תרגיל בית 4 ־ חשבון אינפיניטסמלי II
התכנסות של סדרות וטורים של פונקציות
הגשה עד יום שלישי 20.5.14, בשעה 23:57

11 במאי 2014

תרגיל 1:

הראו שסדרות הפונקציות הבאות מתכנסות במ"ש בקטע I ולא במ"ש בקטע J.

1. $\sqrt[n]{\sin x}; I=[\alpha,\frac{\pi}{2}], J=[0,\frac{\pi}{2}]$ כאשר α הוא כל מספר ממשי בקטע $(0,\frac{\pi}{2})$.
2. $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{1+nx}; I=[\alpha,\infty), J=[0,\infty)$ כאשר α הוא כל מספר ממשי חיובי.
3. $f_n(x)=\frac{1}{n}\ln\left(1+nx\right); I=[0,\alpha], J=[0,\infty)$ כאשר α הוא כל מספר ממשי חיובי.

תרגיל 2:

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים. בדקו גם האם ישנו תחום מקסימלי שבו הטור מתכנס במ"ש. במידה ויש ־ יש למצוא אותו. במידה ואין ־ יש להראות זאת.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^x}$$

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2n}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{1+nx}},\ \ x\geq 0$$

>

תרגיל 3:

תהא $f(x)$ פונקציה רציפה המוגדרת ב־$[0,\infty)$ המקיימת $f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ו־$f(x)$ איננה פונקציית האפס. נגדיר את הסדרות הבאות: $g_n(x)=f(nx), h_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. הראו כי הסדרות הנ"ל מתכנסות לפונקציית האפס ב־$[0,\infty)$ אבל לא במידה שווה.
2. הראו כי הסדרה $m_n(x)=g_n(x)h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

תרגיל 4:

תהא $f_n(x)$ סידרת פונקציות המתכנסת במידה שווה לפונקציה חסומה $f(x)$ בקטע I. הראו כי קיימים מספרים M,N כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in I$ מתקיים $|f_n(x)|\le M$.

.

תרגיל 5:

נגדיר סדרת פונקציות

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^p},\ x\in[0,1],\ p>0$$

עבור אילו ערכי p הסדרה הנ"ל מתכנסת במ"ש? נסמן ב־$f(x)$ את הפונקציה אליה $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית. בדקו ל־$p=4$ ו־$p=2$ האם מתקיים:

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$$