<u>תורת החבורות – תרגיל בית 4</u>

<u>שאלה 1</u>

תהי G חבורה, $x, y \in G$. <u>הוכח</u>:

$$xy = yx \iff y^{-1}xy = x \iff x^{-1}y^{-1}xy = 1$$

(<u>הערה</u>: הביטוי $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ נקרא הקומוטטור של x, y ויסומן ע״י $[x, y]$)

<u>שאלה 2</u>

תהי G חבורה, $x \in G$. <u>הוכח</u>:

א) x, x^{-1} מאותו סדר.

ב) אם x מסדר אי-זוגי, אז קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $\left(x^2\right)^k = x$.

ג) אם $o(x) = n$, כאשר $n = st$ עבור $s, t \in \mathbb{N}$, אז $\left|x^s\right| = t$.

<u>שאלה 3</u>

$(G,*)$ חבורה, $H \subseteq G$ תת-קבוצה לא ריקה של G כך שלכל $a, b \in H$ $a * b^{-1} \in H$.

<u>הוכח</u>: $(H,*)$ חבורה.

<u>שאלה 4</u>

תהי $(G,*)$ חבורה, $x \in G$ איבר מסדר n.

תהי $S = \left\{x^0 = 1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\right\}$ תת-קבוצה של G. <u>הוכח</u>:

א) לכל $t \in \mathbb{Z}$ $x^t \in S$.

ב) $(S,*)$ חבורה מסדר n.

<u>שאלה 5</u>

תהי $GL_n(F)$ חבורת המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל שדה F.

א) <u>כמה</u> איברים יש בחבורה $GL_2\left(\mathbb{Z}_p\right)$?

ב) <u>כתבו</u> במפורש את כל אברי $GL_2\left(\mathbb{Z}_2\right)$ ואת לוח הכפל, ומצאו את הסדרים של כל אברי החבורה.

ג) תהי G חבורה בעלת איברים x,y המקיימים $|y|=3$, $|x|=|xy|=2$, וכי כל אברי G ניתן לכתוב כמכפלת החזקות של x ו-y.

כתבו במפורש את כל אברי החבורה G.

שאלה 6

תהי G חבורה, $a,b\in G$ מסדר סופי המתחלפים בכפל. הוכח:

א) הסדר של ab הינו סופי ומחלק את $|a|\cdot|b|$.

ב) אם הסדרים של a,b הינם זרים, אז $|ab|=|a|\cdot|b|$.

שאלה 7

תהי G חבורה, $a,b\in G$ שונים מיחידה המקיימים $a^5=1$, $aba^{-1}=b^2$.

א) הוכח כי $a^2ba^{-2}=b^4$.

ב) הוכח כי $a^3ba^{-3}=b^8$.

ג) מהו הסדר של b?

שאלה 8

תהי G חבורה מסדר זוגי.

הוכח כי ב-G קיים איבר מסדר 2.