תרגיל בית 10

שאלה 1: (10 נק')

הוכיחו כי תת קבוצה A של מרחב מטרי (X,d) היא חסומה לחלוטין אם ורק אם $\bar{A}$ היא חסומה לחלוטין.

שאלה 2: (30 נק')

א. יהי (X,d) מרחב מטרי. קבוצה $S \subset X$ נקראת מפוזרת אם קיים $C > 0$, כך שלכל $a,b \in S$, המקיימים $a \neq b$, מתקיים $d(a,b) \geq C$. תהי $A \subset X$ קבוצה המכילה תת קבוצה מפוזרת אינסופית. הוכיחו כי A אינה חסומה לחלוטין (ולכן אינה קומפקטית). (10 נק')

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ממימד אינסופי, ויהי B כדור היחידה ב־V, כך שמרכזו ב־$v = 0$. מצאו קבוצה מפוזרת ב־B. הסיקו כי כל כדור סגור ב־V אינו קומפקטי. (20 נק')

רמז: על מנת למצוא קבוצה מפוזרת ב־B השתמשו בתהליך גרם שמידט.

שאלה 3: (40 נק')

א. יהיו U,V מרחבים וקטוריים איזומורפיים מעל $\mathbb{R}$ ויהי $f : U \to V$ איזומורפיזם בינהם. נניח כי על V מוגדרת נורמה $\|\ \|_V$. תהי $\|\ \|_U : U \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על U ע"י: $\|u\|_U = \|f(u)\|_V$ לכל $u \in U$. הוכיחו כי $\|\ \|_U$ היא נורמה על המרחב U. (10 נק')

ב. ידוע כי לכל $n \in \mathbb{N}$, כל שתי נורמות על $\mathbb{R}^n$ הן שקולות. יהי V מרחב וקטורי כלשהו מעל $\mathbb{R}$ ממימד סופי. הוכיחו כי כל שתי נורמות על V הן שקולות. (10 נק')

ג. יהי W מרחב וקטורי כלשהו מעל $\mathbb{R}$ (לאו דווקא ממימד סופי), עם נורמה $\|\ \|$. תהי d מטריקה על W, המוגדרת ע"י הנורמה $\|\ \|$. יהי V תת מרחב של W ממימד סופי. הוכיחו כי V היא תת קבוצה סגורה של W ביחס למטריקה d. (20 נק')

רמז: השתמשו בסעיף ב' של השאלה.

שאלה 4: (20 נק')

יהי (X,d) מרחב מטרי. נניח כי כל תת קבוצה סגורה וחסומה בו היא קומפקטית. הוכיחו כי (X,d) הוא מרחב מטרי שלם.

בהצלחה !