06/06/2016

קומבינטוריקה – הרצאה 12#

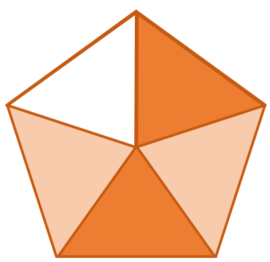
צביעה של מפות

נתונה מפה (כמו באטלס). רוצים לצבוע כל ארץ במפה בצבע כך ששתי ארצות בעלות גבול משותף תהינה תמיד בצבעים שונים.

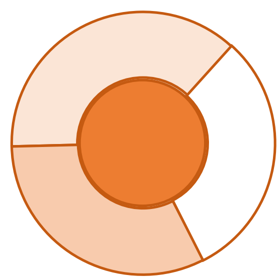
הערות:

(א) אנחנו מניחים שהארצות הן תחומים קשירים.
(ב) נק' משותפת אינה נחשבת גבול משותף.

דוגמאות:



C_5



K_4

בעיית ארבעת הצבעים למפות: האם כל בעיה ניתנת לצביעה בארבעה צבעים?

הגדרה: בהנתן מפה, נגדיר את **גרף השכנות** שלה ע"י: כל ארץ במפה מתוארת ע"י קדקוד בגרף. שני קדקודים מחוברים בצלע אם אותן ארצות הן בעלות גבול משותף.

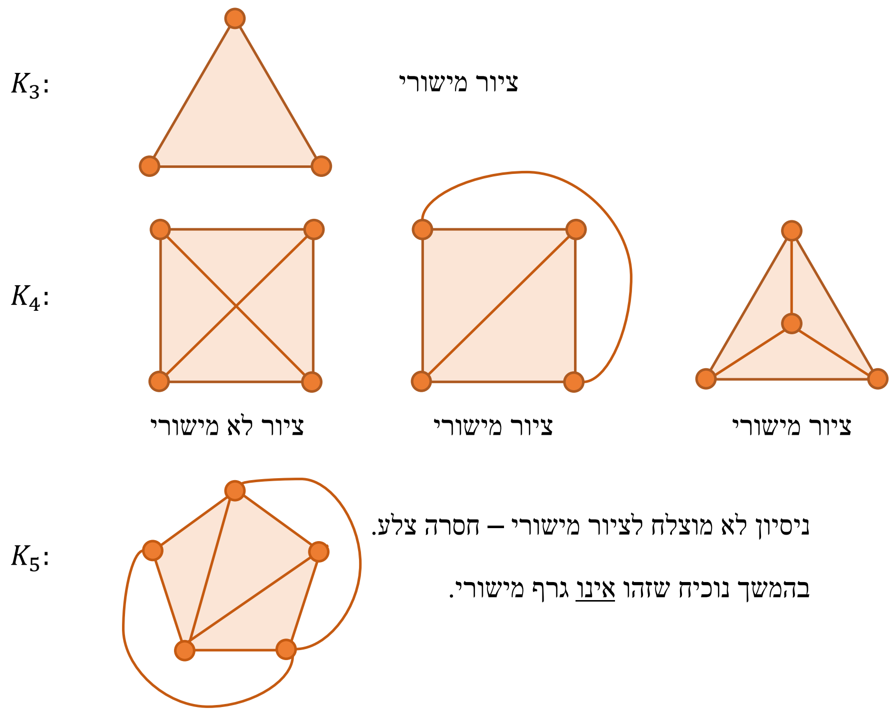
אז בעיית צביעת המפה שקולה לצביעה של גרף השכנות שלה, ומספר הצבעים הדרושים לצביעת המפה הוא מס' הצביעה של הגרף.

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף. **ציור מישורי** D של G הוא תיאור של G במישור $\mathbb{R}^2$ כך ש-:

- הקדקודים הם נק' שונות זו מזו במישור.
- כל צלע היא עקום המחבר את שני הקדקודים שלה ואינו עובר דרך אף קדקוד אחר.
- לשתי צלעות לעולם אין נק' משותפת, אלא אם זהו קדקוד של שתיהן.

הגדרה: גרף G נקרא **מישורי** אם קיים ציור שלו D.

דוגמאות:

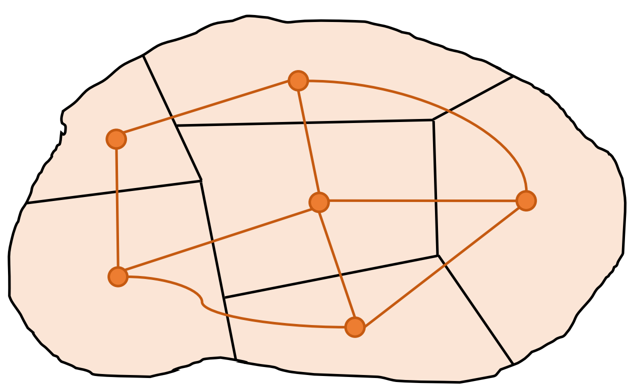


ניסיון לא מוצלח לציור מישורי – חסרה צלע.

בהמשך נוכיח שזהו אינו גרף מישורי.

טענה: לכל מפה, גרף השכנות שלה הוא מישורי.

הוכחה:



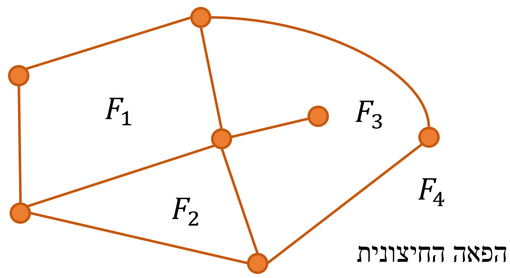
כדי לצייר במישור את גרף השכנות, בוחרים נק' בגל ארץ להיות הקדקוד המייצג אותה. מחברים קדקוד זה ע"י עקומים לנק' הנמצאות על הגבולות של אותה ארץ עם ארצות שכנות. אפשר לעשות זאת ללא חיתוכים.

לכן, נתרגם את בעיית ארבעת הצבעים למפות, לבעיה הבאה:

בעיית ארבעת הצבעים: האם כל גרף מישורי הוא 4-צביע?

הגדרה: יהי D ציור מישורי של גרף G. כל אחד מהרכיבים הקשירים של $\mathbb{R}^2 \setminus D$ נקרא **פאה** של D.

דוגמא:



$n=7$

$m=9$

$f=4$

$7-9+4=2$

משפט – נוסחת אוילר: יהי D ציור מישורי של גרף G. נסמן:

$n=$ מס' הקדקודים.

$m=$ מס' הצלעות.

$f=$ מס' הפאות.

אז אם G קשיר, אז מתקיים $n-m+f=2$.

הוכחה: באינדוקציה על מס' הפאות f. בסיס: $f=1$. במקרה זה G חייב להיות עץ, כי לפי ההנחה הוא קשיר, ואילו היה בו מעגל הוא היה יוצר לפחות פאה אחת שאינה החיצונית. כזכור, בכל עץ מתקיים $m=n-1$, ולכן $n-m+f=1+1=2$ כנדרש.
צעד: $f\geq 2$. לפי הנחת האינדוקציה, נוסחת אוילר נכונה לכל גרף קשיר עם פחות מ-f פאות בציור שלו. ניקח צלע e המפרידה בין שתי פאות של D ונוריד אותה. נסמן את הגרף שנותר ע"י G', את הציור שנותר ע"י D', ואת מס' הקדקודים, הצלעות והפאות שלו ע"י n',m',f'. נשים לב שהגרף G' עדין קשיר. מתקיים:

$$n'=n,\qquad m'=m-1,\qquad f'=f-1$$

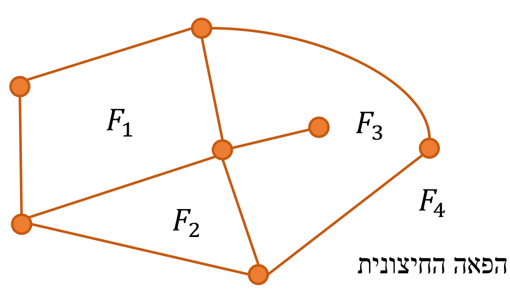
לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש-$n'-m'+f'=2$, לכן:

$$n-m+f=n'-(m'+1)+(f'+1)=n'-m'+f'=2$$

הערה: מנוסחת אוילר נובע שמספר הפאות איננו תלוי בציור המישורי D אלא נקבע באופן יחיד ע"י הגרף G.

הגדרה: בהנתן פאה F של ציור מישורי D, **הערכיות** של F, המסומנת ע"י $d(F)$, היא מס' הצלעות שעוברים כאשר מקיפים את הפאה F.

דוגמא:



$d(F_1)=4$

$d(F_2)=3$

$d(F_3)=6$

$d(F_4)=5$

טענה: יהי D ציור מישורי של גרף $G=(V,E)$. תהיינה $F_1,F_2,\dots,F_f$ כל הפאות של D, אזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{f} d(F_i) = 2|E|$$

הוכחה: כל צלע ב-E תורמת 2 לסכום הערכיויות של הפאות.

משפט: יהיה $G = (V, E)$ גרף מישורי עם $|V| = n \geq 3$, אזי $|E| \leq 3n - 6$.

הוכחה: נניח בלי הגבלת הכלליות ש-G הוא קשיר (אחרת אפשר להוסיף לו צלעות עד שיהיה קשיר – אם מס' הצלעות אחרי ההוספה הוא לכל היותר $3n - 6$, אז גם לפניה היה לכל היותר $3n - 6$). לפי נוסחאת אוילר, $n - m + f = 2$. כמו כן, הערכיות של כל פאה בציור מישורי D של G היא לפחות 3 (כאן משתמשים בהנחה $n \geq 3$, כי כאשר $n = 2$, $d(F) = 2$). לכן:

$$3f \leq \sum_{i=1}^{f} d(F_i) = 2m$$

ומכאן $f \leq \frac{2m}{3}$. נקבל:

$$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{3} = n - \frac{m}{3}$$

$$\therefore \quad m \leq 3n - 6$$

כנדרש.

מסקנה: בכל גרף מישורי G קיים קדקוד x עם ערכיות $d(x) \leq 5$.

הוכחה: ידוע כי $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$. עכשיו, אנו יכולים להניח שמס' הקדקודים $n \geq 3$ (אחרת, המסקנה מיידית). לכן, לפי המשפט הקודם מס' הצלעות הוא לכל היותר $3n - 6$, ולפיכך $\sum_{x \in V} d(x) \leq 3n - 12$. לכן:

$$\frac{1}{n} \sum_{x \in V} d(x) \leq 6 - \frac{12}{n}$$

לכן, הערכיות *הממוצעת* קטנה מ-6, ולכן בהכרח קיים קדקוד שערכיותו לכל היותר 5.