

(1)

א. פונקציה צפיפות משותפת g של ו.א. (X, Y, Z) נתונה ע"י

$$g(x, y, z) = \frac{f(x)f(y) + f(x)f(z) + f(z)f(y)}{6}, \quad x, y, z \in [0, 2],$$

כש- $f(x)$, $x \in [0, 2]$ פונקציה צפיפות של מ.א. מסויים.i. מצאו פונקציה צפיפות משותפת של ו.א. (X, Z) .ii. מצאו $Var X$ כש $f(x) = \frac{1}{4}x^3$, $x \in [0, 2]$

ב. תהי

$$V(x, y) = \frac{G(x) + G(y)}{2}, \quad x, y \in R,$$

כש $G : R \rightarrow [0; 1]$ פונקציה התפלגות של מ.א. מסויים.האם V פונקציה התפלגות משותפת על R^2 ? נמקו!!ג. תהי $G = 1_D$ כש 1_D מציין של תחום $D \subseteq R^n$. עבור איזו תחום D הפונקציה G היא פונקציה התפלגות של וקטור אקראי ב- R^n ?

(2)

פונקציה צפיפות משותפת של מ.א. X ו- Y נתונה ע"י:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2 + \varphi(x)\varphi(y), & (x, y) \in [0, 1/2] \times [1/2, 1] \cup [1/2, 1] \times [0, 1/2] \\ 0, & (x, y) \in [0, 1/2] \times [0, 1/2] \cup [1/2, 1] \times [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x - 1, & x \in [0, 1/2] \\ 4x - 3, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

חשבו את EY ו- $P(X > 2Y)$

(3)

נתון ש- $f_{X,Y,Z}(x, y, z) = 12x^2yz$ כאשר $0 \leq x, y, z \leq 1$. חשבו את $P(X < Y \leq Z)$.

(4)

יהי S_n כמות המוצר שנצרך בשנה ה- n , $n \geq 0$. השתנות הצריכה בזמן

ניתנת ע"י

$$S_n = aS_{n-1} + Z, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 1,$$

כש- $a > 0$ מקדם קבוע ו- Z משתנה אקראי גאומטרי עם פרמטר p .חשבו ES_n ו- $Var S_n$.

(5)

בין N פריטים ישנם N_j פריטים מסוג j , $j = 1, \dots, m$ כך ש $N = N_1 + \dots + N_m$. מוצאים באקראי מדגם של n פריטים ללא החזר. נגדיר m משתנים אקראיים X_1, \dots, X_m כש- X_j זה מספר פריטים מסוג j במדגם.
א. חשבו את פונקצית ההסתברות של וקטור אקראי (X_1, \dots, X_m) .
ב. חשבו גבול של פונקצית ההסתברות כאשר N שואף ל- ∞ כך ש-

$$\frac{N_j}{N} \rightarrow \alpha_j > 0, \quad 1 \leq j \leq m$$

בהצלחה!!