תורת הקבוצות ־ תרגול מספר 1
הגדרות בסיסיות

לוגיקה בסיסית

- $a \wedge b$ ־ a **וגם** b. אמת כאשר a אמת וגם b אמת.
- $a \vee b$ ־ a **או** b. אמת כאשר a אמת או b אמת.
- $\sim a$ ־ **לא** a. אמת כאשר a שקר.
  - $\sim\sim a$ שקול ל־a (שלילה כפולה מבטלת את עצמה).
- $a \rightarrow b$ ־ a **גורר** b. אמת כאשר b אמת או a שקר. קצת מוזר... ("אם פריז היא בירת אנגליה אז יש חמצן על הירח" ־ אמת).
  - הטענה $a \rightarrow b$ **שקולה לוגית** לטענה $\sim b \rightarrow \sim a$. להיזהר לא להתבלבל עם $\sim a \rightarrow \sim b$! ("אם יירד היום גשם אז אירטב" שקול ל"אם לא אירטב היום אז לא ירד גשם" אבל **אינו** שקול ל"אם לא יירד גשם היום לא ארטב", כי ייתכן שסתם אפול לבריכה).
  - $a \rightarrow b$ **שקול לוגית** לפסוק $\sim a \vee b$ (כפי שראינו מהניסוח המילולי שלמעלה).
- $a \leftrightarrow b$ ־ a **אם ורק אם** b. אמת כאשר a, b שניהם אמת או שניהם שקר ־ כלומר, יש להם את אותה טבלת אמת. כאשר אנו אומרים ש־a **שקול לוגית** ל־b, הכוונה היא ש־$a \leftrightarrow b$ (אפשר לבדוק זאת תמיד על ידי בדיקת טבלאות האמת).
  - $a \leftrightarrow b$ בעצמו **שקול לוגית** לפסוק $a \rightarrow b \wedge b \rightarrow a$.

סיכום טבלאות אמת:

a	b	$\sim a$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
F	F	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
T	T	F	T	T	T	T

- כללי דה־מורגן:
  - $\sim (a \vee b) \leftrightarrow \sim a \wedge \sim b$
  - $\sim (a \wedge b) \leftrightarrow \sim a \vee \sim b$
- $\exists$ מסמן "קיים" ו־$\forall$ מסמן "לכל".
- $\sim \exists a\,(\psi) \leftrightarrow \forall a\,(\sim \psi)$ ("**לא קיים** מספר טבעי גדול ביותר אם **לכל** מספר טבעי, הוא **לא** הגדול ביותר").

תרגיל

נגדיר קשר חדש: $a \oplus b$ (xor, קיצור של exclusive or) הוא אמת רק אם בדיוק אחד מבין a, b הוא אמת. מהי טבלת האמת המתאימה ל־xor?

פתרון

a	b	$a \oplus b$
F	F	F
T	F	T
F	T	T
T	T	F

תרגיל

נגדיר קשר חדש, $a \uparrow b$ (nand, קיצור של not and) על ידי $a \uparrow b = \sim (a \wedge b)$.

הוכיחו כי ניתן לקבל פסוקים שקולים ל־$\sim a$ ול־$a \vee b$ באמצעות שימוש ב־$\uparrow$ בלבד.

פתרון

$a \uparrow a \leftrightarrow \sim a$ (בדיקת טבלת אמת).

$$\begin{aligned} a \vee b \quad & \leftrightarrow_{(1)} \quad \sim\sim (a \vee b) \leftrightarrow_{(2)} \sim (\sim a \wedge \sim b) \\ & \leftrightarrow_{(3)} \quad (\sim a) \uparrow (\sim b) \leftrightarrow_{(4)} (a \uparrow a) \uparrow (b \uparrow b) \end{aligned}$$

מעבר 1 נובע מתכונת שלילה כפולה.

מעבר 2 הוא שימוש בכלל דה־מורגן.

מעבר 3 הוא שימוש בהגדרה של $\uparrow$.

מעבר 4 הוא שימוש בתוצאה שראינו קודם של ייצוג $\sim$ בעזרת $\uparrow$.

הצורה הנורמלית DNF

נתונה טבלת אמת כלשהי על n משתנים. האם ניתן לבנות פסוק לוגי שממדל אותה?

התשובה חיובית, וניתן לעשות זאת באמצעות שימוש בקשרים $\vee, \wedge, \sim$ בלבד.

נגיד שפסוק φ הוא ב־DNF (קיצור של Disjunctive Normal Form) אם הוא מהצורה $\varphi = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$ כך שכל C_i נקראת **פסוקית** והיא עצמה פסוק מהצורה $C_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_t$, כך שכל l_j נקרא **ליטרל** והוא עצמו מהצורה a_j (משתנה) או $\sim a_j$ (שלילה של משתנה).

דוגמה לפסוק DNF:

$$\varphi = (a_1 \wedge \sim a_2) \vee (a_3) \vee (\sim a_1 \wedge \sim a_3 \wedge \sim a_5)$$

כיצד נתאר טבלת אמת כללית עם פסוק DNF? הרעיון: הפסוק φ שלנו יכיל פסוקית אחת לכל שורה בטבלת האמת שהיא T. אם בשורה הזו המשתנה a_i מקבל T, אז בפסוקית הוא יופיע בתור a_i, ואם הוא מקבל F אז בפסוקית הזו הוא יופיע בתור $\sim a_i$.

דוגמה: טבלת האמת של גרירה לוגית:

a	b	$a \to b$
F	F	T
T	F	F
F	T	T
T	T	T

ב־φ יהיו שלוש פסוקיות:

$$\varphi = (\sim a \wedge \sim b) \vee (\sim a \wedge b) \vee (a \wedge b)$$