דיפרנציאביליות

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- הגדרה: הנגזרת החלקית של f ב־ (x_0,y_0) לפי x היא

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ובדומה לפי y.

- הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבת $f(x_0,y_0)$. נאמר כי f דיפרנציאבילית ב־ (x_0,y_0) אם קיימים A,B ו־ $\epsilon=\epsilon(x,y)$ כך ש־

$$\triangle f=A\triangle x+B\triangle y+\epsilon$$

ו־ $\epsilon=\epsilon(\triangle x,\triangle y)=o\left(\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}\right)$

באופן שקול, נאמר כי f דיפרנציאבילית ב־ (x_0,y_0) אם קיימים A,B כך ש־

$$\epsilon=\epsilon(x,y)=\frac{\triangle f-A\triangle x-B\triangle y}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}\to 0$$

כאשר $(x,y)\to(0,0)$

הערה: במקרה ו־ $(x_0,y_0)=(0,0)$ נסמן $\triangle x=x$ ו־ $\triangle y=y$ ואז ϵ נראה כך־

$$\epsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-Ax-By}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- משפט: אם f דיפרנציאבילית בנקודה, אז היא רציפה בנקודה, יש לה בנקודה נ"ח ו־ $A=f_x,B=f_y$.
- משפט: אם ל־ f יש נ"ח רציפות בנקודה (x_0,y_0) אז היא דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0).
- המישור המשיק של f בנקודה (x_0,y_0):

$$z=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$$

- הגדרה: יהי u וקטור יחידה. הביטוי

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)}{h}$$

נקרא הנגזרת המכוונת של f בכיוון u בנקודה (x_0,y_0).

- משפט: אם f דיפרנציאבילית ב־ (x_0,y_0) אזי לכל u וקטור יחידה:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot u$$

תרגילים:

1. חשבו את הנגזרות החלקיות של
$$f\left(x,y,z\right)=\ln\left(x^{2}+1\right)+e^{x^{2}+\sin(yz)}$$

<u>פתרון:</u>

גוזרים כמו בחדו"א 1 לפי כל משתנה לחוד:
$$f_{x}\left(x,y,z\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y,z\right)=\frac{2x}{x^{2}+1}+2xe^{x^{2}+\sin(yz)}$$
$$f_{y}\left(x,y,z\right)=z\cos\left(yz\right)e^{x^{2}+\sin(yz)}$$
$$f_{z}\left(x,y,z\right)=y\cos\left(yz\right)e^{x^{2}+\sin(yz)}$$

2. תהי נתונה הפונקציה
$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{2}y}{x^{6}+2y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. האם קיימות לפונקציה f נגזרות חלקיות ב־ $(0,0)$?

ב. האם f דיפרנציאבילי ב־ $(0,0)$?

ג. האם ל־ f יש נגזרת כיוונית בכיוון u ב־ $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

א. ע"פ הגדרה:
$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$
לכן $f_{x}\left(0,0\right)=0$. בדיוק באותו אופן מקבלים $f_{y}\left(0,0\right)=0$.

ב. בתרגול הקודם בדקנו ש־ f לא רציף ב־ $(0,0)$, לכן לא דיפרנציאבילי. או ישירות ע"פ ההגדרה:
$$\epsilon\left(x,y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$$
ניקח
$$\epsilon\left(x,x\right)=\frac{x^{3}}{\sqrt{2}\left|x\right|\left(x^{6}+2x^{2}\right)}\nrightarrow0$$
כש־ $x\to0$.

ג.בדקנו כבר עבור $u\in\{e_{1},e_{2}\}$. עבור $u\notin\{e_{1},e_{2}\}$ נחשב ע"פ ההגדרה:
$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(hu_{1},hu_{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^{3}u_{1}^{2}u_{2}}{h\left(h^{6}u_{1}^{6}+2h^{2}u_{2}^{2}\right)}=\frac{u_{1}^{2}}{2u_{2}}$$
לכן סך הכל, יש ל־ f נגזרת כיוונית בכל כיוון.

מסקנה: **קיום נגזרת כיוונית בכל כיוון לא מבטיח דיפרנציאביליות.**

3. תהי נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. האם $f_x(0,0)$ ו־ $f_y(0,0)$ קיימים?

ב. האם f_x רציף ב־ $(0,0)$?

ג. האם f דיפרנציאבילי ב־ $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

א. מחשבים ע"פ ההגדרה ומקבלים $f_x(0,0)=1$ כי

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1$$

בדומה $f_y(0,0)=1$.

שים לב שבכל נקודה אחרת, f_x, f_y קיימים כנגזרות של אלמנטריות.

ב. ב־ $\mathbb{R}^2-\{0\}$ ניתן לגזור את f כפונקציה אלמנטרית. מקבלים:

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

על קרנות נקבל גבולות שונים כי

$$f_x(x,kx)=\frac{1+3k^2-2k^3}{(1+k^2)^2}$$

לכן ברור ש־ f_x לא רציף ב־ $(0,0)$.

מסקנה: **כדי לבדוק רציפות נ"ח צריך לחשב אותה בסביבת הנקודה.**

ג. נבדוק מה קורה ל־ ϵ:

$$\epsilon=\frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

נשים לב ש־ $\epsilon(x,x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ לכל $x>0$. לכן $\epsilon\nrightarrow 0$ כש־ $(x,y)\to(0,0)$, ז.א., f לא דיפרנציאבילי ב־ $(0,0)$.

מסקנה: **קיום נ"ח אפילו בכל המישור לא מבטיח דיפרנציאביליות.**

4. תהי נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{\alpha}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

עבור α מספר ממשי.

א. קבעו עבור איזה ערכים של α לפונקציה f יש נגזרות חלקיות ב־ $(0,0)$.

ב. קבעו עבור איזה ערכים של α הפונקציה f דיפרציאבילית ב־ $(0,0)$.

ג. יהי $u=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה. קבעו עבור איזה ערכים של α לפונקציה f יש נגזרת מכוונת בכיוון u ב־ $(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

א. קל מאוד לראות של־ f יש נ"ח ב־ $(0,0)$ ו־ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

מסקנה: **קיום נ"ח אפילו בכל המישור לא מבטיח רציפות**.

ב. מתרגיל 17 תרגול 9, נקבל ש־

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=0\Longleftrightarrow 3-2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)>0$$

ג. הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^{2\alpha}}}{h}$ קיים אם ורק אם $3-2\alpha-1\geq 0$. לכן

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\begin{cases}u_2u_1^2 & \alpha=1\\ 0 & \alpha<1\end{cases}$$

5. תהי נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{xy} & x,y\neq 0\\ \frac{\sin x}{x} & x\neq 0,\ y=0\\ \frac{\sin y}{y} & y\neq 0,\ x=0\\ 1 & x=y=0\end{cases}$$

א. הראו ש־ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

ב. הוכיחו ש־ f דיפרציאבילית ב־ $(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

א. ע"פ הגדרה:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin h-h}{h^2}$$

אבל $\sin h-h\sim h^3$ לכן הגבול שווה 0. וכנ"ל עבור $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

ב. צריך להוכיח ש־

$$\epsilon(x,y)=f(x,y)-1$$

מקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

וזה נובע באופן לדומה לבדיקת רציפות f, בודקים לפי היינה ומפרקים לתת־סדרות.

6. נתון כי $f(x,y)$ מקיימת $|f(x,y)| \le 3x^2+4y^2$ ב־ $\mathbb{R}^2$. הוכיחו ש־ f דיפרנציאבילי ב־ $(0,0)$.

פתרון:

קל לראות ש־ $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. לכן נבדוק האם מתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

ואכן זה נובע ישירות מהנתון:

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 3|x|+4|y| \to (0,0)$$

כאשר $(x,y)\to(0,0)$.

7. תהי f דיפרנציאבילית ב־ $\mathbb{R}^2$ המקיימת: $f(x,y)=f(y,x)$. חשבו את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1,1)$ בכיוון $(-1,1)$.

פתרון:

מהנתון

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{f(y,x+h)-f(y,x)}{h}$$

לכן $f_x(x,y)=f_y(y,x)$. לכן $f_x(1,1)=f_y(1,1)$. מכאן עבור $u=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ומכיוון ש־ f דיפרציאבילית, נקבל $f_u(1,1)=0$.

8. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. האם קיימות $f_x(0,0)$ ו־ $f_y(0,0)$?

ב. האם f דיפרנציאבילי ב־ $(0,0)$?

ג. האם f_x רציף ב־ $(0,0)$?

פתרון:

א. ע"י חישוב פשוט, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. למשל בחישוב $f_x(0,0)$, צריך לחשב את

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}$$

ואכן כידוע זה שווה ל־ 0.

ב. נבדוק האם $\epsilon\to0$:

$$\epsilon=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

וע"י מעבור למישור (r,θ) למשל, $\epsilon \to 0$ כאשר $(x,y) \to (0,0)$. למה לא פשוט חסום*שואף ל0?

ג. נחשב ונקבל:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

לכן f_x לא רציף ב־ $(0,0)$, כי המחובר השני $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ לא רציף אבל הראשון כן:

$$\left|2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 2|x| \to 0$$

כש־ $(x,y) \to (0,0)$. אבל

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \mid_{\substack{x=t>0 \\ y=0}} = \cos\frac{1}{t}$$

וכידוע לא קיים $\lim_{t\to 0^+}\cos\frac{1}{t}$.

מסקנה: **דיפרנציאביליות לא גוררת $\mathbf{C^1}$**.

9. א. מצאו את המישור המשיק של $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ בנקודה $(-1,1)$.

ב. חשבו את הנגזרת הכיוונית בכל כיוון u בנקודה $(-1,1)$.

<u>פתרון:</u>

א. ע"י חישוב פשוט מאוד מקבלים

$$f(-1,1) = 1, f_x(-1,1) = -2, f_y(-1,1) = 2$$

לכן

$$z = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x-(-1)) + f_y(-1,1)(y-1)$$

מציבים ומקבלים

$$z = 1 - 2(x+1) + 2(y-1) = -3 - 2x + 2y$$

בדיקה:

$$z(-1,1) = 1, z_x = -2, z_y = 2$$

ב. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ לכן דיפרנציאבילית, ומכאן נשתמש בנוסחא מההרצאה:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1,1) = \nabla f(-1,1) \cdot u = 2(u_2 - u_1)$$

10. תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרציאבילית ב־0 ומקיימת $g^{'}(0)=0$. נגדיר $f(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.
הוכיחו ש־ f דיפרנציאבילית ב־ $(0,0)$ וחשבו את הנגזרת המכוונת בכל כיוון אפשרי.

<u>פתרון:</u>

מספיק לחשב את הנ"ח של f:

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{g(|h|)-g(0)}{h}$$

ע"י בדיקת גבולות חד־צדדיות נקבל $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=g^{'}(0)=0$ ובדומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. עכשיו נבדוק האם $\epsilon\to 0$:

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to g^{'}(0)=0$$

לא הבנתי את
המעבר הזה.
לא חסר g(0)?