אלגברה 104167

תאריך: 6/11/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: שדות

מספר תרגול: 32

שם המתרגל: גלית מזרחי

104167 – אלגברה א'

תרגיל בית מספר 1:

1. הוכח כי לכל איבר בשדה יש נגדי יחיד.
2. הוכח כי איבר היחידה בשדה הוא יחיד.
3. הוכח כי לכל a,b ששייכים לשדה נתון מתקיים: $-(a+b) = -a + -b$.
4. נתונה הקבוצה הבאה: $F = \{(a,b)/a,b \in Q\}$.

נגדיר: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac+2bd, ad+bc)$

הוכח כי F עם הפעולות הנ"ל הוא שדה.

5. פתור מעל Z_3: $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$
6. מצא שלושה שדות שבהם יש פתרון למשוואה: $x^2+1=0$. בכל שדה רשום את כל הפתרונות של המשוואה.
7. תהי $F=\{0,1,x,y\}$ – קבוצה של 4 איברים.

א. השלימו טבלאות חיבור וכפל כך שהתוצאה תהייה שדה:

טבלת התיבור:

+	0	1	x	y
0	0	1		
1	1	0		
x			0	
y				

טבלת הכפל:

*	0	1	x	y
0	0	0		
1	0	1		
x			y	
y				

הדרכה: הניחו ש – 0 – איבר אדיש לחיבור, 1 – איבר אדיש לכפל.
שימו לב שבטבלת הכפל בכל שורה פרט לשורה שמתאימה ל-0 כל האיברים שונים זה מזה.
כמו-כן , שימו לב שהטבלה סימטרית.

ב. הוכיחו ש Z_2 תת שדה של F. (הגדרה: תת שדה של F הינו תת קבוצה של F שהיא בעצמה שדה לגבי אותם פעולות כמו ב F).

עבודה נעימה

1) הוכח כי לכל איבר בשדה יש נגדי יחיד:

נניח בשלילה כי קיים איבר בשדה שלו שני נגדים שונים זה מזה.

נסמנו ב' x'. את הנגדים נסמן ב- $x_1 \neq x_2$

לפי הנגדי מתקיים:

$$\begin{cases} \mathbf{x}+(-x_1)=0 \\ x+(-x_2)=0 \end{cases}$$

הוספת ההפכי $(x+(-x_1))=(x+(-x_2)) \quad /+(-x_1)$

אסוציאטיביות בשדה.

$$\underbrace{(x+(-x_1))}_{\text{לפי הגדרה } 0}+(-x_1)=\underbrace{(x+(-x_1))}_{\text{לפי הגדרה } 0}+(-x_2)$$

לפי הגדרת הנגדי.

$$(-x_1)=(-x_2)$$

וזאת בסתירה להנחת השלילה לכן האיבר הנגדי חייב להיות יחיד לכל איבר בשדה.

2) הוכח כי איבר היחידה בשדה הוא יחיד:

נניח בשלילה כי קיימים שני איברי יחידה בשדה שונים זה מזה.

נסמנם ב- $a_1 \neq a_2$. לפי איבר היחידה מתקיים, עבור כל איבר בשדה (x):

$$a_1 \cdot x = x \quad , \quad a_2 \cdot x = x$$

חיבור משותף.

$$x+a_1 \cdot x = a_2 \cdot x + x \quad /+(-x)$$

הוספת הנגדי + אסוציאטיביות

$$(x+(-x))+a_1 \cdot x = a_2 \cdot x+(x+(-x))$$

עפ"י הגדרת הנגדי.

$$0+a_1 x = a_2 \cdot x+0$$

כפל בהופכי

$$a_1 x \cdot \frac{1}{x} = a_2 x \cdot \frac{1}{x}$$

הגדרת הופכי.

$$a_1 \cdot 1 = a_2 \cdot 1$$

$$a_1 = a_2$$

קיבלנו כי $a_1=a_2$ וזאת בניגוד להנחה ש $a_1 \neq a_2$ לכן $a_1=a_2$,

כלומר, איבר היחידה בשדה הוא יחיד!

3. הוכח כי לכל a,b ששייכים לשדה מתקיים: $-(a+b)=-a+(-b)$

נתון כי $a,b\in F$, שייכים לשדה כלשהו ולכן חלה עליהם תכונת הפילוג: $x(y+z)=xy+xz$

במקרה זה נציב- $x=(-1)$, $y=a$, $z=b$

$$-1(a+b)=-1\cdot a+(-1)\cdot b$$

$$-(a+b)=(-a)+(-b)$$ מ.ש.ל.

4- בל מועד הבא

5. פתור מעל Z_3
$$\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ 2x+y=0 & (2) \end{cases}$$

$(2)\quad 2x+y=0 \quad /+x$

$3x+y=x \longrightarrow x=y$

שווה לאפס (כפולה של 3 מעל Z_3)

$[0]=\{0+k\cdot 3 \mid k\in Z\}$

נציב במשוואה (1):

$(1)\quad x+y=1 \rightarrow x+x=1 \rightarrow 2x=1 \quad /\cdot 2 \rightarrow 4x=2 \rightarrow x=2$

שווה 1 (כפולה של 3 מעל Z_3)

$[1]=\{1+k\cdot 3 \mid k\in Z\}$

מהמשוואה השנייה מצאנו כי $x=y$ ולכן

$x=y=2$

6. מצא אילו שדות שבהם יש פתרון למשוואות $x^2+1=0$.
בכל שדה רשום את כל הפתרונות של השדה.

- $\mathbb{C}$: i
- Z_2 : 1
- Z_5 : $2, 3$

4. נתונה הקבוצה הבאה: $F=\{(a,b)/a,b\in \mathbb{Q}\}$

נגדיר: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$$

הוכח כי F שדה עם הפעולות הנ"ל:

(1) <u>סגירות בחיבור:</u>

$$(a,b)+(c,d)\overset{?}{\in} F$$

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\in \mathbb{Q}\in F$$ (חיבור רגיל בין 2 רציונליים נותן עוד רציונלי)

<u>סגירות בכפל:</u>

$$(a,b)\cdot(c,d)\overset{?}{\in} F$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$$ כפל וחיבור רגילים בין מספרים רציונליים נותנים מספר רציונלי.

(2) <u>קומוטטיביות בחיבור:</u>

$$(a,b)+(c,d)\overset{?}{=}(c,d)+(a,b)$$

$$(a+c,b+d)=(c+a,d+b)$$ במספרים רציונליים קיימת קומוטטיביות בחיבור

(3) <u>אסוציאטיביות בכפל:</u>

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)\overset{?}{=}(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$$

$$(ac+2bd,ad+bc)\cdot(e,f)\overset{?}{=}(a,b)\cdot(ce+2df,cf+de)$$

שמאל $$((ac+2bd)\cdot e+2(ad+bc)\cdot f,(ac+2bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e)\overset{?}{=}$$

ימין $$(a\cdot(ce+2df)+2b\cdot(cf+de),a\cdot(cf+de)+b\cdot(ce+2df))$$

יש קומוטטיביות בכפל וחיבור מספרים רציונליים.

שמאל $$(ace+2bde+2adf+2bcf,acf+2bdf+ade+bce)\overset{V}{=}$$ מ.ש.ל.

ימין $$(ace+2dfa+2bcf+2bde,acf+ade+bce+2bdf)$$ יש אסוציאטיביות בכפל.

(2) <u>קומוטטיביות בכפל:</u>

$$(a,b)\cdot(c,d)\overset{?}{=}(c,d)\cdot(a,b)$$

$$(ac+2bd,ad+bc)\overset{V}{=}(ca+2db,da+cb)$$ במספרים רציונליים קיימת קומוטטיביות בכפל.

(3) <u>אסוציאטיביות בחיבור:</u>

$$((a,b)+(c,d))+(e,f)\overset{?}{=}(a,b)+((c,d)+(e,f))$$

$$(a+c,b+d)+(e,f)\overset{?}{=}(a,b)+(c+e,d+f)$$

$$(a+c+e,b+d+f)\overset{V}{=}(a+c+e,b+d+f)$$

המשך 4

(4) <u>אדיש חיבור</u>:

$$(a,b)+(0,0)=(a+0,\,b+0)=(a,b)$$

(0,0) הוא האדיש החיבורי. $(0,0)\in F$

(5) <u>קיום נגדי</u>:

$$(a,b)+(-a,-b)=(a+(-a),\,b+(-b))=(0,0)$$

(-a,-b) הוא הנגדי: $(-a,-b)\in F$

(6) <u>קיום איבר היחידה</u> מחפשים איבר (c,d) אשר מקיים:

$$(a,b)(c,d)=(a,b)$$

$$(a,b)(c,d)\overset{\text{הגדרה}}{=}(ac+2bd,\,ad+bc)$$

$$\begin{cases} a\underset{1}{c}+2b\underset{0}{d}=a \\ a\underset{0}{d}+b\underset{1}{c}=b \end{cases} \qquad (c,d)=(1,0)$$

(7) <u>קיום הופכי</u>:

$$(a,b)\cdot(c,d)=(1,0)$$

$$ac+2bd=1$$

$$ad+bc=0$$

(I) $a\neq 0$ $\quad c=\dfrac{1-2bd}{a}$

$d=\frac{1}{2b}$

(II) $a=0$, $b\neq 0$ $\quad \begin{cases} 2bd=1 \\ bc=0 \end{cases}$ $\Rightarrow (c,d)=\boxed{\left(0,\frac{1}{2b}\right)}$

$c=0$

(I) $a\neq 0$ $\quad ad+bc=0 \quad ad+b\cdot\left(\dfrac{1-2bd}{a}\right)=0$

$$\Rightarrow a^2d=2b^2d-b \Rightarrow b=2b^2d-a^2d \Rightarrow d=\frac{b}{2b^2-a^2}$$

$$c=\frac{1-2b\cdot\frac{b}{2b^2-a^2}}{a}=\frac{1}{a}-\frac{2b^2}{(2b^2-a^2)\cdot a}$$

$$\boxed{(a,b)^{-1}=\left(\frac{1}{a}-\frac{2b^2}{a\cdot(2b^2-a^2)},\ \frac{b}{2b^2-a^2}\right)}$$

4. המשך

(8) פילוג: $(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] \overset{?}{=} (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$

שמאל $\overset{\text{הגדרת חיבור}}{=} (a,b)\cdot[(c+e),(d+f)] \overset{\text{הגדרת כפל}}{=} (a\cdot(c+e)+2b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e))$

$\overset{\text{פילוג ברציונלים}}{=} (ac+ae+2bd+2bf,\ ad+af+bc+be)$

ימין $(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f) \overset{\text{הגדרת כפל}}{=} (ac+2bd,\ ad+bc)+(ae+2bf,\ af+be)$

$\overset{\text{הגדרה}}{=} (ac+2bd+ae+2bf,\ ad+bc+af+be)$

מתכונות אסוציאטיביות, קומוטטיביות וסגירות הוכחנו כי חוק הפילוג מתקיים עבור שדה זה.

הוכחנו כי לקבוצה זאת כל התנאים של שדה מתקיימים ולכן $F=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ עם הפעולות שהגדרנו!

7א.

+	0	1	X	Y
0	0	1	X	Y
1	1	0	Y	X
X	X	Y	0	1
Y	Y	X	1	0

×	0	1	X	Y
0	0	0	0	0
1	0	1	X	Y
X	0	X	Y	1
Y	0	Y	1	X

ב. הוכיחו ש-Z_2 תת שדה של F (הגדרה...):

לפי הנתונים בסעיף א׳, ניתן לראות בבירור כי F הוא מעל שדה Z_2.
Z_2 מקיים את כל התכונות של F והוא שדה מכיון ש-$n=2$
הינו מספר ראשוני.
בסעיף א׳ ניתן להסתכל על שני המרובעים המסומנים מעלה, ולהבחין
כי אלו בדיוק Z_2.
$Z_2 \subseteq F$ ולכן הוא מהווה תת קבוצה שלה.