טכניון - מכון טכנולוגי לישראל **הפקולטה למתמטיקה**

חשבון אינפיניטסימלי 2 - 104281

תרגיל רשות - חישוב אינטגרלים מסוימים באמצעות המחשב

סמסטר אביב תשנ"ט עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי

מטרתו של תרגיל זה לבחון 3 שיטות שונות לחישוב אינטגרלים מסוימים באמצעות המחשב (במילים אחרות ,,אינטגרציה נומרית"). בכל אחת מן השיטות להלן נחשב אינטגרלים מסוימים של 3 פונקציות נתונות: פולינום, פונקציה ,,פשוטה" (כזו שהפונקציה הקדומה שלה ידועה) ופונקציה ,,מסובכת" (שעבורה אין אנו יודעים לכתוב את הפונקציה הקדומה באמצעות פונקציות אלמנטריות). מטרת החישוב עבור הפולינום והפונקציה ה,,פשוטה" היא לקבל אינדיקציה לכך שתוכנית המחשב פועלת ונותנת תוצאות סבירות עבור מקרים שבהם הפתרון המדויק ידוע. רק לאחר ששתי בדיקות אלו תעבורנה בהצלחה, יש משמעות לדון בתוצאה המתקבלת עבור המצב שבו הפתרון המדויק איננו ידוע. (כידוע, ב,,חיים האמיתיים" המתמטיקאי נדרש לפתור בעיות שעבורן הפתרון איננו ידוע, ולכן בדיקות מקדימות כדוגמת הנזכרות לעיל חיוניות על-מנת שיוכל לשוות אמינות לפתרון שמצא).

שיטה 1 - אינטגרציה ע"י מלבנים בחלוקה לקטעים שווים

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ (ועל-כן אינטגרבילית שם). מחלקים את הקטע ל-n קטעים שווים, כך שנקודת החלוקה ה-k-ית נמצאת בנקודה

$$x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n \tag{1}$$

האינטגרל מקורב אם כן ע"י הנוסחה

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(b-a)\frac{k}{n} \tag{2}$$

אם נסמן את אגף ימין של (2) ע"י I_n אזי מובטח כי

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

1. הוכח את נוסחאות (1),(2),(3).
2. רשום את נוסחא (2) עבור הפונקציה

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2, \quad x \in [-1, 3] \tag{4}$$

כאשר התחום מחולק ל-2 קטעים שווים. מהו ערך I_2 המתקבל? מהו הערך המדויק של האינטגרל?

3. כתוב תכנית מחשב אשר תחשב את נוסחא (2) עבור הפונקציה

$$g(x) = 10^5 x(x^2-\alpha_1)(x^2-\alpha_2)(x^2-\alpha_3)(x^2-\alpha_4)(x^2-\alpha_5)(x^2-\alpha_6)(x^2-\alpha_7)(x^2-\alpha_8)(x^2-\alpha_9), \quad x \in [-\gamma, \gamma] \tag{5}$$

כאשר התחום מחולק ל-9 קטעים שווים. מהו ערך I_9 המתקבל? מהו הערך המדויק של האינטגרל?

הערכים $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ נתונים ע"י הכלל הבא: נניח כי מספר הסטודנט שלך הוא $\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7\beta_8$ (β_i שלמים בין 0 ל-9). אזי

$\alpha_1 = 0.01\beta_3$
$\alpha_2 = 0.2\beta_4$
$\alpha_3 = 0.3\beta_5$
$\alpha_4 = 0.4\beta_6$
$\alpha_5 = 0.5\beta_7$
$\alpha_6 = 0.6\beta_8$
$\alpha_7 = 0.7\beta_1$
$\alpha_8 = 0.8\beta_2$
$\alpha_9 = 0.9\beta_3$
$\gamma = 0.8\beta_4$

כך שאם מספר הסטודנט הוא, למשל, 012345678, אז $\alpha_1 = 0.013$.

4. כתוב תכנית מחשב אשר תחשב את נוסחא (2) עבור הפונקציה

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in [0,9] \tag{6}$$

כאשר התחום מחולק ל-9 קטעים שווים. (זוהי אחת הפונקציות ה„מפורסמות" שעבורן לא ניתן לרשום פונקציה קדומה. דוגמא אחרת היא: e^{-x^2}). מהו הערך I_9 המתקבל?
ערכו של אינטגרל זה מצוי בטבלאות:

$$\int_0^9 \frac{\sin x}{x} dx \cong 1.665040075829603$$

<u>שיטה 2 - שיטת הטרפז</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. מחלקים את הקטע ל-n חלקים שווים כבנוסחא (1). בכל קטע $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n-1$, מחשבים את שטחו של הטרפז ששני בסיסיו הם $f(x_k)$ ו-$f(x_{k+1})$. האינטגרל מקורב אם כן ע"י הנוסחא

$$\int_a^b f(x)dx \cong \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_n) + \frac{1}{2}f(b)\right](b-a)\frac{k}{n} \tag{7}$$

5. הסבר מדוע נוסחא (7) אכן מהווה סכום שטחי הטרפזים.
6. רשום את נוסחא (7) עבור הפונקציה $f(x)$ מנוסחא (4), כאשר התחום מחולק ל-2 קטעים שווים. מהו הערך המתקבל? האם יש שיפור לעומת התוצאה מסעיף 2? הסבר.
7. כתוב תכנית מחשב אשר תחשב את נוסחא (7) עבור הפונקציה $g(x)$ מנוסחא (5), כאשר התחום מחולק ל-9 קטעים שווים. מהו הערך המתקבל? האם יש שיפור לעומת התוצאה מסעיף 3? הסבר.
8. כתוב תכנית מחשב אשר תחשב את נוסחא (7) עבור הפונקציה $h(x)$ מנוסחא (6), כאשר התחום מחולק ל-9 קטעים שווים. מהו הערך המתקבל?

שיטה 3 - שיטת גאוס (K. F. Gauss)

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$. שיטת גאוס היא הנוסחא הבאה:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} f(x_k)w_k \tag{8}$$

$\{x_k\}$ נקראים: נקודות האינטגרציה.
$\{w_k\}$ נקראים: משקלות.
המטרה היא לבחור את נקודות האינטגרציה ואת המשקלות כך שתתקבל נוסחא מדויקת (כלומר שוויון בנוסחא (8), במקום הסימן $\cong$) עבור פולינומים. לדוגמא, נעיין במצב $n=1$, כלומר נקודת אינטגרציה יחידה ומשקולת יחידה. על-מנת לקבוע 2 קבועים אלו, נזדקק ל-2 תנאים, אשר יהיו

א. דרישה לאינטגרציה מדויקת של פולינומים מסדר 0

ב. דרישה לאינטגרציה מדויקת של פולינומים מסדר 1

נציב דרישה א' בנוסחא (8)

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = w_1 \cdot 1 \Longrightarrow w_1 = 2 \tag{9}$$

נציב דרישה ב' בנוסחא (8)

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = 2 \cdot x_1 \Longrightarrow x_1 = 0 \tag{10}$$

<u>מסקנה</u>: חוק האינטגרציה

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2f(0) \tag{11}$$

יתן אינטגרציה מדויקת לכל הפולינומים מסדר 0 ו-1.

9. הוכח את נוסחאות (9),(10) ואת המסקנה.
10. כעת נבנה נוסחא לאינטגרציה גאוסית עבור $n=2$ (2 נקודות אינטגרציה ו-2 משקלות):

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(x_1)w_1 + f(x_2)w_2 \tag{12}$$

על-מנת לקבוע 4 קבועים אלו נזדקק ל-4 תנאים, אשר יהיו דרישה לאינטגרציה מדויקת של פולינומים מסדר 0 עד 3. רשום את 4 הדרישות וקבל את 4 הקבועים.
<u>רמז</u>: הפתרון צריך להיות סימטרי (מדוע?):

$$x_2 = -x_1, \quad w_2 = w_1$$

11. כתוב תכנית מחשב אשר תשתמש בערכים שקיבלת בסעיף 10 ותחשב את האינטגרל המתקבל עבור הפונקציה $f(x)$ מנוסחא (4). שים לב כי יש לבצע שינוי משתנה על-מנת שתחום האינטגרציה יהיה $[-1,1]$ (הפונקציה מוגדרת בתחום $[-1,3]$ ויש לבצע טרנספורמציה שתעתיק תחום זה לקטע $[-1,1]$). מה ההפרש בין התוצאה שקיבלת לערך המדויק של האינטגרל? שים לב כי המחשב איננו מבצע אף חישוב באופן מדויק, אלא רק עד כדי 16 ספרות משמעותיות (בדוק שזהו אמנם המצב בשפת התכנות שבה בחרת!).

12. ניתן למצא בטבלאות את הערכים של נקודות האינטגרציה והמשקלות עבור אינטגרציה גאוסית מסדר גבוה (כלומר, ערכים גדולים של n). למשל עבור $n = 10$ נתונה הטבלא הבאה:

$$\begin{array}{ll} \pm x_k & w_k \\ 0.148874338981631 & 0.295524224714753 \\ 0.433395394129247 & 0.269266719309996 \\ 0.679409568299024 & 0.219086362515982 \\ 0.865063366688985 & 0.149451349150581 \\ 0.973906528517172 & 0.066671344308688 \end{array} \tag{13}$$

אותה תקבלו ממני באמצעות הדואר האלקטרוני.
כתוב תכנית מחשב אשר תחשב את נוסחא (8) עבור הפונקציה $g(x)$ מנוסחא (5), באמצעות הערכים שבטבלא (13) לעיל. מהו הערך המתקבל? הסבר.

13. כתוב תכנית מחשב אשר תחשב את נוסחא (8) עבור הפונקציה $h(x)$ מנוסחא (6), באמצעות הערכים שבטבלא (13).

14. התבונן בשתי שיטות האינטגרציה הראשונות שבתרגיל זה: מהו סדר הפולינום הגבוה היותר שניתן לבצע עבורו אינטגרציה מדויקת בשיטת המלבנים? ובשיטת הטרפז?

ניתן להוכיח כי שיטת גאוס היא השיטה היעילה ביותר לחישוב אינטגרלים (הדיוק הגבוה ביותר עבור המספר הנמוך ביותר של נקודות אינטגרציה). עוד על שיטות לאינטגרציה נומרית בכלל וטבלאות עבור שיטת גאוס בפרט ניתן למצוא בספר

M. Abramowitz and I. A. Stegun - "Handbook of Mathmatical Functions" Dover (1972).

<u>מה יש להגיש</u>

א. תשובות עבור סעיפים 1-14, כולל הסברים לכל התופעות. כדאי מאד לשרטט (באמצעות תכנה גרפית כמו gnuplot) גרפים של הפונקציות.

ב. תדפיס (listing) של התכניות: על התכניות להיות קריאות וברורות וכל שלב יש לתאר בהערות (comments). ניתן לכתוב בכל שפת תכנות שרוצים, אם כי מומלץ לכתוב באותה שפה שאותה אתם לומדים בטכניון.

ג. פלט של התכנית, הכולל כותרות שיבהירו מהו כל מספר.

ד. מסקנות.