קומבינטוריקה – תרגיל 2

1. תנו הוכחות קומבינטוריות ואלגבריות לזהויות הבאות:

א. לכל n טבעי

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

ב. (ההוכחה האלגברית היא תרגיל בונוס) לכל n,m,k טבעיים

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

ג. (ההוכחה הקומבינטורית היא תרגיל בונוס) לכל n טבעי

$$2^0\binom{n}{0} + 2^2\binom{n}{2} + 2^4\binom{n}{4} + \ldots = (-1)^n + 2^1\binom{n}{1} + 2^3\binom{n}{3} + 2^5\binom{n}{5} + \ldots$$

2. פרופסור מוזרוביץ' ניסה להוכיח שלכל n>m>k טבעיים מתקים השיוויון

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

הנימוק: בשביל לבחור קבוצה בגודל k מתוך n איברים אפשר לבחור אפשר לבחור אותה ישירות ואפשר קודם לבחור m איברים ואח"כ לבחור k איברים מתוכם. אם נבחר ישירות k איברים יהיו לנו

$$\binom{n}{k}$$

אפשרויות לעשות זאת ואם נבחר קודם m ומתוכם k יהיו לנו

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}$$

אפשרויות. לכן שני הפתרונות לאותה בעייה שווים. מש"ל

האם ההוכחה נכונה ? אם כן הביאו הוכחה אלגברית. אם לא הסבירו מה הטעות בהוכחה ותנו דוגמה ל-n>m>k טבעיים שאינם מקיימים את השיויון.

3. א. יהי p מספר ראשוני ויהי k מספר שלם בין 1 ל- p-1. תנו הוכחה אלגברית וקומבינטורית לכך שהמספר

$$\binom{p}{k}$$

מתחלק ב-p. (רמז: מעגל. לשם ההוכחה האלגברית מותר להשתמש במשפט "אם a ו-b מספרים שלמים ו-ab מתחלק ב-p אזי או ש-a מתחלק ב-p או ש-b מתחלק ב-p".)

ב. מדוע ההוכחה הקומבינטורית אינה תקפה עבור p שאינו ראשוני?

ג. תנו דוגמא ל-p שאינו ראשוני ו-k מספר שלם בין 1 ל- p-1 כך שהמספר

$$\binom{p}{k}$$

אינו מתחלק ב-p.

4. א. הוכיחו אלגברית את הזהות

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

ב. הראו לפי סעיף א. ש-

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n$$

(זהות זאת תוכח בכיתה בדרך אחרת.)

ג*. תנו הסבר קומבינטורי לנוסחא בסעיף ב.

ד. לכמה שווה

$$2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} + \dots + (n)\binom{n}{n-1} + (n+1)\binom{n}{n}$$