<u>החלפת משתנים</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורות:

- הגדרה: בהינתן $x=x(u,v)$ ו־ $y=y(u,v)$ בעלות נ"ח רציפות, מגדירים את היעקוביאן להיות

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{bmatrix}$$

- משפט ־ **החלפת משתנים**: תהי $f=f(x,y)$ אינטגרבילית בקבוצה D. יהיו $x=x(u,v)$ ו־ $y=y(u,v)$ בעלות נ"ח חלקיות רציפות ב־ D' המגדירות העתקה הפיכה בין D' ו־ D. בנוסף, נניח $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$ ב־ D' פרט אולי לקבוצה משטח אפס. אזי

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dA$$

- משפט: אם $J\neq 0$ בנקודה אז ההעתקה חח"ע בסביבה של הנקודה.

תרגילים:

1. תנו תיאור להעתקה המסובבת קבוצה D ב־ $45°$ מעלות נגד כיוון השעון.

<u>פתרון:</u>

תוך שימוש בעובדה ש־

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$$

לכן ניקח

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$$

$$v=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

הערה: הגורם $\frac{\sqrt{2}}{2}$ גורם להעתקה רק לסובב ולא לנפח, אכן קל לראות שהיעקוביאן כאן הוא 1.

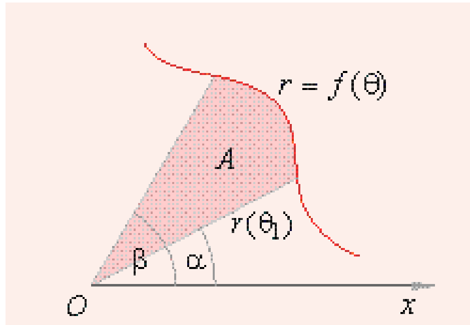
ההעתקה:

$$u=x-y,v=x+y$$

מסובבת כנדרש אבל גם מנפחת:

$$dudv=2dxdy$$

2. יהי $r=f\left(\theta\right)$ עקום המתאר את הקבוצה כמתואר באיור 1



איור 1:

חשבו את השטח A של הקבוצה המסומנת.

<u>פתרון:</u>

ע"י מעביר לקוארדינטות פולריות נקבל

$$\mathrm{A}=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{0}^{f(\theta)}rdr=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(f\left(\theta\right)\right)^{2}d\theta$$

3. חשבו את האינטגרל $\iint_{D}y^{3}dxdy$ כאשר

$$D=\left\{(x,y):x,y>0\,,\,x^{2}\leq y\leq2x^{2}\,,\,\frac{2}{x}\leq y\leq\frac{3}{x}\right\}$$

<u>פתרון:</u>

נבצע החלפת משתנים

$$T\left(x,y\right)=\left(u,v\right)\,:\,u=xy,v=\frac{y}{x^{2}}$$

אזי

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=\left|\det\begin{bmatrix}u_{x}&u_{y}\\v_{x}&v_{y}\end{bmatrix}\right|=\frac{3y}{x^{2}}\neq0$$

ב־ $D'=\left(u,v\right)\in\left[2,3\right]\times\left[1,2\right]$. בנוסף, ההעתקה הפיכה בין D' ו־ D. ומכאן:

$$\iint_{D}y^{3}dxdy=\iint_{D'}y^{3}dudv\frac{x^{2}}{3y}=\iint_{D'}\frac{u^{2}}{3}dudv$$

נעבור לאינטגרלים נשנים ונקבל

$$\iint_{D'}\frac{u^{2}}{3}dudv=\int_{1}^{2}dv\int_{2}^{3}\frac{u^{2}}{3}du=\frac{19}{9}$$

הערה: בדרך כלל קשה להוכיח את הפיכות ההעתקה באופן אנליטי, במקום זאת, קל מאוד לנמק מבחינה גיאומטרית על ידי יחידות חיתוך העקומים u,v במישור x,y ב־ D.

4. חשבו את האינטגרל $I=\iint_D \frac{x^7}{y^4}dA$ כאשר D היא הקבוצה הכלואה בין הקווים

$$x=y^4, y=\frac{1}{x^7}, x=5y^4, y=\frac{5}{x^7}$$

<u>פתרון:</u>

ניקח החלפת המשתנים

$$\begin{Bmatrix} u=\frac{x}{y^4} \\ v=x^7y \end{Bmatrix}$$

עם $D'=[1,5]\times[1,5]$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}=\frac{29x^7}{y^4}\neq 0$$

בנוסף, ההעתקה הפיכה בין D' ו־ D. לכן

$$I=\frac{1}{29}\text{Area}\,(E)=\frac{16}{29}$$

5. חשבו את $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dS$ כאשר $D=\left\{(x,y)\mid x\in[0,1]\ ,\ x\leq y\leq\sqrt{2-x^2}\right\}$.

<u>פתרון:</u>

ע"י החלפת משתנים פולרית נקבל

$$I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} r^2dr=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

הערה: במציאת הקבוצה D, אתם צריכים עם לשים לב שהחיתוך בין שתי המסילות $x=y\geq 0$, $y=\sqrt{2-x^2}$ הוא בדיוק ב־ $(1,1)$.

6. העבר את האינטגרל $\iint_D f dxdy$ לקואורדינטות קטביות כאשר D היא הקבוצה המוגבלת על ידי הקווים

$$x^2+y^2=6x\ ,\ x^2+y^2=8x\ ,\ |y|=x$$

<u>פתרון:</u>

העקום $x^2+y^2=6x$ הוא מעגל ברדיוס 3 סביב $(3,0)$, אכן:

$$x^2+y^2=6x\iff(x-3)^2+y^2=9$$

באופן דומה, $x^2+y^2=8x$ הוא מעגל ברדיוס 4 סביב $(4,0)$, אכן:

$$x^2+y^2=8x\iff(x-4)^2+y^2=16$$

כדי לחשב את D', נשים לב ש־ $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, ומכיוון ש־

$$6x \leq x^2 + y^2 \leq 8x$$

אני לא מבינה את חישוב התטא (לדוגמא בציור שלי).
לדעתי תטא הור בין pi/2 ל-pi/2-

אזי

$$6\cos\theta \leq r \leq 8\cos\theta$$

לכן

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{6\cos\theta}^{8\cos\theta} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr$$

7. חשבו את האינטגרל $I = \iint \left(x+y\right)^2 e^{y^2-x^2} dS$ על הטרפז שקדקדיו הם $\left(0,2\right), \left(0,1\right), \left(2,0\right), \left(1,0\right)$.

<u>פתרון:</u>

נבצע החלפת משתנים

$$u = x - y$$

$$v = x + y$$

ואז הטרפז עובר באופן חח"ע ל־

$$D' = \left\{1 \leq v \leq 2\,,\ -v \leq u \leq v\right\}$$

ומכאן

$$I = \frac{1}{2}\iint_{D'} v^2 e^{uv} dA = \frac{\cosh 4 - \cosh 1}{2}$$

8. חשבו את

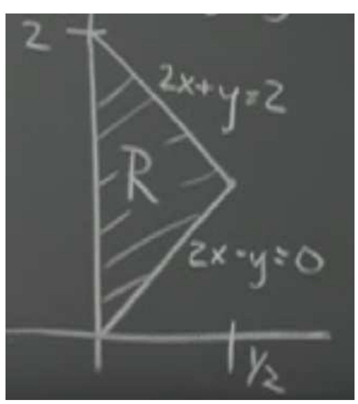
$$I = \iint_R \left(4x^2 - y^2\right)^4 dA$$

כאשר R הוא המשולש ברביע הראשון אשר צלעותיו נצמאות על הישרים $2x - y = 0$, $2x + y = 2$.

<u>פתרון:</u>

הקבוצה נתונה בציור הבא:

איך יודעים שזה לא החלק הנמוך יותר?



איור 2:

נבצע החלפת משתנים

$$\begin{Bmatrix} u=2x-y \\ v=2x+y \end{Bmatrix}$$

ואז ההעתקה הזו מעביר את R ל־

$$R^{'}=\{-2\leq u\leq 0,-u\leq v\leq 2\}=\{0\leq v\leq 2,-v\leq u\leq 0\}$$

והיעקוביאן

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=4$$

ברור שההעתקה הפיכה: לינארית עם דיטרמיננטה שונה ב־ 0.

לכן

$$I=\frac{1}{4}\iint_{R^{\prime}}\left(uv\right)^{4}dA$$

אפשר לחשב בשתי דרכים

$$\iint_{R^{\prime}}\left(uv\right)^{4}dA=\int_{0}^{2}dv\int_{-v}^{0}\left(uv\right)^{4}du=\int_{-2}^{0}du\int_{-u}^{2}\left(uv\right)^{4}dv=\frac{2^{9}}{5^{2}}$$

לכן $I=\frac{2^{7}}{5^{2}}$.

9. חשבו את האינטגרל

$$I=\iint_{D}\frac{y\left(4x-\sin 2x\right)}{2x\sin^{2}x\tan x}dS$$

כאשר

$$D=\left\{(x,y):2\tan x\leq y\leq 4\tan x,y^{2}\leq x\leq 2y^{2},x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

שלבי ההחלפת משתנים זה לא להביע את x
וע באמצעות u וv?

<u>פתרון:</u>

תיאורטית זה לא אמור להיות משנה מי זה u
ומי זה v, אבל אם מחליפים ביניהם
סימן הדטרמיננטה מתהפך..

ברור שכדאי לבצע החלפת משתנים

$$\begin{Bmatrix} u=\frac{y}{\tan x} \\ v=\frac{x}{y^{2}} \end{Bmatrix}$$

המעבירה את D ל־ $D^{\prime}:(u,v)\in[2,4]\times[1,2]$ באופן חח"ע. נחשב את היעקוביאן

$$\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=\begin{Vmatrix} u_{x} & u_{y} \\ v_{x} & v_{y} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \frac{-y}{\sin^{2}x} & \frac{1}{\tan x} \\ \frac{1}{y^{2}} & \frac{-2x}{y^{3}} \end{Vmatrix}=\frac{4x-\sin 2x}{2y^{2}\sin^{2}x}>0$$

$$I=\iint_{D^{\prime}}\frac{y^{3}}{x\tan x}dA\left(u,v\right)=\iint_{D^{\prime}}\frac{y^{2}}{x}\frac{y}{\tan x}dA\left(u,v\right)=\iint_{D^{\prime}}\frac{u}{v}dA=$$

$$==\left(\int_{2}^{4}udu\right)\cdot\left(\int_{1}^{2}\frac{dv}{v}\right)=6\ln 2$$

הערה: כאשר מחשבים $\iint f\left(x,y\right)dxdy$ על ידי החלפת משתנים $u=u\left(x,y\right),v=v\left(x,y\right)$. כדאי לרשום את J $f\left(x,y\right)$ במונחים של u,v ואז להציב, במקום להציב לחוד ב־ f וב־ J.

10. א. חשבו את השטח A ב־ $\mathbb{R}^2$ החסום על ידי האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ב. חשבו את השטח S ב־ $\mathbb{R}^2$ החסום על ידי האליפסה

$$(3x+7y+1)^2+(2x+4y-11)^2=4$$

ג. חשבו את הנפח V ב־ $\mathbb{R}^3$ החסום את ידי האליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

<u>פתרון:</u>

א. נבצע החלפת משתנים אליפטיות

$$x=ar\cos\theta$$

$$y=br\sin\theta$$

כאשר $r\in[0,1]$ ו־ $\theta\in[0,2\pi]$. ואז

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr\neq 0$$

כאשר $r\neq 0$,ז.א. היעקוביאן מתאפס רק בנקודה אחת $(x,y)=0$, לכן

$$A=\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} rabdrd\theta=ab\pi$$

ב. נבצע החלפת משתנים

$$u=3x+7y+1$$

$$v=2x+4y-11$$

בבירור ההחלפה הפיכה, כמו כן:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=3\cdot 4-7\cdot 2=-2\neq 0$$

לכן

$$S=\iint_{\{u^2+v^2=4\}}\frac{dA}{2}=2\pi$$

ג. משיקולי סימטריה:

$$V=2\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dA$$

ע"י החלפת משתנים אליפטיות נקבל

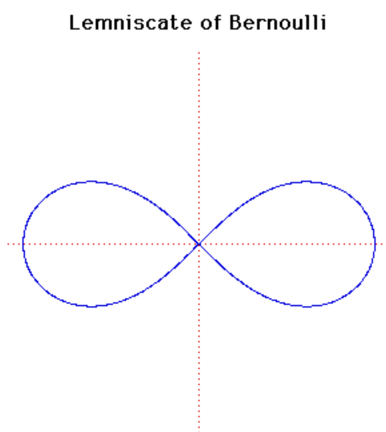
$$V=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abrdr=\frac{4\pi}{3}abc$$

11. חשבו את שטח הקבוצה:

$$D=\left\{\left(x^2+y^2\right)^2\le 2\left(x^2-y^2\right)\ ,\ x^2+y^2\ge 1\right\}$$

<u>פתרון:</u>

העקום $(x^2+y^2)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ נקרא lemniscate of Bernoulli.



איור 3:

אצלינו $a=1$.

משיקולי סימטריה ומעבר לקואורדימטות פולריות נקבל

$$\mathrm{A}(D)=4\int_0^{\alpha}d\theta\int_1^{\sqrt{2\cos(2\theta)}}rdr=2\left(\sin 2\alpha-\alpha\right)$$

כאשר $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$.

12. לכל n טבעי ולכל $p > 0$ ממשי, חשבו את

$$\iint_{\frac{1}{n} \leq |v| \leq 1} \frac{dS}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{p}{2}}}$$

<u>פתרון:</u>

נעבור לקואורדינטות פולריות

$$\iint_{\frac{1}{n} \leq |v| \leq 1} \frac{dS}{\left(x^2+y^2\right)^{p}} = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{rdr}{r^p} = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dr}{r^{p-1}}$$

הערה: מפתה לקחת $n \to \infty$ ולאמר ש־

$$\iint_{|v| \leq 1} \frac{dS}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{p}{2}}}$$

קיים אם ורק אם הגבול של ה־ I_n קיים, ואכן זה המצב, וכידוע, הגבול קיים אם ורק אם $p < 2$.
האם אתה יכול לנחש מתי $\iiint_{|v| \leq 1} \frac{dV}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{p}{2}}}$?

13. תהי ההעתקה

$$T(x,y) = (u,v)\,, u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$

א. הוכיחו כי $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$ לכל x, y.

ב. האם ההעתקה חח"ע ב־ $\mathbb{R}^2$?

<u>פתרון:</u>

א. נחשב ע"פ ההגדרה:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} = e^{2x}$$

ב. ההעתקה בבירור לא חח"ע ב־ $\mathbb{R}^2$, אכן

$$T(x, y+2\pi) = T(x,y)$$

לכל $x, y \in \mathbb{R}$.