פתרון דף תרגילים 11 – אלגברה לינארית ב'

1. הגורם האינווריאנטי הראשון הוא $m_1 = m$. הגורם השני m_2 חייב להיות $m_2 = x + 7$.
על כן גורמי ז'ורדן הם $m_{11} = (x + 7), m_{12} = (x - 2)^2, m_2 = x + 7$. צורת ז'ורדן:
$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
2. גורמי ז'ורדן של הע"ע 1 הם מהצורה $m_{1s} = (x-1)^{t_s}$ כאשר $m_{1r}|\dots|m_{11}$ ומכפלתם $(x-1)^2$. ישנם בדיוק שניים כאלו $m_{11} = (x-1), m_{12} = (x-1)$ או $m_{11} = (x-1)^2$.
באופן דומה גורמי ז'ורדן של -2 נקבעים ע"י הגורם זורדן הראשון של -2 למעט כאשר $m_{21} = (x+2)^2$. במצב האחרון ישנן שתי אפשרויות. סה"כ ישנן 5 אפשרויות לגורמי ז'ורדן של הע"ע -2.- מספר האפשרויות לאוסף בלוקי זורדן באופן כללי יהיה מכפלת האפשרויות לבלוקי זורדן של -2 והאפשרויות ל1 כלומר 10 אפשרויות.
3. נבצע את פעולות השורה-עמודה הבאות על $xI - A$ (משמאל לימין)
$xR_1 + R_2 \to R_2, xR_2 + R_3 \to R_3, xC_2 + C_1 \to C_1, x^2C_3 + C_1 \to C_1$
ונקבל: כי $xI - A \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ע"י החלפת סדר שורות והכפלות בסקלרים נקבל כי האחרונה שקולה ל: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$.
4. זוג מטריצות עם אותם גורמים אינווריאנטיים הינם בעלי אותם גורמי ז'ורדן. על כן מספיק להראות כי בהינתן הבלוק ז'ורדן המקסימלי של הע"ע λ, בהינתן מספר הבלוקי ז'ורדן של λ ובהינתן הריבוי האלגברי של λ שקובע את מכפלת כל בלוקי הז'ורדן של λ הבלוקי ז'ורדן של λ נקבעים באופן יחיד. עבור ריבוי אלגברי 1,2,3 ראינו כי הבלוק ז'ורדן הגדול ביותר קובע את שאר בלוקי ז'ורדן. עבור ריבוי אלגברי 4 הגורם המקסימלי קובע את שארית הבלוקים אלא אם כן $m_1 = (x-\lambda)^2$ ואז ישנן שתי אפשרויות, או $m_2 = (x-\lambda), m_3 = (x-\lambda)$ או $m_2 = (x-\lambda)^2$. שני מקרים אלו נבדלים במספר הבלוקי זורדן (הריבוי הגאומטרי) .
עבור ריבוי אלגברי 5 אם $m_1 = (x-\lambda), (x-\lambda)^4, (x-\lambda)^5$ שאר הגורמים נקבעים באופן יחיד. אם $m_1 = (x-\lambda)^2$ יש שתי אפשרויות לגורמים האחת באורך 4 והשניה באורך 3. אם $m_1 = (x-\lambda)^3$ שוב ישנן שתי אפשרויות האחת באורך 2 והשניה באורך 3.
עבור ריבוי גאומטרי 6: אם $m_1 = (x-\lambda), (x-\lambda)^5, (x-\lambda)^6$ שאר הגורמים נקבעים באופן יחיד. נפצל למקרים:
$m_1 = (x-\lambda)^2$: שלוש אפשרויות לגורמים, האחת באורך 5, השניה באורך 4 והשלישית באורך 3.
$m_1 = (x-\lambda)^3$: שלוש אפשרויות, אחת באורך 4 השניה באורך 3 והשלישית באורך 2.
$m_1 = (x-\lambda)^4$: שתי אפשרויות האחת באורך 2 והשניה באורך 3.
המסקנה היא עבור ריבוי אלגברי $6 \geq$ הגורמי ז'ורדן נקבעים ביחידות ע"י הגורם הראשון, מספר הגורמים והריבוי. כלומר כל זוג מטריצות עם אותם פ"א,פ"מ וריבויים גאומטריים מהגדלים הנתונים דומות.
5. אם N נילפוטנטית מדרגה מינימלית k אז גם N^{tr} נילפוטנטית מדרגה מינימלית k. אם כן לשתיהן יש את אותם גורמי ז'ורדן (למעשה זהו גורם אחד שכן הפ"א של N ושל N^{tr} שווים) ועל כן הן דומות. אותה מטריצה P עבורה $P^{-1}NP = N^{tr}$ מקיימת

$P^{-1}(N+\lambda I)P = N^{tr} + \lambda I = (N+\lambda I)^{tr}$. ולכן כל בלוק ז'ורדן דומה לשחלוף שלו (ל-transpose שלו).
כעת אם A דומה ל-B אשר בצורת זורדן אז A^{tr} דומה ל-B^{tr}. אך כמסקנה מהפסקה הקודמת B דומה ל-B^{tr}. סך הכל A דומה ל-A^{tr}.