

לוגיקה מתמטית - תרגיל 9

1. יהי x משתנה אישי ויהי t שם-עצם. עבור שם-עצם r נסמן ב- $r\langle t \rangle$ את התוצאה של הצבה חלקית כלשהי של t במקום x בשם-העצם r . עבור נוסחה φ נסמן ב- $\varphi\langle t \rangle$ את התוצאה של הצבה חלקית כלשהי של t במקום x בנוסחה φ .
הוכח :

א. יהי M מבנה ותהי s השמה כך ש: $s(x) = s^*(t)$.
אז לכל שם-עצם r מתקיים $s^*(r) = s^*(r\langle t \rangle)$.

ב. יהי M מבנה ותהי s השמה כך ש: $s(x) = s^*(t)$.
אז לכל נוסחה φ כך שההצבה החלקית $\varphi\langle t \rangle$ כשרה מתקיים: $M \models_s \varphi \Leftrightarrow M \models_s \varphi\langle t \rangle$.

ג. לכל נוסחה φ כך שההצבה החלקית $\varphi\langle t \rangle$ כשרה, הנוסחה $(\varphi \rightarrow \varphi\langle t \rangle)$ היא אמיתית לוגית.

2. ענה על שאלה 4 מתרגיל 8, כאשר במקום $\{2m : m \in \mathbb{N}\}$ כתוב :

א. קבוצת המספרים הטבעיים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הטבעיים שהם ריבוע של מספר שלם.

ג. קבוצת המספרים הטבעיים הלא ראשוניים.

ד. קבוצת החזקות של ראשוניים (כלומר $\{p^k : k \in \mathbb{N}, p \text{ ראשוני}\}$).

3. נתבונן בפסוקים :

$$\varphi = (\forall x) \left((P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow R(x) \right)$$

$$\psi = (\exists x) \left((R(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x) \right)$$

א. האם $\varphi \rightarrow \psi$ אמיתי לוגי ?

ב. האם $\psi \rightarrow \varphi$ אמיתי לוגי ?

ג. האם $\varphi \vee \psi$ אמיתי לוגי ?