הקדמה

מהי המתמטיקה?

מתמטיקה היא לעצלנים. פירושה לתת לעקרונות לעבוד במקומך.
(גיאורג פויה, מתמטיקאי הונגרי)

שאלו מישהו ברחוב מהי המתמטיקה, וקרוב לוודאי שתיענו בתשובה שכוללת את המילה "מספר" – המתמטיקה עוסקת במספרים. זה כמובן לא מדויק, משום שכידוע גם הגיאומטריה נכללת במתמטיקה. יש על כן כאלו שמגדירים את המתמטיקה כ"מדע של המספר והצורה". יש בזה אמת, אבל לא כל האמת. יש תחומי מתמטיקה שאינם עוסקים לא בזה ולא בזה. אחד מאלה אנו לומדים בספר הזה – תורת הקבוצות.

תשובה נכונה יותר היא שהמתמטיקה חוקרת מבנים שמצייתים לכללים מוגדרים היטב. המערכות הנחקרות צריכות להיות בעלות עניין כללי. משחק השחמט, למשל, מציית לכללים מוגדרים היטב, אבל איננו בעל עניין למתמטיקה, משום שהוא לא מתקשר לתופעות אחרות בעולם. מתברר שדווקא המערכות שמופיעות בטבע, במיוחד מן הפיזיקה, הן בעלות העומק המתמטי הגדול ביותר.

למעשה, יש בחקירה המתמטית שני שלבים:

א. הסתכלות בחלק כלשהו בעולם, והפשטה של הכללים שהוא מציית להם.

ב. חקירת המסקנות שנובעות מן הכללים.

באשר לשלב א', ההפשטה לכשעצמה אינה ייחודית למתמטיקה: הרי כל חשיבה כרוכה בהמצאת מושגים מופשטים שמתאימים לעולם. המיוחד למתמטיקה הוא שההפשטה מגיעה בה לשיאה. זוהי הפשטה של התהליכים הבסיסיים ביותר. למשל, מספרים הם הפשטה של תהליך החשיבה האלמנטרי ביותר: חלוקת העולם לעצמים, ומיונם לסוגים. אנחנו מפרקים את העולם ל"גושים", כלומר עצמים, ואחר כך מוצאים דמיון בין עצמים שונים ואז קוראים להם באותו שם, נאמר "תפוח". ההפשטה של שני התהליכים האלה יצרה את מושג המספרים הטבעיים. מספר טבעי אומר כמה פעמים חוזר אותו עצם: 2 תפוחים, 3 כבשים. מכיוון שזהו תהליך יסודי כל כך, המספרים חודרים לכל חלק של המתמטיקה.

הפשטה פירושה הכללה, והכללות חוסכות מאמץ. פעם אחת המצאת את המושג "חתול", וחסכת לעצמך את הלימוד מהו היצור שעומד מולך בכל פגישה עם חתולים. מאמץ חד פעמי מספיק למפגשים רבים. המתמטיקה, שעושה את ההפשטות הבסיסיות ביותר, חוסכת הרבה מאוד מאמץ – היא "נותנת לעקרונות לעבוד במקומך", כפי שהעיד פויה. אם בדקת ש-3 עפרונות ועוד 2 עפרונות הם 5 עפרונות, הרי גם 3 תפוחים ועוד 2 תפוחים הם 5 תפוחים. אפשר לקצר אז ולומר באופן כללי "3+2=5". המספר הטהור 2 הוא הפשטה של 2 תפוחים ו-2 עפרונות, והוא מאפשר לדבר על כל מצב שבו יש לנו 2 פריטים מאותו סוג.

לאחר שעשינו את שלב א', של ההפשטה מתופעות שגילינו במציאות, אין כבר צורך בהסתכלות בעולם. את שלב ב' יכול המתמטיקאי לעשות במשרד שלו. משום כך המתמטיקה אינה מדע ניסויי. היא מסיקה מסקנות לוגיות מכללים שנלקחים כאקסיומות.

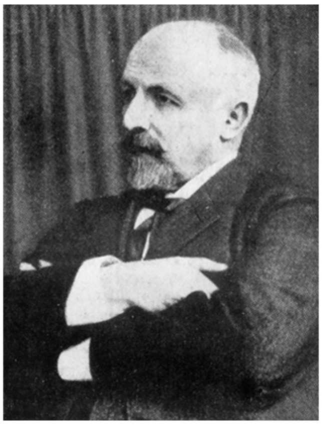
אפשר לחלק את המתמטיקה המודרנית לארבעה תחומים עיקריים:

1. אנליזה, שעוסקת במספרים הממשיים. ההבדל בין המספרים הממשיים והטבעיים הוא שמספרים ממשיים יכולים להיות שונים, ובכל זאת קרובים כרצוננו זה לזה. מכאן נולד מושג הגבול, שהוא המושג שבו עוסקת האנליזה.
2. גיאומטריה.
3. אלגברה, שעוסקת במושג הפעולה בין איברים – הכללה של הפעולות במספרים הטבעיים.
4. מתמטיקה דיסקרטית. "דיסקרטית" פירושו שהעצמים מבודדים זה מזה. התחומים הקלאסיים במתמטיקה דיסקרטית הם הקומבינטוריקה, שעוסקת בקבוצות סופיות, ותורת הקבוצות, שאותה נלמד כאן. תורת הקבוצות עוסקת בעיקר בקבוצות אינסופיות.

מהי תורת הקבוצות?

הה, האינסוף! המרתק בין המושגים שעוסקים בהם המתמטיקאים.
(דויד הילברט)

האינסוף הוא המקום שבו קורים דברים שאינם קורים.
(אינטרפרטציה של מושג האינסוף, מיוחסת לסטודנט אלמוני)



גיאורג קנטור, גרמני, 1845 – 1918. מייסד תורת הקבוצות.

תורת הקבוצות עוסקת במושגים היסודיים ביותר במתמטיקה, ואולי דווקא בשל כך התפתחה מאוחר יחסית, בסוף המאה ה-19. מייסדה היה **גיאורג קנטור** (1845 – 1918). קנטור עסק בתחום קלאסי במתמטיקה שנקרא "טורי פוריה", על שם המתמטיקאי הצרפתי *Fourier*. זהו כלי לחקירת פונקציות מחזוריות, למשל כאלה שמבטאות גלים. במהלך מחקרו גילה קנטור תגלית מפתיעה: שגם בממלכת האינסוף ייתכן אי שוויון בין גדלים. קיימות קבוצות אינסופיות גדולות, וקבוצות אינסופיות גדולות יותר. כפי שקבוצה בת 5 איברים גדולה מקבוצה בת 3 איברים, כך ייתכן שקבוצה אינסופית אחת תהיה גדולה מקבוצה אינסופית אחרת. התגלית המסעירה הראשונה שלו מסוג זה הייתה שקבוצת המספרים הממשיים גדולה מקבוצת המספרים הטבעיים.

המושגים של תורת הקבוצות פשוטים יותר מאשר בכל תורה מתמטית אחרת. היא בנויה כולה על מושג אחד: שייכות של איבר לקבוצה. ייתכן שבגלל הפשטות הזאת המתמטיקאים של אותה תקופה סירבו להכיר בערכה של התורה החדשה. מאוחר יותר הוכח שקנטור צדק: בערך ב-1928 הראה מתמטיקאי בשם פון-נוימן שניתן לבסס את המתמטיקה כולה על מושג השייכות. למשל, שאפשר לבנות את המספרים הטבעיים בתוך תורת הקבוצות.

אולם הייתה גם סיבה נוספת להתנגדות שבה נתקל קנטור. הוא החזיר למרכז הבמה מושג שבאותה תקופה חשבו שהוא מבוסס על טעות: **האינסוף האקטואלי**. במאה ה-19 הצליחו קושי *(Cauchy)* ואחרים לבסס את החשבון הדיפרנציאלי על יסודות מוצקים, עם הגדרות ה"דלתא-אפסילון" המוכרות לכם. אחד מעקרונות הגישה הזאת היה שאין באמת "אינסוף", אלא יש רק שאיפה לאינסוף. קנטור כאילו החזיר את הגלגל לאחור: הוא דיבר על אינסוף כעל ישות שקיימת באמת. הדבר עורר עליו את כעסם של בני דורו, ובעקבות זאת לא קיבל משרה שאליה נכסף. תסכולו החמיר מחלה דכאונית שממנה סבל, והוא סיים את חייו בבית מחסה לחולי רוח.

כלי ראשון שנזדקק לו כדי לדבר על קבוצות הוא **אלגברה בוליאנית**, על שמו של ג'ורג' בול *(George Boole)*, מתמטיקאי אנגלי שחי בין השנים 1815 ו-1864. בול הבין דבר מהפכני – שגם טענות מתמטיות הן חלק מן העולם, ואפשר לחקור אותן בצורה מתמטית, ממש כפי שחוקרים תופעות אחרות, כמו תנועה של גופים.

ג'ורג' בול, 1815-1864,
מייסד הלוגיקה המודרנית

הרכיב הבסיסי בטענות מתמטיות הוא טענות אטומיות (כלומר, כאלה שאינן ניתנות לחלוקה). קוראים להן גם "פסוקים אטומיים". טענות אטומיות מסומנות באותיות. לצורך הטיפול המתמטי תוכנן של הבעיות האטומיות אינו חשוב. טענה אטומית בשם p יכולה לציין ש"היום יום שלישי", או "$2 < 1$" (טענה יכולה להיות גם שקרית).

טענות אטומיות מחוברות זו לזו על ידי סימנים שנקראים "קַשרים". למשל, הקשר $\wedge$ מציין "ו", כלומר $p \wedge q$ פירושו "p ו-q", שהיא טענה האומרת (מייד נסביר מה זה "אומרת") שגם p וגם q נכונות. הטבלה הבאה מגדירה את משמעות הקשרים (ושוב, "משמעות" תוגדר רק בהמשך).
לצורך ההדגמה הטענה p תציין בטבלה "היום יום שלישי" והטענה q תציין "היום יורד גשם".

קשרים לוגיים

קשר	משמעות	דוגמה
$\wedge$	ו-	$p \wedge q$ = היום יום שלישי ויורד גשם
$\vee$	או	$p \vee q$ = היום יום שלישי או יורד גשם (ואולי גם וגם)
$\sim$	שלילה	$\sim p$ = היום לא יום שלישי
$\rightarrow$	גרירה	$p \rightarrow q$ = אם היום יום שלישי, אז יורד גשם
$\leftrightarrow$	גרירה כפולה	$p \leftrightarrow q$ = אם היום יום שלישי אז יורד גשם, ואם יורד גשם אז היום יום שלישי. בקיצור: היום יום שלישי אם ורק אם יורד גשם
$\oplus$	*XOR (eXlusive Or)*	$p \oplus q$ = היום יום שלישי או יורד גשם (אבל לא שניהם!)

בעזרת הקשרים אפשר לבנות מן הטענות האטומיות פסוקים לוגיים מורכבים. למשל: $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$. אם תתרגמו את הביטוי לעברית תוכלו לראות שפסוק זה שקול ל- $p \oplus q$ (מדוע?). מהי "שקילות" נגדיר להלן בצורה מדויקת.

הערה: בלוגיקה מבחינים בין שפה ובין מטא-שפה. שפת הלוגיקה היא הקַשָרים. המטא-שפה היא עברית, או כל שפה אחרת, שבה מדברים על הקַשרים. לפעמים רוצים להשתמש גם במטא-שפה

בקיצורים במקום במילים. מנסים אז להבחין בין הקשרים הלוגיים לבין הקיצורים המתאימים. למשל, גרירה מסמנים במטא-שפה בחץ כפול: $\Longrightarrow$. "וְ" מסמנים ב-"&", "או" כותבים פשוט "or" או "או", ושלילה "not" או "לא". ההבחנה הזאת חשובה בלוגיקה. מכיוון שנושא הקורס אינו לוגיקה, לא תמיד נקפיד על ההבחנה הזאת. לעתים נכתוב $p \to q$ במקום המילים "אם p אז q" (מה שהיה צריך להיכתב בעזרת $\Longrightarrow$).

לשפה העברית (כמו לכל שפה מדוברת אחרת) יש דקדוק, שאומר איך מותר לחבר מילים זו לזו, ויש משמעות, שמחברת אותה למציאות. בדומה גם לפסוקים יש כללי תחביר, שאומרים איך לבנות אותם, ויש "סמנטיקה", שאומרת איך לחבר אותם למציאות. טענה אטומית יכולה להיות אמיתית או שקרית, ותפקידה של הלוגיקה המתמטית אינו לומר איזו משתי האפשרויות נכונה (מתמטיקאים לא מתעניינים בשאלה אם היום יורד גשם). כללי המשמעות אינם אומרים אם הטענות האטומיות נכונות, אלא דבר אחר: בהינתן ערכי האמת של טענות אטומיות שמרכיבות פסוק, כללי המשמעות אומרים אם הפסוק כולו אמיתי או לא.

במקום לומר "אמיתית" נכתוב ליד טענה אטומית "T" $(True)$, ובמקום לומר "שקרית" נכתוב לידה "F" $(False)$. המשמעות של הקשרים הלוגיים מוגדרת על ידי כללים שאומרים מתי פסוק שמכיל אותם מקבל ערך T ומתי הוא מקבל ערך F.

הגדרה: $p \wedge q$ מקבל ערך T אם גם p וגם q מקבלים ערך T.

הגדרנו בכך את המשמעות של הסימן "$\wedge$". שימו לב שזו אינה הגדרה מעגלית, כלומר המושג לא מוגדר בעזרת עצמו. "ו", או "גם", שבעזרתם הגדרנו את ערך האמת של $p \wedge q$, הן מילים בעברית, שאותן אנחנו מבינים. הסימן "$\wedge$" אומנם נקרא בפינו "ו", אבל הוא בסך הכול סימן. יכולנו לקרוא לו גם "מו", וההגדרה שלעיל הייתה אומרת כיצד מוגדרים ערכי האמת של פסוקים שמכילים את הסימן "מו".

הגדרה: $p \vee q$ מקבל ערך T אם לפחות אחד מ-p ו-q מקבלים את הערך T.

במקום להשתמש במילים, נוח יותר לרשום את הכללים האלו בטבלאות, שנקראות **לוחות אמת**.

לוח האמת של $\wedge$ הוא:

q	$\wedge$	p
T	$\boldsymbol{T}$	T
F	$\boldsymbol{F}$	T
T	$\boldsymbol{F}$	F
F	$\boldsymbol{F}$	F

הטבלה הזאת מגדירה את ערך האמת של הפסוק $p \wedge q$ לכל ארבע האפשרויות לערכי אמת של p ושל q. (ארבע אפשרויות, כי p יכולה להיות אמיתית או שקרית, ובכל אחת מן האפשרויות האלה q יכולה להיות אמיתית או שקרית). ארבע האפשרויות האלה מצוינות בארבע השורות, כשערכי האמת של p ושל q מצוינים מתחתיהם. ערך האמת של $p \wedge q$ מוגדר בשורה האמצעית.

לוח האמת של $\vee$:

q	$\vee$	p
T	$\boldsymbol{T}$	T
F	$\boldsymbol{T}$	T

F	$\boldsymbol{T}$	T
F	$\boldsymbol{F}$	F

על פי הלוח הזה, מספיק שאחת הטענות p או q יקבלו ערך T, כדי שהפסוק יקבל ערך T.

לוח האמת של שלילה מצריך רק שתי עמודות, מכיוון ששלילה היא פעולה יונארית - היא פועלת על איבר יחיד :

$\sim$	$\boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{T}$	T
$\boldsymbol{T}$	F

לוח האמת של גרירה :

$\boldsymbol{p}$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{q}$
T	$\boldsymbol{T}$	T
T	$\boldsymbol{F}$	F
F	$\boldsymbol{T}$	T
F	$\boldsymbol{T}$	F

בשורות 3 ו-4 הטענה המורכבת מתקיימת **באופן ריק**. אם מישהו מבטיח לכם שאם היום יום שלישי אז ירד גשם, והיום לא יום שלישי, הוא אינו צריך להוריד גשם כדי לעמוד בהבטחתו. הוא עומד בה בין אם יורד גשם ובין אם לא.

לוח האמת של $\leftrightarrow$:

$\boldsymbol{p}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{q}$
T	$\boldsymbol{T}$	T
T	$\boldsymbol{F}$	F
F	$\boldsymbol{F}$	T
F	$\boldsymbol{T}$	F

במילים אחרות, $\leftrightarrow$ מקבל ערך אמת T אם ורק אם שתי הטענות מקבלות אותו ערך אמת.

הגדרה: שני פסוקים α ו- β נקראים "שקולים" אם לכל הצבה של ערכי אמת למשתנים הלוגיים הם מקבלים אותו ערך אמת, כלומר α מקבל ערך T אם ורק אם β מקבל ערך T.

הערה : שני פסוקים יכולים להיות שקולים גם אם אין בהם בדיוק אותן טענות אטומיות. למשל :

תרגיל: הוכיחו ששני הפסוקים p ו- $p \vee (q \wedge \sim q)$ שקולים.

הגדרה: פסוק נקרא "טאוטולוגיה" אם הוא מקבל ערך T לכל הצבת ערכי אמת לטענות האטומיות שבו.

הערה : בשפה המדוברת טאוטולוגיות הן משפטים ריקים מתוכן, כמו "המים רטובים". פרשני ספורט מתמחים בטאוטולוגיות – "כדי לנצח הקבוצה צריכה להבקיע שערים". יוגי ברה *(Yogi Bera)*, שחקן בייסבול אמריקאי, היה מפורסם בטאוטולוגיות שלו. למשל : "תמיד ידעתי שהשיא הזה יחזיק מעמד עד שישבר".

דוגמה לטאוטולוגיה: $p \to p$. בלוח האמת שלה מתקבל רק T:

p	$\to$	P
T	$\mathbf{T}$	T
F	$\mathbf{T}$	F

השתמשנו כאן במוסכמה שהיא כמעט מובנת מאליה: ש**אם משתנה לוגי מופיע יותר מפעם אחת בנוסחה, הוא מקבל אותו ערך אמת בכל המופעים שלו**.

עוד דוגמה לטאוטולוגיה:

$$(p \to q) \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$$

הוכחה: נכתוב את לוח האמת של הפסוק. נתחיל מרישום של כל שילובי הערכים האפשריים של p ו- q (כאמור – משתנה לוגי מקבל אותו ערך אמת בכל מופע שלו באותה נוסחה):

p	$\to$	q	$\leftrightarrow$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T		T			T			T
T		F			T			F
F		T			F			T
F		F			F			F

נשלים את הטבלה בשלבים. הערך של הנוסחה מתקבל מתחת לקשר האחרון שמופיע בבניית הנוסחה, שהוא $\leftrightarrow$:

p	$\to$	q	$\leftrightarrow$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$\sim$	$q)$
T	T	T	$\mathbf{T}$	T	T	F	F	T
T	F	F	$\mathbf{T}$	F	T	T	T	F
F	T	T	$\mathbf{T}$	T	F	F	F	T
F	T	F	$\mathbf{T}$	T	F	F	T	F

ודאו שאתם מבינים מהוא הסדר הנכון שבו יש למלא את הלוח (הסדר קשור לקדימות אופרטורים ולסוגריים בביטוי). העמודה שמתאימה לסימן האחרון בפסוק $\leftrightarrow$ היא כולה T,

שפירושו שהפסוק מקבל ערך T לכל הצבה של ערכי אמת למשתנים p ו-q.

הערה: חשבו על משמעות הפסוק ותבינו מדוע הוא נכון. הוא "אומר" ש- $p \to q$ נכון אלא אם כן

p נכון ו- q לא נכון. זוהי אכן משמעות הגרירה. האמת היא שהפסוק אינו "אומר" כלום, אלא שהגדרנו את ערכי האמת שלו כך שתהיה להם משמעות של גרירה.

ראינו כי כל פסוק נוכל לייצג בעזרת לוח אמת, אך האם גם הכיוון ההפוך הוא נכון? האם כל לוח אמת נוכל תמיד לייצג בעזרת פסוק?

התשובה היא כן!

בואו נעשה ניסיון על כמה לוחות פשוטים. האם תוכלו לנחש איזה פסוק יכול לתאר את טבלת האמת הבאה:

p	?	q
T	T	T
T	T	F
F	F	T
F	F	F

בלוח זה מתקבל הערך T כאשר $p=T$ ורק כאשר $p=T$, ונראה כאילו אין חשיבות לערכו של q כלל וכלל. לא קשה ליראות כי זה לוח האמת של הפסוק p.

ננסה לוח קצת יותר קשה:

p	?	q
T	F	T
T	T	F
F	F	T
F	T	F

בלוח זה מתקבל ערך T כאשר $q=F$ רק כאשר $q=F$, וכאן נראה כי ערכו של p כלל לא משפיע. זה נראה כמו לוח האמת של $\sim q$, וזה אכן כך.

בואו ננסה לנחש לוח יותר מסובך:

p	?	q
T	F	T
T	T	F
F	F	T
F	F	F

בלוח זה מתקבל הערך T כאשר $p=T$ וגם $q=F$, ורק במקרה זה. תנאי זה נראה לנו מוכר... אם זה היה המקרה היחיד בו מתקבל F, אזי זה היה לוח האמת של $p \rightarrow q$, אך במקרה שלנו המצב הוא בדיוק הפוך למצב זה, משמע, זה הינו לוח האמת של $\sim(p \rightarrow q)$.

עד עכשיו יכולנו לנחש פסוקים בהיסתמך על ההיכרות עם טבלאות דומות, אך האם נוכל למצוא פסוק מתאים גם ללא ניחוש? נסתכל על האמת הבא:

p	?	q
T	F	T
T	T	F
F	T	T
F	T	F

נכון הוא הדבר כי נוכל לנחש פסוק גם ללוח זה, אך נתעקש לעבוד בצורה שיטתית הפעם.

נבדוק מהם המקרים בהם מתקבל ערך T בלוח האמת:

- $P=T$ וגם $q=F$
- $P=F$ וגם $q=T$
- $P=F$ וגם $q=F$

אנו יודעים כי צריך שלפחות אחד מתנאים אלו ייתקיים על מנת שיוחזר ערך T. ומספיק שלפחות אחד מהתנאים יתקיים על מנת שיוחזר ערך T. הקשר המוכר לנו שיודע להחזיר T כאשר, ורק כאשר, לפחות אחד מהתנאים מתקיים היינו קשר $\vee$.

ולכן, פסוק המתאר את הטבלה יכול להיות $(p\wedge \sim q)\vee(\sim p\wedge q)\vee(\sim p\wedge \sim q)$.

האם מצאנו דרך שיטתית שיכולה לתאר כל לוח אמת בעזרת פסוק? התשובה היא כן. בואו ננסה לפתח פסוק לטבלה מסובכת יותר, טבלה המתארת נוסחא a, עם 3 פסוקים אטומיים:

p	q	r	a
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

לפי השיטה, נוכל לבנות נוסחא המתארת את a:

$$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge \sim r)\vee(p\wedge \sim q\wedge \sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge \sim q\wedge r)$$

נשים לב כי מבנה כללי של פסוק המתקבל משיטה זו, כולל פסוקיות המופרדות בקשרי $\vee$, פסוקיות אלו נקראות פסוקיות *clause*.

נוסחא זו נקראת נוסחאת *DNF* (*Disjunctive Normal Form*) לתיאור לוח האמת.

נשים לב שנוכל להישתמש בחוקי דה-מורגן על מנת לשנות את מבנה הנוסחא:

$$\begin{aligned}
&(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge \sim r)\vee(p\wedge \sim q\wedge \sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge \sim q\wedge r)=\\
&\sim\sim((p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge \sim r)\vee(p\wedge \sim q\wedge \sim r)\vee(\sim p\wedge q\wedge r)\vee(\sim p\wedge \sim q\wedge r))=\\
&\sim(\sim(p\wedge q\wedge r)\wedge\sim(p\wedge q\wedge \sim r)\wedge\sim(p\wedge \sim q\wedge \sim r)\wedge\sim(\sim p\wedge q\wedge r)\wedge\sim(\sim p\wedge \sim q\wedge r))=\\
&\sim((\sim p\vee \sim q\vee \sim r)\wedge(\sim p\vee \sim q\vee r)\wedge(\sim p\vee q\vee r)\wedge(p\vee \sim q\vee \sim r)\wedge(p\vee q\vee \sim r))=\\
&\sim((p\wedge \sim q\wedge r)\vee(\sim p\wedge q\wedge \sim r)\vee(\sim p\wedge \sim q\wedge r))=\\
&\sim(p\wedge \sim q\wedge r)\wedge\sim(\sim p\wedge q\wedge \sim r)\wedge\sim(\sim p\wedge \sim q\wedge r)=\\
&(\sim p\vee q\vee \sim r)\wedge(p\vee \sim q\vee r)\wedge(p\vee q\vee \sim r)
\end{aligned}$$

כפי שניתן לראות המבנה הנ"ל קצרה יותר, וגם ניתן להסיברו מבחינה הגיוניות – במקום לבנות נוסחא המחזירה T אם"ם מתקיימים התנאים המדוייקים לכך, נבנה נוסחא המחזירה F אם"ם מתקיימים לכך – נסו זאת בעצמכם!

נוסחא במבנה זה נקראת (CONJUCTIVE NORMAL FORM) CNF.

תרגילים:

1. הוכיחו ששני פסוקים α ו- β הם שקולים אם ורק אם הפסוק $\alpha \leftrightarrow \beta$ הוא טאוטולוגיה.
2. אילו מן הפסוקים הבאים הם טאוטולוגיות: $(p \to \sim p) \to \sim p$, $(p \to q) \to (q \to p)$

הנה עוד טאוטולוגיה: $\sim\sim p \leftrightarrow p$

הוכחה:

~	~	p	↔	p
T	F	T	**T**	T
F	T	F	**T**	F

הטאוטולוגיה הבאה נקראת חוק דה מורגן: $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

הוכחה:

~	(p	∧	q)	↔	~	p	∨	~	q
F	T	T	T	**T**	F	T	F	F	T
T	T	F	F	**T**	F	T	T	T	F
T	F	F	T	**T**	T	F	T	F	T
T	F	F	F	**T**	T	F	T	T	F

למעשה יש שני "חוקי דה מורגן". השני הוא: $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

תרגילים:

1. הוכיחו שגם חוק דה מורגן השני הוא טאוטולוגיה.

(רמז: ניתן להיעזר בחוק דה מורגן הראשון, ולהפעיל שלילה על שני האגפים.)

2. כתבו את חוקי דה מורגן ליותר משני פסוקים אטומיים.
3. הראו שהפסוקים $p \to q$ ו- $\square(p\wedge \quad q)$ שקולים זה לזה. בנוסף להוכחה, תנו הסבר אינטואיטיבי.
4. האם הפסוקים $p \to (q \to r)$ ו- $(p \to q) \to r$ שקולים זה לזה?
5. האם הפסוק $(p \wedge \square q) \to (r \vee p)$ הוא טאוטולוגיה? נסו לענות על שאלה זו ללא בניית טבלת אמת.
6. מצאו פסוק שמופיעים בו שלושה פסוקים אטומיים: p, q ו- r, והוא מקבל ערך T רק בשלוש השורות הבאות:

p	q	r
T	F	F
F	T	F
F	T	T

(ומקבל ערך F בשאר השורות).

7. הוכיחו שלכל פסוק ניתן למצוא פסוק שקול שמופיעים בו (בנוסף לפסוקים האטומיים) רק הקשרים $\wedge$ ו- □. מצאו פסוק כזה השקול לפסוק $p \to (q \vee r)$.

8. הוכיחו שלכל פסוק ניתן למצוא פסוק שקול שמופיעים בו רק הקשרים $\wedge$ ו- $\to$. מצאו פסוק כזה השקול לפסוק $p \wedge (q \vee r)$.

9. נגדיר קשר NOR, המסומן ב- $\downarrow$, ע"י $p \downarrow q = □(p \vee q)$. הוכיחו שלכל פסוק ניתן למצוא פסוק שקול שמופיעים בו רק הקשרים $\downarrow$.

10. הוכיחו שלא קיים פסוק השקול ל- □p שמופיעים בו רק הקשרים $\wedge$ ו- $\vee$.

11. יהי α פסוק שמופיעים בו רק הקשרים $\leftrightarrow$.

[למשל, $(p \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((q \leftrightarrow r) \leftrightarrow q)$.]

הוכיחו: פסוק מסוג זה הוא טאוטולוגיה אם ורק אם כל פסוק אטומי מופיע בו מספר זוגי של פעמים.

כמתים

הקַשרים הלוגיים אינם מספיקים לבטא את כל סוגי הטענות המתמטיות. נניח שנתונה לנו קבוצה של 3 מספרים טבעיים, נאמר a, b ו-c, ואנחנו רוצים לומר שלפחות אחד מהם זוגי. אפשר אז לכתוב 3 משתנים לוגיים, נאמר e_a, e_b ו- e_c, שמציינים את הזוגיות של המספרים בהתאמה (e אמור לציין "*even*") ולכתוב: $e_a \vee e_b \vee e_c$. אבל אם נתונה לנו קבוצה של אינסוף מספרים טבעיים לא נוכל לעשות זאת – נוסחה היא על פי הגדרתה סופית, ואי אפשר לכתוב "או" של אינסוף משתנים לוגיים.

כדי לטפל במקרים אינסופיים המציאו סימנים לוגיים שנקראים "כמתים" *(quantifiers)*. את הסימון להם הכניס המתמטיקאי האיטלקי שפעל בסוף המאה התשע עשרה, *Peano*. יש שני כמתים: $\exists$, שמציין "קיים" (אתם יכולים לנחש את מקור הסימון: זוהי האות הראשונה של $\exists$*xists*). הוא מציין "או", משום ש- $\exists x\, P(x)$ אומר "או שהאיבר הראשון מקיים P, או שהאיבר השני מקיים P, או האיבר השלישי...." הכמת השני, שנקרא "הכמת האוניברסלי" הוא $\forall$, האות הראשונה של $\forall$*ll* (למעשה, של $\forall$*lles*. בגרמנית *Alles* פירושו "כולם") והוא מבטא "לכל". הוא המקביל של "ו", משום ש- $\forall x\, P(x)$ אומר "גם האיבר הראשון מקיים P, וגם האיבר השני..."

הכמתים דורשים משתנים. הנה, למשל איך נבטא שכל איברי קבוצת מספרים נתונה S הם זוגיים. מייד נלמד שאת יחס השייכות של איבר לקבוצה מסמנים ב- $\in$. נבחר אות שמציינת את תכונת הזוגיות, נאמר $P(x)$. הנוסחה שמבטאת "כל איברי S הם זוגיים" תיכתב אז כך:

$$(\forall x \in S)\, P(x)$$

(הסוגריים הם רק לשם בהירות). את הנוסחה המבטאת "קיים איבר זוגי ב-S" נכתוב אז:

$$(\exists x \in S)\, P(x)$$

כמו במקרה של פסוקים עם קשרים, צריך לציין מתי נוסחאות עם כמתים מקבלות ערך "אמת" ומתי לא. ההגדרה טבעית. אם נתון פירוש לאות שמציינת תכונה (בדוגמה לעיל P ציינה זוגיות, למשל), הנוסחה $(\forall x \in S)\, P(x)$ נכונה אם כל איברי S מקיים את התכונה P, והנוסחה $(\exists x \in S)\, P(x)$ נכונה אם קיים איבר ב-S שמקיים את P.

לא נכנס לכך יותר לעומק – תעשו זאת במקצוע שנקרא "לוגיקה מתמטית". נכתוב רק את חוק דה מורגן לכמתים:

$$\sim (\exists x \;\; P(x)) \leftrightarrow \forall x \sim P(x)$$

תרגילים:

1. כתבו את חוק דה מורגן השני לכמתים.

2. נניח שהעולם מכיל רק שני איברים, a ו – b. תרגמו את נוסחת דה מורגן לכמתים שכתובה לעיל ללשון הקַשרים הלוגיים $\wedge$ ו- $\vee$, והראו שזהו בדיוק חוק דה מורגן שמוכר לכם. מה קורה כאשר מדובר במספר סופי גדול מ-2 של איברים?

קבוצות

קבוצה היא אוסף של איברים. זו אינה הגדרה מתמטית (החלפנו מילה לא מוגדרת אחת, "קבוצה", במילה לא מוגדרת אחרת – "אוסף"). למעשה, אין הגדרה מתמטית, משום שזהו מושג בסיסי מדי מכדי להגדירו. אבל אנחנו יודעים איזה דבר במציאות מושג הקבוצה רוצה לתאר – איסוף של איברים יחד, לגוף חדש שכולל את כולם. השפה (סימנים) שבעזרתה נתאר קבוצות והאקסיומות שנבחר ינבעו מן המשמעות הזאת.

יחס השייכות (של איבר לקבוצה) יסומן ב- $\in$. $x \in A$ פירושו שהאיבר x שייך לקבוצה A.

קבוצות יסומנו לרוב באותיות לטיניות גדולות, ואיברים יסומנו לרוב באותיות לטיניות קטנות.

שתי קבוצות מוגדרות כשוות אם הן מכילות בדיוק אותן איברים. כלומר: $S = T$ אם לכל איבר x מתקיים: $x \in T \Leftrightarrow x \in S$.

איך בונים קבוצות?

ניתן לבנות קבוצה על-ידי מניית האיברים שנמצאים בה. מסמנים זאת בעזרת סוגריים מסולסלים, עם פסיקים בין האיברים:

{שמעון פרס, 1, Δ} היא קבוצה שמכילה שלושה איברים - שמעון פרס, המספר 1 ומשולש.

כאשר מונים את איבריה של קבוצה הסדר שבה מונים אותם אינו משנה. למשל:

{שמעון פרס, 1, Δ} = {1, Δ, שמעון פרס}

קבוצה מיוחדת היא הקבוצה הריקה, שאינה מכילה אף איבר. מסמנים אותה כך: $\varnothing$. (זוהי אות באלף בית הדני והנורווגי – אין לבלבל אותה עם האות היוונית ϕ, "פיי", שמבוטאת כ-f.) בסימון הקודם $\{\ \} = \varnothing$. לדוגמה, קבוצת האנשים בעולם שגובהם מעל 3 מטרים היא הקבוצה הריקה.

סימון: עבור קבוצה סופית A, מסמנים ב- $|A|$ את מספר האיברים בקבוצה. למשל $|\{1,2,3\}| = 3$ ו- $|\varnothing| = 0$.

שאלה: כמה איברים יש בקבוצה $\{\varnothing\}$?

תשובה: לא 0, אלא 1. זוהי קבוצה בעלת איבר יחיד, שהוא הקבוצה הריקה. שימו לב שקבוצה יכולה להיות איבר של קבוצה אחרת: $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

סימון: $\mathbb{N}$ מציין את קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$.

שאלה: כמה איברים יש בקבוצה $\{\mathbb{N}\}$?

בדומה לדוגמה הקודמת, זוהי קבוצה בעלת איבר אחד, שהוא $\square$.

תרגיל: מהו $\left|\left\{\varnothing,\left\{\varnothing,\left\{\varnothing\right\}\right\},\left\{\left\{\varnothing\right\}\right\}\right\}\right|$?

תשובה: 3. הקבוצה מכילה את האיברים $\varnothing$, $\left\{\varnothing,\left\{\varnothing\right\}\right\}$ ו- $\left\{\left\{\varnothing\right\}\right\}$.

שימו לב לכך ש- $\left\{\varnothing\right\} \neq \left\{\left\{\varnothing\right\}\right\}$.

בניית המספרים הטבעיים בידי פון-נוימן

סיפרתי לכם שג'ון פון-נוימן הראה שאפשר להגדיר את כל מושגי המתמטיקה בתוך תורת הקבוצות. הנה כיצד הגדיר את המספרים הטבעיים.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \left\{\varnothing\right\} = \left\{0\right\} \\
2 &= \left\{\varnothing,\left\{\varnothing\right\}\right\} = \{0,1\} \\
3 &= \left\{\varnothing,\left\{\varnothing\right\},\left\{\varnothing,\left\{\varnothing\right\}\right\}\right\} = \left\{0,1,2\right\}
\end{aligned}
$$

וכן הלאה...

כל מספר הוא קבוצת הקודמים לו. הדבר נכון גם למספר אפס, משום שקבוצת הקודמים ל-0 היא ריקה.

כאמור, הדרך הראשונה לבנות קבוצה היא למנות את איבריה. זה לא מספיק. בחיים אנחנו בונים את הקבוצות לא רק על ידי מנייה, אלא על פי תכונות. לכל תכונה אנחנו מתאימים קבוצה.

למשל: לתכונה "להיות גבר ישראלי" מתאימה הקבוצה $A = \{x : \text{x גבר בישראל}\}$, ואז שמעון פרס $\in A$.

הערה: יש המעדיפים קו במקום נקודתיים. למשל, הדוגמה לעיל תיכתב כ:

$A = \{x \mid \text{x גבר בישראל}\}$. לכל אחד מן הסימונים מגרעת משלו: נקודתיים אפשר לבלבל עם סימן חילוק, ואילו "|" אפשר לבלבל עם ערך מוחלט, או עם הסימן $a \mid b$, שמציין התחלקות.

דוגמה נוספת: לתכונה "להיות מספר זוגי" מתאימה קבוצת המספרים הזוגיים:

$B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k\}$. (כאן $\mathbb{N}$ מציין את קבוצת המספרים הטבעיים, שבתורת הקבוצות נהוג לכלול בהם גם את 0: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3...\}$. מקור הסימון הוא במילה *natural*, "טבעי".)

למשל, $10 \in B$ ואילו שמעון פרס $\notin B$.

עוד דוגמה: $C = \{x : \text{x קבוצה}\}$ היא קבוצת כל הקבוצות.

אמרתי כדבר מובן מאליו שלכל תכונה מתאימה קבוצה. ההנחה הזאת כה טבעית, שבתחילת ימיה של תורת הקבוצות קיבלו אותה כאקסיומה, שנקראה **אקסיומת הכלילה** *(Axiom of comprehension)*. למעשה, זו אינה אקסיומה אחת, אלא "תבנית אקסיומה", כלומר אינסוף אקסיומות שבנויות כולן על פי אותה תבנית. לכל תכונה *P(x)* מתאימה אקסיומה שאומרת שקיימת הקבוצה *{ x : P(x) }* שמכילה את כל האיברים עבורם התכונה מתקיימת, ורק אותם.
בנוסחה לוגית: לכל תכונה $P(x)$ מתקיים:

$$\exists s \ \forall x (x \in s \leftrightarrow P(x))$$

הנה כמה דוגמאות. אם ניקח את $P(x)$ כנוסחה: $\sim(x = x)$, כלומר האיבר x אינו שווה לעצמו (אחת מן האקסיומות של השוויון היא שכל איבר שווה לעצמו) נקבל קבוצה שאיבר שייך אליה אם ורק הוא אינו שווה לעצמו. כלומר, אף איבר אינו שייך אליה. כך אנחנו מקבלים בעזרת אקסיומת הכלילה את העובדה שקיימת קבוצה ריקה.

הנה עוד דוגמה: $P(x) = \ \forall y(\sim(y \in x))$. זוהי התכונה של קבוצה x, ש"אף איבר אינו שייך ל-x". אילו איברים מקיימים את התכונה הזאת? (חשוב לשים לב: כתבתי "איברים שמקיימים את התכונה", אבל x הוא גם קבוצה. קבוצה יכולה להיות איבר של קבוצה אחרת!) ובכן – על פי הגדרתה, התכונה $P(x)$ משמעה שאין ב-x אף איבר, כלומר x היא הקבוצה הריקה. אם כן, בקבוצה s שמוגדרת על ידי התכונה P נמצאת רק הקבוצה הריקה. כלומר

$$s = \{\varnothing\}$$

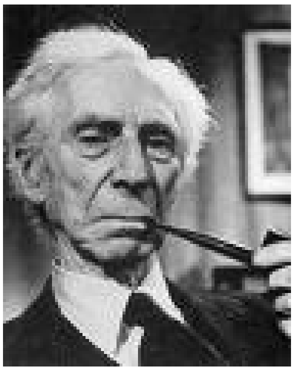
זוהי קבוצה שיש בה איבר אחד – הקבוצה הריקה. שימו לב - s אינה ריקה. יש בה איבר אחד (בקבוצה הריקה יש 0 איברים!)

תרגיל: איזו קבוצה מתקבלת אם לוקחים כ- $P(x)$ את התכונה $x = x$?

אקסיומת הכלילה הופכת את החיים לקלים, משום שניתן לבנות בקלות כל קבוצה שנרצה. אבל כידוע חיים קלים מדי מתנקמים לפעמים בבעליהם. בניית הקבוצות נעשית בדרך זו יותר מדי קלה, וכפי שנראה היא מובילה לסתירות.

פרדוקס ראסל *(BERTARND RUSSEL 1903)*

סתירה מסוג זה נוסחה בידי המתמטיקאי-פילוסוף האנגלי ברטראנד ראסל (מאוחר יותר נראה שקנטור גילה אותה לפניו, וראסל רק ניסח אותה בצורה קצת שונה). ניקח את התכונה הבאה: אי שייכות של קבוצה לעצמה. רוב הקבוצות אינן שייכות לעצמן. למשל, קבוצת הכיסאות אינה שייכת לעצמה, משום שהיא עצמה אינה כיסא. קבוצת בני האדם אינה שייכת לעצמה, וכך גם קבוצת המספרים הזוגיים. אבל יש קבוצות ששייכות לעצמן. למשל, קבוצת כל הקבוצות, או קבוצת כל העצמים ששמם מתחיל ב-ק׳ (היא שייכת לעצמה, משום ששמה מתחיל ב-ק׳).



ברטרנד ראסל, מתמטיקאי ופילוסוף, 1872 - 1970

אם מקבלים את אקסיומת הכלילה, הרי לתכונה הזאת מתאימה קבוצה, שנקרא לה R, שהיא קבוצת כל הקבוצות שאינן שייכות לעצמן. בסימון מתמטי: $R = \{x : x \notin x\}$.

עתה נשאל: האם $R \in R$? כלומר, האם R שייכת לעצמה? על פי הגדרתה של R, לכל איבר x מתקיים $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$. ולכן, בפרט עבור $x = R$ מתקיים $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. זוהי סתירה: טענה אינה יכולה להיות שקולה לשלילתה, משום שהיא או שלילתה נכונים, ומכאן נובע שגם היא וגם שלילתה נכונים, שהיא סתירה. מתברר ש״הגזמנו״ כשבנינו את הקבוצה R. אקסיומת הכלילה, שמאפשרת את בנייתה של R, ליברלית מדי.

ראסל המחיש את הפרדוקס שלו בעזרת סיפור על כפר נידח, שבו גר ספר שנדר נֶדֶר לספר את כל תושבי הכפר שאינם מספרים את עצמם, ורק אותם. הכול הלך כשורה, עד שיום אחד הזדקק הספר עצמו לתספורת. עתה הוא עמד בפני דילמה: לספר את עצמו, או לא? אם יספר את עצמו, אסור לו לספר את עצמו, ואילו אם לא יספר את עצמו, אז לפי הנדר שלו הוא צריך לספר את עצמו. המסקנה דומה לזו שבפרדוקס ראסל, אלא שיש הבדל קטן: זה אינו פרדוקס. הנדר של הספר פשוט אינו ניתן למימוש, ממש כמו נדר לקפוץ לגובה 4 מטרים.

לגזור, או לא לגזור?

לסיפור הזה יש גם נוסח מימי היוונים. מורה לעריכת דין ותלמידו סיכמו ביניהם שהתלמיד ישלם שכר לימוד אם ורק רק אם הוא ינצח במשפט הראשון שלו. כשהתלמיד סיים ללמוד, הוא הודיע למורה חד וחלק שאינו מתכנן לשלם לו את שכר הלימוד בכל מקרה. המורה התרגז, ותבע את התלמיד לדין. מה תהיה תוצאת המשפט? אם המורה ינצח והתלמיד יחויב על-ידי בית המשפט לשלם את שכר הלימוד, אז התוצאה היא שהתלמיד הפסיד במשפט הראשון שלו, ולכן לפי ההסכם שחתם עם המורה, הוא לא מחויב לשלם שכר לימוד. מצד שני, אם התלמיד יזכה, כלומר לא יצטרך לשלם, על פי ההסכם שלו עם המורה הוא חייב לשלם את שכר הלימוד! גם כאן אין פרדוקס אמיתי, אלא רק הנחה בלתי אפשרית. ההסכם בין המורה והתלמיד לא נוסח היטב: לא תמיד הוא ניתן למימוש. במקרה מסוים הוא סותר את עצמו. בדומה, מתברר שאקסיומת הכלילה סותרת את עצמה במקרים מסוימים. אין ברירה אלא לוותר עליה.

אקסיומת הכלילה היא כמו עץ בגן העדן. כדי לבנות קבוצה כל שצריך הוא להגדיר מה רוצים, והאקסיומה מספקת את הקבוצה הרצויה. התברר שזהו גן עדן של שוטים, ופרדוקס ראסל גירש אותנו ממנו. הוא הבהיר שאי אפשר להתפרע בבניית קבוצות. צריך לבנות אותן בזיעת אפיים. אלא שלמזלנו אין צורך לעשות זאת כל פעם מחדש. מישהו כבר עשה את המלאכה עבורנו, ואנחנו יכולים ליהנות מפרי עמלו. האדם הזה היה ארנסט צרמלו *(Ernst Zermelo, 1871-1953)*, שבנה מערכת אקסיומות שמשמשות לבניית קבוצות. מתמטיקאי בשם פרנקל *(Abraham Fraenkel)*, שעלה לארץ בשנות ה-20 וייסד כאן אסכולה מפוארת של תורת הקבוצות, הוסיף למערכת של צרמלו אקסיומה שצרמלו לא שם לב לנחיצותה, והמערכת הזאת נקראת כיום על שם שניהם, צרמלו-פרנקל *(ZF)*. האקסיומות שלהם בונות את הקבוצות "מלמטה". מתחילים משתי קבוצות: הקבוצה הריקה וקבוצת המספרים הטבעיים. מהן בונים את כל הקבוצות בעולם בעזרת כמה אקסיומות שמאפשרות יצירת קבוצות חדשות מקבוצות ישנות. אמונתם של המתמטיקאים בני ימינו היא שב-*ZF* אין סתירה. מכיוון שאפשר לבנות ב-*ZF* את כל המתמטיקה המוכרת לנו, המתמטיקאים מרגישים בה בנוח, כמו עם משקפיים שמן הרגע שהם מונחים על אפך אינך צריך עוד לחשוב עליהם.

האקסיומה הראשונה של *ZF* אינה אקסיומה של בנייה, אלא היא אומרת מתי שתי קבוצות שוות. ואכן מתי? ברור – כאשר יש להן אותן איברים. בנוסחה זה נראה כך:

$$\forall x \forall y \ (y = x \leftrightarrow (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)))$$

במילים: שתי קבוצות x ו- y הן שוות אם ורק אם [כל איבר z בעולם שייך לאחת אם ורק הוא שייך לשנייה] – שפירושו שיש להן בדיוק אותם איברים.

האקסיומות האחרות של *ZF* מדברות כאמור על פעולות שבעזרתן אפשר לבנות קבוצות. הפעולות האלה הן הפעולות הבסיסיות על קבוצות, ומנייתן תשמש אותנו גם להיכרות איתן.

א. קיימת קבוצה ריקה $\varnothing$

ובנוסחה: $\exists z \ (\forall x \ x \notin z)$

במילים: קיימת קבוצה z שאף איבר אינו נמצא בה.

ב. לכל קבוצה יש קבוצה שמכילה אותה כאיבר יחיד

למשל: לפי א, $\varnothing$ היא קבוצה, ומן האקסיומה הזאת נובע שגם $\{\varnothing\}$ היא קבוצה.

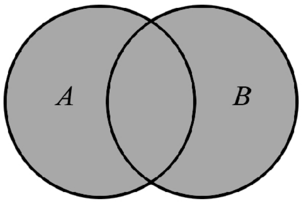
ג. איחוד של קבוצות

האיחוד של הקבוצות A ו-B הוא הקבוצה $A \cup B$ שמכילה את כל האיברים שנמצאים ב-A או נמצאים ב-B (או נמצאים בשניהם): $A \cup B \sqcup \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

האקסיומה המתאימה היא $\forall A \ \forall B \ \exists C \ \left(\ \forall x \ \ x \in C \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B) \ \right)$

את פעולת האיחוד ניתן להמחיש ויזואלית בעזרת דיאגרמת וון ***(Venn)***:

$A \cup B$



בדיאגרמת וון מצוירות הקבוצות כשטחים שמוקפים בעקומים סגורים, וקל אז לראות את התחומים המתקבלים מפעולות על הקבוצות.

דוגמה: המספרים של פון-נוימן הם:

0	1	2	3
$\varnothing$	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$	$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

בבנייה זו מתקיים $3=2\cup\{2\}$, משום ש- $2=\{0,1\}$ ואילו $3=\{0,1,2\}$. באופן כללי הגדרתו של פון נוימן לטבעיים היא אינדוקטיבית: $n=(n-1)\cup\{n-1\}$.

תרגיל: הוכיחו בעזרת אקסיומות ב׳ ו-ג׳ שלכל שני איברים ***x, y*** קיימת הקבוצה *{ x, y}* שמכילה את שניהם ורק את שניהם. בנוסחה:

$\forall x\forall y\exists z\left(\forall a\ \ a\in z\leftrightarrow(a=x)\vee(a=y)\right)$.

למעשה, נזדקק גם לאיחוד של יותר משתי קבוצות. לכל קבוצה של קבוצות קיים האיחוד שלהן, כלומר הקבוצה שמכילה את כל איבריהן. בצורה פורמלית האקסיומה הזאת מנוסחת כך:

$$\forall A\exists B(\forall x(x\in B\leftrightarrow\exists a\in A(x\in a)))$$

במילים: לכל קבוצה A (זוהי קבוצה של קבוצות) קיים האיחוד שלה B, שהיא קבוצה שמכילה בדיוק את האיברים x ששייכים לאיזושהי קבוצה a ב-A.

את האיחוד של קבוצה A מסמנים ב: $\bigcup A$.

תרגילים: 1. תהא A קבוצת כל המספרים הטבעיים של פון-נוימן. מהי $\bigcup A$?

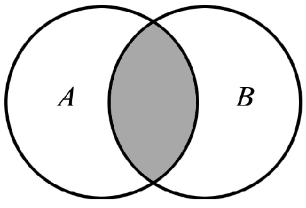
2. תהא B קבוצת כל המספרים הזוגיים בבנייה של פון-נוימן. מהי $\bigcup B$?

ד. חיתוך של קבוצות

החיתוך של A ו-B הוא הקבוצה $A\cap B$ שמכילה את כל האיברים שנמצאים בשתי הקבוצות: $A\cap B\sqcup\left\{x:(x\in A)\wedge(x\in B)\right\}$.

האקסיומה המתאימה (בהמשך נראה שאין בה באמת צורך כאקסיומה, כלומר היא נובעת מן האקסיומות האחרות) היא $\forall A\ \forall B\ \exists C\ \ \forall x\left(\ x\in C\leftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)\ \right)$

$A\cap B$



גם כאן יש נוסח כללי יותר:

$$(\forall A)(A\neq\varnothing\rightarrow(\exists B(\forall x(x\in B\leftrightarrow\forall a\in A(x\in a)))))$$

כלומר לכל אוסף קבוצות לא ריק A יש קבוצה B שמכילה בדיוק את האיברים שנמצאים בכל איברי A. הקבוצה B מסומנת ב- $\bigcap A$.

הסיבה לדרישה ש-A אינה ריקה היא שכל איבר בעולם שייך לחיתוך של הקבוצה הריקה. הרי הוא לא צריך לקיים שום תנאי! אין דרישה שישתייך לשום קבוצה! לו היינו יכולים לבנות את החיתוך של הקבוצה הריקה היינו מקבלים על כן את קבוצת כל האיברים בעולם – עניין שאנו כבר יודעים שהוא מסוכן.

הגדרה: שתי קבוצות שחיתוכן ריק נקראות "זרות".

בשביל להגדיר את הפעולה הבאה נצטרך להגדיר יחס שנקרא "הכלה":

הגדרה: $A \subseteq B$, ובמילים "A מוכלת ב-B", אם כל איבר ב-A שייך ל-B.

בנוסחה: $A \subseteq B$ אם $\forall x \ \ x \in A \rightarrow x \in B$.

אומרים גם ש-"A תת-קבוצה של B" או "A חלקית ל-B".

הערה: יש המשתמשים בסימון $A \subset B$. הסימון "$\subseteq$" מדגיש את העובדה שייתכן גם שוויון. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$.

אם רוצים לציין שמדובר בהכלה של ממש ולא מתקיים שוויון כותבים $B \quad A$.

תרגיל: הוכיחו ש- $A = B$ אם ורק אם $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq A$.

משמעו של התרגיל הזה הוא שכדי להוכיח שוויון של שתי קבוצות צריך להוכיח הכלה דו-כיוונית.

ה. קבוצת תת- הקבוצות

לכל קבוצה B קיימת קבוצה שמכילה את כל תת-הקבוצות של B. בניסוח פורמלי:

$$\forall B \ \exists P \ \left(\forall X \ \ X \in P \leftrightarrow X \subseteq B \right)$$

נעזרנו כאן בסימון ה"הכלה". אם רוצים להשתמש אך ורק בסימונים הבסיסיים, ניתן להחליף את הסימון בנוסחה שמופיעה בהגדרת ההכלה.

סימון: קבוצת תת-הקבוצות של B מסומנת ב- $\mathrm{P}\left(B\right)$. היא נקראת גם "קבוצת החזקה" של B.

דוגמאות:

- $\mathrm{P}\left(\varnothing\right) = \left\{\varnothing\right\}$
- $\mathrm{P}\left(\left\{a\right\}\right) = \left\{\varnothing, \left\{a\right\}\right\}$
- $\mathrm{P}\left(\left\{a,b\right\}\right) = \left\{\varnothing, \left\{a\right\}, \left\{b\right\}, \left\{a,b\right\}\right\}$
- $\mathrm{P}\left(\left\{a,b,c\right\}\right) = \left\{\varnothing, \left\{a\right\}, \left\{b\right\}, \left\{c\right\}, \left\{a,b\right\}, \left\{a,c\right\}, \left\{b,c\right\}, \left\{a,b,c\right\}\right\}$

משפט: $\left|\mathrm{P}\left(S\right)\right| = 2^{|S|}$ (במילים: גודל קבוצת החזקה של קבוצה S הוא 2 בחזקת גודל הקבוצה S)

הוכחה: באינדוקציה על $|S|$.

בסיס האינדוקציה: אם מספר איברי S הוא 0, כלומר S ריקה, אז המשפט מתקיים משום ש:
$\left|P(\varnothing)\right| = \left|\{\varnothing\}\right| = 1 = 2^0 = 2^{|\varnothing|}$.

יהא x איבר כלשהו ב-S. תת הקבוצות של S מתחלקות לשניים: אלה שאינן מכילות את x ואלה שמכילות את x. אלה שמכילות את x הן $\left\{A \cup \{x\} : A \subseteq S \setminus \{x\}\right\}$ שמספרן כמספר הקבוצות בקבוצה $\left\{A : A \subseteq S \setminus \{x\}\right\}$ שאינה אלא $P\left(S \setminus \{x\}\right)$. לפי הנחת האינדוקציה גודלה של $P\left(S \setminus \{x\}\right)$ הוא $2^{|S|-1}$. אלה שאינן מכילות את x הן בדיוק $P\left(S \setminus \{x\}\right)$, ואם כן גם מספרן הוא $2^{|S|-1}$. יחד יש $2^{|S|-1} + 2^{|S|-1}$, כלומר $2^{|S|}$ תת קבוצות של S.

תרגיל: לכל קבוצה A חשבו את $\bigcap P(A)$ ואת $\bigcup P(A)$.

מן האקסיומות שמנינו עד עתה לא נובע שקיימת קבוצה אינסופית. דרך אחת להבטיח זאת מנוסחת באקסיומה הבאה, שמאפשרת את בניית קבוצת המספרים הטבעיים, בדיוק בדרך שבה עשה זאת פון-נוימן:

ו. קיום קבוצה אינסופית

קיימת קבוצה S ש- $\varnothing \in S$, ולכל איבר x ב-S גם הקבוצה $x \cup \{x\}$ נמצאת ב-S.

ז. אקסיומת הכלילה המוחלשת

ולבסוף, נוסח מוחלש של אקסיומת הכלילה (יש לציין שגם בנוסח המוחלש זוהי אקסיומה חזקה, אחת השימושיות ביותר לבנייתן של קבוצות). כזכור, אקסיומת הכלילה אמרה שלכל תכונה $P(x)$ (התכונה אמורה להיות מבוטאת על ידי נוסחה) אפשר לבנות את קבוצת האיברים שמקיימים את התכונה. אקסיומת הכלילה המוחלשת אומרת שאם כבר הצלחנו לבנות קבוצה S, אז לכל תכונה אפשר לבנות את קבוצת איברי S שמקיימים אותה. שימו לב – לא קבוצת כל האיברים בעולם שמקיימים את התכונה, אלא רק איברי S שמקיימים את התכונה.

לכל קבוצה S ולכל תכונה $P(x)$ קיימת הקבוצה $\{x \in S : P(x)\}$.

או בנוסחא: $\forall S, \forall P(x), \exists B \subseteq S, \forall x (x \in S \to (x \in B \leftrightarrow p(x)))$

כמו אקסיומת הכלילה המקורית, אין זו אינה אקסיומה אחת, אלא סכמה שעל פיה בנויות אינסוף אקסיומות. לכל תכונה $P(x)$ (כאמור, הכוונה לנוסחה) צריך לכתוב את האקסיומה הזאת לחוד! (כי אין נוסחה שמאפשרת לנו לדבר על "כל הנוסחאות").

תרגיל: הראו ש-ד' (ה"אקסיומה" שאומרת שלכל קבוצה לא ריקה A קיים $\bigcap A$) אינה נחוצה באמת בתור אקסיומה. הראו שאפשר להסיק אותה מאקסיומת הכלילה המוחלשת. **רמז**: קחו תחילה איבר כלשהו S ב-A (שימו לב – איברי A הם עצמם קבוצות, כך ש-S היא קבוצה), ובחרו תכונה שקבוצת כל איברי S שמקיימים אותה הם בדיוק איברי $\bigcap A$.

<u>פעולת ההפרש הסמטרי:</u>

כפי שזכור לנו, הכרנו את הקשר הXOR, תזכורת:

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$$

גם לקשר זה קיימת פעולה מתאימה על קבוצות, פעולה זו נקראת ההפרש הסימטרי על קבוצות, ונסמנה ב Δ, ובצורה דומה להגדרת הקשר, הגדרת הפעולה היינה:
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, פעולה זו, כפי שניתן להסיק משמה

ומהגדרתה , מוגדרת בצורה סימטרית, ומשמעותה המילולית היינה "כל האיברים שמופיעים במספר <u>אי זוגי</u> של קבוצות".

<u>פונקציה אופיינית של קבוצה</u>

תהא S קבוצה, ותהא A תת קבוצה של S. הפונקציה האופיינית של A היא פונקציה מ-S לקבוצה $\{0,1\}$, שמוגדרת כך:

$$\chi_A(s)=\begin{cases}1 & \text{if } s\in A\\ 0 & \text{if } s\notin A\end{cases}$$

מקור הסימון χ הוא במילה "חרקטר" היוונית, שמשמעה "אופי". χ היא ה"חית" היוונית.

שימו לב לכך שהקבוצה S אינה מוזכרת בפונקציה האופיינית, אף כי גם היא חלק מן המשחק. אנו מניחים שידוע מי היא S.

דוגמה:

$$\begin{array}{llllll} S=\{1,2,3,4,5\} \\ A=\{1,\ \ 3,4\ \ \} \\ S: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \chi_A:(& 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \ \ ) \end{array}$$

כל איבר ששייך ל-A נשלח ל- 1 וכל איבר שאינו שייך ל-A נשלח ל- 0.

במקום פונקציה אפשר לחשוב על וקטור. לא כל המרצים למתמטיקה מספרים זאת לתלמידיהם: וקטורים ופונקציות הם היינו הך. וקטור הוא פונקציה מקבוצת הקואורדינטות למספרים. כך למשל $\vec{v}=(\pi,0,17)$ הוא פונקציה שמקיימת $\vec{v}(1)=\pi,\quad \vec{v}(2)=0,\quad \vec{v}(3)=17$. לכן אפשר לראות את χ_A גם כוקטור, שנקרא כמובן **הוקטור האופייני** של A.

כשידועה הפונקציה האופיינית אפשר לשחזר את הקבוצה. למשל לוקטור $\chi_A=(0,0,0,0,0)$ מתאימה הקבוצה הריקה, לוקטור $\chi_A=(1,1,1,1,1)$ מתאימה הקבוצה S כולה, ולוקטור $\chi_A=(0,1,1,0,0)$ מתאימה הקבוצה $A=\{2,3\}$.

הוכחה שנייה לכך ש- $|\mathrm{P}(S)|=2^{|S|}$: מספר וקטורי 0,1 באורך $|S|$ הוא $2^{|S|}$, משום שבכל קואורדינטה בווקטור אפשר לבחור אם שמים 0 או 1. יש שתי אפשרויות לערך הקואורדינטה הראשונה; בכל אחת משתי האפשרויות האלה יש שתי אפשרויות לערך הקואורדינאטה השנייה, וכו'. דרך אחרת לראות זאת היא שוקטורי 0,1 מאורך *n* הם כל המספרים הבינאריים הקטנים מ-2^n, שמספרם (כולל 0) הוא כמובן 2^n.

דוגמאות לפונקציות אופייניות לקבוצות הנוצרות מפעולות קיימות:

ניתן לראות כי את תוצאת הפעולות המוכרות נוכל לתאר בעזרת פונקציות אופיניות, בהסתמך על הפונקציות האופייניות של הקבוצות המקוריות בלבד, ויותר מכך, אף נוכל לייצרן בעזרת נוסחאות. הרי לפניכם דוגמא ספציפית, ולידה הנוסחאות שהסקנו לפיה.

$$\begin{array}{ll} \chi_A:S\to\{0,1\} & \chi_A=(1,0,0,1,1,0) \\ \chi_B:S\to\{0,1\} & \chi_B=(1,0,1,0,1,1) \\ \chi_{A\cup B}(S)=\max(\chi_A(S),\chi_B(S)) & \chi_{A\cup B}=(1,0,1,1,1,1) \\ \chi_{A\cap B}=\min(\chi_A(S),\chi_B(S)) & \chi_{A\cap B}=(1,0,0,0,1,0) \\ \chi_{A\Delta B}=(\chi_A(S)+\chi_B(S))(\text{mod } 2) & \chi_{A\Delta B}=(0,0,1,1,0,1) \end{array}$$

אקסיומת האינסוף

קיימת קבוצה S ש:

א. $\phi \in S$

ב. לכל x, אם $x \in S$ אז גם $\{x\} \in S$

אז: $\phi \in S, \{\phi\} \in S, \{\{\phi\}\} \in S, \ldots$

אקסיומת האיחוד הכללית: (אפשר לאחד מספר כלשהו של קבוצות)

אקסיומה: לכל קבוצה (של קבוצות) A (הערה: בתורת הקבוצות הפורמלית כל קבוצה היא קבוצה של קבוצות) קיימת קבוצה B שהיא האיחוד של A, כלומר: $\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow \exists a \in A, x \in a)$, סימון האיחוד מסומן ב $\cup A$.

תזכורת: $N = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots\} = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \ldots\}$

תרגיל: מהו $\cup N$?

פתרון: $\cup N = N$. (בדקו בעצמכם)

באופן דומה:

$$S^0 = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \ldots\}$$

$\cup S^0 = S^0$.

עוד דוגמא לקבוצה שמקיימת את התנאי באקסיומת האינסוף:

$$S^1 = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \ldots, N, \{N\}, \{\{N\}\}, \ldots\}$$

חיתוך כללי:

משפט: לכל קבוצה A קיימת קבוצה B שנסמן אותה ב $\cap A$ שמקיימת:

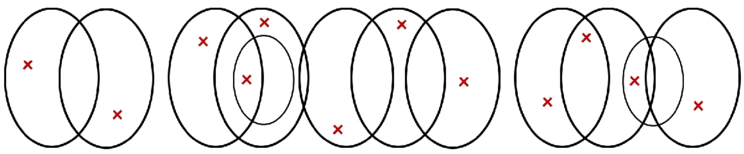
$$\forall x (x \in B \leftrightarrow (\forall a \in A, x \in a))$$

אקסיומת הבחירה

מערכת האקסיומות של ZF מאפשרת את בנייתן של קבוצות חדשות מקבוצות ישנות. לאורך זמן רב לא שמו לב לכך שאחת הדרכים הטבעיות ביותר ליצור קבוצות אינה נובעת מהן. נניח שנתון אוסף של קבוצות לא ריקות. כמעט מובן מאליו הוא שאפשר לבחור איבר אחד מכל קבוצה (לאו דווקא איברים שונים) ולאסוף את האיברים שנבחרו לקבוצה חדשה. אלא ש"כמעט מובן מאליו" אינו אומר שניתן להוכיח זאת מן האקסיומות הנתונות. ואכן, התברר שאי אפשר לעשות זאת. אם רוצים להיות מסוגלים לבנות קבוצות חדשות מקבוצות נתונות בדרך זו, חייבים להוסיף זאת כאקסיומה. קוראים לה "אקסיומת הבחירה", ובקיצור AC (*Axiom of Choice*).

לאקסיומת הבחירה יש נוסחים רבים. ניסוח נוח הוא בעזרת פונקציות. הגדרה פורמלית של פונקציות תינתן רק בהמשך, בינתיים הקורא צריך להסתפק בהבנה אינטואיטיבית של מושג הפונקציה.

אקסיומת הבחירה: לכל אוסף קבוצות לא ריקות $(A_i)_{i\in I}$ קיימת פונקציה $f: I \to \bigcup A_i$ המקיימת $f(i) \in A_i$ לכל $i \in I$.



האינדקסים בקבוצת הקבוצות אינם נחוצים ממש. אפשר לדבר פשוט על קבוצה של קבוצות:

ניסוח שקול: לכל אוסף (קבוצה) A של קבוצות לא ריקות קיימת פונקציה $f: A \to \bigcup A$ שמקיימת $f(a) \in a$ $\forall a \in A$.

הגדרה: פונקציה כזו נקראת "פונקציית בחירה" (מתוך הקבוצה A).

כאמור, אקסיומת הבחירה אינה תלויה באקסיומות האחרות של ZF. ב-1940 הוכיח גדל שאי אפשר להוכיח את שלילתה של AC מן האקסיומות האחרות. ב-1963 הוכיח פול כהן שכאשר צרמלו ניסח את AC כאקסיומה נפרדת האינטואיציה שלו הייתה מוצדקת: אכן אי אפשר להוכיח אותה משאר האקסיומות. המצב הזה מזכיר מקרה אחר מתולדות המתמטיקה, של אקסיומת המקבילים, "האקסיומה החמישית של אוקלידס". האקסיומה הזאת אומרת כי לכל ישר ונקודה מחוץ לו יש קו יחיד שעובר דרך הנקודה ומקביל לישר. במשך זמן רב ניסו להוכיח את אקסיומת המקבילים מאקסיומות גיאומטריות אחרות. באמצע המאה ה-19 הוכיחו בויוי (*Bolyai*), לובצ'בסקי (*Lobachevsky*) וגאוס (*Gauss*), כל אחד בנפרד, שהאקסיומה הזאת אינה תלויה באקסיומות האחרות, במובן זה שאי אפשר להוכיח אותה מהן. הם עשו זאת על ידי בנייה של "עולמות" שבהם כל שאר האקסיומות של הגיאומטריה מתקיימות, בעוד שאקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. בגיאומטריה שהגדירו אין בכלל קווים מקבילים. בהמשך בנה רימן "עולם" שבו

לכל ישר ולכל נקודה שאינה עליו קיימים אינסוף קווים העוברים דרך הנקודה ומקבילים לישר הנתון. כלומר הן קיום המקביל והן יחידותו אינם נובעים מן האקסיומות האחרות של הגיאומטריה.

כאשר מוסיפים ל-ZF את אקסיומת הבחירה מסמנים את אוסף האקסיומות המתקבל ב-ZFC.

תרגילים: 1. מצאו פונקציית בחירה מקבוצת הטבעיים הגדולים מ-0 של פון-נוימן. האם לדעתכם נחוצה אקסיומת הבחירה כדי להוכיח קיום של פונקציה כזו?

2. האם נחוצה אקסיומת הבחירה במקרה שכל הקבוצות השייכות ל-A הן אותה קבוצה B?

עוד פעולות על קבוצות

מכפלה של קבוצות

בהינתן שתי קבוצות A,B המכפלה $A\times B$ שלהן מוגדרת כאוסף הזוגות הסדורים:

$$A\times B=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}$$

זוג סדור הוא זוג שבו חשוב הסדר. זוגות סדורים מסומנים בסוגריים עגולים. חשיבותו של הסדר פירושה ש-$(a,b)\neq(b,a)$, אלא אם כן $a=b$. מי שרוצה לדייק צריך להגדיר מהו זוג סדור במונחים של קבוצות בלבד, ובקבוצות כזכור לא חשוב סדר מניית האיברים. לפדנטים שבינינו, הנה ההגדרה המקובלת (אף כי לא היחידה האפשרית):

$$(a,b)=\{a,\{b,a\}\}$$

אחת האקסיומות של צרמלו (שלא נתעכב עליה, היא עניין של דקויות), אומרת שאין מעגל של הכלות – קבוצה א' ששייכת לקבוצה ב' ששייכת לקבוצה ג'... ששייכת לקבוצה א'. מן האקסיומה הזאת נובע שאין שתי קבוצות x ו-y שמקיימות $x\in y$ וגם $y\in x$. לכן בהינתן קבוצה מהצורה $\{a,\{b,a\}\}$, שיש בה שני איברים, a ו- $\{b,a\}$, יודעים מיהו הראשון (השמאלי) שבין שני האיברים – זהו האיבר ששייך לאחר. הרי לפי האקסיומה של צרמלו, אם אחד מהם שייך לשני, אז השני אינו יכול להיות שייך לראשון. מן הרגע שיודעים שהשמאלי בין בני הזוג הוא a, יודעים מתוך $\{b,a\}$ לפענח גם מיהו בן הזוג השמאלי בזוג הסדור, b.

מי שהנקודות העדינות האלה אינן משמעותיות עבורו (ואכן לא נזדקק להן עוד), יכול להסתפק בדוגמאות לשם הבהרה. קחו למשל את הקבוצה $\{\Delta,\{1,\Delta\}\}$, וראו כיצד מפענחים שזהו הזוג הסדור $(\Delta,1)$.

אקסיומה:

לכל קבוצה A קיימת קבוצהת המכפלה, כלומר, קבוצת כל פונקציות הבחירה מאיברי A. נסמן זאת בXA.
(הערה: אם $\phi\in A$ אז $\times A=\phi$, משמע אין פונקציות בחירה)

תרגיל: כתבו את הזוג הסדור $(1,2)$ כקבוצה, כאשר המספרים 1 ו-2 הם טבעיים של פון-נוימן.

דוגמאות:

1. $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y):x\in\mathbf{R}\wedge y\in\mathbf{R}\}$.

2. תהיינה $A=\{a,b\}, B=\{1,2,3\}$. אזי: $A\times B:\begin{cases}(a,1) & (a,2) & (a,3)\\ (b,1) & (b,2) & (b,3)\end{cases}$

השם "קבוצת המכפלה" בא מן העובדה הבאה

טענה: אם A ו-B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

אפשר לראות זאת בדוגמה שלעיל, שבה $|A|=2, |B|=3$ ו-$|A\times B|=6$.

קל להוכיח את הטענה הזאת, מהגדרת הכפל – לכל איבר ב-A יש בקבוצת המכפלה $|B|$ איברים.

מאוחר יותר נגדיר כך את פעולת הכפל בין גדלים של קבוצות, בין אם סופיות ובין אם אינסופיות. מכפלת גדלי קבוצות תוגדר כגודל של קבוצת המכפלה.

תרגילים: 1*: הוכיחו שקיומה של קבוצת המכפלה נובע מן האקסיומות של ZF. **רמז**: התחילו מקבוצת החזקה של $A\cup B$. השתמשו בשלב כלשהו באקסיומת הכלילה המוחלשת.

2. הראו שזוג סדור של איברים מקבוצה A אפשר לראות כפונקציה מ-$\{1,2\}$ ל-A.

מכפלה של יותר משתי קבוצות

גם קבוצת מכפלה, כמו איחוד, אפשר להגדיר ליותר משתי עוצמות. כדי להבין איך מכלילים את המכפלה של שתי קבוצות, נזכור שמכפלה של שתי קבוצות A ו-B היא אוסף הזוגות המסודרים (a,b), שבהם $a\in A$ ו- $b\in B$. כלומר, זהו מספר האפשרויות לבחור זוג איברים, איבר אחד מכל קבוצה. כלומר זוהי בעצם פונקציית בחירה. נזכיר שבהינתן משפחת קבוצות $i\in I$,A_i, **פונקציית בחירה** היא פונקציה שבוחרת איבר מכל קבוצה A_i. כלומר, זוהי פונקציה $f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i$ המקיימת: $f(i)\in A_i$ לכל $i\in I$.

הגדרה: המכפלה $\prod_{i\in I}A_i$ היא קבוצת כל פונקציות הבחירה של המשפחה.

מכיוון שפונקציה אפשר לראות כוקטור, אפשר להגדיר את קבוצת המכפלה גם כקבוצת כל הוקטורים שהקואורדינטות שלהם נמצאות ב-I, ובמקום ה- i בכל וקטור נמצא איבר מ- A_i.

תרגילים

1. כתבו את כל הוקטורים במכפלה $\{1\}\times\{\Delta,a\}\times\{x,y,z\}$. מהו גודל קבוצת המכפלה?
2. כתבו את כל הוקטורים במכפלה $\prod_{i\in[4]}\{0,1\}$. מהו גודל קבוצת המכפלה?
3. תארו במילים מהם הוקטורים שמופיעים במכפלה $\prod_{i\in\mathbb{N}}\{0,1\}$.

טענה: אקסיומת הבחירה שקולה לטענה שמכפלה של קבוצה כלשהי של קבוצות לא ריקות היא לא ריקה.

הוכחה: תרגיל.

קשרים לוגיים ופעולות ויחסים בין קבוצות

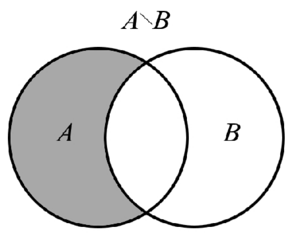
הקֶשֶר בין לוגיקה לתורת הקבוצות הוא בכך שלכל קֶשֶר לוגי מתאימה או פעולה על קבוצות, או יחס בין קבוצות.

למשל, לקשר $p \to q$ מתאים יחס ההכלה $\subseteq$. הסיבה היא שהביטוי $(x \in A) \to (x \in B)$ פירושו כזכור שכל איבר ב-A נמצא ב-B, שמשמעו הוא $A \subseteq B$.

לקשרים האחרים מתאימות פעולות:

הפרש בין קבוצות

בהגדרה פורמלית: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge \sim(x \in B)\}$



ח. משלים של קבוצה

בהינתן קבוצה S ותת–קבוצה שלה A, מסמנים לפעמים $S \setminus A = A^C$ (האות c היא האות הראשונה של *complement*, המילה האנגלית ל"משלים"). בכתיבה זו אין מציינים מי היא S: מניחים שזהותה ידועה.

תרגילים: 1. בטאו את את χ_{A^C} בעזרת χ_A. (פתרון: $\chi_{A^C} = 1 - \chi_A$).

2. לאיזה קשר לוגי מתאימה פעולת ההשלמה?

3. היעזרו בתרגיל הקודם ובחוקי דה מורגן כדי לכתוב בצורה שונה את $(A \cap B)^C$ ואת $(A \cup B)^C$.

4. האם נכון ש- $\mathcal{P}(A)^C = \mathcal{P}(A^C)$? האם אחד האגפים מוכל בהכרח באגף האחר?

הפרש סימטרי

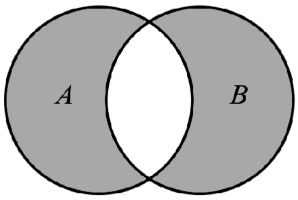
לפעולה הבאה מוקדש פרק נפרד, משום שהיא בעלת תכונות מוצלחות במיוחד: פעולת ההפרש הסימטרי בין שתי קבוצות. היא מתאימה לקשר הלוגי "קסור", כלומר "או אבל לא ו".

ההגדרה הפורמלית היא :
$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$= (A \setminus B) \cup (A \setminus B)$$

כלומר : $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \sim (x \in A \wedge x \in B)$

שפירושו : $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A) \oplus (x \in B)$.

$A \triangle B$



פעולת ההפרש הסימטרי היא פעולה של חבורה קומוטטיבית, שפירושו שהיא מקיימת ארבע תכונות :

1. $A \triangle B = B \triangle A$ – קומוטטיביות
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ – אסוציאטיביות

ההוכחה באמצעות דיאגרמת וון (ראו משמאל). האיברים שנמצאים ב- $(A \triangle B) \triangle C$ הם בדיוק האיברים שנמצאים במספר אי-זוגי של קבוצות, ואותו דבר נכון לאיברי $A \triangle (B \triangle C)$. בינתיים היווכחו בעובדה הזאת על ידי בדיקה. יותר מאוחר נוכיח את העובדה הזאת בצורה פשוטה.

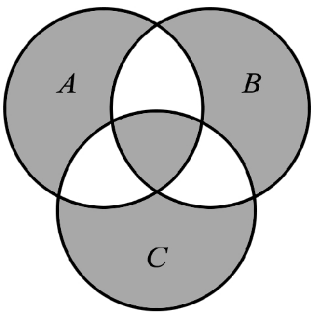
3. קיום איבר אדיש, הלא הוא הקבוצה הריקה. הפעלת הקבוצה הריקה על כל איבר אינה משנה אותו, כלומר $A \triangle \varnothing = A$.
4. לכל איבר A יש איבר הופכי, שהפעלתו על A נותנת את האיבר האדיש. במקרה זה האיבר ההופכי פשוט מאוד – זהו האיבר עצמו. כלומר $A \triangle A = \varnothing$.

ארבע התכונות האלה אומרות שקבוצת תת הקבוצות של קבוצה נתונה, עם פעולת ההפרש הסימטרי, היא **חבורה**. חבורה היא קבוצה עם פעולה אסוציאטיבית, שיש בה איבר שהפעלתו על כל איבר x אינה משנה את x (הוא נקרא "איבר אדיש"), ולכל איבר x יש הופכי, כלומר איבר שהפעלתו על x נותנת את האיבר האדיש. הדוגמה הקלסית היא □, קבוצת המספרים השלמים, עם פעולת החיבור. האיבר האדיש הוא כמובן 0 (חיבורו לכל איבר אינו משנה את האיבר) וההופכי של x הוא $(-x)$.

תרגיל: לכל אחת מן הקבוצות הבאות עם פעולות קבעו אם היא חבורה או לא :

א. □, עם פעולת החיבור. ב. □, עם פעולת הכפל. ג. $\{0\} \setminus$ □, עם פעולת הכפל. ד. קבוצת הרציונליים החיוביים, עם פעולת הכפל.

$A \triangle B \triangle C$



(תשובה : התשובה היא "כן" בכל הסעיפים, פרט ל-ב')

כלל הצמצום

בחבורות יש תכונה שנקראת "צמצום". נראה זאת בדוגמה שלנו. העובדה שבפעולת ההפרש הסימטרי אפשר לצמצם משמעה שאם $A \triangle B = A \triangle C$ אז $B = C$. כדי לראות זאת, הפעילו על שני אגפי השוויון $A \triangle B = A \triangle C$ הפרש סימטרי עם A. נקבל: $A \triangle (A \triangle B) = A \triangle (A \triangle C)$. בעזרת האסוציאטיביות נקבל מכך

$(A \triangle A) \triangle B = (A \triangle A) \triangle C$, ומכיוון ש- $A \triangle A = \varnothing$ נקבל $\varnothing \triangle B = \varnothing \triangle C$, שבעזרת תכונה ד' לעיל נותן לנו $B = C$.

תכונת הצמצום אינה מובנת מאליה. למשל,בפעולת האיחוד אין צמצום. העובדה ש- $A \cup B = A \cup C$ אינה גוררת ש- $B = C$.

תרגיל: מצאו דוגמה שמראה את הטענה האחרונה.

תרגיל: מצאו קבוצה עם פעולה אסוציאטיבית ועם איבר אדיש, שנכון בה כלל הצמצום אבל לא לכל איבר יש בה הופכי. (רמז: תלמיד כיתה א' מכיר דוגמה מעין זו היטב!)

תכונת הקומוטטיביות של ההפרש הסימטרי (תכונה 1) אינה הכרחית על-מנת שהמבנה ייקרא חבורה. חבורה קומוטטיבית נקראת גם **חבורה אבלית** (על שמו של המתמטיקאי הנורווגי *Abel*) ואתם כבר מכירים אחת כזו – המספרים השלמים עם פעולת החיבור.

דוגמה נוספת לחבורה: $\mathbf{Z}_2 = \{0,1\}$ כאשר הפעולה היא חיבור עם שארית מ-2:

$$0+0=0$$
$$0+1=1+0=1$$
$$1+1=0$$

עוד דוגמה: $\mathbf{Z}_2^5$ – קבוצת הוקטורים מאורך 5 שאיבריהם הם 0, 1. הפעולה היא חיבור רכיב-רכיב עם שארית מ-2. למשל:

$$(0,1,1,0,1)+(0,0,0,0,0)=(0,1,1,0,1)$$
$$(0,1,1,0,1)+(0,1,1,0,1)=(0,0,0,0,0)$$

אנחנו רואים כי ההפכי של וקטור $\vec{x}$ הוא $\vec{x}$ בעצמו.

כל זה אמור להזכיר לכם משהו: וקטור אופייני של קבוצה. ואכן, וקטורי 0,1 עם חיבור מודולו 2 ("מודולו" פירושו "שארית") אינם אלא הקבוצות, עם הפרש סימטרי. שניהם תיאורים שונים לאותו דבר. ההתאמה בין השניים ניתנת בטענה הבאה:

טענה: עבור שתי תת קבוצות A ו-B של S מתקיים:

$$\chi_A + \chi_B = \chi_{A \triangle B}$$

כאשר הפעולה היא חיבור עם שארית מ-2 כפי שהוגדרה לעיל.

הוכחה: החיבור הוא חיבור וקטורים מודולו 2. לכן איבר בוקטור $\chi_{A \triangle B}$ יהיה 1 אם ורק אם יש 1 במקום המתאים באחד מהווקטורים χ_A ו- χ_B, אבל לא בשניהם. כזכור, המספר 1 בווקטור האופייני משמעו שהאיבר נמצא בקבוצה, ואכן האיבר המתאים נמצא ב- $A \triangle B$ אם ורק אם האיבר נמצא בדיוק באחת מהקבוצות A ו-B.

מסקנה 1: ההפרש הסימטרי אסוציאטיבי.

הוכחה: מכיוון שהפרש סימטרי אינו אלא חיבור מודולו 2 (לכל איבר לחוד), ופעולת החיבור מודולו 2 היא אסוציאטיבית (הדבר נובע מכך שחיבור רגיל הוא אסוציאטיבי), הרי גם ההפרש הסימטרי היא פעולה אסוציאטיבית.

הנה הטיעון הזה בצורה מפורשת. צ.ל.: $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$. כמובן, לשם כך מספיק להוכיח ש- $\chi_{A\triangle(B\triangle C)}=\chi_{(A\triangle B)\triangle C}$. על פי מה שהראינו מתקיים:

$$\chi_{A\triangle(B\triangle C)}=\chi_A+\chi_{B\triangle C}=\chi_A+(\chi_B+\chi_C)=(\chi_A+\chi_B)+\chi_C=\chi_{A\triangle B}+\chi_C=\chi_{(A\triangle B)\triangle C}$$

(השוויון השלישי משמאל הוא האסוציאטיביות של החיבור עם שארית מ-2). בכך סיימנו את ההוכחה.

הנה שימוש נחמד להפרש הסימטרי – הוכחה של טענה קומבינטורית (הקומבינטוריקה עוסקת בקבוצות סופיות):

מסקנה 2: מספר תת-הקבוצות הזוגיות של קבוצה לא ריקה שווה למספר תת-הקבוצות האי-זוגיות שלה.

דוגמה: תת-הקבוצות הזוגיות של $\{a,b,c,d\}$ הן:

$$\varnothing,\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,c,d\}$$

יש 8 כאלה, שהן מחצית ממספר תת הקבוצות הכולל.

להוכחה נזדקק ללמה (טענת עזר) הפשוטה הבאה:

למה: הפרש סימטרי של שתי קבוצות אי זוגיות הוא זוגי. הפרש סימטרי של קבוצה אי זוגית וקבוצה זוגית הוא אי זוגי.

הוכחה: הלמה נובעת מן השוויון שהוכחנו, ש- $\chi_A+\chi_B=\chi_{A\triangle B}$, מן העובדה שקבוצה A היא זוגית אם ורק אם ב- χ_A יש מספר זוגי של 1-ים, ומן העובדה שבחיבור מודולו 2 מתקיים 1+1=0, 1+0=1. השלימו בבקשה את הפרטים.

תרגיל: עקבו אחרי ההוכחה הבאה, וגלו היכן אנחנו משתמשים בעובדה שהקבוצה שבה אנו עובדים אינה ריקה.

הוכחה למסקנה: כדי להראות שמספר האצבעות ביד ימין שלכם שווה למספר האצבעות ביד שמאל, אינכם צריכים לספור את האצבעות בכל יד: מספיק שתציבו את שתי הידיים זו מול זו. הדבר נותן התאמה בין שתי קבוצות האצבעות, שבה לכל אצבע ביד ימין מתאימה בדיוק אצבע אחת ביד שמאל. התאמה כזו נקראת "בייקציה" (בהמשך נגדיר את המושג הזה במפורט יותר).

נוכיח את הטענה על ידי מציאת בייקציה קבוצת תת הקבוצות הזוגיות וקבוצת תת הקבוצות האי-זוגיות. ניקח תת-קבוצה כלשהי A בגודל אי-זוגי. לכל קבוצה זוגית E נתאים את הקבוצה $E\triangle A$. לפי הלמה $E\triangle A$ היא אי-זוגית. כעת נראה כי לכל קבוצה אי-זוגית X מתאימה קבוצה זוגית E כך ש- $A\triangle E=X$. ואכן, אפשר לקחת $E=A\triangle X$. לפי הלמה E זוגית, ומתקיים:

$$A\triangle E=A\triangle(A\triangle X)=(A\triangle A)\triangle X=\varnothing\triangle X=X$$

נרצה גם להראות שההתאמה הזו היא **חד-חד-ערכית**. דהיינו, שאין שתי קבוצות שונות E_1,E_2 כך שעבור שתיהן נקבל את אותה תוצאה X. הדבר נובע מחוק הצמצום, שאומר שאם $A\triangle E_1=A\triangle E_2$ אז $E_1=E_2$.

אמרנו שלכל קשר לוגי מתאים יחס בין קבוצות, או פעולה. משום כך לכל טאוטולוגיה מתאימה זהות בתורת הקבוצות. למשל לטאוטולוגיה $p \to p$ מתאימה הזהות $A \subseteq A$. לטאוטולוגיה

$$(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

(זהו אחד מחוקי הפילוג של הקשרים הלוגיים) מתאימה הזהות:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

תרגילים:

1. הוכיחו את הזהות האמורה בין הקבוצות בעזרת הטאוטולוגיה. הראו זאת גם בדיאגרמת ון.

2. לכל אחת מן הטאוטולוגיות הבאות כתבו את הזהות המתאימה בתורת הקבוצות:
   א. $(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (חוק הפילוג האחר – אגב, הוכיחו שהוא טאוטולוגיה!)
   ב. $\sim\sim p \leftrightarrow p$
   ג. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
   ד. $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \wedge \sim (p \wedge q))$

3. לכל אחת מן הטענות הבאות על קבוצות (שכולן נכונות תמיד) כתבו את הטאוטולוגיה המתאימה:
   א. $A \subseteq A \cup B$
   ב. $A \cap B \subseteq B$
   ג. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$
   ד. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

הראו כל אחת מן הטענות על הקבוצות גם בעזרת דיאגרמות ון.

4. כתבו חוק דואלי ל-3 ד', שמתאים לחוק דה מורגן השני.

מחלקות

לפעמים נרצה לדבר גם על אוספים שאינם קבוצות. למשל – על כל הקבוצות כולן. ראינו שהתייחסות לאוסף כזה כאל קבוצה עלולה להוביל לצרות. אי אפשר לקרוא לאוסף כזה "קבוצה", ואי אפשר לבצע עליו פעולות, כמו לקחת את קבוצת החזקה שלו או לכפול אותו באוסף אחר. ובכל זאת, מותר לדבר על האיברים, ומותר להגדיר את האוסף בעזרת נוסחה. במקרה כזה נאמר שהאוסף הוא "מחלקה". מחלקה היא אפוא פשוט נוסחה – אנחנו מדברים על האיברים שמקיימים את הנוסחה, שפירושו בעצם לדבר על הנוסחה. נסכם זאת:

הגדרה: ***מחלקה*** היא אוסף של איברים שאפשר להגדירם בעזרת נוסחה.

דוגמאות: 1. הנוסחה $x = x$ מגדירה את כל האיברים בעולם ("קבוצת כל האיברים" היא אותו דבר כמו "קבוצת כל הקבוצות", משום שבתורת הקבוצות אנו מניחים שכל איבר הוא בעצמו קבוצה! תורת הקבוצות מדברת רק על קבוצות).

2. הנוסחה: $\exists y\,(y \in x)$ מגדירה את מחלקת כל הקבוצות הלא ריקות.

3. הנוסחה $x \in x$ מגדירה את אוסף הקבוצות ששייכות לעצמן. האקסיומה של צרמלו שכבר הוזכרה, שאין מעגל של הכלות (קבוצה א' ששייכת לקבוצה ב'... ששייכת לקבוצה א') גוררת בין השאר שקבוצה אינה יכולה להשתייך לעצמה. אם מקבלים זאת כאקסיומה, המחלקה המתאימה היא המחלקה הריקה (שהיא, כמובן, קבוצה). הנוסחה $x \notin x$ מגדירה את מחלקת הקבוצות שאינן שייכות לעצמן. אם מקבלים את האקסיומה האמורה, זוהי מחלקת כל הקבוצות. אם לא מקבלים את האקסיומה האמורה של צרמלו, זוהי מחלקה מסוימת, שעל פי פרדוקס ראסל אכן אינה קבוצה.

יחסים

נעבור כעת לעסוק בסוג מסוים של קבוצות – יחסים. דוגמה ליחס הוא נישואים בין אנשים. לכאורה יחס אינו קבוצה, אלא קשר בין איברים. אבל אם חושבים לרגע רואים שאפשר לראות יחס גם כקבוצה – קבוצה של זוגות. הנה דוגמה: במקום להגדיר מהו היחס "נישואים" אפשר פשוט למנות את כל הזוגות הנשואים, כקבוצה:

M = { (ביבי, שרה), (שרה, ביבי), (סוניה, פרס), (גילה, משה), (אליזבת, פיליפ), ...}

זו הדרך שבה רואים יחסים בתורת הקבוצות – יחס בין זוגות סדורים הוא פשוט אוסף הזוגות הסדורים שמקיימים אותו.

הגדרה יחס בינארי (כלומר בין זוגות) על קבוצה S הוא אוסף של זוגות סדורים של איברים מ-S.

למשל, הקבוצה $\{(s_1,s_2),(s_1,s_3),(s_2,s_4),(s_4,s_3)\}$ היא יחס בינארי.

בצורה דומה מגדירים גם גם **יחסים טרנאריים**, כלומר בין שלשות. למשל, הקבוצה $A=\{(2,3,5),(3,2,5),(7,3,10),(99,2,101),...\}$ היא יחס טרנארי. האם אתם מזהים אותו? בוודאי, עוד מבית-הספר היסודי – זהו יחס החיבור. $(a,b,c)\in A \Leftrightarrow a+b=c$.

ומהו **יחס יונארי** (בין בודדים)? זוהי פשוט קבוצה. למשל:

P = { (ביבי), (משה קצב), (יוסי בניון), (שמעון פרס), ...}

כפי שאפשר להגדיר יחס בינרי על ידי תכונה, גם יחס יונארי אפשר להגדיר על ידי תכונה. למשל, היחס P לעיל אמור להיות קבוצת הגברים בישראל. האם כל קבוצה A אפשר להגדיר באמצעות תכונה? בוודאי: תכונת ההשתייכות ל-A...

הנה עוד דוגמה של יחס בינארי: היחס על המספרים הטבעיים, של חלוקה.

$$D=\{(1,2),(1,10),(3,6),(7,14),(99,198),...\}$$

$$(a,b)\in D \Leftrightarrow a\,|\,b$$

$$\uparrow$$

(מחלק את...)

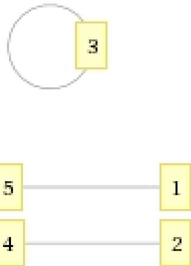
נוכל לייצג את היחס aRb בעזרת הגרף 

.

כאשר היחס סימטרי ($aRb \wedge bRa$) אין צורך בסימון שני חצים, ונוכל לסמנו פשוט 

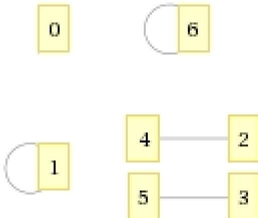
, משמע כאשר הקשת איננה מכוונת (אין חץ) היא בעצם דו כיוונית.

נתבונן לדוגמא ביחס הבא:



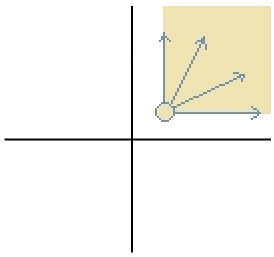
האם אתם מזהים כי גרף זה מתאר את היחס $aRb \Leftrightarrow a+b \equiv 0 (\bmod 6)$.

והגרף



מתאר את היחס $aRb \Leftrightarrow a \cdot b \equiv 1 (\bmod 7)$.

נוכל גם להציג יחסים מורכבים יותר ואף אינסופיים בעזרת גרפים, לדוגמא הגרף



מתאר את היחס $((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow a \geq c \;\&\; b \geq d$.

תכונות מסוימות של יחסים בינאריים הופכות את בעליהן למעניינים יותר מאחרים.

א. רפלקסיביות – כל איבר מתייחס לעצמו.
כלומר, יחס R על קבוצה S נקרא רפלקסיבי אם $\forall s \in S \ \ (s,s) \in R$.
אנטי-רפלקסיביות היא התכונה ההפוכה: אף איבר אינו מתייחס לעצמו.
בנוסחה, יחס R על קבוצה S הוא אנטי-רפלקסיבי אם $\forall s \in S \ \ (s,s) \notin R$

דוגמאות:

- $a \mid b$ על $\mathbf{N}$ (יחס החלוקה) הוא יחס רפלקסיבי, משום שכל מספר מחלק את עצמו.
- $a < b$ על $\mathbf{R}$ הוא אנטי-רפלקסיבי.
- $a \le b$ על $\mathbf{R}$ הוא רפלקסיבי.
- $a = b$ על $\mathbf{R}$ הוא רפלקסיבי.
- יחס יכול להיות לא רפלקסיבי ולא אנטי-רפלקסיבי, למשל, היחס על הקבוצה $S=\{a,b\}$ המוגדר כ: $R=\{(a,a),(a,b)\}$ אינו רפלקסיבי ואינו אנטי-רפלקסיבי.
- $R=\{(x,y):xy \ge 0\}$ על $\mathbf{R}$ הוא יחס רפלקסיבי.
- $T=\{(x,y):xy > 0\}$ על $\mathbf{R}$ - אינו רפלקסיבי כי $(0,0) \notin T$ ואינו אנטי-רפלקסיבי כי $(1,1) \in T$.

ב. סימטריות
יחס R על קבוצה S נקרא סימטרי אם קיומו לזוג גורר את קיומו גם לזוג בסדר ההפוך,
כלומר אם: $\forall x \in S \ \forall y \in S \ \ (x,y) \in R \to (y,x) \in R$
אנטי-סימטריות
יחס R על קבוצה S נקרא אנטי-סימטרי אם $\forall x \in S \ \forall y \in S \ \ (x,y) \in R \to (y,x) \notin R$

טענה: יחס אנטי-סימטרי הוא אנטי-רפלקסיבי.
הוכחה: נניח, בשלילה, שקיים איבר $a \in S$ ש- $(a,a) \in R$. לפי תכונת האנטי-סימטריות, אם נהפוך את סדר האיברים בזוג הזה הם לא יקיימו את היחס R. אבל היפוך הסדר אינו משנה את הזוג, ולכן נובע מכך ש- $(a,a) \notin R$. ההנחה $(a,a) \in R$ גוררת אפוא את שלילתה, ולכן היא לא אפשרית.

נוסח קצת שונה של אנטי-סימטריות, שנקרא "**א-סימטריות**", מרשה את האפשרות שאיבר יתייחס לעצמו:
יחס R נקרא **א- סימטרי** אם הוא אנטי-סימטרי, פרט לכך שמותר בו גם שוויון. כלומר, זוג והיפוכו יכולים שניהם להשתייך ליחס, בתנאי ששני איברי הזוג שווים. ניסוח נוסף: אם א' מתייחס ל-ב', אז ב' לא מתייחס ל-א' אלא אם כן הם שווים (אבל אין הכרח שכל איבר מתייחס לעצמו). בנוסחה: $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \to x = y$.
ברור שכל יחס אנטי סימטרי הוא גם א-סימטרי, אבל לא להפך. הדוגמה הקלאסית היא היחס "$\le$" על המספרים הטבעיים, שהוא א-סימטרי, אבל לא אנטי סימטרי.

תרגיל: הראו את הטענות הבאות

- יחס השוויון, $a = b$ הוא סימטרי, וגם א-סימטרי, אבל לא אנטי-סימטרי.
- יחס הנישואים הוא יחס סימטרי.
- $T = \{(x, y) : xy > 0\}$ הוא יחס סימטרי (הסיבה: כפל הוא פעולה סימטרית).
- יחס האבהות על קבוצת בני האדם, "a אביו של b" הוא יחס אנטי-סימטרי.
- $a > b$ הוא יחס אנטי-סימטרי.
- $a \geq b+1$ הוא יחס אנטי-סימטרי.
- $a \geq b$ אינו סימטרי וגם אינו אנטי-סימטרי. הוא א-סימטרי (בגלל האפשרות של שוויון).

תרגילים: 1. מצאו עוד דוגמה ליחס א-סימטרי שאינו אנטי-סימטרי.

2. הוכיחו שאם R יחס אנטי סימטרי אז היחס R' המוגדר על ידי $(a,b) \in R' \Leftrightarrow (a,b) \in R \ or \ a = b$ הוא א-סימטרי.

3. הוכיחו שאם T יחס א-סימטרי אז היחס R המוגדר על ידי $(a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in T \ \& \ a \neq b$ הוא אנטי סימטרי.

שני התרגילים האחרונים מראים שא-סימטריות ואנטי סימטריות הם כמעט אותו דבר – אפשר לעבור בקלות מן האחד לשני.

ג. טרנזיטיביות

יחס R נקרא טרנזיטיבי אם $\forall a \forall b \forall c \ \left((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \right) \rightarrow \left((a,c) \in R \right)$

דוגמאות ליחסים טרנזיטיביים:

- יחס השוויון
- היחסים "גדול מ-" ו"גדול-שווה ל-"
- היחס "להיות צאצא של"
לעומת זאת, היחס "להיות אח של" הוא לא יחס טרנזיטיבי, כי אני אח של אח שלי, אבל אני לא אח של עצמי.

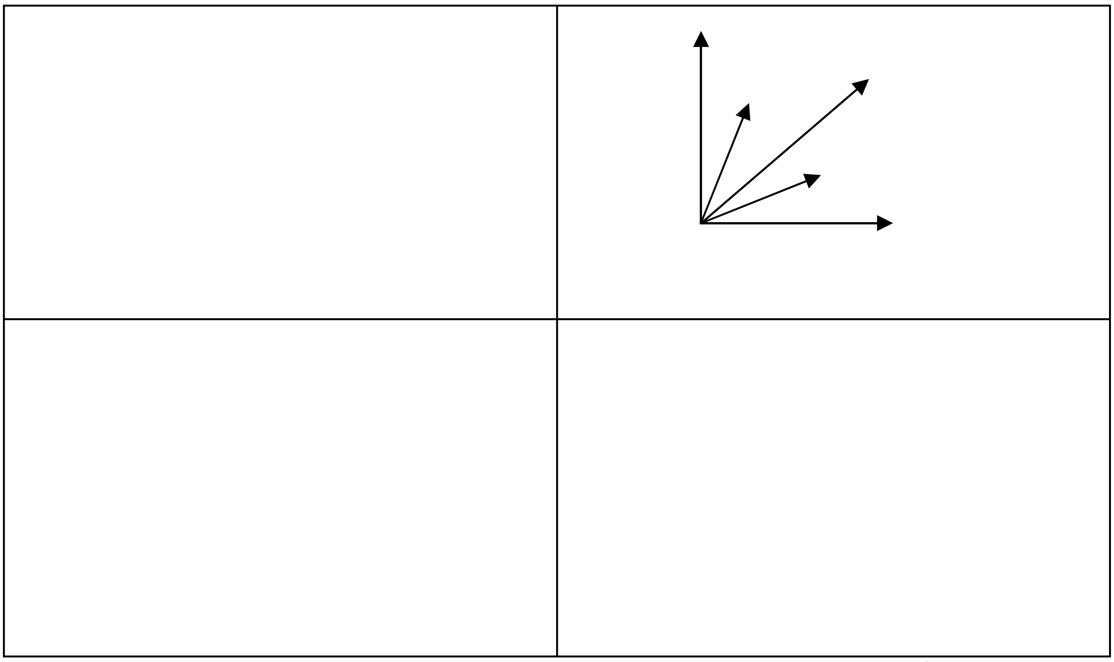
דוגמא:

בואו ננתח את היחס הבא:

$$(a,b),(c,d) \in R^2$$

$$((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow c \geq a \,\&\, d \geq b$$

בעצם מדובר במישור, וכל נקודה נמצאת ביחס עם הנקודות שנמצאות ברביע הראשון יחסית עליה (כולל מקרי קצה):



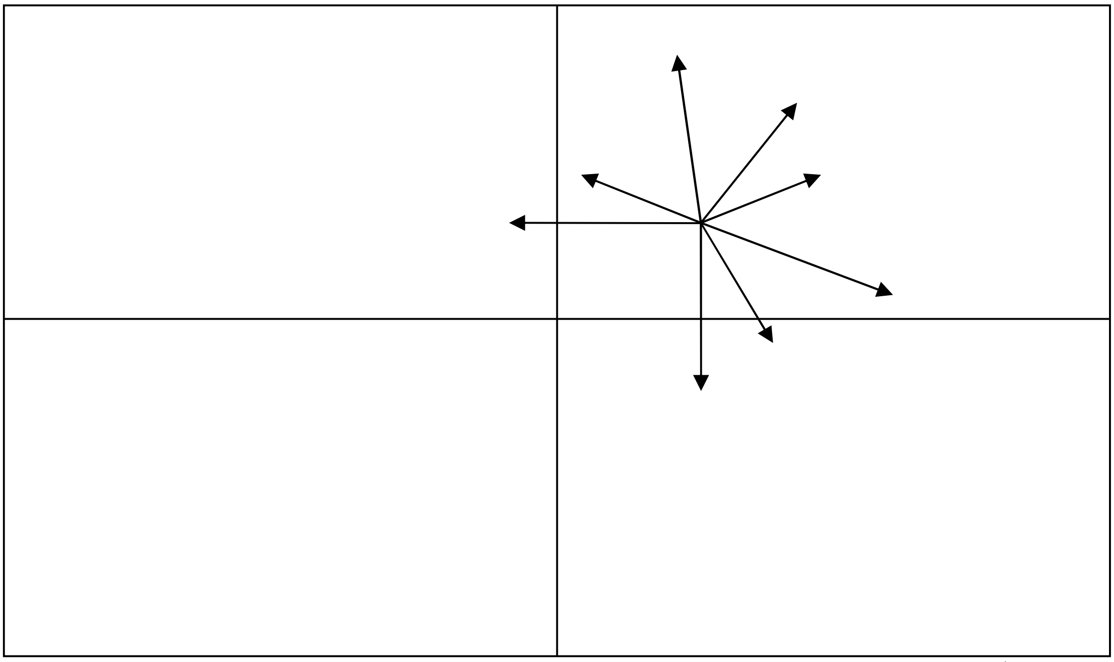
יחס זה הינו רפלקסיבי, אנטי סימטרי, וטרזיטיבי.

וכעט, מהם החיצים אותם מגדיר היחס:

$$(a,b),(c,d) \in R^2$$

$$((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow (c \geq a) or (d \geq b)$$

נוכל לצייר סקיצה כך:

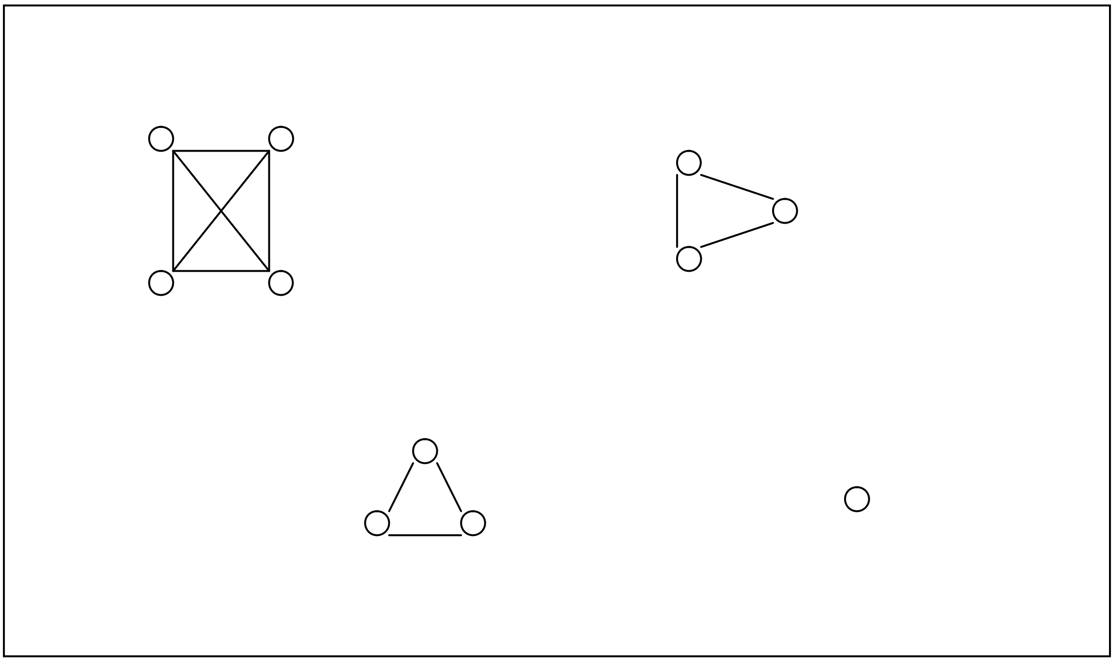


בדקו אילו תכונות מקיים יחס זה.

יחסי שקילות ומחלקות שקילות

הגדרה: יחס בינארי שהוא רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי נקרא **יחס שקילות** *(equivalence)*.

ציור יחס שקילות הוא איחוד של יחסים מלאים עק קבוצות זרות שנקראות מחלקות שקילות:



דוגמאות ליחסי שקילות:

- יחס השוויון.
- היחס "להיות בעל אותו שם משפחה" על אנשים.
- היחס $R=\{(a,b): a\equiv b \bmod 7\}$ (שוויון מודולו 7) על המספרים הטבעיים, כלומר - $(a,b)\in R$ אם a ו-b משאירים אותה שארית בחלוקה ב-7.
- היחס "להיות בעל אותה ספרה אחרונה בתעודה הזהות" על קבוצת תושבי ישראל.

הדוגמאות האלה דומות למדי. כולן הן מן הצורה של זהות בין תכונות, כשהתכונה הייתה שם משפחה במקרה אחד, שארית בחלוקה ב-7 בדוגמה השנייה, הספרה האחרונה במספר תעודת הזהות בדוגמה השלישית. קל מאוד לייצר עוד דוגמאות מסוג זה: מספר השערות על הראש (ואז שני אנשים מתייחסים זה לזה אם יש להם אותו מספר שערות), אות ראשונה בשם הפרטי, חודש לידה, מזל בגלגל המזלות (זהו יחס השקילות שבו משתמשים האסטרולוגים).

בלשון מתמטית, כל הדוגמאות הן מהסוג הבא: נתונה פונקציה $f:S\rightarrow T$ ומגדירים יחס $R=\{(a,b): f(a)=f(b)\}$. בדוגמה הראשונה הפונקציה היא $f(x)=x$, בדוגמה השנייה הפונקציה שולחת כל אדם לשם המשפחה שלו, ובשלישית הפונקציה שולחת כל מספר לשארית שלו בחלוקה ב-7. אלה דוגמאות פשוטות למדי. האם אלה הדוגמאות היחידות? התשובה היא "כן".

משפט: לכל יחס שקילות R על קבוצה S יש קבוצה T ופונקציה $f:S\rightarrow T$ כך שמתקיים

$$\forall x \in S\ \forall y \in S \quad (x,y) \in R \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

על מנת להוכיח את המשפט נזדקק להגדרה הבאה:

הגדרה: יהא R יחס שקילות על S. לכל איבר $x \in S$ מגדירים את מחלקת השקילות של x כ:

$$[x] = \{s \in S : (x,s) \in R\}$$

כלומר, מחלקת השקילות של x היא קבוצת האיברים שמתייחסים אליו.

דוגמאות: 1. ביחס השוויון מתקיים $[n] = \{n\}$. 2. ביחס של שוויון שם המשפחה מחלקת השקילות של משה קצב, ובסימון שלנו [משה קצב], היא קבוצת האנשים ששם משפחתם קצב.

הגדרה: קבוצת מחלקות השקילות של יחס שקילות R נקראת **קבוצת המנה** של R.

דוגמה: ביחס "אנשים שנולדו באותו חודש", מחלקות השקילות הן:

- קבוצת האנשים שנולדו בחודש ינואר
- קבוצת האנשים שנולדו בחודש פברואר
- קבוצת האנשים שנולדו בחודש מרץ

וכו', ולכן אפשר לזהות את קבוצת המנה עם קבוצת החודשים בשנה.

תרגילים:

1. תארו את קבוצת המנה של יחס שוויון השארית בחלוקה ב-7 ושל היחס על המספרים הממשיים המוגדר על ידי: $(x,y) \in R$ אם $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ מציין את הערך השלם של x. למשל $\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lfloor -3.1 \rfloor = -4$).

2. תנו תיאור גיאומטרי למחלקות השקילות של היחסים הבאים על קבוצת הזוגות של מספרים ממשיים:

א. $((x,y),(u,v)) \in R \Leftrightarrow y - 2x = v - 2u$

ב. $((x,y),(u,v)) \in R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2$

ג. $((x,y),(u,v)) \in R \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = u^2 + 2v^2$

3. מהו גודל קבוצת המנה של היחס "להיות בעל אותה ספרה אחרונה בתעודת הזהות"?

למה: ביחס שקילות R לכל שני איברים x, y מתקיים

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow [x] = [y]$$

הוכחה:

כיוון ←: נניח $[y] = [x]$. מן הרפלקסיביות נובע ש-$x \in [x]$ (כל איבר מתייחס לעצמו), ולכן על-פי הנתון מתקיים $x \in [y]$, כלומר $(y,x) \in R$ וזה שקול לתנאי $(x,y) \in R$, בגלל הסימטריות.

כיוון →: נניח ש- $(x,y) \in R$, ונרצה להוכיח כי הקבוצות $[x]$ ו- $[y]$ שוות. כלומר, נרצה להוכיח שכל איבר ב- $[x]$ נמצא גם ב- $[y]$ ולהיפך.

יהא $z\in[x]$. צריך להוכיח כי $z\in[y]$. $z\in[x]$ פירושו שמתקיים $(x,z)\in R$. נתון $(x,y)\in R$, כלומר גם $(y,x)\in R$. מן הטרנזיטיביות נובע ש- $(y,z)\in R$, כלומר $z\in[y]$.
הוכחנו בכך ש- $[y]\subseteq[x]$ ובאופן דומה ניתן להוכיח $[x]\subseteq[y]$, ולכן $[x]=[y]$.

מסקנה: כל שתי מחלקות שקילות של יחס שקילות R הן או זרות (כלומר חיתוכן ריק) או זהות.

הוכחה: תהיינה $[x]$ ו- $[y]$ שתי מחלקות שקילות. צריך להראות שאם הן לא זרות, אז הן זהות. נניח שהן לא זרות, כלומר קיים איבר z ששייך לשתיהן. אזי $(x,z)\in R$ וגם $(y,z)\in R$. מן הסימטריות והטרנזיטיביות של R נובע אז ש- $(x,y)\in R$. מן המשפט נובע ש- $[x]=[y]$.

הוכחת המשפט (על ייצוג יחסי שקילות בעזרת שוויון ערכי פונקציה): יהא R יחס שקילות על קבוצה S. נגדיר את T כקבוצת מחלקות השקילות של R, ונגדיר פונקציה $f:S\to T$ כ: $f(s)=[s]$. לפי הלמה מתקיים $(x,y)\in R \leftrightarrow f(x)=f(y)$, שהוא מה שדרוש במשפט מן הפונקציה f.

דוגמה לא טריוויאלית ליחס שקילות על זוגות של מספרים טבעיים

תהא S קבוצת הזוגות (a,b) של מספרים טבעיים, שבהם $b\neq 0$ (במילים אחרות $S=\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$). נגדיר יחס: $(a,b)\sim(c,d)$ אם $bc=ad$.

תרגילים:

1. מצאו שלושה זוגות שכל אחד מהם מתייחס לאחר ביחס הזה.
2. מהם הזוגות שמתייחסים ביחס הזה לזוג $(1,1)$?
3. מהם הזוגות שמתייחסים ביחס הזה לזוג $(1,n)$?
4. הוכיחו שזהו יחס שקילות.
5. האם תוכלו לתאר בצורה קצרה את מחלקות השקילות של היחס הזה?
6. מצאו קבוצה T ופונקציה $f:S\to T$ כך ש: $(a,b)\sim(c,d)$ אם ורק אם $f((a,b))=f((c,d))$.

עוד דוגמה לא טריוויאלית ליחס שקילות – הפרש סימטרי סופי

תהי $S=\mathrm{P}(\mathbf{N})$ (תת-הקבוצות של $\mathbf{N}$, כלומר קבוצות של מספרים הטבעיים) ונגדיר את היחס R על-ידי:

$$(A,B)\in R \Leftrightarrow \text{סופי } A\triangle B$$

נראה כי זהו אכן יחס שקילות:

- רפלקסיביות: $A\triangle A=\varnothing$ קבוצה סופית, ולכן $(A,A)\in R$ לכל A.
- סימטריות: נובעת מן הסימטריות של ההפרש הסימטרי.
- טרנזיטיביות: נניח ש- $A\triangle B,\ B\triangle C$ שתיהן סופיות. צריך להוכיח ש- $A\triangle C$ סופית.

  אבל: $A\triangle C = A\triangle\varnothing\triangle C = A\triangle(B\triangle B)\triangle C = (A\triangle B)\triangle(B\triangle C)$

  מכיוון שלפי ההנחה $A\triangle B,\ B\triangle C$ קבוצות סופיות, ההפרש הסימטרי שלהן הוא סופי, ולכן $A\triangle C$ סופי, כלומר $(A,C)\in R$.

למה: אם A סופית ו- $B\triangle A$ סופית אז B סופית.

הוכחה: $B=\underbrace{A}_{\text{סופי}}\triangle\underbrace{(A\triangle B)}_{\text{סופי}}$. הקבוצה B היא הפרש סימטרי של קבוצות סופיות, ולכן סופית.

מסקנה מן הלמה היא שאם A סופית אז כל קבוצה שמתייחסת ביחס האמור ל-A היא סופית.
מכך נובע שמחלקת השקילות הקבוצה הריקה היא קבוצת הקבוצות הסופיות:

$$[\varnothing]=\{A:(A,\varnothing)\in R\}=\text{כל הקבוצות הסופיות}$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

על פי הגדרה   על פי הלמה

מחלקת שקילות אחרת (הוכיחו!) היא אוסף הקבוצות שמשלימותיהן סופיות. זוהי מחלקת השקילות של הקבוצה כולה.

תרגיל: תארו במילים את מחלקת השקילות של קבוצת המספרים הזוגיים.

אני רוצה להביא כאן שימוש ליחס הזה. אבל אפתח בחידה סתם, שאינה קשורה לתורת הקבוצות:

חידת כובעים סופית

בחדר בבית הסוהר יושבים שני אסירים. מגיע סוהר ושם על כל אסיר כובע באחד משני צבעים - שחור או לבן. כל אסיר רואה את הכובע של חברו, אבל לא את שלו. כל אחד מהם צריך לנחש את צבע הכובע שלו. אם לפחות אחד מהם יצדק הם ייצאו לחופשי. כמובן, אסור להם לתקשר ביניהם, אבל הם יכולים לתאם מראש אסטרטגיית ניחוש. כיצד יבטיחו את שחרורם?

בנוסח אחר יש 100 אסירים, ומטרתם היא שלפחות 50 מהם יצדקו. באיזו אסטרטגיה יבחרו?

את הפתרון אביא בהמשך. בינתיים – הנה חידה שמשתמשת ביחס השקילות של "הפרש סימטרי סופי":

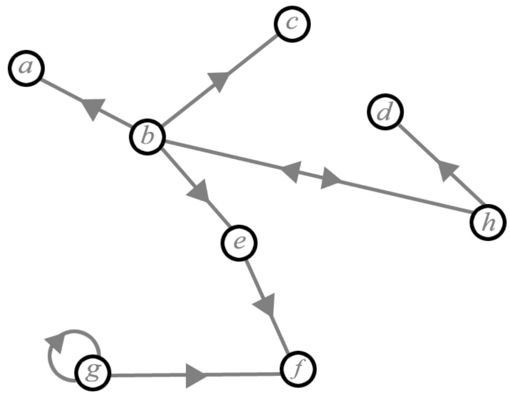
חידת כובעים אינסופית

בנוסח האינסופי יש אינסוף אסירים: $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$. אלא שהפעם מטרתם אמביציוזית הרבה יותר מאשר בנוסח הסופי: מטרתם היא שכמעט כולם יצדקו בניחושם, כלומר לכל היותר מספר סופי מהם יטעו. כיצד יעשו זאת?

רמז: היעזרו ביחס השקילות של ההפרש הסימטרי הסופי. האם כל אחד מן האסירים יכול לדעת מהי מחלקת השקילות ביחס הזה שבה נמצאת קבוצת הכובעים שעל ראשי כולם, גם בלי לדעת מהו הכובע שעל ראשו?

הייצוג הגרפי של יחסים ושל מחלקות שקילות

ניתן לייצג יחס בינארי בעזרת גרף:



העיגולים מייצגים איברים בקבוצה, כאשר איבר x מתייחס לאיבר y אם יש חץ מ-x ל-y. עבור יחס סימטרי יופיעו חיצים בשני הכיוונים, ולכן אפשר (אם רוצים) לצייר קווים ללא חצים (קו ללא חץ מציין חץ דו-כיווני). לולאה (כמו ב-g בדוגמה) מציינת שהאיבר מתייחס לעצמו. יחס רפלקסיבי מיוחד אפוא בכך שבגרף שלו מופיעות כל הלולאות.

איך נראה הגרף של יחס שקילות? ראשית, מופיעות בו כל הלולאות; שנית, הקווים הם דו-כיווניים (ואפשר אם כן לוותר על ציון הכיוון). תכונת הטרנזיטיביות משמעה שהגרף מחולק לאיים, שבכל אי כל האיברים מתייחסים זה לזה. האיים האלה הם מחלקות השקילות.

פתרון חידת הכובעים

ניזכר כי בבעיית הכובעים הסופית יש שני אסירים עם כובעים על הראש, כל כובע בצבע לבן (0) או שחור (1). כל אסיר רואה את הכובע שעל ראש חברו, אבל לא את הכובע שעל ראשו. על כל אסיר לנחש את צבע הכובע שלו, והמטרה היא שלפחות אסיר אחד ינחש נכונה. הנה הפתרון: אסיר א׳ אומר את צבע כובעו של ב׳, ואסיר ב׳ אומר **ההיפך** מצבע כובעו של א׳. אם צבעי הכובעים שווים, כי אז א׳ יצדק; אם הם שונים, ב׳ יצדק.

מה קורה אם ישנם 100 אסירים? האסירים מתחלקים לזוגות, ומפעילים את האסטרטגיה עבור כל זוג בנפרד. כך מובטח שמכל זוג אחד יצדק.

במקרה האינסופי המטרה היא שכל האסירים ינחשו נכונה מלבד מספר סופי של אסירים שיטעו. תחילה נמספר את האסירים בדרך כלשהי – אסיר מספר 0, אסיר מספר 1, אסיר מספר 2, וכו׳. לכל השמת כובעים נתאים תת-קבוצה של המספרים הטבעיים – קבוצת מספרי האסירים שעל ראשם כובע שחור. למשל, להשמה שבה כל האסירים מקבלים כובע לבן מתאימה הקבוצה

הריקה. להשמה שבה האסירים במקומות הזוגיים מקבלים כובע שחור מתאימה קבוצת המספרים הזוגיים.

נזכר כעת ביחס R על $\mathrm{P}\left(\mathbf{N}\right)$ (קבוצת תת הקבוצות של המספרים הטבעיים) שהוגדר על ידי:

$\left(A,B\right)\in R$ אם $A\triangle B$ סופית. כזכור, זהו יחס שקילות.

האסטרטגיה של האסירים תהיה זו: בערב שלפני האירוע הם מתאספים בחדר האוכל האינסופי בבית הכלא, ומתוך כל מחלקת שקילות של R הם בוחרים נציג יחיד, מוסכם על כולם. (הם משתמשים כאן באקסיומת הבחירה, ההנחה היא שמותר להם.) כל נציג הוא למעשה השמה מסויימת של כובעים (כי לכל השמה מתאימה קבוצה של מספרים טבעיים, ולהיפך). למחרת נערך הניסוי, כלומר הסוהר בוחר השמת כובעים מסוימת.

כל אסיר יודע עתה את כל ההשמה, כמעט – הוא אינו יודע את צבע הכובע שעל ראשו. לכן, מבחינת כל אסיר יש שתי השמות אפשריות שנבדלות רק באיבר אחד, ולכן שתיהן שייכות לאותה מחלקת שקילות, שהיא מחלקת השקילות של ההשמה האמיתית. אם כן, כל אסיר יודע מהי מחלקת השקילות של ההשמה האמיתית. כזכור, מתוך מחלקת השקילות הזאת נבחר נציג מסוים. האסיר ינחש את צבע הכובע שעל ראשו לפי הנציג המסוים הזה. כלומר, אם בנציג הזה הצבע המתאים לו הוא לבן האסיר אומר "לבן", ואם בנציג הזה הצבע של כובעו הוא שחור הוא אומר "שחור".

מכיוון שהנציג שנבחר נמצא במחלקת השקילות של ההשמה האמיתית, ההפרש הסימטרי ביניהם הוא סופי, שפירושו שרק מספר סופי של אסירים טעו.

חידת כובעים נוספת

100 אסירים עומדים בשורה, אחד אחרי השני. נמספר את האנשים מ-1 עד 100, כאשר איש מספר 1 עומד ראשון. לכל איש יש כובע על הראש, שחור או לבן, וכל אחד רואה את כל הכובעים של מי שלפניו. למשל, איש מספר 39 רואה את הכובעים שעל אנשים מספר 38 עד 1.

תחילה על איש מספר 100 להגיד בקול רק את הניחוש שלו לצבע כובעו. לאחר מכן, איש מספר 99 אומר את צבע כובעו, וכו'. המטרה היא שהניחוש של כולם, מלבד אולי של מספר 100, יהיה נכון.

החידה הזו לא קשורה ישירות לתורת הקבוצות, אבל הגירסה האינסופית כמובן כן קשורה:

הפעם יש אינסוף אסירים בשורה, מסודרים כאסיר מספר 0, אסיר מספר 1 וכו'. גם הפעם כל אחד רואה את כל הכובעים שלפניו, כשהאסיר מספר 0 רואה את הכובעים על ראשי כל האחרים, אסיר מספר 1 רואה את הכובעים על ראשי האנשים ממספר 2 ואילך, וכו'. גם בנוסח הזה האנשים מנחשים לפי סדר את צבעי כובעיהם, כשמתחיל מספר 0. המטרה קצת שונה מאשר במקרה הסופי: שכולם ינחשו נכונה מלבד מספר סופי של אנשים.

לחידה הזאת לא אתן כאן פתרון, אלא רק רמז: שלבו את פתרון החידה הסופית עם פתרון חידת הכובעים הקודמת.

פונקציות

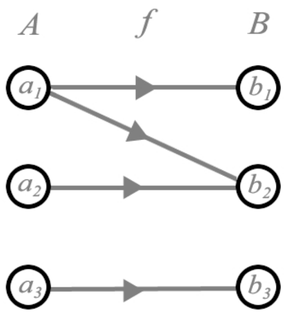
ראינו בפרק הקודם שיחס הוא למעשה קבוצה, ולכן לא יהיה זה מפתיע לגלות כי גם פונקציה אפשר לראות כקבוצה. באופן יותר ספציפי, פונקציה היא סוג של יחס.

הגדרה: פונקציה מקבוצה A לקבוצה B היא תת-קבוצה f של $A\times B$ (כלומר, היא קבוצה של זוגות) שמקיימת את התנאי הבא: לכל $a\in A$ יש $b\in B$ **יחיד** כך ש- $(a,b)\in f$.

מסמנים אז גם (וזהו הסימון שאתם מכירים מן התיכון) $f(a)=b$.

דוגמאות:

1. הקבוצה הבאה אינה מתארת פונקציה, כי a_1 משתתף בשני זוגות, שפירושו שאיננו יכולים להגדיר מהו $f(a_1)$:



2. נגדיר פונקציה f מקבוצת המדינות בעולם לקבוצת הערים, כך שהפעלת f על מדינה תיתן את עיר הבירה שלה. אז הפונקציה f היא הקבוצה

f = { (ישראל, ירושלים) , (אנגליה, לונדון) , ... }

3. פונקציית הסינוס מן הממשיים לעצמם המוכרת לנו מטריגונומטריה, $f(x)=\sin x$, היא הקבוצה

$$f=\left\{(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right),\left(\frac{\pi}{6},½\right),\ldots\right\}$$

הגדרה: אם $f:A\to B$ היא פונקציה מקבוצה A לקבוצה B, אז A נקראת **התחום** של f, והיא מסומנת ב- $dom(f)$ (*domain* פירושו תחום). הקבוצה B נקראת **הטווח** של הפונקציה, והיא מסומנת ב-*rge(f)* (*range* פירושו טווח).

התמונה (*Image*) של $f:A\to B$ היא: $\{f(a):a\in A\}$. מסמנים אותה ב- $\text{Im}(f)$. כמובן, $\text{Im}(f)\subseteq rge(f)$.

תרגיל: האם בפונקציית הסינוס מן הממשיים לעצמם התמונה שווה לטווח? כיצד תשנו את הטווח כך שיתקבל שוויון?

ניתן לראות כי גם פונקציות, כיחסים, יכולות לקיים את התכונות המוכרות לנו על יחסים.

לדוגמא, ננסה למצוא פונקציה רפלקסיבית:

$$\forall a,(a,a)\in R \Leftrightarrow f(a)=a$$

פונקציה זו נקראת פונקצית הזהות.

וכעת, הבה נמצא פונקציה סימטרית:

$$\forall a:(a,f(a))\in R\wedge(f(a),a)\in R \Leftrightarrow a=f(f(a))$$

פונקציה לדוגמא שמקיימת דרישה זו היינה $f(x)=-x$.

ולבסוף, בואו ונמצא פונקציה טרזיטיבית:

$$\forall a:(a,f(a))\in R\wedge(f(a),f(f(a))\in R \to (a,f(f(a))\in R \Leftrightarrow f(a)=f(f(a))$$

פונקציה לדוגמא יכולה להיות: $f(x,y)=(x,0)\Rightarrow f(f(x,y))=f(x,0)=(x,0)$

פונקציה טרנזיטיבית נקראת באופן כללי היטל.

סוגים של פונקציות

כמו ביחסים, גם בעולם הפונקציות יש תכונות שהופכות את הפונקציה למעניינת במיוחד.

הגדרה: $f:A\to B$ נקראת **על** אם כל איברי B מתקבלים כתמונות של איברי A. בנוסחה:

$$\forall b\in B\ \ \exists a\in A\ \ (a,b)\in f$$

תרגיל: הוכיחו ש-f היא על אם ורק אם $\text{Im}(f)=rge(f)$.

דוגמה: פונקציית "עיר הבירה" ממדינות לערים אינה על, כי למשל חיפה היא עיר שאינה בתמונת הפונקציה.

כל פונקציה אפשר להפוך לפונקציה על, על ידי החלפת הטווח בתמונה שלה. למשל, בדוגמה הקודמת אפשר להחליף את קבוצת הערים בקבוצת ערי הבירה בעולם.

דוגמה: פונקציית הסינוס, כשהיא מוגדרת כפונקציה מן הממשיים לעצמם היא לא על כי למשל המספר 17 אינו סינוס של שום זווית ממשית (הוא כן סינוס של זווית מרוכבת!). אבל אם במקום הממשיים לוקחים את הטווח כקטע $[-1,1]$ הפונקציה הופכת להיות על.

הגדרה: $f:A\to B$ נקראת 1-1 ערכית (או חד-חד ערכית) אם $f(a_1)=f(a_2)$ גורר $a_1=a_2$.
במילים אחרות: אם $a_1\neq a_2$ גורר $f(a_1)\neq f(a_2)$.

דוגמאות:

- פונקציית ערי הבירה היא 1-1, כי אין שתי מדינות עם אותה עיר בירה (לפחות לא באופן רשמי... אבל לא ניכנס לפוליטיקה).
- $f(x)=\sin x$ היא לא 1-1-ערכית, כי למשל $f(2\pi)=f(0)=0$.

תרגילים: לכל אחת מן הפונקציות הבאות מן הממשיים לעצמם קבעו אם היא 1-1 ערכית וכן אם היא על.

א. $f(x)=x$ ב. $f(x)=x^2$ ג. $f(x)=x^3$ ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ ה. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

הרכב של פונקציות

הגדרה: תהיינה נתונות קבוצות A, B, C קבוצות, ופונקציות $f:A\to B,\ \ g:B\to C$. פונקציית ההרכב $g\circ f:A\to C$ מוגדרת כ: $g\circ f(a)=g(f(a))$.

דוגמה: הפונקציה $f(x)=\sin(x^2)$ היא הרכב של שתי הפונקציות $h(x)=\sin(x)$ ו- $g(x)=x^2$, בסדר זה: $f(x)=h(g(x))$. בסימון שלנו: $f=h\circ g=\sin\circ(x^2)$.

שימו לב: אם $C\neq A$ ו-f ו- g הן כמו לעיל, אז $f\circ g$ אינו מוגדר כי הטווח של g הוא C, ו- f אינה מוגדרת על C.
אם $A=C$ (כלומר: $f:A\to B$ ו: $g:B\to A$) אז שני ההרכבים, $g\circ f$ ו- $f\circ g$ מוגדרים. הראשונה היא פונקציה מ-A ל-A והשנייה מ-B ל-B.

טענה: פעולת ההרכב היא אסוציאטיבית, כלומר $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

הוכחה: $(f\circ(g\circ h))(a)=f(g\circ h(a))=f(g(h(a)))$, וגם:
$((f\circ g)\circ h)(a)=(f\circ g)(h(a))=f(g(h(a)))$.

משפט: הרכב של שתי פונקציות 1-1 ערכיות הוא 1-1 ערכי. כלומר: אם f, g פונקציות 1-1 ערכיות שהרכבן $g\circ f$ מוגדר, אז $g\circ f$ היא פונקציה 1-1 ערכית.

הוכחה: יהיו $a_1\neq a_2\in dom(f)$. מכיוון ש- f 1-1 ערכית, מתקיים $f(a_1)\neq f(a_2)$, ומכיוון שגם g היא 1-1 ערכית, מתקיים $g(f(a_1))\neq g(f(a_2))$.

בכיוון ההפוך נכון רק חצי מן המשפט:

טענה: אם $g\circ f$ היא 1-1 ערכית, אז f היא 1-1 ערכית.

הוכחה: נניח בשלילה ש-f לא 1-1 ערכית. קיימים אז איברים $a \neq a' \in A$ שעבורם $f(a)=f(a')$. אזי $g \circ f(a)=g(f(a))=g(f(a'))=g \circ f(a')$, בסתירה להנחה ש-$g \circ f$ היא 1-1 ערכית.

תרגיל: מצאו דוגמה לפונקציות f ו-g ש- $g \circ f$ מוגדרת, היא 1-1 ערכית, ו-g אינה 1-1 ערכית.

תרגיל: הוכיחו ש: $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im} f$.

משפט: הרכב של שתי פונקציות ששתיהן על הוא על.

הוכחה: תרגיל.

גם כאן רק חצי מן הכיוון ההפוך נכון:

טענה: תהיינה $f: B \to C, \quad g: A \to B$, ש- $f \circ g$ על. אזי גם f על.

הוכחה: לפי תרגיל לעיל $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im} f$. העובדה ש- $f \circ g$ היא על משמעה ש-$\operatorname{Im}(f \circ g)=C$. משני אלה נובע ש-$\operatorname{Im} f=C$, שפירושו ש-$f$ היא על.

תרגיל: מצאו דוגמה לפונקציות f ו-g ש- $f \circ g$ מוגדרת, היא על, ו-g אינה על.

סימון: עבור $f: A \to B$, לכל איבר $b \in B$ נסמן $f^{-1}(b)=\{a \in A: f(a)=b\}$. כלומר, $f^{-1}(b)$ היא קבוצת האיברים ב-A ש-f שולחת אותם ל-b.
עבור תת-קבוצה $X \subseteq B$ נסמן $f^{-1}(X)=\{a \in A: f(a) \in X\}$.

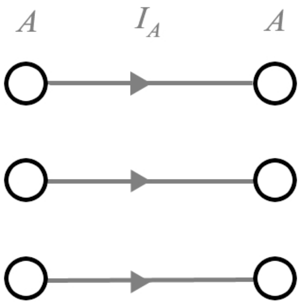
תרגילים:

1. הראו ש- $f: A \to B$ היא על אם ורק אם לכל $b \in B$ מתקיים $f^{-1}(b) \neq \varnothing$.
2. הראו ש- $f: A \to B$ היא 1-1 אם ורק אם לכל $b \in B$ מתקיים $\left|f^{-1}(b)\right| \leq 1$.

פונקציית הזהות מקבוצה לעצמה

פונקציית הזהות I_A על קבוצה A היא הפונקציה מ-A ל-A ששולחת כל איבר לעצמו:

$$I_A(a)=a$$



טענה: לכל פונקציה $f:A\to B$ הפונקציה $f\circ I_A:A\to B$ מוגדרת ושווה ל- f. כמו-כן, $I_B\circ f:A\to B$ מוגדרת ושווה גם היא ל- f.

הוכחה לחלק הראשון: $f\circ I_A(a)=f\left(I_A(a)\right)=f(a)$. החלק השני מושאר כתרגיל.

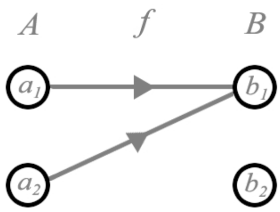
עבור המקרה בו $A=B$ מתקיים $I_A\circ f=f\circ I_A=f$. כמסקנה, כל פונקציה מקבוצה A לעצמה מתחלפת עם I_A.

פונקציות הפכיות משמאל ומימין

הגדרה: תהא $f:A\to B$. פונקציה $h:B\to A$ נקראה **הפכית משמאל** של f אם $h\circ f=I_A$. אם ל-f יש פונקציה הפכית משמאל אז f נקראת **הפיכה משמאל**.

פונקציה $g:B\to A$ נקראה **הפכית מימין** של f אם $f\circ g=I_B$. אם ל- f יש פונקציה הפכית מימין אז f נקראת **הפיכה מימין**.

דוגמה לפונקציה שאינה הפיכה משמאל:



פונקציה הפכית משמאל g הייתה צריכה לקיים $g(b_1)=a_1$ וגם $g(b_1)=a_2$. אבל על פי הגדרת המושג "פונקציה", פונקציה חייבת להחליט לאן היא שולחת כל איבר.

משפט: פונקציה היא הפיכה משמאל אם ורק אם היא חד-חד ערכית.

הוכחה: מספיקות התנאי: תהא $f:A\to B$ פונקציה 1-1 ערכית. עלינו להראות שהיא הפיכה משמאל. נעשה זאת על ידי הגדרת ההפכית שלה, g: לכל $a\in A$ נגדיר $g\left(f(a)\right)=a$. הדבר מוגדר היטב, בגלל החד-חד ערכיות – יש רק a יחיד שנשלח ל- *f(a)*. בזאת הגדרנו את g על

$\operatorname{Im}(f)$. לכל $\operatorname{Im} f$,$b \in B$ נבחר $a \in A$ כלשהו ונגדיר $g(b) = a$. אפשר אפילו לבחור באותו איבר a עבור כל האיברים ב- $\operatorname{Im} f$,B. הגדרתה של g גוררת שהיא ההפכית של f: לכל $a \in A$ מתקיים $g \circ f(a) = g(f(a)) = a$, שפירושו ש- $g \circ f = I_A$.

להוכחת הכיוון ההפוך, נניח ש- $f : A \to B$ הפיכה משמאל, ותהא $g : B \to A$ ההפכית משמאל שלה, שפירושו $g \circ f = I_A$. הטענה שאנו רוצים להוכיח, ש-f היא 1-1 ערכית, נובעת עתה משתי עובדות: האחרת ש- I_A היא 1-1 ערכית, והשנייה היא טענה שהוכחנו, שאם $g \circ f$ 1-1 ערכית אז בהכרח f היא 1-1 ערכית.

התכונות "להיות חד-חד ערכית" ו"להיות על" משוקפות זו לגבי זו במראה של "הפיכות משמאל" ו"הפיכות מימין":

משפט: פונקציה היא הפיכה מימין אם ורק אם היא על.

הוכחה: תהא $f : A \to B$. נניח ש-f על. נרצה להוכיח שקיימת $g : B \to A$ כך ש- $f \circ g = I_B$. (שימו לב - ההרכב הוא הזהות על B, ולא על A). כל איבר $b \in B$ שייך לתמונה (כי f על). כלומר, לכל $b \in B$ הקבוצה $f^{-1}(b)$ אינה ריקה. לפי אקסיומת הבחירה לכל $b \in B$ אפשר לבחור איבר מתוך $f^{-1}(b)$, וליצור בכך קבוצה. לכל b נסמן את האיבר שבחרנו ב- $g(b)$. לפי הגדרת $f^{-1}(b)$ לכל $b \in B$ מתקיים אז $f \circ g(b) = f(g(b)) = b$, שפירושו ש- $f \circ g = I_B$.

להוכחת מספיקות התנאי שבמשפט, תהא $f : A \to B$ הפיכה מימין. פירושו הוא שקיימת פונקציה $g : B \to A$ כך ש- $f \circ g = I_B$. לפי למה שהוכחנו לעיל, אם הרכב שתי פונקציות הוא על, אז השמאלית בהרכב היא על. מכיוון שפונקציית הזהות I_B היא על, נובע ש-f על.

תרגיל: הוכיחו שאקסיומת הבחירה שקולה למשפט הזה. כלומר, אם המשפט נכון אקסיומת הבחירה נכונה.

המסקנה הבאה מן המשפט תהיה חשובה לנו בפרק הבא. רשמו אותה בזכרונכם:

מסקנה: בהינתן שתי קבוצות A ו-B, קיימת פונקציה $f : A \to B$ 1-1 ערכית אם ורק אם קיימת פונקציה $g : B \to A$ על.

הוכחה: אם קיימת $f : A \to B$ 1-1 ערכית, אז יש ל-f הפכית משמאל $g : B \to A$, כלומר פונקציה g שמקיימת $g \circ f = I_A$. השוויון האחרון אומר ש- f היא ההפכית מימין של g, שפירושו ש- g על, ואם כן הוכחנו את קיומה של פונקציה מ-B ל-A שהיא על. הכיוון השני דומה.

סימונים: לפונקציה $f : A \to B$ ולתת קבוצה C של A מסמנים: $f[C] = \{f(c) : c \in C\}$ (כלומר תמונת f כאשר מצמצמים אותה ל-C).

מגדירים $f_* : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ כ: $f_*(C) = f[C]$.

תרגילים:

הוכיחו או הפריכו: א. אם f על אז f_* היא על. ב. אם אם f 1-1 אז f_* היא 1-1. ג. אם f_* על אז f היא על. ד. אם f_* 1-1 אז f היא 1-1.

הגדרה: פונקציה 1-1 ערכית ועל נקראת **בייקציה** *(bijection)*.

משפט: אם $f: A \to B$ בייקציה ואם $g: B \to A$ הפכית של f משמאל ו- $h: B \to A$ הפכית מימין של f, אז $g = h$.

הוכחה:

כל שצריך הוא להסתכל בהרכב של כל שלוש הפונקציות:

$$h = I_A \circ h = \left(g \circ f\right) \circ h = g \circ \left(f \circ h\right) = g \circ I_B = g$$

הגדרה: בייקציה מקבוצה לעצמה נקראת פרמוטציה.

סימון: קבוצת הפרמוטציות של קבוצה A מסומנת ב- S_A. לקבוצה המיוחדת $[n]$ (שמוגדרת כזכור כ- $\{1,2,...,n\}$) מסמנים את S_A ב- S_n.

תרגיל:

1. הראו שב- S_A, עם פעולת ההרכבה של בייקציות, יש איבר אדיש (כלומר בייקציה f מ-A לעצמה שהרכבתה עם בייקציה אחרת אינה משנה את הבייקציה - לכל בייקציה אחרת g מתקיים $f \circ g = g \circ f = g$) ולכל איבר יש איבר הופכי (כלומר לכל בייקציה g יש בייקציה f ש $f \circ g = g \circ f =$ איבר האדיש).

החבורה S_A נקראת "חבורת הסימטריות" של A. מקור השם הוא בכך שהעתקות של גוף לעצמו (ששומרות את צורתו) הן למעשה סימטריות שלו.

תרגילים:

1. הראו שב- S_n יש $n!$ פרמוטציות. (רמז: תהא p פרמוטציה. כמה אפשרויות יש לבחירת $p(1)$? בכל אחת מן האפשרויות האלה, בכמה דרכים אפשר לבחור את $p(2)$? וכו')

2. תהא $f:[n] \to [n]$ מוגדרת על ידי $f(i) = ((i+a) \bmod n) + 1$ (כאן $\bmod n$ משמעו שארית בחלוקה ב-n, ו- a הוא מספר שלם כלשהו. מספר שמתחלק ב-n שאריתו בחלוקה ב-n היא 0. הוספנו 1 בנוסחה כדי ש-f לא תקבל ערך 0, שאינו בטווח). הראו ש- f בייקציה, מצאו את ההפכית לה. הראו ש- f^n, ההרכב של f עם עצמה n פעמים, היא פונקציית הזהות.

3. מצאו n ופונקציה $f \in S_n$ שחזקת n של f אינה הזהות.

הרכב פונקציות אינו קומוטטיבי

כששתי פונקציות הן מקבוצה לעצמה, אפשר להרכיב אותן בשתי דרכים, כלומר בשני סדרים. בדרך כלל שני ההרכבים האלה אינם שווים, שפירושו שפעולת ההרכבה אינה קומוטטיבית. למשל, לשתי הפונקציות $f(x) = \sin(x),\ g(x) = x^2$ מן הממשיים לעצמם מתקיים:

$$g \circ f(x) = \left(\sin x\right)^2 \neq f \circ g(x) = \sin\left(x^2\right)$$

דוגמה מאלגברה ליניארית: תהיינה A ו-B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$. נגדיר: $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ כ: $f(\vec{v})=A\vec{v}$ ו- $g(\vec{v})=B\vec{v}$. שני ההרכבים האפשריים של שתי הפונקציות הם $f\circ g(\vec{v})=AB\vec{v}$ ו- $g\circ f(\vec{v})=BA\vec{v}$. באלגברה ליניארית למדתם שכפל מטריצות אינו בהכרח קומוטטיבי, כלומר שתי ההרכבים עשויים להיות שונים.

הגדרה: שתי פונקציות f ו- g מ-A ל-A נקראות **מתחלפות** אם $f\circ g=g\circ f$.

תרגילים:

1. תנו דוגמה לשתי מטריצות מסדר 2×2 שאינן מתחלפות.
2. הראו שאם מטריצה אחת היא חזקה של האחרת המטריצות מתחלפות.
3. הראו שאם מטריצה אחת היא פולינום במטריצה האחרת המטריצות מתחלפות.
4. (*) האם התנאי ב-3 הכרחי להתחלפות?

הגדרה: חזקה n-ית של פונקציה מקבוצה לעצמה היא ההרכב של הפונקציה עם עצמה n פעמים, כלומר $f^n=f\circ f\circ\ldots\circ f$ כשבהרכב f מופיעה n פעמים. חזקת 0 של פונקציה מקבוצה לעצמה מוגדרת כפונקציית הזהות.

תרגיל פתור: לכל $f:A\to A$ מתקיים $f^2\circ f=f\circ f^2$.

הוכחה: $f^2\circ f=(f\circ f)\circ f=f\circ(f\circ f)=f\circ f^2$ כאשר השוויון האמצעי נובע מאסוציאטיביות.

תרגילים:

1. תנו דוגמה לשתי מטריצות ריבועיות שמתחלפות על אף שאף אחת מהן אינה חזקה של האחרת.
2. תנו דוגמה לשתי פונקציות מקבוצה בת 4 איברים לעצמה, שהן מתחלפות (בפעולת ההרכב) למרות שאף אחת מהן אינה חזקה של האחרת.
3. (*) תנו דוגמה לשתי פונקציות מקבוצה לעצמה, שהן מתחלפות (בפעולת ההרכב) למרות שהן אינן חזקות של אותה פונקציה.
4. הוכיחו שכל בייקציה מתחלפת עם ההפכית שלה. הסיקו מכך שכל בייקציה מתחלפת עם כל חזקה שלה, כולל חזקת 0 (היזכרו מהי!) וכולל חזקות שליליות.

כמה סימונים לקבוצות מיוחדות

$\mathbb{N}$ מציין כאמור את קבוצת המספרים הטבעיים, שבתורת הקבוצות נהוג לכלול בהם גם את 0: $\mathbb{N}=\{0,1,2,3\ldots\}$. מקור הסימון הוא במילה *natural*, "טבעי".

$\mathbb{Z}$ (מ-*Zahlen*, "מספרים" בגרמנית) היא קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z}=\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

□ (מ-*quotient*, ״מנה״, במובן של חילוק) – קבוצת המספרים הרציונליים:

$$\square=\{\frac{a}{b}: a,b\in \quad , b\neq 0\}.$$

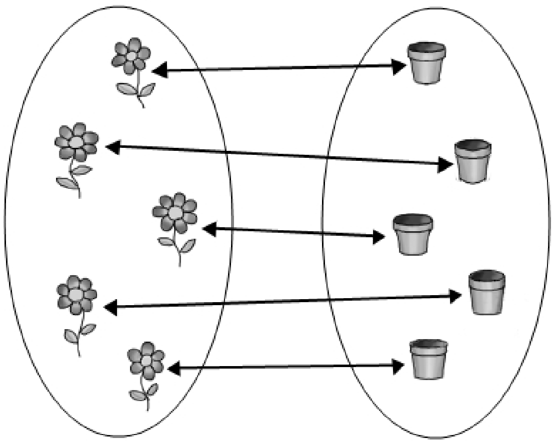
□ (מ-*reals*, ״ממשיים״) – קבוצת המספרים הממשיים. היא מוגדרת כ״השלמה״ של המספרים הרציונליים, שפירושו תוספת של סופרמומים לקבוצות חסומות מלעיל (את המושגים האלה תלמדו בחדו״א).

עוצמות POWERS

כבר סיפרתי לכם שתורת הקבוצות נולדה ממשפט של קנטור, שקבוצת המספרים הממשיים גדולה מקבוצת המספרים הטבעיים. שלב ראשון בדרך לניסוח משפט כזה הוא להגדיר מהו "גודל" של קבוצה אינסופית. במקרה הסופי, גודל של קבוצה הוא מספר האיברים שבה. אבל איך מגדירים "גודל" במקרה האינסופי?

לגודל קוראים בתורת הקבוצות "עוצמה", או באנגלית "*cardinality*". כדי להגדיר זאת נפתח בהגדרה מתי שתי קבוצות הן "שוות גודל", או "שוות עוצמה". מכיוון שעדיין לא הגדרנו מה זו "עוצמה", נשתמש בינתיים בשם קצת שונה – לא נאמר ששתי קבוצות הן שוות עוצמה, אלא שהן "שקולות".

הגדרה: אומרים ששתי קבוצות A ו-B **שקולות**, אם יש בייקציה (פונקציה 1-1 ועל) $f : A \to B$.
נסמן זאת: $A \sim B$.



קבוצת העציצים שקולה לקבוצת הפרחים, מכיוון שיש ביניהן בייקציה

השם "שקילות" מרמז על כך שזהו יחס שקילות. ואכן כך הוא:

טענה: היחס ~ הוא יחס שקילות על המחלקה של כל הקבוצות.

(ראינו שאוסף כל הקבוצות אינו קבוצה, אלא "מחלקה". כלומר, אפשר לדבר עליו אבל אסור להשתמש בו לצורכי פעולות על קבוצות. במיוחד אין להגדיר את קבוצת החזקה שלו.)

הוכחה: נראה כי היחס ~ מקיים את שלוש התכונות הדרושות:

א. **רפלקסיביות:** לכל קבוצה A מתקיים $A \sim A$ מכיוון שפונקציית הזהות $f : A \to A,\quad f(a) = a$ היא בייקציה.

ב. **סימטריות:** אם $f : A \to B$ בייקציה, אז יש לה פונקציה הפכית $f^{-1} : A \to B$ שגם היא בייקציה, ולכן $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$.

ג. **טרנזיטיביות:** נניח ש- $A\sim B$ ו- $B\sim C$. יחס השקילות הראשון משמעו שקיימת בייקציה $f:A\to B$ ויחס השקילות השני אומר שקיימת בייקציה $g:B\to C$. ההרכב $g\circ f$ הוא אז בייקציה מ-A ל-C.

עתה נוכל להגדיר "עוצמה".

הגדרה: עוצמה היא מחלקת שקילות של היחס $\sim$.

העוצמה של קבוצה A מסומנת ב- $|A|$. העוצמה של A היא אם כן מחלקת הקבוצות ששקולות ל-A (כלומר מחלקת הקבוצות שבינן לבין A קיימת בייקציה). לו הייתה מחלקת השקילות הזאת קבוצה, היינו כותבים: $|A|=[A]=\{B: B\sim A\}$. אולם זהירות – מחלקת השקילות אינה קבוצה, משום שהקבוצות, שביניהן מוגדר יחס השקילות, אינו קבוצה.

פירוש הדבר הוא למשל ש-2 אינו אלא המחלקה שמכילה את $\{\otimes,\Delta\}$, את $\{a,b\}$ (חישבו על האותיות כעל סימנים על נייר), את $\{Bibi, Sarah\}$ - כל הקבוצות ששקולות לקבוצה $\{1,2\}$.

קרתה כאן תופעה מרתקת בתולדות המתמטיקה: אחרי אלפי שנות שימוש במספרים, בא קנטור והבין לראשונה מהו באמת "מספר". הוא הבין שמספר אינו אלא תכונה משותפת של קבוצות שיש ביניהן בייקציה. ש-"1" ו-"2" אינם אלא סימנים שבחרנו, כך שהקבוצה $\{1,2\}$ היא נציג נוח של מחלקת השקילות שלה (או של $\{\otimes,\Delta\}$, או של $\{a,b\}$). הוא הבין שמנייה אינה אלא יצירתה של בייקציה. כשאנחנו מונים קבוצה בגודל 5, ועוברים על איבריה ואומרים "אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש", המילים שלנו יוצרות בייקציה בין הקבוצה לבין הנציג המיוחד שבחרנו מתוך מחלקת השקילות – הקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$.

אי שוויון בין עוצמות

נגדיר עתה מה פירוש שקבוצה אחת גדולה או שווה לקבוצה אחרת. ההגדרה עוקבת אחר האינטואיציה: קבוצה A קטנה מקבוצה B או שווה לה אם היא שקולה לתת קבוצה של B. פירושו של זה הוא שיש בייקציה בין A לתת קבוצה של B, שפירושו שיש פונקציה 1-1 ערכית מ-A ל-B.
להלן נגדיר את אי השוויון לא בין קבוצות, אלא בין עוצמות:

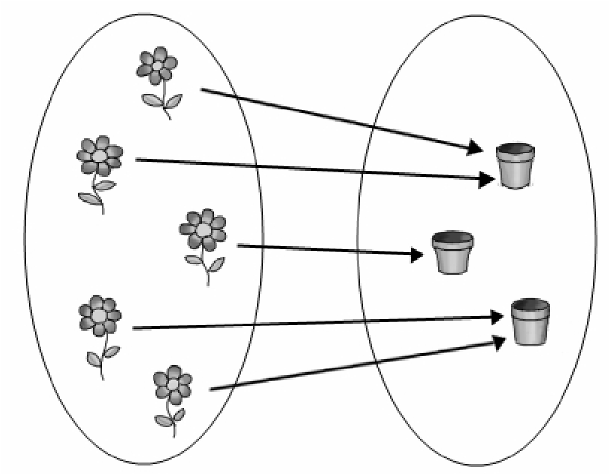
הגדרה: תהיינה α ו- β שתי עוצמות, ותהיינה A ו-B קבוצות מעוצמות α ו- β בהתאמה.

אומרים ש $\alpha\le\beta$ אם קיימת פונקציה 1-1 ערכית $f:A\to B$.

לפי מה שלמדנו, התנאי הזה שקול לכך שקיימת פונקציה על $g:B\to A$. אם כן, הגדרה חליפית היא:

הגדרה חליפית: תהיינה A ו-B קבוצות מעוצמות α ו- β בהתאמה. אומרים ש $\alpha\le\beta$ אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ שהיא על.

בהמשך נשתמש חליפות בשתי ההגדרות האלה.



קבוצת העציצים קטנה או שווה בגודלה לקבוצת הפרחים, מכיוון שיש העתקה על מן הפרחים על העציצים, או בנוסח שקול: קיימת העתקה חד-חד ערכית מן העציצים לפרחים.

ההגדרה הזאת מחביאה מאחוריה בעיה. הקבוצות A ו-B שלעיל הן נציגות ממחלקות השקילות שלהן – אולי בבחירת נציגות אחרות תתקבל תוצאה אחרת?

כדי שתבינו שיש כאן מה להוכיח, הסתכלו בדוגמה הבאה. נניח שיוון וישראל רוצות להחליט איזו מדינה טובה יותר בכדורסל, והן מחליטות להפגיש לשם כך שתי נציגות - קבוצה מסוימת מיוון, עם קבוצה מסוימת מישראל. ברור שהדרך הזאת אינה מוגדרת היטב. אם תיבחר מכבי תל אביב מישראל ונבחרתו של כפר קטן מיוון, התוצאה תהיה שונה בוודאי מזו שתתקבל אם תיפגש נבחרת הילדים של כפר אלול ב׳ עם פנתינאיקוס מאתונה.

למזלנו, במקרה שלנו ההגדרה אכן אינה תלויה בבחירת הנציגים מן העוצמות.

טענה: תהיינה A, A', B ו-B' קבוצות המקיימות $|A'|=|A|, |B'|=|B|$. אם קיימת פונקציה 1-1 ערכית $f:A\to B$ אז קיימת גם פונקציה 1-1 ערכית $f':A'\to B'$.

את ההוכחה נשאיר כ **תרגיל.** רמז: f' היא הרכב של f עם בייקציות $g:A\to A'$ ו-$h:B\to B'$ שמראות ש: $|A'|=|A|,|B'|=|B|$. באיזה סדר תרכיבו אותן?

עובדה ראשונה על אי שוויון קבוצות היא טבעית מאוד:

טענה: אם $A\subseteq B$ אז $|A|\le|B|$.

הוכחה: נגדיר $f:A\to B$ כ: $f(a)=a$. פונקציה זו נקראת **פונקציית השיכון**, וקל לראות שהיא 1-1 ערכית.

תרגילים:

תזכורת: לפונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $S\subseteq A, T\subseteq B$ מסמנים $f(S)=\{f(s):s\in S\}$ ו-$f^{-1}(T)=\{a\in A: f(a)\in T\}$. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית כל אחת מן הטענות הבאות:

א. $|f(S)|\le|S|$.

ב. $|f^{-1}(T)|\geq|T|$.

ג. $f(f^{-1}(T))=T$.

ד. $f^{-1}(f(S))=S$.

תשובות:

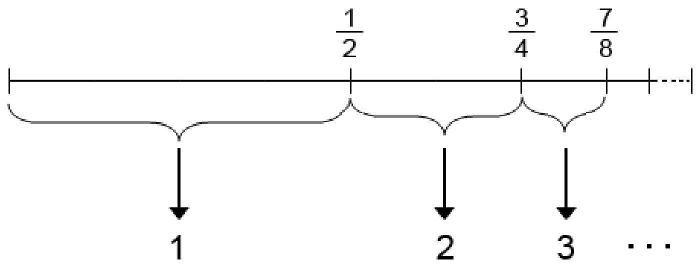
א. נכון. יש העתקה מ-S על $f(S)$, פשוט ההעתקה S, f (צמצום f ל-S), ולמדנו ש- $|A|\geq|B|$ אם ורק אם יש העתקה מ-A על B.

ב. לא נכון. למשל, אם f פונקציה ריקה, יכול להיות ש-T לא ריקה ו- $f^{-1}(T)$ ריקה.

ג. לא נכון, אותה דוגמה כמו ב-ב'.

ד. לא נכון. תנו דוגמה.

תרגיל: היעזרו בציור הבא כדי להוכיח שעוצמת הקטע $[0,1]$ גדולה או שווה מעוצמת המספרים הטבעיים.



קבוצות סופיות ואינסופיות

הגדרה: קבוצה A נקראת סופית אם קיים מספר טבעי n ש-A שקולה לקבוצה $[n]$.

כזכור, $[n]$ מציין את הקבוצה $\{1,2,...,n\}$.

קבוצה נקראת אינסופית אם היא לא סופית.

משפט: קבוצה A היא אינסופית אם ורק אם היא גדולה או שווה בגודלה ל- $\mathbf{N}$. כלומר, אם יש פונקציה 1-1 ערכית מ- $\mathbf{N}$ ל-A.

הוכחה: נניח ש-A אינה סופית, ונבנה פונקציה 1-1 ערכית $f:\mathbf{N}\to A$. אם A ריקה, היא סופית (כי היא שקולה ל- $[0]$), בסתירה להנחה. לכן אפשר להניח שקיים ב-A איבר a_1.

נגדיר $f(0)=a_1$. אם a_1 הוא האיבר היחיד ב-A, אז A שקולה ל- $[1]$, כלומר היא סופית, בסתירה להנחה. לכן אפשר להניח שקיים איבר נוסף, a_2, שונה מ- a_1. נגדיר: $f(1)=a_2$.

ממשיכים כך. ההגדרה של f אינה נעצרת, משום שלו הייתה נעצרת הייתה A סופית. הפונקציה f המתקבלת היא 1-1 ערכית, משום שכל פעם בחרנו איבר שונה.

ייתכן ששמתם לב: השתמשנו כאן באקסיומת הבחירה! כדי להגדיר את a_i היינו צריכים לבחור איברים מתוך סדרה אינסופית של קבוצות, וזה דורש את אקסיומת הבחירה.

דרך אחרת לנסח את המשפט היא שכל קבוצה אינסופית מכילה עותק של המספרים הטבעיים.

הגדרה: קבוצה A נקראת בת-מנייה אם $|A| \le |\mathbf{N}|$.

כזכור, אפשר לפרש זאת בכך שיש פונקציה 1-1 ערכית מ-A ל- $\mathbb{N}$, ואפשר גם לפרש זאת בכך שיש פונקציה $c: \mathbf{N} \to A$ על. המילה "בת מנייה" באה מן הפירוש השני, שאומר שאפשר לעבור על פני כל איברי A, כ - $c(0), c(1), c(2), \dots$, שפירושו שאפשר למנות את איברי A.

הערה: שימו לכך שעל פי ההגדרה קבוצה סופית נחשבת לבת-מנייה.

מן המשפט הקודם נובע שקבוצת הטבעיים היא הקבוצה האינסופית הקטנה ביותר. להיות "בת מנייה" פירושו על כן שאם הקבוצה היא אינסופית, היא האינסופית הכי קטנה שאפשר.

סימון: עוצמת $\mathbf{N}$ מסומנת ב- $\aleph_0$.

אם כן, קבוצה היא בת מנייה אם היא סופית או מגודל $\aleph_0$.

נגדיר עתה אי שוויון חריף בין גדלי קבוצות:

הגדרה: $|A| < |B|$ אם $|A| \le |B|$ ו- B אינה קטנה או שווה בגודלה ל-A.

תרגילים:

1. הוכיחו שאם S קבוצה סופית, אז פונקציה $f: S \to S$ היא 1-1 ערכית אם ורק אם היא על.
2. הוכיחו: אם S ו-T קבוצות סופיות, ויש פונקציה 1-1 ערכית מ-S ל-T שאינה על, אז אין פונקציה 1-1 ערכית מ- T ל-S.

במקרה האינסופי שתי העובדות האלה אינן נכונות. למעשה, נכון המשפט הבא:

משפט: לכל קבוצה אינסופית A יש פונקציה $f: A \to A$ שהיא 1-1 ערכית ולא על, ויש גם פונקציה $g: A \to A$ שהיא על ולא 1-1 ערכית.

הוכחה: נראה זאת תחילה כאשר $A = \mathbb{N}$. נגדיר $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ על ידי: $f(i) = i + 1$ לכל $i \in N$. זוהי פונקציה 1-1 ערכית, ולא על (כי 0 אינו נמצא בתמונה שלה). נגדיר גם $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כ: $g(i) = \max(0, i-1)$. בדקו ש- g היא על, ואינה 1-1 ערכית (היא שולחת כל איבר לקודמו, פרט ל-0, שאותו היא שולחת לעצמו. כך היא שולחת גם את 1 וגם את 0 ל-0).

נוכיח עתה את המשפט לקבוצה אינסופית כלשהי A. לפי משפט קודם, A מכילה עותק של המספרים הטבעיים: $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. ההוכחה תתקבל מהפעלת הפונקציות שהגדרנו לעיל על העותק הזה. ובמפורש: נגדיר $f: A \to A$ כ: $f(a_i) = a_{i+1}$, ו- $f(x) = x$ לכל איבר ב-A שאינו

שווה לאחד ה- a_i. נגדיר $g: A \to A$ כ: $g(a_i)=a_{\max(i-1,0)}$, ו- $g(x)=x$ לכל איבר ב-A שאינו שווה לאחד ה- a_i.

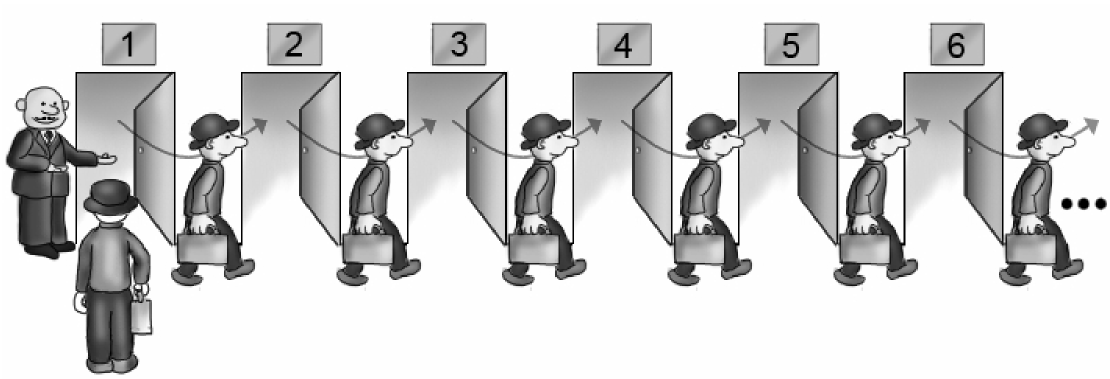
צירוף התרגילים שלעיל עם המשפט נותן אפיון של קבוצות אינסופיות:

משפט: קבוצה היא אינסופית אם ורק אם קיימת פונקציה ממנה לעצמה שהיא 1-1 ערכית ולא על, ואם ורק אם קיימת פונקציה ממנה לעצמה שהיא על ולא 1-1 ערכית.

במקרה הסופי $|A|<|B|$ אם ורק אם יש פונקציה 1-1 ערכית מ-A ל-B, שאינה על. במקרה האינסופי המשפט שלעיל מראה שזו אינה ההגדרה הנכונה. לו היינו נוקטים אותה, היינו מקבלים אבסורד: קבוצה שקטנה מעצמה.

המלון של הילברט

את העובדה שלקבוצה אינסופית יש העתקה חד חד ערכית לתוך עצמה שאינה על הדגים המתמטיקאי הגרמני הגדול דויד הילברט בסיפור על מלון בשמיים. זהו מלון עם אינסוף חדרים, כעוצמת הטבעיים. ערב אחד הגיעו למלון אינסוף אורחים, ותפסו את כל החדרים. ואז צצה בעיה: הגיע אורח נוסף. לו היה המלון סופי, לא היה ניתן לספק לו מקום לינה. מכיוון שהמלון היה אינסופי, נמצא מוצא. בעל המלון הודיע במערכת כריזה שעל כל אורח לעבור לחדר הבא: האורח בחדר ה-n צריך לעבור לחדר מספר $n+1$. האורח בחדר מספר 0 עבר לחדר מספר 1, האורח בחדר מספר 1 עבר לחדר מספר 2, האורח בחדר מספר 2 עבר לחדר מספר 3, וכו'. לפתע התפנה מקום – חדר מספר 0, והאורח החדש יכול היה להיכנס אליו. (באיור שלהלן אין חדר מספר 0, אבל זהו אותו רעיון.)



המלון של הילברט עתיד לספק לנו הפתעות גדולות עוד יותר. הסתכלו במספרים הטבעיים ובמספרים הזוגיים:

$$A=\{0,2,4,6,8,\ldots\}$$
$$B=\{0,1,2,3,4,\ldots\}=\mathbf{N}$$

A מוכלת ממש ב-B, וב-B יש אפילו אינסוף איברים נוספים לאלו שנמצאים ב-A (כל המספרים האי-זוגיים). בכל זאת יש בייקציה בין שתי הקבוצות, שנתונה על ידי הפונקציה מ-B ל-A המוגדרת כ:

$$f(n)=2n$$

במלון של הילברט הסיפור הזה נראה כך. בלילה הבא שוב התמלא המלון לגמרי. והנה, לאחר שכל החדרים כבר נתפסו, הופיע אוטובוס אינסופי עם אינסוף אורחים נוספים. גם הפעם לא הובך בעל המלון. הוא הודיע במערכת הכריזה שעל כל אורח במלון לעבור לחדר במספר כפול משלו. כך התפנו כל החדרים האי-זוגיים, ובהם יכול היה בעל המלון לשכן את האורחים החדשים.

הנה הוא המלון של הילברט עבור קבוצה אינסופית כלשהי:

תרגיל: אם A אינסופית, אז לכל $a \in A$ מתקיים $\left|A \setminus \{a\}\right| = |A|$.

פתרון: מכיוון ש-A אינסופית, יש בה סדרה $a_0, a_1, a_2, \ldots$ של איברים שונים. נגדיר $f : A \to A \setminus \{a\}$ על-ידי:

$$f(x) = \begin{cases} a_0 & \text{if } x = a \\ a_{i+1} & \text{if } x = a_i \\ x & \text{if } x \in A \setminus \{a, a_0, a_1, a_2, \ldots\} \end{cases}$$

במילים: f מעבירה כל איבר בסדרה $a_0, a_1, a_2, \ldots$ לאיבר הבא אחריו. את שאר האיברים ב-A היא שולחת לעצמם. כך האיבר הראשון בסדרה, a_0, מתפנה במובן זה שאף איבר לא נשלח אליו, ולכן אפשר לשלוח אליו את האיבר a.

עוצמת המספרים הרציונליים ועוצמת $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ |

המלון של הילברט הוא סיפור מפתיע. הפתעה גדולה עוד יותר היא שקבוצת המספרים הרציונליים שווה בעוצמתה לקבוצת הטבעיים. זה מפתיע, משום שבין כל שני מספרים טבעיים יש אינסוף מספרים רציונליים. אי השוויון המפתיע הוא כמובן שהרציונליים אינם עולים בעוצמתם על הטבעיים:

טענה: $|\mathbf{Q}| \le |\mathbf{N}|$.

הוכחה: נראה תחילה שמתקיים $\left|\mathbf{Q}^+\right| \le |\mathbf{N}|$, כאשר $\mathbf{Q}^+$ מציין את הרציונליים החיוביים, ואז נרחיב את ההוכחה לכל הרציונליים. מספר רציונלי חיובי הוא מנה של שני מספרים טבעיים: $q = \frac{m}{n}, \quad m,n > 0$.

נגדיר $f : \mathbf{Q}^+ \to \mathbf{N}$ על-ידי $f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m \cdot 3^n$. לדוגמה, המקור של $24 = 2^3 \cdot 3^1$ הוא $\frac{3}{1}$. קל לראות כי הפונקציה הזאת היא חד-חד ערכית (הדבר נובע מיחידות הפירוק לגורמים ראשוניים).

כדי להרחיב את ההגדרה של f עבור כל הרציונליים, נגדיר $f\left(\frac{-m}{n}\right) = 2^m \cdot 3^n \cdot 5$. כך ניתן להבדיל בין תמונות של מספרים שליליים לתמונות של מספרים חיוביים. גם פונקציה זו היא חד-חד ערכית, והדבר מוכיח ש: $|\mathbf{Q}| \le |\mathbf{N}|$.

הערה: לא הגדרנו את f עבור המספר הרציונלי 0. איזה ערך ניתן לתת ל- $f(0)$ כך שתישמר החד-חד-ערכיות?

מספר רציונלי אינו אלא זוג מספרים, (מונה, מכנה) (בהנחה שהשבר מצומצם). לכן המשפט שעומד מאחורי הטענה הוא:

משפט: $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|\le|\mathbf{N}|$.

הוכחה ראשונה: הפונקציה $g:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ המוגדרת על ידי: $g((m,n))=2^m\cdot 3^n$ היא 1-1 ערכית.

הוכחה שנייה: נמנה את הזוגות של המספרים הטבעיים בסדר הבא. נסו לגלות את הכלל:

$$z_0=(0,0),$$
$$z_1=(0,1),\ z_2=(1,0),$$
$$z_3=(0,2),\ z_4=(1,1),\ z_5=(2,0),$$
$$z_6=(0,3),\ z_7=(1,2),\ z_8=(2,1),\ z_9=(3,0),...$$

אני חושב שגיליתם: מונים על פי סדר את הזוגות שסכומם 0 (למעשה זוג אחד), אחר כך את הזוגות שסכומם 1, אחר כך את הזוגות שסכומם 2 וכו'. לכל k מספר הזוגות שסכומם k הוא סופי, ולכן נעבור כך על פני כל הזוגות בעולם. להוכחה הזאת יש יתרון שהיא מספקת בייקציה, שמראה ש: $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}|=|\mathbf{N}|$.

תרגילים

1. ציירו במישור את הסריג של הזוגות של מספרים טבעיים (כלומר, את הצירים הקרטזיים ואת הנקודות השלמות האי-שליליות בה), והראו כיצד המנייה שבהוכחה השנייה עוברת על פני כל הזוגות.

2. הוכיחו ש - $|\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}|\le|\mathbf{N}|$.

3. הוכיחו שקיים פירוק של המספרים הטבעיים ל- $\aleph_0$ קבוצות שבכל אחת מהן $\aleph_0$ איברים.

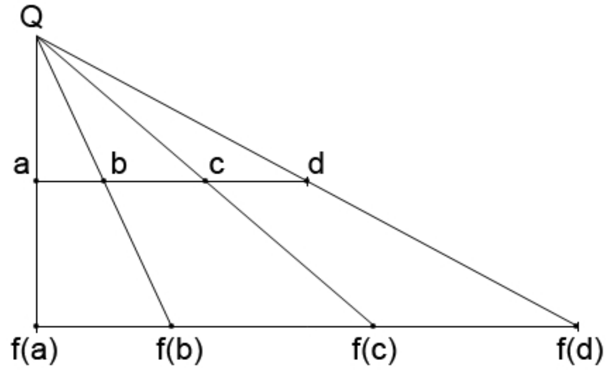
חידה על צפרדע

הנה חידה נחמדה, שאפשר לפתור בעזרת מה שלמדנו.

> על ציר המספרים השלמים עומדת במקום שאיננו יודעים מהו צפרדע בלתי נראית. לא ניתן לראות את הצפרדע, אבל ניתן להרגיש אותה. בכל שנייה הצפרדע קופצת צעד בגודל וכיוון קבוע, למשל 3 ימינה. גם מרחק הקפיצה וגם כיוונה אינם ידועים. בכל שנייה אנחנו יכולים להושיט יד למספר כלשהו ולנסות לתפוס את הצפרדע, אם היא נמצאת באותו מספר. הראו שיש אסטרטגיה שבעזרתה מובטח שתתפסו את הצפרדע בשלב כלשהו.

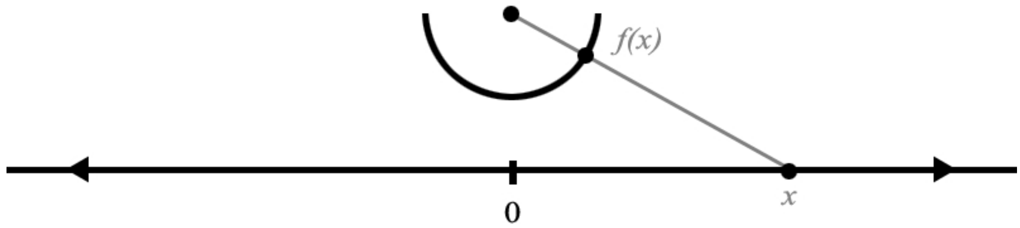
הפתעות נוספות

הנה הפתעה נוספת שמזמנות לנו העוצמות האינסופיות. תהיינה: $A=[0,1]$, $B=[0,2]$ (כאשר $[a,b]$ הוא הקטע $\{x: a\le x\le b\}$ במספרים הממשיים). ב- B יש "פי 2 איברים" מאשר ב-A, ובכל זאת הן שוות עוצמה, כפי שמראה הבייקציה $f:B\to A$ המוגדרת על ידי $f(x)=\frac{x}{2}$.



האיור מראה בייקציה בין קטע (העליון) לבין קטע ארוך ממנו (התחתון)

למעשה, דבר מפתיע בהרבה נכון: קבוצת המספרים הממשיים שקולה לקטע $[0,1]$. בינתיים נראה רק את הצד המפתיע בשקילות הזאת, $|\mathbf{R}| \le |[0,1]|$. לשם כך נראה בייקציה בין $\mathbf{R}$ לבין הקטע הפתוח $(0,1)$. נמתח את הקטע $(0,1)$ על חצי מעגל, ונמקם אותו מעל 0. כעת נעביר ישר מכל נקודה x על $\mathbf{R}$ למרכז המעגל, ונגדיר את $f(x)$ כחיתוך של ישר זה עם חצי המעגל, כמודגם בציור הבא:



שימו לב שקצוות הקטע אינם בתמונת f. אפשר גם לתת בייקציה מפורשת בין $(0,1)$ ל- $\mathbf{R}$. נגדיר:

$$g(x) = \tan\left(\pi\left(x - ½\right)\right)$$

פונקציית הטנגנס מעבירה כידוע קטע סופי לכל הישר (היא שואפת לאינסוף ולמינוס אינסוף בשני קצוות הקטע.

תרגיל: בהוכחה הגרפית אפשר לשים את חצי המעגל כך שייגע בישר בנקודה 0. הראו שאז הנוסחה להתאמה ההפוכה ל- f היא נוסחה מאוד דומה לנוסחה ל- g.

למי שמעדיף פונקציות רציונליות, הנה פונקציה שמעתיקה את הקטע $(-1,1)$ על הישר כולו: $\frac{x}{1-x^2}$.

בהמשך נראה דבר מפתיע עוד יותר: הקטע $[0,1]$ שקול גם למישור, למרחב, ואפילו למרחב ה- n ממדי לכל מספר סופי n.

השקילות שגילינו בין כל-כך הרבה קבוצות אינסופיות עלולה לפתות להאמין שכל הקבוצות האינסופיות הן בעלות אותה עוצמה. דבר זה אינו נכון, וקיומן של קבוצות אינסופיות בעלות גדלים שונים הוא הנושא העיקרי של פרק זה.

תרגילים:

1. הוכיחו כי $B \sim A$ כאשר A ו-B הן הקבוצות הבאות:

   .a $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$

   .b $A=[-19,\infty)$, $B=(0,10)$

   .c $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{N}$

   .d $A=\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $B=\mathbf{N}$

   .e $A=\mathbf{R}$, $B=\{$ מעגלים עם מרכז ב-$(1,1)$ $\}$

2. סדרו את הקבוצות הבאות לפי עוצמה, מקטנות לגדולות (הסימון: $x \mid y$ אומר x מחלק את y, כלומר עבור $x,y\in\sqcup$ אז $x \mid y$ אם קיים $z\in\sqcup$ כך שמתקיים $xz=y$):

   .a $A=\{x\in\sqcup : x^{12}-1=0\}$

   .b $B=\{x\in\sqcup : x \mid 22\}$

   .c $C=\{x\in\sqcup : 2 \mid x\}$

   .d $D=\{x\in\sqcup \mid x\in[1,3]\vee x\in[6,7]\}$

   .e $E=\{x\in\sqcup \mid x>12\}$

משפט קנטור- ברנשטיין

כל שני מספרים טבעיים ניתנים להשוואה – תמיד יש אחד מהם שגדול או שווה מן האחר. האם הדבר נכון גם לעוצמות? האם לכל שתי עוצמות, האחת גדולה או שווה מן האחרת? התשובה היא "כן", שמשמעה שלכל A,B קיימת פונקציה $f:A\to B$ חד-חד ערכית, או קיימת פונקציה $g:B\to A$ חד-חד ערכית. בינתיים לא נוכיח זאת – הדבר דורש פיתוח של כמה כלים. אבל הנה שאלה בסיסית לא פחות: האם יחס האי שוויון הוא אנטי סימטרי? גם כאן התשובה היא "כן". למי ששכח מהי "אנטי סימטריות", היא מבוטאת במשפט הבא:

משפט קנטור-ברנשטיין: אם $|A|\le|B|$ וגם $|B|\le|A|$ אז $|A|=|B|$.

(קנטור הוכיח את המשפט לראשונה, ברנשטיין נתן הוכחה פשוטה יותר.)

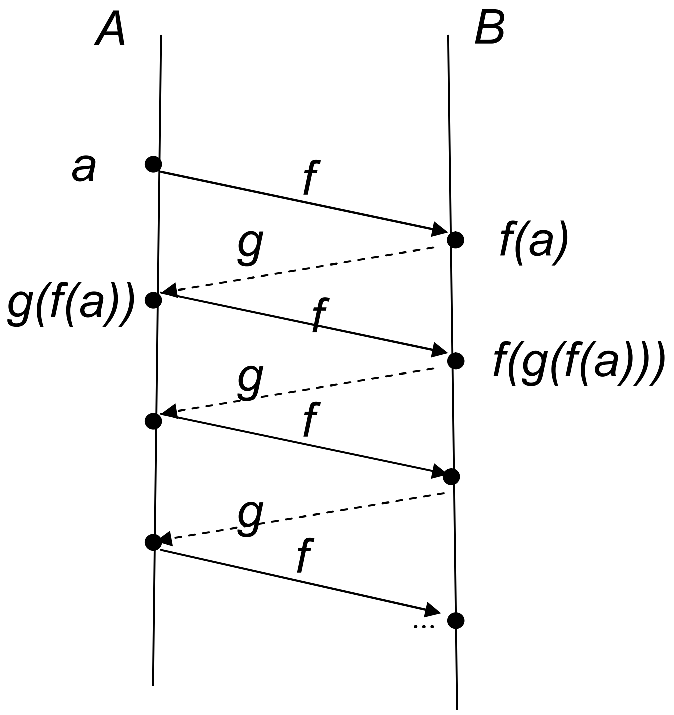
הוכחה: משמעות המשפט היא שאם קיימות פונקציות תהי $f:A\to B$ 1-1 ערכית (לא בהכרח על), ופונקציה $g:B\to A$ 1-1 ערכית (לא בהכרח על), אזי קיימת פונקציה $h:A\to B$ 1-1 ערכית ועל. כמובן – את h נבנה מ- f ומ- g. הרי קיומן הוא מה שנתון לנו, ורק בו אנחנו יכולים להשתמש. ואכן, הפונקציה h תהיה מוכלת ב- $f\cup g^{-1}$, כאשר g^{-1} היא אוסף הזוגות שמרכיבים את g, בסדר הפוך.

ההוכחה היא "גיניאלוגית". כל איבר עושה חקירת "שורשים", כלומר מסתכל על עץ היוחסין שלו, קדימה ואחורה, מי הם אבותיו ומי הם צאצאיו.

ניקח $a\in A$ כלשהו ונסתכל על המסלול שנוצר על-ידי הפעלת f ו- g לסירוגין:

$$f(a),\ g\big(f(a)\big),\ f\Big(g\big(f(a)\big)\Big),\ g\Big(f\Big(g\big(f(a)\big)\Big)\Big),\dots$$

נקרא לאיברים האלה ה"בנים" של a. הנה הם בציור:



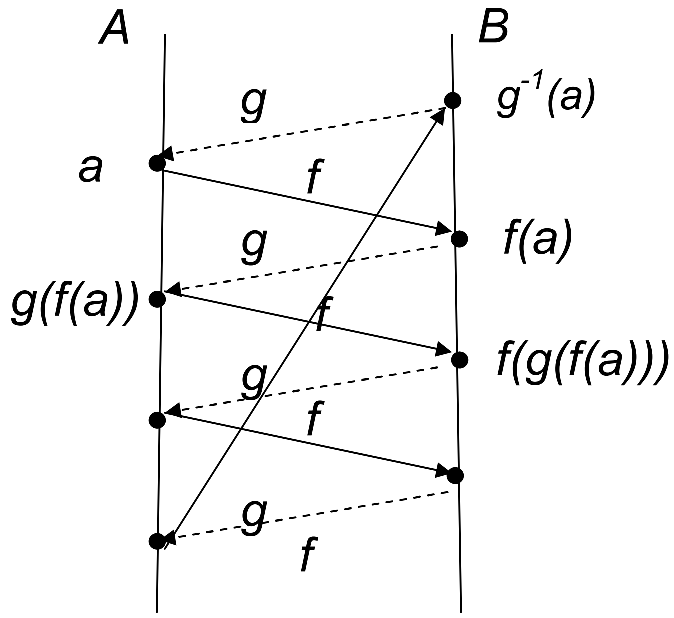
אם a שייך לתמונה של g, כלומר קיים $g^{-1}(a)$, אפשר להמשיך את המסלול גם לאחור:

$$g^{-1}(a),\ f^{-1}\big(g^{-1}(a)\big),\ g^{-1}\Big(f^{-1}\big(g^{-1}(a)\big)\Big),\ f^{-1}\Big(g^{-1}\Big(f^{-1}\big(g^{-1}(a)\big)\Big)\Big),\dots$$

לאיברים האלה נקרא ה"אבות" של a. בכיוון זה ייתכן שהסדרה תיעצר בשלב כלשהו, כי יכול להיות שנגיע לאיבר שלא נמצא בתמונה של f או של g (זכרו ש- f ו- g לא בהכרח על). בסופו של דבר אפשר להגיע לביצה או לתרנגולת שהתחילו את השרשרת (אבל במקרה זה לפחות אפשר גם לא.)

בכיוון קדימה הסדרה עשויה להימשך לאינסוף, כי f מוגדרת לכל $a\in A$ ו- g מוגדרת לכל $b\in B$, ולכן בפרט מוגדרת לכל $f(a)$. אבל ייתכן גם שבשלב מסוים במהלך המסלול נחזור

לאיבר a המקורי, או לאחד מאבותיו. נקרא למצב כזה "מעגל". הנה דוגמה למעגל:



דבר דומה אפשר לעשות גם לאיברי B. אם כן, כל איבר ב- $A \cup B$ שייך למסלול מאחד משלושת הסוגים הבאים:

1. מסלול שמתחיל ולא מסתיים
2. מסלול שלא מתחיל ולא מסתיים. כמו בסיפור הביצה והתרנגולת, אין למסלול כזה התחלה ב-A (נאמר – "ביצה") ואין לו התחלה ב-B (נאמר – "תרנגולת")
3. מעגל.

ההבחנה המכרעת היא שמספיק לבנות בייקציה בכל מסלול לחוד. הסיבה היא שכל המסלולים והמעגלים זרים – שני מסלולים שונים לעולם לא ייפגשו, משום ששתי הפונקציות הנתונות הן 1-1 ערכיות, ולכן לא קורה ששני איברים מגיעים לאותו איבר. אם נבנה בכל מסלול בייקציה בין האיברים ב-A לאיברים ב-B נקבל יחד בייקציה בין כל איברי A לכל איברי B.

נעשה זאת כך:

1. מכל מעגל נבחר את כל החצים ששייכים ל- f (בציור שלעיל – החצים הלא מקווקווים). החצים שבחרנו מהווים בייקציה בין איברי המעגל שנמצאים ב-A לאיברי המעגל שנמצאים ב-B.
2. מכל מסלול שמתחיל ב-A ניקח את כל החצים ששייכים ל- f (בציור שלעיל, שוב אלה החצים הלא מקווקווים). חצים אלה מכסים את כל איברי המסלול, ומהווים בייקציה בין איברי המסלול ששייכים ל-A לאלו ששייכים ל-B .
3. מכל מסלול שמתחיל ב-B ניקח את כל החצים ששייכים ל- g. אם נהפוך את הכיוון שלהם, אלה יהיו חצים מ-A ל-B, שמהווים בייקציה בין איברי המסלול הנתון ששייכים ל-A ואיברי המסלול ששייכים ל-B.
4. מכל מסלול אינסופי לשני הכיוונים נבחר את כל החצים השייכים ל- f . הם מהווים בייקציה בין איברי המסלול שנמצאים ב-A לאיברי המסלול שנמצאים ב-B.

הערה: ב-1 וב-4 יכולנו באותה מידה לקחת את כל החצים השייכים ל- g.

כאמור, מכיוון שהמסלולים זרים אין התנגשויות בין ההגדרות האלה, כלומר זוהי הגדרה טובה. הפונקציה המבוקשת h היא איחוד כל קבוצות החצים שלקחנו בדרך זו. היא 1-1 ערכית משום

שהיא 1-1 ערכית על כל מסלול והמסלולים הם זרים. היא על, משום שהיא על בכל מסלול, והמסלולים מכסים את כל איברי A ו-B.

שימו לב שהפונקציה h שנבנתה בהוכחה אינה בהכרח יחידה.

תרגילים:

1. נגדיר $f:[0,1)\to[0,1]$ כ: $f(x)=x$ ו- $g:[0,1]\to[0,1)$ כ: $g(x)=\frac{x}{2}$. הוכיחו שהפונקציה h שנבנית בהוכחה לעיל היא יחידה. האם תוכלו לתאר אותה?

2. תנו עוד דוגמה שבה h יחידה, ומצאו דוגמה שבה היא אינה יחידה.

3. פתרו את חידת הביצה והתרנגולת: היכן מתחילה השרשרת, בביצה או בתרנגולת? (רמז: זה קשור לפרדוקס הערמה שהוזכר לעיל.)

תרגילים פתורים: 1. הוכיחו כי $\left\|(0,1]\right\|=\left\|[0,1]\right\|$

פתרון: מכיוון ש- $(0,1]\subseteq[0,1]$ נובע מן הלמה ש: $\left\|(0,1]\right\|\le\left\|[0,1]\right\|$. נגדיר $f:[0,1]\to(0,1]$ על-ידי $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. זוהי פונקציה 1-1 ערכית, שמראה כי: $\left\|[0,1]\right\|\le\left\|(0,1]\right\|$. ממשפט קנטור-ברשטיין נובע השוויון $\left\|(0,1]\right\|=\left\|[0,1]\right\|$.

2. הוכיחו ש- $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$.

פתרון: הראינו לעיל ש- $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|$. אי השוויון ההפוך מוכח בעזרת הפונקציה ה-1-1 ערכית $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת על ידי: $g(n)=(0,n)$. כל שנותר הוא להשתמש במשפט קנטור-ברנשטיין. (הערה: למעשה, נתנו לעיל גם בייקציה מפורשת בין שתי הקבוצות.)

3. תהא F קבוצת הפונקציות מן המספרים הטבעיים לעצמם. הוכיחו ש- $|P(\mathbb{N})|\le|F|$

פתרון: לכל תת קבוצה של $\mathbb{N}$ התאימו את הפונקציה האופיינית שלה.

4. תהא G קבוצת הפונקציות המונוטוניות העולות (חלש) מן הטבעיים לעצמם. הוכיחו: $|P(\mathbb{N})|\le|G|$

(רמז: לכל סדרה χ של 0,1 התאימו פונקציה מונוטונית עולה חלש f, שבה $f(n+1)-f(n)=\chi(n)$)

5. * תהא G' קבוצת הפונקציות המונוטוניות העולות (חלש) מן הטבעיים לעצמם. הוכיחו: $|P(\mathbb{N})|\le|G'|$

6. הוכיחו בצורה מדויקת שאם $|A|\le|A'|$ ו- $|B|\le|B'|$ אז $|A\times B|\le|A'\times B'|$.

7. תהא $f:A\to B$ פונקציה. נגדיר שתי פונקציות על קבוצות החזקה: $f^*:P(A)\to P(B)$ ו- $f^{-1}:P(B)\to P(A)$ כך: $f^*(X)=\{f(x):x\in X\}$, $f^{-1}(Y)=\{a\in A:f(a)\in Y\}$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם f על אז f^* על.

ב. אם f חד חד ערכית אז f^* חד חד ערכית.

ג. אם f על אז f^{-1} על.

ד. אם f חד חד ערכית אז f^{-1} חד חד ערכית.

קבוצת החזקה של הטבעיים, וקבוצת הממשיים

עוצמת $\mathbf{R}$, קבוצת המספרים הממשיים, מסומנת ב- $\aleph$. העובדה שגילה קנטור, ושבעקבותיה פיתח את תורת הקבוצות, היא ש- $\aleph > \aleph_0$. להוכחת המשפט הזה נחתור בסעיפים הבאים.
כהקדמה לכך ניזכר מהי שיטת הספירה הבינארית. אנו רגילים לספור בבסיס 10. בבסיס הזה מבוטא כל מספר כסכום של חזקות של 10, נכפלות במקדמים קטנים מ-10. למשל:

$$1452 = 1\cdot 1000 + 4\cdot 100 + 5\cdot 10 + 2 = 1\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0$$

בשיטת הספירה הבינארית משתמשים בחזקות של 2 במקום בחזקות של 10. המקדמים של החזקות קטנים במקרה זה מ-2, כלומר הם 0 ו-1. דוגמה:

$$1101 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+4+0+1 = 13$$

כלומר המספר שנכתב כ- 1101 בשיטה הבינארית נכתב בשיטה העשרונית כ- 13. בדומה לשיטה העשרונית, גם בשיטה הבינארית מגדירים מספרים קטנים מ-1 כ"שברים בינאריים", עם נקודה מימין ל-0 וחזקות שליליות של 2, במקום חזקות שליליות של 10. למשל, 0.1 הוא חצי אחד, 0.01 הוא רבע, 0.001 הוא שמינית, ו- 0.101 הוא חצי ועוד שמינית, כלומר $\frac{5}{8}$.

משפט: $\aleph = |\mathbf{R}| = |\mathrm{P}(\mathbf{N})|$

הוכחה: לפי משפט קנטור-ברנשטיין מספיק להוכיח ש- $|\mathrm{P}(\mathbf{N})| \le |\mathbf{R}|$, וש- $|\mathbf{R}| \le |\mathrm{P}(\mathbf{N})|$.

כדי להוכיח את אי השוויון הראשון, נגדיר פונקציה f מ- $\mathrm{P}(\mathbf{N})$ ל- $\mathbf{R}$ כך: $f(A) = 0.\chi_A$
כאשר $0.\chi_A$ הוא המספר **העשרוני** (לא בינארי) שספרת האחדות שלו היא 0, ומימין לנקודה מופיעה הפונקציה האופיינית של A. כך למשל, אם נסמן את קבוצת המספרים הזוגיים ב- $2\mathbf{N}$, אז:

$$f(2\mathbf{N}) = 0.10101010...$$
$$f(\{1,2,5\}) = 0.0110010000...$$

(שימו לב שמכיוון שהמספרים הטבעיים מכילים את 0, הפונקציה האופיינית של קבוצת הזוגיים היא ...10101010.) מכיוון שמדובר בפיתוח עשרוני, ולא בינארי, הפונקציה היא 1-1 ערכית. לו היינו משתמשים כאן בייצוג הבינארי היינו נתקלים בבעיה, משום שבייצוג בינארי מתקיים $0.100000_2 = 0.011111..._2$ (בדיוק כשם שבשיטה העשרונית מתקיים $1.00000 = 0.99999...$)
ולכן לו היינו מפרשים את $0.\chi_A$ כייצוג בינארי של המספר, היה מתקיים:
$f(\mathbf{N} \setminus \{0\}) = f(\{0\})$, כלומר הפונקציה לא הייתה 1-1 ערכית. בייצוג העשרוני הייתה עלולה להתעורר בעיה בחד-חד ערכיות לו היו מופיעות ספרות 9, אבל אצלנו אין כאלה.

הוכחנו כי לכל איבר ב- $P(\mathbf{N})$ מתאים באופן 1-1 ערכי מספר ב- $\mathbf{R}$, ולכן $|\mathbf{R}| \le |P(\mathbf{N})|$.

כעת נוכיח כי $|\mathbf{R}| \le |P(\mathbf{N})|$. ניזכר כי הוכחנו כבר $\mathbf{R} \sim (0,1)$. לכן מספיק להוכיח $|(0,1)| \le |P(\mathbf{N})|$. כל מספר $r \in (0,1)$ ניתן לייצוג בשיטה הבינארית, למשל:

$$\tfrac{1}{8} = 0.001000...$$

אם יש יותר מייצוג אחד למספר, אז נבחר אחד מהייצוגים. כעת נגדיר $g:(0,1) \to \mathbf{R}$ על-ידי $g(0.\chi_A) = A$. למשל:

$$g(0.101101...) = \{0,2,3,5,...\}$$

מכיוון שבבירור למספרים שונים יש ייצוגים שונים, g היא 1-1 ערכית.

הוכחנו $|P(\mathbf{N})| \le |\mathbf{R}|$ ו-$|\mathbf{R}| \le |P(\mathbf{N})|$, ולכן לפי משפט קנטור-ברנשטיין $|\mathbf{R}| = |P(\mathbf{N})|$.

תרגיל: מצאו את $g\left(\tfrac{1}{3}\right)$

רמז: השאלה היא מהו הפיתוח הבינארי של $\frac{1}{3}$. היזכרו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית. כדי לחשב את הסכום

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + ...$$

נכפול את שני האגפים ב-q ונקבל

$$qS = q + q^2 + q^3 + q^4 ... = S - 1$$

$$\Downarrow$$

$$S(q-1) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$S = \frac{1}{1-q}$$

הראו שאם מציבים בנוסחה איזה ערך יש להציב במקום $q = \frac{1}{4}$ מתקבל הסכום $\frac{1}{3}$, והיעזרו בכך כדי לבטא את $\frac{1}{3}$ בצורה בינארית.

המשפט שאליו חתר קנטור בהגדרת מושג העוצמה הוא זה:

משפט קנטור: $|\mathbf{N}|>|\mathbf{R}|$, כלומר $\aleph>\aleph_0$.

הוכחה: העובדה ש- $|\mathbf{N}|\le|\mathbf{R}|$ נובעת מכך ש- $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$.

כדי להוכיח את אי השוויון החריף, ניקח תת קבוצה של המספרים הממשיים, ונראה שכבר היא אינה ניתנת להימנות. תהא S קבוצת המספרים ב- $(0,1)$ שנכתבים בשיטה העשרונית בעזרת הספרות 0 ו-1 בלבד. S היא תת קבוצה של ⊔, לכן $|S|\ge|$⊔$|$, ולכן מספיק להראות ש- $|$⊔$|>|S|$.

נניח בשלילה ש- $|$⊔$|\le|S|$. כלומר, קיימת פונקציה $h:\mathbf{N}\to S$ שהיא על. לצורך קונקרטיות, הנה דוגמה לערכים אפשריים של h (אין ברשימה כל חוקיות):

$$h(0)=0.10\,1001...$$
$$h(1)=0.101010...$$
$$h(2)=0.00\,1100...$$
$$h(3)=0.000\,100...$$
$$h(4)=0.1\,10\,110...$$

נסתכל על איברי האלכסון:

$$h(0)=0.\underline{1}\,01001...$$
$$h(1)=0.1\,\underline{0}\,10\,10...$$
$$h(2)=0.00\,\underline{1}\,100...$$
$$h(3)=0.000\,\underline{1}\,00...$$
$$h(4)=0.1\,10\,1\underline{1}0...$$

וכעת נגדיר מספר d (האות הראשונה של *davka*, כי המספר d עושה ל- h "דווקא", בכך שהוא מתעקש להיות שונה מכל איברי התמונה של h). ספרותיו של d הן היפוך של הספרות שמופיעות באלכסון. למשל, הספרה הראשונה של d היא 0, הספרה השנייה היא 1, וכו...

$$d=0.01000...$$

אם נרצה לכתוב זאת באופן פורמלי, אז עבור המספר $x\in(0,1)$ נסמן ב- $(x)_i$ את הספרה ה-i-ית אחרי הנקודה בפיתוח העשרוני של x. נגדיר את d כך:

$$(d)_i=1-(h(i))_i$$

על פי הגדרה זו d שונה מ- $h(i)$ בספרה ה-i. כלומר, $d\ne h(i)$ לכל i. המסקנה היא ש- $d\notin\operatorname{Im}h$, ולכן h לא על, בסתירה להנחה.

שיטת ההוכחה נקראת, מסיבה מובנת, "שיטת האלכסון". הרעיון המרכזי בה הוא שבייצוג של כל מספר ב-S יש $\aleph_0$ ספרות, וכך אפשר לבחור את d כך שיהיה שונה מכל $h(n)$ בספרה אחרת

(בחרנו בספרה ה- n, אבל יכולנו למשל לבחור שהוא יהיה שונה בספרה ה- $2n$). יש מספיק מרחב למשחק, כך שההגדרות האלה לא יתנגשו זו בזו. כשנתיים אחרי שהוכיח קנטור את המשפט על עוצמת המספרים הממשיים, הוא פיתח את הרעיון הזה לכל קבוצה. הוא נוכח לדעת שהעובדה שקבוצת הממשיים אינה ניתנת להימנות היא מקרה פרטי של משפט על היחס בין קבוצה לבין קבוצת החזקה שלה.

משפט קנטור על עוצמת קבוצת החזקה

משפט קנטור הכללי: לכל קבוצה S מתקיים $|P(S)|>|S|$. בפרט, עבור $S=\mathbf{N}$ מתקיים $|\mathbf{R}|=|P(\mathbf{N})|>|\mathbf{N}|$.

ראשית יש להוכיח את אי השוויון החלש:

טענה: לכל קבוצה S מתקיים $|S|\le|P(S)|$.

הוכחה: נסתכל על קבוצת היחידונים *(singletons)* ב- $P(S)$. יחידונים הם הקבוצות שמכילות איבר יחיד מ-S, למשל $\{17\}$ הוא יחידון. קבוצת היחידונים היא תת-קבוצה של קבוצה החזקה: $\{\{s\}:s\in S\}\subseteq P(S)$.

ניקח את $f:S\to P(S)$ שמוגדרת על-ידי $f(s)=\{s\}\in P(S)$, ואז f היא 1-1 ערכית.

ההוכחה של אי השוויון החריף היא אחת הקצרות והמפתיעות בדברי ימי המתמטיקה.

הוכחה ש- $|S|\ge|P(S)|$ **אינו אפשרי:** נניח בשלילה כי $|S|\ge|P(S)|$, שפירושו שקיימת פונקציה $h:S\to P(S)$ על. נגדיר $d=\{s:s\notin h(s)\}$. לפי ההנחה ש-h על קיים איבר s ב-S ש: $d=h(s)$. מהגדרת d נובע שעבור אותו s מתקיים $s\in d\Leftrightarrow s\notin h(s)$, כלומר $s\in d\Leftrightarrow s\notin d$, שהיא סתירה.

כל כך קצר, שקשה לעקוב... למעשה, זהו אותו רעיון של ההוכחה שקבוצת הממשיים גדולה מקבוצת הטבעיים. האיבר d הוא "דווקאי", במובן זה שהוא שונה מכל $h(s)$ בדיוק בנוגע להכלת s או אי הכלתה. אם $s\in h(s)$ אז d לא מכילה את s, ואילו אם $s\notin h(s)$ אז d דווקא כן מכילה את s (בדקו זאת לאור הגדרתה של d!)

אני לא בטוח שהמטפורה הבאה תעזור לכולם, אבל לי היא עוזרת להבין את ההוכחה. אתם בוודאי מכירים את משחק הילדים *Mr. Potato Head*. זהו משחק שמורכב מדמות בצורת תפוח-אדמה שניתן לשים עליה אביזרים, כמו כובע, משקפיים, אף, וכו'. נניח שקיבלתם צעצוע כזה עם קבוצת אביזרים S (ייתכן ש-S אינסופית). כל אביזר אפשר לשים על הדמות או לא לשים. דמות כלשהי היא בדיוק תת-קבוצה של אביזרים, שאותם בחרתם לשים על הדמות. לכן מספר הדמויות הוא בדיוק כעוצמת $P(S)$. עלינו להוכיח שמספר הדמויות גדול מ-$|S|$. נניח בשלילה שלא, כלומר נניח כי $|S|\le|\{\text{דמויות}\}|$, כלומר קיימת פונקציה $h:S\to\text{דמויות}$ שהיא על. הפונקציה h מתאימה לכל אביזר ב-S דמות כלשהי. כעת נבנה דמות "דווקאית" d, שאינה בתמונה של h. עבור

כל אביזר s, הדמות d תהיה שונה מ-$h(s)$ בדיוק באביזר s. למשל, אם לדמות ש-h מתאימה לכובע יש כובע, אז לדמות d לא יהיה כובע, ואילו אם h מתאימה לכובע דמות שאין לה כובע, אז לדמות d יהיה כובע. בקיצור: לכל אביזר $s \in S$, ל-d יש s אם ורק אם ל-$h(s)$ אין s. אז לכל אביזר s הדמות d שונה מ- $h(s)$ בנוגע ל s –., ולכן d שונה מ- $h(s)$ לכל s, כלומר היא אינה שייכת ל- $\operatorname{Im} h$, שפירושו ש- h אינה על, בסתירה להנחה. הראינו בכך ש- $|S| < |\{\text{דמויות}\}|$, שפירושו כאמור $|\mathrm{P}(S)| > |S|$.

תרגיל: הראו ששתי ההוכחות האלה הן בעצם אותה הוכחה.

השערת הרצף

קנטור שאל את עצמו אם $\aleph$ היא העוצמה הבאה אחרי $\aleph_0$. הוא שיער שאכן כך הוא:

השערת הרצף: אין עוצמה κ שמקיימת $\aleph_0 < \kappa < \aleph$.

למרות מאמצים נואשים (שיש הטוענים שהיו אחראיים בחלקם להידרדרות מצבו הנפשי) לא הצליח קנטור לפתור את השאלה. למעשה, היא העסיקה את אנשי תורת הקבוצות כ-80 שנה, מ-1880 ועד 1963. בשנת 1940 הוכיח גדל *(Godel)* שאי אפשר להפריך את השערת הרצף. הוא בנה מודל של עולם שבו השערת הרצף מתקיימת. בשנת 1963 הוכיח פול כהן שאי אפשר גם להוכיח את השערת הרצף. באותו מאמר הוכיח כהן גם שאי אפשר להוכיח את אקסיומת הבחירה.

פרדוקס קנטור

עכשיו אני יכול לספר לכם מאין נולד פרדוקס ראסל – מקורו הוא בפרדוקס של קנטור עצמו.

תהא S קבוצת כל הקבוצות. כל איבר ב- $\mathrm{P}(S)$ הוא קבוצה, ולכן שייך ל-S. מכאן נובע $\mathrm{P}(S) \subseteq S$, ולכן $|\mathrm{P}(S)| \le |S|$. זוהי סתירה למשפט קנטור.

(הערה: למעשה, $\mathrm{P}(S) = S$, כי בתורת הקבוצות כל דבר הוא קבוצה.)

ראסל לקח את הפרדוקס הזה, וניתח מה קורה בו. הרי הפונקציה מ-S על $\mathrm{P}(S)$ שמראה ש- $|\mathrm{P}(S)| \le |S|$ היא פשוטה מאוד – פונקציית הזהות I, שבה כל איבר נשלח לעצמו (אם מניחים שיש איברים ב- S שאינם שייכים ל- $\mathrm{P}(S)$ צריך להגדיר את הפונקציה גם עליהם, אבל אין בזה שינוי מהותי.) ההוכחה של משפט קנטור מראה שהפונקציה הזאת מביאה לסתירה, בדמות הקבוצה ה"דוןקאית" שמתאימה לפונקציה. כשבודקים מהי הקבוצה הדוןקאית במקרה הזה, מתברר שזוהי בדיוק הקבוצה של ראסל, קבוצת הקבוצות שאינן שייכות לעצמן. הרי עבור הפונקציה I הקבוצה הדוןקאית מוגדרת כ: $d = \{s : s \notin I(s)\}$, כלומר $d = \{s : s \notin s\}$, בדיוק קבוצת ראסל.

חשבון עוצמות

חיבור עוצמות

לאחר שקנטור הגדיר מחדש מהו "מספר", הוא היה צריך להגדיר מחדש גם את הפעולות בין המספרים. למעשה, בין עוצמות כלשהן.

נתחיל מן החיבור. כיצד אפשר להגדיר חיבור בין עוצמות? מתבקש להגדיר זאת כך: $|A|+|B|=|A\cup B|$, אבל ההגדרה הזאת אינה נכונה כאשר החיתוך בין A ו-B אינו ריק. אפשר לנסות להגדיר $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$. כך אנחנו מוודאים שהאיברים בחיתוך נספרים פעמיים, כפי שהם צריכים להיספר. אבל זוהי הגדרה מעגלית, כי היא מגדירה את פעולת החיבור בעזרת עצמה.

הפתרון הוא להפריד בין הקבוצות A ו-B, כלומר להפוך אותן "בכוח" לזרות. לכל איבר ב-A נצרף איבר מזהה, ולכל איבר ב-B נצרף איבר מזהה אחר. את הצירוף הזה נבצע בעזרת זוגות סדורים.

הגדרה: $|A|+|B|\sqcup|A\times\{1\}\cup B\times\{2\}|$

(הסימון $\sqcup$ מסמן הגדרה: Δ היא ה-d היוונית, ו-d היא האות הראשונה של *definition*)

מכיוון ש- $(a,1)$ אינו יכול להיות שווה ל- $(b,2)$, הקבוצות $A\times\{1\}$ ו- $B\times\{2\}$ הן זרות, והן בעלות אותן עוצמות כמו של A ושל B, בהתאמה.

תרגיל: ההגדרה דלעיל אינה שלמה. צריך להוכיח שהיא אינה תלויה בבחירת הקבוצות המיוחדות A ו-B מתוך מחלקות השקילות $|A|$ ו-$|B|$. הוכיחו זאת. כלומר: הוכיחו שאם $|A'|=|A|$ ו- $|B'|=|B|$ אז $|A'|+|B'|=|A|+|B|$, כשהסכום מוגדר כדלעיל.

תרגיל: הראו שאם A ו- B זרות אז $|A|+|B|=|A\cup B|$**.** כלומר, מצאו בייקציה בין $A\times\{1\}\cup B\times\{2\}$ ובין $A\cup B$.

תרגיל: $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

פתרון: על-פי ההגדרה, $|\mathbf{N}|=\aleph_0$ ולכן ניתן להשתמש בקבוצת הטבעיים כנציג לעוצמה $\aleph_0$:

$$\aleph_0+\aleph_0=|\mathbf{N}\times\{1\}\cup\mathbf{N}\times\{2\}|\overset{?}{=}|\mathbf{N}|$$

כדי להוכיח את השוויון האחרון נמצא בייקציה בין שתי הקבוצות האחרונות. למעשה אנחנו כבר יודעים את הפתרון, בזכות המלון של הילברט. נגדיר פונקציה $f:\mathbf{N}\times\{1\}\cup\mathbf{N}\times\{2\}\to\mathbf{N}$ כ:

$$\begin{cases} f(n,1) = 2n \\ f(n,2) = 2n+1 \end{cases}$$

תרגיל: $\aleph + \aleph = \aleph$

פתרון א': ניזכר כי העוצמה $\aleph$ שווה לעוצמה של כל קטע פתוח או סגור:

$$\aleph = \left|[a,b]\right| = \left|(a,b)\right| \qquad b > a$$

לכן:

$$\aleph + \aleph = \left|[0,1] \cup (1,2]\right| \overset{?}{=} \left|[0,2]\right| = \aleph$$

פתרון ב': נשתמש בכללי החזקות (שנלמד בהמשך):
$\aleph + \aleph = 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2 \times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + 1} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

תרגיל: הראו כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $|A| + |B| \ge |A|$

תרגיל: $\aleph + \aleph_0 = \aleph$

פתרון: על פי התרגיל הקודם, $\aleph \le \aleph + \aleph_0$. כמו כן, מתקיים $\aleph + \aleph_0 \le \aleph + \aleph$ (הוכיחו), ולכן

$$\aleph \le \aleph + \aleph_0 \le \aleph + \aleph = \aleph$$

על פי משפט קנטור-ברנשטיין הדבר גורר $\aleph = \aleph + \aleph_0$.

אתם בוודאי מנחשים את המשפט הכללי:

משפט: לכל עוצמה אינסופית κ מתקיים $\kappa + \kappa = \kappa$. אם λ עוצמה כלשהי ומתקיים $\kappa \ge \lambda$, אז $\kappa + \lambda = \kappa$.

את המשפט הזה נוכיח בהמשך, כמסקנה מאקסיומת הבחירה.

תרגיל: הוכיחו שלכל עוצמה אינסופית κ מתקיים $\kappa + 1 = \kappa$.

(לכו לאחור בספר ומצאו את התרגיל הזה מנוסח קצת אחרת.)

תרגיל: הוכיחו כי $\kappa + 100 = \kappa$. רמז: היעזרו באינדוקציה.

תרגיל: הוכיחו כי $\kappa + \aleph_0 = \kappa$. רמז: קחו קבוצה F מעוצמה $\aleph_0$ (שקולה ל $\square$) בתוך קבוצה S מעוצמה κ, והשתמשו בעובדה ש- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ לבניית בייקציה בין S ובין $S \times \{1\} \cup \square \times \{2\}$ (איברים ב- $S \setminus F$ נשלחים לעצמם, וכו')

דרך שנייה: הצדיקו את השלבים בסדרת השוויונות

$$|S| = |S \setminus F| + |F| = |S \setminus F| + (|F| + |F|) = (|S \setminus F| + |F|) + |F| = |S| + \aleph_0$$

חיבור של מספר כלשהו של עוצמות:

אפשר להגדיר גם סכום של יותר משתי עוצמות. בהינתן משפחת קבוצות $A_i,\ i\in I$, מגדירים:

$$\sum_{i\in I}|A_i|=|\bigcup_{i\in I}A_i\times\{i\}|$$

כמו במקרה של שתי קבוצות, הכפל ביחידון $\{i\}$ מבטיח זרות של הקבוצות. כך לוקחים איחוד של קבוצות זרות, בעוצמות המתאימות.

מכפלת עוצמות

הגדרת מכפלת עוצמות פשוטה יותר מהגדרת הסכום, משום שאין צורך להפוך את הקבוצות לזרות.

הגדרה: $|A|\times|B|=|A\times B|$. (נשתמש גם בסימון $|A|\cdot|B|$) במילים: מכפלת העוצמות היא העוצמה של קבוצת הזוגות הסדורים של איברים מ-A ומ-B.

דוגמה:

$$\begin{aligned}&|\{a,b\}\times\{x,y,z\}|=\\&|\{a,x\},\{a,y\},\{a,z\},\{b,x\},\{b,y\},\{b,z\}|=6\end{aligned}$$

תרגיל: הוכיחו שזוהי הגדרה טובה, כלומר שאינה תלויה בבחירת הקבוצות מתוך מחלקות השקילות שלהן.

תרגיל פתור (קומוטטיביות של הכפל): הראו כי $|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|$, כלומר $|A\times B|=|B\times A|$

פתרון: נגדיר בייקציה

$$\begin{aligned}&f:A\times B\to B\times A\\&f((a,b))=(b,a)\end{aligned}$$

תרגיל: הראו כי מתקיים קומוטטיביות של חיבור עוצמות.

תרגיל (אסוציאטיביות של כפל): הראו $(|A|\times|B|)\times|C|=|A|\times(|B|\times|C|)$

פתרון: למעשה צריך להוכיח

$$|(A\times B)\times C|=|A\times(B\times C)|$$

לשם כך נגדיר

$$f:(A\times B)\times C\to A\times(B\times C)$$
$$f\left(\left((a,b),c\right)\right)=\left(\left(a,(b,c)\right)\right)$$

קל לראות כי זוהי בייקציה.

הוכחנו לעיל ש- $|\sqcup \times \quad| = |\quad|$. פירוש הדבר הוא:

טענה: $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

טענה: $\aleph\cdot\aleph=\aleph$

הוכחה: צריך להוכיח כי $\left|[0,1]\times[0,1]\right|=\left|[0,1]\right|$. שוב, ניעזר בקנטור-ברנשטיין. אי השוויון "$\geq$" מוכח על ידי הפונקציה $g:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ המוגדרת כ: $g(r)=(r,0)$. להוכחת אי השוויון ההפוך נגדיר פונקציה $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$. הנה דוגמה שמבהירה את הגדרת f:

$$f\left((0.14152...,0.87687...)\right)=0.18471698...$$

באופן כללי, לכל זוג סדור $(r,s)\in[0,1]\times[0,1]$ מייצגים את r ואת s בבסיס (נאמר) 10, ומגדירים את $f(r,s)$ כמספר שספרותיו האי-זוגיות הן ספרות r וספרותיו הזוגיות הן ספרות s. בכתיבה פורמלית:

$$f\left((0.a_1a_2a_3...,\ 0.b_1b_2b_3...)\right)=0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3......$$

ההוכחה הזאת אינה לגמרי מדויקת, משום שיש מספרים בעלי שתי הצגות בבסיס 10 למשל $0.09999...=0.10000$.

אבל את הבעיה הזאת לא קשה לפתור. נרשום את r ואת s בהצגה בינארית, ואילו אל התוצאה של f (השילוב בין הספרות) נתייחס כאל מספר עשרוני. מכיוון שבשיטה זו לא מופיעות בכלל ספרות 9, אין בעיה של כפל ייצוג.

תרגיל: $\aleph\cdot\aleph_0=\aleph$

פתרון: $\aleph\leq\aleph\cdot\aleph_0\leq\aleph\cdot\aleph=\aleph$

בוודאי ניחשתם:

משפט: אם κ עוצמה אינסופית, אז $\kappa\cdot\kappa=\kappa$. אם λ עוצמה כלשהי ומתקיים $\kappa\geq\lambda$, אז $\kappa\cdot\lambda=\kappa$.

גם עובדה זו היא מסקנה מאקסיומת הבחירה, וגם את הוכחתה נדחה להמשך.

תרגיל: הראו כי $\kappa\cdot 2=\kappa+\kappa$

מכפלה של מספר כלשהו של עוצמות:

ניזכר שבהינתן משפחת קבוצות $A_i,\ i\in I$, קבוצת המכפלה $\prod_{i\in I} A_i$ מוגדרת כקבוצת כל פונקציות הבחירה מן הקבוצות, או במילים אחרות – קבוצת הוקטורים שקבוצת הקואורדינטות שלהם היא I, ושמכילים איבר מ-A_i לכל $i\in I$. בהתאם, מגדירים את מכפלת העוצמות $\prod_{i\in I} |A_i|$ כעוצמת קבוצת המכפלה, כלומר כ: $|\prod_{i\in I} A_i|$.

תרגיל: הוכיחו מן ההגדרות ש: $\prod_{i\in I} |\{0,1\}| = 2^{|I|}$.

כמה פונקציות יש מ לקבוצה $B=\{b_1,b_2,b_3,...,b_k\}$ בת k איברים לקבוצה $A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_m\}$ בת m איברים? עבור כל איבר $b\in B$, מספר האפשרויות לבחור את $f(b_1)$ הוא $|A|$, כלומר m. לכל אחת מן האפשרויות האלה יש m אפשרויות לבחור את $f(b_2)$, כך שיש $m\times m$ אפשרויות. המשך של אותו חשבון מראה שעבור כל האיברים יחד יש $\underbrace{m\cdot m\cdot\ldots\cdot m}_{k\text{ פעמים}}=m^k$ אפשרויות.

האם הדבר נכון גם לקבוצות אינסופיות?

סימון: עבור שתי קבוצות A,B, נסמן $A^B=\{f:B\to A\}$, כלומר קבוצת הפונקציות מ-B ל-A.

השאלה היא אם כן: האם מתקיים $|A|^{|B|}=|A^B|$? התשובה היא "כן", אלא שבמקרה האינסופי אי אפשר להוכיח זאת, משום שפעולת החזקה עדיין לא הוגדרה. מה עושים? פשוט, כך מגדירים את פעולת החזקה:

הגדרה: $|A|^{|B|}=|A^B|$

כמו בהגדרות קודמות, נחוץ להוכיח גם בהגדרה זו שהיא אינה תלויה בבחירת הקבוצות מתוך העוצמות המתאימות (כזכור, עוצמה היא מחלקת שקילות של קבוצות). כלומר:

טענה: אם $A\sim A', B\sim B'$ אז $A^B\sim A'^{B'}$.

זאת הפעם נעשה זאת במדויק (זה יותר מסובך מן ההגדרות הקודמות. מי שמאמין, יכול לדלג על ההוכחה הזאת).

הוכחה: על פי ההנחה קיימות בייקציות $f:A\to A'$ ו- $g:B\to B'$. נבנה מהן בייקציה $h:A^B\to A'^{B'}$. תהא $\phi\in A^B$, כלומר $\phi:B\to A$. כעת נגדיר

$$h(\phi)=f\circ\phi\circ g^{-1}$$
$$h(\phi)(b')=f\left(\phi\left(g^{-1}(b')\right)\right)$$

יש להראות ש-h היא אכן בייקציה. הדרך הכי טובה לעשות זאת היא להראות שיש פונקציה הפכית. נגדיר

$$h^{-1}:A'^{B'}\to A^B$$
$$h^{-1}(\phi':B'\to A')=f^{-1}\circ\phi\circ g$$

ואז h^{-1} היא הפכית של h משמאל:

$$h^{-1}(h(\phi))=h^{-1}\left(f\circ\phi\circ g^{-1}\right)=f^{-1}\circ f\circ\phi\circ g^{-1}\circ g=\phi$$

ובאופן דומה מוכיחים שהיא גם ההפכית של h מימין.

משפט: לכל קבוצה A מתקיים $\left|\mathrm{P}(A)\right| = 2^{|A|}$

הוכחה: נגדיר פונקציה $f:\mathrm{P}(A)\to\{0,1\}^A$ על ידי: $f(S)=\chi_S$

כלומר

$$f(S)(a)=\begin{cases}1 & a\in S\\ 0 & a\notin S\end{cases}$$

תרגיל – הוכיחו ש- f היא בייקציה.

את משפט קנטור אפשר אפוא לנסח גם כך:

משפט: לכל קבוצה S מתקיים $|S|<2^{|S|}$.

תרגיל למתקדמים: אי- שוויון קניג

המתמטיקאי ההונגרי קניג הוכיח הכללה של משפט קנטור. נביא אותו כאן כתרגיל מודרך.

א. הוכיחו: אם $\kappa_i, i=1,2$ ו- $\lambda_i, i=1,2$ הן עוצמות ו- $\kappa_1<\lambda_1$ ו- $\kappa_2<\lambda_2$, אז $\kappa_1+\kappa_2<\lambda_1\times\lambda_2$.

ב. המשפט הבא, "אי שוויון קניג", הוא הכללה של א'.

משפט: אם $\kappa_i, i\in I$ ו- $\lambda_i, i\in I$ הן עוצמות המקיימות $\kappa_i<\lambda_i$ לכל $i\in I$ אז סכום ה- κ_i קטן ממכפלת ה- λ_i, ובנוסחה: $\sum_{i\in I}\kappa_i<\prod_{i\in I}\lambda_i$.

הסיקו מן המשפט הזה את משפט קנטור, $|I|<2^{|I|}$, לכל קבוצה I.

ג. הוכיחו את אי שוויון קניג. מכיוון שזוהי הכללה של משפט קנטור, צפוי שגם ההוכחה תהיה הכללה של הוכחת משפט קנטור. הנה ההתחלה, המשיכו אותה:

לכל $i\in I$ תהיינה A_i קבוצה בעוצמה κ_i ו- B_i קבוצה בעוצמה λ_i.

קבוצה בעוצמה $\sum_{i\in I}\kappa_i$ היא $\bigcup A_i\times\{i\}$ (מדוע?) וקבוצה בעוצמה $\prod_{i\in I}\lambda_i$ היא $\prod_{i\in I}B_i$.

פירושו של אי שוויון קניג הוא שכל העתקה f מ- $\bigcup A_i\times\{i\}$ אל $\prod_{i\in I}B_i$ אינה על (הסבר מדוע).

נצביע במפורש על איבר ב- $\prod_{i\in I}B_i$ שאינו נמצא בטווח של f (זהו האיבר ה"דווקאיי", שנוצר ב"שיטת האלכסון").

נעשה זאת בדוגמה שבה $I=\{1,2\}$ (כלומר נפתור את התרגיל הקודם). אם כן, יש לנו רק שתי קבוצות מכל סוג - A_1, A_2 ו- B_1, B_2.

f שולחת, בין השאר, את איברי $A_1\times\{1\}$ לקבוצת המכפלה. מכיוון ש - $|A_1|<|B_1|$, אין פונקציה מ- A_1 על B_1. לכן (הסבר מדוע!) יש איבר $b_1\in B_1$ שאין איבר $(a_1,1)\in A_1\times\{1\}$ ש- $f(a_1,1)$ הוא מן הצורה $(b_1,...)$.

בדומה, יש איבר $b_2\in B_2$ שאין איבר $(a_2,2)\in A_2\times\{2\}$ ש- $f(a_2,2)$ הוא מן הצורה $(b_2,...)$.

האיבר (b_1,b_2) אינו נמצא בטווח של f כשהיא מופעלת על $A_1\times\{1\}$ (כי אין איבר בטווח הזה שהרכיב הראשון שלו הוא b_1), והוא גם לא נמצא בטווח של f כשהיא מופעלת על $A_2\times\{2\}$ (כי אין איבר בטווח הזה שהרכיב השני שלו הוא b_2). לכן (b_1,b_2) אינו נמצא בטווח של f בכלל. הדבר מראה ש-f אינה על, כפי שהבטחנו שנראה.

עבדו את ההוכחה הזאת למקרה הכללי.

כללי חשבון העוצמות

משפט (חוק הפילוג): $|A|\left(|B|+|C|\right)=|A|\cdot|B|+|A|\cdot|C|$

הוכחה: על פי ההגדרות של הפעולות, מה שצריך להוכיח הוא ש :
$A\times\left(B\times\{1\}\cup C\times\{2\}\right)\sim A\times B\times\{1\}\cup A\times C\times\{2\}$. דבר זה מוכח על ידי הבייקציה המוגדרת כך :

$$f\left(\left(a,(b,1)\right)\right)=(a,b,1)$$
$$f\left(\left(a,(c,2)\right)\right)=(a,c,2)$$

משפט: $|A|^{|B|+|C|}=|A|^{|B|}\cdot|A|^{|C|}$

הוכחה: בצד שמאל כתובה עוצמת קבוצת הפונקציות מ- $\left(B\times\{1\}\cup C\times\{2\}\right)$ ל- A, ובצד ימין כתובה עוצמה של קבוצת זוגות של פונקציות. עלינו להוכיח :

$$A^{B\times\{1\}\cup C\times\{2\}}\sim A^B\times A^C$$

נגדיר פונקציה f מאגף שמאל לאגף ימין. f מקבלת כמשתנה איבר ϕ מתוך $A^{B\times\{1\}\cup C\times\{2\}}$, כלומר

$$\phi: B\times\{1\}\cup C\times\{2\}\rightarrow A$$

$f(\phi)$ יהיה איבר באגף ימין, כלומר זוג פונקציות: $f(\phi)=(\beta,\gamma)$, כאשר: $\beta\in A^B$ ו- $\gamma\in A^C$ מוגדרות על ידי:

$$\beta(b)=\phi((b,1))$$
$$\gamma(c)=\phi((c,2))$$

צריך להראות ש-f שהגדרנו היא בייקציה, וחלק זה מושאר כתרגיל לקורא.

נוכיח עתה בצורה פשוטה יותר שתי טענות שקודם הוכחו ישירות:

טענה: $\aleph+\aleph=\aleph$.

הוכחה: $\aleph+\aleph=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2\times 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+1}=2^{\aleph_0}=\aleph$.

טענה: $\aleph\cdot\aleph=\aleph$.

הוכחה: ניזכר כי $2^{\aleph_0}=|P(\mathbf{N})|=|\mathbf{R}|=\aleph$, ולכן:

$$\aleph\cdot\aleph=2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0+\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$$

משפט: $\left(|A|^{|B|}\right)^{|C|}=|A|^{|B|\cdot|C|}$

הוכחה: צריך להוכיח $\left|A^{B\times C}\right|=\left|\left(A^B\right)^C\right|$.

הסיפור הבא מבהיר מדוע $A^{B\times C}\sim\left(A^B\right)^C$. תהא A קבוצת המספרים בין 0 ו-100, B קבוצת הסטודנטים בפקולטה למתמטיקה, ו-C קבוצת המקצועות הנלמדים בפקולטה למתמטיקה. מערכת של ציונים היא פונקציה שלכל זוג (תלמיד, מקצוע) נותנת מספר בין 0 לבין 100. $A^{B\times C}$ היא קבוצת הפונקציות האלה, כלומר קבוצת מערכות הציונים האפשריות.

בפקולטה יש שתי מזכירות שמקלידות ציונים. האחת מקבלת רשימה של כל הציונים, והיא מקלידה בלי להתלונן. כלומר, היא מקבלת פונקציה (פונקציית הציון) מן הזוגות (תלמיד, מקצוע) למספרים בין 0 ל-100, שהיא איבר ב- $A^{B\times C}$, ומקלידה.

מזכירה שנייה אינה מסכימה לכך בשום אופן. היא דורשת לקבל לכל מקצוע את גליון הציונים שלו, ורק אז היא מוכנה להקליד. אבל שימו לב: גיליון ציונים במקצוע הוא בעצם פונקציה מן התלמידים לציונים. כלומר, המזכירה השנייה דורשת פונקציה מן המקצועות, שלכל מקצוע נותנת גיליון ציונים, שהוא פונקציה מן התלמידים לציונים. כלומר היא מבקשת פונקציה ששייכת ל- $\left(A^B\right)^C$.

כמובן, שתי המזכירות עושות אותו דבר, אחת בלי להתלונן והאחרת עם. הראשונה מקבלת פונקציה מן הזוגות (תלמיד, מקצוע) לקבוצת המספרים, והשנייה מקבלת פונקציה מן המקצועות לפונקציות מן התלמידים. אם כן, קבוצת הפונקציות מן הזוגות (תלמיד, מקצוע) לקבוצת

המספרים (אגף ימין של היחס $\left(A^B\right)^C \sim A^{B\times C}$) וקבוצת הפונקציות מן המקצועות לפונקציות מן התלמידים (אגף שמאל) הן למעשה אותה קבוצה.

הנה אותו דבר בנוסחאות, במקום בסיפור. נגדיר פונקציה $f:\left(A^B\right)^C \to A^{B\times C}$ כדלקמן.

תהא $\phi \in \left(A^B\right)^C$, כלומר $\phi: C \to A^B$. הפעלת f על ϕ צריכה להחזיר לנו פונקציה מ- $B\times C$, ולכן אנחנו צריכים לדעת כיצד $f(\phi)$ פועל על הזוג $(b,c)\in B\times C$. נגדיר

$$f(\phi)\big((b,c)\big)=\phi(c)(b)$$

כאשר $\phi(c)\in A^B$, ולכן זו פונקציה מ-B ל-A. כעת נמצא את הפונקציה ההפוכה של f, שהיא פונקציה $g: A^{B\times C} \to \left(A^B\right)^C$. את האיבר שעליו פועלת g נסמן ב- $\psi \in A^{B\times C}$. נגדיר:

$$g(\psi)(c)(b)=\psi(b,c)$$

תרגיל: הראו ש-g אכן הפכית ל-f.

נראה עתה כמה שימושים לחוקים שלמדנו.

טענה: $\aleph = \aleph_0^{\aleph_0}$

הוכחה: $2^{\aleph_0} = \aleph \le \aleph_0$, לכן לפי חוקי החזקות מתקיים

$$\aleph = 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

תרגיל: $\aleph = 3^{\aleph_0}$.

פתרון: $\aleph \le \aleph_0^{\aleph_0} \le 3^{\aleph_0} \le 2^{\aleph_0} = \aleph$

טענה: $\aleph = \aleph^{\aleph_0}$.

הוכחה: $\aleph = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}$

טענה: $2^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$.

הוכחה: באחד התרגילים הקודמים הראינו כי $\aleph = \aleph \cdot \aleph_0$. לפיכך:

$$\aleph^{\aleph} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph} = 2^{\aleph}$$

תרגילים:

1. תהיינה A,B,C קבוצות. נסמן ב- A^B את קבוצת כל הפונקציות מ-B ל-A הוכח/הפרך:
   a. $|A|\leq|C| \Rightarrow |A\cup B|\leq|C\cup B|$.
   b. $|A|\leq|C| \Rightarrow |A^B|\leq|C^B|$.
   c. $(A\times B)^C \sim A^C\times B^C$.
   d. $A\sim C \Rightarrow B^A \sim B^C$.
2. נניח כי A קבוצה אינסופית ו-B קבוצה בת מניה. הוכיחו כי $A\sim A\cup B$.
3. תהיינה A,B,C,D קבוצות המקיימות: $A\sim C,\ B\sim D,\ A\cap B=\varnothing,\ C\cap D=\varnothing$.
   a. הוכיחו כי $A\cup B\sim C\cup D$.
   b. האם הטענה עדיין נכונה כאשר הקבוצות לא בהכרח זרות?
   c. נניח כי הקבוצות לא זרות, הוכח/הפרך: A, $B\sim C$, D.
4. הגדירו מהו סכום של שתי עוצמות, והוכיחו מן ההגדרות ש- $|A|+|B|\geq|A|$ לכל שתי קבוצות A,B.
5.
   a. כמה סדרות $a_0,a_1,a_2,\ldots$ של מספרים ממשיים יש?
   b. כמה סדרות $a_0,a_1,a_2,\ldots$ של מספרים ממשיים יש, שבהן כל האברים, פרט למספר סופי, שווים ל-1?
   c. כמה סדרות מתכנסות של מספרים ממשיים יש?
   d. כמה סדרות של מספרים רציונליים יש?
   e. מה יש יותר, פונקציות מן המספרים הטבעיים לממשיים, או מן הממשיים לטבעיים?
6. את מכפלתן של שלוש עוצמות מגדירים כך: $|A|\times|B|\times|C|$ היא עוצמת הקבוצה $A\times B\times C$, שהיא קבוצת כל השלשות המסודרות $(a,b,c),\ a\in A,b\in B,c\in C$.
   הוכיחו: $|A|\times|B|\times|C|$ היא עוצמת קבוצת הפונקציות f מן הקבוצה $\{1,2,3\}$ לקבוצה $A\cup B\cup C$, המקיימות $f(1)\in A, f(2)\in B, f(3)\in C$.
7. היעזרו בתרגיל הקודם כדי להגדיר מהי קבוצת המכפלה $\prod_{i\in I} A_i$, כאשר $A_i, i\in I$ הן קבוצות כלשהן.
8. הוכיחו: $2^{\aleph}+2^{\aleph}=2^{\aleph}$ ו- $2^{\aleph}\cdot 2^{\aleph}=2^{\aleph}$.

בסעיף זה נחשב את עוצמתן של כמה קבוצות מיוחדות.

למה: אם F_i ניתנת להימנות עבור $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, אז $\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ גם היא ניתנת להימנות.

הוכחה: נסדר את איברי F_i במטריצה:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	$\cdots$
f_1^1	f_1^2	f_1^3	f_1^4	f_1^5	$\cdots$
f_2^1	f_2^2	f_2^3	f_2^4	f_2^5	$\cdots$
f_3^1	f_3^2	f_3^3	f_3^4	f_3^5	$\cdots$
f_4^1	f_4^2	f_4^3	f_4^4	f_4^5	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

קיבלנו מטריצה עם $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ איברים, וקבוצת איברי המטריצה בת מניה.

תהא F קבוצת התת-קבוצות הסופיות של $\mathbf{N}$.

טענה: $|\mathrm{F}| = \aleph_0$

הוכחה: נסמן ב- F_1 את קבוצת תת-הקבוצות מגודל 1 של $\mathbf{N}$, אז $|\mathrm{F}_1| = \aleph_0$, משום שכל קבוצה ב- F_1 היא יחידון, ומספר היחידונים הוא כמספר האיברים ב- $\mathbf{N}$.

נסמן ב- F_2 את קבוצת תת-הקבוצות מגודל 2 של $\mathbf{N}$.
טענת ביניים: $|\mathrm{F}_2| = \aleph_0$. הוכחה: נגדיר פונקציה $f: \mathrm{F}_2 \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ כדלקמן. כל זוג איברים $\{a,b\}$ סדרו כך ש- $a<b$ והגדירו $f(\{a,b\}) = (a,b)$. זוהי בבירור פונקציה 1-1 ערכית (שימו לב, זו אינה פונקציה על, משום שמתקבלים כך רק זוגות שבהם האיבר השמאלי קטן מן הימני.)
לכן $|\mathrm{F}_2| \le |\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = \aleph_0$. את ההוכחה של אי השוויון ההפוך נשאיר כתרגיל לקורא.

באופן דומה, נגדיר את F_3 כקבוצת הקבוצות של 3 מספרים טבעיים, וטיעון דומה מראה ש: $|\mathrm{F}_3| \le |\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = \aleph_0$.

באופן כללי, F_i תהיה קבוצת הקבוצות בגודל i, ואז $|\mathrm{F}_i| = \aleph_0$. מכיוון ש- $\mathrm{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_i$ הרי מן הלמה נובע ש- F היא בת מנייה.

כעת, נסמן $\mathrm{I} = \mathrm{P}(\mathbf{N}) \setminus \mathrm{F}$. זוהי קבוצת כל הקבוצות האינסופיות.

טענה: $\aleph = |\mathrm{I}|$.

הוכחה: נסמן את $|\mathrm{I}|$ ב- κ . לפי תרגיל בפרק קודם מתקיים $\kappa + \aleph_0 = \kappa$. מכיוון ש $\mathrm{P}(\mathbf{N}) \equiv \mathrm{I} \cup \mathrm{F}$ הרי $|\mathrm{P}(\mathbf{N})| = |\mathrm{I} \cup \mathrm{F}| = |\mathrm{I}| + |\mathrm{F}| = \kappa + \aleph_0 = \kappa$.

מכיוון ש- $\aleph = |\mathrm{P}(\mathbf{N})|$ נובע מכך ש- $\kappa = \aleph$.

טענה: הקבוצה P של הפולינומים עם מקדמים טבעיים היא ניתנת להימנות, כלומר $|P| = \aleph_0$.

הוכחה: כל פולינום נקבע באופן ייחודי על ידי מקדמיו, ומספר מקמיו סופי, לכן P ניתן להימנות כאיחוד ניתן להימנות של קבוצות הניתנות להימנות.

הגדרה: מספר מרוכב c נקרא אלגברי עם הוא שורש של פולינום עם מקדמים רציונאליים, קבוצת שורשים זו מהווה שדה , שדה המספרים האלגבריים המסומן בA.

טענה: $|A| = \aleph_0$

הוכחה: באופן דומה להוכחה הקודמת, כיוון שכל מקדם שייך לקבוצה הניתנת להימנות (Q), גם כאן קבוצת הפולינומים ניתנת להימנות. מתקיים כי לכל פולינום מספר השורשים שווה לדרגת הפולינום (מספר אלגברי יכול להיות מרוכב), ובפרט מספר השורשים של פולינום הינו סופי ובפרט ניתן להימנות, ולכן מתקיים : $\aleph_0 \le |A| \le \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, ולכן לפי משפט קנטור-ברנשטיין $|A| = \aleph_0$.

תרגילים:

1. הוכיחו שקבוצת הפונקציות מן הטבעיים לעצמן שהן עולות וחסומות ניתנת להימנות.
2. הוכיחו שקבוצת הנקודות במישור ששתי הקואורדינטות שלהן רציונליות ניתנת להימנות.

כמה קבוצות שאינן ניתנות להימנות

טענה: תהא T קבוצת הפונקציות החסומות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. אזי $\aleph = |T|$.

הוכחה: T מכילה בין השאר את כל הפונקציות מ- $\mathbf{N}$ ל-$\{0,1\}$, ולכן בוודאי מתקיים

$$|T| \ge \left|\{0,1\}^{\mathbf{N}}\right| = \left|2^{\mathbf{N}}\right| = \aleph$$

ומצד שני $|T| \le \left|\mathbf{N}^{\mathbf{N}}\right| = \aleph$.

טענה : תהא S את קבוצת הפונקציות העולות ממש מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$. אזי $\aleph = |S|$.

הוכחה : לכל סדרה σ של $0,1$ ($\sigma \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$) נגדיר פונקציה $f \in S$ כך :

$$f(0) = 0$$
$$f(n+1) = f(n) + \sigma(n) + 1$$

במילים, עבור כל מקום בסדרה שכתוב בו 0, הפונקציה f תקפוץ ב-1. בכל מקום בו כתוב 1 הפונקציה f תקפוץ ב-2. למשל, ל - $\sigma:0,1,1,0,1,1,0,...$ מתאימה הפונקציה $f:0,2,4,5,7,9,10,...$. ההתאמה הזאת היא 1-1 ערכית, ולכן קבוצת הפונקציות העולות גדולה או שווה בעוצמתה מקבוצת הסדרות של $\{0,1\}$ שעוצמתה כזכור $\aleph$.

מכיוון שפונקציה עולה ממש היא 1-1 ערכית, מקבלים מכך:

מסקנה: עוצמת קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות מ- $\mathbf{N}$ ל- $\mathbf{N}$ היא $\aleph$.

סימון: תהא $f:A\to B$ פונקציה, ותהא $C\subseteq A$. נסמן את **הצמצום** של f ל-C כך:

$$f|_C=\{(c,f(c)):c\in C\}$$

הטענה הבאה שייכת לחשבון דיפרנציאלי, ואני מקווה שכבר למדתם את המושגים הרלוונטיים:

טענה: פונקציה רציפה נקבעת על-ידי ערכיה על $\mathbf{Q}$. כלומר, אם f ו-g רציפות ומתקיים $f|_{\mathbf{Q}}=g|_{\mathbf{Q}}$ אז בהכרח f=g.

הוכחת הטענה: צריך להוכיח שבתנאי המשפט מתקיים $f(\alpha)=g(\alpha)$ לכל $\alpha\in\mathbf{R}$. ניקח סדרת מספרים רציונליים q_i ששואפת ל- α.

מרציפות f ו- g נובע ש:

$$f(a)=\lim_{i\to\infty}f(q_i)=\lim_{i\to\infty}g(q_i)=g(\alpha)$$

אגב, קיום הגבולות שבביטוי הוא חלק מן התנאי של רציפות הפונקציות.

כפי שאנו יודעים, מספר כל הפונקציות מן הממשיים לעצמם הוא $\aleph^{\aleph}$, ששווה ל- $2^{\aleph}$, שגדול מ- $\aleph$. המשפט הבא אומר, לעומת זאת, שיש רק מעט פונקציות רציפות מן הממשיים לעצמם:

משפט: עוצמת הפונקציות הרציפות מ- $\mathbf{R}$ ל- $\mathbf{R}$ היא $\aleph$.

פתרון: לכל פונקציה רציפה נתאים את הצמצום שלה לרציונליים, שהיא פונקציה מן הרציונליים לממשיים, באופן פורמלי, אנו מגדירים העתקה $\phi:\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \text{רציפה}\}\to\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}$ על ידי $\phi(f)=f|_{\mathbf{Q}}$.

הטענה הקודמת שהוכחנו טוענת בדיוק זאת, ש- ϕ היא 1-1 ערכית. לכן:

$$\left|\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \text{רציפות}\}\right|\le\left|\mathbf{R}^{\mathbf{Q}}\right|=\aleph^{\aleph_0}=\aleph$$

אי השוויון ההפוך מושאר לכם כתרגיל.

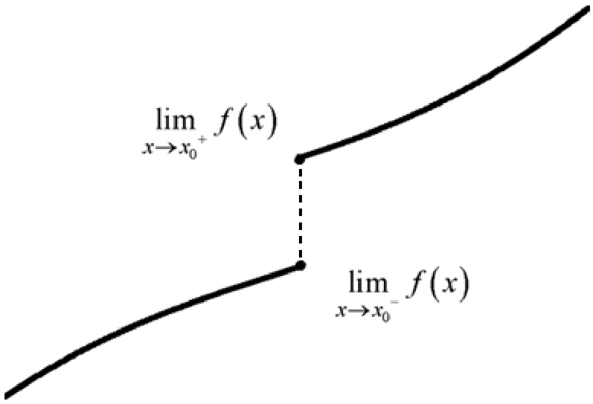
תרגיל: הוכיחו שעוצמת קבוצת הפונקציות הלא רציפות גדולה מ- $\aleph$.

הגדרה: פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ נקראת "מונוטונית עולה" אם $x\ge y\Rightarrow f(x)\ge f(y)$. היא נקראת "מונוטונית עולה חזק" אם $x>y\Rightarrow f(x)>f(y)$.

תהא M קבוצת הפונקציות המונוטוניות עולות מן הממשיים לעצמם. גם על M נראה שהיא קטנה בעוצמתה מקבוצת כל הפונקציות מן הממשיים לעצמם.

טענה: $|M| = א$.

הוכחה: ניזכר תחילה בעובדה מחדו"א: אי-רציפות של פונקציה מונוטונית היא מסוג קפיצה. כלומר, בנקודה x_0 של אי-רציפות שני הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ו-$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ קיימים, ו(כמובן) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.



כמה נקודות אי-רציפות יכולות להיות לפונקציה מונוטונית? מכיוון שכל נקודה כזו היא קפיצה, ניתן להתאים לה קטע

$$I_a = \left(\lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x) \right)$$

עבור נקודות שונות, הקטעים I_a המתאימים הם זרים. נסטה עתה מעט מדרכנו ונשים לב לעובדה פשוטה:

טענת ביניים: אם $\{I_a : a \in A\}$ הם קטעים פתוחים זרים, אז יש לכל היותר $\aleph_0$ מהם.

הוכחה: בכל קטע I_a נבחר מפר רציונלי $q_a \in I_a \cap \mathbf{Q}$. ההעתקה $\phi(I_a) = q_a$ היא 1-1 מהקטעים ל-$\mathbf{Q}$. לכן עוצמת קבוצת הקטעים היא לכל היותר $\aleph_0$.

מכיוון שמספר הקבוצות הניתנות להימנות של מספרים ממשיים היא $\left|\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right| = א^{\aleph_0} = א$, מספר הדרכים לבחור את נקודות הקפיצה של הפונקציה הוא $א$.

בין כל שתי נקודות קפיצה הפונקציה רציפה, וכפי שכבר ראינו, עוצמת הפונקציות הרציפות בקטע מסוים היא $א$. לכן עבור כל קטע לחוד מספר האפשרויות לבחור את הפונקציות בקטע הוא $א$.

וביחד אנחנו מקבלים כי עוצמת האפשרויות לבחור נקודות אי-רציפות ולבחור פונקציות רציפות בין הקפיצות היא

$$א \cdot א = א$$

תרגילים:

א. כמה פונקציות יש מן המספרים הטבעיים למספרים הרציונליים, שכל ערכיהן פרט למספר סופי שווים ל-0?

ב. $\sqcup^{\infty}$ היא קבוצת כל הסדרות $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ של מספרים רציונליים (כפי שרואים מן הסימון הזה, הקואורדינטות ממוספרות על ידי המספרים הטבעיים, $1, 2, 3, \ldots$). מהי עוצמת הקבוצה הזאת?

ג. ל- $\sqcup^{\infty}$ יש מבנה של מרחב וקטורי מעל המספרים הרציונליים. כלומר: יש בו חיבור, החיבור רגיל - רכיב רכיב, וכפל בסקלר רציונלי, שבו כל הרכיבים נכפלים בסקלר. כרגיל, קבוצה S במרחב נקראת פורשת אם כל איבר ניתן לכתיבה כצירוף ליניארי סופי (עם מקדמים רציונליים) של איברים מ-S.

ד. הראה שכל בסיס למרחב הזה הוא למעשה מעוצמה $2^{\aleph_0}$.

ה. כמה פונקציות על יש מ:

1) $\aleph_0$ ל- א

2) א ל- $\aleph_0$

ו. חשבו את עוצמתן של הקבוצות הבאות:

קבוצת הפונקציות מן המספרים הרציונליים לעצמם.

קבוצת הפונקציות מן המספרים הרציונליים למספרים הממשיים.

קבוצת הפונקציות מן המספרים הרציונליים לעצמם שהן על.

קבוצת הפונקציות מן המספרים הממשיים לרציונליים.

קבוצת הפונקציות מן המספרים הממשיים לרציונליים שהן על.

פתרונות לחלק מן התרגילים:

א. לכל מספר n יש $\aleph_0$ קבוצות של מספרים טבעיים בגודל n. לכל אחת מהן יש $\aleph_0$ דרכים להגדיר פונקציה ממנה לרציונליים. לכן קבוצת הפונקציות המדוברת היא איחוד של $\aleph_0$ קבוצות בגודל $\aleph_0$, ולכן היא בגודל $\aleph_0$.

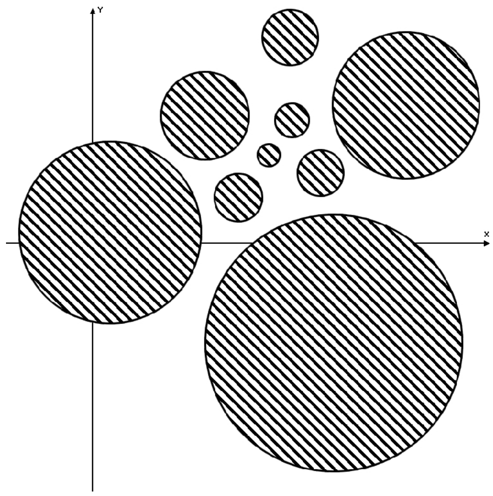
ב. כמספר הפונקציות מן המספרים הטבעיים לרציונליים, שהוא $\aleph_0^{\aleph_0}$, שהוא א.

ג. השתמשו ב-א' וב-ב' כדי להוכיח שכל בסיס למרחב $\sqcup^{\infty}$ אינו ניתן להימנות. (רמז: צירוף ליניארי נקבע על ידי פונקציה מן הקבוצה הפורשת אל... המשך!)

בפרק זה נשאל שאלה מסוג שונה במקצת מזה שעסקנו בו עד עתה: לא מהו גודל של קבוצות מסוימות, אלא מהו הגודל המקסימלי של קבוצה שמקיימת תכונות מסוימות. כבר ראינו דוגמה לבעיה כזו: הראינו שהגודל המקסימלי של קבוצת קטעים פתוחים זרים על הישר הוא $\aleph_0$. הנה הכללה של עובדה זו למישור:

שאלה: כל קבוצת עיגולים זרים במישור $\mathbf{R}^2$ ניתנת להימנות.

(תזכורת: "מעגל" הוא ההיקף, "עיגול" כולל גם את הפנים של המעגל.)



הוכחה: בכל עיגול נבחר נקודה ששני רכיביה רציונליים. זוהי העתקה 1-1 ערכית מקבוצת העיגולים הנתונה ל- $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$, וכבר ראינו ש- $|\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}|=\aleph_0$.

שאלה: מהו הגודל המקסימלי של קבוצת **מעגלים** זרים במישור $\mathbf{R}^2$?

תשובה: אפשר לבחור $\aleph$ מעגלים. נבחר נקודה כלשהי במישור, למשל $(0,0)$, ונמקם שם מעגלים קונצטריים (מעגלים שמרכזם באותה נקודה). עבור כל מספר ממשי x נצייר מעגל שמרכזו $(0,0)$ וקוטרו x. אף שני מעגלים לא נחתכים, ולכן הם זרים.

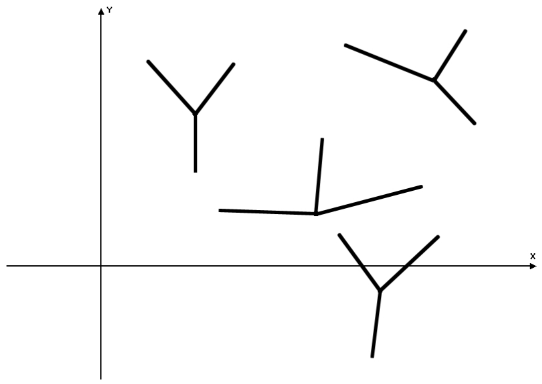
תרגיל: הוכיחו שאי אפשר לבחור יותר מ- $\aleph$ מעגלים זרים. (רמז: כמה מעגלים יש בכלל?)

תרגיל: מצאו קבוצה של $\aleph$ מעגלים זרים שאין ביניהם שניים קונצנטריים. (רמז: פשוט יותר לפתור את המקרה ה-1 ממדי של הבעיה!)

שאלה: כמה "שמיניות" זרות אפשר למקם ב- $\mathbf{R}^2$? כל שמיניה היא מהצורה ∞, וכוללת רק את ההיקף (ניתן לשים שמיניה אחת בתוך השניה).

תשובה: $\aleph_0$. עבור שאלה זו נרחיב את התחבולה שהשתמשנו בה בבעיה הקודמת. לכל שמיניה נבחר זוג נקודות רציונליות – אחת בכל אונה. אין שתי שמיניות שיש להן אותו זוג, ולכן זוהי העתקה 1-1 מקבוצת השמיניות ל- $(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})$, שעוצמתה $\aleph_0$.

שאלה: כמה "שבשבות" זרות ניתן למקם במישור $\mathbf{R}^2$? השבשבות יראו כך:



תשובה: הפתרון דומה לשאלות הקודמות. הפעם נבחר 3 נקודות לכל שבשבת. ההמשך מושאר כתרגיל לקורא.

שאלה (קלה): כמה קבוצות לא ריקות זרות של מספרים טבעיים אפשר למצוא?

תשובה: $\aleph_0$. קל לראות כי ניתן למצוא $\aleph_0$ קבוצות זרות – למשל אוסף כל היחידונים. נראה כי לא ניתן לבחור יותר מ- $\aleph_0$ קבוצות. מכל קבוצה נבחר איבר אחד. מכיוון שהקבוצות זרות זוהי העתקה מאוסף הקבוצות ל- $\mathbf{N}$ שהיא 1-1 ערכית..

שאלה: תהא $F \subseteq P(\mathbf{N})$ לא ריקות, כך שלכל $A,B \in F$, $|A \cap B| \le 1$. מהו הגודל המקסימלי של F?

תשובה: נכתוב $F = F_1 \cup F_2$ כאשר F_1 קבוצת היחידונים ב-F ו- F_2 היא קבוצת הקבוצות ב-F שמכילות יותר מאיבר אחד. ברור כי $|F_1| \le \aleph_0$. לכל קבוצה ב- F_2 נבחר זוג איברים מתוכה. מכיוון שלפי ההנחה אין שתי קבוצות ב-F שמכילות זוג איברים משותף, זוהי העתקה 1-1 ערכית מ- F_2 לקבוצת הזוגות של מספרים טבעיים, שכזכור היא ניתנת להימנות. לכן $|F_2| \le \aleph_0$. מכאן ש: $|F| \le \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

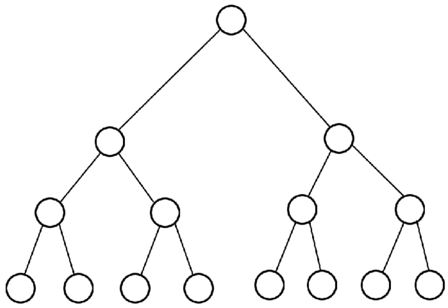
בתרגיל הבא תתבקשו להכליל זאת:

תרגיל: הוכיחו שלכל מספר טבעי n, אם F היא קבוצת קבוצות לא ריקות של מספרים טבעיים המקיימת $|A \cap B| \le n$ לכל $A,B \in F$, אז F ניתנת להימנות.

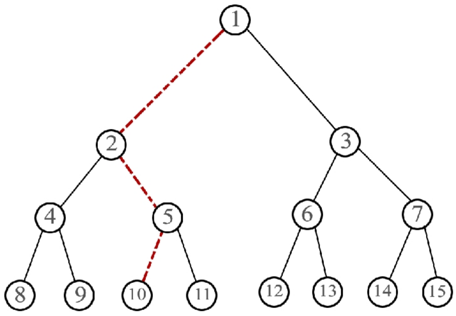
שאלה: מהו הגודל המקסימלי של משפחת קבוצות $F \subseteq P(\mathbf{N})$ שחיתוך כל שתי קבוצות ב-F הוא סופי?

התרגיל הקודם מרמז שהתשובה היא $\aleph_0$. אבל כאן מצפה לנו הפתעה: התשובה היא דווקא $\aleph$. נראה זאת בשתי דוגמאות:

דוגמה 1: עץ בינארי הוא גרף, כלומר אוסף של קדקודים (נקודות) וצלעות שמחברות ביניהן, שנראה כך:



העץ הוא אינסופי, כלומר הקדקודים ממשיכים להתפצל, כל אחד לשני עותקים. קבוצת הקדקודים של העץ ניתנת להימנות, כפי שאפשר להיווכח אם מונים את קדקודי העץ שורה אחר שורה:



הקבוצה שנבנה היא קבוצת המסלולים האינסופיים בעץ, שמתחילים בשורש (מסלול כזה מודגם בקו מקווקו בתמונה). כל מסלול כזה נקבע על ידי סדרת בחירות אינסופית, שבו בכל צעד בוחרים אם לרדת לכיוון ימין או שמאל. לכן קיימת בייקציה בין קבוצת הסדרות האינסופיות של 0,1 (0 מציין שמאל, 1 מציין ימין) לבין קבוצת המסלולים. הדבר מראה שמספר המסלולים הוא $\aleph$.

כל שני מסלולים מתפצלים זה מזה בשלב כלשהו, והם נחתכים רק בקדקודים שמעל נקודת ההתפצלות (כולל הנקודה הזאת). לכן קבוצת המסלולים מהווה קבוצה של $\aleph$ קבוצות שחיתוכיהן סופיים.

דוגמה 2: לכל מספר ממשי ניקח סדרה של מספרים רציונליים ששואפת אליו. אלה הן $\aleph$ סדרות, שאם מתעלמים מן הסדר של איבריהן מקבלים $\aleph$ קבוצות. מכיוון ששתי סדרות שמשותף להן מספר אינסופי של איברים מתכנסות לאותו מספר, החיתוך של כל שתי קבוצות הוא סופי.

סדרים

השארנו מאחורינו כמה חובות. למשל, איננו יודעים להוכיח שלכל עוצמה אינסופית κ מתקיים $\kappa+\kappa=\kappa$ ו- $\kappa\cdot\kappa=\kappa$. אלה הן שתי עובדות נכונות, שהכלים שבידינו אינם מספיקים להוכיחן.

תרגיל: הוכיחו את שתי הטענות האלה לכל עוצמה אינסופית κ מן הצורה $\kappa=2^{\lambda}$.

את הכלים להוכחת הטענה הכללית יספק לנו מושג חדש: קבוצות סדורות, או סדרים. כמובן, המושג הזה חשוב גם בפני עצמו.

הגדרה: קבוצה סדורה (או סדר חלקי) היא זוג $(A,\leq)$ כאשר A היא קבוצה, ו- $\leq$ יחס על A, שמקיים את התכונות הבאות:

1. $a\leq a$ לכל $a\in A$ (רפלקסיביות)
2. $(a\leq b)\&(b\leq c)\Rightarrow a\leq c$ לכל $a,b,c\in A$ (טרנזיטיביות) (תזכורת: "&" בא במקום "ו" בעברית).
3. $(x\leq y)\&(y\leq x)\Rightarrow x=y$ (אנטי סימטריות)

משמעות המילים "סדר חלקי" *(partial order)*, היא שייתכן שיש זוגות איברים שאינם ניתנים להשוואה. כלומר יכולים להיות איברים x,y שעבורם y ’ x וגם x ’ y. אם כל זוג איברים ניתן להשוואה - כלומר $\forall x\,\forall y\,(x\leq y)\vee(y\leq x)$ - אומרים שהסדר **מלא**.

סדרים חזקים וחלשים

לכל סדר יש שני נוסחים – חזק וחלש. בחזק אוסרים שוויון, ואז מסמנים את הסדר ב-"<", ובחלש מרשים שוויון, ואז מסמנים אותו ב-"$\leq$". אפשר לעבור מאחד לשני בקלות, על ידי איסור או התרת שוויון. לעיל הוגדר סדר חלש. ממנו עוברים ליחס סדר חזק $x<y$ באמצעות ההגדרה: $x<y\overset{def}{\Leftrightarrow}(x\leq y)\&(x\neq y)$. בהגדרה זו היחס $x<y$ הוא אנטי-רפלקסיבי, כלומר איבר אינו קטן מעצמו, ובזכות תכונה 3 גם א-סימטרי, כלומר אם $x<y$ אז $y\nless x$. יחס זה נקרא ה"נוסח החזק" של היחס $\leq$. בכיוון ההפוך, בהינתן יחס סדר אנטי רפלקסיבי וא- סימטרי <, מגדירים את הנוסח החלש שלו: $x\leq y\overset{def}{\Leftrightarrow}(x<y)\ or\ (x=y)$. עתה זהו יחס רפלקסיבי, ובמקום להיות א-סימטרי הוא אנטי סימטרי.

אחזור: תנאי האנטי סימטריות בסדר החלש הופך לתנאי א-סימטריות בסדר החזק. תנאי הא-סימטריות בסדר החזק הופך לאנטי סימטריות בסדר החלש.

דוגמאות לסדרים:

א. בהינתן קבוצה A, הקבוצה $\mathrm{P}\left(A\right)$ עם הסדר $B \leq C \Leftrightarrow B \subseteq C$ היא סדר חלקי, שסימונו כזוג הוא $\left(\mathrm{P}\left(A\right), \subseteq\right)$. קל לבדוק את שלוש התכונות הנדרשות:

1. רפלקסיביות: $B \subseteq B$
2. טרנזיטיביות: $\left(B \subseteq C\right) \& \left(C \subseteq D\right) \Rightarrow B \subseteq D$
3. אנטי סימטריות: $\left(C \subseteq B\right) \& \left(B \subseteq C\right) \Leftrightarrow B = C$

תרגיל: הוכיחו שזהו סדר מלא אם ורק אם הקבוצה A היא ריקה או מכילה רק איבר אחד.

ב. סדר החלוקה על קבוצת המספרים הטבעיים: $a \leq b$ אם a מחלק את b (מסמנים זאת $a \mid b$).

ג. קבוצת המספרים הטבעיים עם הסדר הרגיל עליה היא סדר מלא. את הסדר הזה מסמנים ב: $(\sqcup, \leq)$. בדומה מגדירים את $(\sqcup, \leq)$, $(\sqcup, \leq)$, $(\sqcup, \leq)$, שהן בהתאמה קבוצות המספרים השלמים, הרציונליים והממשיים עם הסדר הרגיל. כל אלה סדרים מלאים.

הסדר ההפוך לסדר נתון

הסדר ההפוך לסדר נתון P, שמסומן ב- $\overleftarrow{P}$, הוא $\{(a,b) \mid (b,a) \in P\}$. למשל, הסדר ההפוך לטבעיים הוא המספרים השליליים (אם נדייק, הוא איזומורפי למספרים השליליים.)

תרגיל: הוכיחו שקבוצת החזקה של קבוצה כלשהי, עם סדר ההכלה, איזומורפית לסדר ההפוך לה.

קדם-סדרים

קבוצה עם יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי נקראת "קדם-סדר" *(pre-order)*.

דוגמאות:

1. על המספרים המרוכבים אין סדר חלקי טבעי, אבל אפשר להגדיר קדם-סדר: $u \leq v$ אם $|u| \leq |v|$. **תרגיל:** הוכיחו שזהו קדם סדר. הראו שהוא אינו א-סימטרי.

2. קבוצת הפסוקים הלוגיים, עם יחס הגרירה: $\alpha \leq \beta$ אם הפסוק $\alpha \to \beta$ הוא טאוטולוגיה.

סימון: את הטענה שפסוק ϕ הוא טאוטולוגיה נסמן ב - $\mapsto \phi$. כזכור, משמעות הדבר היא שלכל הצבת ערכי אמת למשתנים הפסוק ϕ מקבל ערך אמת T.

1. רפלקסיביות: $\alpha \to \alpha$ היא טאוטולוגיה.

2. טרנזיטיביות: נניח ש- $\mapsto \alpha \to \beta$ ו- $\mapsto \beta \to \gamma$. נסתכל בלוח האמת של הנוסחאות האלה. העובדה ש- $\mapsto \alpha \to \beta$ משמעה שלכל הצבת ערכים למשתנים שעבורה α מקבלת ערך T גם β מקבלת ערך T. העובדה ש- $\mapsto \beta \to \gamma$ משמעה שלכל הצבת ערכים למשתנים שעבורה β מקבלת ערך T גם γ מקבלת ערך T. מכך נובע שלכל הצבת ערכים למשתנים שעבורה α מקבלת ערך T גם γ מקבלת ערך T. וזה פירושו ש: $\mapsto \alpha \to \gamma$.

היחס הזה אינו א-סימטרי. התבוננו למשל בפסוקים $\alpha = p \wedge q$ ו- $\beta = q \wedge p$.

קל לראות כי α ו- β גוררים זה את זה (כלומר $\mapsto \alpha \to \beta$ ו- $\mapsto \beta \to \alpha$), אבל הם לא אותו פסוק. דוגמה נוספת:

$$\alpha = p$$
$$\beta = p \wedge (q \to q)$$

3. נגדיר יחס בין קבוצות: $A \le B$ אם קיימת פונקציה חד-חד ערכית $f : A \to B$. זהו יחס הוא טרנזיטיבי ורפלקסיבי, אבל הוא אינו סדר משום שאינו אנטי סימטרי. למשל, שתי הקבוצות $A = \{Bush, Obama\}$ ו- $B = \{0,1\}$ מקיימות $A \le B$ ו- $B \le A$ אף על פי ש- $A \ne B$. כדי להפוך את היחס הזה לסדר, צריך להסתכל על מחלקות שקילות של היחס "~" המוגדר על ידי: $A \sim B$ אם $A \le B$ ו- $B \le A$. אתם בוודאי זוכרים: מחלקת שקילות כזו נקראת "עוצמה".

את המעבר מקדם סדר לסדר נעשה עתה באופן כללי:

איך עוברים מקדם סדר לסדר

תרגיל: תהא P קבוצה עם קדם-סדר $\le$. נגדיר יחס R על P על ידי: $(p,q) \in R$ אם $p \le q$ ו- $q \le p$. אזי היחס R הוא יחס שקילות.

בדוגמה מספר 1 R הוא יחס השקילות של להיות בעל אותו ערך מוחלט. בדוגמה מספר 2 R הוא יחס הגרירה הדו-כיוונית בין פסוקים לוגיים. בדוגמה מספר 3 זהו יחס השקילות בין קבוצות (שהוגדר אחר כך כשוויון עוצמות)

תרגיל: תהא P קבוצה עם קדם-סדר $\le$, ונגדיר את R כמו בתרגיל הקודם. נגדיר יחס על מחלקות השקילות של R, על ידי: $[p] \le [q]$ (לשני איברים $p,q \in P$) אם $p \le q$. הוכיחו: א. שזוהי הגדרה טובה (כלומר היא אינה תלויה בבחירת הנציגים ממחלקות השקילות) ו-ב. שזהו סדר חלקי על מחלקות השקילות.

נראה זאת בדוגמה הפרטית, של הפסוקים עם יחס הגרירה הלוגית, מחלקת השקילות של כל פסוק α היא $[\alpha] = \{\beta : \mapsto \beta \to \alpha \ \& \mapsto \alpha \to \beta\}$. היחס R מוגדר כ: $[\alpha] \le [\beta]$ אם $\mapsto \alpha \to \beta$. תחילה עלינו להראות שההגדרה טובה, כלומר לא תלויה בבחירת הנציגים:

יהיו $\gamma \in [\alpha], \delta \in [\beta]$ ונניח ש- $\mapsto \alpha \to \beta$. נרצה להראות שגם $\mapsto \gamma \to \delta$. ההנחה ש- $\gamma \in [\alpha], \delta \in [\beta]$ משמעה ש $\mapsto \gamma \leftrightarrow \alpha$ ו- $\mapsto \beta \leftrightarrow \delta$. לכן העובדה ש- $\mapsto \alpha \to \beta$ גוררת ש- $\mapsto \gamma \to \delta$.

כעת נראה שהיחס החדש הוא אכן אנטי-סימטרי (וודאו בעצמכם שהוא עדיין מקיים את התכונות האחרות): אם $([\alpha] \le [\beta]) \& ([\beta] \le [\alpha])$ אז $\mapsto \alpha \to \beta$ ו- $\mapsto \beta \to \alpha$, כלומר $[\alpha] = [\beta]$.
לכן היחס מקיים את כל התכונות הדרושות כדי להיות יחס סדר.

דוגמא לקדם סדר:

סדר החלוקה על קבוצת המספרים השלמים: $a \le b$ אם a מחלק את b (מסמנים זאת $a \mid b$). זה איננו סדר כי מתקיים $(-3 \mid 3) \,\&\, (3 \mid -3)$ אך $3 \ne -3$.

תרגילים:

1. מה הסדר המתקבל על קבוצת מחלקות השקילות בדוגמה מספר 1 לעיל (אי שוויון בין ערכים מוחלטים)? (פתרון: הסדר הזה איזומורפי לקבוצת המספרים הממשיים האי שליליים עם הסדר הרגיל.)

2. הוכיחו: אם יחס R על קבוצה A הוא קדם סדר אז קיים סדר חלקי $(S,\le)$ ופונקציה $f : A \to S$ המקיימת: $(x,y) \in R \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$. (רמז: הדבר דומה מאוד לעובדה שהוכחנו בפרק על יחסי שקילות, שיחס על S הוא יחס שקילות אם ורק אם יש פונקציה מ-S לקבוצה אחרת, כך ששני איברים מתייחסים ביחס אם ורק אם תמונותיהם שוות).

איברים גדולים ביותר ואיברים מקסימליים

הגדרה: בקבוצה S עם סדר חלקי:

א. איבר x נקרא **גדול ביותר** אם לכל איבר y ב-S מתקיים $y \le x$.

ב. איבר x נקרא **מקסימלי** אם לא קיים איבר y ב-S כך ש- $x < y$.

תרגילים:

1. הראו שאיבר גדול ביותר הוא בהכרח מקסימלי. האם איבר מקסימלי הוא בהכרח גם גדול ביותר?

2. הגדירו מה פירוש "איבר קטן ביותר" ו"איבר מינימלי".

2. באילו מן הקבוצות הבאות יש איבר מקסימלי, ובאילו אין? כנ"ל לאיבר מינימלי: $(\sqcup, \le)$, $(\sqcup, \le)$, $\left(\mathrm{P}\left(A\right), \subseteq\right)$, $(\sqcup, |)$ (האחרון הוא סדר החלוקה, ויש בו איבר מקסימלי. מהו?)

דוגמה: הקבוצה הסדורה $\left(\mathrm{P}\left(A\right), \subseteq\right)$ היא הקבוצה $\mathrm{P}\left(A\right)$ עם יחס ההכלה. האיבר A הוא הגדול ביותר, כי A מכילה כל איבר אחר ב- $\mathrm{P}\left(A\right)$. כמובן, A הוא גם איבר מקסימלי.

דוגמה: בקבוצת מחלקות השקילות של הפסוקים עם סדר הגרירה יש איבר גדול ביותר $[q \to q]$ - מחלקת השקילות של הטאוטולוגיות. לכל α מתקיים $\alpha \to [q \to q]$, ולכן $[\alpha] \le [q \to q]$.

דוגמה: בקבוצת מחלקות השקילות של הפסוקים האיבר הקטן ביותר הוא $\left[\sim (q \to q)\right]$, כלומר מחלקת השקילות של שלילות של טאוטולוגיות.

תרגיל: הוכיחו ששלילה של טאוטולוגיה גוררת כל טענה. כלומר: אם τ טאוטולוגיה, אז לכל פסוק α מתקיים: $\mapsto (\sim \tau) \to \alpha$. (רמז – הדבר נובע מהגדרת לוח האמת של גרירה.)

מן התרגיל נובע שלכל α הפסוק $\left[\sim(q\to q)\right]\to\alpha$ הוא טאוטולוגיה, ולכן $\left[\sim(q\to q)\right]\le[\alpha]$.

דוגמה: נתבונן בקבוצה $\left(\mathbf{N}\setminus\{0\},|\right)$, שהיא קבוצת המספרים הטבעיים עם היחס "מחלק את". למשל $3|15$ ולכן $3\le 15$. בין 8 ו- 22 אין יחס סדר. בקבוצה זו אין איבר גדול ביותר ואין איבר מקסימלי. אבל יש איבר קטן ביותר: לכל $n\in\mathbf{N}$ מתקיים $1|n$.

לעומת זאת, אם כוללים את 0 במספרים הטבעיים יש איבר גדול ביותר – 0, משום שהוא מתחלק בכל מספר.

דוגמה: נתבונן הפעם בקבוצה $\left(\mathbf{N}\setminus\{0,1\},|\right)$. האם כעת יש איבר קטן ביותר? לא. האם יש איבר מינימלי? כן, למשל 2. לא קיים אף מספר שונה מ-2 שמחלק אותו. למעשה כל המספרים הראשוניים הם מינימליים.

הערה: אם יש איבר קטן ביותר, אז הוא המינימלי היחיד.

לכל סדר $P=(S,\le)$ אפשר להגדיר את הסדר ההפוך $\bar{P}=(S,\ge)$. כלומר, ב- $\bar{P}$ מתקיים $x\le y$ אם ורק אם ב-P מתקיים $y\le x$.

פונקציות שומרות סדר

מבנים ופונקציות שומרות מבנה

לאחר שמגדירים מבנה מתמטי, הצעד הבא הוא להגדיר פונקציה ששומרת על המבנה. למשל, בחשבון דיפרנציאלי המבנה הוא גבול של סדרת מספרים. מייד לאחר שמגדירים את מושג הגבול, מגדירים מהי פונקציה ששומרת את המבנה של הגבול, כלומר שערך הפונקציה של הגבול של כל סדרה הוא גבול ערכי הפונקציה על הסדרה: $\lim f(a_n)=f(\lim a_n)$. זוהי ההגדרה של "פונקציה רציפה". באלגברה ליניארית, לאחר שמגדירים את המבנה של מרחב ליניארי, מגדירים "טרנספורמציה ליניארית", שהיא פונקציה בין שני מרחבים ששומרת את פעולות החיבור וכפל בסקלר.

גם בסדרים קורה אותו דבר. לאחר שהגדרנו "סדר" נגדיר מהי פונקציה שומרת סדר:

הגדרה: יהיו $(S,\le_1),(T,\le_2)$. פונקציה $f:S\to T$ נקראת שומרת סדר אם לכל $a,b\in S$ מתקיים $a\le_1 b\Rightarrow f(a)\le_2 f(b)$.

הערה: במקרה של פונקציות ממשיות פונקציה שומרת סדר נקראת "מונוטונית עולה".

דוגמאות:

1. הפונקציה הקבועה $f(n)=17$ מהמספרים הטבעיים לעצמם שומרת סדר. אם $m \le n$ אז $f(m)=17 \le 17 = f(n)$.

2. הפונקציה $f\left(x\right)=2x$ מן הממשיים לעצמם שומרת סדר (כלומר עולה). הפונקציה $f\left(x\right)=-2x$ הופכת סדר (יורדת).

3. נגדיר $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to \mathbf{R}$ כ: $f\left(x\right)=\tan x$ (כאן $\mathbf{R}$ היא קבוצת הממשיים עם הסדר הרגיל). זוהי פונקציה שומרת סדר. היא גם 1-1 ועל, שפירושו שהיא מונוטונית עולה במובן החזק.

4. הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ היא פונקציה שומרת סדר מן המספרים הרציונליים ב- $(-1,1)$ למספרים הרציונליים כולם.

הגדרה: בייקציה שומרת סדר נקראת איזומורפיזם. אם קיים איזומורפיזם $f:\left(S,\le_1\right)\to\left(T,\le_2\right)$ מסמנים $\left(S,\le_1\right)\cong\left(T,\le_2\right)$ ואומרים ש-S ו-T איזומורפיים.

איזומורפיות של שני סדרים פירושה שהם "נראים אותו דבר", מבחינת הסדר. למשל, מדוגמה 2 לעיל אנחנו יודעים ש- $\left(\mathbf{R},\le\right)\cong\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\le\right)$. שני התחומים האלה אינם נראים אותו דבר מבחינת המרחק בין נקודות (שבממשיים אינו חסום ובקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ הוא חסום), אבל אם אין מסתכלים על מרחקים, אלא רק על הסדר, שני התחומים זהים.

האם $\left(\mathbf{R},\le\right)\cong\left(\mathbf{Q},\le\right)$? לא כי אין אפילו בייקציה בין השניים, משום שעוצמת הממשיים גדולה מעוצמת הרציונליים. בפרט אין בייקציה שומרת סדר.

האם $\left(\mathbf{Z},\le\right)\cong\left(\mathbf{Q},\le\right)$? במקרה זה יש בייקציה, אבל אין בייקציה שומרת סדר. הקבוצות $\mathbf{Q}$ ו- $\mathbf{Z}$ אינן נראות אותו הדבר. התכונה שיש למספרים הרציונליים ואין לשלמים היא **צפיפות**, שפירושו שבין כל שני איברים יש איבר שלישי. נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}$ אז נסמן $a=f\left(0\right),\ \ b=f\left(1\right)$. כיוון ש-$f$ בייקציה היא בפרט על, ולכן לאיבר $\frac{a+b}{2}\in\mathbf{Q}$ יש מקור $x\in\mathbf{Z}$ שמקיים $f\left(x\right)=\frac{a+b}{2}$. מכיוון שעל פי ההנחה f שומרת סדר לא ייתכן $x < 0$, כי אז $a=f\left(0\right)>f\left(x\right)=\frac{a+b}{2}$ וזו סתירה. באותו אופן, לא ייתכן ש- $x > 1$. ולכן $x\in\left(0,1\right)$. אבל אין שום מספר שלם בין 0 ל- 1, וכך קיבלנו סתירה לקיומה של f האמורה.

הגדרה: פונקציה שומרת סדר ו-1-1 ערכית מ-$\left(S,\le_1\right)$ ל- $\left(T,\le_2\right)$ נקראת "שיכון". אם יש כזו, אומרים ש-$\left(S,\le_1\right)$ ניתנת לשיכון ב-$\left(T,\le_2\right)$. אם סדר א' ניתן לשיכון בסדר ב', אז א' איזומורפי לתת-סדר של ב'.

דוגמאות:

1. □ ניתנת לשיכון ב- $\mathbf{Q}$ בעזרת פונקציית הזהות.

2. אי אפשר לשכן את □ ב $\mathbf{Q}$, משום שעל פי משפט קנטור אין פונקציה 1-1 ערכית מ- □ ל- $\mathbf{Q}$.

3. טענה: אי אפשר לשכן את $\mathbf{Q}$ ב - □. סיבה אחת היא שברציונליים יש סדרות אינסופיות יורדות ובטבעיים אין. אם f היא שיכון של הרציונליים בטבעיים אז $f(1) > f(\frac{1}{2}) > f(\frac{1}{3}) > f(\frac{1}{4}) > ...$, וכך קיבלנו זו סדרה אינסופית יורדת של מספרים טבעיים, וכאמור אין כזו.

4. אי אפשר גם לשכן את $\mathbf{Q}$ ב - □, משום שהרציונליים צפופים והשלמים לא. נניח בשלילה שקיים שיכון $f:□ \to$. יהא a איבר כלשהו בתמונה של f, נאמר $a = f(q)$, ויהא b האיבר הקטן ביותר בתמונה שגדול מ- a, נאמר $b = f(r)$. אזי $a < f(\frac{q+r}{2}) < b$, בסתירה לבחירת b.

5. מכיוון שבשלמים יש סדרה אינסופית יורדת, אי אפשר לשכן את השלמים בטבעיים.

6. קיים שיכון של $P(□)$ (עם הסדר החלקי של ההכלה בין קבוצות) ב- □. נגדיר $f: P(□) \to$ על ידי: $f(A) = 0.\chi_A$ (למשל: $f(\{0,2,4,...\}) = 0.101010...$). הראו כי הגדרה זו הינה שיכון.

יחס ה"ניתנות לשיכון" ותכונותיו

תרגיל: הראו שהיחס בין סדרים "A ניתן לשיכון ב-B" הוא טרנזיטיבי ורפלקסיבי.

כזכור, ליחס שהוא טרנזיטיבי ורפלקסיבי קראנו "קדם סדר". יחס ה"ניתנות לשיכון" בין סדרים הוא המקביל ליחס "בעל עוצמה קטנה או שווה" במקרה של עוצמות. אלא שבניגוד להשוואת עוצמות, ליחס הזה חסרות שתי תכונות חשובות:

א. זהו רק קדם סדר ולא סדר, כלומר הוא לא אנטי-סימטרי. במילים אחרות – משפט קנטור ברנשטיין אינו נכון לשיכון של סדרים. הסתכלו בשני הסדרים $T=[0,1],\ S=(0,1)$ (שניהם עם הסדר הרגיל על המספרים הממשיים). S ניתן לשיכון ב-T על ידי הפונקציה $f(x)=x$, ו- T ניתן לשיכון ב-S על ידי $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ (הכפל בשליש נועד לדאוג לכך שהקטע הסגור ייכנס כולו לתוך הקטע הפתוח). אבל השיכון הדו כיווני הזה אינו גורר ש- S ו-T איזומורפיות: ל-T יש איבר מקסימלי (וגם איבר מינימלי) ול-S אין.

ב. זה אינו קדם סדר מלא, כלומר לא כל שני סדרים ניתנים להשוואה. למשל, $S=\mathbf{N}=\{0<1<2<...\}$ ו- $T=\overleftarrow{\mathbf{N}}=\{...<-2<-1<0\}$ אינם ניתנים לשיכון זה בזה, משום שב-S אין סדרה אינסופית יורדת, וב-T אין סדרה אינסופית עולה. (השלימו את הטיעון.)

משפט קנטור על סדרים צפופים ללא קצוות

ראינו שהמספרים הממשיים עם הסדר הרגיל איזומורפיים לקטע פתוח. הדבר נכון גם במספרים הרציונליים. הקבוצה $S=\mathbf{Q}\cap(0,1)$ עם הסדר הרגיל איזומורפית לקבוצת הרציונליים כולה,

למשל על ידי האיזומורפיזם $f(x)=\frac{2x-1}{1-|2x-1|}$. (אי אפשר להשתמש כאן בפונקציית $\tan$ שבה השתמשנו במספרים הממשיים, כי טנגנס של מספר רציונלי אינו בהכרח מספר רציונלי.

למעשה, נכונה טענה הרבה יותר כללית, שבשביל לנסח אותה נזדקק לכמה מושגים.

הגדרות:

א. תזכורת: סדר $(S,\le)$ נקרא מלא אם לכל $a,b\in S$ מתקיים $a\le b$ או $b\le a$.

ב. סדר מלא $(S,\le)$ נקרא צפוף אם בין כל שני איברים שונים יש איבר שלישי ($\forall a,b\in S\ \ (a<b)\rightarrow(\exists c\ a<c<b)$). דוגמה לסדרים צפופים: $((0,1),\le)$, $(\mathbf{Q}\setminus\{0\},\le)$, $(\mathbf{R},\le)$. דוגמה לסדר לא צפוף: $(\mathbf{Z},\le)$.

ג. סדר מלא נקרא בלי קצוות (או נטול קצוות) אם אין בו איבר גדול ביותר ואין בו איבר קטן ביותר.

□ הוא סדר צפוף. למעשה, יותר מזה נכון:

משפט: המספרים הרציונליים צפופים בתוך המספרים הממשיים. כלומר, לכל שני מספרים ממשיים a, b ש- $a<b$ קיים מספר רציונלי q ש: $a<q<b$.

הוכחה: על פי טענה שנקראת "אקסיומת ארכימדס" לכל מספר ממשי יש מספר טבעי גדול ממנו. (השם לא נכון משתי סיבות: האחת, שאפשר להוכיח את הטענה מאקסיומת השלמות של המספרים הממשיים, שאומרת שלכל קבוצה חסומה מלעיל יש חסם מלעיל קטן ביותר. השנייה – לארכימדס אין שום קשר לטענה.) לכן קיים מספר טבעי n ש- $n>\frac{1}{b-a}$, כלומר $\frac{1}{n}<b-a$.

נצא מ-0 ונקפוץ קפיצות של $\frac{1}{n}$ לכיוון הקטע (a,b). מכיוון שאורך הקפיצות קטן מאורך הקטע, לא נדלג מעל הקטע, ולכן נהיה חייבים לנחות בתוכו, שפירושו שמצאנו איבר מן הצורה $\frac{m}{n}$ בקטע, שזהו מה שרצינו להוכיח.

מתברר שהתכונות של "להיות ניתן להימנות, צפוף ובלי קצוות" מאפיינים את המספרים הרציונליים. כלומר, כל קבוצה סדורה שיש לה התכונות האלה איזומורפית לרציונליים:

משפט (קנטור): כל שני סדרים מלאים שהם ניתנים להימנות, צפופים, ובלי קצוות הם איזומורפיים.

הוכחה: נניח שהסדרים S ו- T מקיימים את ההנחות של המשפט, כלומר הם ניתנים להימנות, צפופים, ובלי קצוות. תחילה נמנה את איברי S ו-T:

$$S=\{s_1,s_2,s_3,\ldots\}$$
$$T=\{t_1,t_2,t_3,\ldots\}$$

כעת נבנה איזומורפיזם $f:S\rightarrow T$. נעשה זאת על ידי שנדאג לכל איבר בתורו, פעם ב-S ופעם ב-T. תחילה נגדיר באופן שרירותי $f(s_1)=t_1$. האיבר t_1 הוא לא מינימלי ולא מקסימלי, שפירושו

שיש איבר גדול ממנו, וגם איבר קטן ממנו. לכן קיים איבר t_{i_2} שמתייחס ל- t_1 כמו ש- s_2 מתייחס ל- s_1. לכן נוכל להגדיר $f\left(s_2\right)=t_{i_2}$ והפונקציה עדיין תשמור על הסדר.

עד כה דאגנו לשני איברים ב-S. עתה נעבור לדאוג לאיבר ב-T. יהא t_{i_3} האיבר הראשון ב-T שעדיין אינו בתמונה של f (רוב הסיכויים שזהו t_2, אבל ייתכן ש- $t_{i_2}=t_2$, ואז נעבור לאיבר הבא). קיים ב-S איבר s_{j_2} שמתייחס ל- s_1 ול- s_2 כפי ש- t_{i_3} מתייחס ל- t_1 ול- t_{i_2} (הסיבה: S צפוף וללא קצוות). לכן נוכל להגדיר $f\left(s_{j_2}\right)=t_{i_3}$. עתה נעבור לדאוג לאיבר הראשון ב-S שעדיין אינו בתחום של f. כשממשיכים כך

אפשר לדאוג לכל האיברים ב-S וב-T. תכונות הצפיפות וחוסר הקצוות מבטיחות לנו שבכל שלב יהיה איבר ב-T לשלוח אליו כל איבר ב-S, ויהיה איבר ב-S לשלוח ממנו לכל איבר ב-T.

מסקנה: לכל $q\in\mathbf{Q}$ מתקיים $\mathbf{Q}\setminus\{q\}\cong\mathbf{Q}$.

הוכחה: גם לאחר הסרת האיבר q מ- $\mathbf{Q}$, זהו עדיין סדר צפוף, בן-מניה, וללא קצוות, ולכן הסדרים איזומורפיים לפי המשפט.

מסקנה: קבוצת המספרים האלגבריים A איזומורפית לרציונליים.

הוכחה: A צפופה משום שהיא מכילה את הרציונליים, והרציונליים צפופים בתוך הממשיים (בוודאי הראיתם זאת בחדו"א. כדי להראות שבין שני מספרים ממשיים

(מכיל את $\mathbf{Q}$), ניתן להימנות (הוכחנו בפרק על עוצמות), וחסר קצוות. ולכן לפי המשפט $A\cong Q$.

שאלה: האם $\mathbf{R}\setminus\{0\}\cong\mathbf{R}$?

תשובה: לא. הסיבה לכך היא שלמספרים הממשיים יש את תכונת ה**שלמות** – לכל תת-קבוצה ב-$\mathbf{R}$ יש סופרמום. הדבר לא מתקיים עבור $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ - שם לקבוצה $\mathbf{R}^-$ (קבוצת המספרים השליליים) אין סופרמום (הוא צריך להיות 0, אבל הוצאנו את ה-0 מן הקבוצה).

הוכחה מדויקת: נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם כזה $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$. אז הקבוצה $\mathbf{R}^-$ עוברת לקבוצה כלשהי ב- $\mathbf{R}$, שהיא חסומה בהכרח על-ידי $f\left(1\right)$ (כי f שומרת סדר), ולכן יש לה סופרמום s שלא נכלל בתמונה של $\mathbf{R}^-$. מצד שני, s הוא החסם הכי קטן, ולכן לא יכול להתקבל מ-f על-ידי אף מספר שגדול מ-0. לכן s לא בתמונה של f, משמע f לא על.

העובדה הזאת מספקת הוכחה חדשה ומפתיעה למשפט קנטור שהמספרים הממשיים אינם ניתנים להימנות.

הוכחה נוספת למשפט קנטור: שני הסדרים $\mathbf{R}$ ו- $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ הם צפופים וללא קצוות. לו היו ניתנים להימנות, הם היו איזומורפיים על פי המשפט שלעיל.

תרגיל: מהי עוצמת קבוצת הפונקציות שומרות הסדר מ-A ל-B בכל אחד מן המקרים הבאים :

1. $A = \{0,1\}\ \ (0<1),\ B = \square$
2. $A = \square\ ,\ B = \{0,1\}\ \ (0<1)$
3. $A = \square\ ,\ B =$
4. $A = \square\ , B =$

טיפוסי סדר

יחס האיזומורפיזם של סדרים (קבוצות סדורות) הוא יחס שקילות. מחלקת שקילות של היחס הזה נקראת **טיפוס סדר**. זכרו שהגדרנו בצורה דומה עוצמות – עוצמה היא מחלקת שקילות של יחס ה"איזומורפיזם" של קבוצות ללא סדר. אם נצמצם את עולמנו לקבוצות סדורות שבהן הסדר ריק (כלומר אף איבר אינו קטן מאף איבר אחר), טיפוסי הסדר יהיו העוצמות.

סימון: $\omega=\left[\left(\mathbf{N},\le\right)\right]$. זהו טיפוס הסדר של המספרים הטבעיים. מעתה, כשנכתוב ω נתכוון למספרים הטבעיים, עם הסדר שלהם.

סכום של סדרים

לשתי קבוצות סדורות חלקית $\left(S,\le_S\right),\left(T,\le_T\right)$ הסכום $\left(S,\le_S\right)+\left(T,\le_T\right)$ מתקבל מהצבת T לימינו של S, כלומר – הגדרת כל איברי T כגדולים מכל איברי S. בתוך כל אחת מן הקבוצות לחוד נשמר הסדר המקורי.

הגדרה פורמלית יותר: $S+T$ הוא סדר שקבוצת איבריו היא $S\times\{1\}\cup T\times\{2\}$, והסדר בו מוגדר על-ידי:

$$\begin{cases}(s,1)<(t,2) & \forall s\in S,t\in T\\ (s,1)<(s',1) & \text{if } s\le_S s'\\ (t,2)<(t',2) & \text{if } t\le_T t'\end{cases}$$

במילים אחרות, בסכום שמים את כל הקבוצה T אחרי כל הקבוצה S, כך שכל איבר ב- T יבוא אחרי כל איבר ב-S.

דוגמאות:

בדוגמאות הבאות נסמן $n=\{0,1,2,...,n-1\}$ ונתייחס לקבוצה זו כטיפוס סדר. למשל $3=\{0,1,2\}$ כאשר $0<1<2$.

א.

$$\begin{aligned}&S=3,\ \ T=4\\ &3+4=\{(0,1)<(1,1)<(2,1)<(0,2)<(1,2)<(2,2)<(3,2)\}\\ &\quad\cong\{0<1<2<3<4<5<6\}=7\end{aligned}$$

ג. $Q+Q\cong Q$ זאת כיוון ש-$Q+Q$ צפוף מלא וניתן להימנות, ולכן איזומורפי לQ.

ב.

$$1+\mathbb{N}=\{0\}+\{0,1,2,...\}=\{(0,1)<(0,2)<(1,2)<(2,2)<...\}\cong$$

מגדירים גם סכום של טיפוסי סדר. כזכור טיפוס סדר $[P]$ הוא מחלקת השקילות של P, ביחס האיזומורפיזם. ההגדרה טבעית:

$$[P]+[Q]=[P+Q]$$

(טיפוס הסדר של P ועוד טיפוס הסדר של Q הוא טיפוס הסדר של $P+Q$).

כרגיל, הגדרה מסוג זה דורשת הצדקה: צריך להראות שאם בוחרים נציגים אחרים ממחלקות השקילות, מקבלים אותה מחלקת שקילות כתוצאה. נשאיר זאת כתרגיל.

מהעובדה ש- $1+\square \cong \square$ נובע ש- $1+\omega=\omega$. לעומת זאת, $\omega+1$, לעומת זאת, הוא משהו אחר. בסכום זה ה-1 נמצא "מימין" לכל המספרים ב- ω:

$$\underbrace{\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots}_{\omega} \quad < \quad \underbrace{\circ}_{1}$$

הדוגמה הזאת (כמו רבות אחרות) מראה שסכום סדרים אינו קומוטטיבי.

דוגמאות נוספות (בציור):

$$\omega+\omega: \qquad \underbrace{\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots}_{\omega} \quad < \quad \underbrace{\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots}_{\omega}$$

$$\omega+\omega+1: \qquad \underbrace{\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots}_{\omega} \quad < \quad \underbrace{\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots}_{\omega} \quad < \quad \underbrace{\circ}_{1}$$

שימו לב: בטיפוס הסדר $\omega+\omega$ יש איבר שיש אינסוף איברים שקודמים לו, בעוד שב- ω אין איבר כזה. הדבר מוכיח ש- $\omega+\omega\neq\omega$.

- $\square+\square$ מורכב משני עותקים של $\square$, אחד לימין השני. הסדר הזה אינו איזומורפי ל- $\square$, משום שיש בו קבוצה חסומה מלעיל שאין לה סופרמום (חסם מלעיל מינימלי): העותק השמאלי של $\square$ חסום למשל על ידי המספר 0 בעותק הימני, אבל אין חסם מלעיל שהוא הקטן ביותר.

טענה: חיבור סדרים הוא אסוציאטיבי, כלומר: $(R+S)+T=R+(S+T)$. למשל:

$$\omega+1+\omega=\omega+\left(1+\omega\right)=\omega+\omega$$

נשאיר את ההוכחה כתרגיל לקורא – היא דומה לחלוטין להוכחת האסוציאטיביות בחיבור עוצמות.

תרגיל: האם ניתן לשכן את $\omega+\omega$ בתוך $\mathbf{Q}$? במילים אחרות, האם קיימת פונקציה 1-1 ערכית ושומרת סדר $f:\omega+\omega\to\mathbf{Q}$?

פתרון: כן, למשל ניתן לשלוח את האיברים מ- ω השמאלי למספרים $0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\ldots$ ואת האיברים מן ה- ω הימני למספרים $1,1\frac{1}{2},1\frac{3}{4},1\frac{7}{8},\ldots$.

המכפלה $A\times B$ של שתי קבוצות A ו-B הוגדרה כזכור כאוסף כל הזוגות (a,b), כש-$a\in A,\ \ b\in B$. מכפלת סדרים הוא סדר על קבוצת הזוגות האלה. הסדר הוא כמו במילון: הרכיב הימני קובע ראשון (כמו בעברית, ולא כמו באנגלית!) ובמקרה של שוויון קובע הרכיב השמאלי.

המשמעות היא זו: $S\times T$ מתקבל מלקיחת T ו"שתילת" S במקום כל איבר $t\in T$.

מכפלת טיפוסי סדר מוגדרת כטיפוס הסדר של המכפלה.

דוגמה: לחישוב $2\times\omega$ לוקחים כל איבר ב-ω ושמים במקומו את הסדר 2, שהוא כזכור $\{0<1\}$:

$$\begin{aligned} 2\times\omega &= (\circ<\circ)<(\circ<\circ)<(\circ<\circ)<(\circ<\circ)<(\circ<\circ)<\cdots \\ &= \circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\circ<\cdots \end{aligned}$$

רואים כי $2\times\omega=\omega$. לעומת זאת:

$$\begin{aligned} \omega\times 2 &= (\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots)<(\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots) \\ &= \circ<\circ<\circ<\circ<\ldots\quad<\quad\circ<\circ<\circ<\circ<\ldots \end{aligned}$$

אם כן $\omega\times 2=\omega+\omega\neq\omega=2\times\omega$. כפל סדרים אינו קומוטטיבי.

דוגמה: נזכיר ש- $\mathbf{Q}\cong(\mathbf{Q}\cap(0,1))$, ולכן ניתן להתייחס לסדר $\mathbf{Q}$ בתור קטע פתוח של מספרים רציונליים. המכפלה $2\times$ □ היא:

$$\mathbb{Q}\times 2=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}=\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}<\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}$$

והנה $\omega\times$ □:

$$\mathbb{Q}\times\omega=\underbrace{\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}<\underbrace{\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}<\underbrace{\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}<\underbrace{\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}<\underbrace{\cdots\cdots}_{\mathbb{Q}}<\cdots$$

הגדרה: $S\times T$ מוגדר כקבוצה $S\times T$ עם סדר שמוגדר לקסיקוגרפית, כשהאיבר הימני בזוג הוא הראשון שקובע. כלומר, אם $(s_1,t_1),(s_2,t_2)$ איברים ב- $S\times T$, אז $(s_1,t_1)\le(s_2,t_2)$ אם $t_1<t_2$, או $(t_1=t_2)\&(s_1\le s_2)$.

הערה: $\omega\cdot 1=(0<1<2\ldots)\times(0)=(0,0)>(1,0)>(2,0)>\ldots=\omega$.

באופן כללי, לכל סדר S מתקיים $S\cdot 1=S$.

דוגמה:

$$2\times 3=\{0<1\}\times\{0<1<2\}=\{(0,0)<(1,0)<(0,1)<(1,1)<(0,2)<(1,2)\}$$

דוגמה: $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\cong\mathbf{Q}$

הוכחה: הסדר $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ ניתן להימנות, צפוף, וללא קצוות. לכן לפי משפט קנטור הוא איזומורפי ל-$\square$.

לעומת זאת, $\mathbf{Q}\ncong 2\times\mathbf{Q}$. הסדר $2\times\mathbf{Q}$ מתקבל מהחלפת כל מספר רציונלי בשני איברים שאחד מהם גדול מן השני. הסדר הזה אינו צפוף. למשל, בין $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ל- $\left(1,\frac{1}{3}\right)$ אין שום איבר. איבר כזה יצטרך להיות מהצורה $\left(?,\frac{1}{3}\right)$, אבל 2 מכיל רק את האיברים 0 ו-1, ולכן אין הצבת איבר במקום סימן השאלה שתמקיים את הדרישה.

חוק הפילוג

חוק הפילוג נכון לכפל של סדרים רק מצד אחד.

משפט: לכל שלושה סדרים R , S ו-T מתקיים:

$$R\times(S+T)=R\times S+R\times T$$

הוכחה: אגף שמאל מתקבל מהצבת T לימין S, ואז החלפת כל איבר בעותק של R. אגף ימין מתקבל מהצבת עותקים של R שמסודרים בסדר T לימין עותקים שמסודרים בסדר S. מתקבלת אותה תוצאה. **תרגיל:** כתבו הוכחה פורמלית.

דוגמה: ראינו כי $\omega\cdot 2$ הוא שני עותקים של ω, אחד לימין השני. לכן:
$\omega\cdot 2=\omega\cdot(1+1)=\omega+\omega$.

חוק הפילוג משמאל אינו נכון. דוגמה: $\omega=2\cdot\omega=(1+1)\cdot\omega\neq\omega+\omega$.

תרגיל: הסבירו מדוע ההוכחה לחוק הפילוג מימין אינה עובדת לחוק הפילוג משמאל.

סדרים טובים

הגדרה: סדר מלא $(S,\le)$ נקרא **טוב** אם בכל תת-קבוצה לא ריקה של S יש איבר ראשון (כלומר מינימלי).

אומרים גם ש-S "מסודרת היטב".

דוגמאות:

1. בכל תת-קבוצה של $\mathbf{N}$ יש איבר ראשון, ולכן ω הוא סדר טוב.
2. הסדר 7 הוא סופי, ולכן בכל תת-קבוצה שלו יש מספר סופי של איברים, ובפרט איבר שהוא ראשון.
3. הסדר $\mathbf{Z}$ של השלמים אינו טוב. למשל, בתת-הקבוצה $\mathbf{Z}$ עצמה אין איבר ראשון.
4. הסדר $\omega+1$ הוא סדר טוב. אם תת-הקבוצה שניקח היא רק ה-1 מימין, אז האיבר הזה הוא ראשון . אם תת-הקבוצה כוללת איברים מתוך ω , אז אפשר להסתכל רק באיברים האלה, ומתוכם יש איבר ראשון.באופן דומה, גם $\omega+3$ הוא סדר טוב.

דוגמה 4 היא מקרה פרטי של:

טענה: אם S ו-T מסודרות היטב, אז $S+T$ מסודרת היטב.

הוכחה: תהא A תת-קבוצה של $S+T$. אם $A\subseteq T$, אז יש לה איבר ראשון, כי T מסודרת היטב. אם לא, $S\cap A$ היא תת-קבוצה לא ריקה של S, ולכן יש בה איבר ראשון. האיבר הזה הוא איבר ראשון ב- A כולה.

טענה: אם S,T סדרים טובים, אז $S\times T$ סדר טוב.

דוגמה: הסדר $\omega\times\omega$ מתקבל על ידי הצבה של ω במקום כל איבר של ω . התוצאה תהיה

$$(0,0)<(1,0)<(2,0)<\ldots<(0,1)<(1,1)<(2,1)<\ldots<(0,2)<(1,2)<(2,2)<\ldots$$

בדקו כתרגיל שזהו סדר טוב.

הוכחה לטענה: תהא $U\subseteq S\times T$. כדי למצוא בה איבר ראשון לוקחים את העותק הראשון של S שבו מופיעים איברים של U, ובתוך העותק הזה לוקחים את האיבר הראשון.

במדויק יותר: נגדיר $T'=\{t:\exists s\in S\ \ (s,t)\in U\}$. במילים, T' היא קבוצת כל ה-t שבעותקים המתאימים להם נמצאים איברים ב-U. מכיוון ש- $T'\subseteq T$, ו-T מסודרת היטב, יש ב- T' איבר ראשון t_0 . נגדיר $S'=\{t:\exists s\in S\ \ (s,t_0)\in U\}$, ואז $S'\subseteq S$, ולכן יש איבר בה ראשון s_0 .

האיבר (s_0,t_0) הוא אז ראשון ב-U.

משפט: S הוא סדר טוב אם ורק אם אין בו סדרה אינסופית יורדת.

הוכחה: **רק אם.** נניח בשלילה שקיימת סדרה אינסופית יורדת $s_1 > s_2 > s_3 > \dots$. אז לקבוצה $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ אין איבר מינימלי, בסתירה להנחה.

אם. נניח ש-S לא סדר טוב, ונבנה סדרה אינסופית יורדת. תהא תת-קבוצה $T \subseteq S$ כזו שאין בה איבר מינימלי, ויהא $s_1 \in T$ כלשהו. לפי ההנחה, s_1 לא מינימלי, כלומר יש $s_2 \in T$ כך ש-$s_2 < s_1$. גם s_2 לא מינימלי, ולכן יש $s_3 < s_2$, וכן הלאה.

הגדרה: בסדר מלא S איבר $y \in S$ נקרא **העוקב** של איבר x אם:

א. $y > x$

ב. $\sim \exists z \quad x < z < y$ (כלומר בין השניים אין איבר אחר)

משפט: בסדר טוב לכל איבר שאינו מקסימלי יש עוקב.

הוכחה: יהא S סדר טוב ויהא $x \in S$ איבר שאינו מקסימלי. נגדיר $T = \{y : y > x\} \subseteq S$. העובדה ש- x אינו מקסימלי פירושה ש- $T \neq \emptyset$, ולכן יש איבר ראשון $y \in T$. y הוא העוקב של x כי הוא האיבר הראשון שגדול ממנו.

הערה: קיום עוקב לכל איבר הוא לא תנאי מספיק לכך שהסדר הוא טוב. למשל, בקבוצת השלמים $\mathbf{Z}$ יש עוקב לכל איבר, ובכל זאת זה אינו סדר טוב.

תרגילים:

א. תנו דוגמה לתת קבוצה S של המספרים הממשיים שהסדר הרגיל (הסדר בין מספרים ממשיים) עליה הוא סדר טוב, ויש איבר שיש לו אינסוף מספרים קודמים ב-S. תן גם דוגמה שבה יש אינסוף אברים שלכל אחד מהם יש אינסוף אברים קודמים.

ב. הוכיחו: אם S תת קבוצה של המספרים הממשיים שהסדר הרגיל עליה הוא סדר טוב, אז S ניתנת להימנות.

שתי תכונות אפשריות של פונקציות מסדר לעצמו

הגדרנו מתי פונקציה בין שני סדרים (או אפילו אותו סדר) היא שומרת סדר. שתי ההגדרות הבאות מתייחסות לפונקציה מסדר מסוים L לעצמו. שימו לב, אף אחת מהן אינה שקולה לשמירת סדר:

פונקציה $f:L\to L$ נקראת **נסוגה** אם לכל $x\in L$ מתקיים $f(x)\le x$.

פונקציה $f:L\to L$ נקראת **מקדמת** אם לכל $x\in L$ מתקיים $f(x)\ge x$.

הנה צמד תרגילים קשים:

** הוכיחו: סדר הוא טוב אם ורק אם כל פונקציה שומרת סדר ממנו לעצמו היא מקדמת.

** הוכיחו: סדר הוא טוב אם ורק אם הפונקציה הנסוגה היחידה ממנו לעצמו שהיא 1-1 ערכית היא פונקציית הזהות.

תשובות חלקיות:

א. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,1$. שימו לב: הכוונה לא הייתה לסדר את הממשיים או חלק מהם בסדר טוב, אלא למצוא תת קבוצה של הממשיים שבסדר הרגיל על הממשיים היא מסודרת היטב. הדוגמה השנייה יכולה להתקבל על ידי הוספת כל המספרים $2,3,4,\ldots$.

ב. לכל מספר ב-S התאימו מספר רציונלי בינו לבין העוקב לו ב-S. הראו שזוהי התאמה חד-חד ערכית לתוך הרציונליים.

חתכים

הגדרה: יהא S סדר חלקי. תת-קבוצה C של S נקראת **חתך** אם היא סגורה כלפי מטה. כלומר, אם $x\in C$ ו- $y<x$ גורר ש: $y\in C$.

טענה: ב- $\mathbf{R}$ כל חתך הוא או $\mathbf{R}$ כולו, או מהצורה $(-\infty,a)$ או $(-\infty,a]$.

הוכחה: יהא C חתך. לפי הגדרת חתך, אם לכל מספר ממשי x יש מספר ב-C שגדול ממנו, הרי כל מספר ממשי x שייך ל-C, כלומר $C=$ ⊔, שהיא אחת האפשרויות בטענה. אם לא, אז קיים מספר ממשי x שגדול מכל איברי C, כלומר C חסומה מלעיל. לפי האקסיומה של המספרים הממשיים (למעשה, כך בונים אותם) לכל קבוצה חסומה מלעיל יש סופרמום. יהא a הסופרמום של C. לפי הגדרת "סופרמום" כל מספר y שקטן מ- a אינו חסם מלעיל ל-C, כלומר קיים $c\in C$ גדול מ- y, שלפי הגדרת "חתך" גורר ש- $y\in C$. כלומר, כל איבר בתחום $(-\infty,a)$ שייך ל-C. עתה יש שתי אפשרויות: $a\in C$ (ואז $C=(-\infty,a]$, או $a\notin C$, ואז $C=(-\infty,a)$.

ב- ⊔ יש גם חתכים מסוג אחר. למשל, הקבוצה $C=\{x:x<0\ \ or\ \ x^2<2\}$ היא חתך (הוכיחו), שאין לו חסם מלעיל קטן ביותר ולכן אינו מהצורה האמורה. (בממשיים החסם ל-C הוא $\sqrt{2}$, אבל זה אינו מספר רציונלי).

הגדרה: אם S סדר חלקי ו- $x\in S$, אז **הקטע ההתחלי שמוגדר על-ידי x** הוא $S_x=\{y:y<x\}$.
(האות S באה מ-*segment*, שפירושו קטע).

לדוגמה, $S_\pi=\{y:y<\pi\}=(-\infty,\pi)$ הוא קטע התחלי בממשיים. קטע התחלי הוא בבירור חתך (הוכיחו כתרגיל) אך לא בהכרח ההיפך נכון, לדוגמה הקטע $(-\infty,1]$ הינו חתך של הממשיים, אך איננו קטע התחלי. בסדרים טובים גם ההפך נכון:

משפט: בסדר טוב כל חתך הוא קטע התחלי או כל הקבוצה.

הוכחה: יהא C חתך ב-S, ונניח בשלילה ש- $C \neq S$. הקבוצה $S \setminus C$ אינה ריקה, ולכן יש בה איבר ראשון x. הטענה היא ש- $C = S_x$.

נראה תחילה ש- $C \subseteq S_x$. נניח בשלילה שקיים $y \in C$ שאינו קטן מ-x. לא ייתכן $y = x$ כי $x \notin C$ ולעומת זאת $y \in C$. מצד שני, גם לא ייתכן $y > x$ כי $y \in C$ ולכן היה נובע מכך ש- $x \in C$ (כי C חתך, ולכן סגור כלפי מטה), בניגוד להגדרת x. הוכחנו אם כן שכל איברי C קטנים מ-x.

כדי להוכיח את ההכלה ההפוכה, צריך להראות שכל איבר y שקטן מ-x שייך ל-C. אם לא, כלומר אם y שייך ל- $S \setminus C$, אז על פי בחירת x כאיבר הראשון ב- $S \setminus C$, מתקיים $x \leq y$, בסתירה להנחה ש- $y < x$.

למה: אם $\left(S,\leq\right)$ סדר טוב ו- $f: S \to S$ היא פונקציית שיכון (כלומר 1-1 ושומרת סדר) אז לכל $x \in S$ מתקיים $f\left(x\right) \geq x$.

הוכחה א': נניח בשלילה שקיים x כך ש- $f\left(x\right) < x$. הפונקציה f שומרת סדר, ולכן נוכל להפעיל אותה על שני האגפים של האי-שוויון:

$$f\left(f\left(x\right)\right) < f\left(x\right)$$

נפעיל את f גם על שני אגפי האי-שוויון הזה, וכו'. נקבל:

$$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) < f\left(f\left(x\right)\right)$$
$$f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right) < f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)$$
$$\vdots$$

קיבלנו סדרה אינסופית יורדת

$$\ldots < f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right) < f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right) < f\left(f\left(x\right)\right) < f\left(x\right) < x$$

ולפי למה קודמת, נובע שהסדר אינו סדר טוב, בסתירה להנחה.

הוכחה ב': שוב נניח בשלילה שיש x כך ש- $f\left(x\right) < x$. נגדיר: $T = \left\{x : f\left(x\right) < x\right\}$. לפי הנחת השלילה $T \neq \varnothing$, ולכן יש בה איבר ראשון $a \in T$. מתקיים $f\left(a\right) < a$ (כי a שייך ל-T). גם הפעם נפעיל את f על האי-שוויון, ומכיוון שהיא שומרת סדר ו-1-1 נובע כי $f\left(f\left(a\right)\right) < f\left(a\right)$, כלומר $f\left(a\right) \in T$. מצאנו איבר ב-T איבר שקטן מ-a, וזו סתירה לכך ש-a הוא איבר ראשון ב-T.

מסקנה 1: אי אפשר לשכן סדר טוב בקטע התחלי שלו. כלומר: אם $\left(S,\leq\right)$ סדר טוב ו- $x \in S$ אז לא קיימת העתקה $f: S \to S_x$ 1-1 ושומרת סדר.

הוכחה: העתקה כזו מקיימת $f\left(x\right) < x$, בסתירה ללמה.

מסקנה 2: בסדר טוב אם $S_a \cong S_b$ אז $a = b$.

הוכחה: נזכור שסדר טוב הוא מלא. אם $a \neq b$ אז אחד משני האיברים האלה גדול מן השני. בלי הגבלת כלליות נניח ש- $a > b$. מתקבל אז ש- S_a איזומורפי לקטע ההתחלי שלו S_b, בסתירה למסקנה הקודמת.

שיכון של סדר טוב כקטע התחלי של סדר טוב אחר

ראינו שיחס השיכון בין סדרים חלקיים (ואפילו סדרים מלאים) אינו מלא. כלומר, קיימים זוגות של סדרים שאי אפשר לשכן אף אחד מהם בתוך האחר. כאשר מצטמצמים לסדרים טובים, המצב משתפר. שם יחס השיכון הוא מלא. כל שני סדרים טובים ניתנים להשוואה, במובן זה שאחד מהם ניתן לשיכון באחר. יותר מזה: אם השניים אינם איזומורפיים, אז אחד מהם ניתן לשיכון כ**קטע התחלי** של האחר.

הגדרה: יהיו A ו-B סדרים טובים. אם A איזומורפי לקטע התחלי של B נאמר ש-A קטן מ-B, ונסמן זאת ב- $A < B$.

נסמן את הנוסח החלש של היחס הזה, שמתקבל כזכור על ידי הוספת האפשרות של שוויון בין האיברים, ב-"$\leq$". אם כן, $A \leq B$ אם A איזומורפי לקטע התחלי של B או A=B. זה אינו סדר אלא קדם סדר, משום שמכך ש- $A \leq B$ ו- $B \leq A$ אי אפשר להסיק ש-A=B, אלא רק ששניהם איזומורפיים. כדי להפוך זאת לסדר, נצטרך להסתכל על מחלקות שקילות של היחס $\leq$, לגבי איזומורפיזם. זאת נעשה בפרק הבא, שבו נדבר על מחלקות שקילות של סדרים טובים.

כאמור, היחס "$\leq$" על סדרים טובים הוא מלא, עובדה שמנוסחת במשפט הבא:

משפט השיכון של קבוצות סדורות היטב: בין כל שני סדרים טובים אחד איזומורפי לחתך של השני.

מכיוון שחתך הוא קטע התחלי או הקבוצה כולה, המשפט אומר שלכל שני סדרים טובים A ו-B מתקיים או $A < B$ או $B < A$ או $A = B$.

הוכחת המשפט: יהיו $(A,\leq)$ ו-$(B,\leq)$ שני סדרים טובים. תהא $C=\{x\in A:\exists y\in B \;\; S_x\cong S_y\}$ (אנו משתמשים כאן בסימון S_t לקטע התחלי בסדר B). במילים, C היא קבוצת כל האיברים ב-A שעבורם קיים איזומורפיזם מן הקטע ההתחלי שהם מגדירים לקטע התחלי כלשהו ב-B. כך למשל, האיבר הראשון ב-A שייך ל-C, כי הקטע ההתחלי המתאים הוא הקבוצה הריקה, והוא איזומורפי לקטע ההתחלי של האיבר הראשון ב-B.

תרגיל ביניים: הראו שגם האיבר השני ב-A נמצא ב-C.

טענה 1: לכל $x \in C$ מתאים בדיוק y אחד ב-B שעבורו $S_x \cong S_y$.

הוכחת טענה 1: אם $S_x \cong S_{y_1}$ וגם $S_x \cong S_{y_2}$ אז $S_{y_1} \cong S_{y_2}$, בסתירה למסקנה 2 בסעיף הקודם.

מן הטענה נובע שאפשר להגדיר פונקציה r שמתאימה לכל איבר x ב-C איבר y ב-T, ש- $S_x \cong S_y$.

טענה 2: הפונקציה r היא 1-1 ערכית.

הוכחת טענה 2: אם $r(x)=r(x')=y$ אז $S_x \cong S_y$ וגם $S_{x'} \cong S_y$, שפירושו ש $S_x \cong S_{x'}$. לפי מסקנה 2 בסעיף הקודם נובע מכך ש- $x = x'$.

טענה 3: r שומרת סדר.

הוכחת טענה 3: נניח בשלילה שקיימים $x_1 > x_2$ ב-A כך ש- $y_2 = r(x_2) > r(x_1) = y_1$. יהיו $f : S_{x_1} \to S_{y_1},\ g : S_{x_2} \to S_{y_2}$ איזומורפיזמים. אזי $g^{-1} \circ f$ היא פונקציה 1-1 ערכית שומרת סדר מ- S_{x_1} ל- S_{x_2}, בסתירה למסקנה 2 מן הסעיף הקודם.

טענה 4: C הוא חתך.

הוכחת טענה 4: יהיו $x \in C$, ויהא $x' < x$. נרצה להוכיח כי $x' \in C$. מכיוון ש- $x \in C$ קיים איזומורפיזם $f : S_x \to S_y$. יהא $f' = f | S_{x'}$ ויהא $y' = f(x')$. נראה ש-f' איזומורפיזם בין $S_{x'}$ ל- $S_{y'}$ (קיום איזומורפיזם כזה מוכיח ש- $x' \in C$, על-פי הגדרת C). f' היא צמצום של פונקציה 1-1 ושומרת סדר, ולכן גם היא 1-1 ושומרת סדר. נותר רק להראות שהיא על $S_{y'}$. יהא $\theta \in S_{y'}$. עלינו להראות שקיים $z < x'$ ש- $f'(z) = \theta$. אבל זה נובע מכך ש-f היא על S_y, שפירושו שקיים $z \in S_x$ כך ש- $f(z) = \theta$. צריך רק להראות ש- $z < x'$. נניח בשלילה $z \geq x'$. אזי $\theta = f(z) \geq f(x') = y'$, בסתירה להנחה ש- $\theta \in S_{y'}$, שמשמעו $\theta < y'$.

נסמן ב-D את התמונה של r, כלומר $D \sqcup \operatorname{Im} r$.

טענה 5: D הוא חתך.

הוכחת טענה 5: מושארת כתרגיל לקורא. ההוכחה דומה להוכחת טענה 4.

אנחנו מתקרבים לסיום הוכחת המשפט. אנו יודעים כי C, D חתכים וכי r איזומורפיזם בין C ל-D. כעת נפריד למקרים:

(1) אם $C = S$ אם r הוא איזומורפיזם בין S לחתך של T (לפי טענה 5, D הוא חתך).

(2) אם $D = T$ אז r הוא איזומורפיזם בין חתך של S ל-T (לפי טענה 4, C הוא חתך).

טענה 6: לא ייתכן $C \neq S$ וגם $D \neq T$.

הוכחת טענה 6: נניח בשלילה $C \neq S, D \neq T$. יש איבר מינימלי $x \in S \setminus C$ ואיבר מינימלי $y \in T \setminus D$. אז $C = S_x, D = S_y$, ו- r הוא איזומורפיזם בין C ל-D, כלומר בין S_x ל- S_y. מכאן נובע כי $x \in C$, וזו סתירה לכך ש- $x \in S \setminus C$.

לכן חייב להתקיים (1) או (2), או שניהם, שהוא מה שרצינו להוכיח.

מסקנה: אם סדר טוב S ניתן לשיכון בסדר טוב T, אז $T=S$ או ש-S ניתן לשיכון כקטע התחלי של T.

הוכחה: נניח ש- $S \neq T$. תהא $f : S \to T$ פונקציית שיכון. לפי המשפט, אם S אינו ניתן לשיכון כקטע התחלי של T (כלומר אם לא נכון ש- $S < T$) אז $T<S$, כלומר קיימת בייקציה $g : T \to S_x$, כאשר $x \in S$ ו- S_x הוא הקטע ההתחלי המתאים לו ב-S. אזי ההרכב $g \circ f$ שולח את S ל- S_x, בסתירה למשפט קודם (שאמר שפונקציה שומרת סדר מקבוצה מסודרת לעצמה מקיימת $f(x) \geq x$ לכל x).

סודרים $(ORDINALS)$

הגדרה: סודר הוא טיפוס של סדר טוב. כלומר, מחלקת שקילות של סדרים טובים ביחס האיזומורפיזם.

דוגמה: הסדרים $\{$ג'ון<רני<יוסי$\}$, $\{a<b<c\}$, $\{1<2<3\}$ הם סדרים טובים ואיזומורפיים זה לזה. מחלקת השקילות שלהם היא סודר ששמו 3.

דוגמה:

$$\mathbf{N}=\{0<1<2<3<\dots\}$$
$$2\mathbf{N}=\{0<2<4<6<\dots\}$$

ניתן לראות כי $\mathbf{N}\cong 2\mathbf{N}$. למחלקת השקילות של $\mathbf{N}$ קראנו ω.

נרשום את הסודרים המוכרים לנו:

$$\begin{aligned}
&0=[\varnothing],\ 1=[a],\ 2=[a<b],\dots,\\
&\omega=[\{0<1<2<\dots\}],\ \omega+1=[\{0<1<2<\dots<\infty\}],\ \omega+2,\dots,\\
&\omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \omega+\omega+2,\dots,\\
&\omega\cdot 3,\ \omega\cdot 3+1,\dots,\ \omega\cdot 4,\dots,\\
&\omega\cdot\omega=\omega^2,\ \omega^2+1,\dots,\ \omega^2+\omega,\dots,\ \omega^3,\dots,\\
&\omega^4,\dots,\ \omega^5,\dots,\ \omega^\omega,\dots
\end{aligned}$$

הסודרים מכילים זה את זה. למשל, ניתן להתייחס ל- ω^2 בתור סדרה אינסופית של $\mathbf{N}$-ים. אז ω הוא ה- $\mathbf{N}$ הראשון בסדרה הזו, ולכן $\omega\subseteq\omega^2$. אותו הדבר לגבי $\omega^2\subseteq\omega^3$: ω^3 הוא סדרה אינסופית של ω^2.

הגדרה: $\omega^\omega=\bigcup_{k\in\omega}\omega^k$

הערה: היזהרו שלא להתבלבל – אין קשר בין ω^ω לבין $\aleph_0^{\aleph_0}$. העוצמה של ω^ω היא $\aleph_0$ כי ω^ω הוא איחוד ניתן להימנות של קבוצות ניתנות להימנות.

הערה: הקבוצה $\mathbf{R}$ עם הסדר הרגיל אינה סדר טוב, ולכן אין סודר שמתאים לה. עם זאת, משפט הסדר הטוב שנלמד בהמשך מבטיח לנו שניתן לסדר מחדש את $\mathbf{R}$ בסדר טוב כלשהו.לכן יש סודר שעוצמתו (כלומר העוצמה של סדרים מטיפוס הסדר שלו) היא $\aleph$.

הערה: יש יותר מדרך אחת לסדר את המספרים הטבעיים. למשל:

$$\{0<1<2<3<\ldots\}=\omega$$
$$\{1<2<3<\ldots<0\}=\omega+1$$
$$\{0<2<4<6<\ldots<1<3<5<7<\ldots\}=\omega+\omega$$

תרגילים: 1. הוכיחו שיש יותר מסודר אחד מעוצמה $\aleph$.

2. הוכיחו שלכל סודר α מתקיים: $\alpha\neq\alpha+1$.

סימון: ω_1 מציין את הסודר הקטן ביותר שעוצמתו לא ניתנת להימנות.

סדר טוב על הסודרים

תזכורת: לשני סדרים טובים מסמנים $S<T$ אם S איזומורפי לקטע התחלי של T. הראינו שזהו סדר, ושהוא מלא. הדבר משרה סדר על הסודרים, על פי ההגדרה הבאה:

הגדרה (מתבקשת מאליה): יהיו α ו-β סודרים. נגדיר $\beta<\alpha$ אם $S<T$, כאשר S קבוצה סדורה ששייכת לטיפוס הסדר β (זכרו שטיפוס סדר הוא מחלקת שקילות), ו-T קבוצה סדורה ששייכת לטיפוס הסדר α.

תרגיל: הראו שההגדרה אינה תלויה בבחירת S ו-T מתוך מחלקות השקילות המתאימות.

טענה: כל סדר מלא איזומורפי לקבוצת הקטעים ההתחליים שלו, כאשר הם מסודרים ביחס ההכלה.

הוכחה: יהא T סדר מלא. נגדיר העתקה ששולחת כל איבר $x\in T$ לקטע ההתחלי S_x. תרגיל – הוכיחו שזהו איזומורפיזם. (רמז: הראו $S_y \quad S_x \Leftrightarrow x\in S_y \Leftrightarrow x<y$.)

מסקנה (מהגדרת יחס בין סודרים ומן הטענה הקודמת): כל סודר α איזומורפי לקבוצת הסודרים שקטנים ממנו.

דוגמה: הסודר 3 איזומורפי לקבוצת הסודרים הקטנים ממנו: $\{0<1<2\}$

טענה: היחס "$<$" בין סדרים טובים הוא סדר.

הוכחה: הוכחת הטרנזיטיביות פשוטה, ונשאיר אותה לקורא.

על פי מסקנה 1 לעיל, היחס $<$ הוא אנטי רפלקסיבי. על פי אחד התרגילים מן הפרק על סדרים, יחס שהוא טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי הוא אנטי סימטרי (נחזור על ההוכחה הפשוטה: אם $a<b$ וגם $b<a$ אז מן הטרנזיטיביות נובע $a<a$, בסתירה לאנטי רפלקסיביות).

הגדרת פון נוימן לסודרים

כבר סיפרתי לכם כיצד הגדיר המתמטיקאי ההונגרי ג'ון פון נוימן את המספרים הטבעיים. למעשה, זו הייתה רק דוגמה פרטית. הוא הגדיר בצורה זו את כל הסודרים. הוא אמר כך: אם כל סודר איזומורפי לקודמיו, מדוע לא נגדיר כל סודר פשוט כקבוצת כל קודמיו? ואכן, ההגדרה הזאת מועילה ויעילה.

הגדרת פון נוימן לסודרים: כל סודר הוא קבוצת כל הסודרים הקטנים ממנו, כאשר הסודר הראשון הוא $\varnothing$. הסודרים הראשונים הם אפוא:

$$\varnothing\,,\{\varnothing\}\,,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\,,\{\varnothing,\{\varnothing\}\,,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\,,\ldots$$

הסדר על הסודרים הוא סדר טוב

משפט: הסדר $<$ ("איזומורפי לקטע התחלי שלי") הוא סדר טוב. כלומר, בכל קבוצה לא ריקה של סודרים יש איבר קטן ביותר.

הוכחה: ראשית, צריך להוכיח שזהו סדר מלא. אבל זאת הוכחנו במשפט שקראנו לו לעיל "משפט השיכון של קבוצות סדורות היטב". נותר רק להוכיח שזהו סדר טוב.

נבחר $A \in \alpha$. אם α מינימלי ב-A, אז סיימנו. אם לא, תהא $B=\{\beta\in A:\beta<\alpha\}$ קבוצת כל הסודרים ב-A שקטנים מ- α. כל איבר ב-B איזומורפי לקטע התחלי S_x של α. מכיוון ש- α מסודרת היטב, יש בין הקטעים ההתחליים קטע התחלי ראשון. אם β הוא האיבר המתאים לקטע ההתחלי הראשון, אז β ראשון ב-B, ולכן ראשון ב-A.

דוגמה: נניח

$$A=\{2\,,7\,,100\,,\omega\,,\omega\cdot 2\,,\omega\cdot 3+1\}$$

נבחר $A \in \alpha$ כלשהו, נניח $\alpha=\omega$. אז $B=\{\beta\in A:\beta<\omega\}=\{2\,,7\,,100\}$. בין הקטעים ההתחליים $\{S_2\,,S_7\,,S_{100}\}$ יש סדר טוב, כי הם קטעים התחליים של ω, שהוא סדר טוב. לכן יש ביניהם איבר ראשון - S_2.

אפשר היה לסכם זאת בכך שקבוצת הסודרים מסודרת היטב, אלא שהדבר לא מדויק משום שקבוצת הסודרים אינה קבוצה, אלא מחלקה. את העובדה הזאת הוכיח למעשה קנטור, אבל היא קרויה על שמו של מתמטיקאי איטלקי בשם בורלי-פורטי שגילה זאת אחריו. בזמנם עדיין לא הייתה קיימת ההבחנה בין קבוצה למחלקה, וכל דבר נחשב לקבוצה. לכן הם ניסחו זאת כפרדוקס. כיום רואים זאת לא כסתירה במתמטיקה, אלא רק סתירה להנחה שהסודרים מהווים קבוצה. כלומר, למעשה הוכחה שהם אינם קבוצה.

פרדוקס בּוּרָלי פּוֹרְטִי: הסודרים אינם מהווים קבוצה.

הוכחה: נניח שהסודרים מהווים קבוצה. הראינו שהסודרים מסודרים בסדר טוב, כלומר לכל קבוצת סודרים יש איבר ראשון. לכן, לקבוצת הסודרים מתאים סודר. נסמן ב- α את קבוצת כל הסדרים. אבל α הוא סודר (כי לקבוצה הזו יש סדר טוב), ולכן הוא איבר ב- α. אז $\alpha\cong S_\alpha$, כלומר α איזומורפי לקטע התחלי של עצמו. זוהי סתירה למשפט שהוכחנו. אפשר לומר זאת גם כך: לפי הגדרת הסדר "$<$", $\alpha<\alpha$, בסתירה לכך שהסדר על הסודרים הוא אנטי-רפלקסיבי.

סימון: מחלקת הסודרים מסומנת ב- On (עבור *Ordinals*).

משפט האינדוקציה הטרנספיניטית

אחד הדברים המועילים בסדרים טובים הוא שאפשר להפעיל עליהם אינדוקציה. דבר זה מתבטא בשתי דרכים. האחת – שאפשר להוכיח באינדוקציה, והשנייה – שאפשר להגדיר באינדוקציה. זאת נעשה בשני הסעיפים הקרובים.

נפתח בהוכחות באינדוקציה. נניח שרוצים להוכיח שכל איבר בקבוצה מסודרת היטב מקיים תכונה נתונה $P(x)$. עקרון האינדוקציה אומר שאם ידוע שקיום התכונה לאיברים קטנים יותר מאיבר נתון גורר שגם האיבר מקיים את התכונה, אז אכן התכונה נכונה תמיד. כרגיל, במקום לדבר על התכונה $P(x)$ אפשר לדבר על הקבוצה P של כל האיברים שמקיימיים אותה:

משפט: יהא S סדר טוב, ותהא P תת קבוצה של S. אם מתקיים

$$\forall x\left(\left(\forall y<x \quad y\in P\right)\to x\in P\right)$$

אז $P=S$.

כביכול, חסר במשפט הזה דבר חשוב – בסיס האינדוקציה, כלומר שהתכונה מתקיימת לאיבר הראשון של S. למעשה, גם הבסיס כלול בהנחה. שימו לב שעבור האיבר הראשון בקבוצה אין איברים שקטנים ממנו, ולכן הפסוק $\left(\forall y<x \quad y\in P\right)$ מתקיים באופן ריק. לכן הנחת האינדוקציה פירושה גם שהתנאי מתקיים עבור האיבר הראשון.

הוכחת המשפט: נניח בשלילה ש- $P\neq S$. אזי $S \setminus P\neq\varnothing$, ולכן יש בקבוצה זו איבר ראשון x. מכיוון ש-x ראשון ב- $S \setminus P$, לכל $y<x$ מתקיים $y\in P$, במילים אחרות מתקיים $\left(\forall y<x \quad y\in P\right)$. לכן לפי ההנחה נובע $x\in P$, בסתירה לכך ש- $x\in S \setminus P$.

תרגילים:

א. הוכיחו שמשפט האינדוקציה נכון לסדר מלא אם ורק אם הסדר הוא טוב. במילים אחרות, הראו שאם סדר S אינו טוב אז יש תכונה P שמקיימת את התנאי אבל לא מקיימת $P=S$.

(רמז: קחו קבוצה לא ריקה A של S שאין בה איבר ראשון, והגדירו באמצעותה תכונה P – למשל שייכות ל-A או אי-שייכות ל-A.)

ב. מצאו תת-קבוצה של המספרים הממשיים שעבורה משפט האינדוקציה הטרנספיניטית אינו נכון.

ג. הוכיחו שבכל סדר מלא יש תת קבוצה שעבורה משפט האינדוקציה הטרנספיניטית נכשל.

עתה נעבור לאפשרות להגדיר פונקציות באינדוקציה טרנספיניטית. ההגדרות שנדבר עליהן יהיו של פונקציות מקבוצה של סודרים (או לפעמים ממחלקת כל הסודרים) לאיזושהי קבוצה.

מלימודי התיכון כולנו רגילים להגדיר סדרות (או פונקציות) באינדוקציה. ברוב המקרים שפגשתם כל איבר הוגדר על פי קודמו. אבל אפשר להגדיר את ערכה של הפונקציה למספר נתון על פי כל הערכים הקודמים. למשל:

$$f(0)=1$$
$$f(n)=2\prod_{i<n} f(i)$$

תרגיל: כתבו נוסחה ל-$f(n)$. רמז: עברו ללוגריתמים על פי בסיס 2, שם המכפלה הופכת לסכום. רמז עוד יותר מועיל: כתבו את האיברים הראשונים של הסדרה.

זוהי דוגמה לפונקציה מן המספרים הטבעיים למספרים הטבעיים. הסודרים הם המשך של הטבעיים, ואפשר להגדיר בדומה באינדוקציה פונקציות מן הסודרים לקבוצה כלשהי:

$$f:\mathrm{On}\ \to S$$

אזכיר שפונקציה מן הסודרים כולם אינה יכולה להיות בעצמה קבוצה. היא מחלקה.

בסודרים לא תמיד אפשר להגדיר את ערך הפונקציה על פי ערכה בסודר הקודם, כי לפעמים אין סודר קודם! למשל ל- ω אין סודר קודם. לכן לסודרים ההגדרה הנכונה היא על פי כל הערכים הקודמים.

אם כן, לסודרים הגדרה אינדוקטיבית של פונקציה היא כזו: נתון "כלל המשך" F, שאמור להגדיר את הערך של הפונקציה לסודר הבא. כלל ההמשך F הוא בעצמו פונקציה, שמוגדרת על פי הערכים הקודמים, שפירושו שהיא מקבלת כערכים את סדרת ערכי הפונקציה עד עכשיו. כלומר – התחום של F הוא פונקציות, כלומר קבוצות של זוגות.

המשפט (הכמעט מובן מאליו) הוא שאפשר להגדיר באינדוקציה:

משפט: פונקציית המשך שהטווח שלה הוא קבוצה נתונה S מגדירה פונקציה אחת ויחידה מן הסודרים ל-S.

כדי לקצר סימונים, נשתמש במוסכמה של פון נוימן: כל סודר יהיה פשוט קבוצת כל הסודרים הקודמים לו.

אזכיר גם את הסימון $f|_B$: זהו הצמצום של f ל-B, ולכן $f|_\alpha$ היא f מצומצמת לכל הסודרים הקטנים מ- α. בסימון הזה המשפט, בניסוח פורמלי, הוא:

משפט: תהא S קבוצה, ותהא F פונקציה שהמשתנה שלה הוא פונקציות שערכיהן ב-S, וגם ערכיה של F הם ב-S. אזי קיימת פונקציה יחידה f מן הסודרים ל-S שלכל סודר α היא מקיימת

$$f(\alpha)=F(f|_\alpha)$$

דוגמה נגדיר פונקציה מן הסודרים לקבוצת המספרים הטבעיים, על ידי כלל ההמשך "המספר הראשוני הקטן ביותר שלא נבחר עד עכשיו". בנוסחה: לכל פונקציה *h* מגדירים $F(h)=\min\{x : x \text{ is a prime}, x\notin \mathrm{Im}(h)\}$. כמו כן נגדיר את *F(h)* כ-0 אם *Im(h)* מכיל את כל הראשוניים. כלל ההמשך הזה מגדיר באינדוקציה פונקציה *f* המקיימת:

$$f(0)=2,\ f(1)=3,\ f(2)=5,\ f(3)=7,\ f(4)=11,\ldots,\ f(\omega)=0,\ f(\omega+1)=0,\ldots$$

($f(\alpha)=0$ לכל $\alpha\geq\omega$)

הדוגמה הזאת מראה גם נקודה חשובה – אפשר להגדיר את *F* בצורה סתמית מן הרגע שרוצים שההגדרה תיפסק.

הוכחת המשפט: נכתוב תנאי *G* על סודר β, שהוא שקיימת *f* יחידה המוגדרת ל $\gamma\leq\beta$, ומסכימה עם כלל ההמשך *F* (כלומר (*) מתקיים לסודרים קטנים או שווים ל- β). נוכיח את *G* באינדוקציה טרנספיניטית[1], לכל סודר β. אבל כמעט אין מה להוכיח: אם התנאי נכון לסודרים קטנים מ- β, אז יש פונקציה יחידה המוגדרת על הסודרים הקטנים מ- β, ואז יש דרך יחידה להגדיר את $f(\beta)$ כך שיתקיים, $f(\beta)=F(f|_\beta)$. ביתר פירוט, נגדיר תכונה $P(\beta)$: קיימת פונקציה יחידה $f:\beta+1\rightarrow S$ (כאן β מסמן את קבוצת הסודרים הקטנים מ- β, ולכן $\beta+1$ הוא כל הסודרים עד β, כולל) כך שלכל $\gamma<\beta$ מתקיים $f(\gamma)=F(f|_\gamma)$. נראה שלכל β, אם $P(\gamma)$ נכון לכל $\gamma<\beta$, אז מתקיים $P(\beta)$ (זהו התנאי של משפט האינדוקציה). נניח ש- $P(\gamma)$ נכון לכל $\gamma<\beta$. לכל γ יש $f_\gamma:\gamma\rightarrow S$ שמקיימת את כלל ההמשך. שימו לב: אם $\delta<\gamma$ אז בהכרח $f_\delta=f_\gamma|_\delta$ כי שתיהן מקיימות את כלל ההמשך ו- $f_\delta:\delta\rightarrow S$ היא יחידה שמקיימת את כלל ההמשך. לכן נגדיר

$$f_\beta=\left(\bigcup_{\gamma<\beta}f_\gamma\right)\cup\left(\beta,F\left(\bigcup_{\gamma<\beta}f_\gamma\right)\right)$$

כאשר הזוג הסדור בצד ימין הוא זוג של מקור ותמונה (לפי הגדרת פונקציה כקבוצה של זוגות סדורים). הראינו שאם $P(\gamma)$ נכון לכל $\gamma<\beta$, אז מתקיים $P(\beta)$, ולכן לפי משפט האינדוקציה, $P(\beta)$ מתקיימת לכל סודר β, משמע קיימת $f_\beta:\beta+1\rightarrow S$ לכל β.

לכל β נגדיר $f(\beta)=f_\beta(\beta)$. ההוכחה לעיל כוללת גם הוכחה של יחידות ההגדרה הזאת.

דוגמה: נגדיר $\omega^\omega\rightarrow$ סודרים: f על-ידי $f(\alpha)=\sum_{\beta<\alpha}f(\beta)+1$. האיברים הראשונים הם:

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ldots,\ f(n)=2^n$$

---

[1] משפט האינדוקציה הטרנספיניטית: בהינתן סדר טוב S, $P\subseteq S$, אם מתקיים $\forall x((\forall y<x\ \ y\in P)\rightarrow x\in P)$ אז נובע $P=S$. אנו נעזרים במשפט האינדוקציה הטרספיניטית על מנת להוכיח את הגדרת האינדוקציה הטרנספיניטית.

החוקיות $f\left(n\right)=2^{n}$ שמצאנו תקפה עבור סודרים סופיים, אך אין זה אומר שאותה חוקיות מתקיים גם בסודרים אינסופיים:

$$f\left(\omega\right)=\sum_{\beta<\omega}f\left(\beta\right)+1=\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+\ldots\right)+1=\left(1+2+4+\ldots\right)+1=\omega+1$$

$$\begin{aligned}f\left(\omega+1\right)&=\sum_{\beta<\omega+1}f\left(\beta\right)+1=\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)+\ldots+f\left(\omega\right)\right)+1\\&=\left(\omega+\omega+1\right)+1=\omega\cdot2+2\end{aligned}$$

רצינו להגדיר $f:\mathrm{On}\to\omega^{\omega}$, אבל עם ההגדרה הנוכחית אנחנו "נעבור" את ω^{ω}. לכן צריך להוסיף הגבלה: אם $\sum_{\beta<\alpha}f\left(\beta\right)+1\geq\omega^{\omega}$, נגדיר $f\left(\alpha\right)=0$. כך יתקיים $f\left(\omega^{\omega}\right)=0$, והטווח של f יהיה כפי שרצינו.

תרגיל: הוכיחו שהסודר α המינימלי שעבורו מתקיים $f\left(\alpha\right)=0$ הוא ω^{ω}.

אקסיומת הבחירה, למת צורן ומשפט הסדר הטוב

מעמדה של אקסיומת הבחירה

תהא A קבוצה של קבוצות. נזכיר ש- $\bigcup A$ מציין את איחוד כל הקבוצות ב-A, כלומר אוסף כל האיברים שמשתתפים בקבוצות A. ועוד תזכורת: פונקציה $f: A \to \bigcup A$ נקראת "פונקציית בחירה" אם לכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in a$, כלומר הפונקציה בוחרת לכל קבוצה איבר בה.

אקסיומת הבחירה (AC) אומרת שלכל קבוצה A של קבוצות לא ריקות יש פונקציית בחירה.

בנוסחה:

$$\forall S[(\forall a \in S\, a \neq \varnothing) \to (\exists f: S \to \bigcup S)(\forall a \in S)(f(a) \in a)]$$

האקסיומה הזאת נראית כה מובנת מאליה, שבתחילה לא חשדו שהיא דורשת ניסוח נפרד. ההכרה בנחיצותה היה אחד מהישגיו של ארנסט צרמלו, שהכניס אותה למערכת האקסיומות שניסח ב-1904. כאשר הקבוצה A שממנה בוחרים היא סופית זו אינה אקסיומה אלא משפט, שאפשר להוכיח באינדוקציה על גודל A. הבעיה היא רק כאשר הקבוצה היא אינסופית – במקרה הזה קיום פונקציית הבחירה אינו נובע מן האקסיומות האחרות. את העובדה הזאת הראה המתמטיקאי פול כהן ב-1963.

אקסיומת הבחירה אומרת רק "יש פונקציה". היא אינה מצביעה על דרך לבנות את הפונקציה. משום כך קמה בשנות ה-20 של המאה העשרים תנועה שנקראה "אינטואיציוניזם", שפסלה את האקסיומה ודגלה בכך שרק מה שאפשר לבנות באמצעות אלגוריתם זכאי לתואר "אובייקט מתמטי". אלא שהתברר שהויתור גדול מדי. טענות רבות אפשר להוכיח רק אם מניחים את אקסיומת הבחירה, כלומר הן שקולות לאקסיומת הבחירה. הנה רשימה קצרה:

1. $\kappa \times \kappa = \kappa$ לכל עצמה אינסופית κ.
2. לכל מרחב וקטורי יש בסיס.
3. כל שתי קבוצות ניתנות להשוואת גדלים (כלומר קיימת פונקציה חד חד ערכית מן האחת לשנייה).

כיום אין איש שמוכן לשלם את המחיר של כבילת הידיים הכרוך בויתור על אקסיומת הבחירה, והיא מקובלת כשוות מעמד לאקסיומות האחרות.

נוסחים (קרובים) שקולים לאקסיומת הבחירה

נוסח שקול לאקסיומת הבחירה הוא:

(*) לכל קבוצה X קיימת פונקציית בחירה של הקבוצה $\mathrm{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, כלומר פונקציה $f : \mathrm{P}(X) \setminus \{\varnothing\} \to X$ כך ש- $f(a) \in a$ $\forall a \in \mathrm{P}(X)$.

הוכחת השקילות בין שני הנוסחים היא קלה. ברור ש-(*) הוא מקרה פרטי של AC (משום ש-$\mathrm{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ הוא אוסף מסוים של קבוצות לא ריקות) ולכן הוא נובע מ-AC. מצד שני, AC מתקבלת מ-(*) על-ידי לקיחת $X = \bigcup A$, לקיחת הפונקציה f שקיומה מובטח ב-(*) וצמצומה ל-A. (שימו לב ש- $A \subseteq \mathrm{P}(X)$, כלומר כל קבוצה ב-$A$ מוכלת ב-X).

הנה עוד ניסוח שקול:

ACD (אקסיומת הבחירה לקבוצות זרות, D הוא האות הראשונה של *Disjoint*, זרות): לכל אוסף של קבוצות זרות יש פונקציית בחירה.

טענה: AC שקולה ל-ACD.

הוכחה: ACD היא מקרה פרטי של AC, ולכן נובע ממנה. נניח עתה ACD ונוכיח את AC. תהא A קבוצת קבוצות. נהפוך אותן לזרות על ידי טריק שכבר השתמשנו בו, כשהגדרנו חיבור של עוצמות: נוסיף לכל קבוצה מעין "סימן" יחודי. נגדיר:

$$A' = \{a \times \{a\} : a \in A\}$$

הסימן שהוספנו לקבוצה a הוא למעשה הקבוצה כולה. כך כל איבר $x \in a$ הופך להיות (x,a).
אם איבר x משותף לשתי קבוצות, $x \in a \cap b$, אז הוא הוחלף בשני איברים שונים $(x,a),(x,b)$. מACD נובע שלקבוצה A' יש פונקציית בחירה. אם נמחק את ה"סימנים" מן האיברים שנבחרו, נקבל פונקציית בחירה ל-A.

למת צורן

כאמור, לאקסיומת הבחירה יש הרבה מסקנות שקולות לה. על שתיים מהן, שנקראות בהתאמה "משפט הסדר הטוב" ו"למת צורן", נתעכב במיוחד. למת צורן היא אולי פחות טבעית מאשר אקסיומת הבחירה, אבל היא השימושית ביותר בין שלושה העקרונות. קל להשתמש בה, והיא מהווה בסיסי בארגז הכלים של כל מתמטיקאי. צורן ניסח את העיקרון שלו במאמר מ-1935, ושמו זכור בעיקר בעקבותיה – עובדה שלא נשאה חן בעיניו. "למה" היא כביכול טענת עזר, אבל אם זוהי למה שמשתמשים בה באינספור משפטים חשובים, הרי היא מכובדת לא פחות ממשפטים חשובים.

הגדרה: יהא $(S,\leq)$ סדר חלקי. תת-קבוצה C של S נקראת **שרשרת** (*Chain*) אם כל שני איברים ב-C ניתנים להשוואה. במילים אחרות – C היא קבוצה שהסדר המושרה עליה הוא מלא.

טענה: בכל שרשרת סופית יש איבר מקסימלי.

דוגמה: יהא $(\mathbf{N},|)$ עם הסדר $a\leq b \Leftrightarrow a|b$ (*a* מחלק את *b*). זה אינו סדר מלא, משום שלמשל $5\nmid 3$ וגם $3\nmid 5$. הנה כמה דוגמאות לשרשראות בסדר הזה:

$$\{5\}$$
$$\{2|4\}$$
$$\{1|2|4|8|16|...\}$$
$$\{2|6|30|210|...\}$$
$$\{k!:k\in\mathbf{N}\}$$

הגדרה: קבוצה A נקראת אנטי-שרשרת או בלתי-תלויה אם אף שני איברים בה אינם ניתנים להשוואה.

דוגמה: בסדר $(\mathbf{N},|)$ הראשוניים הם אנטי-שרשרת.

דוגמה: בסדר $(P(N),\subseteq)$ (קבוצת החזקה של המספרים הטבעיים עם סדר ההכלה) הקבוצה $c=\{\phi,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},...\}$ היא שרשרת אינסופית, והיחידונים היא אנטי-שרשרת אינסופית.

תרגיל (קשה): הראו כי בכל סדר אינסופי קיימת שרשרת אינסופית, או קיימת אנטי-שרשרת אינסופית.

פתרון (בנוסח כללי יותר) יינתן בפרק הבא.

הגדרה: תהא $(S,\leq)$ קבוצה מסודרת חלקית, ותהא $T\subseteq S$ קבוצה כלשהי. איבר $x\in S$ נקרא חסם מלעיל ל-T אם $\forall t\in T \quad t\leq x$.

דוגמה: בקבוצה $S=\{a,b,c\}$ עם הסדר החלקי $\{c<a,\ c<b\}$ לתת-הקבוצה $T=\{a,b\}$ אין חסם מלעיל.

דוגמה: בסדר $(P(N),\subseteq)$ לשרשרת $c=\{\phi,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},...\}$ קיים חסם מלעיל, והוא N, לעומת זאת לשרשרת זו לא קיים חסם מלעיל בסדר $(P(N)\setminus N,\subseteq)$, ואף לא קיים איבר מקסימלי בסדר זה כלל.

בסדר חלקי סופי יש לכל שרשרת איבר מקסימלי, והוא חסם מלעיל לשרשרת. במקרה האינסופי לא לכל שרשרת יש חסם מלעיל. למשל $(\leq,\sqcup)$ הוא סדר מלא (ולכן שרשרת בעצמו) שאין לו איבר מקסימלי, ולכן אין לו חסם מלעיל.

לקבוצה שאינה שרשרת לא חייב להיות חסם מלעיל גם במקרה הסופי – ראו את הדוגמה הלפני אחרונה.

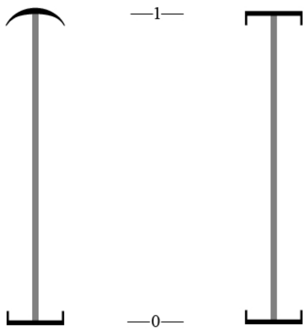
דוגמה: נתבונן בסדר $\omega+\omega$. אם ניקח את ה-ω ה"שמאלית" בתור התת-קבוצה T, זו שרשרת אינסופית, ויש לה חסם מלעיל. למעשה, כל איבר ב-ω ה"ימנית" הוא חסם מלעיל של T. לעומת זאת, אם ניקח קבוצה שמכילה אינסוף איברים מתוך ה-ω הימני, נקבל שרשרת שאין לה חסם מלעיל.

אם בסדר חלקי יש איבר גדול ביותר, אז הוא חסם מלעיל לכל קבוצה. למשל, בקבוצת המספרים השליליים $\mathbf{Z}^-$, האיבר -1 הוא חסם מלעיל של כל תת-קבוצה.

למת צורן (ZL): אם בסדר חלקי $(S,\leq)$ לכל שרשרת יש חסם מלעיל, אז קיים ב-S איבר מקסימלי.

למת צורן מצביעה על **קיום** של איבר מקסימלי, אבל לא נותנת דרך למצוא אותו. פירוש הדבר שההוכחה **אינה קונסטרוקטיבית**.

תרגיל: הראו שהמשפט ההפוך ללמת צורן אינו נכון. במילים אחרות, קיום איבר מקסימלי אינו גורר שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. לדוגמה, נסתכל על איחוד זר של הקבוצות $[0,1)\times\{1\}$ ו-$[0,1]\times\{2\}$, כאשר כל עותק מסודר בסדר הרגיל של הממשיים. בין איברים בשני עותקים שונים לא מוגדר סדר.



$[0,1)\times\{1\}$ $\quad$ $[0,1]\times\{2\}$

באיחוד יש איבר מקסימלי – ה-1 של הקבוצה הימנית. הקטע $(0,1)$ השמאלי הוא שרשרת שאין לה חסם מלעיל.

לפני ההוכחה של למת צורן ניתן לה כמה דוגמאות, שיעזרו להפנים את המושגים.

משפט הָמֶל: לכל מרחב וקטורי יש בסיס (שנקרא בסיס הָמֶל).

הגדרות: יהא V מרחב וקטורי מעל שדה F.

קבוצה $S \subseteq V$ נקראת **תלויה ליניארית** אם קיימים $s_1, s_2, ..., s_k \in S$ ו- $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in F$ כך שלא כל המקדמים α_i שווים ל-0, ו:

$$\alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2 + ... + \alpha_k \cdot s_k = 0$$

צירוף שבו לא כל המקדמים שווים ל-0 נקרא **צירוף ליניארי לא טריוויאלי**. חשוב לשים לב כי במרחב וקטורי אין מובן לצירוף ליניארי אינסופי. צירוף ליניארי הוא סכום סופי. לכך תהיה חשיבות בהוכחת המשפט.

קבוצה $S \subseteq V$ נקראת **פורשת** אם כל איבר במרחב הוא צירוף ליניארי של איבריה. כלומר,לכל $v \in V$ קיימים $s_1, s_2, ..., s_k \in S$ ו- $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in F$ כך ש:

$$\alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2 + ... + \alpha_k \cdot s_k = v$$

קבוצה $S \subseteq V$ נקראת **בסיס** אם היא פורשת ובלתי-תלויה.

על-פי הגדרות אלו, משפט הַמֶל טוען כי תמיד קיימת קבוצה פורשת ובלתי-תלויה.

הוכחת משפט הַמֶל:

טענה: בכל מרחב וקטורי קיימת קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בסדר ההכלה.

הוכחה: נגדיר $(P, \leq)$ כקבוצת הקבוצות הבלתי תלויות עם סדר ההכלה. לפי למת צורן, מספיק להראות שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. תהא C שרשרת ב-P. יהא $T = \bigcup C$, שפירושו איחוד כל הקבוצות ב-C. האיחוד T מכיל את כל קבוצות, ולכן ברור שהוא חסם מלעיל (לפי סדר ההכלה). הקושי הוא להוכיח ש- $T \in P$, כלומר ש-T בלתי-תלויה.

נניח בשלילה ש-T תלויה, כלומר שיש צירוף ליניארי לא טריוויאלי שמקיים

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_j \cdot x_j = 0$$

נסמן את הקבוצות הבת"ל שמרכיבות את C ב- A_i. אז

$$x_1 \in A_{i_1}, x_2 \in A_{i_2}, ..., x_j \in A_{i_j}$$

הקבוצה $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_j}$ היא שרשרת סופית של קבוצות, ולכן יש בה איבר מקסימלי, כלומר קבוצה A_{i_k} שמכילה את כל השאר. לאותו k מתקיים: $x_i \in A_{i_k}$ לכל i. אבל פירוש הדבר הוא ש A_{i_k} תלויה ליניארית. זוהי סתירה להנחה שאיברי השרשרת C הם בת"ל.

הוכחנו בכך ש- T שייכת ל-P, והיא חסם מלעיל ל-C. הראינו אם כן את התנאי של למת צורן, ומן הלמה נובע שקיים ב-P איבר מקסימלי A בסדר של P, שהוא כאמור סדר ההכלה.

נראה עתה ש-A בסיס, כלומר שהיא גם פורשת. יהא $x \in V$. אם $x \in A$ אז בבירור x צירוף ליניארי של איברי A (בצורה טריוויאלית - $x = x$). אם לא, אזי הקבוצה $A \cup \{x\}$ בהכרח תלויה, כי A בלתי תלויה מקסימלית. כלומר, קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_n a_n + \gamma x = 0$$

בהכרח מתקיים $\gamma \neq 0$, משום שאחרת השוויון שלעיל מראה ש- A תלויה. לכן ניתן לחלק ב- γ ולקבל:

$$x = -\frac{\beta_1}{\gamma} a_1 - \frac{\beta_2}{\gamma} a_2 - ... - \frac{\beta_n}{\gamma} a_n$$

כלומר x הוא צירוף ליניארי של איברי A. הראינו בכך שכל איבר ב-V נפרש על ידי A, כלומר A בסיס.

דוגמה: יהי $V = \mathbf{R}^\infty = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, ... \right) : \forall i \;\; x_i \in \mathbf{R} \right\}$. על פי משפט הָמֶל, יש למרחב הזה בסיס. מהו? הבסיס הראשון שעולה על הדעת הוא הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(1,0,0,0,...\right) \\ e_2 &= \left(0,1,0,0,...\right) \\ e_3 &= \left(0,0,1,0,...\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

אבל זו אינה קבוצה פורשת. למשל, היא אינה פורשת את האיבר $\vec{1} = \left(1,1,1,...\right) \in V$, כי אין צירוף ליניארי **סופי** של ה- e_i. אפשר לנסות להוסיף לקבוצה את $\vec{1}$, אבל גם קבוצה זו היא לא בסיס, כי היא לא פורשת למשל את $v = \left(1,2,3,...\right)$. גם אם נוסיף את האיבר v לקבוצה שלנו, היא עדיין לא תהיה פורשת (מצאו דוגמה לכך). בצורה זו בונים שרשרת:

$$\left\{e_1, e_2, e_3, ...\right\} \subseteq \left\{e_1, e_2, e_3, ..., \vec{1}\right\} \subseteq \left\{e_1, e_2, e_3, ..., \vec{1}, v\right\} \subseteq ...$$

על פי ההנחה לשרשרת הזאת יש חסם מלעיל (שהוא עצמו קבוצה בלתי תלויה). אם הוא בסיס למרחב, מה טוב. אם לא, ממשיכים להוסיף לו איברים. התהליך שאנחנו מתארים פה הוא למעשה רעיון ההוכחה של למת צורן - גם במקרה הכללי בונים שרשרת באינדוקציה טרנספיניטית, על ידי כך שמוסיפים לה כל פעם איבר גדול מכל אלה שהיו עד כה בשרשרת. החכמה בהוכחה היא לדעת מדוע התהליך חייב להסתיים. כאמור, זאת נראה רק מאוחר יותר.

תרגיל: הראו שאם X ו- Y הן קבוצות אינסופיות ו: $f : X \to Y$ היא "1-סופי" ערכית, כלומר $f^{-1}(y)$ סופית לכל $y \in Y$, אז $|X| \leq |Y|$.

תרגיל: אם A, B הם בסיסים למרחב וקטורי מעל שדה כלשהו, אז $|A| = |B|$.

(רמז: אם A או B סופיים אזי זהו משפט ידוע מאלגברה ליניארית. אם כן, נניח ש-A ו-B שתיהן אינסופיות.

נראה ש- $|A| \leq |B|$ (אי השוויון ההפוך מוכח בצורה סימטרית.) לכל $a \in A$ תהא $C(a)$ תת הקבוצה המינימלית של B שפורשת את a. הסבירו מדוע $C(a)$ סופית. הראו שלכל תת קבוצה סופית K של B מספר האיברים a ב-A המקיימים $K = C(a)$ הוא לכל היותר $|K|$ (גם זו עובדה פשוטה מאלגברה ליניארית), ולכן ההתאמה $f(a) = C(a)$ ששולחת את האיבר a

לקבוצה $C(a)$ היא 1-סוף ערכית, ועתה השתמשו בתרגיל הקודם כדי להראות ש- $|A|$ אינה עולה על עוצמת תת הקבוצות הסופיות של B, שהיא עוצמתה של B.

משפחות תורשתיות ובעלות אופי סופי

ההוכחה לקיום חסם מלעיל במשפט המל היא טיפוסית. ברוב השימושים של למת צורן הסדר הוא הכלה, והחסם מלעיל לשרשרת הוא פשוט איחוד כל הקבוצות בשרשרת. האיחוד הוא תמיד גדול או שווה (בסדר ההכלה) מכל איברי השרשרת. הבעיה היא להוכיח שהאיחוד שייך לקבוצה. ובכל ההוכחות שנעזרות ב-ZL הדבר נובע באותה צורה: אופי "סופי" של תנאי ההשתייכות לקבוצה. במקרה זה פעלה לטובתנו העובדה שקבוצה היא תלויה אם ורק אם יש לה תת קבוצה סופית תלויה. בואו נגדיר זאת:

הגדרה: משפחת קבוצות (שפירושו פשוט קבוצה של קבוצות) F נקראת "בעלת אופי סופי" אם מתקיים התנאי הבא:

(FIN) לכל קבוצה S, אם כל תת קבוצה סופית של S שייכת ל-F אז גם S שייכת ל-F.

הגדרה: משפחת קבוצות F נקראת "תורשתית" (*hereditary*) אם התכונה "להיות שייך ל-F" עוברת בתורשה לתת קבוצות. כלומר, אם מתקיים:

(HER) אם $A\in F$ ו- $B\subseteq A$ אז $B\in F$.

תרגיל: לכל אחת ממשפחות הקבוצות הבאות קבעו אם היא בעלת אופי סופי או לא, ואם היא תורשתית או לא. במקרה שהתשובה שלילית, תנו דוגמה נגדית:

א. קבוצת הקבוצות הבלתי תלויות במרחב וקטורי.

ב. הקבוצה D של אוספי תת קבוצות זרות של הטבעיים. (למשל, קבוצת היחידונים $\{\{i\}:\ i\in\mathbb{N}\}$ שייכת ל-D, משום שכל שני יחידונים הם זרים).

ג. קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$.

ד. קבוצת כל הקבוצות הסופיות של מספרים טבעיים.

ה. קבוצת כל תת הקבוצות הניתנות להימנות של הממשיים.

(תשובות: כל המשפחות תורשתיות. א', ב' ו-ג' גם בעלות אופי סופי).

המשפט הבא מכליל את המשפט בדבר קיום קבוצה בלתי תלויה מקסימלית, והוכחתו היא הכללה של ההוכחה של המשפט האמור:

משפט: אוסף קבוצות שהוא גם תורשתי וגם בעל אופי סופי מכיל איבר מקסימלי ביחס ההכלה.

הוכחה: יהא F אוסף קבוצות תורשתי ובעל אופי סופי. נראה שהוא מקיים את תנאי למת צורן, כלומר שלכל שרשרת יש חסם מלעיל. תהא C שרשרת ב-F. נראה ש- $\bigcup C$ שייך ל-F. בגלל האופי הסופי, מספיק להראות שכל תת קבוצה סופית X של $\bigcup C$ שייכת ל-F. כל איבר ב-X שייך לקבוצה מסוימת C_i ב-C, ומכיוון שמספר הקבוצות C_i סופי, אחת מהן, C_{i_0} מכילה את השאר. (ראה למה לעיל), ולכן מכילה את X. מכיוון ש- C_i שייכת ל- F , נובע מן התורשתיות ש-X שייכת ל-F. זהו מ.ש.ל.

תרגיל: הראו על ידי דוגמאות ששני התנאים, גם התורשתיות וגם האופי הסופי, נחוצים במשפט, כלומר שבלעדיהם ייתכן שב-F אין תת קבוצה מקסימלית להכלה. (רמז: לכך שהאופי הסופי נחוץ תוכלו להשתמש באחת הדוגמאות מן התרגיל האחרון. לנחיצות של התורשתיות קחו את דוגמה ה', ושנו אותה קצת – הסתכלו בקבוצות של מספרים ממשיים שעוצמתן היא $\aleph_0$ בדיוק. בדקו שהיא בעלת אופי סופי).

תרגיל: תהיינה A ו-B קבוצות זרות, ו-R יחס בין A ו-B, כלומר $R \subseteq A \times B$. הוכיחו שבין הפונקציות ה-1-1 ערכיות שמוכלות ב-R (פונקציה כזו היא מתת קבוצה של A לתת קבוצה של B) יש פונקציה שהיא מקסימלית לגבי הכלה.

דוגמאות נוספות לשימוש בלמת צורן

משפט: תהא F קבוצת קבוצות כלשהי, אזי קיימת $G \subseteq F$ שהיא קבוצת קבוצות זרות מ-F, שהיא מקסימלית להכלה. (לדוגמא חישבו על קבוצת העיגולים בעלי הרדיוס החיובי במישור).

הוכחה: נסתכל על P- קבוצת תתי הקבוצות של F של קבוצות זרות, סדורות בסדר ההכלה. לP יש אופי סופי, כלומר, לקבוצת קבוצות $A \subseteq F$, אם לכל $A' \subseteq A$ סופית A' מורכבת מקבוצות זרות, אז A מורכבת מקבוצות זרות. למעשה, לפי הגדרת P (זרות), מספיק שהתנאי יתקיים לכל זוג ($|A'|=2$). בנוסף P הינה תורשתית, כי כל תת-קבוצה של קבוצות זרות, הינה קבוצת קבוצות זרות בעצמה. ולכן קיים איבר מקסימלי בP.

מסקנה: בכל משפחת קבוצות יש תת קבוצה מקסימלית של קבוצות זרות.

למה: כל קבוצה אינסופית היא איחוד זר של קבוצות בגודל $\aleph_0$. כלומר כל קבוצה A ניתנת להיכתב כ:

$$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots = \bigcup_{i \in I} B_i$$

כאשר $|B_i| = \aleph_0$ לכל i, והקבוצות B_i זרות.

פירוש הדבר הוא ש- $|A| = |I| \cdot \aleph_0$.

הוכחה ללמה: תהא P קבוצת האוספים של תת קבוצות זרות מעוצמה $\aleph_0$ של A. (איבר של Pהוא אם כן אוסף $\{B_1, B_2, \ldots\}$ של קבוצות B_i זרות, שכל אחת מהן מעוצמה $\aleph_0$. שימו לב – כל B_i ניתנת להימנות, אבל מספר ה- B_i יכול להיות לא ניתן להימנות.

טענה: ב-P יש אוסף מקסימלי להכלה.

הוכחת הטענה: על פי למת צורן, מספיק להוכיח שלכל שרשרת C של איברים ב-P (שכל אחד מהם הוא כאמור אוסף של קבוצות) יש חסם מלעיל. יהא $T = \bigcup C$ (איחוד כל האוספים השייכים ל-C). מכיוון שכל איבר ב-C הוא אוסף של קבוצות מעוצמה $\aleph_0$, גם T הוא אוסף של קבוצות מעוצמה $\aleph_0$. כדי להוכיח ש-T חסם מלעיל ל-C צריך רק להוכיח שכל שתי קבוצות בו זרות. תהיינה B_1, B_2 שתי קבוצות ב-C. אזי $B_1 \in C_1,\ B_2 \in C_2$, כש- C_1, C_2 אוספים ששייכים ל-C. מכיוון ש-C שרשרת, אחת הקבוצות C_i מכילה את האחרת, ואז היא מכילה גם את B_1 וגם את

B_2 . מכיוון ש- C_i שייכת ל-P, איבריה הם קבוצות זרות. בין השאר, B_1 ו- B_2 זרות, כפי שרצינו להראות.

יהא M איבר (שהוא כאמור אוסף קבוצות) מקסימלי ב-C.

טענה: $A \setminus \bigcup M$ היא קבוצה סופית.

הוכחה: לו $A \setminus \bigcup M$ הייתה קבוצה אינסופית, אפשר היה למצוא בה קבוצה בעוצמה $\aleph_0$, ולהוסיף אותה ל-M, בסתירה למקסימליות של M.

עתה נוכל להוכיח את הלמה. נבחר ב-M (שהוא כזכור אוסף של קבוצות) קבוצה אחת ונוסיף לה את $A \setminus \bigcup M$. היא תישאר עדיין מעוצמה $\aleph_0$. אוסף הקבוצות שהתקבל ממלא את הדרוש: הקבוצות שבו זרות, מעוצמה $\aleph_0$, ואיחודן הוא כל A.

הערה: ההוכחה הזאת מחביאה מאחוריה תהליך של מיצוי. מוציאים מ-A קבוצה אחר קבוצה מעוצמה $\aleph_0$, עד ש-A מתמצה. אם A לא התמצתה, נשארו בה רק מספר סופי של איברים, שאותם אפשר לצרף לאחת הקבוצות. למת צורן רק אומרת לנו שהתהליך הזה מסתיים. זהו המסר האמיתי של למת צורן: אם לכל שרשרת יש חסם, תהליך שבו מחליפים כל פעם איבר באיבר גדול ממנו (כאן הכוונה שמחליפים כל אוסף ב-P באוסף גדול ממנו על ידי הוספת קבוצה אחת) מסתיים לבסוף.

תרגיל: הוכיחו כי תנאי המשפט ($A = \bigcup_{i \in I} B_i$ כאשר ה- B_i זרות מעוצמה $\aleph_0$) מתקיים אם ורק אם $A \cong I \times \mathbf{N}$.

כמסקנה מן הלמה נקבל:

משפט: $\kappa + \kappa = \kappa$. כלומר, לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $|A| + |A| = |A|$.

הוכחת המשפט: השוויון הדרוש נובע מן הלמה, ומכך שהמשפט נכון ל- $\kappa = \aleph_0$.

תהא A קבוצה מעוצמה κ . אזי:

$$\kappa + \kappa = |A| + |A| = |I|\aleph_0 + |I|\aleph_0 = |I|(\aleph_0 + \aleph_0) = |I|\aleph_0 = |A| = \kappa$$

הנה עוד מסקנה מן הלמה:

מסקנה: תהי A קבוצה אינסופית, אז מתקיים

$$|A| \cdot \aleph_0 = \beta\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \beta\left(\aleph_0 \cdot \aleph_0\right) = \beta\aleph_0 = |A|$$

תרגיל: לכל שתי עוצמות אינסופיות κ ו- λ מתקיים $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

משפט: $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. כלומר, לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $|A| \times |A| = |A|$, שמשמעו: $|A \times A| = |A|$.

הוכחה: בהוכחה נשתמש בעובדה, שעדיין לא הוכחנו, שכל שתי עוצמות ניתנות להשוואה. ננסה למצוא בייקציה בין הקבוצה A לבין המכפלה $A\times A$. אנחנו כבר יודעים שעבור תת-קבוצה B בגודל $\aleph_0$ אכן קיימת בייקציה בין B לבין $B\times B$.

תהא S קבוצת הבייקציות $\phi:B\to B\times B$ עבור $B\subseteq A$, עם סדר ההכלה. כלומר, בייקציה א׳ קטנה מבייקציה ב׳ אם היא מוכלת בה, כקבוצת זוגות (זכרו שכל פונקציה היא קבוצה של זוגות).

טענה: ב-S יש בייקציה מקסימלית.

הוכחה: תהא C שרשרת של בייקציות ב-S. לכל $\phi\in S$ נסמן ב- $\operatorname{dom}\phi$ את ה-B המתאים (כלומר ϕ היא פונקציה מ- B ל- $B\times B$)

יהא $\psi=\bigcup C$ ויהא $\bar{B}=\bigcup\limits_{\phi\in C}\operatorname{dom}\phi$. נראה כי $\psi:\bar{B}\to\bar{B}\times\bar{B}$ בייקציה, ובכך נוכיח כי ψ חסם מלעיל של C (כי היא מכילה את כל איברי השרשרת, ולכן גדולה מכולם).

נראה ש- ψ על. יהא $(a_1,a_2)\in\bar{B}\times\bar{B}$. צריך להוכיח ש- (a_1,a_2) בתמונת ψ. $\bar{B}$ הוא האיחוד של כל התחומים $\operatorname{dom}\phi$, ולכן קיימים ϕ_1,ϕ_2 כך שמתקיים $a_1\in\operatorname{dom}\phi_1,\ a_2\in\operatorname{dom}\phi_2$. נניח בלי הגבלת כלליות ש- $\phi_1\le\phi_2$, דהיינו $\phi_1\subseteq\phi_2$. לכן $\operatorname{dom}\phi_1\subseteq\operatorname{dom}\phi_2$ ואז $a_1,a_2\in\operatorname{dom}\phi_2$. מכיוון ש- $\phi_2\subseteq\psi$ נובע ש: $(a_1,a_2)\in\operatorname{Im}\phi_2\subseteq\operatorname{Im}\psi$, ובכך הוכחנו ש- ψ על.

נותר להוכיח כי ψ היא 1-1. חלק זה מושאר כתרגיל לקורא.

לפי למת צורן יש ב-S בייקציה מקסימלית $\phi_0:B_0\to B_0\times B_0$. אנו נראה ש- $|B_0|=|A|=\kappa$, מה שיוכיח ש- $\kappa=\kappa\cdot\kappa$.

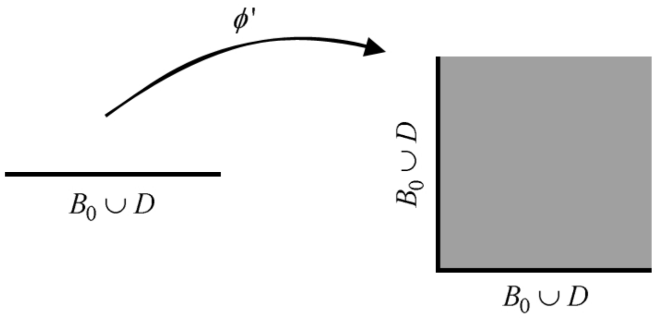
נניח בשלילה ש- $|B_0|=\mu<\kappa$. שימו לב מקיומה של הבייקציה ϕ_0 נובע כי:

$$\mu\cdot\mu=\mu$$

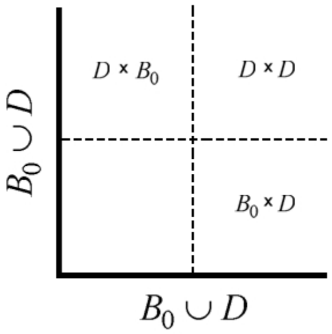
טענה: לא נכון ש- $|A\setminus B_0|\le\mu$.

הוכחה לטענה: אם $|A\setminus B_0|\le\mu$ אז לפי המשפט הקודם $\kappa=|A|=|B_0|+|A\setminus B_0|\le\mu+\mu=\mu$, בניגוד להנחה.

כזכור, אנחנו מניחים (אף שעדיין לא הוכחנו זאת) שכל שתי עוצמות ניתנות להשוואה, ולכן מן הטענה נובע ש: $|A\setminus B_0|>\mu$. מכך נובע שהקבוצה $A\setminus B_0$ מכילה תת-קבוצה D בעוצמה μ (כדי להבין מדוע, היזכרו בהגדרה של אי-שוויון עוצמות). נבנה בייקציה $\phi':B_0\cup D\to(B_0\cup D\times B_0\cup D)$ שמקיימת $\phi_0\subseteq\phi'$. נעשה זאת בחלקים.



$\phi'(B_0)$ כבר מוגדר על-ידי $\phi_0(B_0)$, ולכן עלינו לדאוג ששאר ה"שטח" יהיה גם בתמונה.



למעשה, אנחנו צריכים ש- $\phi'(D)$ יכסה את שלושת השטחים $D \times B_0, D \times D, B_0 \times B_0$. על פי הנחת השלילה, $|B_0| = |D| = \mu$, ומכיוון שבידינו בייקציה $\phi_0 : B_0 \to B_0 \times B_0$, נובע כי $\mu \cdot \mu = \mu$. לכן

$$|D \times B_0| = |D \times D| = |B_0 \times D| = \mu$$

ולכן

$$|D \times B_0 \cup D \times D \cup B_0 \times D| = \mu + \mu + \mu = \mu$$

מכאן נובע שקיימת בייקציה $\eta : D \to D \times B_0 \cup D \times D \cup B_0 \times D$. אבל אז $\phi_0 \cup \eta \in S$, בעוד שכמובן $\phi_0 \cup \eta > \phi_0$, בסתירה למקסימליות של ϕ_0. כאמור, הסתירה הזאת היא להנחה ש: $\mu < \kappa$. אם כן $\mu = \kappa$, וכאמור מכאן נובע ש- $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

תרגילים:

א. השתמשו בעובדה ש- $\kappa \times \kappa = \kappa$ לכל עוצמה אינסופית κ כדי להוכיח שאם κ אינסופית אז לכל עוצמה λ שונה מ-0 מתקיים $\kappa \times \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

ב. יהא R יחס סימטרי על קבוצה S (כרגיל, יחס הוא בין זוגות של אברים). תת קבוצה K של S נקראת "קליק" אם כל שני איברים ב- K מתייחסים זה לזה ביחס R. הראו שתמיד קיים קליק מקסימלי להכלה.

ג. יהא R יחס על קבוצת המספרים הממשיים, המוגדר על ידי aRb אם $|a\cdot b|\le 1$. תנו דוגמה לשני קליקים מקסימליים שונים.

ד. הוכיחו שכל קליק מקסימלי בסעיף ב׳ אינו ניתן להימנות.

פתרונות:

ב. תהא F קבוצת הקבוצות שבהן כל זוג אברים מתייחס ביחס R, ונסדר את F בסדר ההכלה. לפי למת צורן מספיק להראות שלכל שרשרת C של קבוצות ב-F האיחוד של כל הקבוצות ב-C, כלומר $\bigcup C$, נמצא ב-F. כלומר, צריך להוכיח שכל זוג אברים שונים ב- $\bigcup C$ מתייחס ביחס R. יהיו $x, y \in \bigcup C$. העובדה ש- $x \in \bigcup C$ פירושה שקיימת קבוצה X בשרשרת C ש- $x \in X$. בדומה, קיימת קבוצה Y בשרשרת C ש- $y \in Y$. העובדה ש-C היא שרשרת משמעה שאו $X \subseteq Y$ או $Y \subseteq X$. נניח שהאפשרות הראשונה קורה, כלומר $X \subseteq Y$. אז $x, y \in Y$, ומכיוון ש- $Y \in C$ נובע מכך ש- xRy. הראינו בכך שכל שני אברים של $\bigcup C$ מתייחסים זה לזה ביחס R, שהוא מה שהיה צריך להוכיח.

ד. הוכח שכל קבוצה מקסימלית נראית מהצורה $\{a\}\bigcup\left[-\frac{1}{|a|},\frac{1}{|a|}\right]$, עבור מספר שונה מ-0 a שערכו המוחלט לפחות 1. כמובן, קטע בממשיים אינו ניתן להימנות.

36

הוכחת למת צורן

כדי להוכיח את למת צורן נזדקק למשפט שאותו לא נוכיח:

משפט: אם קיימת פונקציה 1-1 ערכית ממחלקה A לקבוצה B אז גם A קבוצה.

לכך שאיננו מוכיחים זאת יש סיבה טובה – זוהי כמעט אקסיומה. "כמעט", במובן זה, שזהו נוסח שקול לאחת מאקסיומות תורת הקבוצות, אקסיומה שהגדיר המתמטיקאי אברהם פרנקל. האקסיומה הזאת אומרת שאם התחום של פונקציה הוא קבוצה, אז הטווח שלה הוא קבוצה, אפילו אם הפונקציה עצמה היא מחלקה ולא קבוצה. המשפט נובע מן האקסיומה הזאת על ידי לקיחת הפונקציה ההפוכה לפונקציה ה-1-1 ערכית.

נוסח שקול לאקסיומה של פרנקל: פונקציה מקבוצה היא בעצמה קבוצה (כלומר אוסף הזוגות הוא קבוצה).

עתה נוכל להוכיח את ZL:

הוכחה ללמת צורן: נניח שב-P אין איבר מקסימלי. נקבל סתירה על-ידי כך שנבנה באינדוקציה טרנספיניטית $f:On\to P$ שהיא 1-1 ערכית. על פי המשפט הנובע מאקסיומת פרנקל, נובע כי המחלקה On היא קבוצה, מה שעל פי פרדוקס בורלי פורטי הוא סתירה.

לפי ההנחה, אקסיומת הבחירה (AC) נכונה, כלומר יש פונקציית בחירה $g:\mathrm{P}(P)\setminus\{\varnothing\}\to P$, כלומר $g(A)\in A$ $\forall A\subseteq P$. לכל תת קבוצה A של P נסמן ב- $b(A)$ את קבוצת החסמים מלעיל ל-A, כלומר $b(A)=\{x\in P:\forall a\in A\ \ x>a\}$. נבנה את f בעזרת כלל ההמשך הבא: עבור פונקציה $h:\alpha\to P$ (α הוא קבוצת הסודרים הקטנים מ- α) כלל ההמשך הוא

$$F(h)=\begin{cases} g\big(b(\operatorname{Im}(h))\big) & \operatorname{Im}(h)\ \text{chain},\ b(\operatorname{Im}(h))\neq\varnothing \\ t & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר t הוא איבר כלשהו שאינו ב-P, והוא מסמן שהאינדוקציה "נגמרה". כלומר F – בוחרת חסם מלעיל לאיברים שנבחרו עד כה. הבחירה הזאת אפשרית רק בגלל AC. כעת נגדיר את f בעזרת כלל ההמשך F:

$$f(\alpha)=F(f|_{\alpha})$$

(גם כאן α מציין את קבוצת הסודרים הקטנים מ- α).

טענה: f מוגדרת לכל סודר, היא 1-1 ערכית, וכמו-כן $\operatorname{Im} f$ היא שרשרת ב-P.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על α. נניח ש-f הוגדרה לכל $\beta<\alpha$. ב- $\operatorname{Im}(f|_{\alpha})$ אין איבר שהוא מקסימלי בכלל P (כי לפי הנחת השלילה, אין ב-P איבר מקסימלי). עם זאת, מהנחת האינדוקציה $\operatorname{Im}(f|_{\alpha})$ שרשרת, ולכן יש ל- $\operatorname{Im}(f|_{\alpha})$ חסם מלעיל שנסמנו ב-z. מכיוון ש-z לא מקסימלי ב-P, יש $x>z\geq\operatorname{Im}(f|_{\alpha})$, ואז $x\in b(\operatorname{Im}(f|_{\alpha}))$, כלומר $b(\operatorname{Im}(f|_{\alpha}))\neq\varnothing$, ולכן ניתן להמשיך לפי כלל ההמשך:

$$f(\alpha)=F(f|_{\alpha})=x$$

באינדוקציה מראים ש- $f|_{\alpha}$ היא 1-1 לכל α ולכן f היא 1-1. אם למשל $f(105)=f(107)$ המשמעות היא ש- $f|_{108}$ לא 1-1.

הוכחנו כי קיימת $f:On\to P$ 1-1 ערכית, וזו סתירה לכך שאין פונקציה כזו.

למעשה הוכחנו משהו חזק יותר מאשר למת צורן: אין צורך שלכל שרשרת יהיה חסם מלעיל. מספיק לדרוש זאת לשרשראות מסודרות היטב.

טענה: אם לכל שרשרת מסודרת היטב בסדר חלקי יש חסם מלעיל, אז קיים בסדר החלקי איבר מקסימלי.

הוכחה: הפונקציה f שבנינו היא פונקציה מהסודרים ל-P. לכן כל שרשרת בהוכחה היא תמונה של סודר, ולכן היא מסודרת היטב.

נסמן את הגירסה הזאת ב- SZL – *Strong Zorn's Lemma*.

דוגמה נוספת לשימוש בלמת צורן

משפט האוסדורף: בכל סדר חלקי יש שרשרת מקסימלית להכלה. כלומר, יש שרשרת C שאינה מוכלת באף שרשרת אחרת.

הערה: משפט האוסדורף עוסק בסדר ההכלה בין שרשראות, ולא בסדר ה"רגיל" של הקבוצה. לכן לא ניתן להפעיל את למת צורן ישירות, ויש צורך בהוכחה מורכבת יותר.

דוגמה: בסדר החלקי $(\mathbf{N},|)$ (סדר ההתחלקות) שרשרת מקסימלית כזו היא $C=\{1<2<4<8<16<...<0\}$. כל מספר שננסה להוסיף ל-C (כדי ליצור שרשרת יותר גדולה, שמכילה את C) יפגע בתכונת השרשרת, כלומר האיבר שנוסיף לא יתייחס בסדר ההתחלקות לאיבר כלשהו. למשל, אם נוסיף את המספר 24 הוא לא מתחלק ב-16 וגם אינו מחלק אותו. הראו **כתרגיל** שאכן הוספת מספר כלשהו פוגעת בתכונת השרשרת.

הוכחה: שימו לב שהסדר החלקי כאן הוא סדר של הכלה בין שרשראות (בניגוד לסדר החלקי של הקבוצה עצמה). לפי משפט שהוכחנו, מספיק להראות שקבוצת השרשראות היא תורשתית ובעלת אופי סופי.

(1) תורשתיות: צריך להוכיח שתת קבוצה של שרשרת היא שרשרת. תהא C שרשרת, ותהא D תת קבוצה של C. אזי כל שני איברים ב-D שייכים גם ל-C, ומכיוון ש-C שרשרת הם מתייחסים זה לזה בסדר החלקי (שפירושו שאחד מהם גדול מן השני). הדבר מוכיח שגם D שרשרת.

(2) אופי סופי: כדי שקבוצה A תהיה שרשרת מספיק שכל שני איברים בה יהוו שרשרת. אם כן בוודאי מספיק שכל תת קבוצה סופית של A תהיה שרשרת.

תרגיל (חיזוק למשפט האוסדורף): לכל $x\in P$ יש שרשרת מקסימלית שמכילה את x.

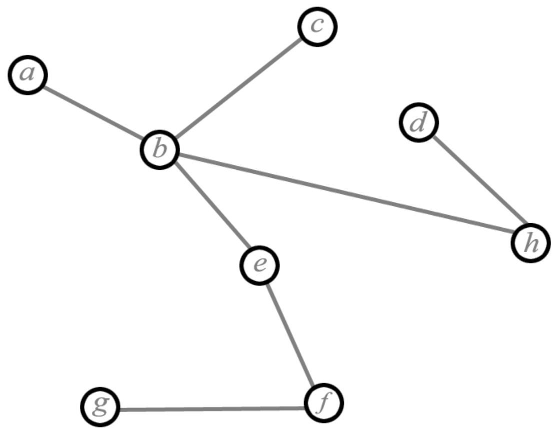
עזרה קטנה: שימו לב שקבוצת השרשראות שמכילות את x אינה תורשתית (כי תת קבוצה של שרשרת כזו אינה חייבת להכיל את x! לכן הסתכלו בקבוצה אחרת: כל השרשראות שכל איבריהן ניתנים להשוואה עם x.

תרגיל: הוכיחו: אם P סדר חלקי ממש (כלומר לא מלא) יש לפחות שתי שרשראות מקסימליות שונות.

התחלת פתרון: לפי ההנחה שהסדר לא מלא, יש אברים x,y שאינם ניתנים להשוואה. השתמשו עתה בתרגיל הקודם.

הגדרה: גרף (בקומבינטוריקה) הוא קבוצה של קודקודים ויחס בינארי סימטרי עליהם. באופן פורמלי, גרף הוא זוג (V,E) כאשר V קבוצה של קודקודים ו- $E\subseteq\binom{V}{2}$, דהיינו קבוצה של זוגות לא מסודרים של קודקודים. (לא מסודרים, כי לא משנה הסדר – הזוג שייך בשני הסידורים שלו).

דוגמה לגרף:



$$V=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$
$$E=\{(a,b),(b,c),(b,e),(b,h),(d,h),(e,f),(f,g)\}$$

(אין חשיבות לסדר בין הזוגות ב-E)

הגדרה: תת קבוצה A של V נקראת **בלתי תלויה** אם אין בה צלעות, כלומר $E\cap\binom{A}{2}=\varnothing$

דוגמה: בגרף הקודם, הקבוצה $\{a,c,e,d,g\}$ היא בלתי תלויה, כי אין אף צלע בין הקודקודים הנ"ל.

תרגיל: הוכיחו שבכל גרף יש קבוצה בלתי תלויה מקסימלית.

(הוכיחו תורשתיות ואופי סופי).

התרגיל הזה מספק הוכחה נוספת למשפט האוסדורף. בהינתן סדר חלקי P, ניקח את הגרף G שקודקודיו הם איברי P ונחבר שני קודקודים x,y אם הם לא ניתנים להשוואה. קבוצה בלתי תלויה ב-G היא קבוצה שכל איבריה ניתנים להשוואה, ולכן היא שרשרת ב-P. כמו כן, כל שרשרת

ב-P היא קבוצה בלתי תלויה ב-G. לכן קבוצה בלתי תלויה מקסימלית ב-G היא שרשרת מקסימלית ב-P.

תרגילים:

א. השתמשו בלמת צורן כדי להוכיח את הטענה הבאה: אם $|A|<|B|$ אז אפשר לחלק את הקבוצה B לקבוצות בעוצמה $|A|$. (כלומר: אפשר לכתוב את B כאיחוד זר של קבוצות B_i, שלכל i מתקיים $|B_i|=|A|$).

ב. יהא R יחס סימטרי על קבוצה S. השתמשו בלמת צורן כדי להראות שבין הקבוצות שכל איבריהן מתייחסים זה לזה ביחס R יש קבוצה מקסימלית ביחס להכלה.

ג. הסתכל בקבוצת המספרים השלמים, עם היחס aRb אם $|b-a|\leq 10$ ותן דוגמה לקבוצה מקסימלית שכזו. האם זוהי הקבוצה המקסימלית היחידה?

ד. תנו דוגמה לקבוצה S ויחס סימטרי R עליה שבה יש בדיוק שתי קבוצות מקסימליות ביחס לתכונה שכל אבריהן מתייחסים זה לזה ביחס R, שאחת מהן סופית ואחת אינסופית.

ה. תהא S קבוצה, ותהא G קבוצת הפונקציות החד-חד ערכיות מסודרים ל-S. נגדיר על איברי G סדר חלקי על ידי $g>h$ אם g הוא הרחבה של h (כלומר $f \quad g$). הראו כי כל שרשרת בסדר זה היא חסומה מלעיל. הוכיחו בעזרת זאת ובעזרת הלמה של צורן כי כל קבוצה ניתנת לסידור טוב.

משפט הסדר הטוב

ייתכן שאתם זוכרים חוב (לא היחיד) שיש לנו בעניין עוצמות: להראות שכל שתי עוצמות ניתנות להשוואה. כלומר שסדר ה"גדול מ-" על עוצמות הוא מלא. אנחנו מתקרבים עתה לתשלום החוב הזה. אנחנו יודעים שבין כל שני סדרים טובים אחד ניתן לשיכון באחר. לכן על מנת להוכיח שהשוואת גודלי עוצמות הוא סדר מלא, מספיק להוכיח את המשפט הבא:

משפט (צרמלו, 1907): כל קבוצה אפשר לסדר בסדר טוב.

דוגמה: המשפט אומר, למשל, שקיים סדר טוב על המספרים הממשיים. סדר זה אינו זהה לסדר הרגיל (שאינו סדר טוב). הוא יכול להיראות למשל כך:

$$\pi < e < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < \tfrac{3}{4} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} < \ldots$$

הטענה גם איננה שיש נוסחה שמתארת את הסדר הטוב. היא רק אומרת שקיים סדר טוב.

את משפט הסדר הטוב מציינים ב-WOT (*Well Ordering Theorem*).

משפט: $WOT \Rightarrow AC$

הוכחה: תהי קבוצה X, ונרצה להגדיר לכל קבוצה $a \in P\left(X\right)$ את $f\left(a\right)$. לפי משפט הסדר הטוב, יש על X סדר טוב. נבחר מכל קבוצה $A \neq \varnothing$ את $f\left(a\right)$ כאיבר הראשון ב-a.

הוכחה למשפט הסדר הטוב: תהא S קבוצה, ותהא g פונקציית בחירה מתת הקבוצות של S. כלומר, $g\left(A\right)$ הוא איבר ב-A לכל תת קבוצה לא ריקה A של S. נגדיר פונקציה F שמקבלת כמשתנה פונקציה f מסודר α לקבוצה S, על ידי $F\left(f\right) = g\left(S \setminus f\left[a\right]\right)$. במילים אחרות, F בוחרת איבר מ-S שעדיין לא נבחר על ידי f, כשהבחירה מוכתבת על ידי פונקציית הבחירה g. כמובן, זה לא מוגדר אם $f\left[\alpha\right] = S$. במקרה זה נגדיר את F בצורה שרירותית, נאמר כאיבר t שנוסיף ל-S. לשם הבהרה, בואו נראה מי הוא $f\left(0\right)$. לפי הגדרתנו, 0 הוא קבוצת כל הסודרים הקטנים מ-0, כלומר הוא הקבוצה הריקה. על פי ההגדרה, $f\left(0\right)$ הוא $F\left(\varnothing\right)$, שהוא $g\left(S \setminus \varnothing\right)$, כלומר זהו האיבר ש-$g$ בוחרת מ-S כולה. $f\left(1\right)$ הוא $g\left(S \setminus \left\{f\left(0\right)\right\}\right)$, כלומר האיבר ש-$g$ בוחרת מ-$S \setminus \left\{f\left(0\right)\right\}$. וכו' – כל איבר מוגדר כמי ש-g בוחרת מן הקבוצה פחות קודמיו. על פי המשפט שלפני הקודם, מוגדרת פונקציה f ממחלקת הסודרים ל-S. על פי המשפט הקודם הפונקציה הזאת לא יכולה להיות חד-חד ערכית, משום שהראינו שמחלקת הסודרים אינה קבוצה. לפי ההגדרה של f משמעות הדבר היא שהפונקציה שווה ל-t החל מסודר מסוים α. אזי $f|_{\alpha}$ היא פונקציה חד-חד ערכית מ-α על S (על, משום שכאשר F נותנת t זהו סימן ש-$f\left[\alpha\right] = S$). משמעותו של זה היא שהצלחנו לסדר את S בסדר טוב, מטיפוס α.

מסקנה: הסדר "$<$" בין עוצמות הוא סדר טוב על מחלקת העוצמות.

להוכחה נקדים **תרגיל**: הוכיחו שאם α, β הם סודרים, ואם $|\alpha|<|\beta|$, אז $\alpha<\beta$.

הוכחה למסקנה: תהא S קבוצה לא ריקה של עוצמות. צריך להוכיח שיש בה עוצמה מינימלית. לכל עוצמה ב-S נבחר קבוצה מתאימה מאותה עוצמה. לפי משפט הסדר הטוב, אפשר לסדר כל אחת מן הקבוצות שנבחרו בסדר טוב. תהיה T קבוצת הסודרים המתאימים לסדרים האלה. באחד השיעורים הקודמים ראינו שמחלקת הסודרים מסודרת היטב (בסדר שהגדרנו בין הסודרים), ולכן ב-T יש איבר מינימלי. על פי התרגיל שלעיל, העוצמה המתאימה לו היא מינימלית ב-S.

פתרון שאלות מהבוחן
(סמסטר אביב 2008-9)

שאלה 1: הוכיחו על-ידי בייקציה שאם $A\cap B=\varnothing$ אז $\mathrm{P}\left(A\cup B\right)\cong \mathrm{P}\left(A\right)\times \mathrm{P}\left(B\right)$, כלומר $2^{|A|+|B|}=2^{|A|}\cdot 2^{|B|}$.

פתרון: נגדיר את ההעתקה

$$\begin{aligned}&\phi:\mathrm{P}\left(A\cup B\right)\to \mathrm{P}\left(A\right)\times \mathrm{P}\left(B\right)\\&\phi(C)=\left(C\cap A,C\cap B\right)\end{aligned}$$

נראה שהיא על. יהא $\left(X,Y\right)\in \mathrm{P}\left(A\right)\times \mathrm{P}\left(B\right)$. נגדיר $C=X\cup Y$ ואז $\phi(C)=\left(X,Y\right)$, את הוכחת החד-חד ערכיות נשאיר לקורא.

שאלה 2א: נגדיר $F=\left\{A:A\subseteq \mathbf{R},|A|=\aleph_0\right\}$. מהי $|F|$?

פתרון: כל קבוצה של מספרים ממשיים מעוצמה $\aleph_0$ אפשר לסדר בדרך כלשהי, ולקבל סדרה של מספרים ממשיים. ההתאמה הזאת (של סדרה לקבוצה) היא 1-1 ערכית, משום שלשתי קבוצות שונות מתאימות שתי סדרות עם תמונות שונות, ולכן בוודאי אלה סדרות שונות. אם כן, מספר תת הקבוצות הניתנות להימנות אינו עולה על מספר הסדרות. אבל סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה מן הטבעיים לממשיים, ולכן מספר הסדרות הוא $\left|\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right|$, שהוא

$\aleph=2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=\aleph^{\aleph_0}$.

לכן עוצמת F היא לכל היותר $\aleph$, ומצד שני היא לפחות $\aleph$, כי F מכילה את כל היחידונים של מספרים ממשיים. לכן לפי משפט קנטור-ברנשטיין $|F|=\aleph$.

שאלה 2ב: מהי העוצמה של קבוצת הקבוצות של קטעים פתוחים זרים לא ריקים על הישר הממשי (שימו לב: השאלה איננה מה הגודל המקסימלי של קבוצת קטעים זרים, אלא כמה קבוצות כאלה יש).

שאלה 3ב: הוכיחו שאקסיומת הבחירה שקולה לאקסיומת הבחירה שבה הקבוצות שמהן בוחרים הן זרות (להוכחת הכיוון הלא טריוויאלי השתמשו בטריק המקובל שהופך קבוצות לזרות).

שאלה 3ג: נסמן ב-(*) את הטענה הבאה: לכל פונקציה על יש פונקציה הפכית מימין.

הראו ש-(*) שקולה ל-AC.

פתרון: את אחד הכיוונים, ש-AC גוררת את (*), הראינו בתחילת הסמסטר. לכיוון ההפוך נראה ש-(*) גוררת את ACD (אקסיומת הבחירה לקבוצות זרות, שהראינו שהיא שקולה ל-AC). תהא $\{A_i : i \in I\}$ קבוצה של קבוצות זרות לא ריקות. נגדיר את הפונקציה

$$f : \bigcup A_i \to I$$
$$f(a) = i \Leftrightarrow a \in A_i$$

במילים, הפונקציה f נותנת עבור כל איבר את האינדקס של הקבוצה שהוא נמצא בה. למשל, עבור איבר $x \in A_{567}$ הפונקציה תחזיר $f(x) = 567$. הפונקציה מוגדרת היטב, כי הקבוצות זרות, ולכן לכל איבר יש אינדקס יחיד. f על, כי הקבוצות לא ריקות, ולכן על פי ההנחה יש לה הפכית מימין g. הפונקציה g בוחרת לכל i איבר ב- A_i, ובמילים אחרות – מכל A_i היא בוחרת איבר. זוהי פונקציית הבחירה המבוקשת.

שאלה 3ד: כמה פונקציות הופכיות מימין יש לפונקציה $f(x) = \sin x$ מ- $\mathbf{R}$ לקטע $[-1,1]$?

פתרון: לכל מספר בקטע $[-1,1]$ יש קבוצה של מספרים ב- $\mathbf{R}$ שנשלחים אליו. כך למשל, המספר 1 הוא התמונה של כל המספרים מהצורה $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. אנו מחפשים פונקציה $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ כך שיתקיים $f \circ g = I_{[-1,1]}$. אם נסמן $A = \mathbf{R},\ B = [-1,1]$, אז נרצה שלכל $b \in B = [-1,1]$ הפונקציה g תבחר $a \in f^{-1}(b)$. למשל, עבור $b = \frac{1}{2}$, הפונקציה g תבחר איבר כלשהו מהקבוצה $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. זאת אומרת שעבור $b = \frac{1}{2}$ יש $\aleph_0$ אפשרויות. למעשה, עבור כל מספר $b \in [-1,1]$ מספר האפשרויות לבחור $a \in f^{-1}(b)$ הוא $\aleph_0$ (כי $\left|f^{-1}(b)\right| = \aleph_0$), ולכן מספר האפשרויות לבחור את g הוא ${\aleph_0}^{\aleph} = 2^{\aleph}$.