אלגברה א' - 104167

פתרונות לשיעורי הבית

סמסטר חורף תשס"ט

תוכן עניינים:

גליון 1 - שדות

פתרון לשאלה 1

נניח בשלילה כי קיים איבר בשדה F אשר יש לו 2 איברים נגדיים.

נסמן את האיבר ב- a ואת שני הנגדיים לו ב- b_1, b_2.

מצד אחד, ע״פ ההנחה: $a+b_1=0$, ומצד שני $a+b_2=0$. השוויון לאפס נובע מקיום האיברים בשדה.

לכן ניתן לכתוב את השוויון גם כך: $a+b_1=a+b_2$.

נוסיף את הנגדי ל- a לשני האגפים (לא משנה איזה, בה״כ את b_2):

$a+b_1+b_2=a+b_2+b_2$ $\Leftarrow$ $(a+b_2)+b_1=(a+b_2)+b_2$ $\Leftarrow$ $(0)+b_1=(0)+b_2$ $\Leftarrow$

$b_1=b_2$.

קיבלנו סתירה להנחה ששני האיברים הנגדיים ל- a שונים, ולכן ההנחה בשלילה איננה נכונה $\Leftarrow$

בשדה F לכל איבר קיים נגדי יחיד.

פתרון לשאלה 2

נניח בשלילה כי קיימים שני איברי יחידה בשדה F.

נסמן את האיברים האלו ב- 1_1 וב- 1_2.

מצד אחד, 1_1 הוא איבר בשדה ולכן אם נכפיל אותו באיבר היחידה 1_2 נקבל את 1_1: $1_1\cdot 1_2=1_1$.

מצד שני, 1_2 הוא איבר בשדה ולכן אם נכפיל אותו באיבר היחידה 1_1 נקבל את 1_2: $1_1\cdot 1_2=1_2$.

קיבלנו: $1_1=1_1\cdot 1_2=1_2$ $\Leftarrow$ $1_1=1_2$.

קיבלנו סתירה להנחה ששני איברי היחידה הם שונים, ולכן ההנחה בשלילה איננה נכונה $\Leftarrow$

בשדה F קיים רק איבר יחידה אחד.

פתרון לשאלה 3

נתון: $a,b\in F$.

צ״ל: $-(a+b)=-a+(-b)$.

<u>הוכחה:</u>

$a,b\in F$	$\Leftarrow$	$a+b\in F$	(סגירות לחיבור).
$a+b\in F$	$\Leftarrow$	קיים לו נגדי בשדה, נסמנו ב- d_1.	(לכל איבר בשדה יש נגדי).
$a+b=(a+b)$	$\Leftarrow$	$(a+b)\in F$	(שוויון בין איברים).
$(a+b)\in F$	$\Leftarrow$	קיים לו נגדי בשדה, נסמנו ב- d_2.	(לכל איבר בשדה יש נגדי).

כעת נראה כי $d_1=d_2$.

$d_2=-(a+b)$ (d_2 הנגדי של $(a+b)$).

ננחש כי $d_1=-a+-b$. נבדוק את הניחוש שלנו: $d_1+a+b=-a+-b+a+b=-a+a+-b+b=0+0=0$.

(מכיוון שלא נתון אחרת אנו מניחים כי פעולת החיבור היא חיבור הממשיים).

ניחשנו נכונה ולכן d_1 הנגדי של $a+b$.

קיבלנו כי d_1 הוא הנגדי של $a+b$, וש- d_2 הנגדי של $(a+b)$.

האיבר $a+b=(a+b)$ שייך לשדה F ולכן קיים לו נגדי <u>יחיד</u>.

מכך נובע כי $d_1=d_2$, או במילים אחרות $-(a+b)=-a+(-b)$.

מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 4

על מנת להוכיח ש- F שדה יש לעבור על 11 הכללים ולראות שהם מתקיימים.
לאורך כל ההוכחה נסתמך על העובדה שתוצאת החיבור והכפל של רכיבי איברים גם היא שייכת ל- Q מכיוון שהוא שדה. (כלומר: $a,c \in Q \quad \Rightarrow \quad a+c \in Q \ , \ a \cdot c \in Q$).
כמו כן, מכיוון שלא נתונה הגדרה לשוויון מסוג שונה, נניח כי השוויון בין איברים הוא שוויון טבעי, כלומר $(a,b)=(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad b=d$ וגם $a=c$.

1) סגירות לחיבור: $(a,b),(c,d) \in F \quad \Rightarrow \quad (a+c, b+d) \in F$.
מתקיים תחת Q.

2) אסוציאטיביות: $\left[(a,b)+(c,d)\right]+(e,f)=(a,b)+\left[(c,d)+(e,f)\right]$
אגף שמאל:
$$\left[(a,b)+(c,d)\right]+(e,f)=\left[(a+c,b+d)\right]+(e,f)=(a+c+e,\ b+d+f)$$
אגף ימין:
$$(a,b)+\left[(c,d)+(e,f)\right]=(a,b)+\left[(c+e,\ d+f)\right]=(a+c+e,\ b+d+f)$$
פיתוח שני האגפים הוביל לתוצאה שווה ולכן השוויון מתקיים.

3) קיום איבר ה-0 (איבר אדיש חיבורית):
נמצא את איבר ה-0 בצורה הבאה: חיפוש איבר (x,y) כך שיתקיים: $(a,b)+(x,y)=(a,b)$.
ע"פ הגדרת השדה: $(a,b)+(x,y)=(a+x,\ b+y)$.
כעת נדרוש: $\begin{cases} a+x=a \\ b+y=b \end{cases}$. נפתור את המשוואה:

$$\begin{aligned} a+x&=a \qquad \backslash+(-a) \\ a+(-a)+x&=a+(-a) \\ 0+x&=0 \\ x&=0 \end{aligned}$$

($(-a)$ הוא הנגדי של a בשדה Q).
בצורה דומה נמצא את y.
קיבלנו כי איבר האפס בשדה F הוא: $(0,0)$.

4) איבר נגדי:
נמצא את האיבר הנגדי ע"י הדרישה: לכל (a,b) מציאת איבר (x,y) כך שיתקיים:
$(a,b)+(x,y)=(0,0)$. נדרוש: $\begin{cases} a+x=0 \\ b+y=0 \end{cases}$. נפתור את המשוואות:

$$\begin{aligned} a+x&=0 \qquad \backslash+(-a) \\ a+(-a)+x&=0+(-a) \\ 0+x&=(-a) \\ x&=(-a) \end{aligned}$$

($(-a)$ הוא הנגדי של a בשדה Q).
בצורה דומה נמצא את y.
קיבלנו כי האיבר הנגדי ל- (a,b) בשדה F הוא: $(-a,-b)$.

5) קומוטטיביות: $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c\ ,\ b+d)=(c,d)+(a,b)$$

(נובע מתכונת הקומוטטיביות של השדה Q).

6) סגירות לכפל: $(a,b),(c,d)\in F \quad \Leftarrow \quad (ac+2bd,\ ad+bc)\in F$.

מתקיים תחת Q כי $a,b,c,d\in Q \quad \Leftarrow \quad ac+2bd\in Q$ וגם $ad+bc\in Q$.

7) אסוציאטיביות: $\left[(a,b)\cdot(c,d)\right]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot\left[(c,d)\cdot(e,f)\right]$

אגף שמאל:

$$\left[(a,b)\cdot(c,d)\right]\cdot(e,f) = \left[(ac+2bd,\ ad+bc)\right]\cdot(e,f) =$$
$$\left((ac+2bd)e+2(ad+bc)f\ ,\ (ac+2bd)f+(ad+bc)e\right) =$$
$$(ace+2bde+2adf+2bcf\ ,\ acf+2bdf+ade+bce)$$

אגף ימין:

$$(a,b)\cdot\left[(c,d)\cdot(e,f)\right] = (a,b)\cdot\left[(ce+2df\ ,\ cf+de)\right] =$$
$$\left(a(ce+2df)+2b(cf+de),\ a(cf+de)+b(ce+2df)\right) =$$
$$(ace+2adf+2bcf+2bde\ ,\ acf+ade+bce+2bdf)$$

ניתן לראות כי הרכיבים שווים זה לזה (נובע מתכונת הקומוטטיביות של השדה Q) ולכן האיברים שווים זה לזה, ולכן השוויון מתקיים.

8) קיום איבר היחידה (האדיש כפלית), האיבר "1":

נמצא את איבר "1" בצורה הבאה: לכל (a,b), חיפוש איבר (x,y) כך שיתקיים: $(a,b)\cdot(x,y)=(a,b)$.

ע"פ הגדרת השדה: $(a,b)\cdot(x,y)=(ax+2by\ ,\ ay+bx)$.

כעת נדרוש: $\begin{cases} ax+2by=a \\ ay+bx=b \end{cases}$. במקום לפתור את המשוואות, ננחש פתרון: $x=1,\ y=0$.

יש לבדוק את הניחוש: נציב במשוואות ונראה כי הן מתקיימות <u>לכל</u> (a,b), ולכן הניחוש נכון.

קיבלנו כי האיבר "1" בשדה F הוא: $(1,0)$.

9) קיום איבר הפכי:

נמצא את האיבר ההפכי ע"י הדרישה: מציאת איבר (x,y) כך שיתקיים: $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$

לכל (a,b) כאלה אשר אינם איבר ה-0.

ע"פ הגדרת השדה: $(a,b)\cdot(x,y)=(ax+2by\ ,\ ay+bx)$.

לכן נדרוש: $\begin{cases} ax+2by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$. נפתור את המשוואות (תחת השדה Q):

$$bx=-ay$$

כעת נפריד לשני מקרים: א. $b\neq 0$:

$$bx=-ay \qquad \backslash\cdot b^{-1}$$
$$x=-\frac{a}{b}y$$

נציב במשוואה הראשונה כדי למצוא את y:

$$y=\frac{b}{2b^2-a^2} \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{-a}{2b^2-a^2}$$

ב. במקרה $b=0$ ו- $b=0$, בטוח ש- $a\neq 0$ (אחרת זהו איבר האפס ואין לו הפכי). לכן:

$$0\cdot x+ay=0$$
$$ay=0$$
$$y=0$$

נציב במשוואה הראשונה כדי למצוא את x:

$$ax=1$$
$$x=\frac{1}{a}$$

נשים לב שקיבלנו את אותו הפיתרון כמו במקרה הקודם (עם הצבת $b=0$), כלומר עבור כל איבר שאינו איבר האפס, האיבר ההפכי הוא:

$$\left(\frac{-a}{2b^2-a^2}\ ,\ \frac{b}{2b^2-a^2}\right)$$

אם נבצע את ההכפלה $(a,b)\cdot\left(\frac{-a}{2b^2-a^2}\ ,\ \frac{b}{2b^2-a^2}\right)=(1,0)$ לשם בדיקה נשים לב כי תשובתנו היא נכונה.

10) קומוטטיביות: $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$:

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd\ ,\ ad+bc)=(c,d)\cdot(a,b)$$

(נובע מהפעולות תחת השדה Q).

11) דיסטריבוטיביות: נבדוק האם מתקיים $(a,b)\cdot\left[(c,d)+(e,f)\right]\ =\ (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$

אגף שמאל:

$$(a,b)\cdot\left[(c,d)+(e,f)\right]\ =\ (a,b)\cdot(c+e,\ d+f)=$$
$$\left(a(c+e)+2b(d+f)\ ,\ a(d+f)+b(c+e)\right)=$$
$$(ac+ae+2bd+2bf\ ,\ ad+af+bc+be)$$

אגף ימין:

$$(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)\ =$$
$$(ac+2bd\ ,\ ad+bc)+(ae+2bf\ ,\ af+be)=$$
$$(ac+2bd+ae+2bf\ \ ,\ ad+bc+af+be)$$

ניתן לראות כי הרכיבים בתוצאה בשני האגפים שווים (נובע מתכונת הקומוטטיביות של השדה Q) ולכן השוויון מתקיים.

הוכחנו קיום כל 11 התכונות הנדרשות לקיום שדה, ולכן הקבוצה F הנתונה תחת הפעולות הנתונות היא שדה.
מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 5

נפתור את מערכת המשוואות תחת השדה Z_3 :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל (לא לשכוח שכל החשבונות בתרגיל זה נעשים במודולו 3) :

$$2y=1 \qquad \backslash\cdot 2$$
$$4y=y=2$$

נציב את $y=2$ במשוואה הראשונה ונקבל:

$$x+2=1 \qquad \backslash+1$$
(1 הוא הנגדי של 2)
$$x+3=1+1$$
$$x=2$$

פתרון לשאלה 6

נראה כי למשוואה $x^2+1=0$ יש פתרון בשדות הבאים:

בשדה Z_2 :

$$x^2+1=0 \qquad \backslash+1$$
$$x^2=1$$
$$x=1$$

בשדה Z_5 :

$$x^2+1=0 \qquad \backslash+4$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2, \qquad x_2=3$$

בשדה Z_{17} :

$$x^2+1=0 \qquad \backslash+16$$
$$x^2=16$$
$$x_1=4, \qquad x_2=13$$

גליון 2 - מרוכבים

פתרון לשאלה 1 ב'

במקרה הזה נפתח לפי מכפלה פשוטה של מספרים מרוכבים:

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$
$$(a+ib)^3 = a^3 - 3ab^2 + \left(3a^2b - b^3\right)i$$
$$(a-ib)^3 = a^3 - 3ab^2 - \left(3a^2b + b^3\right)i$$

$$\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} = \frac{(1-4+4i)-(1-3-i(3-1))}{(27-36+i(54-8))-(4-1+4i)} = \frac{(-3+4i)-(-2-2i)}{(-9+46i)-(3+4i)} =$$
$$= \frac{-1+6i}{-12+42i} = \frac{-1+6i}{-12+42i}\cdot\left(\frac{-12-42i}{-12-42i}\right) = \frac{12+42i-72i+252}{12^2+42^2} = \frac{264-30i}{1908} = \frac{44-5i}{318}$$

פתרון לשאלה 3

א.

$$i\left(z+\overline{z}\right)+i\left(z-\overline{z}\right)=2i+3$$
$$i\left(z+z+\overline{z}-\overline{z}\right)=2i+3$$
$$i\cdot 2z = 2i+3 \qquad \backslash :2$$
$$i\cdot z = i+\tfrac{3}{2} \qquad \backslash \cdot i$$
$$(-1)z=(-1)+i\tfrac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad z=1-i\tfrac{3}{2}$$

ד. נפתור לפי הנוסחא הרגילה:

$$x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$$
$$\frac{(3-2i)\pm\sqrt{(3-2i)^2-4(5-5i)}}{2}=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{5-12i-20+20i}}{2}=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{-15+8i}}{2}$$

על מנת לחשב את הביטוי שבשורש, נמצא אילו מספרים מרוכבים מקיימים: $z^2=-15+8i$.
נסמן $z=a+ib$ כאשר $a,b\in R$.

$$(a+ib)^2=-15+8i$$
$$a^2-b^2+2abi=-15+8i$$
$$\begin{cases} a^2-b^2=-15 \\ 2ab=8 \end{cases}$$

ניתן לראות כי $a\neq 0$, אחרת המשוואה השניה אינה מתקיימת. לכן ניתן לחלק ב- a: $b=\frac{4}{a}$.

נציב במשוואה הראשונה ונקבל: $a^4+15a^2-16=0$. נפתור ונקבל: $\left(a^2\right)_1=1$, $\left(a^2\right)_2=-16$.

דרשנו ש- $a\in R$ ולכן נתעלם מ- $\left(a^2\right)_2=-16$ (אחרת גם a מרוכב).

כעת $a_1=1$, $a_2=-1$, ובמקרה כזה:

$$a_1=1,\quad b_1=4 \qquad\Rightarrow\qquad z_1=1+4i$$
$$a_2=-1,\quad b_2=-4 \qquad\Rightarrow\qquad z_2=-1-4i$$

נחזור לחישוב משוואת השורשים המקורית:

מקרה I – $\frac{(3-2i)\pm(1+4i)}{2}=(2+i)\ ,\ (1-3i)$

מקרה II – $\frac{(3-2i)\pm(-1-4i)}{2}=(2+i)\ ,\ (1-3i)$

כלומר בכל מקרה מקבלים את אותם שני הפתרונות.
לסיכום:

$$x_1=2+i \qquad , \qquad x_2=1-3i$$

פתרון לשאלה 5

ע"פ הנתון: $\mathrm{Im}(w),\mathrm{Im}(z)\neq 0 \quad , \quad \mathrm{Im}(wz)=0$.
צ"ל: $w=\alpha\bar{z}$

הוכחה:

$$\mathrm{Im}(wz)=0 \Rightarrow wz=\beta\ ,(\beta\in R) \Rightarrow wz=\alpha|z|^2,(\alpha\in R)$$

נתון כי $\mathrm{Im}(z)\neq 0$ ולכן גם $|z|^2\neq 0$

$$wz\cdot\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=\alpha\bar{z}z\cdot\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)$$

$$w\frac{z\cdot\bar{z}}{|z|^2}=\alpha\bar{z}\frac{z\cdot\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow w\frac{|z|^2}{|z|^2}=\alpha\bar{z}\frac{|z|^2}{|z|^2} \Rightarrow w=\alpha\bar{z}$$

מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 7

צ"ל: $\mathrm{Re}\left[(z+\bar{w})(\bar{z}-w)\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad |z|=|w|$

ראשית נפתח את הביטוי $(z+\bar{w})(\bar{z}-w)$:

$$(z+\bar{w})(\bar{z}-w) = z\cdot\bar{z}-z\cdot w+\bar{z}\cdot\bar{w}-w\cdot\bar{w} = |z|^2-zw+\overline{zw}-|w|^2 = |z|^2-|w|^2-2i\,\mathrm{Im}(zw)$$

כיוון $\Leftarrow$: נוכיח $\mathrm{Re}\left[(z+\bar{w})(\bar{z}-w)\right]=0 \quad\Leftarrow\quad |z|=|w|$

$$\mathrm{Re}\left[(z+\bar{w})(\bar{z}-w)\right] = \mathrm{Re}\left[|z|^2-|w|^2-2i\,\mathrm{Im}(zw)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$|z|^2-|w|^2=0 \Rightarrow |z|^2=|w|^2 \Rightarrow |z|=|w|$$

כיוון $\Rightarrow$: נוכיח $|z|=|w| \quad\Leftarrow\quad \mathrm{Re}\left[(z+\bar{w})(\bar{z}-w)\right]=0$

נניח בשלילה כי $\mathrm{Re}\left[(z+\bar{w})(\bar{z}-w)\right]\neq 0$.

$$\mathrm{Re}\left[(z+\bar{w})(\bar{z}-w)\right]\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\left[|z|^2-|w|^2-2i\,\mathrm{Im}(zw)\right]\neq 0 \Rightarrow$$

$$|z|^2-|w|^2\neq 0 \Rightarrow |z|^2\neq|w|^2 \Rightarrow |z|\neq|w|$$

קיבלנו סתירה לנתון, לכן ההנחה בשלילה אינה נכונה, לכן הטענה נכונה.

מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 8

א. הטענה נכונה (בהנחה ש- $w \neq 0$, אחרת התרגיל אינו מוגדר). הוכחה:

נסמן: $w = c + id$, $z = a + ib$. נציב במשוואות ונראה שנגיע לאותה תוצאה.

אגף שמאל:

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{\overline{z}}{w}\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{\overline{zw}}{|w|^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{ac - db - i(ad + bc)}{c^2 + d^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{ac - db - i(ad + bc)}{c^2 + d^2}\right) = \frac{ac - db}{c^2 + d^2}$$

אגף ימין:

$$\frac{1}{|w|^2}\left(\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z)\cdot\operatorname{Im}(w)\right) = \frac{1}{c^2 + d^2}(ac - bd)$$

הגענו לאותה תוצאה ולכן השוויון מתקיים.

ב. הטענה נכונה. הוכחה:

נסמן: $w = c + id$. נציב במשוואות ונראה שנגיע לאותה תוצאה.

אגף שמאל:

$$\operatorname{Im}(w^2) = \operatorname{Im}(c^2 - d^2 + 2icd) = 2cd$$

אגף ימין:

$$2\cdot\operatorname{Re}(w)\cdot\operatorname{Im}(w) = 2\cdot c\cdot d$$

הגענו לאותה תוצאה ולכן השוויון מתקיים.

ג. הטענה איננה נכונה.

נסמן: $w = c + id$, $z = a + ib$. נציב במשוואות ונראה שנגיע לתוצאה שונה:

אגף שמאל:

$$\operatorname{Im}(w\overline{z}) = \operatorname{Im}(ac + bd + i(bd - bc)) = bd - bc$$

אגף ימין:

$$-\operatorname{Re}(w)\cdot\operatorname{Im}(z) = -c\cdot b$$

לכן, אם נבחר למשל $\begin{cases} z = 1 + i \\ w = 1 + 2i \end{cases}$ אז נפריך את הטענה.

מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 13

נתון: $z \neq 2$.

צ"ל: $\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{z-2}\right) = 0 \iff \operatorname{Im}(z) = 0$

ראשית נפתח את $\frac{z+2}{z-2}$:

$$\frac{z+2}{z-2} = \frac{z+2}{z-2}\cdot\overline{\left(\frac{z-2}{z-2}\right)} = \frac{z+2}{z-2}\cdot\left(\frac{\overline{z-2}}{\overline{z-2}}\right) = \frac{z+2}{z-2}\cdot\frac{\overline{z}-2}{\overline{z}-2} = \frac{z\overline{z} - 2z + 2\overline{z} - 4}{|z-2|^2} =$$

$$= \frac{|z|^2 + 2(\overline{z} - z) - 4}{|z-2|^2} = \frac{1}{|z-2|^2}\cdot\left(|z|^2 - 4 - 2i\operatorname{Im}(z)\right)$$

כיוון $\Leftarrow$: נוכיח $\operatorname{Im}\left(\frac{z+2}{z-2}\right) = 0 \Leftarrow \operatorname{Im}(z) = 0$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Im}\left[\frac{1}{|z-2|^2}\cdot\left(|z|^2-4-4i\,\mathrm{Im}(z)\right)\right]=0 \quad\Rightarrow\quad 2\,\mathrm{Im}(z)=0 \quad\Rightarrow$$
$$\mathrm{Im}(z)=0$$

כיוון $\Rightarrow$: נוכיח $\mathrm{Im}(z)=0 \quad\Leftarrow\quad \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)=0$.

נניח בשלילה כי $\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)\neq 0$.

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Im}\left[\frac{1}{|z-2|^2}\cdot\left(|z|^2-4-4i\,\mathrm{Im}(z)\right)\right]\neq 0 \quad\Rightarrow\quad 4\,\mathrm{Im}(z)\neq 0 \quad\Rightarrow$$
$$\mathrm{Im}(z)\neq 0$$

קיבלנו סתירה לנתון $\mathrm{Im}(z)=0$, לכן ההנחה בשלילה אינה נכונה, לכן הטענה נכונה.

מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 14

נתון: $z\neq 0$.

צ"ל: $\mathrm{Re}\left[\left(1+\frac{1}{\overline{z}}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]<1$.

נפתח את הביטוי:

$$\mathrm{Re}\left[\left(1+\frac{1}{\overline{z}}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}}+\frac{1}{\overline{z}}\right)\left(\frac{z}{z}-\frac{1}{z}\right)\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}\right)\left(\frac{1-z}{z}\right)\right] =$$
$$\mathrm{Re}\left[\frac{|z|^2+z-\overline{z}-1}{|z|^2}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{|z|^2-1+2i\,\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}\right] = \frac{|z|^2-1}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2}-\frac{1}{|z|^2} = 1-\frac{1}{|z|^2}$$

ומכיוון ש $|z|^2$ הינו מספר ממשי אזי ברור כי $1-\frac{1}{|z|^2}<1$.

מ.ש.ל.

פתרון לפרק 13, עמוד 5, שאלה 1

ראשית נמצא מהו $(1+i)^3$:

$$(1+i)^3=\left[(1+i)\right]^3=\left[\sqrt{2}cis(45)\right]^3=\left(\sqrt{2}\right)^3 cis(135)$$

נמצא את שלושת השורשים השלישיים של מספר זה:

$$z^3=\left(\sqrt{2}\right)^3 cis(135)$$
$$z=\sqrt{2}cis\left(\frac{135}{3}+\frac{360}{3}k\right)=\sqrt{2}cis(45+120k),\qquad k=0,1,2$$
$$z_1=\sqrt{2}cis45=(1+i)$$
$$z_2=\sqrt{2}cis(165)$$
$$z_3=\sqrt{2}cis(285)$$

פתרון לפרק 13, עמוד 13, שאלה 1 א'

נסמן $\left(a,b\in R\right)$, $z=a+ib$.

$$z^2+|z^2|=1+2i$$

$$a^2-b^2+i2ab+\sqrt{a^4+b^4-2a^2b^2+4a^2b^2}=1+2i$$

$$a^2-b^2+i2ab+\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}=1+2i$$

$$a^2-b^2+i2ab+\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}=1+2i$$

$$a^2-b^2+i2ab+\left(a^2+b^2\right)=1+2i$$

$$2a^2+i2ab=1+2i \qquad \Rightarrow \qquad a^2+iab=\frac{1}{2}+i$$

קיבלנו $\begin{cases} a^2=\frac{1}{2} \\ ab=1 \end{cases}$.

מקרה I: $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$. (a חייב להיות ממשי ולא מרוכב, ציינו זאת בתחילת התרגיל).

$$a=\sqrt{\tfrac{1}{2}} \Rightarrow \qquad b=\frac{1}{a}=\sqrt{2}$$

מקרה II: $a=-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$$a=-\sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad b=\frac{1}{a}=-\sqrt{2}$$

לכן הפתרונות הם:

$$z_1=\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{2} \qquad , \qquad z_2=-\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{2}$$

גליון 3 - מטריצות

פתרון לשאלה 8

ראשית נחשב את המשוואה $z^3 = i$:

$$z^3 = i = cis(90)$$
$$z = cis(30+120k)\ ,\quad k = 0,1,2$$
$$z_1 = cis(30) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i$$
$$z_2 = cis(150) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i$$
$$z_3 = cis(270) = -i$$

נשים לב כי סכום השורשים הוא אפס: $\sum_{i=1}^{3} z_i = 0$.

א. נבצע את ההכפלה:

$$AB = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1+z_2+z_3 \\ z_2+z_3+z_1 \\ z_3+z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ב.

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i & -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i & -i \end{pmatrix}$$

פתרון לשאלה 15

א. נשים לב כי גודל AE הוא $q \times n$. נבחן את הביטוי לאיבר כללי ב- AE : $(AE)_{ij} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip} e_{pj}$.

נתון כי האיבר e_{kl} הוא היחיד שאינו אפס, כלומר כל שאר האיברים הם בהכרח אפס, ובפרט כל העמודות שאינן העמודה ה- l ב- E הנן כולן אפסים. לכן עבור כל i ולכל $j \neq l$ מתקיים כי $(AE)_{ij} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip} e_{pj} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip} \cdot 0 = 0$,

כלומר כל עמודות AE חוץ מהעמודה ה- l הן אפסים.

נבחן את העמודה ה- l ב- AE :

כל האיברים e_{pl} הם אפסים פרט לכאשר $p = k$, ולכן האיבר $(AE)_{il}$ עבור $1 \le i \le q$ יראה כך:

$$(AE)_{il} = \sum_{p=1}^{m} a_{ip} e_{pl} = \sum_{p=1}^{k-1} a_{ip} e_{pl} + a_{ik} e_{kl} + \sum_{p=k+1}^{m} a_{ip} e_{pl} = \sum_{p=1}^{k-1} a_{ip} \cdot 0 + (a_{ik} \cdot 1) + \sum_{p=k+1}^{m} a_{ip} \cdot 0 = a_{ik}$$

(כי רק עבור $p = k$ מתקיים ש- $e_{kl} = 1$, ואחרת $e_{pl} = 0$).

קיבלנו כי $(AE)_{1l} = a_{1k}\ ,\ (AE)_{2l} = a_{2k}\ ,\ \ldots\ ,\ (AE)_{ql} = a_{qk}$, או במילים אחרות:

המטריצה AE היא מטריצה שהעמודה ה- l שלה זהה לעמודה ה- k ב- A .

בצורה פורמלית:

$$\forall i\ 1 \le i \le q\ ,\ (AE)_{ij} = \begin{cases} a_{ik}\ , & j = l \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

ב. נשים לב כי גודל EB הוא $m\times p$. נבחן את הביטוי לאיבר כללי ב- EB : $(EB)_{ij}=\sum_{r=1}^{n}e_{ir}b_{rj}$.

נתון כי האיבר e_{kl} הוא היחיד שאינו אפס, כלומר כל שאר האיברים הם בהכרח אפס, ובפרט כל השורות שאינן השורה ה- k ב- E הנן כולן אפסים. לכן עבור כל j ולכל $i\neq k$ מתקיים כי $(EB)_{ij}=\sum_{r=1}^{n}e_{ir}b_{rj}=\sum_{r=1}^{m}0\cdot b_{rj}=0$,

כלומר כל שורות EB חוץ מהשורה ה- k הן אפסים.

נבחן את השורה ה- k ב- EB :

כל האיברים e_{kr} הם אפסים פרט לכאשר $r=l$, ולכן האיבר $(EB)_{kj}$ עבור $1\le j\le p$ יראה כך :

$$(EB)_{kj}=\sum_{r=1}^{n}e_{kr}b_{rj}=\sum_{r=1}^{l-1}e_{kr}b_{rj}+e_{lr}b_{lj}+\sum_{r=l+1}^{n}e_{kr}b_{rj}=\sum_{r=1}^{l-1}0\cdot b_{rj}+(1\cdot b_{lj})+\sum_{r=l+1}^{n}0\cdot b_{rj}=b_{rj}$$

(כי רק עבור $r=l$ מתקיים ש- $e_{kl}=1$, ואחרת $e_{kr}=0$).

קיבלנו כי $(EB)_{k1}=b_{l1}$, $(EB)_{k2}=b_{l1}$, ... , $(EB)_{kp}=b_{lp}$, או במילים אחרות :

המטריצה EB היא מטריצה שהשורה ה- k שלה זהה לשורה ה- l ב- B.

בצורה פורמלית :

$$\forall j\ 1\le j\le p\ ,\ (EB)_{ij}=\begin{cases}b_{lj}\,, & i=k\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

ג. נסמן לעצמנו $E_{n\times m}=E^{(2)}$, $E_{m\times n}=E^{(1)}$.

נשים לב כי גודל $E^{(1)}E^{(2)}$ הוא $m\times m$. נבחן את הביטוי לאיבר כללי ב- $E^{(1)}E^{(2)}$: $\left(E^{(1)}E^{(2)}\right)_{ij}=\sum_{r=1}^{n}e_{ir}^{(1)}e_{rj}^{(2)}$.

אם נסמן את $E_{n\times m}=E^{(2)}$ כ- B, נקבל את סעיף ב'. נפתור לפי המסקנות שהגענו אליהן בסעיף ב', כלומר הוכחנו כי המטריצה $E^{(1)}B$ היא מטריצה שהשורה ה- k שלה זהה לשורה ה- l ב- B, או אם נחזור לסימון הקודם :

המטריצה $E^{(1)}E^{(2)}$ היא מטריצה שהשורה ה- k שלה זהה לשורה ה- l ב- $E^{(2)}$.

נבחן את איברי השורה ה- k ב- $E^{(1)}E^{(2)}$:

כל האיברים $e_{kr}^{(1)}$ הם אפסים פרט לכאשר $r=l$, וכן כל האיברים $e_{rk}^{(2)}$ הם אפסים פרט לכאשר $r=l$, ולכן האיבר ה- i בשורה ה- k $\left(E^{(1)}E^{(2)}\right)_{ki}$ יראה כך :

$$\left(E^{(1)}E^{(2)}\right)_{ki}=\begin{cases}\sum_{r=1}^{n}e_{kr}^{(1)}e_{ri}^{(2)}=e_{k1}^{(1)}e_{1i}^{(2)}+...+e_{kl}^{(1)}e_{li}^{(2)}+...+e_{kn}^{(1)}e_{ni}^{(2)}=0\cdot 0+...+1\cdot 1+...+0\cdot 0=1\ , & i=k\\ \sum_{r=1}^{n}e_{kr}^{(1)}e_{ri}^{(2)}=0\cdot 0+...+0\cdot 0=0 \quad , & otherwise\end{cases}$$

קיבלנו כי במטריצת המכפלה בשורה ה- k האיבר היחיד שאינו אפס הוא האיבר במקום ה- k : $\left(E^{(1)}E^{(2)}\right)_{kk}=1$.

לסיכום : המטריצה $E^{(1)}E^{(2)}$ היא מטריצה שכל האיברים בה הם אפסים פרט לאיבר בשורה ובעמודה ה- k השווה ל-1. בצורה פורמלית :

$$\forall i,j\ \ 1\le i\le m\ \ 1\le j\le m\ \ \left(E^{(1)}E^{(2)}\right)_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=k\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

פתרון לשאלה 16

א. ע"פ סעיף א' של השאלה הקודמת, $CE^{k,k}$ היא המטריצה שהעמודה ה- k שלה זהה לעמודה ה- k ב- C.
כלומר, $CE^{k,k}$ נראית כך:

$$CE^{k,k}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & c_{1k} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_{2k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n-1,k} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_{nk} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

מצד שני, ע"פ סעיף ב' של השאלה הקודמת, $E^{k,k}C$ היא המטריצה שהשורה ה- k שלה זהה לשורה ה- k ב- C. כלומר, $E^{k,k}C$ נראית כך:

$$E^{k,k}C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{k,n-1} & c_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נתון כי C מתחלפת בכפל עם כל מטריצה מאותו הסדר, ולכן $CE^{k,k}=E^{k,k}C$.
לכן ניתן להסיק כי בהכרח $c_{ij}=0$ עבור $i\neq j$, וזאת הגדרת המטריצה האלכסונית.

ב. נתון כי C מתחלפת בכפל עם $E^{1,k}$ לכל $k=2,3,\dots,n$. נכתוב את המטריצות עבור $k=2$:
($CE^{1,2}$ היא המטריצה שבה העמודה השניה של $CE^{1,2}$ שווה לעמודה הראשונה של C,
$E^{1,2}C$ היא המטריצה שבה השורה הראשונה של $E^{1,2}C$ שווה לשורה השניה של C).

$$CE^{1,2}=\begin{pmatrix} 0 & c_{11} & \dots & 0 \\ 0 & c_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n-1,1} & \cdots & 0 \\ 0 & c_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}=E^{2,1}C$$

ניתן לראות כי $c_{11}=c_{22}$.
ובאופן כללי:

$$CE^{1,k}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & c_{11} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n-1,1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{k,n-1} & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}=E^{1,k}C$$

ואז נקבל כי $c_{11}=c_{kk}$.

לסיכום: הראינו כי C היא מטריצה אלכסונית, וכן כי $c_{11}=c_{kk}$ לכל $k=2,3,\dots,n$ כלומר כל איברי האלכסון שווים זה לזה, ולכן C היא מטריצה סקלרית.
מ.ש.ל.

פתרון לשאלה 24

א. נכתוב את המטריצות ונשים לב לסדרים:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad x=\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad b=\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

נבצע את ההכפלה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_{i1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$b=\begin{pmatrix} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+a_{13}x_{13}+\ldots+a_{1n}x_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{11}+a_{m2}x_{21}+a_{m3}x_{13}+\ldots+a_{mn}x_{n1} \end{pmatrix}=$$

$$=x_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+x_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+x_{31}\begin{pmatrix} a_{13} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{pmatrix}+\ldots+x_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

נשים לב שקיבלנו את b כצירוף לינארי של עמודות A.

ב. נכתוב את המטריצות ונשים לב לסדרים:

$$x=\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1m} \end{pmatrix} \quad , \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad b=\begin{pmatrix} b_{11}\ldots b_{1n} \end{pmatrix}$$

נבצע את ההכפלה:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} x_{1i}a_{i1} & \ldots & \sum_{i=1}^{m} x_{1i}a_{in} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x_{11}a_{11}+x_{12}a_{21}+\ldots+x_{1m}a_{m1} & \ldots & x_{11}a_{1n}+x_{12}a_{2n}+\ldots+x_{1m}a_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=x_{11}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}+x_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}+\ldots+x_{1m}\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

נשים לב שקיבלנו את b כצירוף לינארי של שורות A.

ג. נכתוב את המטריצות ונשים לב לסדרים:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

נבצע את ההכפלה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ik} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1k}+\ldots+a_{1n}b_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+\ldots+a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1k}+\ldots+a_{mn}b_{nk} \end{pmatrix}$$

נכתוב את עמודות C כצירוף ליניארי של עמודות A.
את העמודה ה-i של C $(1\le i\le k)$ ניתן לבטא כך:

$$b_{1i}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+b_{2i}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\ldots+b_{ni}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

נכתוב את שורות C כצירוף ליניארי של שורות B.
את השורה ה-i של C $(1\le i\le m)$ ניתן לבטא כך:

$$a_{i1}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \end{pmatrix}+a_{i2}\begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \end{pmatrix}+\ldots+a_{in}\begin{pmatrix} b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

פתרון לשאלה 25

ב. הטענה איננה נכונה, נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & \frac{14}{3} \\ 7 & 12 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad AB=BA=\begin{pmatrix} 19 & \frac{86}{3} \\ 43 & 62 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & \frac{14}{3} \\ 7 & 12 \end{pmatrix} \quad , \quad B^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad AB^t=\begin{pmatrix} \frac{43}{3} & \frac{101}{3} \\ 31 & 69 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 26 & \frac{122}{3} \\ 38 & \frac{171}{3} \end{pmatrix}=B^tA$$

ג. הטענה איננה נכונה, נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהמטריצה AB איננה מטריצה אנטי סימטרית ולכן הטענה איננה נכונה.

ד. הטענה איננה נכונה, נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad AB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad BA=\begin{pmatrix} -14 & 18 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שהמטריצה AB היא מטריצה אנטי סימטרית אך לא מתקיים כי $AB=BA$, ולכן הטענה איננה נכונה.

פתרון לשאלה 27

נבנה את המטריצה A ע"פ הדרישות: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. מתקיים ש- $tr(A)=a+(-a)=0$.

נבצע את ההכפלה:

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab-ab \\ ac-ac & bc+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי A^2 היא מטריצה סקלרית.
מ.ש.ל.

פתרון לפרק 13, עמוד 7, שאלה 1 א'

נחפש מטריצה $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ כך שיתקיים $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ מעל Z_5.

נרשום את המשוואות ונפתור אותן:

$$\begin{cases} a+2c=2 \\ b+2d=4 \\ 3c=0 \\ 3d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}$$

המטריצה B היא: $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

גליון 4 – דירוג, דרגה ואלמנטריות

כדי לוודא את תוצאתנו בדירוג מטריצות, ניתן להעזר באתר הבא אשר מדרג מטריצות לצורה קנונית מכל סדר וגם מפרט את דרך הפיתרון: http://www.gregthatcher.com/Mathematics/GaussJordan.aspx
(דירוג מטריצות לצורה קנונית באנגלית: **Gauss–Jordan elimination**).

פתרון לפרק 13, עמוד 1, תרגיל 2 א'

נתון כי המטריצות A ו- B הן שקולות שורה, ולכן ניתן להביא אותן לצורה קנונית יחידה.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4\\3&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 3R_1}\begin{pmatrix}1&0&4\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\end{pmatrix}$$

כעת נבטא את הפעולות שביצענו באמצעות המטריצות האלמנטריות:
עבור B:

$$\xrightarrow{R_1\to 3R_1}: \quad \begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=E_1$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1}: \quad \begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=E_2$$

עבור A אנו זקוקים לפעולה ההפוכה שביצענו, על מנת לעבור מהמטריצה הקנונית ל- A.
תחת Z_5 נבטא זאת כך:

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1}: \quad \begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=E_3$$

כעת ניתן לרשום:

$$A=E_3E_2E_1B=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\3&1&4\end{pmatrix}$$

פתרון לפרק 13, עמוד 3, תרגיל 2

א. נבצע פעולות שורה על מנת להביא את A לצורה קנונית:

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 3R_1}\begin{pmatrix}1&3&4\\3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to 3R_2}$$
$$\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\end{pmatrix}$$

ב. נחפש את כל המטריצות הקנוניות מהצורה:

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש 3 סוגים כאלה:

$$\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&a&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

תחת Z_p, לכל a,b יש p אפשרויות, ולכן נקבל סה"כ p^2+p+1 מטריצות קנוניות.

עבור $p=2$ יש 7:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

עבור $p=3$ יש 13:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון לפרק 13, עמוד 7, תרגיל 3

נביא את המטריצה לצורה מדורגת:

$$\begin{pmatrix}a&1&1&a\\a&2&-a+1&a+1\\a&2&a^3-a&2a+1\\-a&-1&-1&a^2-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4+R_1}}\begin{pmatrix}a&1&1&a\\0&1&-a&1\\0&1&a^3-a-1&a+1\\0&0&0&a^2+a-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\begin{pmatrix}a&1&1&a\\0&1&-a&1\\0&0&a^3-1&a\\0&0&0&a^2+a-2\end{pmatrix}$$

ננסה לאפס כל איבר מוביל על מנת לגלות מהם הערכים הקריטיים, ולבסוף נציב אותם אחד אחד ונראה מה התוצאה: נדרוש:

$$\begin{cases} a=0 \\ a^3-1=0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases}$$

המשוואה השניה: $a^3=1$.

$$a^3=cis(0)$$
$$a=cis(120k)\ ,\quad k=0,1,2$$
$$a_1=1\quad ,\quad a_2=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\quad ,\quad a_3=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

המשוואה השלישית:

נסמן $a=c+id$ כאשר $c,d\in R$.

$$a^2+a-2=(c+id)^2+c+id-2=c^2-d^2+c-2+i(2cd+d)=0$$

$$\begin{cases} 2cd+d=0 \\ c^2-d^2+c-2=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} d(2c+1)=0 \\ c^2-d^2+c-2=0 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה רואים ש- $d=0$ או $c=-\frac{1}{2}$ הם פתרונות. נציב את $c=-\frac{1}{2}$ במשוואה השניה ונקבל:

$$\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}-2=d^2\qquad\Rightarrow\qquad d^2=-2\tfrac{1}{4}$$

$d\in R$ ולכן אין פתרון, כלומר $c=-\frac{1}{2}$ אינו פתרון מתאים למערכת הזו.

ננסה את $d=0$: $\quad c^2+c-2=0\qquad\Rightarrow\qquad c_{1,2}=1,-2$

כלומר בינתיים קיבלנו כי $a=1$ או $a=-2$.

נאחד את כל הפתרונות שקיבלנו בינתים ונשלול אותם: $a\neq 0\ ,\ 1\ ,\ -2,\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

כעת נציב כל אחד מהפתרונות, ונבדוק איזה דרגה כל פיתרון נותן:

- עבור $a=0$:

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2+R_3}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהדרגה המתקבלת היא 3.

- עבור $a=1$:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהדרגה המתקבלת היא 3.

- עבור $a=-2$:

$$\begin{pmatrix} -2&1&1&-2\\ 0&1&2&1\\ 0&0&-9&-2\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהדרגה המתקבלת היא 3.

- עבור $a=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 & 1 & \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to\left(-\frac{1}{3}\right)R_4]{R_3\to\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)R_3} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 & 1 & \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהדרגה היא 3.

- עבור $a=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 & 1 & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to\left(-\frac{1}{3}\right)R_4]{R_3\to\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)R_3} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 & 1 & \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהדרגה היא 3.

<u>לסיכום</u>:

דרגת המטריצה תיהיה 3 עבור כל אחד מהערכים הבאים : $a=0\ ,1\ ,-2,\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

דרגת המטריצה תיהיה 4 עבור כל ערך אחר של a.

דרגת המטריצה לעולם לא תיהיה 0 או 1 או 2.

פתרון לפרק 13, עמוד 1, תרגיל 2 א'

נתונה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

נשים לב כי תחת Z_2 מתקיים $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן דרגתה 1.

לעומת זאת תחת Z_3 מתקיים $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן דרגתה 2.

תחת Z_5 מתקיים $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{R_2\to R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ולכן דרגתה 2.

אם כך, נחפש עבור כל p ראשוני, מהו התנאי כך שיתקיים שדרגת המטריצה תיהיה 2, כלומר שיתקיים שהאיבר a_{21} יתאפס אך האיבר a_{22} לא יתאפס:

$$\begin{cases} 3+1\cdot k=p \\ 4+2\cdot k\neq p \end{cases} \quad \text{עבור } 1<k<p.$$

במשוואה הראשונה נבטא את k באמצעות p : $k=p-3$. נציב למשוואה השניה:

$$4+2(p-3)\neq p \qquad \Rightarrow \qquad p\neq 2.$$

קיבלנו כי לכל $p\neq 2$ דרגת המטריצה תיהיה 2.

גליון 5 – מרחב וקטורי + מרחב נפרש

פתרון לפרק 3, שאלה 5

ב. הקבוצה הנתונה אינה תת מרחב מכיוון שאינה סגורה לחיבור.
נניח בשלילה כי הקבוצה הנתונה היא כן תת מרחב, נקרא לו V_b.
ניקח 2 מטריצות $n\times n$ המקיימות את התנאי שמכפלת איבריהן הוא אפס:

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&\dots&1&0\\1&\dots&1&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\dots&1&1\end{pmatrix}.$$

לכן $A_1,\ A_2\in V_b$. נבצע את החיבור:

$$A_1+A_2=\begin{pmatrix}0&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&\dots&1&0\\1&\dots&1&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\dots&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&2&1\\2&2&\dots&2&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&\cdots&2&2\end{pmatrix}\notin V_b.$$

$\left(A_1+A_2\right)\notin V_b$ מכיוון שמכפלת איבריה אינה אפס. הוכחנו כי הקבוצה הנתונה אינה סגורה לחיבור, לכן ההנחה שגויה, ולכן V_b אינו תת מרחב.

ד. הקבוצה הנתונה (נסמן V_d) הינה תת מרחב של V.
ראשית נראה באופן כללי כי V_d היא קבוצת המטריצות הסימטריות:

$$A=2A^t-A\qquad /+A$$
$$2A=2A^t\qquad\Rightarrow\qquad A=A^t$$

וזוהי הגדרת מטריצה סימטרית.
כעת נוכיח V_d היא תת מרחב ע"י הוכחת קיום שלושת התנאים:
I – מטריצת האפס מסדר $n\times n$: $0\in V_d$ כי מטריצת האפס היא סימטרית ולכן $V_d\neq\phi$.
II – סגירות לחיבור: נראה כי $\left(A+B\right)\in V_d \quad\Rightarrow\quad A,B\in V_d$.
נקח את האיבר הכללי ב-$\left(A+B\right)$: $\left(A+B\right)_{ij}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\left(a_{ji}+b_{ji}\right)=\left(A+B\right)_{ji}$, כלומר קיבלנו כי $\left(A+B\right)=\left(A+B\right)^t$, ולכן $\left(A+B\right)\in V_d$.
III – כפל בסקלר: נראה כי $a\left(A\right)\in V_d \quad\Rightarrow\quad A\in V_d$, כלומר $\alpha\left(A\right)=\left(a\left(A\right)\right)^t$.
נקח את האיבר הכללי ב $\alpha\left(A\right)$: $\alpha\left(A\right)_{ij}=\alpha\left(a_{ij}\right)=\alpha\left(a_{ji}\right)=\alpha\left(A\right)_{ji}$, כלומר קיבלנו כי $\alpha\left(A\right)=\left(\alpha\left(A\right)\right)^t$,
ולכן $\alpha\left(A\right)\in V_d$.
הראנו את שלושת התכונות לקיום תת מרחב, ולכן V_d תת מרחב.
מ.ש.ל.

ו. הקבוצה הנתונה (נסמנה כ- V_f) אינה תת מרחב, מכיוון שהיא איננה סגורה לחיבור.
נניח בשלילה כי V_f היא כן תת מרחב.
ניקח 2 מטריצות $n\times n$ המקיימות את התנאי – דרגתן 1: A_1 היא המטריצה שבשורה הראשונה שלה האיבר הראשון הוא 1 וכל שאר האיברים הם 0, בעוד ש- A_2 היא המטריצה שבשורה האחרונה שלה האיבר האחרון הוא 1 וכל שאר האיברים הם 0:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

לכן $A,\ B\in V_f$.

נבצע את החיבור: $$A+B=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.$$

$(A+B)\notin V_b$ מכיוון שדרגת $(A+B)$ היא 2 ולא 1.

הוכחנו כי הקבוצה הנתונה אינה סגורה לחיבור, לכן ההנחה שגויה, ולכן V_f אינו תת מרחב.

פתרון לפרק 3, שאלה 6

על מנת להראות מרחב וקטורי עלינו להוכיח קיום כל עשרת התכונות.

1) סגירות לחיבור: $x,y\in V \quad\Leftarrow\quad (x\oplus y)\in V$:

$$x,y\in V \ \Rightarrow\ x,y\in R^+ \ \Rightarrow\ x\oplus y=xy \ \Rightarrow\ xy\in R^+ \ \Rightarrow\ (x\oplus y)\in V$$

2) אסוציאטיביות: לכל $x,y,z\in V$ מתקיים: $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$:

$$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus yz=xyz \qquad (x\oplus y)\oplus z=xy\oplus z=xyz$$

קיבלנו שוויון ולכן האסוציאטיביות מתקיימת.

3) קומוטטיביות: לכל $x,y\in V$ מתקיים $x\oplus y=y\oplus x$:

$$x\oplus y=xy=yx=y\oplus x$$

4) קיום איבר נייטרלי: קיים איבר 0 ב- V המקיים $0+x=x$ לכל $x\in V$:

ננחש כי איבר האפס הוא 1. נבדוק את הניחוש:

$1\in R^+$, וגם מתקיים $1\oplus x=1x=x$ לכל $x\in R^+$. הוכחנו כי הניחוש נכון.

5) איבר נגדי: לכל $x\in V$ קיים $(-x)\in V$ המקיים $x\oplus(-x)="0"$.

נחפש איבר המקיים: $x\oplus(-x)=1$, ולכן האיבר הנגדי של x הוא $\frac{1}{x}$.

$V=R^+$ ולכן אין סכנה בחלוקה באפס.

6) $\begin{cases}x\in R^+\\ \alpha\in R\end{cases} \quad\Leftarrow\quad \alpha\circ x\in R^+$:

ע״פ ההגדרה, $\alpha\circ x=x^\alpha$. $x^\alpha\in R^+$ לכל $\alpha\in R$, נובע מתכונות החזקה ב- R.

7) $\begin{cases}x_1,x_2\in R^+\\ \alpha\in R\end{cases} \quad\Leftarrow\quad \alpha\circ(x_1\oplus x_2)=\alpha\circ x_1\oplus\alpha\circ x_2$:

$$\alpha\circ(x_1\oplus x_2)=\alpha\circ(x_1x_2)=(x_1x_2)^\alpha=(x_1)^\alpha(x_2)^\alpha=\alpha\circ x_1\oplus\alpha\circ x_2$$

8) $\begin{cases}x\in R^+\\ \alpha,\beta\in R\end{cases} \quad\Leftarrow\quad (\alpha+\beta)\circ x=\alpha\circ x\oplus\beta\circ x$:

$$(\alpha+\beta)\circ x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta} = \alpha\circ x \oplus \beta\circ x$$

9) $\begin{cases} x\in R^+ \\ \alpha,\beta\in R \end{cases} \Leftarrow \quad (\alpha\beta)\circ x = \alpha\circ(\beta\circ x)$

$$(\alpha\beta)\circ x = x^{\alpha\beta} = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = \alpha\circ(\beta\circ x)$$

10) $\begin{cases} x\in R^+ \\ 1\in R \end{cases} \Leftarrow \quad 1\circ x = x$: $\quad 1\circ x = x^1 = x$.

הראינו קיום כל עשרת התכונות, ולכן הקבוצה הנתונה תחת הפעולות החדשות היא מרחב וקטורי.

פתרון לפרק 13, עמוד 2, שאלה 4

א. U היא איננה תת מרחב מכיוון שאינה מקיימת את תכונת הכפל בסקלר. נראה ע"י דוגמא:

תהי $A=\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}$. $A\in U$ מכיוון ש- $6=2\cdot 1+4\cdot 1$, וכמו כן $(6-1)^2=25\neq 4$.

נבחר את הסקלר להיות $\frac{2}{5}$: $\frac{2}{5}A=\frac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix}6&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&0\end{pmatrix}$. ניתן לראות שכעת הדרישה $(a-c)^2\neq 4$

אינה מתקיימת, מכיוון ש- $\left(\frac{12}{5}-\frac{2}{5}\right)^2=2^2=4$, ולכן $\frac{2}{5}A\notin U$. לכן U איננה תת מרחב.

ב. התשובה שלילית, כלומר u הוא אינו כפולה של v_n. יהיה $V=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in R\right\}$ מרחב ווקטורי. נסמן

את האיברים ב- V: $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. יהיה $u=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$, כלומר איבר הנפרש ע"י

v_1,v_2,v_3 אך לא ע"י v_1,v_2. קל לראות כי u הוא אינו כפולה של v_n.

ג. W אינו תת מרחב לכל בחירה של U ו- V מכיוון שאינו מקיים את תכונת הסגירות לחיבור.

נראה זאת ע"י שני איברים ששניהם ב- W אך חיבורם נותן איבר שאינו ב- W.

יהי $u\in U$, $u\neq 0$. בהכרח יש אחד כזה כי $U\neq\{0\}$.

יהי $w\in W$, $w\neq 0$. ע"פ הגדרת W נובע כי $w\notin U$.

ל- w קיים נגדי והוא $(-w)$. נתבונן באיבר: $z=u+(-w)$.

טענה: $z\notin U$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $z\in U$.

יהי $(-u)$ הנגדי של u. $(-u)\in U$ (U הוא גם כן מרחב וקטורי, ולכן אם $(-u)\notin U$ אז U אינו מרחב וקטורי ולכן גם לא תת מרחב, בסתירה לנתוני השאלה).

מתכונת הסגירות לחיבור של U נובע:

$$\begin{cases}(-u)\in U\\ z\in U\end{cases} \Rightarrow \quad z+(-u)=u+(-u)+(-w)=(-w)\in U$$

$(-w)\in U \quad\Leftarrow\quad w\in U$ (לפי אותו טיעון, אחרת U אינו מרחב וקטורי).

$w\in U \quad\Leftarrow\quad w\notin W$ ע"פ הגדרת W.

אך אנו בחרנו את w כך ש- $w\in W$.

לכן קיבלנו סתירה, כלומר ההנחה כי $z\in U$ איננה נכונה ולכן $z\notin U$.

נחזור לטענה המקורית, כי W אינו תת מרחב מכיוון שאינו מקיים את תכונת הסגירות לחיבור.

לפי הגדרת W: $z \notin U \quad \Leftarrow \quad z \in W$.
נבצע את החיבור:

$$\begin{cases} z \in W \\ w \in W \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z + w = u + (-w) + w = u$$

$u \in U \quad \Leftarrow \quad u \notin W$, כלומר תכונת הסגירות לחיבור אינה מתקיימת אצל W.

פתרון לפרק 13, עמוד 8, שאלה 4

א. הקבוצה הנתונה (נסמנה כ- V) איננה תת מרחב מכיוון שאינה מקיימת את תכונת הכפל בסקלר.
נראה ע"י דוגמא:

תהי $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. $b \in V$ מכיוון ש- $|10-11| < 2$, וכמו כן $10 = 2 \cdot 5$.

נבחר את הסקלר להיות 5: $5b = 5 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 55 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$. ניתן לראות שכעת הדרישה $|a-b| < 2$ אינה מתקיימת, מכיוון ש- $|50-55| > 2$, ולכן $5b \notin V$.
לכן V איננה תת מרחב.

ב. הקבוצה הנתונה (נסמנה כ- V) איננה תת מרחב מכיוון שאינה מקיימת את תכונת הכפל בסקלר.
נראה ע"י דוגמא:

תהי $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A \in V$ מכיוון ש- $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ כאשר $3 \in Q$.

נבחר את הסקלר להיות $\sqrt{7}$ (מותר לבחור סקלר כזה, מכיוון שלא נתונה דרישה על השדה של איברי F, אנו מניחים ששדה זה הוא R). נבצע את ההכפלה: $\sqrt{7}A = \sqrt{7}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cdot\sqrt{7} & 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ניתן לראות שכעת הדרישה אינה מתקיימת כי $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7} + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7} = \left(3\cdot\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{2}$ ו- $\left(3\cdot\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{2}$ אינו רציונלי.
לכן V איננו תת מרחב.

ג. הקבוצה הנתונה (נסמן כ- V) היא תת מרחב.
לפני שנראה את שלושת התנאים, נראה באופן כללי את משמעות התנאי לשיוך לקבוצה:
אם $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ וגם $f(x) \in V$ אזי:

$$f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \quad , \quad f(0) = a_0$$
$$a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = \tfrac{1}{2}a_0 \quad \Rightarrow \quad a_3 + a_2 + a_1 = -\tfrac{1}{2}a_0$$

כעת נראה קיום תת מרחב ע"י הוכחת קיום כל שלושת התנאים:

I – $V \neq \phi$: איבר האפס הוא $f_0(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0 = 0$.
$f_0 \in V$ כי $f_0(0) = 0$, $f_0(1) = 0$ ומתקיים $f_0(1) = \frac{1}{2}f_0(0)$.

II – סגירות לחיבור: יהיו $f_A(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $f_B(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ כך ש- $f_A(x), f_B(x) \in V$. כלומר, $a_3 + a_2 + a_1 = -\frac{1}{2}a_0$ וגם $b_3 + b_2 + b_1 = -\frac{1}{2}b_0$.

$f_{A+B}(x)=f_A(x)+f_B(x)=\left(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\right)+\left(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\right)=$
$=\left(a_3+b_3\right)x^3+\left(a_2+b_2\right)x^2+\left(a_1+b_1\right)x^1+\left(a_0+b_0\right)$
$f_{A+B}(0)=a_0+b_0$
$f_{A+B}(1)=\left(a_3+b_3\right)+\left(a_2+b_2\right)+\left(a_1+b_1\right)+\left(a_0+b_0\right)=$
$=\left(a_3+a_2+a_1\right)+\left(b_3+b_2+b_1\right)+\left(a_0+b_0\right)=\left(-\frac{1}{2}a_0\right)+\left(-\frac{1}{2}b_0\right)+\left(a_0+b_0\right)=$
$=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}b_0=\frac{1}{2}\left(a_0+b_0\right)=\frac{1}{2}f_{A+B}(0)$

III – כפל בסקלר: תהיה $f_A(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ כך ש- $f_A(x)\in V$, כלומר, מתקיים $a_3+a_2+a_1=-\frac{1}{2}a_0$. נכפול בסקלר: $f_{\lambda A}(x)=\lambda\cdot f_A(x)=\lambda\cdot\left(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\right)$.

$f_{\lambda A}(0)=\lambda a_0$
$f_{\lambda A}(1)=\lambda\cdot\left(a_3+a_2+a_1+a_0\right)=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}a_0+a_0\right)=\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}a_0\right)=\frac{1}{2}\left(\lambda a_0\right)=\frac{1}{2}f_{\lambda A}(0)$

ולכן $f_{\lambda A}(x)\in V$.
הראנו קיום כל שלושת התכונות ולכן V הינה תת מרחב.

גליון 6 – מערכת משוואות

פתרון לפרק 6, שאלה 4

נרשום את A^* ונדרג אותה:

$$A^*=\begin{pmatrix}1&2&-3&a\\3&-1&2&b\\1&-5&8&c\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\begin{pmatrix}1&2&-3&a\\0&-7&11&b-3a\\0&-7&11&c-a\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&-3&a\\0&-7&11&b-3a\\0&0&0&c-b+2a\end{pmatrix}$$

אם $c-b+2a\neq 0$ אז $r(A)=2\neq 3=r(A^*)$, ולכן אין פתרונות למערכת.

אם $c-b+2a=0$ אז $r(A)=r(A^*)=2$, יש אינסוף פתרונות ודרגת חופש אחת כי $n-r(A)=3-2=1$.

לא יתכן מצב בו יתקיים פתרון יחיד למערכת.

פתרון לפרק 6, שאלה 5

נרשום את A^* ונדרג אותה:

$$A^*=\begin{pmatrix}1&k&1&0\\k&1&k&0\\k+1&-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-(k+1)R_1]{R_2\to R_2-k\cdot R_1}\begin{pmatrix}1&k&1&0\\0&1-k^2&0&0\\0&(-k^2-k-1)&-k&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to(1-k^2)R_3+(k^2+k+1)R_1}\begin{pmatrix}1&k&1&0\\0&1-k^2&0&0\\0&0&k(k^2-1)&0\end{pmatrix}$$

נבחן את הערכים החשודים: $k=0,\ \pm1$.

<u>מקרה I</u> – נציב $k=0$: $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, נקבל אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

(כי $r(A)=r(A^*)=2$, $n-r(A)=3-2=1$).

<u>מקרה II</u> – נציב $k=1$: $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, נקבל אינסוף פתרונות עם שתי דרגות חופש.

(כי $r(A)=r(A^*)=1$, $n-r(A)=3-1=2$).

<u>מקרה III</u> – נציב $k=-1$: $\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, אינסוף פתרונות עם שתי דרגות חופש.

לסיכום:

למערכת יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת כאשר $k=0$.

למערכת יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש כאשר $k=-1,\ 1$.

עבור הערכים $k\neq -1,\ 0,\ 1$ יש למערכת פיתרון יחיד.

פתרון לפרק 6, שאלה 12

ע"פ הנתון, ניתן להסיק כי המטריצה A היא מסדר 3×4, כלומר יש 3 משוואות ו-4 נעלמים.
מבין שלושת האפשרויות למספר הפתרונות האפשריים (אין פתרון, פתרון יחיד, אינסוף פתרונות) ניתן לפסול את "אין פתרון" מכיוון שנתון שיש פתרון למערכת. ואם יש 3 משוואות ו-4 נעלמים ויש פתרון למערכת אז בהכרח יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

פתרון לפרק 6, שאלה 18

כיוון $\Leftarrow$: למערכת $\begin{pmatrix}1&4&7&a\\2&5&8&b\\3&6&9&c\end{pmatrix}$ יש פתרון $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$.

נדרג את מטריצת המערכת:

$$\begin{pmatrix}1&4&7&a\\2&5&8&b\\3&6&9&c\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&4&7&a\\0&-3&-6&b-2a\\0&-6&-12&c-3a\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&7&a\\0&-3&-6&b-2a\\0&0&0&c+a-2b\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{1}{3}\right)R_2}\begin{pmatrix}1&4&7&a\\0&1&2&\frac{1}{3}(2a-b)\\0&0&0&c+a-2b\end{pmatrix}$$

נרצה שיהיה פתרון למערכת ולכן נדרוש $c+a-2b=0$: $c=2b-a$, כלומר ה- b (וקטור הפתרון, לא הנעלם!) הוא עכשיו $\begin{pmatrix}a\\b\\2b-a\end{pmatrix}$.

כעת כדי לבדוק מהי הקבוצה הפורשת הקנונית, נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-4R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{1}{3}\right)R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\alpha+2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\2\beta-\alpha\end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו כי וקטור הפתרון מקיים את $c=2b-a$ שהוא התנאי עבורו יש למערכת פתרון.
מ.ש.ל כיוון $\Leftarrow$.

כיוון $\Rightarrow$: $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$ $\Leftarrow$ למערכת $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & a\\ 2 & 5 & 8 & b\\ 3 & 6 & 9 & c\end{pmatrix}$ יש פתרון.

הוכחנו כבר כי $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ נפרש ע"י $span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ 2\beta-\alpha\end{pmatrix}$, כלומר מתקיים כי $c=2b-a$.

נדרג את המערכת $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & a\\ 2 & 5 & 8 & b\\ 3 & 6 & 9 & c\end{pmatrix}$ ונקבל כי התנאי לפתרונה הוא $c=2b-a$. התנאי מתקיים ע"פ הנתון ולכן
למערכת יש פתרון.
מ.ש.ל. כיוון $\Rightarrow$.

פתרון לפרק 6, שאלה 21

נתון כי $A\in Z_2$, ולכן תחת שדה זה לעולם לא יתכנו אינסוף פתרונות. ניתן לפסול את סעיפים א' ו-ד'.
נתון כי יש 8 פתרונות, כלומר יש מספר דרגות חופש. מספר דרגות החופש הוא איזשהי חזקה של p. אצלנו: $p=2$
ולכן מכיוון ש- $2^3=8$ נסיק כי מספר דרגות החופש הוא 3. כעת ניתן להסיק גם את דרגת A:
$n-r(A)=6-x=3 \quad\Leftarrow\quad r(A)=x=3$. ל- A 3 שורות, כלומר בצורה המדורגת של A <u>אין</u> שורות אפסים.
לכן, בזמן דירוג, במטריצה A^* לא תתכן שורה כזאת: $(0 \ \ \dots \ \ 0 \ \ | \ \ a)$ כאשר $a\neq 0$, כי אז לא יהיה פתרון
למערכת. לפיכך ג' נכון, כי לא יתכן c עבורו למערכת $Ax=c$ אין פתרון.
מכיוון שיש דרגות חופש אז לא יתכן פתרון יחיד ולכן סעיף ה' לא נכון.
ע"פ משפט, מספר דרגות החופש במערכת ההומוגנית קובע את מספר דרגות החופש במערכת האי הומוגנית, ולכן
קובע גם את מספר הפתרונות, ולכן סעיף ב' נכון.

פתרון לפרק 13, עמוד 3, שאלה 3

נרשום את A^* ונדרג אותה:

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b & a\\ a & 1 & a & (1+ab) & (1+a^2)\\ b & 0 & (1+b) & (1+b^2) & (4+ab)\\ b & 0 & b & (a-2b+b^2) & (a+1+ab)\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-bR_1]{\substack{R_2\to R_2-aR_1\\ R_3\to R_3-bR_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b & a\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & (a-2b) & (a+1)\end{pmatrix}$$

כעת נפריד למקרים ע"פ האיברים המובילים:

מקרה I – נציב $a=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & (-2b) & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+2bR_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+8b\end{pmatrix}$$

אם $b=-\frac{1}{8}$ אז $r(A)=r(A)^*=3$ ולכן יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.
אם $b\neq-\frac{1}{8}$ נקבל סתירה.

מקרה II – אם $a=2b$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2}a & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (a+1) \end{pmatrix}$$

אם $a=-1$: $r(A)=r(A)^*=3$ ולכן יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

אם $a\neq -1$: נקבל סתירה.

מקרה III – אם $a\neq 2b$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & (a-2b) & (a+1) \end{pmatrix}$$

נקבל פתרון כמו במקרה I.

<u>סיכום :</u>

סתירה נקבל כאשר $\begin{cases} a=0 \\ b\neq -\frac{1}{8} \end{cases}$ או $\begin{cases} a\neq -1 \\ a=2b \end{cases}$.

אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת נקבל כאשר $\begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{1}{8} \end{cases}$ או $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

פתרון יחיד נקבל כאשר $\begin{cases} a\neq 0 \\ a=2b \end{cases}$ או $\begin{cases} a=-1 \\ b\neq -\frac{1}{2} \end{cases}$.

פתרון לפרק 13, עמוד 10, שאלה 4 א'

דורשים כי $\alpha u+\beta v$ גם כן יהיה פיתרון של $Ax=b$. נרשום זאת במפורש :
$$A(\alpha u+\beta v)=\alpha\cdot Au+\beta\cdot Av=\alpha\cdot b+\beta\cdot b=b(\alpha+\beta)=b$$

התנאי הוא אם כך $(\alpha+\beta)=1$.

פתרון לפרק 14, עמוד 2, שאלה 3 ב'

ע"פ הנתון כי המטריצה היא מעל Z_5 ניתן להסיק :

אם דרגת המטריצה היא 9 אז יש פתרון יחיד.

אם דרגת המטריצה היא 8 אז יש דרגת חופש אחת, כלומר מעל Z_5 יש 5 פתרונות אפשריים.

אם דרגת המטריצה היא 7 אז יש שתי דרגות חופש, כלומר $5^2=25$ פתרונות אפשריים.

אם דרגת המטריצה היא 6 אז יש שלוש דרגות חופש, כלומר $5^3=125$ פתרונות אפשריים.

אם דרגת המטריצה היא 5 אז יש ארבע דרגות חופש, כלומר $5^4=625$ פתרונות אפשריים.

ע"פ הנתון, מספר הפתרונות נמצא בין 40 ל- 150. הדרגה היחידה המתאימה לכך היא דרגה 6.

גליון 7 – מטריצות הפיכות

פתרון לפרק 8, שאלה 7

הטענה אינה נכונה.

ראשית, לא תמיד סכום של מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה, למשל: $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ הן מטריצות הפיכות אך $A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ אינה הפיכה, ולכן הצד השמאלי של המשוואה $(A+B)^{-1}$ כלל איננו מוגדר.

ניתן להפריך את הטענה גם ללא הטיעון הנ"ל:

תיהינה $A=B=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $(A+B)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$A^{-1}=B^{-1}=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $A^{-1}+B^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

קל לראות ששני אגפי המשוואה אינם שווים ולכן הטענה איננה נכונה.

פתרון לפרק 8, שאלה 9

האיבר b_{14} שווה לאחד: $b_{14}=1$.

הסבר: נסמן את המטריצה AB כ- C, ואת איבריה כ- c_{ij}. ע"פ הנתון $AA^{-1}=AB=C=I$.

לפיכך כל איברי האלכסון ב- C הם 1. נבחן את האיבר c_{44}: הוא מתקבל מהכפלת השורה הרביעית של A בעמודה הראשונה מ- B, או בצורה פורמלית:

$$c_{44}=\sum_{i=1}^{4}a_{4i}b_{i4}=a_{41}b_{14}+a_{42}b_{24}+a_{43}b_{34}+a_{44}b_{44}=1.$$

אך מכיוון ש- $a_{42}=a_{43}=a_{44}=0$ וגם $c_{44}=1$ אז חייב להתקיים כי $a_{41}b_{14}=1$, ומכיוון שידוע ש- $a_{41}=1$ אז בהכרח נובע ש- $b_{14}=1$.

פתרון לפרק 8, שאלה 12

כיוון $\Leftarrow$: מטריצה A היא הפיכה $\Leftarrow$ למערכת $Ax=0$ יש רק הפתרון הטריוויאלי.

הוכחה:

המטריצה A היא הפיכה $\Leftarrow$ A שקולה שורות ל- I (כי A^{-1} היא מכפלת אלמנטריות) $\Leftarrow$

לאחר שנדרג לצורה קנונית את המערכת $(A^*)=(A|b)$ (כאשר b הוא וקטור האפס) נקבל את המערכת $(I|b)$.

b הוא עדיין וקטור האפס מכיוון שכל הפעולות שהפעלנו על שורות על A לא יכלו לשנות את ערך אף איבר ב- b, מכיוון שכל האיברים בווקטור זה הם אפסים.

לכן, $(I|b)$ תראה כך: $\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&\cdots&0&1&0\end{array}\right)$, או אם נתרגם זאת למשוואות: $\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\\vdots\\x_n=0\end{cases}$

כמו כן $r(A^*)=r(A)=n$ ולכן הפתרון הוא יחיד.

כלומר הפתרון היחיד האפשרי הוא אם כל המשתנים הם אפס, או במילים אחרות, זהו הפתרון הטריוויאלי.

נותר רק לציין כי פתרון המערכת $(I|b)$ זהה לפתרון המערכת $(A|b)$ מכיוון ששתי מטריצות אלה הן שקולות שורה. מ.ש.ל. כיוון $\Leftarrow$.

כיוון $\Rightarrow$: למערכת $Ax=0$ יש רק הפתרון הטריוויאלי $\Leftarrow$ המטריצה A היא הפיכה.
הוכחה :
למערכת $Ax=0$ יש רק הפתרון הטריוויאלי $\Leftarrow$ למערכת $(A|b)$ כאשר b הוא וקטור האפס יש פתרון רק כאשר כל המשתנים מקבלים ערך 0 $\Leftarrow$ $(A|b)$ בצורה הקנונית שלו נראה מהצורה :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ A שקולה שורות ל- I $\Leftarrow$ A הפיכה.

מ.ש.ל. כיוון $\Rightarrow$.

פתרון לפרק 8, שאלה 15

נשים לב כי באופן כללי, למערכת $Ax=0$ יש תמיד את הפתרון הטריוויאלי (הווקטור x שווה 0). אם יש פתרון נוסף (כלומר הווקטור x הוא לא ווקטור האפס), אזי יש אינסוף פתרונות (מעל R).

נחזור לתרגיל שלנו : למען הנוחות נסמן $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$.

נתון כי <u>קיים</u> x עבורו יש למערכת פתרון. זהו אינו הפתרון הטריוויאלי (כי $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$), לכן נסיק כי

למערכת $A^{17}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ יש אינסוף פתרונות $\Leftarrow$ דרגת A^{17} היא 1 $\Leftarrow$ A^{17} לא שקולה שורות ל- I

$\Leftarrow$ A^{17} לא הפיכה $\Leftarrow$ A לא הפיכה $\Leftarrow$ דרגת A היא 1 $\Leftarrow$ יש פרופורציה בין השורות.

נבטא את הפרופורציה בין השורות :

$$\begin{cases} 1\beta = 2a \\ a\beta = 1 \end{cases}, \ \beta \in R \qquad \Rightarrow \qquad a^2=\frac{1}{2}$$

פתרון לפרק 13, עמוד 10, שאלה 4 ב'

הטענה נכונה, תמיד קיימת מטריצה הפיכה P כך של- PA יש רק שורה אחת שונה מאפס.
הוכחה : נתונה A אשר בשורה הראשונה שלה יש ערכים כלשהם, וכל שורה אחרת בה היא כפולה בסקלר של השורה הראשונה. נבטא את המטריצה A כך : $\begin{pmatrix} r \\ \alpha_2 r \\ \alpha_3 r \\ \vdots \\ \alpha_n r \end{pmatrix}$ כאשר r מסמלת שורה ו- α_i סקלרים.

נבצע את הפעולות הבאות על A : $\begin{cases} R_2 \to R_2-\alpha_2 r \\ R_3 \to R_3-\alpha_3 r \\ \vdots \\ R_n \to R_n-\alpha_n r \end{cases}$. לאחר ביצוע פעולות אלו נקבל מטריצה כזו : $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

כלומר מטריצה שרק שורה אחת שלה שונה מ-0.

כעת ניצור את P : נקח את I ונבצע עליה את הפעולות שביצענו על A . נקבל: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\alpha_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

P הפיכה כי התקבלה מביצוע פעולות על שורות על המטריצה I.

ב- PA שורה אחת שונה מאפס, מכיוון ש- P נבנתה כך שתאפס בעזרת השורה הראשונה כל שורה אחרת.

פתרון לפרק 14, עמוד 17, שאלה 3 ב'

נעביר את A לצורה הקנונית ובו בזמן נבצע את הפעולות על I :

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

לכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

נבנה את המטריצות האלמנטריות המבוקשות:

$$\xrightarrow{R_2 \to 2R_2} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{R_2 \to 3R_2} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2} : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

גליון 8 – תלות לינארית

פתרון לפרק 4, שאלה 7

נדרג את הוקטורים וננסה להגיע לשורת אפסים על מנת לקבל תלות לינארית:

א. במקרה זה השורות תלויות עבור ערך מסויים של α:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&3&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&2&(\alpha-1)\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&(\alpha-3)\end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו כי עבור $\alpha=3$ נקבל שורת אפסים ולכן הוקטורים תלויים.
נקבל את הוקטור הראשון כצירוף של האחרים כך:

$$(1\quad 3\quad \alpha)=(1\quad 3\quad 3)=(-1)\cdot(1\quad 1\quad 1)+2\cdot(1\quad 2\quad 2).$$

ב. במקרה זה השורות תלויות <u>לכל</u> ערך של α:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\5&1&2&2\\7&3&4&4\\1&3&-1&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-5R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-3&-3\\0&-4&-3&-3\\1&3&-1&\alpha\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&-4&-3&-3\\1&3&-1&\alpha\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים. שורת האפסים תשאר שורת אפסים ללא כל קשר ל- α.

ג. במקרה זה הוקטורים אינם תלויים לינארית:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&\alpha&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&(\alpha-1)&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&(\alpha-1)&-2&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

לכל ערך של α שנבחר לא יתקבלו שורות אפסים, ולכן הוקטורים בלתי תלויים, ללא קשר ל- α.
מכיוון שהוקטורים בלתי תלויים לא ניתן לבטא אחד מהם בעזרת השאר (אחרת הוא היה נפרש על ידם ואז הם כן היו תלויים), ולכן לא ניתן לבטא את הווקטור הראשון בעזרת השאר.

פתרון לפרק 4, שאלה 11

הטענה נכונה. נוכיח:

ע"פ נתון, $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ ב.ת.ל. כלומר:

$$\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=0 \quad\Leftarrow\quad \alpha=\beta=0$$ או בצורת משוואות:

$$\begin{cases}\alpha x_1+\beta x_2=0\\ \alpha y_1+\beta y_2=0\end{cases} \quad\Leftarrow\quad \alpha=\beta=0.$$

כעת נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ תלויים לינארית, כלומר:

קיימים סקלרים α ו-β לא כולם אפס כך ש- $\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\a_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=0$. או בצורת משוואות: $\begin{cases}\alpha x_1+\beta x_2=0\\ \alpha y_1+\beta y_2=0\\ \alpha z_1+\beta z_2=0\end{cases}$.

אך זוהי סתירה לנתון, שכן α ו-β חייבים להיות אפס עבור שתי המשוואות הראשונות (גורר שגם עבור השלישית).

לכן, ההנחה בשלילה שגויה, ולכן $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ הם בלתי תלויים לינארית.

מ.ש.ל.

פתרון לפרק 4, שאלה 15

המטריצות A,B,C,D אכן תלויות לינארית. נראה זאת:

$$\begin{pmatrix}3&8&-11&16&10&9\\1&3&-4&6&5&4\\1&2&-3&4&0&1\\3&8&0&16&10&9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1-3R_2}\begin{pmatrix}0&-1&1&-2&-5&-3\\1&3&-4&6&5&4\\0&-1&1&-2&-5&-3\\3&8&0&16&10&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&3&-4&6&5&4\\0&-1&1&-2&-5&-3\\3&8&0&16&10&9\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים ולכן המטריצות תלויות.

נראה את A כצירוף לינארי של השאר. ניתן לעקוב אחר הפעולות על שורות שעשינו ולבטא אותן כך:

$$R_1\to R_1-3R_2: A_1=A-3B$$
$$R_3\to R_3-R_2: \qquad C_1=C-B$$
$$R_1\to R_1-R_3: \qquad A_1-C_1=A-3B-(C-B)=A-2B-C=0 \qquad\Rightarrow\qquad A=2B+C$$

נוודא שאכן זה מתקיים: $\begin{pmatrix}3&8&-11\\16&10&9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&3&-4\\6&5&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&-3\\4&0&1\end{pmatrix}$

נמשיך לדרג על מנת למצוא את הביטוי של D כצירוף של השאר:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&3&-4&6&5&4\\0&-1&1&-2&-5&-3\\3&8&0&16&10&9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to(-1)R_3]{R_4\to R_4-3R_2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&3&-4&6&5&4\\0&1&-1&2&5&3\\0&-1&12&-2&-5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4+R_3}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\1&3&-4&6&5&4\\0&1&-1&2&5&3\\0&0&11&0&0&0\end{pmatrix}$$

נשים לב שבמהלך כל הדירוג לא החלפנו שורות זו בזו ולכן השורה הראשונה מייצגת את A, השנייה את B, וכו'.

ניתן לראות כי הוקטורים B,C,D אינם תלויים לינארית, כלומר לא ניתנים לביטוי אחד מהם כצירוף לינארי של השאר, ובפרט גם לא את D.

פתרון לפרק 4, שאלה 20

הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:
ההפרכת מתבססת על ההגדרה כי איבר האפס הוא תלוי לינארית.

נבחר 3 וקטורים: $w=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

נראה כי טענה ה"אם" מתקיימת:
הוקטורים תלויים לינארית כי קיימים סקלרים α,β,γ לא כולם אפס המקיימים $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$.

למשל נבחר $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=5$ ונקבל: $0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$.

אבל v הוא אינו צירוף לינארי של u,w (כי אין סקלרים $\lambda,\ \delta$ כך ש- $v=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lambda u+\delta w$).

לכן הטענה אינה נכונה.

פתרון לפרק 13, עמוד 14, שאלה 5 א'

ע"פ נתון, $\{v_1,\dots,v_m\}$ קבוצה תלויה $\Leftarrow$ קיימים סקלרים לא כולם אפס כך ש- $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_mv_m=0$.
כל תת קבוצה שלה ב.ת.ל., כלומר כל צירוף לינארי של תת הקבוצה גורר בהכרח שמקדמי הוקטורים הם כולם אפס.

נניח בשלילה את ההפך מהטענה, כלומר במשוואה $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_mv_m=0$ קיים לפחות סקלר אחד אשר הוא אפס.

נניח כי בה"כ רק הסקלר α_i שווה לאפס.

המשוואה המקורית: $\alpha_1v_1+\ldots\alpha_{i-1}v_{i-1}+\alpha_iv_i+\alpha_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\alpha_mv_m=0$

אך כעת, ניתן לרשום אותה ללא α_iv_i (כי $\alpha_i=0$): $\alpha_1v_1+\ldots\alpha_{i-1}v_{i-1}+\alpha_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\alpha_mv_m=0$

הנחנו כי רק α_i שווה לאפס $\Leftarrow$ כל שאר הסקלרים שונים מאפס $\Leftarrow$

קיבלנו צירוף לינארי של תת קבוצה ממש של N ששווה לאפס אשר מקדמי הוקטורים שונים מאפס $\Leftarrow$
הקבוצה תלויה לינארית.

קיבלנו סתירה כי ע"פ הנתון כל תת קבוצה של N היא ב.ת.ל.
לכן הנחת השלילה שגויה ולכן הטענה נכונה.

פתרון לפרק 14, עמוד 12, שאלה 4 ב'

מטריצה מסדר 2×3 היא מצורה כזו: $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$. נוכיח את המשפט ע"י הפרדה למקרים, ע"פ הדרגה שלה.

<u>מקרה I</u> – דרגת המטריצה 0:

נקבל את מטריצת האפס: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. עמודות המטריצה הן: $C_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ C_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ C_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

העמודות תלויות לינארית כי קיימים סקלרים $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ שאינם כולם אפס המקיימים את המשוואה:

$\alpha\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

<u>מקרה II</u> – דרגת המטריצה 1:
אם דרגת המטריצה היא 1 ומספר השורות הוא 2, אזי יש פרופורציה בין השורות. כלומר אם המטריצה היא

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ אז מתקיים $\lambda\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \lambda a = d \\ \lambda b = e \\ \lambda c = f \end{cases}$.

נשים לב כי בהכרח אחת המשוואות היא לא 0=0, (אחרת כל האיברים הם 0 וקיבלנו את מטריצת האפס).

אם יש רק משוואה אחת שונה מ- 0=0 (בה"כ תיהיה זו $\lambda a = d$) אזי ניתן לרשום $0\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

כאשר $\beta, \gamma \neq 0$.

אם יש שתי משוואות שונות מ- 0=0 (למשל 2 הראשונות) אזי ניתן לרשום $0\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

כאשר $\gamma \neq 0$.

אם שלושת המשוואות שונות מ- 0=0 אז ניתן לרשום: (נשים לב כי $\frac{d}{a} = \frac{e}{b}$, לכן):

$1\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - \frac{a}{b}\begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{a}{b}b \\ d - \frac{a}{b}e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a \\ d - a\frac{e}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>מקרה III</u> – דרגת המטריצה היא 2:
נביא את המטריצה לצורה קנונית, ואז היא תיהיה מהצורה:

א. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ואז: $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (עבור $\alpha \neq 0$).

ב. $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ואז אם $x = 0$ אז $0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (עבור $\alpha \neq 0$),

ואם $x \neq 0$ אז $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}$ ואז: $(-x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x \\ y - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

דירוג המטריצה אמנם משנה את מרחב העמודות אך במקרה זה אינו משנה את התלות בין העמודות.

הראינו כי לכל צורה של מטריצה מסדר 2×3 עמודות המטריצה הן תלויות.
מ.ש.ל.

גליון 9 – בסיס ומימד

פתרון לפרק 5, שאלה 4

על מנת לקבוע אם $W=P_3[t]$ יש לדרג את איברי בסיס W:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן ניתן להסיק כי $\dim(W)=2$.

מכיוון ש-$\dim(P_3[t])=4$ אז ברור כי $W\neq P_3[t]$.

בסיס W הוא: $\{t^3+6t-5,\ t^2+t-3\}$ ומימד W הוא 2.

על מנת להשלים לבסיס של $P_3[t]$ נוסיף שני וקטורים כך שיהיו בלתי תלויים בווקטורים הקיימים בבסיס של W, ואז דרגת הבסיס תיהיה 4. ניתן להיעזר במטריצה הקנונית שמצאנו ולראות ששני וקטורים כאלו יכולים להיות למשל $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ואז נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר בסיס חדש של W כך שיהיה שווה לבסיס של $P_3[t]$ הוא: $\{t^3+6t-5\ ,\ t^2+t-3\ ,\ t\ ,\ 1\}$.

פתרון לפרק 5, שאלה 11

א. לא נכון. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת.

יהי $n=3$. יהי המרחב הוקטורי $V=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in R\right\}$, או קבוצת המטריצות האלכסוניות.

נראה שלוש מטריצות שדרגת כל אחת מהן קטנה ממש מ-3 הפורשות את V:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

נראה מטריצה הנפרשת ע"י A_1, A_2, A_3 שאינה מדרגה קטנה 3: למשל $B=(A_1+A_2+A_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

מתקיים כי $r(B)=3$, כלומר הטענה כי המרחב V מכיל רק מטריצות מדרגה קטנה ממש מ-n איננה נכונה.

ב. לא נכון. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת.

יהי $n=3$, ויהי V המרחב הוקטורי הנפרש ע"י $A_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

מתקיים כי דרגת כל אחת מהמטריצות היא $n=3$.

כעת נראה מטריצה הנפרשת ע"י A_1,A_2 אשר אינה מדרגה $n=3$: $B=(A_1+A_2)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

נדרג אותה: $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

מתקיים כי $r(B)=2$, כלומר הטענה כי המרחב V מכיל רק מטריצות מדרגה n או מטריצת האפס אינה נכונה.

פתרון לפרק 5, שאלה 14

א. הטענה נכונה. הוכחה:

ע"פ נתון $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס ל- V $\Leftarrow$ האיברים v_1,v_2,v_3 פורשים את V $\Leftarrow$

לכל $u\in V$ קיימים סקלרים α,β,γ כך ש- $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=u$.

נניח בשלילה כי $\{v_1+v_2\ ,v_2+v_3\ ,\ v_3+v_1\}$ אינו בסיס ל- V $\Leftarrow$

קיים איבר $u\in V$ כך שלא קיימים סקלרים α,β,γ המקיימים $\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_2+v_3)+\gamma(v_3+v_1)=u$.

נתבונן באגף שמאל:

$$\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_2+v_3)+\gamma(v_3+v_1)=(\alpha+\gamma)v_1+(\alpha+\beta)v_2+(\beta+\gamma)v_3=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=u$$

כלומר ע"פ הנחת השלילה לא קיימים סקלרים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ כך ש- $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=u$, אך זוהי סתירה שכן נתון כי האיברים v_1,v_2,v_3 פורשים את V ולכן בהכרח קיימים סקלרים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ כך ש- $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=u$.

לכן הטענה נכונה.

ב. הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

יהי $V=Z_2^{3\times1}$ המרחב הנפרש ע"י הוקטורים $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. נדרג אותם על מנת לוודא שהם אכן מהווים בסיס: $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2+R_3]{R_1\to R_1+R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

אין שורות אפסים ולכן v_1,v_2,v_3 ב.ת.ל. ופורשת את V.

כעת נראה את $\{v_1+v_2\ ,v_2+v_3\ ,\ v_3+v_1\}$: $v_3+v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2+v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_1+v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$\{v_1+v_2\ ,v_2+v_3\ ,\ v_3+v_1\}$ לא בסיס ל- V מכיוון שהאיבר $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in Z_2^{3\times1}$ אינו נפרש על ידם.

לכן הטענה אינה נכונה.

ג. הטענה נכונה. נבחן את המטריצה A^t שהיא מסדר 3×2.
ע"פ משפט, באופן כללי דרגת מטריצה קטנה או שווה למינימום של מספר השורות או העמודות שלה:
עבור מטריצה $B_{n\times m}$ מתקיים: $r(B)\le \min\{n, m\}$.
אצלנו: $r(A^t)=\min\{2,3\}=2$ $\Leftarrow$ דרגת A^t היא 0 או 1 או 2 $\Leftarrow$
שורות המטריצה A^t הן ת.ל. $\Leftarrow$ עמודות A הם ת.ל.

ד. הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת.
נתבונן במטריצה מסדר 3×3: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

קל לראות כי דרגתה $3-1=2$, אך השורה האחרונה שלה היא לא שורת אפסים.

ה. הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:
נתבונן במטריצה מסדר 3×3: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

קל לראות כי דרגתה $3-1=2$, אך השורה האחרונה שלה אינה תלויה לינארית בשורה הקודמת.

פתרון לפרק 7, שאלה 7

נבטא את U ו- W בצורה אחרת:

$$W=sp\{x^3+x\ ,\ x^2-ax\}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-a&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$W=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-a\\0\end{pmatrix}\right\}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-a\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta\\-a\beta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha-a\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$U=sp\{x^3-ax\ ,\ x^2+1\}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&0&-a&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$U=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-a\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\-a\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-a\gamma\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\delta\\0\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\\-a\gamma\\\delta\end{pmatrix}$$

כעת, על מנת לבטא איבר הנמצא בחיתוך ולפיכך נמצא בכל אחד מתתי המרחב, נאלץ את הוקטורים להיות מאותה הצורה. כלומר, אם נסתכל על הוקטור של U, נדרוש שהאיבר השלישי יהיה האיבר הראשון מוכפל ב- $(-a)$, והאיבר הרביעי יהיה שווה לאיבר השני. נתרגם את שני התנאים הנ"ל לוקטור מ- W:

$$\begin{cases} \alpha - a\beta = (-a)\alpha \\ 0 = \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha(1+a) = 0$$

מכיוון ש- α יכול להיות כל דבר, מוכרח להתקיים כי $a=-1$.

לכן עבור $a=-1$ הוקטור בחיתוך יראה כך: $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. נסמנו כ- v.

נוודא ש- $v \in U$: עבור $a=-1$, $\gamma=\lambda$ ו- $\delta=0$ מתקיים:

$$\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

נוודא ש- $v \in W$: עבור $a=-1$, $\alpha=\lambda$ ו- $\beta=0$ מתקיים:

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

פתרון לפרק 13, עמוד 14, שאלה 4

א. נמצא בסיס ל- U:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a+b \\ a+c \\ a+b+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי המטריצה היא מדורגת מצומצמת ללא שורות אפסים, ולכן בסיס ל- U יהיה:

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \dim(U) = 3$$

נמצא בסיס ל- W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נתעלם משורת האפסים, ולכן בסיס ל- W יהיה:

$$B_W=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\quad,\quad \dim(W)=3$$

ב. נכניס את כל וקטורי הבסיסים למטריצה אחת ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&2\end{pmatrix}\to\ldots\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן בסיס ל- $U+W$ יהיה:

$$B_{U+W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\quad,\quad \dim(U+W)=5$$

ג. ראשית נמצא את המימד: $\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)=3+3-5=1$
נרשום כיצד נראים האיברים הכללים בכל אחד מתתי המרחב:

$$U:\begin{pmatrix}a\\b\\c\\a+b\\a+c\\a+b+c\end{pmatrix}\quad,\quad W:\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha\\\gamma\\\alpha+\beta\\-\beta+2\gamma\end{pmatrix}$$

במילים: איבר ב- U הוא איבר אשר המקום הרביעי שלו הוא סכום של הראשון והשני,
המקום החמישי הוא סכום של הראשון והשלישי,
המקום השישי הוא סכום של הראשון, השני והשלישי.
נבטא אילוצים אלו ב- W:

$$\begin{cases}\gamma=\alpha+\beta\\\alpha+\beta=2\alpha\\-\beta+2\gamma=2\alpha+\beta\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\beta=\alpha\quad\Rightarrow\quad\gamma=2\alpha$$

נציב את האילוצים ונמצא את בסיס $U\cap W$:

$$U \cap W : \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון לפרק 14, עמוד 2, שאלה 3 ג'

נתון:

$\{v_1, v_2\}$ בסיס ל- $U \cap W$.

$\{v_1, v_2, u_1\}$ בסיס ל- U.

$\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ בסיס ל- W.

צ"ל: בסיס ל- $U + W$.

הוכחה:

ראשית נסתכל על המימדים: $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 4 - 2 = 5$.

טענה: $\{v_1, v_2, u_1, w_1, w_2\}$ בסיס ל- $U + W$. נסמן $B = \{v_1, v_2, u_1, w_1, w_2\}$.

ע"פ המימד – גודל B מתאים. נותר להראות כי B פורשת וב.ת.ל.

B פורשת את $U + W$:

נקח איבר כללי $x \in U + W$ ונראה כי ניתן לבטא אותו כק"ל של איברי B.

x שייך לסכום אז x הוא סכום של איבר מ- U ואיבר מ- W, ולכן: $x = u_k + w_k$, כאשר $u_k \in U$ ו- $w_k \in W$.

ע"פ נתון $\{v_1, v_2, u_1\}$ פורשת את U ולכן: $u_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1$.

ע"פ נתון $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ פורשת את W ולכן: $w_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 w_1 + \beta_4 w_2$.

$$x = u_k + w_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 w_1 + \beta_4 w_2 =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \alpha_3 u_1 + \beta_3 w_1 + \beta_4 w_2$$

כלומר ניתן לבטא כל איבר $x \in U + W$ באמצעות איברי B, ולכן מ.ש.ל. פורשת.

B ב.ת.ל:

נרשום ק"ל של איברי B השווה לאפס: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1 + \alpha_4 w_1 + \alpha_5 w_2 = 0$.

צ"ל: $\alpha_i = 0$, $1 \le i \le 5$.

נעביר את האיברים מ- W אגף: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1 = -\alpha_4 w_1 - \alpha_5 w_2$. (נסמן משוואה זו ב-*).

נשים לב כי באגף ימין מופיע איבר מ- W (כי $w_1, w_2 \in W$), ובאגף שמאל מופיע איבר מ- U (כי $v_1, v_2, u_1 \in U$).

בין שני האגפים יש שוויון, כלומר זהו ביטוי לאיבר שנמצא גם ב- U וגם ב- W, או במילים אחרות – איבר הנמצא בחיתוך שלהם $U \cap W$.

לכן, בפרט אפשר את אגף שמאל לבטא רק באמצעות v_1, v_2 שכן נתון שהם בסיס ל- $U \cap W$.

נרשום: $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = -\alpha_4 w_1 - \alpha_5 w_2$

נעביר אגף: $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \alpha_4 w_1 + \alpha_5 w_2 = 0$

מתואר איבר ב- W שכן נתון כי v_1, v_2, w_1, w_2 בסיס, ולכן אם איבר זה שווה לאפס אזי בהכרח כל המקדמים הם אפס.

$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.

נציב בחזרה $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$ למשוואה *: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1 = 0$.

ע"פ אותו נימוק, מתואר איבר ב- U שכן נתון כי v_1, v_2, u_1 בסיס, ולכן אם איבר זה שווה לאפס אזי בהכרח כל המקדמים הם אפס: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

לסיכום, קיבלנו כי $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, וזו בדיוק המסקנה אותה רצינו, כי הראנו

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_1 + \alpha_4 w_1 + \alpha_5 w_2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 .$$

מ.ש.ל. B ב.ת.ל.

הראינו מימד מתאים, ובסיס אשר הוא גם פורש וגם ב.ת.ל., ולכן מצאנו B בסיס מתאים ל- $U+W$.

גליון 10 – טרנספורמציות ליניאריות

פתרון לפרק 9, שאלה 20

נשים לב כי הטרנספורמציה ST היא זו: $V \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} V$, כלומר T מופעלת ראשונה ו- S מופעלת שניה.

ב. הטענה נכונה. הוכחה:

נניח בשלילה כי $\ker(S) \neq \{0\}$ וגם $\ker(T) \neq \{0\}$. (למשל $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

מכך נובע כי גם $\ker(ST) \neq \{0\}$.

(ל- T הפועלת ראשונה יש יותר מאיבר אחד הנשלח לאפס, ולכן גם ל- ST יש יותר מאיבר אחד הנשלח לאפס).

אך קיבלנו סתירה לנתון ש- $\ker(ST) = \{0\}$. לכן הנחת השלילה שגויה, ולכן הטענה נכונה.

ה. הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

נגדיר את הטרנספורמציות הבאות: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

נראה כי $\operatorname{Im}(ST) = \{0\}$: $ST\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S\left(T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

נראה כי $\ker(S) \neq V$: $S\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כלומר קיים איבר ב- V אשר אינו נשלח לאפס.

נראה כי $\ker(T) \neq V$: $T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ כלומר קיים איבר ב- V אשר אינו נשלח לאפס.

הראינו כי טענת ה-"אם" מתקיימת אך טענת ה-"אז" אינה מתקיימת ולכן הפרכנו את הטענה.

ו. הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

נגדיר $T, S : R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix},$$

נראה כי $\operatorname{Im}(ST) = \{0\}$:

$$ST\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S\left(T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = S\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-d+d) & 0 \\ 0 & (d-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נראה איבר x המקיים $\begin{cases} x \in \operatorname{Im}(S) \\ x \notin \ker(T) \end{cases}$, ובכך נראה כי ההכלה $\operatorname{Im}(S) \subseteq \ker(T)$ אינה מתקיימת.

יהי $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. אז:

$$S(x) = S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0 \\ 0 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן ההכלה $\operatorname{Im}(S) \subseteq \ker(T)$ אינה מתקיימת.

ז. הטענה נכונה. הוכחה:

נניח בשלילה כי $\mathrm{Im}(T)$ אינו מוכל ב-$\ker(S)$, כלומר קיים איבר x המקיים: $\begin{cases} x \in \mathrm{Im}(T) \\ x \notin \ker(S) \end{cases}$.

$x \notin \ker(S) \quad \Leftarrow \quad S(x) \neq 0$.

$x \in \mathrm{Im}(T) \quad \Leftarrow \quad$ קיים y כך ש- $T(y) = x$.

נפעיל על ST על y ונראה מה נקבל: $ST(y) = S(T(y)) = S(x) \neq 0$.

כלומר מצאנו y כך ש- $\begin{cases} y \in \mathrm{Im}(ST) \\ ST(y) \neq 0 \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \mathrm{Im}(ST) \neq \{0\}$.

אך זוהי סתירה לנתון. לכן הנחת השלילה שגויה ולכן הטענה נכונה.

פתרון לפרק 14, עמוד 4, שאלה 5 א'

נוכיח את השוויון $A_1 = A_2$ ע"י הכלה דו כיוונית:

$A_2 \subseteq A_1$:

כלומר נוכיח כי אם $x \in A_2$ אז בהכרח מתקיים $x \in A_1$.

$$x \in A_2 \quad \Leftarrow \quad T(x) = T(v_0 + u) = T(v_0) + T(u) = T(v_0) + 0 = T(v_0) \quad \Leftarrow$$

$$T(x) = T(v_0) \quad \Leftarrow \quad x \in A_1.$$

$A_1 \subseteq A_2$:

כלומר נוכיח כי אם $x \in A_1$ אז בהכרח מתקיים $x \in A_2$.

$$x \in A_1 \quad \Leftarrow \quad T(x) = T(v_0) = T(v_0) + 0 = T(v_0) + T(0) = T(v_0 + 0) \quad \Leftarrow$$

$$x = v_0 + 0 \quad \Leftarrow \quad x \in A_2.$$

פתרון לפרק 14, עמוד 5, שאלה 1

א. נמצא בסיס לתמונה:

$$\begin{pmatrix} b & a+2f \\ b & 4a+8f \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן בסיס לתמונה הוא: $B_{\mathrm{Im}(T)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\}$.

מימד התמונה הוא: $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(B_{\mathrm{Im}(T)}) = 2$.

ב. ע"פ משפט המימדים: $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T))$. אצלנו:

$$\dim(R_5[x]) = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T))$$

$$\dim(R_5[x]) = \dim(B_{\mathrm{Im}(T)}) + \dim(\ker(T))$$

$$6 = 2 + \dim(\ker(T))$$

$$\dim(\ker(T)) = 4$$

ג. ראשית נמצא את $\ker(T)$:

$$\begin{pmatrix} b & a+2f \\ b & 4a+8f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} b=0 \\ a=-2f \end{cases}$$

כלומר, כל פולינום מהצורה $-2f+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$ נמצא בגרעין של T.
נמצא בסיס לגרעין :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\ker(T)} = \left\{-2+x^5 \ , \ x^2 \ , \ x^3 \ , \ x^4\right\}$$

כלומר, איבר כללי בגרעין נראה כך : $f(x)=a\left(-2+x^5\right)+cx^2+dx^3+ex^4$.
נציב $x=1$ ונדרוש שוויון ל-2 :

$$f(1)=a(-2+1)+c+d+e=-a+c+d+e=2 \qquad \Rightarrow \qquad c=2+a-d-e$$

נציב את c באיבר כללי בגרעין :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(-2+x^5\right)+(2+a-d-e)x^2+dx^3+ex^4 = \\ &= a\left(-2+x^2+x^5\right)+d\left(-x^2+x^3\right)+e\left(-x^2+x^4\right) \end{aligned}$$

נבדוק שהרכיבים הם ב.ת.ל :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftarrow \qquad \text{אכן ב.ת.ל ולכן בסיס.}$$

בסיס מבוקש הוא : $\left\{-2+x^2+x^5 \ , \ -x^2+x^3 \ , \ -x^2+x^4\right\}$.

ד. נסמן $U=sp\left\{x,\ x^5\right\}$. נראה כי $U+\ker(T)=R_5[x]$, כלומר, החיבור נותן בסיס ל- $R_5[x]$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו $\left\{1,\ x\ ,\ x^2\ ,\ x^3\ ,\ x^4\ ,\ x^5\right\}$ שהוא הבסיס הסטנדרטי ל- $R_5[x]$.
נותר להראות כי $U\cap\ker(T)=\{0\}$ ואז ינבע כי U ו- $R_5[x]$ הם סכום ישר :
נבחן איבר כללי y הנמצא בחיתוך :

$y\in U \qquad \Leftarrow \qquad y=\alpha x+\beta x^5$.

$y\in\ker(T) \qquad \Leftarrow \qquad y=\gamma\left(-2+x^5\right)+\delta x^2+\lambda x^3+\mu x^4$.

נשווה בין שני הביטויים : $\alpha x+\beta x^5=\gamma\left(-2+x^5\right)+\delta x^2+\lambda x^3+\mu x^4$

נעבור אל איברי y מנקודת המבט של אגף ימין:

באגף שמאל אין איבר חופשי ולכן $\gamma = 0$.

ע"פ אותו טיעון, באגף שמאל אין גם איברים שהם x^4 , x^3 , x^2 ולכן גם $\delta = \lambda = \mu = 0$.

קיבלנו את המשוואה $\alpha x + \beta x^5 = 0$, ולכן גם $\alpha = \beta = 0$.

לכן $U \cap \ker(T) = \{0\}$ $\Leftarrow$ U ו- $R_5[x]$ הם סכום ישר.

הוכחנו את התנאים הדרושים ולכן $R_5[x] = U \oplus \ker(T)$.

ה. קיים תת מרחב W המקיים את הטענה.

יהי W תת המרחב הנפרש ע"י $\{x + x^4 , x^5\}$.

נראה כי $W + \ker(T) = R_5[x]$, כלומר, החיבור נותן בסיס ל- $R_5[x]$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו $\{1, x , x^2 , x^3 , x^4 , x^5\}$ שהוא הבסיס הסטנדרטי ל- $R_5[x]$.

נותר להראות כי $W \cap \ker(T) = \{0\}$ ואז ינבע כי W ו- $R_5[x]$ הם סכום ישר:

נבחן איבר כללי y הנמצא בחיתוך:

$y \in W$ $\Leftarrow$ $y = \alpha(x + x^4) + \beta x^5$.

$y \in \ker(T)$ $\Leftarrow$ $y = \gamma(-2 + x^5) + \delta x^2 + \lambda x^3 + \mu x^4$.

נשווה בין שני הביטויים: $\alpha(x + x^4) + \beta x^5 = \gamma(-2 + x^5) + \delta x^2 + \lambda x^3 + \mu x^4$

נעבור אל איברי y מנקודת המבט של אגף ימין:

באגף שמאל אין איבר חופשי ולכן $\gamma = 0$.

ע"פ אותו טיעון, באגף שמאל אין גם איברים שהם x^3 , x^2 ולכן גם $\delta = \lambda = 0$.

נותרנו עם $\alpha(x + x^4) + \beta x^5 = \mu x^4$.

באגף שמאל אין אף איבר שהוא x או x^5 ולכן $\alpha = \beta = 0$.

קיבלנו $0 = \mu x^4$, ולכן גם $\mu = 0$.

לכן $W \cap \ker(T) = \{0\}$ $\Leftarrow$ W ו- $R_5[x]$ הם סכום ישר.

הוכחנו את התנאים הדרושים ולכן $R_5[x] = W \oplus \ker(T)$.

כעת נראה כי $U \neq W$: למשל האיבר $3x + 3x^4 - 5x^5$ נמצא ב- W אך לא ב- U.

לכן U ו- W שונים.

פתרון לפרק 14, עמוד 8, שאלה 3 ב'

ע"פ נתון T היא על ולכן ע"פ משפט $\operatorname{Im}(T)=Z_p^2$. ע"פ משפט המימדים ניתן לרשום:

$$\dim(V)=\dim(\operatorname{Im}(T))+\dim(\ker(T))$$
$$\dim(Z_p^{2\times 3})=\dim(Z_p^2)+\dim(\ker(T))$$
$$6=2+\dim(\ker(T)) \qquad \Rightarrow \qquad \dim(\ker(T))=4$$

לכן מספר האיברים בגרעין שווה ל- p^4.

פתרון לפרק 14, עמוד 16, שאלה 4 א'

נוכיח ע"י שנראה כי מימד V שווה ל- n וגם הקבוצה $\{v_1\dots v_n\}$ (בגודל n) היא ב.ת.ל.

ע"פ נתון, $T(v_1)\dots T(v_n)$ מהווים בסיס ל- W (לשם הנוחות נסמן נתון זה ב-*).

מימד n:

נתון כי T חח"ע $\Leftarrow$ $\ker(T)=\{0\}$ $\Leftarrow$ $\dim(\ker(T))=0$.

ע"פ משפט המימדים:

$$\dim(V)=\dim(\operatorname{Im}(T))+\dim(\ker(T))$$
$$\dim(V)=n+0=n$$

($\dim(\operatorname{Im}(T))=n$ כי ע"פ נתון * מימד התמונה של T הוא n).

קבוצה ב.ת.ל.:

נתון כי $T:V\to W$ ולכן קיים $\begin{cases} v\in V \\ w\in W\end{cases}$ כך ש- $T(v)=w$.

ע"פ נתון * ניתן לרשום $T(v)=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)$. כמו כן, ע"פ נתון * מתקיים:

$$\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1=\dots=\alpha_n=0$$

נרשום את המשוואה $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0$, נפעיל עליה T בשני האגפים ונראה מה נקבל:

באגף שמאל: $T(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=T(\alpha_1 v_1)+\dots+T(\alpha_n v_n)=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)$

ובאגף ימין: $T(0)=0$

אם נשווה את האגפים נקבל $\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)=T(0)=0$.

ע"פ נתון * בהכרח מתקיים $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$, ולכן גם במשוואה $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0$ מתקיים $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$.

קיבלנו כי $v_1\dots v_n$ הם ב.ת.ל.

לסיכום:

מימד V = מימד הקבוצה $\{v_1\dots v_n\}$ = מימד n

הקבוצה $\{v_1\dots v_n\}$ היא ב.ת.ל. $\Leftarrow$ $\{v_1\dots v_n\}$ בסיס ל- V.

מ.ש.ל.

נראה את הדוגמא המבוקשת:

נגדיר $T:R^2 \to R^2$ כך: $T(a,b)=(a+b,\ a+b)$.

ידוע כי האיברים $v_2=(0,1)$ ו- $v_1=(1,0)$ הם בסיס ל- R^2.

נבחן את $T(v_i)$: $T(v_1)=T(1,0)=(1,1)$, $T(v_2)=T(0,1)=(1,1)$.

הראינו כי T היא לא חח"ע.

כמו כן, $T(v_1),T(v_2)$ אינם מהווים בסיס ל- R^2 מכיוון שהם תלויים.

פתרון לפרק 14, עמוד 20, שאלה 4 א'

התנאי הוא: B הפיכה $\Leftrightarrow$ T איזומורפיזם.

התנאי המספיק: B הפיכה $\Leftarrow$ T איזומורפיזם. הוכחה:

$T(A_1)=T(A_2)$ $\Leftarrow$ $BA_1=BA_2$ $\Leftarrow$ B הפיכה ולכן קיימת B^{-1} $\Leftarrow$

$B^{-1}BA_1=B^{-1}BA_2$ $\Leftarrow$ $A_1=A_2$.

קיבלנו כי T היא חח"ע $\Leftarrow$ T היא גם על $\Leftarrow$ T היא איזומורפיזם.

התנאי ההכרחי: B אינה הפיכה $\Leftarrow$ T אינה איזומורפיזם. הוכחה:

B לא הפיכה $\Leftarrow$ $r(B)<n$ $\Leftarrow$ למערכת $Bx=0$ יש אינסוף פתרונות.

נסמן $x_0\neq 0$ כאחד מהפתרונות הללו. (x_0 וקטור באורך n).

נבנה את המטריצה $C=\left(\underbrace{x_0 \mid x_0 \mid \ldots \mid x_0 \mid x_0}_{n\ \ times}\right)$, כלומר C היא המטריצה שיש בה n פעמים את העמודה x_0.

בפרט, $C\neq 0$ כי $x_0\neq 0$.

ע"פ $Bx=0$, ניתן לחשב את BC: $BC=B(x_0 \mid x_0 \mid \ldots \mid x_0 \mid x_0)=B(0\mid 0\mid \ldots \mid 0\mid 0)=0$

כלומר $T(C)=T(x_0 \mid x_0 \mid \ldots \mid x_0 \mid x_0)=0$. אבל גם $T(0)=0$, ולכן T אינה חח"ע $\Leftarrow$

T אינה איזומורפיזם.

פתרון לפרק 14, עמוד 23, שאלה 1

א. נמצא גרעין ל- T:

$$\begin{pmatrix} a-2b & c+d \\ a-2b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=2b \\ d=-c \end{cases}$$

כלומר כל איבר מהצורה $\begin{pmatrix} 2b & b \\ c & -c \end{pmatrix}$ שייך לגרעין של T. $\begin{pmatrix} 2b & b \\ c & -c \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

שתי המטריצות הן ב.ת.ל. ולכן בסיס לגרעין יהיה:

$$B_{\ker(T)}=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

ד. M היא לא תת מרחב של $R^{2\times 2}$. הוכחה:

נתבונן בקבוצה S מעל $R^{2\times 2}$: $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in R\right\}$.

והקבוצה $\ker(T)$ היא: $\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix} 2x & x \\ y & -y \end{pmatrix} \mid x,y\in R\right\}$

על מנת למצוא את האיבר הכללי של החיתוך נאלץ את תנאי הקבוצה $\ker(T)$ על S :

האיבר a_{11} כפול מהאיבר a_{12}, והאיבר a_{22} הוא הנגדי של a_{21}. נקבל: $\begin{cases} a=2b \\ c=a \end{cases}$ ולכן

$$S\cap\ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}2b & b\\ 2b & -2b\end{pmatrix} \mid b\in R\right\}$$

כעת נראה כיצד נראית מטריצה הנמצאת ב- M :

$$\begin{pmatrix}2b & b\\ 2b & -2b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2b & b\\ 2b & -2b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2b & b\\ 2b & -2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6b^2 & 0\\ 0 & 6b^2\end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי על מנת שמטריצה תיהיה ב- M על איברי האלכסון שלה להיות מספר אי שלילי.

כעת נראה דוגמא נגדית מפורשת כי M אינה תת מרחב מכיוון שאינה סגורה לכפל בסקלר:
נניח בשלילה כי M היא תת מרחב.

נסמן $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. $A\in S$ כי $tr(A)=0$. $A\in\ker(T)$ כי $T\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

לכן $A\in S\cap\ker(T)$ $\Leftarrow$ $A^2=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\in M$.

ע"פ הנחת השלילה M תת מרחב ולכן סגורה לכפל בסקלר $\Leftarrow$ $(-1)\cdot A^2=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}\in M$.

ננסה לגלות מהי המטריצה הנמצאת ב- $S\cap\ker(T)$ כך שריבועה יתן את $(-1)\cdot A^2=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & b\\ 2b & -2b\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}6b^2 & 0\\ 0 & 6b^2\end{pmatrix} \Leftarrow 6b^2=-6 \Leftarrow b^2=-1.$$

T מוגדרת מעל R, ו- S מעל $R^{2\times2}$ ולכן אין פתרון.
לכן $(-1)\cdot A^2\notin M$ $\Leftarrow$ M אינה סגורה לכפל בסקלר $\Leftarrow$ M לא מ.ו.
קיבלנו סתירה, לכן הנחת השלילה שגויה ולכן M לא תת מרחב של $R^{2\times2}$.

פתרון לפרק 14, עמוד 26, שאלה 4

א. הטענה נכונה. הוכחה:
נתון: $T:V\to V$ ט.ל., $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ בסיס ל- V, $\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס ל- $\ker(T)$.
צ"ל: $T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)$ ב.ת.ל.

נניח בשלילה כי $T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)$ הם כן תלויים לינארית, כלומר קיימים סקלרים לא כולם אפס המקיימים: $\alpha_{k+1}T(v_{k+1})+\dots+\alpha_nT(v_n)=0$. נפתח את הביטוי:

$$\alpha_{k+1}T(v_{k+1})+\dots+\alpha_nT(v_n)=0$$
$$T(\alpha_{k+1}v_{k+1})+\dots+T(\alpha_nv_n)=0$$
$$T(\alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_nv_n)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_nv_n\in\ker(T)$$

ע"פ נתון $\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס ל- $\ker(T)$ ולכן $\alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_n v_n$ נפרש ע"י $\{v_1,\dots,v_k\}$.
אבל אם $\alpha_{k+1}v_{k+1}+\dots+\alpha_n v_n$ נפרש ע"י $\{v_1,\dots,v_k\}$ אז הקבוצה $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ תלוייה לינארית.
נתון כי $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ הוא בסיס ולכן לא יתכן כי איברי הקבוצה תלויים.
קיבלנו סתירה, כלומר הנחת השלילה שגויה והטענה נכונה.

ב. הטענה אינה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:
נגדיר טרנספורמציה לינארית $T:R^2\to R^2$ באופן הבא: $T(a,b)=(b,a)$.
(T שהגדרנו היא אכן לינארית כי מקיימת את שתי התכונות הנדרשות).
נשים לב מהי T^2: $T^2(a,b)=T(T(a,b))=T(b,a)=(a,b)$.
נוכיח כי $\ker(T)=\ker(T^2)$ ע"י הכלה דו כיוונית:
$\ker(T)\subseteq\ker(T^2)$:
$x\in\ker(T) \Rightarrow T(a,b)=(0,0) \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow$
$T^2(0,0)=(0,0) \Rightarrow x\in\ker(T^2)$.
$\ker(T^2)\subseteq\ker(T)$:
$x\in\ker(T^2) \Rightarrow T^2(a,b)=(a,b)=(0,0) \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow$
$T(0,0)=(0,0) \Rightarrow x\in\ker(T)$.

לכן $\ker(T)=\ker(T^2)$. אבל $\begin{cases}T(1,0)=(0,1)\\ T^2(1,0)=(1,0)\end{cases}$, ולכן $T\neq T^2$.

גליון 11 – מטריצות מייצגות

פתרון לפרק 10, שאלה 10

נתון $T(x,y,z)=(2x-y\ ,\ x+3y+z\ ,\ x-y+4z)$.

א. נמצא את $[T]_e$:

הבסיס הסטנדרטי של במקרה זה הוא $\{(1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1)\}$. לכן:

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0)&=(2,1,1)= && 2(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)\\ T(0,1,0)&=(-1,3,-1)= && -1(1,0,0)+3(0,1,0)-1(0,0,1)\\ T(0,0,1)&=(0,1,4)= && 0(1,0,0)+1(0,1,0)+4(0,0,1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&3&-1\\0&1&4\end{pmatrix}$$

יש לעשות טרנספוז, ולכן נקבל:

$$[T]_e=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&1\\1&-1&4\end{pmatrix}$$

ב. נחשב את מטריצת המעבר מ- e ל- w:

$$\begin{aligned}(1,2,3)&=\alpha_1(1,0,0)+\beta_1(0,1,0)+\gamma_1(0,0,1) &&\Rightarrow &&\alpha_1=1,\ \beta_1=2,\ \gamma_1=3\\ (0,3,2)&=\alpha_2(1,0,0)+\beta_2(0,1,0)+\gamma_2(0,0,1) &&\Rightarrow &&\alpha_2=0,\ \beta_2=3,\ \gamma_2=2\\ (0,0,1)&=\alpha_3(1,0,0)+\beta_3(0,1,0)+\gamma_3(0,0,1) &&\Rightarrow &&\alpha_3=0,\ \beta_3=0,\ \gamma_3=1\end{aligned}$$

$$[P]_{e\to w}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

ג. דרך ראשונה:

נחשב ע"פ האלגוריתם המקורי. הבסיס במקרה זה הוא $\{(1,2,3)\ (0,3,2)\ (0,0,1)\}$. לכן:

$$\begin{aligned}T(1,2,3)&=(0,10,11)=\alpha_1(1,2,3)+\beta_1(0,3,2)+\gamma_1(0,0,1) &&\Rightarrow &&\alpha_1=0,\ \beta_1=\tfrac{10}{3},\ \gamma_1=\tfrac{13}{3}\\ T(0,3,2)&=(-3,11,5)=\alpha_2(1,2,3)+\beta_2(0,3,2)+\gamma_2(0,0,1) &&\Rightarrow &&\alpha_2=-3,\ \beta_2=\tfrac{17}{3},\ \gamma_2=\tfrac{8}{3}\\ T(0,0,1)&=(0,1,4)=\alpha_3(1,2,3)+\beta_3(0,3,2)+\gamma_3(0,0,1) &&\Rightarrow &&\alpha_3=0,\ \beta_3=\tfrac{1}{3},\ \gamma_3=\tfrac{10}{3}\end{aligned}$$

יש לעשות טרנספוז, ולכן נקבל:

$$[T]_w=\begin{pmatrix}0&-3&0\\ \frac{10}{3}&\frac{17}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{13}{3}&\frac{8}{3}&\frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

דרך שניה:

נשתמש במשפט: $[T]_w=P^{-1}[T]_eP$ (כאשר P היא מטריצת המעבר מ- e ל- w).

P ידועה לנו מהחישוב בסעיף ב'. את P^{-1} ניתן לחשב או לפי הפיכת P בשיטה הרגילה, או כך:

$$(1,0,0)=\alpha_1(1,2,3)+\beta_1(0,3,2)+\gamma_1(0,0,1) \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=1,\ \beta_1=-\tfrac{2}{3},\ \gamma_1=-\tfrac{5}{3}$$
$$(0,1,0)=\alpha_2(1,2,3)+\beta_2(0,3,2)+\gamma_2(0,0,1) \quad\Rightarrow\quad \alpha_2=0,\ \beta_2=\tfrac{1}{3},\ \gamma_2=-\tfrac{2}{3}$$
$$(0,0,1)=\alpha_3(1,2,3)+\beta_3(0,3,2)+\gamma_3(0,0,1) \quad\Rightarrow\quad \alpha_3=0,\ \beta_3=0,\ \gamma_3=1$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$$

לכן:

$$[T]_w=P^{-1}[T]_e P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ \frac{10}{3} & \frac{17}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{13}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3}\end{pmatrix}$$

פתרון לפרק 10, שאלה 13

ע"פ נתון: V מ.ו. ממרחב 3, וגם $\{v_1,v_2,v_3\}$ קבוצת וקטורים ב.ת.ל $\Leftarrow$ $\{v_1,v_2,v_3\}$ הוא בסיס ל- V.

נסמן $B=\{v_1,v_2,v_3\}$. נחשב את $[T]_B$:

$$\left.\begin{aligned}T(v_1)&=v_2= && 0v_1+1v_2+0v_3\\ T(v_2)&=v_3= && 0v_1+0v_2+1v_3\\ T(v_3)&=v_1+v_2+v_3= && 1v_1+1v_2+1v_3\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

נבצע טרנפוז ונקבל: $[T]_B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. נדרג את $[T]_B$ ונקבל את מטריצת היחידה.

ע"פ משפט, T הפיכה $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ (B בסיס כלשהו של V).

$r([T]_B)=3$ $\Leftarrow$ $[T]_B$ הפיכה $\Leftarrow$ T הפיכה.

נמצא את T^{-1} בעזרת המשפט: $[T^{-1}]_B=([T]_B)^{-1}$. לכן, המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T^{-1} היא:

$$[T^{-1}]_B=([T]_B)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פתרון לפרק 10, שאלה 17

אם $T=0$ סיימנו את ההוכחה.

לכן, נניח $T\neq 0$ ונוכיח שקיים בסיס של F^2 בו המטריצה המייצגת את T היא $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

$T\neq 0$, לכן קיימים $u,v\neq 0$ כך ש- $T(v)=u$. ע"פ נתון מתקיים $T(u)=T(T(v))=T^2=0$.

נראה ש- u,v הם ב.ת.ל ולכן מהווים בסיס ל- F^2, ונבנה מהם את המטריצה המייצגת.

נרצה להוכיח: $\alpha v+\beta u=0$ $\Leftarrow$ $\alpha,\beta=0$. (נסמן טענה זאת ב-*)

נפעיל T על $\alpha v+\beta u=0$:

$T\left(\alpha v+\beta u\right)=0$

$T\left(\alpha v\right)+T\left(\beta u\right)=0$

$\alpha T\left(v\right)+\beta T\left(u\right)=0$

$\alpha u+\beta\cdot 0=0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha u=0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=0$

נציב זאת ב-*:

$\beta u=0 \qquad \Leftarrow \qquad \beta=0$.

קיבלנו כי u,v ב.ת.ל ולכן $\{u,v\}$ מהווים בסיס ל- F^2.

$T\left(u\right)=0=0\cdot u+0\cdot v$

$T\left(v\right)=u=1\cdot u+0\cdot v$

ולכן $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ היא המטריצה המייצגת את T.

פתרון לפרק 14, עמוד 8, שאלה 5 א'

נתון כי A היא מטריצה מסדר n עם $n-1$ שורות זהות. בה"כ נסמן כי השורה היחידה השונה היא השורה הראשונה. לכן, ע"י פעולות שורה ניתן להחסיר את השורה השניה מהשורה השלישית עד השורה ה- n ית.

נקבל מטריצה שרק שתי השורות הראשונות שלה שונות מאפס. נסמן מטריצה זו כ- C.

המעבר $A\to\ldots\to C$ התבצע ע"י $n-2$ פעולות אלמנטריות $R_i\to R_i-R_2$ לכל $3\le i\le n$. את הפעולות הללו ניתן כמובן לבטא באמצעות $n-2$ מטריצות אלמנטריות $E_1\ldots E_{n-2}$. נסמן מכפלת מטריצות אלה כמטריצה P.

לכן, $PA=B$.

P היא הפיכה (כי מורכבת ממכפלת אלמנטריות) ולכן קיימת P^{-1}. נשים לב כי אם נכפיל את PA ב- P^{-1} עדיין נקבל מטריצה עם $n-2$ שורות אפסים, וזאת מכיוון שבמהלך ההכפלה P^{-1} נמצאת מימין ל- PA, כלומר כל שורות האפסים של PA תשארנה שורות אפסים גם לאחר ההכפלה. לכן, גם PAP^{-1} היא מטריצה עם $n-2$ שורות אפסים.

המטריצה PAP^{-1} דומה ל- A.

מ.ש.ל.

פתרון לפרק 14, עמוד 10, שאלה 4 א'

ע"פ נתון: $\dim\left(V\right)=n$, $\dim\left(\operatorname{Im}\left(T\right)\right)=r$. ע"פ משפט המימדים:

$\dim\left(V\right)=\dim\left(\operatorname{Im}\left(T\right)\right)+\dim\left(\ker\left(T\right)\right)$

$n=r+\dim\left(\ker\left(T\right)\right)$

$\dim\left(\ker\left(T\right)\right)=n-r$

נגדיר בסיס בעל $n-r$ איברים להיות גרעין: $\left\{v_{r+1}\ldots,v_{r+(n-r-1)},v_n\right\}$.

נשלים אותו לבסיס של V: $\left\{v_1,\ldots,v_r,v_{r+1}\ldots,v_{r+(n-r-1)},v_n\right\}$.

נמצא את $\left[T\right]_B$:

$$
\begin{aligned}
&T(v_1)=\alpha_{11}v_1+\alpha_{12}v_2+\ldots+\alpha_{1n}v_n\\
&T(v_2)=\alpha_{21}v_1+\alpha_{22}v_2+\ldots+\alpha_{2n}v_n\\
&\vdots\\
&T(v_r)=\alpha_{r1}v_1+\alpha_{r2}v_2+\ldots+\alpha_{rn}v_n\\
&T(v_{r+1})=0\cdot v_1+0\cdot v_2+\ldots+0\cdot v_n=0\\
&T(v_{r+2})=0\cdot v_1+0\cdot v_2+\ldots+0\cdot v_n=0\\
&\vdots\\
&T(v_n)=0\cdot v_1+0\cdot v_2+\ldots+0\cdot v_n=0
\end{aligned}
$$

כעת נבנה את המטריצה המייצגת כטרנספוז של האיברים שלמעלה:

$$
[T]_B=\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{r1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{r2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{rn} & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

r עמודות $n-r$ עמודות

פתרון לפרק 14, עמוד 25, שאלה 1 ד'

$$
\left.\begin{aligned}
&T(e_1)=T(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=f_1+f_4\\
&T(e_2)=T(1+x)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=-f_1+f_2+f_3+f_4\\
&T(e_3)=T(x^2)=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=2f_1-f_2-f_3\\
&T(e_4)=T(x^3)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&1&1&1\\2&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

$$
[T]_e^f=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\-1&1&1&1\\2&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}
$$

גליון 12 – דטרמיננטים

פתרון לפרק 11, שאלה 9

א. נתון $A^t=-A$. נבצע את הפעולות הבאות:

$A^t=-A \qquad /\det(\ )$

$|A^t|=|-A|$

מתקיים כי $|-A|=(-1)^n\cdot|A|$, וגם כי $|A|=|A^t|$, ולכן נקבל:

$|A|=|A^t|=|-A|=(-1)^n\cdot|A| \qquad \Rightarrow \qquad |A|=(-1)^n\cdot|A|$

נתון כי n אי זוגי, ולכן $|A|=(-1)^n\cdot|A|=(-1)\cdot|A|=-|A|$.

$|A|=-|A| \qquad \Leftarrow \qquad |A|=0$.

ב. נתון $A^t=A^{-1}$. נבצע את הפעולות הבאות:

$A^t=A^{-1} \qquad /\cdot A$

$A\cdot A^t=A\cdot A^{-1}=I \qquad /\det(\ )$

$|A\cdot A^t|=|I|=1$

$|A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=1$

ומכיוון ש- $|A|=|A^t|$ נקבל: $|A|\cdot|A^t|=|A|\cdot|A|=1$ וזה כמובן מתקיים רק עבור ±1.

ג. נתון $A^3=(-A^t)^5$. נבצע את הפעולות הבאות:

$A^3=(-A^t)^5 \qquad /\det(\ )$

$|A^3|=|(-A^t)^5|=|-A^t|^5=(-1)^n|A^t|^5=(-1)^n|A|^5$

$|A|^3=(-1)^n|A|^5$

לשם הנוחות נסמן $|A|=a$: $a^3=(-1)^n a^5$. נבחן את המקרים השונים:

I – $\begin{cases}A\in R\\ n=3\end{cases} \qquad \Leftarrow \qquad a\in R$.

$a^3=(-1)^3a^5 \quad \Rightarrow \quad a^3=-a^5 \quad \Rightarrow \quad a^3(1+a^2)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$

הפיתרון היחיד שקיבלנו הינו $|A|=0=a$, ולכן בהכרח A לא הפיכה.

II – $\begin{cases}A\in R\\ n=4\end{cases} \qquad \Leftarrow \qquad a\in R$

$a^3=(-1)^4a^5 \quad \Rightarrow \quad a^3=a^5 \Rightarrow \quad a^3(1-a^2)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0,\pm1$

כלומר יתכן כי $|A|=\pm1$ ולכן יתכן כי A הפיכה.

III – $\begin{cases}A\in C\\ n=3\end{cases} \qquad \Leftarrow \qquad a\in C$

$a^3=(-1)^3a^5 \quad \Rightarrow \quad a^3=-a^5$

לאחר שנפתור משוואת הקומפלקסים, נקבל $a=i$.

כלומר יתכן כי $|A|=i$ ולכן יתכן כי A הפיכה.

פתרון לפרק 14, עמוד 8, שאלה 4, סעיף ג'

הטענה איננה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת:

תהינה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $B=9A=9\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&18&27\\36&45&54\\63&72&81\end{pmatrix}$.

המטריצות הנ"ל עומדות בתנאי השאלה. נסמן לשם הנוחות: $|A|=\alpha$. נפתח את שני האגפים:

$$|A|+|B|=|A|+|9A|=|A|+9^3|A|=\alpha\left(9^3+1\right)=730\alpha .$$

$$|A+B|=|A+9A|=|10A|=10^3|A|=1000\alpha .$$

כלומר $|A+B|>|A|+|B|$ ובכך הפרכנו את הטענה.

פתרון לפרק 14, עמוד 8, שאלה 5, סעיף ב'

צ"ל: $adj\left(A^2\right)=\left(adj\left(A\right)\right)^2$.

נזכר במשפט: $adj\left(A\right)=|A|\cdot A^{-1}$.

אגף שמאל:

$$adj\left(A^2\right)=|A^2|\cdot\left(A^2\right)^{-1}=|A\cdot A|\cdot\left(A\right)^{-2}=|A|^2\cdot A^{-2}$$

אגף ימין:

$$\left(adj\left(A\right)\right)^2=\left(|A|\cdot A^{-1}\right)^2=\left(|A|\cdot A^{-1}\right)\cdot\left(|A|\cdot A^{-1}\right)=\left(|A|\cdot|A|\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}\right)=|A|^2\cdot A^{-2}$$

קיבלנו שיוויון ולכן שני האגפים שווים.

פתרון לפרק 14, עמוד 12, שאלה 3, סעיף א'

ע"פ הנתונים ניתן להסיק כי: $|D|=-|C|=-|B|=3|A|$.

נחשב את הדטרמיננטות המבוקשות:

- $-\frac{1}{4}=\left|\left(D^{-1}\right)^t\right|=\left|D^{-1}\right|=\frac{1}{|D|}\quad\Rightarrow\quad|D|=-4\quad\Rightarrow\quad|A|=-\frac{4}{3}$
- $\left|adj\left(A\right)\cdot D\right|=\left||A|\cdot A^{-1}\cdot D\right|=|A|^4\cdot\left|A^{-1}\right|\cdot|D|=|A|^4\cdot\frac{1}{|A|}\cdot|D|=|A|^3\cdot|D|=\left(-\frac{4}{3}\right)^3\cdot(-4)$
- $\left|adj\left(C^3\cdot A^{-1}\right)\right|=\left|\left|C^3\cdot A^{-1}\right|\cdot\left(C^3\cdot A^{-1}\right)\right|=\left|C^3\cdot A^{-1}\right|^4\cdot\left|\left(C^3\cdot A^{-1}\right)\right|=\left(|C^3|\cdot|A^{-1}|\right)^4\cdot\left|C^3\right|\cdot\left|A^{-1}\right|=$

  $=\left(|C^3|\cdot|A^{-1}|\right)^4\cdot\left|C^3\right|\cdot\left|A^{-1}\right|=\left|C^3\right|^4\cdot\left|A^{-1}\right|^4\cdot\left|C^3\right|\cdot\left|A^{-1}\right|=\left|C^3\right|^5\cdot\left|A^{-1}\right|^5=|C|^{15}\cdot\frac{1}{|A|^{15}}=\frac{4^{15}}{\left(-\frac{4}{3}\right)^{15}}=(-3)^{15}$

פתרון לפרק 14, עמוד 15, שאלה 3, סעיף ב'

צ"ל: $\begin{vmatrix}x&0\\y&z\end{vmatrix}=1$ מעל Z_5. נפתח ונקבל $\begin{vmatrix}x&0\\y&z\end{vmatrix}=xz-0\cdot y=xz=1$, כלומר כל אחת מהמטריצות הנ"ל תתאים:

$\begin{pmatrix}4&0\\\alpha&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&0\\\alpha&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\\alpha&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\\alpha&1\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha=0,1,2,3,4$.

גליון 13 – ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

כדי לוודא את חישובינו בכל הנוגע לפ״א, ע״ע וו״ע, ניתן להעזר באתר הבא:
http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi → English → Matrix Calculator

פתרון לפרק 14, עמוד 3, שאלה 3 א'

ידוע כי כל מטריצה A דומה למטריצה משולשת שבה איברי האלכסון הם הע״ע.
הדטרמיננטה של המטריצה המשולשת היא מכפלת איברי האלכסון, לכן הדטרמיננטה של המשולשת שווה ל- $1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3=12$. למטריצות דומות אותה דטרמיננטה, ולכן גם $|A|=12$.
כמו כן מכיוון שנתונים 5 ע״ע נסיק כי דרגת A היא 5×5.
ע״פ הנתונים ניתן להסיק כי $|B|=|A_2|=5|A_1|=-5|A|$. נעבור לחישוב עצמו:

$$\left|\left(B\cdot adj(A)\right)^{-1}\right|=\frac{1}{|B\cdot adj(A)|}=\frac{1}{|B|}\cdot\frac{1}{|adj(A)|}=\frac{1}{-5|A|}\cdot\frac{1}{\left||A|\cdot A^{-1}\right|}=\frac{1}{-5|A|}\cdot\frac{1}{|A|^5\cdot|A^{-1}|}=$$

$$=\frac{1}{-5|A|}\cdot\frac{1}{|A|^5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{|A|}}=\frac{1}{-5|A|^5}=\frac{1}{-5\cdot12^5}$$

פתרון לפרק 14, עמוד 8, שאלה 4 ב'

הטענה: A לכסינה $\Leftarrow$ A דומה ל- A^t.

ע״פ הנתון A לכסינה ולכן קיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}$ (כאשר $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ הם הע״ע של A).

פירוש A דומה ל- A^t הוא שקיימת Q הפיכה כך שמתקיים: $P^{-1}AP=D=Q^{-1}A^tQ$ (כי אם שתי מטריצות דומות למטריצה שלישית אז הן דומות ביניהן).

נניח בשלילה כי A לא דומה ל- A^t, כלומר לא קיימת Q הפיכה כך שמתקיים השוויון. לכן, לכל Q הפיכות שנבחר נקבל $P^{-1}AP\neq Q^{-1}A^tQ$. נפתח את הביטוי:

$$P^{-1}AP\neq Q^{-1}A^tQ \qquad /\det(\ )$$

$$|P^{-1}AP|\neq|Q^{-1}A^tQ|$$

$$|P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P|\neq|Q^{-1}|\cdot|A^t|\cdot|Q|$$

$|A|=|A^t|$, ולכן נסמן $|A|=|A^t|=\beta$:

$$|P^{-1}|\cdot\beta\cdot|P|\neq|Q^{-1}|\cdot\beta\cdot|Q|$$

$$\beta\left(|P^{-1}|\cdot|P|-|Q^{-1}|\cdot|Q|\right)\neq0$$

$$\beta\left(|P^{-1}\cdot P|-|Q^{-1}\cdot Q|\right)\neq0$$

$$\beta\left(|I|-|I|\right)\neq0$$

$$\beta(1-1)\neq0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta\cdot0\neq0$$

קיבלנו סתירה.
לכן ההנחה כי לא קיימת Q הפיכה כך שמתקיים השוויון אינה נכונה, לכן בהכרח קיימת Q כזאת, ולכן הטענה נכונה.

פתרון לפרק 14, עמוד 12, שאלה 5 ב'

ע"פ הנתון, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \neq \{0\}$, כלומר קיים v כך ש- $v \in V_{\lambda_1}$ וגם $v \in V_{\lambda_2}$.
עבור ה-v הזה מתקיים $T(v) = \lambda_1 v$ וגם $T(v) = \lambda_2 v$.
מכך נובע $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ ולכן $\lambda_1 = \lambda_2$. לכן הטענה נכונה.

פתרון לפרק 14, עמוד 18, שאלה 5

א. הטענה איננה נכונה. נפריך ע"י דוגמא נגדית מפורשת.
תהיינה המטריצות $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. המטריצות הנ"ל הן לכסינות כי לכל אחת מהן הר"א שווה לר"ג:
עבור A לערך העצמי 0 ר"א 1 והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,0)$ מר"ג 1,
לערך העצמי 2 ר"א 1 והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,2)$ מר"ג 1.
עבור B לערך העצמי 0 ר"א 1 והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,0)$ מר"ג 1,
לערך העצמי (-2) ר"א 1 והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,-2)$ מר"ג 1.
נבחן את $A+B$: $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. המטריצה הזאת אינה לכסינה:
קיים רק ערך עצמי אחד והוא 0 מר"א 2, והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,0)$ מר"ג 1.
ר"ג קטן מר"א ולכן לא לכסינה.

פתרון לפרק 14, עמוד 21, שאלה 2

א. נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2-\alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} 4-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 4-\alpha & 1-\alpha & 1 & 2 \\ 4-\alpha & 1 & 1-\alpha & 1 \\ 4-\alpha & 1 & 1 & 2-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$(4-\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\alpha \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} (4-\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$(4-\alpha)\begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = (4-\alpha)(-\alpha)^2(1-\alpha) = \alpha^2(4-\alpha)(1-\alpha)$$

ב. + ג. עבור הערך העצמי $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ מריבוי אלגברי 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x, -z-2x, z, x) \quad \Rightarrow \quad V_{\alpha_1=0} = V_{\alpha_2=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

עבור הערך העצמי $\alpha_3 = 4$ מריבוי אלגברי 1:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow (w,w,w,w) \Rightarrow V_{\alpha_3=4} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור הערך העצמי $\alpha_4 = 1$ מריבוי אלגברי 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow (-2w,w,2w,w) \Rightarrow V_{\alpha_4=1} = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ג. לסיכום: לערך העצמי 0 ר"א 2 ור"ג 2. לערך העצמי 4 ר"א 1 ור"ג 1, לערך העצמי 1 ר"א 1 ור"ג 1.

ד. A לכסינה מכיוון שהראינו שלכל ערך עצמי שלה מתקיים כי ר"א שווה לר"ג.
נמצא את P בקלות ע"י הצבת הוקטורים העצמיים בעמודות:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D היא פשוט הערכים העצמיים (בהתאמה לסדר הופעת הוקטורים ב- P) במטריצה אלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון לפרק 14, עמוד 21, שאלה 2

א. נחשב את הפולינום האופייני:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4-\alpha & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)\begin{vmatrix} 4-\alpha & 6 & 8 \\ 0 & 2-\alpha & 4 \\ 0 & 4 & 8-\alpha \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-\alpha & 4 \\ 0 & 4 & 8-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\alpha)(4-\alpha)\left[(2-\alpha)(8-\alpha)-16\right] - 2\left[(2-\alpha)(8-\alpha)-16\right] =$$

$$= \left(\alpha^2 - 5\alpha\right)\left(\alpha^2 - 10\alpha\right) = \alpha^2(\alpha-5)(\alpha-10)$$

ב. + ג. עבור הערך העצמי $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ מריבוי אלגברי 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow (2w-2y, y, -2w, w) \Rightarrow V_{\alpha_1=0} = V_{\alpha_2=0} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור הערך העצמי $\alpha_3 = 5$ מריבוי אלגברי 1:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow (x,2x,0,0) \Rightarrow V_{\alpha_3=5} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

עבור הערך העצמי $\alpha_4 = 10$ מריבוי אלגברי 1:

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{11}{10}w, \frac{11}{5}w, \frac{1}{2}w, w\right) \Rightarrow V_{\alpha_3=10} = \left\{\begin{pmatrix} 11/10 \\ 11/5 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ג. לסיכום: לערך העצמי 0 ר״א 2 ור״ג 2. לערך העצמי 5 ר״א 1 ור״ג 1, לערך העצמי 10 ר״א 1 ור״ג 1.

ד. A לכסינה מכיוון שהראינו שלכל ערך עצמי שלה מתקיים כי ר״א שווה לר״ג.
נמצא את P בקלות ע״י הצבת הוקטורים העצמיים בעמודות:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 11/10 \\ 0 & 1 & 2 & 11/5 \\ -2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D היא פשוט הערכים העצמיים (בהתאמה לסדר הופעת הוקטורים ב- P) במטריצה אלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

פתרון לפרק 14, עמוד 21, שאלה 2

א. נתון $A^3 = A$. נפתח את הביטוי:

$$A^3 = A \qquad /\det(\ )$$
$$|A^3| = |A| \quad \Rightarrow \quad |A|^3 = |A| \quad \Rightarrow$$
$$|A|^3 - |A| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A|\left(|A|^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad |A| = 0, \pm 1$$

(וזאת מכיוון שנתון ש- A ממשית). ל- A יתכנו כל אחד משלושת הערכים.
נחפש מטריצה B שתקיים: $B^3 \neq B$:

$$B^3 \neq B \qquad /\det(\ )$$
$$|B^3| \neq |B| \quad \Rightarrow \quad |B|^3 \neq |B| \quad \Rightarrow$$
$$|B|^3 - |B| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |B|\left(|B|^2 - 1\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |B| \neq 0, \pm 1$$

ע״פ משפט, למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה, אך ע״פ הדרישה הסקנו שלא יתכן של- A ול- B תיהיה אותה דטרמיננטה (כי הערכים היחידים של דט' ש- A יכולה לקבל אסורים ל- B), ולכן לא קיימת B כזאת.

ב. הסקנו כי הדטרמיננטה של A יכולה להיות שווה ל- $0,\pm1$.
ידוע כי מכפלת הערכים העצמיים שווה לדטרמיננטה, ולכן על הערכים העצמיים לקיים תנאי זה.
אם $|A|=0$ אז אחד מהערכים העצמיים צריך להיות 0 ואין הגבלה על כל השאר.
אם $|A|=1$ אז על מכפלתם להיות 1, ואסור שאחד מהם יהיה 0.
אם $|A|=-1$ אז על מכפלתם להיות 1-, ואסור שאחד מהם יהיה 0.

ג. הטענה אינה נכונה. נפריך ע״י דוגמא נגדית מפורשת:
תהי $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. נשים לב כי מתקיים $A^3=A$. נראה כי A לכסינה כי לכל ע״ע שלה הר״א שווה לר״ג:
לערך העצמי 1 ר״א 1 והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,1)$ מר״ג 1,
לערך העצמי (1-) ר״א 1 והוקטור העצמי המתאים לו הוא $(1,-1)$ מר״ג 1.
קל לראות כי $rank(A)=2$, וכן כי $tr(A)=0$, ובכך הפרכנו את הטענה.