15/11/2016

תרגול 4

תרגיל:

יהא (X,τ) מרחב טופולוגי, ויהי (A,τ') תת מרחב שלו. תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-A, אזי a_n מתכנסת לגבול $L\in A$ ב-(A,τ') אם ורק אם היא מתכנסת לגבול L גם ב-(X,τ).

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ ב-(X,τ). תהא V קבוצה פתוחה ב-(A,τ'), כך ש-$L\in V$. אזי קיימת קבוצה פתוחה U ב-(X,τ) כך ש-$V=U\cap A$ (על פי הגדרת תת מרחב טופולוגי).

U קבוצה פתוחה ב-(X,τ) ולכן "כמעט" כל איברי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נמצאים ב-U, כי $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ ב-(X,τ). אך הסביבה V כולה ב-A ולכן נסיק כי גם איברי הסדרה נמצאים ב-A ומכאן שמתקיים, על פי הגדרה, $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ ב-(A,τ').

($\Rightarrow$) נניח כי $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ ב-(A,τ') ותהא U קבוצה פתוחה כלשהי ב-(X,τ') המכילה את L. אזי הקבוצה $V=U\cap A$, היא קבוצה פתוחה ב-(A,τ') המכילה את L. לכן כמעט כל איברי הסדרה נמצאים ב-V, אך מיחסי הכלה, קרי, משום ש-$V\subset U$, נקבל כי כמעט כל איברי הסדרה נמצאים ב-U ולכן מתקיים $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ ב-(X,τ).

תרגיל:

יהא (X,τ) מרחב טופולוגי ויהא (A,τ') תת מרחב שלו. הוכיחו, כי לכל קבוצה $Y\subseteq A$ מתקיים – Y סגורה ב-(A,τ') אם ורק אם קיימת קבוצה סגורה B ב-(X,τ) כך ש-$Y=B\cap A$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי קיימת קבוצה $B\subset X$ סגורה ב-(X,τ) כך ש-$Y=B\cap A$. נראה כי Y סגורה ב-(A,τ') - כלומר נראה כי $A\setminus Y$ פתוחה ב-(A,τ'). נשים לב כי:

$$A\setminus Y=A\setminus(B\cap A)=A\setminus B=(X\setminus B)\cap A$$

אך B סגורה ב-(X,τ), ולכן $X\setminus B$ פתוחה ב-(X,τ). לכן, בפרט $A\setminus Y$ פתוחה ב-(A,τ') ולכן Y סגורה ב-(A,τ').

($\Rightarrow$) נניח כי Y סגורה ב-(A,τ'). אזי מתקיים $A\setminus Y$ פתוחה ב-(A,τ'). לכן קיימת קבוצה פתוחה U ב-(X,τ) כך שמתקיים $A\setminus Y=U\cap A$. כמו כן, נשים לב כי מתקיים:

$$Y=A\setminus(A\setminus Y)=A\setminus(U\cap A)=A\setminus U=(A\setminus U)\cap A=(X\setminus U)\cap A$$

אך $X\setminus U$ היא קבוצה סגורה ב-(X,τ) ולכן U פתוחה ב-(X,τ). לכן נסמן $B=X\setminus U$ וקיבלנו את הנדרש.

תרגיל:

הוכיחו כי המרחב המטרי $(\mathbb{R}^n,d_{max})$ הוא מרחב מטרי ספרבילי.

הוכחה:

נתבונן בקבוצה $\mathbb{Q}^n\subseteq\mathbb{R}^n$, היא כמובן קבוצה בת מניה. נראה כי קבוצה זו צפופה ב-$\mathbb{R}^n$. יהא $x_0\in\mathbb{R}^n$ ויהא $B(x_0,r)$ כדור פתוח ברדיוס r עם המרכז ב-x_0 כלשהו ב-$(\mathbb{R}^n,d_{max})$. נוכיח כי בהכרח קיים $q\in\mathbb{Q}^n\cap B(x_0,r)$ על ידי כך שנזכור, כי הראינו בשיעור הקודם כי מתקיים:

$$B(x_0,r)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| \forall 1\le i\le n \quad \left|x_i-x_{0_i}\right|<r\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \middle| \begin{matrix}\forall 1\le i\le n\\ x_{0_i}-r<x_i<x_{0_i}+r\end{matrix}\right\}$$

אך משאלה 3 בתרגיל בית 2, נסיק כי בכל קטע פתוח שקצותיו ממשיים שונים קיים מספר רציונלי, לכן לכל $1 \leq i \leq n$ נוכל לבחור $q_i \in \left(x_{0_i} - r, x_{0_i} + r\right)$ רציונלי ונגדיר את האיבר $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ ונקבל כי $q \in \mathbb{Q}^n \cap B(x_0, r)$

ולכן $\mathbb{Q}^n$ צפופה ב-$(\mathbb{R}^n, d_{max})$, והיא בת מניה, ולכן מרחב זה אכן ספרבילי כנדרש.

<u>תרגיל:</u>

תנו דוגמה למרחב מטרי (X, d) כך שבו סגור של כדור פתוח $B(x_0, r)$ הוא אינו כדור סגור $B[x_0, r]$ וכך שפנים של כדור סגור $B[x_0, r]$ אינו כדור פתוח $B(x_0, r)$. (זו תכונה שלא מתאפשרת ב-$\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית).

<u>פתרון:</u>

נתבונן במרחב המטרי הבא:

$$X = \{a, b, c\} \quad \begin{matrix} d(a, b) = 3 \\ d(b, c) = 4 \\ d(a, c) = 5 \end{matrix}$$

נבחר כדור פתוח עם המרכז ב-a וברדיוס 3. נסמנו $B(a, 3)$ ונקבל כי:

$$B(a, 3) = \{a\} \to \overline{B(a, 3)} = \{a\}$$

היות וכל יחידון הוא קבוצה סגורה, נשים לב כי היות ו-$B[a, 3] = \{a, b\}$ כי בהכרח $\overline{B(a, 3)} = B(a, 3)$ כלומר זהו אכן כדור פתוח כנדרש.

כמו כן, $B[a, 3]$ הוא קבוצה פתוחה ב-(X, d) (כי המשלים שלה קבוצה סגורה ב-(X, d)), ולכן הפנים של קבוצה זו הוא הכדור הסגור $B[a, 3]$ שהוא אינו כדור פתוח.