

## אלגברה ב' - גליון תרגילים 8; להגשה 1.06.2000

### ♣ שאלה 1:

הוכיחו שאופרטור  $T$  של ממ"פ  $V$  ממימד סופי הוא אופרטור נורמלי אם"ס כל תת-מרחב  $T$ -שמור (אינווריאנטי) של  $V$  הוא גם  $T^*$ -שמור.

### ♣ שאלה 2:

יהא  $T \in L(V)$ , כאשר  $V$  הוא ממ"פ ממימד סופי. הוכיחו שקיימים אופרטור אוניטרי  $U$  ואופרטור חיובי יחיד  $N$  כך ש- $T = NU$ . (בהרצאה הוכחה הטענה עבור  $T$  הפיך, ובמקרה זה גם  $N$  וגם  $U$  נקבעים ביחידות)

### ♣ שאלה 3:

הוכיחו שאופרטור  $T$  של ממ"פ ממימד סופי הוא אופרטור נורמלי אם"ס הוא מתפרק כמכפלה  $T = NU$  כאשר  $N$  הוא אופרטור אי-שלילי, ו- $U$  אופרטור אוניטארי המתחלף בכפל עם  $N$ .

### ♣ שאלה 4:

תהי  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מטריצה לכסינה. הוכיחו שקיימות מטריצה מוגדרת חיובית  $H$  ומטריצה נורמלית  $N$  כך שיתקיים  $H^{-1}AH = N$ .

### ♣ שאלה 5:

תהיינה  $A, B$  מטריצות מוגדרות-חיובית. הוכיחו שהערכים העצמיים של  $AB$  חיוביים כולם, והביאו דוגמה לשלשה  $A, B, C$  של מטריצות מוגדרות-חיובית כך שלמטריצה  $ABC$  יש ערך עצמי אי-חיובי.

### ♣ שאלה 6:

תהי  $A$  מטריצה מוגדרת אי-שלילית מסדר  $n \times n$ , ותהי  $B$  תת-מטריצה ראשית של  $A$  מסדר  $k \times k$ . תהיה  $C$  תת-מטריצה של  $A$  מסדר  $k \times n$  כך ש- $B$  היא תת-מטריצה של  $C$ . הוכיחו כי  $rk(B) = rk(C)$ .

### ♣ שאלה 7 - [H] 2.8.14:

הוכיחו שלכל חבורה סופית בת יותר משני איברים יש אוטומורפיזם לא טריוויאלי.

### ♣ שאלה 8 - [H] 2.9.6:

תהי  $\varphi$  הפונקציה של אוילר. אם  $a > 1$  הוא שלם, הוכיחו כי  $n \mid \varphi(a^n - 1)$ .