

לוגיקה מתמטית - תרגיל 8

1. בכל אחד מהמקרים הבאים, בצע את ההצבה החופשית של t במקום x בנוסחה φ , וציין אם היא כשרה או לא.

א. $t = y$, $\varphi = (\forall x)R(x) \rightarrow (\exists y)R(y)$

ב. $t = g(y)$, $\varphi = (\exists x)(\exists y)x = y \rightarrow x = f(y)$

ג. $t = f(y, c)$, $\varphi = (\forall y)(\forall z)f(y, z) = f(x, z)$

2. א. תהי φ נוסחה, יהי x משתנה אישי ויהי t שם עצם. נסמן ב- $\varphi(t)$ את תוצאת ההצבה החופשית של t במקום x בנוסחה φ .

הוכח שאם ההצבה כשרה אז הנוסחה $\varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$ אמיתית לוגית.

ב. הראה שבחלק א' לא ניתן לוותר על ההנחה שההצבה כשרה.

3. לכל אחת מהדרישות הבאות, כתוב פסוק בשפה שבה יש סימן יחס דו-מקומי R וסימן יחס $=$, כך שהפסוק מסתפק במבנה $M = (W^M, R^M)$ אם ורק אם הוא מקיים את הדרישה:

א. R^M הוא יחס שקילות על W^M .

ב. R^M יחס סדר חלקי על W^M (כלומר, יחס רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי).

ג. R^M יחס סדר קווי על W^M (בנוסף על ב', כל שני איברים ניתנים להשוואה).

4. מצא פסוק φ בתחשיב סימני היחס בעל התכונה הבאה:

$$\{n \in \mathbb{N} : |W^M| = n \text{ ש-}\varphi \text{ מספק את } M \text{ קיים מבנה}\} = \{2m : m \in \mathbb{N}\}$$

הערות:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים.

הינך רשאי לבחור את השפה כרצונך.