

סעיפי רשות מסומנים ב- (*)

1. נתון:

f ו- g שתי פונקציות מ- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ל- \mathbb{R} : $f(x,y)=|x|+|y|$, $g(x,y)=x^2$
 A ו- B שתי תת-קבוצות של $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $A=(0, 2) \times (0, 1)$, $B=[-3, -2] \times [-1, 0]$
 M, K ו- N שלוש תת-קבוצות של \mathbb{R} : $M=(1, 4)$, $N=[-2, 1]$, $K=\{-2, 2, 4\}$
 (א) מצא: $f[A]$, $f[B]$, $g[A]$, $g[B]$. (כתוב תשובות בלבד).
 (ב) מצא: $f^{-1}[K]$, $f^{-1}[M]$, $f^{-1}[N]$, $g^{-1}[K]$, $g^{-1}[M]$, $g^{-1}[N]$. (תן תיאורים גיאומטריים בלבד).

2. תהי f פונקציה מ- X ל- Y . הוכח את הטענות על הפונקציות המורכבות:

- (א) לכל $D, E \subseteq Y$ מתקיים $f^{-1}[D \setminus E] = f^{-1}[D] \setminus f^{-1}[E]$.
 (ב) (*) "לכל $A, B \subseteq X$ מתקיים $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$ אם ורק אם f חד-חד-ערכית".
 (ג) "לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f[A^c] \subseteq (f[A])^c$ אם ורק אם f חד-חד-ערכית".
 (ד) "לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f[A^c] \supseteq (f[A])^c$ אם ורק אם f היא על".

3. הוכח שקילויית-עוצמה. בסעיפים א'–ה' תן הוכחה מדויקת: בנה פונקציה חד-חד-ערכית ועל (והוכח שהיא כזאת). בסעיפים ו'–ז' הוכח שפונקציה כזאת קיימת ע"י שימוש בתוצאות שהוכחו בהרצאה או תרגול.

- (א) אם $A \sim C$ ו- $B \sim D$, אז $A \times B \sim C \times D$.
 (ב) $X^{\{0,1\}} \sim X \times X$ לכל קבוצה X .
 (ג) $\{0,1\}^X \sim P(X)$ לכל קבוצה X .
 (ד) $\{x \in \mathbb{Z} : 2|x\} \sim \{x \in \mathbb{Z} : 2 \nmid x\}$ (הסימון $2 \nmid x$ – פירושו " x לא מתחלק ב-2").
 (ה) (*) $\{x \in \mathbb{Z} : 5|x\} \sim \{x \in \mathbb{Z} : 8|x\}$
 (ו) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
 (ז) (*) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

4. הוכח שקילויית-עוצמה ע"י בניה מפורשת של פונקציה חד-חד-ערכית ועל (ללא שימוש במשפט Cantor-Schröder-Bernstein). בסעיף א' יש להוכיח בכל הפרטים שהפונקציה שבנית אכן חח"ע+על, בשאר הסעיפים – רק להגדיר פונקציה.

- (א) $[1, 3] \sim [4, 8]$
 (ב) $[0, 1] \sim (0, 1)$
 (ג) $[0, 1] \cup (2, 3] \sim [0, 2]$
 (ד) (*) $[0, 1] \cup [2, 3] \sim [0, 2]$
 (ה) (*) $[0, 1) \cup (2, 3] \sim [0, 2]$

$$[0, 1] \cup (2, 3] \sim \mathbb{R} \quad (ו)$$

$$[0, 1) \cup (1, 2] \sim (3, +\infty) \quad (*) \quad (ז)$$

5. הוכח תוך שימוש ב"שיטת האלכסון" (ייתכן שבחלק מהסעיפים יש צורך בנימוקים נוספים):

(א) הקבוצות \mathbb{Z} ו- $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ אינן שקולות-עוצמה.

(ב) הקבוצות $(0, 1)$ (\Rightarrow קטע פתוח $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$) ו- $(0, 1)^{(0, 1)}$ אינן שקולות-עוצמה.

(ג) (*) הקבוצות $(0, 1)$ ו- $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ אינן שקולות-עוצמה.

(ד) (*) \aleph איננה שקולת-עוצמה לקבוצה של כל הפונקציות f מ- \aleph ל- \aleph שמקיימות:

$$2|f(n) \Leftrightarrow 2|n \text{ לכל } n \text{ טבעי}$$