חשבון אינפיניטסימלי חורף 2016-2017

תרגיל בית מס' 4

חלק א'

שאלה 1

תהא $M^k \subset \mathbb{R}^n$ יריעה. נאמר כי פונקציה $\phi : M \to \mathbb{R}^m$ הינה ממחלקה $C^1(M, \mathbb{R}^m)$ אם לכל $p \in M$ קיימת פרמטריזציה (h, V) כאשר $h : V \subset \mathbb{R}^k \to M$ המכילה p, כך ש- $\phi \circ h : V \to \mathbb{R}^m$ הינה העתקה $C^1(V, \mathbb{R}^m)$ (במובן הרגיל).

א) הראו כי ההגדרה אינה תלויה בבחירת הפרמטריזציה.

ב) הראו כי פונקציה $\phi : M \to \mathbb{R}^m$ הינה $C^1(M, \mathbb{R}^m)$ אם"ם לכל $p \in M$ קיימת סביבה U המכילה p ופונקציה $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ כך ש- $\Phi|_M = \phi$ (כלומר לפונקציות C^1 על יריעה יש הרחבה מקומית לפונקציות C^1 על $\mathbb{R}^n$).

שאלה 2

תהיינה $M \subset \mathbb{R}^m$ ו-$N \subset \mathbb{R}^n$ שתי יריעות חלקות. נניח כי $f : M \to N$ הינה העתקה C^1 (לצורך התרגיל הניחו כי $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ מוגדרת בסביבה של M, ומקיימת $f(M) = N$) בסביבה של M. הוכיחו כי $Df(p)[T_pM] \subset T_{f(p)}N$ (כלומר המרחב המשיק ל-M ב- p מועתק למרחב המשיק ל-N ב-$f(p)$).

שאלה 3

א) נניח $f : I \to \mathbb{R}^n$ ו- $g : J \to \mathbb{R}^n$ שתי מסילות חח"ע, גזירות ברציפות ורגולריות כך ש- $\Gamma = f(I) = g(J)$. הראו שקיימת $h \in C^1(I, J)$ חח"ע ועל כך ש- $f(t) = g(h(t))$.

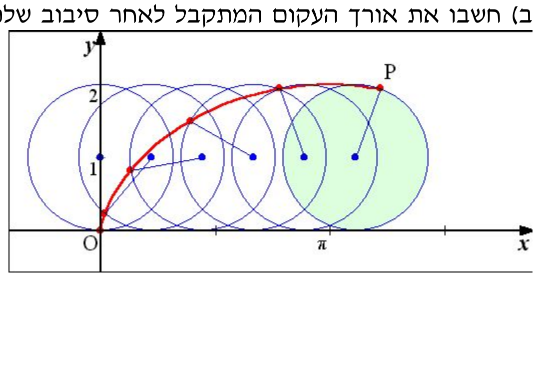
ב) ראינו כי את אורך המסילה $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ניתן לחשב על ידי פרמטריזציה $f : I \to \mathbb{R}^n$, על ידי הנוסחא $L(\Gamma) = \int_I |f'(t)|dt$. בהינתן כי g פרמטריזציה אחרת ל-Γ כנ"ל הראו כי $\int_I |f'(t)|dt = \int_J |g'(t)|dt$ (מכך נובע כי האורך $L(\Gamma)$ מוגדר היטב).

שאלה 4

מעגל ברדיוס 1 מסובב לאורך ציר ה-x. העקומה המתקבלת מתזוזת נקודה על המעגל נקראת ציקלואיד.

א) מצאו פרמטריזציה לעקומה שתמונתה היא הציקלואיד (ראו איור).

ב) חשבו את אורך העקום המתקבל לאחר סיבוב שלם של המעגל.



שאלה 5

רשמו העקומות הבאות (ב־$\mathbb{R}^2$) בפרמטריזצית אורך

א) $y = mx + n$

ב) $r = e^{\theta}$ בקואורדינטות פולריות.

שאלה 6

מטרת תרגיל זה לקבל תובנה גיאומטרית על כופלי לגרנג'.

א) הוכיחו הטענה הבאה: נניח $\alpha, \beta_1, ..., \beta_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ העתקות לינארית

ונניח $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ .. \\ .. \\ \beta_m \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, אז $ker(B) \subset ker(\alpha)$ אם"ם

קיימים מספרים $\lambda_1, ..., \lambda_m$ כך ש־$\alpha = \lambda_1\beta_1 + ...\lambda_m\beta_m$.

רמז לכיוון " $\leftarrow$ ": אלמלא α נתון כצירוף לינארי כנ"ל חישבו מה אז תיהיה דרגת המטריצה המתקבלת כשנוסיף את α כשורה נוספת ל־B? הראו שזה מהווה סתירה להנחה.

ב) הוכיחו כי אם $M \subset \mathbb{R}^n$ הינה יריעה, $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, ו־$f \in C^1(U)$ פונקציה ממשית, אז אם $a \in M \cap U$ הינה אקסטרמום מקומי של f מצומצמת ל־M אז $T_aM \subset ker(Df(a))$.

ג) הסיקו את המשפט על כופלי לגרנג': אם M יריעה הנתונה כמשטח גובה של פונקציה $\bar{F} = (F_1, ..., F_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ול־$f$ מצומצמת ל־M יש נקודה קריטית ב־$a \in M$ אז קיימים מספרים $\lambda_1, ..., \lambda_m$ כך

ש־ $Df(a) = \lambda_1 DF_1(a) + ... + \lambda_m DF_m(a)$

חלק ב'

שאלה 7

בהינתן $0 < N \in \mathbb{N}$ ומספרים ממשיים חיוביים $a_1, ..., a_N$ נגדיר Δ_N כתחום החסום על ידי העל מישורים $x_1 = 0, ..., x_N = 0$, והעל מישור $\frac{x_1}{a_1} + ... + \frac{x_N}{a_N} = 1$ (אני מציע שלעצמכם תערכו שירטוט עבור $N = 1, 2, 3$). הוכיחו כי $Vol(\Delta_N) = \frac{\prod_{i=1}^{N} a_i}{N!}$.

שאלה 8

תהא $A \subset \mathbb{R}^m$ ו־$A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצות בעלות נפח, ותיהיינה $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ו־ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות. נגדיר $h : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ על ידי $h(x, y) = f(x)g(y)$. הוכיחו כי $\int_{A \times B} h = (\int_A f)(\int_B g)$. הסיקו כי $vol(A \times B) = Vol(A)Vol(B)$.

שאלה 9

השתמשו במשפט פוביני כדי להוכיח הזהות $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ כאשר שתי הנגזרות החלקיות השניות רציפות.

רמז: אם $D_1 D_2 f - D_2 f D_1 f > 0$ בנקודה, אז קיים מלבן R בו זה חיובי. אולם משפט פוביני יראה $\int_R (D_1 D_2 f - D_2 D_1 f) = 0$.

שאלה 10

נגדיר $f : I \times I \to \mathbb{R}$ כאשר $I = [0,1]$ על ידי

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if either x or y is irrational} \\ \frac{1}{q} & \text{if x and y are rational and y=p/q with p and q relatively prime} \end{cases}$$

הוכיחו

א) $\int_{I\times I} f = 0$

ב) $\int_0^1 f(x,y)dy = 0$ לכל $x \in [0,1]$.

ג) $\int_0^1 f(x,y)dx = 0$ אם y אי רציונלי, אך האינטגרל אינו קיים אם y רציונלי.