אלגברה ב – תבניות בילינאריות 2

נושאים:
1. ההבדל בין חפיפה לדמיון
2. תרגילים

ההבדל בין חפיפה לדמיון

ראינו בקורס שני אפיונים ל – A מטריצה ממשית סימטרית:
1. כל מטריצה סימטרית ממשית ניתנת ללכסון, ז"א קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה אורתוגונלית P כך ש – $A=P^{-1}DP$.
2. כל מטריצה סימטרית ממשית חופפת למטריצה אלכסונית עם אברי אלכסון שהם ± 1 או 0.

חשוב לשים לב ששני יחסי השקילות הללו שונים.
- היחס הראשון נובע מכך שמטריצות ריבועיות מייצגות אופרטורים על המרחב הוקטורי (לכן יחס השקילות שומר על תכונות כמו ע"ע ווקטורים עצמיים של המטריצה)
- היחס השני נובע מכך שמטריצות מגדירות תבניות בילינאריות (ז"א יחס השקילות הזה שומר על תכונות אחרות, כמו החתימה של התבנית המתאימה).

דוגמא: נסתכל על המטריצה $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$. זו מטריצה סימטרית, לכן מגדירה אופרטור סימטרי $T:R^2\rightarrow R^2$ ע"י $T((a,b))=A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. הערכים העצמיים של A הם 1,2 ולכן A דומה למטריצה האלכסונית $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (2 ע"ע עם ו"ע (1,1) ו – 1 ע"ע עם ו"ע (1,-1)). מטריצת מעבר הבסיס היא $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$. מצד שני, A מגדירה תבנית סימטרית ע"י $f((a,b),(c,d))=(a,b)A\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=\frac{3}{2}(ac+bd)+\frac{1}{2}(ad+bc)$. זו תבנית חיובית לחלוטין מדרגה 2, לכן A חופפת למטריצת היחידה.

תרגילים

1. יהי V מ"ו סוף ממדי מעל F, תהא f תבנית בילינארית רגולרית וסימטרית. ל – $v\in V$ נגדיר $L_f^v(u)=f(v,u)$ $L_f^v:V\rightarrow F$ ונגדיר $L_f:V\rightarrow V^*$ ע"י $L_f(v)=L_f^v$. נשים לב ש - L_f^v אכן מגדיר פונקציונל וכי L_f טרנספורמציה לינארית (תוכיחו בתרגיל).
הראה כי לכל בסיס $B_V=\{v_{1,}\dots,v_n\}$ של V קיים בסיס ייחודי $\hat{B}=\{\hat{v}_1,\dots,\hat{v}_n\}$ של V עבורו מתקיים $f(v_i,\hat{v}_j)=\delta_{ij}$ וכן לכל $v\in V$ מתקיים $v=\sum_{i=1}^n f(v,\hat{v}_i)v_i=\sum_{i=1}^n f(v_i,v)\hat{v}_i$.

פתרון: נוכיח תחילה ש - L_f חח"ע כאשר $rank(f)=n$. נניח $v\in Ker(L_f)$, אז $L_f(v)=0$, ז"א לכל $u\in V$ נקבל $0=L_f^v(u)=f(v,u)$, אבל f רגולרית לכן $v=0$. L_f חח"ע, לכן $\varphi_i=L_f(v_i)$ בסיס של V^* . נגדיר $\hat{v}_i=\varphi_i^*$ (ז"א הבסיס הדואלי לבסיס φ_i שקיבלנו). $\hat{v}_i\in V^*=V$ ומהווים בסיס של V. כמו כן, הבסיס $\{\hat{v}_i\}_{i=1}^n$ מתקבל באופן יחיד מהבסיס $\{v_i\}_{i=1}^n$ (כי L_f איזומורפיזם והבסיס הדואלי הוא יחיד).

נראה ש - $\hat{v}_i$ מקיים את התנאים הדרושים: $f(v_i,\hat{v}_j)=L_f(v_i)(\hat{v}_j)=\hat{v}_j(L_f(v))=\delta_{ij}$ מבחירת $\hat{v}_i$ כבסיס דואלי של $L_f(v_i)$. לכל $v\in V$ נרשום $v=\sum_{i=1}^n a_i v_i=\sum_{j=1}^n b_j \hat{v}_j$. נחשב ונקבל: $f(v,\hat{v}_j)=\sum_{i=1}^n a_i f(v_i,\hat{v}_j)=a_j$, $f(v_i,v)=\sum_{j=1}^n f(v_i,\hat{v}_j)\hat{v}_j=b_j$ לכן מתקיים התנאי.

2. תהי $q:R^2\to R$ הנתונה ע"י $q((x_1,x_2))=ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ התבנית הריבועית המתאימה לתבנית הבילינארית הסימטרית f . הוכח ש – $rank(f)=2$ אם ורק אם $b^2-4ac\neq 0$.

פתרון: נעזר בנוסחת הפולריזציה $f(v,u)=\frac{1}{4}q(v+u)-\frac{1}{4}q(v-u)$ ונמצא את המטריצה המייצגת את f בבסיס הסטנדרטי.

$$f((1,0),(1,0))=\frac{1}{4}q((2,0))=a$$
$$f((1,0),(0,1))=\frac{1}{4}q((1,1))-\frac{1}{4}q((1,-1))=\frac{b}{2}$$
$$f((0,1),(0,1))=\frac{1}{4}q((0,2))=c$$

לכן נקבל $[f]_E=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. $rank(f)=2$ אם ורק אם $[f]_E$ הפיכה, ז"א $det([f]_E)\neq 0$.

3. תהא f תבנית בילינארית על V מ"ו ממימד סופי מעל F. נסמן $W=\{v\in V \mid f(u,v)=0\ \forall u\in V\}$. הוכח ש – $rank(f)=dim(V)-dim(W)$

פתרון: נבחר $v_1,\dots,v_k$ בסיס ל – W ונרחיב אותו לבסיס $v_1,\dots,v_n$ של V. נסמן בסיס זה ב – B. המטריצה המייצגת את f בבסיס B היא המטריצה $([f]_B)_{ij}=f(v_i,v_j)$, אבל ל – $j\le k$ ולכל $1\le i\le n$ מתקיים $f(v_i,v_j)=0$ לכן k העמודות הראשונות ב - $[f]_B$ הן אפסים, ז"א $rank(f)\le n-k$.

V מתפרק לסכום ישר $V=U\oplus W$ עבור $W=span\{v_1,\dots,v_k\},\ U=span\{v_{k+1},\dots,v_n\}$.

נסתכל על $f|_U$. לכל $0\neq v\in U$ קיים $v'\in V$ כך ש – $f(v',v)\neq 0$ (אחרת $v\in W$). $v'=u'+w'$ – ל $u'\in U,\ w'\in W$ ונקבל $0\neq f(v',v)=f(u',v)+f(w',v)=f(u',v)$, לכן $f|_U$ רגולרית (כי יש $u'\in U$ כך ש – $f(u',v)\neq 0$). בפרט נקבל שהמטריצה A המייצגת את $f|_U$ ביחס לבסיס $v_{k+1},\dots,v_n$ היא מטריצה עם n-k שורות בת"ל, אבל המטריצה $[f]_B$ מכילה את המטריצה A בבלוק $n-k\times n-k$ בפינה הימנית התחתונה, לכן ב - $[f]_B$ יש n-k שורות בת"ל, לכן $rank(f)\ge n-k$