תורת ההסתברות

תרגיל בית מס׳ 2
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. תרגיל 1.5 מהחוברת.
<u>פתרון</u>. די להוכיח כי

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \geq 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{5}{6}\right) \leq \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

אי השוויון האחרון ניתן לבדוק על ידי לקיחת $\ln$ משני הצדדים ושמוש במחשבון או בכל דרך אחרת.
<u>תרגיל 2</u>. תרגיל 12.20 מהחוברת.
<u>פתרון</u>. נגדיר

$$\begin{aligned} X_k &= \{\text{מספר שנמצא במקום } k \text{ בסידור}\},\\ Y_k &= \{\text{מיקומו של מספר } k \text{ בסידור}\},\\ A &= \{X_1+X_n=n\},\\ B=\{Y_1<Y_2<Y_n\}, \qquad & C_{ijk}=\{Y_1,Y_2,Y_n\in\{i,j,k\}\}. \end{aligned}$$

(א) לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{n} P\left(A\bigcap X_1=k\right)=\sum_{k=1}^{n} P\left(X_n=n-k\bigcap X_1=k\right)=\\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n} & \text{אם } n \text{ הינו מספר אי זוגי},\\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq\frac{n}{2}}}^{n-1}\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{n-2}{n(n-1)} & \text{אם } n \text{ הינו מספר זוגי}. \end{cases} \end{aligned}$$

(ב) לפי נוסחת ההסתברות הכוללת

$$P(B)=\sum_{i,j,k}P(B|C_{i,j,k})P(C_{i,j,k})=\sum_{i,j,k}\frac{1}{3!}P(C_{i,j,k})=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

תרגיל 3. הוכיחו רציפות של מידה הסתברותית עבור סדרה מונוטונית לא עולה.
פתרון.
נשים לב כי אם $\{A_n\}$ סדרה לא עולה, אזי סדרה $\{A_n^c\}$ היא לא יורדת. נזכיר כי (ראה תרגיל כיתה 1)

$$\lim_n A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c, \qquad \lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

רציפות של מידה הסתברותית עבור סדרה מונוטונית לא יורדת הוכחה בהרצאות. לכן, בהשתמש בכלל דה-מורגן נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\lim_n A_n\right).$$

המסקנה היא:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P\left(\lim_n A_n\right).$$

תרגיל 4. השלימו את ההוכחה של רציפות מידת ההסתברות במקרה כללי.
פתרון. לפי כלל דה-מורגן

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \liminf_n A_n^c.$$

לכן די להוכיח כי עבור סדרה כל שהיא $\{A_n\}$ מתקיים:

$$P\left(\limsup A_n\right) \geq \limsup_n P(A_n), \tag{1}$$

כי מכאן נובע

$$P\left(\liminf A_n\right) = 1 - P(\limsup_n A_n^c) \leq 1 - \limsup_n P(A_n^c) = \liminf_n P(A_n).$$

אי שוויון (1) הוא מקרה פרטי של למה פטו. כדי להוכיח אותו נשים לב כי

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

והסדרה $\left\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right\}$ היא סדרה לא עולה. מכאן:

$$P\left(\limsup A_n\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\geq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} P(A_k):=\limsup_n P(A_n).$$

<u>תרגיל 5</u>. השלימו את הנוסחה והוכיחו אותה:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{i\neq j} P\left(A_k\bigcap A_j\right)+\ldots$$

<u>פתרון</u>.
הנוסחה היא

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sum_{i_1<i_2\ldots<i_j} P\left(A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_j}\right) \qquad (2)$$

למשל:

$$\begin{aligned} P\left(A\bigcup B\bigcup C\right) &= P\left(A\bigcap B\right)-P\left(B\bigcap C\right)-P\left(A\bigcap C\right)- \\ &- P\left(A\bigcap B\bigcap C\right). \end{aligned}$$

הוכחהה היא באינדוקציה ומתבססת על נוסחת עזר:

$$P\left(C\bigcap\left\{A\bigcup B\right\}\right)=P\left(C\bigcap A\right)+P\left(C\bigcap B\right)-P\left(C\bigcap A\bigcap B\right) \qquad (3)$$

נוסחה (3) ניתן לבדוק למשל על ידי שרטוט מעגלים "A", "B" ו- "C" (תרגום של "שיטת המעגלים" לשפה פורמלית הוא על ידי חלוקה מתאימה של מאורעות A, B ו- C לקבוצות זרות).
נניח עתה כי (2) נכונה עבור $n-1$. כדי להוכיח אותה עבור n "נאחד" את המאורעות A_{n-1} ו- A_n. לפי (3)

$$\begin{aligned} P\left(A_{i_1}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_j}\bigcap\left\{A_{n-1}\bigcup A_n\right\}\right) &= P\left(A_{i_1}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_j}\bigcap A_{n-1}\right) \\ +P\left(A_{i_1}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_j}\bigcap A_n\right) &- P\left(A_{i_1}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_j}\bigcap A_{n-1}\bigcap A_n\right) \end{aligned}$$

קל להשתכנע כי זה אכן מוכיח את הטענה.
<u>תרגיל 6</u>. נניח כי נקודה a נבחרה באקראי מתוך קטע $[0;5]$ ואילו נקודה b נבחרה

באקראי באופן בלתי תלוי מתוך קטע $[1;6]$. חשבו את $P\left(\int\limits_a^{\sqrt{b}} xdx > 1\right)$.

<u>פתרון</u>. זהו תרגיל בנושא "הסתברות גאומטרית" ולכן הפתרון כרוך בחשוב שטחים במישור (a,b):

$$P\left(\int\limits_a^{\sqrt{b}} xdx > 1\right) = P(b > a^2+2) = \frac{\int\limits_0^2 (6-a^2-2)da}{5\times 5} = \frac{16}{75}.$$