תורת ההסתברות

תרגיל מס' 10

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. נתון: $f_{X,Y}(x,y) = 1/2\pi$. נעבור לפולריות: $Q = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$

$$f_{X,Y} = \frac{f_{R,\Theta}}{\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(R,\Theta)}\right|} \quad \Rightarrow \quad f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r}{\pi},\ r \in [0,1], \theta \in [0,2\pi].$$

$$A^2 = 1 + R^2 + 2R\cos\Theta, \qquad B^2 = 1 + R^2 - 2R\cos\Theta.$$

$$\text{COV }(A^2, B^2) = E(A^2B^2) - E(A^2)E(B^2)$$

מטעמי סימטריה:

$$E(A^2) = E(B^2) = 1 + E(R^2) = 1 + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{\pi} dr d\theta = \frac{3}{2},$$

$$E(A^2B^2) = E(1 + 2R^2 + R^4 - 4R^2\cos^2\Theta) =$$
$$= 2 + E(R^4) - 2E(\cos^2\Theta) = \frac{4}{3}.$$

לכן:

$$\text{COV }(A^2, B^2) = \frac{4}{3} - \frac{9}{4} = -\frac{11}{12}.$$

<u>תרגיל 2</u>.

(א)

המטריצה לא הפיכה אם ורק אם העמודות שלה תלויות, כלומר קיימים מספרים α_u, $i = 1, 2, \ldots, n$ לא כולם שווים לאפס, כך ש-

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \text{ COV }(X_i, X_j) = 0, \qquad \forall\ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

נסמן $i=1,2,\ldots,n$ת לא כולם שווים לאפס, כך ש-

$$Y := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j$$

בגלל תכונות הלינאריות של השונות, משוואות (1) שקולות ל-

$$\text{COV } (X_i, Y) = 0, \quad \forall\ i = 1, \ldots, n,$$

ולכן ל-

$$\text{VAR } (Y) = 0.$$

פרושו של הדבר: קיים מספר $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $P(Y=c)=1$.

(ב)

יהי $\Omega = \{a,b,c,d\}$ מרחב המדגם ו- P הסתברות כזאת ש-

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1/4.$$

נגדיר משתנים אקראים:

$$X_1(\omega) = \mathbf{1}_{\{a,b\}}(\omega), \quad X_2(\omega) = \mathbf{1}_{\{b,c\}}(\omega), \quad X_3(\omega) = \mathbf{1}_{\{c,a\}}(\omega).$$

כאשר $\mathbf{1}_A$ מסמן פונקציה מציינית של קבוצה $A \subseteq \Omega$.

בדקו בעצמכם כי ו"א $(X_1, X_2, X-3)$ מהווה דוגמה נגדית לטענה.

<u>**תרגיל 3**</u>. נניח כי $ac \neq 0$. אז:

$$\rho_{S,T} = \frac{E(ST) - E(S)E(T)}{ac \cdot \sigma_X \sigma_Y} = \frac{ac \cdot \text{COV } (X,Y)}{|ac| \cdot \sigma_X \sigma_Y} = \text{sign } (ac) \rho_{X,Y}.$$

<u>**תרגיל 4**</u>.

(א)

$$\lim_{n\to\infty} E(Z_n) = E(X_1 X_2) = 4.$$

(ב)

$$E(Z_n|X_2) = \frac{1}{n}\left(E(X_1X_2|X_2) + E(X_2X_3|X_2) + (n-3)E(X_3X_4)\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(-4X_2 + 4(n-3)\right)$$

$$\text{VAR}\ [E(Z_n|X_2)] = \frac{1}{n^2}\text{VAR}\ (-4X_2) = \frac{16}{n^2}.$$

<u>תרגיל 5.</u>
לפי משפט ההחלקה:

$$\begin{aligned}
\text{COV}\ (Z_i, Z_j) &= E(Z_iZ_j) - E(Z_i)E(Z_j) = \\
&= pE(X_iX_j) + qE(Y_iY_j) - [pE(X_i) + qE(Y_i)]\,[pE(X_j) + qE(Y_j)] = \\
&= pq\,[E(X_i)E(X_j) + E(Y_i)(Y_j) - E(X_i)(Y_j) - E(X_j)(Y_i)] = \\
&= pq\left[1 + \frac{1}{(1+i)(1+j)} - \frac{1}{1+j} - \frac{1}{1+i}\right] = pq\frac{ij-2}{(1+i)(1+j)}
\end{aligned}$$

<u>תרגיל 6.</u>
(א)
יהיה M ו"א המוגדר על ידי $M = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathbb{R}^k$. ו"א M מפולג באחידות בתחום $D_{k,1}$ כאשר עבור $n \in \mathbb{N},\ t > 0$,

$$D_{n,t} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall\ i = 1, \ldots, n \text{ and } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq t\}.$$

נסמן על ידי $S_{n,t}$ את הנפח של $D_{n,t}$. נשתמש בטענה הבא אשר ניתן להוכיח למשל באינדוקציה על n:

$$S_{n,t} = \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

נקבל:

$$\begin{aligned}
&f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \\
&\quad = \frac{1}{S_{k,1}} \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x-3} dx_4 \ldots \int_0^{1-x_1-x_2-\ldots x_{k-1}} dx_k = \\
&\quad = \frac{S_{k-2,1-x_1-x_2}}{S_{k,1}} = \frac{(1-x_1-x_2)^{k-2}}{k(k+1)}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f_{X_1,X_2,X_3|X_4,\ldots,X_k}(x_1,x_2,x_3|x_4,\ldots,x_k) = \\
&\quad = \frac{f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k)}{f_{X_4,\ldots,X_k}(x_4,\ldots,x_k)} = \\
&\quad = 1\Big\backslash\int_0^{x_1} dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 = \\
&\quad = \frac{1}{S_{3,1}} = 24.
\end{aligned}
$$

(ב) יהיה N ו"א המוגדר על ידי $N = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$. ו"א N מפולג באחידות בתחום $D \in \mathbb{R}^3$ כאשר

$$
D := \{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, 0 \leq x_1 \leq 0.4, 0 \leq x_2 \leq 0.4, x_3 \geq 0\}.
$$

נסמן על ידי S את הנפח של D.

$$
\begin{aligned}
S = \int_0^{0.4} dx_1 \int_0^{0.4} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 = 0.16 - 2\int_0^{0.4} x_1 dx_1 \int_0^{0.4} dx_2 = \\
= 0.096
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \\
&\quad = \frac{1}{S}\int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 = \frac{1-x_1-x_2}{0.096}.
\end{aligned}
$$

לכן X_1 ו- X_2 תלוים !