<u>תורת החבורות – תרגיל בית 13 – פתרון</u>

<u>שאלה 1:</u>

$G \lhd N$, לכן G פועלת על N ע"י ההצמדה. כלומר, קיים הומומורפיזם $\varphi: G \to S_N$ המתאים לכל $g \in G$ איבר $\varphi_g \in Aut(N)$, כאשר לכל $n \in N$ $\varphi_g(n) = gng^{-1}$.

נמצא את גרעינו:

$$g \in Ker(\varphi) \iff \varphi_g = id_N \iff (\forall n)(\varphi_g(n) = n) \iff$$
$$\iff (\forall n)(gng^{-1} = n) \iff (\forall n)(gn = ng) \iff g \in C_G(N)$$

בכך קיבלנו כי $C_G(N) = Ker(\varphi)$ ולכן הינה תח"נ כגרעין של הומומורפיזם.

<u>שאלה 2:</u>

G פועלת על עצמה ע"י ההצמדה. כלומר, קיים הומומורפיזם $\varphi: G \to S_G$ המתאים לכל $g \in G$ איבר $\varphi_g \in Inn(G)$, כאשר לכל $x \in G$ $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$.

לכל $x \in G$ $C_G(x) \le G \Leftarrow$ $|C_G(x)|$ חזקה של p, וכך גם עבור $|cl_G(x)|$.

כעת נניח כי $G = Z(G) \dot{\cup} \left(\bigcup_{i=1}^{t} cl(x_i)\right)$. כעת מתקיים כי לכל $x \in Z(G)$ $C(x) = G$, לכן $|cl_G(x)| = 1$. כמו כן עבור כל $x \notin Z(G)$ $C(x) \ne G \Leftarrow |cl(x)| > 1$ ולכן מתחלק ב- p.

G היא איחוד זר: $G = Z(G) \dot{\cup} \left(\bigcup_{i=1}^{t} cl(x_i)\right) \Leftarrow |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{t} |cl(x_i)|$.

לכל $1 \le i \le t$ $|cl(x_i)|$ מתחלק ב- p, כך גם $|G|$, לכן $|Z(G)|$ מתחלק ב- p. מצד שני, $|Z(G)| \ne 0$ (כי מרכז מכיל את יחידה), לכן $|Z(G)| \ge p \Leftarrow Z(G) \ne \{e\}$.

שאלה 4:

אברי S_5 צמודים אם ורק אם יש להם אותו מבנה מעגלי.

נרכז את כל מחלקות הצמידות $cl(x)$ וגדלים של $cl(x), C(x)$ בטבלא הבאה:

x	id	$(4\,5)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,2\,3\,4\,5)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2)(3\,4\,5)$
$cl(x)$	1	10	20	30	24	15	20
$C(x)$	120	12	6	4	5	8	6

כעת נמצא את הרכזים.

1) $C(id)=S_5$

2) $\psi(4\,5)\psi^{-1}=(4\,5) \Leftrightarrow \psi\in\langle\alpha,(4\,5)|\alpha\in S_3\rangle \Leftarrow C(4\,5)=\langle\alpha,(4\,5)|\alpha\in S_3\rangle$

3) $|C(1\,2\,3)|=6$ בעלת מרכז לא טריביאלי, לכן ציקלית.

כמו כן $(1\,2\,3)(4\,5)\in C(1\,2\,3) \Leftarrow C(1\,2\,3)=\langle(1\,2\,3)(4\,5)\rangle$

4) $|C(1\,2\,3\,4)|=4 \wedge (1\,2\,3\,4)\in C(1\,2\,3\,4) \Leftarrow C(1\,2\,3\,4)=\langle(1\,2\,3\,4)\rangle$

5) באותו אופן $C(1\,2\,3\,4\,5)=\langle(1\,2\,3\,4\,5)\rangle$

6) $\psi(1\,2)(3\,4)\psi^{-1}=(3\,4)(2\,1) \Leftarrow \psi=(1\,3\,2\,4)\in C((1\,2)(3\,4))$.

לכן $\langle(1\,3\,2\,4),(1\,2),(3\,4)\rangle\in C((1\,2)(3\,4))$ והיות והיא ת״ח מסדר 8 השוויון מתקיים.

7) $|C((1\,2)(3\,4\,5))|=6$ בעלת מרכז לא טריביאלי, לכן ציקלית והינה $\langle(1\,2)(3\,4\,5)\rangle$.

שאלה 5:

נתאים את הטבלה מהתרגיל הקודם ל- A_5:

x	id	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3\,4\,5)$
$C(x)$	60	4	3	5
$cl(x)$	1	15	20	12

ובכך מחלקת הצמידות יחידה של S_5 המתפרקת ב-A_5 לשתי מחלקות צמידות שוות גודל היא מחלקת הצמידות של 5-מעגל. לכן גדלים של חלקות הצמידות ב-A_5 הן: $1, 15, 20, 12, 12$

שאלה 6:

תהי $A_5 \triangleright N$ כך ש $N \neq G$, אז $|N| \leq |A_5|/2 = 30$.

היות וכל תח"נ של A_5 היא איחוד של מחלקות צמידות של A_5, נקבל כי

$|N| \in \{1,\ 1+12,\ 1+15,\ 1+20,\ 1+12+12,\ 1+12+15\}$. אך לפי משפט לגרנג' $|N|$

מחלק את 30, לכן $|N| = 1$. בכך קיבלנו כי ל-A_5 אין ת"ח ממש ההינה תח"נ, מכאן A_5 פשוטה.