

## חדו"א 1' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא אינטגרלים מסוימים

מושגים: \* סכומי דרבו, סכומי רימן, פרמטר חלוקה, עידון

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{כללים: (א)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{(ב)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{(אדיטיביות) (ג)}$$

$$f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{(ד)}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{(ה)}$$

$$g \leq f \implies \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \quad \text{(ו)}$$

$$m \leq f(x) \leq M \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{(ז)}$$

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f, \quad \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{(לינאריות) (ח)}$$

משפטים:

1.  $f$  מונוטונית  $\iff f$  אינטגרבילית.

2.  $f$  רציפה  $\iff f$  אינטגרבילית.

3.  $f$  רציפה פרט למספר נקודות סופי (ו-  $f$  חסומה)  $\iff f$  אינטגרבילית.

4\*  $f$  אינטגרבילית  $\iff$  קבוצת נקודות אי הרציפות של  $f$  היא ממידה 0.

5. שינוי  $f$  במספר סופי של נקודות אינו משנה את האינטגרביליות (ואת ערך האינטגרל).

6.  $f$  אינטגרבילית על  $[a, b]$   $\iff f$  אינטגרבילית על כל  $[c, d] \subseteq [a, b]$ .

7.  $f, g$  אינטגרביליות  $\iff fg$  אינטגרבילית.

8.  $f$  אינטגרבילית  $\iff |f|$  אינטגרבילית.

9. (ערך הביניים)  $f$  רציפה  $\iff$  קיימת  $c \in [a, b]$  כך ש-

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

10.  $f$  אינטגרבילית  $\iff F(x) = \int_a^x f(t) dt$  רציפה.

11.  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  גזירה ו-  $F'(x) = f(x)$  (המשפט היסודי)  $f$  רציפה  $\iff$

12.  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  אזי  $F$  פונקציה קדומה של  $f$ , (נוסחת ניוטון) אם

13.  $u, v$  גזירות עם נגזרות אינטגרביליות, אזי: (אינטגרציה בחלקים)

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

14.  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ,  $\varphi$  על, גזירה,  $f$  רציפה ב-  $[a, b]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , אזי: (שיטת ההצבה) אם

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

15. אינטגרל של פונקציה אינטגרבילית אי זוגית בתחום סימטרי הוא 0.

16.  $f, g$  אינטגרביליות, אזי: (אי שוויון קושי-שוורץ) אם

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

17. אם  $f$  רציפה ו-  $g \geq 0$  אינטגרבילית, אזי קיים  $c \in [a, b]$  כך ש-  $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$

18. אם  $f$  מונוטונית וגזירה,  $f'$  אינטגרבילית, ו-  $g$  אינטגרבילית, אזי קיים  $c \in [a, b]$  כך ש-  $\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g$

נוסחאות:

אורך קשת:  $L = \int_a^b (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2} dt$

$$L = \int_a^b (1 + y'(x)^2)^{1/2} dx$$

נפח גוף סיבוב:  $v = \pi \int_a^b f^2(x) dx$