אינטגרל רימן Riemann

הסמסטר הראשון הוקדש לחשבון דיפרנציאלי. בסמסטר זה אנו פותחים בהגדרת האינטגרל המסוים

$$\int_a^b f(x)dx \; .$$

אנו נקשור בין שני המושגים באמצעות "המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי". האינטגרל בו נעסוק הוא "אינטגרל רימן". מושג שונה של אינטגרל יילמד בעתיד בהגדרת "האינטגרל של לבג".

נתונה פונקציה חסומה $f(x)$ המוגדרת על קטע חסום $[a, b]$ (כאשר הסגירות של הקטע אינה

מהותית כאן). לצורך ההדגמה והמוטיבציה, נניח ש: $f(x)$ היא רציפה וחיובית על $[a,b]$. במקרה זה יבטא האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה ובין ציר x, ובין הקוים הישרים $x=a$ ו: $x=b$. אני מדגיש שאנו נגדיר את האינטגרל עבור פונקציות f שאינן בהכרח רציפות.

ההגדרה הבסיסית של האינטגרל תהיה עבור פונקציות f שהן חסומות על קטע חסום $[a,b]$. הגדרה זו תורחב ובהמשך נגדיר את אינטגרל רימן המוכלל, היכן ש: f או הקטע אינם חסומים.

<u>הגדרה</u>: חלוקה P (partition) של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה סופית של נקודות, $x_0, x_1, ..., x_n$ כך שמתקיים

$$.a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

אנו מסמנים $P = \{x_0, ..., x_n\}$, וכן

$$.\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, ..., n$$

בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ מסמנים

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \\ m_i &= \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \end{aligned}$$

כאשר M_i ו: m_i קיימים וסופיים מאחר ו: $f(x)$ פונקציה חסומה. אולם הם אינם בהכרח $\max f$ ו: $\min f$ כי f לאו דוקא רציפה.

לכל חלוקה P מגדירים כעת את הסכומים העליון והתחתון של **Darboux** (upper and lower sums) ע"י

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$
$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

כעת מגדירים את האינטגרל העליון של f על $[a,b]$ ע"י

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_P U(P,f) \tag{1}$$

כאשר האינפימום ב: (1) הוא מעל כל החלוקות האפשריות P של $[a,b]$. בדומה לזה מגדירים את האינטגרל התחתון של f על $[a,b]$ ע"י

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_P \{L(P,f)\}. \tag{2}$$

הביטויים האלו תמיד קיימים מאחר ו: f היא פונקציה חסומה: קיימים m ו: M כך ש

$$m \leq f(x) \leq M$$

לכל $a \leq x \leq b$. לכן מתקיים לכל חלוקה P

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq L(P,f)$$
$$\leq U(P,f) \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a)$$

ולכן האינפימום והסופרימום מעל כל החלוקות P קיימים וסופיים.

הגדרה. פונקציה חסומה על הקטע $[a,b]$ נקראת אינטגרבילית לפי רימן על $[a,b]$ אם האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון שווים:

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

הערך המשותף הזה מסומן $\int_a^b f$ ונקרא אינטגרל רימן של f.

ההגדרה הזו קשה ליישום : יש להתחשב בכל החלוקות של הקטע, להתיחס לאינפימום והסופרימום מעל כל החלוקות ולהשוותם. נצטרך למצוא קריטריונים יעילים יותר לאינטגרביליות. נראה את הדוגמאות הבאות:

דוגמא. $[a,b]$ קטע סגור כלשהו, c מספר כלשהו
ו: $f(x)$ הפונקציה $f(x)=c$ לכל $a \le x \le b$.
אז f אינטגרבילית.

דוגמא. יהי $[a,b]$ קטע סגור כלשהו ותהי f
הפונקציה הבאה על $[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x \text{ is rational} \\ 1 & x \text{ is irrational} \end{cases}.$$

אז f אינה אינטגרבילית.

ברור שעבור חלוקה נתונה P מתקיים
$L(P,f) \le U(P,f)$. אך למעשה מצפים שכל
סכום עליון הוא גדול מכל סכום תחתון, או

בצורה מדויקת, לכל שתי חלוקות P_1 ו: P_2 מתקיים

$$.L(P_1, f) \le U(P_2, f) \tag{3}$$

אנו נראה זאת באמצעות השוואת שתי החלוקות עם חלוקה שלישית. נזדקק להגדרה הבאה:

<u>הגדרה:</u> חלוקה $P^\star$ נקראת עידון של חלוקה P אם קבוצת נקודות החלוקה של P מוכלת בקבוצת נקודות החלוקה של $P^\star$. העידון המשותף של P_1 ו: P_2 היא החלוקה

$$.P^\star = P_1 \cup P_2$$

משפט העידון. אם $P^\star$ עידון של P אז

$$L(P,f) \le L(P^\star,f),$$
$$.U(P^\star,f) \le U(P,f)$$

הוכחה: נניח תחילה ש: $P^\star$ מכילה נקודה אחת יותר מאשר P:

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$
$$P^\star = \{x_0, x_1, ...x_{j-1}, x^\star, x_{j+1}, ..., x_n\}$$

והנקודה הנוספת היא $x^\star$ אשר שייכת לקטע $[x_{j-1}, x_j]$ ב: P. בחלוקה החדשה הקטע הזה מתפצל לשני תתי קטעים $[x_{j-1}, x^\star]$ ו: $[x^\star, x_j]$. בחלוקה המקורית P

$$m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$$

ובחלוקה החדשה $P^\star$

$$w_1 = \inf_{[x_{j-1},x^\star]} f(x),$$
$$w_2 = \inf_{[x^\star,x_j]} f(x).$$

ברור שמתקיים $m_j \geq w_1$ ו: $m_j \geq w_2$. מאחר וההפרש $L(P^\star, f) - L(P, f)$ שווה ל:

$$w_1(x^\star - x_{j-1}) + w_2(x_j - x^\star)$$
$$-m_j(x_j - x_{j-1})$$

ובשימוש ב:

$x_j - x_{j-1} = (x_j - x^\star) + (x^\star - x_{j-1})+$ מקבלים ש: $L(P^\star, f) - L(P, f)$ שווה ל:

$$(w_1 - m_j)(x^\star - x_{j-1})$$
$$+(w_2 - m_j)(x_j - x^\star),$$

וזה גודל חיובי, כי כל הגורמים בביטוי האחרון חיוביים. אם $P^\star$ גדול מ: P במספר סופי של נקודות, אז יש לחזור על התהליך מספר פעמים, בכל פעם מוסיפים נקודה אחת. עבור U הנימוק דומה, בהחלפת inf ב: sup.

<u>משפט השוואה</u>. תהי f חסומה על $[a,b]$. אז

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

<u>הוכחה:</u> נוכיח תחילה את אי-השיויון (3) מלמעלה. תהיינה P_1 ו: P_2 חלוקות כלשהן של $[a,b]$ ותהי $P^\star = P_1 \cup P_2$ העידון המשותף שלהן. אז

$$L(P_1,f) \leq L(P^\star,f) \leq U(P^\star,f) \leq U(P_2,f),$$

כאשר אי-השיויונים הראשון והשלישי נובעים ממשפט העידון, והשני ברור. עבור P_2 קבוע לוקחים באי-השיויון $L(P_1,f)\le U(P_2,f)$ סופרימום מעל כל ה: P_1 האפשריים, ומקבלים

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{P_1} L(P_1,f) \le U(P_2,f) \quad (4)$$.

עכשיו אגף שמאל של (4) הוא מספר קבוע, ולקיחת אינפימום מעל כל P_2 ב: (4) נותן

$$\underline{\int_a^b} f \le \inf_{P_2} U(P_2,f) = \overline{\int_a^b} f$$.

התוצאה הבאה נותנת תנאי נוח לשימוש עבור אינטגרביליות.

משפט. f אינטגרבילית לפי רימן אם ורק אם לכל $0 < \epsilon$ קיימת חלוקה P כך ש

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon. \qquad (5)$$

הוכחה: נניח שהתנאי המבוטא ב: (5) מתקיים וצריך להוכיח ש: f אינטגרבילית. אולם

$$L(P,f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(P,f),$$

ומאחר וההפרש בין שני הקיצונים U ו: L קטן מ: ϵ, גם ההפרש בין שני המספרים הפנימיים מקיים

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \epsilon.$$

מאחר ו: ϵ הוא כלשהו, האינטגרל התחתון והעליון שווים, ולכן הפונקציה אינטגרבילית רימן.

בכיוון ההפוך, נתון ש: f אינטגרבילית ולכן

$$.\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

מהגדרת האינטגרל העליון, לכל $\epsilon > 0$ קיים P_1 כך ש

$$,0 \le U(P_1, f) - \overline{\int_a^b} f < \frac{1}{2}\epsilon$$

ולכן גם

$$.0 \le U(P_1, f) - \int_a^b f < \frac{1}{2}\epsilon \qquad (6)$$

באופן דומה, מהגדרת האינטגרל התחתון קיים P_2 כך ש

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f - L(P_2, f) < \frac{1}{2}\epsilon$$

ולכן גם

$$.0 \leq \int_a^b f - L(P_2, f) < \frac{1}{2}\epsilon \qquad (7)$$

יהי P העידון המשותף $P = P_1 \cup P_2$. מ (6) ו (7) נובע עבורו

$$U(P, f) \leq U(P_1, f) < \int_a^b f + \frac{1}{2}\epsilon$$

וגם

$$L(P, f) \geq L(P_2, f) > \int_a^b f - \frac{1}{2}\epsilon$$

ומהפחתת אי-השיויון השני מהראשון מקבלים

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon,$$

וזה מה שצריך להוכית.

מצאנו P אשר מקיים את אי-השיויון, אבל אי-שיויון דומה יתקיים ע"י כל עידון של P.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית, ועבור $\epsilon > 0$ תהי P כזו שמתקיים $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$. לכל $1 \le i \le n$ תהי t_i נקודה כלשהי ב: $[x_{i-1}, x_i]$. אזי גם

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f \right| < \epsilon.$$

זה אומר שעבור פונקציה אינטגרבילית ניתן להתקרב לאינטגרל ע"י שימוש בנקודות ביניים כלשהן.

<u>הוכחה:</u> ברור שמתקיים

$$m \le m_i \le f(t_i) \le M_i \le M$$

לכל $1 \le i \le n$, כאשר m ו: M הם החסמים התחתון והעליון של f על $[a,b]$. ולכן

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i$$
$$\le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(P,f)$$

אולם ידוע ש: f אינטגרבילית ועל כן

$$L(P,f) \le \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \le U(P,f).$$

יוצא ששני המספרים, $\int_a^b f$ ו: $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ נמצאים בין U ו L, ולכן

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f\right| < U(P,f) - L(P,f).$$

אבל P נבחר כך ש: $U - L < \epsilon$, ולכן הביטוי באגף שמאל קטן מ: ϵ.

<u>הערה:</u> הסכומים $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ נקראים סכומי רימן. אפשר לפתח את תורת האינטגרציה בכיוון הפוך, ולאפיין אינטגרביליות באמצעות סכומי רימן.