# אלגברה ב – תרגול חזרה למועד א'

קובץ Exam.B2 מה – moodle, שאלה 1

יהי F שדה ו – $f: F^2 \times F^2 \to F$ העתקה בילינארית המוגדרת ע"י $f(u,v)=u_1v_2-u_2v_1$ ל – $u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)$ .

א. חשב את המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס הסדור $B=span\{(1,0),(1,1)\}$

ב. הוכח שלכל אופרטור ליניארי $T: F^2 \to F^2$ ולכל $u,v\in F^2$ מתקיים $f(T(u),T(v))=det(T)\,f(u,v)$ .

*פתרון:*

*<u>סעיף א'</u> –נסמן $v_1=(1,0), v_2=(1,1)$ . המטריצה המייצגת את $f$ ביחס לבסיס $B$ היא המטריצה*

$$[f]_B=\begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & f(v_1,v_2) \\ f(v_2,v_1) & f(v_2,v_2)\end{pmatrix}$$ *. נחשב את הערכים של המטריצה:*

$$f(v_1,v_1)=0,\ f(v_1,v_2)=1,\ f(v_2,v_1)=-1,\ f(v_2,v_2)=0$$ *ז"א* $$[f]_B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$$ .

*<u>סעיף ב'</u>- נשים לב תחילה כי התבנית שלנו היא תבנית מתחלפת (ז"א $f(u,v)=-f(v,u)$ לכל $u,v\in F^2$ ) לכן בפרט $f(v,v)=0$ לכל $v\in F^2$ .*

*עבור וקטורים $u,w\in F^2$ כלליים, מתקיים $u=x_1v_1+y_1v_2,\ w=x_2v_1+y_2v_2$ ל – $x_1,x_2,y_1,y_2\in F$ לכן נקבל:*

$$f(T(u),T(v))=f(x_1T(v_1)+y_1T(v_2),x_2T(v_1)+y_2T(v_2))=$$
$$=x_1y_1f(T(v_1),T(v_1))+x_1y_2f(T(v_1),T(v_2))+x_2y_1f(T(v_2),T(v_1))+y_1y_2f(T(v_2),T(v_2))=$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1)f(T(v_1),T(v_2))$$

*. מצד שני, נקבל באופן דומה $f(u,v)=(x_1y_2-x_2y_1)f(v_1,v_2)$ , לכן מספיק להראות ש – $f(T(v_1),T(v_2))=det(T)$ .*

*אופרטור כללי $T$ כנ"ל נתון ע"י מטריצה $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ל – $a,b,c,d\in F$ . עבור $T$ הנ"ל, מתקיים $T(v_1)=(a,c),\ T(v_2)=(a+b,c+d)$ . נכתוב את התמונות בבסיס הנתון לנו, ונקבל ש – $T(v_1)=(a-c)v_1+cv_2,\ T(v_2)=(a+b-c-d)v_1+(c+d)v_2$ . ראינו בכיתה כי עבור תבנית בילינארית $f: V\times V\to F$ , בסיס $B$ של $V$ ווקטורים $x,y\in V$ מתקיים $f(x,y)=[x]_B^T[f]_B[y]_B$ . נציב למקרה שלנו ונקבל:*

$$f(T(v_1),T(v_2))=\begin{pmatrix} a-c & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b-c-d \\ c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+d \\ -a-b+c+d\end{pmatrix}=$$
$$=(a-c)(c+d)+c(-a-b+c+d)=ac+ad-c^2-cd-ac-cb+c^2+cd=ad-cb=det(T)$$ .

קובץ Exam.A2 מה – moodle, שאלה 2

יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל C ויהי $T: V\to V$ אופרטור ליניארי צמוד לעצמו, כלומר $T=T^*$ .

א. הוכח כי $I+iT$ הוא אופרטור הפיך (I אופרטור הזהות).

ב. הוכח ש - $(I-iT)(I+iT)^{-1}$ אופרטור אוניטרי.

ג. הוכח שלכל $v\in V$ $\|7v+5iT(v)\|=\|7v-5iT(v)\|$ .

*פתרון:*

*<u>סעיף א'</u> – נניח כי $v\in V$ מקיים $(I+iT)(v)=0$ , אז נקבל:*

$$0=\langle (I+iT)(v),(I+iT)(v)\rangle=\langle v,v\rangle+i\langle T(v),v\rangle+\bar{i}\langle v,T(v)\rangle+i\cdot\bar{i}\langle T(v),T(v)\rangle=\|v\|^2+\|T(v)\|^2$$

כי $T$ צמוד לעצמו, לכן $\langle T(v),v\rangle=\langle v,T(v)\rangle$ ו – $\bar{i}=-i$ , בפרט חייב להתקיים $\|v\|^2=0$ ז"א $v=0$ . לכן נקבל ש - $I+iT$ אופרטור חח"ע, לכן הוא על (לפי משפט המימדים), ז"א אופרטור הפיך.

<u>סעיף ב'</u> – נראה כי לכל $v\in V$ מתקיים $\|(I-iT)(I+iT)^{-1}(v)\|=\|v\|$ .
עבור $v\in V$ , ראינו בסעיף הקודם כי קיים $u\in V$ כך ש – $(I+iT)(u)=v$ , לכן נקבל $\|(I-iT)(I+iT)^{-1}(v)\|=\|(I-iT)(u)\|$ ומספיק להראות ש – $\|(I-iT)(u)\|=\|v\|$ .
בסעיף הקודם ראינו שעבור $u\in V$ מתקיים $\|(I+iT)(u)\|^2=\|u\|^2+\|T(u)\|^2$ , לכן מבחירת $u$ כמקור של $v$ תחת $I+iT$ נקבל ש – $\|v\|^2=\|u\|^2+\|T(u)\|^2$ . מצד שני נחשב ונקבל:
$\|(I-iT)(u)\|^2=\langle(I-iT)(u),(I-iT)(u)\rangle=\|u\|^2+\|T(u)\|^2$ , ז"א $\|(I-iT)(u)\|^2=\|v\|^2$ ולכן נקבל את השיוויון של הנורמות הנדרש (כי הנורמה מוגדרת להיות השורש החיובי).

<u>סעיף ג'</u> – נחשב את ערכי הנורמות בריבוע:
$\|7\mathrm{v}+5\mathrm{iT}(v)\|^2=\langle 7\mathrm{v}+5\mathrm{iT}(v),7\mathrm{v}+5\mathrm{iT}(v)\rangle=49\|v\|^2+25\|T(v)\|^2$ (שוב, מאותם שיקולים כמו בסעיף א', שהאופרטור הרמיטי ו – $\bar{i}=-i$ ). חישוב דומה ייתן $\|7\mathrm{v}-5\mathrm{iT}(v)\|^2=49\|v\|^2+25\|T(v)\|^2$ לכן נקבל את הנדרש.

<u>מועד א' סמסטר חורף תשע"ב, שאלה 3</u>

יהי $V$ ממ"פ מעל $C$ . לכל שני וקטורים $x,y\in V$ נגדיר טרנספורמציה ליניארית על $V$ שנסמנה $x\otimes y^*$ ע"י $(x\otimes y^*)(v)=\langle v,y\rangle x$ .

א. מצאו את הטרנספורמציה הצמודה $(x\otimes y^*)^*$
ב. מתי $x\otimes y^*$ צמודה לעצמה? מתי היא מוגדרת אי שלילית? מתי היא מוגדרת חיובית?
ג. תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית עם $rank(T)=k$ , הראו שניתן לרשום את T כסכום של $k$ טרנספורמציות מהצורה שהגדרנו, ז"א $T=\sum_{i=1}^k x_i\otimes y_i^*$ .
ד. השתמשו בסעיפים ג' ו – א' כדי להוכיח ש – $rank(T^*)=rank(T)$ .

פתרון:
<u>סעיף א'</u> – נסמן $T=x\otimes y^*$ , אז מתקיים $\langle T(v),u\rangle=\langle v,T^*(u)\rangle$ , לכן נקבל $\langle v,T^*(u)\rangle=\langle\langle v,y\rangle x,u\rangle=\langle v,y\rangle\langle x,u\rangle=\langle v,\overline{\langle x,u\rangle}y\rangle$ ולכן מיחידות הצמוד נקבל בהכרח ש – $T^*(u)=\overline{\langle x,u\rangle}y=\langle u,x\rangle y=(y\otimes x^*)(u)$ (כי השיוויון לעיל נכון לכל $u,v\in V$ ).

<u>סעיף ב'</u> – $T$ צמודה לעצמה כאשר $T=T^*$ , ז"א צריך להתקיים לכל $v\in V$ השיוויון: $\langle v,y\rangle x=\overline{\langle x,v\rangle}y$ . זה מתקיים בשני מקרים – הראשון, כאשר $x=0$ או $y=0$ . בשני המקרים הללו $T$ היא העתקת האפס והצמוד שלה הוא העתקת האפס. המקרה השני הוא $x,y\neq 0$ , ואז בפרט $x,y$ מקיימים $x=\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|^2}y,\ \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x=y$ ז"א $x,y$ תלויים ליניארית, לכן $y=ax$ . במקרה זה נקבל $\langle v,x\rangle ax=\langle v,y\rangle x=\langle v,ax\rangle x=\langle v,x\rangle\bar{a}x$ וזה מתקיים לכל $v\in V$ , בפרט עבור $v=x$ , מה שמחייב ש – $a=\bar{a}$ , ז"א $a$ ממשי. בכיוון ההפוך, אם מתקיים $y=ax$ ל – $a$ ממשי, אז החישוב למעלה מראה ש – $\langle v,x\rangle y=\langle v,y\rangle x$ לכל $v\in V$ ז"א $x\otimes y^*$ צמודה לעצמה.
$x\otimes y^*$ מוגדרת אי שלילית כאשר היא צמודה לעצמה ומקיימת $\langle x\otimes y^*(v),v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$ , ז"א $\langle v,y\rangle\langle x,v\rangle\geq 0$ . אם $T=0$ אז כמובן מקיימת אי שליליות. אחרת נדרש $a>0$ לכן סה"כ $T$ מוגדרת אי שלילית כאשר $y=ax$ ל - $a\geq 0$ . כדי ש – $T$ תהיה מוגדרת חיובית, חייב להתקיים $T\neq 0$ , ז"א $x,y\neq 0$ ו - $a>0$ .

<u>סעיף ג'</u> – נניח $T$ אופרטור מדרגה $k$. נסמן ב – $v_1,\dots,v_n$ בסיס של $V$ כך ש – $v_1,\dots,v_{n-k}$

*בסיס של $Ker(T)$ . אם נבצע על $v_{1,} \dots , v_n$ תהליך גרהאם שמידט, נקבל בסיס $u_{1,} \dots , u_n$ א"נ עבורו מתקיים $T(u_i)=0$ לכל $i\le n-k$ (כי לכל $i$ מתקיים $u_i\in span\{v_{1,} \dots , v_i\}$ ). ז"א קיים בסיס א"נ $w_{1,} \dots , w_n$ של $V$ כך ש – $T(w_i)=0$ לכל $i>k$ (הפיכת סדר האיברים בבסיס).*

*עבור $v\in V$ קיים צ"ל $v=a_1 w_1+\dots+a_n w_n$ ואז נקבל:*

*$T(v)=\sum_{i=1}^{n} a_i T(w_i)=\sum_{i=1}^{k} a_i T(w_i)$ . מצד שני, $w_{1,} \dots , w_n$ בסיס א"נ, לכן מתקיים $a_i=\langle v , w_i\rangle$ לכן נקבל $T(v)=\sum_{i=1}^{k} \langle v , w_i\rangle T(w_i)=\sum_{i=1}^{k} (T(w_i)\otimes w_i^*)(v)$ כנדרש.*

*<u>סעיף ד'</u> – נניח $T$ מדרגה $k$ . לפי סעיף ג', $T=\sum_{i=1}^{k} (y_i\otimes w_i^*)$ ל - $w_i$ איברים בבסיס א"נ ו - $y_i\neq 0$ (תמונות של אברי הבסיס הא"נ שלא פורשים את הגרעין של $T$). לפי סעיף א' והתכונות של אופרטורים צמודים, נקבל ש – $T^*=\sum_{i=1}^{k} (w_i\otimes y_i^*)$ , לכן מרחב התמונה של $T^*$ נפרש ע"י $w_{1,} \dots , w_k$ שהם כאמור בת"ל, לכן $rank(T^*)\le k$ . מצד שני, אם $rank(T^*)=p<k$ אז נקבל לפי אותו טיעון ש - $rank((T^*)^*)\le p<k$ אבל אנו יודעים ש – $(T^*)^*=T$ וזו סתירה, לכן $rank(T^*)=k$*

<u>מועד א' סמסטר חורף תש"ע, שאלה 1</u>

תהי $T: R^3\rightarrow R^3$ טרנספורמציה ליניארית המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+2b+c\\ 2b-c\\ 3c\end{pmatrix}$ .

א. חשבו את הפולינום המינימלי של T

ב. פרקו את $R^3$ לסכום ישר של תתי מרחבים $T$-אינווריאנטים של $R^3$ כך שהפולינום המינימלי של הצמצום של $T$ לכל אחד מהם הוא חזקה של פולינום אי פריק ב - $R[x]$ .

ג. מיצאו את צורת ג'ורדן של $T$ .

*פתרון:*

*<u>סעיף א'</u> - תחילה, נמצא את המטריצה המייצגת של $T$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.*
*$T(e_1)=2e_{1,}\ T(e_2)=2(e_1+e_2),\ T(e_3)=e_1-e_2+3e_3$ , לכן המטריצה המייצגת היא:*

*$[T]_E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ . בפרט נקבל שהפולינום האופייני הוא $p_T(x)=(x-2)^2(x-3)$ . בפרט, הפולינום המינימלי הוא או הפולינום האופייני או הפולינום $(x-2)(x-3)$ . נציב ונבדוק אם זה הפולינום המינימלי:*

*$([T]_E-2I)([T]_E-3I)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ וזה לא אפס, לכן*
*הפולינום המינימלי הוא $m_T(x)=(x-2)^2(x-3)$ .*

*<u>סעיף ב'</u> – לפי תהליך הפירוק שמבוצע במשפט ג'ורדן, תתי המרחבים אותם אנו מחפשים הם המרחבים $W_1=ker((T-2I)^2),\ W_2=ker(T-3I)$ . נזכור כי מציאת הגרעין של אופרטור היא מציאת המרחב העצמי של הערך העצמי 0. נתחיל עם $W_1$ - נחשב את $(T-2I)^2$ :*

*$[T-2I]_E^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ , ז"א $W_1=span\{e_{1,} e_2\}$ . עבור $W_2$*

*נחשב ונקבל $[T-3I]_E=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ . וקטור עצמי של ערך עצמי 0 הוא $(x , y , z)$*

*המקיים:* $\begin{matrix}-x+2y+z=0\\ -y-z=0\end{matrix}$ *. פתרון מערכת נותן את וקטור מהצורה* $(-z,-z,z)$ *לכן* $W_2=span\{(1,1,-1)\}$ .

<u>*סעיף ג'*</u> *– מצאנו את הפולינום המינימלי של* $T$ *בסעיף א', ולפי משפט ג'ורדן נקבל שצורת ג'ורדן של האופרטור היא* $J_T=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ *- הגורם* $x-3$ *מופיע בריבוי 1 בפולינום המינימלי, לכן כל בלוק המתאים לע"ע 3 יהיה בלוק* $1\times1$ *, מצד שני הגורם הנ"ל מופיע בפולינום האופייני בריבוי 1, לכן יש בלוק אחד כזה.*
*הגורם* $x-2$ *מופיע בפולינום המינימלי בריבוי 2, לכן יש לפחות בלוק אחד בגודל* $2\times2$ *המתאים לערך עצמי 2, מצד שני הריבוי של* $x-2$ *בפולינום האופייני הוא 2, לכן סכום המימדים של הבלוקים המתאימים לערך עצמי 2 הוא 2, ז"א יש בלוק יחיד בגודל* $2\times2$ *המתאים לערך עצמי 2.*

<u>טענות נכון/לא נכון</u> (אם נכון, נדרש להוכיח, אחרת להביא דוגמה נגדית)

(קובץ Exam.B2 מה – moodle, שאלה 5 א')
יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ מטריצות. יהי $f(x)$ הפולינום המאפס המינימלי של $AB$ ו – $g(x)=xf(x)$ , אז $g(x)$ פולינום מאפס של $BA$ (ז"א $g(BA)=0$ ).

*פתרון: נכון – נסמן את הפולינום* $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ *, אז נקבל*

$$g(BA)=(BA)(a_0I+a_1BA+...+a_n(BA)^n)=$$
$$=Ba_0IA+B(a_1AB)A+...+B(a_n(AB)^n)A=B(f(AB))A=0 .$$

(מועד א' אביב תשע"ב, שאלה 6 א')
יהי $V$ מ"ו מעל R ו – $T:V\to V$ אופרטור ליניארי המקיים $T^3=T$ אז T לכסין.

*פתרון: נכון – נסמן ב -* $m_T(x)$ *את הפולינום המינימלי של* $T$*, אז מתקיים* $m_T(x)|x^3-x$ *(כי* $T^3-T=0$ *), לכן בפרט הפולינום המינימלי של* $T$ *מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן לפי משפט קיילי המילטון, הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן ל –* $T$ *יש צורת ג'ורדן. מצד שני, הפולינום המינימלי מתחלק ב –* $(x^3-x)=(x-1)(x+1)x$ *, ז"א כל הגורמים בפולינום המינימלי הם ממעלה 1, לכן כל בלוק במטריצת ג'ורדן הוא לכל היותר בגודל* $1\times1$ *, ז"א צורת ג'ורדן של* $T$ *היא מטריצה אלכסונית.*

(מועד א' אביב תשע"ב, שאלה 6 ג')
לא קיימת $A\in R^{7\times7}$ שהפולינום המינימלי שלה הוא $x^2+x+1$

*פתרון: נכון – הפולינום האופייני של* $A$ *הוא פולינום ממעלה 7 עם מקדמים ממשיים. כיוון ששורשים מרוכבים של פולינום ממשי מופיעים בזוגות צמודים, יש מספר זוגי של שורשים מרוכבים לפולינום האופייני של* $A$*, לכן בהכרח יש לפולינום האופייני של* $A$ *שורש ממשי.*
*לפי משפט קיילי המילטון, לפולינום המינימלי של* $A$ *יש אותם שורשים כמו לפולינום האופייני, לכן בהכרח לפולינום המינימלי של* $A$ *יש שורש ממשי, ז"א יש גורם ליניארי.*
*מצד שני, הפולינום* $x^2+x+1$ *הוא אי פריק מעל* $R$*, לכן אין לו גורמים ליניאריים.*

<u>מועד א' סמסטר חורף תש"ע, שאלה 3</u>

תהי $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ ונגדיר על $R^3$ : $(v,u)=v^T Au$

א. הראו כי $(v,u)$ היא מכפלה פנימית על $R^3$ .

ב. נסמן $V=R^3$ עם המכפלה הפנימית מסעיף א'. יהי $W=span\{(0,1,0),(1,0,1)\}$ תת מרחב של $V$ . מיצאו ב – $V$ וקטור באורך 1 שניצב ל – $W$ והשלימו אותו לבסיס א"נ של $V$ (המושגים "ניצב" ו - "אורתונורמלי" מתייחסים למכפלה הפנימית מסעיף א').

*פתרון:*

*<u>סעיף א'</u> -התכונות של מכפלה פנימית $\langle -,-\rangle$ על מרחב וקטורי $V$ מעל $R$ הן:*

1. *ליניאריות ברכיב השמאלי - $\langle av_1+bv_2,u\rangle=a\langle v_1,u\rangle+b\langle v_2,u\rangle$ לכל $v_1,v_2,u\in V$ , $a,b\in R$*
2. *ליניאריות ברכיב הימני – $\langle v,au_1+bu_2\rangle=a\langle v,u_1\rangle+b\langle v,u_2\rangle$ לכל $v,u_1,u_2\in V,\ a,b\in R$ .*
3. *סימטריות – $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$ לכל $u,v\in V$ .*
4. *חיוביות לחלוטין – $\langle v,v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$ ו – $\langle v,v\rangle=0$ אם ורק אם $v=0$*

*$A$ היא מטריצה סימטרית, לכן התבנית $(v,u)$ המוגדרת לעיל היא תבנית ביליניארית סימטרית, בפרט מקיימת את תכונות 1 – 3.*

*נראה ש – $(v,u)$ מקיימת את תנאי 4 – נסמן $v=(a,b,c)$ ונקבל:*

$$\langle v,v\rangle=\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a+b\\a+2b+c\\b+2c\end{pmatrix}=a(2a+b)+b(a+2b+c)+c(b+2c)=$$

$$=2a^2+2ab+2b^2+2bc+2c^2=(a+b)^2+(b+c)^2+a^2+c^2$$

*לכן לכל $v\in R^3$ מתקיים $(v,v)\geq 0$ . בנוסף, אם $(v,v)=0$ אז בפרט כל אחד מהמחוברים לעיל צריך להתאפס (סכום ריבועים), לכן בהכרח $a=c=0$ וזה גורר $b=0$ ז"א $v=0$ .*

*<u>סעיף ב'</u> – נעזר בתהליך גראהם שמידט. נסמן $v_1=(0,1,0),v_2=(1,0,1),v_3=(1,0,0)$ . קל לראות שזה בסיס כך ש – $v_1,v_2$ בסיס של $W$ . נשים לב שכאשר מבצעים את תהליך גראהם שמידט, נקבל וקטורים $u_1,u_2,u_3$ המקיימים $u_i\in span\{v_1,\dots,v_i\}$ , לכן הוקטור $u_3$ יהיה וקטור באורך יחידה המאונך ל – $W$ (שייפרש ע"י $u_1,u_2$ ).*

*$u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$ , לכן נחשב את הנורמה של $v_1$ :*

$$\|v_1\|^2=(v_1,v_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

*לכן $u_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ .*

*$w_2=v_2-(u_1,v_2)u_1=(1,0,1)-\sqrt{2}u_1=(1,-1,1)$ , ואז $u_2=\frac{w_2}{\|w_2\|}$ ונקבל $u_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ .*

$$w_3=v_3-(u_1,v_3)u_1-(u_2,v_3)u_2=(1,0,0)-\frac{1}{\sqrt{2}}u_1-\frac{1}{\sqrt{2}}u_2=(1,0,0)-(0,\frac{1}{2},0)-(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$$

*. הנורמה של $w_3$ היא: $\|w_3\|^2=(w_3,w_3)=1$ לכן נקבל $u_3=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$ .*

*הוקטור $u_3$ הוא הוקטור באורך יחידה המאונך ל - $W$ והשלמה שלו לבסיס א"נ הוא הבסיס $u_1,u_2,u_3$ שמצאנו.*