משפט החתונה

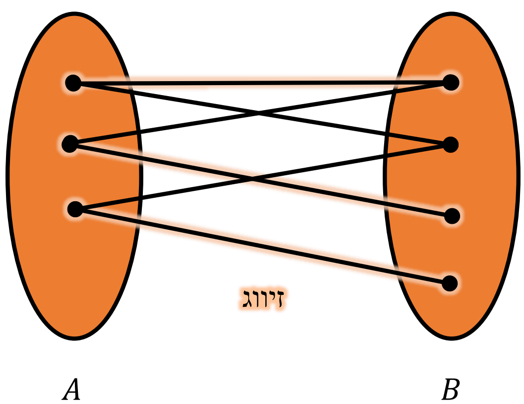
תזכורת: $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ.

אוסף צלעות זרות בזוגות נקרא זיווג.

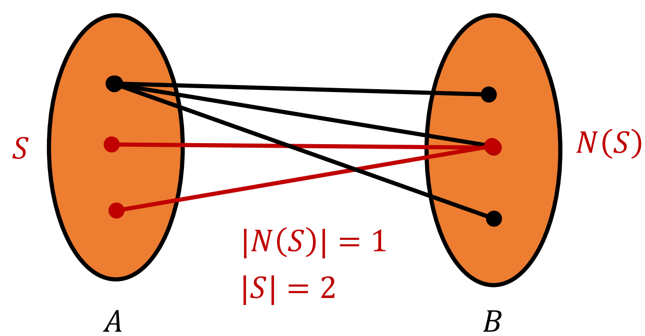
ν – גודל מקס' של זיווג בגרף.

משפט החתונה: $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ, אז קיים זיווג עבור A אמ"מ לכל $S\subseteq A$ מתקיים $|S|\le|N(S)|$.

דוגמא: בגרף הבא יש זיווג.



דוגמא:



כאן אין זיווג כי תנאי משפט החתונה לא מתקיים.

הגדרה: נתונה משפחה של קב' $A_1,\dots,A_m$ שונות. **מערכת נציגים שונים של המשפחה** היא בחירה $a_i\in A_i$ כך שלכל $i\neq j$ מתקיים $a_i\neq a_j$. למשל:

$$A_1=\{1,2,3\}\to 1$$
$$A_2=\{1,2,4\}\to 2$$
$$A_3=\{2,4,3\}\to 3$$

תרגיל: נתונה משפחה של קב' $A_1, A_2, \dots, A_m$ שונות כך ש-$\bigcup A_i \subseteq [n]$. הוכיחו שניתן לבחור מערכת נציגים שונים אמ"מ לכל $S \subseteq [m]$ מתקיים $|\bigcup_{i\in S} A_i| \ge |S|$.

פתרון: נבנה גרף דו צדדי $G=(A,B,E)$ כאשר $A=\{A_1,\dots,A_m\}$, $B=\{1,2,\dots,n\}$. מתקיים $(A_i,j)\in E \Leftrightarrow j\in A_i$. אם לוקחים $S\subseteq A$, $N(S)=\bigcup_{i\in S}A_i$, אז מערכת נציגים שונים זה בעצם זיווג בגרף. ניתן לבחור מערכת נציגים שונים אמ"מ יש זיווג בגרף G המתאים, וזה קורה אמ"מ לכל $S\subseteq[m]$, $|S| \le N(\{A_i\}_{i\in S})$ אמ"מ $|S| \le |\bigcup_{i\in S} A|$.

תרגיל: יהי $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ. נסמן ב-δ את הערכיות המינימלית של הקדקודים ב-A, וב-d את הערכיות המקסימלית של הקדקודים ב-B. הוכיחו שאם $\delta \ge d$, אז יש זיווג עבור A.

פתרון: תהא $S\subseteq A$. צ"ל $|S| \le |N(S)|$. נסמן ב-E_0 את כל הצלעות היוצאות מ-S, וב-E_1 את כל הצלעות שיוצאות מ-$N(S)$. $E_0\subseteq E_1$, ולכן $|E_0|\le|E_1|$.

$$|E_0| \ge |S|\cdot\delta, \qquad |E_0| \le |E_1| \le |N(S)|\cdot d$$

$$\therefore \ \ \delta|S| \le d|N(S)|$$

$$|S| \le \underbrace{\frac{\delta}{d}}_{1\le}|S| \le |N(S)|$$

ולכן יש זיווג עבור A.

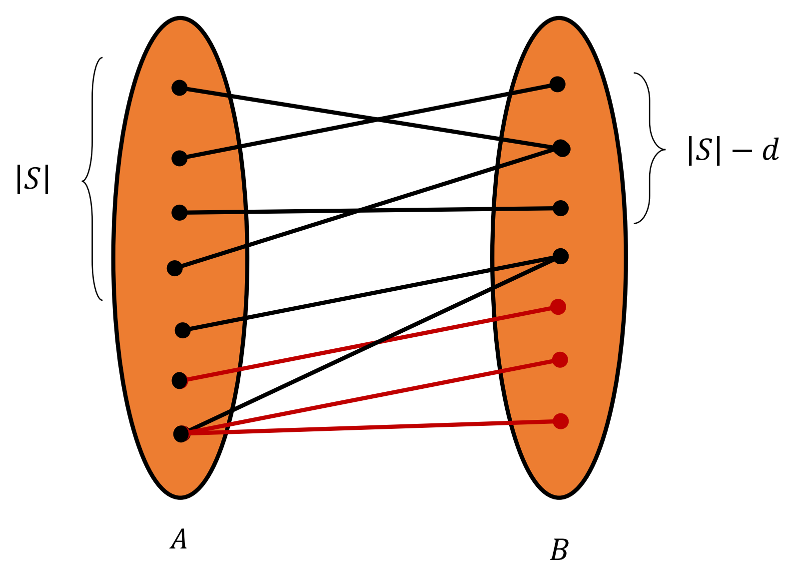
הגדרה: גרף G נקרא **d-רגולרי** אם כל הערכיויות שוות ל-d. כלומר, לכל $v\in V$, $\deg(v)=d$.

מסקנה: בכל גרף $G=(A,B,E)$ דו צדדי d-רגולרי יש זיווג מושלם. כי

$$d|A| = d|B| \quad \Rightarrow \quad |A|=|B|$$

תרגיל: יהי $G=(A,B,E)$ גרף דו"צ. הוכיחו שאם לכל $S\subseteq A$ מתקיים $|S|-d<|N(S)|$ אז יש זיווג שמכיל לפחות $|A|-d$ קדקודים מ-A.

פתרון:



מוסיפים d קדקודים ל-B ומחברים אותם עם כל קדקודי A

נקבל גרף חדש G'. תהי $S \subseteq A$, אז מתקיים:

$$|N_{G'}(S)| = |N_G(S)| + d \geq |S| - d + d = |S|$$

מתקיים התנאי של משפט החתונה ולכן קיים זיווג עבור A ב-G'. לכל היותר d קדקודים מ-A מחוברים לקדקודים חדשים שהוספנו, ולכן אם נוריד אותם עדין $|A| - d$ ישארו בזיווג.

משפט: גרף הוא דו"צ אמ"מ כל המעגלים שלו הם באורך זוגי.

הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-G הוא גרף דו"צ. אם אין מעגלים, אז הטעה נכונה באופן ריק. אם יש מעגל, אז בגל צלע אנחנו עוברים מצד אחד לצד שני ולכן כדי לחזור לקדקוד הראשון צריך לעשות מס' זוגי של צעדים $\Leftarrow$ המעגל זוגי.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שכל המעגלים בגרף הם זוגיים. נוכיח על גרף קשיר ואם הגרף לא קשיר, נוכיח עבור כל רכיב קשירות. יהיה קדקוד v.
נסמן ב-A את כל הקדקודים שקיים מסלול אי זוגי מ-v אליהם, וב-B את כל הקדקודים שקיים מסלול באורך זוגי מ-v אליה.
נראה ש-$A \cap B = \emptyset$. אם לא, אז קיים $u \in A \cap B$ כך שקיים מסלול באורך זוגי ומסלול באורך אי זוגי מ-v ל-u. לכן, האיחוד של המסלולים יוצר מסלול סגור באורך אי זוגי. כל מסלול סגור ניתן לפירוק למעגלים זרים פשוטים ולפחות אחד מהם יהיה באורך אי זוגי בסתירה לנתון.
אם $\{u, w\} \in E$ כאשר, למשל, $u, w \in A$, אז מ-v יש מסלול באורך אי"ז ל-u ומסלול באורך אי"ז ל-w, אבל אז יחד עם הצלע $\{u, w\}$ אנו מקבלים מסלול סגור באורך אי זוגי בסתירה לנתון.