תורת ההסתברות

תרגיל בית מס׳ 1

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.
הוכיחו בשיטה הסתברותית (קומבינטורית) כי

$$\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

<u>רמז</u>. יהי $N=\{1,2,\dots,2n\}$. נניח כי n מספרים נבחרים באקראי מתוך N. נגדיר מאורעות $A_k=$\{בדיוק k מספרים נבחרו מתוך קטע $[1,n]$ \}. אזי $\Omega=\bigcup_0^n A_k$.

<u>פתרון</u>.
מרחב המצבים יהיה

$$\Omega=\{M\subset N:|M|=n\},$$

כאשר M היא קבוצת המספרים שנבחרו. נגדיר A_k כנ"ל, כלומר A_k יהיה מאורע שנבחרו בדיוק k מספרים מתוך קטע $[1,n]$ ו- $n-k$ מספרים מתוך קטע $[n+1,2n]$:

$$A_k=\left\{\left|M\bigcap[1,n]\right|=k\right\},\quad k=0,1,\dots$$

אזי

$$1=\sum_{k=0}^{n}P(A_k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{|A_k|}{|\Omega|},$$

כלומר

$$|\Omega|=\sum_{k=0}^{n}|A_k|.$$

מכיוון ש- $|A_k|=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$ נקבל

$$\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

תרגיל 2.
בכיתה יושבים n סטודנטים. מהי ההסתברות שלפחות לשניים מהם יש יום הולדת באותו יום של השנה ? תניחו כי ישנם 365 יומים בכל שנה, כולם שווי הסתברות.

פתרון.
נגדיר מאורע

$$A_n = \{\text{לפחות לשניים מהסטודנטים יש יום הולדת באותו יום של השנה}\}.$$

נתבונן במאורע

$$A_n^c = \{\text{לכל זוג של הסטודנטים יש יומי הולדת שונים}\}.$$

עבור $n \leq 365$ נקבל

$$|A_n^c| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1) = \frac{365!}{(365-n)!}.$$

לכן

$$P_n = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}.$$

תרגיל 3.
(א) תהי $\{A_n\}$ סדרה כלשהי של מאורעות. הוכיחו כי לכל $n > 0$ מתקיים:

$$P\left(\bigcap_1^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_n) - (n-1).$$

רמז. תגדירו $B_n = A_n^c$ ותשתמשו בחוקי דה-מורגן והאי שוויון

$$\sum_n P(B_n) \geq P\left(\bigcup_n B_n\right).$$

(ב) יהיו A, B, C מאורעות. האם ייתכן ש- $P(A) = P(B) = P(C) = 0.8$ ו- $P\left(A \bigcap B \bigcap C\right) = 0.3$?

<u>פתרון</u>.
(א) נשתמש באי השוויון

$$\sum_k P(B_k) \geq P\left(\bigcup_k B_k\right).$$

ממינו נובע כי

$$\sum_k (1-P(A_k)) \geq P\left(\bigcup_k A_k^c\right).$$

לכן, לפי חוק דה-מורגן נקבל

$$n-\sum_k P(A_k) \geq P\left(\bigcup_k A_k^c\right) = P\left(\left(\bigcap_k A_k\right)^c\right) = 1-P\left(\bigcap_k A_k\right),$$

כלומר

$$P\left(\bigcap_1^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_n)-(n-1).$$

(ב) הנתונים לא מסתדרים עם האי שוויון שהוכחנו בסעיף הקודם:

$$P\left(A\bigcap B\bigcap C\right) = 0.3 \leq P(A)+P(B)+P(C)-(3-1) = 0.4.$$

לכן, לא קיימים מאורעות A, B, C שתואמים את -הנתון.

<u>תרגיל 4</u>.
(א) תהי $\{A_n\}$ סדרה עולה של המאורעות (דהיינו $A_n \subseteq A_{n+1}$ לכל $n \geq 1$). נגדיר

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.
<u>רמז</u>. ניתן להשתמש בחלוקה $\lim A_n = \bigcup_n X_n$ כאשר X_n הן קבוצות זרות, המוגדרות על ידי

$$X_1 := A_1, \quad X_k := A_{k-1}^c \bigcap A_k, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

(ב) תהי $\{B_n\}$ סדרה יורדת של מאורעות (דהיינו $B_{n+1} \subseteq B_n$ לכל $n \geq 1$). נגדיר

$$\lim_{n\to\infty} B_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n)$.
<u>רמז</u>. תהי $\{B_n\}$ סדרה יורדת. נגדיר $A_n := B_n^c$. אזי $\{A_n\}$ היא סדרה עולה.

<u>פתרון</u>.
(א)
נגדיר מאורעות X_k כנ"ל. אזי

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(X_n) = \lim_{N\to\infty} P(A_N). \end{aligned}$$

(ב)
נשים לב כי אם $\{A_n\}$ סדרה יורדת, אזי סדרה $\{A_n^c\}$ היא סדרה עולה. רציפות של מידה הסתברותית עבור סדרה מונוטונית עולה הוכחה בסעיף הקודם. לכן, בהשתמש בכלל דה-מורגן נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n} A_n\right).$$

המסקנה היא:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P\left(\lim_{n} A_n\right).$$

<u>תרגיל 5</u>.
יהיו X ו Y שני מ"מ גאומטריים בלתי תלויים, בעלי הצפיפות

$$P(X=k) = P(Y=k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

עבור פרמטר $0 < p < 1$.

(א) חישבו את ההסתברות $P(X+Y=n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k, Y=n-k)$,

$n = 2, 3, \dots$.
ב) חישבו את $P(X=k|X+Y=n)$.

<u>פתרון.</u>
שימו לב כי החישובים להלן לא תופסים בלי הנחת אי תלות.
א)

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k, Y=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = \\ &= (n-1)p^2 q^{n-2}. \end{aligned}$$

ב)

$$\begin{aligned} P(X=k|X+Y=n) &= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\ &= \frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} = \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

התוצאה לא תלויה ב- k ! זו גרסה אחרת של תחונת חוסר הזכרון.

<u>תרגיל 6.</u>
לתחנת שרות מסויימת בה עובדים N שרתים, מגיעים במשך היום $3N$ אנשים. כל לקוח פונה לשרת אחד אותו הוא בוחר באופן אקראי ובלתי תלוי באחרים. מהי בקירוב ההסתברות ששרת מסויים יטפל במשך היום ב- 2 לקוחות בדיוק ? בלקוח אחד בלבד ? כדי לענות על השאלה תניחו כי N הוא "מספר גדול" ותשתמשו בקירוב פואסוני.

<u>פתרון.</u>
נגדיר משתנה אקרעי

$$X = \text{מספר הלקוחות שניגשו לשרת מסוים}$$

כל אחד מ- $3N$ לקוחות "בלתי תלויים" בוחר אחד מ- N שרתים באקראי, לכן

$$X \sim BIN(3N, 1/N).$$

לכן הנוסחה המדוייקת היא

$$P(X=k) = \binom{3N}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{3N-k}.$$

מכיוון ש- N גדול מאוד ניתן להשתמש בקירוב פואסוני למשתנה אקראי X $(\lambda = \frac{3N}{N} = 3)$:

$$P(X=k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

בפרט:

$$P(X=1) \approx 3e^{-3}, \qquad P(X=1) \approx \frac{9}{4}e^{-3}.$$

<u>תרגיל 7.</u>
בקופסה נמצאים n כדורים זהים ממוספרים מ- 1 עד n. מוציאים את הכדורים אחד אחרי השני באופן אקראי בלי החזרה.
(א) מהי ההסתברות שכדור בו מספר 932 הופיע בדיוק בהוצאה מספר 932 (נניח כי $n > 932$) ?
(ב) מהי ההסתברות שכל n המספרים יופיעו בסדר עולה ?

<u>פתרון.</u>
תוצאה בניסוי היא תמורה (פרמוטציה) של מספרים מ- 1 עד n. בסך הכל יש $n!$ תמורות כאלה, כולם שווי הסתברות. לכן, כרגיל, עבור מאורע כלשהי A:

$$P(A) = \frac{\text{מספר התוצאות המתאימות}}{\text{מספר התוצאות סה"כ}}.$$

לכן התשובות:
(א)

$$P_{\text{א}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

(ב)

$$P_{\text{ב}} = \frac{1}{n!}.$$

<u>תרגיל 8.</u>
שני אנשים, A ו- B, מטילים פעם אחרי פעם שתי מטבעות מזוייפות. ההסתברות להופעת "עץ" במטבע של A היא $P_A = \frac{2}{3}$ ואילו ההסתברות להופעת "עץ" במטבע של B היא $P_B = \frac{2}{5}$. המשחק נמשך עד אשר בהטלה מסויימת לא יתקבלו תוצאות שונות על גבי שתי המטבעות. שחקן שמטבע שלו מראה "עץ" בהטלה אחרונה יוכרז

כמנצח. מהי ההסתברות ש- A ינצח את המשחק ?

פתרון.
נגדיר מאורעות

$$W_k = \{\text{שחקן } A \text{ ניצח במשחק אחרי הטלה } k\text{-ית}\},$$

$$W = \{\text{שחקן } A \text{ ניצח במשחק}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k,$$

$$U_1 = \{\text{אף אחד מהשחקנים לא ניצח במשחק אחרי הטלה ראשונה}\}.$$

ברור כי אחרי כמה הטלות בהן לא היה מנצח, עומדים השחקנים בפני אותו משחק בדיוק כמו בהתחלה. בפרט $P(W) = P(W|U_1)$. לכן, לפי נוסחת ההסתב-רות הכוללת

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W_1) + P(W|U_1) \cdot P(U_1) = P(W_1) + P(W) \cdot P(U_1) = \\ &= P_A \cdot (1 - P_B) + P(W) \cdot \Big((1 - P_A) \cdot (1 - P_B) + P_A \cdot P_B\Big) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot P(W) = \frac{2}{5} + \frac{7}{15} \cdot P(W), \end{aligned}$$

כלומר

$$P(W) = \frac{3}{4}.$$

תרגיל 9.
כד מכיל n כדורים ממוספרים מ- 1 עד n. מוציאים k כדורים אחד אחרי השני עם החזרה. מהו הסיכוי שהמספר המכסימלי שהתקבל ב- k ההוצאות הראשונות קטן או שווה מ- m ? בדיוק שווה ל- m ?

פתרון.
נגדיר:

$$\begin{aligned} X_j &= \text{מספר שהתקבל בהוצאה } j\text{-ית}, \\ Y_k &= \max_{1 \le j \le k} X_j. \end{aligned}$$

אנחנו רוצים לחשב $P(Y_k=m),\ m=1,\dots,n$. נשים לב כי
$$P(Y_k\le m)=P\left(\bigcap_{j=1}^{k}X_j\le m\right)=\Big(P(X_1\le m)\Big)^k=\left(\frac{m}{n}\right)^k.$$
מכאן
$$P(Y_k=m)=P(Y_k\le m)-P(Y_k\le m-1)=\left(\frac{m}{n}\right)^k-\left(\frac{m-1}{n}\right)^k$$

<u>תרגיל 10</u>.
כל אחד מ- n כדים מכיל w כדורים שחורים ו- b כדורים לבנים. מעבירים כדור מהכד הראשון לשני, משני לשלישי וכו', כאשר בכל שלב הכדור שמועבר נבחר באקראי. מהי ההסתברות שהכדור שבסוף מוצא מהכד ה- n-י יהיה לבן, עבור
(א) $n=2,3$?
(ב) n כללי ?

<u>פתרון</u>.
נגדיר מאורעות
$$Bk=\{\text{כדור שהוצא בהוצאה } k\text{-ית היה שחור}\},$$
$$Wk=\{\text{כדור שהוצא בהוצאה } k\text{-ית היה לבן}\}.$$
לפי נוסחת ההסתברות השלמה
$$\begin{aligned}P(W2)&=P(W2|B1)P(B1)+P(W2|W1)P(W1)=\\&=\frac{w}{b+w+1}\cdot\frac{b}{b+w}+\frac{w+1}{b+w+1}\cdot\frac{w}{b+w+1}=\frac{w}{b+w}\end{aligned}$$
שימו לב כי $P(W2)=P(W1)$ ולכן גם
$$P(B2)=1-P(W2)=P(B1)=\frac{b}{b+w}.$$
באינדוקציה ניתן להראות כי באופן כללי, עבור כל $k\le n$
$$P(Wk)=\frac{w}{b+w}.$$