קומבינטוריקה - תרגיל מס' 7

פתרון

תרגיל מס' 1

יהי J_n מספר התת-קבוצות של קבוצת המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$ (כולל התת-קבוצה הריקה) שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. בטא את J_n באמצעות מספרי פיבונאצ'י.

פתרון:

נמצא נוסחת נסיגה על J_n עבור $n \geq 2$. נספור לחוד את התת קבוצות בהן מופיע האיבר n, ואת אלה בהן הוא לא מופיע.

-- אם n מופיע בתת קבוצה, אז $n-1$ לא מופיע, ואז יש לנו עוד J_{n-2} אפשרויות להוסיף את שאר האברים (חשבו למה).

-- אם n לא מופיע בתת קבוצה, אז יש לנו בדיוק J_{n-1} אפשרויות לבחור את התת קבוצה של $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ בהתאם לתנאים.

סך הכל קיבלנו $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$.

עתה יש רק תת קבוצה אחת לקבוצה הריקה, והיא הקבוצה הריקה, לכן $J_0 = 1$, וכן ברור ש-$J_1 = 2$ לכן יחד עם נוסחת הנסיגה נקבל $J_n = f_{n+2}$.

מ.ש.ל.

תרגיל מס' 2

אדם עולה n מדרגות, כאשר בכל צעד הוא עולה מדרגה אחת, שתיים או שלוש. מייד אחרי צעד של שלוש מדרגות, הוא רשאי (אך לא חייב) לנוח שלב אחד, כלומר לעשות צעד של אפס מדרגות (אפשרות זאת קיימת גם אם הצעד של שלוש מדרגות הביא אותו לקצה). יהי S_n מספר האופנים לעשות זאת.

א. מצא נוסחת נסיגה עבור S_n.

ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור S_n.

פתרון:

נחלק את S_n למקרים לפי הדבר האחרון שעשה האדם לפני שסיים את העליה:

---האדם עלה מדרגה אחת - במקרה הזה יש לו S_{n-1} אפשרויות לבחור את מסלול העליה עד המדרגה ה-$n-1$.

---האדם עלה שתי מדרגות - במקרה הזה יש לו S_{n-2} אפשרויות לבחור את מסלול העליה עד המדרגה ה-$n-2$.

---האדם עלה שלוש מדרגות - במקרה הזה יש לו S_{n-3} אפשרויות לבחור את מסלול העליה עד המדרגה ה-$n-3$.

---האדם נח - במקרה הזה בצעד לפני כן הוא עלה שלוש מדרגות ויש לו S_{n-3} אפשרויות לבחור את מסלול העליה עד המדרגה ה-$n-3$.

מהדיון הנ"ל נקבל את נוסחת הנסיגה:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + 2 \cdot S_{n-3}$$

נמצא תנאי התחלה:

-- $n=0$, לאדם יש אפשרות אחת לא לעשות כלום: $S_0=1$.
-- $n=1$, לאדם יש אפשרות אחת לצעוד את הצעד הבודד: $S_1=1$.
-- $n=2$, לאדם יש שתי אפשרויות איך לעלות שתי מדרגות: $S_2=2$.
ב. הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה הוא:

$$q^3-q^2-q-2$$

מנחשים שורש של הפולינום: $q_1=2$.
מחלוקת הפולינום ב-$q-2$ אנו נותרים עם

$$\frac{q^3-q^2-q-2}{q-2}=q^2+q+1=0$$

מכאן מקבלים את שני השורשים האחרים:

$$q_2=\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}, \qquad q_3=\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$$

לכן הפתרון הוא מהצורה

$$S_n=\alpha\cdot 2^n+\beta\cdot\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^n+\gamma\cdot\left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

כדי למצוא את α,β,γ נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases}\alpha\cdot 2^0+\beta\cdot\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^0+\gamma\cdot\left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^0=S_0=1\\ \alpha\cdot 2^1+\beta\cdot\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^1+\gamma\cdot\left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^1=S_1=1\\ \alpha\cdot 2^2+\beta\cdot\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot\left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2=S_2=2\end{cases}$$

נפתור ונקבל

$$\alpha=\frac{4}{7}, \qquad \beta=\frac{9-i\cdot\sqrt{3}}{42}, \qquad \gamma=\frac{9+i\cdot\sqrt{3}}{42}$$

תרגיל מס' 3

סדרת המספרים: $H_n,\ n=0,1,2,\ldots$ מקיימת: $H_n=-2H_{n-1}-H_{n-2}$ לכל $n\geq 2$, וכן: $H_{30}=15,\ H_{17}=11$.
מצא את: H_{100}.

פתרון

נפתור את הבעיה בדרך הרגילה להתרת נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים. נניח, כי קיים פתרון לנוסחה, מצורת: q^n. פתרון זה מקיים:

$$q^n=-2q^{n-1}-q^{n-2}$$

אם נחלק את השוויון ב - q^{n-2}, נקבל:

$$q^2 = -2q - 1$$

הפולינום האופייני של הנוסחה הוא, לכן:

$$q^2 + 2q + 1$$

ושורשיו הם: $q_1 = q_2 = -1$. ז"א, הפתרון הכללי לנוסחת הנסיגה הוא מצורת:

$$H_n = a_1(-1)^n + a_2 \cdot n(-1)^n$$

נציב את שני הערכים הידועים של H_n מן הנתון, ונקבל שתי משוואות:

$$H_{17} = 11 = -a_1 - 17a_2$$
$$H_{30} = 15 = a_1 + 30a_2$$

נפתור את המשוואות ונקבל: $a_1 = -45,\ a_2 = 2$, ולכן הפתרון הכללי לנוסחת הנסיגה הוא:

$$H_n = -45(-1)^n + 2n(-1)^n$$

ולכן, הערך המבוקש בשאלה הוא:

$$H_{100} = -45 + 200 = 155$$

מ.ש.ל

תרגיל מס' 4

יהי T_n מספר הסדרות: $a_1, a_2, \dots, a_n$ המקיימות:

$(*)$ כל a_i הוא אחד המספרים: $0, 1, 2, 3$.

$(**)$ אם a_i הוא 0, אז a_j הוא 0, לכל $j > i$.

א. מצא נוסחת נסיגה עבור T_n.

ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור T_n.

פתרון

א. ננסה לתאר סדרה אשר תקיים את הדרישות בשאלה. נתבונן בסדרה:

n ספרות

a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n

נסמן את מספר הסדרות ה"חוקיות" באורך n, ב: T_n. הספרה הראשונה, a_1, יכולה לקבל אחד מבין ארבעה ערכים: $1, 2, 3, 4$. נבנה את המשך הסדרה, לאחר הצבת a_1, כתלות בערך שהוא קיבל:

מקרה 1: $a_1 = 1, 2, 3$. במקרה זה, ניתן להמשיך את הסדרה $a_2, \dots, a_n$ ב - T_{n-1} אופנים שונים. כל סדרה חוקית על מקומות אלה תתן ביחד עם a_1 סדרה חוקית על כל n המקומות.

מקרה 2: $a_1 = 0$. במקרה זה, נצטרך להשלים את כל שאר המקומות ב - 0, וזאת ניתן לעשות בדרך אחת בלבד.

לכן, כיוון שבשלוש מתוך ארבע האפשרויות עבור a_1 נמצא את עצמנו במקרה 1, ופעם אחת נמצא את עצמנו במקרה 2, נקבל נוסחת נסיגה עבור T_n:

$$T_n = 3T_{n-1} + 1; \quad T_0 = 1 \text{ (הסדרה הריקה)}$$

ב. נפתור את נוסחת הנסיגה. כיוון שזו אינה נוסחה הומוגנית (יש איבר חופשי), נשתמש בשיטת ההצבה החוזרת. נבצע הצבה של T_{n-1} בנוסחת הנסיגה ונקבל:

$$T_n = 3T_{n-1} + 1 = 3(3T_{n-2} + 1) + 1 = 3^2T_{n-2} + 3 + 1$$

נמשיך ונציב את T_{n-2} במה שקיבלנו, ונקבל:

$$T_n = 3^2(3T_{n-3} + 1) + 3 + 1 = 3^3T_{n-3} + 3^2 + 3 + 1$$

אנו רואים כעת את החוקיות אשר בהצבה, ולכן נקבל לאחר n הצבות:

$$T_n = 3^nT_0 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + 1 = 3^n + 3^{n-1} + \cdots + 3 + 1 = \sum_{i=0}^{n} 3^i$$

ולכן, אנו מקבלים את התשובה:

$$T_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

מ.ש.ל

תרגיל מס' 5

חלקיק נע במישור לפי הכללים הבאים: במצב ההתחלתי הוא נמצא בראשית הצירים (הנקודה $(0,0)$). בכל שניה הוא נע מרחק של 1 ימינה, שמאלה או למעלה (כלומר, מן הנקודה (x,y) לנקודה $(x+1,y)$, לנקודה $(x-1,y)$ או לנקודה $(x,y+1)$). לעולם, החלקיק איננו חוזר לנקודה ממנה יצא בשניה הקודמת. יהי P_n מספר המסלולים האפשריים למהלך החלקיק במשך n שניות.

א. הוכח ש - P_n מקיים את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 3 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור P_n.

פתרון:

א. יש הרבה דרכים נכונות לפתור את התרגיל, נציג פה אחת מהן.

נבדוק קודם את תנאי ההתחלה:

-- $n = 0$, יש לחלקיק בדיוק אפשרות אחת לא לעשות כלום, לכן $P_0 = 1$.

-- $n=1$, החלקיק יכול ללכת בצעד אחד ימינה, שמאלה או למעלה, סה"כ יש לו שלוש אפשרויות, ולכן $P_1=3$.

עתה נוכיח את נוסחת הנסיגה. נסמן f_n מספר הדרכים ללכת ימינה בצעד הראשון, ולבצע עוד $n-1$ צעדים חוקיים.

נפריד את P_n למקרים לפי הצעד הראשון:

-- ימינה: אז לפי ההגדרה יש f_n אפשרויות להמשיך.

-- שמאלה: בגלל הסימטריה בין ימין לשמאל, גם במקרה זה יש f_n אפשרויות.

-- למעלה: במקרה זה החלקיק ממשיך לעוד $n-1$ צעדים ללא מגבלות, לכן יש P_{n-1} אפשרויות.

אם כן, סך הכל קיבלנו

$$P_n = P_{n-1} + 2\cdot f_n$$

או

$$f_n = \frac{P_n - P_{n-1}}{2}$$

נפריד עתה את f_n למקרים לפי הצעד השני:

-- ימינה: אז, לפי ההגדרה יש f_{n-1} אפשרויות.

-- למעלה: אז, יש עוד $n-2$ צעדים לבצע ללא מגבלות, סך הכל P_{n-2} אפשרויות.

לכן קיבלנו

$$f_n = f_{n-1} + P_{n-2}$$

נציב עתה את המשוואה הקודמת למשוואה האחרונה ונקבל

$$\frac{P_n - P_{n-1}}{2} = \frac{P_{n-1} - P_{n-2}}{2} + P_{n-2}$$

נכפיל ב-2

$$P_n - P_{n-1} = P_{n-1} - P_{n-2} + 2\cdot P_{n-2}$$

ולכן

$$P_n = 2\cdot P_{n-1} + P_{n-2}$$

מ.ש.ל.

ב. מה שנותר לנו זה לפתור את נוסחת הנסיגה. הפולינום האופייני המתקבל הוא

$$q^2 - 2\cdot q - 1 = 0$$

ומכאן $q_1 = 1+\sqrt{2}$, $q_2 = 1-\sqrt{2}$, לכן הפתרון הוא מהצורה

$$P_n = \alpha\cdot(1+\sqrt{2})^n + \beta\cdot(1-\sqrt{2})^n$$

מתנאי ההתחלה נקבל את המערכת

$$\begin{cases} \alpha\cdot(1+\sqrt{2})^0 + \beta\cdot(1-\sqrt{2})^0 = P_0 = 1 \\ \alpha\cdot(1+\sqrt{2})^1 + \beta\cdot(1-\sqrt{2})^1 = P_1 = 3 \end{cases}$$

הפתרון יוצא

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

והתשובה היא

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot ((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})$$

מ.ש.ל.

<u>תרגיל מס' 6</u>

הוכח: בכל מאה יש 15 שנים שה - 1 בינואר חל בהן באותו יום בשבוע.

<u>פתרון</u>

מכאן ואילך בדף זה, אנו עוברים לדבר על עקרון שובך היונים; לפי ניסוח השאלה, צריך להוכיח כי תנאי כלשהו מתקיים עבור 15 שנים. התנאי קשור ליום בשבוע בו חל ה - 1 בינואר באותה שנה.

התאריך 1 בינואר יכול לחול באחד מתוך שבעה ימים. נגדיר את ימות השבוע כתאים ואת השנים במאה כיונים. "נכניס" את היונים לתאים באופן הבא: השנה x תיכנס לתא y אם"ם ה - 1 בינואר בשנה זו חל ביום y. באופן זה, נכניס כל יונה לתא אחד בלבד, ונכניס את כל היונים לתאים.

כיוון שיש לנו 100 יונים ו - 7 תאים, ומתקיים:

$$100 = 14 \cdot 7 + 2$$

אנו מקבלים, לפי עקרון שובך היונים, כי קיים תא ובו לפחות 15 יונים, ובמונחי השאלה: קיימות 15 שנים בכל מאה, אשר ה - 1 בינואר חל בהן באותו יום בשבוע.

מ.ש.ל