קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 8

תאריך הגשה: יום חמישי, 2/1/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

תהי $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אי-זוגית ורציפה, כך ש- $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(0)$. הראו כי f מקבלת מינימום ומקסימום.

f אי-זוגית, לכן $f(0)=0$. אם $f(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$, סיימנו, כי זהו המינימום והמקסימום. אם לא, אז קיים x_0 כך ש- $f(x_0)\neq 0$, ולכן גם $f(-x_0)\neq 0$. נניח בה״כ כי $x_0>0$ וגם $f(x_0)>0$. מכך ש- $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(0)=0$, נובע שקיים x_1 כך שלכל $x>x_1$, $f(x)<f(x_0)$. הקטע $[0,x_1]$ הוא סגור ועליו f רציפה, ולכן מויירשטראס, f מקבלת עליו מקסימום, נסמנו M_1. מכיוון ש- $f(x_0)=f(x_0)$, מתקיים $x_0\leq x_1$, לכן $x_0\in[0,x_1]$, לכן $f(x_0)\leq M_1$, ולכן לכל $x\in(x_1,\infty)$ מתקיים $f(x)<f(x_0)\leq M_1$, ולכן M_1 הוא מקסימום של f ב- $[0,\infty)$, ומאי-זוגיות f זה גורר כי $-M_1$ מינימום של f ב- $(-\infty,0]$. באופן דומה ניתן לקבל כי ל- f יש מינימום M_2 ב- $[0,\infty)$, ומקסימום $-M_2$ ב- $(-\infty,0]$.
בסה״כ, $M=\max\{|M_1|\ ,\ |M_2|\}$ הוא מקסימום של f ב- $\mathbb{R}$, ו- $-M$ הוא המינימום.

שאלה 2:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $\left|f(x)-xe^{\sqrt{|x|}}\right|\leq x^4$ לכל $x\in\mathbb{R}$. מהי התמונה של f?

מהנתון נקבל כי (*) $xe^{\sqrt{|x|}}-x^4\leq f(x)\leq xe^{\sqrt{|x|}}+x^4$. נסתכל על הביטוי $xe^{\sqrt{|x|}}-x^4$: מתקיים לכל $x\neq 0$, $xe^{\sqrt{|x|}}-x^4=x^4\left(\frac{e^{\sqrt{|x|}}}{x^3}-1\right)$. כעת נסתכל על $\frac{e^{\sqrt{|x|}}}{x^3}$: מכלל המנה נוכל לקבל כי הסדרה $\frac{e^n}{n^6}\to\infty$ כאשר $n\to\infty$, ולכן גם $\frac{e^n}{(n+1)^6}=\frac{e^{n+1}}{(n+1)^6}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\to\infty$. בנוסף, לכל $x>0$ מתקיים $\frac{e^{[x]}}{([x]+1)^6}\leq\frac{e^x}{x^6}$, ולכן מכלל הפיצה, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^6}=\infty$, ולכן גם $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sqrt{|x|}}}{\sqrt{x}^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^6}=\infty$ (כי כאשר $x>0$, $\sqrt{x}=\sqrt{|x|}$). מאי-השוויון השמאלי ב- (*) ומכלל הפיצה נקבל כי $f(x)\to\infty$ כאשר $x\to\infty$. באופן דומה ניתן להראות כי האגף הימני ב- (*) שואף ל- $-\infty$ כאשר $x\to-\infty$, ולכן $f(x)\to-\infty$ כאשר $x\to-\infty$. מהגבולות של f ב- $\pm\infty$ ורציפות f נובע (ניתן להראות זאת) כי f מקבלת כל ערך ממשי, כלומר f על.

שאלה 3:

תהי $f\ :\ [a,b]\to[a,b]$ מונוטונית עולה. הראו כי קיימת ל- f נקודת שבת, כלומר: קיים $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=x_0$.

אם $f(a)=a$ או $f(b)=b$ סיימנו. אחרת, בהכרח $f(b)<b$, $f(a)>a$. נסתכל על $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$: אם $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{a+b}{2}$, סיימנו. אם לא, נבדוק את $f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a+b}{2}$: אם גודל זה חיובי (כלומר, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{a+b}{2}$), נסמן $b_1=b$, $a_1=\frac{a+b}{2}$. אם גודל זה שלילי, נסמן $a_1=a$, $b_1=\frac{a+b}{2}$. בשלב הבא, נסתכל על $\frac{a_1+b_1}{2}$: אם מתקיים $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=\frac{a_1+b_1}{2}$ סיימנו, ואם לא, נבחר את הקטע הבא $[a_2,b_2]$ כך שאחת מנקודות הקצה שלו היא $\frac{a_1+b_1}{2}$, והשניה היא אחת מתוך a_1 , b_1 עבורה הסימן של $f(x)-x$ הפוך מהסימן בנקודה $\frac{a_1+b_1}{2}$. נמשיך כך, עד שנמצא בשלב כלשהי נקודה מהצורה $\frac{a_n+b_n}{2}$ שהיא נקודת שבת של f, או שנקבל סדרה אינסופית של קטעים סגורים $\{[a_n , b_n]\}$ המקיימים לכל n כי $f(a_n)>a_n$ וגם $f(b_n)<b_n$.

קטעים אלו מקיימים בדיוק את תנאי הלמה של קנטור, ולכן בחיתוך של כל הקטעים האלו נמצאת נקודה יחידה x_0, שמקיימת $x_0=\lim a_n=\lim b_n$. מכיוון ש- f מונוטונית עולה, קיימים לה הגבולות החד״צ בכל נקודה, בפרט ב- x_0, ומכיוון ש- a_n היא סדרה מונוטונית עולה נקבל כי הסדרה $f(a_n)$ היא סדרה מתכנסת, המתכנסת ל- $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, ומקיימת $\lim f(a_n)\ge \lim a_n=x_0$. באותו אופן נקבל עבור הסדרה המונוטונית היורדת b_n כי מתקיים $\lim f(b_n)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ וגם $\lim f(b_n)\le \lim b_n=x_0$. ממונוטוניות f והעובדה כי $a_n<b_n$ לכל n נקבל גם כי $\lim f(a_n)\le \lim f(b_n)$. בסה״כ קיבלנו אם כן: $x_0\le \lim f(a_n)\le \lim f(b_n)\le x_0$, כלומר $x_0\le \lim_{x\to x_0^-} f(x)\le \lim_{x\to x_0^+} f(x)\le x_0$, ולכן שני הגבולות החד״צ האלו קיימים ושווים ל- x_0, ולכן $\lim_{x\to x_0} f(x)=x_0$. אבל, ממונוטוניות f נקבל גם כי $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\le f(x_0)\le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, לכן מתקיים גם $f(x_0)=x_0$, כלומר x_0 זו היא נקודת השבת שחיפשנו.

שאלה 4:

נאמר ש- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא מחזורית אם קיים T ממשי כך שלכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$. הוכיחו כי אם פונקציה מחזורית היא רציפה, אז היא מקבלת מינימום ומקסימום והיא רציפה במ״ש.

נעיר תחילה כי באינדוקציה ניתן להראות כי $f(x+mT)=f(x)$ לכל $m\in\mathbb{Z}$. נוכל להניח בה״כ כי $T>0$, אחרת נסתכל על $-T$ – שגם הוא מקיים את תנאי המחזוריות. בקטע $[0,T]$ f היא רציפה, לכן מקבלת שם מינימום m ומקסימום M. לכל $x\in\mathbb{R}$ נסמן: $K_x=\max\{\, m\in\mathbb{Z} \mid mT\le x \,\}$, ונסמן $\bar{x}=x-K_xT$, אז $\bar{x}\in[0,T]$, לכן $m\le f(\bar{x})\le M$, ו- $f(x)=f(\bar{x})$, ולכן $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in\mathbb{R}$, לכן M , m הם מקסימום ומינימום בהתאמה של f על $\mathbb{R}$.

בנוסף, f רציפה על $[0,T]$ וגם על $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ ולכן רציפה שם במ״ש, לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שאם $x,y\in[0,T]$ ו- $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, וקיים δ_2 מתאים עבור הקטע $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $\delta_1,\delta_2>0$ המתאימים לו מרציפות במ״ש בקטעים $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, $[0,T]$ בהתאמה. נסמן $\delta=\min\left\{\delta_1 , \delta_2 , \frac{T}{2}\right\}$. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x-y|<\delta$. אם $K_x=K_y$, אז $|\bar{x}-\bar{y}|=|x-y|<\delta\le\delta_1$, ולכן $|f(x)-f(y)|=|f(\bar{x})-f(\bar{y})|<\varepsilon$. אם $K_x\neq K_y$, ונניח בה״כ כי $K_x<K_y$, אז מכיוון ש- $\delta\le T$ נובע כי $K_y=K_x+1$, לכן $x-K_yT\in[-T,0]$ ו- $y-K_yT\in[0,T]$. מכיוון ש- $|x-y|<\frac{T}{2}$, למעשה חייב להתקיים $x-K_yT\in\left[-\frac{T}{2},0\right]$ ו- $y-K_yT\in\left[0,\frac{T}{2}\right]$, כלומר

$|(x-K_yT)-(y-K_yT)|=|x-y|<\delta\le\delta_2$, וגם מתקיים $x-K_yT\,,y-K_yT\in\left[-\frac{T}{2}\,,\frac{T}{2}\right]$, ולכן:
$|f(x)-f(y)|=f(x-K_yT)-f(y-K_yT)|<\varepsilon$.

שאלה 5:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש- $\lim_{x\to\infty}f(x)$ קיים וסופי, אך $\lim_{x\to\infty}[f(x)]$ אינו קיים.

א. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}f(x)\in\mathbb{Z}$.

נסמן $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$. אם $L\notin\mathbb{Z}$ אז קיים $\varepsilon>0$ כך שהקטע הפתוח $(L-\varepsilon\,,L+\varepsilon)$ אינו מכיל אף שלם, ולכן לכל y בקטע זה, $[y]=[L]$. מהגדרת התכנסות, קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$, $|f(x)-L|<\varepsilon$, ולכן לכל $x>x_0$, $[f(x)]=[L]$, ולכן $\lim_{x\to\infty}[f(x)]=[L]$, בסתירה לנתון.

ב. הוכיחו כי קיימת סדרה $x_n\to\infty$ כך ש- $f(x_n)=\lim_{x\to\infty}f(x)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

נשים לב כי לכל x_0, קיימים $x_1\,,x_2>x_0$ כך ש- $f(x_1)\ge L$ ו- $f(x_2)<L$: אם לא קיים x_1 כנ״ל, אז $f(x)<L$ לכל $x>x_0$, ולכן $[f(x)]\to L-1$ - סתירה. באותו אופן עבור x_2. נבנה סדרה כך: עבור $x_0=1$, קיימים $x_1,x_2>1$ מהטענה. אם $f(x_1)=L$, נבחר $a_1=x_1$. אם $f(x_1)>L$, אז מכיוון ש- $f(x_2)<L$ ו- f רציפה בכל $\mathbb{R}$, ובפרט בקטע הסגור בין x_1 ל- x_2, נובע כי קיים c בקטע הפתוח בין x_1 ל- x_2 כך ש- $f(c)=L$, ובמקרה זה נבחר $a_1=c$.

בשלב ה-n-י, נבחר באופן דומה $a_n>n$ המקיים $f(a_n)=L$ (כאשר בשלב זה את תפקיד ה- x_0 בטענה ימלא n), ונקבל את הסדרה הדרושה.

שאלה 6:

הוכיחו ע״פ הגדרה כי $f(x)=x^3+5x+3$ רציפה במ״ש בכל קטע סגור.

יהי $[a,b]$ הקטע הסגור הנתון, ויהי $\varepsilon>0$. נסמן $M=\max\{|a|,|b|\}$. לכל $x\,,y\in[a,b]$ מתקיים:

$|f(x)-f(y)|=|x^3+5x+3-y^3-5y-3|=|x^3-y^3+5x-5y|=|(x-y)(x^2+xy+y^2+5)|=$
$|x-y|\cdot|x^2+yx+y^2+5|\le|x-y|(3M^2+5)$.

לכן אם נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{3M^2+5}$ נקבל מהחישוב הנ״ל כי אם $|x-y|<\delta$, אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

שאלה 7:

בדקו רציפות במ״ש במקרים הבאים, הוכיחו טענותיכם:

א. $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ב- $(0,\infty)$.

יהי $\varepsilon>0$. מתקיים $\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$, לכן מתנאי קושי נקבל כי קיים x_0 כך שלכל $x\,,y>x_0$, $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

נגדיר $g(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. ניתן לבדוק ע״י חישוב גבול כי g רציפה ב- $[0,\infty)$, בפרט ב- $[0,x_0+1]$, ולכן רציפה שם במ״ש, ולכן רציפה במ״ש גם ב- $(0,x_0+1]\subset[0,x_0+1]$. על הקטע $(0,x_0+1]$, $g=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, ולכן בקטע זה $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ רציפה במ״ש. יהי $\delta>0$ המתאים ל- $\frac{\varepsilon}{2}$ מרציפות במ״ש בקטע זה.

כעת, יהיו $x,y\in(0,\infty)$ כך ש- $|x-y|<\delta$. אם $x,y<x_0+1$, אז מרציפות במ״ש ב- $(0,x_0+1]$ נקבל כי $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. אם $x,y\geq x_0+1$ נקבל מתנאי קושי כי $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. אם $x<x_0+1$ ו- $y\geq x_0+1$, אז בפרט $|x-x_0+1|<\delta$, ולכן:

$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(x_0+1)|+|f(x_0+1)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

ב. $x\sin x$ ב- $(0,a)$, כאשר $a>0$.

$x\sin x$ רציפה ב- $[0,a]$, לכן רציפה שם במ״ש, ולכן רציפה במ״ש גם ב- $(0,a)\subset[0,a]$.

ג. $x\sin x$ ב- $(0,\infty)$.

נראה כי $x\sin x$ לא רציפה במ״ש ב- $(0,\infty)$: נשים לב כי אם f רציפה במ״ש, מתקיים שאם x_n , y_n 2 סדרות המקיימות $|x_n-y_n|\to 0$, אז מתקיים $|f(x_n)-f(y_n)|\to 0$, כי לכל $\varepsilon>0$, יהי $\delta>0$ המתאים לו מרציפות במ״ש. מהתכנסות $|x_n-y_n|$, קיים N כך שלכל $n>N$, $|x_n-y_n|<\delta$, ואז מרציפות במ״ש, $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$. נסתכל על $y_n=2\pi n$, $x_n=2\pi n+\frac{1}{n}$. אז $|x_n-y_n|=\frac{1}{n}\to 0$, אבל:

$$\left|f(x_n)-f(y_n)\right|=\left|\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)-2\pi n\sin(2\pi n)\right|=\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)=$$

$2\pi\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)\to 2\pi$. (מתקיים $\sin\left(\frac{1}{n}\right)>0$ כי $n\geq 1$).

מההערה, זה גורר כי $x\sin x$ לא רציפה במ״ש ב- $(0,\infty)$.

ד. $\sin(x^2)$ ב- $\mathbb{R}$.

נשתמש בהערה מסעיף ג׳, ונסתכל על הסדרות: $y_n=\sqrt{2\pi n}$, $x_n=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$. ניתן לחשב (ע״י כפל ב״צמוד״) כי $|x_n-y_n|\to 0$, אבל $|\sin(x_n^2)-\sin(y_n^2)|=|1-0|=1$.

<u>שאלה 8: (לא להגשה)</u>

הוכיחו כי אם f רציפה ב- $[a,b]$, אז היא ניתנת לקירוב פוליגוני שם, כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה רציפה $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, כך ש- $[a,b]$ מחולק למספר סופי של קטעים שעל כל אחד מהם g לינארית, ומתקיים $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in[a,b]$.

<u>שאלה 9: (לא להגשה)</u>

הוכיחו כי אם f רציפה במ״ש ב- $[a,\infty)$ עבור $a>0$, אז קיים K כך ש- $|f(x)|\leq Kx$ לכל $x\in[a,b]$. הראו כי הטענה אינה נכונה עבור $a\leq 0$.