אינפי 3 - גליון בית 1 - אביב תשע"ז

1. מצאו את קבועי השקילות בין נורמת-∞ ונורמת-3 של $\mathbb{R}^n$, כלומר:
   (א) מצאו קבועים $c,C>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $c\left\|x\right\|_\infty\le\left\|x\right\|_3\le C\left\|x\right\|_\infty$.
   (ב) מצאו וקטורים שונים מ-0 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ כך ש-$\left\|x_1\right\|_3=c\left\|x_1\right\|_\infty$ ו-$\left\|x_2\right\|_3=C\left\|x_2\right\|_\infty$ (כלומר, הראו שהקבועים הדוקים).
2. תהיינה $\left\|\cdot\right\|_a,\left\|\cdot\right\|_b$ שתי נורמות שקולות על $\mathbb{R}^n$. הראו כי:
   (א) כל כדור פתוח בנורמה $\left\|\cdot\right\|_a$ (כלומר, קבוצה מהצורה $B_r(p)=\{x\in\mathbb{R}^n:\left\|x-p\right\|_a<r\}$) מכיל כדור פתוח בנורמה $\left\|\cdot\right\|_b$ ומוכל בכדור פתוח בנורמה $\left\|\cdot\right\|_b$ (סביב אותו מרכז).
   (ב) סדרה $\{p_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{R}^n$ מתכנסת לנקודה $p\in\mathbb{R}^n$ ביחס לנורמה $\left\|\cdot\right\|_a$ אמ"מ היא מתכנסת ל-p ביחס לנורמה $\left\|\cdot\right\|_b$.
   (ג) קבוצה $U\subset\mathbb{R}^n$ היא פתוחה ביחס ל-$\left\|\cdot\right\|_a$ אמ"מ היא פתוחה ביחס ל-$\left\|\cdot\right\|_b$.
   (ד) קבוצה $U\subset\mathbb{R}^n$ היא סגורה ביחס ל-$\left\|\cdot\right\|_a$ אמ"מ היא סגורה ביחס ל-$\left\|\cdot\right\|_b$.
3. תהי $D\subset\mathbb{R}^n$, ותהי $f:D\to\mathbb{R}^m$, כך שלכל $E\subset\mathbb{R}^m$ פתוחה, גם $f^{-1}(E)$ פתוחה (ב-$\mathbb{R}^n$). הוכיחו ש-f רציפה.
4. עבור קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$, נסמן ב-$int(A)$ את קבוצת כל הנקודות הפנימיות של A.
   (א) הוכיחו כי $int(A)$ פתוחה.
   (ב) הוכיחו כי אם $U\subset A$ פתוחה אז $U\subset int(A)$.
5. התבוננו בטענה הבאה: "אם $A,B\subset\mathbb{R}^n$ ו-$f:A\to\mathbb{R}^m,g:B\to\mathbb{R}^m$ פונקציות רציפות, כך ש-$f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$ (כלומר, הן מזדהות בחיתוך), אז גם הפונקציה $h:A\cup B\to\mathbb{R}^m$ המוגדרת לפי $h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in B\end{cases}$ רציפה".
   (א) הוכיחו את הטענה במקרה שבו A,B פתוחות.
   (ב) הוכיחו את הטענה במקרה שבו A,B סגורות.
   (ג) האם הטענה נכונה באופן כללי?
6. לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ נגדיר $\left\|A\right\|=\sup\limits_{\left\|x\right\|_2=1}\left\|Ax\right\|_2$.
   (א) הראו כי $\left\|\cdot\right\|$ נורמה (על מרחב המטריצות).
   (ב) הראו כי אם $M=\left\|A\right\|$, אז לכל $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\left\|Ax\right\|_2\le M\left\|x\right\|_2$, וכי $\left\|A\right\|$ הוא המספר הקטן ביותר בעל תכונה זו.
   (ג) הראו כי לכל שתי מטריצות $A\in\mathbb{R}^{m\times n},B\in\mathbb{R}^{n\times k}$ מתקיים $\left\|AB\right\|\le\left\|A\right\|\cdot\left\|B\right\|$.