אלגברה 104167

תאריך: 23/11/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: מטריצות

מספר תרגול: 32

שם המתרגל: גלית מזרחי

פרק אחד-

8. תהי $A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ כאשר $z_{1,2,3}$ הם שלוש הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

כמו כן נתונות המטריצות: $C=(1 \quad 0 \quad 0)$ $B=(1 \quad 1 \quad 1)^t$. חשב את:

א) AB ; ב) CA

15. נגדיר מטריצה $(E_{m\times n})^{k,l}$ כמטריצה מסדר $m\times n$ אשר כל איבריה הם אפס פרט לאיבר בשורה ה- k ועמודה l השווה ל- 1.

א) תהי $A\in F^{q\times m}$ חשב את $A\cdot(E_{m\times n})^{k,l}$.

ב) תהי $B\in F^{n\times p}$ חשב את $(E_{m\times n})^{k,l}\cdot B$.

ג) חשב את המכפלה $(E_{m\times n})^{k,l}\cdot(E_{n\times m})^{l,k}$.

16. הוכח שאם C היא מטריצה ריבועית מסדר $n\times n$ ומתחלפת בכפל עם כל מטריצה ריבועית מאותו הסדר אז C היא בהכרח מטריצה סקלרית (כלומר $C=kI_n$ כאשר k סקלר).

רמז: הסתמך על תרגיל 15 והוכח את השלבים הבאים:

א) אם C מתחלפת בכפל עם כל מטריצה ריבועית אז היא מתחלפת בפרט עם $(E_{n\times n})^{k,k}$ ולכן C היא אלכסונית.

ב) כמו כן C מתחלפת בפרט עם $(E_{n\times n})^{k,1}$ לכל $k=2,3,\dots,n$ ואז $c_{kk}=c_{11}$ כלומר סקלרית.

24.

y יקרא צירוף ליניארי של $x_1,x_2\dots x_n$ אם קיימים סקלרים $a_1,a_2..a_n$ כך ש

א) הראה שאם $Ax=b$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $x\in F^{n\times 1}$, $b\in F^{m\times 1}$ (F שדה כלשהו) אז b

$y=a_1x_1+a_2x_2+\dots a_3x_3$

ניתן לכתיבה באמצעות עמודות A (כלומר b הוא צירוף ליניארי של עמודות A).

ב) הראה שאם $xA=b$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $x\in F^{1\times m}$, $b\in F^{1\times n}$ (F שדה כלשהו) אז b ניתן לכתיבה באמצעות שורות A (כלומר b הוא צירוף ליניארי של שורות A).

ג) הראה שאם $AB=C$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times k}$, $C\in F^{m\times k}$ (F שדה כלשהו) אז עמודות C ניתנות לכתיבה באמצעות עמודות A ושורות C ניתנות לכתיבה באמצעות שורות B.

25. הפרך ע"י דוגמא או הוכח את הטענות הבאות :

א) אם $AB = BA$ אז A מתחלפת בכפל עם B^2.

ב) אם $AB = BA$ אז A מתחלפת בכפל עם B^t.

~~ג) מכפלה של מטריצות אנטי-סימטריות מאותו הסדר היא תמיד מטריצה אנטי סימטרית.~~

ד) אם AB היא אנטי סימטרית אז $AB = BA$.

פרק 13

שאלה מספר 1.

מועד 1

א. מצא שלושה מספרים מרוכבים z_1, z_2, z_3 המקיימים את כל התנאים הבאים :

a. $|z_1|,|z_2|,|z_3|$ הם מספרים שלמים שמכפלתם שווה ל- 14 ו- $|z_1|<|z_2|<|z_3|$.

b. $\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = 120^\circ$ ו- $\arg(z_1) = \frac{1}{2}\arg(z_2) = \frac{1}{3}\arg(z_3) =$.

ב. תהי A מטריצה לא סקלרית ממשית 2×2 כך ש- A^2 היא מטריצה סקלרית. הוכח כי סכום איברי האלכסון הראשי של A הוא אפס.

16 נקודות.

שאלה מספר 1.

מועד 7

א. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ מעל Z_5. מצא מטריצה B מעל Z_5 כך שיתקיים השוויון $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

פרק 14-

עמוד 16

שאלה מספר 5.

לפניך שלוש טענות. עבור כל אחת מהן עליך לקבוע אם היא נכונה או לא. אם לדעתך הטענה נכונה, יש להוכיח אותה. אם לדעתך הטענה אינה נכונה, עליך להביא דוגמא נגדית.

א. תהינה A ו- B שתי מטריצות ריבועית ממשיות שונות מאפס כך ש $AB = A$, אז בהכרח $B = I$.

8. יהי $A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ כאשר $z_{1,2,3}$ הם שלוש הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

נעזר: $z=r\text{cis}\theta$, לפי ההגדרה $z^3=r^3\text{cis}(3\theta)$

את i ניתן לרשום כך: $\text{cis}90$

נשווה בין שני הצדדים:

$r^3\text{cis}(3\theta)=\text{cis}90°$

$r^3=1 \qquad 3\theta=90+360k$

$r=1 \qquad \theta=30+120k \qquad k=0,1,2$

$k=0: \quad z_1=\text{cis}30°=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$k=1: \quad z_2=\text{cis}150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$k=2: \quad z_3=\text{cis}270°=0-i=-i$

מכאן: $A=\begin{pmatrix} \text{cis}30 & \text{cis}150 & \text{cis}270 \\ \text{cis}150 & \text{cis}270 & \text{cis}30 \\ \text{cis}270 & \text{cis}30 & \text{cis}150 \end{pmatrix}$, נתון:

$B=(1\ 1\ 1)^t$

$C=(1\ 0\ 0)$

לפי הגדרת טרנספוז

$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

א) $A_{3\times3}\cdot B_{3\times1}=AB_{3\times1}=\begin{pmatrix}\text{cis}30+\text{cis}150+\text{cis}270\\ \text{cis}30+\text{cis}150+\text{cis}270\\ \text{cis}30+\text{cis}150+\text{cis}270\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\text{cis}30+\text{cis}150+\text{cis}270=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-i=0$

ב) $C_{1\times3}\cdot A_{3\times3}=CA_{1\times3}=\begin{pmatrix}\text{cis}30+0\cdot+0\cdot & \text{cis}150+0\cdot0 & \text{cis}270+0\cdot+0\cdot\end{pmatrix}$

$=(\text{cis}30 \quad \text{cis}150 \quad \text{cis}270)$

15. נגדיר מטריצה $(E_{m\times n})^{k,l}$ כמטריצה מסדר $m\times n$ אשר כל איבריה הם אפס פרט לאיבר בשורה ה-k והעמודה ה-l השווה ל-1.

א) תהי מטריצה $A\in F^{q\times m}$. חשב את $A\cdot(E_{m\times n})^{k,l}$

$$A_{q\times m}\cdot(E_{m\times n})^{kl} = AE_{q\times n}\left(0\begin{pmatrix}a_{1l}\\ a_{ql}\end{pmatrix}0\right) \rightarrow \begin{pmatrix}0 & \begin{matrix}a_{1l}\\ a_{2l}\\ \vdots\\ a_{ql}\end{matrix} & 0\end{pmatrix}$$

$$AE = \sum_{x=1}^{q} a_{xl}$$

בעמודה l, כל השאר אפסים.

ב. תהי מטריצה $B\in F^{n\times p}$ חשב את $(E_{m\times n})^{kl}\cdot B$

$$(E_{m\times n})^{kl}\cdot B_{n\times p} = \sum B_{m\times p}\begin{pmatrix}0\\ B_{l1} \quad B_{lp}\\ 0\end{pmatrix}$$

ג. חשב את המכפלה $(E_{m\times n})^{kl}\cdot(E_{n\times m})^{lk}$

$C = EE_{m\times m}$ נגדיר $(C)_{k,k} = 1$,   השאר $= 0$

16. הוכח שאם C היא מטריצה מסדר n×n ומתחלפת בכפל עם
כל מטריצה ריבועית מאותו הסדר אז C היא מוכרחה מטריצה סקלרית
(כלומר $C=kI_n$ כאשר k סקלר)

נראה תחילה כי C מתחלפת עם כל מטריצה, אז בפרט היא מתחלפת
עם אי"ן $(E_{n\times n})$ הריבועית ולכן כמו שהוכחנו בתרגיל הקודם בסעיפים
א' וב' C חייבת להיות אלכסונית (אפסים מחוץ לאלכסון הראשי).

$$C\cdot E\begin{pmatrix} & c_{1k} & \\ & \vdots & \\ 0 & \underline{c_{kk}} & 0 \\ & \vdots & \\ & c_{nk} & \end{pmatrix} = E\cdot C\begin{pmatrix} & 0 & \\ c_{k1} & \cdots\ \underline{c_{kk}}\ \cdots & c_{kn} \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

בגלל ש־$EC=CE$ האיבר היחידי השונה מאפס זה c_{kk}
כמו כן, בגלל שנתון ש־C היא מטריצה שמתחלפת עם כל
מטריצה ריבועית מאותו הסדר היא מתחלפת בפרט עם "י" $(E_{n\times n})$
לכל $k=2,3,\ldots n$ של $c_{kk}=c_{11}$, כלומר C סקלרית. מ.ש.ל.

(24) Y ייקרא צירוף ליניארי של $x_1,x_2\dots x_n$ אם קיימים סקלרים $a_1,a_2\dots a_n$ כך ש $Y=a_1x_1+a_2x_2+\dots a_nx_n$.

א) הוכח שאם $Ax=b$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $x\in F^{n\times 1}$, $b\in F^{m\times 1}$ אז b ניתן להכתיבה כצירוף עמודות A.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x=\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

אפשר להסתכל על כפל מטריצה וקטור עמודה:

$$a_{11}\cdot x_{11}+a_{12}\cdot x_{21}+\dots+a_{1n}\cdot x_{n1}$$
$$a_{21}\cdot x_{11}+a_{22}x_{21}+\dots+a_{2n}\cdot x_{n1}$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\cdot x_{11}+a_{m2}x_{21}+\dots+a_{mn}\cdot x_{n1}$$

כלומר המספרים היחידים שכופלים את x_{11} למשל הם העמודה הראשונה. לכן ניתן לכתוב את b:

$$\sum_{l=1}^{n} A_{\downarrow l}\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{מספר } x}}{x}$$

בין x_{11} ל-x_{n1}.

ב) הראה שאם $xA=b$ כאשר $A\in F^{m\times n}$, $x\in{}^{1\times m}$, $b\in F^{1\times n}$ אז b ניתן לכתיבה כצירוף שורות A.

באופן דומה לסעיף א', אפשר להסתכל על כפל וקטור שורה במטריצה:

$$x_{11}\cdot a_{11}+x_{12}\cdot a_{21}+\dots+x_{1m}\cdot a_{m1} \quad x_{11}a_{12}+x_{12}a_{22}+\dots+x_{1m}\cdot a_{m2} \quad \dots$$

כלומר, המספרים היחידים ש- x_{11} למשל כופל הם השורה הראשונה.

לכן, ניתן לכתוב את b כצירוף שורות A.

$$\sum_{l=1}^{n} x_{1l}\cdot A_{l\to}+\sum_{l=1}^{n} x_{1l}\cdot A_l \dots$$

ג) הראה שאם $AB=C$ ניתנת לכתיבה: עמודות C כצירוף עמודות A ושורות C כצירוף שורות B.

- מדויק כמו שהראיתי בסעיפים א' וב', רק שהפעם מדובר על שתי מטריצות שכופלות זו את זו ולא על וקטור עמודה או שורה. כלומר, היחידים שכופלים את b_{11} הם העמודה הראשונה של a, והיחידים שכופלים את a_{11} הם השורה הראשונה ב-b...

25 הפרך ע"י דוגמא או הוכח את הטענות הבאות:

א) אם $AB=BA$ אז A מתחלפת בכפל עם B^2.

<u>שלב</u> הוכחה:

נתון: $AB=BA$

גדלים	מטריצות
$m\times n$	A
$l\times k$	B
$m\times k$, $n=l$ בגלל	AB
$l\times n$ $m=k$ בגלל	$BA=AB$
$l\times n = m\times k$ $\downarrow \quad \downarrow$ $n\times n = m\times m$ $\Downarrow$ $n=m$	$BA=AB$

נובע מטריצות A ו-B הן ריבועיות. נסמן אותן כמטריצות מסדר $n\times n$.

$$A_{n\times n}\cdot B^2_{n\times n} = B^2_{n\times n}\cdot A_{n\times n}$$

מוגדר רק כשהמטריצה ריבועית.

צ"ל: $AB^2=B^2A$

אגף שמאל: $AB^2 \underset{\text{הגדרת חזקה של מטריצה}}{=} A(BB) \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} (AB)\cdot B \underset{\text{נתון } AB=BA}{=} (BA)B \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} B(AB) \underset{\text{נתון } BA=AB}{=} B(BA)$

$\underset{\text{לפי הגדרת חזקה}}{=} B^2A$

מכאן, הוכחנו שוויון $AB^2=B^2A$.

25 ב. אם $AB=BA$ אז A מתחלפת בכפל עם B^t.

לא נכון, דוגמא נגדית:

$$A\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 26\\ 39 & 56\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 26\\ 39 & 56\end{pmatrix}$$

$$B^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$AB^t=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -\\ - & -\end{pmatrix}$$

$$B^tA=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & -\\ - & -\end{pmatrix}$$

אין צורך
להמשיך.
שוויון מטריצות
מתקיים כאשר
איבר שמטריצה
אחת שווה לאיבר
מאותו מקום בשנייה.

$$AB^t \neq B^tA$$

ג. אם AB אזי סימטרית אז $AB=BA$. לא נכון, דוגמא:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ אזי סימטרית

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

פרק 13 עמוד 1 שאלה 1:

תהי A מטריצה לא סקלרית ממשית 2×2 כך ש-A^2 הינה מטריצה סקלרית. הוכח כי סכום איברי האלכסון הראשי הוא אפס.

נסמן מטריצה A כך: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a\neq d$ או $b\neq 0, c\neq 0$

$$A^2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

במטריצה סקלרית האיברים מחוץ לאלכסון הראשי שווים לאפס, ובנוסף איברי האלכסון הראשי שווים זה לזה, מכאן:

$$\text{וגם}\begin{cases} a^2+\cancel{bc}=\cancel{cb}+d^2 \longrightarrow a^2=d^2 \\ ab+bd=ca+cd=0 \end{cases}$$

$b(a+d)=0$ $\qquad$ $c(a+d)=0$

$b=0$ או $\boxed{a=-d}$ $\qquad$ $c=0$ או $\boxed{a=-d}$

$c\neq0$ נתון

$b\neq0$ נתון.

אם נציב במשוואה הראשונה את מה שהתקבל בשנייה נקבל:

$a^2-d^2=0$

$a^2-(-a)^2=0 \longrightarrow$, מהמשוואה השנייה קיבלנו $a=-d$, כלומר, $\underline{0=a+d}$

$a=0$

ספק זמן! כלומר, הוכחנו כי מהנתונים נובע שסכום איברי האלכסון (d, a) שווה לאפס.

פרק 13 עמוד 7 שאלה 1

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ מעל Z_5. מצאו מטריצה

B מעל Z_5 כך שיתקיים השוויון $AB=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}$

נסמן מטריצה כך $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}$$

מעל מרוכב

$$\begin{cases}(1)\ a+2c=2\\(2)\ b+2d=4\\(3)\ 3c=0\\(4)\ 3d=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{array}{l}(3):3c=0\xrightarrow{\cdot 2}6c=0\longrightarrow \underline{c=0}\\(4):\ 3d=2\xrightarrow{\cdot 2}6d=4\longrightarrow \underline{d=4}\\(1)+(3):\ a+2\cdot 0=2\longrightarrow \underline{a=2}\\(2)+(4):\ b+2\cdot 4=4\longrightarrow b=-4\longrightarrow \underline{b=1}\end{array}$$

כאן, מצאנו כי המטריצה B נראית כך: $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&4\end{pmatrix}$

(למטריצה יש הצגות נוספות בגלל שהיא מעל שדה סופי).

פרק 14 עמוד 16 שאלה 5

תהיינה A ו-B שתי מטריצות ריבועיות ממשיות, שונות מאפס

כך ש- $AB=A$, נציג הפרכה $B=I$:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=A$$