רמז לתרגיל 1 ־ שאלה 4

11 בנובמבר 2016

נתחיל מהפונקציה $f:[n]\to[n]$. דרך אחת לגשת לבעיה היא להוכיח את הטענה היותר כללית הבאה: יהיו $J_1,J_2,\dots,J_n$ תתי קבוצות של $[n]$. הראו כי

$$\mathbf{P}\Big(f(1)\in J_1,\ f(2)\in J_2,\dots,\ f(n)\in J_n\Big)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(f(i)\in J_i).$$

במילים אחרות לכל בחירה של $J_1,\dots,J_n$ המאורעות $(A_i)_{i=1}^n$המוגדרים על ידי $A_i=\{f(i)\in J_i\}$ הנם בלתי תלויים.

כעת נשים לב שהמאורע שאת ההסתברות שלו אנו מעוניינים לחשב הוא

$$A=\{f(i)\neq i\,\text{for all }i\in[n]\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{f(i)\neq i\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{f(i)\in[n]\setminus\{i\}\}.$$

כלומר, אם נגדיר $J_i=[n]\setminus\{i\}$, אזי

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

השתמשו כעת באי התלות על מנת לחשב את ההסתברות.

נעבור למקרה השני $g:[n]\to[n]$ פונקציה חח"ע. במקרה זה עלינו למצוא דרך שונה לחשב את ההסתברות היות ואי התלות שהוכחנו במקרה הראשון אינה נכונה. אם נסמן ב־ $\widetilde{\mathbf{P}}$ את מידת ההסתברות של הפונקציות החח"ע על מרחב המדגם המתאים ונגדיר $A=\{f(i)\neq i\,\forall i\in[n]\}$ וכן $A_i=\{f(i)\neq i\}$, נקבל

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A)=\widetilde{\mathbf{P}}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Big)=1-\widetilde{\mathbf{P}}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Big)^c\Big)=1-\widetilde{\mathbf{P}}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c\Big).$$

כלומר, מספיק לחשב את $\widetilde{\mathbf{P}}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c\Big)$. השתמשו כעת בנוסחאת ההכלה וההפרדה שהוכחתם בשאלה 1. על מנת לפתור את הבעייה.