תרגול 9

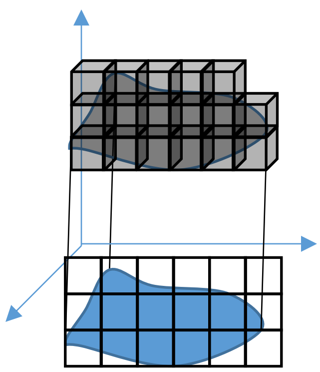
תרגיל:

הראו כי אם f אינטגרבילית על $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ אזי הגרף של f, המוגדר על ידי:

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$$

בעל נפח אפס ב-$\mathbb{R}^{n+1}$.

פתרון:



יהא $\varepsilon > 0$. היות ו-f אינטגרבילית, נקבל כי קיימת חלוקה P של התיבה $R \supset \Omega$ כך שמתקיים:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

וכאמור, מתקיים:

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) Vol(R_i) < \varepsilon$$

ועתה נתבונן על התיבות:

$$R_i^* = R_i \times [m_i, M_i] \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ונשים לב כי:

$$\mathcal{G}_f \subset \bigcup R_i^*$$

וכן מתקיים:

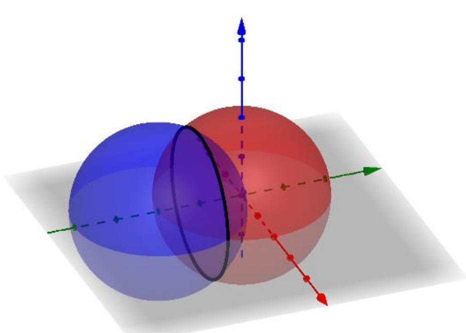
$$\sum_i Vol(R_i^*) = Vol(R_i)(M_i - m_i) < \varepsilon$$

תרגיל:

חשבו את נפח הגוף המשותף לשני הכדורים:

$$(I): x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \quad (II): x^2 + (y + a)^2 + z^2 \le a^2 \quad a < 0$$

פתרון:



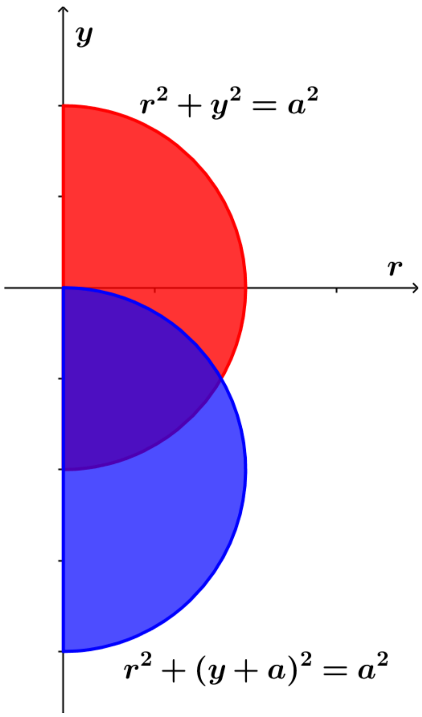
אנחנו מעוניינים בחישוב הגודל:

$$V = \iiint_\Omega 1 dxdydz$$

ישנה סימטריה סביב ציר y ולכן נבחר בקואורדינטות גליליות מהצורה (r, θ, y). כלומר יתקיים:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \\ y = y \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad J = r$$

התחום החדש שלנו יהיה $\tilde{\Omega}$ המוגדר על ידי האילוצים:



$$(I): r^2+y^2 \le a^2 \quad (II): r^2+(y+a)^2 \le a^2$$

וכן הדרישות $r \ge 0$ וכן $0 \le \theta \le 2\pi$.

בשלב זה, נוכל לכתוב:

$$V=\iiint_{\tilde{\Omega}} r dr d\theta dy=\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \iint_D r dr dy$$

כאשר ההפרדה ב-θ נעשתה היות ואנו שמים לב כי לכל y שנקבע מדובר בחלק שמתקבל מגוף סיבוב.

התחום D, אם כן, מוגדר להיות:

$$D=\begin{Bmatrix} 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}a}{2} \\ -\sqrt{a^2-r^2} \le y \le \sqrt{a^2-r^2}-a \end{Bmatrix}$$

$\frac{\sqrt{3}a}{2}$ הוא הרדיוס הגדול ביותר בפרמטריזציה שלנו שבו עדיין ישנו חיתוך בין הכדורים (קרי, הנקודה הימנית ביותר באיור הימני שלהלן).

ולכן נקבל, סה"כ, כי מתקיים:

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2}} dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}-a} r dy=\cdots$$

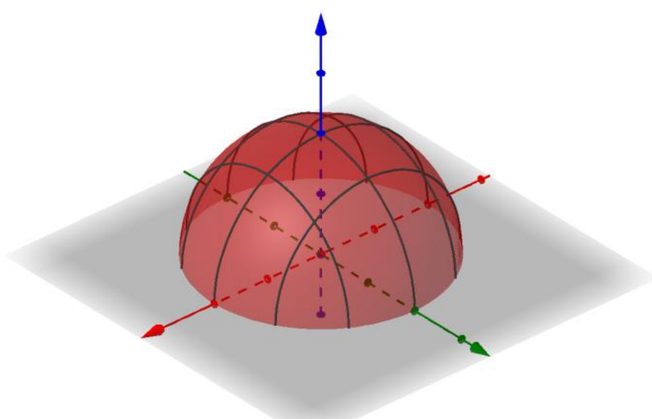
<u>תרגיל:</u>

חשבו את מרכז המזה של חצי כדור היחידה הנתון על ידי:

$$\Omega=\{x^2+y^2+z^2 \le 1 | z \ge 0\}$$

כאשר נתון כי צפיפות המסה הינה צפיפות אחידה.

<u>פתרון:</u>



מרכז המסה מוגדר להיות:

$$\bar{m}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$$

כך שמתקיים:

$$\begin{cases} \bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x \cdot \rho(x,y,z) dx dy dz}{m} \\ \bar{y}=\frac{\iiint_\Omega y \cdot \rho(x,y,z) dx dy dz}{m} \\ \bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z \cdot \rho(x,y,z) dx dy dz}{m} \end{cases}$$

נשים לב כי ניתן להניח $\rho = 1$ (שכן צפיפות אחידה משמעותה כי ρ קבוע ולכן ממילא בהליך האינטגרציה הוא "יצא" מתוך האינטגרל החוצה).

כאמור, Ω גוף סיבוב, ולכן $\bar{x} = \bar{y} = 0$ (בדקו).

ונחשב את המסה m:

$$m = \iiint_\Omega 1dxdydz = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \text{נפח} \\ \text{כדור} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\pi$$

עתה, על מנת לחשב את האינטגרל של $\bar{x}$, נעבור לקואורדינטות כדוריות, כלומר:

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

לאחר הצבה באילוצים נקבל כי $r \leq 1$, כי $0 \leq \theta \leq 2\pi$ וכן נקבל כי $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (שמתקבל מהדרישה $z \geq 0$.

היעקוביאן במקרה זה נתון על ידי:

$$J = r^2 \sin\varphi$$

נציב ונקבל את האינטגרל:

$$\bar{z} = \iiint_\Omega zdxdydz = \iiint_{\widetilde{\Omega}} r^3 \sin\varphi \cos\varphi \, drd\theta d\varphi$$

ניתן להשתמש בפוביני (בדקו למה) ולכן:

$$\bar{z} = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

<u>הערת הכותב:</u>

בתרגול לא הוכחה הנוסחה למציאת מרכז מסה, ונעשה בה שימוש תוך הנחת נכונותה.

הנוסחה למציאת מרכז המסה של גוף כמוה כמציאת ממוצע משוקלל של מיקום כל רכיבי המסה שמרכיבים את האובייקט. נקודה נוחה להשוואה היא מציאת מרכז מסה של שני חלקיקים על ידי:

$$\bar{x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2$$

לאחר מכן ניתן להעביר נוסחה זו על ידי שימוש ב-$\rho(x)$ לתיאור המסה של החלקיק הקטן מאוד בנקודה x. לכן, מאותו הגיון, מרכז המסה יהיה לקחת סכום של מיקום המסה כפול "תרומתה" (כלומר המסה שלה יחסית לכלל המסה של האובייקט), ולקבל עבור סט דיסקרטי של כמות גדולה של מסות:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho(x_i) x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)}$$

עתה נשים לב כי למעט המכנה (שהוא קבוע לכל איבר בסכום), הנ"ל שקול לסכום רימן על תחום מסוים בציר x של הפונקציה $f(x) = \rho(x)x$. לכן, אם אנחנו מדברים על מקרה רציף (כלומר מסות מגודל הולך וקטן), נוכל לבצע את הקפיצה הלוגית ולהבין שמדובר באינטגרציה ולקבל כי:

$$\bar{x} = \int_a^b \frac{\rho(x)x}{\int_a^b \rho(x)} dx = \frac{\int_a^b \rho(x) x dx}{\int_a^b \rho(x)}$$

והמעבר למקרה התלת ממדי שקול.

<u>תרגיל:</u>

בהנתן:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f dz$$

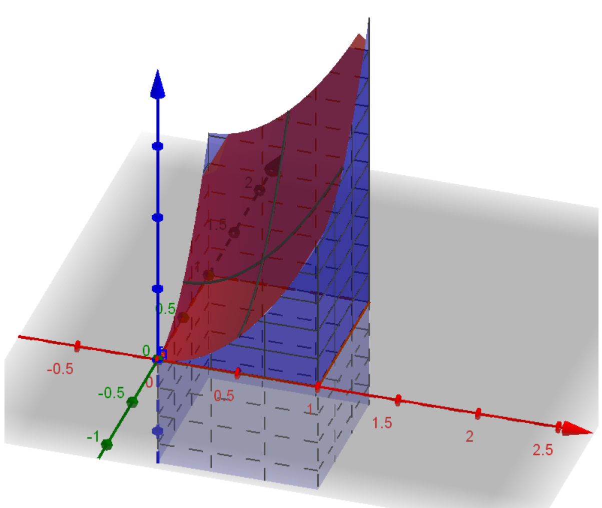
החליפו סדר אינטגרציה:

$$I = \int dz \int dy \int f dx$$

<u>פתרון:</u>

נצייר את התחום:

$$\Omega = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \end{cases}$$

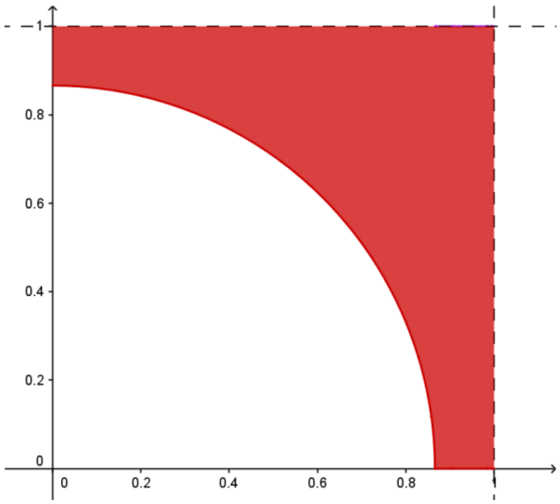


נקבע את z בתחום $0 \le z \le 2$ ונקבל כי:

$$I = \int_0^2 dz \iint_{D_z} f dxdy$$

כאשר D_z היא "פרוסה" בגובה z. נפתור את האינטגרל הכפול:

$$D_z = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ x^2 + y^2 \ge z \end{cases}$$



איור 1 – $0 \le z \le 1$

נחלק למקרים:

א. $0 \le z \le 1$ – במקרה זה ניתן לכתוב את D_z כתחום פשוט ביחס לציר x:

$$D_z = D_1 \cup D_2$$

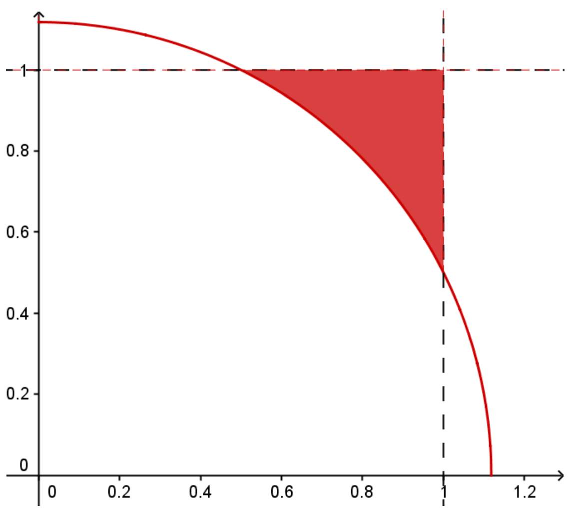
עבור:

$$D_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 \le y \le \sqrt{z} \\ \sqrt{z - y^2} \le x \le 1 \end{matrix} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{matrix} \sqrt{z} \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{matrix} \right\}$$

ב. $1 \le z \le 2$ – במקרה זה נקבל כי:

$$D_z = \left\{ \begin{matrix} \sqrt{z-1} \le y \le 1 \\ \sqrt{z - y^2} \le x \le 1 \end{matrix} \right\}$$



איור 2 - $1 \le z \le 2$

לכן נקבל, סה"כ:

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f dx$$

$$+ \int_0^1 dz \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f dx$$

$$+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f dx$$

<u>תרגיל:</u>

מומנט האינרציה של גוף Ω בעל צפיפות מסה $\rho(x,y,z)$ סביב ציר z נתון על ידי:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x,y,z) dxdydz$$

כאשר $x^2 + y^2$ הוא ריבוע המרחק מציר הסיבוב.

נרצה לחשב, עתה, את מומנט האינרציה I_z עבור Ω הנמצא מעל מישור xy והחסום על ידי:

$$(I): x^2 + y^2 = z \quad (II): x^2 + y^2 = a^2 \quad a > 0$$

כמו כן, נתון כי הוא בעלת צפיפות מסה אחידה $\rho \equiv$. כלומר, נרצה לחשב:

$$I = \iiint_{\Omega} \rho(x^2 + y^2)dxdydz$$

קיימים מספר דרכים לפתור אינטגרל זה.

<u>דרך א'</u> – שיטת הפסים.

<u>דרך ב'</u> – קואורדינטות גליליות. (סימטריה סביב ציר z).

נסמן:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$
$$J = r$$

במקרה זה, התחום החדש שלנו יהיה התחום החסום על ידי:

$$(I): z = r^2 \quad (II): r^2 = a^2 \Longrightarrow r = a$$

וכאמור למעט הנ"ל נדרוש:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad r \geq 0 \quad z \geq 0$$

ולכן יתקיים:

$$I_z = \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho r^2 \cdot r dr d\theta d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \iint_D r^3 drdz$$

נפתור את האינטגרל הכפול שנותר ונקבל את התשובה המבוקשת.