החלפות סדר בטורים

פרמוטציה (תמורה) של $\{1,2,...,n\}$ היא פונקציה חח"ע מהקבוצה: $\{1,2,...,n\}$ על עצמה. באופן דומה פרמוטציה π של הטבעיים היא פונקציה חח"ע

$$\pi : \{1,2,3,...\} \mapsto \{1,2,3,...\}$$

מהקבוצה $\{1,2,3,...\}$ על עצמה.

נתיחס לטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ונאמר שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתקבל ממנו ע"י שינוי סדר המחוברים אם קיימת פרמוטציה של טבעיים:

$$\pi : \{1,2,3,...\} \mapsto \{\pi(1),\pi(2),\pi(3),...\}$$

כך ש:

$$.b_n = a_{\pi(n)},\ n \geq 1$$

<u>משפט.</u> בטור חיובי מתכנס מותר להחליף את סדר המחוברים, והטור החדש מתכנס לאותו סכום.

<u>הוכחה:</u> תהי π פרמוטציה כלשהי ולכל $n \geq 1$ יהי $b_n = a_{\pi(n)}$. צריך להוכיח שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. נסמן

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

ו:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} b_k$$

את הסכומים החלקיים של שני הטורים.
מחיוביות של a_n נובע ששתי הסדרות $\{S_n\}$ ו:
$\{T_k\}$ מונוטוניות, וידוע ש: $\{S_n\}$ מתכנסת, נגיד
ל: S. עבור n טבעי כלשהו נסמן

$$k = \max\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)\}$$

ואז מתקיים, בגלל חיוביות a_i,

$$\begin{aligned} T_n &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)} \\ &\leq a_1 + a_2 + \cdots a_k \leq S \end{aligned}$$

יוצא ש: $\{T_n\}$ מונוטונית לא-יורדת וחסומה ע"י
S, ולכן מתכנסת לגבול T אשר מקיים

$$T \leq S.$$

מאחר והפרמוטציה π של הטבעיים היא חח"ע ועל, קיימת לה פרמוטציה ההפוכה π^{-1}, ויש את הקשר

$$b_n = a_{\pi(n)} \Leftrightarrow a_m = b_{\pi^{-1}(m)}$$

כאשר $m = \pi(n)$. ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתקבל מהחלפת סדר של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. לכן הנימוק המוביל ל: $S \leq T$ נותן את אי-השיויון ההפוך $T \leq S$, ולכן שיויון $S = T$.

נעסוק עתה בטורים עם סימנים כלשהם, לאו דוקא חיוביים. עבור טור $\sum a_n$ נגדיר את החלק החיובי ואת החלק השלילי של a_n כדלקמן:
החלק החיובי הוא

$$0 \leq p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$$

והחלק השלילי הוא

$$0 \leq q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n & a_n \leq 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$$

למשל עבור הטור $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$

מקבלים את סדרת החלק החיובי

$p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = 1/3,\ p_4 = 0, ...$

וסדרת החלק השלילי היא

$q_1 = 0,\ q_2 = 1/2,\ q_3 = 0,\ q_4 = 1/4, ...$.

נובע מההגדרות ש:

$$a_n = p_n - q_n,\ |a_n| = p_n + q_n. \qquad (1)$$

המשפט הבא יבהיר את משמעות ההתכנסות בהחלט של טור.

<u>משפט.</u> א. אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum p_n$ ו: $\sum q_n$ מתכנסים, נגיד ל: P ו: Q בהתאמה, ומתקיים

$$S = P - Q$$

כאשר S הוא הסכום של $\sum a_n$.

ב. אם $\sum p_n$ ו: $\sum q_n$ מתכנסים אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

<u>הוכחה:</u> להוכחת חלק א, משתמשים באי השיויונות

$$0 \le p_n, q_n \le |a_n| \,,$$

ולכן מההתכנסות של $\sum |a_n|$ נובעות ההתכנסויות של $\sum p_n$ ו: $\sum q_n$. מאחר ו:

$a_n = p_n - q_n$ נובע ש: $S = P - Q$.

הטענה בחלק ב נובעת מ: $|a_n| = p_n + q_n$, כך שההתכנסויות של $\sum p_n$ ו: $\sum q_n$ גוררות את ההתכנסות של $\sum |a_n|$.

<u>מסקנה.</u> אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי (כלומר לא מתכנס בהחלט) אז שני הטורים $\sum p_n$ ו: $\sum q_n$ מתבדרים.

זה נובע מכך שלא יתכן ששניהם מתכנסים, אבל גם לא יתכן שאחד מהם מתכנס והשני מתבדר, כי אז גם $\sum a_n$ היה מתבדר.

<u>משפט.</u> בטור מתכנס בהחלט מותר לבצע כל החלפת סדר בלי לשנות את סכום הטור.

הוכחה. נתון ש: $\sum |a_n|$ מתכנס. זהו טור של אברים חיוביים ולכן מותר לבצע בו החלפת סדר, ויוצא ש: $\sum |a_{\pi(n)}|$ מתכנס ולאותו סכום.

מהתכנסות $\sum |a_n|$ נובעת ההתכנסות של $\sum p_n$ ושל $\sum q_n$, ומההתכנסות של $\sum |a_{\pi(n)}|$ נובעת ההתכנסות של $\sum p_{\pi(n)}$ ושל $\sum q_{\pi(n)}$, ויתרה מכך, יש את השיויונות

$$\sum p_n = \sum p_{\pi(n)}, \sum q_n = \sum q_{\pi(n)}$$

כי אלו הם טורים חיוביים.

עתה, מההתכנסות של $\sum p_{\pi(n)}$ ו: $\sum q_{\pi(n)}$ נובע, לפי המשפט האחרון, שהטור $\sum a_{\pi(n)}$ מתכנס

וסכומו

$$\sum a_{\pi(n)} = \sum p_{\pi(n)} - \sum q_{\pi(n)}$$
$$= \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$$

בטור שאינו מתכנס בהחלט המצב שונה לגמרי.

<u>משפט (Riemann)</u>. יהי $\sum a_n$ טור שמתכנס בתנאי (ולא בהחלט). אז לכל מספר S, $-\infty \leq S \leq +\infty$ (כולל $\pm\infty$), אפשר לסדר מחדש את אברי הטור כך שיתקבל טור שסכומו הוא S. יתירה מכך, אפשר גם לסדר את הטור באופן שהטור שמתקבל לא מתכנס כלל (גם לא ל: $\pm\infty$).

הוכחה: כזכור הסקנו למעלה שאם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי ולא בהחלט אז $\sum p_n$ ו: $\sum q_n$ שניהם מתבדרים ל: $+\infty$. נחבר אברים $p_1 + p_2 + \cdots$ עד שנקבל ערך העולה על S. כלומר, יהי n_1 הטבעי הקטן ביותר כך ש: $p_1 + \cdots + p_{n_1} > S$, כאשר יתכן כמובן $n_1 = 1$. אז מתקיים

$$p_1+\cdots+p_{n_1-1} \leq S < p_1+\cdots+p_{n_1} \tag{1}$$

ומסמנים את אגף ימין של (1) ב: A_1. אז אגף שמאל של (1) שווה $A_1 - p_{n_1}$ ואי-השיויונות ב: (1) שקולים ל:

$$0 < A_1 - S \leq p_{n_1}. \tag{2}$$

עתה מחסירים מהמספר A_1 סכום

$$q_1 + q_2 + \cdots$$

עד שמתקבל מספר קטן מ: S. כלומר, יהי m_1 מספר טבעי כך ש:

$$\begin{aligned} A_1 - (q_1 + \cdots + q_{m_1}) &< S \\ &\leq A_1 - (q_1 + \cdots q_{m_1 - 1}) \end{aligned} \quad (3)$$

ומסמנים את אגף שמאל של (2) ב: A_2. אז אגף ימין של (3) הוא $A_2 + q_{m_1}$, ואי-השיויונות (3) שקולים ל:

$$.0 < S - A_2 \leq q_{m_1} \qquad (4)$$

עכשיו נוסיף ל: A_2 מחוברים $p_{n_1+1}+\cdots$ עד שמקבל מספר גדול מ: S, ויהי n_2 הטבעי הקטן ביותר עבורו זה קורה, כלומר

$$\begin{aligned}A_2+\ (\ p_{n_1+1}+\cdots+p_{n_2-1}) &\le S\\ <\ A_2+(p_{n_1+1}+\cdots+p_{n_2})&(5)\end{aligned}$$

אגף ימין של (5) מסומן A_3, אגף שמאל יוצא $A_3-p_{n_2}$, ו: A_3 מקיים

$$.0<A_3-S\le p_{n_2}$$

הבנייה נמשכת ונוצרת סדרה $\{A_n\}$, $n\ge 1$, כך שעבור n אי-זוגי $A_n>S$ (כלומר A_n מצד ימין של S) ועבור n זוגי $A_n\le S$ ו: A_n מצד שמאל.

כאשר A_n מצד ימין אנו מפחיתים ממנו את המספר המינימלי של המחוברים העוקבים הבאים מהסדרה $\{q_k\}$ כך שמתקבלת תוצאה משמאל ל: S (כולל S עצמו), ואם A_n מצד שמאל אנו מוסיפים לו את המספר המינימלי של המחוברים העוקבים הבאים מהסדרה $\{p_k\}$ כך שמתקבלת תוצאה מימין ל: S. כמו ב: (2) ו: (4), המינימליות בבנייה הזו גוררת ש:

$$|A_i - S| \leq q_{m_i} \text{ או } |A_i - S| \leq p_{n_i}.$$

מאחר ו: $p_n, q_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$, ומאחר ו: $n_i, m_i \to \infty$ כאשר $i \to \infty$, נובע ש:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = S.$$

אבל הסדרה $\{A_n\}$ היא טור עם סוגריים כדלקמן:

$$A_{2k} = (p_1 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1})$$
$$+(p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - (q_{m_1+1} + \dots + q_{m_2})$$
$$+ ... - (q_{n_{k-1}+1} + \dots + q_{m_k})$$

ו:

$$A_{2k+1} = (p_1 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1})$$
$$+(p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - (q_{m_1+1} + \dots + q_{m_2})$$
$$+ ... + (p_{n_k+1} + \dots + p_{n_{k+1}})$$

אלו מהווים סדרת סכומים חלקיים של טור עם סוגריים, וכאמור הם מתכנסים ל: S. בתוך כל

זוג סוגריים כל המחוברים הם בעלי אותו סימן. לכן, ממשפט קודם, אפשר להסיר את הסוגריים.

אבל אז אנו מקבלים סידור מחדש של הטור $\sum a_n$: האברים האי-שליליים מופיעים בסדרת ה p_k בעוד האברים השליליים מופיעים בסדרת ה: q_k. ואכן המחוברים p_k מופיעים בסימן חיובי ב: A_n בעוד q_k מופיעים בסימן שלילי. לכן כל מחובר a_n מופיע בערכו הנכון. יתירה מכך, כל אבר a_n מתאים לאבר אחד ויחיד מסדרת ה:p_k או ה:q_k, ולכן הוא יופיע אי פעם בסכומים החלקיים A_n עבור n מספיק גדול. זה מראה שאחרי הסרת הסוגריים מקבלים סידור מחדש של הטור המקורי, ומאחר וסכומו הוא S, זה מסיים את הוכחת הטענה.

באופן בסיסי זוהי הבנייה המוכיחה גם את הטענות האחרות במשפט. למשל, לקבלת סידור מחדש עבורו הטור מתבדר ל: $+\infty$, מתחילים מ: n_1 עבורו

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} > 1$$

ואחרי אברים אלו שמים את $-q_1$. אחר כך בוחרים $n_2 > n_1$ אשר מקיים

$$\begin{gathered}(p_1 + \cdots + p_{n_1}) - q_1 \\ +(p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_2}) > 2\end{gathered}$$

ואחרי המחוברים הללו שמים את $-q_2$, וכ"ו.

הטור הזה, אשר מהווה סידור מחדש של הטור המקורי, מתבדר לאינסוף. הוא סידור מחדש כי

כל אבר שלילי מיוצג ע"י q_l עבור איזשהו l טבעי, ולכן יופיע (בסימן הנכון) אחרי l בלוקים של מחוברי p. כל מחובר אי-שלילי a_n יופיע כי הוא מיוצג ע"י איזשהו p_k, ולכן יהיה כלול באחד, ורק אחד מהבלוקים (שוב, בסימן הנכון).

עוד נותר להבחין ש: $q_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$, ולכן האברים q_n אשר מופיעים בין הבלוקים של אברי p לא מקלקלים את ההתבדרות לאינסוף. בצורה דומה בונים סידור מחדש עבורו יש התבדרות ל: $-\infty$.

לסיום, באותה שיטה בונים סידור מחדש עם סוגריים עבורו הסכומים החלקיים מקפצים בין

הערכים +1,-2,+3,-4=,... (כלומר גדול מ: +1, קטן מ: -2 וכ"ו). כך מתקבל טור שאינו מתכנס אפילו בתנאי, וגם אינו מתבדר.

<u>דוגמא.</u> יודעים שהטור

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdot$$

מתכנס בתנאי. להערכת סכומו S נכתוב $S=S_3+r_3$, כאשר

$$S_3=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6},$$

ועל פי משפט לייבניץ $r_3<0$, ולכן $S<5/6$.

עכשיו נשנה את סדר האברים כך שיופיעו

בקבוצות של 2 חיוביים ואחריהם שלילי אחד:

$$(1 + 1/3 - 1/2) + (1/5 + 1/7 - 1/4)$$
$$+(1/9 + 1/11 - 1/6) + \cdots$$

הקבוצה ה: k היא מהצורה

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

והוא חיובי כי

$$.\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k} > 0,\ \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} > 0$$

לכן סכום הטור גדול מסכום הקבוצה

הראשונה $1 + 1/3 - 1/2 = 5/6$, ורואים

ששינוי הסדר הגדיל את ערך הסכום.

<u>תרגיל.</u> הוכח שהטור החדש אכן מתכנס. (רמז: הראה שסכום הקבוצה ה־kית חסום ע"י C/k^2 עבור איזשהו קבוע $C > 0$.)

מכפלת טורים

נתונים הטורים $\sum a_n$ ו: $\sum b_n$. נתבונן בטבלא

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
a_ib_1 & a_ib_2 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

ונסכם, למשל, לאורך אלכסונים:

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots$$

כאשר המחובר ה: kי הוא הסכום של האלכסון ה: k, והוא שווה ל:

$$.\sum_{i+j=k+1} a_ib_j = \sum_{i=1}^{k} a_ib_{k+1-i}$$

משפט. אם $\sum a_n = A$ ו: $\sum b_n = B$ מתכנסים בהחלט אז כל טור אשר מכיל את כל המחוברים a_ib_j, $i,j \geq 1$ בסדר כלשהו, מתכנס ל: AB.

הוכחה: נסדר את האברים $\{a_ib_j\}$ בסדר כלשהו ונסמן סדר זה ב:

$$\sum w_n = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

נסתכל על הסכום החלקי $w_1 + \cdots + w_n$ ונסמן

$m = \max\{i,j : a_ib_j = w_k, k = 1,2,...,n\}$.

כלומר m הוא האינדקס הגדול ביותר i או j אשר מופיע באחת המכפלות המגדירות את w_k, $1 \leq k \leq n$. אז מקבלים

$$|w_1| + \cdots + |w_n| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{m} |b_i|\right)$$

וברור שאגף ימין חסום ע"י המספר הממשי (סופי)

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|\right).$$

לכן הטור החיובי $\sum |w_n|$ חסום, ולכן מתכנס. זה אומר ש: $\sum w_n$ מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס.

עוד נראה שסכומו AB, מה שיסיים את ההוכחה. מאחר והטור $\sum w_n$ מתכנס בהחלט מותר לסדר את אבריו בכל סדר שהוא בלי

לשנות את ערכו. נבחר סדור אשר מסכם את המחוברים a_ib_j בבלוקים, כאשר בבלוק ה־n־י מסכמים את כל המחוברים a_ib_j עבורם מתקיים

$$\max\{i,j\}=n\,.$$

אז הבלוק הראשון מכיל רק את a_1b_1, השני מכיל את a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, השלישי כולל את המחוברים

$$a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1,$$

וכ"ו. זה מגדיר סידור w'_n של האברים a_ib_j כך ש:

$$(w'_1; w'_2, w'_3, w'_4; w'_5, w'_6, w'_7, w'_8, w'_9, \ldots) = (a_1b_1; a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1; a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b; \ldots)$$

יוצא שסכום n^2 המחוברים הראשונים הוא סכום כל האברים a_ib_j עבורם $1 \leq i, j \leq n$, ולכן

$$\sum_{k=1}^{n^2} w'_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \to A \cdot B$$

כאשר $n \to \infty$. לכן סכום הטור $\sum w'_n$ הוא AB, ומאחר והסכום אינו תלוי בסדר, נובע שזהו גם סכום הטור $\sum w_n$.

<u>הערה.</u> במקרים מסוימים, כאשר יש התכנסות בהחלט, דרך נוחה לסכם את מכפלת הטור היא ע"י בחירת הסידור לאורך אלכסונים, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ כאשר

$$d_n = \sum_{i+j=n+1} a_ib_j = \sum_{i=1}^{n} a_ib_{n+1-i},$$

כלומר

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n+1} a_i b_j\right)$$

<u>דוגמא.</u> נסכם בצורה הזו את המכפלה

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)$$

עבור $n \geq 0$ אנו מסכמים

$$\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

$$= \frac{(x+y)^n}{n!}$$

צריכים לסכם על כל הערכים $n = 0, 1, 2, ...$

ולכן מכפלת הטורים היא

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}\ .$$

מאחר ולכל c ממשי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}$ מתכנס, יוצא מהחישוב לעיל שמכפלת הטורים מתכנסת בהחלט.

<u>דוגמא.</u> הדוגמא הנוכחית מראה שללא התכנסות בהחלט מסקנת המשפט האחרון אינה בהכרח נכונה. יהיו

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

כך ששני הטורים שווים לטור

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots$$

אז

$$\begin{aligned} d_n &= a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \\ = \quad & (-1)^n \left[\tfrac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} \right. \\ & \left. + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}} \right] \end{aligned}$$

ישנם n מחוברים בסוגריים האחרונים, וכל אחד מהם גדול מ: $\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}$. לכן הסכום בסוגריים גדול מ: $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, ונובע שהטור $\sum_n d_n$ אינו מתכנס.