

בחינת מועד ב באלגברה לינארית ב - 104171

18.9.2014

הנחיות: משך הבחינה 3 שעות. השימוש בכל חומר עזר **אסור בהחלט**. יש **לנמק היטב** כל תשובה.

בהצלחה!

1. (20 נק) תהא A מטריצה ב- $M_n(\mathbb{C})$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם A^2 נורמלית אז גם A נורמלית.

(ב) אם A^*A צמודה לעצמה אז A נורמלית.

(ג) אם A נורמלית אז הדרגה של A שווה לדרגה של A^*A .

(ד) אם A בעלת ערכים עצמיים מדומים טהורים (ז.א. מהצורה ai כאשר $a \in \mathbb{R}$) אז A אנטי צמודה לעצמה (ז.א. $A^* = -A$).

2. (16 נק) יהא V מרחב כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2 מעל \mathbb{R} . נגדיר:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

לכל $p(x), q(x) \in V$.

(א) הראו כי מדובר במכפלה פנימית.

(ב) יהא $W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\}$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- W^\perp .

3. (16 נק) תהא $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f(x, y) = n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y)$$

כאשר

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad m_x = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad m_y = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

(א) בדקו כי f היא תבנית בילינארית סימטרית מעל \mathbb{R}^n .

(ב) מצאו את המטריצה המייצגת של f לפי הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^n .

4. (16 נק) יהא V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל \mathbb{C} ותהא $T : V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית.

(א) הראו כי אם $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ אז $T = 0$.

(ב) הראו כי אם $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ לכל $v \in V$ אז T נורמלית.

5. (16 נק)

(א) תהא מטריצה הנתונה בצורת ז'ורדן. הראו כי הפולינום המינימלי והפולינום האופייני של בלוק ז'ורדן מסדר r המתאים לע"ע λ שווים ל- $(x - \lambda)^r$ (וודאו שכל צעד בחישוב מנומק היטב!).

(ב) מצאו את כל צורות הז'ורדן האפשריות למטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ בעלת פולינום אופייני $(x - 1)^3(x - 2)^4$ ומקיימת בנוסף

$$\dim(\text{Ker}(A - I)) = 2, \quad \dim(\text{Ker}(A - 2I)) = 3$$

6. (16 נק) תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$. הראו כי A לכסינה אם ורק אם הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים שונים (ז.א. הפולינום המינימלי הוא מהצורה $(x - a_1) \cdots (x - a_k)$ כאשר $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ מספרים שונים).