שאלה 1. (25 נקודות)

יהי $V = R^3$ עם מכפלה פנימית

$$< x, y > = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + \frac{5}{4}x_3y_3,$$

כאשר $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

א) השלימו את הווקטור $e_1 = (1,0,0)$ לבסיס אורתונורמלי של R^3 ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

ב) נתון הפונקציונל הלינארי הבא על R^3 : $f(x) = 2x_1 + x_2$. מצאו $y \in R^3$ כך שלכל $x \in R^3$ מתקיים $f(x) =< x, y >$, כאשר $<\cdot,\cdot>$ היא המכפלה הפנימית הנתונה בשאלה.

פתרון:

א) נקח את הבסיס הסטנדרטי של R^3
$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ונפעיל עליו את התהליך גרם-שמיט.

$$w_1 = e_1, \|w_1\| = 1 \Rightarrow u_1 = w_1 = (1,0,0)$$

$$< e_2, u_1 > = 1$$

$$w_2 = e_2 - < e_2, u_1 > u_1 = (0,1,0) - 1 \cdot (1,0,0) = (-1,1,0)$$

$$\|w_2\| = \sqrt{1 - 2 + 5} = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}(-1,1,0)$$

$$< e_3, u_1 > = 0, < e_3, u_2 > = -\frac{1}{2}$$

$$w_3 = e_3 - < e_3, u_1 > u_1 - < e_3, u_2 > u_2 = (0,0,1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{2}{16} + \frac{5}{16} - \frac{2}{4} + \frac{5}{4}} = 1 \Rightarrow u_3 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$$

קיבלנו בסיס א"נ $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), u_3 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)\}$

ב) לפי המשפט קיים וקטור יחיד y שמקיים את הדרישה ומתקיים:

$y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(u_i)} \cdot u_i$, כאשר $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ הינו בסיס א"נ. במקרה שלנו המרחב ממימד 3 וממשי, לכן

$y = f(u_1)u_1 + f(u_2)u_2 + f(u_3)u_3$, כאשר $\{u_1, u_2, u_3\}$ הינו הבסיס שמצאנו בסעיף 1.

אז: $f(u_1) = 2, f(u_2) = -\frac{1}{2}, f(u_3) = -\frac{1}{4}$

$$y = 2(1,0,0) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right) = \left(\frac{37}{16}, -\frac{5}{16}, -\frac{1}{4}\right)$$

דרך נוספת:

נסמן $y = (a, b, c)$ ונדרוש שלווקטור כללי $x = (x_1, x_2, x_3)$ יתקיים $< x, y > = f(x) \Leftrightarrow$

$$x_1 a + x_1 b + x_2 a + 5x_2 b - x_2 c - x_3 b + \frac{5}{4} x_3 c = 2x_1 + x_2 \Leftrightarrow$$

$$x_1(a+b) + x_2(a + 5b - c) + x_3\left(-b + \frac{5}{4}c\right) = 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a + 5b - c = 1 \\ -b + \frac{5}{4}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{37}{16}, b = -\frac{5}{16}, c = -\frac{1}{4}$$

כלומר, הווקטור המבוקש הינו $y = \left(\frac{37}{16}, -\frac{5}{16}, -\frac{1}{4}\right)$.

שאלה 2. (25 נקודות)

יהא V מרחב מכפלה פנימית סוף-מימדי מעל C.

א) הוכיחו כי אם $T: V \to V$ הוא אופרטור לינארי המקיים
$\|T(v)\| = 2\|T^*(v)\|$ לכל $v \in V$ אז $T = 0$.

ב) הוכיחו כי אם $T: V \to V$ הוא אופרטור לינארי צמוד לעצמו $(T^* = T)$ אז
$(4+3i)I + T + T^2$ הינו אופרטור חד-חד ערכי.

<u>**פתרון:**</u>

א)

$$\|T(v)\| = 2\|T^*(v)\| \Leftrightarrow \|T(v)\|^2 = (2\|T^*(v)\|)^2 \Leftrightarrow$$

$< Tv, Tv >$

$$< (T^*T - 4TT^*)v, v > = 0$$

כיון ש-V ממ"פ מעל C והשוויון נכון לכל $v \in V$ אז $(T^*T - 4TT^*) = 0$, כלומר
$T^*T = 4TT^*$.

נתבונן ב-$tr(T^*T)$. מצד אחד, $tr(T^*T) = tr(TT^*)$. מצד שני,
$tr(T^*T) = tr(4TT^*) = 4tr(4TT^*)$. מכאן ברור ש- $tr(TT^*) = 0$. נקח B -
בסיס א"נ של V.

ונסמן כ- A את $[T]_B$. אז $[T^*]_B = A^*$. אז
$tr(TT^*) = tr(AA^*) = \Sigma_{i,j}|a_{ij}|^2 = 0$.

לכן $|a_{ij}| = 0$ לכל i, j, כלומר $A = 0$. מכאן נובע שגם $T = 0$.

ב) נסמן $S = (4+3i)I + T + T^2$. כיון ש-S הינו פולינום $f(T)$, כאשר
$f(x) = (4+3i) + x + x^2$ אז גם הע"ע של S הינם $f(\lambda)$ כאשר λ הוא ע"ע של
T.

כיון ש-T הרמיטי, כל הערכים העצמיים שלו ממשיים, לכן אף אחד מהם אינו
מאפס את $f(x)$. לכן ל-S אין ע"ע ששווה לאפס, לכן לא קיים
$Sv = 0, v \neq 0, v \in V$. ז"א ש- $KerS = \{0\}$ ו-S הינו חח"ע.

שאלה 3. (25 נקודות)

א) מצאו את הדרגה והסיגנטורה של התבנית הריבועית על R^3
$q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_2^2 - 10x_2x_3 + 8x_3^2,$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$

ב) מצאו את התבנית הבילינארית הסימטרית $f(x, y)$ המתאימה ל$-$ q. נמקו!

ג) הוכיחו כי התבנית
$h(x, y) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 7x_2y_2 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2 + 8x_3y_3 + < x, y >$
היא מכפלה פנימית על R^3, כאשר $< x, y >$ היא מכפלה סטנדרטית על R^3.

<u>פתרון :</u>

א) המט׳ הידה המתאימה לתבנית q היא $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 7 & -5\\ 2 & -5 & 8\end{pmatrix}$

$A_{3\times3}$ סימטרית ולכן ניתנת ללכסון ויחס הדמיון זהה ליחס החפיפה.

נחשב את $\det A$

$$\det A = 1(56-25)+3(-24+10)+2(15-14) = -9 \neq 0$$

לכן או של A יש שלושה ערכים עצמיים שליליים או שני ערכים עצמיים חיוביים ואחד שלילי. וזאת כי $rkA=3$.

נציב ב-q את הווקטור $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ב-$\mathbb{R}^3$ ונקבל $q(\bar{x}) = 1 > 0$

לכן לא יתכן שיש 3 ערכים עצמיים שליליים כלומר יש ערך עצמי שלילי יחיד ושני ערכים עצמיים חיוביים והפרש

$$sgn(A) = 2-1 = 1$$

ב) נציב את q בנוסחה $f(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\bar{x}+\bar{y})-q(\bar{x})-q(\bar{y})\right)$ עבור $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^3$ ואחרי פעולות סימטריות וכינוס איברים נקבל

$$f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1-3x_1y_2-3y_1x_2+2x_1x_3+2y_1x_3$$
$$+7x_2y_2-5x_2y_3-5x_3y_2+8x_3y_3$$

א) המט׳ מייצגת המתאימה לתבנית q היא $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

$A_{3\times3}$ סימטרית ולכן ניתנת לליכסון ויחס הדמיון זהה ליחס החפיפה.

נחשב את $\det A$

$$\det A = 1(56-25) + 3(-24+10) + 2(15-14) = -9 \neq 0$$

לכן אין ל A ע״ע 0, כלומר יש שלושה ערכים עצמיים שליליים או שני ערכים עצמיים חיוביים ואחד שלילי. ובפרט $rkA = 3$

נציב את הווקטור $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^3$ ונקבל $q(\bar{x}) = 1 > 0$

לכן לא ייתכן שיש 3 ערכים עצמיים שליליים כלומר יש ערך עצמי שלילי יחיד ושני ערכים עצמיים חיוביים ובפרט

$$sgn(A) = 2 - 1 = 1$$

ב) נציב את q בנוסחה $f(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}\left(q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})\right)$ עבור $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ ואחרי פתיחת סוגריים וכינוס איברים נקבל

$$f(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + 2x_1x_3 + 2y_1x_3$$
$$+ 7x_2y_2 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2 + 8x_3y_3$$

שאלה 4. (25 נקודות)

א) תהא $A \in C^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. נסמן ב-J_1 את צורת הז'ורדן של A וב-J_2 את צורת הז'ורדן של A^{-1}. יהא $\lambda \in C$ ערך עצמי כלשהו של A.
הוכח

i) מספר הבלוקים ב-J_1 המתאימים ל- λ שווה לריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ.

ii) מספר הבלוקים ב-J_1 המתאימים ל- λ שווה למספר הבלוקים ב-J_2 המתאימים לערך העצמי $\frac{1}{\lambda}$ של A^{-1}.

ב) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:
יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי ויהא $T: V \to V$ אופרטור לינארי מעל R.
נתון שקיים וקטור $x \in V$, כך ש- $V =< x >$, כלומר V הוא מרחב ציקלי עבור האופרטור T.
אז לכל $\alpha \in R$ V הינו גם מרחב ציקלי עבור האופרטור $S = 4T + \alpha I$.

אם הטענה נכונה לדעתך יש להוכיח אותה, אחרת יש למצוא במפורש ערך α שעבורו היא אינה נכונה.

<u>פתרון:</u>

א. ברור כי כל וקטור עצמי של A קודם בלוק ז'ורדן. מצד שני הטרנספורמציה $A-\lambda I$ הינו נילפוטנטית מסדר n_i על כל בלוק ז'ורדן מתאים (i). ולכן אם a הינו וקטור היוצר את הבסיס הציקלי של הבלוק ניקח $\cancel{A-\lambda I}$ כי

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^{n_i-1}(a) = 0$$

כלומר הוקטור $(A-\lambda I)^{n_i-1}(a)$ הוא וקטור עצמי של A ולכן מספר הבלוקים זהה לריבוי הגאומטרי.

ב. אם λ ערך עצמי של A אז λ^{-1} ערך עצמי של A^{-1} מאותו ריבוי ולכן מספר הבלוקים זהה.

ג. חישוב פשוט מראה כי

$$\mathrm{Span}\{x, Tx, T^2x, \dots T^n x\} =$$

$$\mathrm{Span}\{x\ (4T+\alpha I)x, (4T+\alpha I)^2 x, \dots (4T+\alpha I)^n x\}$$

ולכן V הינו מרחב ציקלי עבור האופרטור $4T+\alpha I$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.