תירגול מס. 11

אינטגרל מוכלל (לא אמיתי)

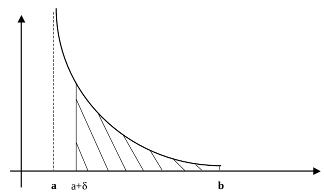
א הגדרות

רוצים להרחיב את מושג האינטגרל המסויים גם למקרים שבהם אינטגרל רימן לא קיים.
מטפלים בשני מקרים בסיסיים:

א. $f(x)$ אינה חסומה באחד מקצות הקטע $[a,b]$ (ולכן אינה אינטגרבילית רימן ב - $[a,b]$).

ב. קטע האינטגרציה הוא אין סופי (במקרה זה אינטגרל רימן אינו מוגדר).

הגדרה 1 תהא $f(x)$ מוגדרת בקטע הסופי $(a,b]$, אינטגרבילית רימן בכל תת-קטע סגור $[a+\delta,b]$, אבל (אולי) אינה חסומה ליד a.



אם קיים הגבול הסופי: $I = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ אז נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int_a^b f(x)\,dx$ מתכנס וערכו I.

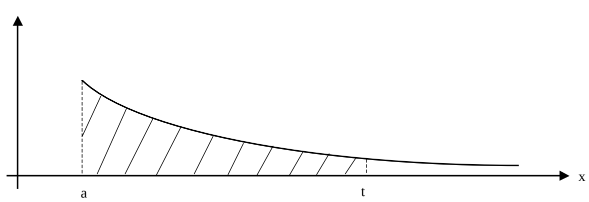
__תרגיל 1__ להראות שזאת הכללה של אינטגרל רימן במובן הבא: אם $f(x)$ **אינטגרבילית-רימן ב -** $[a,b]$
אז האינטגרל המוכלל מתלכד עם אינטגרל רימן, כלומר: $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

__פתרון:__ נגדיר פונקציה $F(t):[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י: $F(t)=\int_t^b f(x)\,dx$.
$f(x)$ **אינטגרבילית רימן ב** $[a,b]$, ולכן[1], הפונקציה $F(t)$ **רציפה ב -** $[a,b]$, **ומכאן ש-** $\lim_{t\to a^+} F(t) = F(a)$ **מ.ש.ל**

למה 1

- יהי $a>0$ כלשהו. האינטגרל המוכלל $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס **א.מ.ם** $\alpha<1$.
- יהיו $a<b$ כלשהם. האינטגרלים: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ ו- $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ מתכנסים **א.מ.ם** $\alpha<1$.

הגדרה 2 תהא $f(x)$ מוגדרת בקטע אינסופי $[a,\infty)$, ואינטגרבילית-רימן בכל תת-קטע סופי $[a,t]$.



אם קיים הגבול הסופי $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = I$ אז נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס וערכו I.

למה 2 יהי $a>0$ כלשהו. האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס **א.מ.ם** $\alpha>1$

[1] לפי חלק א' של המשפט היסודי של החדו"א

ב מבחני השוואה

משפט 1 אם $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות ב $(a,b]$ **ואינטגרבליות רימן בכל תת–קטע סגור** $[a+\varepsilon,b]$, (אולי לא חסומות ליד a).
וכך שסביבה ימנית כלשהי של a[2] מתקיים: $0 \le f(x) \le g(x)$ אז:

- אם $\int_a^b g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^b f(x)\,dx$ מתכנס.
- אם $\int_a^b f(x)\,dx$ מתבדר, אז גם $\int_a^b g(x)\,dx$ מתבדר.

<u>הערות</u>

1. לא לשכוח לבדוק שהפונקציות אינטגרביליות רימן בכל תת-קטע סגור, ואי-שליליות בסביבה ימנית של - a.
2. אם שתיהן אי-חיוביות בסביבה ימנית של - a, אז אפשר להסתכל על הפונקציות האי-שליליות:[3] $-f(x),-g(x)$.

<u>מסקנה</u> יהיו $f(x),g(x)$ מוגדרות ב $(a,b]$ **אינטגרבליות רימן בכל תת-קטע סגור** $[a+\varepsilon,b]$, (אולי לא חסומות ליד a).
נניח ששתיהן חיוביות בסביבה ימנית של - a, ושקיים הגבול הסופי והחיובי:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; c\,, \qquad (c>0) \tag{1}$$

אז שני האינטגרלים: $\int_a^b f(x)\,dx$ ו- $\int_a^b g(x)\,dx$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

<u>הסבר</u> מהגבול (1) נובע ש (עבור $\varepsilon=\frac{c}{2}>0$) קיימת $0<\delta$ כך ש-

$$a \;<\; x \;<\; a+\delta \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{1}{2}c \;<\; \frac{f(x)}{g(x)} \;<\; \tfrac{3}{2}c$$

ומכיוון ש - $g(x)>0$ אז (מכפילים בביטוי חיובי):

$$\forall x\in(a,a+\delta)\,, \qquad \tfrac{1}{2}c\cdot g(x) \;<\; f(x) \;<\; \tfrac{3}{2}c\cdot g(x)$$

והמסקנה נובעת משני החלקים של מבחן ההשוואה.

<u>הערה</u> אם בגבול (1) מתקיים $c=\infty$ או $c=0$, אז אפשר להסיק קצת פחות:
למשל אם $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)} \;=\; \infty$ אז קיימת סביבה ימנית של - a, שבה: $f(x)>g(x)>0$ (למה?) ולכן

$$\int_a^b f(x) \text{ מתכנס } \Rightarrow \int_a^b g(x) \text{ מתכנס.} \qquad \text{ואילו} \qquad \int_a^b g(x) \text{ מתבדר } \Rightarrow \int_a^b f(x) \text{ מתבדר.}$$

משפט 2 יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות שמוגדרות בקרן $[a,\infty)$ **ואינטגרבליות רימן בכל תת–קטע סופי** – $[a,t]$.
נניח שקיים $a\le X_0$ כך שלכל $x>X_0$ מתקיים: $0 \le f(x) \le g(x)$ אז

א. אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס

ב. אם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר, אז גם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתבדר

ובנוסף, אם קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ אז קיימות מסקנות דומות.

[2] כלומר בקטע מהצורה $(a,a+\delta)$
[3] עדיף להסתכל על ביטויים חיוביים כדי לא להתבלבל בכיוון של אי השיויון

ג דוגמאות לשימוש במבחני ההשוואה

זכרו שמבחני ההשוואה ישימים רק כאשר הפונקציה שומרת על סימן קבוע [4].

<u>תרגיל 2</u> לבדוק התכנסות:

(א) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-\cos x}$ (ב) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^2}\,dx$ (ג) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

<u>פתרון</u>

א. $f(x)=\frac{1}{1-\cos x}$ רציפה וחיובית ב $(0,1]$ ולכן אינטגרבילית רימן בכל תת-קטע סגור $[\delta,1]$.
אבל אינה חסומה ליד אפס.
עם מה כדאי להשוות? - בעזרת הפיתוח הסטנדרטי של $\cos x$ מקבלים פיתוח של המכנה:

$$1-\cos x \;=\; \tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^4}{4!}+\dots$$

בסביבת אפס האיבר הדומיננטי הוא האיבר הראשון, כלומר:

$$x\sim 0 \quad\Rightarrow\quad 1-\cos x\;\sim\;\frac{x^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1-\cos x}\;\sim\;\frac{2}{x^2}$$

כדאי לכן לנסות לבצע השוואה עם הפונקציה[5] : $g(x)=\frac{1}{x^2}$. נבצע השוואה:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x} \;=\; \text{“}\,\tfrac{0}{0}\,\text{”} \;\overset{\text{לופיטל}}{=}\; \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sin x} \;=\; 2\;>\;0$$

ומכאן מסיקים ש -

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ ו- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ מתבדרים יחדיו

ב. $f(x)=\frac{e^x-1}{x^2}$ רציפה וחיובית ב $(0,1]$ ולכן אינטגרבילית רימן בכל תת-קטע סגור $[\delta,1]$.
אבל היא (אולי) אינה חסומה ליד אפס.
עם מה כדאי להשוות? - בעזרת הפיתוח הסטנדרטי של e^x מקבלים פיתוח של המונה:

$$e^x-1 \;=\; x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3!}+\dots$$

האיבר הראשון הוא הדומיננטי בסביבת אפס, כלומר:

$$x\sim 0 \quad\Rightarrow\quad 1-e^x\;\sim\;x \quad\Rightarrow\quad \frac{e^x-1}{x^2}\;\sim\;\frac{1}{x}$$

ולכן במקרה זה כדאי לנסות להשוות עם: $g(x)=\frac{1}{x}$ (חיובית ב - $(0,1]$) :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} \;=\; \text{“}\tfrac{0}{0}\text{”} \;\overset{\text{לופיטל}}{=}\; \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1} \;=\; 1\;>\;0$$

ומכאן מסיקים ש -

$\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ ו- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ מתבדרים יחדיו (למה הראשון מתבדר?)

---

[4] לפחות בסביבה של הנקודה הבעייתית

[5] $g(x)$ היא פונקציה חיובית, ואנו יודעים שהאנטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ מתבדר.

ג. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ רציפה וחיובית ב - $[0,1)$ אבל אינה חסומה ליד אחד.
עם מה להשוות? - במקרה זה קשה לנחש, ולכן ננסה להשוות עם משהו שאנחנו מכירים.
מה שאנחנו מכירים וסביר להניח שיתאים למקרה זה היא פונקציה מהצורה

$$g(x) \;=\; \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$$

היא חיובית ב - $[0,1)$, (אינה חסומה ליד אחד) והאינטגרל שלה שם מתכנס א.מ.ם $\alpha<1$.
נבצע השוואה עם

$$g(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x}} \qquad (\alpha=\tfrac{1}{2})$$

מתקיים:

$$\forall\, x\in[0,1)\,, \qquad 0\;<\;x^4\;<\;x\;<\;1 \qquad \Rightarrow \qquad 0\;<\;1-x\;<\;1-x^4$$

ומכאן שלכל x בקטע האינטגרציה $[0,1)$:

$$0\;<\;\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\;<\;\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

ולכן ע"פ מבחן ההשוואה:

$$\text{מתכנס}\;\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \Leftarrow \qquad \text{מתכנס}\;\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad (\alpha=\tfrac{1}{2})$$

<u>תרגיל 3</u> עבור אילו ערכים של α ו- β מתכנסים האינטגרלים הבאים:

(א) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\ln^{\beta}(1+x)\cdot x^{\alpha}}$ (ב) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\ln^{\beta}(x)\cdot(x-1)^{\alpha}}$

<u>פתרון</u>

א. הפונקציה:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\ln^{\beta}(1+x)\cdot x^{\alpha}}$$

רציפה וחיובית ב - $(0,1]$ אבל (אולי) אינה חסומה ליד אפס.
כדי להבין כיצד היא מתנהגת ליד אפס (ועם מה להשוות), נעזר בפיתוח הסטנדרטי:

$$\ln(1+x) \;=\; x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\ldots$$

לכן ליד אפס:

$$f(x)\;\sim\;\frac{1}{x^{\beta}\cdot x^{\alpha}} \qquad \Leftarrow \qquad \ln(1+x)\;\sim\;x$$

נשווה לכן עם: $\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}} \;=\; \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^{\beta} \;=\; ``\left(\tfrac{0}{0}\right)^{\beta}" \;\overset{\text{"לופיטל פנימי"}}{=}\; \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\frac{1}{1+x}}\right)^{\beta} \;=\; 1\;>0$$

ונובע ש -

$$\alpha+\beta\;<\;1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{מתכנס}\;\int_0^1\frac{dx}{x^{\alpha+\beta}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{מתכנס}\;\int_0^1 f(x)\,dx$$

ב. נציב $t=x-1 \;\Leftarrow\; x=t+1$ ונקבל:

$$\int_1^2\frac{dx}{\ln^{\beta}(x)\cdot(x-1)^{\alpha}} \;=\; \int_0^1\frac{dt}{\ln^{\beta}(1+t)\cdot t^{\alpha}}$$

ולפי סעיף קודם האינטגרל האחרון מתכנס א.מ.ם $\alpha+\beta<1$.

<u>תרגיל 4</u> עבור אילו ערכים של α מתכנס האינטגרל: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^\alpha x}$

<u>פתרון:</u> הפונקציה $f(x) = \frac{1}{(\cos x)^\alpha}$ רציפה וחיובית ב $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, אבל אינה חסומה בשני הקצוות.
לכן, האינטגרל מתכנס א.מ.ם מתכנסים שני האינטגרלים:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \qquad , \qquad I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$$

ובמקרה כזה, ערכו הוא $I = I_1 + I_2$.
נבדוק התכנסות של I_1: - המועמדת הטבעית להשוואה היא

$$g(x) = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}$$

כי היא חיובית ורציפה ב - $[0, \frac{\pi}{2})$, וכמו הפונקציה $f(x)$ שלנו, היא אינה חסומה ליד $\frac{\pi}{2}$.
ובנוסף ידוע ש -

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha} \quad \text{מתכנס} \quad \text{א.מ.ם} \quad \alpha < 1$$

כל זה לא מבטיח שמבחן ההשוואה יעבוד אבל כדאי לנסות[6]:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}\right)^\alpha = \left(\text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}\right)^\alpha \overset{\text{לופיטל פנימי}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-1}{-\sin x}\right)^\alpha = 1 > 0$$

ומכאן ש - I_1 מתכנס א.מ.ם $\alpha < 1$.
באופן דומה מקבלים בדיוק אותו תנאי עבור התכנסות של I_2.
כך שבסה"כ, האינטגרל I מתכנס א.מ.ם $\alpha < 1$.

נעבור לכמה דוגמאות של אינטגרלים מוכללים בקטעים לא סופיים:

<u>תרגיל 5</u> לבדוק התכנסות של האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x\cdot(x+1)}\,dx$ (ב) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+[x]^2}$ (ג) $\int_0^\infty \frac{(x+1)^6}{x\cdot e^x}\,dx$

<u>פתרון</u>

א. הפונקציה $f(x) = \frac{\arctan x}{x\cdot(x+1)}$ רציפה וחיובית ב - $(0,\infty)$.
יש שתי בעיות שעלולות להביא להתבדרות: א' קטע אינטגרציה אינסופי. ב' לא ברור מה קורה ליד אפס.
צריך לחלק את קטע האינטגרציה לשני קטעים, למשל: $(0,1]$ ו- $[1,\infty)$, ולבדוק כל אחד בנפרד.

– בדיקת האינטגרל: $I_1 = \int_1^\infty f(x)\,dx$
כדי למצוא מועמד להשוואה, צריך להבין כיצד מתנהגת הפונקציה $f(x)$ כאשר $x\to\infty$.
כאשר $x\to\infty$, מתקיים $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, ואילו $(1+x)\sim x$ לכן $f(x) \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$
נבצע השוואה עם $g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}\cdot\arctan x = \frac{\pi}{2} > 0$$

ואפשר להסיק ש $I_1 = \int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס (כי $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ מתכנס).

[6] הצדקה אחרת להשוואה: כאשר $x\sim\frac{\pi}{2}$, אז $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ומכאן שליד $\frac{\pi}{2}$ מתקיים $f(x)\sim g(x)$.

– בדיקת האינטגרל: $I_2 = \int_0^1 f(x)\,dx$

הפונקציה $f(x)$ לא מוגדרת באפס. האם היא גם לא חסומה ליד אפס? -
התשובה היא, ש - $f(x)$ כן חסומה ליד אפס כי:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{\arctan x}{x} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

כלומר, אם נגדיר $f(0) = 1$, אז $f(x)$ תהיה רציפה ב - $[0,1]$, ומכאן שהאינטגרל I_2 מתכנס.[7]

ב. נתבונן בפונקציה $f(x) = \dfrac{1}{1+[x]^2}$ היא חיובית ב $[0,\infty)$ (מוגדרת היטב באפס!) ואינטגרבילית רימן בכל קטע סופי - $[0,t]$ (כי בכל קטע כזה היא חסומה ובעלת מספר סופי של נקודות אי-רציפות).
התנאים שמאפשרים שימוש במבחן ההשוואה מתקיימים, ומכיוון שעבור x-ים גדולים: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$

אז נשווה את $\int_1^\infty f(x)\,dx$ עם האינטגרל המתכנס[8] $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

נסמן $g(x) = \frac{1}{x^2}$, ונחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$: נעזר באי-השיוויון $x-1 < [x] \le x$
לכל $1 \le x$ כל הביטויים חיוביים, כך שאפשר להעלות בריבוע (ולשמור על אי-השיוויונות) ולכן:

$$\forall\, x \in [1,\infty)\,, \qquad (x-1)^2 < [x]^2 \le x^2$$

נובע שלכל $1 \le x$ מתקיים

$$\frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{1+[x]^2} < \frac{1}{1+(1-x)^2}$$

וע"י חלוקה ב - $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ נקבל:

$$\frac{x^2}{1+x^2} \le \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{x^2}{1+(1-x)^2}$$

ומכאן בעזרת סנדוויץ: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ולכן $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ו- $\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתכנסים יחדיו.

ג. $f(x) = \dfrac{(x+1)^6}{x \cdot e^x}$ רציפה וחיובית ב $(0,\infty)$. נבדוק התכנסות של: $I_1 = \int_1^\infty f(x)\,dx$ ו- $I_2 = \int_0^1 f(x)\,dx$

– בדיקת התכנסות של I_1: נתבונן תחילה באינטגרל פשוט יותר: $\int_1^\infty \frac{dx}{e^x}$
הוא מתכנס - וזאת משתי סיבות: ראשית אפשר למצוא פונקציה קדומה ולבדוק התכנסות ע"פ ההגדרה, ושנית $0 < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^2}$ כך שההתכנסות נובעת גם ממבחן ההשוואה.
כעת, אפילו אם נכפיל בפקטור פולינומיאלי גדול כמו: $(1+x)^6$ זה לא יכול לקלקל את ההתכנסות כי הגורם e^x במכנה הרבה יותר גדול, ועבור x-ים מספיק גדולים יתקיים

$$0 \le \frac{(x+1)^6}{x \cdot e^x} < \frac{1}{x^2}$$

וכדי להראות זאת באופן מדוייק, נשווה את $f(x)$ עם $g(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+1)^6}{e^x} \overset{\text{לופיטל מספיק פעמים}}{= \cdots =} 0$$

ונובע שעבור x-ים מספיק גדולים: $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ ומכאן ש - I_1 מתכנס.

– בדיקת התכנסות של I_2: צריך להבין כיצד מתנהגת הפונקציה $f(x)$ ליד אפס.

$$x \sim 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(1+x)^6}{e^x} \sim \frac{1^6}{e^0} = 1 \quad\Rightarrow\quad f(x) \sim \frac{1}{x}$$

ומכיוון ש $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ מתבדר אז ע"י השוואה עם $\frac{1}{x}$ מקבלים ש - I_2 מתבדר.

[7] יתר על כן, זה אינטגרל אמיתי (כלומר קיים במובן של אינטגרל רימן).
[8] מספיק לבדוק התכנסות ב - $[1,\infty)$, כי בקטע - $[0,1]$ הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית רימן

ד האינטגרל $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \cdot \ln^\beta x}$

עד כה הפונקציות בהן השתמשנו לצורך השוואה היו בעיקר פונקציות מהצורה: $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$
הלמה הבאה מספקת עוד כלי שימושי מאוד למבחני השוואה.

למה 3 יהיו $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ כלשהם. ויהי $I = \int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \cdot \ln^\beta x}$

- אם $1 < \alpha$ אז האינטגרל **מתכנס** (לכל β).
- אם $1 > \alpha$ אז האינטגרל **מתבדר** (לכל β).
- אם $\alpha = 1$ אז האינטגרל מתכנס **א.מ.ם** $1 < \beta$.

<u>הערה</u> אם נשווה תוצאה זו עם התוצאה המוכרת: $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ מתכנס א.מ.ם $\alpha > 1$
אז אפשר לראות שהגורם $\ln^\beta x$ בד"כ לא משפיע על ההתכנסות[9], אלא רק במקרה הגבולי $\alpha = 1$.
לפני שנוכיח את הלמה נדגים את השימוש בה:

<u>תרגיל 6</u> עבור אילו ערכים של הקבועים α, β, p, q מתכנסים האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,dx$ (ב) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha \cdot \ln^\beta x}$ (ג) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p \cdot (-\ln x)^q}$

<u>פתרון</u>

א (זאת שאלה מבחינה). צריך לבדוק את התכנסותם של

$$I_1 = \int_2^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,dx \qquad \text{ו-} \qquad I_2 = \int_0^2 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,dx$$

נתחיל עם I_1 עבור x-ים גדולים: $\ln(1+x^2) \sim \ln(x^2) = 2\ln x$ כלומר

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \sim \frac{2\ln x}{x^\alpha} = \frac{2}{x^\alpha \cdot \ln^{-1} x} \quad , \qquad as \quad x \to \infty$$

לא קשה לוודא (חישוב גבול...) ש - I_1 מתכנס א.מ.ם מתכנס האינטגרל

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \cdot \ln^{-1} x}$$

כלומר, לפי הלמה ($\beta = -1 < 1$) א.מ.ם $\alpha > 1$.

נבדוק התכנסות של I_2: צריך להבין כיצד מתנהגת $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}$ ליד אפס.
לשם כך נשתמש בפיתוח הסטנדרטי

$$\ln(1+t) = t - \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{3} - \ldots \qquad \Rightarrow \qquad \ln(1+x^2) = x^2 - \tfrac{x^4}{2} + \ldots$$

ובעזרתו נסיק שליד אפס:

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

ומכאן [10] מקבלים ש I_2 מתכנס א.מ.ם מתכנס האינטגרל $\int_0^2 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx$ ז"א, א.מ.ם $\alpha - 2 < 1$ או $\alpha < 3$.
בסה"כ, האינטגרל הנתון מתכנס א.מ.ם מתכנסים שני האינטגרלים, כלומר א.מ.ם $1 < \alpha < 3$.

[9] וזאת מפני שהוא זניח ביחס לגורם השני x^α.
[10] בעזרת מבחן ההשוואה

ב הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha\cdot\ln^\beta x}$ רציפה וחיובית ב $(1,\infty)$ אבל יש בעיית חסימות ליד $x=1$.

נבדוק את התכנסותם של $I_1=\int_2^\infty f(x)\,dx$ ו- $I_2=\int_1^2 f(x)\,dx$

I_1 מתאים בדיוק ללמה. נבדוק את I_2:

צריך להבין כיצד מתנהגת $f(x)$ ליד 1. ראשית, $x\sim 1 \Leftarrow x^\alpha\sim 1$ ובנוסף אם נסמן $x=1+h$ אז

$$\ln x=\ln(1+h)\overset{\text{לפי הפיתוח}}{\sim} h=x-1 \quad\Leftarrow\quad h\sim 0 \quad\Leftarrow\quad x\sim 1$$

ומכאן ש -

$$f(x)\;=\;\frac{1}{x^\alpha\cdot\ln^\beta x}\sim\frac{1}{1\cdot(x-1)^\beta}\qquad\Leftarrow\qquad x\;\sim\;1$$

מהשוואת I_2 עם $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^\beta}$ מקבלים שהם מתכנסים או מתבדרים יחדיו, ומכאן ש I_2 מתכנס א.מ.ם $\beta<1$.

המסקנה היא שהאינטגרל הנתון מתכנס א.מ.ם $\beta<1$ ו- $\alpha>1$.

ג נתבונן בפונקציה:

$$f(x)\;=\;\frac{1}{x^p\cdot(-\ln x)^q}\quad=\quad\frac{1}{x^p\cdot\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}$$

מכיוון שעבור $0<x<1$ מתקיים $\ln x<0$, אז בקטע $(0,1)$ הפונקציה מוגדרת היטב[11], חיובית ורציפה.

כדי לבדוק התכנסות, ננקוט בטריק הבא:

נציב: $t\;=\;\frac{1}{x}$ ואז $dt\;=\;\frac{-dx}{x^2}$ וכן: $\begin{cases} x=0 & \rightarrow\quad t=\infty\\ x=1 & \rightarrow\quad t=1\end{cases}$

ומכאן ש -

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p\cdot\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}\quad=\quad\int_0^1\frac{\frac{1}{x^2}\cdot dx}{x^{p-2}\cdot\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}\quad=\quad\int_\infty^1\frac{-dt}{\left(\frac{1}{t}\right)^{p-2}\cdot\ln^q t}\quad=\quad\int_1^\infty\frac{dt}{t^{2-p}\cdot\ln^q t}$$

האינטגרל האחרון הוא בדיוק האינטגרל של סעיף ב' (עם $\alpha=2-p$ ו- $\beta=q$)

ולכן ע"פ סעיף ב' יש התכנסות א.מ.ם $2-p>1$ ו- $q<1$ או באופן שקול א.מ.ם $p,q<1$.

<u>הוכחת הלמה</u> נתבונן בפונקציה: $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha\cdot\ln^\beta x}$ היא רציפה וחיובית ב $[2,\infty)$. נפריד לשלושה מקרים:

א. $\alpha=1$ (במקרה זה אפשר לחשב פונקציה קדומה).

ב. $1<\alpha$ (נסמן $\alpha=1+\varepsilon$ ונשווה עם האינטגרל המתכנס $\int_2^\infty\frac{dx}{x^{1+\varepsilon/2}}$).

ג. $1>\alpha$ (נשווה עם האינטגרל המתבדר $\int_2^\infty\frac{dx}{x}$).

- מקרה א' כאשר $\alpha=1$ הפונקציה היא $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln^\beta x}$ וניתן לחשב פונק' קדומה.

$$\int\frac{dx}{x\cdot\ln^\beta x}\;=\;\int\frac{du}{u^\beta}\quad=\quad\begin{cases}\ln|\ln x| & ,\quad\beta=1\\ \frac{1}{1-\beta}\cdot(\ln x)^{1-\beta} & ,\quad\beta\neq 1\end{cases}\;+\;C\qquad\text{(הצבנו }u=\ln x\;,\;du=\tfrac{dx}{x}\text{)}$$

נבדוק התכנסות ע"פ ההגדרה: אם $\beta=1$ אז:

$$\lim_{t\to\infty}\int_2^t f(x)\,dx\;=\;\lim_{t\to\infty}\left(\ln|\ln x|\,\Big|_2^t\right)\;=\;\infty$$

ואם $\beta\neq 1$ אז:

$$\lim_{t\to\infty}\int_2^t f(x)\,dx\;=\;\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1-\beta}\cdot(\ln x)^{1-\beta}\,\Big|_2^t\right)\;=\;\begin{cases}\text{סופי} & ,\quad\beta>1\\ \text{אין סופי} & ,\quad\beta<1\end{cases}$$

בסה"כ יש התכנסות א.מ.ם $\beta>1$.

[11] שימו לב שאם למשל $q=\frac{1}{2}$ אז מופיע הביטוי $\sqrt{-\ln x}$ וחייבים לבדוק שהביטוי מתחת לשורש חיובי

- מקרה ב' עבור $\alpha > 1$ נציג $\alpha = 1+\varepsilon$. ונראה ש $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}\cdot \ln^\beta x}$ מתכנס לכל $\beta \in \mathbb{R}$.
  - אם $\beta \geq 0$ זה ברור כי $0 < f(x) \leq \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$.
  - ועבור $\beta < 0$ נרשום: $f(x) = \dfrac{(\ln x)^{|\beta|}}{x^{1+\varepsilon}}$ ונשווה עם: $g(x) = \dfrac{1}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$. נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{|\beta|}}{x^{\frac{\varepsilon}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\varepsilon}{2|\beta|}}}\right)^{|\beta|} = (\text{"}\tfrac{\infty}{\infty}\text{"})^{|\beta|}$$

נחשב את הגבול של הביטוי הפנימי בעזרת לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{\varepsilon}{2|\beta|}}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\varepsilon}{2|\beta|}\cdot x^{\frac{\varepsilon}{2|\beta|}-1}} = \frac{2\cdot|\beta|}{\varepsilon}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\frac{\varepsilon}{2|\beta|}}} = 0$$

כלומר $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ואפשר להסיק שעבור x-ים מספיק גדולים: $0 < f(x) < g(x)$

ומכיוון ש $\displaystyle\int_2^\infty g(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{dx}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$ מתכנס, אז גם $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ מתכנס

- מקרה ג' אם $\alpha < 1$ אז $\displaystyle\int_2^\infty f(x)\,dx$ מתבדר (לכל β) ע"י השוואה[12] עם האינטגרל המתבדר $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x}$.

ה התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

אפשר לוותר על הסעיף הזה[13].

תרגיל 7 לבדוק התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי של האינטגרלים הבאים:

(א) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (ב) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ (ג) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx$

פתרון

א. נתבונן בפונקציה: $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ היא רציפה ב $(0,1]$ ולכן אינטגרבילית רימן בכל תת-קטע סגור: $[\delta, 1]$.
הבעיה היא שהיא לא שומרת על סימן קבוע בסביבת אפס ולכן לא ניתן להשתמש במבחן ההשוואה.
נבדוק האם מתכנס האינטגרל: $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ התשובה היא שכן, כי

$$0 \leq |f(x)| = \frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ומכיוון ש - $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס אז גם $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ מתכנס. ולכן $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

ב. נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad x \geq 1$$

היא רציפה ב - $[1,\infty)$ ולכן אינטגרבילית רימן בכל תת קטע סופי - $[1,t]$. גם במקרה זה לא ניתן להפעיל את מבחן ההשוואה כי היא לא שומרת על סימן קבוע[14]. נעזר במבחן דריכלה[15]

[12] הפעם מציגים $\alpha = 1-\varepsilon$
[13] הסעיף הזה מדגים טיפול בפונקציות שאינן שומרות על סימן קבוע (ולא ניתן להשתמש במבחני ההשוואה). זכרו שמלבד מה שמודגם כאן, תמיד ניתן לנסות ולבדוק התכנסות ע"פ ההגדרה (בעיקר אם יודעים לחשב פונקציה קדומה).
[14] נסיון לפעול כמו בסעיף א' לא יועיל, כי כל מה שנקבל זה $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$
[15] לא תמיד כלול בחומר הלימוד

<u>מבחן דריכלה</u> תהיינה $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות ב - $[a,\infty)$ אשר

1. $f(x)$ מונוטונית יורדת ב - $[a,\infty)$, וכן - $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
2. $f(x)$ בעלת נגזרת רציפה ב - $[a,\infty)$.
3. הפונקציה $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ חסומה[16] ב - $[a,\infty)$

אז $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$ מתכנס.

כעת, עבור $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ מתקיימים התנאים עם $g(x)=\cos x$, $f(x)=\frac{1}{x}$ ולכן האינטגרל מתכנס.

נראה שהוא אינו מתכנס בהחלט כלומר ש - $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x}\right|\,dx$ מתבדר.

כדי להוכיח זאת נשים לב שלכל $1\le x$ מתקיים

$$\forall\, x \;\ge\; 1\;, \qquad 0 \;\le\; \frac{\cos^2 x}{x} \;\le\; \frac{|\cos x|}{|x|}$$

ולכן מספיק להראות התבדרות של

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}\,dx \quad = \quad \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} \quad + \quad \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$$

(השתמשנו בזהות $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$).

המחובר הראשון בסכום מתבדר, והשני מתכנס (לפי מבחן דריכלה) ובסה"כ יש התבדרות.

כלומר האינטגרל הנתון מתכנס בתנאי (מתכנס אבל אינו מתכנס בהחלט).

ג. נציב $t=\frac{1}{x}$ ו- $dt=-\frac{1}{x^2}dx$ נקבל:

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\,dx \;=\; \int_0^1 x\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} \;=\; \int_1^\infty \frac{1}{t}\cos t\,dt$$

חזרנו לאינטגרל של סעיף ב' ומכאן שגם במקרה הנוכחי יש התכנסות בתנאי.

[16] כלומר קיים $M>0$ כך ש - $\left|\int_a^x g(t)\,dt\right|\le M$ $\forall x\ge a$,