תרגיל:

בדקו אינטגרביליות וחשבו את $I=\iint_D \frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dxdy}$ כאשר $D=\left\{(x,y)\ \mid\ 0\le y\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$ (תחום בצורת משולש).

פתרון:

הפונקציה $f(x,y)=\frac{\sin(x)}{x+y}$ היא רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ פרט לנקודות מהצורה $(t,-t)$, והנקודה היחידה מהצורה הזאת בנמצאת בתחום היא $(0,0)$. לפונקציה אין גבול שם, אפילו אם מצטמצים רק לתחום D, מאחר ושני המסלולים $(t,0)$, (t,t) עבור $0\le t\le \frac{\pi}{2}$ נמצאים בתחום ומתקיים ש

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t)}{t+t}=\frac{1}{2}\ne 1=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t)}{t+0}.$$

מה שכן ניתן להראות זה שהפונקציה חסומה בתחום כי

$$\left|\frac{\sin(x)}{x+y}\right|=\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\left|\frac{x}{x+y}\right|\le\frac{|x|}{|x+y|}=\frac{x}{x+y}\le 1$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש $x,y\ge 0$ ו $|\sin(x)|\le |x|$. הפונקציה חסומה ורציפה פרט למספר סופי של נקודות ולכן אינטגרבילית.

כדי להשתמש במשפט פוביני צריך שהפונקציה תהיה רציפה (למרות שניתן להרחיב את התנאים של המשפט גם לפונקציה הזאת). עבור $0<\varepsilon\le\frac{\pi}{2}$, נחלק את התחום לשני חלקים (תלויים באפסילון) $D=D_1\cup D_2$ כאשר $D_1=\{(x,y)\ \mid\ 0\le y\le x\le\varepsilon\}$ (משולש קטן ליד הנקודת אי רציפות) ו $D_2=D\backslash D_1=\left\{(x,y)\ \mid\ \varepsilon<x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le x\right\}$ (שאר התחום). נקבל $\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}$ ובנוסף

$$\left|\iint_{D_1}\frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dxdy}\right|\le\iint_{D_1}\left|\frac{\sin(x)}{x+y}\right|\mathrm{dxdy}\le\iint_{D_1}1\mathrm{dxdy}=\frac{\varepsilon^2}{2}$$

ולכן כאשר נשאיף את ε לאפס נקבל ש $\iint_{D_2}$ שואף ל $\iint_D$.

$$\begin{aligned}\iint_{D_2}\frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dxdy} &= \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^x\frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}=\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\left[\ln(x+x)-\ln(x+0)\right]\mathrm{dx}=\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\ln(2)\mathrm{dx}\\ &= \left(\cos(\varepsilon)-\cos(\frac{\pi}{2})\right)\ln(2)\overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow}\ln(2)\end{aligned}$$

שימו לב שאי אפשר מראש להציב $\varepsilon=0$, כי אז יהיה מותר להציב בתוך האינטגרל את אפס ב x ויהיה לנו ביטוי מהצורה $\ln(0)-\ln(0)$ שהוא לא מוגדר. בגלל שחתכנו את החלק הבעייתי ואנחנו רק בודקים את הגבול כאשר $x\to 0$, אנחנו רואים ששני הלוגריתמים אמנם שואפים לאינסוף כל אחד, אבל ההפרש בינהם שואף (ובעצם שווה) ל $\ln(2)$.

אינטגרלים כפולים מוכללים

תרגיל:

חשבו את האינטגרלים הבאים או הראו שהם מתבדרים:

1. $\iint_D (x+y)e^{-x-y}\mathrm{dxdy}$ כאשר $D=\{(x,y)\mid x,y\geq 0\}$.
2. $\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\mathrm{dxdy}$
3. $\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}$

פתרון

1. $\iint_D (x+y)e^{-x-y}\mathrm{dxdy}$ כאשר $D=\{(x,y)\mid x,y\geq 0\}$.
נסמן $u=x+y$ $v=x$ אז התחום הופך להיות $v,u-v\geq 0$ כלומר $u\geq v\geq 0$.

$$\det\left(\frac{\mathrm{dxdy}}{\mathrm{dudv}}\right)=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-1$$

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)e^{-x-y}\mathrm{dxdy} &= \int_0^\infty\left[\int_0^u ue^{-u}\mathrm{dv}\right]\mathrm{du}=\lim_{M\to\infty}\int_0^M\left[\int_0^u ue^{-u}\mathrm{dv}\right]\mathrm{du}=\lim_{M\to\infty}\int_0^M u^2e^{-u}\mathrm{du}=(*)\\ \int u^2e^{-u}\mathrm{du} &= -u^2e^{-u}+2\int ue^{-u}\mathrm{du}=-\left(u^2+2u+2\right)e^{-u}\\ (*) &= \lim_{M\to\infty}2-\left(M^2+2M+2\right)e^{-M}=2\end{aligned}$$

2. $\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\mathrm{dxdy}$
נשתמש בהצבה פולארית.

$$\begin{aligned}\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\mathrm{dxdy} &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\frac{\ln(r^2)}{r}r\mathrm{dr}\right]\mathrm{d}\theta=4\pi\left[\int_0^1\ln(r)\mathrm{dr}\right]=4\pi\left[r\ln(r)-r\right]_0^1\\ &= -4\pi-4\pi\lim_{r\to 0^+}\frac{\ln(r)}{1/r}=-4\pi-4\pi\lim_{r\to 0^+}\frac{1/r}{-1/r^2}=-4\pi\end{aligned}$$

3. $\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\mathrm{dxdy}$
אותו חישוב כמו בתרגיל הקודם יתן לנו

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\mathrm{dxdy} = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\frac{\ln(r^2)}{r}r\mathrm{dr}\right]\mathrm{d}\theta=4\pi\left[\int_1^\infty\ln(r)\mathrm{dr}\right]=\infty$$