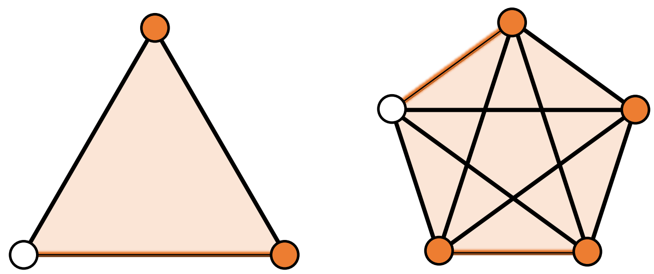
24/05/2016

קומבינטוריקה – הרצאה #9

הגדרה: קב' C של קדקודים בגרף $G=(V,E)$ נקראת **כיסוי** אם לכל צלע ב-E יש לפחות קדקוד אחד ב-C. נסמן ע"י $\tau(G)$ את **מספר הכיסוי** של G. כלומר הגודל המינימלי של כיסוי ב-G.

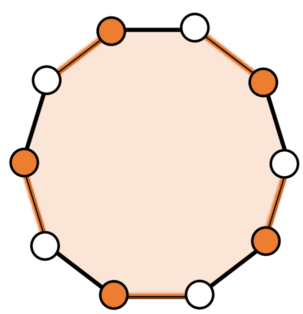
דוגמאות:

(1) נתבונן בגרף השלם K_n על n קדקודים, n מס' טבעי.



$$\nu(K_n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\qquad \tau(K_n)=n-1$$

(2) נתבונן במעגל C_n על n קדקודים $n\geq 3$.



$$\nu(C_n)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\qquad \tau(C_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$$

טענה: בכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים:

$$\nu(G)\leq\tau(G)$$

הוכחה: עלינו להראות שלכל זיווג M ולכל כיסוי C גרף G מתקיים $|M|\leq|C|$. כדי להראות זאת, יהי M זיווג ויהי C כיסוי. C חייב, בפרט, להכיל קדקוד מכל צלע ב-M. מכיוון ש-M זיווג, קדקודים אלה שונים זה מזה. לכן בהכרח $|C|\geq|M|$ כנדרש.

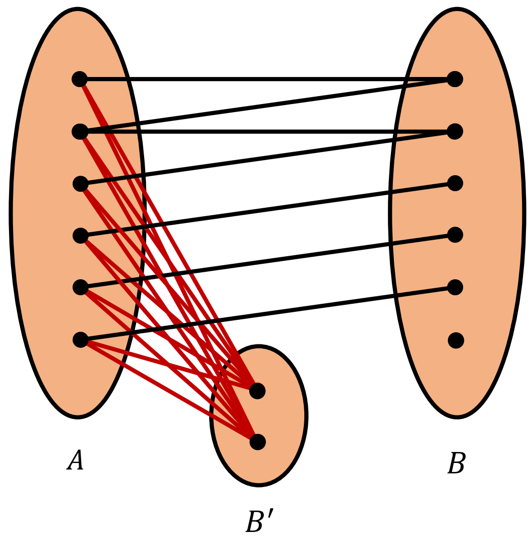
משפט (König): בכל גרף דו-צדדי מתקיים ש-$\nu(G)=\tau(G)$.

הוכחה: יהי $G=(A,B,E)$ גרף דו-צדדי. נסמן $h=\max\{|S|-|N(S)|:\ S\subseteq A\}$. זהו הגרעון הכי גדול בתנאי משפט Hall. המשפט ינבע משתי הטענות הבאות שנוכיח:

(א) $\nu(G)\geq|A|-h$

(ב) $\tau(G) \le |A| - h$

נוכיח את טענה **(א)**: צריכים להראות שקיים זיווג M כך ש-$|M| \ge |A| - h$. לשם כך נתבונן בבעיית החתונה המתקבלת מן הגרף G ע"י הוספת h בחורות חדשות.



$$|B'| = h$$

כלומר, אנו מתבוננים בגרף הדו-צדדי $G' = (A, B \cup B', E')$, כאשר:

$$B \cap B' = \emptyset, \qquad |B'| = h, \qquad E' = E \cup \big\{\{x, y\}: x \in A, y \in B'\big\}$$

בגרף G' מתקיים התנאי של משפט Hall, כי לכל $\emptyset \ne S \subseteq A$:

$$|S| - |N(S)| \le h$$

ולכן:

$$|N'(S)| = |N(S)| + h \ge |S| - h + h = |S|$$

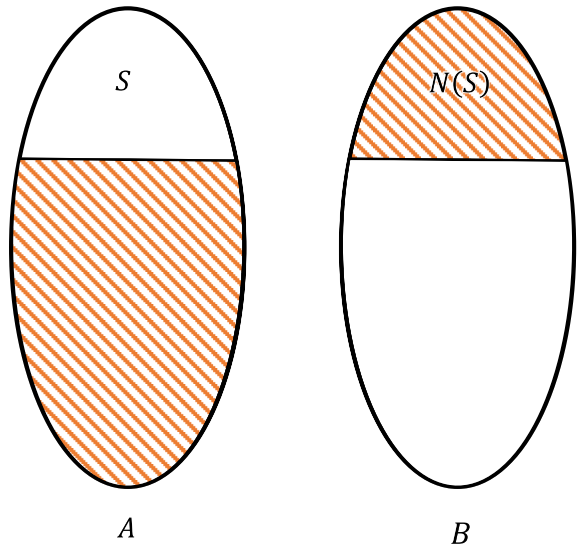
לכן, לפי משפט Hall, קיים בגרף G' זיווג M' בגודל $|A|$. ב-M' יש לכל היותר h צלעות שאינן ב-E. אחרי שנוציא אותן מ-M', נשאר עם זיווג M בגרף המקורי G שגודלו לפחות $|A| - h$, כנדרש.

הוכחת טענה **(ב)**: עלינו להראות שקיים כיסוי C בגרף G כך ש-$|C| \le |A| - h$. לשם כך נתבונן בתת-קבוצה $S \subseteq A$ עבורה מתקבל המקס' בהגדרת h. כלומר:

$$|S| - |N(S)| = h$$

כעת נתבונן בקב'

$$C = (A \setminus S) \cup N(S)$$



אז C היא כיסוי בגרף G, כי אם צלע יוצאת מ-$S \setminus A$, אז היא מכוסה שם, ואם היא יוצרת מ-S, אז היא בהכרח מגיעה לתוך $N(S)$, ולכן מכוסה שם. כמו כן,

$$|C| = |A| - |S| + |N(S)| = |A| - h$$

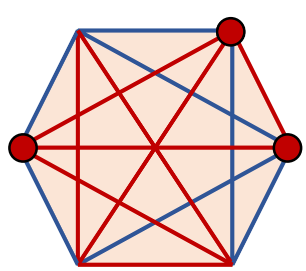
ולכן מצאנו כיסוי C כנדרש.

משפט רמזי

נתבונן ב**טענה** הבאה: בכל קב' של 6 בני אדם, או שיש 3 בני אדם שכל שנים ממהם מכירים זה את זה, או שיש 3 בני אדם שכל שנים מהם אינם מכירים זה את זה. נכתוב את אותה הטענה בניסוח של גרפים:

טענה: לכל צביעה של הצלעות של K_6 בכחול ובאדום, או שקיים K_3 שכל צלעותיו כחולות, או שקיים K_3 שכל צלעותיו אדומות.

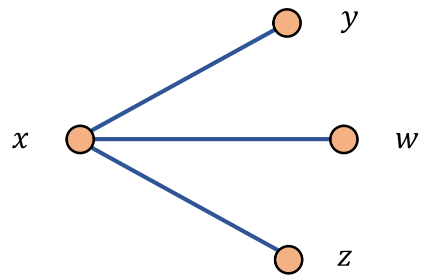
דוגמא:



הוכחה: תהי נתונה צביעה כזו. נתבונן בקדקוד מסוים x. יוצאות ממנו 5 צלעות. כל אחת מהן צבועה בכחול או באדום. לפי עקרון שובך היונים, אחד מהבאים קורה:

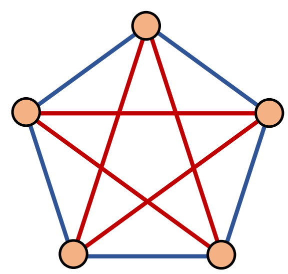
(א) לפחות 3 מהצלעות היוצאות מ-x כחולות.
(ב) לפחות 3 מהצלעות היוצאות מ-x אדומות.

נניח תחילה שקורה מקרה **(א)**.



יהיו y, z, w 3 קדקודים המחוברים ל-x בצלעות כחולות. אם לפחות אחת מהצלעות בתוך $\{y, z, w\}$ היא כחולה, אז שני הקדקודים שלה יחד עם x נותנים K_3 שכולו כחול. אחרת, כל הצלעות בתוך $\{y, z, w\}$ הן אדומות, וזה נותן K_3 שכולו אדום.
נניח תחילה שקורה מקרה **(ב)**, אז הטיעון עובד בחילופי שני הצבעים.

הערה: הטענה אינה נשארת נכונה אם מתחילים עם K_5 במקום K_6. למשל:



הגדרה: יהיו $k, l, n \in \mathbb{N}$. אנו אומרים שלמספר n יש **התכונה** $\boldsymbol{R(k, l)}$ אם לכל צביעה של הצלעות של K_n בכחול ובאדום, או שיש K_k שכל צלעותיו כחולות, או שיש K_l שכל צלעותיו אדומות.

הערה: הטענה שהוכחנו קודם אמרה שלמספר 6 יש התכונה $R(3,3)$, וההערה אחרי הטענה אמרה שלמספר 5 אין התכונה $R(3,3)$.

הערה: אם למספר n יש התכונה $R(k, l)$, אז לכל מס' $m \geq n$, יש התכונה $R(k, l)$, לכן, בהינתן $k, l \in \mathbb{N}$, שתי השאלות המעניינות הן:

(א) האם בכלל קיים n טבעי בעל התכונה $R(k, l)$?
(ב) אם כן, מהו ה-n הקטן ביותר בעל התכונה הזו?

סימון: אם עבור k, l מסוימים קיים n בעל התכונה $R(k, l)$, אז נסמן ע"י $\boldsymbol{r(k, l)}$ את ה-n הקטן ביותר בעל התכונה הזו. במקרה זה נגיד גם ש-$r(k, l)$ קיים.

הערה: במונחים אלה, מה שראינו קודם אומר ש-$r(3,3)$ קיים ו-

$$r(3,3) = 6$$