פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - פתרון חלקי לגליון תרגילים מס' 2

3. (**א**) צ"ל את עוצמת אוסף כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$.
פתרון: העוצמה היא (<u>בהגדרה</u>) $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|}$, וזה, ע"פ חוקי חשבון עוצמות:
$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} = (2^{\aleph_0})^{\mathcal{C}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathcal{C}} = 2^{\mathcal{C}}$.

(**ב**) צ"ל את עוצמת אוסף הפונקציות הרציפות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$.
פתרון: העוצמה המבוקשת היא עוצמת הרצף $\mathcal{C}$. היא לפחות $\mathcal{C}$ - כי זוהי עוצמת אוסף הפונקציות הקבועות. נראה שהעוצמה אינה גדולה מ- $\mathcal{C}$: לכל פונקציה f רציפה נתאים את $f|_{\mathbb{Q}}$ - הצמצום של f על הרציונליים. התאמה זו היא <u>חח"ע</u> (כיוון ש- $\mathbb{Q}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$, שתי פונקציות רציפות שמזדהות על הרציונליים הן שוות), ולכן העוצמה המבוקשת אינה גדולה מעוצמת כל הפונקציות מ- $\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{R}$ שהיא $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = \mathcal{C}^{\aleph_0} = \mathcal{C}$.

(**ג**) צ"ל את עוצמת אוסף הפונקציות המדידות בורל מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$.
פתרון: העוצמה המבוקשת היא עוצמת הרצף $\mathcal{C}$. ברור שהיא לפחות $\mathcal{C}$ (זו עוצמת הרציפות, הקבועות). נראה את האי-שוויון השני בשתי דרכים.
דרך I: לכל f מדידה בורל ניתן להתאים סדרה $\{s_n\}$ של פונקציות פשוטות ומדידות בורל כך ש- $s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ לכל $x \in X$. ההתאמה היא בודאי חח"ע (מיחידות הגבול), ולכן העוצמה המבוקשת אינה גדולה מעוצמת אוסף כל הסדרות של פונקציות פשוטות ומדידות בורל. עוצמת אוסף קבוצות בורל היא $\mathcal{C}$ ולכן עוצמת אוסף הפונקציות הפשוטות המדידות בורל היא $\mathcal{C}$ (מדוע?). עוצמת אוסף כל הסדרות של פונקציות כאלה היא, אם-כן, $\mathcal{C}^{|\mathbb{N}|} = \mathcal{C}$.
דרך II: בהנתן f מדידה בורל נתאים לכל $y \in \mathbb{Q}$ את הקבוצה $f^{-1}([y,\infty))$. זוהי קבוצת בורל וההתאמה היא <u>חח"ע</u> כי אם $f \neq g$ אז יש $x \in \mathbb{R}$ ש- $f(x) < g(x)$ (או להפך) ולכן יש $y \in \mathbb{Q}$ ש- $f(x) < y < g(x)$ (או להפך). לכן העוצמה המבוקשת אינה גדולה מעוצמת כל הפונקציות מ- $\mathbb{Q}$ ל- σ-אלגברה של בורל שהיא $|\mathcal{B}|^{|\mathbb{Q}|} = \mathcal{C}^{\aleph_0} = \mathcal{C}$. $\square$

4. צ"ל: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה אז f' מדידה בורל.
הוכחה: f גזירה, ולכן רציפה - ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$ הפונקציה $f_n(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$ היא רציפה ולכן מדידה בורל. כיוון ש- $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$, הטענה נובעת (- גבול של פונקציות מדידות הוא פונקציה מדידה). $\square$

5. נתונים פונקציה $f : X \to Y$ ו- $A, B \subset X$ עם $A \cup B = X$.
(**א**) צ"ל: אם $f|_A$, $f|_B$ מדידות אז f מדידה. -נכון, כי איחוד של שתי קבוצות מדידות הוא קבוצה מדידה: $f^{-1}(G) = (f^{-1}(G) \cap A) \cup (f^{-1}(G) \cap B)$.
(**ב**) אם f מדידה אז $f|_A$, $f|_B$ לא בהכרח מדידות (אם A, B לא מדידות). דוגמא: $f \equiv 0$ קבועה ($Y = \mathbb{R}$), A לא מדידה ו- $B = A^c$. אז $f|_A^{-1}([-1,1]) = X \cap A = A$ לא מדידה.

6. (**א**) צ"ל: פונקציית רימן $r(x)$ היא מדידה בורל.
הוכחה: נזכור שמכיוון שכל יחידון הוא קבוצת בורל, כל קבוצה סופית או בת-מנייה היא קבוצת בורל. לכל $A \subset \mathbb{R}$ ש- $0 \notin A$ הקבוצה $f^{-1}(A)$ מכילה רק מספרים רציונליים ולכן היא (סופית או בת-מנייה ולכן) מדידה בורל. אם $0 \in A$ אז $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$ היא בת מנייה לכל היותר $\Leftarrow$ היא מדידה בורל $\Leftarrow$ המשלימה $f^{-1}(A)$ מדידה בורל.

(**ב**) צ"ל: אם נקודות האי-רציפות של $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ בנות מנייה, לכל היותר, אז f מדידה בורל.
הוכחה: יהי A אוסף נקודות האי-רציפות של f ותהי $g = f|_{A^c}$, אז g רציפה (כפונקציה על A^c)
ולכן לכל קבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}$, הקבוצה $g^{-1}(U)$ היא פתוחה ב- A^c, כלומר - יש קבוצה פתוחה $V \in \mathbb{R}$ כך ש- $g^{-1}(U) = V \cap A^c$. בסה"כ קיבלנו:

$$f^{-1}(U) = [f^{-1}(U) \cap A^c] \cup [f^{-1}(U) \cap A] = [V \cap A^c] \cap [f^{-1}(U) \cap A]$$

הקבוצות V (-פתוחה), A^c (- משלימתה בת-מנייה לכל היותר) ו- $f^{-1}(U) \cap A$ (- בת-מנייה לכל היותר) כולן מדידות בורל, והטענה נובעת. $\square$

$*$(**ג**) צ"ל שאם f חסומה ומקיימת את תנאי הסעיף הקודם בקטע $[a, b]$, אז f אינטגרבילית רימן בו.
הוכחה: קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ נקראת "בעלת מידה (לבג) 0" אם לכל $\varepsilon > 0$, A מוכלת באיחוד בן מנייה של קטעים (סגורים/פתוחים) שסכום אורכיהם אינו עולה על ε. כל קבוצה בת מנייה היא כזו (כסו את $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ בקטעים $\{(a_n - \varepsilon 2^{-n}, a_n + \varepsilon 2^{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$) אך יש גם קבוצות לא בנות מנייה שהן כאלה (קבוצת קנטור, למשל).
נראה שאם פונקציה f חסומה בקטע $[a, b]$ ואוסף נקודות האי-רציפות שלה בקטע הוא בעל מידה 0 אז f אינטגרבילית רימן בקטע.
יהי $A \subset [a, b]$ אוסף נקודות האי-רציפות של f ב- $[a, b]$, ויהי M חסם של f בקטע. בהנתן $\varepsilon > 0$ לכל $x \in (a, b) \backslash A$ יש קטע פתוח I_x כך שלכל זוג נקודות $y, z \in I_x$ מתקיים: $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.
כיוון שהנחנו ש- A בעלת מידה 0 (וכך גם $\{a, b\} \cup A$) נוכל לקחת סדרת קטעים סגורים $\{J_n\}$ כך שסכום אורכיהם אינו עולה על $\frac{\varepsilon}{M}$ וש- $(\{a, b\} \cup A) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. קיבלנו כיסוי פתוח של הקטע (הקומפקטי) $[a, b]$ ולכן נוכל למצוא לו תת-כיסוי סופי. תהי T החלוקה של $[a, b]$ שנוצרת ע"י הקצוות של קטעים אלו ויהיו U, L סכומי דרבו התחתונים והעליונים המתקבלים מ- T. יהיו $K_1, \ldots, K_n$ קטעי החלוקה ובהג"כ $K_1 \ldots, K_m$ הם תת-קטעים של קטעים מהצורה I_x ו- $K_{m+1}, \ldots, K_n$ הם תת-קטעים של קטעים מהצורה J_n. אז (נסמן ב- $|I|$ את אורך הקטע I):

$$\begin{aligned}
U - L &= \sum_{i=1}^{n} [\sup_{K_i} f(x) - \inf_{K_i} f(x)] \, |K_i| \\
&= \sum_{i=1}^{m} [\sup_{K_i} f(x) - \inf_{K_i} f(x)] \, |K_i| + \sum_{i=m+1}^{n} [\sup_{K_i} f(x) - \inf_{K_i} f(x)] \, |K_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} 2\varepsilon \, |K_i| + \sum_{i=m+1}^{n} 2M \, |K_i| \;\leq\; 2\varepsilon \, |[a, b]| + 2M \sum_{i=1}^{\infty} |J_n| \;\leq\; 2\varepsilon(b - a) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

כלומר - נוכל למצוא חלוקה עם $U - L$ קטן כרצוננו. מש"ל.
(הערה: גם הכיוון ההפוך של טענה זו נכון, ההוכחה לא קשה והשיקולים דומים לאלה שעשינו כאן - הם עובדים גם בכיוון ההפוך. שתי הטענות ביחד - שפונקציה החסומה בקטע $[a, b]$ אינטגרבילית רימן בו אם"ם אוסף נקודות האי-רציפות שלה הוא בעל מידה 0 - נקראות משפט רימן-לבג. ר' בספר של לינדנשטראוס ע' $193 - 192$)