קומבינטוריקה - תרגיל מס' 10

פתרון

תרגיל מס' 1

א. יהיו n, k מספרים טבעיים, $k < \frac{n}{2}$. תהי S קבוצה בת n אברים. הוכח שאפשר להוסיף לכל תת-קבוצה של S שגודלה k איבר נוסף, באופן כזה שקבוצות שונות זו מזו תשארנה שונות זו מזו אחרי ההוספה. (במילים אחרות, מה שעליך להראות הוא שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית

$$f : \{A \subseteq S : |A| = k\} \to \{B \subseteq S : |B| = k+1\}$$

כך ש-$A \subseteq f(A)$ לכל A.)

ב. הוכח שהדבר אינו אפשרי אם $k \geq \frac{n}{2}$.

פתרון:

הערה: פתרון זה מפורט במכוון, על מנת להדגים את דרך הפתרון ואת מידול הבעיה לבעיה מוכרת בתורת הגרפים

א. ההוספה של איבר לכל תת קבוצה בגודל k של S באופן שקבוצות שונות תשארנה שונות לאחר ההוספה - היא, בעצם, פונקציה חד-חד-ערכית מאוסף התת-קבוצות בגודל k של S לאוסף תת הקבוצות בגודל $k+1$ של S.

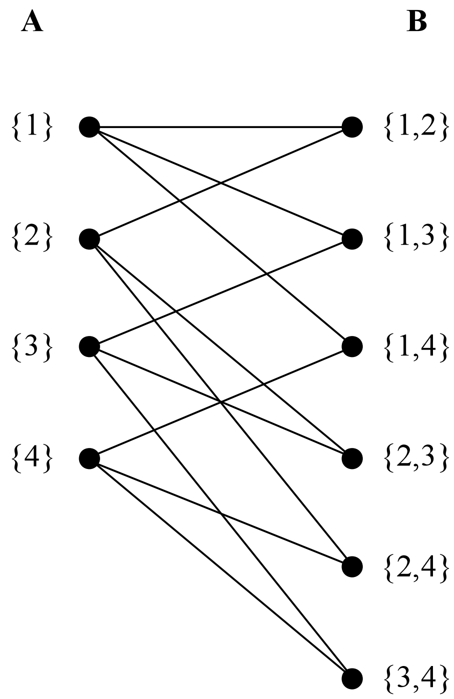
אם נגדיר את הקבוצה A להיות אוסף התת קבוצות מגודל k של S, ואת הקבוצה B להיות אוסף התת קבוצות מגודל $k+1$ של S, אנו מחפשים שידוך של אברי A לאברי B - אבל, בתוספת תנאי מסוים. את התנאי נוסיף בהגדרת "ההיכרות" בין אברי A לאברי B. נאמר, כי ת"ק ב - A "מכירה" ת"ק ב - B אם"ם הת"ק מ - B התקבלה מהת"ק מ - A ע"י הוספת איבר אחד. בצורה פורמלית, נוכל לרשום:

$A = \{H \subseteq S \ : \ \big|H\big| = k\}$
$B = \{G \subseteq S \ : \ \big|G\big| = k+1\}$
$H \in A$ מכיר את $G \in B$ אם"ם $H \subset G$

לדוגמא, עבור: $k = 1$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$ נקבל:

$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$
$$B = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

ואת ההיכרות נוכל לתאר בגרף הבא (צלע מתארת היכרות):



לאחר שנמצא שידוך לפי ההגדרות הנ"ל, נוכל להגדיר את הפונקציה f על אברי A ע"י כך שהיא תתאים לכל איבר מ - A את מי ששודך לו מ - B.

לפי הגדרת הבעיה - קיבלנו גרף G דו צדדי (A - בחורים B - בחורות), בו צריך למצוא שידוך. נבדוק את ערכיויות הגרף. כל קדקד v_A ב - A מתאים לת"ק של S מגודל k. ערכיותו של v_A היא מספר האיברים השונים שאפשר להוסיף לו, ע"מ לקבל ת"ק מגודל $k+1$ - וזה בדיוק מספר האיברים אשר אינם נמצאים בו: $n-k$.
כל קדקד v_B ב - B מתאים לת"ק של S מגודל $k+1$. ערכיותו של v_B היא בדיוק מספר האיברים השונים אשר אפשר להוריד ממנו: $k+1$. לכן, מתקיים:

$$\forall\, v_A \in A,\ d(v_A) = n-k;\ \forall\, v_B \in B,\ d(v_B) = k+1$$

נשים לב כי: $\left|A\right| = \binom{n}{k}$ ו - $\left|B\right| = \binom{n}{k+1}$

לגבי הבעיה המתורגמת, צריך להראות כי קיים בה שידוך. לפיכך, מספיק להראות קיומו של תנאי $Hall$:
לכל תת קבוצה I של A מגודל m, חברי I מכירים ביחד לפחות m בחורות.

לפי מה שראינו מקודם, כל קדקד ב - A "מכיר" בדיוק $n-k$ קדקדים ב - B, וכל קדקד ב - B מכיר $k+1$ קדקדים מ - A. לכן, מכל תת קבוצה I מגודל m של A, יוצאות בדיוק $m\cdot(n-k)$ צלעות. נסמן ב - J ($\left|J\right|=t$) את קבוצת הקדקדים ב - B אותם מכירים חברי I. אזי, מ - J יוצאות בדיוק $t\cdot(k+1)$ צלעות, וחלקן הן הצלעות אשר מגיעות לחברי I. לכן, חייב להתקיים:

$$\left|I\right| = m,\ \left|J\right| = t\ :\ m\cdot(n-k) \le t\cdot(k+1)$$

אנו מקבלים:

$$m\cdot(n-k) \le t\cdot(k+1) \ \Leftrightarrow\ t \ge m\frac{n-k}{k+1}$$

אבל, אפשר לומר כי (כדאי לקרוא משמאל לימין):

$$\frac{n-k}{k+1} \ge 1 \ \Leftrightarrow\ n-k \ge k+1 \ \Leftrightarrow\ n \ge 2k+1 \ \Leftrightarrow\ n > 2k \ \Leftrightarrow\ \frac{n}{2} > k$$

ולפי הנתון, אכן: $k < \frac{n}{2}$ ולכן: $t \geq m\frac{n-k}{k+1}$ גורר ש: $t \geq m$ - ומתקיים תנאי $Hall$.
מכאן, יש שידוך של אברי A לאברי B, ולכן קיימת פונקציה כנדרש!

ב. בסעיף זה, $k \geq \frac{n}{2}$, ולכן הקבוצה B אשר הגדרנו - גודלה: $\binom{n}{k+1}$ והקבוצה A - גודלה: $\binom{n}{k}$. לפי תכונת האונימודליות של הפונקציה "בחר", כפי שנלמדה בתחילת הקורס, עבור: $k \geq \frac{n}{2}$ מתקיים: $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$ ולכן גודל הקבוצה A גדול ממש מגודל הקבוצה B - ומכאן שלא ניתן למצוא שידוך לאברי A!

מ.ש.ל

תרגיל מס' 2

במסיבה משתתפים n בחורים ו-n בחורות. כל בחור מכיר בדיוק k מהבחורות, וכל בחורה מכירה בדיוק k מהבחורים. רוצים לארגן את המשתתפים ל-k ריקודי זוגות, כך שבכל ריקוד ישתתפו כל הנוכחים (בסידור של n זוגות), ירקדו כבני זוג רק בחור ובחורה שמכירים, וכל בחור ובחורה שמכירים ירקדו פעם כבני-זוג. הוכח שהדבר אפשרי.

פתרון:

אם נתבונן על גרף דו-צדדי של בחורים ובחורות ונחבר בצלע כל בחור ובחורה אשר מכירים זה את זו - נקבל גרף דו"צ k-רגולרי. במונחי גרף זה, ריקוד זוגות הינו שידוך, והדרישה לגבי קיומם של k ריקודים שונים שקולה לדרישה לגבי מציאת k שידוכים זרים (שידוך הוא אוסף צלעות של הגרף ושידוכים זרים הם שני אוספים זרים של צלעות מן הגרף). לכן, מספיק להוכיח כי בגרף דו"צ k-רגולרי קיימים k שידוכים זרים. נוכיח את הטענה באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: $k = 1$ אם מדובר בגרף דו"צ, בו כל בחור מכיר בדיוק מבחורה אחת וכל בחורה מכירה בדיוק בחור אחד, אזי אין שני בחורים אשר מכירים את אותה הבחורה - ולכן נוכל לשדך לכל בחור את הבחורה אותה הוא מכיר.

הנחת האינדוקציה: בכל גרף דו"צ (A-בחורים, B-בחורות) m-רגולרי, כאשר $m < k$, ניתן למצוא m שידוכים שונים של הבחורים.

צעד האינדוקציה: נתבונן בגרף G דו"צ k-רגולרי. לפי מה שנלמד בתרגול, בגרף כזה קיים שידוך של הבחורים. נמצא שידוך כזה. כעת, נסיר מן הגרף את השידוך שנוצר - ז"א את הצלעות המשתתפות בו - וניוותר עם גרף דו"צ $(k-1)$-רגולרי. לפי הנחת האינדוקציה, בגרף כזה יש $k-1$ שידוכים שונים, והם וודאי שונים מן השידוך שהסרנו, ולכן קיבלנו בסה"כ k שידוכים שונים ב - G.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 3

בכיתה יש m ועדות $A_1, A_2, \ldots, A_m$. רוצים לבחור נציג לכל ועדה (אחד מבין חבריה), באופן כזה שתלמיד לא יוכל להיות נציג של יותר מועדה אחת. מצא תנאי הכרחי ומספיק לכך שהדבר אפשרי.

פתרון:

נתאר בעיה שקולה. נבנה גרף דו"צ G, בו קדקדי A יהיו הועדות $A_1, \ldots, A_m$ וחברי B יהיו תלמידי הכיתה. נחבר בצלע קדקד v_A מ - A עם קדקד v_B מ - B אם"ם בועדה אותה מייצג v_A נמצא התלמיד v_B. באופן זה, הדרוש בשאלה הוא למצוא שידוך של חברי A, ז"א למצוא לכל ועדה תלמיד מתוכה - ואז למנותו ליו"ר.

כיוון שהבעיה שקולה, אפשר לדבר על תנאי מספיק והכרחי לקיום שידוך בגרף שמצאנו. אבל, תנאי זה הוא בדיוק תנאי $Hall$ - לכל ת"ק של A, מספר הקדקדים שמכירים חברי A יהיה לפחות כגודלה של A.

יש צורך לתרגם תנאי זה לתנאי הבעיה (ועדות ותלמידים): בכל קבוצה של n ועדות $(n \leq m)$ יש ביחד לפחות n תלמידים.

מ.ש.ל

<u>תרגיל מס' 4</u>

יהי G גרף. נאמר כי G ניתן לכיוון חד-משמעי אם, בהנתן ציור שלו, אפשר לצייר חץ על כל צלע (המכוון מקדקד אחד שלה לקדקד אחר שלה), באופן כזה שמכל קדקד יוצא לכל היותר חץ אחד.

א. הוכח שאם G עץ אז הוא ניתן לכוון חד-משמעי.

ב. הוכח שאם G מעגל אז הוא ניתן לכוון חד-משמעי.

ג. האם כל גרף ניתן לכוון חד-משמעי?

<u>פתרון:</u>

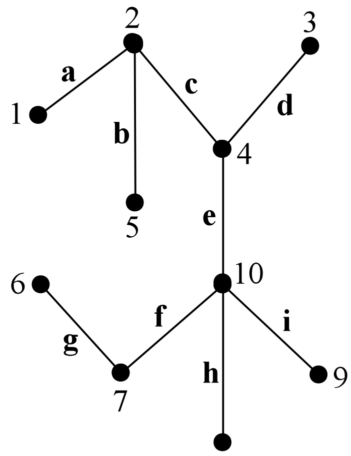
נסמן: $G = (V_G, E_G)$. נתרגם בעיה זו למונחי גרפים דו צדדים ושידוכים. כיצד נקבל "רמזים" בנתוני השאלה להגדרה הרצויה? לפי דרישות השאלה, עלינו לצייר חץ על כל צלע, המכוון לקדקד אחד שלה. ציור זה, הוא מעין התאמה של כיוון לכל צלע - לקדקד זה או לקדקד השני. זהו רמז ראשון לשידוך - לכל צלע מתאימים את אחד מקדקדיה.

ננסה לעבוד לפי ההגדרה הבאה לבניית גרף דו צדדי G': נגדיר את קבוצה A_G להיות צלעות הגרף G, קבוצה B_G להיות קדקדי הגרף G ונגדיר "היכרות" בין קדקד לצלע בגרף G להיות שייכות של הקדקד לצלע. באופן פורמלי, נגדיר:

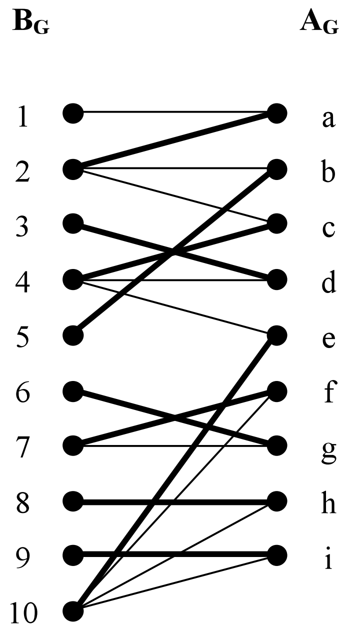
$A_G = E_G$
$B_G = V_G$
איבר e_G מ - A_G "מכיר" איבר v_G מ - B_G אם"ם v_G הוא קדקד של e_G

כעת, נחפש שידוך בגרף G', ולאחר שמצאנו אותו - נתאים מכל צלע חץ לכיוון הקדקד אשר שודך לה. בכך, לכל צלע יותאם קדקד אחד. נשים לב, כי כל הצלעות תשודכנה, אך לא בהכרח כל הקדקדים. ז"א, נוכל לכוון את הגרף - ובאופן כזה שלכל קדקד ייכנס לכל היותר חץ אחד. אם נהפוך את כל החיצים אשר נסמן - נקבל כיוון של הגרף, בו מכל קדקד יוצא לכל היותר חץ אחד, וזהו הכיוון החד-משמעי הדרוש בשאלה. (<u>הערה:</u> נכון שאפשר היה מראש לכוון את החץ הפוך לאחר השידוך, אך כך מודגש הקשר בין כיוון החץ לבין השידוך).

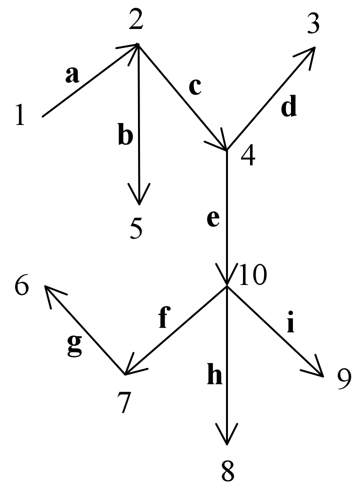
להלן דוגמא לתהליך זה. נתון, לדוגמא, הגרף G הבא:



בניית הגרף G' לפי ההגדרות לעיל, תתן את הגרף הדו צדדי הבא:



הצלעות המושחרות הן השידוך אשר מצאנו. משידוך זה, נכוון את הצלעות באופן הבא:



וכעת נהפוך את כיווני החיצים בכל צלע.

אבל, האם תמיד נצליח לעשות זאת? על כך נענה בסעיפים הבאים?

א. כעת, נניח כי G הוא עץ ונגדיר את הגרף הדו"צ G' אשר נבנה כמו בהסבר לעיל. ידוע, כי כל קדקד ב - G הוא בעל ערכיות לפחות 1, וכי כל צלע שייכת בדיוק לשני קדקדים, לכן ערכיות של קדקד $e_G \in A_G$ היא בדיוק 2 וערכיות כל קדקד $v_G \in B_G$ היא לכל הפחות 1.

תהי $H \subseteq A_G$ מגודל k. ז"א, H מכילה k צלעות מ - A. הקבוצה $N(H)$ היא קבוצת השכנים של H ב - G', ולפי ההגדרה שלנו - זוהי קבוצת הקדקדים השייכים לצלעות ב - H. ז"א: $N(H)$ היא קבוצת קדקדים מ - G. כיוון ש - H הוא אוסף של צלעות מ - G, הן מהוות ביחד יער עם $d \geq 1$ רכיבים קשירים. ביער שנוצר, ידוע כי יש $\left|N(H)\right| - d$ צלעות, ולכן מתקיים:

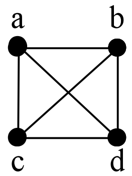
$$\left|H\right| = \left|N(H)\right| - d \implies \left|H\right| \leq \left|N(H)\right|$$

וכיוון שהדבר נכון לכל $H \subseteq A_G$, מתקיים תנאי $Hall$.

לכן, קיים שידוך ומכאן שקיים כיוון חד משמעי, כפי שהוסבר למעלה.

ב. עבור מעגל, אם נבנה את הגרף G' כפי שהוסבר לעיל, נקבל גרף דו צדדי 2-רגולרי, כיוון שכל צלע שייכת בדיוק לשני קדקדים, ובמעגל נקבל כי כל קדקד שייך בדיוק לשתי צלעות. לכן, בגרף G' יהיה שידוך, כפי שראינו בכיתה, ולפי שידוך זה נכוון את הגרף חד-משמעית.

ג. כיוון שהמרנו את בעיית הכיוון החד-משמעי לבעיית שידוכים - ברור שלא בכל גרף ניתן יהיה למצוא שידוך לפיו נכוון. לדוגמא, נתבונן בגרף K_4:



K_4

אם קיים כיוון חד משמעי, אזי מהקדקד a יוצא לכל היותר חץ אחד, ומכאן - נכנסים לכל הפחות 2 חיצים, נניח בה"כ שאלו חיצים מ - b ומ - c. ז"א, מ - b ומ - c כבר יוצא חץ אחד, ז"א שתי הצלעות האחרות מכוונות מ - b ומ - c פנימה. אבל אז, הצלע (b,c) צריכה מצד אחד להיות מכוונת לכיוון c (נכנסת ל - c) ומצד שני להיות מכוונת לכיוון b (נכנסת ל - b). וזה לא ייתכן, כמובן.

מ.ש.ל

<u>הערה:</u> ניתן לפתור את סעיף א' באינדוקציה ואת סעיף ב' ע"י הגדרת כיוון חד-משמעי פשוט של המעגל - וייתכן אף כי נקבל פתרון פשוט יותר. בכל זאת, הצגנו כאן את הפתרון בעזרת השידוכים ע"מ להדגים את יישומי משפט השידוכים.

<u>תרגיל מס' 5</u>

הוכח שלכל k טבעי מתקיים: $r(k,k) > (k-1)^2$

<u>פתרון:</u>

לשם הוכחת הטענה נבנה צביעה של $K_{(k-1)^2}$ בכחול ואדום, כך שלא יהיה בה לא תת גרף K_k אדום, ולא תת גרף K_k כחול.

נסדר את $(k-1)^2$ הקודקודים ברבוע בגודל $(k-1) \times (k-1)$. כל שני קודקודים באותה השורה נחבר על ידי קשת אדומה, וכל שני קודקודים שאינם באותה שורה נחבר על ידי קשת כחולה.

נראה שבבניה שתארנו אין תת גרף K_k כחול, ואין תת גרף K_k אדום.

בין כל k קודקודים שנבחר יש לפי עקרון שובך היונים שניים שהם באותה השורה, כלומר שניים שמחוברים בקשת אדומה, לכן אין תת גרף K_k כחול. מצד שני, בין כל k קודקודים יש שניים שאינם באותה שורה, כלומר שניים המחוברים על ידי קשת כחולה, ולכן גם אין תת גרף K_k אדום. ולכן קיבלנו את הנדרש.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 6

א. צובעים את הצלעות של K_8 בכחול ובאדום באופן הבא: מציירים את הקדקדים של K_8 כקדקדים של מתומן משוכלל. צובעים בכחול את כל הצלעות של המתומן, וכן את המיתרים הארוכים (המחברים קדקדים נגדיים). צובעים את כל שאר המיתרים באדום. הוכח שבצביעה זו אין K_3 שכל צלעותיו כחולות ואין K_4 שכל צלעותיו אדומות.

ב. הסק מחלק א', כי: $r(3,4) \geq 9$.

ג. נתבונן בצביעה של הצלעות של K_9 בכחול ובאדום, ונניח שאין בה K_3 שכל צלעותיו כחולות ואין K_4 שכל צלעותיו אדומות. הוכח שמכל קדקד יוצאות 3 צלעות כחולות ו - 5 צלעות אדומות.

ד. הסק מחלק ג' כי $r(3,4) \leq 9$.

פתרון:

א. אין בגרף תת גרף K_3 כחול, כי עבור כל קודקוד - הקודקודים המחוברים אליו עם קשת כחולה, מחוברים בקשתות אדומות.

כל שני קודקודים סמוכים מחוברים בקשת כחולה, ולכן אם יש תת גרף K_4 אדום, אז הוא מורכב מקודקודים שביניהם אין אף שניים שכנים, לכן יש ביניהם שני קודקודים מנוגדים. אבל כל שני קודקוד-ים מנוגדים מחוברים בקשת כחולה, ומכאן שאין בגרף תת גרף K_4 אדום.

ב. בסעיף א' ראינו צביעה של K_8 בכחול ואדום שאין בה לא K_3 כחול, ולא K_4 אדום. מכאן $r(3,4) > 8$, ולכן $r(3,4) \geq 9$.

ג. נראה את הנדרש בשני שלבים:

1. מכל קודקוד יוצאות לכל היותר 3 קשתות כחולות.

נניח בשלילה שיש קודקוד v_0 ממנו יוצאות 4 קשתות כחולות או יותר. נניח שהקשתות הכחולות הן: $v_0 - v_1, v_0 - v_2, v_0 - v_3, v_0 - v_4$. אין בגרף משולש כחול, ולכן הקשתות המחברות בין v_1, v_2, v_3, v_4 הן כולן אדומות. מכאן שקיבלנו תת גרף K_4 אדום, סתירה. ובכך הוכחנו את 1.

2. מכל קודקוד יוצאות לפחות 3 קשתות כחולות.

נניח בשלילה שיש קודקוד v_0 ממנו יוצאות פחות מ-3 קשתות כחולות, כלומר לפחות 6 קשתות אדומות. נניח שהקשתות $v_0 - v_1, v_0 - v_2, v_0 - v_3, v_0 - v_4, v_0 - v_5, v_0 - v_6$ הן אדומות. הקודקודים $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ הם הקודקודים של תת גרף K_6 הצבוע בכחול ואדום. $r(3,3) = 6$ ולכן יש בו משולש אדום או משולש כחול. אין בו משולש כחול, כי בכל הגרף אין משולש כחול, לכן יש בו משולש אדום v_i, v_j, v_k. אבל במקרה כזה v_0, v_i, v_j, v_k יוצרים תת גרף K_4 אדום (למה?), בסתירה להנחה.

מ-1 ו-2 נקבל כי מכל קודקוד יוצאות בדיוק 3 קשתות כחולות ו-5 קשתות אדומות.

ד. על מנת להראות ש-$r(3,4) \leq 9$, נראה שבכל צביעה של הגרף K_9 בכחול ובאדום יש או משולש כחול או תת גרף K_4 אדום.

נניח בשלילה שיש צביעה של K_9 בה הנ"ל לא מתקיים. מכאן, לפי הסעיף הקודם, מכל קודקוד יוצאות בדיוק 3 קשתות כחולות ו-5 קשתות אדומות. נתבונן בתת הגרף הנוצר על ידי הקשתות הכחולות. יש בו 9 קודקודים, לכל אחד הערכיות היא 3. קיבלנו גרף עם מספר אי זוגי של קודקודים עם ערכיות אי זוגית, סתירה. מהסתירה נובע כי $r(3,4) \leq 9$.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 7

א. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה: לכל קבוצה של n נקודות במרחב, או שיש ביניהן 4 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא לכל היותר 1, או שיש ביניהן 5 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן עולה על 1.

ב. מצא במפורש n כזה (לאו-דווקא הקטן ביותר).

פתרון:

א. נקח $n \geq r(4,5)$ כלשהו. נתאים לנקודות במרחב גרף K_n, נצבע צלע בין שתי נקודות בכחול אם המרחק ביניהן לכל היותר 1, ובאדום אחרת. לפי הגדרת $r(4,5)$, או שיש בגרף שבנינו תת גרף כחול K_4, שמתאימות לו 4 נקודות שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא לכל היותר 1, או תת גרף אדום K_5, שמתאימות לו 5 נקודות במרחב שהמרחק בין כל שתיים מהן עולה על 1, וקיבלנו את הנדרש.

ב. ידוע כי

$$r(4,5) \leq \binom{4+5-2}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

לכן אם נקח $n = 35$, הוא יקיים את הנדרש.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 8

א. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה: יהיו נתונים n קטעים על הישר, כך שאף נקודה אינה נמצאת ביותר משני קטעים. אזי קיימים 10 מבין הקטעים שהם זרים בזוגות (כלומר, לאף שניים מהם אין נקודה משותפת).

ב. מצא במפורש n כזה (לאו-דווקא הקטן ביותר).

פתרון:

א. נקח $n \geq r(10,3)$ כלשהו. נתאים לקטעים על הישר גרף K_n, נצבע צלע בין שני קטעים בכחול אם הם זרים, ובאדום אחרת. לפי הגדרת $r(10,3)$, או שיש בגרף שבנינו תת גרף כחול K_{10}, שמתאימים לו 10 קטעים זרים, או תת גרף אדום K_3, שמתאימים לו 3 קטעים שלכל שניים ביניהם נקודה משותפת.

האפשרות השניה אומרת, כי יש 3 קטעים, אשר לכל שניים מהם יש נקודה משותפת - וכיוון שהקטעים הם על ישר אחד, משמעות הדבר כי לשלושתם יש נקודה משותפת, בניגוד לנתון.

לכן האפשרות הראשונה מתקיימת, כלומר יש 10 קטעים זרים בזוגות.

ב. ידוע כי

$$r(10,3) \leq \binom{10+3-2}{10-1} = \binom{11}{9} = 55$$

לכן אם נקח $n = 55$, הוא יקיים את הנדרש.

מ.ש.ל