בסיס ומימד

1.א.

$$U=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$W=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\\5\\4\end{pmatrix}\right]$$

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\\5\\4\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

לכן, הווקטור $\begin{pmatrix}1\\4\\1\\4\\5\\4\end{pmatrix}$ הוא ת"ל ב- W.

לכן הבסיס ל- U:

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

הבסיס ל- W:

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right]$$

1.ב. נמצא את הבסיס ל- U+W:

נשווה בין Sp(W) ל- Sp(U):

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

נקבל מע' משוואות:

$\alpha = a \overset{(1)}{=} c = b = \beta = \gamma$

$\beta = b$

$\gamma = a$

$\alpha+\beta = b+c \rightarrow \alpha+\beta=\beta+c \Rightarrow \overset{(1)}{\alpha=c}$

$\alpha+\gamma = a+b \rightarrow b=a$

$\alpha+\beta+\gamma = b+2c \rightarrow$

אם כן הן בת"ל.

2. פתרון

יהי U ו-W תת"מ של מ"ו V.

הבסיס של $U\cap W$ הוא $\{v_1, v_2\}$

הבסיס של U הוא $\{v_1, v_2, u_1\}$

הבסיס של W הוא $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$

הבסיס ל- $U+W$ הוא $\{v_1, v_2, w_1, w_2, u_1\}$.

כעת, נוכיח זאת:

נניח בשלילה כי קיים $z \in U+W$ כך ש-
$\{v_1, v_2, w_1, w_2, u_1, z\}$
מהווה בסיס ל- $U+W$.

מתקיים $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W)$.
לפי משפט המימדים.

אך אז נקבל $6 = 4+3-2 = 5$

סתירה.* לכן זו הקבוצה הפורשת המינימלית.

נוכיח כעת כי הוקטורים בבסיס של $U+W$ הם בת"ל.

מהנתון נסיק כי $\{v_1, v_2, u_1\}$ בת"ל ו- $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ בת"ל.

(הן בסיס לכן וקטוריהן בת"ל, לפי משפט).

נניח בשלילה כי u_1 ת"ל עם w_1. (בה"כ)

כלומר $u_1 \in Sp(\{v_1, v_2, w_1, w_2\})$, אך $u_1 \in U$ ושם
$u_1 \in W$ אזי $u_1 \in sp(\{v_1, v_2\})$.

אך מהנתון $\{v_1, v_2, u_1\}$ היא בת"ל.

סתירה.

לכן, הקבוצה $\{v_1, v_2, w_1, w_2, u_1\}$ בת"ל.

לפי הגדרת הבסיס, היא מהווה בסיס ל- $U+W$.

זו קבוצה פורשת מינימלית ובת"ל.

□

*נימוק:

בה"כ אם נחסיר את אחד הוקטורים u_1, w_1, w_2
נקבל $\dim(U+W) = 4 = 4+3-2 = 5$.

סתירה.

Scanned by CamScanner

3.א. <u>הוכחה</u> יהיו B_1, B_2 בסיסים ל- U, W בהתאמה.
מהנתון $V = U \oplus W$ נסיק כי לכל $v \in V$
קיימת קבוצת סקלרים $\{\alpha_1 \dots \alpha_{k+j}\}$ (1) כך שעבור
$B_1 = \{b_{11} \dots b_{j1}\}$, $B_2 = \{b_{12} \dots b_{k2}\}$
$v = \alpha_1 b_{12} + \dots + \alpha_{k+j} b_{j1}$.

~~נניח בשלילה כי $B_1 \cap B_2 \neq \{0\}$.~~
~~אזי קיים $b \in B_1$ וגם $b \in B_2$.~~
~~אז~~

נוכיח כעת כי הקבוצה $B_1 \cup B_2$ היא בת"ל.
נניח בשלילה כי קיימים $b_1, b_2 \in B_1 \cup B_2$ כך ש- $b_1 = \alpha b_2$
עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו.

אז עבור הקבוצה (1) נוכל לשכתב $\{\alpha_1 \dots \alpha \cdot \alpha_i \dots \alpha_{k+j}\}$
ונקבל $v = \alpha_1 b_{12} + \dots + \alpha \cdot \alpha_i b_{j1} + \dots \alpha_{k+j} b_{j1}$

בסתירה לכך שזהו סכום ישר. אזי ניתן לשכתבו
בצורה אחת ויחידה בלבד.

לכן $B_1 \cup B_2$ היא בת"ל.

נעזר במשפט המימדים להוכיח כי זוהי הקבוצה
הפורשת המינימלית.
נניח בשלילה כי $U \cap W \neq \{\emptyset\}$. אז קיים $u \in U \cap W$.
אך לעיל הוכחנו כי $U \uplus W$ היא בת"ל אז לא ייתכן
כי $u \in U$ וגם $u \in W$. סתירה.

אז $\dim(U \cup W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
$\dim(U \cup W) = |B_1| + |B_2|$
אז זו הקבוצה הפורשת המינימלית $(B_1 \cup B_2)$.

$\square$

3. ב. הטענה אינה נכונה. יהי V מ"ו של מטריצות מאותו הסדר שדרגת כל אחת מהן קטנה ממש מ-V.

לדוגמא נגדיר:

נגדיר $n=3$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$ra(A)=ra(B)=2<n$ *

$A,B\in V$ ו-* אך

$$ra\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}=ra\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=ra(A+B)=3=n$$

סתירה.

3. ג. <u>הוכחה</u> $V=\mathbb{R}^{n\times n}$.

נניח בשלילה כי קיים בסיס של V המורכב מ-n^2 מטריצות שכולן מתחלפות בכפל. נסמן B הוא הבסיס הנ"ל.

צ"ל שלכל $b_k,b_j\in B$ מתקיים $b_jb_k=b_kb_j$

$B=\{b_1\dots b_{n^2}\}$.

מתכונות הבסיס, כל $v\in V$ ניתן לכתוב כך:

$V=\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\dots+\alpha_nb_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ib_i$ כאשר $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

הם דבודות סקלרים ממשיים.

לכן, בוודאי מתקיים

$$v_j\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ib_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ib_i\right)\cdot v_j \overset{(1)}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n}\alpha_ib_i\cdot v_j\in B$$

אך עפ"י משפט שהוכחנו בשיעור הקודם, כל מטריצה $(E^{n\times n})^{i,j}$ אינה ניתנת להחלפה לכל $v\in\mathbb{R}^{n\times n}$, רק אם היא סקלרית אלכסונית.

אזי, כל מטריצה $v\in V$ ניתן להביע באמצעות צ"ל של מטריצות מתחלפות. אולם עבור $(E^{n\times n})^{i,j}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כלשהי באופן שאינה מקיימת $(E^{n\times n})^{i,j}\in B$

כלומר (1) לא מתקיים.

סתירה.

לכן, לא קיים בסיס כזה.

□

4. הוכחה.

נתון:

$\dim(U)=n-1$

$\dim(W)=n-1$

$\dim(V)=n$

מאחר ו- $U\neq W$, קיים $v_1\in U$ ו- $w_1\in W$, ($v_1,w_1\in V$ כי הם מוכלים בתת-מרחבים $U,W\subseteq V$) כך ש- $v_1\neq w_1$.

אילו הן זהים, אז מאחר ו- $\dim(V)=\dim(U)=n-1$ אז $V=W$. סתירה.

נניח כי קיים $v_2\in V$ ו- $w_2\in W$ כך ש- $v_2\neq w_2$.

אז $\dim(V)=\dim(W)=n-2$. סתירה. אז קיים וקטור קודם המקיים זו.

נוכל להסיק כי $\dim(U\cap W)=n-2$.

□

5. א. הוכחה: נניח בה"כ כי $A,B\in F^{n\times n}$.

נוכיח כי מרחב העמודות של AB מוכל במרחב העמודות של A:

נפרק את AB:

$$AB \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\cdot b_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

סימנו b_i עמודה של B, לכל $n\geq i\geq 1$.

אז בוודאי מתקיים

$$AB \overset{(1)}{=} \subseteq \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = A$$

סימנו A_i עמודה של A לכל $n\geq i\geq 1$.

בבירור, $A\overset{(2)}{\subseteq} Sp\{A_1\dots A_n\}$ ובפרט $Ab_i \overset{(2)}{\subseteq}$ לכל $1\leq i\leq n$.

בזו הסתיימה ההוכחה.

לפי משפט, $Col(AB)\subseteq Col(A) \Longrightarrow \dim(AB)\leq\dim(A) \Longrightarrow r(AB)\leq r(A)$

ניתן להוכיח באופן דומה כי מרחב השורות של AB מוכל במרחב השורות של B. כי מתקיים

$$AB = \begin{pmatrix} - & B\cdot A_1 & - \\ - & B\cdot A_2 & - \\ & \vdots & \\ - & B\cdot A_n & - \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} - & B_1 & - \\ - & B_2 & - \\ & \vdots & \\ - & B_n & - \end{pmatrix} = B$$

כאשר עבור A_i שורה של A, B_i שורה של B, $1\leq i\leq n$.

לפי משפט $Row(AB)\subseteq Row(B) \Longrightarrow \dim(AB)\leq\dim(B) \Longrightarrow r(AB)\leq r(B)$

לכן $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

□

Scanned by CamScanner

5. ב. <u>הוכחה</u>

דרגת המטריצה שווה למימד מרחב השורות (או עמודות) שלה.

אז, אם נוכיח $Row(A+B) \subseteq Row(A) + Row(B)$, הסתיימה ההוכחה.

מרחב

$$Row(A+B) = sp\left\{\begin{bmatrix} - & A_1+B_1 & - \\ - & A_2+B_2 & - \\ \vdots & & \\ - & A_n+B_n & - \end{bmatrix}\right\}$$

$$Row(A) = sp\left\{\begin{bmatrix} - & A_1 & - \\ - & A_2 & - \\ \vdots & & \\ - & A_n & - \end{bmatrix}\right\}$$

$$Row(B) = sp\left\{\begin{bmatrix} - & B_1 & - \\ - & B_2 & - \\ \vdots & & \\ - & B_n & - \end{bmatrix}\right\}$$

עלינו להוכיח את $-A_i+B_i-$ [illegible] צ"ל של $-A_i-$ ו $-B_i-$ כלשהן ומכך נראה הכלה.

תהי $A_i+B_i=\ell$ שורה ב-$Row(A+B)$.

לפי כלל חיבור שורות קיימים $A_i \in Row(A)$ ו-$B_i \in Row(B)$

$A_i+B_i \in \ell$.

אז $\dim(A+B) \le \dim(A)+\dim(B) \xLeftarrow{\text{משפט 4}} Row(A+B) \subseteq Row(A)+Row(B)$.

$\square$