תורת ההסתברות

תרגיל מס' 5

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.

(א)

נסמן ע"י Y את גודל המתח במערכת. לפי ההגדרה $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. מכיוון ש- Y היא פונקציה של מ"א נתון X, כדי לחשב את $F_Y(y)$ נמצא בעזרת הגרף של פונקציה $Y(X)$ את הקבוצה A_y כך ש-

$$P(Y \leq y) = P(X \in A_y) = \int_{A_Y} f_X(x)dx.$$

הפונקציה $Y(X)$ נתונה על ידי הביטוי הבא:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{if } \; X < 1, \\ X & \text{if } \; 1 \leq X < 5, \\ 5 & \text{if } \; X \geq 5. \end{cases}$$

לכן:

$$A_y = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \; y < 1, \\ (-\infty, y] & \text{if } \; 1 \leq y < 5, \\ \mathbb{R} & \text{if } \; y \geq 5. \end{cases}$$

לפיכך:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \; y < 1, \\ P(X \leq y) & \text{if } \; 1 \leq y < 5, \\ 1 & \text{if } \; y \geq 5. \end{cases}$$

מכיוון ש- $X \sim N(6,1)$, $X - 6 \sim N(0,1)$, ולכן $P(X \leq y) = \Phi(y-6)$. סופית:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \; y < 1, \\ \Phi(y-6) & \text{if } \; 1 \leq y < 5, \\ 1 & \text{if } \; y \geq 5. \end{cases}$$

מכיוון שלפונקציה הזו יש שתי קפיצות (ב -1 וב- 5), Y הוא מ"א מעורב. נמצא עתה את הפרוק

$$F_Y(y) = \alpha F_Y^d(y) + (1-\alpha) F_Y^c(y).$$

לפי הנוסחאות שהוצכו בהרצאות:

$$\alpha = \text{סכום הקפיצות} = \Phi(-5) + (1 - \Phi(-1)) = \Phi(-5) + \Phi(1),$$

$$F_Y^d(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ y < 1, \\ \frac{\Phi(-5)}{\Phi(-5)+\Phi(1)} & \text{if } \ 1 \leq y < 5, \\ 1 & \text{if } \ y \geq 5. \end{cases}$$

לכן:

$$F_Y^c(y) = \frac{F_Y(y) - \alpha F_Y^d(y)}{1-\alpha} == \begin{cases} 0 & \text{if } \ y < 1, \\ \frac{\Phi(y-6)-\Phi(-5)}{\Phi(-1)-\Phi(-5)} & \text{if } \ 1 \leq y < 5, \\ 1 & \text{if } \ y \geq 5. \end{cases}$$

(ב)

עבור $y \notin \{1,5\}$, $f_y^c(y) = \frac{dF_Y^c(y)}{dy}$. לכן:

$$f_Y^c(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } \ y \leq 1, \\ \frac{e^{-(y-6)^2/2}}{\sqrt{2\pi}(\Phi(-1)-\Phi(-5))} & \text{if } \ 1 < y < 5, \\ 1 & \text{if } \ y \geq 5. \end{cases}$$

(ג)

$$P(Y < 4) = P(Y \leq 4) = \Phi(2).$$

<u>תרגיל 2</u>.

(א)

ד"ל כי

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1. \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \quad \text{(i)}$$

$$F_X(x) \text{ לא יורדת} \quad \text{(ii)}$$

(iii) $F_X(x)$ רציפה מימין.

שתי התכונות הראשונות מתקיימות באופן ברור. נראה עתה שגם התכונה השלישית מתקיימת. $F_X(x)$ רציפה על המשלים ב- $\mathbb{R}$ של הקבוצה

$$\{x > 0 : x = 3n, n \in \mathbb{N}\},$$

ואילו לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to 3n^+} = 1 - e^{-n} = F_X(3n).$$

כדי לשרטט את הגרף תשתמשו בעובדה ש- $F_X(x)$ מונוטונית עולה בקטע $(0, \infty)$, עושה קפיצות בגודל $\frac{e^{-(n-1)} - e^{-n}}{2}$ בנקודות $x = 3n$, $n \in \mathbb{N}$, וקעורה בכל הקטעים מן הסוג $(3n, 3n+3)$.

(ב)

(i) $P(X \geq 5) = \frac{1}{2}(e^{-5/3} + e^{-1})$.

(ii) $P(X < 4) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-4/3} + e^{-1})$.

(iii) $P(X = 3) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

(vi) $P(X < 10 | X > 4) = \frac{P(4<X<10)}{P(X>4)} = 1 - \frac{e^{-10/3} + e^{-3}}{e^{-4/3} + e^{-1}}$.

<u>תרגיל 3</u>.

(א)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = -C\frac{1}{2}e^{-2F(x)}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{C}{2}(1 - e^{-2}).$$

לכן $C = \frac{2}{1-e^{-2}}$.

(ב)

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)dx = \frac{1 - e^{-2F(x)}}{1 - e^{-2}}.$$

<u>תרגיל 4</u>.

נגדיר:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{אם הוחלט לבחור } T \text{ מתוך קטע } [1,3], \\ 0 & \text{אם הוחלט לבחור } T \text{ מתוך קטע } [4,8]. \end{cases}$$

אז $P(X=1)=\alpha$, $P(X=0)=1-\alpha$, **ולכן:**

$$
\begin{aligned}
&F_T(t)=P(T\le t)=\\
&\quad =P(T\le t|X=1)P(X=1)+P(T\le t|X=0)P(X=0)=\\
&\quad =\alpha P(T\le t|X=1)+(1-\alpha)P(T\le t|X=0)=\\
&\quad =\begin{cases}0 & \text{if } \ t<1,\\ \alpha\frac{t-1}{2} & \text{if } \ 1\le t<3,\\ \alpha & \text{if } \ 3\le y<4,\\ \alpha+(1-\alpha)\frac{t-4}{4} & \text{if } \ 4\le t<8,\\ 1 & \text{if } \ t\ge 8.\end{cases}
\end{aligned}
$$

מכאן נובע כי:

$$
f_T(t)=\begin{cases}0 & \text{if } \ t\le 1,\\ \frac{\alpha}{2} & \text{if } \ 1<t<3,\\ 0 & \text{if } \ 3\le y\le 4,\\ \frac{1-\alpha}{4} & \text{if } \ 4<t<8,\\ 0 & \text{if } \ t\ge 8.\end{cases}
$$

<u>תרגיל 5</u>.
תציירו את הגרף של $y=y(x)$ ותבדקו כי :

מקרה ראשון: $2A_1<A_2$

$$
F_y(t)=\begin{cases}0 & \text{if } \ y<0,\\ P(x\le t) & \text{if } \ 0\le t<\frac{A_1}{2},\\ P(x\le t)+P(A_1\le x\le 2t) & \text{if } \ \frac{A_1}{2}\le t<A_1,\\ P(x\le 2t) & \text{if } \ A_1\le t<\frac{A_2}{2},\\ P(x\le A_2) & \text{if } \ \frac{A_2}{2}\le t<A_2,\\ 1 & \text{if } \ t\ge A_2.\end{cases}
$$

מקרה שני: $2A_1 = A_2$

$$F_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0, \\ P(x \le t) & \text{if } 0 \le t < \frac{A_1}{2}, \\ P(x \le t) + P(A_1 \le x \le 2t) & \text{if } \frac{A_1}{2} \le t < A_1, \\ P(x \le A_2) & \text{if } A_1 \le t < A_2, \\ 1 & \text{if } t \ge A_2. \end{cases}$$

מקרה שלישי: $2A_1 > A_2$

$$F_y(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0, \\ P(x \le t) & \text{if } 0 \le t < \frac{A_1}{2}, \\ P(x \le t) + P(A_1 \le x \le 2t) & \text{if } A_1 \le t < \frac{A_2}{2}, \\ P(x \le t) + P(A_1 \le x \le A_2) & \text{if } \frac{A_2}{2} \le t < A_1, \\ P(x \le A_2) & \text{if } A_1 \le t < A_2, \\ 1 & \text{if } t \ge A_2. \end{cases}$$

מכאן כבר ממש קצרה הדרך לפתרון ואני משאיר לכם להשלים את השלבים האחרונים.

תרגיל 6.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1, \\ \frac{2c}{5}(x^{5/2} - 1) & \text{if } 1 \le x < 16, \\ 1 & \text{if } x \ge 16. \end{cases}$$

$F_X(x)$ אמורה להיות רציפה ולכן, $c = \frac{5}{2046}$.

$$X \sim F_X^{-1}(U) = \left(1 + \frac{5U}{2c}\right)^{2/5},$$

כאשר U - מ"א מפולג באופן אחיד בקטע $(0,1)$.

תרגיל 7.

(א)

עבור $y > 0$:

$$P(Y \le y) = P(-6X \le \log y) = 1 - F_{-}\left(\frac{-\log y}{6}\right),$$

כאשר $F_{-}(x)$ היא גבול מצד שמאל של פונקצית F בנק' x.

ב)
עבור $y \in (0,1)$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6y} f_X\left(\frac{-\log y}{6}\right) = \frac{4}{3} y^{1/3}.$$