ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

ערכים עצמיים (ע״ע) ווקטורים עצמיים (ו״ע)

1. תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. הוכח שמטריצה מייצגת של T לפי בסיס B היא אלכסונית אס״ם B מורכב כולו מוקטורים עצמיים של T.

2. $T:R^2\to R^2$ הוא שיקוף כל נקודה במישור XY דרך ציר Y. מצא את כל הע״ע והו״ע T.

3. יהי $V=R^2$ ו-יהי $T:R^2\to R^2$ אופרטור הסיבוב של כל וקטור (x,y) ב- R^2 בזווית θ נגד כיוון השעון.

א) ודא שהמטריצה $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ מייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי של R^2.

ב) בעזרת המטריצה שבסעיף א׳ ודא שלאופרטור הסיבוב אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים מלבד המקרים $\theta=\pi k$. מהם אז המרחבים העצמיים של T?

ג) ודא שהמטריצה $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ לכסינה מעל C, מצא את הצורה האלכסונית שלה ואת המטריצה המלכסנת P.

4. הראה שלמטריצה משולשת (עליונה או תחתונה) הערכים עצמיים נמצאים על האלכסון.

5. לכל מטריצה מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים הבלתי תלויים שלה. אם המטריצה לכסינה, מצא את הצורה האלכסונית שלה ומטריצה מלכסנת שלה:

א) $\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$; ב) $\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$; ג) $\begin{pmatrix}5&0&0\\1&5&0\\0&1&5\end{pmatrix}$; ד) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}$; ה) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$;

ו) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; ז) $\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$; ח) $\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\-1&1&4\end{pmatrix}$; ט) $\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$;

י) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$; י״א) $\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&5&-5\\0&0&3&8\\0&0&0&3\end{pmatrix}$; י״ב) $\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&1&3\end{pmatrix}$.

6. תהיינה $B=\begin{pmatrix}3&-1\\13&-3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$. לגבי כל אחת מהן מצא את הפולינום האופייני שלה, ע״ע וו״ע. אם היא לכסינה מצא P מלכסנת ו- D אלכסונית: א) מעל R ב) מעל C.

7. מצא את כל הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים הבלתי תלויים לינארית של כל אחד מהאופרטורים הבאים וקבע האם הוא לכסין:

א) $T(x,y,z)=(x+y+z\,,2y+z\,,2y+3z)$, $T:R^3\to R^3$;

ב) $T(x,y,z)=(x-y\,,2x+3y+2z\,,x+y+2z)$, $T:R^3\to R^3$;

ג) $T(ax^2+bx+c)=bx^2+c$, $T:P_2\left[x\right]\to P_2\left[x\right]$ (אל תשכח לחזור חזרה לפולינומים).

ד) נסמן ב- E את העתקת האינטגרציה ללא תוספת קבוע (למשל $E(x)=\dfrac{x^2}{2}$) ונגדיר $T:P_2\left[x\right]\to P_2\left[x\right]$ ע"י $T\left(p(x)\right)=\dfrac{1}{x}E\left(p(x)\right)-\dfrac{1}{x^2}E^2\left(p(x)\right)$, כאשר E^2 פירושו ביצוע אינטגרציה פעמיים.

ה) $T(A)=A^t$, $T:R^{2\times2}\to R^{2\times2}$ (כאשר A^t היא המטריצה המוחלפת של A).

8. סמן את הטענה נכונה והוכח אותה: 0 הוא ערך עצמי של T אם"ם:

א) אף פעם ; ב) T הפיך ; ג) T לא הפיך ; ד) T לכסין ; ה) $\ker T\neq\left\{0\right\}$.

9. הוכח שהטענות הבאות שקולות:

א) 0 הוא ערך עצמי של T ;

ב) T אינו הפיך ;

ג) האיבר החופשי של הפולינום האופייני של T שווה ל- 0 ;

ד) T סינגולרי ($\det(T)=0$)

ה) קיים וקטור $v\neq0$ כך ש- $T(v)=0$.

10. תהי $A\in F^{n\times n}$ ויהי v וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ. הוכח:

א) לכל k טבעי, v הוא ו"ע של A^k השייך לע"ע λ^k.

ב) לכל $c\in F$, v הוא ו"ע של $A+cI$ השייך לע"ע $\lambda+c$.

ג) אם השדה אינסופי, קיים סקלר $c\in F$ כך ש- $A+cI$ הפיכה. כמה סקלרים כאלו קיימים?

ד) הכלל את א' ו- ב': הוכח שאם $p(t)$ הוא פולינום מעל F אז v הוא וקטור עצמי של $p(A)$ השייך לערך העצמי $p(\lambda)$.

ה) הוכח שאם ל- A יש ע"ע $\lambda=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ אז המטריצה $B=A^7-I$ לא הפיכה.

11. יהי $\lambda=3$ ע"ע של A. מצא ע"ע אחד של המטריצה $B=A^2+5A+I$.

12. יהי T אופרטור לאר סינגולרי (הפיך) ויהי λ ערך עצמי שלו. הראה ש- $\frac{1}{\lambda}$ הוא ע"ע של T^{-1}.

13. יהי v ו"ע של T ושל S. הראה ש- v הוא גם ו"ע של $\alpha T+\beta S$ כאשר α,β סקלרים.

14. הוכח שאם $A_{n\times n}$ ממשית עם ע"ע $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$ אז $v_2=\overline{v_1}$ בהתאמה.

15. א) הוכח שלמטריצה A ולמוחלפת שלה A^t אותו פולינום אופייני ולכן אותם ע"ע.

ב) הוכח שאם A לכסינה אז גם A^t לכסינה.

ג) הוכח שאם A לכסינה אז A ו- A^t דומות.

16. תהי $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ממשית. הוכח:

א) אם $(a-d)^2+4bc>0$ אז A לכסינה מעל R.

ב) אם $(a-d)^2+4bc<0$ אז A לא לכסינה מעל R.

(<u>שים לב</u> כי בסעיפים א' ו- ב' התנאים הם תנאים מספיקים ולא הכרחיים לכן אין לנסות להוכיח את הכיוון השני)

ג) נניח כי $(a-d)^2+4bc=0$. מצא מה צריכה לקיים A כדי שתהייה לכסינה.

17. תהי A מטריצה סימטרית מסדר 2×2, אך לא סקלרית (כלומר לא מהצורה cI). הוכח כי ל- A יש שני ע"ע שונים. הסק האם A לכסינה מעל R? מעל C?

18. תהי A מטריצה 2×2 כלשהי עם ע"ע ממשיים בלבד ו- $|A|<0$. הוכח ש- A לכסינה מעל R.

19. תהי $A(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר α ממשי.

א) עבור אילו ערכי α המטריצה $A(\alpha)$ לכסינה מעל R? נמק!

ב) עבור אילו ערכי α המטריצה $A(\alpha)$ לכסינה מעל C? נמק!

ג) יהי $\alpha=5$ מצא P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $P^{-1}A(5)P=D$.

ד) בטא את $A(5)^{-1}$ כפולינום ב- $A(5)$.

ה) חשב את $trace\left(A(5)^{10}\right)$ (רמז" חשב תחילה את הערכים העצמיים של $A(5)^{10}$).

20. א) מצא את כל שרשי הפולינום $f(t)=t^3-4t^2-t+4$.

ב) יהי $f(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+4$ הפולינום האופייני של מטריצה A מסדר 3×3. האם A לכסינה? נמק.

21. מצא את הפולינום האופייני של המטריצות הבאות ללא חישוב הדטרמיננטה $|A-\lambda I|$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 7\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & 4\end{pmatrix}.$$

22. תהי $C=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$ כאשר A_1,A_3 מטריצות ריבועיות. חשב את הפולינום האופייני של C והכלל למקרה הכללי.

23. עבור אילו ערכי α , β , γ המטריצות הבאות לכסינות :

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ 0 & 1 & \beta\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\quad ;\quad B=\begin{pmatrix}2 & \alpha & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & \gamma & 2 & 1\\ 0 & 0 & \beta & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

24. תהי $A=\begin{pmatrix}3 & a & 1\\ b & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. נתון כי $|A|=24$ ו- $\lambda_1=2$ ע״ע של A:

א) מצא את כל הערכים העצמיים של A.

ב) עבור אילו ערכי a ו- b המטריצה A תהייה לכסינה? נמק.

25. תהי $A\in F^{n\times n}$ כך ש- $rank(A)=1$.

א) מהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$?

ב) הראה שמימד המרחב העצמי של A המתאים לע״ע 0 שווה ל- $n-1$.

ג) הראה שהריבוי האלגברי של הע״ע 0 יכול להיות n או $n-1$, והסק מזה שבהכרח $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_{n-1}=0$.

ד) ידוע שסכום כל הע״ע של מטריצה שווה לעקבה שלה. השתמש בעובדה זו למציאת λ_n . יש להבחין בין שני מקרים : $trace(A)=0$ ו- $trace(A)\neq0$. קבע בכל אחד מהמקרים האם A לכסינה.

ה) השתמש בתוצאה של סעיף ד׳ כדי לקבוע האם המטריצות הבאות לכסינות ואם כן מצא את הצורה האלכסונית שלה:

$$(i\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad (ii\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad (iii\ \begin{pmatrix} a & -a & a & \cdots \\ -a & a & -a & \cdots \\ a & -a & a & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$(iv\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad (v\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad (vi\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \qquad (vii\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

26. תהי $A_{n\times n}$ ($n>1$) כך ש- $rank(A)=1$. הוכח: או ש- A לכסינה או ש- A נילפוטנטית, כלומר שקיים k טבעי כך ש- $A^k=0$.

27. תהי $A_{n\times n}$ ($n>1$) כך ש- $rank(A)=k<n$. הוכח שלמטריצה A יש לפחות $n-k$ ערכים עצמיים השווים ל- 0.

28. תהי $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מצא את כל הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה. הסק ש- M לכסינה ומצא מטריצה מלכסנת P ומטריצה אלכסונית D מתאימות.

29. מצא את כל הערכים של t עבורם $\begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4-t & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 9-t & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16-t \end{vmatrix}=0$ (רמז: תרגיל 25).

30. תהי $M=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ מצא את $\det(M)$. רמז: כתוב את M בצורה הבאה:

$M=\begin{pmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ b & b & b & \cdots & b \\ b & b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & b \end{pmatrix}+(a-b)I_n$ והיעזר בתרגילים 10-ב' ו- 25 למציאת הערכים העצמיים של M, וכן במשפט שדטרמיננטה של מטריצה שווה למכפלת הערכים העצמיים שלה.

31. מבין המטריצות הבאות ציין את אלו שהן לכסינות. נמק בקצרה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}\ ;$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\ ;\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ F=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

32. אם $A\in R^{2\times 2}$ כך ש- $\left|-I-A\right|^2+\left|I-A\right|^6=0$ אז (סמן את כל הטענות הנכונות):

א) $A=0$; ב) A סינגולרית ; ג) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ד) A לכסינה ;

ה) A דומה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ו) $trace(A)=0$ ז) $A=A^{-1}$.

33. יהיו A ו- B שתי מטריצות ריבועיות $n\times n$. הוכח כי ל- AB ו- BA אותם ערכים עצמיים.

34. יהיו A ו- B שתי מטריצות ריבועיות $n\times n$. הוכח כי ל- AB ו- BA אותו פולינום אופייני.

* 35. יהיו $A \in F^{m\times n}$ ו- $B \in F^{n\times m}$. ויהי $f_M(\lambda)$ הפולינום האופייני של מטריצה ריבועית M.

היעזר בזהות $\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ כדי להוכיח כי:

א) אם $n > m$ אז $\lambda^{n-m} f_{AB}(\lambda) = f_{BA}(\lambda)$.

ב) אם $m > n$ אז $f_{AB}(\lambda) = \lambda^{m-n} f_{BA}(\lambda)$.

ג) אם $n = m$ אז $f_{AB}(\lambda) = f_{BA}(\lambda)$.

36. יהיו A ו- B שתי מטריצות ריבועיות $n\times n$.

א) יהי v וקטור עצמי משותף ל- A ול- B, הוכח ש- v הוא וקטור עצמי גם של AB וגם שלך BA;

ב) הוכח שאם ל- A ול- B יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית משותפים אז $AB = BA$ (כלומר A ו- B מתחלפות בכפל).

ג) הוכח שאם A ו- B מתחלפות בכפל ול- A יש n ערכים עצמיים שונים אז ל- A ול- B יש ליכסון משותף.

37. הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א) אם A ו- B מסדר $n\times n$ לכסינות אז גם AB לכסינה.

ב) אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כך ש- $a > 0$ וגם $\det(A) > 0$ אז כל הערכים העצמיים של A הם חיוביים.

ג) אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כך ש- $a \geq 0$ וגם $\det(A) \geq 0$ אז כל הערכים העצמיים של A הם אי שליליים.

ד) מטריצה A המקיימת $A^2 - 2A + I = 0$ איננה סינגולרית (כלומר היא הפיכה).

ה) אם מטריצה A לכסינה ומקיימת $A^3 = A^2$ אז גם $A^2 = A$.

ו) אם v וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ ו- w הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי μ אז $v + w$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $\lambda + \mu$.

ז) אם A מטריצה לכסינה אז כל הערכים העצמיים שלה שונים זה מזה.

38. יהיו $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ערכים עצמיים שונים של מטריצה A מסדר $n\times n$. בטא את $trace(A)$ ואת $\det(A)$ כפונקציה של הערכים העצמיים.

39. קבע את ערכו של הפרמטר a כך ש- $\lambda=-2$ יהיה ערך עצמי של $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & a\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$.

<u>משפט קיילי – המילטון</u>

40. מצא פולינום שהמטריצה $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ היא שורש שלו.

41. א) הוכח שאם A מטריצה מסדר $n\times n$ הפיכה אז קיים פולינום $p(x)$ ממעלה $n-1$ כך ש- $A^{-1}=p(A)$.

ב) תהי $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 2\end{pmatrix}$. מצא פולינום $p(x)$ כך ש- $A^{-1}=p(A)$.

42. נתון: $A\in R^{3\times 3}$, $\det(A)=5$ ו- $\lambda=2+i$ ערך עצמי של A. הוכח כי:

א) $A^3=5A^2-9A+5I_3$;

ב) $A^4=16A^2-40A+25I_3$;

43. תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

א) הוכח שהמטריצות $\left\{I,A,A^2,...,A^n\right\}$ תלויות ליניארית;

ב) יהי $U=span\left\{I,A,A^2,...,A^n\right\}$ מצא חסם ל- $\dim U$.

44. תהי A מטריצה לא סינגולרית (כלומר $\det(A)\neq 0$). הוכח שקיים k טבעי כך ש- $(A^k)_{11}\neq 0$.

45. תהי $A\in F^{n\times n}$ כך ש- $A^k=0$ עבור מספר k טבעי כלשהו. הוכח ש- $A^n=0$.

46. תהי A מטריצה לא לכסינה מדרגה 1. הוכח שקיים מספר טבעי k כך ש- $A^k=0$ (רמז: ראה תרגילים 25 ו- 26 בפרק זה).

47. מצא מטריצה ממשית מסדר 2×2 שכל איבריה שונים מ- 0 כך שהפולינום האופייני שלה הוא $f(\lambda)=\lambda^2-7\lambda+9$. כמה מטריצות כאלו קיימות?

דמיון מטריצות

48. קבע אילו זוגות של מטריצות הן דומות:

א) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & -9 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 10 & 9 & 2 \end{pmatrix}$; ב) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; ג) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ד) $\begin{pmatrix} b_2 & c_2 & a_2 \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$; ה) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. נתונות שתי מטריצות A ו- B. לגבי כל אחת מהן יש למצוא פולינום אופייני, ערכים עצמיים וקטורים עצמיים. האם הן לכסינות? אם כן למצוא P מלכסנת ו- D אלכסונית. האם A ו- B דומות? נמק.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

50. תהיינה $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

לגבי כל אחת מהן יש למצוא פולינום אופייני, ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי. האם הן לכסינות? אם כן למצוא P מלכסנת ו- D אלכסונית. האם A, B ו- C דומות? נמק.

51. לפניך קבוצה של 4 מטריצות. חלק אותן לקבוצות של מטריצות דומות זו לזו:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

52. הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א) מטריצה A שכל הערכים העצמיים שלה שווים ל- 0 היא מטריצה ה- 0.

ב) המטריצה $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ דומה מעל C למטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ג) למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.

ד) למטריצות דומות יש אותם וקטורים עצמיים.

ה) אם למטריצות A ו- B יש אותם ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, פולינום אופייני, ואותו ריבוי אלגברי של כל ערך עצמי אז הן דומות.

ו) אם לשתי מטריצות יש אותו פולינום אופייני אז יש להם אותם: דרגה, דטרמיננטה, עקבה, ערכים עצמיים וריבוי אלגברי של כל אחד מהערכים העצמיים.

ז) אם לשתי מטריצות יש אותו פולינום אופייני אז יש להם אותם: ערכים עצמיים, ריבוי גיאומטרי וריבוי אלגברי של כל אחד מהערכים העצמיים.

ח) אם מטריצה A היא הפיכה אז AB ו- BA דומות.

ט) למטריצה ממשית מסדר 5×5 יש לפחות ערך עצמי ממשי אחד.

53. תהי $A\in F^{2\times 2}$ כך ש- $A^2=0$. הוכח: או ש- $A=0$ או ש- A דומה למטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(רמז: ראה תרגיל 21 בפרק "הצגת אופרטור ע"י מטריצה").

54. השתמש בתוצאה של תרגיל 53 כדי להראות שכל מטריצה מסדר 2×2 דומה ל- $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ או ל- $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (a ו- b לא בהכרח שונים זה מזה).

55. תהי $A\in F^{n\times n}$. הוכח:

א) כל וקטור $v\in F^n$ הוא וקטור עצמי של A אם"ם $A=I_n$.

ב) מטריצה A דומה רק לעצמה אם"ם $A=\alpha I_n$.

56. הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח: אם נחליף שתי שורות של מטריצה A זו בזו (או נעשה כל פעולה אלמנטרית אחרת) אז נקבל מטריצה שדומה ל- A.

57. א) לכל אחת מהמטריצות הבאות מצא פולינום אופייני, ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי, וודא שכל האיפיונים הנ"ל זהים.

ב) מצא $rank\left((A-\alpha I)^2\right)$, $rank\left((B-\alpha I)^2\right)$. האם הם שווים?

ג) קבע האם מטריצות בעלות אותו פ"א, ע"ע, ו"ע ר"א ור"ג הן בהכרח דומות.

$$B=\begin{pmatrix} a&1&0&0&0&0&0\\ 0&a&1&0&0&0&0\\ 0&0&a&0&0&0&0\\ 0&0&0&a&1&0&0\\ 0&0&0&0&a&0&0\\ 0&0&0&0&0&a&1\\ 0&0&0&0&0&0&a \end{pmatrix} \quad ; \quad A=\begin{pmatrix} a&1&0&0&0&0&0\\ 0&a&1&0&0&0&0\\ 0&0&a&0&0&0&0\\ 0&0&0&a&1&0&0\\ 0&0&0&0&a&1&0\\ 0&0&0&0&0&a&0\\ 0&0&0&0&0&0&a \end{pmatrix}$$