טכניון - מכון טכנולוגי לישראל **הפקולטה למתמטיקה**

חשבון אינפי' 2 104281

גליון תרגילים מספר 9

תרגילים בנושא גבול, רציפות ודיפרנציאביליות של פונקציה בשני משתנים

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי סמסטר אביב תשנ"ט

1. מצא תחום הגדרה מקסימלי עבור הפונקציות הבאות:

(א) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$

(ב) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$

(ג) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$

עבור סעיפים א' ו-ג' צייר את תחום ההגדרה במישור x-y.

2. חשב את הגבולות הבאים אם הם קיימים:

(א) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ y\to 0} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

(ב) $\displaystyle\lim_{(x^2+y^2)\to\infty} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

(ג) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ y\to 2} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$

(ד) $\displaystyle\lim_{(x^2+y^2)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{1-(x-y)^4}$

(ה) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ y\to 0} \frac{1-\cos 2xy}{x^2y\sin \pi y}$

(ו) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ y\to 1} \frac{1-\cos 2xy}{x^2y\sin \pi y}$

(ז) $\displaystyle\lim_{x\to 1,\ y\to -1} \frac{x^4-x^2-y^4+y^2}{|x+y|}$

(ח) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\ y\to 0} \frac{x^2-x+y^2-y}{|x|+|y|}$

3. בדוק רציפות הפונקציות:

(א) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(ב) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y-3)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} & (x,y)\neq(1,2) \\ 0 & (x,y)=(1,2) \end{cases}$

4. בדוק רציפות במידה שווה

(א) $f(x,y) = x^2-xy+y^2$ של R^2 על

(ב) $f(x,y,z) = \sin\left(\dfrac{1}{|x|+1}+y+z\right)$ של R^3 על

5. בדוק רציפות, קיום נגזרות חלקיות ממעלה ראשונה ודיפרנציאביליות:

(א) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & x^2+y^2>0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

(ב) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2+y^2)}{y^2} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

(ג) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\arctan(x^2+y^2)}{\sqrt{2x^2+3y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

6. התבונן בפונקציה הבאה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^k} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(א) עבור אילו ערכי k הפונקציה רציפה?

(ב) עבור אילו ערכי k הפונקציה בעלת נגזרת מכוונת בכל כיוון?

(ג) עבור אילו ערכי k הפונקציה דיפרנציאבילית?

7. (מועד ב' חורף תשנ"ה)

(א) תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2y+y^2x)\sin(x-y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בדוק האם $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה ב-$(0,0)$, והאם f דיפרנציאבילית. נמק !

(ב) תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת ש-$\frac{\partial f}{\partial x}$ ו-$\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות ב-R^2. נעיין בהצבה $x=s+t$, $y=s^2-t^3$, ונניח ש-$f(s,t)$ גזירה חלקית ברציפות לפי s ו-t. הוכח ש-$\frac{\partial f}{\partial s}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial t}(0,0)$ ו-$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

8. (מועד ב' אביב תשנ"ג)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^{1/8}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(א) בדוק האם $f(x,y)$ רציפה ב-$(0,0)$.

(ב) בדוק האם $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ רציפה ב-$(0,0)$.

9. (מועד ב' חורף תשנ"א)

האם הפונקציה הבאה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$?

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{xy} & x,y\neq 0\\ \frac{\sin x}{x} & x\neq 0,\ y=0\\ \frac{\sin y}{y} & x=0,\ y\neq 0\\ 1 & x=y=0\end{cases}$$

10. (מועד א' אביב תש"ן) התבונן בפונקציה המוגדרת בשאלה 7 סעיף א'.

(א) חשב $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ <u>לכל</u> נקודה (x,y).

(ב) חשב את f_{xy}, f_{yx} בנקודה $(0,0)$.

11. (מועד א' חורף תש"ן) נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+y^2\sin\frac{1}{y} & x,y\neq 0\\ x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0,\ y=0\\ y^2\sin\frac{1}{y} & x=0,\ y\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

(א) חשב את f_x, f_y ב-$(0,0)$ ובסביבתו.

(ב) הוכח כי f_x, f_y לא רציפות ב-$(0,0)$.

(ג) הוכח כי f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

12. תהי $f(x,y)$ מוגדרת ע"י

$$f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & y>0\\ 0 & y=0\\ -\sqrt{x^2+y^2} & y<0\end{cases}$$

(א) חשב את $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y)$.

(ב) חשב את $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

(ג) חשב את $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(ד) חשב את הנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial n}(0,0)$, בכל כיוון $\hat{n}=(n_1,n_2)$.

(ה) באילו נקודות (x,y) הפונקציה f דיפרנציאבילית?

13. נתונה $f(x,y)$ המקיימת

$$|f(x,y)|\leq x^2+y^2$$

לכל $(x,y)\in R^2$. הוכח כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

14. הוכח את הזהות

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m(n!2\pi x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$