מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים --- תרגול 8

1 טופולוגיות חלשות

תהי X קבוצה. נניח שלכל $\alpha \in \Lambda$ יש פונקציה $f_\alpha : X \to X_\alpha$ כאשר (X_α, τ_α) מרחב טופולוגי. נסמן $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

הגדרה: הטופולוגיה החלשה הנוצרת ע"י המשפחה $\mathcal{F}$ היא הטופולוגיה $\tau(\mathcal{F})$ המינימ-לית על X כך שכל ההעתקות ב-$\mathcal{F}$ רציפות.

למעשה $\tau(\mathcal{F})$ היא הטופולוגיה הנוצרת ע"י תת הבסיס:

$$S = \left\{ f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \,|\, \alpha \in \Lambda,\, U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}$$

טענה 1.1 יהי (Y, τ) מרחב טופולוגי, הראו כי $f : Y \to X$ רציפה אם"ם $f_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ רציפות לכל $\alpha \in \Lambda$.

הוכחה: $\Longleftarrow$: אם $f : Y \to X$ רציפה אז ברור שגם ההרכבות עם f_α רציפות (כי הטופולוגיה על X נבחרה בדיוק כדי שהן תהיינה רציפות)

$\Longrightarrow$: כדי לבדוק ש-f רציפה, מספיק לבדוק זאת על איברי תת הבסיס. יהי $V = f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in S$, אז מתקיים:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f_\alpha^{-1}(U_\alpha)) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha) \in \tau_Y$$

■

דוגמאות: 1. טופולוגיית תת המרחב היא הטופולוגיה החלשה ביחס להעתקת השיכון.

2. טופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה הנוצרת על ידי העתקות ההטלה לרכיבי המכפלה. כלומר ההעתקות

$$\begin{aligned} \pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &\to X_\beta \\ \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in A}) &= x_\beta \end{aligned}$$

2 האוסדורף

הגדרה 2.1 מרחב טופולוגי (X, τ) הוא האוסדורף, אם לכל $x \neq y \in X$ קיימות סב-יבות זרות, כלומר קיימים $U, V \in \tau$ כך ש-$U \cap V = \emptyset$, $x \in U,\, y \in V$.

טענה 2.2 מרחב טופולוגי X הוא האוסדורף אם"ם האלכסון Δ ב$X \times X$ הוא סגור. (כאשר $\Delta = \{(x,x)\,|x \in X\} \subset X \times X$)

הוכחה: $\Longrightarrow$ יהיו $x \neq y \in X$, אזי $(x,y) \notin \Delta$, כלומר $(x,y) \in \Delta^c$, לכן קיים איבר בסיס המפריד את (x,y) מ-Δ, כלומר קיימות $U,V \in \tau$ כך ש-$(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c$. אבל זה בדיוק כמו לומר $U \cap V = \emptyset$, $x \in U,\, y \in V$.

$\Longleftarrow$ צריך להראות ש-Δ^c פתוחה: לכל $(x,y) \in \Delta^c$ (מתקיים $x \neq y$) לכן קיימות סביבות פתוחות זרות $U \cap V = \emptyset$,$x \in U,\, y \in V$. לכן $(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c$. ∎

טענה 2.3 יהיו (X_α, τ_α) משפחה של מרחבים טופולוגיים, ונסמן ב-$X = \prod_\alpha X_\alpha$ את מרחב המכפלה (עם טופולוגיית המכפלה τ). X_α האוסדורף לכל α אם"ם X האוסדורף.

הוכחה: $\Longleftarrow$: יהיו $(x_\alpha) \neq (y_\alpha) \in X$, אזי קיים α_0 כך ש-$x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$, X_{α_0} הוא האו-סדורף לכן קיימים $U_{\alpha_0}, V_{\alpha_0} \in \tau_{\alpha_0}$ סביבות זרות של x,y בהתאמה. ולכן $\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}), \pi_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$ הן סביבות זרות של $(x_\alpha), (y_\alpha)$ בהתאמה.

$\Longrightarrow$: יהי α_0, ויהיו $x \neq y \in X_{\alpha_0}$. נבחר באופן שרירותי נקודה $x_\alpha \in X_\alpha$ לכל $\alpha \neq \alpha_0$. נסתכל על העתקת השיכון $i : X_{\alpha_0} \to \prod X_\alpha$ שלוקחת את הנקודה $x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$ לנקודה $(x_\alpha) \in X$. i רציפה וחח"ע (רציפה כי $\pi_\alpha \circ i$ היא העתקה קבועה או העתקת הזהות על X_{α_0}). X האוסדורף, לכן קיימות U,V סביבות זרות ל-$i(x), i(y)$, ולכן $i^{-1}(U), i^{-1}(V)$ הן סביבות פתוחות וזרות של x,y (ב-X_{α_0}). ∎

3 אקסיומות הפרדה

מרחב טופולוגי X הוא T_0 אם "הטופולוגיה מבחינה בין נקודות": לכל $x \neq y \in X$ קיימת U פתוחה כך ש-$y \in U \not\ni x$ או $x \in U \not\ni y$.

מרחב טופולוגי X הוא T_1 אם "יחידונים הם סגורים": לכל $x \neq y \in X$ קיימת U פתוחה כך ש-$y \in U \not\ni x$.

מרחב טופולוגי X הוא T_2 אם הוא מקיים את תכונת האוסדורף.

דוגמאות:

1. המרחב $X = \{1,2\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית אינו T_0
2. המרחב $X = \{1,2\}$ עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ הוא מרחב T_0 שאינו T_1.
3. המרחב X אינסופי עם הטופולוגיה הקו-סופית (זאת הטופולוגיה המינימלית שעבורה X הוא T_1) הוא T_1 אבל לא T_2.
4. כל מרחב מטרי הוא T_2.