תורת ההסתברות

תרגיל מס' 1

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.

(א)

נגדיר שני מאורעות:

$$A_{i,j,k} = \Big\{\{\pi_{n-2}, \pi_{n-1}, \pi_n\} = \{i, j, k\}\Big\},$$

כלומר שלושה מספרים אחרונים הם i, j, k (בסדר כלשהוא), ו-

$$B = \{\pi_{n-2} > \pi_{n-1} > \pi_n\},$$

כלומר שלושה מספרים אחרונים מופיעים בסדר יורד.
אזי

$$P(B) = \sum_{i,j,k} P(B \cup A_{i,j,k}) = \sum_{i,j,k} \frac{|B \cup A_{i,j,k}|}{|\Omega|} = \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{6}.$$

(ב)

מטעמי סימטריה בין המספרים:

$$\begin{aligned} P(i_3 > i_2 | i_2 < i_1) &= \frac{P(i_1 > i_2, i_3 > i_2)}{P(i_2 < i_1)} = \frac{P(i_2 = \min\{i_1, i_2, i_3\})}{P(i_2 = \min\{i_1, i_2\})} = \\ &= \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

<u>תרגיל 2</u>.

(א)

אני משאיר לכם לבדוק שהחיתוך $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ הוא אכן σ-אלג'ברה.

לעומת זאת, האחוד $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ הוא לא בהכרח σ-אלג'ברה. דוגמה נגדית:
$\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$, $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{1\}, \Omega\}$. הבעיה כאן ש- $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$ אינו באחוד.

(ב)

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, [4,7], [2,4) \cup (7,8], \Omega\}$$

תרגיל 3.

בלי הגבלת הכלליות נניח כי $\alpha \in [0, 2\pi)$. אז:

$$P(A_1 \cap A_2 | B) \;=\; \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\min\{\alpha, \pi/4\}}{2\pi},$$

$$P(A_1|B) \;=\; \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\pi/4}{2\pi} \quad \text{and} \quad P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

לכן התנאי:

$$2\pi \min\{\alpha, \pi/4\} = \alpha\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \min\{\alpha, \pi/4\} = \frac{\alpha}{8}.$$

לכן $\alpha = 0$, והתשובה הסופית היא $\alpha \in \{0, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$.

תרגיל 4.

התשובה היא שלילית. הינה דוגמה נגדית:

$$C = \{1,2,5\},\; B = \{3,4,5\},\; A = \{2,3\},\; \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

אז

$$P(B) = P(C) = \frac{1}{2},\; P(A) = \frac{1}{3},\; P(A \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

אבל:

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(\{2,3\}) = \frac{1}{3},\; P(B \cup C) = P(\{1,2,3,4,5\} = \frac{5}{6}.$$

תרגיל 5.

$$P = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$