7

קומבינטוריקה – תרגיל בית מס' 9

205689581 – 326991890

1. נתרגם את הבעיה לגרפים. נסתכל על גרף $G = (A, B, E)$. ב-A קודקודים שנסמנן כקבוצת הבחורות, B קבוצת הקודקודים שמסמנים את קבוצת הבחורים, ונאמר שקיימת צלע $\{a, b\} \in E$ אמ"מ בחורה $a \in A$ מכירה בחור $b \in B$.
(ע"פ הנתון |A|=n ו-|B|=m).
נניח כעת, בה"כ, כי n<m. נשתמש במשפט קניג, ע"פיו, בכל גרף דו"צ מתקיים כי $\tau(G) = \nu(G)$.
למה? זה דורש להשתמש בנתונים בשאלה כדי להראות את זה
נשים לב כי $\tau(G)$ הינו גודל הכיסוי המינימלי, והוא לכל הפחות מספר הקדקודים ב-A המשתתפים בזיווג. נזכור כי כל גבר מכיר בדיוק k נשים וכל אישה מכירה בדיוק t גברים, כלומר **כל** הקדקודים ב-A משתתפים בזיווג. אזי מהמשפט ומכך נובע שמספר הקדקודים ב-A הוא גודל הזיווג (המקסימלי).
לסיכום, נקבל ש$\tau(G) = \nu(G) = n = \min\{n, m\}$.

2.

a. נתרגם את הבעיה לגרפים. נגדיר גרף $G = (A, B, E)$ כך:
A קבוצה המכילה קודקודים שהם העמודות בטבלה.
B קבוצה המכילה קודקודים שהם השורות בטבלה. ב-B יש מספרים או שורות?
והצלע $\{a,b\} \in E$ כך ש– $a \in A, b \in B$ קיים אמ"מ בעמודה a המספר b לא הופיע.
ע"פ הנתון, כל שורה מכילה פרמוטציה של המספרים 1 עד ל-n ובכל עמודה מספר כלשהו לא מופיע יותר מפעם 1. לכן, נקבל שכל מספר מופיע בטבלה בדיוק k פעמים (בכל שורה המספר מופיע פעם אחת), ז"א, לקודקוד a יש n-k צלעות שנכנסות אליו ולכל b יש n-k צלעות שיוצאות ממנו. כך, נקבל גרף n-k רגולרי, וע"פ מה שהוכח בכיתה, נקבל שקיים זיווג מושלם בכל גרף רגולרי, בפרט בגרף שלנו. נסתכל על הזיווג כהוספה של שורה חדשה. ההוספה תואמת את תכונות הטבלה מכיוון שמכתחילה הסתכלנו על המספרים שלא הופיע בעמודה כלשהי, לכן לא נקבל סתירה לנתון.

b. כל טבלה ניתנת להשלמה לטבלה nxn בתהליך של אינדוקציה, כמו התהליך הנ"ל. מכיוון שכל פעם אנו נוכל להוסיף את הזיווג החדש ונקבל כי, הגרף החדש, בעל אותם מאפיינים כמו למעלה, הוא הינה גרף רגולרי, וע"פ אותו הטיעון לעיל, נקבל שקיים זיווג. נוכל לבצע תהליך זה עד לשורה ה-n-י (כולל) ולאחר מכן לא ניתן מכיוון שעבור הקודקודים נקבל שהערכיות קטנה או שווה ל-0 וכך לא ניתן למצוא זיווג.

3. נניח בשלילה שלא מתקיים תנאי משפט הול, כלומר קיימת $S \subseteq A$, $|N(S)| < |S|$.

נסתכל על תת קבוצה $K \subseteq A$, שהיא מינימלית המקיימת את $|N(K)| < |K|$.(*)

נוכיח את קיומה: לפי הנחת השלילה קיימת $S \subseteq A$, כך שמתקיים $|N(S)| < |S|$. כעת באופן רקורסיבי נשמיט איברים מ-S $S = S\backslash\{a'\}, S = S\backslash\{a', a''\}$ וכו'. בסופו של התהליך או שנקבל $|S| \leq |N(S)|$ או שנקבל $|\{0\}| \leq |N(\{0\})|$ כאשר $\{0\}$ היא הקבוצה הריקה שתמיד מתקיים כי אין לקבוצה הריקה אף קדקודים המתחברים אליה. זו תהיה הקבוצה המינימלית K . סיימנו.

וכעת נסתכל על $K' = K \setminus \{a\}$. בעקבות המינימליות של K, נקבל שעבור K' מתקיים $|N(K')| = |K'|$(**) . אילו לא, אז היה מתקיים $|N(K')| < |K'|$. אך אז $|K| = |K'| + 1 \leq |N(K')|$. אזי לפי משפט Hall קיים זיווג ל-K . בסתירה ל-(*).

לכל גרף ובפרט לזו מתקיים $C \subseteq D$ כאשר C הם הצלעות היוצאות מ-K ו-D הם הצלעות היוצאות מ-N(K). לכן, $\sum_{x_i \in K} deg(x_i) \leq \sum_{x_i \in N(K)} deg(y_i)$.

אך כעת מאחר ו-$deg(a) \geq 1$ ו-$deg(x_i) \geq deg(y_j)$ לכל j,i, ומתקיים $|K| = |N(K)| + 1$ אזי:

$\sum_{x_i \in K} deg(x_i) > \sum_{y_i \in N(K)} deg(y_i)$.

אנו יודעים את זה רק אם xi מחובר לyi צריך להראות למה ניתן לחלק אותם לזוגות המחוברים אחד לשני כדי להעביר אר האי שיוויון לאי שיוויון על הסכום

סתירה.

לכן, תנאי משפט הול מתקיים וגודל הזיווג המקסימלי הינו $v(G) = |A|$.

4. נתרגם את הבעיה לגרפים. נגדיר גרף $G = (A, B, E)$ כך:

A קבוצה המכילה קודקודים שהם השורות במטריצה. B קבוצה המכילה קודקודים שהם העמודות במטריצה. והצלע $\{\alpha, \beta\} \in E$ כך ש– $\alpha \in A, \beta \in B$ קיים אמ"מ בשורה α ועמודה β במטריצה יש את המספר 1.

ע"פ משפט קניג, בגרף דו"צ מתקיים כי $\tau(G) = v(G)$.

בשאלה זו, נתייחס אל v(G) כמספר המקסימלי של האחדים שלא קיימים עוד אחדים בשורתם/עמודתם.

ו– $\tau(G)$ כהקווים המינימלים/ הכיסוי המינימלי אשר מכסה את האחדים. ונקבל a=b.

קודקודים, לא צלעות

הסבר ל– $\tau(G)$: במקרה שלנו ה-1-ים הינם מסומנים כצלעות בגרף הדו"צ. אם נדרוש כמות קווים (שורות/עמודות) מינימלית נקבל כמות צלעות מינימלית כך שעדיין יתקיים שלכל יציאה $X_{\alpha,\beta}$ של המטריצה אשר יש בה 1, קים צלע בין קודקוד α לקודקוד β, לכן אכן מדובר בכיסוי מינימלי.

הסבר ל– $\nu(G)$: נסתכל על המספר המקסימלי של האחדים כך שרק הם בעמודתם/שורותם. נשים לב להגדרת הזיווג. בזיווג כל צלעות זרות, משמעות הדבר, עבור צלע $\{\alpha,\beta\}$ כלשהי בזיווג מתקיים $\{\alpha,\beta\}\cap A\setminus\{\alpha\}=\emptyset$ ו- $\{\alpha,\beta\}\cap B\setminus\{\beta\}=\emptyset$, לכן, כאן אנו מסתכלים על זיווג מקסימלי.

5. נצבע את הגרף השלם K_6 ע"פ הנחיות הרמז.

ע"פ משפט רמזי (המקרה הפרטי של K_6) נקבל שלגרף יש תת גרף שלם K_3 כך שכל 3 צלעותיו באותו הצבע.

קטן ממש כי הם שונים (אחרת זה לא משולש)

נסמן את קודקודי גרף K_3 כ-a,b,c. (מתקיים ע"פ הסימון כי $6 \le a \le b \le c \le 1$).

ע"פ הצביעה הנתונה, נקבל שהצלעות שבאותו הצבע מקיימות k=|i-j| כך k קודקוד כלשהו באותו הצבע ו-k הינו מספר בין 1 ל-5.

נסמן את הצלעות כx,y,z.

z=|a-c|, ההפרש הכי גדול בין הקודקודים.

x=|b-a| הערך המוחלט לא נדרש כי סידרנו אר

y=|c-b| a,b,c בסדר הנכון

נקבל כי ע"פ הצביעה z=x+y.

x,y,z הינם מספרים בין 1 עד (כולל) 5 מכיוון שמדובר בפעולות חיסור בין מספרים מ1 עד ל6.