<u>אינפי 2 - דף עזר בנושא אינטגרלים פרמטריים</u>

<u>משפטים:</u>

1. תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. אזי F רציפה ב- $[c,d]$.

2. <u>כלל לייבניץ</u> - גזירה תחת סימן האינטגרל:

תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ונניח ש - F מוגדרת לכל y ב - $[c,d]$ (למשל, אפשר לדרוש שלכל y ב - $[c,d]$, $f(x,y)$ רציפה כפונקציה של x).
כמו כן נניח ש - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה במלבן.
אזי:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx .$$

3. <u>משפט פוביני -</u> החלפת סדר אינטגרציה:
תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. אזי:

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy .$$

4. <u>משפט לייבניץ</u> - הכללה:
תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. תהיינה $\varphi(y),\psi(y)$ פונקציות רציפות ב - $[c,d]$, כך שלכל y, $a\le\varphi(y),\psi(y)\le b$. נגדיר: $F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.
אזי F רציפה ב- $[c,d]$.
אם בנוסף $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה במלבן ו - $\varphi(y),\psi(y)$ גזירות, אזי:

$$F'(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y) .$$