טורי מספרים

אנו נדבר על טורי מספרים כאשר בהמשך נתיחס לטורי פונקציות. טור הוא סכום אינסופי מהצורה

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

ובדרך כלל נתיחס לסכום אינסופי, וכאשר הסכום הוא סופי נקרא לו "טור סופי". אי אפשר לעבוד פורמלית עם טורים כאלו. כי נניח למשל ש:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = A$$

ואז הכפלה ב:2 נותנת

$$2+4+8+16+\cdots=2A.$$

מהצבה בביטוי הקודם מקבלים

$$1+2A=A\Rightarrow A=-1$$

שהיא טענה חסרת היגיון. יש צורך, לכן, להגדיר במדויק מהי הכוונה ב"סכום הטור" $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

עבור טור כזה נגדיר את הסכום החלקי ה: nי:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

ונתיחס לסדרת הסכומים החלקיים

$$S_1,S_2,S_3,...=\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \, ,$$

ולכן

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

<u>הגדרה.</u> הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים $S_1, S_2, S_3, \ldots$ מתכנסת.

אם $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ אז נאמר ש: S הוא סכום הטור:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \,.$$

בצורה זו העברנו את בעית ההתכנסות של טור לבעית התכנסות של סדרה, שזוהי בעיה מוכרת מאינפי' 1.

<u>הערה.</u> יש התאמה 1-1 בין טורים וסדרות. ראינו לעיל כיצד מותאמת לטור סדרת הסכומים החלקיים, ומאידך לסדרה נתונה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתאימים את הטור שאבריו הם $a_1 = S_1$ ו: $a_k = S_k - S_{k-1}$ עבור $k \geq 2$.

המינוחים באנגלית הם טור=series (ביחיד
וברבים), סדרה=sequence.

<u>המשך ההגדרה.</u> אם קים $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$
אז אומרים שהטור מתבדר לאינסוף:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty ,$$

והגדרה דומה עבור התבדרות ל: $-\infty$.

<u>דוגמא: טור גיאומטרי.</u> מתיחסים לסכום
האינסופי

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

עם הסכומים החלקיים

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

אם $|q|<1$ אז קים הגבול

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}=\frac{1}{1-q}$$

עבור $|q|<1$.

<u>דוגמא.</u> עבור הטור

$$-1+1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

מתקבלים הסכומים החלקיים

$$S_n=\begin{cases} -1 & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \\ 0 & \text{אם } n \text{ זוגי}\end{cases}$$

אין לסדרה $\{S_n\}$ גבול ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ אינו מתכנס.

<u>דוגמא.</u> עבור הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots$$

יש את הסכומים החלקיים $S_n = n$, והטור מתבדר.

<u>דוגמא.</u> עבור הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

יש עבור האבר הכללי את ההצגה הבאה

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{1}$$

ולכן

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;=\; \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\;\cdots\;+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \;=\; 1-\frac{1}{n+1}$$

ברור שמתקים $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, ועל כן הטור מתכנס וסכומו 1:

$$.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שניתן להציג את האבר הכללי שלו כמו ב: (1), כלומר כהפרש $a_n = b_n - b_{n-1}$, נקרא "טור טלסקופי".

דוגמא. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$$

מתבדר מאחר ו:

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ +\ \frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$=\ \sqrt{n}\to\infty$$

יש אנלוגיה בין טורים ובין אינטגרלים מוכללים מהצורה $\int^{\infty} f$ כאשר

$$\int^{\infty} f\ \Leftrightarrow\ \sum^{\infty} a_k$$
$$\int^{b} f\ \Leftrightarrow\ S_n$$

תכונות יסוד

ניזכר בקריטריון קושי לסדרות: סדרה $c_1, c_2, c_3, \ldots$ היא סדרה מתכנסת אמ"ם לכל $\epsilon > 0$ קים $N = N(\epsilon)$ כך ש: $|c_n - c_m| < \epsilon$ לכל m, n אשר מקיימים $m, n > N$.

התרגום של התוצאה הזו עבור טורים הוא:

<u>משפט.</u> (קריטריון Cauchy עבור טורים).
הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אמ"ם לכל ϵ קים $N = N(\epsilon)$ כך ש:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon \qquad (2)$$

מתקיים לכל m, n אשר מקימים $m > n > N$.

הוכחה. א. בכיוון אחד, נניח שהטור $\sum a_k$ מתכנס, אז נובע שהסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת, ולכן מקריטריון קושי לסדרות קיים N כך ש:

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m| = |S_m - S_n| < \epsilon \qquad (3)$$

לכל $m > n > N$.

ב. נניח שלכל $\epsilon > 0$ קיים N עבורו (2) מתקיים לכל $m > n > N$. אז מסיקים מ: (3) ומקריטריון קושי לסדרות ש: $\{S_n\}$ סדרה מתכנסת, ולכן $\sum a_k$ הוא טור מתכנס.

דוגמא. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m| &= \\
\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2} &\leq \\
\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m} &= \\
\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right) &= \\
\frac{1}{n}-\frac{1}{m} &< \epsilon
\end{aligned}$$

בתנאי ש: $n > 1/\epsilon$, כלומר אפשר לקחת

$$.N(\epsilon)=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$$

__משפט חשוב.__ אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \, .$$

__הערה.__ צריך לשים לב שזהו תנאי הכרחי ולא מספיק.

__הוכחה.__ בהינתן $\epsilon > 0$ יהי $N(\epsilon)$ כמו בקריטריון קושי, וניקח בקריטריון הזה $n > N$ ו: $m = n+1$. מקבלים ש: $|a_{n+1}| < \epsilon$ לכל $n > N$, וזוהי בדיוק ההגדרה של $a_k \to 0$.

התנאי הנ"ל הוא בהחלט אינו מספיק להתכנסות הטור, למשל הטור $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ מתבדר למרות ש: $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$.

אפשר להשתמש בקריטריון קושי להוכחת אי-התכנסות.

<u>דוגמא.</u> הטור ההרמוני

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

מתבדר.

אנו רוצים להראות ש:

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m|$ אינו קטן כרצוננו מתחת לתנאי היחיד ש: n הוא גדול מספיק.

לצורך זה ניקח, לכל n נתון, $m = 2n$, ואז מקבלים

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

ובהחלפת כל מחובר ע"י $1/2n$ אנו מקטינים את הסכום, ולכן

$$.|a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

גודל זה לא יכול להיעשות קטן כרצוננו, ועל כן הטור אינו מתכנס.

כפי שבאינטגרל המוכלל הסתכלנו על $\int^{\infty} f$ ללא תלות בנקודת ההתחלה אלא רק בתלות בהתנהגות הפונקציה בסביבת ∞, כך גם בטיפול בטורים.

<u>**הגדרה.**</u> $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ נקרא "זנב של הטור" (או "שארית הטור") $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

מסקנה. טור מתכנס אמ"ם כל זנב של הטור מתכנס.

הסיבה לכך היא כי קריטריון קושי דורש $\epsilon > |\sum_{k=n}^{m} a_k|$ עבור $m > n > N(\epsilon)$, כלומר לכל m, n גדולים מספיק, ולכן מקום התחלת הטור l אינו בעל חשיבות.

מסקנה. שינוי במספר סופי של אברי הטור אינו משפיע על העובדה אם הטור מתכנס או לא. (שינוי כזה יכול כמובן להשפיע על ערך הסכום במקרה בו הטור מתכנס.)

תכונות של טורים מתכנסים.

משפט. אם $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ ו- $\sum\limits_{k=l}^{\infty} b_k$ שניהם מתכנסים,

אז גם $\sum\limits_{k=l}^{\infty}(a_k+b_k)$ טור מתכנס וסכומו

$$\sum_{k=l}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=l}^{\infty} a_k+\sum_{k=l}^{\infty} b_k\ . \qquad (3)$$

הוכחה: לכל n סופי הסכום החלקי מקיים

$$\sum_{k=l}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=l}^{n} a_k+\sum_{k=l}^{n} b_k\ , \qquad (4)$$

וכאשר $n\to\infty$, אגף ימין של (4) שואף לאגף ימין של (3), מה שמוכיח את טענת המשפט.

הערה. הכיוון ההפוך אינו נכון, למשל שני

הטורים $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ ו: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)$ שניהם מתבדרים,
אך הטור $\sum_{k=1}^{\infty} (1 + (-1))$ מתכנס כמובן.

בדומה להוכחה הקודמת מוכיחים את:

<u>משפט.</u> יהיו $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ טור מתכנס ו: c מספר
ממשי כלשהו. אז גם $\sum_{k=l}^{\infty} (ca_k)$ טור מתכנס
וסכומו הוא $c \sum_{k=l}^{\infty} a_k$.

טורים בעלי אברים חיוביים .

<u>משפט.</u> קריטריון השוואה לטורים. נניח ש:

$0 \le b_n \le a_n$ לכל $n \ge 1$. אז:

א. אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז גם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

ב. אם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר ל: $+\infty$ אז גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר ל: $+\infty$.

<u>הוכחה:</u> נסמן את הסכומים החלקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

א. מאחר ו: $a_n \geq b_n \geq 0$, נובע ש:
$S_n \leq T_n \leq 0$ לכל $n \geq 0$. בגלל חיוביות a_n ו:
b_n הסדרות $\{T_n\}$ ו: $\{T_n\}$ הן מונוטוניות
לא-יורדות (למשל $T_n \geq T_n + b_{n+1} = T_{n+1}$).
מאחר ו: $\{S_n\}$ מתכנסת, היא חסומה, ומ:
$S_n \leq T_n$ נובע ש: $\{T_n\}$ חסומה. המונוטוניות
והחסימות גוררים את ההתכנסות של $\{T_n\}$.

ב. שוב, מ: $S_n \leq T_n$ נובע שאם הסדרה $\{T_n\}$
מתבדרת ל: $+\infty$ אז גם הסדרה $\{S_n\}$
מתבדרת.

<u>הערה.</u> זוהי הסיבה לטיפול הפשוט בטורים
חיוביים: הסכומים החלקיים תמיד עולים, ואז

או שהם חסומים ומתכנסים, או בלתי חסומים ומתבדרים.

<u>הערה.</u> מספיק ש: $a_n \geq b_n$ רק עבור $n \geq N_0$.

<u>משפט.</u> נניח ש: $a_n, b_n > 0$. אם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

$0 < L < \infty$, אז הטורים $\sum_1^\infty a_n$ ו $\sum_1^\infty b_n$ או שניהם מתכנסים או שניהם מתבדרים.

<u>הוכחה.</u> דומה להוכחת קריטריון ההשוואה עבור אינטגרלים מוכללים. יהי $0 < \epsilon < L$ ויהי N_0 כך ש:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \epsilon$$

אם $n > N_0$. כלומר, אם $n > N_0$ אז מתקיים

$$L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon,$$

או מה ששקול לכך

$$\begin{aligned} 0 < a_n &\le (L+\epsilon) b_n \\ 0 < b_n &\le \frac{1}{L-\epsilon} a_n. \end{aligned}$$

מהשורה הראשונה מסיקים שאם $\sum_1^\infty b_n$ מתכנס אז גם $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס, ומהשורה השניה שאם $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס אז $\sum_1^\infty b_n$ מתכנס.

אם הגבול במשפט הוא $L = 0$, אז רק הנימוק הראשון תקף, השני לא.

דוגמא. נתיחס לטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ ו: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3-1}$. מבחינת סדר הגודל, עבור n גדול, מתקיים $\frac{1}{n^2} \approx \frac{n}{n^3 \pm 1}$, ואנו יודעים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

עבור הטור הראשון מקבלים $\frac{1}{n^2} < \frac{n}{n^3+1}$ ולכן נובעת ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

עבור הטור השני אי השיויון $\frac{1}{n^2} > \frac{n}{n^3-1}$ לא מאפשר שום מסקנה, אולם אפשר להשתמש באי-השיויון $\frac{2}{n^2} < \frac{n}{n^3-1}$ אשר מתקים לכל $n > 1$. לחילופין, בשימוש במשפט האחרון, אם

מסמנים $a_n = \dfrac{n}{n^3 - 1}$ ו: $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ אזי

$\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, ולכן הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ מתכנס.