written by Dani Movso

4. הנגזרת:

- [illegible]

אם קיים הגבול: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ או: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

בעיות שהביאו למושג הנגזרת: 1. מהירות רגעית 2. שיפוע המשיק בנק' a.
משוואת המשיק: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

- גזירות מימין: f מוגדרת ב- $[a, a+r)$: $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- גזירות משמאל: f מוגדרת ב- $(a-r, a]$: $f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

הערה: אם f גזירה ב- a $\Leftarrow$ f גזירה מימין ומשמאל.
אם f גזירה מימין ומשמאל $\not\Rightarrow$ f גזירה (דג': $|x|$ בנק' 0).

- נגזרות שימושיות וחשובות להכיר: (הוכחה פשוט לפי הגדרת הנגזרת)

1. עבור n טבעי: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
2. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
3. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
4. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
5. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
6. $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
7. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a \Rightarrow [a^{f(x)}]' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

- משפט: f גזירה בנק' a $\Leftarrow$ f רציפה בנק' a.
הוכחה: צ"ל: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\Leftarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$
f גזירה ב- a ולכן:

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right)(x-a) \underset{\text{אריתמטיקה}}{=} f'(a) \cdot 0 = 0$$

- אריתמטיקה של נגזרות: f, g גזירות בנק' a.

1. הפונקציה αf גזירה בנק' a: $(\alpha f)'(a) = \alpha \cdot f'(a)$
2. $f+g$ גזירה בנק' a: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(1, 2 – הוכחה לפי אריתמטיקה של גבולות)

3. $f \cdot g$ גזירה בנק' a: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
הוכחה: להשתמש בהגדרת הנגזרת וגם להוסיף ולהחסיר $f(x)g(a)$
$\Leftarrow$ לפי אריתמטיקה והגזירות של הפונקציות עצמן בנק' a.
4. אם $g(a) \neq 0$ אז f/g גזירה בנק' a: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$
הוכחה: להשתמש בהגדרת הנגזרת וגם להוסיף ולהחסיר $f(a)g(a)$
$\Leftarrow$ לפי אריתמטיקה והגזירות של הפונקציות עצמן בנק' a.

- כלל השרשרת: f גזירה ב- a ו- g גזירה ב- $b = f(a)$. אז $g \circ f$ גזירה בנק' a ומתקיים: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$
הוכחה: בעזרת היינה, מראים כי לכל סדרה $a \neq x_n \to a$ מתקיים:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \right) \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)}_{f(x_n) \neq f(a) \text{ נכון עבור מקרים בהם }} = g'(f(a)) f'(a)$$

$\Leftarrow$ מחלקים את ההוכחה למקרים: ① $f(x_n) \neq f(a)$ $\Leftarrow$ מתקיים עבור n מספיק גדול
וגם פשוט לפי הגזירות של f ו- g.
② $f(x_n) = f(a)$ $\Leftarrow$ 2 תתי סדרות: $x_{n_k} = f(a)$ לכל k $\Leftarrow$ נהיות 0 ולכן מתקיים
$x_{m_k} \neq f(a)$ לכל k $\Leftarrow$ לפי מקרה ① וגם סיימנו.

- **נגזרת של פונקציה הפוכה**: אם f חח"ע ורציפה בסביבה של a, גזירה בנק' a ו- $f'(a)\neq 0$. אז f^{-1} גזירה בנקודה $b=f(a)$ ומתקיים: $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$

הוכחה: $x\neq b$ בסביבה מנוקבת של b:

$$\underbrace{\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(b)}{x-b}}=\frac{1}{\frac{x-b}{f^{-1}(x)-f^{-1}(b)}}=\frac{1}{\underbrace{\frac{f(f^{-1}(x))-f(a)}{f^{-1}(x)-a}}}\xrightarrow{x\to b}\frac{1}{f'(a)}$$

מרציפות $x\to b \Leftarrow f^{-1}(x)\longrightarrow \underbrace{f^{-1}(b)}_{a}$

$f^{-1}(x)\to a \Leftarrow$ מהמכנה יוצא את הביטוי: $f'(a)$

הערה: דרך נוספת לחישוב נגזרת של פונקציה הפוכה: בהנחה שיודעים שהפונקציה ההפוכה גזירה בנק' רושמים $f(f^{-1}(x))=x$ ואז גוזרים את הביטוי לפי כלל השרשרת. $f'\neq 0$ חובה.

הערה: אם $f'(a)=0$ אז f^{-1} לא גזירה בנק' $f(a)$.

- **גזירה לוגריתמית**: $f'(x)=f(x)\cdot((\ln f(x))' \Leftarrow (\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$

באופן כללי איך משתמשים:

$$(a^x)'=(e^{\ln(a^x)})'=\underbrace{e^{(\ln a)x}}_{a^x}\cdot\ln a=(\ln a)a^x$$

- **נגזרת מסדר גבוה**:

- הגדרה: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$

- משפט: אם h,g גזירות מסדר n, אז גם המכפלה גזירה מסדר n ומתקיים:

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(j)}(x)g^{(n-j)}(x)$$

הוכחה: באינדוקציה על n. ואז בהוכחה על $n+1$ משתמשים בזהות פסקל.

5. משפטי גזירות:

הערה: במשפטים אלו משתמשים במונחים של נקודות קיצון: מקסימום/מינימום גלובאלי או מקסימום/מינימום מקומי.

- **משפט פרמה**: תהי f גזירה בנק' x_0. אם x_0 נק' קיצון מקומית אז $f'(x_0)=0$.

הוכחה: בה"כ מקסימום מקומי.

קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ מתקיים $f(x)-f(x_0)\leq 0$

$\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{x\to x_0^+}\leq 0 \Leftarrow x>x_0$, $\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{x\to x_0^-}\geq 0 \Leftarrow x<x_0$

$f'_+(x_0)\leq 0 \Leftarrow$ הפונקציה גזירה ב- $x_0 \Rightarrow f'_-(x_0)\geq 0$

ולכן רציפה שם $f'(x_0)=0 \Leftarrow$

הערה: לא כל נקודה ב- $f'(x_0)=0$ כי נק' קיצון.

- **משפט רול**: f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). נניח $f(a)=f(b)$. אזי קיימת נק' $c\in(a,b)$ עבורה $f'(c)=0$.

הוכחה: לפי ויירשטראס מתקבל מקס' M ומינימום m ב- $[a,b]$.
- אם שניהם מתקבלים בקצוות $m=f(a)=f(b)=M$ אז הפונקציה קבועה וסיימנו.
- אם אחת הנק' מתקבלת בנקודה פנימית, בה"כ M מתקבל בנקודה $c\in(a,b)$
$\Leftarrow c$ מקסימום מקומי ואז לפי פרמה, הנגזרת מתאפסת.

- **משפט לגרנז'**: f רציפה ב- $[a,b]$, גזירה ב- (a,b) אז קיימת $c\in(a,b)$ עבורה:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

הוכחה: מגדירים פונקציה חדשה:

$$g(x)=f(x)-\underbrace{\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}_{\text{המיתר שמחבר את קצות הקטע}}$$

הפונקציה החדשה מקיימת את תנאי משפט רול: $0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftarrow g'(c)=0$

- **משפט**: אם f גזירה בקטע I ומתקיים $f'(x)=0$ לכל $x\in I$, אז f קבועה בקטע.
הוכחה: לכל זוג נקודות $a\neq b$ בקטע מתקיים $f(a)=f(b)$.
נוכיח בעזרת לגרנז': בה"כ $a<b$ נסתכל על הקטע $[a,b]$ בו הפונקציה גזירה
ורציפה מתקיים: $f(b)=f(a) \Leftarrow 0=f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **משפט**: תהי f פונקציה גזירה בקטע I כך שמתקיים $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in I$.
אז: f עולה ב-I. אם $f'(x)>0$ ב-I אז f עולה ממש בקטע I.
הוכחה: נניח $f'\geq 0$, צ"ל: $f(a)\leq f(b) \Leftarrow a<b$ ⇐ משתמשים בלגרנז' בקטע
$[a,b]$ ומקבלים $c\in(a,b)$ עבורה: $f(b)-f(a)\geq 0 \Leftarrow 0\leq f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הערה: אם $f'>0$ פרט למס' סופי של נק' בהן $f'=0$, אז f עולה ממש.

הערה: אם f עולה וגזירה בכל $x\overset{\circ}{\in} I$ (נק' פנימית) אז: $f'(x)\geq 0$.

- **טענה**: אם f גזירה בקטע I ומקיימת $|f'(x)|\leq M$ לכל $x\in I$, אז f רציפה במ"ש ב-I.
הוכחה: משתמשים בלגרנז' על שתי נקודות $a,b\in I$: קיימת $c\in(a,b)$ כך ש:
$$\Leftarrow M|b-a|\geq|f(b)-f(a)| \Leftarrow M\geq|f'(c)|=\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$
מקיים תנאי ליפשיץ ⇐ רציף במ"ש.

- **משפט ערך הביניים של קושי**: תהיינה f,g רציפות ב-$[a,b]$, גזירות ב-(a,b).
אז קיימת נק' $c\in(a,b)$ כך שמתקיים: $(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$.

הערה: 1. לגרנז' מקרה פרטי בו $g(x)=x$.
2. כאשר $g(b)\neq g(a)$ וגם $g'\neq 0$ אז ניתן לרשום: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$

הוכחה: מגדירים את הפונקציה: $h(x)=(g(x)-g(a))(f(x)-f(a))-(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$
הפונקציה החדשה מקיימת את תנאי משפט רול ⇐ אחרי השוואות הנגזרת
של הנקודה $c\in(a,b)$ מקבלים את תוצאת המשפט.

- **משפט דרבו**: תהי f גזירה ב-$[a,b]$, אז: f' מקבלת כל ערך ביניים בין
$f'_+(a), f'_-(b)$. f' לא חייבת להיות רציפה.
הוכחה: $f'_+(a)=f'_-(b)$ - ברור.
- בה"כ $f'_+(a)<f'_-(b)$. תהי: $f'_+(a)<\lambda<f'_-(b)$, קיים $c\in(a,b)$ כך ש: $f'(c)=\lambda$.
- מגדירים פונ' עזר: $g(x)=f(x)-\lambda x$ ⇐ g גזירה ב-$[a,b]$ ⇐
$g'(x)=f'(x)-\lambda$. מתקיים: $g'_+(a)=f'(a)-\lambda<0$ ⇐ g יורדת בסביבה ח"ז של a
$g'_-(b)=f'(b)-\lambda>0$ ⇐ g עולה בסביבה ח"ז של b
g רציפה בקטע $[a,b]$ לפי ויירשטראס II היא מקבלת מינימום בקטע:
קיימת $a\leq c\leq b$ כך ש- $g(c)\leq g(x)$ לכל $x\in[a,b]$.
c לא יכולה להיות שווה ל- a,b כי נקודת מינימום.
⇐ c נק' מינימום פנימית ⇐ פרמה: $g'(c)=0$ ⇐ $f'(c)-\lambda=0$ ⇐ $f'(c)=\lambda$.

- **תנאים מספיקים לנק' קיצון**:

א. תהי f מוגדרת בסביבת הנק' x_0: f עולה מימין ל-x_0 ויורדת משמאל לה, אז:
x_0 נק' מינימום מקומית.
ב. אם f רציפה בסביבה של x_0 וגזירה בסביבה נ', כך ש: $f'\leq 0$ משמאל
ל-x_0 ו- $f'\geq 0$ מימין, אז: x_0 נק' מינימום מקומית של f.
ג. טענות מקבילות קיימות עבור מקסימום מקומי.
הוכחת ב: x נק' בסביבה כך ש: $x<x_0$. מהנתון: $f'\leq 0$ בקטע $[x,x_0)$ ⇐
f יורדת בקטע. נבחר סדרת נקודות $x_n \to x_0$, $x_n>x_0$ מונוטונית עולה ⇐ $f(x)\geq f(x_n)$
לכל n.
כאשר $n\to\infty$ מקבלים לפי רציפות f ש: $f(x)\geq f(x_0)$.

- מסקנות מהמשפט: אם f גזירה בסביבת x_0, ו- $f'(x_0)=0$. ומה-כן: $f''(x_0)\neq 0$
אז x_0 היא נקודת קיצון מקומית.
- אם $f''(x_0)>0$, אז לה מינימום מקומי
- אם $f''(x_0)<0$, אז לה מקסימום מקומי

הוכחה: בה"כ $f''(x_0)>0$ נראה נק' מינימום.
מתקיים: $0<f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$ ⇐ לפי המשפט על גבולות קיימת סביבה עבורה לכל x בסביבה מתקיים:
$$0<\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$
⇐ עבור x בסביבה ימנית מתקיים: $x-x_0>0 \Rightarrow f'(x)-\underbrace{f'(x_0)}_{0\ \text{נתון}}>0 \Rightarrow f'(x)>0$

⇐ ממשיכים באותה הדרך ומקבלים את תנאי המשפט הקודם.

6. כלל לופיטל:

1. משפט: תהיינה f,g מוגדרות בסביבה מנוקבת של הנק' a וגזירות בה כך ש:

מהטיפוס: "$\frac{0}{0}$" ⇐

א. $g'(x)\neq 0$ לכל x בסביבת a.
ב. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
ג. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ עבור $L\in\mathbb{R}$ או $L=\pm\infty$

⇐ קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

הוכחה: נגדיר: $f(a)=g(a)=0$ ⇐ פונק' רציפות בנק' וגזירות בסביבה מנוקבת.
נוכיח את הגבול מימין ומשמאל ע"י שימוש בערך הביניים של קושי על סביבה ימנית $[a,x]$ או שמאלית $[x,a]$:
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}}=\underbrace{\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}}\xrightarrow{x\to a^+} L$$
⇐ $\lim_{x\to a^+} c_x=a$ לפי סנדוויץ' / היינה.

$g(x)\neq g(a)$ כי אחרת לפי רול היינה נקודה בה g' מתאפסת וזה סותר את (א)

2. משפט: תהיינה f,g מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של a, כך ש:

מהטיפוס: "$\frac{\infty}{\infty}$" ⇐

א. $g'(x)\neq 0$ לכל x בסביבה.
ב. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$
ג. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ עבור $L\in\mathbb{R}$ או $L=\pm\infty$

⇐ קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

רעיון ההוכחה:
מחלקים את זה למצבים L סופי או L אינסופי.
L סופי: לוקחים סביבה המקיימת את הגבול לנגזרת (לפי ג') ובסביבה הזה משתמשים במשפט ערך הביניים של קושי ⇐ בודקים $0<L$ ו- $L=0$.
L אינסופי: הופכים את הפונקציה $g(x)/f(x)$ ואז הגבול שווה 0 וחוזרים למצב הקודם.

3. משפט: נניח f,g גזירות בקרן (c,∞) ומקיימות:
א. $g'(x)\neq 0$ בקרן.
ב. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)$ ושניהם שווים ל-0 או ל-∞
ג. $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ קיים במובן הרגיל או הרחב

⇐ קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

הוכחה: בה"כ $c>0$. בקטע $(0,\frac{1}{c})$:
מגדירים: $F(t)=f(\frac{1}{t})$, $G(t)=g(\frac{1}{t})$ ⇐ גוזרים את הפונקציות החדשות ⇐ מקיימות את תנאי ג' ⇐ משתמשים בתנאי לופיטל הקודמים עבור נקודה סופית a (במקרה שלנו $a=0^+$).

הערה: לופיטל מתאים גם לביטויים מהסוג: "1^∞", "0^0", "$\infty-\infty$" וכו'

7. קמירות:

- **הגדרה:** תהי f מוגדרת בקטע I. נאמר ש-f קמורה בקטע אם לכל $x,y\in I$ ולכל $\lambda\in(0,1)$ מתקיים: $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$

ממוצע של התמונות   f של הממוצע

אם השוויון חד נאמר ש-f קמורה ממש.

משמעות גאומטרית: המיתר נמצא תמיד מעל גרף הפונקציה.

- **טענה:** פונקציה היא קמורה $\Leftrightarrow$ מקיימת את התכונה הגאומטרית הנ"ל

הוכחה: מגדירים את משוואת המיתר שעובר דרך הנק' x ו-y.

$\Leftarrow$ לוקחים נקודה $x<t<y$ עבורה $t=\lambda x+(1-\lambda)y$ ואז מציבים במשוואות המיתר ומשוואות הפונקציה. אחרי הצבה ו-$t-x=(1-\lambda)(y-x)$ אי השוויון מתקבל.

הערה: קו ישר הוא גם קמור וגם קעור.

- **הגדרה:** f קעורה $\Leftrightarrow$ $(-f)$ קמורה (כלומר פשוט הופכים את אי השיוויון הנ"ל).

- **למה** (מונוטוניות שיפועים ממוצעים): תהי f קמורה בקטע I:

1. תהי $a\in I$. אז לכל $a<x<x_2$ ב-I מתקיים: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$

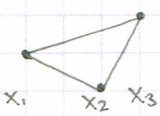
$\Leftarrow$ השיפוע הממוצע ביחס לנק' קצה שמאלית קבועה היא פונקציה עולה.

2. תהי $b\in I$ אז לכל $x_2<x<b$ ב-I מתקיים: $\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$

$\Leftarrow$ גם כיוון השיפוע הממוצע הוא פונקציה עולה.

הוכחה: מגדירים את המיתר $L(x)$ העובר דרך נק' הקצה $\Leftarrow$ תכונת קמירות $L(x_1)\ge f(x_1)$ ואז פשוט מציבים את משוואות המיתר.

$\Leftarrow$ **למת השיפועים:** תהי f קמורה בקטע I ו- $x_1<x_2<x_3$ שלוש נק' בקטע:



$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

- **משפט:** אם f קמורה בקטע I, אז f רציפה בפנים של I.

רעיון ההוכחה: לוקחים נק' x פנימית ומקבעים גם נקודות $a,b\in I$ כך ש: $a<x<b$. משתמשים בלמת השיפועים עבור: $a<x<t<b$ $\Leftarrow$ מכפילים את האגפים ב- $t-x$ $\Leftarrow$ מקבלים שני ביטויים שיש בהם $f(t)-f(x)$ ואז בעזרת סנדוויץ' והשאיפה $t\to x^+$ מתקבל $f(t)-f(x)\to 0$ $\Leftarrow$ $\lim_{t\to x^+} f(t)=f(x)$ $\Leftarrow$ רציפות מימין. באותה הדרך מראים רציפות משמאל.

- **משפט:** תהי f גזירה בקטע I. אז f קמורה בקטע $\Leftrightarrow$ f' עולה.

הוכחה: $\Leftarrow$: נקבע $a<b$ ונראה $f'(a)\le f'(b)$ $\Leftarrow$ משתמשים בלמת השיפועים עבור $a<x<b$. את הביטוי שמקבלים משאיפים מימין $x\to b^-$ ומשמאל $x\to a^+$ ואז מתקבל: $f'(a)\le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b)$

$\Rightarrow$: לוקחים גם נק' $a<b$ וצ"ל להראות שהמיתר מעל הגרף של f.

- מניחים $f(a)=f(b)$ $\Leftarrow$ לפי רול קיימת נק' בה הנגזרת מתאפסת: x_0
$\Leftarrow$ f' עולה ולכן f יורדת בקטע $(a,x_0]$ ועולה בקטע $[x_0,a)$
$\Leftarrow$ בפרט נובע $f(x)\le f(a)=f(b)$ לכל x בקטע.
- במקרה הכללי: מגדירים פונקציה חדשה (כמו שמגדירים במשפט לגרנז') והפונקציה החדשה מקיימת: $g(x)\le g(a)=g(b)=0$ לכל x בקטע.
$g(x)\le 0$ $\Leftarrow$ גרף הפונקציה נמצא כולו מתחת למיתר.

- **משפט:** תהי f גזירה פעמיים בקטע I. אז f קמורה ב-I $\Leftrightarrow$ $f''\ge 0$ ב-I.

הוכחה: f קמורה $\Leftrightarrow$ f' עולה $\Leftrightarrow$ $f''\ge 0$

- **משפט**: תהי f גזירה בקטע I. אז f קמורה ב-I $\Leftrightarrow$ בכל נק' פנימית $x_0\in I$ המשיק לגרף f בנק' x_0 נמצא מתחת לגרף הפונקציה.

הוכחה: $\Leftarrow$: משתמשים בלמת השיפועים ובביטוי שראינו עבור: $f'(a)\le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b)$

משתמשים בביטוי פעמיים: 1. $a=x_0$, $b=x>x_0$ 2. $a=x<x_0$, $b=x_0$

אחרי הצבה ובידוד אגפים רואים שמשני הצדדים משוואות המשיק בנק' x_0 נמצא מתחת לגרף הפונקציה.

$\Rightarrow$: מספיק להראות ש-f' עולה: מקבעים זוג נק' $b>a$:

משוואות המשיק בשתי הנק' נמצאות מתחת לגרף הפונקציה $\Leftarrow$

נציב $x=a$ במשוואה עם המשיק בנק' b, ונציב $a=x$ במשוואה השנייה

ואז מקבלים את הביטוי: $f'(a)\le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'(b)$.

- **משפט**: אם f קמורה בקטע I אז בכל נק' פנימית $x\in I$, f גזירה מימין ומשמאל ב-x. בנוסף לכל זוג נקודות $y>x$ ב-I מתקיים: $f'_-(x)\le f'_+(x)\le f'_-(y)\le f'_+(y)$

רעיון ההוכחה: תהי $b>x$ קבועה.

משתמשים בלמת השיפועים עבור: $x<t_1<t_2<b$:

נסמן: $g(t)=\frac{f(x)-f(t)}{x-t}$

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(t_1)}{x-t_1}}_{g(t_1)}\le\underbrace{\frac{f(x)-f(t_2)}{x-t_2}}_{g(t_2)}\le\underbrace{\frac{f(b)-f(x)}{b-x}}_{\text{קבוע}(*)}$$

$\Leftarrow$ $g(t)$ פונקציה עולה עבור $t<x$ וחסומה מלעיל ע"י הקבוע (*).

$\Leftarrow$ לפי המשפט על פונ' מונוטוניות, קיים הגבול הסופי $f'_-(x)$.

$\Leftarrow$ המשפט הוא הכללת ההגדרה, הסופרימום והאינפימום של $g(t)$ עבור $x>t$ ועבור $x<t$ $\Leftarrow$ שימוש נוסף בלמת השיפועים ומקבלים $f'_-(x)\le f'_+(x)$.

ההגדרה של צירוף קמור

- **טענה**: אם f קמורה ב-I, אז לכל n נק': $x_1,x_2,\dots,x_n\in I$ $(n\ge2)$ ולכל $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\ge0$ כך ש: $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ מתקיים: $f(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i)\le\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i)$

הוכחה: באינדוקציה על n.

- **משפט אי שוויון הממוצעים המוכלל**: לכל $n\ge2$ מספרים: $0<x_1,\dots,x_n$ ולכל $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in[0,1]$ כך ש: $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ מתקיים:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}\le\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i$$

בפרט אם $\lambda_i=\frac1n$ לכל i נקבל:

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\frac1n}\le\frac1n\sum_{i=1}^n x_i$$

הוכחה: נציב $t_i=\ln x_i$ $\Leftarrow$ $x_i=e^{t_i}$ $\Leftarrow$

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}=\prod_{i=1}^n e^{\lambda_it_i}=e^{\sum_{i=1}^n\lambda_it_i}=f(\sum_{i=1}^n\lambda_it_i)$$

עבור $f(t)=e^t$, f קמורה ולכן מהטענה מתקבל:

$$\underline{\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}}=e^{\sum_{i=1}^n\lambda_it_i}=f(\sum_{i=1}^n\lambda_it_i)\le\sum_{i=1}^n\lambda_ie^{t_i}=\underline{\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot x_i}$$

- **הגדרה**: אם יש נק' שבסביבה ימנית שלה הפונקציה קעורה ובסביבה שמאלית שלה הפונקציה קמורה, נאמר שנק' זו היא נקודת פיתול.

הערה: אם f גזירה פעמיים ב-x_0 נק' פיתול, זה אומר ש-f'' משנה סימן כשעוברים משמאלה לימינה של הנקודה.