אלגברה 104167

תאריך: 22/12/2014

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: גיליון מרחבים וקטורים

שם המתרגל: גלית מזרחי

<u>מרחבים וקטוריים:</u>

פרק 3 תרגיל 3

3. קבע עבור המקרים הבאים האם W תת מרחב של V :

א) $V = R^3$ ו- $W = R^2$.

ב) $V = \left\{ f \middle| f : R \to R \right\}$ מרחב הפונקציות הממשיות.

(i) W – כל הפונקציות הממשיות המקיימות $f(4) = f(1)$.

(ii) W – כל הפונקציות הממשיות הזוגיות כלומר המקיימות $f(x) = f(-x)$.

(iii) W – כל הפונקציות הממשיות המקיימות $f(7) = 3$.

ג) V הוא מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2.

.i $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + b = 0 \quad , \quad a, b \in R \right\}$

.ii $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1+b & a \end{pmatrix} \middle| a + b = 0 \quad , \quad a, b \in R \right\}$

.iii $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| (a+b)^2 + (a-b)^2 = 0 \quad , \quad a, b \in R \right\}$

.iv $W = \{ A \in V \mid AP = 3P \}$ כאשר P היא מטריצה ממשית מסדר 2×2 נתונה.

ד) V מרחב הפולינומים ללא הגבלת מעלה, מעל שדה כלשהו.

(i) W – אוסף כל הפולינומים עם חזקות זוגיות בלבד.

(ii) W אוסף כל הפולינומים עם חזקות אי-זוגיות בלבד.

פרק 3 תרגיל 7:

7. יהי $V = R^2$ כל הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים ויהי $K = R$ השדה הממשי. נגדיר שתי פעולות ב- $V = R^2$:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2)$$
$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1, \alpha y)$$

לכל $\alpha \in R$ סקלר. הוכח כי קבוצה זו עם שתי הפעולות שהוגדרו מהווה מרחב וקטורי מעל השדה הממשי. מהו איבר ה- 0? מהו הנגדי של כל וקטור (x, y) ?

פרק 3 תרגיל 10:

10. יהי $V \neq \{0\}$ מרחב וקטורי ויהי $U \neq \{0\}$ תת מרחב של V השונה מ- V.

יהי $W = \{ w \in V \setminus U \} \cup \{0\}$. האם W הוא תת מרחב של V? בחר אחת מהתשובות הבאות:

א. W תמיד תת מרחב של V – הוכח.

ב. W לפעמים כן ת"מ של V ולפעמים לא – תן דוגמא אחת שכן ואחת שלא.

ג. W לעולם לא ת"מ של V – הוכח.

פרק 13 עמוד 2 תרגיל 5ג

<u>שאלה מספר 5</u>.

לפניך שלוש טענות. עבור כל אחת מהן עליך לקבוע אם היא נכונה או לא. אם לדעתך הטענה נכונה, יש להוכיח אותה. אם לדעתך הטענה אינה נכונה, עליך להביא דוגמא נגדית.

ג. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה Z_p כאשר p ראשוני, אז כל תת קבוצה לא ריקה של V הסגורה לחיבור היא תת מרחב של V.

פרק 13 עמוד 10 תרגיל 5

X
דרך
אחרת הוכחה

<u>שאלה מספר 5</u>.

א. לפניך טענה. עליך לקבוע אם הטענה נכונה או לא. אם לדעתך הטענה נכונה, עליך להוכיח אותה. אם לדעתך הטענה אינה נכונה, עליך להביא דוגמא נגדית.

יהא V מרחב וקטורי ו- V_3 , V_2 , V_1 שלושה תתי מרחבים של V שאף אחד מהם הוא לא V עצמו ולא המרחב $\{0\}$.

נתון כי $V = V_1 + V_2 + V_3$ וכי $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$. אז כל איבר ב- V ניתן להצגה באופן יחיד בצורה $v_1 + v_2 + v_3$ כאשר $v_3 \in V_3$, $v_2 \in V_2$, $v_1 \in V_1$.

ב. יהיו $U_1, U_2, \ldots, U_k$ תתי מרחבים של מרחב וקטורי V. הוכח כי החיתוך $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$ אף הוא תת מרחב של V. יש להוכיח זאת ישירות (כלומר: ללא שימוש במשפט שחיתוך של שני תתי מרחבים הוא תת מרחב).

פרק 3 תרגיל 3

קבע עבור המקרים הבאים האם W תת מרחב של V:

(א) $V=R^3$ ו- $W=R^2$ לא

לא תת מרחב - W אפילו לא מוכל ב-V:

(ב) $V=\{f|f:R\to R\}$ מרחב הפונקציות הממשיות כן

(i) W כל הפונקציות הממשיות המקיימות $f(4)=f(1)$

$w_1,w_2\in W$

$0\in W$: $f(x)=0$ מקיים $f(1)=f(4)$

$w_1+\alpha w_2\in W$: $f_1(4)+\alpha f_2(4)\in W$

$f_1(1)+\alpha f_2(1)\in W$

(ii) W- כל הפונקציות הזוגיות המקיימות $f(x)=f(-x)$ כן

$0\in W$, $f(x)=0$ מקיים $f(0)=f(-0)$.

$W\ni w_1=f_1(x_1)+\alpha f_2(-x_2)=w_2\in W$

$W\ni w_1=f_1(-x_1)+\alpha f_2(-x_2)=w_2\in W$

(iii) W- כל הפונקציות הממשיות המקיימות $f(7)=3$ לא

$0\notin W$ $f(7)\neq 0$.

$f_1(x)=x-4$
$f_2(x)=3$

אין סגירות בחיבור - $f_1(x)+f_2(x)=x-4+3=x-1$

$f(7)=7-1=6\neq 3$

(ג) V הנו מרחב המטריצות הממשיות 2x2

(i) $W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \middle| a+b=0,\ a,b\in R\right\}$ כן.

המטריצה מצורה $\begin{pmatrix}a&-a\\c&d\end{pmatrix}$

$0\in W$ v $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$ $(c=d=a=-a=0)$

$$\begin{pmatrix}a&-a\\c&d\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}e&-e\\f&g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\alpha e&-a-\alpha e\\c+\alpha f&d+\alpha g\end{pmatrix}\in W$$

v מצורה $\begin{pmatrix}a&-a\\c&d\end{pmatrix}$.

3ג. V הוא מרחב המטריצות הממשיות מסדר $2X2$.

(ii) $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 1+b & a\end{pmatrix} \middle| a+b=0\ ,\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ לא

המטריצה מצורה $\begin{pmatrix} a & -a\\ 1-a & a\end{pmatrix}$

$0\in V$ ו $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in W$ $(c=d=a=-a=0)$

$$\begin{pmatrix} a & -a\\ 1-a & a\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} c & -c\\ 1-c & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\alpha c & -a-\alpha c\\ \underbrace{1-a+\alpha(1-c)}_{1-a+\alpha-c\alpha} & a+\alpha c\end{pmatrix}$$

$$1-\alpha=1-a-\alpha c\neq 1-a+\alpha-c\alpha$$

אין סגירות בחיבור

(iii) $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \middle| (a+b)^2+(a-b)^2=0\ \ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ כן.

$a^2=-b^2$ מפני הממשיים רק 0 מקיים את התנאי.

לכן הפונקציה שמקיימת את התנאי היא $W\ni\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$.W_1+\alpha W_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

(iv) $W=\{A\in V \mid AP=3P\}$ כאשר P הוא מטריצה ממשית מסדר $2X2$.

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3e & 3f\\ 3g & 3h\end{pmatrix}$$

$ae+bg=3e$

$af+bh=3f$

$ce+dg=3g$

$cf+dh=3h$

המטריצה היחידה שמקיימת את התנאי P ממשית מסדר $2X2$ היא $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$

כלומר מטריצת האפס לא שייכת ל-W ו-W לא סגורה לחיבור ולא לכפל בסקלר.

$$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}\notin W$$

פרק 3 תרגיל 3

3. V מרחב הפולינומים ללא הגבלת מעלה מעל שדה כלשהו.

(i) W אוסף כל הפולינומים עם חזקות זוגיות בלבד. כן.

- $W \neq \emptyset$ פולינום האפס הוא ממעלה מינוס אינסוף שהיא גם זוגית וגם אי זוגית.
- $w_1 + \alpha w_2 \in W$ (חיבור לא משנה את מעלת הפולינום וגם לא כפל בסקלר ולכן אם ניקח שני פולינומים עם חזקות זוגיות בלבד, נכפול אותם בסקלרים ונחבר אותם נקבל עדיין פולינום ממעלה זוגית - פולינום ממעלה 0 היא זוגית.

(ii) W - אוסף כל הפולינומים עם חזקות אי-זוגיות בלבד.

- $W \neq \emptyset$ פולינום האפס הוא ממעלה מינוס אינסוף שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית.
- $w_1 + \alpha w_2 \in W$: (אותו הסבר כמו חזקות זוגיות).

* הערה בהבנה של הגדרת השאלה-

אם הכוונה הייתה של הציונים בפונקציה הם זוגיים/אי זוגיים התשובה הכן כמו שרשמתי,

אם הכוונה הייתה לפולינומים שהחזקה הכי גבוהה בהם היא זוגית/אי-זוגית אז שתי התשובות לא נכונות כי תמיד נוכל לייצר מהן פונקציה זוגית → אי זוגית

אי זוגית → זוגית

פרק 3 תרגיל 7

יהי $V=\mathbb{R}^2$ כל הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים ויהי $k\in\mathbb{R}$ הסקלר הממשי. נגדיר שתי פעולות מ- $V=\mathbb{R}^2$

$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,y_1+y_2)$

$a\boxdot(x,y)=(ax-a+1,ay)$

(1) סגירות בחיבור - $(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)\stackrel{?}{=}(x_1+x_2-1,y_1+y_2)\in V$

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\stackrel{?}{=}(x_2,y_2)+(x_1,y_1)$ (2)

$(x_1+x_2-1,y_1+y_2)=(x_2+x_1-1,y_2+y_1)$ בגלל אסוצי' החיבור ב-$\mathbb{R}$ וקומי' החיבור

$(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))\stackrel{?}{=}((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)$ (3)

$(x_1,y_1)+(x_2+x_3-1,y_2+y_3)\stackrel{?}{=}(x_1+x_2-1,y_1+y_2)+(x_3,y_3)$

$(x_1+x_2+x_3-2,y_1+y_2+y_3)\stackrel{\checkmark}{=}(x_1+x_2+x_3-2,y_1+y_2+y_3)$

בגלל אסוצי' וקומי' החיבור ב-$\mathbb{R}$

$x\oplus "0"=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1,y_1)\Rightarrow x_1+x_2-1=x_1\rightarrow x_2=1$ (4)

$y_1+y_2=y_1\rightarrow y_2=0$

איבר האפס: $"0"=(1,0)$

$a+"-a"=0:(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(1,0)\Rightarrow x_1+x_2-1=1\rightarrow x_2=2-x_1$ (5)

$y_1+y_2=0\rightarrow y_2=-y_1$

נגדי: $"-a"=(2-x_1,-y_1)$

(6) סגירות בכפל בסקלר $\alpha\boxdot(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\alpha y)$

$(\alpha\beta)(x,y)=\alpha(\beta\cdot(x,y))$ (7)

$(\alpha\beta)(x,y)=(\alpha\cdot\beta x-\alpha\beta+1,\alpha\beta y)=$

$\alpha(\beta(x,y))=\alpha(\beta x-\beta+1,\beta y)=(\alpha\beta x-\alpha\beta+\alpha-\alpha+1,\alpha\beta y)$

$"1"\cdot(x,y)=(x,y)$ (8)

$\alpha(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\alpha y)=(x,y)$

$\alpha=1$

$(\alpha+\beta)\cdot(x_1,y_1)\stackrel{?}{=}\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_1,y_1)$ (9)

$((\alpha+\beta)x_1-(\alpha+\beta)+1,(\alpha+\beta)y_1)\stackrel{?}{=}(\alpha x_1-\alpha+1,\alpha y_1)+(\beta x_1-\beta+1,\beta y_2)$

$=(\alpha x_1-\alpha+1+\beta x_1-\beta+1-1,\alpha y_1+\beta y_2)$

← המשך (10)
בדף הבא!

פרק 3 תרגיל 7 - המשך:

(10) $\alpha(x_1,y_1)+\alpha(x_2,y_2)=\alpha[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]$

אגף שמאל: $(\alpha x_1-\alpha+1,\alpha y_1)+(\alpha x_2-\alpha+1,\alpha y_2)=(\alpha x_1-\alpha+1+\alpha x_2-\alpha+1-1,\alpha y_1+\alpha y_2)$

אגף ימין: $(x_1+x_2-1,y_1+y_2)=(\alpha\cdot x_1+\alpha x_2-\alpha-\alpha+1,\alpha(y_1+y_2))$

פרק 3 תרגיל 10

יהי $V\neq\{0\}$ מרחב וקטורי ויהי $U\neq\{0\}$ תת מרחב של V השונה מ-V. יהי $W=\{w\in V\setminus U\}\cup\{0\}$. האם W הוא תת מרחב של V?

בחר אחת מהתשובות: תמיד/לפעמים/לעולם לא.

- לפי משפט שלמדנו בתרגול 'איחוד תתי מרחבים הוא לעולם לא מ"ו פרט למקרה שאחד מוכל בשני'.

נניח בשלילה ש-W הינו תת מרחב וקטורי, נתון לנו ש-U הוא תת מרחב וקטורי: $W\cup U=(V\setminus U)\cup(U)\cup\{0\}=V$

לפי המשפט V לעולם לא תהיה מרחב וקטורי, וזוהי סתירה לנתון ש-V הינו מרחב וקטורי!

כלומר יש סתירה בהנחה שלנו. ההנחה הייתה ש-W הוא תת-מרחב כלומר W לעולם לא תהיה תת מרחב.

פרק 13 עמוד 2 תרגיל 7 ג'

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{Z}_p$ כאשר p ראשוני. אז כל תת קבוצה לא ריקה של V הסגורה בחיבור היא (נכונית):

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a+1 & 4a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 2b \\ 3b+1 & 4b \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אין סגירות בכפל מסקלר

$$\begin{pmatrix} a & 2a \\ 3a+1 & 4a \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} b & 2b \\ 3b+1 & 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+cb & 2a+2bc \\ 3a+1+(3b+1)c & 4a+4bc \end{pmatrix}$$

$$1+3a+3bc+c\neq 3(a+cb)+1=3a+3bc+1$$

פרק B עמוד 2 תרגיל 5ג':

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה Z_p כאשר p ראשוני, אז כל תת-קבוצה לא ריקה של V הסגורה לחיבור היא מהכרח תת מרחב.

$V=R^{2\times2}$, מעל השדה Z_3

יהי W תת הקבוצה של V כך ש- $W=R_+^{2\times2}$, כלומר כל המטריצות מסדר 2×2 בעלות איברים חיוביים.

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in R^+\right\}$$

$$Z_2=\{0,1\}$$

כיוון שכל $\alpha\in Z_2$ אז: $\alpha=0,1$

ב-W יש סגירות לחיבור, שכן חיבור של שני מספרים חיוביים $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ יתן מספר חיובי.

אך W אינה תת"מ של V שכן אין סגירות לכפל בסקלרים

כי $\alpha=0$: $\alpha\in Z_2$; $\underset{\alpha=0}{\alpha}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\notin R_+^{2\times2}$

כלומר הראיתי שקיימת תת קבוצה של V מעל Z_p כאשר p ראשוני אשר מקיימת סגירות לחיבור אך לא כפל בסקלר ולכן אינה תת"מ.