תירגול מס. 9

שיטות אינטגרציה

א אינטגרלים בסיסיים

<u>אינטגרציה בחלקים:</u> $\int U\cdot V' = U\cdot V - \int U'\cdot V$ דוגמאות:

א. $$\int \underbrace{x}_{v'}\cdot\underbrace{\ln x}_{u}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

ב. $$\int \ln x\,dx = \int\underbrace{1}_{v'}\cdot\underbrace{\ln x}_{u}\,dx = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

ג. $$\int\underbrace{e^x}_{u}\cdot\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx = -e^x\cos x+\int e^x\cdot\cos x\,dx$$

על האינטגרל האחרון נבצע שוב אינטגרציה בחלקים עם: $u=e^x$ ו- $v'=\cos x$ ונקבל:

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = -e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$

כלומר:

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin x\,dx$$

וע"י העברת אגפים: (לא לשכוח להוסיף בסוף קבוע)

$$\int e^x\sin x\,dx = \tfrac12 e^x(\sin x-\cos x)+C$$

<u>אינטגרל של "נגזרת לוגריתמית"</u> $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$ דוגמאות:

א.

$$\int\frac{x^4}{x^5-9}\,dx = \tfrac15\int\frac{5x^4}{x^5-9}\,dx = \tfrac15\ln|x^5-9|+C$$

ב.

$$\int\tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|+C$$

<u>הצבות</u> יהי $0<a$ קבוע חיובי, נחשב: $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ו- $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

א.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{\frac1a\cdot dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

נציב: $t=\frac{x}{a}$ $\Leftarrow$ $dt=\frac1a\cdot dx$ ונקבל:

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

כלומר:

$$(a>0)\ ,\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

ב.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} \;=\; \int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} \;=\; \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}\cdot dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

נציב: $t=\frac{x}{a} \quad \Leftarrow \quad dt=\frac{1}{a}\cdot dx$ ונקבל:

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \tfrac{1}{a}\arctan(t)+C \;=\; \tfrac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

כלומר:

$$(a>0)\ , \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} \;=\; \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

<u>תרגיל 1</u> לחשב:

(א) $\int \arcsin(x)\,dx$ (ב) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (ג) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$

<u>פתרון:</u>

א. נתחיל באינטגרציה בחלקים:

$$\int \underbrace{1}_{v'}\cdot\underbrace{\arcsin(x)}_{u} \;=\; x\cdot\arcsin(x)-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

את האינטגרל האחרון מחשבים בעזרת ההצבה: $t=1-x^2 \quad \Leftarrow \quad dt=-2x\cdot dx$ מקבלים:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; -\int \frac{-2x\cdot dx}{2\sqrt{1-x^2}} \;\overset{\text{הצבה}}{=}\; -\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} \;=\; -\sqrt{t}+C \;=\; -\sqrt{1-x^2}+C$$

כך שבסה"כ:

$$\int \arcsin(x)\,dx \;=\; x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$$

ב. נציב $x=t^2 \quad \Leftarrow \quad dx=2t\cdot dt$ נקבל:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int e^t\cdot 2t\,dt$$

נמשיך באינטגרציה בחלקים:

$$\int \underbrace{e^t}_{v'}\cdot\underbrace{2t}_{u}\,dt \;=\; 2te^t-2\int e^t\,dt \;=\; 2te^t-2e^t+C$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

ג. כדי להיפטר מכל השורשים נציב: $x=t^6 \quad \Leftarrow \quad dx=6t^5\cdot dt$ נקבל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} \;=\; \int \frac{6t^5\cdot dt}{t^3(1+t^2)} \;=\; 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \;=\; 6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt \;=$$

$$=\; 6\Big(t-\arctan(t)\Big)+C \;=\; 6\Big(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\Big)+C$$

ב הצבות שימושיות

א. עבור ביטוי שמורכב מ- x ו- $\sqrt{a^2-x^2}$, כדאי לנסות את ההצבה: $x=a\sin t$.

ב. עבור ביטוי שמורכב מ- x ו- $\sqrt{a^2+x^2}$, כדאי לנסות את ההצבה: $x=a\tan t$.

ג. עבור ביטוי שמורכב מ- x ו- $\sqrt{x^2-a^2}$, כדאי לנסות את ההצבה: $x=\frac{a}{\cos t}$.

<u>תרגיל 2</u> לחשב: (א) $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$ (ב) $\int\sqrt{-6x-x^2}\,dx$

<u>פתרון</u>

א. ההצבה המתאימה היא: $x=3\sin t \quad\Leftarrow\quad dx=3\cos t\cdot dt$, ובעזרתה נקבל:

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx \;=\; \int\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt \;=\; 9\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$$

מתקיים: $\sqrt{\cos^2 t} \;=\; \sqrt{1-\sin^2 t}$ והיינו רוצים להחליף את זה פשוט ב- $\cos t$ ולקבל: $9\int\cos^2 t\,dt$

האם זה מותר? - אמנם באופן כללי $\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|\neq\cos x$, אבל,

1. הקטע הרלוונטי עבור האנטגרל $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$ הוא $-3\le x\le 3$,
כך שבהצבה: $x=3\sin t$ אפשר לדרוש למשל:

$$\frac{\pi}{2}\;\le\; t\;\le\;\frac{\pi}{2} \qquad \Big(-3\;\le\;3\sin t\;\le\;3 \quad\Leftarrow\Big)$$

ואז:

$$-\tfrac{\pi}{2}\;\le\;t\;\le\;\tfrac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos t\;\ge\;0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\cos^2 t}\;=\;|\cos t|\;=\;\cos t \quad \checkmark$$

2. אפשרות אחרת שנכונה תמיד, היא לבצע מה שנוח לנו, ולבדוק את התוצאה הסופית ע"י גזירה.

נמשיך אם כן ונחשב:

$$9\int\cos^2 t\,dt$$

בעזרת הזהות: $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ נקבל:

$$=\;\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\;dt\;=\;\frac{9}{2}\left(t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

נחזור למשתנה המקורי[1]

$$x\;=\;3\sin t \quad\Rightarrow\quad t\;=\;\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

אפשר לסיים כאן, אבל כדי להימנע מהביטוי המסורבל

$$\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\arcsin\left(2\sin\frac{x}{3}\right)$$

נשים לב ש-

$$\tfrac{1}{2}\sin 2t\;=\;\sin t\cos t\;=\;\sin(t)\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}$$

ומכיוון ש-

$$x\;=\;3\sin t \quad\Rightarrow\quad \sin t\;=\;\frac{x}{3}$$

אז:

$$\tfrac{1}{2}\sin 2t\;=\;\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\;=\;\frac{x}{9}\sqrt{9-x^2}$$

כך שבסה"כ:

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx\;=\;\frac{9}{2}\left(\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x}{9}\sqrt{9-x^2}\right)+C$$

---

[1]גם כאן אנו למעשה משתמשים בבחירה $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ כי בקטע זה יש ל- $\sin t$ פונקציה הפכית- arcsin.

ב. כדי להביא את האנטגרל $\int\sqrt{-6x-x^2}\,dx$ לצורה שמתאימה לאחת ההצבות המומלצות, נבצע השלמה לריבוע באופן הבא:

$$\int\sqrt{-6x-x^2}\,dx \;=\; \int\sqrt{-(x^2+6x)}\,dx \;=\; \int\sqrt{-\Big((x^2+6x+9)-9\Big)}\,dx \;=$$

$$=\;\int\sqrt{-\Big((x+3)^2-9\Big)}\,dx \;=\; \int\sqrt{9-(x+3)^2}\,dx$$

נציב:

$$dx \;=\; du \qquad \Leftarrow \qquad u \;=\; x+3$$

ונקבל:

$$=\;\int\sqrt{9-u^2}\,du$$

ואת זה חישבנו בסעיף א'.

<u>שאלה</u> איך לחשב את האינטגרל: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$, $(b\neq 0)$

- אפשר להפריד לשני מקרים: $b\;=\;\lambda^2\;>\;0$ ו- $b\;=\;-\lambda^2\;<\;0$ ולטפל בכל אחד מהם בנפרד בעזרת ההצבות: ב' ו- ג' שהוזכרו למעלה. אבל יש הצבה נוספת שמתאימה יותר:

<u>הצבת אוילר</u> כדי לחשב

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}\ , \qquad (b\neq 0)$$

נציב:

$$t \;=\; \sqrt{x^2+b}+x$$

יתקיים:

$$dt \;=\; \frac{x+\sqrt{x^2+b}}{\sqrt{x^2+b}}\cdot dx \;=\; \frac{t}{\sqrt{x^2+b}}\cdot dx$$

ומכאן ש-

$$\frac{dt}{t} \;=\; \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$$

נקבל:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} \;=\; \int\frac{dt}{t} \;=\; \ln|t|+C \;=\; \ln\left|\sqrt{x^2+b}+x\right|+C$$

<u>תרגיל 3</u> לחשב את האינטגרל: $\displaystyle\int\sqrt{x^2+b}\cdot dx$, $(b\neq 0)$

רמז: להתחיל באינטגרציה בחלקים.

<u>פתרון:</u> עבור $V=\sqrt{x^2+b}$ ו- $U'=1$, נקבל ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$\int 1\cdot\sqrt{x^2+b}\cdot dx \;=\; x\sqrt{x^2+b}-\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+b}}\,dx \;=$$

$$=\;x\sqrt{x^2+b}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+b}}\,dx \;=\; x\sqrt{x^2+b}-\int\frac{(x^2+b)-b}{\sqrt{x^2+b}}\,dx \;=$$

$$=\;x\sqrt{x^2+b}-\int\sqrt{x^2+b}\cdot dx \;+\; b\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$$

ע"י העברת אגפים נקבל:

$$2\int\sqrt{x^2+b}\cdot dx \;=\; x\sqrt{x^2+b} \;+\; b\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$$

האינטגרל האחרון הוא בדיוק האינטגרל שחישבנו בעזרת הצבת אוילר. כלומר:

$$\int\sqrt{x^2+b}\cdot dx \;=\; \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+b}+b\cdot\ln\left|\sqrt{x^2+b}+x\right|\right)+C \qquad (b\neq 0)\ ,$$

על הסעיף הבא אפשר לדלג

ג נוסחאות נסיגה

<u>נוסחת נסיגה עבור:</u> $\int \sin^n x\,dx$ נתחיל באינטגרציה בחלקים:

$$\int \sin^n x\,dx \;=\; \int \underbrace{\sin x}_{v'} \cdot \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\,dx \;=\; -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \int \cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\,dx$$

באינטגרל האחרון נחליף את $\cos^2 x$ ב- $1-\sin^2 x$:

$$\int \cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\,dx \quad = \quad (n-1)\cdot \int \left(1-\sin^2 x\right)\cdot \sin^{n-2} x\,dx$$

כך שבסה"כ, (כאשר נפרק אינטגרל זה לסכום של שני אינטגרלים) נקבל:

$$\int \sin^n x\,dx \quad = \quad -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \;+\; (n-1)\cdot \int \sin^{n-2} x\,dx \;-\; (n-1)\cdot \int \sin^n x\,dx$$

ומכאן ע"י העברת אגפים מחלצים את האינטגרל המבוקש: $\int \sin^n x\,dx$, ומקבלים את נוסחת הנסיגה:

$$\int \sin^n x\,dx \quad = \quad -\tfrac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x \quad + \quad \tfrac{n-1}{n}\cdot \int \sin^{n-2} x\,dx \quad , \qquad n \;=\; 2,3,\ldots$$

ולה צריך להוסיף את שני תנאי ההתחלה:

$$\int \sin^0 x\,dx \quad = \quad \int dx \quad = \quad x$$

וכן:

$$\int \sin^1 x\,dx \quad = \quad -\cos x$$

(ולא לשכוח להוסיף קבוע אינטגרציה בסוף).

<u>נוסחת נסיגה עבור:</u>

$$I_k \quad = \quad \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^k}\ , \qquad k \;=\; 1,2,3,\ldots \quad ; \quad a>0$$

נוכיח את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} I_1 \;=\; \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \\[2ex] I_{k+1} \;=\; \frac{1}{2ka^2}\cdot \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^k} \;+\; \frac{2k-1}{2k\cdot a^2} I_k \end{cases}$$

באינטגרל

$$I_1 \;=\; \int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

כבר טיפלנו.
כדי להוכיח את הקשר הרקורסיבי נרשום:

$$I_k \quad = \quad \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\left(x^2+a^2\right)^{-k}}_{v}\,dx$$

נמשיך באינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$= \quad \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^k} \;-\; \int x \cdot \frac{-k}{\left(x^2+a^2\right)^{k+1}} \cdot 2x\,dx \quad = \quad \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^k} \;+\; 2k \cdot \int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{k+1}}\,dx$$

נחשב את האינטגרל האחרון:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{k+1}}\,dx \quad = \quad \int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{k+1}}\,dx \quad = \quad I_k \;-\; a^2 \cdot I_{k+1}$$

בסה"כ:

$$I_k \quad = \quad \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^k} \;+\; 2k \cdot \left(I_k \;-\; a^2 \cdot I_{k+1}\right)$$

ומכאן מקבלים את קשר הרקורסיה.

ד אינטגרציה של פונקציה רציונלית

<u>תרגיל 4</u> לחשב את האינטגרל: $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$

<u>פתרון:</u> זה אינטגרל של פונקציה רציונלית. מכיוון שמעלת המונה $\geq$ מעלת המכנה, נתחיל בחלוקת פולינומים.
(אפשר כמובן לבצע "חילוק ארוך" של פולינומים, אבל המקרה הזה פשוט)

$$\frac{x^4}{x^3-1} \;=\; \frac{x\cdot\big(x^3-1\big)+x}{x^3-1} \;=\; x+\frac{x}{x^3-1}$$

כלומר:

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx \quad=\quad \int x\,dx \;+\; \int \frac{x}{x^3-1}\,dx \quad=\quad \frac{x^2}{2}\;+\;\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$$

נעבור לחישוב האינטגרל האחרון, שהוא אינטגרל של פונקציה רציונלית שבו מעלת המונה $<$ מעלת המכנה:

<u>פירוק "לשברים פשוטים":</u>
נציג את הפולינום במכנה כמכפלה של גורמים לינאריים וגורמים ריבועיים אי-פריקים.
כלומר נביא את הביטוי כולו לצורה:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \frac{P(x)}{A\cdot\underbrace{(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{k_m}}_{\text{גורמים לינאריים}}\cdot\underbrace{\big(x^2+p_1x+q_1\big)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\big(x^2+p_sx+q_s\big)^{l_s}}_{\text{גורמים ריבועיים אי פריקים}}} \qquad (1)$$

במקרה שלנו, הפולינום במכנה מתפרק למכפלה של גורם לינארי וגורם ריבועי אי-פריק (שניהם עם ריבוי $=1$)

$$Q(x) \;=\; x^3-1 \;=\; \underbrace{(x-1)}_{\text{גורם לינארי}}\cdot\underbrace{\big(x^2+x+1\big)}_{\text{גורם ריבועי אי-פריק}}$$

כלומר:

$$\frac{x}{x^3-1} \;=\; \frac{x}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$$

שימו לב שהפולינום במכנה יתפרק תמיד למכפלת גורמים לינאריים וגורמים ריבועיים אי-פריקים
(אם כי מציאת הפירוק עלולה להיות קשה).

<u>טענה</u> ביטוי רציונלי מהצורה (1) מתפרק לסכום של "שברים פשוטים" כאשר:

- כל גורם לינארי מהצורה $(x-a)^k$ במכנה של (1), תורם לסכום k המחוברים מהצורה:

$$\frac{b_1}{x-a} \;+\; \frac{b_2}{(x-a)^2} \;+\; \ldots \;+\; \frac{b_k}{(x-a)^k}$$

- כל גורם ריבועי אי-פריק מהצורה $\big(x^2+px+q\big)^l$ במכנה של (1), תורם לסכום l מחוברים מהצורה:

$$\frac{c_1x+d_1}{x^2+px+q} \;+\; \frac{c_2x+d_2}{\big(x^2+px+q\big)^2} \;+\; \ldots \;+\; \frac{c_lx+d_l}{\big(x^2+px+q\big)^l}$$

<u>חזרה לדוגמא שלנו:</u> קיימים גורם לינארי אחד וגורם ריבועי אחד, שניהם מריבוי אחד, ולכן הפירוק יהיה מהצורה:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} \;=\; \frac{a}{(x-1)}+\frac{bx+c}{(x^2+x+1)}$$

כדי למצוא את הקבועים a , b ו- c, נעשה מכנה משותף באגף ימין:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} \;=\; \frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$$

ונשווה מקדמים של חזקות זהות של x במונים של שני האגפים:

$$\begin{array}{lcccl} x^0 & : & 0 & = & a-c \\ x^1 & : & 1 & = & a-b+c \\ x^2 & : & 0 & = & a+b \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad a \;=\; c \;=\; \frac{1}{3}\,, \quad b \;=\; -\frac{1}{3}$$

כלומר, קיבלנו את הפירוק הבא לסכום של שני שברים יסודיים:

$$\frac{x}{x^3-1} \quad = \quad \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x-1} \;+\; \frac{-x+1}{x^2+x+1}\right)$$

<u>נחשב את האינטגרל של כ"א מהם בנפרד:</u>

- הראשון מיידי:

$$\int \frac{dx}{x-1} \quad = \quad \ln|x-1|$$

(את קבוע האינטגרציה נוסיף בסוף).

- את האינטגרל השני:

$$\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

מחשבים באופן הבא: ראשית נציג את המונה כניגזרת של המכנה + תיקון:

$$\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx \quad = \quad \int \frac{-\frac{1}{2}\cdot\overbrace{(2x+1)}^{\text{נגזרת המכנה}}+\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,dx$$

ונפרק לסכום של שני אינטגרלים:

$$= \; -\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \;+\; \frac{3}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+x+1}\,dx$$

וכעת, נחשב כ"א מהם בנפרד: הראשון הוא אינטגרל של "נגזרת לוגריתמית" (המונה הוא נגזרת של המכנה)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \quad = \quad \ln\left|x^2+x+1\right| \quad = \quad \ln\left(x^2+x+1\right)$$

(הביטוי הריבועי האי-פריק הוא תמיד חיובי, ולכן נפטרנו מהערך המוחלט).
באינטגרל השני, נתחיל מהשלמה לריבוע:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} \quad = \quad \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

וכעת, אם נציב $t = x+\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $dt = dx$ ונסמן: $a^2 = \frac{3}{4}$ נקבל את האינטגרל הבסיסי:

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} \quad = \quad \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

בזאת מסתיים התהליך, כשבסה"כ (אחרי איסוף כל התוצאות):

$$\int \frac{x^4}{x^3+1}\,dx \quad = \quad \frac{x^2}{2} \;+\frac{1}{3}\ln|x-1| \;-\; \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) \;+\; \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \;+\; C$$

ה סיכום שיטת האינטגרציה של פונקציה רציונלית

נתון אינטגרל $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ נניח להלן ש- מעלת $P(x)$ $>$ מעלת $Q(x)$
(אם זה אינו המצב אז מבצעים חלוקת פולינומים).

מפרקים את הביטוי $\frac{P(x)}{Q(x)}$ לסכום של שברים פשוטים מהצורות:

(א) $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ (ב) $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}$ (x^2+px+q - פולינום אי-פריק)

- אינטגרציה של שבר פשוט מהסוג הראשון היא פשוטה: ע"י ההצבה $u = x-\alpha$ מקבלים:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}\,dx \quad = \quad a\cdot\int\frac{du}{u^k} \quad = \quad \begin{cases} a\cdot\ln|x-\alpha| & , \quad k=1 \\ \frac{a}{1-k}\cdot u^{1-k} & , \quad k>1 \end{cases}$$

- שבר פשוט מהסוג השני מציגים תחילה כ-

$$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m} \quad = \quad \frac{B\cdot\overbrace{(2x+p)}^{(x^2+px+q)'}+C}{(x^2+px+q)^m} \quad = \quad B\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m} + C\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^m}$$

הקבועים B ו- C הם (אין צורך לזכור בע"פ):

$$B = \frac{b}{2} \quad , \quad C = c-\frac{bp}{2}$$

צריך לכן לטפל בשני אינטגרלים:

1. בראשון מציבים: $u = x^2+px+q \;\Leftarrow\; du = (2x+p)dx$ ומקבלים את האנטגרל המידי הבא:

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx \quad = \quad \int\frac{du}{u^m}$$

2. בשני מתחילים מהשלמה לריבוע:

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^m} \quad = \quad \frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2+\beta^2\right)^m}$$

כאשר (לא צריך לזכור בע"פ):

$$\beta^2 = q-\frac{p^2}{4} > 0$$

וע"י הצבה: $u = x+\frac{p}{2}$ מקבלים את האינטגרל:

$$I_m \quad = \quad \int\frac{du}{(u^2+\beta^2)^m}$$

אם $m=1$, זה אינטגרל בסיסי:

$$I_1 = \int\frac{du}{x^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\cdot\arctan\left(\frac{u}{\beta}\right)$$

ולמען השלמות נעיר שאם $m>1$, אז קיימת נוסחת נסיגה (שהוצגה בסעיף ד).

ו אינטגרלים טריגונומטרים

בסעיף זה נציג כמה שיטות לפתרון של אינטגרלים מהצורה: $\int R\left(sinx, cosx\right)\ dx$

כאשר הביטוי $R\left(sinx, cosx\right)$ מייצג ביטוי רציונלי שמורכב מ- $\sin x$, ומ- $\cos x$. למשל:

$$\int \frac{\cos^2 x + 5\sin x}{\sin x \cdot \cos x}\, dx \quad \text{או} \quad \int \frac{\cos x}{1+\tan x}\, dx$$

הרעיון הוא להעביר, ע"י הצבה מתאימה, את האינטגרל הנתון לאינטגרל של פונקציה רציונלית, ולטפל באינטגרל האחרון בשיטה שהוצגה בסעיף ה. קיימות שלוש הצבות:

1. ההצבה הראשונה מיידית:
   - באינטגרל מהצורה: $\int R\left(\cos x\right) \cdot \sin x\, dx$ מציבים: $t = \cos x$
   - ובאינטגרל מהצורה: $\int R\left(\sin x\right) \cdot \cos x\, dx$ מציבים: $t = \sin x$

דוגמא: נחשב: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ נביא אותו לצורה $\int R\left(\cos x\right) \cdot \sin x\, dx$ ע"י כך שנרשום:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad = \quad \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx \quad = \quad \int \underbrace{\left(\frac{1}{1-\cos^2 x}\right)}_{R(\cos x)} \cdot \sin x\, dx$$

ע"י ההצבה $t \ = \ \cos x \quad \Leftarrow \quad dt \ = \ -\sin x \cdot dx$ נקבל:

$$= \int \frac{-dt}{1-t^2} \quad = \quad \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

האינטגרל האחרון הוא סכום של שני שברים יסודיים, והתוצאה היא:

$$= \ \tfrac{1}{2} \cdot \ln|t-1| \ - \ \tfrac{1}{2} \cdot \ln|t+1| \ + \ C \ = \ \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \ + \ C$$

וכשנחזור למשתנה המקורי, $t = \cos x$, נוכל להיפטר מהערך המוחלט ולקבל (בדקו):

$$= \ \tfrac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) \ + \ C$$

2. אם $\sin x$ ו- $\cos x$ מופיעים רק עם חזקות זוגיות (ו- $\tan x$ עם חזקות כלשהן),

   כדאי לנסות את ההצבה: $t = \tan x$.

בהצבה:	$t \ = \ \tan x$	מתקיים:
$\sin^2 x \ = \ \frac{t^2}{1+t^2}$	$\cos^2 x \ = \ \frac{1}{1+t^2}$	$dx \ = \ \frac{dt}{1+t^2}$

הוכחה: בעזרת הזהות:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \ = \ \frac{\sin^2 x + \cos^x}{\cos^2 x} \ = \ 1 + \tan^2 x$$

מקבלים:

$$dt \ = \ \frac{dx}{\cos^2 x} \ = \ \left(1+\tan^2 x\right) dx \ = \ \left(1+t^2\right) dx \quad \Rightarrow \quad dx \ = \ \frac{dt}{1+t^2}$$

וכן:

$$\cos^2 x \ = \ \frac{1}{1+\tan^2 x} \ = \ \frac{1}{1+t^2} \quad \text{ומכאן גם:} \quad \sin^2 x \ = \ 1 - \cos^2 x \ = \ \frac{t^2}{1+t^2}$$

דוגמא: נחשב $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$

מכיון שמופיעות רק חזקות זוגיות של - $\cos x$, נציב: $t = \tan x \Leftarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

כאמור: $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$ ולכן נקבל:

$$= \int \left(1+t^2\right)\, dt = t + \tfrac{1}{3}t^3 + C = \tan x + \tfrac{1}{3}\tan^3 x + C$$

3. ההצבה הכללית ביותר שמתאימה לאינטגרל מהצורה: $\int R\left(\sin x, \cos x\right)\, dx$ היא

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \Leftarrow t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(הצבה זו מטפלת גם בשני המקרים הקודמים, אבל בד"כ יותר פשוט להשתמש עבורם בהצבות הקודמות).

בהצבה:	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	מתקיים:
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dt$

הוכחה: בעזרת הזהות:

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + t^2$$

מקבלים:

$$dt = \tfrac{1}{2}\left(1+t^2\right)\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\cdot dx$$

וכן:

$$\cos x = 2\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - 1 = 2\cdot\tfrac{1}{1+t^2} - 1 = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) = 2\underbrace{\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)}_{1/(1+t^2)}\tan\left(\tfrac{x}{2}\right) = \tfrac{2t}{1+t^2}$$

דוגמא: נחזור ונחשב את האינטגרל מהדוגמא הראשונה: $\int \frac{dx}{\sin x}$ הפעם בעזרת ההצבה האחרונה:

$$\tfrac{1}{\sin x} = \tfrac{1+t^2}{2t} \quad , \quad dx = \tfrac{2}{1+t^2}\cdot dt \Leftarrow t = \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

נקבל:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$