

1. החלף את סדר האינטגרציה:

$$\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right] dx \quad (\text{א})$$

$$\int_0^2 \left[\int_{2x}^{1-x} f(x, y) dy \right] dx \quad (\text{ב})$$

2. עבור לקואורדינטות קוטביות באינטגרל $\iint_D f(x, y) dx dy$ וציין את גבולות האינטגרציה עבור

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\} \quad (\text{א})$$

$$D \text{ הוא התחום החסום ע"י} \quad (\text{ב})$$

$$y = 2x, \quad y = x, \quad x^2 + y^2 = 8x, \quad x^2 + y^2 = 4x$$

3. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy \right] dx \quad (\text{א})$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ כאשר } \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy \quad (\text{ב})$$

$$D \text{ הוא פנים הלימניסטיקה } (x^2 + y^2) = 4(x^2 - y^2) \text{ כאשר } \iint_D (x^2 - y^2) dx dy \quad (\text{ג})$$

$$D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \text{ כאשר } \iint_D \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \right] dx dy \quad (\text{ד})$$

$$D \text{ הוא התחום החסום ע"י } \iint_D (x+y)^3 (x-y)^3 dx dy \quad (\text{ה})$$

$$x+y=1, \quad x+y=3, \quad x-y=1, \quad x-y=-1$$

$$D \text{ הוא התחום החסום ע"י הפרבולות } \iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dx dy \quad (\text{ו})$$

$$y^2 = \frac{\pi}{2}x, \quad y^2 = \pi x, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y$$

$$D \text{ חסום ע"י ההיפרבולות } xy=1, \quad xy=2 \text{ והישרים } y=x, \quad y=3x \quad (\text{ז})$$

$$D \text{ חסום בין הקווים } \iint_D xy dx dy \quad (\text{ח})$$

$$xy=2, \quad xy=3, \quad y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=2x^2$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \text{ כאשר } \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (\text{ט})$$

4. חידה: קודחים חור עגול בגובה h דרך כדור. מה הנפח הנותר? תן פרוש גאומטרי לתוצאה.

תרגילים בנושא אינטגרלים כפולים מוכללים

5. חשב את האינטגרל או קבע את התבדורותו :

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\} \text{ כאשר } \iint_D (x+y)e^{-x-y} dx dy \quad (\text{א})$$

$$y = x + 1, x = 0, y = 0 \text{ הישרים } D \text{ כאשר } \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{y-x}} \quad (\text{ב})$$

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\} \text{ כאשר } \iint_D e^{-9x^2-4y^2} dx dy \quad (\text{ג})$$

6. בדוק האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים. אם הם מתכנסים, חשב את ערכם.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy \quad (\text{א})$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}} dx dy \quad (\text{ב})$$

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{ג})$$

$$\iint_{R^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy \quad (\text{ד})$$

$$7. \text{ עבור אילו ערכי } k \text{ מתכנס האינטגרל הבא: } \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^k} dx dy$$

8. נגדיר

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2} & 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

הוכח כי

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = 1,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = -1,$$

הסבר את התופעה (כל אינטגרל רימן קיים וסופי).

9. נגדיר

$$f(x, y) = (x-y)e^{-(x-y)^2}.$$

הוכח כי

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dy dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

הסבר את התופעה.