תורת ההסתברות 104222 ־ תרגיל 6

15 בינואר 2017

יש להגיש את התרגיל עד יום חמישי ה־ 26 לינואר.

1. יהיו $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים, כל אחד עם התפלגות $\mathrm{Ber}(p)$. לכל $1 \le k \le n$ נגדיר $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. חשבו את $\mathbf{E}[S_k | S_n]$. (הערה: התשובה צריכה להיות במונחי S_n, n ו־ k).

2. יהיו X ו־ Y משתנים מקריים בדידים כך שמתקיים $\mathbf{E}[Y|X=x] = \mathbf{E}[Y]$ לכל $x \in \mathbb{R}$ בתומך ש־ X.

   (א) הוכיחו כי X ו־ Y בלתי מתואמים, כלומר $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

   (ב) הוכיחו או הפריכו את הטענה כי X ו־ Y בלתי תלויים.

3. הראו כי אם $(A_n)_{n \ge 1}$ סדרת מאורעות, אז $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ ו־ $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$.

4.

   (א) הראו כי $X_n \overset{a.s.}{\to} X$ אם ורק אם $\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| \ge \varepsilon) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

   (ב) השתמשו בסעיף א' ובלמה ל Fatou על מנת להראות כי התכנסות כמעט תמיד גוררת התכנסות בהסתברות.

5. עבור שני משתנים מקריים נגדיר

$$\delta(X,Y) = \mathbf{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right].$$

   תהי (X_n) סדרת משתנים מקריים. הראו כי X_n מתכנסים בהסתברות ל־ X אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} \delta(X, X_n) = 0$.

6. השתמשו במשפט הגבול המרכזי על מנת לחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\frac{5}{6}n} \binom{n}{j} \left(\frac{5}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^{n-j}.$$

7. השתמשו במשפט הגבול המרכזי על מנת להעריך את ההסתברויות הבאות:

   (א) מטילים מטבע הוגן עד שמתקבל עץ 100 פעם. מהי ההסתברות שלשם כך יידרשו לפחות 226 הטלות.

   (ב) מועמדים A ו־ B רצים לראשות העיר. אם 50% מהמצביעים תומכים במועמד א', מהי ההסתברות שבדגימה מקרית של 400 איש, לפחות 55% מהם יתמכו במועמד ב'?