פתרון
לוגיקה מתמטית – תרגיל 1

1. א. לכל הפחות מופיע פסוק אחד. דוגמה: $\neg\ldots\neg P$ כאשר סימן השלילה מופיע **n** פעמים.

לכל היותר: 2^n פעמים. דוגמה עבור **n=2**: $((P\wedge P)\wedge(P\wedge P))$

ב. לכל הפחות **n** קשרים. לכל היותר 2^n-1 קשרים.

2. א.

p	q	$q\vee p$	$p\to(q\vee p)$
T	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

ב.

p	q	$p\wedge\neg q$	$(p\wedge\neg q)\to\neg p$
T	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

ג.

p	q	r	$(p\vee(q\wedge r))$	$(p\vee q)$	$(p\vee(q\wedge r))\equiv(p\vee q)$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**

3. מכיוון ש- $A\to B$ טאוטולוגיה אזי לפי טבלת האמת של הקשר $\to$ מקבלים שכל האפשרויות עבור **A** ו-**B** והשמה כלשהי הן: **T T** או **F T** או **F F**.
מכיוון שיודעים ש-**A** טאוטולוגיה, מצטמצמות האפשרויות לאפשרות יחידה **T T**. על כן **B** טאוטולוגיה.

4. הגדרה רקורסיבית:
אם **A** פסוק אטומי אזי $A^*=\neg A$.
אם $A=\neg B$ אזי $A^*=\neg B^*$.
אם $A=B_1\wedge B_2$ אזי $A^*=B_1^*\vee B_2^*$.
אם $A=B_1\vee B_2$ אזי $A^*=B_1^*\wedge B_2^*$.

הוכחה באינדוקציה כי A^* שקול ל-$\neg A$:
בסיס: **A** פסוק אטומי. לפי הגדרה $A^*=\neg A$ ולכן הטענה נכונה.

צעד האינדוקציה:

- $A=\neg B$.

(1) $\neg A$ שקול ל-B (נובע מהמקרה)
(2) B^* שקול ל-$\neg B$ (הנחת האינדוקציה)
(3) $\neg B^*$ שקול ל-B (נובע מ-2)
(4) $A^* = \neg B^*$ (ההגדרה הרקורסיבית של A^*)
(5) A^* שקול ל-B (נובע מ-3 ו-4)
(6) A^* שקול ל-$\neg A$ (נובע מ-5 ו-1)

- $A=B_1\wedge B_2$.

(1) $\neg A$ שקול ל-$\neg B_1\vee\neg B_2$ (נובע מחוקי דה מורגן והמקרה)
(2) $B_{1,2}^*$ שקול ל-$\neg B_{1,2}$ (הנחת האינדוקציה)
(3) $\neg A$ שקול ל-$B_1^*\vee B_2^*$ (נובע מ-1 ו-2)
(4) $A^* = B_1^*\vee B_2^*$ (ההגדרה הרקורסיבית של A^*)
(5) A^* שקול ל-$\neg A$ (נובע מ-3 ו-4)

- $A=B_1\vee B_2$.

(1) $\neg A$ שקול ל-$\neg B_1\wedge\neg B_2$ (נובע מחוקי דה מורגן והמקרה)
(2) $B_{1,2}^*$ שקול ל-$\neg B_{1,2}$ (הנחת האינדוקציה)
(3) $\neg A$ שקול ל-$B_1^*\wedge B_2^*$ (נובע מ-1 ו-2)
(4) $A^* = B_1^*\wedge B_2^*$ (ההגדרה הרקורסיבית של A^*)
(5) A^* שקול ל-$\neg A$ (נובע מ-3 ו-4)

5. ראשית נשים לב כי הקשר $\equiv$ הוא קומוטטיבי ואסוציאטיבי. כמו כן נשים לב שלכל פסוק A ופסוק אטומי p, A שקול ל-$A\equiv p\equiv p$.

כיוון אחד: נניח שכל פסוק אטומי מופיע ב-A מספר זוגי של פעמים. לפי האמור לעיל, אפשר "לצמצם" כל הפסוקים האטומיים בפסוק בהדרגה תוך שמירת שקילות עד שיישאר פסוק מהצורה $q\equiv q$ שהוא טאוטולוגיה. מכאן שגם A טאוטולוגיה.

כיוון שני: נניח שבפסוק A יש פסוק אטומי, נסמן אותו p, שמופיע בו מספר אי זוגי של פעמים. על ידי שינוי סדר של פסוקים אטומיים בפסוק A וצמצום של זוגות של הפסוק p, נקבל פסוק C שקול ל-A מהצורה $B\equiv p$ כאשר p לא מופיע ב-B. עכשיו כשניקח שתי השמות שמתלכדות על כל הפסוקים האטומיים פרט ל-p, אזי ערך האמת של B יהיה זהה בשתי ההשמות. אך מכיוון של-p יהיו ערכי האמת שונים, גם ל-C יהיו ערכי האמת שונים. מכאן ש-A לא טאוטולוגיה.