תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 11

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.

נזכיר שכאשר מדובר בוקטור גאוסי, החזאי הכללי תמיד לינארי.

(א) על פי הנוסחה: $\widehat{X_1} = \frac{\sigma_{X_1,X_4}}{\sigma^2_{X_4}} X_4 = \boxed{\frac{X_4}{4}}$.

(ב) במקרה הזה $\widehat{X_1} = \alpha X_3 + \beta X_4$. כדי למצוא את המקדמים נשים לב כי:

$$E(\widehat{X_1} X_3) = E\big(X_3 E(X_1|X_3, X_4)\big) = \\ E\big(E(X_1 X_3|X_3, X_4)\big) = E(X_1 X_3) = 0.$$

לכן:

$$0 = \alpha E(X_3^2) + \beta E(X_3 X_4) = \alpha.$$

לכן $\widehat{X_1} = \beta X_4$ וניתן להשתמש בנוסחה עבור החזאי הלינארי. התשובה תהיה כמובן זהה לזו של סעיף א׳: $\widehat{X_1} = \boxed{\frac{X_4}{4}}$. הסיבה לכך היא ש- X_3 ו- X_1 בלתי מתואמים ולכן גם בלתי תלוים.

(ג) אני משאיר לכם לבדוק שעבור הוקטור הגאוסיה הזה מתקיים (מה שצריך לבדוק ולא נכון כללית זה השוויון שמסומן ב-***):

$$f_{X_1,X_3|X_4}(x_1, x_3|x_4) = \frac{f_{X_1,X_3,X_4}(x_1, x_3, x_4)}{f_{X_4}(x_4)} = \\ = \frac{f_{X_1,X_4|X_3}(x_1, x_4|x_3) f_{X_3}(x_3)}{f_{X_4}(x_4)} = *** \\ = \frac{f_{X_1,X_4}(x_1, x_4) f_{X_3}(x_3)}{f_{X_4}(x_4)} = f_{X_1|X_4}(x_1|x_4) f_{X_3}(x_3).$$

מכאן:

$$E(X_1 X_3|X_4 = x_4) = \int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_3 f_{X_1,X_3|X_4}(x_1, x_3|x_4) dx_1 dx_3 = \\ = E(X_1|X_4) E(X_3) = 0.$$

__תרגיל 2.__

יש למצוא תחילה את $p_{Z|W}(z|w)$. המשתנה W יכול לקבל את הערכים $w=1,2,\dots$. כאשר $w \geq 2$ המצב מאוד פשוט:

$$p_{Z|W}(z|w) = \begin{cases} 1 & z=w \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כי W יכול לקבל ערך w כזה רק אם מלכתחילה Z היה שווה ל- W. לעומת זאת, עבור $w=1$, $P(Z=0|W=1) = \frac{P(W=1|Z=0)P(Z=0)}{P(W=1)} = \frac{1\,\lambda^0/0!}{\lambda^0/0!+\lambda^1/1!}$ ולכן

$$p_{Z|W}(z|1) = \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda} & z=0 \\ \frac{\lambda}{1+\lambda} & z=1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad .$$

מזה נובע ש-

$$\widehat{Z} = E(Z|W) = \boxed{\begin{cases} \frac{\lambda}{1+\lambda} & W=1 \\ W & W=2,3,\dots \end{cases}}$$

(W רק מקבל את הערכים $1,2,\dots$). לגבי תוחלת השגיאה הריבועית, באופן כללי:

$$\begin{aligned} E(Z-E(Z|W))^2 &= EZ^2 - 2E[E(Z|W)Z] + E\left(E(Z|W)^2\right) \\ &= EZ^2 - 2E[E(E(Z|W)Z|W)] + E\left(E(Z|W)^2\right) \\ &= EZ^2 - E\left(E(Z|W)^2\right). \end{aligned}$$

כאן

$$E\left(E(Z|W)^2\right) = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 \overbrace{e^{-\lambda}(1+\lambda)}^{P(W=1)} + \underbrace{\sum_{w=2}^{\infty} w^2\, \overbrace{e^{-\lambda}\frac{\lambda^w}{w!}}^{P(W=w)}}_{EZ^2-\lambda e^{-\lambda}} = EZ^2 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1+\lambda}$$

ולכן $E(Z-E(Z|W))^2 = \boxed{\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1+\lambda}}$.

__תרגיל 3.__

נתבונן בטרנספורמציה לינארית $(X,Y) \to (X,Z)$. על פי הנוסחה:

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) &= \frac{1}{\left|\frac{\partial(X,Z)}{\partial(X,Y)}\right|} f_{X,Y}(x,z-x) = f_{X,Y}(x,z-x) = \\ &= f_X(x) f_Y(z-x) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-(z-x)^2/4}, \quad x \in (0,2),\ z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

לפיכך:

$$f_Z(z) = \int_0^2 \frac{1}{4\sqrt{\pi}} e^{-(z-x)^2/4} dx, \quad z \in \mathbb{R},$$

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{e^{-(z-x)^2/4}}{\int_0^2 e^{-(z-x)^2/4} dx}, \quad x \in (0,2), \ z \in \mathbb{R},$$

$$E(X|Z=z) = \int_0^2 x f_{X|Z}(x|z) dx, \quad z \in \mathbb{R}.$$

לא מקבלים כאן נוסחה יפה במיוחד.

<u>תרגיל 4</u>.

לפי נוסחת הטרנספורמציה:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{\left|\frac{\partial(R,\Theta)}{\partial(X,Y)}\right|} f_{X,Y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r}{4\pi} e^{-r^2\cos^2\theta/8} e^{-(r\sin\theta-2)^2/2}.$$

<u>תרגיל 5</u>.

(א)

$$\begin{aligned} f_S(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f_Y(z-x) dx \\ &= \frac{1}{6}\int_{\max\{0,z-3\}}^{\min\{2,z\}} dx = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad z < 0, \\ z & \text{if} \quad 0 \le z < 2, \\ 2 & \text{if} \quad 2 \le z 3, \\ 5-z & \text{if} \quad 3 \le z \le 5, \\ 0 & \text{if} \quad z > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

כמו כן,

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X \le z)P(Y \le z) = \begin{cases} 0 \text{ if } \ z < 0, \\ \frac{z^2}{6} \text{ if } \ 0 \le z < 2, \\ \frac{z}{3} \text{ if } \ 2 \le z < 3, \\ 1 \text{ if } \ z \ge 3. \end{cases}$$

ב)

לפי נוסחת הטרנספורמציה:

$$f_{X,V}(x,v) = \frac{1}{\left|\frac{\partial(X,V)}{\partial(X,Y)}\right|} f_{X,Y}(x, x-2v) = 2f_{X,Y}(x,x-2v) =$$
$$= 1/3, \quad x \in (0,2),\ x - 2v \in (0,3).$$

לכן, $v \in (-3/2, 1)$ ו-:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,V}(x,v)dv = \frac{1}{3}\int_{\max\{0,2v\}}^{\min\{2,3+2v\}} dx =$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ if } \ v < -3/2, \\ \frac{3+2v}{3} \text{ if } \ -3/2 \le v < -1/2, \\ \frac{2}{3} \text{ if } \ -1/2 \le v < 0, \\ \frac{2-2v}{3} \text{ if } \ 0 \le v < 1, \\ 0 \text{ if } \ v > 1. \end{cases}$$

<u>תרגיל 7</u>.

התרגיל מבוטל.

<u>תרגיל 8</u>.

נסצן: $U = E(Z|X,Y)$. לפי הנתון: $U = \alpha X + \beta Y + \gamma$. לכן:

$$E(U) = E\big(E(Z|X,Y)\big) = E(Z) = 0 \Rightarrow \gamma = 0.$$

$$E(UX) = E(XE(Z|X,Y)) = E(E(XZ|X,Y)) = E(XZ)$$
$$\Rightarrow \sigma_{XZ} = \alpha\sigma_{XX}^2 + \beta\sigma_{XY}$$

$$E(UY) = E(YE(Z|X,Y)) = E(E(YZ|X,Y)) = E(YZ)$$
$$\Rightarrow \sigma_{YZ} = \alpha\sigma_{XY} + \beta\sigma_{YY}^2$$

משתי המשוואות האחרונות ניתן לחלץ את α ו- β.

<u>תרגיל 9</u>.

(א)

נתבונן בטרנספורמציה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ אשר מעבירה נקודה $M=(X_1,X_2,X_3)$ לנקודה $T(M)=(X,Y,Z)$ הנתונה על ידי הנוסחאות הבאות:

$$X=X_1,\quad Y=X_2,\quad Z=\frac{1}{3}\left(X_1+X_2+X_3\right)$$

לפי נוסחת הטרנספורמציה נקבל עבור כל נקודה $M=(x,y,z)\in D$,

$$f_{X,Y,Z}(M)=\frac{1}{\left|\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(X_1,X_2,X_3)}\right|\left(T^{-1}(M)\right)}f_{X_1,X_2,X_3}\big(T^{-1}(M)\big)=3,$$

כאשר התחום D מוגדר על ידי:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x\in[0,1],y\in[0,1],3z-x-y\in[0,1]\},$$

כלומר:

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x\in[0,1],y\in[0,1],3z-1\le x+y\le 3z\}.$$

בעזרת ציור של התחום D מגיעים למסקנה כי:

$$f_Z(z)=\int\int_{(x,y,z)\in D}3dxdy=\begin{cases}0 & \text{if}\quad z<0,\\ \frac{27z^2}{2} & \text{if}\quad 0\le z<1/3,\\ 3-3(3z-1)^2 & \text{if}\quad 1/3\le z<2/3,\\ \frac{27(1-z)^2}{2} & \text{if}\quad \frac{2}{3}\le z\le 1,\\ 0 & \text{if}\quad z>1.\end{cases}$$

(ב)

נסמן: $Z=g(Y)$, $H=h^*(X)$. כלומר, $H=E(Z|X)$. אז:

$$\begin{aligned}E(Z-\alpha H)^2 &= E\big(E(Z^2-2\alpha ZH+H^2|X)\big)=\\ &= E\big(E(Z^2-2\alpha ZH+H^2|X)\big)=\\ &= E(Z^2)+(1-2\alpha)E(H^2).\end{aligned}$$