**תרגיל:** בהנתן $n$ פונקציות בלתי תלויות לינארית בקטע $I$, בנו מד"ר לינארית הומוגנית מסדר לכל היותר $n$ שהן פתרונות שלה.
**פתרון:** נסמן את הפונקציות ע"י $u_1(x), \ldots, u_n(x)$. אזי המד"ר היא

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) & y \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) & y' \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ u_1^{(n)}(x) & \cdots & u_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

כלומר, אם נפתח לפי העמודה האחרונה נקבל

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

כלומר

$$W(u_1, \ldots, u_n)(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

נראה כי $u_1(x)$ פתרון ע"י הצבה:

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) & u_1(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) & u_1'(x) \\ \vdots & & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)} & u_1^{(n-1)}(x) \\ u_1^{(n)}(x) & \cdots & u_n^{(n)} & u_1^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

וזוהי זהות מכיוון שיש לנו שתי עמודות שוות בדטרמיננטה.
באופן דומה, $u_2(x), \ldots, u_n(x)$ פתרונות.
שימו לב כי המד"ר מסדר לכל היותר $n$ כיוון שקיימות פונקציות בלתי תלויות לינארית אשר הורונקיאן שלהן זהותית אפס. אנו נראה זאת בתרגיל הבא.

**תרגיל:** תנו דוגמא לשתי פונקציות בלתי תלויות לינארית בקטע $I$ שהורונסקיאן שלהן זהותית אפס.
**פתרון:** נסתכל על

$$u_1(x) = x^2$$
$$u_2(x) = x|x|$$

אני משאיר לכם לוודא כי הפונקציות גזירות על הישר וכי

$$u_2'(x) = (x|x|)' = |x| + xsign(x) = 2|x|$$

כאשר

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

. נראה כי הן בלתי תלויות לינארית על הישר: נניח כי $c_1x^2 + c_2x|x| = 0$ לכל $x$. אז

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad c_1 + c_2 = 0 \\ x = -1: &\quad c_1 - c_2 = 0. \end{aligned}$$

ולכן $c_1 = c_2 = 0$.
חישוב הורונסקיאן:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & |x| + xsign(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} = 2x^2|x| - 2x^2|x| = 0$$

כאשר השתמשנו בזהות $(x|x|)' = |x| + xsign(x)$.

שימו לב כי זה אומר שהורונסקיאן יכול להתאפס זהותית אפילו עבור פונקציות בלתי תלויות לינארית. לכן המד"ר שקיבלנו בתרגיל הראשון הוא לכל היותר מסדר $n$ כי המקדם של $y^{(n)}$ הוא הורונסקיאן.

איך אפשר להכליל את התרגיל? כלומר, האם קל למצוא $n$ פונקציות בלתי תלויות לינארית על הישר אשר הורונסקיאן שלהן אפס זהותית? התשובה היא שכן. נגדיר $y_1(x) = x^n$ ונגדיר $y_2(x) = x^{n-1}|x|$. קל (אם כי ארוך) להראות כי הפונקציות גזירות $n-1$ פעמים, הן בלתי תלויות לינארית על הישר, ולכל $x$ הוקטורים

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

תלויים לינארית (למעשה הם שווים עד כדי סימן). ולכן אם נוסיף $n-2$ פונקציות בלתי תלויות כלשהן, בורונסקיאן של $n$ הפונקציות יהיו תמיד שתי עמודות תלויות לינארית ולכן הדטרמיננט הוא אפס זהותית.