מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 1

1 חזרה על תורת הקבוצות

1.1 פעולות בסיסיות על קבוצות

הגדרה 1.1 תהא X קבוצה. נסמן ב־$\mathcal{P}(X)$ (או ב־2^X) את קבוצת החזקה של X.

$$\mathcal{P}(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$$

איחוד: $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$. באותו אופן, אם $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ אז

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \,|\, \exists A \in \mathcal{A},\, x \in A\}$$

חיתוך: $A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$. באותו אופן, אם $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ אז

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \,|\, \forall A \in \mathcal{A},\, x \in A\}$$

(כאשר אם $\mathcal{A} = \emptyset$ אז אנחנו מבינים $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$)
משפחה של תתי קבוצות תסומן $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ (כלומר פונקצית אינדקס $f : \Lambda \to \mathcal{P}(X)$, עבורה $f(\alpha) = A_\alpha$). במקרה כזה את האיחוד והחיתוך ניתן לכתוב באופן הבא: $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha, \bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$.
הפרש: $A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$.
משלים: $A^c = X \setminus A$.

תכונות:

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \setminus B = A \cap B^c$
3. כללי דה־מורגן (De Morgan's laws):

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c = \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c$$
$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)^c$$

הגדרה 1.2 תהא $f: X \to Y$ פונקציה, נגדיר עבור $B \subseteq Y$ את התמונה ההפוכה שלה ב־X ע"י: $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.
ועבור $A \subseteq X$ את התמונה שלה ע"י $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

תכונות התמונה ההפוכה:

1. $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$ (כנ"ל עבור איחודים של יותר משתי קבוצות)
2. $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$ (כנ"ל עבור חיתוכים של יותר משתי קבוצות)
3. $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

1.2 עצמה של קבוצה

תהיינה A, B שתי קבוצות. נאמר שהן בעלות אותה עצמה (ונסמן $|A| = |B|$) אם קיימת פונקציה $f: A \to B$ חח"ע ועל.
נאמר ש־A בעלת עצמה קטנה או שווה לעצמת B אם קיימת $f: A \to B$ חח"ע (ונסמן $|A| \leq |B|$)

משפט 1.3 (קנטור־ברנשטיין) אם $|A| \leq |B|$ וגם $|B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$

דוגמאות:

1. אם $|A| = |\mathbb{N}|$ אז אומרים ש־A בת מנייה (אינסופית) ומסמנים $|A| = \aleph_0$. למשל $\mathbb{Q}$ היא בת מנייה.
כמוכן, איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא בן מנייה, כלומר אם $\mathcal{A}$ בת מנייה, וכל $A \in \mathcal{A}$ היא בת מנייה אזי $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ בת מנייה.
2. לעצמת $\mathbb{R}$ קוראים עצמת הרצף ומסמנים $|\mathbb{R}| = \aleph$. מתקיים $2^{\aleph_0} = \aleph$ (כלומר $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph$)

2 דוגמאות למרחבים מטריים

הגדרה 2.1 מרחב מטרי הוא הזוג (X, d) כאשר X היא קבוצה לא ריקה, ופונקציה $d: X \times X \to [0, \infty)$ (לפעמים ל־$[0, \infty]$) הנקראת מטריקה ומקיימת:
1. $x = y \iff d(x, y) = 0$
2. סימטריות: $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
3. אי שיוויון המשולש: $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

דוגמאות:

1. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט וקשיר. נבחר $X = V$, ואת המטריקה נגדיר באופן הבא: $d(x, y)$= אורך המסלול הקצר ביותר בין x ל־y. כלומר,
$$d(x, y) = min\left\{ n \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists x_0, x_1, ..., x_n \in V,\ x_0 = x,\ x_n = y \\ \forall 1 \leq i \leq n \{x_{i-1}, x_i\} \in E \end{array} \right\}$$
נוכיח במהירות שזאת אכן מטריקה: 1. ו־2. בקצרה.
הוכחת 3 בציור.

הערה: ניתן להוסיף פונקצית משקל על הצלעות E (כלומר $\lambda : E \to (0,\infty)$) ואז אורך של מסלול $P = (e_1, ..., e_n)$ (צלעות המסלול) יחושב על ידי סכימת המשקלים:

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(e_i)$$

ו־$l(\emptyset_x) = 0$ (האורך של המסלול הריק = מסלול שמחבר את הנקודה x לעצמה) והמטריקה תוגדר להיות

$$d(x,y) = \inf\{l(P) | P \text{ is a path connecting } x \text{ and } y\}$$

במקרה זה d היא פסאודו־מטריקה (pseudometric) כלומר מקיימת את האקסיומות של מטריקה פרט ל־$d(x,y) = 0 \implies x = y$ (אי־שלילית, $d(x,x) = 0$, סימטרית ומקיימת את אי שיוויון המשולש - אבל, אולי לא מפרידה נקודות). ציור דוגמאות בהם d היא פסאודומטריקה ולא מטריקה (וכדורים פתוחים).
יש תנאים שיבטיחו ש־d היא מטריקה כמו למשל אחד מהבאים:

(א) חסימות מלמטה של פונקציית האורך
(ב) הגרף הוא עץ
(ג) הגרף הוא סופי מקומי

2. נגדיר מטריקה חדשה על $X = \mathbb{R}^2$, באופן הבא:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

ציור של המטריקה, וכדורים פתוחים.
הוכחה שזאת אכן מטריקה (תרגיל)

2.1 מרחבים נורמיים ומרחבי מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$

הגדרה 2.2 מרחב נורמי הוא הזוג $(V, \|\cdot\|)$, כאשר Vהוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, והפונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$נקראת נורמה ומקיימת:

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. הומוגניות: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V,\ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3. אי שיוויון המשולש: $\forall x,y \in V,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

דוגמאות:

המרחב $V = \mathbb{R}^n$ והנורמות הבאות:

1. $\|(x_1, ...x_n)\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$
2. $\|(x_1, ...x_n)\|_\infty = max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$
3. $\|(x_1, ...x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$
4. $\|(x_1, ...x_n)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}$ עבור $p > 1$