14.11

טו

תורת המשחקים

גליון 2

מגישים:

I

II

1) צ"ל: במשחק $G_{n,m}$, בו $2\le n=m$, בכל תכסיס ניצחון של לבן והוא בוחר במסע הראשון את המשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה.

הוכחה:

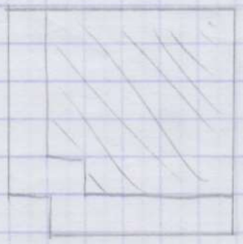
מהרצאה הוכחנו כי במשחק זה (במקרה $2\le n=m$) יש ללבן תכסיס ניצחון. (*)

כמו-כן הראנו כי באחד מתכסיסי הניצחון של לבן הוא בוחר במסע הראשון במשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה. נניח בשלילה כי קיים תכסיס ניצחון ללבן בו הוא בוחר במסע הראשון בחירה שונה, ונגיע לסתירה.

לפי משפט צרמלו

מכיוון שמשחק זה לא מאפשר תיקו, בהגיענו לסתירה נוכיח כי לשחור תכסיס ניצחון. נחלק ל-2 מקרים:

מקרה 1: לבן בוחר במסע הראשון במשבצת שאינה בשורה התחתונה או בעמודה השמאלית, וכן אינה המשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה (אחת מהמשבצות הצבועות בציור, בה"כ עבור אורך הצלע). אז שחור יכול לבחור במשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה, וכך להגיע לאותו מצב אליו היה מגיע לבן



אילו היה בוחר במשבצת זו במסע הראשון. מכאן ואילך שחור ישחק כפי שהיה משחק לבן בתכסיס שתיארנו בהרצאה, ובכך היה מבטיח את נצחונו.

$\Rightarrow$ לשחור יש תכסיס ניצחון $\Leftarrow$ סתירה ל-(*)

מקרה 2: לבן בוחר במסע הראשון במשבצת שנמצאת בשורה התחתונה או בעמודה השמאלית. לאחר מסע "מתחיל משחק $G_{n,m}$ חדש", בו $1\le n,m$ ולא שניהם 1. הראנו בהרצאה כי במשחק כזה, לשחקן המתחיל יש תכסיס ניצחון, אך במשחק "החדש", שחור הוא השחקן המתחיל, ולכן לשחור יש תכסיס ניצחון $\Leftarrow$ סתירה ל-(*)

הראנו כי כל מסע בו יבחר לבן מלבד המשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה יביא לכך שלשחור יהיה תכסיס ניצחון. מכאן שבכל תכסיס ניצחון של לבן, הוא בוחר במסע הראשון במשבצת הנ"ל. מ.ש.ל

2) נסמן את אוסף כל תתי הקבוצות - Ω

א- $\underline{k=0}$: $k+1=1$ ולכן $k+1 \mid n$ לכל n. ⇐ נוכיח כי לשחור תכסיס ניצחון ב- $S_{n,0}$. הוכחה:

במשחק זה: $\Omega=\phi$, ולכן כאשר השחקן הלבן מתחיל הלוח ריק, ולכן הוא מפסיד ⇐ לשחור תכסיס ניצחון (כי השחור לא צריך לעשות שום דבר, ומפסיד).

מ.ש.ל

ב- $\underline{k=1}$: $k+1=2$ ⇐ $k+1 \mid n$ אמ"מ n זוגי. ⇐ נוכיח אם n זוגי לשחור יש תכסיס ניצחון, ואם n אי-זוגי ללבן יש תכסיס ניצחון.

הוכחה:

במשחק זה $\Omega=\{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$ (כיוון ש- $|A|=1$), ולכן כל שחקן בתורו ימחק תת-קבוצה אחת, אשר מחיקתה לא תגרום למחיקת של תתי-קבוצות נוספות. לכן במשחק זה אין משמעות לבחירת מסע כלשהו, ומשנה רק מספר המסעים. אם n זוגי ⇐ שחור ימחק את הקבוצה האחרונה וינצח ⇐ לשחור תכסיס ניצחון (די לבחור בכל תור מסע כלשהו).

אם n אי-זוגי ⇐ לבן ימחק את הקבוצה האחרונה וינצח ⇐ ללבן תכסיס ניצחון (די לבחור בכל תור מסע כלשהו). מ.ש.ל

ג- $\underline{k=n}$: $k+1=n+1$ ⇐ $n+1 \mid n$ אמ"מ $n=0$. ⇐ נוכיח כי אם $n=0$ לשחור תכסיס ניצחון, ואם $n\neq 0$ ללבן תכסיס ניצחון.

<u>הוכחה:</u>

אם $n=0$ אז מהוכחת $k=0$ ⇐ כבר הראינו שבמצב זה לשחור יש תכסיס ניצחון. (מ.ש.ל א')

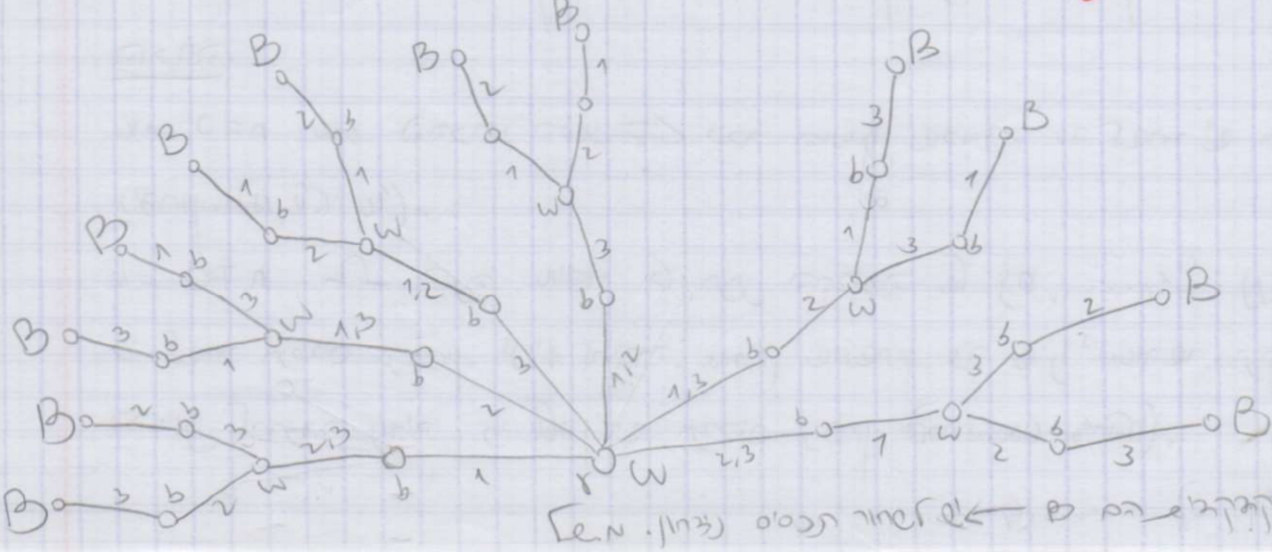
אם $n\neq 0$, Ω הינה אוסף כל תתי הקבוצות של $\{1,\dots,n\}$. נניח בשלילה כי לשחור תכסיס ניצחון ונגיע לסתירה. מכיוון שמשחק זה אינו מאפשר תיקו, מהנחתינו לסתירה נובע כי ללבן יש תכסיס ניצחון (לפי משפט צרמלו).

נניח כי לבן בוחר במסע הראשון למחוק את הקבוצה: $\{1,2,\dots,n\}$:
מחיקת קבוצה זו לא גוררת מחיקה נוספת כיוון שאין קבוצה המכילה אותה.
השחור בתורו, יציג במסע כלשהו, לפי תכסיס הניצחון שלו. לפי ההנחה במצב זה
כל דבר שהלבן יעשה יגרום להפסדו הודאי, כל צעד שחור יפעל לפי תכסיס הניצחון
שלו. אך הנה תכסיס ניצחון של לבן: במסע הראשון ימחק לבן את הקבוצה
שמחק שחור במסע הראשון במצב הקודם. מחיקת הקבוצה תביא למחיקת
הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ כיוון שקבוצה זו מכילה את כל תתי הקבוצות.
מכיוון שכעת המצב בו נמצא לבן הוא אותו מצב בו היה שחור כאשר
נצחונו היה מובטח. לכן אם לבן יעתיק מעתה ואילך את תכסיס הניצחון
של שחור - נצחונו מובטח, וזוהי סתירה!
לכן ללבן יש תכסיס ניצחון. (מ.ש.ל ב')

3 - $\underline{n=3}$: $n \mid k+1$ אמ"מ $k=0$ או $k=2$. כבר הוכחנו את
הלמה עבור המקרים $k=0$, $k=1$, $k=n(=3)$ לכן ניתן להוכיח כי ב- $S_{3,2}$
לשחור יש תכסיס ניצחון. נוכיח ע"י ציור עץ המשחק. נשים לב כי:

$$\Omega = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

* בסוף המשחק, ציירנו את תכסיס הניצחון של שחור בלבד, כלומר זהו אינו
עץ המשחק המלא (לא מופיעים בו המסעים שאינם חלק מתכסיס הניצחון של שחור)



כל הקדקודים הם B ⟵ יש לשחור תכסיס ניצחון. מ.ש.ל

ה- $n=4$: $k+1 \mid n$ אמ״מ $k=0,1,3$. כבר הוכחנו את הטענה

עבור המקרים: $k=0$, $k=1$, $k=n(=4)$, ולכן נותר להוכיח:

(i) ללבן יש תכסיס ניצחון ב-$S_{4,2}$

(ii) לשחור יש תכסיס ניצחון ב- $S_{4,3}$

הוכחת (i):

$$\Omega=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

הנה תכסיס ניצחון של לבן:

בתורו הראשון ימחק את הקבוצה $\{4\}$, מה שיביא גם למחיקת: $\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}$. כעת יש לנו משחק "חדש" - $S_{3,2}$ - שעבורו כבר הוכחנו כי לשחקן שמשחק שני יש תכסיס ניצחון, ומכיוון שבמשחק "החדש" לבן משחק שני, עליו לפעול לפי תכסיס ניצחון זה, וניצחונו מובטח. מ.ש.ל (i)

הוכחת (ii) – בעמוד הבא.

(ii) נתאר את תכסיס הנצחון של שחור ב- $S_{4,3}$.

נחלק למקרים לפי המסע הראשון של לבן:

• מקרה 1 - לבן בוחר היחידון במסעו הראשון.

נניח בה"כ שלבן בחר ב- $\{4\}$, שאר המקרים יהיו זהים עד כדי שינוי שמות.

$\{1,2,3\}$, $\cancel{\{1,3,4\}}$, $\cancel{\{1,2,4\}}$, $\cancel{\{2,3,4\}}$

$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\cancel{\{1,4\}}$ $\{2,3\}$ $\cancel{\{2,4\}}$ $\cancel{\{3,4\}}$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\cancel{\{4\}}$

לאחר מחיקת כל הקב' שמכילות את 4, קיבלנו לוח משחק הזהה ללוח ההתחלתי במשחק $S_{3,3}$. במשחק זה, לפי סעיף ג' קיים תכסיס נצחון ללבן וכאן תורו של שחור לשחק ולכן ע"י חילוף תפקידים ללבן עם השחור יפעל לפי תכסיס הנצחון של לבן במשחק $S_{3,3}$, מובטח לו נצחון.

• מקרה 2 - לבן בוחר הקבוצה בת שלושה איברים במסעו הראשון.

בתורו, על השחור לבחור היחידון המשלים את הקב' שבחר לבן. לאחר מסע זה נקבל שנמחקו כל הקב' מגודל 3 (כל קב' מגודל 3 שאינה הקב' בה בחר לבן, תכיל את המשלים שלה) ונמחק קב' מגודל 2 שמכילות את היחידון.

בסה"כ אם נניח בה"כ שלבן בחר ב- $\{1,2,3\}$ נקבל את הלוח הבא:

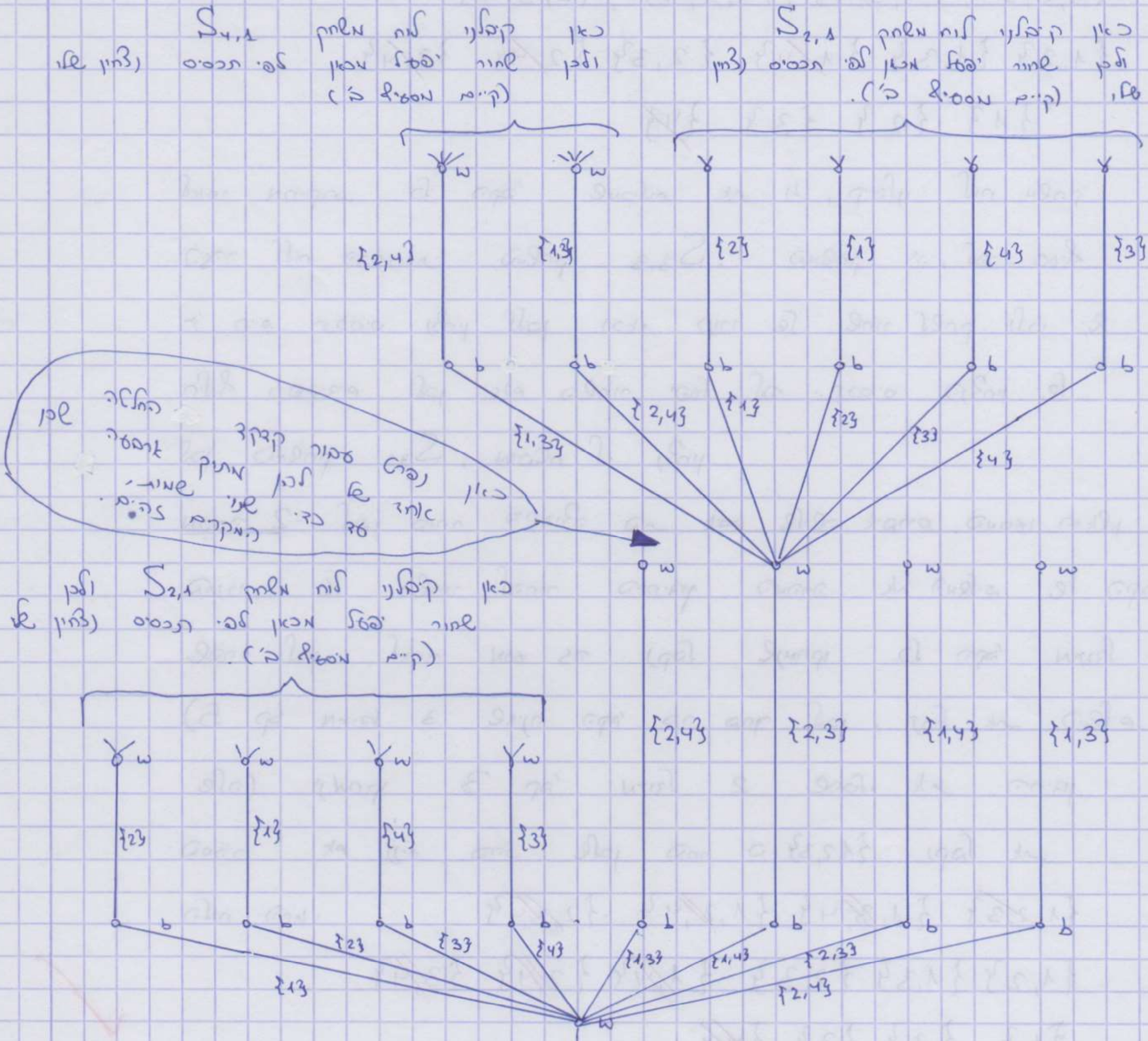
$\cancel{\{1,2,3\}}$ $\cancel{\{1,3,4\}}$ $\cancel{\{1,2,4\}}$ $\cancel{\{2,3,4\}}$

$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$ $\cancel{\{1,4\}}$ $\cancel{\{2,4\}}$ $\cancel{\{3,4\}}$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\cancel{\{4\}}$

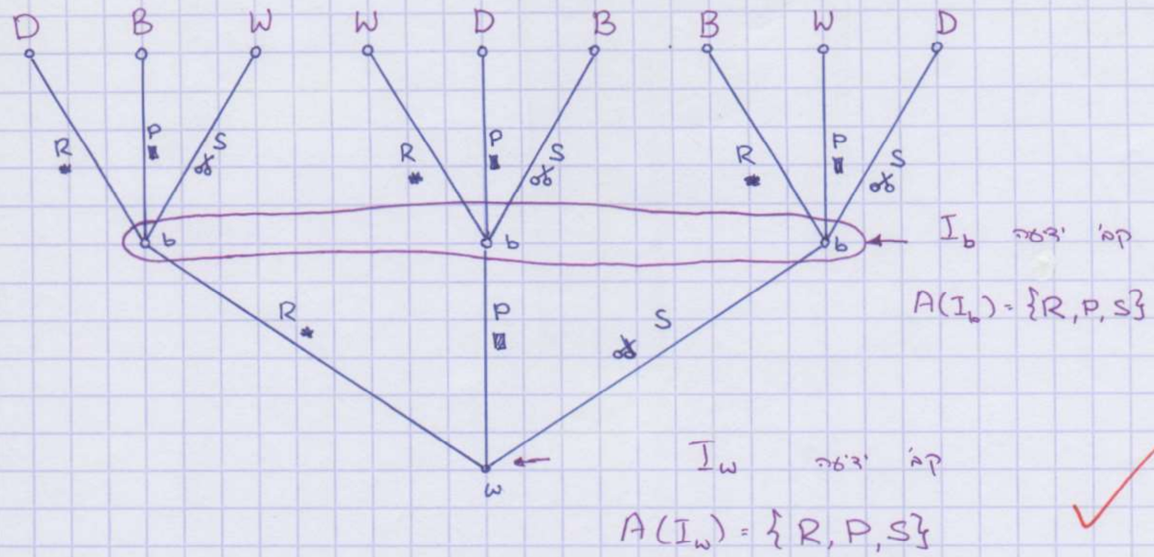
הדבר זהה ללוח ההתחלתי של המשחק $S_{3,2}$, שלפי סעיף ד' קיים בו תכסיס נצחון לשחור. כעת, בשאר המסעים אם השחור ינהג לפי תכסיס נצחון זה, מובטח לו נצחון במשחק.

• <u>מקרה 3</u>: לבן בוחר בקבוצה בת שני איברים במסע הראשון. (בה"כ {1,2})
נצייר את המסלולים בעץ שמבטיחים לשחור נצחון עבור כל
בחירה של לבן. בשאר קדקדי ההחלטה שלו יבחר מסע כלשהו, וכך
(מצאו את) תכסיס הנצחון של שחור.



נא לשדך את העמודים לא הפוכים!

3. א.



ב. כאשר מנסים לבצע הוכחת משפט "פון-נוימן" על משחק בו קיימות קבוצות ידיעה שאינן יחידונים, כמו במשחק זה, ההוכחה נכשלת כאשר אני מנסה לייצר את הפונקציה f מקב' הקדקדים (או אוסף קבוצות הידיעה) לקבוצה $\{W,B,D\}$.

למשל בשלב מסוים הקודם כל קדקדי ההחלטה של שחור קיים קדקד סופי שמוביל לניצחון של שחור. לכן לכאורה $f(v)=B$ לכל $v\in I_b$ כנ"ל. אך כיוון שכל הקדקדים הנ"ל נמצאים בקב' ידיעה אחת I_b, איננו יכולים לבנות תכסיס לשחור כך שהוא יבחר במסע שמוביל אותו לניצחון בכל אחד מהקדקדים, שכן הבחירה צריכה להיות אחידה לכל הקדקדים באותה קב' ידיעה.

ייתכן שבחירה בפעולה כלשהי עבור קב' ידיעה, תביא בכל קדקד לתוצאות שונות ולכן לא ניתן לשמור על התכונות של הפונק' f. (תנאי $(*)_v$)