פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 5

.1

(א) לא נכון. לקבוצה $\Sigma = \{p \to p\}$ יש מודל, אבל לא לקבוצה $\{\neg(p \to p)\}$.

(ב) נכון. יהי M מודל של Σ. אם $M \models A$ אז M מודל של $\Sigma \bigcup \{A\}$ ולכן $\Sigma \bigcup \{A\}$ חסרת סתירה. אחרת $M \models \neg A$ ואז M מודל של $\Sigma \bigcup \{\neg A\}$ ולכן $\Sigma \bigcup \{\neg A\}$ חסרת סתירה.

(ג) נכון. נניח כי A יכיח מתוך Σ. אז מתוך $\Sigma \bigcup \{\neg A\}$ יכיחים גם A וגם $\neg A$, ולכן $\Sigma \bigcup \{\neg A\}$ בעלת סתירה. בכיוון ההפוך, נניח כי $\Sigma \bigcup \{\neg A\}$ בעלת סתירה. אז כל פסוק יכיח מתוכה, ובפרט $\Sigma \bigcup \{\neg A\} \vdash A$. כמו כן ברור כי $\Sigma \bigcup \{A\} \vdash A$. לפי משפט עזר 2 מההרצאה, נובע כי $\Sigma \vdash A$.

(ד) לא נכון. תהי $\Sigma = \emptyset$ ויהי $A = p$. קיים מודל של Σ (כל השמה היא מודל של Σ) שבו p שקרי, אבל $\neg p$ אינו יכיח (כי אינו טאוטולוגיה).

.2

(א) נתבונן בתחשיב הפסוקים שבו $\mathcal{AP} = \{p_{b,g} | b \in B, g \in K_b\}$. אינטואיטיבית, $p_{b,g}$ טוען ש b משודך ל g. לכל $B' \subseteq B$ נגדיר את קבוצות הפסוקים הבאות:

$$\Sigma_1(B') = \{ \bigvee_{g \in K_b} p_{b,g} | b \in B'\}$$

(בכתיב $\bigvee_{g \in K_b} p_{b,g}$ אנו מתכוונים לדיסיונקציה של כל הפסוקים האטומיים $p_{b,g}$ כאשר g עובר על כל הבנות ב - K_b. זו צורה חוקית לפסוק, כי K_b סופית.)

$$\Sigma_2(B') = \{\neg(p_{b,g_1} \bigwedge p_{b,g_2}) | b \in B', g_1, g_2 \in K_b, g_1 \neq g_2\}$$

$$\Sigma_3(B') = \{\neg(p_{b_1,g} \bigwedge p_{b_2,g}) | b_1, b_2 \in B', g \in K_{b_1} \bigcap K_{b_2}, b_1 \neq b_2\}$$

$$\Sigma(B') = \Sigma_1(B') \bigcup \Sigma_2(B') \bigcup \Sigma_3(B')$$

טענה: תהי $B' \subseteq B$. אזי ל - B' יש שידוך אם ורק אם ל $\Sigma(B')$ יש מודל.

הוכחה:

נניח של-B' יש שידוך $f : B' \to G$. נגדיר השמה M ע"י:

עבור $b \in B'$, $M(p_{b,g}) = T$ אם ורק אם $f(b) = g$, ועבור $b \notin B'$ $M(p_{b,g})$ מוגדר באופן שרירותי. מן העובדה ש-fשידוך נובע כי M מודל של $\Sigma(B')$.
בכיוון ההפוך נניח של $\Sigma(B')$ יש מודל M. נגדיר פונקציה $f : B' \to G$ ע"י: $f(b) = g$ אם ורק אם $M(p_{b,g}) = T$. מן העובדה ש-M מודל של $\Sigma(B')$ נובע כי f מוגדרת היטב והיא שידוך של B'.

נחזור להוכחת הנאמר בשאלה, כלומר שאם לכל $B' \subseteq B$ סופית יש שידוך אז ל B יש שידוך. לפי הטענה, די לראות כי ל־$\Sigma(B)$ יש מודל. לפי משפט הקומפקטיות, די להראות כי לכל $\Sigma_0 \subseteq \Sigma(B)$ סופית יש מודל. תהי אפוא Σ_0 תת־קבוצה סופית של $\Sigma(B)$. תהי B_0 קבוצת הבנים המופיעים באינדקסים של הפסוקים ב־Σ_0. אז B_0 סופית ומתקיים $\Sigma_0 \subseteq \Sigma(B_0)$. לפי תנאי השאלה יש ל B_0 שידוך, לכן לפי הטענה יש ל $\Sigma(B_0)$ מודל. לפיכך גם ל Σ_0 החלקית לה יש מודל, כנדרש.

(ב) כדי להראות של־B יש שידוך, מספיק להראות לפי חלק א' שלכל $B' \subseteq B$ סופית יש שידוך. תהי B' תת־קבוצה סופית של B. לפי משפט החתונה הרגיל, כדי של - B' יהיה שידוך צריך שיתקיים $|\bigcup_{b \epsilon B''} K_b| \geq |B''|$ לכל $B'' \subseteq B'$. תנאי זה אכן מתקיים לפי ההנחה.

(ג) ניקח $B = \{b_0, b_1, b_2, ...\}$, $G = \{g_1, g_2, ...\}$,

$$K_b = \begin{cases} \{g_n\} & b = b_n, n \geq 1 \quad \text{אם} \\ G & b = b_0 \quad \text{אם} \end{cases}$$

התנאי הנדרש מתקיים לכל $B' \subseteq B$, כי אם $b_0 \notin B'$ אז $|\bigcup_{b \in B'} K_b| = |B'|$ ואם $b_0 \in B'$ אז $|\bigcup_{b \in B'} K_b| = |G| \geq |B'|$. אבל ל־$B$ אין שידוך, כי בשידוך כזה היה מתחייב $f(b_n) = g_n$ עבור $n \geq 1$ ואז לא נשארת אף בת עבור b_0.

3. תהי Q קבוצה של קוביות כך שכל $Q' \subseteq Q$ סופית היא טובה. לכל קוביה ב־Q, נמספר באופן שרירותי את קדקדיה במספרים $1, 2, ..., 8$. נתבונן בתחשיב הפסוקים שבו $\mathcal{AP} = \{p_{x,i} | x \in Q, i = 1, ..., 8\}$. אינטואיטיבית, $p_{x,i}$ טוען שבקוביה x נצבע הקדקד ה־i. לכל $Q' \subseteq Q$ נגדיר את קבוצות הפסוקים הבאות:

$$\Sigma_1(Q') = \{p_{x,1} \bigvee p_{x,2} \bigvee ... \bigvee p_{x,8} | x \in Q'\}$$

$$\Sigma_2(Q') = \{\neg(p_{x,i_1} \bigwedge p_{x,i_2}) | x \in Q', 1 \leq i_1 < i_2 \leq 8\}$$

$$\Sigma_3(Q') = \left\{\neg(p_{x_1,i_1} \bigwedge p_{x_2,i_2} \bigwedge p_{x_3,i_3} \bigwedge p_{x_4,i_4}) \middle| \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4 \in Q' \text{ שונות זו מזו} \\ 1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq 8 \\ x_j \text{ של } i_j \text{ הקדקדים ה־} \\ j = 1, 2, 3, 4 \text{, הם על מישור אחד} \end{array} \right\}$$

$$\Sigma(Q') = \Sigma_1(Q') \bigcup \Sigma_2(Q') \bigcup \Sigma_3(Q')$$

טענה: תהי $Q' \subseteq Q$. אזי Q' טובה אם ורק אם ל־$\Sigma(Q')$ יש מודל.

הוכחה:

נניח ש Q' טובה. אז יש פונקציה $f : Q' \to \{1, ..., 8\}$ כך שבין הקדקדים ה־$f(x)$ של הקוביה x, כאשר $x \in Q'$, אין ארבעה על מישור אחד. נגדיר השמה M ע"י: עבור $x \in Q'$, $M(p_{x,i}) = T$ אם ורק אם $f(x) = i$, ועבור $x \notin Q'$, $M(p_{x,i})$ מוגדר באופן שרירותי. אז M מודל של $\Sigma(Q')$. בכיוון ההפוך, נניח של־$\Sigma(Q')$ יש מודל M. נגדיר פונקציה $f : Q' \to \{1, ..., 8\}$ ע"י : $f(x) = i$ אם ורק אם

$M(p_{x,i}) = T$. מן העובדה ש ־ M מודל של $\Sigma(Q')$ נובע כי f מוגדרת היטב ובין הקדקדים ה ־ $f(x)$ של הקוביה x, כאשר $x \in Q'$, אין ארבעה על מישור אחד. לכן Q' טובה.

נחזור להוכחת העובדה ש־Q טובה. לפי הטענה, די להראות כי ל־$\Sigma(Q)$ יש מודל. לפי משפט הקומפקטיות, די להראות כי לכל $\Sigma_0 \subseteq \Sigma(Q)$ סופית יש מודל. תהי אפוא Σ_0 תת־קבוצה סופית של $\Sigma(Q)$. תהי Q_0 קבוצת כל הקוביות המופיעות באינדקסים של הפסוקים ב־Σ_0. אז Q_0 סופית, ומתקיים $\Sigma_0 \subseteq \Sigma(Q_0)$. לפי תנאי השאלה, Q_0 טובה, ולכן לפי הטענה ל $\Sigma(Q_0)$ יש מודל. לפיכך גם ל Σ_0 יש מודל, כנדרש.