חשבון אינפיניטסימלי 3 – ת"ב 4

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

27/12/2016

תאריך הגשה

12

קבוצת תרגול

שאלה 1:

אומרים כי בהנתן $M \subset \mathbb{R}^n$ יריעה מממד k, אזי פונקציה $\phi: M \mapsto \mathbb{R}^m$ הינה ממחלקת $C^1(M, \mathbb{R}^m)$ אם לכל $p \in M$, קיימת פרמטריזציה (h, V) כאשר $h: V \subset \mathbb{R}^k \mapsto M$ המכילה את p, כך ש-$\phi \circ h: V \mapsto \mathbb{R}^m$ היא העתקה $C^1(V, \mathbb{R}^m)$.

א. נרצה להראות כי העתקה זו מוגדרת היטב, כלומר אינה תלויה בבחירת הפרמטריזציה. לשם כך, נשים לב כי לכל נקודה p שנבחר, אם נניח קיום פרמטריזציה $h: V \subset \mathbb{R}^k \mapsto M$ אזי על פי הגדרה היא $C^1(V, \mathbb{R}^n)$, רגולרית ומכאן שגם חד-חד ערכית ועל בסביבה זו. בהנתן, עתה פרמטריזציה אחרת $h': V' \subset \mathbb{R}^k \mapsto M$ נקבל תכונות דומות.
לכן, אם נתבונן בפרט ב-$V \cap V'$, נקבל כי שתי הפונקציות הפיכות, חד-חד ערכיות ועל, ובפרט ההופכיות שלהן גזירות ברציפות בתחום זה. כמובן ש-$p \in V \cap V'$ וכן מתקיים:

$$(\phi \circ h) \circ (h^{-1} \circ h'): (V \cap V') \mapsto \mathbb{R}^m$$

גזירה ברציפות כהרכבה של פונקציות גזירות ברציפות בתחום וזה וכן מתקיים:

$$(\phi \circ h) \circ (h^{-1} \circ h') = \varphi\left(h\left(h^{-1}\left(h'(x)\right)\right)\right) = \varphi\left(h'(x)\right) = (\varphi \circ h')(x)$$

כלומר אכן ϕ גזירה ברציפות ואינה תלויה בבחירת הפרמטריזציה, כנדרש.

■

ב. עלינו להראות כי $\phi: M \mapsto \mathbb{R}^m$ הינה $C^1(M, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow$ לכל $p \in M$ קיימת סביבה U המכילה את p ופונקציה $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ כך שמתקיים $\Phi|_{\mathrm{M}} = \phi$.

$\Rightarrow$ נניח כי אכן לכל $p \in M$ קיימת סביבה U המכילה את p ופונקציה $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ כנדרש. נזכור כי M יריעה מממד k, ולכן, על פי הגדרה קיימת $p \in U' \subset \mathbb{R}^n$, עבורה קיימת קבוצה פתוחה $V \subseteq \mathbb{R}^k$ והעתקה $h: V \mapsto U' \cap M$ שהיא חד-חד ערכית ועל, וכן $h \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$.
נתבונן בקבוצה $U \cap U' \subseteq \mathrm{M}$ המכילה כמובן את p, ונגדיר את ההעתקה:

$$h|_{V'}: \overbrace{h^{-1}(U \cap U')}^{\subseteq \mathbb{R}^k} \mapsto U \cap U' \quad h|_M(u) = h(u)$$

וזו חד-חד ערכית ועל (היות ולכל $u \in U \cap U'$ יש מקור ב-V הנמצא על פי הגדרה ב-$h^{-1}(U \cap U')$ היות ו-h על, והחד-חד ערכיות נובעת מחד-חד ערכיות h).
בפרט, נובע מכך גם כי $h|_{V'} \in C^1(h^{-1}(U \cap U'), \mathbb{R}^n)$ מגזירות h ברציפות. אך מכאן נובע כי זו פרמטריזציה סביב p של M.
עבור פרמטריזציה זו, מתקיים:

$$\phi \circ h|_{V'} = \Phi|_M \circ h|_{V'}: h^{-1}(U \cap U') \mapsto \mathbb{R}^m$$

אך מסעיף א' ראינו כי מספיק להראות כי לכל p, קיימת פרמטריזציה עבורה $\phi \circ h$ גזירה ברציפות, וזה בדיוק מתקיים מהנ"ל כנדרש.

$\Leftarrow$ תהא $p \in M$. היות ו-M יריעה אנו יודעים כי קיימת $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה וכן קיימת $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ כך שמתקיים:

$$U \cap M = \{x \in U | g(x) = 0\} \quad rank\ Dg(x) = n - k$$

בנוסף אנו יודעים כי קיימת סביבה $p \in V \times W \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (כשנניח כי ניתן לכתוב $p = (p', p'') \in V \times W$), וקיימת פונקציה $h \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-k})$ רגולרית המקיימת:

$$M \cap (V \times W) = \{(x, h(x) | x \in V\}$$

מעתה נעבוד עם איברים מהצורה (x, y) כך ש-$x \in V, y \in W$ וכן $V \times W$ הינה, כאמור, סביבה של p ונסמנה U לשם נוחות.
נגדיר:

$$\Phi(x, y) = \phi\left(x, h(x)\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n-k} y_i - \left(g(x)\right)_i\right) \quad \forall (x, y) \in U$$

בפרט, היות ו-h רגולרית בסביבה זו אנו יודעים כי היא חד-חד ערכית. כלומר, אנו יודעים כי $(x', y) \in M \cap U$ אם ורק אם $y = h(x')$, אך מחד-חד ערכיות h נובע כי $h(x) = h(x') \Longrightarrow x = x'$.
לכן, נשים לב כי לכל $(x, y) \in M \cap U$ מתקיים:

$$(x, y) = \left(x, h(x)\right) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-k} y_i - \left(g(x)\right)_i = 0$$

ולכן:

$$\Phi|_M: M \mapsto \mathbb{R}^m \quad \Phi|_{\mathrm{M}}(x, y) = \phi\overbrace{\left(x, h(x)\right)}^{=(x,y)}\left(1 + \overbrace{\sum_{i=1}^{n-k} y_i - \left(g(x)\right)_i}^{=0}\right) = \phi(x, y)$$

וכן הפונקציה גזירה ברציפות כמובן כהרכבה של פונקציות גזירות ברציפות.

■

שאלה 2:

נתונות אם כן, $M \subset \mathbb{R}^m$ וכן $N \subset \mathbb{R}^n$ שתי יריעות חלקות. נניח כי $f: M \mapsto N$ העתקה C^1. נניח כי $f(M) = N$. נרצה להראות כי:

$$Df(p)[T_pM] \subset T_{f(p)}N$$

לשם כך, נתבונן בקבוצה:

$$T_pM = \left\{ \gamma'(t_0) \middle| \begin{matrix} \gamma: (a,b) \mapsto M & \gamma \in C^1 \\ t_0 \in (a,b) & \gamma(t_0) = p \end{matrix} \right\}$$

ויהא אם כן איבר מהצורה $\gamma'(t_0) \in T_pM$. כלומר, קיימת γ כמתואר לעיל המקיימת את הנדרש. נשים לב כי:

$$f \circ \gamma: (a,b) \mapsto N \quad \overbrace{f}^{\in C^1} \circ \overbrace{\gamma}^{\in C^1} \in C^1 \quad f(\gamma(t_0)) = f(p)$$

כלומר, $f \circ \gamma$ היא מסילה גזירה ברציפות המכילה את $f(p) \in N$, ולכן, על פי הגדרה:

$$(f \circ \gamma)'(t_0) \in T_{f(p)}N$$

אך מאידך מתקיים, על פי כלל השרשרת:

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(p)\gamma'(t_0) = Df(p)\gamma'(t_0) \in Df(p)[T_pM]$$

כלומר, לכל $Df(p)\gamma'(t_0) \in Df(p)[T_pM]$ מתקיים $Df(p)\gamma'(t_0) = \overbrace{(f \circ \gamma)}^{\text{מסילה}}{}'(t_0) \in T_{f(p)}N$. כנדרש.

■

שאלה 3:

נתונות $f: I \mapsto \mathbb{R}^n$ וכן $g: J \mapsto \mathbb{R}^n$ שתי מסילות חד-חד ערכית, גזירות ברציפות ורגולריות כך ש-$\Gamma = f(I) = g(J)$. כלומר שתי מסילות המתארות את אותו עקום.

א. נרצה למצוא פונקציה $h \in C^1(I, J)$ המקיימת $f(t) = g(h(t))$. נשים לב כי נתון ש-g חד-חד ערכית ועל ולכן מוגדרת הפונקציה ההפוכה באופן טבעי $g^{-1}: \Gamma \mapsto J$. אנו יודעים, כי היות ומתקיים:

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t))$$

וכן מתקיים:

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי היות ונתון $rank(g'(t)) = n$ לכל $t \in J$, נסיק כי בפרט $g_i'(t) \neq 0$ לכל $t \in J$. ומכאן שבכל J, הפונקציה $g_i(t)$ מונוטונית עולה/יורדת ממש לכל $t \neq 0$ ובפרט חד-חד ערכית[1]. נבחר $g_i: J \mapsto \mathbb{R}$ עבור $1 \leq i \leq n$ כלשהו.
נשים לב, כי לכל איבר $y \in g(J)$ קיים מקור יחיד (מהגדרת g כחד-חד ערכית), $t \in J$. בפרט נובע:

$$g(t) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \Longrightarrow g^{-1}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = g^{-1}(g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)) = t$$

אך מחד-חד ערכיות g_i לכל $1 \leq i \leq n$, נובע כי $g^{-1}(y) = g_i^{-1}(y_i)$.
לסיכום שלב זה, נזכיר כי מצאנו ש-g_i עבור $1 \leq i \leq n$ מקיימת:

- חד-חד ערכית.
- על.
- גזירה ברציפות (כנובע מגזירות ברציפות הפונקציה g).
- הפיכה.

לכן נוכל לרשום:

$$(g_i \circ g_i^{-1})'(t) = g_i'\left(g_i^{-1}(t)\right)\left(g_i^{-1}\right)'(t) = (id)'(t) = 1 \Longrightarrow \boxed{\left(g_i^{-1}\right)' = \frac{1}{g_i'\left(g_i^{-1}(t)\right)}}$$

היות ו-$g_i'(x) \neq 0$ לכל $x \in J$, נסיק בפרט כי גם הנגזרת של g_i^{-1} מוגדרת היטב בכל התחום ואף רציפה כהרכבה ומנה של פונקציות רציפות. עתה נוכל להגדיר:

---

[1] אם נניח בשלילה $g_i(t_1) = g_i(t_2)$ עבור $t_1 \neq t_2$, אזי מגזירות הפונקציה נובע קיום $t_1 < t_c < t_2$ כך ש-$g_i'(t_c) = 0$ בסתירה לרגולריות g.

$$G:\Gamma \mapsto J \quad G(y_1, y_2, \cdots, y_n) = g_i^{-1}(y_i)$$

ונשים לב כי אכן, באם מתקיים $g(t) = y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$, אזי:

$$g\big(G(y)\big) = g\big(G(y_1, \cdots, y_i, \cdots y_n)\big) = g\left(g_i^{-1}(y_i)\right) = g(t) = y$$

כלומר אכן הפונקציות הפוכות כנדרש.

שכפי שראינו קודם, הינה פונקציה מוגדרת היטב, גזירה ברציפות, וחד-חד ערכית ועל J. עבור פונקציה זו נגדיר:

$$h \coloneqq (G \circ f): I \mapsto J$$

פונקציה זו גזירה ברציפות כהרכבה של פונקציות גזירות ברציפות בתחומים המתאימים. כמו כן מתקיים:

$$\forall t \in I \quad g\big(h(t)\big) = g\left(G\big(f(t)\big)\right) = g\left(G\left(\overbrace{y}^{\in\Gamma}\right)\right) = y = f(t)$$

כמו כן, נשים לב כי h חד-חד ערכית כהרכבה של פונקציות חד-חד ערכיות בתחום המתאים, וכן היות והטווח של f הוא Γ נוכל להסיק מכך כי h על J (כי G על J) כנדרש.

■

ב. כפי שראינו, אורך העקום $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ניתן לחישוב על ידי פרמטריזציה $f: I \mapsto \mathbb{R}^n$ באמצעות הנוסחה $L(\Gamma) = \int_I |f'(t)|dt$. נרצה להראות כי בהנתן g פרמטריזציה אחרת, מתקיים $\int_I |f'(t)|dt = \int_J |g'(t)|dt$. לשם כך נרצה לבצע החלפת משתנים. ראינו מסעיף א' כי ניתן להגדיר פונקציה $h \in C^1(I,J)$ המקיימת:

$$f(t) = g\big(h(t)\big)$$

ולכן יתקיים:

$$\int_I |f'(t)|dt = \int_I \left|g\big(h(t)\big)'\right| dt = \int_I \left|g'\big(h(t)\big)\right| |h'(t)| dt$$

ונוכל עתה להגדיר משתנה חדש:

$$u = h(t), du = h'(t)dt$$

ולכן:

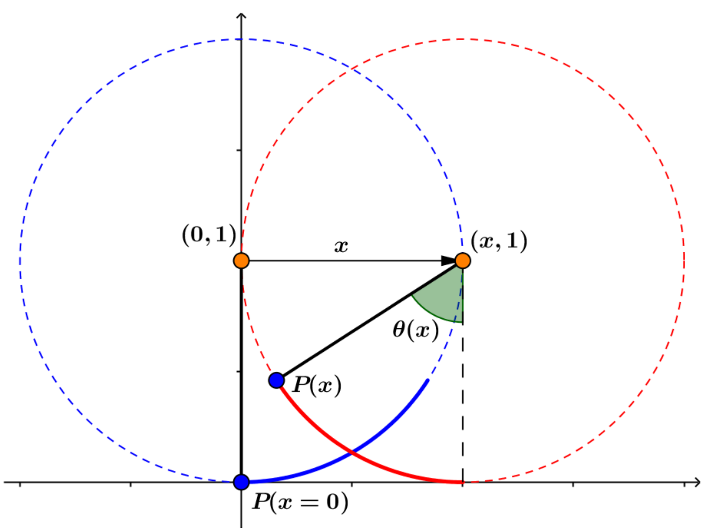
$$= \int_J |g'(u)|dt$$

כנדרש.

■

<u>שאלה 4:</u>

נרצה למצוא פרמטריזציה לציקלואיד המתואר על ידי נקודה קבועה על מעגל אשר "נעה" איתו כאשר מרכז המעגל נעל במקביל לציר x.



איור 1 – תיאור הבעיה – מעגל יחידה "מתגלגל" לאורך ציר ה-x

נפתח בזיהוי הנקודות בהן נעסוק.

$(0,1)$ – מרכז המעגל המקורי.

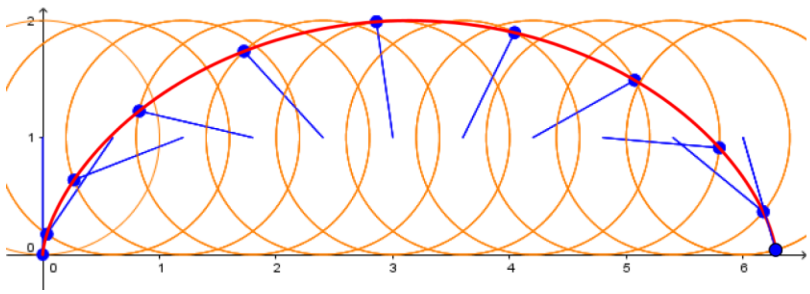
$P(x=0) = (0,0)$ – הנקודה בה נעסוק יחסית למיקום מרכז המעגל, כאשר בתחילת תנועת המעגל הוא נמצא בנקודה שבה $x = 0$.

$P(x)$ – הנקודה על המעגל לאחר שהמעגל התקדם כך שמרכזו נמצא כעת ב-$(x,1)$.

$\theta(x)$ – הזווית שנוצרת בין הנקודה $P(x)$ לבין האנך היורד ממרכז המעגל שבנקודה $(x,1)$ לכיוון ציר ה-x.

עתה נשים לב, כי על מנת שהמעגל יגיע באמצעות "גלגולו" לנקודה שבה $(x,1)$ היא מרכז המעגל, נסיק כי x (כאורך מהיקף המעגל, היה צריך לעבור על ציר ה-x (באיור 1 שמשמאל, הכוונה היא שאורך הרכיב של המעגל שצבוע בכחול היה צריך להיות מאורך x על מנת שלאחר שהמעגל יחצה את כולו, מרכז המעגל אכן ינוע מרחק אופקי של x). נחשב אם כן, עבור איזו זווית θ, לאחר שהמעגל ינוע כך ש-$\theta(x) = \theta$, החלק ההיקפי שלו שהיה על ציר ה-x יהיה שווה לאותו x.

עבור המעבר לקואורדינטות פולריות, כלומר, לאחר שנסמן:



$$\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{matrix} r = x^2 + y^2 = 1 \\ 0 < \theta < \theta(x) \end{matrix}$$

כאשר סימנו כי עבור העתקה זו מתקיים $J = r =$ 1, ולכן:

$$x \overset{\text{נדרוש}}{=} \int_0^{\theta(x)} d\theta = \theta(x)$$

אך נשים לב כי ניתן לתאר את $P(x)$ בכל נקודה על ידי:

$$P(x) = \big(x - \sin(\theta(x)), 1 - \cos(\theta(x))\big) \overset{\theta(x)=x}{=} (x - \sin x, 1 - \cos(x))$$

נחשב את אורכו של העקום שנוצר על ידי פרמטריזציה זו בתחום $0 < \theta < 2\pi$ באמצעות הפרמטריזציה שמצאנו, וזאת תחת ההבנה שאורך עקום ניתן לתאר באמצעות פרמטריזציה שלו על ידי הנוסחה:

$$L = \int_0^{2\pi} |P'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4(1-\cos\theta)}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

$$2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4[1+1] = 8$$

■

שאלה 5:

א. נרצה למצוא פרמטריזציית אורך לישר $y = mx + n$. לשם כך, נניח כי אורך העקום הינו $l(t)$ עבור $t \in [t_0, \infty)$. לשם כך נבחר פרמטריזציה מהצורה:

$$f(t) = (t, mt + n) \quad f: [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^2$$

ואורך העקום עד לנקודה $f(t)$ נתון על ידי:

$$f'(t) = (1, m) \neq 0 \Longrightarrow |f'(t)| = \sqrt{1 + m^2}$$
$$l(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + m^2} dt = (t - t_0)\sqrt{1 + m^2}$$

כלומר, נוכל להגדיר עתה את הפונקציה ההפוכה $\tau: [0, \infty) \mapsto [t_0, \infty)$ על ידי:

$$\tau(l(t)) = \frac{l(t)}{\sqrt{1 + m^2}} + t_0$$

(הצבה פשוטה תראה שעבור $l = 0$ נקבל את המקור של f לראשית העקום, t_0). אכן מתקיים:

$$\big(\tau(l(t))\big)' = \tau'(l(t))l'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\sqrt{1 + m^2} = 1$$

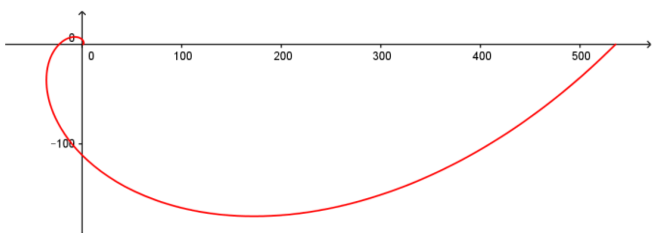
כלומר אכן מתקיים:

$$l(L) = \int_0^L |(\tau(l)'| dl = \int_0^L 1 dl = L$$

ומכאן שנוכל להביע את פרמטריזציית האורך של עקום זה על ידי:

$$\boxed{\sigma: [0, \infty) \mapsto [f(t_0), \infty) \quad \sigma(l) = f(\tau(l))}$$

■



ב. נרצה למצוא פרמטריזציית אורך לעקום הנתון על ידי $r = e^{\theta}$. כאמור, ב-$\mathbb{R}^2$ מתקיים $r = x^2 + y^2$ וכן $\frac{y}{x} = \tan\theta$ ולכן ניתן לתאר את העקום באמצעות הקואורדינטות הפולריות:

$$f(\theta) = \left(e^{\theta}\cos\theta, e^{\theta}\sin\theta\right)$$

בהנתן כי אורך העקום נתון על ידי L, נשים לב כי מתקיים:

$$f'(\theta) = \left(e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta, e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta\right)$$

כלומר:

$$|f'(\theta)| = \sqrt{\left(f_x'(\theta)\right)^2 + \left(f_y'(\theta)\right)^2}$$

$$f_x'(\theta) = e^{2\theta}\cos^2\theta + e^{2\theta}\sin^2\theta - 2e^{2\theta}\cos\theta\sin\theta = e^{2\theta}(1 - \sin 2\theta)$$

$$f_y'(\theta) = e^{2\theta}\sin^2\theta + e^{2\theta}\cos^2\theta + 2e^{2\theta}\cos\theta\sin\theta = e^{2\theta}(1 + \sin 2\theta)$$

ולכן נקבל כי:

$$|f'(\theta)| = \sqrt{2e^{2\theta}} = \sqrt{2}e^{\theta} \neq 0$$

ונשים לב כי בדומה לדרך שבה פעלנו בסעיף הקודם, מתקיים:

$$l(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} |f'(\theta)| d\theta = \sqrt{2}\int_{\theta_0}^{\theta} e^{\theta} d\theta = \sqrt{2}\left(e^{\theta} - e^{\theta_0}\right) \Rightarrow e^{\theta} = \frac{l}{\sqrt{2}} + e^{\theta_0}$$

הפונקציה מונוטונית עולה ב-l ולכן בפרט חד-חד ערכית והפיכה. נוכל לכתוב:

$$\Theta: [0, \infty) \mapsto [\theta_0, \infty) \quad \Theta(l) = \theta(l) = \ln\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + e^{\theta_0}\right)$$

ואכן מתקיים:

$$\Theta'(l) = \frac{1}{\frac{l}{\sqrt{2}} + e^{\theta_0}} \frac{1}{\sqrt{2}} l'(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{\theta}}{\frac{l}{\sqrt{2}} + e^{\theta_0}} = \frac{\frac{l}{\sqrt{2}} + e^{\theta_0}}{\frac{l}{\sqrt{2}} + e^{\theta_0}} = 1$$

ולכן נוכל להציג את אורך העקום על ידי:

$$L(l) = \int_0^l |\Theta'(\mathrm{l})| dl = \int_0^l 1 dl = 0$$

כלומר זו אכן פרמטריזציית האורך של העקום, ולכן נסמן:

$$\boxed{\sigma: [0, \infty) \mapsto [f(\theta_0), \infty) \quad \sigma(l) = f(\Theta(l))}$$

■

<u>הערה</u> – עבור סעיף ב', במידה והמטרה הייתה לבצע פרמטריזציה הכוללת בתוכה את האילוצים מקואורדינטות פולריות, קרי $r \geq 0$ וכן $0 \leq \theta \leq 2\pi$, נקבל עדיין כי זה הינו הך, כלומר, כל שנידרש לעשות הוא לסמן $\sigma: [0, l(2\pi)] \mapsto [f(0), f(2\pi)]$ ונקבל את המבוקש. כנ"ל עבור סעיף א', עבור עקום המתקבל על ידי $f([a, b])$ סופי כלשהו.

<u>שאלה 6:</u>

א. נניח כי נתונות $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_m: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ העתקות ליניאריות ונניח כי מתקיים $\begin{bmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m\end{bmatrix}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. $B =$ אזי נרצה להראות כי $\ker(B) \subset \ker(\alpha)$ אם ורק אם קיימים $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ כך שמתקיים $\alpha = \sum_{i=1}^m \lambda_i \beta_i$.

$\Rightarrow$ נניח כי אכן קיימים $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ כנדרש. אזי נשים לב כי לכל $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$v \in \ker B$ מתקיים $Bv = 0$ כלומר $\beta_i v = 0$ לכל $1 \leq i \leq m$, אך מכן שוודאי שמתקיים: $\alpha v = \sum_{i=1}^m \beta_i v = 0$ כלומר $v \in \ker\alpha$ ואכן סה"כ $\ker B \subseteq \ker\alpha$.

$\Leftarrow$ נניח כי $\ker B \subseteq \ker\alpha$ ונניח בשלילה כי לא קיימים $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ כמתואר בניסוח השאלה. כלומר, נסיק כי α אינה תלויה ליניארית ב-$\beta_1, \cdots, \beta_m$. עתה נבנה מטריצה חדשה C שמורכבת מ-B כאשר נוסיף את α כשורה למטריצה. היות ו-α בלתי תלויה ליניארית בשאר הוקטורים – נקבל כי דרגת המטריצה גדלה (כי נפרש על ידן מרחב מממד אחד גדול יותר).
אך אנו יודעים כי ממד המקור, שהוא n צריך להיות שווה לממד הגרעין + לממד התמונה, ומאידך, אנו יודעים כי דרגת המטריצה, שגדלה ב-1 היא ממד התמונה. ומכאן נובע כי ממד הגרעין הצטמצם על ידי הוספת α. כלומר, קיים $v \in \mathbb{R}^n$ עבורו $Bv = 0$ אך $Cv \neq 0$, ומכאן, שההבדל נובע מכך שאינו מאפס את α, אך זו סתירה מתנאי ההכלה בין $\ker B$ ל-$\ker\alpha$.

ב. נתונה, אם כן, יריעה $M \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה וכן $f \in C^1(U)$ פונקציה ממשית. ראשית, נשים לב כי המרחב המשיק ניתן להגדרה על ידי:

$$T_a M = \left\{\gamma'(t_0) \middle| \begin{matrix}\gamma: I \mapsto M & \gamma \in C^1(I) \\ \exists t_0 \in I & \gamma(t_0) = a\end{matrix}\right\}$$

תהא אם כן $\gamma'(t_0) \in T_a M$. אזי קיימת מסילה γ כמתואר בהגדרה שלעיל. נגדיר עתה פונקציה חדשה:

$$g: f\circ\gamma: I \mapsto f(U)$$

פונקציה זו גזירה ברציפות כהרכבה של פונקציות גזירות ברציפות. כמו כן, מתחייב כי $g(t_0)=f\big(g(t_0)\big)=f(a)$ היא נקודת קיצון של g כפונקציה של משתנה אחד בסביבת $U\cap M$ (כלומר, נקודת קיצון ביחס לכל הנקודות בסביבה U שנמצאות על היריעה. אך g הינה פונקציה במשתנה יחיד, והיא גזירה, ולכן מתחייב כי $g'(t_0)=0$. אך על פי הגדרה:

$$g'(t_0)=f'\big(\gamma(t_0)\big)\gamma'(t_0)=Df(a)\gamma'(t_0)=0$$

אך מכאן שהנ"ל נכון באחד משני מקרים אפשריים:

- $Df(a)=0$ אך מכאן ש-a היא נקודת קיצון כללית של הפונקציה ובפרט עבור הנקודות על היריעה ולכן כל וקטור מהצורה $\gamma'(t_0)$ נמצא בגרעין של $Df(a)$, כנדרש.
- $Df(a)\neq 0$ אך מכאן נובע כי לכל $\gamma'(t_0)$ מהצורה שתיארנו מתקיים $\gamma'(t_0)=0$ על מנת שהשוויון יהיה נכון. ומכאן, שכצפוי, מתקיים $\gamma'(t_0)\in\ker\big(Df(a)\big)$ כנדרש.

■

ג. בסעיף ב' ראינו כי $T_aM\subseteq\ker(F_1,F_2,\cdots,F_m)$. וכן אנו יודעים כי T_aM ניתן להצגה על ידי:

$$T_aM=\ker[D\bar{F}(a)]\subseteq\ker[Df(a)]$$

וההכלה נכונה מסעיף ב'. אך מסעיף א' נסיק שהנ"ל נכון אם ורק אם קיימים סקלרים כך שמתקיים:

$$\sum_i^m\lambda_i\big(DF_i(a)\big)=Df(a)$$

■

שאלה 7:

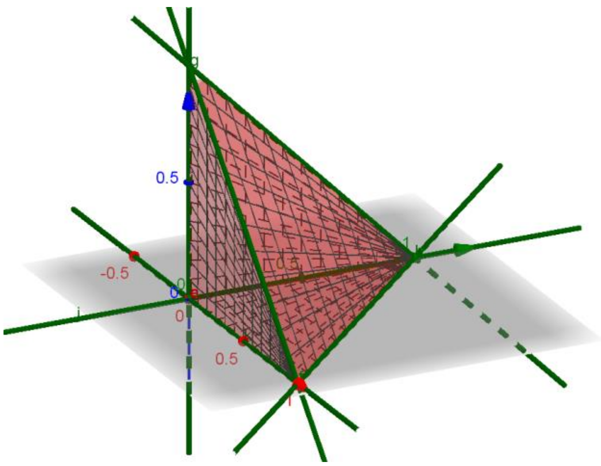
נתון אם כן, התחום הכלוא בין $x_1=0, x_2=0,\cdots,x_N=0$ עבור $N\in\mathbb{N}$, וכן על ידי העל מישור:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{a_i}=1$$

כאשר $a_i>0$ לכל $1\leq i\leq N$. נרצה להראות כי במידה ונסמן ΔN בתור התחום הכלוא הנ"ל, נקבל כי:

$$Vol(\Delta N)=\frac{\prod_{i=1}^{N}a_i}{N!}$$

נעשה זאת באינדוקציה על N. עבור מקרה הבסיס, למשל $n=3$, נקבל את התחום המתואר באיור 2 (סכמתי).



איור 2 – דוגמה עבור המקרה התלת ממדי.

כלומר זהו התחום הכלוא בין:

$$x=0\quad y=0\quad z=0\quad \frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1$$

נרצה לחשב על $\iiint_\Omega 1dV$ על ידי מציאת תחומי האינטגרציה שלנו. נשים לב כי המישורים $x=0,y=0,z=0$ הם התחומים שחוסמים את המשתנים x,y,z מלרע בהתאמה. נראה זאת על ידי מציאת החיתוכים בין כל 3 על מישורים.

- $x=0,y=0,\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1$ – נציב ונקבל כי $z=a_3$. היות ו-$z=0$ גם הוא חסם, נקבל כי $0\leq z\leq a_3$.
- $x=0,z=0,\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1$ – נציב ונקבל כי $y=a_2$. היות ו-$y=0$ גם הוא חסם, נקבל כי $0\leq y\leq a_2$.
- $y=0,z=0,\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}+\frac{z}{a_3}=1$ – נציב ונקבל כי $x=a_1$. היות ו-$x=0$ גם הוא חסם, נקבל כי $0\leq x\leq a_1$.
- $x=0,y=0,z=0$ – הנקודה $(x,y,z)=(0,0,0)$.

כמו כן, נשים לב כי בהנתן y,z כל שהם, מתקבל החסם:

$$0\leq x\leq a_1\left(1-\frac{y}{a_2}-\frac{z}{a_3}\right)$$

כמו כן, היות וגודל זה חייב להיות חיובי (כי התחום שלנו, כפי שהראינו מלעיל, כולו בתחום שבו כל הרכיבים חיוביים), נסיק כי לכל z עלינו לדרוש:

$$0 \le y \le a_2\left(1-\frac{z}{a_3}\right)$$

ולכן ניתן לתאר את התחום שלנו על ידי:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le z \le a_3 \\ 0 \le y \le a_2\left(1-\frac{z}{a_3}\right) \\ 0 \le x \le a_1\left(1-\frac{y}{a_2}-\frac{z}{a_3}\right) \end{array} \right\}$$

ונשים לב כי בהגדרת:

$$g_x(y,z) = \int_0^{a_1\left(1-\frac{y}{a_2}-\frac{z}{a_3}\right)} 1dx = a_1\left(1-\frac{y}{a_2}-\frac{z}{a_3}\right)$$

נקבל כי $g_x(y,z)$ רציפה בכל התחום:

$$(\star) 0 \le z \le a_3 \quad 0 \le y \le a_2\left(1-\frac{z}{a_3}\right)$$

ולכן אינטגרבילית רימן. מכאן שמתקיימים תנאי משפט פוביני כלומר לכל z, בתחום $(\star)$ שנסמנו D_z מתקיים:

עתה, נגדיר:

$$\iint_{D_z} 1dxdy = \int_0^{a_2\left(1-\frac{z}{a_3}\right)} g_x(y,z)dy = \left[a_1\left(y-\frac{y^2}{2a_2}-\frac{zy}{a_3}\right)\right]_0^{a_2\left(1-\frac{z}{a_3}\right)} = a_1a_2\left(1-\frac{z}{a_3}\right) - \frac{1}{2}a_2a_1\left(1-\frac{z}{a_3}\right)^2 - \frac{a_2a_1z\left(1-\frac{z}{a_3}\right)}{a_3}$$

$$= a_1a_2 - \frac{a_1a_2}{a_3}z - \frac{1}{2}a_1a_2 + \frac{a_1a_2}{a_3}z - \frac{1}{2}\frac{a_2a_1z^2}{a_3^2} - \frac{a_1a_2}{a_3}z + \frac{a_1a_2}{a_3^2}z^2$$

$$= \frac{a_1a_2}{2} - \frac{a_1a_2}{a_3}z + \frac{a_1a_2}{2a_3^2}z^2 = \frac{a_1a_2}{2}\left(1-\frac{z}{a_3}\right)^2$$

כאמור, גם פונקציה זו רציפה ואף אינטגרבילית בתחום $[0,a_3]$. ולכן מתקיימים תנאי משפט פוביני, כלומר:

$$\iiint_\Omega 1dxdydz = \int_0^{a_3}\left(\iint_{Dz} 1dxdy\right)dz = \int_0^{a_3}\left[\frac{a_1a_2}{2}\left(1-\frac{z}{a_3}\right)^2\right]dz = \left[-\frac{a_1a_2}{2}\frac{a_3}{3}\left(1-\frac{z}{a_3}\right)^3\right]_0^{a_3}$$

$$= -\frac{a_1a_2}{2}\frac{a_3}{3}\overbrace{\left(1-\frac{a_3}{a_3}\right)^3}^{=0} + \frac{a_1a_2}{2}\frac{a_3}{3}\left(1-\frac{0}{a_3}\right) = \frac{a_1a_2a_3}{6}$$

כנדרש.

עתה נניח את נכונות הטענה עבור $N-1$ ממדים, ונראה את הנכונות עבור הממד ה-N. כלומר, נניח כי בהנתן העל מישורים $x_1 = 0, \cdots, x_{N-1} = 0$ וכן העל מישור $\sum_{i=1}^{N-1}\frac{x_i}{a_i} = 1$ עבור $a_1, \cdots, a_{N-1}$ קבועים חיוביים, מתקיים:

$$Vol\big(\Delta(N-1)\big) = \frac{\prod_{i=1}^{N-1} a_i}{(N-1)!}$$

ונניח עתה כי נתון העל מישור מהשאלה בעל N הממדים. נשים לב כי בהנתן x_N מקובע בתחום $0 \le x_N \le a_N$ נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{N-1}\frac{x_i}{a_i} = 1 - \frac{x_N}{a_N}$$

ועתה נשים לב כי לכל $x_N \ne a_N$ ניתן לכתוב:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_i}{a_i\left(1-\frac{x_N}{a_N}\right)} = 1$$

ואם נסמן $b_i = a_i\left(1-\frac{x_N}{a_N}\right) > 0$ לכל $1 \leq i \leq N-1$, אזי נקבל כי $\sum_{i=1}^{N-1}\frac{x_i}{b_i} = 1$ ויותר התנאים כלומר $x_i = 0$ כעל מישורים מממד נמוך יותר מקיימים את תנאי האינדוקציה כלומר, אם נסמן ב-$\Delta(N-1)_{X_N}$ בתור התחום הכלוא בין העל מישורים בממד הנמוך יותר הנקבע על ידי x_N, נקבל כי:

$$Vol\left(\Delta(N-1)_{X_N}\right) \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{N-1} b_i}{(N-1)!} = \left(1-\frac{x_N}{a_N}\right)^{N-1}\frac{\prod_{i=1}^{N-1} a_i}{(N-1)!}$$

ופונקציה זו רציפה לכל $0 \leq x_N \leq a_N$ ובפרט אינטגרבילית. לכן מתקיים משפט פוביני, כלומר:

$$Vol(\Delta N) = \int_{\Delta N} 1dV = \int_0^{a_N} Vol\left(\Delta(N-1)\right)_{X_N} dx_N = \left[-\frac{a_n}{N}\left(1-\frac{x_N}{a_N}\right)^N \frac{\prod_{i=1}^{N-1} a_i}{(N-1)!}\right]_0^{a_N} =$$

$$-\frac{a_N}{N}\overbrace{\left(1-\frac{a_N}{a_N}\right)^N}^{=0}\frac{\prod_{i=1}^{N-1} a_i}{(N-1)!} + \frac{a_N}{N}\left(1-\frac{0}{a_N}\right)\frac{\prod_{i=1}^{N-1} a_i}{(N-1)!} = \frac{\prod_{i=1}^{N} a_i}{N!}$$

כנדרש.

<u>הערה</u> – עבור המקרה שבו $x_N = a_N$ לא נוכל לבצע תהליך זה שכן המכנה יתאפס. אך במצב זה נקבל מלכתחילה כי קבוצת הפתרונות, היות וכל הרכיבים חיוביים, של המשוואה $\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{a_i} = 1$ היא נקודה בודדת והיא $x_N = a_N$ וכל יתר הרכיבים הם 0. אך זו כמובן קבוצה בעלת נפח אפס ולכן אינה משפיעה על התוצאה הסופית של האינטגרל שלנו.

■

<u>שאלה 8:</u>

נתונות, אם כן $B \subseteq \mathbb{R}^n$ וכן $A \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצות בעלות נפח וכן $f: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ ו-$g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ אינטגרביליות. מגדירים:

$$h: \mathbb{R}^{m+n} \mapsto \mathbb{R} \quad h(x,y) = f(x)g(y)$$

ראשית נשים לב כי h אינטגרבילית כמכפלה שתי פונקציות אינטגרביליות (ולכן חסומות ובעלות קבוצה בעלת נפח אפס של נקודות אי רציפות). נסמן:

$$h_x(x) = \int_B h(x,y)dy = \int_B f(x)g(y)dy \overset{\substack{f(x) \\ \text{קבוע}}}{=} f(x)\int_B g(y)dy$$

היות ו-g אינטגרבילית ב-B וכן $f(x)$ אינטגרבילית בכל $x \in A$, אזי נקבל על פי משפט פוביני כי מתקיים:

$$\int_{A\times B} h(x,y)dxdy = \int_A \left(f(x)\int_B g(y)dy\right)dx = \int_A f(x)\overbrace{\left(\int_B g(y)dy\right)}^{\text{קבוע}}dx = \left(\int_A f(x)dx\right)\left(\int_B g(y)dy\right)$$

כנדרש.

בפרט, עבור הגדרת $f(x) = 1, g(y) = 1$ נקבל כי מתקיים:

$$\int_{A\times B} h(x,y)dxdy = \int_{A\times B} 1dxdy = Vol(A\times B) = \int_A 1dx\int_B 1dy = Vol(A)Vol(B)$$

■

<u>שאלה 9:</u>

נתונה פונקציה גזירה פעמיים כך שנגזרותיה השניות רציפות. נרצה להראות כי $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. לשם כך נרצה להיעזר במשפט פוביני.

נניח אם כן, כי מתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ונניח כי קיימת נקודה שבה $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)>\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$. אזי מרציפות נגזרות אלה נובע קיומה של סביבה, ובפרט מלבן סביב נקודה זו בו מתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)>0$ לכל $(x,y)\in R$. היות וזהו הפרש בין שתי פונקציות רציפות נסיק כי פונקציית ההפרש אינטגרבילית במלבן זה, ומכאן נובע כי מתקיים בהכרח:

$$\iint_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x,y)dxdy>0$$

כאשר נסמן $R=[x_0,x_f]\times[y_0,y_f]$. אך נשים לב שלכל x נוכל לסמן:

$$g_y(x)=\int_{R_y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)(x,y)dy=\int_{R_y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)dy\overset{\text{כלל לייבניץ}}{=}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_f)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$$

ובנוסף:

$$g_x(y)=\int_{R_x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x,y)dx=\int_{R_x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)dy\overset{\text{כלל לייבניץ}}{=}\frac{\partial f}{\partial y}(x_f,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$$

ובפרט פונקציות אלה רציפות ולכן אינטגרביליות (בפרט הן גזירות ברציפות היות ואנו יודעים שהנגזרות שלהן רציפות). מכאן שמתקיימים התנאים לשימוש במשפט פוביני, ולכן:

$$\iint_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(x,y)dxdy=\iint_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\right)dxdy-\iint_R\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

$$=\int_{R_x}g_y(x)dx-\int_{R_y}g_x(y)dy=\int_{R_x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_f)dx-\int_{R_x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)-\left[\int_{R_y}\frac{\partial f}{\partial y}(x_f,y)dy-\int_{R_y}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)dy\right]$$

$$\overset{\text{כלל לייבניץ}}{=}f(x_f,y_f)-f(x_0,y_f)-\big(f(x_f,y_0)-f(x_0,y_0)\big)-\Big[f(x_f,y_f)-f(x_f,y_0)-\big(f(x_0,y_f)-f(x_0,y_0)\big)\Big]=0$$

כלומר הגענו לסתירה. מכאן שבהנתן שהנגזרות השניות רציפות עבור פונקציה f, בהכרח $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ כנדרש.

■

שאלה 10:

מוגדרת פונקציה מהצורה $f:I\times I\mapsto\mathbb{R}$ כאשר $I=[0,1]$ על ידי:

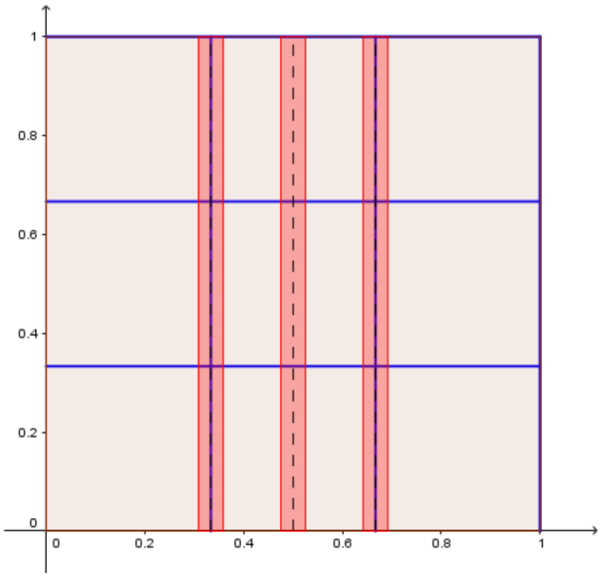
$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\text{ או }y\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x\in\mathbb{Q},y=\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{Z},\gcd(|p|,|q|)=1\end{cases}$$

א. נרצה להראות כי $\iint_{I\times I}f(x,y)dxdy=0$. זאת נעשה על ידי שימוש בסכומי דארבו. ראשית, נשים לב כי לכל חלוקה של התחום מתקיים:

$$L(f,P)=0$$

וזאת משום שבכל תחום בחלוקה קיים לפחות איבר אחד אי רציונלי (נובע מצפיפות האי רציונליים בממשיים) ולכן סכום דארבו התחתון (שמוגדר על ידי סכימה של נפחי תיבות מוכפלות במינימום), יהיה אפס בכל חלוקה.

נותר להראות, אם כן, כי $U(f,P)$ מקיים שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה עבורה $U(f,P)<\varepsilon$.



לשם כך נגדיר חלוקות באופן הבא:

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את חלוקה באופן הבא:

$$P^{(n)}=\left\{\frac{i}{n}\middle|0\le i\le n\right\}$$

ועתה נגדיר את הקבוצה $P_\varepsilon^{(n)}$ באופן הבא:

לכל מספר מהצורה $\frac{p}{q}$ כך ש-$p,q\in\mathbb{N}$, וכן $\gcd(p,q)=1$, נדרוש כי יתקיים $\frac{p}{q}-\varepsilon,\frac{p}{q}+\varepsilon\in P_\varepsilon^{(n)}$ (למעט המקרה של 1 בו נכניס רק את האיבר $1-\varepsilon$.

נשים לב כי לכל n קבוצה זו סופית (בפרט בעלת נפח אפס).

נגדיר עתה את החלוקה של $I\times I$ על ידי:

$$P=P^{(n)}\times\left(P^{(n)}\cup P_\varepsilon^{(n)}\right)$$

עתה, נשים לב כי $f(x,y)>\frac{1}{n}$ אם ורק אם $y\in P_\varepsilon^{(n)}$ (שכן קבוצה זו "מכסה" את כל הרציונלים שלהם מכנה קטן מ-n או שווה ל-n.

עבור כל (x,y) כך ש-$y\notin P_\varepsilon^{(n)}$ יתקיים בהכרח $f(x,y)<\frac{1}{n}$.

עבור כל תיבה בחלוקה שעבור לא קיים (x,y) כך ש-$y\in P_\varepsilon^{(n)}$ (כלומר, הקבוצות ה"טובות"), מתקיים בפרט:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-2\varepsilon\right)\le Vol(R_i)\le\frac{1}{n^2}$$

משום שבמקרה הגרוע ביותר, תיבה "קוצצה" משני צדדיה על ידי תיבות מהעידון על ידי $P_\varepsilon^{(n)}$.

אם נסמן ב-$K_G(n)$ את מספר התיבות ה"טובות" וב-$K_B(n)$ את מספר התיבות הרעות, נוכל ראשית להסיק כי $K_G(n)\le n^2$ שכן ממילא זה מספר התיבות המקורי המקסימלי במידה ולא היו "הפרעות".

כמו כן, נפח כל תיבה "רעה" נתון על ידי:

$$2\varepsilon\cdot\frac{1}{n}=\frac{2\varepsilon}{n}$$

ולכן יתקיים:

$$U(f,P)\le K_G(n)\cdot\frac{1}{n}\cdot Vol(R_G)+K_B(n)\cdot 1\cdot Vol(R_B)$$

כאשר כפי שהסברתי קודם, הנ"ל נובע משום ש-$\frac{1}{n}$ הוא חסם ל-f בתיבות הטובות, ועבור התיבות הרעות ממילא, $\frac{1}{q}$ מקסימלי עבור $q=1$ ולכן נוכל לחסום תיבות אלה על ידו. נציב את החסמים שמצאנו לנפחי התיבות ונקבל כי:

$$U(f,P)\le\frac{K_G(n)}{n}\frac{1}{n^2}+K_B(n)\frac{2\varepsilon}{n}\le\frac{n^2}{n}\frac{1}{n^2}+K_B(n)\frac{2\varepsilon}{n}=\frac{1}{n}\left(1+2\varepsilon K_B(n)\right)$$

עתה, בהנתן $\varepsilon'>0$, נבחר $n\in\mathbb{N}$ עבורו $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon'}{2}$, ולאחר מכן, היות ועבור n זה מתקיים ש-$K_B(n)$ מוגדר וקבוע, נבחר:

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{4K_B(n)}$$

ואז יתקיים $U(f,P)\le\varepsilon'$. כלומר אכן מתקיים:

$$\int_{I\times I}f(x,y)dxdy=0$$

■

ב. יהא $x\in[0.1]$ כלשהו. אזי נפריד למקרים.

- אם $x\notin\mathbb{Q}$, אזי נקבל כי ממילא $f(x,y)\equiv0$ לכל $y\in[0.1]$ וממילא האינטגרל יתאפס.
- אם $x\in\mathbb{Q}$, אזי מתקיים $f(x,y)=g(y)$ כאשר $g(y)=0$ אם y אי רציונלי וכן $\frac{1}{q}$ בהתאם לחוקיות f עבור $y\in\mathbb{Q}$.

נשים לב כי עבור בחירת חלוקה מהצורה $P^{(n)}\cup P_\varepsilon^{(n)}$, נקבל באותו אופן חסם ל-$U(g,P)$ ונוכל להראות כי הוא יהא קטן כרצוננו עבור בחירת $\varepsilon>0$ מתאים לחלוקה $P_\varepsilon^{(n)}$ ועבור n גדול מספיק. ולכן יתקיים $\int_0^1 g(y)dy=0$.

ג. יהא $y\in[0,1]$ כלשהו. נפריד גם כאן למקרים.

- אם $y\notin\mathbb{Q}$ אזי ממילא $f(x,y)\equiv0$ בתחום $x\in[0,1]$ וממילא האינטגרל יתאפס.
- אם $y\in\mathbb{Q}$ אזי מתקיים (עבור ההצגה של $y=\frac{p}{q}$ זרים ושלמים):

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

כאמור זהו אינטגרל של וריאציה של פונקציית דיריכלה, אשר הראינו כי האינטגרל שלה לא קיים (כנובע מכך שסכום דארבו העליון שלה תמיד זהה ושווה ל-$\frac{1}{q}$ וסכום דארבו התחתון שלה הוא 0, כלומר הם אינם מתלכדים כלל).
מכאן שעבור $y \in \mathbb{Q}$ האינטגרל אינו קיים כלל.