קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 3

תאריך הגשה: יום רביעי, 20/11/2013, עד שעה 22:00

<u>שאלה 1:</u>

יהיו $k \in \mathbb{N}$, ו- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נניח ש- $b_n = a_{n+k}$. הוכיחו כי:

$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$.

<u>$\Rightarrow$:</u> ה- N המתאים להגדרת הגבול עבור a_n מתאים גם להגדרת הגבול ל- b_n, כי לכל $n > N$ מתקיים בפרט $n + k > N$ ולכן $|b_n - L| = |a_{n+k} - L| < \varepsilon$.

<u>$\Leftarrow$:</u> קיים N המתאים להגדרת הגבול עבור b_n, ועבור a_n נבחר $N' = N + k$, ואז לכל $n > N'$ מתקיים בפרט $n - k > N$, ולכן $|a_n - L| = |b_{n-k} - L| < \varepsilon$.

<u>שאלה 2:</u>

הוכיחו או הפריכו על פי הגדרה את קיום הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)+\sin(n)+1}{n^{5/4}}$

יהי $\varepsilon > 0$, ונבחר $N = \left[\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{\frac{4}{5}}\right] + 1$, אז לכל $n > N$, $\left|\frac{\cos(n)+\sin(n)+1}{n^{5/4}}\right| \le \frac{3}{n^{5/4}} < \frac{3}{N^{5/4}} > \varepsilon$, לכן הגבול הוא 0.

ב. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}n - \left[\sqrt{2}n\right]\right)$

לסדרה אין גבול: נשים לב כי איברי הסדרה חסומים בין 0 ל- 1, לכן כל מועמד לגבול L כך ש- $L < 0$ או $L > 1$ לא יכול להיות הגבול, ע״י שנבחר $\varepsilon_0 = -\frac{L}{2}$ או $\varepsilon_0 = \frac{1-L}{2}$, בהתאמה.

ל- $0 \le L \le 1$, נבחר $\varepsilon_0 = 0.1$, ויהי $N > 0$. נסתכל על $n_0 = N + 1$. אם $\left|\sqrt{2}n_0 - \left[\sqrt{2}n_0\right] - L\right| \ge 0.1$, סיימנו. אם דווקא $\left|\sqrt{2}n_0 - \left[\sqrt{2}n_0\right] - L\right| < 0.1$, נסתכל על $n_1 = N + 2 = n_0 + 1$: מתקיים:

$$\left|\sqrt{2}n_1 - \left[\sqrt{2}n_1\right] - L\right| = \left|\sqrt{2}n_1 - \left[\sqrt{2}n_1\right] - \left(\sqrt{2}n_0 - \left[\sqrt{2}n_0\right]\right) - \left(L - \left(\sqrt{2}n_0 - \left[\sqrt{2}n_0\right]\right)\right)\right| \ge$$

$$\left|\sqrt{2}n_1 - \left[\sqrt{2}n_1\right] - \left(\sqrt{2}n_0 - \left[\sqrt{2}n_0\right]\right)\right| - \left|L - \left(\sqrt{2}n_0 - \left[\sqrt{2}n_0\right]\right)\right| > \left|\sqrt{2} - \left[\sqrt{2}n_1\right] + \left[\sqrt{2}n_0\right]\right| - 0.1$$

נשים לב כי $\left[\sqrt{2}n_1\right] - \left[\sqrt{2}n_0\right] = 1$ או $\left[\sqrt{2}n_1\right] - \left[\sqrt{2}n_0\right] = 2$ (כי $1.4 \le \sqrt{2} \le 1.5$), ולכן:

$\left|\sqrt{2} - \left[\sqrt{2}n_1\right] + \left[\sqrt{2}n_0\right]\right| > 0.4$, ולכן $\left|\sqrt{2} - \left[\sqrt{2}n_1\right] + \left[\sqrt{2}n_0\right]\right| - 0.1 > 0.3 > 0.1 = \varepsilon_0$, וסיימנו.

ג. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{a_n+1} - \sqrt[3]{a_n}\right)$, כאשר a_n סדרה המקיימת: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n > 0$.

ע״י כפל וחילוק בגורם החיובי $\sqrt[3]{a_n+1}^2 + \sqrt[3]{a_n+1}\sqrt[3]{a_n} + \sqrt[3]{a_n}^2$ ושימוש בזהות $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$, נקבל: $\sqrt[3]{a_n+1} - \sqrt[3]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[3]{a_n+1}^2 + \sqrt[3]{a_n+1}\sqrt[3]{a_n} + \sqrt[3]{a_n}^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}^2}$.

יהי $\varepsilon > 0$. מהנתון על התכנסות $a_n \to \infty$, קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}$, לכן מהחישוב הקודם נקבל כי לכל $n > N$, $\left|\sqrt[3]{a_n+1} - \sqrt[3]{a_n}\right| < \varepsilon$, כלומר הסדרה שואפת ל- 0.

שאלה 3 :

יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות מתכנסות. נתון כי הקבוצות $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \le b_n\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid b_n \le a_n\}$ אינן חסומות. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $\{n \in \mathbb{N} \mid b_n \le a_n\} = A$, $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \le b_n\} = B$.
נניח בשלילה $b > a$. מהנתון על התכנסות הסדרות, ועבור $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$, $a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, וכן קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$, $b_n > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, ולכן לכל $n > \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$, בסתירה לכך ש- A לא חסומה. באופן דומה לא יתכן $a > b$, ולכן בהכרח $a = b$.

שאלה 4 :

הכלילו את הטענה על התכנסות הממוצע החשבוני מהכיתה באופן הבא :

א. תהי $\{b_n\}$ סדרה כך ש- $b_n > 0$ ו- $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \infty$. הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, אז : $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = a$.

יהי $\varepsilon > 0$. נוכיח תחילה את הטענה עבור $a = 0$. במקרה זה קיים N כך שלכל $n > N$, $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. מא״ש המשולש נקבל, לכל $n > N$: $(*)$ $\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right| \le \left|\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right| + \left|\frac{\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right|$. כל אחד מה- $|a_k|$ במונה של המחובר הימני קטן מ- $\varepsilon/2$, לכן מתקיים : $\left|\frac{\sum_{k=N+1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$. מכיוון שה- $b_k > 0$, מתקיים $\frac{\sum_{k=N+1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \le 1$, ולכן : $\frac{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N+1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. עבור המחובר השמאלי ב- (*), מכיוון שהמונה קבוע והמכנה שואף לאינסוף, הביטוי כולו שואף לאפס, ולכן קיים N' כך שלכל $n > N'$ ביטוי זה קטן מ- $\frac{\varepsilon}{2}$. לכן, החל מהמקום ה- $\max\{N, N'\}$, נקבל כי הביטוי ב- (*) קטן מ- $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ולכן $\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}\right| \to 0$, ולכן $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \to 0$.

כעת, ל- a כללי, נסתכל על הסדרה $c_n = a_n - a$. מאריתמטיקה של גבולות, סדרה זו שואפת לאפס, ולכן מהחלק הקודם, $\frac{\sum_{k=1}^{n} c_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \to 0$, כלומר $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} - \frac{\sum_{k=1}^{n} a \cdot b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \to 0$. אבל המחובר הימני הוא בדיוק a, ולכן מאריתמטיקה של גבולות נקבל את הדרוש.

ב. הסיקו מהטענה את התכנסות הממוצע החשבוני.

התכנסות הממוצע החשבוני מתקבלת ע״י לקיחת $b_n = 1$ לכל n ושימוש בסעיף א.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת כי סדרת הממוצעים החשבוניים, $A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, מתכנסת, אז גם a_n מתכנסת.

לא נכון, ד״נ: $a_n = 2 + (-1)^n$.

שאלה 5:

הוכיחו כי כל מספר ממשי הוא גבול של סדרה של רציונליים וגם של סדרה של אי-רציונליים.

נראה כי כל ממשי הוא גבול של סדרת רציונליים, באופן דומה ניתן להוכיח עבור סדרת אי-רציונליים.

יהי $r \in \mathbb{R}$. נבנה סדרה כך: את a_1 נבחר להיות מספר רציונלי כלשהו בקטע הפתוח $(r-1, r+1)$ (קיים כזה כי $r-1$, $r+1$ שניהם רציונליים או ששניהם אי-רציונליים, בהתאם ל- r, וראינו כי בין כל זוג כזה קיים מספר רציונלי). באופן דומה נבחר את a_2 להיות רציונלי כלשהו בקטע הפתוח $\left(r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}\right)$, ובאופן כללי נבחר את a_n להיות רציונלי בקטע הפתוח $\left(r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n}\right)$. אז a_n היא בבירור סדרת רציונליים, ומקיימת: $r-\frac{1}{n} < a_n < r+\frac{1}{n}$ לכל n, ולכן מסנדוויץ׳ (או ישירות מהגדרת הגבול) נקבל כי $a_n \to r$.

שאלה 6:

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$.

שימוש בקריטריון המנה נותן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{e} < 1$, לכן הסדרה שואפת ל- 0.

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\left((3n)!\right)^{1/n}}$.

נסמן $a_n = \frac{n^{3n}}{(3n)!}$, אז הסדרה הנתונה היא $\sqrt[n]{a_n}$. נחשב במקום זאת $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ונקבל $\frac{e^3}{27}$, ולכן זה גם הגבול המבוקש.

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(\cos(n))^{n^2}}}{\sqrt{n}}$.

איברי הסדרה a_n מקיימים $|a_n| \le \frac{2}{\sqrt{n}}$, לכן הסדרה שואפת ל- 0.

ד. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n-(n-1)^n}{n^n+2}$.

נוכל לרשום: $\frac{(n+1)^n-(n-1)^n}{n^n+2} = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)\left(\frac{n^n}{n^n+2}\right)$, ומכאן נקבל כי הסדרה שואפת ל- $e-\frac{1}{e}$.