טורי מספרים

הגדרה: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה מוגדרת ע"י

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

נאמר כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם הגבול

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

קיים. נסמן גבול זה ע"י $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$. כלומר

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

תכונות של טורי מספרים

בהנחה כי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\forall n,\ a_n \ge 0 : \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ge 0$$

$$\forall n, a_n \le b_n : \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

בהנחה כי $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס : $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n$$

משפט: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הערה: שינוי מספר סופי של אברי הסדרה אינו משפיע על התכנסות הטור. הוא יכול להשפיע על הסכום עצמו, אבל לא על ההתכנסות.

טורים עם אברים חיוביים

משפט: תהי a_n סדרה של מספרים אי שליליים. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אס"ם סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ חסומה.

משפט [קריטריון ההשוואה]: יהיו a_n, b_n סדרות אי שליליות כך ש־ $a_n \le b_n$ לכל n.

1. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס.

משפט [קריטריון ההשוואה הגבולי]:
יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות ונניח כי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים ושווה ל־L.
כאשר $0 < L < \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אס"ם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
כאשר $0 \le L < \infty$: אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס.
כאשר $0 < L \le \infty$: אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס.

אפשר להרחיב טיפה את קריטריון ההשוואה הגבולי:
כאשר $0 < \liminf \frac{a_n}{b_n} \le \limsup \frac{a_n}{b_n} < \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אס"ם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
כאשר $\limsup \frac{a_n}{b_n} < \infty$: אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס.
כאשר $0 < \liminf \frac{a_n}{b_n}$: אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ אינו מתכנס אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס.

משפט:
יהי $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_n$ טור עם אברים חיוביים.

1. **[מבחן השורש]** אם קיימים $0 < N$ ו־$0 < q < 1$ כך ש־ $\sqrt[n]{a_n} \le q$ לכל $N < n$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   אם קיים $0 < N$ כך ש־ $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ לכל $N < n$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
   [מבחן השורש הגבולי] אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
2. **[מבחן המנה]** אם קיימים $0 < N$ ו־$0 < q < 1$ כך ש־ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ לכל $N < n$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   אם קיים $0 < N$ כך ש־ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ לכל $N < n$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
   [מבחן המנה הגבולי] אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

הערות: 1. אם במבחן השורש או המנה הגבולי מקבלים שהגבול הוא 1, אין מידע על התכנסות הטור.

2. עבור סדרה כלשהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}<1$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}<1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.
אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}>1$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}>1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=\infty$ (אם הסדרה חיובית אז הגבול במובן הרחב הוא אינסוף, אם הסדרה היא שלילית אז הגבול במובן הרחב הוא מינוס אינסוף. אם הסדרה מחליפה סימנים אז אין גבול).

<u>משפט[מבחן האינטגרל]:</u> תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית ומונוטונית יורדת המוגדרת בקרן $[1,\infty)$ ואינטגרבילית בכל קטע חסום וסגור המוכל בקרן.
אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ מתכנס אס"ם האינטגרל המוכלל $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ מתכנס, ומתקיים

$$\sum_{n=2}^{\infty}f(n)\leq\int_1^{\infty}f(x)dx\leq\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

<u>משפט:</u> הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס אס"ם $1<p$.

טורים עם סימנים מתחלפים

<u>הגדרה:</u> נאמר שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.
אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ לא מתכנס, נאמר שההתכנסות היא בתנאי.

<u>משפט:</u> אם טור מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>משפט [לייבניץ]:</u> אם a_n סדרה חיובית ומונוטונית יורדת לאפס אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס ומתקיים

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n<a_1$$

ובאופן כללי יותר

$$0<\Big|\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\Big|<a_{n_0}$$

תרגיל: הראו כי הטור הגיאומרי

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

מתכנס אם"ם $|q| < 1$.

פתרון: אם $q = 1$ אז

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

אם $q \neq 1$ אז

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & 1<q \\ \text{לא קיים} & q \leq -1 \end{cases}$$

תרגיל: חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

פתרון: נשים לב כי

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \\ = & \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right) = \\ = & 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right) + \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \\ = & 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{aligned}$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

תרגיל: חשבו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(3n+3)}$$

פתרון: נשים לב כי

$$\frac{1}{3k(3k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{3k+3}\right)$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k(3k+3)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k}-\frac{1}{3k+3}\right)=\\
=\ &\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-3}-\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+3}\right)\right)=\\
=\ &\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{3n-3}+\frac{1}{3n-3}\right)+\left(-\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}\right)-\frac{1}{3n+3}\right)=\\
=\ &\frac{1}{9}-\frac{1}{9n+9}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(3n+3)}=\frac{1}{9}$$

<u>**תרגיל:**</u> הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^2+4}$$

מתבדר.

<u>**פתרון:**</u> ננסה קודם להעריך את האיברים של הטור

$$\frac{3n}{n^2+4}=\frac{3n}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{1}{n}\frac{3}{1+\frac{4}{n^2}}$$

וקיבלנו $\frac{1}{n}$ כפול ביטוי ששואף ל־3. לכן נשווה את הטור עם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. נשתמש במשפט ההשוואה הגבולי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3n}{n^2+4}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{4}{n^2}}=3$$

ולכן הטורים מתכנסים או מתבדרים ביחד. כיוון ש־ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{n^2+4}$ מתבדר.

<u>**תרגיל:**</u> הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^{2.5}-n+3}$$

מתכנס.

<u>**פתרון:**</u> ננסה קודם להעריך את האיברים של הטור

$$\frac{n+1}{2n^{2.5}-n+3}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{2.5}\left(2-\frac{1}{n^{1.5}}+\frac{3}{n^{2.5}}\right)}=\frac{1}{n^{1.5}}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^{1.5}}+\frac{3}{n^{2.5}}}$$

וקיבלנו $\frac{1}{n^{1.5}}$ כפול ביטוי ששואף ל־$\frac{1}{2}$. לכן נשווה את הטור עם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$. נשתמש במשפט ההשוואה הגבולי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{2n^{2.5}-n+3}\right)}{\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n^{1.5}}+\frac{3}{n^{2.5}}}=\frac{1}{2}$$

ולכן הטורים מתכנסים או מתבדרים ביחד. כיוון ש־ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^{2.5}-n+3}$ מתכנס.

תרגיל: הראו כי הטור
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$$
מתכנס אם"ם $p>1$.

פתרון: איברי הטור הם "כמו" $\ln(1+x)$ כאשר x קטן. אנו יודעים כי
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
ולכן נשווה את הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ עם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$:
מהיינה נובע כי כאשר $p>0$ אז $x_n = \frac{1}{n^p} \to 0$ ולכן
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}} = 1$$
ולכן הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ מתכנסים או מתבדרים ביחד ונקבל כי עבור $p>1$ הטורים מתכנסים ועבור $0<p\le 1$ הם מתבדרים.
עבור $p \le 0$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ אינו מתכנס כי האיבר הכללי אינו שואף לאפס.
לסיכום, הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ מתכנס אם"ם $p>1$.

תרגיל: הראו כי אם טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ עם איברים אי שליליים מתכנס, אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס. הראו כי אין זה בהכרח נכון אם לא מניחים כי a_n אי שליליים.

פתרון: כיוון ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי קיים N_0 עבורו אם $n>N_0$ אז $a_n<1$. אז עבור $n>N_0$ מתקיים כי $0 \le a_n^2 \le a_n$. מהתכנסות הטור $\sum\limits_{n=N_0+1}^{\infty} a_n$ נובעת התכנסות הטור $\sum\limits_{n=N_0+1}^{\infty} a_n^2$ וכיוון שמספר סופי של איברים לא משפיע על התכנסות טור אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.
בשביל הדוגמא הנגדית ניקח $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ שמתכנס בגלל משפט לייבניץ. לעומת זאת
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
שהוא הטור ההרמוני שלא מתכנס.

תרגיל: עבור אילו ערכי $p>0$ הטור מתכנס
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^p}} - 1\right)$$

פתרון: ננסה לשחק עם הביטוי $e^{\frac{1}{n^p}}-1$:
$$e^{\frac{1}{n^p}} - 1 = \frac{e^{\frac{1}{n^p}}-1}{\frac{1}{n^p}} \cdot \frac{1}{n^p}.$$
כיוון ש־ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ אז לפי היינה $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^p}}-1}{\frac{1}{n^p}} = 1$ ולכן נשווה את הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^p}}-1\right)$ עם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^p}}-1}{\frac{1}{n^p}} = 1$$

ולכן הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^p}}-1\right)$ מתכנסים או מתבדרים ביחד ומזה נסיק כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^p}}-1\right)$ מתכנס אם"ם $p>1$.

<u>תרגיל:</u> הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$$

מתכנס.

<u>פתרון:</u> הטור חיובי ולכן נוכל להשתמש במבחן המנה הגבולי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0=q<1$$

ולכן הטור מתכנס.

<u>תרגיל:</u> הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$$

מתבדר.

<u>פתרון:</u> נשתמש במבחן המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2n+1}=2=q>1$$

ולכן מתבדר.

<u>תרגיל:</u> הראו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{(n+1)!}$$

מתכנס.

<u>פתרון:</u> כיוון שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2^n}{(n+1)!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$$

מתכנס (תרגיל קודם), אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{(n+1)!}$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

<u>תרגיל:</u> בדקו התכנסות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)\cdot\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

<u>פתרון:</u> הטור אינו חיובי ולכן ננסה להסתכל על הטור עם הערכים המוחלטים:

$$\left|\sin(n)\cdot\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right|=|\sin(n)|\cdot\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\leq\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

ולכן ננסה להראות כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

מתכנס. נשתמש במבחן השורש הגבולי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2n}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=q<1$$

ונקבל כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

מתכנס. לפי מבחן ההשוואה גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin(n)\cdot\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right|$$

מתכנס ולכן הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)\cdot\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

תרגיל: הראו כי הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$$

מתכנס אס"ם $\alpha>1$.

פתרון: אם $\alpha\leq 0$ אזי $\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}\geq\frac{1}{n}$ ולכן ממבחן ההשוואה עם הטור ההרמוני נקבל כי מתבדר. נניח כעת כי $\alpha>0$. אז הסדרה $\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$ מונוטונית יורדת לאפס ולכן נשתמש במבחן האינטגרל לקבל כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$ מתכנס אס"ם האינטגרל $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}$ מתכנס.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}}$$
$$t=\ln x\quad dt=\frac{1}{x}dx$$

ולכן האינטגרל מתכנס אס"ם $\alpha>1$ ולכן הטור מתכנס אס"ם $\alpha>1$.

הערה: שימו לב כי עבור $\alpha>0$ לא היינו יכולים להשתמש במבחן ההשוואה בצורה יעילה. אין לנו משהו פשוט להשוות את הטור אליו. לכל $\beta>1$ מתקיים כי $\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}\geq\frac{1}{n^{\beta}}$ עבור n מספיק גדולים וזו לא השוואה שעוזרת. מצד שני, $\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}\leq\frac{1}{n}$ ושוב ההשוואה אינה תורמת. השוואה "מפספסת" את הנקודה שמבחן האינטגרל "תופס".

תרגיל: חשבו את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

ברמת דיוק של 10^{-4}.

פתרון: מהזהות $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ נקבל כי

$$1-\cos\frac{1}{n}=2\sin^2\frac{1}{2n}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2\frac{1}{2n}$$

וכיוון ש־$\sin^2\frac{1}{2n}$ מונוטונית יורדת לאפס אז נוכל להשתמש במשפט לייבניץ עם הערכת השארית.

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2\frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{n_0}(-1)^{n+1}\sin^2\frac{1}{2n}\right|=\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^2\frac{1}{2n}\right|<$$

$$<\ \sin^2\frac{1}{2n}\leq\left(\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{1}{4n^2}$$

כאשר השתמשנו בעובדה כי $\sin x\leq x$ עבור $x>0$.
נמצא כעת עבור איזה n אנו מקבלים כי $\frac{1}{4n^2}\leq 10^{-4}$:

$$\frac{1}{4n^2}\leq 10^{-4}$$
$$4n^2\geq 10^4$$
$$n^2\geq 2500$$
$$n\geq 50$$

ולכן, עד כדי טעות של 10^{-4}, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ הוא

$$\sum_{n=1}^{50}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

<u>תרגיל:</u> הראו את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$$

מתכנס אם"ם $p>0$.
<u>פתרון:</u> כאשר $p\leq 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$ אינו קיים כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}$ הוא 1 אם $p=0$ ואינסוף אם $p<0$.
כאשר $p>0$ אז הסדרה $\frac{1}{n^p}$ היא סדרה מונוטונית יורדת לאפס ולכן לפי לייבניץ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$ מתכנס.
<u>הערה:</u> כאשר $0<p\leq 1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$ מתכנס בתנאי כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

מתבדר. כאשר $p>1$ הטור מתכנס בהחלט.

<u>תרגיל:</u> עבור הטור

$$a_n=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^k & k\ even\\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^k & k\ odd\end{cases}$$

הראו כי מבחן המנה הגבולי לא נותן מידע ומבחן השורש הגבולי נותן כי הטור מתכנס.
<u>פתרון:</u> כאשר k זוגי אז $k+1$ איזוגי ולכן

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^k}=\frac{4}{3}$$

כאשר k איזוגי אז $k+1$ זוגי ולכן

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{2\left(\frac{2}{3}\right)^k}=\frac{1}{3}$$

ולכן

$$\liminf \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{3} < 1$$
$$\limsup \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4}{3} > 1$$

ולכן אין מידע. לעומת זאת כאשר k זוגי אז

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \frac{2}{3}$$

כאשר k איזוגי אז

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{2\left(\frac{2}{3}\right)^k} = 2^{\frac{1}{k}}\frac{2}{3} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{2}{3}$$

ולכן

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{3} < 1$$

שאומר כי הטור מתכנס.

<u>הערה:</u> באופן כללי, עבור סדרות חיוביות

$$\liminf \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$$