מבוא למתמטיקה שמושית - פתרון תרגיל 3 - אביב תשס"ד

1. נתונה הבעיה

$$y'' + \epsilon y' = -\frac{1}{1+\epsilon^2} \quad x > 0$$
$$0 < \epsilon \ll 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 1$$

נציב

$$y(x,\epsilon) \sim y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + O(\epsilon^3)$$

נקבל מערכת

$$y_0'' = -1 \quad y_0(0) = 1 \quad y_0'(0) = 0$$
$$y_1'' + y_0' = 0 \quad y_1(0) = 0 \quad y_1'(0) = 0$$
$$y_2'' + y_1' = 1 \quad y_2(0) = 0 \quad y_2'(0) = 0$$

שפתרונה

$$y_0 = 1 - \frac{x^2}{2} \quad y_1 = \frac{x^3}{6} \quad y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

2. מצא את הסדר המוביל של הפתרון של הבעיות הבאות

(א)

$$\epsilon y'' + y' + y^{1/2} = 0 \quad 0 < x < 1$$
$$0 < \epsilon \ll 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

המקדם של y' חיובי ב-$[0,1]$, ולכן שכבת הגבול צפויה להיות ליד $x = 0$. הפתרון החיצוני מקיים לכן, לסדר מוביל, את הבעיה

$$y_{out}' + y_{out}^{1/2} = 0 \quad y_{out}(1) = 1$$

שפתרונה לכן

$$y_{out} = \frac{1}{4}(3-x)^2$$

נציב $\xi = x/\epsilon$ ונקבל שהסדר המוביל בשכבת הגבול מקיים

$$y_i'' + y_i' = 0 \quad y_i(0) = 0 \quad \lim_{\xi \to \infty} y_i(\xi) = \frac{9}{4}$$

ולכן

$$y_i = \frac{9}{4}\left(1 - e^{-\xi}\right)$$

הקרוב היוניפורמי נתון ע"י

$$y \sim \frac{1}{4}(3-x)^2 - \frac{9}{4}e^{-x/\epsilon}$$

3. מצא סדר מוביל לפתרון של הבעיה

$$\ddot{y} + \epsilon \dot{y}^3 + y = 0 \quad 0 < t < \frac{1}{\epsilon}$$
$$0 < \epsilon \ll 1, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

נציב

$$y(t,\epsilon) \sim y_0(t,\tau) + \epsilon y_1(t,\tau) + O(\epsilon^2)$$

כאשר $\tau = \epsilon t$. לסדר מוביל נקבל

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} + y_0 = 0$$

ולכן

$$y_0 = A_0(\tau)\cos t + B_0(\tau)\sin t$$

משוואת הסדר הבא נראית

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + y_1 = (A_0 \sin t - B_0 \cos t)^3 + (A_0' \sin t - B_0' \cos t)$$

ע"י שימוש בנוסחאות

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}\left(\cos 3t + 3\cos t\right)$$

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}\left(-\sin 3t + 3\sin t\right)$$

ולאחר שנדרוש התאפסות המקדמים של $\sin t$ ו-$\cos t$ ונציב גם בתנאי ההתחלה נקבל

$$\frac{dA_0}{d\tau} + \frac{3}{4}\left(A_0^3 + A_0 B_0^2\right) = 0 \quad A_0(0) = 0$$
$$\frac{dB_0}{d\tau} + \frac{3}{4}\left(B_0^3 + B_0 A_0^2\right) = 0 \quad B_0(0) = 1$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-A_0 ואת השניה ב-B_0 ונחבר. נקבל

$$\frac{1}{2}\frac{dR}{d\tau}+\frac{3}{4}R^2=0 \quad R(0)=1$$

כאשר $R=A_0^2+B_0^2$. הפתרון נתון ע"י

$$R=\frac{1}{1+\frac{3}{2}\tau}$$

נכפיל עתה את המשוואה הראשונה ב-A_0 ואת השניה ב-B_0 ונחסר. נקבל

$$\frac{1}{2}\frac{du}{d\tau}+\frac{3}{4}Ru=0 \quad u(0)=-1$$

כאשר$u=A_0^2-B_0^2$. הפתרון נתון ע"י

$$u=-\frac{1}{1+\frac{3}{2}\tau}$$

נקבל

$$A_0=0 \quad B_0=\left[\frac{1}{1+\frac{3}{2}\tau}\right]^{1/2}$$

או

$$y_0=\left[\frac{1}{1+\frac{3}{2}\tau}\right]^{1/2}\sin t$$