שניר הורקן
205689581

1. ב. $\boxed{\text{נתון:}}$ $\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$.

נסמן $L=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

נשים לב כי:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln(e) = 1$$

מרציפות פונקציית ה $\ln$ ושבו גבול ידוע 1

אזי $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = L = \lim_{n\to\infty} L\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

מאחר ו- $L>1$, מצפיפות המספרים הממשיים, קיים $L>p>1$.

לפי הגדרת הגבול, קיים N כך שלכל $n>N$, מתקיים

$$\left|p\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n - L\right| < \left|n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) - L\right| < \varepsilon$$

אזי,

$$0 < L-\varepsilon < p\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < \varepsilon + L$$

~~נזכיר במשפט האומר כי אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ו $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס. (עבור טורים חיוביים) נסיק כי אם $\frac{a_n}{a_{n+1}} \ge \frac{b_n}{b_{n+1}}$, אז מעיקרון ההשוואה נקבל.~~

מהגבול מתקיים $0 < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{n}{p}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$. $\Leftarrow$ $0 < n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{n}{p}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

$\Leftarrow$ $0 < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{p}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ $\Leftarrow$ (מונוטוניות ה- $\ln$) $\frac{n+1}{n} < \frac{1}{p}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}$ (p מספר גדול מ-1) $\Leftarrow$ $p\cdot\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}}$

נחשב את הגבול: $\lim_{n\to\infty} p\cdot\frac{n+1}{n} = p > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

והטור מתכנס, לפי מבחן המנה לסדרות.

□

ו.ב. **הוכחה** לראשונה

נסמן

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = L = \lim_{n\to\infty} L\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (1)$$

תהי $\varepsilon>0$.

נניח כי $L<1$.

אז קיים $0<L<p<1$ מצפיפות המספרים הממשיים ו-a_n חיובי.

לפי הגדרת הגבול של (1),

קיים N כך שלכל $n\geq N$,

$$0< n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$$

אז,

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Leftarrow n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < np\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \Leftarrow 0<\frac{a_n}{a_{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \Leftarrow$$

ממונוטוניות ה-$\ln$

כי זה הי מוגדר ב-$\ln$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Leftarrow$$

לפי מבחן המנה, $\sum a_n$ מתבדר.

$\square$

1. ב. __הטור ניתן לכתיבה כך:__

$$A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+2}\right) \quad , \quad a_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+2}$$

נתבונן בביטוי:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k+2}}{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+2}} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+2}\right)\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)+2}}{\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k+2}\right)} = \frac{2n+1}{2n+4}$$

אזי

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+4}{2n+1}$$

__נעזר בטענת ראבה:__

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n$$

נשים לב כי:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{לופיטל } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)'}{\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{(x+2)(2x+1)}$$

$$\underset{\text{לופיטל } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4x+7} = \frac{3}{2}$$

לפי היינה נסיק:

אזי $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{3}{2} > 1$ ולכן

הטור מתכנס.

□

3. א. __הוכחה__

תהי $a_n \to 0$.

$\sum a_n$ מתבדר $\Longleftarrow$ $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

נגדיר $b_n =$

4.א. $E=(-1,1)$. נזכר סכום של טור גיאומטרי אז:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ עבור $x\in E$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} x^k \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}$$

4.ב. ראשית, נשים לב כי

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

נעזר בסעיף א', ונשים את הסדרה x^n בטור,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S_n' = (1+x+\dots+x^n)' \underset{\text{שגזירת פולינום}}{=} 1+x+\dots nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים $S_n=1+x+\dots+x^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}$.
כאת מאחר והסכום אינו תלוי ב-n, ושגזרנו כל אחד מן האיברים.
אזי,

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

כנדרש.

□

4.ג. ראשית נוכיח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|$ אינו מתכנס.

נסמן $a_n=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| \Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>0$

נעזר במבחן ההשוואה לטורים חיוביים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{-0.5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

אזי הטורים מתכנסים/מתבדרים יחדיו ובפרט מתבדרים יחדיו.

לכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

כעת נוכיח כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.

נשתמש במשפט ע"ש לייבניץ, עבור $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ונקבל כי הטור מתכנס.

נחשב את מכפלת קושי של הטור הזה עם עצמו:

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)$$

עלינו להראות כי $C_n \not\to 0$.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\cdot(-1)^{n-k}}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\cdot(-1)^{n-k}}{\sqrt{kn-k^2+k+n-k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{-k^2+nk+n+1}} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{n}}$$

אז $C_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.. כי הטור מתכנס לערך סופי שאינו אפס (לפי משפט לייבניץ)

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{n}}$$

□

2. נתבונן בטור

$C_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$

נפרק לשני טורים: $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} \dots$

$b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \dots$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{72} \dots$

אז:

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-2}$

$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$

נשים לב כי לכל n, כי $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n}$ וידוע כי $\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, מתבדר. לכן לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ מתבדר.

כמו כן לכל n. $0 < \frac{1}{n\cdot(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס מאחר וידוע ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

לכן, בוודאי $a_n + b_n = C_n$ מתבדר.

כנדרש.

□

3.א. ראשית, נגדיר $f(n)=a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

$\int_a^x f$ חיובית ומונוטונית עולה, לפי הנתון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

נגדיר $g(x)=\int_a^x f$, ושם $b(n)=\frac{1}{\int_a^n f}=\frac{1}{g(n)}$, $b(n)$ מונוטונית יורדת ושואפת ל-0.

נתבונן באינטגרל $\int_1^\infty \frac{f}{\int_a^x f}$.

$$\int_1^\infty \frac{f}{\int_a^x f} \underset{\text{לפי N-L}}{=} \int_1^\infty \frac{g'}{g} \underset{N-L}{=} \ln(g)\Big|_1^\infty = \lim_{M\to\infty} \ln(g(M)) - \ln(1) = \infty$$

נשתמש במבחן האינטגרל לטורים. (בשאלה של אחד התנאים)

נבדוק כי התנאים מתקיימים: (במפורט בהמשך)

① הפונקציות f,g חיוביות ② $\frac{f}{g}$ מונו' יורדת

② אם $\int_1^\infty \frac{f}{g}$ מתבדר אז $\sum a_n b_n$ מתבדר.

*נגדיר כי בין כל $n,n+1$ $n\in\mathbb{N}$ כלשהן f מונ' עולה, ורציפה (לפי אינט' בקטן).

3.ב. הוכחה

נניח כי קיימת סדרה $P_n>0$ $\sum \frac{1}{P_n}$ מתבדר ושם

$$P_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1} \leq 0 \Rightarrow (1)\ \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

מאחר ו- $\sum \frac{1}{P_n}$ מתבדר אז לפי מבחן המנה,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{P_{n+1}}}{\frac{1}{P_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$$

מאחר ו- (1) מתקיים, אז

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

אז לי, הטור $\sum a_n$ מתבדר.

ג. ט. המשפט <u>הוכחה</u>

נניח כי $\sum a_n$ מתכבר.

לפי סעיף א', קיימת סדרה מונו' יורדת ל-0, $\{p_n\}$,
כך ש $\sum a_n p_n$ מתכבר.

$$\sum a_n \Longleftrightarrow \sum (a_n p_n)\cdot\left|\frac{1}{p_n}\right| \Longleftrightarrow \sum \frac{1}{p_n}$$

$\sum a_n$: מתכבר $\Downarrow$ נתון

$\sum (a_n p_n)\cdot\frac{1}{p_n}$: מתכבר $\Downarrow$ כפל בביטוי המשפט ל-1

$\sum \frac{1}{p_n}$: מתכבר $\Downarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\infty$ אז קוואזי סדרת הסכומים החלקיים שם שואפת ל-∞

מאחר ו- $\sum a_n p_n$ מתכבר אז $a_n p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\infty$ כי ההפכי של סדרה מונו' יורדת השואפת ל-0 שואף ל-∞.

נניח בשלילה כי $a_n p_n > a_{n+1}p_{n+1}$ לכל n.

כלומר $a_n p_n$ מונו' יורדת וגם $a_n\cdot p_n>0$ כי $a_n>0$ וגם p_n חיובי.

אז $a_n p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. זו בסתירה לכך ש- $\sum a_n p_n$ מתכבר.

לכן $a_n p_n \le a_{n+1}p_{n+1}$ לכל n.

אז $p_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \le 0$.

□