קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 9

תאריך הגשה: יום שלישי, 24/6/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

הראו כי אם $P(x)$ פולינום לא קבוע אז מספר הפתרונות של $\sin x = P(x)$ הוא סופי.

נשים לב כי מאחר ו- $P(x)$ פולינום, מתקיים: $\lim_{x\to-\infty}|f(x)| = \lim_{x\to\infty}|f(x)| = \infty$, ולכן קיים $K>0$ כך שלכל $x \notin [-K,K]$ מתקיים $|f(x)|>1$, ולכן כל הפתרונות של $\sin x = P(x)$ חייבים להתקיים בתוך הקטע $[-K,K]$.

נסמן $f(x) = \sin x - P(x)$, ונסמן ב- m את מעלת $P(x)$. מתקיים ש- f גזירה ∞ פעמים, ובפרט $4m$ פעמים, וגם: $f^{(4m)}(x) = \sin^{(4m)}(x) = \sin x$. $\sin x$ מתאפסת מספר סופי של פעמים בקטע $[-K,K]$ (לכל היותר $\frac{2K}{\pi}+1$ פעמים).

נסמן ב- A את מספר השורשים של $\sin x$ ב- $[-K,K]$, אז ממשפט רול (המופעל בדרך השלילה $4m$ פעמים) נקבל כי ל- f יש לכל היותר $A+4m$ שורשים ב- $[-K,K]$, כלומר למשוואה יש לכל היותר $A+4m$ פתרונות בקטע זה, ולכן זה מספר הפתרונות המירבי האפשרי, ובפרט למשוואה יש מספר סופי של פתרונות.

שאלה 2:

הוכיחו את הגרסה המוכללת של אי-שוויון ברנולי:

א. עבור $\alpha > 1$ או $\alpha < 0$, ולכל $x > -1$, מתקיים: $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$.

נגדיר $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$. f גזירה, מקיימת $f(0) = 0$, ומתקיים:
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$.

נטפל תחילה במקרה $\alpha > 1$: במקרה זה נקבל עבור $x \ge 0$ כי $f'(x) \ge 0$ (כי $(1+x)^{\alpha-1} \ge 1$), ועבור $-1 < x < 0$ נקבל $f'(x) < 0$, ולכן 0 היא נקודת מינימום גלובלי של f, ולכן $f(x) \ge 0$ לכל x וסיימנו. במקרה $\alpha < 0$ נקבל כי $(1+x)^{\alpha-1} \le 1$ ל- $x \ge 0$, ולכן שוב $f'(x) \ge 0$ ל- $x \ge 0$, וגם $f'(x) < 0$ ל- $-1 < x < 0$, ושוב כמו מקודם נסיים.

ב. עבור $0 < \alpha < 1$, ולכל $x > -1$, מתקיים: $(1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$.

ניתן לחשב בצורה מפורשת כמו בסעיף א, וניתן גם לשים לב כי אם $x > -1$ ו- $0 < \alpha < 1$, אז $\alpha x > -1$ ו- $\frac{1}{\alpha} > 1$, ולכן מסעיף א׳ נקבל כי $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \ge 1 + \frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha x) = 1 + x$, וע״י העלאה בחזקת α נקבל את הדרוש.

שאלה 3:

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים: $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

נגדיר $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. f גזירה, מקיימת $f(0) = 0$, ו- $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{3x^2}{6}$. עבור $f'(x)$ נשים

לב כי $f'(0) = 0$, f' גזירה, ו- $f''(x) = -\sin x + x$, ולכן $f''(x) > 0$ ל- $x > 0$, ולכן f' עולה ממש ב- $[0,\infty)$, ויחד עם $f'(0) = 0$ נקבל כי $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$, כלומר f עולה ממש ב- $[0,\infty)$, ולכן $f(x) > f(0) = 0$ לכל $x > 0$.

ב. הוכיחו כי לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים: $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$.

נגדיר $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$. f גזירה בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ומקיימת $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ו- $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. כדי לקבוע את סימן f' מספיק להסתכל על המונה: נסמן $g(x) = x\cos x - \sin x$, אז g גזירה, $g(0) = 0$, ו- $g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$, כלומר $g'(x) < 0$ ב- $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, לכן g יורדת בקטע זה, ולכן לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $g(x) < g(0) = 0$. מכאן נובע כי $f' < 0$ ב- $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ולכן f יורדת ממש בקטע, כלומר $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, וסיימנו.

שאלה 4:

א. הוכיחו כי למשוואה $x = \cos x$ קיים פיתרון יחיד x_0, וכי $x_0 \in (0,1)$.

נגדיר $f(x) = x - \cos x$. מתקיים $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, לכן מרציפות f ב- $[0,1]$ ומשפט ערה״ב נקבל כי קיים לפחות שורש אחד x_0 ל- f ב- $(0,1)$. בנוסף, $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, ולמעשה $f'(x) > 0$ פרט לנקודות מהצורה $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, ולכן, מרציפות, f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ (כי הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת הן מבודדות, ובכל שאר הנקודות הנגזרת חיובית ממש), ולכן חח״ע, ולכן קיים לה לכל היותר שורש אחד, ולכן השורש שמצאנו בחלק הראשון הוא היחיד של f.

ב. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר $a_1 = \cos\alpha$, ולכל $n \geq 1$ נגדיר: $a_{n+1} = \cos a_n$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

הדרכה: השתמשו במשפטי גזירות כדי להעריך את $|a_n - x_0|$.

ראשית נשים לב כי מהגדרת הסדרה מתקיים כי לכל n , $a_n \in [-1,1]$, ומכיוון ש- $[-1,1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, נובע כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n \in (0,1]$, ולכן לכל $n \geq 3$ מתקיים $a_n \in (0,1)$.

אם קיים N כך ש- $a_N = x_0$, אז מכיוון ש- x_0 מקיים $\cos x_0 = x_0$, מתקיים כי לכל $n \geq N$, $a_n = x_0$, כלומר הסדרה קבועה החל מהמקום ה- N-י, ובפרט מתכנסת ל- x_0. נניח אם כן כי לכל n, $a_n \neq x_0$.

$\cos x$ רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$, ובפרט בכל קטע סגור, ולכן ממשפט לגרנז׳, לכל n קיים c_n הנמצא בין x_0 ל- a_n כך ש- $\frac{|a_{n+1} - x_0|}{|a_n - x_0|} = \frac{|\cos a_n - \cos x_0|}{|a_n - x_0|} = |(\cos c_n)'|$, כאשר $|(\cos c_n)'| = |\sin c_n|$. מכיוון שגם x_0 וגם a_n (ל- $n \geq 3$) נמצאים ב- $(0,1)$, גם $c_n \in (0,1)$, ומונוטוניות $\sin x$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ נקבל כי $\sin c_n \leq \sin 1 < 1$ לכל $n \geq 3$. נסמן $b_n = |a_n - x_0|$, אז קיבלנו כי $\frac{b_{n+1}}{b_n} = |\sin c_n| \leq \sin 1 < 1$, ולכן ממבחן המנה נקבל כי $b_n \to 0$, כלומר $a_n \to x_0$, כנדרש (שימו לב כי לא הנחנו ש- $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנסת, עצם העובדה כי הסדרה b_n מקיימת $0 \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} < q < 1$ מספיקה כדי שינבע ש- $b_n \to 0$).

שאלה 5 :

תהי $f\,:[-1,1]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות וגזירה פעמיים ב- $(-1,1)$, המקיימת את התכונות הבאות:

- $f(1)=1$.
- $f(x)\le 2x^2-1$.
- לפונקציה יש נקודת קיצון בקטע $(-1,0)$.

הראו כי קיימת נקודה $c\in(-1,1)$ המקיימת $f''(c)\ge 1$.

הדרכה: קבלו הערכה על $f(0)$ והפעילו משפטי גזירות על קטעים משני צידי 0.

התכונה השניה נובע כי $f(0)\le -1$, ולכן ממשפט לגרנז׳ על הקטע $[0,1]$ נקבל שקיימת נקודה $c_1\in(0,1)$ כך ש- $f'(c_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\ge 2$. מהתכונה השלישית ומשפט פרמה נובע כי קיימת $c_2\in(-1,0)$ כך ש- $f'(c_2)=0$, ולכן ממשפט לגרנז׳ עבור f' והקטע $[c_2,c_1]$ נקבל שקיימת $c\in(c_2,c_1)\subset(-1,1)$ כך ש- $f''(c)=\frac{f'(c_1)-f'(c_2)}{c_1-c_2}\ge\frac{2-0}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1$.

שאלה 6 :

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$\cos x>0$ בסביבה של 0, לכן נוכל לרשום : $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\cos x^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}$. שימוש בלופיטל עבור החזקה (זהו גבול מהצורה " $\frac{0}{0}$ ") נותן כי החזקה שואפת ל- $\frac{\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{2x}=-\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\to-\frac{1}{2}$, לכן מרציפות e^t נקבל כי הגבול המקורי הוא $e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

ב. $\lim_{x\to 0^+}(\ln x+\cot x)$.

$\ln x+\cot x=\ln x+\ln e^{\cot x}=\ln xe^{\cot x}=\ln\frac{e^{\cot x}}{\frac{1}{x}}$. שימוש בלופיטל עבור הגבול שבתוך ה- ln נותן $\frac{e^{\cot x}.\left(-\frac{1}{sin^2(x)}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=e^{\cot x}\cdot\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\to\infty$ (הביטוי האחרון שואף ל- ∞ כי $\cot x\to\infty$ כאשר $x\to 0^+$). מרציפות ln נקבל כי גם הביטוי כולו שואף ל- ∞ כאשר $x\to 0^+$.

ג. חשבו ללא לופיטל: $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$ עבור $a>0$.

מתקיים: $x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)=\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^0}{\frac{1}{x}}$. נציב $t=\frac{1}{x}$, ואז $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0^+$, לכן $\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^0}{\frac{1}{x}}=$ $\lim_{t\to 0}\frac{a^t-a^0}{t}$. הגבול האחרון הוא הגדרת הנגזרת של a^x ב- $x=0$, ולכן הגבול הוא $\ln a\cdot a^0=\ln a$.

ד. חשבו ללא לופיטל: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{xe^x}-\frac{1}{x}\right)$.

מתקיים: $\frac{\cos x}{xe^x}-\frac{1}{x}=\frac{\cos x-e^x}{xe^x}=\frac{\frac{\cos x-e^x}{e^x}-0}{x}$. הגבול האחרון הוא הגדרת הנגזרת עבור $f(x)=\frac{\cos x-e^x}{e^x}$ ב- $x=0$, וזו פונקציה גזירה בכל $\mathbb{R}$ המקיימת $f'(x)=\frac{(-\sin x-e^x)e^x-(\cos x-e^x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-\sin x-\cos x}{e^x}$. בפרט, ב- $x=0$ נקבל $f'(0)=-1$, ולכן זהו הגבול המבוקש.