מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים

תרגיל בית 8

רן קירי - 311532238
09/01/2017

שאלה 1:

א. נתונה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב מטרי (X,d). נניח כי $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה תת סדרה. בהנתן $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m,n \geq N$ מתקיים:

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

מהגדרת תת הסדרה, ניתן לבחור $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq K$ מתקיים $n_k \geq N$. אזי, עבור $\varepsilon > 0$ זה, נסיק כי לכל $k_1, k_2 \geq K$ מתקיים:

$$d\left(x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}\right) \overset{n_{k_1},n_{k_2} \geq N}{\leq} \varepsilon$$

כלומר $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ אכן סדרת קושי בפני עצמה.

■

ב. נניח כי $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. אזי, בהנתן $\varepsilon > 0$, קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq K$ מתקיים:

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ועתה, בהתבוננות בסדרה המקורית, נסיק כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n,m \geq N$ יתקיים:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכן, נשים לב כי לכל $n \geq N$ נבחר $k \geq K$ כך ש-$n_k \geq N$, ונקבל כי:

$$d(x_n, x_0) \overset{\text{א"ש המשולש}}{\leq} \overbrace{d(x_n, x_{n_k})}^{\overset{\leq\frac{\varepsilon}{2}}{\text{סדרת קושי}}} + \overbrace{d(x_{n_K}, x_0)}^{\overset{\leq\frac{\varepsilon}{2}}{\text{התכנסות}}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר מתקיים על פי הגדרה $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

שאלה 2:

נראה דוגמה נגדית לשני מרחבים מטריים, $(X,d_1),(X,d_2)$, הומיאומורפים כמרחבים טופולוגיים, עבורם (X,d_1) הוא מרחב שלם ואילו (X,d_2) אינו מרחב שלם.

נתבונן אם כן במרחב $(X,d_1),(X,d_2)$ המוגדרים על ידי:

$$X = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

כאשר $d_1 = d_{Eucl}$ וכאשר d_2 הינה המטריקה הדיסקרטית, המוגדרת על ידי:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

נראה ראשית, כי מרחבים אלה הומיאומורפים. לשם כך נגדיר את העתקת הזהות:

$$id: (X,d_1) \to (X,d_2) \quad id(x) = x$$

ונשים לב שזו העתקה רציפה, שכן לכל $U \in (X,d_2)$ מתקיים ש-$U \in (X,d_1)$ והיא איחוד של יחידונים, אשר בשתי המטריקות הם קבוצות פתוחות ולכן העתקה זו רציפה כדרוש.

נשים לב כי (X,d_1) אינו מרחב שלם, שכן הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $x_n = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ מקיימת:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X$$

ונרצה להראות כי (X,d_2) מרחב שלם. לשם כך תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי, שהיא סדרת קושי. כלומר בפרט עבור בחירת $\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m,n \geq N$ מתקיים $d(x_m,x_n) < \varepsilon = \frac{1}{2}$, אך היות והערכים היחידים ש-$d(x_m,x_n)$ יכול לקבל הם 1 או אפס, נסיק כי $d(x_m,x_n) = 0$ בהחלט כלומר $x_m = x_n$ לכל $m,n \geq N$. כלומר, כל סדרת קושי במטריקה זו היא בהכרח סדרה קבוע מנקודה מסויימת. מכאן שגם הגבול שלה הוא אותו ערך קבוע, ולכן נסיק כי הגבול שלה חייב להיות איבר מהקבוצה כלומר המרחב אכן מרחב שלם כנדרש.

שאלה 3:

$\Leftarrow$ נניח כי (X,d) מרחב מטרי שלם. אזי, לכל סדרת קושי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים $x_0 \in X$ כך שמתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. עתה, נניח כי נתונה סדרת קבוצות סגורות ולא ריקות של X כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$. נבנה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n \in A_n$. נרצה להראות כי זו סדרת קושי. יהא $\varepsilon > 0$. אזי, מהגדרת הקטרים של הסדרות נובע כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\operatorname{diam} A_n \leq \varepsilon$.

נשים לב, אם כך, כי לכל $m,n \geq N$ מתקיים:

$$x_n, x_m \in A_N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \operatorname{diam} A_N \leq \varepsilon$$

כלומה, הסדרה שבחרנו הינה סדרת קושי. ולכן קיים $x_0 \in X$ עבורו מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. אך נשים לב כי לכל A_N מתקיים ש-$\{x_m\}_{m=N}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת שמוכלת כולה ב-A_N כתת סדרה של הסדרה המקורית. היות ו-A_N קבוצה סגורה נסיק כי גם הגבול של הסדרה חייב להיות מוכל בה, כלומר $x_0 \in A_N$ לכל $N \in \mathbb{N}$ ומכאן שבהכרח:

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

כמו כן, נשים לב כי אם נניח קיומו של $x_0' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ אזי נקבל כי $d(x_0, x_0') < \operatorname{diam} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq 0$ בסתירה לכך שמתקיים $\operatorname{diam} A_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. כלומר החיתוך מכיל את x_0 בלבד ולכן:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$$

$\Longrightarrow$ נניח כי אכן לכל סדרה יורדת ביחס להכלה של קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיים $x_0 \in X$ כך שמתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$. נרצה להראות כי (X,d) מרחב שלם, ולשם כך נרצה להראות כי כל סדרת קושי מתכנסת ב-(X,d). תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי. אזי על פי הגדרה, אם נבחר $\varepsilon > 0$ כלשהו, נסיק כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, m \geq N$ מתקיים:

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

בפרט מתקיים לכל $n \geq N$:

$$d(x_n, x_N) < \varepsilon \Longrightarrow x_n \in B[x_N, \varepsilon]$$

לכן, נגדיר עתה $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי, קיים $N_n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m \geq N_n$ מתקיים $x_m \in B\left[X_{N_n}, \varepsilon_n\right] \coloneqq A_n$. עתה הגדרנו סדרה של קבוצות סגורות יורדות ביחס להכלה כך שמתקיים $\operatorname{diam} A_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

אך מכאן שקיים $x_0 \in X$ כך שמתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x_0\}$. אך נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $X_{N_n} \in A_n$ וכן $x_0 \in A_n$ ולכן מתקיים $d\left(x_{N_n}, x_0\right) < \operatorname{diam} A_n = \frac{1}{n}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{N_n}, x_0\right) = 0$ כלומר אכן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} x_{N_n} = x_0 \in X$$

כלומר (X,d) אכן מרחב שלם כנדרש.

שאלה 4:

נרצה להראות כי l_∞ הינו מרחב שלם. לשם כך נראה כי כל סדרת קושי במרחב זה מתכנסת.

תהא, אם כן, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב-(l_∞, d_∞). אזי על פי הגדרה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n \geq N$ מתקיים:

$$d_\infty(x_m, x_n) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|x_m^{(i)} - x_n^{(i)}\right| < \varepsilon$$

כמו כן, נשים לב כי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים בפרט:

$$\left|x_m^{(i)} - x_n^{(i)}\right| < \varepsilon$$

כלומר הסדרה $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי ב-$(\mathbb{R}, d_{Eucl})$ ולכן, היות וזהו מרחב שלם, נסיק כי קיים $x_0^{(i)}$ כך שמתקיים לכל $i \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = x_0^{(i)}$$

נרצה להראות עתה כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \cdots\right)$$

ועתה נשים לב כי עבור בחירת $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ נקבל כי קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n, m \geq N$ מתקיים:

$$\left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

וכאשר $m \to \infty$ נקבל מהגבול שהוכחנו כי מתקיים:

$$\left|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow{m\to\infty} \left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

וזאת לכל $i \in \mathbb{N}$. אך מכאן נקבל כי לכל $m \geq n$ מתקיים:

$$d(x_m, x_0) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|x_m^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|x_m^{(i)} - x_n^{(i)}\right| + \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר אכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$ כנדרש.

שאלה 5:

נתונה הקבוצה $N = \mathbb{N}$. מוגדרת פונקציה $d: N \times N \to \mathbb{R}$ על ידי:

$$\forall (m,n) \in N \quad d(m,n) = \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 + \dfrac{1}{\min(m,n)} & m \neq n \end{cases}$$

א. נרצה להוכיח כי זו אכן מטריקה.

a. חיוביות – טריוויאלית שכן $\min(m,n)\geq 0$ לכל $m,n\in N$.

i. התאפסות מתאפשרת רק כאשר $m=n$ מהגדרת המטריקה. (כאשר $m\neq n$ מדובר בביטוי חיובי ממש).

b. סימטריות – אכן מתקיים לכל $m,n\in N$:

$$d(m,n)=1+\frac{1}{\min(m,n)}=1+\frac{1}{\min(n,m)}=d(n,m)$$

c. אי שוויון המשולש – נניח $m,n,l\in N$ כלשהם:

$$d(m,n)=1+\overbrace{\frac{1}{\min(m,n)}}^{\leq 1}\leq\overbrace{1+\frac{1}{\min(m,l)}+1+\frac{1}{\min(l,n)}}^{\geq 2}=d(m,l)+d(l,n)$$

ב. נרצה להראות כי זהו אכן מרחב שלם. לשם כך נניח סדרת קושי במרחב זה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ונשים לב כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\geq N$ מתקיים:

$$d(x_m,x_n)=1+\frac{1}{\min(x_m,x_n)}\leq\varepsilon$$

אך ביטוי זה גדול ממש מ-1 למעט כאשר $x_m=x_n$. כלומר, נסיק כי סדרת קושי בהכרח זהותית החל מ-$N\in\mathbb{N}$. סדרה זהותית בוודאי מתכנסת על פי הגדרה ולכן נסיק כי זהו בהחלט מרחב שלם כדרוש.

ג. נתבונן בסדרת הכדורים הבאה:

$$B_n=B\left[n,1+\frac{1}{n}\right]$$

נשים לב כי לכל $m>n$ מתקיים:

$$d(n,m)=1+\frac{1}{\min(m,n)}=1+\frac{1}{n}\Longrightarrow m\in B_n$$

עבור $m=n$ מתקיים $d(n,m)=0$ וזה מקרה טריוויאלי.

ומאידך לכל $m<n$ מתקיים:

$$d(n,m)=1+\frac{1}{\min(m,n)}=1+\frac{1}{m}>1+\frac{1}{n}\Longrightarrow m\notin B_n$$

כלומר מתקיים:

$$B_n=B\left[n,1+\frac{1}{n}\right]=N\setminus\{1,\cdots,n-1\}$$

ולכן בפרט זוהי סדרת כדורים יורדת. ונשים לב כי:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\emptyset$$

שכן בהנתן $n\in\mathbb{N}$ נקבל כי $n\notin B_{n+1}$ ולכן אינו נמצא בחיתוך. אך הנ"ל נכון לכל $n\in\mathbb{N}$ כלומר לכל איבר בקבוצה. כנדרש.