תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 9 להגשה עד 05.01.2003

(*)– סעיפי רשות.

1. נתון:
א) כמה יחסי סדר חלקי יש ב- $\{1, 2, 3\}$?
ב) כמה (מבחינת העצמה) יחסי סדר חלקי יש ב- $\mathbb{N}$?

2. נגדיר יחס "$\le$" ב- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:
$f \le g \Leftrightarrow$ לכל n טבעי $f(n)=g(n)$ **<u>או</u>**
קיים n טבעי כך ש- $f(n)<g(n)$, ולכל k טבעי קטן מ- n מתקיים $f(k)=g(k)$.
הוכח שיחס זה הוא יחס סדר מלא.

3. תהי X קבוצה עם סדר חלקי. מה התנאי לכך שב- X קיים $inf(\varnothing)$? $sup(\varnothing)$?

4. תהי $X=\{(1,2), (1,5), (1,20), (1,50), (1,100), (2,6), (2,20), (2,100), (2,300), (3,100)\}$.
א) נגדיר ב- X את היחס הבא: $(a,b) \le (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \\ b \mid d \end{cases}$.
הוכח שהיחס הזה הוא יחס סדר חלקי;
צייר דיאגרמת Hasse ;
מצא את כל האיברים המינימליים, האיברים המקסימליים, האיבר הראשון והאיבר האחרון של X (אם יש כאלה);
מצא את כל החסמים מלעיל, החסמים מלרע, ה- sup וה- inf (אם יש כאלה) של התת-קבוצות הבאות של X :
$A=\{(1,50), (1,100), (2,20)\}$, $B=\{(1,100), (2,6), (2,20)\}$.
ב) (*) חזור על אותן השאלות כאשר היחס הוא $(a,b) \le (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \le c \\ b \le d \end{cases}$.

5. תהי X קבוצה עם סדר חלקי "$\le_1$" ו- Y קבוצה עם סדר חלקי "$\le_2$".
נגדיר יחס הבא ב- $X \times Y$: $(a,b) \le (c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \le_1 c \\ b \le_2 d \end{cases}$.
א) (*) הוכח שהיחס הזה הוא יחס סדר חלקי.
ב) הוכח או הפרך: אם x איבר מינימלי ב- X (לגבי היחס "$\le_1$") ו- y איבר מינימלי ב- Y (לגבי היחס "$\le_2$"), אז (x,y) איבר מינימלי ב- $X \times Y$ (לגבי היחס "$\le$").
ג) הוכח או הפרך: אם (x,y) איבר מינימלי ב- $X \times Y$, אז x איבר מינימלי ב- X ו- y איבר מינימלי ב- Y.

6. הגדרות:

תהי X קבוצה עם סדר חלקי.

X נקראת <u>סריג</u> אם לכל $x, y\in X$ קיימים $sup(\{x, y\})$ ו- $inf(\{x, y\})$ (ב- X).

X נקראת <u>סריג שלם</u> אם לכל A, תת-קבוצה של X, קיימים $sup(A)$ ו- $inf(A)$ (ב- X).

א) (*) האם בהכרח כל שני איברים בסריג ניתנים להשוואה?

ב) (*) מצא דוגמא של סריג שאינו סריג שלם.

ג) (*) מצא דוגמא של סריג שלם אינסופי. (שים לב: בסריג שלם גם ל- $\emptyset$ יש sup ו- inf !)

ד) נתון: X סריג. הוכח: לכל A, תת-קבוצה סופית של X, קיימים $sup(A)$ ו- $inf(A)$ (ב- X).

ה) נתון: X קבוצה עם סדר חלקי; ל- X יש איבר ראשון; ולכל A, תת-קבוצה לא ריקה של X, קיים $sup(A)$ (ב- X). הוכח: X סריג שלם.

ו) (*) נניח שבסעיף הקודם נתון של- X יש איבר אחרון (במקום *ראשון*). הראה ע"י דוגמא ש- X לא בהכרח סריג.

7. הגדרות:

תהי X קבוצה סופית עם סדר חלקי.

תת-קבוצה A של X נקראת <u>בלתי תלויה</u> אם כל שני אברים שונים של A אינם ניתנים להשוואה.

משפחה F של שרשראות (לאו דווקא זרות) ב- X נקראת <u>כיסוי</u> אם כל איבר של X שייך [לפחות] לאחת מהשרשראות מ- F.

נסמן: α – הגודל המקסימלי של קבוצה בלתי תלויה ב- X;

κ – הגודל המינימלי של כיסוי ב- X. (כלומר, הכמות המינימלית של שרשראות שיכולות לכסות את X.)

א) תהי $X=\{1, 3, 5, 7, 14, 15, 49, 98, 165, 210\}$ עם הסדר החלקי $a\leq b \Leftrightarrow a|b$. מצא α ו- κ, וכתוב קבוצה בלתי תלויה וכיסוי שנותנים ערכים אלה.

ב) קיים משפט (Dilworth theorem) שאומר שבכל קבוצה סופית עם סדר חלקי מתקיים $\alpha=\kappa$. מבין שני הכיוונים, $\alpha\leq\kappa$ ו- $\alpha\geq\kappa$, אחד קל להוכחה. מצא איזה כיוון הוא קל, והוכח אותו.