שניר הורן

אינפי 2

1.
$$\left|\frac{xy^3+xy\sin(2015x+2016y)}{(x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}}\right| \le \left|\frac{xy^3+xy}{(x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}}\right|$$

$$\cancel{\left|\frac{xy^3+xy}{x^2+y^2}\right|} \le \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לפי הנתון $f(0,0)=0$ ולכן הפונקציה רציפה.

שני הפונקציות מעל ידועות כמתכנסות ל-0, כפי שהוכח בהרצאה.

2.א. ידוע כי קיים הגבול: (עבור A_1,B_1 קבועים כלשהן):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1)\ \frac{f(x,y)-f(0,0)+A_1(x-0)+B_1(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

מאחר ו-f דיפרנציאבילית לכל מסלול קיים הגבול ובפרט:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (2)\ \frac{f(y,x)-f(0,0)+A_2(x-0)+B_2(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1)-(2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(y,x)+(A_1+A_2)x+(B_1+B_2)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)-g(0,0)+(A_1+A_2)x+(B_1+B_2)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

לפי הגדרה, $g(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

2.ב. $h(x,y)=f(|x|,y^2)$.

נתבונן בגבול:

$$f_y=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y^2)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{h(0,y)-h(0,0)}{y}$$

~~לפי שלפני/לטענתי/ קיים f_y כמו שהתבקש:~~

$$\cancel{f(0,0_y)=\frac{h(0,y)-h(0,0)}{y}}$$

$$f_x=\lim_{x\to0^+}\frac{h(x,0)-h(0,0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(|x|,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$f_x=\lim_{x\to0^-}\frac{h(x,0)-h(0,0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(|x|,0)-f(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(-x,0)-f(0,0)}{-x}$$

$(x^2+y^2)\neq 0$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$ ג.3

$$f_{xy}(0,0)=0$$ סוף צוי

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^5}{y^4}=0$$

3.ב. נגזור לפי x ו-y כלומר נמצא את ה הנ"ח מספר רציונלי)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\underset{\text{כלל המכפלה}}{=}y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{-4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\,\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\,\frac{4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

נחשב את הנגזרת מסדר ראשון בנק' (0,0):

$$f_x = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f_y = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

כעת נחשב את הנ"ח מסדר שני בנק' (0,0):

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y\cdot\frac{-y^2}{y^2}}{y} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\frac{x^2}{x^2}}{x} = 1$$

קיבלנו שני נגזרות חלקיות שונות: $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$

3. ב. נבדוק:

$$f_{xy}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f_{xy}(0,0) = -1$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot xy \right)$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot x + \cancel{\ }8xy$$

$$+\,yx\cdot\frac{(8xy)(x^2+y^2)^2 - 4xy^2\cdot 4y\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \emptyset$$

לכן, f_{xy} אינה רציפה ב- (0,0).

6. בהרח

$a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות.

לפי כלל השרשרת:

$$f_x\left(0,\tfrac{\pi}{4}\right) = e^0\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot a'\left(e^0\sin\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot b\left(e^0\cos\tfrac{\pi}{4}\right) + e^0\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot b'\left(e^0\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot a\left(e^0\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \tfrac{\sqrt2}{2}\cdot a'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot b\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right) + \tfrac{\sqrt2}{2}\, b'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot a\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$f_y\left(0,\tfrac{\pi}{4}\right) = e^0\cos\tfrac{\pi}{4}\cdot a'\left(e^0\sin\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot b\left(e^0\cos\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin\tfrac{\pi}{4}\cdot e^0\cdot b'\left(e^0\cos\tfrac{\pi}{4}\right)\cdot a\left(e^0\sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tfrac{\sqrt2}{2}\cdot a'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot b\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right) - \tfrac{\sqrt2}{2}\, b'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot a\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)$$

מאחר והנ"ח גזירות ברציפות, מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f\cdot\vec{u} = \left(f_x\left(0,\tfrac{\pi}{4}\right), f_y\left(0,\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt2}{2}, -\tfrac{\sqrt2}{2}\right)$$

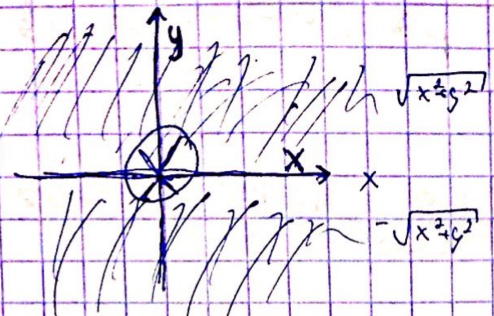
$$= \left(\tfrac{\sqrt2}{2}\left(a'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot b\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right) + a\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)b'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\right), \tfrac{\sqrt2}{2}\left(a'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot b\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right) - b'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)a\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\right)\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt2}{2}, -\tfrac{\sqrt2}{2}\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\left(a'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\cdot b\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right) + a\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)b'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\right), -\tfrac{1}{2}\left(a'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)b\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right) - a\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)b'\left(\tfrac{\sqrt2}{2}\right)\right)\right)$$

כנדרש.

$\square$

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & y>0\\ x & y=0\\ -\sqrt{x^2+y^2} & y<0\end{cases}$$



נגדיר $\vec{u}=(u_1,u_2)$.

א. כאשר $y>0$: $(u_2>0)$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(h\cdot u_1,h\cdot u_2)-f(0,0)}{h|\vec{u}|}$$

$(f(0,0)=0)$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{(hu_1)^2+(hu_2)^2}}{h\sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2}}=\lim_{h\to0^+}\frac{h\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{h\sqrt{u_1^2+u_2^2}}=1$$

כאשר $y<0$: $(u_2<0)$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{-\sqrt{(hu_1)^2+(hu_2)^2}}{h\sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2}}=-1$$

כאשר $y=0$: $(u_2=0)$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(hu_1,hu_2)}{h\sqrt{(u_1)^2+u_2^2}}=\lim_{h\to0^+}\frac{h\cdot u_1}{h\cdot\sqrt{u_1^2}}=1$$

ב. הווקטורים עבורם מתקיים $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{u}$ הם הווקטורים עבורם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית.

ראינו לפי סעיף הכיוונית $\frac{\partial f}{\partial u}$ של f משתנה כאשר $y<0$ $(u_2<0)$.

לכן מופיע רק עבור $u_2\geq0$ כאשר $\vec{u}=(u_1,u_2)$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot\vec{u}$

ג. $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t\vec{u}}$

שגבול זה שואף עבור $t\to0^+$ ו- -1 $t\to0^-$ (לכן הגבולות

$=\lim_{t\to0}$

$\nabla f=(f_x,f_y)$ → $f_x=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$

$f_y=\lim_{y\to0^+}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ $\lim_{y\to0^+}$

שגבול זה קיים לכן f לא דיפרנציאבילית

לכן הנגזרת מוגדרת אם ה ש $f_x = -f_x$
כלומר $f_x = 0$.

נניח בשלילה כי $f_x \neq 0$.
אז מתקיים כי קיים הגבול:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(|x|, y^2) - f(0,0)}{x}$$

אם כך גם לו שבירה ב-0 ($|x|$).
סתירה.

הגדרה:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y^2) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y^2) - f(0,0)}{y^2} \cdot y$$

$= 0$

שגבול זה קיים לכל y ולכן פרטי ב-y של הגבול h אינם משפיעים על הנגזרות.

4. הוכחה
תהי $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה נ"ח חסומות בסביבת $(0,0)$.
עבור סגל כמשבו לכל δ $d_2(x,y)<\delta$ $(x,y \in \mathbb{R}^2)$ קיימים $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ כך ש- $|f_x(x,y)| \le M_1$, $|f_y(x,y)| \le M_2$.

$$f_x(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$$

לפי משפט לגרנז', קיים $0 \le c_x \le x$ כך ש-

$$f(c_x, 0) = \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \le M_1$$

באופן דומה, עבור f_y מתקיים:

$$f_y(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}$$

לפי משפט לגרנז' קיים c_{yx} כך ש-:

$$f(x, c_{yx}) = \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} \le M_2$$

הערה:
יכולנו
להשתמש
בלופיטל
כי f_x, f_y
חסומות.

נוכל לכתוב את $f(x,y)$ כך:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y) - f(x,0) + f(x,0) - f(0,0)|$$

$$\le |f(x,y) - f(x,0)| + |f(x,0) - f(0,0)|$$

$$= |f(x, c_{yx})| + |f(c_x, 0)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לכן יהי $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $d_2(x,y) < \delta$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים
$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.