

תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 7

פתרונות יתפרסמו באתר הקורס ב- 03.02.02

תרגיל 1.

יהיו $\{X_i\}$ מ"מ ב"ת כך ש- $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$ עבור $i = 0, 1, \dots$. נסמן $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(א) חשבו את הפונקציה האופינית של S_n .

(ב) מצאו את ההתפלגות של S_n .

(ג) חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \geq n + n^\alpha)$, כאשר α הוא פרמטר חיובי.

תרגיל 2.

נניח כי נק' (X, Y) נבחרה באקראי מתוך מעגל בראדיוס אחד עם מרכז ב- $(0, 0)$, כלומר $f_{X,Y}(x, y) = 1/\pi$, עבור $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. נסמן על ידי (R, Θ) את הקאורדינטות הפולריות של הנקודה.

(א) חשבו את $E(R)$ ואת $E(R^2)$.

(ב) האם R ו- Θ ב"ת?.

תרגיל 3.

X, Y, Z בלתי תלויים, כל אחד אחיד ב- $[0, 1]$. מצא את

(א) $f_{X+Y}(u)$

(ב) $f_{X+Y+Z}(v)$

תרגיל 4.

יהיו X_1, X_2, \dots, X_n מ"מ ב"ת מפולגים באחידות ב- $(0, 1)$. תהא

$$\min_k \{X_k\} = Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n = \max_k \{X_k\}$$

תמורה של $\{X_1, \dots, X_n\}$ בסדר עולה.

(א) חשבו את $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) := \lim_{\max\{\Delta_i\} \rightarrow 0} \frac{P(y_i - \frac{\Delta_i}{2} \leq Y_i \leq y_i + \frac{\Delta_i}{2})}{\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n}$
 $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < 1$

(ב) חשבו את $E(Y_k)$, $1 \leq k \leq n$.

תרגיל 5.

רעש במערכת הוא משתנה אקראי X המפולג $N(\mu, 4)$. מערכת משדרת אות Y שהיא הטרנספורמציה הבאה של הרעש:

$$Y = \begin{cases} \frac{X-\mu}{2}, & |X-\mu| \leq 2 \\ 0, & |X-\mu| > 2. \end{cases}$$

חשבו את פונקציית ההתפלגות $F_Y(y)$.

תרגיל 6.

מטילים מטבע, בעל הסתברות $1/3$ להצלחה, N פעמים באופן בלתי תלוי, כאשר N משתנה אקראי בלתי תלוי בתוצאות ההטלות ומפולג פואסוני עם פרמטר 1. נסמן X מספר ההצלחות.

(א) חשבו את $VAR(X)$

(ב) חשבו את $COV(X, N)$