# מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים --- תרגול 12-13

## 1 משפט ההרחבה של טיצה

משפט 1.1 (Tietze) יהי $X$ נורמלי, $A \subset X$ סגורה, $f : A \to [0,1]$ אזי קיימת לה הרחבה רציפה $F : X \to [0,1]$ (כלומר $F|_A = f$)

טענה 1.2 תהי $A \subset X$ סגורה במרחב נורמלי, ותהי $f : A \to (-1,1)$ העתקה רציפה. אזי קיימת לה הרחבה רציפה $F : X \to (-1,1)$.

הוכחה: לפי משפט טיצה אנחנו יודעים של-$f$ יש הרחבה $\tilde{F} : X \to [-1,1]$. נסמן $B = \tilde{F}^{-1}(\{\pm 1\})$. $A \cap B = \emptyset$, ושתיהן סגורות. לכן קיימת פונקציה רציפה $g : X \to [0,1]$ כך ש-$g(A) = 1,\ g(B) = 0$. נגדיר $F : X \to (-1,1)$ על ידי $F = g \cdot \tilde{F}$. ואכן $F$ היא הרחבה של $f$. ■

דוגמה למרחב שהוא $T_3$ אבל לא $T_4$: $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.

הוכחה: $\mathbb{R}_\ell$ הוא $T_4$ (שיעורי בית), בפרט הוא $T_3$ ולכן גם המכפלה $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ היא $T_3$.

כדי להוכיח שהוא לא $T_4$ נשתמש בעובדה שהמרחב $\mathbb{R}_\ell$ ספרבילי (שיעורי בית), ולכן גם $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ ספרבילי.

כמה פונקציות רציפות יש $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell \to \mathbb{R}$?

מצד אחד הוא ספרבילי, וכל פונקציה רציפה על $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ נקבעת על ידי הערכים שהיא מקבלת על הקבוצה הצפופה. לכן יש לכל היותר $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ פונקציות רציפות כנ"ל. מצד שני אם הוא $T_4$ כל פונקציה רציפה מהקבוצה הסגורה $\tilde{\Delta} = \{(x,-x) | x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ ניתנת להרחבה. אבל הטופולוגיה על $\tilde{\Delta}$ היא דיסקרטית (כי $\{(x,-x)\} = \tilde{\Delta} \cap ([x,\infty) \times [-x,\infty))$). לכן יש שם $\left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ פונקציות רציפות. לכן על $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ יש לכל הפחות $2^{2^{\aleph_0}}$ פונקציות רציפות. סתירה.

בפרט, $\mathbb{R}_\ell$ אינו מטריזבילי.

למעשה, הראינו גם שמכפלה של מרחבים $T_4$ אינה בהכרח $T_4$.

המרחב $\mathbb{R}_\ell$ גם מספק דוגמה למכפלה של מרחב לינדלוף שאינה לינדלוף: בדומה למרחבים קומפקטים, קבוצה סגורה של מרחב לינדלוף היא לינדלוף. המרחב $\mathbb{R}_\ell$ מכיל קבוצה סגורה דיסקרטית שאינה בת מנייה, $\tilde{\Delta}$, לכן אינה לינדלוף.

משפט 1.3 (מטריזביליות של אוריסון למרחב קומפקטי) כל מרחב מרחב האוסדורף קומפקטי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה הוא מטריזבילי.

הוכחה: יהי $X$ מרחב האוסדורף קומפקטי המקיים את אקסיומת המנייה השנייה. יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מנייה של $X$. (נניח בה"כ שלכל $B \in \mathcal{B}$ מתקיים $\overline{B}^c \in \mathcal{B}$) לכל $B, C \in \mathcal{B}$

כך ש-$C \subset \overline{B} \subset C$ קיימת פונקציה $f_{B,C} : X \to [0,1]$ רציפה כך ש-$f_{B,C}(B) = 0$ ו-$f_{B,C}(C^c) = 1$. יש מספר בן מנייה של $B, C$ כנ"ל. נגדיר

$$f = \prod_{\overline{B} \subset C,\, B,C \in \mathcal{B}} f_{B,C} : X \to [0,1]^\omega$$

$f$ רציפה, ועל התמונה שלה. נשאר להוכיח ש-$f$ חח"ע (הסבר). יהיו $x \neq y$. קיימת $C \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in C$, $y \in C^c$. $X$ נורמלי לכן קיימת $B \in \mathcal{B}$ כך ש- $\{x\} \subset B \subset \overline{B} \subset C$ לכן $f_{B,C}(x) = 0, f_{B,C}(y) = 1$. כלומר $f(x) \neq f(y)$.

המרחב $[0,1]^\omega$ הוא מטרי. לפי למה שהוכחנו $f$ שיכון הומאומורפי (רציפה חח"ע ועל (התמונה) מקומפקטי להאוסדורף) לכן $X$ הומאומורפי למרחב מטרי, לכן $X$ מטריזבילי. ■

## 2 קשירות וקשירות מסילתית

טענה 2.1 נגדיר יחס על המרחב הטופולוגי $(X, \tau)$ על ידי: $x \sim y$ אם ניתן לחבר את $x$ ואת $y$ במסילה. כלומר קיימת $\gamma : [0,1] \to X$ רציפה כך ש-$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. היחס $\sim$ הוא יחס שקילות

הוכחה: רפלקסיביות: $x \sim x$. נבחר $\gamma(t) = x$ לכל $t \in [0,1]$.

סימטריות: אם $x \sim y$ אז קיימת $\gamma : [0,1] \to X$, נסתכל על $\gamma^* : [0,1] \to X$ המוגדרת על ידי $\gamma^*(t) = \gamma(1-t)$ רציפה (כהרכבה של רציפות) ומקיימת $\gamma^*(0) = y,\ \gamma^*(1) = x$ לכן $y \sim x$.

טרנזיטיביות: אם $x \sim y$ (על ידי $\gamma$) ו-$y \sim z$ (על ידי $\tilde{\gamma}$) נבנה את המסילה הבאה $\sigma : [0,1] \to X$ על ידי:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2t-1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

היא רציפה כהדבקה של העתקות רציפות ($y = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(0)$) ומתקיים $\sigma(0) = x,\ \sigma(1) = z$ ולכן $x \sim z$. ■

מסקנה 2.2 המרחב $X$ מתחלק למחלקות שקילות של היחס $\sim$, הנקראות רכיבי קשירות מסילתית. את רכיב הקשירות המסילתית של $x \in X$ נסמן ב-$P_x$.

הגדרה 2.3 יהי $X$ מרחב טופולוגי, $x \in X$. נסמן ב-$C_x$ את רכיב הקשירות של $x$.

הערה 2.4 מתקיים $P_x \subseteq C_x$ לכל $x \in X$.

## 3 קשירות מקומית

הגדרה 3.1 מרחב טופולוגי נקרא קשיר מקומית בנקודה ב-$x \in X$ (קשיר מסילתית מקומית) אם לכל סביבה פתוחה $x \in U$ קיימת תת סביבה פתוחה וקשירה (קשירה

מסילתית) $x \in V \subset U$. $X$ נקרא קשיר מקומית (קשיר מסילתית מקומית) אם הוא קשיר מקומית (קשירות מסילתית מקומית) בכל נקודה.

במילים אחרות, $X$ קשיר מקומית (קשיר מסילתית מקומית) אם יש ל-$X$ בסיס של קבוצות פתוחות וקשירות (קשירות מסילתית)

מרחב קשיר (מסילתית) מקומית שאינו קשיר:

$$X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$$

מרחב קשיר (מסילתית) אך לא קשיר מקומית:

$$X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \subset \mathbb{R}^2$$

**הגדרה 3.2** מרחב טופולוגיה $X$ נקרא קשיר מקומית חלש ב-$x$ (או: connected im kleinen) אם לכל סביבה פתוחה $x \in U$, קיימת תת קבוצה קשירה כך ש-$x \in \overset{\circ}{N} \subset N \subset U$. $X$ נקרא קשיר מקומית חלש אם הוא קשיר מקומית חלש בכל נקודה.

**למה 3.3** כל מרחב נורמי הוא קשיר מסילתית מקומית.

הוכחה: יהי $B$ כדור ב-$X$ יהיו $x, y \in B$. נסתכל על $f : [0,1] \to X$ המוגדרת על ידי $f(t) = (1-t)x + ty$. מתקיים $f(0) = x, f(1) = y$. $f(t) \in B$ (כי $B$ היא כדור לכן קמורה), ו-$f$ רציפה כי היא ליפשיצית:

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(s)\| &= \|(1-t)x + ty - (1-s)x - sy\| \\ &= \|(s-t)x - (s-t)y\| \\ &= |s-t| \|x-y\| \end{aligned}$$

■

**משפט 3.4** יהי $X$ קשיר מסילתית מקומית וקשיר אזי $X$ קשיר מסילתית. ובפרט, קבוצה פתוחה וקשירה במרחב נורמי היא קשירה מסילתית.

הוכחה: רכיב הקשירות המסילתית $P_x \subset X$ של $x \in X$ היא קבוצה פתוחה כי $X$ קשיר מסילתית מקומית.

אבל מצד שני $X = \bigcup_{x \in A} P_x$ (ו-$P_x = P_y$ או $P_x \cap P_y = \emptyset$), לכן עבור $x \in X$ ניתן לכתוב $P_x = X \setminus \left( \bigcup_{y \in X \setminus P_x} P_y \right)$ ולכן $P_x$ סגורה ב-$X$. כלומר $P_x$ היא קבוצה clopen ב-$X$. $X$ קשירה ולכן הקבוצות ה-clopen היחידות הן $\emptyset$ או $X$. $P_x \neq \emptyset$ לכן $P_x = X$ כלומר $X$ קשירה מסילתית (יש לה רק רכיב קשירות מסילתית אחד). ■

## 4 דוגמה למרחב בן מנייה האוסדורף קשיר

נסתכל על $X=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ עם הטופולוגיה הנוצרת ע"י הבסיס

$$\mathcal{B}=\{A_{a,d}|\gcd(a,d)=1\}$$

כאשר $A_{a,d}=a+d\mathbb{Z}$.
תרגיל: להוכיח שזה בסיס לטופולוגיה האוסדורף.
נראה שהמרחב המתקבל הוא קשיר: הוכחה: נניח ש-

$$\mathbb{Z}\setminus\{0\}=\left(\bigcup_{\alpha}A_{a_\alpha,d_\alpha}\right)\cup\left(\bigcup_{\beta}A_{a_\beta,d_\beta}\right)$$

עבור קבוצות $U=\bigcup_\alpha A_{a_\alpha,d_\alpha}$ ו-$V=\bigcup_\beta A_{a_\beta,d_\beta}$ פתוחות לא ריקות (האיחודים לא טריוויאליים) ונראה שהחיתוך של הקבוצות הנ"ל אינו ריק.
תחילה נשים לב שאם קיימים $\alpha,\beta$ כך ש-$\gcd\left(d_\alpha,d_\beta\right)=1$ אזי לפי משפט השאריות הסיניות

$$A_{a_\alpha,d_\alpha}\cap A_{a_\beta,d_\beta}\neq\emptyset$$

נראה שקיימים $\alpha,\beta$ כך ש-$\gcd\left(d_\alpha,d_\beta\right)=1$:
נניח בשלילה שלכל $\alpha,\beta$ מתקיים $\gcd(d_\alpha,d_\beta)\neq 1$.
לכן בפרט לכל $\alpha$ מתקיים $d_\alpha\in U$ (כי לא ייתכן ש-$d_\alpha\in V$) ובאותו אופן גם מספרים שמתחלקים ב-$d_\alpha$ שייכים ל-$U$.
יהי $d_\beta$ ויהי $d_1=d_{\alpha_1}$.
מתקיים $d_1\in U$ ו-$\gcd\left(d_1,d_\beta\right)\neq 1$.
קיים $d_2=d_{\alpha_2}$ כך ש-$\gcd\left(d_1,d_2\right)=1$, ומצד שני $\gcd\left(d_2,d_\beta\right)\neq 1$ ולכן גם $d_1d_2\in U$.
קיים $d_3=d_{\alpha_3}$ כך ש-$\gcd\left(d_3,d_1d_2\right)=1$ ומצד שני $\gcd\left(d_3,d_\beta\right)$ ממשיכים באינדוקציה ובונים סדרה $d_i$ כך ש-$\gcd\left(d_i,d_j\right)=1$ אבל $\gcd\left(d_i,d_\beta\right)\neq 1$. סתירה לכך של-$d_\beta$ יש מספר סופי של מחלקים ראשוניים. ■