קומבינטוריקה – הרצאה 2# (31/03/2016)

המקדמים הבינומיים ותכונותיהם

ניזכר בנוסחאות:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \qquad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ times}} = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y + \cdots$$

כאשר המקדם נקבע בצורה קומבינטורית – המקדם של $x^{n-k}y^k$ הוא מניה של מס' האפשרויות של k מכפלות של y עם $n-k$ מכפלות של x. אפשר לחשוב על זה כעל סידור של k פעמים y ב-n מקומות.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$$

זו נוסחאת *הבינום של ניוטון*. המספרים $\binom{n}{k}$ נקראים *המקדמים הבינומיים*. נציב בנוסחאת הבינום $x=y=1$, ונקבל:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

הסבר קומבינטורי של מה שקיבלנו: באגף שמאל סופרים את התת-קבוצות של קב' בת n איברים. באגף ימין סופרים תחילה לכל k את התת קב' בגודל k, ואז סוכמים על כל ה-k-ים.

נציב כעת בנוסחאת הבינום $x=1=-y$ (עבור $n \geq 1$):

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

דרך אחרת לכתוב זאת:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

כלומר, מס' תת הקב' של קב' בעלת $n \geq 1$ איברים יש אותו מספר תת קב' בגודל זוגי כמו בגודל אי זוגי. הסבר קומבינטורי: תהי A קב' בעלת $n \geq 1$ איברים. נסמן ב-$\mathcal{P}(A)$ את אוסף כל התת-קב' של A. נבחר איבר קבוע $x \in A$. נגדיר פונ' $f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ ע"י:

$$f(S) = \begin{cases} S \setminus \{x\}, & x \in S \\ S \cup \{x\}, & x \notin S \end{cases}$$

אז הפונ' היא חח"ע ועל, והיא מעתיקה את אוסף התת קב' בגודל זוגי לאוסף התת קב' בגודל אי זוגי, ולהיפך. לכן שני האוספים שווי גודל.

נוסחאת פסקל – עבור $1 \leq k \leq n-1$ מתקיים $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$. ההוכחה היא אריתמטית ופשוטה. ניתן הסבר קומבינטורי: באגף שמאל, סופרים את התת-קב' בגודל k של קב' בת n איברים. כדי להבין את אגף ימין, נבחר איבר קבוע x של הקב' בת n איברים. נספור בנפרד את התת קב' בגודל k שמכילות את x ואת אלה שאינן מכילות אותו. סכום שתי תוצאות הספירה האלה מופיעות בצד ימין.

משולש פסקל – הוא טבלה אינסופית המכילה את כל מקדמי הבינומים במתכונת הבאה:

$$\begin{array}{cc}
n=0 & \binom{0}{0} \\
n=1 & \binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
n=2 & \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
n=3 & \binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

כדי להציב את המספרים עצמם במשולש פסקל, נעזר בנוסחאת פסקל:

$$\begin{array}{cc}
n=0 & 1 \\
n=1 & 1\ \ 1 \\
n=2 & 1\ \ 2\ \ 1 \\
n=3 & 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\
n=4 & 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

כל שורה במשולש היא סימטרית:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

הסבר קומבינטורי: בחירה של תת קב' בגודל k שקולה לבחירה של המשלימה שלה שהיא בגודל $(n-k)$.

טענה: עבור n זוגי:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{n/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

עבור n אי-זוגי:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

הוכחה: נחשב את היחס $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$, ונבדוק מתי הוא גדול מ-1, קטן מ-1, או שווה ל-1:

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{n-k}{k+1}$$

יחס זה גדול מ-1 אמ"מ $n-k>k+1$. כלומר, $k<\frac{n-1}{2}$. היחס קטן מ-1 אמ"מ $k>\frac{n-1}{2}$, והיחס שווה ל-1 אמ"מ $k=\frac{n-1}{2}$. אם נציב את האפשרויות ל-k, נראה שסיימנו.

כעת, ידוע שהמקדמים האמצעיים בשורה הם הגדולים ביותר בה. נרצה להעריך בכמה הם בולטים בגדלותם. כלומר, בשורה שמתאימה ל-n מסוים יש $n+1$ מקדמים בינומיים שסכומם הוא 2^n. אילו כולם היו שווים, אז ערכם המשותף היה אמור להיות $\frac{2^n}{n+1}$. אנחנו נרצה לחשב בקירוב את המקדם האמצעי (הגדול ביותר) ולדעת אם הסדר הגודל שלו דומה להערכה $\frac{2^n}{n+1}$. לשם כך ניעזר בנוסחא לחישוב מקורב של $n!$ הנקראת *נוסחאת סטירלינג*:

$$n!\sim\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}$$

כאשר היחס $\sim$ הוא סימן שפירושו התנהגות אסימפטוטית. כלומר, היחס בין שני האגפים שואף ל-1 כאשר n שואף לאינסוף. לא נוכיח את הנוסחא. הרעיון הכללי הוא לחשב את $\ln(n!)$ ולקרב אותו ע"י אינטגרל:

$$\ln(n!)=\ln(1)+\ln(2)+\cdots+\ln(n)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\approx\int_1^n\ln(x)\,dx$$

בעזרת נוסחאת סטירלינג, נחשב:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{\sqrt{2\pi}\cdot(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^{2n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

זו הנוסחא המקורבת למקדם הבינום האמצעי בשורה בגודל $n+1$. סדר הגודל הוא גדול מההערכה שהתקבלה על בסיס ההנחה שהמקדמים שווים זה לזה בכך שהמכנה הוא $\sqrt{n}$ ולא n.

שאלה: מטילים מטבע הוגנת 200 פעם. מה ההסתברות שנקבל "עץ" בדיוק 100 פעמים?

תשובה: ההסתברות הזו היא:

$$\frac{\binom{200}{100}}{2^{200}}\approx\frac{\frac{2^{200}}{\sqrt{\pi\cdot 100}}}{2^{200}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot 100}}\approx 0.056$$

כלומר, מעל 5%!.