

לוגיקה מתמטית - תרגיל 10

1. נוסחה φ נקראת מקרה הצבה של טאוטולוגיה אם קיימת טאוטולוגיה של תחשיב הפסוקים ש- φ מתקבלת ממנה ע"י הצבה של נוסחאות כלשהן במקום הפסוקים האטומיים.
(למשל, $(\forall x)R(x) \rightarrow (x = y \rightarrow x = y)$ מתקבלת מן הטאוטולוגיה $(p \rightarrow (q \rightarrow q))$.
הוכח שאם φ מקרה הצבה של טאוטולוגיה אז $\vdash \varphi$.

2. תהא φ נוסחה ותהי \sum קבוצת נוסחאות. יהי x משתנה אישי.
הוכח $\sum \vdash \varphi$ אם ורק אם $\sum \vdash (\forall x)\varphi$.

3. תהי φ נוסחה ויהיו x, y משתנים אישיים. נניח כי y אינו מופיע חופשי ב- φ , וכי ההצבה החופשית $\varphi(y)$ של y במקום x בנוסחה φ היא כשרה.
כתוב הוכחה מלאה של הנוסחה $(\forall x)\varphi \rightarrow (\forall y)\varphi(y)$.
בצד כל שורה בהוכחה נמק ע"י הפניה לאקסיומה או לשורות קודמות שמהן השורה נובעת ע"י אחד מכללי ההיסק.

4. מצא פסוק בתחשיב היחסים שאיננו אמיתי לוגי, אבל הוא מסתפק בכל מבנה עם עולם סופי.
הנך רשאי לבחור את השפה כרצונך.