פתרון תרגיל 3 – אלגברה לינארית ב'

1. ראינו בתרגול:

שלב א: כיוון שA לכסינה יש מטריצה הפיכה P עבורה $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1\times r_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_k I_{r_k\times r_k} \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ שונים. נגדיר $B' = P^{-1}BP$ ונסמן את הבלוקים המתאים למבנה של A' ע"י $B' = \left(B_{i,j}\right)_{i=1,j=1}^{k,k}$ כאשר $B_{i,j}$ בלוק בגודל $r_i \times r_j$. נשים לב כי A', B' מתחלפות אמ"ם A, B מתחלפות וכי A', B' לכסינות במשותף אמ"ם A, B לכסינות במשותף. מכאן מספיק להוכיח את הטענה עבור A', B'.

שלב ב': נשים לב כי $\left(\lambda_i B_{i,j}\right)_{i=1,j=1}^{k,k} = A'B' = B'A' = \left(\lambda_j B_{i,j}\right)_{i=1,j=1}^{k,k}$ ומכאן $\lambda_i B_{i,j} = \lambda_j B_{i,j}$. עבור $i \neq j$ נקבל $B_{i,j} = 0$.

שלב ג': כיוון שB' לכסינה נקבל כי $B_{i,i}$ לכסינות (לדוגמא ע"י התבוננות בפולינום המינימלי של B'). תהיQ_i מטריצה הפיכה עבורה $Q_i^{-1}B_{i,i}Q_i$ הינה אלכסונית ותהי $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Q_k \end{pmatrix}$. נקבל כי $Q^{-1}B'Q$ אלכסונית. כיוון ש$Q_i^{-1}\lambda_i I Q_i = \lambda_i I$ נקבל כי גם $Q^{-1}A'Q$ אלכסונית. קיבלנו כי Q מלכסנת את A', B' במשותף.

2. ממשפט נובע כי T אופרטור לכסין אמ"ם הפולינום המינימלי של T הינו מכפלת גורמים לינאריים זרים. כיוון שלפולינום המינימלי ולפולינום האופייני אותם שורשים נקבל $m_T(x) = x(x-1)$. על כן: $T(T-I) = 0$ ו$\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}$.

3. נכפיל את $E_1 + \dots + E_k = I$ בE_1 ונקבל:$\mathrm{E}_1^2 + \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2 + \dots + \mathrm{E}_1\mathrm{E}_\mathrm{k} = \mathrm{E}_1$. אך כיוון ש$E_1E_i = 0$ לכל $i \neq 1$ נקבל $E_1^2 = E_1$. מטעמי סימטריה $E_i^2 = E_i$ לכל i.

4. נשים לב כי $\left(I - \frac{E}{2}\right)(E + I) = (E + I)\left(I - \frac{E}{2}\right) = E - \frac{E^2}{2} + I - \frac{E}{2} = I$.

5. נסמן $W_i = ImE_i$. נשים לב כי: $trace(E_i) = dimW_i$ שכן יש בסיס בו E_i הינה מטריצה אלכסונית עם אלכסון בעל כניסות 0 או 1 (אלו הערכים העצמיים של הטלה). נקבל כי $dimW_1 + \dots + dimW_k = tr(E_1) + \dots + tr(E_k) = tr(E_1 + \dots + E_k) = tr(I) = n$.
קיבלנו כי $W_1 + \dots + W_k = V$ ומתקיים $dimW_1 + \dots + \dim W_k = dimV$ ולכן V הינו הסכום הישר של $W_1, \dots, W_k$.

יש להבחין כי באופן כללי הטלות P, Q עם תמונות זרות אינן חייבות לקיים $PQ = 0$.
נשים לב בנוסף כי $(E_1 + \dots + E_k)E_1 = E_1$ ולכן $(E_2 + \dots + E_k)E_1 = 0$. כלומר לכל וקטור v נקבל כי $E_2E_1v + \dots + E_kE_1v = 0$ אך כיוון ש$E_iE_1v \in W_i$ וW_i מרחבים בת"ל נקבל כי $E_iE_1v = 0$ כל v. כלומר קיבלנו כי $E_iE_1 = 0$ לכל $i \neq 1$. באופן דומה הדבר מתקיים לE_j גם לכל $j > 1$.