הרכבת פונקציות.

אם $f(x_1,\ldots,x_n)$ רציפה בתחום נתון ב: R^n,
וכל אחת מהפונקציות $x_i = g_i(y_1,\ldots,y_k)$
הינה רציפה בתחום השתנות מתאים, אז הפונ-
קציה המורכבת

$$f\left(g_1(y_1,\ldots,y_k),\ldots,g_n(y_1,\ldots,y_k)\right)$$

רציפה ב- $(y_1,\ldots,y_k)$ בתחום המתאים.
הוכחה כמו במשתנה אחד.

תכונות (ניסוח ב- R^2).

<u>משפט ערך הביניים.</u> אם f רציפה בתחום
D, $f(x_1,y_1) = A$ ו: $f(x_2,y_2) = B$,

אז לכל מספר C בין A ל- B קיימת נקודה $(x_0, y_0) \in D$ כך ש- $f(x_0, y_0) = C$.

<u>הוכחה:</u> נשתמש בעובדה שעבור קבוצה פתוחה קשירות גוררת קשירות מסילתית. למעשה ניתן להניח שהמסילה היא פוליגונלית, ונניח תחילה ש- (x_1, y_1) מקושרת ל: (x_2, y_2) ע"י קטע ישר בעל תאור פרמטרי

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = ty_1 + (1-t)y_2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

נסתכל בפונקציה הרציפה:

$$g(t) = f\left(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2\right)$$

המוגדרת עבור $0 \leq t \leq 1$. אז

$$g(1) = A,\ g(0) = B,$$

ו- g מקבלת את הערך C עבור $0 < t < 1$ כלשהו.

אם שתי הנקודות מחוברות ע"י פוליגון, ההוכחה דומה. הטענה כמובן לא נכונה בקבוצה לא קשירה.

<u>משפט.</u> פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה, חסומה שם.

<u>הוכחה:</u> $\overline{D}$ סגורה, חסומה, ו: f רציפה ב- $\overline{D}$.

נניח בשלילה ש: f לא חסומה: אז לכל n יש $P_n \in \overline{D}$ כך ש- $|f(P_n)| > n$.

$\{P_n\}$ סדרה בקבוצה סגורה וחסומה, לכן עפ"י

בולצנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת
$\left\{P_{n_k}\right\}$,

$$P_{n_k} \to P_0 \ ,$$

ו: $\overline{D} \in P_0$ כי $\overline{D}$ סגורה ומכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

f רציפה ב- P_0 , לכן $f\left(P_{n_k}\right) \to f\left(P_0\right)$. אבל $\left|f\left(P_{n_k}\right)\right| > n_k \to \infty$, סתירה.

<u>משפט.</u> בהנחות המשפט הקודם, ל- $f(P)$ יש מכסימום ב- $\overline{D}$.

<u>הוכחה:</u> לפי המשפט הקודם f חסומה ב- $\overline{D}$,

לכן קיים $\sup\limits_{P\in\overline{D}} f(P) = M < \infty$.

נניח בשלילה שאין אף נקודה כך ש- $f(P) = M$. אז לכל n יש נקודה $P_n \in \overline{D}$

כך ש- $M - \frac{1}{n} < f(P_n) < M$.

לסדרה $\{P_n\}$ יש תת-סדרה מתכנסת

$P_{n_k} \to P_0$ ועבורה, בשל הרציפות,

$f\left(P_{n_k}\right) \to f\left(P_0\right)$.

לכן $f(P_0) = M$, <u>סתירה להנחת השלילה.</u>

לכן קיימת נקודה $P_0 \in \overline{D}$ כך ש-

$f(P_0) = M$ שהוא המקסימום. נימוק דומה

מראה שהמינימום של f מתקבל על $\overline{D}$.

רציפות במדה שווה.

<u>הגדרה.</u> $f(P)$ רציפה במ"ש על D אם לכל ε קיים $\delta(\varepsilon)$ כך שלכל $P_1, P_2 \in D$ אשר מקיימים $d(P_1, P_2) < \delta(\varepsilon)$ מתקיים $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$.

$\delta(\varepsilon)$ תלוי רק ב- ε לא בנקודות.

ניסוח בקורדינטות.

לכל $(x_1, \ldots, x_n)$, $(\tilde{x_1}, \ldots, \tilde{x_n})$ כך ש- $|x_i - \tilde{x_i}| < \delta(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$ מתקיים

$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(\tilde{x_1}, \ldots, \tilde{x_n})| < \varepsilon$.

<u>משפט.</u> פונקציה רציפה על קבוצה סגורה וחסומה $\overline{D}$, רציפה שם במידה שווה.

<u>הוכחה (בדרך השלילה).</u> נניח ש: f לא רציפה במ"ש. אז קיים $0 > \varepsilon_0$, ולכל n קיימים P_n, Q_n כך ש- $d(P_n, Q_n) < \frac{1}{n}$, אבל $|f(P_n) - f(Q_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$.

$\overline{D}$ סגורה וחסומה, ולכן יש תת-סדרה מתכנסת: $P_{n_k} \to P_0$, $P_0 \in \overline{D}$.

f רציפה בכל $\overline{D}$, בפרט ב- P_0 , לכן

$$f(P_{n_k}) \to f(P_0).$$

בגלל ש- $\frac{1}{n_k} > d(P_{n_k}, Q_{n_k})$ נובע שגם $P_0 \to Q_{n_k}$ ועל כן גם

$$.f(Q_{n_k}) \to f(P_0)$$

הגבול הזה יחד עם $f(P_0) \to f(P_{n_k})$ סותר את

$$.|f(P_{n_k}) - f(Q_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$$

חשבון דיפרנציאלי.

נעבוד ב- R^2 ונסמן את המשתנים ב- (x,y) .

<u>הגדרה:</u> הנגזרת החלקית של f לפי x בנקודה (x_0,y_0) היא:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

<u>סימונים שונים:</u>

$f_x(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x (פיזיקאים).

כנ"ל מגדירים את הנגזרת החלקית לפי y: $f_y\equiv\frac{\partial f}{\partial y}$.

קיום הנגזרות החלקיות אינו מבטיח אפילו רציפות. למשל:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

כאן

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\ldots=0$$

אבל f לא רציפה ב- $(0,0)$.

הגדרת דיפרנציאביליות.

עבור פונקציה של משתנה אחד:

$$g'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}$$

ז"א

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0)+\varepsilon(\Delta x)$$

כאשר $0 \to \varepsilon(\Delta x)$. לכן

$$\Delta g \equiv g(x_0+\Delta x)-g(x_0) \sim \underbrace{g'(x_0)}_{const} \cdot \Delta x$$

ז"א Δg "כמעט ליניארי" ב- Δx .

עבור פונקציה של שני משתנים $f(x,y)$, נגדיר את השינוי ב- f כדלקמן:

$$\Delta f \equiv f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

נאמר ש: f היא דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0) אם Δf "כמעט לינארי" ב- $(\Delta x, \Delta y)$ במובן המדויק הבא:

הגדרה. f דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) אם קיימים מספרים A, B כך ש-

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$
$$+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

ומתקיים

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$$
$$\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$$

כאשר

$$.(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

באופן שקול,

$$\begin{aligned}\alpha\Delta x + \beta\Delta y \;&=\; \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &\equiv\; \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\end{aligned}$$

כאשר אנו מגדירים

$$\epsilon = \alpha\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\beta\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= \frac{|\alpha||\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{|\beta||\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \\ &\leq |\alpha|+|\beta| \to 0 \end{aligned}$$

כלומר

$$\Delta f = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$$
$$+\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כאשר $0 \to \varepsilon(x,y)$.

בכיוון השני ניתן לכתוב

$$\varepsilon(x,y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$
$$=\varepsilon_1(x,y)\cdot[|\Delta x|+|\Delta y|]$$

ויוצא ש: $|\varepsilon(x,y)| \le |\varepsilon_1(x,y)|$. ולכן הביטוי Δf ניתן לכתיבה בצורה

$$\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$$

עם פונקציות $\alpha(x,y)$ ו: $\alpha(x,y)$ אשר מקיימות

$$|\alpha(x,y)|=|\beta(x,y)|=|\varepsilon_1(x,y)|,$$

ובפרט $\alpha,\beta\to 0$ כאשר $\Delta x,y\to 0$.

<u>סימון.</u>

נאמר ש: $F = o(G)$ כאשר $x \to x_0$ אם

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F}{G} = 0,$$

ואומרים במקרה זה ש: F מסדר גודל קטן יותר מאשר G. במקרה שלנו

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

<u>**מסקנה:**</u> f דיפרנציאבילית בנקודה $\Leftarrow$ f רציפה באותה נקודה כי $\Delta f \to 0$ כאשר $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

זה אומר ש:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות

<u>משפט.</u> אם f דיפרנציאבילית ב- (x_0, y_0) , אז בנקודה זו קיימות הנגזרות החלקיות f_x ו: f_y, ויתרה מכך:

$$.A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0)$$

<u>הוכחה.</u> לחישוב $\frac{\partial f}{\partial x}$ ניקח y קבוע $y = y_0$ כך ש: $\Delta y = 0$:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot 0 + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot 0,$$

$\alpha(\Delta x, 0) \to 0$ כאשר $\Delta x \to 0$, ונובע ש:

$$.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

הערה. קיום הנגזרות החלקיות f_x, f_y אינו מספיק לדיפרנציאביליות. למשל,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מקיימת

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

וגם מתקיים $f_y(0,0)=0$, אבל ראינו ש: f אינה רציפה ולכן גם אינה יכולה להיות דיפרנציאבילית.

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

<u>משפט.</u> אם יש ל- $f(x,y)$ נגזרות חלקיות בסב-יבה של (x_0,y_0) והן רציפות ב- (x_0,y_0), אז f דיפרנציאבילית ב- (x_0,y_0).

<u>הוכחה.</u>

$$\Delta f \equiv f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$
$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)]$$
$$+[f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$$
$$= f_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x$$
$$+f_y(x_0, y_0+\theta_2\cdot\Delta y)\cdot\Delta y$$
$$0<\theta_1<1, \qquad 0<\theta_2<1$$

נסמן

$$f_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)$$
$$\equiv \alpha(\Delta x,\Delta y)$$
$$f_y(x_0,y_0+\theta_2\cdot\Delta y)-f_y(x_0,y_0)$$
$$\equiv \beta(\Delta x,\Delta y).$$

אז

$$\Delta f=[f_x(x_0,y_0)+\alpha]\,\Delta x$$
$$+\,[f_y(x_0,y_0)+\beta]\,\Delta y$$

וכמובן ש $\beta(\Delta x,\Delta y),\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$
כי f_x , f_y רציפות ב- (x_0,y_0) .

התנאי המספיק הזה איננו הכרחי:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \rho>0\\ 0, & \rho=0\end{cases}$$

בסימון $\rho^2=x^2+y^2$. אז f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$ עם $A=B=0$ כי

$$\Delta f\equiv f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)$$
$$=\ ((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)$$

ולכן ביטוי זה הוא מסדר $O((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$, ואפשר לכתבו כ:

$$0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

ונובע ש: f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. אבל $\frac{\partial f}{\partial x}$ אינה רציפה כי $\lim\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ לא קיים.

פרוש גיאומטרי.

קיבלנו עבור פונקציה דיפרנציאבילית:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \\ &+ o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\end{aligned}$$

החלק הראשון נקרא <u>הדיפרנציאל בנקודה</u> (x_0,y_0).

אם $z=f(x,y)$ מתאר משטח מעל

$$(x,y)\in D\subset R^2$$

בתוך R^3 , כאשר עוברים מנקודה (x_0,y_0) לנקודה סמוכה (x,y) , השינוי בפונקציה זו הוא

$$\Delta z = z - z_0 = f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

ובשימוש בטור טיילור ניתן לכתוב זאת כ:

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{A}(\Delta x) + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{B}(\Delta y)$$
$$+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

החלק הראשון:

$$z - z_0 \approx A(x - x_0) + B(y - y_o)$$

הוא פונקציה לינארית המקרבת את המשטח $z = f(x, y)$ ולגרף שלה יש נקודה משותפת (x_0, y_0, z_0) עם המשטח הזה. זוהי משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה (x_0, y_0) . דיפר-נציאביליות היא האפשרות לקרב פונקציה/משטח נתון על ידי פונקציה/משטח ליניארי.

גזירת פונקציה מורכבת.

משפט. תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות (ולכן דיפרנציאבילית) בתחום D, נניח ש: $x(t), y(t)$ גזירות (לפי t) בקטע (α,β) ונניח ש

$$(x(t), y(t)) \in D.$$

אז $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$ היא פונקציה גזירה ונגזרתה היא (כלל השרשרת):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

(כתיב אחר: $F' = f_x \cdot x' + f_y \cdot y'$).

<u>הוכחה:</u> כאשר משנים את t ל- $t + \Delta t$,
$x(t), y(t)$ משתנים כדלקמן:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$

השינוי המושרה בערך של F הוא:

$$\Delta F = F(t + \Delta t) - F(t)$$

$$= f\left(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t)\right) - f\left(x(t), y(t)\right)$$

ומכיוון ש- f דיפרנציאבילית ביטוי זה שווה ל:

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) \cdot \Delta y$$

$$+\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

ומתקיים

$$\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$$

כאשר $(0,0) \to (\Delta x, \Delta y)$.

אבל כאשר $\Delta t \to 0$ אזי אכן $\Delta x, \Delta y \to 0$,

ועל כן גם $\alpha, \beta \to 0$, ומקבלים

$$.\frac{\Delta F}{\Delta t} = f_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

בביטוי האחרון יש לנו ש:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'(t),\ \frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t)$$

כאשר $\Delta t \to 0$, ולכן

$$.\ F' = \frac{dF}{dt} = f_x \cdot x' + f_y \cdot y'$$

<u>משפט.</u> תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בתחום D, $x(t,s), y(t,s)$ בעלות נגזרות חלקיות לפי s,t בתחום E, כך ש:

$$(x(t,s), y(t,s)) \in D$$

לכל $(t,s) \in E$. אז יש לפונקציה

$$F(t,s) = f(x(t,s), y(t,s))$$

נגזרות חלקיות לפי (t,s) כך ש:

$$\frac{\partial F(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

ההוכחה דומה להוכחת המשפט הקודם.

<u>משפט.</u> אם $f_y \equiv f_x \equiv 0$ בכל נקודות תחום D, אז $f \equiv const$ ב- D.

<u>הוכחה:</u> ניקח שתי נקודות P_1, P_2 ונניח תחילה שהן ניתנות לחיבור ע"י בקטע ישר, אשר המשואה הפרמטרית שלו היא $(x(t), y(t))$. על קטע זה נסתכל ב- $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$, ואז

$$\frac{dF}{dt} = \underbrace{f_x}_{0} \cdot x' + \underbrace{f_y}_{0} \cdot y' \equiv 0 .$$

נובע ש: F קבועה על הישר ועל כן

$$F(P_1) = F(P_2) .$$

אם P, Q מחוברות בתחום (הקשיר!) ע"י קו פוליגונלי, אז חוזרים על הנימוק הזה בכל קטע,

ומקבלים ש: f קבועה על כל קטע בנפרד, ולכן בעלת אותו ערך בקצוות הקו הפוליגונלי. מכאן נובע שהיא קבועה בכל התחום.

תרגיל: פונקציות הומוגניות

פונקציה $f(x_1, \ldots, x_n)$ נקראת הומוגנית חיובית ממעלה p אם

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, \ldots, x_n)$$

לכל $t > 0$.

משפט Euler. תהי $f(x_1, \ldots, x_n)$ בעלת נגזרות חלקיות ראשונות רציפות. אזי היא הומוגנית חיובית ממעלה p אם ורק אם

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = pf$$

<u>הוכחה:</u> בכיוון אחד, נניח ש: f הומוגנית מסדר p:

$$f\left(\underbrace{tu_1}_{x_1},\dots,\underbrace{tu_n}_{x_n}\right)=t^p f(u_1,\dots,u_n)$$

נגזור את שני אגפי המשוואה לפי t ונקבל:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x_1}(tu_1,\dots,tu_n)\cdot u_1+\dots \\ + \; & \frac{\partial f}{\partial x_n}(tu_1,\dots,tu_n)\cdot u_n \\ = \; & pt^{p-1}f(u_1,\dots,u_n) \end{aligned}$$

נציב $t=1$ ואז $u_i\equiv x_i$, ומקבלים

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)+\dots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n)$$
$$=pf(x_1,\dots,x_n).$$

בכיוון השני, נניח שמשוואה $(\star)$ מתקיימת

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = pf$$

ונסמן $g(t) = f(tu_1, \ldots, tu_n)$. נגזור את $g(t)$ לפי t :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tu_1, \ldots, tu_n) u_i$$

ונכפיל ביטוי זה ב- t :

$$tg'(t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tu_1, \ldots, tu_n) \underbrace{(tu_i)}_{x_i}$$

נובע מ: $(\star)$ שהביטוי האחרון שווה ל:

$$.pf(tu_1, \ldots, tu_n) = pg(t)$$

אזי

$$\left[t^{-p}g(t)\right]' = t^{-p}g'(t) + (-p)t^{-p-1}g(t)$$

$$= t^{-p-1}\underbrace{\left[tg' - pg\right]}_{0} \equiv 0$$

ולכן $t^{-p}g(t) = const = c$. יוצא ש:

$g(t) = ct^p$, ו: $c = g(1)$. מהגדרת $g(t)$ ע"י

$$g(t) = f(tu_1, ..., tu_n)$$

מקבלים

$$f(tu_1, \ldots, tu_n) = ct^p = f(u_1, \ldots, u_n)t^p.$$