גליון 1

שאלה 3:

בסעיף הראשון מראים שאם לנגזרת יש נקודת אי רציפות, אז היא חייבת להיות עיקרית (כלומר לא אי רציפות סליקה ולא קפיצה). במילים אחרות, אם ל f יש נקודת אי רציפות סליקה או קפיצה אז האינטגרל ה**לא מסויים** $\int f\mathrm{dx}$ לא קיים. האינטגרל המסויים עדיין יכול להיות קיים ־ למשל פונקציות מדרגה הן אינטגרביליות רימן אך אין להן פונקציה קדומה (אלא אם כן הן קבועות).

בסעיף השני נתונה פונקציה עם אי רציפות קפיצה. מהסעיף הראשון מקבלים שלא קיימת לה פונקציה קבועה בכל התחום הגדרה, אך לעומת זאת כן ניתן למצוא פונקציה <u>רציפה</u> על כל המישור שהנגזרת שלה שווה ל $g(x)$ לכל $x \neq 0$.

גליון 2

שאלה 1:

במקום להוכיח את הטענה ישירות, כדאי להסתכל על הפונקציה $g(x) - f(x)$.

שאלה 5:

שימו לב שבסעיף השני הקבוע δ צריך להיות תלוי אך ורק ב ε ולא ב n. אם $f(x)$ היא פונקציה רציפה <u>כלשהי</u> שאינה זהותית אפס אז $\int |f(x)|^n \mathrm{dx} > 0$ ולכן בוודאי קיים $\delta_{n,\varepsilon}$ כך ש $\int |f(x)|^n \mathrm{dx} \geq \delta(M-\varepsilon)^n$ ־ למשל ניתן לבחור $\delta = \frac{\int |f(x)|^n \mathrm{dx}}{\delta(M-\varepsilon)^n} > 0$.

בסעיף השלישי אי אפשר להשתמש בכלל הסנדוויץ' ישירות, כי החסם העליון והחסם התחתון לא שווים. כדי לעקוף את זה, אפשר למשל להשתמש בגבול העליון ובגבול התחתון של הסדרה $\left(\int |f(x)|^n \mathrm{dx}\right)^{1/n}$.

גליון 3

שאלה 9:

נוסחת סטרלינג אומרת ש $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ כאשר n מאוד גדול. מבחינה פורמלית זה אומר שהמנה שואפת לאחד. כאשר יש גבול שצריך לחשב שמופיע בו עצרת, אי אפשר סתם להחליף את העצרת בקירוב סטרלינג ־ חייבים להראות האם זה מותר. למשל $\frac{1}{n} \to 0$ כאשר $n \to \infty$, אבל אם נחליף את $\frac{1}{n}$ ב 0 בתוך הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ אז נקבל שהגבול שווה ל 1 במקום לקבל את e.

הפתרון של התרגיל באמצעות קירוב סטרלינג:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} &= \left(\frac{(2n)!}{(2n/e)^{2n}\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{(2n/e)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}\right)^{1/n} \\
&= \left(\frac{(2n)!}{(2n/e)^{2n}\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{2^{2n}n^n\sqrt{2}}{e^n} \cdot \frac{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}\right)^{1/n} \\
&= \left(\frac{(2n)!}{(2n/e)^{2n}\sqrt{2\pi n}}\right)^{1/n} \cdot \frac{4n}{e}2^{\frac{1}{2n}} \cdot \left(\frac{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)^{1/n} \frac{1}{n} \\
&= \left(\frac{(2n)!}{(2n/e)^{2n}\sqrt{2\pi n}}\right)^{1/n} \cdot \left(\frac{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)^{1/n} \cdot \frac{4}{e}2^{\frac{1}{2n}}
\end{aligned}$$

עכשיו אפשר להשתמש בקירוב סטרלינגץ שני הגורמים בסוגריים הראשונים שואפים לאחד ולכן השורש ה n־י שלהם גם שואף לאחד ומכאן נקבל שהגבול הוא $\frac{4}{e}$.