מילון מושגים במתמטיקה

פונקציות

הגדרות ותיאורים, נוסחאות, משפטים ודוגמאות

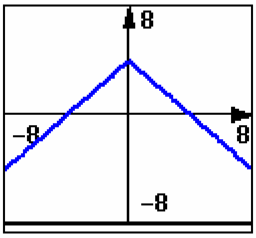
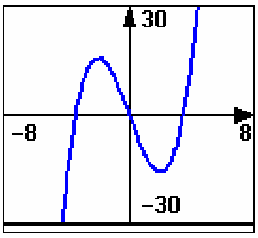
מהדורת ניסוי

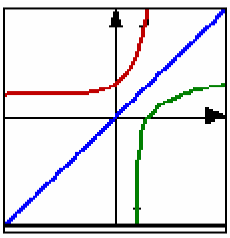
מטח
המרכז לטכנולוגיה חינוכית

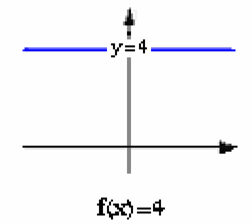
תוכן העניינים

מושגים בסיסיים

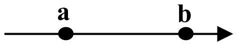
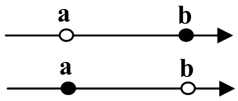
הגדרות ותיאורים	דוגמאות
אם משתנה y תלוי במשתנה x כך שלכל ערך של x מתאים ערך אחד ויחיד של המשתנה y, (הערך של x מגדיר את הערך של y), כלומר, אם ידועה שיטה למציאת הערך של y לכל ערך של x, אז אומרים שהמשתנה y הוא **פונקציה** של המשתנה x: **y=f(x).** המשתנה **x** נקרא **המשתנה הבלתי תלוי** והמשתנה y נקרא **המשתנה התלוי (הפונקציה) .**	1. מחיר נסיעה במונית הוא פונקציה של אורך הדרך שעברה המונית בנסיעה. אורך הדרך הוא המשתנה הבלתי תלוי ומחיר הנסיעה הוא המשתנה התלוי. 2. שטח של עיגול הוא פונקציה של רדיוס העיגול. רדיוס העיגול הוא המשתנה הבלתי תלוי ושטח העיגול הוא המשתנה התלוי. 3. מחיר מברק הוא פונקציה של מספר המילים במברק. מספר המילים הוא המשתנה הבלתי תלוי ומחיר המברק הוא המשתנה התלוי. 4. אורך עמוד הכספית במד חום הוא פונקציה של הטמפרטורה. הטמפרטורה היא המשתנה הבלתי תלוי ואורך עמוד הכספית הוא המשתנה התלוי.
קבוצת כל הערכים של המשתנה הבלתי תלוי נקראת **תחום הפונקציה (תחום ההגדרה).**	בדוגמאות לעיל: בדוגמאות 1 ו-2 , תחום ההגדרה של הפונקציות הנתונות הוא כל המספרים החיוביים. בדוגמה 3 – תחום ההגדרה הוא כל המספרים הטבעיים. בדוגמה 4 – תחום ההגדרה הוא כל המספרים הממשיים.
קבוצת כל ערכי הפונקציה (המשתנה התלוי), או כל קבוצה המכילה אותה, נקראת **טווח הפונקציה.**	1. בדוגמה 1, טווח הפונקציה הוא כל המספרים הממשיים הגדולים מהמחיר ההתחלתי. 2. בדוגמה 2 ובדוגמה 3, טווח הפונקציה הוא כל המספרים החיוביים. 3. אם הפונקציה היא קבועה, אז הטווח יכול להיות קבוצה המכילה ערך אחד או כל קבוצה המכילה את הערך הזה.

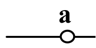
<table>
<tr><th>הגדרות ותיאורים</th><th>דוגמאות</th></tr>
<tr><td>ייצוג אלגברי של פונקציה הוא שיטה להצגת הפונקציה בעזרת נוסחה (או כמה נוסחאות) המאפשרת למצוא את ערכי הפונקציה.</td><td>1. $f(x)= 2x-5$
2. $g(x)=x^2+3$
3. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>ייצוג גרפי של הפונקציה הוא שיטה להצגת הפונקציה כאוסף נקודות במערכת צירים, כך ששיעור ה-x של כל נקודה הוא ערך המשתנה הבלתי תלוי, ושיעור ה-y של כל נקודה הוא ערך הפונקציה.
אוסף של כל הנקודות הללו נקרא גרף הפונקציה.
בגרף הפונקציה אפשר לראות כל מיני תכונות ומאפיינים של הפונקציה.</td><td></td></tr>
<tr><td>טבלת הערכים של פונקציה היא שיטה להצגת הפונקציה בעזרת טבלה, שבה ליד ערך של המשתנה הבלתי תלוי מופיע ערך הפונקציה המתאים לו.</td><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-2</td><td>5</td></tr><tr><td>0.4</td><td>12</td></tr><tr><td>3</td><td>7.3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>אם לכל ערך של הפונקציה $y=f(x)$ קיים ערך יחיד של המשתנה x המתאים לו, כלומר, לערכים שונים של x מתאימים ערכים שונים של y, אז הפונקציה $y=f(x)$ נקראת פונקציה חד חד ערכית.</td><td>1. הפונקציה $f(x)=2x$ היא פונקציה חד חד ערכית, כי לכל שני ערכים שונים של x מתאימים ערכים שונים של y: אם $x_1\neq x_2$ אז $2x_1\neq 2x_2$.
2. הפונקציה $g(x)=x^2$ איננה פונקציה חד חד ערכית, כי קיימים ערכים שונים של x שמתאימים להם אותו ערך של y. למשל, $g(2)=g(-2)=4$</td></tr>
</table>

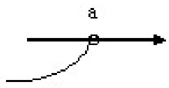
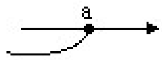
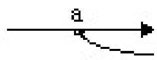
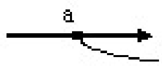
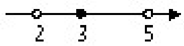
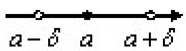
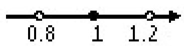
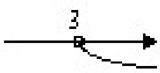
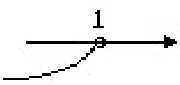
הגדרות ותיאורים	דוגמאות
אם $y=f(x)$ היא פונקציה חד חד ערכית, אז המשתנה x הוא גם פונקציה של המשתנה y: $x=g(y)$. הפונקציה הזאת נקראת **הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)$.** לפונקציה שאיננה חד חד ערכית לא קיימת פונקציה הפוכה.	1. **הפונקציה**: מחיר הנסיעה הוא פונקציה של אורך הדרך. לכל אורך דרך נתון אפשר לחשב את מחיר הנסיעה. **הפונקציה ההפוכה**: אורך הדרך הוא פונקציה של המחיר. לכל מחיר נסיעה נתון אפשר לחשב את מרחק הנסיעה. 2. **הפונקציה:** המשקל שלי הוא פונקציה של הגיל שלי. בכל גיל יש לי משקל מסוים. בשנתיים האחרונות המשקל שלי לא השתנה. מכאן שלפונקציה הזאת אין פונקציה הפוכה, כי בגילים שונים היה לי אותו משקל. 3. **הפונקציה**: $f(x)=x^2$ איננה פונקציה חד חד ערכית בתחום של כל המספרים הממשיים. בתחום הזה אין לה פונקציה הפוכה. אבל בתחום המספרים החיוביים, הפונקציה $f(x)=x^2$ היא פונקציה חד חד ערכית והפונקציה ההפוכה שלה היא: $g(x)=\sqrt{x}$.
כדי **למצוא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה הנתונה בייצוג אלגברי** יש לבטא את המשתנה הבלתי תלוי באמצעות המשתנה התלוי (בדרך כלל, את המשתנה x באמצעות המשתנה y).	מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y=2x-3$. נחלץ את x, ונקבל: $2x=y+3$, $x=\frac{y+3}{2}$. זוהי הפונקציה ההפוכה לפונקציה הנתונה. אפשר גם להחליף את סימון המשתנים: $y=\frac{x+3}{2}$.
בצורה גרפית: הגרפים של שתי פונקציות הפוכות הם סימטריים ביחס לישר $y=x$.	

הגדרות ותיאורים	דוגמאות
פונקציה שמוצגת על-ידי משוואה מהצורה $f(x, y)=0$ נקראת **פונקציה סתומה.** **שימו לב!** לא כל משוואה **מהצורה** $f(x, y)=0$ מגדירה פונקציה.	1. המשוואה $2x+y=0$ מגדירה פונקציה סתומה כי לכל ערך של x אפשר למצוא ערך יחיד של y שהוא השורש היחיד של המשוואה הליניארית. למשל, אם $x=1$ אז $y= -2$ וכו׳ 2. המשוואה $y^2-x=0$ אינה מגדירה פונקציה כי ישנם ערכי x שעבורם יש לפונקציה שני ערכים של y (ולא ערך יחיד). למשל, עבור $x=4$, גם $y=2$ וגם $y=-2$ מקיימים את המשוואה.
פונקציה קבועה היא פונקציה שהטווח שלה כולל רק מספר אחד, כלומר, לכל ערכי x מתאים אותו ערך של הפונקציה. הגרף של פונקציה קבועה הוא קו ישר המקביל לציר ה-X.	
אם המשתנה y הוא פונקציה של x, כלומר $y=f(x)$, והמשתנה z הוא פונקציה של y, כלומר $z=g(y)$, אז לכל ערך של x מתאים ערך מסוים של z. פירוש הדבר שהמשתנה z גם הוא פונקציה של x: $z=g(f(x))$. פונקציה זו נקראת **פונקציה מורכבת**.	1. יש לי שטר של 100 ש״ח ואני רוצה לקנות גבינה. מחיר הקנייה הוא פונקציה של משקל הגבינה: $y=f(x)$. העודף שאקבל מ-100 ש״ח הוא פונקציה של מחיר הקנייה: $z=g(y)$. לכן, העודף שאקבל מ- 100 ש״ח גם הוא פונקציה של משקל הגבינה: $z=g(f(x))$ 2. אם $f(x)=x^2$ ו- $g(y)=5y-1$, אז $g(f(x))=5x^2-1$, $f(g(y))=(5y-1)^2$.

אינטרוולים וסביבות

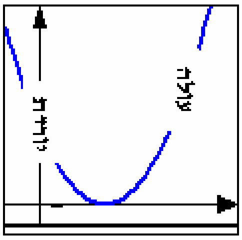
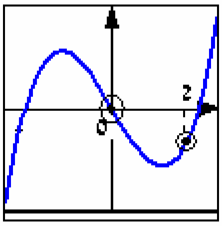
הגדרות ותיאורים	דוגמאות
ציר המספרים – קו ישר שמוגדרים עליו נקודת אפס וקטע יחידה. לכל נקודה על ציר המספרים אפשר למצוא את שיעור הנקודה, ולכל מספר ממשי אפשר למצוא נקודה המתאימה לו על ציר המספרים.	
אינטרוול סגור [a, b]  הוא אוסף כל המספרים הגדולים מ-a או שווים לו וקטנים מ-b או שווים לו. כלומר, כל הנקודות x המקיימות $a\leq x\leq b$.	1. האינטרוול [0, 1] כולל את המספרים 0, 1 ואת כל המספרים שביניהם. למשל: $0.32, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}$ וכו'. 2. האינטרוול [2, 1] אינו כולל מספרים כלל (הקבוצה הריקה) כי אין מספרים הגדולים מ-2 וקטנים מ-1.
אינטרוול פתוח  (a, b) הוא אוסף כל המספרים הגדולים מ-a וקטנים מ-b. כלומר, כל הנקודות x המקיימות $a<x<b$.	1. האינטרוול (0, 1) כולל את כל המספרים שבין 0 ו-1 ולא כולל 0 ו-1. 2. האינטרוול (2, 2) אינו כולל מספרים (הקבוצה הריקה) כי אין מספרים הגדולים מ-2 וקטנים מ-2.
אינטרוול חצי פתוח  (a, b] (חצי סגור) ([a, b)) הוא אוסף כל המספרים המקיימים $a<x\leq b$ ($a\leq x< b$).	1. האינטרוול [2 ,1-) כולל את כל המספרים שבין 1- ו-2 ולא כולל 1-. 2. האינטרוול (1, 3] כולל את כל המספרים שבין 1 ו-3 ולא כולל 3.

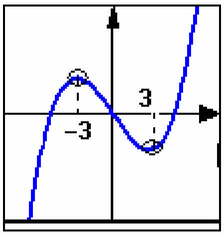
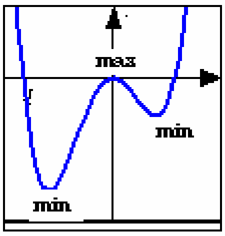
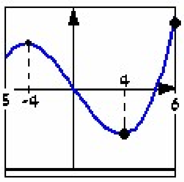


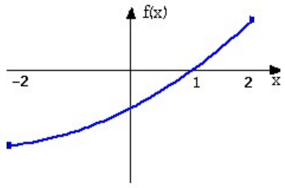
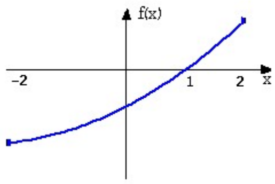
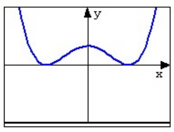
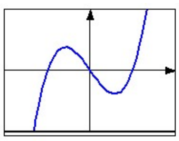
הגדרות ותיאורים	דוגמאות
אינטרוולים אינסופיים **(-∞, a)** כולל את כל המספרים x המקיימים x<a .  **(-∞, a]** כולל את כל המספרים x המקיימים x≤ a .  **(a, ∞)** כולל את כל המספרים x המקיימים x>a .  **[a, ∞)** כולל את כל המספרים x: x≥ a .  	(-∞, 2) כולל את כל המספרים x המקיימים x<2 . (-∞, 5] כולל את כל המספרים x המקיימים x≤ 5 . (-1, ∞) כולל את כל המספרים x המקיימים x>-1 . [0, ∞) כולל את כל המספרים x המקיימים x≥ 0 .
סביבה של נקודה היא אינטרוול פתוח המכיל את הנקודה. האינטרוול (a- δ , a+ δ) נקרא **δ- סביבה** של נקודה a. **סביבה נקובה של נקודה** היא סביבה של הנקודה ללא הנקודה עצמה.	האינטרוול הפתוח (2, 5) הוא סביבה של 3.  האינטרוול הפתוח (a- δ , a+ δ) הוא δ- סביבה של נקודה a.  התחום $(0.8,1)\cup(1,1.2)$ הוא סביבה נקובה של נקודה 1: 
סביבה של אינסוף היא קבוצת כל המספרים הגדולים ממספר כלשהו: (m, ∞).	האינטרוול (3, ∞) הוא סביבה של אינסוף. 
סביבה של מינוס אינסוף היא קבוצת כל המספרים הקטנים ממספר כלשהו: (-∞,m).	האינטרוול (-∞, 1) הוא סביבה של מינוס אינסוף. 

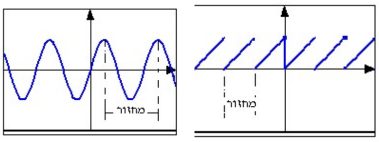
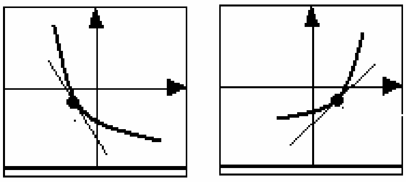
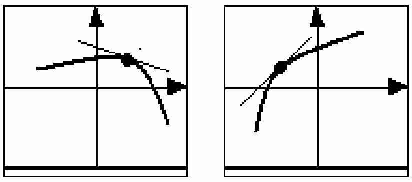
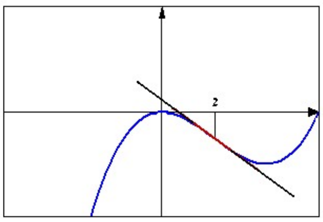
מאפיינים של פונקציות

לחקור פונקציה פירושו למצוא את כל המאפיינים שלה.

הגדרות ותיאורים	צורה סימבולית והערות	צורה גראפית ודוגמאות
פונקציה $f(x)$ היא פונקציה **עולה מונוטונית בתחום מסוים** A, אם למשתנה בלתי תלוי גדול יותר בתחום מתאים משתנה תלוי (ערך הפונקציה) גדול יותר בטווח. פונקציה $f(x)$ היא פונקציה **יורדת מונוטונית בתחום מסוים** A, אם למשתנה בלתי תלוי גדול יותר בתחום מתאים משתנה תלוי (ערך הפונקציה) קטן יותר בטווח.	**פונקציה עולה בתחום** לכל זוג ערכים של x בתחום אם מתקיים: אם $x_1> x_2$, אז $f(x_1)>f(x_2)$. **פונקציה יורדת בתחום** לכל זוג ערכים של x בתחום מתקיים: אם $x_1> x_2$, אז $f(x_1)<f(x_2)$	**פונקציה עולה בתחום מסוים** אם הגרף שלה עולה בכיוון משמאל לימין. **פונקציה יורדת** בתחום מסוים אם הגרף שלה יורד בכיוון משמאל לימין. 
פונקציה $f(x)$ **עולה (יורדת) בנקודה מסוימת**, אם קיימת סביבה של הנקודה שבה הפונקציה עולה (יורדת).	**פונקציה עולה (יורדת) בתחום מסוים** אם ורק אם היא עולה (יורדת) בכל נקודה בתחום. אם הפונקציה עולה בתחום מסוים, היא עולה בכל נקודה בתחום הזה. אם הפונקציה עולה בכל נקודה של תחום מסוים, היא פונקציה עולה בתחום כולו.	 הפונקציה עולה בנקודה 2 ויורדת בנקודה 0.

הגדרות ותיאורים	**צורה סימבולית והערות**	**צורה גראפית ודוגמאות**
1. לפונקציה $f(x)$ יש **מקסימום מקומי** בנקודה x_1 אם קיימת סביבה של הנקודה שבה ערך הפונקציה בנקודה x_1 גדול מכל ערכי הפונקציה האחרים בסביבה. x_1 נקראת נקודת מקסימום. 2. לפונקציה $f(x)$ יש **מינימום מקומי** בנקודה x_1 אם קיימת סביבה של הנקודה שבה ערך הפונקציה בנקודה x_1 קטן מכל ערכי הפונקציה האחרים בסביבה. x_1 נקראת נקודת מינימום.	x_1 **היא נקודת מקסימום (נקודת מינימום)** של הפונקציה $f(x)$ אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 כך שלכל נקודה x בסביבה, השונה מהנקודה x_1 ושייכת לתחום ההגדרה, מתקיים: $f(x_1)<f(x)$ ($f(x_1)>f(x)$).	לפונקציה הנתונה יש מקסימום מקומי בנקודה $x=-3$ (הנקודה שבה גרף הפונקציה הוא הגבוה ביותר בסביבה). לפונקציה הנתונה יש מינימום מקומי בנקודה $x=3$ (הנקודה שבה גרף הפונקציה הוא הנמוך ביותר בסביבה). 
נקודות מקסימום מקומי ונקודות מינימום מקומי של הפונקציה נקראות **נקודות הקיצון** שלה.	בדרך כלל, נקודת קיצון של פונקציה היא נקודה x_1 שבה משתנה האפיון של הפונקציה מפונקציה עולה לפונקציה יורדת או להפך.	לפונקציה בסרטוט יש שלוש נקודות קיצון: שתי נקודות מינימום ונקודת מקסימום אחת. 
אם הערך של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 גדול (קטן) מכל ערכי הפונקציה האחרים בתחום נתון, x_1 היא **נקודת המקסימום המוחלט (נקודת המינימום המוחלט) בתחום** הנתון.	אם פונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציפה בתחום מסוים, אז נקודת המקסימום (המינימום) המוחלט שלה בתחום הזה היא נקודת המקסימום (המינימום) המקומי או אחת מנקודות הקצה של התחום הנתון.	הנקודה $x=6$ שהיא נקודת קצה של  האינטרוול הנתון, והיא נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה בתחום הנתון (לנקודה $x=6$ מתאימה הנקודה הכי גבוה של הגרף בתחום). הנקודה $x=4$, שהיא נקודת מינימום מקומי, היא נקודת המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום. (לנקודה $x=4$ מתאימה הנקודה הכי נמוכה של הגרף בתחום).

הגדרות ותיאורים	צורה סימבולית והערות	צורה גראפית ודוגמאות
נקודת אפס של פונקציה היא נקודה x_1 כזו שערך הפונקציה המתאים לה שווה לאפס: $f(x_1)=0$.	**כדי למצוא נקודות אפס של פונקציה $f(x)$** יש לפתור את המשוואה $f(x)=0$.	בסרטוט, $x=1$ היא נקודת אפס של הפונקציה הנתונה: $f(1)=0$. נקודת אפס היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-X. 
תחום חיוביות (שליליות) של פונקציה הוא חלק מתחום ההגדרה של הפונקציה שבו כל ערכי הפונקציה חיוביים (שליליים).	**כדי למצוא תחום חיוביות של פונקציה $f(x)$** יש לפתור את האי-שוויון $f(x)>0$. **כדי למצוא תחום שליליות של פונקציה $f(x)$** יש לפתור את האי-שוויון $f(x)< 0$.	בסרטוט מופיע הגרף של פונקציה נתונה באינטרוול $[-2, 2]$. האינטרוול $[-2, 1)$ הוא תחום שליליות של הפונקציה (הגרף נמצא מתחת לציר ה-X).  האינטרוול $(1, 2]$ הוא תחום חיוביות של הפונקציה (הגרף נמצא מעל לציר ה-X).
פונקציה זוגית היא פונקציה שעבורה $f(-x)=f(x)$ לכל ערכי x בתחום ההגדרה שלה. **פונקציה אי-זוגית** היא פונקציה שעבורה $f(-x)= -f(x)$ לכל ערכי x בתחום ההגדרה שלה.	בחקירה של פונקציה זוגית או אי-זוגית, אפשר לחקור את הפונקציה רק עבור $x\geq 0$ ולקבל אוטומטית את כל המאפיינים של הפונקציה עבור $x<0$.	 גרף של פונקציה זוגית הוא גרף סימטרי ביחס לציר ה- Y.  גרף של פונקציה אי-זוגית הוא גרף סימטרי ביחס לראשית הצירים.

הגדרות ותיאורים	צורה סימבולית והערות	צורה גראפית ודוגמאות
פונקציה $f(x)$ נקראת **פונקציה מחזורית** אם קיים מספר p השונה מאפס כך שלכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה מתקיים: $f(x+p)=f(x)$. המספר p נקרא **מחזור הפונקציה.** המחזור החיובי הקטן ביותר נקרא **המחזור היסודי** של הפונקציה.	בחקירה של פונקציה מחזורית בעלת מחזור p, אפשר לחקור אותה רק בתחום $[0,p]$, ולקבל באופן אוטומטי את כל המאפיינים של הפונקציה עבור תחומים אחרים .	בגרף של פונקציה מחזורית, חלק של הגרף חוזר על עצמו אינסוף פעמים. 
אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 כך שמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 נמצא מתחת גרף הפונקציה בסביבה זו, אומרים **שהפונקציה $f(x)$ קמורה בנקודה x_1.** אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 כך שמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 נמצא מעל גרף הפונקציה בסביבה זו, אומרים **שהפונקציה $f(x)$ קעורה בנקודה x_1.**	**פונקציה היא קמורה בנקודה** אם קצב השינוי שלה עולה בנקודה זו. **פונקציה היא קעורה בנקודה** אם קצב השינוי שלה יורד בנקודה זו.	הפונקציות הנתונות להלן הן קעורות בנקודות המסומנות.  הפונקציות הנתונות להלן הן קמורות בנקודות המסומנות. 
אם קיימת סביבה של הנקודה x_1 כך שמשמאל (מימין) לנקודה, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 נמצא מתחת לגרף, ומימין (משמאל) לנקודה המשיק נמצא מעל הגרף, אז הנקודה נקראת **נקודת פיתול של גרף הפונקציה.**	**בנקודת פיתול,** הפונקציה משתנה מפונקציה קמורה לקעורה או להפך.	הנקודה $x=2$ היא נקודת פיתול של הפונקציה המופיעה בסרטוט. 

פונקציה קווית

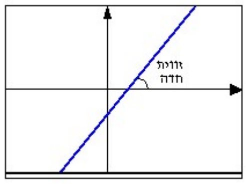
פונקציה שניתן להציג אותה בצורה $f(x)=m\cdot x+n$, כאשר m ו- n הם פרמטרים, נקראת **פונקציה ליניארית (פונקציה קווית)**.

הגרף של פונקציה ליניארית הוא קו ישר.

בפונקציה $f(x)=mx+n$ **המקדם m** נקרא ה**שיפוע** של גרף הפונקציה הליניארית.

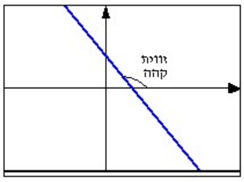
השיפוע m מציג את אופי הפונקציה (עולה או יורדת) ואת קצב ההשתנות שלה : ככל שערכו המוחלט של השיפוע גדול יותר, **קצב ההשתנות** של הפונקציה גדול יותר.

$m>0$



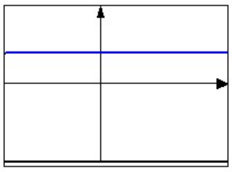
הקו הישר יוצר זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה –X.

$m<0$



הקו הישר יוצר זווית קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה –X.

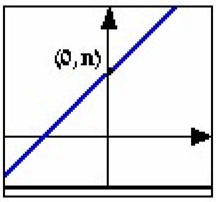
$m=0$



הקו הישר מקביל לציר ה –X.

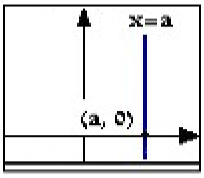
בפונקציה $f(x)=mx+n$ **המקדם n** מגדיר את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- Y.

כל קו ישר במערכת צירים שאינו מקביל לציר ה - Y, מוגדר על ידי פונקציה ליניארית $f(x)= m\cdot x+n$, כאשר m הוא שיפוע הקו הישר ו -n הוא שיעור y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-Y.



קו ישר המקביל לציר ה- Y אפשר לתאר על ידי משוואה מהצורה $x=a$ (כאשר a הוא פרמטר), והוא אינו פונקציה ליניארית (כי לאותו ערך של x מתאימים ערכים רבים של y).

הגרף אינו מתאר פונקציה :



טבלת הערכים של פונקציה ליניארית

בטבלת הערכים של פונקציה ליניארית אפשר לראות את **השינוי של הפונקציה הליניארית**:

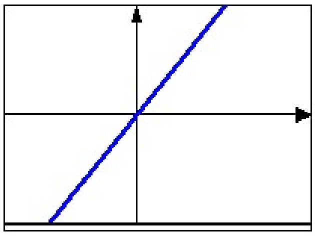
השינוי של הפונקציה שווה לשיפוע שלה כאשר משנים את ערך ה- x ביחידה.

דוגמה: נתונה הפונקציה הליניארית $f(x)=2x-3$, שהשיפוע שלה הוא 2.

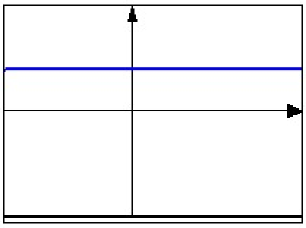
x	-2	-1	0	4	5
y	-7	-5	-3	5	7

בטבלת הערכים של הפונקציה אפשר לראות שבכל פעם שהערך של x גדל ב-1, הערך של f(x) גדל ב-2.

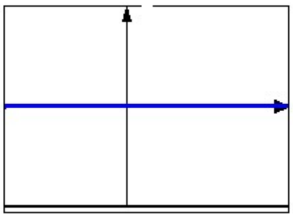
מקרים מיוחדים



כאשר בייצוג $f(x)=mx+n$ ‏$n=0$, הקו הישר עובר דרך ראשית הצירים.

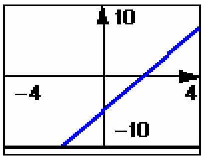
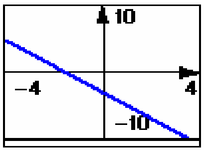
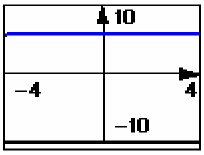
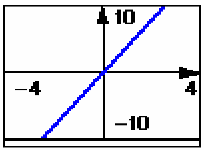


כאשר בייצוג $f(x)=mx+n$ ‏$m=0$, הקו הישר מקביל לציר ה-X.



כאשר בייצוג $f(x)=mx+n$ ‏$n=0$ וגם $m=0$, הקו הישר מתלכד עם ציר ה-X.

דוגמאות של פונקציות ליניאריות בייצוגים שונים

<table>
<tr><th>ייצוג אלגברי</th><th>ערכי הפרמטרים</th><th>ייצוג גרפי</th><th>טבלת ערכים</th></tr>
<tr><td>f (x)=3x-5</td><td>m=3, n=-5
השיפוע 3</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-11</td><td>-8</td><td>-5</td><td>-2</td><td>1</td></tr></table>הפרש 3 בין ערכי y</td></tr>
<tr><td>g (x)= -2x-3</td><td>m=-2, n=-3
השיפוע -2</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>-1</td><td>-3</td><td>-5</td><td>-7</td></tr></table>הפרש -2 בין ערכי y</td></tr>
<tr><td>h (x)=6</td><td>m=0, n=6
השיפוע 0</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>y לא משתנה. הפרש 0 בין ערכי y</td></tr>
<tr><td>p (x)=4x</td><td>m=4, n=0
השיפוע 4</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>-8</td><td>-4</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr></table>הפרש 4 בין ערכי y</td></tr>
</table>

פונקציה ריבועית

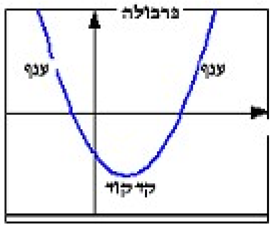
פונקציה שניתן להציג אותה בצורה $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$, כאשר a, b, c הם פרמטרים ו-$a\neq0$ (הצורה הפולינומית של הפונקציה), נקראת **פונקציה ריבועית** (פונקציה ממעלה שנייה).

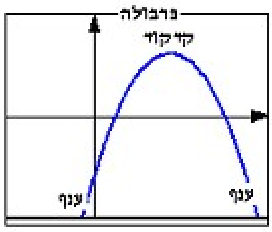
הגרף של פונקציה ריבועית הוא **פרבולה**. בפרבולה קיימת תמיד **נקודת מינימום או נקודת מקסימום**. הנקודה הזאת נקראת **קדקוד הפרבולה**.

שיעורי קדקוד הפרבולה הם:

$$x=-\frac{b}{2a}, y=c-\frac{b^2}{4a}$$

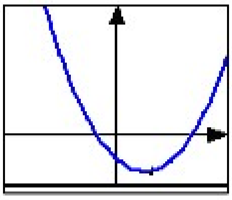
שני חלקי הפרבולה היוצאים מהקדקוד נקראים **ענפי הפרבולה**.



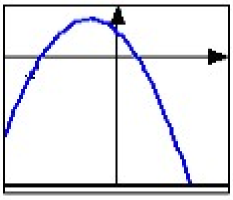


השפעת מקדמי הפונקציה $f(x)=ax^2+bx+c$ על הגרף

הסימן של המקדם a מגדיר את כיוון הפרבולה:
אם $a>0$, קדקוד הפרבולה הוא נקודת מינימום;
אם $a<0$, קדקוד הפרבולה הוא נקודת מקסימום.

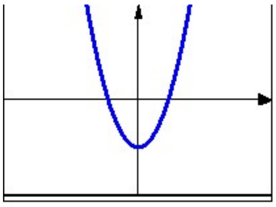


$a>0$
קדקוד הפרבולה הוא נקודת מינימום

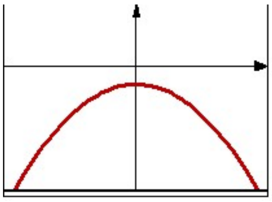


$a<0$
קדקוד הפרבולה הוא נקודת מקסימום

הערך המוחלט של המקדם a משפיע על קצב ההשתנות של הפונקציה (התלילות של ענפי הפרבולה).

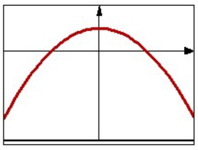
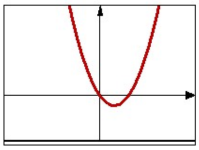
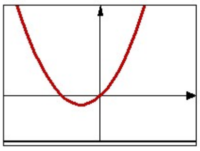
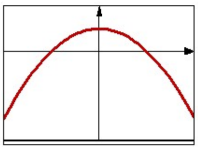
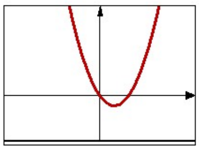
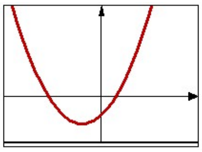


$|a|=1$



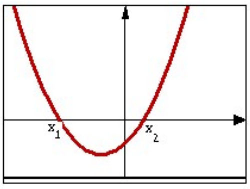
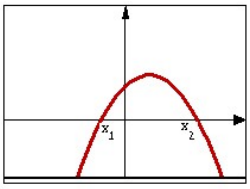
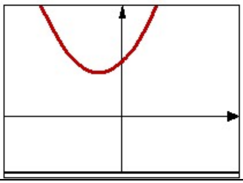
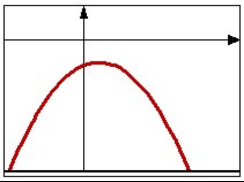
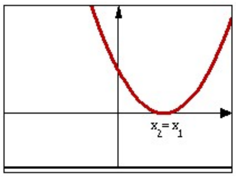
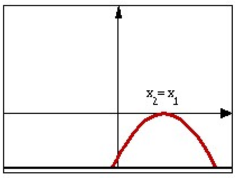
$|a|=0.2$

קצב ההשתנות של הפונקציה הימנית גבוה מקצב ההשתנות של הפונקציה השמאלית.

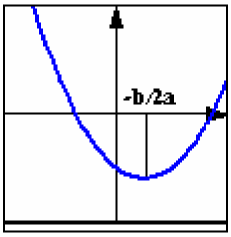
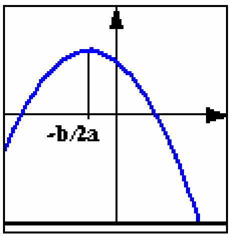
המקדם b משפיע על מיקומו של קדקוד הפרבולה: שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה הוא $-\frac{b}{2a}$. אם **b=0**, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-Y.	 $b=0$ הפרבולה סימטרית ביחס לציר ה- X	 $b=-3 \quad a=2$ $\frac{b}{a}<0$	 $b=2 \quad a=1$ $\frac{b}{a}>0$
המקדם c שווה לשיעור ה- y של נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-*y*. אם **c=0**, גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים.	 $c>0$	 $c=0$	 $c<0$

נקודות האפס של הפונקציה $f(x)=ax^2+bx+c$ והחיתוך של הפרבולה עם ציר ה-X

מספר נקודות האפס של פונקציה ריבועית תלוי בסימן הביטוי b^2-4ac. הביטוי נקרא **דיסקרימיננטה** והוא מסומן ב-Δ.

	$a>0$	$a<0$
אם $\Delta>0$, לפונקציה יש שתי נקודות אפס. הפרבולה חותכת את ציר ה-X בשתי נקודות .		
אם $\Delta<0$, לפונקציה אין נקודות אפס. הפרבולה אינה חותכת את ציר ה-X.	$a>0$ 	$a<0$ 
אם $\Delta=0$, לפונקציה יש נקודת אפס אחת. הפרבולה משיקה לציר ה-X.	$a>0$ 	$a<0$ 

תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=ax^2+bx+c$

עבור $a>0$, הפונקציה יורדת בתחום $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ ועולה בתחום $(-\frac{b}{2a},\infty)$. $-\frac{b}{2a}$ היא נקודת מינימום.	$a>0$
עבור $a<0$, הפונקציה עולה בתחום $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ ויורדת בתחום $(-\frac{b}{2a},\infty)$. $-\frac{b}{2a}$ היא נקודת מקסימום.	$a<0$

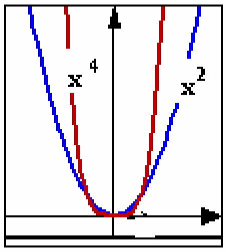
צורות ייצוג נוספות של פונקציה ריבועית

הצורה הקדקודית: $f(x)=a(x-v)^2+p$. בייצוג זה, (v,p) הם שיעורי קדקוד הפרבולה.

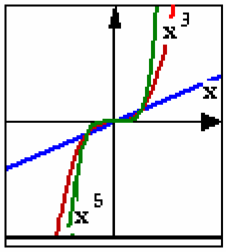
אם לפונקציה הריבועית יש שתי נקודות אפס r ו-s, אפשר להציג אותה גם **בצורת המכפלה**: $f(x)=a(x-r)(x-s)$.

פונקצית החזקה

פונקצית החזקה היא פונקציה מהצורה $f(x)=x^n$, כאשר n הוא מספר טבעי קבוע.
צורת הגרף והמאפיינים של פונקציית חזקה תלויים בחזקה n.
קיימים שני מקרים:



1. אם n הוא מספר **זוגי**, הפונקציה $f(x)=x^n$ היא פונקציה זוגית והטווח שלה הוא $[0, \infty)$. כל ערכי הפונקציה הם מספרים לא שליליים.
   לכל פונקציה מהסוג הזה יש מינימום בנקודה $(0, 0)$.
   גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-Y.

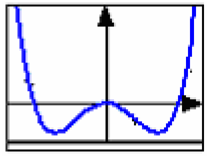


2. אם n הוא מספר אי-זוגי, הפונקציה $f(x)=x^n$ היא פונקציה אי- זוגית והטווח שלה הוא $(-\infty, \infty)$. הפונקציה מקבלת את כל הערכים הממשיים.
   כל פונקציה מהסוג זה עולה מונוטונית בכל התחום.
   גרף הפונקציה הוא בעל סימטריה סיבובית ביחס לראשית הצירים.

פונקציית פולינום

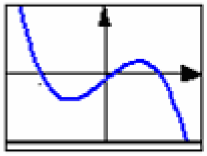
פונקציית פולינום היא פונקציה מהצורה
$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ כאשר $a_0, a_1,\ldots a_n$ הם מספרים כלשהם.
תחום ההגדרה של כל פונקציות הפולינום הוא כל המספרים הממשיים : $(-\infty, \infty)$.
הטווח של פונקציית פולינום ממעלה זוגי הוא אינטרוול אינסופי חצי פתוח : $[a,\infty)$ או $(-\infty, b]$.
הטווח של פונקציית פולינום ממעלה אי-זוגי הוא קבוצה של כל המספרים הממשיים : $(-\infty,\infty)$.
כל פונקציית פולינום היא **רציפה** בכל התחום.
לפולינום ממעלה n יכולות להיות לכל היותר $(n-1)$ **נקודות קיצון** (נקודות מקסימום או מינימום).
לגרף של פונקציית פולינום אין אסימפטוטות.
לחקירת פונקציית הפולינום נוח להשתמש בנגזרת.

להלן **דוגמאות של שלוש פונקציות פולינום:**



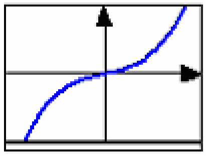
x^4-5x^2

שלוש נקודות קיצון
הטווח מוגבל מצד אחד



$6x-x^3-2$

שתי נקודות קיצון
הטווח אינסופי משני הצדדים



x^3+2x

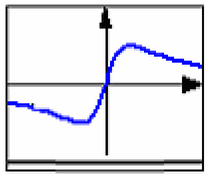
אין נקודות קיצון
הטווח אינסופי משני הצדדים

פונקציית מנה

פונקציית מנה (פונקציה רציונאלית) היא פונקציה מהצורה $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ כאשר $p(x)$ ו- $q(x)$ הם פולינומים.

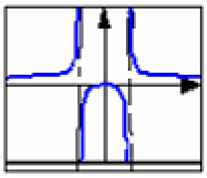
תחום ההגדרה של פונקציית מנה הוא כל המספרים הממשיים חוץ ממספרים שמאפסים את המכנה $q(x)$.
כל נקודות האפס של המכנה הן גם **נקודות אי-רציפות** של פונקציית המנה. במקרה כזה הגרף של פונקציית המנה מורכב מכמה ענפים.
בכל נקודת אפס של המכנה שהמונה בה שונה מאפס, לגרף פונקציית המנה יש **אסימפטוטה אנכית**.
אם מעלת המונה קטנה או שווה למעלת המכנה, לגרף הפונקציה יש גם **אסימפטוטה אופקית**.
אם מעלת המונה גדולה באחד ממעלת המכנה, לגרף הפונקציה יש גם **אסימפטוטה משופעת.**
לחקירת פונקציה המנה יש להשתמש בנגזרת ובאסימפטוטות.

להלן **שלוש דוגמאות של פונקציית מנה**:



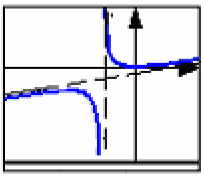
$\frac{x}{x^2+1}$

אסימפטוטה אופקית-ציר X
פונקציה רציפה
טווח מוגבל



$\frac{x^2}{x^2-1}$

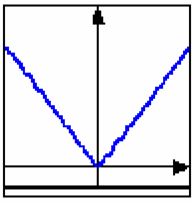
שתי אסימפטוטות אנכיות
טווח אינסופי משני הצדדים
שלושה ענפים



$\frac{x^2}{x^2+2}$

אסימפטוטה אחת אנכית
ואחת משופעת
טווח אינסופי משני הצדדים
שני ענפים

פונקציית הערך המוחלט



פונקציית הערך המוחלט מוגדרת על ידי $f(x)=|x|$.

הגרף של הפונקציה מורכב משתי קרניים שראשן בראשית הצירים.

הערך המינימאלי של הפונקציה הוא אפס.

בתחום $x<0$, **הפונקציה יורדת.**

בתחום $x>0$, **הפונקציה עולה.**

הנגזרת של הפונקציה נתונה על ידי : $f'(x)=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$

בנקודה $x=0$, לפונקציית הערך המוחלט אין נגזרת.

פונקציית הערך המוחלט של פונקציה כלשהי

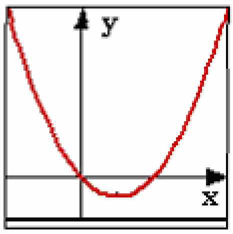
הפונקציה $y=|f(x)|$, פונקציית הערך המוחלט של הפונקציה $f(x)$, היא פונקציה לא שלילית בכל התחום

ומקיימת : $|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\ge 0\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$

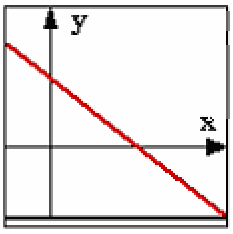
ולכן, כדי לקבל את גרף הפונקציה $y=|f(x)|$, יש לשקף ביחס לציר ה-X את חלקי הגרף של הפונקציה $y=f(x)$ הנמצאים מתחת לציר ה-X.

דוגמאות:

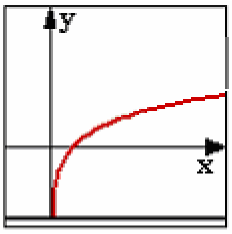
$y=x^2-2x$



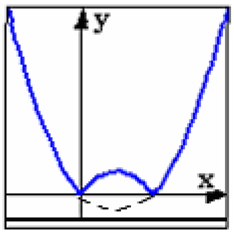
$y=4-x$



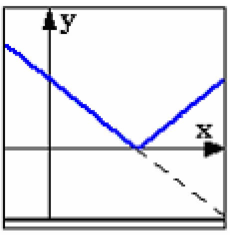
$y=\log_2 x$



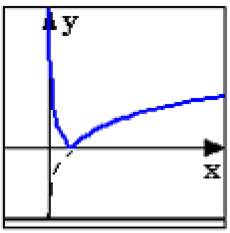
$y=|x^2-2x|$



$y=|4-x|$



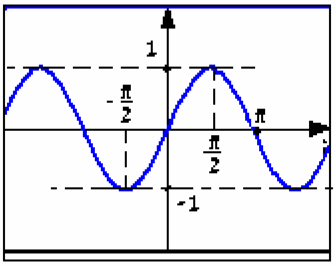
$y=|\log_2 x|$



פונקציות טריגונומטריות

<u>הפונקציה f(x)=sin x</u>

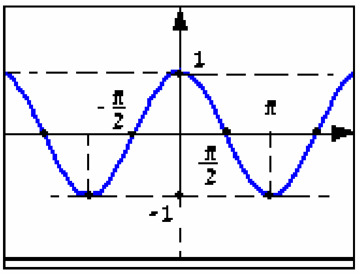
תחום הפונקציה: כל המספרים הממשיים $(-\infty, \infty)$.
טווח הפונקציה: $[-1, 1]$. לכל ערכי x , $-1 \le \sin x \le 1$.
פונקציה אי זוגית: $\sin(-x) = -\sin x$ לכל ערכי x. גרף הפונקציה הוא בעל סימטריה סיבובית ביחס לראשית הצירים.
פונקציה מחזורית בעלת מחזור יסודי של 2π : $\sin(x+2\pi) = \sin x$ לכל ערכי x.
נקודות אפס: לפונקציה יש אינסוף נקודות אפס ששיעוריהן $x=\pi n$, כאשר n הוא מספר שלם.
תחומי חיוביות: $[2\pi n, \pi(2n+1)]$, כאשר n מספר שלם.
תחומי שליליות: $[\pi(2n-1), 2\pi n]$, כאשר n מספר שלם.
נקודות מקסימום: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 1)$, כאשר n מספר שלם.
נקודות מינימום: $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -1)$, כאשר n מספר שלם.
תחומי עלייה: $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.
תחומי ירידה: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.



גרף הפונקציה f(x)=sin *x*

<u>הפונקציה f(x)=cos x</u>

תחום הפונקציה: כל המספרים הממשיים $(-\infty, \infty)$.
טווח הפונקציה: $[-1, 1]$. לכל ערכי x , $-1 \le \cos x \le 1$.
פונקציה זוגית: $\cos(-x) = \cos x$ לכל ערכי x . גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-Y.
פונקציה מחזורית בעלת מחזור יסודי של 2π : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ לכל ערכי x.
נקודות אפס: לפונקציה יש אינסוף נקודות אפס ששיעוריהן $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, כאשר n מספר שלם.
תחומי חיוביות: $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.
תחומי שליליות: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.
נקודות מקסימום: $(2\pi n, 1)$, כאשר n מספר שלם.
נקודות מינימום: , $(\pi(2n-1), -1)$ כאשר n מספר שלם.
תחומי עלייה: $[\pi(2n-1), 2\pi n]$, כאשר n מספר שלם.
תחומי ירידה: $[2\pi n, \pi(2n+1)]$, כאשר n מספר שלם.



גרף הפונקציה f(*x*)=cos *x*

הפונקציה f(x)=tan x

תחום הפונקציה : כל המספרים הממשיים חוץ ממספרים מהצורה $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

טווח הפונקציה : $(-\infty, \infty)$.

פונקציה אי זוגית : $\tan(-x)=-\tan x$ לכל ערכי x . גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים.

פונקציה מחזורית בעלת מחזור יסודי של π : $\tan(x+\pi)=\tan x$ לכל ערכי x.

נקודות אפס : לפונקציה יש אינסוף נקודות אפס ששיעוריהן $x = \pi n$, כאשר n מספר שלם.

תחומי חיוביות : $(\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.

תחומי שליליות : $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n)$, כאשר n מספר שלם.

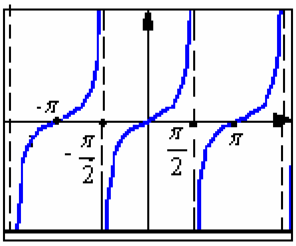
לפונקציה אין נקודות מקסימום או מינימום.

פונקציה רציפה בכל תחום $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$,

כאשר n מספר שלם.

פונקציה עולה בכל תחום $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$,

כאשר n מספר שלם.



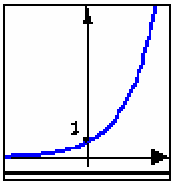
גרף הפונקציה f(x)=tan x

הפונקציה המעריכית

פונקציה מעריכית היא פונקציה מהצורה $f(x)=a^x$, כאשר a הוא מספר חיובי השונה מ-1.

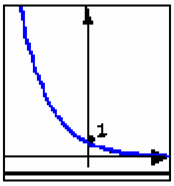
הגרף של כל פונקציה מעריכית עובר דרך הנקודה $(0,\ 1)$.
אם a>1, הפונקציה a^x עולה מונוטונית בכל התחום.
אם a<1, הפונקציה a^x יורדת מונוטונית בכל התחום.

a>1



הפונקציה עולה

a<1



הפונקציה יורדת

תחום ההגדרה של כל הפונקציות המעריכיות הוא כל המספרים הממשיים : $(-\infty,\ \infty)$.
טווח הפונקציות המעריכיות הוא כל המספרים החיוביים : $(0,\ \infty)$.

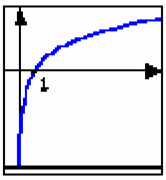
הפונקציה הלוגריתמית

הפונקציה הלוגריתמית היא פונקציה מהצורה $f(x)=\log_a x$, כאשר הבסיס a הוא מספר חיובי השונה מ-1.

הפונקציה $\log_a x$ היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה המעריכית a^x.
תחום ההגדרה של כל הפונקציות הלוגריתמיות הוא כל המספרים החיובים : $(0,\ \infty)$.
הטווח של כל הפונקציות הלוגריתמיות הוא כל המספרים הממשיים : $(-\infty,\ \infty)$.

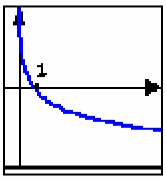
הגרפים של כל הפונקציות הלוגריתמיות עוברים דרך הנקודה $(1,\ 0)$.
אם a>1, הפונקציה $\log_a x$ עולה מונוטונית בכל התחום.
אם a<1, הפונקציה $\log_a x$ יורדת מונוטונית בכל התחום.

a>1



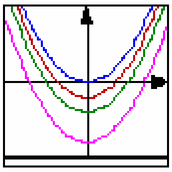
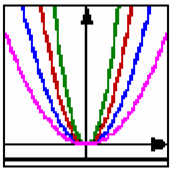
הפונקציה עולה

a<1

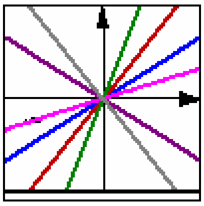
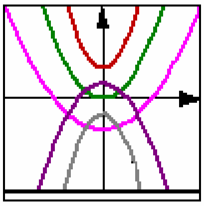
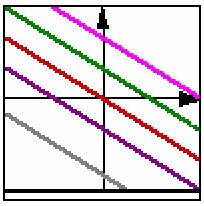


הפונקציה יורדת

משפחות של פונקציות

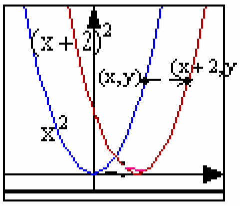
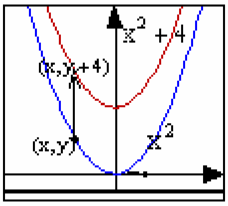
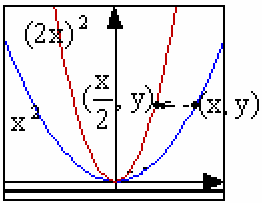
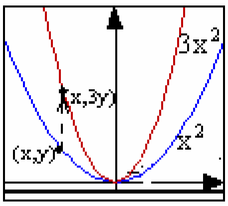
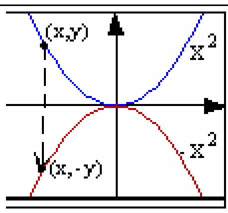
הגדרות ותיאורים	דוגמאות
אוסף של פונקציות בעלות תכונה משותפת כלשהי נקרא משפחה של פונקציות. אחת הדרכים ליצור **משפחה של פונקציות היא ביצוע שינויים גרפיים** (הזזות, מתיחות, וכדומה) על הגרף של פונקציה מסוימת.	המשפחה התקבלה על ידי הזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.  המשפחה התקבלה על ידי מתיחה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$. 
בייצוג אלגברי של משפחה של פונקציות מופיעים פרמטר אחד או כמה פרמטרים. לייצוג כזה קוראים ייצוג פרמטרי של המשפחה.	1. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=mx-2n$ (m ו-n הם שני פרמטרים . לדוגמה, הפונקציות $f(x)=4x-6$, $f(x)=-3x-26$ שייכות למשפחה. כל הפונקציות במשפחה הן פונקציות קוויות. 2. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=\begin{cases} ax, x\ge 2 \\ a-x, x<2 \end{cases}$ (a הוא פרמטר). לדוגמה, הפונקציה $f(x)=\begin{cases} -2x, x\ge 2 \\ -2-x, x<2 \end{cases}$ שייכת למשפחה. 3. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $g(x)=ax^2+bx+c$ (באמצעות שלושה פרמטרים a, b ו-c). לדוגמה, הפונקציות $f(x)=x^2-1$, $f(x)=-x^2+3x+4$ שייכות למשפחה.
אפשר להגדיר משפחה של פונקציות על ידי **התכונה המשותפת לכל הפונקציות במשפחה.**	1. משפחה של פונקציות זוגיות. 2. משפחה של פונקציות עולות בתחום [0, 1]. 3. משפחה של פונקציות ליניאריות העוברות דרך הנקודה (1, 1).

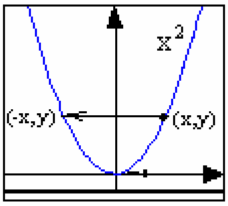
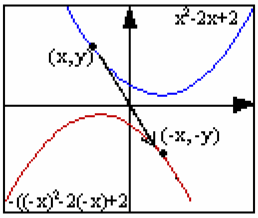
דוגמאות נוספות של משפחות של פונקציות בייצוגים שונים

ייצוג פרמטרי	ייצוג גרפי	תכונות המשפחה
$f(x)=kx$ k - פרמטר	המשפחה התקבלה על ידי סיבוב גרף הפונקציה $f(x)=x$ סביב ראשית הצירים. 	ערכי הפונקציות פרופורציוניים לערכי המשתנה הבלתי-תלוי: כל פונקציה f השייכת למשפחה מקיימת: $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1}{x_2}$
$g(x)=ax^2+b$ a ו-b - פרמטרים	המשפחה התקבלה על ידי מתיחה והזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$. 	משפחת כל הפונקציות הריבועיות הזוגיות.
$f(x)=m-x$ m - פרמטר	המשפחה התקבלה על ידי הזזה של גרף הפונקציה $f(x)=-x$ 	משפחה של פונקציות ליניאריות בעלות שיפוע -1.

הקשר בין שינוי הגרף של הפונקציה לבין שינוי הביטוי האלגברי של הפונקציה

כאשר נתונים הגרף והביטוי האלגברי של פונקציה, כל שינוי של הגרף גורם לשינוי מסוים של הביטוי האלגברי, ולהפך, כל שינוי של הביטוי האלגברי גורם לשינוי מסוים של הגרף. בטבלה שלהלן מוצגות טרנספורמציות המבוצעות על גרף של פונקציה והשינוי המתאים בביטוי האלגברי.

טרנספורמציות של הגרף	שינוי הביטוי האלגברי	דוגמאות
הזזה אופקית ב a- יחידות	$f(x-a)$	על ידי הזזה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ב-2 יחידות ימינה על הציר האופקי, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=(x-2)^2$. 
הזזה אנכית ב a- יחידות	$f(x)+a$	על ידי הזזה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ב-4 יחידות מעלה על הציר האנכי, מקבלים את הגרף של הפונקציה $h(x)=x^2+4$. 
מתיחה אופקית בגורם מתיחה k.	$f(\frac{x}{k})$	על ידי מתיחה אופקית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בגורם $\frac{1}{2}$, מקבלים את הגרף של הפונקציה $h(x)=(2x)^2$ 
מתיחה אנכית בגורם מתיחה k.	$k\bullet f(x)$	על ידי מתיחה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בגורם 3, מקבלים את ה גרף של הפונקציה $g(x)=3x^2$. 
שיקוף בציר ה-X	$-f(x)$	על ידי שיקוף גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בציר ה- X, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=-x^2$. 

טרנספורמציות של הגרף	שינוי הביטוי האלגברי	דוגמאות
שיקוף בציר ה-Y	$f(-x)$	על ידי שיקוף גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בציר ה-Y, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=(-x)^2$. מאחר ש $(-x)^2=x^2$, מתקבל גרף זהה לגרף של $f(x)=x^2$. 
שיקוף בראשית הצירים	$-f(-x)$	על ידי שיקוף גרף הפונקציה $f(x)=x^2-2x+2$ בראשית הצירים, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=-[(-x)^2-2(-x)+2]$. 

גבול של פונקציה ורציפות של פונקציה

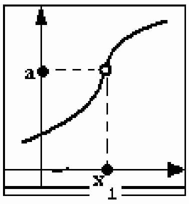
הגדרות ותיאורים	דוגמאות וגרפים

הגדרה כללית (אינטואיטיבית)

המספר a הוא גבול של הפונקציה בנקודה x_1 :

$\lim_{x\to x_1} f(x)=a$ אם כאשר x שואף ל-x_1 אז f(x) שואפת ל-a.

הערה. ההגדרה הזאת אינה מדויקת כי המילה "שואף" דורשת פרוש.



דוגמה 1. כאשר x שואף ל-2 אז הפונקציה $f(x)=x^2-1$ שואפת ל- $2^2-1=3$

דוגמה 2. כאשר x שואף ל-1 אז הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ שואפת ל- 1+1=2 כי $\frac{x^2-1}{x-1}$ שווה ל- $x+1$ בכל נקודה חוץ מ-x=1.

ההגדרה המדויקת של גבול בנקודה

המספר a הוא **גבול של הפונקציה f(x) בנקודה x_1** אם עבור כל מספר חיובי ε קיים מספר חיובי δ כך ש: לכל מספר x שעבורו $0<|x-x_1|<\delta$ אז מתקיים ש $|f(x)-a|<\varepsilon$.

ניסוח אחר: מספר a הוא **גבול של הפונקציה f(x) בנקודה x_1** אם עבור כל סביבה של a קיימת סביבה נקובה (סביבה של הנקודה ללא הנקודה עצמה). של x_1 כך ש: לכל מספר x השייך לסביבה הנקובה של נקודה x_1 f(x) שייך לסביבה של הנקודה a : אם

$x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$ $(x\neq x_1)$

אז $f(x)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

שימו לב! גבול של הפונקציה בנקודה לא תלוי בערך הפונקציה בנקודה עצמה מכיוון שבהגדרת הגבול מופיעה סביבה נקובה של הנקודה.

דוגמה. יש להוכיח כי $\lim_{x\to0}\frac{2x^2+x}{x}=1$.

פתרון. בכל x חוץ מ- $x=0$: $\frac{2x^2+x}{x}=\frac{x(2x+1)}{x}=2x+1$

תהי נתון מספר $\varepsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

אם $|x-0|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ אז $|2x|<\varepsilon$ כלומר $|(2x+1)-1|<\varepsilon$.

מ.צ.ל.

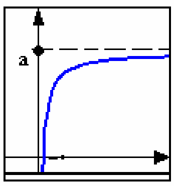
גבולות באינסוף

המספר a הוא **גבול של הפונקציה f(x) כאשר x שואף לאינסוף** $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$

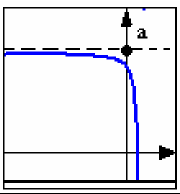
אם עבור כל מספר חיובי ε קיים מספר כלשהו M כך שאם x>M אז מתקיים גם $|f(x)-a|<\varepsilon$.

המספר a הוא **גבול של הפונקציה f(x) כאשר x שואף למינוס אינסוף** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$

אם עבור כל מספר חיובי ε קיים מספר כלשהו N כך שאם x<N אז גם $|f(x)-a|<\varepsilon$.



$\lim_{x\to\infty} f(x)=a$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$

דוגמה. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

(המכנה הולך וגדל לאינסוף ולכן השבר הולך וקטן ושואף ל- 0).

גבולות אינסופיים

הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 שואפת לאינסוף

$\lim_{x\to x_1} f(x)=\infty$ אם עבור כל מספר M קיים מספר חיובי δ כך שאם $|x-x_1|<\delta$ אז $f(x)>M$.

הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 שואף למינוס אינסוף:

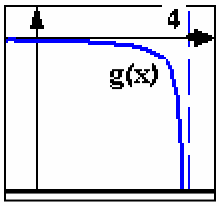
$$\lim_{x\to x_1} f(x)=-\infty$$

אם עבור כל מספר N קיים מספר חיובי δ כך שאם $|x-x_1|<\delta$ אז $f(x)<N$.

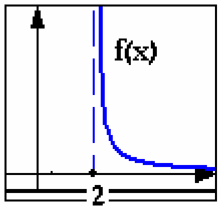
__דוגמה 1.__ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$

__דוגמה 2.__ $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\infty$

__דוגמה 3.__ $\lim_{x\to -1}\frac{-x^2}{x+1}=-\infty$



$\lim_{x\to 4} g(x)=-\infty$



$\lim_{x\to 2} f(x)=\infty$

גבולות חד צדדיות

המספר a הוא **גבול חד צדדי ימני** של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1: $\lim_{x\to x_1^+} f(x)=a$

אם כאשר x שואף ל-x_1 מימין אז $f(x)$ שואפת ל-a.

כלומר, המספר a הוא **גבול ימני של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1** אם עבור כל מספר חיובי ε קיים מספר חיובי δ כך ש: לכל מספר x שעבורו $0<x-x_1<\delta$ יהיה $|f(x)-a|<\varepsilon$ או בניסוח אחר: אם $x\in(x_1,x_1+\delta)$ אז $f(x)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

המספר a הוא **גבול חד צדדי שמאלי** של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1: $\lim_{x\to x_1^-} f(x)=a$ אם כאשר x שואף ל-x_1 משמאל אז $f(x)$ שואפת ל-a.

כלומר, המספר a הוא **גבול משמאל של הפונקציה $f(x)$**

בנקודה x_1 אם עבור כל מספר חיובי ε קיים מספר חיובי δ

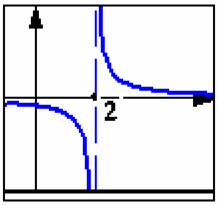
כך ש: לכל מספר x שעבורו $0<x_1-x<\delta$ יהיה $|f(x)-a|<\varepsilon$

או בניסוח אחר: $x\in(x_1-\delta,x_1)$ גורר

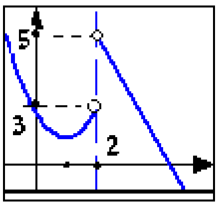
$f(x)\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ אם בנקודה כלשהי לפונקציה

קיימים שני גבולות חד צדדיות אבל הם לא שווים:

$\lim_{x\to x_1^+} f(x)\neq\lim_{x\to x_1^-} f(x)$ אז גרף הפונקציה מתפצל לענפים נפרדים.



$f(2)=0$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$

בנקודה x=2 הפונקציה לא מוגדרת

רציפות של הפונקציה

תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_1. אם קיים גבול של הפונקציה בנקודה x_1 השווה לערכה של הפונקציה בנקודה(כלומר, $\lim_{x\to x_1} f(x)=f(x_1)$)

אז אומרים כי **הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה x_1**.

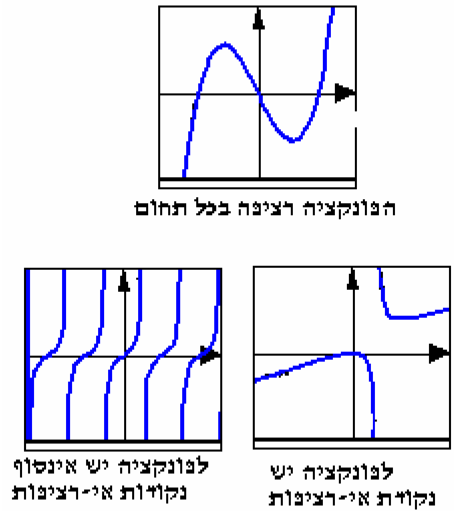
פונקציה רציפה בתחום אם היא רציפה בכל נקודה בתחום זה.

אם פונקציה רציפה בתחום ההגדרה שלה אז אומרים כי **הפונקציה רציפה**.

כל הפונקציות: פולינומים, פונקציות שבר, פונקציות טריגונומטריות, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות רציפות בכל אינטרוול השייך לתחום ההגדרה שלהן.

כל פונקציה רציונאלית רציפה בכל נקודה חוץ מנקודות אפס של המכנה.

דוגמה. לפונקציה $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ יש שתי נקודות אי-רציפות: $x_1=1$, $x_2=-1$. זאת אומרת שגרף הפונקציה מתפצל לשלושה חלקים.

גרף של פונקציה רציפה נראה כקו שלם, ללא קפיצות. בנקודות אי-רציפות גרף הפונקציה מתפצל לחלקים נפרדים.	

חישוב גבולות

גבולות בסיסיים

1. תהיינה $f(x)$ פונקציה רציפה בנקודה x_1 אז $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0$ כאשר a ו-n הם פרמטרים, n>0.
3. גבול הטריגונומטרי הבסיסי: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
4. גבולות מעריכיים או לוגריתמיים בסיסיים:

א. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$ e הוא מספר קבוע: e=2.71828... .

ב. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ג. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

חוקי הגבולות

תהיינה f(x) ו-g(x) שתי פונקציות המקיימות: $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = L,$ וגם $\lim\limits_{x \to x_1} g(x) = K$:

1. $\lim\limits_{x \to x_1} (f(x) + g(x)) = L + K$.
2. $\lim\limits_{x \to x_1} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$
3. $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ בתנאי כי K≠0
4. $\lim\limits_{x \to x_1} f[g(x)] = \lim\limits_{x \to K} f(x)$

חישוב גבול בנקודה:

נתאר חישוב של גבול בנקודה של פונקציה רציפה בנקודה וחישוב של גבול בנקודה של פונקציה שאינה רציפה בנקודה.

גבול בנקודה של פונקציה רציפה בנקודה:

גבול בנקודה של פונקציה הרציפה בנקודה שווה לערך של הפונקציה.

<u>דוגמה:</u>

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+5}{x+3}=\frac{-2+5}{-2+3}=3$ כי הפונקציה $f(x)=\frac{x+5}{x+3}$ מוגדרת ורציפה בנקודה x= -2.

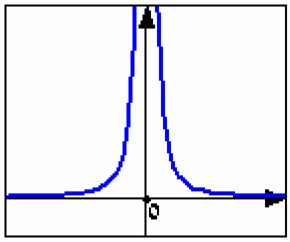
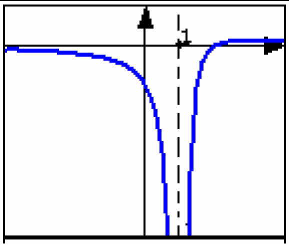
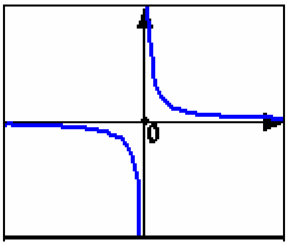
גבול בנקודה של פונקציה שאינה רציפה בנקודה:

יש כמה שיטות למציאת הגבול בנקודה של פונקציה שאינה רציפה בנקודה זו.

גבול של פונקציה רציונאלית (פונקצית שבר) בנקודה שבה המכנה שווה לאפס.

1) במקרה שהמונה לא שווה לאפס, הגבול לא קיים או שווה ל $\pm\infty$.

<u>דוגמאות:</u>

		
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{(1-x)^2}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ לא קיים (קיימים גבולות חד צדדים).

2) במקרה שגם המונה וגם המכנה שווים לאפס בנקודה יש לצמצם את השבר בגורם השווה לאפס בנקודה.

<u>דוגמה 1</u>

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3}$$

אחרי הצמצום קבלנו את הפונקציה הרציפה בנקודה x=2 אז הגבול שווה לערך הפונקציה בנקודה x=2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3}=\frac{2+2}{3}=1\frac{1}{3}.$$

<u>דוגמה 2</u>

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2-1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

3) גבולות של פונקציות טריגונומטריות

בחישוב גבולות טריגונומטריות (בנקודות אי רציפות של הפונקציה הנתונה) משתמשים בגבול הטריגונומטרי

הבסיסי: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

מהגבול הזה נגזר הגבול הבא: $\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ בתנאי ש- f(x) היא פונקציה רציפה בנקודה a ו-f(a)=0.

בחישוב גבולות טריגונומטריות (בנקודות אי רציפות של הפונקציה הנתונה) משתמשים בגבול הטריגונומטרי

הבסיסי: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ומאז $\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ בתנאי ש- f(x) היא פונקציה רציפה בנקודה a ו-f(a)=0.

<u>דוגמה 1.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{5x}{\sin 5x}\times\frac{2}{5}\right)=1\times 1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

<u>דוגמה 2.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\times\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)=1\times\frac{1}{1}=1$$

<u>דוגמה 3.</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{2x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{2(x-\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

כי אם $x\to\frac{\pi}{4}$ אז $(x-\frac{\pi}{4})\to 0$.

4) גבולות מערכיים ולוגריתמיים.

בחישוב גבולות מערכיים ולוגריתמיים (בנקודות אי רציפות של הפונקציה הנתונה) משתמשים בגבולות המעריכים או הלוגריתמיים הבסיסיים (ר' לעיל):

<u>דוגמה:</u>

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{3x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=e^3.$$

חישוב גבול באינסוף

בחיפוש גבול של שבר באינסוף יש לחלק גם את המונה וגם את המכנה של השבר ב- x^n כאשר n הוא החזקה הגדולה ביותר של x המופיעה בשבר ואחר כך להיעזר ב- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ עבור כל n טבעי.

<u>דוגמאות</u>

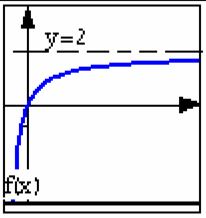
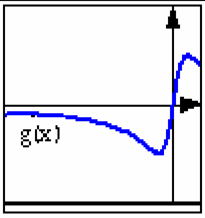
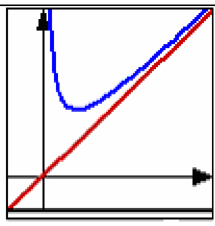
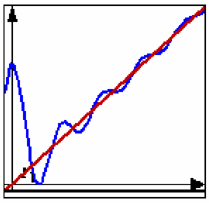
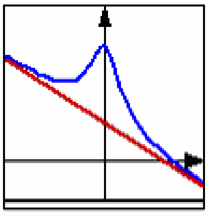
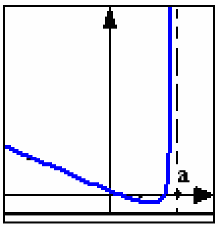
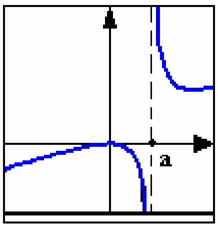
1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2-3x/x^2}{2x^2/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3/x}{2}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x/x^3+2/x^3}{x^3/x^3-1/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3/x^2+2/x^3}{1-1/x^3}=\frac{0+0}{1-0}=0$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x/x^3-x^3/x^3}{x^2/x^3+1/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x^2-1}{1/x+1/x^3}=\frac{0-1}{0+0}=\frac{-1}{0}$ הגבול לא קיים.

אסימפטוטות לגרף של פונקציה

אסימפטוטה לגרף של פונקציה היא קו ישר שהגרף שואף אליו.
ישנם כמה סוגים שונים של אסימפטוטות.

הגדרות ותיאורים	צורה סימבולית והערות	צורה גראפית	
קו ישר $y=a$ שגרף הפונקציה $y=f(x)$ שואף אליו כאשר x שואף לאינסוף (או למינוס אינסוף), נקרא **אסימפטוטה אופקית** לגרף הפונקציה.	אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ או $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ אז הישר $y=a$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה $y=f(x)$.	 הישר $y=2$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $f(x)$	 ציר ה-X הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $g(x)$
קו ישר $y=mx+n$ שגרף הפונקציה $y=f(x)$ שואף אליו כאשר x שואף לאינסוף (או למינוס אינסוף), נקרא **אסימפטוטה משופעת** לגרף הפונקציה $y=f(x)$. (ההפרש בין $f(x)$ לבין הפונקציה הליניארית $mx+n$ שואף ל-0). __הערה__: אסימפטוטה אופקית היא מקרה מיוחד של אסימפטוטה משופעת שבו $m=0$.	אם $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(mx+n)]=0$ או $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+n)]=0$ אז הישר $y=mx+n$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה $y=f(x)$. כדי למצוא אסימפטוטה אופקית, יש למצוא תחילה את $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ (אם הגבול קיים), ואחר כך את $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$	  גרפים של הפונקציות שואפים באין סוף לקו ישר	 גרף הפונקציה שואף לקו ישר באין סוף ובמינוס אינסוף
קו הישר $x=a$ שגרף הפונקציה $y=f(x)$ שואף אליו נקרא **אסימפטוטה אנכית** לגרף הפונקציה $y=f(x)$	אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ או $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, אז הקו הישר $x=a$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה $y=f(x)$. בדרך כלל, a היא נקודה שאינה נמצאת בתחום ההגדרה של הפונקציה.		

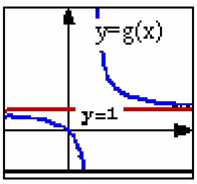
__דוגמאות__

1. מצאו את האסימפטוטה האופקית של הפונקציות הנתונות.

א. $g(x)=\frac{x}{x-2}$.

__פתרון__: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1}{1}=1$.

האסימפטוטה היא $y=1$.

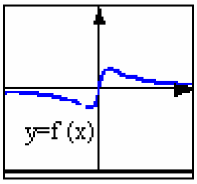


האסימפטוטה היא $y=1$.

ב. $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

פתרון: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$.

האסימפטוטה היא $y=0$ (ציר ה-X).

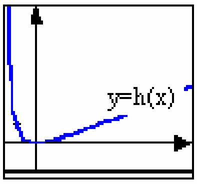


האסימפטוטה היא ציר ה-X.

ג. $h(x)=\frac{x^2}{x+2}$.

פתרון: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{0}=\infty$.

לפונקציה זו אין אסימפטוטה אופקית.



אין אסימפטוטות אופקיות.

2. מצאו את כל האסימפטוטות של גרף הפונקציה
$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

פתרון: אסימפטוטות אופקיות הן מקרה מיוחד של אסימפטוטות משופעות, ולכן, אם , צריך למצוא את כל האסימפטוטות, כמו בדוגמה הזאת, לא כדאי לחפש בנפרד אסימפטוטות אופקיות, אלא כדאי לחפש משוואה של אסימפטוטה משופעת:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-2x}{x^2}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x-2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-2/x}=\frac{2}{1-0}=2$$

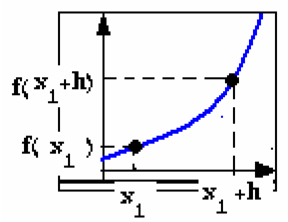
מכאן שמשוואת האסימפטוטה המשופעת היא $y=x+2$.

כדי למצוא אסימפטוטה אנכית נבדוק אם הפונקציה שואפת לאינסוף בנקודות שבהן היא אינה מוגדרת.

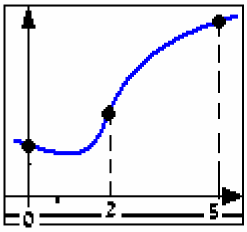
כלומר, בנקודה $x=2$. $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{0}=\infty$.

מכאן שהישר $x=2$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה $f(x)$.

נגזרת של פונקציה

דוגמאות וגרפים	הגדרות ותיאורים
 **דוגמה** חשבו לפי ההגדרה את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2$ בנקודה $x=1$. **פתרון:** $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=$ $=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$ לכן הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2$ בנקודה $x=1$ שווה ל-2.	**הגדרת הנגזרת בנקודה** תהי $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_1. **הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודה** x_1 היא הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ בתנאי שהוא קיים. הנגזרת בנקודה מסומנת $f'(x_1)$. לעיתים היא נקראת המספר הנגזר ואומרים שהפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה x_1.
דוגמה חשבו לפי ההגדרה את הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2$. **פתרון:** $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$ $=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$ כלומר, הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $f(x)=x^2$, היא $2x$. כותבים כך: $f'(x^2)=2x$.	**הפונקציה הנגזרת** ערכי הנגזרת בכל הנקודות שעבורם הפונקציה $f(x)$ גזירה, מרכבים פונקציה חדשה $f'(x)$ שהיא **הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ (הנגזרת הראשונה).** ולכן: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
דוגמה. מצאו את הנגזרת השנייה ואת הנגזרת השלישית של הפונקציה $f(x)=x^3-4x$ **פתרון** מוצאים קודם את הנגזרת הראשונה: $f'(x)=3x^2-4$ הנגזרת השנייה: $f''(x)=(f'(x))'=6x$ הנגזרת השלישית: $f'''(x)=(f''(x))'=6$	**נגזרת מסדר גבוה** הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $f'(x)$ נקראת **הנגזרת השנייה** של הפונקציה $f(x)$. מסומנת $f''(x)$ או $f^{(2)}(x)$. הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $f''(x)$ נקראת **הנגזרת השלישית** של הפונקציה $f(x)$. מסומנת $f'''(x)$ או $f^{(3)}(x)$. אפשר להגדיר הנגזרת מסדר גבוה באופן כללי: $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$ כאשר n מספר טבעי.
	המשמעות של הנגזרת בנקודה **סימן הנגזרת** של הפונקציה בנקודה מאפיין את הכיוון השינוי של הפונקציה בנקודה: בנקודות שבהן הנגזרת חיובי – הפונקציה עולה, בנקודות שבהן הנגזרת שלילי - הפונקציה יורדת.

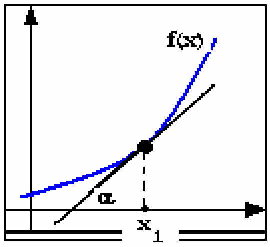
ערך המוחלט של נגזרת הפונקציה בנקודה מאפיין את קצב השינוי של הפונקציה בנקודה.



בנקודות 2 ו-5 הפונקציה עולה , ערכי הנגזרת חיובים.
קצב השינוי של הפונקציה בנקודה x=2 יותר גבוה מקצב השינוי בנקודה x=5 .
בנקודה x=0 הפונקציה יורדת, ערך הנגזרת הוא מספר שלילי .

המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת.

ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה שווה לשיפוע של המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הזו.



$$f'(x_1) = m = \tan\alpha$$

כאשר m הוא שיפוע המשיק ו-ά הזווית בין המשיק ובין הכיוון החיובי של ציר ה-X

טבלה של נגזרות בסיסיות

פונקציה f(x)	פונקציה נגזרת f '(x)	פונקציה f(x)	פונקציה נגזרת f '(x)
C (מספר קבוע)	0	sin x	cos x
$\mathbf{x^n}$	$n \cdot x^{n-1}$	cos x	-sin x
$\sqrt[m]{x^k}$	$\frac{k}{m} x^{\frac{k}{m}-1}$	tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	cot x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\mathbf{\log_a x}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
ln x	$\frac{1}{x}$	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbf{a^x}$	$a^x \cdot \ln a$	arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbf{e^x}$	e^x	arccot x	$-\frac{1}{1+x^2}$

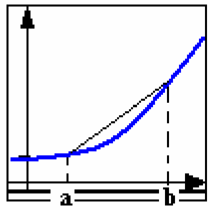
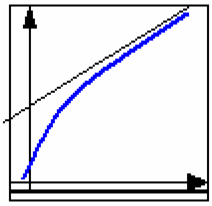
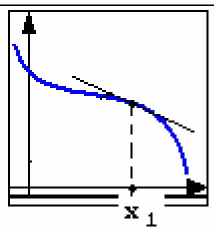
חוקי הגזירה

משפטים	צורה סימבולית	דוגמאות
הנגזרת של סכום (הפרש) של שתי פונקציות	$(f(x) \pm g(x))' =$ $= f'(x) \pm g'(x)$	1. $(x^3 - x^5)' = 3x^2 - 5x^4$ 2. $(x^2 + \sin x - 2)' = 2x + \cos x$
הנגזרת של פונקציה המכפלת במספר קבוע	$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$	1. $(3x^4)' = 3 \cdot 4x^2 = 12x^2$ 2. $(-\cos x)' = -1 \cdot (-\sin x) = \sin x$
הנגזרת של מכפלת שתי פונקציות	$(f(x) \cdot g(x))' =$ $= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$(x^2 \cdot \ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$ $= 2x \cdot \ln x + x$
הנגזרת של מנת שתי פונקציות	$(\frac{f(x)}{g(x)})' =$ $= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	$(\frac{2x^3}{x^2 + 1})' = \frac{6x^2 \cdot (x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$
הנגזרת של פונקציה מורכבת: כלל השרשרת	$(g(f(x)))' = g'(y) \cdot f'(x)$ כאשר $y = f(x)$	1. $(\sin x^2)' = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$ בדוגמה הזו: $y = f(x) = x^2, g(x) = \sin x$ 2. $((\sin x)^2)' = 2 \sin x \cdot \cos x$ בדוגמה הזו: $y = f(x) = \sin x, g(x) = x^2$
נגזרת הפונקציה ההפוכה	$x'_y = \frac{1}{y'_x}$ כאשר $y'_x \neq 0$	1. פונקציה $\sqrt{x}$ היא פונקציה ההפוכה לפונקציה x^2 מאז: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 2. פונקציה $\arcsin x$ היא פונקציה ההפוכה לפונקציה $\sin x$. מאז: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
נגזרת של פונקציה סתומה	כדי למצוא נגזרת של פונקציה סתומה אפשר לגזור שני אגפי המשוואה המתאימה	אם פונקציה $y=f(x)$ נתונה על ידי המשוואה: $x^2=xy+1$. נגזור שני אגפי המשוואה: $(x^2)' = (xy + 1)'$, $2x = x' \cdot y + x \cdot y'$ או $2x = y + x \cdot y'$ ומאז $y' = \frac{2x - y}{x}$

משיק לגרף הפונקציה

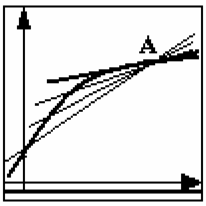
קירוב ליניארי של הפונקציה f(x) הוא פונקציה ליניארית הכי קרובה לפונקציה f(x) בתחום מסוים.

יש כמה סוגי קירוב ליניארי של פונקציה. סוג הקירוב תלוי בתחום הקירוב.

		
אינטרפולציה ליניארית היא **קירוב ליניארי לגרף הפונקציה בתחום [a, b]**	אסימפטוטה משופעת היא **קירוב ליניארי לגרף הפונקציה באינסוף**	משיק לגרף הפונקציה **בנקודה x_1** היא **קירוב ליניארי לגרף הפונקציה בסביבת הנקודה**

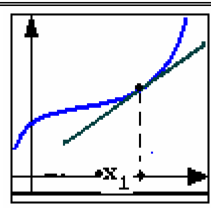
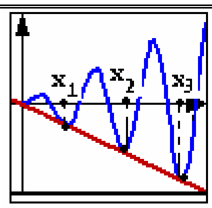
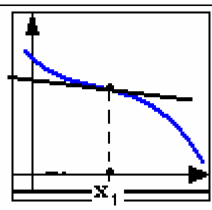
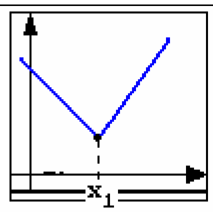
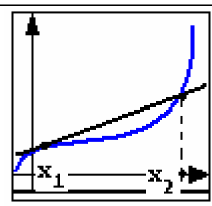
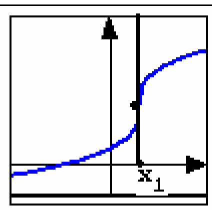
<u>לסיכום</u> : **משיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה $A(x_1, y_1)$** המקיימת את הפונקציה הוא קו ישר העובר דרך הנקודה A הקרוב ביותר לגרף הפונקציה בסביבת הנקודה x_1.

<u>הגדרה של משיק:</u>



נתון גרף הפונקציה f(x) ו $A(x_1, y_1)$ נקודה על הגרף. אם מעבירים קווים ישרים דרך נקודה A כך שכל ישר עובר גם דרך נקודה נוספת x_2 על גרף הפונקציה f(x) והנקודה x_2 תלך ותתקרב על גבי הגרף לנקודה A אז יתקבל ישר גבולי שנקראת **משיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה x_1**.

סוגים שונים של משיק לגרף הפונקציה.

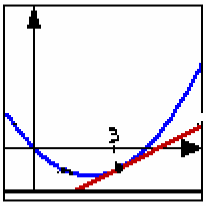
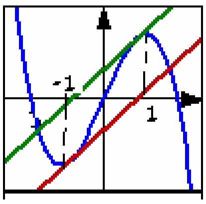
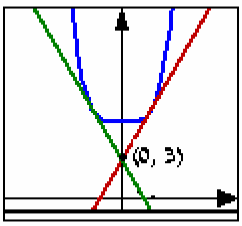
ייצוג גרפי	תיאור מילולי	ייצוג גרפי	תיאור מילולי
	הקו הישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה x_1. הגרף נמצא בצד אחד של המשיק.		הקו הישר משיק לגרף הפונקציה בכמה נקודות.
	הקו הישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה x_1 ונמצא משני צידי הגרף של הפונקציה. עובר מצד האחד של הגרף לצידו השני		לפונקציה אין משיק בנקודה x_1.
	הקו הישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה x_1 וחותך את הגרף בנקודה נוספת x_2.		הקו הישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה x_1 ומקביל לציר ה-Y (אינו פונקציה) אולי לשנות בכל מקום כמו הניסוח הזה.

משוואת המשיק.

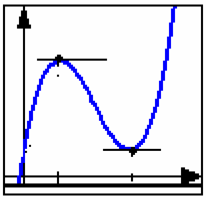
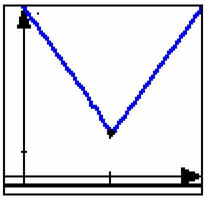
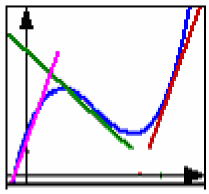
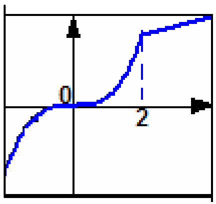
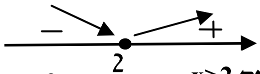
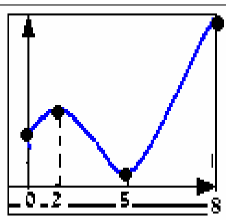
תהי נתונה הפונקציה $f(x)$ והנקודה x_1 שבה הפונקציה מוגדרת וגזירה אז:

1. קיים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1.
2. השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 שווה לנגזרת של הפונקציה בנקודה x_1: $m=f'(x_1)$.
3. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_1 היא $y-f(x_1)=f'(x_1)\cdot(x-x_1)$.

דוגמאות למציאת משוואת המשיק

משימה	פתרון	גרף
כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-4x$ בנקודה $x_1=3$.	מחשבים $f(x_1)$ ו-$f'(x_1)$: $f(x_1)=3^2-4\cdot3=-3$ $f'(x)=2x-4,\ f'(x_1)=2\cdot3-4=2$ מציבים במשוואת המשיק הכללית: $y+3=2(x-3)$ ומקבלים את משוואת המשיק: $y=2x-9$	
כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)=5x-x^3$ המקביל לישר $y=2x$.	מכיוון שהמשיק מקביל לישר $y=2x$ שיפועו שווה ל-2. אז יש למצוא נקודה שבה הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ שווה ל-2: $g'(x)=2$ $g'(x)=5-3x^2$, $5-3x^2=2$ ולכן $x=\pm1$. בנקודה $x=1$, $g(x)=4$ ועל ידי הצבה במשוואה הכללית מקבלים שמשוואת המשיק היא $y-4=2(x-1)$ או $y=2x+2$. בנקודה $x=-1$, $g(x)=-4$ ועל ידי הצבה במשוואה הכללית מקבלים שמשוואת המשיק היא $y=2x-2$. כנ"ל	
מצאו משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^4+6$ שעובר דרך הנקודה $(0, 3)$ (הנקודה לא נמצאת על הגרף).	אם a הוא שעור ה x של נקודת ההשקה אז: $f'(a)=4a^3$ $f(x)=a^4+6$ משוואת המשיק: $y-a^4-6=4a^3(x-a)$ נציב $x=0$, $y=3$ (לפי הנתונים) ונקבל $3-a^4-6=-4a^4$, $a^4=1$, $a=\pm1$ אם $a=1$ אז $f(1)=7$, $f'(1)=4$ משוואת המשיק היא $y-7=4(x-1)$ או $y=4x+3$ אם $a=-1$ אז $f(-1)=7$, $f'(-1)=-4$ משוואת המשיק היא $y-7=-4(x+1)$ או $y=-4x+3$.	

חקירת פונקציות בשילוב אנליזה (נגזרות וגבולות)

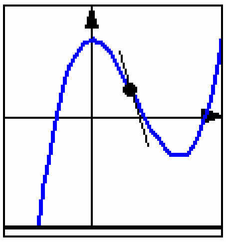
משפטים והסברים	צורה גרפית	דוגמאות
מציאת נקודות קיצון (נקודות מינימום ומקסימום) אם פונקציה f(x) גזירה פעמיים בנקודה x_1 ו- $f''(x_1)\neq 0, f'(x_1)=0$ אז לפונקציה f(x) יש ערך קיצון בנקודה x_1: אם $f''(x_1)>0$ אז נקודת הקיצון היא נקודת מינימום. אם $f''(x_1)<0$ אז נקודת הקיצון היא נקודת מקסימום. שימו לב! יתכן כי הפונקציה לא גזירה בנקודת הקיצון.	 **בכל אחת מנקודות הקיצון ערך הנגזרת שווה לאפס, המשיק מקביל לציר אופקי**  **בנקודת הקיצון הפונקציה הנתונה לא גזירה. המשיק לגרף בנקודת הקיצון לא קיים**	מצאו נקודות מקסימום ומינימום של הפונקציה $f(x)=3x-x^3$. פתרון. נגזור את הפונקציה: $f'(x)=3-3x^2$ הנקודות אפס של הנגזרת: $x_{1,2}=\pm1$ נבדוק את הסימן של הנגזרת השנייה בנקודות האלה: $f''(x)=-6x,$ $f''(-1)=6>0,\quad f''(1)=-6<0$ בנקודה x=1 לפונקציה יש מקסימום f(1)=2 בנקודה x=-1 לפונקציה יש מינימום f(-1)=-2
מציאת תחומי עליה וירידה אם בכל נקודה באינטרוול כלשהו $f'(x)>0$ אז הפונקציה *f(x)* עולה באינטרוול הזה. אם בכל נקודה באינטרוול כלשהו $f'(x)<0$ אז הפונקציה *f(x)* יורדת באינטרוול הזה. שימו לב! בנקודות שייכות לתחום עלייה או לתחום ירידה של הפונקציה יתכן כי הנגזרת שווה לאפס או הפונקציה לא גזירה.	בתחום עליה של הפונקציה הנגזרת חיובית.המשיק הוא ישר עולה. בתחום ירידה של הפונקציה הנגזרת שלילית.המשיק הוא ישר יורד.   הפונקציה עולה בכל התחום. בנקודה 0 הנגזרת שווה לאפס. בנקודה 2 הפונקציה לא גזירה.	מצאו את תחומי העליה והירידה של הפונקציה $f(x)=x^2-4x$. פתרון. נגזור את הפונקציה: $f'(x)=2x-4$ כאשר x>2 כלומר, 2x-4>0 , הפונקציה עולה. כאשר x<2 כלומר, 2x-4<0 , הפונקציה יורדת. נוח לראות את זה בציר המספרים:  **בתחום x>2** **בתחום x<2** **הנגזרת חיובית** **הנגזרת שלילית** **הפונקציה עולה** **הפונקציה יורדת**
מציאת מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט של פונקציה באינטרוול. אם פונקציה רציפה באינטרוול, אז היא יכולה להשיג את המינימום המוחלט ואת המקסימום המוחלט באינטרוול הזה רק בנקודות קיצון של הפונקציה או בקצות האינטרוול.	הפונקציה מוגדרת ורציפה באינטרוול [0,8] המקסימום המוחלט נימצא בנקודה x=8 (קצה האינטרוול) המינימום המוחלט נימצא בנקודה x=5 (נקודת הקיצון) 	מצאו את הנקודות מקסימום מוחלט ומינימום מוחלט של הפונקציה $g(x)=3x^4-4x^3-3$ בתחום [-1, 2]. פתרון. הפונקציה הנתונה רציפה בתחום ולכן מספיק לחשב את ערכי הפונקציה בנקודות שבהן נגזרת שווה לאפס (כל הנקודות קיצון נמצאות ביניהן) וערכי הפונקציה בנקודות הקצה. $g'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$ g '(x)=0 בנקודות $x_1=0$, $x_2=1$ נחשב ערכי הפונקציה בנקודות האלה: $g(0)=-3, g(1)=-4$ ובנקודות הקצה: $g(-1)=4, g(2)=13$ נקבל מקסימום מוחלט: $g(2)=13$ מינימום מוחלט: $g(1)=-4$.

מציאת נקודות פיתול.

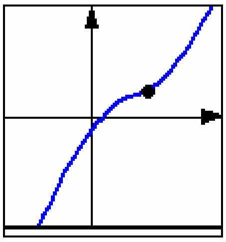
אם x_1 היא נקודת פיתול של פונקציה $f(x)$ והפונקציה גזירה פעמיים ב-x_1 אז $f''(x_1)=0$.

שימו לב! לא כל נקודה שבה $f''(x_1)=0$ היא נקודת פיתול. יתכן כי בנקודת אפס של הנגזרת השנייה אין נקודת פיתול.

למציאת נקודות פיתול יש להוכיח כי הנגזרת השנייה משנה את סימנה בנקודה.



הנגזרת השנייה שווה לאפס בנקודת הפיתול המשיק נמצא משני הצדדים מגרף הפונקציה



הפונקציה לא גזירה פעמיים בנקודת הפיתול

מצאו נקודות פיתול של הפונקציה

$$f(x)=3x^5-5x^4$$

פתרון. נחפש נקודות אפס של הנגזרת השנייה:

$$f'(x)=15x^4-20x^3$$

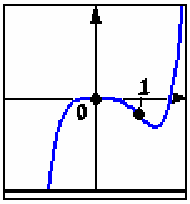
$$f''(x)=(f'(x))'=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$$

$f''(x)=0$ בנקודות $x_1=0, x_2=1$.

שינוי הסימן של $f''(x)$:

$-\quad -\quad +$

$0\quad 1$



בנקודה $x_1=0$ הנגזרת השנייה לא משנה את סימנה, זאת אומרת שהנקודה הזו איננה נקודת פיתול של הפונקציה.

בנקודה $x_2=1$ הנגזרת השנייה משנה את סימנה, זאת אומרת שהנקודה הזו היא נקודת פיתול של הפונקציה.

הכללה: נקודות קיצון ונקודות פיתול.

תהי פונקציה $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה x_1. אם $f'(x_1)=f''(x_1)=\ldots=f^{(n-1)}(x_1)=0$

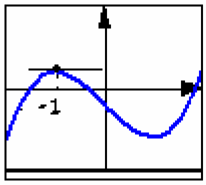
אבל $f^{(n)}(x_1)\neq 0$ אז:

אם n זוגי אז x_1 היא נקודת קיצון, אם n אי זוגי אז x_1 היא נקודת פיתול

$f'(-1)=0$

$f''(-1)\neq 0$

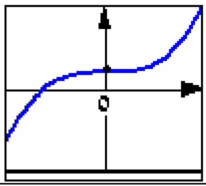
נקודת קיצון



$f'(0)=f''(0)=0$

$f'''(0)\neq 0$

נקודת פיתול

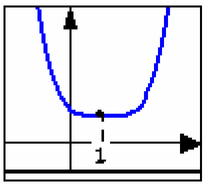


$f'(1)=f''(1)=$

$=f'''(1)=0$

$f^{(4)}(1)\neq 0$

נקודת קיצון



מצאו נקודות קיצון ונקודות פיתול של הפונקציה $f(x)=3x^5-5x^4$ (דוגמה מהסעיף הקודם בדרך אחרת).

<u>**פתרון.**</u> נחשב נגזרות ונקודות אפס שלהן:

$$f'(x)=15x^4-20x^3=5x^3(3x-4)$$

נקודות אפס: $x_1=0, x_2=\frac{4}{3}$

$$f''(x)=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$$

נקודות אפס: $x_1=0, x_3=1$

$$f^{(3)}(x)=180x^2-120x=60x(3x-2)$$

$$f^{(4)}(x)=360x-120$$

עבור $x_1=0$

$f^{(4)}(0)\neq 0, f'(0)=f''(0)=f^{(3)}(0)=0$.

מאז $x_1=0$ נקודת קיצון (4 הוא מספר זוגי).

עבור $x_2=\frac{4}{3}$ $f''(\frac{4}{3})\neq 0, f'(\frac{4}{3})=0$.

מאז $x_2=\frac{4}{3}$ נקודת קיצון (2 הוא מספר זוגי).

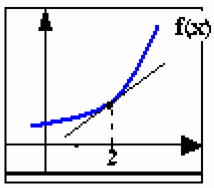
מציאת תחומי קעירות וקמירות של הפונקציה.

תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה פעמיים בנקודה x_1. אם $f''(x_1)>0$ אז f קמורה בנקודה x_1.

אם $f''(x_1)<0$ אז f קעורה בנקודה x_1.

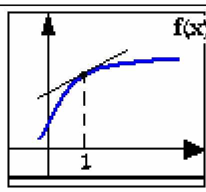
קמירות בנקודה x=2

$f''(2)>0$



קעירות בנקודה x=1

$f''(1)<0$



מצאו תחומי קמירות וקעירות של הפונקציה

$$f(x)=x^3-6x^2+2x-1$$

פתרון. נגזור את הפונקציה פעמיים:

$$f''(x)=6x-12, f'(x)=3x^2-12x+2$$

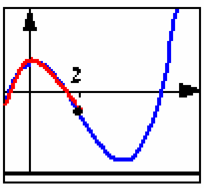
הנגזרת השנייה שווה לאפס אם 6x-12=0,

x=2 שינוי הסימן של f"(x):

$-\quad 2\quad +$

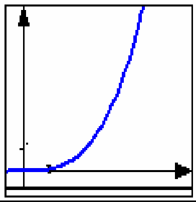
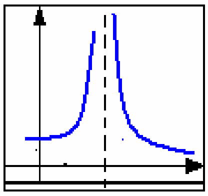
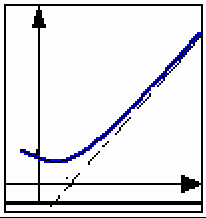
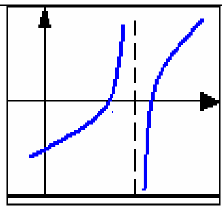
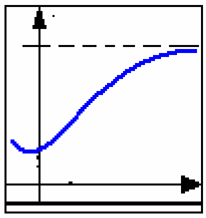
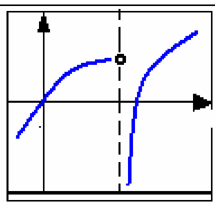
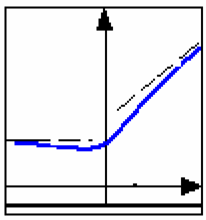
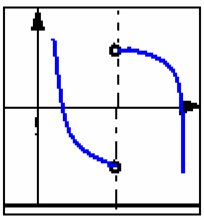
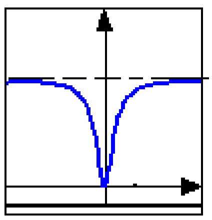
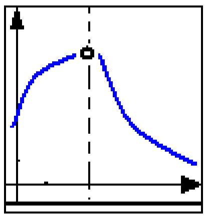
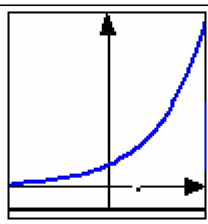
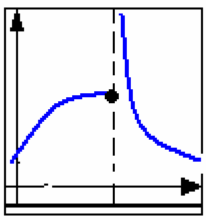
כאשר x>2 $f''(x)>0$ הפונקציה קמורה.

כאשר x<2 $f''(x)<0$ הפונקציה קעורה.



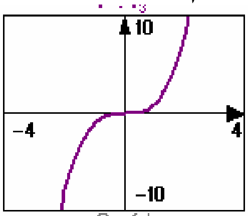
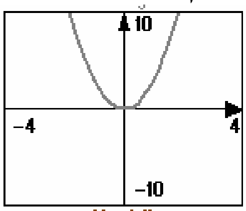
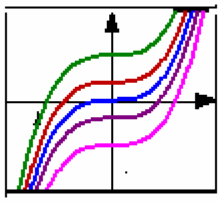
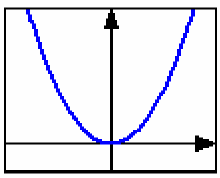
התנהגות של פונקציה באינסוף ובסביבת נקודות אי רציפות

יש הרבה אפשרויות שונות להתנהגות של פונקציה באינסוף ובסביבת נקודות אי רציפות.
בטבלה שלהלן מופיע קמה מאפשרויות האלה. ר' גם סעיף "אסימפטוטות".

התנהגות של פונקציה באינסוף		**התנהגות של פונקציה בסביבת נקודות אי רציפות**	
	הפונקציה שואף לאינסוף באופן חופשי (לא שואף לקו ישר איזשהו)		בסביבת הנקודה אי רציפות הגרף שואף לאינסוף משני הצדדים
	באינסוף הגרף שואף לקו הישר המשופע		בסביבת הנקודה אי רציפות הגרף שואף לאינסוף מצד אחד ולמינוס אינסוף מצד השני
	באינסוף הגרף שואף לקו הישר האופקי		בסביבת הנקודה אי רציפות הגרף שואף למספר מצד אחד ולמינוס אינסוף מצד השני
	באינסוף הגרף שואף לקו הישר המשופע ובמינוס אינסוף הגרף שואף לקו הישר האופקי		בסביבת הנקודה אי רציפות הגרף שואף לנקודה מצד אחד ולנקודה האחרת מצד השני
	גם באינסוף וגם במינוס אינסוף הגרף שואף לאותו קו הישר האופקי		בסביבת הנקודה אי רציפות הגרף שואף לאותה הנקודה משני הצדדים
	הפונקציה שואפת לאינסוף באינסוף ושואפת לאפס במינוס אינסוף.		הפונקציה מוגדרת בנקודה אי רציפות . בצד אחד ממנה הגרף שואף לאינסוף.

אינטגרל ופונקציה קדומה

מושגים בסיסים

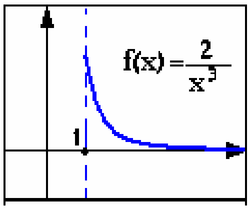
הגדרות ותיאורים	צורה גרפית, הערות	דוגמאות
כל פונקציה $F(x)$ המקיימת $F'(x)=f(x)$ בתחום A נקראת **פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)$ בתחום A**. הפעולה של מציאת פונקציה קדומה נקראת **אינטגרציה**. **שימו לב!** יתכן כי לפונקציה מסוימת בתחומים שונים יש כמה פונקציות קדומות שונות	הפונקציה הבאה  היא פונקציה קדומה של הפונקציה:  	1. הפונקציה $F(x)=x^3$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)=3x^2$ כי $(x^3)'=3x^2$. 2. הפונקציה $F_1(x)=\frac{x^2}{2}$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)=\lvert x\rvert$ בתחום $x\geq0$ והפונקציה $F_2(x)=-\frac{x^2}{2}$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=\lvert x\rvert$ בתחום $x<0$.
אם פונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)$ בתחום A, אז כל פונקציה מהצורה $F(x)+C$ (C מספר קבוע) גם היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ באותו התחום. אוסף הפונקציות $F(x)+C$ נקרא **אינטגרל לא מסוים של** הפונקציה $f(x)$. המספר C נקרא **קבוע האינטגרציה**. $\int f(x)dx=F(x)+C$. כלומר, אינטגרל לא מסוים הוא אוסף פונקציות השונות זו מזו במספר קבוע.	אוסף הפונקציות  הוא אינטגרל לא מסוים של הפונקציה: 	הפונקציה $F(x)=x^2$ היא פונקציה קדומה של פונקציה $f(x)=2x$ כי $(x^2)'=2x$ כל אחת מהפונקציות $F_1(x)=x^2+2$, $F_2(x)=x^2-5$, $F_3(x)=x^2-0.44$ וכן הלאה גם הן פונקציות קדומות של הפונקציה $f(x)=2x$. אינטגרל לא מסוים של הפונקציה $2x$: $\int 2xdx=x^2+C$
אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $[a, b]$ אז ההפרש $F(b)-F(a)$ נקרא **אינטגרל מסוים של הפונקציה $f(x)$ בתחום $[a, b]$**. המספרים a ו- b נקראים **גבולות האינטגרציה**. a הוא **הגבול התחתון** ו-b הוא **הגבול העליון**. $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=$ $=F(b)-F(a)$	**הערה:** אינטגרל מסוים הוא מספר (ולא פונקציה). המספר הזה לא תלוי בבחירת הפונקציה הקדומה מבין הפונקציות השייכות לאוסף הפונקציות $F(x)+C$.	חשבו $\int_{-1}^{2}2xdx$. **פתרון.** אחת מהפונקציות הקדומות של הפונקציה $2x$ היא הפונקציה x^2 (ר' סעיף הקודם). ולכן: $\int_{-1}^{2}2xdx=[x^2]_{-1}^{2}=2^2-(-1)^2=3$ כלומר, האינטגרל המסוים של הפונקציה $2x$ בתחום $[-1, 2]$ הוא 3.

אינטגרלים לא אמיתיים הם אינטגרלים קשורים לאינסוף. כלומר: אם אחד מגבולות האינטגרציה או שניהם הוא ∞, -∞ או תחום האינטגרציה כולל נקודה שבה הפונקציה לא מוגדרת ושואפת ל-∞ או -∞. במקרים כאלה יש לעבור לגבול המתאים:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)dx$$ כאשר $$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

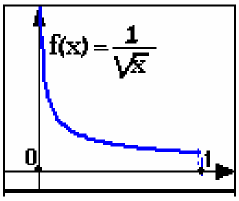


1. חשבו $\int_1^{\infty}\left(\frac{2}{x^3}\right)dx$.

פתרון. פונקציה הקדומה של הפונקציה $-\frac{1}{x^2}$ היא פונקציה $\frac{2}{x^3}$.

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{x^3}dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - (-1) = 0 + 1 = 1$$



2. חשבו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

פתרון. פונקציה הקדומה של הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ היא פונקציה $F(x) = 2\sqrt{x}$. הנקודה x=0 לא שייך לתחום ההגדרה של הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ לכן יש צורך לעבור לגבול:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \lim_{t\to 0^+}[2\sqrt{x}]_t^1 = 2 - \lim_{t\to 0^+}(2\sqrt{t}) =$$

$$= 2 - 0 = 2$$

טבלת אינטגרלים מיידיים (הטבלה התקבלה על סמך טבלת הנגזרות).

פונקציה f(x)	a פונקציה קבועה	x^n $n\neq -1$	$\frac{1}{x}$	sin x	cos x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	a^x
פונקציה קדומה F(x)	ax	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	ln |x|	-cos x	sin x	tan x	-cot x	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

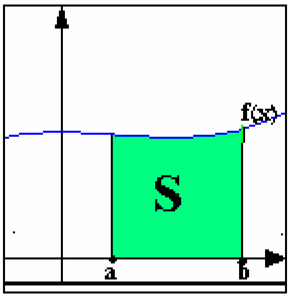
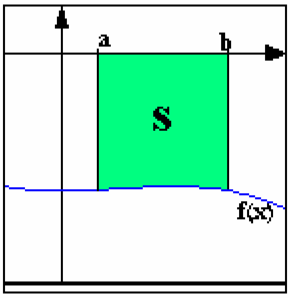
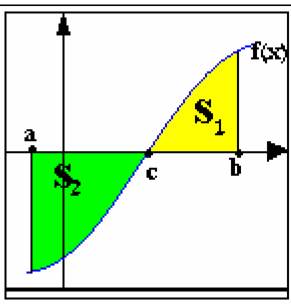
<u>**הערה**</u> בטבלה נתונה רק אחת מהפונקציות הקדומות. על ידי הוספת מספר קבוע (+C) נקבל כל פונקציה קדומה אחרת.

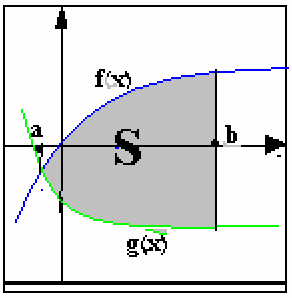
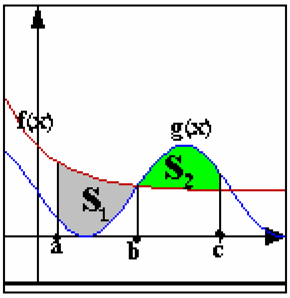
כללי אינטגרציה

צורה מילולית	**צורה סימבולית**	**דוגמאות**
אינטגרל של סכום (הפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (הפרש) של שני האינטגרלים המתאימים	$\int(f(x)\pm g(x)dx) =$ $= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int(\sin x + x^2)dx = \int \sin x dx +$ $+ \int x^2 dx = -\cos x + \frac{x^3}{3} + C$

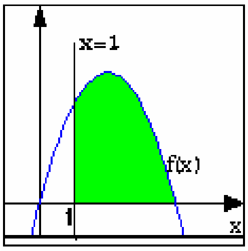
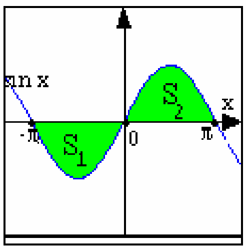
אינטגרל של מכפלת פונקציה בגורם קבוע שווה למכפלת האינטגרל של הפונקציה באותו הגורם. (גורם קבוע אפשר להוציא מחוץ לאינטגרל)	$\int (af(x))dx = a\int f(x)dx$	.1 $\int 3x^4dx = 3\int x^4dx = 3\cdot\frac{x^5}{5}+C = \frac{3}{5}x^5+C$ .2 $\int (2x-3x^3)dx = 2\int xdx - 3\int x^3dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^4}{4}+C = x^2-\frac{3}{4}x^4+C$
אינטגרל של פונקציה מפונקציה קווית שווה למכפלה של אינטגרל של הפונקציה המתווכת במספר ההפוך לשיפוע של הפונקציה הקווית.	$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(z)dz$ כשה $z = kx+b$	$\int (2x-5)^4dx = \frac{1}{2}\int z^4dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5}+C = \frac{1}{10}(2x-5)^5+C$

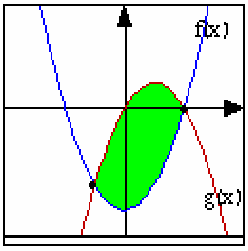
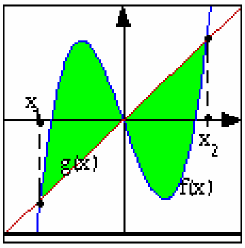
חישוב שטחים בעזרת אינטגרלים

צורה מילולית	צורה סימבולית	צורה גרפית
השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה f(x) (מלמעלה), הישרים x=a, x=b וציר ה-X (מלמטה) שווה לאינטגרל המסוים של הפונקציה f(x) בתחום [a, b] (a<b).	$S = \int_a^b f(x)dx$	
השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה f(x) (מלמטה), הישרים x=a, x=b וציר ה-X (מלמעלה) שווה לנגדי של האינטגרל המסוים של הפונקציה f(x) בתחום [a, b] (a<b). אולי לכתוב שהוא שווה האינטגרל המסוים.	$S = -\int_a^b f(x)dx$	
במקרה שחלק מהגרף של הפונקציה f(x) בתחום האינטגרציה נמצא מעל לציר ה-X וחלק אחר של הגרף נמצא מתחת לציר ה-X, אפשר לחשב כל אחד מהחלקים של השטח בנפרד ואחר כך לחבר אותם.	$S=S_1+S_2 = \int_c^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx$	

השטח בין גרפים של שתי פונקציות בתחום שאחד מהגרפים נימצא מעל הגרף האחר, שווה לאינטגרל מסוים של ההפרש של שתי הפונקציות.	$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$	
אם שני הגרפים נחתכים בתחום האינטגרציה, אפשר להרכיב את השטח ממספר חלקים.	$S=S_1+S_2=$ $=\int_a^b (f(x)-g(x))dx+$ $+\int_b^c (g(x)-f(x))dx$	

דוגמאות

משימה	גרף	פתרון
1. חשבו את השטח המוגבל ע״י גרף הפונקציה $f(x)=4x-x^2$, ציר ה-X והישר $x=1$.		לפי הסרטוט, הגבול התחתון של האינטגרציה הוא 1 והגבול העליון הוא נקודת אפס של הפונקציה $f(x)$: $4x-x^2=0$, $x_1=0$, $x_2=4$ ולכן $x_2=4$ הוא הגבול העליון. עכשיו אפשר לחשב את השטח: $S=\int_1^4 (4x-x^2)dx=[2x^2-\frac{x^3}{3}]_1^4=$ $=(2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3})-(2\cdot 1^2-\frac{1^3}{3})=9$
2. חשבו את השטח המוגבל ע״י גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$ וציר ה-X בתחום $[-\pi, \pi]$.		חלק אחד מהגרף נמצא מעל ציר ה-X וחלקו האחר תחת הציר. לכן השטח שווה לסכום של שני השטחים: $S=S_1+S_2=-\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int_0^{\pi}\sin x\,dx=$ $=-[-\cos x]_{-\pi}^{0}+[-\cos x]_0^{\pi}=$ $=(\cos 0-\cos(-\pi))+$ $+(-\cos\pi-(-\cos 0))=$ $=(1-(-1))+(1-(-1))=4$

3. חשבו את השטח בין שתי הפרבולות: $f(x)=x^2-4$ ו-$g(x)=2x-x^2$		נחשב קודם את גבולות האינטגרציה שהן נקודות החיתוך של שני הגרפים: $x^2-4=2x-x^2$ $x_1=-1$, $x_2=2$. מכיוון שבתחום האינטגרציה גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $f(x)$ אז: $S=\int_{-1}^{2}(g(x)-f(x))dx=$ $=\int_{-1}^{2}(2x-x^2-(x^2-4))dx=$ $=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=$ $=[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x]_{-1}^{2}=$ $=(-\frac{2\cdot 2^3}{3}+2^2+4\cdot 2)-$ $-(-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}+(-1)^2+4\cdot(-1))=9$
4. חשבו שטח המוגבל ע"י הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^3-6x$ ו-$g(x)=3x$.		לשני הגרפים יש שלוש נקודות חיתוך: $x=0$ ועוד שתי נקודות x_1 ו-x_2 $x^3-6x=3x$, $x_1=-2$, $x_2=2$ בתחום $[-2, 0]$ גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל גרף הפונקציה $g(x)$ ובתחום $[0, 2]$ – להפך ולכן: $S=S_1+S_2=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+$ $+\int_{0}^{2}(g(x)-f(x))dx=\int_{-2}^{0}(x^3-9x)dx+$ $+\int_{0}^{2}(9x-x^3)dx=[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}]_{-2}^{0}+$ $+[\frac{9x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]_{0}^{2}=14+14=28$

מפתח לפי א-ב