

קומבינטוריקה - תרגיל מס' 10

להגשה עד ה - 24.06.01, בשעה 17.00

תרגיל זה הוא האחרון הסמסטר. יש להגיש לפחות שישה מהתרגילים בדף. מומלץ לפתור את כל התרגילים לקראת המבחן.

בהצלחה!

תרגיל מס' 1

א. יהיו n, k מספרים טבעיים, $k < \frac{n}{2}$. תהי S קבוצה בת n אברים. הוכח שאפשר להוסיף לכל תת-קבוצה של S שגודלה k איבר נוסף, באופן כזה שקבוצות שונות זו מזו תשארנה שונות זו מזו אחרי ההוספה. (במילים אחרות, מה שעליך להראות הוא שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית

$$f : \{A \subseteq S : |A| = k\} \rightarrow \{B \subseteq S : |B| = k + 1\}$$

כך ש- $A \subseteq f(A)$ לכל A .)

ב. הוכח שהדבר אינו אפשרי אם $k \geq \frac{n}{2}$.

תרגיל מס' 2

במסיבה משתתפים n בחורים ו- n בחורות. כל בחור מכיר בדיוק k מהבחורות, וכל בחורה מכירה בדיוק k מהבחורים. רוצים לארגן את המשתתפים ל- k ריקודי זוגות, כך שבכל ריקוד ישתתפו כל הנוכחים (בסידור של n זוגות), ירקדו כבני זוג רק בחור ובחורה שמכירים, וכל בחור ובחורה שמכירים ירקדו פעם כבני-זוג. הוכח שהדבר אפשרי.

תרגיל מס' 3

בכיתה יש m ועדות A_1, A_2, \dots, A_m . רוצים לבחור נציג לכל ועדה (אחד מבין חבריה), באופן כזה שתלמיד לא יוכל להיות נציג של יותר מועדה אחת. מצא תנאי הכרחי ומספיק לכך שהדבר אפשרי.

תרגיל מס' 4

יהי G גרף. נאמר כי G ניתן לכיוון חד-משמעי אם, בהנתן ציור שלו, אפשר לצייר חץ על כל צלע והמכוון מקודקוד אחד שלה לקודקוד אחר שלה, באופן כזה שמכל קודקוד יוצא לכל היותר חץ אחד.

א. הוכח שאם G עץ אז הוא ניתן לכיוון חד-משמעי.

ב. הוכח שאם G מעגל אז הוא ניתן לכיוון חד-משמעי.

ג. האם כל גרף ניתן לכיוון חד-משמעי?

תרגיל מס' 5

הוכח שלכל k טבעי מתקיים: $r(k, k) > (k - 1)^2$.

תרגיל מס' 6

א. צובעים את הצלעות של K_8 בכחול ובאדום באופן הבא: מציירים את הקדקדים של K_8 כקדקדים של מתומן משוכלל. צובעים בכחול את כל הצלעות של המתומן, וכן את המיתרים הארוכים (המחברים קדקדים נגדיים). צובעים את כל שאר המיתרים באדום. הוכח שבצביעה זו אין K_3 שכל צלעותיו כחולות ואין K_4 שכל צלעותיו אדומות.

ב. הסק מחלק א', כי: $r(3, 4) \geq 9$.

ג. נתבונן בצביעה של הצלעות של K_9 בכחול ובאדום, ונניח שאין בה K_3 שכל צלעותיו כחולות ואין K_4 שכל צלעותיו אדומות. הוכח שמכל קדקד יוצאות 3 צלעות כחולות ו- 5 צלעות אדומות.

ד. הסק מחלק ג' כי $r(3, 4) \leq 9$.

תרגיל מס' 7

א. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה: לכל קבוצה של n נקודות במרחב, או שיש ביניהן 4 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא לכל היותר 1, או שיש ביניהן 5 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן עולה על 1.

ב. מצא במפורש n כזה (לאו-דווקא הקטן ביותר).

תרגיל מס' 8

א. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה: יהיו נתונים n קטעים על הישר, כך שאף נקודה אינה נמצאת ביותר משני קטעים. אזי קיימים 10 מבין הקטעים שהם זרים בזוגות (כלומר, לאף שניים מהם אין נקודה משותפת).

ב. מצא במפורש n כזה (לאו-דווקא הקטן ביותר).

בהצלחה!

החתונה שלא נלמד עליה בקורס (המידע המובא להלן - אמיתי ביותר, למרות שקשה להאמין!!!):

בספטמבר 1996, נישאו בדיסקוטק הגדול ביותר בתאילנד - בבגדים ורודים תואמים - שני... חתולים נדירים ביותר. עלות החתונה: \$16,241, והיא כללה 500 מוזמנים אשר העניקו לזוג הטרי צ'קים בשווי של כ- \$60,000, בנוסף למתנות. השושבינים, אגב, היו תוכי ואיגואנה: חתונה זו הוכרזה כחתונת החיות היקרה ביותר בעולם!