תכונות של פונקציות אינטגרביליות

התנאי ההכרחי ומספיק, $U - L < \epsilon$, הינו יעיל מאוד וניתן להוכיח באמצעותו אינטגרביליות של משפחות פונקציות שונות. השימוש הראשון יהיה להראות שכל פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע זה. להוכחת טענה זו אנו זקוקים למושג "הרציפות במידה שווה".

<u>תזכורת:</u> פונקציה f הינה רציפה בנקודה x_0 אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ כך שמתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ לכל x המקיים $|x - x_0| < \delta$. פונקציה f הינה רציפה במידה שווה בקבוצה K אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$

כך שמתקיים $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ לכל שתי נקודות x_1 ו: x_2 אשר שייכות ל: K ומקיימות $|x_1 - x_2| < \delta$. כלומר, δ טוב לכל שתי נקודות קרובות של K והוא תלוי אך ורק ב: ϵ.

<u>משפט.</u> פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום $[a, b]$ רציפה עליו במידה שווה.

<u>משפט.</u> פונקציה רציפה על קטע $[a, b]$ אינטגרבילית בו.

<u>הוכחה:</u> f רציפה ב: $[a, b]$ ולכן רציפה במידה שווה, כלומר לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ כך ש: $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ לכל $s, t \in [a, b]$ כך ש: $|s - t| < \delta$.

תהי P חלוקה של $[a,b]$ כך ש:
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$ לכל $i = 1, 2, ..., n$. אז
מתקיים $\epsilon > |f(s) - f(t)|$ לכל
$s, t \in [x_{i-1}, x_i]$, ובפרט זה נכון אם s ו: t הן
נקודות בהן מתקבלים $\max f$ ו: $\min f$ בקטע,
ולכן

$$\begin{aligned} &\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \\ &= \max_{[x_{i-1},x_i]} f - \min_{[x_{i-1},x_i]} f \\ &= M_i - m_i < \epsilon \end{aligned}$$

עבור החלוקה הזו P מתקיים

$$\begin{aligned} 0 \le U(P,f) - L(P,f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - m_i\Delta x_i \\ = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i &\le \sum_{i=1}^{n} \epsilon\Delta x_i = \epsilon(b-a) \end{aligned}$$

והביטוי $\epsilon(b-a)$ הוא קטן כרצוננו. לכן $U(P,f)-L(P,f)$ ניתן להיעשות קטן כרצוננו עבור חלוקה P מתאימה, ולפי המשפט הקודם f אינטגרבילית לפי Riemann.

<u>משפט.</u> אם f פונקציה מונוטונית על $[a,b]$, אז f אינטגרבילית על $[a,b]$.

<u>הערה.</u> f יכולה להיות מונוטונית ולא רציפה באינסוף נקודות ב: $[0,1]$, כך שיש לה קפיצה בגודל $1/n^2$ בנקודה $1/n$, והיא קבועה בקטע $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right]$.

הוכחת המשפט: נבחר חלוקה P המוגדרת ע"י חלוקת הקטע ל: n תת-קטעים שווים:

$$.x_i - x_{i-1} = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

נניח למשל ש: f עולה, או ליתר דיוק לא יורדת.

אז בקטע $[x_{i-1}, x_i]$ מתקיים

$$m_i = \min f = f(x_{i-1})$$

$$.M_i = \max f = f(x_i)$$

לכן מתקיים

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\frac{b-a}{n}$$

$$= \tfrac{b-a}{n} \cdot [f(b) - f(a)]$$

והביטוי באגף ימין יהיה קטן מ: ϵ נתון, בתנאי שבוחרים את n מספיק גדול.

<u>משפט.</u> תהי f בעלת מספר סופי של נקודות אי-רציפות ב: $[a,b]$ וחסומה על קטע זה. אז f אינטגרבילית על $[a,b]$.

<u>הערה.</u> נקודת אי-רציפות של f היא נקודה בה (i) או לא קיים אחד מהגבולות החד-צדדיים, (ii) או ששני גבולות אלו קיימים אך שונים בערכם.

<u>הוכחת המשפט:</u> בהינתן $\epsilon > 0$ אנו צריכים למצוא חלוקה P כך ש:

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon.$$

f חסומה על $[a,b]$, נניח $|f(x)| < M$ לכל $x \in [a,b]$. אוסף נקודות אי הרציפות הוא סופי, בעל k אלמנטים. אנו מכסים את k נקודות אי הרציפות ע"י k קטעים (u_1,v_1), (u_2,v_2),...,(u_k,v_k) כך שסכום ארכיהם מקיים

$$. \sum_{j=1}^{k} (v_j - u_j) < \frac{\epsilon}{M} \qquad (1)$$

(אם a ו/או b הן נקודות אי רציפות אז מוסיפים קטע כיסוי מהצורה $[a,v)$ או $(u,b]$.)

בהוצאת הקטעים הפתוחים (u_j,v_j) מ: $[a,b]$ נשארים $k+1$ קטעים סגורים $\{I_j\}_{j=1}^{k+1}$. f רציפה על כל קטע I_j ולכן אינטגרבילית על I_j,

ומהתוצאה הקודמת קיימת חלוקה P_j על I_j עם סכומי דרבו U_j ו: L_j המקיימים

$$U_j(P_j,f)-L_j(P_j,f)<\frac{\epsilon}{k+1}. \qquad (2)$$

ניקח חלוקה P על $[a,b]$ הכוללת את כל הנקודות $\{u_j,v_j\}$, לא מכילה נקודות מתוך הקטעים (u_j,v_j), ומכילה את כל הנקודות של כל החלוקות P_j, $j=1,2,...,k+1$. אזי

$$\begin{aligned} U(P,f)-L(P,f) &\leq \sum_{j=1}^{k+1}(U_j-L_j) \\ +\sum_{j=1}^{k}\delta_j[M_j-m_j] &\leq (k+1)\frac{\epsilon}{k+1} \\ &+ 2M\sum_{j=1}^{k}\delta_j \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב: (2), וב: (1) בסימון

$$.\delta_j = v_j - u_j$$

נובע ש:

$$,U(P,f) - L(P,f) < 3\epsilon$$

ומאחר ו: ϵ הוא כלשהו, נובע ש: f אינטגרבילית על $[a,b]$.

<u>משפט.</u> אם $f(x)$ אינטגרבילית על $[a,b]$ ו: c מספר קבוע אז גם $cf(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית על $[a,b]$ ומתקיים

$$.\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

<u>הוכחה:</u> אם $c \geq 0$ אזי

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} cf(x) = c \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

ו:

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} cf(x) = c \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

ולכן

$$U(P,cf) = cU(P,f),\ L(P,cf) = cL(P,f)$$

ומקבלים

$$U(P,cf) - L(P,cf) = c[U(P,f) - L(P,f)].$$

אבל את $U(P,f) - L(P,f)$ ניתן לעשות קטן כרצוננו ע"י בחירת חלוקה P, נגיד קטן מ ϵ/c.

עבור חלוקה כזו מקבלים

$U(P,cf)-L(P,cf)<\epsilon$, ולכן $cf(x)$ היא אינטגרבילית. לחישוב האינטגרל שלה, נחשב למשל

$$\int_a^b cf = \overline{\int_a^b} cf = \inf_P \{U(P,cf)\} = \inf_P \{cU(P,f)\}$$

$$= c \inf_P \{U(P,f)\} = c \overline{\int_a^b} f = c \int_a^b f$$

לעומת זאת, אם $c<0$ אז

$$\sup(cf) \;=\; (-c)\sup(-f)$$

$$= |c|(-\inf f) \;=\; c \inf f$$

ובצורה דומה (הוכח כתרגיל!) מקבלים

$$\inf(cf) = c \sup f.$$

ולכן

$$U(P,cf) = cL(P,f),\ L(P,cf) = cU(P,f)$$

ומקבלים

$$\begin{aligned} 0 &\le U(P,cf) - L(P,cf) \\ &= c[L(P,f) - U(P,f)] \\ &= |c|[U(P,f) - L(P,f)] \end{aligned}$$

מאחר ו: c שלילי. אבל $U(P,f) - L(P,f)$ יכול להיעשות קטן כרצוננו, למשל קטן מ: $\epsilon/|c|$, ואז $U(P,cf) - L(P,cf)$ קטן מ: ϵ.

לחישוב ערך האינטגרל, בדומה לעיל

$$\int_a^b cf = \overline{\int_a^b} cf = \inf_P U(P,cf) = \inf_P cL(P,f)$$

$$= c\sup_P L(P,f) = c\underline{\int_a^b} f = c\int_a^b f$$

<u>משפט.</u> אם f_1 ו: f_2 אינטגרביליות על $[a,b]$ אזי גם f_1+f_2 אינטגרבילית על $[a,b]$ ומתקיים

$$.\int_a^b (f_1+f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$$

<u>הוכחה:</u> יש את אי-השיוונות

$$\sup(f_1+f_2) \le \sup f_1 + \sup f_2$$

ו:

$$\inf(f_1+f_2) \ge \inf f_1 + \inf f_2$$

ולכן

$$\begin{aligned} U(f_1+f_2) &\le U(f_1)+U(f_2), \\ L(f_1+f_2) &\ge L(f_1)+L(f_2) \end{aligned}$$

מאחר ו: f_1 אינטגרבילית קיים P_1 כך ש:

$$U(P_1,f_1)-L(P_1,f_1)<\frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

ומאחר ו: f_2 אינטגרבילית קיים P_2 כך ש:

$$U(P_2,f_2)-L(P_2,f_2)<\frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

יהי P העידון המשותף של P_1 ו: P_2, ויוצא שאי-השיויונות (1) ו: (2) עבור P_1 ו: P_2 מתקימים גם עבור P. מלמעלה יש לנו

$$\begin{aligned} L(P,f_1)+L(P,f_2) &\le L(P,f_1+f_2) \\ \le U(P,f_1+f_2) &\le U(P,f_1)+U(P,f_2) \end{aligned}$$

מתיחסים אליהם כארבעה מספרים מסודרים על הישר הממשי, ואז ברור שההפרש בין שני הקיצוניים קטן מההפרש הין שני הפנימיים, כלומר

$$U(P, f_1 + f_2) - L(P, f_1 + f_2)$$
$$\leq U(P, f_1) + U(P, f_2) - L(P, f_1) - L(P, f_2)$$
$$= [U(P, f_1) - L(P, f_1)] + [U(P, f_2) - L(P, f_2)$$

מאחר ו: U קטן ו: L גדל עבור העידון, יש את היחסים הבאים

$$\leq [U(P_1, f_1) - L(P_1, f_1)]$$
$$+[U(P_2, f_2) - L(P_2, f_2)]$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

נותר עוד לחשב את

$$\inf_P U(P, f_1+f_2) = \overline{\int_a^b}(f_1+f_2) = \int_a^b(f_1+f_2)$$

מהגדרת האינטגרל של רימן, לכל $0 < \epsilon$ יש P_1 כך ש:

$$U(P_1, f_1) < \int_a^b f_1 + \epsilon$$

ויש P_2 כך ש:

$$U(P_2, f_2) < \int_a^b f_2 + \epsilon$$

ועבור העידון המשותף $P = P_1 \cup P_2$ מקבלים

$$\begin{aligned}
\int_a^b(f_1+f_2) &\le U(P, f_1+f_2) \\
&\le U(P, f_1) + U(P, f_2) \\
&\le U(P_1, f_1) + U(P_2, f_2) \\
&\le \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + 2\epsilon
\end{aligned}$$

מאחר וזה נכון לכל $\epsilon > 0$ נובע ש:

$$\int_a^b (f_1 + f_2) \leq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 . \qquad (3)$$

כל האמור כאן על הפונקציות f_1 ו: f_2 נכון גם עבור הפונקציות $-f_1$ ו: $-f_2$, וכאשר מפעילים עבורן את אי-השיויון (3) מקבלים

$$\int_a^b (-f_1 - f_2) \leq -\int_a^b f_1 - \int_a^b f_2 , \qquad (3)$$

כלומר

$$\int_a^b (f_1 + f_2) \geq \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 . \qquad (4)$$

מ: (3) ו: (4) ביחד נובע

$$\int_a^b (f_1 + f_2) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 . \qquad (5)$$

מסקנה: אם f_1 ו: f_2 אינטגרביליים, כך גם $c_1 f_1 + c_2 f_2$, ועל כן אוסף הפונקציות האינטגרביליות לפי רימן מהווה מרחב ליניארי.

משפט. אם f_1 ו: f_2 אינטגרביליות ומתקיים $f_1 \le f_2$ ב: $[a,b]$ אזי

$$\int_a^b f_1 \le \int_a^b f_2 .$$

הוכחה: נסמן $f = f_2 - f_1$, ואז מתקיים $0 \le f(x)$ לכל $a \le x \le b$. אבל נובע מכך ש: $0 \le L(P,f)$ לכל חלוקה P, ועל כן $0 \le \int_a^b f$. אבל זה גורר

$$\int_a^b f_1 \le \int_a^b f_2$$

כי

$$.\int_a^b f = \int_a^b f_2 - \int_a^b f_1$$

<u>מסקנה:</u> אם f אינטגרבילית ב: $[a,b]$ ומתקיים $M \leq f(x) \leq m$, אז

$$.m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

<u>הוכחה:</u>

$$m(b-a) = L(P,m) \leq L(P,f) \leq \int_a^b f$$
$$\leq U(P,f) \leq U(P,M) = M(b-a)$$

ניסוח דומה הוא: אם f מקיימת $|f(x)| \leq M$ אזי

$$.\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$$

זה נובע מכך ש: $|f(x)| \leq M$ שקול ל:
$-M \leq f(x) \leq M$, ואז המסקנה היא:

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

אשר שקול ל:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a).$$

<u>משפט.</u> אם f אינטגרבילי ב: $[a,b]$ ו:
$a<c<b$ אז f אינטגרבילית על $[a,c]$ ועל
$[c,b]$, וקים

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

ולכן אינטגרביליות עוברת בירושה לתת קטע.

הוכחה: מאינטגרביליות f על $[a,b]$ נובע קיום חלוקה P כך ש:

$$U(P,f)-L(P,f)<\epsilon.$$

נעדן את P ע"י הוספת נקודה c ומתקבלת החלוקה $P^\star=P\cup\{c\}$, ואז

$$U(P^\star,f)-L(P^\star,f)<\epsilon,$$

כי העידון מקטין את U ומגדיל את L. אך העידון משרה חלוקות על $[a,c]$ ו: $[c,b]$ והסכומים U,L מתפצלים לשניים כ"א:

$$\begin{aligned}&[U_a^c(P^\star,f)+U_c^b(P^\star,f)]\\ &-[L_a^c(P^\star,f)+L_c^b(P^\star,f)]\\ &<\epsilon\end{aligned}$$

ונובע מכאן

$$\begin{aligned} U_a^c(P^\star, f) - L_a^c(P^\star, f) &< \epsilon, \\ ,U_c^b(P^\star, f) - L_c^b(P^\star, f) &< \epsilon \end{aligned}$$

ולכן f אינטגרבילית על כל תת-קטע. כמו קודם יש את אי השיויונות

$$\begin{aligned} \left(\int_a^c f <\right) U_a^c(P^\star, f) &< \int_a^c f + \epsilon, \\ \left(\int_c^b f <\right) U_c^b(P^\star, f) &< \int_c^b f + \epsilon \end{aligned}$$

ונובע

$$\int_a^b f \le U(P^\star, f) = U_a^c(P^\star, f) + U_c^b(P^\star, f)$$

$$\int_a^c f + \int_c^b f + 2\epsilon$$

לכל $\epsilon > 0$, ולכן

$$. \int_a^b f \le \int_a^c f + \int_c^b f \qquad (1)$$

את אי השיויון ההפוך מקבלים מהפעלת (1) על הפונקציה $-f$ במקום על f.

עד עתה התיחסנו לאינטגרל $\int_a^b f$ עבור $a < b$.
באופן פורמלי אנו מגדירים

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

וזה משחרר מהצורך להשגיח על סדר הגבולות.
המוטיבציה להגדרה הזו היא שאם לוקחים חלוקה

$$a = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0 = b$$

אזי $0 > \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

<u>תרגיל.</u> להראות שאם f אינטגרבילית על $[a,b]$ אזי

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f$$

לכל α, β, γ בתחום $[a,b]$. בפרט מקבלים

$$\int_a^a f = \int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0 \, .$$