# חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא התכנסות במ"ש וטורי חזקות

**הגדרה:** $\{f_n(x)\}$ מתכנסת ל- $f(x)$ במ"ש בתחום $I$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N(\varepsilon)$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, לכל $x \in I$.

**הגדרה:** $\{f_n(x)\}$ מתכנסת ל- $f(x)$ נקודתית בתחום $I$ אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in I$ קיים $N(\varepsilon, x)$ כך שלכל $n > N(\varepsilon, x)$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

**קריטריון קושי:** $f_n \longrightarrow f$ במ"ש בתחום $I \iff$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שאם $m, n > N(\varepsilon)$ אז $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in I$.

**הגדרה:** טור פונקציות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בתחום $I$ אם סדרת הסכומים החלקיים $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ מתכנסת במ"ש.

**משפטים:**

1. אם $f_n \longrightarrow f$ נקודתית בתחום $I$, ונסמן $M_n = \sup\limits_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\}$, אזי:

$$f_n \longrightarrow f \text{ במ"ש} \iff \lim_{n \to \infty} M_n = 0$$

2. אם $f, f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n \longrightarrow f$ נקודתית ומונוטונית, $f_n$ רציפות, אזי:

$$f_n \longrightarrow f \text{ במ"ש} \iff f \text{ רציפה}$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש $\Longleftarrow$ $f_n \longrightarrow 0$ רציפה.

4. (מבחן $M$ של ויירשטראס) אם טור פונקציות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ על תחום $I$ מקיים $|f_n(x)| \le M$ לכל $n$ ולכל $x \in I$, ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ טור (אי-שלילי) מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

5. (אינטגרציה איבר-איבר) אם $\{f_n(x)\}$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ואם הסדרה $\{f_n(x)\}$ / הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ל- $f(x)$, אזי

$f$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

לסדרה: $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx\left(=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

לטור: $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx\left(=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)$$

הערה: לא לאינטגרלים מוכללים!

6. (גזירה איבר-איבר) אם $\{f_n(x)\}$ פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$, הסדרה $\{f_n(x)\}$ / הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית ב-$x_0\in[a,b]$ מסוים, וסדרת הנגזרות $\{f_n'(x)\}$ / טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$, אזי:

   (א) הסדרה $\{f_n(x)\}$ / הטור $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע.

   (ב) פונקצית הגבול $f(x)$ גזירה בקטע.

   (ג) לסדרה: $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \left(=(\lim_{n\to\infty} f_n)'\right)$.

   לטור: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x) \left(=(\sum f_n)'\right)$.

7. (משפט Abel) אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס עבור $x=\alpha$ מסוים $(\alpha\neq 0)$ אזי הטור מתכנס בהחלט עבור כל $|x|<\alpha$.

8. (משפט קושי-הדמר) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. רדיוס ההתכנסות נתון ע"י:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

9. (משפט דלמבר) יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. רדיוס ההתכנסות נתון ע"י:

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ בתנאי שהגבול קיים.

10. טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו.

11. יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R$, ונסמן את סכומו $f(x)$. אזי:

(א) $f(x)$ רציפה בתחום התכנסותו של הטור.

(ב) $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור בתחום התכנסותו של הטור, ומתקיים:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ולטור זה אותו רדיוס התכנסות ולפחות אותו תחום התכנסות.

(ג) $f(x)$ גזירה בכל נקודה $-R < x < R$ ומתקיים:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ולטור זה אותו רדיוס התכנסות ולכל היותר אותו תחום התכנסות.

בפרט, בכל נקודה בתוך תחום ההתכנסות של טור חזקות, מותר לגזור/לבצע אינטגרציה איבר-איבר.

12. (יחידות הצגת פונקציה כטור חזקות) אם $f(x) = \sum a_n x^n$ ב- $(-R, R)$ אזי $f$ גזירה מכל סדר ומתקיים $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

13. אם $f$ גזירה מכל סדר ב- $[-r, r]$ ויש $M$ כך שלכל $x \in [-r, r]$ ולכל $n$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$, אזי:

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ לכל $x$ ב- $[-r, r]$.

(כלומר אם הנגזרות חסומות במשותף, אזי $f$ היא הסכום של טור טיילור שלה.)

14. אם $\sum a_n x^n$ טור חזקות של $f_1(x)$,
ו- $\sum b_n x^n$ טור חזקות של $f_2(x)$, אזי:

(א) $\sum \gamma a_n x^n$ טור חזקות של $\gamma f_1(x)$ בתחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.

(ב) $\sum (a_n \pm b_n) x^n$ טור חזקות של $f_1 \pm f_2$ בכל $x$ ששייך ל-2 תחומי ההתכנסות.

(ג) נגדיר $c_n \triangleq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. אזי $\sum c_n x^n$ טור חזקות של $f_1 \cdot f_2$ בכל $x$ פנימי של 2 תחומי ההתכנסות.