אינפי 104195

תאריך: 30/11/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: גיליון 5

שם המתרגל: יוחאי מעיין

תרגיל בית 5

תאריך הגשה: יום ראשון, 30.11.2014.

1. יהי $\alpha > 1$, ונניח כי $a_n \to \infty$. הראו כי $\alpha^{a_n} \to \infty$. מה אם $0 < \alpha < 1$? ומה אם $\alpha = 1$?

2. חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}}$.

3. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהסדרה מתפרקת ל־k תתי הסדרות

$$\left(a_{n_m^1}\right)_{m=1}^{\infty}, \ldots, \left(a_{n_m^k}\right)_{m=1}^{\infty}$$

אם כל איבר בסדרה המקורית שייך לפחות לאחת מבין תתי־הסדרות הנ"ל.

א. הראו שאם הסדרה מתפרקת ל־k תתי־סדרות מתכנסות, אזי הגבולות שלהן, $L_1, \ldots, L_k$, הם בדיוק כל הגבולות החלקיים של הסדרה המקורית.

ב. הראו שאם הסדרה מתפרקת ל־k תתי־סדרות אשר מתכנסות כולן לאותו גבול L, אזי הסדרה המקורית מתכנסת גם היא ל־L.

ג. הראו שאם $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$, $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ ו־$(a_{3n})_{n=1}^{\infty}$ כולן מתכנסות, אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

4. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה אשר אין בה איבר קטן ביותר ואין בה איבר גדול ביותר. הראו כי הסדרה אינה מתכנסת.

5. הראו כי אם, עבור זוג סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$, מתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, אזי לשתי הסדרות יש אותם גבולות חלקיים.

א) יהי $a>1$ ונניח כי $a_n\to\infty$. הראו כי $a^{a_n}\to\infty$

נתון: $\forall m>0\ \ \exists N(m);\ \forall n>N\ \ a_n>m$

צ"ל: $\forall m_1>0\ \ \exists N_1(m_1);\ \forall n>N_1\ \ a^{a_n}>m_1$

$$a^{a_n}=a^{(a_1+\dots+a_N+a_{N+1}+\dots+a_n)}$$

לפי הנתון, החל מ- $N<n$ כל איברי סדרת a_n חיוביים ושואפים לאינסוף.

$$=\underbrace{a^{(a_1+\dots+a_N)}}\cdot\underbrace{a^{(a_{N+1}+\dots+a_n)}}\ \ge\ k\cdot\underbrace{a^{(a_{N+1}\cdot(n-N))}}>k\cdot 1>M_1$$

לפי חוקי חזקות.

מספר קבוע, נסמנו ב-k, כי a (מספר חיובי) (*) בכל חזקה ייתן מספר חיובי.

החל מאינדקס שגדול מ-N כל איברי a_n חיוביים ושואפים לאינסוף. בחזקה מחלק זה קיימים $(n-N)$ איברים, ו-a_{N+1} הוא הקטן מביניהם.

$a>1$ ולפי הנתון, והחזקה שלו חיובית ושואפת לאינסוף, לכן כל הביטוי הנ"ל גדול מ-1.

צ"ל עבור כלשהו מהגדרה

קיבלנו $k\cdot 1>M_1>0$ (*) ($k>0$, לפי הגדרה) אזי שוויון זה אינו תלוי ב-n, כלומר,

עבור כל $N<n$ שנבחר, הסדרה a^{a_n} תשאף ל-∞ (אין תלות ב-N)

אם $0<a<1$: נתבונן ב- $k\cdot\underbrace{a^{(a_{N+1}\cdot(n-N))}}$

$0<a<1$ לפי הנתון במקרה זה, ולכן הוא ילך ויקטן ככל שהחזקה תלך ותגדל, כלומר:

$$k\cdot a^{(a_{N+1}\cdot(n-N))}=k\cdot\frac{1}{a^{(a_{N+1}\cdot(n-N))}}\longrightarrow 0$$

$a>1\to$; ∞ לפי סעיף קודם

אם $a=1$: 1 בכל חזקה שווה לאחד $\rightarrow$ $1^{a_n}=1$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}\right)}$$

ננסה להגיע לצורה $\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}$

$$\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}\right)}=\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{-2n}{3}\right)}\right)^{-\frac{2n}{3}}\right)^{\underbrace{\frac{-3}{2n}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}\right)}_{(*)}}$$

$$(*)\quad -\frac{3}{2n}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}}{n}\right)$$

לפי המשפט על גבול של סדרת הממוצעים החשבוניים שווה לגבול של הסדרה, נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

לפי אריתמטיקה של גבולות.

כלומר, קיבלנו:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{-2n}{3}\right)}\right)^{\frac{-2n}{3}}\right)^{\frac{-3}{2n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\dots+\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{3}}}$$

3. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהסדרה מתפרקת ל-k תתי הסדרות $(a_{n_m^1})_{m=1}^{\infty} \ldots (a_{n_m^k})_{n=1}^{\infty}$
אם כל איבר הסדרה המקורית שייך לפחות לאחת מבין תתי הסדרות הנ"ל.

א. הראו שאם הסדרה מתפרקת ל-k תתי סדרות מתכנסות, אזי הגבולות שלהן $L_1, \ldots, L_k$ הם בדיוק כל הגבולות החלקיים של הסדרה המקורית.

נניח בשלילה שקיים לסדרה גבול חלקי נוסף L_m כך ש-$L_m \notin \{L_1 \ldots L_k\}$
כלומר, בהכרח קיימת תת סדרה של a_n אשר מתכנסת אליו.
נתון כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתפרקת ל-k תתי סדרות $(a_{n_m^1})_{m=1}^{\infty} \ldots (a_{n_m^k})_{m=1}^{\infty}$ מתכנסות,
מכאן L_m הוא גבול של אחת מתתי הסדרות הנ"ל בהכרח,
ו[illegible] תתי הסדרות מתכנסות ל- $L_1, \ldots, L_k$, כלומר L_m חייבת להיות אחת
מהן וזו בניגוד להנחה ש- $L_m \notin \{L_1 \ldots L_k\}$
מכאן, הוכחנו ע"י הנחה בשלילה שלא יכול להיות לסדרה גבול חלקי
נוסף כשהיא מתפרקת ל-k תתי סדרות מתכנסות שמכילות כל איבר
מהסדרה המקורית.

ב. הראו שאם הסדרה מתפרקת ל-k תתי סדרות אשר כולן מתכנסות
ל-L אותו גבול, אזי הסדרה המקורית מתכנסת גם היא ל-L.

(על סמך סעיף א') א תתי הסדרות מכילות את כל איברי הסדרה המקורית
ונתון כי כולן מתכנסות לאותו גבול L. בסעיף א' בשלילה זו הוכחתי
כי במצב זה לא יכולה להיות לסדרה המקורית תת סדרה נוספת שמתכנסת
לגבול שאינו L. כלומר, אין עוד נקודה שבסביבת ε שלה יש אינסוף איברים
ולכן L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

ג. הראו שאם $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$, $(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$, $(a_{3n})_{n=1}^{\infty}$ כולן מתכנסות, אזי: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

(נסתמך על סעיפים א' וב'), לפי הנתון שלושת תתי הסדרות הנ"ל מתכנסות,
נסמן: $\lim_{n\to\infty}(a_{2n})_{n=1}^{\infty}=L_1$, $\lim_{n\to\infty}(a_{2n+1})_{n=1}^{\infty}=L_2$, $\lim_{n\to\infty}(a_{3n})_{n=1}^{\infty}=L_3$. לפי הנתון [illegible]
"סדרה מתפרקת ל-k תתי סדרות אם כל איבר שלה שייך לפחות לאחת מבין
תתי הסדרות". כלומר, במצב זה a_n מתפרקת ל-2 תתי סדרות: a_{2n}, a_{2n+1} (כי
הן מכילות את כל איברי הסדרה המקורית, פרט a_1, שהוא איבר סופי ואין לו
שום השפעה על הגבול של a_n).

3ג- המשך:

מסעיף א' הוכחנו שאם קיימת תת סדרה נוספת מתכנסת מעבר ל-3 תתי הסדרות שמכילות את כל איברי הסדרה ואז היא מתכנסת לאחד הגבולות של 3 תתי הסדרות הנתונות,

בתרגיל זה שמתקיים: $L_1 = L_3$ או $L_2 = L_3$.

L_1, L_2, L_3

a_{3n} מכילה אינסוף איברים מ- a_{2n}, a_{2n+1}

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\dots$

כלומר, אינסוף שלושת תתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול $L_1 = L_3$ וגם $L_2 = L_3$,

$L = L_1 = L_2 = L_3$

מסעיף ב' הוכחנו שאם סדרה מתפרקת ל-3 תתי סדרות אשר כולן מתכנסות לאותו גבול אזי הסדרה המקורית מתכנסת גם היא ל-L.

במקרה שלנו, a_n מתפרקת ל-2 תתי סדרות ומצאנו תת הסדרה השלישית הראנו כי הגבול של a_{2n}, a_{2n+1} מתכנסות לאותו גבול ולכן a_n מתכנסת ל-L!

Scanned by CamScanner

4. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה אשר אין בה איבר קטן ביותר ואין בה איבר גדול ביותר. הוכח כי הסדרה אינה מתכנסת.

מהנתונים עולה כי a_n היא סדרה חסומה כלומר קיימים אינפימום וסופרמום, ובנוסף שאין בה איבר גדול/קטן ביותר כלומר היא לא מקבלת מקסימום ומינימום.

לסדרה זו יש לפחות שני גבולות חלקיים: $\limsup_{n\to\infty} a_n , \liminf_{n\to\infty} a_n$ (לפי הלמה של קנטור הסדרה אינה ריקה), ולפי BW יש לה ת"ס מתכנסת.
לפי הנתונים, הסדרה לא יכולה להיות קבועה כי אין בה איבר גדול/קטן ביותר ולכן הסדרה מכילה קטע, מכאן: $\liminf_{n\to\infty} a_n \neq \limsup_{n\to\infty} a_n$

לפי המשפט "אם לסדרה יש שתי תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, הסדרה אינה מתכנסת.

5. הראו כי אם, עבור שתי סדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, מתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, אז לשתי הסדרות יש אותם גבולות חלקיים.

בה"כ נבחר תת סדרה מתכנסת של a_n, $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ ונסמן את הגבול שלה ב- $L_{a_{n_j}}$, ע"פ הנתון מתקיים $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ מתקיים כי על מנת שהגבול של (a_n-b_n) ישאף לאפס, על הגבול של תת הסדרה b_{n_j} להיות שווה לגבול $L_{a_{n_j}}$, וזה נכון עבור כל תת סדרה מתכנסת של a_n.

כלומר $\lim_{n\to\infty} a_{n_j}=L_{a_{n_j}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_{n_j}=\lim_{n\to\infty} a_{n_j}=L_{a_{n_j}}$

אותו דבר אפשר לעשות כשבוחרים תת סדרה מתכנסת של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ומ"ש בצורה דומה, מקבלים כי לשתי הסדרות יש אותם גבולות חלקיים.

Scanned by CamScanner