1 סדרות וטורים של פונקציות

1.1 התכנסות במידה שווה של סדרות של פונקציות

נתונה סדרת פונקציות $\{f_n\}$. בכל נקודה x שבה כולן מוגדרות נרצה לבדוק אם סדרת המספרים $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או תבדרת.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הפונקציות $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ מוגדרות בכל הישר ו- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ לכל x.

(ii) הפונקציות $f_n(x) = x^n$ מוגדרות בכל הישר ומקיימות $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ אם $x \in (-1,1)$ וכן $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.
עבור כל ה-x-ים האחרים הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}$ אינה מתכנסת.

<u>הגדרה.</u> תהי f_n סדרת פונקציות המוגדרות בקטע I. נאמר שהסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה f בקטע אם לכל נקודה $x \in I$ הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, כלומר, לכל x בקטע ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(x,\varepsilon)$ כך ש- $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $n > N$.

בהגדרת ההתכנסות הנקודתית התאמנו לכל ε מספר $N = N(x,\varepsilon)$, ובדר"כ הוא תלוי ב- x. כלומר סדרת המספרים $f_n(x)$ מתקרבת למספר $f(x)$ בקצב שונה בנקודות שונות. חשיבות רבה יש למקרה המיוחד שבו אפשר לבחור את N כך שלא יהיה תלוי ב- x אלא רק ב- ε. במקרה זה קצב ההתקרבות של f_n ל- f הוא <u>אחיד בכל הקטע</u>.

<u>הגדרה.</u> תהי f_n סדרת פונקציות המוגדרות בקטע I. נאמר שהסדרה מתכנסת לפונקציה f במידה שווה (במ"ש) בקטע אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ (התלוי רק ב- ε) כך ש- $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $n > N$ ולכל $x \in I$.

מבחינה גיאומטרית $f_n \to f$ במ"ש אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים שאם n גדול מספיק אז כל הגרף של f_n מוכל ברצועה ברוחב 2ε שמרכזה הוא הגרף של f. כפי שנראה בהמשך, העובדה <u>שכל</u> הגרף של f_n "קרוב" לכל הגרף של f תאפשר לנו להסיק שכאשר ל- f_n-ים יש תכונות מסוימות (כגון רציפות או אינטגרביליות) אז גם ל- f יש אותן תכונות.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הסדרה $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x) = 0$ על כל הישר. כי בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $N = 1/\varepsilon$ ואז לכל $n > N$ מתקיים

$$0 < \frac{1}{x^2+n} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \,.$$

(ii) סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ אמנם מתכנסת נקודתית ב- $(-1,1)$ ל- 0, אך ההתכנסות איננה במידה שווה. כדי לראות זאת נבחר $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ ונראה שלכל n יש x_n כך ש- $f_n(x_n) > \frac{1}{4}$. ובאמת, נבחר למשל $x_n = \sqrt[n]{1/2}$, ואז $f_n(x_n) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

הלמה הפשוטה הבאה היא למעשה ניסוח אחר להגדרה.

<u>למה.</u> **תהיינה f_n מוגדרות בקטע I. אז התנאים הבאים שקולים:**

(i) **הסדרה f_n מתכנסת במ"ש לפונקציה f בקטע I.**

(ii) $b_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

(iii) **יש קבועים $a_n \geq 0$ כך ש- $a_n \to 0$ וכך ש- $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ לכל x בקטע.**

הוכחה. ברור שהתנאים (ii) ו- (iii) שקולים וגוררים התכנסות במ"ש. להפך, אם $f_n \to f$ במ"ש אז ההגדרה אומרת ש- $b_n \to 0$. $\square$

הבדיקה אם סדרה נתונה f_n מתכנסת במ"ש בקטע I תעשה בשני שלבים:

שלב 1: בדיקה שהסדרה מתכנסת נקודתית - וזהוי הפונקציה הגבולית f.

שלב 2: שימוש בלמה כדי לבדוק אם f_n אכן מתכנסת במ"ש לפונקציה f שמצאנו.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הסדרה $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} + x$ מתכנסת במ"ש על כל הישר. הגבול הנקודתי של הסדרה הוא $f(x) = x$, ועלינו לבדוק את ההתנהגות של $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$. נקבע n, ואז הנגזרת של $(f_n - f)(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ מתאפסת רק ב- $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{n}}$. כמו כן לכל n קבוע $\lim_{x\to\pm\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, ולכן $|f_n - f|$ אכן מקבלת מכסימום בנקודות אלה, ומתקיים

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \left|(f_n - f)\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ .$$

(ii) הסדרה $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ מתכנסת נקודתית בקטע $[0,1]$ ל- 0 ונראה שה-התכנסות איננה במ"ש. ובאמת

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} x^n(1-x^n) = \frac{1}{4} \not\to 0$$

כי המכסימום של $t(1-t)$ בקטע $[0,1]$ הוא $\frac{1}{4}$ (ומתקבל ב- $t = \frac{1}{2}$), ונציב $t = x^n$.

(iii) הדוגמא הטיפוסית המדגימה באופן ברור את ההבדל בין התכנסות נקודתית להתכנסות במ"ש היא סדרה מהטיפוס

$$f_n(x) = \begin{cases} n\alpha_n x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2\alpha_n - n\alpha_n x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

המתכנסת נקודתית ל- 0 לכל בחירה של המספרים α_n, אך מתכנסת במ"ש אםם $\max f_n(x) = \alpha_n \to 0$.

נשאיר כתרגיל את הוכחת המשפט החשוב הבא

משפט. [תנאי קושי] הסדרה f_n מתכנסת במ"ש ל- f בקטע I אםם לכל ε יש N (התלוי ב- ε בלבד) כך שלכל $N < n, m$ מתקיים $|f_n(x) - fm(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in I$.

הערה. בענפים רבים של מתמטיקה, מדע וטכנולוגיה אנחנו זקוקים ל"מדד של קירבה" בין שתי פונקציות. התכנסות במ"ש קשורה לדרך טבעית מאוד למדידת הקירבה: שתי פונקציות f ו- g תחשבנה ל"קרובות זו לזו" בקטע I אם הגרפים שלהן "קרובים" זה לזה, או, באופן יותר מתמטי, אם $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$ "קטן".

כדי להדגים זאת נתאר שתי בעיות פשוטות של "בקרה":

(i) במשך תהליך ייצור הטמפרטורה האידאלית הרצויה בזמן t צריכה להיות $h(t)$ - אבל סטיות עד לגודל ε מהטמפרטורה האידיאלית עדיין מותרות ואינן פוגמות במוצר. תפקידו של המהנדס הוא לתכנן מנגנון בקרה שיבטיח שהטמפרטורה בפועל, $f(t)$, תהיה ε-קרובה, בכל זמן t במשך הייצור, לערך ב- t של הפונקציה האידאלית h.

(ii) תקציב המדינה בשנה מסויימת קובע את הוצאות הממשלה $h(t)$ בחודש t, אך החלטת הממשלה גם מתירה סטיות עד לגודל מסויים. תפקידו של הממונה על התקציבים הוא לדאוג שההוצאה בפועל, $f(t)$, תקיים שהסטיה המירבית מההוצאה המתוכננת, כלומר $\sup\{|f(t) - g(t)| : 1 \leq t \leq 12\}$, עומדת בדרישות שהוצבו ע"י הממשלה.

בשתי הדוגמאות המדד להצלחה הוא ה"קירבה" של הגרפים, והתכנסות במ"ש פרושה שע"י בחירת n גדול מספיק אפשר לשלוט בקירבה הזו, ולהקטין אותה כרצוננו.

הדוגמאות הבאות מראות שתכונות חשובות של פונקציות, כגון רציפות או אינטגרביליות, אינן נשמרות בהתכנסות נקודתית לגבול.

דוגמאות.

(i) הפונקציות הרציפות $f_n(x) = x^n$ מתכנסות נקודתית בקטע $[0,1]$ לפונקציה הלא רציפה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} .$$

(ii) נסתכל בסדרת הפונקציות הבאות בקטע $[0,1]$

$$D_n(x) = \begin{cases} 0 & q \leq n \text{ -כך ש } x = \frac{p}{q} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases} .$$

לכל n קבוע זוהי פונקציה חסומה, והיא רציפה פרט למספר סופי של נקודות, ולכן אינטגרבילית. אך הגבול הנקודתי של הסדרה הוא פונקצית דיריכלה שאינה אינטגרבילית.

(iii) גם כשהגבול הנקודתי הוא פונקציה אינטגרבילית בקטע I לא נובע מכך כי $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$. למשל, בדוגמא (iii) למעלה מתקיים כי $f_n \to 0$ נקודתית בקטע $I = [0,1]$ לכל בחירה של α_n, ולכן $\int_I f = 0$. אך $\int_I f_n = \alpha_n$ ובבחירות

מתאימות של α_n נקבל סדרה α_n שאינה מתכנסת, או שהיא מתכנסת לגבול שונה מאפס.

לעומת זאת, התכנסות במ"ש כן מבטיחה רציפות (או אינטגרביליות) של פונקצית הגבול. שימו לב איך משתמשים בהוכחות בכך שבהתכנסות במ"ש כל הגרף של f_n קרוב באופן אחיד לגרף של f.

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש ל- f בקטע I. אם כל ה- f_n רציפות בנקודה x_0 אז גם f רציפה ב- x_0. בפרט, אם f_n רציפות בכל הקטע אז גם f רציפה בו.

הוכחה. נקבע $\varepsilon > 0$ ועלינו למצוא $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. נעשה זאת בשני שלבים:

בשלב הראשון נבחר N, ע"ס ההתכנסות במ"ש, כך ש- $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ לכל x בקטע.

בשלב השני ננצל את הרציפות של f_N בנקודה x_0 ונמצא $\delta > 0$ כך שלכל x בקטע המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$.

זהו ה- $\delta > 0$ המבוקש, כי כשנצרף את אי השוויונים נקבל שאם $|x - x_0| < \delta$ אז

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ המתכנסת במ"ש ל- f בקטע. אז גם f אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש- $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$. יתר על כן, אם נגדיר $F_n(x) = \int_a^x f_n$ ו- $F(x) = \int_a^x f$, אז $F_n \to F$ במ"ש בקטע.

הוכחה. נניח לשם פשטות הסימון כי הקטע הוא $[0, 1]$, ונראה תחילה ש- f אינטגר-בילית. לשם כך נקבע ε ונמצא חלוקה עבורה $\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon$, ושוב נעשה זאת באותם שני שלבים כמו בהוכחת המשפט הקודם.

בשלב הראשון נבחר N, ע"ס ההתכנסות במ"ש, כך ש- $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ לכל x בקטע.

בשלב השני ננצל את האינטגרביליות של f_N ונמצא חלוקה P עבורה מתקיים כי $\sum \omega_i^N \Delta_i^N < \varepsilon/3$ (כאשר ω_i^N הם התנודות של f_N בקטעי החלוקה P).

חישוב דומה לזה שנעשה במשפט הקודם מראה ש- $\omega_i^N \leq \omega_i + \varepsilon$ לכל i, ולכן מקבלים כי $\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon$. (בדקו את הפרטים!)

כעת נראה כי $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$. נקבע $\varepsilon > 0$ ונמצא $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ לכל t. לכן

$$\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon \ .$$

הטענה האחרונה נובעת מחישוב דומה: לכל $n > N$ ולכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$|F_n(x) - F(x)| \le \int_0^x |f_n(t) - f(t)|dt < \varepsilon x \le \varepsilon \ .$$

$\square$

ראינו שהתכנסות במ"ש של סדרת פונקציות רציפות גוררת שהגבול אף הוא רציף. ההיפך כמובן אינו נכון (בדקו שאתם מכירים דוגמא!). מתברר שכאשר ההתכנסות היא מונוטונית (כלומר או שהסדרה $f_n(x)$ עולה לכל x, או שהיא יורדת לכל x), אז ההתכנסות כן חייבת להיות במ"ש:

<u>משפט.</u> [דיני] נניח שסדרת פונקציות רציפות f_n מתכנסת באופן מונוטוני לפונקציה רציפה f בקטע סגור $[a,b]$, אז ההתכנסות היא במ"ש.

הוכחה. נניח בה"כ שהסדרה יורדת, וע"י החלפתה ב- $f_n - f$ נוכל גם להניח כי $f \equiv 0$. נניח בשלילה ש- f_n אינה מתכנסת במ"ש ל- 0 בקטע $[a,b]$, ונמצא $\varepsilon_0 > 0$, אינדכסים $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ ונקודות x_{n_k} בקטע $[a,b]$ כך ש-

$$f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$$

(יש כאלה כי $\max|f_n(x)| \not\to 0$).
נקבע m כלשהו, ואז בגלל המונוטוניות, מתקיים לכל $n_k > m$ כי

$$f_m(x_{n_k}) \ge f_{n_k}(x_{n_k}) \ge \varepsilon_0 \ .$$

הסדרה האינסופית $\{x_{n_k}\}$ חסומה, ולכן ע"ס בולצ'אנו ווירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת $x_{n_{k_l}} \to x_0 \in [a,b]$. מרציפות f_m נובע לכן כי

$$f_m(x_0) = \lim f_m(x_{n_{k_l}}) \ge \varepsilon_0$$

בסתירה להנחה ש- $\lim_{m\to\infty} f_m(x_0) = 0$. $\square$

<u>תרגיל:</u> הוכיחו את המשפט בעזרת הלמה של היינה בורל. רמז: לכל x בקטע מיצאו n_x כך ש- $f_{n_x}(x) < \varepsilon/2$, וקטע פתוח I_x סביב x שבו $f_{n_x} < \varepsilon$. אח"כ השתמשו בהיינה בורל.

ראינו שגבול במ"ש של פונקציות רציפות או אינטגרביליות הוא רציף או אינטגרבילי בהתאמה. האם גם גזירות נשמרת? התשובה היא שלילית כי אפשר לעשות שינויים גדולים מאוד בשיפועים של הגרף של פונקציה בלי לשנות בהרבה את ערכיה.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הפונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & |x| \ge \frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & |x| \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

מתכנסות במ"ש על כל הישר לפונקציה $f(x)=|x|$. הן גזירות בכל נקודה, אך הגבול אינו גזיר בנקודה $x=0$. (יש פונקציות רציפות שאינן גזירות באף נקודה, והבניות הסטנדרטיות שלהן הן כגבולות במ"ש של פונקציות שהן גזירות בכל מקום. ראו גם בדוגמאות אחרי משפט וירשטראס על התכנסות במ"ש של טורים).

(ii) גם כשהגבול f גזיר סדרת הנגזרות אינה חייבת להתכנס לנגזרת f'. למשל, נקח $f_n(x)=\frac{\sin n^2x}{n}$, ואז הן מתכנסות במ"ש ל- $f\equiv 0$, אך $f_n'(x)=2n\cos n^2x$, וסדרה זו אינה מתכנסת במ"ש כלל (ואפילו לא נקודתית).

המשפט הבא מטיל תנאים נוספים על הסדרה המספיקים כדי להבטיח שהנוסחה $(\lim f_n)'=\lim(f_n')$ תהיה תקפה, אך למעשה התנאים הם כאלה שהמשפט הוא מסקנה מיידית מהמשפט על אינטגרציה.

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות בעלות נגזרות רציפות בקטע I כך ש-

(i) יש נקודה x_0 שבה הסדרה המספרית $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת.

(ii) הסדרה f_n' מתכנסת במידה שווה על I.

אז הסדרה f_n מתכנסת במידה שווה על I, גבולה שיסומן ב- f גזיר, ומתקיימת הנוסחה $f'=\lim f_n'$.

הוכחה. נסמן את הגבול של ה- f_n'-ים ב- φ. כגבול במ"ש של פונקציות רציפות גם φ רציפה, וע"ס המשפט על אינטגרציה $\lim\int_{x_0}^x f_n'(t)dt=\int_{x_0}^x\varphi(t)dt$ וההתכנסות היא במ"ש.

מצד שני $f_n(x)=\int_{x_0}^x f_n'(t)dt+f_n(x_0)$, ולכן גם הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש וגבולה הוא

$$f(x)=\int_{x_0}^x\varphi(t)dt+C$$

כאשר $C=\lim f_n(x_0)$. ע"ס המשפט היסודי של החדו"א $f'=\varphi$. □

1.2 טורי פונקציות

נאמר שטור הפונקציות $\sum f_n$ מתכנס נקודתית (או במ"ש) בקטע I אם סדרת הסכומים החלקיים שלו, כלומר הסדרה, $S_N(x)=\sum_{n=1}^N f_n(x)$, היא סדרה מתכנסת נקודתית (או במ"ש).

ההגדרה נעשתה בעזרת התכנסות של סדרות של פונקציות, ולכן לכל המשפטים שהוכחנו על סדרות מתכנסות של פונקציות יש משפטים מקבילים על טורי פונקציות, הנובעים מהם באופן פורמלי ואין צורך להוכיחם מחדש.

<u>משפט.</u> [תנאי קושי] הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ל- S בקטע I אםם לכל ε יש N (התלוי ב- ε בלבד) כך שלכל $m>k>N$ מתקיים $|\sum_{n=k}^m f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in I$.

<u>משפט.</u> יהי $\sum f_n$ טור פונקציות המתכנס במ"ש לפונקציה S בקטע I. אם כל ה- f_n-ים רציפות בנקודה x_0 אז גם S רציפה ב- x_0. בפרט, אם f_n רציפות בכל הקטע אז גם S רציפה בו.

__משפט.__ תהיינה f_n פונקציות אינטגרביליות בקטע I כך שהטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש בקטע. אז גם $S = \sum f_n$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש- $\int_I \sum f_n = \sum \int_I f_n$.

__משפט.__ [דיני] תהיינה f_n פונקציות רציפות אי-שליליות כך שהטור $\sum f_n$ מתכנס נקודתית בקטע סגור I לפונקציה רציפה S. אז ההתכנסות היא במ"ש.

__משפט.__ תהי f_n סדרת פונקציות בעלות נגזרות רציפות בקטע I כך ש-

(i) יש נקודה x_0 שבה הטור $\sum f_n(x_0)$ מתכנס.

(ii) הטור $\sum f_n'$ מתכנס במידה שווה על I.

אז גם הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש על I, סכומו פונקציה גזירה, ומתקיימת הנוסחה $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

המשפט הבא הוא המשפט היחיד שנביא שהוא מיוחד לטורים.

__משפט.__ [ויירשטראס] נניח שהפונקציות f_n מוגדרות בקטע I ושיש קבועים M_k כך ש- $|f_k(x)| \leq M_k$ לכל $x \in I$. אם טור המספרים $\sum M_k$ מתכנס אז גם טור הפונקציות $\sum f_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע.

הוכחה. לכל x קבוע הטור המספרי $\sum f_n(x)$ מתכנס בהחלט ע"ס מבחן ההשואה, ולכן מתכנס. נסמן את הסכום ב-$S(x)$ ועלינו להוכיח כי $S_N \to S$ במ"ש. ובאמת

$$|S(x) - S_N(x)| = \Big| \sum_{n>N} f_n(x) \Big| \leq \sum_{n>N} |f_n(x)| \leq \sum_{n>N} M_n \to 0$$

כי הטור $\sum M_n$ מתכנס. $\square$

__דוגמאות.__

(i) הטור $\sum 2^{-n} \sin 3^n x$ מתכנס במ"ש (ניקח במשפט $M_n = 2^{-n}$). שימו לב שאין לנו נוסחה מפורשת לפונקצית הסכום, אך ידוע לנו שהיא רציפה (כסכום במ"ש של טור פונקציות רציפות). זוהי למעשה דוגמא ידועה מאד: וירשטראס הראה שפונקציה רציפה זו אינה גזירה באף נקודה!

(ii) הטור $\sum x^n$ מתכנס במ"ש בכל קטע מהצורה $[-r, r]$ כאשר $0 < r < 1$ (כאן ניקח $M_n = r^n$) ולכן סכומו פונקציה רציפה ב- $(-1, 1)$. למעשה זהו טור גיאומטרי אינסופי וסכומו ידוע לנו: $\frac{1}{1-x}$. כשנבצע איטגרציה אבר אבר נקבל כי לכל $0 < t < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum \int_0^t x^n dx = \int_0^t \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)\big|_0^t = -\ln(1-t)$$

וכשנציב $t = 1/2$ ונקבל את הנוסחה המעניינת $\ln 2 = -\ln \frac{1}{2} = \sum \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(iii) משפט ווירשטראס נותן תוצאה חזקה של התכנסות בהחלט ובמ"ש, ויש כמובן טורים מתכנסים במ"ש שאינם מתכנסים בהחלט. למשל הטור $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ מתכנס במ"ש על $[0,1]$ כי לכל x קבוע זהו טור לייבניץ, ולכן השארית ה- m-ית מקיימת

$$|r_m(x)| \leq |f_{m+1}(x)| = \frac{1}{x+m+1} \leq \frac{1}{m+1} < \varepsilon$$

אם רק $m > 2/\varepsilon$. הערכה זו נכונה לכל $x \in [0,1]$ ולכן ההתכנסות היא במ"ש. אבל הטור הזה אינו מתכנס בהחלט לאף x.

1.3 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. טורי חזקות הם הכללה של פולינומים לסכומים אינסופיים, ויש להם תכונות מאד מיוחדות.

לשם פשטות הסימונים נבצע הזזה ב- x_0, וכך נרשום בד"כ את הטענות למקרה המיוחד שבו $x_0 = 0$, כלומר, נסתכל בטורים מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

כל טור חזקות $\sum a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$. מה עוד אפשר לאמר על תחום ההתכנסות?

דוגמאות.

(i) הטור $\sum \frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל x - וההתכנסות היא במ"ש בכל קטע סופי $[-r,r]$. כי $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{r^n}{n!}\right|$ לכל x בקטע והטור $\sum \frac{r^n}{n!}$ מתכנס לכל r עפ"י מבחן המנה. הטענה נובעת כעת ממשפט ווירשטראס.

(ii) ראינו שהטור $\sum x^n$ מתכנס בקטע $(-1,1)$ ומתבדר עבור $|x| \geq 1$.

(iii) תחום ההתכנסות של הטור $\frac{x^n}{n}$ הוא הקטע $[-1,1)$.

(iv) הטור $\sum n^n x^n$ מתבדר לכל $x \neq 0$, כי אם $n \geq \frac{1}{|x|}$ אז $|n^n x^n| \geq 1$, ולכן האיבר הכללי בטור אינו שואף לאפס.

בכל הדוגמאות תחום ההתכנסות הוא קטע סימטרי סביב אפס (שיכול גם להיות כל הישר, או קטע מנוון ל- 0 בלבד), פרט אולי לאי סימטריה בהתכנסות בנקודות הקצה. הלמה והמשפט הבאים אומרים שזה המצב הכללי.

למה. אם הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = \alpha$, אז לכל $0 \leq r < |\alpha|$ הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r,r]$.

הוכחה. הטור $\sum a_n \alpha^n$ מתכנס, ולכן האבר הכללי שלו שואף לאפס. בפרט זו סדרה חסומה ויש M כך ש- $|a_n \alpha|^n \leq M$ לכל n. אם $|x| \leq r < |\alpha|$ אז

$$|a_n x^n| = |a_n \alpha^n| \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{\alpha}\right|^n$$

שהוא איבר כללי של טור גיאומטרי אינסופי עם $q = \left|\frac{r}{\alpha}\right| < 1$, ולכן הטור מתכנס והלמה נובעת ממשפט ווירשטראס. $\square$

משפט. לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ יש מספר $0 \le R \le \infty$, הנקרא רדיוס התכנסות של הטור, כך שהטור מתכנס בקטע $(-R,R)$ ומתבדר עבור $|x| > R$ (כאשר $R=\infty$ הפירוש הוא שהטור מתכנס לכל x ו- $R=0$ פירושו שהטור איננו מתכנס לאף $x \ne 0$). בנקודות $x = \pm R$ עצמן הטור יכול או להתכנס או להתבדר.

יתר על כן, אם $0 \le r < R$ אז הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r,r]$.

הוכחה. ההוכחה נובעת בקלות מהלמה: נסמן ב- E את קבוצת כל הנקודות x עבורן הטור מתכנס. ע"ס הלמה ל- E יש התכונה הגיאומטרית שאם $\alpha \in E$ ואם $0 \le r < |\alpha|$ אז הקטע $[-r,r]$ מוכל כולו ב- E ולכן E היא איחוד של קטעים סימטריים סביב אפס, ואיחוד כזה הוא קטע כמבוקש.

למעשה קל לבדוק ש- R ניתן ע"י הנוסחה $R = \sup\{|x| : x \in E\}$. $\square$

המשפט הבא ייתן לנו נוסחאות מפורשות לחישוב רדיוס ההתכנסות.

משפט. יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות ונסמן

$$\lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad ; \quad \mu = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

אז

(i) $R = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) אם $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים אז $R = \frac{1}{\mu}$.

הערה. חלק (ii) נובע למעשה מחלק (i), כי ראינו כבר (בזמן הדיון במבחני השורש והמנה להתכנסות טורים) שאם $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים אז גם $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ קיים ושווה לו.

חלק (ii) גם חלש יותר כי הוא דורש קיום של גבול ואינו מסתפק בגבול עליון או בגבול תחתון. יחד עם זאת הוא מאד נוח לשימוש כאשר הוא ישים.

הוכחת המשפט. (i) נקבע x_0, ואז $\limsup \sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = \lambda |x_0|$.

עפ"י מבחן השורש הטור $\sum a_n x_0^n$ מתכנס כאשר $\lambda|x_0| < 1$ והוא מתבדר כאשר $\lambda |x_0| > 1$.

ההוכחה של (ii) נעשית באופן דומה ע"י שימוש במבחן המנה.

דוגמאות.

(i) רדיוס ההתכנסות של $\sum \frac{x^n}{n!}$ הוא $R=\infty$. נוכיח זאת בעזרת שתי הנוסחאות.

$\mu = 0$ כי $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \to 0$. כדי לראות ש- $\lambda = 0$ נשתמש בהערכה

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \le \sqrt[n]{\frac{1}{(n/2)^{n/2}}} = (n/2)^{-1/2} \to 0. \ .$$

(ii) רדיוסי ההתכנסות של $\sum x^n$ ושל $\frac{x^n}{n}$ הם 1 עפ"י שתי הנוסחאות.

(iii) רדיוס ההתכנסות של $\sum n^n x^n$ הוא 0 עפ"י נוסחת השורש.

(iv) אם

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{כאשר } n \text{ זוגי} \\ \frac{2}{n} & \text{כאשר } n \text{ איזוגי} \end{cases}$$

אז $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2$ ו- $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2}$, ולמספרים אלה אין כל קשר לרדיוס ההתכנסות האמיתי שהוא $R = 1$ (כפי שנובע ממבחן השורש).

(v) רדיוס ההתכנסות של $\sum x^{2n}$, או באופן כללי יותר של $\sum_{j=1}^{\infty} x^{n_j}$ הוא $R = 1$, ובדוגמאות אלה יש אכן להשתמש בנוסחת השורש עם הגבול העליון כי $\lim \sqrt[n]{a_n}$ לא קיים.

כפי שראינו טור החזקות אינו חייב להתכנס בנקודות הקצה $\pm R$. ראינו גם כי לכל $0 \le r < R$ הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-r, r]$, אך אינו חייב להתכנס במ"ש בקטע $(-R, R)$. המשפט הבא מקשר בין ההתכנסות בנקודות קצה לבין ההתכנסות במ"ש בכל תחום ההתכנסות.

<u>משפט.</u> יהי $\sum a_n x^n$ טור עם רדיוס התכנסות $0 < R < \infty$. אז הטור מתכנס בנקודה $x = R$ אםם הוא מתכנס במ"ש בקטע $[0, R)$, ובמקרה זה ההתכנסות היא, למעשה, במ"ש בכל הקטע $[0, R]$.

טענה דומה תקפה ביחס לנקודה $x = -R$ ולקטע $(-R, 0]$.

הוכחה. נטפל רק בנקודה $x = R$ ובקטע $[0, R)$. נניח תחילה שהטור $\sum a_i R^i$ מתכנס ונקבע $0 \le x \le R$. נשתמש בנוסחה של סכימה בחלקים

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_m B_m - \sum_{k=n}^{m-1} B_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$$

כאשר $\alpha_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k \quad , \quad \beta_i = a_i R^i$ ו- $B_k = \sum_{i=n}^{k} \beta_i$.

הטור $\sum a_i R^i$ מתכנס, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $k > n > N$ מתקיים ש- $\varepsilon > \left|\sum_{i=n}^{k} a_i R^i\right| = |B_k|$. נקבע $0 \le x \le R$ ונקבל כי

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| &= \left|\sum_{k=n}^{m} (a_k R^k) \left(\tfrac{x}{R}\right)^k\right| = \left|\left(\tfrac{x}{R}\right)^m B_m - \sum_{k=n}^{m-1} B_k \left(\left(\tfrac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\tfrac{x}{R}\right)^k\right)\right| \\ &\le \varepsilon \left(\tfrac{x}{R}\right)^m + \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon \left(\left(\tfrac{x}{R}\right)^k - \left(\tfrac{x}{R}\right)^{k+1}\right) = \varepsilon \left(\tfrac{x}{R}\right)^n \le \varepsilon \end{aligned}$$

הערכה זו נכונה לכל $0 \le x \le R$ ולכן ע"ס קריטריון קושי הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס במ"ש בקטע $[0, R]$.

להפך, אם הטור מתכנס במ"ש בקטע $[0,R)$, אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ כך ש- $\left|\sum_{k=n}^m a_k x^k\right| < \varepsilon$ לכל $0 \le x < R$ ולכל $m > n > N$. נקבע את m ו- n ואז

$$\left|\sum_{k=n}^m a_k R^k\right| = \lim_{x \to R^-} \left|\sum_{k=n}^m a_k x^k\right| \le \varepsilon$$

כלומר הטור $\sum a_n R^n$ מקיים את תנאי קושי, ולכן מתכנס. $\square$

כפי שכבר אמרנו, פונקציות המתוארות ע"י טור חזקות מתכנס הן בעלות תכונות מיוחדות (וכדי לעמוד עליהן באופן יסודי יש לעבור למישור המרוכב ולהסתכל על טורי חזקות מרוכבים, כפי שתעשו בקורס בפונקציות מרוכבות). המשפט הבא מראה שביחס לרציפות, גזירות ואינטגרביליות אפשר להתייחס אליהן כאל סכומים סופיים, כלומר, כאילו היו פולינומים.

<u>משפט.</u> נתון טור $\sum a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R ונסמן את סכומו ב- $f(x)$. אז

(i) הפונקציה f רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.

(ii) רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ הוא R, ולכל $0 \le r < R$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[-r,r]$ ומתקיים

$$\int_0^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad (*)$$

אם הטור הנתון מתכנס ב- $x = R$ (או $x = -R$), אז הנוסחה $(*)$ תקפה גם בנקודה זו.

(iii) רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ הוא R, הפונקציה f גזירה בקטע $(-R,R)$ ומתקיים

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1} \qquad (**)$$

אם טור הנגזרות מתכנס ב- $x = R$ (או $x = -R$), אז גם הטור המקורי מתכנס בנקודה זו ו- $(**)$ תקפה שם (לנגזרת החד צדדית).

(iv) הפונקציה f גזירה מכל סדר בקטע $(-R,R)$ ולכל p טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+p)(m+p-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)a_{m+p} x^m \end{aligned}$$

ולכל הטורים האלה יש אותו רדיוס התכנסות R.

הוכחה. (i) אם $|x_0| < r$ נבחר r כך ש- $|x_0| < r < R$. הטור מתכנס במ"ש ב- $[-r,r]$ ולכן f רציפה שם, ובפרט ב- x_0.
אם הטור מתכנס גם בנקודה $x = R$ (או $x = -R$) אז ההתכנסות היא במ"ש ב- $[0,R]$ (או $[-R,0]$), ולכן f רציפה גם ב- $\pm R$ בהתאמה.

(ii) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ ולכן

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} &= \frac{\limsup \sqrt[n+1]{|a_n|}}{\lim \sqrt[n+1]{n+1}} = \limsup \sqrt[n+1]{|a_n|} \\ &= \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{R}\end{aligned}$$

הטענות האחרות נובעות מכך ש- $\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ומאינטגרציה איבר-איבר.

(iii) חישוב רדיוס ההתכנסות דומה ל- (ii):

$$\limsup \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R}$$

גם שאר הטענות נובעות באופן דומה ל- (ii).

(iv) חלק (iv) נובע מחלק (iii).

$\square$

נניח כי $f(x) = \sum a_n x^n$ בקטע $(-R, R)$, ונציב $x = 0$ בנוסחה שבחלק (iv) של המשפט, ואז נקבל כי $f^{(n)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_n$ או

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

כלומר

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad -R < x < R \; .$$

נוסחה זו קשורה באופן הדוק לנוסחת טיילור עם שארית האומרת שאם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x = 0$ אז $f = T_n + R_n$ בסביבה, כאשר T_n פולינום טיילור ממעלה n ו- R_n השארית, והם ניתנים ע"י

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad ; \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)}$$

עבור איזשהו $c = c_x$ בין 0 ל- x.

קשר זה נותן לנו את המפתח לדיון בשאלה החשובה הבאה: נתונה פונקציה f המוגדרת בסביבת $x = 0$. באיזה תנאים אפשר להציג אותה שם כסכום של טור חזקות? אם יש הצגה כזו אז הסכום החלקי ה- n-י הוא בדיוק פולינום טיילור T_n שלה, ולכן ניסוח שקול לשאלה הוא מתי $R_n(x) \to 0$.

תנאי מוקדם לקיום הצגה כזו הוא ש- f צריכה להיות גזירה אינסוף פעמים, אך תנאי הכרחי זה אינו מספיק.

<u>דוגמא.</u>

הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה איסוף פעמים וכפי שנראה מיד $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n. לכן $T_n \equiv 0$ לכל n ו- $R_n = f$ לכל n, ובוודאי ש- $R_n(x) \not\to 0$.

נראה כעת באינדוקציה כי $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n. עבור $n = 1$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^{s^2}} = 0 \end{aligned}$$

בשלב האינדוקציה מראים תחילה (באינדוקציה!) שלכל n יש פולינומים P_n, Q_n כך ש- $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x^2}}$ לכל $x \neq 0$. ואז, באופן דומה למקרה $n = 1$ מראים כי

$$. \ f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = 0$$

<u>משפט.</u> תהי f גזירה מכל סדר ב- $(-r, r)$ כך שיש קבוע M באופן שלכל n ולכל $|x| < r$ מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n$. אז רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ מקיים $R \ge r$. (התנאי בוודאי מתקיים אם יש קבוע $C = C_r$ כך ש- $\left|f^{(n)}(x)\right| \le C$ לכל $|x| < r$ ולכל n).

הוכחה. נקבע $|x| < r$, ואז עפ"י נוסחת השארית בפיתוח טיילור יש נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{M^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

כי לכל קבוע A מתקיים $\lim A^m/m! = 0$. $\square$

אם יש ל- f הצגה כטור חזקות, $f(x) = \sum a_n x^n$, אנחנו קוראים לטור "טור טיילור של f". באופן כללי יותר, אם יש ל- f הצגה כטור חזקות, $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$, אנחנו קוראים לטור "טור טיילור של f סביב הנקודה x_0".

שימו לב שלעתים קרובות תחום ההתכנסות של הטור חלקי ממש לתחום שבו f מוגדרת.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $f(x) = e^x$.

כאן $f^{(n)}(x) = e^x$ לכל n. ולכן לכל $r > 0$ מתקיים ש- $|f^{(n)}(x)| \le e^r$ לכל $|x| \le r$, כלומר $R = \infty$. כמו כן $f^{(n)}(0) = 1$ לכל n, ולכן לכל x מתקיים

$$. \ e^x = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$(ii)\quad f(x)=\sin x$.

כאן $f^{(n)}(x)$ הוא $\pm\sin x$ או $\pm\cos x$, ובפרט $|f^{(n)}(x)|\le 1$ לכל x ולכל n ולכן $R=\infty$. כמו כן $f^{(2m)}(0)=\pm\sin 0=0$ ואילו $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\cos 0=(-1)^m$ ולכן לכל x מתקיים

$$\sin(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\ .$$

<u>תרגיל:</u> הראו כי $\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$.

(iii) הטור $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ הוא טור גיאומטרי שמתכנס עבור $|x|<1$ לפונקציה $\frac{1}{1-x}$. ע"י גזירה איבר איבר נקבל נוסחאות חדשות:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m\ .$$

גזירה נוספת נותנת

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1-x)^3}&=\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'=\left(\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m\right)'\\&=\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)mx^{m-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n\end{aligned}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו את טורי טיילור של $\frac{1}{(1-x)^p}$ לכל p טבעי.

(iv) אפשר גם לקבל נוסחאות מעניינות ע"י אינטגרציה איבר איבר. למשל

$$-\log(1-x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x t^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\ .$$

כאן יש גם תוספת: הטור מתכנס גם עבור $x=-1$ כי זהו טור לייבניץ $\sum\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. כשימוש לנוסחה נשים לב שהיא תקפה גם עבור $x=-1$ ולכן

$$\sum\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\log 2\ .$$

יתר על כן, ע"ס משפט לייבניץ מקבלים כי $\left|\log 2-\sum_{k\le N}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|<\frac{1}{N+1}$. (זהו קצב התכנסות איטי. כדי לקבל טעות קטנה מ- $\frac{1}{1000}$ צריך אלף אברים!).

חישוב דומה (או ההצבה $t=-x$) נותנים כי $\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.

שימו לב כי הטורים של $\log(1\pm x)$ אינם מתכנסים עבור $|x|>1$, ולכן מאפשרים חישוב של $\log s$ רק עבור $0<s\le 2$. עבור s גדול יותר נפתור את המשוואה $s=\frac{1+x}{1-x}$,

ונקבל כי $x=\frac{s-1}{s+1}$ וכי $0<x<1$, ולכן

$$\begin{aligned}\log s &= \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}\end{aligned}$$

למשל, אם $s=7$ אז $x=\frac{3}{4}$ ו- $\log 7=2\sum\left(\frac{3}{4}\right)^{2j-1}/(2j-1)$.

הנוסחה הזו גם מאפשרת חישוב מהיר ויעיל יותר של $\log s$ עבור $s\leq 2$. למשל עבור $s=2$ נקבל $x=\frac{1}{3}$, ולכן $\log 2=2\sum\left(\frac{1}{3}\right)^{2j-1}/(2j-1)$. טור זה מתכנס הרבה יותר מהר מ- $\sum\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(v) נציב $x=-t^2$ בטור עבור $\frac{1}{1-x}$ ונקבל $\frac{1}{1+t^2}=\sum(-1)^n t^{2n}$ עבור $|t|<1$. אינטגרציה איבר איבר נותנת

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

עבור $|x|<1$. הטור מתכנס גם עבור $x=\pm 1$, ולכן מתכנס במ"ש על $[-1,1]$. בפרט, עבור $x=1$ נקבל

$$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ .$$