תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 2

פתרנות יתפרסמו באתר הקורס ב- 23.11.01.

<u>תרגיל 1</u>.
יהיה X מ"א מפולג $BIN(n,p)$. מצאו m כך ש-

$$P(X=m)=\max_k P(X=k).$$

<u>תרגיל 2</u>.

(א) הסיקו מאי שוויון קושי- שוורץ $E\left(|X|\cdot|Y|\right)\leq\sqrt{E(X^2)\cdot E(Y^2)}$ כי עבור מ"א חיובי כלשהו Z מתקיים: $E(Z)\cdot E\left(\frac{1}{Z}\right)\geq 1$.

(ב) מתאי מתקיים השוויון ?

(ג) נניח שמספר זוכים בהגרלה מסויימת הוא משתנה אקראי עם תוחלת N. עוד נניח כי פרס כספי, נגיד 100 ש"ח, יחולק בין כל הזוכים באופן שווה. מה אפשר להגיד על סמך הנתונים האלה על תוחלת של חלקו של זוכה אחד ?

<u>תרגיל 3</u>.
יהיו X,Y שני משתנים אקראים בלתי תלוים מפולגים גאומטרית עם פרמטר p כל אחד, דהיינו $P(X=k)=P(Y=k)=(1-p)^{k-1}p,\ k\in\mathbb{N}$. חישבו את פונקצית ההסתברות של מ"א $W=|X-Y|$.

<u>תרגיל 4</u>.
יהי N מ"א בעל צפיפות $P_N(n)=P(N=n)=c\cdot n2^{-n},\ n=1,2,\ldots$
(א) חישבו את הקבוע c,
(ב) חישבו את התוחלת $E(N)$.

<u>תרגיל 5</u>.
יהי $(\Omega,\mathcal{A},P)$ מרחב הסתברות. הוכיחו כי קיים לכל היותר מספר בר מנייה של נקודות $\omega\in\Omega$ עבורם מתקיים $P(\{\omega\})>0$.

<u>תרגיל 6</u>.

יהיו X,Y שני מ"א המוגדרים באותו מרחב הסתברות. הוכיחו כי $P(\omega : X < Y) = 1$ **גורר** $P(Y \leq x) \leq P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>תרגיל 7</u>.

תנו דוגמה למרחב הסתברות סופי ושלושה מאורעות בלתי תלוים בו.