$A\in M_n(\mathbb{C})$ ①

א. הטענה אינה נכונה: נניח $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$AA^*=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A^*A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כלומר A אינה נורמלית

אולם $A^2=A^{*2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ מטריצה נורמלית.

ב. הטענה אינה נכונה.

לכל $A\in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים כי A^*A צמודה לעצמה

שכן $(A^*A)^*=A^*A^{**}=A^*A$, אולם לא כל $A\in M_n(\mathbb{C})$ הינה נורמלית.

ג. הטענה נכונה.

A נורמלית $\leftarrow$ A דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית

לכן מותר להניח $P^*AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}=D$ (P אוניטרית)

אז $A^*A=(PDP^*)^*(PDP^*)=P|D|^2P^*$ ומאחר ו[illegible] בדמיון אינה משנה דרגה

$\bar{D}D$

$$rk(A^*A)=rk(|D|^2)=rk(D)=rk(A)$$

③ הטענה אינה נכונה.

לדוגמא $A=\begin{pmatrix}i&1\\0&2i\end{pmatrix}$ הינה בעלת ע"ע שונים i ו- $(2i)$

אולם $A^*=\begin{pmatrix}-i&0\\1&-2i\end{pmatrix}\neq -A$.

$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$ $\qquad V=\mathbb{R}_2[x]$ $\qquad$ (2)

נסמן $x_0=1$, $x_1=1$, $x_2=2$

ונניח $p(x),q(x),m(x)\in V$

(א) סימטריות: $\langle p(x),q(x)\rangle=\langle q(x),p(x)\rangle$ מיד' מקומוטטיביות השדה $\mathbb{R}$.

לינאריות $\langle \alpha p(x)+m(x), q(x)\rangle = \alpha \sum_{i=0}^{2} p(x_i)q(x_i) + \sum_{i=0}^{2} m(x_i)q(x_i)$

חיוביות סכום של ריבועים ≥ 0 $\langle p(x),p(x)\rangle = \sum_{i=1}^{2} p(x_i)^2$

נניח $\langle p(x),p(x)\rangle = 0$ אז $0=p(0)^2=p(1)^2=p(2)^2$

כלומר $p(0)=p(1)=p(2)=0 \qquad (*)$

ברם פולינום מדרגה ≤ 2 נקבע באופן יחיד ע"י ערכו ב-3 נקודות שונות שכן $p(x)$ מהצורה $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

לכן $(*)$ שקול למערכת הלינארית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

למערכת פתרון יחיד $a_0=a_1=a_2=0$ $\Leftarrow$ אם $\langle p(x),p(x)\rangle=0$ אז $p\equiv 0$.

(ב) מגדירים $W=\{p(x)\in V: p(1)=0\}$

כלומר $W=\{a_0+a_1x+a_2x^2 : \sum_{i=0}^{2} a_i = 0\}$

לכן $\dim W = 2 \Leftarrow W^{\perp}$ חד מימדי.

אם $q\perp W$ אז לכל $p\in W$ $\quad 0=\sum_{i=0}^{2} p(x_i)q(x_i) \overset{p(1)=0}{=} p(0)q(0)+p(2)q(2)$

לכן נוכל לזהות $W^{\perp}$ כ- $W^{\perp}=\{q\in V: q(0)=q(2)=0\}$

כלומר אם $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ אז $b_0=0$

ובנוסף $b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2=0$

כלומר $b_2=-\frac{1}{2}b_1$

לכן נוכל לקחת $q(x)=0+x-\frac{1}{2}x^2$

נשים לב $\langle q(x),q(x)\rangle = q(1)^2 = \frac{1}{4}$

לכן כבסיס אורתונורמלי ל- $W^{\perp}$ ניקח $\tilde{q}(x)=\frac{q(x)}{1/2}=2x-x^2$

* כבסיס ל- W יכולנו לקחת $p_2(x)=1-x \qquad p_1(x)=x-x^2$

(בדיקה מראה $p_1(1)=p_2(1)=0$) ובדיקה ישירה מראה

$i=1,2 \qquad \langle p_i, q\rangle = p_1(0)\underbrace{q(0)}_{=0}+\underbrace{p_i(1)}_{=0}q(1)+p_i(2)\underbrace{q(2)}_{=0}=0$

3 א

$$f(x,y)=n\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)(y_i-m_y) \qquad x,y\in\mathbb{R}^n$$

כאשר $m_x=\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ $\qquad m_y=\frac{y_1+\dots+y_n}{n}$

$$f(y,x)=n\sum_{i=1}^{n}(y_i-m_y)(x_i-m_x)=f(x,y) \implies$$ סימטרית

$$f(\alpha x+z,y)=n\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+z_i-m_{\alpha x+z})(y_i-m_y)=\dots$$

$$(m_{\alpha x+z}=\alpha m_x+m_z)$$

$$\dots=n\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i-m_x)(y_i-m_y)+n\sum_{i=1}^{n}(z_i-m_z)(y_i-m_z)$$

$$=\alpha f(x,y)+f(z,y)$$

לינארית ברכיב שני ובגלל סימטריות.

ב נסמן $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ הבסיס הסטנדרטי ל-$\mathbb{R}^n$.

$$f(e_k,e_l)=n\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ik}-m_{e_k})(\delta_{il}-m_{e_l})$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{ik}\delta_{il}-\tfrac{1}{n}\delta_{il}-\tfrac{1}{n}\delta_{ik}+\left(\tfrac{1}{n}\right)^2\right)$$

$$=n\left(\delta_{kl}-\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n}+\tfrac{n}{n^2}\right)=n\delta_{kl}-1$$

$$\implies [f]=\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots \\ -1 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & n-1 \end{pmatrix}$$

4 V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, $T:V\to V$ אופ' לינארי.

(א) נניח $\langle T(v),v\rangle=0 \quad \forall v\in V$

בפרט $\forall v,w\in V$

$$0=\langle T(v+w),v+w\rangle=$$

$$\cancel{\langle T(v),v\rangle}^{0}+\langle T(w),v\rangle+\langle T(v),w\rangle+\cancel{\langle T(w),w\rangle}^{0}$$

$$\implies \forall v,w\in V \quad \langle T(w),v\rangle=-\langle T(v),w\rangle \quad (*)$$

מאידך:

$$0=\langle T(v+iw),v+iw\rangle=\langle T(v),iw\rangle+\langle T(iw),v\rangle$$

$$=-i\langle T(v),w\rangle+i\langle T(w),v\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \forall v,w\in V \quad \langle T(v),w\rangle = \langle T(w),v\rangle \qquad (**)$$

מסקנה מ- (*) ו- (**):

$$\forall v,w\in V \quad \langle T(v),w\rangle = 0$$

כלומר $T(v)$ אורתוגונלי לכל $w\in V$, לכן $T(v)$ הינו וקטור האפס לכל $v\in V$ $\Leftarrow$ $T\equiv 0$ העתקת האפס.

ב) נתון $\langle T(v),T(v)\rangle = \langle T^*(v),T^*(v)\rangle$

מהגדרת האופרטור הצמוד נקבל: $\langle T^*T(v),v\rangle = \langle TT^*(v),v\rangle$

$\Leftarrow$ $\langle (T^*T-TT^*)(v),v\rangle = 0$

$\Leftarrow$ מסעיף קודם $T^*T-TT^*\equiv 0$

לפיכך $T^*T=TT^*$.

5) א) בלוק ז'ורדן מסדר r המתאים לע"ע λ הינו מהצורה

$$J_{\lambda,r} = \lambda I_r + N_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

כאשר I_r מטריצת היחידה מסדר r ואילו N_r נילפוטנטית מאינדקס r, פועלת על איברי הבסיס בצורה $N_r(e_j)=e_{j-1}$ ל- $r\geq j>1$, ואילו $N_r(e_1)=0$.

הפולינום האופייני מתקבל מ-

$$p(x)=\det(xI-J_{\lambda,r}) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{מטריצה משולשת עליונה}}}{=} \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda) = (x-\lambda)^r$$

הפולינום המינימלי $m(x)$ מחלק הפולינום האופייני

$\Leftarrow$ $m(x)=(x-\lambda)^q$ כאשר $q\leq r$

אולם $(J_{\lambda,r}-\lambda I)^q=(N_r)^q$

ומאחר ואינדקס הנילפוטנטיות של N_r הוא r,

$(N_r)^q\neq 0$ לכל $q<r$ $\underset{q=r}{\Leftarrow}$ $p(x)=m(x)=(x-\lambda)^r$.

ב) נתונה $A\in M_n(\mathbb{C})$ בעלת פולינום אופייני $(x-1)^3(x-2)^4$

המקיימת

$\dim\ker(A-I)=2$ (*)

$\dim\ker(A-2I)=3$ (**)

מדרגת הפולינום האופייני נובע $n=3+4=7$.

מ- (*) נובע כי לע"ע $\lambda_1=1$ מקסימום 2 ו"ע בת"ל.

מ- (**) נובע כי לע"ע $\lambda_2=2$ מקסימום 3 ו"ע בת"ל.

מס' בלוקי ז'ורדן הוא כמספר הו"ע לכן יש 2 בלוקים בלבד המתאימים לע"ע $\lambda_1=1$ ו- 3 בלוקים בלבד המתאימים לע"ע $\lambda_2=2$.

נסמן ב- $J_{\lambda,r_{\lambda k}}$ בלוק ז'ורדן ה-k מספר $r_{\lambda k}$ המתאים לע"ע λ.

אז $\dim J_{1,r_{11}}+\dim J_{1,r_{12}}=3$

$\dim J_{2,r_{21}}+\dim J_{2,r_{22}}+\dim J_{2,r_{23}}=4$

$\dim J_{\lambda,r_{\lambda k}}\geq 1$ ובנוסף נוכל להניח: $\dim J_{\lambda,r_{\lambda k-1}}\geq \dim J_{\lambda,r_{\lambda k}}$, לפיכך:

$\dim J_{1,r_{11}}=2 \qquad \dim J_{1,r_{12}}=1$

וכן: $\dim J_{2,r_{21}}=2,\quad \dim J_{2,r_{22}}=\dim J_{2,r_{23}}=1$

ולכן ל- A צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

6) תהא $A\in M_n(\mathbb{C})$.

⇐ כיוון ראשון

נניח $m_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים שונים $m_A(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_k)$. נוכיח כי ל- $V=\mathbb{C}^n$ יש בסיס של ו"ע של A.

נסמן $E_{a_i}=\ker(A-a_iI)$.

מספיק שנראה $V=E_{a_1}+\dots+E_{a_k}$ שכן ו"ע המתאימים לע"ע שונים הינם בת"ל.

נגדיר $f_i(x)=\frac{m_A(x)}{(x-a_i)}=\prod_{j\neq i}(x-a_j)$. מאחר וה- a_i שונים, המחלק המשותף המקסימלי של $f_1,\dots,f_k$ הוא 1 $\Leftarrow$ קיימים פולינומים $g_i(x)$ $1\leq i\leq k$

כך ש- $1=g_1(x)f_1(x)+\dots+g_k(x)f_k(x)$. נגדיר $h_i(x)=g_i(x)f_i(x)$

אז $1=h_1(x)+\_\_+h_k(x)$ כאשר $h_i(x)\equiv 0 \mod m_A(x)/(x-a_i)$

כלומר $(x-a_i)h_i(x)$ מתחלק ב- $m_A(x)$ ולכן $(A-a_iI)h_i(A)$ פועל על V

כאופרטור האפס $\Leftarrow$ לכל $v\in V$ $h_i(A)(v)\in E_{a_i}$

ומכאן ש- $I=\sum_{i=1}^{k}h_i(A)$ הרי ש- $\underset{E_{a_1}}{\underset{\cap}{h_1(A)(v)}}+\dots\dots+\underset{E_{a_k}}{\underset{\cap}{h_k(A)(v)}}=v$ $\forall v\in V$

$\Leftarrow$ $V=\sum_{i=1}^{k}E_{a_i}$.

כיוון שני $\Rightarrow$ נניח A לכסינה, כלומר $V=\sum_{i=1}^{k}E_{a_i}$ סכום של המרחבים העצמיים,

כלומר $0=(A-a_iI)E_{a_i}$.

האופרטורים $(A-a_iI)$ מתחלפים, לכן $f(A)=\prod_{i=1}^{k}(A-a_iI)$

פועל על V כהעתקת האפס. $\Leftarrow$ $m(x)\mid f(x)$.

אולם כל שורש של $f(x)$ הינו ע"ע של A, ולכן מהווה שורש

של הפולינום המינימלי של A. כל שורש של $f(x)$ הינו בעל ריבוי 1

($f(x)$ מכפלה של גורמים לינאריים שונים) לכן בהכרח $f(x)=m(x)$,

כלומר $m(x)$ מכפלה של גורמים לינאריים שונים.