פתרון
לוגיקה מתמטית – תרגיל 10

1. א. נניח ש-A טאוטולוגיה בתחשיב הפסוקים שמורכבת מהפסוקים האטומיים $P_1, \ldots, P_m$. נניח ש- $\psi_1, \ldots, \psi_m$ הנוסחאות שמציבים במקום הפסוקים האטומיים. לפי משפט השלמות הרגיל לתחשיב הפסוקים, קיימת הוכחה $A_1, \ldots, A_n = A$ של A. נסמן $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ הנוסחאות שמתקבלות על ידי ההצבה הנ"ל. מכיוון שבמערכת ההוכחה של תחשיב סימני היחס קיימות אותם סכמות האקסיומות וכלל היסק, אזי ברור ש- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ מהווה הוכחה של φ במערכת ההוכחה של תחשיב סימני היחס. על כן $\vdash \varphi$.

2. נניח ש- $\Sigma \vdash \forall x\varphi$. תהי $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ההוכחה של $\forall x\varphi$ מתוך Σ. נוסיף $\varphi_{n+1} = \forall x\varphi \to \varphi$ (A4) ו- $\varphi_{n+2} = \varphi$ (כלל היסק מ-φ_n ו-φ_{n+1}) ונקבל ההוכחה של $\varphi_{n+2} = \varphi$ מתוך Σ. על כן $\Sigma \vdash \varphi$.

נניח ש- $\Sigma \vdash \varphi$. תהי $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ההוכחה של φ מתוך Σ. נוסיף $\varphi_{n+1} = \forall x\varphi$ (כלל ההכללה מ-φ_n) ונקבל ההוכחה של $\varphi_{n+1} = \forall x\varphi$ מתוך Σ. על כן $\Sigma \vdash \forall x\varphi$.

3. א.

(1)	$\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y)) \to (\forall x\varphi \to \forall y\varphi(y))$	(A5)
(2)	$\forall x\varphi \to \varphi(y)$	(A4)
(3)	$\forall y(\forall x\varphi \to \varphi(y))$	(הכללה של 2)
(4)	$\forall x\varphi \to \forall y\varphi(y)$	

4. $\forall x\forall y(f(x)=f(y) \to x=y) \to \forall y\exists x(y=f(x))$