קומבינטוריקה - תרגיל מס' 6

פתרון

תרגיל מס' 1

כמה מספרים טבעיים בין 300 ל - 2000 אינם מתחלקים באף אחד מבין המספרים: $5, 12, 14$?

פתרון:

ראשית, נתייחס כאן אל המספרים הדרושים בתחום אשר כולל את 300 ואת 2000. על מנת למצוא את המספרים המקיימים את התנאי שבשאלה, נגדיר את הקבוצות הבאות:

$A_1 =$ קבוצת המספרים בין 300 ל - 2000 אשר מתחלקים ב - 5

$A_2 =$ קבוצת המספרים בין 300 ל - 2000 אשר מתחלקים ב - 12

$A_3 =$ קבוצת המספרים בין 300 ל - 2000 אשר מתחלקים ב - 14

ואנו מחפשים את:

$$|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 1701 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

נחשב את גודלי כל הקבוצות הדרושות לנו, לצורך הפתרון.

אבל, לפני שניגש לכל החישובים, בואו נבין דבר חשוב מאוד. כמה מספרים בתחום: $1, \ldots, 11$ יש, המתחלקים ב - 2? נכון, למדנו בכיתה שהמספר הדרוש הוא: $5 = \left[\frac{11}{2}\right]$. כעת, ענו על זה: כמה מספרים שמתחלקים ב - 2 יש בתחום: $3, \ldots, 11$? התשובה לכך יכולה להינתן באופן הבא: נבדוק כמה מספרים המתחלקים ב - 2 יש בתחום $1, \ldots, 11$ ונפחית מכך את המספרים המתחלקים ב - 2 בתחום: $1, \ldots, 2$. כך, נקבל בדיוק את התשובה הדרושה. לגבי חישובים אחרים (ושגויים) אשר מחפשים תשובה לאותה שאלה, ראו בסוף התשובה, בחלק: "טעויות נפוצות"...

אם כן, כעת נחשב את גודלי הקבוצות הדרושות:

$|A_1| =$ מספר המספרים בתחום $300, \ldots, 2000$ אשר מתחלקים ב - 5 $= \left[\frac{2000}{5}\right] - \left[\frac{299}{5}\right] = 400 - 59 = 341$

$|A_2| =$ מספר המספרים בתחום אשר מתחלקים ב - 12 $= \left[\frac{2000}{12}\right] - \left[\frac{299}{12}\right] = 166 - 24 = 142$

$|A_3| =$ מספר המספרים בתחום אשר מתחלקים ב - 14 $= \left[\frac{2000}{14}\right] - \left[\frac{299}{14}\right] = 142 - 21 = 121$

$|A_1 \cap A_2| =$ מספר המספרים בתחום אשר מתחלקים ב - $\{5, 12\}$ $= \left[\frac{2000}{60}\right] - \left[\frac{299}{60}\right] = 33 - 4 = 29$

$|A_1 \cap A_3| =$ מספר המספרים בתחום אשר מתחלקים ב - $\{5, 14\}$ $= \left[\frac{2000}{70}\right] - \left[\frac{299}{70}\right] = 28 - 4 = 24$

$|A_2 \cap A_3| =$ מספר המספרים בתחום אשר מתחלקים ב - $\{12, 14\}$ $= \left[\frac{2000}{84}\right] - \left[\frac{299}{84}\right] = 23 - 3 = 20$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$ מספר המספרים בתחום אשר מתחלקים ב - $\{5, 12, 14\}$ $= \left[\frac{2000}{420}\right] - \left[\frac{299}{420}\right] = 4 - 0 = 4$

וכל מה שנותר לעשות, הוא להשתמש בעקרון ההכלה-הפרדה ולומר כי המספר אותו אנו מחפשים הוא:

$$1701 - (341 + 142 + 121) + (29 + 24 + 20) - 4 = 1166$$

מ.ש.ל.

טעויות נפוצות בשאלה זו:

אם נתעלם מן הטעויות שנבעו מאי-הכללת המספרים 300 ו/או 2000 בתחום הספירה, הבעיה העיקרית היתה בתשובה לשאלה: "כמה מספרים בין 300 ל - 2000 מתחלקים ב - x?" כפי שראינו למעלה, יש דרך פשוטה לחשב זאת. הטעויות אשר חזרו על עצמן פעמים רבות בחישוב זה היו:

א. המספר המבוקש הוא: $\left[\frac{2000-300}{x}\right]$. לצורך דוגמא פשוטה יותר, נתבונן בשאלה: "כמה מספרים בין 2 ל - 4 (כולל את שניהם) מתחלקים ב - 2?". ברור, כי התשובה הנכונה היא: 2 (המספרים: $2,4$). נראה מה מקבלים כאן: $\left[\frac{4-2}{2}\right]=1$, וברור כי התוצאה אינה נכונה. החישוב, כפי שנלמד בכיתה, מתייחס לעובדה שמתחילת התחום, אנו סופרים כמה קבוצות בגודל x יש לנו, ולא מתייחסים לקבוצה האחרונה, אם אינה מלאה. הרעיון הוא, כי בכל קבוצה כזו, יופיע בדיוק מספר אחד אשר מתחלק ב - x. הטעות כאן היא, שבמקרה בו התחום אינו מתחיל ב - 1, הקבוצה הראשונה אינה מלאה!

ב. המספר המבוקש הוא: $\left[\frac{2000}{x}\right]-\left[\frac{300}{x}\right]$. באופן זה, אתם מוציאים את המספר 300 מן החישוב. במקרה של השאלה שלנו, מי שעשה כך הגיע, בכל זאת, לתשובה הנכונה - כיוון ש - 300 אינו מקיים את התכונה הנדרשת, ולכן בכל מקרה לא אמור להיספר...

תרגיל מס' 2

n אנשים נכנסים למסעדה וכל אחד מהם תולה בכניסה מעיל ומטריה. בצאתם, כל אחד לוקח באקראי את אחד המעילים ואחת המטריות. מה ההסתברות לכך שאף אדם לא יצא עם כל רכושו? (ז"א, אנו סופרים מקרים בהם אדם יצא עם המטריה שלו אך לא עם המעיל שלו, או להיפך, או עם אף אחד מהם). האם הסתברות זו שואפת לגבול כאשר $n\longrightarrow\infty$, ואם כן - מהו?

פתרון:

לצורך הפתרון, ננסה לשחזר את תהליך מציאת D_n מן הכיתה.

ברור, כי במקרה זה, סך האפשרויות להחזיר לאנשים את המעילים והמטריות - ללא שום מגבלות - הוא: $(n!)^2$. כעת, נסמן את המספר הדרוש בשאלה ב: $D_n^{(2)}$, ולצורך חישובו נגדיר את הקבוצות הבאות:

$A_i=$ אוסף החלוקות, בהן האיש ה - i מקבל את המעיל והמטריה שלו $\qquad 1\leq i\leq n$

אנו מחפשים את:

$$D_n^{(2)}=(n!)^2-\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$$

ולצורך חישוב גודלו של האיחוד, נצטרך להשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

חישוב גודלי הקבוצות במקרה זה, יחסית פשוט. בכל חיתוך של $1\leq k\leq n$ קבוצות, אנו מחזירים ל - k אנשים את חפציהם, ומחלקים את שאר $2(n-k)$ החפצים ב - $((n-k)!)^2$ אפשרויות. לכן:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right|=((n-k)!)^2$$

וברור כי יש בדיוק $\binom{n}{k}$ חיתוכים כאלה. לכן, שימוש בעקרון ההכלה-הפרדה נותן, כי המספר הדרוש הוא:

$$D_n^{(2)}=(n!)^2-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}((n-k)!)^2$$

כעת, ננסה לבדוק האם הביטוי: $\frac{D_n^{(2)}}{(n!)^2}$ (זוהי ההסתברות שהאירוע עליו אנו מדברים - אכן יתרחש) מתכנס, ואם כן - למה?

$$\frac{D_n^{(2)}}{(n!)^2} = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{(n!)^2} \binom{n}{k} ((n-k)!)^2$$

לפי מה שנלמד בכיתה על ביצוע הכלה-הפרדה עד שלב כלשהו, נובע שאם נשמור בסכום שבאגף ימין רק את המחובר המתאים ל - $k = 1$, נקבל חסם מלרע על ההסתברות המבוקשת. בנוסף, כיוון שביטוי זה מבטא הסתברות - הוא וודאי קטן או שווה מ - 1. לכן:

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{D_n^{(2)}}{(n!)^2} \leq 1$$

כאשר $n \longrightarrow \infty$, חסם המלרע: $1 - \frac{1}{n}$ שורף ל - 1, ולכן גם ההסתברות המבוקשת שואפת ל - 1.

תרגיל מס' 3

בכמה מן התמורות של הספרות $0, 1, 2, \ldots, 9$ אין רצף של שבע (או יותר) ספרות עוקבות? (למשל, התמורה: 2034567891 פסולה בגלל הרצף המסומן.)

פתרון:

נגדיר את הקבוצות הבאות:

$A_1 =$ התמורות בהן הרצף $0 \cdots 6$ קיים

$A_2 =$ התמורות בהן הרצף $1 \cdots 7$ קיים

$A_3 =$ התמורות בהן הרצף $2 \cdots 8$ קיים

$A_4 =$ התמורות בהן הרצף $3 \cdots 9$ קיים

וברור, כי אנו מחפשים את כל התמורות אשר אינן באחת מהקבוצות הנ"ל, כלומר את הגודל של:

$$10! - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

נבדוק את גודלי כל הקבוצות אותן אנו צריכים, על מנת להשתמש בעקרון ההכלה-הפרדה. נשים לב, כי יש הבדלים בין גודלי חיתוכים של קבוצות שונות. ראשית:

$$|A_i| = 4! \qquad 1 \leq i \leq 4$$

כעת, נעבור לחיתוכים של שתי קבוצות ונבחין בין המקרים הבאים:

$|A_1 \cap A_2| =$ מספר התמורות בהן הרצף $0 \cdots 7$ קיים $= 3! = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4|$

$|A_1 \cap A_3| =$ מספר התמורות בהן הרצף $0 \cdots 8$ קיים $= 2! = |A_2 \cap A_4|$

$|A_1 \cap A_4| =$ מספר התמורות בהן הרצף $0 \cdots 9$ קיים $= 1$

חיתוכים של שלוש קבוצות:

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2! =$ **מספר התמורות בהן הרצף** $0 \cdots 8$ **קיים** $= |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 1 =$ **מספר התמורות בהן הרצף** $0 \cdots 9$ **קיים** $= |A_1 \cap A_2 \cap A_4|$

ולגבי הקבוצה האחרונה הדרושה:

$1 =$ **מספר התמורות בהן הרצף** $0 \cdots 9$ **קיים** $= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

מכאן, קצרה הדרך לתשובה הסופית. מספר התמורות המבוקש בשאלה הוא:

$$10! - 4 \cdot 4! + (3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1) - (2 \cdot 2! + 2 \cdot 1) + 1 = 10! - 78 = 3,628,722$$

מ.ש.ל.

<u>טעות נפוצה:</u>

רבים הגדירו את הקב' להיות:

A_1 - התמורות בהן יש 7 ספרות עוקבות

A_2 - התמורות בהן יש 8 ספרות עוקבות

A_3 - התמורות בהן יש 9 ספרות עוקבות

A_4 - התמורות בהן יש 10 ספרות עוקבות

ראשית, כיוון ש: $A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$, ברור כי: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1|$ (ולכך הגיעו אלו שלא טעו בחישובים...).

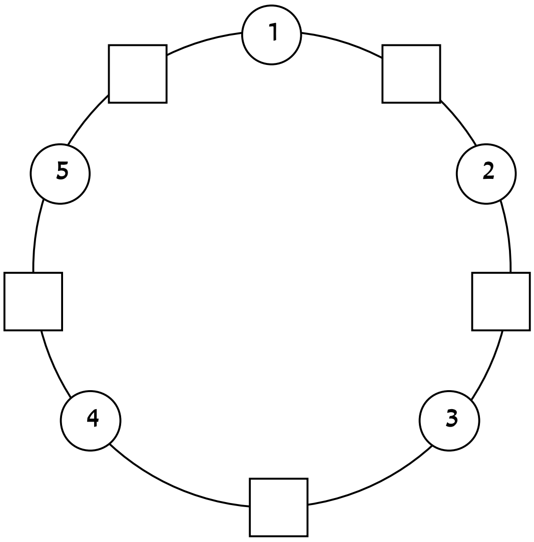
שנית, גודלה של הקבוצה A_1, לדוגמא, <u>אינו</u> שווה ל - $4 \cdot 4!$ (4 דרכים לבחור רצף של 7 ספרות עוקבות, ואז $4!$ תמורות של הרצף ביחד עם 3 הספרות הנותרות). ע"י ספירה זו, התמורה: 9123456780=9123456780 למשל, נספרת פעמיים! ובעצם, על מנת לחשב את גודלי כל אחת מן הקבוצות הנ"ל - יש להשתמש בעקרון ההכלה-הפרדה.

<u>תרגיל מס' 4</u>

סביב שולחן עגול עם 10 כסאות, יושבות 5 נשים כך שבין כל שתיים יש כסא פנוי. בכמה אופנים שונים יכולים להתיישב 5 הבעלים של הנשים בכסאות הפנויים, אחד בכל כסא, כך שאף גבר לא ישב על יד אשתו?

<u>פתרון:</u>

נמספר את הנשים הישובות: $1, \ldots, 5$ ונניח כי - לפי השאלה - הן התיישבו כבר, כמתואר בציור (הנשים ממוספרות בתוך עיגולים, לגברים יש מקומות ריקים בצורת ריבועים):



כעת, יש להושיב את הבעלים. ללא הגבלות, ניתן לעשות זאת ב - $5!$ אופנים. נגדיר את הקבוצות הבאות:

$A_i =$ קבוצת הסידורים בהם בעל מס' i יושב ליד אשתו $\quad 1 \leq i \leq 5$

ואז אנחנו מחפשים את:

$$5! - \left| \bigcup_{i=1}^{5} A_i \right|$$

ברור, כי מתקיים:

$|A_i| =$ מספר הסידורים בהם בעל מס' i יושב ליד אשתו $= 2 \cdot 4! \quad 1 \leq i \leq 5$

ונבדוק את שאר הקבוצות, אותן אנו צריכים.

<u>חיתוכים של שתי קבוצות:</u> כאן, יש להפריד בין שני מקרים - האם אנו מנסים להושיב שני בעלים של נשים היושבות סמוך זו לזו, או האם שתי הנשים רחוקות זו מזו. נבדוק את שני המקרים:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_4| = |A_4 \cap A_5| = |A_5 \cap A_1| = 3 \cdot 3!$$

כיוון שיש 3 דרכים להושיב את שני הבעלים המסויימים, ועוד $3!$ דרכים להושיב את שאר הבעלים.

$$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_5| = |A_4 \cap A_1| = |A_5 \cap A_2| = 4 \cdot 3!$$

כיוון שכעת לשני הבעלים הנדונים יש 4 אפשרויות ישיבה.

<u>חיתוכים של שלוש קבוצות:</u> גם כאן, יש להפריד בין שני מקרים - האם אנו מנסים להושיב שלושה בעלים של שלוש נשים היושבות בסמוך זו לזו, או האם רק שתי נשים צמודות זו לזו והשלישית רחוקה. נבדוק את שני המקרים:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = |A_4 \cap A_5 \cap A_1| = |A_5 \cap A_1 \cap A_2| = 4 \cdot 2!$$

כיוון שיש 4 דרכים להושיב את שלושת הבעלים הנדונים, ועוד $2!$ דרכים להושיב את שאר הבעלים.

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4 \cap A_5| = |A_3 \cap A_5 \cap A_1| = |A_4 \cap A_1 \cap A_2| = |A_5 \cap A_2 \cap A_3| = 6 \cdot 2!$$

כיוון שכעת לשלושת הבעלים הנדונים יש 6 אפשרויות ישיבה.

חיתוכים של ארבע קבוצות: פה יש רק אפשרות אחת לבדוק - כל הבעלים יושבים ליד נשים הסמוכות זו לזו. כל אפשרות כזו, תיתן לנו 5 אפשרויות ישיבה.

ולבסוף:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 2$$

כעת, ניתן לגשת למתן התשובה הסופית. מספר הדרכים להושיב את הבעלים, כך שאף אחד לא ישב ליד אשתו, הוא:

$$5! - 5 \cdot 2 \cdot 4! + (5 \cdot 3 \cdot 3! + 5 \cdot 4 \cdot 3!) - (5 \cdot 4 \cdot 2! + 5 \cdot 6 \cdot 2!) + 5 \cdot 5 - 2 = 13$$

מ.ש.ל.

תרגיל מס' 5

הוכח שמספרי פיבונאצ'י מקיימים: $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - {f_n}^2 = (-1)^n$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה $n=1$: מתקיים $f_0 \cdot f_2 - f_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור n ונראה עבור $n+1$:

$$f_{n+1-1} \cdot f_{n+1+1} - {f_{n+1}}^2 = f_n \cdot f_{n+2} - {f_{n+1}}^2 = f_n \cdot (f_{n+1} + f_n) - {f_{n+1}}^2 =$$

$$= {f_n}^2 - (f_{n+1} - f_n) \cdot f_{n+1} = -(f_{n-1} \cdot f_{n+1} - {f_n}^2)$$

ולפי הנחת האינדוקציה זה שווה ל

$$-(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

ובכך השלמנו את הוכחת צעד האינדוקציה.

מ.ש.ל.

תרגיל מס' 6^* (בונוס)

הוכיחו כי עבור n שמתחלק ב-m מתקיים: f_n מתחלק ב-f_m.

(שימו לב כי כאן $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, \ldots$)

<u>שלבים מרכזיים בפתרון:</u>

א) בשלב הראשון הוכיחו באנדוקציה על n כי לכל n, m טבעיים

$$f_{m+n} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}$$

ב) עתה, נוכיח באנדוקציה על n כי $f_{m\cdot n}$ מתחלק ב-f_m.

-**בסיס**: עבור $n = 1$ הטענה נכונה.

-צעד: נניח נכונות עבור n, אז עבור $n+1$:

$$f_{m(n+1)} = f_{m\cdot n+m} = f_{m\cdot n+1}f_m + f_{m\cdot n}f_{m-1}$$

ולפי הנחת האנדוקציה מקבלים כי $f_{m(n+1)}$ מתחלק ב-f_m, כנדרש.