תורת ההסתברות

תרגיל בית מס׳ 3

פתרנות יתפרסמו באתר הקורס ב- 30.12.01.

<u>תרגיל 1</u>.
יהיו X, Y משתנים אקראיים ברנולי בלתי מתואמים, דהינו $cov(X, Y) = 0$. האם X, Y בלתי תלוים? תזכורת: מ״א Z נקרא מ״א ברנולי אם $P(Z = 1) = p$, $P(Z = 0) = 1 - p$ עבור פרמטר $p \in (0, 1)$.

<u>פתרון</u>.
התשובה היא כן, X, Y הם מ״א ב״ת. מהנתון נובע כי

$$\begin{aligned} P(X = 1 \cap Y = 1) &= P(XY = 1) = EXY = EX \cdot EY = \\ &= P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = p^2. \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} P(X = 1 \cap Y = 0) &= P(X = 1) - P(X = 1 \cap Y = 1) = p - p^2 = pq = \\ &= P(X = 1) \cdot P(Y = 0). \end{aligned}$$

כמו כן

$$\begin{aligned} P(X = 0 \cap Y = 1) &= P(X = 1) - P(X = 1 \cap Y = 1) = pq = \\ &= P(X = 0) \cdot P(Y = 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0 \cap Y = 0) &= 1 - P(X = 1 \cap Y = 1) - P(X = 1 \cap Y = 0) \\ &- -P(X = 0 \cap Y = 1) = 1 - p^2 - 2pq = q^2 = \\ &= P(X = 0) \cdot P(Y = 0). \end{aligned}$$

לכן עבור כל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

<u>תרגיל 2</u>. יהא X מ״א פואסוני עם פרמטר $\lambda < 1$, דהיינו $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, עבור $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(א) מצאו את $E(X!)$.

(ב) מצאו את $E\Big((X+1)!\Big)$.

(ג) הוכיחו כי $E(X^n)=\lambda E\left(\left(X+1\right)^{n-1}\right)$ עבור כל $n\in\mathbb{N}$.

פתרון.

(א)

$$E(X!) = \sum_{k=0}^{\infty} k!\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^k = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}.$$

(ב)

$$\begin{aligned} E\big((X+1)!\big) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot\lambda^k = \\ &= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\right)' = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{1-\lambda}-1\right)' = \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

(ג)

$$\begin{aligned} \lambda E\left(\left(X+1\right)^n\right) &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n-1}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}j^n\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}j^n\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} = E(X^n). \end{aligned}$$

תרגיל 3.

יהיו Y,X שני משתנים אקראיים בלתי תלוים מפולגים לפי התפלגות פואסונית עם פרמטרים λ_x ו- λ_y בהתאמה. הוכיחו כי אם $\lambda_x<\lambda_y$ אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $P(X\le n)>P(Y\le n)$. תזכורת: נאמר כי מ"א Z מפולג פואסוני עם פרמטר λ אם $P(Z=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,2,\dots$.

פתרון 1.

נגדיר עבור $\lambda>0$: $f_n(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. אזי $P(X\le n)=f_n(\lambda_x)$, כמו כן

$P(Y \le n) = f_n(\lambda_y)$. זאת אומרת, ד"ל כי $f_n(\lambda)$ היא פונקציה יורדת של λ. זה נובע מחשבון הבא:

$$\begin{aligned} f_n'(\lambda) &= \left(\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right)' = -\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{k\lambda^{k-1}}{k!} = \\ &= -\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} < 0. \end{aligned}$$

פתרון 2.
נסמן $\lambda_u = \lambda_y - \lambda_x$ ונגדיר משתנה אקראי $U \sim \text{Poisson }(\lambda_u)$. ראינו בכיתה כי $Y \sim X + U$, כלומר

$$\begin{aligned} P(Y \le n) &= P(X+U \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(U=k)P(X \le n-k) < \\ &< \sum_{k=0}^{n} P(U=k)P(X \le n) = P(X \le n)\sum_{k=0}^{n} P(U=k) < \\ &< P(X \le n). \end{aligned}$$

תרגיל 4.
יהיו $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ו- $Y \sim \text{Geom}(p)$ שני מ"א בלתי תלויים. מצאו את ההסתברות $P(Y - X = n),\ n > 0$. תזכורת: נאמר כי מ"א Z מפולג גאומטרי עם פרמטר $p \in (0,1)$ אם $P(Z = k) = pq^{k-1}$, כאשר $k = 1, 2, \ldots$ ו- $q = 1 - p$.

פתרון.
עבור $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k,\ Y = n+k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)P(Y=n+k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot q^{n+k-1}p = q^{n-1}pe^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^k}{k!} = q^{n-1}pe^{-\lambda p} \end{aligned}$$

עבור $n = 0$ נקבל

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot q^{k-1}p = \\ &= \frac{p}{q}\cdot\{e^{-\lambda p} - e^{-\lambda}\}. \end{aligned}$$

<u>תרגיל 5</u>.
לניסוי מסויים יש r תוצאות אפשריות: $1, 2, \ldots, r$ אשר מופיעות בההסתברויות $p_1, p_2, \ldots, p_r$ בהתאמה. חוזרים על הניסוי n פעמים. יהיו X מספר הניסויים בהם התקבלה תוצאה 1 ו- Y מספר הניסויים בהם התקבלה תוצאה 2. חישבו את $\rho(X, Y)$.

<u>פתרון:</u>.
נגדיר: $I_k = 1$ אם בניסוי i-י התקבלה תוצאה 1 ו- $I_k = 0$ אחרת. כמו כן נגדיר: $J_k = 1$ אם בניסוי i-י התקבלה תוצאה 2, ו- $I_k = 0$ אחרת. ברור כי

- $X = I_1 + \ldots I_n$ ו- $Y = J_1 + \ldots J_n$.
- $X \sim BIN(n, p_1)$ ו- $Y \sim BIN(n, p_2)$

אם $k \neq m$ אזי

$$E(I_k J_m) = P(I_k J_m = 1) = P(I_k \cap J_m = 1) = P(I_k) \cdot P(J_m = 1) = p_1 p_2.$$

כמו כן,

$$E(I_k J_k) = P(I_k J_k = 1) = P(I_k \cap J_k = 1) = 0.$$

לכן

$$E(XY) = E\Big((I_1 + \ldots I_n)(J_1 + \ldots J_n)Bigr) = n(n-1)p_1 p_2.$$

מכאן:

$$COV(X, Y) = EXY - EX \cdot EY = n(n-1)p_1 p_2 - n^2 p_1 p_2 = -n p_1 p_2.$$

סופית:

$$\begin{aligned} \rho(X, Y) &= \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{VARX \cdot VARY}} = \frac{-n p_1 p_2}{\sqrt{n p_1 (1 - p_1) \cdot n p_2 (1 - p_2)}} = \\ &= -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1 - p_1)(1 - p_2)}}. \end{aligned}$$

<u>תרגיל 6</u>.
לנשף אצל קיסר רומאי הוזמנו n זוגות. לפני ריקוד הפתיחה קיסר הרכיב באופן

אקראי לגמרי n זוגות הרוקדים. יהא S_n מספר הגברים שבכל זאת ירקדו עם בת זוגם. חישבו את $E(S_n)$ ו- $VAR(S_n)$. תניחו כי קיסר דאג לכך שבנים רוקדים רק עם בנות.

<u>פתרון.</u>
נגדיר: $I_k = 1$ אם גבר i-י רוקד עם בת זוגתו $I_k = 0$ אחרת. אזי $S_n = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$. שימו לב כי המשתנים I_k תלוים. עבורם מתקיים:

$$\begin{aligned} P(I_k = 1) &= \frac{1}{n}, \\ P(I_k I_m = 1) &= \frac{1}{n(n-1)}, \quad k \neq m. \end{aligned}$$

לכן:

$$E(S_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = \frac{n}{n} = 1,$$

$$\begin{aligned} VAR(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + \sum_{i \neq j} COV(X_i, X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(E(X_i^2) - (EX_i)^2 \Big) + \sum_{i \neq j} \Big(E(X_i X_j) - E(X_i) E(X_j) \Big) = \\ &= n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) + n(n-1) \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$