תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 7
פתרונות

תרגיל 1.

יהיו $\{X_i\}$ מ"מ ב"ת כך ש- $X_i \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_i)$ עבור $i = 0, 1, \ldots$. נסמן $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

(א) חשבו את הפונקציה האופינית של S_n.

(ב) מצאו את ההתפלגות של S_n.

(ג) חשבו את $\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq n + n^{\alpha})$, כאשר α הוא פרמטר חיובי.

פתרון

(א)

$$\phi_{X_j}(t) = E\left(e^{iX_jt}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\frac{\lambda_j^k}{k!}e^{-\lambda_j} = \exp\left\{\lambda_j(e^{it}-1)\right\},$$

כלומר

$$\begin{aligned}\phi_{S_n}(t) &= E\left(e^{iS_nt}\right) = \prod_{j=1}^{n} E\left(e^{iX_jt}\right) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{\lambda_j(e^{it}-1)\right\} = \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(e^{it}-1)\right\}.\end{aligned}$$

(ב) מ- (א) וממשפט הרציפות נובע כי $S_n \sim Poiss\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$.

(ג) עבור $\alpha = 1/2$ לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq n + n^{1/2}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq 1\right) = 1 - \Phi(1) = \Phi(-1).$$

עבור $\alpha > 1/2$:
יהיה M מספר חיובי כלשהו. עבור n מספיק גדול מתקיים $M < \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}$, ולכן:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq n + n^\alpha) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}\right) \leq \\
&\leq \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq M\right) = 1 - \Phi(M).
\end{aligned}$$

מכיוון ש- M הוא מספר כלשהוא, עבור $\alpha > 1/2$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq n + n^\alpha) = 0$$

באופן דומה, עבור $\alpha < 1/2$:
יהיה m מספר חיובי כלשהו. עבור n מספיק גדול מתקיים $0 < \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} < m$, ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq 0\right) \geq \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}}\right) \geq \\
&\geq \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq m\right) = 1 - \Phi(m).
\end{aligned}$$

מכיוון ש- M הוא מספר כלשהוא, עבור $\alpha < 1/2$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq n + n^\alpha) = 1/2.$$

<u>תרגיל 2</u>.
נניח כי נק' (X, Y) נבחרה באקראי מתוך מעגל ברדיוס אחד עם מרכזו ב- $(0, 0)$, כלומר $f_{X,Y}(x, y) = 1/\pi$, עבור $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. נסמן על ידי (R, Θ) את הקאורדינטות הפולריות של הנקודה.

(א) חשבו את $E(R)$ ואת $E(R^2)$.

(ב) האם R ו- Θ ב"ת ?

<u>פתרון</u>

(א)

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{1}{\left|\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\right|} f_{X,Y}(x, y) = \frac{r}{\pi}, \quad 0 < r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

לכן

$$E(R) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cdot\frac{r}{\pi}drd\theta = \frac{2}{3},$$
$$E(R^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot\frac{r}{\pi}drd\theta = \frac{1}{2}.$$

(ב) כן, נובע מהסעיף הקודם.

תרגיל 3.
X, Y, Z בלתי תלויים, כל אחד אחיד ב- $[0,1]$. מצא את

(א) $f_{X+Y}(u)$

(ב) $f_{X+Y+Z}(v)$

פתרון

(א) נגדיר מ"מ $U = X+Y$. אזי

$$F_U(u) = P(U \le u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\int_{-\infty}^{u-x} f_Y(y)dydx.$$

לכן

$$f_U(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(u-x)dx.$$

הנוסחה לצפיפות של סכום של שני מ"מ ב"ת נקראת נוסחת הקונוולוציה, לפעמים משתמשים בסימון $f_U = f_X * f_Y$.
במקרה הספציפי ברור כי $0 \le U \le 2$. ההגבלות $0 \le x \le 1$ ו- $0 \le u-x \le 1$ (או $u-1 \le x \le u$) קובעות את אינטרוול האינטגרציה האמיתי $\max(0,u-1) \le x \le \min(1,u)$
ובו האינטגרנד $\equiv 1$.

$\underline{u \in (0,1)}$ $\qquad f_{X+Y}(u) = \int_0^u 1\,dx = u$

$\underline{u \in (1,2)}$ $\qquad f_{X+Y}(u) = \int_{u-1}^1 1\,dx = 2-u$

ולסיכום מתקבל
$$f_{X+Y}(u)=\begin{cases} u & 0<u<1 \\ 2-u & 1<u<2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}\ .$$

(ב)

$$f_{X+Y+Z}(v)=g*f(v)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(v-x)\,dx$$

כאשר $g=f_{X+Y}$ (מסעיף א') ו- $f=f_Z$. ברור שמחוץ ל- $[0,3]$, $f_{X+Y+Z}(v)=0$.
כמו בסעיף הקודם, עלינו לטפל בנפרד בתחומים השונים בתוך $[0,3]$, שם גבולות האיטגרציה נקבעים אחרת בכל מקרה.

$\underline{v\in(0,1)}$ $\qquad f_{X+Y+Z}(v)=\int_0^v x\,dx=\frac{v^2}{2}$

$\underline{v\in(1,2)}$ $\qquad f_{X+Y+Z}(v)=\int_{v-1}^1 x\,dx+\int_1^v(2-x)\,dx=\frac{1}{2}(-2v^2+6v-3)$

$\underline{v\in(2,3)}$ $\qquad f_{X+Y+Z}(v)=\int_{v-1}^2(2-x)\,dx=\frac{1}{2}(3-v)^2$

לסיכום : בסעיף א', הגרף של f_{X+Y} הוא "משולש" סימטרי המורכב משני קטעים ישרים מחוברים, בעוד שבסעיף ב', הגרף של f_{X+Y+Z} הוא חיבור של שלושה חלקי פרבולה, כאשר בנקודות החיבור הנגזרת הראשונה רציפה, אך השנייה לא קיימת.

באופן כללי, הקונוולוציה של n צפיפויות אחידות ב- $[0,1]$ תיתן צפיפות על $[0,n]$ שהיא חיבור של n חלקי גרף כאשר כל חלק כזה (המוגדר על תתקטע באורך 1) הוא פולינום מדרגה $(n-1)$ ובכל נקודות החיבור, $(n-2)$ הנגזרות הראשונות רציפות אך לא קיימת הנגזרת מסדר $(n-1)$.

<u>תרגיל 4.</u>
יהיו $X_1,X_2,\ldots,X_n$ מ"מ ב"ת מפולגים באחידות ב- $(0,1)$. תהא

$$\min_k\{X_k\}=Y_1\le Y_2\le\ldots\le Y_n=\max_k\{X_k\}$$

תמורה של $\{X_1,\ldots,X_n\}$ בסדר עולה.

(א) חשבו את $f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1,\ldots,y_n):=\lim_{\max\{\triangle_i\}\to 0}\frac{P\left(y_i-\frac{\triangle_i}{2}\le Y_i\le y_i+\frac{\triangle_i}{2}\right)}{\triangle_1\cdot\triangle_2\cdot\ldots\cdot\triangle_n}$, $0<y_1<y_2<\ldots<y_n<1$.

(ב) חשבו את $E(Y_k)$, $1\le k\le n$.

<u>פתרון</u>

(א) דרך טבעית לחשב את הצפיפות היא לחשב קודם את פונקצית ההתפלגות ואז להשתמש בנוסחה $f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n)=\frac{\partial F_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n)}{\partial y_1\partial y_2\dots\partial y_n}$:

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n) = \lim_{\max\{\triangle_i\}\to 0}\frac{P\left(y_i-\frac{\triangle_i}{2}\le Y_i\le y_i+\frac{\triangle_i}{2}\quad\forall i\right)}{\triangle_1\cdot\triangle_2\cdot\ldots\cdot\triangle_n},$$

$$0<y_1<y_2<\ldots<y_n<1.$$

אם $\triangle_i<y_{i+1}-y_i$ אזי לכל $0<y_1<y_2<\ldots<y_n<1$ נקבל:

$$P\left(y_i-\frac{\triangle_i}{2}\le Y_i\le y_i+\frac{\triangle_i}{2}\quad\forall i\right)=n!\triangle_1\cdot\triangle_2\cdot\ldots\cdot\triangle_n,$$

כיוון שלכל תמורה (פרמוטציה) σ של $\{1,2,\dots,n\}$

$$\begin{aligned}&P\left(y_i-\frac{\triangle_i}{2}\le X_{\sigma(i)}\le y_i+\frac{\triangle_i}{2}\quad\forall i\right)=\\&=\prod_{i=1}^{n}P\left(y_i-\frac{\triangle_i}{2}\le X_{\sigma(i)}\le y_i+\frac{\triangle_i}{2}\right)=\\&=\triangle_1\cdot\triangle_2\cdot\ldots\cdot\triangle_n,\end{aligned}$$

וישנם בסה"כ $n!$ תמורות כאלה. לפיכך:

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1,\dots,y_n)=n!,\quad 0<y_1<y_2<\ldots<y_n<1.$$

(ב)

$$EY_k=\int_0^1\int_0^{y_n}\int_0^{y_{n-1}}\ldots\int_0^{y_3}\int_0^{y_2}y_k\cdot n!dy_1dy_2\ldots dy_{n-2}dy_{n-1}dy_n=\frac{k}{n+1},$$

בהתאם לאינטואיציה.

<u>תרגיל 5</u>.

רעש במערכת הוא משתנה אקראי X המפולג $N(\mu,4)$. מערכת משדרת אות Y שהיא הטרנספורמציה הבאה של הרעש:

$$Y=\begin{cases}\frac{X-\mu}{2}, & |X-\mu|\le 2\\ 0, & |X-\mu|>2.\end{cases}$$

חשבו את פונקצית ההתפלגות $F_Y(y)$.

<u>פתרון</u>

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y < -1, \\ \Phi(y) - \Phi(-1) & \text{if} \quad -1 \le y < 0, \\ \Phi(y) + \Phi(-1) & \text{if} \quad 0 \le y \le 1, \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le y. \end{cases}$$

כדי להגיע לתשובה הזו אפשר להשתמש בהגדרה של פונקצית התפלגות $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \in A_y)$ ואז לזהות את התחום A_y בעזרת גרף של פונקציה $Y = Y(X)$. כאשר זה נעשה נשאר רק לבטא את $P(X \in A_y)$ במונחים של $\Phi(\cdot)$.

<u>תרגיל 6</u>.
מטילים מטבע, בעל הסתברות $1/3$ להצלחה, N פעמים באופן בלתי תלוי, כאשר N משתנה אקראי בלתי תלוי בתוצאות ההטלות ומפולג פואסוני עם פרמטר 1. נסמן X מספר ההצלחות.

(א) חשבו את $VAR(X)$

(ב) חשבו את $COV(X,N)$

<u>פתרון</u>

(א) לפי התוצאה הכללית שקיבלנו בתרגיל מס' 1 בתירגול מס' 10:

$$VAR(X) = 2/3 \cdot 1/3 \cdot 1 + 1/9 \cdot 1 = 1/3.$$

(ב) נזכור כי $E(N) = VAR(N) = 1$:

$$\begin{aligned} COV(X,N) &= E(XN) - EX \cdot EN = \\ &= E\big(E(XN|N)\big) - \frac{1}{3}\big(E(N)\big)^2 = \\ &= \frac{1}{3}\Big(E(N^2) - \big(E(N)\big)^2\Big) = \frac{1}{3}VAR(N) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$