חוברת תרגילים בקומבינטוריקה (104286)

נערך ע"י ארנון הרשקוביץ

עדכון אחרון: 23 באוקטובר 2001

תוכן ענינים

חלק I

מבוא

א הבטחות זכיה בהימורים

1. יהי f_n מספר הטורים המינימליים שיש לשלוח בטוטו כדורגל, כדי להבטיח זכיה בפרס שני לפחות ($n-1$ ניחושים נכונים, לפחות, מתוך n משחקים).
   א. הוכיחו כי: $f_{n+k} \leq 3^k f_n$ לכל n, k טבעיים.
   ב. מיצאו את f_2.

2. יהי g_n מוגדר כמו f_n, אלא שעבור טוטו כדורסל (זיכרו, כי בכדורסל אין תוצאת תיקו).
   א. מיצאו והוכיחו חסם מלרע עבור g_n, שהוא אנלוגי לחסם המלרע שהוכח בהרצאה עבור f_n.
   ב. מיצאו את g_3.

3. עבור שני טורים: t_1, t_2 בטוטו כדורגל, נסמן ב - $d(t_1, t_2)$ את מספר המקומות (משחקים) שבהם שני הטורים שונים זה מזה. על כמה טורים חולשים (במובן שהוגדר בהרצאה) גם t_1 וגם t_2, אם:
   א. $d(t_1, t_2) \geq 3$?
   ב. $d(t_1, t_2) = 2$?
   ג. $d(t_1, t_2) = 1$?

4. בטוטו כדורגל על 16 משחקים, הראה כיצד אפשר לשלוח 6561 טורים ולהבטיח זכיה בפרס חמישי לפחות (כלומר, 12 ניחושים נכונים לפחות).
   <u>רמז:</u> היעזר בקבוצה הטורים המבטיחה פרס שני לפחות, שניתנה בהרצאה למקרה של 4 משחקים.

ב נישואים יציבים ומשפט קיילי-המילטון

1. נתונה חברה בת 4 בחורים ו - 4 בחורות עם ההעדפות הבאות:

בחורות $\rightarrow$ / בחורים $\downarrow$	1	2	3	4
1	$4,4$	$2,2$	$3,3$	$1,2$
2	$2,2$	$4,1$	$3,4$	$1,3$
3	$2,1$	$1,3$	$3,2$	$4,4$
4	$1,3$	$2,4$	$4,1$	$3,1$

(בכל משבצת, המספר משמאל מתאר את הדירוג של הבחורה בעיני הבחור, והמספר מימין מתאר את הדירוג של הבחור בעיני הבחורה.)

א. בצע את האלגוריתם של $Gale - Shapley$ ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

ב. בצע את האלגוריתם האנלוגי, שבו הבחורות הן המחזרות אחרי הבחורים, ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

2. תן דוגמה לחברה בת 2 בחורים ו - 2 בחורות עם העדפות כאלו ששני הנישואים (כלומר, שתי האפשרויות להשיא את הבחורים לבחורות) הם יציבים.

3. נתונה חברה בת n בחורים ו - n בחורות, ובה בחור b המדרג את הבחורה g ראשונה, כך שגם g מדרגת את b ראשון. הוכח, שבכל נישואים יציבים, b ו - g נשואים זה לזו.

4. נתונה חברה בת 4 בחורים $1,2,3,4$ ו - 4 בחורות A,B,C,D עם ההעדפות הבאות:

העדפות של הבחורות:

A	4	2	1	3
B	2	1	3	4
C	3	4	2	1
D	2	3	4	1

העדפות של הבחורים:

1	D	B	C	A
2	B	D	C	A
3	B	A	C	D
4	A	B	D	C

א. בצע את האלגוריתם של $Gale-Shapley$ בו הבחורים מחזרים אחרי הבחורות ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

ב. בצע את האלגוריתם האנלוגי, שבו הבחורות הן המחזרות אחרי הבחורים, ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

ג בעיות מניה בסיסיות

1. בכתה בת 25 תלמידים בוחרים נבחרת שחמט (לוח ראשון, שני, שלישי ורביעי) ונבחרת כדורסל (חמישה שחקנים, הסדר לא משמעותי).
   א. בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת השחמט?
   ב. בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת הכדורסל?
   ג. בכמה דרכים ניתן לבחור את שתי הנבחרות, אם אסור שיהיה יותר מתלמיד אחד המשתתף בשתיהן?

2. לכל אחד מן התנאים הבאים, מיצאו את מספר הטורים בטוטו כדורגל על 16 משחקים, המקיימים את התנאי.
   א. לכל i $(i = 1, 2, \dots, 16)$ התוצאה במשחק ה - i שונה מן התוצאה במשחק ה - $(17 - i)$.
   ב. יש חמש תוצאות 1, חמש תוצאות 2 ושש תוצאות x.
   ג. אין אף x, יש בדיוק שלוש תוצאות 2 ואף שתיים מהן אינן מופיעות זו אחר זו.

3. אבי, בני, גדי, דינה, הילה וורד מסתדרים במעגל. לכל אחד מן התנאים הבאים, מיצאו את מספר הסידורים השונים המקיימים את התנאי (אין להבחין בין סידורים המתקבלים זה מזה על ידי סיבוב).
   א. אבי ודינה אינם זה על יד זו.
   ב. בני והילה הם זה מול זו.
   ג. בנים ובנות מופיעים לסירוגין.
   ד. גדי קרוב יותר להילה מאשר לורד.

4. קבוצה ובה 12 ילדים צריכה להתחלק לשלשות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? (אין משמעות לסדר השלשות).

5. א. כמה תוצאות שונות ניתן לקבל ע"י הטלת n קוביות שונות?
   ב. כמה תוצאות שונות ניתן לקבל ע"י הטלת n קוביות זהות?

6. מהו מספר הפתרונות של המשוואה : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26$, כאשר:
   א. $x_i \geq 0$ לכל $i = 1, \dots, 5$.
   ב. $x_i > 0$ לכל $i = 1, \dots, 5$.

7. א. הוכח כי: $\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{2^n}$ הוא מספר שלם.
   ב. נתונה קבוצה של $2n$ אנשים. בכמה אופנים ניתן לחלק אותם ל- n זוגות?

8. א. חשב את מספר השלשות (A, B, C) כאשר $A \subseteq B \subseteq C \subseteq [n]$
   ב. חשב את מספר הזוגות (A, B) באשר $A, B \subseteq [n]$ ומתקיים $A \subset B, A \neq B$

9. מהו מספר הסדרות המכילות מספר זוגי של אפסים ב:

א. $\{0,1\}^n$ (כלומר סדרות של אפסים ואחדים באורך n)?

ב. $\{0,1,2\}^n$?

ג. $\{0,1,\dots\dots m-1\}^n$?

10. מהו מספר המסלולים השריגיים החיוביים מ- $(0,0)$ ל- (n,n) שאינם מכילים נקודה (x,y) עם $y>x$?

11. יהא $f(n,m)$ מספר הפונקציות מ- $[n]$ ל- $[m]$ שהן <u>על</u>. הוכח כי $f(n,m)$ מתחלק ב- $m!$.

12. יהי $P_o(n)$ - מספר החלוקות של n למספרים אי-זוגיים. יהי $P_D(n)$ - מספר החלוקות של n למספרים שונים. תן הוכחה קומבינטורית ל:

$$P_o(n) = P_D(n)$$

(<u>רמז:</u> נקח $n=37$ וחלוקה לשונים $n=6+8+11+12$.

$$6+8+11+12 = 2^1\cdot 3+2^3+2^0\cdot 11+2^2\cdot 3 = 2^3\cdot 1+(2^2+2^1)\cdot 3+2^0\cdot 11$$

וזו חלוקה לאי-זוגיים.)

13. (*בונוס)

א. כמה אפשרויות יש לצבוע <u>פאות</u> של קוביה בשישה צבעים שונים, כאשר צביעות המתקבלות מסבובים במרחב נחשבות זהות, אבל צביעות המתקבלות זו מזו על ידי שיקוף נחשבות שונות.

ב. כמו א', אבל צובעים את 8 <u>הקודקודים</u> של הקובייה.

ג. כמו א', אבל עכשיו צובעים את 12 <u>הצלעות</u> של הקובייה.

ד. כיצד היו משתנות התשובות לסעיפים א'-ג', אם צביעות המתקבלות זו מזו על ידי שיקוף היו נחשבות זהות?

14. (*בונוס)

נקרא <u>חלוקה סדורה</u> של n, לחלוקה של n למחוברים טבעיים עם חשיבות לסדר המחוברים. למשל, ל-3 יש 4 חלוקות סדורות:

$$3=1+1+1,\quad 3=1+2,\quad 3=2+1,\quad 3=3$$

א. כמה חלוקות סדורות יש ל-n?

ב. בכמה מן החלוקות הסדורות של n יש מספר זוגי של מחוברים זוגיים?

ד מקדמי הבינום

1. א. בכמה דרכים ניתן לבחור מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_k$ כך ש: $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$? (הנח ש: $0 \leq k \leq n$)

ב. אותה שאלה, כאשר התנאי הוא: $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq n$.

ג. אותה שאלה כמו בחלק ב', כאשר דורשים בנוסף: $a_1 \neq a_k$.

2. בכנסת בוחרים יו"ר מבין 4 מועמדים. כמה תוצאות שונות אפשריות? (הנח שכל אחד מבין 120 חברי הכנסת יכול להצביע בעד אחד המועמדים או להימנע. תוצאת ההצבעה היא מספר הקולות להם זכה כל מועמד ומספר הנמנעים.)

3. כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש לכל אחת מן המשוואות הבאות?

א. $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 20$

ב. $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$

ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5) = 18$

4. לגבי כל אחד מן הביטויים הבאים, קיבעו האם הוא מופיע בפיתוח של $\left(x^6 + y^5\right)^7$ לפי נוסחת הבינום, ואם כן - מה המקדם שלו.

א. $x^{24}y^{20}$; ב. $x^{12}y^{25}$; ג. $x^{30}y^{10}$.

5. א. הוכיחו: לכל n טבעי ולכל $0 \leq k \leq 2^{n-1}$, מתקיים:

$$\binom{2^n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2^{n-1}}{j}\binom{2^{n-1}}{k-j}$$

ב. הוכיחו: לכל n טבעי ולכל $1 \leq k \leq 2^n - 1$, $\binom{2^n}{k}$ הוא זוגי.

(רמז: היעזרו בחלק א' ובאינדוקציה)

ג. האם $\binom{66}{17}$ הוא זוגי או אי-זוגי?

6. הוכח: המכפלה של כל k מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת ב - $k!$.

7. א. הוכח, שכל מספר טבעי $m > 1$ מופיע במשולש פסקל רק מספר סופי של פעמים.

ב. כמה פעמים מופיע המספר 10 במשולש פסקל?

8. הוכח כי מספר המספרים האי-זוגיים בסדרה: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ הוא חזקה של 2.

9. יהא p ראשוני.

א. הוכח $\binom{p}{k} \equiv 0(mod p)$ לכל $1 \leq k \leq p - 1$

ב. הוכח:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p (modp)$$

10. חשב בעזרת נוסחת הבינום:

א. $\sum_{k=2}^{k=n} k(k-1)\binom{n}{k}$

ב. $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

11. (*בונוס*)

בדומה לצורה בה ניתן היה להגדיר את $\binom{n}{k}$ באמצעות משולש פסקל, נגדיר את המספרים $\left(\binom{n}{k}\right)$ עבור $n \geq 1, 1 \leq k \leq n$ על ידי המשולש הבא:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 2 & & 2 & & & & \\ & & & 3 & & 4 & & 3 & & & \\ & & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & & \\ & 5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5 & \\ 6 & & 16 & & 25 & & 25 & & 16 & & 6 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

או באופן יותר פורמלי:

א. $\left(\binom{n}{1}\right) = \left(\binom{n}{n}\right) = n$, לכל $n \geq 1$.

ב. $\left(\binom{n+1}{k+1}\right) = \left(\binom{n}{k}\right) + \left(\binom{n}{k+1}\right)$, לכל $n \geq 1, 0 < k < n$

מצא ביטוי סגור ל-$\left(\binom{n}{k}\right)$ באמצעות המקדמים הבינומיים הרגילים.

ה זהויות קומבינטוריות

1. הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

ב. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}$

(רמז: בוחרים ועד ובו n חברים, בכיתה שבה n בנים ו - n בנות. בחלק ב', לועד יש יו"ר ממין מסוים.)

2. חשב:

א. $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$

ב. $\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k}$

ג. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

ד. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2$

3. הוכח כי מספר הקבוצות בגודל k מתוך $\{1,\ldots,n\}$ שאינן מכילות שני מספרים עוקבים הוא $\binom{n-k+1}{k}$.

4. נתון מצולע משוכלל עם n קודקודים.

א. בכמה אופנים ניתן לבחור 3 מבין קודקודי המצולע כך שצלעות המשולש הנוצר הינן אלכסונים במצולע המקורי (ולא צלעות)?

ב. בכמה אופנים ניתן לבחור k מבין קודקודי המצולע כך שצלעות המצולע הנוצר הינן אלכסונים במצולע המקורי (ולא צלעות)?

(<u>רמז:</u> השתמשו בשאלה 3)

5. הוכח (עבור: $l\leq n$):

$$\sum_{k=l}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{l}=\binom{n}{l}2^{n-l}$$

6. נסמן ב- $D(n)$ את מספר התמורות על $[n]$ ללא נקודות שבת. נסמן $D(0)=1$.

א. הוכח

$$n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D(n-k)$$

ב. הוכח על סמך שיקולים קומבינטוריים כי

$$D(n)=(n-1)(D(n-1)+D(n-2))$$

ג. השתמש ב- ב' על מנת להוכיח באינדוקציה את הנוסחה ל- $D(n)$ שקיבלנו בכיתה.

7. הוכח:

$$\binom{n+1}{a+b+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$$

(רמז: מהו מספר הקבוצות $A = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_{a+b+1}\}$ בגודל $a+b+1$ מתוך $[n]$ בהן $x_{a+1} = k+1$?)

8. יהא $p \geq q$. חשב:

$$\sum_{j=q}^{p} (-1)^{j+q} \binom{j}{q}\binom{p}{j}$$

ו עקרון ההכלה וההפרדה

1. בקבוצה מסוימת של 5 אנשים, כל אדם מדבר 3 שפות, ולכל שני אנשים יש בדיוק שפה אחת משותפת. יש שתי שפות, השגורות בפי שלושה אנשים כל אחת, ושאר השפות ידועות לפחות משלושה אנשים. כמה שפות ידועות לקבוצה כולה (כלומר, לפחות לאדם אחד בה)?

2. בצנצנת יש 10 סוכריות טופי, 8 סוכריות דבש ו - 6 סוכריות מנטה. כמה שקיות שונות של 10 סוכריות אפשר להוציא ממנה? כמה של 15? כמה של 20? (אין מבחינים בין סוכריות שונות מאותו סוג.)

3. חשב את פונקציית אוילר $\varphi(n)$ עבור המספרים הבאים: $n = 18,\ 252,\ 693$

4. א. הוכח: אם m, n מספרים טבעיים זרים, אז: $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$
ב. כאשר m, n אינם זרים, איזה משני המספרים: $\varphi(m \cdot n)$ ו - $\varphi(m) \cdot \varphi(n)$ גדול יותר?

5. תהא $\varphi(n) = |\{1 \leq k \leq n : (k, n) = 1\}|$ פונקצית אוילר. הוכח בשתי דרכים, קומבינטורית וחישובית כי $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
(מסכמים על כל ה- $1 \leq d \leq n$ המחלקים את n)

6. כמה מספרים טבעיים בין 200 ל - 2000 אינם מתחלקים מאף אחד מבין המספרים: $5, 12, 14$?

7. בכיתה 25 תלמידים דוברי שלוש שפות זרות: 14 דוברי ספרדית, 12 דוברי צרפתית, 6 דוברי ספרדית וצרפתית, 5 דוברי גרמנית וספרדית, 2 דוברי כל השפות. כל ששת התלמידים שהם דוברי גרמנית מדברים גם שפה אחרת. כמה תלמידים בכיתה אינם דוברי שפה זרה?

8. כמה מספרים קטנים מ- $1,000,000$ אינם ריבועים שלמים או חזקות שלישיות שלמות או חזקות רביעיות שלמות? (כלומר מצא את גודל הקבוצה $\{x \leq 10^6 : x \neq y^2, z^3, w^4\}$).

9. כמה פתרונות שלמים חיוביים יש למשוואה:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

בתנאים הבאים: $10 \leq x_3 < 25$,$7 \leq x_2 < 15$,$4 \leq x_1 < 10$.

10. בכמה מספרים בני 4 ספרות יש לפחות ספרה אחת 1, ספרה אחת 2, וספרה אחת 3?

11. כמה מספרים בין 1 ל- 6000 אינם מתחלקים לא ב- 3 ולא ב- 5?

12. כמה מספרים שלמים וחיוביים הקטנים מ- 30 זרים ל- 30?

13. בכמה אופנים ניתן לסדר את המספרים $1, \ldots, 9$ בשורה כך שאף מספר זוגי לא יהיה במקומו הטבעי?

14. מהו מספר התמורות של $\{1, \ldots, 8\}$ שבהן בדיוק מחצית מהאיברים נמצאים במקומם הטבעי?

15. n אנשים נכנסים למסעדה וכל אחד מהם תולה בכניסה מעיל ומטריה. בצאתם, כל אחד לוקח באקראי את אחד המעילים ואחת המטריות. מה ההסתברות לכך שאף אדם לא יצא עם כל רכושו? (ז"א, אנו סופרים מקרים בהם אדם יצא עם המטריה שלו אך לא עם המעיל שלו, או להיפך, או עם אף אחד מהם). האם הסתברות זו שואפת לגבול כאשר $n \longrightarrow \infty$, ואם כן - מהו?

16. בכמה מן התמורות של הספרות $0, 1, 2, \ldots, 9$ אין רצף של שבע (או יותר) ספרות עוקבות? (למשל, התמורה: 2034567891 פסולה בגלל הרצף המסומן.)

17. הוכח:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{k-i} = \binom{m}{k}$$

(רמז: חשב בעזרת הכלה והדחה את מספר הקבוצות $A \subset [m+n]$ בגודל k שאינן מוכלות ב- $[m]$).

18. תהינה A, B, C קבוצות. הוכח:

$$3|A \cup B \cup C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq 2(|A| + |B| + |C|)$$

19. תהינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות.

א. הוכח

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

ב. נניח כי $A_1 \cap \ldots A_n = \emptyset$. הוכח:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \geq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

20. פתרו כל אחד מן הסעיפים הבאים בשתי דרכים: פעם בעזרת עקרון ההכלה וההפרדה ופעם נוספת ללא שימוש בעקרון ההכלה וההפרדה:

א. מהו מספר השלשות הסדורות (A, B, C) של קבוצות המוכלות ב- $[n]$ שאיחודן $A \cup B \cup C = [n]$?

ב. מהו מספר ה- k-יות הסדורות $(A_1, \ldots, A_k)$ של קבוצות המוכלות ב- $[n]$ שאיחודן $A_1 \cup \ldots \cup A_k = [n]$?

21. תהינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות. הוכח:

$$3 \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \leq (n-2) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

22. בכמה אופנים ניתן סדר את המספרים $1, \ldots, 9$ בשורה כך ש-

א. אף אחד מהבלוקים $23, 45, 678$ אינו מופיע בסידור הנ"ל

ב. אף אחד מהבלוקים $34, 45, 678$ אינו מופיע בסידור הנ"ל

23. מצא את כל הפתרונות השלמים האי-שליליים של המשוואה

$$a + b + c + d = 17$$

המקיימים : $1 \leq a \leq 3$, $2 \leq b \leq 4$, $3 \leq c \leq 5$, $4 \leq d \leq 6$

24. בכמה אופנים אפשר לשים 50 כדורים בארבעה תאים שקיבוליהם $20, 20, 30, 30$?

25. סביב שולחן עגול עם 10 כסאות, יושבות 5 נשים כך שבין כל שתיים יש כסא פנוי. בכמה אופנים שונים יכולים להתיישב 5 הבעלים של הנשים בכסאות הפנויים, אחד בכל כסא, כך שאף גבר לא ישב על יד אשתו?

ז נוסחאות נסיגה ופתרונן

1. הוכח:

א. $F_1+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$

ב. $F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2n-1}=F_{2n}$

ג. כל מספר טבעי הוא סכום של מספרי פיבונצ'י שונים

2. חשב:

א. $F_0+F_2+F_4+\ldots+F_{2n}$

ב. $F_0-F_1+F_2+\ldots+(-1)^nF_n$

ג. ${F_0}^2+{F_1}^2+\ldots+{F_n}^2$

3. הוכח:

$$F_{n+1}F_{n-1}-{F_n}^2=(-1)^{n+1}$$

4. הוכח:

א. F_n זוגי אמ"ם n מתחלק ב- 3

ב. F_n מתחלק ב- 3 אמ"ם n מתחלק ב- 4

ג. F_n מתחלק ב- 4 אמ"ם n מתחלק ב- 6

5. הוכח:

$$\binom{n}{0}F_0+\binom{n}{1}F_1+\ldots+\binom{n}{n}F_n=F_{2n}$$

6. מהו מספר סדרות $\{0,1\}$ באורך n שאינן מכילות זוג אפסים עוקבים?

7. מהו מספר האפשרויות לעלות n שלבים של סולם, כאשר בכל צעד עולים שלב אחד או שניים ובצעד הראשון עולים שלב אחד?

8. יהי J_n מספר התת-קבוצות של קבוצת המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$ (כולל התת-קבוצה הריקה) שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. בטא את J_n באמצעות מספרי פיבונאצ'י.

9. אדם עולה n מדרגות, כאשר בכל צעד הוא עולה מדרגה אחת, שתיים או שלוש. מייד אחרי צעד של שלוש מדרגות, הוא רשאי (אך לא חייב) לנוח שלב אחד, כלומר לעשות צעד של אפס מדרגות (אפשרות זאת קיימת גם אם הצעד של שלוש מדרגות הביא אותו לקצה). יהי S_n מספר האופנים לעשות זאת.
א. מצא נוסחת נסיגה עבור S_n.
ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור S_n.

10. חלקיק נע במישור לפי הכללים הבאים: במצב ההתחלתי הוא נמצא בראשית הצירים (הנקודה $(0,0)$).
בכל שניה הוא נע מרחק של 1 ימינה, שמאלה או למעלה (כלומר, מן הנקודה (x,y) לנקודה $(x+1,y)$, לנקודה $(x-1,y)$ או לנקודה $(x,y+1)$). לעולם, החלקיק איננו חוזר לנקודה ממנה יצא בשניה הקודמת.
יהי P_n מספר המסלולים האפשריים למהלך החלקיק במשך n שניות.
א. הוכח ש - P_n מקיים את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 3 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור P_n.

11. n ישרים במישור נקראים <u>במצב כללי</u> אם אין בינהם שניים מקבילים ואין שלושה שעוברים דרך אותה נקודה. נסמן ב- $f(n)$ את מספר התחומים שנוצרים במישור ע"י n ישרים במצב כללי. למשל $f(2)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=7$. הוכח:

$$f(n) = f(n-1) + n$$

ומצא נוסחה כללית ל- $f(n)$.

12. נתונים n מישורים במרחב, אשר כולם מכילים את הנקודה $(0,0,0)$. נתון שחיתוך של כל שלושה מישורים הוא הנקודה $(0,0,0,)$ בלבד. נסמן ב- $f(n)$ את מספר התחומים על פני הכדור שנקבעים ע"י מישורים אלה. למשל: $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=8$. מצא נוסחת נסיגה ל- $f(n)$ ובעזרתה תן נוסחה כללית.

13. נסמן ב- $p(n,m)$ את מספר החלוקות n לחלקים שגודלם m לכל היותר. הוכח:

$$p(n,m) = p(n,m-1) + p(n-m,m)$$

14. א. מצא נוסחת נסיגה עבור: $D(n)$ (תזכורת: זהו מספר התמורות של n איברים ללא נקודת שבת).
ב. הוכח: $D(n)$ זוגי אם"ם n אי-זוגי.

15. נסמן ב- $f(n)$ את מספר הסידורים של המספרים $1\ldots n$ במעגל בלי ששני מספרים עוקבים יהיו סמוכים בסידור. (לצורך הענין 1 ו- n נחשבים עוקבים). הוכח : $f(n)+f(n+1)=D(n)$.

16. נסמן ב- $g(n)$ את מספר הסדרות ב- $\{0,1,2\}^n$ (כלומר סדרות באורך n שאבריהן הם 2,1,0) שלא מכילות שני אפסים עוקבים. הוכח: $g(n)=2g(n-1)+2g(n-2)$.

17. מגדלי הנוי: n טבעות בעלות רדיוסים 1 עד n מושחלות על מוט , כאשר בתחתית הערימה נמצאת טבעת ברדיוס n, מעליה - טבעת ברדיוס $n-1$, וכן הלאה, ובראש הערימה מונחת טבעת ברדיוס 1. לרשותך שני מוטות נוספים שעליהם אפשר להשחיל את הטבעות. נדרש להעביר את הטבעות מהמוט הראשון למוט השני, כך שבסוף התהליך סידורן יהי זהה (מסודרות לפי גודל יורד מלמטה למעלה). תוך כדי תהליך ההעברה מותר לשים טבעות על המוט השלישי. יש לשמור על הכלל הבא: בכל שלב על כל מוט טבעת קטנה יותר לא תהיה מונחת מתחת לטבעת גדולה יותר.

נסמן ב- a_n את מספר הצעדים המינימלי שנדרש על מנת להשלים את ההעברה עבור n טבעות. הוכח: $a_n = 2a_{n-1}+1$.

18. מצא את נוסחת האיבר הכללי a_n:

א. $a_0=2$, $a_1=3$, $a_{n+2}=3a_n-2a_{n+1}$

ב. $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$

ג. $a_0=0$, $a_{n+1}=2a_n+3$

ד. $a_0=2$, $a_1=8$, $a_{n+2}=+\sqrt{a_n a_{n+1}}$

19. פתור את משוואת הנסיגה הבאה: $h_0=1$, $h_1=h_2=0$, $h_n=3h_n-2h_{n-3}$, עבור $n\geq 3$.

20. מצא את האיבר הכללי בסדרה הנתונה ע"י נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_{n+3}=a_n-3a_{n+1}+3a_{n+2}$$

כאשר $a_0=a_1=0$, $a_2=1$.

21. סדרת המספרים: $H_n,\ n=0,1,2,\ldots$ מקיימת: $H_n=-2H_{n-1}-H_{n-2}$ לכל $n\geq 2$, וכמו כן מקיימת: $H_{30}=15$, $H_{17}=11$. מצא את: H_{100}.

22. יהי T_n מספר הסדרות: $a_1,a_2,\ldots,a_n$ המקיימות:

$(*)$ כל a_i הוא אחד המספרים: $0,1,2,3$.

$(**)$ אם a_i הוא 0, אז a_j הוא 0, לכל $j>i$.

א. מצא נוסחת נסיגה עבור T_n.

ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור T_n.

23. (*בונוס*)

הוכיחו כי עבור n שמתחלק ב-m מתקיים f_n מתחלק ב-f_m.

(שימו לב כי כאן: $f_0=0, f_1=1, f_2=1, f_3=2,\ldots$)

חלק II

מבוא לתורת הגרפים ועקרון שובך היונים

א עקרון שובך היונים

1. הוכח: בכל מאה יש 15 שנים שה - 1 בינואר חל בהן באותו יום בשבוע.

2. בודקים את ידיעת השפות עברית, ערבית, רוסית ואנגלית בקבוצה מסוימת של 100 אנשים. מתברר, שאיש אינו יודע את כל ארבע השפות, וכל יודעי העברית יודעים גם אנגלית. הוכח שיש 10 אנשים היודעים אותן שפות בדיוק.

3. במשולש שווה-צלעות שאורך צלעותיו 1, נתונות $2^{2n}+1$ נקודות (n - מספר טבעי כלשהו). הוכח, שקיימות שתי נקודות ביניהן, המרוחקות זו מזו מרחק של $\frac{1}{2^n}$ לכל היותר.

4. הוכח: בכל קבוצה של 50 בני אדם, יש שמונה שהפרש הגילים בין כל שניים מהם (בשנים שלמות) מתחלק בשבע.

5. יהי α מספר ממשי ויהי q מספר טבעי.
א. הוכח שקיים מספר טבעי b, $1 \le b \le q$, כך שהמרחק מ - $b\alpha$ למספר השלם הקרוב ביותר הוא לכל היותר $\frac{1}{q}$.
ב. הסק מחלק א' ש - α ניתן לקרוב עד כדי $\frac{1}{b\cdot q}$ ע"י מספר רציונלי בעל מכנה b שאינו עולה על q (כלומר, קיים a שלם וקיים $1 \le b \le q$ כך ש - $|\alpha - \frac{a}{b}| \le \frac{1}{b\cdot q}$).

6. נתונות חמש נקודות במישור, כך שאף שתיים מהן אינן נמצאות על ישר המקביל לאחד הצירים. הוכח שקיים מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, שניים מקודקודיו הם מבין הנקודות הנתונות, ובפנימו נמצאת עוד אחת (לפחות) מבין הנקודות הנתונות. הראה ע"י דוגמה שהטענה אינה נכונה עבור ארבע נקודות.

7. במסיבה משתתפים 8 בחורים ו - 13 בחורות. כל בחור מכיר לפחות 5 מהבחורות. הוכח שיש בחורה המכירה לפחות 4 מהבחורים. (הנח כי יחס ההיכרות הוא סימטרי)

8. ילד מקבל בתחילת החודש 50 ש"ח דמי-כיס. בכל אחד מבין 30 הימים, הוא מוציא מספר שלם וחיובי של שקלים, מתוך דמי הכיס שקיבל. הוכח שיש תקופה רצופה של מספר כלשהו של ימים במשך החודש, שבמהלכה הוא מוציא בסך הכל 9 ש"ח בדיוק.

9. עשרה אנשים רוקדים במעגל. סכום הגילים שלהם הוא 250. הוכח שיש שלושה אנשים סמוכים במעגל שסכום גיליהם לכל היותר 75.

10. נתונה קבוצה A של וקטורים של מספרים שלמים באורך n. הוכח כי אם $|A| > 2^n$, אזי קיימים $a \neq b \in A$ כך ש- $\frac{a+b}{2}$ הוא גם וקטור של שלמים.

11. תהא $A \subset [2n]$ כך ש- $|A| = n+1$.

א. הוכח ש- A מכילה שני מספרים זרים.

ב. הוכח ש- A מכילה שני מספרים $a \neq b$ כך ש- a מחלק את b.

ג. הוכח שכל סדרה של n מספרים (לאו דווקא שונים) מכילה תת-סדרה לא ריקה שסכומה מתחלק ב- n.

12. בריבוע שאורך צלעותיו 1, נתונות n^2+1 נקודות (n - מספר טבעי כלשהו). הוכח, שקיימות שתי נקודות ביניהן, המרוחקות זו מזו מרחק של $\frac{\sqrt{2}}{n}$ לכל היותר.

13. (**בונוס מוגדל**)

הוכח כי לכל טבעי n קיים מספר פיבונאצ'י f_m המתחלק ב-n.

ב   מושגים בסיסיים בתורת הגרפים

1. האם קיים גרף שדרגות קודקודיו הן : $3,3,3,3,5,6,6,6,6$?

2. הראה כי אם הדרגה המינימלית ב- G היא לפחות 2 אז G מכיל מעגל.

3. גרף הקוביה ה - n-מימדית Q_n מוגדר באופן הבא: הקדקדים הם כל הסדרות של אפסים ואחדים באורך n. שני קדקדים מחוברים בצלע אם הסדרות המתאימות שונות זו מזו בקואורדינטה אחת בדיוק.
   א. צייר את Q_1, Q_2, Q_3.
   ב. מה הערכיות של כל קדקד ב - Q_n?
   ג. מה מספר הצלעות ב - Q_n?
   ד. הוכח כי Q_n גרף קשיר.
   ה. הוכח כי Q_n גרף דו-צדדי.

4. יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, $|V| \geq 2$. הוכח שיש לפחות שני קדקדים $x \in V$ בעלי התכונה הבאה (כל אחד בנפרד): אם נרחיק מ - G את x ואת כל הצלעות המכילות אותו, הגרף שיישאר יהיה קשיר.

5. יהי G גרף שיש בו בדיוק שני קדקדים בעלי ערכיות אי-זוגית. קדקדים אלה (שנסמנם: x,y) אינם מחוברים בצלע. יהי G^* הגרף המתקבל מ - G ע"י הוספת הצלע $\{x,y\}$. הוכח כי G^* קשיר אם ורק אם G קשיר.

6. יהי G עץ.

   א. הוכח: אם x קדקד בעל ערכיות d ו - G^- הוא הגרף המתקבל מ - G ע"י הרחקת הקדקד x וכל הצלעות המכילות אותו, אז G^- הוא יער בעל d מרכיבים קשירים.

   ב. הוכח: הערכיות המקסימלית של קדקדי G היא לכל היותר כמספר העלים ב - G.

   ג. תאר את העצים G שעבורם מתקיים שוויון בחלק ב'.

7. יהי G עץ.

   א. הוכח: אם x קדקד בעל ערכיות d ו - G^- הוא הגרף המתקבל מ - G ע"י הרחקת הקדקד x וכל הצלעות המכילות אותו, אז G^- הוא יער בעל d מרכיבים קשירים.

   ב. הוכח: הערכיות המקסימלית של קדקדי G היא לכל היותר כמספר העלים ב - G.

   ג. תאר את העצים G שעבורם מתקיים שוויון בחלק ב'.

8. יהי $G=(V,E)$ גרף. הוכח כי 3 הטענות הבאות שקולות:
   א. G עץ (ז"א, G קשיר וחסר מעגלים).
   ב. G קשיר ו: $|E|=|V|-1$.
   ג. G קשיר מינימלי (ז"א, הורדת כל צלע תהפוך את G ללא-קשיר).

9. הוכח:

א. גרף $G = (V, E)$ הוא עץ אס"ם G קשיר ו-$G - e$ אינו קשיר לכל $e \in E$

ב. גרף $G = (V, E)$ הוא עץ אס"ם G חסר מעגלים ומכיל עץ פורש יחיד.

10. מהו מספר הקודקודים בעץ עם דרגה ממוצעת a?

11. יהי G גרף קשיר על n קודקודים. הוכח כי G מכיל מעגל יחיד אס"ם $|E| = n$.

12. הראה כי G הוא יער אס"ם מספר מרכיבי הקשירות של $G \setminus e$ קטן ממספר מרכיבי הקשירות של G לכל צלע e של G.

13. הקוטר של גרף $G = (V, E)$ מוגדר ע"י:

$$diam(G) = max\{d(u, v) : u, v \in V\}$$

יהא G גרף קשיר שאיננו עץ. הוכח כי G מכיל מעגל שאורכו לכל היותר $2diam(G) + 1$.

14. הוכח כי גרף שאינו מכיל צלע ההולכת מקודקוד לעצמו, שבו בין כל שני קודקודים יש מסלול יחיד הוא עץ.

15. המרכז של גרף G הוא קודקוד u כך ש:

$$max\{d(u, v) : v \in V\}$$

הוא הקטן ביותר. הראה כי אם G עץ, אז או שיש ל- G מרכז יחיד, או שיש שני מרכזים שמחוברים בצלע.

16. יער הוא גרף ללא מעגלים. תת-גרף H של גרף G נקרא <u>מרכיב קשירות</u> אם H קשיר ולכל תת גרף קשיר H' של G כך ש- $H \subset H'$ מתקיים $H = H'$. הראה כי מרכיבי קשירות של יער הם עצים.

17. יהא $G = (V, E)$ עץ, $|V| = n$. נסמן ב- p_i את מספר הקודקודים מדרגה i. הוכח:

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - 3p_5 - (n - 3)p_{n-1} = 2$$

ג גרפים אוילריאניים ומסלולים אוילריאניים

1. הוכח : ב- G יש מסלול אוילרי אם"ם מספר הקודקודים בעלי ערכיות אי-זוגית הוא לכל היותר 2.

2. הוכח: אם G קשיר ומכיל לכל היותר $2k$ קודקודים בעלי ערכיות אי זוגית, אז $E(G) = P_1 \cup \ldots \cup P_k$, כאשר P_i מסלולים זרים בצלעות.

   (הערה: שני מסלולים נקראים זרים בצלעות אם אין להם צלע משותפת - מותר שיהיו קודקודים משותפים).

3. הוכח כי אם ב- G אין קודקודים מדרגה אי-זוגית, אז קיימים מעגלים זרים בצלעות $C_1, \ldots, C_m$ כך ש- $E(G) = C_1 \cup \ldots \cup C_m$.

   (הערה: שני מעגלים נקראים זרים בצלעות אם אין להם צלע משותפת - מותר שיהיו קודקודים משותפים.

4. הוכח או הפרך: אם G אוילריאני והצלעות e, f נפגשות בקודקוד אזי יש מסלול אוילריאני שבו e, f מופיעות זו אחר זו.

5. נתון לוח שחמט ($8 * 8$ משבצות). על הלוח נע צריח, כאשר בכל צעד הוא יכול לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן או במאונך. רוצים לתכנן מהלך תנועה של הצריח על הלוח באופן כזה ש:

   א. הצריח יתחיל ויסיים את המהלך באותה משבצת.

   ב. לכל זוג משבצות שהצריח יכול להגיע מהאחת לשניה (כלומר שנמצאות באותה שורה או באותו טור), יהיה בדיוק צעד אחד במהלך שבו הצריח עובר מהאחת לשניה (לא חשוב באיזה כיוון).

   האם הדבר אפשרי?

6. יהי G גרף שבו כל הערכיויות הן זוגיות. הוכח שבהנתן ציור של הגרף, אפשר לצייר חץ על כל צלע (המכוון מקדקד אחד שלה לקדקד אחר שלה), באופן כזה שלכל קדקד מספר החיצים המכוונים ממנו שווה למספר החיצים המכוונים אליו.

7. תאר את כל העצים שיש בהם מסלול אוילריאני.

8. יהי K_n הגרף השלם על n קדקדים (בגרף זה כל שני קדקדים מחוברים בצלע). רוצים לפרק את K_n ל - m מסלולים זרים, כלומר למצוא קבוצה של m מסלולים, כך שכל צלע של K_n תימצא בדיוק באחד מהם. מהו ה - m הקטן ביותר שעבורו זה אפשרי? (קבע את m כפונקציה של n)

9. ענה על אותה שאלה כמו שאלה (8), עבור גרף הקוביה ה - n-מימדית Q_n.

10. סדר 14 אפסים ואחדים במעגל כך ש- 14 הסדרות המתקבלות של 4 ביטים רצופים הן כל הרביעות האפשריות למעט 0101 ו- 1010.

11. (*בונוס*) עבור גרף כלשהו G, נסמן ב: $\Delta(G)$ את הערכיות המקסימלית של קדקדי G. עבור גרף מכוון D, נסמן ב: $\Delta^+(D)$ את הערכיות היוצאת המקסימלית של קדקדי D (כאשר: ערכיות יוצאת של קדקד היא מספר הצלעות המכוונות מהקדקד החוצה). יהי G גרף כלשהו (לא מכוון). הוכח כי ניתן לכוון את צלעות G לגרף מכוון $D(G)$ באופן ש:

$$\Delta^+(D(G)) \leq \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor$$

ד גרפים המילטוניים ומסלולים המילטוניים

1. הראה כי אם G דו-צדדי עם חלוקה X,Y כך ש- $|X|=|Y|$ וכל קודקוד ב- X מחובר לכל קודקוד ב- Y, אזי G המלטוני.

2. הראה כי אם G דו-צדדי עם חלוקה X,Y כך ש- $|X|\neq|Y|$ אזי G איננו המלטוני.

3. הראה כי אם ב-G יש מסלול המלטוני אז לכל $S\subset V(G)$ מתקיים :

$$c(G\setminus S)\leq |S|+1$$

.

4. הראו כי בגרף הקוביה ה - n-מימדית, Q_n, יש מסלול המילטוני.

ה ספירת עצים פורשים

1. הוכח כי אם צובעים את צלעות K_n בשני צבעים אז קיים עץ פורש חד-צבעי.

2. מהו העץ הפורש של K_7 שסדרת $Prufer$ שלו היא $(5,1,1,2,7)$?

3. מהו העץ הפורש של K_9 שסדרת $Prufer$ שלו היא $(1,1,1,1,1,1,1)$?

4. מהו מספר העצים הפורשים של K_n עם:

   א. $n-1$ עלים בדיוק?

   ב. $n-2$ עלים בדיוק?

   ג. 2 עלים בדיוק?

5. מהו מספר העצים הפורשים של K_n שעליהם הם הקודקודים $1,\ldots,k$ בדיוק ?

6. מהו מספר העצים הפורשים של K_n שאינם מכילים את הצלע $\{1,2\}$?

7. הוכח בדרך קומבינטורית כי מספר העצים הפורשים של K_n שמכילים את הצלע $\{1,2\}$ הוא:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-2}k^{k-2}(n-k)^{n-k-2}$$

הסק כי:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-2}k^{k-2}(n-k)^{n-k-2}=2n^{n-3}$$

8. א. יהיו $T_1=(V_1,E_1)$, $T_2=(V_2,E_2)$ עצים, $V_1\cap V_2=\emptyset$. מהו מספר העצים הפורשים של הגרף השלם שקודקודיו הם $V_1\cup V_2$, שמכילים את T_1 ואת T_2?

   ב. יהיו $T_1=(V_1,E_1)$, $T_2=(V_2,E_2)$, $T_3=(V_3,E_3)$ עצים, $V_i\cap V_j=\emptyset$ לכל $1\le i\ne j\le 3$. מהו מספר העצים הפורשים של הגרף השלם שקודקודיו הם $V_1\cup V_2\cup V_3$, שמכילים את T_1 את T_2 ואת T_3?

ו שידוכים ומשפט $Hall$

1. הראו כי בגרף הקוביה ה - n-מימדית, Q_n, יש שידוך.

2. יהיו n, k מספרים טבעיים.

א. נניח, כי: $k < \frac{n}{2}$. תהי S קבוצה בת n אברים. הוכח שאפשר להוסיף לכל תת-קבוצה של S שגודלה k איבר נוסף, באופן כזה שקבוצות שונות זו מזו תשארנה שונות זו מזו אחרי ההוספה. (במילים אחרות, מה שעליך להראות הוא שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית

$$f : \{A \subseteq S : |A| = k\} \to \{B \subseteq S : |B| = k + 1\}$$

כך ש-$A \subseteq f(A)$ לכל A.)

ב. הוכח שהדבר אינו אפשרי אם $k \geq \frac{n}{2}$.

3. במסיבה משתתפים n בחורים ו-n בחורות. כל בחור מכיר בדיוק k מהבחורות, וכל בחורה מכירה בדיוק k מהבחורים. רוצים לארגן את המשתתפים ל-k ריקודי זוגות, כך שבכל ריקוד ישתתפו כל הנוכחים (בסידור של n זוגות), ירקדו כבני זוג רק בחור ובחורה שמכירים, וכל בחור ובחורה שמכירים ירקדו פעם כבני-זוג. הוכח שהדבר אפשרי.

4. בכיתה יש m ועדות $A_1, A_2, \ldots, A_m$. רוצים לבחור נציג לכל ועדה (אחד מבין חבריה), באופן כזה שתלמיד לא יוכל להיות נציג של יותר מועדה אחת. מצא תנאי הכרחי ומספיק לכך שהדבר אפשרי.

5. יהי G גרף. נאמר כי G ניתן לכיוון חד-משמעי אם, בהנתן ציור שלו, אפשר לצייר חץ על כל צלע (המכוון מקודקוד אחד שלה לקודקוד אחר שלה), באופן כזה שמכל קודקוד יוצא לכל היותר חץ אחד.
א. הוכח שאם G עץ אז הוא ניתן לכוון חד-משמעי.
ב. הוכח שאם G מעגל אז הוא ניתן לכוון חד-משמעי.
ג. האם כל גרף ניתן לכוון חד-משמעי?

6. חשבו את מספר הזיווגים המושלמים ב - $K_{n,n}$ וב - K_{2n}.

7. הראו, כי בעץ יש לכל היותר שידוך אחד.

8. שני שחקנים משחקים משחק על גרף G: כל שחקן בתורו בוחר קודקוד המחובר לקודקוד שנבחר שלב אחד קודם (כלומר הקודקודים הנבחרים יוצרים מסלול). שחקן שלא יכול לבחור קודקוד כזה- מפסיד.

א. הוכיחו כי לשחקן השני יש אסטרטגית ניצחון אם ב- G יש זיווג מושלם.

ב. הוכיחו כי לשחקן הראשון יש אסטרטגית ניצחון אם ב- G אין זיווג מושלם.

(<u>רמז ל-ב'</u> השחקן הראשון מתחיל עם קודקוד שאינו נמצא בזיווג מכסימום.)

ז   תורת רמזי

1. הראו כי לכל k,l מתקיים $r(k,l)=r(l,k)$.

2. בשאלה זו נחשב את $r(3,4)$.

א. צובעים את הצלעות של K_8 בכחול ובאדום באופן הבא: מציירים את הקדקדים של K_8 כקדקדים של מתומן משוכלל. צובעים בכחול את כל הצלעות של המתומן, וכן את המיתרים הארוכים (המחברים קדקדים נגדיים). צובעים את כל שאר המיתרים באדום. הוכח שבצביעה זו אין K_3 שכל צלעותיו כחולות ואין K_4 שכל צלעותיו אדומות.

ב. הסק מחלק א', כי: $r(3,4)\geq 9$.

ג. נתבונן בצביעה של הצלעות של K_9 בכחול ובאדום, ונניח שאין בה K_3 שכל צלעותיו כחולות ואין K_4 שכל צלעותיו אדומות. הוכח שמכל קדקד יוצאות 3 צלעות כחולות ו - 5 צלעות אדומות.

ד. הסק מחלק ג' כי $r(3,4)\leq 9$.

3. א. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה: לכל קבוצה של n נקודות במרחב, או שיש ביניהן 4 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא לכל היותר 1, או שיש ביניהן 5 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן עולה על 1.

ב. מצא במפורש n כזה (לאו-דווקא הקטן ביותר).

4. א. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה: יהיו נתונים n קטעים על הישר, כך שאף נקודה אינה נמצאת ביותר משני קטעים. אזי קיימים 10 מבין הקטעים שהם זרים בזוגות (כלומר, לאף שניים מהם אין נקודה משותפת).

ב. מצא במפורש n כזה (לאו-דווקא הקטן ביותר).

5. יהא $n\geq 3$, אי זוגי. נצבע את צלעות K_n ב- $n-1$ צבעים. הוכח כי קיימות שתי צלעות נוגעות באותו צבע.

6. הוכח כי אם צובעים את צלעות K_{3n-1} בשני צבעים, אז יש n צלעות זרות (כלומר זיווג בגודל n) שכולו באותו צבע.

(רמז: אינדוקציה על n)

7. נסמן ב- $f(k)$ את ה- n המינימלי כך שאם צובעים את צלעות K_n ב-k צבעים, אז בהכרח יש משולש חד צבעי. לדוגמא $f(2)=k(3,3)=6$. הראו: $f(k)\leq 2+(f(k-1)-1)k$.

ח גרפים מישוריים

1. יהי G גרף מישורי. נסמן ב- k את האורך המינימלי של מעגל ב- G. הוכח כי אם $k \geq 3$ אזי:

$$|E(G)| \leq \frac{k}{k-2}(|V(G)|-2)$$

2. א. הוכח כי אם G גרף מישורי עם $V(G) \geq 11$, אז המשלים של G איננו מישורי.
   ב. מצא דוגמא לגרף מישורי עם 6 קודקודים שגם המשלים שלו מישורי.

3. א. הראו כי $K_{3,3} \setminus e$ מישורי לכל $e \in E(K_{3,3})$.
   ב. הראו כי $K_5 \setminus e$ מישורי לכל $e \in E(K_5)$.

4. יהיו $x_1, \ldots, x_n$ נקודות במישור שהמרחק בין כל 2 מהן הוא לפחות 1. הראו כי מספר הזוגות $\{i, j\}$, כך שהמרחק בין x_i ו- x_j הוא בדיוק 1, הוא לכל היותר $3n-6$.

5. הוכיחו כי בכל גרף מישורי יש קודקוד שדרגתו לכל היותר 5.