מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים – ת"ב

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

13/11/2016

תאריך הגשה

11

קבוצת תרגול

תרגיל בית 2

שאלה 1:

א. נתונה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה באחד מבין המרחבים l_1, l_2, l_∞, אשר נתון כי היא מתכנסת ל-a במרחב זה. נרצה להראות כי לכל $k \in \mathbb{N}$, סדרת הקואורדינטות ה-kיות של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, שנסמנה $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, מתכנסת ב-$\mathbb{R}$ לקואורדינטה ה-k של a, $a^{(k)}$.

כלומר, נרצה להראות כי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים:

$$\left|a_n^{(k)} - a^{(k)}\right| < \varepsilon$$

ראשית, נתון כי הסדרה המקורית מתכנסת באחד מן המרחבים הנתונים, כלומר:

a. __בעבור l_1__ – לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| < \varepsilon$.

b. __בעבור l_2__ – לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_2$ מתקיים $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_n^{(i)} - a^{(i)}\right)} < \varepsilon$.

c. __בעבור l_∞__ - לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_\infty \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_\infty$ מתקיים $\max_{i \in \mathbb{N}}\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| < \varepsilon$.

ולכן בפרט, בהנתן $k \in \mathbb{N}$ כלשהו:

a. __בעבור l_1__ – לכל $n \geq N_1$ מתקיים (לכל $\varepsilon > 0$):

$$\left|a_n^{(k)} - a^{(k)}\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| < \varepsilon \to \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a^{(k)}}$$

b. __בעבור l_2__ – לכל $n \geq N_2$ מתקיים (לכל $\varepsilon > 0$):

$$\left|a_n^{(k)} - a^{(k)}\right| = \sqrt{\left(a_n^{(k)} - a^{(k)}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_n^{(i)} - a^{(i)}\right)^2} < \varepsilon \to \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a^{(k)}}$$

c. __בעבור l_∞__ - לכל $n \geq N_\infty$ מתקיים (לכל $\varepsilon > 0$):

$$\left|a_n^{(k)} - a^{(k)}\right| \leq \max_{i \in \mathbb{N}}\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| < \varepsilon \to \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a^{(k)}}$$

ב. נמצא דוגמאות נגדיות לכל אחד מן המרחבים, על ידי שימוש בסדרה:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad a_n = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$$

ראשית, נשים לב ש-$\{a_n\}_{i=1}^{\infty}$ שייכת לכל אחד מן המרחבים שכן:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_n^{(i)}\right| = 1 \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} {a_n^{(i)}}^2} = 1 \quad \max_{i \in \mathbb{N}}|a_n| = 1$$

וכן נשים לב כי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים ש-$a_n^{(i)} = 0$ זהותית החל מ-$n \geq i$. ולכן:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)} = a^{(i)} = 0$$

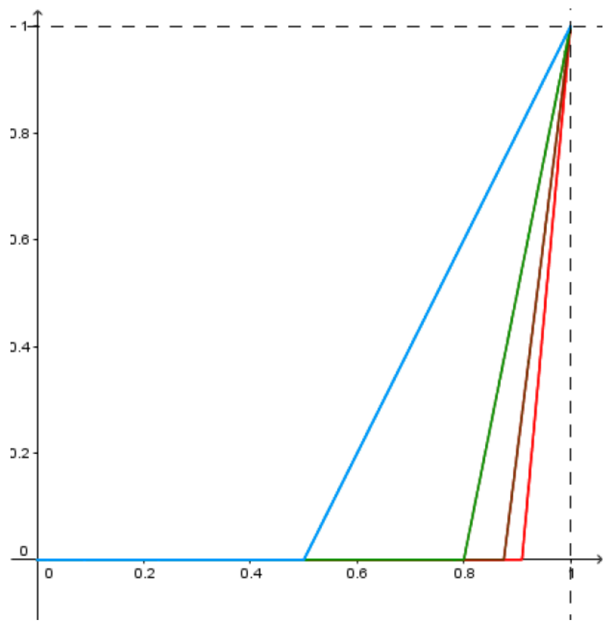
אך נשים לב כי בהגדרת $a = (0,0,0,\cdots,0)$ השייכת לכל אחד ממרחבים אלה באופן טריוויאלי, מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| = 1 \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_n^{(i)} - a^{(i)}\right)^2} = 1 \quad \max_{i \in \mathbb{N}}\left|a_n^{(i)} - a^{(i)}\right| = 1$$

כלומר ה"מרחק" בין הסדרות נשאר 1 ולעולם לא שואף לאפס ולכן במרחבים אלו אין התכנסות של הסדרה a_n ל-a.

שאלה 2:

א. בהנתן המרחבים המטריים $(C[0,1],d_{L^1})$ ו-$(C[0,1],d_{L^2})$, נתבונן בסדרת הפונקציות הבאה:



איור 1

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad f_n = \begin{cases} (n+1)\left(x - \frac{n}{n+1}\right) & x \in \left[\frac{n}{n+1},1\right] \\ 0 & x \in \left[0,\frac{n}{n+1}\right) \end{cases}$$

אשר דוגמה למספר ערכי n שלה ניתנים באיור 1 שלהלן.

נשים לב כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$ וכן מתקיים:

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

שהוא שטח המשולש הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה-x.

נשים לב עתה כי לכל x מתקיים:

לכן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1} = 0$$

אבל אמנם לכל $x \in [0,1)$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

אך:

$$\lim_{n\to\infty} f(1) = 1$$

ולכן, אם נגדיר את $f(x) \equiv 0$ נשים לב כי:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \nrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f}$$

כמו כן, נשים לב כי:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n^2 = \begin{cases} (n+1)^2\left(x - \frac{n}{n+1}\right)^2 & x \in \left[\frac{n}{n+1},1\right] \\ 0 & x \in \left[0,\frac{n}{n+1}\right) \end{cases}$$

ולכן, מתקיים:

$$\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\frac{n}{n+1}}^1 (n+1)^2\left(x - \frac{n}{n+1}\right)^2 dx} = \sqrt{(n+1)^2\left[\frac{\left(x-\frac{n}{n+1}\right)^3}{3}\right]_{\frac{n}{n+1}}^1}$$

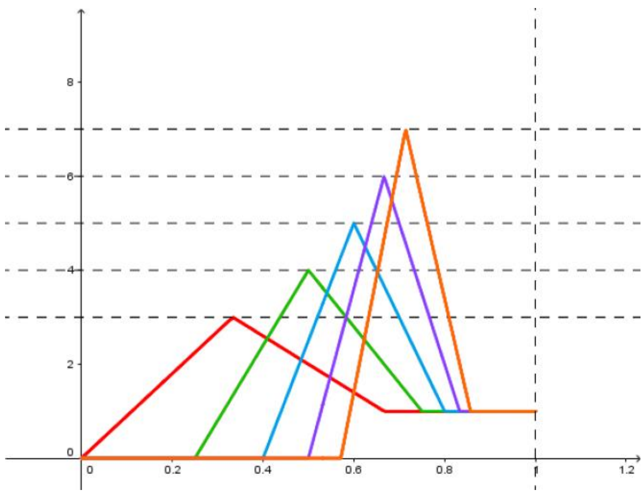
$$\|f_n\|_{L^2} = \sqrt{\frac{1}{3(n+1)^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = \|f\|_{L^2}$$

אך כפי שהראינו קודם, הפונקציה אינה מתכנסת נקודתית ל-f.כלומר:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \nrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = f}$$

ב. נגדיר את סדרת הפונקציות הבאה:

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad f_n(x)=\begin{cases} 1 & x\in\left(\frac{n}{n+1},1\right] \\ -n(n+1)\left(x-\frac{n}{n+1}\right)+1 & x\in\left(\frac{n-1}{n+1},\frac{n}{n+1}\right] \\ (n+1)^2\left(x-\frac{n-2}{n+1}\right) & x\in\left[\frac{n-2}{n+1},\frac{n-1}{n+1}\right] \\ 0 & x\in\left[0,\frac{n-2}{n+1}\right) \end{cases}$$



איור 2

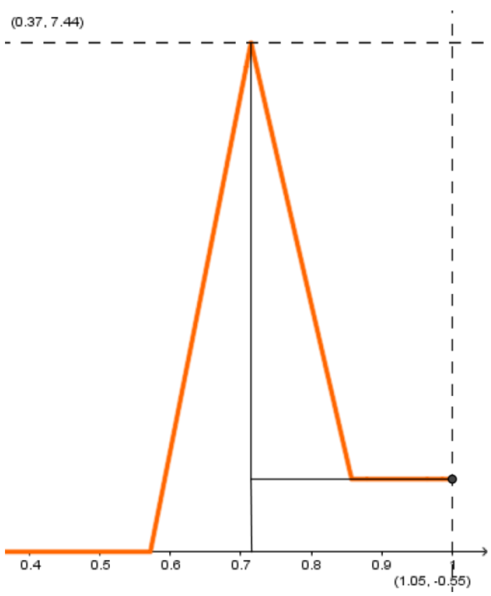
וראשית נשים לב, כי לכל $x\in[0,1)$ נוכל לבחור $N\in\mathbb{N}$ עבורו $f_n(x)=0$ לכל $n\geq N$ היות ולכן בתחום זה $f_n\xrightarrow{n\to\infty}0$.

עבור $x=1$ מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$ $f_n(1)=1$ ולכן אם נגדיר:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\in[0,1)\end{cases}$$

נקבל כי $f_n\xrightarrow{n\to\infty}f$ נקודתית בתחום.

אך נשים לב, כי לכל $n\in\mathbb{N}$, ניתן לחשב את הנורמה לפי d_{L^1} באופן הבא:



איור 3

היות והנורמה $\|f_n\|_{L^1}$ מוגדרת להיות $\int_0^1|f_n|dx$ כלומר השטח הגיאומטרי הכלוא בין f_n לבין ציר ה-x. במקרה זה ניתן לחלק את השטח באופן הבא (כמתואר באיור 3):

- משולש שאורך בסיסו $\frac{1}{n+1}$ וגובהו $n+1$, ולכן שטחו נתון על ידי $\frac{1}{2}$.
- משולש שאורך בסיסו $\frac{1}{n+1}$ וגובהו n, ולכן שטחו נתון על ידי $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}$.
- מלבן שגובהו 1 ואורך הצלע השניה היא $\frac{2}{n+1}$.

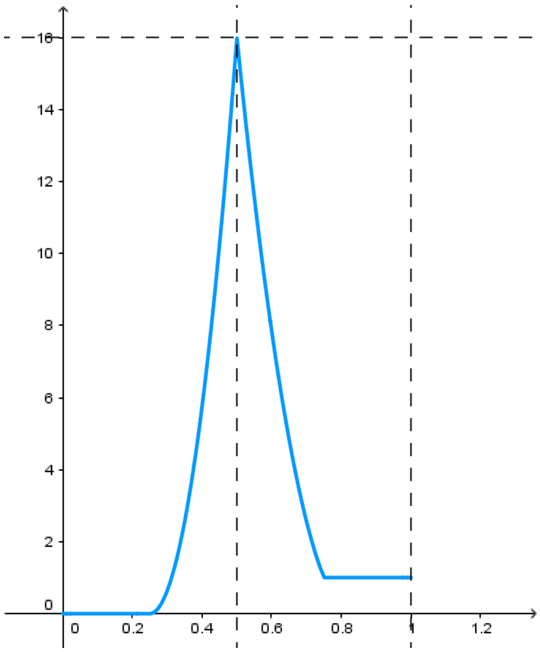
סה"כ נקבל כי מתקיים:

$$\|f_n-f\|_{L^1}=\|f_n\|_{L^2}=1-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{2}{n+1}$$

אך נקבל סתירה שכן:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^1}=1\neq 0}$$

וזאת על אף שהייתה התכנסות נקודתית. נראה, עתה, עבור הנורמה השניה, כי אין התכנסות גם לפיה.



איור 4

נשים לב כי מתקיים:

$$\|f_n\|_{L^2} = \int_0^1 f_n^2 dx$$

כפי שניתן לראות מתיאור הפונקציה עבור ערכי $n \in \mathbb{N}$ שונים באיור 4, ניתן לחלק את אינטגרל זה לכמה חלקים, נחשבם בנפרד:

- בתחום $\left[\frac{n-2}{n+1}, \frac{n-1}{n+1}\right]$ מתקיים:

$$\int_{\frac{n-2}{n+1}}^{\frac{n-1}{n+1}} (n+1)^4 \left(x - \frac{n-2}{n+1}\right)^2 dx =$$

$$(n+1)^4 \frac{1}{3}\left[\left(x - \frac{n-2}{n+1}\right)^3\right]_{\frac{n-2}{n+1}}^{\frac{n-1}{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(n+1)^4}{(n+1)^3} = \frac{1}{3}(n+1)$$

- בתחום $\left[\frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$ מתקיים:

$$n^2(n+1)^2 \int_{\frac{n-1}{n+1}}^{\frac{n}{n+1}} \left(\left(x - \frac{n}{n+1}\right) + 1\right)^2 dx = n^2(n+1)^2 \frac{1}{3}\left[\frac{\left((n+1)x+1\right)^3}{3(n+1)^3}\right]_{\frac{n-1}{n+1}}^{\frac{n}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{3}\frac{n^5}{n+1}$$

- בתחום $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$ מתקיים:

$$\int_{\frac{n}{n+1}}^{1} 1dx = \frac{1}{n+1}$$

ולכן נסיק כי הנורמה $\|f_n\|_{L^2}$ היא סכום האינטגרלים הללו, ונקבל כי:

$$\|f_n\|_{L^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n^2(n+1)^3}{n+1} - \frac{n^5}{n+1} + \frac{(n+1)^2}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3(n+1)}(1 + n^5 + 3n^4 + 3n^3 + n^2 - n^5 + n^2 + 2n + 1)$$

$$= \frac{2 + 2n + 2n^2 + 3n^3 + 3n^4}{3n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

לכן נסיק, כי על אף ההתכנסות הנקודתית, מתקיים:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2} = \infty}$$

<u>שאלה 3:</u>

א. יהא $x \in U$. נרצה להראות כי $\big(a(x), b(x)\big) \subseteq U$. לשם כך, יהא $x' \in \big(a(x), b(x)\big)$ כלשהו.

נסמן $M = \max\{x, x'\}$ וכן נסמן $m = \min\{x, x'\}$. נפריד למקרים:

- אם $a(x) = -\infty$, נבחר $m' = m - 1$.
- אם $b(x) = \infty$, נבחר $M' = M + 1$.
- אם $a(x)$ סופי, אזי מהגדרתו כאינפימום, נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט ל-$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(m - a(x)\right) > 0$, אשר חיובי משום ש-$\left(a(x), b(x)\right)$ הוא קטע פתוח ולכן בפרט $a(x) > y$ <u>לכל</u> $y \in \left(a(x), b(x)\right)$, נקבל כי קיים $x'' \in \left(a(x), b(x)\right)$, עבורו מתקיים $a(x) + \varepsilon > x''$, אך מכאן שמתקיים:
$$a(x) < x'' < a(x) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}a(x) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}a(x) < m$$
- אם $b(x)$ סופי, אזי מהגדרתו כסופרמום, נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}(b(x) - M) > 0$, קיים $y'' \in \left(a(x), b(x)\right)$, עבורו מתקיים $b(x) - \varepsilon < y''$ אך מכאן שמתקיים:
$$b(x) > y'' > b(x) - \frac{1}{2}(b(x) - M) = \frac{1}{2}b(x) - \frac{1}{2}M > M$$

בעבור ההגדרות הללו נקבל ממילא כי:
$$x, x' \in (m, M)$$
אך זהו קטע פתוח המכיל את x, ובנוסף הוא קטע ששייך ל-I, היות ו-I מכיל את כל הקטעים המכילים את x אשר קצותיהם גדולים מ-$a(x)$ וקטנים מ-$b(x)$.
לכן נסיק כי $(m, M) \subseteq U$ ולכן בפרט $x' \in U$, לכל $x' \in \left(a(x), b(x)\right)$ ולכן נסיק $\left(a(x), b(x)\right) \subseteq U$.

ב. יהיו $x_1, x_2 \in U$. נניח כי קיים $x \in \left(a(x_1), b(x_1)\right) \cap \left(a(x_2), b(x_2)\right)$. אזי בפרט:
$$a(x_1) < x < b(x_1) \quad a(x_2) < x < b(x_2)$$
נרצה להראות כי $a(x_1) = a(x_2), b(x_1) = b(x_2)$. לשם כך נפריד בין המקרים:
- אם $a(x_1) = -\infty$, נבחר $m \in \mathbb{N}$ כך ש-$-m < \min\{x_1, x, x_2\}$. לאחר מכן:
  - אם $b(x_1) = \infty$ נבחר $M \in \mathbb{N}$ כך ש-$M > \max\{x_1, x, x_2\}$. נקבל, אם כן, כי מתקיים:
  $$(-m, M) \ni x_1, x, x_2$$
  מחד, וכמו כן $(-m, M) \subseteq U$ (שכן $-m > a(x_1)$ וכן $M < b(x_1)$), אך מכאן נסיק כי $(-m, M) \in I(x_1)$ וגם $(-m, M) \in I(x_2)$ וזה נכון לכל $M' > M$ וכל $m' > m$, ולכן נסיק כי קצוות הקטעים המוכלים ב-$I(x_2)$ לא חסומים גם הם ומתקיים $a(x_1) = a(x_2)$ וכן $b(x_1) = b(x_2)$ כנדרש.
  - המקרה שבו $b(x_2) = \infty$ סימטרי שכן ניתן לבחור M כנ"ל באותה הדרך.
- אם $a(x_2) = -\infty$, המקרה סימטרי בדיוק למקרה שבו $a(x_1) = -\infty$ שכן ניתן לבחור m באותה צורה.
- במקרה שבו $a(x_1), a(x_2) > -\infty, b(x_1), b(x_2) < \infty$, נבחר:
$$M = \max\{b(x_1), b(x_2)\} \quad m = \min\{a(x_1), a(x_2)\}$$

מהגדרתם כסופרמום, נוכל לבחור $m < m' < \min\{x_1, x_2, x\}$ וכן $\max\{x_1, x_2, x\} < M' < M$ ולכן נקבל כי הקטע $(m, M) \subseteq U$ ולכן $(m, M) \in I(x_1), I(x_2)$. כלומר נשים לב כי כל M, m שנבחר עבור x_1 ניתן לבחור עבור x_2, ולכן נקבל כי $a(x_1) = a(x_2), b(x_1) = b(x_2)$.

מכאן שאם החיתוך אינו ריק, אזי בהכרח הקטעים הנ"ל שווים, כנדרש.

ג. נוכיח תחילה, כי בכל קטע על הישר הממשי קיים מספר רציונלי. יהא $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ כלשהו, ויהא $q \in \mathbb{Q}$ מספר רציונלי כלשהו כך ש-$q > b$ וכן יהא $\mathbb{Q} \ni p < a$ מספר רציונלי אחר. נגדיר תהליך איטרטיבי באופן הבא:
- $a_1 = \frac{p+q}{2}$.

- לכל $i \in \mathbb{N}$, אם $a_{i-1} < b$, אזי:
   i. אם $a_{i-1} > a$, אזי סיימנו, ומצאנו מספר רציונלי מתאים כמספר שהתקבל מפעולות של חיבור וכפל של מספרים רציונליים.
   ii. אם $a_{i-1} < a$, אזי נגדיר, $a_i = \frac{a_{i-1}+a_{i-2}}{2}$

   וכן אם $a_{i-1} < b$ נקבל את הכל בצורה סימטרית.

התהליך ייעצר, כאשר נגיע למספר רציונלי הנמצא בקטע, כנדרש.

עתה, נשים לב לכך, שכל קטע ב-I מהצורה $\big(a(x), b(x)\big)$ עבור $x \in U$ כלשהו, מכיל $x' \in U$ שהינו רציונלי. מספר רציונלי זה נקבע באופן יחיד, היות ובסעיף ב' הראנו כי במידה וקיים רציונלי המקושר לשני קטעים מצורה זו, נקבל כי הם זהים.

מכאן, שאם נסמן:

$$J = \left\{q \in \mathbb{Q} \middle| \exists x \in U \quad q \in \big(a(x), b(x)\big)\right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ולכן, היות ו-$\mathbb{Q}$ הינה קבוצה בת מניה, נקבל, כנדרש, כי גם J, השקולה ל-I (כקבוצת נציגים של האיברים בה), הינה קבוצה בת מניה.

ד. נשים לב כי לכל $q \in J$ נסמן ב-I_q את הקטע מ-I אשר q הוא נציגו, ונקבל כי:

$$U = \bigcup_{x \in U} x \subseteq \bigcup_{x \in U} \big(a(x), b(x)\big) = \bigcup_{q \in J} I_q$$

כך שאכן מתקיים, כי U הינה איחוד בן מניה של קטעים פתוחים, כנדרש.