

# אלגברה לינארית ב' אביב תשע"ו – מועד א'

08/07/2016

## הנחיות לנבחנים

- משך הבחינה שלוש שעות.
- סך כל הנקודות הוא 102.
- כל חומר עזר אסור בשימוש.
- יש לנמק את תשובותיכם היטב.
- בבחינה יש 6 שאלות. יש לענות על כולן.

---

**שאלה 1** (12 נק'). יהי  $V = \mathbb{R}^3$  מרחב הפולינומים שמעלתם לכל היותר 3, ויהיה  $D : V \rightarrow V$  אופרטור הגזירה (כלומר  $D(p(x)) := p'(x)$ ). נגדיר  $T : V \rightarrow V$  ע"י  $T := D + 3D^2$ . מצאו את צורת ג'ורדן של  $T$ .

**שאלה 2** (20 נק'). נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) (4 נק'). מצאו את הפולינום המינימלי של  $A$ .

(ב) (8 נק'). מצאו את צורת ג'ורדן של  $A$ .

(ג) (8 נק'). מצאו מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $P^{-1}AP$  היא מטריצה בצורת ג'ורדן.

**שאלה 3** (16 נק'). יהי  $V = M_2(\mathbb{R})$  מרחב המטריצות הממשיות מסדר  $2 \times 2$  עם המ"פ הסטנדרטית (כלומר  $\langle A, B \rangle := \text{tr}(B^t A)$ ). נגדיר ת"מ של  $V$  ע"י

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ b-a & c-a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(א) (8 נק'). מצאו בסיס ל- $W^\perp$ .

(ב) (8 נק'). מצאו את הקרוב הטוב ביותר ב- $W$  למטריצה  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

**שאלה 4** (22 נק'). יהי  $V = \mathbb{R}^3$  עם המ"פ הסטנדרטית. נגדיר  $T : V \rightarrow V$  ע"י

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ x - z \\ -x - y \end{pmatrix}$$

(א) (16 נק'). הוכיחו כי  $T$  צ"ע ומצאו בסיס  $B$  של  $\mathbb{R}^3$  כך ש- $[T]_B$  היא מטריצה אלכסונית.

(ב) (6 נק'). רשמו את הפירוק הספקטרלי של המטריצה  $A = [T]_B$ .

(סעיף א. הוא שאלת שיעורי הבית)

**שאלה 5** (22 נק'). נגדיר  $V := \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$ . המרחב  $V$  הוא מעל  $\mathbb{R}$ .

(א) (3 נק'). מצאו את המימד של  $V$  כמרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$ .

(ב) (3 נק'). הוכיחו כי לכל  $A \in V$  מתקיים  $|A| \in \mathbb{R}$ .

(ג) (8 נק'). נגדיר פונקציה  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י  $q(A) = 2|A|$ . הוכיחו כי  $q$  היא תבנית ריבועית על  $V$ .

(ד) (8 נק'). מצאו את הדרגה ואת הסיגנטורה של  $q$ .

**שאלה 6** (10 נק'). תהיינה  $A$  ו- $B$  שתי מטריצות ממשיות סימטריות מסדר  $3 \times 3$ . נתונים הפולינומים האופייניים של המטריצות:

$$\Delta_A(x) = x^3 - x \quad \Delta_B(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

מצאו את כל הטבעיים  $k \in \mathbb{N}$  עבורם  $A^k$  ו- $B^k$  הן מטריצות חופפות.