תורת החבורות – תרגיל בית 6 – פתרון

שאלה 1

תהי $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0, c\neq 0\right\}$.

א) G סגורה תחת כפל מטריצות:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2\end{pmatrix}\in G$$ כי $a_1a_2\neq 0,\ c_1c_2\neq 0$.

ב) G סגורה להפיכים, כי $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a^{-1} & -b/ac \\ 0 & c^{-1}\end{pmatrix}\in G$.

ג) G תת-חבורה של $GL_2(\mathbb{R})$ לפי שני הסעיפים הקודמים וכי $I\in G$.

ד) $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\right\}$ הינה תת-חבורה של $GL_2(\mathbb{R})$, כי

1) $I\in H$

2) $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ 0 & a_1a_2\end{pmatrix}\in H$$

3) $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a^{-1} & -b/a^2 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\in G$$

שאלה 2

א) $(\mathbb{C}^*,\cdot)\ncong(\mathbb{R}^*,\cdot)$, כי למשל למשוואה $x^2=e$ בחבורה $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ישנם 3 פתרונות,

וב-$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ -- רק אחד.

ב) $(\mathbb{Q},+)\ncong(\mathbb{Z},+)$, כי למשל חבורה $(\mathbb{Z},+)$ ציקלית, ו $(\mathbb{Q},+)$ – לא.

ג) $S_4\ncong D_{24}$ כי המרכז של S_4 הינו טריביאלי, ושל D_4 -- לא.

שאלה 3

יהי $k>1$ טבעי ותהי $\varphi:G\to G$ העתקה המוגדרת ע״י $\varphi(z)=z^k$.

אז לכל $z,w \in G$ מתקיים $\varphi(zw)=(zw)^k=z^kw^k=\varphi(z)\varphi(w) \Leftarrow \varphi$

הומומורפיזם. יותר מכך, הינו הומומורפיזם על, כי לכל $z=\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\in G$ קיים

$z'=\text{cis}\left(\frac{2\pi}{kn}\right)\in G$ המקור של z ע״י φ.

φ אינו איזומורפיזם, כי אינו חח״ע: $\varphi\left(\text{cis}\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right)=\varphi(1)$, אך $\text{cis}\left(\frac{2\pi}{k}\right)\neq 1$ לכל

$k>1$ טבעי.

<u>שאלה 5</u>

יהי $k\in\mathbb{Z}$ ותהי $\varphi: A\to A$ העתקה המוגדרת ע״י $\varphi(a)=a^k$.

אז לכל $a,b\in A$ מתקיים $\varphi(ab)=(ab)^k=a^kb^k=\varphi(a)\varphi(b) \Leftarrow \varphi$ הומומורפיזם.

כעת נגדיר העתקה $\psi: A\to A$ ע״י $\psi(a)=a^{-1}$, אז

ψ הומומורפיזם אם ורק אם לכל $a,b\in A$ $\psi(ab)=\psi(a)\psi(b)$ אם ורק אם לכל

$a,b\in A$ $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ אם ורק אם לכל $a,b\in A$ $\left((ab)^{-1}\right)^{-1}=\left(a^{-1}b^{-1}\right)^{-1}$

אם ורק אם לכל $a,b\in A$ $ab=ba$ אם ורק אם A אבלית.

<u>שאלה 7</u>

א) ניקח חבורה $G=(Z,+)$ ותת-קבוצה אינסופית $H=\mathbb{N}$. אז $H=\mathbb{N}$ סגורה תחת הפעולה, אך אינה תת-חבורה של G.

ב) נניח בשלילה כי קיימת G חבורה סופית מסדר $n>2$, בה ישנה תת-חבורה H מהסדר $n-1$: $H=\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$, ו- $G=H\bigcup\{y\}$.

לכל $1\le i\le n-1$ $x_iy\notin H$ (כי אחרת $y\in H$).

לכן לכל $1\le i\le n-1$ $x_iy\in G-H$, כלומר לכל $1\le i\le n-1$ $x_iy=y$.

כמו כן $n>2 \Leftarrow n-1>1 \Leftarrow y=e \Leftarrow e\in H$, והגענו לסתירה.