פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - פתרון חלקי לגליון תרגילים מס' 6

3. צ"ל: קבוצה $N \subset \mathbb{R}$ בעלת מידה אפס כך ש- $N + N = \mathbb{R}$.

פתרון: תהי K קבוצת קנטור. כידוע, $m(K) = 0$, ולכן גם $N = \mathbb{Z} + K$ היא בעלת מידה אפס - כאיחוד בן-מנייה של הקבוצות $\{m + K\}_{m\in\mathbb{Z}}$, שמידתן אפס. נראה ש- $K + K = [0, 2]$: עבור $x \in [0, 2]$ ועבור $n \in \mathbb{N}$ תהי $x_n \in \{0, 1, 2\}$ הספרה ה-n-ית אחרי הנקודה בהצגה התרינארית של $x/2$, כלומר: $\frac{x}{2} = 0.x_1x_2x_3\ldots$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $y_n, z_n \in \{0, 1, 2\}$ באופן הבא:

$$
\begin{array}{lcll}
x_n = 0 & \Rightarrow & y_n = 0 & z_n = 0 \\
x_n = 1 & \Rightarrow & y_n = 0 & z_n = 2 \\
x_n = 2 & \Rightarrow & y_n = 2 & z_n = 2
\end{array}
$$

ויהיו z,y המספרים התרינאריים ש- z_n,y_n, בהתאמה, היא הספרה ה-n-ית אחרי הנקודה שלהם - $y = 0.y_1y_2y_3\ldots$, $z = 0.z_1z_2z_3\ldots$. לא קשה לוודא ש- $\frac{y+z}{2} = \frac{x}{2}$ וש- $y, z \in K$. קיבלנו, אם-כן, ש- $K + K = [0, 2]$ ולכן $N + N \supset K + \{2m + K\}_{m\in\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

4. צ"ל: עצמת אוסף הקבוצות שאינן מדידות לבג ב- $\mathbb{R}^n$ היא $2^{\mathcal{C}}$.

הוכחה: ניקח קבוצה לא מדידה $A \subset [2, 3]$ כלשהי. מדוע יש כזאת? - (א) כי אפשר לחזור על הבנייה של Vitali של הקבוצה הלא מדידה כך שהקבוצה תהיה מוכלת בקטע $[2, 3]$; (ב) שאלה 1.א בגליון 7 - אם E היא קבוצה לא מדידה כלשהי אז קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $[m, m + 1) \cap E$ לא מדידה, וכיוון שהזזה וכפל בסקלר של קבוצה ב- $\mathbb{R}$ לא משנה את מדידותה, כל קטע מכיל תת-קבוצה לא מדידה. הראנו שיש A כנ"ל. כעת, אם K היא קבוצת קנטור ו- $\mathcal{P}(K)$ קבוצת החזקה שלה, אז האוסף $\{A \cup B\}_{B\in\mathcal{P}(K)}$ הוא אוסף בן-מנייה של קבוצות לא מדידות (מדוע?).

5. נתון: פונקציה מדידה $f : X \to \mathbb{R}$ חיובית כב"מ המוגדרת על מרחב מידה סופי.

(**א**) צ"ל: לכל $A \in \mathcal{M}$ עם $\mu(A) > 0$ מתקיים $\int_A f\,d\mu > 0$.

פתרון: הקבוצות $A_n = \{x \in A : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ הן מדידות ומקיימות $A_n \nearrow A$ ולכן (לפי סדרה מתרחבת) - $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$. לכן יש $n \in \mathbb{N}$ עבורו $\mu(A_n) \geq \frac{1}{2}\mu(A) > 0$, ואז:

$$
\int_A f\,d\mu \underset{f>0}{\geq} \int_{A_n} f\,d\mu \;\geq\; \frac{1}{n}\mu(A_n) \;\geq\; \frac{1}{2n}\mu(A) > 0 \quad .
$$

(**ב**) צ"ל: אם הסדרה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ מקיימת שאם $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f\,d\mu = 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0$.

פתרון: הזכרו נא בשאלות 5 ו-6 בגליון 3. שימו לב שבסעיף הקודם הוכחנו שהמידה $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ המוגדרת על $(X, \mathcal{M})$ מקיימת שאם $\nu(A) = 0$ עבור $A \in \mathcal{M}$ אז גם $\mu(A) = 0$, כלומר, ע"פ המינוח של שאלה 3.6, המידה (הסופית והחיובית) μ רציפה בהחלט ביחס ל- ν. המינוח לא כל כך חשוב, מה שחשוב זה ששם הוכחנו שהתנאי הזה שקול לכך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\nu(A) < \delta$ אז $\mu(A) < \varepsilon$. לא קשה לראות שמזה האחרון נובע התנאי אותו צריך להוכיח.

6. צ"ל: כל אחת מהקבוצות הבאות מדידה לבג ולחשב את מידת לבג שלה.

(**א**) A = אוסף הנקודות ב- $[0,1]$ שהספרה 6 לא מופיעה בפיתוח העשרוני שלהן.
לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן ב- A_n את אוסף הנקודות ב- $[0,1]$ שהספרה 6 לא מופיעה בפיתוח העשרוני שלהן במקום ה-n-י. כל A_n מדידה - כאיחוד סופי של קטעים - ומידתה $\frac{9}{10}$. יתר-על-כן, לא קשה להשתכנע (אם כי אולי קצת מייגע לנמק בצורה פורמלית) שלכל $k \in \mathbb{N}$ קבוצות כאלה $A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}$ מתקיים $m\left(\bigcap_{i=1}^k A_{n_i}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^k$. כיוון שהסדרה $\bigcap_{n=1}^k A_n$ היא סדרה יורדת ל- A ומרחב המידה הוא סופי, נקבל: $m(A) = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcap_{n=1}^k A_n\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k = 0$.

(**ב**) B = הנקודות ב- $[0,1]$ שהספרה 6 מופיעה בפיתוח העשרוני שלהן מספר סופי של פעמים.
בסימוני הסעיף הקודם, לכל $k \in \mathbb{N}$ הקבוצה $B_k = \bigcap_{n>k} A_n$ היא אוסף הנקודות בהן 6 לא מופיע אחרי המקום ה-k-י אחרי הנקודה. משיקולים זהים, $m(B_k) = 0$. כיוון ש- $B_k \nearrow B$, $m(B) = 0$.

(**ג**) C = הנקודות ב- $[0,1]$ שבהצגתן העשרונית הספרה 6 מופיעה לפני הספרה 3.
שימו לב שמשיקולי סימטריה די קל להשתכנע שמידת C היא $\frac{1}{2}$. אני חושב שהנימוק המלא של שיקולי הסימטריה הוא קצת קשה. הנה נימוק נוסף: עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את C_n להיות אוסף הנקודות שהספרה ה-n-ית שלהן היא 6 והספרות $1, \ldots, (n-1)$ כולן שונות מ- 6 ו- 3. אז הקבוצות C_n הן מדידות (כאיחוד סופי של קטעים), זרות בזוגות, $\bigcup_{n=1}^\infty C_n = C$, ו- $m(C_n) = \frac{1}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^{n-1}$. לכן:

$$m(C) = \sum_{n=1}^\infty m(C_n) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{10}\left(\frac{8}{10}\right)^{n-1} = \text{(סכום של סדרה הנדסית)} = \frac{1}{2}$$

7. נתון: $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג.

(**א**) צ"ל: הפונקציה $f(x) = m\big(A \cap (-\infty, x]\big)$ היא רציפה.
הוכחה: לכל $a < b$ מתקיים: $f(a) - f(b) = m(A \cap (a,b]) \le m((a,b]) = b - a$ - כלומר, הפונקציה מקיימת תנאי ליפשיץ (עם קבוע 1) ולכן היא רציפה.

(**ב**) צ"ל: עבור כל $0 \le \alpha \le m(A)$ יש $B \subset A$ מדידה לבג עם $m(B) = \alpha$.
נשים לב תחילה שניתן להניח, בה"כ, ש- $m(A) < \infty$ (אחרת - נמצא $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\alpha \le m([-n,n] \cap A) < \infty$ (מדוע יש כזה) ונחליף את A ב- $([-n,n] \cap A)$). הפונקציה $f(x)$ מהסעיף הקודם היא מונוטונית לא יורדת ומקיימת (סדרה מתרחבת) $\lim_{n\to\infty} f(n) = m(A)$ ולכן $\lim_{x\to\infty} f(x) = m(A)$ וכן (סדרה מתכווצת, המידה סופית) $\lim_{n\to\infty} f(-n) = 0$ ולכן $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. ע"פ משפט ערך הביניים המוכלל, הזכור לטוב מאינפי 1, כיוון ש- f רציפה, יש $x \in \mathbb{R}$ עבורו $m(A \cap (-\infty, x]) = f(x) = \alpha$. קיבלנו מש"ל עם $B = A \cap (-\infty, x]$.