אינפי 2 - תרגיל בית 4

הגשה: 26/11/2017

1. עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

ראיתם בתרגול ש- $I_n < \infty$. הוכיחו כי

$$I_{n+1} = n!$$

2. מצאו עבור כל ערכי $q, p \in \mathbb{R}$, עבורם האינטגרלים הבאים מתכנסים.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p + x^q} dx$$

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{x^q - 1} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{\ln x} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 - \cos x)^p}$$

3. תהי $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית יורדת ואי-שלילית. נתון ש- $\int_0^1 f$ מתכנס. הוכיחו:

$$\lim_{x \to 0^+} x f(x) = 0$$

4. הוכח כי האינטגרלים $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x} dx$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$ מתכנסים ולאותו ערך. הוכח כי אחד מהם מתכנס בהחלט והשני בתנאי.

5. רשות. הוכיחו כי אם f רציפה במידה שווה ב- $[a, \infty)$ ו- $\int_a^\infty f$ קיים אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.