<u>**תרגיל בית 7**</u>

<u>**שאלה 1:**</u> (65 נק')

יהי $(\mathbb{R},T)$ מרחב טופולוגי, כאשר $\mathbb{R}$ היא קבוצת הממשיים ו- T היא הטופולוגיה האוקלידית.

נסמן ב- $\mathbb{R}^\infty$ את קבוצת כל הסדרות הממשיות (שימו לב: זוהי אינה אלא המכפלה קרטזית של $\mathbb{R}$ עם עצמו "$\aleph_0$ פעמים").

יהיו T_{box} ו- T_{prod} טופולוגיות התיבות והמכפלה על $\mathbb{R}^\infty$. לכל i טבעי תהי π_i ההטלה ה- i-ית, כלומר לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$ מתקיים $\pi_i\left(\{x_n\}_{n=1}^\infty\right) = x_i$.

א. נגדיר העתקה אלכסונית $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^\infty$ ע"י $D(x)=(x,x,\cdots x,\cdots)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי לכל i טבעי הפונקציה $\pi_i\circ D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא רציפה ביחס לטופולוגיה T על $\mathbb{R}$, אך D אינה רציפה ביחס טופולוגיות T על $\mathbb{R}$ ו- T_{box} על $\mathbb{R}^\infty$. (10 נק')

ב. תהי $U=\prod_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ תת קבוצה של $\mathbb{R}^\infty$. הוכיחו כי $U\in T_{box}$, אך $U\notin T_{prod}$ (אתם יכולים להשתמש בטענת הסעיף ג' בשאלה 4 בתרגיל בית 6). (10 נק')

ג. מצאו סדרה $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ של איברים ב- $\mathbb{R}^\infty$ ואיבר a ב- $\mathbb{R}^\infty$ (שימו לב כי a הוא סדרה של איברים ב- $\mathbb{R}$), כך שלכל i טבעי הסדרה $\{\pi_i(y_n)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל- $\pi_i(a)$ במרחב טופולוגי $(\mathbb{R},T)$, אך הסדרה $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ אינה מתכנסת ל- a במרחב טופולוגי $(\mathbb{R}^\infty,T_{box})$. (10 נק')

ד. הוכיחו כי המרחב הטופולוגי $(\mathbb{R}^\infty,T_{prod})$ מקיים את האקסיומה השנייה של מניה. (10 נק')

ה. נבחין בכך שהקבוצה l_∞ (קבוצת הסדרות הממשיות החסומות) היא תת קבוצה של $\mathbb{R}^\infty$. הוכיחו כי הטופולוגיית התת מרחב המושרית ע"י T_{prod} על l_∞ מתלכדת עם הטופולוגיה המושרית ע"י המטריקה הסטנדרטית d_∞ על l_∞. (25 נק')

<u>**שאלה 2:**</u> (35 נק')

תהי T הטופולוגיה האוקלידית על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ ויהי T_{cc} האוסף הבא של תתי קבוצות של $\mathbb{R}$:

$T_{cc}=\left\{U\subseteq\mathbb{R} \,\middle|\, |\mathbb{R}\setminus U|\le\aleph_0\right\}\cup\{\varnothing\}$, כלומר זהו אוסף של תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ עם המשלים שהוא בן מניה (סופי או אינסופי) בתוספת הקבוצה הריקה.

א. הוכיחו היא כי T_{cc} היא טופולוגיה על $\mathbb{R}$. (5 נק')

ב. הוכיחו כי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty\in\mathbb{R}$ מתכנסת ל- $a\in\mathbb{R}$ במרחב טופולוגי $(\mathbb{R},T_{cc})$, אם ורק אם קיים N טבעי כך שלכל $n>N$ טבעי מתקיים $x_n=a$. (5 נק')

ג. הראו כי הנקודה $x=0$ נמצאת בסגור של הקטע $(0,1]$ ביחס למרחב טופולוגי $(\mathbb{R},T_{cc})$, אך לא קיימת סדרה שאיבריה ב- $(0,1]$ שמתכנסת ל- x ב- $(\mathbb{R},T_{cc})$. (10 נק')

ד. הוכיחו כי פונקציית הזהות $Id:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינה רציפה כפונקציה ממרחב טופולוגי $(\mathbb{R},T_{cc})$ למרחב טופולוגי $(\mathbb{R},T)$, אך עדיין מקיימת את התכונה: לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}$ המתכנסת ל- $a\in\mathbb{R}$ ב- $(\mathbb{R},T_{cc})$ מתקיים כי הסדרה $\{Id(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $Id(a)$ ב- $(\mathbb{R},T)$. (5 נק')

ה. הוכיחו כי המרחב הטופולוגי $(\mathbb{R},T_{cc})$ הוא מרחב טופולוגי T_1, אך אינו מרחב טופולוגי T_2 (כלומר אינו האוסדורף). (10 נק')

בהצלחה !