פונקציות במשתנים אחדים

כדי לדבר על פונקציה $f(x_1, \ldots, x_n)$ נסתכל על $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ כנקודות של R^n, המרחב האוקלידי ה- n ממדי.

נשתמש בסימון הבא עבור נקודות

$$P = (x_1, \ldots, x_n)$$
$$Q = (y_1, \ldots, y_n)$$

ואת המרחק בין נקודות P ו: Q נסמן

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \overline{PQ} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_1 - y_1)^n} \end{aligned}$$

תכונות של מרחק:

$$d(P,Q) = d(Q,P)$$

$$d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

$$.d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$$

אילו הן תכונות המטריקה, כאשר האחרונה מוכחת ע"י אי-שוויון Cauchy-Schwarz. כי נסמן

$$x_i - y_i = a_i$$

$$y_i - z_i = b_i$$

$$x_i - z_i = a_i + b_i$$

אז צ"ל

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$

ז"א

$$\sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)} \geq$$
$$\geq \ \sum\left(a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2\right)$$

כלומר יש להוכיח את אי-השיוון

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

אי השיוון האחרון מוכח כך: מתקיים לכל t

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \sum\left(a_it + b_i\right)^2 \\ &= \ \left(\sum a_i^2\right)t^2 + 2t\left(\sum a_ib_i\right) + \sum b_i^2 \end{aligned}$$

וביטוי רבועי כזה הינו אי-שלילי <u>לכל t</u> אמ"ם

$$\Delta = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0.$$

כדור ברדיוס R סביב $P^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ כמרכז
הוא קבוצת הנקודות P אשר מקיימות

$$\overline{PP^0} \leq R,$$

כלומר הקבוצה

$$B(P^0, R) = \left\{ P : \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 \leq R^2 \right\}.$$

תיבה היא קבוצה מהצורה

$$T = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

קו ישר יצוין בצורה פרמטרית

$$x_i = a_i t + b_i,\ 1 \leq i \leq n,\ -\infty < t < \infty.$$

מושגים בטופולוגיה.

סביבה (סביבה כדורית) של P^0 היא כל כדור $B(P^0,R)$ עבור איזשהו $R>0$.

נקודת הצטברות.

P נקודת הצטברות של קבוצה S אם בכל סביבה של P יש נקודה השייכת ל- S ושונה מ- P.

דוגמא. נקודה מבודדת אינה נקודת הצטברות.

הגדרה.

1. P היא נקודה פנימית של S אם קיימת סביבה של P המוכלת ב- S.
2. P היא נקודה חיצונית ל- S אם קיימת

סביבה של P שזרה ל- S.

3. נקודה שאינה פנימית ל- S ואינה חיצונית לה היא נקודת שפה.

נקודת שפה יכולה להשתייך או לא להשתייך ל- S. למשל, שני הסוגים נמצאים בשפה של קבוצת הנקודות (x,y) ב: R^2 המוגדרת ע"י

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \le x < 1 \\ 0 \le y < 1 \end{array} \right\}$$

דוגמא. קבוצת הנקודות (x,y) כך ש: x ו: y הם רציונלים המקיימים $0 \le x,y \le 1$ היא קבוצה ששפתה היא כל הריבוע $\{(x,y) : 0 \le x,y \le 1\}$.

הגדרה. (i) קבוצה נקראת פתוחה אם כל נקודה שלה היא נקודה פנימית.
(ii) קבוצה נקראת סגורה אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

לא נכון שקבוצה היא או פתוחה או סגורה.

טענה. המשלים של קבוצה פתוחה היא קבוצה סגורה.

הוכחה: תהי A קבוצה פתוחה ונסמן $B =$ $R^n \setminus A$. ניקח נקודת הצטברות של B , למשל P. זה אומר שבכל סביבה של P יש עוד נקודה של B , ולפיכך סביבה כזו אינה מוכלת ב- A . לכן P אינה פנימית ל- A . אבל ל- A יש רק

נקודות פנימיות לכן P לא שייכת ל- A . לכן P שייכת ל- $B = R^n \setminus A$. מצאנו שכל נקודת הצטברות של B שייכת ל- B , לכן B <u>סגורה</u>.

גם הטענה ההפוכה היא נכונה: המשלים של קבוצה סגורה הוא קבוצה פתוחה. (תרגיל)

קשירות.

אומרים שקבוצה A היא קשירה אם אין קבוצות פתוחות V,W כך ש $A \subset W \cup V$ וגם

$$V \cap A \neq \emptyset,\ W \cap A \neq \emptyset,\ W \cap V = \emptyset$$

קבוצה נקראת קשירה מסילתית אם כל שתי נקודות ניתנות לחבור ע"י פוליגון (מצולע) שמוכל בקבוצה. קל לראות שאם קבוצה היא קשירה מסילתית אז היא קשירה. ההיפך אינו בהכרח נכון. אבל:

טענה. תהי A פתוחה. אז A קשירה אמ"ם A קשירה מסילתית.

תחום הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

אומרים שקבוצה היא קבוצה חסומה אם היא מוכלת בתוך כדור (או תיבה).

קוטר קבוצה S מוגדר ע"י

$$d(S)=\sup_{P,Q\in S}\ d(P,Q)$$

ואז קבוצה היא חסומה אם $d(S)<\infty$.

מגדירים את המרחק מנקודה לקבוצה ע"י

$$d(P,S)=\inf_{Q\in S}\ d(P,Q)\ .$$

סדרות של נקודות

נתונה סדרת נקודות

$$P^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$$
$$P^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$$
$$\vdots$$
$$P^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

ונקודת גבול

$$.P^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

נאמר ש: $P^0 = P^k \lim_{k\to\infty}$ או

$P^k \to P^0$ כאשר $k \to \infty$ אם

$$.\lim_{k\to\infty} d(P^k, P^0) = 0$$

זה שקול לכך שלכל $1 \leq j \leq n$

$$x_j^k \to x_j^0$$

כאשר $k \to \infty$, כפי שרואים מההערכה הבאה:

$$\begin{aligned}|x_j^k - x_j^0| \ &\leq \ d(P^k, P^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^0)^2} \\ &\leq \ n \cdot \max_j |x_j^k - x_j^0|\end{aligned}$$

<u>משפט.</u> לכל סדרה חסומה $\left\{P^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה מתכנסת.

נוכיח ב- R^2 , $n = 2$.

<u>הוכחה:</u> ניקח סדרת נקודות ובמקום $\left\{\left(x_1^k, x_2^k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ נסמן אותה ב- $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$,

כדי להקל על סימון האינדקסים.
מאחר והסדרה חסומה נובע שהיא מוכלת במלבן כלשהו $[a,b]\times[c,d]$:

$$.a \le x_k \le b, \quad c \le y_k \le d$$

$\{x_k\}$ סדרת מספרים חסומה ולכן לפי בולצנו-ויירשטרס קיימת תת-סדרה מתכנסת

$$.x_{k_l} \to x_0$$

גם הסדרה $\{y_{k_l}\}$ חסומה ב- $[c,d]$ ויש לה תת-סדרה מתכנסת

$$.y_{k_{l_j}} \to y_0$$

אז כאשר $j \to \infty$ מקבלים

$$.(x_{k_{l_j}}, y_{k_{l_j}}) \to (x_0, y_0)$$

אנו מכירים את התוצאה הבאה עבור $d = 1$, קטעים מקוננים.

<u>הלמה של **Cantor**.</u> נתונה סדרת מלבנים סגורים

$$R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$$

כך ש-

(א) $R_{n+1} \subset R_n$.

אז

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \neq \emptyset ,$$

כלומר חיתוך המלבנים איננו ריק. אם גם

ב) $d(R_n) \to 0$,

אז למלבנים אלה יש נקודה משותפת אחת בלבד.

הוכחה: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

ונובע מהלמה החד-ממדית שקיים α ששייך לכל $[a_n, b_n]$. כנ"ל יש β כך ש: $\beta \in [c_n, d_n]$ לכל n, ומקבלים ש

$$(\alpha, \beta) \in R_n$$

לכל $n \geq 1$, ולכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \neq \emptyset$. ברור שאם $d(R_n) \to 0$ אז החיתוך מכיל נקודה אחת בלבד.

תרגיל. הוכח טענה דומה עבור סדרת כדורים. (סדרת המרכזים היא סדרת קושי במרחב ה: n-ממדי.)

הלמה של **Heine-Borel**. אם לקבוצה סגורה וחסומה יש כיסוי אינסופי של קבוצות פתוחות, אז אפשר להוציא מתוכם כיסוי סופי.

פונקציות של n משתנים

$f(P) = f(x_1,\ldots,x_n)$ מוגדרת על קבוצה ב- R^n ומקבלת ערכים ממשיים כך שהטווח שלה הוא קבוצת המספרים הממשיים:

$$.f\colon\ R^n \longrightarrow R$$

אנו רגילים לכתוב $y = f(x_1,\ldots,x_n)$.

<u>הגדרת הגבול.</u> תהי

$$\left\{ \begin{array}{l} f(P) \\ f(x_1,\ldots,x_n) \end{array} \right\}$$

מוגדרת בסביבה

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \\ (x_1^0,\ldots,x_n^0) \end{array} \right\}$$

(אבל לא דווקא ב- P_0). נאמר ש:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L \\ \lim f(x_1,\ldots,x_n) = L \end{array} \right\}$$

כאשר $(x_1,\ldots,x_n) \to (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ אם לכל

$\varepsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\varepsilon)$ כך שמתקיים

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(P) - L| < \varepsilon \\ |f(x_1,\ldots,x_n) - L| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

לכל P עבורו מתקיים

$$.0 < d(P,P_0) < \delta$$

במקום $P \to P_0$ מספיק לדרוש

$$f(P_n) \to f(P_0)$$

לכל סדרה $\{P_n\}$ המקיימת $P_n \to P_0$.

כאשר מסתכלים על נקודות P אשר מקיימות

$$d(P, P_0) < \delta$$

מתיחסים לכדור, ואילו כאשר מסתכלים

על $|x_i - x_i^0|$ מתיחסים לתיבה.

<u>דוגמא.</u> פונקציה הומוגנית $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

מוגדרת על $R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

כאן

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{5}, \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

לכן לא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

<u>דוגמא.</u> נתיחס כעת לפונקציה

$$g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

המוגדרת על $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, וכעת קיים הגבול

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \ .$$

המונה הוא מסדר יותר גבוה מאשר המכנה, ומ-
קבלים

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| \ &= \ \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |y| \\ &\leq \ |y| \to 0 \end{aligned}$$

כאשר $(0,0) \leftarrow (x,y)$.

גבולות נשנים

לפנינו שלושה מושגי גבול:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

דוגמא.

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=-1$$

לא קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$

<u>משפט.</u> אם קיים הגבול הכפול

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ואם לכל y בקרבת y_0 קיים

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

אז קיים הגבול החוזר

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y)$$

והוא שווה לגבול הכפול L.

<u>הוכחה:</u> לפי הנתון קיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ולכן $\frac{\varepsilon}{2} > |f(x,y) - L|$ **עבור**

$\delta > |x - x_0|$, $|y - y_0|$. **לכל** $\delta > |y - y_0|$

קיים לפי הנתון

$$|f(x,y) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

עבור $\delta > \delta_y > |x - x_0|$ **עבור** $0 < \delta_y$

כלשהו. לכן

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - L| \;&\le\; |\varphi(y) - f(x,y)| \\ +|f(x,y) - L| \;&<\; \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

לכל $\delta\ \ <\ \ |y-y_0|$. לכל y כזה בוחרים x מתאים אשר מקים $\delta < \delta_y < |x-x_0|$. זה אומר $\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = L$, כלומר

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = L$$

<u>הערה.</u> באופן דומה מוכיחים שאם קיים הגבול $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ לכל x בסביבה של x_0 אז קיים הגבול הנשנה השני

$$\lim_{x\to y_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = L\ .$$

רציפות.

הגדרה. תהי f מוגדרת בנקודה P_0 ובסביבה שלה.

f רציפה ב- P_0 אם $\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

ניסוח אחר:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon) > 0$ כך ש-

$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ לכל P אשר מקיים

$$d(P, P_0) < \delta \ .$$

ניסוח אחר:

אם לכל סדרה $\{P_n\}$ כך ש: $P_n \to P_0$ מתקיים

$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$ אז f רציפה ב: P_0.

<u>ניסוח אחר</u>:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon)$ כך ש-

$$|f(x_1,\ldots,x_n) - f(x_1^0,\ldots,x_n^0)| < \varepsilon$$

לכל $(x_1,\ldots,x_n)$ כך ש: $|x_i - x_i^0| < \delta$ לכל $i = 1,\ldots,n$.

אומרים שהפונקציה f הינה רציפה בתחום D (קבוצה פתוחה וקשירה) אם f רציפה בכל נקודה של D. עבור תחום D נסמן ב: $\bar{D}$ את האיחוד של D עם שפתו ∂D. $\bar{D}$ היא קבוצה סגורה.
אומרים ש: f רציפה בנקודה P_0 בתחום הסגור $\bar{D}$ אם $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ לכל $P \in \bar{D}$, $d(P, P_0) < \delta$.

הערה. אם $f(x_1,\ldots,x_n)$ רציפה, היא רציפה
בנפרד בכל משתנה אבל לא להפך.

למשל, $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = f(x,y)$ רציפה ב- x
ורציפה ב- y :

$$\lim_{y\to 0}\ \frac{xy}{x^2+y^2}=0\ \ ,\ \ \lim_{x\to 0}\ \frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

$$.(x\neq 0\ \ ,\ \ y\neq 0)$$

אבל הגבול הבא אינו קיים

$$.\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

הערה. סכום, מכפלה, מנה של פונקציה רציפות
רציפות נשארים רציפים בתנאים הרגילים.