# תלות האינטגרל בבחירת המסלול

בתוך הקבוצה שלנו $D$ נחבר שתי נקודות $A, B$
ע"י שני מסלולים שונים $C_1, C_2$:
שאלה:

מתי $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s = \int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s$ ?

יש את השיוין

$$\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s - \int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s = \int\limits_{C_1 \cup (-C_2)} F \cdot \vec{\mathrm{d}}s$$

כאשר $(-C_2)$ הוא המסלול $C_2$ במגמה הפוכה.
כאן $C_1 \cup (-C_2)$ מסלול סגור.

**מסקנה.** $\int_A^B \vec{F}\cdot \vec{\mathrm{d}}s$ בלתי תלוי במסלול מ- $A$ ל- $B$ בתוך התחום $D$ אם ורק אם

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s = 0$$

לכל מסלול סגור בתוך התחום $D$. במקרה זה $\vec{F}$ נקרא <u>שדה משמר בתחום $D$</u>.

**הערה.** מספיק להסתכל במסלולים סגורים שאינם חותכים את עצמם (פשוטים), כי נחבר את $A, B$ במסלול שלישי $C_3$ שאינו חותך לא את $C_1$ ולא את $C_2$, ואז נצטרך לבדוק רק מסלו- לים סגורים $C_1 \cup (-C_3)$, $C_2 \cup (-C_3)$ שאינם נחתכים.

כדי שנוכל להשתמש בנוסחת גרין צריך לדרוש שלכל מסלול סגור ב- $D$ מתקיימת ההנחה

$$v_x = u_y$$

בפנים המסלול. מכאן נובעת הדרישה ש- $D$ יהיה פשוט קשר:

<u>הגדרה.</u> תחום $D$ נקרא <u>פשוט קשר</u>, אם לכל מסלול סגור ופשוט $\Gamma$ המוכל ב- $D$, גם הפנים של $\Gamma$ מוכל ב- $D$.

<u>הערה.</u> משפט ג'ורדן טוען שאם $\Gamma$ הוא מסלול סגור ופשוט ב: $R^2$, אזי הוא מחלק את $R^2$ לשני תחומים קשירים: אחד חסום, הפנים של $\Gamma$ והשני בלתי חסום, החוץ של $\Gamma$.

באופן ציורי, לאמר ש $D$ הוא פשוט-קשר משמ-
עותו ש: $D$ אינו מכיל חורים.

<u>ניסוח שקול.</u> אפשר לכווץ כל עקום סגור ב- $D$
לנקודה בתחום באופן רציף.

<u>משפט.</u> בתחום פשוט קשר השדה הוקטורי
$\vec{F} = (u, v)$ הוא שדה משמר אם ורק אם

$$v_x \equiv u_y.$$

<u>דוגמא.</u> עבור האינטגרל

$$\int \frac{-y\mathsf{d}x + x\mathsf{d}y}{x^2 + y^2}$$

יש לנו את השיויון $u_y \equiv v_x$ בכל $R^2 \setminus (0,0)$, שהוא לא פשוט קשר. ואכן האינטגרל על מעגל המכיל את הראשית אינו מתאפס.

תנאי לשדה משמר:

משפט. השדה $\vec{F} = (F_1, F_2)$ הוא שדה משמר בתחום $D$ אם ורק אם קיימת פונקציה $f(x,y)$ המוגדרת ב- $D$ כך ש-

$$F_1(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
$$F_2(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

במקרה זה $f(x,y)$ נקראת פונקצית הפוטנציאל של השדה $\vec{F}$.

הוכחה: (א) התנאי מספיק.

נניח שקיימת $f(x,y)$ כזו. אז

$$\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot \vec{\mathrm{d}}s = \int_a^b \left(F_1 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_2 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

כאשר

$$F_1 = F_1\left(x(t), y(t)\right)$$

$$F_2 = F_2\left(x(t), y(t)\right)$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ 0 \le t \le b \end{cases}$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) \cdot \mathrm{d}t \\
&= f(x(t), y(t))\big|_a^b \\
&= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned}
$$

כלומר, הערך תלוי רק בקצוות, ולא בבחירת המסלול בין $A$ ל- $B$.

דרך פיזיקלית לחשוב על זה היא: ערך האינט- גרל מבטא את העבודה המתבצעת ע"י השדה $\vec{F}$ לאורך המסלול, וזו שווה להפרש הפוטנציאלים בנקודות הקצה של המסלול.

<u>הערה.</u> אם $\Gamma$ אינו $C^1$ אלא מורכב ממספר סופי של קשתות חלקות, נחשב כ"א בנפרד ונסכם.

בחישוב הזה הקצוות הפנימיים מצטמצמים:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot \vec{\mathrm{d}}s &= \sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_i} \vec{F}\cdot \vec{\mathrm{d}}s \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big[f(A_i)-f(A_{i-1})\Big] \\ &= f(A_m)-f(A_0)\end{aligned}$$

(ב) <u>התנאי הכרחי</u>.

נניח שידוע ש- $\int_{A}^{B} \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}}s$ לא תלוי במסלול המחבר את $A$ אל $B$, לכל $A,B$ בתחום. אז נגדיר את הפונקציה:

$$f(x,y)\equiv \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}}s \qquad (1)$$

כאשר $(x_0, y_0)$ נקודה קבועה בתחום והאינט-
גרל ב: (1) מחושב לאורך עקום כלשהו מ:
$(x_0, y_0)$ אל $(x, y)$. עפ"י ההנחה, $f$ מוגדר היטב.

<u>תזכורת</u>: תחום הוא קבוצה קשירה.

לפי ההגדרה

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y)} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y)} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s$$

$$= f(x,y) + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y)} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}s$$

ולכן מקבלים

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y+\Delta y)}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}}s$$

נצטמצם לעיגול קטן סביב $(x,y)$. בעיגול זה אפשר לעשות את האינטגרציה לאורך הקו הישר:

$$\begin{aligned} x(t) &= x+t\cdot\Delta x \\ y(t) &= y+t\cdot\Delta y \\ ,0\leq\ & t \ \leq 1 \end{aligned}$$

ואז חישוב האינטגרל על הקטע שקצותיו הם $(x,y)$ ו: $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ הוא

$$=\int_0^1 (F_1(x+t\cdot\Delta x,y+t\cdot\Delta y)\cdot\underbrace{\Delta x}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}+$$

$$+F_2(x+t\cdot\Delta x, y+t\cdot\Delta y)\cdot\underbrace{\Delta y}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}})\ \mathrm{d}t$$

אם ניקח $\Delta y = 0$ אז נקבל

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \int_0^1 F_1(x+t\Delta x, y)\ \mathrm{d}t$$

נחסיר $F_1(x,y)=\int_0^1 F_1(x,y)\ \mathrm{d}t$:

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}-F_1(x,y)$$

$$= \int_0^1 (F_1(x+t\Delta x, y)-F_1(x,y))\ \mathrm{d}t$$

$F_1(x,y)$ רציפה במידה שווה בעיגול סגור סביב

$(x,y)$, ולכן

$$|F_1(x+t\Delta x,y)-F_1(x,y)|<\varepsilon$$

בתנאי ש- $|t\Delta x|\le|\Delta x|<\delta$. מקבלים מזה ש:

$$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}-F_1(x,y)\to 0$$

כאשר $\Delta x\to 0$.

ז"א

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=F_1(x,y)$$

ובצורה דומה מקבלים

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=F_2(x,y).$$

לכן $f(x,y)$ שהגדרנו מקיים את טענת המשפט.

<u>הערה.</u> אין סתירה בין העובדה ש-

$$\oint \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \neq 0$$

סביב $(0,0)$ לבין קיום השיויונים

$$\left(\arctan\tfrac{y}{x}\right)_x = -\tfrac{y}{x^2+y^2},$$
$$.\ \left(\arctan\tfrac{y}{x}\right)_y = \tfrac{x}{x^2+y^2}$$

לכאורה

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

מקיים את תנאי המשפט הקודם. <u>למעשה לא:</u>
הפונקציה $\arctan\dfrac{y}{x}$ אינה מוגדרת היטב ב:
$(0,0) \setminus R^2$, והיא רב-ערכית בתחום הזה.

<u>הערה.</u> במשפט האחרון לא הנחנו שהתחום הוא פשוט קשר. אין צורך בהנחה הזו, כי ההנחה: "קי-ימת $f(x,y)$ ב-$D$ כך ש:..." מהווה תחליף עבורה.

<u>הערה.</u> אם מחליפים את $(x_0,y_0)$ בהגדרת $f(x,y)$ בנקודה אחרת $(x_1,y_1)$, אז $f(x,y)$ מוחלפת ב: $f(x,y)+c$ כאשר $c$ הוא הקבוע

$$c=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_0,y_0)}\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}}s.$$

<u>תרגיל.</u> הוכח ש

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)}(2xy)\ \mathrm{d}x+\left(x^2-y^2\right)\ \mathrm{d}y$$

בלתי תלוי במסלול.

<u>הוכחה 1:</u>

$$u_y = 2x = v_x \quad \Leftarrow \quad u = 2xy\,, v = x^2 - y^2$$

בתחום פשוט הקשר $R^2$.

<u>הוכחה 2:</u> נחפש $f(x,y)$ כך שיתקיימו השיויונות הבאים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2. \tag{2}$$

מ: (1) נובע ש:

$$f(x,y) = \int 2xy \; \mathrm{d}x = x^2 y + h(y),$$

ואילו מ-(2) נובע ש:

$$x^2 - y^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + h'(y)$$
$$h'(y) = -y^2$$
$$h(y) = -\frac{y^3}{3}$$

ולכן $f(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}$ ב: $R^2$ כולו.

## דוגמא נוספת.

כוח כובד/כוח קולוני במישור:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right),$$

כאשר אם הוא כוח מושך אז יש גם סימן $(-)$.
נסמן ב: $F_1$ ו: $F_2$ את רכיבי הוקטור $\vec{F}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \\
&= x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-5/2} \cdot 2y \\
&= \frac{\partial F_2}{\partial x}
\end{aligned}$$

בכל תחום פשוט קשר השדה משמר לפי המשפט הראשון. אבל $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ אינו פשוט קשר ולכן בדיקת $(F_2)_x = (F_1)_y$ אינה עוזרת לנו. ננסה בדרך אחרת.

<u>חיפוש פוטנציאל.</u> האם יש $f(x,y)$ כך ש-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2\ ?$$

ואכן הפונקציה

$$f(x,y) = -(x^2+y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

היא כזו, כי

$$f_x = -\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot(2x) = F_1$$

וכן

$$f_y = -\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot(2y) = F_2.$$

היכן הפונקציה הזו $f(x,y)$ מוגדרת? בדיוק ב- $R^2\setminus(0,0)$. לכן, שדה זה משמר ב- $R^2\setminus(0,0)$, למרות שהתחום הזה אינו פשוט קשר.

נבדוק את טענתנו זו ונחשב את האינטגרל על מסלול המקיף את הראשית:

$$\begin{aligned}
&x = a\cos\theta \\
&y = a\sin\theta \\
&0 \le \theta \le 2\pi
\end{aligned}$$

$$\oint\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{a\cos\theta}{a^3}\underbrace{(-a\sin\theta)}_{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} + \frac{a\sin\theta}{a^3}\underbrace{(a\cos\theta)}_{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= 0$$

מדוע יש שוני כה רב ביו שני האינטגרלים:

$$I_1 = \int \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

ו:

$$?I_2 = \int \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

הסיבה היא שהפוטנציאל $f = -(x^2+y^2)^{-1/2}$ מוגדר בכל $R^2 \setminus (0,0)$, ואילו הפונקציה $f = \arctan\frac{y}{x}$ אינה מוגדרת היטב, והיא למעשה רב ערכית. חישבנו למעלה שעל מעגל המקיף את הראשית האינטגרים המתקבלים הם

$$.I_1 = 0, I_2 = 2\pi$$