תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 6 - פתרון חלקי

.1

1) אם C לא ריקה, אז מסיקים C=P(C) כמו בתרגיל בית מס' 2. וזה לא ייתכן כי לפי משפט קנטור |C|<|P(C)| . תשובה: רק כאשר C ולפחות אחת מבין A ו- B – קבוצות ריקות.

2) לא נכון. דוגמא נגדית: $C=D=\mathbb{N}$.

.2

1) כל מספר טבעי ניתן לכתוב באופן יחיד בצורה

$$x = 2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}\cdot 7^{a_4}\cdot 11^{a_5}\cdot 13^{a_6}\cdot 15^{a_7}\cdot\ldots$$

נגדיר:
$$f(x)=\begin{cases}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), & a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\neq 0\\ (1,1,1,1,1) & \text{אחרת}\end{cases}$$

2) רמז: להתחיל ב- $f(x)=(\frac{a_1}{a_2},\frac{a_3}{a_4})$, אח"כ לתקן: לדאוג לכך ש- f תהיה מוגדרת כאשר $a_2=0$ או $a_4=0$; לכך שבתמונה יהיו גם זוגות של מספרים רציונליים שלפחות אחד מהם שלילי, לכך שגם זוגות מהצורה $(0,x)$ ו- $(x, 0)$ יהיו בתמונה...

3) לא. ניתן להוכיח, למשל, בשיטת האלכסון.

.3

1) נסמן את הקבוצה הנדונה ב- X ; בהנחה ש- $\varphi:\mathbb{N}\to X$ פונקציה [חח"ע ו-]על, מגדירים $f\in X$ ע"י $f(x)=1-(\varphi(x))(x)$ ומוכיחים כרגיל ש- $f\notin \mathrm{Im}(\varphi)$ בסתירה להנחה.

2) בהנחה ש- $\varphi:\mathbb{N}\to X$ פונקציה [חח"ע ו-]על, מגדירים $f\in X$ ע"י

$$f(x)=\begin{cases}1, & (\varphi(x))(x)\neq 1\\ 2 & (\varphi(x))(x)=1\end{cases}$$

(לא לשכוח להוכיח שבאמת $f\in X$) , ומוכיחים ש- $f\notin \mathrm{Im}(\varphi)$ בסתירה להנחה.

.4

1) רמז: כל סדרה כזאת – קבועה ממקום מסויים.

2) רמז: יש להשתמש במשפט האומר שאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.

5. <u>כיוון 1</u>:

נתון: X קבוצה סופית.

צריך להוכיח: קיימת $f: X \to X$ כך שלכל $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$ מתקיים $f(A) \not\subseteq A$.

תהי $X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

נגדיר:

$$f: X \to X$$
$$x_i \mapsto x_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1$$
$$x_n \mapsto x_1$$

תהי A קבוצה כלשהי כך ש- $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$. קיים אינדקס i כך ש- $x_i \in A$ אבל $x_{i+1} \notin A$ (כאשר $x_{n+1}=x_1$) (למה קיים i כזה?..) לפי הגדרת f, $x_{i+1} \in f(A)$ אבל $x_{i+1} \notin A$ ולכן $f(A) \not\subseteq A$.

<u>כיוון 2</u>:

נתון: X קבוצה אינסופית.

צריך להוכיח: לכל $f: X \to X$ קיימת $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$ כך ש- $f(A) \subseteq A$.

תהי f פונקציה כלשהי מ- X ל- X.

יהי $x_1 \in X$ כלשהו.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $x_{n+1}=f(x_n)$.

(כלומר: $x_2=f(x_1)$, $x_3=f(f(x_1))$, $x_4=f(f(f(x_1)))$ וכן הלאה.)

ייתכנו שני מקרים:

- קיימים $k, m \in \mathbb{N}$ <u>שונים</u> (בלי הגבלת הכלליות $k<m$) כך ש- $x_k=x_m$.
  נגדיר $A=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$. אז $f(A) \subseteq A$ ו- $A \subsetneq X$ כי A סופית.
- לכל $k, m \in \mathbb{N}$ <u>שונים</u> $x_k \neq x_m$.
  נגדיר $A=\{x_2, x_3, x_4, \ldots\}=\{x_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$. אז $f(A) \subseteq A$ ו- $A \subsetneq X$ כי $x_1 \notin A$.