תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 9 - פתרון חלקי

1. נתון:

א) תשובה: 19. (יש לצייר כל דיאגרמות Hasse האפשריות).

ב) תשובה: $\aleph$: לכל $A\in P(\mathbb{N})\setminus\{\varnothing\}$ נגדיר יחס הבא ב- $\mathbb{N}$

$x\le y \Leftrightarrow x\in A,\ y\in A^c$

מכאן יש לפחות $\aleph$ יחסים כאלה.

2.

- היחס רפלקסיבי: לכל $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, לכל n טבעי מתקיים $f(n)=f(n)$.
- היחס טרנזיטיבי: נניח $f\le g$ ו- $g\le h$. ייתכנו 4 מקרים:
  1. לכל n טבעי $f(n)=g(n)$ ו- $g(n)=h(n)$.
     אז לכל n טבעי $f(n)=h(n)$. לכן $f\le h$.
  2. לכל n טבעי $f(n)=g(n)$, וקיים m טבעי כך ש- $g(m)<h(m)$ ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $g(k)=h(k)$.
     אז $f(m)<h(m)$ ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=h(k)$. לכן $f\le h$.
  3. קיים m טבעי כך ש- $f(m)<g(m)$ ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=g(k)$, ולכל n טבעי $g(n)=h(n)$.
     אז $f(m)<h(m)$ ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=h(k)$. לכן $f\le h$.
  4. קיים m טבעי כך ש- $f(m)<g(m)$, ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=g(k)$, וקיים n טבעי כך ש- $g(n)<h(n)$, ולכל k טבעי קטן מ- n מתקיים $g(k)=h(k)$.
     בלי הגבלת הכלליות $m\le n$. עבור m: $f(m)<g(m)$ ו- $g(m)<h(m)$ (בין אם $m=n$ לבין אם $m\le n$), לכן $f(m)<h(m)$. כמו כן, לכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=g(k)$ ומתקיים $g(k)=h(k)$, לכן $f(k)=h(k)$. לכן $f\le h$.

  לסיכום: $f\le h$ בכל מקרה.
- היחס אנטיסימטרי: נניח $f\le g$ ו- $g\le f$. ייתכנו 4 מקרים:
  1. לכל n טבעי $f(n)=g(n)$ ו- $g(n)=f(n)$.
     אז לכל n טבעי $f(n)=h(n)$. לכן $f=h$.
  2. לכל n טבעי $f(n)=g(n)$, וקיים m טבעי כך ש- $g(m)<f(m)$ ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $g(k)=f(k)$.
     זה לא ייתכן.
  3. קיים m טבעי כך ש- $f(m)<g(m)$ ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=g(k)$, ולכל n טבעי $g(n)=f(n)$.
     זה לא ייתכן.
  4. קיים m טבעי כך ש- $f(m)<g(m)$, ולכל k טבעי קטן מ- m מתקיים $f(k)=g(k)$, וקיים n טבעי כך ש- $g(n)<f(n)$, ולכל k טבעי קטן מ- n מתקיים $g(k)=f(k)$.
     בלי הגבלת הכלליות $m\le n$. עבור m: $f(m)<g(m)$ ו- $g(m)<f(m)$ – זה לא ייתכן.

  לסיכום: $f=h$ בכל מקרה.
- היחס מלא (כלומר, כל שני אברי $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ניתנים להשוואה).
  תהינה $f, g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

אם לכל n טבעי $f(n)=g(n)$, סיימנו.
אם קיים n טבעי כך ש- $f(n)\neq g(n)$: ניקח n מינימלי כזה. כלומר, לכל $k<n$ מתקיים $f(k)=g(k)$. כעת אם $f(n)<g(n)$ אז $f\leq g$ ואם $f(n)>g(n)$ אז $g\leq f$.

3. לגבי $sup(\varnothing)$:
קודם כל, כל איבר של X הוא חסם מלעיל של $\varnothing$: כל איבר של $\varnothing$ קטן או שווה מכל איבר של X (באופן ריק, כי ב- $\varnothing$ אין איברים).
סופרמום – זה חסם מלעיל שקטן מכל חסם מלעיל אחר. כלומר – איבר ראשון בקבוצת החסמים מלעיל.
מכאן: אם ב- X יש איבר ראשון, אז הוא $sup(\varnothing)$. אם ב- X אין איבר ראשון, אז אין $sup(\varnothing)$.

בדומה, $inf(\varnothing)$ הוא איבר אחרון של X (אם יש כזה).

4.
א) איברים מינימליים: $(1,2)$ ו- $(1,5)$;
איברים מקסימליים: $(2,300)$ ו- $(3,100)$;
אין איבר ראשון ואיבר אחרון.

עבור A :
חסמים מלעיל: $(3,100)$, $(2,300)$, $(2,100)$;
חסמים מלרע: $(1,5)$, $(1,2)$;
סופרמום: $(2,100)$;
אין אינפימום.

עבור B :
חסם מלעיל היחיד וסופרמום: $(2,300)$;
חסם מלרע היחיד ואינפימום: $(1,2)$.

5. הטענות בסעיפים (ב) ו- (ג) – נכונות.

6.
ה) נתון: X קבוצה עם סדר חלקי; ל- X יש איבר ראשון; ולכל A , תת-קבוצה לא ריקה של X , קיים $sup(A)$ (ב- X) .

נוכיח: לכל A , תת-קבוצה לא ריקה של X , קיים $inf(A)$ (ב- X) .

תהי A תת-קבוצה לא ריקה של X .

נסמן ב- B את קבוצת החסמים מלרע של A.
B לא ריקה כי האיבר הראשון של X שייך לה.
לכן, לפי הנתון, קיים (ב- X) $sup(B)$. נסמן אותו ב- z .

<u>נוכיח ש- z הוא חסם מלרע של A</u> (במילים אחרות, נוכיח ש- $z \in B$!).
יהי $a \in A$. עלינו להוכיח ש- $z \leq a$.
לכל $b \in B$ מתקיים $b \leq a$ (לפי הגדרת B). לכן a הוא חסם מלעיל של B .
ואילו z הוא *סופרמום* של B.
לכן $z \leq a$.

<u>נוכיח ש- z הוא $inf(A)$</u> .
כבר הוכחנו ש- z הוא חסם מלרע של A .
יהי y חסם מלרע כלשהו של A . עלינו להוכיח ש- $y \leq z$.
y ו- z שייכים ל- B . אבל z הוא גם חסם מלעיל של B (כי הוא מוגדר כסופרמום של B), לכן $y \leq z$.

הוכחנו שלכל A , תת-קבוצה לא ריקה של X , קיים $inf(A)$.

לגבי $\varnothing$: נתון של- X יש איבר ראשון – הוא הסופרמום של $\varnothing$.
ל- X כולה יש סופרמום $\Leftarrow$ הוא האיבר האחרון של X $\Leftarrow$ הוא האינפימום של $\varnothing$.

מכל זה נובע ש- X סריג שלם.

.7

ב) תהי A קבוצה בלתי תלויה כלשהי ו- F כיסוי כלשהו.
ב- A אין שני איברים ששייכים לאותה שרשרת מ- F.
לכן מספר האיברים ב- A קטן או שווה ממספר השרשראות ב- F.
כלומר – מספר האיברים בקבוצה בלתי תלויה כלשהי קטן או שווה ממספר השרשראות בכיסוי כלשהו.
בפרט – מספר האיברים בקבוצה בלתי תלויה מקסימלית קטן או שווה ממספר השרשראות בכיסוי מינימלי.