תשובות למועד בתורת הקבוצות ־ פברואר 2017 ־ חורף תשע"ז

שאלה 1

נגדיר יחס שקילות S על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא:

$$fSg \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad f(k) = g(k)$$

א. נמצא את עצמת כל מחלקות השקילות של היחס S.

נסתכל על מחלקות השקילות:

$$[f]_S = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \ \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad g(k) = f(k)\}$$

מתקיים כי הפונקציות במחלקות השקילות של f הן הסדרות שהחל ממקום מסוים שוות לה. נגידר:

$$A_{[f]_S, n} \coloneqq \{g \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq n \quad g(k) = f(k)\}$$

הקבוצה $A_{[f]_S, n}$ היא הקבוצה של הסדרות השוות לf החל מאינדקס n **מסוים**. לכן, עצמתה היא $|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

מתקיים כי $[f]_S$ היא איחוד זר שלהן $[f]_S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{[f]_S, n}$, מכיוון שניתן לקחת n כלשהו.

$|[f]_S| = \aleph_0$ כי איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה הינו בן־מניה.

ב. נמצא את עצמת מרחב המנה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S$. מרחב המנה הוא קבוצת מחלקות השקילות:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S = \{[f]_S : \ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$$

מתקיין ביחס שקילות כי איחוד מחלקות השקילות הוא הקבוצה עליה מוגדר היחס, לכן מתקיין:

$$\bigsqcup_{[f]_S\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S}[f]_S=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

מתקיים $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|=\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph$. נניח בשלילה כי מתקיים $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S|<\aleph$. מתקיים:

$$\aleph=|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|=|\bigsqcup_{[f]_S\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S}[f]_S|=|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S|\cdot|[f]_S=*\max\{|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/s|,\aleph_0\}<\aleph$$

*מסקנה מהלמה של צורן.

קיבלנו $\aleph<\aleph$. זאת סתירה, ולכן $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/S|\geq\aleph$.

<u>שאלה 2</u>

א. נראה כי $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ ו $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ עם הסדר המילוני הלועזי אינם איזומורפיים. נסתכל על הסכום הראשון באופן הבא:

$$P\triangleq\mathbb{Z}\times\{0\}\oplus\mathbb{Q}\times\{1\}\oplus\mathbb{Z}\times\{2\}$$

נביט באיבר $(z_0,2)\in P$, ונניח כי קיים איזומורפיזם $\varphi:\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$.
קיים $\varphi((z_0,2))=(r_0,m_0)$.
מכיוון ש־ $\mathbb{Q}$ איננה חסומה, ומכיוון ש φ **על**, קיים $(z_1,i\in\{0,1,2\})$ כך שמתקיים $\varphi((z_1,i))=(r_1,m_1)$ עבור כל זוג $r_1,\ m_1$, ובפרט עבור הזוג

$$r_1=r_0+1,\ m_1=m_0$$

מתקיים $r_1>r_0$ ולכן $(r_1,m_1)>(r_0,m_0)$. מכיוון שאיזומורפיזם משמר סדר לשני הכיוונים, $(z_1,i)>(z_0,2)$ וזה ייתכן רק עבור $i=2$ (מהגדרת יחס הסדר על P). מכאן, $(z_1,2)>(z_0,2)$.
מתקיים כי הקטע $[(z_0,2),(z_1,2)]$ הינו קטע סופי, כי הוא קטע בין שני מספרים ב־ $\mathbb{Z}$, שאינה צפופה. הקטע

$$[\varphi((z_0,2)),\ \varphi((z_1,2))]=[(r_0,m_0),(r_1,m_1)]$$

הינו אינסופי מכיוון ש־ $\mathbb{Q}$ צפופה וניתן לקחת כל $r_0 < r' < r_1$ עם הזוג $(r_0, m_0) <$ $(r', m_0) < (r_1, m_1)$. איזומורפיזם מעתיק קטע סופי לקטע סופי, ולכן לא קיים איזומורפיזם φ.

ב. נראה כי הסדרים $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ אינם איזומורפיים. נסמן:

$$A \coloneqq \mathbb{Z} \times \{0\} \oplus \mathbb{Q} \times \{1\} \oplus \mathbb{Z} \times \{2\} \quad B \coloneqq \mathbb{Q} \times \{0\} \oplus \mathbb{Z} \times \{1\} \oplus \mathbb{Q} \times \{2\}$$

נניח כי קיים איזומורפיזם $\varphi : A \longrightarrow B$.
קיים איבר $(r_0, 0) \in B$. איזומורפיזם בפרט חד־חד ערכי ולכן הפיך, וקיים $\varphi^{-1}((r_0, 0)) =$ $(x_0, y_0) \in A$.
נסתכל על $(x_0 - 1, 0) < (x_0, 0) \leq (x_0, y_0)$. מתקיים כי $(x_0 - 1, 0), (x_0, 0)$ שכנים, מכיוון שאין איברים במרחק קטן מאחד ב־ $\mathbb{Z}$. לעומת זאת, מתקיים:

$$\varphi((x_0 - 1, 0)) < \varphi((x_0, 0)) \leq \varphi((x_0, y_0)) = (r_0, 0)$$

מתקיים לכן כי קיים זוג $\varphi((x_0 - 1, 0) < (r_1, 0) < \varphi((x_0, 0))$, מכיוון ש־ $\mathbb{Q}$ צפופה. איזומורפיזם מעתיק שכנים לשכנים ולכן קיימת סתירה ו־ φ אינו איזומורפיזם.

<u>הערה</u>: נראה כי איזומורפיזם אכן מעתיק שכנים לשכנים.
יהיו כי $\varphi : X \longrightarrow Y$ איזומורפיזם, וגם $x1 < x2$ שכנים ב־ X.
נניח כי $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ אינם שכנים. קיים מכך $\varphi(x_1) < y \in Y < \varphi(x_2)$, אך איזומורפיזם שומר סדר! לכן גם $x_1 < \varphi^{-1}(y) < x_2$, בסתירה להנחה כי $x_{1,x2}$ שכנים. לכן איזומורפיזם מעתיק שכנים לשכנים.
מכך נובע גם כי לא ייתכן כי איזומורפיזם מעתיק קטע סופי לקטע צפוף, שבו אין שכנים (עבור סעיף א').

<u>שאלה 3</u>

א. נחשב את עצמת קבוצת כל תתי הקבוצות מעצמה $\aleph$ של $\mathbb{R}$. נגדיר:

$$A \coloneqq \{X \subseteq \mathbb{R} : |X| = \aleph\}$$

מתקיים:

$$A \subseteq P(\mathbb{R}) \Longrightarrow |A| \leq |P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$$

ניצור העתקה חד־חד ערכית:

$$\varphi:\ P(\mathbb{R}_+) \longrightarrow A,\ \varphi(X) = X \sqcup (-1,0)$$

מתקיים כי כל קטע על הישר שקול לו, ולכן $\aleph = |(-1,0)|$ ומתקיים לכל $X \subseteq \mathbb{R}_+$:

$$|\varphi(X)| = |X \sqcup (-1,0)| = \aleph$$

מתקיים מכך ש־ φ חד־חד ערכית כי $|P(\mathbb{R}_+) \leq |A|$. לכן מתקיים $2^{\aleph} = |P(\mathbb{R}_+)| \leq |A| \leq |P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$ וממשפט Cantor-Shröder-Bernstein נובע $|A| = 2^{\aleph}$.

ב. נחשב את עצמת קבוצת כל תתי הקבוצות של קבוצת הסדרות הרציונליות המתכנסות לגבול סופי. נגדיר:

$$A \coloneqq \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} :\ \exists \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathbb{R}\}$$

יש למצוא את $|P(A)|$. מתקיים $A \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, לכן $|A| \leq |\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$. נגדיר העתקה חד־חד ערכית שתעביר כל מספר לסדרה השואפת אליו:

$$\varphi:\ \mathbb{R} \longrightarrow A, \quad \varphi(x) \coloneqq (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} :\ \lim_{n\to\infty} f_n = x$$

ידוע כי קיימת סדרה כזאת לכל $x \in \mathbb{R}$, וכי סדרה לא יכולה לשאוף לשני גבולות שונים, לכן הפונקציה מוגדרת וחח"ע. (נובע מאקסיומת השלמות)
מתקיים $\aleph = |\mathbb{R}| \geq |A|$. מכך נובע $\aleph \leq |A| \leq \aleph$ וממשפט Cantor-Shröder-Bernstein נובע $|A| = \aleph$.
ממשפט קנטור מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^{\aleph}$

שאלה 4

א. יהיו הקבוצות $U := \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, $U \supseteq B_n := \{(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} : \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \text{ is even}\}$.
נחשב את $|\liminf(B_n)|$. מתקיים:

$$\liminf(B_n) = \{(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_n\} =$$

$$= \{(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} : \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \varepsilon_n+\varepsilon_{n+1} \text{ is even}\} = \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \{(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} : \forall n \geq n_0 \quad \varepsilon_n+\varepsilon_{n+1} \text{ is even}\}$$

מתקיים לכל $n_0 \in \mathbb{N}$ כי הקבוצה הנ"ל היא קבוצת הסדרות שהחל מ־ n_0 מסוים סכום איברים סמוכים בהן הינו זוגי. בפרט כל הסדרות של הספרות 0,2 ($\{0,2\}^{\mathbb{N}} \subseteq U$) מוכלות באיחוד (כמובן ש־2 מחלק סכום של איברים ב$\{0,2\}$). מתקיים:

$$\aleph =_{\text{[from Cantor]}} |\{0,2\}^{\mathbb{N}}| \leq |\liminf B_n| \leq_{\text{[because } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq U]} |\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}| = \aleph$$

ממשפט Cantor-Shröder-Bernstein נובע $|\liminf B_n| = \aleph$.

ב. הראנו בכיתה כי מתקיים תמיד $\liminf B_n \subseteq \limsup B_n$ לכן $\liminf B_n \subseteq \limsup B_n \subseteq U \Longrightarrow |\liminf B_n| = \aleph \leq |\limsup B_n| \subseteq \aleph = |U|$.
ממשפט Cantor-Shröder-Bernstein נובע $|\limsup B_n| = \aleph$.

<u>שאלה 5</u>

א. נראה כי הקבוצה $A := \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$ סדורה היטב עם הסדר הרגיל:
הראנו כי קבוצה סדורה לינארית הינה סדורה היטב אם ורק אם לא קיימת בה סדרה אינסופית יורדת (ממש) של איברים. נראה שאכן לא קיימת סדרה כזאת.
נניח שקיימת סדרה אינסופית יורדת ב־ A. נפריד לשני מקרים:
*$a_0 \in \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$. מתקיים כי יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $a_0 = 1 - \frac{1}{n_0}$. מההנחה שהסדרה יורדת, קיים $n_1 \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{n_1} = a_1 < a_0$. צריך מכך להתקיים:

$$1 - \frac{1}{n_1} < 1 - \frac{1}{n_0} \Rightarrow \frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_0} \Rightarrow n_1 < n_0$$

באופן דומה נקבל לכל $i \in \mathbb{N}$ $n_i < n_{i-1}$.

ידוע כי $\mathbb{N}_+$ חסומה מלרע ע"י 1, ואינה צפופה ולכן לא קיימת סדרה אינסופית $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ומכך לא ייתכן כי $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה אינסופית יורדת.
*אם $a_0 \in \{2-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}_+\}$, נגיע באותו אופן לכך שלא קיימת סדרה אינסופית יורדת בקבוצה זאת. לכן, קיים איבר $a_j \in \{1-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}_+\}$. הראנו כי הסדרה לא יכולה להיות אינסופית החל מאיבר זה, לכן קיימת סתירה.
מסקנה: A סדורה היטב כי אין בה סדרה אינסופית יורדת.

ב. תהיינה $(X,\leq_X),(Y,\leq_Y)\neq\varnothing$ קס"ל, כך ש $(X\times Y,\leq_e)$ קס"ה. נראה כי בהכרח $(X,\leq_X),(Y,\leq_Y)$ שתיהן קס"ה.
נניח כי $(X,\leq_X)$ אינה קס"ה. קיימת סדרה אינסופית יורדת : $x_0>x_1>x_2>...$ $(X,\leq_X)\subseteq(x_0,x_1,...)$. מתקיים כי קיים איבר $y_0\in Y$ (כי $(Y,\leq_Y)\neq\varnothing$). ניצור סדרה אינסופית יורדת ב $(X\times Y,\leq_e)$ ע"י $((x_0,y_0)>(x_1,y_0)>(x_2,y_0)>...)$. זוהי אכן סדרה יורדת כי $x_0>x_1>x_2>...$.
קיבלנו סתירה מפני שבקס"ה $(X\times Y,\leq_e)$ לא תיתכן סדרה אינסופית יורדת, לכן ההנחה ש $(X,\leq_X)$ אינה קס"ה שגויה.
נניח כי $(Y,\leq_Y)$ אינה קס"ה. קיימת סדרה אינסופית יורדת $(Y,\leq_Y)\subseteq(y_0>y_1>y_2>,...)$. קיים איבר $x_0\in X$ כי $X\neq\varnothing$. ניצור סדרה אינסופית יורדת ב $(X\times Y,\leq_e)$ ע"י $((x_0,y_0)>(x_0,y_1)>(x_0,y_2)>...)$. זוהי אכן סדרה יורדת כי בכל האיברים $x_0=x_0$(האיבר השמאלי בזוג), וכי $y_0>y_1>y_2>...$. שוב קיבלנו סתירה לנתון ולכן גם $(Y,\leq_Y)$ קס"ה.