תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 12	להגשה עד 26.1.2003

.1

א. האם הקבוצות $[0,1]$ ו- $[0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$ איזומורפיות כאשר שתיהן סדורות כרגיל?

ב. מצא שרשרת מקסימלית ב- $(P(Z \times Z),\subseteq)$ שהיא בת מניה.

ג. תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה היטב. הוכח כי לכל תת-קבוצה של X החסומה מלעיל יש sup.

ד. הוכח או הפרך: אם A קבוצה סדורה היטב שבה אין סדרה אינסופית עולה ממש אז יש ב A איבר מקסימלי.

.2 יהי $f: R \to R$ איזומורפיזם של יחס הסדר הרגיל. הוכח: f פונקציה רציפה.

.3 תהי $X = N^N$ קבוצת כל הפונקציות מהטבעיים לטבעיים.
נגדיר על X יחס $<$ באופן הבא:
לכל $f,g \in X$ $f < g$ אם ורק אם קיים מספר טבעי $n \in N$ כך ש $f(n) < g(n)$ ולכל $n > k$ $f(k) = g(k)$.
(בתרגיל בית מס' 9 הוכחתם שזה יחס סדר מלא.)
האם $(X,\leq)$ קס"ה?

.4 תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. קבוצה חלקית Y של X נקראת קופינלית אם לכל $x \in X$ יש $y \in Y$ כך ש- $x \leq y$. הוכח כי אם X סדורה לינארית אז יש ב- X קבוצה חלקית סדורה היטב וקופינלית, לפי הסדר $\leq$.
(הערה: ניתן למצוא רמז לתרגיל זה בספר של שמרון.)

.5 האם $1+\omega+1=1+\omega+1+\omega+1$?