לוגיקה מתמטית – תרגיל 5

1. הוכח או הפרך : (Σ קבוצת פסוקים, A פסוק).
   א. אם ל- Σ יש מודל אז גם ל- $\{\neg B \mid B \in \Sigma\}$ יש מודל.
   ב. אם ל- Σ יש מודל אז $\Sigma \cup \{A\}$ חסרת סתירה או $\Sigma \cup \{\neg A\}$ חסרת סתירה.
   ג. A יכיח מתוך Σ אם ורק אם $\Sigma \cup \{\neg A\}$ בעלת סתירה.
   ד. אם קיים מודל של Σ שבו A שקרי אזי $\neg A$ יכיח מתוך Σ.

2. תהי B קבוצת בנים ותהי G קבוצת בנות. לכל $b \in B$ תהי $K_b \subseteq G$ קבוצת הבנות ש- b מכיר. עבור $B' \subseteq B$ שידוך של B' הוא פונקציה חח״ע $f : B' \to G$ כך שלכל $b \in B'$ $f(b) \in K_b$.

   א. הוכח שאם K_b סופית לכל $b \in B$, ולכל $B' \subseteq B$ סופית יש שידוך, אז גם ל- B יש שידוך.

   ב. משפט החתונה (Hall) אומר שאם B, G סופיות ולכל $B' \subseteq B$ מתקיים $|\bigcup_{b \in B'} K_b| \geq |B'|$ (*) אז ל- B יש שידוך.

   הסתמך על משפט זה ועל חלק א׳ כדי להוכיח את הגירסה האינסופית של משפט החתונה: אם K_b סופית לכל $b \in B$, ולכל $B' \subseteq B$ סופית מתקיים (*) אז ל- B יש שידוך.

   ג. תן דוגמא המראה שהמשפט שהוכחת בחלק ב׳ אינו נשאר נכון אם מוותרים על הנחת הסופיות של ה- K_b -ים.

3. נקרא לקבוצה Q של קוביות במרחב טובה, אם אפשר לצבוע קדקד אחד של כל קוביה ב- Q באופן שלא תהיינה ארבע נקודות צבועות על מישור אחד.
   הוכח: אם Q קבוצה של קוביות במרחב, וכל $Q' \subseteq Q$ סופית היא טובה, אז Q טובה.