הצבות

עד עכשיו, פתרנו משוואות באופן ישיר. עכשיו ננסה לפתור משוואות ע"י הצבות שיאפשרו לנו לפתור משוואות שאיננו יודעים לפתור ע"י מעבר למשוואות אותם אנו יודעים לפתור. נראה כמה דוגמאות.

משוואות הומוגניות

מד"ר מהצורה $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ נקראת מד"ר הומוגנית (אין קשר למד"ר לינארית הומוגנית).

נעשה הצבה $v = \frac{y}{x}$

כאשר הדגש הוא שגם y וגם v הן פונקציות של x, כלומר $v(x) = \frac{y(x)}{x}$

או $y(x) = xv(x)$

נגזור את היחס והקבל $y'(x) = v(x) + xv'(x)$

אבל מהמד"ר $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) = f\big(v(x)\big)$

ולכן $v(x) + xv'(x) = f\big(v(x)\big)$

כלומר המד"ר ב־v היא $v'(x) = \frac{1}{x}\left(f\big(v(x)\big) - v(x)\right)$

כלומר $v' = \frac{1}{x}\left(f(v) - v\right)$

וזו מד"ר פרידה שאנו יודעים לפתור. פותרים ומקבלים פתרון בצורה מפורשת או סתומה (לא לשכוח פתרונות סינגולריים־קבועים) ואז מחליפים כל מופע של v ב־$\frac{y}{x}$.

איך מזהים מד"ר הומוגנית? רושמים את המד"ר $y' = f(x,y)$. אז מסתכלים על f. בדר"כ יהיו ביטויים מהצורה

$$\frac{8x^py^q - 4x^\alpha y^\beta + \cdots}{-10x^ay^b + 6x^cy^d + \cdots}$$

נסתכל על כל אחד מהמחוברים במונה ובמכנה ונסכם את החזקה של x עם החזקה של y. כלומר נסתכל על

$$p+q, \alpha+\beta, a+b, c+d, \ldots$$

אם כל אלה שווים, כלומר $n = p+q = \alpha+\beta = a+b = c+d = \cdots$ אז אפשר לרשום את הביטוי כביטוי שלוי ב־$\frac{y}{x}$ בלבד ע"י חלוקת מונה ומכנה ב־x^n. נקבל

$$\frac{8x^py^q - 4x^\alpha y^\beta + \cdots}{-10x^ay^b + 6x^cy^d + \cdots} = \frac{8\left(\frac{y}{x}\right)^q - 4\left(\frac{y}{x}\right)^\beta + \cdots}{-10\left(\frac{y}{x}\right)^b + 6\left(\frac{y}{x}\right)^d + \cdots}$$

ואלו ביטויים התלויים אך ורק ב־$\frac{y}{x}$ כנדרש.

תרגיל: $y' = \frac{x+y}{x}$

פתרון: נרשום את המשוואה בצורה $y' = 1 + \frac{y}{x}$

עכשיו אנו יכולים לפתור כמד"ר הומוגנית ע"י ההצבה $\frac{y(x)}{x} = v(x)$ $\frac{y}{x} = v$
ונקבל

$$\begin{aligned}
&y' = xv' + v = f(v) = 1 + v \\
&v' = \frac{1}{x} \\
&v = \ln|x| + c \\
&y(x) = xv(x) = x\ln|x| + cx
\end{aligned}$$

כאשר תחום ההגדרה הוא $x > 0$ או שתחום ההגדרה הוא $x < 0$. שימו לב כי תחום ההגדרה אינו $x \neq 0$.

תרגיל לעבודה עצמית: פתרו את התרגיל כמד"ר לינארית והשוו פתרונות למה שקיבלנו פה.

תרגיל: $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

פתרון: אנו רואים כי סכומי החזקות של כל מחובר בוא 2 ולכן נחלק מונה ומכנה ב־x^2. נקבל $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

נציב $v = \frac{y}{x}$

או $y = xv$

נגזור את היחס (ונזכור כי y, v הן פונקציות של x) ונקבל $y' = v + xv'$

אבל מהמד"ר $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(v) = \frac{2v}{1-v^2}$

ולכן $v(x) + xv'(x) = \frac{2v}{1-v^2}$

כלומר המד"ר ב־v היא $v'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{2v}{1-v^2} - v\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{v^3+v}{1-v^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{v(v^2+1)}{v^2-1}$

נפתור לפי הפרדת משתנים: נחפש קודם פתרונות סינגולריים: $\frac{v(v^2+1)}{v^2-1} = 0$

ולכן $v \equiv 0$ הוא פתרון. מתוך הצבה שלו למד"ר $0 = \frac{1}{x} \cdot \frac{0}{0-1} = \frac{0}{x}$

אנו רואים כי תחום ההגדרה הוא $x > 0$ או שתחום ההגדרה הוא $x < 0$.

נמשיך לפתור לפי הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned}
&\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| \\
&\int \frac{dv}{g(v)} = \int \frac{1-v^2}{v(v^2+1)}dv = \ln\left|\frac{v}{1+v^2}\right|
\end{aligned}$$

ולכן נקבל שהפתרונות הם

$$\ln\left|\frac{v}{1+v^2}\right| = \ln|x| + c$$

ביחד עם $v \equiv 0$.
נפשט את הביטוי הסתום:

$$\ln\left|\frac{v}{1+v^2}\right| = \ln|x| + c = \ln c_1|x| \qquad c_1 > 0$$
$$\left|\frac{v}{1+v^2}\right| = c_1|x| \qquad c_1 > 0$$
$$\frac{v}{1+v^2} = \pm c_1 x = c_2 x \qquad c_2 \neq 0$$

נציב $v = \frac{y}{x}$ חזרה כדי לקבל את הפתרון למד"ר המקורית:

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = cx \quad c \neq 0$$
$$\frac{y}{x} = v \equiv 0$$
$$y \equiv 0$$

או

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = cx$$

כאשר נשים לב כי עבור $c = 0$ אנו מקבלים את הפתרון $y \equiv 0$. אפשר להוסיף ערך שמקודם לא היה חוקי עבור הפרמטר c רק אחרי שמוודאים כי ערך זה נותן פתרון של המד"ר, כמו במקרה זה.
נחלץ את y

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = cx$$
$$\frac{xy}{x^2+y^2} = cx$$
$$xy = cx^3 + cxy^2$$
$$(cx)y^2 + (-x)y + cx^3 = 0$$
$$y = \frac{x \pm \sqrt{(-x)^2 - 4(cx)(cx^3)}}{2cx} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4c^2x^4}}{2cx} =$$
$$= \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4c^2x^2}}{2cx}$$

שימו לב כי בצורה המפורשת $c \neq 0$ ועבור $c = 0$ נקבל $y \equiv 0$ מהצורה הסתומה.

הערות: 1. תחום ההגדרה של $y \equiv 0$ צריך להבדק מהמד"ר המקורית, כלומר להציב למד"ר המקורית

$$0 = \frac{2x \cdot 0}{x^2 - 0^2} = \frac{0}{x^2}$$

ושוויון זה תקף רק כאשר $x \neq 0$ ולכן אנו מקבלים שני פתרונות

$$\begin{aligned} y &\equiv 0 \quad x > 0 \\ y &\equiv 0 \quad x < 0 \end{aligned}$$

2. תחום ההגדרה של הפתרון המפורש $y = \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4c^2x^2}}{2cx}$ הוא

$$\begin{aligned} &1 - 4c^2x^2 > 0 \quad and \quad x \neq 0 \\ &4c^2x^2 < 1 \quad and \quad x \neq 0 \\ &-1 < 2cx < 1 \quad and \quad x \neq 0 \\ &-\frac{1}{2c} < x < \frac{1}{2c} \quad c > 0 \quad and \quad x \neq 0 \\ &\frac{1}{2c} < x < -\frac{1}{2c} \quad c < 0 \quad and \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

כלומר הפתרונות הם

$y = \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4c^2x^2}}{2cx}$	$0 < x < \frac{1}{2c}$	$c > 0$
$y = \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4c^2x^2}}{2cx}$	$-\frac{1}{2c} < x < 0$	$c > 0$
$y = \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4c^2x^2}}{2cx}$	$\frac{1}{2c} < x < 0$	$c < 0$
$y = \frac{x \pm |x|\sqrt{1-4c^2x^2}}{2cx}$	$0 < x < -\frac{1}{2c}$	$c < 0$
$y = 0$	$0 < x$	
$y = 0$	$x < 0$	

משוואה של ישר (הצבה לינארית)

מד"ר נקראת משוואה של ישר, או מד"ר של הצבה לינארית, אם היא מהצורה

$$y' = f(ax + by + c)$$

במקרה של מד"ר כזו נשתמש בהצבה $v = ax + by + c$ כאשר נזכור כי, כמו קודם, y, v הן פונקציות של המשתנה x. נגזור את היחס $v = ax + by + c$
נשתמש במד"ר הנתונה כדי לקבל $v' = a + by' = a + bf(ax + by + c) = a + bf(v)$
כלומר נקבל משוואה ב־v שהיא $v' = a + bf(v)$
כמו קודם, נפתור מד"ר זו שהיא הפרדת משתנים ונציב לפתרון שנקבל ב־v את היחס $v = ax + by + c$.

תרגיל: $y' = \frac{1}{(4x+3y+10)^2}$ $\qquad y(-1) = -2$

פתרון: אנו רואים כי זו משוואה של ישר ונשתמש בהצבה

$$v = 4x + 3y + 10$$
$$v' = 4 + 3y' = 4 + \frac{3}{(4x + 3y + 10)^2} = 4 + \frac{3}{v^2} = \frac{3 + 4v^2}{v^2}$$
$$v' = \frac{3 + 4v^2}{v^2}.$$

אנו רואים כי אין פתרונות סינגולריים. נחפש פתרון כללי

$$v' = \frac{3 + 4v^2}{v^2}$$
$$\int \frac{v^2}{3 + 4v^2} dv = \frac{v}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\frac{v}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}\right) = x + c$$

ועכשיו נציב חזרה את היחס $v = 4x + 3y + 10$ ונקבל את הפתרון הכללי בצורה סתומה

$$\frac{4x + 3y + 10}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \arctan\left(\frac{2(4x + 3y + 10)}{\sqrt{3}}\right) = x + c.$$

איננו יכולים לפשט ביטוי זה.
נשתמש כעת בתנאי ההתחלה ונקבל

$$
\begin{aligned}
&y(-1) = -2 \\
&\frac{4\cdot(-1)+3\cdot(-2)+10}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\arctan\left(\frac{2\cdot(4\cdot(-1)+3\cdot(-2)+10)}{\sqrt{3}}\right) = -1+c \\
&c = 1 \\
&\frac{4x+3y+10}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\arctan\left(\frac{2(4x+3y+10)}{\sqrt{3}}\right) = x+1
\end{aligned}
$$

וזה לכאורה הפתרון של המד"ר המקיים את תנאי ההתחלה. אבל! הבעיה המקורית אינה חוקית. פתרון שכזה חייב לקיים
$y'(x) = \frac{1}{(4x+3y(x)+10)^2}$ וכאשר נציב $x = -1$ לתוך המד"ר נקבל

$$
y'(-1) = \frac{1}{(4(-1)+3y(-1)+10)^2} = \frac{1}{(4(-1)+3(-2)+10)^2} = \frac{1}{0}
$$

כלומר הפונקציה שמוגדרת בצורה סתומה ע"י

$$
\frac{4x+3y+10}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\arctan\left(\frac{2(4x+3y+10)}{\sqrt{3}}\right) = x+1
$$

אמנם פתרון של המד"ר, אבל אינה מקיימת את תנאי ההתחלה כי לא יכולה להיות גזירה ב־$x = -1$ ולכן, כפתרון, אינה מוגדרת שם. כלומר למד"ר עם תנאי ההתחלה הנתון, אין פתרון. רשמית, לא היינו צריכים לפתור את המד"ר אם היינו שמים לב לזה מההתחלה. אבל כמובן, רצינו לראות איך פותרים מד"ר של ישר ואת זה ראינו.

תרגיל: $y(0)=3 \qquad y'=\frac{1+x+y}{1-x-y}$

פתרון: נרשום $y'=\frac{1+x+y}{1-x-y}=\frac{1+(x+y)}{1-(x+y)}$ ולכן נשתמש בהצבה

$$\begin{aligned}
&v=x+y\\
&v'=1+y'=1+\frac{1+v}{1-v}=\frac{2}{1-v}\\
&v'=\frac{2}{1-v}.
\end{aligned}$$

נפתור כפרידה. אין פתרונות סינגולריים. נחפש פתרון כללי

$$\begin{aligned}
&v'=\frac{2}{1-v}\\
&\int\frac{1-v}{2}dv=\frac{v}{2}-\frac{v^2}{4}\\
&\frac{v}{2}-\frac{v^2}{4}=x+c\longrightarrow v^2-2v+4x+c=0\\
&v=\frac{2\pm\sqrt{4-16x+c}}{2}=1\pm\sqrt{1-4x+c}.
\end{aligned}$$

זה הפתרון הכללי של המד"ר ב־v. נחזור ל־y ע"י ההצבה המקורית $v=x+y$

$$\begin{aligned}
&v=\frac{2\pm\sqrt{4-16x+c}}{2}=1\pm\sqrt{1-4x+c}\\
&x+y=\frac{2\pm\sqrt{4-16x+c}}{2}=1\pm\sqrt{1-4x+c}\\
&y=-x+1\pm\sqrt{1-4x+c}.
\end{aligned}$$

זה הפתרון הכללי של המד"ר. נשתמש כעת בתנאי ההתחלה

$$\begin{aligned}
&y=-x+1\pm\sqrt{1-4x+c}\\
&3=y(0)=1\pm\sqrt{1+c}\\
&2=\pm\sqrt{1+c}\\
&4=1+c\longrightarrow c=3\\
&y=-x+1\pm\sqrt{1-4x+3}=-x+1\pm\sqrt{4-4x}\\
&3=y(0)=1\pm\sqrt{4}=1\pm 2\longrightarrow y=-x+1+\sqrt{4-4x}
\end{aligned}$$

תחום ההגדרה של הפתרון הוא $4-4x>0$ כלומר $x<1$.

משוואות ברנולי

מד"ר מהצורה $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ כאשר $\alpha \neq 0, 1$ ממשי, נקראת משוואות ברנולי.
נחלק את המשוואה ב־y^{α} ונקבל $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$.
משוואת ברנולי פותרים ע"י הצבה: $z = y^{1-\alpha}$ או במפורש $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$. נגזור את $z = y^{1-\alpha}$ ונקבל $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ או $\frac{z'}{1-\alpha} = y^{-\alpha}y'$. נציב חזרה למשוואה ונקבל $\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$ או $z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$ וזו מד"ר לינארית שאנו יודעים לפתור. נציב חזרה $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ בשביל לקבל את $y(x)$.
נשים לב שאם $\alpha > 0$ אזי $y \equiv 0$ פתרון שאנו מאבדים ע"י החלוקה ב־y^{α} והוא פתרון סינגולרי לפי שיטה זו. נשים לב שאם $\alpha < 0$ אזי אין פתרון שמתאפס באיזושהי נקודה.

<u>תרגיל:</u> $y' + y = y^{\frac{1}{2}} \qquad y(0) = 0$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ ולכן $y \equiv 0$ הוא פתרון.
נחלק ב־$y^{\frac{1}{2}}$ ונקבל $y^{-\frac{1}{2}}y' + y^{\frac{1}{2}} = 1$
נציב $z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$ ונגזור כדי לקבל $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ או $2z' = y^{-\frac{1}{2}}y'$, נציב למשוואה ונקבל $2z' + z = 1$
או $z' + \frac{z}{2} = \frac{1}{2}$
עם תנאי התחלה $z(0) = y(0)^{\frac{1}{2}} = 0$
שהפתרון הכללי שלה הוא $z(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$
ואז $c + 1 = z(0) = 0$ ולכן $c = -1$ כלומר $z = -e^{-\frac{1}{2}x} + 1$.
ואז $y = z^2 = (-e^{-\frac{1}{2}x} + 1)^2$
אבל יש לנו פתרון נוסף שהוא $y \equiv 0$.

<u>תרגיל:</u> $y' + y = y^{-1} \qquad y(1) = -2$

<u>פתרון:</u> נחלק ב־y^{-1} ונקבל $yy' + y^2 = 1$
נציב $z = y^{1-(-1)} = y^2$ ונגזור כדי לקבל $z' = 2yy'$ או $\frac{1}{2}z' = yy'$, נציב למשוואה ונקבל $\frac{1}{2}z' + z = 1$
או $z' + 2z = 2$
עם תנאי התחלה $z(1) = y(1)^2 = 4$
שהפתרון הכללי שלה הוא $z(x) = c \cdot e^{-2x} + 1$
ואז $ce^{-2} + 1 = z(1) = 4$ ולכן $c = 3e^2$ כלומר $z = 3 \cdot e^{-2x+2} + 1$.
ואז $y = \pm z^{\frac{1}{2}} = \pm(3 \cdot e^{-2x+2} + 1)^{\frac{1}{2}} = -(3 \cdot e^{-2x+2} + 1)^{\frac{1}{2}}$
תחום ההגדרה הוא כאשר $3 \cdot e^{-2x+2} + 1 > 0$ (כי פונקציית השורש אינה גזירה באפס) ולכן הפתרון מוגדר לכל x.

תרגיל: $xy' - y = y^2$

פתרון: נחלק ב-xy^2 ונקבל $y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{1}{x}$

נציב $z = y^{1-2} = y^{-1}$ ונגזור כדי לקבל $z' = -y^{-2}y'$ או $-z' = y^{-2}y'$, נציב למשוואה ונקבל $-z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$

או $z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}$

שהפתרון הכללי שלה הוא $z(x) = c \cdot x^{-1} - 1$

ואז $y = \frac{1}{c \cdot x^{-1} - 1} = \frac{x}{c - x}$

כאשר נזכור כי $y \equiv 0$ פתרון סינגולרי.