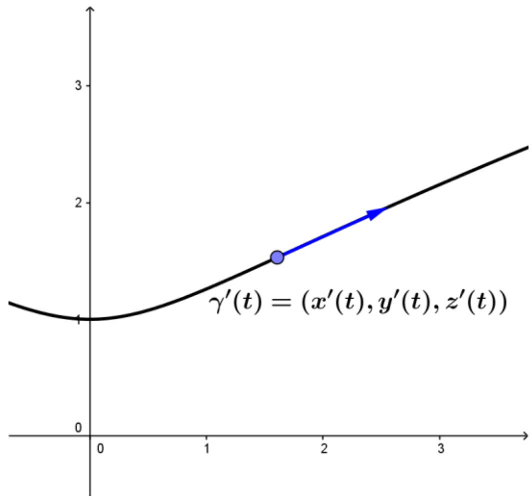
7/12/2016

תרגול 7

עקומים ב-$\mathbb{R}^n$:



עקום חלק ב-$\mathbb{R}^3$ נתון על יד פרמטריזציה מהצורה:

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \quad t \in [a,b]$$

כאשר $x(t), y(t), z(t)$ גזירות ונגזרותיהן אינן מתאפסות בו זמנית.
בכל נקודה על העקום, הוקטור המשיק נתון על ידי:

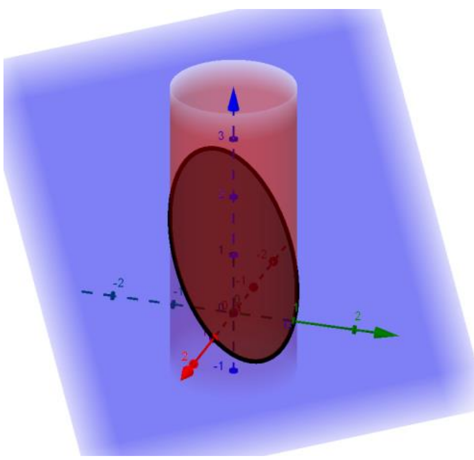
$$\gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

תרגיל:

מצאו פרמטריזציה לעקום החיתוך בין:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{גליל} \\ x + y + z = 1 & \text{מישור} \end{cases}$$

פתרון:



איור 2 – הגליל (באדום) והמישור (בכחול), יחד עם עקום החיתוך (בשחור)

ניתן למצוא פרמטריזציה עבור הגליל מהצורה:

$$S(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

והחיתוך עם המישור יהיה, אם כך:

$$\cos\theta + \sin\theta + z = 1$$

כלומר:

$$z = 1 - \cos\theta - \sin\theta$$

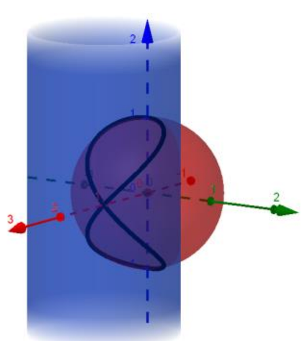
ולכן הפרמטריזציה לעקום γ תהיה:

$$\boxed{\begin{matrix} \gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1 - \cos\theta - \sin\theta) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}}$$

תרגיל:

מצאו פרמטריזציה לחיתוך בין:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 & \text{ספירה} \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2 & \text{גליל מוזז} \end{cases}$$



איור 1 – הגליל (בכחול), הספירה (באדום) ועקום החיתוך (בקו שחור מודגש)

עבור הגליל נוכל לקבל את הפרמטריזציה מהצורה:

$$x = a\cos\theta + a \quad y = a\sin\theta \quad z = z$$

נציב במשוואה הספירה כדי למצוא את העקום שמקיים את שניהם:

$$z^2 = 4a^2 - (\mathrm{a}\cos\theta + a)^2 - a^2\sin^2\theta$$

$$= 4a^2 - a^2\cos^2\theta - 2a^2\cos\theta - a^2 - a^2\sin^2\theta$$

$$= 2a^2 - 2a^2\cos\theta \overset{(\star)}{=} 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

כאשר $(\star)$ מתכוון מזהות של זווית כפולה. לכן נסמן:

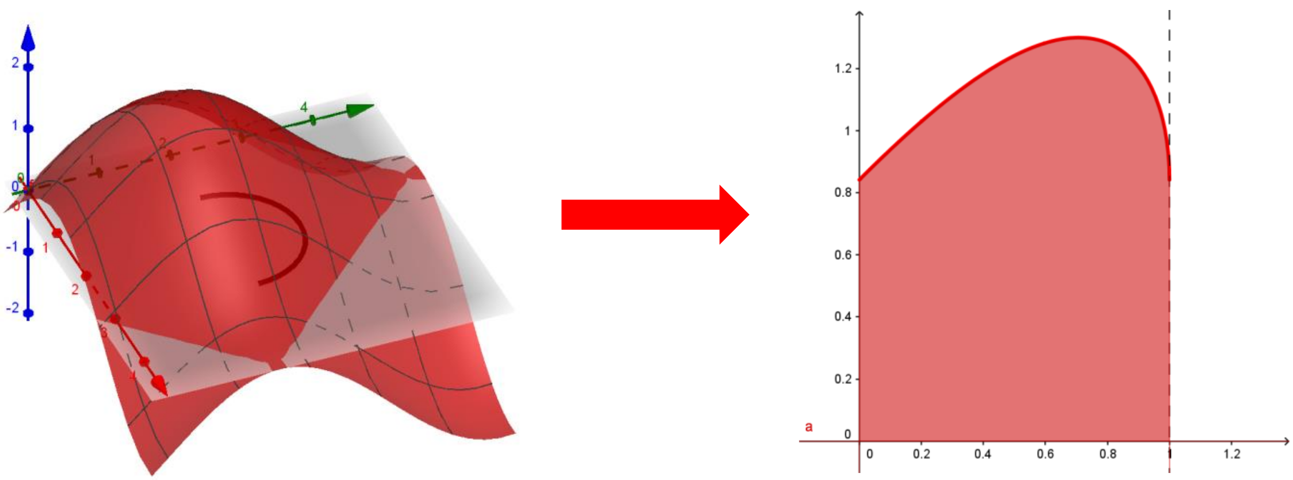
$$\boxed{z = \pm 2a\sin\frac{\theta}{2}}$$

כך שמצאנו פרמטריזציה הנתונה על ידי:

$$\boxed{\gamma(\theta) = \left(a + a\cos\theta\,, a\sin\theta\,, 2a\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad -2\pi \le \theta \le 2\pi}$$

אינטגרל קווי:

עבור תחום הגדרה $\gamma \subset \mathbb{R}^n$.



למדנו כי אינטגרל של פונקציה בשתי משתנים סוכמת למעשה את הנפח הכלוא בין גרף הפונקציה למישור xy. עבור המקרה של עקום (כדוגמת העקום γ באיור השמאלי הצבוע בקו דגוש שחור), המצב שונה. בפועל, החישוב הוא של שטח של יריעה הנפרשת בין מישור xy לבין גרף הפונקציה בתחום העקום הנתון. לכן, בהעברת הגרף לצורה של פונקציית xy, המתארת את הפרש הגבהים בין העקום לבין מישור xy, וכך חישוב השטח הוא למעשה אינטגרל רגיל, על הפרשי הגבהים (כמתואר באיור הימני).[1]

<u>אינטגרל קווי מסוג ראשון:</u>

$$f:\gamma \mapsto \mathbb{R} \qquad \int_\gamma f\,dl$$

כאשר dl מסמן אלמנט אורך (שמתקבל על ידי חלוקה של העקום בעיקרון דומה לסכומי רימן, קרי, חלוקת העקום לקווים ישרים שהאורך שלהם קטן). במקרה זה, כאמור, מחשבים את השטח שהפונקציה יוצרת על העקום $\gamma \subset \mathbb{R}$.

על מנת לפתור בעיה זו מוצאים פרמטריזציה לעקום:

---

[1] תוספת העורך

7/12/2016

$$\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\quad a\le t\le b$$

על γ מתקיים:

$$f(x,y,z)=f\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

ולכן יתקיים:

$$\int_\gamma f dl=\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)|\gamma'(t)|dt$$

והביטוי הימני הוא אינטגרל סטנדרטי.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את $\int_\gamma (x+y)dl$ עבור עקום γ שהוא המשולש במישור xy שקדקודיו הם $(2,0),(1,1),(1,0)$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה ל-γ_1 נתונה על ידי:

$$\gamma_1(t)=\big(x(t),y(t)\big)=(t,0)$$
$$1\le t\le 2$$
$$|\gamma'(t)|=|(1,0)|=1$$

ולכן נקבל כי:

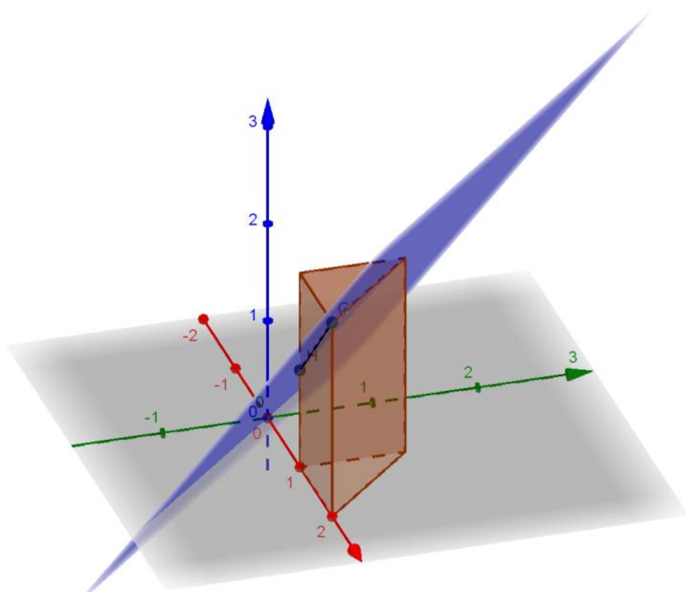
$$\int_{\gamma_1}(x+y)dl=\int_1^2(t+0)\cdot 1dt=\frac{3}{2}$$

עבור γ_2 נקבל את הפרמטריזציה:

$$\gamma_2(t)=(1,t)$$
$$0\le t\le 1$$
$$|\gamma_2'(t)|=|(0,1)|=1$$

ולכן נקבל כי:

$$\int_{\gamma_2}(x+y)dl=\int_0^1(1+t)dt=\frac{3}{2}$$



איור 3 – תיאור הבעיה – השטח של המעטפת של ה"מנסה" (לא כולל החלק שנמצא מעל גרף המישור $x+y-z=0$

עבור γ_3 נקבל את הפרמטריזציה:

$$\gamma_3(t)=(t,2-t)\quad 1\le t\le 2\quad |\gamma_3'(t)|=|(1,-1)|=\sqrt{2}$$

$$\int_{\gamma_3}(x+y)dl=\int_1^2 2\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}$$

וסה"כ נקבל כי:

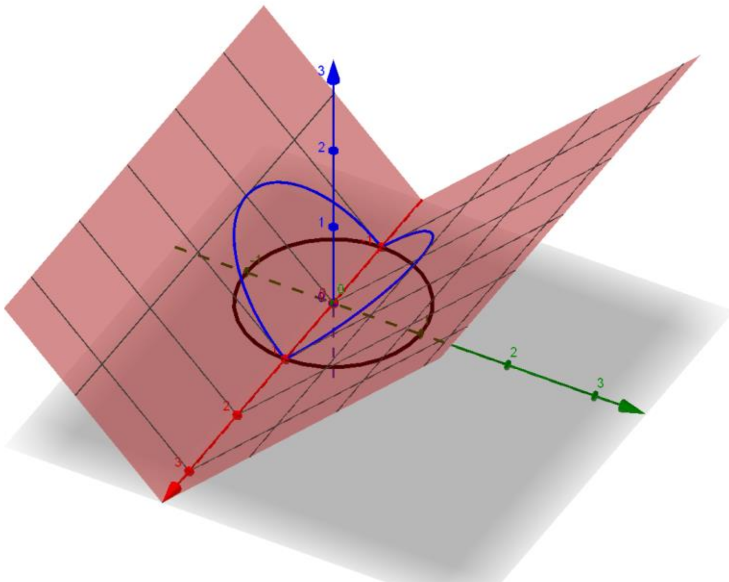
$$\int_\gamma(x+y)dl=\int_{\gamma_1}(x+y)dl+\int_{\gamma_2}(x+y)dl+\int_{\gamma_3}(x+y)dl=3+2\sqrt{2}$$

7/12/2016

<u>תרגיל:</u>

חשבו את המסה של מעגל ברדיוס R סביב הראשית, בעל צפיפות מסה נתונה $\rho(x,y)=|y|$.

<u>פתרון:</u>



איור 4 – המעגל (בשחור), הפונקציה $\rho(x,y)$ (באדום) וערכי הפונקציה שמתקבלים במעגל (בכחול).

$$M=\int_\gamma \rho(x,y)dl$$

פרמטריזציה ל-γ ניתן לקבל על ידי:

$$\gamma(\theta)=(R\cos\theta\,,R\sin\theta)\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

נשים לב כי:

$$|\gamma'(\theta)|=|(-R\sin\theta\,,R\sin\theta)|=R$$

ולכן נקבל כי:

$$M=\int_\gamma \rho(x,y)dl=\int_0^{2\pi}|R\sin\theta|Rd\theta$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}|\sin\theta|d\theta=\cdots=4R^2$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את $\int_\gamma(x^2+y^2+z^2)dl$

כאשר:

$$\gamma(t)=(2\cos t\,,2\sin t\,,t)\quad 0\le t\le 2\pi$$

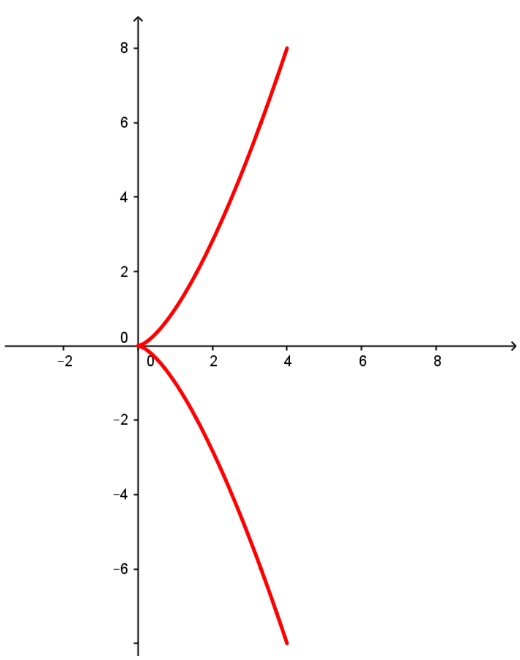
<u>פתרון:</u>

נשים לב כי γ הינו מעגל ברדיוס 2 במישור $z=1$. כמו כן:

$$|\gamma'(t)|=|(-2\sin t\,,2\cos t\,,0)|=2$$

ולכן:

$$\int_\gamma f dl=\int_0^{2\pi}(4\cos^2 t+4\sin^2 t+1)2dt=10\int_0^{2\pi}dt=20\pi$$



<u>תרגיל:</u>

חשב את אורך העקום הנתון על ידי $y^2=x^3$ עבור $0\le x\le 4$.

<u>פתרון:</u>

$$I=\int_\gamma 1dl$$

נחלק את העקום ל-γ_1, γ_2 שהם החצי החיובי של העקום $(y > 0)$ והחצי השלילי. היות והעקום סימטרי יחסית לציר x, נסיק כי מספיק לחשב את החלק העליון ולהכפיל ב-2.

$$I = 2\int_{\gamma_1} 1dl$$

$$\gamma_1(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right) \quad 0 \le t \le 4$$

$$|\gamma_1'(t)| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}$$

כך שנקבל כי:

$$I = 2\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}dt = \cdots$$