<u>אלגברה ב – חבורות חופשיות</u>

נושאים:
1. ייצוגים של חבורות
2. מכפלה חופשית

<u>ייצוגים של חבורות</u>

<u>הגדרה:</u> תהי G חבורה, $X\subset G$ קבוצה. נסמן $S_X=\{g^{-1}xg|g\in G, x\in X\}$. הסגור הנורמלי של X ב – G מוגדר להיות החבורה הנוצרת ע"י S_X . חבורה זו מסומנת $N_G(X)$.

דוגמאות:
1. עבור G חבורה כלשהי, H תת חבורה נורמלית, $N_G(H)=H$.
2. עבור $G=SL_2(R)$, $X=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, מהו $N_{SL_2(Z)}(X)$?

$\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\-a&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}dc+ab&d^2+b^2\\-c^2-a^2&-cd-ab\end{pmatrix}$. ז"א הסגור הנורמלי הוא החבורה הנוצרת ע"י מטריצות מהצורה לעיל.

<u>הגדרה:</u> תהי G חבורה. נאמר כי ל – G ייצוג ע"י קבוצת יוצרים X וקבוצת יחסים R אם $G\simeq F(X)/N(R)$ (כאשר $R\subset F(X)$ קבוצת מילים). במקרה זה נסמן $G=\langle X|R\rangle$.

<u>הגדרה:</u> ייצוג של חבורה ייקרא סופי אם X ו – R קבוצות סופיות.

<u>הערות:</u>
1. לכל חבורה יש מספר רב של ייצוגים שונים.
2. לחבורה $G=\langle X|R\rangle$, ל - $g\in G$ יכולים להיות שני ייצוגים שונים ע"י יוצרים $x_i, y_j\in X$ – ל $g=x_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n}=y_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot y_m^{t_m}$ שחלקם אולי שונים, אבל במקרה זה $x_1^{r_1}\cdot\ldots x_n^{r_n}\cdot y_m^{-t_m}\cdot\ldots\cdot y_1^{-t_1}\in N(R)$.

דוגמאות:
1. החבורה הציקלית החיבורית מסדר n (המסומנת Z_n) מיוצגת ע"י $Z_n=\langle a|a^n=1\rangle$. זה למעשה ייצוג, כאשר היוצר הוא a והיחס הוא a^n
2. החבורה החופשית $F(X)$ ייצוג כ – $F(X)=\langle X|\emptyset\rangle$.
3. לחבורה $SL_2(Z)$ הייצוג $SL_2(Z)=\langle a,b|abab^{-1}a^{-1}b^{-1},(aba)^4\rangle$.

תרגיל: מהי החבורה הנתונה ע"י הייצוג הבא: $G=\langle a,b|a^{-1}ba=b^2,\ b^{-1}ab=a^2\rangle$?
פתרון: $ab=ba^2, ba=ab^2=ba^2b\Rightarrow 1=ab$ *לכן* $b=a^{-1}$ *, לכן נקבל* $a=a^2$ *(מהיחס השני), לכן* $a=1$ *ו –* $b=1$*, ז"א G החבורה הטריוויאלית.*

<u>הערה:</u>
3. אם G מיוצגת כ – $G=\langle X|R\rangle$ אז לכל עבור $\varphi:F(X)\to G$ ההומומורפיזם המובטח מהתכונה האוניברסלית של החבורה החופשית (עבור $f:X\to G$ השיכון הטבעי), כל $w\in R$ מקיים $\varphi(w)=1_G$.

<u>מכפלה חופשית של חבורות</u>

<u>הגדרה:</u> תהיינה G,H חבורות זרות. המכפלה החופשית $G*H$ היא אוסף הסדרות מהצורה

$(x_1,...,x_n)$ כאשר $x_i\in G\cup H$, עם כפל הנתון ע"י שרשור מילים ויחס שקילות של מילים הניתן ע"י הפעולות:

1. אם ב – $(x_1,...,x_n)$ האות x_i היא איבר היחידה של G או של H, ניתן למחוק אותה

2. אם ב – $(x_1,...,x_n)$ קיים $1\le i\le n-1$ כך ש – x_i,x_{i+1} באותה החבורה, ניתן להחליף את זוג האותיות x_i,x_{i+1} באות x_ix_{i+1} (ולקבל סדרה קצרה יותר).

<u>הערה:</u>

4. המילים במכפלה החופשית הן למעשה סדרות השקולות לסדרות מהצורה $(x_1,...,x_n)$ כאשר כל האותיות הזוגיות מאותה חבורה וכל האותיות האי זוגיות מהחבורה השנייה, ואף אות אינה היחידה של אף אחת מהחבורות.

<u>התכונה האוניברסלית של המכפלה החופשית:</u> G איזומורפית למכפלה החופשית של G_1,G_2 אם $G_1\cup G_2$ קבוצת יוצרים של G, קיימים שיכונים $i_j:G_j\to G$ ל – $j\in\{1,2\}$ ולכל חבורה H כך שיש הומומורפיזמים $f_i:G_i\to H$ ל – $i\in\{1,2\}$ אז קיים הומומורפיזם יחיד $\varphi:G\to H$ כך ש - $\varphi\circ i_j=f_j$ ל – $j\in\{1,2\}$.

<u>טענה:</u> עבור חבורות $G_i=\langle X_i|R_i\rangle$ חבורות (ל – $i\in\{1,2\}$) כך ש – $X_1\cap X_2=\emptyset$, החבורה $G=\langle X_1\cup X_2|R_1\cup R_2\rangle$ איזומורפית ל – G_1*G_2 .

הוכחה: ברור ש $G_1\cup G_2$ יוצרים של G, כי היוצרים של $G_1\cup G_2$ הם $X_1\cup X_2$ וזו בדיוק קבוצת היוצרים של G.

נגדיר את $i_j:G_j\to G$ (ל – $j\in\{1,2\}$) באופן הבא: ל – $g\in G_j$, נבחר ייצוג של g ע"י היוצרים $g=x_1^{r_1}\cdot...\cdot x_n^{r_n}$ ונעתיק אותו ל- $x_1^{r_1}\cdot...\cdot x_n^{r_n}$ כאבר ב – G. איבר זה נמצא ב – G כי X_j חלק מקבוצת היוצרים של G. i_j מוגדרת היטב בדיוק בגלל הערה 2 והעובדה ש - $N_{G_j}(R_j)$ תת חבורה ב – $N_G(R_1\cup R_2)$. ההומומורפיזם i_j הוא שיכון כי אם קיימים $g_1,g_2\in G_j$ כך ש – $i_j(g_1)=i_j(g_2)$, נרשום $g_1=x_1^{r_1}\cdot...\cdot x_n^{r_n},\ g_2=y_1^{t_1}\cdot...\cdot y_m^{t_m}$, אז מתקיים $x_1^{r_1}\cdot...\cdot x_n^{r_n}\cdot y_m^{-t_m}\cdot...\cdot y_1^{-t_1}\in N_G(R_1\cup R_2)$ כאשר $x_a,y_b\in X_j$. כיוון שקבוצות היוצרים זרות, בהכרח $x_1^{r_1}\cdot...\cdot x_n^{r_n}\cdot y_m^{-t_m}\cdot...\cdot y_1^{-t_1}\in N_{G_j}(R_j)$ לכן $g_1=g_2$ ב - G_j .

נניח שקיימים הומומורפיזמים $f_i:G_i\to H$ אז נגדיר $\varphi:G\to H$ באופן הבא: עבור יוצר $x\in X_j$ נגדיר $\varphi(x)=f_j(x)$. עבור $g\in G$ הנתון ע"י יוצרים $g=x_1^{r_1}\cdot...\cdot x_n^{r_n}$ ל – $x_i\in X_1\cup X_2$ נגדיר $\varphi(g)=\varphi(x_1)^{r_1}\cdot...\cdot\varphi(x_n)^{r_n}$. שוב, לפי הערה 2, φ מוגדרת היטב על G. כמו כן, ברור כי זה הומומורפיזם (כי המכפלה של שני איברים מיוצגת ע"י הכפלת ייצוגי היוצרים, לא דרשנו שהייצוגים יהיו מצומצמים). התנאי $\varphi\circ i_j=f_j$ מתקיים באופן ברור, כי כך בנינו את φ על היוצרים. בעזרת התכונה האוניברסלית, נקבל $G\simeq G_1*G_2$

<u>מסקנה:</u> עבור $F(X_1),F(X_2)$ חבורות חופשיות, מתקיים $F(X_1\cup X_2)=F(X_1)*F(X_2)$, בפרט החבורה החופשית $F(X)$ היא המכפלה החופשית של $|X|$ עותקים של Z, עבור $|X|$ מספר האיברים ב - X (כי החבורה החופשית על יוצר אחד היא Z).