

# תורת ההסתברות

## תרגיל בית מס' 6

פתרונות יתפרסמו באתר הקורס ב- 27.01.02

### תרגיל 1.

נניח כי נק'  $(X, Y)$  נבחרה באקראי מתוך מעגל בראדיוס אחד עם מרכז ב-  $(0, 0)$ , כלומר  $f_{X,Y}(x, y) = 1/\pi$ , עבור  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ . מצאו את  $f_{Y|X}(y|x)$ .

תרגיל 2. יהיו  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים באופן אחיד על  $(0, 1)$ . נגדיר  $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$  ו-  $Z_n = \log Y_n = \sum_{k=1}^n \log X_k$ .

(א) חשבו את  $EY_n$  ואת  $EZ_n$ .

(ב) חשבו את  $VAR(Y_n)$  ואת  $VAR(Z_n)$ .

(ג) בעזרת משפט הגבול המרכזי ל-  $Z_n$ , הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq e^{-n+t\sqrt{n}}) = \Phi(t).$$

מהו  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq e^{-n})$  ?

### תרגיל 3.

נתונים 48 מספרים  $X_1, X_2, \dots, X_{48}$  שהוגרלו באקראי. נסמן  $S = \sum_{k=1}^{48} X_k$  ו-  $T = \sum_{k=1}^{48} \overline{X_k}$ , כאשר  $\overline{x}$  מסמן את המספר השלם, הקרוב ביותר ל-  $x$ . נניח כי

ההפרשים  $X_k - \overline{X_k}$  מפולגים באופן אחיד בקטע  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

(א) בעזרת משפט הגבול המרכזי העריכו את  $P(|S - T| \geq 4)$ .

(ב) השתמשו באי-שוויון צ'בישב כדי להעריך את  $P(|S - T| \geq 4)$ .

### תרגיל 4.

מטילים מטבע אחת אינסוף פעמים, עם סיכוי להצלחה  $p$ . נסמן ב-  $X_n$  את מספר ההטלה שבה התקבלה הצלחה  $n$ -ית. למשל, אם סדרת ההטלות של המטבע הניבה את הוקטור  $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ , כאשר 1 מסמן הצלחה ו- 0 כשלון, אזי  $X_1 = 3, X_2 = 5, X_3 = 8$  וכו'.

(א) הוכיחו  $X_k$  ו-  $X_{k-1}$  תלויים ביניהם.

(ב) האם לדעתכם  $X_1, X_2 - X_1, \dots, X_n - X_{n-1}$  הם בלתי תלויים? תנו נימוך קצר ומשכנע.

(ג) השתמשו בייצוג  $X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + \dots + (X_n - X_{n-1})$  כדי לחשב את  $VAR(X_n)$ . ניתן להעזר בעובדה כי  $VAR(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$ .

(ד) אם התשובה ל- (ב) חיובית, השתמשו בזאת כדי לחשב בעזרת משפט הגבול המרכזי את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( X_n > \frac{n}{p} + x \sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}} \right)$$

לכל  $-\infty < x < \infty$ .

### תרגיל 5.

יהא  $(X, Y)$  ו"א המפולג לפי  $f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \exp\{-x - 2y\}$ ,  $x, y \geq 0$ . נגדיר:  $U = \min\{X, Y\}$  ו-  $V = \max\{X, Y\}$ .

(א) מצאו את  $f_{U,V}(u, v)$

(ב) נגדיר:  $W = \frac{U}{U+V}$ ,  $Q = U + V$ . מצאו את  $f_{W,Q}(w, q)$

(ג) האם מ"א  $W$  ו-  $Q$  ב"ת?