קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 2

תאריך הגשה: יום שני, 31/3/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

השלימו את הוכחת אי-שוויון הממוצעים: הוכיחו כי אם $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ממשיים חיוביים, אז $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}}$.

מאחר וכל המספרים חיוביים, גם $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ כולם חיוביים, ולכן מכך שהוכח בתרגול כי ממוצע חשבוני גדול או שווה לממוצע הנדסי נקבל: $\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}$. ע״י העברת אגפים (הכל חיובי ולכן כיוון אי-השוויון לא משתנה) נקבל את הדרוש.

שאלה 2:

הוכיחו כי לכל קבוצה לא ריקה וסופית של ממשיים קיים מקסימום.

באינדוקציה: עבור קבוצה בת שני איברים זה ברור, כי מבין a_1, a_2, בהכרח מתקיים $a_1 \geq a_2$ או $a_2 \geq a_1$, כלומר לקבוצה קיים חסם מלעיל שהוא איבר בקבוצה, ולכן קיים מקסימום.

לקבוצה בת $n+1$ איברים, נסתכל על n איברים מתוכה, להם יש מקסימום מהנחת האינדוקציה. לקבוצה בת שני האיברים שהיא המקסימום הנ״ל והאיבר האחרון בקבוצה המקורית יש מקסימום, מהנחת המקרה עבור $n=2$, ומקסימום זה הוא בהכרח חסם מלעיל של כל $n+1$ האיברים, והוא גם איבר בקבוצה, ולכן הוא המקסימום של כל $n+1$ האיברים.

שאלה 3:

יהיו A, B קבוצות לא ריקות של ממשיים החסומות מלמעלה.

א. נניח שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש- $a + \varepsilon < b$. הוכיחו כי $supA < supB$.

לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq supA$, לכל $b \in B$ מתקיים $b \leq supB$. מהגדרת סופרמום, עבור ה- ε הנתון קיים $a \in A$ כך ש- $a + \varepsilon > supA$, ועבור a זה קיים $b \in B$ כך ש- $a + \varepsilon < b$. בסה״כ נקבל $supA < a + \varepsilon < b \leq supB$.

ב. נניח כעת שלכל $A \in a$ קיימים $0 < \varepsilon$ ו- $B \in b$ כך ש- $a + \varepsilon < b$. הוכיחו או הפריכו: $supA < supB$.

הטענה לא נכונה, דוגמא נגדית: $A = (0,1), B = (0,1]$. (לכל $a \in A$ נבחר $\varepsilon = \frac{1-a}{2}$ ו- $b = 1$).

שאלה 4:

יהיו $A_1 , A_2 , \ldots$ קבוצות לא ריקות וחסומות של ממשיים, ותהי A האיחוד של הקבוצות הנ״ל. נתון ש- A חסומה, ונתונים גם הערכים $\sup A_n$, $\inf A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. בטאו את $\inf A$ ואת $\sup A$ בעזרת ערכים אלו. הוכיחו את טענותיכם.

$\{infA = \inf\{infA_n\}$, $supA = \sup \{\sup a_n\}$. הוכחה לדוגמא עבור הסופרמום: ראשית נשים לב כי הקבוצה $\{supA_n\}$ בהכרח חסומה, כי אם לא אז הקבוצה A לא חסומה, ולכן $\sup \{supA_n\}$ קיים. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת סופרמום, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $supA_N + \frac{\varepsilon}{2} > \sup \{supA_n\}$, ושוב מההגדרה קיים $a \in A_N$ כך ש- $a + \frac{\varepsilon}{2} > supA_N$, לכן מתקיים: $a + \varepsilon > \sup \{supA_n\}$, כנדרש. באופן דומה ניתן להוכיח עבור האינפימום.

שאלה 5:

תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלמטה של ממשיים. הראו כי קיימת סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתוך A (כלומר, $a_n \in A$ לכל $n \in \mathbb{N}$) כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$.

יהי $\varepsilon > 0$. A לא ריקה וחסומה ולכן קיים $\inf A$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_n = \left\{a \in A : a - \frac{1}{n} < \inf A\right\}$. נשים לב כי $A_n \neq \emptyset$ לכל n, מהגדרת אינפימום. נשתמש באקסיומת הבחירה, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $a_n \in A_n$. קיים N כך ש- $\frac{1}{N} < \varepsilon$, ואז לכל $n > N$ נקבל מהגדרת A_n: $\inf A - \varepsilon < \inf A \leq a < \inf A + \varepsilon$, כלומר לכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - \inf A| < \varepsilon$, כלומר $a_n \to \inf A$.

שאלה 6:

הוכיחו ע״פ הגדרה:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3-6n+12}{4n^3-4n^2+4n-4} = \frac{7}{4}$.

יהי $\varepsilon > 0$. מתקיים: $\left|\frac{7n^3-6n+12}{4n^3-4n^2+4n-4} - \frac{7}{4}\right| = \left|\frac{7n^2-13n+19}{4n^3-4n^2+4n-4}\right|$. ניתן לחשב כי המונה חיובי תמיד, והמכנה חיובי לכל $n > 1$ (יש לשים לב כי 1 מהווה שורש של הפולינום במכנה, ולפולינום הריבועי שנותר אין שורשים). לכן ל- $n \geq 2$ מתקיים: $\left|\frac{7n^2-13n+19}{4n^3-4n^2+4n-4}\right| = \frac{7n^2-13n+19}{4n^3-4n^2+4n-4} \leq \frac{7n^2+19n^2}{4n^3-4n^2-4n^2} < \frac{28n^2}{4n^2(n-2)} <$

$\frac{7}{n-2}$ (לאי-השוויון האחרון יש להניח כי $n \geq 3$ כדי שהמכנה לא יתאפס). לכן, נבחר $N = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] + 2 + 1 = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] + 3$,

ואז לכל $N < n$ מתקיים $\frac{7}{n-2} < \frac{7}{N-2} < \frac{7}{\frac{7}{\varepsilon}} = \varepsilon$. (נשים לב כי אם $n > N$ אז בפרט $n \geq 3$).

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)+\sin(n)+1}{n^{7/4}} = 0$.

יהי $\varepsilon > 0$. מתקיים: $\left|\frac{\arctan(n)+\sin(n)+1}{n^{\frac{7}{4}}}\right| < \frac{\frac{\pi}{2}+1+1}{n^{\frac{7}{4}}} < \frac{4}{n^{\frac{7}{4}}}$. נבחר $N = \left[\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{7}}\right] + 1$, אז לכל $n > N$ מתקיים $\frac{4}{n^{\frac{7}{4}}} < \varepsilon$.

ג. לא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\right)$.

נראה כי לכל $L \in \mathbb{R}$, L אינו הגבול של הסדרה. יהי $L \in \mathbb{R}$. נשים לב כי איברי הסדרה מקבלים ערכים בין 0 ל-1, כאשר 0 מתקבל אינסוף פעמים והסדרה מתקרבת ל-1 כרצוננו עבור n גדול מספיק. לכן נבחר $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. יהי $N \in \mathbb{N}$. עבור $n_1 = 2N^2 > N$ מתקיים $a_{n_1} = 0$. אם $\left|a_{n_1} - L\right| \geq \frac{1}{4}$, כלומר $|L| \geq \frac{1}{4}$, סיימנו. אחרת $|L| < \frac{1}{4}$. נסתכל על $n_2 = 2(N+1)^2 - 1 > N$. נשים לב כי $\sqrt{\frac{n_2}{2}} = \sqrt{(N+1)^2 - \frac{1}{2}}$ מקיים:

$$N + 1 = \sqrt{(N+1)^2} > \sqrt{(N+1)^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{N^2 + 2N + \frac{1}{2}} > \sqrt{N^2} \geq N,$$

ולכן $\left[\sqrt{\frac{n_2}{2}}\right] = N$. לכן:

$$a_{n_2} = \sqrt{N^2 + 2N + \frac{1}{2}} - N = \sqrt{N^2 + 2N + \frac{1}{2}} - \sqrt{N^2}$$

$$= \frac{2N + \frac{1}{2}}{\sqrt{N^2 + 2N + \frac{1}{2}} + \sqrt{N^2}} > \frac{2N}{\sqrt{(N+1)^2} + \sqrt{N^2}} = \frac{2N}{2N+1} = 1 - \frac{1}{2N+1} \geq \frac{2}{3}$$

ולכן:

$$\left|a_{n_2} - L\right| = \left|\left(a_{n_2} - a_{n_1}\right) - \left(L - a_{n_1}\right)\right| \geq \left|a_{n_2} - a_{n_1}\right| - \left|L - a_{n_1}\right| = \left|a_{n_2}\right| - |L| \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} > \varepsilon_0.$$