תורת החבורות – תרגיל בית 2 – פתרון

שאלה 2

יהי $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ פולינום עם מקדמים שלמים אי-שליליים, כאשר $\deg(f(x))=n$

מספר שלם אי-שלילי. הוכח כי לכל k טבעי מתקיים: אם $k \equiv_9 10$, אז $f(k) \equiv_9 \sum_{i=0}^{n} a_i$.

פתרון:

נשים לב כי $k \equiv_9 10 \equiv_9 1$, לכן לכל $0 \le i \le n$ טבעי $k^i \equiv_9 1^i \equiv_9 1$, ולכל $a_i \in \mathbb{Z}$ מתקיים

כי $a_i \cdot k^i \equiv_9 a_i \cdot 1 \equiv_9 a_i$.

בכך מקבלים: $f(k)=\sum_{i=0}^{n} a_i k^i$ שווה ל- $\sum_{i=0}^{n} a_i$ מודולו 9. ■

שאלה 3

הוכח כי לא קיימים a,b,c שלמים המקיימים $a^2+b^2=3c^2$ $(*)$.

פתרון:

אם $x \in \mathbb{Z}$, אז $x^2 \equiv_4 0,1$. לכן $a^2+b^2 \equiv_4 0,1,2$ ו- $3c^2 \equiv_4 0,3$.

מכך ומהשוויון $a^2+b^2=3c^2$ נובע כי $a^2 \equiv_4 b^2 \equiv_4 c^2 \equiv_4 0$, בפרט שלושת המספרים הינם

זוגיים: $a=2a_1, b=2b_1, c=2c_1$. נציבם ב- $(*)$, נצמצם ב-4 ונקבל: $a_1^2+b_1^2=3c_1^2$.

נחזור על התהליך עבור a_1, b_1, c_1 וכך נמשיך עד שלא נגיע לשלב בו כבר לא נוכל לצמצם. ■

שאלה 4

יהי a מספר שלם אי-זוגי, הוכח: $a^2 \equiv_8 1$.

פתרון:

a מספר שלם אי-זוגי, לכן קיים $\alpha \in \mathbb{Z}$ כך ש $a=2\alpha+1$.

אז $a^2=(2\alpha+1)^2=4\alpha^2+4\alpha+1=4\alpha(\alpha+1)+1$. היות ו- $\alpha(\alpha+1)$ זוגי, אז

$4\alpha(\alpha+1) \equiv_8 0 \quad \Rightarrow \quad a^2=4\alpha(\alpha+1)+1 \equiv_8 1$.

<u>דרך אחרת</u>: a מספר שלם אי-זוגי, לכן $a \equiv_8 1,3,5,7 \quad \Rightarrow \quad a^2 \equiv_8 1$. ■