חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא מבחנים להתכנסות טורים

1. תנאי הכרחי להתכנסות $\sum a_n$ הוא $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. <u>מבחן האינטגרל:</u> תהי $f(x)$ פונקציה חיובית מונוטונית יורדת על $[a,\infty)$, כך ש- $f(n)=a_n$. אזי:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

3. <u>מבחן ההשוואה:</u> $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות חיוביות, $a_n \le M\cdot b_n$ מ-n מסוים. אזי:
   (א) $\sum b_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.
   (ב) $\sum a_n$ מתבדר $\Longleftarrow$ $\sum b_n$ מתבדר.

4. <u>הכללה של מבחן ההשוואה:</u> $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות חיוביות, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$, $0<L<\infty$. אזי $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

5. <u>מבחן המנה:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$. אזי:
   (א) $0\le\rho<1$ $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס (מספיק $\overline{\lim}<1$)
   (ב) $\rho>1$ $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתבדר (מספיק $\underline{\lim}>1$)
   (ג) $\rho=1$ המבחן נכשל.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\rho>1$.

7. <u>מבחן קושי:</u> $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך ש- $|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_p|<\varepsilon$ לכל $p\ge n\ge N(\varepsilon)$.

8. טור אי-שלילי מתכנס $\Longleftrightarrow$ סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

9. <u>מבחן השורש:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\sigma$. אזי:
   (א) $0\le\sigma<1$ $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס
   (ב) $\sigma>1$ $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתבדר
   (ג) $\sigma=1$ המבחן נכשל.

*10. <u>מבחן הדלילות:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת. אזי $\sum a_n$ ו- $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

*11. <u>מבחן ראבה:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$. אזי:

(א) $L > 1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתכנס

(ב) $L < 1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתבדר

(ג) $L = 1$ המבחן נכשל.

*12. <u>שיפור לראבה:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\lim_{n\to\infty} \ln n\left(1-n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) = L$. אזי: ראה 11 לעיל.

13. $\{a_n\}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת, $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $na_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

14. <u>משפט לייבניץ:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת: $(1)\quad a_{n+1}\le a_n \quad \forall n$
$(2)\quad na_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

אזי: $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס, וכן מתקיים (S - הסכום):

(א) $|S| \le |a_1|$

(ב) $|S-S_n| \le |a_{n+1}|$

15. <u>חוק הצירוף:</u>

(א) אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור הנוצר ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנס אף הוא, ולאותו סכום.

(ב) פתיחת סוגריים בטור מתכנס יכולה לגרום לו להתבדר.

(ג) אם בכל סוגריים האברים בעלי אותו סימן, אז (ב) לא נכון.

16. <u>חוק החילוף:</u>

(א) אם $\sum a_n$ מתכנס <u>בהחלט</u>, אזי כל טור הנוצר ממנו ע"י שינוי סדר האברים מתכנס אף הוא בהחלט, ולאותו סכום.

(ב) אם $\sum a_n$ מתכנס <u>בתנאי</u>, אז ניתן ע"י שינוי סדר האברים לגרום לו להתכנס לכל סכום, או להתבדר.

17. <u>מבחן אבל:</u> אם $\sum a_n$ מתכנס, $\{b_n\}$ מונוטונית וחסומה, אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

18. <u>מבחן דיריכלה:</u> אם סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ חסומה, ו- $\{b_n\}$ שואפת מונוטונית ל-0, אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.