תורת הקבוצות - תרגול מספר 8
חשבון עוצמות

תזכורת

ראינו כי ניתן להגדיר פעולות של חיבור, כפל וחזקה על עוצמות, באמצעות פעולות מתאימות על קבוצות. נניח כי A,B הן קבוצות כלשהן ונסמן את עוצמותיהן ב־$|A|=\kappa,|B|=\lambda$, אז נגדיר:

- $\kappa+\lambda=|A\times\{1\}\cup B\times\{2\}|$ (המכפלה ב־$\{1\}$ וב־$\{2\}$ נועדה לוודא שהאיחוד הוא איחוד זר).
- $\kappa\cdot\lambda=|A\times B|$
- $\kappa^{\lambda}=\left|A^{B}\right|$

הגדרות אלו תקפות גם לקבוצות סופיות (כלומר, למקרה שבו העוצמות הן מספרים טבעיים) ומקיימות את חוקי החשבון המוכרים לנו (חיבור וכפל מקיימים את חוקי הפילוג, הקיבוץ והחילוף).

נהוג לסמן $\aleph_0=|\mathbb{N}|$ ("אלף־אפס") ו־$\aleph=|\mathbb{R}|$. ניתן להוכיח כי $\aleph_0=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0$ ו־$\aleph=\aleph\cdot\aleph=\aleph+\aleph$.

תרגיל

נוכיח כי מבחינה פורמלית, $|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}$. ההוכחה כמעט טריוויאלית: נגדיר $B=\{0,1\}$, וכעת נגדיר העתקה חח"ע ועל $\Psi:\mathcal{P}(A)\to B^{A}$ המעבירה כל תת־קבוצה אל הפונקציה המציינת שלה: $\Psi(D)=\chi_D$. קל לראות כי העתקה זו היא חח"ע ועל.

את משפט קנטור כעת ניתן לנסח כך: $\kappa<2^{\kappa}$ לכל עוצמה κ.

כמו כן, כעת ברור הקשר בין $\aleph_0$ ו־$\aleph$: $\aleph=2^{\aleph_0}$ (שכן כבר ראינו כי $\mathbb{R}\sim 2^{\mathbb{N}}$).

תרגיל

נוכיח שחוקי חזקות המוכרים לנו מהמספרים השלמים מתקיימים גם כאן.

יהיו A,B,C קבוצות ו־$|A|=\kappa,|B|=\lambda,|C|=\mu$

- $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$
- $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$
- $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu}=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$
- אם $\kappa\le\lambda$ אז $\kappa^{\mu}\le\lambda^{\mu}$

כדי להוכיח את החוקים הללו נציג במפורש פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות הרלוונטיות.

במקרה הראשון, אנו רוצים למצוא פונקציה חח"ע ועל $\Psi:(A\times B)^{C}\to A^{C}\times B^{C}$.

אינטואיציה: באגף שמאל יש לנו פונקציה שמקבלת איבר ב־C ומחזירה זוג איברים האחד מ־A והשני מ־B.

באגף ימין יש לנו זוג פונקציות שמקבלות כל אחת איבר ב־C ומחזירות האחת איבר ב־A והשניה איבר ב־B.

באופן כללי פונקציה $f(x)=(a,b)$ ניתן לתאר בתור זוג של פונקציות: $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$. זו ההתאמה שנבצע גם כאן: $\Psi(f)=(f_1,f_2)$ כאשר $f_1(x)=[f(x)]_1$ ו־$f_2(x)=[f(x)]_2$. כאן הסימון $[]_i$ מתאר את **ההטלה** של האיבר על הרכיב ה־i שלו ($[(a_1,\dots,a_n)]_i=a_i$).

Ψ בבירור הפיכה: בהינתן (f_1,f_2) נגדיר פונקציה $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$ וקל לראות שהעתקה זו הופכת את Ψ.

נעבור למקרה השני: כאן אנו רוצים למצוא פונקציה חח"ע ועל $\Psi:A^{B\cup C}\to A^{B}\times A^{C}$ כאשר אנו מניחים ש־B,C זרות.

אינטואיציה: בהינתן פונקציה f שהתחום שלה הוא האיחוד הזר של B,C, אנחנו יכולים "לחלק את התחום לשניים" ולהגדיר שתי פונקציות, אחת לכל חלק של התחום.

פורמלית, $\Psi\left(f\right)=\left(f_{B},f_{C}\right)$ כאשר $f_{B}=f|_{B}$ ו־$f_{C}=f|_{C}$. כאן $|_{D}$ הוא **אופרטור הצמצום** של פונקציה לתחום D. באופן כללי, אם $g:A\to B$ היא פונקציה ו־$D\subseteq A$ אז $g|_{D}$ מוגדרת בתור פונקציה $g|_{D}:D\to B$ המוגדרת על ידי $g|_{D}\left(x\right)=g\left(x\right)$.

מכיוון ש־B,C זרות, ברור כיצד ניתן להפוך את Ψ: $f\mapsto\left(f_{B},f_{C}\right)$ כך ש־$f\left(x\right)=\begin{cases}f_{B}\left(x\right) & x\in B\\ f_{C}\left(x\right) & x\in C\end{cases}$.

במקרה השלישי, אנו רוצים למצוא פונקציה $\Psi:\left(A^{B}\right)^{C}\to A^{B\times C}$. סעיף זה ניתן בתרגילי הבית, אז נסתפק ברמז בלבד: במדעי המחשב נהוג לפעמים, בהינתן פונקציה בשני משתנים, "לקבע" את אחד המשתנים ולקבל בחזרה פונקציה במשתנה יחיד. למשל, אם $f\left(x,y\right)=3x+2y$, אז נוכל "לקבע" את x להיות, נאמר, 5, ולקבל את הפונקציה $g_{5}\left(y\right)=f\left(5,y\right)=2y+15$. בדומה היינו יכולים "לקבע" את x לערכים שונים ולקבל, למשל, $g_{2}=f\left(2,y\right)=2y+6$. באופן כללי, $g_{n}=f\left(n,y\right)=2y+3n$.

אם כן, ניתן לחשוב על פונקציה $g:\mathbb{N}\to\left(\mathbb{N}\to\mathbb{N}\right)$ כך ש־$g\left(n\right)=g_{n}=f\left(n,y\right)$. לפעולת "קיבוע" זו קוראים Currying. הרעיון שמאחורי הוכחת המקרה השלישי הכללי הוא בדיוק לעבור מצורת ההצגה הזו לצורת ההצגה ה"רגילה".

במקרה הרביעי, נתון לנו ש־$\kappa\le\lambda$, כלומר כבר קיימת פונקציה חח"ע (לאו דווקא על) $\varphi:A\to B$. אנו רוצים למצוא פונקציה חח"ע (לאו דווקא על) $\Psi:A^{C}\to B^{C}$. הרעיון פשוט: הרכבה של φ על הפונקציה שהתקבלה כקלט. כלומר, אם $f:C\to A$ אז $\varphi f:C\to B$ היא הפונקציה שמעניינת אותנו. פורמלית, $\Psi\left(f\right)=\varphi f$.

נוכיח ש־Ψ חח"ע: נניח כי $\Psi\left(f_{1}\right)=\Psi\left(f_{2}\right)$, כלומר $\varphi f_{1}=\varphi f_{2}$. יהא $a\in A$ כלשהו ונרצה להוכיח כי $f_{1}\left(a\right)=f_{2}\left(a\right)$. נשים לב לכך ש־$\varphi\left(f_{1}\left(a\right)\right)=\varphi\left(f_{2}\left(a\right)\right)$; מכיוון ש־$\varphi$ היא חח"ע קיבלנו את התוצאה המבוקשת.

שימו לב: אם $\kappa<\lambda$ זה **לא אומר** ש־$\kappa^{\mu}<\lambda^{\mu}$! למשל, $2<\aleph_{0}$ אבל $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|=\aleph_{0}^{\aleph_{0}}\le2^{\aleph_{0}}=\left|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\right|$, אבל נראה $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\sim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ולכן $\aleph_{0}^{\aleph_{0}}=2^{\aleph_{0}}$.

כדי להראות כי $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\sim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נשתמש בקנטור־שרדר־ברנשטיין.

בכיוון אחד, $f:\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נתונה על ידי מיון אברי הקלט A ואולי חזרה אינסופית על האיבר האחרון (למשל, אם $A=\left\{4,1,17\right\}$ אז $A\mapsto1,4,17,17,17,\dots$).

בכיוון השני, $g:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ נתונה על ידי קידוד אברי הסדרה כחזקות של ראשוניים: $\left\{a_{n}\right\}\mapsto\left\{p_{n}^{a_{n}+1}\mid n\ge0\right\}$ כאשר p_{n} הוא הראשוני ה־n־י.

תרגיל

הוכיחו כי עוצמת קבוצת הסדרות האינסופיות של ממשיים A שווה לעוצמת קבוצת הסדרות האינסופיות של טבעיים B.

חשבון עוצמות נותן פתרון מיידי:

$$\left|A\right|=\aleph^{\aleph_{0}}=\left(2^{\aleph_{0}}\right)^{\aleph_{0}}=2^{\aleph_{0}\cdot\aleph_{0}}=2^{\aleph_{0}}\le\aleph_{0}^{\aleph_{0}}=\left|B\right|\le\left|A\right|$$

קיבלנו שרשרת של אי־שוויונות שמתחילה ונגמרת באותו איבר ולכן כל המעברים הם שוויונות ממש.