וריאציית פרמטרים

בהנתן מד"ר לינארית מנורמלת ולא הומוגנית

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

ובהנתן פתרונות בת"ל $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ של המד"ר ההומוגנית המתאימה, נחפש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + \cdots + c_n(x)u_n(x).$$

נרצה להציב את ביטוי זה לתוך המד"ר כדי לקבל תנאים על $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ כך שנקבל פתרון. באופן כללי הגזירה תהיה מאוד מכוערת. נראה את הרעיון עבור $n = 3$ בשביל פשטות סימון. אזי המד"ר היא

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

ובנוסף נתונים שלושה פתרונות ב.ת.ל. של המד"ר ההומוגנית המתאימה $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$. אנו מחפשים פונקציות $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ עבורם

$$y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + c_3(x)u_3(x)$$

פתרון פרטי של המד"ר האי־הומוגנית. ננסה להציב לתוך המד"ר כדי לקבל תנאים על $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$. נגזור את הביטוי

$$y_p'(x) = c_1'(x)u_1(x)+c_2'(x)u_2(x)+c_3'(x)u_3(x)+c_1(x)u_1'(x)+c_2(x)u_2'(x)+c_3(x)u_3'(x)$$

אנו רואים כי המשך הגזירה יהיה מכוער מאוד אם לא נפשט את הביטוי. למשל אם נדרוש כי

$$c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) + c_3'(x)u_3(x) = 0$$

אז

$$y_p'(x) = c_1(x)u_1'(x) + c_2(x)u_2'(x) + c_3(x)u_3'(x)$$

נגזור שוב

$$y_p''(x) = c_1'(x)u_1'(x)+c_2'(x)u_2'(x)+c_3'(x)u_3'(x)+c_1(x)u_1''(x)+c_2(x)u_2''(x)+c_3(x)u_3''(x)$$

כמו קודם, כדי שהגזירה תהיה פשוטה, נדרוש כי

$$c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x) + c_3'(x)u_3'(x) = 0$$

אז

$$y_p''(x) = c_1(x)u_1''(x) + c_2(x)u_2''(x) + c_3(x)u_3''(x)$$

נגזור פעם אחרונה

$$y_p'''(x) = c_1'(x)u_1''(x)+c_2'(x)u_2''(x)+c_3'(x)u_3''(x)+c_1(x)u_1'''(x)+c_2(x)u_2'''(x)+c_3(x)u_3'''(x)$$

ונציב לתוך המד"ר האי הומוגנית כדי לקבל את התנאי האחרון

$$\begin{aligned}
& y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\
& c_1'(x)u_1''(x) + c_2'(x)u_2''(x) + c_3'(x)u_3''(x) + c_1(x)u_1'''(x) + c_2(x)u_2'''(x) + c_3(x)u_3'''(x) + \\
+ \quad & a_2(x)\big(c_1(x)u_1''(x) + c_2(x)u_2''(x) + c_3(x)u_3''(x)\big) + \\
+ \quad & a_1(x)\big(c_1(x)u_1'(x) + c_2(x)u_2'(x) + c_3(x)u_3'(x)\big) + \\
+ \quad & a_0(x)\big(c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + c_3(x)u_3(x)\big) = f(x)
\end{aligned}$$

נסדר את האברים של הביטוי מחדש ונקבל

$$\begin{aligned}
& c_1(x)\big(u_1'''(x) + a_2(x)u_1''(x) + a_1(x)u_1'(x) + a_0(x)u_1(x)\big) + \\
+ \quad & c_2(x)\big(u_2'''(x) + a_2(x)u_2''(x) + a_1(x)u_2'(x) + a_0(x)u_2(x)\big) + \\
+ \quad & c_3(x)\big(u_3'''(x) + a_2(x)u_3''(x) + a_1(x)u_3'(x) + a_0(x)u_3(x)\big) + \\
+ \quad & c_1'(x)u_1''(x) + c_2'(x)u_2''(x) + c_3'(x)u_3''(x) = f(x)
\end{aligned}$$

אבל $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ פתרונות של ההומוגנית ולכן נקבל

$$c_1'(x)u_1''(x) + c_2'(x)u_2''(x) + c_3'(x)u_3''(x) = f(x).$$

לסיכום, התנאים שקיבלנו על $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ בשביל ש־

$$y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + c_3(x)u_3(x)$$

יהיה פתרון פרטי של המד"ר האי הומוגנית הם

$$\begin{aligned}
c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) + c_3'(x)u_3(x) &= 0 \\
c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x) + c_3'(x)u_3'(x) &= 0 \\
c_1'(x)u_1''(x) + c_2'(x)u_2''(x) + c_3'(x)u_3''(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

וזו מערכת משוואות שהמטריצה שלה היא המטריצה המופיעה בורונסקיאן של $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ ולכן מובטח פתרון יחיד. שימו לב כי הנעלמים במערכת המשוואות הם בעצם $c_1'(x), c_2'(x), c_3'(x)$ ולא $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$.

עבור $n = 2$ נקבל $y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$ והמשוואות הן

$$\begin{aligned}
c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) &= 0 \\
c_1'(x)u_1'(x) + c_2'(x)u_2'(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

סיכום המקרה הכללי: יש פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = c_1(x)u_1(x) + \cdots + c_n(x)u_n(x)$$

כאשר התנאים הם

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)u_1(x) + \cdots + c_n'(x)u_n(x) = 0 \\
&c_1'(x)u_1'(x) + \cdots + c_n'(x)u_n'(x) = 0 \\
&\vdots \\
&c_1'(x)u_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)u_n^{(n-2)}(x) = 0 \\
&c_1'(x)u_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)u_n^{(n-1)}(x) = f(x)
\end{aligned}$$

<u>דגש:</u> המד"ר <u>חייבת</u> להיות <u>מנורמלת</u> בשביל להפעיל את השיטה של ורייאציית פרמטרים.

תרגיל: נתון כי $u_1(x) = x^2$ ו־ $u_1(x) = x$ פתרונות של המד"ר ההומוגנית המתאימה של $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4$. מצאו פתרון כללי כאשר $x > 0$.

פתרון: נתונה לנו מד"ר מסדר שני עם שני פתרונות בלתי תלויים של ההומוגנית המתאימה. נשתמש בשיטת וריאציית פרמטרים. נשים לב כי המד"ר אינה מנורמלת ואחרי נרמול נקבל

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^x} = x^2$$

ואז יש פתרון פרטי מהצורה $y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2$ ועבורו

$$\begin{aligned} &c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 = 0 \\ &c_1'(x) + 2c_2'(x)x = x^2. \end{aligned}$$

נפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} &c_1'(x) = -c_2'(x)x \\ &-c_2'(x)x + 2c_2'(x)x = x^2 \\ &c_2'(x) = x \\ &c_1'(x) = -x^2 \end{aligned}$$

ונעשה אינטגרציה ונציב חזרה לנוסחת הפתרון הפרטי

$$\begin{aligned} &c_1(x) = -\frac{1}{3}x^3(+c_1) \\ &c_2(x) = \frac{1}{2}x^2(+c_2) \\ &y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2 = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^4 = \frac{1}{6}x^4 \end{aligned}$$

ונקבל כי הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{6}x^4.$$

שימו לב שאם היינו ממשיכים עם

$$\begin{aligned} &c_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + c_1 \\ &c_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_2 \\ &y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2 = (-\frac{1}{3}x^3 + c_1)x + (\frac{1}{2}x^2 + c_2)x^2 = \\ &c_1x + c_2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^4 = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{6}x^4 \end{aligned}$$

שזה פשוט הפתרון הכללי והקבועים נותנים את הפתרון של ההומוגנית שכבר ידענו אותו.

<u>תרגיל:</u>

$$y'' - 9y = 5e^{3x}$$
$$y(0) = \frac{5}{6}$$
$$y'(0) = -\frac{1}{6}\ .$$

מצאו את $y'''(0)$.

<u>פתרון:</u> נפתור קודם את ההומוגנית המתאימה

$$y'' - 9y = 0$$
$$p(r) = r^2 - 9 = (r-3)(r+3)$$
$$e^{3x},\ e^{-3x}.$$

כעת נחפש פתרון פרטי בשיטת וריאציית פרמטרים

$$y_p(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-3x}$$
$$c_1'e^{3x} + c_2'e^{-3x} = 0$$
$$3c_1'e^{3x} - 3c_2'e^{-3x} = 5e^{3x}$$
$$c_2' = -c_1'e^{6x}$$
$$3c_1'e^{3x} + 3c_1'e^{3x} = 5e^{3x}$$
$$c_1' = \frac{5}{6}$$
$$c_2' = -\frac{5}{6}e^{6x}$$
$$c_1(x) = \frac{5}{6}x$$
$$c_2(x) = -\frac{5}{36}e^{6x}$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא

$$y_p(x) = c_1(x)e^{3x} + c_2(x)e^{-3x} = \frac{5}{6}xe^{3x} - \frac{5}{36}e^{6x}e^{-3x} = \frac{5}{6}xe^{3x} - \frac{5}{36}e^{3x}$$

והפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\frac{5}{6}xe^{3x}-\frac{5}{36}e^{3x}= \\ = &\ (c_1-\frac{5}{36})e^{3x}+c_2e^{-3x}+\frac{5}{6}xe^{3x}=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\frac{5}{6}xe^{3x}. \end{aligned}$$

נשתמש כעת בתנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} &\frac{5}{6}=y(0)=c_1+c_2 \\ &-\frac{1}{6}=y'(0)=3c_1-3c_2+\frac{5}{6} \\ &c_1=\frac{1}{4},\ c_2=\frac{7}{12} \\ &y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\frac{5}{6}xe^{3x}=\frac{1}{4}e^{3x}+\frac{7}{12}e^{-3x}+\frac{5}{6}xe^{3x} \\ &y'''(0)=\frac{27}{4}-\frac{189}{12}+\frac{135}{6}=13.5 \end{aligned}$$

שיטה אחרת לפתור בעיה זו היא הבאה: כיוון ש־$y(x)$ פתרון אזי

$$y''(x)-9y(x)=5e^{3x}$$

ולכן אם נציב $x=0$ ונשתמש בתנאי ההתחלה נקבל

$$y''(0)-9y(0)=5\longrightarrow\ y''(0)=\frac{45}{6}+5=\frac{75}{6}.$$

נגזור את הזהות $y''(x)-9y(x)=5e^{3x}$ ונקבל

$$y'''(x)-9y'(x)=15e^{3x}$$

נציב שוב $x=0$ ונשתמש בתנאי ההתחלה נקבל

$$y'''(0)-9y'(0)=15\longrightarrow y'''(0)=15+9y'(0)=15-\frac{9}{6}=13.5$$

הערה: שיטה זו עובדת כאשר הנקודה בה מתבקש הפתרון היא הנקודה בה נתון תנאי ההתחלה. אם היינו מתבקשים למצוא את $y''(1)$ למשל, אז היינו צריכים להשתמש בשיטה הראשונה.