תורת ההסתברות

עבודת בית מס' 7
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. בעיה 5.3 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

$$EX^2 = VARX + (EX)^2 = 1 - 0 = 1.$$

$$\begin{aligned} Ee^X &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx = \\ &= e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)dx = \sqrt{e}, \end{aligned}$$

כאשר $Y \sim N(1,1)$.

<u>תרגיל 2</u>. בעיה 5.4 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

$$\begin{aligned} E\frac{1}{1+X} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} P_X(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda} - `1\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}. \end{aligned}$$

<u>תרגיל 3</u>. בעיה 5.6 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א) יהי X מספר הפריצות בביתם של המבוטחים. אזי $X \sim BIN(10,000; 0.006)$ וההסתברות המבוקשת תהיה

$$P_1 = P(X > 100) = \sum_{k=101}^{10000} \binom{10000}{k} 0.006^k \cdot 0.994^{10000-k}.$$

(ב) לצורך התרגיל בלבד: פרמיה נקראת הוגנת אם תוחלת התקבולים של החברה שווה לאפס. לכן הגובה שלה תהיה

$$G=\frac{120,000\cdot EX}{10,000}=\frac{120,000\cdot 10,000\cdot 0.006}{10,000}=720.$$

<u>תרגיל 4</u>. בעיה 5.7 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(i)

$$EX=\int_0^1 xf_X(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}EX &= \int_0^2 xf_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\int_0^1 x^2dx+\\ &+ \int_0^1 (1+t)(1-t)dt=\int_0^1 dt=1.\end{aligned}$$

כדי להעביר את שני האינטגרלים לאותו תחום עשינו בשני את החלפת משתנים $t=x+1$.

(iii)

$$EX=\int_0^1 xF'_X(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,\Big|_0^1=1.$$

<u>תרגיל 5</u>. בעיה 5.13 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א) ראשית, נשים לב כי X הינו משתנה רציף ו- $F_X(0)=\frac{1}{2}$ (ראו תרגיל 2 מתוך עבודת בית מס' 4). לכן $F_Y(-1)=\frac{1}{2}$ בעוד שעבור $0\le y\le 1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(X\le y^2)=\frac{1}{2}+\int\limits_0^{y^2} f_x(x)dx= \\ &= \frac{1}{2}+\left[x-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{y^2}=\frac{1}{2}+y^2-\frac{y^4}{2}. \end{aligned}$$

סופית:

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad y<-1, \\ \frac{1}{2} & \text{if} \quad -1\le y\le 0, \\ \frac{1}{2}+y^2-\frac{y^4}{2} & \text{if} \quad 0\le y\le 1, \\ 1 & \text{if} \quad 1\le y. \end{cases}$$

אנה לא לשכוח לשרטט את הגרף !

(ב) Y הוא משתנה מעורב כי פונקצית ההתפלגות שלו רציפה בכל מקום פרט לנקודה אחת ($y=-1$) בה היא עושה קפיצה.

(ג) יש יותר מדרך אחת לחשב את התוחלת. למשל, ניתן להשתמש בפירוק של משתנה מעורב. הדרך שנראית לי הקצרה ביותר:

$$\text{Define} \quad g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ by } g(x)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad x<-1, \\ -1 & \text{if} \quad -1\le x<0, \\ \sqrt{x} & \text{if} \quad 0\le x\le 1, \\ 0 & \text{if} \quad x>1. \end{cases}$$

אזי

$$\begin{aligned} EY &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_x(x)dx=-\frac{1}{2}+\int\limits_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx= \\ &= -\frac{1}{2}+\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\right]\Big|_0^1=-\frac{7}{30}. \end{aligned}$$

<u>תרגיל 6</u>. בעיה 5.14 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א) עבור $y \in [0,1]$ נקבל:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y \le y | N = n) P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{3}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{4}\right)^n = \frac{3}{4} \frac{1}{1 - \frac{y}{4}} = \frac{3}{4 - y}. \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y < 0, \\ \frac{3}{4-y} & \text{if} \quad 0 \le y < 1, \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le y. \end{cases}$$

השרטוט זה כבר לא מסימה קשה. הדבר המעניין מבחינתינו זוה הקפיצה ש- $F_Y(y)$ עושה ב- 0.

(ב) Y הוא מ"א מעורב כי $F_Y(y)$ רציפה פרט לנקודה $y = 0$ בה יש לה קפיצה בגודל $\frac{3}{4}$. (משתנה X נקרא מעורב אם $F_X(x)$ רציפה בכל מקום פרט למספר סופי או בר מנייה של נקודות).

<u>תרגיל 6</u>. תרגיל 12.29 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. כללית, עבור מאורע A כל שהו:

$$\begin{aligned} EI_A &= 1 \cdot P(I_A = 1) + 0 \cdot P(I_A = 0) = P(I_A(\omega) = 1) = P(A). \\ I_A &= I_A^2 \Rightarrow EI_A^2 = EI_A = P(A), \\ VARI_A &= EI_A^2 - (EI_A)^2 = P(A) - P(A)^2 = P(A)P(A^c). \end{aligned}$$

לכן

(א)

$$EI_{A \bigcup B} = P\left(A \bigcup B\right).$$

(ב)

$$VARI_A = P(A)P(A^c) = e^{-2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda}\right).$$