1. דרך א:

יש סה"כ 256 תת-קבוצות ל-$\{1,...,8\}$. מתוכן יש לחסר 16 תת-קבוצות ללא איבר זוגי ו-16 תת-קבוצות ללא איבר אי-זוגי. את הקבוצה הריקה חיסרנו פעמיים, לכן נוסיף אותה (יש פה מקרה פשוט של עקרון ההכלה וההדחה שהקדים את זמנו), ונקבל

$256-16-16+1=225$

דרך ב:

כדי לבחור קבוצה כזו, למעשה יש לבחור תת-קבוצה לא ריקה של $\{2,4,6,8\}$ ותת-קבוצה לא ריקה של $\{1,3,5,7\}$. לפי עקרון הכפל מקבלים

$15*15=225$

2. השאלה שקולה לשאלה "כמה תמורות יש ל-$\{2,...,7\}$?". שאת תשובתה אנו יודעים: $6!=720$.

הוכחה שזו באמת שאלה שקולה: נסמן ב-A את קבוצת התמורות של $\{2,...,7\}$ ונסמן ב-B את הקבוצה המבוקשת (תמורות של $\{1,…,7\}$ כש-1 בסוף). נגדיר פונקציה F מ-A ל-B באופן הבא: F שולחת כל תמורה של $\{2,…,7\}$ לתמורה של $\{1,…,7\}$ ע"י הוספת 1 בסופה. למשל: $F(4,2,7,6,3,5)=4,2,7,6,3,5,1$. לכל איבר ב-B יש איבר אחד ויחיד ב-A הנשלח אליו ע"י F. זהו האיבר שיתקבל אם נשמיט את ה-1 בסוף. לכן F חח"ע ועל ומכאן ש-$720=|A|=|B|$.

3. המספר 2 צריך להופיע אחרי 1, לכן ה-4-תמורה חייבת להיות מאחת משלוש הצורות הבאות:

1,2,i,j

i,1,2,j

i,j,1,2

בכל אחד מהמקרים יש 5 אפשרויות לבחור את i (מתוך $\{3,…,7\}$) ו-4 אפשרויות לבחור את j ולכן סה"כ מספר האפשרויות לפי עקרון הכפל הוא

$3*5*4=60$

4. דרך א:

יש 9 אפשרויות לבחור את הספרה הראשונה (לא 0), יש 9 אפשרויות לבחור את הספרה השניה (לא כמו הראשונה), יש 8 אפשרויות לשלישית (לא כמו הראשונה או השנייה), ובאותו אופן 7 לרביעית ו-6 לחמישית וסה"כ לפי עקרון הכפל מספר האפשרויות הוא:

$9*9*8*7*6=27216$

4. דרך ב:

שאלה שקולה: כמה 5-תמורות של $\{0,...,9\}$ לא מתחילות ב-0 ?

יש סה"כ $10!/5!=30240$ 5-תמורות של $\{0,...,9\}$ ומתוכן יש $9!/5!=3024$ שמתחילות ב-0 (כמספר ה-4-תמורות של $\{1,...,9\}$)

לכן התשובה היא:

$30240-3024=27216$

5. מחלקים ל-6 מקרים:

מקרה I) ילד א מקבל את שני הכדורים הזהים.

יש 7 אפשרויות לבחור את הכדור השלישי שמקבל ילד א. מבין 6 הכדורים הנותרים צריך לבחור 3 שיקבל ילד ב, וזה כבר קובע מה יקבל ילד ג. לכן סה"כ אפשרויות במקרה זה:

$$7\binom{6}{3}=140$$

מקרה II) ילד ב מקבל את שני הכדורים הזהים.

משיקולים דומים למקרה I), גם פה יש 140 אפשרויות.

מקרה III) ילד ג מקבל את שני הכדורים הזהים.

שוב, מאותם שיקולים, 140 אפשרויות.

מקרה IV) ילדים א ו-ב מקבלים את שני הכדורים הזהים.

צריך לבחור שניים מ-7 הכדורים השונים שיקבל ילד א ו-2 מ-5 הנותרים שיקבל ילד ב, וזה כבר קובע מה יקבל ילד ג. לכן סה"כ אפשרויות במקרה זה:

$$\binom{7}{2}\binom{5}{2}=210$$

מקרה V) ילדים א ו-ג מקבלים את שני הכדורים הזהים.

משיקולים דומים למקרה V), גם פה יש 210 אפשרויות.

מקרה VI) ילדים ב ו-ג מקבלים את שני הכדורים הזהים.

שוב, מאותם שיקולים, 210 אפשרויות.

כל המקרים זרים, כלומר לא יתכן ששניים מהמקרים יקרו בעת ובעונה אחת, וכמו-כן, קל להשתכנע שאלה כל המקרים האפשריים, לכן לפי עקרון החיבור מספר האפשרויות בסה"כ הוא

$140+140+140+210+210+210=1050$

6. ישנם $(4-1)!=6$ אפשרויות לסידור הרביעייה. מכיוון שהמספר קטן, נוכל לצייר את כולם. קל לבדוק שמבין שש האפשרויות, בדיוק 4 עומדות בתנאי השאלה.

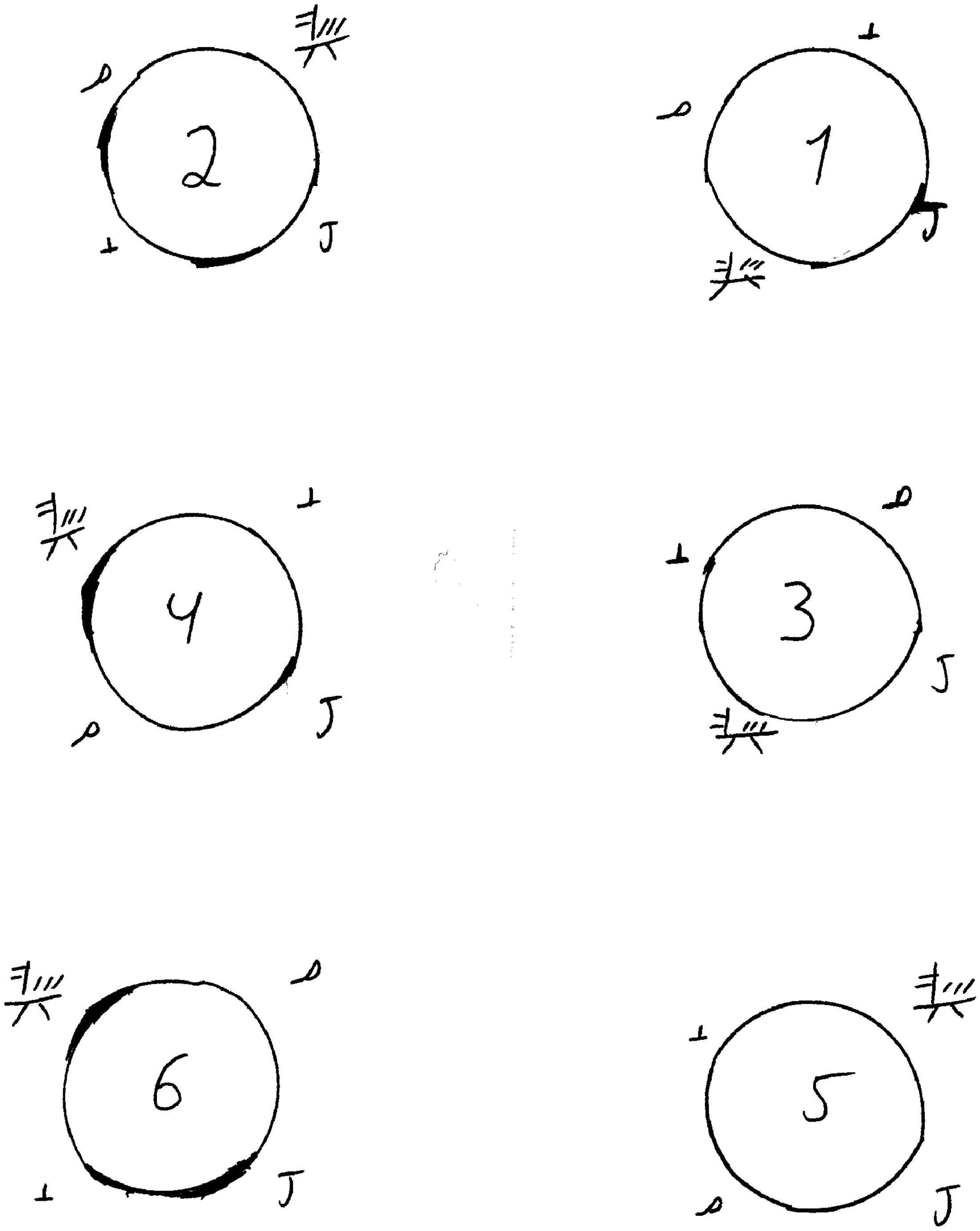
מקרא:

⊥ יוסי

מוחמד

J ג'ניפר

קאי לינג



7. בעיה שקולה היא בחירת תת-קבוצה של קבוצת 2n+1 הכדורים השונים בגודל n לכל היותר. נסמן ב- A את קבוצת 2n+1 הכדורים השונים, נסמן ב- X את קבוצת התת-קבוצות של A בגודל n לכל היותר, ונסמן ב- Y את קבוצת התת-קבוצות של A בגודל יותר מ-n. תהי F פונקצית המשלים ל- A, כלומר לכל קבוצה B ב- X, נגדיר את F(B) כקבוצת כל הכדורים שנמצאים ב- A ולא נמצאים ב- B. קל להיווכח ש- F פונקציה חח"ע מ- X על Y ולכן |X|=|Y|. כמו-כן, X ו- Y זרות ובאיחודן נמצאות כל התת-קבוצות של A ולכן לפי עקרון החיבור

$$|X|+|Y|=2^{2n+1}$$

ולכן

$$|X|=\frac{2^{2n+1}}{2}=2^{2n}=4^{n}$$

וזו התשובה לשאלה.