

תורת ההסתברות 104222 - תרגיל 4

8 בינואר 2017

יש להגיש את התרגיל עד יום שלישי ה- 27 לדצמבר.

1. כל אחד מהמקרים הבאים חשבו את התוחלת והשונות של Y .

(א) Y משתנה מקרי המתפלג אחיד על $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

(ב) $X \sim N(0, 1)$ ו- $Y = |X|$

(ג) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ו- $Y = e^X$. מהו ה- $\alpha \in \mathbb{R}$ המקסימלי כך ש- $E[Y^\alpha] < \infty$.

(ד) פונקציית ההתפלגות של Y היא

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < \sqrt{3} \\ 1 - \frac{3}{a^2} & \sqrt{3} \leq a \end{cases}$$

2. נאמר שמשתנה מקרי מתפלג קושי אם הוא רציף בהחלט ובעל פונקציית צפיפות

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

(א) הוכיחו כי זוהי אכן פונקציית צפיפות של משתנה מקרי.

(ב) מהנקודה $(0, -1) \in \mathbb{R}^2$ במישור מוציאים קרן היוצרת זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה- y , כאשר $\alpha \sim U([- \pi/2, \pi/2])$. תהי X קואורדינטת ה- x של נקודת החיתוך של הקרן עם ציר ה- x . הוכיחו ש- X הוא בעל צפיפות קושי.

(ג) הראו כי התוחלת של X אינה מוגדרת.

3.

(א) תהי $A \subset \{2, 3, 4, 5, 6\}$. משחקים את המשחק הבא: מטילים קובייה עד שמתקבל 1 או מספר מ- A . התוצאה של המשחק היא המספר שהתקבל בהטלה האחרונה. איזו קבוצה A עלינו לבחור על מנת למקסם את התוחלת של תוצאת המשחק?

(ב) חוזרים על המשחק הקודם, אך הפעם, התוצאה של המשחק היא המספר שהתקבל בהטלה האחרונה פחות מספר ההטלות. איזו קבוצה A עלינו לבחור עתה על מנת למקסם את תוחלת התוצאה של המשחק?

4.

(א) יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים ב- $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. הראו כי

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

(ב) מטילים קובייה הוגנת 5 פעמים. תהי X התוצאה הקטנה ביותר מבין חמש התוצאות שהתקבלו. חשבו את התוחלת של X .

5. יהי X מספר הכישלונות עד להצלחה ה- r בסדרה אינסופית של ניסויי ברנולי עם הסתברות הצלחה p .

(א) חשבו את התוחלת של X .

(ב) חשבו את השונות של X .

(ג) היעזרו באי שוויון צ'ביצ'ב על מנת למצוא חסם תחתון עבור $\varepsilon > 0$ להסתברות

$$\mathbf{P}\left(X \in \left[\frac{r(1-p)}{p} - \varepsilon, \frac{r(1-p)}{p} + \varepsilon\right]\right).$$

6. שאלה זאת עוסקת במידת הדיוק של אי שוויון מרקוב

(א) הוכיחו כי לכל $t \geq 1$ קיים משתנה מקרי X המקבל ערכים אי שליליים עם $\mathbf{E}[X] = 1$, כך ש-

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \frac{1}{t}.$$

(ב) יהי $C \geq 1$ קבוע כלשהו. הוכיחו כי לא קיים משתנה מקרי X המקבל ערכים אי שליליים עם $\mathbf{E}[X] = 1$ כך שלכל $t \geq 1$

$$\mathbf{P}(X > t) \geq \frac{1}{Ct}.$$

7. יהי $\alpha > 0$.

(א) תנו דוגמה למשתנה מקרי X (כלומר לפונקציית ההתפלגות של X) כך ש- $\mathbf{E}[X^\alpha] = \infty$ ו- $\beta < \alpha$ לכל $\mathbf{E}[X^\beta] \in \mathbb{R}$.

(ב) עבור $n \in \mathbb{N}$ אי זוגי, תנו דוגמה למשתנה מקרי Y (כלומר לפונקציית ההתפלגות של X) כך ש- $\mathbf{E}[X^\beta] \in \mathbb{R}$ לכל $\beta < n$ ו- $\mathbf{E}[X^n]$ לא קיים.