הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל	מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים

הפקולטה למתמטיקה	חורף תשע״ז

<u>תרגיל בית 6</u>

<u>שאלה 1:</u> (10 נקי)

יהיו $\left(X,T\right)$ ו- $\left(Y,S\right)$ מרחבים טופולוגיים. תהי $F:X\to Y$ העתקה.

א. יהי Ψ בסיס לטופולוגיה S. הוכיחו כי F רציפה אם ורק אם לכל $V\in\Psi$ מתקיים $F^{-1}\left(V\right)\in T$. (5 נקי)

ב. יהיו $a\in X$, Φ_a בסיס לטופולוגיה T ב- a ו- $\Psi_{F(a)}$ בסיס לטופולוגיה S ב- $F\left(a\right)$. הוכיחו כי F רציפה ב- a אם ורק אם לכל $V\in\Psi_{F(a)}$ קיים $U\in\Phi_a$, כך ש- $F\left(U\right)\subseteq V$. (5 נקי)

<u>שאלה 2:</u> (5 נקי)

יהיו $\left(X,T\right)$ מרחב טופולוגי, $a\in X$ ו- Ψ_a בסיס לטופולוגיה T ב- a. תהי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב- X. הוכיחו כי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- $\left(X,T\right)$ ל- a, אם ורק אם לכל $U\in\Psi_a$ קיים N טבעי כך שלכל $n\geq N$ מתקיים $x_n\in U$.

<u>שאלה 3:</u> (25 נקי)

יהיו $\left(X,T\right)$ ו- $\left(Y,S\right)$ מרחבים טופולוגיים, $a\in X$ ו- $\Phi_a=\left\{U_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה לטופולוגיה T ב- a.

א. הוכיחו כי לכל n טבעי האוסף $\left\{\bigcap_{i=1}^{n}U_i\right\}_{n=1}^{\infty}$ גם הוא בסיס (בן מניה) לטופולוגיה T ב- a. (5 נקי)

ב. תהי A תת קבוצה של X. יהי $a\in\overline{A}$. הוכיחו כי קיימת סדרה שכל איבריה ב- A המתכנסת ל- a. (10 נקי)

ג. תהי $F:X\to Y$ העתקה. הוכיחו כי F רציפה ב- a אם ורק אם לכל סדרה $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- a ב- $\left(X,T\right)$, הסדרה $\left\{F\left(x_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $F\left(a\right)$ ב- $\left(Y,S\right)$. (10 נקי)

<u>שאלה 4:</u> (60 נקי)

יהי $\left\{Y_i,S_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף בן מניה של מרחבים טופולוגיים, כאשר S_i היא טופולוגיה על Y_i לכל i טבעי. יהי $Y=\prod_{i=1}^{\infty}Y_i$ (המכפלה הקרטזית של Y_i-ים) תהי S טופולוגיית המכפלה על Y. לכל i טבעי תהי $\pi_i:Y\to Y_i$ הטלה על מרחב Y_i, כלומר π_i מוגדרת ע״י $\pi_i\left(y_1,y_2,\cdots y_i\cdots\right)=y_i$ לכל $\left(y_1,y_2,\cdots y_i\cdots\right)\in Y$. יהי $\left(X,T\right)$ מרחב טופולוגי.

א. הוכיחו כי לכל i טבעי ההטלה π_i היא העתקה רציפה ביחס למרחבים טופולוגיים $\left(Y,S\right)$ ו- $\left(Y_i,S_i\right)$. (5 נקי)

ב. הוכיחו כי הטופולוגיה S היא הטופולוגיה הדלה ביותר על Y כך שלכל i טבעי ההטלה π_i רציפה ביחס למרחבים טופולוגיים $\left(Y,S\right)$ ו- $\left(Y_i,S_i\right)$. (10 נקי)

ג. תהי $F:X\to Y$ העתקה. הוכיחו כי F רציפה ביחס למרחבים טופולוגיים (X,T) ו- (Y,S) אם ורק אם לכל i טבעי העתקה $\pi_i\circ F:X\to Y_i$ היא רציפה ביחס למרחבים טופולוגיים (X,T) ו- (Y_i,S_i). (10 נק׳)

ד. תהי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב- Y. הוכיחו כי $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- y ב- (Y,S) אם ורק אם לכל i טבעי הסדרה $\left\{\pi_i\left(x_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\pi_i(y)$ ב- (Y_i,S_i). (10 נק׳)

ה. הכלילו את טענות הסעיפים א׳-ד׳ באופן המתאים למקרה בו $\left\{Y_\alpha,S_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ הוא אוסף כלשהו של מרחבים טופולוגיים, כאשר S_α היא טופולוגיה על Y_α לכל איבר α בקבוצת האינדקסים כלשהי A (לא בהכרח בת מניה). הוכיחו את הטענות המוכללות. (25 נק׳)

בהצלחה !