מספרים מרוכבים

רשימת התרגילים הפתורים: 1, 3, 5, 10, 15, 17, 18, 19, 21.

הנחיות כלליות לפתרון תרגילים מס' 5-8,13-18:

רצוי שלא לעבור לצורה אלגברית או טריגונומטרית, השתמשו בזהויות הבאות:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2\ ,\ z+\bar{z}=2\,\mathbf{Re}(z)\ ,\ z-\bar{z}=2i\cdot\mathbf{Im}(z),$$

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}\ ;\ \ |z|=1\ \Rightarrow\ \frac{1}{z}=\bar{z}\,.$$

תרגיל מס' 5:

$$z\cdot w=r\ ;\ r\in R\ \ \Rightarrow\ \bar{z}\cdot z\cdot w=r\cdot\bar{z}\ \Rightarrow\ |z|^2\cdot w=r\cdot\bar{z}$$

לפי הנתון, z אינו מספר ממשי, בפרט - אינו אפס, לכן גם ערכו המוחלט שונה מאפס, ואז אפשר לחלק בו. מקבלים - $w=\frac{r}{|z|^2}\cdot\bar{z}$, ואפשר לסמן $a=\frac{r}{|z|^2}$ - זהו מספר ממשי, ולכן הוכחנו את הטענה.

תרגיל מס' 15:

נתון כי: $z^3=1,\ z\neq 1$. לכן:

$$z^3-1=(z-1)\cdot(z^2+z+1)=0\ \Rightarrow\ z^2+z+1=0$$

נשתמש בזה כדי לחשב את הביטוי המבוקש:

$$\begin{aligned}(z+1)^2\cdot(2z^2+z+1)&=(z^2+2z+1)\cdot((z^2+z+1)+z^2)\\&=((z^2+z+1)+z)\cdot z^2=z\cdot z^2=z^3=1\end{aligned}$$

תרגיל מס' 17:

אם z הוא ממשי ו- w הינו שורש n-י של z, כלומר: $w^n=z$, אז:

$$\bar{w}^n=\overline{w^n}=\bar{z}=z,$$

וקיבלנו שגם $\bar{w}^n=z$, וזאת אומרת שלמספר z יש שני שורשים צמודים מסדר n.

להפך: נניח שלמספר z יש שני שורשים צמודים מסדר n, כלומר: קיים מספר w המקיים: $\bar{w}^n=w^n=z$

מצד שני:

$$w^n=z\ \Rightarrow\ \overline{w^n}=\bar{w}^n=\bar{z}\ \Rightarrow\ z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in R\,,$$

וזה מסיים את התרגיל.

<u>תרגיל מס׳ 18:</u>

נתון: $z^{200}=1+i$.

ב) $z_0^{200}=1+i \Rightarrow \overline{\left(z_0^{200}\right)}=1-i \Rightarrow \left(\bar{z}_0\right)^{200}=1-i\neq 1+i$

לכן $\overline{z_0}$ אינו שורש של המשוואה הנ״ל (אפשר לראות את זה גם מהתרגיל הקודם).

ה) אם z_1,z_2 שני שורשים של המשוואה אז סכומם לא בהכרח שורש. למשל, אם z הוא שורש אז $-z$ גם שורש וסכומם נותן אפס.

<u>תרגיל מס׳ 10:</u> הוכח:

$$\sin x+\sin 2x+\dots\dots\dots+\sin nx=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

- רמז - נגדיר: $z=\cos x+i\cdot\sin x$

ואז: $\sin x+\sin 2x+\dots\dots\dots+\sin nx=\mathrm{Im}(z+z^2+\dots\dots+z^n)$

כעת יש לחשב את $z+z^2+\dots\dots+z^n$ כסכום סידרה הנדסית, לחשב את חלקו המדומה ולהשתמש בזהויות טריגונומטריות.

<u>תרגיל מס׳ 19:</u>

$p(x)$ פולינום ממעלה אי זוגית בעל מקדמים ממשיים. צ״ל: יש לו לפחות שורש ממשי אחד. ההוכחה מסתמכת על שתי טענות:

1) אם z הוא שורש של הפולינום הנ״ל אז גם $\bar{z}$ שורש שלו.

2) אם z ו $\bar{z}$ שורשים של הפולינום הנ״ל אז הם שורשים מאותו ריבוי.

<u>תשובות לתרגילים חישוביים:</u>

<u>תרגיל מס׳ 1:</u>

א) $2\cdot i^{n-1}$; ב) $\frac{44-5i}{318}$; ג) 2; ד) $\sqrt{3}\cdot\mathrm{cis}(\frac{\pi+2\cdot\pi\cdot k}{6});\ \ k=0\dots.5$;

ה) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}\cdot\mathrm{cis}\frac{7\pi}{4}}{2\cdot\mathrm{cis}\frac{\pi}{6}}}=\dots..=\sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{cis}(\frac{19\pi}{36}+\frac{2\cdot\pi\cdot k}{6});\ \ k=0\dots5$;

ז) -2^5; ח) $2^{10}\cdot\mathrm{cis}\frac{5\pi}{3}$;

ט) $$\left(1+\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha\right)^n=\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}+i\cdot\sin\alpha\right)^n=\left(2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}+i\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n$$
$$=\left(2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\cdot\left(\text{cis}\frac{\alpha}{2}\right)^n=2^n\cdot\cos^n\frac{\alpha}{2}\cdot\text{cis}\frac{n\alpha}{2}$$

י) $$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi\right)}{2\left(1-i\right)\left(\cos\varphi-i\cdot\sin\varphi\right)}=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)}{4}cis2\varphi=\ldots=\frac{1}{\sqrt{2}}cis\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+2\varphi\right)$$

<u>תרגיל מס' 3:</u>

א) $\boldsymbol{z}=1-\frac{3\boldsymbol{i}}{2}$

ב) $z_1=3-i,\ \ z_2=2+i$

ג) $x=\pm1$

ד) $z_1=2+i,\ \ z_2=1-3i$

ה) $z_1=0,\ \ z_2=\text{cis}\ \frac{\pi}{4},\ \ z_3=\text{cis}\frac{3\pi}{4},\ \ \ z_4=\text{cis}\frac{5\pi}{4},\ z_5=\text{cis}\frac{7\pi}{4}$

ו) $z=a+i\cdot(a-1),\ \ a\in R,\ a\neq0$

ז) $z_1=z_2=0,\ \ z_3=3\text{cis}\frac{\pi}{3},\ \ z_4=3\text{cis}\frac{5\pi}{6},\ \ z_5=3\text{cis}\frac{4\pi}{3},\ \ z=3\text{cis}\frac{11\pi}{6}$

<u>תרגיל מס' 21:</u>

א) $x_1=0,\ \ x_2=2-i,\ \ x_3=2+i,\ \ x_4=1,\ \ x_5=3$

ב) $x_1=3+2i,\ \ x_2=3-2i,\ \ x_3=2$

ג) $x_1=2,\ \ x_2=2,\ \ x_3=-3$

ד) $x_1=x_2=-1,\ \ x_3=x_4=3$

ה) $x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=2i,\ \ x_4=-2i$

ו) $x_1=2,\ \ x_2=3+i,\ \ x_3=3-i$

מטריצות

רשימת התרגילים הפתורים: 4, 11, 15, 16, 19, 25

סימונים:

$M_n(F)$ - קבוצת כל המטריצות $n \times n$ עם מקדמים בשדה F.

$F^{n\times m}$ - קבוצת כל המטריצות $n \times m$ עם מקדמים ב-F.

$F^n = F^{n\times 1}$ - קבוצת כל וקטורי-העמודה (או שורה, אם כתוב) עם מקדמים מתוך F.

$E_{m,l}$ - נגדיר מטריצה $E_{m,l} \in M_n(F)$ באופן הבא: כל האיברים במטריצה הם אפס פרט לאיבר בשורה m ובעמודה l שהוא 1. כלומר -

$$\left(E_{m,l}\right)_{i,j} = \begin{cases} 0 & ;i \neq m \text{ or } j \neq n \\ 1 & ;i=m,\ j=n \end{cases},$$

ובאופן יותר פורמלי: $\left(E_{m,l}\right)_{i,j} = \delta_{m,i} \cdot \delta_{l,j}$, כאשר δ היא פונקציה "המודדת" האם שני מספרים נתונים שווים :

$$\delta_{m,i} = \begin{cases} 0 & ;m \neq i \\ 1 & ;m=i \end{cases}$$

הנחיות כלליות לפתרון תרגילים מס' 3,4,9,10,11,25,29 :

- כאשר צריך להוכיח שמטריצה מסוימת הינה סימטרית, מוטב לא לנסות להוכיח מיד כי $a_{i,j}=a_{j,i}$ אלא כי $A=A^t$. לדוגמא:

תרגיל מס' 4: P^tAP, $\left(P^tAP\right)^t = P^tA^t\left(P^t\right)^t = P^tAP$, ולכן P^tAP סימטרית.

- אחד התרגילים החשובים במיוחד בפרק זה הוא -

תרגיל מס' 15: נפתור אותו למקרה של מטריצות ריבועיות (ההוכחה למקרה "הלא ריבועי" זהה, יש רק יותר אינדקסים):

א) תהא $A \in M_n(F)$ מטריצה כלשהי $n \times n$ ונחשב את $A \cdot E_{m,l}$.

האיבר במקום ה-i,j במטריצה זו מתקבל מכפל שורה i של המטריצה A בעמודה j של המטריצה $E_{m,l}$, וכיוון שבמטריצה $E_{m,l}$ כל עמודה חוץ מהעמודה ה-l היא עמודת-אפסים, גם במטריצה $A \cdot E_{m,l}$ כל העמודות חוץ מהעמודה ה-l הן עמודות אפסים. לכן האיבר במקום ה-i בעמודה ה-l

מתקבל כך:

$$\left(A\cdot E_{m,l}\right)_{i,l}=\begin{pmatrix}a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n}\end{pmatrix}\times\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow m\\ \\ \\ \end{array}$$

$$=a_{i,1}\cdot 0+\ldots+a_{i,m-1}\cdot 0+a_{i,m}\cdot 1+a_{i,m+1}\cdot 0+\ldots+a_{i,n}\cdot 0=a_{i,m}\,,$$

כלומר, באופן יותר מדויק:

$$\left(A\cdot E_{m,l}\right)_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot\left(E_{m,l}\right)_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot\delta_{m,k}\delta_{l,j}=\begin{cases}0 & ;l\neq j\\ \sum_{k=1}^{n}a_{i,k}\cdot\delta_{m,k} & ;l=j\end{cases}=\begin{cases}0 & ;l\neq j\\ a_{i,m} & ;l=j\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad A\cdot E_{m,l}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & \cdots & a_{1,m} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{n,m} & \cdots & 0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ & & l & & \end{array}\end{array}.$$

זאת אומרת, שהמטריצה $A\cdot E_{m,l}$ היא מטריצה, שכל עמודותיה חוץ מהעמודה ה-l הן אפסים, ובעמודה ה-l נמצאת העמודה ה-m של A. באופן דומה מקבלים, כי מטריצה $E_{m,l}\cdot A$ היא מטריצה, שכל <u>שורותיה</u> חוץ מהשורה ה-m הן אפסים, ובשורה ה-m נמצאת השורה ה-l של A.

מכאן גם מקבלים, כי: $\boxed{E_{m,l}\cdot E_{k,p}=\delta_{l,k}\cdot E_{m,p}}\,.$

התרגיל הנ״ל עוזר לנו לפתור את -

<u>תרגיל מס׳ 16:</u> הוכח שאם מטריצה $C\in M_n(F)$ מתחלפת בכפל עם כל מטריצה מאותו סדר, אזי C מטריצה סקלרית, כלומר $C=k\cdot I, k\in F$. נדגיש, שמטריצה סקלרית אכן מתחלפת עם כל מטריצה אחרת מאותו סדר: $(k\cdot I)M=k\cdot(IM)=k\cdot M=k\cdot(MI)=M\cdot(k\cdot I)$ - הרי לסקלרים מותר "לנדוד" ממקום למקום בתוך מכפלות של מטריצות.

- אכן: C מתחלפת בכפל עם כל המטריצות $n\times n$, בפרט עם מטריצות מהצורה $E_{m,l}$, לכל $1\leq m,l\leq n$, לכן:

$$C\cdot E_{m,l}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & c_{1,m} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & c_{l,l} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & c_{n,m} & \cdots & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{l,1} & \cdots & c_{m,m} & \cdots & c_{l,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=E_{m,l}\cdot C\,,$$

ולכן כל האיברים של C מחוץ לאלכסון שווים לאפס, ובאלכסון: $c_{m,m}=c_{l,l}$ לכל $1\le m,l\le n$.

מטריצות מהצורה $E_{m,l}$ מהוות גם כלים לבניית דוגמאות נגדיות לטענות רבות:

<u>תרגיל 11ב:</u> מכפלה של מטריצות סימטריות היא לא בהכרח סימטרית (זה קורה אם״ם הן מתחלפות בכפל). דוגמה נגדית: כל מטריצה מהצורה $E_{m,m}$ היא אלכסונית ולכן סימטרית, כמו כן כל מטריצה מהצורה $E_{m,l}+E_{l,m}$ היא סימטרית. לכן ניקח מכפלה של שתי מטריצות סימטריות: $E_{1,2}+E_{2,1}\,,\,E_{1,1}$:

$$(E_{1,2}+E_{2,1})\cdot E_{1,1}=E_{1,2}\cdot E_{1,1}+E_{2,1}\cdot E_{1,1}=0+E_{2,1}=E_{2,1}$$

ו- $E_{2,1}$ אינה סימטרית. במטריצות מסדר 2×2 זה נראה כך: $\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}$.

<u>תרגיל 11ה:</u> מכפלה של מטריצה סימטרית במטריצה אנטי-סימטרית היא לא בהכרח אנטי-סימטרית (גם זה קורה אם״ם המטריצות מתחלפות בכפל).

<u>דוגמה נגדית:</u> למה שאמרנו בסעיף ב׳ נוסיף, שכל מטריצה מהצורה $E_{m,l}-E_{l,m}$ היא אנטי-סימטרית. אז ניקח מכפלה של מטריצה סימטרית $E_{1,1}$ במטריצה אנטי-סימטרית $E_{1,2}-E_{2,1}$:

$$(E_{1,2}-E_{2,1})\cdot E_{1,1}=E_{1,2}\cdot E_{1,1}-E_{2,1}\cdot E_{1,1}=0-E_{2,1}=-E_{2,1},$$

ו- $(-E_{2,1})$ איננה אנטי-סימטרית. במטריצות מסדר 2×2 זה נראה כך: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$.

(שאר הטענות בתרגיל זה ניתנות להוכחה).

<u>תרגיל 19א:</u> דוגמה למטריצה $A\ne I$ מסדר $n\times n$ המקיימת $A^2=I$:

קודם כל נבנה דוגמה 2×2, ואחר-כך נשלים אותה ל- $n\times n$.

אנו כבר ראינו, כי $E_{1,2}\cdot E_{2,1}=E_{1,1}$ ו $E_{2,1}\cdot E_{1.2}=E_{2,2}$. לכן:

$$(E_{1,2}+E_{2,1})\cdot(E_{1,2}+E_{2,1})=\underbrace{E_{1,2}\cdot E_{1,2}}_{0}+\underbrace{E_{1,2}\cdot E_{2,1}}_{E_{1,1}}+\underbrace{E_{2,1}\cdot E_{1,2}}_{E_{2,2}}+\underbrace{E_{2,1}\cdot E_{2,1}}_{0}=E_{1,1}+E_{2,2}$$

במטריצות מסדר 2×2 זה נראה כך:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathrm{I}.$$

כעת נשלים את זה לדוגמה מסדר $n\times n$:

$$\left(\begin{array}{cc:ccc}0&1&0&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\\hdashline 0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&1\end{array}\right)^2=I_{n\times n}.$$

<u>תרגיל 19ב:</u> דוגמה למטריצה $A\ne 0$ מסדר $n\times n$ המקיימת $A^2=0$: כל מטריצה מהצורה $E_{m,l}$

עבור $m \neq l$.

<u>תרגיל 25ב:</u> אם $BA = AB$ אז לא בהכרח $AB^t = B^t A$. בתור דוגמה נגדית אפשר לקחת כל מטריצה A שלא מתחלפת עם A^t , כלומר - $B = A$ - שוב נעזר במטריצות מהצורה $E_{m,l}$. נשים לב, כי $(E_{m,l})^t = E_{l,m}$.ואז לכל $m \neq l$ מתקיים:

$$(E_{m,l})^t \cdot E_{m,l} = E_{l,m} \cdot E_{m,l} = E_{l,l} \neq E_{m,m} = E_{m,l} \cdot E_{l,m} = E_{m,l} \cdot (E_{m,l})^t .$$

במטריצות מסדר 2×2 זה נראה כך:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad (m=1, l=2).$$

<u>תרגיל 25ג:</u> מכפלת מטריצות אנטי-סימטריות מאותו סדר היא לא בהכרח אנטי-סימטרית. (אפשר להוכיח (תעשו את זה!), כי מכפלה של שתי מטריצות אנטי-סימטריות מאותו סדר היא <u>סימטרית</u> אם״ם הן מתחלפות בכפל).

לאור ההערה שבסוגריים, דוגמה נגדית פשוטה-ביותר לטענה היא: תהי A מטריצה אנטי-סימטרית כלשהי. אז A^2 היא סימטרית ולא אנטי-סימטרית! (בהנחה ש- $A \neq 0$)

<u>תרגיל 25ד:</u> אם AB היא אנטי-סימטרית אז לא בהכרח $BA = AB$. לבניית דוגמה נגדית שוב נעזר במטריצות מהצורה $E_{m,l}$.

מטריצת האפס היא אנטי-סימטרית (אגב, היא גם סימטרית, סקלרית, משולשת וכו׳),לכן נמצא שתי מטריצות A ו-B כך ש-$AB=0$, אך $BA \neq 0$.למשל: $E_{1,2} \cdot E_{1,1} = 0$ ו- $E_{1,1} \cdot E_{1,2} = E_{1,2}$. אז קיבלנו את הדוגמה הדרושה:

$E_{1,2} \cdot E_{1,1}$ היא אנטי-סימטרית ו- $E_{1,2} \cdot E_{1,1} \neq E_{1,1} \cdot E_{1.2}$.

<u>תרגיל 25 ו׳:</u> אם $AC = I_n$, $B = A^2$, $A = B^2$ אזי $B = C$. זאת טענה נכונה.

$$I = AC = B^2C = A^2A^2C = A^3(AC) = A^3$$
$$\Rightarrow BA = A^2A = A^3 = I \Rightarrow AC = BA = I.$$
$$\Rightarrow B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

וזה מה שהיה להוכיח.

<u>תרגיל 25 ז׳:</u> אם $A \neq 0$, $B \neq 0$ ו- $AB = B$, אז לא נכון להסיק ש- $B = I$. דוגמה נגדית לכך ניתנת ע״י הבחירה $B \neq 0$ כלשהי ו- $A = I$.

בהגבלה ש- $A \neq I$, עדיין ניתן לרשום $AB = B \Leftrightarrow (A - I)B = 0$ כעת נסמן $C = A - I$, ותמיד אפשר למצוא $B, C \neq 0$ כך ש- $CB = 0$, ובהינתן מטריצות כנ״ל, בונים את A המתאימה ע״י $A = C + I$.

מרחבים וקטוריים

רשימת התרגילים הפתורים: 3, 9, 10, 11

סימונים:

- $A \subseteq B$ = "הקבוצה A מוכלת בקבוצה B (ואולי שווה לה)";
- $A \subset B$ = "הקבוצה A מוכלת ב-B, אך לא שווה לה";
- $W < V$ = "W הוא תת-מרחב-וקטורי (תמ"ו) של V".

הנחיות כלליות לפתרון התרגילים 1,2,3,5

בכדי לבדוק, האם קבוצה נתונה S מהווה תת-מרחב של מרחב וקטורי V מעל שדה F, יש לבדוק את קיומם של הקריטריונים הבאים:

1) $S \neq \varnothing$ (S קבוצה לא ריקה)

2) $\forall u, v \in S, \forall \alpha \in F : u + \alpha v \in S$ (סגירות מעורבת)

הערות: בדרך-כלל נוח לבדוק האם $0 \in S$, על-מנת לוודא את תנאי 1.
קיום תנאי 2 שקול לקיום סגירות לחיבור ולכפל בסקלר יחדיו.

תרגיל 3 ג: **(i)** תת-מרחב. **(ii)** תת-מרחב. **(iii)** אינו תת-מרחב.

הוכחה: **(i)** פונקצית-האפס שייכת ל-W: $0(x) \equiv x \Rightarrow 0(1) = 0 = 0(4) \Rightarrow 0(x) \in W$.

כעת ניקח $g, h \in W, \alpha \in R$, ונבדוק:

$$(g + \alpha h)(1) = g(1) + \alpha \cdot h(1) = g(4) + \alpha \cdot h(4) = (g + \alpha h)(4) \Rightarrow g + \alpha h \in W.$$

(ii) פונקצית-האפס היא פונקציה זוגית (וגם אי-זוגית!!), ולכן היא שייכת ל-W.
כאן הבדיקה זהה לבדיקה בסעיף הקודם.

(iii) פונקצית-האפס לא שייכת ל-W, ואנו יודעים שזהו תנאי הכרחי לכך ש-W יהיה תת-מרחב ב-V.

תרגיל 9: V - מרחב וקטורי מעל F; $S = \{a, b, c, d, e\} \subseteq V, W = V - S.$

נוכיח ש-W אינו תת-מרחב של V: נניח בשלילה, כי W הוא תת-מרחב, ואז איבר-האפס לא שייך ל-S.
נכון לרגע זה (לפני שהגענו לבסיס ומימד), בשאלה חסר נתון, וקיימות מספר אפשרויות:

אפשרות 1: אם F בעל יותר מחמישה איברים, אז נוכל למצוא $0 \neq \alpha \in F$, שעבורו:

$$\alpha \cdot a \notin S \Leftrightarrow \alpha \cdot a \in W \Rightarrow a = \frac{1}{\alpha}(\alpha \cdot a) \in W,$$

בסתירה לכך ש-a אינו שייך ל-W.

אפשרות 2: $1_F + 1_F \neq 0_F$ (למשל - $F \neq Z_2$): במקרה זה, לכל $s \in S$, מתקיים $s \neq (-s)$, וחייב

להתקיים $(-s) \in S$ (- אחרת, $s \notin S \Rightarrow s = -1 \cdot (-s) \in W \Rightarrow (-s) \in W$, בסתירה להנחה). לפיכך, מספר האיברים ב-S חייב להיות זוגי.

אפשרות 3: כעת נותרה אפשרות יחידה: השדה F הוא שדה עם חמישה איברים לכל-היותר, המקיים $1_F + 1_F = 0_F$. כרגע אין לנו כלים להתמודד עם אפשרות זו.

<u>תרגיל 10:</u> V מרחב וקטורי, $U < V$ (כך מסמנים ש-U הוא ת״מ של V), ונתון:

$$U \neq \{0\}, V\ , \quad W = (V - U) \cup \{0\} = \left\{ w \in V \,\middle|\, w \notin U \text{ or } w = 0 \right\}.$$

אז W אינו תמ״ו של V: בשלילה, נניח כי W הוא תת-מרחב של V. לפי הנתון, קיימים $u, w \neq 0,\ u \in U,\ w \in W$; נתבונן בוקטור $v = u + w$:

נכון כי:

$$V = U \cup W \Rightarrow v \in W \text{ or } v \in U.$$

קיימים שני מקרים:

$$1)\ v \in U: \quad u \in U \Rightarrow w = v - u \in U;$$

$$2)\ v \in W: \quad w \in W \Rightarrow u = v - w \in W.$$

בשני המקרים הגענו לסתירה. ■

<u>תרגיל 11:</u> לפי התרגיל הקודם, אם ניתן ל-V להיות אוסף כל המטריצות הממשיות 3×3, ונסמן ב-U את אוסף המטריצות האלכסוניות ב-V, אז U הוא תמ״ו ב-V, ולכן W, המהווה את אוסף כל המטריצות שאינן אלכסוניות + מטריצת-האפס, אינו תמ״ו.

אפשר לא להסתמך על התרגיל הקודם, אלא לתת מיד דוגמה נגדית:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\in W} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\notin W}.$$

קבוצות תלויות וקבוצות פורשות

<u>רשימת התרגילים הפתורים:</u> 2, 4, 5, 10, 14, 17, 20, 21

<u>הערות:</u>

א. שני וקטורים $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}$ תלויים-לינארית (ת״ל) אם״ם קיים $\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{F}$ כך ש- $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}\cdot \boldsymbol{v}$.

ב. אם $\boldsymbol{S}_1\subseteq \boldsymbol{S}_2\subseteq \boldsymbol{V}$:

- אם $\boldsymbol{S}_1$ ת״ל אז $\boldsymbol{S}_2$ ת״ל; אם $\boldsymbol{S}_2$ בת״ל, אז $\boldsymbol{S}_1$ גם בת״ל.
- אם $\boldsymbol{S}_1$ פורשת אז $\boldsymbol{S}_2$ פורשת.

<u>תרגיל 2א:</u> כדי להראות שהוקטורים $(0,2,-1),(0,1,1)$ פורשים את כל המישור $\boldsymbol{y\text{-}z}$ ב- $\boldsymbol{R}^3$ מעל $\boldsymbol{R}$, יש לקחת וקטור שרירותי $(0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ במישור זה, ולהראות שקיימים קבועים $\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$ (התלויים ב-$\boldsymbol{a}$ וב-$\boldsymbol{b}$) כך ש-

$$\alpha(0,2,-1)+\beta(0,1,1)=(0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow (0,2\alpha,-\alpha)+(0,\beta,\beta)=(0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

$$\Leftrightarrow (0,2\alpha+\beta,\beta-\alpha)=(0,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=\boldsymbol{a}\\ \beta-\alpha=\boldsymbol{b}\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{3},\ \beta=\frac{2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}}{3}.$$

<u>תרגיל 2ב:</u> כדי להראות שהוקטורים $(0,2,2),(0,1,1)$ אינם פורשים את המישור $\boldsymbol{y\text{-}z}$ ב- $\boldsymbol{R}^3$ מעל $\boldsymbol{R}$, יש למצוא וקטור במישור זה, שאינו מן הצורה $\alpha(0,2,2)+\beta(0,1,1)=(0,2\alpha+\beta,2\alpha+\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in \boldsymbol{R}$. למשל: $(0,1,2)$ הוא וקטור כזה, מכיוון שריכיביו השני והשלישי אינם שווים זה-לזה.

<u>תרגיל 2ג:</u> לאור הערה ב׳, מספיק להראות כי $(0,1,-1),(0,1,1)$ פורשים את מישור $\boldsymbol{y\text{-}z}$ ב- $\boldsymbol{R}^3$ מעל $\boldsymbol{R}$, וזה נעשה בדיוק כמו בסעיף א׳.

<u>תרגיל 4א:</u> נראה אי-תלות: (מתבוננים בצירוף-לינארי השווה לאפס, ומראים שכל מקדמיו הם אפסים)

$$\alpha(0,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,1)=0\Leftrightarrow (\beta+\gamma,\alpha+\beta,\alpha+\gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta+\gamma=0\\ \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2\alpha+\beta+\gamma=0\Rightarrow \underbrace{2\alpha=0\Rightarrow \alpha=0}_{2,\alpha\in \boldsymbol{R},\,2\neq 0}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

<u>תרגיל 4ב:</u> מעל $\boldsymbol{Z}_2$ הוקטורים הנ״ל תלויים: $1\cdot(0,1,1)+1\cdot(1,1,0)+1\cdot(1,0,1)=(2,2,2)\equiv 0$.

<u>תרגיל 5א:</u> לאור הערה א׳, הוקטורים $(2,-1+\boldsymbol{i}),(1-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})\in \boldsymbol{C}^2$ תלויים מעל $\boldsymbol{F}$, אם״ם קיים $\alpha\in \boldsymbol{F}$, שעבורו: $(2,-1+\boldsymbol{i})=\alpha(1-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})$. המספר היחיד α המקיים את זה הוא: $\alpha=1+\boldsymbol{i}$. ברור שזהו מספר מדומה, ולכן הוקטורים הנ״ל תלויים מעל $\boldsymbol{C}$, אך לא מעל $\boldsymbol{R}$.

<u>תרגיל 5ב:</u> הוקטורים $(2,\boldsymbol{i}),(1-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})\in \boldsymbol{C}^2$ פורשים את $\boldsymbol{C}^2$ מעל $\boldsymbol{C}$ -

$$(a,b)=\alpha(2,i)+\beta(1-i,i)\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta(1-i)=a\\ i\alpha+i\beta=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta(1-i)=a\\ i(\alpha+\beta)=b\end{cases}$$

מראים שקיים פתרון עבור כל זוג $(a,b)\in C^2$.

כדי להראות שהם אינם פורשים את C^2 מעל R, נראה שלא כל וקטור ניתן לכתיבה בצורה הנ"ל, עבור $\alpha,\beta\in R$: מן הצורה האחרונה שבה רשמנו את מערכת-המשוואות לעיל, אנו רואים שבהנחה כי $\alpha,\beta\in R$, הרכיב השני של וקטור (a,b) שהוא צ"ל של הוקטורים נתונים חייב להיות מדומה טהור. לפיכך כל וקטור עם רכיב שני ממשי שונה מאפס יתאים למטרתנו - $(0,1)$ - למשל.

<u>תרגיל 10:</u> $u,v\neq 0\quad Au=2u, Av=v;$. נראה ש- $\{u,v\}$ היא קבוצה בת"ל.

$$pu+qv=0,\ p,q\in R\Rightarrow A(pu+qv)=0.$$

$$0=A(pu+qv)=pAu+qAv=2pu+qv\Rightarrow\begin{cases}pu+qv=0\\ 2pu+qv=0\end{cases}\Rightarrow pu=0\wedge u\neq 0\Rightarrow p=0$$

$$\Rightarrow qv=0\wedge v\neq 0\Rightarrow q=0.$$

<u>תרגיל 14:</u> $V=Span\left\{x^2+1, x^3-ax\right\}, U=Span\left\{x^2-a, x^3+x\right\}$

נמצא a, שעבורו $U\cap V\neq\{0\}$. זה אומר, שקיים $p(x)\neq 0$, הנמצא בחיתוך.

$$p(x)\in U\Rightarrow p(x)=A(x^2-a)+B(x^3+x),\ p(x)\in V\Rightarrow p(x)=C(x^2+1)+D(x^3-ax)$$

$$\Rightarrow A(x^2-a)+B(x^3+x)=C(x^2+1)+D(x^3-ax)\Leftrightarrow\begin{cases}B=D,\ A=C\\ B=-aD,\ -aA=C\end{cases}\Rightarrow a=-1.$$

<u>תרגיל 17:</u> נראה אי-תלות:

$$a(u+v+w)+b(v-w)+c(2w)=0\Leftrightarrow au+(a+b)v+(a-b+2c)w=0,$$

אבל $\{u,v,w\}$ היא קבוצה בת"ל, ולכן:

$$\begin{cases}a=0,\ a+b=0\\ a-b+2c=0\end{cases}\Rightarrow a=b=c=0.$$

<u>תרגיל 20:</u> הטענה אינה נכונה: אם $\{u,v,w\}$ ת"ל, אז קיימים a,b,c <u>לא כולם אפס</u>, המקיימים: $au+bv+cw=0$. אפשר לנסות לרשום: $v=\left(-a/b\right)\cdot u+\left(-c/b\right)\cdot w$, אבל אם במקרה $b=0$, הרי שלא ניתן לחלק ב-b, והוקטור v אינו חייב להיות צ"ל של u,w:

$$u=(1,0), v=(0,1), w=(2,0)\in R^2.$$

תרגיל 21א: נניח ש-

$$\alpha_1(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)+\ldots+\alpha_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{v}_1)=0$$
$$\Leftrightarrow(\alpha_1+\alpha_{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{v}_1+(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{v}_2+\ldots+(\alpha_{\boldsymbol{k}-1}+\alpha_{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}=0.$$

אבל $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}\}$ היא קבוצה בת"ל, ולכן:

$$\alpha_1+\alpha_{\boldsymbol{k}}=\alpha_1+\alpha_2=\ldots=\alpha_{\boldsymbol{k}-1}+\alpha_{\boldsymbol{k}}=0.$$

מכאן אנו מסיקים:

$$\begin{cases}\alpha_1=-\alpha_{\boldsymbol{k}},\\ \alpha_2=-\alpha_1,\\ \alpha_3=-\alpha_2=\alpha_1,\\ \vdots\\ \alpha_{\boldsymbol{i}}=(-1)^{\boldsymbol{i}-1}\cdot\alpha_1.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \alpha_1=-\alpha_{\boldsymbol{k}}=-(-1)^{\boldsymbol{k}-1}\cdot\alpha_1=(-1)^{\boldsymbol{k}}\cdot\alpha_1$$

לפיכך, עבור $\boldsymbol{k}$ איזוגי, נקבל:

$$\underbrace{\alpha_1=-\alpha_1\Rightarrow\alpha_1=0}_{\alpha_1\in\boldsymbol{R}}\Rightarrow\forall\boldsymbol{i}:\alpha_{\boldsymbol{i}}=0$$

ולכן הקבוצה $\{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{v}_1\}$ בת"ל.

ואילו עבור $\boldsymbol{k}$ זוגי, הקבוצה ת"ל, עם מקדמים $\alpha_{\boldsymbol{i}}=(-1)^{\boldsymbol{i}}$.

תרגיל 21ב: לכל $\alpha\in\boldsymbol{Z}_2$, מתקיים $\alpha=-\alpha$, ולכן ההוכחה הנ"ל איננה תקפה. מעל $\boldsymbol{Z}_2$ הקבוצה $\{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{v}_1\}$ תמיד תהיה ת"ל, מכיוון שסכום איבריה שווה לאפס.

דרגת-מטריצה, בסיס ומימד

רשימת התרגילים הפתורים: 2, 7, 8, 9, 13

תזכורת וסימונים: עבור מטריצה $A \in F^{m\times n}$, F שדה, מסמנים:

$R(A)$ - מרחב-השורה של A = המרחב הנפרש ב- F^n ע״י השורות של A.

$C(A)$ - מרחב-העמודה של A = המרחב הנפרש ב- F^m ע״י העמודות של A.

$Ker(A) = \left\{ x \in F^n \middle| \ Ax = 0 \right\}$ - מרחב כל הפתרונות של המערכת $Ax = 0$.

$r(A) = rank(A)$ - הדרגה של A = מספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת של A.

$n(A) = \dim Ker(A)$ - האפסיות של A = מימד המרחב $Ker(A)$.

$F[x]$ - מרחב כל הפולינומים במשתנה x עם מקדמים בשדה F.

$F_n[x]$ - מרחב כל הפולינומים במשתנה x, עם מקדמים ב-F ובעלי מעלה הקטנה או שווה ל-n.

$M_n(F) = F^{n\times n}$ - מרחב כל המטריצות הריבועיות $n \times n$ עם מקדמים ב-F.

ידועות העובדות הבאות:

- $r(A) = \dim R(A) = \dim C(A) = r(A^t)$ = מספר מקסימלי של שורות בת״ל = מספר מקסימלי של עמודות בת״ל.
- $C(A) = \left\{ Ax \middle| \ x \in F^n \right\}$ - כלומר: מרחב-העמודות של A מכיל בדיוק את כל הוקטורים מן הצורה Ax.
- אם V מ״ו מעל F, $W < V$, אז בסיס של W היא קבוצה בת״ל, הפורשת את W = קבוצה בת״ל מקסימלית ב-W = קבוצה פורשת מינימלית ב-W.

הקדמה: התרגיל הבא הוא עובדה חישובית ותיאורטית מן החיוניות ביותר בקורס.

תרגיל: הוכח את הנוסחה $C(A) = \left\{ Ax \middle| \ x \in F^n \right\}$ (זוהי הכללה של תרגיל 18 מן הפרק על משוואות לינאריות)

הוכחה: נסמן את העמודות של A באופן הבא:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ A_i = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ \\ a_{m,i} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i$$

עם מקדמיםA הוא צירוף לינארי של העמודות של Axאנו רואים, כי לכל $x \in F^n$, הוקטור

. אם $y \in C(A)$, אז, לפי הגדרה, יש מקדמים $x_1, \dots, x_n$, כך ש- $Ax \in C(A)$ $x_1, \dots, x_n$, ולכן

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i \Rightarrow y = Ax,\ x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t,$$

כנדרש.

<u>מסקנה:</u> למשוואה $Ax = y$ קיים פתרון (במשתנה x, כאשר y וקטור נתון) אם״ם $y \in C(A)$.

<u>תרגיל 2א:</u> $\dim R^3 = 3$, ולכן כדי לבדוק, האם הקבוצה הנתונה היא בסיס, מספיק לבדוק שהיא בת״ל, מכיוון שיש בה שלושה איברים - וזה נעשה ע״י דירוג.

<u>תרגיל 2ב:</u> $\dim R^3 = 3$, ומכאן שכל קבוצה בת ארבעה איברים חייבת להיות ת״ל.

<u>תרגיל 2ד:</u>

$$p_1(x) = ax^2 + bx + c,\ p_2(x) = 2ax + b,\ p_3(x) = 2a,\ a \neq 0.$$

$\dim R_2[x] = 3$, ומכאן נובע, שמספיק לבדוק שקבוצת-הפולינומים הנתונה היא בת״ל. זה ברור, מכיוון שהמעלות של p_1, p_2, p_3 שונות ($a \neq 0$).

<u>תרגיל 2ה:</u> נתון כי: $V = Span\{(2,2,4),(0,0,2),(2,2,2)\} \subseteq R^3$. הוקטורים הנ״ל אינם מהווים בסיס של V, מכיוון שהם תלויים: $(2,2,4) - (0,0,2) = (2,2,2)$.

<u>תרגיל 7:</u> הפתרון לתרגיל זה משתמש במשפט על משוואות לינאריות הומוגניות, לכן אם החומר לא נלמד עדיין, אפשר לוותר על תרגיל זה. נניח: $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times k} \Rightarrow AB \in F^{m \times k}$

כעת, נשתמש בתרגיל שבהקדמה:

$$\forall x \in F^k: \quad 0 = (AB)x = A(Bx)$$

מאן נובע, שלכל x כנ״ל, הוקטור Bx הוא פתרון של המשוואה $Az = 0$, כלומר: $C(B) \subseteq Ker(A)$.

לפיכך:

$$r(B) = \dim C(B) \leq \dim Ker(A) = \underbrace{n(A) = n - r(A)}_{(*)} \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n.$$

כאשר **(*)** הוא המשפט (במשוואות לינאריות), האומר כי מימד מרחב הפתרונות של $Az = 0$ שווה למספר המשתנים, פחות הדרגה של A.

(!!!) הערה: הפתרון שנתון כאן הוא עבור המקרה הכללי, שבו המטריצות הן לאו-דווקא ריבועיות.

<u>תרגיל 8א:</u> נסמן $M = AB$; כדי להוכיח את הטענה שבתרגיל, נצטרך להראות כי:

$$r(M) \leq r(A),\ r(M) \leq r(B).$$

למעשה מספיק להראות רק את אי-השוויון הראשון, מכיוון שממנו נובע:

$$(AB)^t = B^t A^t = M^t \Rightarrow r(M) = r(M^t) = r(B^t A^t) \leq r(B^t) = r(B).$$

בכדי להראות, שהדרגה של M קטנה או שווה לדרגה של A, נראה שכל עמודה של M היא צירוף לינארי של עמודות של A, ואז נקבל, שמרחב-העמודות של M מוכל במרחב-העמודות של A, ולכן:

$$r(M) = \dim C(M) \le \dim C(A) = r(A).$$

ואמנם, נסמן ב- b_i את העמודות של B, ואז: $M = AB = A \cdot \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot b_1 & \cdots & A \cdot b_n \end{bmatrix}$

אנו רואים, שכל עמודה i של M היא מן הצורה $A \cdot b_i$ - כלומר: היא צירוף לינארי של העמודות של A, כפי שטענו.

<u>תרגיל 8ב:</u> כאן נקבע $M = A + B,\ m_i = a_i + b_i$, כאשר m_i, a_i, b_i הן העמודות המתאימות של M,A,B - בהתאמה. אנו רואים שכל עמודה של M שייכת למרחב $C(A) + C(B)$, ולכן גם מתקיים:

$$C(M) \subseteq C(A) + C(B)$$
$$\Rightarrow r(M) = \dim C(M) \le \dim(C(A) + C(B)) \le \dim C(A) + \dim C(B) = r(A) + r(B).$$

<u>תרגיל 9:</u> נניח בשלילה שקיים בסיס $(n \ne 1)$ $\mathscr{C} = \left\{C_1, \ldots, C_{n^2}\right\},$ ל- $M_n(R)$, כך ש-

$$\forall i, j = 1, \ldots, n^2: \quad C_i C_j = C_j C_i.$$

תהיינה A,B מטריצות כלשהן ב- $M_n(R)$, ונרשום אותן כצירופים לינאריים של איברי-הבסיס $\mathscr{C}$:

$$A = \sum_{1 \le i \le n^2} a_i C_i,\ B = \sum_{1 \le j \le n^2} b_j C_j$$
$$\Rightarrow AB = \left(\sum_{1 \le i \le n^2} a_i C_i \right)\left(\sum_{1 \le j \le n^2} b_j C_j \right) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n^2} (a_i b_j)(C_i C_j) = \sum_{i,j=1}^{n^2} (b_j a_i)(C_j C_i)}_{C_i C_j = C_j C_i} = BA$$

לסיכום: הראינו שכל שתי מטריצות $A, B \in M_n(R)$ מתחלפות בכפל, וזה לא נכון, אלא-אם כן $n = 1$.

<u>תרגיל 13א:</u> תחילה נמצא בסיס למרחב-השורות של A ע"י דירוג - הבסיס הוא $\left\{(1,0,1), (0,1,0)\right\}$, ולכן (a,b,c) שייך למרחב-השורות של A, אם"ם קיימים x,y (סקלרים) שעבורם:

$$(a,b,c) = x(1,0,1) + y(0,1,0) = (x,y,x),$$

וזה קורה אם"ם $a = c$.

<u>תרגיל 13ב:</u> אם נדרג את המטריצה המתקבלת מוקטורי-השורה שפורשים את W, נקבל ש- $\left\{(1,0,1), (0,1,0)\right\}$ הוא בסיס ל-W, ולכן וקטור (a,b,c) שייך ל-W אם"ם $a = c$, ולכן W הוא מרחב-הפתרונות של המערכת $a - c = 0$.

משוואות לינאריות

רשימת התרגילים הפתורים: 1, 3, 4, 5, 6, 10, 17, 20, 21, 22

סימונים ועובדות: עבור המשוואה $Ax = b, A \in F^{n\times m}$, נגדיר את המושגים הבאים:

- אם $b = 0$ - המערכת נקראת "מערכת הומוגנית"
- אם $b \neq 0$ - המערכת נקראת "מערכת אי-הומוגנית"
- $Ker(A) = \left\{x \in F^m \middle| Ax = 0\right\}$ - אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית - מהווה תת-מרחב וקטורי של F^m, ומימדו מסומן ע"י $n(A)$. מתקיים גם כי: $\boxed{n(A) + r(A) = m}$.
- מסמנים ב- A^* את המטריצה המורחבת של המשוואה: $A^* = [A|b]$, ולמערכת $Ax = b$ קיים פתרון אם"ם $r(A^*) = r(A)$.
- אוסף הפתרונות של מערכת אי-הומוגנית עבור $b \neq 0$ נתון איננו תת-מרחב, אבל מתקיים המשפט: בהינתן פתרון מסויים, x_p, של המערכת $Ax = b$, לכל פתרון x של מערכת זו קיים x_0 אחד ויחיד כך ש- $x = x_0 + x_p$, $Ax_0 = 0$.
- מסקנה: אם ל- $Ax = b$ יש פתרון אחד לפחות, אז מספר דרגות-החופש במשוואה האי-הומוגנית שווה למספר דרגות-החופש במשוואה ההומוגנית.
- הערה: אפס דרגות חופש = פתרון יחיד.
- בפרט - אם השדה F הוא בעל q איברים, אז: $|Ker(A)| = q^{n(A)}$, ולכן, אם למערכת $Ax = b$ יש לפחות פתרון אחד, אז מספר-הפתרונות שלה (=מספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה) שווה $q^{n(A)}$.

תרגיל 1: כדי למצוא בסיס למרחב-הפתרונות של המערכת ההומוגנית צריך:

- לדרג את מטריצת-המקדמים:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- לרשום את המערכת בצורתה המדורגת:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

- לבחור משתנים חפשיים, ולבטא את המשתנים התלויים דרכם:

$$\begin{cases} x_4 = x_5 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = x_5 = 0 \\ x_2 = \dfrac{-2x_3 - 2x_4 - x_5}{-2} = x_3 \\ x_1 = -x_2 + 3x_4 + x_5 = -x_2 = -x_3 \end{cases}$$

- לרשום פתרון כללי למערכת:

$$Ker(A) = \{(-a, a, a, 0, 0) \mid a \in R\}$$

- למצוא בסיס למרחב-הפתרונות באמצעות הפתרון הכללי:

$$(-a, a, a, 0, 0) = a \cdot (-1,1,1,0,0)$$
$$\Rightarrow Ker(A) = Sp\{(-1,1,1,0,0)\}.$$

לפיכך אנו רואים שהקבוצה $\{(-1,1,1,0,0)\}$ מהווה בסיס של מרחב-הפתרונות, שמימדו, לפיכך, שווה ל-1.

<u>תרגיל 3א:</u> בכדי למצוא פתרון כללי למערכת אי-הומוגנית, צריך לבצע את אותן הפעולות כמקודם, אך עם מטריצת-המקדמים המורחבת:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 + x_4 \\ x_1 = 2 - x_2 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 - x_2 - x_4, x_2, 1 + x_4, x_4),$$

כלומר, פתרון כללי של המערכת הנתונה הוא:

$$(2 - a - b, a, 1 + b, b) = (2,0,1,0) + a(-1,1,0,0) + b(-1,0,1,1).$$

<u>תרגיל 4:</u> מטריצת-המקדמים המורחבת:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -1 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{array}\right]}_{A^*} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 7 & b - 3a \\ 0 & 0 & 0 & -2a + b - c \end{array}\right]$$

למערכת יש פתרון אם"ם $r(A) = r(A^*) \Leftrightarrow -2a + b - c = 0$. במידה ויש למערכת פתרון, אז יש אינסוף פתרונות, מפני שמספר הנעלמים הוא 3, ואילו הדרגה של A היא 2, כלומר: יש דרגת-חופש אחת, והתשובות הן: א) אף-פעם;

ב) $-2a + b - c = 0$;

ג) $-2a + b - c \neq 0$.

<u>תרגיל 5:</u> המערכת הומוגנית.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ k+1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1 - k - k^2 & -k \\ 0 & 1 - k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

עבור $k=\pm1$: הדרגה המתקבלת היא $r(A)=2$, והפתרון אינו יחיד.

עבור $k=0$: השורות השניה והשלישית פרופורציוניות, ושוב $r(A)=2$, והפתרון אינו יחיד.

בכל מקרה אחר, $r(A)=3$, והפתרון יחיד.

<u>תרגיל 6:</u> כאן -
$$A^*=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&8&1\\1&1&\lambda^2&\lambda\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&8&1\\0&0&\lambda^2-9&\lambda-3\end{array}\right]$$

למערכת יש פתרון אם״ם $r(A)=r(A^*)\Leftrightarrow\lambda\neq-3$;

למערכת פתרון יחיד אם״ם $r(A)=r(A^*)=3\Leftrightarrow\lambda\neq\pm3$;

למערכת אינסוף פתרונות אם״ם $r(A)=r(A^*)<3\Leftrightarrow\lambda=3$.

לכן התשובה הנכונה היא תשובה ג׳.

<u>תרגיל 10:</u>
$$\begin{bmatrix}1&1&-2&-3&0\\-1&0&1&1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-3&0\\0&1&-1&-2&-4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y+2z+3m\\y=z+2m+4\omega\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=-z-2m-4\omega+2z+3m=z+m-4\omega.$$

מכאן מתקבל פתרון כללי:
$$(z+m-4\omega,z+2m+4\omega,z,m,\omega)=z\underbrace{(1,1,1,0,0)}_{u}+m\underbrace{(1,2,0,1,0)}_{v}+\omega\underbrace{(-4,4,0,0,1)}_{w}$$
$$\Rightarrow W=Sp\{u,v,w\},\ \dim W=3.$$

הוקטור $(-2,3,5,-3,1)$ שייך ל-W, כי הוא מהווה פתרון למערכת, ויחד עם הוקטורים v,w הוא יוצר בסיס עבור W (כי שלושת הוקטורים בת״ל, ושייכים ל-W).

$$V=Sp\{r=(1,-3,7,0,0),s=(t-1,-1,t+1,2,-1)\}$$

הקבוצה $\{r,s\}$ בת״ל, ולכן $\dim V=2$. הוקטור r אינו שייך ל-W (כי הוא לא פתרון למערכת), ולכן:
$$\left.\begin{array}{l}V\not\subseteq W\Rightarrow V\cap W\subset V\\\dim V=2\end{array}\right\}\Rightarrow\dim(V\cap W)\le1.$$

רוצים למצוא t, שעבורו $\dim(V\cap W)=1$. במקרה שלנו זה שקול למציאת כל הערכים של t, שעבורם $\dim(V\cap W)\neq0$, כלומר: $V\cap W\neq0$. אפשר לבדוק, שזה קורה אם״ם u,v,w,r,s ת״ל, וידוע כבר כי u,v,w,r בת״ל. לפיכך: $V\cap W\neq0\Leftrightarrow s\in Sp\{u,v,w,r\}\Leftrightarrow s=au+bv+cw+dr.$, עבור קבועים ממשיים a,b,c,d מתאימים. נציב:
$$\begin{aligned}(t-1,-1,t+1,2,-1)&=a(1,1,1,0,0)+b(1,2,0,1,0)+c(-4,4,0,0,1)+d(1,-3,7,0,0)\\&=(a+b-4c+d,a+2b+4c-3d,a+7d,b,c)\end{aligned}$$

מהשוואת רכיבים מקבלים: $b=2, c=-1$, ואז:

$$\begin{cases} t-1=a+6+d \\ -1=a-3d \\ t+1=a+7d \end{cases}$$

זאת-אומרת, הקבועים הנ"ל אכן קיימים אס"ם למערכת זו יש פתרון, ויש למצוא את הפרמטר t, שעבורו הפתרון באמת קיים. זאת נעשה ע"י דירוג המטריצה המורחבת:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & t-7 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 7 & t+1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & t-7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{array}\right] \Rightarrow \left(\mathbf{dim}(V\cap W)=1 \Leftrightarrow t=2\right).$$

התשובה היא: $t=2$.

<u>תרגיל 17:</u> מן הנתונים:

$$\left.\begin{array}{l} A\in R^{m\times n} \\ r(A)=n-2 \end{array}\right\} \Rightarrow n(A)=\mathbf{dim}\,Ker(A)=2.$$

$$AX=AY=AZ=b \Rightarrow \begin{cases} A(X-Y)=AX-AY=b-b=0 \\ A(X-Z)=AX-AZ=b-b=0 \end{cases} \Rightarrow X-Y, X-Z\in Ker(A).$$

מצד שני, נתון שהוקטורים $X-Y, X-Z$ בת"ל (שני וקטורים הם בת"ל אס"ם הם <u>אינם</u> פרופורציוניים), ולכן מצאנו קבוצה בת"ל בת שני איברים בתוך $Ker(A)$, שמימדו שווה 2. לכן:

$$Ker(A)=Sp\{X-Y, X-Z\} \Rightarrow \forall X_0\in Ker(A)\ \exists a,b\in R\mathbf{:}\ X_0=a(X-Y)+b(X-Z)$$

כעת ניזכר בכך שפתרון כללי של $Ax=b$ הוא סכום של פתרון פרטי (למשל X) עם הפתרון הכללי של $Ax=0$. תשובה סופית אפשרית היא, לפיכך:

$$x=X+X_0=X+a(X-Y)+b(X-Z)=(a+b+1)X+(-a)Y+(-b)Z;\quad a,b\in R.$$

<u>תרגיל 20:</u> $A\in(Z_2)^{3\times5}$, כלומר: המערכת $Ax=b$ היא בעלת 3 משוואות ב-5 נעלמים, ונתון שיש לה $8=2^3$ בדיוק. כאמור בהערות שבתחילת הפרק, למערכת $Ax=0$ אותו מספר פתרונות, ולכן:

$$n(A)=\mathbf{dim}\,Ker(A)=3 \Rightarrow r(A)=5-n(A)=5-3=2$$

מכאן נובע כי א',ד',ה' אינם נכונים. ב' נכון, מכיוון שאם ל- $Ax=c$ יש פתרון, אז יש בדיוק 8 פתרונות. באשר ל-ג': ל- $Ax=c$ יש פתרון אס"ם $c\in C(A)$, אבל:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{dim}\,C(A)=r(A)=2 \\ \mathbf{dim}\left((Z_2)^3\right)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(A)\subset(Z_2)^3 \Rightarrow \exists c\in(Z_2)^3\mathbf{:}\ c\notin C(A).$$

כלומר, לא לכל c יש פתרון למערכת $Ax=c$.

<u>תרגילים 21,22:</u> הפתרונות מבוססים על אותו עקרון; התשובות הנכונות הן:

בתרגיל 21 - ב',ג' נכונים.

בתרגיל 22 - רק ד' נכון: נתונה מערכת של 5 משוואות ב-4 נעלמים ובעלת 3 דרגות-חופש. לפיכך

דרגת המערכת היא 1, ולכן מימד מרחב-העמודות של מטריצת-המקדמים שווה 1, כלומר: מכיל רק שני וקטורים: $0, \boldsymbol{b}$.