

מצא ביטוי לסכום של n האיברים הראשונים בטור, ומכאן מצא את סכום הטור:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2. \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

$$3. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)(p+n+1)(p+n+2)}, \quad p \neq -1, -2, \dots$$

בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p > 1$$

$$10. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$13. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 9}}$$

$$14. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{n^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 5n}{n(n^2 + 1)^{3/2}}$$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
19. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}+1}{n^3-1}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$
21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+4}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$
25. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$
26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$
27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\alpha}}$
28. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt[3]{n+1}}$
30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{n^2+1}$
31. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^n}, \alpha > -1$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n |\sin n\alpha|, \quad r > 0, \alpha > 0$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} \ln(4n+1)}{n(n+1)}$
36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{4n+3}{2n+2}$
40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \right]^p$
41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right]^p$
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$
43. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-1}{2n} \right)$
45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$
46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 3^{3n}}$
47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$
48. $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n \ln n \log_2 n} - \ln \left(\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} \right) \right]$
49. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{2+n^p}{1+n^p} \right)$
50. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right]$
51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{2^{n^2}}$
52. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n-2)^3}$
53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left(\frac{1}{n} \right)$
54. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-\cos(n\alpha)}$
56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$
57. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \alpha > 0 \text{ (עבור אילו ערכי } \alpha \text{)}$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^p + n)^q} \text{ (עבור אילו ערכי } p, q \text{)}$$

$$61. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^{\sqrt[n]{n}}}$$

$$63. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$64. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

$$65. \text{ תן דוגמא לפונקציה } f(x) \text{ חיובית ורציפה המקיימת כי } \int_0^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס אבל } \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ מתבדר.}$$

$$66. \text{ יהי } \sum a_n \text{ טור נתון, } a_n > 0 \text{ לכל } n. \text{ הוכח כי אם טור זה מתכנס אזי גם הטור } \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ מתכנס. הוכח כי אם } \{a_n\} \text{ סדרה מונוטונית, } a_n > 0, \text{ אזי אם } \sum \sqrt{a_n a_{n+1}} \text{ מתכנס אזי גם } \sum a_n \text{ מתכנס.}$$

$$67. \text{ יהיו } \sum u_n, \sum v_n \text{ טורים בעלי איברים חיוביים, ונניח כי}$$

$$0 < \liminf \frac{u_n}{v_n} \leq \limsup \frac{u_n}{v_n} < \infty$$

$$\text{הוכח כי אזי } \sum u_n \text{ ו-} \sum v_n \text{ מתכנסים ומתבדרים יחד.}$$

$$68. \text{ יהיו } \sum a_n, \sum b_n \text{ טורי מספרים חיוביים. אם לכל } n > N \text{ מתקיים } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ אזי אם } \sum b_n \text{ מתכנס אזי } \sum a_n \text{ מתכנס, ואם } \sum a_n \text{ מתבדר אזי } \sum b_n \text{ מתבדר.}$$

$$69. \text{ עבור אילו ערכי } a > 0 \text{ מתכנס הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}.$$

$$70. \text{ עבור אילו ערכי } a > 0 \text{ ו-} k \text{ ממשיים מתכנס הטור } \sum \frac{(n+a)^n}{n^{n+a}}$$

$$71. \text{ עבור אילו ערכי } x, y \text{ חיוביים מתכנס הטור}$$

$$\sum \frac{(x+1)(2x+1) \cdots (nx+1)}{(y+1)(2y+1) \cdots (ny+1)}$$