קומבינטוריקה גיליון 2

שמי סטודנט: שניר הירדן ואלעד סלומון
ת"ז: 205689581 , 326991890

① נגדיר $A=\{1,2,\dots k\}$, $B=\{1,2\dots n\}$ שתי קבוצות.

(א) לכל איבר A נתאים איבר יחיד מהקבוצה B. ניתן להתאים בלי הגבלה איבר כלשהו לאיבר A.
לכן קיימים n^k פונקציות כאלו.

(ב) כמה פונקציות חח"ע יש?
פתרון: קיימים $P(n,k)=n\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ פונקציות חח"ע.
בעיה זו שקולה למציאת הפרמוטציות של בחירת k איברים מתוך קבוצה בגודל n, אך במקרה זה, הסדר אכן משפיע על כמות הפונקציות.

(ג) קיימים $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ פונקציות עולות ממש.
לכל בחירה של k איברים מקבוצה B, קיימת סדרה 1 עולה ממש שניתן להבנות מהבחירה ולכן אין חשיבות לסדר הבחירה.

(ד) קיימים $\binom{k+n-1}{n-1}=\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!}$

בעיה זו מקבילה לבעיית הפתרונות למשוואה: $x_1+x_2+x_3+\dots+x_k=n$
נקבל את x_1 למספר הקטנה ביותר בסדרה כך ש- $x_1\le x_2\dots\le x_n$.
בדומה לבעיית חלוקת n כדורים ל k תאים.

$$2x_1+2x_2+x_3=11$$ (2) (א)

הסכום הכולל הינו אי-זוגי, ובנוסף קיימים השקלים של ג + ב
כך שהם חייבים להיות זוגיים, לכן x_3 חייב להיות אי זוגי.
כמו כן, $x_2 \ge 1$, לכן x_3 יכול להיות שווה ל:
$1,3,5,7,9$

אז נבדק בכל האופציות:

עבור $x_3=1$

$$2x_1+2x_2=10$$
$$x_1+x_2=5$$

מכיוון ש $x_1 \ge 1$

$$x_1+x_2=4$$

$$\binom{4+2-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$$

עבור $x_3=3$

$$2x_1+2x_2=6$$
$$x_1+x_2=3$$
$$\binom{3+2-1}{2-1}=4$$

עבור $x_3=5$

$$x_1+x_2=2$$
$$\binom{2+2-1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$$

עבור $x_3=7$

$$x_1+x_2=2$$

וקיימים 2 אופציות בלבד $x_1=1,\ x_1=2$

עבור $x_3=9$ קיימת אופציה אחת $x_1=1$

סה"כ הפתרונות = 15.

2 ב נשים לב כי אין הבדל אם נחליף את הסימן '<' ל-'>' מטעמי סימטריה. לכן עלינו לפתור את הנוסחה:

$$|U| = \left|\frac{U_1}{2}\right| = \left|\frac{U_3-U_2}{2}\right|$$

נגדיר את הקבוצה U כקבוצת כל הפתרונות שאנו מחפשים,

$|U_1|$ כמות הפתרונות שסכום תאי זוגיים > סכום תאי זוגיים אחרים.

$|U_2| =$ כמות הפתרונות של שוויון בין סכומי הקבוצות

$|U_3| =$ סה"כ אפשרויות לחלוקה הכללית

$U_2 =$ $\quad x_1+\dots+x_4=12 \quad , \quad x_5+\dots+x_8=12$

$$\binom{12+4-1}{4-1}\cdot\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3}^2$$

U_3 נחשב את סה"כ האפשרויות:

$$\binom{24+8-1}{8-1} = \binom{31}{7}$$

$$U_1 = \binom{31}{7} - \binom{15}{3}^2$$

$$|U| = \frac{\binom{31}{7} - \binom{15}{3}^2}{2}$$

③ נסמן את הספרות (משמאל לימין בהתאמה) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

נתון כי $x_1 \geq 1$ וכי $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$

הפתרון הינו:

$$\underset{x_1=1}{\binom{9+3}{3}} + \underset{x_1=2}{\binom{8+3}{3}} + \underset{x_1=3}{\binom{7+3}{3}} + \dots + \underset{x_1=9}{\binom{1+3}{3}} + \underset{x_1=10}{\binom{0+3}{3}}$$

④ ⓔ הוכחה אלגברית:

נוכיח זאת ע"י גזירת הנתונה מהכיתה וגזירת שהוכחה בכיתה:

$$(1+x)^n + n(1+x)^{n-1} = \sum \binom{n}{k} x^k + \sum \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

נגזור את שני האגפים:

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum \binom{n}{k} k x^{k-1} + \sum \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}$$

נציב $x=1$ ונקבל:

$$n \cdot 2^{n-1} + 2^{n-2} \cdot n(n-1) = \sum \binom{n}{k} k + \sum \binom{n}{k} k(k-1)$$
$$= \cancel{\sum \binom{n}{k} k} + \sum \binom{n}{k} k^2 - \cancel{\sum \binom{n}{k} k}$$
$$= \sum \binom{n}{k} k^2$$

$\blacksquare$

Scanned by CamScanner

$$\sum \binom{n}{k} k^2 = n\cdot 2^{n-1} + 2^{n-2}\cdot n(n-1)$$ (4)

צד שמאל: לכל תת קבוצה בגודל $n\geq k\geq 1$ נבחר 2 סטודנטים, אחד שמקבל כובע אדום ואחד שמקבל כובע ירוק וכל השאר מקבלים כובעים כחולים.
הבחירות מתבצעות באופן לא תלוי אשר סטודנט יכול להיבחר פעמיים, גם לירוק גם לאדום.

צד ימין: סוכמים את כל תתי הקבוצות מהם שאנו בוחרים מהם את הנציגים עם הכובע:
עבור $n\cdot 2^{n-1}$ אנו נספור את כל האפשרויות לבחירה של נציג יחיד אשר יקבל גם כובע אדום וגם כובע ירוק.
עבור $2^{n-2}\cdot n\cdot(n-1)$ אנו נספור את כל האפשרויות לבחירה של שני נציגים שונים, אחד שמקבל כובע אדום ואחד שמקבל כובע ירוק. כל השאר מתת הקבוצה מקבלים כובעים כחולים.

(5) (א) צ"ל: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

אגף שמאל: נחלק את הבחירה ע"פ בנים ובנות. לכל צורה נבדוק כמה אפשרויות יש לבחור תת קבוצה בגודל $n\geq k\geq 1$ כך שלכל תת קבוצה משלימה בחירה של בנות.
לאחר שסיימנו לבחור את הבנות נבחר את הבנים והם מהווים $n-k$.

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n-1} + \cdots \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

אגף ימין: מתוך כיתה של n בנים ו n בנות, נבחר תת קבוצה בגודל n של בנים ובנות לסטודנטים.

(5ב) צ"ל: $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$

אגף שמאל: בעיר יש $2n+1$ תושבים אנו נבחר כל פעם תת קבוצה עד לגודל n שתהווה צוות ביטחון בלילה.

$(k<n)$

אגף ימין: נבחין קודם כל ש קבוצה בגודל k וקבוצה בגודל $n-k$ ביחד מהווה קבוצה בגודל n.
מכאן נובע כי סכום כל תתי הקבוצות בגודל קטן מ-n זהה לסכום כל אתי הקבוצות שאינם בגודל קטן מ-n (תתי קבוצות שגודלן $>n$).
ניתן לעשות את ההתאמה באמצעות פונק' ח"ע ועל:

לכל קבוצה של תושבים עד לגודל n נתאים קבוצה של תושבים שתהיה הקבוצה המשלימה שלה, התושבים בעלי ת"ז לכן לכל קבוצה יש קבוצה משלימה משלה.

לכן ניתן להסתכל על הבחירה ככל תתי הקבוצות לקבוצה בגודל $2n+1$ ← 2^{2n+1} אופציות
ונחלק ב-2 מכיוון שכל תתי הקבוצות בגודל עד n ועוד כל תתי הקבוצות בגודל הגדול מ-n משלימים לכל תתי הקבוצות של הקבוצה.

$$\frac{2^{2n+1}}{2}=2^{2n}$$

5.ב. נתבונן בקבוצות $A=\left\{\binom{2n+1}{i} \;\middle|\; 1\le i\le n\right\}$ ו- $B=\left\{\binom{2n+1}{2n+1-k} \;\middle|\; n+1\le k\le 2n+1\right\}$

נזכר בזהות $\binom{2n+1}{k}=\binom{2n+1}{2n+1-k}$

אז נוכל להסיק $\binom{2n+1}{n}=\binom{2n+1}{n+1}$

מהזהות נוכל לקבוע כי קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$ שהיא הפונקציה המשלימה.

<u>נימוק</u>: אם במקום "לבחור" באיבר כלשהו (1) לא נבחר בו (0) אז נקבל בחירה השקולה לזהות דלעיל וקיימת בחירה אחת מקבוצה A לכל בחירה מקבוצה B וקיבלנו פונ' חח"ע ועל.

נשים לב כי $|A\cup B|$ הוא סה"כ האיברים בשני קבוצות זרות הזהות בעוצמתן. $(A\cap B=\{0\})$

כמו כן $A\cup B$ מכסה את כל תתי-הקבוצות של $2n+1$. לכן $|A\cup B|=2^{2n+1}$

משיקולי סימטריה נקבל $|A|=\frac{2^{2n+1}}{2}=2^n$

(כי $A\cap B=\{\emptyset\}$! וגם $|A|=|B|$ כי יש איזומורפיזם ביניהם).