אינפי 2

1. א. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n(\ln n)^2}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \cdot n \cdot \ln^2(n)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n\ln^2(n)}}$$

$$= \frac{1}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n\ln^2(n)}} = \frac{1}{2}$$

לכן $R=2$.

נבדוק בקצוות:

כאשר $x=2$:

$$\sum \frac{2^n}{2^n n\ln^2 n} = \sum \frac{1}{n\ln^2 n} \Rightarrow$$

הטור מתכנס כי ראינו בכיתה

$$\sum \frac{-2^n}{-2^n n\ln^2(n)} = -\sum \frac{1}{n\ln^2(n)} \Rightarrow$$

מתכנס בדרך דומה

לכן תחום רדיוס ההתכנסות: $[-2,2]$.

1. ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{n} \cdot x^{3n}$

נשים לב כי $a_n = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{n}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\sqrt[n]{n}} = e$$

לכן $R=\frac{1}{e} \Leftarrow x = e^{-3}$

נבדוק בהצבות מקודם:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{n}$$

נעצר בחישוב הגבול בעזרת מבחן

בשאלה ה, הגבול לופיטל כלים:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\frac{1}{x})^{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e}^x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(x(x+\frac{1}{x})^x(\frac{1}{e})^x\right)}$$

נתבונן בביטוי:

$$\ln\left(x\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\left(\frac{1}{e}\right)^{x}\right)=$$

$$\ln\left(x\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\right)+\ln\left(\frac{1}{e}\right)^{x}=\ln(x)+\ln\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x}+1^{x}$$

$$\geq \ln(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$$

לכן:

$$\lim e^{\ln\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{x}\cdot x\right)}=\infty$$

לפי הגדרת הגבול החלקי של ס' מינה עבור $n=\lambda_n$ נקבל כי

לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים הטור מתבדר.

לכן רדיוס ההתכנסות הוא $(-e^{-3}, e^{-3})$.

1. ש. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\frac{(2x+1)^n}{n}$. נציב $y=2x+1$:

נחלק לשקולות חלקיים זוגיים/אי זוגיים:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\sqrt[n]{n}}=e\xRightarrow{\text{זוגיים}}R=\frac{1}{e}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{e}\Rightarrow R=e$$

נבחר את רדיוס ההתכנסות שמוכל בשני.

$R=\frac{1}{e}$

נבדוק התכנסות בקצוות:

$$\overset{(1)}{\sum\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{2n}}{2n}}+\sum\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)^{(2n-1)^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{2n-1}}{2n-1}=\sum\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{n}}{n}$$

נתבונן באינדקסים הזוגיים:

$$(1)=\sum\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{e^{2n}\cdot 2n}$$

נבדוק מבחן השוואה גבולי:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{e^{2n\cdot 2n}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{e^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}{e}\right)^{2n} = 1$$

לכן הטורים מתכנסים או מתבדרים יחדיו, ובפרט מתבדרים יחדיו, כי הוכחנו בכיתה כי $\sum \frac{1}{2n}$ מתבדר.

לכן הטור מתבדר.

באופן דומה עבור $-e^{-3}$ בהצבה נקבל תוצאה זהה.

לכן קיים התכנסות כאשר: $e^{-3}=2x+1 \Leftarrow$ $x_1=\frac{e^{-3}-1}{2}$, $-e^{-3}=2x+1 \Leftarrow x=\frac{-1-e^{-3}}{2}$

כי הצבנו החלפה $y=2x+1$

$\left(\frac{-1-e^{-3}}{2}, \frac{e^{-3}-1}{2}\right)$.

2. נחשב $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3+3^{3n}}{n!}$

$$= \sum^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n!} + \sum^{\infty} \frac{3^{3n}\cdot(-1)^n}{n!}$$

נזכור כי $\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

עבור $\frac{1}{e} = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{n!}$

כי $n^3$ אינו משפיע על התכנסות הטור.

$$\frac{1}{e^{27}} = \sum^{\infty} \frac{27^n(-1)^n}{n!} = \sum^{\infty} \frac{3^{3n}\cdot(-1)^n}{n!}$$

$27^n$ מעריכי ומשפיע על התכנסות הטור.

3. א.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = 1$$

כאשר $x=1$: $\frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$ ולפי מבחן ההשוואה מתכנס.

$x=-1$: $(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$ לפי משפט לייבניץ מתכנס.

אז קטע ההתכנסות הוא $[-1,1]$.

3. ב. על מנת להוכיח כי הטור עולה?

נראה כי $f'(x)>0$ לכל $x\in(-1,1)$ שהרי זהו תחום ההתכנסות.

נשתמש במשפט גזירה איבר-איבר:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1} \Longrightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\cdot n x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^{n-1} > 0$$

לכל $x\in(-1,1)$ מתקיים כי הטור מתכנס לערך חיובי לפי משפט לייבניץ לטורים.

מאחר ו- $f'(x)>0$ עבור $x\in(-1,1)$ $f(x)$ מונו' עולה בקטע זה.

4. בשאלון 4 אם יכולנו להשתמש במשפט גזירה איבר-איבר. כעת נתבונן בטור חזקות הנ"ל:

$$\sum_{n}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow \left(\sum^{\infty} x^n\right)' = \sum (x^n)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

אז:

$$\sum_{n}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נימוק: שגזרנו את הפונקציה שהיא טור חזקות.