מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים --- תרגול 10

1 משפט ארצלה--אסקולי

משפט 1.1 (אסקולי) X מרחב קומפקטי האוסדורף, Y מרחב מטרי. תת קבוצה $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ בעלת סגור קומפקטי (ביחס לנורמת ה-sup) אם ורק אם היא רציפה במידה אחידה ולקבוצה $\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}$ לכל $a \in X$ יש סגור קומפקטי.

רציפות במידה אחידה: $\mathcal{F}$ רציפה במידה אחידה אם לכל $x \in X$, $\epsilon > 0$ קיימת U סביבה פתוחה של x כך שלכל $f \in \mathcal{F}$, $y \in U$ מתקיים $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

טענה 1.2 תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ סדרה של פונקציות גזירות, בעלות נגזרות חסומות במשותף (כלומר, $\sup\{|f'(x)| \mid x \in [0,1], n \in \mathbb{N}\} = d < \infty$) ו-$f_n(0) = 0$ (לכל $n \in \mathbb{N}$) אזי ל-$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת.

הוכחה: צריך להראות שהסדרה חסומה נקודתית ורציפה במידה אחידה.

$f_n(0) = 0$ וגם $-d \le f_n'(x) \le d$ לכן $-dx \le f_n(x) \le dx$, לכן הפונקציות בסדרה חסומות נקודתית. בנוסף לכל $\epsilon > 0$ ולכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f_n(x) - f_n(y)| \le d \cdot |x-y| < \epsilon$ לכל $y \in B(x, \frac{\epsilon}{d})$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ (לפי משפט לגרנג')

לכן לפי משפט אסקולי יש לה תת סדרה מתכנסת. ∎

טענה 1.3 יהי X מרחב מטרי קומפקטי. נסמן ב-$\mathrm{Iso}(X)$ את (חבורת) האיזומטריות של X. $\mathrm{Iso}(X)$ קומפקטית (במטריקת ה-sup).

הוכחה: נשים לב ש-$\mathcal{F} := \mathrm{Iso}(X) \subset C(X,X)$. נשתמש במשפט אסקולי:

$\mathcal{F}$ היא רציפה במידה אחידה, כי לכל $\epsilon > 0$ ולכל $x \in X$ מתקיים $d(f(x), f(y)) = d(x,y) < \epsilon$ לכל $y \in B(x, \epsilon)$ ולכל $f \in \mathcal{F}$

וכמובן של-$\mathcal{F}_a$ יש סגור קומפקטי לכל $a \in X$ (כי X עצמו הוא קומפקטי).

$\mathcal{F}$סגורה, כי אם $f_n \in \mathcal{F}$ ו-$f_n \to g \in C(X,X)$ אז מתקיים לכל $x, y \in X$, $d(x,y) = d(f_n x, f_n y) \to d(gx, gy)$ לכן $d(x,y) = d(gx, gy)$ כלומר $g \in \mathcal{F}$.

לכן $\mathcal{F}$ קומפקטית. ∎

הערה 1.4 האם במקרה זה $C(X,X)$ קומפקטית? לא, כבר ראינו שיש סדרות ב-$C([0,1],[0,1])$ שאין לתת סדרה שלהן גבול, לכן היא אינה קומפקטית סדרתית.

טענה 1.5 $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$ קומפקטית ביחס לנורמה האופרטורית על $M_n(\mathbb{R})$. (כלומר הנורמה $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$)

הוכחה: שיטה 1: $M_n(\mathbb{R})$ הוא מרחב נורמי n^2 מימדי, כל הנורמות על $\mathbb{R}^{n^2}$ שקולות, לכן מספיק להראות ש-$O(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ סגורה וחסומה באחת מהנורמות, נבחר את הנורמה הסטנדרטית $\|A\| = \sqrt{tr(AA^t)}$.

חסומה, כי לכל $A \in O(n)$ מתקיים $\|A\| = 1$. סגורה, כי ההעתקה $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $f(A) = AA^t$, היא רציפה, ו-$O(n) = f^{-1}(\{I\})$ לכן סגורה.

שיטה 2: נשים לב ש- $O(n) \tilde{\to} Iso(\mathbb{S}^{n-1})$, $\mathbb{S}^{n-1}$ קומפקטית (סגורה וחסומה) ולכן $Iso\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ לכן קומפקטית. ■

הערה 1.6 ובאותו אופן החבורות:

$$\begin{aligned} SO(n) &= \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} \\ U(n) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I\} \\ SU(n) &= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} \end{aligned}$$