תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 9

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.

(א)

יהיה S -שטח המשולש. ההתפלגות היא אחידה ולכן $f_{X,Y}(x,y)=1/S=1/2$.
זה גורר:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}\frac{1}{2}dx=x\ if\ x\in[0,1)\\ \\ \int_0^{4-2x}\frac{1}{2}dx=2-x\ if\ x\in(1,2]\end{cases}.$$

$$f_Y(y)=\int_{y/2}^{2-y/2}\frac{1}{2}dx=1-y/2,\quad y\in[0,2].$$

(ב) הישר $X=Y$ חותך את המשולש בנקודות $O=(0,0)$ ו- $M=(4/3,4/3)$.
נסמן ב- S_1 את השטח של המשולש OMB, כאשר $B=(2,0)$. המשולש הזה מייצג את המאורע $\{X\geq Y\}$ (תעשו שרטוט). לכן:

$$P(X<Y)=1-P(X\geq Y)=1-S_1/2=1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

(ג) הישר $X+Y=1$ חותך את המשולש בנקודות $C=(1/3,2/3)$ ו- $D=(1,0)$.
נסמן ב- S_2 את השטח של המשולש OCD. המשולש הזה מייצג את המאורע $\{X+Y\leq 1\}$ (תעשו שרטוט). לכן:

$$P(X+Y>1)=1-S_2/2=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

(ד) נסמן את התחום (כלומר את המשולש) ב- D. אז

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{2-y},\quad (x,y)\in D.$$

<u>תרגיל 2</u>.

נשים לב כי $P(Z=0)=0,\ P(Z=1)=P(Z=-1)=1/2$. כמו כן, לכל מאורע $A\subseteq\mathbb{R}$,

$$P(Y\in A,Z=0)=0=P(Y\in A)P(Z=0),$$

$$P(Y \in A, Z = 1) = P(X \in A) = \frac{P(Y \in A)}{2} = P(Y \in A)P(Z = 1),$$

$$\begin{aligned} P(Y \in A, Z = -1) = P(X \in -A) = \frac{P(Y \in A)}{2} = \\ = P(Y \in A)P(Z = -1), \end{aligned}$$

כאשר $-A := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

<u>תרגיל 3</u>.

$$\begin{aligned} f_{X_3}(z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_{X_1,X_2,X_3}(x, y, z)dxdy = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_{X_3|X_1,X_2}(z|x, y)f_{X_1,X_2}(x, y)dxdy = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (x + y)e^{-z(x+y)}4e^{-2x-2y}dxdy = \\ &= 8\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-z(x+y)}e^{-2x-2y}dxdy = \\ &= \\ &= 8\int_0^\infty xe^{-x(z+2)}dx \int_0^\infty e^{-y(z+2)}dy = \frac{8}{(z + 2)^3}. \end{aligned}$$

$$F_Z(z) = \int_0^z \frac{8}{(z + 2)^3}dz = 1 - \frac{4}{(z + 2)^2}, \quad z \geq 0.$$

$$E(X_3^2) = \int_0^\infty \frac{8z^2}{(z + 2)^3}dz = \infty.$$

<u>תרגיל 4</u>.

(**א**) במקרה הזה, כל החלוקות בין התאים הן שווי התפלגות. בסה"כ מספר החלוקות הוא כמו מספר הפתרונות של המשוואה $X_1 + X_2 + \ldots X_m = n$ ושווה ל- (הנוסחה נלמדה בקורס של קומבינטוריקה, ההוכחה עם ה"מחיצות")

$$N_{n,m} = \binom{n + m - 1}{m - 1}.$$

לכן, אם נסמן $D=\{a,b,c\in\mathbb{N}\cup\{0\} : a+b+c\leq n\}$, נקבל:

$$p_{X_1,X_2,X_3}(a,b,c)=\frac{N_{n-a-b-c,m-3}}{N_{n,m}}, \qquad (a,b,c)\in D,$$

$$p_{X_1|X_2,X_3}(a|b,c)=\frac{p_{X_1,X_2,X_3}(a,b,c)}{p_{X_2,X_3}(b,c)}, \qquad (a,b,c)\in D,$$

כאשר

$$p_{X_2,X_3}(b,c)=\frac{N_{n-b-c,m-2}}{N_{n,m}}.$$

כמו כן, מטעמי סימטריה:

$$E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_m) \;\Rightarrow\; E(X_j)=\frac{1}{m}E(X_1+\ldots X_m)=\frac{n}{m}.$$

דרך אחרת לחשב את התוחלת היא להלן (גרועה מכל הבחינות האפשריות ומ-תפרסמת כאן אך ורק בגלל בקשות חוזרות ונישנות של הקהל):

$$p_{X_j}(a)=\frac{N_{n-a,m-1}}{N_{n,m}}, \qquad a=0,1,2,\ldots,n.$$

לכן:

$$\begin{aligned}
E(X_j) &= \frac{1}{N_{n,m}}\sum_{i=0}^{n} i\frac{(n-i+m-2)!}{(n-i)!(m-2)!}= \\
&= \frac{1}{N_{n,m}}\sum_{i=0}^{n}(n-(n-i))\frac{(n-i+m-2)!}{(n-i)!(m-2)!}= \\
&= n-\frac{1}{N_{n,m}}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\frac{(n-i+m-2)!}{(n-i)!(m-2)!}= \\
&= n-\frac{m-1}{N_{n,m}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-i+m-2)!}{(n-1-i)!(m-1)!}= \\
&= n-\frac{m-1}{N_{n,m}}\sum_{i=0}^{n-1}N_{n-1-i,m}.
\end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\sum_{i=0}^{n} p_{X_j}(i) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} N_{n-i,m-1} = N_{n,m}$$

לכן:

$$\begin{aligned} E(X_j) &= n - \frac{m-1}{N_{n,m}} N_{n-1,m+1} = \\ &= n - (m-1) \cdot \frac{n!(m-1)!}{(n+m-1)!} \cdot \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} = \\ &= \frac{n}{m}. \end{aligned}$$

(ב)

עבור כל נק. (a,b,c) בתחום $D = \{a,b,c \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a+b+c \leq n\}$ נקבל:

$$\begin{aligned} & p_{X_1,X_2,X_3}(a,b,c) = \\ & \quad = \frac{n!}{a!b!c!(n-a-b-c)!} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{a+b+c} \cdot \left(\frac{m-3}{m}\right)^{n-a-b-c}. \end{aligned}$$

$$p_{X_1|X_2,X_3}(a|b,c) = \frac{p_{X_1,X_2,X_3}(a,b,c)}{p_{X_2,X_3}(b,c)},$$

כאשר

$$p_{X_2,X_3}(b,c) = \frac{n!}{b!c!(n-b-c)!} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{m-2}{m}\right)^{n-b-c}.$$

לכן:

$$p_{X_1|X_2,X_3}(a|b,c) = \binom{n-b-c}{a} \left(\frac{1}{m-2}\right)^{a} \cdot \left(\frac{m-3}{m-2}\right)^{n-a-b-c}.$$

כמו כן:

$$X_j \sim \text{ BIN}(n, 1/m) \quad \Rightarrow \quad E(X_j) = \frac{n}{m}.$$

<u>תרגיל 5</u>.

(א)

הנתון אומר כי $f_{X_n|X_{n-1}}(x_n|x_{n-1}) = 1/x_{n-1}$ עבור $0 < x_n < x_{n-1} < 1$. לכן:

$$f_{X_0,X_1}(x_0,x_1) = f_{X_1|X_0}(x_1|x_0)f_{X_0}(x_0) = 1/x_0, \quad 0 < x_1 < x_0 < 1,$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{x_1}^{1} \frac{1}{x_0} dx_0 = -\ln x_1, \quad 0 < x_1 < 1.$$

בדומה לכך:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)f_{X_1}(x_1) = -\frac{\ln x_1}{x_1}, \quad 0 < x_2 < x_1 < 1,$$

$$f_{X_2}(x_2) = -\int_{x_2}^{1} \frac{\ln x_1}{x_1} dx_1 = \frac{(\ln x_2)^2}{2}, \quad 0 < x_2 < 1.$$

מכאן הניחוש (בדקו עבור $n = 3$):

$$f_{X_n}(x_n) = (-1)^n \frac{(\ln x_n)^n}{n!}, \quad 0 < x_n < 1. \tag{1}$$

(ב)

הוכחה של הנוסחה (1) באינדוקציה. אם היא נכונה עבור n מסוים אזי

$$\begin{aligned} f_{X_n,X_{n+1}}(x_n,x_{n+1}) &= f_{X_{n+1}|X_n}(x_{n+1}|x_n)f_{X_n}(x_n) = \\ &= (-1)^n \frac{(\ln x_n)^n}{n! x_n}, \quad 0 < x_{n+1} < x_n < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{X_{n+1}}(x_n) &= \int_{x_n}^{1} (-1)^n \frac{(\ln x_n)^n}{n! x_n} dx_n = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(\ln x_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < x_{n+1} < 1. \end{aligned}$$

(ג)

לפי משפט ההחלקה:

$$E(X_n) = E(E(X_n|X_{n-1})) = E\left(\frac{X_{n-1}}{2}\right) = \ldots = E\left(\frac{X_0}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

דרך אחרת:

$$\begin{aligned}E(X_n) &= \int_0^1 x(-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n!}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' (-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n!}dx = \\ &= \frac{x^2}{2}(-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n!}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{2}\left[(-1)^n \frac{(\ln x)^n}{n!}\right]' dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2}(-1)^{n-1}\frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!}dx = \\ &= E\left(\frac{X_{n-1}}{2}\right) = \ldots = E\left(\frac{X_0}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

תרגיל 6.

(א)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = 2, \quad 0 < x < y < 1,$$

$$f_X(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

(ב)

$$E(X|Y) = Y/2,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < x < y < 1,$$

$$E(Y|X=x) = \int_x^1 y\frac{1}{1-x}dy = \frac{1+x}{2}.$$

הסיבה: ו"א (X,Y) מפולג באחידות בתחום מסוים.