תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 7 – פתרון חלקי

.1

א) לכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מגדירים $\mathbb{Z}_n[x]$ להיות קבוצת הפולינומים עם מקדמים שלמים ממעלה קטנה או שווה מ- n , ובונים $f:\mathbb{Z}_n[x]\to\underbrace{\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}}_{n+1\text{ פעמים}}$ באופן הבא: $f(a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0)=(a_n,\ldots,a_1,a_0)$. מכאן $|\mathbb{Z}_n[x]|\le\aleph_0$ ולכן גם $|\mathbb{Z}[x]|\le\aleph_0$ כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. מצד שני, לכל $a\in\mathbb{Z}$ קיים פולינום $p(x)=a$, מכאן $|\mathbb{Z}[x]|\ge\aleph_0$.

ב) $\sqrt{2}$ הוא שורש של הפולינום x^2-2 .

ג)

$$x=\sqrt[5]{3+\sqrt{6}}$$
$$\Downarrow$$
$$x^5=3+\sqrt{6}$$
$$\Downarrow$$
$$x^5-3=\sqrt{6}$$
$$\Downarrow$$
$$x^{10}-6x^5+9=6$$
$$\Downarrow$$
$$x^{10}-6x^5+3=0$$

לכן $\sqrt[5]{3+\sqrt{6}}$ הוא שורש של הפולינום $x^{10}-6x^5+3$.

ד) לכל פולינום עם מקדמים שלמים p נגדיר X_p להיות קבוצת השורשים של p . כל קבוצה כזאת היא סופית (מוגבלת בגודל ע"י המעלה של p).
קבוצת המספרים האלגבריים היא $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}[x]}X_p$ – איחוד בן מניה של קבוצות סופיות $\Leftarrow$ היא בת מניה. מצד שני, כל מספר טבעי הוא אלגברי ומכאן העצמה היא $\aleph_0$.

ה) נסמן את קבוצת המספרים האלגבריים ב- $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. הוכחנו ש- A בת מניה. לכן $\mathbb{R}\setminus A$ אינסופית (כי אחרת $\mathbb{R}$ בת מניה כאיחוד של שתי קבוצות בנות מניה). לכן ל- $\mathbb{R}\setminus A$ יש תת קבוצה בת מניה:
$B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. בעזרתה בונים פונקציה חח"ע ועל מ- $\mathbb{R}\setminus A$ ל- $\mathbb{R}$:
$x\notin B \Leftarrow x\mapsto x$;
$b_1\mapsto b_1, b_2\mapsto a_1, b_3\mapsto b_2, b_4\mapsto a_2,\ldots$

.2

א) לא נכון: $X=Y=\mathbb{N}$.

ב) לא נכון: $X=\mathbb{Z}$, $Y=\mathbb{N}$.

ג) תשובה: כן. לפי הרעיון של פתרון של 1-ה'.

ד) תשובה: כן.

.3

א) בשלב ראשון מוכיחים ש- $|\{x\in[0, \pi/2): \sin(x)\in\mathbb{Q}\}|=\aleph_0$: הפונקציה $f: \{x\in[0, \pi/2): \sin(x)\in\mathbb{Q}\} \to \mathbb{Q}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\sin(x)$ – חח"ע.
בדומה $|\{x\in[\alpha\pi/2, (\alpha+1)\pi/2): \sin(x)\in\mathbb{Q}\}|=\aleph_0$ לכל $\alpha\in\mathbb{Z}$. מכאן לקבוצה הנתונה עוצמה $\aleph_0$ כלאיחוד בן מניה של קבוצות בעלות העצמה $\aleph_0$.

ב) לדוגמא, פונקצית האפס: $f(x)\equiv 0$.

.4

א) נניח $X=\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. לכל $i\in\mathbb{N}$ נסמן $Y_i=l_i\cap Y$. כל Y_i בת מניה כי כל ישר חותך קבוצה בת מניה של ישרים. לכן Y בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות במות מניה.

ב) טענה זאת לא נכונה. דוגמא נגדית – X קבוצה של כל הישרים במישור שעוברים דרך $(0, 0)$.

ג) נגדיר $f: X \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא: אם $A=\{a\}$ אז $f(A)=(a, a)$; אם $|A|>1$, נסמן ב- a ו- b את שני האיברים הקטנים ביותר של A ונגדיר $f(A)=(a, b)$.
פונקציה זאת היא חח"ע ...

ד) נבנה $X=\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ בשלבים. בשלב n (כאשר $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) נגדיר איבר מס' n של כל A_k עבור $k\leq n$ ו- n האיברים הראשונים של A_{n+1} :

- $\underline{n=0}$:
  $A_1=\varnothing$

- $\underline{n=1}$:
  $A_1=\{\mathbf{1}\}$
  $A_2=\{\mathbf{1}\}$

- $\underline{n=2}$:
  $A_1=\{1, \mathbf{2}\}$
  $A_2=\{1, \mathbf{3}\}$
  $A_3=\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$

- $n=3$:
  $A_1=\{1, 2, \mathbf{4}\}$
  $A_2=\{1, 3, \mathbf{5}\}$
  $A_3=\{2, 3, \mathbf{6}\}$
  $A_4=\{\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$

- $n=4$:
  $A_1=\{1, 2, 4, \mathbf{7}\}$
  $A_2=\{1, 3, 5, \mathbf{8}\}$
  $A_3=\{2, 3, 6, \mathbf{9}\}$
  $A_4=\{4, 5, 6, \mathbf{10}\}$
  $A_5=\{\mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}\}$

- $n=5$:
  $A_1=\{1, 2, 4, 7, \mathbf{11}\}$
  $A_2=\{1, 3, 5, 8, \mathbf{12}\}$
  $A_3=\{2, 3, 6, 9, \mathbf{13}\}$
  $A_4=\{4, 5, 6, 10, \mathbf{14}\}$
  $A_5=\{7, 8, 9, 10, \mathbf{15}\}$
  $A_6=\{\mathbf{11}, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{14}, \mathbf{15}\}$

- ...

5. נקודה X נמצאות באותו מרחק מנקודות Y ו- Z אם ורק אם היא שייכת לאנך האמצעי של Y ו- Z . לכן מה שצריך להוכיח בשאלה הזאת זה שבמישור יש **א** נקודות שלא שייכות לאנך האמצעי של שתי נקודות כלשהן מ- S .
ניתן שמות לאברי S : תהי $S=\{P_i\}_{i\in I}$ (כאשר I בת-מניה).
תהי T קבוצת האנכים האמצעיים של זוגות של נקודות מ- S : $T=\{l_{ij}\}_{i,j\in I}$ כאשר l_{ij} – האנך האמצעי של P_i ו- P_j . עלינו להוכיח שבמישור יש **א** נקודות שלא שייכות לישר מ- T .
<u>שלב ראשון</u>: נוכיח ש- T בת מניה.
לכל $k\in I$, תהי $T_k=\{l_{ik}\}_{i\in I\setminus\{k\}}$ – קבוצת האנכים האמצעיים של P_k ונקודה אחרת מ- S . ההתאמה $P_i \mapsto l_{ik}$ (מ- $S\setminus\{P_k\}$ ל- T_k) היא חח"ע ועל. לכן T_k בת מניה ומכאן T בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה: $T=\bigcup_{k\in I} T_k$.
<u>שלב שני</u>: נוכיח שבמישור יש **א** נקודות שלא שייכות לישר מ- T .
לכל ישר במישור יש כיוון – מספר ששייך ל- $[0, \pi)$. T בת מניה ו- **א**$=|[0, 1)|$, לכן קיים במישור ישר שאינו מקביל לאף ישר מ- T . ניקח ישר אחד כזה ונסמן

אותו ב- l . מאחר ש- T בת מניה, קבוצת הנקודות של l השייכות לישר מ- T היא בת מניה. מכאן – על l יש $\aleph$ נקודות שלא שייכות לישר מ- T .

קיבלנו: [רק] על l יש $\aleph$ נקודות שלא שייכות לישר מ- T . לכן בכל המישור יש לפחות $\aleph$ נקודות שלא שייכות לישר מ- T . מצד שני – במישור יש בסה"כ $\aleph$ נקודות. לכן בכל המישור יש $\aleph$ נקודות שלא שייכות לישר מ- T .

6. רמז: לכל ישר במישור – משוואה $y=kx+m$ או $x=a$.