דוגמא לשימוש בקורדינטות פולריות.

החישוב של

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

ושימוש של זה לחישוב

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} \mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^{2p-1} e^{-x^2} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ולחישוב $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (בהצבת $t = x^2$).

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \\ &= 2 \lim_{a \to \infty} \int_0^{a} e^{-x^2} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

נביט ב-

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{y=0}^{a} \left[\int\limits_{x=0}^{a} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{y=0}^{a} e^{-y^2}\left[\int\limits_{x=0}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \left(\int\limits_{x=0}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_{y=0}^{a} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)
\end{aligned}
$$

כאשר $D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le a \end{array} \right\}$.

לכן

$$
I^2 = \left(2\lim_{a\to\infty}\int\limits_{0}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2
$$

$$= 4\lim_{a\to\infty}\int\int_{0\le x,y\le a} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

נסמן ב: D_a את הריבוע ברביע הראשון שצלעותיו מקבילות לצירים וארכן שווה a, ונסמן ב: B_a את רבע העיגול בעל רדיוס a ברביע הראשון. אז קיים

$$B_a \subset D_a \subset B_{a\sqrt{2}},$$

ומכיון ש: $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ נובע ש:

$$\int\int_{B_a} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \int\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \int\int_{B_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

לכן אם קיים הגבול

$$\lim_{a\to\infty}\int\int_{B_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha$$

אז גם קיים הגבול

$$\lim_{a\to\infty}\int\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \,.$$

אבל

$$\begin{aligned}\int\int_{B_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \\ \int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \\ \int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-(r^2)} r dr d\theta & \end{aligned} \tag{1}$$

היכן שהשתמשנו בשינוי המשתנים

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

עם היעקוביאן $J = r$, ולכן

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r dr d\theta .$$

ב: (1) אנו מבצעים שינוי משתנה נוסף

$$r^2 = t,\ 2rdr = dt$$

והוא מתקבל

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a^2} e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\cdot dt\right)d\theta \ =$$
$$-\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}[e^{-t}]_0^{a^2}\right)d\theta \ =$$
$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right).$$

הגבול של הביטוי האחרון קיים כאשר $a \to \infty$ ושווה $\pi/4$. לכן מקבלים

$$,I^2 = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$$

ונובע ש:

$$.I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

נחשב עתה את

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\infty t^{1/2-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

ובהצבת $t=x^2$, $x=\sqrt{t}$, האינטגרל הוא

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$$

$2\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

מכאן בעזרת הזהות

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

מקבלים

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

וכו'".

אורך קשת

הגדרת אורך קשת שונה מהגדרת שטח תחום. תחום יכול להכיל ולהיות מוכל במלבנים שנוצרו ע"י חלוקה מקבילה לצירים. אם מקרבים קשת ע"י קטעים מקבילים לצירים, איננו מקרבים את האורך שלו, למרות שהמרחק קטן:
למשל, קו ישר בעל שיפוע 45°.
אורכי הקטעים שווים ל- $\sqrt{2}$ כפול אורך הישר.

הקשת אינה מכילה ואינה מוכלת בקטעי פוליגון: אפשר רק לקרב את המרחק ביניהם.

<u>הגדרה.</u> <u>עקום רציף</u> הוא אוסף כל הנקודות מהצורה $(x(t), y(t))$, $a \le t \le b,$,

כאשר $x(t), y(t)$ פונקציות רציפות. זוהי הצגה פרמטרית של עקום במישור: לכל t מתאימה נקודה במישור שהקורדינטות שלה הן

$$(x(t), y(t)),$$

וכאשר t משתנה על כל הערכים האפשריים עבורו, הנקודה עוברת על כל נקודות העקום.

בצורה דומה עקום במרחב מיוצג בצורה פרמטר-ית ע"י שלוש פונקציות רציפות $x(t), y(t), z(t)$, $a \leq t \leq b$.

עבור הקטע $[a, b]$ ניקח חלוקה :

$$T: \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = b$$

נסתכל בנקודות $T_k = (x(t_k), y(t_k))$

ובאורך הפוליגון $h = h(T) = \sum_{k=1}^{q} \overline{P_{k-1}P_k}$

<u>הגדרה.</u> אם קבוצת המספרים $\{h(T)\}$ כאשר T משתנה מעל כל החלוקות האפשריות T היא קבוצה חסומה, אז

$$L = \sup_P h(T)$$

נקרא אורך הקשת.

דוגמא למצב בו הקבוצה $\{h(T)\}$ לא חסומה היא:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

בוחרים את הנקודות $t_k = \frac{1}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ ואז

$$\overline{P_{k-1}P_k} > \frac{1}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)}$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^{q} \overline{P_{k-1}P_k} > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$$

וזה יכול להיות גדול ברצוננו.

איך בודקים את <u>החסימות</u> של $\{h(T)\}$ והסופיות של $\sup\limits_{P} h(T)$?

לכל $n \geq 1$ תהי T_n חלוקה של $[a,b]$, נסמן אותה

$$\{t_{k,n}\}_{k=0}^{q_n},$$

עם קטעי חלוקה באורך

$$\{\Delta t_{k,n}\}_{k=0}^{q_n-1},$$

ונקודות

$$P_{0,n}, P_{1,n}, ..., P_{q_n,n}$$

על העקום. נאמר שזוהי סדרה תקינה של חלוקות אם מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \Delta t_{k,n} = 0.$$

<u>משפט.</u> נתונה קשת כנ"ל $(x(t), y(t))$. אם קיים H כך שלכל סדרה תקינה של חלוקות

$$T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$$

קיים הגבול

$$h(T_n) = \sum_{k=1}^{q_n} \overline{P_{k-1,n}P_{k,n}} \to H \quad (*)$$

אז H הוא אורך הקשת.

<u>הוכחה:</u> (א) נראה תחילה שלכל חלוקה T קיים

$$.h(T) \leq H$$

כי ניקח חלוקה כלשהי T ויתאים לה פוליגון באורך $h(T)$. נחלק כל קטע $[t_1, t_2]$ של T לשניים: $[t_1, t']$ ו: $[t', t_2]$. בגלל אי שוויון המשולש נקבל חלוקה T_2 עם פוליגון ארוך יותר.

נחזור על זה ונקבל סדרת חלוקות כך ש-

$$h(T) \leq h(T_2) \leq h(T_3) \leq \ldots$$

ברור שזו סדרה תקינה כי בכל שלב מחלקים את $\max \Delta t_k$ ב-2, לכן לפי ההנחה

$$h(T) \leq h(T_2) \leq h(T_3) \leq \ldots \to H$$

ובזה הוכחנו כי $h(T) \leq H$ לכל T. לכן

$$\sup \{h\} \leq H.$$

הנחנו שהגבול $(*)$ קיים לכל לסדרה תקינה, ולכן מתקיים

$$\sup \{h\} \geq H,$$

ולכן קיים שוויון.

אם

$$x(t), y(t) \in C^1$$

נוכל להשתמש במשפט הקודם כדי לחשב את L. ניקח סדרה תקינה של חלוקות $T_1, T_2, \ldots$. עבור חלוקה כלשהי T נתיחס לביטוי

$$\begin{aligned} h(T) &= \sum_{k=1}^{q} \overline{P_{k-1}P_k} \\ &= \sum_k \left[(\Delta x(t_k))^2 + (\Delta y(t_k))^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

כאשר $\Delta x(t_k) = x(t_k) - x(t_{k-1})$ ו: $\Delta y(t_k) = y(t_k) - y(t_{k-1})$. מקבלים לפי לגרנז':

$$= \sum_k \left[\left(x'(t_k')\right)^2 + \left(y'(t_k'')\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta t_k$$

כאשר

$$.t_{k-1} < t'_k, t''_k < t_k$$

לו היה $t'_k \equiv t''_k$ אזי זה היה סכום רימן, ועבור סדרה תקינה של חלוקות הסכומים היו מתכנסים ל-

$$.\int_a^b \left[(x')^2 + (y')^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

לכן נתקן ונרשום:

$$\begin{aligned} = \ & \sum_k \left[\left(x'(t'_k)\right)^2 + \left(y'(t'_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta t_k \\ + \ & \sum_k \left\{\left[\left(x'(t'_k)\right)^2 + \left(y'(t''_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ - \ & \left. \left[\left(x'(t'_k)\right)^2 + \left(y'(t'_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \Delta t_k \end{aligned}$$

המחובר הראשון בביטוי הזה מתכנס לאינטגרל

$$, L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t$$

ונוכיח שהסכום השני הוא קטן. קיים אי השיויון

$$\left| a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right| \leq |a-b|^{\frac{1}{2}}$$

(כי נניח $0 < b \geq a$. אז הטענה שקולה ל:

$$a + b - 2\sqrt{ab} \leq a - b$$

וזה שקול ל: $2b \leq 2\sqrt{ab}$, וזה נכון.)

לכן הביטוי השני קטן מ-

$$\sum_k \left| (y')^2(t_k'') - (y')^2(t_k') \right|^{\frac{1}{2}} \Delta t_k$$

אבל הפונקציה $(y')^2(t)$ רציפה במ"ש על $[0,b]$, ולכן

$$\left|(y')^2(t''_k)-(y')^2(t'_k)\right|<\epsilon$$

בתנאי ש- $\left|t''_k-t'_k\right|<\delta(\epsilon)$. אבל זה אכן מתקיים, כי שתי הנקודות נמצאות בקטע $[t_{k-1},t_k]$, ועבור סדרה תקינה של חלוקות, אורך כל קטע יהיה לבסוף קטן מהגודל $\delta(\epsilon)$ לעיל. לכן עבור המחובר השני

$$\begin{aligned}&\sum_k\left\{\left[\left((x')^2(t'_k)\right)^2+\left((y')^2(t''_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right.\\ -&\left.\left[\left(x'(t'_k)\right)^2+\left(y'(t''_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\Delta t_k\\ \leq&\sum_k\sqrt{\epsilon}\Delta t_k=\sqrt{\epsilon}(b-a)\end{aligned}$$

בזאת הוכחנו שעבור כל

$$x(t), y(t) \in C^1[a,b]$$

מתקיים לכל סדרה תקינה $\{T_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} h(T_n) = \int\limits_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2},$$

ולפי המשפט הקודם אורך הקשת

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\mathrm{d}t$$

מוגדר היטב.

<u>הערה.</u> הנוסחה בלתי תלויה בתאור הפרמטרי, כי אם נחליף את המשתנה מ: t ל: τ

$$t = t(\tau),\ \alpha \le \tau \le \beta,$$

כך שיש לפונקציה $t(\tau)$ פונקציה הפוכה

$\tau = \tau(t),\ a \le t \le b$,

כאשר מניחים ששתי הפונקציות גזירות ברציפות, מקבלים

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \cdot \mathrm{d}\tau \\
&= \int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right] \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

שאלת אי התלות של תכונה מסוימת בבחירת הייצוג, או הפרמטריזציה, תעלה שוב ושוב. נעיר שהתאור הפרמטרי קובע מגמה על העקום.

פרמטריזצית אורך הקשת

נתיחס לקשת הנתונה בצורה פרמטרית כ:

$$(x(t), y(t)),\ a \le t \le b.$$

לכל t מגדירים את

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \mathrm{d}t.$$

ראינו שיש אינסוף תאורים פרמטריים, כולם שקו-
לים. ביניהם יש אחד טבעי (intrinsic) שהוא
חשוב ביותר בגיאומטריה דיפרנציאלית,
והוא $s = s(t)$. כלומר לכל נקודה מתאימים את
אורך הקשת מנקודת הקצה עד הנקודה. ברור

שההתאמה $s(t) \leftrightarrow t$ היא חד-חד-ערכית וגזירה, כי

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} > 0,$$

ומתקיים

$$a \le t \le b \;\Leftrightarrow\; 0 \le s \le L.$$

לכן אפשר להשתמש ב: s כפרמטר עבור הקשת, ולקבל את הפרמטריזציה

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \;\; 0 \le s \le L \end{cases}$$

ואז מתקיים:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}s}\right)^2 &= \\
\left(\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t}\cdot\frac{\mathsf{d}t}{\mathsf{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}t}\cdot\frac{\mathsf{d}t}{\mathsf{d}s}\right)^2 &= \\
\frac{\left[\left(\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}t}\right)^2\right]}{\left(\frac{\mathsf{d}s}{\mathsf{d}t}\right)^2} &\equiv 1
\end{aligned}
$$

משמעות גיאומטרית.

$$
\begin{aligned}
& \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\
= \;& (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - (x(t), y(t)) \\
= \;& \big(x'(t_1)\Delta t, y'(t_2)\Delta t\big) \\
= \;& \Delta t \cdot \big(x'(t_1), y'(t_2)\big)
\end{aligned}
$$

הוקטור המשיק מוגדר כגבול השיפועים הללו כאשר $\Delta t \to 0$:

$$.\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to \big(x'(t), y'(t)\big) = \vec{T}(t)$$

כאשר מחליפים משתנה, הכיוון של הוקטור הגבולי נשמר, אך האורך עשוי להשתנות, כי

$$.\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

אבל אם בוחרים את התאור הפרמטרי בעזרת $s(t)$, כלומר הפרמטריזציה של אורך הקשת, אז

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \\ \|T\| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2} \equiv 1 \end{aligned}$$

ולכן נקבל וקטור משיק באורך יחידה, ונסמן אותו $\hat{T}$.

<u>הערה:</u> אם לעקום ב-R^3 יש את הפרמטריזציה

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ a \le t \le b \end{cases}$$

אז אורך הקשת המוגדרת על-ידיו הוא

$$L = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y)^2 + (z')^2}\,\mathrm{d}t\ .$$