חשבון אינפיניטסימלי 3 – ת"ב 6

רן קירי

שם 1

אלכסנדרה טרוסט

שם 2

314158148 + 311532238

תעודת זהות + תעודת זהות 2

26/01/2016

תאריך הגשה

12

קבוצת תרגול

שאלה 2:

נתונים ϕ פונקציה סקלרית וכן A, B שדות וקטורים חלקים בהתאמה.

א. נרצה להראות כי:

$$\nabla \cdot (\phi A) = (\nabla \phi) \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$$

ואכן מתקיים:

$$\nabla \cdot (\phi A) = \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}\right) \cdot (\phi A_1, \phi A_2, \phi A_3) = \partial_{x_1}(\phi A_1) + \partial_{x_2}(\phi A_2) + \partial_{x_3}(\phi A_3)$$

אך נשים לב כי הן ϕ והן A_i הן פונקציות התלויות במשתנים x_1, x_2, x_3, ולכן ניאלץ לבצע נגזרת של מכפלה:

$$= \phi_{x_1} A_1 + \phi \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + \phi_{x_2} A_2 + \phi \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 + \phi_{x_3} A_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3$$

$$= \phi_{x_1} A_1 + \phi_{x_2} A_2 + \phi_{x_3} A_3 + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} A_3\right)$$

$$= \left(\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{x_3}\right) \cdot (A_1, A_2, A_3) + \phi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot (A_1, A_2, A_3)$$

$$= \left(\nabla \phi_{x_1}\right) \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$$

■

ב. נרצה להראות כי:

$$\nabla \times (\phi A) = (\nabla \phi) \times A + \phi(\nabla \times A)$$

נפעל על פי הגדרת האופרטורים ונראה:

$$\nabla \times (\phi A) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi A_2) \\ -\frac{\partial}{\partial x_1}(\phi A_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi A_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\phi A_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \phi_{x_2} A_3 + \phi \frac{\partial}{\partial x_2} A_3 - \phi_{x_3} A_2 - \phi \frac{\partial}{\partial x_3} A_2 \\ \phi_{x_3} A_1 + \phi \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 - \phi_{x_1} A_3 - \phi \frac{\partial}{\partial x_1} A_3 \\ \phi_{x_1} A_2 + \phi \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \phi_{x_2} A_1 - \phi \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{x_2} A_3 - \phi_{x_3} A_2 \\ \phi_{x_3} A_1 - \phi_{x_1} A_3 \\ \phi_{x_1} A_2 - \phi_{x_2} A_1 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} A_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \phi_{x_1} & \phi_{x_2} & \phi_{x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} + \phi \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{x_3}\right) \times A + \phi\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \times A\right]$$

$$= (\nabla \phi) \times A + \phi(\nabla \times A)$$

■

ג. נרצה להראות כי מתקיים:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

ולשם כך נזכיר עתה כי נתון ש-ϕ חלקה, ובפרט C^2 ולכן נגזרותיה החלקיות מתחלפות בסדר. ואכן:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \nabla \times \left(\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, \phi_{x_3}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \phi_{x_1} & \phi_{x_2} & \phi_{x_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{x_2 x_3} - \phi_{x_3 x_2} \\ \phi_{x_3 x_1} - \phi_{x_1 x_3} \\ \phi_{x_1 x_2} - \phi_{x_2 x_1} \end{pmatrix} \overset{\in C^2}{=} 0$$

■

ד. נרצה להראות כי מתקיים:

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

וגם כאן, נזכיר כי A חלקה ובפרט גזירה פעמיים ברציפות כך שנגזרותיה החלקיות מתחלפות בהכרח. ואכן:

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=\nabla\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2}A_3-\frac{\partial}{\partial x_3}A_2\\ \frac{\partial}{\partial x_3}A_1-\frac{\partial}{\partial x_1}A_3\\ \frac{\partial}{\partial x_1}A_2-\frac{\partial}{\partial x_2}A_1\end{pmatrix}=$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}A_3-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}A_2+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}A_1-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}A_3+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}A_2-\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}A_1=0$$

■

ה. נרצה להראות כי מתקיים:

$$\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$$

ואכן:

$$\nabla\cdot(A\times B)=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\nabla\cdot\begin{pmatrix}A_2B_3-A_3B_2\\ A_3B_1-A_1B_3\\ A_1B_2-A_2B_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}(A_2B_3-A_3B_2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(A_3B_1-A_1B_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(A_1B_2-A_2B_1)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_2\right)B_3+A_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}B_3\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}A_3\right)B_2-A_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1}B_2\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}A_3\right)B_1+A_3\left(\frac{\partial}{\partial x_2}B_1\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}A_1\right)B_3-A_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}B_3\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}A_1\right)B_2+A_1\left(\frac{\partial}{\partial x_3}B_2\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x_3}A_2\right)B_1-A_2\left(\frac{\partial}{\partial x_3}B_1\right)$$

$$=B_1\left[\frac{\partial}{\partial x_2}A_3-\frac{\partial}{\partial x_3}A_2\right]+B_2\left[\frac{\partial}{\partial x_3}A_1-\frac{\partial}{\partial x_1}A_3\right]+B_3\left[\frac{\partial}{\partial x_1}A_2-\frac{\partial}{\partial x_2}A_1\right]$$

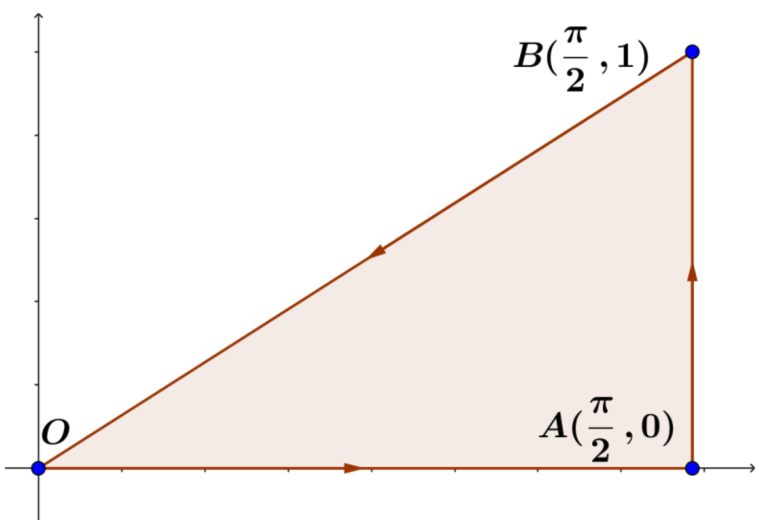
$$+A_1\left[\frac{\partial}{\partial x_3}B_2-\frac{\partial}{\partial x_2}B_3\right]+A_2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}B_3-\frac{\partial}{\partial x_3}B_1\right]+A_3\left[\frac{\partial}{\partial x_2}B_1-\frac{\partial}{\partial x_1}B_2\right]$$

$$B\cdot\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}-A\cdot\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$$

<u>שאלה 3:</u>

נתון המשולש המתואר בשרטוט ונרצה לחשב:

$$\oint_C (y-\sin x)dx+\cos(x)dy$$



א. בחישוב ישיר, נוכל לחלק את האינטגרל לאינטגרל על הקטעים:

$$OA, AB, BO$$

לפי הסדר הנ"ל, ועל ידי פרמטריזציות של העקום בתחומים אלה נוכל לבצע את החישוב.
נשים לב כי העקום OA הוא פשוט קו ישר המקביל לציר ה-x. הפרמטריזציה שלו ניתנת על ידי:

$$\varphi_{OA}(t)=(t,0)\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

נקבל כי:

$$\varphi'_{OA}(t)=(1,0)$$

ולכן נקבל, תוך סימון:

$$\boxed{P(x,y)=y-\sin x\quad Q(x,y)=\cos x}(\star)$$

נוכל לחשב את האינטגרל על פי הגדרה:

$$\int_{OA}P(\varphi_{OA}(t))\varphi'_{OA_x}dt+Q(\varphi_{OA}(t))\varphi'_{OA_y}dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin t\,dt=[\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}=-1$$

עבור AB, נוכל לבנות את הפרמטריזציה:

$$\varphi_{AB}(t) = \left(\frac{\pi}{2}, t\right) \quad 0 \le t \le 1$$

כלומר:

$$\varphi'_{AB}(t) = (0,1)$$

ולכן, נוכל לחשב ולקבל כי:

$$\int_{AB} P(\varphi_{AB}(t))\varphi'_{AB_x}dt + Q(\varphi_{AB}(t))\varphi'_{AB_y}dt = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)dt = \int_0^1 0dt = 0$$

ולבסוף, עבור הקטע BO, נוכל לבנות את הפרמטריזציה הבאה:

$$\varphi_{BO}(t) = \left(\frac{\pi}{2} - t, 1 - \frac{2}{\pi}t\right) \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

כלומר:

$$\varphi'_{BO}(t) = \left(-1, -\frac{2}{\pi}\right)$$

ולכן:

$$\int_{BO} P(\varphi_{BO}(t))\varphi'_{BO_x}dt + Q(\varphi_{BO}(t))\varphi'_{BO_y}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\left(1 - \frac{2}{\pi}t - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)dt - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}t - 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)dt = \left[\frac{1}{\pi}t^2 - t + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$$

ולכן נקבל כי:

$$\oint_C (y - \sin x)dx + \cos(x)dy$$

$$= \int_{OA} (y - \sin x)dx + \cos(x)dy + \int_{AB} (y - \sin x)dx + \cos(x)dy + \int_{BO} (y - \sin x)dx + \cos(x)dy$$

$$= -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$$

■

ב. עתה נחשב את אינטגרל זה בהסתמך על משפט גרין, לפיו:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oiint_S (Q_x - P_y)dS$$

ונשים לב כי:

$$\vec{F} = (P, Q) = (y - \sin x, \cos x) \Longrightarrow \begin{matrix} \partial_x Q = -\sin x \\ \partial_y P = 1 \end{matrix}$$

כלומר:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oiint_S (-\sin x - 1)dxdy$$

כאשר תחום האינטגרציה שלנו הוא:

$$S = \left\{(x, y) \middle| \begin{matrix} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \frac{2}{\pi}x \end{matrix}\right\}$$

$$\oiint_S (-\sin x - 1)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{2}{\pi}x} -\sin x - 1dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-y\sin x - y]_0^{\frac{2}{\pi}x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{2}{\pi}x\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + 1)dx \ (\star)$$

נחשב אינטגרל זה בנפרד:

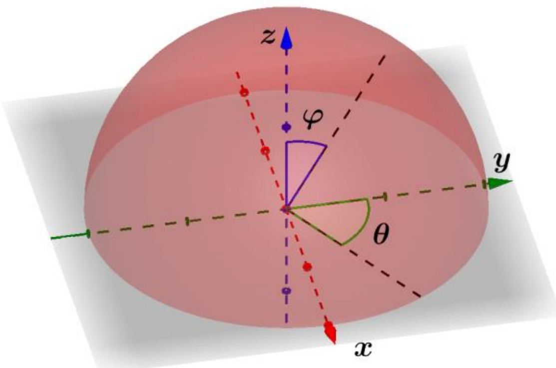
$$\int x\sin x + xdx = \int x\sin x\,dx + \frac{1}{2}x^2 = -x\cos x + \int \cos x\,dx + \frac{1}{2}x^2 = -x\cos x + \sin x + \frac{1}{2}x^2$$

נציב ונקבל:

$$\color{red}{(\star)} = -\frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{2}x^2 - x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\right] = -\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$$

■

שאלה 4:



נסמן ב-S את החצי העליון של הספירה $x^2+y^2+z^2=1$. שפת המשטח היא מעגל היחידה שנמצא על מישור xy. נרצה להראות כי לפי משפט סטוקס אכן מתקיים:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA \qquad \vec{F} = (2x-y, -yz^2-y^2z)$$

לשם כך נחשב את כל אחד מן הגדלים בנפרד. נגדיר פרמטריזציה לעקום השפה:

$$C = \varphi([0,2\pi]) \qquad \begin{aligned} &\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 \\ &\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned} \Longrightarrow \varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

ולכן:

$$\vec{F}(\varphi(t)) = \vec{F}(\cos t, \sin t, 0) = (2\cos t - \sin t, 0, 0)$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t, 0,0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\sin t\cos t + \sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} -\sin 2t\,dt + \int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

נחשב את האינטגרלים בנפרד:

$$-\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt = -\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 1-\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2-2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1-2\cos^2 t\,dt + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt$$

$$\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt = \pi - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \pi$$

כלומר:

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{x} = \pi}$$

עתה נחשב את האינטגרל של ה-2-תבנית ש-$\vec{F}$ משרה:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ -yz^2 & -y^2z \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ 2x-y & -y^2z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ 2x-y & -yz^2 \end{vmatrix}$$

$$\left(\partial_y(-y^2z) - \partial_z(-yz^2), -\partial_x(-y^2z) + \partial_z(2x-y), \partial_x(-yz^2) - \partial_y(2x-y)\right) = (-2yz+2zy, 0+0, 0+1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (0,0,1)$$

נמצא פרמטריזציה לחצי הספירה העליונה מהצורה:

$$S = S\left([0,2\pi] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right) \quad \begin{matrix} S: [0,2\pi] \times \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 \\ S(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{matrix} \Longrightarrow S_\theta = \begin{bmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad S_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

נמצא את וקטור הנורמל:

$$\vec{n} = S_\theta \times S_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\begin{vmatrix} -\sin(\varphi)\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\sin^2(\varphi)\sin\theta, \sin^2(\varphi)\cos\theta, \sin(\varphi)\cos(\varphi)\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)\right) = \left(-\sin^2(\varphi)\sin\theta, \sin^2(\varphi)\cos\theta, \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right)$$

ומכאן שנקבל, כי:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \iint_S (0,0,1) \cdot \left(-\sin^2(\varphi)\sin\theta, \sin^2(\varphi)\cos\theta, \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) d\theta d\varphi$$

$$= \iint_S \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\, d\varphi\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{4}\cos(2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

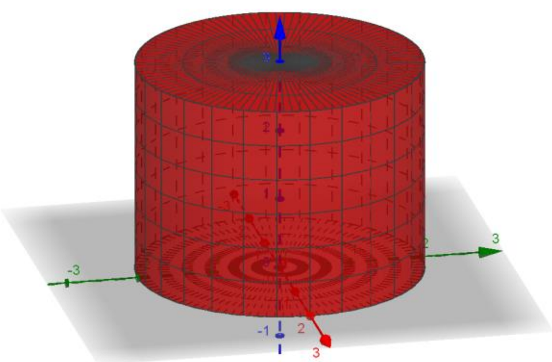
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta = \pi$$

כלומר אכן קיבלנו, כנדרש, כי:

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \pi}$$

■

שאלה 5:



נתון M התחום הכלוא בין המשטחים $z = 3, z = 0$ וכן $x^2 + y^2 = 4$. נתון השדה הוקטורי:

$$\vec{F} = (4x, -2y^2, z^2)$$

נרצה להראות את נכונות משפט הדיברגנץ בעבור שדה זה, כלומר:

$$\iiint_M \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iint_{\partial M} (\vec{F} \cdot \hat{n})\, dA$$

ראשית נבטא את הגודל $\operatorname{div} \vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (4x, -2y^2, z^2)$$

$$= 4 - 4y + 2z$$

עבור גודל זה נרצה לחשב את האינטגרל הנפחי בגליל הנתון. התחום שלנו הוא:

$$M = \left\{(x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 \le z \le 3 \\ 0 \le x^2 + y^2 \le 4 \end{matrix}\right\}$$

נוכל להציג גודל זה על ידי:

$$M = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 \le z \le 3 \\ -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{matrix} \right\}$$

ונקבל עבור גודל זה:

$$\iiint_M \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 4 - 4y + 2zdy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 [4y - 2y^2 + 2yz]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \right) dz = \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 8\sqrt{4-x^2} + 4\sqrt{4-x^2} z\, dx \right) dz$$

$$= 4\int_0^3 \left(\int_{-2}^2 (2+z)\sqrt{4-x^2} dx \right) dz = 4\int_0^3 2 + zdz \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 4\left[2z + \frac{1}{2}z^2\right]_0^3 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 42\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$$

האינטגרל האחרון הוא פשוט שטח של חצי מעגל שרדיוסו 2 ולכן נקבל כי אינטגרל זה שווה 2π. וסה"כ:

$$\iiint_M \operatorname{div} \vec{F} dV = 84\pi$$

על מנת לחשב את האינטגרל של $\vec{F}$ על התחום הכולא נפח זה, נחלק את האינטגרל ל-3 חלקים – ה"קיר", קרי מעטפת הצילינדר למעט התחומים העיגוליים ב-$z = 3,0$, ואת שני התחומים העיגוליים נחשב בנפרד.

הפרמטריזציה של המעטפת של הגליל היא:

$$\varphi(\theta, z) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), z) \quad \varphi: [0,2\pi] \times [0,3] \to \mathbb{R}^3$$

ומתקיים:

$$D\varphi = \begin{pmatrix} -2\sin(\theta) & 0 \\ 2\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_\theta = \begin{bmatrix} -2\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varphi_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\hat{n} = \varphi_\theta \times \varphi_z = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2\sin(\theta) & 2\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, הפונקציה שתהיה בתוך האינטגרל תהיה:

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = (8\cos(\theta), -8\sin^2(\theta), z^2) \cdot (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 0) = 16\cos^2(\theta) - 16\sin^3(\theta)$$

ולכן:

$$\iint_{\text{צילינדר}} (\vec{F} \cdot \hat{n}) dA = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} 16\cos^2(\theta) - 16\sin^3(\theta)\, d\theta \right) dz$$

נחשב את האינטגרלים הפנימיים בנפרד:

$$16\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) = 8\int_0^{2\pi} 2\cos^2(\theta) - 1 + 1d\theta = 8\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta + 16\pi$$

$$4\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} + 16\pi = 16\pi$$

$$\int_0^{2\pi} 16\sin^3(\theta)\, d\theta = 16\int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(\theta))\sin(\theta)\, d\theta = 16\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\, d\theta - 16\int_0^{2\pi} \overbrace{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}^{F'(g)g'} d\theta =$$

$$16[-\sin(\theta)]_0^{2\pi} - 16\left[-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

כלומר:

$$\int_0^3\left(\int_0^{2\pi}16\cos^2(\theta)-16\sin^3(\theta)d\theta\right)dz=\int_0^3 16\pi dz=48\pi$$

עתה נבחן את הדסקה העליונה והתחתונה שחוסמות את נפח הצילינדר. עבורן נגדיר בהתאמה את הפרמטריזציה:

$$\begin{matrix}\psi_0(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),0)\\ \psi_3(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),3)\end{matrix}\quad \psi_{0,3}:[0,2]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$$

ומתקיים:

$$D\psi_i=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad \psi_{i_r}=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\\ 0\end{bmatrix}\quad \psi_{i_\theta}=\begin{bmatrix}-r\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\\ 0\end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\hat{n}_i=\psi_{i_r}\times\psi_{i_\theta}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\end{vmatrix}=(0,0,r)$$

כלומר הפונקציה עבורה נבצע אינטגרציה על המשטחים היא:

$$\vec{F}\cdot\hat{n}_i=(4r\cos(\theta),-2r^2\sin^2(\theta),\delta_{i3}9)\cdot(0,0,r)$$

כלומר, עבור שני התחומים בהתאמה יתקיים:

$$\vec{F}\cdot\hat{n}_0=(0,0,0)\quad \vec{F}\cdot\hat{n}_3=(0,0,9r)$$

כלומר, המסקנה שלנו היא שהשדה הוקטורי $\vec{F}$, במשטח החוסם את הדיסקה מלרע, נמצא אך ורק על משטח, כלומר אין לו רכיב z. ולכן ודאי שהשטף דרכו יהיה 0. אך אין זה כך עבור המשטח העליון. נחשב:

$$\iint_{\substack{\text{משטח}\\ \text{עליון}}}(\vec{F}\cdot\hat{n}_3)dA=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 9rdr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}[4.5r^2]_0^2d\theta=\int_0^{2\pi}18d\theta=36\pi$$

ואכן נקבל כי סה"כ:

$$\iint_{\partial M}(\vec{F}\cdot\hat{n})dA=48\pi+0+36\pi=84\pi$$

כלומר אכן קיבלנו:

$$\boxed{\iiint_M \operatorname{div}\vec{F}\,dV=\iint_{\partial M}(\vec{F}\cdot\hat{n})dA}$$

■

<u>שאלה 6:</u>

נתונה ϕ פונקציה סקלרית חלקה על 3-יריעה M.

א. נרצה להוכיח את הזהות:

$$\iiint_M(\nabla\phi)dV=\iint_{\partial M}\phi\hat{n}dA$$

לשם כך, נניח וקטור קבוע מהצורה $\vec{C}=(C_x,C_y,C_z)$ עבורו נגדיר את השדה הוקטורי:

$$\vec{F}(x,y,z)=\phi(x,y,z)\vec{C}=(C_x\phi,C_y\phi,C_z\phi)$$

עתה, אנו יודעים כי לפי משפט הדיברגנץ מתקיים:

$$\iiint_M(\nabla\cdot\vec{F})dV=\iint_{\partial M}(\vec{F}\cdot\hat{n})dA\ (\star)$$

אך מתקיימת הזהות הוקטורית שהוכחנו בסעיפים הקודמים:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot\left(\phi\vec{C}\right)=(\nabla\phi)\cdot\vec{C}+\phi\left(\nabla\cdot\vec{C}\right)$$

כאשר:

$$\nabla\cdot\vec{C}=\partial_x C_x+\partial_y C_y+\partial_z C_z=0$$

ולכן נשים לב כי:

$$\nabla\cdot\vec{F}=(\nabla\phi)\cdot\vec{C}$$

כלומר:

$$\iiint_M\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)dV=\iiint_M\nabla\phi\cdot\vec{C}dV=\vec{C}\cdot\iiint_M\nabla\phi dV\overset{(\star)}{=}\iint_{\partial M}\phi\vec{C}\cdot\hat{n}dA=\vec{C}\cdot\iint_{\partial M}\phi\hat{n}dA$$

כאמור, הנ"ל נכון לכל וקטור $\vec{C}$ שנבחר, ולכן נוכל להסיק כי השוויון מתקיים עבור האינטגרלים עצמם, כלומר:

$$\iiint_M\nabla\phi dV=\iint_{\partial M}\phi\hat{n}dA$$

■

ב. נרצה להוכיח את הזהות:

$$\iiint_M\left(\nabla\times\vec{A}\right)dV=\iint_{\partial M}\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)ds$$

על ידי כך שנגדיר:

$$\vec{F}=\vec{A}\times\vec{C}$$

עבור וקטור קבוע $\vec{C}=\left(C_x,C_y,C_z\right)$. נשים לב כי מתקיים:

$$\iiint_M\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)dV=\iint_{\partial M}\left(\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)\cdot\hat{n}\right)ds\ (\star)$$

כך שנוכל להיעזר בזהות שהוכחנו בסעיפים הקודמים ונקבל כי:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)$$

ולכן נקבל כי:

$$\iiint_M\vec{C}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)dV=\iint_{\partial M}\hat{n}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)ds$$

ולאחר שניעזר באותה הזהות בשנית נקבל כי:

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\cdot\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)$$

ולכן לאחר הצבה נקבל:

$$\iiint_M\vec{C}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)dV=\vec{C}\cdot\iiint_M\left(\nabla\times\vec{A}\right)dV=\vec{C}\cdot\iint_{\partial M}\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)ds$$

הנ"ל נכון לכל וקטור קבוע $\vec{C}$ שנבחר ולכן נסיק כי השוויון בין האינטגרלים אכן מתקיים כלומר:

$$\iiint_M\left(\nabla\times\vec{A}\right)dV=\iint_{\partial M}\left(\hat{n}\times\vec{A}\right)ds$$

■

<u>שאלה 7:</u>

נרצה להוכיח את נכונות משפט הדיברגנץ במישור. לשם כך נשים לב כי בהגדרת F שדה וקטורי המוגדר על ידי:

$$F(x,y)=\left(M(x,y),N(x,y)\right)$$

נתבונן באינטגרל:

$$\int_D\left(M_x+N_y\right)dxdy$$

ותחת ההנחה כי $F\in C^1$ נוכל לבצע אינטגרציה בהתאם למשפט פוביני ולקבל כי:

$$\int_D\left(M_x+N_y\right)dxdy=\int_D$$