תורת הקבוצות ־ 104290 ־ תרגיל בית 2
תאריך הגשה: יום שני 6.05.2018 עד 22:00 באופן אלקטרוני במודל

שאלה 1 ־ פעולות חשבוניות על קבוצות של מספרים

יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות של מספרים ממשיים ויהא $\lambda\in\mathbb{R}$ מספר ממשי כלשהו.
נגדיר:

- $A+B\triangleq\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$ (סכום זה נקרא לעתים **סכום מינקובסקי**).
- $\lambda A\triangleq\{\lambda a\mid a\in A\}$.

כתבו במפורש מהן הקבוצות הבאות:

1. $\{4,7,-6\}+2\{0,3\}$
2. $(0,1)+[2,3]$.
3. $3\mathbb{Z}$.
4. $\mathbb{N}+(-1)\mathbb{N}$.
5. $\frac{1}{3}[0,1]+\frac{2}{3}$.

שאלה 2 ־ האם רפלקסיביות היא תכונה הכרחית ליחסי שקילות?

להלן "הוכחה" לכך שכל יחס סימטרי וטרנזיטיבי $R\subseteq A^2$ הוא רפלקסיבי ועל כן יחס שקילות:
"יהא $a\in A$. מכיוון ש־R סימטרי אז $(a,b)\in R$ גורר $(b,a)\in R$. כעת נשתמש בטרנזיטיביות על $(a,b),(b,a)$ ונקבל ש־$(a,a)\in R$, כלומר R רפלקסיבי".

1. מצאו את הטעות בהוכחה ותנו דוגמה נגדית שמראה כי הטענה שגויה (כלומר, תנו דוגמה ליחס סימטרי וטרנזיטיבי שאינו רפלקסיבי).
2. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שיחס סימטרי וטרנזיטיבי יהיה רפלקסיבי.

שאלה 3 ־ נסיונות להגדרת יחסי שקילות ופונקציות

עבור היחסים הבאים, הוכיחו/הפריכו את היותם יחסי שקילות. במקרה שהיחס הוא יחס שקילות, תנו קבוצת נציגים לכל מחלקות השקילות.

1. היחס $E_1\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ המוגדר על ידי $E_1=\{(x,y)\mid xy>0\}$.
2. היחס $E_2\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ המוגדר על ידי $E_2=\{(x,y)\mid x-y\in\mathbb{Z}\}$.
3. היחס $E_3\subseteq\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ המוגדר על ידי $E_3=\{(f,g)\mid |\{x\in\mathbb{Z}\mid f(x)\neq g(x)\}|\leq 100\}$, כלומר E_3 מוגדר על פונקציות מ־$\mathbb{Z}$ ל־$\mathbb{Z}$ והזוג f,g ביחס אם קבוצת האיברים שעליהם הן מחזירות ערכים שונים היא לכל היותר מגודל 100.

עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם הן מוגדרות היטב או לא. הוכיחו את תשובתכם.

1. הפונקציה $f_1 : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f_1([a]) = a$.
2. הפונקציה $f_2 : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ המוגדרת על ידי $f_2(([a],[b])) = [a+b]$.
3. הפונקציה $f_3 : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f_3(X) = \bigcap X$.

שאלה 4 - תמונות של פונקציות

אם $f : A \to B$ היא פונקציה, אז ה**תמונה** של f מוגדרת להיות $f(A) \triangleq \{f(a) \mid a \in A\}$.
עבור הפונקציות הבאות קבעו מהן התמונות שלהן (אין צורך בהוכחה פורמלית אך תנו נימוק).

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_1(x) = -2\sin x$.
2. $f_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_2((a,b)) = \frac{a}{b}$.
3. $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $f_3(z) = |z|$.
4. $f_4 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_4(x) = \tan x$.

שאלה 5 - היכרות עם קבוצת קנטור

קבוצת קנטור היא קבוצה בעלת שלל תכונות לא אינטואיטיביות ומפתיעות. בתרגיל זה נציג את בנייתה בלבד מבלי להיכנס לתכונות המורכבות יותר.

אינטואיטיבית, קבוצת קנטור מתקבלת בתור התוצאה של התהליך האינסופי הבא: מתחילים מקטע היחידה $[0,1]$, מוחקים ממנו את השליש האמצעי הפתוח $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ונשארים עם הקבוצה $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. מכל אחד משני הקטעים בקבוע מסירים גם כן את השליש האמצעי ונותרים עם הקבוצה $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. מכל אחד מהקטעים בה מסירים את השליש האמצעי, וכן הלאה. קבוצת קנטור היא אוסף כל הנקודות שאינן מוסרות באף שלב של התהליך.

פורמלית נגדיר סדרה $C_0, C_1, \ldots$ של קבוצות באופן הבא:

- $C_0 = [0,1]$.
- $C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right)$

כאשר כפל וחיבור קבוצות עם מספרים הוא כמו בשאלה 3.

כעת נגדיר את קבוצת קנטור: $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

הוכיחו כי קבוצת קנטור היא **דומה לעצמה** במובן הבא:

- $C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right)$

(במילים אחרות, ניתן לראות את C כמורכבת משני עותקים מוקטנים של עצמה, שקטנים ממנה פי 3 ואחד מהם מוזז ב-$\frac{2}{3}$).

שאלה 6 - מרחבים פרוייקטיביים

בגאומטריה אוקלידית רגילה קיימים **ישרים מקבילים**, אשר אינם נפגשים לעולם. בגאומטריה פרוייקטיבית כל שני ישרים נפגשים בנקודה כלשהי. אינטואיטיבית, ניתן להפוך את המישור האוקלידי $\mathbb{R}^2$ למרחב פרוייקטיבי על ידי הוספת "ישר באינסוף" שבו ייפגשו כל הישרים שאינם נפגשים ב-$\mathbb{R}^2$. בשאלה זו נראה תהליך בניה פורמלי.

בשאלה זו נשתמש בסימון $\overline{a}$ לתיאור n-יות ($\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$). כמו כן נגדיר נגדיר על n-יות של כפל בסקלר $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

לכל n טבעי נסמן $X_n = \mathbb{R}^n \backslash \left\{\overline{0}\right\}$ (דהיינו, X הוא המרחב האוקלידי ה-n ממדי ללא הראשית).

נגדיר על X_n את היחס E_n הבא:

$E = \left\{\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in X_n^2 \mid \exists\lambda \in \mathbb{R}\left(\overline{a} = \lambda\overline{b}\right)\right\}$

1. הוכיחו כי E_n הוא יחס שקילות.

נסמן $\mathbb{P}^n\mathbb{R} \triangleq X_{n+1}/E_{n+1}$. כמו כן נסמן $H_n \triangleq \{[\overline{a}] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \mid a_{n+1}=0\}$.

נגדיר פונקציה $\psi : (\mathbb{P}^n\mathbb{R}\backslash H_n) \to \mathbb{R}^n$ באופן הבא: $\psi([\overline{a}]) = \left(\frac{a_1}{a_{n+1}},\dots,\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

2. הוכיחו כי ψ מוגדרת היטב וכי היא חח"ע ועל.

3. מצאו פונקציה $\phi : H_n \to \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ שהיא חח"ע ועל.

המסקנה מסעיפים 2-3 היא ש-$\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ מורכב מעותק של $\mathbb{R}^n$ ועוד "נקודות באינסוף" שהן עותק של $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$.

4. לכל איבר $[\overline{a}] \in \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ נבחר נציג $\overline{a}=(a_1,a_2)$ כך ש-$a_1^2+a_2^2=1$ ו-$a_1 \geq 0$. הסבירו מהי קבוצת כל הנציגים של $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$, מי מהם עוברים ל-$\mathbb{R}$ על ידי ψ ומה הנציגים של H_1.

5. חזרו על סעיף 4 עבור $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ ונציגים $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ כך ש-$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$ ו-$a_1 \geq 0$.

שאלת אתגר

אין חובת הגשה לשאלות אלו. הן מיועדות למי שנושאי הקורס מעניינים אותם ורוצים העשרה. שאלות אלו לא יופיעו בבחינה בתור שאלת שיעורי הבית.

בניות טופולוגיות

נתבונן בקבוצה $X=[0,1]^2$ - ריבוע היחידה במישור. אם נגדיר על ריבוע היחידה יחס שקילות ונעבור להתבונן במחלקות השקילות שלו, ניתן לחשוב על כך מבחינה גיאומטרית כאילו לקחנו דף נייר ריבועי (X) ו"הדבקנו" חלקים שונים שלו יחד (נקודות ששייכות לאותה מחלקת שקילות).

הסבירו במילים אילו צורות יתקבלו מיחסי השקילות הבאים:

1. $E_1 = I \cup \{((0,x),(1,x)) \mid x \in [0,1]\}$
2. $E_2 = I \cup \{((0,x),(1,1-x)) \mid x \in [0,1]\}$
3. $E_3 = I \cup \{((0,x),(1,x)) \mid x \in [0,1]\} \cup \{((x,0),(x,1)) \mid x \in [0,1]\}$
4. $E_4 = I \cup \{((0,x),(1,x)) \mid x \in [0,1]\} \cup \{((x,0),(1-x,1)) \mid x \in [0,1]\}$