תורת החבורות – תרגיל בית 7 -- פתרון

שאלה 1

א) $SL_n(F) \le GL_n(F)$ כי

1) $I \in SL_n(F) \Leftarrow \det(I) = 1$

2) לכל $A, B \in SL_n(F)$ מתקיים

$$AB^{-1} \in SL_n(F) \Leftarrow \det(AB^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = 1.$$

ב) $\{A \in GL_n(F) | a_{ij} = 0 \text{ for all } i > j\} \le GL_n(F)$ כי

1) I משולשת עליונה;

2) מכפלת מטריצות משולשות עליונות היא משולשת עליונה;

3) המטריצה ההפכית של מטריצה משולשת עליונה גם היא משולשת עליונה.

שאלה 2

נוכיח את הסעיף ב), ואז הסעיף הראשון הוא מקרה פרטי של הסעיף ב).

תחילה נציין כי לכל $j \in I$ $e \in H_j \Leftarrow e \in \bigcap_{j \in I} H_j$.

כעת נניח כי $x, y \in \bigcap_{j \in I} H_j$, אז לכל $j \in I$ $x, y \in H_j \Leftarrow xy^{-1} \in H_j$ כי H_j תת-חבורה לכל $j \in I$. קיבלנו כי לכל $j \in I$ $xy^{-1} \in H_j \Leftarrow xy^{-1} \in \bigcap_{j \in I} H_j$ וסיימנו.

שאלה 3

<u>הוכח</u> כי $(\mathbb{Z}, +)$ פועלת על $X = \mathbb{Z}$ ע"י $z \cdot a = z + a$ לכל $z, a \in \mathbb{Z}$.

נסמן $G = (\mathbb{Z}, +)$ ו-$z \cdot a$ ע"י $z(a)$. עלינו להוכיח כי

1) לכל $z \in G$ הינה תמורה על X.

2) לכל $z, w \in G$ $(z+w)(a) = z(w(a))$ לכל $a \in X$.

1) z חח"ע: לכל $a, b \in X$ מתקיים

$$z(a) = z(b) \Leftrightarrow z + a = z + b \Leftrightarrow a = b$$

z על: לכל $a \in X$ קיים $b = -z + a \in X$ המקור של a ע"י z.

2) לכל $a \in X$ ולכל $z, w \in G$ מתקיים

$$(z+w)(a) = (z+w) + a = z + (w+a) = z(w(a))$$

שאלה 4

תהי חבורה G הפועלת על קבוצה A, $a \in A$.

<u>הוכח</u> כי כל אחת מהקבוצות הבאות היא תת-חבורה:

א) נסמן $H \triangleq \{g \in G | g \cdot a = a\}$, ו- $g \cdot a$ ע"י $g(a)$.

פעולה – היא הומומורפיזם, לכן לכל $x \in A$ $e(x) = x$ (פונקצית זהות), ובפרט $e(a) = a \Leftarrow e \in H$.

יהיו $g, h \in G$, אז $(gh)(a) = g(h(a)) = g(a) = a$, ומכאן $gh \in H$.

יהיו $g \in G$, אז $g(a) = a \Leftarrow g^{-1}(a) = a$, ומכאן $g^{-1} \in H$.

ב) נסמן $H \triangleq \{g \in G | g \cdot x = x \text{ for all } x \in A\}$, ו- $g \cdot x$ ע"י $g(x)$ לכל $x \in A$.

פעולה – היא הומומורפיזם. כמו כן אם לכל $x \in A$ $g(x) = x$, אז g היא פונקצית זהות. מכאן H הינו גרעין של הומורפיזם, ולכן תת-חבורה.

<u>בדרך ישירה (מבלי להשתמש בעובדה כי גרעין של הומומורפיזם הינו תת-חבורה)</u>:

פעולה – היא הומומורפיזם, לכן לכל $x \in A$ $e(x) = x$ (פונקצית זהות), לכן $e \in H$.

יהיו $g, h \in G$, אז לכל $x \in X$ $(gh)(x) = g(h(x)) = g(x) = x$, ומכאן $gh \in H$.

יהיו $g \in G$, אז לכל $x \in X$ $g(x) = x \Leftarrow g^{-1}(x) = x$ לכל $x \in X$, ומכאן $g^{-1} \in H$.