06/06/2016

קומבינטוריקה – תרגול #12

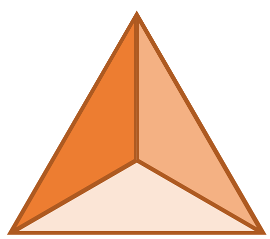
גרפים מישוריים

משפט: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ – מס' הקדקודים

תרגיל:

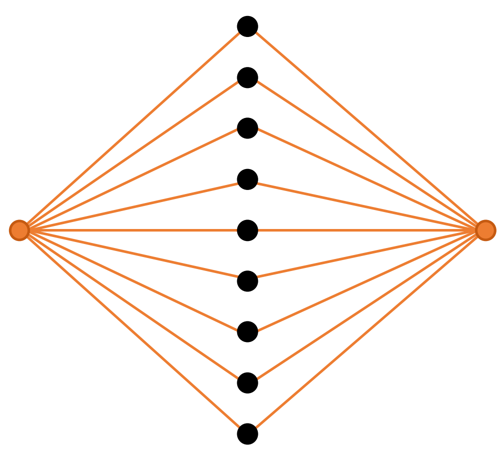
(א) מבלי להשתמש במשפט ארבעת הצבעים הוכיחו שכל גרף מישורי שהציור המישורי שלו כל הפאות ן משולשים ניתן לצבוע בארבעה צבעים.
(ב) מצאו דוגמא בה צריכים בדיוק ארבעה צבעים.

פתרון: עבור **(א)**. אם G הוא משולש, אז מספיקים שני צבעים לצביעת הפאות. אחרת, נעבור לגרף שמתאים לגרף זה כאשר לכל פיאה נתאים קדקוד ושני קדקודים שמחוברים אם לפאות המתאימות יש צלע משותפת G'. הערכיות המקס' בגרף היא 3. $\chi(G) \leq \Delta(G') + 1 = 4$, וצביעה חוקית של קדקודים ב-G' היא צביעה חוקית של פאות ב-G. ציור ל-**(ב)**:



תרגיל: הוכיחו ש-$K_{2,r}$ מישורי לכל r.

פתרון: קיים ציור מישורי, ולכן הגרף מישורי.



משפט אוילר: בציור של גרף מישורי $n - m + f = 2$, כאשר $n = |V|,\ m = |E|,\ f = |F|$.

טענה: בגרף מישורי $|E| \leq 3|V| - 6$.

הגדרה: ציור מישורי של גרף נקרא שילוש אם כל הפאות הן משולשים.

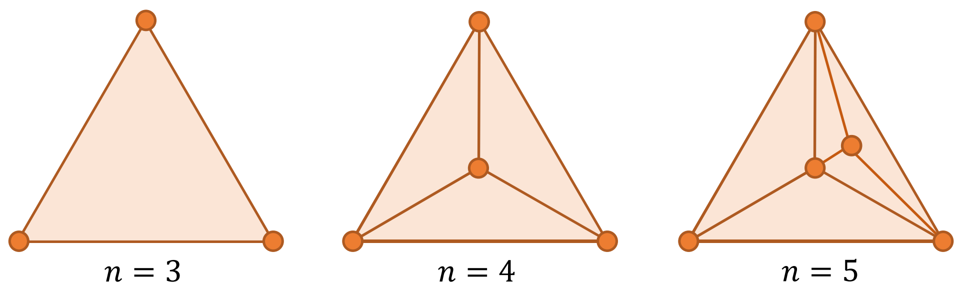
תרגיל:

(א) הוכיחו של-G יש שילוש עם n קדקודים אמ"מ $|E| = 3n - 6$ כאשר $n \geq 3$.
(ב) הראו כי לכל $n \geq 3$ קיים שילוש על n קדקודים.

פתרון: עבור **(א)**, מההוכחה של האי-שוויון:

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(F_i) \geq \frac{3}{2}f$$

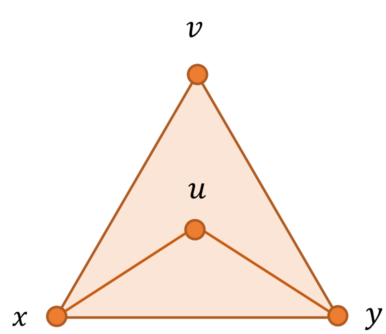
כאשר שוויון יתקבל אמ"מ $d(F_i) = 3$. עבור **(ב)**, נתחיל בלהתסכל על המקרים הבסיסיים:



ההוכחה האופן כללי היא באינדוקציה. נניח שיש שילוש עבור n, ונבנה שילוש עבור $n + 1$. נוסיף קדקוד בתוך אחת הפאות ונחבר אותו לקדקודי הפאה. עדין נשמרת הנוסחא $n - m + f = 2$ כי נוסף קדקוד, שלוש צלעות ושתי פאות.

תרגיל: הוכיחו שאם G מישורי קשיר שמקיים $|E| = 3|V| - 6$ וקיים $v \in V$ כך ש-$\deg(v) = 2$, אז G משולש.

פתרון: כל פאה היא משולש.



כל פאה היא משולש ולכן $\{x, y\} \in E$. אם נוסיף קדקוד נוסף u, אז כדי לשמור על כך שכל פאה הוא משולש צריכים לחבר אותו ל-x, y, אבל אז הפאה v, x, y, u לא תהיה משולש, בסתירה.

מסקנה: אם G גרף מישורי קשיר ו-$|E| = 3|V| - 6$ ו-$|V| \geq 3$, אז $d(v) \geq 3$ לכל $v \in V$.

תרגיל: הוכיחו שאם G מישורי קשיר, $|E| = 3|V| - 6$, $|V| \geq 4$, אז יש לפחות 4 קדקודים v_1, v_2, v_3, v_4 כך ש-$\deg(v_i) \in \{3,4,5\}$ לכל i מתאים.

פתרון: נסמן V_k בתור כל הקדקודים מהערכיות k. צ"ל ש-$|V_3|+|V_4|+|V_5| \geq 4$. מהמסקנה ידוע ש-$|V_0|=|V_1|=$ $|V_2|=0$. מתקיים:

$$|V|=\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|$$

$$2(3|V|-6)=2|E|=\sum_{i=1}^{\infty}\deg(v_i)=\sum_{k=1}^{\infty}k|V_k|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}6|V_k|-12=\sum_{k=1}^{\infty}k|V_k|$$

$$\sum_{k=1}^{5}(6-k)|V_k|=\sum_{k=6}^{\infty}\underbrace{(k-6)}_{\geq 0}|V_k|+12$$

$$3|V_3|+2|V_4|+|V_5|\geq 12$$

$$3(|V_3|+|V_4|+|V_5|)\geq 12$$

$$|V_3|+|V_4|+|V_5|\geq 4$$

תרגיל: יהי G גרף מישורי קשיר כך ש-$\deg(v)=3$ לכל $v\in V$, וכל הפאות הן משושים ומחומשים. הוכיחו כי מס' המחומשים הוא מס' קבוע. מהו?

פתרון: $2|E|=\sum_{v\in V}\deg(v)=3|V|$, ולכן $|V|=\frac{2}{3}|E|$. מכאן:

$$2|E|=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}(F_i)=5k+6(f-k)$$

$$2|E|=6f-k$$

לפי נוסחת אוילר:

$$\frac{2}{3}|E|-|E|+f=2$$

$$3f-6=|E|$$

$$6f-12=2|E|=6f-k$$

$$k=12$$

הערה: חפשו בוויקיפדיה את ה-*Buckyball* ע"ש *Buckminster Fuller*.

תרגיל: הוכיחו שכל גרף מישורי על n קדקודים יש קב' בת $\frac{n}{4}$ קדקודים שאף שניים מהם לא מחוברים בצלע.

פתרון: על פי משפט ארבעת הצבעים, הגרף הוא 4-צביע. נצבע בארבעה צבעים וקב' הקדקודים מתחלק ל-4 קב' על פי הצבעים. בכל קב' אין צלעות, וגודל ממוצע של קב' הוא $\frac{n}{4}$ ולכן קיימת קב' שגודלה הוא לפחות $\frac{n}{4}$.