אלגברה ב – צורת ג'ורדן 2

נושאים:

1. פירוק אופרטור לצורת ג'ורדן
2. תרגילים

פירוק אופרטור לצורת ג'ורדן

משפט (פירוק ג'ורדן): יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי, יהי T אופרטור. נניח כי הפולינום האופייני של T הוא מהצורה $p_T(x)=(x-\lambda_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r)^{n_r}$ עבור $\lambda_i\in F$ לכל $1\le i\le r$ והפולינום המינימלי מהצורה $m_T(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r)^{m_r}$, אזי קיים בסיס ל – V בו ל – T הצגה כמטריצת בלוקים אלכסונית J, כאשר הבלוק J_{ij} הוא מטריצה ריבועית עם λ_i באלכסון הראשי ו – 1 באלכסון מעל הראשי, 0 בשאר המקומות. נסמן ב - $m(J_{ij})$ את הסדר של J_{ij}. לכל λ_i , הבלוקים המתאימים J_{ij} מקיימים:

1. $m(J_{ij})\le m_i$ וקיים j כך שמתקבל שוויון.
2. $\sum_j m(J_{ij})=n_i$
3. מספר הבלוקים J_{ij} הוא הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ_i .
4. מספר הבלוקים J_{ij} מכל סדר אפשרי נקבע בצורה יחידה ע"י T.

דוגמא: נניח כי T הוא אופרטור על מ"ו ממימד 7, עם פולינום אופייני $p_T(x)=(x-2)^4(x-3)^3$ ופולינום מינימלי $m_T(x)=(x-2)^2(x-3)^2$. מה צורות הג'ורדן האפשריות של T?

פתרון: ל – T יש שני ערכים עצמיים – 2 ו – 3. לפי משפט הפירוק של ג'ורדן, אנחנו יודעים שעבור 2 ו – 3 יהיה לפחות בלוק אחד מגודל 2x2 (כי בפולינום המינימלי הם בחזקות 2).נסמן $A_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ *. בפולינום האופייני, 3 מופיע בחזקת 3, לכן ל – 3 יש רק עוד בלוק נוסף, בגודל 1. עבור הערך העצמי 2, יש שתי אפשרויות (עד כדי סדר בסיס):*

א. יש בלוק נוסף בגודל 2x2, במקרה זה $J=\begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *. במקרה זה, הריבוי הגיאומטרי של 2 ושל 3 הוא 2 כ"א.*

ב. יש 2 בלוקים נוספים בגודל 1x1 , במקרה זה $J=\begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *. במקרה זה, הריבוי הגיאומטרי של ע"ע 3 הוא 2 ושל ע"ע 2 הוא 3.*

תרגילים

1. תהיינה $A,B\in M_{nxn}(F)$ בעלות אותו פולינום אופייני $p(x)=(x-c_1)^{d_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_k)^{d_k}$ ואותו פולינום מינימלי. הראה כי אם $d_i\le 3$ לכל $1\le i\le k$, אזי A, B דומות.

פתרון: מספיק להראות שיש לשתי המטריצות אותה צורת ג'ורדן (עד כדי סדר בסיס). נסמן את הפולינום המינימלי של A ו – B ב - $m(x)=(x-c_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_k)^{r_k}$ *. נסתכל על ע"ע* c_i *מסוים. לפי משפט ג'ורדן, כל בלוק המתאים ל -* c_i *הוא מסדר לכל היותר* r_i *וסכום הסדרים הוא* d_i *. כיוון ש –* $d_i\le 3$ *, לכל* c_i *יכול להתקיים אחת מהאפשרויות הבאות:*

א. $r_i=3$ *- במקרה זה, יש בצורת ג'ורדן בלוק אחד, מסדר 3x3 המתאים ל -* c_i *.*

ב. $r_i=2$ - במקרה זה, יש בצורת ג'ורדן בדיוק 2 בלוקים המתאימים ל - c_i - אחד בסדר 2 והשני מסדר 1.
ג. $r_i=1$ - במקרה זה, יש בצורת ג'ורדן בדיוק 3 בלוקים המתאימים ל - c_i מסדר 1 כ"א.
כיוון ש – A,B בעלות אותו פולינום אופייני ופולינום מינימלי, לכל c_i ע"ע של A,B, אחד מ – א' עד ג' מתקיים עבור A אם ורק אם מתקיים עבור B, לכן יש להן את אותה צורת ג'ורדן.

.2

1. תהא N מטריצה נילפוטנטית ממימד 3x3. הוכח כי המטריצה $A=I+\frac{1}{2}N-\frac{1}{8}N^2$ מקיימת $A^2=I+N$.
2. הוכח בעזרת סעיף 1 כי לכל $c\neq 0$, למטריצה $cI+N$ יש שורש ריבועי.
3. הסק כי לכל מטריצה הפיכה מרוכבת 3x3 יש שורש ריבועי.
4. הוכח כי ל – N נילפוטנטית מסדר nxn למטריצה $I+N$ יש שורש ריבועי.

פתרון: כדי לפתור את סעיף 1, מספיק להעלות את A בריבוע ולקבל את התוצאה. סעיף 2 נובע מסעיף 1 כי אפשר להוציא את c החוצה ואז $\frac{1}{c}N$ נילפוטנטית ולכן המטריצה שאנו מחפשים היא בדיוק $\sqrt{c}\cdot\sqrt{I+\frac{1}{c}N}$.
סעיף 3 נובע מסעיף 2, ל – A הפיכה, $A=P^{-1}JP$ ל – J צורת ג'ורדן עם אלכסון שאין בו אפסים (0 אינו ע"ע). לכל בלוק אנו יודעים להוציא שורש, לכן אפשר להוציא שורש למטריצה J (זו תהיה מטריצת הבלוקים כאשר כל בלוק הוא השורש של הבלוק המתאים ב – J), נסמן אותה ב - $\sqrt{J}$ ואז המטריצה שאנו מחפשים היא $P^{-1}\sqrt{J}P$, כי היא תקיים $(P^{-1}\sqrt{J}P)^2=P^{-1}\sqrt{J}PP^{-1}\sqrt{J}P=P^{-1}JP=A$.
כדי לפתור את סעיף 4, צריך להבין מאיפה נמצא הביטוי בסעיף 1.
אנו מחפשים מטריצה A שתקיים $A^2=I+N$, או במילים אחרות, $A=\sqrt{I+N}$. כמובן שאנו לא יודעים להוציא שורש של מטריצה. אנו כן יודעים להציב מטריצה בפולינום כלשהו ולקבל מטריצה אחרת, לכן נרצה למצוא קירוב פולינומיאלי למטריצה $\sqrt{I+N}$ - את זה נעשה כמובן בעזרת טור טיילור.
באופן כללי, טור טיילור של פונקציה f בסביבת x_0 נתון ע"י $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
. נניח שפיתחנו את הפונקציה בסביבת המטריצה A והצבנו B, נקבל $f(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(A)}{n!}(B-A)^n$. אם נדע ש - $B-A$ נילפוטנטית, נדע כי הטור הוא למעשה סופי. במקרה שלנו נרצה $B-A=N$ ומצד שני מחפשים את $f(I+N)$ וש - $f(x)$ תהיה גזירה אינסוף פעמים, לכן במקרה זה אנו מפתחים את $f(x)=\sqrt{1+x}$ בסביבת $x_0=0$, ז"א $B=N\,,A=0$, ונקבל $\sqrt{I+N}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}N^n$ (כאשר $N^0=I$ כמוסכמה באופן דומה למספרים רגילים). הטור כמובן סופי ולכן יש נוסחה (שניתן למצוא מפורשות) לשורש של $I+N$ לכל דרגת נילפוטנטיות של N.