קומבינטוריקה - תרגול

בעיות מניה בסיסיות-

עקרונות-

חוק החיבור- A,B קבוצות זרות $|A\cup B| = |A|+|B|$

חוק הכפל- אם A,B קבוצות $A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$ אז: $|A\times B|=|A||B|$

כללי העבודה-

(1) להבין את הבעיה ולדעת מה סופרים

(2) לחשוב על דוגמאות קטנות ולהבין אותן (מומלץ לצייר)

(3) אם צריך, לחלק למקרים פשוטים ככל הניתן.

(4) לזכור שניתן לפתור את הבעיה בדרך המשלים.

סוגי הבעיות-

(1) האם יש חזרות?

(2) האם סדר הבחירה חשוב?

	בלי חזרות	עם חזרות
בלי חשיבות לסדר	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\binom{n+k-1}{n-1}$
עם חשיבות לסדר	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k

מה: החשיבות מספר הבחירה של המספרים.

תרגיל-

(א) כמה מספרים ארבע ספרתיים יש? פתרון- $9\cdot10\cdot10\cdot10$ (עם חזרות, עם חשיבות לסדר)

(ב) כמה מספרים ארבע ספרתיים יש המורכבים מארבע ספרות שונות? פתרון- $9\cdot9\cdot8\cdot7$

(בלי חזרות עם חשיבות לסדר)

(ג) כמה מספרים ארבע ספרתיים יש, עם ספרות שונות, כך שהערך המוחלט של ההפרש בין הספרה הראשונה והאחרונה הוא 2.

7...9	9...7
6...8	8...6
⋮	⋮
1...3	2...0

פתרון- יש 15 מקרים לספרה הראשונה והאחרונה ו- $8\cdot7$ אפשרויות לספרות האמצעיות. לכן סה"כ- $15\cdot8\cdot7$.

(3) כמה מספרים ארבע ספרתיים יש בעלי ספרות שונות בסדר עולה?

פתרון- במקרה זה אין חשיבות לסדר בחירת המספרים ואין חזרות,

לכן $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!}$

תרגיל- יהי $n\geq 4$. כמה זוגות סדורים (A,B) יש כך ש- $A,B\subseteq[n]$

ו- $|A\cap B|=2$. פתרון- $\binom{n}{2}\cdot 3^{n-2}$. לכל מספר שלא בחיתוך יש 3 אפשרויות:

לבחור את המספר בחיתוך

(סימון- $[n] = \{1,2,\dots,n\}$)

המספר רק ב-A, המספר רק ב-B, המספר לא נמצא ב- $A\cup B$.

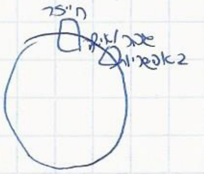
סידור עצמים במעגל-

תרגיל- 3 גברים, 3 נשים וחייזר מתיישבים מסביב לשולחן מעגלי.

(א) כמה אפשרויות יש להושיבם במעגל. פתרון- $6!$, במקרה הכללי $(n-1)!$.

(ב) כמה אפשרויות יש אם אסור ששניים מאותו מין ישבו זה ליד זה?

פתרון- $2\cdot \underset{\text{סידור נשים}}{3!}\cdot \underset{\text{סידור גברים}}{3!} = 72$

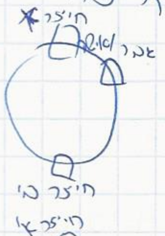


(ג) מגיע חייזר נוסף. כולם קמים ומתיישבים שוב. כמה דרכים יש להושיבם?

פתרון- נחלק למקרים.

מקרה א'-
חייזר ב' מול א'.

אותו סידור כמו סעיף ב'. 72



מקרה ב'

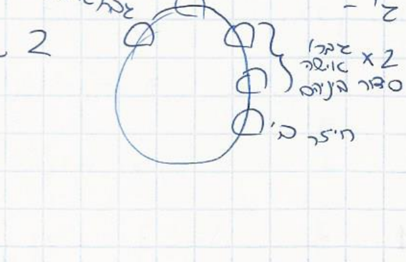
$2\cdot$ סעיף ב' $= 2\cdot 72$

למיקום חייזר ב'

מקרה ג'-

2 אפשרויות לחייזר ב'

$2^3\cdot 3!\cdot 3!$



בעיות מניה - כלי חישובים לספר עם חזרות

ניסוחים שקולים:

(1) חלוקת k כדורים זהים ל-r תאים שונים

(2) כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+\dots+x_r=k$

$$\binom{k+r-1}{r-1}$$

תרגיל- נתונה קופסא מלאה בכדורים בצבעים אדום, כחול וירוק. בוחרים 10 כדורים ומכניסים לקופסא קטנה.

(א) כמה אפשרויות שונות יש? פתרון- x_1-מס' הכדורים הכחולים.
x_2 - מס' הכדורים האדומים
x_3 - מס' הכדורים הירוקים.

$$x_1+x_2+x_3=10 \qquad \binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}$$

(ב) בכמה מהאפשרויות יש לפחות חמישה כדורים כחולים?

פתרון- $x_1+x_2+x_3=10$, $x_1\ge 5$ $\qquad$ $x_1=y_1+5$, $y_1\ge 0$

$$y_1+5+x_2+x_3=10 \Rightarrow y_1+x_2+x_3=5 \qquad \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}$$

(ג) בכמה מהאפשרויות יש לכל היותר ארבעה כדורים כחולים?

פתרון- מקרה זה הוא המשלים של סעיף ב' ולכן:

$$\binom{12}{2}-\binom{7}{2}=\frac{12!}{2!\cdot 10!}-\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{12\cdot 11-7\cdot 6}{2}=6\cdot 11-7\cdot 3=45$$

תרגיל-
כמה פתרונות יש למשוואה $x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 2: 3x_1+x_2+x_3=18$

$x_1=y_1+1$
$x_2=y_2$
$x_3=y_3+3$

$$3y_1+3+y_2+y_3+2=18 \Rightarrow 3y_1+y_2+y_3=13$$

$y_1\le 4$

y_1	y_2+y_3	
0	13	$\binom{14}{1}=14$
1	10	11
2	7	8
3	4	5
4	1	2

נפריד למקרים:

סה"כ 40 אפשרויות.

זהויות קומבינטוריות

מקדם בינום $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

בינום של ניוטון-

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k$$

תכונות-

1) זהות פסקל: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

2) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

3) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

4) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

5) $\binom{k}{1}\binom{n}{k}=k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

הוכחה קומבינטורית ל-(5):

אגף שמאל- בוחרים ועד בגודל k ואז בוחרים ראש ועד.
אגף ימין- בוחרים את ראש הועד ואז משלימים $k-1$ אנשים נוספים לועד.

תרגיל- הוכיחו את הזהויות הבאות:

א) $\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+\binom{n}{1}^2$

פתרון- אגף שמאל- n בנים, n בנות, בוחרים 2 אנשים.
אגף ימין- בוחרים 2 בנים או 2 בנות או בן ובת.

ב) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

פתרון- אלגברי:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

נגזור:

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

נציב $x=1$

$$n(2)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$

פתרון קומבינטורי:

- אגף ימין- בוחרים סטודנט אחד שיקבל 100 במבחן בקומבינטוריקה וכל השאר מחולקים לשתי קבוצות. אלה שיקבלו 60 ואלה שיקבלו 40.
- אגף שמאל- לכל k בוחרים קבוצה בגודל k שעברו (כל השאר נכשלו), ומתוך ה-k בוחרים אחד שיקבל 100 וכל השאר 60.

תרגיל

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{n-k}=2^{2n}$$

פתרון-
נספור את כמות הסדרות של 0 ו-1 באורך 2n+1 בהן יש יותר אחדות מאפסים.

אגף ימין- 2^{2n+1} סדרות באורך 2n+1 ומחצית מהם יש יותר אחדות מאפסים:

$$\frac{2^{2n+1}}{2}=2^{2n}$$

n אחדים

אגף שמאל-   1

ה-n+1-י

ה-1 ה-(n+1)-י נמצא במקומות n+k+1 $0\le k\le n$

נניח שה-1 הזה נמצא במקום ה- n+k+1

לפניו יש n+k מקומות, בהם יש n אחדים ו-k אפסים $\binom{n+k}{k}$ ← בחירה היכן יהיו אפסים.

נשאר n-k מקומות אחרי ה-1 למלא אותם ויש 2^{n-k} אפשרויות למלא אותם.

מספרי קטלן

C_n:

(1) מספר האפשרויות לסדר n זוגות של סוגריים בצורה חוקית.
בכל קטע התחלתי, מספר הפותחים גדול או שווה למספר הסוגרים.

(2) מספר האפשרויות להגיע מנקודה (0,0) לנקודה (n,n) כאשר צעד חוקי הוא יחידה אחת ימינה או יחידה אחת למעלה, ואסור לחצות את הישר y=x.
מספר הצעדים ימינה הוא לפחות מספר הצעדים למעלה.

טענה- הוכיחו שלכל n: $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

הוכחה- נעשה הזזה יחידה ימינה של הבעיה ונקבל: מספר המסלולים מ-(1,0) ל-(n+1,n) שלא חוצים את הישר y=x-1, כלומר לא נוגעים בישר y=x.

סך כל המסלולים: $\binom{2n}{n}$ ונחסר את כל המסלולים שנוגעים ב- y=x.

A- אוסף המסלולים מ-(1,0) ל-(n+1,n) שנוגעים ב- y=x.

B- אוסף המסלולים מ-(0,1) ל-(n+1,n).

כל מסלול ב-A נשקף אותו סביב הישר y=x עד לנקודת המגע הראשונה (a,a) עם הישר y=x ונקבל מסלול ב-B ולהפך. (את שאר המסלול משאירים כפי שהוא).
זו התאמה חח"ע ועל בין A ל-B ולכן |A|=|B|.

כלומר, $|B|=\binom{2n}{n-1}$ (יש לנו (n+1) צעדים ימינה ו- (n-1) צעדים למעלה, סה"כ 2n צעדים מתוכם עלינו לבחור ימינה או למעלה).

לכן,
$$C_n=\underset{\text{כלל}}{\binom{2n}{n}}-\underset{\text{רעים}}{\binom{2n}{n-1}}$$

$$C_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{2n!}{n!\cdot n!}-\frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{2n!}{n!\cdot n!}\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\binom{2n}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

הכלה-הפרדה

תרגיל- במועדון ספורט 54 חברים. 34- משחקים טניס, 22-גולף, 11- כדורסל, 10-טניס וגולף, 4-כדורסל וגולף, 6-טניס וכדורסל, 2- הכל.

(א) כמה מחברי המועדון לא משחקים טניס ולא גולף.

פתרון- נחשב כמה משחקים טניס ו\או גולף.

$34+22-10=46$

לכן התשובה היא: $54-46=8$.

(ב) כמה מחברי המועדון באים רק בשביל לשתות קפה?

נחשב מי משחק משהו: $34+22+11-10-4-6+2=49$

באים לשתות קפה: $54-49=5$.

<u>משפט</u>: נסמן Ω את העולם. $A_1,A_2,\dots A_n\subseteq\Omega$.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=|A_1|+\dots+|A_n|-|A_1\cap A_2|-\dots$$
$$+\dots|A_1\cap A_2\cap A_3|-\dots$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\right|\right)$$

*לרוב, נצטרך למצוא משלים ולא את הסכום עצמו.

$$|\Omega|-\left|\bigcup A_i\right|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left(\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{k}A_{i_j}\right|\right)$$

תרגיל: כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=20$ $\quad 0\le x_i\le 8$

פתרון- Ω - כל הפתרונות. $|\Omega|=\binom{22}{2}$

A_i - כל הפתרונות בהם $x_i\ge 9$ $\quad i=1,2,3$

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=\binom{13}{2}$$

$x_1\ge 9$

$x_1=y_1+9 \qquad y_1+x_2+x_3=11$

$$y_1+y_2+x_3=2$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=\binom{4}{2}$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$\binom{22}{2}-3\binom{13}{2}+3\binom{4}{2}-0=\cancel{216}\ 15$$

תרגיל- הוכיחו בדרך אלגברית וקומבינטורית את הזהות

$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-1)^k$$

דרך אלגברית-

$$1=(2+(-1))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-1)^k$$

דרך קומבינטורית- נחשב כמה סדרות יש של 0 ו-1 שאורך n שבהן כל הספרות הן 0. אגף שמאל 1.

Ω - כל הסדרות $|\Omega|=2^n$

A_i - כל הסדרות שבהן במקום i יש 1 $\quad |A_i|=2^{n-1} \quad \binom{n}{1}$

$$\binom{n}{2} \quad |A_i\cap A_j|=2^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{k} \quad |A_{i_1}\cap\dots A_{i_k}|=2^{n-k}$$

לפי הכלה והפרדה, $2^n-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$

עקרון ההכלה-הפרדה

טענה- לכל $x,n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ יש בדיוק $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ מספרים טבעיים שקטנים או שווים מ-n ומתחלקים ב-x.

הוכחה- המספרים המתאימים הם $x, 2x, 3x \dots kx$ וצריך להתקיים $kx \le n$

$\Leftarrow$ $k \le \frac{n}{x}$, k שלם ולכן $k = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$

מקסימלי. שמקיים זאת.

תרגיל- כמה מספרים טבעיים יש השייכים לקבוצה $X=\{1,2,\dots,119\}$ שאינם מתחלקים ב- $3,5,7$?

A_1- מתחלקים ב-3

A_2 - מתחלקים ב-5

A_3 - מתחלקים ב-7.

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{119}{3} \right\rfloor = 39$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{119}{5} \right\rfloor = 23$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{119}{7} \right\rfloor = 17$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{119}{15} \right\rfloor = 7$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{119}{21} \right\rfloor = 5$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{119}{35} \right\rfloor = 3$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{119}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor = 1$$

$$119-39-23-17+7+5+3-1=54$$

תרגיל- מסעדה ושבה n זוגות מסבים לשולחן עגול. מהו מספר האפשרויות לסדר אותם כך שאף גבר לא ישב ליד אשתו?

פתרון - $|\Omega|=(2n-1)!$

$\binom{n}{1}$ A_i - הזוג ה-i ~~ישבו~~ ישבו ביחד. נחשוב על הזוג ה-i כאילו זה בן-אדם אחד, לכן עכשיו צריך לסדר $(2n-1)$ אנשים במעגל שזה $(2n-2)!$ ובכפול בסדר הפנימי בתוך הזוג. כלומר: $2\cdot(2n-2)!$

$\binom{n}{2}$ $|A_i\cap A_j|$ - $2^2\cdot(2n-3)!$

$\vdots$

$\binom{n}{k}$ $|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}|$ - $2^k(2n-k-1)!$

$$|\Omega|-|\cup A_i|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot 2^k(2n-k-1)!$$

נוסחאות נסיגה:

שיטה לפיתרון בעיות בעזרת נוסחאות נסיגה:

- שלב א'- מציאת נוסחת נסיגה ותנאי התחלה.
- שלב ב'- מציאת נוסחה מפורשת (שיטת האינדוקציה / פולינום אופייני).

מגדלי הנוי:

נזירים בסין רוצים להעביר n טבעות בגודל עולה מעמוד א' לעמוד ג', כאשר אסור לשים טבעת גדולה על קטנה. כמה מהלכים צריך לעשות כדי לסיים?

פתרון-

a_n - כמות המהלכים להעביר n טבעות.

$a_1=1$, $a_2=3$, $a_n=2a_{n-1}+1$: מעבירים ב-a_{n-1} מהלכים את $n-1$ הטבעות העליונות מ-א' ל-ב' ואז מעבירים את הטבעת הגדולה ל-ג' ושוב ב-a_{n-1} מהלכים מעבירים את שאר הטבעות מ-ב' ל-ג'.

$$a_n=2a_{n-1}+1=2(2a_{n-2}+1)+1=2(2(2a_{n-3}+1)+1)+1=\ldots$$
$$=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

הוכחה באינדוקציה- בסיס- $a_1=2^1-1=1$ ✓

נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$a_{n+1}=2a_n+1=2\cdot(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$$

אי-סדרים:

תרגיל- אי-סדרים D_n. הוכיחו כי אם D_n הוא מס' האי-סדרים
אז מתקיים ש- $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$, $D_1=0, D_2=1$,

(אי-סדרים - תמורות (פונקציות חח"ע ועל) ללא נקודת שבת $f:[n]\to[n]$
כך שלכל i : $f(i)\neq i$. D_n סופר כמה פונקציות כנ"ל יש.)

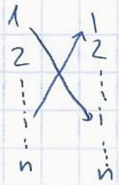
D_n סופר כמה פונקציות כנ"ל יש.

$D_1=0$ $D_3=2$ $D_5=44$

$D_2=1$ $D_4=9$

עבור D_n:

אם $f(1)=i$, $f(i)=1$ $i=2,\dots,n$



נותר לסדר ללא נקודות שבת את המספרים $2,\dots,n$ בלי i,
כלומר D_{n-2}.

אם $f(i)\neq 1$: נחליף את i ב-1 בטווח ונסתכל על אי סדרים כאשר
i לא עובר ל-1 וכל השאר לא עוברים לעצמם.
כלומר D_{n-1}.

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$$

בחירת המקום בזוג של 1.   אם $f(i)\neq 1$ $f(i)=1$

נוסחאות נסיגה

תרגיל- מהו מספר הסדרות $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{-1,1\}^n$ כך שלכל $k \le n$

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \le 1$$

פתרון- נסמן ב-H_n את מספר הסדרות הדרושות

$H_0=1$ הסדרה הריקה

$H_1=2$ $\quad 1 \quad -1$

$H_2=2$ $\quad 1\;-1 \;,\; -1,\;1$

$H_3=4$ $\quad \underbrace{1,-1\,\_}_{\text{2 אפשרויות}} \;,\; \underbrace{-1,1\,\_}_{\text{2 אפשרויות}}$

$\vdots$

H_n $\quad \underbrace{\text{סדרה חוקית באורך } n-2}_{H_{n-2}}\; 1\;-1 \quad , \quad \text{סדרה חוקית באורך } n-2 \; -1\;1$

$$H_n = 2H_{n-2}$$
$$H_0=1$$
$$H_1=2$$

בדיקה עבורינו- $H_3 = 2H_1 = 4$

נפתור בעזרת פולינום אופייני: $H_n = q^n$

$$q^n = 2q^{n-2} \Rightarrow q^2 - 2 = 0 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$$C_n = c_1\cdot(\sqrt{2})^n + c_2\cdot(-\sqrt{2})^n$$

$$\left.\begin{aligned} 1 = H_0 &= c_1 + c_2 \\ 2 = H_1 &= \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ c_2 &= \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$H_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2})^n + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(-\sqrt{2})^n$$

אם n זוגי:

$$H_n = (\sqrt{2})^n\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2})^n$$

אם n אי-זוגי:

$$H_n = (\sqrt{2})^n\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = (\sqrt{2})^{n+1}$$

תרגיל- מצאו נוסחת נסיגה למספר המילים באורך n המשתמשות רק באותיות $\{x,y,z\}$ שבהן לא מופיע הרצף xyz.

אם האות האחרונה היא x/y — מילה חוקית באורך $n-1$: H_{n-1}

אם האות האחרונה היא z — סדרה באורך $n-1$: H_{n-1}, xy: H_{n-3}

$$\boxed{H_n = 3H_{n-1} - H_{n-3}}$$

$H_0=1$

$H_1=3$

$H_2=9$

$H_3=26$ (3^3-1)

$H_3 = 3\cdot 9 - 1 = 26$

תרגיל- מצאו נוסחה מפורשת לנוסחת הנסיגה הבאה:

$H_n = 8H_{n-1} - 21H_{n-2} + 18H_{n-3}$ כאשר $H_2=2$, $H_1=1$, $H_0=0$.

פתרון- $H_n = q^n$

$$q^n = 8q^{n-1} - 21q^{n-2} + 18q^{n-3}$$

$$P(q) = q^3 - 8q^2 + 21q - 18 = 0$$

אם ל-$P(q)$ יש שורש רציונלי $\frac{a}{b}$ אז $a|18$, $b|1$, $\frac{a}{b} \in \{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18\}$

$P(2)=0$, לאחר חילוק פולינומים מקבלים

$$P(q) = (q-2)(q^2-6q+9) = (q-2)(q-3)^2$$

לכן, $2^n, 3^n, n\cdot 3^n$ פתרונות.

$$C_n = c_1\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n + c_3\cdot n\cdot 3^n$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 \\ 2 &= 4c_1 + 9c_2 + 18c_3 \end{aligned}\right\} \quad H_n = -4\cdot 2^n + (4-n)\cdot 3^n$$

$c_1 = -4 \quad c_2 = 4 \quad c_3 = (-1)$

עקרון שובך היונים:

(1) אם מחלקים $n+1$ עצמים ל-n תאים אז יש תא המכיל 2 עצמים.

(2) אם מחלקים $mk+1$ עצמים ל-m תאים אז יש תא עם לפחות $k+1$ עצמים.

תרגיל- תהי S קבוצה של $[n+1]$ מספרים $S=\{a_1,\dots,a_{n+1}\}$

$a_i\in[2n]$. הוכיחו שקיימים שני מספרים זרים ב-S.

פתרון-

תאים: $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\vdots$, $\{2n-1,2n\}$

היונים - איברי הקבוצה S
יש n תאים, ו-$n+1$ יונים
לכן יש תא עם 2 יונים
כלומר S מכילה 2 מספרים
עוקבים ולכן זרים.

תרגיל- תהי $A\subseteq\{1,2,\dots,2n-1\}$. $|A|=n+1$. הוכיחו כי קיימים

שני מספרים שונים ב-A שסכומם הוא $2n$.

פתרון-

תאים $\{i,2n-i\}$
$i=1,\dots,n-1$

היונים- A. n תאים.

ו- $n+1$ יונים.

בתא $\{n\}$ יש לכל היותר איבר אחד נוריד את התא יחד עם האיבר n (אם צריך) ונישאר עם $n-1$ תאים ולפחות n יונים.

לכן, לפי שובך היונים, קיים תא מהצורה $\{i,2n-i\}$ שמכיל 2 יונים.

תרגיל- תהי B קבוצה של n מספרים שלמים. הוכיחו כי קיימת תת-קבוצה

$S\subseteq B$ כך שסכום איבריה $\sum_{s\in S} s$ מתחלק ב-n.

פיתרון- נסמן $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$. $s_i=b_1+b_2+\dots+b_i$ $i\in[n]$.

$C=\{s_1,\dots,s_n\}$. נסתכל על איברי הקבוצה C מודולו n.

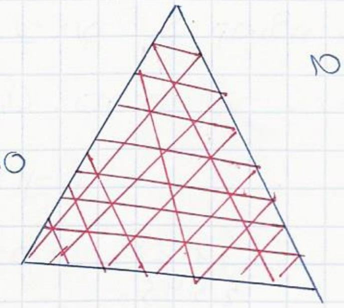
נוסיף $s_0=0$ ונקבל $C=\{s_0,s_1,\dots,s_n\}$.

לפי שובך היונים קיימים s_i,s_j כך ש: $s_i\equiv s_j\pmod{n}$. $i<j$

$n\mid s_j-s_i=\sum_{k=i+1}^{j} b_k$. לכן $S=\{b_{i+1},\dots,b_j\}$.

תרגיל- נתונות n^2+1 נקודות במשולש שווה צלעות שאורך צלעו n.
הוכיחו שיש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר 1.

פיתרון-



סוג ל...

בכל שורה נוספים שני משולשים. מספר המשולשים
שווי צלעות שאורך צלע 1 הוא:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$$

יש n^2 משולשים ו- (n^2+1) נקודות, ולכן יש
משולש שמכיל שתי נקודות. כיוון שהצלעות של המשולש הן באורך 1,
המרחק בין שתי הנקודות ≤ 1.

תרגיל- במשך 30 יום אספו תלמידי כיתה ו' קרשים לל"ג בעומר.
כל יום הצליחו לאסוף קרש אחד וסך הכל אספו 45 קרשים.
יש להוכיח שיש רצף ימים בו אספו בדיוק 14 קרשים.

פיתרון- X_i - מספר הקרשים שאספו ביום ה-i

$$X_i \ge 1, \quad \sum_{i=1}^{30} X_i = 45$$

$$S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$$

יש 30 יונים $S_i, i=1,2,\dots,30$.
14 תאים.. יש תא עם 3.

$$\sum_{k=1}^{i_1} X_k, \sum_{k=1}^{i_2} X_k, \sum_{k=1}^{i_3} X_k \qquad i_1<i_2<i_3$$

$$\sum_{k=i_1+1}^{i_2} X_k = \sum_{k=1}^{i_2} X_k - \sum_{k=1}^{i_1} X_k$$ מתחלק ב-14

אפשרויות: 14, 28, 42. אם זה 14 סיימנו. אחרת $\sum_{k=i_2+1}^{i_3} X_k$ מתחלק ב-14.
אם הוא שווה ל-14. סיימנו. אחרת הסכום ≥ 28 אבל אז:

$$\sum_{k=i_1+1}^{i_3} X_k = \underbrace{\sum_{k=i_1+1}^{i_2} X_k}_{\ge 28} + \underbrace{\sum_{k=i_2+1}^{i_3} X_k}_{\ge 28} > 45$$

סתירה

(ב) האם התשובה תישאר זהה אם התלמידים אספו את הקלפים במהלך 28 ימים?

פתרון - כן, אם יש תא עם 3 יונים אז פתרנו כמו ב-א'. אחרת,

בכל תא יש בדיוק 2 יונים. מלבד בתא 0 יש 2 יונים.

$14 \mid \sum_{k=1}^{i_1} X_k , \sum_{k=1}^{i_2} X_k$

אם $\sum_{k=1}^{i_1} X_k = 14$ סיימנו.

אחרת, הסכום ≥ 28. אם $\sum_{k=i_1+1}^{i_2} X_k = 14$ סיימנו.

אחרת $\geq 28 \Leftarrow$ אבל אז $\sum_{k=i_1+1}^{i_2} X_k = 14$ סתירה $\Leftarrow \Rightarrow$

שובך היונים:

תרגיל- עשרה אנשים יושבים במעגל. סכום הגילאים הוא 250.
הוכיחו שקיימים שלושה מתוכם היושבים ברצף שסכום הגילאים הוא
לפחות 75.

פיתרון- נסכום את הגילאים לפי שלשות ברצף. יש 10 שלשות.
כל אחד מופיע ב-3 שלשות ולכן סכום הגילאים ב-10 שלשות הוא
$3\cdot 250=750$. לכן, בממוצע סכום הגילאים בשלשה הוא 75
ולכן יש שלשה עם סכום גילאים לפחות 75.

תרגיל-

(א) הוכיחו: לכל $A\subset\{S\subset\{1,2,\dots,9\} : |S|\le 3\}$ בגודל $|A|=26$ קיימות
קבוצה מגודל ≤ 3
זו קבוצה של תתי קבוצות
$S,T\in A$ כך ש- $S\ne T$. $\sum_{s\in S} s=\sum_{t\in T} t$

פיתרון-

הסכומים האפשריים הם: 0 עבור הקבוצה הריקה
24 עבור הקבוצה הגדולה ביותר $\{7,8,9\}$

היונים זה הקבוצות (26). התאים הם הסכומים האפשריים (25).
יש תא עם שתי יונים. כלומר קיימות שתי קבוצות שונות $S\ne T$ כך ש- $\sum_{s\in S} s=\sum_{t\in T} t$

(ב) האם קיימת קבוצה $A\subset\{S\subset\{1,2,\dots,9\} \mid |S|\le 3\}$, $|A|=25$, כך שלכל $S\ne T$
$\sum_{t\in T} t \ne \sum_{s\in S} s$?

פיתרון-

$\{\phi, \{1\}, \dots \{9\}, \{9,1\}, \{9,2\}, \dots \{9,8\}, \{9,8,1\}, \dots \{9,8,7\}\}$

תרגיל 8 יהיו $a_1, a_2, \dots a_{10}$ מספרים שלמים, הוכיחו כי קיימים

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{10} \in \{-1,0,1\}$ שלא כולם 0 כך שהסכום $\sum \varepsilon_i a_i$ מתחלק ב-1023

(א) פיתרון - נסתכל על סכומים מהצורה $\sum \varepsilon_i a_i$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ מודולו 1023.

$\sum \varepsilon_i a_i$ $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{10})$ - היונים 2^{10}

נסתכל על $\sum \varepsilon_i a_i$ מודולו 1023 - תאים 1023.

משובך היונים יש תא עם שתי יונים $\sum \varepsilon_i a_i, \sum \varepsilon'_i a_i$ משאירים את

אותה השארית בחלוקה ב- 1023. $\sum (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) a_i$

$\varepsilon_i - \varepsilon'_i \in \{-1,0,1\}$ ולא כולם אפס.

וההפרש בין הסכומים מתחלק ב- 1023.

(ב) מצאו שלמים $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ כך שלכל $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{10} \in \{-1,0,1\}$ שלא כולם 0

$\sum \varepsilon_i a_i$ לא מתחלק ב-1024.

(ב) פיתרון-

נסתכל על הסדרה $a_1=1, a_2=2, a_3=2^2, \dots, a_{10}=2^9$ מהצורה על עיקר מייצג את

מספר הביטים במספר, ולכן סה"כ אפשר לייצג את כל המספרים בין 0-1023.

מספר בינארי: $\overline{2^9}\ \overline{2^8}\ \overline{2^7}\ \overline{2^6}\ \overline{2^5}\ \overline{2^4}\ \overline{2^3}\ \overline{2^2}\ \overline{2^1}\ \overline{2^0}$

$\sum \varepsilon_i a_i$ מייצג את כל מספר מ-1 עד 1023 (כי לא חוקי) בצורה יחידה.

$\varepsilon_i \in \{0,1\}$. כי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{10})$ הוא ייצוג בינארי של המספר $2^9, 2^8, \dots 2^0$.

בחלוקה ב- 1024 כל סכום יהיה הוא אחר.

משפט ארדש סקרש:

יהיו m,n מספרים טבעיים. כל סדרה של מספרים ממשיים (לאו דווקא שונים) באורך $mn+1$ מכילה תת סדרה עולה באורך $m+1$ או תת סדרה לא עולה באורך $n+1$.

תרגיל- יהי $n < kl$. הוכיחו שכל סדרה באורך n מכילה סדרה עולה באורך $k+1$ או סדרה יורדת באורך $l+1$ או סדרה קבועה באורך n.

פתרון: אם יש סדרה קבועה באורך n: סיימנו. אחרת קיימת תת סדרה באורך $kl+1$ מספרים שונים. (כי אחרת, כל מספר מופיע לכל היותר $n-1$ פעמים וגם יש $\leq kl$ מספרים שונים אז סה"כ יהיה $kl(n-1)$ מספרים סה"כ, סתירה).

לפי ארדש סקרש (המספרים שונים) אז יש תת סדרה עולה באורך $k+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $l+1$.

גרפים:

הגדרות:

גרף- זוג $G(V,E)$ = כאשר V- קבוצה כלשהי שנקראת קודקודים.
ו- E קבוצה של זוגות סדורים שנקראות צלעות.
$E \subseteq \{(u,v): u,v \in V\}$

$N(x)$- קב' השכנים של x.

$|N(x)| = d(x) :=$ ערכיות של x.

טענה- בכל גרף $\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$ (מספר זוגי)

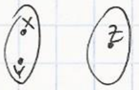
הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף, הגרף המשלים של G ומסומן ב- $\bar{G}$ הוא גרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$: $\{x,y\}\in\bar{E}$ אמ"מ $\{x,y\}\notin E$

בדוגמא- $\bar{G}=$  $G=$ 

תרגיל: הוכיחו שאם $G=(V,E)$ גרף אז G קשיר ו/או $\bar{G}$ קשיר.

פיתרון- אם G קשיר, סיימנו. אחרת, G לא קשיר. צריך להוכיח ש- $\bar{G}$ קשיר. יהיו $x,y\in V$, צ"ל קיים מסלול ב- $\bar{G}$ מ- x ל- y.

אם $\{x,y\}\in\bar{E}$ סיימנו. אחרת $\{x,y\}\in E$. בפרט, y,x נמצאים באותו מרכיב קשיר. כיוון ש- G לא קשיר, יש לפחות שני מרכיבים קשירים.



קיים z שנמצא במרכיב קשיר אחר.

כלומר, $\{y,z\},\{x,z\}\notin E \Leftarrow \{y,z\},\{x,z\}\in\bar{E}$

נקבל את המסלול: $x\,e\,z\,e'\,y$ ב- $\bar{G}$.

הגדרה: עץ הוא גרף קשיר חסר מעגלים.
יער - גרף חסר מעגלים.

תכונות: (1) בעץ יש לפחות 2 עלים. (עלה - קודקוד עם ערכיות 1).
(2) בעץ $|E| = |V|-1$.

טענה - יהי G גרף, $|V| \geq 3$. הוכיחו שהטענות הבאות שקולות
(1) G עץ.
(2) ב-G יש מסלול יחיד בין כל שני קודקודים.
(3) G גרף קשיר מינימלי (אם נוריד צלע כלשהי, ונשאיר את הקודקודים נקבל גרף לא קשיר)

הוכחה - נראה $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$(1) \Rightarrow (2)$: G עץ ולכן יש לפחות מסלול אחד בין כל שני קודקודים (מקשירות).
נניח שיש שני מסלולים בין x,y
מסלול ראשון: $x = v_0 e_1 v_1 \dots e_{n-1} v_{n-1} e_n v_n = y$
מסלול שני: $x = u_0 e'_1 u_1 \dots e'_{m-1} u_{m-1} e'_m u_m = y$
i מינימלי: $e_i \neq e'_i \Leftarrow v_i \neq u_i$ ו-$v_{i-1} = u_{i-1}$.
כעת, קיימים k,j מינימלים כך ש- $v_j = u_k$ ו- $j,k > i$
$v_{i-1} e_i v_i e_{i+1} \dots e_j v_j$
$v_{i-1} e_i v_i \dots e_j v_j = u_k e'_k u_{k-1} \dots e'_i u_{i-1} = u_{i-1} \Rightarrow$ מעגל
$\Leftarrow$ סתירה לכך ש-G עץ.

$(2) \Rightarrow (3)$: מ-(2) נובע ש-G קשיר.
$\{x,y\}$ צלע, נוריד אותה.
$x,\{x,y\},y$ מסלול בין x ל-y, מ-(2) ידוע שזהו המסלול היחיד מ-x ל-y.
כלומר, לאחר שהורדנו את הצלע, אין מסלול בין x ל-y ולכן הגרף שהתקבל לא קשיר.

$(3)\Rightarrow(1)$ צ"ל G עץ. מ-(3) נתון ש-G קשיר. צ"ל G חסר מעגלים.
נניח שב-G יש מעגל. נוריד צלע $\{x,y\}$ מהמעגל.
($\{x,y\}$ היה מסלול בין x ל-y, שאר המעגל מהווה מסלול בין x ל-y.
צריך להראות שיש מסלול בין כל שני קודקודים. ניקח מ"מ שהמסלול ביניהם
כלל את הצלע e. נחליף את המסלול במסלול אחר כאשר את הצלע e מחליפים
במעגל (בלי הצלע), (אם יש חזרות, אז נוריד אותם).

הגדרה: יהי G קשיר. עץ פורש של G הוא עץ שקודקודים הם
קודקודי G וצלעותיו מוכלות בצלעות של G.

טענה- לכל גרף קשיר יש עץ פורש.

הוכחה- נניח באינדוקציה על מספר המעגלים ב-G. $c=0$ (מספר המעגלים),
אז G הוא עץ והוא עץ פורש של עצמו.
נניח כי ב-G יש $c>0$ מספר המעגלים ונניח באינדוקציה שלכל גרף עם פחות
מ-c מעגלים יש עץ פורש.
נבחר מעגל ונוריד צלע מן המעגל, אז הגרף נשאר קשיר ומספר המעגלים $< c$.
ולפי הנחת האינדוקציה, בגרף החדש יש עץ פורש. העץ, הוא גם עץ פורש
של G.

מסלולים אוילריאניים:

<u>משפט אוילר</u> - גרף קשיר הוא גרף אוילר אמ"מ כל הדרגות זוגיות.

<u>מסקנה</u>: בגרף קשיר G יש מסלול אוילר (שהוא לא מסלול סגור)
אמ"מ קיימים בדיוק שני קודקודים עם דרגות אי-זוגיות.

הוכחה: נניח שיש מסלול אוילר: $v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$

כל קודקוד שמופיע באמצע נוסף 2 לדרגות לשני קודקודי הקצה
נוסף עוד 1. ולכן, קודקודי הקצה בעלי דרגות אי-זוגיות.

כיוון שני - יש x,y עם דרגות אי-זוגיות.
אם $\{x,y\}\in E$ נוריד את הצלע. הדרגות זוגיות לכל v ולכן קיים
מסלול אוילר סגור. נוסיף את הצלע למסלול ונתחיל ממנה.
אם $\{x,y\}\notin E$, נוסיף את הצלע וכל הדרגות זוגיות. קיבלנו מסלול
אוילר סגור, כאשר נוריד את הצלע, נקבל מסלול פתוח.

אוילר:

הגדרה: גרף G נקרא d-רגולרי אם כל הדרגות שוות ל-d. כלומר לכל $v\in V$, $d(v)=d$.

תרגיל: יהי $G=(V,E)$ גרף d-רגולרי, בנוסף, נתון $|V|=2d+1$
הוכיחו כי G הוא גרף אוילריאני.

פתרון: נוכיח G קשיר ו-d זוגי.

G קשיר: ניקח u,v. צ"ל שיש מסלול מ-v ל-u. אם $\{v,u\}\in E$ סיימנו.

אחרת, $|N(v)|=|N(u)|=d$

$N(v),N(u)\subseteq V\setminus\{v,u\}$

$|V\setminus\{v,u\}|=2d-1$

מסקנה שנובע מהנוסח, נובע $\exists w = N(u)\cap(N(v))\neq\emptyset$

$u\overset{e_2}{-}w\overset{e_1}{-}v$ מסלול מ-u ל-v $\Leftarrow$ G קשיר.

נשתמש בנוסחה: $\underbrace{2|E|}_{\text{זוגית}}=\sum_{v\in V} d(v)=(\underbrace{2d+1}_{\text{אי זוגי}})\cdot d$

$\Leftarrow$ d זוגי.

תרגיל- עבור $n\geq 2$ נגדיר את הגרף $G_n=(V,E)$ באופן הבא: $V=\binom{[n]}{2}$
כל הקבוצות בגודל 2 מ-$[n]$. $\{A,B\}\in E$ אמ"מ $A\cap B=\emptyset$

דוגמא: עבור $n=4$, G_4:

$\{1,2\} - \{3,4\}$

$\{1,3\} - \{2,4\}$

$\{1,4\} - \{2,3\}$

(א) הוכיחו כי אם $n\geq 5$ אז G_n קשיר

פתרון- $A,B\in V$, $A\cap B=\emptyset$ אז $\{A,B\}\in E$. אחרת $A\cap B\neq\emptyset$ אז $|A\cup B|=3$.

קיימים $x,y\in[n]\setminus(A\cup B)$ (כי $n\geq 5$). ניקח $C=\{x,y\}\in V$.

$A\cap C=B\cap C=\emptyset$. $\{A,C\},\{C,B\}\in E$. קיבלנו מסלול מ-A ל-B.

(ב) עבור אילו ערכי n הגרף G_n הוא גרף אוילריאני?

פתרון- $n=2$. $G_n=\bullet$. יש מסלול אוילריאני ריק. $n\geq 5$ (3,4 לא קשירים)

$A\in V$. $d(A)=\binom{n-2}{2}=\frac{(n-3)(n-2)}{2}$. ($n-2$ או $n-3$ זוגי) ונרצה שהמספר הזוגי

מתוכם יתחלק ב-4. $n=4k+2$ או $n=4k+3$.

משפט הול - משפט החתונה:

<u>הגדרה</u>- זיווג בגרף הוא אוסף צלעות זרות בזוגות, כלומר אוסף הצלעות שהחיתוך בין כל שתיים הוא ריק. גודל זיווג מקסימלי מסומן $\nu(G)$ בגרף דו-צדדי $G=(A,B,E)$

$\min\{|A|,|B|\} \ge \nu(G)$

<u>הגדרה</u>: נאמר שקיים זיווג M עבור A בגרף דו"צ $G=(A,B,E)$ אם $\nu(G)=|A|$.

<u>משפט החתונה</u>: $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ. קיים זיווג עבור A (כלומר $\nu(G)=|A|$) אמ"מ לכל $S\subseteq A$ ו $|N(S)|\ge|S|$

<u>הגדרה</u>: נתונה משפחה של קבוצות שונות $A_1,A_2,\ldots,A_m$. מערכת נציגים שונים של המשפחה היא בחירה $a_i\in A_i$ כך שלכל $i\ne j$ $a_i\ne a_j$.

<u>תרגיל</u>: נתונה משפחה של קבוצות שונות $A_1\ldots A_m$ כך ש $\bigcup A_i \subseteq [n]$ ($n\ge m$). הוכיחו שניתן לבחור מערכת נציגים שונים אמ"מ לכל $S\subseteq[m]$ מתקיים $|\bigcup_{i\in S} A_i|\ge|S|$.

<u>פתרון</u>: נתרגם את הבעיה לגרף $G=(A,B,E)$

$\{A_i,j\}\in E$ אמ"מ $j\in A_i$. זיווג בגרף מייצג בחירת נציגים שונים למשפחה. התנאי ב-G לכל $S\subseteq A$, $|N(S)|\ge|S|$ שקול לבחירת תת קבוצה של אינדקסים $S\subseteq[m]$ כך ש- $|\bigcup_{i\in S}A_i|\ge|S|$

ניתן לבחור מערכת נציגים שונים אמ"מ יש זיווג עבור A ב-G $\overset{\text{משפט הול}}{\iff}$ לכל $S\subseteq A$, $|N(S)|\ge|S|$ אמ"מ לכל $S\subseteq[m]$, $|\bigcup A_i|\ge|S|$.

\# תרגיל- יהי $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ. נסמן ב-δ את הדרגות המינימלית של הקודקודים ב-A וב-d את הדרגות המקסימלית ב-B. הוכיחו שאם $\delta \geq d$ אז יש זיווג עבור A ב-G.

פתרון- תהי $S \subseteq A$, צ"ל $|S| \leq |N(S)|$. נסמן ב-E_0 את כל הצלעות היוצאות מ-S וב-E_1 את כל הצלעות היוצאות מ-$N(S)$.

$$E_0 \subseteq E_1 \Rightarrow |E_0| \leq |E_1|.$$

$$|E_0| \geq \delta |S|$$

$$|E_1| \leq d|N(S)|$$

$$\delta |S| \leq |E_0| \leq |E_1| \leq d|N(S)|$$

$$N(S) \geq \frac{\delta |S|}{d} \geq |S|$$

מסקנה: אם $G=(A,B,E)$ דו"צ d-רגולרי אז יש זיווג עבור A.

בנוסף, מכיוון ש- $d|A| = d|B| \Rightarrow |A|=|B|$

זיווג זה כולל את כל הקודקודים בגרף ולכן זיווג מושלם של G.

משפט הול:

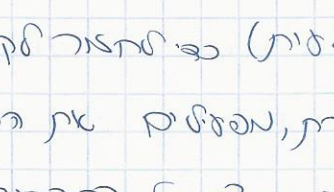
תזכורת: בכל גרף $G=(A,B,E)$ דו"צ d-רגולרי יש זיווג מושלם (זיווג עבור A,B - כל הקודקודים משתתפים בזיווג), $|A|=|B|$

<u>תרגיל</u>- הוכיחו שאם $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ d-רגולרי אז ניתן לפרק את צלעותיו ל-d זיווגים מושלמים זרים.

פתרון- נוכיח באינדוקציה על d.
עבור $d=1$ אז כל הצלעות של G הם זיווג. נניח עבור $d-1$ ונוכיח עבור d. מהתזכורת, בגרף דו"צ d-רגולרי יש זיווג מושלם. נוריד אותו, כיוון שכל הקודקודים משתתפים בזיווג בדיוק פעם אחת.
לאחר ההורדה נישאר עם גרף דו"צ $(d-1)$ רגולרי. לפי הנחת האינדוקציה גרף זה ניתן לפירוק ל-$(d-1)$ זיווגים זרים ויחד עם הזיווג שהורדנו נקבל d זיווגים שונים. $M_1,M_2,\ldots M_d$, $M_i\cap M_j=\phi$

<u>תרגיל</u>: $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ. הוכיחו שאם לכל $S\subseteq A$ מתקיים $|N(S)|\geq|S|-d$ אז יש זיווג שמכיל לפחות $|A|-d$ קודקודים.
הוכחה- הוכח בהרצאה.

<u>משפט</u>: גרף הוא דו"צ אמ"ם כל המעגלים בו הם באורך זוגי.
הוכחה-
<u>כיוון ראשון</u>- אם G דו"צ מעגל C. ניקח $v\in A$ על המעגל. נתחיל לטייל על המעגל. כל צלע שעליה אנחנו עוברים מעבירה אותנו לצד השני של הגרף, לכן דרוש מס' זוגי של צעדים (צלעות) כדי לחזור לקודקוד $v\in A$.
<u>כיוון שני</u>- נניח ש-G קשיר, אחרת, מפעילים את ההוכחה על כל מרכיב קשירות. ניקח $v\in V$. נגדיר $\underline{A}$- קבוצת כל הקודקודים שאורך המסלול הקצר ביותר מהם ל-v הוא אי-זוגי. $\underline{B}$- כל הקודקודים שאורך המסלול הקצר ביותר מהם ל-v הוא זוגי. $A\cap B=\phi, A\cup B=V$. נראה $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ.



נניח בשלילה, מה"כ $\exists\{u,w\}\in E$, $u,w\in A$.
אז המסלול מ-u ל-v + המסלול מ-v ל-w
+ הצלע $\{u,w\}$ יוצרים מסלול סגור אי-זוגי.

מספיק עבור נירק לפירוק למעגלים זרים. ושאחד מהם לפחות יהיה באורך אי-זוגי, סתירה. עבור B אותה הוכחה.

הגדרה- יהי $G=(V,E)$ גרף. תת קבוצה $C\subseteq V$ נקראת כיסוי קודקודים אם לכל $e\in E$ מתקיים $C\cap e\neq\phi$.

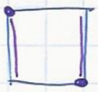
טענה- בכל גרף, אם C הוא כיסוי ו- M הוא זיווג $|C|\ge|M|$

סימון- גודל זיווג מקסימלי מסומן ב- $\nu(G)$

גודל כיסוי מינימלי מסומן ב- $\tau(G)$

דוגמאות:

$\nu(G)=\tau(G)=2$



K_4: $\tau=3$
$\nu=2$

* בכל K_n $\tau=n-1$

תרגיל: הוכיחו שבכל גרף $G=(V,E)$ $(\nu\le)\tau\le 2\nu$ (מהרצאה.)

הוכחה- ניקח M להיות זיווג מקסימלי, $\nu=|M|$.

$|C|=|\bigcup_{e\in M} e|=2\nu$ אוסף הקודקודים שמשתתפים בכל הצלעות בזיווג.

נראה ש- C הוא כיסוי.

נניח בשלילה שלא, כלומר קיימת צלע $e=\{u,v\}$ כך ש- $C\cap e=\phi$,

אז $M\cup\{e\}$ גם זיווג. בגודל $\nu+1$ בסתירה למקסימליות של M.

תרגיל: הוכיחו את משפט הול ממשפט König

פיתרון- יהי $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ. הכיוון הטריוויאלי נשאר כמו שהיה.

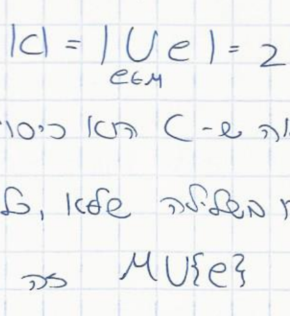
אם ב- G יש זיווג עבור A אז לכל $S\subseteq A$: $|N(S)|\ge|S|$.

כיוון שני- צ"ל אם לכל $S\subseteq A$ $|N(S)|\ge|S|$ אז יש זיווג עבור A ב- G.

נניח בשלילה שאין זיווג עבור A. צ"ל קיים $S\subseteq A$ כך ש- $|N(S)|<|S|$.

אם אין זיווג עבור A, $\tau(G)=\nu(G)<|A|$ $\Leftarrow$ קיים כיסוי C כך ש- $|C|<|A|$

ניקח $S=A\setminus C$, $B'=B\cap C=C\setminus A$.



$|N(S)|\le|B'|=|C\setminus A|=|C|-|C\cap A|\Leftarrow N(S)\subseteq B'$

$\le|A|-|C\cap A|=|A\setminus C|=|S|$

$\Rightarrow |N(S)|<|S|$

תורת רמזי:

הגדרה- נאמר שמספר n בעל תכונה $R(k,l)$, אם לכל צביעה של צלעות של K_n בכחול ואדום יש K_k כחול או K_l אדום.

אם קיים מספר מינימלי N כך ש- K_N מקיים את התכונה $R(k,l)$ אז נאמר ש- $n=r(k,l)$ מספר רמזי.

משפט ארדש סקרש- לכל $k,l \ge 2$, אם קיימים $r(k-1,l), r(k,l-1)$ אז $r(k,l)$ קיים ו- $r(k,l) \le r(k-1,l) + r(k,l-1)$

משפט רמזי- עבור k,l מספר טבעיים $r(k,l)$ קיים ומתקיים:

$$r(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1}$$

הערה- $r(k,l) = r(l,k)$

דוגמאות-

(1) $r(1,l)=1$

(2) $r(2,l)=l$

(3) $r(3,3)=6$

תרגיל- הוכיחו ש- $r(3,4)=9$

פיתרון- החסמים במשפט ארדש סקרש והמשפט רמזי נותנים $r(3,4) \le 10$ וזה לא עוזר. נוכיח ישירות:

$r(3,4) \le 9$. יהי K_9 שצלעותיו צבועות בכחול ואדום. לכל $v \in V$ מתקיים $d(v)=8$. יש או 4 כחולים לפחות או לפחות 5 אדומים.

מקרה א'- יש $v \in V$ כך שיוצאות ממנו לפחות 4 צלעות כחולות.

אם שניים מהשכנים הכחולים של v מחוברים בכחול אז יש K_3 כחול וסיימנו.

אחרת, כל השכנים הכחולים של v מחוברים באדום ויוצרים K_4 אדום.

מקרה ב'- מכל v יוצאים לכל היותר 3 צלעות כחולות. אם מכל קודקוד יוצאות בדיוק 5 צלעות אדומות, אז בגרף האדום, $d(v)=5$ לכל $v \in V$, $|V|=9$

$$2|E| = \sum d(v) = 5 \cdot 9 = 45$$

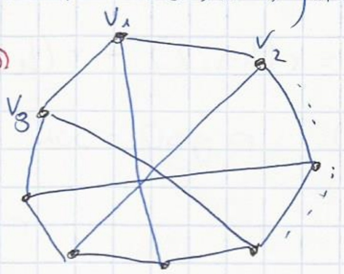
סתירה, לכן קיים v שממנו יוצאות 6 צלעות אדומות.

כיוון ש- $r(3,3)=6$. יש בין השכנים האדומים של v, K_3 כחול או K_3 אדום. אם יש K_3 כחול, סיימנו. אם יש K_3 אדום אז יחד עם v נקבל K_4 אדום וסיימנו.

נותר להוכיח ש- $r(3,4)>8$.

אין K_3 כחול (לפי הציור). אין K_4 אדום כי אסור לקחת שני קודקודים סמוכים ולכן הקבוצות היחידות: v_1,v_3,v_5,v_7 $\quad$ v_2,v_4,v_6,v_8

הצלעות שלא מופיעות הן אדומות!



תרגיל-

נתונות 9 נקודות במישור $x_1,x_2,...,x_9\in\mathbb{R}^2$. הוכיחו ש-3 מתוכן נמצאות במרחק שונה מ-1 ביניהן.

פתרון- נתאים ל-9 הנקודות צביעה של K_9 . כל קודקוד v_i מסמנת הנקודה x_i צבועה $\{v_i,v_j\}$ בכחול אם המרחק ביניהן שונה מ-1, וצבועה באדום אם המרחק $=1$.

בתרגיל הקודם הראינו ש- $r(3,4)=9$, כלומר ב- K_9 שקיבלנו יש K_3 כחול או K_4 אדום. אם יש K_4 אדום אז יש 4 נקודות במישור שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא 1. וזה לא יכול להיות.

$\Leftarrow$ בהכרח יש K_3 כחול, כלומר 3 נקודות שהמרחק בין כל שתיים מהן $\neq 1$.

משפט ארדש - $\binom{r(k,k)}{k} \ge 2^{\binom{k}{2}-1}$.

תרגיל: הוכיחו שעבור $k \ge 2$, $2^{\frac{k}{2}} \le r(k,k) \le 2^{2k}$

פתרון - נוכיח $r(k,k) \le 2^{2k}$ ממשפט רמזי.

$$r(k,k) \le \binom{2k-2}{k-1} \le 2^{2k-2} \le 2^{2k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

. $r(k,k) \ge 2^{\frac{k}{2}}$

ניזכר מאי שוויון: $\binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}$

$$2^{\binom{k}{2}-1} \le \binom{r(k,k)}{k} \le \frac{(r(k,k))^k}{k!}$$

$$(r(k,k))^k \ge k! \cdot 2^{\frac{k^2-k-2}{2}} \underset{\text{ע"פ}}{\ge} 2^{\frac{k^2}{2}}$$

$k! \ge 2^{\frac{k+2}{2}}$ באינדוקציה:

בסיס: עבור $k=3$ $\quad 6 = 3! \ge 2^{\frac{5}{2}}$

נניח עבור k ונוכיח עבור $k+1$.

$$(k+1)! = k!\underset{\ge\sqrt{2}}{(k+1)} \ge 2^{\frac{k+2}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{k+3}{2}}$$

צביעה של גרפים:

צביעה של גרף ב-k צבעים היא פונקציה $f: V \to [K]$
כך ש- $\{u,v\}\in E \Longrightarrow f(u)\neq f(v)$

$\chi(G)$ מס' הצביעה - המספר המינימלי של צבעים הדרוש לצביעה חוקית.

<u>דוגמאות:</u>

(1) $\chi(G)=1 \iff E(G)=\phi$ $\qquad \omega(G)=1$

(2) $\chi(G)=2 \iff G$ דו"צ $\qquad \omega(G)=2$

(3) נסמן ב- C_n מעגל באורך n $\qquad n\neq 3 \quad \omega(G)=2$

$$\chi(C_n)=\begin{cases}2 & \text{זוגי } n\\ 3 & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$$

(4) $\chi(K_n)=n$ $\qquad \omega(K_n)=n$

סימון- נסמן ב- $\omega(G)$ את הגודל של תת הגרף השלם הכי גדול ב-G. (מס' הקודקודים בקליק מקסימלי).

<u>טענה</u>- $\chi(G)\geq\omega(G)$

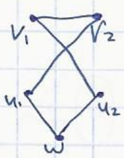
<u>הוכחה</u>- אם ב-G יש תת גרף שלם בגודל $\omega(G)$ אז צריך לפחות $\omega(G)$ צבעים כדי לצבוע את תת הגרף הזה נשתמש באותם הצבעים לצביעת כל השאר, אבל יכול להיות שנצטרך להוסיף עוד צבעים.

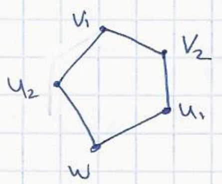
<u>גרפי מיצלסקי:</u>

• M_1 $\quad K_2=M_1$ $\quad \chi=\omega=2$

• M_2

v_i, u_j אם $\{v_i,v_j\}\in M_1$

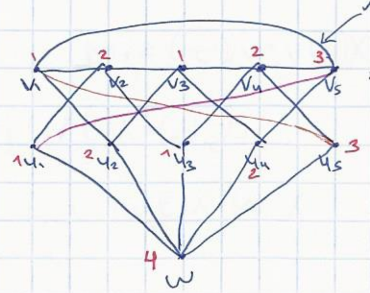




$M_2=C_5$

$\omega=2, \chi=3$

• M_3 $\quad :M_3$



$\omega=2 \quad \chi=4$

תרגיל- יהי G גרף ויהי $\bar{G}$ הגרף המשלים של G. נסמן ב- $n=|V|$.

(א) הוכיחו: $\chi(G)\chi(\bar{G}) \ge n$

פתרון- נסמן:

$k=\chi(G)$, $m=\chi(\bar{G})$. צ"ל $mk \ge n$

נוכיח ש- $\chi(K_n) = \chi(G \cup \bar{G}) \le \chi(G)\cdot\chi(\bar{G})$

נסמן ב- f את הצביעה של G ב-k צבעים. נסמן ב- $\bar{f}$ את הצביעה של $\bar{G}$ ב- m צבעים.

נבנה צביעה ל- K_n. נגדיר $g: V \to [k]\times[m]$ כאשר $g(v)=(f(v),\bar{f}(v))$.

צ"ל שלכל $\{u,v\}\in E$ (כל זוג u,v) מתקיים ש- $g(u)\neq g(v)$.

אם $\{u,v\}\in E(G)$ אז $f(u)\neq f(v)$. אחרת, $E(\bar{G}) \ni \{u,v\}$

$\Leftarrow$ $\bar{f}(u)\neq\bar{f}(v)$, לכן, לכל $u,v\in V$ $g(u)\neq g(v)$.

קיבלנו צביעה של K_n ב- km צבעים ומכיוון ש- $km \ge n \Leftarrow \chi(K_n)$.

(ב) $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \le n+1$

פתרון- נוכיח באינדוקציה על מספר הקודקודים.

בסיס- $n=1$, $G=\bar{G}=\cdot$, $\chi(G)=\chi(\bar{G})=1$

$\chi(G)+\chi(\bar{G})=2 \le n+1=2$

צעד האינדוקציה- נניח נכונות עבור n ונוכיח נכונות עבור $n+1$.

יהי $G=(V,E)$, $|V|=n+1$. נוריד קודקוד v. נסתכל על $G\setminus\{v\}$, $\overline{G\setminus\{v\}} = \bar{G}\setminus\{v\}$. לפי הנחת האינדוקציה:

$\chi(G\setminus V)+\chi(\bar{G}\setminus V) \le n+1$

נפריד לשני מקרים-

- אם $\chi(G\setminus V)+\chi(\bar{G}\setminus V) \le n$

אז כשנחזיר את v נקבל $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \le n+2$

- מקרה בו: $\chi(G\setminus V)+\chi(\bar{G}\setminus V) = n+1$,

$d_G(V) < \chi(G\setminus V) \Leftarrow \chi(G)=\chi(G\setminus V)$ ואז $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \le n+2$

(כי $\chi(\bar{G}) \le \chi(G\setminus V)+1$), ובנוסף אם $d_{\bar{G}}(V) < \chi(\bar{G}\setminus V)$.

אם $d_G(v) \ge \chi(G\setminus V)$ וגם $d_{\bar{G}}(v) \ge \chi(\bar{G})$ אז: $n = d_G(v)+d_{\bar{G}}(v) \ge \chi(G)+\chi(\bar{G}) = n+1$

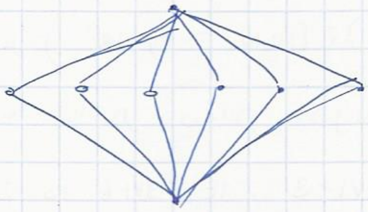
סתירה $\Leftarrow$

גרפים מישוריים:

הגדרה: גרף G ייקרא מישורי אם ניתן לצייר אותו במישור כך שהצלעות אינן נחתכות.

תרגיל: הוכיחו ש- $K_{2,n}$ מישורי.

יש ציור מישורי לכן $K_{2,n}$ מישורי.



נוסחת אוילר- בגרף מישורי עם ציור מישורי D מתקיים $|V|-|E|+f=2$ כאשר f זה המספר הפאות ב-D.

טענה-

(1) בגרף מישורי $|E|\le 3|V|-6$

(2) K_5, $K_{3,3}$ לא מישוריים.

(3) גרף הוא מישורי אמ"מ הוא לא מכיל את $K_{3,3}$ ואת K_5 או עידון שלהם.

(4) $2|E|=\sum_{i=1}^{f} d(F_i)$

תרגיל: ציור מישורי של גרף נקרא שילוש אם כל הפאות שלו הן משולשים.

(א) הוכיחו של-G יש ציור מישורי שהוא שילוש אמ"מ $|E|=3|V|-6$

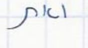
(ב) הראו שלכל $n\ge 3$ קיים שילוש עם n קודקודים.

פיתרון:

(א) מהוכחה ש- $|E|\le 3|V|-6$: $|E|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} d(F_i)\ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f} 3=\frac{3f}{2}$

לכן, יהיה שוויון אמ"מ $d(F_i)=3$ לכל $i=1,\dots,f$

(ב) נבנה את הגרפים באינדוקציה, עבור $n=3$ ברור.

עבור $n=4$ 

נניח באינדוקציה שקיים שילוש עם n קודקודים, עבור $n+1$: בוחרים את אחד המשולשים, שמים קודקוד נוסף באמצע המשולש ומחברים אותו לקודקודי המשולש.

תרגיל- הוכיחו שאם G מישורי קשיר שמקיים $|E|=3|V|-6$ וקיים $v\in V$ כך ש- $d(v)=2$

אז G הוא משולש (K_3)

פיתרון -

מהתרגיל הקודם, כל הפאות הן משולשים, אם נוסיף קודקוד נוסף, w, שלא w מחוץ למשולש $\{vxy\}$ אז הפאה החיצונית לא תהיה משולש (כי $d(v)=2$)

אם הוא בתוך המשולש ולא מחובר ל-v, אז אחת הפאות הפנימיות לא תהיה משולש.

מסקנה- אם G גרף מישורי קשיר שמקיים $|E|=3|V|-6$, $|V|>3$ אז $d(v)\geq 3$ לכל $v\in V$.

תרגיל- הוכיחו שאם G מישורי קשיר $|E|=3|V|-6$, $|V|\geq 4$ אז יש לפחות ארבעה קודקודים v_1,v_2,v_3,v_4 כך ש- $d(v_i)\in\{3,4,5\}$

פיתרון -

נסמן ב- V_k כל הקודקודים מדרגות k. (קבוצה). מהמסקנה ידוע ש- $d(v)\geq 3$ וצ"ל:

$|V_3|+|V_4|+|V_5|\geq 4$.

$$2|E|=\sum d(v)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{v\in V_k} d(v)=\sum_{k=3}^{\infty} k|V_k|$$

שינוי סדר סכימה מותר מסכום סופי.

$$2|E|=2(3|V|-6)=6|V|-12=6\cdot\sum|V_k|-12$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{\infty}6|V_k|-12=\sum_{k=3}^{\infty}k|V_k|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{5}(6-k)|V_k|=12+\sum_{k=6}^{\infty}(k-6)|V_k|$$

$$3|V_3|+2|V_4|+|V_5|=12+\sum_{k=6}^{\infty}(k-6)|V_k|$$

$$\wedge|$$

$$3(|V_3|+|V_4|+|V_5|)\geq 12+\underbrace{\sum}_{\geq 0}$$

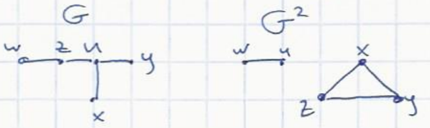
$$|V_3|+|V_4|+|V_5|\geq 4+\underbrace{\sum}_{\geq 0} \Rightarrow |V_3|+|V_4|+|V_5|\geq 3$$

תרגיל- הוכיחו שבכל גרף מישורי עם n קודקודים יש קבוצה בת לפחות $\frac{n}{4}$ קודקודים שאף שניים מהם לא מחוברים בצלע.

פתרון- כל גרף מישורי הוא 4-צביע. נצבע בארבעה צבעים. כל צבע הוא קבוצה בה אין צלעות בין קודקודים. בממוצע גודל של קבוצה הוא $\frac{n}{4}$ ולכן יש קבוצה $\geq \frac{n}{4}$.

תרגיל- עבור גרף $G=(V,E)$, נגדיר $G^2=(V,E^2)$ כאשר $\{u,v\}\in E^2$ אם"ם יש מסלול באורך 2 ביניהם.

למשל,



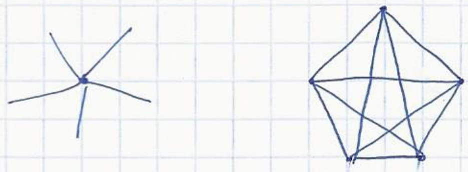
הוכיחו או הפריכו:

(א) אם G מישורי אז G^2 מישורי.

(ב) אם G^2 מישורי אזי G מישורי.

פתרון-

(א)



לא מישורי   מישורי

(ב) G לא מישורי, G מישורי