# תורת הקבוצות ת"ב 5

שניר הורדן -205689581

30 ביוני 2018

**.1**

.1

<u>הוכחה</u>

יהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קס"ה ביחס לסדר הרגיל על $\mathbb{R}$.

נניח בשלילה ש-$A$ אינה בת-מנייה. כלומר $|A| > \aleph_0$ אך לפני הנתון $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |A| \leq \aleph$
אז לפי השערת הרצף $|A| = \aleph$.

$A$ קס"ה לכן לכל תת-קבוצה שלה קיים איבר ראשון. (אמ"ם לא קיימת תת-סדרה אינסופית יורדת)

נחלק לשני מקרים:

<u>מקרה 1</u>-$A$ אינה חסומה מלרע

אז בוודאי קיימת תת-סדרה אינסופית יורדת לפי הסדר המושרה על $\mathbb{R}$. סתירה לכך שהיא סדורה היטב.

<u>מקרה 2</u> -$A$ חסומה מלרע

לפי שלמות המספרים הממשיים, לכל תת-קבוצה לא ריקה של הממשיים קיים סופרמום.
נתבונן בקבוצת החסמים מלרע של $A$ שנסמנה $S$. ל-$S$ קיים סופרמום הנסמנו $s$ שהוא האינפימום של $A$ו-$s \in A$. נימוק: $s$ גדול או שווה לכל החסמים מלרע. הם קטנים או שווים לכל האיברים ב-$A$, אז הסופרמום שלהם נמצא ב-$A$(שווה לאיבר ב-$A$).

$A$ מעצמה אאז קיימת לה סדרה אינסופית השואפת ל-$s$. כלומר תת-סדרה אינסופית יורדת. סתירה לכך שהיא סדורה היטב.

לכן $A$ בת-מנייה.

מ.ש.ל.

.2 <u>הוכחה</u>

תהא $A \subseteq [0,\infty)$עם יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$.

נניח ש-$A \cap [n, n+1)$ היא קס"ה לכל $n \in \mathbb{N}$.

נניח בשלילה שקיימת סדרה אינסופית יורדת לפי יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$.

לפי שלמות הממשיים וכפי שהוכחנו בסעיף 1, לכל תת-קבוצה לא ריקה ב-$\mathbb{R}$ קיים אינפימום ב-$\mathbb{R}$.

סדרה זו מתכנסת לערך כלשהו בקטע חצי סגור מלרע.

נסמן $s - infimum\, of\, montonically\, decreasing\, sequence$.

אזי $\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ s \in [n_o, n_0+1)$.

אזי בקטע זה קיימת סדרה אינסופית יורדת לפי יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$.

סתירה להנחה.

אזי לא קיימת תת-סדרה אינסופית יורדת לפי יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$לכן $A$ היא אכן קס"ה.

מ.ש.ל.

**2. הוכחה**

ע"פ ההגדרה־סודר $\alpha$ הוא סודר עוקב אם קיים סודר $\beta$ כך ש־ $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, אחרת הוא סודר גבולי.

צ.ל.$\alpha$ אינו סודר עוקב אס"ם $\beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 < \alpha$

$\Leftarrow$

נניח $\alpha$ אינו סודר עוקב וגם שמתקיים $\beta < \alpha$.

אז לא קיים סודר $\beta$ כך ש־ $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

אזי $\alpha \neq \beta + 1$ לכל סודר $\beta$. אז לפי משפט הוא מקיים אחד בלבד מהשתיים : $\beta + 1 < \alpha$ או $\beta + 1 > \alpha$.

נניח בשלילה שמתקיים $\beta + 1 > \alpha$.

אך לפי ההנחה $\beta < \alpha$, כלומר $\alpha = \beta + 1$.

סתירה.

לכן בהכרח מתקיים $\beta + 1 < \alpha$.

$\Rightarrow$

נניח $\forall \beta \in Ord \, : \, \beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 < \alpha$.

נניח בשלילה ש־$\alpha$ סודר עוקב.

אזי $\beta + 1 \underbrace{=}_{by\, definition\, of\, ordinal\, arithmatic} \exists \beta \, : \, \alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

אך לפי משפט יכול להתקיים רק אחד מבין השלושה : $\beta < \alpha$.1 $\beta > \alpha$.2 $\beta = \alpha$.3

סתירה.

לכן $\alpha$ אינו סודר עוקב.

מ.ש.ל.

**.3**

1. הוכחה

יהיו $\alpha, \beta, \gamma$ סודרים.

לפי משפט, הסודר $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ הוא טיפוס הסדר של הקבוצה $A \times B \times C$ עם יחס הסדר $\leq$ המוגדר כך:

יהיו $(P_1, \leq_1), (P_2, \leq_2), (P_3, \leq_3)$ קס"ה כך שמתקיים : $\forall a \in P_1, b \in P_2, c \in P_3$ $a < b < c$.

אזי נקבל שלישייה של איברים המסודרים בסדר טוב. נשים לב כי

$$|A \times B \times C| = |(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)| \Rightarrow A \times B \times C \sim (A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$$

נימוק: העצמה שלהן שווה אז קיימת פונקציה חח"ע ועל ביניהם, $f$.

לכן לפי יחס הסדר שהגדרנו לעיל מתקיים $f$ שומרת סדר.

אז $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

הוכחה עם אינדוקציה על־סופית

נשתמש בהגדרת סדר שהגדרנו בדרך פתרון הראשונה.

בסיס האינדוקציה: $\emptyset \cdot (\emptyset \cdot \emptyset) = (\emptyset \cdot \emptyset) \cdot \emptyset$. בוודאי שמתקיים.

מקרה $I$ האורדינלים אינם גבוליים

הנחת האינדוקציה: נניח $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ . אז נרצה להוכיח

$$(\alpha + 1) \cdot ((\beta + 1) \cdot (\gamma + 1)) = ((\alpha + 1) \cdot (\beta + 1)) \cdot (\gamma + 1)$$

.

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma\Rightarrow exists bijective well-ordered function f:\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\to(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma\Rightarrow$$

נבנה פונקציה חדשה

$$f_{new}:(\alpha+1)\cdot((\beta+1)\cdot(\gamma+1))\to((\alpha+1)\cdot(\beta+1))\cdot(\gamma+1)$$

אשר זהה ל־$f|_{\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)}$ נגדיר

$$f_{new}\left(\alpha\cup\{\alpha\}\right)=\alpha\cup\{\alpha\}, f_{new}\left(\beta\cup\{\beta\}\right)=\beta\cup\{\beta\}, f_{new}\left(\gamma\cup\{\gamma\}\right)=\gamma\cup\{\gamma\}$$

נשים לב שבו שומרת על הסדר שהגדרנו והיא בייקציה. אזי

$$exists bijective well-ordered function f_{new}:(\alpha+1)\cdot((\beta+1)\cdot(\gamma+1))\to((\alpha+1)\cdot(\beta+1))\cdot(\gamma+1)$$

<u>מקרה $II$ ־ גבולי</u>

$$\forall\theta<\alpha,\epsilon<\beta,\zeta<\gamma:\theta\cdot(\epsilon\cdot\zeta)=(\theta\cdot\epsilon)\cdot\zeta\Rightarrow\sup\{\theta\cdot(\epsilon\cdot\zeta)\,|\,\theta<\alpha,\epsilon<\beta,\zeta<\gamma\}=\sup\{(\theta\cdot\epsilon)\cdot\zeta\,|\,\theta<\alpha,\epsilon<\beta,\zeta<$$

$$\Rightarrow\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$$

בזו הסתיימה האינדוקציה העל־סופית.

2. <u>הוכחה</u>

נניח $\beta<\gamma$. צ.ל. $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

נוכיח באמצעות טיפוס סדר של קבוצות.

לפי משפט, הסודר $\alpha+\beta$ הוא טיפוס הסדר של הקבוצה $P_1=A\times\{0\}\cup P_2=B\times\{1\}$ עם יחס הסדר $\leq$ המוגדר כך:

יהיו $(P_1,\leq_1),(P_2,\leq_2)$ קס"ה כך שמתקיים $\forall a\in P_1,b\in P_2:\ a<b$.

אז אם $\gamma>\beta$ לא קיימת פונקצייה חח"ע, שהיא על שומרת סדר $f:\beta\to\gamma$. כלומר $\exists b\in\beta:\ f(b)=\underbrace{\gamma\backslash\{\gamma\}}_{largest\,ordinal\,in\,order}$!.

לכל פונקציה $g:\alpha+\beta\to\alpha+\gamma$ מתקיים $g|_\alpha(x)=x$ ו־$g|_\beta=f$. לפי הסדר שהגדרנו לעיל מתקיים $g$ שומרת סדר, אז לכל $g$ מתקיים $g$ חח"ע שומרת סדר שאינה על.

אזי $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

4. נתבונן בתת־קבוצה $[0,1)$. נגדיר $A_n=\left[\frac{2^n-1}{2^n},\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]$.

נגדיר $a_n=\left\{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}-\frac{1}{k}\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}-\frac{2^n-1}{2^n}\right)\ :\ k\in\mathbb{N}^+\right\}$־קבוצה סדורה.

נגדיר $f:\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}\{n\}\times a_n\right)\cup\{(1,1)\}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}+1$.

<u>מוגדרת היטב:</u> יהיו $x,y\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}+1$ צריך להוכיח $(f(b)=x)\wedge(f(b)=y)\iff$ $x=y$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ האיברים ב־$a_n$ נבדלים זה מזה, והאינדקס ייחודי לכל קבוצה. כמו כן,

$$|a_n| = |\mathbb{N}| = \aleph_0 \Rightarrow \left| \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \{n\} \times a_n \right| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$f\left(\left(n, \underbrace{a_n(i)}_{element\, i\, in\, set}\right)\right) = (n,i)$$

$$f((1,1)) = 1$$

זו פונקציה חח"ע ועל המשמרת את הסדר הרגיל על $\mathbb{N}$.

**5. <u>הוכחה</u>**

נניח $\alpha > 1$. נוכיח באינדוקציה על־סופית כי $\beta \le \alpha^\beta$.

בסיס האינדוקציה:

$\beta \in Ord$.

$$n = 0 \Rightarrow \underbrace{\emptyset}_{ordinal} \le \alpha^{\emptyset}\,(empty\, set\, smaller\, or\, equal\, to\, all\, sets)$$

$$n = 1 \Rightarrow \{0\} \underbrace{\le}_{cartesian\, multiplication} \{0\} \times \{0\} \le \alpha^{\emptyset}$$

צעד האינדוקציה:

נניח שמתקיים $\beta \le \alpha^\beta$. אזי ,

$$\beta \le \alpha^\beta \Rightarrow \beta < \alpha^\beta \times \alpha\,(membership\, is\, left\, compatible\, with\, ordinal\, multiplication)$$

$$\beta \cup \{\beta\} \le \alpha^{\beta+1}\,(successor\, ordinal) \Rightarrow \beta + 1 \le \alpha^{\beta+1}$$

<u>מקרה של אורדינל גבולי</u>

נזכור כי עבור $x$ אורדינל גבולי $x = \bigcup_{y\in x} y = \sup\{y \,|\, y < x\}$

נניח $\alpha > 1$ ונוכיח $\beta \le \alpha^\beta$

צעד האינדוקציה:

$$\forall \gamma < \beta \,:\, \gamma \le \alpha^\gamma \Rightarrow \sup\{\gamma \,|\, \gamma < \beta\} \le \sup\left\{\gamma \,|\, \gamma < \alpha^\beta\right\}$$

$$\Rightarrow \beta \le \alpha^\beta\,(def\, of\, limit\, ordinal)$$

מ.ש.ל.