# תורת ההסתברות 104222 ־ תרגיל 2

15 בנובמבר 2016

**יש להגיש את התרגיל עד יום שלישי ה־ 29 לנובמבר.**

1. לחברות התעופה ידוע שנוסע שהזמין מקום בטיסה לא יופיע אליה בסיכוי $0.1$ (באופן בלתי תלוי בנוסעים האחרים). לכן, הן נוהגות לאשר יותר הזמנות ממספר המקומות בטיסה. חברה א' מאשרת 10 הזמנות לטיסה שיש בה 9 מקומות. חברה ב' מאשרת 20 הזמנות לטיסה שיש בה 18 מקומות. למי מהחברות, ההסתברות שלא תוכל להטיס את כל הנוסעים שיופיעו גבוהה יותר?

2. כל אחד מ־ $2n$ לקוחות מחליט לקבל הצעה של חברת ביטוח בהסתברות $0 < \alpha < 1$ ולדחות אותה בהסתברות $1 - \alpha$. לקוח שהחליט לקבל את ההצעה בוחר באקראי אחת מ־ $3n$ תחנות השירות של החברה וניגש אליה להירשם. ההחלטות של הלקוחות והבחירות של תחנות השירות הן בלתי תלויות. וההסתברות של כל אחד מהלקוחות לבחור כל אחת מהתחנות היא זהה. בהנחה ש־ $n$ גדול, מהי בקירוב ההסתברות שלתחנה נתונה ייגשו יותר מ־ 2 לקוחות?

3.
   (א) יהיו $p, q \in (0,1)$. שתי שחקניות (שחקנית א' ושחקנית ב') זורקות חץ למטרה קטנה בתורות. בכל פעם ששחקנית א' זורקת חץ הסיכוי שהיא תפגע במטרה הוא $p$. בכל פעם ששחקנית ב' זורקת חץ הסיכוי שהיא תפגע במטרה הוא $q$. הניחו כי התוצאות בזריקות שונות הן בלתי תלויות. שחקנית א' משחקת ראשונה. השחקנית הראשונה לפגוע במטרה מנצחת. הראו כי ההסתברות ששחקנית א' מנצחת היא $\frac{p}{1-(1-p)(1-q)}$.

   (ב) (סעיף רשות) זורקים מטבע (לא בהכרח הוגן) שוב ושוב. ההסתברות לעץ בכל הטלה היא $p$ וההסתברות לפלי היא $1 - p$, כאשר $p \in (0,1)$. רצף באורך $r$ של עצים הוא סדרה של $r$ הטלות עץ ברצף. למשל, אם התוצאה היא $H, H, T, T, H, T, H, T, T, H, H, H, T, H, H, H, H, H, H, T, \ldots$, אז רצף באורך $6$ של עצים התרחש החל מההטלה ה־ 14. חשבו את ההסתברות שרצף עצים באורך $r$ יתקבל לפני רצף פליים באורך $s$. (רמז: נתחו את הבעיה באופן שיאפשר להשתמש בנוסחה מהסעיף הקודם).

4.
   (א) הראו כי $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. רמז: את אגף שמאל ניתן לכתוב כ־ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

   (ב) שני אנשים זורקים מטבע הוגן $n$ פעמים כל אחד. מהי ההסתברות שהם יקבלו את אותו המספר של עצים?

(ג) נסמן ב־ $p_n$ את ההסתברות בסעיף הקודם. נוסחת סטירלינג גורסת כי $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ כאשר $n \to \infty$. השתמשו בנוסחה על מנת על מנת לחשב את $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} p_n$.

5. נסמן ב־ $X_n$ את מספר נקודות השבת בפונקציה חד חד ערכית מקרית על $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ הנבחרת באופן אחיד. בתרגיל הקודם, הראיתם כי

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 0) = e^{-1}.$$

השתמשו בעובדה זאת על מנת להראות כי

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

רמז: אם $A$ הוא המאורע כי $1, 2, \ldots, k$ הן נקודות שבת של $g$ ו־ $B$ הוא המאורע של־ $g$ יש בדיוק $k$ נקודות שבת, אז $\mathbf{P}(B|A)$ היא ההסתברות שבפונקציה חח"ע מ־ $\{k+1, k+2, \ldots n\}$ ל־ $\{k+1, k+2, \ldots n\}$ אין נקודות שבת.

6. מקלט מפעיל 3 אנטנות הפועלות באופן בלתי תלוי אחת בשנייה. כל אנטנה קולטת ביט (ספרה 0 או 1) נכון בהסתברות 0.75 ולא נכון (הופכת את הביט) בהסתברות 0.25. מחשב מקבל מהמקלט את הביט בהצלחה אם הוא נקלט נכון בלפחות שתיים מהאנטנות (אחרת הוא מקבל ביט שגוי).

(א) נסמן ב־ $X$ את מספר האנטנות שקלטו נכון את הביט. חשבו את $\mathbf{P}(X = k)$ לכל ערך אפשרי של $k$.

(ב) מהי ההסתברות שהמחשב יקלוט את הביט נכון?

(ג) משדרים שמונה ביטים באופן בלתי תלוי. נסמן ב־ $Y$ את מספר הפעמים שהמחשב קלט ביט שגוי. חשבו את $\mathbf{P}(Y = k)$ לכל ערך אפשרי של $k$.

(ד) מבצעים כעת סדרת ניסויים בלתי תלויים זה אחר זה. נסמן ב־ $Z$ את מספר הניסוי שבו אירעה טעות בקליטה. חשבו את $\mathbf{P}(Z \le 10)$ (רמז: יש דרך טובה יותר מאשר לסכם 10 ביטויים).

7. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ מרחב הסתברות ו־ $X : \Omega \to \mathbb{R}$. זכרו כי ההתפלגות של $X$, המסומנת על ידי $\mathbf{P}_X$, היא פונקציה על תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$\mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X \in A) \equiv \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \,:\, X(\omega) \in A\}).$$

הראו כי $\mathbf{P}_X$ מקיימת את התכונות של פונקציית הסתברות.

8. (שאלת רשות) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ מרחב הסתברות. קבוצת מאורעות $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ נקראת $k$־בלתי תלויה אם כל $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ כך ש־ $|\mathcal{A}| \le k$ היא בלתי תלויה. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$, קיים מרחב הסתברות ובו אוסף של $n$ מאורעות $\mathcal{B}$, כך ש־ $\mathcal{B}$ היא $(n-1)$ בלתי תלויה אבל $\mathcal{B}$בעצמה אינה בלתי תלויה.