פתרון דף תרגילים 1 – אלגברה לינארית ב'

1. א. נסמן $A=\begin{pmatrix}0&0&0&5\\1&0&0&-4\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני של A הינו

$$\Delta_A(x)=\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x&0&0&-5\\-1&x&0&4\\0&-1&x&3\\0&0&-1&x-2\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x&0&4\\-1&x&3\\0&-1&x-2\end{vmatrix}-5=$$

$$=x(x(x(x-2)+3)+4)-5=x^4-2x^3+3x^2+4x-5$$

נראה כי הפולינום המינימלי של A הינו בעצם הפולינום האופייני. אנחנו יודעים כי $m_A(x)|\Delta_A(x)$ ונרצה להראות כי אין פולינום מדרגה קטנה מ4 אשר מתאפס בA. נשים לב כי:

$Ae_1=e_2,\ A^2e_1=Ae_2=e_3,\ A^3e_1=Ae_3=e_4$. ולכן לכל פולינום

$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ מתקיים

$p(A)e_1=a_0e_1+a_1Ae_1+a_2A^2e_1+a_3A^3e_1=a_0e_1+a_1e_2+a_2e_3+a_3e_4$.

וכיוון שe_1,e_2,e_3,e_4 בת"ל $p(A)e_1=0$ יגרור כי p הינו פולינום ה0.

נסמן $B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני של B הינו:

$$\Delta_B(x)=\det(xI-B)=\begin{vmatrix}x-1&-1&0&0\\1&x+1&0&0\\2&2&x-2&-1\\-1&-1&1&x\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}x-1&-1\\1&x+1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2&-1\\1&x\end{vmatrix}=x^2(x-1)^2.$$

בכדי לחשב את הדטמננט השתמשנו בכך שהמטריצה היא מטריצת בלוקים.

עבור מטריצת בלוקים $M=\begin{pmatrix}T&0\\R&S\end{pmatrix}$ ופולינום $p(x)$ מתקיים $p(M)=\begin{pmatrix}p(T)&0\\ *&p(S)\end{pmatrix}$ שכן ראינו בכיתה כי $M^i=\begin{pmatrix}T^i&0\\ *&R^i\end{pmatrix}$. במצב כזה הפולינום המינימלי של M מתחלק בפולינום המינימלי של S ובזה של T. מכאן הפולינום המינימלי של B מתחלק בפולינום המינימלי של $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ ושל $\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$. ואילו אלו (כפי שחישבנו בתרגול הראשון) הם: x^2 ו$(x-1)^2$ בהתאמה. מכאן

$m_B(x)=x^2(x-1)^2$. כנדרש.

ב. $\Delta_A(x)$ הינו מדרגה שלוש ואילו $m_A(x)|\Delta_A(x)$ ולכן $\Delta_A(x) = m_A(x)(x-\beta)$ עבור β מסוים. אך ל$\Delta_A(x)$ ול$m_A(x)$ אותם שורשים, כלומר $\beta = 0$. קיבלנו $\Delta_A(x) = x^3$.

הפולינום המינימלי של $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ הינו x^2.

2. נסמן $n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$. לאחר פתיחת סוגריים נקבל כי המקדם של x^{n-1} של $p(x)$ הינו $-c_1d_1 - c_2d_2 - \cdots - c_kd_k$. אך גם ידוע (מאלגברה 1 לדוגמא) כי המקדם של x^{n-1} הוא $-tr(A)$.

3. יהי m_T הפולינום המינימלי של T. יהי $h(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i x^i$ פולינום. מתקיים כי:

$$h(T) = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} h_i T^i = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} h_i T^i(B) = 0 \text{ B לכל } \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} h_i A^i B = 0 \; B \text{ לכל } \leftrightarrow (\sum_{i=0}^{n} h_i A^i) B = 0 \; B \text{ לכל } \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} h_i A^i = 0 \leftrightarrow h(A) = 0$$

מכאן הפולינום המינמלי של A ושל T חייבים להיות זהים.

4. נשים לב כי $\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}$. כעת $P = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ הפיכה ולכן $P^{-1}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$. המטריצות $C = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ ו$D = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}$ דומות ולכן בעלות אותו פולינום אופייני. מכאן נקבל כי $\Delta_C(x) = x^m \det(x - BA) = x^m \Delta_{BA}(x),\; \Delta_D(x) = x^n \Delta_{AB}(x)$.
לכן $x^m \Delta_{BA}(x) = x^n \Delta_{AB}(x)$ ו$\Delta_{BA}(x) = x^{n-m}\Delta_{AB}(x)$.

5. נראה תחילה כי לכל פולינום $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^i$ מתקיים $Af(BA)B = ABf(AB)$. נשים לב כי $B(AB)^i = (BA)^i B$ ולכן
$Bf(AB) = \sum_{i=1}^{k} a_i B(AB)^i = \sum_{i=1}^{k} a_i (BA)^i B = f(BA)B$ או $Af(BA)B = ABf(AB)$.
נציב את הפולינום $f = m_{BA}$ ונקבל:
$0 = Am_{BA}(BA)B = ABm_{BA}(AB)$, ולכן AB מאפסת את $xm_{BA}(x)$. באופן סימטרי נקבל BA מאפסת את $xm_{AB}(x)$. ומכאן $m_{AB}(x)|xm_{BA}(x)$ ו$m_{BA}(x)|xm_{AB}(x)$. כלומר ייתכנו שלושה מקרים (שכן יחסים אלו מעידים על $|\deg(m_{AB}) - \deg(m_{BA})| \leq 1$):
1. $m_{AB}(x) = xm_{BA}(x)$,
2. $m_{AB}(x) = m_{BA}(x)$,
3. $m_{BA}(x) = xm_{AB}(x)$.