מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 2

1 בניות של מרחבים מטריים

1. תת מרחב של מרחב מטרי (X,d) הוא תת קבוצה $A \subseteq X$ עם המטריקה $d|_A$, כלומר $(A, d|_A)$.
דוגמאות:

   (א) $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|x\|_2 = 1\right\} = S^1 \subset \mathbb{R}^2$

2. תהי $[0,\infty) \to [0,\infty)$: ϕ המקיימת:

   (א) $\phi(s) = 0 \iff s = 0$

   (ב) ϕ מונוטונית לא יורדת

   (ג) לכל $s,t \geq 0$ מתקיים $\phi(s+t) \leq \phi(s) + \phi(t)$

   אם (X,d) מרחב מטרי אזי $\phi \circ d$ היא מטריקה על X

3. מכפלה של מרחבים וקטוריים. יהיו $(X_1, d_1), ..., (X_n, d_n)$ מרחבים וקטוריים.
ניתן להגדיר מטריקה על המרחב $X_1 \times ... \times X_n = \{(x_1, ..., x_n) \,|\forall 1 \leq i \leq n,\, x_i \in X_i\}$ באופן הבא:
תהי $\|\cdot\|$ נורמה על $\mathbb{R}^n$ לא קטנה על $\mathbb{R}^n_+$ (כלומר לכל $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n_+$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$, $x_i \leq y_i$ מתקיים $\|x\| \leq \|y\|$). נגדיר $d = \|(d_1, ..., d_n)\|$ כלומר:

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \|(d_1(x_1, y_1), ..., d_n(x_n, y_n))\|$$

   d היא מטריקה על $X_1 \times ... \times X_n$. בדיקה:

   (א) אי שלילית - ברור.

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff \forall i, d_i(x_i, y_i) = 0 \iff \forall i, x_i = y_i \iff x = y$$

   .

   (ב) סימטריות - ברור.

   (ג) אי שיוויון המשולש:

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{z}) &= \|(d_i(x_i, z_i))_i\| \\ (\text{non-decreasing}) &\leq \|(d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i))_i\| \\ (\triangle - \text{inequality}) &\leq \|(d_i(x_i, y_i))_i\| + \|(d_i(y_i, z_i))_i\| \\ &= d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z}) \end{aligned}$$

הערה 1.1 הנורמות שהוזכרו בדוגמאות $\|\cdot\|_p$ על $\mathbb{R}^n$ הן נורמות כאלה (non-decreasing).

2 שקילות של מטריקות

הגדרה 2.1 שתי מטריקות d_1, d_2 על X נקראות שקולות טופולוגית אם:
לכל $x \in X$, ולכל $r_1 > 0$ קיים $r_2 > 0$ כך ש-$B_{d_2}(x, r_2) \subset B_{d_1}(x, r_1)$.
לכל $x \in X$, ולכל $r_2 > 0$ קיים $r_1 > 0$ כך ש-$B_{d_1}(x, r_1) \subset B_{d_2}(x, r_2)$.

למה 2.2 שתי מטריקות הן שקולות טופולוגית אם"ם הן מגדירות את אותה הטופולוגיה (את אותו אוסף של קבוצות פתוחות).

הוכחה: אם הן מגדירות את אותה הטופולוגיה אז (לכל $x \in X, r_1 > 0$) $B_{d_1}(x, r_1)$ היא פתוחה גם במטריקה d_2 כלומר קיים כדור סביב x (במטריקה d_2) כך ש-$B_{d_2}(x, r_2) \subset B_{d_1}(x, r_1)$. (ובאותו אופן כדורים ב-$d_2$ מכילים כדורים ב-d_1)
אם המטריקות שקולות ותהי U פתוחה ביחס ל-d_1, ויהי $x \in U$, קיים כדור ביחס ל-d_1 סביב x בתוך U ($x \in B_{d_1}(x, r_1) \subset U$), לכן לפי הגדרת השקילות קיים $r_2 > 0$ כך ש- $x \in B_{d_2}(x, r_2) \subset B_{d_1}(x, r_1) \subset U$, לכן לפי הגדרת קבוצה פתוחה ביחס U פתוחה ביחס ל-d_2. (ובאותו אופן קבוצות פתוחות ביחס ל-d_2 פתוחות ביחס ל-d_1) ∎

הגדרה 2.3 המטריקות d_1, d_2 שקולות חזק אם קיים $M > 0$ כך ש-$\frac{1}{M} d_1 \leq d_2 \leq M d_1$

טענה 2.4 אם d_1, d_2 שקולות חזק אז הן שקולות הומאומורפית.

הוכחה: תרגיל ∎

3 מרחק בין קבוצות

הגדרה 3.1 עבור (X, d) מרחב מטרי, $A \subset X$ ונקודה $x \in X$ נגדיר

$$d(x, A) = inf\{d(x, y) | y \in A\}$$

.

ועבור שתי קבוצות $A, B \subset X$ נגדיר

$$d(A, B) = inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$$