תרגול חזרה 2 – פונקציונלים ומרחבים דואליים

תרגילים

1. יהי $V=R^3$. נסמן $v_1=(1,0,1),v_2=(0,1,-2),v_3=(-1,-1,0)$.

1.1. אם f פונקציונל על R^3 המקיים $f(v_1)=1,f(v_2)=-1,f(v_3)=3$, מצא את $f((a,b,c))$.

1.2. תאר בנוסחה את פונקציונל הליניארי על R^3 המקיים $f(v_1)=f(v_2)=0,f(v_3)\neq 0$.

1.3. יהי f פונקציונל המקיים $f(v_1)=f(v_2)=0,f(v_3)\neq 0$. הוכח ש – $f((2,3,-1))\neq 0$

פתרון:

סעיף 1: נשים לב שהוקטורים v_1,v_2,v_3 הם בסיס. הפונקציונל f הוא טרנספורמציה ליניארית, לכן אם נכתוב את (a,b,c) כצ"ל של הבסיס, נוכל לחשב את הערך. נפתור את המערכת: $(a,b,c)=xv_1+yv_2+zv_3\Rightarrow a=x-z,\ b=y-z,\ c=x-2y$. $a-b=x-y,\ c=x-2y\Rightarrow y=a-b-c,\ z=a-2b-c,\ x=2a-2b-c$, לכן נקבל

$$f((a,b,c))=(2a-2b-c)f(v_1)+(a-b-c)f(v_2)+(a-2b-c)f(v_3)=$$
$$=2a-2b-c-a+b+c+3a-6b-3c=4a-7b-3c$$.

סעיף 2: נשים לב שהנוסחה $f((a,b,c))=(2a-2b-c)f(v_1)+(a-b-c)f(v_2)+(a-2b-c)f(v_3)$ נכונה בלי קשר לערכי f על v_1,v_2,v_3 , לכן אם נרצה למשל פונקציונל עבורו $f(v_1)=f(v_2)=0,f(v_3)=1$ נציב לעיל ונקבל לאיבר כללי $f((a,b,c))=a-2b-c$.

סעיף 3: נסמן $f(v_3)=k$ ל - $k\neq 0$, אז לפי הנוסחה הכללית וסעיף ב', נקבל $f((a,b,c))=(a-2b-c)k$. נציב $a=2,b=3,c=-1$ ונקבל $f((2,3,-1))=-3k\neq 0$.

2. יהי F שדה ממציין 0, ויהי V מ"ו ממימד סופי. יהיו $v_1,\dots,v_m\in V$ וקטורים שונים מאפס. הוכח שקיים פונקציונל $f:V\to F$ כך ש - $f(v_i)\neq 0$ לכל $1\leq i\leq m$ (לאו דווקא $\dim(V)\geq m$!).

פתרון: אם $v_1,\dots,v_m$ קבוצה בת"ל, אז נשלים אותה לבסיס $v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n$ ונגדיר $f(v_i)=1$. פונקציונל הוא טרנספורמציה ליניארית לכן מספיק להגדיר על הבסיס וסיימנו.

כעת, נניח כי הקבוצה אינה בת"ל. נניח בה"כ ש – $v_1,\dots,v_k$ תת קבוצה בת"ל מקסימלית, ל - $k<m$. בפרט, לכל $1\leq j\leq m$ ניתן לכתוב $v_j=\sum_{i=1}^{k}a_{ji}v_i$, כאשר לא כל a_{ij} אפסים (ל - $j\leq k$ מתקיים כמובן $a_{ij}=\delta_{ij}$). נסמן $W=span\{v_1,\dots,v_k\}$, אז כמובן מתקיים $v_j\in W$ לכל $1\leq j\leq m$. נסתכל על $f_1,\dots,f_k\in W^*$ הבסיס הדואלי. לכל פונקציונל $f\in W^*$ מתקיים $f=\sum_{i=1}^{k}b_if_i$, לכן נקבל $f(v_j)=\sum_{i=1}^{k}a_{ji}b_i$, ז"א שהוקטור $\bar{f}=(f(v_1),\dots,f(v_m))$ נתון ע"י המערכת $A\bar{b}=\bar{f}$ (כאשר $\bar{b}$ הוא וקטור המקדמים $(b_1,\dots,b_k)$ ו – A היא מטריצת המקדמים $A=(a_{ij})$). נסמן ב - $\bar{f}(i)$ את הקורדינטה ה - i של הוקטור $\bar{f}$.

נשים לב לעובדות הבאות:

1. *A מטריצה מדרגה k (כיוון ש – k השורות הראשונות הן פשוט $I_{k\times k}$).*
2. *אם לשני וקטורים $\bar{f}_1,\bar{f}_2$ מתקיים $\bar{f}_1(i)+c\bar{f}_2(i)=0$ לכל $c\in F$, אז $\bar{f}_1(i)=\bar{f}_2(i)=0$.*

המסקנה מהערה 2 היא שאם קיימים וקטורים $\bar{b}_1,\bar{b}_2$ כך ש – $A\bar{b}_1(i)\neq 0,A\bar{b}_2(j)\neq 0$ אז קיים c כך שבוקטור – $A\bar{b}_1+cA\bar{b}_2$ הערך בקורדינאטות i,j שונה מאפס, לכן כדי

להראות שיש פונקציונל f המקיים את הנדרש, מספיק להראות שאפשר למצוא וקטורים $\bar{b}_t$ ל - $1\le t\le m$ (ז"א צירופים ליניאריים של הבסיס הדואלי) עבורם $\bar{f}_t(t)\neq 0$, אבל ברור שכאלה וקטורים קיימים (כי לכל $1\le t\le m$ קיים $1\le i\le k$ כך ש - $a_{ti}\neq 0$, אז ניקח $\bar{b}_t(j)=0$ ל - $j\neq i$ ו – $\bar{b}_t(i)=a_{ti}$).

3. יהי $V=R_2[x]$. נגדיר $f_1(p)=\int_0^1 p(x)dx,\ f_2(p)=\int_0^2 p(x)dx,\ f_3(p)=\int_{-1}^0 p(x)dx$. הוכח ש – f_1, f_2, f_3 בסיס של V^* .

פתרון: מספיק להראות שזה בסיס דואלי של בסיס של $R_2[x]$, ז"א אנו מחפשים פולינומים $p_i(x)=a_i x^2+b_i x+c_i$ ל - $1\le i\le 3$ כך ש – $f_i(p_j)=\delta_{ij}$. נחשב את האינטגרלים ונקבל:

$$1=f_1(p_1)=\frac{a_1}{3}+\frac{b_1}{2}+c_1$$

$$0=f_2(p_1)=\frac{8a_1}{3}+2b_1+2c_1$$

. נפתור את המערכת ונקבל

$$0=f_3(p_1)=\frac{-a_1}{3}+\frac{b_1}{2}-c_1$$

$b_1=1,\ a_1=-\frac{3}{2},\ c_1=1$ *ז"א* $p_1(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+1$ *. באופן דומה נקבל ל -* p_2 *את המערכת*

$$0=f_1(p_2)=\frac{a_2}{3}+\frac{b_2}{2}+c_2$$

$$1=f_2(p_2)=\frac{8a_2}{3}+2b_2+2c_2$$

$$0=f_3(p_2)=\frac{-a_2}{3}+\frac{b_2}{2}-c_2$$

שהפתרון שלה הוא $b_2=0, a_2=\frac{1}{2},\ c_2=-\frac{1}{6}$ *ז"א* $p_2=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$ *. עבור* p_3 *נקבל*

$$0=f_1(p_3)=\frac{a_3}{3}+\frac{b_3}{2}+c_3$$

$$0=f_2(p_3)=\frac{8a_3}{3}+2b_3+2c_3$$

$$1=f_3(p_3)=\frac{-a_3}{3}+\frac{b_3}{2}-c_3$$

והפתרון פה הוא $b_3=1, a_3=-\frac{1}{2}, c_3=0$ *ז"א* $p_3(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$ *. קל לראות ש –* p_1, p_2, p_3 *בסיס.*