תרגול 6

תרגיל:

יהא (X,d) מרחב מטרי. תהי A תת קבוצה של X כן יהא $x \in X$. נגדיר מרחק מ-x ל-A על ידי:

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\}$$

א. הוכח כי פונקציית המרחק מ-A המתאימה לכל $x \in X$ את $d(x,A)$ היא פונקציה 1 ליפשיץ כפונקציה מ-(X,d) ל-$(\mathbb{R},d_1)$ כאשר d_1 היא המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$.

תזכורת - פונקציה $f: X \mapsto Y$ כאשר $(X,d_1),(Y,d_2)$ הם מרחבים מטריים, נקראת m ליפשיץ אם לכל $x_1,x_2 \in X$ מתקיים:

$$d_2\big(f(x_1),f(x_2)\big) \le m d_1(x_1,x_2)$$

פתרון:

א. צריך להוכיח, כי לכל $x_1,x_2 \in X$ מתקיים:

$$|d(x_1,A) - d(x_2,A)| \le d(x_1,x_2)$$

נשים לב כי לכל $a \in A$ מתקיים:

$$d(x,A) \le d(a,x_1) \le d(x_1,x_2) + d(a,x_2)$$

וזאת על פי הגדרת הפונקציה והן מאי שוויון המשולש. כלומר קיבלנו כי $d(x_1,A) \le d(x_1,x_2) + d(a,x_2)$ או:

$$d(x_1,A) - d(x_1,x_2) \le d(a,x_2)$$

כלומר הביטוי $d(x_1,A) - d(x_1,x_2)$ חסם מלרע לקבוצה $\{d(a,x_2) | a \in A\}$ ולכן בפרט:

$$d(x_1,A) - d(x_1,x_2) \le d(x_2,A)$$

כלומר, נקבל את אי השוויון:

$$d(x_1,A) - d(x_2,A) \le d(x_1,x_2)$$

וזה נכון לכל $x_1,x_2 \in X$ ולכן בפרט נקבל גם כי מתקיים:

$$|d(x_2,A) - d(x_1,A)| \le d(x_1,x_2)$$

ב. הוכח כי לכל $x \in X$ מתקיים $d(x,A) = 0$ אם ורק אם $x \in \bar{A}$.

פתרון:

ב. $\Leftarrow$ נניח כי $d(x,A) = 0$. אם $x \notin \bar{A}$ אזי קיים כדור פתוח ברדיוס $r > 0$ סביבו שכולו נמצא מחוץ ל-A. לכן, לכל $a \in A$ מתקיים $d(x,a) \ge r$ ולכן $d(x,A) \ge r > 0$ בסתירה להנחה. לכן נסיק כי $x \in \bar{A}$.
$\Rightarrow$ נניח כי $x \in \bar{A}$. ונתבונן בקבוצת הכדורים הפתוחים סביב x ברדיוס $\frac{1}{n}$ עבור n טבעי. היות ו-$x \in \bar{A}$ נסיק כי בכל כדור כזה יש איבר מ-A. נבחר בכל כדור כזה איבר מ-A ונקבל סדרה מהצורה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב-A כך ש-$d(x,x_n) \le \frac{1}{n}$ לכל n טבעי. לכן נסיק מכלל הסנדוויץ' כי הסדרה $\{d(x,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0. לפי הגדרת האינפימום מתקבל מידית כי $d(x,A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\} = 0$.

תרגיל:

נתבונן בשת מטריקות על $\mathbb{R}$ - המטריקה האוקלידית d והמטריקה ρ, המוגדרת לכל $x,y \in \mathbb{R}$ על ידי:

$$\rho(x,y)=|e^x-e^y|$$

הוכח, כי מטריקות אלה מגדירות את אותה הטופולוגיה על $\mathbb{R}$, אך אינן שקולות.

פתרון:

מספיק להוכיח כי לשתי הטופולוגיות אותן קבוצת סגורות בשביל לקבל שהן שוות.

טענת עזר – תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$x\in\mathbb{R}$ ביחס ל-d אם ורק אם היא מתכנסת ל-x ביחס ל-ρ.

הוכחת טענת העזר – אם x_n מתכנסת ל-x ביחס ל-d, אזי $\{e^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-e^x ביחס ל-d. וזה בדיוק אומר כי x מתכנסת ל-x ביחס ל-ρ. ולהיפך – במידה ו-$x_n\to x$ ביחס ל-ρ, אזי $e^{x_n}\to e^x$ ולכן מתקיים:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\ln e^{(x_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

וסדרה זו כמובן מתכנסת ל-$x=\ln e^x$ ביחס ל-d כנדרש.

נחזור לפתרון השאלה – תהא U קבוצה סגורה באחד המרחבים האלה. נראה כי היא סגורה גם במרחב השני. נבחר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב-U המתכנסת ל-x במרחב השני. אזי היא מתכנסת ל-x גם במרחב הראשון. עתה, נזכור כי אם U סגורה במרחב הראשון נקבל כי $x\in U$. לכן U סגורה גם במרחב השני. כלומר, לשני המרחבים אותן קבוצות סגורות ולכן גם אותן קבוצות פתוחות.

כלומר, המטריקות קובעות את אותה הטופולוגיה על $\mathbb{R}$. נראה כי d ו-ρ אינן שקולות.

אם הן היו שקולות היינו מקבלים כי קיים $m\in\mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y)\in\mathbb{R}$ מתקיים $\rho(x,y)\le md(x,s)$ כלומר ρ היא m ליפשיץ. אך זה לא נכון כי אם נבחר $y=0$ נקבל כי:

$$\rho(x,y)=|e^x-e^0|=|e^x-1|$$

וכן:

$$d(x,y)=|x-y|=x$$

אך נקבל כי:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\rho(x,y)}{d(x,y)}=\lim_{x\to 0}\frac{|e^x-1|}{x}=\infty$$

כלומר אפשר למצוא x,y כך שלא קיים m שיהיה חסם למטריקה הנ"ל. לכן, הן אינן שקולות.