13/12/2016

תרגול 8

<u>תרגיל:</u>

יהא $\{X_\alpha,\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. הוכיחו כי הקבוצות:

$$\psi_{box}=\{\prod_{\alpha\in A}U_\alpha\,|U_\alpha\in\tau_\alpha\}$$

$$\psi_{prod}=\left\{\prod_{\alpha\in A}U_\alpha\middle|\begin{matrix}U_\alpha\in\tau_\alpha\\ U_\alpha=X_\alpha\quad \text{פרט למספר סופי של } \alpha \text{ – ות}\end{matrix}\right\}$$

הן בסיסים לטופולוגיה על $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$.

<u>פתרון:</u>

ברור כי $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\in\psi_{box}$ וגם $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha\in\psi_{prod}$. מכאן ברור כי:

$$\bigcup\{\psi_{prod}\}=\bigcup\{\psi_{box}\}=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$$

וכמו כן, מתקיים:[1]

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\prod_{\alpha\in A}U_\alpha^i\right\}=\prod_{\alpha\in A}\left(\bigcap_{i=1}^{n}U_\alpha^i\right)$$

אבל:

$$\prod_{\alpha\in A}\bigcap_{i=1}^{n}U_\alpha^i\in\psi_{box},\psi_{prod}$$

ולכן:

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left\{\prod_{\alpha\in A}U_\alpha^i\right\}=\bigcup\left\{\prod_{\alpha\in A}\bigcap_{i=1}^{n}U_\alpha^i\right\}$$

ולכן ψ_{box},ψ_{prod} אכן מהווים בסיסים לטופולוגיות.

<u>תרגיל:</u>

יהא $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. לכל $\alpha\in A$, נתון ψ_α בסיס לטופולוגיה τ_α על X_α. הראו כי הקבוצה:

$$\{\prod_{\alpha\in A}\varphi_\alpha\,|\varphi_\alpha\in\psi_\alpha\}$$

הינה בסיס לטופולוגית התיבות על $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$.

<u>פתרון:</u>

לכל $\alpha\in A$ מתקיים $\varphi_\alpha\in\psi_\alpha$ ולכן φ_α פתוחה ב-(X_α,τ_α). לכן $\prod_{\alpha\in A}\varphi_\alpha$ פתוחה בטופולוגית התיבות $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$.

---

[1] $\bigcap_{i=1}^{n}\{\prod_{\alpha\in A}U_\alpha^i\}=\{f|\quad\}$

13/12/2016

<u>תזכורת</u> – בהנתן (X,τ) מרחב טופולוגי ובהנתן ψ אוסף של תתי קבוצות פתוחות ב-(X,τ), אזי ψ הינו בסיס לטופולוגיה τ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה $U \in \tau$ ולכל $x \in U$ קיים $\varphi \in \psi$ כך ש-$x \in \psi \subset U$.

עתה, תהא U פתוחה ב-$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ביחס לטופולוגית התיבות על $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. יהא $x \in U$. אזי לכל $\alpha \in A$ קיימת קבוצה $U_\alpha \in \tau_\alpha$ פתוחה ב-(X_α,τ_α) כך ש-$x \in \prod_{\alpha\in A} U_\alpha \subset U$. כמו כן, לכל $\alpha \in A$ מתקיים $x(\alpha) \in U_\alpha$.

$U_\alpha \in \tau_\alpha$ פתוחה ולכן על פי הקריטריון מהתזכורת, נקבל כי קיים $\varphi_\alpha \in \psi_\alpha$ כך שמתקיים $x(\alpha) \in \varphi_\alpha \subset U_\alpha$. לכן $x \in \prod_{\alpha\in A} \varphi_\alpha \subset \prod_{\alpha\in A} \subset U$ כלומר $x \in \prod_{\alpha\in A} \varphi_\alpha \subset U$ ולכן נקבל כי הקבוצה הנ"ל אכן מהווה בסיס לטופולוגית התיבות על $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

<u>הערה</u> – במקרה ש-A הינה קבוצה סופית, טופולוגית התיבות וטופולוגית המכפלה הן שוות, כי הן נוצרות על ידי אותו בסיס. לכן הקבוצה מתרגיל זה מהווה גם בסיס לטופולוגית המכפלה.

כלומר, אם $\psi_1,\cdots,\psi_n$ בסיסים ל-$\tau_1,\cdots,\tau_n$ (שהן טופולוגיות על $X_1,\cdots,X_n$ בהתאמה), אזי $\{\prod_{i=1}^n \varphi_i \,|\varphi_I \in \psi_i\}$ היא בסיס לשתי הטופולוגיות.

<u>תרגיל:</u>

יהא $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. לכל $\alpha \in A$ תהא $S_\alpha \subset X_\alpha$ סגורה ב-(X_α,τ_α). הוכיחו כי $\prod_{\alpha\in A} S_\alpha$ היא קבוצה סגורה ב-$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ביחס לטופולוגית התיבות וגם המכפלה.

<u>פתרון:</u>

נראה כי $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in A} S_\alpha$ היא קבוצה פתוחה בשתי הטופולוגיות. יהא $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus \prod_{\alpha\in A} S_\alpha$ מכאן שקיים $\beta \in A$ עבורו $x(\beta) \notin S_\beta$. S_β סגורה ב-$\left(X_\beta,\tau_\beta\right)$ ולכן $X_\beta \setminus S_\beta$ פתוחה ב-$\left(X_\beta,\tau_\beta\right)$. מכאן, שקיימת סביבה V של $x(\beta)$ כך ש