

## דף תרגילים 10 באלגברה לינארית ב'

$V$  הינו מרחב וקטורי ממימד סופי  $n \geq 1$ , מעל השדה  $F$  ו- $T$  אופרטור עליו.

1. א. יהי  $T$  האופרטור הלינארי על  $\mathbb{R}^3$  עבורו המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי היא:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

יהי  $W = \ker(T - 2I)$ . הראה כי  $(T - 2I)e_1 \in W$  וכי אין אף וקטור  $v \in W$  עבורו

$$(T - 2I)v = (T - 2I)e_1.$$
 הסק כי  $W$  אינו  $T$ -קביל.

ב. נניח בשלילה כי ל- $W$  יש משלים  $T$ -שמור  $U$ , מה הפולינום המינימלי של  $T$  על  $U$  בהתחשב בפולינום המינימלי של  $T$ ? הסק כי גם בדרך זו כי ל- $W$  אין משלים  $T$ -שמור.

2. תהי  $A$  המטריצה הממשית הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

מצא מטריצה  $P$  עבורה  $P^{-1}AP$  בעלת צורה רציונלית.

3. יהי  $\Delta(x) = x^4(x-1)(x-2)$ . מצא רשימה מינימלית של מטריצות  $S$  כך שכל מטריצה עם פולינום אופייני  $\Delta(x)$  דומה למטריצה יחידה ב- $S$ .

4. יהי  $f$  פולינום אי פריק (מעל  $F$ ) ונניח  $\Delta_T(x) = m_T(x) = f(x)^r$ . הוכח כי לכל תת מרחב לא טריוויאלי של  $V$  שהינו  $T$ -שמור אין משלים  $T$ -שמור.

רמז: העזר ב1ב'

5. נניח כי  $T$  לכסין. הוכח כי לכל מרחב  $T$ -שמור יש משלים  $T$ -שמור.

רמז: ניתן להתבונן ברכיבים הפרימריים.