

תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 3

פתרונות יתפרסמו באתר הקורס ב- 30.12.01.

תרגיל 1.

יהיו X, Y משתנים אקראיים ברנולי בלתי מתואמים, דהיינו $cov(X, Y) = 0$. האם X, Y בלתי תלויים? תזכורת: מ"א Z נקרא מ"א ברנולי אם $P(Z = 1) = p$, $P(Z = 0) = 1 - p$ עבור פרמטר $p \in (0, 1)$.

תרגיל 2. יהא X מ"א פואסוני עם פרמטר $\lambda < 1$, דהיינו $P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, עבור $k = 0, 1, 2, \dots$.

(א) מצאו את $E(X!)$.

(ב) מצאו את $E((X + 1)!)$.

(ג) הוכיחו כי $E(X^n) = \lambda E((X + 1)^{n-1})$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

תרגיל 3.

יהיו X, Y שני משתנים אקראיים בלתי תלויים מפולגים לפי התפלגות פואסונית עם פרמטרים λ_x ו- λ_y בהתאמה. הוכיחו כי אם $\lambda_x < \lambda_y$ אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $P(X \leq n) > P(Y \leq n)$. תזכורת: נאמר כי מ"א Z מפולג פואסוני עם פרמטר λ אם $P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

תרגיל 4.

יהיו $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ו- $Y \sim \text{Geom}(p)$ שני מ"א בלתי תלויים. מצאו את ההסתברות $P(Y - X = n)$, $n > 0$. תזכורת: נאמר כי מ"א Z מפולג גאומטרי עם פרמטר $p \in (0, 1)$ אם $P(Z = k) = pq^{k-1}$, כאשר $k = 1, 2, \dots$ ו- $q = 1 - p$.

תרגיל 5.

לניסוי מסויים יש r תוצאות אפשריות: $1, 2, \dots, r$ אשר מופיעות בהסתברויות p_1, p_2, \dots, p_r בהתאמה. חוזרים על הניסוי n פעמים. יהיו X מספר הניסויים בהם התקבלה תוצאה 1 ו- Y מספר הניסויים בהם התקבלה תוצאה 2. חישבו את $\rho(X, Y)$.

הדרכה:

נגדיר: $I_k = 1$ אם בניסוי i -י התקבלה תוצאה 1 ו- $I_k = 0$ אחרת. כמו כן נגדיר: $J_k = 1$ אם בניסוי i -י התקבלה תוצאה 2, ו- $J_k = 0$ אחרת. הראו כי:

$$X = I_1 + \dots + I_n \text{ ו- } Y = J_1 + \dots + J_n \bullet$$

$$X \sim \text{BIN}(n, p_1) \text{ ו- } Y \sim \text{BIN}(n, p_2) \bullet$$

$$E(I_k J_k) = 0 \bullet$$

$$E(I_k J_m) = p_1 p_2 \text{ אם } k \neq m \bullet$$

$$E(XY) = n(n-1)p_1 p_2 \bullet$$

$$\text{COV}(X, Y) = -np_1 p_2 \bullet$$

$$\rho(X, Y) = -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} \bullet$$

תרגיל 6.

לנשף אצל קיסר רומאי הוזמנו n זוגות. לפני ריקוד הפתיחה קיסר הרכיב באופן אקראי לגמרי n זוגות הרוקדים. יהא S_n מספר הגברים שבכל זאת ירקדו עם בת זוגם. חישבו את $E(S_n)$ ו- $\text{VAR}(S_n)$. תניחו כי קיסר דאג לכך שבנים רוקדים רק עם בנות.