# תרגיל בית 9

**שאלה 1: (10 נק')**

תהי $X \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}$, בעלת התכונה הבאה: לכל שתי נקודות ב־$X$ מתקיים כי הקטע הסגור הנקבע על ידן מוכל ב־$X$. הוכיחו כי $X$ היא בהכרח בעלת אחת מן הצורות הבאות:

1. $(\inf X, \sup X)$
2. $[\inf X, \sup X]$
3. $(\inf X, \sup X]$
4. $[\inf X, \sup X)$

(אם לפחות אחד מבין $\inf X$ או $\sup X$ אינסופי, אז הנקודה המתאימה כמובן אינה שייכת לקבוצה $X$).

**שאלה 2: (10 נק')**

הוכיחו כי קבוצה דלילה ב־$\mathbb{R}$ היא קשירה (ביחס לטופולוגיה האוקלידית) אם ורק אם היא יחידון (כלומר בעלת איבר אחד ויחיד).

**שאלה 3: (10 נק')**

יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, עם הנורמה $\|\ \|$. הוכיחו כי כל כדור פתוח וכל כדור סגור במרחב זה הן קבוצות קמורות. הסיקו מכך שהן קבוצות קשירות מסילתית ולכן קשירות.

**שאלה 4: (15 נק')**

תהי $X$ קבוצה של כל האיברים במרחב טופולוגי אוקלידי $\mathbb{R}^n$, בעלי קואורדינטה רציונלית אחת לפחות. מצאו את כל רכיבי הקשירות של $X$. הוכיחו כי הקבוצות שמצאתם אכן מהוות רכיבי הקשירות של $X$.

**שאלה 5: (30 נק')**

יהיו $T_1$ ו־ $T_2$ טופולוגיות אוקלידיות על $\mathbb{R}^1$ ו- $\mathbb{R}^2$ בהתאמה.

א. הוכיחו כי המרחבים הטופולוגיים $\left(\mathbb{R}^1, T_1\right)$ ו־ $\left(\mathbb{R}^2, T_2\right)$ אינם הומיאומורפיים. **(15 נק')**

ב. הוכיחו כי המרחבים הטופולוגיים $\left([a,b], T_1|_{[a,b]}\right)$ ו־$\left(S^1, T_2|_{S^1}\right)$ אינם הומיאומורפיים, כאשר $a,b \in \mathbb{R}$, $[a,b]$ הוא הקטע הנקבע ע"י $a$ ו־$b$, ו־$S^1$ הוא מעגל היחידה ב־$\mathbb{R}^2$. **(15 נק')**

**שאלה 6: (25 נק')**

יהי $(X,T)$ מרחב טופולוגי קשיר. נניח כי כל נקודה $x \in X$ היא בעלת סביבה פתוחה קשירה מסילתית. הוכיחו כי $(X,T)$ הוא מרחב טופולוגי קשיר מסילתית.

## בהצלחה !