אלגברה ב – צורה רציונלית

נושאים:
1. רענון על פירוק T-ציקלי
2. הצורה הרציונלית

רענון על פירוק T-ציקלי

* המוטיבציה – ראינו כי כדי לקבל צורת ג'ורדן, צריך שהפולינום האופייני יתפרק לגורמים לינאריים. זה כמובן לא תמיד מתקיים (אם V מ"ו מעל שדה שאינו סגור אלגברית). כן נרצה לקבל צורה "קנונית" (למשל כדי לדעת אם שתי מטריצות הן דומות).

תזכורת:
1. עבור $v\in V$, הפולינום ה – T-מאפס של v הוא הפולינום המתוקן בדרגה הקטנה ביותר המקיים $q(T)v=0$.
2. ל – $v\in V$, תת המרחב הנפרש ע"י $v, T(v), T^2(v), \ldots$ מסומן $Z(v;T)$. זה מרחב ממימד סופי שהוא T-אינווריאנטי.

משפט הפירוק הציקלי: יהי T אופרטור על מ"ו V ממימד סופי מעל F. קיימים וקטורים שונים מאפס $v_1, \ldots, v_k\in V$ עם T-מאפסים $p_1, \ldots, p_r$ כך ש:

א. $V=Z(v_1;T)\oplus\ldots\oplus Z(v_r;T)$

ב. p_k מחלק את p_{k-1} ל - $k\geq 2$

כמו כן, r והפולינומים p_i ל - $1\leq i\leq r$ נקבעים באופן יחיד ע"י התכונות א', ב' והעובדה ש - $v_i\neq 0$ לכל $1\leq i\leq r$

הערה: נשים לב שהפולינום p_1 הוא למעשה הפולינום המינימלי של T.

מסקנה: כדי להבין איך T פועל על V (ז"א למצוא צורה קנונית למטריצה של T), מספיק להבין איך T פועל על מרחב T-ציקלי.

הצורה הרציונלית

יהי V מרחב וקטורי, יהי T אופרטור. נניח כי V הוא מרחב T-ציקלי, ונסמן $V=Z(u;T)$.
נסמן ב - p_u את ה – T-מאפס של u, ונסמן $deg(p_u)=k$

טענה (ראינו בתרגול קודם):
1. $u, T(u), \ldots, T^{k-1}(u)$ בסיס של V (נסמן בסיס זה ב – B, ז"א $v_i=T^{i-1}(u)$).
2. p_u הוא הפולינום המינימלי והאופייני של T. (ראינו שזה הפולינום המינימלי. זה הפולינום האופייני כי הדרגה שלו היא המימד של V).

איך נראית המטריצה $[T]_B$? נסמן $p_u(x)=a_k x^k+\ldots+a_0$, אז $T(v_i)=v_{i+1}$ ל - $1\leq i\leq k-1$. עבור v_k נקבל

$T(v_k)=T^k(u)=-a_{k-1}T^{k-1}(u)-\ldots-a_1T(u)-a_0I(u)=-a_{k-1}v_k-\ldots-a_1v_2-a_0v_1$, לכן

המטריצה המייצגת היא: $[T]_B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$. מטריצה מצורה זו נקראת "מטריצה נלווית" (companion matrix) המתאימה לפולינום p_u .

מסקנה: אם U אופרטור על מ"ו ממימד סופי W, יש ב – W וקטור U-ציקלי אם ורק אם יש

בסיס של W בו U מיוצג ע"י המטריצה הנלוות של הפולינום המינימלי של U.

- עבור T אופרטור כללי על מרחב וקטורי V, נקבל את התוצאה הבאה:

<u>משפט:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל F ו - T אופרטור. נניח כי הפולינום המינימלי של T מתפרק לגורמים $m_T=p_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{r_k}$, אז קיים ל – V בסיס B בו $[T]_B$ היא מהצורה $[T]_B=(C_{ij})$ כאשר C_{ij} הן מטריצות נלוות של $p_i^{n_{ij}}$ ומתקיים $r_i=n_{i1}\geq\ldots\geq n_{is_i}$. כמו כן, הצגה זו היא יחידה (עד כדי סדר הבסיס).

<u>הערה:</u> הצגה זו נקראת "הצורה הקנונית הרציונלית". הפולינומים $p_i^{n_{ij}}$ נקראים המחלקים האלמנטריים של T.

הוכחה: ממשפט הפירוק הפרימרי, $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$ וכל W_i הוא T-אינווריאנטי, עם פולינום מינימלי $p_i^{r_i}$. ממשפט הפירוק הציקלי עבור W_i נקבל $W_i=Z(u_{i,1};T)\oplus\ldots\oplus Z(u_{i,s_i};T)$. המטריצה המייצגת את $T_i=T|_{W_i}$ היא מטריצת בלוקים של מטריצות נלוות המתאימות לפולינומים המתקבלים בפירוק הציקלי. T מיוצגת כבלוקים של ייצוגי T_i וזה משלים את ההוכחה.

דוגמא: יהי $V=span_R\{1,x,\sin(x),\cos(x),xsin(x),xcos(x)\}$ ו – D אופרטור הגזירה על V. מה הצורה הקנונית הרציונלית של D?

פתרון: המטריצה המייצגת את אופרטור הגזירה בבסיס לעיל (לפי הסדר) היא:

$$D=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

. הפולינום אופייני הוא $\lambda^2(\lambda^2+1)^2$. נשים לב שעבור $xsin(x)$ מתקיים $(D^2+I)(xsin(x))=xsin(x)+D(\sin(x)+xcos(x))=2\cos(x)$ לכן $D^2(D^2+I)$ אינו אופרטור האפס, ז"א בפולינום המינימלי מופיע $(\lambda^2+1)^2$. מצד שני, עבור x מתקיים $D(D^2+I)(x)=1$ לכן הפולינום המינימלי הוא בהכרח הפולינום האופייני. לפי ההוכחה של המשפט לעיל, נסמן $W_1=ker(D^2),W_2=ker((D^2+I)^2)$. נחשב ונקבל: $W_1=span_R\{1,x\},\ \ W_2=span_R\{\sin(x),\cos(x),xsin(x),xcos(x)\}$. המרחב W_1 הוא $D|_{W_1}$-ציקלי, עם וקטור ציקלי x. נבדוק אם W_2 הוא מרחב $D|_{W_2}$-ציקלי. נסתכל על וקטור כללי $v=a\sin(x)+b\cos(x)+c\,xsin(x)+d\,xcos(x)$, ונרצה שהקבוצה $S=\{v,D(v),D^2(v),D^3(v)\}$ תהיה בת"ל. נחשב את הנגזרות ונשים במטריצה (כאשר כל שורה היא וקטור אחר מ – S). נקבל

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c-b&a+d&-d&c\\-a-2d&2c-b&-c&-d\\b-3c&-a-3d&d&-c\end{pmatrix}$$

. נחפש ערכים a,b,c,d שהמטריצה תהיה מדרגה מלאה. עבור $a=c=1,b=d=0$ נקבל מטריצה מדרגה 4, לכן $\sin(x)+xsin(x)$ וקטור ציקלי ב - W_2 , לכן הצורה הרציונלית היא:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&-2\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$