טורי חזקות

טור חזקות הוא ביטוי מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

אנו מעוניינים למצוא עבור אילו x הטור מתכנס.
הטור מתכנס ל־ a_0 עבור $x = a$.

משפט: יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ טור חזקות.

1. אם הטור מתכנס עבור $x_0 \neq a$ כלשהו, אז הטור מתכנס לכל x המקיים $|x-a| < |x_0 - a|$.
2. אם הטור אינו מתכנס עבור $x_0 \neq a$ כלשהו, אז הטור אינו מתכנס לכל x המקיים $|x-a| > |x_0-a|$.
3. קיים $0 \leq R \leq \infty$ יחיד עם התכונה הבאה: אם $|x-a| < R$ אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס, ואם $|x-a| > R$ אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתבדר.

הגדרה: תחום ההתכנסות של טור חזקות הוא קבוצת כל ה־x עבורם טור החזקות מתכנס.
רדיוס ההתכנסות של טור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ הוא מספר אי שלילי (אולי אינסוף) R עם התכונות הבאות:

1. אם $|x-a| < R$ אז הטור מתכנס.
2. אם $|x-a| > R$ אז הטור אינו מתכנס.

נוסחת Cauchy־Hadamard לרדיוס ההתכנסות היא $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. בנוסף, אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ קיים אז נוסחת d'Alembert עבור רדיוס ההתכנסות היא $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.
שימו לב כי $0 \leq R \leq \infty$.
$R = 0$ אומר כי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס רק עבור $x = a$ ועבורו $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 + a_1 \cdot 0 + \dots = a_0$.
$R = \infty$ אומר כי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס לכל x.
אם $0 < R < \infty$ אז $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס לפחות כאשר $|x-a| < R$, ומתבדר עבור $|x-a| > R$.
כאשר $|x-a| = R$, כלומר $x = a+R$ או $x = a-R$, בודקים ישירות את התכנסות הטורים

$$x = a+R: \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(a+R-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$
$$x = a-R: \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-R-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$$

אי אפשר לדעת, רק מידיעת רדיוס ההתכנסות, מה קורה בנקודות הקצה $x = a \pm R$.

לסיכום, בשביל למצוא את תחום ההתכנסות של טור חזקות, יש למצוא את רדיוס ההתכנסות R, ואז, אם רדיוס ההתכנסות אינו אפס או אינסוף, יש לברר את התכנסות הטור בנקודות $x = a \pm R$.

משפט: אם קיים $R > 0$ כך ש־ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ כאשר $|x-a| < R$, אז $a_n = b_n$ לכל n.

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ טור חזקות עם תחום התכנסות I. יהי $J \subseteq I$ קטע חסום וסגור. אז הטור מתכנס במ"ש על J.

משפט: לטור חזקות ולטור הנגזרות שלו אותו רדיוס התכנסות.
תחום ההתכנסות של טור חזקות מכיל את תחום ההתכנסות של טור הנגזרות.

תרגיל: מצאו תחום התכנסות של

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

פתרון: נוח יותר להשתמש בנוסחה

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

ולכן הטור מתכנס לכל x.

תרגיל: מצאו תחום התכנסות של

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

פתרון: נשתמש שוב בנוסחה

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

ולכן $R = 0$ ולכן הטור מתכנס רק כאשר $x = 0$.

תרגיל: מצאו תחום התכנסות של

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) x^n$$

פתרון:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{n+2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)} \cdot \frac{n+2}{n+1} = 1$$

כיוון ש־ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ אזי לפי היינה, עבור $x_n = \frac{1}{n+1}$ נקבל שכיוון ש־ $x_n \longrightarrow 0$ אזי

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

ובאופן דומה $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n+2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n+2}\right)} = 1$. בנוסף $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$ ולכן $R = 1$.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

נבדוק התכנסות הטור עבור $x = 1$: במקרה זה הטור הוא $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n+1}$.

ראינו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = 1$ ולכן, לפי משפט ההשוואה הגבולי, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n+1}$ והטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ הוא הטור ההרמוני שמתבדר ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n+1}$ מתבדר.

נבדוק התכנסות הטור עבור $x = -1$: במקרה זה הטור הוא $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$.

כיוון ש־ $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$ וכיוון ש־ $\sin\frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית יורדת (כיוון ש־ $\sin x$ מונוטונית עולה בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) אז לפי לייבניץ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n+1}$ מתכנס.

לכן תחום ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) x^n$ הוא $[-1, 1)$, כלומר $-1 \le x < 1$.

תרגיל: חשבו את תחום ההתכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)x^n$$

פתרון: נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ ונקבל

$$1-\cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$$

ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{2\sin^2\frac{1}{2(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(\frac{1}{2(n+2)}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^2}{\left(\sin\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)^2}=1$$

נבדוק התכנסות בקצוות:

עבור $x=1$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{2n}$$

נשווה את $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{2n}$ אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\left(\sin\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ולכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנסים או מתבדרים ביחד. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{1}{2n}$ מתכנס.

עבור $x=-1$ נקבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n2\sin^2\frac{1}{2n}$ וכיוון ש־ $2\sin^2\frac{1}{2n}$ מונוטונית יורדת לאפס אז לפי לייבניץ מתכנס. נימוק נוסף: זהו טור המתכנס בהחלט כי $2\sin^2\frac{1}{2n} = \left|(-1)^n2\sin^2\frac{1}{2n}\right|$.

תחום ההתכנסות הוא $[-1,1]$.

תרגיל: מצאו תחום התכנסות של

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}x^n$$

פתרון:

$$a_n=\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\geq 0$$

$$\left(\frac{4^n-3^n}{3^n+2^n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq a_n^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\frac{4^n+3^n}{3^n-2^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

נחשב את הגבולות של "פרוסות הלחם" כך שאם הגבולות שווים נוכל להשתמש במשפט הסנדביץ':

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+3^n}{3^n-2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n(1+\frac{3^n}{4^n})}{3^n(1-\frac{2^n}{3^n})}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1^0}{1^0}=\frac{4}{3}$$

באופן דומה $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4^n-3^n}{3^n+2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}$ ולכן לפי סנדביץ'

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}$$

הערה: היה אפשר להשתמש גם ב־ $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

לכן $R=\frac{3}{4}$.

נבדוק את הקצוות:

עבור $x=\pm\frac{3}{4}$ נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\cdot\frac{3^n}{4^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\cdot(-1)^n\frac{3^n}{4^n}$$

אבל בשני המקרים האיבר הכללי של הטור אינו מתכנס לאפס ולכן הטורים אינם מתכנסים ולכן תחום ההתכנסות הוא $(-\frac{3}{4},\frac{3}{4})$.

תרגיל בית: הראו באמת כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\cdot\frac{3^n}{4^n}=1$$

והסיקו כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\cdot\frac{3^n}{4^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-1)^n3^n}{3^n+(-1)^n2^n}\cdot(-1)\frac{3^n}{4^n}$$

אינם מתכנסים.

תרגיל: מצאו תחום התכנסות של הטור חזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}x^{2n+1}$$

פתרון: נפשט קצת את הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}x\cdot x^{2n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}(x^2)^n.$$

נסתכל על הטור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}t^n$ ונמצא עבורו תחום התכנסות:

נמצא קודם רדיוס התכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n+1}{n^2+1}}{\frac{4^{n+1}+1}{(n+1)^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+1}{4\cdot4^n+1}\cdot\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}=\frac{1}{4}$$

ולכן הטור מתכנס לפחות בקטע $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

נבדוק התכנסות בקצוות: עבור $x=\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}\frac{1}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+4^{-n}}{n^2+1}$$

כיוון ש־ $\frac{2}{n^2}\geq\frac{1+4^{-n}}{n^2+1}\geq 0$ וכיוון ש־ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ מתכנס, אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+4^{-n}}{n^2+1}$ מתכנס.

עבור $x=-\frac{1}{4}$ נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}(-1)^n\frac{1}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+4^{-n}}{n^2+1}(-1)^n$$

וטור זה מתכנס בהחלט כי $\frac{1+4^{-n}}{n^2+1}=\left|\frac{1+4^{-n}}{n^2+1}(-1)^n\right|$ שמתכנס, ולכן מתכנס.

תחום ההתכנסות של $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+1}{n^2+1}t^n$ הוא $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$.

לכן הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+1}{n^2+1}(x^2)^n$ מתכנס כאשר $-\frac{1}{4} \le x^2 \le \frac{1}{4}$ כלומר $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.
כלומר תחום ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+1}{n^2+1}x^{2n+1}$ הוא $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

<u>הערה:</u> אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס בתחום $(-R, R)$, אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n$ מתכנס בתחום $(-R, R)$.
אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס בתחום $[-R, R)$, אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n$ מתכנס בתחום $(-R, R)$.
אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס בתחום $(-R, R]$, אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n$ מתכנס בתחום $[-R, R]$.
אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס בתחום $[-R, R]$, אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^2)^n$ מתכנס בתחום $[-R, R]$.
באופן כללי, אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ מתכנס בקטע I, אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \big(f(x)\big)^n$ מתכנס לכל x עבור $f(x) \in I$.

<u>תרגיל:</u> הראו כי תחום התכנסות של טור

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

הוא $(-1, 1)$ אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר L סופי ושונה מאפס.
<u>פתרון:</u> מבחן המנה נותן כי

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|L|}{|L|} = 1$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1. בנוסף, הטורים

$$x = 1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad\qquad x = -1 : \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

אינם מתכנסים כי האיבר הכללי שלהם אינו מתכנס לאפס (עבור הטור השמאלי האיבר הכללי מתכנס ל-L שאינו אפס, ועבור הטור הימני אין גבול לאיבר הכללי ולכן אינו מתכנס לאפס). לכן תחום ההתכנסות של טור החזקות הוא $(-1, 1)$.

פיתוח פונקציות לטורי חזקות

<u>הגדרה:</u> נאמר כי פונקציה $f(x)$ המוגדרת בקטע I מפותחת לטור (טיילור) חזקות אם קיים טור חזקות המתכנס ל־$f(x)$ בקטע I.

פונקציה כזו חייבת להיות גזירה אינסוף פעמים, ואם $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ אז $a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ לכל $n\geq 0$.

<u>הערה:</u> לא לכל פונקציה הגזירה אינסוף פעמים יש טור חזקות. למשל עבור הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\end{cases}$$

מתקיים כי $f^{(n)}(0)=0$ לכל $n\geq 0$.

<u>משפט:</u> נניח כי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ ונניח כי רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא $R>0$.

אז $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}$ ורדיוס ההתכנסות של הטור של הנגזרת שווה לרדיוס ההתכנסות של הטור של הפונקציה (אם כי תחום ההתכנסות יכול להיות שונה).

בנוסף

$$\int_a^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

נניח כי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ונניח כי רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא $R>0$.

אז $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ ורדיוס ההתכנסות של הטור של הנגזרת שווה ל־R (אם כי תחום ההתכנסות יכול להיות שונה).

בנוסף $\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ ורדיוס ההתכנסות של טור החזקות של האינטגרל שווה ל־R.

טורי חזקות ידועים:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad R=\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\qquad R=\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad R=\infty$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\qquad R=1$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\qquad R=1$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad R=1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\qquad R=1$$

תרגיל: פתחו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$$

לטור חזקות.

פתרון: נשתמש בשברים חלקיים.

$$\begin{aligned}
f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}&=\frac{1}{(x+3)(x-1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)=\\
&=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\\
&=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^n=\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n}\right)x^n=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)x^n
\end{aligned}$$

רדיוס ההתכנסות: שימו לב כי במצב בו

$$f(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$$

אנו מפתחים את שני המחוברים לטורי חזקות. הרדיוס התכנסות של הטור של $\frac{1}{1-x}$ הוא 1 ושל $\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$ הוא כאשר $\left|\frac{x}{3}\right|<1$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 3. כיוון שאנו משלבים את הטורים אז רדיוס ההתכנסות המשותף הוא המינימום בין רדיוסי ההתכנסות ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 1.
אפשר לראות זאת גם ע"י שימוש בתרגיל קודם: הגבול של $1-\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ הוא 1. לכן רדיוס ההתכנסות הוא 1 ואפילו תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$.

תרגיל: פתחו את הפונקציה

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

לטור חזקות.

פתרון: כיוון ש־ $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ כאשר $R=\infty$, אז

$$f(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

ולכן

$$\int_0^x e^{-t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

רדיוס ההתכנסות הוא $R=\infty$.

תרגיל: פתחו את הפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

לטור חזקות.

פתרון: נשים לב כי $f(x)=\left(-\frac{1}{1+x}\right)'$. בנוסף

$$-\frac{1}{1+x}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

ולכן

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

רדיוס ההתכנסות הוא 1.

תרגיל: פתחו את הפונקציה

$$f(x)=\arctan x$$

לטור חזקות.

פתרון: אפשר לעשות זאת ישירות ע"י חישוב הנגזרות של $\arctan x$ מכל הסדרים, אבל אנו נחפש משהו יותר קצר.

נשים לב כי

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad R=1$$

ולכן

$$\int_0^x(\arctan t)'dt=\arctan x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R=1$$

תרגיל: מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}.$$

פתרון: נשים לב כי אם נגדיר

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$$

אז סכום הטור הוא $f(1)$. ננסה למצוא את $f(x)$ בצורה מפורשת:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}.$$

ננסה למצוא את

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}.$$

נשים לב כי

$$\int_0^x g(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n$$

או, באופן דומה, כי

$$g(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n\right)'.$$

נעשה את התהליך שוב ונשים לב כי $e^x-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ כי הסכום מתחיל מאחד ולא אפס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)'=x\big(e^x-1\big)'=xe^x.$$

לכן

$$g(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n \right)' = \big(xe^x\big)' = (x+1)e^x$$

ולכן נקבל כי

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1} = xg(x) = (x^2+x)e^x.$$

לבסוף,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = f(1) = 2e$$

<u>הערה:</u> איך ומתי משתמשים בנגזרות ומתי באינטגרלים?
נניח כי נתון לנו טור חזקות של פונקציה ידועה

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

אם אנו רוצים לחשב את

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

אז נשתמש בנגזרת באופן הבא:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = xh'(x).$$

אם אנו רוצים לחשב את

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$$

אז

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\big(h(x) - a_0\big)$$

ונקבל כי

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{t}\big(h(t) - a_0\big)dt.$$

נחזור על הפתרון של התרגיל בצורה יותר זריזה תוך שימוש בעקרונות שראינו בהערה זו

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n}{n!} x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n \right)' = x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \right)' =$$

$$= x \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right)' \right)' = x\Big(x\big(e^x - 1\big)'\Big)' = x\big(xe^x\big)' = x(x+1)e^x = (x^2+x)e^x$$

<u>תרגיל:</u> מצאו את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}.$$

פתרון: נרשום את הטור מחדש

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ולכן אם נגדיר $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ אז אנו מעוניינים ב־ $f\left(\frac{1}{2}\right)$. נמצא את $f(x)$ כאשר נשים לב כי רדיוס ההתכנסות הוא 1, כלומר $|x|<1$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}$$

כאשר זהות זו נכונה עבור $x\neq 0$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

ונקבל כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}-0=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}t^{n+1}\right)'dx=$$
$$=\int_0^x\frac{t}{(1-t)^2}dt=\int_0^x-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}dt=\ln|1-t|+\frac{1}{1-t}\Big|_0^x=\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}-1$$

ולכן, עבור $x\neq 0$,

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}-1\right)$$

ו־

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+4-2=\ln 4+2$$

הערה: שימו לב כי $f(0)=0$ וגם

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}-1}{x}\overset{(L)}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}}{1}=0=f(0)$$

תרגיל: הראו כי

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

פתרון: נסתכל על הטור

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

קל לראות כי רדיוס ההתכנסות שלו הוא 1 וכי תחום ההתכנסות שלו הוא $(-1,1]$. (הראו זאת) נשתמש בעובדה כי טור החזקות מתכנס במ"ש על כל תת קטע חסום וסגור של $(-1,1]$ כדי להראות ש־$f(x)$ רציפה בתחום הגדרתה: יהי $-1<a\leq 1$. נגדיר $\delta=\frac{1}{2}\min\{1,a+1\}$. אז a נקודה פנימית של הקטע $[a-\delta,1]$ וקטע זה מוכל ב־ $(-1,1]$. לכן טור החזקות מתכנס במ"ש בקטע זה מה שגורר כי טור החזקות רציף בכל נקודה פנימית של הקטע $[a-\delta,1]$ ובפרט ב־a.

קיבלנו רציפות של $f(x)$ בכל תחום הגדרתה, כלומר בכל תחום ההתכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

מצד שני, נראה כי עבור $-1<x<1$

$$\ln(1+x)=f(x).$$

אפשר להראות זאת ע"י פולינום טיילור ונוסחת השארית, אבל נעשה זאת ע"י הכלים שלמדנו פה:

$$\Big(\ln(1+x)\Big)'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

ולכן, לכל $-1<x<1$, יש לנו התכנסות במ"ש של הטור על הקטע הסגור שקצוותיו $0,x$, ולכן

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=f(x).$$

קיבלנו כי $f(x),\ln(1+x)$ פונקציות רציפות על $(-1,1]$ עבורן מתקיים שלכל $(-1,1)$ יש שוויון $f(x)=\ln(1+x)$, ולכן

$$\ln 2=\ln(1+1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

תרגיל בית: הראו כי אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע I, ו־

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

טור חזקות שתחום ההתכנסות של הוא I, ומתקיים כי לכל **נקודה פנימית** של I

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

אז

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

על כל I.

תרגיל בית: נניח כי

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

בקטע $(a-R,a+R)$.

1. הראו כי אם $\lim_{x\to(a-R)^+}f(x)$ אינו קיים, אז

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(a-R-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n R^n$$

אינו מתכנס.

2. הראו כי אם $\lim_{x\to(a+R)^-}f(x)$ אינו קיים, אז

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(a+R-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$$

אינו מתכנס.