קומבינטוריקה - תרגיל מס' 9

פתרון

תרגיל מס' 1

גרף הקוביה ה - n-מימדית Q_n מוגדר באופן הבא: הקדקדים הם כל הסדרות של אפסים ואחדים באורך n. שני קדקדים מחוברים בצלע אם הסדרות המתאימות שונות זו מזו בקואורדינטה אחת בדיוק.

א. צייר את Q_1, Q_2, Q_3.

ב. מה הערכיות של כל קדקד ב - Q_n?

ג. מה מספר הצלעות ב - Q_n?

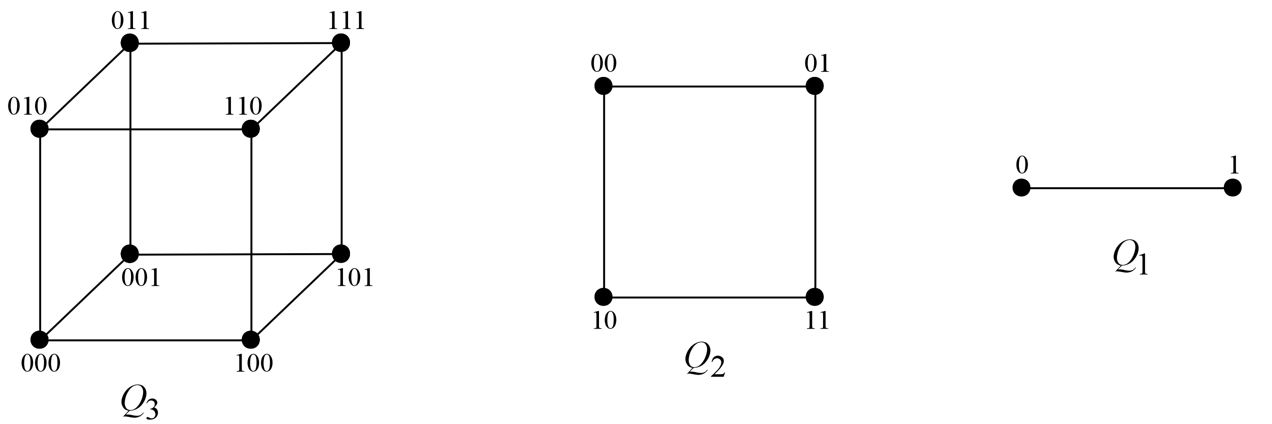
ד. הוכח כי Q_n גרף קשיר.

ה. הוכח כי Q_n גרף דו-צדדי.

פתרון:

נסמן את קודקודי הגרף Q_n ב - V_n, ולפי הנתון: $V_n = \{0,1\}^n$. מספר הקודקודים הוא כמספר הסדרות הבינריות באורך n: 2^n. את צלעות Q_n נסמן ב: E_n.

א. להלן הגרפים המבוקשים: Q_1, Q_2, Q_3:



ב. כל קדקד ב - Q_n מייצג סדרה בינרית באורך n, והוא מחובר בצלע לקדקד אחר אם"ם הסדרות אותן הם מייצגים נבדלות בספרה אחת. לכן, מכל קדקד יוצאות בדיוק n צלעות, כיוון שכל סדרה ניתן לשנות ב - n אופנים ע"י שינוי ספרה בינרית אחת. לכן:

$$\forall\ v \in V_n \ \ d(v) = n$$

ג. לפי מה שנלמד בכיתה, סכום הערכיות של כל קדקדי הגרף שווה לפעמיים מספר הצלעות. ז"א, בכל גרף מתקיים:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2|E| \tag{1}$$

במקרה של הגרף Q_n, לפי סעיף ב' ידועות הערכיויות של קודקודיו, לכן נציב ב - (1) ונקבל:

$$\sum_{v\in V_n} d(v) = 2^n \cdot n = 2\left|E_n\right| \tag{2}$$

ומ - (2) מקבלים מיד ש:

$$\left|E_n\right| = 2^{n-1} \cdot n$$

ד. על מנת להוכיח כי הגרף Q_n הוא קשיר, מספיק להוכיח כי בין כל שני קדקדים קיים מסלול. נבחר שני קדקדים: $v_i, v_j \in V_n$ ונסמן כל אחד מהן בעזרת הסדרות הבינריות אותן הם מייצגים:

$$v_i = a_1a_2\cdots a_n;\ v_j = b_1b_2\cdots b_n;\ a_i, b_i \in \{0,1\}\ \forall\ i = 1,\ldots,n$$

כעת, נסמן ב - I את קבוצת האינדקסים מתוך $1,\ldots,n$, עבורם מתקיים: $a_i \neq b_i$. כלומר, האינדקסים ב - I הם אלה אשר עבורם הסדרות v_i ו - v_j נבדלות. נניח כי I היא הקבוצה: $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, כאשר: $k \leq n$ ונניח כי: $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

כיצד, אם כן, נבנה מסלול מ - v_i ל - v_j? נתחיל עם הקדקד $v_0 = v_i$ ונסמן ב: v_1 את הקדקד אשר זהה לקדקד v_0 בכל ספרותיו, פרט למקום ה - i_1. כיוון שהם נבדלים בספרה אחת, קיימת צלע ביניהן. נמשיך באותו אופן: נבחר את הקדקד v_2, אשר זהה לקדקד v_1 בכל ספרותיו, פרט לזו אשר במקום ה - i_2. שוב, כיוון שהסדרות שונות בספרה אחת בדיוק, יש ביניהן צלע. נמשיך באופן דומה, עד שנגיע לקדקד v_k, אשר התקבל מ - v_{k-1} ע"י שינוי הספרה ה - i_k-ית, או שהתקבל ע"י הקדקד $v_0 = v_i$ ע"י שינוי כל הספרות עם האינדקסים ב - I. כלומר: $v_k = v_j$, וכך מצאנו מסלול:

$$\{v_i, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_j\}$$

והוא מסלול מ - v_i ל - v_j כדרוש. מכאן, הגרף Q_n קשיר.

ה. יש להוכיח כי הגרף Q_n הוא דו צדדי. כזכור, גרף דו צדדי הוא גרף אשר ניתן לחלק את קבוצת קדקדיו V לשתי קבוצות זרות: $V = A \cup B$ כך שאין צלע בין שני קדקדים מ - A ואין צלע בין שני קדקדים מ - B.
נבצע את החלוקה הבאה:

$A = \{v \in V_n \mid$ ב - v יש מספר זוגי של אפסים$\}$
$B = \{v \in V_n \mid$ ב - v יש מספר אי זוגי של אפסים$\}$

ברור, כי זו חלוקה זרה של קדקדי V (אין קדקד שיש בו גם מספר זוגי של אפסים וגם מספר אי זוגי של אפסים, וכמו כן בכל קדקד יש או מספר זוגי של אפסים או מספר אי זוגי של אפסים). כעת, נשים לב כי לא תתכן צלע בין שני קדקדים מ - A, כיוון שבין כל שני קדקדים שונים כאלה יש לפחות שני שינויים בספרותיהם. באותו אופן, אין צלע בין שני קדקדים מ - B. לכן, Q_n הוא גרף דו צדדי.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 2

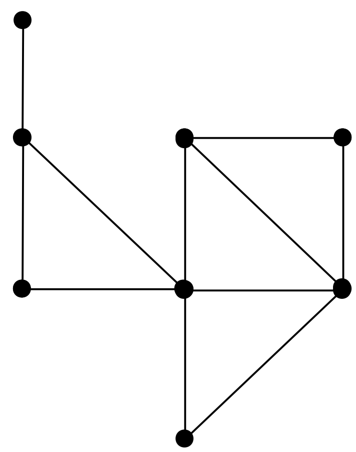
יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, $|V|\geq 2$. הוכח שיש לפחות שני קדקדים $x\in V$ בעלי התכונה הבאה (כל אחד בנפרד): אם נרחיק מ - G את x ואת כל הצלעות המכילות אותו, הגרף שיישאר יהיה קשיר.

פתרון:

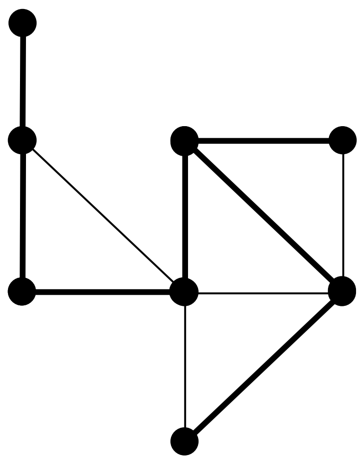
הטענה ברורה אם G הוא עץ: במקרה זה, ידוע מן ההרצאה כי ל - G לפחות 2 עלים. עלים הם קדקדים עם ערכיות 1, ולכן ניתן להוריד כל אחד מהם עם הצלע היחידה המחוברת אליו ולא לפגום בקשירות של הגרף שנשאר.

נניח, כי G אינו עץ. אזי, לפי מה שראינו בתרגול, קיים ל - G עץ פורש. עץ פורש זהו עץ אשר קדקדיו הם כל קדקדי הגרף G וצלעותיו הם חלק מצלעות הגרף G.

לדוגמא, עבור הגרף הבא:



אפשר למצוא את העץ הפורש הבא (הצלעות העבות יותר הן צלעות העץ הפורש):



כעת, בעץ הפורש יש שני עלים, לפחות, והם גם קדקדים ב - G. אם נוריד עלה כזה ואת כל הצלעות מ - G המחוברות אליו, נישאר עם עץ פורש על צלעות G, אשר מגיע לכל קדקדי G (פרט לזה שהורדנו, כמובן!). כיוון שנותרנו עם עץ פורש, אשר הינו גרף קשיר, ברור כי תוספת הצלעות של G אשר אינן משתתפות בעץ הפורש, אינן יכולות לפגוש בקשירותו. לכן, הטענה נכונה.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 3

יהי G גרף שיש בו בדיוק שני קדקדים בעלי ערכיות אי-זוגית. קדקדים אלה (שנסמנם: x, y) אינם מחוברים בצלע. יהי G^* הגרף המתקבל מ - G ע"י הוספת הצלע $\{x, y\}$. הוכח כי G^* קשיר אם ורק אם G קשיר.

פתרון:

הערה: אם G^* מתקבל מ - G ע"י הוספת הצלע (x, y), אזי G מתקבל מ - G^* ע"י הורדת הצלע (x, y)

כיוון אחד: אם G קשיר, אזי גם G^* קשיר

זהו הכיוון הקל, כיוון שהוספת צלע אינה יכולה לפגום בקשירותו של גרף.

כיוון שני: אם G^* קשיר, אזי גם G קשיר

ניקח את G^* ונסיר ממנו את הצלע (x, y). נניח, כי G - הגרף אשר התקבל על ידי הורדת הצלע (x, y) אינו קשיר. כיוון שהורדת הצלע (x, y) פגמה בקשירותו, נובע כי הקדקדים x ו - y נמצאים ברכיבי קשירות שונים ב - G, נסמנם: C_1 ו - C_2 בהתאמה. ב - C_1 הקדקד x הוא היחיד עם ערכיות אי-זוגית, אך הדבר אינו ייתכן כיוון ש - C_1 הוא בפני עצמו גרף, ולכן חייב לקיים את התכונה שהוכחה בכיתה: בכל גרף מספר הקדקדים מערכיות אי-זוגית הוא זוגי. כנ"ל לגבי C_2. לכן, ההנחה אינה נכונה והגרף G קשיר.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 4

יהי G עץ.

א. הוכח: אם x קדקד בעל ערכיות d ו - G^- הוא הגרף המתקבל מ - G ע"י הרחקת הקדקד x וכל הצלעות המכילות אותו, אזי G^- הוא יער בעל d מרכיבים קשירים.

ב. הוכח: הערכיות המקסימלית של קדקדי G היא לכל היותר כמספר העלים ב - G.

ג. תאר את העצים G שעבורם מתקיים שוויון בחלק ב'.

פתרון:

א. נזכור, כי G^- נוצר על ידי הורדת d צלעות מ - G. נסמן: $G^- = (V^-, E^-)$. כפי שידוע מן ההרצאה, עבור עץ: $G = (V, E)$, מתקיים:

$$\left|E\right| = \left|V\right| - 1$$

וכן קל לבדוק (בדקו), עבור יער עם m רכיבי קשירות: $C_1, \ldots, C_m$, כאשר נסמן: $C_i = (V_i, E_i),\ i = 1, \ldots, m$ מתקיים:

$$\left|E\right| = \left|E_1\right| + \cdots + \left|E_m\right| = \left(\left|V_1\right| - 1\right) + \cdots + \left(\left|V_m\right| - 1\right) = \left|V_1\right| + \cdots + \left|V_m\right| - m = \left|V\right| - m \tag{3}$$

לכן, אם נסמן את מספר רכיבי הקשירות אשר ב - G^- (G^- הינו יער, כיוון שהוא חסר מעגלים) ב - m, נקבל מצד אחד מ - (3):

$$\left|E^-\right| = \left|V^-\right| - m \tag{4}$$

ומצד שני, כיוון ש - G^- התקבל מ - G ע"י הורדת d צלעות, ברור ש:

$$|V^-| = |V| - 1;$$
$$|E^-| = |E| - d$$

נציב זאת ב: (4) ונקבל:

$$|E| - d = |V| - 1 - m$$

ומכאן:

$$m = \underbrace{|V| - |E| - 1}_{\text{שווה 0 בעץ}} + d$$

ומכאן: $m = d$, כלומר ב - G^- בדיוק d רכיבי קשירות.

ב. יהי x הקדקד בעל הערכיות המקסימלית בגרף: $d(x) = \Delta$ (ייתכן ש - x אינו היחיד עם ערכיות זו).
כיוון ש - G עץ, אזי G קשיר ולכן קיים מסלול מ - x לכל אחד מן העלים ב - G.

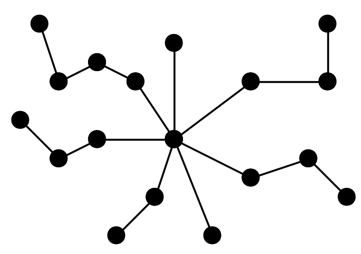
<u>הוכחת הטענה:</u> נוריד מן הגרף G את הקדקד x ואת הצלעות המחוברות אליו. לפי סעיף א', נקבל יער - G' עם Δ רכיבי קשירות. נראה, כי בכל אחד מרכיבי הקשירות יש עלה של G.

יהי G_i רכיב קשירות של היער G'. אם ב - G_i רק קדקד אחד - הרי שהוא היה עלה ב - G. אחרת, ב - G' לפחות שני קדקדים, ומכאן - לפחות שני עלים. כיוון שרק קדקד אחד ב - G_i היה שכן של x, לפחות אחד מהעלים ב - G_i אינו שכן של x ולכן עלה ב - G.

לכן, מספר העלים ב - G הוא לפחות כערכיות המקסימלית בגרף - או בניסוח זהה: הערכיות המקסימלית בעץ היא לכל היותר כמספר העלים בו.

ג. מתי יתקיים שוויון ב - ב'? לפי הוכחת הטענה ב - ב', ראינו כי מהקדקד בעל הערכיות המקסימלית יוצאים מסלולים לכל העלים. אם דורשים שוויון - דורשים, בעצם, שמכל מסלול כזה נגיע <u>בדיוק</u> לעלה אחד. אבל, אם ניתקל במסלול מ - x לעלה כלשהו בקדקד עם ערכיות גדולה ממש משתיים, נוכל להמשיך ממנו ליותר מעלה אחד.

לכן, שוויון יתקיים רק בעצים אשר הם "קווים" (כל הערכיויות הן שתיים, פרט לשני עלים בקצה) ובעצים להם קדקד אחד ויחיד בעל ערכיות מקסימלית גדולה מ - 2, ויתר הקדקדים הם מערכיות 1 או 2, כדוגמת זה אשר בציור:



מ.ש.ל

תרגיל מס' 5

יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכח כי 3 הטענות הבאות שקולות:

א. G עץ (ז"א, G קשיר וחסר מעגלים).

ב. G קשיר ו: $|E|=|V|-1$.

ג. G קשיר מינימלי (ז"א, הורדת כל צלע תהפוך את G ללא-קשיר).

פתרון:

נוכיח את השקילויות על ידי הגרירות הבאות:

א' $\Longleftarrow$ ב'

נתון כי G הוא עץ וצ"ל כי G קשיר ומקיים: $|E|=|V|-1$.

G קשיר כיוון שהוא עץ, ולפי מה שהוכחנו בכיתה, מתקיים בכל עץ: $|E|=|V|-1$.

ב' $\Longleftarrow$ ג'

נתון, כי G קשיר, וכי: $|E|=|V|-1$, וצ"ל כי הורדת כל צלע מ - G תפגום בקשירותו.

נניח כי הטענה אינה נכונה. ז"א, קיימת צלע e_1 אשר ניתן להוריד מ - G ולהשאירו קשיר. נסמן ב - $G^1=(V^1,E^1)$ את הגרף אשר התקבל מ - G ע"י הורדת הצלע e_1, אזי: $|V^1|=|V|$ ו: $|E^1|=|E|-1$.

אם G^1 עץ, אזי ידוע מן הכיתה כי:

$$|E^1|=|V^1|-1$$

ולכן:

$$|E|=|E^1|+1=|V^1|-1+1=|V^1|=|V|$$

בסתירה לנתון.

לכן, G^1 אינו עץ, ולכן קיים לו עץ פורש, ז"א ניתן להוריד $1\geq k$ צלעות מ - G^1 ולקבל עץ, נסמנו ב - $G^2=(V^2,E^2)$. לגבי G^2 ידוע כי:

$$|E^2|=|V^2|-1 \tag{5}$$

וכמו כן כי:

$$|V^2|=|V^1|=|V|$$
$$|E^2|=|E^1|-k=|E|-k-1$$

אבל אז מקבלים ש:

$$|E|=|E^2|+k+1=|V^2|-1+k+1=|V|+k$$

בסתירה לנתון.

לכן, ההנחה ש - G אינו קשיר מינימלי היתה שגויה והטענה הוכחה!

ג' $\Longleftarrow$ א'

נתון, כי G קשיר מינימלי וצ"ל כי G עץ.

ידוע כי G קשיר, ולכן צריך רק להראות ש - G חסר מעגלים. נניח, כי קיים ב - G מעגל. לכן, ניתן להוריד מן המעגל צלע, מבלי לפגום בקשירותו של G - ומכאן G אינו קשיר מינימלי, בסתירה לנתון. לכן G חסר מעגלים, ומכאן G עץ.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 6

נתון לוח שחמט ($8 * 8$ משבצות). על הלוח נע צריח, כאשר בכל צעד הוא יכול לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן או במאונך. רוצים לתכנן מהלך תנועה של הצריח על הלוח באופן כזה ש:

א. הצריח יתחיל ויסיים את המהלך באותה משבצת.

ב. לכל זוג משבצות שהצריח יכול להגיע מהאחת לשניה (כלומר שנמצאות באותה שורה או באותו טור), יהיה בדיוק צעד אחד במהלך שבו הצריח עובר מהאחת לשניה (לא חשוב באיזה כיוון).

האם הדבר אפשרי?

פתרון:

נתבונן בגרף המושרה על ידי הבעייה: הקודקודים יהיו המשבצות של הלוח, ותהיה צלע בין כל שתי משבצות שצריח יכול לעבור ביניהן. השאלה שקולה לשאלה האם יש בגרף שבנינו מסלול אוילריאני סגור (עצרו לרגע, וחשבו למה).

נוכיח, ראשית, כי הגרף הינו קשיר. נניח, כי שורות לוח השחמט ממוספרות מ - 1 עד 8 ובאותו אופן ממוספרות גם העמודות. באופן זה, כל משבצת ניתנת לזיהוי ע"י זוג קואורדינטות, לציון השורה והעמודה שלה.

יהיו $v_{(i_1,j_1)}, v_{(i_2,j_2)}$ שני קדקדים שונים, אשר מייצגים שתי משבצות שונות בלוח - כאשר הקואורדינטות הן כפי שהוסבר בפסקה הקודמת.

אם הצריח עומד במשבצת (i_1, j_1), הוא יכול לעשות צעד למשבצת: (i_1, j_2) - צעד אשר נשאר בשורה ה - i_1, ולאחר מכן לעשות צעד אל המשבצת (i_2, j_2) - צעד אשר נשאר בעמודה ה - j_2. לכן, קיים מסלול בגרף שבנינו:

$$v_{(i_1,j_1)} \longrightarrow v_{(i_1,j_2)} \longrightarrow v_{(i_2,j_2)}$$

ולכן קיים מסלול בין כל שני קדקדים - ומכאן, הגרף קשיר.

נבדוק את ערכיויות הקודקודים בגרף: מכל משבצת הצריח יכול להגיע ל-7 משבצות במאוזן, ול-7 משבצות במאונך, לכן הערכיות של כל קודקוד בגרף היא $7 + 7 = 14$. קיבלנו שהערכיויות של כל הקודקודים בגרף הן 14, כלומר זוגיות, ולכן יש בגרף שבנינו מסלול אוילריאני סגור. לכן ניתן לתכנן מהלך צריח המקיים את תנאי השאלה.

מ.ש.ל

תרגיל מס' 7

תאר את כל העצים שיש בהם מסלול אוילריאני.

פתרון:

אם העץ הוא קדקד בודד - אזי יש בו מסלול אוילריאני סגור (הקדקד עצמו מהווה מסלול אוילריאני סגור).

אחרת, כפי שנלמד בהרצאות, לכל עץ עם לפחות שני קדקדים - יש לפחות שני עלים. מצד שני כל עלה הוא קדקד מערכיות אי-זוגית, ולכן בעץ שיש בו מסלול אוילריאני יש בדיוק שני עלים, וכל שאר הקודקודים הם מערכיות זוגית.

נניח כי בעץ יש n קודקודים. נסמן את שני העלים v_1, v_2 ואת שאר שקודקודים $v_3, v_4, \dots, v_n$. מהאמור לעיל

$$d(v_1) = d(v_2) = 1 \qquad d(v_3), d(v_4), \dots, d(v_n) \geq 2$$

(מדוע?), מצד שני סכום ערכיות הקדקדים שווה לפעמיים מספר הצלעות, במקרה שלנו

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2(n-1)$$

מצד שני

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq 1 + 1 + (n-2) \cdot 2 = 2(n-1)$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם

$$d(v_1) = d(v_2) = 1, \qquad d(v_3) = d(v_4) = \dots = d(v_n) = 2$$

מכאן אנו מקבלים אפיון לעצים הנדרשים. אלו הם

א. נקודה בודדת.

ב. "שרוכים" - עצים עם שני עלים וערכיות 2 לכל קודקוד פנימי. (ראה ציור)