טורים בעלי אברים חיוביים

משפט. נניח ש: $a_n, b_n > 0$ ונתון ש:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (1)$$

לכל $n > N_0$, עבור איזשהו טבעי N_0. אזי
אם $\sum a_n$ מתכנס, אז גם $\sum b_n$ מתכנס.
אם $\sum b_n$ מתבדר ל: $+\infty$ אז גם $\sum a_n$ מתבדר ל: $+\infty$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח ש: (1)
מתקיים לכל $n \geq 1$ (כי רק זנב הטור משפיע על

תכונות ההתכנסות). אז אפשר לכתוב

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &\geq \frac{b_2}{b_1} > 0 \\ \frac{a_3}{a_2} &\geq \frac{b_3}{b_2} > 0 \\ &\vdots \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &\geq \frac{b_{n+1}}{b_n} > 0 \end{aligned}$$

מכפילים את אי השיויונות ומקבלים

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \geq \frac{b_{n+1}}{b_1},$$

מה שגורר

$$a_{n+1} \geq \left(\frac{a_1}{b_1}\right) b_{n+1} > 0,$$

ומכאן המסקנה.

מבחן האינטגרל

הזכרנו את הדימיון בין $\sum^{\infty} a_n$ ובין $\int^{\infty} f$.

<u>משפט.</u> תהי f פונקציה חיובית, לא עולה, מוגדרת עבור $x \geq 0$, אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ כך ש: $0 \leq a < b$. אזי $\int_0^{\infty} f$ קיים אמ"ם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u> $f(x)$ לא עולה ועל כן

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

לכל $k \le x \le k+1$. מבצעים אינטגרציה על אי-שיויונות אילו:

$$\int_k^{k+1} f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x) \le \int_k^{k+1} f(k)$$

ששקול ל:

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x) \le f(k).$$

עכשיו מסכמים על ערכי

$k = 0, 1, 2, ..., n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

בסימון $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ מקבלים

$$S_n - S_0 \le \int_0^n f \le S_{n-1}.$$

נסמן גם $I(b)=\int_0^b f$, ואז

$$.S_n - S_0 \le I(n) \le S_{n-1} \qquad (1)$$

מאחר ו: $f \ge 0$ נובע ששתי הסדרות $\{S_n\}$ $I(n)$ לא-יורדות, והמסקנה נובעת מקריטריון ההשוואה.

באופן מפורט יותר: אם האינטגרל $\int_0^\infty f$ קיים, אז $\{I(n)\}$ היא סדרה חסומה, ונובע מ: (1) ש: $\{S_n\}$ היא סדרה וחסומה. מאחר והסדרה מונוטונית, נובע שהיא מתכנסת.

אם, מאידך הסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת, נובע שהיא חסומה וקיים $M>0$ כך ש: $S_n<M$ לכל

לכל $I(b) \leq M$:ש (1) אבל אז נובע מ: $n \geq 0$.
$b > 0$. לכן הפונקציה $I(b) \mapsto b$ היא מונוטונית
לא יורדת וחסומה, ולכן קיים הגבול
$\lim_{b\to\infty} I(b) \leq M$. בפרט מקבלים מ: (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{\infty} f \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

<u>**מסקנה.**</u> ראינו ש: $\int^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ מתכנס עבור $p > 1$
ומתבדר עבור $p \leq 1$. מכאן נובע ש: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \leq 1$.

עבור $p = 1$ (טור הרמוני) ו: $p = 2$ כבר ראינו
זאת.

תרגיל. לבדוק עבור אילו ערכים של q האינטגרל $\int_5^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^q}$ מתכנס? עבור אילו ערכי q הטור $\sum_{k=5}^\infty \frac{1}{k(\ln k)^q}$ מתכנס?

הערה. כמו תמיד, מספיק שההנחות תתקיימנה עבור $x \geq x_0$ בלבד.

הערה. בדרך כלל קל יותר לחשב אינטגרלים מאשר סכומי טורים.

עד עתה בדקנו רק התכנסות $\sum^\infty a_n$, ולא מצאנו את סכומו. חישבנו בפועל את סכום הטור רק במקרה של טור גיאומטרי, וכן עבור טורים טלסקופיים.

מבחן השורש ומבחן המנה

כעת מגיעם לשתי טענות קשורות, שתשמשנה מאחר יותר בדיון על טורי חזקות. אילו הן:

מבחן השורש: $\sqrt[n]{a_n}$

מבחן המנה: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

יש לבחון את הסדרות הללו ולבדוק את התנהגותן עבור $n \to \infty$. בגרסה הפשוטה ביותר יש לבחון אם קימים הגבולות $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ או $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. אולם ניסות כזה הינו חלש מדי, כי יתכן שהגבולות אינם קיים אך בכל זאת ניתן להסיק מסקנה בעלת משמעות.

<u>תזכורת:</u> עבור סדרת מספרים ממשיים $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, מסמנים

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}[\sup\{c_k : k \geq n\}]$$

וכן

$$\liminf_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}[\inf\{c_k : k \geq n\}].$$

המשמעות היא: $\limsup_{n\to\infty} c_n$ היא נקודת ההצטברות הגדולה ביותר של קבוצת המספרים $\{c_n : n \geq 1\}$, ואילו $\liminf_{n\to\infty} c_n$ היא נקודת ההצטברות הקטנה ביותר של הקבוצת $\{c_n : n \geq 1\}$.

<u>משפט.</u>(מבחן השורש של קושי.) (i) אם

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ii) אם

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

<u>הוכחה:</u> (i). אם

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

אז קימים $0 < q < 1$ ו: $N_0 > 0$ כך שלכל $n > N_0$ מתקים

$$\sqrt[n]{a_n} \le q \; .$$

אבל אז $0 \le a_n \le q^n$ לכל $n \ge N_0$, ומהשוואה עם הטור הגיאומטרי המתכנס $\sum_{n=N_0}^{\infty} q^n$ נובע ש: $\sum^{\infty} a_n$ טור מתכנס.

(ii). אם

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

אז $\sqrt[n]{a_n} > 1$ עבור אינסוף אברים של הסדרה. אבל אז $a_n \ge 1$ סותר את התנאי ההכרחי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

להתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>הערה.</u> בחלק (ii) של המשפט חייבים להניח $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ ולא מספיק להניח

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, כי תתכן התקרבות ל: 1
מצד שמאל כמו למשל בטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,
היכן ש: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$.

ניסוח שקול של המשפט הוא: (i) אם קיים
$1 > q > 0$ כך ש: $q \geq \sqrt[n]{a_n} \geq 0$ לכל $n > N_0$,
אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מתכנס.

(ii) אם יש אינסוף אינדקסים n שעבורם
$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור מתבדר. כאן
מדובר באינסוף אינדקסים: הם לא צריכים
להיות עוקבים, ובודאי לא כולם.

מסקנה. נניח שקיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

אם $0 \le L < 1$ אז הטור מתכנס, ואם $L > 1$ אז הטור מתבדר. אם $L = 1$ אז אי אפשר להסיק כל מסקנה, ואפשר להביא דוגמאות לכאן ולכאן, למשל $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ו: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

משפט. (מבחן המנה של d'Alambert). יהיו $a_n > 0$ עבור $n > n_0$.

(i) אם $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ii) אם $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר ל: $+\infty$.

הערה. אנו מבחינים שבניגוד למשפט הקודם,
כאן יש $\limsup$ ו: $\liminf$ במקרים השונים.

הוכחה. אם

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

אז קים מספר $0 < q < 1$ כך ש:
$a_{n+1}/a_n < q$ לכל $n > N_0$. אם נסמן
$b_n = q^n$, נקבל שהטור $\sum b_n$ מתכנס, ומתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

לכל $n \geq N_0$, ונובע ממשפט קודם שגם $\sum a_n$
מתכנס. זה מוכיח את (i).

להוכחת (ii), נניח ש: $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ואז החל מאינדקס מסוים n_0 מתקיים $a_{n+1}/a_n \geq 1$ ולכן $a_{n+1} \geq a_n$ לכל $n > n_0$. אבל אז

$$a_n \geq a_{n_0}$$

לכל $n > n_0$, ולכן אברי הסדרה a_n אינם שואפים ל: 0, שהוא תנאי הכרחי להתכנסות הטור.

<u>הערה.</u> בדומה להערה קודמת לא מספיק לקחת ב: (ii) את התנאי $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, ודוגמא נגדית היא $a_n = 1/n^2$.

ניסוח אחר של התוצאה האחרונה הוא:

(i) אם קיים $n_0 > 0$ כך ש: $q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לכל $n > n_0$ עבור איזשהו $0 < q < 1$, אזי הטור מתכנס.

(ii) אם קיים $n_0 > 0$ כך ש: $1 \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לכל $n > n_0$, אזי הטור מתבדר. (אין זה מספיק לדרוש את התנאי עבור אינסוף nים שונים, אלא לכל $n > N_0$).

<u>הערה.</u> יש צורך בתנאי $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ואי אפשר להסתפק ב: $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, כפי שרואים מהדוגמא

$$.a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots$$

אז $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = +\infty$, אך תתכן התכנסות הטור. או:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots,$$

אז

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0.5,$$

והטור מתכנס.

<u>דוגמא.</u> נתיחס לטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}$ עבור איזשהו c קבוע, ובסימון $a_n=\frac{c^n}{n!}$ מקבלים $0 \leftarrow \frac{c}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ולכן הטור מתכנס לכל c.

מקרה מיוחד. נניח שקיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L\,.$$

אז: אם $0 \le L < 1$ הטור מתכנס, ואם $L > 1$ הטור מתבדר. אי אפשר להסיק מ: $L = 1$

מסקנה חד-משמעית: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ מתבדר בעוד $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ מתכנס, אך עבור שני הטורים הגבול של המנות הוא 1.

נוכיח עכשיו שאם מתקיימים תנאי ההתכנסות של מבחן היחס אז מתקיימים גם תנאי ההתכנסות של מבחן השורש. נראה דוגמא בה לא מתקיימת גרירה בכיוון ההפוך. נובע מכך

שמבחן השורש הוא קריטריון חזק יותר ממבחן המנה.

נניח שמתקיים $1 > q \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ לכל $N < n$, ונכתוב זאת בצורה

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \leq q$$
$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq q$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_{N+n}}{a_{N+n-1}} \leq q$$

ומהכפלת אי השיויונים הללו מקבלים

$$\frac{a_{N+n}}{a_N} \leq q^n$$

לכל $n \geq 1$. בסימון $m = n + N$ מקבלים

$$a_m \leq a_N q^{m-N}$$

לכל $m > N$. בהוצאת שורש m

$$\sqrt[m]{a_m} \leq q \cdot \left(\frac{a_N}{q^N}\right)^{\frac{1}{m}} \qquad (1)$$

כאשר $\frac{a_N}{q^N}$ הוא קבוע, לא תלוי ב: m. אבל אנו יודעים שאם $C > 0$ קבוע אז $\sqrt[m]{C} \to 1$ ומאחר ו: $0 < q < 1$ נובע מ: (1) ש: $\sqrt[m]{a_m} \leq q_1$ עבור איזשהו $0 < q_1 < 1$ לכל $n > N_1$. כלומר, מתקיים תנאי ההתכנסות במבחן השורש.

בכיוון ההפוך נראה דוגמא אשר בה מבחן השורש מאפשר הסקת התכנסות אך מבחן

המנה לא מאפשר זאת.

$$a_n = \begin{cases} q^{n-1} & \text{if } n \text{ is even} \\ q^{n+1} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

מבחן השורש מתקיים:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{q^{n\pm1}} = q^{\frac{n\pm1}{n}} \to q < 1$$

ולכן הטור מתכנס. עבור a_{n+1}/a_n מקבלים:

אם $n = 2k$ זוגי אז המנה היא

$$,\frac{q^{2k+2}}{q^{2k-1}} = q^3 < 1$$

ואילו אם $n = 2k - 1$ אז המנה היא

$$\frac{q^{2k-1}}{q^{2k}} = q^{-1} > 1.$$

לכן

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

ותנאי ההתכנסות במבחן המנה אינו מתקיים.

טורים חיוביים ומונוטוניים

אנו יודעים שאם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$. אם נוסיף עוד הנחה שהטור גם מונוטוני יורד, נקבל מהתנאי ההכרחי גם מידע על קצב ההתכנסות:

משפט. נתון ש: $\sum a_n$ מתכנס, $a_n > 0$ והסדרה $\{a_n\}$ אינה עולה (כלומר $0 < a_{n+1} \leq a_n$). אזי $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

הוכחה: על פי קריטריון קושי

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \epsilon$$

עבור כל $m > n > N(\epsilon)$. עבור $n > N(\epsilon)$
נבחר $m > 2n$:

$$(m-n)a_m \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \epsilon$$
(1)

כי יש בסכום $m-n$ מחוברים, והקטן שבהם
הוא a_m. מ: $m > 2n$ נובע $m - n \geq m/2$ ולכן
מקבלים מ: (1)

$$\frac{1}{2}m \cdot a_m < \epsilon \Rightarrow ma_m < 2\epsilon$$

לכל $m > 2N(\epsilon)$. אבל זה בדיוק אומר שקיים
הגבול $\lim_{m\to\infty} ma_m = 0$.

<u>הערה.</u> זהו תנאי הכרחי, לא מספיק,
להתכנסות.

דוגמא. $a_n = n^{-p}$. מהמשפט האחרון תנאי הכרחי להתכנסות הוא $n^{1-p} \to 0$, וזה מתקיים אמ"ם $p > 1$. המסקנה היא שהטור מתבדר אם $p \leq 1$.