משוואות דיפרנציאליות רגילות - א'

מרצה: פרופ' אלכסנדר נפומניאשצי

2 בפברואר 2012

(לתיקונים והערות מייל: sidan@tx.tehcnion.ac.il)
שעות קבלה: ב' $30:15-30:14$.ד' $30:15-30:14$. טל' 8294170 ח' 926 .

hepom@tx.technion.ac.il

עבודת בית 10% מגן. בוחן אמצע 25% מגן. בחינה סופית 65%
מד"ר
←פתרון בעיות במדעי הטבע(פיזיקה,כימיה)
←מתמטיקה שימושית
←מערכות דינמיאות
←מד"ח - משוואות דיפרנציאליות בכמה נעלמים.
מד"ר מטפלות בפונקציות בנעלם אחד.

תוכן עניינים

1 משוואות

אלגבריות $f(x)=0$, מציאת שורשי פונקציה. $x=x_0$. $f(x_{\to param}, y_{\to vari})=0$. פתרון $y=g(x)$.

דיפרנציאבליות רגילות:

$$F(x,y(x),y'(x)...y^n(x))=0$$

$n\geq 1$, nייקרא סדר או מעלות המשוואה.
*ייתכן ויהיה נתון תחום ההגדרה של הפונקציה $y(x)$: $a<x<b$
*פיתרון המשוואה היא פונקציה הגזירה nפעמים ברציפות, $y\in C^n$.

מד"ר **לינאריות**

F- פונקציה לינאריות ביחס ל $y^n(x),...,y(x)$.

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{n-1}+..+a_n(x)y(x)-b(x)=0$$

אם $b(x)\equiv 0$ המשוואה נקראת לינאריות הומגנית. אם $b\neq 0$ המשוואה נקראת לינארית בלתי הומגנית.

1.1 דוגמאות :

1. $\begin{matrix} y'=0; \\ -\infty<x<\infty \end{matrix}$. פתרון כללי - $y=Const$. זוהי משפחה חד פרמטרית. אוסף כל הפתרונות נקרא פתרון כללי למשוואה, כל איבר בקב, הפתרונות נקרא פתרון פרטי .פתרונות פרטיים: $y=1,y=2.6$. (פתרון כללי - אוסף של כל הפתרונות.)

2. חוק שני של ניוטון, $ma=f$. נתבונן במשוואת מרחק ביחס לזמן $y(t)$. $\begin{matrix} y'(t)=v(t) \\ y''(t)=a(t) \end{matrix}$.
$my''(t)=f(t,y'(t),y''(t))$.
לדוג' משוואה מסדר שני, נפילה חופשית:

$$\begin{gathered} my''(t)=-mg,(t>t_0) \\ v(t)=y'(t) \\ v'(t)=y''(t)=-g \\ \Rightarrow v'(t)=-g \\ \int v'(t)dt=-\int gdt+\mathrm{C}_1 \\ \int dv=-gt+\mathrm{C}_1 \\ v(t)=-gt+\mathrm{C}_1 \\ \Rightarrow y'(t)=-gt+\mathrm{C}_1 \\ \int \Rightarrow y(t)=-\frac{gt^2}{2}+C_1\cdot t+C_2 \end{gathered}$$

זהו פתרון כללי. נמצא פתרון פרטי בעזרת תנאי התחלה.

$$y(t_0) = y_0$$
$$y'(t_0) = v_0$$

באופן כללי, בעיות מסוג זה יקראו **בעיות תנאי התחלה**. כעת, נפתור ב־2 שלבים:
1) נפתור ונגיע לפיתרון כללי
2)נציב תנאי התחלה בפיתרון ונמצא את הקבועים.
אז נמשיך בהצבת תנאי התחלה, ונקבל:

$$y(t_0) = -\frac{gt_0^2}{2} + C_1 \cdot t_0 + C_2$$
$$y_0 = -\frac{gt_0^2}{2} + C_1 \cdot t_0 + C_2$$
$$C_1 = v(t) + gt,$$
$$C_2 = y(t) + \frac{gt^2}{2} + C_1 \cdot t = y(t) + \frac{gt^2}{2} - (v(t) + gt,) \cdot t$$

ונקבל את הפיתרון הפרטי.

$$y(t) = -\frac{gt}{2} + (v_0 + gt_0) \cdot t + y_0 - v_0 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$$

וזהו פתרון של בעייה פרטית.

3. משוואת התפתחות בקטריות.

$$y'(t) = r \cdot y(t);\ t > 0;$$
$$y(0) = y_0 \geq 0$$

נחלק לשני מקרים. מקרה מיוחד $y(t) \equiv 0 \Leftarrow$

$$y(t) = 0 \Rightarrow y'(t) = 0$$

אחרת, $\int \frac{y'(t)dt \to dy}{y(t)} = \int r$,$\frac{y'(t)}{y(t)} = r \Leftarrow y(t) \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y} = rt$$
$$lny = rt + C$$
$$y(t) = e^{rt+C}$$
$$y(t) = C_1 \cdot e^{rt}; (C_1 > 0)$$

זהו פתרון כללי. נשים לב שניתן להוסיף את הפתרון המיוחד שמצאנו למשפחה, ע"י הגדרת C_1

להיות שווה לאפס.
נציב תנאי התחלה:

$$y(0) = y_0, y_0 \geq 0$$
$$y(0) = e_1 e^0 = e_1 = y_0$$
$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

(גרף)

1.2 משמעות גאומטרית(ווקטורית) שקולה.

יש לבנות גרף עקום. כך ששיפוע המשיק בכל נק' יהיה שווה לערך $f(x,y)$ מסויים בכל נק' (x,y).
תנאי התחלה עובר על הגרף בנק (x_0, y_0).
דוג' לבעייה הפוכה: מצא משוואה כאשר ידועים פתרונות של עקומים. (גרף)

$$(x-c)^2 + y^2 = 1$$
$$\frac{d}{dx} \to 2(x-c) + 2yy' = 0; c-1 < x < c+1$$
$$\to x - c = -yy'$$
$$c = x + yy'$$
$$\Rightarrow y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0$$

(המעבר נעשה ע"י הצבת c אל המשוואה)

2 מד"ר מסדר ראשון

הגדרה 2.1 משוואה מסדר ראשון, היא משוואה שהנגזרת המאקסימלית של y המופיעה בה היא 1.
ישנם 2 דרכים להציג משוואה מסדר ראשון:
1) **צורה סתומה**

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

2) **צורה מפורשת**

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

תנאי התחלה: $y(x_0) = y_0$.
באופן כללי **סדר המשוואה** הוא הסדר של החזקה הגבוהה ביותר במשוואה.

הליך פתרון:

1. לברר האם פתרון קיים והאם הוא יחיד.
2. לפתור באופן אניליטי דרך משוואות ידועות(אם אפשר)
3. לברר התנהגות איכותית של הפרונות. (בלי לפתור במפורש)
4. לפתור באופן נומרי.

הקורס שלנו יעסוק ב1 ו2. 3 רלוונטי לקורס "שיטות אנליטיות למשוואות דיפרנציאליות, מבוא למתמטיקה שימושית. 4 רלוונטי לקורס אנליזה נומרית.

2.1 משוואת פרידה (הפרדת משתנים)

משוואות מהצורה הבאה יקראו משוואת פרידה:

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

כדיי לפתור משוואות מצורה זו, נחלק בg, ואז נפריד למקרים $g = 0$ ו $g \neq 0$.
$g \neq 0$: נחלק בg

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$
$$\int \frac{(y'dx) \to dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

אם קיימות פונקציות

$$G(y) :\ G'(y) = \frac{1}{g(y)}$$
$$F(x) :\ F'(x) = f(x)$$
$$\to G(y(x)) = F(x) + C$$

ומכאן שהפתרון הוא

$$y(x) = G^{-1}[F(x) + C]$$

תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$, $G(y_0) = F(x_0) + C$. $\leftarrow$ $C = G(y_0) - F(x_0)$.

$$G(y(x)) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$$
$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$$

2.1.1 דוגמאות

$$y' = -\frac{x}{y}$$ $$-\infty < x < \infty$$ ואז מתקיים, $$f(x) = -x$$ $$g(y) = \frac{1}{y}$$:

$$yy' = -x$$
$$\int yy'dx = \int ydy = -\int xdx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$
$$y = \pm\sqrt{2C - x^2}$$

ונציה תנאי התחלה

$$y(x_0) = y_0$$
$$2C = x_0^2 + y_0^2$$
$$C = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}$$

שיעור שני (יש גרף פתרונות)
26.10.2011 חזרה: משוואת פרידה

$$y' = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C_1$$

ייתכן פתרון מיוחד

$$g(y) = 0$$
$$y = y_*$$
$$g(y_*) = 0$$
$$y' = 0$$

המשך דוגמאות:

1) $y' = 2xy^2$, $\infty < x < \infty$, $y(x_0) = y_0$. (פתרון מיוחד $y = 0$..)

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx + C$$
$$\frac{-1}{y} = x^2 + C$$
$$y = -\frac{1}{x^2 + C}$$

זהו פתרון כללי.
אם $C>0$, הפתרון קיים לכל התחום $-\infty<x<\infty$.
עבור $C=0$, יש בעייה ב0. נתבונן בגרף הפתרונות $y=\frac{-1}{x^2}$. אם $x_0>0$ אז הפתרון קיים עבור x חיוביים, ואם $x_0<0$ אז הפתרון קיים עבור x שליליים.
אם $C<0$, יש בעייה עבור $x=\pm\sqrt{-C}$. אם $y_0>0$, אז $\sqrt{-C}<x<\sqrt{-C}$-. אם $y_0<0$, אז $-\infty<x<-\sqrt{-C}\vee\sqrt{-C}<x<\infty$.
(גרף). קיבלנו כי קיימים פתרונות שונים, עבור תנאי התחלה שונים.

2.2 מודל התרבות חידקים ($Vermost$).

הגדרה 2.2 משוואות מהצורה, $r>0,k>0$. לרוב מיועד לתיאור התרבות אוכלוסיה (חיידקים)

$$\begin{cases} y'=ry(1-\frac{y}{k}) \\ y(x_0)=0 \end{cases}$$

פתרונות מיוחדים. צד שמאל - $y'=0$, עבור מקרה זה קיימים שני פתרונות מויחדים. $y=0$, ו$y=k$. אלה מצבים שבהם האוכלוסייה לא משתנה.
אלה הם פתרונות שיווי משקל, נק' שבת, עבורן אין שינויי.
נגיע לפתרון הכללי של המודל

$$\begin{gathered} y'=ry(1-\frac{y}{k}) \\ \int\rightarrow\int\frac{dy}{y(1-\frac{y}{k})}=\int rdx\underset{\cdot k}{\Rightarrow}\int\frac{kdy}{y(k-y)}=rx+C_1 \\ \Rightarrow k\int(\frac{1}{ky}+\frac{1}{k(k-y)})dy=rx+C_1 \\ \Rightarrow\frac{k}{k}\ln(y)+\frac{k}{k}(-\ln|k-y|)+C_1=rx+C_2 \\ \Rightarrow\ln(y)-\ln(k-y)=rx+C \\ \Rightarrow\ln(\frac{y}{|k-y|})=rx+C \end{gathered}$$

כעת נפריד למקרים:
א) $0<y<k$,

$$\begin{gathered} \ln[\frac{y}{(k-y)}]=rx+C \\ \frac{y}{k-y}=C_1e^{rx} \\ \Rightarrow y=\frac{KCe^{rx}}{1+Ce^{rx}} \end{gathered}$$

הגרף ־ $x \to -\infty$ אז $y \to 0$, ו $x \to \infty$ אז $y \to K$. (במשמעות מדעית, מס' החיידקים שואף לקבוע K)

ב) $y > K$,

$$\ln[\frac{y}{(y-k)}] = rx + C$$
$$\Rightarrow \frac{y}{y-k} = C_1 e^{rx}$$
$$y = \frac{KCe^{rx}}{C_1 e^{rx} - 1}$$

הגרף ־ $x \to \infty$ אז $y \to K$.

2.3 משוואות שאפשר להביא למשוואות פרידה

1. **פונקציה של ישר** $\begin{cases} a, b \neq 0 \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$.

$$y' = f(ax + by + c)$$

נעשה שינויי משתנים על מנת לפשט את צד ימין, ולהגיע למשוואה המתאימה לשיטת הפרדת המשתנים.

נציב $v = ax + by + c$. ואז $y(x) = \frac{v-ax-c}{b}$, ו $y'(x) = \frac{v'(x)-a}{b} = f(v)$. ואז,

$$v'(x) = bf(v) + a$$
$$\Rightarrow \int \frac{dv}{bf(v)+a} = \int 1dx$$

2. **משוואות t-הומגניות**

$$y' = f(x, y)$$
$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

(לדוג': $f = \frac{2y-x}{y} = 2 - \frac{x}{y}$)

$$\Rightarrow (t = \frac{1}{x}) \Rightarrow$$
$$f(x,y) = f(1, \frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x})$$
$$V = \frac{y}{x}$$
$$y = Vx \Rightarrow y' = V'x + v$$
$$f(x,y) = g(v)$$
$$v'x + v = g(v)$$
$$v'x = g(v) - v$$
$$\int \frac{dv}{g(v) - v} = \int \frac{dx}{x} + C$$

שיעור שלישי 1.11.11

חזרה -

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

- משוואות פרידה: $y' = f(x)g(y)$
- משוואות לנאריות $a_0(x)y' + a_1(x)y = c(x)$ עבור תחום $x \in (a,b)$. נחלק ב $a_0(x)$ ונקבל

$$y' + p(x)y = g(x)$$

$g(x), p(x)$ - פונקציות רציפות ב $[a,b]$.
אם $g(x) = 0$ המשוואה הלנארית נקראת הומוגנית. ואם $g(x) \neq 0$ המשוואה הלנארית לא הומגנית.

2.4 משוואות הומגניות

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0 \\ x \in (a,b) \\ p(x) \in C[a,b] \\ u(x_0) = u_0 \\ x_0 \in (a,b) \end{cases}$$
$$\Rightarrow u' = -pu$$

נפריד לשני מקרים

1. $u = 0$ (ברור)

2. $\frac{u'}{u} = -p$, ואז

$$\int \frac{u'}{u} = \int -pdx$$
$$ln|u| = \int -pdx + C$$
$$\Rightarrow |u(x)| = \exp(-\int_{x_0}^{x} p(x_1)dx_1 + C)$$

x1 is the integration variable, it shouldn't be equal to x. when x0 is arbitrary, and not realted to initial conditions

$exp(C) = C_1 > 0$. ואז (נזכיר x_0 קבוע שרירותי.)
נהוג לרשום:

$$|u(x)| = C_1 \exp(-\int_{x_0}^{x} p(x_1)dx_1); C_1 > 0$$

ואם נוריד את הערך המוחלט

$$u(x) = C_2 \exp(-\int_{x_0}^{x} p(x_1)dx_1)$$

והפתרון הפרטי $u(x_0) = u_0$

$$u(x_0) = C_2 \exp(-\int_{x_0}^{x_0} p(x_1)dx_1)$$
$$\Rightarrow C_2 = u_0$$
$$u(x) = u_0 \exp(-\int_{x_0}^{x} p(x_1)dx_1)$$

2.5 משוואה לא הומגנית

הגדרה 2.3 משוואה לא הומגנית היא משוואה מהצורה

$$y' + p(x)y = g(x)$$

כלומר קיים פונקציה רציפה $g(x) \neq 0$.

טענה 2.4 אם $y_p(x)$ פתרון פרטי של משוואה לנארית לא הומגנית, אז"י הפתרון הכללי של הבעייה לא הומגנית הוא $y(x) = y_p(x) + u(x)$ כאשר $u(x)$ - פתרון כללי של בעייה הומגנית.

הוכחה: א) אם $y_p(x)$ הוא פרטי של משוואה לא הומגנית, אז הוא מקיים

$$(*) = y_p' + py_p = g$$

כל פתרון של משוואה לא הומגנית(מסדר ראשון) מקיים

$$(-) = y' + py = g$$

$$\begin{gathered}(-) - (*) = \\ y' + py - y_p' - py_p = g - g \\ (y' - y_p' + p(y - y_p)) = 0\end{gathered}$$

נשים לב כי לכל y שמקיים $(-)$, $y - y_p$ הוא פתרון של משוואה **הומגנית.**
אם uהוא הפתרון של הבעייה ההומגנית, אז

$$\begin{gathered}(y_p + u)' + p(y_p + u) = g(x) \Rightarrow \\ (y_p' + py_p) + (u' + pu) = g + 0 = g\end{gathered}$$

■

אז כעת נתמקד בדרכים למציאת הפתרון הפרטי (דרכים למציאת פתרון למשוואה ההומגנית נלמד בסעיף הקודם)

<u>שיטה 0</u>: ניחוש. דוג' $y' + y = 1 \Rightarrow y_p = 1$

<u>שיטה 1:</u> ווריאצית פרמטרים.

$$y' + py = g$$

אם נדע את הפתרון:

$$\begin{gathered}u' + pu = 0 \\ u(x) = C \cdot \exp(-\int_{x_0}^{x} p(x_1)dx_1)\end{gathered}$$

שינויי משתנה נעלם

$$y(x)=V(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt)$$

$$y'(x)=V'(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt)-V(x)p(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt)$$

$$g(x)=y'(x)+py(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)=V'(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt)-V(x)p(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt)+p(V(x)\exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt))$$

$$\Rightarrow g(x)=V'(x)exp(-\int_{x_0}^{x}p(t)dt)$$

$$\Rightarrow V'(x)=g(x)\exp(\int_{x_0}^{x}p(t)dt)$$

$$V(x)=\int_{x_0}^{x}g(x_2)\exp(\int_{\overline{x}_0}^{x_2}p(x_1)dx_1)dx_2$$

$$y(x)=\underbrace{(\exp[-\int_{x_0}^{x}p(x_3)dx_3]\int_{\overline{x_0}}^{x}g(x_2)\exp[\int_{x_0}^{x_2}p(x_1)dx_1]dx_2)_{(-)}}_{\text{Private solution for non Homogeneous equation}}$$

$$+\qquad\underbrace{(C\exp[-\int_{x_0}^{x}p(x_3)dx_3])_{(*)}}_{\text{Solution for Homogeneous equation}}$$

$*$= פתרון כללי של משוואה הומגנית, ו ־ = פתרון פרטי של בעייה לא הומגנית y_p.
אם יש תנאי התחלה $y(x_0)=y_0$ נקח x_0 כגבול תחתון באינטגרלים, כך שבהצבה נקבל ביטויי "פשוט".

$$y(x_0)=e^0\cdot\int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_0}g(s)\cdot 1ds+c\cdot 1=y_0\Rightarrow c=y_0$$

שיטה 2: שיטת גורם אינטגרציה:

$$y'+py=g$$

נקח $|\mu(x)|>0$, כמובן שמתקיים $(y'+py)\mu(x)=g(x)\mu(x)$. נרצה לבחור $\mu(x)$, כך שבצד שמאל נקבל נגזרת שלמה:כלומר צד ימין שווה ל $(\mu y)'$. ואז נקבל

$$\mu y'+\mu py=(\mu y)'=\mu' y+\mu y'$$

$$\mu py=\mu' y$$

$$\mu p=\mu'\Rightarrow p=\frac{\mu'}{\mu}$$

$$\int\Rightarrow\ln\mu=\int_{x_0}^{x}p(t)dt+C$$

נבחר $C=0$,(מחפשים פתרון ספציפי)

$$\ln\mu = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$$
$$\mu = \exp(\int_{x_0}^{x} p(t)dt)$$
$$(\mu y)' = \mu g$$
$$\mu(x)y(x) = \int_{\overline{x_0}}^{x} \mu(x_2)g(x_2)dx_2 + C$$
$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_{x_0}^{x} \mu(x_2)g(x_2)dx_2 + \frac{C}{\mu(x)}$$

2.5.1 משוואות שאפשר להביא אותן לצורה לנארית

משוואת Bernullie

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}; \\ 0 < x < \infty; \\ \alpha \neq 0, 1 \end{cases}$$

א) אם $\alpha > 0$, אז $y \equiv 0$, $y' \equiv 0$.
ב) $y \neq 0$, נחלק ב y^{α}.

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

ואז ניתן לסמן $\begin{matrix} v = y^{1-\alpha} \\ v' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \end{matrix}$. ומכאן

$$\frac{V'}{1-\alpha} + p(x)v = q(x)$$

וזוהי משוואה לנארית.

2.6 משוואות מדוייקות

$f(x,y,y') = 0$ תמיד מתקיים שקיימת פונקציה $g(x,y,C) = 0$ כאשר הפתרון הכללי שלה מתקבל בצורה סתומה. לעיתים נקבל $C = F(x, y(x))$ בקטע , ואז

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

נתונה משוואה

$$Q(x,y)y' + P(x,y) = 0$$

הגדרה 2.5 משוואה $Q(x,y)y' + P(x,y) = 0$ נקראת משוואה מדויקת אם קיימת פונקציה $F(x,y)$, כך ש־ $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, ו $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. ואז

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = 0 \Rightarrow F(x,y) = C$$

משפט 2.6 תהיינה פונקציות $Q(x,y), P(x,y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט D. אז"י משוואה $Q(x,y)y' + P(x,y) = 0$ מדוייקת בתחום הזה אמ"מ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ב־D.

שיעור שלישי

חזרה: משוואות מדוייקות

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

משוואה זו מדוייקת אם

$$P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$$
$$Q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x},$$

ובעצם מתקיים

$$(P,Q) = \nabla F$$

(במשמעות של אנליזה וקטורית ־ קיים לשדה F פוטנציאל).

$$\frac{\partial F(y,y(x))}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} y' = 0$$

ומתקיים $F(x,y(x))=C$ פתרון. **הוכחה:** **תנאי הכרחי:** אם F קיימת אז

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\underset{\text{Continiousity}}{=}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

תנאי מספיק: משפט גרין

$$\oint_l (Pdx+Qdy)=\int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

נמשיך בהוכחה

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$
$$\Rightarrow \oint_l Pdx+Qdy$$

נחלק את המעגל לשני מסלולים l_1,l_2, בין נק A ל B, ואז

$$0=\oint_l Pdx+Qdy=\int_{\substack{A\\(l_1)}}^{B} Pdx+Qdy+\int_{\substack{B\\(-l_2)}}^{A} Pdx+Qdy$$
$$\Rightarrow \int_{\substack{A\\(l_1)}}^{B} Pdx+Qdy-\int_{\substack{A\\(l_2)}}^{B} Pdx+Qdy=0$$
$$\Rightarrow \int_{\substack{A\\(l_1)}}^{B} Pdx+Qdy=\int_{\substack{A\\(l_2)}}^{B} Pdx+Qdy$$

נגדיר

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(s,t)ds+Q(s,t)dt$$

ונותר להראות

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$$

(ישנו גרף בהוכחה להקלת ההבנה)

$$F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(s,t)ds+Q(s,t)dt=$$
$$=\int_{x_0}^{x}P(s,y_0)ds+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt$$
$$\Rightarrow\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0+Q(x,y)=Q(x,y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}dt\underset{\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}}{=}$$
$$P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}dt=$$
$$=P(x,y_0)+[P(x,y)-P(x,y_0)]=P(x,y)$$

נשים לב שהוכחה זו קונסטרקטיבית. ■

כיצד נביא משוואות לא מדוייקות למדוייקות?

2.6.1 גורם אינטגרציה

$$P+Qy'=0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\neq 0$$

לפעמים קיים $\mu(x,y)$, נכפיל את האגפים בו, ונקבל:

$$\mu P+\mu Qy'=0\Rightarrow\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=0$$

כעת המשוואה מדוייקת. נמשיך בפיתוחה:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x}-(\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y})=0$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial x}Q-\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=0$$

זוהי מד"ח, כלומר פתרון משוואה זו אף מסובך יותר. אך קיימים מקריים פרטיים שאותם קל יותר לפתור:

א) האם $\mu = \mu(x)$?

$$\mu'(x)Q + \mu(x)(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = 0$$
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})$$

ואז, אם $\frac{1}{Q}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$ פונקציה של x, אז אפשר לפתור משוואה.
ב) האם $\mu = \mu(y)$?

$$-\mu'(y)P + \mu(y)(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = 0$$
$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

ואם זה פונקציה של y אפשר לפתור.
ג) $\mu = \mu(z)$. $z = z(x, y)$?

$$z = x^a y^b, z = ax + by$$

דוגמא

$$(7x^4y^4 + 15y^2) + (4x^5y^3 + 10xy)y' = 0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 20x^4y^3 + 10y \neq 28x^4y^3 + 30y = \frac{\partial P}{\partial x}$$
$$(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = 8x^4y^3 + 20y$$
$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \frac{8x^4y^3 + 20y}{4x^5y^3 + 10xy} = \frac{(2x^4 + 5)(4y^3 + 4y)}{(4y^3 + 4y)(x^5 + \frac{5}{2}x)} = \frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow \int \Rightarrow \ln(\mu(x)) = 2\ln|x| + C$$

נבחר $C = 0$

$$\mu(x) = x^2 \cdot (e^C = 1)$$
$$x^2[(7x^4y^4 + 15y^2) + (4x^5y^3 + 10xy)y'] = 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{(7x^6y^4 + 15x^2y^2)}_{\frac{\partial F}{\partial x}} + \underbrace{(4x^7y^3 + 10x^3y)}_{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot y' = 0$$

נבדוק ש$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 28x^6y^3 + 30x^2y - 28x^6y^3 - 30x^2y = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 7x^6y^4 + 15x^2y^2$$
$$F(x,y) = x^7y^4 + 5x^3y^2 + C(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x^7y^3 + 10x^3y + C'(y)$$
$$F(x,y) = x^7y^4 + 5x^3y^2$$
$$\Rightarrow F(x,y) = C$$

ולכן, משפחת הפתרונות

$$x^7y^4 + 5x^3y^2 = C$$

שיעור רביעי

08.11.2011

חזרה:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial P}{\partial x}$$

אז המשווה לא מדוייקת

$$P + Qy' = 0$$
$$\mu P + \mu Qy' = 0$$
$$\mu P = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \mu Q = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$$
$$\frac{d}{dx}(F(x,y(x))) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$$
$$\Rightarrow F(x,y(x) = C$$

משפט 2.7 אם למשוואה $P + Qy' = 0$ קיים פתרון כללי בצורה $F(x,y) = C$, אז למשוואה זו קיים גורם אינטגרציה.

הוכחה: נראה זאת:

$$F(x,y(x)) = C \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

מצד שני,

$$P + Qy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{P}{Q}$$
$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{P}{Q}$$

נבחר

$$\mu = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q}$$

נכפול את המשוואה שלנו ($P + Qy' = 0$) ב μ, ונקבל:

$$\begin{aligned} &\mu P + \mu Q y' = 0 \\ \Rightarrow &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dF}{dx}(x, y(x)) = 0 \end{aligned}$$

מש"ל (μ גורם אינטגרציה, לאחר שנכפיל בו תתקבל משוואה מדוייקת) ■

2.6.2 גורם אינטגרציה לא יחיד

דוגמה

$$y - xy' = 0$$

נתון: $P = y$. $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \neq 0$

$$Q = -x$$

1) נחפש **גורמי** אינטגרציה:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \underbrace{\frac{2}{-x}}_{\uparrow \text{ not depand on y}}$$
$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow \ln \mu = -2 \ln |x| + C$$
$$(C = 0) \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

נכפיל את המשוואה ב $\mu(x)$:

$$\mu y-\mu xy'=0\Rightarrow$$
$$\frac{y}{x^2}-\frac{y'}{x}=0$$
$$\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{x^2}$$
$$\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow F(x)=-\frac{y}{x}+C_1$$
$$\Rightarrow\frac{y}{x}+C_1=C\Rightarrow y=Cx$$

2) דרך נוספת למציאת גורם אינטגרציה.

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}=-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{not depand on b}}}{\frac{2}{y}}$$
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=-\frac{2}{y}\Rightarrow\mu=\frac{1}{y^2}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}y'=0\Rightarrow F(x,y)=\frac{x}{y}=C_1$$

3) דרך שלישית: גם $\mu=\frac{1}{xy}$גורם אינטגרציה.

$$\frac{1}{x}-\frac{y'}{y}=0$$
$$\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{x},\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow F(x,y)=\ln|x|-\ln|y|=C$$
$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|=c$$
$$\frac{x}{y}=\pm e^c\Rightarrow y=\pm\frac{x}{e^c}=y\Rightarrow y=Cx$$

4) גורם אינטגרציה **רביעי**,

$$\mu=\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}y'=0$$
$$\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]'=0\Rightarrow\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=C$$
$$\ldots$$

טענה 2.8 אם $\mu(x,y)$ גורם אינטגרציה למשוואה $P+Qy'=0$ ו $F(x,y)=C$ פתרון כללי של המשוואה הזאת, אז"י $\mu(x,y)\cdot F(x,y)$ גם גורם אינטגרציה.

$$P+Qy'=0$$

הוכחה: $\mu P+\mu Qy'=0$, נתבונן ב $\mu FP+\mu FQy'=0$, ונבדוק האם זו משוואה מדוייק:

$$(\mu P)_y=(\mu Q)_x$$

$$(\mu FP)_y-(\mu FQ)_x=0$$

ואכן,

$$(\mu FP)_y-(\mu FQ)_x=\mu P(F)_y+\cancel{(\mu P)_y F}-\mu Q(F)_x\cancel{-(\mu Q)_x F}$$
$$=\mu P\left(F\right)_y-\mu Q\left(F\right)_x=\mu(PF_y-QF_x)$$

$$\underset{\text{known}}{\underset{\uparrow}{P+Qy'=0}}\Rightarrow y'=-\frac{P}{Q}$$

$$F(x,y)=C\Rightarrow F_x+F_yy'=0\Rightarrow y'=-\frac{F_x}{F_y}$$

$$\Rightarrow$$

$$-\frac{P}{Q}=-\frac{F_x}{F_y}\Rightarrow PF_y-QF_x=0$$
$$\Rightarrow(\mu FP)_y-(\mu FQ)_x=0$$

מש"ל ■

משפט 2.9 אם $\mu_1(x,y)$ ו$\mu_2(x,y)$ גורמי אינטגרציה למשוואה $P+Qy'=0$, כך ש $\frac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)}\neq const$.
אז הפתרון הכללי למשוואה הזאת

$$F(x,y)=\frac{\mu_2(x,y)}{\mu_1(x,y)}=C$$

הוכחה: מתקיים $(\mu_1P)_y=(\mu_1Q)_x$ ו$(\mu_2P)_y=(\mu_2Q)_x$. נגדיר $F(x,y)=\frac{\mu_2(x,y)}{\mu_1(x,y)}\Rightarrow\mu_1(x,y)F(x,y)=\mu_2(x,y)$ מכאן

$$(\mu_1PF)_y-(\mu_1QF)_x=0$$
$$(\mu_1P)_yF+\mu_1PF_y-(\mu_1P)_xF-\mu_1PF_y=0$$
$$\mu_1PF_y=\mu_1QF_x\Rightarrow PF_y=QF_x$$
$$(\mu_1\neq 0)\Rightarrow\frac{P}{Q}=\frac{F_x}{F_y}=-y'$$
$$y'=-\frac{F_x}{F_y}\Rightarrow F_x+F_yy'=0$$
$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0$$

לכן נבחר $\begin{matrix} P=F_x \\ Q=F_y \end{matrix}$, ונקבל פיתרון. $F(x,y(x))=C$.מש"ל. ∎

2.7 משוואות בצורה סתומה ביחס ל y'

פתרון משוואות מצורה זו

.1

$$x=f(y')$$
$$p\equiv y',\ x=f(p)$$
$$\Rightarrow dx=f'(p)dp\underset{y'}{\Rightarrow}$$
$$dy=y'dx=pf'(p)dp\Rightarrow$$
$$y=\int pf'(p)dp+C$$

וקיבלנו פתרון בצורה פרמטרית $\left\{\begin{matrix} x=f(P) \\ y=\int pf'(P)dp+C \end{matrix}\right.$.

דוגמאות

.1 $\left\{\begin{matrix} x=\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}} \\ y'=p \\ x=\frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \end{matrix}\right.$

$$dx=x'(p)dp=(\frac{1}{\sqrt{1+p}}-\frac{p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}})dp$$
$$=\frac{(1+p^2-p^2)dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$dy=y'(x)dx=pdx=\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\Rightarrow y=\int\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+C$$

והפתרון $\left\{\begin{matrix} x=\frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \\ y=\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}+C \end{matrix}\right.$, ומכאן $\left\{\begin{matrix} x^2=\frac{P^2}{1+P^2} \\ (y-C)^2=\frac{1}{(1+p^2)} \end{matrix}\right.$, נחבר

$$x^2+(y-C)^2=1$$

2. $\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y=f(p)x+q(p),\ p=y' \end{cases}$ משוואה זו נקראת גם משוואת Lagrange.

נגזור ב־x, $y=y(x)$, $p=p(x)$. ואז:

$$\begin{aligned} p=y'=f'(p)p'x+f(p)+q'(p)p' \\ \frac{dp}{dx}=\frac{p-f(p)}{f'(p)x+q'(p)} \end{aligned}$$

כעת, יש שני מקרים:

א)$f(p)\not\equiv p$

א1) $f(p)\neq p$, ואז

$$\frac{dx}{dp}=\frac{f'(p)}{p-f(p)}x+\frac{q'(p)}{p-f(p)}$$

וזוהי משוואה לינארית.

$$\begin{aligned} x=x(p,c) \\ y=f(p)x(p,c)+q(p) \end{aligned}$$

א2) $f(p_0)=p_0$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx}=0\Rightarrow p=p_0\Rightarrow p=\frac{dy}{dx}=p_0 \\ \Rightarrow y=p_0x+q(p_0)=f(p_0) \end{aligned}$$

ב)

$$\begin{aligned} f(p)\equiv p \\ p=y' \\ y=y'x+q(y')\Rightarrow y=px+q(p) \end{aligned}$$

זוהי משוואת Claitaut (קלרו). נגזור ביחס ל־ x

$$\begin{aligned} p=p'x+p+q'(p)p' \\ p'(x+q'(p))=0 \end{aligned}$$

עבור $p'=0$, $\begin{cases} p=C \\ y=Cx+g(C) \end{cases}$

עבור $x=-q'(p)$, מתקיים $y=-pq'(p)+q(p)$. פתרון מיוחד בצורה פרמטרית ($q(p)$ לא פונקציה לינארית.

טענה 2.10 קיבלנו פתרון פרטי שלא מוכל במשפחה של הפתרונות הרגולרים מלפניי, כיצד זה יתכן? הפתרון לבעייה הוא עקום Γ שמהווה פתרון מיוחד ונקרא מעטפת לפתרונות.
מעטפת Γ למשפחה של עקומים (בדוגמה שלנו $y = Cx + g(x)$)
1) כל נקודה בעקום Γ שייכת גם ללפחות אחד מהעקומים של המשפחה.
2) בנקודה המשותפת, המשיק לעקום Γ זהה למשיק לעקום מתאים מהמשפחת העקומים. **הוכחה:**
1) נקודה של r עם

$$\begin{cases} p = C, \Gamma \\ x_c = q'(c) \\ y_c = -cq'(c) + q(c) \end{cases}$$
$$\Rightarrow y_c = Cx_c + q(c)$$

2)(להשלים!!)

$$\begin{cases} x_c = -q'\left(c\right) \\ y_c = -pq'\left(c\right) + q\left(c\right) \end{cases}$$

$$y' = C$$

■

2.8 מעטפת של משפחה של עקומיות

נתונה משפחה של עקומים

$$\varphi(x, y, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const}}}{C}) = 0$$

נגדיר Γ: $\text{we need to find} \rightarrow \begin{cases} x = x(C) \\ y = y(C) \end{cases}$

1. תהיי נוסחה למעטפתΓ: $\varphi(x(C), y(C), C) = 0$(כלומר אנחנו מנסים לתת פרמטריזציה למעטפת כתלות בC של העקומים.)

$$\frac{d\varphi}{dC} = \varphi_x x'(C) + \varphi_y y'(C) + \varphi_C = 0$$

2. נחשב משיק ל Γ:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_c'dC}{x_c'dC} = \dfrac{y_c'}{x_c'} = \dfrac{dy/dc}{dx/dc} \\ \varphi(x,y,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Const}}}{C}) = 0 \\ \Rightarrow y' = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y_c'}{x_c'} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Rightarrow \varphi_x x_c' + y_c'\varphi_y = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_C = 0$$

<u>דוגמאות</u>

1. משפחה של עקומים $\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\alpha} + \dfrac{y}{\sin\alpha} = 1 \\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases}$

$$\varphi(x,y,\alpha) = \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{x\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{y\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow x = y\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha} \underset{\varphi(x,y,\alpha)}{\Rightarrow} y\frac{\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow y\frac{\overbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}^{=1}}{\sin^3\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = cos^3\alpha \\ y = sin^3\alpha \end{cases}$$

$$cos^2\alpha = x^{\frac{2}{3}}, sin^2\alpha = y^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$$

2. $y = px + g(p)$ משפחה של קווים p - פרמטר

$$\begin{cases} \varphi(x,y,p) = y - px - g(p) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}(x,y,p) = -x - g'(p) = 0 \end{cases}$$

$$y = -pg'(p) + g(p),\ x = -g'(p)$$

שיעור
חמישי **<u>חזרה</u>**
15.11.2011

2.8.1 משפחות עקומים אורתוגונליות

עבור המשפחות, בין כל פתרון קווי במשפחה, החיתוך בין הפתרונות יוצר זווית אורתוגונלית. (גרף)

$$\begin{gathered} I:\, y'_I = f(x,y) \\ \tan\alpha = f(x,y) \\ \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\beta = \tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cot\alpha \\ \Rightarrow y'_{II} = -\frac{1}{f(x,y)} \end{gathered}$$

דוגמא: נתונה משוואה של עקומים $y^{2=}4Cx$. מצא משפחה אורתוגונלית. (גרף)

פתרון: תחילה נחשב y' בבכל נקודה,

$$\begin{gathered} \begin{cases} 2yy' = 4Cx \\ y^2 = 4Cx \Rightarrow C = \dfrac{y^2}{4x} \end{cases} \\ \Rightarrow 2yy' = \frac{y^2}{x} \underset{y\neq 0}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} 2y' = \frac{y}{x} \\ \Rightarrow y'_{II} = -\frac{2x}{y} \Rightarrow yy' + 2x = 0 \Rightarrow \\ (\frac{y^2}{2} + x^2)' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = C > 0 \\ \uparrow \\ \text{Ortogonalic family} \end{gathered}$$

(משפחה של אליפסות)

3 קיום ויחידות הפתרונות

משוואה $y' = f(x,y)$. תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$. ומתקיים $y(x) \in C^1$.
מה אפשר לשאול עבור משוואות אלה?

1. האם הפתרון קיים?
2. אם הפתרון קיים, האם הוא יחיד?
3. אם הפתרון קיים, באיזה תחום?

3.0.2 דוגמאות

.1

$$\begin{cases} y' + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Not Continuous at 0}}}{\frac{2}{x}} \cdot y = x^5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2dx}{x} = e^{2\ln|x|}} = x^2$$

$$\Rightarrow x^2y' + 2xy = x^7 \Rightarrow (x^2y)' = x^7$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \int}}{\Rightarrow} x^2y = \frac{x^8}{8} + C \Rightarrow y = \frac{x^6}{8} + \frac{C}{x^2}$$

אם $y(0) = \begin{cases} 0, & c = 0 \\ \infty, & c \neq 0 \end{cases}$ - הפתרון לבעיית התחלה לא קיים.

.2

$$\begin{cases} y' - \frac{2}{x}y = x^5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{2dx}{x}} = e^{[-2\ln|x|]} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{x^5}{x^2}$$

$$(\frac{y}{x^2})' = x^3$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{x^4}{4} + C \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^6}{4} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aribitrary}}}{C}x$$

$$y(0) = 0$$

.3

$$\begin{cases} y' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{real root,Continuous}}}{y^{\frac{1}{3}}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1) $y = 0$ - פתרון

2) אם $y \neq 0$, $\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} = 1$, נבצע אינטגרציה $x = C + \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}}$, מכאן $y = \pm[\frac{2}{3}(x-C)]^{\frac{3}{2}}$
נבחן תוצאות אלו: $C = 0$, $y = \frac{2}{3}x$ פתרון, וגם $y = -\frac{2}{3}x$. כלומר **עבור פונקציה רציפה** $f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$, **אין יחידות לפתרון**.

.4

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) = y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = 1$$

$$\Rightarrow C - \frac{1}{y} = x \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{C-x}$$

$$y(0) = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

זו דוג' שנותנת מענה לסעיף 3 בשאלות שלנו. כלומר יש תחום לפתרונות (עבור בעיית תנאי התחלה), ובמקרה זה התחום $-\infty < x < 1$.

3.0.3 משוואות מסדר n

משוואות מהצורה

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),\ n \geq 1 \\ y \in C^n \\ y(x_0) = l_1,\ y'(x_0) = l_2, ..., y^{(n-1)}(x_0) = l_n \end{cases}$$

נראה כי משוואה מסדר n, היא מקרה פרטי של מערכות משוואות מסדר ראשון. נגדיר:

$$\begin{matrix} u_1(x) = y \\ u_2(x) = y' \\ \vdots \\ u_n(x) = y^{(n-1)} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} u_1'(x) = u_2 \\ u_2'(x) = u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n \\ u_n' = f(x, u_1, u_2, ..., u_n) \end{matrix}\right\} \text{first order system}$$

מערכת של משוואות מסדר <u>**ראשון.**</u> מקרה כללי יותר, של מערכת

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1, ..., u_n) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1, ..., u_n) \\ \vdots \\ u_n'(x) = f_n(x, u_1, ..., u_n) \\ u_1(x_0) = l_1 .... u_n(x_0) = l_n \end{cases}$$

פתרון של מערכת $(u_1(x), u_2(x), ...u_n(x))$, כך ש $u_n(x) \in C^1$.
על כן במהלך הוכת משפט קיום היחידות, נעבוד עם מערכות של מערכת משוואות - כדיי לא לעשות עבודה כפולה עבור משוואות מסדר n.

3.0.4 תנאי ליפשיץ (Lipschitz)

הגדרה 3.1 $g(x)$ מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום $[a,b]$ אם קיים קבוע L כך שלכל $x_1, x_2 \in [a,b]$, מתקיים $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lipshitz Constant}}}{L} |x_1 - x_2|$.

נראה יחס בין תנאי ליפשיץ לרציפות וגזירות:

$$\begin{aligned} g(x) \in C^1 &\Rightarrow x_1, x_2 \in [a,b] \\ |g'(x)| < M &\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| = |g'(c)| \cdot |x_1 - x_2| \\ &\leq M|x_1 - x_2| \\ &\Rightarrow \text{Lipschitz continuity} \end{aligned}$$

כיוון שני לא עובד, למשל $y(x) = |x|$.

$$\text{Lipschitz continuity} \Rightarrow |x_1 - x_2| \leq \delta = \frac{e}{L} \Rightarrow g(x) \in C$$

כיוון שני לא עובד, למשל $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

הגדרה 3.2 פונקציה $f(x,y)$ מקיימת תנאי ליפשיץ ביחס למשתנה y בתחום $D \in \mathbb{R}^2$ אם קיים קבוע L כך ש $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ לכל $(x,y_1), (x,y_2) \in D$.
פונקציה $f(x, u_1, ..., u_n)$ מקיימת תנאי ליפשיץ ביחס למשתנים $u_1, ..., u_n$ בתחום $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ אם קיימים קבועים $L_1, ..., L_n$, כך של -

$$|f(x, v_1, .., v_n) - f(x, w_1, ...w_n)| \leq L_1|v_1 - w_1| + ... + L_n|v_n - w_n|$$

לכל $(x, v_1, ...v_n), (x, w_1, ..., w_n) \in D$.

3.0.5 משפט קיום ויחידות(Picard - Lindelof)

משפט 3.3 נתון

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y,z), \\ \frac{dz}{dx} &= g(x,y,z) \\ (z &= u_2, y = u_1) \end{aligned}$$

פונקציות f ו־ g רציפות בתחום $D\subset\mathbb{R}^3$. ומתקיים

$$y(x_0)=y^0,\quad z(x_0)=z^0,\quad (x_0,y^0,z^0)\in D$$

(לשים לב ש y ו z לא בחזקת 0, אלא זהו סימון)

קיימת תיבה

$$\left\{\, B:\ \middle|\ x-x_0|\le a, |y-y^0|\le b,\ |z-z^0|\le c\,\right\}$$

כך ש $B\subset D$. כך שבתוך B פונקציות $f(x,y,z)$ ו־ $g(x,y,z)$ מקיימות תנאי ליפשיץ ביחס ל־ yו־ z:

$$|f(x,y_1,z_1)-f(x,y_2,z_2)|\le A|y_1-y_2|+B|z_1-z_2|$$
$$|g(x,y_1,z_1)-g(x,y_2,z_2)|\le A|y_1-y_2|+B|z_1-z_2|$$

אז"י קיים קטע ב־ x בסביבת נקודה $x=x_0$ שבו הפתרון לבעייה קיים ויחיד.

שיעור שישי 16.11

הוכחה: תחילה נגדיר

$$M=\max\{\ |\ f(x,y,z)|,|g(x,y,z|\ \}$$
$$h=\min\{a,\frac{b}{M},\frac{c}{M}\}$$

מכך נובעים כמה מסקנות

$$y'=f\Rightarrow |y'|=|f|\le M$$
$$|y'|=|f|\le M$$
$$|x-x_0|\le h\Rightarrow |y-y^0|\le b,\ |z-z^0|\le c$$
$$\Rightarrow \left\{\, P:\ \middle|\ x-x_0|\le h,\ |y-y^0|\le b,\ |z-z^0|\le c\,\right\}\subset B$$

ההוכחה תהיה בשלבים:

1) טרנספורמציה למשוואות אינטגרליות

$$\int_{x_0}^{x}\left.\begin{array}{c} y'(x)=f(x,y(x),z(x))\\ z'(x)=g(x,y(x),z(x))\\ y(x_0)=y^0,\ z(x_0)=z^0\end{array}\right\}\begin{array}{c} y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(s,y(s),z(s))ds\\ z(x)-z(x_0)=\int_{x_0}^{x}g(s,y(s),z(s)ds\end{array}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c} y(x)=y^0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s),z(s))ds\\ z(x)=z^0+\int_{x_0}^{x}g(s,y(s),z(s))ds\end{array}$$

2) נבנה תהליך איטרציות (תזכורת $\{\ P:|\ x-x_0|\le h,\ |y-y^0|\le b,\ |z-z^0|\le c\ \}$)

נבחר פונקציות $y_0(x)$ ו $z_0(x)$ רציפות, המקיימות תנאי התחלה

$$y_0(x_0) = y^0,\ z_0(x_0) = z^0$$

ואז

$$|x - x_0| \le h \Rightarrow |y - y^0| \le b,\ |z - z^0| \le c$$

$$\begin{cases} y_1(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s), z_0(s))ds, \\ z(x) = z^0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_0(s), z_0(s))ds \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} y_n(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))ds, \\ z_n(x) = z^0 + \int_{x_0}^{x} g(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))ds \end{cases}$$

צריך להוכיח שסדרות מתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x)$$

וש (y, z) זה פתרון.

3) נוכיח כי לכל n, אם $|x - x_0| \le h$, אז $|y_n(x) - y^0| \le b$ ו $|z_n - z^0| \le c$. $z_0(x)$, $y_0(x)$ - לפי בחירה.

כאשר $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{c}{M}\right\}$, ו$M = \max_B \{f, g\}$

הוכחה באינדוקציה: נניח שזה נכון ל $y_{n-1}(x),\ z_{n-1}(x)$. ונוכיח שנכון עבור הצעד:

$$|y_n - y^0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s), z_{n-1}(s))ds| \le |\int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(s, y_n(s), z_n(s))|}_{\le M} ds|$$

$$\le M|x - x_0| \le Mh \le b$$

$$|z_n - z^0| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{as before}}}{\le} M|x - x_0| \le Mh \le c$$

כלומר נקבל שה"מכונה" שבונה את הפונקציות שומרת את הפונקציות בתוך התיבה.

4) נוכיח שסדרת $\{y_n(x)\},\ \{z_n(x)\}$ מתכנסות במ"ש בקטע $|x - x_0| \le h$. על מנת לעשות זאת,

נהפוך את הסדרה לטור:

$$y_n(x) = y_0 + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + ... + [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$$

$$\Rightarrow y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{n}(y_m(x) - y_{m-1}(x))$$

$$\underset{\text{as before}}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} z_n(x) = z_0(x) + \sum_{m=1}^{n}(z_m(x) - z_{m-1}(x))$$

$$n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}(y_m(x) - y_{m-1}(x))$$

$$\lim_{n\to\infty} z(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}(z_m(x) - z_{m-1}(x))$$

האם הטורים

$$\sum_{m=1}^{\infty}[z_m(x) - z_{m+1}(x)]$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}[y_m(x) - y_{m-1}(x)]$$

מתכנסים במ"ש בקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$?

נשתמש במבחן הM של ויירשטראס האומר: אם $|f_m(x)| \le a_M$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ מתכנס, אז"י הטור $\sum_{m=1}^{\infty} |f_m(x)|$ מתכנס במידה שווה.

שיעור שביעי 22.11.2011

נחקור התכנסות של הטור בקטע $[x_0, x_0 + h]$

$m = 1$:

$$|y_1(x) - y_0(x)| \underset{\text{continious in a closed interval}}{\underset{\uparrow}{\le}} k$$

$m = 2$:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = |\int_{x_0}^{x}[f(s, y_1(s), z_1(s)| - \int_{x_0}^{x}[f(s, y_0(s), z_0(s)]ds|$$

$$\le \int_{x_0}^{x}|f(s, y_1(s), z_1(s) - f(s, y_0(s), z_0(s)| \underset{\text{Lipschitz}}{\underset{\uparrow}{\le}} \int_{x_0}^{x}[A|\underbrace{y_1(s) - y_0(s)}_{\le K}| + B|\underbrace{z_1(s) - z_0(s)}_{\le K}|]ds$$

$$\le K(A + b)(x - x_0)$$

בדומה לזה, בשביל $|z_2(x) - z_1(x)| \le K(A + B)(x - x_0)$.

טענה :

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|,|z_n(x)-z_{n-1}(x)|\leq K\frac{(A+B)^{n-1}(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

נוכיח באינדוקציה:
נניח(הנחת האינדוקציה)

$$|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|,|z_{n-}(x)-z_{n-2}(x)|\leq K\frac{(A+B)^{n-2}(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

ואז:(צעד)

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_{n-1}(x)| &\leq \int_{x_0}^{x}|f(s,y_{n-1}(s),z_{n-1}(s))-f(s,y_{n-2}(s),z_{n-1}(s))|ds\\ &\underset{\underset{\text{Lipschitz}}{\uparrow}}{\leq}\int_{x_0}^{x}[A|y_{n-1}-y_{n-2}|+B|z_{n-1}(s)-z_{n-1}(s)|]ds\\ &\leq \int_{x_0}^{x}(A+B)K\frac{(A+B)^{n-2}}{(n-1)!}(s-x_0)^{n-2}ds=\\ \frac{K(A+B)^{n-1}}{(n-2)!}&\int_{x_0}^{x}\underbrace{(s-x_0)^{n-2}}_{\frac{(s-x_0)^{n-1}}{n-1}(|_{x_0}^{x})}ds=\frac{K(A+B)^{n-1}(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

כעת, נשתמש בקריטריון M של ווירשטראס

$$\sum_{m=-1}^{\infty}\frac{[(A+B)h]^{m-1}}{(m-1)!}=K\exp[(A+B)\,h]$$

כלומר הטור מתכנס, ולכן ע"פ ווירשטראס: הסדרות $y_n(x)$ ו $z_n(x)$ מתכנסות בקטע $[x_0,x_0+h]$ במידה שווה.
בדומה לקטע $[x-h,x_0]$ $\left[\int_{x_0}^{x}\to-\int_{x}^{x_0}\right]$

5) $\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)$,$\lim_{n\to\infty}z_n(x)=z(x)$ פונקציות רציפות ב $[x_0-h,x_0+h]$

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y^0+\int_{x_0}^{x}f(s.y_{n-1}(s),z_{n-1}(s))ds$$
$$\lim_{n\to\infty}z_n(x)=z^0+\int_{x_0}^{x}g(s.y_{n-1}(s),z_{n-1}(s))ds$$

f ליפשיץ, וy_n וz_n מתכנסות במ"ש, ועל כן ניתן להכניס את הגבול לf, ונקבל שהגבולות

$$y(x)=y^0+\int_{x_0}^{x}f(s,y(s),z(s))ds$$
$$z(x)=z^0+\int_{x_0}^{x}g(s,y(s),z(s))ds$$

$(y(x),z(x))$פתרון של מערכת משוואות אינטגרליות בקטע $[x_0-h,x_0+h]$ פתרון שקיבלנו מקיים גם משוואות דיפרנציאליות ותנאי התחלה.

6) **יחידות הפתרון:** נניח שקיים פתרון $(Y(x),Z(x))$כך ש־

$$\left|y(x)-y^0\right| \le b,$$
$$\left|Z(x)-z^0\right| \le C$$
$$x-x_0<l;\ \ l<h$$

בנוסף לפתרון $(y(x),z(x))$.

$$Y(x)=y^0+\int_{x_0}^{x} f(s,Y(s),Z(s))ds$$
$$Z(x)=z^0+\int_{x_0}^{x} g(s,Y(s),Z(s))ds$$
$$|Y(x)-y(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(s,Y(s),Z(s)-f(s,y(s),z(s)|\,ds$$
$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lipschitz}}}{\le} \int_{x_0}^{x} \left[A\,|Y(s)-y(s)|+B\,|Z(s)-z(s)|\right] \le$$
$$A\max_{s-x_0\le l}|Y(s)-y(s)|\,l+B\max_{s-x_0\le l}|Z(s)-z(s)|\,l$$

ובאופן דומה

$$|Z(x)-z(x)| \le A\max_{s-x_0\le l}|Y(s)-y(s)|\,l+B\max_{s-x_0\le l}|Z(s)-z(s)|\,l$$

נניח

$$\max_s|Y(s)-y(s)| \ge \max_s|Z(s)-z(s)|$$
$$(x_0\le x\le x_0+l)$$

אם אי־שיוויון הפוך, אז עושים הערכה עבור $|Z(x)-z(x)|$בתחום $[x_0-l,x_0+l]$. כעת מההנחה:

$$|Y(x)-y(x)| \le (A+B)l\max_{s-x_0\le l}|Y(s)-y(s)|$$

ומכאן ינבע

$$\underbrace{\max_{s-x_0\le l}|Y(s)-y(s)|}_{Q} \le (A+B)l\underbrace{\max_{s-x_0\le l}|Y(s)-y(s)|}_{Q}$$
$$\Rightarrow 0\le Q\le (A+B)lQ$$

נבחר $l \leq \frac{1}{A+B}$, ואז האי שיוויון ייתכן רק אם $Q = 0$. ומכאן נקבל כי $|Y(s) - y(s)| = 0$ בכל הקטע, ולכן $Y(x) = y(x)$, ומההנחה שלנו הריי שגם $\max_s |Z(s) - z(s)|$ הוא אפס, ולכן $Z(s) = z(s)$.

נשים לב שבהוכחה זו השתמשנו בליבשיץ בלבד, כלומר אם אנחנו יודעים שפתרון קיים, הריי שמספיק רק תנאי ליבשיץ **ליחידות**. ■

3.0.6 דוגמאות

דוגמה 1: נראה שללא תנאי ליבשיץ אין יחידות פתרון

$$\begin{array}{r|l} y' = y^{\frac{1}{3}} & y_I(x) = 0 \\ y(0) = 0 & y_{II}(x) \neq 0 \end{array}$$

$y^{\frac{1}{3}} < Ly$, $0 < y < b$ לא מתקיים ל- y מספיק קטן

דוגמה 2: דוגמא לפתרון יחיד, כאשר אין תנאי ליפשיץ (כלומר תנאי המשפט לא הכרחי).

$$\begin{gathered} y' = 1 + y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + y^{\frac{1}{3}} \\ = \int_0^x dx_1 = \int_0^y \frac{dy_1}{1 + y_1^{\frac{1}{3}}} = h(y) \\ F(x,y) = h(y) - x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \\ \Rightarrow \text{one solution} \end{gathered}$$

פתרון בצורה סתומה

דוגמה 3: נראה מה המשפט מבטיח עבור משוואה(בלי לפתור אותה)

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \\ -a < x < a \\ 1-b < y < 1+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{[1-b,1+b]} y^2 = (1+b)^2$$

$$b > 0 \Rightarrow (1+b)^2 > (1-b)^2$$

$$h = \min\left(a, \frac{b}{(1+b)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left|y_1^2 - y_2^2\right| = |y_1+y_2|\,|y_1-y_2| \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{finite Lipschitz constant}}}{\max |y_1+y_2|}\,|y_2-y_1|$$

נשים לב כי

$$\frac{b}{(1+b)^2} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{b}+2+b}_{\text{min value in b=1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{(1+b)^2} \le \frac{1}{4}$$

b אופטימלי $\begin{matrix} h = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{matrix}$, המשפט אומר $-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}$.

נרא]ה שזה אכן נכון, פתרון המשוואה (משוואה פרידה)

$$y = \frac{1}{C-x}$$

$$1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

$$y = \frac{1}{1-x}$$

והפתרון קיים בקטע $(-\infty, 1) \supset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

תרגיל:

$$\begin{matrix} y^0 = 3 \\ (2,3) \end{matrix} \begin{cases} y' = \dfrac{1}{1-y} \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

$$D: \ -\infty < x < \infty$$

$$y > 1 \,|\, \cancel{y < -1}$$

פתרון:

$$B: \begin{matrix} 2-a \leq x \leq 2+a \\ 3-b < y < 3+b \end{matrix}$$

$$b < 2$$

$$M = \max_B \left|\frac{1}{1-y}\right| = \max \frac{1}{y-1} = \left|\frac{1}{y-1}\right|_{y=3-b}$$

$$= \frac{1}{2-b}$$

התחום של התיבה $\begin{matrix} \left|x - x^0\right| = |x-2| \leq a \\ \left|y - y^0\right| = |y - y_0| \leq b \end{matrix}$ ע"פ תנאי התחלה.

מכיוון שהפונקציה אינה תלוי בx, הריי שבשביל למצוא את h

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, b(2-b)\right\}$$

$$\max\left(2b - b^2\right) = \left(2b - b^2\right)\Big|_{b=1} = 1$$

$$1 = 2 - 1 \leq x \leq 2 + 1 = 3$$

$$b = 1 \Rightarrow h_{max} = 1$$

שיעור שמיני

23.11.201

מה המשמעות של ליפשיץ בסביבה $[x_0 - a, x_0 + a]$ בסביבה אינסופית ביחס לy, z?

$$-\infty < y_1, z_1 < \infty, \ x \in I$$

$$\left\{\begin{matrix} |f(x,y_1,z_1) - f(x,y_2,z_2)| \\ |g(x,y_1,z_1) - g(x,y_2,z_2)| \end{matrix}\right\} \leq A\,|y_1 - y_2| + B\,|B(z_1 - z_2)|$$

נדרוש ש A ו B יהיו אחידים לכל 2 נק' בקטע.

3.0.7 משפט קיום ויחידות עבור פונקציות בשיכבה האינסופית

משפט 3.4 אם פונקציות $f(x,y,z)$ ו $f(x,y,z)$ ו $g(x,y,z)$ מקיימות תנאי לפשיץ (אחיד= אותם קבועים לכל התחום) , בשכבה $z<\infty$ ו $-\infty<y$, $x_1\le x\le x_2$ אזי לבעייה $z'=g$, $y'=f$ ו $z(x_0)=z^0$, $y(x_0)=y^0$, $x_0\in[x_1,x_2]$. הפתקון קיים ויחיד בקטע $x\in[x_1,x_2]$.

הוכחה: שלבים 1 ו 2 לא משתנים. שלב 3 לא צריך.

4) $h=\max(x_2-x_0,x_0-1)$

$$\begin{aligned}|y_n-y_{n-1}|,|z_n-z_{n-1}| &\le \frac{K\left(A+B\right)^{n-1}|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}\\ &\le \frac{K\left(A+B\right)^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

ההמשך לא משתנה. ■

האם המשפט נכון עבור קטע פתוח?

דוגמה

$$\begin{cases} y'=\tan x\cdot\sin y\\ y(0)=y^0\end{cases}$$

$$D:\left\{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ -\infty<y<\infty\right\}$$

זהו תחום **רציפות**, ומתקיים עבור $y_1\le y_*\le y_2$

$$\begin{aligned}&|\tan x\cdot\sin(y_1)-\tan x\cdot\sin(y_2)|\\ &\underset{\text{Lagrange}}{\overset{}{=}}|\tan x|\cdot\underbrace{|\cos(y_*)|}_{\le1}|y_1-y_2|\end{aligned}$$

ליפשיץ לא מתקיים בכל D פתוח. אך מתקיים לכל קטע סגור שכן יש קבוע ליפשיץ

$$[a,b]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow\le\max_{x\in[a,b]}|\tan x|\,|y_1-y_2|$$

ועל כן לפי משפט יש פתרון בכל קטע סגור $\begin{cases}x\in[a,b]\\ -\infty<y,z<\infty\end{cases}$, וזה שקול לכך שקיים פתרון בכל התחום.

דוגמה

$$\begin{cases} y'=x^7\sin y\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

פתרון

$$\left|x^7\sin(y_1)-x^7\sin(y_2)\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Lagrange}}}{=} \left|x^7\right|\underbrace{\left|\cos y_*\right|}_{\leq 1}\left|y_1-y_2\right| = \left|x^7\right|\cdot\left|y_1-y_2\right|$$

ליפשיץ בכל שכבה $x\in[a,b]$ ו $-\infty<y<\infty$, ועל כן מהמשפט יש פתרון ב $-\infty<x<\infty$.
(גרף) $y=n\pi$ נקודת שבת(נקבל $y'=0$). מכיוון שאין אפשרות לפתרונות להיחתך נוכל לקבל אנליזה איכותית לפתרונות, כאשר המישור מחולק לחלקים ב $y=\pi n$.

שיעור תשיעי 29.11.11

דוגמה

$$\begin{cases} y'=x-y^2\\ y(2)=1\end{cases}$$

האם קיים פתרון בתחום $[x,\infty)$?

פתרון y'nullcline$\Leftarrow y=\sqrt{x}$, עבור כל $x\geq 2 \Leftarrow y(x)<\sqrt{x}$.

$$y'=0 \text{ nullcline}$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{x}$$
$$\forall x\geq 2\Rightarrow y(x)<\sqrt{x}$$
$$B:\begin{cases}2\leq x\leq x_m\\ 1\leq y\leq\sqrt{x}\end{cases}$$
$$f(x,y)=x-y^2$$
$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| = \left|x-y_1^2-x+y_2^2\right| = \underset{\uparrow}{\left|y_2+y_1\right|}\cdot\left|y_2-y_1\right|$$
$$y_1\leq\sqrt{x}\leq\sqrt{x_m}$$
$$y_2\leq\sqrt{x_m}$$
$$\leq \underbrace{2\sqrt{x_m}}_{A}\left|y_2-y_1\right|$$

כלומר קיים בכל תת קטע סגור $\Leftarrow$בכל התחום $[2,\infty)$

3.0.8 בעיות תלויות בפרמטר

משפט 3.5 עבור מערכת משוואות

$$\begin{cases} y'=f(x,y,z;\alpha)\\ z'=g(x,y,z;\alpha)\\ y(x_0)=y^0\\ z(x_0)=z^0\end{cases}$$

אם פונקציות f ו־ g רציפות ביחס לפרמטר α ותנאי משפט קיום ויחידות מתקיימות לכל α, אז הפתרונות $(y(x,\alpha),z(x,\alpha))$ רציפות ביחס לα.

טענה 3.6 עבור מערכת משוואות

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ z' = g(x,y) \\ y(x_0) = y^0 \\ z(x_0) = z^0 \end{cases}$$

אז הפתרונות

$$y = y\left(x; x_0, y^0, z^0\right)$$
$$z = z\left(x; x_0, y^0, z^0\right)$$

פתרונות תלויים ב־ (x_0, y^0, z^0) באופן רציף (פונקציות y ו z ־ פונקציות רציפות של (x_0, y^0, z^0))

4 מערכות מד"ר ליניאריות

מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^1[a,b] \\ y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \dots y_n(x_0) = y_n^0 \\ x_0 \in [a,b] \end{cases}$$

אשר כל אחת מהמשוואות לינארית, כלומר :

$$y_i'(x) = a_{i1}(x)\, y_1(x) + a_{i2}(x)\, y_2(x) + \ldots + a_{in}(x)\, y_n(x) + i(x)$$

ניתן להציג מערכת משוואות בצורה וקטורית

$$\begin{cases} \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \\ \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},\ \vec{y^0} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{y'}(x) = A\vec{y}(x) + \vec{b}(x) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}(x_0) = \vec{y}^0 \\ x \in I \end{cases},$$

נראה שעבור מערכות לינאריות תנאי ליפשיץ מתקיים תמיד.

$$x \in I = [a,b]$$

$$\Rightarrow f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) = \sum_{j-1}^{n} a_{ij}\left(x\right) y_j\left(x\right) + b_j\left(x\right)$$

$$\left|f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) - f_i\left(x, \tilde{y}_1, \ldots \tilde{y}_n\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(y_j - \tilde{y}_j\right)\right|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|}_{L_{ij}} \left|\left(y_j - \tilde{y}_j\right)\right| = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \left|\left(y_j - \tilde{y}_j\right)\right| \underset{\substack{\uparrow \\ L_i = \max_i L_{ij}}}{\leq}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} L_i \left|\left(y_j - \tilde{y}_j\right)\right|}_{\text{Lipschitz continuty}}$$

משפט 4.1 אם פונקציות $\left\{a_{ij}\left(x\right), b_i\left(x\right)\right\}$ רציפות ל $\begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$, בקטע סגור $x \in I = [a,b]$, אז"י הפתרון קיים ויחיד בכל קטע I. $[x_1, x_2] \subset [a,b)$.

4.1 משוואות דיפרנציאליות לינאריות ממעלה n

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1\left(x\right) y^{(n-1)}\left(x\right) + \ldots + p_n\left(x\right) y\left(x\right) = q\left(x\right) \\ y\left(x_0\right) = y_0, y'\left(x_0\right) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_{n-1} \\ x_0 \in I \end{cases}$$

נוכל לסמן זאת כאופרטור לינארי

$$L\left[y\right] = \left(\frac{d^n}{dx^n} + p_1\left(x\right) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n\left(x\right)\right) y\left(x\right)$$

אם $q\left(x\right) = 0$ הבעייה הומוגנית(H). $L\left[y\left(x\right)\right] = 0$
אם $q\left(x\right) \not\equiv 0$, הבעייה בלתי הומוגנית$(NH)$. $L\left[y\left(x\right)\right] = q\left(x\right)$.
דנו בכך בעבר והגענו שזהו בעצם מקרה פרטי של n משוואות ממעלה ראשונה. תזכורת:

$$\begin{matrix} u_1(x) = y \\ u_2(x) = y' \\ \vdots \\ u_n(x) = y^{(n-1)} \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1'(x) = u_2 \\ u_2'(x) = u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n \\ u_n' = -p_n u_1 - p_{n-1} u_2 - \ldots - p_1 u_n + q \end{matrix}\right\} \text{first order system}$$

ואז

$$u' = A\vec{u} + \vec{b}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \dots & \dots & -p_1(x) \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix}$$

$$u_1, \dots u_n \in C^1 \Rightarrow y \in C^n$$

משפט 4.2 לבעייה לינארית ממעלה n אם פונקציות $q(x), p_n(x), \dots, p_1(x)$ רציפות בקטע I, אז פתרון למשוואה דיפרנציאלית ממעלה n קיים ויחיד בכל קטע I.

4.2 משוואות לינאריות הומוגניות

טענה 4.3 אם $y_1(x)$ ו־$y_2(x)$ פתרונות של משוואה הומגנית ($L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$, L בקטע I) אז"י $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ (c_2, c_1 ־ קבועים) גם פתרון.

$$L[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1L[y_1(x)] + c_2L[y_2(x)] = 0$$

זה מבוסס על עקרון סופרפוזיציה.

טענה 4.4 למשוואה $L[y] = 0$ יש פתרון $y(x) = 0$ ב־I. הפתרון הזה מקיים תנאי התחלה $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

טענה 4.5 פתרונות משוואה הומוגנית מהווים מרחב לינארי!

הגדרה 4.6 נתונות פונקציות $f_1(x), \dots, f_k(x)$ אם $c_1f_1(x) + \dots + c_kf_k(x) = 0$ בקטע I ($c_1, \dots, c_k$ קבועים) רק אם $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ אז פונקציות בלתי תלויות לינארית. אם $c_1f_1(x) + \dots + c_kf_k(x) \equiv 0$ בקטע I עובר $(c_1, \dots, c_k) \not\equiv (0, \dots, 0)$ אז פונקיות תלויות לינארית.

משפט 4.7 מימד של מרחב לינארי של פתרונות למשוואה (H) הוא בדיוק n.
[קיים בסיס $\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ של פתרונות ל (H) כך ש־ (1) $u_1(x), \dots, u_n(x)$ בלתי תלויים לינארית. (2) כל פתרון $v(x)$ של משוואה (H)אפשר לייצג כ־
$v(x) = d_1u_1(x) + d_2(x) + d_2u_2(x) + \dots + d_nu_n(x)$]

הוכחה: נפתור בשלבים:
1) $x_0 \in I$, $L[y] = 0$.

$$u_1(x) : \left\{ L[u_1(x)] = 0;\ u_1(x_0) = 1, u_1' = 0, \dots, u_1^{n-1}(x_0) = 0 \right\}$$
$$u_2(x) : \left\{ L[u_2(x)] = 0;\ u_2(x_0) = 0, u_2' = 1, \dots, u_2^{n-1}(x_0) = 0 \right\}$$
$$\dots$$
$$u_1(x) : \left\{ L[u_n(x)] = 0;\ u_n(x_0) = 0, u_n' = 0, \dots, u_n^{n-1}(x_0) = 1 \right\}$$

אם $u_1, \dots, u_n$ תלויים לינארית $x \in I,\ (c_1, \dots, c_n) \not\equiv (0, \dots, 0)$

$$\begin{gathered} c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_n u_n(x) = 0 \\ c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \ldots + c_n u_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ c_1 u_1^{(n-1)}(x) + c_2 u_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n u_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{gathered}$$

$\Leftarrow x = x_0 \in I$

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \ldots + c_n \cdot 0 = 0 \\ \ldots \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$c_1 = 0, \ldots c_n = 0$ מכאן שהפתרונות בלתי תלויים לינארית.

2) לכל פתרון נמצא $d_1 \ldots d_n$ כך ש

$$\begin{cases} v(x) = d_1 u_1(x) + d_2 u_2(x) + \ldots + d_n u_n(x) \\ v'(x) = d_1 u_1'(x) + d_2 u_2'(x) + \ldots + d_n u_n'(x) \\ \ldots \\ v^{(n-1)}(x) = d_1 u_1^{(n-1)}(x) + d_2 u_2^{(n-1)}(x) + \ldots + d_n u_n^{(n-1)}(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x_0) = d_1 \cdot 1 + d_2 \cdot 0 + \ldots + d_n \cdot 0 = d_1 \\ v'(x_0) = d_1 \cdot 0 + d_2 \cdot 1 + \ldots + d_n \cdot 0 = d_2 \\ \ldots \\ v^{(n-1)}(x_0) = d_1 \cdot 0 + d_2 \cdot 0 + \ldots + d_n \cdot 1 = d_{n-1} \end{cases}$$

האם מתקיים

$$v(x) = v(x_0) u_1(x) + v'(x_0) u_2(x) + \ldots + v^{(n-1)}(x_0) u_{n-1}(x)$$

זה נכון בנקודה $x = x_0$האם זה נכון גם לכל $x \in I$? כן, נגדיר $\underset{v(x)}{\overset{\uparrow}{U(x)}} = v(x_0) u_1(x) + \ldots +$ $v^{(n-1)}(x_0) u_{n-1}(x)$ ■

שיעור עשירי 30.11.2011

מסקנה 4.8 בשביל למצוא פתרון מספיק למצוא n פתרונות בלתי תלויים לנארית (אנחנו יודעים שהם קיימים)

הגדרה 4.9 $f_1(x),\dots,f_n(x)\in C^{n-1}$ פונקציה שרירותית

$$W[f_1,\dots,f_n]=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n\\ f_1' & f_2' & \dots & f_n'\\ \vdots & \dots & \dots & \vdots\\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

זוהי פונקציית Wronskian וורונסקיאן.

משפט 4.10 נתונות פונקציות $f_1(x),\dots,f_n(x)\in C^{n-1}$ ב־ I. תנאי הכרחי לתלות לינארית של פונקציות $f_1,\dots,f_n$ היא $W[f_1,\dots,f_n]=0$ ב־I.

הוכחה: תלות לינארית בI:

$$(c_1,c_2,\dots,c_n)\not\equiv(0,0,\dots,0)$$

$$\begin{cases} c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_nf_n\equiv 0\\ c_1f_1'+c_2f_2'+\dots+c_nf_n'\equiv 0\\ \vdots\\ c_1f_1^{(n-1)}+c_2f_2^{(n-1)}+\dots c_nf_n^{(n-1)}\equiv 0\end{cases}$$

פתרון לא טריוואלי $\Leftarrow$ $W[f_1,\dots,f_n](x)=0$ ב־ I . ■

הערה 4.11 במקרה הכללי הכיוון השני אינו נכון $W=0\Leftarrow(c_1(x),\dots c_n(x))$, כלומר זה יכול להגיד גם שהקבועים תלויים ב x .

דוגמה:

$$f_1(x)=\begin{cases}x^5 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ x^7 & x<0\end{cases}$$

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)=\begin{cases}c_1x^5 & x\ge 0\\ c_2x^7 & x<0\end{cases}$$

אך מתקיים כאשר לכל x

$$\begin{Bmatrix} x\ge 0, c_1=0, c_2\neq 0\\ c<0, c_1\neq 0, c_2=0\end{Bmatrix}$$

$$W=\begin{vmatrix} f_1 & f_2\\ f_2' & f_1'\end{vmatrix}=0$$

(והפונקציות בת"ל.)

אך אנחנו לא מדברים על ה מקרה הכללי ־ אלא על מפתרונות של מד"ר, ושם המצב שונה.

משפט 4.12 אם $u_1, u_2, \dots, u_n(x)$ פתרונות לבעייה (H) בקטע I, אז התנאי $W[u_1, u_2, \dots, u_n](x) = 0$ ב־I הוא תנאי הכרחי ומספיק לתלות של הפתרונות $u_1, \dots u_n$.

הוכחה: 1) תנאי הכרחי לפי משפט קודם
2) צריך להוכיח כי אם $W[u_1, \dots, u_n] = 0$ ב־ I, אז קיימים קבועים $(c_1, \dots, c_n) \not\equiv (0, \dots, 0)$ כך ש $c_1u_1(x) + \dots + c_nu_n(x) = 0$ ב־I. ■

טענה 4.13 (עזר) אם $u_1, \dots, u_n$ פתרונות ל־H ו$W[u_1, \dots, u_n](x_0) = 0$ בנקודה אחת $x_0 \in I$ אז פתרונות $u_1, \dots, u_n$ תלויים לינארית.

הוכחה: מתקיים

$$W[u_1, \dots, u_n] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n \equiv 0 \\ c_1u_1' + c_2u_2' + \dots + c_nu_n' \equiv 0 \\ \vdots \\ c_1u_1^{(n-1)} + c_2u_2^{(n-1)} + \dots c_nu_n^{(n-1)} \equiv 0 \end{cases}$$

מפני ש $W(x_0) = 0$ יש פתרון לא טריביאלי

$$(c_1, \dots, c_n) \not\equiv (0, \dots 0)$$

נגדיר

$$x \in I; \; v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x)$$

ומתקיים

$$\begin{matrix} v(x) = 0, \; x \in I \\ c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \dots + c_nu_n(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ u_1, \dots, u_n \text{Linear independence} \end{matrix} \begin{cases} L[v] = 0 \\ v(x) = 0 \\ v'(x_0) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

מסקנה: אם $W(x_0) = 0$, אז $W(x) = 0$ בכל קטע $\Rightarrow$ $W(x_0) = 0 \Rightarrow u_1, \dots, u_n \text{Linear independence}$ $W(x) = 0$ (הכרחיות ומספיקות של המשפט). ■

הרציפות במשפט הכרחית, לדוג':

דוגמה: נתבונן

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$
$$\underset{\text{Continuous in } x \neq 0}{\uparrow}$$

פתרון המשוואה (נדע לפתור בהמשך)

$$\begin{gathered}
y = x^a,\ y' = ax^{a-1},\ y'' = a\left(a-1\right)x^{a-2} \\
a\left(a-1\right)x^{a-2} - 2ax^{a-2} + 2x^{a-2} = 0 \\
\left(a-2\right)\left(a-1\right) = 0 \\
\Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2 \\
u_1 = x,\ u_2 = x^2 \\
W\left(u_1, u_2\right) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2
\end{gathered}$$

בכל קטע של כולל את $x = 0$, $y\left(x\right) = c_1x + c_2x^2$, $W \neq 0$, פונקציות u_1, u_2 בלתי תלויות לינארית. ו$W\left(0\right) = 0$.

4.2.1 נוסחת Abel (אבל)

תהיי משוואה הומגנית

$$\left(H\right)\ \ y^{(n)}\left(x\right) + p_1\left(x\right)y^{(n-1)}\left(x\right) + \ldots p_n\left(x\right)y\left(x\right) = 0$$

משפט 4.14 אם $u_1\left(x\right)\ldots, u_n\left(x\right)$ פתרונות של משוואה $\left(H\right)$, אז הוורונסקיאן $W\left(u_1, \ldots u_n\right)\left(x\right)$ מקיים משוואה $W'\left(x\right) = -p_1\left(x\right)W\left(x\right)$

$$W\left(x\right) = \underset{\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) = 0}{W\left(x_0\right)}\exp\left[-\int_{x_0}^{x} p_1\left(s\right)ds\right]$$

6.12 9-11

בוחן 9.12, שעות 9-11, חדרים: אולמן 707-709

1. משוואות מסדר ראשון(עם כל השימושים)
2. קיום ויחידות (למשוואות ומערכת של משוואות)

הוכחה: 4.14 תחילה נראה איך גוזרים דטרמיננטה. תהיי דטרמיננטה

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

נגזרתה: נתבונן בכל הפרמוטציה $\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ s_1, s_2, \dots, n \end{pmatrix}$ דרך לרשום דטרמיננטה כסכום עבור כל הפרמוטציות:

$$\sum_{\{s_1 \dots s_n\}} (-1)^s a_{1s_1}(x) a_{2s_2}(x) \dots a_{ns_{nn}}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\det(a_{ij}(x))\right] =$$

$$\sum_{\{s_1 \dots s_n\}} (-1)^s \left[a'_{1s_1}(x) a_{2s_2}(x) \dots a_{ns_{nn}}(x) + \right.$$

$$\left. a_{1s_1}(x) a'_{2s_2}(x) \dots a_{ns_{nn}}(x) + \dots a_{1s_1}(x) a_{2s_2}(x) \dots a'_{ns_{nn}}(x)\right]$$

$$= \sum_{\{s_1 \dots s_n\}} (-1)^s \left[a'_{1s_1}(x) a_{2s_2}(x) \dots a_{ns_{nn}}(x)\right] + \sum_{\{s_1 \dots s_n\}} (-1)^s \left[a_{1s_1}(x) a'_{2s_2}(x) \dots a_{ns_{nn}}(x)\right] +$$

$$+ \dots + \sum_{\{s_1 \dots s_n\}} (-1)^s \left[a'_{1s_1}(x) a_{2s_2}(x) \dots a'_{ns_{nn}}(x)\right]$$

<u>מסקנה:</u> +

$$\frac{d}{dx}\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & \ddots & & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

באותו האופן ל $\frac{dW(x)}{dx}$

$$\frac{dW(x)}{dx} = \begin{vmatrix} u'_1 & \dots & \dots & u'_n \\ u'_1 & \dots & \dots & u'_n \\ u''_1 & \dots & \dots & u''_n \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ u_n^{(n-1)} & & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & \dots & \dots & u_n \\ u''_1 & \dots & \dots & u''_n \\ u''_1 & \dots & \dots & u''_n \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ u_n^{(n-1)} & & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_1 & \dots & \dots & & u_n \\ & & & & \\ \ddots & \vdots & & & \\ u_n^{(n-2)} & \dots & & \ddots & u_n^{(n-2)} \\ u_n^{(n)} & & & & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

נקבל כי יש שני שורות זהות לכל דטרמיננט, ולכן הכל מתאפס מלבד האחרון:

$$\frac{dW(x)}{dx} = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & \dots & & u_n \\ & & & & \\ \ddots & \vdots & & & \\ u_n^{(n-2)} & \dots & & \ddots & u_n^{(n-2)} \\ u_n^{(n)} & & & & u_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & \dots & \dots & u_n \\ \vdots & \ddots & & u_n' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-p+1)\,u_1^{(n-1)} & \dots & \dots & (-p_1)\,u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x) \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 \dots & & & u_n \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ u_1^{(n-1)} & \dots & \dots & u_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{W} =$$

$$= -p_1(x)\,W(x) \Rightarrow \frac{dW(x)}{dx} = -p_1(x)\,W(x)$$

$$\exp\left[\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds\right] W'(x) + p_1(x)\,W(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left[W(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds\right]\right]' = 0$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{\int}}{\Rightarrow} W(x)\exp\left[\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds\right] = C$$

■

4.2.2 שיטת הורדת סדר

$$L[y] = y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$$

ידוע כי $L\left[y_1(x)\right]=0$ בתחום ש $y_1(x)\not\equiv 0$:

$$y(x)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{new function}}}{v(x)}y_1(x)$$

$$y'=v'y_1+vy_1',\ y''=v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$$

$$v''y_1+2v'y_1'+vy_1''+p_1\left(v'y_1+vy_1'\right)+p_2vy_1=0$$

$$v''y_1+v'\left(2y_1'+p_1y_1\right)+v(\underset{\substack{\uparrow\\ =0}}{y_1''+p_1y_1'+p_2y_1})=0$$

$$z\underset{\substack{\uparrow\\ \text{we'll mark}}}{=}v'\Rightarrow y_1z'+\left(2y_1'+p_1y_1\right)z=0$$

$$\Rightarrow z'+\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p_1\right)z=0,\ y_1(x)\neq 0$$

$$\Rightarrow v'=z=C\exp\left[-\underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{2y_1'(s)}{y_1(s)}ds}_{-2\ln y_1(x)+2\ln y_1(x_0)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{we'll choose } x_0=\text{x}}}{=}0}-\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right]$$

$$=C_2\frac{1}{y_1^2}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right]\Rightarrow$$

$$v(x)=C_2\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{y_1^2(t)}\exp\left[-\int_{x_0}^{t}p_1(s)\,ds\right]+C_1$$

$$y(x)=C_2\underbrace{y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{y_1^2(t)}\exp\left[-\int_{x_0}^{t}p_1(s)\,ds\right]}_{y_2(x)}+C_1y_1(x)$$

$$\Rightarrow W\left[y_1,y_2\right]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2=y_1^2\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=y_1^2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{y_1(t)}\exp\left[-\int_{x_0}^{t}p_1(s)\,ds\right]$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{1}{y_1(t)}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right]$$

$$W=\exp\left[-\int_{x_0}^{x}p_1(s)\,ds\right]\neq 0$$

4.2.3 דוגמאות

$$\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$$

ניתן לנחש פתרון $y_1=x$. ואז $y=y_1v=xv$ ומתקבל

$$\begin{gathered}
y'=xv'+v\\
y''=xv''+2v'\\
\Rightarrow\left(1-x^2\right)\left(xv''+2v'\right)+2x\left(xv'+v\right)-2xv=0\\
v''\left(1-x^2\right)x+v'\left(2-\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}\right)+\cancel{v\left(2x-2x\right)}=0\\
v'=z\Rightarrow z'\left(1-x^2\right)x+2z=0\\
\Rightarrow z'+\frac{2}{x\left(1-x^2\right)}z=0,\ x>1\\
v'=z=C_2\exp\left[\underset{(*)=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\underset{\uparrow}{\int\frac{2dx}{x\left(x^2-1\right)}}}\right]=C_2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\\
v=C_2\left(x+\frac{1}{x}\right)+C_1\\
y=vx=C_1\underset{y_1}{\underset{\uparrow}{x}}+C_2\left(1+\underset{y_2}{\underset{\uparrow}{x^2}}\right)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
(*)=\frac{2}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}\\
\Rightarrow a\left(x^2-1\right)+b\left(x^2-x\right)+c\left(x^2+x\right)=2\\
\left(a+b+c\right)x^2+\left(-b+c\right)x-a=2\\
\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=0 & a=-2\\ \underset{\Rightarrow b=c}{\underset{\uparrow}{-b+c=0}} & b+c=2\\ -a=2 & b=c=1\end{cases}\\
\int\frac{2dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\int\left[-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right]dx=\\
\ln\left[\frac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{x^2}\right]=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)
\end{gathered}$$

תהיי משוואה הומגנית $L[y]$. נניח ויש לנו פתרון $L[y_1]=0$ ו $y=y_1(x)\not\equiv 0=$ אז $y(x)=$.$y_1(x)\,v(x)$

$$L[y_1 v]=(y_1 v)^{(n)}+p_1(y_1 v)^{(n-1)}+p_{n-1}(y_1 v)'+p_n y_1 v=0$$

$$\Rightarrow L[y_1 v]=y_1 v^{(n)}+\ldots+p_{n-1}yv'+v\underbrace{\left[y_1^{(n)}+p_1 y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_n y_1\right]}_{=0}=0$$

$$z^{(n-1)}+\ldots+(\ldots)z=0$$

$$v_1(x)=\int z_1 dx,\ldots v_{n-1}(x)=\int Z_{n-1}(x)$$

$$\left\{y_1\int z_1 dx,\ldots y_1\int z_{n-1}dx,y_1\right\}$$

בודקים האם פתרונות בלתי תלויים לינארית:

$$c_1 y_1\int z_1 dx+c_2 y_1\int z_2 dx+\ldots+c_{n-1}y_1\int z_{n-1}dx+c_n y_1=0$$

$$y_1\neq 0\Rightarrow c_1\int z_1 dx+c_2\int z_2 dx+\ldots+c_{n-1}\int z_{n-1}dx+c_n=0$$

$$x\in I\underset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow}c_1 z_1+c_2 z_2+\ldots c_{n-1}z_{n-1}=0$$

$$\Rightarrow c_1=c_2=\ldots=c_{n-1}=0$$

$$\text{well insert it}\Rightarrow c_n=0$$

כך שאפשר להשתמש בצמצום הפתרונות למשוואה ממעלה n.
מה קורה כאשר ידועים מספר פתרונות בלתי תלויים לינארית? יהי פתרונות בת"ל:

$$y_1(x)+\ldots+y_m(x),\ m<n$$

$$y=y_1 v$$

$$v'=z$$

מתקיים $y=y_1\int z dx$ ואז

$$z=\left(\frac{y}{y_1}\right)'$$

$$z^{(n-1)}+\ldots+(\ldots)z=0$$

$$y_2(x),\ldots,y_m(x)$$

$$z_1=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)',\ldots,z_{m-1}=\left(\frac{y_m}{y_1}\right)'\Rightarrow\text{order }n-m$$

נבדוק האם $z_1,\dots z_{m-1}$ בלתי תלויים לינארית

$$c_1z_1+\dots c_{m-1}z_{m-1}=0$$

האם זה אפשרי רק אם $c_1=\dots=c_{m-1}=0$?

$$\begin{aligned}
c_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'+\dots+c_{m-1}\left(\frac{y_m}{y_1}\right)&=0\\
\underset{\underset{\int}{\uparrow}}{\Rightarrow} c_1\frac{y_2}{y_1}+\dots c_{m-1}\frac{y_m}{y_1}&=c_m\\
\Rightarrow c_1y_2+\dots c_{m-1}y_m+c_my_1&=0\\
\Rightarrow c_1=\dots=c_{m-1}&=0
\end{aligned}$$

4.2.4 מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועיים

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

ו$\{a_i\}$ קבועים. ננחש: $y=e^{rx}\Leftarrow y^{(m)}=r^me^{rx}$.

$$L[e^{rx}]=r^ne^{rx}+a_1r^{n-1}e^{rx}+\dots+a_{n-1}re^{rx}=0$$

$$=e^{rx}\left(\underset{\underset{\text{Characteristic polynomial}}{\uparrow}}{r^n+a_1r^{n-1}+\dots+a_{n-1}r+a_n}\right)=e^{rx}P(r)=0$$

$$P(r)=0$$

נתבונן בשורשים של הפולינום האופייני ונחלק למקרים:

1. כל שורשים ממשיים ושונים אחד לשני $P(r)=(r-r_1)\cdot\ldots\cdot(r-r_n)$, r_i ממשיים.

$$\begin{gathered}
r_1,\dots r_n\Rightarrow u_1,\dots,u_n\\
\forall i,j, r_i-r_j\neq 0
\end{gathered}$$

ואז:

$$W[e^{r_1x},\dots e^{r_nx}]=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & \dots & \dots & e^{r_nx}\\ & \ddots & & \\ r_1^{(n-1)}e^{r_1x} & & & r_n^{(n-1)}e^{r_nx}\end{vmatrix}=e^{r_1x}e^{r_2x}\dots e^{r_nx}\underset{\underset{\text{det van der Mond}}{\uparrow}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1\\ r_1 & \ddots & & r_n\\ & & \ddots & \\ r_1^{(n-1)} & \dots & \dots & r_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}$$

$$=\prod_{1\le i\le j}(r_i-r_j)\prod_{i=1}^n e^{r_i}$$

2. לשורש r_1 יש ריבוי k_1 .

$$p(r) = (r-r_1)^{k_1} H(r), \ H(r_1) \neq 0$$
$$p(r_1) = 0, p'(r_1) = 0, \ldots, p^{(k_1-1)}(r_1) = 0$$
$$p^{(k)}(r_1) \neq 0$$
$$\Rightarrow y_1 = e^{rx}, y_2 = \underset{e^{r_1x};(r_2\to r_1)}{\underset{\downarrow}{e^{r_2x}}} : r_1 \neq r_2$$
$$y_1(x) = e^{r_1x}, \ y_2(x) = \frac{e^{r_2x}-e^{r_1x}}{r_2-r_1} \underset{r_2\to r_1}{\underset{\uparrow}{\to}} y_2(x) = \left(\frac{\partial e^{rx}}{\partial r}\right)_{r=r_1} = xe^{r_1x}?$$

זהו ניחוש. קיבלנו

$$\underset{\text{include } \frac{\partial}{\partial x}}{\underset{\uparrow}{L}}\left[x^l e^{rx}\right] = L\left[\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left(\underset{\text{differentiable, infinite times}}{\underset{\uparrow}{e^{rx}}}\right)\right]$$
$$\frac{\partial e^{rx}}{\partial r} = xe^{rx} = \frac{\partial^l}{\partial r^l} L(e^{rx})$$
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(e^{rx}) = x^2 e^{rx}$$
$$\frac{\partial^l}{\partial r^l}(e^{rx}) = x^l e^{rx} = \frac{\partial^l}{\partial r^l}\left[p(r)e^{rx}\right]$$

נוסחת Leibnitz

$$= p^{(l)}(r)e^{rx} + \binom{l}{1} p^{(l-1)}(r) xe^{rx} + \ldots + \binom{l}{l} p(r) x^l e^{rx}$$

אם $l \leq k_1 - 1$, אז $L\left[x^l e^{rx}\right] = 0$ וקיימים

$$\left\{e^{r_1x}, xe^{r_1x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{r_1x}\right\}$$

k_1 - פתרונות. כעת,

$$p(r) = (r-r_1)^{k_1}(r-r_2)^{k_2}\ldots(r-r_q)^{k_q}$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_q = n$$

ומתקיים

$$y(x) = \sum_{j=1}^{q} e^{r_jx} \underbrace{\left(c_{j1} + c_{j2}x + \ldots = c_{jk_j}x^{k_j-1}\right)}_{P_j(x)(\text{dim } k_j\text{-}1)}$$

צריך להוכיח כי, אם $y(x)=\sum_{j-1}^{q} e^{r_jx}p_j(x)=0$, אז $\begin{array}{l} j=1\dots q \\ m=1\dots k \end{array}$ $c_{jm}=0,$ אם פונקציות $P_j(x)=0$

בת"ל.

הוכחה: נניח שלא כל $P_j(x)\equiv 0$, למשל $P_q(x)\not\equiv 0$.

$$P_1(x)e^{r_1x}+P_2(x)e^{r_2x}+\ldots+P_q(x)e^{r_qx}=0$$
$$\downarrow$$
$$x\in I,\ P_1(x)+P_2(x)e^{(r_2-r_1)x}+\ldots+P_q(x)e^{(r_q-r_1)x}=0$$
$$\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\left[P_1(x)+P_2(x)e^{(r_2-r_1)x}+\ldots+P_p(x)e^{(r_q-r_1)x}\right]=0$$
$$\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}=0\downarrow$$
$$*=Q_2(x)e^{(r_2-r_1)x}+\ldots+Q_q(x)e^{(r_q-r_1)x}=0$$
$$\left[P_2(x)e^{(r_2-r_1)x}\right]'=\left[P_2'(x)+\left(r_2\underset{\neq 0}{\underset{\uparrow}{-}}r_1P_2(x)\right)e^{(r_2-r_1)x}\right]$$
$$\deg\ (Q_j(x))=\deg(P_j(x))$$
$$*\underset{\cdot e^{(r_1-r_2)x}}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}}Q_2(x)+Q_3(x)e^{(r_3-r_2)x}+\ldots+Q_q(x)e^{(r_q-r_2)x}=0$$

גוזרים k_2 פעמיים, ונקבל

$$\underbrace{R_q(x)e^{(r_q-r_{q-1})x}}_{\deg R_q(x)=\deg P_q(x)}=0$$

3. מקרה של שורש מרוכב

$$\begin{cases} r_1=\alpha+\beta i \\ r_2=\overline{r_1}=\alpha-\beta i \end{cases}$$
$$r_1\neq r_2\leftarrow\beta\neq 0$$
$$v_1(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}$$
$$v_2(x)=e^{(\alpha-\beta i)x}$$

תזכורת **נוסחת אוילר**

$$e^{-bi}=\text{cis}\,(b)=\cos b+i\sin b$$

ואז:

$$u_1(x)=\frac{v_1(x)+v_2(x)}{2}=\text{Re}\left[e^{\alpha x}e^{i\beta x}\right]=e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$u_2(x)=\frac{v_1(x)-v_2(x)}{2i}=\text{Im}\left[e^{\alpha x}e^{i\beta x}\right]=e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$W(v_1,v_2,\ldots)\neq 0\to W(u_1,u_2,\ldots)\neq 0?$$
$$\begin{vmatrix} \frac{v_1+v_2}{2} & \frac{v_1-v_2}{2i} & v_3 & \ldots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}=\frac{1}{i}\begin{vmatrix} \frac{v_1+v_2}{2} & \frac{v_1-v_2}{2i} & v_3 & \ldots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

(להשלים)

דוגמא:

$$y''+w^2y=0$$
$$\Rightarrow p(r)=r^2+w^2\Rightarrow r_{1,2}=\pm iw$$
$$\Rightarrow \alpha=0,\ \beta=w$$
$$\Rightarrow y(x)=c_1\underbrace{\cos wx}_{y_1}+c_2\underbrace{\sin wx}_{y_2}$$

דוגמא:

$$y^{(4)}+4y=0$$
$$\Rightarrow P(r)=r^4+4\Rightarrow r^4=4\mathbf{cis}\pi$$
$$\Rightarrow r=\sqrt{2}\mathbf{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)$$
$$\Rightarrow r_1=\sqrt{2}\mathbf{cis}\ \frac{\pi}{4},\ r_2=\sqrt{2}\mathbf{cis}\ \frac{3\pi}{4},\ r_3=\sqrt{2}\mathbf{cis}\ \frac{5\pi}{4},\ r_4=\sqrt{2}\mathbf{cis}\ \frac{7\pi}{4}$$
$$\Rightarrow r_1=1+i,\ r_2=-1+i,\ r_3=-1-i,\ r_4=1-i$$
$$\Rightarrow \alpha_1=1,\beta_1=1\Rightarrow$$
$$y_1=e^x\cos x,\ y_2=e^x\sin x$$
$$\alpha_2=-1,\beta_2=1\Rightarrow$$
$$y_3=e^{-x}\cos x,\ y_4=e^{-x}\sin x$$

4. שורשים מרוכבים כפולים

$$p(r)=\underset{\left\{e^{r_1x},xe^{e_1x},\ldots,x^{k-1}e^{k_1x}\right\}}{\underset{\uparrow}{(r-r_1)^{k_1}}}\cdot\underset{\left\{e^{\overline{r_1}x},\ldots,x^{k-1}e^{\overline{r_1}x}\right\}}{\underset{\uparrow}{(r-\overline{r})^{k_1}}}$$
$$\text{Re:}e^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$\text{Im:}e^{\alpha x},xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$r_i \to \underbrace{\left\{e^{r_1 x}, xe^{e_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{k_1 x}\right\}}_{k_i \text{ linearly independent solutions}}$$

4.3 מד"ר לינארית לא הומגנית

$$(NH)\, L[y] = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = q(x)$$
$$(H)\, L[u] = u^{(n)} + p_1(x)\, u^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

טענה 4.15 הפרש של כל שני פתרונות של (NH) הוא פתרון של בעייה הומגנית

$$\begin{cases} L[y_2] = q \\ L[y_1] = q \end{cases}$$
$$\Rightarrow L[y_2 - y_1] = L[y_2] - L[y_1] = q - q = 0$$
$$y_2 - y_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \{u_i | \text{Basis for (H) solutions}\}$$
$$y_1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{known solution}}}{y_p}$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{any solution of (NH)}}}{y_2 = y} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{private solution of (NH)}}}{y_p} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i u_i}_{\substack{\uparrow \\ \text{solution for (H)}}}$$

שלבים לפתרון:

1. פותרים בעייה הומכנית ע"י מציאת בסיס $\{u_i\}$
2. מספיק למצוא פתרון אחד פרטי $y_p(x)$ של (NH).

4.3.1 שיטת וריאצית הפרמטרים

נתונה בעייה לא הומגנית

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = q(x)$$

והמשוואה ההומגנית המתאימה:

$$(H)\,,\ \ u(x)=\sum_{i=1}^{n}p_iu_i(x)$$

מתקיים כי הפתרון

$$y(x)=u(x)+y_p(x)$$

אנו צריכים למצוא פתרון פרטי $y_p(x)$. נגדיר אותו כך:

$$\underset{\text{unknown function}}{\underset{\uparrow}{y_p(x)}}=\sum_{i=1}^{n}\quad \underset{n\text{ unknown new functions}}{\underset{\uparrow}{v_i(x)}}\quad u_i(x)$$

צריך להוסיף עוד $n-1$ תנאים כדיי להגדיר $v_i(x)$.מכיוון שדרגות החופש של $y_p(x)$ היא $n-1$(תלוייה ב n פונקציות), הריי שנוכל להוסיף $n-1$ תנאים שרירותיים למשוואה, ולקבל פתרון פרטי יחיד, כנדרש.
נגזור כדיי למצוא התנאים:

$$y'(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i(x)\,u_i'(x)+v_i'(x)\,u_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\,u_i'(x)\Rightarrow(1)$$

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i(x)\,u_i''(x)+v_i'(x)\,u_i'(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\,u_i''(x)\Rightarrow(2)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i(x)\,u_i^{(n-1)}(x)+v_i'(x)\,u_i^{(n-2)}(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\,u_i^{(n-1)}(x)\Rightarrow(n)$$

התנאים הנוספים:

$$(1)\sum_{i=1}^{n}v_i'(x)\,u_i(x)=0$$

$$(2)\sum_{i=1}^{n}v_i'(x)\,u_i'(x)=0$$

$$\vdots$$

$$(n)\sum_{i=1}^{n}v_i'u_i^{(n-2)}=0$$

נגזור (n) פעמים

$$+\begin{cases} y^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(v_i(x)\,u_i^{(n)}(x)+v_i'(x)\,u_i^{(n-2)}(x)\right)\\ p_1(x)\,y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}p_1(x)\,v_i(x)\,u_i^{(n-1)}(x)\\ \vdots\\ p_n(x)\,y=\sum_{i=1}^{n}p_n(x)\,v_i(x)\,u_i(x)\end{cases}$$

$$L[y]=\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\underbrace{\left(u_i^{(n)}(x)+p_1(x)\,u_i^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\,u_i(x)\right)}_{L[u_i(x)]=0}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}v_i'(x)\,u_i^{(n-1)}(x)}_{=q}$$

וכאמור התנאים

$$(1)\sum_{i=1}^{n}v_i'(x)\,u_i(x)=0$$

$$(2)\sum_{i=1}^{n}v_i'(x)\,u_i'(x)=0$$

$$\vdots$$

$$(n)\sum_{i=1}^{n}v_i'u_i^{(n-2)}=0$$

נכתוב אותם בצורה מטריציונאלית

$$\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u'(x) & u_2'(x) & \ldots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ \vdots \\ v_{n-1}'(x) \\ v_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix}$$

$$\det(\ldots) = W[u_1(x)\ldots u_n(x)] \neq 0$$

$$\{v_1'(x), \ldots, v_n'(x)\}$$

$$v_i(x) = \int_{x_0}^{x} \underset{\text{allready known}}{\underset{\uparrow}{v_i'(t)}}\, dt + c_i$$

$$\underset{\text{General solution of (NH)}}{\underset{\uparrow}{y(x)}} = \underset{\substack{y_p(x)\ \text{private solution} \\ \text{of (NH)}}}{\underset{\uparrow}{\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \int_{x_0}^{x} v_i'(t)\, dt}} + \underset{\substack{u(x)\ \text{General solution} \\ \text{of (H)}}}{\underset{\uparrow}{\sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)}}$$

4.3.2 דוגמאות

דוגמא:

$$(NH)\ \ y'' + y = \frac{1}{\cos x},\ \ |x| < \frac{\pi}{2}$$

נפתור את המשוואה ההומגנית:

$$(H)\ \ u'' + u = 0,\ \ \underbrace{p(r) = r^2 + 1 = 0}_{r_{1,2} = \pm i}$$

$$\Rightarrow u_1(x) = \cos x,\ \ u_2(x) = \sin x$$

לכן נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$y(x) = v_1(x)\cos x + v_2(x)\sin x$$

נפתור את האילוצים על הפתרון:

$$u_1' = -\sin x,\ u_2'(x) = \cos x$$

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{bmatrix}$$

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}_{1}} = -\tan x$$

$$\Rightarrow v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}_{1}} = 1$$

$$\Rightarrow v_1(x) = \int_0^x \frac{(-\sin t)\,dt}{\cos t} = \int_1^{\cos x} \frac{du}{u} + c_1 = \ln\cos x + c_1$$

$$v_2(x) = x + c_2$$

ולכן הפתרון:

$$\begin{aligned} y(x) &= (\ln\cos x + c_1)\cos x + (x + c_2)\sin x \\ &= \underbrace{\cos x \cdot \ln\cos x + x\sin x}_{y_p(x)} + \underbrace{c_1\cos x + c_2\sin x}_{u(x)} \end{aligned}$$

4.3.3 צורה אינטגרלית של הפתרון

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, v_i'(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} e_i u_i(x)$$

תחילה נמשיך לפתח את הביטוי:

$$\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ \vdots \\ v_{n-1}'(x) \\ v_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{bmatrix}$$

נעזר בנוסחאת קרמר:

$$v_i'(x)=\frac{\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{i-1} & 0 & u_{i+1} & \dots & u_n \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & \ddots & & 0 & & & \vdots \\ & & & 0 & & & \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_{i-1}^{(n-1)} & q & u_{i+1}^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{W[u_1\dots u_n]}$$

$$=\frac{q(x)(-1)^{i+n}\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{i-1} & u_{i+1} & \dots & u_n \\ & & & & & \\ u_1^{(n-2)} & & & & \dots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}{W[u_1\dots u_n]}$$

ולכן נוכל לפתח את $y(x)$ באופן הבא:

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\,v_i'(t)=\sum_{i=1}^{n}u_i\cdot\frac{q(t)(-1)^{i+n}\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{i-1} & u_{i+1} & \dots & u_n \\ & & & & & \\ u_1^{(n-2)} & & & & \dots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix}}{W[u_1\dots u_n]}$$

$$=\frac{q(t)\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{i-1} & u_i(t) & u_{i+1} & \dots & u_n \\ & & & & & & \\ u_1^{(n-2)}(x) & & & u_i(x) & & \dots & u_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}}{W[u_1\dots u_n]}$$

$$\text{Well mark } K=\frac{\begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_{i-1} & u_i(t) & u_{i+1} & \dots & u_n \\ & & & & & & \\ u_1^{(n-2)}(x) & & & u_i(x) & & \dots & u_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix}}{W[u_1\dots u_n]}$$

$$=q(t)\underbrace{K(x,t)}_{\text{Cauchy kernel}}$$

ואז הפתרון

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,t)\,q(t)\,dt+\sum_{i=1}^{n}c_iu_i(x)$$

דוגמה: נפתור את אותה הדוגמה באמצעות שימוש בנוסחא שקיבלנו

$$y'' + y = q(x)$$
$$u_1(x) = \cos x,\ u_2(x) = \sin x$$
$$K(x,t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} =$$
$$= \sin x \cos t - \cos x \sin t = \sin(x-t)$$
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \sin(x-t)\, q(t)\, dt + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$
$$q(t) = \frac{1}{\cos t}$$
$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \frac{1}{\cos t} dt + u(x)$$
$$= \sin x \int_0^x 1dt + \cos x \int_0^x (-\tan t)\, dt + u(x)$$
$$= x \sin x + \cos x \cdot \ln(\cos x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

וכצפוי, הפתרון זהה לפתרון שקיבלנו מקודם.

4.4 מד"ר לינארית לא הומגנית עם מקדמים קבועים

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = q(x),\ a_i \in \mathbb{R}$$
$$L[y] = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = 0$$

4.4.1 שיטת מקדמים לא מסויימים (שיטת השוואת מקדמים)

1. $q(x) = P_m(x)$ (פולינום)

$$P_m(x) = b_m x^m + \ldots b_1$$

נבדוק האם

$$y(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0, \text{deg m}$$
$$y'(x) = e_m m x^{m-1} + c_{m-1}(m-1) x^{m-2} + \ldots + c_1, \text{deg m-1}$$

נציב במשוואה:

$$v_1 e^x + c_1' e^x + v_2 (e^x + e^x + xe^x) + v_2'' (e^x + xe^x) -$$

ומתקיים

$$L\left[y\left(x\right)\right]=x^{m}c_{m}a_{n}+x^{m-1}\left(c_{m}a_{n}+c_{m}ma_{n-1}\right)+\ldots=$$
$$=b_{m}x^{m}+\ldots+b_{1}x+b_{0}$$
$$\begin{bmatrix}a_{n} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ ma_{n-1} & a_{n}\\ & & \ddots\\ & & & a_{n}\\ & & & & a_{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{m}\\ c_{m-1}\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{m}\\ b_{m-1}\\ \vdots\end{bmatrix}$$

ו לכן $a_{n}\neq0$ $\iff$ $\mathrm{rank}\left(A\right)=n$

$$\Rightarrow L\left[y\right]=y^{n}+\ldots a_{n-s}y^{(s)}=P_{m}\left(x\right)$$
$$y_{p}\left(x\right)=\left(c_{m}x^{m}+\ldots c_{0}\right)x^{s}+\cancel{\left(..\right)x^{s-1}+\left(..\right)x^{0}}$$
$$u_{1}\left(x\right)=1,\ldots,u_{s-1}\left(x\right)=x^{s-1},\ \left(H\right)$$

תרגיל

$$y''+2y'=x^{3}$$
$$\Rightarrow p\left(r\right)=r^{2}+2r=r\left(r+2\right)$$

מתקיים

$$y=y_{p}\left(x\right)+y_{h}\left(x\right)$$

תחילה נפתור משוואה הומגנית.

$$r\left(r+2\right)=0\Rightarrow r=0,-2$$
$$u_{1}\left(x\right)=1,\ u_{2}\left(x\right)=e^{-2x}$$
$$\Rightarrow s=1\Rightarrow$$
$$y_{p}=x\left(c_{0}x^{3}+c_{1}x^{2}+c_{2}x+c_{3}\right)=$$
$$=c_{0}x^{4}+c_{1}x^{3}+c_{2}x^{2}+c_{3}x$$
$$\Rightarrow y_{p}'=4c_{0}x^{3}+3c_{1}x^{2}+2c_{2}x+c_{3}$$
$$\Rightarrow y_{p}''=12c_{0}x^{2}+6c_{1}x+2c_{2}$$

נציב

$$y_p'' + 2y_p' = 12c_0x^2 + 6c_1x + 2c_2 + 2\left(4c_0x^3 + 3c_1x^2 + 2c_2x + c_3\right)$$
$$\Rightarrow 8c_0x^3 + (12c_0 + 6c_1)x^2 + (6c_1 + 4c_2)x + 2(c_2 + c_3) = x^3$$
$$\begin{cases} 8c_0 = 1 \\ 12c_0 + 6c_1 = 0 \\ 6c_1 + 4c_2 = 0 \\ 2c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \frac{1}{8} \\ c_1 = -\frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{3}{8} \\ c_3 = -\frac{3}{8} \end{cases}$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{8} - \frac{3}{8}x + d_1 + d_2e^{-2x}$$

2. מקרה שבו:

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = e^{\alpha x}P_m(x)$$
$$\text{we'll look at the case } y(x) = e^{\alpha x}u(x)$$
$$\Rightarrow L[e^{\alpha x}u(x)] = e^{\alpha x}\left(A_nu^{(n)} + \ldots + Au\right) = e^{\alpha x}P_m(x)$$

נקח $e(x) = e^{rx}$

$$L[e^{\alpha x}e^{rx}] = L\left[e^{(\alpha+r)x}\right] = e^{(\alpha+r)x}p(r+\alpha)$$
$$e^{\alpha x}\left[A_n(e^{rx})^{(n)} + A_{n-1}(e^{rx})^{(n-1)} + \ldots + A_0e^{rx}\right]$$
$$= e^{\alpha x}e^{rx}\left(A_nr^n + A_{n-1}r^{n-1} + \ldots + A_0\right)$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{\Rightarrow} \varphi(r+\alpha) = A_nr^n + A_{n-1}r^{n-1} + \ldots + A_0$$

$$\varphi(r+\alpha) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)r + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}r^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(\alpha)}{n!}r^n$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = \varphi(\alpha) \\ A_1 = \frac{\varphi'(\alpha)}{1!} \\ \ldots \\ A_n = \frac{\varphi^{(n)}}{n!} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{\varphi^{(n)}}{n!}u^{(n)} + \ldots + \frac{\varphi^{(1)}}{1!}u' + \varphi(\alpha)u = P_m(x)$$

1) אם $\varphi(\alpha) \neq 0$,(כלומר, הניחוש שלנו מזדהה עם פתרונות ההומגנית):
הניחוש להצבה:

$$u = c_0x^m + \ldots c_m$$
$$y = e^{\alpha x}(c_0x^m + \ldots c_m)$$

2) אחרת, $\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\ldots=\varphi^{(s-1)}(\alpha)=0,\ \varphi^{(s)}(\alpha)\neq 0$
הניחוש: להצבה

$$u=x^s\left(c_0x^m+\ldots+c_m\right)$$
$$y=e^{\alpha x}x^s\left(c_0x^m+\ldots+c_m\right)$$

כאשר s הוא ריבוב של השורש.

דוגמאות לשימוש

$$1)y''-6y'+9=e^{2x}\left(5x+7\right)$$
$$r^2-6r+9=\left(r-3\right)^2=0$$
$$\Rightarrow s=2,r=3$$
$$\Rightarrow u_1=e^{3x},u_2=xe^{3x}$$
$$y_p=e^{2x}\left(c_0x+c_1\right)$$
$$2)\ y''-6y'+9=e^{3x}\left(5x-7\right)$$
$$\Rightarrow y_p=e^{3x}x^2\left(c_0x+c_1\right)$$

3. מקרה שלישי

$$L\left[y\right]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=e^{\alpha x}\cos\left(\beta x\right)P_m\left(x\right)$$
$$=e^{\alpha x}\frac{1}{2}\left(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}\right)P_m\left(x\right)=\frac{1}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}P_m\left(x\right)+\frac{1}{2}e^{(\alpha-i\beta)x}P_m\left(x\right)$$
$$\varphi\left(\alpha+i\beta\right)$$
$$\varphi\left(\alpha+i\beta\right)=\varphi'\left(\alpha+i\beta\right)=\ldots=\varphi^{(s-1)}\left(\alpha+i\beta\right)=0$$
$$\varphi^{(s)}\left(\alpha+i\beta\right)\neq 0$$
$$y=y_p+\overline{y_p}$$
$$y_p=e^{(\alpha+i\beta)x}x^sR_m\left(x\right),\ R_m=c_0x^m+\ldots+c_m$$
$$y=x^s\left[e^{(\alpha+i\beta)x}R_m\left(x\right)+e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{R_m\left(x\right)}\right]$$
$$\underset{\text{Polynom with complex coefficient}}{\underset{\uparrow}{R_m}}=\frac{1}{2}\left(\underset{\text{Real coefficient}}{\underset{\uparrow}{A_m\left(x\right)}}-i\underset{\text{Real coefficient}}{\underset{\uparrow}{B_m\left(x\right)}}\right)$$
$$y=x^s\begin{bmatrix}e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)\frac{1}{2}\left(A_m\left(x\right)-iB_m\left(x\right)\right)+\\+e^{\alpha x}\left(\cos\beta x-i\sin\beta x\right)\frac{1}{2}\left(A_m\left(x\right)+iB_m\left(x\right)\right)\end{bmatrix}=$$
$$=x^se^{\alpha x}\left(\cos\beta x\cdot A_m\left(x\right)+i\sin\beta x\cdot B_m\left(x\right)\right)$$

4.5 משוואת אויילר (Euler)

$$L\left[y\right]=a_0x^ny^{(n)}\left(x\right)+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}\left(x\right)+\ldots+a_{n-1}xy'\left(x\right)+a_ny\left(x\right)=q\left(x\right)$$

פתרון מהצורה e^t , ואז

$$y\left(e^t\right)=Y\left(t\right),\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\Leftarrow t=\ln x\Leftarrow x=e^t$$

ואז:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dY}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dY}{dt},\ a_{n-1}x\frac{dy}{dx}\Rightarrow a_{n-1}\frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dY}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dY}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dY}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dY}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dY}{dt}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow a_{n-2}x^2\frac{d^2y}{dx}\to a_{n-2}\left(\frac{d^2Y}{dt^2}-\frac{dY}{dt}\right)$$

באותו אופן ממשיכים, ומקבלים

$$\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{1}{x^k}\left(\frac{d^kY}{dt^k}+\text{Lower Derivative...}\right)$$

$$\Rightarrow a_{n-k}x^k\frac{d^ky}{dx}\to a_{n-k}\left(\frac{d^2Y}{dt}+\ldots\right)$$

על כן

$$L\left[y\right]=q\left(x\right)\to$$

$$\tilde{L}=b_0\frac{d^nY}{dx^n}+\ldots+b_nY,\ \tilde{L}\left[Y\right]=q\left(e^t\right)$$

כאשר $\tilde{L}$זה פולינום עם **מקדמים קבועים**, ואנחנו יודעים לפתור זאת.

נסכם:

$$\underset{\text{Euler Equation}}{\underset{\uparrow}{L[y]=0}} \quad \underset{\substack{x=e^t\\ t=\ln x}}{\underset{\uparrow}{\rightarrow}} \quad \underset{\text{Constant coefficient}}{\underset{\uparrow}{\tilde{L}[Y]=0}}$$

$$Y=e^{rt}\Rightarrow\begin{cases} y=x^r\\ y'=rx^{r-1}\\ \dots\\ y^{(n)}=r(r-1)\dots(r-n+1)x^{r-n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{L}[Y]=a_0\frac{d^nY}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}Y}{dt^{n-1}}+\dots+b_nY$$

$$\Rightarrow L[y]=a_0x^ny^{(n)}(x)+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}(x)+\dots$$

$$\dots+a_{n-1}xy'(x)+a_ny(x)=x^rp(r)=0$$

$$\text{(known as indicial polynomial)}$$

$$p(r)=a_0r(r-1)\dots(r-n+1)+$$

$$a_1r(r-1)\dots(r+n+2)+\dots+a_{n-1}e+a_n$$

$$\Rightarrow p(r)=a_0r^n+b_1r^{n-1}+\dots+b_{n-1}r+b_n$$

כעת, אנחנו נוכל לפתח באמצעות השיטות הקודמות. $\tilde{L}(Y)=0,\ L(y)=0$

- כל r_j ממשיים (ושונים אחד מהשני) $\begin{cases} e^t=x\\ t=\ln x\end{cases}$:

$$Y(t)=e^{r_jt}\Rightarrow y_j(x)=x^{r_j}$$

- r_j ריבוי של k_j

$$\begin{matrix} Y_j(t)=t^se^{r_jt}\\ 0\le s\le k_j-1\end{matrix}\Rightarrow y_j(x)=x^{r_j}(\ln x)^s$$

- $\begin{matrix} r_1=\alpha+\beta i\\ r_2=\alpha-\beta i\end{matrix}$ פשוטים(כלומר ללא ריבוי). $\left(x=e^{\ln x}\right)$

$$\tilde{Y}_1=e^{r_1x}\Rightarrow\tilde{y}_1(x)=x^{r_j}=x^{\alpha+\beta i}=x^\alpha x^{\beta i}=x^\alpha\left(e^{\ln x}\right)^{\beta i}$$

$$=x^\alpha e^{\beta i\ln x}=x^\alpha[\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)]$$

$$y_1(x)=\mathrm{Re}[y_1(x)]=x^\alpha\cos(\beta\ln x)$$

$$y_2(x)=\mathrm{Im}[y_1(x)]=x^\alpha\sin(\beta\ln x)$$

• $\begin{matrix} r_1 = \alpha + \beta i \\ r_2 = \alpha - \beta i \end{matrix}$ ריבוי $k_1 \Leftarrow \begin{cases} \cos \beta T \\ \sin \beta T \end{cases} Y(T) = T^S e^{\alpha T} \Leftarrow x^\alpha (\ln x)^S \begin{cases} \cos(\beta \ln x) \\ \sin(\beta \ln x) \end{cases}$

5 מערכות של מד"ר לינאריות מסדר ראשון

$$\begin{matrix} (NH) \ \dfrac{dy^i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y^j(x) + b_i(x) \\ (H) \ \dfrac{dy^i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y^j(x) \end{matrix}, \begin{cases} (i = 1, \dots, n) \\ x \in I = [c, d] \\ y^i(x_0) = y_0^i, x_0 \in I \\ \forall I = (\gamma, \delta), [c, d] \subset (\gamma, \delta) \\ \text{it might be} \, (-\infty, \infty) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y^1(x) \\ y^2(x) \\ \vdots \\ y^n(x) \end{pmatrix}$$

אם פונקציות $b_i(x), a_{ij}(x)$ רציפות ב־ I, אז הפתרון לבעיית תנאי התחלה קיים ויחיד ב־I.

$$f\left(x, y^1, \dots, y^n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y^j + b_i(x)$$

$$\left| f\left(x, y^1, \dots, y^n\right) - f\left(x, y_*^1, \dots, y_*^n\right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \left(y^j - y_*^j\right) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x)| \left|y^j - y_*^j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \tilde{A} \left|y^j - y_*^j\right|, \ \tilde{A} = \max_{i,j} \underbrace{\max |a_{ij}(x)|}_{\tilde{A}_{ij}}$$

הצגה מטריצונאלית:

$$\vec{y}\left(x\right)=\begin{pmatrix}y^{1}\left(x\right)\\ y^{2}\left(x\right)\\ \vdots\\ y^{n}\left(x\right)\end{pmatrix},\ A\left(x\right)=\begin{pmatrix}a_{11}\left(x\right) & \ldots & a_{1n}\left(x\right)\\ & \ddots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\left(x\right)\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}\left(x\right)=\begin{pmatrix}b_{1}\left(x\right)\\ b_{2}\left(x\right)\\ \vdots\\ b_{n}\left(x\right)\end{pmatrix},\ \vec{y_{0}}=\begin{pmatrix}y_{0}^{1}\\ \vdots\\ \vdots\\ \\ y_{0}^{n}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{dy\left(x\right)}{dx}=A\left(x\right)\vec{y}\left(x\right)+\vec{b}\left(x\right),\ x\in I$$

$$\vec{y}\left(x_{0}\right)=\vec{y_{0}},\ x_{0}\in I$$

נניח שנתונה מד"ר

$$y^{(n)}+p_{1}y^{(n-1)}+\ldots+p_{n}y=q$$

נסמן:

$$y^{1}=y,y^{2}=y',\ldots y^{n}=y^{(n-1)}$$

ואז:

$$\frac{\partial y^{n}}{\partial x}=-p_{n}y^{1}-p_{n-1}y^{2}-\ldots-p_{1}y^{n}+q$$

אז זוהי מערכת משוואות עם:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ & & 1\\ & & & 1\\ & & & & 1\\ -p_{n} & \ldots & \ldots & \ldots & -p_{1}\end{pmatrix}$$

$$\left(H\right)\frac{dy\left(x\right)}{dx}=A\left(x\right)\vec{y}\left(x\right),\ x\in I$$

אם $\vec{y}_{1}\left(x\right)$ ו־ $\vec{y}_{2}\left(x\right)$ פתרונות של $\left(H\right)$, אז גם $c_{1}\vec{y}_{1}\left(x\right)+c_{2}\vec{y}_{2}\left(x\right)$ פתרון של $\left(H\right)$. (c_{2},c_{1} קבועים)

$$\frac{d\vec{y_{1}}}{dx}=A\vec{y_{1}},\ \frac{d\vec{y_{2}}}{dx}=A\vec{y_{2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(c_{1}\vec{y_{1}}+c_{2}\vec{y_{2}}\left(x\right)\right)=c_{1}\frac{d\vec{y_{1}}}{dx}+c_{2}\frac{d\vec{y_{2}}}{dx}$$

$$=c_{1}A\vec{y_{1}}+c_{2}A\vec{y_{2}}=A\left(c_{1}\vec{y_{1}}+c_{2}\vec{y_{2}}\right)$$

אוסף של פתרונות ל $\left(H\right)$ הוא מרחב לנארי!

הגדרה 5.1 פונקציה וקטורית $\vec{y}_1(x)\ldots\vec{y}_m(x)$ תלויים לינארית בקטע I, אם קיימים קבועים $(c_1,\ldots,c_m)\not\equiv(0,\ldots,0)$, כך ש $c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_m\vec{y}_m(x)=\vec{0}$.
ובלתי תלויים אם $c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_m\vec{y}_m(x)=\vec{0}$ רק אם $c_1=\ldots=c_m=0$.

כעת, עבור פתרונות $\vec{y}_n=\begin{pmatrix}y_n^1\\ \vdots\\ \vdots\\ y_n^n\end{pmatrix},\ldots\vec{y}_1=\begin{pmatrix}y_1^1\\ \vdots\\ \vdots\\ y_1^n\end{pmatrix}$, מתקיים

$$W\left[\vec{y}_1(x)\ldots\vec{y}_n(n)(x)\right]=\left|\vec{y}_1\vec{y}_2\ldots\vec{y}_n\right|$$

אם וקטורים $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n(x)$ תלויים לינארית אז $W\left[\vec{y}_1(x)\ldots\vec{y}_n(n)(x)\right]=0$, $c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_m\vec{y}_m(x)=\vec{0}$ **בכל נקודה** $\Leftarrow W=0$.

דוגמה

$$\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix}x^2\\0\end{pmatrix}$$
$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x&x^2\\0&0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$
$$x\in I,\ c_1\vec{y}_1(x)+c_2\vec{y}(x)=0$$
$$\Rightarrow x\in I,c_1x+c_2x^2=0$$
$$\Rightarrow c_1=c_2=0$$

משפט 5.2 פתרונות $\vec{y}_1,\ldots\vec{y}_n(x)$ של משוואה (H) תלויות לינארית בקטע I אם ורק אם $W\left[\vec{y},\ldots\vec{y}_n\right]$ מתאפס בנקודה מסויימת $x_0\in I$.
א) אם פונקציות תלויות לינארית, $W\left[\vec{y},\ldots\vec{y}_n\right]=0$ בכל קטע.
ב) נניח ש $W\left[\vec{y},\ldots\vec{y}_n\right](x_0)=0$. יש $(c_1,\ldots c_n)\neq(0,\ldots,0)$ כך ש

$$c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_n\vec{y}_n(x)=\vec{0}$$

נגדיר פונקציה וקטורית

$$\vec{z}(x)=c_1\vec{y}_1(x)+c_2\vec{y}_2(x)+\ldots+c_n\vec{y}_n(x)$$

$\vec{z}(x)$ פתרון $\vec{z}(x_0)=\vec{0}$, $\vec{u}(x)=\vec{0}$גם פתרון ו $\vec{u}(x_0)=\vec{0}$. $\Leftarrow$ בגלל יחידות:

$$\vec{z}(x)=\vec{u}(x),\ x\in I$$
$$c_1\vec{y}_1(x)+\ldots+c_n\vec{y}_n(x)=0$$

מתקיים $W(x_0)=0$ $\Leftarrow$ $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n$ תלויים לינארית בקטע I. $\Leftarrow W(x)=0$ ב I .

משפט 5.3 אוסף שפתרונות למשוואה (H) הוא מרחב n ־ מימדי צריך להוכיח:
א) קיימת קבוצה $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n$ בלתי תלויים לינארית בקטע I.
ב)כל פתרון של (H) הוא צרוף לינארי של $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n$.

הוכחה: א) $x_0 \in I$

$$L[\vec{y_1}] = \frac{d\vec{y}_1}{dx} - A\vec{y}_1 = 0,\ \vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

$$L[\vec{y_2}] = 0,\ \vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$$

$$\vdots$$

$$L[\vec{y_n}] = 0,\ \vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \vec{e}_n$$

ב) $\vec{y}(x)$ פתרון שרירותי ב־ I $\vec{y}(x_0) = \begin{pmatrix} y^1(x_0) \\ y^2(x_0) \\ \vdots \\ y^n(x_0) \end{pmatrix}$ בנקודה x_0

$$\vec{y}(x_0) = y^1(x_0)\underbrace{\vec{y}_1(x_0)}_{\vec{e}_1} + \ldots + y^n(x_0)\underbrace{\vec{y}_n(x_0)}_{\vec{e}_n}$$

ונגדיר

$$\vec{z}(x) = y^1(x_0)\vec{y}_1(x) + \ldots + y^n(x_0)\vec{y}_n(x),\ L[\vec{z}(x)] = 0,\ \vec{z}(x)|_{x=x_0} = \vec{y}(x_0)$$
$$\vec{z}(x) = y^1(x_0)\vec{y}_1(x) + \ldots + y^n(x_0)\vec{y}_n(x),\ L[\vec{y}(x)] = 0,\ \vec{y}(x)|_{x=x_0} = \vec{y}(x_0)$$
$$\Rightarrow \vec{y}(x) = \vec{z}(x)$$

■

5.1 נוסחת Abel

אם $\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n$ פתרונות של (H)

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = A(x)\vec{y}(x)$$

אז הוורונסקיאן $W(x)=W[x_0]$ מקיים הנוסחא

$$W(x)=W(x_0)\exp\left[\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}A(s)\,ds\right]$$

שיעור שניים
עשר 21.1211

כזכור,

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} m_{11}(x) & \dots & m_{1n} \\ & \vdots & \\ n_{n1} & & m_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m'_{11} & \dots & m'_{1n} \\ m_{21} & \dots & m_{2n} \\ & \vdots & \\ m_{n1} & \dots & m_{nn}\end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \dots & m_{2n} \\ & \vdots & \\ m'_{n1} & \dots & m'_{nn}\end{vmatrix}$$

על כן, הנגזרת של W:

$$\frac{dW}{dx}=\underbrace{\begin{vmatrix} y'_{11} & \dots & y'_{1n} \\ y_{21} & \dots & y_{2n} \\ & \vdots & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn}\end{vmatrix}}_{\text{first Element}}+\dots+\underbrace{\begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & \dots & y_{2n} \\ & \vdots & \\ y'_{n1} & \dots & y'_{nn}\end{vmatrix}}_{\text{n Element}}$$

ומתקיים

$$\frac{dy_i^j(x)}{dx}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}y_j^k(x)_n=A_{ii}y_j^i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}A_{ik}y_j^k(x)$$

ננתח את האיבר הראשון:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} A_{11}y_1^1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n}A_{1k}y_1^k(x) & \dots & A_{11}y_n^1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{n}A_{1k}y_n^k(x) \\ y_{21} & \dots & y_{2n} \\ & \vdots & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn}\end{vmatrix}}_{\text{first Element}}=\begin{vmatrix} A_{11}y_1^1+A_{12}y_1^2+\dots+A_{1n}y_1^n & \dots & A \\ y_{21} & \dots & \\ & \vdots & \\ y_{n1} & \dots & \end{vmatrix}$$

כעת, נחסר מהשורה הראשונה, כל כל שורה r, כפול A_{1r}, ונקבל

$$=\begin{vmatrix} A_{11}y_1^1 & \dots & A_{11}y_n^1 \\ y_{21} & \dots & y_{2n} \\ & \vdots & \\ y_{n1} & \dots & y_{nn}\end{vmatrix}=A_{11}\cdot W$$

נמשיך כך לכל אלמנט ונקבל

$$\frac{dW}{dx}=A_{11}W\left(x\right)\ldots A_{nn}W\left(x\right)=\left(A_{11}+\ldots+A_{nn}\right)W=\mathrm{trA}W\left(x\right)$$

5.2 מערכת הומגנית עם מקדמים קבועים

מערכת מהצורה:

$$\frac{dy\left(x\right)}{dx}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Const}}}{A}\vec{y}\left(x\right)$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$\vec{y}\left(x\right)=e^{\lambda x}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Constant}}}{\vec{v}}$$

נציב למערכת ־

$$\lambda\cancel{e^{\lambda x}}\vec{v}=A\cancel{e^{\lambda x}}\vec{v}$$

נצמצם ב $e^{\lambda x}$:

$$\Rightarrow A\vec{v}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Eigenvector}}}{\lambda}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Eigenvalue}}}{\vec{v}}\qquad\left(v\neq0\right)$$

נחשב פולינום אופייני:

$$\left(A-\lambda I\right)\vec{v}=0$$
$$\det\left(A-\lambda I\right)=0$$
$$\Rightarrow\varphi\left(\lambda\right)=\begin{vmatrix}A_{11}-\lambda\\ & \ddots\\ & & A_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0=$$

כעת, נחלק למקרים:

א) $\varphi\left(\lambda\right)=\left(\lambda-\lambda_{1}\right)\ldots\left(\lambda-\lambda_{n}\right)$ כל שורשים פשוטים ושונים אחד לשני : $\vec{v}_{1}\ldots\vec{v}_{n}$ בת"ל.
ואז הפתרונות יהיו:

$$y_{1}\left(x\right)=e^{\lambda_{1}x}\vec{v_{1}}+\ldots\vec{y}_{n}=e^{\lambda_{2}x}\vec{v}_{2}$$
$$W\left(\vec{y}_{1}\left(x\right),\ldots,\vec{y}_{n}\right)\left(x\right)=\det\left(e^{\lambda_{1}x}\vec{v}_{1}\ldots e^{\lambda_{n}x}\vec{v}_{n}\right)=e$$
$$W\left(\vec{y}_{1}\left(x\right),\ldots,\vec{y}_{n}\right)\left(0\right)=\det\left(e^{\lambda_{1}0}\vec{v}_{1}\ldots e^{\lambda_{n}0}\vec{v}_{n}\right)\neq0$$

לפי משפט, מספיק שהוורנסקיאן לא מתאפס באיזושהי נק' כדיי שנדע ש$\vec{y}_1(x),\ldots,\vec{y}_n$ בת"ל. במקרה זה הפיתרון הכללי הוא:

$$\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i x}\vec{v}_i$$

א1) כל $\{\lambda_n\}$ ממשיים, ואז הפתרון הנל' הוא הפתירון.

$$\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{\lambda_i x}\vec{v}_i$$
$$(\tilde{v}_1,\lambda_1)\rightarrow\left(\overline{\tilde{v}_1},\bar{\lambda}_1\right)$$

א2) יש ע"ע מרוכבים

$$\begin{aligned} A\vec{\tilde{v}} &= \lambda_1\vec{\tilde{v}}_1 \underset{A=\bar{A}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}}} A\bar{\vec{\tilde{v}}}_1=\bar{\lambda}\bar{\vec{\tilde{v}}} \\ A\vec{\tilde{v}} &= \lambda_1\vec{\tilde{v}}_1 \underset{A=\bar{A}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}}} A\bar{\vec{\tilde{v}}}_1=\bar{\lambda}\bar{\vec{\tilde{v}}} \end{aligned}$$

$$\Downarrow\quad\Downarrow\quad\Downarrow$$

$$\vec{\tilde{y}}_2(x)=e^{\bar{\lambda}_1 x}=\frac{\bar{\vec{\tilde{v}}}}{\tilde{y}_1(x)}\quad\vec{\tilde{v}}\quad\vec{\tilde{y}}_1(x)=e^{\lambda_1 x}\vec{\tilde{v}}$$

לכן

$$\vec{y}_1(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{y}_1+\bar{\tilde{y}}_1\right]=\text{Re }\left[\tilde{y}_1(x)\right]$$
$$\vec{y}_2=\frac{1}{2i}\left[\tilde{y}_1-\bar{\tilde{y}}_1\right]=\text{Im}\left[\tilde{y}_1(x)\right]$$

ב) $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^r(\lambda_{r+1}-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$, יש r וקטורים עצמיים (ר"א=ר"ג). כלומר $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_r$. (יש $s<r$ וקטוריים עצמיים).
אם זה כך לכל הערכים העצמיים אז:

1. יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית
2. מטריצה A לכסינה.

דוגמא:

$$\vec{v}'=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\vec{v}$$

מציבים $\vec{U}(x)=e^{\lambda x}\vec{v}$:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}$$

נקבל: $\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$
עבור מקרה $\lambda=-1$:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

לכן הו"ע $v_1=(1,0,-1)$ ו $v_2=(0,1,-1)$.
עבור $\lambda=2$, נקבל ו"ע $v_3=(1,1,1)$. נקבל פתרונות בת"ל:

$$u_1(x)=e^{-x}(1,0,-1),u_2=e^{-x}(0,1,-1),u_3(x)=e^{2x}(1,1,1)$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$u(x)=C_1u_1+C_2u_2+C_3u_3=\begin{pmatrix}C_1e^{-x}+C_3e^{2x}\\ C_2e^{-x}+C_3e^{2x}\\ -C_1e^{-x}-C_2e^{-x}+C_3e^{2x}\end{pmatrix}$$

משפט 5.4 אם ריבוי גאומטרי s קטן מריבוי אלגברי r של שורש, λ של הפולינום האופייני, אז למערכת משוואות (H) קיימים r פיתרונות בת"ל מהצורה:

$$\vec{U}(x)=e^{\lambda x}(p_1(x),\ldots,p_n(x))$$

כאשר $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ פולינומים מדרגה $r-1$ לכל היותר.

5.2.1 משוואות מטריציות

$U_1,\ldots U_n$ פתרונות בת"ל

$$U(x)=\left(\vec{U}_1(x),\ldots,\vec{U}_n(x)\right)=\begin{pmatrix}U_1^1 & & U_n^1\\ & & \\ & & \\ U_1^n & & U_n^n\end{pmatrix}$$

$$U'(x)=(U_1',\ldots U_n')=(AU_1,\ldots AU_n)=AU(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$U'(x)=A(x)U(x)$$

ות"ה:

$$U|_{x=x_0} = U(x_0)$$

$$W(x_0) = \det U'(x_0) \neq 0$$

$U(x)$ נקראת מטריצה יסודית.

טענה 5.5 אם $U(x)$ פתרון למשוואה מטריצית $U'(x) = A(x)U(x)$, $\det U(x) \neq 0$ אז פתרון כללי למשוואה זו הוא $U(x)C$ כאשר C- מטריצה קבועה שרירותית.

1) לכל C, $U(x)C$ פתרון.

2) לכל פתרון $V(x)$ קיימת מטריצה C כך ש $V(x) = U(x)C$.

הוכחה: 1)

$$[U(x)C]' = U'(x)C = (AU(x))C \underset{U(x)\ \text{solution}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} A(U(x)C)$$

לפי ה שיוויון הנ"ל, $U(x)C$ הוא פתרון.

2) יהי $V(x)$ פתרון. $U(x)$ הפיכה, נגדיר: $C = U^{-1}(x_0)V(x_0)$ עבור איזשהוא x_0 נשווה $V(x)$ ו $W(x) = U(x) = C$ - $V(x)$ ו $W(x)$ שניהם פתרונות המקיימים את אותו ת"ה $W(x_0) = V(x_0)$ בגלל משפט קיום ויחידות נקבל כי $W(x) = V(x)$. ■

נרצה לפתור בעיות מהצורה:

כאשר $A(x) = A$ מטריצה קבועה אז:

(3) $U'(x) = AU(x)$

(4) $U(0) = I$

הערה 5.6 במקרה $n = 1$:

$$U'(x) = aU(x)$$
$$U(0) = 1$$
$$U(x) = e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!}$$

משפט 5.7 פתרון לבעייה 3, 4 הוא

$$U(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}A^k \triangleq \exp(xA)$$
$$U_{ij}(x) = \delta_{ij} + xA_{ij} + \frac{x^2}{2!}A_{ij}^2 + \ldots$$
$$\Rightarrow \vec{y}(x) = \exp(xA)\vec{c}$$

הוכחה: 1) הטור מתכנס ־
התכנסות . לשם כך נגדיר נורמה $\|A\| = \sum_{i,j} |A_{i,j}|$. נראה שזו נורמה:
1) $\|A\| \geq 0$, $A = 0 \iff \|A\| = 0$.
2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$
3) $\|A + b\| \leq \|A\| + \|B\|$ (כי נכון לכל איבר ⇐נכון לסכום.)
על כן נורמה. נראה שמתקיים: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

$$\|AB\| = \sum_{i,j} \left|(AB)_{ij}\right| = \sum_{i,j} \left|\sum_k A_{ik} B_{kj}\right| \leq \sum_{ijk} \underbrace{|A_{ik} B_{kj}|}_{n^3 \text{ elements}}$$

$$\|A\| \, \|B\| = \sum_{ik} |A_{ik}| \sum_{lj} |B_{lj}| = \sum_{iklj} \underbrace{|A_{ik}| \, |B_{lj}|}_{n^4 \text{elements}}$$

יש יותר אברים ולכן:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

מתקיים:

$$U_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left(A^k\right)_{ij}$$

$$|x| \leq R \ \ (\forall x \in \mathbb{R}, \exists R \in \mathbb{R})$$

$$\left|A_{ij}^k\right| \underset{\|AB\| \leq \|A\| \|B\|}{\underset{\uparrow}{\leq}} \left\|A^k\right\| \leq (\|A\|)^k$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^k}{k!} \left(A^k\right)_{ij}\right| \leq \frac{R^k \|A\|^k}{k!}$$

אך מתקיים $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k \|A\|^k}{k!} = \exp\left(R\left(\|A\|\right)\right)$, כלומר מתכנס. וממבחן ההשוואה הטור $U_{ij}(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום $|x| \leq R$.
2)בדיקה שהסכום מקיים (3) ו(4)

$$U'_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \left(A^k\right)_{ij}$$

$$U'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = AU$$

$$U(0) = I$$

■

דוגמא

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \exp(xA) \, \vec{c}$$

פתרון $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. מתקיים

$$U=\exp(xA)=I+xA+\frac{x^2}{2!}A^2+\ldots$$
$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-I;$$
$$A^3=-A;\ A^4=I;\ldots$$
$$U=I+xA-\frac{x^2}{2!}I-\frac{x^3}{3!}I+\frac{x^3}{3!}I+\ldots=$$
$$I\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\ldots\right)}_{\cos x}+A\underbrace{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)}_{\sin x}$$

בשיטה הישנה הפתרון היה:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+1=0,\ \lambda_{1,2}=\pm i$$
$$\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i\Rightarrow\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_{1_1} \\ v_{2_1} \end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases} -i\tilde{v}_{1_1}+\tilde{v}_{1_2}=0 \\ -\tilde{v}_{1_1}-i\tilde{v}_{1_2}=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\tilde{\vec{v}}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\tilde{\vec{u}}_1(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}e^{ix}=\begin{pmatrix} \cos x+i\sin x \\ i\cos x-\sin x \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix} \vec{u}_1=\mathrm{Re}\tilde{\vec{u}}_1=\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \\ \vec{u}_2=\mathrm{Im}\tilde{\vec{u}}_1=\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \end{matrix}$$

תכונות של $\exp(xA)$

1. אם $AB=BA$ $\Leftarrow$

$$\exp(xA)=\exp(xB)=$$
$$\exp(x(A+B))$$

.2

$$\exp\left(xP^{-1}AP\right) =$$

$$I + xP^{-1}AP + \frac{x^2}{2!}P^{-1}A\cancel{P}\cancel{P^{-1}}AP + \dots \frac{x^n}{n!}P^{-1}A\cancel{P}\dots\cancel{P^{-1}}AP$$

$$= P^{-1}\left(I + xA + \dots + \frac{x^n}{n!}A^n\right)P$$

לפיכך

$$\exp\left(xA\right) = P\exp\left(xP^{-1}AP\right)P^{-1}$$

5.2.2 מקרים ל A

1. A לכסינה.

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & & \\ & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$P=(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\dots|\vec{v_n})$$

$$\exp(xA)=P\exp(x\Lambda)P^{-1}$$

$$\exp(x\Lambda)=I+x\Lambda+\frac{x^2}{2!}\Lambda\dots$$

$$=\begin{pmatrix}1+x\lambda_1+\frac{x^2}{2!}\lambda_1^2+\dots & 0 & & \\ & 0 & & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & & & 1+x\lambda_n+\frac{x^2}{2!}\lambda_n^2+\dots\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 x} & 0 & & \\ & e^{\lambda_2 x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & & & e^{\lambda_n x}\end{pmatrix}$$

$$\vec{y}=\exp(xA)\vec{c}=(\vec{v}_1|\vec{v_2}|\dots|\vec{v_n})\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 x} & 0 & & \\ & e^{\lambda_2 x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & & & e^{\lambda_n x}\end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}\underset{\text{arbitrary}}{\underset{\uparrow}{\vec{c}}}}_{\vec{d}}$$

$$=(\vec{v}_1|\vec{v_2}|\dots|\vec{v_n})\begin{pmatrix}d_1e^{\lambda_1 x}\\ d_2e^{\lambda_2 x}\\ \vdots\\ d_ne^{\lambda_n x}\end{pmatrix}=d_1\vec{v_1}e^{\lambda_1 x}+d_2\vec{v}_2e^{\lambda_2 x}+\dots d_n\vec{v}_ne^{\lambda_n x}$$

אך הגענו לתוצאה זו ממקודם. כלומר במקרה ש A לכסינה $\Leftarrow$לא עשינו דבר. כלומר אין פה "שיטה חדשה" .

2. A אינה לכסינה. עדיין ניתן לג'רדן אותה:

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & & \\ & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}$$

$$J_i = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{r\times r}$$

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & & \\ & J_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & J_s^k \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\ J_i = \lambda_i I + Z$$

$$\exp(xJ_i) = \exp(x\lambda_i I + xZ) = \exp(x\lambda_i I)\exp(xZ)$$

$$\exp(x\lambda_i I) = \exp(x\lambda_i)\, I$$

$$\exp(xZ) = I + xZ + \frac{x^2}{2!}Z^2 + \dots$$

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Z^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\ Z^r = 0$$

מכאן ש $\exp\left(xZ\right)$ זהו סכום של r מטריצות. כך ש

$$\exp\left(xZ\right)=I+xZ+\frac{x^{2}}{2!}Z^{2}+\ldots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}Z^{r-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & & \ddots & \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & x & \frac{x^2}{2} \\ & 0 & 0 & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\exp\left(xJ_i\right)=e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & & \ddots & \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & x & \frac{x^2}{2} \\ & 0 & 0 & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, נרצה לחשב, ($P=(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\ldots|\vec{v_n})$) (נעבוד עבור $r=n$)

$$\exp\left(xA\right)\underset{\text{arbitrary}}{\underset{\uparrow}{\vec{c}}}=P\exp\left(xJ\right)P^{-1}c=$$

$$\underbrace{\left(\exp\left(xA\right)\underset{\text{arbitrary}}{\underset{\uparrow}{\vec{c}}}\right)}_{\text{j element}}(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\ldots|\vec{v_n})\left(e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & & \ddots & \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & x & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & x & \frac{x^2}{2} \\ & 0 & 0 & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}\right)\vec{d}$$

נקבע

$$\vec{d_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\vec{d_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\ldots$$

ואז:

$$\vec{y_1}=\left(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\ldots|\vec{v_n}\right)e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{v_1}e^{\lambda_i x}$$

$$\vec{y_2}=\left(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\ldots|\vec{v_n}\right)e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix}x\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\left(x\vec{v}_1+\vec{v_2}\right)e^{\lambda_i x}$$

$$\vdots$$

$$\vec{y_r}=\left(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\ldots|\vec{v_n}\right)e^{\lambda_i x}\begin{pmatrix}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\\\vdots\\x\\1\end{pmatrix}=\left(\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\vec{v_1}+\ldots+x\vec{v_{r-1}}+\vec{v_r}\right)e^{\lambda_i x}$$

כך שעבור **כל בלוק** מגודל r קיבלנו r פתרונות בת"ל, כך שסה"כ קיים בסיס נדרש.

מתקיים מהנחתנו המקורית $\vec{y}'=A\vec{y}$.

$$\begin{gathered}
y_1'=Ay_1\\
v_1\lambda_i\cancel{e^{\lambda_i x}}=A\vec{v}_1\cancel{e^{\lambda_i x}}\\
\Rightarrow\left(A-I\lambda_i\right)\underset{\substack{\uparrow\\\text{eigenvector}}}{\vec{v}_1}=0\\
y_2=\left(xv_1+v_2\right)e^{\lambda_i x}\\
\cancel{e^{\lambda_i x}}\left[v_1+\lambda_i xv_1+\lambda_i v_2\right]=\left(Av_1x+Av_2\right)\cancel{e^{\lambda_i x}}\\
\Rightarrow\underbrace{\left(Av_2-\lambda_i v_2-v_1\right)}_{\underbrace{=0}_{\Rightarrow(A-\lambda_i I)v_2=v_1}}+x\underbrace{\left(Av_1-\lambda_i v_1\right)}_{\substack{(A-\lambda_i)v_1=0\\\uparrow\\\text{because it's eignvalue}}}=0
\end{gathered}$$

נמצא $(A-\lambda_i I)\,v_2=v_1$ זהו וקטור מצורף , אם אין לנו מספיק ערכים עצמיים נצטרך לבנות

פתרונות באמצעות וקטורים מצורפים.

$$\vec{y_3}=\left(\frac{x^2}{2}\vec{v_1}+x\vec{v_2}+\vec{v_3}\right)e^{\lambda_i x}$$

$$\vec{y_3'}=A\vec{y_3}$$

$$\cancel{e^{\lambda_i x}}\left[xv_1+v_2+\frac{\lambda_1 x^2}{2}v_1+\ldots+\lambda_i x v_2+\lambda_i v_3\right]=\left(\frac{x^2}{2}Av_1+xA\vec{v_2}+A\vec{v_3}\right)\cancel{e^{\lambda_i x}}$$

$$v_2+\lambda_1 v_3=Av_3$$

$$\left(A-\lambda_i I\right)v_3=v_2$$

וכך הלאה

$$\begin{cases}\left(A-\lambda_i I\right)v_2=v_1\\ \left(A-\lambda_i I\right)v_3=v_2\\ \vdots\\ \left(A-\lambda_i I\right)v_r=v_{r-1}\end{cases}$$

דוגמה:

$$\vec{u}'=\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}\vec{u}$$

$$\varphi\left(\lambda\right)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-4\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3+4=\left(\lambda-1\right)^2$$

$$\lambda=1\Rightarrow A-I=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left(A-\lambda I\right)\vec{v}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\end{pmatrix}=0$$

$$\left(A-\lambda I\right)\vec{w}=\vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w^1\\w^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$w=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{cases}2w'-4w^2=2\\ w'-2w^2=1\end{cases}$$

נבחר $w^1 = 1$,$w^2 = 0$

$$\vec{y_2} = \vec{v}xe^{\lambda x} + \vec{w}e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

?is there another vector 'metzuraf'

$$(A - \lambda I) = \vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2z^1 - 4z^2 = 1 \\ z^1 - 2z^2 = 0 \end{cases}$$

no solution

$$\vec{y} = C_1 e^x + C_2 \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix} e^x$$

5.3 מערכת משוואת לינארית לא הומגנית

$$(NH)\, \vec{y}'(x) = A(x)\,\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

$$(H)\, \vec{u}'(x) = A(x)\,\vec{u}(x)$$

$$\underset{\text{General}}{\underset{\uparrow}{\vec{y}(x)}} = \underset{\text{private}}{\underset{\uparrow}{\vec{y}_p}} + \underset{\text{General}}{\underset{\uparrow}{\vec{u}(x)}}$$

5.3.1 שיטת ווריאצית הפרמטרים

$$(H)\,u(x)=U(x)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Const}}}{\vec{c}}$$

$$U'=AU$$

$$(NH)\,y=Uc$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ AU}}{U'}c+Uc'=AUc+b$$

$$\Rightarrow Uc=b$$

$$c'=U^{-1}b$$

$$c=\int_{x_0}^{x}U^{-1}bds+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{arbitrary const vec}}}{\vec{K}}$$

$$\vec{y}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Private Solution of (NH)}}}{U\int_{x_0}^{x}U^{-1}bds}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{General solution of (H)}}}{UK}$$

$$\vec{y}=\int_{x_0}^{x}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Cauchy Kernal}}}{U(x)\,U^{-1}}(s)\,bds+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{General solution of (H)}}}{UK}$$

5.3.2 מקדמים קבועים

$$U(x)=e^{Ax}$$

$$U^{-1}(x)=e^{-Ax}$$

$$e^{Ax}e^{-As}=e^{(x-s)A}$$

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}e^{(x-s)}bds+u$$

$$y'=Ay+b$$

$$b=e^{\alpha x}\cos\beta x\begin{pmatrix}p_1(x)\\ \vdots\\ \vdots\\ p_n(x)\end{pmatrix}+e^{\alpha x}\sin\beta x\begin{pmatrix}q_1(x)\\ \vdots\\ \vdots\\ q_n(x)\end{pmatrix}|q,p\text{ n degree}$$

אם $\lambda=\alpha+bi$ שורש של משוואה אופיינית מריבוי אלגברי r ,$q_i(x)$ $p_i(x)$ פולינומים. (אם זה לא

שורש $r=0$) נחפש פתרון מהצורה:

$$y_p(x)=b=e^{\alpha x}\cos\beta x\begin{pmatrix}P_1(x)\\ \vdots\\ \vdots\\ P_n(x)\end{pmatrix}+e^{\alpha x}\sin\beta x\begin{pmatrix}Q(x)\\ \vdots\\ \vdots\\ Q_n(x)\end{pmatrix}|Q,P,\ \text{n+r degree}$$

דוגמה

$$y'=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}e^{5x}\\e^{7x}\end{pmatrix}$$

פתרון נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$u'=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}u$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\4&1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)^2=4$$

$$1-\lambda=\begin{cases}2\Rightarrow\lambda_1=-1\\-2\Rightarrow\lambda_2=3\end{cases}$$

$$\lambda_1=-2\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^1\\v_1^2\end{pmatrix}=0$$

$$2v_1^1+v_1^2=0$$

$$4v_1^1+2v_1^2=0$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{we'll choose}}}{\Rightarrow} v_1^1=1,\ v_1^2=-2$$

$$\Rightarrow u_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-x}$$

$$\lambda_2=3\Rightarrow\begin{pmatrix}-2&1\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_2^1\\v_2^2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow v_2^1=1,v_2^2=2$$

$$u_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3x}$$

נמצא הופכית

$$U\left(x\right)=\begin{pmatrix}e^{-x} & e^{3x}\\ -2e^{-x} & 2e^{3x}\end{pmatrix}$$
$$U^{-1}\left(s\right)=\frac{1}{e^{-s}2e^{3s}+e^{3s}2e^{2s}}\begin{pmatrix}2e^{3s} & -2e^{-s}\\ e^{3s} & 2e^{-s}\end{pmatrix}$$
$$U^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{e^{s}}{2} & -\frac{e^{s}}{4}\\ \frac{1}{2}e^{-3s} & \frac{e^{-3s}}{4}\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$U^{-1}b=\begin{pmatrix}\frac{e^{s}}{2} & -\frac{e^{s}}{4}\\ \frac{1}{2}e^{-3s} & \frac{e^{-3s}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5s}\\ e^{7s}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{e^{6s}}{2} & -\frac{e^{8s}}{4}\\ \frac{1}{2}e^{2s} & \frac{e^{4s}}{4}\end{pmatrix},\text{we'll choose }x_{0}=-\infty$$
$$\Rightarrow\int\begin{pmatrix}\frac{e6^{s}}{2} & -\frac{e^{8s}}{4}\\ \frac{1}{2}e^{2s} & \frac{e^{4s}}{4}\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{e^{6x}}{12} & -\frac{e^{8x}}{32}\\ \frac{1}{4}e^{-2x} & \frac{e^{-4x}}{16}\end{pmatrix}$$
$$y_{p}=U\int\ldots=\begin{pmatrix}e^{-x} & e^{3x}\\ -2e^{-x} & 2e^{3x}\end{pmatrix}\vec{\begin{pmatrix}\frac{e^{6x}}{12} & -\frac{e^{8x}}{32}\\ \frac{1}{4}e^{-2x} & \frac{e^{-4x}}{4}\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\frac{e^{5x}}{3}+-\frac{e^{7x}}{32}\\ \frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{3e^{7x}}{16}\end{pmatrix}$$
$$y=\begin{pmatrix}\frac{e^{5x}}{3}+-\frac{e^{7x}}{32}\\ \frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{3e^{7x}}{16}\end{pmatrix}+c_{1}\begin{pmatrix}e^{-x}\\ -2e^{-x}\end{pmatrix}+c_{2}\begin{pmatrix}e^{3x}\\ 2e^{3x}\end{pmatrix}$$

6 תורת שטורם (Sturm)

מדברים על משוואות מהצורה

$$a\left(x\right)y''+b\left(x\right)y'+c\left(x\right)y=0,\ x\in I$$

כאשר $a\left(x\right),b\left(x\right),c\left(x\right)$ רציפות, ו $a\left(x\right)\neq0$ בקטע I . אז"י

$$y''\left(x\right)+\frac{b\left(x\right)}{a\left(x\right)}y'+\frac{c\left(x\right)}{a\left(x\right)}y=0$$

ולכן קיימים שני פתרונות בלתי תלויים לינארית.

לדוגמא:

$$u''-a^{2}u=0$$
$$r^{2}-a^{2}=0\Rightarrow r=\pm a,$$
$$u=C_{1}e^{ax}+C_{2}e^{-ax}$$

במקרה זה **אין אפסים** או **אפס אחד.**

מקרה נוסף

$$v''+a^2v=0$$
$$r^2+a^2=0\Rightarrow r=\pm ia$$
$$u=C_1\cos(ax)+C_2\sin(ax)$$

במקרה זה **אין סוף אפסים.**

כעת, נפתח את משוואת שטורם. נניח ש a,b גזירות

$$y(x)=\underset{k(x)>0}{\underset{\uparrow}{k(x)}}\quad\underset{\text{new uknown function}}{\underset{\uparrow}{u(x)}}$$
$$y'=ku'+k'u$$
$$y''=ku''+2k'u'+k''u$$
$$ay''+by'+cy=0$$
$$\Rightarrow a(ku''+2k'u'+k''u)+b(ku'+k'u)+cku=$$
$$\Rightarrow aku''+u'(2ak'+kb)+(ak''+bk'+ck)u=0$$

כעת, נבחר k כך ש $2ak'+kb=0$:

$$(\ln k)'=\frac{k'}{k}=-\frac{b}{2a}$$
$$\Rightarrow \ln k(x)=\underset{=0}{\underset{\uparrow}{\cancel{C}}}-\int_{x_0}^{x}\frac{b(s)}{2a(s)}ds$$
$$k(x)=\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\frac{b(s)}{2a(s)}\right]$$
$$k'(x)=-\frac{b(x)}{2a(x)}k(x)$$
$$k''(x)=-\frac{b}{2a}k+\frac{ba'}{2a^2}kx-\frac{bk'}{2a}$$

ואז נציב:

$$a\cancel{k}u''+\left[-\frac{b}{2}+\frac{ba'}{2a}+\frac{1}{4}\frac{b^2}{a}-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a}+c\right]\cancel{k}u=0$$
$$u''+\left[\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{b'}{a}+\frac{ba'}{2a^2}}_{-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)'}-\frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}\right]u=0$$
$$u''+p\underset{\uparrow}{(x)}u$$

6.0.3 משפט ההשוואה של שטורם

משפט 6.1 נתונות שתי משוואות

$$\begin{matrix} x\in I,\ u''(x)+p(x)\,u(x)=0 \\ x\in I,\ v''(x)+\mathcal{P}v(x)=0 \end{matrix},\ I=[a,b]$$

$p(x),\mathcal{P}(x)$ רציפות ב־ I . נתון ש $p\leq\mathcal{P}$ ב־I,
אם לפונקציה $u(x)\not\equiv 0$ (פתרון של 1) יש שני אפסים ב־I : $u(\alpha)=u(\beta)=0$ אז"י לכל פתרון $v(x)$ של (2) יש נקודה γ, $\alpha<\gamma<\beta$ כך ש $p<\mathcal{P}$ לפחות בנקודה אחת $x=x_0$. (בגלל רציפות $p(x)<\mathcal{P}(x)$ בסביבות x_0), ואז מתקיים:

$$v(\gamma)=0$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות. נניח ש $x=\alpha$ ו $x=\beta$ אפסים עוקבים. (אם לא, נוכיח את המשפט לאפסים עוקבים) $\Leftarrow 0\neq u(x)\,,(\alpha,\beta)\ni x$.
בלי הגבלת כלליות נניח כי $u(x)>0$ בקטע זה.(אם לא נקח $-u(x)$) (u' שונה מאפס, כי מהיחידות אם הוא היה שווה לאפס אז $u(x)\equiv 0$, כך שהפונקציה בהכרח חיובית או שלילית בקטע, ניתן לצייר זאת ליותר הבנה)
נניח בשלילה ש $v(\gamma)\neq 0$ בקטע (α,β)בה"ג נניח ש־

$$v(x)>0$$

(אם לא אז נקח $v(x)$־). כעת,

$$\begin{gathered} -v\left(u''+p(x)\,u\right)=0 \\ u\left(v''+\mathcal{P}(x)\,v\right)=0 \\ \Rightarrow \\ \underbrace{uv''-vu''}_{(uv'-vu')'}+\left(\mathcal{P}(x)-p(x)\right)uv=0 \\ \int_\alpha^\beta (uv'-u'v)'\,dx+\int_\alpha^\beta \left(\mathcal{P}(x)-p(x)\right)uv\,dx=0 \\ \cancel{\underset{\overset{\uparrow}{=0}}{u(\beta)}\,v'(\beta)}-\underset{\overset{\uparrow}{<0}}{u'(\beta)}\underset{\overset{\uparrow}{\geq 0}}{v(\beta)}-\cancel{\underset{\overset{\uparrow}{=0}}{u(\alpha)}\,v'(\alpha)}+u'(\alpha)\underset{\overset{\uparrow}{=0}}{v(\alpha)} \\ +\int_\alpha^\beta \underset{\overset{\uparrow}{\text{In certain area }>0}}{\left(\mathcal{P}(x)-p(x)\right)}\ {>}0\ \underset{\overset{\uparrow}{\text{(mayb }=0\text{ in edges)}}}{uv}\,dx \end{gathered}$$

ולכן נקבל שהביטוי כולו גדול ממש מ0, ולא שווה ל־0. **סתירה**. ■

מסקנה 6.2 נניח $u''+p(x)\,u=0$ וידוע כי $p(x)\leq 0$ בקטע I .
טענה: לכל פתרון של משוואה זו אין יותר מאפס אחד בקטע I.

הוכחה: נגדיר $v'' + \mathcal{P}(x)\, v = 0$, $\mathcal{P}(x) = 0$. $v = C_1 x + C_2,\ v'' = 0$

אם $p(x) \equiv 0$, אז אין יותר מאפס אחד. אם $p(x) \not\equiv 0$, משתמשים במשפט שטורים ל־ u ו v.
אם ל u יש 2 אפסים לכל פתרון v צריך להיות לפחות אפס אחד בין שני אפסים האלה. אבל ל v יש פתרון C_2 שהוא בכלל לא מתאפס. **סתירה.** ■

מסקנה 6.3 נתבונן במשוואה $y'' + q(x)\, y = 0$, $x \in [a,b]$. ונניח ש $\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 \leq q(x) \leq \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$. כאשר $m, n \in \mathbb{Z}$.

טענה: לכל פתרון של משוואה זו יש לפחות m אפסים בקטע (a,b) ולא יותר מ־n אפסים בקטע $[a,b]$.

הוכחה: נשווה שתי משוואות:

א)

$$u'' + \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 u = 0$$

ו$y'' + q(x)\, y = 0$. (כאמור $\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 \leq q(x)$) אנו יכולים לקחת פתרון כזה:

$$u(x) = \sin\frac{m\pi (x-a)}{(b-a)}$$

לפי משפט שטורם בכל קטע יש לפחות אפס אחד של $y(x)$.

ב) באופן דומה,

$$v'' + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2 u = 0$$

נניח שיש יותר מn אפסים בקטע $[a,b]$, על כן לפי משפט שטורם, לכל פתרון של v יש **יותר** מ$n-1$ אפסים בקטע סגור $[a,b]$. בפועל יש בדיוק $n-1$ אפסים וזו **סתירה.** ■

6.0.4 משפט ההפרדה של שטורם

נתבונן במשוואה $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = 0$, ב־ I. $p(x)$,$q(x)$ רציפות.

נבחין, אם לפתרונות $y_1(x)$ ו־ $y_2(x)$ יש אפס משותף:

$$y_1(\alpha) = y_2(\alpha) = 0$$

אז פתרונות $y_1(x)$ ו $y_2(x)$ תלויים לינארית, (כי $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}|_\alpha = 0$)

משפט 6.4 אם $u(x)$ ו $v(x)$ פתרונות של משוואה, <u>בלתי תלויים לינארית</u>, אז בין כל שני אפסים צמודים של פונקציה $u(x)$ יש בדיוק אפס אחד של פונקציה $v(x)$ ולהפך($u = v$).

הוכחה: א)קיים לפחות אפס יחיד. מתקיים

$$\begin{cases} u''+pu'+qu=0 \\ v''+pv+qv=0 \end{cases} \Rightarrow u(\alpha)=u(\beta)=0$$

נניח של v אין אפסים. נגדיר $h=\frac{u}{v}$, h רציפה וגזירה (כאשר $v\neq 0$) ו$h(\alpha)=h(\beta)=0$. לפי משפט רול מתקיים

$$\exists\gamma;\ h'(\gamma)=0$$

אך מה זה h'?

$$h'=\frac{u'v-v'u}{v^2}=\frac{1}{v^2}\begin{vmatrix} v & u \\ v' & u' \end{vmatrix}=\frac{1}{v^2}W(u,v)\,|_{x=\gamma}=0$$

אך מפיתוחים קודמים לפתרונות בלתי תלויים לינארית $W(x)\neq 0$ בכל נקודה. **סתירה.**
ב) קיים לכל היותר אפס יחיד ב $[\alpha,\beta]$. נניח שיש 2 אפסים של $v(x)$ בין 2 אפסים צמודים של $u(x)$. נגיע לסתירה למשפט ההשוואה, כי אין אפס לu בין 2 אפסים של v. ■

11.01.2012

למה 6.5 אם לשני פתרונות של I $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0,\ x\in I$ u,v יש אפס משותף אז $v=cu$, c קבוע .

$$v(\alpha)=u(\alpha)=0\Rightarrow W(u,v)\,|_{x=\alpha}=0$$

למה 6.6 אם לפתרון $y(x)$ יש אינסוף אפסים בקטע סופי אז $y(x)=0$ מכיוון ש: (Bolzano Weierstrass)

$$y(x_n)=0\Rightarrow y(c)=0,\ \underset{\to 0}{y(x_n)}-\underset{\to 0}{y(c)}=$$
$$(x_n-c)\,y'(c+\theta(x_n-c))\underset{0\le\theta\le 1}{\to} y'(c_\theta(x_n-c))=0$$
$$\Rightarrow y'(c)=0$$

דוגמה: בעיית **Sturm liouville** (שטורם ליוביל)

$$x\in[0,L],\ y''+\lambda y=0,\ \lambda>0$$
$$y(0)=y(L)=0,\ y(x)=0$$

פולינום אופייני: $r^2+\lambda=0$, ו$r=\pm i\sqrt{\lambda}$ ומתקיים:

$$y=C_1\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$
$$\Rightarrow y(0)=C_2=0$$
$$y(L)=\underset{\substack{\uparrow\\ C_1=0\\ y'(x)=0}}{C_1}\quad\underset{\substack{\uparrow\\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}L\right)=0}}{\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right)}\quad+\underset{\substack{\uparrow\\ =0}}{\cancel{C_2\cos\left(\sqrt{\lambda}L\right)}}=0$$
$$\sqrt{\lambda_n}L=n\pi$$
$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$
$$\Rightarrow y_n(x)=C_1\sin\frac{n\pi x}{L},\ n=1,2,\ldots$$

מתקיים:

$$A\vec{y}=\lambda\vec{y}$$
$$\vec{y}\in\mathbb{R}^n$$
$$\underbrace{\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)}_{L}y(x)=\lambda y(x)$$
$$y\in C^2\cap\{y(0)=y(L)=0\}$$
$$(L-\lambda)y=\varnothing$$
$$f(x)?$$

6.0.5 בעיית שטורם ליוביל רגולרית

$$x\in[a,b],\ y''+\lambda p(x)y=0,\ \lambda>0$$
$$y(a)=y(b)=0, p(x)\ \text{Continuous}$$

1. אם $p(x)>0$ לבעייה אין ערכים עצמיים כך ש $\lambda\le 0$.
אם $\lambda=0$: $y''=0$, $\Leftarrow y=C_1x+C_2$ (אין שני אפסים)
אם $\lambda<0\Leftarrow\lambda p(x)<0\Leftarrow$מסקנה 1 - אין שני אפסים.

2. אם λ ע"ע, אז פונקציה עצמית עבורו יחידה עד כדי כפל בקבוע.
1) אם y פ"ע, אז cy גם פונקציה עצמית.
2)אם y_1,y_2 פונקציות עצמיות, אז $y_1(a)=y_2(a)=0$, יש שורש משותף $\Leftarrow y_2=cy_1$.

3. אם $(\lambda_1,y_1(x))$,$(\lambda_2,y_2(x))$ ע"ע ופ"ע $\lambda_1\neq\lambda_2$, אז

$$\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)\,dx=0$$

ומתקיים:

$$\begin{matrix} y_1(a)=y_1(b)=0 \\ y_2(a)=y_2(b)=0 \end{matrix}\Big| + \quad \begin{matrix} y_2\left(y_1''+\lambda_1 p y_1\right)=0 \\ -y_1\left(y_2''+\lambda_2 p y_2\right)=0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_1''y_2-y_1y_2''}_{\frac{d}{dx}\left(y_1'y_2-y_1y_2'\right)}+(\lambda_1-\lambda_2)\,py_1y_2=0$$

$$\int_a^b \Rightarrow \underbrace{\left(y_1'y_2-y_1y_2'\right)|_a^b}_{=0}+\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}\int_a^b py_1y_2dx=0$$

4. אם $p(x)>0$ אז לבעיית ש"ל אין ע"ע מרוכבים. נניח שקיימים, מתקיים $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\bar{\lambda}$ ו$y_1=y,\ y_2=\bar{y}$ ואז מחישובים קודמים:

$$\underbrace{\left(y'\bar{y}-y\bar{y}'\right)|_a^b}_{=0}+\underbrace{\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)}_{=0}\underbrace{\int_a^b p\left|y\right|^2dx}_{>0}=0$$

מכאן $\lambda=\bar{\lambda}$ ולכן זהו ערך **ממשי**.

משפט 6.7 (קיום) לבעיית ש"ל אין סוף ע"ע

$$\lim\lambda_n=\infty,\ 0<\lambda_1<\lambda_2<\dots$$

לפ"ע $y_n(x)$ שמתאימה לע"ע λ_n יש בדיוק $n-1$ אפסים בקטע (a,b).

6.0.6 בעיית קושי

?

6.0.7 משפט קיום לבעיית שטורם ליוביל

משפט 6.8 לבעיית שטורם ליוביל יש אין סוף ע"ע

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\dots,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$$

לפונקציה עצמית $y_n(x)$ אשר מתאימה לע"עλ_nיש בדיוק $n-1$ אפסים פשוטים בקטע (a,b).

הוכחה: נגדיר בעייה משנית

$$\begin{gathered} y_\lambda''(x)+\lambda p(x)\,y_\lambda(x)=0,\ x\in[a,b] \\ y_\lambda(a)=0,\ y_\lambda'=1 \end{gathered}$$

נגדיר:

$$p(x)=p(b)\,,\ x\geq b,\ x\in[a,\infty)$$

תכונות של $y_{\lambda}(x)$:
1) ל$y_{\lambda}(x)$ יש אין סוף אפסים פשוטים

$$0 < x_1(\lambda) < x_2(\lambda) < \ldots$$

בתחום (a, ∞). נקח קטע $[a, c_1]$כך ש

$$\left(\frac{\pi}{c_1 - a}\right)^2 < \lambda k \le \lambda p(x)$$

ממסקנה 6.3 בקטע (a, c_1) יש לפחות אפס אחד.
נקח c_2, $\left(\frac{2\pi}{c_2-a}\right)^2 < \lambda k < \lambda p(x) \Leftarrow$יש 2 אפסים בקטע (a, c_2). נמשיך כך ונקבל, כי ישנה סדרה אינסופית:

$$0 < x_1(\lambda) < x_2(\lambda) < \ldots$$

ובהכרח:

$$\lim_{n \to \infty} x_x = \infty$$

כי אם $\lim_{n \to \infty} x_n = C$ אז בקטע $[a, x + \epsilon]$ יהיו אין סוף אפסים ואז ממסקנה 6.2 נקבל סתירהץ כמו כן אפסים אלה פשוטים כי אם לא אז נקבל נק' שבה $y(x_k) = 0$ וגם $y'(x_k) = 0$, ואז $y \equiv 0$ לפי משפט היחידות.
2) הערכות $\Leftarrow$ חסימות. נתבונן בפונ' y_{λ} המוגדרת במלבן: $a \le x \le l$, $0 < \lambda \le \beta$:
א) אם $x_1(\lambda) > l$ מתקיים:

$$\Rightarrow y''(x) = -\lambda p(x) y(x) < 0$$
$$0 < y(x) < x - a < l - a$$

ב) אם $x_1(\lambda) < l$ ו $x_2(\lambda) > l$ אז בתחום $a < x < x_1(\lambda)$ מתקיים $0 < y(x) < x - a$ ובתחום $x_1(\lambda) < x < \lambda$, מתקיים $y'(x_1(\lambda))(x - x_1(\lambda))$. לפי משפט רול קיימת נק' z_1 כך ש $y'(z_1) = 0$ ואז

$$y'(x_1(\lambda)) = \int_{z_1}^{x_1(\lambda)} y''(x)\,dx = -\int_{z_1}^{x_1(\lambda)} \underset{<\beta}{\underset{\uparrow}{\lambda}}\, \underset{<k}{\underset{\uparrow}{p(x)}} y(x)\,dx$$

ואז נקבל: $0 < y(x) < l - a$
וכך ניתן להמשיך, לסיכום ההתנהגות:

$$\forall \lambda \forall x; 0 < \lambda \le \beta,\ a \le x \le l$$
$$|y_{\lambda}(x)| < M(a, l, \beta)$$

3) אם $\mu \to \lambda$ אז $y_\lambda(x) \to y_\mu(x)$ ו $y'_\lambda(x) \to y'_\mu(x)$ במידה שווה בקטע $[a,l]$. נתבונן ב2 הבעיות בקטע $x \in [a,l]$:

$$\begin{cases} y''_\lambda + \lambda p(x) y_\lambda = 0 \\ a \le x \le l \\ y_\lambda(a) = 0, \ y'_\lambda(a) = 1 \\ \\ \\ y''_\mu + \mu p(x) y_\mu = 0 \\ y_\mu(a) = 0, \ y'_\mu(a) = 1 \end{cases}$$

נגדיר:

$$u_\lambda^{(x)} = y_\lambda(x) - y_\mu(x)$$

נחסר את 2 הבעיות:

$$y''_\lambda(x) - y''_\mu(x) + \lambda p(x) y_\lambda - \mu p(x) y_\mu = 0$$
$$y''_\lambda(x) - y''_\mu(x) + \mu p(x)(y_\lambda(x) - y_\mu(x)) = (\mu - \lambda) p(x) y_\lambda$$
$$\begin{cases} u''_\lambda + \mu p(x) u_\lambda = (\mu - \lambda) p(x) y_\lambda(x) \\ u_\lambda(a) = 0, \ u'_\lambda(a) = 0 \end{cases}$$

הפיתרון הכללי לבעייה ההומגנית:

$$u^h(x) = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

ניקח u_1 u_2 , כך ש $u_1(a) = 1, u'_1(a) = 0, u_2(a) = 0$. $u'_2(a) = 1$ $\Leftarrow$ $= 1$ $W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
ולכן u_1, u_2 בת"ל.
פתרון כללי, נשתמש בווריאצית הפרמטרים:

$$u_\lambda(x) = c_1(x) u_1(x) + c_2(x) u_2(x)$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{cases} c'_1(x) u_1(x) + c'_2(x) u_2(x) = 0 \\ c'_1(x) u'_1(x) + c'_2(x) u'_2(x) = (\mu - \lambda) p(x) y_\lambda(x) \end{cases}$$
$$W(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}(x) = 1$$
$$c'_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & u_2(x) \\ (\mu - \lambda) p(x) y_\lambda(x) & u'_2 \end{vmatrix} = -(\mu - \lambda) p(x) y_\lambda(x) U_2(x)$$
$$c'_2(x) = \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u'_1(x) & (\mu - \lambda) p(x) y_\lambda(x) \end{vmatrix} = (\mu - \lambda) p(x) y_\lambda(x) u_1(x)$$

עם כן,

$$|c_1'(x)| < |\mu-\lambda| < \underbrace{M\max_{a\le x\le l}|u_2(x)|}_{\text{not depent on }\lambda}$$
$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\mu} c_1' = 0$$
$$|c_1'(x)| < |\mu-\lambda| < \underbrace{M\max_{a\le x\le l}|u_1(x)|}_{\text{not depent on }\lambda}$$
$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\mu} c_2' = 0$$

סה"כ

$$u_\lambda(a) = c_1(a)\,u_1(a) + c_2(a)\,u_2(a) \to c_1(a) = 0$$
$$u_\lambda'(a) = \underbrace{c_1'(a)\,u_1(a) + c_2'(a)\,u_2(a)}_{=0} + \underbrace{c_1(a)\,u_1'(a)}_{=0} + \underbrace{c_2(a)\,u_2'(a)}_{=1} = 0$$
$$\Rightarrow c_2(a) = 0$$
$$\Rightarrow c_1(x) = \int_a^x c_1'(s)\,ds \to 0$$
$$\Rightarrow c_2(x) = \int_a^x c_2'(s)\,ds \to 0$$

(כל השאיפות במ"ש). לכן,

$$u_\lambda(a) = \underbrace{c_1(a)}_{\to 0}\underbrace{u_1(a)}_{\text{bound not depent on }\lambda} + \underbrace{c_2(a)}_{\to 0}\underbrace{u_2(a)}_{\text{bound not depent on }\lambda} \underset{\lambda\to\mu}{\to} 0$$

ובאופן דומה:

$$u_\lambda'(x) \to 0$$

ומתקיימת הטענה.

4) תכונות של אפסים $x_1(\lambda), x_2(\lambda)$:

1)פונקציה $x_1(\lambda)$ יורדת מונוטונית ממש:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \to x_1(\lambda_2) < x_1(\lambda_1)$$

$$y_{\lambda_1}'' + \lambda_1 p(x)\,y_\lambda = 0$$
$$y_{\lambda_1}(a) = 0,\ y_{\lambda_2}'(a) = 1$$

$$y_{\lambda_2}'' + \lambda_2 p(x)\,y_{\lambda_2} = 0$$

נשתמש במשפט ההשוואה של שטורם בקטע $[a, x_1(\lambda)]$:

$\lambda_2 p(x) > \lambda_1 p(x)$

2) עבור λ מספיק גדול $x_1(\lambda) < b$, ועבור λ מספיק קטן $x_1(\lambda) > b$:
א) $\lambda = L^+$ כך ש $L^+ k < L^+ p(x)$ $> \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2$ וכעת, ממסקנה 6.3, בקטע (a,b) יש לפחות אפס אחד של $y_\lambda(x)$.
ב) $\lambda = L^-$ כך ש $\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 > L^- k \geq L^- p(x)$ וכעת, ממסקנה 6.3, בקטע $[a,b]$ יש לא יותר מאפס אחד של $y_\lambda(x)$.
לפי ת"ה $y_\lambda(a) = 0$ ולכן בהכרח $y_1(\lambda) > b$. ■

טענה 6.9 אם $\lambda \to \mu$ אז $x_1(\lambda) \to x_1(\mu)$.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$, הוכחנו כבר ש $y_\lambda(x) \underset{\lambda\to\mu}{\overset{\uparrow}{\to}} y_\mu(x)$ לכן קיים $\delta > 0$ כך שעבור $|\lambda - \mu| < \delta$ מתקיים $|y_\lambda - y_m| < \epsilon$ לכל $x \in [a,l]$. מכאן נקבל כי $x_-(\mu,\epsilon) < x_1(\lambda) < x_+(\mu,\epsilon)$ וכאשר $\lambda \to \mu$, $x_+(\mu,\epsilon) \to x_1(\mu)$, $x_-(\mu.\epsilon) \to x_1(\mu)$ לכן $x_1(\lambda) \to x_1(\mu)$. כעת, נקבל כי קיים λ_1 כך ש $x_1(\lambda_1) = b$ ובאותו אופן קיים λ_2 כך ש $x_2(\lambda_2) = b$ וכך הלאה, קיים λ_n כך ש $x_1(\lambda_n) = b$. נראה כי $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ אינה חסומה.

נניח בשלילה ש

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = A$$

■

ונתבונן בבעיה: $y''_A + (A+1)\, y_A = 0$ ע"פ משפט ההשוואה של שטורם לפתרון המשוואה הנל', יש אינסוף אפסים בקטע $[a,b]$ / אבל אז בהכרח הפתרון טריוויאלי, וזה סתירה למשפט הקיום שלבעיה הנל עם ת"ה $y_A(a) = 0,\ y'_A(a) = 1$ יש פתרון.

7 פתירת משוואות בעזרת טורים

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
$$|z - z_0| < R,\ z \in \mathbb{C}$$

זוהי פונקציה אנליטית בנקודה z_0 (הולמרפית). $R > 0$ זהו רדיוס ההתכנסות.

$$f(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} (z - z_0)^n (w - w_0)^m$$
$$|z - z_0| < R_1,\ |w - w_0| < R_2$$

עבור תחום פשוט קשר:

$$\frac{dw(z)}{dz} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Holymorphic at } (z_0, w_0)}}{f(z,w)}$$

$$w(z_0) = w_0$$

זוהי **משוואה כללית**. אך לרוב נרצה לדבר על משוואות **לינאריות**.

7.0.8 פתרון קיים ויחיד הוא פונרציה הולומורפית

$$w^{(n)}p_1(z)\,w^{(n-1)}\ldots + p_n(z)\,w = q(z)$$

$$w = \sum a_n (z-z_0)^n\,,\ |z-z_0| < R$$

כאשר $p_i,\ q$ אנליטיות.

דוגמה:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R},\ y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = A,\ y'(0) = B \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$z\in\mathbb{C},\ w'' + zw' + w = 0$$

$$w(0) = A,\ w'(0) = B$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)\,z^{n-2}$$

נציב למשוואה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)\,z^{n-2} + z\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

נעשה הזזה לקורדינטות, $(m = n-2)$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}(m+2)((m+2)-1)\,z^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ואז פשוט נתחיל סכימה מ2 באיבר הראשון:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(n+1)\right] = 0$$
$$\Rightarrow \forall n,\ a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n(n+1) = 0$$
$$\Rightarrow a_{n+2} = -a_n \frac{1}{n+2}$$

בוחרים a_0, a_1שרירותיים , ואז מקבלים מהנוסחה הרקורסיבית :

$$a_2 = -\frac{a_0}{2},\ a_4 = -a_2\frac{1}{4} = -\frac{a_0}{8}\dots$$
$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2n(2n-1)\dots 2} =$$
$$= (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!!} = (-1)^n \frac{a_0}{2^n n!}$$

בנוסף, ניתן להראות כי: $a_3 = -\frac{a_1}{3}$ ו $a_5 = \frac{a_1}{5\cdot 3}$:

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)(2n-1)\dots 3}$$

ואז:

$$w(z) = a_0\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2\cdot 4}\dots\right) + a_1\left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{3\cdot 5}\dots\right)$$

פתרון סופי יראה:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,\ \begin{cases} a_{2n} = \dots \\ a_{2n+1} = \dots \end{cases}$$

דוגמה: נניח והפונקציות **לא אנליטיות בבכל התחום**:(נק' סינגולרית)

$$z^2 w'' - 2zw' + 2w = 0$$
$$w'' - \frac{2}{z}w' + \frac{2}{z^2}w = 0$$
$$\Rightarrow w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \underset{\underset{t=z-1}{\uparrow}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ואז נציג את הבעיה כ:

$$(t+1)^2 \frac{d^2w}{dt^2} - 2(t+1)\frac{dw}{dt} + 2w = 0$$

אך שיטה זו **לא טובה** כי היא מסובבת, לאור העובדה ש z^2 ו z דיי "פשוטות". אז נאלץ למצוא שיטה אחרת לפתרון **פשוט** יותר.

7.1 שיטת Frobenius

$$w''+\frac{p(z)}{z-a}w'+\frac{q(z)}{(z-a)^2}w=0$$
$$p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(z-a)^k$$
$$q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(z-a)^k$$

כאשר p,q אינם קבועיםת אלא פונקציות אנליטיות בסביבה של נקודה $z=a$. (אם קבועים אנחנו יודעים לפתור, לפי אויילר)

$z=a$ נק **סינגולרית רגולרית**. דרך נוספת להצגה:

$$w(z)=(z-a)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

נציג:

$$L[w]=(z-a)^2w''+(z-a)p(z)w'+q(z)w=0$$
$$L[(z-a)^s]=(z-a)^2s(s-1)(z-a)^{s-2}+(z-a)p(z)s(z-a)^{s-1}+q(z)(z-a)^s=$$
$$=(z-a)^s[s(s-1)+sp(z)+q(z)]=(z-a)^s\left[\underbrace{[s(s-1)+sp_0+q_0]}_{f_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(sp_k+q_k)}_{f_k}(z-a)^k\right]$$
$$f_0(s)=s(s-1)+sp_0+q_0$$
$$f_k(s)=(sp_k+q_k),k=1,2,\dots$$
$$L[z-a]^s=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(s)(z-a)^{s+k}$$
$$L[w]=L\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^{r+n}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nL\left[(z-a)^{r+n}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{\infty}f_k(r+n)(z-a)^{r+n+k}$$
$$=(z-a)^r\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_nf_k(r+n)(z-a)^{n+k}=0$$

נחלק למקרים: אם

$$n+k=0,\ n=0,k=0,\ f_0(r)=0$$
$$\underset{\neq 0}{\underset{\uparrow}{a_0}} \underset{=0}{\underset{\uparrow}{f}}(r)=0$$

נקבל **משוואה אינדרציאלית:**

$$f_0(r)=r(r-1)+rp_0+q_0=0$$
$$r_1\neq r_2 \vee r_1=r_2$$

אם

$$n+k=1,\Rightarrow \begin{matrix} n=0,n=1 \\ k=1,k=0 \end{matrix} \Rightarrow$$
$$a_0f_1(r)+a_1f_0(r+1)=0$$
$$f_0(r+1)\neq 0,\ a_1=-a_0\frac{f_1(r)}{f_0(r+1)}$$

אם

$$n+k=m$$
$$\begin{matrix} n=0,\ k=m \\ n=1,\ k=m-1 \\ \dots \\ n=m-1,\ k=1 \\ n=m,\ k=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_0f_m(r)+a_1f_{m-1}(r)+\dots \\ \dots+a_{m-1}f_1(r+m-1) \\ +a_mf_0(r+m)=0 \end{matrix}$$

מכאן:

$$a_m=-\frac{a_0f_m(r)+\dots a_{m-1}f_1(r+m-1)}{f_0(r+m)},\ f_0(r+m)\neq 0$$

כעת, נחלק למקרים לפי r:

1. $r_1-r_2\neq N$, N **שלם,** $N>0$**, וגם** $r_1-r_2\neq 0$:

$$w_1=(z-a)^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}(z-a)^n$$
$$w_2=(z-a)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}(z-a)^n$$

2. $r_1 + r_2 = N > 0$

$$w_1 = (z-a)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$
$$w_2 = ?$$

3. $r_1 = r_2$

$$w_1 = (z-a)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$
$$w_2 = ?$$

במקרים 2 ו 3, נשתמש בשיטת הורדת סדר כדיי להבין איך נראה הפתרון (זו לא בהכרח השיטה הכי קצרה) .
נציב $w_2 = vw_1$

$$L[w] = (z-a)^2 w'' + (z-a) p(z) w' + q(z) w = 0$$
$$\Rightarrow L[vw_1] = (z-a)^2 (v''w_1 + 2v'w_1' + vw_1'') +$$
$$(z-a) p(z) (v'w_1 + vw_1') + q(z) vw_1 =$$
$$v''(z-a)^2 w_1 + v'\left[2w_1'(z-a)^2 + p(z-a) w_1\right] + \underbrace{v\left[(z-a)^2 w_1'' + (z-a) p w_1' + q w_1\right]}_{=0} = 0$$
$$v'' w_1 + v'\left(2w_1' + \frac{p w_1}{z-a}\right) = 0$$
$$\frac{v''}{v'} = -2\frac{w_1'}{w_1} - \frac{p}{z-a}$$
$$w_1 = (z-a)^{r_1} f_1(z), a_0 \neq 0 \rightarrow f_1(a) \neq 0$$
$$w_1' = r_1 (z-a)^{r_1 - 1},\ f_1(z) + (z-a)^{r_1} f_1'(z)$$

מתקיים כי $f_1(a)$ אנליטית בסביבת נק' $z=a$:

$$\frac{w_1'}{w_1}=\frac{r_1}{z-a}+\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}=\frac{r_1}{z-a}+f_2(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{p}{z-a}=\frac{p_0+p_1(z-a)+p_2(z-a)^2}{z-a}+\dots$$

$$=\frac{p_0}{z-a}+p_1+p_2(z-a)+\dots=\frac{p_0}{z-a}+\underbrace{f_3(z)}_{\text{analytic}}$$

$$\frac{v''}{v'}=-\frac{2r_1+p_0}{z-a}\underbrace{-2f_2(z)+f_3(z)}_{f_4\ \text{analytic}}=$$

$$-\frac{1+r_1-r_2}{z-a}+f_4(z)$$

לכן, אנו יכולים להבין איך נראה הפתרון הלינארי:

$$\ln v'(z)=-(1+r_1-r_2)\ln(z-a)+f_5(z)$$

$$v'=(z-a)^{-1+r_2-r_1}f_6(z),$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{analytic}}}{f_6}(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\dots$$

$$r_2-r_1=\begin{cases}N>0\\0\end{cases}$$

$$v'=\frac{c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2}{(z-a)^{1+r_1-r_2}}=$$

$$=\frac{c_0}{(z-a)^{1+r_1-r_2}}+\frac{c_1}{(z-a)^{r_1-r_2}}+\dots+\underbrace{\frac{c_{r_1-r_2}}{z-a}}_{A}+\text{elemets with powers}\geq 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \int}}{\Rightarrow} v=\frac{b_0}{(z-a)^{r_1-r_2}}+\dots+\frac{b_{r_1-r_2-1}}{z-a}+A\ln(z-a)+C$$

elements with whole positive non-singular powers ≥ 1

$$=\frac{1}{(z-a)^{r_1-r_2}}f_7(z)+A\ln(z-a)+C$$

$$\Rightarrow$$

$$w_2=vw_1=Cw_1+\frac{f_7(z)}{(z-a)^{r_1-r_2}}(z-a)^{r_1}f_1(z)+A\ln(z-a)w_1$$

$$\Rightarrow w_2=(z-a)^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n+A\ln(z-a)w_1$$

ומתקיים:

- $A\neq 0 \Leftarrow r_1=r_2$
- $A=0\vee A\neq 0 \Leftarrow r_1-r_2=N\in\mathbb{N}$
- $A=0 \Leftarrow r_1-r_2\notin\mathbb{N}$

זהו ניחוש שנוכל להשתמש בו, ואין צורך לפתח את השיטה בכל פעם שבאים לפתור בעייה מסוג זו.

7.1.1 דוגמאות

דוגמה

$$z\left(z-1\right)w''+\left(3z-1\right)w'+w=0$$

מצא פתרון כללי בצורה של טור מסביב לנקודה $z=0$.

פתרון

$$w''+\frac{3z-1}{z\left(z-1\right)}w'+\frac{1}{z\left(z-1\right)}w=0$$

מתקיים:

$$p\left(z\right)=\frac{3z-1}{z-1},\ q\left(z\right)=\frac{z}{z-1},$$
$$p_0=1,\ q_0=0$$

כאשר $q\left(z\right)$ ו $p\left(z\right)$ אנליטיות בסביבה $z=0$.

$$w=z^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$
$$r\left(r-1\right)+rp_0+q_0=0\Rightarrow r^2\cancel{-r+r}=0\Rightarrow r_{1,2}=0$$
$$w_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$
$$w_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n+A\ln zw_1$$

$A \neq 0$, כי אם לא אין שני פתרונות אנליטים(כי כאשר נציב את אחד הפתרונות נקבל נוסחא רקורסיבית, ולא נוכל לקבל שני פתרונות שונים מאותו ביטוי) כעת, נציב ביטוי זה:

$$z^2 w_1'' - z w_1'' + 3z w_1' - w_1' + w_1 = 0$$

$$z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (n-1) z^{n-2} - z \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (n-1) z^{n-2} +$$

$$3z \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n \left[\underbrace{n (n-1) + 3n + 1}_{n^2+2n+1=(n+1)^2} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-1} \left[n (n-1) + n \right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ m=n-1 \\ \Rightarrow n=m+1}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n \left[\underbrace{n (n-1) + 3n + 1}_{n^2+2n+1=(n+1)^2} \right] - \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} z^m (m+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ l=m}}{\Rightarrow}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} z^l \underbrace{\left[a_l (l+1)^2 - a_{l+1} (l+1)^2 \right]}_{(l+1)^2 (a_l - a_{l+1})} = 0$$

מכאן:

$$a_{l+1} = a_l, \ \ l = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\Rightarrow a_n = a_0 = 1$$

$$\Rightarrow w_1 = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow w_2(z) = \underset{\substack{\uparrow \\ =1}}{\cancel{A}} \frac{\ln z}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

ניתן לפתור באמצעות פיתוח לטורים, אך מפאת חוסר זמן נשתמש בשיטת הורדת סדר:

:$w=\frac{v}{1-z}$

$$w'=\frac{v'}{1-z}+\frac{v}{(1-z)^2}$$

$$w''=\frac{v''}{1-z}+\frac{2v'}{(1-z)^2}+\frac{2v}{(1-z)^3}-z(1-z)w''+(3z-1)w'+w=0$$

$$\Rightarrow$$

$$-zv''-\frac{2z}{1-z}v'-\frac{2z}{(1-z)^2}v+\frac{3z-1}{1-z}v'+\frac{3z-1}{(1-z)^2}v+\frac{v}{1-z}=0$$

$$-zv''+v'\underbrace{\left(-2\frac{2z}{1-z}+\frac{3z-1}{1-z}\right)}_{-1}+v\left(-\frac{2z}{(1-z)^2}+\frac{3z-1}{(1-z)^2}+\frac{1}{1-z}\right)=0$$

$$\Rightarrow -zv''-v'=0,$$

$$u=v'$$

$$-zu'-u=0\Rightarrow \ln u=-\ln z+C_1$$

$$v'=u=\frac{C_2}{z}$$

$$v=C_1+C_2\ln z$$

$$w=\underbrace{\frac{C_1}{1-z}}_{w_1}+\underbrace{\frac{C_2\ln z}{1-z}}_{w_2}$$

שיעור 25.01

7.1.2 משוואת בסל Bessel

$$z^2w''+zw'+\left(z^2-\alpha^2w\right)=0$$

ומתקיים

$$w=z^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{r+n}$$

$$z^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(r+n\right)\left(r+n-1\right)z^{r+n-2}+z\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(r+n\right)z^{r+n-1}$$

$$+z^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{r+n}-\alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{r+n}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^{r+n}a_n\left[\left(r+n\right)\left(r+n-1\right)+\left(r+n\right)-\alpha^2\right]+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^{r+n+2}a_n}_{\substack{l=n+1\\ n=l-2\\ \uparrow\\ \sum_{l=2}^{\infty}z^{r+l}a_{l-2}\\ \uparrow\\ \sum_{n=2}^{\infty}z^{r+n}a_{n-2}}}=0$$

$$\Rightarrow z^ra_0\left(r^2-\alpha^2\right)+a_1\left[\left(r+2\right)^2-\alpha^2\right]z^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left[\left(r+n\right)^2-\alpha^2\right]a_n+a_{n-2}\right)z^{r+n}$$

מתקיים $r^2-\alpha^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm\alpha$, $\alpha\geq 0$. $r_1=\alpha$, $r_2=-\alpha$. $\Rightarrow$

1. $\alpha=0 \Rightarrow r_1=r_2$
2. $2\alpha=N \Rightarrow r_1-r_2=N$
3. $2\alpha\notin\mathbb{N} \Rightarrow r_1-r_2\notin\mathbb{N}$.

פתרון ראשון: $r=\alpha\geq 0$:

$$\alpha_1\left[\left(\alpha+1\right)^2-\alpha^2\right]=\alpha_1\underbrace{\left(2\alpha+1\right)}_{>0}=0\Rightarrow a_1=0$$

$$\left[\left(\alpha+n\right)^2-\alpha^2\right]a_n=a_{n-2},n=2,3,\ldots$$

$$n^2+2n\alpha=n\left(n+2\alpha\right)$$

$$\Rightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{n\left(n+2\alpha\right)},n=2,3,\ldots$$

$$a_1=0\Rightarrow a_3=a_5=\ldots=0$$

מכאן שהמקדמים זוגיים: $n=2k$

$$a_{2k}=-\frac{a_{2(k-1)}}{2k\left(2k+2\alpha\right)}=-\frac{a_{2(k-1)}}{2^{2}k\left(k+\alpha\right)}$$
$$\Rightarrow a_{0}\neq0;a_{2}=-\frac{a_{0}}{2^{2}\left(1+\alpha\right)};\ a_{4}=-\frac{a_{2}}{2^{2}2\left(2+\alpha\right)}$$
$$\Rightarrow a_{2k}=\left(-1\right)^{k}\frac{a_{0}}{2^{2k}k!\left(1+\alpha\right)\left(2+\alpha\right)\left(k+\alpha\right)}$$

נבחר $a_0=1$:

$$w_{1}\left(z\right)=z^{\alpha}\sum\left(-1\right)^{k}\frac{a_{0}z^{2k}}{2^{2k}k!\left(1+\alpha\right)\left(2+\alpha\right)\left(k+\alpha\right)}$$
$$z^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!\left(1+\alpha\right)\left(k+\alpha\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

פתרון שני:

נחלק למקרים:

1. $\alpha\neq\frac{N}{2},0 \Leftarrow r_2=-\alpha$:

$$w_{2}\left(z\right)-z^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!\left(1-\alpha\right)\left(2-\alpha\right)\ldots\left(k-\alpha\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

2. $\alpha=\frac{2m+1}{2}$, m שלם, $m=0,1,2,\ldots$:

$$n\left(n-2\alpha\right)a_{n}+a_{n-2}=0$$
$$n\left(n-2m-1\right)a_{n}+a_{n-2}=0$$

n זוגי $\Leftarrow$

$$a_{n}=-\frac{a_{n-2}}{n\left(n-2m-1\right)}$$
$$a_{2}=-\frac{a_{0}}{2\left(1-2m\right)},$$
$$a_{4}=-\frac{a_{2}}{4\left(3-2m\right)}\ldots$$

$$a_{1}\left(1-2\alpha\right)=0$$
$$a_{1}\left(-2m\right)=0$$
$$\Rightarrow \text{if}\alpha=\frac{1}{2},\ m=0\Rightarrow a_{1}\text{arbitrary}$$

(להשלים?): $n=2m+1$

$$w_2(z)=a_0z^{-\frac{2m+1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\left(1-\frac{2m+1}{2}\right)\dots\left(k-\frac{2m+1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$
$$+z^{\frac{-2m+1}{2}}\sum_{l=m}^{\infty}a_{2l+1}z^{2l+1}$$

נראה כי $z^{\frac{-2m+1}{2}}\sum_{l=m}^{\infty}a_{2l+1}z^{2l+1}$ זה בעצם w_1(יש פה בעייה עם קבועים - להשלים מה בדיוק)
:

$$a_{2m+1}z^{\frac{2m+1}{2}}+a_{2m+2}z^{\frac{2m+3}{2}}+\dots=z^{\overset{\frac{2m+1}{2}}{\overset{\uparrow}{r=\alpha}}}\left(a_{2m+1}+a_{2m+2}z+\dots\right)$$

ומהיחידות של משוואות (להשלים) נקבל שזה ב הכרח w_2.

דוגמה: $m=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$:

$$w_1=z^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\frac{3}{2}\frac{5}{2}\dots\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{z^{2k}}{2^k2^k}=$$
$$=z^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cancel{2^k}z^{2k}}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot5\cdot3\cdot2^k\cancel{2^k}}=z^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^{2k}}{(2k+1)!}=$$
$$z^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kz^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sin z}{z^{\frac{1}{2}}}$$

נמצא פתרון שני:

$$w_2(z)=z^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\underbrace{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{2k-1}{2}}_{\text{k times}}}\cdot\frac{z^{2k}}{2^k2^k}$$
$$=z^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=z^{-\frac{1}{2}}\left(\underbrace{1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}+\dots}_{\cos z}\right)=\frac{\cos z}{z^{\frac{1}{2}}}$$

דוגמה: $\alpha=m\in\mathbb{N}>0$

$$w_1(z)=z^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(1+m)(2+m)\dots(k+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$
$$=m!2^m\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}}_{J_m(z)-\text{First type Bassel eq}}$$

פתרון שני:

$$w_2\left(z\right)=z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k+Aw_1\left(z\right)\ln z$$

מהפיתוחים שלנו $m=0$ בטוח ש $A\neq 0$, נוכל לכפול ב $\frac{1}{A}$ $A\to 1$. נשתמש בשיטת הורדת סדר:

$$\begin{gathered}
w_1\left(z\right)=J_0\left(z\right)\\
w=v\cdot w_1\\
w'=v'w_1+vw_1'\\
w''=v''w_1+2v'w_1'+vw_1''\\
z^2v''w_1+2z^2v'w_1'+z^2vw_1''+zv'w_1+zvw_1'+\left(z^2-\alpha^2\right)vw_1=0\\
zv''w_1+v'\left(2zw_1'+w_1\right)=0\\
\frac{v''}{v'}=-2\frac{w_1'}{w_1}-\frac{1}{z}\\
\underset{\overset{\uparrow}{\int}}{\Rightarrow}\ln v'=-2\ln w_1-\ln z+C_0\\
v'=\frac{C_2}{zw_1^2}\Rightarrow v=C_2\int\frac{dz}{zw_1^2}+C_1\\
w=C_1J_0\left(z\right)+C_2\int\frac{dz}{zJ_0^2\left(z\right)}=\\
C_1J_0\left(z\right)+\underbrace{\int\frac{dz}{z}}_{\ln z}+\underbrace{\frac{1}{2}\int z+\ldots dz}_{\text{analytic}}
\end{gathered}$$

מה נותר? עדיין לא הראנו כי הטורים מתכנסים לפתרון.
בשלב זה נראה זאת,נתבונן ב:

$$\begin{gathered}
1)w''+P\left(z\right)w'+Q\left(z\right)w=0\\
3)P\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\left(z-a\right)^n\\
4)Q\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n\left(z-a\right)^n
\end{gathered}$$

נניח כי $z=a$ נק' רגילה, ונגדיר ת"ה

$$2)w\left(a\right)=a_0,w'\left(a\right)=a_1$$

משפט 7.1 תהי נקודה $z=a$ רגילה למשוואה (1) ז"א הטורים (3) ו (4) מתכנסים ל $Q(z)P(z)$ בסביבה $|z-a|<R$.
אז"י קיים טור:

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

שמתכנס לפתרון של בעייה (1) ו (2) באותה סביבה $|z-a|<R$. (יכול להיות שהטור מתכנס בתחום יותר גדול, אבל זה לא סותר את המשפט)

הוכחה: בה"כ, נקח $a=0$ (כי תמיד ניתן להגדיר $z_1=z-a$)
תחילה נקבל נוסחאת רקורסיה לפיתוח פורמאלי:

$$w'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnz^{n-1}\underset{\substack{\uparrow\\ k=n-1\\ n=k+1}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}(k+1)z^k$$

$$w''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)z^{n-2}\underset{\substack{\uparrow\\ k=n-2\\ n=k+2}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+2}(k+2)(k+1)z^k$$

$$P(z)w'(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_ma_{k+1}(k+1)z^{m+k}\underset{\substack{\uparrow\\ m+k=n\\ m=n-k}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}a_{k+1}(k+1)\right)$$

$$Q(z)w(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q_ma_kz^{m+k}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{fimiliar to before}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[a_{n+2}(n+2)(n+1)+\sum_{k=0}^{n}\left(p_{n-k}a_{k+1}(k+1)+q_{n-k}a_k\right)\right]=0$$

$$a_{n+2}(n+2)(n+1)=-\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}a_{k+1}(k+1)+q_{n-k}a_k\right]$$

זוהי נוסחאת רקורסיה: $n=0,1\ldots$
עבור $0<R_0<R$ ל $z=R_0$ טורים ל $P\left(z\right)$ ו$Q\left(z\right)$ מתכנסים.

$$\begin{gathered}\forall n\\ \left|p_n\right|R_0^n<M\\ \left|q_n\right|R_0^n<M\end{gathered}$$

כמו כן מתקיים:

$$\left|a_{n+2}\right|\left(n+2\right)\left(n+1\right)\leq-\sum_{k=0}^{n}\left[\left|p_{n-k}\right|\left|a_{k+1}\right|\left(k+1\right)+\left|q_{n-k}\right|\left|a_k\right|\right]$$

ואז ניתן להסיק כי

$$\begin{gathered}\forall n\\ \left|p_n\right|R_0^n<M\rightarrow\left|p_n\right|\leq\frac{M}{R_0^n}\\ \left|q_n\right|R_0^n<M\rightarrow\left|q_n\right|\leq\frac{M}{R_0^n}\end{gathered}$$

ונמשיך את הפיתוח:

$$\begin{gathered}\left|a_{n+2}\right|\left(n+2\right)\left(n+1\right)\leq-\sum_{k=0}^{n}\left[\left|p_{n-k}\right|\left|a_{k+1}\right|\left(k+1\right)+\left|q_{n-k}\right|\left|a_k\right|\right]\\ \leq\sum_{k=0}^{n}\frac{M}{R_0^{n-k}}\left(\left|a_{k+1}\right|\left(k+1\right)+\left|a_k\right|\right)\leq\end{gathered}$$

נוסיף איבר שבוודאות לא שלילי לפישוט הביטוי

$$\leq R^{-n}M\sum_{k=0}^{n}R_0^k\left(\left|a_{k+1}\right|\left(k+1\right)+\left|a_k\right|\right)+M\left|a_{n+1}R_0\right|$$

נגדיר סדרה:

$$\begin{gathered}b_0=\left|a_0\right|,\ b_1=\left|a_1\right|\\ b_{n+2}\left(n+2\right)\left(n+1\right)=R_0^{-n}m\sum_{k=0}^{n}R_0^k\left(b_{k+1}\left(k+1\right)+b_k\right)+Mb_{n+1}R_0\\ \forall n;\ 0\leq\left|a_n\right|\leq b_n\end{gathered}$$

נוכיח התכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ 0\leq\left|z\right|<R_0$$

נגדיר $\begin{array}{l} n=m-1 \\ m=n+1 \end{array}$

$$\begin{aligned} 1) b_{n+1}(n+1) n &= R_0^{-n+1} M \sum_{k=0}^{n-1} R_0^k \left(b_{k+1}(k+1)+b_k\right)+M b_n R_0 \\ 2) b_n n(n-1) &= R_0^{-n+2} M \sum_{k=0}^{n-2} R_0^k \left(b_{k+1}(k+1)+b_k\right)+M b_{n-1} R_0 \end{aligned}$$

נכפול הביטוי (1) ב R_0:

$$R_0 b_{n+1}(n+1) n=R_0^{-n+2} M \sum_{k=0}^{n-1} R_0^k\left(b_{k+1}(k+1)+b_k\right)+M b_n R_0^2=$$

$$\underbrace{R_0^{-n+2} M \sum_{k=0}^{n-2} R_0^k\left(b_{k+1}(k+1)+b_k\right)}_{\underset{(2)}{\overset{\uparrow}{=}} b_n n(n-1)+R_0 M n b_n+M b_n R_0^2}+R_0 M\left[b_n n+b_{n-1}\right]+M b_n R_0^2$$

$$\Rightarrow b_{n+1}=\frac{n(n-1)+R_0 M n+M R_0^2}{R_0(n+1) n} b_n$$

מכאן ש $0 \leq|z|<R_0$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$ מתכנס $\Leftarrow \sum a_n z^n$ מתכנס עבור $|z|<R$. ■

כעת, נתבונן בבעייה מהצורה:

$$\begin{aligned} 1) & z^2 w^1(z)+z p(z) w^{\prime}(z)+q(z) w(z)=0 \\ 2) & p(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \\ 3) & q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \end{aligned}$$

$z=0$ נקודה סינגולרית רגולרית, משוואה איניציאלית:

$$r(r-1)+p_0 r+q_0=\left(r-r_1\right)\left(r-r_2\right)=0$$

משפט 7.2 תהי נקודה $z=0$ סינגולרית רגולרית טורים (2) ו (3) מתכנסים בעיגול $0<|z|<R$, r_1, r_2 ממשיים, $r_1 \geq r_2$ אז"י קיים טור בצורה של פרוביניוס:

$$w_1(z)=z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

שמתכנס לפתרון של משוואה (1)בתחום $0<|z|<R$ אם $r_2 \neq r_1$ ו $r_1 - r_2 \neq \mathbb{N}$, אז גם הטור

$$w_2(z) = z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} z^n$$

מתכנס לפתרון של משוואה (1) עבור $0<|z|<R$.

הוכחה: אנו כבר פיתחנו נוסחאת ריקורסיה לבעייה מצורה זו: נקח $0<R_0<R$

$$a_0 f_n(r) + a_1 f_{n-1}(r+1) + \ldots + a_n f_0(r+n) = 0$$

$$f_0(s) = s(s-1) + sp_0 + q_0$$

$$f_0(r+n) = (r+n-r_1)(r+n-r_2)$$

$$a_n\left[(r+n)(r+n-1) + (r+n)p_0 + q_0\right] \to \begin{cases} f_0(r_1+n) = n(n+r_1-r_2) \\ f_0(r_2+n) = n(n-r_1+r_2) \end{cases} \geq n(n-|r_1-r_2|)$$

$$a_n n(n-|r_1-r_2|) \leq |a_n|\,|f_0(r+n)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\left[|r+k|\,|p_{n+k}| + |q_{n+k}|\right]$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R_0^{k-n} M(|r+k|+1)$$

$$??????????????? = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f_{n-k}(r+k)$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]$$

נגדיר סדרה:

$$b_n = |a_n|,\ n-|r_1-r_2| \leq 0$$

$$b_n n(n-|r_1-r_2|) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k R_0^{k-n} M(|r+k|+1)$$

$$\Rightarrow b_{n+1}(n+1)(n-|r_1-r_2|) = \sum_{k=0}^{n} b_k R_0^{k-n-1} M(|r+k|+1)$$

רוצים להראות התכנסות של הטור, כלומר :

$$|a_n| < b_n$$

$$\forall n,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,\ |z| < R_0$$

נראה זאת:

$$R_0 b_{n+1}\left(n+1\right)\left(n+1-\left|r_1-r_2\right|\right)=\sum_{k=0}^{n} b_k R_0^{k-n} M\left(\left|r+k\right|+1\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1} b_k R_0^{k-n} M\left(\left|r+k\right|+1\right)+b_n M\left(\left|r+n\right|+1\right)=b_n\left[n\left(n-\left|r_1-r_2\right|\right)+M\left(\left|r+n\right|+1\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to 0}\left|\frac{b_{n+1}z^{n+1}}{b_n z^n}\right|=\left|\frac{z}{R_0}\right|<1$$

■