תורת ההסתברות 104222 ־ תרגיל 1

2 בנובמבר 2016

יש להגיש את התרגיל עד יום שלישי ה־ 15 לנובמבר.

1. נוסחאת ההכלה וההפרדה. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ מרחב הסתברות.

   (א) הראו כי לכל שני מאורעות $A, B \in \mathcal{F}$ מתקיים

   $$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

   (ב) הוכיחו את נוסחאת ההכלה וההפרדה הגורסת כי לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל אוסף מאורעות $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ מתקיים

   $$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{J \subset \{1,2,\ldots,n\} \\ |J| = i}} \mathbf{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big)$$

   רמז: הוכיחו באינדוקציה באמצעות שימוש בסעיף (א.) והעובדה ש־ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$.

2. חסם האיחוד. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ מרחב הסתברות ו־ $A_1, \ldots, A_n$ מאורעות. בתרגול הוכחתם את חסם האיחוד $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

   (א) הוכיחו את החסם התחתון

   $$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j).$$

   (ב) יהיו $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ ו־ $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ שתי סדרות של מאורעות כך ש־ $B_i \subset A_i$ לכל i. הראו כי

   $$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{P}(A_i) - \mathbf{P}(B_i)|$$

3. יהי $\Omega = \mathbb{R}$ ונגדיר $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} \,:\, A \,\text{or}\, A^c \,\text{is countable}\}$.

(א) האם $\mathcal{F}$ היא σ־אלגברה.

(ב) נגדיר $\mathbf{P}$ על $\mathcal{F}$ באופן הבא: לכל $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) = 0$ אם A בת מנייה ו־ $\mathbf{P}(A) = 1$ אם A^c בת מנייה. האם $\mathbf{P}$ פונקציית הסתברות?

4. (*) תהי $f : [n] \to [n]$ פונקציה מקרית המפולגת באופן אחיד ותהא $g : [n] \to [n]$ פונקציה חד חד ערכית מקרית המפולגת באופן אחיד.

(א) הגדירו את מרחבי ההסתברות של f ו־ g.

(ב) נגדיר את המאורע A להיות המאורע כי ל־ f אין נקודות שבת, כלומר $f(x) \neq x$ לכל $x \in [n]$. באופן דומה, נגדיר את המאורע B להיות המאורע כי ל־ g אין נקודות שבת. נסמן ב־ α_n את ההסתברות של A ו־ β_n את ההסתברות של B. חשבו את

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

ונסו להסביר את תשובתכם באופן אינטואיטיבי.

5. נסתכל על קבוצת המספרים $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. נבחר תת קבוצה של $[n]$ באקראי ונסמנה על ידי A (הסיכוי לבחור כל אחת מ־ 2^n תתי הקבוצות של $[n]$ הוא זהה). נבחר כעת קבוצה נוספת של $[n]$ באקראי ובאופן בלתי תלוי ונסמנה על ידי B. הראו כי

(א) הראו כי $P(A \subset B) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(ב) הראו כי $P(A \cap B = \emptyset) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

6. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ מרחב הסתברות ו־ A, B, C שלושה מאורעות בעלי הסתברות חיובית. נאמר כי מאורע A מעדיף את מאורע B אם $\mathbf{P}(B|A) > \mathbf{P}(B)$. האם הטענה הבאה נכונה באופן כללי? אם מאורע A מעדיף את מאורע B ומאורע B מעדיף את מאורע C, אז מאורע A מעדיף את מאורע C?

7. בקופסא יש 10 כדורים אדומים ו־ 5 כדורים שחורים. כדור נבחר באקראי מהקופסא. אם הכדור אדום, מחזירים אותו לקופסא. אם הכדור שחור, מחזירים אותו לקופסא ומוסיפים שני כדורים שחורים. לאחר מכן, בוחרים כדור חדש באקראי.

(א) מה ההסתברות שהכדור האחרון שנבחר הוא אדום?

(ב) אם הכדור האחרון שנבחר הוא שחור, מה היא ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר גם הוא שחור?

8. באוניברסיטה כלשהי 95% מהאנשים הם סטודנטים ו־ 5% אחוז הם פרופסורים. מבין הסטודנטים, 30% רוכבים על אופניים. מבין הפרופסורים 5% רוכבים על אופניים. אדם נצפה רוכב על אופניים. מה ההסתברות שהוא פרופסור?

9. כותבים את המספרים $1, 2, 3, \ldots, n$ על פתקים ומסדרים אותם באופן אקראי. לאחר מכן, פותחים את הפתקים לפי הסדר. יהי $k \leq n$. בהינתן שעל הפתק ה־ k הופיע המספר הגדול ביותר מבין k הפתקים הראשונים, מה ההסתברות שהמספר על הפתק ה־ k הוא המספר הגדול ביותר האפשרי?

(*) שאלה זאת הינה מעט יותר קשה. בעוד כשבוע נפרסם רמזים כיצד ניתן לפתור אותה.