אינפי 104195

תאריך: 13/11/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: גיליון 3

שם המתרגל: יוחאי מעיין

תרגיל בית 3

תאריך הגשה: יום חמישי, 13.11.2014.

1. הראו לפי הגדרת הגבול:

   א. לכל מספר ממשי a ולכל מספר טבעי k מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^k}=0$.

   ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{5n-9}=\frac{4}{5}$.

   ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n+2}{7n^2-n+5}=\frac{3}{7}$.

   ד. לא מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{4n^2+n+7}=1$.

   ה. הסדרה $a_n=n$ אינה מתכנסת.

2. תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. הראו כי קיימת סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של מספרים מתוך הקבוצה A (כלומר, $a_n\in A$ לכל n) כך ש-$\lim_{n\to\infty}a_n=\sup A$.

3. א. יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ ו-$\beta_1,\dots,\beta_m$ מספרים ממשיים, כאשר $k\le m$ ו-$\alpha_k,\beta_m\neq 0$. חשבו את ערכו של הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_k n^k+\alpha_{k-1}n^{k-1}+\cdots+\alpha_1 n+\alpha_0}{\beta_m n^m+\beta_{m-1}n^{m-1}+\cdots+\beta_1 n+\beta_0}$$

   ב. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$a_n=\frac{n^6-8}{4n^7-20n^5-1},\quad b_n=\frac{8n^{20}-24n^{16}+n^9-3}{7n^{20}+67n^{14}-8n^5+4},\quad c_n=\frac{6n^4+4n^2}{9n^4-n}$$

4. חשבו את הגבולות הבאים:

   א. $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2n^2-10n+11}-\sqrt{2n^2-7n-8}\right]$.

   ב. $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{7n^4-2n^2+n+11}-\sqrt{7n^4+5n^2+3n-9}\right]$.

   ג. $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^2-9n+1}-\sqrt[3]{n^2-8n-3}\right]$.

5. א. הראו כי אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\lim_{n\to\infty}A_n=L$, כאשר A_n היא סדרת הממוצעים החשבוניים:

$$A_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

   ב. הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמה נגדית מפורטת: אם ידוע שסדרת הממוצעים החשבוניים מתכנסת לאפס, אזי a_n מתכנס לאפס.

1א. לכל מספר ממש a וכל מספר טבעי k מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^k}=0$$

<u>k מספר טבעי</u>

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon);\ \forall n>N\quad\left|\frac{a}{n^k}-0\right|<\varepsilon$$

נחלק למקרים:

(i) <u>$a=0$</u>

$\left|\frac{0}{n^k}\right|<\varepsilon$ עבור כל $\varepsilon>0$ לפי ההגדרה
סדרה הקבועה של אפסים.

(ii) <u>$a>0$</u>

$$\left|\frac{a}{n^k}\right|<\varepsilon \xrightarrow{a>0} \frac{a}{n^k}<\varepsilon \qquad \frac{a}{\varepsilon}<n^k$$

$$n>\sqrt[k]{\frac{a}{\varepsilon}}$$

מכאן, נבחר $N=\left[\sqrt[k]{\frac{a}{\varepsilon}}\right]+1$

(iii) <u>$a<0$</u>

$$-\frac{a}{n^k}<\varepsilon$$

$$\sqrt[k]{\frac{-a}{\varepsilon}}<n$$

אם k זוגי, מחלק כי אין פתרון ממשי,
גם k אי זוגי, נבחר $N=\left[\sqrt[k]{\frac{-a}{\varepsilon}}\right]+1$

1ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{5n-9}=\frac{4}{5}$

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon);\ \forall n>N\quad\left|\frac{4n+3}{5n-9}-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{4n+3}{5n-9}-\frac{4}{5}\right|=\left|\frac{5(4n+3)-4(5n-9)}{5(5n-9)}\right|=\left|\frac{20n+15-20n+36}{25n-45}\right|$$

$$=\left|\frac{51}{25n-45}\right|<\left|\frac{51}{25n}\right|=\frac{51}{25n}<\varepsilon$$

$$n>\frac{51}{25\varepsilon}$$

מכאן, נבחר $N=\left[\frac{51}{25\varepsilon}\right]+1$

1א.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-6n+2}{7n^2+n+5} = \frac{3}{7}$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_{(\varepsilon)} ; \forall n>N \quad : \left|\frac{3n^2-6n+2}{7n^2+n+5} - \frac{3}{7}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n^2-6n+2}{7n^2+n+5} - \frac{3}{7}\right| = \left|\frac{7(3n^2-6n+2)-3(7n^2+n+5)}{7(7n^2+n+5)}\right|$$

$$= \left|\frac{-45n-1}{7(7n^2+n+5)}\right| \le \frac{45n+1}{49n^2+7n+35} < \frac{46n}{49n^2} < \varepsilon$$

נמצא הערכה - הקטנת מכנה והגדלת מונה

$$n > \frac{46}{49\varepsilon}$$

מכאן, נבחר $N = \left[\frac{46}{49\varepsilon}\right] + 1$

1ב. הוכח שלא מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{4n^2+n+5} = 1$$

אם הגדרת הגבול היא: $\forall \varepsilon>0, \exists N_{(\varepsilon)} ; \forall n>N : \left|\frac{2n^2+1}{4n^2+n+5} - 1\right| < \varepsilon$

אז ההגדרה שבה לא גבול היא: $\forall \varepsilon_0>0, \exists N_{(\varepsilon)} ; \forall n>N \left|\frac{2n^2+1}{4n^2+n+5} - 1\right| \ge \varepsilon_0$

$$\left|\frac{2n^2+1}{4n^2+n+5} - 1\right| = \left|\frac{2n^2+1-4n^2-n-5}{4n^2+n+5}\right| = \left|\frac{-2n^2-n-4}{4n^2+n+5}\right|$$

$$\ge \frac{2n^2+n+4}{4n^2+n+5} \ge \frac{\cancel{2}n^2}{\cancel{10}n^2} = \frac{1}{5}$$

נמצא הערכה - הגדלת מכנה, הקטנת מונה.

הוכחנו שלכל n טבעי מתקיים $|a_n - L| \ge \frac{1}{5} = \varepsilon_0$

לכן, בניגוד: שלכל N קיים $n>N$ כך ש $|a_n - L| \ge \varepsilon_0$.

מ.ש.ל.

1) ה) הסדרה $a_n=n$ לא מתכנסת.

נניח בשלילה שהסדרה $a_n=n$ מתכנסת, כלומר יש לה גבול, נסמנו ב-L.

L מספר קבוע.

אם כך מתקיים לפי הגדרה: $\forall\varepsilon>0, \exists N_{(\varepsilon)}, \forall n>N \quad |n-L|<\varepsilon$

$$|n-L|<\varepsilon \longrightarrow -\varepsilon<n-L<\varepsilon \longrightarrow \underbrace{L-\varepsilon}_{\text{מספר קבוע}}<\underbrace{n}_{\infty}<\underbrace{\varepsilon+L}_{\text{מספר קבוע}}$$

לפי כלל הסנדוויץ' $L \leftarrow n$, אך זוהי סתירה
כי נתון ש- $n\rightarrow\infty$:

אם השוויון השמאלי $n>L-\varepsilon$ קיבלנו ש∞ גדול ממספר קבוע
זוהי בעצם ההגדרה של ∞ ולכן, אי שוויון זה אינו משפיע על
התרגיל.

אם השוויון הימני לעומת זאת קיבלנו $L+\varepsilon>n$, קיבלנו ש∞
קטן ממספר קבוע זוהי סתירה.

מכאן, n לא מתכנסת - ע"פ כלל הפיצה.

2. נתון: A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. הראו כי קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים מתוך הקבוצה A (כלומר $a_n \in A$, לכל n) כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$

נחלק לשני מקרים:

(I) $\sup A = \max A$. כלומר, קיימת סדרה קבועה שמכילה את איבר ה-$\max A$, ומכאן ברור ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

(II) קיימת סדרה שאיבריה לקוחים מקבוצה A. נסמן את האיבר הראשון שלה ב-a_1. לפי הגדרת הסופרמום (אינו מקבוצה) תמיד נוכל למצוא מספר אשר גדול ממספר זה ונסמן אותו ב-a_2.

כך ניתן להמשיך עד אינסוף $a_n > \dots > a_3 > a_2 > a_1$

בשלב מסוים החל מאיבר מסוים כל האיברים יתכנסו ל-$\sup A$.

3א. יהיו $a_1,\dots\dots a_k$ ו- $B_1,\dots\dots B_m$ מספרים ממשיים,
כאשר $k\le m$ ו- $a_k, B_m \neq 0$. חשבו את ערכו של הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_k\cdot n^k+a_{k-1}\, n^{k-1}+\dots\dots+a_1 n+a_0}{B_m\cdot n^m+B_{m-1}\cdot n^{m-1}+\dots\dots+B_1 n+B_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k\left(a_k+\cancel{\frac{a_{k-1}}{n}}^{0}+\dots+\cancel{\frac{a_1}{n^{k-1}}}^{0}+\cancel{\frac{a_0}{n^k}}^{0}\right)}{n^m\left(B_m+\cancel{\frac{B_{m-1}}{n}}_{0}+\dots+\cancel{\frac{B_1}{n^{m-1}}}_{0}+\cancel{\frac{B_0}{n^m}}_{0}\right)}$$ לפי אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^m}\cdot\frac{a_k}{B_m}$$ ידוע כי $a_k, B_m\neq 0$

אם $m>k$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{n^{m-k}}_{\text{חיובי}}}\cdot\frac{a_k}{B_m}=0$ לפי אריתמ' של גבולות

אם $m=k$: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^k}\cdot\frac{a_k}{B_m}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_k}{B_m}=\frac{a_k}{B_m}$

ב.

- $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6-8}{4n^7+20n^5-1}=\lim\frac{\cancel{n^6}\left(1-\cancel{\frac{8}{n^6}}^{0}\right)}{n^{\cancel{7}}\left(4+\cancel{\frac{20}{n^2}}_{0}-\cancel{\frac{1}{n^7}}_{0}\right)}$ לפי אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{n\to\infty}\cancel{\frac{1}{4n}}^{0}=0$$ לפי אריתמטיקה של גבולות

- $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^{20}-24n^{16}+n^9-3}{7n^{20}+67n^{14}-8n^5+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^{20}}\left(8-\cancel{\frac{24}{n^4}}^{0}+\cancel{\frac{1}{n^{11}}}^{0}-\cancel{\frac{3}{n^{20}}}^{0}\right)}{\cancel{n^{20}}\left(7-\cancel{\frac{67}{n^6}}_{0}-\cancel{\frac{8}{n^{15}}}_{0}+\cancel{\frac{4}{n^{20}}}_{0}\right)}$ לפי אריתמטיקה של גבולות

$$=\frac{8}{7}$$

- $\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{6n^4+4n^2}{9n^4-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}\left(6+\cancel{\frac{4}{n^2}}^{0}\right)}{\cancel{n^4}\left(9-\cancel{\frac{1}{n^3}}_{0}\right)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

לפי אריתמטיקה של גבולות

4. חשבו את הגבולות הבאים:

א)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2n^2-10n+11}-\sqrt{2n^2+7n-8}\right]$$

נשתמש בזהות: $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2n^2-10n+11}-\sqrt{2n^2+7n-8}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cancel{2n^2}-10n+11-\cancel{2n^2}-7n+8}{\sqrt{2n^2-10n+11}+\sqrt{2n^2+7n-8}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-17n+18}{\sqrt{n^2(2-\frac{10}{n}+\frac{11}{n^2})}+\sqrt{n^2(2+\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2})}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{-17n+18}{\sqrt{2}\,n+\sqrt{2}\,n}$$

אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-17n+18}{2\sqrt{2}\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(-17+\frac{18}{n})}{2\sqrt{2}\,\cancel{n}}=\boxed{\frac{-17}{2\sqrt{2}}}$$

אריתמטיקה של גבולות

ב)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{7n^4-2n^2+n+11}-\sqrt{7n^4+5n^2+3n-9}\right]$$

נשתמש בזהות $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cancel{7n^4}-2n^2+n+11-\cancel{7n^4}-5n^2-3n+9}{\sqrt{n^4(7-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{11}{n^4})}+\sqrt{n^4(7+\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}-\frac{9}{n^4})}}\right]$$

אריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-7n^2-2n+20}{\sqrt{7}n^2+\sqrt{7}n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(-7-\frac{2}{n}+\frac{20}{n^2})}{\cancel{n^2}(\sqrt{7}\cdot 2)}$$

אריתמטיקה של גבולות

$$=\frac{-7}{\sqrt{7}\cdot 2}=\boxed{-\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^2-9n+1}-\sqrt[3]{n^2+8n-3}\right]$$ 4ג.

$A=\sqrt[3]{n^2-9n+1}$
$B=\sqrt[3]{n^2+8n-3}$

נשתמש בזהות: $A-B=\dfrac{A^3-B^3}{a^2+2ab+b^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2-9n+1-(n^2+8n-3)}{\sqrt{(n^2-9n+1)\cdot(n^2+8n-3)}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{n^2-9n+1}\right)^2}_{A^2}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{n^2+8n-3}\right)^2}_{B^2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-17n+4}{\sqrt{n^4-n^3-74n^2+35n-3}+\underset{0}{A^2}+\underset{0}{B^2}}$$

אריתמטיקה של גבולות
$\left(\sqrt[3]{n^2}\right)^2=n^{2\frac{2}{3}}\longrightarrow 0$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-17n+4}{\sqrt{n^4\left(1-\underset{0}{\frac{1}{n}}-\underset{0}{\frac{74}{n^2}}+\underset{0}{\frac{35}{n^3}}-\underset{0}{\frac{3}{n^4}}\right)}}$$ $\longrightarrow$ אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-17n+4}{n^2}=\frac{\cancel{n}\left(-17+\overset{0}{\frac{4}{\cancel{n}}}\right)}{n^{2}}$$ אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{n\to\infty}\overset{0}{\frac{-17}{n}}$$ אריתמטיקה של גבולות

$=0$

5א. הראו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אז $\lim_{n\to\infty} A_n$ היא סדרת הממוצעים החשבוניים: $A_n = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$

נתון: $\forall \varepsilon_1>0,\ \exists N_1(\varepsilon): \forall n>N_1\ |a_n - L|<\varepsilon_1$

צריך להוכיח: $\forall \varepsilon_2>0,\ \exists N_2(\varepsilon): \forall n>N_2\ \left|\frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n} - L\right| < \varepsilon_2$

$$\left|\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} - L\right| = \left|\frac{a_1+a_2+\dots+a_{N_1}+a_{N_1+1}+\dots+a_n - Ln}{n}\right|$$

כי ממקום מסוים (N_1) הסדרה מתקרבת לשאוף ל-L

$$= \left|\frac{\overbrace{(a_1-L)+(a_2-L)+\dots+(a_{N_1}-L)}^{\text{קבוע, נסמן ב-}b}}{n} + \frac{(a_{N_1+1}-L)+\dots+(a_n-L)}{n}\right|$$

כל איבר קטן מ-ε_1

$$\underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} \left|\frac{b}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1}-L)+\dots+(a_n-L)}{n}\right| < \left|\frac{b}{n}\right| + \left|\frac{(n-N_1)\cdot\varepsilon_1}{n}\right| < \varepsilon_2$$

שואף ל-0 *

שואף ל-0

$n, N_1 \in \mathbb{N}$

$n-N_1<n$

$\frac{n-N_1}{n}<1$

$\varepsilon_1\cdot\left(\frac{n-N_1}{n}\right)<\varepsilon_1$

*הוכחת עזר:

$\forall \varepsilon'>0,\ \exists N'(\varepsilon): \forall n>N': \left|\frac{b}{n} - 0\right| < \varepsilon'$

$\frac{b}{n} < \varepsilon' \to n > \frac{b}{\varepsilon'}$ ← סדרת חיוביים כי $n \to n$ טבעי.

לכל $n > N'$ מתקיים ש-$\frac{b}{n}$

נבחר $N' = \left[\frac{b}{\varepsilon}\right]+1$

$$\underset{\forall}{\varepsilon_2} = \underset{\exists}{\varepsilon_1} + \underset{\exists}{\varepsilon'}$$

ולכן נבחר $N_2 = \max[N', N_1]$

מ.ש.ל

2ב. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית מפורטת: אם
יהא שסדרת הממוצעים החשבוניים מתכנסת לאפס, אזי a_n
מתכנס לאפס.

לא ~~נכון~~

נתונה סדרת הממוצעים החשבוניים הבאה: $A_n=\frac{(-1)^n}{n}$
הסדרה שואפת לאפס. ו-$a_n = (-1)^n$ אפילו לא מתכנסת, ולכן
בטח שגבולה הוא לא אפס.