תרגיל בית 3 ־ חשבון אינפיניטיסמלי II
טורים מספריים
הגשה עד יום רביעי ה 7.5, בשעה 3:14 בצהריים

תרגיל 1:

בדקו התכנסות עבור כל אחד מהטורים הבאים:

1. $\sum_1^\infty \frac{\sqrt{5n^3+1}\left(e^{1/n}-1\right)}{n\cdot\ln^2(n^5+2n)\sin\left(\frac{n+1}{n}\right)}$.
2. $\sum_1^\infty \frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}{n^n}$.
3. $\sum_2^\infty \left[\frac{1}{n\ln n\log_2 n} - \ln\left(\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}\right)\right]$

מצאו עבור אלו קבועים α, p, q יש התכנסות.

1. $\alpha > 0$, $\sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
2. $\sum_1^\infty \frac{1}{(n^p+n)^q}$

תרגיל 2:

1. מצאו דוגמא לפונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש $\sum_1^\infty f(i)$ מתבדר ו $\int_0^\infty f(x)\mathrm{dx}$ מתכנס.
2. מצאו דוגמא לפונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש $\sum_1^\infty f(i)$ מתכנס ו $\int_0^\infty f(x)\mathrm{dx}$ מתבדר.

תרגיל 3:

1. תהא $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה במידה שווה כך ש $\int_0^\infty f(t)\mathrm{dt}$ קיים וסופי. הראו ש $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
2. (לא להגשה) הראו שקיימת פונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה, חיובית לא חסומה כך ש $\int_0^\infty f(t)\mathrm{dt}$ קיים וסופי. בפרט הראו שלא קיים הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. (רמז ־ כדאי להסביר במילים איך בונים את הפונקציה הזאת, ולא לחפש פונקציה אלמנטרית שמקיימת את התכונה הנ"ל).

תרגיל 4:

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים בסביבת האפס. יהא $0 < k \in \mathbb{N}$ כך ש $\sum_1^\infty f\left(\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right)$ מתכנס. הראו ש $f^{(m)}(0) = 0$ לכל $0 \le m \le k$ (כאשר $f^{(m)}$ היא הנגזרת ה m־ית ו $f^{(0)}(x) = f(x)$).

תרגיל 5:

תהא (a_i) סדרה כלשהי ונניח שאחרי השמת סוגריים בצורה כלשהי, הטור $\sum_1^\infty a_i$ מתכנס. בצורה יותר פורמלית, תהא i_j סדרת טבעיים מונוטונית עולה ממש לאינסוף כך ש $i_1 = 0$ ונסמן

$$A_j = a_{i_j+1} + a_{i_j+2} + a_{i_j+3} + \cdots + a_{i_{j+1}} = \sum_{k=i_j+1}^{i_{j+1}} a_k$$

אז ההנחה היא ש $\sum_j A_j$ מתכנס. למשל, עבור $i_1 = 0, i_2 = 3, i_3 = 4, i_4 = 6, ...$ נקבל את ה"טור"

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots$$

כלומר i_j מסמן את האינקס האחרון המופיע בתוך הסוגריים ה j (קודם מחשבים את הסכום של כל סוגריים ואז בודקים האם הטור מתכנס).

הראו שאם קיים N כך שכל סוגריים מכילים לכל היותר N מחוברים ו $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$ אז הטור $\sum_1^\infty a_i$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum_1^\infty A_j$ מתכנס. (לא להגשה - הראו שלא ניתן לוותר על התנאי הזה).

תרגיל 6:

1. (לא להגשה) תהא $f(x) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ פונקציה מונוטונית יורדת ונסמן

$$.F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(x)\mathrm{dx}$$

הראו ש $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$ קיים והוא חסום ע"י $.0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} F(n) \leq f(0) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

2. נסמן $.H(n) = \sum_1^n \frac{1}{k}$ לפי הסעיף הקודם קיים הגבול

$$.\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(H(n) - \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{dx}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(H(n) - \ln(n+1)\right)$$

קבוע זה נקרא קבוע אוילר. מצאו קירוב ל γ עם שגיאה של לכל היותר $.\frac{1}{10}$

3. חשבו את הסכום של הטור

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{7} - \cdots$$

תרגיל 7 (לא להגשה):

1. תהא (a_n) סדרה חיובית ונניח ש $\sum_1^\infty a_i = \infty$ ונסמן $.S_n = \sum_{i=1}^n a_i$
תהא $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ פונקציה מונוטונית עולה כך ש $\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\mathrm{dx}$ מתבדרת. הראו ש $\sum_1^\infty \frac{a_{i+1}}{f(S_i)}$ זה טור מתבדר.

2. הראו שלכל סדרה חיובית (a_n) כך ש $\sum_1^\infty a_n = \infty$ קיימת סדרה (b_n) כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ ועדיין $.\sum_1^\infty b_n = \infty$

3. הראו שלכל סדרה חיובית (a_n) כך ש $\sum_1^\infty a_n < \infty$ קיימת סדרה (b_n) כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$ ועדיין $.\sum_1^\infty b_n < \infty$