טכניון - מכון טכנולוגי לישראל **הפקולטה למתמטיקה**

חשבון אינפי' 2 104281

גליון תרגילים מספר 8 - תרגילים בטורי חזקות

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי סמסטר אביב תשנ"ט

1. פתח לטור חזקות סביב $x = 0$; מהו רדיוס ההתכנסות ומהו תחום ההתכנסות?

(א) $\dfrac{1}{1-x-2x^2}$

(ב) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

(ג) $\sin^2 x$

2. מצא רדיוס התכנסות ותחום התכנסות:

(א) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$

(ב) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}}\,x^{3n}$

(ג) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$

(ד) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$

(ה) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{3n}$

3. פונקצית בסל (Bessel) מוגדרת ע"י

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

מצא את תחום הגדרתה של הפונקציה, והוכח כי הפונקציה $y(x) = J_0(x)$ מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית $xy'' + y' + xy = 0$ (משוואה זו מכונה משוואת בסל מסדר אפס).

4. נתון הטור $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix} x^n$, כאשר

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix} \triangleq \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix} \triangleq 1, \quad \forall\alpha \in R$$

(א) חשב את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטור.

(ב) הוכח שהטור הנ"ל מתכנס ל-$(1+x)^\alpha$ ע"י גזירת הביטוי

$$\left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix} x^n}{(1+x)^\alpha}\right].$$

(ג) חזור על הוכחת $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha$ באופן הבא: הראה ששארית הטור שואפת לאפס.

<u>הדרכה:</u> קודם כל, אנא השתכנע בכך שהטור הנ"ל הוא טור מקלורין של $(1+x)^\alpha$. עתה, עבור $0<x\le 1$ התבונן בצורת לגרנז' של השארית והראה ש-$|R_n(x)|<\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|$.
עבור $-1\le x<0$ התבונן בצורת קושי של השארית והראה ש-$|R_n(x)|<\left|n\binom{\alpha}{n}x^n\right|$.

5. נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ בעל רדיוס התכנסות R_1 ו-$\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ בעל רדיוס התכנסות R_2. מה ניתן להגיד על רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$?

6. פתור את המשוואה הבאה (עבור הנעלם $y(x)$):

$$xy'(x)-2x^3=y(x)$$

<u>הדרכה:</u> סמן $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, הצב לתוך המשווה וקבע את המקדמים. נתון כי $y'(0)=1$. נמק כל שלב !

7. הוכח כי עבור $|x|<1$ מתקיים

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n$$

8. מצא את סכום הטור: $S(x)=1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$

9. מצא את סכומי הטורים הבאים:

(א) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

(ב) $\frac{x^3}{1\cdot3}-\frac{x^5}{3\cdot5}+\frac{x^7}{5\cdot7}-\frac{x^9}{7\cdot9}+\cdots$

(ג) $1-2x^2+3x^4-4x^6+\cdots$

(ד) $\frac{1}{1\cdot2\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot4\cdot2^3}-\frac{1}{4\cdot5\cdot2^4}+\cdots$

10. (אביב תשנ"ה) יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור מספרים מתכנס.

(א) הוכח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$ מתכנס.

(ב) הוכח את הזהות

$$\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$$

(ג) חשב את סכום הטור

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots$$

11. פתח לטור חזקות סביב $x=0$:

(א) $\arctan x$

(ב) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

(ג) $\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$

(ד) $\int_0^x e^{-t^2}dt$

12. חשב את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x}-e^2}{\ln x}$

(ב) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}$

(ג) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln x}{\sin^2(x-1)}$

(ד) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{2/3}-(1-x)^{2/3}}{x}$

(ה) $\lim_{n\to\infty}\ln n\left[(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right]$

(ו) $\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

13. קבל את טור החזקות של $\arctan x$ ע"י אינטגרציה של הטור $\frac{1}{1+t^2}$. נמק כל שלב !

14. הוכח את הנוסחא הבאה (התגלתה לראשונה ע"י לייבניץ, 1673) (בדרך שונה משאלה 10)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

15. יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות מתכנס בעל רדיוס התכנסות R. הוכח כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{x^n},\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin^n x,\ \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n/2},\ \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$$

כולם טורי פונקציות מתכנסים. מהו תחום ההתכנסות? עיין בספרות וצטט את המשפט הכללי. (נא לקרוא את ההוכחה).

16. נתון כי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x)$ עבור x בתחום מסוים. מגדירים

$$b_b=\begin{cases} a_n & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases}\quad k=0,1,2,\ldots$$

מהו הסכום $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ (בתלות בפונקציה f)? מה קורה אם מגדירים

$$b_b=\begin{cases} a_{n/2} & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases}\quad k=0,1,2,\ldots$$

או

$$b_b=\begin{cases} a_n & n=2k+1 \\ 0 & n=2k \end{cases}\quad k=0,1,2,\ldots$$

17. הוכח את הנוסחאות הבאות הקשורות במספרי ברנולי B_n (ראה ההגדרה בסוף הגליון):

(א) $$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} 2^{2n}(2^{2n-1}) x^{2n-1}$$

(ב) $$\frac{x}{\sinh x} \equiv x \,\mathrm{csch}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2-2^{2n}) x^{2n}$$

הדרכה: השתמש בזהויות הבאות (הוכח אותן תחילה):

$$\tanh x = 2\coth(2x) - \coth x \ ; \ \mathrm{csch}\, x = \frac{1}{2}\coth\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\tanh\frac{x}{2}$$

18. הפולינומים של ברנולי - $B_n(x)$ - מוגדרים באופן הבא:

$$e^{xt} \cdot \frac{t}{e^t - 1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\right) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

כאשר B_n הם מספרי ברנולי (ראה הגדרה בסוף הגליון)

(א) הוכח כי $B_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n, והוא נתון ע"י הנוסחא:

$$B_n(x) = \binom{n}{0} B_0 x^n + \binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} x + \binom{n}{n} B_n$$

(ב) הוכח כי

i. $B_n(0) = B_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

ii. $B_n(1) = B_n, \quad n = 2, 3, \ldots$

(ג) הוכח כי

i. $B_{n+1}(x) = B_{n+1} + (n+1)\int_0^x B_n(t)dt$

ii. $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$

iii. $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$

(ד) רשום את חמשת פולינומי ברנולי הראשונים.

מספרי ברנולי (Bernoulli) למי שלא שמע:
מוגדרים כמקדמים B_n בטור החזקות

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

1. להשוות מקדמים בין x לבין טור מקלורין של המכפלה של אגף ימין עם e^x-1 ולקבל את הקשר
$$\binom{n}{0}B_0+\binom{n}{1}B_1+\binom{n}{2}B_2+\cdots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}=0$$

2. לחשב את המקדמים B_n עבור כמה ערכי n, באמצעות הנ"ל
$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ \ldots$$

3. להוכיח כי $B_{2n+1}=0$, $n=1,2,\ldots$ באמצעות חקירת הפונקציה
$$\frac{x}{e^x+1}+\frac{1}{2}x$$