## גורמי אינטגרציה המערבים את שני המשתנים

1. גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x$ בלבד: במקרה זה $\mu(x,y)=\mu(x)$ ולכן $\mu'_y(x,y)=\big(\mu(x)\big)'_y=0$ ונקבל

$$\mu(x,y)\big(P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\big)=\mu'_x(x,y)Q(x,y)-\mu'_y(x,y)P(x,y)$$
$$\mu(x)\big(P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\big)=\mu'(x)Q(x,y)$$
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

שימו לב כי צד שמאל הוא פונקציה של $x$ בלבד ולכן גם צד ימין חייב להיות פונקציה של $x$ בלבד. כלומר תנאי לקיום גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x$ בלבד הוא שהביטוי

$$\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

יהיה פונקציה של $x$ בלבד. במקרה זה נקבל

$$\ln|\mu(x)|=\int\left(\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}\right)dx$$
$$\mu(x)=\exp\left(\int\left(\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}\right)dx\right).$$

לסיכום, למד"ר $Pdx+Qdy=0$ יש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $x$ בלבד בתנאי שהביטוי $\frac{P'_y-Q'_x}{Q}$ הוא פונקציה של $x$ בלבד ובמקרה זה גורם אינטגרציה הוא

$$\mu(x)=\exp\left(\int\left(\frac{P'_y-Q'_x}{Q}\right)dx\right).$$

2. גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $y$ בלבד: במקרה זה $\mu(x,y)=\mu(y)$ ולכם $\mu'_x(x,y)=\big(\mu(y)\big)'_x=0$ ושיקולים דומים מביאים למסקנה הבאה:
למד"ר $Pdx+Qdy=0$ יש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של $y$ בלבד בתנאי שהביטוי $\frac{Q'_x-P'_y}{P}$ הוא פונקציה של $y$ בלבד ובמקרה זה גורם אינטגרציה הוא

$$\mu(y)=\exp\left(\int\left(\frac{Q'_x-P'_y}{P}\right)dy\right).$$

3. גורמי אינטגרציה שהם פונקציה של ביטוי המערב את שני המשתנים : במקרה זה נתונה פונקציה של שני משתנים $z(x,y)$ ואנו מחפשים פונקציה של משתנה אחד $\mu(z)$

כך ש־$\mu\big(z(x,y)\big)$ הוא גורם אינטגרציה עבור המד"ר. נשים לב כי במקרה זה

$$\big(\mu(z(x,y))\big)'_x = \mu'(z(x,y))z'_x(x,y)$$
$$\big(\mu(z(x,y))\big)'_y = \mu'(z(x,y))z'_y(x,y)\ .$$

ואחרי חישובים נקבל כי

$$\mu(z(x,y))\big(P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)\big) = \mu'(z(x,y))\big(z'_x(x,y)Q(x,y) - z'_y(x,y)P(x,y)\big)$$
$$\frac{\mu'(z(x,y))}{\mu(z(x,y))} = \frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{z'_x(x,y)Q(x,y) - z'_y(x,y)P(x,y)}$$

ולכן $\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{z'_x(x,y)Q(x,y)-z'_y(x,y)P(x,y)}$ חייב להיות פונקציה של $z(x,y)$ בלבד.

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{P'_y - Q'_x}{z'_xQ - z'_yP}$$
$$\ln\mu(z) = \int \frac{P'_y - Q'_x}{z'_xQ - z'_yP}dz$$
$$\mu(z) = \exp\int \frac{P'_y - Q'_x}{z'_xQ - z'_yP}dz$$

**תרגיל:** $ydx - (x^2+y^2+x)dy = 0$
מצאו גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^2+y^2)$ ופתרו את במד"ר.
**פתרון:** במקרה זה $z(x,y) = x^2+y^2$ ולכן

$$P'_y(x,y) = 1$$
$$Q'_x(x,y) = -2x-1 = -(2x+1)$$
$$z'_x(x,y) = 2x$$
$$z'_y(x,y) = 2y\ .$$

נציב לנוסחא ונקבל

$$\mu(z) = \exp\int \frac{P'_y - Q'_x}{z'_xQ - z'_yP}dz = \exp\int \frac{1+2x+1}{2x(-x^2-y^2-x)-2y^2}dz =$$
$$= \exp\int \frac{2x+2}{-2x(x^2+y^2)-2(x^2+y^2)}dz = \exp\int \frac{2x+2}{-(2x+2)(x^2+y^2)}dz =$$
$$= \exp\int -\frac{1}{(x^2+y^2)}dz = \exp\int -\frac{1}{z}dz = \frac{1}{z}$$

ולכן $\mu(x^2+y^2)=\frac{1}{x^2+y^2}$ ג"א עבור המד"ר. לכן המד"ר

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}dy=0$$

מדוייקת (בידקו!).

$$\int\frac{y}{x^2+y^2}dx=\arctan\frac{x}{y}+g(y)$$
$$\int-\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}dy=-y+\arctan\frac{x}{y}+h(x)\ .$$

וחישובים פשוטים מראים כי פונקציית הפוטנציאל היא

$$F(x,y)=\arctan\frac{x}{y}-y+c$$

ולכן הפתרון הכללי בצורה סתומה הוא

$$\arctan\frac{x}{y}-y=c\ .$$