אלגברה ב – מרכוב מרחבים ואופרטורים

נושאים:

1. בנייה כללית
2. דוגמא מעשית
3. תרגיל

בנייה כללית

- מוטיבציה – שימוש בתורה שפיתחנו עבור ממ"פ מרוכבים על ממ"פ ממשיים.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל R. $\bar{V}=\{(v,w)|v,w\in V\}$ עם הפעולות הבאות:

1. $(v_1,w_1)+(v_2,w_2)=(v_1+v_2,w_1+w_2)$
2. $(a+ib)(v,w)=(av-bw,bv+aw)$

הינו מרחב וקטורי מעל C. כמו כן מתקיים: $(v,w)=(v,0)+i(w,0)\quad \forall v,w\in V$ $\bar{V}$ נקרא "מרכוב של V".

הערה: בגלל התכונה הנוספת, אפשר להסתכל על $\bar{V}$ בתור $V+iV$. בהצגה כזו, ל – $z\in\bar{V}$, $z=u+iv$, u ייקרא החלק הממשי של z, הוקטור v ייקרא החלק המרוכב והצמוד של z יוגדר להיות u – iv. וקטור ייקרא ממשי אם החלק המרוכב שלו הוא וקטור האפס.

טענה: יהי V ממ"פ מעל R, אזי $\bar{V}$ הינו ממ"פ מעל C, עם המכפלה הפנימית:
$\langle u+iv,s+it\rangle_{\bar{V}}=(\langle u,s\rangle_V+\langle v,t\rangle_V)+i(\langle v,s\rangle_V-\langle u,t\rangle_V)$.

למה: יהי V מ"ו מעל R, יהי T אופרטור, אז קיים אופרטור יחיד $\bar{T}:\bar{V}\to\bar{V}$ המקיים $\bar{T}(v)=T(v)$ לכל $v\in\bar{V}$ ממשי.
הוכחה: מגדירים $\bar{T}(u+iv)=T(u)+iT(v)$

טענה: יהי V ממ"פ מעל R, יהיו T,S אופרטורים, אז:

1. $\overline{T+S}=\bar{T}+\bar{S}$
2. $\overline{TS}=\bar{T}\bar{S}$
3. $\overline{T^*}=(\bar{T})^*$
4. T נורמלית/סימטרית/אורתוגונלית, אם ורק אם $\bar{T}$ נורמלית/הרמיטית/אוניטרית

הוכחה: 1 -חשבון ישיר. 2,3 – הוכח בכיתה.
4 – נורמלית – הוכח בכיתה. נניח T סימטרית, אז $T^*=T$ לכן: $\overline{(T^*)}(u+iv)=T^*(u)+iT^*(v)=T(u)+iT(v)=\bar{T}(u+iv)$ *ואז מסעיף 3 נקבל סימטריות. נניח T אורתוגונלית, אז $T^*=T^{-1}$. ברור שעבור אופרטור הזהות I מתקיים $\bar{I}$ אופרטור הזהות על $\bar{V}$, לכן $\bar{I}=\overline{TT^*}=\bar{T}\,\overline{T^*}=\bar{T}(\bar{T})^*$ לכן $\bar{T}$ אוניטרית. אם $\bar{T}$ הרמיטית/אוניטרית, זה נכון בפרט לוקטורים הממשיים, לכן T סימטרית/אורתוגונלית.*

משפט (הוכח בכיתה): יהי T אופרטור נורמלי על ממ"פ V ממימד n מעל R, אז יש ל – V בסיס א"נ $E=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ כך שהייצוג של T ביחס ל – E הוא מטריצת בלוקים, כאשר הבלוקים המתאימים ל – $v_1,\dots,v_k$ בגודל 1 (ז"א אלו וקטורים עצמיים) והבלוקים המתאימים ל – $v_{k+1},\dots,v_n$ מהצורה $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$ כך ש – $b_i\neq 0$.

דוגמא מעשית

מהו המרכוב של R^3 עם מ"פ סטנדרטית?
ראינו בכיתה, שעבור המרחב הממשי V, המרכוב של V הוא המרחב $\bar{V}=\{u+iv|u,v\in V\}$, עם מכפלה פנימית: $\langle u_1+iv_1,u_2+iv_2\rangle_{\bar{V}}=[\langle u_1,u_2\rangle_V+\langle v_1,v_2\rangle_V]+i[\langle v_1,u_2\rangle_V-\langle u_1,v_2\rangle_V]$.
במקרה שלנו, $w\in\bar{V}\Leftrightarrow w=(a_1,a_2,a_3)+i(b_1,b_2,b_3)=(a_1+ib_1,a_2+ib_2,a_3+ib_3)$ ז"א $\bar{V}=C^3$. מה המכפלה הפנימית? חישוב ישיר מראה שזו המ"פ הסטנדרטית ב - C^3.

<u>תרגיל</u>

יהי $V=R^3$, עם מכפלה פנימית סטנדרטית ויהי T האופרטור הבא:

$T((a,b,c))=(2\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{\sqrt{2}}c,\frac{1}{2}a+2\frac{1}{2}b-\frac{1}{\sqrt{2}}c,\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b+3c),\ (a,b,c)\in R^3$. מהו T^5 ?

פתרון: נסתכל על המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס הסטנדרטי:

$A=\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \end{pmatrix}$. הדרך הישירה – להעלות את המטריצה בחזקת 5 – אפשר אך לא מומלץ. אז מה כן עושים? נשים לב ש – A מטריצה נורמלית, ז"א מייצגת העתקה נורמלית. מצד שני, המטריצה לא סימטרית, לכן אינה ניתנת ללכסון מעל R, לכן נעבור למרחב המרוכב ולאופרטור המרוכב.

ראינו שהמרכוב של R^3 הוא C^3 , ומהו $\bar{T}$? הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס א"נ גם של C^3 לכן $\bar{T}$ נתון בדיוק באותו אופן, רק הפעם ל – $(a,b,c)\in C^3$.

מעל המרוכבים, A כמובן ניתנת ללכסון (כי היא נורמלית), ז"א יש ל - $\bar{V}$ בסיס א"נ של ו"ע של A. מה הערכים העצמיים של A? הפולינום האופייני הוא:

$det(\lambda I-A)=(\lambda-2\frac{1}{2})^2(\lambda-3)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\lambda-2\frac{1}{2})-\frac{1}{4}(\lambda-3)+\frac{1}{2}(\lambda-2\frac{1}{2})$. נפתח סוגריים, נסדר ונקבל: $det(\lambda I-A)=\lambda^3-8\lambda^2+22\lambda-20=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+10)$ לכן הע"ע הם $2,3+i,3-i$. אנחנו מחפשים בסיס א"נ של ו"ע של T, לכן נחפש ו"ע עם נורמה 1.

החישוב ייתן

$$\lambda=3+i: z_1=(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2i}{\sqrt{6}})$$

$$\lambda=3-i: z_2=\bar{z}_1$$

$$\lambda=2: z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

.

לכן לפי ההוכחה של המשפט הבסיס הא"נ שלנו הוא

$$u_1=\frac{1}{2}(z_1+\bar{z}_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$u_2=\frac{1}{2i}(z_1-\bar{z}_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$u_3=z_3$$

והמטריצה המייצגת את T בבסיס זה היא $U=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, עבורה הרבה יותר פשוט להעלות חזקות...