אלגברה ב – מרחבי מכפלה פנימית I

נושאים:

1. תיאוריה ודוגמאות בסיסיות
2. דוגמאות לא סטנדרטיות

תיאוריה ודוגמאות בסיסיות

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F (כאשר F הוא הממשיים או המרוכבים). המרחב V נקרא מרחב מכפלה פנימית אם לכל זוג וקטורים u,v קיים a ב – F (המסומן <u,v>) כך ש:

1. $\langle u+v , w\rangle=\langle u , w\rangle+\langle v , w\rangle$
2. $\langle \alpha u , v\rangle=\alpha\langle u , v\rangle$
3. $\langle u , v\rangle=\overline{\langle v , u\rangle}$ (בפרט, $\langle u , u\rangle$ ממשי כי צמוד לעצמו)
4. $\langle u , u\rangle\geq 0$ לכל u ב – V
5. $\langle u , u\rangle=0$ אם ורק אם u = 0.

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל C או מעל R, אז:

1. $\langle u , v+w\rangle=\langle u , v\rangle+\langle u , w\rangle$
2. $\langle u , \alpha v\rangle=\overline{\alpha}\langle u , v\rangle$

הגדרה: ל – V ממ"פ, הנורמה של v ב – V היא $\|v\|=\sqrt{\langle v , v\rangle}$ (השורש החיובי)

הערה: ממ"פ מעל R נקרא מרחב אוקלידי. ממ"פ מעל C נקרא מרחב אוניטרי

הערה: למרחב וקטורי V מעל R (או C) יכולים להיות מבנים שונים של מרחבי מכפלה פנימית (לכן חשוב לציין עם איזו מכפלה פנימית עובדים).

טענה: יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל F. נניח כי ל – V מבנה מכפלה פנימית ו - $T:V\rightarrow W$ איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים, אז T משרה על W מבנה מכפלה פנימית ע"י $\langle w_1 , w_2\rangle_W=\langle T^{-1}(w_1) , T^{-1}(w_2)\rangle_V$.

הוכחה: $\langle , \rangle_W$ מוגדרת היטב, כי T^{-1} איזומורפיזם (לכן חח"ע ועל). המכפלה הפנימית ליניארית משמאל כי T^{-1} העתקה ליניארית. תכונות 3 ו – 4 מתקיימות באופן ברור (4 נובע מכך ש - T^{-1} על, לכן מתקיים לכל w ב – W). תכונה 5 מתקיימת כי T^{-1} חח"ע לכן הגרעין טריוויאלי.

דוגמאות:

1. ל – V = R^n יש מבנה מכפלה פנימית, ע"י $\langle (a_1,..,a_n),(b_1,..,b_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (המכפלה הפנימית הסטנדרטית ל – R^n)
2. ל – V = C^n מגדירים $\langle (a_1,..,a_n),(b_1,..,b_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$ (מ.פ. סטנדרטית ל – C^n).
3. ל – V = c^nxm מגדירים $\langle A , B\rangle=trace(\overline{B}^T A)$ (המכפלה הסטנדרטית ב – C^nxm)
4. יהי V מרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע הסגור [a,b]. נגדיר מכפלה פנימית $\langle f , g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$ - נקרא המכפלה הפנימית הסטנדרטית ל – V.

1. ל – V מרחב הפונקציות המרוכבות, נקח $\langle f , g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

דוגמאות לא סטנדרטיות

דוגמא א: נסתכל על $V=R_n[x]$ (מרחב הפולינומים מדרגה לכל היותר n). נבחר $x_1,...,x_{n+1}$ מספרים ממשיים, ונגדיר $\langle f , g\rangle=f(x_1)g(x_1)+...+f(x_{n+1})g(x_{n+1})$. הוכח שזה מרחב מכפלה פנימית.

תשובה: תכונות 1-3 מתקיימות בצורה ברורה. תכונה 4 מתקיימת כי עבור פולינום f נקבל

סכום ריבועים. תכונה 5 מתקיימת כי f פולינום ממעלה n לכל היותר, $\langle f, f\rangle=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)^2$ *לכן יש לו לכל היותר n שורשים (אלא אם הוא פולינום האפס), ואז בהכרח יש j עבורו* $f(x_j)^2\neq 0$ *.*

<u>הערה:</u> יש איזומורפיזם $R_n[x]\equiv R^{n+1}$ (ע"י העתקות הבסיסים הסטנדרטיים). לפי הטענה הקודמת, מתקבלים מבנים שונים של מכפלות פנימיות על R^{n+1} (ולא רק המכפלה הסטנדרטית אותה אנו מכירים).

דוגמה קונקרטית: נסתכל על R^3 והמכפלה הפנימית המושרית עליו מהמכפלה הפנימית על $R_2[x]$ המתאימה לשלשה $(-1,0,1)$: $T^{-1}((a_1, a_2, a_3))=a_1+a_2x+a_3x^2$ ואז לשני וקטורים נקבל:

$$\langle(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\rangle_{R^3}=\langle a_1+a_2x+a_3x^2, b_1+b_2x+b_3x^2\rangle_{R_2[x]}=$$
$$=(a_1-a_2+a_3)(b_1-b_2+b_3)+a_1b_1+(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)=$$
$$=2(a_1b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_3b_3)+a_1b_1 .$$

<u>הערה:</u> אפשר כמובן להגדיר גם ל – C (ז"א לפולינומים מעל המרוכבים), ע"י הוספת צמוד לערכים של g.

דוגמא ב: יהי $V=R^2$ ונגדיר $\langle(x_1, x_2),(y_1, y_2)\rangle=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+kx_2y_2$. עבור אילו ערכי k נקבל מכפלה פנימית?

תשובה: $k>1$ *. תכונות 1 – 3 מתקיימות לכל k. תכונה 4 מחייבת* $k\geq 1$ *(רק כך ניתן להבטיח שהמכפלה הפנימית חיובית, כסכום ריבועים, אחרת תמיד אפשר לבחור וקטור שייתן ערך שלילי). תנאי 5 מתקיים בנוסף לתנאים הקודמים רק אם* $k>1$ *.*