1.1 הגדרה – יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אזי הוא ממד אינסופי $\Leftrightarrow$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ניתן למצוא בו n וקטורים בת"ל.

דוגמה 1:

נתבונן ב-V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ שהוא קבוצה של כל הסדרות הממשיות. נסמנו ב-$\mathbb{R}^\infty$ ונוכיח כי ממדו אינסופי. יהא $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. לכל $1 \le i \le n$ נתאים סדרה e_i המוגדרת על ידי:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה כי הסדרות $\{e_i\}_{i=1}^n$ שבנינו הן בת"ל. יהיו $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ סקלרים כלשהם ב-$\mathbb{R}$. נניח כי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$$

וצריך להראות כי $\alpha_i = 0$ לכל $1 \le i \le n$. יהא, אם כן, $1 \le i_0 \le n$ כלשהו. הקואורדינטה של $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ במקום i_0 היא α_{i_0} והיא גם 0 כי $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$ ולכן נקבל כי $\alpha_{i_0} = 0$. הנ"ל נכון לכל $1 \le i_0 \le n$ ולכן נסיק כי אכן כל הסקלרים מתאפסים, והוקטורים בת"ל כנדרש.

לסיכום, הסדרות $\{e_i\}_{i=1}^n$ הן בת"ל ולכן על פי הגדרה ממדו של V אינסופי.

דוגמה 2:

נתבונן במרחב הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[0,1]$. נראה כי ממדו אינסוף. יהא n טבעי כלשהו, לכל $1 \le i \le n$ נתאים פונקציה המוגדרת באופן הבא:

$$f_i(x) = \begin{cases} 2^{i+2}\left(x - \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^j}\right) & x \in \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^j}, \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2_j} + \frac{1}{2^{i+2}}\right] \\ -2^{i+1}\left(x - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{2^i}\right) & x \in \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{i+2}}, \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{2^i}\right] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יהא $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ סקלרים ממשיים כלשהם ונניח כי $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$. צריך להראות כי $\alpha_i = 0$ לכל $1 \le i \le n$. אם כן, יהא $1 \le i_0 \le n$ כלשהו. נתבונן ב-$x_0 = \sum_{j=1}^{i_0} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{i_0+2}}$ ונשים לב כי:

$$f_{i_0}(x_0) = 1$$

וזאת משום ש-x_0 מקבלים את הקדקוד של המשולש המתאים ל-i_0.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0) = 0$$

מצד שני מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0) = \alpha_{i_0} \Longrightarrow \alpha_{i_0} = 0$$

אך כאמור, הנ"ל נכון לכל $1 \le i_0 \le n$ ולכן נסיק כי כל הסקלרים אכן מתאפסים ובאותו אופן על פי הגדרה קיבלנו כי מרחב זה אכן בעל ממד אינסופי.

1.2 הגדרה – יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מכפלה פנימית על V היא פונקציה $\langle\ \ \rangle: V \times V \mapsto \mathbb{R}$ המקיימת את התכונות הבאות:

א. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ לכל $u,v \in V$.

ב. $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$ לכל $u,v,w \in V$ ולכל $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

ג. $0 \le \langle v,v\rangle$ ו-$\langle v,v\rangle = 0$ אם ורק אם $v = 0$.

<u>דוגמה:</u>

ב-$\mathbb{R}^n$ לכל $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ ו-$y = \{y_i\}_{(i=1)}^n$ נגדיר:

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

וזו הינה מכפלה פנימית סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$.

1.2.1 הגדרה – למספר $\sqrt{\langle v,v\rangle}$ קוראים נורמה של וקטור v או אורך של וקטור v. מסמנים אותו בנוסף על ידי $\|v\|$.

1.2.2 הגדרה – מרחק בין שני וקטורים $u,v \in V$ מוגדר להיות $\|u - v\|$.

1.3 טענה – אי שוויון קושי שוורץ – יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$. אזי לכל $u,v \in V$ מתקיים:

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|$$

השוויון מתקיים אם ורק אם u,v בת"ל.

1.4 טענה – תכונות של נורמה:

i. לכל $v \in V$ מתקיים $\|v\| \ge 0$ וכן $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

ii. לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ סקלר כלשהו, מתקיים $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$.

iii. אי שוויון המשולש, כלומר, לכל $u,v \in V$ מתקיים $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$. שוויון מתקיים אם ורק אם אחד מבין הוקטורים הינו כפולה בסקלר אי שלילי של השני. כלומר כאשר קיים $\lambda \ge 0$ כך שמתקיים $u = \lambda v$ או $v = \lambda u$.

<u>הוכחה לאי שוויון המשולש:</u>

יהיו $u,v \in V$, אזי מתקיים:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

וכמו כן, על פי קושי שוורץ מתקיים:

$$\langle u,v\rangle \le \|u\|\|v\|$$

ולכן:

$$\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

כלומר קיבלנו, כי אכן מתקיים:

$$\|u+v\|^2 \le (\|u\| + \|v\|)^2 \Longrightarrow \boxed{\|u+v\| \le (\|u\| + \|v\|)}$$