תרגיל בית 1

שאלה 1:

יהיו שתי נורמות כלליות ב- $\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|^{(1)},\|\cdot\|^{(2)}$.

א. יהא כדור פתוח בנורמה הראשונה, $\|\cdot\|^{(1)}$, כלומר קבוצה מהצורה:

$$B(p,r)=\left\{q\in\mathbb{R}^n \middle| \|p-q\|^{(1)}<r\right\}$$

ונרצה להראות כי קיים כדור בנורמה השניה, $\|\cdot\|^{(2)}$, המוכל בכדור זה.

נשים לב, כי לכל $q\in B(p,r)$, ניתן לכתוב:

$$q-p=\frac{\|v\|^{(1)}v}{\|v\|^{(1)}}$$

כך ש-$v\in\mathbb{R}^n$, נסמן $u=\frac{v}{\|v\|}$ וכן נסמן $\lambda=\|v\|$ ונקבל כי ניתן לכתוב את השוויון הנ"ל כך:

$$q=p+\lambda u$$

וכן מתקיים:

$$\|q-p\|^{(1)}=|\lambda|\|u\|^{(1)}\overset{\|u\|^{(1)}=1}{=}|\lambda|<r$$

עתה נשים לב כי:

$$\|\lambda u\|^{(2)}=|\lambda|\|u\|^{(2)}$$

נשים לב, כי אם נסמן:

$$S_1(1)=\left\{q\in\mathbb{R}^n \middle| \|q\|^{(1)}=1\right\}\quad S_2(1)=\left\{q\in\mathbb{R}^n \middle| \|q\|^{(2)}=r\right\}$$

ונגדיר את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \|\cdot\|^{(2)}:S_1(1)\mapsto\mathbb{R} & \|\cdot\|^{(1)}:S_2(1)\mapsto\mathbb{R} \\ q\to\|q\|^{(2)} & q\to\|q\|^{(1)} \end{array}$$

אזי נקבל כי היות ונורמות הן פונקציות רציפות ב-$\mathbb{R}^n$ ובפרט בקבוצות $S_1(p,1),S_2(p,2)$, והיות וקבוצות אלו קומפקטיות, נקבל כי לפי משפט ויירשטראס, הן מקבלות בקבוצות אלו מינימום ומקסימום. נסמן:

$$(\star)M=\max_{u\in S_1(1)}\|q\|^{(2)}\quad(\star\star)m=\max_{u\in S_2(1)}\|q\|^{(1)}$$

אזי נסיק כי לכל $q\in B(p,r)$ יתקיים:

$$\|q-p\|^{(2)}=\overset{<r}{|\lambda|}\|u\|^{(2)}\overset{(\star)}{<}rM$$

ולכן $q\in B(p,r)$ כלומר מתקיים:

$$B_2(p,rM)\supseteq B(p,r)$$

ונשים לב, כי לכל $q\in B_2\left(p,\frac{r}{m}\right)$ מתקיים:

$$\|q-p\|^{(1)}=\overset{<\frac{r}{m}}{|\lambda|}\|u\|^{(1)}\overset{(\star\star)}{<}m\frac{r}{m}$$

כלומר $q\in B(p,r)$ כנדרש. ולכן:

$$B_2\left(p,\frac{r}{m}\right)\subseteq B(p,r)$$

וסה"כ נקבל כנדרש כי:

$$\boxed{B_2\left(p,\frac{r}{m}\right)\subseteq B(p,r)\subseteq B_2(p,rM)}$$

ב. תהא נתונה סדרה $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ אשר נתון כי היא מתכנסת לגבול p ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$. כלומר, נתון כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $k\geq N$ מתקיים $\|p_k-p\|^{(1)}<\varepsilon$. כלומר מתקיים $p_k\in B(p,\varepsilon)$. נרצה

להראות כי בהנתן $\varepsilon > 0$ כלשהו, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq N$ מתקיים $\|p_k - p\|^{(2)} < \varepsilon$, כלומר מתקיים $p_k \in B_2(p,\varepsilon)$. כפי שראינו מסעיף א', קיימים קבועים M,m כך שלכל $B(p,\varepsilon)$ מתקיים:

$$(\star) B_2\left(p,\frac{\varepsilon}{m}\right) \subseteq B(p,\varepsilon) \subseteq B_2(p,\varepsilon M)$$

לכן, אם נבחר $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, נקבל מההתכנסות בנורמה הראשונה, כי קיים $N' \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq N'$ מתקיים $p_k \in B\left(p,\frac{\varepsilon}{M}\right)$ כלומר מ-$(\star)$ נסיק כי $p_k \in B_2\left(p,\frac{\varepsilon}{M}M\right) = B_2(p,\varepsilon)$. כלומר הסדרה $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת גם לפי נורמה $\|\cdot\|^{(2)}$.

באותו אופן, אם נניח כי $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ביחס לנורמה השניה, אזי נסמן $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{m}$ ונקבל כי באותו אופן, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq N$ מתקיים $p_k \in B_2(p,\varepsilon')$, אך ראינו שמתקיים:

$$B_2(p,\varepsilon') \subseteq B(p,\varepsilon' m) = B(p,\varepsilon)$$

כלומר $p_k \in B(p,\varepsilon)$ לכל $k \geq N$ כנדרש. זה נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן נסיק כי אכן $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת גם בנורמה הראשונה, כנדרש.

ג. תהא קבוצה $U \subset \mathbb{R}^d$ שהיא פתוחה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$, כלומר, לכל נקודה $x \in U$ קיים $R_x > 0$ כך ש-$B(x,R_x) \subseteq U$. אך בסעיף א', ראינו כי קיים קבוע $m \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$B_2\left(x,\frac{R_x}{m}\right) \subseteq U$$

אך מכאן נובע כי לכל $x \in U$ קיימת סביבה $B_2\left(x,\frac{R_x}{m}\right) \subseteq U$, כלומר, הקבוצה U פתוחה לפי $\|\cdot\|^{(2)}$.

באותו אופן נקבל כי בהנתן קבוצה $U \subset \mathbb{R}^d$ שהיא פתוחה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$, כלומר לכל $x \in U$ קיים R_x כך שמתקיים $B_2(x,R_x) \subseteq U$, אך באופן דומה קיים $m_2 \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$B\left(x,\frac{R_x}{m_2}\right) \subseteq B_2(x,R_x) \subseteq U$$

ולכן לכל $x \in U$ קיימת סביבה שלו בנורמה הראשונה המוכלת ב-U ולכן הקבוצה פתוחה גם לפי נורמה זו.

ד. תהא קבוצה נתונה $U \subset \mathbb{R}^d$ שסגורה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$. מכאן, שלכל סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת בנורמה הראשונה ל-x, מתקיים $x \in A$ אך אנו יודעים מסעיף ב' כי ההתכנסות מתאפשרת אם ורק אם היא מתכנסת גם בנורמה השניה לאותו $x \in A$. אך הנ"ל נכון לכל $x \in U$ ולכן נסיק מכאן כי כל סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת בנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$ ל-x, אזי מתקיים $x \in A$, ולכן U סגורה גם לפי הנורמה השניה.

שאלה 2:

א. כדור היחידה בנורמה $\|\cdot\|_1$ הוא הקבוצה:

$$B_1(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$$

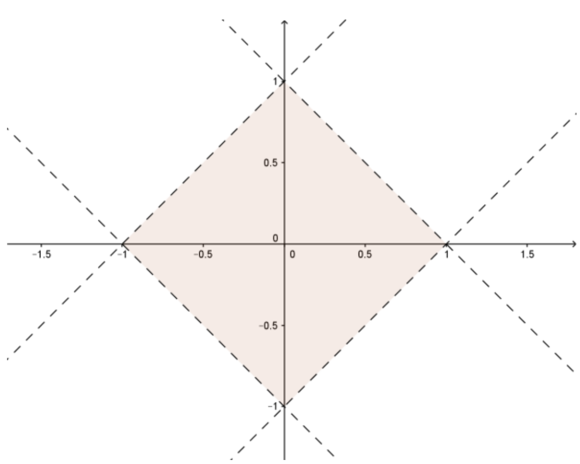
כלומר קבוצת כל הנקודות המקיימות את כל התנאים:

$$-1 < x + y < 1 \quad -1 < x - y < 1$$

כלומר, זהו השטח התחום על ידי הישרים:

$$y = -x - 1 \quad y = 1 - x \quad y = x - 1 \quad y = x + 1$$

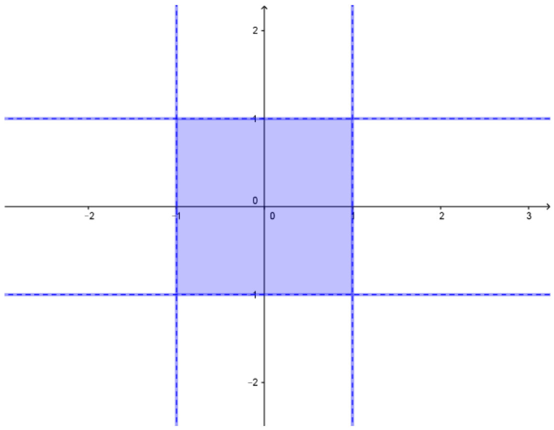
ולכן הציור של כדור זה הוא כדלהלן:



ב. כדור היחידה בנורמה $\|\cdot\|_\infty$ הוא הקבוצה:

$$B_\infty(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

כלומר, כל הנקודות עבורן $-1 < x < 1$ וגם $-1 < y < 1$, אך זה בדיוק הריבוע "הפתוח" $(-1,1) \times (-1,1)$ ולכן הציור המתאים הוא כדלהלן:



שאלה 3:

יהא $x \in \mathbb{R}^d$ כלשהו. אזי מתקיים:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2$$

ולכן מתקיים, כמובן:

$$\boxed{\|x\|_2 \leq \|x\|_1}$$

ועתה נשים לב כי מאידך, מתקיים:

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} |x_i||x_j|$$

ונשים לב כי לכל $1 \leq i \neq j \leq d$ מתקיים אי שוויון קושי שוורץ שהרי:

$$\left(|x_i| - |x_j|\right)^2 > 0 \to x_i^2 + x_j^2 \geq 2|x_i||x_j|$$

היות וכל זוג $|x_i||x_j|$ נסכם פעמיים באיבר הימני שמשמאל, אזי נחליף כל ביטוי של $2|x_i||x_j|$ בביטוי:

$$x_i^2 + x_j^2$$

כלומר:

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d} |x_i||x_j| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq d} \frac{1}{2}\left(x_i^2 + x_j^2\right)$$

וכן נשים לב כי לכל i יש $2d-2$ פעמים שבו הוא נסכם, שכן עבור i כקואורדינטה ראשונה ישנם $d-1$ אפשרויות לבחירת $j \neq i$, ולאחר מכן, לכל j (ויש $d-1$ קואורדינטות שהן לא i) יש עוד פעם אחת שבה הוא הקואורדינטה הראשונה). לכן נקבל כי:

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^2 + \sum_{i=1}^{d} (2d-2)\frac{1}{2} x_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} d x_i^2 = \|dx\|_2^2$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\|x\|_1^2 \leq (d\|x\|_2)^2 \to \boxed{\|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\|_2}$$

כלומר הראינו את נכונות שני האגפים של אי השוויון הדרוש.

שאלה 4:

א. ($\Leftarrow$) תהא $f: U \mapsto W$ פונקציה רציפה כך ש-U, W קבוצות פתוחות. מתנאי הרציפות נובע כי בהנתן $x_0 \in U$, לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in U$, אם $x \in B(x_0, \delta)$, אז $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. עתה, תהא $W' \subseteq f(U) \subseteq W$ קבוצה פתוחה. נרצה להראות כי $f^{-1}(W')$ הוא פתוח. היות ו-W' פתוחה, נסיק כי לכל $y \in W'$ קיים $\varepsilon_y > 0$ כך ש-$B(y, \varepsilon_y) \subseteq W'$.
על מנת להראות כי $f^{-1}(W')$ פתוחה, עלינו להראות כי לכל $x \in f^{-1}(W')$ קיים $\delta_x > 0$ כך שמתקיים:
$$B(x, \delta_x) \subseteq f^{-1}(W')$$
יהא, אם כן, $x_0 \in f^{-1}(W')$. מכאן, שקיים $y \in W'$ כך ש-$y = f(x_0)$. נתון כי W' קבוצה פתוחה ולכן, כפי שהראינו, קיים $\varepsilon_y > 0$ כך ש-$B(y, \varepsilon_y) \subseteq W'$. מרציפות f נסיק כי קיימת δ_{x_0} כך שלכל x המקיים $x \in B(x_0, \delta_{x_0})$ מתקיים $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon_y) = B(y, \varepsilon_y)$, אך מכאן בפרט ש-$f(x) \in W'$ לכל x בסביבה זו ולכן $B(x_0, \delta_{x_0}) \subseteq f^{-1}(W')$, כלומר $f^{-1}(W')$ אכן קבוצה פתוחה כנדרש.
($\Rightarrow$) תהא $f: U \mapsto W$ פונקציה רציפה כך ש-U, W קבוצות פתוחות. נניח כי לכל $W' \subseteq W$, הקבוצה $f^{-1}(W')$ פתוחה. נרצה להראות, אפוא, כי f רציפה. כלומר, שבהנתן $x_0 \in U$, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in B(x_0, \delta)$ מתקיים $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.
יהא, אם כן, $x_0 \in U$ כלשהו, ויהא $\varepsilon > 0$ כלשהו. אזי נתבונן בסביבה $B(f(x_0), \varepsilon)$. זו קבוצה פתוחה וכן בפרט המקור שלה על ידי f הוא קבוצה פתוחה המכילה את x_0, שכן $f(x_0) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. היות וזו קבוצה פתוחה, נסיק כי קיים $\delta > 0$ כך שמתקיים $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$, אך מכאן הראינו כי אכן קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$ מתקיים:
$$f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$$
כלומר f אכן רציפה כדרוש.

ב. תהא פונקציית ההטלה $\pi: \mathbb{R}^{m+d} \mapsto \mathbb{R}^m$ המוגדרת על ידי:
$$\pi(x) = (x_1, \cdots, x_m)$$
נרצה להראות שהיא רציפה ולשם כך ניעזר באפיון שהוכחנו בסעיף א'. תהא, אם כן, תת קבוצה פתוחה כלשהי $W \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה. נרצה להראות כי $\pi^{-1}(W)$ פתוחה. נשים לב כי לכל $y_0 \in W$ קיים $r > 0$ כך שמתקיים $B(y_0, r) \subseteq W$. נשים לב כי:
$$\forall y \in B(y_0, r) \quad \pi^{-1}(y) = \{(x_1, \cdots, x_{m+d}) \in \mathbb{R}^{m+d} \big| \forall 1 \le i \le m \quad x_i = y_i\}$$
יהא אם כן $x_0 \in \pi^{-1}(W)$, כלומר קיים $y_0 \in W$ כך ש-$\pi(x_0) = y_0$, ונתבונן, אם כן בכדור $B(y_0, r)$ כך שמהנחתנו בחירת r היא כזו שיתקיים $B(y_0, r) \subseteq \pi^{-1}(W)$. נניח, לשם נוחות כי הנורמה היא נורמת $\|\cdot\|_1$. נוכל להניח זאת היות וראינו כי ממילא כל כדור $B(y_0, r')$ בנורמה מסוימת יכיל כדור מנורמת אחד, ומכיל כדור מנורמת אחד.
נגדיר את הכדור $B(x_0, r)$ ונשים לב כי:
$$\forall x \in B(x_0, r) \quad \|x - x_0\| = \sum_{i=1}^{m+d} \left|x_i - x_{0_i}\right| \ge \sum_{i=1}^{m} \left|x_i - x_{0_i}\right| = \|\pi(x) - \pi(x_0)\|$$
אך אנו יודעים כי $\|x - x_0\| < r$ ולכן $\|\pi(x) - \pi(x_0)\| = \|\pi(x) - y_0\| < r$ אך מכאן $\pi(x) \in B(y_0, r)$ לכל $x \in B(x_0, r)$ ולכן $B(x_0, r) \subseteq \pi^{-1}\big(B(y_0, r)\big) \subseteq \pi^{-1}(W)$.
הנ"ל נכון לכל $x_0 \in f^{-1}(W)$ ולכן זו קבוצה פתוחה. מסעיף א' נקבל כי נובע מכך ש-π אכן פונקציה רציפה כנדרש.

שאלה 5:

א. נרצה להראות כי אם $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ רציפה על קבוצה $D \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית אזי היא רציפה בה במידה שווה. כלומר שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in D$, אם $\|x - y\| < \delta$ אזי $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
לשם כך, נניח בשלילה כי הפונקציה אינה רציפה במידה שווה. כלומר, קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$, קיימים $x, y \in D$ עבורם $\|x - y\| < \delta$ אך $\|f(x) - f(y)\| \ge \varepsilon$.

נגדיר סדרה $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\delta_n = \frac{1}{2^n} > 0$. מהנחת השלילה קיים $\varepsilon > 0$ כלשהו, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים $x_n, y_n \in D$ כך ש-$\|x_n - y_n\| < \delta_n = \frac{1}{2^n}$ אך $\|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon$.

נשים לב, עתה, כי הסדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ היא סדרה ב-D, ולכן מהיות קומפקטית נובע כי קיימת לה תת סדרה $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ עבורה מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \in D$$

אך נשים לב כי סדרה זו משרה תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שגם היא תת סדרה חסומה ב-D ולכן גם לה יש תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ עבורה מתקיים:

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = x_0 \in D$$

והגבול של תת הסדרה שהושרתה $\{y_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ חייב להיות זהה שכן זו תת סדרה של סדרה מתכנסת.

נזכור, כי מתקיים:

$$0 \le \left\|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}\right\| \le \delta_{n_{k_l}} = \frac{1}{2^{n_{k_l}}}$$

ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל כי:

$$\lim_{l\to\infty} \left\|x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}\right\| = 0 \overset{\text{תכונות הנורמה}}{\Longleftrightarrow} \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}} = 0 \overset{\substack{\text{אריתמטיקה} \\ \text{של גבולות}}}{\Longleftrightarrow} \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} = y_0 = x_0$$

אך נשים לב כי מתקיים:

$$\left\|f\left(x_{n_{k_l}}\right) - f\left(y_{n_{k_l}}\right)\right\| = \left\|\left(f\left(x_{n_{k_l}}\right) - f(y_0)\right) - \left(f\left(y_{n_{k_l}}\right) - f(y_0)\right)\right\|$$

$$\overset{\substack{\text{אי שוויון} \\ \text{המשולש}}}{\le} \left\|f\left(x_{n_{k_l}}\right) - f(y_0)\right\| + \left\|f\left(y_{n_{k_l}}\right) - f(y_0)\right\|$$

אך מרציפות f נובע:

$$\lim_{l\to\infty} f\left(y_{n_{k_l}}\right) = f(y_0) \quad \lim_{l\to\infty} f\left(x_{n_{k_l}}\right) = f(x_0)$$

ולכן כאשר $l \to \infty$, שני האיברים בחלקו האחרון של אי השוויון שואפים לאפס ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל כי:

$$\lim_{l\to\infty} \left\|f\left(x_{n_{k_l}}\right) - f\left(y_{n_{k_l}}\right)\right\| = 0$$

אך זאת בסתירה לכך ש-$\left\|f\left(x_{n_{k_l}}\right) - f\left(y_{n_{k_l}}\right)\right\| > \varepsilon$ לכל $l \in \mathbb{N}$. לכן נסיק כי בהכרח f כן רציפה במידה שווה על D כנדרש.

ב. נתון כי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קשירה, כלומר לכל $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות, זרות, ולא ריקות כך ש-$D \subseteq U \cup V$ מתקיים $D \subseteq U$ או $D \subseteq V$. נרצה להראות, עתה, כי בהנתן f רציפה על קבוצה קשירה D, אזי גם $f(D)$ קשירה.

נניח אם כן, כי $f(D)$ אינה קשירה, כלומר קיימות $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות, זרות, ולא ריקות, כך ש מתקיים $f(D) \subseteq U \cup V$ אך $f(D) \cap V \neq \emptyset$ וכן $f(D) \cap U \neq \emptyset$.

נוכל להסיק מכך, כי לכל $x \in D$, מתקיים $f(x) \in V$ או $f(x) \in U$.

נראה עתה, כי אחד מהתנאים הבאים חייבים להתקיים:

i. קיים $x_0 \in D$ כך ש-$f(x_0) \in V$ ולכל $r > 0$, הקבוצה $B(x_0, r)$ מכילה x עבורו $f(x) \in U$.
ii. קיים $x_0 \in D$ כך ש-$f(x_0) \in U$ ולכל $r > 0$, הקבוצה $B(x_0, r)$ מכילה x עבורו $f(x) \in V$.

לשם כך, נניח כי אין זה כך. כלומר, נניח בשלילה כי שני התנאים אינם מתקיימים. כלומר, לכל $x_0 \in D$ מתקיימים אחד מהתנאים הבאים:

i. אם $f(x_0) \in V$, אזי קיים $r > 0$ כך שלכל $x \in B(x_0, r)$ מתקיים $f(x_0) \in V$.

ii. אם $f(x_0) \in U$, אזי קיים $r > 0$ כך שלכל $x \in B(x_0, r)$ מתקיים $f(x_0) \in U$.

נגדיר אפוא את הקבוצות:

$$U' = \{x \in D | f(x) \in U\} \quad V' = \{x \in D | f(x) \in V\}$$

ראשית, הקבוצות אינן ריקות. זאת משום שאחרת היינו מקבלים כי אם בה"כ $V' = \emptyset$ אזי $f(D) \cap V = \emptyset$ כלומר $f(D) \subseteq U$ בניגוד להנחת השלילה שלנו. בנוסף, נשים לב כי היות ו-$V \cap U = \emptyset$, נסיק כי בהכרח $V' \cap U' = \emptyset$. כמו כן, שתי הקבוצות הללו פתוחות. זאת משום שמהנחתנו לכל $x \in U'$ קיים $r > 0$ כך שלכל $x' \in B(x, r)$ מתקיים $f(x') \in U$ כלומר $x' \in U'$ ולכן $B(x, r) \subseteq U'$, וכנ"ל לגבי V' בהתאמה.

עתה, נשים לב כי לכל $x \in D$ מתקיים $f(x) \in V$ או $f(x) \in U$ ולכן:

$$D \subseteq U' \cup V'$$

אך מתקיים בנוסף:

$$D \cap U' \neq \emptyset \quad D \cap V' \neq \emptyset \to D \nsubseteq U' \quad D \nsubseteq V'$$

כלומר קיבלנו כי D אינה קשירה, בסתירה לנתון. לכן נסיק כי אחד התנאים שדרשנו יתקיים. נניח בה"כ הכלליות כי יהיה זה התנאי הראשון.

כלומר, ניתן לבחור $x_0 \in D$ כך ש-$f(x_0) \in V$ ולכל $r > 0$ קיים $x \in B(x_0, r)$ עבורו $f(x_0) \in U$. נבנה סדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $r_n = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי מהנחתנו ניתן לבנות סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל r_n בוחרים $x_n \in B(x_0, r_n)$ עבורו $f(x_n) \in U$.

נשים לב, כי מתקיים:

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| \leq \lim_{n \to \infty} r_n = 0$$

כלומר נסיק כי בהכרח $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$. אך f פונקציה רציפה ולכן נסיק מכך כי:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

אך מכאן נסיק כי לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ ולכן $B(f(x_0), \varepsilon) \nsubseteq V$ לכל $\varepsilon > 0$, אך זו סתירה לכך ש-V קבוצה פתוחה.

ראינו כי אם מניחים את אי קשירות $f(D)$, מקבלים סתירה. לכן נסיק כי f רציפה על קבוצה קשירה D היא תנאי מספיק לכך ש-$f(D)$ קשירה.

ג. ($\Longrightarrow$) נניח כי D קשירה מסילתית. אזי נניח בשלילה כי D לא קשירה, כלומר קיימות $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות זרות ולא ריקות כך שמתקיים $D \subseteq V \cup U$ וכן $D \cap V \neq \emptyset$ וכן $D \cap U \neq \emptyset$. נבחר $x \in V$ ו-$y \in U$ ונסיק, היות ו-D קשירה מסילתית, כי קיימת פונקציה רציפה $f: [0,1] \mapsto D$ כך ש-$f(1) = y$ וכן $f(0) = x$. עתה, נסיק מסעיף ב', כי היות ו-$[0,1]$ קבוצה קשירה - $f([0,1])$ קבוצה קשירה. אך מכאן נובע כי לכל $U', V' \subseteq \mathbb{R}^n$, פתוחות, זרות, ולא ריקות, עבורן $f([0,1]) \subseteq U' \cup V'$, מתקיים $f([0,1]) \subseteq U'$ או $f([0,1]) \subseteq V'$. אך הנ"ל נכון גם עבור $U' = U, V' = V$, ולכן נסיק בפרט כי $x, y \in U$ או $x, y \in V$ בסתירה להנחה כמובן. לכן נסיק כי D בהכרח קשירה כנדרש.
($\Longleftarrow$) נניח כי D קשירה ופתוחה, נניח בשלילה כי היא אינה קשירה מסילתית, ותהא $a \in D$. נסמן ב-$\mathrm{U} \subseteq D$ את כל הנקודות שניתן לחבר ל-a על ידי מסילה רציפה, ונסמן $V = D \setminus U$. נראה עתה כי מתקיימים מספר דברים:

- U קבוצה פתוחה – יהיה $x \in U$ ומהיות D פתוחה קיים r_x כך ש-$B(x, r_x) \subseteq U$. קל לראות כי לכל שתי נקודות בכדור, הקו הישר המחבר ביניהן מוכל בכדור. ולכן נוכל להגדיר:

$$f:[0,1]\mapsto D \quad f(t)=(1-t)x+ty$$

אך $x\in U$ ולכן מהגדרת הקבוצה קיימת פונקציה:

$$g:[0,1]\mapsto D \quad g(1)=x, g(0)=a$$

ובהרכבת הפונקציה $h:[0,1]\mapsto U\cup\{x'|\exists t\in[0,1] \quad x'=(1-t)x+ty\}$:

$$h(t)=\begin{cases} g(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ f(2t-1) & t\in\left(\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$

וקל לראות כי הפונקציה רציפה עבור $t\neq\frac{1}{2}$ כהרכבה של פונקציות רציפות וב-$\frac{1}{2}$ הפונקציה רציפה בהסתכלות על הגבולות המתאימים. כלומר קיבלנו כי לכל $x\in U$, $B(x,r_x)\subseteq U$ כלומר U אכן קבוצה פתוחה כנדרש.

- V קבוצה פתוחה – יהא $x\in V$ כלשהו ומפתיחות D נסיק כי נוכל להסתכל על סביבה פתוחה שלו מהצורה $B(x,r_x)$. נשים לב שלא ייתכן כי $B(x,r_x)\cap U\neq 0$, שכן אחרת היינו מקבלים כי קיימת מסילה רציפה בין x לבין $x'\in B(x,r_x)\cap U$ אך מכאן שעל ידי חיבור מסילות כפי שהראיתי קודם לכן, נקבל כי קיים מסלול מ-x ל-a בסתירה לכך ש-$x\in V$. לכן נסיק כי בהכרח מתקיים $B(x,r_x)\subseteq V$ כלומר V אכן קבוצה פתוחה.

נשים לב כי מהגדרת הקבוצות ודאי מתקיים $V\cap U=\emptyset$ וכן $D\subseteq V\cup U$. אך מהנחת השלילה שלנו לגבי אי קשירות מסילתית של D, הנחנו כי $V\neq\emptyset$ וכן $U\neq\emptyset$ כלומר בפרט:

$$D\cap U\neq\emptyset \quad D\cap V\neq\emptyset$$

אך זו סתירה לכך ש-D קשירה. לכן נסיק כי היא אכן קשירה מסילתית כנדרש.

שאלה 6:

א. נתון כי f פונקציה חסומה, כלומר קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך ש-$-M\leq f(x)\leq M$ לכל $x\in[0,1]$. וכאמור, f רציפה ב-$[0,1]$ אם ורק אם היא רציפה בו במ"ש, וזאת אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[0,1]$ מתקיים שאם $|x-y|<\delta$ אז $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$. וזאת אם ורק אם לכל $y\in[0,1]$ בגרף הפונקציה מתקיים:

$$\lim_{x\to y}\big(x,f(x)\big)=\big(y,f(y)\big)$$

ומכאן שהנ"ל יהיה נכון לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה $x_n\to y$, ולכן גרף הפונקציה הוא קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^2$

ב. עבור הכיוון הראשון, נשים לב כי אם $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ רציפה אזי בפרט היא רציפה בו במ"ש, ולכן תנאי החסימות מיותר.
עבור הכיוון השני החסימות נדרשת. נראה זאת באמצעות דוגמא, על ידי כך שנגדיר:

$$f:[0,1]\mapsto\mathbb{R} \quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

ונשים לב שלכל סדרה המתכנסת ל-$\big(x,f(x)\big)$, תהיה התכנסות מרציפות הפונקציה ל-$x\neq 0$. אך לכל סדרה עבור ערכי ה-x מתכנסים לאפס, נקבל כי $f(x)\to\infty$ ולכן ממילא לא תהיה התכנסות כלל של הסדרה ולכן לא תהיה סתירה לתנאי הסגירות של הפונקציה, ובמקרה זה נסיק כי תנאי החסימות הכרחי.

שאלה 7:

א. נרצה להראות כי איחוד של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה. כלומר, נניח כי A_i קבוצה פתוחה לכל $i\in I$ (אינטרוול כלשהו), ונרצה להראות כי $\bigcup_{i\in I}A_i$ הינה קבוצה פתוחה. לשם כך, יהא $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$

כלשהו. כלומר קיים $i \in I$ עבורו $x \in A_i$, ומכך נסיק כי היות וקבוצה זו פתוחה, קיים $r > 0$ כך שמתקיים $B(x,r) \subseteq A_i$. אך מכאן נובע בפרט כי $B(x,r) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ כלומר $\bigcup_{i\in I} A_i$ קבוצה פתוחה כנדרש.

ב. נרצה להראות כי חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה. לשם כך, יהיו $A_1,\cdots,A_n$ קבוצות פתוחות כלשהן, ויהא $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ כלשהו. מכאן נסיק כי לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $x \in A_i$. היות ולכל i, הקבוצה A_i הינה קבוצה פתוחה, נסיק כי קיים $r_i > 0$ כך שמתקיים $B(x,r_i) \subseteq A_i$. נבחר:

$$r = \min_{1\le i\le n} r_i$$

ונקבל כי לכל $1 \le j \le n$ מתקיים:

$$B(x,r) \subseteq B(x,r_j) \subseteq A_j$$

מכאן, קיבלנו כי $B(x,r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ כלומר $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ היא קבוצה פתוחה, כנדרש.

שאלה 8:

א. נרצה להראות בנפרד את נכונות הטענות עבור $\bar{A}$ והן עבור $\mathrm{int}(A)$.

a. נראה, כי $\bar{A}$ שווה לחיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A. נראה ראשית כי $\bar{A}$ מוכלת בחיתוך זה. נשים לב, כי בהנתן $x \in \bar{A}$ נפריד ל-2 מקרים.

i. אם $x \in A$ אזי בפרט x שייכת לחיתוך שכן החיתוך מוגדר כחיתוך של קבוצות אשר A מוכל בכולם.

ii. אם $x \notin A$ אזי נקבל כי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ כך ש-$x_n \to x$. (אחרת נקבל כי זו לא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A, ולמשל $\bar{A} \setminus \{x\}$ תהיה קבוצה סגורה המכילה את A והיא קטנה יותר מ-$\bar{A}$ הנתונה בסתירה להגדרת $\bar{A}$). אך נשים לב כי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ ולכן מוכלת בכל קבוצה סגורה המכילה את A, ומכאן שהיות וכל הקבוצות בחיתוך הנ"ל סגורות, נסיק כי גם גבול הסדרה, x, שייך לכל הקבוצות הללו (אחרת הן לא היו סגורות).

כלומר, קיבלנו כי $\bar{A}$ אכן מוכלת בחיתוך כדרוש.

ההכלה ההפוכה מידית שכן $\bar{A}$ היא קבוצה סגורה על פי הגדרתה ולכן כל איבר בחיתוך שייך בפרט ל-$\bar{A}$ כנדרש.

b. נתון כי A' הינה קבוצת כל נקודות ההצטברות של A. נרצה להראות כי $\bar{A} = A' \cup A$. נעשה זאת על ידי שנראה הכלה דו כיוונית.

i. בהנתן $x \in \bar{A}$ ייתכנו שתי אפשרויות:

1. אם $x \in A$, אזי בוודאי ש-$x \in A \cup A'$.
2. אם $x \notin A$, אזי נסיק מהגדרת $\bar{A}$ כי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ כך שמתקיים $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in \bar{A}$ אך מכאן נובע כי לכל $r > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$ מתקיים $x_n \in B(x,r)$ אך $x_n \in A$ ולכן $x_n \in B(x,r) \cap A$ ולכן x נקודת הצטברות של A, כלומר $x \in A'$ ולכן $x \in A \cup A'$.

ii. בהנתן $x \in A \cup A'$ אזי מתקיים $x \in A$ או $x \in A'$.

1. אם $x \in A$ אזי ממילא $x \in \bar{A}$ מהגדרת הקבוצה.
2. אם $x \in A'$ אזי נקבל כי לכל $r > 0$ קיים $x \ne y \in B(x,r) \cap A$. נגדיר אפוא סדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי $r_n = \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים, אפוא:

$$x \ne x_n \in B(x,r_n) \cap A$$

כלומר הגדרנו סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ כך ש-$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, אך מכאן כי $\bar{A}$ קבוצה סגורה אם ורק לכל סדרה מתכנסת מתקיים שהגבול שלה שייך ל-$\bar{A}$, ונוכל להסיק כי $x \in \bar{A}$ בהכרח.

כלומר בשני המקרים נקבל כי $x \in A \cup A'$ כנדרש.

נשים לב כי לפי (i) הראינו $\bar{A} \subseteq A \cup A'$ וכן לפי (ii) הראינו $A \cup A' \subseteq \bar{A}$ ולכן מתקיים השוויון.

שאלה 9:

א. נרצה למצוא את השפה של הקבוצות הבאות:

a. בהנתן $r>0$ ו-x_0 כלשהו, מתקיים:

$$\boxed{\partial B(x_0,r)=\{x \mid \|x-x_0\|=r\}}$$

זאת משום שנשים לב כי לכל $x_1\in\partial B(x_0,r)$, נבחר את הנקודה:

$$x_2=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$$

עבור $0<\lambda<1$ ונשים לב כי:

$$\|x_2-x_0\|=\|\lambda(x_1-x_0)\|=\lambda\|x_1-x_0\|<r$$

כלומר $x_2\in B(x_0,r)$ אך נשים לב כי מתקיים:

$$\|x_2-x_1\|=\|(1-\lambda)x_0+\lambda x_1-x_1\|=\|(1-\lambda)(x_0-x_1)\|=(1-\lambda)\|x_0-x_1\| \\ =(1-\lambda)r$$

כלומר $x_2\in B(x_1,(1-\lambda)r)$, כמו כן בבחירת:

$$x_3=x_1+(x_1-x_0)(1-\lambda)$$

נקבל כי:

$$\|x_3-x_0\|=\|x_1+(1-\lambda)(x_1-x_0)-x_0\|=\|(x_1-x_0)+(1-\lambda)(x_1-x_0)\|=(2-\lambda)r>r$$
$$\|x_3-x_1\|=\|x_1+(1-\lambda)(x_1-x_0)-x_1\|=(1-\lambda)\|x_1-x_0\|=(1-\lambda)r$$

כלומר קיבלנו כי $x_2\in B(x_0,r)$ אך $x_3\notin B(x_0,r)$ בעוד ש-$x_2,x_3\in B(x_1,(1-\lambda)r)$. כלומר בסימון $r'=(1-\lambda)r$ עבור כל $0<\lambda<1$ נקבל כי אכן לכל $r'>0$ ניתן לבחור $0<\lambda<1$ מתאימה. לכן $\partial B(x_0,r)$ היא אכן הקבוצה שצוינה לעיל.

b. במקרה של כדור סגור נקבל כי השפה היא אותה שפה. זאת משום שאותו נימוק תקף בהחלפת כל סימן $r>$ בסימן $r\le$.

c. תהא $\mathbb{Q}^2$ קבוצת כל הרציונליים במישור. מצפיפות הממשיים אנו יודעים שבכל סביבת $r>0$ של $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$ קיימים $x',y'\in\mathbb{Q}$ וכן $x'',y''\notin\mathbb{Q}$ כך ש-$(x',y')\in B\big((x,y),r\big)$ וכן (ניתן לקבל זאת נניח עבור נורמת 1 בהתבוננות בסביבת $\left[x-\frac{r}{2},x+\frac{r}{2}\right]$ ובסביבת $\left[y-\frac{r}{2},y+\frac{r}{2}\right]$. וכן $(x'',y'')\notin\mathbb{Q}^2$. אך נשים לב כי הנ"ל נכון גם עבור $(x,y)\notin\mathbb{Q}^2$, ולכן נסיק כי:

$$\boxed{\partial\mathbb{Q}^2=\mathbb{R}^2}$$

d. בהנתן פונקציה רציפה במישור, אזי הגרף שלה הוא הקבוצה $\{(x,f(x))\}$. אנו יודעים כי מרציפות הפונקציה, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x'\in B(x,\delta)$ מתקיים $f(x')\in B(f(x),\varepsilon)$.
בבחירת $\varepsilon=r>0$ ובדרישה $0<\delta<\varepsilon$, אזי נקבל כי מנורמת 2 לדוגמה, מתקיים:

$$\big(x+\delta,f(x+\delta)\big),(x,f(x)+r)\in B\Big(\big(x,f(x')\big),r\Big) \quad \begin{matrix}\big(x+\delta,f(x+\delta)\big)\in\big\{\big(x,f(x)\big)\big\} \\ (x,f(x)+r)\notin\big\{\big(x,f(x)\big)\big\}\end{matrix}$$

והנ"ל נכון לכל x בתחום ולכל $r>0$ שנבחר, ולכן:

$$\boxed{\partial\big\{\big(x,f(x)\big)\big\}=\big\{\big(x,f(x)\big)\big\}}$$

ב. נוכיח:

a. נרצה להראות $\bar{A}=A\cup\partial A$. נשים לב כי $x\in\bar{A}$ אם ורק אם מתקיימים אחת התנאים הבאים:

i. $x\in A$ וזאת אם ורק אם $x\in A\cup\partial A$.

ii. $x\notin A$ וזאת אם ורק אם קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$ כך ש-$x_n\xrightarrow{n\to\infty}x\notin A$. אך מכאן נסיק כי לכל $r>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $x_n\in B(x,r)$ אך כאמור $x_n\in A$ לכל $n\in\mathbb{N}$ כלומר $x_n\in B(x,r)\cap A$.אז $x\in\partial A$, אם ורק אם $x\in A\cup\partial A$.

הראנו הכלה דו כיוונית (כל הטיעונים הם בחזקת אם ורק אם), ולכן יש שוויון כדרוש.

b. נניח כי A פתוחה. הנ"ל ייתכן אם ורק אם לכל $x \in A$, קיים $r > 0$ כך ש-$B(x,r) \subseteq A$. הנ"ל ייתכן אם ורק אם לכל $x \in A$, קיים $r > 0$ כך שלא קיים $x' \in B(x,r)$ המקיים $x' \notin A$. אך מכאן נסיק כי הנ"ל ייתכן אם ורק אם $x \in A$ גורר ש-$x \notin \partial A$, ולכן $A \cap \partial A = \emptyset$.

c. נראה כי טענה זו לא בהכרח נכונה. נגדיר:

$$f: [0,2\pi] \cup [3\pi, 4\pi] \mapsto [-1,1] \quad f(x) = \sin x$$

נשים לב כי:

$$\partial([0,2\pi] \cup [3\pi, 4\pi]) = \{0, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$$

ולכן מתקיים:

$$f(\{0,2\pi, 3\pi, 4\pi\}) = \{0, -1\}$$

ומאידך מתקיים:

$$f([0,2\pi] \cup [3\pi, 4\pi]) = [-1,1]$$

ולכן:

$$\partial([-1,1]) = \{-1,1\} \neq \{0,-1\}$$

והיות ו-f כמובן פונקציה רציפה, נקבל כי הטענה לא נכונה.

d. נראה כי בהנתן $f: U \mapsto W$ פונקציה רציפה, אזי לא בהכרח נכון כי $f^{-1}(\partial W) \subseteq \partial f^{-1}(W)$. לשם כך נתבונן בפונקציה $f: [0,1] \mapsto \{0\}$ המוגדרת על ידי $f(x) = 0$. נשים לב כי הפונקציה כמובן רציפה. כמו כן נשים לב, כי מתקיים $\partial[0,1] = \{0,1\}$ וכן $\partial\{0\} = 0$. אך מתקיים:

$$f^{-1}(\partial\{0\}) = [0,1] \neq \{0,1\} = \partial[0,1] = \partial f^{-1}(\{0\})$$

ולכן הטענה אינה נכונה.