מועד הגשה: 04.04.04
נמקו את תשובותיכם!!

(1)
תחשבו את $P(\limsup A_n)$ ו-$P(\liminf A_n)$ **עבור סדרות הבאות של קבוצות** $\{A_n\}_1^\infty$:
א. $A_{2n} = \{\omega_1\}, \quad A_{2n+1} = \{\omega_2\}, \quad n \geq 1, \quad P(\omega_1) = 1/3, \quad P(\omega_2) = 3/4$
ב. בחירה אקראית מ-$\Omega = [0,1]$, $n \geq 1$, $A_n = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2})$

(2)
יהי X משתנה אקראי ו-F_X פונקצית ההתפלגות שלו. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^\infty (1 - F_X(x))dx$$

בשני המקרים הבאים:
א. X- משתנה אקראי ברנולי ;
ב. X- משתנה אקראי המפולג אחיד על מספרים $0, 1, \ldots, L$, כלומר

$$P(X = k) = \frac{1}{L+1}, \; k = 0, 1, \ldots L.$$

(עצה: לשרטט גרפים של ההתפלגויות שבנידון)

(3)
תהי $\{A_n\}$ סידרה מתכנסת ו-B קבוצה נתונה. האם הסידרה $\{A_n B\}_1^\infty$ מתכנסת?

(4)
כעבור יחידת זמן, שתי מולקולות בודדות מתמזגות למולקולה אחת בהסתברות $p > 0$ ונשארות נפרדות בהסתברות $1 - p > 0$. מאידך, כעבור יחידת זמן, המולקולה הגדולה מתפרקת חזרה לשתי מולקולות בודדות בהסתברות p ולא מתפרקת בהסתברות $1 - p$.
א.מהי ההסתברות p_n שכעבור n יחידות זמן תיהי מולקולה גדולה אחת אם בהתחלה (כלומר $n = 0$) היו שתי מולקולות בודדות?
ב. חשבו $\lim_{n\to\infty} p_n$;
ג. חשבו אותו גבול כאשר בהתחלה היתה מולקולה אחת גדולה.
(עצה:נוסחת נסיגה)

(5)
חלקיק מתחיל את תנועתו מנקודה 0 על הציר וקופץ יחידת אורך ימינה או שמאלה, בהסתברויות p ו- q בהתאמה, ובאותו האופן הלאה לאורך הציר הנ"ל. מניחים שהקפיצות הן בלתי תלויות.

א. מהי ההסתברות שכעבור $2n$ קפיצות החלקיק יחזור ל-0 מצד ימין של הנקודה 0 ?

ב. נניח כעת ש-$p = q = 1/2$ ושהחלקיק מתחיל את תנועתו מנקודה הנבחרת באקראי בין הנקודות $0, 1, \ldots L - 1$. מהי ההסתברות שכעבור $2n$ קפיצות החלקיק יחזור ל-0?

בהצלחה!!