דף תרגילים 1 - אלגברה לינארית ב'

בתרגיל זה F הינו שדה ו$F[x]$ אלגברת הפולינומים.

1. א. מצא את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של המטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ב. תהי A מטריצת 3x3 עם פולינום מינימלי x^2, מהו הפולינום האופייני שלה? מצא דוגמא למטריצה כזו.

2.. תהי A מטריצה עם פולינום אופייני $p(x) = (x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2} \dots (x-c_k)^{d_k}$. הראו כי העקבה של A היא $tr(A) = c_1d_1 + c_2d_2 + \dots + c_kd_k$.

3. יהי V המרחב הוקטורי של המטריצות $n \times n$ מעל השדה F. תהי A מטריצת $n \times n$ קבועה. יהי T אופרטור לינארי על V המוגדר ע"י $T(B) = AB$. הוכח כי הפולינום המינימלי של T הינו הפולינום המינימלי של A.

4. תהי $A \epsilon F^{m\times n}$ ותהי $B \epsilon F^{n\times m}$ כאשר $n \geq m$. הוכח כי $\Delta_{BA}(t) = t^{n-m}\Delta_{AB}(t)$.

רמז: כפלו את מטריצת התאים $\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ משמאל ב$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix}$ ומימין ב$\begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$.

5. תהיינה $A, B \in F^{n\times n}$. הוכיחו כי הפולינומים המינמליים של AB ושל BA קשורים באחת מהאפשרויות הבאות:

א. $m_{AB}(t) = m_{BA}(t)$

ב. $m_{AB}(t) = tm_{BA}(t)$

ג. $tm_{AB}(t) = m_{BA}(t)$.

רמז: הראה כי עבור כל פולינום $f(t)$ מתקיים $Af(BA)B = ABf(AB)$.