מד"ר לינארית מסדר n

הקדמה

הגדרה: מד"ר לינארית מסדר n היא משוואה מהצורה

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n היא משוואה מהצורה

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

מד"ר לינארית מנורמלת מסדר n היא מד"ר מהצורה

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

תנאי התחלה עבור מד"ר לינארית מסדר n הוא מהצורה

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y_1 \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

הערות: 1. תנאי התחלה הוא אחד. אלו לא תנאיי התחלה. תנאי התחלה אחד מורכב מ־n תנאים אבל תנאי ההתחלה הוא אוסף התנאים הללו.
2. הנקודה x_0 חייבת להופיע בכל אחד מהתנאים בתנאי ההתחלה.

תרגיל: הראו כי e^x פתרון של המד"ר $y'' + (x-1)y' - xy = 0$ והראו כי x אינו פתרון של המד"ר.
פתרון: נציב את e^x לתוך המד"ר

$$(e^x)'' + (x-1)(e^x)' - xe^x = e^x + (x-1)e^x - xe^x = e^x(1 + x - 1 - x) = e^x \cdot 0 = 0$$

ולכן e^x הוא פתרון של המד"ר על כל הישר.
נציב את x ולמד"ר ונקבל

$$(x)'' + (x-1)(x)' - x \cdot x = 0 + (x-1) - x^2 = -x^2 + x - 1$$

כיוון ש־ $-x^2 + x - 1$ הוא פולינום עם שני שורשים לכל היותר, אין הוא שווה לאפס על איזשהו קטע ולכן אינו פתרון.

משפט (לינאריות או עקרון הסופרפוזיציה): יהי $y_1(x)$ פתרון של

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

ויהי $y_2(x)$ פתרון של

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

אז $ay_1(x) + by_2(x)$ פתרון של המד"ר

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = af(x) + bg(x).$$

הוכחה: כיוון ש־y_1 פתרון של המד"ר הראשונה אזי

$$a_n(x)y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) = f(x)$$

וכיוון ש־y_2 פתרון של המד"ר השניה אזי

$$a_n(x)y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x) = g(x).$$

נציב את $ay_1(x) + by_1(x)$ לתוך צד שמאל של המד"ר

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = af(x) + bg(x).$$

ונקבל

$$\begin{aligned}
& a_n(x)\big(ay_1(x) + by_1(x)\big)^{(n)} + a_{n-1}(x)\big(ay_1(x) + by_1(x)\big)^{(n-1)} + \cdots + \\
+ \quad & a_1(x)\big(ay_1(x) + by_1(x)\big)y' + a_0(x)\big(ay_1(x) + by_1(x)\big) = \\
= \quad & a_n(x)\big(ay_1^{(n)}(x) + by_2^{(n)}(x)\big) + a_{n-1}(x)\big(ay_1^{(n-1)}(x) + by_2^{(n-1)}(x)\big)^{(n-1)} + \cdots + \\
+ \quad & a_1(x)\big(ay_1'(x) + by_2'(x)\big)y' + a_0(x)\big(ay_1(x) + by_2(x)\big) = \\
= \quad & a\Big(a_n(x)y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x)\Big) + \\
+ \quad & b\Big(a_n(x)y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x)\Big) = af(x) + bg(x)
\end{aligned}$$

וקיבלנו את צד ימין ולכן סיימנו ■

<u>מסקנה:</u> אם $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של מד"ר לינארית מסדר n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

אז $y_1(x) - y_2(x)$ פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

<u>הוכחה:</u> לפי המשפט הקודם נובע כי $y_1(x) - y_2(x)$ פתרון של המד"ר

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) - f(x) = 0.$$

■

<u>מסקנה:</u> תהי

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n. אזי קבוצת כל הפתרונות היא מרחב ווקטורי.

<u>הוכחה:</u> לפי המשפט הקודם נובע כי אם $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

אזי $ay_1(x) + by_2(x)$ פתרון של המד"ר

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

■

שתי מסקנות אלו מובילות אותנו למסקנה החשובה הבאה: ידיעת הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית המתאימה, שנסמנו ע"י y_H (עבור $Homogeneous$), וידיעת פתרון פרטי <u>אחד</u> של האי־הומוגנית, שנסמנו y_p (עבור $particular$), נותן לנו את הפתרון הכללי של המד"ר האי־הומוגנית בצורה הבאה: כל פתרון של המד"ר האי הומוגנית הוא מהצורה $y = y_H + y_p$. למה? כי אם $y(x)$ פתרון של המד"ר האי־הומוגנית, אזי $y - y_p$ פתרון של המד"ר ההומוגנית, כלומר $y - y_p = y_H$ ולכן $y = y_H + y_p$.

מצד שני, כל ביטוי מהצורה $y_H(x) + y_p(x)$ הוא פתרון של המד"ר האי הומוגנית, כי

y_H פותר את $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

ו־y_p פותר את $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$

ולכן הסכום שלהם $y_H(x) + y_p(x)$ פותר את

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 + f(x) = f(x).$$

לסיכום, <u>כל</u> פתרון של המד"ר האי־הומוגנית הוא מהצורה $y_H + y_p$, ולכן כדי לפתור מד"ר אי־הומוגנית, נפתור את המד"ר ההומוגנית בצורה מלאה, ואז נמצא פתרון <u>אחד</u> של המד"ר האי־הומוגנית. לכן קודם נראה שיטות לפתרון מלא של מד"ר הומוגניות, ואז נראה שיטות למציאת פתרון פרטי.

משפט קיום ויחידות עבור מד"ר לינארית מנורמלת מסדר n:

נניח כי הפונקציות $a_0(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ רציפות בקטע I ויהי $x_0 \in I$.
אזי למד"ר המנורמלת $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ ביחד
עם תנאי התחלה

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y_1 \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

יש פתרון יחיד המוגדר על כל I.