תרגול חזרה 4 – מרכוב מרחבים וקטורים

בנייה כללית

<u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל R. נגדיר $V_C = V \oplus V$ להיות המרחב הוקטורי של זוגות סדורים של איברים מ – V, עם הפעולות הבאות:

1. $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
2. $a(v, w) = (av, aw)$ עבור $v, w \in V, a \in R$
3. $i(v, w) = (-w, v)$ עבור $v, w \in V$.

<u>טענה:</u> V_C הוא מרחב וקטורי מעל C (נקרא "המרכוב של V").

הוכחה: ברור כי V_C מקיים את כל התכונות הנדרשות עבור חיבור (זה בדיוק החיבור ב – V לכל קורדינטה בנפרד). עבור $z = a + ib \in C$ ו – $v, w \in V$ נקבל:

$$(a+ib)(v, w) = a(v, w) + ib(v, w) = (av, aw) + i(bv, bw) = (av, aw) + (-bw, bv) = (av - bw, aw + bv)$$

לכן המרחב סגור לכפל בסקלר. עבור $z_1, z_2 \in C$ נקבל מצד אחד $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ לכן $(z_1 z_2)(v, w) = ((a_1 a_2 - b_1 b_2)v - (a_1 b_2 + a_2 b_1)w, (a_1 a_2 - b_1 b_2)w + (a_1 b_2 + a_2 b_1)v)$. מצד שני, נקבל

$$z_1(z_2(v, w)) = z_1(a_2 v - b_2 w, a_2 w + b_2 v) = \\ = (a_1(a_2 v - b_2 w) - b_1(a_2 w + b_2 v), a_1(a_2 w + b_2 v) + b_1(a_2 v - b_2 w))$$

וביטויים אלו שווים.

<u>הערה:</u> ב - V_C מתקיים $(v, w) = (v, 0) + i(w, 0)$ $\forall v, w \in V$, לכן נסמן $V_C = V + iV$. עבור $v \in V_C$ מהצורה $v = u + iw$, u נקרא החלק הממשי של v ו – w החלק המדומה של v. כמו כן נגדיר $\bar{v} = u - iw$. לכל $v \in V_C$ יש ייצוג יחיד מהצורה $v = u + iw$.

<u>הגדרה:</u> $v \in V_C$ נקרא ממשי אם בייצוג $v = u + iw$ מתקיים $w = 0$.

<u>הערה:</u> ברור כי V_C הוא גם מרחב וקטורי מעל R. אם $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל – V, אז בסיס ל - V_C כמרחב וקטורי מעל R הוא $B_C = \{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_n)\}$. כמרחב וקטורי מעל C, ברור כי B_C קבוצה פורשת (כי היא פורשת של V_C מעל R). נשים לב שלכל $1 \le j \le n$ מתקיים $i(v_j, 0) = (0, v_j)$ לכן $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0)$ פורשת ובת"ל ל - V_C מעל C, המורכבת כולה מוקטורים ממשיים, לכן יש התאמה חח"ע בין בסיס של V מעל R ובסיס של V_C מעל C המורכב מוקטורים ממשיים.

<u>טענה:</u> יהי V מ"ו מעל R, יהי T אופרטור, אז קיים אופרטור יחיד $T_C : V_C \to V_C$ המקיים $T_C(v) = T(v)$ לכל $v \in V_C$ ממשי.

הוכחה: קיום: נגדיר $T_C(u + iw) = T(u) + iT(w)$. T_C היא פונקציה מ - V_C לעצמו. נראה ש - T_C לינארית:

$$T_C(v_1 + v_2) = T_C((u_1 + u_2) + i(w_1 + w_2)) = T(u_1 + u_2) + iT(w_1 + w_2) = \\ = T(u_1) + iT(w_1) + T(u_2) + iT(w_2) = T_C(v_1) + T_C(v_2)$$

. עבור $z \in C, v \in V_C$ נקבל

$$T_C(zv) = T_C((a+ib)(u+iw)) = T_C((au - bw) + i(aw + bu)) = \\ = T(au - bw) + iT(aw + bu) = a(T(u) + iT(w)) + ib(T(u) + iT(w)) = (a+ib)(T_C(v))$$.