מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים – ת"ב 5

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

8/12/2016

תאריך הגשה

11

קבוצת תרגול

שאלה 1:

א. נתונים המרחבים המטריים $(X,d_1),(Y,d_2),(Z,d_3)$ וכן איזומטריות $f: X\mapsto Y$ ו-$g: X\mapsto Z$. אודות f,g נוכל להסיק על פי הגדרה כי:

$$\forall x_1,x_2\in X \quad d_2\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d_1(x_1,x_2)(\star)$$
$$\forall y_1,y_2\in Y \quad d_3\big(g(y_1),g(y_2)\big)=d_2(y_1,y_2)(\star)$$

וכן הפונקציות חד-חד ערכיות ועל.

נרצה להראות כי:

$$g\circ f: X\mapsto Z \quad g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)$$

לשם כך נרצה להראות כי הפונקציה על Z וכי מתקיים:

$$\forall x_1,x_2\in X \quad d_3\big(g\circ f(x_1),g\circ f(x_2)\big)=d_1(x_1,x_2)$$

ואכן, מתקיים, לכל $x_1,x_2\in X$, כי:

$$d_3\big(g\circ f(x_1),g\circ f(x_2)\big)=d_3\left(g\left(\overbrace{f(x_1)}^{\in Y}\right),g\left(\overbrace{f(x_2)}^{\in Y}\right)\right)\overset{(\star)}{=}d_2\big(f(x_1),f(x_2)\big)\overset{(\star)}{=}d_1(x_1,x_2)$$

וכן, נניח כי $z\in Z$. אזי היות ו-g על, נסיק כי קיים $y\in Y$ עבורו מתקיים $g(y)=z$. אך $y\in Y$ ו-f על ולכן נסיק כי קיים $x\in X$ עבורו מתקיים $f(x)=y$, אך מכאן שמתקיים $z=g(y)=g\big(f(x)\big)$. כלומר הפונקציה $g\circ f$ אכן על ומשמרת מטריקה ולכן איזומטריה.

■

ב. נתונים המרחבים הטופולוגיים $(X,\tau_1),(Y,\tau_2),(Z,\tau_3)$ ו-$f: X\mapsto Y$ ו-$g: Y\mapsto Z$ הומיאומורפיזמים. כלומר f,g רציפות וגם f^{-1},g^{-1} קיימות ורציפות, ובפרט הן חד-חד ערכיות ועל. נרצה להראות כי הפונקציה $g\circ f$ הינה הומיאומורפיזם. לשם כך נראה את קיום התנאים.

a. <u>רציפות</u> – תהא $U\in\tau_3$ קבוצה פתוחה ב-(Z,τ_3). אזי היות ו-g הומיאומורפיזם, מתקיים ש-g^{-1} קיימת, רציפה, חד-חד ערכית ועל. בפרט נובע כי $g^{-1}(U)$ היא קבוצה פתוחה. אך $g^{-1}(U)\in\tau_2$ ולכן מאותו שיקול עבור f נסיק כי $f^{-1}\big(g^{-1}(u)\big)$ קבוצה פתוחה. אך $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ ולכן קיבלנו שהמקור של קבוצה פתוחה על ידי $f^{-1}\circ g^{-1}$ הוא פתוח. מכאן ש-$g\circ f$.

b. <u>חד-חד ערכיות</u> – לכל $x_1,x_2\in X$ מתקיים (מחד-חד ערכיות f,g):

$$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Leftrightarrow g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$$

c. <u>על</u> – לכל $z\in Z$ מתקיים כי קיים $y\in Y$ עבורו $g(y)=z$. אך $y\in Y$ ולכן קיים $x\in X$ עבורו $y=f(x)$. ולכן מתקיים $z=g(y)=g\big(f(x)\big)$ כלומר $g\circ f$ אכן על.

d. <u>הפיכות</u> $(g\circ f)^{-1}$ – לכל $U\in\tau_1$ קבוצה פתוחה, מתקיים מרציפות f^{-1} ש-$(f^{-1})^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה ב-Y, ומרציפות g^{-1} נובע כי $(g^{-1})^{-1}\big((f^{-1})^{-1}(U)\big)$ היא פתוחה. ולכן $g\big(f(U)\big)$ פתוחה ומכאן שההעתקה ההופכית גם היא רציפה כנדרש.

■

שאלה 2:

א. נתונים שני קטעים $(a,b),(a',b')$ על הישר הממשי. נרצה להראות כי הקטעים הומיאומורפים. לשם כך נפריד למקרים שבהם שני הקטעים סופיים לבין יתר המקרים.

a. <u>$a,b,a',b'\in\mathbb{R}$</u> - נגדיר את ההומיאומורפיזם הבא:

$$f:(a,b)\mapsto(a',b') \quad f(x)=a'+(x-a)\frac{b'-a'}{b-a}$$

פונקציה זו רציפה כמנה והרכבה של פונקציות אלמנטריות בממשיים. נרצה להראות כי היא חד-חד ערכית ועל.

<u>חד-חד ערכיות</u> – לכל $x,y\in(a,b)$ מתקיים:

$$f(x)=f(y)\Leftrightarrow a'+(x-a)\frac{b'-a'}{b-a}=a'+(y-a)\frac{b'-a'}{b-a}$$
$$\Leftrightarrow\overset{\text{אלגברה}}{\cdots}\Leftrightarrow y=x$$

<u>על</u> – לכל $y\in(a',b')$ מתקיים:

$$f\left(a+(y-a')\frac{b-a}{b'-a'}\right)=y$$

קל לראות כי $a+(y-a')\frac{b-a}{b'-a'}\in(a,b)$ ולכן נסיק כי אכן הפונקציה על.

b. <u>בה"כ $a,b,a'\in\mathbb{R}$ וכן $b'=\infty$</u> - במקרה זה נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f:(a,b)\mapsto(a',\infty)\quad f(x)=a'+\frac{x-a}{b-x}$$

נשים לב כי רציפות הפונקציה הנ"ל גם היא טריוויאלית כהרכבה של פונקציות אלמנטריות.
נראה כי היא מהווה הומיאומורפיזם, קרי חד-חד ערכיות ועל:
<u>חד-חד ערכיות</u> – לכל $x,y\in(a,b)$ מתקיי

$$f(x)=f(y)\Leftrightarrow\frac{x-a}{b-x}=\frac{y-a}{b-y}\Rightarrow(x-a)(b-y)=(y-a)(x-b)$$

$$\overset{\text{אלגברה}}{\Leftrightarrow\cdots}\Leftrightarrow x=y$$

<u>על</u> – לכל $y\in(a',\infty)$ נשים לב כי:

$$f\left(a+(b-a)\left(1-\frac{1}{y-a'}\right)\right)\overset{\text{אלגברה}}{=\cdots}=y$$

וכאמור נקודה זו אכן שייכת לקטע (a,b) ומכאן שגם במקרה זה מדובר בהומיאומורפיזם.

c. <u>בה"כ $a'=-\infty$ וכן $b=\infty$</u> - נגדיר את הפונקציה:

$$f:(a,\infty)\mapsto(-\infty,b')\quad f(x)=-(x-a)+b'$$

פונקציה זו, מאותם שיקולים, רציפה כפונקציה אלמנטרית (ואף ליניארית). קל לראות כי פונקציה זו חד-חד ערכית. היותה על נובע מכך שלכל $y\in(-\infty,b')$ מתקיים:

$$f(a+b'-y)=-(a+b'-y-a)+b'=y-b'+b'=y$$

וכאמור הנקודה $a+b'-y$ ודאי נמצא בקטע (a,∞) ולכן פונקציה זו אכן מהווה הומיאומורפיזם.

d. <u>$a,a'=-\infty,b,b'=\infty$</u> - במקרה זה העתקה הזהות הינה הומיאומורפיזם.

e. <u>$a,b\in\mathbb{R}$ וכן $(a',b')=(-\infty,\infty)$</u> - במקרה זה נגדיר הומיאומורפיזם בין (a,b) לבין $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ בהתאם למקרה הסופי שנסמנה g, ולאחר מכן נגדיר:

$$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\mapsto\mathbb{R}\quad f(x)=\tan x$$

פונקציה זו רציפה, חד-חד ערכית ועל (אלמנטרי, אניח שלא נדרשת הוכחה), ובתחום זה $\arctan x$ מוגדרת, רציפה, חד-חד ערכית, ועל כפונקציה הפיכה לכן בפרט ההרכבה $f\circ g$ תהיה ההעתקה המבוקשת.

f. <u>$a\in\mathbb{R},b=\infty$ וכן $(a',b')=(-\infty,\infty)$</u> - במקרה זה נוכל לקבל הומיאומורפיזם מהצורה שבנינו במקרה השני בין (a,∞) לקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ולאחר מכן להשתמש בהומיאומורפיזם שבנינו במקרה החמישי. הרכבת הומיאומורפיזמים אלו תתן את המבוקש.

■

ב. נפריד גם כאן למקרים בהם הקטעים אינסופיים/חצי אינסופיים לבין המקרה שבו הקטעים סופיים.

a. בסעיף הקודם כל ההומיאומורפיזמים שבנינו בין קטעים אינסופיים/חצי אינסופיים היו פונקציות ליניאריות. פונקציות ליניאריות, כפי שהראינו בכיתה, הן פונקציות משמרות מטריקה. בפרט היות וזהו הומיאומורפיזם המשמר מטריקה, נקבל כי זוהי איזומטריה כנדרש.

b. בין קטעים חצי אינסופיים/אינסופיים לבין קטע סופי לא קיימת איזומטריה. זאת משום שבקטעים מסוג זה ניתן לבחור שתי נקודות הרחוקות כרצוננו, אך לקטע סופי ישנו קוטר סופי ולכן אם קיים הומיאומורפיזם הוא בהכרח לא יוכל לשמר מרחק בין נקודות.

c. בעבור שני קטעים סופיים, נשים לב כי אם $b'-a'>b-a$, ניתן למצוא זוג נקודות ב-(a',b') אשר המרחק ביניהן גודל מהמרחק בין כל שתי נקודות ב-(a,b) ומכאן שאם יש העתקה חד-חד ערכית ועל בין הקטעים נסיק כי המרחק לא יכול להישמר תחת ההומיאומורפיזם. באותו אופן עבור המקרה שבו $b-a>b'-a'$ נקבל את אותה תוצאה. מאידך, עבור $b-a=b'-a'$ נקבל כי ההעתקה האפינית:

$$f(x)=x+(a'-a)$$

היא העתקה כנדרש וכהעתקה אפינית משמרת מטריקה ומכאן שמהווה איזומטריה בין הקטעים.

■

שאלה 3:

עבור קטעים סופיים מהצורה $[a,b],[a',b']$ נגדיר את הפונקציונל הבא:

$$\Psi: C[a,b] \mapsto C[a',b'] \quad \Psi(f) = f \circ h$$

כאשר:

$$h: [a,b] \mapsto [a',b'] \quad h(x) = a' + (x-a)\frac{b'-a'}{b-a}$$

העתקה זו מוגדרת היטב כהרכבה של העתקות רציפות בתחומים המתאימים. הטיעון בדבר חד-חד ערכיות ועל ההעתקה h מתקבל מידית מהמקרה של קטעים סופיים של שאלה 2 סעיף א' (קצוות הקטע מתאימים בטיעון זה בצורה די טריוויאלית).

היות וכך, נוכל להראות עתה כי Ψ חד-חד ערכית ועל באופן הבא:

<u>חד-חד ערכית</u> – לכל $f,g \in C[a,b]$ מתקיים:

$$\Psi(f) = \Psi(g) \Leftrightarrow f \circ h = g \circ h \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f\big(h(x)\big) = g\big(h(x)\big)$$

אך לכל $y \in [a',b']$ קיים $x \in [a,b]$ עבורו $h(x) = y$,ולכן נסיק כי הנ"ל נכון אם ורק אם:

$$\forall y \in [a',b'] \quad f(y) = g(y) \Leftrightarrow f = g$$

<u>על</u> – לכל $g' \in C[a',b']$ נשים לב כי עבור כל $y \in [a',b']$ קיים x עבורו $h(x) = y$. כלומר נוכל להגדיר:

$$\Psi^{-1}(f) = f\big(h^{-1}(x)\big)$$

כך שיתקיים:

$$\Psi^{-1}\big(\Psi(f)\big) = \Psi^{-1}(f \circ h) = f \circ h \circ h^{-1} = f$$

ומאותו שיקול העתקה זו תהיה חד-חד ערכית (עבור אותם טיעונים לגבי $h^{-1}(x)$ שהיא רציפה חד-חד ערכית ועל. אך הראינו, אם כך, כי ההעתקה וההעתקה ההפוכה שלה מגודרות היטב וחד חד ערכיות ומכאן שגם על.

כמו כן, נשים לב כי לכל שתי פונקציות f,g, הערך המקסימלי שהן תקבלנה לא ישתנה תחת Ψ היות ו-Ψ משנה רק את הערך שבו המקסימום יתקבל (היא אינה משנה את f אלא רק את הארגומנט שלה, והרי עדיין f תוגדר על הקטע כולו לכל f). מכאן שקל לראות כי:

$$d_\infty\big(\Psi(f),\Psi(g)\big) = \max_{[a',b']}\left|f\big(h(x)\big) - g\big(h(x)\big)\right|$$

אך מכאן שנניח כי ערך מקסימלי זה מתקבל בנקודה $y \in [a,b]$, כלומר $|f(y) - g(y)|$ הוא הערך המקסימלי. אזי קיים כמובן $x \in [a',b']$ עבורו $h(x) = y$ ועבורו מתקיים שהערך המקסימלי יתקבל בו עבור ההרכבות שציינו לעיל. לכן:

$$d_\infty\big(\Psi(f),\Psi(g)\big) = \max_{[a,b]}|f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g)$$

כלומר זו אכן איזומטריה כנדרש.

■

שאלה 4:

א. תהא $f: X \mapsto Y$ העתקה חד-חד ערכית ועל מקבוצה X למרחב מטרי (Y,ρ). נראה כי אכן:

$$d: X \times X \mapsto \mathbb{R} \quad d(x,y) = \rho\big(f(x),f(y)\big)$$

מהווה מטריקה על פי ההגדרות כנדרש:

i. <u>חיוביות</u> – מתקיים מחיוביות ρ באופן טריוויאלי.

a. התאפסות – נשים לב כי:

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \rho\big(f(x),f(y)\big)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$$

ii. סימטריות – אכן מתקיים, כאמור:

$$d(x,y)=\rho\big(f(x),f(y)\big)=\rho\big(f(y),f(x)\big)=d(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש – בהנתן $x,y,z \in X$ מתקיים:

$$d(x,z)=\rho\big(f(x),f(z)\big) \le \rho\big(f(x),f(y)\big)+\rho\big(f(y),f(z)\big)=d(x,y)+d(y,z)$$

■

ב. נתון כי f חד-חד ערכית ועל כהעתקה בין קבוצות, ובפרט נתון שהיא משמרת מטריקה. מכאן כי אכן מדובר באיזומטריה ומכאן שהמרחבים איזומטריים.

שאלה 5:

א. נראה כי $F:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ איזומטריה בין $(\mathbb{R},d)$ לעצמו אם ורק אם קיים $c\in\mathbb{R}$ עבורו $F(x)=\pm(x+c)$, וזאת לכל $x\in\mathbb{R}$. לשם כך, נשים לב כי מתקיים על פי הגדרה:

$$d\big(F(x),F(y)\big)=|F(x)-F(y)|=|\pm(x-y)\ |=d(x,y)$$

ומאידך, נשים לב כי:

$$d(x,0)=|x|=|F(x)-F(0)|$$

ואם נסמן $F(0)=c$ נקבל את הקבוע הדרוש, ולכן $F(x)-c=x$ או $F(x)-c=-x$ ומכאן נקבל $F(x)=\pm(x-c)$ כנדרש.

■

ב. עבור F מונוטונית ממש נסיק באופן טריוויאלי כי מדובר בהומיאומורפיזם. זאת משום שמונוטוניות משרה חד-חד ערכיות ועל טריוויאלית (על מתקיים משום שמדובר על כל $\mathbb{R}$).

עבור F הומיאומורפיזם אם נניח בשלילה כי המונוטוניות לא מתקיימת נסיק כי קיימים בה"כ x,y,z עבורם:

$$x<y<z \quad F(x)>F(y),F(y)<F(z)$$

אך מרציפות הפונקציה נסיק כי ממשפט ערך הביניים קיימות נקודות $c_1\in(x,y)$ וכן $c_2(y,z)$ עבורן מתקיים:

$$f(c_1)=f(c_2)=C$$

כאשר C הינו ערך כלשהו השייך ל-$\big(F(y),F(z)\big)\cap\big(F(y),F(x)\big)$. אך זו סתירה לחד-חד ערכיות ולכן נסיק כי הפונקציה חייבת להיות מונוטונית.

■