תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 11 **להגשה עד 19.01.2003**

1. תהי X קבוצה סדורה חלקית. הוכח: קיימת B , תת-קבוצה בלתי תלויה של X , כך שכל איבר של $X\setminus B$ ניתן להשוואה עם איבר אחד לפחות של B .

<u>תזכורת</u>: תת-קבוצה B של X נקראת בלתי תלויה אם כל שני אברים שונים של B אינם ניתנים להשוואה.

2. תהי F משפחה של כל התת-קבוצות S של $\mathbb{R}$ בעלות התכונה הבאה:
$x, y\in S$ ו- $x\neq y$ $\Leftarrow$ $x+y\notin S$.
א) הוכח: ב- F , המסודרת לפי ההכלה של קבוצות, יש איבר מקסימלי.
בסעיפים הבאים T הוא איבר מקסימלי כלשהו של F .
ב) הוכח: $|T|\neq\aleph_0$.
ג) הוכח: $|T|=\aleph$. (<u>הערה</u>: לא מספיק להגיד שאנחנו לא מכירים עצמה בין $\aleph_0$ לבין $\aleph$!)
ד) יהי $z\in\mathbb{R}\setminus T$. הוכח: קיימים $x,y\in T$ כך ש- $x+y=z$ או $x-y=z$.

3. <u>הגדרה</u>:
תהי X קבוצה, ויהי S יחס שקילות ב- X .
תת-קבוצה A של X נקראת <u>חתך של X לפי S</u> אם יש בה איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות (כלומר, לכל $x\in X$ מתקיים $|[x]_S\cap A|=1$).
א) הוכח בעזרת אקסיומת הבחירה: לכל X ו- S קיים חתך של X לפי S .
ב) הוכח את אותה הטענה בעזרת הלמה של צורן.
ג) תהי $X=\mathbb{R}$ ו- $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x-y\in\mathbb{Q}\}$. האם כל החתכים של $\mathbb{R}$ לפי S – בעלי אותה עוצמה? מה הן כל העצמות האפשריות?

4. הוכח בעזרת אקסיומת הבחירה: פונקציה $f: A\to B$ היא על אם ורק אם קיימת פונקציה $g: B\to A$ כך ש- $f\circ g=\mathrm{Id}_B$. (Id_B זאת פונקצית הזהות ב- B.)

5. תהיינה $f: B\to C$ ו- $g: A\to C$ שתי פונקציות כך ש- $\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathrm{Im}(g)$.
הוכח בעזרת אקסיומת הבחירה: קיימת פונקציה $h: B\to A$ כך ש- $g\circ h=f$.

6. הגדר פונקצית בחירה ללא שימוש באקסיומת הבחירה בקבוצות הבאות:
א) בקבוצת הקטעים הסגורים החסומים ב- $\mathbb{R}$ (כלומר, ב- $\{[a, b]: a,b\in\mathbb{R}\}$) .
ב) בקבוצת הקטעים הפתוחים החסומים ב- $\mathbb{R}$ (כלומר, ב- $\{(a, b): a,b\in\mathbb{R}\}$) .
ג) ב- $P(\mathbb{Q})\setminus\{\varnothing\}$.