תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 2 – פתרון חלקי

.1

א) $P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$

$P(B)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{1,2,5\}\}$

$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)=\{\varnothing, \{1\}, \{5\}, \{1,5\}\}$

ב) הטענה נכונה:

$$X\in P(A\cap B) \Leftrightarrow X\subseteq A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} X\subseteq A \\ X\subseteq B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X\in P(A) \\ X\in P(B) \end{cases} \Leftrightarrow X\in P(A)\cap P(B)$$

ג) ו- ד): שתי הטענות אינן נכונות. דוגמא נגדית: תהיינה $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$.

אז $A\triangle B=\{2,3\} \Leftarrow P(A\triangle B)=\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$,

ואילו $\begin{cases} P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \\ P(B)=\{\varnothing, \{1), \{3\}, \{1,3\}\} \end{cases} \Leftarrow P(A)\triangle P(B)=\{\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}\}$.

.2 לדוגמא, $\{\ \varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\{\{\varnothing\}\}\},\ \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}\ \}$

.3

א) תשובה: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$

ב) תשובה: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\{0\}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$.

ג) $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\geq n} A_m \Leftrightarrow$ קיים $n\in N$ כך שלכל $m\geqslant n$ מתקיים $x\in A_m$ (כלומר החל ממקום מסויים, x שייך לכל איברי המשפחה).

$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m \Leftrightarrow$ לכל $n\in N$ קיים $m\geqslant n$ כך ש- $x\in A_m$ (כלומר, לכל איבר של המשפחה, יש אחריו איבר ש- x שייך לו).

מכאן ברור ש- $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\geq n} A_m \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m$, אבל לא בהכרח יש שוויון. ניקח, לדוגמא, המשפחה הבאה : $A_n=\{0,1\}$ לכל n אי-זוגי, $A_n=\{1,2\}$ לכל n זוגי. עבור המשפחה הזאת, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\geq n} A_m=\{1\}$ ו- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m=\{0,1,2\}$.

נביא דוגמא של משפחה שעבורה הקבוצות $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m\ge n} A_m$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m\ge n} A_m$ כולן שונות זו מזו. נגדיר:

$A_n=[-1/n, 1]$ עבור n אי-זוגי, $A_n=[1/n, 2]$ עבור n זוגי:

$A_1=[-1, 1]$ $A_2=[1/2, 2]$, $A_3=[-1/3, 1]$, $A_4=[1/4, 2]$, $A_5=[-1/5, 1]$, $A_6=[1/6, 2]\ldots$

עבור המשפחה הזאת:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=[1/2,1],\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=[1,2],\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\ge n} A_m=(0,1],\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\ge n} A_m=[0,2].$$

4. א) הטענה לא נכונה.

נראה אילו הכלות בין A, B, C ניתן להסיק מהנתון.

$x\in A$ $\Leftarrow$ לכל $y\in B$, $(x,y)\in A\times B$ $\Leftarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cup(B\times C)$ $\Leftarrow$ $(x,y)\in C\times C$ $\Leftarrow$ $x\in C$ ולכן $A\subseteq C$.

$y\in B$ $\Leftarrow$ לכל $x\in A$, $(x,y)\in A\times B$ $\Leftarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cup(B\times C)$ $\Leftarrow$ $(x,y)\in C\times C$ $\Leftarrow$ $y\in C$ ולכן $B\subseteq C$.

$$z\in C \Leftarrow (z,z)\in C\times C \Leftarrow (z,z)\in(A\times B)\cup(B\times C) \Leftarrow \left[\begin{array}{l}(z,z)\in A\times B\\ (z,z)\in B\times C\end{array}\right. \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}z\in A\\ z\in B\end{cases}\\ \begin{cases}z\in B\\ z\in C\end{cases}\end{array}\right. \Leftarrow z\in B$$

ולכן $C\subseteq B$, אבל אין אפשרות להסיק $z\in A$.

לכן קיבלנו: $A\subseteq B=C$, ולא בהכרח $A=B$, דוגמא נגדית אפשרית – $A=\{1\}, B=C=\{1,2\}$.

ב) יהיו $x\in C$ ו- $y\in P(C)$. אז: $(x,y)\in C\times P(C)$ $\Leftarrow$ $(x,y)\in(A\times B)\cup(B\times A)$ $\Leftarrow$

$$\Leftarrow \left[\begin{array}{l}(x,y)\in(A\times B)\\ (x,y)\in(B\times A)\end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l}(y,x)\in(B\times A)\\ (y,x)\in(A\times B)\end{array}\right. \Leftarrow (x,y)\in(A\times B)\cup(B\times A) \Leftarrow$$

$(x,y)\in P(C)\times C$ $\Leftarrow$ $y\in C$ ו- $x\in P(C)$, ומכאן $C=P(C)$, וזה לא ייתכן כי $|C|=n$ $\Leftarrow$ $|P(C)|=2^n$. לכן המצב המתואר בלתי אפשרי.

5. התרגיל הזה מכליל את המצב שמתואר בדיאגרמות Venn עבור 2 או 3 קבוצות:

עבור 2 קבוצות $\boldsymbol{X}=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$; עבור 3 קבוצות

$$\boldsymbol{X}=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup$$
$$\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C^c)$$

א) מאחר שלכל $k=1, 2, \dots, n$ (אינדקס של קבוצה) יש 2 אפשרויות לבחור i_k – יש 2^n אפשרויות לכתוב ביטוי $A_1^{i_1}\cap A_2^{i_2}\cap\ldots\cap A_n^{i_n}$, לכן יש לכל היותר 2^n קבוצות יסודיות. ייתכן שיש פחות כי יכול להיות שחלק מהן שוות; לדוגמא אם $\boldsymbol{X}=\{1, 2\}$, $A=B=\{1\}$,
אז $A\cap B=\{1\}$, $A^c\cap B^c=\{2\}$, $A\cap B^c=A^c\cap B=\varnothing$ – שלוש קבוצות יסודיות.

ב) בכל זוג של קבוצות יסודיות שונות, יש אינדקס k אחד לפחות כך שבאחת מהן מופיע $A_k^0=A_k$ ובשניה – $A_k^1=A_k^c$ (כי אחרת הן היו קבוצות יסודיות שוות). לכן החיתוך שלהן הוא
$$(\ldots\cap A_k\cap\ldots)\cap(\ldots\cap A_k^c\cap\ldots)=\ldots\cap A_k\cap A_k^c=\ldots\cap\varnothing=\varnothing$$
כלומר כל שתי קבוצות כאלו – זרות.

ג) אם x שייך לאחת מהקבוצות היסודיות אז הוא בוודאי שייך ל- $\boldsymbol{X}$ – לפי המשמעות של ה"עולם".
אם x שייך ל- $\boldsymbol{X}$, אז לכל k הוא שייך או ל- $A_k^0=A_k$ או ל- $A_k^1=A_k^c$, לכן x שייך לחיתוך של k קבוצות כאלה, שזה אחת מהקבוצות היסודיות, ולכן – לאיחוד של כל הקבוצות היסודיות.

ד) אם x שייך לאיחוד כל הקבוצות היסודיות שבהן הגורם ה- j הוא $A_j^0=A_j$.
לכן הוא שייך לקבוצה יסודית (אחת לפחות) מהצורה $\ldots\cap A_j\cap\ldots$, לכן שייך ל- A_j.
אם x שייך ל- A_j, אז לכל $k\neq j$ הוא שייך או ל- $A_k^0=A_k$ או ל- $A_k^1=A_k^c$, לכן x שייך לחיתוך של $k-1$ קבוצות כאלה עם A_j, שזה אחת מהקבוצות היסודיות, ולכן – לאיחוד של כל הקבוצות היסודיות מהצורה $\ldots\cap A_j\cap\ldots$.