<u>הגדרה:</u> העתקה $q: V \to K$ תיקרא

תבנית ריבועית quadratic form

אם קיים $q(v) = f(v,v)$

כאשר f תבנית בי-ליניארית <u>סימטרית</u>

$f: V \times V \to K$.

אם $\mathrm{char}\, K \neq 2$ (המציין של K אינו 2)

אז ניתן לקבל את f מתוך q

באופן הבא

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v) \right)$$

אם $A = (a_{ij})$ מטריצה המייצגת

את f בבחירת בסיס

$$\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$$

אז אם $\bar{x} \in V$

$$q(x) = f(x,x) = x^t A x =$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 +$$

$$2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

ביטוי זה יקבל הכפליים הריבועיים והמעורבים
לפי מקדמי המטריצה A.

אם A אלכסונית אז ל-q הצגה

$$q(x) = X^t A X = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

כלומר אין איברים מעורבים.

מהמשפט הקודם לגבי תבניות ריבועיות
מעל שדה K עם $\operatorname{char} K \neq 2$
קיים בסיס בו ל-q הצגה מהצורה

$$a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2.$$

<u>דוגמא:</u> יהי $q(x,y)=2x^2-12xy+5y^2$

תבנית ריבועית מעל $\mathbb{R}^2$ אזי ע"י

שינוי בסיס כלומר ההצבה $y=t$

$x=s+3t$ נקבל

$$q(\xi)=2(s+3t)^2-12(s+3t)(t)+5t^2=$$

$$2s^2-13t^2.$$

<u>משפט:</u> תהי f תבנית בילינארית סימטרית על

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$. אזי קיים

בסיס של V בו f ניתנת להצגה אלכסונית

עם מטריצה אלכסונית. בכל הצגה אלכסונית

נקבל אותו מספר P של איברים חיוביים

ואותו מספר N של איברים שליליים.

<u>הגדרה:</u> $P-N$ יקרא הסיגנטורה של f

הוכחה: מהמשפט הקודם נובע כי ל V קיים

בסיס $\{u_1,\dots,u_n\}$ שבו f הצגה כאלכסונית

מטריצה אלכסונית A. וכי P מספר האיברים

החיוביים ב A, ו N מספר האיברים השליליים.

אם $\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס אחר ל V שבו f

הצגה אלכסונית עם P' איברים חיוביים, ו N'

איברים שליליים אזי

$$P+N = P'+N' = \text{rank}(A)=n$$

ולכן מספיק להראות כי $P=P'$.

וכי $U=\mathrm{span}\{u_1,\dots,u_p\}$; $W=\mathrm{span}\{w_{p'+1},\dots,w_n\}$

אזי $f(v,v)>0$ לכל $v\in U$;

$f(v,v)\le 0$ לכל $0\neq v\in W$.

לכן $U\cap W=0$ ולכן

$\dim U = p$ $\quad$ $\dim W = n-P'$

$$\dim(U+W) = \dim U+\dim W-\dim(U\cap W) =$$

$$P+n-P'-0 = P-P'+n$$

אולם $\dim(U+W) \leq \dim V = n$

ולכן $p - p' + n \leq n$ או $p \leq p'$

אם נחליף את ההגדרות של U ו- W

נקבל: $p' \leq p$ ולכן $p = p'$

__הגדרה:__ תבנית בי לינארית סימטרית וממשית

f תיקרא אי שלילית אם

$$q(v) = f(v,v) \geq 0$$

ואם $q(v) = f(v,v) > 0 \quad \forall v \in V$

נאמר כי q תבנית חיובית מוחלטת.

__מסקנה:__ f אי שלילית אם ורק אם

$P + N = \operatorname{rank}(f)$, S = סיגנטורה

f חיובית מוחלטת אם

$$P - N = \dim V$$

נזכור כי הערכים העצמיים של f הם $-1, 1$

<u>דוגמא:</u> f מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

הוכיח כי f תבנית בילינארית סימטרית

ולכן $q(v) = f(v,v)$

תבנית ריבועית

f חיובית בהחלט כי

$$f(u,u) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

<u>משפט:</u> לכל תבנית ריבועית ממשית L

יש הצגה יחידה מהצורה

$$L(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2$$

נבדוק כעת מה קורה כאשר $K=\mathbb{C}$

<u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית

מעל $\mathbb{C}$. יהי $f: V\times V \to \mathbb{C}$ כך ש

(1) $f(av_1+bv_2, u) =$
$a f(v_1,u) + b f(v_2,u)$

$$f(u,v) = \overline{f(v,u)} \qquad \text{(iii)}$$

אזי f נקראת תבנית הרמיטית על V.

בפרט מ (i) ; (ii) נובע כי f ליניארית ס"ל צמוד במשתנה השני.

<u>הגדרה</u>: תהי $g: V \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$g(v) = f(v,v)$$

תיקרא התבנית הריבועית ההרמיטית.

ניתן לחלץ את f מתוך g באופן הבא:

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\big(g(u+v) - g(u-v)\big) + \frac{i}{4}\big(g(u+iv) - g(u-iv)\big)$$

אם $e_1, \dots, e_n$ בסיס של V אזי המטריצה $H = (h_{ij})$ המייצגת את f היא

$$h_{ij} = f(e_i, e_j)$$

היא נקראת הרמיטית כי

$$f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)}$$

לכן אברי H באלכסון הם ממשיים.

והמשפט המקביל עבור תבניות ריבועיות מרוכבות הוא:

<u>משפט:</u> אם f תבנית הרמיטית על V

אזי קיים בסיס $\{e_1, \dots, e_n\}$ של V

בו ל f הצגה זו: יש צורה אלכסונית

כלומר $f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

בכל הצגה אלכסונית של f מספר האיברים החיוביים והשליליים קבוע.

ההפרש $P - N$ נקרא הסיגנטורה של f.

ונקראת f אי שלילית אם

$$q(v) = f(v,v) \geq 0 \qquad \forall v \in V$$

וחיובית בהחלט אם

$$q(v) = f(v,v) > 0 \qquad \forall v \in V$$

<u>סיכום</u>: מרחבי מכפלה פנימית ותבניות בי לינאריות

מכפלה פנימית היא פונקציה המוגדרת על מרחבים וקטוריים V מעל שדה K כאשר $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

המכפלה הפנימית מקיימת לכל $u,v,w \in V$ ו־$a,b \in K$:
$$(\,,\,) : V \times V \to K$$

(1) $(u,v) = \overline{(v,u)}$

(2) $(au+bv, w) = a(u,w) + b(v,w)$

(3) $(u,u) \geq 0$; $(u,u)=0$ אם ורק אם $u=0$.

מעל שדה <u>כללי</u> לא ניתן להגדיר מכפלה פנימית בצורה שכזו מאחר: המושג $(u,u) \geq 0$ אינו ברור.

ובפרט לא ניתן להגדיר את מושג <u>האורך</u> <u>והניצבות</u>.

כאן במידה ואנו רוצים להגדיר "מושג מקביל" בשדות כלליים צריך לשנות את הדרישות.

מה שניתן לעשות מעל שדה כללי F הוא להגדיר מושג הנקרא <u>תבנית</u> <u>בי לינארית</u>

זאת פונקציה $f(\ ,\ ): V\times V \to F$

המקיימת: לכל $u,v,w \in V$: $a,b \in F$

(1) בי לינאריות

$$f(au+bv,w) = af(u,w)+bf(v,w)$$

$$f(u,av+bw) = af(u,v)+b(u,w)$$

① <u>נשים לב</u> כי אנו דורשים לוותר על מושג הצמוד (‾) שכן הוא לא קיים בשדה כללי F.

② <u>נשים לב</u> כי מכפלה פנימית במקרה הממשי <u>איננה</u> תבנית בי לינארית.

בהינתן בסיס למרחב V ניתן להתאים
לכל תבנית בי-לינארית f מטריצה באופן
אם $\{e_1,\dots,e_n\}$ איזשהו בסיס אזי

$$A=(a_{ij})=\big(f(e_i,e_j)\big)$$

המטריצה A מייצגת את התבנית
כי
$$f(u,v)=(u_1,\dots,u_n)\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$$

<u>ההתאמה</u> $A\to f$ היא התאמה חח"ע
ועל מאוסף התבניות הבילינאריות על אוסף
המטריצות $n\times n$ מעל F.

אם נבחר בסיס אחר למרחב הוקטורי V
ו $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ הם אחרים. תהי P
מטריצת המעבר מהבסיס $\{e_1,\dots,e_n\}$
לבסיס $\{e'_1,\dots,e'_n\}$

אזי $V_e = P v_{e'}$

ואזי $B_{e'} = P^t A_e P$ -

זה יקרא יחס חופפות

⊛ נשים לב כי זה שונה מאשר קודם

בטרנספורמציות לינאריות של $T: V \to V$

$$A_{e'} = P^{-1} A_e P .$$

אם נתונה תבנית בי לינארית סימטרית f אזי

ניתן למצוא בסיס ל V שבו f

הצגה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

אם $F = \mathbb{R}$ ואם $F = \mathbb{C}$ אזי

ואז $V_e = P v_{e'}$

ואז $B_{e'} = P^t A_e P$

שני מטריצות כנ"ל A ; B יקראו

מטריצות חופפות.

(*) נשים לב כי תנאי זה שונה מאשר החלפת

בסיס בטרנספורמציות ליניאריות $T: V \to V$

כי אז $A_{e'} = P^{-1} A_e P$

כאן יחס דמיון

נניח כי התבניות הבי-ליניאריות $f: V \times V \to F$

הן סימטריות כלומר $f(u,v) = f(v,u)$

אזי f ניתנת להצגה כמטריצה

אלכסונית!!! אם $\mathrm{char}\, F \neq 2$.

נשים לב כי לא מדובר בלכסון אלא

במובן חופפות כלומר

$P^t A P$ — אלכסונית

אם אין מניחים כי $F = \mathbb{R}$ אין יחידים

הרבה יותר כי אז היינו ש P אורתוגונלית

כלומר $P^{-1} = P^{t}$

וזה תנאי חזק מאד.

נניח כעת לצורך הדיון ש $F = \mathbb{C}$

או $F = \mathbb{R}$.

$\underline{\mathrm{I}}$ $F = \mathbb{C}$.

אם f תבנית בי-ליניארית סימטרית על V מעל $\mathbb{C}$

אז ל f הצגה ע"י מטריצה אלכסונית מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כי נבחר בסיס בו $f(e_i, e_j) = 0$ $i \neq j$

ואז $f(e_i, e_i) = c_i$ נשנה את הבסיס

ע"י:
$$e_i' = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\sqrt{c_i}} & c_i \neq 0 \\ e_i & c_i = 0 \end{cases}$$

ואז נקבל את הצורה הדרושה מיד

שלכל $c_i \in \mathbb{C}$ יש שורש ב $\mathbb{C}$.

II אם $F = \mathbb{R}$ ו f תבנית בי-לינארית

סימטרית על V מעל $\mathbb{R}$ אזי ל f

הצגה ע"י מטריצה אלכסונית מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

לוקחים בסיס שבו f בצורה אלכסונית ואז

משנים את הבסיס ל

$$e_i' = \begin{cases} \dfrac{e_i}{\sqrt{c_i}} & c_i > 0 \\[2ex] \dfrac{e_i}{\sqrt{-c_i}} & c_i < 0 \\[2ex] e_i & c_i = 0 \end{cases}$$

כש $f(e_i, e_i) = c_i$

מסקנה: אם $F = \mathbb{C}$ אזי כל מטריצה חופפת למטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

אם $F = \mathbb{R}$ כל מטריצה חופפת למטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ההפרש בין מספר ה-1 החיוביים ומספר ה-1- הוא פונקציה של התבנית ולא של הבסיס בו היא מוצגת ונקראה הסיגנטורה של f.

מסקנה: אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ו-f תבנית סימטרית על V. תהי A מטריצה מייצגת את f בבסיס כלשהו. אזי f היא חיובית (או אי שלילית) אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A הם חיוביים (או אי שליליים).

<u>הוכחה:</u> A <u>ממשית</u> <u>וסימטרית</u> לכן קיימת

P אורתוגונלית ($P^{-1}=P^{t}$) כך ש

$$P^{-1}AP = P^{t}AP = \begin{pmatrix} \ddots & \\ & \end{pmatrix}$$

אלכסונית.

לכן A גם <u>דומה</u> וגם <u>חופפת</u>

למט' ריבועית אלכסונית.

לכן באלכסון הערכים העצמיים של A

ובקנונית הם הסימנים שלהם $1, \pm$.

ולכן f חיובית או אי שלילית אם

ורק אם הערכים העצמיים של A הם כנ"ל.