תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 1
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. תרגיל 1.6 מהחוברת.
<u>פתרון</u>.

(א) קל לבדוק כי פונקציה $P_1(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$ מקיימת כל אקסיומות של פונקצית ההסתברות. ההוכחה ניתנה בהרצאות.

(ב) פונקציה $P_2(A) = \frac{|A|}{n^2}$ אינה מקיימת אקסיומת האדיטיביות. לדוגמה: תהיה $A_1 = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ו- $A_1 = \{n\}$. אזי:

$$P_2\left(A_1 \bigcup A_2\right) = 1 \neq \frac{(n-1)^2 + 1}{n^2} = P_2(A_1) + P(A_2).$$

<u>תרגיל 2</u>. תרגיל 1.12 מהחוברת.
<u>פתרון</u>. יהיה $X_i,\ i = 1, 2$ התוצאות שהופיעו על גבי הקוביות. אזי עבור מספרים שלמים $1 \le a \le b \le 6$ נקבל:

$$\begin{aligned}
P(M \le a) &= P\left(X_1 \le a \bigcap X_2 \le a\right) = \left(\frac{a}{6}\right)^2, \\
P(M < a) &= P\left(X_1 < a \bigcap X_2 < a\right) = \left(\frac{a-1}{6}\right)^2 \\
P(M \ge a) &= 1 - P(M < a), \\
P(b < M < a) &= P(M < a) - P(M \le b), \\
P(b \le M < a) &= P(M < a) - P(M < b).
\end{aligned}$$

<u>תרגיל 3</u>. תרגיל 1.14 מהחוברת.
<u>פתרון</u>.
(א) נגדיר:

$$\Omega_n = \{\text{כל החלוקות של } 2n \text{ מספרים ל- } n \text{ זוגות}\}$$

ברור כי כל החלוקות שוות סיכוי. נוכיח עתה כי $|\Omega| = \frac{2n!}{n!\cdot 2^n}$. אחת מן הדרכים לראות את זה: נשים לב כי עבור מספר k כלשהו ישנם $|\Omega_{n-1}|$ חלוקות בהן מספר 1 מזווג עם k. מכאן:

$$|\Omega_n| = (2n-1)|\Omega_{n-1}| = \prod_{j=1}^{n}(2j-1) = \frac{2n!}{n!\cdot 2^n}.$$

לכן ההסתברות לקבל החלוקה המקורית היא:

$$P_1 = \frac{1}{|\Omega_n|} = \frac{n!\cdot 2^n}{2n!}.$$

(ב) מספר חלוקות בהן כל הזוגות הן של בן ובת הוא $n!$. המספר הזה שווה למספר תמורות של n מספרים כי ניתן להעמיד בנות בשורה וכל פרמוטציה של בנים מולן מהווה חלוקה מתאימה. מכאן:

$$P_2 = \frac{n!}{|\Omega_n|} = \frac{(n!)^2\cdot 2^n}{2n!}.$$

<u>תרגיל 4</u>. 12 אנשים מתחלקים ל-3 קבוצות של 4,3 ו-5 אנשים. כמה חלוקות אפשריות שונות ישנן ?
<u>פתרון</u>.

$$N = \binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5} = \frac{12!}{3!4!5!}.$$

<u>תרגיל 5</u>. יהיו $\{A_n\}$ ו- $\{B_n\}$ סדרות של קבוצות. הוכיחו כי:
(א)

$$\underline{\lim_n}\ \left(A_n\bigcap B_n\right) \subseteq \left(\underline{\lim_n}\ A_n\right)\bigcap\left(\underline{\lim_n}\ B_n\right)$$

(ב)

$$\left(\overline{\lim_n}\ A_n\right)\bigcap\left(\overline{\lim_n}\ B_n\right) \subseteq \overline{\lim_n}\ \left(A_n\bigcup B_n\right)$$

<u>פתרון</u>.
(א) די להוכיח כי

$$\liminf\left(A_n\bigcap B_n\right) \subseteq \liminf A_n.$$

הוכחה של הטענה הזו היא מיידית אם נזכור כי $\liminf A_n$ זהו אוסף של תוצאות ω ששייכות לכל הקבוצות A_n, פרט לאולי מספר סופי שלהן:

$$\begin{aligned}\liminf A_n &= \{\omega : \exists k = k(\omega) \text{ s.t. } \omega \in A_n \ \forall n \geq k\} \\ &= \{\omega : \omega \in A_n \text{ for all } A_n \text{ from some } k = k(\omega) \text{ on}\}.\end{aligned}$$

שימו לב כי $k = k(\omega)$ תלוי ב- ω.
(ב) די להוכיח כי

$$\limsup A_n \subseteq \limsup \left(A_n \bigcup B_n\right).$$

הטענה הזו נובעת מייד מההגדרה:

$$\limsup A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ for infinitely many of sets } A_n\}.$$

<u>תרגיל 6</u>. הוכיחו כי לכל סדרה לא עולה $\{A_n\}$ ($A_{n+1} \subseteq A_n$ לכל $n \geq 1$) יש גבול שהוא $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
<u>פתרון</u>.
די להוכיח כי

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

ברור כי עבור סדרה לא עולה $\{A_n\}$ מתקיים

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k, \qquad \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

לכן

$$\begin{aligned}\liminf A_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \\ \limsup A_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.\end{aligned}$$

בהצלחה !