תרגיל מס' 8 בתורת המשחקים

1. א. הוכח שכל משחק פשוט מונוטוני על 3 שחקנים הוא משחק רוב משוקלל.

ב. תן דוגמה של משחק פשוט מונוטוני על 4 שחקנים שאיננו משחק רוב משוקלל.

2. במועצת הבטחון של האו"ם חברות 15 מדינות, מהן 5 קבועות ו־10 זמניות. הצעת החלטה מתקבלת במועצה אם תמכו בה לפחות 9 חברות, ולא התנגדה אף חברה קבועה. נסמן $N = P \cup T$, כאשר:
$P = \{1, \ldots, 5\}$ היא קבוצת החברות הקבועות,
$T = \{6, \ldots, 15\}$ היא קבוצת החברות הזמניות.

א. כתוב משחק פשוט המתאר את מועצת הבטחון (כלומר, הקואליציות הזוכות הן אלו שבכוחן להעביר כל החלטה שירצו).

ב. האם זה משחק רוב משוקלל ?

3. תהי S_n חבורת התמורות של $N = \{1, \ldots, n\}$. יהי $G = (N, v)$ משחק.
תמורה $\sigma \in S_n$ נקראת סימטריה של G אם $v(\{\sigma(i) | i \in T\}) = v(T)$ לכל $T \subseteq N$.
נסמן ב־$\mathrm{SYM}(G)$ את קבוצת כל הסימטריות של G.

א. הוכח ש־$\mathrm{SYM}(G)$ היא תת־חבורה של S_n.

ב. מצא את $\mathrm{SYM}(G)$ עבור כל אחד מן המשחקים הבאים:

I. משחק הרוב על 3 שחקנים.

II. משחק שוק הכפפות על 3 שחקנים.

III. מועצת הבטחון של האו"ם.

ג. G נקרא סימטרי אם $\mathrm{SYM}(G) = S_n$. הוכח:
$G = (N, v)$ הוא סימטרי אם ורק אם קיימת פונקציה $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, המקיימת $f(0) = 0$, כך ש־ $v(T) = f(|T|)$ לכל $T \subseteq N$.

ד. יהי G משחק רוב משוקלל. הוכח:

I. אם $[q; w_1, \ldots, w_n]$ היא הצגה של G ו־ $\sigma \in \mathrm{SYM}(G)$ אז גם $[q; w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(n)}]$ היא הצגה של G.

II. אם $[q; w_1, \ldots, w_n]$ ו־ $[q'; w'_1, \ldots, w'_n]$ הן הצגות של G אז גם $[q + q'; w_1 + w'_1, \ldots, w_n + w'_n]$ היא הצגה של G.

III. יש ל־G הצגה $[q; w_1, \ldots, w_n]$ בעלת התכונה הבאה:
אם עבור שני שחקנים i, j קיימת $\sigma \in \mathrm{SYM}(G)$ כך ש־ $\sigma(i) = j$ אז $w_i = w_j$.