כלל השרשרת

1 נגזרת של הרכבה:

תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ויהיו $u_1,u_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירות בנקודה $(a_0,b_0)\in\mathbb{R}^2$ כך ש $u_1(a_0,b_0)=x_0$ ו $u_2(a_0,b_0)=y_0$. אז ההרכבה $F(a,b)=f(u_1(a,b),u_2(a,b))$ גזירה ב (a_0,b_0) ונגזרתה היא

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a}(a_0,b_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(a_0,b_0),u_2(a_0,b_0))\frac{\partial u_1}{\partial a}(a_0,b_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(a_0,b_0),u_2(a_0,b_0))\frac{\partial u_2}{\partial a}(a_0,b_0)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial u_1}{\partial a}(a_0,b_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial u_2}{\partial a}(a_0,b_0)\end{aligned}$$

ובצורה דומה מחשבים את $\frac{\partial F}{\partial b}(a_0,b_0)$. **לשים לב,** הפרמטרים של $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו $\frac{\partial f}{\partial y}$ הם x_0,y_0 ולא a_0,b_0.

אם $u_1,u_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות עם פרמטר אחד (ונסמן $F(t)=f(u_1(t),u_2(t))$) אז

$$\frac{dF}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t_0),u_2(t_0))\frac{du_1}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0),u_2(t_0))\frac{du_2}{dt}(t_0)$$

<u>**הערה**</u>: שימו לב להקבלה עם נגזרת לפי כלל השרשרת של פונקציה במשתנה אחד: אם $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו $h(t)=f\circ g(t)$ אז $h'(t)=f'(g(t))\cdot g'(t)$. במקרה למעלה f' הופך ל ∇f ו g' זה הווקטורי נגזרות חלקיות $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$.

תרגיל 1:

נתונות הפונקציות $f(x,y,z)=xy-\frac{z^2}{y^2+1}$, $g(u,v)=\big((u+v)^2,\ 1,\ 2uv\big)$. מצאי את הנגזרת של הפונקציה $F(u,v)=f\circ g(u,v)$.

פתרון:

נסמן $g_1(u,v)=(u+v)^2$, $g_2(u,v)=1$ ו $g_3(u,v)=2uv$. נחשב את הנגזרות:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \left(y,\ x+\frac{z^2}{\left(y^2+1\right)^2}\cdot 2y,\ -\frac{2z}{y^2+1}\right)\\ \nabla g_1(u,v) &= (2(u+v),\ 2(u+v))\qquad \nabla g_2(u,v)=(0,0)\qquad \nabla g_3(u,v)=(2v,2u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mid_{g(u,v)}\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\mid_{g(u,v)}\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial z}\mid_{g(u,v)}\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\\ &= y\cdot 2(u+v)+\left(x+\frac{z^2}{(y^2+1)^2}\cdot 2y\right)\cdot 0-\frac{2z}{y^2+1}\cdot 2v\mid_{(x,y,z)=g(u,v)}\\ &= 2(u+v)-4uv^2\\ \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mid_{g(u,v)}\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\mid_{g(u,v)}\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial z}\mid_{g(u,v)}\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\\ & \ 2(u+v)-4u^2v\end{aligned}$$

לכן הנגזרת של F היא $\nabla F(u,v)=\big(2(u+v)-4uv^2, 2(u+v)-4u^2v\big)$.

תרגיל 2

גזרו את הפונקציה $H(x)=\int_x^{f(u(x),v(x^2+1))} g(t)\mathrm{dt}$.

פתרון:

נסמן $F(x)=f(u(x),v(x^2+1))$ אז $H(x)=\int_x^{F(x)} g(t)\mathrm{dt}$ ולכן

$$H'(x) \quad = \quad g(F(x))F'(x)-g(x)$$

נותר למצוא את הנגזרת של $F(x)$. כדי

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(x),v(x^2+1))\cdot u'(x)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x),v(x^2+1))\frac{\partial\left(v(x^2+1)\right)}{\partial x} \\ \frac{\partial\left(v(x^2+1)\right)}{\partial x} &= v'(x^2+1)\cdot 2x \end{aligned}$$

הערה 1.1 לשים לב שיש הבדל בין הנגזרת של $v(x)$ לפי x והנגזרת של $v\left(x^2+1\right)$ לפי x. כדי לא להתבלבל, כדאי להוסיף עוד שמות לפרמטרים, למשל v תהיה פונקציה של t, כלומר $v:=v(t)$ ו t תהיה פונקציה של x ע"י $t(x)=x^2+1$. ואז נקבל נגזרת לפי כלל השרשרת (של אינפי 1):

$$.\,(v(t(x)))'=v'(t(x))\cdot t'(x)$$

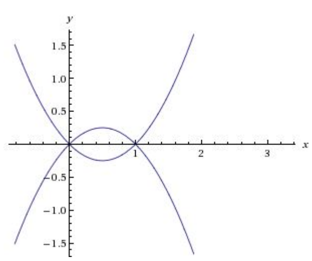
2 צמצום לעקומים

תרגיל 3:

תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה בסביבות הראשית ובנוסף נתון שהיא קבועה על הקבוצה $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2=(x-x^2)^2\right\}$. הראו שהנגזרת של f בראשית היא אפס.

פתרון:

נשים לב שניתן לכתוב את הקבוצה A כאיחוד של שתי קבוצות $A_+=\left\{y=(x-x^2)\right\}$ ו $A_-=\left\{y=-(x-x^2)\right\}$, כלומר מקבלים איחוד של שתי פרבולות



בפרט, בראשית עוברים שני עקומים ־ נסמן אותם ב $\varphi(t)=(t-t^2,t)$ ו $\psi(t)=(t^2-t,t)$. מהנתון מקבלים שקיים קבוע C כך ש $f(\varphi(t))=C$ ו $f(\psi(t))=C$ לכל t. נגזור!

$$\begin{aligned} C &= f(t^2-t,t) \\ 0=C' &= f'_x(t^2-t,t)\cdot(t^2-t)'+f'_y(t^2-t,t)\cdot t'=f'_x(t^2-t,t)\cdot(2t-1)+f'_y(t^2-t,t) \end{aligned}$$

רוצים לדעת מה קורה בראשית, ולכן נציב $t=0$ ונקבל $f'_x(0,0)(-1)+f'_y(0,0)=0$. אותו הדבר נעשה עם ψ ונקבל $f'_x(0,0)\cdot 1+f'_y(0,0)\cdot 1=0$. קיבלנו שתי משוואות עם שני נעלמים (f'_x ו f'_y) ־ פתירת המערכת תיתן ש $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$. הנגזרות החלקיות בראשית שוות לאפס (והפונקציה גזירה) ולכן הנגזרת בראשית שווה לאפס.

תרגיל 4:

תהא f גזירה בראשית ומקיימת בנוסף

$$\begin{aligned} f(t,0) &= te^t \\ f(t,t^2-t) &= te^{t^2}+t^4-2t^3+t^2 \end{aligned}$$

מצאי את הנגזרת של f בראשית.

פתרון:

שוב נתון לנו איך f מתנהגת לאורך שני עקומים שעוברים בראשית (קו ישר ופרבולה). נגזור כדי לקבל מערכת משוואות על הנגזרות החלקיות:

$$\begin{aligned} f'_x(t,0)\cdot t' + f'_y(t,0)\cdot 0' &= (te^t)' = e^t(1+t) \\ f'_x(t,t^2-t)\cdot t' + f'_y(t,t^2-t)\cdot(t^2-t)' &= (te^{t^2}+t^4-2t^3+t^2)' \end{aligned}$$

נציב $t=0$ ונקבל

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= 1 \\ f'_x(0,0)-f'_y(0,0) &= 1 \\ &\Rightarrow\ f'_x=1,\ f'_y=0 \end{aligned}$$

<u>הערה:</u> באופן כללי, ברגע שאנחנו יודעים איך f מתנהגת לאורך שני עקומים שעוברים דרך נקודה P, כאשר הכיווני משיקים של העקומים בנקודה הם בלתי תלויים לינארית, נוכל מהמידע הזה לשלוף את הנגזרות החלקיות באותה נקודה.

תרגיל 5:

נתונה הפונקציה $f(x,y)$ גזירה ברציפות ב $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ונתונות הנגזרות החלקיות שלה

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x\alpha(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\alpha(x,y)$$

כאשר $\alpha(x,y)$ פונקציה רציפה. הוכיחי שהפונקציה קבועה על כל מעגל סביב הראשית.

פתרון:

נבחר $r>0$ קבוע ונסתכל על הטרנספורמציה

$$\psi^{(r)}(\theta)=(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))$$

כלומר עבור זווית θ, הנקודה $\psi(\theta)$ תהיה בזווית θ מציר ה x ובמרחק r מהראשית. מאחר ואנחנו רוצים לדעת מה קורה ל f על מעגל סביב הראשית אז נסתכל על

$$\tilde{f}^{(r)}(\theta)=f(\psi^{(r)}(\theta))=f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))$$

שזה בעצם הצמצום של f למעגל ברדיוס r. הפונקציה f קבועה על המעגל ברדיוס r אמ"מ הפונקציה $\tilde{f}^{(r)}(\theta)$ היא פונקציה קבועה ואת זה ניתן לבדוק ע"י גזירה והשוואה לאפס.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}^{(r)}}{\partial\theta}(\theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\psi^{(r)}(\theta))\frac{\partial x}{\partial\theta}(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(\psi^{(r)}(\theta))\frac{\partial y}{\partial\theta}(\theta) \\ &= \alpha(x,y)\left[x\frac{\partial x}{\partial\theta}(r,\theta)+y\frac{\partial y}{\partial\theta}(r,\theta)\right]=\alpha(x,y)\left[-xr\sin(\theta)+yr\cos(\theta)\right] \\ &= \alpha(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\left[-r\cos(\theta)r\sin(\theta)+r\sin(\theta)r\cos(\theta)\right]=0 \end{aligned}$$

קיבלנו ש $\tilde{f}^{(r)}(\theta)$ קבועה לכל r (למרות שהקבוע יכול להיות שונה עבור כל מעגל), ולכן הפונקציה f קבועה על כל מעגל.