אלגברה ב – בניית אופרטור צמוד

נושאים:

1. הגדרות ותיאוריה
2. מציאת אופרטור צמוד – דוגמא מעשית

הגדרות ותיאוריה

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F (כאשר F הוא הממשיים או המרוכבים). העתקה לינארית $\varphi:V\to F$ נקראת פונקציונאל לינארי.

דוגמאות:

1. ל – $V=R^n$ מ"ו מעל R, $\varphi((a_1,..,a_n))=a_1$ $\varphi:R^n\to R$.
2. ל – $V=M_{nxn}(R)$ מ"ו מעל R, $\varphi(A)=trace(A)$ פונקציונאל
3. ל – V ממ"פ מעל F, $u\in V$ וקטור כלשהו, $\varphi(v)=\langle v,u\rangle_V$ פונקציונאל.

משפט 1: יהי V ממ"פ סוף ממדי מעל F, יהי $\varphi:V\to F$ פונקציונאל, אז קיים וקטור יחיד $u\in V$ המקיים $\varphi(v)=\langle v,u\rangle_V$ $\forall v\in V$.

רעיון ההוכחה: בוחרים בסיס אורתונורמלי $E=\{e_1,..,e_n\}$ ל – V, ואז הוקטור המבוקש הוא $u=\overline{\varphi(e_1)}e_1+...+\overline{\varphi(e_n)}e_n$. כעת מראים ש - φ שווה לפונקציונאל $\psi(v)=\langle v,u\rangle_V$.

הגדרה: יהי V ממ"פ מעל F, ויהיו $S,T:V\to V$ אופרטורים לינאריים. נאמר ש – S צמוד ל – T אם לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u),v\rangle=\langle v,S(u)\rangle$.

משפט 2: יהי V ממ"פ סוף ממדי מעל F, אז לכל אופרטור לינארי $T:V\to V$ קיים אופרטור צמוד יחיד. אופרטור זה מסומן T^* .

רעיון ההוכחה: נקבע $v\in V$, אז $\varphi(u)=\langle T(u),v\rangle$ מגדיר פונקציונאל. לפי משפט 1, קיים $\bar{v}\in V$ המקיים $\varphi(u)=\langle u,\bar{v}\rangle$. נגדיר $T^*(v)=\bar{v}$. בצורה זו מגדירים את התמונה של כל $v\in V$ תחת T^* . T^* אופרטור לינארי בדיוק מהתכונות של המכפלה הפנימית, וכן מהבנייה מקיים את התנאי של אופרטור צמוד.

טענה: יהי $T:V\to V$ אופרטור על ממ"פ ויהי $E=\{e_1,...,e_n\}$ בסיס א"נ. המטריצה A המייצגת את T לפי הבסיס E נתונה ע"י $a_{ij}=\langle T(e_i),e_j\rangle$.

רעיון ההוכחה: חישוב מיידי של המטריצה המייצגת ושאלה 2 מתרגיל 1.

משפט 3: יהי V ממ"פ מעל F, $T:V\to V$ אופרטור ליניארי. נניח כי עבור בסיס א"נ $E=\{e_1,...,e_n\}$, המטריצה המייצגת את T היא המטריצה A, אז המטריצה המייצגת את T^* בבסיס E היא המטריצה $A^*=\overline{A^t}$.

הוכחה: עבור $a_{ij}=\langle T(e_i),e_j\rangle, b_{ij}=\langle T^*(e_i),e_j\rangle$ האברים במטריצות המייצגות, מתקיים:

$$b_{ij}=\langle T^*(e_i),e_j\rangle=\overline{\langle e_j,T^*(e_i)\rangle}=\overline{\langle T(e_j),e_i\rangle}=\overline{a_{ji}}$$

מציאת אופרטור צמוד – דוגמה מעשית

יהי V ממ"פ מעל F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. כיצד מוצאים את T^* ?

שלבים למציאת האופרטור הצמוד:

1. מציאת בסיס אורתונורמלי E ל – V (למשל ע"י תהליך גרהאם שמידט).
2. *לכל $e_i\in E$, בעזרת הוכחת משפט 1 מוצאים את $\bar{v}\in V$ המתאים לפונקציונאל $\varphi(v)=\langle T(v),e_i\rangle$.*

3. מגדירים $T^*(e_i)=\bar{v}$ ומרחיבים לינארית לכל V. משפט 2 מבטיח כי זה אכן נותן את האופרטור הצמוד.

דוגמא: יהי $V=R^2$ ממ"פ מעל R, עם המכפלה הפנימית $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+kx_2y_2$ ל - $k>1$. נסתכל על האופרטור $T:V\to V$ הנתון לפי $T((a,b))=(b,a)$. מהו T^* ?

פתרון:

1. נחפש בסיס א"נ. נתחיל מהבסיס הסטנדרטי $E=\{e_1,e_2\},\ e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)$ ונפעיל עליו את גרהאם שמידט: $u_1=e_1,\ u_2=\frac{1}{\sqrt{k-1}}(1,1)$. נשים לב שעבור T מתקיים: $T(u_1)=\sqrt{k-1}u_2-u_1,\ T(u_2)=u_2$
2. מהו $\bar{v}$ המתאים ל - u_1 ? לפי משפט 1, $\bar{v}=\varphi(u_1)u_1+\varphi(u_2)u_2$ (אנחנו מעל R) לפונקציונאל $\varphi(v)=\langle T(v),u_1\rangle$, לכן $\varphi(u_1)=\langle T(u_1),u_1\rangle=-1,\ \varphi(u_2)=\langle T(u_2),u_1\rangle=0$ ונקבל $\bar{v}=-u_1$. מהו $\bar{v}$ המתאים ל - u_2 ? כמו שעשינו ל - u_1 , נקבל הפעם $\varphi(u_1)=\langle T(u_2),u_1\rangle=1,\ \varphi(u_2)=\langle T(u_2),u_2\rangle=1$ ז"א $\bar{v}=\sqrt{k-1}u_1+u_2$
3. לפי משפט 2, מתקיים $T^*(u_1)=-u_1,\ T^*(u_2)=\sqrt{k-1}u_1+u_2$. אבר כללי ב – V מיוצג כ - $(a,b)=au_1+b(\sqrt{k-1}u_2-u_1)=(a-b)u_1+b\sqrt{k-1}u_2$, לכן נקבל : $T^*((a,b))=(a-b)T^*(u_1)+b\sqrt{k-1}T^*(u_2)=(a-b)(-u_1)+b\sqrt{k-1}(\sqrt{k-1}u_1+u_2)$, ז"א נקבל $T^*((a,b))=(bk-a)u_1+b\sqrt{k-1}u_2=(b(k+1)-a,b)$.
4. בדיקה ישירה מראה באמת שקיבלנו את האופרטור הצמוד.

<u>הערה:</u> נשים לב שאם היינו לוקחים את אותו האופרטור ל – $V=R^2$ עם המכפלה הסטנדרטית, היינו מקבלים $T^*=T$, לכן האופרטור הצמוד תלוי לא רק באופרטור ההתחלתי אלא גם במבנה המכפלה הפנימית על V.