תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 8	**להגשה עד 29.12.2002**

1. א) הוכח או הפרך: $(2^2)^{2^{\aleph}} = (2^4)^{\aleph}$.

ב) הוכח או הפרך: $(2^{(2^{\aleph_0})})^{\aleph_0} = 2^{\aleph}$.

2. א) האם קיימים α,β,γ קרדינלים אינסופיים שונים זה מזה כך ש-
$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{(\beta^{\gamma})}$?

ב) האם קיימים α,β,γ קרדינלים אינסופיים כך ש- $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \beta^{(\gamma^{\alpha})}$?

ג) האם קיימים $\alpha,\beta,\gamma,\kappa,\lambda,\mu$ קרדינלים אינסופיים כך ש-
$\alpha \neq \kappa$, $\beta \neq \lambda$, $\gamma \neq \mu$, ו- $\alpha^{(\beta^{\gamma})} = \kappa^{(\lambda^{\mu})}$?

3. נסמן: $\alpha_0 = \aleph_0$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ $\alpha_n = 2^{\alpha_{n-1}}$. תהי $\Lambda = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. הוכח את הטענות הבאות:

א) לכל $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $\alpha_i \cdot \alpha_i = \alpha_i$ ו- $\alpha_i + \alpha_i = \alpha_i$. (רמז: אינדוקציה.)

ב) לכל $i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ כך ש- $i<j$ מתקיים $\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha_j$ ו- $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_j$.

ג) אם $\beta,\gamma \in \Lambda$ ו- $\gamma < \beta$ אז $\beta^{\gamma} = \beta$.

ד) אם $\beta,\gamma \in \Lambda$ ו- $\beta \leq \gamma$ אז $\beta^{\gamma} = 2^{\gamma}$.

<u>הערה</u>: יש לפתור תרגיל זה רק ע"י חשבון קרדינלים, ללא שימוש במסקנות מהלמה של צורן.

4. א) מצא את העוצמה של קבוצת כל הפונקציות מ- $[0,1]$ ל- $\mathbb{R}$.

ב) מצא את העוצמה של קבוצת כל הפונקציות הרציפות מ- $[0,1]$ ל- $\mathbb{R}$.

ג) מצא את העוצמה של קבוצת כל הפונקציות מ- $[0,1]$ ל- $\mathbb{R}$ שיש להן נקודת אי רציפות אחת בדיוק.

5. א) מצא את העצמה של קבוצת כל היחסים ב- $\mathbb{N}$.

ב) מצא את העצמה של קבוצת כל יחסי השקילות ב- $\mathbb{N}$.

6. מצא את העצמות של הקבוצות הבאות:

- A , קבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים (כלומר, $A=\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$).
- B , קבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים שיש להן גבול (סופי ממשי).
- C , קבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים שמתכנסות ל- 0 .
- D , קבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים שמקבלות מספר סופי של ערכים (כלומר, התמונה שלהן – קבוצה סופית).
- E , קבוצת כל הסדרות היורדות מונוטונית של מספרים רציונליים.
- $F=B\cap D$.
- $G=C\cap E$.

<u>הערה</u>: בהגדרה של הקבוצה E הכוונה למונוטוניות חזקה: $x<y \Leftarrow f(x)<f(y)$.