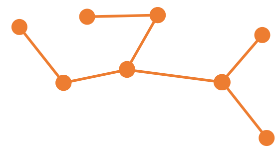
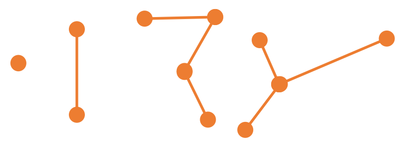
עצים

הגדרה: גרף $G = (V, E)$ נקרא **עץ** אם הוא קשיר ואין בו מעגלים.



הערה: אם הגרף $G = (V, E)$ הוא חסר מעגלים, אבל לאו-דווקא קשיר, אז הוא מתפרק למרכיביו הקשירים שכל אחד מה הוא עץ.



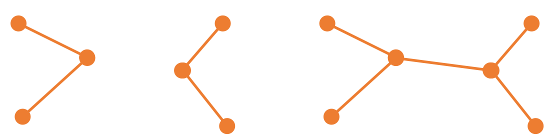
הגדרה: גרף כזה נקרא **יער**.

טענה: בכל עץ $G = (V, E)$ מתקיים $|E| = |V| - 1$.

הוכחה: באינדוקציה על מספר הצלעות.

בסיס: $|E| = 0$, אז בהכרח יש קדקוד יחיד והטענה מתקיימת.
צעד: $|E| \geq 1$. הנחת האינדוקציה אומרת שהטענה נכונה בכל עץ עם פחות צלעות מ-$|E|$.

ניקח צלע $e \in E$ כלשהי, ונוריד אותה. כלומר, נסתכל על $G' = (V, E')$ כאשר $E' = E \setminus \{e\}$.



G' הוא יער בעל שני רכיבים קשירים. נסמנם $G_1 = (V_1, E_1),\ \ G_2 = (V_2, E_2)$, אז מתקיים:

$$|V| = |V_1| + |V_2|, \qquad |E| = |E_1| + |E_2| + 1$$

לכל אחד מ-G_1, G_2 יש פחות מ-$|E|$ צלעות, ולכן הנוסחא בטענה נכונה לגביו לפי הנחת האינדוקציה. ולפיכך:

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + 1 = |V| - 1$$

כנדרש.

הגדרה: קדקוד x בעץ $G = (V, E)$ המקיים $d(x) = 1$ נקרא **עלה**.

מסקנה: בכל עץ $G = (V, E)$ עם $|V| \geq 2$ קיימים לפחות 2 עלים.

הוכחה: נסמן ב-n את מס' הקדקודים וב-k את מס' העלים. לכל קדקוד שאיננו עלה, הערכיות שלו היא לפחות 2 ולכן:

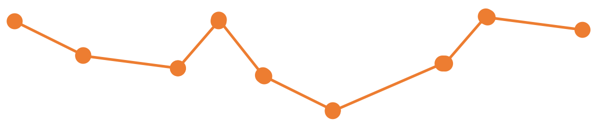
$$\sum_{x \in V} d(x) \geq k + 2(n-k) = 2n - k$$

מצד שני:

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E| = 2(|V|-1) = 2n - 2$$

מהשוואת העובדות הנ"ל, $k \geq 2$.

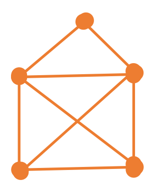
הערה: לעץ יש בדיוק 2 עלים, אז העץ העץ כולו הוא מסלול.

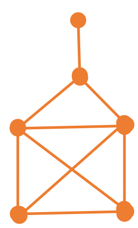


גרפים אוילריאניים

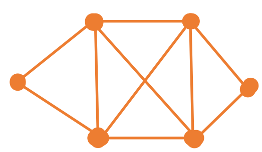
האם אפשר לצייר את הציור מבלי להרים את הטוש מהלוח, ומבלי לחזור על קטע יותר מפעם אחת?

(א') אפשר - **(ב')** אי אפשר -





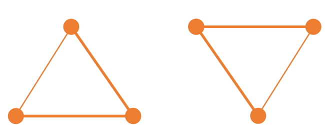
החמרת הדרישות: בנוסף לנ"ל, נניח שנדרשים להתחיל ולסיים באותה הנק', אז התשובה לגבי **(א')** היא שאי אפשר. את הגרף הבא ניתן לצייר גם התחלה וגם סיום באותה הנק'.



הגדרה: מסלול בגרף $G = (V, E)$ נקרא **אוילראיני** אם מופיעות בו כל הצלעות ב-E. גרף $G = (V, E)$ נקרא **אוילריאני** אם קיים בו מסלול אוילריאני סגור.

משפט Euler: יהיה $G = (V, E)$ גרף קשיר, אז $G = (V, E)$ הוא אוילריאני אמ"מ הערכיות של כל קדקוד ב-G היא זוגית.

הערה: בהיעדר קשירות, הגרף הבא מתאים:



הוכחה: נניח שהגרף $G = (V, E)$ אוילריאני. יהי $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots e_k, v_k = v_0$ מסלול אוילריאני סגור בגרף, אז כל התרומות לערכיויות של הקדקודים מתקבלות לאורך המסלול. בכל פעם שהמסלול עובר דרך קדקוד כלשהו, מתקבלת תרומה של 2 לערכיות שלו. בנוסף, הצלע הראשונה והצלע האחרונה במסלול תורמות 2 לערכיות של v_0. לפיכך, כל התרומות הן זוגיות, ולכן כל הערכיויות הן זוגיות.

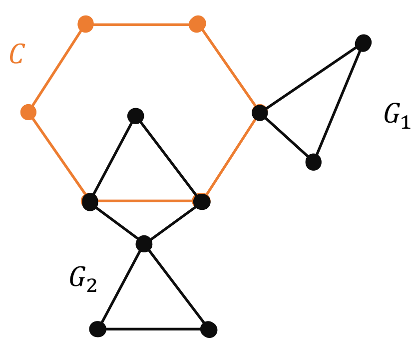
בכיוון השני, נניח ש-$G = (V, E)$ הוא קשיר והערכיות של כל קדקוד בו היא זוגית. נוכיח קיום מסלול אוילריאני סגור באינדוקציה על מס' הצלעות.
בסיס: $|E| = 0$, אז יש קדקוד יחיד (כי הגרף קשיר), והמסלול המתחיל ומסתיים בו ואורכו 0 עונה על הדרישה.
צעד: $|E| \geq 1$. הנחת האינדוקציה אומרת שבכל גרף קשיר עם פחות מ-$|E|$ צלעות, שבו הערכיות של כל קדקוד היא זוכית, קיים מסלול אוילריאני סגור. הגרף $G = (V, E)$ הוא קשיר אבל איננו עץ (כי אילו היה עץ, אז מכיוון ש-$|V| \geq 2$ היו בו לפחות שני עלים ובו יש ערכיות 1 שהיא אי-זוגית.
לכן קיים ב-G מעגל C. נתבונן בגרף המתקבל מ-G אחרי הרחקת הצלעות של C. כלומר, אם $C = (V_C, E_C)$, אז:

$$G' = (V, E'), \qquad E' = E \setminus E_C$$

לכל קדקוד ב-V_C הרחקת הצלעות של C מורידה את הערכיות ב-2, ולכל קדקוד שאיננו על C, הערכיות לא משתנה.
לכן גם ב-G' הערכיות של כל קדקוד היא זוגית. כמו כן, מס' הצלעות ב-G' קטן מ-$|E|$. אבל ייתכן ש-G' איננו קשיר, ולכן נתבונן במרכיביו הקשירים

$$G_i = (V_i, E_i), \qquad i = 1, \dots, r$$

נשים לב שלכל אחד מן המרכיבים הקשירים הנ"ל יש לפחות קדקוד משותף אחד עם המעגל C. זה נכון בוודאי אם $r = 1$, כי אז $V_1 = V$. אם $r \geq 2$, אז זה נובע מכך שכל מרכיב קשיר G_i היה מחובר בגרף המקורי לשאר המרכיבים, והרחקת הצלעות של C פגעה בחיבור הזה, ולכן G_i מכיל לפחות קדקוד אחד של C. לפיכך, נוכל לבחור עבור $i = 1, \dots, r$ קדקוד $x_i \in V_i$ הנמצא על המעגל C. לפי הנחת האינדוקציה, בכל רכיב קשיר G_i קיים מסלול אוילריאני סגור. בהג"כ, נבחר את המסלול כך שהוא יתחיל ויסתיים ב-x_i.



כעת, נבחר את אחד ה-x_i-ים. נניח x_i, בתור קדקוד התחלה, ונבחר כיוון תנועה על המעגל C. נלך ב-G_1 לפי המסלול האולריאני הסגור המתחיל ומסתיים ב-x_1. אז נמשיך מ-x_1 לפי כיוון התנועה על המעגל C. בכל פעם שנגיע לאחד מה-x_i, נלך באותו G_i לפי המסלול האוילריאני הסגור המתחיל ומסתיים ב-x_i. כך נמשיך לאורך המעגל C עד אשר נחזור לבסוף לנק' המוצא x_1. בכך נקבל מסלול אוילריאני סגור ב-G כנדרש.