אינטגרציה של סדרות וטורי פונקציות

נניח ש$f_n(x)$ רציפות, מוגדרות על $[a,b]$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

ברור ש- f_n אינטגרביליות.

1. האם גם $f(x)$ אינטגרבילית?
2. האם קיים הגבול $\lim \int_a^b f_n(x)$?
3. האם $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim \ f_n$?

כנ"ל עבור טור $\sum^{\infty} u_n(x)$: ברור ש:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx$$

האם

$$?\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx$$

בדרך כלל, התשובה היא שלילית.

דוגמא. כאן f_n מוגדרת על $[0,1]$, שווה 0 פרט לקטע $[1/n, 2/n]$, היכן שהגרף שלה הוא "אוהל" עם מכסימום ב: $(1.5/n, n)$. אז

$$f_n(x) \to f(x) \equiv 0$$

(כי בכל נקודה קבועה $x_0 \neq 0$, המשולש לבסוף משמאל לנקודה). אבל $\int_0^1 f_n(x) \equiv 1/2$ לכל n בעוד ש: $\int_0^1 f(x) = 0$.

הערה. אם ניקח בגרף גובה n^2, אז נקבל

$$\int_0^1 f_n(x) = n/2 \to \infty .$$

משפט. תהיינה $f_n(x)$ פונקציות רציפות ב- $[a,b]$ אשר מתכנסות במ"ש ל- $f(x)$. אז $f(x)$ רציפה ו:

$$\int_a^x f_n(t)dt \longrightarrow \int_a^x f(t)dt$$

במידה שווה עבור x ב: $[a,b]$.

הוכחה: $f \longrightarrow f_n$ במ"ש, ולכן בהינתן $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$ כך ש: $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ לכל $n > N(\epsilon)$. לכן

$$|\int_a^x f_n - \int_a^x f| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt$$
$$< (x-a)\cdot\epsilon \leq (b-a)\epsilon$$

ניסוח לטורים: נתון כי הטור $\sum\limits_{k}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במ"ש ל- $S(x)$ ב- $[a,b]$. אזי

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^x u_k(t) \to \int_a^x S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k(t)dt$$

כלומר

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^x u_k(t) \to \int_a^x (\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t))dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x u_k(t)dt$$

משפט. (בלי הוכחה) אם f_n אינטגרביליות ב- $[a,b]$ ו- $f_n \longrightarrow f$ במ"ש אז f אינטגרבילית ו-

$$\int_a^x f_n(t) \longrightarrow \int_a^x f(t)dt \, .$$

(ראה מייזלר, עמ' 480)

גזירה של סדרות וטורים

גזירה הינה יותר מסובכת מאינטגרציה כי אם f_n קרוב ל- f אין זה אומר ש: f_n' קרוב ל- f'.
במילים אחרות: פעולת הגזירה אינה פעולה רציפה (על מרחב הפונקציות הגזירות) בעוד שאינטגרציה היא כן פעולה רציפה. זו הסיבה שנהוג לתרגם משוואות דיפרנציאליות למשוואות אינטגרליות.

משפט. יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ טור של פונקציות בעלות נגזרות רציפות על $[a,b]$. נתון ש:
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס על $[a,b]$ וסכומו $S(x)$.
2. $\sum\limits^{\infty} u_n'(x)$ מתכנס במידה שווה על $[a,b]$.

אזי

א. $\sum\limits^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במידה שווה על $[a,b]$ ו-
$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

ב. הסכום $S(x)$ הוא פונקציה גזירה.

ג. קיים $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, כלומר

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}u_n(x)$$

<u>הוכחה:</u> נתון ש: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ מתכנס במידה שווה. נסמן את סכומו ב- $\varphi(x)$. נתון ש: $u_n'(x)$ רציפות, לכן $\varphi(x)$ רציפה. לפי המשפט על אינטגרציה,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt = \int_a^x (\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t))dt$$

$$= \int_a^x \varphi(t)dt$$

וכאן ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^x u_n')$ היא במ"ש.

מצד שני, $u_n'(t)$ רציפות, ולכן

$$\int_a^x u_n'(t)dt = u_n(x) - u_n(a)$$

ומקבלים ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \int_a^x \varphi(t)dt$$

וההתכנסות במ"ש. אבל $\sum u_n(a)$ טור של
קבועים (כאן השתמשנו בהנחה 1.), ולכן
התכנסות $\sum^{\infty} u_n(x)$ היא במ"ש.

<u>הערה.</u> אי אפשר להסתפק רק ב 2 ולוותר על 1
כי אז יכולנו להחליף את $u_n(x)$ ב- $u_n(x) + C$
שהיה מקלקל את ההתכנסות של $\sum^{\infty} u_n(x)$,
כלומר היה מצב שבו $\sum [u_n(x) - u_n(a)]$
מתכנס אבל כל אחד מהסכומים
$\sum u_n(x)$, $\sum u_n(a)$ מתבדר.

קיבלנו לפיכך

$$S(x) - S(a) = \int_a^x \varphi(t)$$

מכיון ש- φ רציף נובע כי $S(x)$ גזיר ו-

$$S'(x) = \varphi(x) = \sum_1^\infty u_n'(x)$$

<u>הערה.</u> במקום להניח ב: 1 כי $\sum u_n(x)$ מתכנס עבור כל x, מספיק היה להניח ב: 1 כי $\sum u_n(a)$ מתכנס. 2 כמובן נחוץ.

טורי חזקות

בשלב הבא נבחר $u_n(x) = a_n x^n$ ונסתכל על טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

או על פונקציות $u_n(x) = a_n (x - x_0)^n$ שהיא הזזה ב: x_0, ואז מתיחסים לטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \,.$$

<u>משפט.</u> אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = \alpha$, אז הוא מתכנס בהחלט לכל $|x| < |\alpha|$.

הוכחה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\alpha^n$ מתכנס, לכן $\lim_{n\to\infty} a_n\alpha^n = 0$, ולכן $|a_n|\alpha^n \le M$ לכל n. (ממקום מסוים $n > N$ בגלל קיום הגבול, ועבור N האברים הראשונים - מספרם סופי.)

לכן לכל $|x| < |\alpha|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\alpha^n| \cdot |\ \frac{x}{\alpha}\ |^n \le \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot |\ \frac{x}{\alpha}\ |^n$$

שהוא טור גיאומטרי מתכנס.

הערה. המשפט מדבר על תחום סימטרי $(-|\ \alpha\ |, |\ \alpha\ |\ )$ ולא אומר דבר על קצותיו.

משפט. לכל טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש רדיוס התכנסות R, $0 \le R \le \infty$, כך שהטור

מתכנס עבור $|x| < R$ ומתבדר עבור
$|x| > R$. (אין שום טענה על $x = \pm R$.)
($R = \infty$ פרושו: מתכנס לכל x, ו: $R = 0$
פרושו: לא מתכנס לאף $x \neq 0$.)

<u>הוכחה:</u> נסמן ב- E את קבוצת כל הנקודות x
עבורן $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס. ברור ש: $E \neq \emptyset$ כי
$E \ni 0$.

נגדיר את R ע"י

$$R = \sup\{\, |x| : \ x \in E \,\} ,$$

וברור ש: $R \geq 0$.

<u>מקרה א'</u>: $\boxed{0 < R < \infty}$.

ניקח $|x| < R = \sup E$. אז קיים $\alpha \in E$ כך ש- $|x| < |\alpha| < R$. מאחר ו: $\alpha \in E$ הטור מתכנס עבור α, ולכן מתכנס בהחלט עבור x.

אם $|x| > R = \sup E$ אז $x \notin E$ ולכן הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לא מתכנס.

<u>מקרה ב'</u>: $\boxed{R = 0}$.

אז לכל $|x| > R = 0$ הטור לא מתכנס.

<u>מקרה ג'</u>: $\boxed{R = \infty}$.

לכל x ממשי יש $\alpha \in E$ כך ש-
$|x| < \alpha < R = \sup E = \infty$ ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל x.

הגדרה. R נקרא רדיוס ההתכנסות, ו:
$(-R, R)$ נקרא קטע ההתכנסות.

אין שום אינפורמציה על הנקודות $x = \pm R$.

דוגמאות.

(א) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס עבור $|x| < 1 = R$

(ב) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{n})^n$ מתכנס בהחלט לכל x כי
עבור $n > 2|x|$ מתקיים $(\frac{1}{2})^n > |(\frac{x}{n})^n|$.
מקבלים לכן $R = \infty$.

(ג) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ מתבדר לכל $x \neq 0$ כי $|nx| > 1$ עבור n גדול מספיק. לכן יוצא ש: $R = 0$.

<u>משפט.</u> רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

<u>הוכחה:</u> נסמן $c = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

א. נניח ש: $0 < c < \infty$ וניקח $|x| > \frac{1}{c}$. אז

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot c > 1$$

והטור מתבדר.

עבור $|x| < \frac{1}{c}$ נקבל

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot c < 1$$

והטור מתכנס. לכן $R = \frac{1}{c}$ במקרה זה.

ב. אם $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = c = 0$ אז

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot c = 0 < 1$$

לכל x והטור מתכנס לכל x. לכן $R = \infty$
במקרה זה, ואכן $R = 1/c$.

ג. אם $c = \infty$ אז לכל x הטור מתבדר כי

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \infty > 1,$$

ולכן $R = 0$, $R = 1/c$.

מבחן המנה. בוחנים קיום של $1 < \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ו: $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. שני מספרים אלה לא בהכרח שוים ולא תמיד יתנו לנו את R^{-1}, ונקבל תוצאה רק כשהם שווים:

משפט. אם קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R_0$$

אזי הוא רדיוס ההתכנסות R של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

הוכחה:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

והגבול הזה $L=|x|/R_0$ הינו גדול או קטן מ: 1 בהתאם לכך אם $|x|$ גדול או קטן מ: R_0, שהוא $\lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|$, שהוא לכן רדיוס ההתכנסות.

<u>הערה.</u> רדיוס ההתכנסות מוגדר באמצעות $\limsup$, שתמיד קיים. במבחן המנה דרוש קיום של גבול המנה, שלא תמיד קיים.

<u>הערה.</u> אין שום טענה על $x=\pm R$. למשל עבור הטור $\sum x^n/n^2$ יש התכנסות ב: $[-1,1]$, עבור הטור $\sum x^n/n$ יש התכנסות ב: $[-1,1)$ ועבור הטור $\sum x^n$ יש התכנסות ב: $(-1,1)$. לכל השלושה רדיוס ההתכנסות הוא 1.

התכנסות במ"ש של טורי חזקות

דוגמא.

$$R = 1 \quad , \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ואז

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$$
$$= \frac{x^{n+1}}{1-x} \to 0$$

הטור מתכנס נקודתית לכל $|\,x\,| < 1$ אבל לא במידה שווה ב- $(-1,1)$ כי

$$.R_{n-1}(\sqrt[n]{1/2}) = \frac{1/2}{1-\sqrt[n]{1/2}} \to \infty$$

אבל ההתכנסות היא כן במ"ש ב: $[-\alpha, \alpha]$ אם $0 < \alpha < 1$ כי

$$.R_n(x) = \frac{|\, x \,|^{n+1}}{|1-x|} \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \longrightarrow 0$$

<u>משפט.</u> אם ל: $\sum a_n x^n$ יש רדיוס התכנסות $R > 0$ ו- $0 < r < R$ אז הטור מתכנס במ"ש ב: $[-r, r]$.

<u>הערה.</u> כנ"ל בכל קטע $[a, b] \subset (-R, R)$ כי יש $r < R$ כך ש- $-R < -r \leq a < b \leq r < R$.

<u>הוכחה:</u> לכל $-r \leq x \leq r$ קיים

$$, |a_n x^n| \leq |a_n| r^n$$

אבל טור הקבועים $\sum |a_n| r^n$ מתכנס, ולפי משפט קודם $\sum |a_n x^n|$ מתכנס במ"ש ב: $[-r,r]$. (משתמשים בקריטריון קושי.)

מה קורה אם הטור המקורי מתכנס גם בנקודות הקצה $x=R$? אז ההתכנסות במ"ש מגיעה עד לקצה R.

<u>משפט.</u> יהי $0<R<\infty$ רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.

א. אם הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס ב: $x=R$, אז הוא מתכנס במ"ש ב: $[0,R]$ (וכמובן ב- $[-r,R]$ לכל $0<r<R$).

ב. אם הטור מתבדר ב: $x=R$ אז ההתכנסות ב: $(-R,R)$ אינה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>. א. נניח שהטור מתכנס ב- $x = R$.

<u>תזכורת</u>: נוסחת הסכום בחלקים היא

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} B_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$$

$$B_k = \beta_1 + \ldots + \beta_k, \qquad B_0 \equiv 0$$

<u>נתון</u> שהטור מתכנס ב: $x = R$. לכן לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k R^k \right| < \epsilon \, .$$

ניקח $0 \le x \le R$. אז

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k| = |\sum_{k=n}^{m} \underbrace{(a_k R^k)}_{\beta_k} \underbrace{(\frac{x}{R})^k}_{\alpha_k}|$$

כאן ניקח

$$B_k = \beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_k$$

ונקבל עבור הביטוי הקודם

$$\leq |\alpha_m| \cdot |B_m| + \sum_{k=n}^{m-1} |B_k| \cdot |\alpha_{k+1} - \alpha_k|$$
$$= \left(\frac{x}{R}\right)^m \cdot |B_m| + \sum_{k=n}^{m-1} |B_k| \cdot [\ (\frac{x}{R})^k - (\frac{x}{R})^{k+1}\ ]$$

אבל

$$|B_k| = |\sum_{i=n}^{k} a_i R^i| < \epsilon$$

לכל $N(\epsilon) < n \leq m$, ולכן

$$\leq \epsilon[(\frac{x}{R})^m + ((\frac{x}{R})^n - (\frac{x}{R})^{n+1}) + \ldots$$
$$((\frac{x}{R})^{m-1} - (\frac{x}{R})^m)] = \epsilon(\frac{x}{R})^n \leq \epsilon$$

לכל $R \leq x \leq 0$ ולכל $N < n \leq m$. לכן ההתכנסות היא במ"ש על $[0, R]$.

ב. נניח שהטור מתבדר ב- $x = R$. נניח בשלילה שההתכנסות היא במ"ש ב: $(-R, R)$,

אז לכל $\epsilon > 0$ קיים $N = N(\epsilon)$ כך ש:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכל $-R < x < R$ ולכל $N < n < m$.

בסכום הסופי הזה ניקח $x \to R$ ואז

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k R^k\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

לכל $N(\epsilon) < n < m$. זה אומר שמתקיים קריטריון Cauchy להתכנסות הטור ב- $x = R$, בסתירה לנתון שהטור לא מתכנס. לכן ההנחה מופרכת.