תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 4 – פתרון חלקי

.1

א) $(\{1, 2\}\times\{7, 8\})^{\{0, 1\}} =$

$$\begin{aligned}\{\ &\{0, (1,7)\}, \{1, (1,7)\},\\ &\{0, (1,7)\}, \{1, (1,8)\},\\ &\{0, (1,7)\}, \{1, (2,7)\},\\ &\{0, (1,7)\}, \{1, (2,8)\},\\ &\{0, (1,8)\}, \{1, (1,7)\},\\ &\{0, (1,8)\}, \{1, (1,8)\},\\ &\{0, (1,8)\}, \{1, (2,7)\},\\ &\{0, (1,8)\}, \{1, (2,8)\},\\ &\{0, (2,7)\}, \{1, (1,7)\},\\ &\{0, (2,7)\}, \{1, (1,8)\},\\ &\{0, (2,7)\}, \{1, (2,7)\},\\ &\{0, (2,7)\}, \{1, (2,8)\},\\ &\{0, (2,8)\}, \{1, (1,7)\},\\ &\{0, (2,8)\}, \{1, (1,8)\},\\ &\{0, (2,8)\}, \{1, (2,7)\},\\ &\{0, (2,8)\}, \{1, (2,8)\}\ \}\end{aligned}$$

ב) $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & ,0\le x<1\\[2mm] \dfrac{x}{1+x} & ,-1<x<0\end{cases}$$

הפונקציה הזאת היא חד-חד-ערכית ועל – ניתן להשתכנע בזה אם מציירים גרף שלה: הוא חותך כל ישר אופקי פעם אחת בדיוק.

לפני ההוכחה המדוייקת נשים לב:

$$\frac{x}{1+x}=\frac{x+1-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}\ ;\ \frac{x}{1-x}=\frac{x-1+1}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1\ ,$$

כלומר:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-1 & ,0\le x<1\\[2mm] 1-\dfrac{1}{1+x} & ,-1<x<0\end{cases}$$

<u>הוכחה ש-f חד-חד-ערכית:</u>

נניח $f(x_1)=f(x_2)$. יש שלושה מקרים:

* x_1 ו- x_2 שליליים. אז:

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$1-\frac{1}{1+x_1}=1-\frac{1}{1+x_2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{1+x_1}=\frac{1}{1+x_2}$$
$$\Downarrow$$
$$1+x_1=1+x_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_1=x_2$$

* x_1 ו- x_2 אי-שליליים. אז מקבלים $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=x_2$ בדומה למקרה הקודם.
* מבין x_1 ו- x_2 אחד שלילי והשני אי-שלילי. ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות: x_1 שלילי ו- x_2 אי-שלילי. אז:

$$f(x_1)=f(x_2)$$
$$\Downarrow$$
$$1-\frac{1}{1+x_1}=\frac{1}{1-x_2}-1$$

אבל זה לא ייתכן כי האגף השמאלי שלילי והימני אי-שלילי:

$$x_1\in(-1,0) \Rightarrow 1+x_1\in(0,1) \Rightarrow \frac{1}{1+x_1}\in(1,+\infty) \Rightarrow -\frac{1}{1+x_1}\in(-\infty,-1) \Rightarrow 1-\frac{1}{1+x_1}\in(-\infty,0)$$

$$x_2\in[0,1) \Rightarrow -x_2\in(-1,0] \Rightarrow 1-x_2\in(0,1] \Rightarrow \frac{1}{1-x_2}\in[1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{1-x_2}\in[0,+\infty)$$

<u>בכך הוכחנו $f(x_1)=f(x_2) \Leftarrow x_1=x_2$, כלומר f חד-חד-ערכית</u>.

<u>הוכחה ש- f היא על:</u>

יהי $y\in\mathbb{R}$. נוכיח שקיים $x\in(-1, 1)$ כך ש- $f(x)=y$. יש שני מקרים:

- $y<0$. נמצא x ש"ייתן" אותו. לפי הגרף רואים ש- x כזה יהיה שלילי. לכן מחפשים x שיקיים: $y = 1-\frac{1}{1+x}$. מכאן:

$$\frac{1}{1+x} = 1-y$$
$$\Downarrow$$
$$1+x = \frac{1}{1-y}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{1}{1-y} - 1$$

x זה שייך ל- $(-1, 0)$:

$$y \in (-\infty, 0)$$
$$\Downarrow$$
$$-y \in (0, +\infty)$$
$$\Downarrow$$
$$1-y \in (1, +\infty)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{1-y} \in (0,1)$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{1}{1-y} - 1 \in (-1, 0)$$

לכן באמת, עבור x זה,

$$f(x) = 1-\frac{1}{1+x} = 1-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-y}-1\right)} = 1-\frac{1}{\frac{1}{1-y}} = 1-(1-y) = y$$

- $y>0$. בדומה למקרה הקודם מוצאים x "שלו": $x = 1-\frac{1}{1+y}$, בודקים ש- x זה שייך ל- $[0, 1)$ ומוודאים שעבורו באמת $f(x)=y$.

<u>בכך הוכחנו שלכל $y\in\mathbb{R}$ קיים $x\in(-1, 1)$ כך ש- $f(x)=y$, כלומר f היא על.</u>

ג) יש הרבה פונקציות שמקיימות את הנדרש. המטרה כאן – למצוא פונקציה קלה לתיאור, פחות או יותר מפורשת.
פתרון אפשרי:
לכל $A\in P(\mathbb{N})$ נגדיר $f(A)$ באופן הבא:

$f(\emptyset)=0$

$f(\{1\})=1$

$f(\{n\})=-1$ לכל $n\geq 2$.

(עד כאן הגדרנו $f(A)$ לכל A שמקיימת $|A|<2$.)

אם $|A|\geq 2$, נסמן ב- a את האיבר המינימלי של A, וב- b את האיבר השני בגודל של A.

כעת נגדיר:

$$f(A)=\begin{cases} a/b, & |A|=2 \\ b/a, & |A|=3 \\ -a/b, & |A|=4 \\ -b/a, & |A|\geq 5 \end{cases}$$

הפונקציה הזאת היא על: לכל איבר q של $\mathbb{Q}$ פרט ל- 0, 1 ו- -1 יש צורה $+m/n$ או $-m/n$ כאשר m ו- n טבעיים שונים. ניקח A תת-קבוצה כלשהי של $\mathbb{N}$ כך ש- m ו- n – שני האיברים הקטנים שלה, ונוסיף איברים בהתאם לכך האם q חיובי או שלילי והאם q קטן או גדול מ- 1 בערך מוחלט. אז יתקיים $f(A)=q$.

לדוגמא:

$$\tfrac{2}{15}=f(\{2,15\})$$
$$\tfrac{15}{2}=f(\{2,15,16\})$$
$$-\tfrac{2}{15}=f(\{2,15,16,17\})$$
$$-\tfrac{15}{2}=f(\{2,15,16,17,18\})$$

(הערה: קל לראות שהפונקציה שבנינו "מאוד לא חד-חד-ערכית".)

ד)

$$f: Z\times Z \to Q$$
$$(m,n)\mapsto \begin{cases} 0, & n=0 \\ m/n, & n\neq 0 \end{cases}$$

הפונקציה הזאת היא על: כל מספר רציונלי q ניתן לכתוב בצורה m/n בהרבה דרכים, אז לכל m, n כאלה יהיה $q=f(m,n)$, לדוגמא:

$2/5=f(2,5)=f(4,10)=f(-2,-5)\ldots$

<u>הערה</u>: בנושא של שקילויות-עוצמה הוכחנו תוצאות שמהן נובע שקיימת אפילו פונקציה חד-חד-ערכית מ- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ל- $\mathbb{Q}$ (שתי הקבוצות שקולות-עוצמה ל- $\mathbb{N}$), אבל הגדרה מפורשת של פונקציה כזאת תהיה יותר מסובכת מהפתרון שנתנו פה. כאן התבקשנו **למצוא** פונקציה, ולא מספיק להוכיח שקיימת כזאת.

ה)

$$y = h(x)$$
$$\Downarrow$$
$$y = (1 - x^2)^{1/2}$$
$$\Downarrow$$
$$1 - x^2 = y^2$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 = 1 - y^2$$
$$\Downarrow$$
$$x = (1 - y^2)^{1/2}$$

לכן הפונקציה הזאת היא הפכית לעצמה: $h^{-1} = h$ (הגרף שלה – רבע מעגל).

2. תשובות:

א) $n!$

ב) $(2^n)^n$

ג) $3n \cdot (3n-1) \cdot (3n-2) \cdot \ldots \cdot (2n+1) = \dfrac{(3n)!}{(2n)!}$

או, תוך שימוש בסימנים קומבינטוריים: $\dfrac{(3n)!}{(2n)!} = \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!} \cdot n! = \dbinom{3n}{n} \cdot n!$.

3. שאלה זאת הופיעה במבחן אמצע בסמסטר אביב 2001/02. פתרון של מבחן זה נמצא באתר של הקורס.

4. א) נתון: X קבוצה סופית, $f : X \to X$ פונקציה חד-חד-ערכית ועל.

צריך להוכיח: קיים n טבעי כך ש- $f^n = Id_X$, כלומר: קיים n טבעי כך שלכל $x \in X$ מתקיים $\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n \text{ פעמים}}(x))\ldots))) = x$.

יהי x איבר כלשהו של X. נסתכל בסדרה הבאה:

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x)))\ldots$$

כל אברי הסדרה הזאת – איברים של X. נתון ש- X קבוצה סופית, לכן בסדרה הזאת יהיו חזרות, כלומר קיימים k ו- m שונים כך ש-

$$\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{m \text{ פעמים}}(x))\ldots))) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{k \text{ פעמים}}(x))\ldots)))$$

נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $k<m$.

נתון ש- f חד-חד-ערכית, לכן

$$\underbrace{f(f(f(...(f}_{k \text{ פעמים}}(x))...))) = \underbrace{f(f(f(...(f}_{m \text{ פעמים}}(x))...)))$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{f(f(f(...(f}_{k-1 \text{ פעמים}}(x))...))) = \underbrace{f(f(f(...(f}_{m-1 \text{ פעמים}}(x))...)))$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{f(f(f(...(f}_{k-2 \text{ פעמים}}(x))...))) = \underbrace{f(f(f(...(f}_{m-2 \text{ פעמים}}(x))...)))$$
$$\Downarrow$$
$$...$$
$$\Downarrow$$
$$x = \underbrace{f(f(f(...(f}_{m-k \text{ פעמים}}(x))...)))$$

הוכחנו: לכל $x \in X$ קיים n_x טבעי כך ש- $\underbrace{f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}(x))...))) = x$.

(יכול להיות שהוא שונה עבור x-ים שונים, לכן עוד לא סיימנו.)

נגדיר $n = \prod_{x \in X} n_x$ **(כלומר – מכפלה של כל ה-n_x-ים).**

כעת לכל $x \in X$ ניתן לכתוב $n = \alpha \cdot n_x$ ולכן לכל $x \in X$ מתקיים

$$\underbrace{f(f(f(...(f}_{n \text{ פעמים}}(x))...))) = \underbrace{f(f(f(...(f}_{\alpha \cdot n_x \text{ פעמים}}(x))...))) =$$
$$= \underbrace{\underbrace{f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}...\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}}_{\alpha \text{ פעמים}}(x)......))) =$$
$$= \underbrace{\underbrace{f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}...\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}}_{\alpha-1 \text{ פעמים}}(x)......))) =$$
$$= \underbrace{\underbrace{f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}...\underbrace{(f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}}_{\alpha-2 \text{ פעמים}}(x)......))) =$$
$$= ... = \underbrace{f(f(f(...(f}_{n_x \text{ פעמים}}(x))...))) = x$$

(זה כבר לכל x עבור אותו n.)

הערה: במקום המכפלה של כל ה-n_x-ים ניתן היה לקחת את הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם.

ב) לדוגמא:

$$f: Z \to Z$$
$$x \mapsto x+1$$