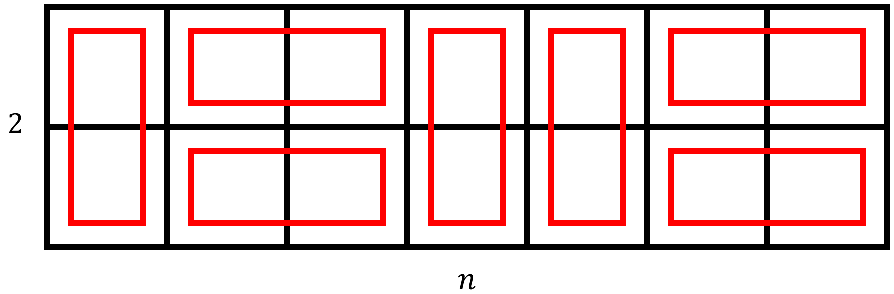
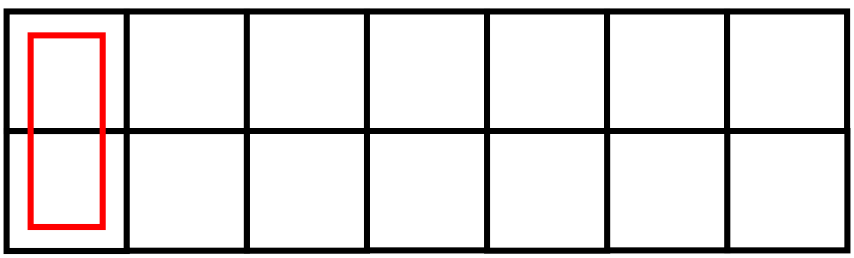
נוסחאות נסיגה ופתרונן

דוגמא: נתון לוח דומינו בגודל $2 \times n$:

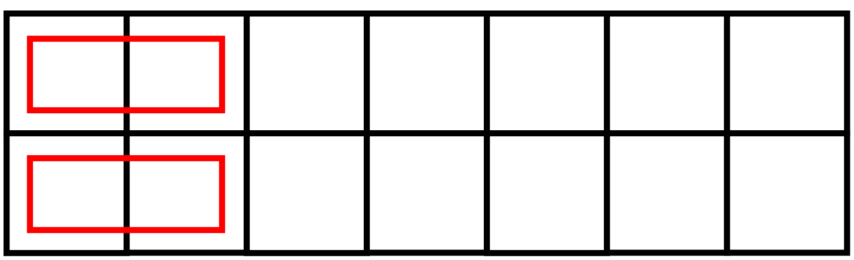


אנחנו רוצים לכסות את הלוח בכלי דומינו שגודל כל אחד מהם הוא 2×1, ללא חפיפה בין הכלים, וללא חריגה מן הלוח. בכמה דרכים אפשר לעשות זאת?

נסמן את מספר הדרכים ע"י F_n. נשים לב שכל כיסוי כזה מתחיל בצד שמאל במאונך או במאוזן. כלומר, יש שני מקרים:



(יש F_{n-1} כיסויים כאלה)



(יש F_{n-2} כיסויים כאלה)

זה מוביל לנוסחאת נסיגה:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

יש לנו גם תנאי התחלה:

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1$$

מכאן, יש לחשב את איברי הסדרה $\{F_n\}$ בזה אחר זה:

$$F_2 = 2, \qquad F_3 = 3, \qquad F_4 = 5, \qquad F_5 = 8, \qquad \ldots$$

סדרה זו נקראת סדרת מספרי פיבונאצ'י (Fibonacci).

כעת נרצה לפתור את נוסחאת הנסיגה. כלומר, לקבל נוסחא מפורשת עבור F_n. בשלב ראשון, נניח שסדרה גיאומטרית מהצורה $\{q^n\}$ כאשר $q \neq 0$ מקיימת את נוסחאת הנסיגה. כלומר, מתקיים $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$. נצמצם ב-q^{n-2}, נעביר אגפים, ונקבל:

$$q^2 - q - 1 = 0$$

$$\therefore \quad q_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

בכך קיבלנו שתי סדרות גיאומטריות המקיימות את נוסחאת הנסיגה:

$$A_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad B_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

כעת, כל צירוף ליניארי של שתי הסדרות הנ"ל מקיים גם הוא את נוסחאת הנסיגה. כלומר, נוכל לרשום פתרון כללי לנוסחאת הנסיגה:

$$C_n = c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

נרצה לבחור את המקדמים c_1, c_2 כך שיתקיימו תנאי ההתחלה. כלומר:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 1$$

$$c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

כעת, נפתור את המערכת עבור c_1, c_2:

$$c_1\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$c_1\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\therefore \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

כלומר, קיבלנו שהסדרה $C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ מקיימת את נוסחאת הנסיגה וגם את תנאי ההתחלה. יש רק סדרה אחת כזו, ולכן:

$$F_n = C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

זו הנוסחא המפורשת העונה על הבעיה שלנו. התשובה המקורבת עבור n גדול היא:

$$F_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

הגודל $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ נקרא *יחס הזהב*.

נוסחאת נסיגה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר k היא מהצורה:

$$H_n = a_1H_{n-1} + a_2H_{n-2} + \cdots + a_kH_{n-k}, \qquad n \geq k$$

כאשר $a_1, \ldots, a_k$ מס' ממשיים, $a_k \neq 0$. יש גם תנאי התחלה:

$$H_0 = b_0, \qquad H_1 = b_1, \qquad \ldots, \qquad H_{k-1} = b_{k-1}$$

כאשר $b_0, \ldots, b_{k-1}$ מס' ממשיים כלשהם. כעת נתאר את שיטת הפתרון לנוסחאות כאלה:

1. אנחנו מניחים שסדרה גיאומטרית $\{q_n\}$, $q \neq 0$, מקיימת את נוסחאת הנסיגה ומקבלים:
$$q^n = a_1q^{n-1} + a_2q^{n-2} + \cdots + a_kq^{n-k}$$
אחרי צמצום והעברת מקדמים אנו מקבלים:
$$q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$
זה נקרא הפולינום אפייני של נוסחאת הנסיגה.
2. אנחנו מוצאים את השורשים של הפולינום האופייני.
3. אם התקבלו k שורשים שונים, כותבים את הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה:
$$C_n = c_1 \cdot q_1^n + c_2 \cdot q_2^n + \cdots + q_k \cdot q_k^n$$
כעת, כדי לקיים את תנאי ההתחלה מתקבלת מערכת של k משוואת ליניאריות בנעלמים $c_1, \ldots, c_k$. פותרים את המערכת ומקבלים סדרה $\{C_n\}$ שמקיימת גם את נוסחת הנסיגה וגם את תנאי ההתחלה, ולכן $H_n = C_n$.
הערה: מטריצת המקדמים המצומצמת של המע' היא:
$$\begin{pmatrix} q_1^0 & q_2^0 & \cdots & q_k^0 \\ q_1^1 & q_2^1 & \cdots & q_k^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \cdots & q_k^{k-1} \end{pmatrix}$$
זו *מטריצת VANDERMONDE*, וידוע שכאשר ה-q_i שונים זה מזה, היא הפיכה ולכן למערכת יש פתרון יחיד.
4. אם אחד השורשים מרובה – נניח q עם ריבוי r, אז הוא נותן לנו r סדרות המקיימות את נוסחאת הנסיגה והן הסדרות מהצורה:
$$n^jq^n, \qquad j = 0,1,\ldots,r-1$$
לכן, כאשר לוקחים כל שורש עם הריבוי שלו, מקבלים בסה"כ k סדרות המקיימות את נוסחאת הנסיגה. כעת, נוכל כמו קודם לכתוב פתרון כללי, לפתור מערכת משוואות ליניאריות עבור המקדמים, ולקבל את הנוסחא המפורשת.

דוגמא: נפתור את נוסחת הנסיגה:

$$H_n = 6H_{n-1} - 9H_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

עם תנאי ההתחלה:

$$H_0 = 1, \qquad H_1 = 2$$

הפולינום האופייני הוא:

$$q^2 - 6q + 9 = (q-3)^2$$

$q = 3$ הוא שורש כפול, ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$C_n = c_1 e^n + c_2 n \cdot 3^n$$

בכדי לקיים את תנאי ההתחלה:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 1$$

$$c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 = 2$$

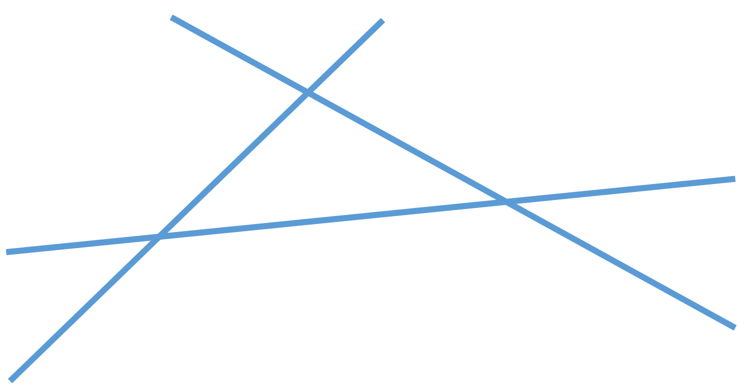
$$\therefore \quad c_1 = 1, \qquad c_2 = -\frac{1}{3}$$

לכן, הנוסחא המפורשת עבור H_n היא:

$$H_n = 3^n - \frac{1}{3} n \cdot 3^n = 3^n - n3^{n-1}$$

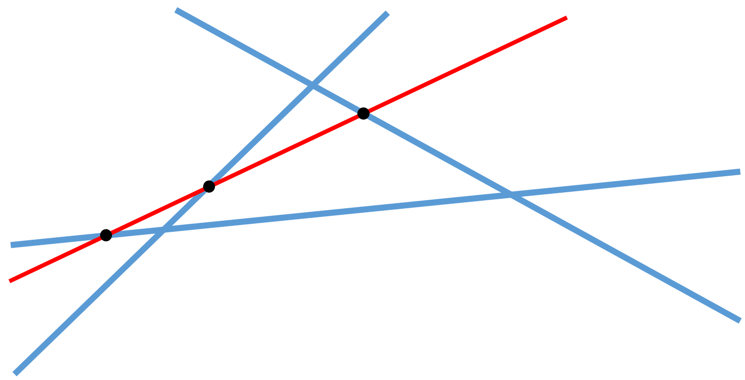
דוגמא: נתונים n ישרים במצב כללי במישור (כלומר, אף שניים אינם מקבילים, ואף שלושה אינם עוברים דרך אותה נק').

לכמה תחומים הם מחלקים את המישור?



בשרטוט יש 3 קווים, ו-7 תחומים שונים. נסמן את מס' התחומים ע"י R_n.

על הישיר ה-n-י יש נק' חיתוך עם כל אחד מ-$(n-1)$ הישרים הקודמים, והן שונות זו מזו. לכן, יש $n-1$ נק' חיתוך, והן יוצרות על הישר ה-n-י n קטעים.



כל קטע כזה מפצל תחום קיים לשני תחומים. לכן:

$$R_n = R_{n-1} + n, \qquad n \geq 1$$

עם תנאי ההתחלה $R_0 = 1$

זו אינה נוסחת נסיגה מהצורה שניתחנו, אבל אפשר לפתור אותה ע"י הצבות חוזרות:

$$R_n = R_{n-1} + n = R_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = R_0 + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

ובכך קיבלנו נוסחא מפורשת עבור R_n.