.1

א. תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. הוכח כי התנאים הבאים שקולים:

1) קיימת פונקציה חח"ע ועל שומרת סדר מ- A ל- $\{1,..,n\}$ עם הסדר הרגיל של המס' הטבעיים. (<u>תזכורת</u>: פונקציה f נקראת שומרת סדר אם $x\leq y \Leftarrow f(x)\leq f(y)$.)

2) A קבוצה סדורה לינארית סופית.

3) לכל תת-קבוצה של A יש איבר ראשון ואיבר אחרון.

ב. תן דוגמא לקבוצה שלכל תת-קבוצה סופית שלה יש איבר ראשון ואיבר אחרון ואינה מקיימת את התנאים מהסעיף הקודם.

ג. מצא ארבעה יחסי סדר לינארי שונים ב- $\mathbb{N}$ כך שבין כל שתי קבוצות $(\mathbb{N},\leq'), (\mathbb{N},\leq'')$ לא קיימת פונקציה שומרת סדר חח"ע ועל.

ד. מצא את העוצמה של קבוצת כל יחסי הסדר הלינארי ב- $\mathbb{N}$ המקיימים את התנאי מסעיף ב' (לכל תת-קבוצה סופית יש איבר ראשון ואיבר אחרון).

.2

א. מצא שרשרת מקסימלית ב- $(P(\mathbb{R}),\supseteq)$ שהיא בת מניה.

ב. מצא שרשרת בעלת העוצמה $2^{\aleph}$ ב- $(P(\mathbb{R}),\leq)$ כאשר יחס הסדר יכול להיקבע כרצונכם.

.3 תהי V תת-קבוצה של קבוצת כל הסדרים הלינאריים בקבוצה סופית A. נגדיר יחס R_V בין שני איברי A באופן הבא:

$aR_V b \iff b<a$ לפחות בחצי מהסדרים מ- V.

דוגמא: אם $V=\left\{\begin{matrix} a & b & a\\ | & | & |\\ b, & c, & c\\ | & | & |\\ c & a & b\end{matrix}\right\}$ אז $aR_V b, bR_V c, aR_V c$.

א. האם בהכרח R_V כזה הוא יחס טרנזיטיבי?

ב. תהי W קבוצת כל הסדרים הלינאריים עבורם מתקיים התנאי הבא: בכל S, תת קבוצה בגודל 3 של A $(S\subseteq A, |S|=3)$, קיים איבר b כך שבכל סדר לינארי מ- W, b לא נמצא מתחת לשאר אברי S. הוכח: לכל $T\subseteq W$, R_T יחס טרנזיטיבי.

ג. בהינתן $T\subseteq W$ כאשר T בגודל אי-זוגי, הוכח שקיים איבר a ב- A כך שלכל $b\in A$ מתקיים $aR_T b$.

.4 יהי R סדר חלקי בקבוצה X. הוכח בעזרת הלמה של צורן שיש סדר לינארי S ב- X כך ש- $R\subseteq S$.