<u>**תורת החבורות – תרגיל בית 6**</u>

<u>**שאלה 1**</u>

תהי $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0, c\neq 0\right\}$.

א) <u>הראה</u> כי G סגורה תחת כפל מטריצות ע"י חישוב המכפלה של $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

ב) <u>מצא</u> את המטריצה ההפכית של $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ <u>והסק</u> כי G סגורה להפיכים.

ג) <u>הסק</u> כי G תת-חבורה של $GL_2(\mathbb{R})$.

ד) <u>הוכח</u> כי $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\right\}$ הינה תת-חבורה של $GL_2(\mathbb{R})$.

<u>**שאלה 2**</u>

<u>הוכח</u> כי החבורות הבאות אינן איזומורפיות:

א) $(\mathbb{R}^*,\cdot),\quad (\mathbb{C}^*,\cdot)$

ב) $(\mathbb{Z},+),\quad (\mathbb{Q},+)$

ג) $D_{24},\quad S_4$.

<u>**שאלה 3**</u>

תהי $G=\left\{z\in\mathbb{C} \middle| z^n=1 \text{ for some } n\in\mathbb{Z}^+\right\}$.

<u>הוכח</u> כי לכל $k>1$ טבעי ההעתקה מ- G לעצמה המוגדרת ע"י $z\mapsto z^k$ הינה הומומורפיזם על, אך אינה איזומורפיזם.

שאלה 4

הוכח כי לכל $k \in \mathbb{Q}^*$ ההעתקה המוגדרת ע"י $q \mapsto kq$ ($q \in \mathbb{Q}$) הינה איזומורפיזם מ- $\mathbb{Q}$ ל- $\mathbb{Q}$.

שאלה 5

תהי A חבורה אבלית, ויהי $k \in \mathbb{Z}$.

הוכח כי ההעתקה המוגדרת ע"י $a \mapsto a^k$ הינה הומומורפיזם מ- A לעצמה, ואם $k=-1$, אז ההומומורפיזם הינו איזומורפיזם.

שאלה 6

בכל אחד מהסעיפים הבאים קבע אם H הינה תת-חבורה של G:

א) $G=\left(\mathbb{C}^*,\cdot\right),\quad H=\left\{z\in G \,\middle|\, |z|=1\right\}$

ב) $G=\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right),\quad H=\left\{x\in G \,\middle|\, x^2\in\mathbb{Q}\right\}$

ג) $G=S_n,\quad H=\left\{(i\ j)\in G \,\middle|\, 1\le i<j\le n\right\}$, כאשר $n\ge 3$ מספר טבעי.

ד) H הינה קבוצת השיקופים ב- $G=D_{2n}$, כאשר $n\ge 3$ מספר טבעי.

ה) H הינה קבוצת המספרים הרציונליים (מצומצמים) עם מכנה המחלק את n, כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו- $G=\left(\mathbb{Q},+\right)$.

ו) H הינה קבוצת הרציונליים עם מכנה הזר ל- n, כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו- $G=\left(\mathbb{Q},+\right)$.

ז) G חבורה כלשהי, H הינה קבוצת כל האיברים מסדר n, בתוספת איבר היחידה, כאשר $n\in\mathbb{N}$ טבעי לא ראשוני ונתון כי G מכילה איברים מסדר n.

שאלה 7

א) הבא דוגמא לחבורה G ותת-קבוצה אינסופית $H\subseteq G$ סגורה תחת הפעולה, כך ש- H אינה תת-חבורה של G.

ב) הוכח כי אם G חבורה סופית מסדר $n>2$, אז לא קיימת בה תת-חבורה H מהסדר $n-1$. (אין להשתמש במשפט לגרנג'.)

<u>שאלה 8</u>

תהיינה A,B חבורות.

<u>הוכח</u> כי כל אחת משתי הקבוצות $\{(1,b)|b \in B\}$, $\{(a,1)|a \in A\}$ הינה תת-חבורה של $A \times B$, וכי $\{(a,a)|a \in A\}$ הינה תת-חבורה של $A \times A$.

(<u>הערה</u>: לתת-חבורה האחרונה קוראים <u>התת-חבורה האלכסונית</u>)