# מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים – ת"ב 6

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

19/12/2016

תאריך הגשה

11

קבוצת תרגול

## שאלה 1:

נתונים $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים, וכן נתונה $F\colon X \mapsto Y$ העתקה.

א. נרצה להראות כי בהנתן $\Psi$ בסיס לטופולוגיה $\sigma$, מתקיים:

$$F \text{ רציפה} \Leftrightarrow F^{-1}(V) \in \tau \quad \forall V \in \Psi$$

$\Leftarrow$ נניח אם כן, כי $F$ רציפה. כלומר, לכל $V \in \sigma$ מתקיים $F^{-1}(V) \in \tau$ פתוחה. בפרט, כל $V \in \Psi$ היא בפרט קבוצה פתוחה ב-$\sigma$, ולכן נסיק כי בפרט מתקיים $F^{-1}(V) \in \tau$ לכל $V \in \Psi$.

$\Rightarrow$ נניח, כי לכל $V \in \Psi$ מתקיים ש-$F^{-1}(V) \in \tau$. עתה, נשים לב כי לכל $V \in \sigma$ מתקיים, מהגדרת הבסיס, שקיימות $V_\alpha \in \Psi$ עבור $\alpha \in I$ קבוצת אינדקסים כלשהי, כך שמתקיים $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. אך מכאן שמתקיים:

$$F^{-1}(V) = F^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) \overset{\substack{\text{תורת}\\ \text{הקבוצות}}}{=} \bigcup_{\alpha \in I} \overbrace{F^{-1}(V_\alpha)}^{\in\tau} \in \tau$$

כלומר לכל $V \in \sigma$ מתקיים $F^{-1}(V) \in \tau$ פתוחה כנדרש.

■

ב. יהא $a \in X$ וכן $\Phi_a$ בסיס ל-$\tau$ ב-$a$. כמו כן, נניח כי $\Psi_{F(a)}$ בסיס ל-$\sigma$ ב-$F(a)$. נרצה להראות כי:

$$F \text{ רציפה ב} - a \Leftrightarrow \forall V \in \Psi_{F(a)} \quad \exists U \in \Phi_a \quad F(U) \subseteq V$$

$\Leftarrow$ נניח, אם כן, כי $F$ רציפה ב-$a$. כלומר, לכל $V \in \sigma$ פתוחה כך ש-$F(a) \in V$, קיימת $a \in U \in \tau$ כך ש-$U \subset F^{-1}(V)$ פתוחה. בפרט, אנו יודעים מכך כי אם נבחר $F(a) \in V \in \Psi_{F(a)}$ אזי בפרט עבורה קיימת $a \in U \in \tau$ סביבה פתוחה כך ש-$U \subset F^{-1}(V)$. כלומר $F(U) \subset V$. אך $U$ סביבה של $a$ ולכן מהגדרת $\Phi_a$ קיימת $U' \in \Phi_a$ כך ש-$U' \subset U$, אך בפרט נובע מכך כי מתקיים, כנדרש, $F(U') \subset F(U) \subset V$.

$\Rightarrow$ נניח כי אכן לכל $V \in \Psi_{F(a)}$ קיימת $U \in \Phi_a$ כך ש-$F(U) \subseteq V$. נרצה להראות כי $F$ רציפה ב-$a$. תהא אם כן $V \in \sigma$ סביבה כלשהי המכילה את $F(a)$. אזי, קיימת סביבה $V' \in \Psi_{F(a)}$ המכילה את $F(a)$ כך שמתקיים $V' \subset V$. עבור $V'$, מהנחתנו, קיימת $U \in \Phi_a$ עבורה $F(U) \subset V' \subset V$, כלומר, אכן לכל $V \in \sigma$ המכילה את $a$ קיימת $U \in \tau$ פתוחה כך ש-$F(U) \subset V$ ו-$a \in U$.

■

## שאלה 2:

נתון מרחב טופולוגי $(X,\tau)$. בהנתן $a \in X$, ו-$\Psi_a$ בסיס ל-$\tau$ ב-$a$, נרצה להראות כי עבור סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כלשהי, מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ ב } (X,\tau) - \Leftrightarrow \forall U \in \Psi_a \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow x_n \in U$$

$\Rightarrow$ נניח כי $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. אזי, על פי הגדרה, לכל $U \in \tau$ המכיל את $a$, קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in U$. כלומר, הדבר בפרט נכון לכל $U \in \Psi_a \subseteq \tau$.

$\Leftarrow$ נניח כי אכן לכל $U \in \Psi_a$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in U$. תהא $U \in \tau$ כלשהי כך ש-$a \in U$. היות ו-$U$ הינה סביבה של $a$, נובע מהגדרת $\Psi_a$ כי קיימת סביבה $U' \in \Psi_a$ המכילה את $a$ כך ש-$U' \subset U$. אך מהנחתנו, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים:

$$x_n \in U' \subset U \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow x_n \in U$$

■

## שאלה 3:

נתונים $(X,\tau)$ וכן $(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים. כמו כן, נתון $a \in X$ וכן $\Phi_a = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה ל-$\tau$ ב-$a$.

א. נתבונן באוסף הקבוצות $\{\bigcap_{i=1}^{n} U_i\}_{n=1}^{\infty}$. ראשית, נשים לב כי אף אחת מן הקבוצות הללו אינה ריקה שכן כל הקבוצות המקוריות מהגדרתן כבסיס של $\tau$ ב-$a$ מכילות את $a$ עצמה. נרצה להראות כי גם זה בסיס בן מניה ל-$\tau$ ב-$a$. לשם כך, תהא $U$ כלשהי המכילה את $a$. אזי, על פי הגדרת הבסיס הנתון בשאלה, קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש-$U_i \subset U$ וכאמור $a \in U_i$. אך נשים לב כי:

$$\bigcap_{j=1}^{i} U_j \subseteq U_i \subset U$$

וכן החיתוך הנ"ל הוא קבוצה באוסף שהגדרנו, ולכן זו תת סביבה פתוחה של $U$ המכילה את $a$ כנדרש ואכן הקבוצה הנ"ל מהווה בסיס של $\tau$ ב-$a$.

■

ב. נתונה, עתה $A \subset X$ ונתון כי $a \in \bar{A}$. נרצה להראות כי קיימת סדרה שכל איבריה ב-$A$, המתכנסת ל-$a$. לשם כך, נתבונן בסדרת הקבוצות שהוגדרה בסעיף א'. לכל $n \in \mathbb{N}$, הקבוצה $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ היא סביבה המכילה את $a$ ולכן על פי הגדרת $\bar{A}$ מתקיים:

$$A \cap V_n \neq \emptyset$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, נבחר $x_n \in A \cap V_n$ ונתבונן בסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נשים לב, ראשית, כי מהגדרת $V_n$ מתקיים:

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$$

ועתה, תהא $U \in \tau$ סביבה כלשהי המכילה את $a$. היות ו-$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינו בסיס ל-$\tau$ ב-$a$ נובע כי קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו $V_N \subset U$. אך נשים לב:

$$\forall n \geq N \quad x_n \in V_n \subset V_N \subset U$$

כלומר, על פי התנאי השקול שהראינו בשאלה 2, הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$a$. אך הסדרה כולה מורכבת מאיברים שנמצאים ב-$A$ ולכן נקבל את הדרוש:

■

ג. נתונה העתקה $F:X\mapsto Y$. נרצה להראות כי:

$F$ רציפה ב – $a$ $\Leftrightarrow$ $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\quad x_n\xrightarrow{n\to\infty}a\Longrightarrow F(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}a$

$\Leftarrow$ נניח כי $F$ רציפה ב-$a$. אזי, לכל $F(a)\in V\in\sigma$, קיימת $a\in U\in\tau$ פתוחה כך ש-$F(U)\subset V$. תהא אם כן, סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n\xrightarrow{n\to\infty}a$ ב-$(X,\tau)$, ונרצה להראות כי $F(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}F(a)$. לשם כך, נניח $F(a)\in V\in\sigma$ פתוחה כלשהי. נראה כי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $F(x_n)\in V$. לשם כך, ניעזר ברציפות $F$ ב-$a$, לפיה קיימת סביבה פתוחה $a\in U\in\tau$ כך שמתקיים $F(U)\subset V$. עתה, נשים לב כי מהתכנסות $x_n$ נובע כי עבור $U$, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n\in U$. אך מכאן נובע ש-$F(x_n)\in F(U)\subset V$ כלומר $F(x_n)\in V$. ולכן, קיבלנו כי אכן עבור $N$ זה הנ"ל מתקיים כנדרש.

$\Rightarrow$ נניח כי לכל $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$x_n\xrightarrow{n\to\infty}a$, מתקיים $F(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}F(a)$. נרצה להראות כי $F$ רציפה ב-$a$. לשם כך נניח בשלילה כי החלק הראשון מתקיים אך ההעתקה אינה רציפה ב-$a$. כלומר, קיימת סביבה $F(a)\in V\in\sigma$ פתוחה שהיא, עבורה לכל $a\in U\in\tau$ פתוחה, קיים $x\in U$ כך ש-$F(x)\notin V$.

בהנתן הסביבה $V$ מהנחת השלילה, נגדיר את סדרה הקבוצות מסעיף א', $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\bigcap_{i=1}^{n}U_i\}_{n=1}^{\infty}$. נשים לב כי לכל $V_n$, על פי הנחת השלילה, קיים $x_n\in V_n$ כך ש-$F(x_n)\notin V$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחר $x_n$ מתאים, ונבנה כך את הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

נשים לב כי לכל סביבה $a\in U\in\tau$, קיים $N\in\mathbb{N}$ עבורו $V_N\subset U$ היות והראינו כי $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ בסיס של $\tau$ ב-$a$. ומכאן נובע כי לכל $n\geq N$ מתקיים:

$$x_n\in V_n\subset V_N\subset U$$

כלומר, על פי הגדרה, מתקיים $x_n\xrightarrow{n\to\infty}a$. אך נשים לב כי לכל $n$ מתקיים $F(x_n)\notin V$. כלומר, הסדרה $\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת ל-$F(a)$ וזאת בסתירה לנתון.

■

## שאלה 4:

נתון $\{Y_i,\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף בן מניה של מרחבים טופולוגיים, כאשר $\sigma_i$ היא טופולוגיה על $Y_i$ לכל $i\in\mathbb{N}$. יהא $Y=\prod_{i=1}^{\infty}Y_i$ (המכפלה הקרטזית של $Y_i$ לכל $i$), ותהא $\sigma_{prod}$ טופולוגיית המכפלה על $Y$. לכל $i\in\mathbb{N}$ מגדירים $\pi_i:Y\mapsto Y_i$ את ההטלה על המרחב $Y_i$, כלומר:

$$\forall(y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots)\in Y\quad \pi_i(y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots)=y_i$$

א. נרצה להראות כי לכל $i\in\mathbb{N}$ ההטלה $\pi_i$ היא העתקה רציפה. לשם כך יהא:

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_i,\cdots)\in Y\quad y_i\in Y_i$$

תהא סביבה פתוחה $V_i\in\sigma_i$ כלשהי. נשים לב כי:

$$\pi_i^{-1}(V_i)=\{y'=(y_1',y_2',\cdots,y_i',\cdots)\in Y|\pi_i(y')=y_i'\in V_i\}=\{y'=(y_1',y_2',\cdots,y_i',\cdots)|y_i\in V_i\}$$
$$=\left\{y'=(y_1',y_2',\cdots,y_i',\cdots)\middle|\begin{matrix}\forall j\in\mathbb{N},j\neq i & y_j'\in Y_i\\ & y_i'\in V_i\end{matrix}\right\}=Y_1\times Y_2\times\cdots\times V_i\times\cdots\overset{\text{לפי הגדרה}}{\in}\sigma_{prod}$$

כלומר, הראינו כי אכן המקור של כל קבוצה פתוחה ב-$Y_i$ הוא קבוצה פתוחה ב-$Y$, ולכן ההעתקה רציפה כנדרש.

■

ב. נניח $\sigma$ טופולוגיה כלשהי כך ש-$\pi_i$ רציפה לכל $i$, כלומר, בהתאם למה שהוכחנו בסעיף א':

$$\forall i\in\mathbb{N}\quad\forall V_i\in\sigma_i\quad \pi^{-1}(V_i)=Y_1\times\cdots\times V_i\times\cdots\overset{\substack{\text{דרישת}\\ \text{הרציפות}}}{\in}\sigma$$

נרצה להראות כי $\sigma_{prod}\subset\sigma$. לשם כך נזכור כי:

$$\psi_{prod}=\left\{\prod_{i=1}^{\infty}U_i\middle|\begin{matrix}\forall i\notin J & U_i=Y_i\\ \forall i\in J & \\ |J|<\infty & Y_i\neq U_i\in\sigma_i\end{matrix}\right\}$$

הוא בסיס של $\sigma_{prod}$ (הראינו בכיתה). נראה עתה כי $\Psi_{prod}\subset\sigma$. לאחר שנראה זאת, ינבע כי כל קבוצה מ-$\sigma_{prod}$ היא איחוד של קבוצות מ-$\sigma$ ולכן בפרט $\sigma_{prod}\subset\sigma$.

יהא $V=\prod_{i=1}^{\infty}U_i\in\sigma_{prod}$. אזי יש לכל הפחות מספר סופי של קבוצות, נסמנן על ידי קבוצת האינדקסים $J$, עבורן $Y_i\neq U_i$ וכן $U_i\in\sigma_i$ לכל $i\in J$. נשים לב כי:

$$\pi^{-1}(U_i)=Y_1\times Y_2\times\cdots\times U_i\times\cdots\in\sigma$$

לכן מתקיים:

$$\bigcap_{i\in J}\pi^{-1}(U_i)=\left\{y=(y_1,y_2,\cdots,y_j,\cdots)\middle|\begin{matrix}\forall i\in J & y_i\in U_i\\ \forall i\in\mathbb{N},i\notin J & y_i\in Y_i\end{matrix}\right\}=\prod_{i=1}^{\infty}U_i$$

אך זהו חיתוך סופי של קבוצות פתוחות מ-$\sigma$ ולכן נסיק כי $\prod_{i=1}^{\infty}U_i\in\sigma$ מתכונות הטופולוגיה. ולכן, קיבלנו כי אכן:

$$\sigma_{prod}\subset\sigma$$

לכל $\sigma$ המקיימת ש-$\pi_i$ רציפה לכל $i$. כלומר, כל טופולוגיה המתאימה לתנאי השאלה מכילה אותה ולכן היא הדלה ביותר המקיימת תנאים אלה.

■

ג. נתונה $F: X \mapsto Y$ העתקה. נרצה להראות כי ביחס למרחבים $(X,\tau),(Y,\sigma_{prod})$:

$$F \text{ רציפה} \Leftrightarrow \begin{matrix}\forall i \in \mathbb{N} \\ \pi_i \circ F: X \mapsto Y_i \text{ רציפה}\end{matrix}$$

$\Leftarrow$ נניח כי $F$ רציפה, אזי כמובן ש-$\pi_i \circ F$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפה לכל $i$ (סעיף ב').

$\Rightarrow$ נניח כי לכל $i$, $\pi_i \circ F$ רציפה, ונרצה להראות כי $F$ רציפה. תהא אם כן $V \in \sigma_{prod}$. אזי נרצה להראות כי $F^{-1}(V)$ פתוחה.

כאמור $V$ ניתנת לכתיבה על ידי $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$ כך ש-$V_\alpha \in \sigma_{prod}$ לכל $\alpha \in I$. נשים לב, כי לכל $\alpha$ מתקיים:

$$V_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i}$$

כאשר $U_{\alpha_i} \in \sigma_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$ וכן $U_{\alpha_i} \neq Y_i$ אך ורק במספר סופי של אינדקסים (נסמן קבוצת אינדקסים זו ב-$J_\alpha$).

עתה, לכל $i \in J_\alpha$, מתקיים, מרציפות $\pi_i \circ F$, כי:

$$(\pi_i \circ F)^{-1}(U_{\alpha_i}) = F^{-1} \circ \pi_i^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \tau$$

וכן נשים לב כי:

$$\bigcap_{i\in J_\alpha} \overbrace{F^{-1} \circ \pi_i^{-1}(U_{\alpha_i})}^{\substack{\in\tau \\ \text{מהרציפות}}} = \left\{ y = (y_1, y_2, \cdots) \middle| \begin{matrix} \forall i \in J_\alpha & F \circ \pi_i(y) \in U_{\alpha_i} \\ \forall i \notin J_\alpha & F \circ \pi_i(y) \in Y_i \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ y = (y_1, y_2, \cdots) \middle| F(y) \in \textstyle\prod_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i} \right\} = F^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i}\right)$$

ולכן $F^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\infty} U_{\alpha_i}\right) = F^{-1}(V_\alpha) \in \tau$ כחיתוך סופי של איברים מ-$\tau$.

אך מכאן שמתקיים:

$$F^{-1}(V) = F^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} \overbrace{F^{-1}(V_\alpha)}^{\in\tau} \in \tau$$

כלומר $F$ אכן רציפה כדרוש.

■

ד. נתונה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-$(Y,\sigma_{prod})$. נרצה להוכיח שמתקיים:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in (Y,\sigma_{prod}) \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \quad \pi_i(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi(y)$$

$\Rightarrow$ נניח כי $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in (Y,\sigma_{prod})$. מכאן שלכל $U \in \sigma_{prod}$ המכיל את $Y$ קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in U$.

יהא, עתה $i \in \mathbb{N}$ כלשהו, וסביבה $U_i \in \sigma_i$ המכילה את $\pi_i(y)$. אזי מרציפות $\pi_i$ נובע שקיימת $y \in V_i \in \sigma_{prod}$ פתוחה, עבורה מתקיים $\pi_i(V_i) \subset U_i$. אך $V_i$ סביבה שמכילה את $y$ ולכן קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in V_i$. אך מכאן, שמצאנו מספר טבעי עבורו לכל $n \geq N$ בפרט מתקיים:

$$\pi_i(x_n) \in \pi_i(V_i) \subset \pi_i^{-1}(U_i)$$

כלומר, $\pi_i(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_i(y)$ כנדרש.

$\Leftarrow$ נניח כי לכל $i \in \mathbb{N}$, מתקיים $\pi_i(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_i(y) \in (Y_i,\sigma_i)$. עבור הבסיס $\Psi_{prod}$ ל-$\sigma_{prod}$, נגדיר בסיס חדש:

$$\Phi_{prod}^{(y)} = \left\{ U \in \Psi_{prod} \middle| y \in U \right\} \subset \Psi_{prod}$$

נראה כי זהו בסיס של $\sigma_{prod}$ ב-$y$ – לכל $y \in U \in \sigma_{prod}$, מתקיים מהגדרת $\Psi_{prod}$ כי ניתן להציג את $U$ על ידי:

$$U = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha \qquad \begin{matrix} \forall\alpha \in I \\ V_\alpha \in \Psi_{prod} \end{matrix}$$

אך היות ו-$y \in U$ נובע כי קיימת $\alpha \in I$ עבורה $y \in V_\alpha$, ומאידך $V_\alpha \in \Psi_{prod}$ על פי הגדרה ולכן $V_\alpha \in \Phi_{prod}^{(y)}$. ומהאיחוד נקל לראות כי אכן מתקיים $V_\alpha \subset U$ כנדרש.

עתה, תהא סביבה $U$ של $y$ כלשהי. אזי, מהגדרת $\Phi_{prod}^{(y)}$ נובע כי קיימת $V \in \Phi_{prod}^{(y)}$ עבורה $y \in V \subset U$. היות ובפרט $V \in \Psi_{prod}$ נובע כי קיימת קבוצת אינדקסים סופית $J$ כך שמתקיים:

$$V = \prod_{i=1}^{\infty} U_i \qquad \begin{matrix} \forall i \in J & U_i \in \sigma_i \\ \forall i \notin J & U_i = Y_i \end{matrix}$$

עתה, לכל $i \in J$, ההעתקה $\pi_i$ רציפה ומתקיים $\pi_i(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_i(y)$. לכן, לכל $i \in \mathbb{N}$, קיים $N_i \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N_i$ מתקיים $\pi_i(x_n) \in \pi_i(V) = U_i$.

נסמן $N = \max_{i\in J} N_i$, ונשים לב כי עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים, שלכל $i \in J$, $\pi_i(x_n) \in \pi_i(V) = U_i$, וכמובן שלכל $i \notin J$ מתקיים:

$$\pi_i(x_n) \in \pi_i(V) = Y_i$$

אך מכאן קיבלנו כי לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in V$ על פי הגדרה עבור כל הרכיבים, ולכן $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$, כנדרש.

■

ה. עתה נניח כי אנו עוסקים באוסף $(Y_\alpha, \sigma_\alpha)$ לכל $\alpha \in I$. כלומר זהו אוסף שאינו בן מניה של מרחבים טופולוגיים. מגדירים:

$$Y = \{f: I \mapsto \cup_{\alpha\in I} Y_\alpha \,|f(\alpha) \in Y_\alpha\}$$

ואת טופולוגיית המכפלה. נכליל את הטענות א'-ד' עבור אוסף זה:

- נסמן ב-$\pi_\alpha: Y \mapsto Y_\alpha$ את ההעתקה $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$. נראה כי העתקה זו רציפה. תהא, אם כן, סביבה $\alpha \in U_\alpha \in \sigma_\alpha$. נשים לב כי על פי הגדרה:

$$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \{f \in Y|\pi_\alpha(f) \in U_\alpha\} = \{f \in Y|f(\alpha) \in U_\alpha\}$$

אך נשים לב כי הוכחנו כי הקבוצה:

$$\Psi_{prod} = \left\{ f: I \mapsto \cup_{\alpha\in I} U_\alpha \middle| \begin{matrix} \forall\alpha \in I & f(\alpha) \in U_\alpha \\ \forall i \notin J & \\ |J| \in \mathbb{N} & U_\alpha = Y_\alpha \end{matrix} \right\}$$

אך מכאן ברור כי $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \Psi_{prod}$ ולכן היא בפרט מוצגת כאיחוד של איברים מקבוצה זו ובפרט $\pi^{-1}(U_\alpha) \in$ $\sigma_{prod}$ כלומר ההעתקה רציפה כנדרש.

- תהא טופולוגיה כלשהי $\sigma$ המקיימת ש-$\pi_\alpha$ רציפה לכל $\alpha \in I$. אזי, כפי שהראינו, מתקיים:

$$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \{f \in Y|f(\alpha) \in U_\alpha\} \in \Psi_{prod}$$

נרצה להראות כי $\sigma_{prod} \subset \sigma$. לשם כך נראה כי $\Psi_{prod} \subset \sigma$ כלומר ניתן לבטא את כל $\sigma_{prod}$ כאיחוד של איברים מ-$\sigma$ ולכן הוא מוכל בה. יהא אם כן, $U \in \Psi_{prod}$. אזי קיימת קבוצת אינדקסים $J$ מגודל סופי כך שמתקיים:

$$U = \left\{ f \in Y \middle| \begin{matrix} \forall\alpha \in I & f(\alpha) \in U_\alpha \\ \forall i \notin J & \\ |J| \in \mathbb{N} & U_\alpha = Y_\alpha \end{matrix} \right\} = \bigcap_{i\in J} \{f \in Y|f(j) \in U_j\} = \bigcap_{i\in J} \overbrace{\pi_j^{-1}(U_j)}^{\in\sigma} \underset{\text{סופי}}{\overset{\text{איחוד}}{\in}} \sigma$$

כלומר אכן מתקיים $\Psi_{prod} \subset \sigma$ כנדרש. כלומר, כל טופולוגיה המקיימת את הנ"ל מכילה את $\sigma_{prod}$ בהכרח ולכן נסיק כי הטופולוגיה הדלה ביותר המקיימת את הנדרש היא $\sigma_{prod}$ עצמה.

- נרצה להראות כי $F: X \mapsto Y$ רציפה אם ורק אם $\pi_\alpha \circ F$ רציפה לכל $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$ נניח כי $F$ רציפה. אזי לכל $\alpha \in I$ מתקיים ש-$\pi_\alpha \circ F$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

$\Rightarrow$ נניח כי לכל $\alpha \in I$ מתקיים $\pi_\alpha \circ F$ רציפה. נרצה להראות כי $F$ רציפה כלומר שלכל $U \in \sigma_{prod}$ מתקיים $F^{-1}(U) \in \tau$ פתוחה. לשם כך, נשים לב כי $U \in \sigma_{prod}$ ולכן ניתן להצגה כאיחוד מהצורה:

$$U = \bigcup_{\beta\in J} U_\beta \quad \begin{matrix} \forall\beta \in J \\ U_\beta \in \Psi_{prod} \end{matrix}$$

אך מהגדרת $\Psi_{prod}$ ובאותו אופן שהראינו עבור תת הסעיף הקודם, אנו יודעים כי לכל $\beta \in J$, ניתן להציג את $U_\beta$ באופן הבא:

$$U_\beta = \bigcap_{k\in K} \pi_k^{-1}(U_k) \quad |K| \in \mathbb{N}$$

ולכן, מתקיים:

$$F^{-1}(U_\beta) = F^{-1}\left(\bigcap_{k\in K} \pi_k^{-1}(U_k)\right) = \bigcap_{k\in K} \overbrace{F^{-1}\left(\pi_k^{-1}(U_k)\right)}^{\in\tau} \underset{\text{סופי}}{\overset{\text{חיתוך}}{\in}} \tau$$

ומכאן שמתקיים:

$$F^{-1}(U) = F^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in J} U_\beta\right) = \bigcup_{\beta\in J} \overbrace{F^{-1}(U_\beta)}^{\in\tau} \underset{\tau-\text{מ}}{\overset{\text{איחוד}}{\in}} \tau$$

כלומר, אכן $F$ רציפה כנדרש.

- נרצה להראות כי $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל-$y$ ב-$(Y, \sigma_{prod})$ אם ורק אם $\pi_\alpha(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_\alpha(y)$ לכל $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$ נניח כי $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ ב-$(Y, \sigma_{prod})$, ויהא $\alpha \in I$ כלשהו. תהא $\pi_\alpha(y) \in U_\alpha \in \sigma_\alpha$ סביבה כלשהי. אזי מרציפות $\pi_\alpha$ שהוכחה בסעיף א', אנו יודעים כי קיימת $y \in V_\alpha \in \sigma_{prod}$ עבורה מתקיים $\pi(V_\alpha) \subset U_\alpha$. אך $V_\alpha$ הינה סביבה של $y$ ולכן מהתכנסות $x_n$ ב-$(Y, \sigma_{prod})$ נובע כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in V_\alpha$ כלומר מצאנו $N$ טבעי עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $\pi_\alpha(x_n) \in \pi_\alpha(V_\alpha) \subset \pi_\alpha(U_\alpha)$ ולכן $\pi_\alpha(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_\alpha(y)$ כנדרש.

$\Rightarrow$ נניח כי לכל $\alpha \in I$ מתקיים $\pi_\alpha(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_\alpha(y)$. נרצה להראות כי לכל $y \in U \in \sigma_{prod}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$, $x_n \in U$. לשם כך, נגדיר בסיס ל-$\sigma_{prod}$ ב-$y$ על ידי:

$$\Phi_{prod}^{(y)} = \{U \in \Psi_{prod}|y \in \mathrm{U}\}$$

נראה כי זה אכן בסיס ל-$\sigma_{prod}$ ב-$y$ כנדרש. תהא $U$ סביבה כלשהי המכילה את $y$. אזי, מהגדרת $\Psi_{prod}$ קיים איחוד מהצורה:

$$U=\bigcup_{\beta\in J}U_\beta \quad U_\beta\in\Psi_{prod}$$

אך היות ו-$y\in U$, נסיק כי קיים $\beta\in J$ עבורו $y\in U_\beta$. מיחסים בין קבוצה זו לאיחוד נסיק כי $U_\beta\subset U$ מחד, ומאידך מהגדרת הקבוצה מתקיים $U_\beta\in\Phi_{prod}^{(y)}$ ולכן זהו בסיס של $\sigma_{prod}$ ב-$y$ כנדרש.

עתה, תהא $y\in U\in\sigma_{prod}$ כלשהי. אזי, על פי הגדרה קיימת קבוצה $y\in U'\in\Phi_{prod}^{(y)}$ כך ש-$U'\in U$. עבור קבוצה זו, מהגדרת $\Psi_{prod}$, נובע כי קיימת קבוצת אינדקסים סופית $J$ עבורה מתקיים:

$$U'=\left\{f\in Y\middle|\begin{matrix}\forall\alpha\in I & f(\alpha)\in U_\alpha\\ \forall i\notin J & \\ |J|\in\mathbb{N} & U_\alpha=Y_\alpha\end{matrix}\right\}$$

וכמובן שלכל $\alpha$, היות ו-$y\in U'$ מתקיים $\pi_\alpha(y)=\pi_\alpha(U')=U_\alpha$

אך נשים לב, כי לכל $\alpha\in J$, נובע מהתכנסות $\pi_\alpha$ שקיים $N_\alpha$ עבורו לכל $n\geq N_\alpha$ מתקיים $\pi_\alpha(x_n)\in\pi_\alpha(U')=U_\alpha$.

נסמן, אם כן:

$$N=\max_{\alpha\in J}N_\alpha$$

ונשים לב כי אכן לכל $n\geq N$ מתקיים $\pi_\alpha(x_n)\in U_\alpha$ לכל $\alpha\in J$ מהגדרת הגבול, ומאידך באופן טריוויאלי מתקיים $\pi_\alpha(x_n)\in U_\alpha=Y_\alpha$ לכל $\alpha\notin J$. כלומר אכן מצאנו כי לכל סביבה $y\in U\in\sigma_{prod}$, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n\in U$ (שכן כל הרכיבים הקרטזים שלו נמצאים בכל הסביבות של הרכיבים הקרטזים של $U$). כלומר:

$$x_n\xrightarrow{n\to\infty}y$$

■