אינפי 1 -פתרון גיליון תרגילים מספר 6

1. א. נאמר ש- $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$ אם לכל $m<0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-3|<\delta$, מתקיים ש - $f(x)<m$.

ב נאמר ש- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)+3|<\varepsilon$.

ג נאמר ש- $\lim_{x\to 3} f(x) \neq -3$ אם קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים x המקיים $0<|x-3|<\delta$, עבורו $|f(x)+3|>\varepsilon$.

ד נאמר ש- $\lim_{x\to -\infty} f(x) \neq 3$ אם קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל m קיים $x<m$ עבורו מתקיים $|f(x)-3|>\varepsilon$.

2 א. $\lim_{x\to 3}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{10}$

יהא $\varepsilon>0$. יש להראות שקיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-3|<\delta$, מתקיים $\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{10}\right|<\varepsilon$ (*).

$\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{10}\right| = \left|\frac{(3-x)(3+x)}{10(1+x^2)}\right| \le \frac{\delta\,|3+x|}{10}$. לכן אם נבחר $\delta<3$, אז יתקיים ש- $\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{10}\right| \le \frac{9\delta}{10}$. כדי למלא את התנאי (*) נוכל לבחור $\delta=\min\left\{3, \varepsilon\cdot\frac{10}{9}\right\}$.

ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3x+3}=\infty$

יהא $R>0$. יש להראות שקיים $M>0$ כך שלכל $x>M$, מתקיים $\sqrt{x^2-3x+3}>R$ (*).

לכל $x>4$ מתקיים $x^2>4x$, ו- $\sqrt{x^2-3x+3}>\sqrt{x+3}>\sqrt{M+3}$. לכן M שיקיים את (*) הוא $M=\max\{R^2-3,4\}$.

3. א. $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ בעזרת משפט הסנדוויץ': $1 = x\cdot\frac{1}{x} \ge x\left[\frac{1}{x}\right] > x\left(\frac{1}{x}-1\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

ב $\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x+[x]} = \lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$.

ג $\lim_{x\to 3+}\frac{\sqrt{x^2-9}}{|x-3|} = \lim_{x\to 3+}\frac{\sqrt{(x+3)(x-3)}}{x-3} = \lim_{x\to 3+}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}=\infty$.

ד $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{6x^2+10}=\frac{1}{2}$

ה $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+a)-\sin(a)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos((x+2a)/2)\sin((x+a-a)/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \cos(a)$

ו

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(\sin(x)-\sin(a))(\sin(x)+\sin(a))}{(x-a)(x+a)}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{2\cos((x+a)/2)\sin((x-a)/2)\cdot 2\sin((x+a)/2)\cos((x-a)/2)}{(x-a)(x+a)}=$$

נפריד לשני מקרים: אם $a\neq 0$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x^2-a^2}=\frac{\cos(a)2\sin(a)}{2a}\lim_{x\to a}\frac{2\sin((x-a)/2)}{(x-a)}=\frac{\cos(a)2\sin(a)}{2a}$$

אם $a=0$:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x^2-a^2}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x/2)\cdot 2\sin(x/2)}{x^2}=1$$

4. עבור x שלם $|[x]|=[|x|]$. עבור x שלילי שאינו שלם, $|[x]|=[|x|]+1$, ולכן $f(x)=\begin{cases}0 & x\geq 0 \quad or \quad x\in Z\\ -1 & x<0 \quad and\, x\notin Z\end{cases}$. לכן ל - $f(x)$ יש נקודות אי רציפות סליקות כש- x שלם ושלילי, ונקודת אי רציפות מסוג ראשון ב- 0.

5 נגדיר: $h(t)=\begin{cases}-A & t<-A\\ t & |t|\leq A\\ A & t>A\end{cases}$. היות ו - $h(t)$ רציפה, מהמשפט האומר שהרכבת פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה, נובע ש - $g(x)=h(f(x))$ רציפה בכל נקודה בה $f(x)$ רציפה.

6 הוכחה: היות ו - $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$, נובע שקיים $M>0$, כך שלכל $x>M$ מתקיים: $|f(x)-1|<\frac{1}{2}$, כלומר, $|f(x)|>\frac{1}{2}$. לכן $\inf_{x>M}\{f(x)\}\geq\frac{1}{2}$. היות והפונקציה רציפה ב - $[0,M]$, היא מקבלת שם מקסימום ומינימום. נסמן את המקום בו המינימום מתקבל ב - x_m. לפי הנתון על החיוביות של הפונקציה, $f(x_m)>0$. לכן $\inf_{x\in[0,M]}\{f(x)\}=f(x_m)>0$.

$\inf_{x\in[0,\infty)}\{f(x)\}=\min\left\{\inf_{x\in[0,M]}\{f(x)\},\inf_{x>M}\{f(x)\}\right\}\geq\min\{f(x_m),1/2\}>0$.

7 הוכח או הפרך:

א. אם $f(x)$ מוגדרת בכל R ו - $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ אז $\lim_{x\to 0}f(1/x)=0$.

לא נכון. דוגמא נגדית: $f(x)=e^{-x}$. אזי $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ אבל $\lim_{x\to 0+}e^{-1/x}=0,\lim_{x\to 0-}e^{-1/x}=\infty$ ולכן לא קיים גבול.

ב. אם $g(x)=(f(x))^2$ רציפה ב - a אזי $f(x)$ רציפה ב - a.

לא נכון. דוגמא נגדית: $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\leq 0\end{cases}$ לא רציפה ב- 0, אך $g(x)=(f(x))^2=1$ רציפה.

ג. קיימות פונקציה $f(x)$ רציפה ב - a וסדרה $a_n\to a$ שעבורן $\lim_{n\to\infty}f(a_n)$ לא קיים.

לא נכון. הטענה סותרת את משפט הרציפות של היינה.

ד. אם $f(x)$ חסומה בסביבת $x=0$ אזי קיים $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)$.

נראה ש - $\lim\limits_{x\to 0} xf(x)=0$:

יהא $\varepsilon>0$. נראה שקיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x|<\delta$ מתקיים $|xf(x)|<\varepsilon$. יהא M החסם של $f(x)$. אזי $|xf(x)|\le \delta M$, ולכן ה- δ הנדרש הוא $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$.

ה. ל- $f(x)=x^5+x^3+x-1$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

$f(0)=-1, f(1)=2$, $f(x)$ רציפה כפולינום ולכן לפי משפט ערך הביניים, קיימת ב- $(0,1)$ נקודה בה $f(x)$ מתאפסת.