לכסון אוניטרי/אורתוגונלי

<u>הגדרה</u>: יהא V ממ"פ, ט"ל $T:V\to V$

לינארי, אופרטור $S:V\to V$ ייקרא הצמוד

של T $(S=T^*)$ אם $\langle Tv,u\rangle=\langle v,Su\rangle$

לכל $u,v\in V$.

מוטיבציה: במ"פ הסטנדרטי:

$$\langle v,u\rangle = v^* u$$

$$\langle Tv,u\rangle = (Tv)^* u = v^* T^* u = \langle v, T^* u\rangle$$

<u>משפט</u>: אם E בסיס א"נ של V

מתקיים $[T^*]_E = [T]_E^* = \overline{[T]_E^t}$

$\langle \alpha_1 e_1 + \_ \_ + \alpha_n e_n , \beta_1 e_1 + \_ + \beta_n e_n \rangle$

$= \underbrace{\langle \alpha_1 e_1 , \beta_1 e_1 \rangle}_{\alpha_1 \overline{\beta_1}} + \underbrace{\langle \alpha_1 e_1 , \beta_2 e_2 \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \alpha_1 e_1 , \beta_3 e_3 \rangle}_{0} +$

$\ldots \_ \_ \quad + \underbrace{\langle \alpha_n e_n , \beta_n e_n \rangle}_{\alpha_n \overline{\beta_n}}$

$\langle u , v+w \rangle = \overline{\langle v+w , u \rangle} = \overline{\langle v , u \rangle} + \overline{\langle w , u \rangle} =$

$= \langle u , v \rangle + \langle u , w \rangle$

<u>משפט</u>: יהי T נורמלי (מעל $\mathbb{C}$) $T^*T=TT^*$

צ"ע (מעל $\mathbb{R}$) $T^*=T$

אזי קיים ל-V בסיס א"נ של ו"ע.

<u>הוכחה</u>: נניח כי T לכסין.

לאופרטור נורמלי מרחבים עצמיים של ע"ע שונים הם ניצבים.

נניח $\lambda\neq\mu$ ע"ע עם ו"ע v,u, נוכיח $\langle v,u\rangle=0$

$$\lambda\langle v,u\rangle=\langle Tv,u\rangle=\langle v,T^*u\rangle\overset{\circledast}{=}\langle v,\bar{\mu}u\rangle=\mu\langle v,u\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle v,u\rangle=0$$

למה: אם T נורמלי אז $\ker T = \ker T^*$.

$Tv = 0 \iff T^*v = 0$

$\|Tv\| = \|T^*v\|$

1

$\langle Tv, Tv\rangle = 0$

$=$ הגדרה

$\langle T^*Tv, v\rangle$

$=$ נורמלי

$\langle TT^*v, v\rangle$

$=$ הגדרה

$\boxed{\langle T^*v, T^*v\rangle}$

לכן $\ker(T-\lambda I) = \ker(T^* - \bar{\lambda} I)$

כלומר: אם $Tv = \lambda v$ אז $T^*v = \bar{\lambda} v$

למה: T לכסין אם ורק אם לכל

תת מרחב T-שמור יש משלים ישר T-שמור.

הוכחה: $m_{T|_W} \mid m_T$ מפני ש $m_T(T)=0$

ולכן גם $m_T(T|_W)=0$, לכן $m_{T|_W} \mid m_T$.

לכן אם T לכסין, m_T מתפרק

לגורמים לינאריים זרים, לכן גם

$m_{T|_W}$ ולכן $T|_W$ לכסין, יש ל-W

בסיס של ו"ע, נשלים לבסיס של V, ההשלמה

T-שמור.

(וזו תת מרחב)

בכיוון השני, אם T לא לכסין:

$$\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

יש v_1, v_2 כך ש $Tv_1 = \lambda v_1$

ו $Tv_2 = \lambda v_2 + v_1$

נבחר $W = Sp\{v_1\}$, T-שמור.

אם W' משלים ישר אז v_2 נרשום

לכתיבה כזו $v_2 = \alpha v_1 + w'$

W'

נניח $\alpha = 0$ (אחרת נשנה את הבסיס)

אזי $Tv_2 \in W'$ אבל $Tv_2 - \lambda v_2 \in W'$

$$Tv_2 - \lambda v_2 = v_1 \in W$$

בסתירה.

למה: אם W T-שמור אז $W^{\perp}$

הוא T^*-שמור.

הוכחה: ניקח $w' \in W^{\perp}$, צריך

להראות $T^*w' \in W^{\perp}$ כלומר $\langle w, T^*w' \rangle = 0$

$$\langle w, T^*w' \rangle = \langle Tw, w' \rangle$$

לכל $w \in W$.

אם $T^*=T$, אז לכל W T-שמור

$W^{\perp}$ משלים ישר $\underset{T}{\overset{\|}{T^*}}$ - שמור

לכן מהלמה T לכסין , ומה שהוזכר

גם לכסין א"נ (הבסיס המלכסן א"נ)

Scanned by CamScanner

<u>תרגיל:</u> הוכיחו כי אם $T^*T=0$ אז $T=0$.

<u>פתרון:</u> לכל v: $\|Tv\|^2=\langle Tv,Tv\rangle=\langle \underbrace{T^*Tv}_{=0},v\rangle$

לכן $Tv=0$ לכל v.

דרך ב': נעבור לבסיס א"נ E

ממשפט $[T^*]_E=\overbrace{[T]_E}^{A}{}^*$, לכן נקבל $A^*A=0$

בפרט לכל i, $\langle A_i,A_i\rangle=(A^*A)_{ii}=0$

העמודה ה-i

לכן $A_i=0$ ו-$A=0$.

תרגיל: יהיו S,T צמודים לעצמם.
הוכיחו כי TS צ"ע אמ"ם $TS=ST$.

פתרון:

$$\langle TSv,u\rangle = \langle Sv, T^*u\rangle = \langle v, S^*T^*u\rangle \underset{\text{נתון}}{=} \langle v, STu\rangle$$

$$\langle TSv,u\rangle \underset{\text{הגדרה}}{=} \langle v,(TS)^*u\rangle$$

לכן TS צ"ע אם ורק אם

$$\langle v, TSu\rangle = \langle v,(TS)^*u\rangle = \langle v, STu\rangle$$

שזה קורה אמ"ם $TS=ST$.

וכאן T הפיך

תרגיל: הוכיחו כי $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

פתרון: למעשה צ"ל:

$$\langle (T^{-1})v, u\rangle = \langle v, (T^*)^{-1}u\rangle$$

נציב $v = Tw$ (T הפיך)

$$\langle (T^{-1})v, u\rangle = \langle T^{-1}Tw, u\rangle = \langle w, u\rangle$$

$$\langle v, (T^*)^{-1}u\rangle = \langle Tw, (T^*)^{-1}u\rangle = \langle w, T^*(T^*)^{-1}u\rangle = \langle w, u\rangle$$

תרגיל: יהא $T:V\to V$ כך ש $T^*=aT$

עבור $a\in\mathbb{C}$, $|a|\neq 1$, הוכיחו כי $T=0$.

פתרון: $\langle Tv,v\rangle = \langle v,T^*v\rangle = \langle v,aTv\rangle =$

נקבל: $= \bar{a}\,\overline{\langle Tv,v\rangle}$

בצמוד שוב: $\overline{\langle Tv,v\rangle} = a\langle Tv,v\rangle$

$\Rightarrow \langle Tv,v\rangle = \bar{a}\cdot a\cdot\langle Tv,v\rangle = |a|^2\langle Tv,v\rangle$

לכן $|a|^2=1$ או $\langle Tv,v\rangle=0$ $\Rightarrow$ $\langle Tv,v\rangle=0$

$aT = T^*$, אזי T נורמלי, אם

T לכסין. יהיו λ ע"ע של T עם

ו"ע $v \neq 0$: $\langle Tv, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle \overset{\substack{\text{הנחנו}\\ T}}{=} 0$

$\langle v,v\rangle \neq 0$, לכן $\lambda = 0$, אזי T לכסין

אם ע"ע 0 בלבד $\Longleftarrow$ $T=0$.

בכך שניה: $aT = T^*$ נקבל:

$$|a|^2 T = \bar{a}(aT) = \bar{a}T^* = (T^*)^* = T$$

$|a| \neq 1$, לכן $T=0$.

תרגיל: יהא T נורמלי, $S = T^* - aT$

$|a| \neq 1$, $a \in \mathbb{C}$, הוכיחו כי $\mathrm{rank}\,T = \mathrm{rank}\,S$, $\ker T = \ker S$.

פתרון:

תזכורת: אם T נורמלי, עם ע"ע $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ו-p פולינום ב-$z, \bar{z}$ אז גם $p(T)$ נורמלי, עם אותם ו"ע וע"ע $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$

לכן הע"ע של S הם $\bar{\lambda}_1 - a\lambda_1, \ldots, \bar{\lambda}_n - a\lambda_n$.

נראה כי $\lambda_i = 0 \iff \bar{\lambda}_i - a\lambda_i = 0$.

Scanned by CamScanner

זה יקרה כי לפ"ע סוותם

נ"ע ג ד וב ז.

ואכן, אם $\lambda_i=0$ אז $\bar{\lambda}_i - a\lambda_i = 0$

ואם $\bar{\lambda}_i - a\lambda_i = 0$ ו $\lambda_i \neq 0$ אז

$a = \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i}$ מנורמה 1 בסתירה.