פתרון חלקי של גיליון 3

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$ עבור $c>0$. ע"פ כלל המנה.

1.2 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^n}\cdot\frac{(n-1)^{(n-1)}}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}=e^{-1}\cdot 0=0$$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ **ולכן גם הממוצע החשבוני שלה** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}=1$.

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot 3^n}{n!\cdot(2n)^n}=\infty$ **ע"פ כלל המנה.**

1.5 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+6}{n^2+5n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{7n-4}{n^2+5n+2}\right)^{\left(\frac{n^2+5n+2}{7n-4}\right)}\right)^7\cdot\left(1-\frac{7n-4}{n^2+5n+2}\right)^{-\frac{35n-2}{7n-4}}$$

$$=e^{-1}\cdot 1^{-5}=e^{-1}$$

1.6 נסמן $a_n=\sqrt[2^n]{1+2^n}$. נתבונן בסדרה $b_k=\sqrt[k]{k}$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}b_k=1$. לכן גם תתהסדרה:

$b_{k_n}=\sqrt[2^n]{2^n}$ כאשר $k_n=2^n$ מתכנסת לאותו גבול, כלומר 1. קל לבדוק ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_{k_n}}=1$. לכן נקבל ש-

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

1.7 א. נוכיח $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

יהי $\varepsilon>0$ נבחר $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ אז לכל $n>N(\varepsilon)$ מתקיים:

$$\left|\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos 0\right|=2\sin\frac{1}{2n}\sin\frac{1}{2n}\le 2\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

ב. נשתמש בכך ש- $\sin x\le x\le\tan x$ אז גם עבור $\frac{1}{n}$, נקבל: $\sin\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}\le\tan\frac{1}{n}$. לכן,

$\cot\frac{1}{n} \le n \le \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{-1}$, ולכן, $\cos\frac{1}{n} \le n\sin\frac{1}{n} \le 1$. ע"פ סנדויץ' נקבל : $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$.

ג.נסמן $a_n = \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$, $c_n = \sin\frac{1}{n}$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ ולכן,

$$\lim_{n\to\infty}(1+c_n)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n^{-1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_n^{-1}}\right)^{n\frac{c_n}{c_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{c_n^{-1}}\right)^{c_n^{-1}}\right)^{nc_n} = e$$

(ומי שלא חשב על הפתרון הזה יכול לראות עצמו בריא מנטלית ...).

2 א. נתונה הסדרה : $a_n = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a_{n-1}}{3}}$, כאשר $a_1 = 1$. נראה כי הסדרה מונוטונית וחסומה.

<u>מונוטונית</u>: באינדוקציה: $a_2 = \sqrt{\frac{7}{12}} < 1$ נניח כי לכל $k < n$ מתקיים $a_k < a_{k-1}$ ונוכיח עבור n

$a_n = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a_{n-1}}{3}} < \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a_{n-2}}{3}} = a_{n-1}$. הסדרה מונוטונית יורדת.

<u>חסומה</u>: למשל ע"י אפס.

לכן מתכנסת. נמצא נמהו הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a_{n-1}}{3}} \quad\Rightarrow\quad A = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{A}{3}} \quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{6}+\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{4}}$$

ב. מי שמעוניין בפתרון המלא שיגש אלי בשעות הקבלה.

אם $\alpha+\beta>1$ אז a_n מונוטונית עולה (מדוע ?) אם $\alpha+\beta<1$ אז a_n מונוטונית יורדת. הגבול יהיה

$A = \beta+\sqrt{\frac{\beta^2}{2}+a}$.

3

3.1 לא . דוגמא נגדית : $a_n = -\frac{1}{n}$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אבל $\lim_{n\to\infty}[a_n] = -1$.

3.2 לא.

3.3 נכון כי סדרה מונוטונית יורדת וחסומה היא מתכנסת.

3.4 לא. ע"פ כלל המנה סדרה כזאת תתבדר לאינסוף.

4 נגדיר את סדרת ההפרשים : $b_n \equiv a_{n+1} - a_n$ אז $b_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n$, ולכן $b_n = \frac{a_{n-1} - a_n}{2}$, מכאן נקבל $b_n = -\frac{1}{2} b_{n-1}$ כלומר $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה הנדסית עם $b_1 = a_2 - a_1$, $q = -\frac{1}{2}$. כעת, מצד אחד, $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ ומצד שני $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k = a_n - a_1$ לכן, $a_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} + a_1$, בהצבת המשתנים נקבל $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.