מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים
104142

טענות ומשפטים

תוכן העניינים

1 מבוא למרחבים מטריים

1.1 מרחבים מטריים - הגדרות בסיסיות

טענה 1. יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה. אזי הפונקציה $d : V \times V \to \mathbb{R}$ המוגדרת לפי:

$$d(v,w) := \|v - w\|$$

היא מטריקה על V.

1.2 מרחבים טופולוגיים - הגדרות בסיסיות

טענה 2. נניח (X,d) מרחב מטרי, תת־קבוצה לא־ריקה $U \subset X$. אזי U קבוצה פתוחה ב־(X,d) אמ"מ U היא איחוד של אוסף כלשהו של כדורים פתוחים ב־(X,d).

טענה 3. 1. הצמצום $\tau|_A$ היא טופולוגיה על A.

2. אם d מטריקה על X, אזי $(\tau_d)|_A = \tau_{(d|_A)}$.

1.3 התכנסות סדרות

טענה 4. נניח (X,d) מרחב מטרי, וסדרה $\{x_k\}$ מתוך X, ואיבר $a \in X$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) הסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת ל־a ב־(X,τ_d).

(ב) לכל ε קיים N כך שלכל $k \geq N$ מקיים כי $x_k \in B(a,\varepsilon)$.

(ג) הסדרה $\{d(x_k,a)\}$ ב־$\mathbb{R}$ מתכנסת ל־0 (לפי אינפי).

טענה 5. במרחב מטרי, לכל סדרה מתכנסת יש גבול יחיד.

טענה 6. נניח כי סדרה $\{x_k\}$ מתכנסת ל־a במרחב טופולוגי (X,τ), אזי כל תת־סדרה $\{x_{k_i}\}$ מתכנסת גם היא ל־a.

1.4 סוגי נקודות ביחס לקבוצה במרחבים שונים

טענה 7. נניח (X,d) מרחב מטרי, ותת־קבוצה לא־ריקה $A \subset X$. נניח נקודה $x \in X$. אזי:

(א) הנקודה x היא נקודת סגור של A אמ"מ קיימת סדרה $\{a_n\}$ של איברים ב־A שגבולה x.

(ב) אם x נקודת סגור של A וגם $x \notin A$, אזי x נקודת הצטברות של A.

1.5 קבוצת הפְּנים, וקבוצות סגורות

טענה 8. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ותת־קבוצה $A \subset X$. אזי ניתן להציג את $\operatorname{Int} A$ כאיחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב־A:

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{U \subset A \text{ פתוחה}} U .$$

מסקנה 9. 1. לכל $A \subset X$ מתקיים כי $\operatorname{Int} A$ היא קבוצה פתוחה.

2. קבוצה A פתוחה אמ"מ $A = \operatorname{Int} A$.

3. מתקיים $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

טענה 10. הקבוצה A סגורה אמ"מ היא מכילה את כל נקודות הסגור שלה ($\overline{A} = A$).
נניח (X,τ) מרחב טופולוגי.

1. בהינתן אוסף של קבוצות סגורות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אזי $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ היא קבוצה סגורה.

2. בהינתן מספר סופי של קבוצות סגורות $A_1,\ldots,A_k$, גם איחודן סגור.

טענה 11. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, ונניח תת־קבוצות $A_1 \subset A_2 \subset X$. אזי $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

טענה 12. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי ותת־קבוצה $A \subset X$. אזי

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset C \text{ סגורה}} C.$$

מסקנה 13. 1. $\overline{A}$ קבוצה סגורה.
2. $A = \overline{A}$ אמ"מ A סגורה.
3. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

1.6 קבוצות צפופות וקבוצות דלות

טענה 14. מרחב ℓ_∞ אינו ספרבילי.

טענה 15. נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי $A \subset (X,d)$ גלה אמ"מ בכל כדור פתוח $B(x,R)$ אפשר למצוא כדור נוסף $B(y,r) \subset B(x,R)$ עבורו $B(y,r) \cap A = \varnothing$.

טענה 16. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, וקבוצה $A \subset (X,\tau)$. אזי:

(א) אם A דלה אזי $X \backslash A$ צפופה.

(ב) אם A סגורה מתקיימת גם הגרירה ההפוכה.

טענה 17. נניח (X,d) מרחב מטרי, ללא נקודות מבודדות. אזי כל קבוצה דיסקרטית ב־(X,d) דלה.

1.7 רציפות

טענה 18. נניח (X,τ) ו־(Y,σ) מרחבים טופולוגיים, והעתקה $F : X \to Y$. אזי התנאים הבאים שקולים:
(א) ההעתקה F רציפה.
(ב) ההעתקה F רציפה בכל נקודה ב־X.
(ג) עבור כל קבוצה סגורה $A \subset (Y,\sigma)$, המקור של A הוא קבוצה סגורה ב־(X,τ).

טענה 19. נניח $F : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ העתקה בין מרחבים טופולוגיים, רציפה בנקודה $a \in X$. נניח סדרה $\{x_n\} \subset X$ שמתכנסת ל־a. אזי הסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,σ).

הוכחה. נניח V סביבה של $F(a)$ ב־(Y,σ). אזי, כיוון ש־F רציפה, אפשר למצוא סביבה U של a ב־(X,τ) כך ש־$F(U) \subset V$. כיוון שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל־a, אפשר למצוא N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in U$. לכן, לכל $n \geq N$ יתקיים $F(x_n) \in F(U) \subset V$. ומכאן שהסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$. □

מסקנה 20. אם ההעתקה $F : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ בין מרחבים טופולוגיים רציפה, כל סדרה $\{x_n\}$ המתכנסת לנקודה כלשהי $a \in X$, אזי הסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,σ).

טענה 21. נניח $F : (X,d) \to (Y,\rho)$ העתקה בין מרחבים מטריים, ונקודה $a \in X$. אזי התנאים הבאים שקולים:
(א) ההעתקה F רציפה ב־a.
(ב) לכל $\varepsilon > 0$ אפשר למצוא $\delta > 0$ כך שיתקיים

$$F(B(a,\delta)) \subset B(F(a),\varepsilon),$$

או באופן שקול

$$B(a,\delta) \subset F^{-1}(B(F(a),\varepsilon)).$$

(ג) אם הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל־a ב־(X,d), אזי הסדרה $\{F(a)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,ρ).

טענה 22. נניח $F : (X,d) \to (Y,\rho)$ העתקת ליפשיץ בין מרחבים מטריים. אזי F רציפה.

הערה 23. כאמור, אם f בי־ליפשיץ, אזי היא חח"ע. בפרט היא ליפשיץ, וגם ההעתקה $f^{-1} : \left(f(X), \rho|_{f(x)}\right) \to (X,d)$ היא ליפשיץ, ושתיהן רציפות. לכן f שיכון טופולוגי. כך, אם f בי־ליפשיץ ועל, אז היא בפרט הומאומורפיזם (על המרחבים הטופולוגיים שמהטריקות משרות).

מסקנה 24. קבוצת האיזומטריות של מרחב מהווה חבורה, בפרט תת־חבורה של חבורת ההומאומורפיזמים ממרחב לעצמו.

טענה 25. נורמות $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ על $\mathbb{R}^n$ כולן שקולות. בפרט הן מגדירות על $\mathbb{R}^n$ אותה טופולוגיה (הנקראת הטופולוגיה האוקלידית).

2 ...וטופולוגיים

2.1 דוגמאות ותכונות נוספות

טענה 26. נניח $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הוא אוסף טופולוגיות על קבוצה לא־ריקה X. אזי גם τ המוגדר לפי

$$\tau=\bigcap_{\alpha\in I}\tau_\alpha$$

הוא טופולוגיה.

מסקנה 27. נניח X קבוצה לא־ריקה, וכי Θ אוסף כלשהו של תת־קבוצות של X. אזי

$$\tau(\Theta)=\bigcap_{\tau\text{ טופולוגיה על }X\text{ עם }\Theta\subset\tau}\tau$$

היא הטופולוגיה הכי דלה המכילה את Θ (היא נקראת הטופולוגיה הנוצרת על־ידי Θ).

2.2 בחירת טופולוגיה לפי דרישה לרציפות

2.3 מרחבי מנה טופולוגיים

2.4 בסיס לטופולוגיה

טענה 28. האוסף ψ הוא בסיס של איזשהי טופולוגיה τ על X אם ורק אם איחוד כל הקבוצות ב־ψ שווה ל־X, וגם כל חיתוך סופי של קבוצות מ־ψ הוא או ריק או איחוד כלשהו של קבוצות מ־ψ.

הערה 29. נניח ψ אוסף כלשהו של תתי־קבוצות של X המקיים כי איחוד כל הקבוצות ב־ψ שווה ל־X. אם "נוסיף" ל־ψ את כל החיתוכים הסופיים של קבוצות ממנו, נקבל אוסף שיכול להיות בסיס לטופולוגיה כלשהי על X.

2.5 מכפלות ישרות של מרחבים טופולוגיים

2.6 אקסיומות מנייה

טענה 30. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי
(א) אם (X,τ) הוא C_{II}, אזי הוא ספרבילי.
(ב) אם (X,τ) מטריזבילי, אזי גם הגרירה ההפוכה נכונה.

משפט 31 (*Lindelöf*). נניח (X,τ) מרחב טופולוגי C_{II}. אזי כל כיסוי של (X,τ) אפשר לבחור תת־כיסוי בר־מנייה.

2.7 אקסיומות ההפרדה

טענה 32. כל מרחב מטרי הוא נורמלי.

לֵמָה 33 (הלמה של *Urysohn*). נניח (X,d) מרחב מטרי, ונניח A_0,A_1 קבוצות סגורות זרות ב־(X,d), אזי אפשר למצוא f רציפה מ־(X,d) אל $\mathbb{R}$ כך ש־

$$A_0=f^{-1}(0),\quad A_1=f^{-1}(1).$$

3 מרחבים מטריים – שלמות

3.1 סדרות קוֹשִי

טענה 34. נניח $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא העתקת ליפשיץ בין (מרחבים מטריים), אזי f מעתיקה כל דרת קושי ב־(X,d) לסדרת קושי ב־(Y,ρ).

טענה 35. נניח $(X_1,d_1),\ldots,(X_k,d_k)$ מרחבים מטריים שלמים, נסמן את מכפלתם $X=\prod_{i\le k}X_i$. אזי המרחב $(X,d_{\max})$ גם הוא מרחב שלם.

טענה 36. נניח d, d' מטריקות שקולות על X. אזי (X,d) שלם אם ורק אם (X,d') שלם.

טענה 37. נניח (X,d) מרחב מטרי, A תת־קבוצה לא ריקה של X.

(א) אם $(A, d|_A)$ שלם, אזי A סגורה ב־(X,d).

א) אם (X,d) שלם ו־A סגורה, אזי $(A, d|_A)$ שלם.

משפט 38 (הלמה של *Cantor*). נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) (X,d) שלם.

(ב) לכל סדרה יורדת אינסופית של כדורים סגורים

$$B\left[x_1, R_1\right] \supset B\left[x_2, R_2\right] \supset \cdots$$

ב־(X,d) עם רדיוסים השואפים לאפס, יש נקודה משותפת

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[x_n, R_n\right] = \{a\}$$

עבור $a \in X$ כלשהי.

3.2 משפט Baire

משפט 39 (*Baire*). אי־אפשר לכסות כדור סגור (מרדיוס חיובי) במרחב מטרי שלם, על־ידי מספר בן־מניה של קבוצות דלות.

מסקנה 40. נניח שקבוצה מקטגוריה שנייה מכוסה על־ידי אוסף בר־מנייה של קבוצות סגורות A_i. אזי לא יכול להיות שכל ה־A_i דלות. לכן אפשר למצוא לפחות A_n עבורה

$$\operatorname{Int} A_n = \operatorname{Int} \overline{A_n} \neq \varnothing ,$$

כלומר יש ל־A_n נקודת פנים.

נניח (X,d) מרחב מטרי שלם, ו־$A_1, A_2, \ldots$ קבוצות דלות ב־(X,d). לפי משפט Baire, האיחוד $\bigcup_i A_i$ לא מכסה אף כדור סגור ב־(X,d), כלומר בכל כדור סגור (ולכן גם בכל כדור פתוח) יש נקודה שלא שייכת לאיחוד. כלומר, הקבוצה $X \setminus \bigcup_i A_i$ צפופה ב־(X,d).

מסקנה 41. נניח כעת אוסף קבוצות פתוחות וצפופות $U_1, U_2, \ldots$ ב־(X,d). לכן האוסף $\{A_i = X \setminus U_i\}$ הוא אוסף של קבוצות דלילות. כך

$$X \setminus \bigcup_i A_i = \bigcap_i X \setminus A_i = \bigcap_i U_i$$

היא קבוצה צפופה ב־(X,d). כלומר, במרחב מטרי שלם חיתוך בר־מנייה של קבוצות פתוחות וצפופות הוא בעצמו צפוף.

3.3 משפט נקודות השבת של Banach

טענה 42. נניח $f : (X,d) \to (X,d)$ היא העתקה c-ליפשיץ ממרחב מטרי לעצמו. אזי

$$f^{(n)} : (X,d) \to (X,d)$$

היא העתקה c^n־ליפשיץ (לכל n טבעי).

משפט 43 (*Banach*). נניח (X,d) מרחב מטרי שלם, $f : (X,d) \to (X,d)$ העתקה מכווצת. אזי יש ל־f בדיוק נקודת שבת אחת.

3.4 השלמה של מרחבים מטריים

משפט 44. נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי

(א) יש ל־(X,d) השלמה.

(ב) נניח (X^*, d^*) ו־(X^{**}, d^{**}) השלמות של (X,d), כך ש־(X,d) תת־מרחב שלהם. אזי אפשר למצוא איזומטריה $F : (X^*, d^*) \to (X^{**}, d^{**})$ כך ש־

$$.F\big|_X = \operatorname{Id}$$

4 קשירות

4.1 הגדרות בסיסיות

טענה 45. נניח $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגיים, ונניח Z קבוצה קשירה ב־(X,τ). אזי $f(Z)$ היא קבוצה קשירה ב־(Y,σ).

טענה 46. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, Z קשירה, ונניח $X = A \cup B$ הפרדה של X. אזי $Z \subset A$ או $Z \subset V$.

טענה 47. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, Z קבוצה קשירה. נניח W כלשהי כך ש־$Z \subset W \subset \overline{Z}$. אזי גם W קשירה (בפרט, אם Z קשירה, אזי $\overline{Z}$ קשירה. הגרירה ההפוכה לא בהכרח מתקיימת (בדקו!)).

לֵמָה 48. נניח $A \subset W$ קבוצות במרחב טופולוגי (X,τ). נניח $x \in W$. אזי x נקודת סגור של A ב־(X,τ) אם ורק אם x נקודת סגור של A ב־$(W,\tau|_W)$.

טענה 49. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קבוצות קשירות ב־(X,τ), כך שלכל $\alpha,\beta \in I$ $Z_\alpha \cap Z_\beta \neq \varnothing$. אזי $\bigcup_{\alpha\in I} Z_\alpha$ קשירה.

משפט 50. הקבוצות הקשירות של המרחב הממשי עם הטופולוגיה האוקלידית $(\mathbb{R},\tau)$ הן בדיוק הקטעים פתוחים, הקטעים הסגורים, והקטעים החצי־פתוחים חצי־סגורים על הישר.

משפט 51 (ערך הביניים). נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, Z קשירה. נניח $F : (X,\tau) \to \mathbb{R}$ רציפה, ונניח $a,b \in Z$. אזי אם

$$F(a) = \alpha < \beta = F(b),$$

לכל $\gamma \in (\alpha,\beta)$ אפשר למצוא $c \in Z$ כך ש־$F(c) = \gamma$.

מסקנה 52 (הניסוח הקלאסי). נניח $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה, $F(a) = \alpha < \beta = F(b)$. אזי, כיוון ש־$[a,b]$ קשירה, המשפט על ערך הביניים (עבור מרחבים טופולוגיים) גורר שעבור כל $\gamma \in (\alpha,\beta)$ אפשר למצור $c \in (a,b)$ עבורו $F(c) = \gamma$.

טענה 53. נניח (X_1,τ_1) ו־(X_2,τ_2) מרחבים טופולוגיים, ו־Z_1 ו־Z_2 קבוצות קשירות ב־X_1 ו־X_2 בהתאמה. אזי גם $Z_1 \times Z_2$ קשירה ב־$(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$.

4.2 רכיבי קשירות

משפט 54. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי, ניתן להציג את X כאיחוד

$$X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha,$$

כך שלכל $\alpha,\beta \in I$

- $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$
- X_α קבוצה קשירה וסגורה
- כל קבוצה קשירה ב־(X,τ) מוכלת ב־X_α כלשהי (והיא יחידה, כי הקבוצות X_α השונות זרות).

אם יש הצגה אחרת ל־X

$$X = \bigcup_{\beta\in J} X_\beta$$

עם אותן התכונות, אזי יש העתקה חד־חד־ערכית ועל $\varphi : I \to J$ כך שלכל $\alpha \in I$ קיים $X_\alpha = X_{\varphi(\alpha)}$.

4.3 קשירות מסילתית

טענה 55. אם (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר מסילתית, אז (X,τ) קשיר (הגרירה ההפוכה לא בהכרח נכונה).

5 קומפקטיות

5.1 קומפקטיות במרחבים טופולוגיים כלליים

טענה 56. נניח (X,τ) מרחב טופולוגית ונניח $\Psi = \{V_\beta\}_{\beta\in J}$ בסיס של τ. נניח $A \subset (X,\tau)$. אזי A קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של A על־ידי קבוצות מ־Ψ, קיים תת־כיסוי סופי.

טענה 57. נניח $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגיים, ונניח $A\subset(X,\tau)$ קומפקטית. אזי $F(A)$ קומפקטית ב־(Y,σ).

טענה 58. נניח (X,τ) קומפקטי, $A\subset(X,\tau)$ סגורה. אזי A קומפקטית.

טענה 59. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף, ו־$A\subset(X,\tau)$ קומפקטית. אזי A סגורה.

טענה 60. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף. אזי הוא נורמלי (T_4).

משפט 61. נניח (X_1,τ_1) ו־(X_2,τ_2) מרחבים טופולוגיים, וקבוצות קמפקטיות $A_1\subset X_1$ ו־$A_2\subset X_2$. אזי $A_1\times A_2$ קומפקטית ב־$(X_1\times X_2,\tau_1\times\tau_2)$ (בפרט, עבור $A_i=X_i$ מקבלים כי המרחב כולו קומפקטי) .

מסקנה 62. מכפלה סופית של קבוצות קומפקטיותת היא קומפקטית (לפי טופולוגית המכפלה).

5.2 קומפקטיות במרחבים מטריים

טענה 63. נניח A תת־קבוצה של מרחב מטרי (X,d), ונניח של־A יש ε־רשת סופית. אזי ל־A יש 2ε־רשת סופית מנקודות של A.

טענה 64. קבוצה A במרחב מטרי (X,d) היא חסומה לחלוטין רק אם היא חסומה (אך לא להיפך).

טענה 65. נניח (X,d) מרחב מטרי חסום לחלוטין. אזי (X,d) ספרבילי (כלומר C_{II}).

משפט 66. נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) (X,d) הוא מרחב מטרי קומפקטי (כלומר המרחב הטופולוגי (X,τ_d) קומפקטי).

(ב) מכל כיסוי בן־מנייה של (X,d) ניתן לבחור תת־כיסוי סופי.

(ג) כל סדרה עולה $U_1\subset U_2\subset\cdots$ של קבוצות פתוחות ב־(X,d) שמכסה את X היא בהכרח מתייצבת (כלומר, קיים מקום שהחל ממנו היא קבועה).

(ד) כל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא־ריקות $A_1\supset A_2\supset\cdots$ ב־(X,d) מתקיים $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\neq\varnothing$.

(ה) מכל סדרה ב־(X,d) ניתן לבחור תת־סדרה מתכנסת.

(ו) (X,d) הוא

1. חסום לחלוטין
2. ושלם.

תרגיל 67. גם התנאים הבאים שקולים לקומפקטיות של מרחב מטרי (X,d):

(ז) מכל כיסוי של (X,d) על־ידי כדורים פתוחים אפשר לבחור תת־כיסוי סופי.

(ח) מכל כיסוי בן־מנייה של (X,d) על־ידי כדורים פתוחים קיים תת־כיסוי סופי.

(ט) או ש־X קבוצה סופית, או שלכל תת־קבוצה אינסופית של X יש נקודת הצטברות ב־(X,d).

כמו־כן, אם (X,d) קומפקטית אזי לכל סדרה יורדת של כדורים סגורים ב־(X,d) יש נקודה משותפת (אבל לא להיפך).

מסקנה 68. נניח A קבוצה במרחב מטרי (X,d) אזי תנאים הבאים שקולים:

(1) A קומפקטית.

(2) מכל סדרה ב־A אפשר לבחור תת־סדרה מתכנסת ב־$\left(A,d|_A\right)$.

(3) A חסומה לחלוטין, והמרחב המטרי $\left(A,d|_A\right)$ שלם (אממ A סגורה ו־X שלם).

טענה 69. נתבונן במרחב $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$, ותהי $A\subset\mathbb{R}^n$. אזי A קומפקטית אם ורק אם A סגורה וחסומה.

מסקנה 70. נניח d מטריקה על $\mathbb{R}^n$, ששקולה ל־d_∞. אזי קבוצה A קומפקטית ב־$(\mathbb{R}^n,d)$ אם ורק אם A סגורה וחסומה ב־$(\mathbb{R}^n,d)$.

משפט 71. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $A\subset(X,\tau)$ קומפקטית. נניח $F:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ רציפה (עם הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$). אזי קיימות $a,b\in A$ עם

$$F(a)=\inf_{x\in A}F(x)>-\infty$$

וכן

$$F(b)=\sup_{x\in A}F(x)<+\infty$$

(כלומר F משיגה את החסמים שלה על A).

משפט 72. כל נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^n$ שקולה ל־$\|\cdot\|_\infty$ (בפרט כל שתי נורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות, ולכן המטריקות שהן משרות מגדירות אותה טופולוגיה – הטופולוגיה האוקלידית).

מסקנה 73. לכל נורמה על $\mathbb{R}^n$ והמטריקה המושרית, קבוצה היא קומפקטית במרחב המטרי אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

5.3 רציפות במידה שווה

תרגיל 74. רציפות במידה שווה גוררת רציפות (אבל לא הפוך)

משפט 75. נניח (X,d) מרחב מטרי קומפקטי, $F:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה. אזי F רציפה במידה שווה.

5.4 קומפקטיות במרחבי הפונקציות

מסקנה 76. עבור $A\subset(C(X),d_\infty)$ קיים כי $\overline{A}$ קומפקטית אם ורק אם A חסומה לחלוטין. בפרט, אם A חסומה לחלוטין אזי $\overline{A}$ קומפקטית, ואז מכל סדרה של פונקציות ב־A אפשר לבחור תת־סדרה המתכנסת תחת d_∞ לאיזשהי פונקציה ב־$\overline{A}$.

משפט 77 (*Arzelà-Ascoli*). נניח (X,ρ) מרחב מטרי קומפקטי, A קבוצה ב־$C(X)$. אזי A חסומה לחלוטין אם ורק אם A חסומה ורציפה במידה אחידה.