תרגול 4

משפט הפונקציות הסתומות:

תהא $F(x,y,z)=0$ ונקודה $p_0(x_0,y_0,z_0)$ כך שמתקיים:

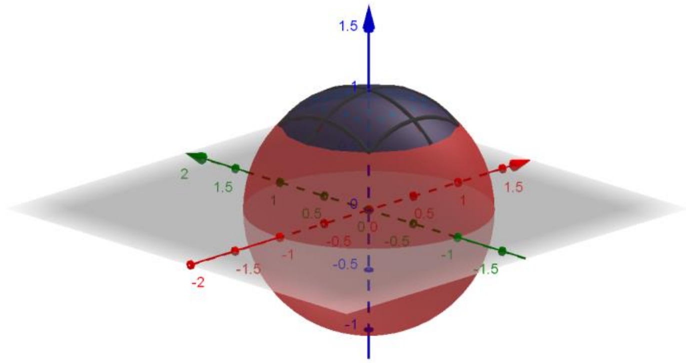
1. $F(p_0)=0$.
2. F בעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת p_0.
3. $\frac{\partial F}{\partial z}(p_0)\neq 0$.

אזי ניתן לחלץ את z כפונקציה של x,y באופן יחיד על ידי $z=f(x,y)$, כך שמתקיים:

1. $z_0=f(x_0,y_0)$.
2. f בעלת נגזרות חלקיות רציפות בסביבת (x_0,y_0), ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{F_x}{F_z}\bigg|_{p_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{F_y}{F_z}\bigg|_{p_0}$$



איור 1 – משוואת ספירה $F(x,y,z)=0$ אשר אינה ניתנת להצגה כגרף של פונקציה מהצורה $z=f(x,y)$ בכל התחום. בכחול נמצא תחום שבו כן ניתן להציג את סביבת הנקודה העליונה של הספירה כפונקציה כנ"ל

הערות:

א. משמעות המשפט – ניתן להציג את המשטח $F(x,y,z)=0$ כגרף של פונקציה בשני נעלמים שהיא גזירה ברציפות / C^1.

ב. תנאי (3) של המשפט הוא מספיק אך לא הכרחי. לדוגמה, בהנתן הפונקציה $F(x,y)=x^3-y^3$, ננסה לחלץ את y כפונקציה של x בסביבת p_0. לשם כך נבדוק את תנאי המשפט:
1. $F(0,0)=0$ כצפוי.
2. הנגזרות החלקיות של F רציפות בכל $\mathbb{R}^2$.
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=-3y^2|_{(0,0)}=0$.

כלומר תנאי 3 של משפט הפונקציות הסתומות אינו מתקיים אך קיים חילוץ מהצורה:

$$y^3=x^3\rightarrow y=x$$

נשים לב כי חילוץ זה גם גזיר.

תרגיל:

נתונה המשוואה:

$$xy-z\ln y+e^{xz}=1$$

נבדוק, האם המשטח מהווה גרף של פונקציה $y(x,z)$ בסביבת $p_0(0,1,1)$?

נייצג את המשוואה על ידי:

$$F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1=0$$

ונבדוק את קיום תנאי המשפט:

1. $F(0,0,1)=0$ כנדרש.
2. F בעלת נגרות חלקיות רציפות בסביבת הנקודה.
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,1)=\left(x-\frac{z}{y}\right)\Big|_{(0,1,1)}=-1\neq 0$

על פי משפט הפונקציות הסתומות קיים חילוץ גזירה $y(x,z)$ בסביבת p_0.

עתה נרצה לבדוק, האם המשטח מהווה גרף של פונקציה גזירה $z(x,y)$ בסביבת p_0.

לשם כך, נניח כי אכן קיים חילוץ מצורה זו, ונוכל לייצג את המשטח על ידי הפונקציה $F\big(x,y,z(x,y)\big)=0$.

היות והנחנו כי $z(x,y)$ גזירה, נקבל כי ניתן לבצע גזירה מלאה של $F\big(x,y,z(x,y)\big)$ ולקבל כי:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,y,z(x,y)\big)\overbrace{\frac{dx}{dx}}^{=1}+\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y,z(x,y)\big)\cdot\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{=0}+\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,z(x,y)\big)\ \frac{dz}{dx}(x,y)=0$$

נקבל כי:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,y,z(x,y)\big)+\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,z(x,y)\big)\frac{dz}{dx}(x,y)=0$$

במקרה שלנו, מתקיים:

$$F\big(x,y,z(x,y)\big)=xy-z(x,y)\ln y+e^{xz(x,y)}-1=0$$

ונגזור לפי x ונקבל כי:

$$y-z_x(x,y)\ln y+e^{xz(x,y)}[z(x,y)+xz_x(x,y)]=0$$

וזה נכון לכל נקודה בסביבה. נציב $(0,1)$ ונקבל כי:

$$1-z_x(0,1)\cdot\ln 1+e^{0\cdot z(0,1)}[z(0,1)+0\cdot z_x(0,1)]=2\neq 0$$

וכאמור התקבלה סתירה, ולכן נסיק כי פירוק גזיר כנ"ל לא קיים. באשר לפירוק <u>כלשהו</u> – לא הוכחנו.

<u>תרגיל:</u>

נתונות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases}x^2+y^2+u^2+v^2=21\\ 2x+yu+v=0\end{cases}$$

נרצה להראות כי ניתן לחלץ את $u(x,y),v(x,y)$ בסביבת $p_0(x_0,y_0,u_0,v_0)=(2,-4,1,0)$, וחשבו את:

$$v_x(2,-4)\quad u_x(2,-4)\quad u_{xx}(2,-4)$$

<u>פתרון:</u>

נבנה את הפונקציות:

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=x^2+y^2+u^2+v^2-21=0\\ G(x,y,u,v)=2x+yu+v=0\end{cases}$$

ונבדוק את קיום תנאי המשפט:

1. $F(p_0) = 4 + 16 + 1 + 0 - 21 = 0$ וכן $G(p_0) = 4 - 4 + 0 = 0$ כנדרש.
2. F, G בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^4$.
3. נחשב את היעקוביאן:

$$\mathcal{J} = \left|\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ y & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{p_0}\right| = 2 \neq 0$$

כלומר, משפט הפונקציות הסתומות מבטיח חילוץ גזיר כנ"ל מהצורה $u = f(x, y), v = f(x, y)$.

המקיים:

1. $u_0 = f(x_0, y_0)$ וכן $\mathrm{v}_0 = g(x_0, y_0)$.
2. f, g בעלות נגזרות חלקיות רציפות בסביבת (x_0, y_0) ומתקיים:

$$\boxed{\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} = -\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}\Bigg|_{p_0}^{-1} \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}\Bigg|_{p_0}}$$

אך ננסה לחשב נגזרות חלקיות בדרך אחרת. נעשה זאת על ידי כך שנציב את החילוץ למערכת:

$$\begin{cases} F\big(x, y, u(x,y), v(x,y)\big) = 0 \\ G\big(x, y, u(x,y), v(x,y)\big) = 0 \end{cases}$$

נגזור לפי x ונקבל כי:

$$(1)\ F_x \cdot 1 + F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = 0$$

כלומר:

$$2x + 2u(x,y)u_x(x,y) + 2v(x,y)v_x(x,y) = 0$$

נציב במשוואה זו את $(x_0, y_0) = (2, -4)$ ונקבל כי:

$$2 + u(2,-4)u_x(2,-4) + v(2,-4)v_x(2,-4) = 0 \to \boxed{u_x(2,-4) = -2}$$

לאחר ביצוע תהליך דומה במשוואה השניה, והצבת הנקודה, נקבל כי:

$$\boxed{v_x(2,-4) = -10}$$

על מנת לחשב את הנגזרות הגבוהות יותר, ניתן לגזור בשנית את משוואות 1,2 ונוכל להציב בהן את הנגזרות הראשונות שכבר חישבנו, ונקבל את הדרוש.

<u>הערה</u> – אם בתנאי המשפט $F, G \in C^n$ אזי נוכל להסיק כי $f, g \in C^n$ ובפרט במקרה של השאלה שלו, נוכל להסיק בוודאות כי הנגזרות השניות קיימות.

<u>נגזרות מסדר גבוה:</u>

באופן כללי, לא ניתן להסיק עבור פונקציה כללית, כי מתקיים:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

אך במידה ו-$f \in C^2$ הנ"ל כן מתקיים.

<u>דוגמה:</u>

$$g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

אזי מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y),v(x,y)\big)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

וחשוב לזכור, בגזירה לסדר גבוה יותר, שהנגזרת של $\frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ צריכה להתבצע על ידי כלל שרשרת.