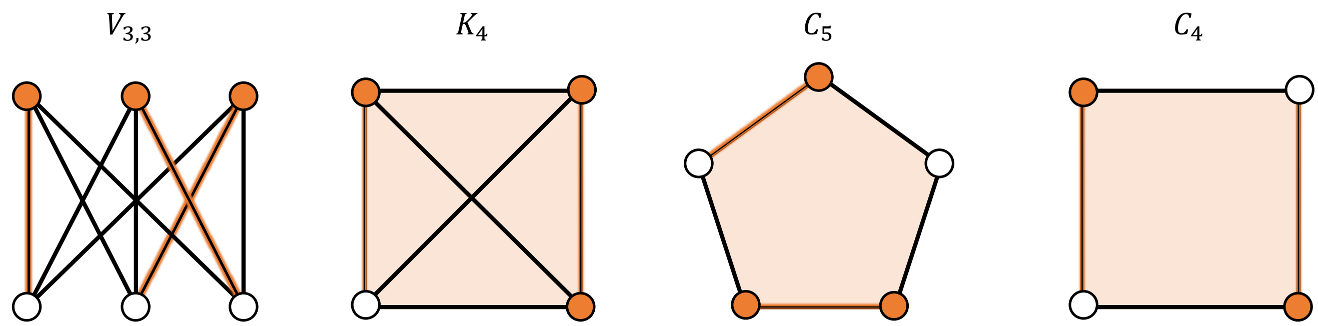
24/05/2016

קומבינטוריקה – תרגול #9

הגדרה: יהא $G=(V,E)$ גרף. תת קב' $C\subseteq V$ נקראת **כיסוי של הקדקודים** אם לכל $e\in E$, $e\cap C\neq\emptyset$.

דוגמאות לזיווג ולכיסוי:



כיסוי מקס': 3   כיסוי מקס': 3   כיסוי מקס': 3   כיסוי מקס': 2

טענה: בכל גרף אם C הוא כיסוי ו-F הוא זיווג, מתקיים $|C|\geq|F|$.

סימון: $\nu(G)$ – גודל מקס' של זיווג. $\tau(G)$ – גודל מקס' של כיסוי.

משפט: יהא G גרף, $\tau(G)\geq\nu(G)$.

טענה: יהא G גרף, אז $\tau(G)\leq 2\nu(G)$

הוכחה: יהי F זיווג מקס'. כלומר, $|F|=\nu(G)$. נגדיר את C להיות כל הקדקודים המשתתפים בכל הצלעות של F. צ"ל – C כיסוי, כי $|C|=2|F|=2\nu(G)$. תהי $e\in E$, אז נניח בשלילה ש-$e\cap C=\emptyset$. אם כן, $F\cup\{e\}$ הוא זיווג, שכן e זרה לכל צלע ב-F, וזה זיווג גדול יותר מ-F בסתירה למקס' F.

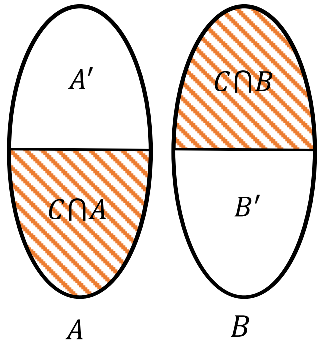
משפט König: בגרף דו צדדי $G=(A,B,E)$ מתקיים $\tau(G)=\nu(G)$

תרגיל: הוכיחו את משפט Hall ממשפט König.

הוכחה: נתון $G=(A,B,E)$. צ"ל $|A|=\nu(G)$ אמ"מ לכל $S\subseteq A$ מתקיים $|N(S)|\geq|S|$ כאשר נתון שלכל גרף דו"צ $\tau=\nu$.

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-$|A|=\nu(G)$ אז סיימנו (ההוכחה היא בדיוק כמו ב-Hall).

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$|N(S)|\geq|S|$ לכל $S\subseteq A$. צ"ל ש-$|A|=\nu(G)$. נניח בשלילה שלא, אז $\tau(G)=\nu(G)<|A|$ (כי $\tau(G)\leq|A|$). לכן, קיים כיסוי C כך ש-$|C|<|A|$. נגדיר $A'=A\setminus(A\cap C),\ B'=B\setminus(B\cap C)$.



נסתכל על $S = A'$ ונראה ש-$|A'| > |N(A')|$, וזה יביא לסתירה. $N(A') \subseteq B'$, ולכן:

$$|N(A')| \le |B'| = |C \setminus A\cap C| = |C| - |A\cap C| \underbrace{<}_{|C|<|A|} |A| - |C\cap A| = |A'|$$

תרגיל: יהי $G = (A, B, E)$ גרף דו"צ כאשר $|A| = |B| = n$.

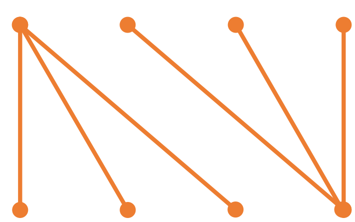
(א) הוכיחו שאם $\deg(v) \ge \frac{n}{2}$ לכל $v \in A\cup B$, אז יש זיווג מושלם בגרף.

(ב) האם קיימת דוגמא לגרף בו $\deg(v) \ge \frac{n}{2} - 1$ ואין זיווג מושלם.

פתרון:

(א) צ"ל שלכל $S \subseteq A$ מתקיים $|N(S)| \ge |S|$. יהי $S \subseteq A$. אם $|S| \le \frac{n}{2}$ אז עבור איזשהו $v \in S$, מתקיים $|N(\{v\})| = \deg(v) \ge \frac{n}{2}$ ולכן $|N(S)| \ge |N(\{v\})| \ge \frac{n}{2} \ge |S|$.
אחרת, $|S| > \frac{n}{2}$. נסתכל על $w \in B \setminus N(S)$, $|N(\{w\})| \ge \frac{n}{2}$ בנוסף, $N(\{w\})\cap S = \emptyset$. אם כן, $|N(w)\cup S| > 2\frac{n}{2} = n$, וזו סתירה. לכן, לא קיימת $w \in B \setminus N(S)$, ולכן $B = N(S)$. אם כן, $|N(S)| = n \ge |S|$.

(ב) בגרף הבא $n = 4$ ו-$\deg(v) \ge \frac{n}{2} - 1 = 1$, אך אין זיווג:

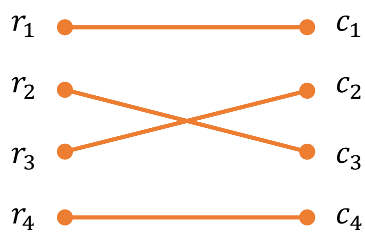


תרגיל: מטריצה ריבועית M מסדר $n \times n$ נקראת בי-סטוכסטית אם איבריה הם ממשיים אי-שליליים וסכומי כל השורות וכל העמודות הם 1. הוכיחו בעזרת משפט החתונה שמכל מטריצה M כזו ניתן לבחור n איברים חיוביים כך שבכל שורה ועמודה נמצא בדיוק אחד מהם.

דוגמא:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{{}^{2}/_{3}} & & & {}^{1}/_{3} \\ & \boxed{{}^{2}/_{3}} & {}^{1}/_{3} & \\ & {}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{2} & \boxed{{}^{1}/_{6}} \\ {}^{1}/_{3} & & \boxed{{}^{1}/_{6}} & {}^{1}/_{2} \end{pmatrix}$$

פתרון: נגדיר גרף דו"צ $G = (A, B, E)$ כך ש-A יהיו השורות של M ו-B העמודות של M. נחבר שורה i לעמודה j אמ"מ $m_{ij} > 0$.



צ"ל שיש זיווג מושלם. יהי $S \subseteq A$, אז נראה ש-$|N(S)| \geq |S|$. $|S|$ הוא סכום האיברים שמופיעים בשורות של S. מצד שני אם נסכום את האיברים החיוביים שמופיעים בשורות של S לפי העמודות, נקבל שהסכום על כל עמודה ≤ 1, ומס' העמודות עליהן סוכמים הוא בדיוק $|N(S)|$. לכן, סך הכל, סכום האיברים החיוביים שמשתתפים בשורות S קטן או שווה מ-$|N(S)|$. לכן, $|S| \leq |N(S)|$ כנדרש.