כלל לייבניץ - נגזרת מתחת לסימן האינטגרל

משפט:

1. תהא $f(x,t):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, גזירה לפי x כך ש $f,\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפות במלבן $[a,b]\times[c,d]$. אם מסמנים $F(x)=\int_c^d f(x,t)\mathrm{dt}$ אז $F(x)$ רציפה ב $[a,b]$, גזירה ב (a,b) ונגזרתה היא

$$.F'(x)=\int_c^d\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]\mathrm{dt}$$

2. נניח בנוסף שנתונות $\alpha(x),\beta(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירות ונתון קטע I כך שהערכים ש α,β מקבלות על I נמצאים בתוך $[a,b]$, או במילים אחרות $\alpha(I),\beta(I)\subseteq[a,b]$. אם מסמנים $G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\mathrm{dt}$ אז $G(x)$ רציפה ב I, גזירה בפנים של I ונגזרתה היא

$$G'(x)=f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]\mathrm{dt}$$

תרגיל 1:

תהא $F(y)=\int_1^2\sin(ye^x)\mathrm{dx}$. חשבו את $F'(y)$.

פתרון:

נסמן $f(x,y)=\sin(ye^x)$ ואז $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(ye^x)e^x$. הפונקציות $f,\frac{\partial f}{\partial y}$ הן רציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן ניתן להשתמש בכלל ליבניץ.

$$F'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_1^2\sin(ye^x)\mathrm{dx}\right)=\int_1^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin(ye^x)\right)\mathrm{dx}=\int_1^2\cos(ye^x)e^x\mathrm{dx}$$

אם $y=0$ אז מקבלים ש $F'(0)=\int_1^2 e^x=e^2-e^1$. אם $y\neq0$, אז נסמן $t=ye^x$ ואז $\frac{dt}{dx}=ye^x$ ונקבל ש

$$\int_1^2\cos(ye^x)e^x\mathrm{dx}=\frac{1}{y}\int_1^2\cos(ye^x)ye^x\mathrm{dx}=\frac{1}{y}\int_{ye^1}^{ye^2}\cos(t)\mathrm{dt}=\frac{\sin(ye^2)-\sin(ye^1)}{y}$$

תרגיל 2:

1. חשבו את $\int_0^1 x^y \mathrm{dx}$ כאשר $y>0$.
2. חשבו את $\int_0^1 x^m \ln^n(x)\mathrm{dx}$ כאשר $m\geq 1, n\geq 0$ מספרים טבעיים.

פתרון:

1. $\int_0^1 x^y \mathrm{dx} = \frac{x^{y+1}}{y+1} |_{x=0}^1 = \frac{1}{y+1}$.
2. בשביל החלק השני, ננסה להשתמש בכלל לייבניץ. נשים לב תחילה ש $x^y = e^{\ln(x)y}$ היא פונקציה רציפה במלבן $[0,1]\times[a,b]$ לכל $b>a>0$ (הוכיחו!). הנגזרת $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = \ln(x)x^y$ היא גם רציפה במלבן הזה. מכלל ליבניץ נקבל שאם $F(y) = \int_0^1 x^y \mathrm{dx}$ אז

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(x^y)\mathrm{dx} = \int_0^1 \ln(x)x^y\mathrm{dx} \\ F'(y) &= \left(\frac{1}{1+y}\right)' = -\frac{1}{(1+y)^2}. \end{aligned}$$

נמשיך לגזור באינדוקציה (הוכיחו שהתנאי של כלל ליבניץ ממשיך להתקיים) ונקבל ש

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(m)}}{\partial y^{(m)}}(x^y) &= \ln^m(x)x^y \quad ; \quad \left(\frac{1}{1+y}\right)^{(m)} = (-1)^m\frac{m!}{(1+y)^{m+1}} \\ (-1)^m\frac{m!}{(1+y)^{m+1}} &= F^{(m)}(y) = \int_0^1 \frac{\partial^{(m)}}{\partial y^{(m)}}(x^y)\mathrm{dx} = \int_0^1 \ln^m(x)x^y\mathrm{dx} \end{aligned}$$

בפרט, ע"י הצבה $y=n$ נקבל ש $\int_0^1 \ln^m(x)x^n\mathrm{dx} = (-1)^m\frac{m!}{(1+n)^{m+1}}$.

תרגיל 3:

חשבו את $\int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}$.

רמז: מצאו פונקציה אלמנטרית ששווה ל $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}$ לכל $x>0$.

פתרון:

הרעיון: נגזור תחילה את $F(x)$ לפי x ונקווה לקבל פונקציה שקל למצוא את הפונקציה הקדומה שלה.
נגדיר

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ \frac{t^x-1}{\ln(t)} = \frac{e^{\ln(t)x}-e^0}{\ln(t)x-0}x & 0<t<1 \\ x & t=1 \end{cases}$$

אם הכל עובד כמו שצריך אז לכל $x>0$ נקבל ש

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt} = \int_0^1 t^x\mathrm{dt} = \frac{t^{x+1}}{x+1} |_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

ולכן מקבלים ש $F(x) = \ln(1+x)+C$. אם היה מותר לנו להציב $x=0$ אז נקבל ש $0 = F(0) = \ln(1+0)+C$ כלומר $C=0$ (לשים לב שכדי להשתמש בכלל לייבניץ ב $x=0$ צריך רציפות במלבן ש $x=0$ מוכל בפנים שלו, אבל הפונקציה f לא רציפה שם כי לכל x שלילי נקבל ש $\lim_{t\to 0} f(x,t) = -\infty$).

קל (פחות או יותר) לבדוק ש $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ רציפות ב $I=[a,b]\times[0,1]$ עבור $0<a<b$ ולכן מותר להשתמש בכלל לייבניץ בתחום הזה, כלומר קיים C כך ש $F(x) = \ln(1+x)+C$. נשים לב שניתן להגדיל את הקטע $[a,b]$ כרצוננו כל עוד $a>0$ (הפונקציה t^x לא רציפה ב $(0,0)$) ולכן בעצם $F(x) = \ln(1+x)+C$ לכל $x>0$.

מאחר ו f רציפה בכל המלבן $[0,1]\times[0,1]$ אז מקבלים ש $F(x)$ רציפה בכל x חיובי ובפרט $\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)=0$ ומצד שני $\lim_{x\to0^+}\ln(1+x)+C=C$ ולכן $C=0$.

מכאן נסיק ש $\int_0^1\frac{t^2-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}=\ln(3)$.

נוכיח את הגבול $\lim_{x\to0^+}F(x)=0$ בצורה נוספת. ניזכר תחילה שלכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים ש $e^a-1-a\geq0$ ואם a שלילי אז מקבלים ש $e^a<1$ ולכן

$$0 \quad \geq \quad e^a-1\geq a \quad \Rightarrow \quad |a|\geq|e^a-1|$$

$$x>0 \quad then \qquad |F(x)|\leq\int_0^1\left|\frac{t^x-1}{\ln(t)}\right|\mathrm{dt}=\int_0^1\frac{\left|e^{\ln(t)x}-1\right|}{|\ln(t)|}\mathrm{dt}\leq\int_0^1\frac{|\ln(t)x|}{|\ln(t)|}\mathrm{dt}=\int_0^1 x\mathrm{dt}=x$$

כאשר השתמשנו בעובדה שאם $0<t<1$ אז $\ln(t)<0$. לכן $\lim_{x\to0}|F(x)|=0$ וסיימנו.