26/10/2016

פרק 1

טופולוגיה ב-$\mathbb{R}^n$

מספר תזכורות –

נורמה/אורך – זוהי פונקציה $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ המקיימת את התנאים:

a. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \geq 0$
   i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
b. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
c. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>דוגמה:</u>

$\|x\|_2$ היא הנורמה המושרית מהמכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

תרגיל – הראו כי $\|\cdot\|_2$ אכן נורמה על פי הגדרה.

<u>הוכחה:</u>

סעיפים a ו-b מתקיימים (טריוויאלי).

נוכיח את אי שוויון המשולש וניעזר באי שוויון קושי שוורץ:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

עתה נרצה להראות כי אכן מתקיים:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

הכל חיובי, ולכן מתקיים:

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

מהגדרת המכפלה הפנימית נוכל לכתוב שמתקיים:

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2\right) = \|x\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|_2^2$$

את האגף הימני יותר נוכל להשוות לפי אי שוויון קושי שוורץ ולקבל כי מתקיים:

$$\|x\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

ומכאן נוכל להסיק על ידי צמצום האיברים הדומים, כי מתקיים:

$$\boxed{\langle x, y\rangle \leq \|x\|_2\|y\|_2}$$

ישנן נורמות נוספות, כמובן:

26/10/2016

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \qquad \text{נורמת אחד}$$

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\} \quad \text{נורמת אינסוף}$$

ובאופן כללי:

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p\geq 1$$

ונורמה, כפי שהראינו, מגדירה מרחק, או מטריקה על ידי:

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

כדור/סביבה – מוגדר על ידי $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\|<r\}$

כאשר נבחרת נורמה, ניתן להגדיר באמצעותה רציפות, גזירות וכדומה.

תרגיל – הראו שכל הנורמות ב-$\mathbb{R}^n$ שקולות. כלומר, הראו כי בהנתן שתי נורמות, $\|\cdot\|^{(1)},\|\cdot\|^{(2)}$ ניתן למצוא קבועים $m,M>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\boldsymbol{m}\cdot\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}\leq\|\boldsymbol{x}\|^{(1)}\leq\boldsymbol{M}\cdot\|\boldsymbol{x}\|^{(2)}$$

<u>הוכחה:</u>

שקילות נורמות הינה יחס שקילות, ולכן מספיק להראות כי כל נורמה שקולה לנורמה ספציפית (והשאר ינבע מכך שמדובר ביחס שקילות). נרצה להראות שקילות לנורמת האחד שהוגדרה לעיל.

כלומר, יש למצוא $m,M>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$m\cdot\|x\|_1 \underset{II}{\leq} \|x\| \underset{I}{\leq} M\cdot\|x\|_1$$

I. נסמן ב-$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ את הבסיס הסטנדרטי ב-$\mathbb{R}^n$. אזי מתקיים:

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right\| \overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} \sum_{i=1}^{n}|x_i|\|e_i\|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot\overbrace{\max_{i=1,2,\cdots,n}\|e_i\|}^{=M}=M\sum_{i=1}^{n}|x_i|=M\|x\|_1$$

II. נניח בשלילה שלא קיים $m>0$ כנדרש, כלומר כזה שעבורו לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$m\cdot\|x\|_1\leq\|x\|$$

מהנחה זו, נקבל כי לכל $k\in\mathbb{N}$ ניתן למצוא $x^{(k)}\in\mathbb{R}^n$, כך שמתקיים:

$$\left\|x^{(k)}\right\|<\frac{1}{k}\left\|x^{(k)}\right\|_1$$

זהו אי שוויון "חזק" ולכן נוכל להניח כי לכל $k\in\mathbb{N}$, $x^{(k)}\neq 0$.

נבנה סדרה חדשה, $\left(y^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ באופן הבא:

$$y^{(k)}=\frac{x^{(k)}}{\left\|x^{(k)}\right\|_1}$$

ונשים לב כי מתקיים בהכרח:

$$\left\|y^{(k)}\right\|_1=\left\|\frac{x^{(k)}}{\left\|x^{(k)}\right\|_1}\right\|_1 \overset{\left\|x^{(k)}\right\|_1 \text{ סקלר}}{=} \frac{1}{\left\|x^{(k)}\right\|_1}\left\|x^{(k)}\right\|_1=1$$

ובנוסף מתקיים:

$$\|y^{(k)}\| < \frac{1}{k}$$

כמו כן, נשים לב כי $\left(y^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה, במובן שלכל $1 \le i \le n$, מתקיים:

$$\left|y_i^{(k)}\right| \le 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

מכאן, שלפי משפט בולצאנו ויירשטראס ב-$\mathbb{R}$, יש לה תת סדרה מתכנסת $\left(y^{(k_j)}\right)_{j=1}^{\infty} \to y^{(0)}$

(כלומר, למעשה יש לה תת סדרה מתכנסת לרכיב הראשון, המשרה תת סדרה של כל רכיבי האיבר שגם היא חסומה, מה שאומר שניתן לבחור לתת סדרה זו תת סדרה מתכנסת עבור הרכיב השני שמשרה סדרה עבור תת סדרה מתכנסת גם לרכיב השלישי וכך הלאה לכל הרכיבים עד שמתקבלת תת סדרה שמתכנסת בכל הרכיבים, כלומר כל הרכיבים מתכנסים לאיבר סופי $y^{(0)}$)[1]

מתקיים, אם כן:

$$\|y^{(0)}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|y_i^{(0)}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\lim_{j\to\infty} y_i^{(k_j)}\right| = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left|y_i^{(k_j)}\right|}_{=\left\|y^{(k_j)}\right\|_1} = 1$$

$$\|y^{(0)}\| \le \left\|y^{(k_j)}\right\| + \left\|y^{(0)} - y^{(k_j)}\right\| \underset{\text{השלילה}}{\overset{\text{הנחת}}{\le}} \frac{1}{k_j} + M\left\|y^{(0)} - y^{(k_j)}\right\|_1$$

נפעיל גבול על שני האגפים כאשר $j \to \infty$ ונקבל כי $\frac{1}{k_j} \to 0$ מחד, והאיבר הימני, היות ואנו יודעים כי $y^{(k_j)} \to y^{(0)}$, נקבל כי גם הנורמה $\left\|y^{(0)} - y^{(k_j)}\right\|_1 \to 0$ במקרה זה. סה"כ נקבל כי:

$$0 \le \|y^{(0)}\| \le 0 \to \boxed{y^{(0)} = 0}$$

אך קיבלנו סתירה, היות וכבר ראינו כי בהכרח $\left\|y_1^{(0)}\right\|_1 = 1 \ne 0$.

1.1 מסקנה מהתרגיל – כל נורמה $\|x\|^{(1)}$ רציפה ב-$\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^{(2)}\right)$.

<u>הוכחה:</u>

יש להראות כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}^n$, אם $\|x - x_0\|^{(2)} < \delta$, אז $\left|\|x\|^{(1)} - \|x_0\|^{(1)}\right| < \varepsilon$.
ואכן, נשים לב כי בהנתן $\varepsilon > 0$ כנ"ל, נקבל כי:

$$\left|\|x\|^{(1)} - \|x_0\|^{(1)}\right| \underset{\substack{\text{אי שוויון}\\\text{המשולש}}}{\le} \|x - x_0\|^{(1)} \underset{\substack{\text{שקילות}\\\text{הנורמות}}}{\le} M \cdot \|x - x_0\|^{(2)}$$

ולכן בבחירת $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ ונקבל את הנדרש.

1.2 אי שוויון Holder – אם $p, q > 1$ וכן $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

<u>הוכחה:</u>

[1] הערת הכותב

נוכיח בעזרת אי שוויון Young:

1.2.1 אי שוויון Young – אם $p,q>1$, וכן $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, אזי לכל $x,y>0$ מתקיים $xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

את אי שוויון Young נוכיח בהמשך, עתה נסתמך על נכונותו. בה"כ נניח כי $x,y\neq 0$, ונשתמש באי שוויון Young ונקבל כי בסימון:

$$a_i=\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\quad b_i=\frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

מתקיים:

$$\frac{|x_iy_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}\le\frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{\|y\|_q}\right)^q$$

נסכום עתה על $1\le i\le n$ ונקבל כי:

$$\frac{1}{\|x\|_p\|y_p\|}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\frac{1}{p}\frac{1}{\|x\|_p^p}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}_{=\|x\|_p^p}\right)+\frac{1}{q}\frac{1}{\|y\|_q^q}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q}_{=\|y\|_q^q}\right)$$

ולכן, לאחר צמצום, והיות ומתקיים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, נקבל כי כל האגף הימני שווה לאחד:

$$\boxed{|\langle x,y\rangle|\overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\le\|x\|_p\|y_p\|}$$

1.3 אי שוויון Minkowski – אם $p>1$ אז לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים: $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$

<u>הוכחה:</u>

נעלה את האגף השמאלי בחזקת p:

$$\|x+y\|_p^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}\ \circledast$$

נסמן:

$$|x_i|=a_i\quad|x_i+y_i|^{p-1}=b_i$$

נשתמש באי שוויון Holder כאשר p כבר מוגדר ו-$q=\frac{p}{p-1}$ ונקבל כי:

$$\circledast\le\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|a\|_p}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{\cancel{p-1}})^{\frac{p}{\cancel{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}_{\|b\|_q}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{\cancel{p-1}})^{\frac{p}{\cancel{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

נוכל להוציא את האיבר הימני בכל אחת מהמכפלות בתור גורם משותף ולקבל כי:

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_q\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{p-1} = \left(\|x\|_p + \|y\|_q\right)\|x+y\|_p^{p-1}$$

נחלק ב-$\|x+y\|_p^{p-1}$ את הביטוי האחרון ואת הביטוי המקורי מאי השוויון ונקבל את הדרוש.

תרגיל – הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ רציפה על קבוצה S קומפקטית ב-$\mathbb{R}^n$, אזי גם התמונה של S, קרי $f(S)$, קומפקטית ב-$\mathbb{R}^m$.

<u>הוכחה:</u>

תזכורת – קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית $\Leftrightarrow$ S סגורה וחסומה. הגדרה שקולה תהא שקבוצה קומפקטית $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty} \subset S$ קיימת תת סדרה מתכנסת לנקודה ב-S, וכן הגדרה שקולה נוספת תהא שקבוצה קומפקטית $\Leftrightarrow$ לכל כיסוי פתוח של S קיים תת כיסוי סופי.

תהא, אם כן, $\left(y^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty} \subset f(S)$ ונראה שקיימת לה תת סדרה מתכנסת. לכל $y^{(k)}$ קיים $x^{(k)}$ כך שמתקיים:

$$f\left(x^{(k)}\right) = y^{(k)}$$

היות ו-S קומפקטית נסיק כי לסדרה $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ קיימת תת סדרה $\left(x^{(k_j)}\right)_{j=1}^{\infty} \to x_0 \in S$. נסמן, אם כן:

$$y^{(0)} = f\left(x^{(0)}\right) \in f(S)$$

f רציפה, ולכן $y^{(k_j)} = f\left(x^{(k_j)}\right) \to f\left(x^{(0)}\right) = y^{(0)} \in f(S)$ כנדרש.

תרגיל – תהא $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, ותהא $f: A \mapsto A$ המקיימת:

$$\|\boldsymbol{f(x) - f(y)}\| = \|\boldsymbol{x - y}\| \quad \forall \boldsymbol{x, y} \in \boldsymbol{A}$$

הוכיחו כי f בהכרח על.

<u>הוכחה:</u>

נשים לב, כי f בהכרח רציפה (שכן ניתן "לשלוט" במרחק בין תמונת הפונקציה על ידי המרחקים בין המקורות), ואף חח"ע. רציפות f, יחד עם היות A קומפקטית, מתאימה לתנאי השאלה הקודמת שהוכחנו, כלומר, $f(A)$ קומפקטית גם היא. אנו יודעים כי $f(A) \subseteq A$ ונרצה להראות את ההכלה ההפוכה.

לשם כך, נניח בשלילה כי ההכלה ההפוכה לא מתקיימת, קרי קיים איבר $x \notin f(A)$ כך ש-$x \in A$ בפרט נסיק כי בהכרח $x \in f(A)^c$. היות ו-A קבוצה קומפקטית קרי סגורה וחסומה, נקבל כי המשלים שלה הוא קבוצה פתוחה. מכאן נסיק כי קיים כדור $B_r(x) \subseteq f(A)^c$. נתבונן עתה בסדרה הבאה:

$$\left(f^{(n)}(x)\right)_{n=1}^{\infty}$$

כאשר הסימון בחזקה הינו סימון של הרכבת הפונקציה על עצמה n-פעמים. נשים לב כי כל הסדרה מוכלת ב-$f(A)$. עתה נשים לב כי מתקיים:

$$\left\|f^{(m)}(x) - f^{(n)}(x)\right\| = \left\|f^{(m-1)}(x) - f^{(n-1)}(x)\right\| = \cdots = \left\|f^{(m-n)}(x) - x\right\|$$

וזאת משימור הנורמה שנתון בשאלה.

אך נשים לב כי האיבר האחרון בשוויונות הנ"ל, תחת הנחת השלילה שלנו, חייב לקיים:

$$\left\|f^{(m-n)}(x)-x\right\| \geq r$$

וזאת שאחת היינו מקבלים כי $f^{(m-n)}(x) \in B_r(x) \subset f(A)^c$. אך מכאן נקבל כי לסדרה זו לא יכולה להיות תת סדרה מתכנסת שכן היא אינה מקיימת את תנאי קושי להתכנסות סדרות (הרכבת הפונקציה על עצמה שוב ושוב לא מקרבת את התמונות, מהשוויונות שציינו לעיל). מכאן שמצאנו סתירה לכך ש-$f(A)$ קומפקטית! לכן f חייבת להיות על A כנדרש.