

קומבינטוריקה - סמסטר חורף תשס"ג - תרגיל מס' 6

להגשה עד ה - 10.12.02

תרגיל מס' 1

יהי n מספר טבעי. נגדיר:

$A(n)$ - מספר החלוקות של n למספרים שאינם מתחלקים ב-3.

$B(n)$ - מספר החלוקות של n למספרים, כך שאף מספר אינו מופיע יותר מפעמיים.

א. חשבו את הפונקציות היוצרות המתאימות ל: $A(n)$ ול $B(n)$ והראו כי הן שוות, כלומר: $A(n) = B(n)$.

ב. הוכיחו כי $A(n) = B(n)$ בעזרת הוכחה קומבינטורית.

(הדרכה: עקבו אחרי שתי ההוכחות מן הכיתה ל: $P_D(n) = P_O(n)$)

תרגיל מס' 2

בתרגיל מס' 1 ב' בדף עבודה מס' 3, הוכחנו כי:

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2)); \quad D(0) = 1, \quad D(1) = 0$$

כאשר $D(n)$ הינו מספר התמורות של n איברים ללא נקודות שבת. כעת, נמצא ביטוי מפורש ל $\frac{D(n)}{n!}$ בעזרת שימוש בפונקציות יוצרות. נגדיר:

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

א. הוכיחו כי (אפשר לבצע אינטגרציה איבר-איבר מבלי לנמק):

$$\int x G'(x) dx = \sum_{n \geq 2} \frac{(n-1)D(n-1)}{n!} x^n$$

ב. הוכיחו כי (אפשר לבצע אינטגרציה איבר-איבר מבלי לנמק):

$$\int x G(x) dx = \sum_{n \geq 2} \frac{(n-1)D(n-2)}{n!} x^n$$

ג. היעזרו בנוסחת הנסיגה ל $D(n)$ ובביטויים מן הסעיפים הקודמים והראו כי $G(x)$ מקיים את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{x}{1-x}$$

ד. פתרו את המשוואה מן הסעיף הקודם, ע"י אינטגרציה של שני האגפים (אפשר להשתמש ב: $\int \frac{x}{1-x} dx = -x - \ln(1-x)$) ומיצאו במפורש את $G(x)$.

תרגיל מס' 3

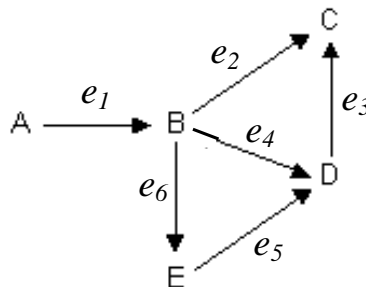
יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון, זאת אומרת שצלע e מוגדרת עם כיוון: $e = u \rightarrow v$ או: $e = v \rightarrow u$. במקרה שהצלע "יוצאת" מ- v נסמן: $e = vu$ ובמקרה שהיא "נכנסת" ל- v נסמן: $e = uv$. נגדיר את $A(G)$ - מטריצת החילה של G באופן הבא:

$A(G)$ היא מטריצה מסדר $|V| \times |E|$ (שורותיה מסמלות את הקדקדים של G ועמודותיה את צלעות G);

$$(A(G))_{v,e} = \begin{cases} 1, & \exists u : e = uv \\ -1, & \exists u : e = vu \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

נסמן ב: x_e את וקטור החילה של הצלע e , כלומר את העמודה המתאימה ל- e ב: $A(G)$.

א. כיתבו במפורש את $A(G)$ עבור הגרף שבציור:



ב. הוכיחו כי קבוצת וקטורי החילה של צלעות G : $\{x_e : e \in E(G)\}$ היא בלתי-תלויה-לינארית אם ורק אם G הוא יער (כשהמושג יער מתייחס ל- G ללא כיווני הצלעות).

ג. נסמן ב: $c(G)$ את מספר רכיבי הקשירות של גרף G עם n קדקדים. הוכיחו על ידי כיוון כלשהו של צלעותיו, כי: $r(A(G)) = n - c(G)$.

תרגיל מס' 4

הוכיחו כי מספר הקדקדים עם דרגה (ערכיות) אי-זוגית בגרף כלשהו G הוא אי-זוגי.

תרגיל מס' 5

גרף הקוביה ה- n מימדית Q_n מוגדר באופן הבא: הקדקדים הם כל הסדרות של אפסים ואחדים באורך n . שני קדקדים מחוברים בצלע אם הסדרות המתאימות שונות זו מזו בקואורדינטה אחת בדיוק.

א. צייר את Q_1, Q_2, Q_3 .

ב. מה הערכיות של כל קדקד ב- Q_n ?

ג. מה מספר הצלעות ב- Q_n ?

ד. הוכח כי Q_n גרף קשיר.

ה. הוכח כי Q_n גרף דו-צדדי.

בהצלחה! (לא נשאר לי מקום לציור/בדיחה הפעם...)