גבולות ורציפות

הגדרה 0.1 נאמר שפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ שואפת לגבול L בנקודה $(x,y)\in\mathbb{R}^n$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_\varepsilon>0$ כך שלכל ווקטור $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ מספיק קטן $0<\sqrt{h^2+k^2}<\delta_\varepsilon$ מתקיים ש $|f(x+h,y+k)-L|<\varepsilon$.

ובמילים אחרות, כאשר מתקרבים לנקודה (x,y), אז ערך הפונקציה מתקרב ל L.
אם $L=f(x,y)$ אז הפונקציה נקראת רציפה ב (x,y).

הערה חשובה: כאשר התעסקנו בפונקציות במשתנה אחד היו בדיוק שני כיוונים בהם יכלנו להתקרב לנקודה x_0 - מכיוון חיובי ושלילי. כאשר עוברים למימד 2 ומעלה יש אינסוף כיוונים (ישרים) בהם ניתן להתקרב לנקודה P_0 ובפרט ניתן להתקרב ל P_0 גם דרך עקומים שאינם ישרים ולכן

מסקנה: כדי להראות שפונקציה אינה רציפה ב P_0, מספיק למצוא סדרה Q_n כך ש $Q_n\to P_0$ אבל $f(Q_n)\not\to f(P_0)$.
דרך נוספת, היא להגדיר עקום $\varphi(t)$ כך ש $\varphi(t_0)=P_0$ ולהסתכל על הפונקציה $f(\varphi(t))$ (כלומר הערכים שהפונקציה מקבלת לאורך העקום) ולבדוק מה הגבול כאשר $t\to t_0$.

תרגיל 1:

בדקו האם קיים גבול בראשית לפונקציה

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{3x^2+2y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

פתרון:

נשים לב שאם קיים גבול, אז נקבל אותו גבול על כל מסלול שמתכנס לראשית. בפרט הגבול סה"כ יהיה חייב להיות $\lim\limits_{t\to0}f(t,0)=0$ - נראה שהגבול הוא אכן אפס. כדי לבדוק גבול בראשית, מספיק להסתכל על המקרה בו $|x|,|y|<1$. ננסה לחסום את הפונקציה

$$\begin{aligned}|f(x,y)-0| &= \frac{|xy^3|}{3x^2+2y^2}\overset{(*)}{\leq}\frac{|y^3|}{3x^2+2y^2}\leq\frac{|y^3|}{2y^2}=\frac{1}{2}|y|\\ \lim_{(x,y)\to0}|f(x,y)| &\leq \lim_{(x,y)\to0}\frac{1}{2}|y|\to0\end{aligned}$$

בשפת אפסילון דלתא: לכל $\varepsilon>0$ נבחר $\delta_\varepsilon=\min(1,\varepsilon)$ ולכן נקבל ש $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta_\varepsilon\leq1$ שהיינו צריכים בשביל $(*)$, ובנוסף $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta\leq\varepsilon$. לכן סה"כ נקבל ש $|f(x,y)-f(0,0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
הסיבה שכדאי לעבור לערך מוחלט היא ש $0\leq|f(x,y)|$ ועכשיו מקבלים ע"י כלל הסנדוויץ' שלפונקציה יש גבול בראשית.
למה כדאי להשתמש בחסם של $|x|<1$ ולא $|y|<1$ (באי שוויון הראשון משמאל)? הסבירו לעצמכם.

תרגיל 2:

בדקו האם לפונקציה הבאה יש גבול בראשית

$$f(x,y)=\frac{xy}{3x^2+2y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

פתרון:

נשים לב שאם נתקרב לראשית דרך הצירים, כלומר עם המסלולים $(t,0)$ או $(0,t)$ נקבל שהגבול בסדר הוא אפס (כי $f(t,0)=f(0,t)=0$).
לעומת זאת נסתכל על המסלול $\varphi(t)=(t,t)$ כאשר $t\to 0$ אז מקבלים ש

$$f(\varphi(t))=\frac{t\cdot t}{3t^2+2t^2}=\frac{t^2}{5t^2}=\frac{1}{5}$$

קיבלנו שהפונקציה קבועה על הישר $\{(t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ פחות הנקודה אפס, ולכן בפרט הגבול שלה לאורך הישר הזה שווה ל $\frac{1}{5}$, ולכן לא יתכן שהפונקציה רציפה בראשית. באופן כללי נוכל להסתכל על ישרים שעוברים בראשית (t,kt) ולראות שהגבולות שונים.

תרגיל 3:

הראו שלפונקציות הבאות אין גבול בראשית

$$f(x,y)=\frac{x^2-x+y^2-x}{|x|+|y|},\qquad g(x,y)\frac{xy}{x^2+\sin^2(y)}$$

פתרון:

עבור f: נסתכל על העקום $\varphi(t)=(t,t)$ ואז נקבל

$$\lim_{t\to 0}\frac{3t^2-3t}{3\,|t|}=\frac{t}{|t|}(t-1)$$

אם t שואף לאפס מהכיוון החיובי אז הגבול הוא (-1), ואם מהכיוון השלילי אז הגבול הוא 1, ולכן אין גבול בראשית.
עבור g: נרצה שהביטויים $x^2\sim\sin^2 y$ יהיו דומים, אז נבחר את העקום $(\sin(t),t)$ - הוא עובר בראשית עבור $t=0$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\sin(t)}{2\sin^2(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin(t)}=\frac{1}{2}$$

כדי למצוא גבול נוסף בראשית, נשים לב שעבור העקום $(t,0)$ המונה הוא זהותית אפס ולכן מקבלים שהגבול בראשית הוא אפס. קיבלנו שני גבולות שונים ולכן אין גבול בראשית.

מעבר לקורדינטות פולריות (קוטביות):

הגדרה 0.2 תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. נאמר ש $\lim_{r\to 0}f(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))=L$ כאשר ההתכנסות היא במ"ש ב θ, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_\varepsilon>0$ (**שאינו תלוי ב** θ) כך שאם $0\leq r<\delta_\varepsilon$ אז

$$|f(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))-L|<\varepsilon\,.$$

משפט 0.3 תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. אז הגבול $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ אמ"מ $\lim_{r\to 0} f(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))=L$ במ"ש ב θ.

הוכחה: אם נסמן $h=x-x_0,\ k=y-y_0$ אז בהצבה של הקור' הפולריות נקבל ש $r=\sqrt{h^2+k^2}$. שאר המשפט נובע מההגדרות של הגבולות. ■

ע"י הגדרת $g(h,k)=f(x+h,y+k)$, במקום לבדוק את הגבול של f ב (x,y) מספיק לבדוק את הגבול של g בראשית. באותה צורה ניתן להסתכל על הפונקציה $g(h,k)-L$ כדי לבדוק האם הגבול הוא 0 במקום L. בצורה זו מספיק לבדוק האם הגבול של $|g(h,k)-L|$ הוא אפס ואז צריך רק לחסום מלמעלה.

במקרה זה, כדי להראות התכנסות של פונקציה (בראשית ולאפס) נרצה ש

$$|f(x,y)|=|f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))|\le\alpha(r)\beta(r,\theta)$$

כאשר $\lim_{r\to 0}\alpha(r)=0$ ו $\beta(r,\theta)$ חסומה כאשר r קטן.

תרגיל 4:

מצא את הגבול של הפונקציות הבאות בראשית

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+4y^2}\qquad g(x,y)=\frac{x\sin(y^2)}{x^2+y^2}$$

פתרון:

- ע"י הצבת המסלול $(t,0)$ קל לראות שאם קיים גבול אז הוא צריך להיות אפס. נשתמש בהצבה הפולרית

$$|f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))|=\left|\frac{r^3\cos^3(\theta)+r^3\sin^3(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+4\sin^2(\theta))}\right|=r\frac{\left|\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right|}{(\cos^2(\theta)+4\sin^2(\theta))}=r\frac{\left|\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right|}{1+3\sin^2(\theta)}$$

  הפונקציה $\alpha(r,\theta)=r$ שואפת לאפס כאשר $r\to 0$ ו $|\beta(r,\theta)|=\left|\frac{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}{1+3\sin^2(\theta)}\right|\le\frac{\left|\cos^3(\theta)\right|+\left|\sin^3(\theta)\right|}{1}\le 2$ חסומה, ולכן יש התכנסות.

- בפונקציה השנייה, הצבה של $(t,0)$ תראה שאם קיים גבול אז הוא אפס. נשים לב תחילה ש $|\sin(t)|\le|t|$ לכל t, ולכן מספיק להראות שהפונקציה החוסמת מלמעלה שואפת לאפס. ע"י הצבה פולרית נקבל ש $|g(x,y)|\le\frac{|xy^2|}{x^2+y^2}$ כי

$$\left|\frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2}\right|=r\left|\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right|\le r$$

  ושוב נקבל שהפונקציה שואפת לאפס.

הגדרה 0.4 לפונקציה $f(x,y)$ יש גבול בכיוון $v=(v_x,v_y)$ בנקודה (x_0,y_0), אם כאשר מתקדמים בכיוון v, כלומר לאורך הישר $\varphi(t)=(x_0,y_0)+t(v_x,v_y)$ לנקודה, אז קיים גבול. פורמלית

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t))\to L$$

מבחינת קורדינטות פולריות זה אומר שעבור הזווית θ_v (הקבועה!) שמתאימה לכיוון v, קיים הגבול $\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_v),r\sin(\theta_v))=L$.

הערה: לפונקציה בתרגיל 2 יש גבול בראשית לאורך כל ישר שעובר בראשית, אבל אין לה גבול בראשית! ננסה לבנות עוד פונקציה כזאת.

תרגיל 5:

נגדיר $f(x,y)=\frac{xy^2}{y^4+x^2}$ לכל $(x,y)\neq(0,0)$. הראו של f יש גבול לאורך כל ישר העובר בראשית, אך אין לה גבול בראשית.

פתרון:

יהא $v=(a,b)$ ישר, אז צריך למצוא את הגבול של $f(at,bt)=\frac{ab^2t^3}{b^4t^4+a^2t^2}=\frac{ab^2t}{b^4t^2+a^2}$ כאשר $t\to 0$. נפריד למקרים:

$a=0$: הפונקציה שווה זהותית לאפס ולכן הגבול הוא אפס.

$a\neq 0$: הגבול של המכנה הוא $a^2\neq 0$ ולכן ניתן להשתמש באריתמטיקה של גבולות ונקבל שהגבול הוא $\frac{0}{a^2}=0$.

קיבלנו שהגבול לאורך כל ישר הוא אפס. לעומת זאת, אם ננוע לאורך העקום (t^2,t) (וזה ידאג שהחזקות של x,y במכנה יהיו זהות), אז נקבל

$$f(t^2,t)=\frac{t^4}{2t^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

כלומר אין גבול בראשית.

דרך נוספת להראות שיש גבולות לאורך ישרים, זה ע"י קורדינטות פולריות:

$$f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^4\sin^4(\theta)+r^2\cos^2(\theta)}=r\left(\frac{\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\sin^4(\theta)+\cos^2(\theta)}\right)$$

כאשר קובעים את θ, אם $\cos^2(\theta)\neq 0$ אז מאריתמטיקת גבולות נקבל שהגבול הוא אפס, ואם $\cos(\theta)=0$ אז הפונקציה שווה זהותית לאפס. שימו לב שבתרגיל הזה בניגוד לתרגילים הקודמים קיבלנו פונקציה מהצורה $\alpha(r)\beta(r,\theta)$, אבל β אינה חסומה.

תרגיל 6:

הראו שהפונקציה הבאה רציפה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x+y)}{x+y} & x+y\neq 0\\ 1 & x+y=0\end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שבנקודות $x+y\neq 0$ נקבל שהפונקציה רציפה כהרכבה של רציפות. ניתן אף להכליל את זה בצורה הבאה - נגדיר $g(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t)}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ ואז $f(x,y)=g(x+y)$. הפונקציה g רציפה (אינפי 1) ו $(x,y)\mapsto x+y$ רציפה ולכן f היא הרכבה של רציפות (בכל המישור) ולכן רציפה בעצמה.

תרגיל 7:

הראו שלפונקציה הבאה יש גבול בראשית

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)x}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}$$

פתרון:

כרגיל, נתחיל את התרגיל ע"י כך שנשים לב שלאורך המסלול $(0,t)$ הפונקצייה שווה זהותית לאפס, ולכן אם קיים גבול אז הוא חייב להיות אפס.

היינו רוצים להשתמש בקירובים $\sin(t),\tan(t),\ln(1+t)\sim t$ שאנחנו מכירים מפונקציות במשתנה אחד. הדרך כלל כדי לפשט פונקציות כאלו נרשום (למשל) $\sin(x)=\frac{\sin(x)}{x}x$ ואז $\frac{\sin(x)}{x}\to 1$ ונשתמש איכשהו באריתמטיקה של גבולות. הבעיה היא שיכול להיות ש $(x,y)\neq(0,0)$ אבל x כן שווה לאפס.

כדי להימנע מהבעיה הזאת נסמן $A = \{(x,y) \mid x = 0 \; or \; y = 0\}$ ונראה שהגבול קיים בנפרד על A וכל $\mathbb{R}^2 \backslash A$ ולכן הגבול קיים סה"כ. מאחר ו $\ln(1) = 0$ אז $f \mid_A \equiv 0$ ולכן הגבול שם הוא אפס. ב $\mathbb{R} \backslash A$ נוכל לחלק ב x, y ונקבל ש

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\ln(1+xy)x}{\sin^2(x)+\tan^2(y)} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot \frac{x^2y}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}$$

הביטוי הראשון שואף לאפס (הרכבה של הפונקציה $\frac{\ln(1+t)}{t}$ ו $t = xy$) ולכן מספיק לחשב את הגבול של הביטוי השני ולהשתמש באריתמטיקת גבולות. כדי להיפטר מה $\sin(x)$, $\tan(y)$ במכנה ניתן לעשות חישובים דומים, או להשתמש בחסמים $|\sin(x)| \geq \frac{|x|}{2}$ עבור x מספיק קרוב לאפס וכנ"ל $|\tan(y)| \geq \frac{|y|}{2}$ עבור y מספיק קרוב לאפס (זה נובע מהגבולות $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ ו $\frac{\tan(y)}{y} \to 1$).

$$\left|\frac{x^2y}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}\right| = \frac{|x^2y|}{\sin^2(x)+\tan^2(y)} \leq \frac{|x^2y|}{x^2/2+y^2/2} = \frac{2\,|x^2y|}{x^2+y^2}$$

עכשיו הצבה רגילה של קור' פולריות תראה שהגבול של הביטוי היני הוא אפס, וע"י סנדוויץ' גם הגבול של הפונקציה המקורית הוא אפס.

תרגיל 8:

תהי $f(x,y)$ מוגדרת לכל (x,y) כך ש

1. לכל x קבוע, הפונקציה $f_x(y)=f(x,y)$ רציפה (כפונקציה של המשתנה y)
2. לכל y קבוע, הפונקציה מקיימת $|f(x,y)-f(x_0,y)|<|x-x_0|$

הוכח שהפונקציה רציפה.

פתרון:

אנחנו רוצה לחשב את המרחק בין (x_0,y_0) ל (x,y) ונרצה להשתמש בנתונים שיש לנו

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &= |f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| \\ &\leq |f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| \\ &\leq 2|x-x_0|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &\leq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2|x-x_0|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)| \to 0\end{aligned}$$

שאלה: אם מחליפים את תנאי 2 ב "לכל y קבוע הפונקציה $f_y(x)=f(x,y)$ היא רציפה", האם הפונקציה $f(x,y)$ עדיין חייבת להיות רציפה?