חשבון אינפיניטסימלי 3

סיכומי הרצאותיו של פרופסור אור שליט

סמסטר חורף 2016-2017

נכתב על ידי רן קירי

<u>תוכן עניינים:</u>

הרצאה 1

סקירה טופולוגית של R^n:

1.1 הגדרה –

$$\mathbb{R}^d := \left\{ (x_1, \cdots, x_d) \middle| \begin{matrix} 1 \le i \le d \\ x_i \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

1.2 הגדרה – הנורמה האוקלידית מוגדרת על ידי:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.3 הגדרה – המטריקה האוקלידית מוגדרת על ידי:

$$d(x,y) = d_2(x,y) = \|x-y\|$$

1.4 סדרה – מבנה מהצורה $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ כאשר $x^n = (x_1^n, x_2^n, \cdots, x_d^n)$.

1.5 הגדרה (התכנסות) – סדרה $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$x \in \mathbb{R}^d$ אם מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0$$

וכן מסמנים:

$$x^n \to x \quad \lim_{n\to\infty} x^n = x$$

הערה:

$x^n \to x$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$ לכל $1 \le i \le d$.

1.6 הגדרה (סדרת קושי) – סדרה $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת סדרת קושי אם מתקיים:

$$\|x^n - x^m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

כלומר שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m,n > N$ מתקיים $\|x^n - x^m\| < \varepsilon$

1.6.1 משפט ($\mathbb{R}^d$ הינו מרחב שלם) – כל סדרת קושי ב-$\mathbb{R}^d$ מתכנסת.

הוכחה:

נניח כי $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרת קושי, אזי לכל $1 \le i \le d$, מתקיים:

$$|x_i^n - x_i^m| = \sqrt{\left|x_i^n - x_i^m\right|^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left|x_j^n - x_j^m\right|^2} = \|x^n - x^m\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

ולכן $(x_i^n)\_(n=1)^\infty$ הינה סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$ ולכן מתכנסת ב-$\mathbb{R}$. נגדיר $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$ ונסמן:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$$

ונקבל כנדרש כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x$$

1.7 הגדרה – כדור פתוח מוגדר על ידי:

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x - y\| < r\} \quad \begin{matrix} r > 0 \\ x \in \mathbb{R}^d \end{matrix}$$

1.8 הגדרה – קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת קבוצה פתוחה אם לכל $x \in A$ קיים $r > 0$ כך שמתקיים:

$$B_r(x) \subseteq A$$

1.9 הגדרה – קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת קבוצה סגורה אם מתקיים התנאי:

$$\forall (x^n)_{n=1}^{\infty} \in A \quad x^n \to x \Longrightarrow x \in A$$

1.9.1 טענה – קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה סגורה אם ורק אם $\mathbb{R}^d \setminus A$ קבוצה פתוחה.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) A קבוצה סגורה. נניח עתה בשלילה כי A^c אינה פתוחה, ולכן קיים $x \notin A$ כך שלכל $r > 0$ מתקיים: $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. נבחר, אם כן, $x^n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$, ונשים לב כי x^n מתכנסת ל-x אך מיחידות הגבול נקבל כי $x^n \to x \in A$ וזו סתירה להנחה (כי $x \notin A$).

1.10 הגדרה (קומפקטיות) – קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת קומפקטית אם לכל סדרה $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ קיימת תת סדרה $(x^{n_k})_{k=1}^{\infty} \subseteq E$ כך ש-$x^{n_k} \to x \in E$.

1.10.1 משפט – קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קומפקטית אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

1.10.1.1 הגדרה – קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^d$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך שלכל $x \in E$ מתקיים $\|x\| < R$.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) אם E לא חסומה יש $\|x^n\| > n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לסדרה זו אין תת-סדרה מתכנסת (כי כל הסדרות מתבדרות לאינסוף). אם E לא סגורה, אז ישנה סדרה $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$E \supseteq x^n \to x \notin E$.

($\Rightarrow$) נשתמש בטענת עזר:

1.10.1.2 טענת עזר – לכל סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}^d$ יש תת סדרה מתכנסת ב-$\mathbb{R}^d$.

(הוכחת טענה זה באמצעות תתי סדרות מתכנסות של הרכיב הראשון (מבולצנו ויירשטראס במימד אחד) שמשרה תת סדרה מתכנסת של הרכיב השני וכן הלאה לכל הרכיבים ולבסוף מתקבלת תת סדרה מתכנסת.

נניח אם כן, כי E סגורה וחסומה. לכל סדרה $E \supseteq (x^n)_{n=1}^{\infty}$ קיימת תת סדרה מתכנסת $(x^{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לאיבר $x \in \mathbb{R}^d$. מסגירות $x \in E$ נקבל את הקומפקטיות כנדרש.

<u>הערה:</u>

קומפקטיות שקולה לתכונה הבאה – בכל פעם שנתון אוסף $\{U_i\}_{i \in I}$ של קבוצות פתוחות כך ש-$E \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. אזי ניתן לבחור תת אוסף סופי $U_{i_1}, \cdots, U_{i_n}$ כך שמתקיים:

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

<u>פונקציות רציפות:</u>

1.11 הגדרה – פונקציה $f\colon \underset{\in\mathbb{R}^d}{A} \mapsto \underset{\in\mathbb{R}^n}{B}$ נקראת *רציפה* אם לכל $x \in A$ מתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $y \in A$, אם $\|x - y\| < \delta$ אזי מתקיים $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

1.12 הגדרה – פונקציה $f\colon \underset{\in\mathbb{R}^d}{A} \mapsto \underset{\in\mathbb{R}^n}{B}$ נקראת *רציפה במידה שווה* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$, אם $\|x - y\| < \delta$ אזי $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

1.13 הגדרה (שקולה לרציפות) – לכל סדרה $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ מתקיים – אם $x^n \to x$ אזי בהכרח:
$$f(x^n) \to f(x)$$

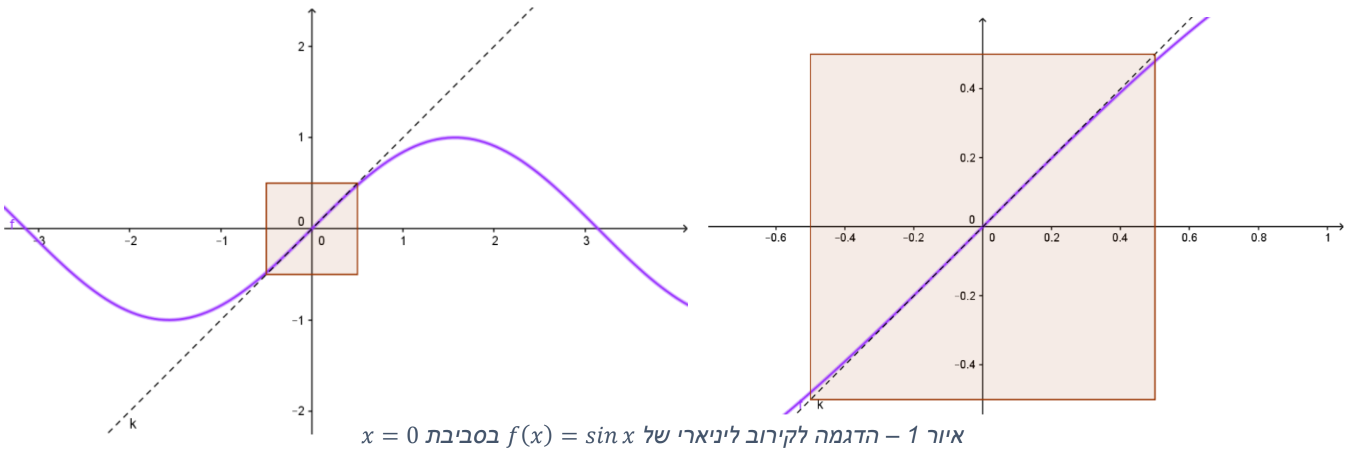
1.14 הגדרה (שקולה, אם A, B פתוחות) – לכל $U \subseteq B$ גם $f^{-1}(U) = \{x \in A | f(x) \in U\}$ הינה קבוצה פתוחה.

1.15 משפט – תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה קומפקטית, וכן תהא $f: A \mapsto \mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ב-A ומקבלת שם מקסימום ומינימום מוחלטים.

<u>הוכחה:</u>

תהא $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש-$f(x^n) \to \sup_{x \in A} f(x)$. ניתן לבנות סדרה כזו שכן נתון כי $f(A)$ חסומה ולכן יש הסופרמום קיים ומהגדרתו ניתן לבנות סדרה של איברים בתמונה שמתקרבים אליו כרצוננו. אך נשים לב כי סדרת ה-xים <u>לא</u> בהכרח מתכנסת אך היא כן סגורה וחסומה, ולכן, נקבל מקומפקטיות הקבוצה כי קיימת לסדרה זו תת סדרה מתכנסת $x^{n_k} \to x \in A$ עבורה גם כן מתקיים $f(x^{n_k}) \to \sup_{x \in A} f(x)$ וכן קיבלנו כי x הוא בדיוק המקסימום המוחלט שלה.

הרצאה 2



איור 1 – הדגמה לקירוב ליניארי של $f(x) = \sin x$ בסביבת $x = 0$

בהנתן $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מוגדרת העתקה ליניארית $T_A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ על ידי:

$$T_A(x) = A_x \quad x \in \mathbb{R}^n$$

A מכונה המטריצה המייצגת של T_A לפי הבסיס הסטנדרטי. כלומר, אנחנו מבינים כי T_A שקולה ל-A.

2.1 הגדרה – תהא $T: V \mapsto W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית. נורמת האופרטורים של T מוגדרת על ידי:

$$\|\boldsymbol{T}\| := \sup_{v\neq 0} \frac{\|T_v\|_W}{\|v\|_V}$$

2.1.1 הגדרה – T נקראת חסומה אם מתקיים $\|T\| < \infty$.

2.2 מסקנה – אם T חסומה, אזי מתקיים:

$$\forall v \in V \quad \|T_v\|_W \leq \|T\|\|v\|_V$$

2.3 טענה – תהא $T = T_A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית. אזי:

$$\|T_A\| \leq \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

<u>הוכחה:</u>

על פי הגדרה מתקיים:

$$\|T_A x\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \left[\sum_{i,j} a_{ij}^2\right]\cdot\|x\|^2$$

2.4 מסקנה – לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$\|T_A(x) - T_A(y)\| \le \|T_A\|\|x - y\|$$

כלומר בפרט T_A רציפה ואף רציפה ליפשיץ עבור $k = \|T_A\|$.

2.5 הגדרה – פונקציה אפינית היא פונקציה מהצורה $T_{A,b}(x) = Ax + b$ עבור $\begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ b \in \mathbb{R}^m \end{matrix}$.

<u>תזכורת:</u>

בהנתן $I \subset \mathbb{R}$ קטע פתוח, ו-$a \in I$, אזי $f: I \mapsto \mathbb{R}$ נקראת גזירה ב-a אם קיים הגבול:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

במידה והפונקציה אכן גזירה ב-a, מסמנים את הגבול בסימון $f'(a)$. יחד עם זאת, ניתן באופן שקול להגדיר את גזירות f ב-a, אם $f(a+h) - [f(a) + f'(a)h]$[1] $= o(h)$. כאשר $o(h)$ מקיימת:

$$\lim_{h\to 0} o(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

במילים אחרות, אנו אומרים כי הפונקציה גזירה ב-a אם ניתן לקרב בצורה ליניארית את f בסביבת a.

בעצם נרצה לומר, כי הישר $y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ מהווה "קירוב טוב" ל-f בסביבת a. ניתן לראות זאת באיור 1 בתחילת העמוד הקודם בו ניתן לראות כיצד בסביבה קרובה של $x = 0$, הישר $y = x$ מהווה קירוב טוב יותר ויותר של $f(x) = \sin x$ בסביבה זו (וככל שהסביבה תהא קטנה יותר הקירוב יהיה טוב יותר).

2.6 הגדרה – תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, וכן תהא $f: U \mapsto \mathbb{R}^m$. בהנתן $a \in U$ נאמר כי f גזירה ב-a אם קיימת העתקה ליניארית $T: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ כך שמתקיים:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - [f(a) + Th]}{\|h\|} = 0$$

2.6.1 הגדרה – כאשר מופיע בגבול הביטוי $h \to 0$ עבור h שהינו וקטור, הכוונה היא שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל h עבורו $0 < \|h\| < \delta$ התנאי מתקיים. (כמובן נדרוש כי δ תהא קטנה די צורכנו על מנת ש-$B_\delta(a) \subseteq U$.

2.7 הגדרה (שקולה) – f גזירה ב-a אם קיימת העתקה ליניארית T ופונקציה ε המוגדרת בסביבת 0 כך שעבור $f(a+h) = f(a) + Th + \varepsilon(h)$ מתקיים:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0$$

2.8 הגדרה – אם $\varepsilon: B_r(0) \mapsto \mathbb{R}^m$, נכתוב $\varepsilon(h) = o(h)$ אם מתקיימת הגדרה 2.7.

במקרה זה נוכל להגדיר בצורה נוספת גזירות על ידי:

$$f(a+h) - f(a) - Th = o(h)$$

[1] דרך נכונה יותר להגדיר זאת תהיה על ידי קיומו של קבוע A כך ש-$f(a+h) - [f(a) + Ah] = o(h)$. אם קבוע כזה קיים, אז מסמנים אותו $A = f'(a)$.

2.9 טענה – אם f גזירה ב-a, אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה T המקיימת את הגדרה הגזירות הנתונה בהגדרות 2.6,2.7.

<u>הוכחה:</u>

נניח כי אכן מתקיים:

$$f(a+h) = f(a) + T_i h + \varepsilon_i(h)$$

עבור $i = 1,2$ (כלומר העתקות ליניאריות שונות המקיימות את הנ"ל על פי הגדרה 2.7. נרצה להראות כי:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad T_1 h = T_2 h$$

נשים לב כי:

$$\|T_1 h - T_2 h\| \overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} \|T_1 h - [f(a+h) - f(a)]\| + \|[f(a+h) - f(a)] - T_2 h\| =$$
$$\|\varepsilon_1(h)\| + \|\varepsilon_2(h)\|$$

עתה נדרוש, לשם נוחות, כי $\|h\| = 1$. עתה:

$$\frac{t\|T_1 h - T_2 h\|}{t} = \frac{\|T_1(th) - T_2(th)\|}{t} \leq \frac{\|\varepsilon_1(th)\|}{t} + \frac{\|\varepsilon_2(th)\|}{t}$$

נשים לב כי שני הביטויים, באגף ימין, על פי הגדרה, מקיימים:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|\varepsilon_i(th)\|}{t} = 0 \quad i = 1,2$$

ולכן גם הגבול השמאלי חייב לשאוף ל-0. אך הגבול השמאלי הוא בדיוק $\|T_1 h - T_2 h\|$ ולכן נסיק כי:

$$\|T_1 h - T_2 h\| = 0 \to T_1 h - T_2 h = 0 \to \boxed{T_1 = T_2}$$

2.10 הגדרה – אם f גזירה ב-a, נסמן ב-$f'(a)$ (או $Df(a)$) את ההעתקה הליניארית (היחידה) המקיימת:

$$\boldsymbol{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)}$$

$f'(a)$ נקראת הדיפרנציאל (נגזרת) של f ב-a.

ניתן גם לכתוב את המשוואה מהגדרה 2.10 באופן הבא:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

2.11 הגדרה – אם f גזירה בכל נקודה ב-$U \subset \mathbb{R}^n$, נאמר כי f גזירה ב-U.

2.12 טענה – אם f פונקציה אפינית, בכל $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $Df(a) = A$.

<u>תרגיל</u> – אם f גזירה ב-a אזי f רציפה ב-a.

2.13 משפט – כלל השרשרת – נניח כי f גזירה ב-a, ונניח כי g גזירה ב-$b := f(a)$. אזי $g \circ f$ גזירה ב-a ומתקיים:

$$\boldsymbol{D(g\circ f)(a) = Dg(b)\circ Df(a) \quad (g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)}$$

<u>הוכחה:</u>

בהסתמכות על גזירות הפונקציות f,g, נכתוב:

$$\begin{matrix} f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\varepsilon_1(h) \\ g(b+k)=g(b)+g'(b)k+\varepsilon_2(k) \end{matrix} \quad \frac{\varepsilon_1(v)}{\|v\|}\xrightarrow[\|v\|\to 0]{}0$$

אזי:

$$g\circ f(a+h)-g\circ f(a)=g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big) \circledast$$

בהגדרת $k=f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\varepsilon_1(h)$ נקבל:

$$\circledast = g(b+k)-g(b)=g'(b)\big(f'(a)h+\varepsilon_1(h)\big)+\varepsilon_2(k)$$

$$=\underbrace{g'(b)f'(a)}_{\text{רכיב ליניארי}}h+g'(b)\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(k)$$

אך נשים לב כי:

$$\left\|\frac{g'(b)\varepsilon_1(h)}{\|h\|}\right\| \underset{\substack{g'(b)\\ \text{העתקה ליניארית}}}{=} \left\|g'(b)\left(\frac{\varepsilon_1(h)}{\|h\|}\right)\right\| \le \|g'(b)\|\cdot\left\|\frac{\varepsilon_1(h)}{\|h\|}\right\|\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

ובנוסף:

$$k=f'(a)h+\varepsilon_1(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$\frac{\varepsilon_2(k)}{\|h\|}=\begin{cases} 0 & k=0 \\ \frac{\varepsilon_2(k)}{\|k\|}\cdot\frac{\|k\|}{\|h\|} & k\neq 0\end{cases}$$

במקרה שבו $k=0$ אנחנו נקבל את שרצינו. ונשים לב שעבור $k\neq 0$, ניתן לכתוב את הביטוי הימני במכפלה באופן הבא:

$$\frac{\varepsilon_2(k)}{\|k\|_{\neq 0}}\cdot\frac{\|f'(a)h+\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

ונקבל את הדרוש.

2.14 הגדרה – תהא $f\colon \underset{\subset\mathbb{R}^n}{U}\mapsto\mathbb{R}$ ותהא $a\in U$ וכן יהא $0\neq v\in\mathbb{R}^n$. אזי, אם קיים הגבול:

$$\boldsymbol{D_v f(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}}$$

אזי נאמר כי f גזירה בכיוון v וש-$D_v f(a)$ נקראת הנגזרת הכיוונית/מכוונת של f בכיוון v.

2.14.1 הגדרה – אם v (מהגדרה 2.14) הינו e_i, כלומר וקטור בסיס סטנדרטי, אזי $D_{e_i}f(a)$ נקראת הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה ה-i. מסמנים:

$$\boldsymbol{D_{e_i}f(a)=D_i f(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=f_{x_i}(a)}$$

2.15 טענה – תהא $f\colon \underset{\subset\mathbb{R}^n}{U}\mapsto\mathbb{R}$ גזירה ב-a, אזי f גזירה בנקודה a בכל הכיוונים ובפרט קיימות כל הנגזרות החלקיות. הנגזרת בכיוון v נתונה על ידי:

$$\boldsymbol{D_v f(a) = Df(a)v}$$

<u>הוכחה:</u>

בהנתן כי f גזירה ב-a, אזי קיימת העתקה ליניארית $Df(a): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + o(h)$$

ולכן יתקיים:

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \frac{Df(a)tv + o(tv)}{t} \quad \frac{o(tv)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

וה-t מצטמצם בביטוי $\frac{Df(a)tv}{t}$ ולכן נקבל כי:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = Df(a)v}$$

במידה ו-f מקיימת את תנאי הטענה, מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Df(a)e_j$$

באופן כללי, המטריצה המייצגת של $Df(a)$ בבסיס הסטנדרטי היא:

$$\boxed{\text{הגרדיאנט} \ - \ \nabla f(a) = Df(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)}$$

ולכן נקבל כי:

$$D_v f(a) = Df(a)v = \nabla f(a)\cdot v = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_j$$

עבור $\|v\| = 1$ נקבל כי הביטוי הנ"ל מקסימלי כאשר $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

נחזור עתה לעיסוק במספר ממדים, קרי בפונקציות $f: \underset{\subset\mathbb{R}^n}{U} \mapsto \mathbb{R}^m$. נכתוב $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ כאשר $f: \underset{\subset\mathbb{R}^n}{U} \mapsto \mathbb{R}$ וכל f_i ניתנת על ידי $f_i = \pi_i \circ f$ כאשר:

$$\pi_i: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R} \quad \pi_i(x_1, \cdots, x_m) = x_i$$

2.16 טענה – $\boldsymbol{f}$ גזירה ב-$\boldsymbol{U \ni a}$ אם ורק אם $\boldsymbol{f_i}$ גזירה ב-$\boldsymbol{a}$ לכל $\boldsymbol{i = 1, \cdots, m}$ ומתקיים:

$$\boldsymbol{Df(a)v = (Df_1(a)v, \cdots, Df_m(a)v)}$$

<u>הוכחה:</u>

אם f_i גזירה לכל i נגדיר:

$$Tv = (Df_1(a)v, \cdots, Df_m(a)v)$$

<u>כתרגיל</u> – לבדוק כי אכן $f(a+h) - f(a) - Th = o(h)$ כנדרש.

וכאמור אם f_i גזירה ב-a אזי $f_i = \pi_i \circ f$ גזירה ב-a לפי כלל השרשרת ומתקיים:

$$Df_i(a) = D\pi_i\big(f(a)\big) \circ Df(a) = \pi_i \circ Df(a)$$

אם $f\colon \underset{\subset\mathbb{R}^n}{U} \mapsto \mathbb{R}^m$ כך ש-$f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ גזירה ב-a, אזי כל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ קיימות והמטריצה המייצגת של $Df(a)$ לפי הבסיס הסטנדרטי היא:

$$\boxed{J_f(a) \coloneqq \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}}}$$

2.17 – הגדרה – המטריצה J_f מכונה מטריצת היעקוביאן של f.

הרצאה 3

תזכורת:

העתקה $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ נקראת דיפרנציאבילית אם ניתן לקרב אותה ליניארית. במקרה של פונקציה במשתנה אחד הקירוב נתון על ידי:

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a)$$

ובעבור f שהיא פונקציה במספר ממדים מתקיים:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad J_f(a) = \underbrace{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]}_{\text{יעקוביאן}}$$

כאשר $J_f(a)$ הינה מטריצה המכילה את כל הנגזרות החלקיות לפי כל המשתנים בנקודה $x = a$, ובמידה והן רציפות נקבל כי f דיפרנציאבילית בנקודה a.

2.18 משפט – תהא $f: \underset{\subseteq\mathbb{R}^n}{U} \mapsto \mathbb{R}^m$ מהצורה $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. אזי, נניח כי לכל i,j, הנגזרת החלקית $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ רציפות בסביבת $a \in U$ (כלומר, בכדור $B_r(a)$ כלשהו), אזי f גזירה (דיפרנציאבילית) ב-a.

<u>הוכחה:</u>

לפי טענה משיעור קודם, מספיק להוכיח כי f_i גזירה לכל i[2]. לכן נניח כי $f: U \mapsto \mathbb{R}$ ויהא $h \in \mathbb{R}^n$. ניתן לכתוב:

$$(h_1, h_2, \cdots, h_n) = h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$$

אזי נקבל כי:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a + \sum_{i=1}^{j} h_i e_i\right) - f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i\right)\right)^{3}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} h_i ej\right) h_j + o\left(h_j\right) = \nabla f(a) \cdot h + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i\right) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) h_j + o(h)$$

נותר להראות כי:

---

[2] שכן בהרצאה הקודמת הראינו כי גזירות פונקציה מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}$ מאפשרת לקבל קירוב ליניארי שלי, וכך, במידה ונוכיח זאת לכל הרכיבים, נוכל לקבל קירוב כנ"ל (כלומר דיפרנציאביליות) לכל הרכיבים ב-f, כלומר, היא תהא דיפרנציאבילית.

[3] נשים לב כי זהו טור טלסקופי מהצורה:

$$f(a) - f(a_1 + h_1, a_2, \cdots, a_n) + f(a_1 + h_1, a_2, \cdots, a_n) - f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3, \cdots, a_n) + f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3, \cdots, a_n) \cdots - f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3, a_4, \cdots, a_n) \cdots$$

כך שמתקבל, ראשית, סכום טלסקופי שמותיר לנו את ההפרש המקורי שרצינו לחשב, אך עתה, נשים לב שכל צמד איברים בסכום זה הוא נגזרת חלקית לפי משתנה יחיד. היות וכל הנגזרות החלקיות קיימות, נוכל לבצע לכל צמד כזה קירוב ליניארי כמתואר בהמשך ההוכחה.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\sum_{i=1}^{j-1}h_ie_i\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)h_j=o(h)$$

אך אנו יודעים כי הנגזרות החלקיות רציפות בסביבת a ולכן עבור $h\to 0$ אכן נקבל, כנדרש, כן ההפרשים שבסוגריים שואפים לאפס כנדרש, כלומר f דיפרנציאבילית ב-a כנדרש.

2.19 סימון – אם $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ רציפות ב-U נרשום $f\in C^1$ או $f\in C^1(U)$ או $f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ כאשר זהו סימון של קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות ב-U.

2.20 טענה – תהא $f:\underset{\subseteq\mathbb{R}^n}{U}\mapsto\mathbb{R}$ גזירה ב-U, אזי אם ל-f יש מקסימום מקומי ב-$a\in U$, אז מתקיים:

$$\boldsymbol{\nabla f(a)=0}\quad \boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0}\ \ \boldsymbol{\forall 1\le j\le n}$$

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי אם $a\in U$ היא נקודה שבה מקסימום מקומי מתקבל, אזי נוכל להגדיר פונקציה חדשה, לכל משתנה, על ידי:

$$g_i(u)=f(a_1,a_2,\cdots,a_i+u,a_{i+1},\cdots,a_n)$$

אך אנו יודעים כי עבור $g=0$ מתקבל מקסימום מקומי, כלומר $g'(0)=0$. אך מתקיים:

$$g'(0)=0=\lim_{u\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\cdots,a_i+u,a_{i+1},\cdots a_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{u}\overset{\text{לפי הגדרה}}{=}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

כנדרש.

2.21 טענה – בהנתן $f,g:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$, אזי מתקיים:

א. $D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a)$
ב. אם $m=1$ אזי מתקיים $D(fg)(a)=g(a)Df(a)+f(a)Dg(a)$
ג. אם $m=1$ אזי מתקיים $D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f(a)Dg(a)-g(a)Df(a)}{g(a)^2}$

2.22 טענה – תכונות של נורמת אופרטורים:

א. $\|A\|_{op}=sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
ב. $\|A\circ B\|_{op}\le\|A\|_{op}\|B\|_{op}$ לכל $A:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ ו-$B:\mathbb{R}^k\mapsto\mathbb{R}^n$
ג. אם A הפיכה, אזי $\|Ax\|>0$ לכל $\|x\|=1$, ובפרט $\min_{\|x\|=1}\|Ax\|=c>0$

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}^n|\|x\|=1\}$ הינה קבוצה קומפקטית, כלומר סגורה וחסומה, ולכן העתקה זו, שהיא רציפה[4] מקבלת שם מקסימום ומינימום, ולכן בפרט נוכל לסמן:

$$\min_{\|x\|=1}\|Ax\|=c>0$$

---

[4] בהתאם למסקנה 2.4 מהרצאה 2

והנ"ל יהיה מוגדר היטב. מכאן שמתקיים, עבור $v \neq 0$ כלשהו:

$$\|Av\| = \|v\| \left\| A\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right\| \geq c\|v\|$$

אך מכאן שלכל $v \neq 0$ האופרטור לא מאפס את v ולכן נסיק כי לא קיימת למטריצה וקטור עצמי לערך העצמי 0, וזה כמובן שקול לכך שהמטריצה הפיכה, כנדרש.

ד. אם A חסומה מלמטה, כלומר קיים $c > 0$ כך ש-$\|Ax\| \geq c\|x\|$, אזי A הפיכה.

<u>הוכחה:</u>

אם A הפיכה, אז קיימת A^{-1} כלומר $x = A^{-1}y$. ולכן:

$$\|x\| = \|A^{-1}y\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\| \to \|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|$$

כלומר $\|x\| = 0$ אם ורק אם $x = 0$, ולכל $\|x\| = 1$ בפרט מתקיים $\|A^{-1}\|^{-1}\|x\| = \|A^{-1}\|^{-1}$.

נסמן ערך זה ב-C וקיבלנו את המבוקש.

ה. אם A הפיכה ו-$\|B - A\| < \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}$ אז גם B הפיכה ומתקיים $\|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|$

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי לכל וקטור x מתקיים:

$$Bx = Ax + (B - A)x$$

ולכן בפרט:

$$\|Bx\| \geq \|Ax\| - \|(B - A)x\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x\| - \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}\|x\| = \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}\|x\|$$

כלומר אכן קיבלנו ש-B חסומה מלמטה כנדרש ומתקיים:

$$\|B\| \leq \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1} \to \|B^{-1}\| \geq \|B^{-1}\|^{-1} \geq 2\|A^{-1}\|$$

הרצאה 4

נגדיר את הקבוצה הבאה:

3.1 הגדרה - $GL_n(\mathbb{R}) = \{A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n | \text{הפיכה } A\}$ **היא קבוצת כל האופרטורים ההפיכים מ-$\mathbb{R}^n$ לעצמו.**

הראנו בהרצאה הקודמת, כי בהנתן $A \in GL_n(\mathbb{R})$ אזי לכל B, אם $\|A - B\| \le \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}$ אזי גם B חסומה ומתקיים:

$$\|B^{-1}\| \le 2\|A^{-1}\|$$

3.2 טענה – ההעתקה $A \mapsto A^{-1}$ בתחום $GL_n(\mathbb{R})$ רציפה.

<u>הוכחה:</u>

יהא $\varepsilon > 0$ כלשהו. נניח כי $\varepsilon < \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}$. תהא B המקיימת $\|A - B\| < \varepsilon$, אזי מתקיים:

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| = \|A^{-1}(B - A)B^{-1}\| \le \|A^{-1}\|\|B - A\|\|B^{-1}\| \le 2\|A^{-1}\|^2\varepsilon$$

כנדרש.

כעת, נשים לב כי מתקיים:

$$\|A^{-1}\|^{-1}\|x - y\| \le \|Ax - Ay\| \le \|A\|\|x - y\|$$

3.3 הגדרה - $C \subset \mathbb{R}^n$ **נקראת קמורה אם מתקיים:**

$$\forall x, y \in C \quad \forall t \in [0,1] \quad tx + (1 - t)y = y + t(x - y) \in C$$

3.4 למה – תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה ופתוחה ונניח $f: U \mapsto \mathbb{R}^m$ גזירה. נניח כי מתקיים $\sup_{x \in U}\|f'(x)\| \le M \le \infty$, אזי לכל $x, y \in U$ מתקיים:

$$\|f(x) - f(y)\| \le M\|x - y\|$$

<u>הוכחה:</u>

נסמן $v = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$ (ניתן לעשות זאת שכן אם המכנה מתאפס נקבל $f(x) = f(y)$ וסיימנו. אזי מתקיים:

$$\|f(x) - f(y)\| = \langle v, f(x) - f(y)\rangle$$

נגדיר, עתה:

$$g: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R} \quad g(y) = \langle v, y\rangle$$

ונגדיר:

$$h: [0,1] \mapsto U \quad h(t) = y + t(x - y)$$

נשים לב, כי מתקיים:

$$g' = v \quad h' = (x - y)$$

עתה נגדיר:

$$\varphi = g \circ f \circ h$$

פונקציה זו גזירה כהרכבה של גזירות בתחומים המתאימים, ולכן לפי משפט לגרנז', נקבל כי קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך שמתקיים:

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0} = \varphi(1) - \varphi(0) = \langle v, f(x) \rangle - \langle v, f(y) \rangle = \|f(x) - f(y)\|$$

לכן מתקיים:

$$|\varphi'(c)| = \left\| g'\big(f\big(y + c(x-y)\big)f'\big(y + c(x-y)\big)h'(c)\right\| \le \|v\| \cdot M \cdot \|x - y\|$$

עבור $\|v\| = 1$ נקבל כי:

$$\|f(x) - f(y)\| \le M\|x - y\|$$

3.5 מסקנה – אם $f \in C^1$ אז f ליפשיצית בכל תת קבוצת קומפקטית של תחום הגדרתה.

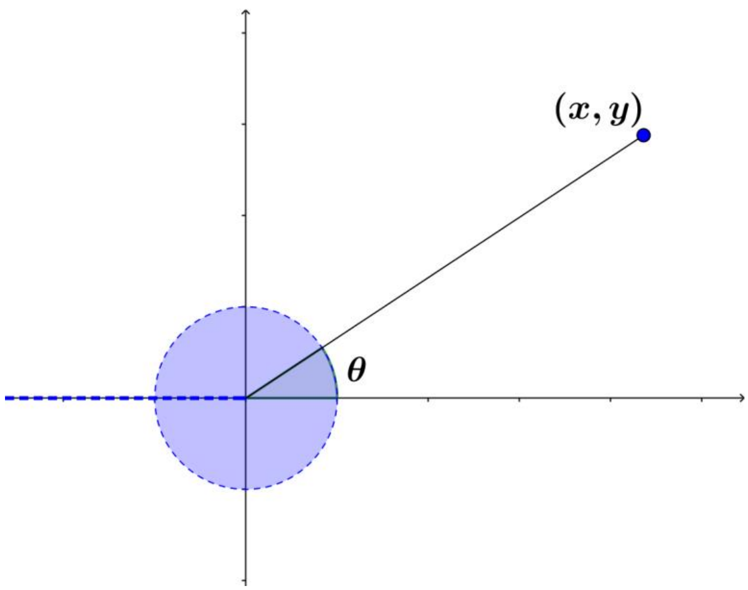
<u>דוגמה:</u>

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{matrix} x > 0 \text{ או } y \neq 0 \\ \text{וגם} \\ x^2 + y^2 > 1 \end{matrix} \right\}$$

ונגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & y < 0 \end{cases}$$

ונשים לב כי מתקיים עבור $x > 0$:



איור 2 – תיאור של התחום D (הקו המקווקו והתחום הצבוע לא כלולים)

$$\|\nabla f(x,y)\|^2 = \left\| \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \frac{1}{x\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} \right) \right\|^2 = \cdots = \frac{1}{\|(x,y)\|^2}$$

כלומר מתקיים:

$$\sup_D \|f'\| = 1$$

נראה כי:

$$\|f(x) - f(y)\| \nleq (\cdots)\|x - y\|$$

על ידי בחירת:

$$x = \left(0, \frac{3}{2}\right) \quad y = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

ונקבל כי:

$$\|f(x)-f(y)\| = \pi \nleq 3 = \|x-y\|$$

3.6 משפט הפונקציה ההפוכה – תהא $\boldsymbol{U \subseteq \mathbb{R}^n}$ פתוחה, $\boldsymbol{f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)}$ וכן תהא $\boldsymbol{a \in U}$. אזי, אם $\boldsymbol{f'(a)}$ הפיכה, אזי קיימת קבוצה פתוחה $\boldsymbol{a \in V \subseteq U}$, וקבוצה פתוחה $\boldsymbol{f(a) \subseteq W}$ כך ש-$\boldsymbol{f: V \mapsto W}$ היא חד-חד ערכית ועל ו-$\boldsymbol{f^{-1}: W \mapsto V}$ גם כן גזירה, ומתקיים:

$$(\boldsymbol{f^{-1}})'(\boldsymbol{y}) = \left[\boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{f^{-1}(y)}\right)\right]^{-1} \quad \text{או} \quad (\boldsymbol{f^{-1}})'\big(\boldsymbol{f(x)}\big) = [\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})]^{-1}$$

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה המוגדרת על ידי:

$$f(x,y) = (e^x \cos y\,, e^x \sin y)$$

נשים לב כי:

$$Jf'(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

אך מתקיים:

$$|Jf'| = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0$$

<u>הוכחה:</u>

לכל i,j, ההעתקה:

$$U \ni x \mapsto \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{i,j=1}^{n}$$

הינה העתקה רציפה. כלומר, בהגדרת ההעתקה על ידי:

$$f': U \mapsto M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

נסיק כי מתקיים:

$$\left\|\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right] - \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right]\right\|_{op} \leq \left(\sum_{i,j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

כלומר $f'(x) \mapsto x$ רציף ביחס לנורמת האופרטורים. נסמן, אם כן $A = f'(a)$. קיים $r > 0$ כך שמתקיים:

$$\forall x \in \bar{B} = \overline{B_r(a)} \subseteq U \quad \|f'(x) - f'(y)\|_{op} < \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}$$

נרצה להראות קיומו של קבוע C כך שמתקיים:

$$\|f(x)-f(y)\| \geq C\|x-y\|$$

נזכיר, כי היות ו-f גזירה, ישנו קירוב ליניארי מהצורה:

$$f(x) \approx A(x-a) + f(a)$$

כלומר, ניתן לומר כי:

$$f(x)-f(y)\approx A(x-a)+f(a)-A(y-a)-f(a)=A(x-y)$$

ולכן, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &= \left\|A(x-y)-\big(Ax-f(x)-Ay+f(y)\big)\right\| \\ &\geq \|A(x-y)\|-\|f(x)-Ax-(f(y)-Ay)\| \overset{?}{\geq} \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}\|x-y\|\end{aligned}$$

נצדיק עתה את אי השוויון האחרון, בכך שנגדיר:

$$g(x)=f(x)-Ax \quad g'(z)=f'(z)-A$$

כלומר:

$$\|f(x)-Ax+(f(y)-Ay)\|=\|g(x)-g(y)\|\leq \sup_{z\in\bar{B}}\|g'(z)\|\cdot\|x-y\|\leq \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}\|x-y\|$$

כלומר אי השוויון האחרון ודאי קיים כנדרש.

כלומר, קיבלנו כי לכל $x,y\in\bar{B}$ מתקיים $\|f(x)-f(y)\|\geq \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}\|x-y\|$ ולכן בפרט $f:\bar{B}\mapsto f(\bar{B})$ חד-חד ערכית.

נסמן $\partial B=\{y|\|y-a\|=r\}$ (השפה של התחום $\bar{B}$). נסמן קבוצה חדשה על ידי $K=f(\partial B)$. נשים לב כי K קבוצה קומפקטית שכן היא מתקבלת על ידי העתקה רציפה מקבוצה קומפקטית. הראינו כי f חד-חד ערכית ולכן נסיק כי $f(a)\notin K$ (שכן אחרת היינו מקבלים איבר נוסף בשפה שמקבל אותו ערך כמו a בסתירה לחד-חד ערכיות). מכאן שקיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\partial B$ מתקיים:

$$\|f(x)-f(a)\|\geq\delta$$

נגדיר, אם כן:

$$W=B_{\frac{\delta}{2}}\big(f(a)\big)$$

ונרצה להראות שאם $x\in\partial B$ אז לכל $y\in W$ מתקיים:

$$\|f(x)-y\|\geq\|f(a)-f(x)\|-\|f(a)-y\|\geq\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}>\|f(a)-y\|$$

כלומר ראינו שתמונת השפה בהכרח לא יכולה להימצא ב-W שכן מרחק כל איברי התמונה מ-W גדול מרדיוס הסביבה שקבענו.

עתה נרצה להראות, כי לכל $y\in W$ קיים $x\in B$ כך שמתקיים $f(x)=y$, ואז נסמן:

$$V=f^{-1}(W)\cap B$$

נקבע $y\in W$ ונגדיר:

$$\varphi:\bar{B}\mapsto\mathbb{R}\quad \varphi(x)=\|f(x)-y\|^2$$

אנו יודעים כי φ רציפה ב-$\bar{B}$ ולכן מקבלת בו מינימום. בנוסף, ראינו כי $\varphi(a)<\varphi(x)$ לכל $x\in\partial B$. מכאן שהמינימום מתקבל בכדור הפתוח B.

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(f_j(x) - y_j\right)^2$$

אם המינימום מתקבל ב-$x \in B$ אזי בהכרח מתקיים:

$$\nabla\varphi(x) = 0$$

נראה זאת על ידי כך שנדרוש:

$$\forall 1 \le j \le n \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} 2\left(y_i - f_i(x)\right)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0$$

כלומר:

$$2\left(y - f(x)\right) \cdot J_f(x) = 0$$

אך $J_f(x)$ הפיכה ולכאן בהכרח שונה מאפס. מכאן ש-$y - f(x) = 0$ כלומר, כנדרש:

$$y = f(x)$$

מצאנו, אם כן, V, W פתוחות כך ש-$f: V \mapsto W$ חד-חד ערכית ועל. עבור $f^{-1}: W \mapsto V$ ראינו כי:

$$\forall x, y \in V \subseteq \bar{B} \quad \|f(x) - f(y)\| \ge \frac{\|A^{-1}\|^{-1}}{2}\|x - y\|$$

ומכאן שמתקיים:

$$\forall u, w \in W \quad \|f^{-1}(u) - f^{-1}(w)\| \le 2\|A^{-1}\|\|u - w\|$$

כלומר f^{-1} ליפשיצית.

עתה, יהיו $a, x \in V$ ונסמן $b = f(a), w = f(x) \in W$. אזי מתקיים:

$$f^{-1}(w) - f^{-1}(b) = f^{-1}\left(f(x)\right) - f^{-1}\left(f(a)\right) = x - a$$

אך מצד שני המועמד ל-$Df^{-1}(b)$ הוא $\left(f'(a)\right)^{-1}$. נשים לב כי ניתן לכתוב:

$$\left(f'(a)\right)^{-1}(w - b) = \left(f'(a)\right)^{-1}\left(f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a)\right)$$

שכן השינוי בסוגריים הוא הקירוב הליניארי לפי f. אנחנו נרצה להראות עתה כי:

$$f^{-1}(w) - \left[f^{-1}(b) - \left(f'(a)\right)^{-1}(w - b)\right] = \left(f'(a)\right)^{-1}(x - a)$$

כך ש-$\left(f'(a)\right)^{-1}(x - a)$ מקיים:

$$\lim_{\|w-b\|\to 0} \frac{\left(f'(a)\right)^{-1}\varepsilon(x - a)}{\|w - b\|} = 0$$

נזכור כי $\left(f'(a)\right)^{-1}$ רציפה וליניארית וממילא חסומה. לכן מספיק להראות כי $\varepsilon(x - a) = o(w - b)$ ונקבל כי התאפסות שלו בגבול שציינו תבטיח התאפסות של כל הביטוי. נראה כי:

$$\frac{\|\varepsilon(x-a)\|}{\|w-b\|} = \frac{\|\varepsilon(x-a)\|}{\|x-a\|}\frac{\|x-a\|}{\|w-b\|} \leq 2\|A^{-1}\|\frac{\|\varepsilon(x-a)\|}{\|x-a\|} \to 0$$

כאשר נזכור, ראשית, כי יכולנו לחלק ב-$\|x-a\|$ הפונקציה ההפוכה חח"ע בסביבה הזאת ולכן לא יתכן שבשאיפה של $w-b$ ל-0 נקבל עוד איבר שבו $f^{-1}(w) = x = a = f^{-1}(b)$. בנוסף נוכל להסיק מכך כי הגבול שבו $w-b \to 0$ מתקיים אם ורק אם $x-a \to 0$ ולכן המעבר של אי השוויון נכון.

<u>הרצאה 5</u>

<u>תזכורת – משפט הפונקציה ההפוכה:</u>

בהנתן $\underset{\text{פתוחה}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ $a \in$ ובהינתן פונקציה $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ כך ש-$f'(a)$ הפיכה – אזי קיימת סביבות $a \in V \subseteq U$ וכן $f(a) \in W \subseteq f(U)$ כך ש-$f: V \mapsto W$ חד-חד ערכית ועל. כמו כן, $f^{-1}: W \mapsto V$ גזירה ומתקיים:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \left[f'\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}}$$

למעשה, אנו יודעים כי f' גזירה ברציפות, שכן הנוסחה שמצאנו מראה כי הנגזרת של f^{-1} היא הרכבת f^{-1} שהיא רציפה, על f' שהיא רציפה, ועל הרבה זו מרכיבים את ההעתקה שלוקחת מטריצה הפיכה להופכי שלה. זו העתקה רציפה מהקשר בין $adj\ A$ ל-A, A^{-1}.

<u>תרגיל</u> (בונוס) – שיטת ניוטון לפתרון מערכת משוואות – נניח כי נתונות n-פונקציות, נסמנן $f_1, \cdots, f_n: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ אשר כולן רציפות בתחום, ונניח כי ברצוננו לפתור מערכת משוואות מהצורה:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

השיטה למציאת פתרון למערכת משוואות זו, תתבצע על ידי ניחוש פתרון $x^1 \in \mathbb{R}^n$.

נגדיר פתרון x^n בצורה רקורסיבית. לכל n נגדיר:

$$B_n = \left[J_f(x^n)\right]^{-1} \quad x^{k+1} = x^k - B_k f\left(x^k\right)$$

ואם $n = 1$, נקבל:

$$\boxed{x^{k+1} = x^k - \frac{f\left(x^k\right)}{f'\left(x^k\right)}}$$

השאלה – הוכיחו כי אם קיים פתרון $\bar{x}$ עבורו $f(\bar{x})$ הפיכה, אזי קיים $r > 0$ כך שלכל $x^1 \in B_r(\bar{x})$ – הסדרה המתקבלת, $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\bar{x}$. יש להסביר גם באופן מילולי מדוע הנ"ל יעבוד, ומה הקשר בין טכניקה זו לבין משפט הפונקציה ההפוכה.

3.7 הגדרה – פונקציה $f \in C^1\left(\underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{U}, \mathbb{R}^m\right)$ נקראת רגולרית ב-U אם $\operatorname{rank} J_f(a) = m$ לכל $a \in U$.

3.8 משפט – תהא $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ רגולרית ב-U. אזי, f העתקה פתוחה – כלומר, לכל $V \subseteq U$ פתוחה, $f(V)$ גם היא פתוחה.

<u>הוכחה:</u>

המקרה הפשוט יותר, שבו $m = n$, מתקבל מידית ממשפט הפונקציה ההפוכה, שכן מקבלים כי $f(a) \in W$ נמצא בתוך סביבה ב-$f(V)$.היות והפונקציה חח"ע ועל נסיק כי <u>לכל</u> $f(a) \in f(V)$ קיים מקור a כך של-$f(a)$ יש סביבה שהוא נמצא בפנים שלה ולכן $f(V)$ קבוצה פתוחה.

נעסוק עתה במקרה שבו $m < n$. נשים לב כי $\operatorname{rank} J_f(a) = m$ כלומר במטריצה $J_f(a)$ יש m עמודות בלתי תלויות ליניארית. בלי הגבלת הכלליות, יהיו אלה m העמודות הראשונות. נסמן:

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(i,j)=1}^{m}$$

נגדיר עתה:

$$F: U \mapsto \mathbb{R}^n$$

על ידי:

$$F(x) = (f(x), x_{m+1}, \cdots, x_n)$$

כלומר, נשלים את הקואורדינטות כך שההעתקה תהיה בעלת n ממדים. לכן מתקיים:

$$J_F = \begin{bmatrix} J_f & \star \\ 0 & I_{(n-m)\times(n-m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)} & \star \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

נשים לב כי F מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה בכל נקודה, ולכן $F(V)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$ לכל $V \subseteq U$ פתוחה. מכאן נובע $f(v) = \pi\big(F(V)\big)$ כאשר:

$$\pi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_m)$$

נראה, כי העתקה זו, π, היא העתקה פתוחה, ומכאן, נובע כי $f(V)$ כהרכבה של העתקות פתוחות, היא פתוחה.

לשם כך, נזכור כי מתקיים:

$$\pi\big(B_r(x)\big) = B_r\big(\pi(x)\big)$$

3.8.1 טענת עזר – נראה כי π אכן העתקה פתוחה כדרוש.

<u>הוכחה:</u>

תהא $W \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, ונרצה להראות כי $\pi(W)$ קבוצה פתוחה. לשם נוחות, נשתמש בסימון הבא:

$$(a, b) \in \mathbb{R}^n \quad \begin{matrix} a \in \mathbb{R}^m \\ b \in \mathbb{R}^{n-m} \end{matrix}$$

כל $a \in \pi(W)$ היא נקודה המתקבלת $(a, b) \in W$. אם W פתוחה, נסיק כי קיים $r > 0$ כך $B_r\big((a, b)\big) \subseteq W$. נראה כי $B_r(a) \subseteq \pi(W)$. יהא אם כן $a + h$, כך ש-$\|h\| < r$. נגדיר $B_r(a, b) \subseteq W$ ולכן $(a + h, b) \in B_r(a, b) \subseteq W$:

$$a + h \in \pi(W)$$

כלומר $B_r(a) \subseteq W$ לכל a ולכן $\pi(W)$ פתוחה כלומר π העתקה פתוחה כנדרש.

3.9 משפט ההעתקה הפתוחה – אם $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ רגולרית – אז היא פתוחה.

<u>מינימליזציה:</u>

תהא $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ כך ש-$U \in \mathbb{R}^n$. אזי אם מחפשים מינימום של f על U, נמצא $x \in U$ כך שמתקיים:

$$\nabla f(x) = 0$$

כלומר, אנחנו מחפשים $\bar{x}$ כך שמתקיים $f(\bar{x}) < f(x)$ לכל $x \in U$.

לעתים, נרצה לבצע מינימיזציה לא בכל המרחב הנתון U, אלא רק ביריעה במרחב הנ"ל. (הגדרה של יריעה תינתן בהמשך). באופן כללי, לעת עתה, ניתן לתאר יריעה על ידי קבוצת נקודות שמהוות פתרון של משוואות מסויימות. לדוגמה:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

זוהי יריעה ב-$\mathbb{R}^2$ המתארת עקום. במקרה זה מדובר במעגל היחידה.

נדון במינימליזציה של פונקציות המוגדרות על יריעות כאלו:

4.1 משפט – תהא $\boldsymbol{g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)}$ רגולרית כאשר $\boldsymbol{U \subset \mathbb{R}^n}$ קבוצה פתוחה. ותהא $\boldsymbol{M = \{x \in U | g(x) = 0\}}$ יריעה נתונה. אזי בהנתן $\boldsymbol{f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)}$, אם $\boldsymbol{a \in M}$ ומתקיים $\boldsymbol{f(a) \le f(x)}$ לכל $\boldsymbol{x \in M}$ (קרי, $\boldsymbol{a}$ מינימום של $\boldsymbol{f}$ על $\boldsymbol{M}$), אזי מתקיים:

$$\boldsymbol{\nabla f(a) \in \mathrm{span}\{\nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \cdots, \nabla g_m(a)\}}$$

באופן מעשי – כדי למצוא מינימום, פותרים את המשוואות:

$$\begin{cases} \nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a) \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

מדובר כאן ב-n משוואות ב-$n + m$ נעלמים, שהם $(a_1, \cdots, a_n), \lambda_1, \cdots, \lambda_m$ בעבור המשוואה הראשונה והמשוואה השניה היא בעצם m משוואות ב-n נעלמים.

4.2 הגדרה – במשפט 5.5, הנעלמים $\boldsymbol{\lambda_i}$ לכל $\boldsymbol{1 \le i \le m}$ נקראים כופלי לגרנז'.

דוגמה:

נתון מישור ב-$\mathbb{R}^3$ על ידי:

$$g(x, y, z) = ax + by + cz - d = 0$$

ונניח שנתונה פונקציה:

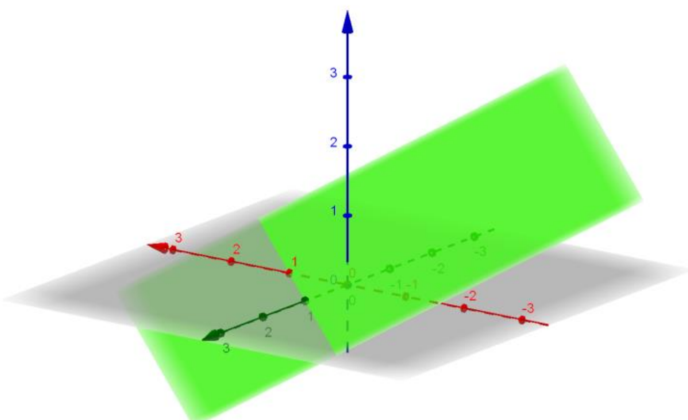
$$f(x, y, z) = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

לשם כך נחליף את f בפונקציה:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ונשתמש במשוואות שהוגדרו במשפט 5.5:

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g = (a, b, c)$$



איור 3 – דוגמה של מישור $ax + by + cz = d$ (בירוק) במרחב $\mathbb{R}^3$

נשים לב, כי מתקיים:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

(שכן הפונקציה היא על $\mathbb{R}$ ולכן הסכימה מתבצעת על λ יחידה. נקבל כי מתקיים:

$$(x, y, z) = \frac{\lambda}{2}(a, b, c)$$

נציב במשוואה השניה ונקבל כי:

$$g\left(\frac{\lambda}{2}(x,y,z)\right)=\frac{\lambda}{2}(a^2+b^2+c^2)-d=0$$

ונקבל כי:

$$\lambda=\frac{2d}{a^2+b^2+c^2}\to\boxed{(x,y,z)=\frac{d(a,b,c)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{d}{\|(a,b,c)\|}}$$

וכפי שציפינו, קיבלנו בדיוק את המרחק בין המישור לבין הראשית, כנדרש.

<u>הוכחת המשפט:</u>

תהא $a\in M$, ונניח כי:

$$\nabla f(a)\notin \operatorname{span}\{\nabla g_1(a),\nabla g_2(a),\cdots,\nabla g_m(a)\}$$

ונראה כי ב-a לא מתקבלת נקודת מינימום. נגדיר $F: U\mapsto\mathbb{R}^{m+1}$ על ידי:

$$F(x)=\big(f(x),g(x)\big)=\begin{pmatrix}f(x)\\g(x)\end{pmatrix}$$

$$J_F(x)=\begin{bmatrix}\nabla f(x)\\\nabla g_1(x)\\\vdots\\\nabla g_m(x)\end{bmatrix}$$

כלומר $\operatorname{rank}J_F(a)=m+1$ ולכן $\operatorname{rank}J_F=m+1$ בסביבת a. מכאן נקבל כי F העתקה פתוחה (ממשפט 5.4) בסביבת a.

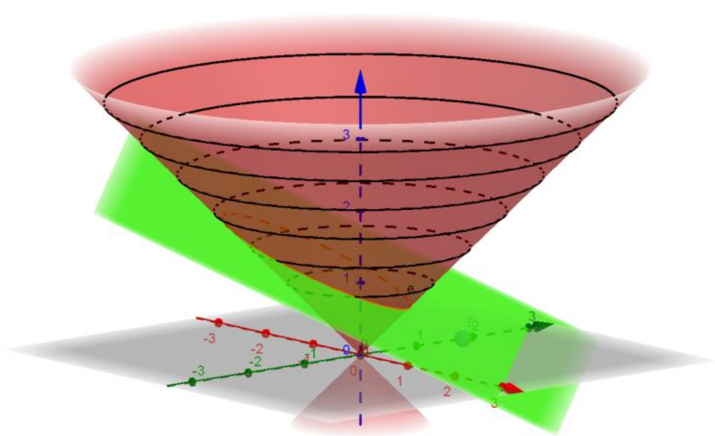
כמו כן, $F(a)=\big(f(a),0\big)$ נמצא בפנים של $F(U)$ מכאן שגם $\big(f(a)-\varepsilon,0\big)\in F(U)$ בבחירת ε קטן מספיק (ואכן קיים כזה ממשפט ההעתקה הפתוחה).

עתה, מהגדרת M, יש $x\in M$ כך שמתקיים $\big(f(x),0\big)=\big(f(a)-\varepsilon,0\big)=F(x)$ ולכן a לא נקודת מינימום.

ניתן להבין אינטואיטיבית את משמעות המשפט באופן הבא –

באופן כללי, גרדיאנט של פונקציה במספר משתנים, הינה כיוון של וקטור הניצב למישור המשיק לנקודה על הפונקציה.

כשאנחנו מעוניינים לבצע מינימליזציה של פונקציה ביריעה במרחב, אנחנו מעוניינים בעצם למצוא נקודה, המשותפת לפונקציה ול"פונקצית" היריעה, שבה המישור שמשיק ליריעה הוא אותו מישור (מבחינת כיוון) שמשיק לנקודה על הפונקציה. מכאן שהגרדיאנט של הפונקציה ושל פונקציית היריעה צריכים להיות באותו כיוון בדיוק, למעט אולי כפל בסקלרים – הלא אלו בדיוק הם כופלי לגרנז'.



איור 4 תיאור של פונקציה (באדום) על מרחב, ויריעה במרחב

הרצאה 6

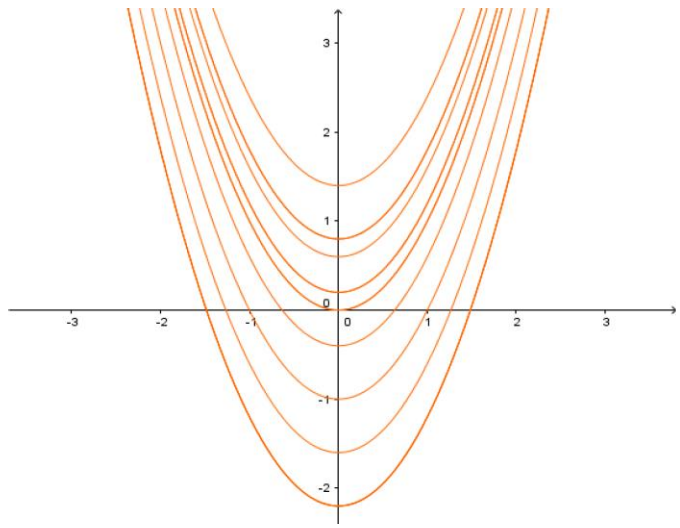
נניח ונתון לנו פולינום מהצורה $p(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ ונניח כי קיים אלגוריתם למציאת פתרון כלשהו.

<u>דוגמה:</u>

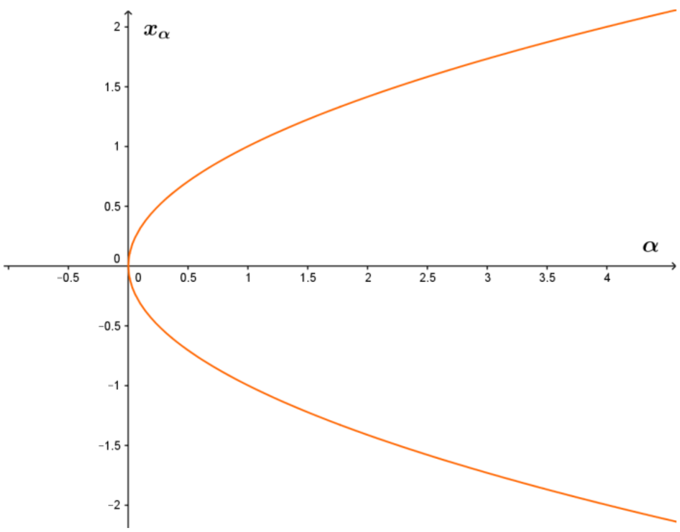
עבור הפולינום $P_\alpha=x^2-\alpha$ אנו יודעים כי אכן קיים אלגוריתם כנ"ל. הפתרון, כתלות ב-α, נתון על ידי:

$$x_\alpha=\pm\sqrt{\alpha}$$

תיאור של הפולינום ושל הפתרונות כפונקציה של α נונים באיורים 1,2 שלהלן.



איור 5 – מספר פולינומים מהצורה $P_\alpha=x^2-\alpha$ עבור ערכי α שונים.



איור 6 – פתרונות הפולינום P_α כתלות בערכו של α - $x_\alpha=\pm\sqrt{\alpha}$

ניטיב לראות כי הפונקציות:

$$f_1(\alpha)=\sqrt{\alpha}\quad f_2(\alpha)=-\sqrt{\alpha}$$

גזירות ברציפות. באופן כללי, שורשים של פולינום תלויים במקדמים שלהם באופן רציף.

5.1 נרצה להראות – אם $\bar{x}$ שורש פשוט של $P_{\bar{a}}(x)=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_kx^k$ כאשר $\bar{a}\in\mathbb{R}^{n+1}$ מהצורה $\bar{a}=(\bar{a}_0,\cdots,\bar{a}_n)$, אזי קיימת סביבה של $\bar{a}$ ב-$\mathbb{R}^{k+1}$ כך שאחד השורשים של $P_{\bar{a}}(x)=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_kx^k$ נתון כפונקציה גזירה ברציפות של $\bar{a}$:

$$f(a_1,\cdots,a_n,x)=P_a(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=0$$

$$f\colon \underbrace{\mathbb{R}^{n+2}}_{\cong\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}}\mapsto\mathbb{R}\quad f(a,x)=0$$

x מוגדר כפונקציה סתומה של וקטור המקדמים a.

באופן כללי נעסוק בתחומים $U\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ פתוחים. נסמן $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ כאשר:

$$x\in\mathbb{R}^n\quad y\in\mathbb{R}^m$$

5.2 משפט הפונקציה הסתומה – תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ פתוחה, ותהא $f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ וכן תהא $(a,b)\in U$ כך ש-$f(a,b)=0$. נניח, בנוסף, כי $\det\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\Big|_{(a,b)}\neq0$, אזי קיימת סביבה $V\ni(a,b)$ וקיימת פונקציה $g\in C^1$ שמוגדרת בסביבה של a לתוך $\mathbb{R}^m$ כך שמתקיים:

$$\forall(x,y)\in V\quad f(x,y)=0\Leftrightarrow y=g(x)$$

ובפרט, $f(x,g(x))=0$ לכל x קרוב ל-a.

דוגמה:

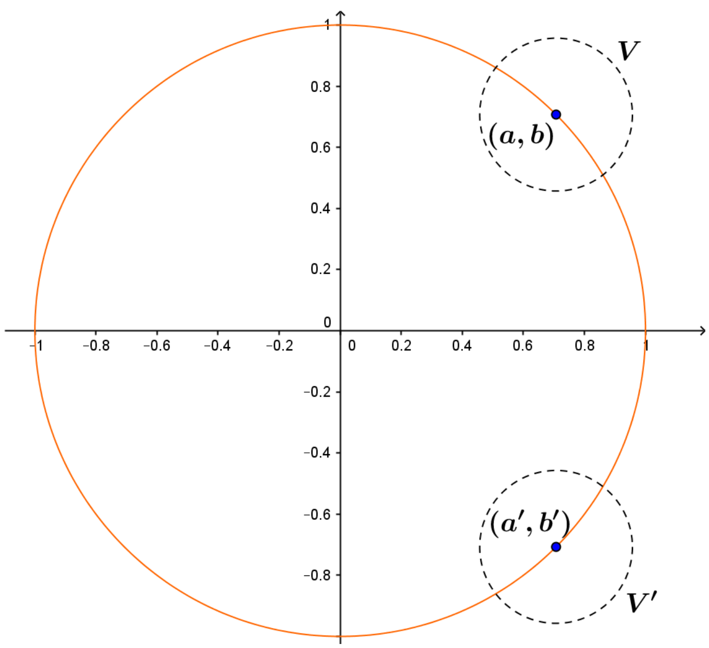
תהא הפונקציה:

$$f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

ונתבונן בנקודה $(a,b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. אכן מתקיים $f(a,b) = 0$, וכן $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2y|_{(a,b)} = 2b = \sqrt{2} \neq 0$. עתה, במידה ונבחר לגבי סביבת (a,b) את הפונקציה $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, ונשים לב, שבסביבה קטנה של (a,b):

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$$

ובעבור $(a',b') = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ לדוגמה, באותו אופן מתקיים $f(a,b) = 0$ וכן $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ובבחירת סביבה V' של הנקודה, הפונקציה $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ מקיימת את הנדרש.



איור 7 – תיאור הפונקציה $0 = f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

הערה – בעיה תתקבל רק כאשר $y = 0$. למשל, בנקודה $(1,0)$ נשים לב כי $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ ואכן אין כאן עמידה בתנאי המשפט. אך לעומת זאת, מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \neq 0$ ולכן על פי המשפט נוכל לבטא את x כפונקציה של y בסביבה של $(1,0)$ לקבלת הפתרונות.

הוכחת המשפט:

נגדיר $F: \underset{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}{U} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ באופן הבא:

$$F(x,y) = \big(x, f(x,y)\big) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, f_1, \cdots, f_m)$$

ונשים לב כי מתקיים:

$$J_f = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)} & \frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)} \end{bmatrix}$$

והיות ודרשנו כי $\det \left.\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|_{(a,b)} \neq 0$ אזי נקבל כי J_f הפיכה בנקודה (a,b). נפעיל את משפט הפונקציה ההפוכה על F סביב (a,b). נקבל סביבה V של (a,b) עליה F הפיכה. אזי $F: V \mapsto W$ הפיכה עם הפונקציה ההפוכה המתאימה $F^{-1}: W \mapsto V \in C^1$ ואז נקבל כי:

$$F(x,y) = \Big(\overset{x}{F_1(x,y)}, \overset{f(x,y)}{F_2(x,y)}\Big)$$

$$F^{-1}\Big(\underset{\in\mathbb{R}^n}{u}, \underset{\in\mathbb{R}^m}{v}\Big) = \big(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\big) \quad \begin{matrix} \varphi_1: W \mapsto \mathbb{R}^n \\ \varphi_2: W \mapsto \mathbb{R}^m \end{matrix}$$

הרצאה 7

תזכורת:

משפט הפונקציה הסתומה – תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ פתוחה, ותהא $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$. כמו כן, תהא $(a,b) \in U$ כך שנקודה זו מהווה פתרון למשוואה:

$$f(a,b) = 0$$

אזי אם:

$$\det \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} \neq 0$$

בנקודה (a,b), נסיק כי קיימת סביבה פתוחה $(a,b) \in V$, וקיימת $g \in C^1$ המוגדרת בסביבה של a, כך שמתקיים:

$$\forall (x,y) \in V \quad f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$$

<u>הוכחה:</u>

נגדיר:

$$F: U \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad \big(x, f(x,y)\big)$$

ונשים לב כי:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} & \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} \end{bmatrix}$$

כאשר הנחתנו היא כי הרכיב המטריציוני $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}$ בעל דטרמיננט שונה מאפס. לכן בפרט:

$$\det J_F(x,y) \neq 0$$

F, אם כך, מקיימת את תנאי משפט הפונקציה ההפוכה, ולכן קיימות סביבה $(a,b) \in V$ וכן $F(a,b) \in W$ כך שמתקיים $F: V \mapsto W$ חד-חד ערכית ועל, ובפרט קיימת $F^{-1} \in C^1(W,V)$.

נשים לב, אם כן:

$$F^{-1}(u,v) = \big(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\big)$$

נשים לב, כי מתקיים:

$$F^{-1}\big(x, f(x,y)\big) = F^{-1} \circ F(x,y) = (x,y)$$

ולכן נסיק כי בהכרח $\varphi_1(u,v) = u$. מצד שני, אנו יודעים כי:

$$\varphi_2: W \mapsto \mathbb{R}^m \quad \varphi_2 \in C^1$$

נגדיר, אפוא, את הפונקציה:

$$g(x) = \varphi_2(x,0)$$

אשר מוגדרת היטב בסביבה שמצאנו של a. נניח עתה כי $(x,y) \in V$. נשים לב כי:

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \big(x, f(x,y)\big) = (x,0) \Leftrightarrow F^{-1}\big(x, f(x,y)\big) = F^{-1}(x,0) = \big(\varphi_1(x,0), \varphi_2(x,0)\big)$$

אך אנו יודעים כי $\varphi_1(x,0) = x$, ולכן נשים לב כי הנ"ל נכון אם ורק אם $\varphi_2(x,0) = g(x)$ כפי שתיארנו.

שורשי פולינומים:

נניח כי $\bar{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ וקטור המקדמים של פולינום ממעלה n ונניח כי $\bar{x}$ הינו שורש של $P_{\bar{a}}$ כלומר $P_{\bar{a}}(\bar{x}) = 0$.

נגדיר $f: \underbrace{\mathbb{R}^{n+2}}_{=\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^1} \mapsto \mathbb{R}$. אזי נשים לב כי בהנתן:

$$f(a, x) = P_a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

נוכל להסיק, כי ישנה נקודה $(\bar{a}, \bar{x})$ עבורה מתקיים:

$$f(\bar{a}, \bar{x}) = P_{\bar{a}}(\bar{x}) = 0$$

ולכן בפרט מתקיים:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{a},\bar{x})} = \left.\frac{d}{dx} P_{\bar{a}}\right|_{x=\bar{x}}$$

ולכן התנאי להפעלת משפט הפונקציה הסתומה, הוא שיתקיים $P'_{\bar{a}}(\bar{x}) \neq 0$ (כלומר, הנ"ל שקול, לכך שהשורש $\bar{x}$, הינו שורש מריבוי 1 בלבד).

5.3 מסקנה – אם $\bar{x}$ שורש פשוט של $P_{\bar{a}}$ אזי קיימת סביבה $(\bar{a}, \bar{x}) \in V$ וקיימת פונקציה $g \in C^1$ מוגדרת בסביבה של $\bar{a}$ כך שמתקיים:

$$\boxed{\forall (a, x) \in V \quad P_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(a)}$$

כלומר, קיבלנו שבסביבת שורשים מריבוי 1 של פולינומים, קיימת פונקציה גזירה ברציפות של המקדמים של הפולינום אשר מבטאת את השורש x.

5.4 מסקנה – אם $\bar{x}$ שורש פשוט של $P_{\bar{a}}$, אזי קיימת סביבה $\bar{a} \in V_1$ ו-$\bar{x} \in V_2$, וכן קיימת $g \in C^1(V_1, \mathbb{R})$ כך שלכל $a \in V_1$ וכן $x \in V_2$, מתקיים:

$$\boldsymbol{P_a(x) = 0 \quad x = g(a)}$$

הרצאה 8

נגזרות מסדר גבוה:

תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהא $f: U \mapsto \mathbb{R}$ עבורה קיימות הנגזרות החלקיות:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

לכל $1 \leq i \leq n$. בהנתן שנגזרות אלו גזירות בעצמן, שכן הן פונקציות מהצורה $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \mapsto \mathbb{R}$, ונוכל לכתוב:

$$D_i \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

סימונים מקובלים נוספים הם:

$$\partial_i = \partial_{x_i} = D_i$$

ואם $f = f(x, y, \cdots)$ אזי בהנתן:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

מסמנים:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy}$$

ובאופן דומה:

$$D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

6.1 הגדרה –נסמן ב-$C^k(U)$ את כל הפונקציות $f: U \mapsto \mathbb{R}$ המקיימות שכל הנגזרות החלקיות מסדר קטן או שווה ל-k קיימות והן כולן רציפות.

6.2 למה – תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^2(U)$. אזי, לכל i, j מתקיים:

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, D_i D_j = D_j D_i}$$

<u>הוכחה:</u>

מספיק להוכיח עבור $n = 2$. נרצה להראות, כי $f_{xy} = f_{yx}$. לשם כך, תהא $(a, b) \in U$ ונתבונן בביטוי:

$$G(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

<u>הערה</u> – רצוי לבדוק את הגבול:

$$\lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{G(h, k)}{h \cdot k}$$

ולראות כי ביטוי זה, הוא בדיוק $f_{xy}(a, b)$.

נגדיר עתה:

$$\varphi(t) = f(t, b+k) - f(t, b)$$

ונשים לב, כי:

$$G(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a) \overset{\text{ערך הביניים}}{=} \varphi'(p)h = \big(f_x(p, b+k) - f_x(p,b)\big)h$$

$$\overset{\text{ערך הביניים}}{=} f_{xy}(p,q)kh$$

אך נשים לב, כי היה ניתן לבצע את התהליך בסדר הפוך ולקבל כי:

$$f_{xy}(p,q)kh = G(h,k) = f_{yx}(p',q')hk$$

עבור $h,k \to 0$ נקבל כי $p', p \to a$, וכן $q', q \to b$ ולכן מרציפויות f_{xy}, f_{yx}, נקבל כי:

$$\boxed{f_{xy}(a,b) = \lim_{k,h\to 0} f_{xy}(p,q) = \lim_{k,h\to 0} f_{yx}(p',q') = f_{yx}(a,b)}$$

6.3 סימונים (Multi-Index Notation) – נסמן עבור $\boldsymbol{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n}$:

$$\boldsymbol{|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \qquad \boldsymbol{\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!}$$

$$\boldsymbol{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \quad \boldsymbol{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}} \quad \boldsymbol{\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}}$$

<u>דוגמאות:</u>

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2}$$

$$(x_1 + \cdots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

6.4 משפט – הא $\boldsymbol{U \subseteq \mathbb{R}^n}$ פתוחה וקמורה. תהא $\boldsymbol{f \in C^{k+1}(U)}$. אזי לכל $\boldsymbol{a \in U}$ ולכל $\boldsymbol{h}$ כך שמתקיים $\boldsymbol{(a+h) \in U}$ מתקיים:

$$\boldsymbol{f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i + \sum_{m=2}^{k} \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + R_k(f; a, h)}$$

כאשר:

$$\boldsymbol{R_k(f; a, h) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(a+ch)}{\alpha!} h^\alpha}$$

עבור $\boldsymbol{0 < c < 1}$ כלשהו זה נקרא פיתוח טיילור מסדר $\boldsymbol{k}$ ב-$\boldsymbol{n}$ משתנים.

נוכל לכתוב את הביטוי הנ"ל מחדש על ידי:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{Df^{\alpha}(a)}{\alpha!}(x-a)^{\alpha}}_{\substack{f \text{ פולינום טיילור של} \\ k \text{ מסדר } a \text{ מסביב}}} + R_k$$

6.5 הגדרה – פונקציה $p: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ מהצורה $p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha x^\alpha$ נקראת פולינום.

6.6 מסקנה – השגיאה היא $o\left(\|h\|_2^k\right)$.

נניח כי בסביבה של a מתקיים $|D^\alpha f(x)| \le M$ כך ש-$|\alpha| = k+1$. אזי מתקיים:

$$|R_k(f;a,h)| \le \frac{M}{\alpha!}\sum |h^\alpha| = \frac{M}{(k+1)!}(|h_1| + \cdots + |h_n|)^{k+1} \le \frac{M}{(k+1)!} n^{\frac{k+1}{2}} \|h\|_2^{k+1} = o\left(\|h\|_2^k\right)$$

הרצאה 9

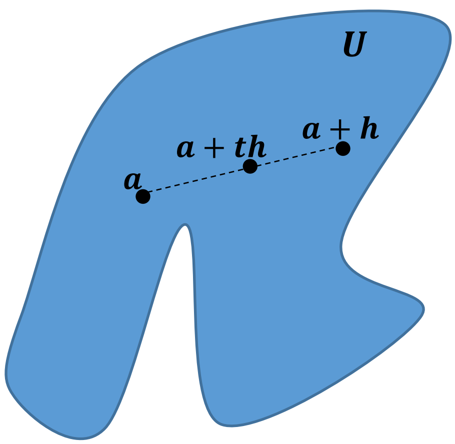
6.7 משפט – תהא $\boldsymbol{U \subseteq \mathbb{R}^n}$ פתוחה וקמורה ותהא $\boldsymbol{f \in C^{k+1}(U)}$. אזי לכל $\boldsymbol{a \in U}$ ולכל $\boldsymbol{h \in \mathbb{R}^n}$ (קטן מספיק), מתקיים:

$$\boldsymbol{f(a+h) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + R_k(f;a,h)}$$

כאשר:

$$\boldsymbol{R_k(f;a,h) \overset{0<c<1}{=} \sum_{|\beta|=k+1} \frac{D^\beta f(a+ch)}{\beta!} h^\beta}$$

<u>הוכחה:</u>



איור 8

נגדיר את הפונקציה $g(t) = f(a+th)$.

כך ש-$g: I \mapsto \mathbb{R}$, וזאת כאשר I קטע המכיל את $[0,1]$ (למשל קטע פתוח מהצורה $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו).

6.7.1 טענה - $\boldsymbol{g \in C^{k+1}(I)}$ ומתקיים לכל $\boldsymbol{0 \le m \le k+1}$:

$$\boldsymbol{\frac{d^m}{dt^m} g(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} h^\alpha D^\alpha f(a+th)}$$

<u>הוכחה:</u>

נראה זאת באינדוקציה –

בסיס האינדוקציה עבור $m = 0$ טריוויאלי. עבור $m = 1$ נראה כי מתקיים[5]:

$$\frac{d}{dt} f(a+th) = Df(a+ht) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right) f(a+th)$$

כאשר מכך נוכל להסיק כי:

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right) f(a+th)$$

ובאופן כללי מתקיים[6]:

$$\frac{d^m}{dt^m} g(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i \right)^m f(a+th) = \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} h^\alpha D^\alpha \right) f(a+th)$$

---

[5] זאת בהתאם לכלל השרשרת עבור ההרכבה $f \circ \psi$ כאשר $\psi: I \mapsto \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי $g = f \circ \psi$.

[6] בהרכבה m פעמים של האופרטור נשים לב כי בכל שלב מדובר על אופרטור ממרחב הפונקציות הגזירות ברציפות m פעמים למרחב של פונקציות גזירות ברציפות $m-1$ פעמים, כלומר למרחב גדול יותר. לא מדובר באותו אופרטור. הסיבה לכתיב הנ"ל היא מכך שבגזירות הפונקציה ברציפות בכל שלב נסיק כי כל הנגזרות החלקיות מתחלפות בסדר ולכן ניתן לקבל את הנוסחה מקומבינטוריקה מתחשיב מולטינומים.

עתה, נשים לב, כי ממשפט טיילור עם שארית לגרנז', מתקיים:

$$g(1) = \sum_{m \le k} \frac{g^{(m)}}{m!} 1^m + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(c) 1^{m+1}$$

עבור נקודה $0 < c < 1$.

אם נציב ביטויים אלה שקיבלנו, נקבל כי מתקיים:

$$g(1) = f(a+h) = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha h^\alpha f(a) + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(k+1)!}{\alpha!} D^\alpha f(a+ch) h^\alpha$$

ולאחר צמצום נקבל את הדרוש.

6.8 מסקנה – תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וקמורה, וכן תהא $f \in C^k(U)$, אזי מתקיים:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-\alpha)^\alpha + o\left(\|x-\alpha\|^k\right)}$$

מסקנה זו שונה מעט ממשפט טיילור המקורי שכן היא דורשת גזירות k פעמים בלבד ולאו דווקא גזירות $k+1$ פעמים.

<u>הוכחה:</u>

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k-1} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{\alpha=k} \frac{D^\alpha f(a+ch)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha f(a+ch) - D^\alpha f(a)](x-\alpha)^\alpha}_{\star}$$

נרצה להוכיח כי הביטוי $\star$ אכן מתפקד כ-$o\left(\|x-a\|^k\right)$. כלומר, נרצה להראות כי מתקיים:

$$\frac{[D^\alpha f(a+ch) - D^\alpha f(a)](x-\alpha)^\alpha}{\|x-a\|^k} \xrightarrow{x \to a} 0$$

היות והפונקציה f גזירה ברציפות k פעמים נקבל כי לכל α מתקיים:

$$D^\alpha f(a+ch) - D^\alpha f(a) \xrightarrow{h \to a} 0$$

וכן נשים לב שמתקיים:

$$\frac{(x-a)^\alpha}{\|x-a\|^k} = \frac{|x_1-a_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n-a_n|^{\alpha_n}}{\|x-a\|^k} \le \frac{\|x-a\|^{\alpha_1} \cdots \|x-a\|^{\alpha_n}}{\|x-a\|^k} = 1$$

ולכן בפרט:

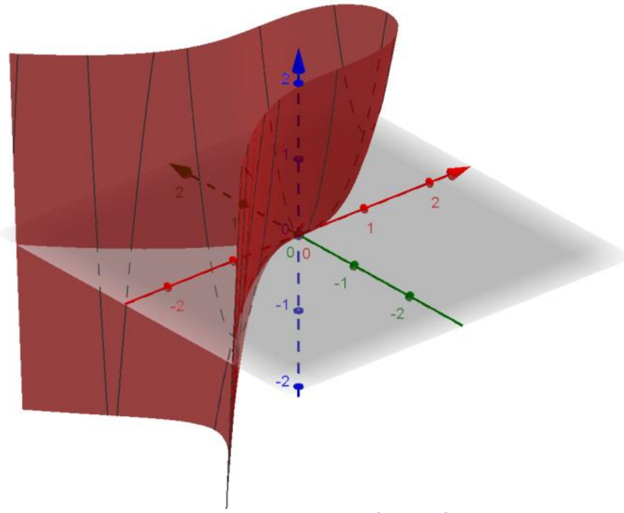
$$\frac{[D^\alpha f(a+ch) - D^\alpha f(a)](x-\alpha)^\alpha}{\|x-a\|^k} \le \frac{[D^\alpha f(a+ch) - D^\alpha f(a)]\|x-a\|^k}{\|x-a\|^k} \to 0$$

וכך נקבל את הדרוש.

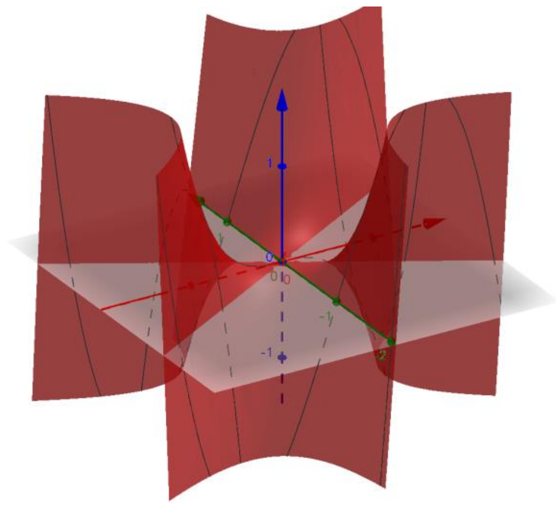
<u>סיווג נקודות קריטיות:</u>

7.1 הגדרה – בהנתן $f: U \mapsto \mathbb{R}$ ו-$U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, אם קיים $r > 0$ עבורו כך ש-$f(a) \leq f(x)$ לכל $x \in B_r(a)$ או לחילופין $f(a) \geq f(x)$, אזי a נקראת נקודת מינימום / מקסימום מקומית. אם האי שוויון חזק, אזי נאמר כי זו נקודת מינימום / מקסימום חזקה.

7.1.1 הגדרה – אם לכל $r > 0$ קיימים $x, y \in B_r(a)$ כך ש-$f(x) < f(a) < f(y)$



איור 4 – הפונקציה $f(x,y) = x^3 + 5y^2$ בעלת נקודת אוכף ב-$(0,0)$.



*איור 2 – הפונקציה $f(x,y) = 3y^2 - x^3$ כאשר $(0,0)$ הינה נקודת אוכף שלה 3 כיווני ירידה ו3 כיווני עליה (**"אוכף קופים"**)*

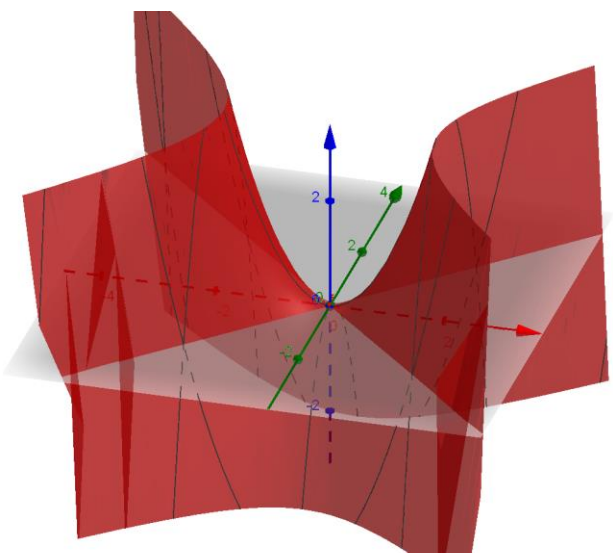
7.2 הגדרה – תהא $f \in C^2(U)$. אזי ההסיאן (Hessian) של f בנקודה a, הוא המטריצה:

$$\boldsymbol{H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n}}$$

זו מטריצה סימטרית והיא מגדיר תבנית ריבועית על ידי:

$$\boldsymbol{\forall v \in \mathbb{R}^n}$$

$$\boldsymbol{\langle H_f(a)v, v\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j}$$



איור 3 – הפונקציה $f(x,y) = x^2 - y^2$ כאשר $(0,0)$ הינה נקודת אוכף שלה 2 כיווני ירידה ברורים ו-2 כיווני עליה

נשים לב, כי בעבור פונקציה כנ"ל, מתקיים:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha + o(\|h\|^2)$$

כאשר, כאמור, מתקיים:

$$|\alpha| = 2 \rightarrow \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 2$$

כלומר בכל אחד מהמקרים האפשריים, או שאחד מהמקדמים הללו הינו 2 והיתר 0, או שיש שני מקדמים שערכם 1 והיתר 0. לכן ניתן לרשום:

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + \sum_{1\le i<j\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

$$\stackrel{?}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + o(\|h\|^2)$$

(כתרגיל להראות את השוויון הנ"ל).

עתה, נניח כי $H_f(a)$ לכסינה, וכך נקבל כי היא דומה למטריצה מהצורה $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$. נניח אם כן, כי a נקודה קריטית, ונשים לב כי:

$$f\big(a+(x,y)\big) \approx \frac{1}{2}\langle H_f(a)(xu_1+yu_2), (xu_1+yu_2)\rangle = \lambda x^2 + \mu y^2$$

כך שניתן לראות כי מיחסי λ, μ מבחינת חיוביות / שליליות, נוכל לזהות נקודות מקסימום ומינימום. כלומר:

7.3 הגדרה – תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית. אזי:

א. A נקראת (מוגדרת) אי שלילית אם לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle Av, v\rangle \ge 0$, ומסמנים $A \ge 0$.
ב. A נקראת (מוגדרת) חיובית אם אי השוויון של א' (לכל $0 \ne v \in \mathbb{R}^n$) חזק.
ג. A נקראת (מוגדרת) אי חיובית אם לכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle Av, v\rangle \le 0$ ומסמנים $A < 0$.
ד. A נקראת (מוגדרת) שלילית אם אי השוויון של ב' (לכל $0 \ne V \in \mathbb{R}^n$) חזק.
ה. A נקראת לא מוגדרת אם קיימים $u, v \in \mathbb{R}^n$ עבורם $\langle Au, u\rangle < 0 < \langle Av, v\rangle$.

7.4 תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^2(U)$. אזי בהנתן $a \in U$ נקודה קריטית, מתקיים:

א. אם $H_f(a) > 0$ אזי a נקודת מינימום חזקה.
ב. אם $H_f(a) < 0$ אזי a נקודת מקסימום חזקה.
ג. אם $H_f(a)$ לא מוגדרת אזי a נקודת אוכף.

<u>הערה</u> – זה לא מכסה כמובן את כל המקים. במקרים שבהם $H_f(a) \le 0$ או $H_f(a) \ge 0$ ייתכן שהנקודה תהא מקסימום או מינימום חלש או נקודת אוכף.

<u>הוכחה:</u>

תהא a נקודה קריטית, קרי נקודה שבה $\nabla f(a) = 0$. אזי מתקיים:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + R(h) \qquad \frac{R(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

נניח כי $H_f(a) > 0$. אזי נקבל כי:

$$0 < c \coloneqq \min_{\|v\|=1} \langle H_f(a)v, v\rangle = \min_{\|v\|\ne 0} \frac{\langle H_f(a)v, v\rangle}{\|v\|^2}$$

אזי לכל h מתקיים: $\langle H_f(a)h, h\rangle \ge c\|h\|^2$. יהא $r > 0$ כך ש-$B_r(a) \subseteq U$, אזי מתקיים:

$$\frac{|R(h)|}{\|h\|^2} < \frac{1}{2}c \to |R(h)| < \frac{c}{2}\|h\|^2$$

ועבור h כזה מתקיים:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + R(h) \geq f(a) + \frac{c}{2}\|h\|^2 - |R(h)| > f(a)$$

כנדרש. באופן דומה נוכיח עבור נקודת מינימום. ולכן a נקודה קריטית חזקה.

הרצאה 10

תזכורת:

בהרצאה האחרונה הראינו כי בהנתן $f \in C^2(U)$ ונקודה $a \in U$ המהווה נקודה קריטית. אזי ניתן להתבונן בקירוב לפי משפט טיילור מסדר שני, ולקבל ביטוי מהצורה:

$$f(a+h) = f(a) = \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + R(h)$$

כך שמתקיים:

$$\frac{R(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

והראינו כי עבור $H_f(a) > 0$ או $H_f < 0$ ניתן להסיק כי a נקודת קיצון חזקה.

עתה, נניח כי $H_f(a)$ אינה מוגדרת (במובן חיוביות/אי חיובית). יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה. נסמן:

$$b = \langle H_f(a)u, u\rangle < 0$$
$$c = \langle H_f(a)v, v\rangle > 0$$

ובוחרים $r > 0$ כך שלכל h מתקיים:

$$\|h\| < r \to \left|\frac{R(h)}{\|h\|^2}\right| < \frac{1}{2}\min\{|b|, c\}$$

וכך, עבור כל $0 < t < r$ יתקיים:

$$f(a+tu) = f(a) + \frac{1}{2}\langle H_f(a)tu, tu\rangle + R(tu) \leq f(a) + \frac{b}{2}t^2 + |R(tu)| < f(a)$$

וזאת משום שכאמור, דרשנו $|R(tu)| < \frac{1}{2}|b|t^2$. באופן דומה, עבור $f(a+tv) > f(a)$ ניתן להראות בצורה זהה.

יריעות C^1 משוכנות:

8.1 הגדרה – תת קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת יריעה C^1 ממימד k אם לכל נקודה $a \in M$ קיימות קבוצות פתוחות $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש-$a \in U$ ופונקציה הפיכה ורגולרית $f: U \mapsto V \in C^1$ כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{F(M \cap N) = V \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right) = \{x \in V | x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}}$$

8.2 משפט – התנאים הבאים שקולים עבור $M \subseteq \mathbb{R}^n$:

א. M יריעה ממימד k.

ב. לכל $a \in M$ קיימת סביבה $a \in U$ וקיימת $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ רגולרית כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{M \cap U = \{x \in U | g(x) = 0\}}$$

ג. לכל $a \in M$ עד כדי פרמוטציה של המשתנים, קיימת סביבה $a \in V \times W$ כך ש-$V \subseteq \mathbb{R}^k$ וכן $W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ וקיימת $h \in C^1\left(V, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ כך שמתקיים $M \cap (V \times W) = graph(h)$ כאשר:

$$\boldsymbol{graph(h) = \{(x', h(x')) | x' \in V\}}$$

<u>דוגמה:</u>

תהא $\partial\mathbb{B}_{n+1} = S^n = \{x|\|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ונראה כי קבוצה זו הינה יריעה.

<u>לפי ב'</u> – נבחר $U = \mathbb{R}^{n+1}$ ונגדיר:

$$g: U \mapsto \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$$

נשים לב כי $\nabla g = 2(x_1, \cdots, x_n)$ ולכן רגולרית ב-U. וכן מתקיים, כנדרש:

$$S^n = S^n \cap U = \{x \in U|g(x) = 0\}$$

<u>לפי ג'</u> – יהא $a \in S^n$ ויהא $a_i \neq 0$ עבור i כלשהו. נבחר $V = \mathbb{B}_n$ וכן $W = (-\infty, 0)$ ונגדיר:

$$h(y_1, \cdots, y_n) = -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

ונקבל כי אכן:

$$S^n \cap (W \times V) = \{(h(x), x)|x \in \mathbb{B}_n\}$$

<u>דוגמה חשובה</u> – לכל $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות אשר מהוות יריעה ממד n מתקיים שאם $V < \mathbb{R}^n$ תת מרחב כך ש-:

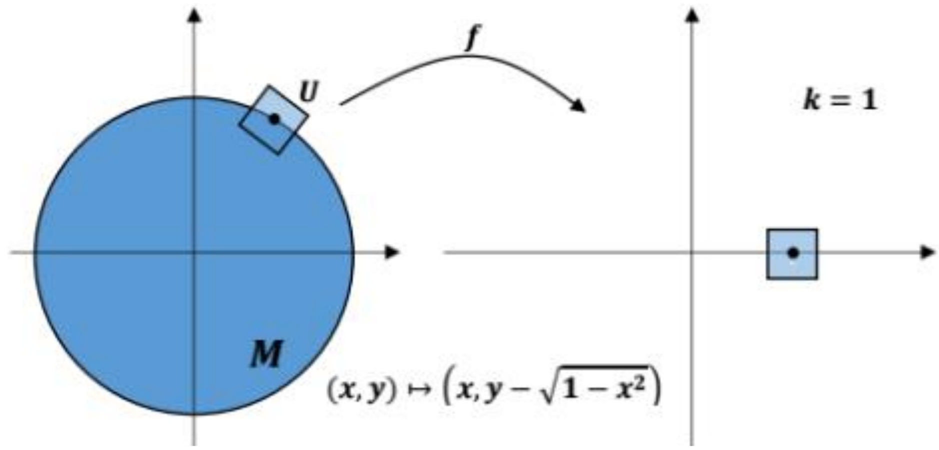
$$U \subseteq \mathbb{R}^k \cong V$$

אזי U תת מרחב מממד k.

תזכורת:

$M \subset \mathbb{R}^n$ נקראת יריעה C^1 ממממד k אם לכל נקודה $a \in M$ קיימת סביבה $a \in U$ וקיימת $V \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, וכן העתקה $f: U \to V \ni C^1$ הפיכה ורגולרית כך שמתקיים:

$$f(M \cap U) = \{x \in V | x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$$



8.3 משפט – התנאים הבאים שקולים להגדרת $M \subset \mathbb{R}^n$:

א. M יריעה ממממד k.

ב. לכל $a \in M$ קיימת סביבה $a \in U$ וקיימת $g \in C^1\left(U, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ רגולרית כך שמתקיים:

$$U \cap M = \{x \in U | g(x) = 0\}$$

ג. לכל $a \in M$, עד כדי פרמוטציה של המשתנים, קיימות סביבות $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ וכן $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$, כך שעבור הסימון $a = (a', a'') \in V \times W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, קיימת $h \in C^1\left(V, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ כך שמתקיים:

$$M \cap (V \times W) = \text{graph}(h) = \left\{\left(x', h(x')\right) \middle| x' \in V\right\}$$

<u>הוכחה:</u>

א⇐ב – נניח כי אכן, עבור $a \in M$ קיימות f, V, U כמתואר בהגדרה. אזי נגדיר:

$$\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k} \quad \pi(x_1, \cdots, x_n) = (x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

ונגדיר בהסתמך על הטלה זו:

$$g = \pi \circ f \quad g'(x) = \underbrace{\pi}_{\text{rank}=n-k} \circ \underbrace{f'(x)}_{\text{rank}=n}$$

כלומר, g כפי שהגדרנו אותה רגולרית כדרוש. נשים לב, אם כן, כי עבור $g: U \to \mathbb{R}^{n-k}$, נוכל לראות כי מתקיים:

$$x \in M \cap U \Leftrightarrow f(x) \in \{y \in V | y_{k+1} = \cdots = y_n = 0\} \Leftrightarrow \pi\left(f(x)\right) = g(x) = 0$$

ב⇐ג – נניח כי $a \in M$ וכן g, U נתונים כמתואר במשפט. אזי מתקיים:

$$\text{rank}\frac{\partial(g_1, \cdots, g_{n-k})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = n - k$$

ומכאן נסיק כי ישנן $n-k$ עמודות בלתי תלויות. כאמור, נניח כי בלי הגבלת הכלליות, מדובר ב-$n-k$ העמודות האחרונות. נקבל מכך כי מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה, ולכן קיימות סביבות V,W ופונקציה $h\in C^1\left(V,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה מתקיים, כנדרש:

$$M\cap(V\times W)=\left\{\left(x',h(x')\right)\middle|x'\in V\right\}$$

ג⟸א נניח כי $a\in M$ וכי נתונות V,W,h כמתואר בתנאי המשפט. נגדיר, על סמך אלו, $U=V\times W$ וכן $f:U\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי:

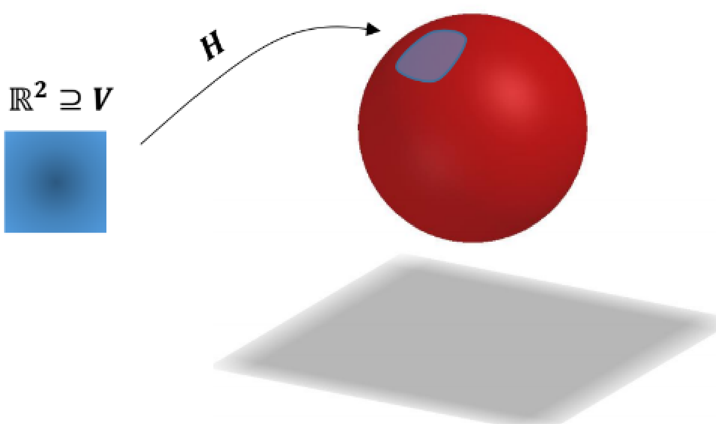
$$f\in C^1\quad f(x',x'')=\left(x',x''-h(x')\right)\quad J_f=\begin{bmatrix}I_k & 0\\ -J_h & I_{n-k}\end{bmatrix}$$

וזו מטריצה מדרגה מלאה, כמובן, ומכאן נסיק כי f הפיכה בסביבת a, ולאחר שנבחר סביבה מתאימה חלקית ל-U, שקיומה מובטח ממשפט הפונקציה ההפוכה, נקבל את הדרוש.

8.4 משפט – תהא $\mathbb{R}^n\supset M$. אזי M יריעה מממד k ⟺ לכל $a\in M$ קיימת סביבה $a\in U\subset\mathbb{R}^n$ וקיימת קבוצה פתוחה $V\subset\mathbb{R}^k$ וכן העתקה $H:V\to U\cap M\subset\mathbb{R}^n$ חד-חד ערכית ועל, וכן מתקיים $H\in C^1(V,\mathbb{R}^n)$ ובנוסף $\operatorname{rank}DH=k$ בכל V.

8.4.1 הגדרה – זוג (H,V) כמתואר במשפט הנ"ל נקרא <u>מערכת קואורדינטות</u> (בסביבת a) או <u>פרמטריזציה</u> בסביבת a.

<u>הוכחה:</u>



אם M יריעה בסביבת $a\in U=V\times W$ כך שמתקיים:

$$M\cap U=\left\{\left(x',h(x')\right)\middle|x'\in V\right\}$$

עבור h הנתונה מהגדרת היריעה, נוכל להגדיר את H באופן הבא:

$$H:\underset{\subset\mathbb{R}^k}{V}\to\mathbb{R}^n$$

$$H(x)=\left(x,h(x)\right)\quad J_H=\begin{bmatrix}I\\ J_h\end{bmatrix}$$

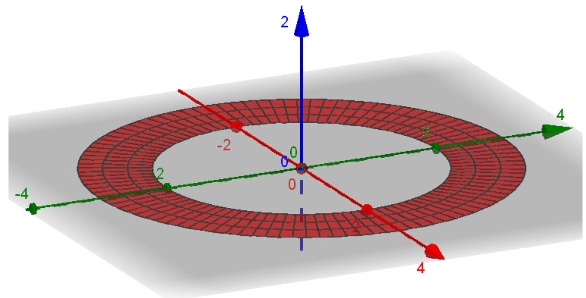
ואכן יתקיים כדרוש $\operatorname{rank}DH=k$.

<u>דוגמאות:</u>

נניח $H:\mathbb{R}\times(-1,1)\to\mathbb{R}^3$ שתוגדר על ידי:

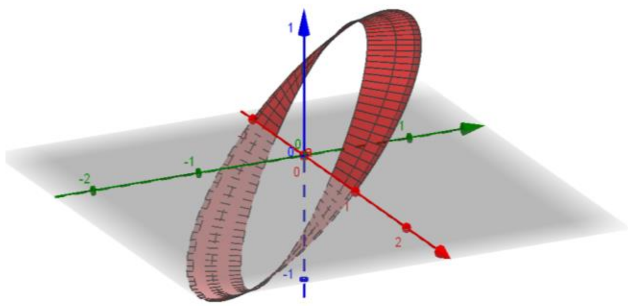
$$H(s,t)=2\cos(s)\,e_1+2\sin(s)\,e_2+v(s)t\quad v(s)=\cos(s)\,e_1+\sin(s)\,e_2$$

ובמקרה זה נקבל כי הפרמטריזציה, מתארת אובייקט אשר הנקודות שלו, יחידת למעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 2, מוסיפים בכל פעם את כל הנקודות בכיוון חיצוני למרכז המעגל, שמרחקן מהנקודה אינו עולה על 1. כך שנוצרת למעשה צורה של דסקה הנמצאת במישור xy.



עתה נגדיר פרמטריזציה חדשה, מהצורה הבאה:

$$v(s) = u(s)\cos\left(\frac{s}{2}\right) + \sin\left(\frac{s}{2}\right) e_3$$
$$u(s) = \cos(s)\, e_1 + \sin(s)\, e_2$$



וכפי שניתן לראות מן האיור שלהלן, התקבלת צורה הידועה בשם טבעת מוביוס (Möbius Strip).

בשלב הבא נגדיר פרמטריזציה באופן הבא:

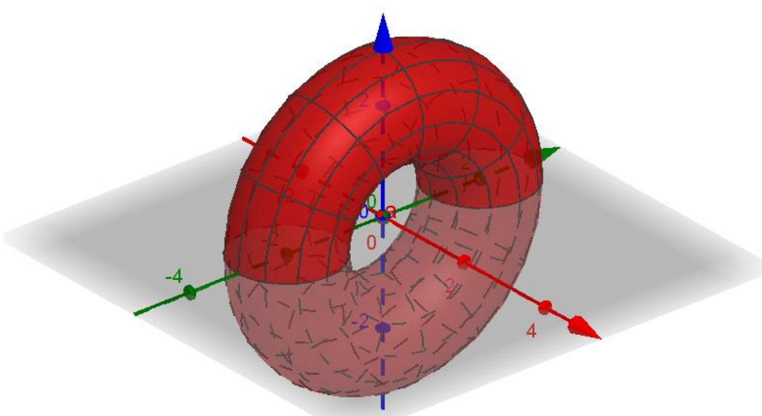
$$H(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(v) & -\sin(v) \\ 0 & \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(u) \\ 0 \\ 2+\cos(u) \end{bmatrix}$$

כאשר למעשה המטריצה השמאלית מתארת באופן כללי סיבוב של וקטור ב-$\mathbb{R}^3$ סביב ציר ה-x. בסה"כ נקבל:

$$H(u,v) = \begin{bmatrix} \sin u \\ -\sin v\,(2+\cos u) \\ \cos v\,(2+\cos u) \end{bmatrix} \quad J_H = \begin{bmatrix} \cos u & 0 \\ \sin u \sin v & -\cos v\,(2+\cos u) \\ -\sin u \cos v & -\sin v\,(2+\cos u) \end{bmatrix}$$

ונשים לב כי פרמטריזציה זו אכן מוגדרת היטב שכן אם נניח, לדוגמא, כי השורה הראשונה מתאפסת, כלומר $\cos u = 0$, אזי ממילא נקל לראות כי השורה השניה והשלישית אינן מתאפסות, כלומר דרגת J_H אכן 2 כדרוש. צורה זה, שהתקבלה, קרויה טורוס.

<u>כתרגיל:</u>



א. הוכיחו כי הטורוס קומפקטי.
ב. האם ישנה העתקה רציפה מ-$\mathbb{S}^2$ ל-$\mathbb{T}^2$?
ג. האם ישנה העתקה רציפה מ-$\mathbb{T}^2$ על $\mathbb{S}^2$?
ד. במקום שני הסעיפים הקודמים, ניתן לשאול במקום האם קיימת:
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
הפיכה וגזירה ברציפות המעתיקה את הטורוס על הספירה?

8.5הגדרה – <u>מסילה רציפה ב-$\mathbb{R}^n$</u> זו פונקציה:

$$(\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_n}) = \boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

כאשר $\mathbb{R} \supset \boldsymbol{I}$ קטע ו-$\boldsymbol{f_i} \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I})$ לכל $\boldsymbol{I}$.

8.5.1 הגדרה – אם $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C^1}(\boldsymbol{I})$ אזי אומרים כי $\boldsymbol{f}$ <u>מסילה גזירה ברציפות.</u>

<u>הערה</u> – אם $M \subset \mathbb{R}^n$ יריעה ממימד C^1 אזי סביב כל נקודה נקבל כי M הנה תמונה של מסילה גזירה.

<u>דוגמה</u> – נגדיר:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (t^2, t^3)$$

נשים לב כי $f'(t) = (2t, 3t^2)$ כך שהפרמטריזציה המגדירה את המשטח אמנם גזירה ברציפות, אך ה"שפיץ" שיש ביריעה זו בנקודה $(0,0)$ היא נקודה שבה היריעה אינה גזירה.

8.6 הגדרה – אם $f: I \to \mathbb{R}^k$ גזירה, מסמנים $f'(t) = Df(t)$ והנ"ל מכונה <u>וקטור המהירות של המסילה f בזמן t</u>.

<u>הרצאה 11</u>

8.7 הגדרה – תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ממימד k. אזי פונקציה $g: M \mapsto \mathbb{R}^m$ נקראת גזירה ברציפות אם לכל $a \in M$ ולכל מערכת קואורדינטות (פרמטריזציה) ב-a מהצורה (H, V) מתקיים:

$$g \circ H \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$$

<u>כתרגיל</u> – הראו כי:

א. ההגדרה אינה תלויה בבחירת מערכת הקואורדינטות.
ב. הוכיחו, כי $g: M \mapsto \mathbb{R}^m$ הינה $C^1 \Leftrightarrow$ קיימת סביבה $a \in U$ ו-$G \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ כך ש:

$$g|_{M \cap U} = G|_{M \cap U}$$

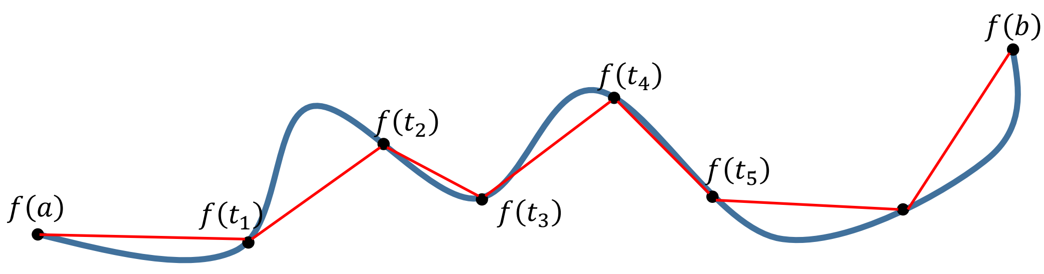
9.1 הגדרה – תהא $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ מסילה רציפה, ותהא $P = \{a = t_0 < \cdots < t_k = b\}$ חלוקה של $[a, b]$. נגדיר:

$$l(f, P) = \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

ונגדיר:

$$l(f) = sup_P l(f, P)$$

אזי אם $l(f) < \infty$ נאמר כי המסילה $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ היא בעלת אורך ו-$l(f)$ ייקרא האורך של המסילה.



איור 9 – דוגמה לעקום (בכחול), חלוקה של העקום (הנקודות השחורות) והסכום $l(f, P)$ (הקטעים האדומים)

9.2 משפט – אם $f \in C^1([a, b])$, אזי למסילה $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ יש אורך.

<u>הוכחה:</u>

תהא $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ חלוקה. אזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|=\sum_{i=1}^{k}\|f'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})+o(t_i-t_{i-1})\|$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\|f'(t_{i-1})\|(t_i-t_{i-1})+\sum_{i=1}^{k}o(t_i-t_{i-1})$$

ונשים לב, שכאשר $\max_i(t_i-t_{i-1})\to 0$ נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{k}\|f'(t_{i-1})\|(t_i-t_{i-1})\to\int_a^b\|f'(t)\|dt$$

ומאידך:

$$\sum_{i=1}^{k}o(t_i-t_{i-1})\overset{(\star)}{=}\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\,o(1)=o(1)(b-a)\to 0$$

כאשר $(\star)$ דורש הצדקה נוספת. לשם כך נטען:

9.3 טענה – תחת כל תנאי המשפט, מתקיים $l(f,P)\le\int_a^b\|f'(t)\|dt$ לכל חלוקה P.

<u>הוכחה:</u>

נראה עבור $P=\{a<b\}$. מתקיים:

$$\left\|\begin{pmatrix}\int_a^b f_1'(t)dt\\ \int_a^b f_2'(t)dt\\ \vdots\\ \int_a^b f_n'(t)dt\end{pmatrix}\right\|^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f_j'(t)dt\right)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f_j'(s)ds\right)\left(\int_a^b f_j'(t)dt\right)$$

$$=\int_a^b\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f_j'(s)ds\right)f_j'(t)dt\overset{\text{א"ש קושי-שוורץ}}{\le}\int_a^b\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b f_j'(s)ds\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{\|f(b)-f(a)\|}\cdot\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n}f_j'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}}}_{\int_a^b\|f'(t)\|dt}dt$$

ולכן, בחלוקה ב-$\|f(b)-f(a)\|$ נקבל את אי השוויון:

$$\|f(b)-f(a)\|\le\int_a^b\|f'(t)\|dt$$

ולכן נסיק כי באופן כללי עבור חלוקה כלשהי מתקיים:

$$\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|\le\int_{t_{i-1}}^{t}\|f'(t)\|dt$$

ואם נסכום לכל i נקבל בדיוק את הטענה הכללית.

עתה, לכל $\tau \in (a,b)$ נגדיר:

$$L(\tau) = \begin{pmatrix} \text{האורך של} \\ f:[a,\tau] \mapsto \mathbb{R}^n \end{pmatrix}$$

וכאמור $L(\tau)$ קיים וסופי לכל τ, מהטענה.

יהא $h > 0$ בלי הגבלת הכלליות, ונשים לב, כי:

$$\frac{\|f(\tau+h)-f(\tau)\|}{h} \leq \frac{L(\tau+h)-L(\tau)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\tau}^{\tau+h}\|f'(t)\|dt \xrightarrow{h\to 0} \|f'(t)\|$$

כלומר, קיבלנו כי $L(\tau)$ גזירה ומתקיים:

$$L'(t) = \|f'(t)\|$$

ונוכל לרשום, בנוסף:

$$\boxed{L(b) = \underbrace{L(a)}_{=0} + \int_a^b L'(t)dt}$$

הרצאה 12

מרחב המשיק:

10.1 הגדרה – לכל $p \in \mathbb{R}^n$ נגדיר את המרחב המשיק ל-$\mathbb{R}^n$ בנקודה p להיות:

$$T_p(\mathbb{R}^n) = \{(p,v) | v \in \mathbb{R}^n\}$$

10.1.1 סימון - $(p,v) = v_p = v$.

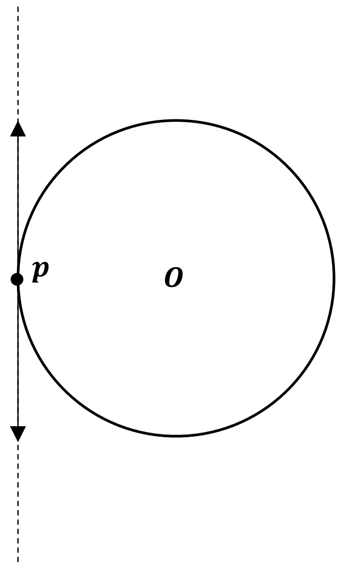
אם $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב וקטורי, אזי $V_p = \{(p,v)|v \in V\} \subseteq T_p(\mathbb{R}^n)$ וניתן לזהות אותו עם המרחב:

$$V_p = p + V = \{p + v | v \in V\}$$

10.2 הגדרה – תהא $M \subset \mathbb{R}^n$ יריעה C^1 ממד k, ותהא $p \in M$ נקודה ביריעה.
המרחב המשיק ל-M ב-p מוגדר להיות:

$$\left\{ p + \gamma'(t_0) \middle| \begin{array}{c} \overset{\in C_1}{\gamma} : (a,b) \mapsto M \\ t_0 \in (a,b) \quad \gamma(t_0) = p \end{array} \right\}$$

13.2.1 סימון - $T_p(M) = \left(\left\{ \gamma'(t_0) \middle| \begin{array}{c} \overset{\in C_1}{\gamma} : (a,b) \mapsto M \\ t_0 \in (a,b) \quad \gamma(t_0) = p \end{array} \right\} \right)_p$



איור 10 – דוגמה למרחב המשיק לנקודה p על מעגל היחידה (המרחב המשיק הוא הקו המקווקו).

10.3 הגדרה - $T_p(M) = \left[Im\left(DH(q)\right)\right]_p$ **כאשר** $H: V \subseteq \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$ **מערכת קואורדינטות סביב p וקיים q עבורו $H(q) = p$.**

דוגמה:

עבור מערכת קואורדינטות $H: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$H(t) = (\cos t, \sin t)$$

(קרי, פרמטריזציה של חצי מעגל), נבחר בנקודה $p = (1,0)$ ונשים לב כי:

$$DH(0) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$$

ונשים לב כי:

$$Im\left(DH(0)\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow \mathrm{T_p}(M) = p + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

וזה אכן, מרחב המתיישב אינטואיטיבית עם ההגדרה שלנו למרחב המשיק בנקודה הנ"ל (במקרה זה, הנ"ל דומה למרחב הוקטורי באיור 1).

10.4 הגדרה - תהא $M \ni p$ כך שקיימת U עבורה $p \in U$. נסמן $p = (a', a'')$ (כך ש-$a' \in \mathbb{R}^k$ וכן $a'' \in \mathbb{R}^{n-k}$), עבורה:

$$U \cap M = \left\{ \left(x', h(x')\right) \middle| x \in \underset{\subseteq \mathbb{R}^k}{V} \right\} \quad h \in C^1\left(V, \mathbb{R}^{n-k}\right)$$

אזי נגדיר:

$$T_p(M) = graph\begin{pmatrix} \text{הקירוב האפיני של} \\ \boldsymbol{h} \text{ בנקודה } \mathbf{a}' \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$T_p(M) = \{(v, h(a') + Dh(a')(v - a')) | v \in \mathbb{R}^k\}$$

וזהו מקרה מיוחד של הגדרה 13.3 כך ש-$(H: V \mapsto \mathbb{R}^n, H(v) = (v, h(v))$.

10.5 הגדרה – אם $M \cap U = \{x | g(x) = 0\}$ עבור $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k})$ רגולרית, אזי נגדיר:

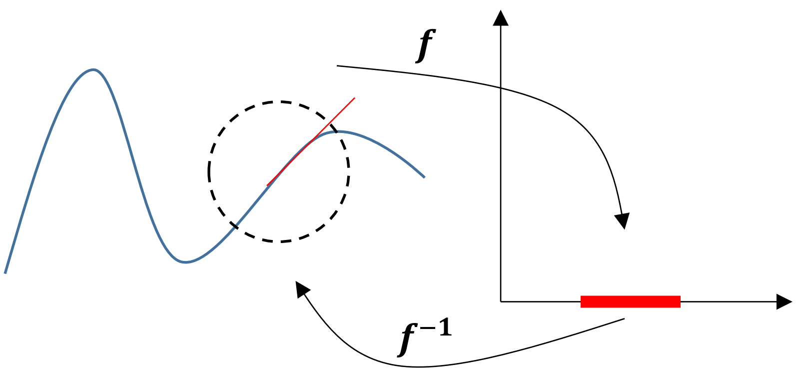
$$T_p(M) = [ker\ Dg(p)]_p = \{x \in \mathbb{R}^n | Dg(p)(x - p) = 0\}$$

10.6 הגדרה – עבור $p \in U$, כך שמוגדרת $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ עבורה:

$$f(M \cap U) = V \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

נגדיר:

$$T_p(M) = \{p + Df(p)^{-1}(v, 0) | v \in \mathbb{R}^k\}$$



איור 11 תיאור סכמטי של הגדרה 13.6 כתיאור המרחב המשיך כמרחב וקטור

10.7 משפט – כל ההגדרות שקולות.

<u>הוכחה:</u>

הגדרה 13.3 $\Leftrightarrow$ הגדרה 13.5 – נניח כי H, g נתונות כמ

$$p \in U \cap M = \{x \in U | g(x) = 0\}$$

ונניח, כאמור, כי מתקיים בנוסף $H: V \subseteq \mathbb{R}^k \mapsto U \cap M$ $p \in$ כך שקיים $q \in V$ עבורו $H(q) = p$. לכן, מתקיים:

$$g \circ H \equiv 0$$

כלומר:

$$Dg\left(\underset{p}{H(q)}\right) \circ DH(q) = 0 \Longrightarrow Im(DH(q)) \subseteq \ker(Dg(p))$$

אבל שניהם ממימד k ולכן מתקיים שוויון.

נראה כי הגדרה 13.2 $\Leftrightarrow$ הגדרה 13.5 – תהא $p = \gamma(t_0)$ עבור $\gamma: (a, b) \mapsto M$.

<u>אינטגרציה על עקומים:</u>

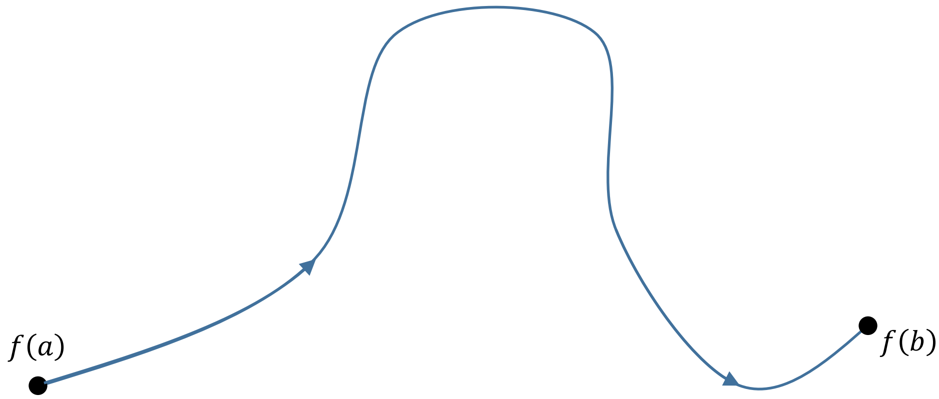
10.8 הגדרה – <u>עקום פשוט וחלק</u> זו תת קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה תמונה של מסילה גזירה ברציפות:

$$f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$$

המקיימת:

א. f חד-חד ערכית למעט אולי בנקודות a, b, כלומר למעט אפשרות שבה $f(a) = f(b)$.
ב. $f'(t) \neq 0$.

10.9 הגדרה – <u>עקום מכוון</u> הינו עקום, עבורו מבחינים בין $f(a)$ כנקודת ההתחלה לבין $f(b)$ כנקודת הסוף.



10.10 הגדרה – אם $f(a) = f(b)$, אזי C נקרא <u>עקום סגור</u>.

<u>הערה</u> – קל לטפל באיחוד סופי של עקומים פשוטים וחלקים.

<u>תזכורת</u> – הגדרנו את:

$$l(f) = \sup_P l(f, P) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

10.11 הגדרה – אם C עקום פשוט וחלק, נגדיר:

$$\boldsymbol{l(C) = l(f)}$$

עבור f מההגדרה הקודמת.

10.12 טענה - $l(C)$ כפי שהגודר ב-13.11 מוגדר היטב.

<u>הוכחה:</u>

דרך ההוכחה, תהיה לנסות להגדיר חלוקות של $[a, b]$ המתאימות לחלוקה של C.

<u>דיון על פרמטריזציית "אורך קשת":</u>

תהא $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ פרמטריזציה של עקום פשוט וחלק C. בהרצאה הקודמת ראינו כי $L: [a, b] \mapsto [0, l(C)]$ המוגדרת על ידי $L(t) = l\left(f|_{[a,t]}\right)$ גזירה:

$$L'(t) = \|f'(t)\| \Longrightarrow \begin{array}{c} L \in C^1 \\ \forall t \quad L'(t) \neq 0 \end{array}$$

וממשפט הפונקציה ההפוכה קיימת $\sigma \in C^1$ מהצורה $\sigma: [0, l(C)] \mapsto [a, b]$ עבורה מתקיים:

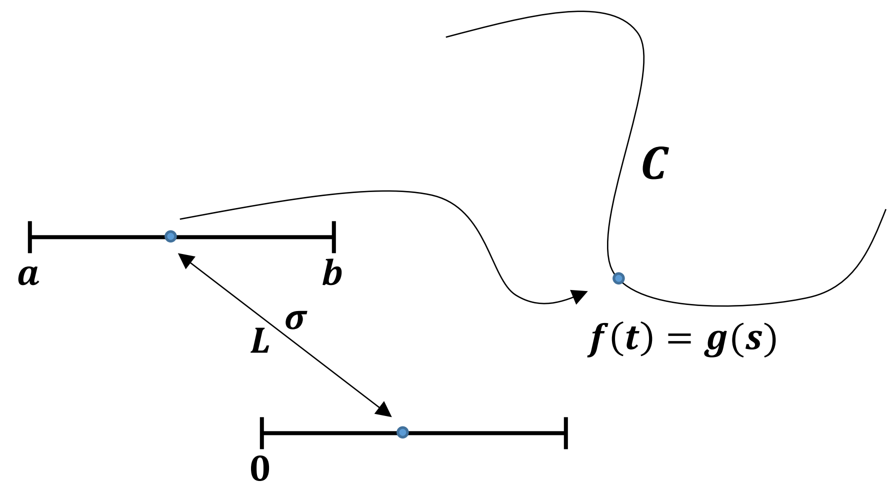
$$\sigma'(s) = \frac{1}{L'\left(L^{-1}(s)\right)} = \frac{1}{\left\|f'\left(\sigma(s)\right)\right\|} (\star)$$

ומכאן שניתן להגדיר פרמטריזציה חדשה על ידי:

$$g:[0,l(C)] \mapsto C \subseteq \mathbb{R}^n$$

כך שמתקיים:

$$g(s)=f\big(\sigma(S)\big) \quad \begin{matrix} s=L(t) \\ t=\sigma(s) \end{matrix}$$



ולכן:

$$l(C)=\int_a^b \|f'(t)\|dt=\int_0^{l(C)} \big\|g'\big(\sigma(s)\big)\big\|\sigma'(s)ds$$

$$l(C)=\int_0^{l(C)} \|g'(s)\|ds=\int_0^{l(C)} ds$$

כאשר את המעבר האחרון נצדיק על ידי:

$$\|g'(s)\|=\big\|f'\big(\sigma(s)\big)\big\||\sigma'(s)| \overset{(\star)}{=} 1$$

10.13 הגדרה – פרמטריזציה $\boldsymbol{g}$ של עקום עבורה $\|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{s})\|=\mathbf{1}$ נקראת <u>פרמטריציית אורך קשת</u>.

הרצאה 14

הקפיץ המתואר באיור 1 נתון על ידי הפונקציה:

$$f: [0, L] \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = (a\cos\omega t\,, a\sin\omega t\,, bt)$$

$$f'(t) = (-\omega a\sin\omega t\,, \omega a\cos\omega t\,, b)$$

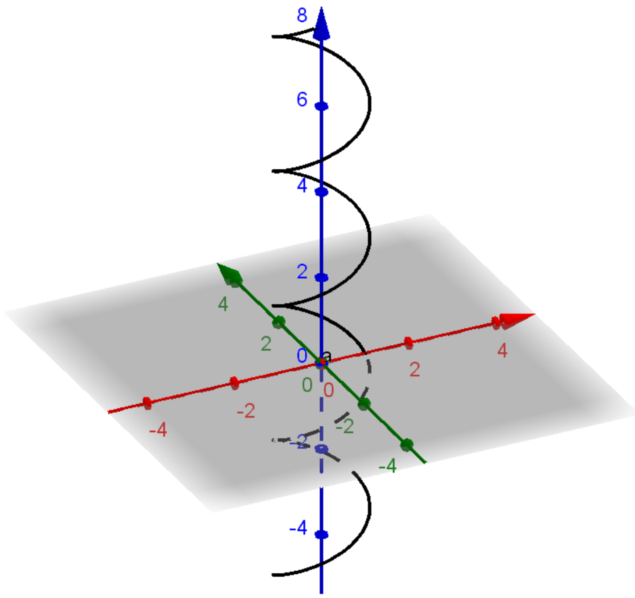
נוכל לחשב את אורך הקפיץ על ידי:

$$l(C) = l(f) = \int_0^L \|f'(t)\| dt$$

$$= \int_0^L \sqrt{\omega^2 a^2 \sin^2\omega t + \omega^2 a^2 \cos^2\omega t + b^2} dt$$

$$= L\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$$

נשים לב כי $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$ ולכן נסיק כי זו **אינה** פרמטריזציית אורך קשת כפי שהגדרנו בהרצאה הקודמת.



איור 12 - תיאור של קפיץ (Helix)

נגדיר פרמטריזציה חדשה על ידי:

$$g: \left[0, L\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}\right] \mapsto C \subset \mathbb{R}^3 \quad g(s) = f\big(\sigma(s)\big)$$

כאשר $\sigma(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}$. במקרה זה, נשים לב כי:

$$\|g'(s)\| = \big\|f'\big(\sigma(s)\big)\sigma'(s)\big\| = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}\frac{1}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} = 1$$

וקיבלנו כי g הינה פרמטריזציית אורך קשת מתאימה לקפיץ שמתואר בבעיה.

<u>דוגמה:</u>

תהא הפונקציה:

$$f(t) = \left(\cos t\,, \sin t\,, \frac{1}{2}t^2\right)$$

ונשים לב כי:

$$\|f'(t)\| = \|(-\sin t\,, \cos t\,, t)\| = \sqrt{1 + t^2}$$

כלומר:

$$l(f) = \int_0^L \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2}\left[L(1 + L^2)^{\frac{1}{2}} + \ln\left(L + \sqrt{1 + L^2}\right)\right]$$

ונרצה למצוא עבור פרמטריזציה זו את פרמטריזציית אורך הקשת המתאימה:

$$\sigma: [0, l(L)] \mapsto [0, L] \quad g(s) = f\big(\sigma(s)\big) \quad \|g'(s)\| = \big\|f'\big(\sigma(s)\big)\big\|\|\sigma'(s)\|$$

וכפי שניתן לראות, בניגוד לדוגמא הראשונה, לא תמיד פשוט למצוא את הפונקציה ההפוכה שתתן לנו את הפרמטריזציית קשת.

אינטגרל מסוג ראשון (אינטגרל של פונקציה סקלארית):

נניח כי צפיפות המסה של הקפיץ נתונה על ידי הפונקציה:

$$\rho(x,y,z)=z$$

מהי, אם כן, מסת הקפיץ?

$$\int_C \rho ds=\int_0^L \rho\big(f(t)\big)\|f'(t)\|dt=\int_0^{L\sqrt{a^2\omega^2+b^2}} \rho\big(g(s)\big)ds$$

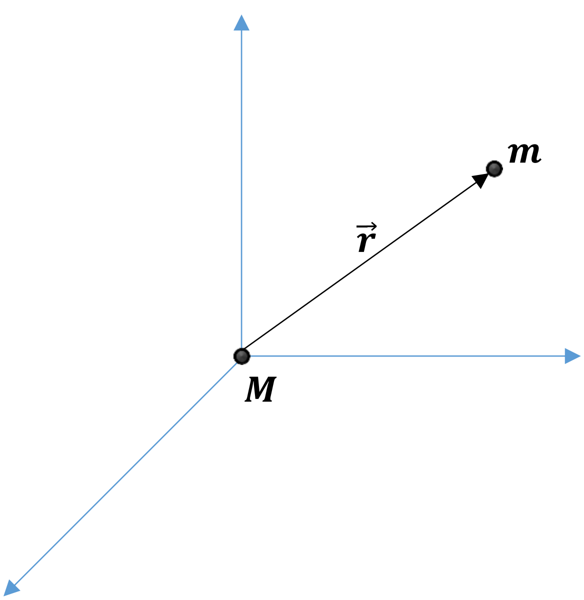
כאשר לעיתים מסמנים $\rho(s)$ במקום $\rho\big(g(s)\big)$ שכן פרמטריזציית אורך הקשת נתפסת כ"פרמטריזציה" טבעית של אורך הקטע. נשתמש בפרמטריזציה זו, ונקבל כי:

$$g(s)=\left(a\cos\left(\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}\right),a\sin\left(\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}\right),\frac{bs}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}\right)$$

$$\int_0^{l(C)}\frac{bs}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}ds=\frac{b}{\sqrt{a^2\omega^2+b^2}}\frac{1}{2}L(a^2\omega^2+b^2)=\frac{b}{2}L^2\sqrt{a^2\omega^2+b^2}$$

11.1 הגדרה – פונקציה $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{S}\mapsto\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}=\bigcup_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{T_p}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ נקראת <u>שדה וקטורי</u> אם $\boldsymbol{F(p)}\in\boldsymbol{T_p}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$.

<u>דוגמה:</u>



$$F\colon\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\mapsto\mathbb{R}^3$$

יהיה הכח הגרביטציוני שגוף בעל מסה m מרגיש כתוצאה מנוכחות של גוף בעל מסה M במרחב המתואר על ידי $\vec{r}$.

מתקיים:

$$\vec{F}=G\frac{Mm}{\|\vec{r}\|^3}(-\vec{r})$$

בהנחה ש-M,m קבועים נוכל לכתוב:

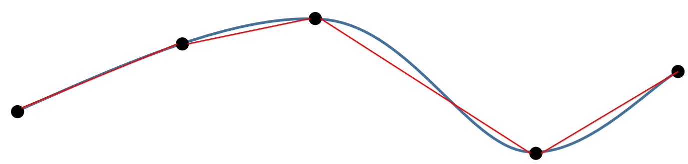
$$F(x,y,z)=-K\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$$

11.2 הגדרה – תהא $\boldsymbol{f}\colon[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\mapsto\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ פונקציה רציפה של עקום $\boldsymbol{C}$ מכוון, פשוט, וחלק, ו-$\boldsymbol{F}\colon\boldsymbol{C}\mapsto\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ שדה וקטורי. <u>האינטגרל הקווי של $\boldsymbol{F}$ לאורך $\boldsymbol{C}$</u> מוגדר להיות:

$$\int_C \vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}=\int_C\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F_i dx_i}:=\int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\big)\cdot\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

<u>הערות:</u>

א. ניתן להבין אינטגרל זה על ידי ביצוע חלוקה כמתואר באיור להלן, וקבלת קירוב פוליגונלי לעקום. בכל "קו ישר" כזה, השדה שמורגש בכל נקודה בכיוון העקום הוא בדיוק ההיטל של השדה על העקום ולכן הנ"ל מתקבל כמכפלה סקלארית של השדה עם אורך העקום וכיוונו בכל נקודה, כמתואר באינטגרל האחרון.



איור 13 – דוגמה לחלוקה של עקום

ב. אם $g:[a,b]\mapsto C$ פרמטריזציית אורך קשת, נגדיר $T(s)=g'(s)$ ונקבל כי $\|T(s)\|=1$ ואז נקבל כי:

$$\int_C \sum F_i dx_i=\int_a^b F\big(g(s)\big)\cdot g'(s)ds=\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds$$

כאשר לעיתים מקובל לסמן וקטור באורך יחידה כדוגמת T על ידי $\hat{T}$ (וקטור כיוון באורך 1).

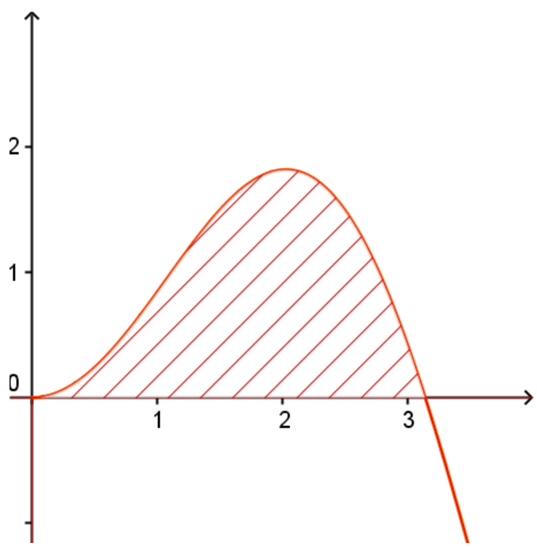
הרצאה 15

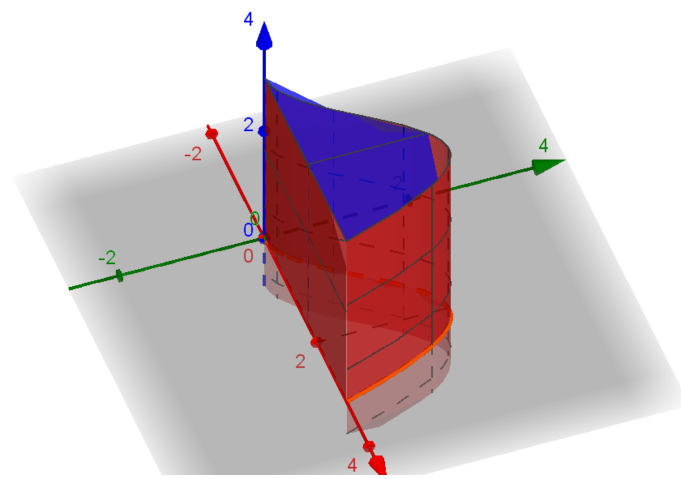
מטרת השיעור:

בהנתן $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ תחום סגור של קבוצה פתוחה, ו-$f:\Omega \mapsto \mathbb{R}$. נרצה להגדיר:

$$\int_{\Omega} f dv = \iint \underset{\Omega}{\cdots} \int f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

כאשר המשמעות היא חישוב "נפח" ב-$\mathbb{R}^{n+1}$ הנוצר על ידי גרף הפונקציה של f Ω.





<u>באיורים</u> – דוגמה למקרה הדו-ממדי ולמקרה התלת ממדי, כך שברור לנו שבמקרה הדו ממדי הכוונה היא לשטח ובמקרה התלת ממדי הכוונה היא לנפח (הנפח של הצורה באדום).

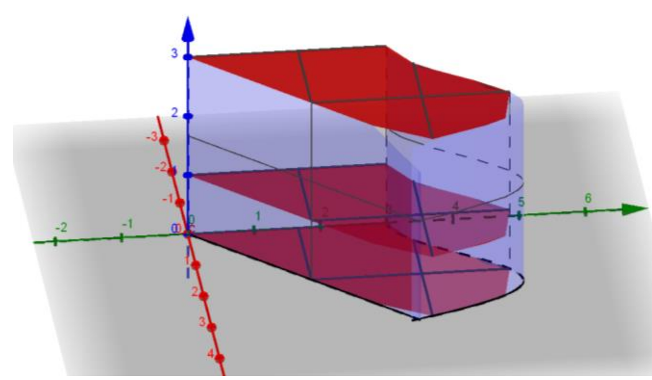
עבור Ω תחום פשוט, חישוב האינטגרל יהיה, בפועל, חישוב של n אינטגרלים נשנים לדוגמה:

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dxdydz \quad \begin{cases} 0 \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

ונקבל במקרה זה:

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$$

כך שכפי שניתן לראות באיור מימין, אנחנו בפועל סוכמים "משטחים" המרכיבים את הנפח (האיור הינו הפשטה של המקרה התלת ממדי לצורך המחשה בלבד. באיור המשטחים לדוגמה צבועים באדום, והסכימה היא עבור כל המשטחים המוכלים בתחום הכחול החצי שקוף).



שימושים:

א. בהנתן תחום $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, האינטגרל $\iiint_\Omega 1dv$ הינו נפח האובייקט התלת ממדי. באופן כללי, נפח במובן המוכלל שלו ניתן על ידי $\int_\Omega 1dv$ עבור כל $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

ב. עבור $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ופונקציה $\rho(x,y,z)$ שהינה פונקציית צפיפות (למשל במקרה של פיזיקה, פונקציה המתארת את המסה פר יחידת מסה (כלומר ביחידות של $\frac{kg}{m^3}$), מתקיים שמסת גוף שמתואר על ידי היריעה Ω היא:

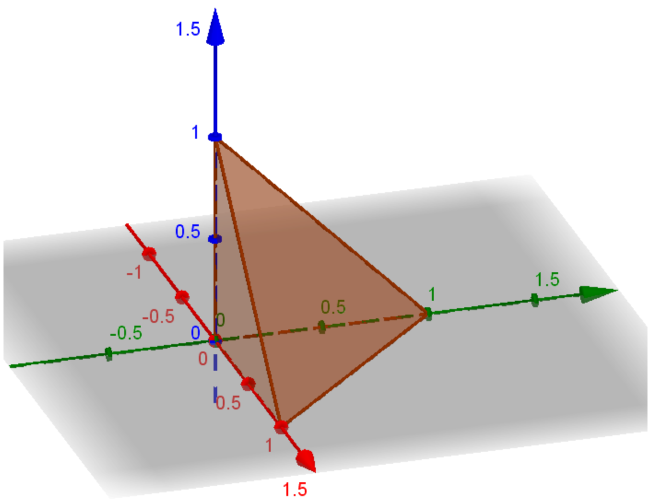
$$m = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv$$

ג. שימוש פיזיקלי נוסף הינו מומנט האינרציה / חישובי מרכז מסה.

<u>דוגמה:</u>

נחשב את $I = \iiint_\Omega (xyz)dxdydz$ עבור Ω התחום החסום על ידי $x+y+z=1$ והצירים $x=0, y=0, z=0$.

התחום Ω הוא בעצם הפירמידה המשולשת החסומה על ידי 4 מישורים.



על מנת לעשות זאת, נקבע את z ולכל z נקבל משולש מהצורה:

$$x + y = 1 - z$$

D_z תחום פשוט ביחס לציר y. הוא התחום:

$$D_z = \begin{Bmatrix} 0 \le x \le 1-z \\ 0 \le y \le 1-x-z \end{Bmatrix}$$

וסה"כ נסיק כי התחום שלנו, Ω, ניתן להגדרה על ידי:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le x \le 1-z \\ 0 \le y \le 1-x-z \end{Bmatrix}$$

ולכן מתקיים:

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-x-z} xyzdy$$

<u>אינטגרציה במלבן:</u>

נניח כי נתון תחום מהצורה:

$$R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$$

ותהא $f: R \mapsto \mathbb{R}$. נגדיר חלוקה של R על ידי:

$$P_1 = \{a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = b\} \quad P_2 = \{c = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_m = d\}$$

כך שמתקיים:

$$P = P_1 \times P_2 = \underset{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}{\forall} [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

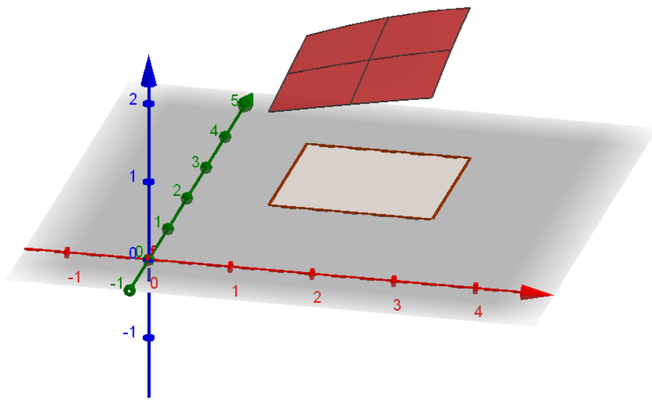
נסמן, עתה:

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f$$
$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$$

ונוכל עתה להגדיר סכום עליון וסכום תחתון של f עבור החלוקה P, על ידי:

$$U(f,P) = \sum_{i,j} M_{ij} A(R_{ij})$$

$$L(f,P) = \sum_{i,j} m_{ij} A(R_{ij})$$



איור 14 פונקציה $f(x,y)$ במרחב $\mathbb{R}^3$ בתחום מלבני לדוגמה

וכפי שלמדנו באינפי 2, אנו יודעים כי f אינטגרבילית אם קיים I יחיד עבורו:

$$L(f,P) \le I \le U(f,P) \quad \forall P$$

למשל, עבור פונקציה קבוע $f(x,y) \equiv C$, נקבל כי:

$$U(f,P) = \sum_{i,j} C \cdot A(R_{ij}) = CA(R) \quad L(f,P) = \sum_{i,j} C \cdot A(R_{ij}) = C \cdot A(R)$$

ולכן מתקיים כנדרש:

$$I = C \cdot A(R)$$

<u>אינטגרציה בתיבה:</u>

נניח כי נתונה תיבה מהצורה:

$$R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

וכן $f: R \mapsto \mathbb{R}$ חסומה. אזי, תהא $P = \{R_i\}$ חלוקה של R לתיבות קטנות יותר. "נפח" תיבה, נתון על ידי:

$$vol(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

הגדרה 11.3 - <u>סכום דארבו העליון והתחתון</u> נתונים, עתה, על ידי:

$$\boldsymbol{U(f,P) = \sum_i M_i \cdot vol(R_i)}$$
$$\boldsymbol{L(f,P) = \sum_i m_i \cdot vol(R_i)}$$

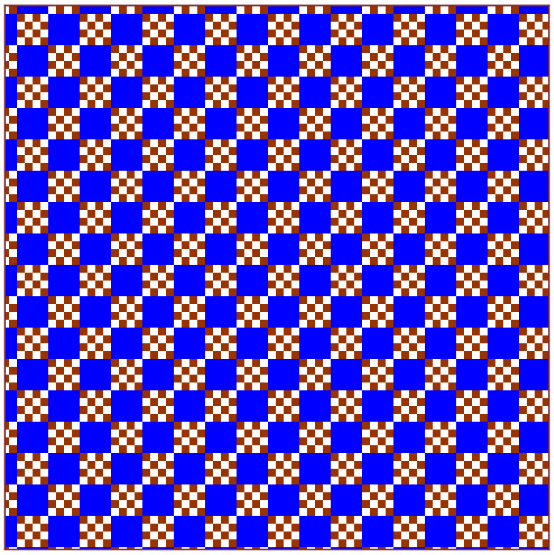
הגדרה 11.4 – נאמר כי <u>f אינטגרבילית על R</u> אם קיים I יחיד עבורו:

$$\boldsymbol{\forall P \quad L(f,P) \le I \le U(f,P) \Rightarrow I = \int_R f dv}$$

בפרט, עבור $f \equiv C$, קל לראות, כי מתקיים:

$$\int_R f dv = C \cdot vol(R)$$

11.5 הגדרה – יהיו P, P' שתי חלוקות של R. נאמר כי P' <u>עידון</u> של P אם לכל מלבן $Q' \in P'$, קיים $Q \in P$ כך ש-$Q \subset Q$.



*איור 15 – דוגמאות לשתי חלוקות (בכחול וחום) **<u>סכמתיות</u>**, כך שאחת (החומה) מהווה עידון של השניה.*

11.6 למה – יהיו P, P' חלוקות של R ונניח כי P' עידון של P. נניח כי f חסומה על R. אזי מתקיים:

$$\boldsymbol{L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P)}$$

<u>הוכחה:</u>

לכל $Q \in P$, קיימים $\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_s\} \subset P'$ שהם עידון של Q. אזי מתקיים, כמובן:

$$(\star) \sum_{i=1}^{s} M_i \cdot vol(Q_i) \leq M \cdot vol(Q)$$

וכן מתקיים:

$$(\star) \geq \sum_{i=1}^{s} m_i \cdot vol(Q_i) \geq m \cdot vol(Q)$$

נסכום על כל התיבות ב-P, ונקבל את הדרוש.

11.7 מסקנה – לכל P', P'' חלוקות של R, מתקיים:

$$\boldsymbol{L(f,P') \leq U(f,P'')}$$

את המסקנה ניתן להוכיח ביתר קלות על ידי שימוש בחלוקה שמהווה הן עידון של P' והן עידון של P'', ונשתמש בתוצאה מהלמה.

11.8 טענה (אפיון לאינטגרביליות) – תהא $f: R \mapsto \mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית על R $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P כך שמתקיים $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

<u>הוכחה:</u>

$(\Longrightarrow)$ נניח כי f איננה אינטגרבילית. אזי קיימים $I_1 \neq I_2$ כך שלכל חלוקה P מתקיים:

$$L(f,P) \leq I_i \leq U(f,P)$$

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $I_2 > I_1$ ונסמן $\boxed{\varepsilon = I_2 - I_1} > 0$.

לכל P מתקיים:

$$L(f,P) \leq I_1 < I_2 \leq U(f,P) \Longrightarrow U(f,P) - L(f,P) \geq I_2 - I_1 = \varepsilon$$

וזו סתירה.

($\Longleftarrow$) נניח כי f אינטגרבילית, ויהא $\varepsilon > 0$. אזי קיימת חלוקה P' כך שמתקיים:

$$U(f, P') - I < \frac{\varepsilon}{2}$$

(אחרת נקבל סתירה ליחידות I). כמו כן, קיימת חלוקה P'' כך שמתקיים $I - L(f, P'') < \frac{\varepsilon}{2}$ מאותו שיקול. עתה, נבחר P שתהא עידון של P', P'', ויתקיים:

$$L(f, P'') \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P')$$

ומתקיים, לכן:

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P') - L(f, P'') < \varepsilon$$

כנדרש.

11.9 טענה – נניח כי f, g אינטגרביליות על R. אזי $f + g$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int_R (f+g) dv = \int_R f dv + \int_R g dv$$

<u>הוכחה:</u>

תהא P חלוקה של R. נשים לב כי מתקיים

$$\max_{R_i}(f+g) \leq \max_{R_i} f + \max_{R_i} g$$

ולכן מתקיים:

$$(\star) U(f+g, P) \leq U(f, P) + U(g, P)$$

מאותו שיקול, נוכל להסיק כי הנ"ל מתקיים גם עבור החסמים מלרע וסה"כ:

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f+g, P) \leq (\star)$$

ומכאן נקבל כי:

$$U(f+g, P) - L(f+g, P) \leq [U(f, P) - L(f, P)] + [U(g, P) - L(g, P)]$$

יהא, עתה, $\varepsilon > 0$. אזי קיימות P', P'' עבורן מתקיים:

$$U(f, P') - L(f, P') < \frac{\varepsilon}{2} \quad U(g, P'') - L(g, P'') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן עבור P שתהא עידון של P', P'' ונקבל את הדרוש, קרי:

$$U(f+g, P) - L(f+g, P) < \varepsilon$$

כנדרש.

בשלב זה, לאחר שהראינו את ה<u>אינטגרביליות</u> של $f + g$ (קרי, את קיום האינטגרל), נרצה להראות כי אכן ערכו הוא כמתואר בטענה.

אנו יודעים כי עבור החלוקה שבחרנו מתקיים:

$$L(f, P) \leq I_1 \leq U(f, P) \quad L(g, P) \leq I_2 \leq U(g, P)$$

וזאת לכל P. נרצה להראות כי $I = I_1 + I_2$. נניח בשלילה, אם כן, כי $I < I_1 + I_2$.

נסמן $\varepsilon = (I_1 - I_2) - I > 0$. ממה שראינו עד כה, מתקיים:

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq I < I_1 + I_2 \leq U(f,P) + U(g,P)$$

ולכן, יתקיים:

$$[U(f,P) - L(f,P)] + [U(g,P) - L(g,P)] \geq \varepsilon$$

אך זו סתירה לאפיון האינטגרביליות של שתי הפונקציות בנפרד, שכן קיימות חלוקות עבורן כל אחד מהביטויים בסוגריים יהיה קטן מ-$\frac{\varepsilon}{2}$, ובפרט עבור עידון של חלוקות אלה יתקבל בשני הביטויים כי הם קטנים מ-$\frac{\varepsilon}{2}$ בסתירה לאי השוויון שהגענו אליו.

11.10 טענה – תהא f אינטגרבילית על R ותהא $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי $\alpha \cdot f$ אינטגרבילית בתחום ומתקיים:

$$\int_R (\alpha f) dv = \alpha \cdot \int_R f dv$$

11.11 טענה – אם $R = R' \cup R''$ איחוד של שני מלבנים שחיתוכם הוא לכל היותר בשפה של המלבנים. אזי f אינטגרבילית על R $\Leftrightarrow$ f אינטגרבילית על R', R'' ומתקיים:

$$\int_R f dv = \int_{R'} f dv + \int_{R''} f dv$$

הרצאה 16

11.12 טענה – אם $f: R \mapsto \mathbb{R}$ רציפה על מלבן R, אזי f אינטגרבילית.

<u>הוכחה:</u>

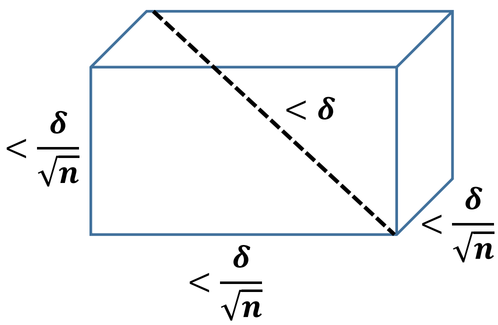
יהא $\varepsilon > 0$, ונמצא חלוקה P כך שמתקיים:

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

לשם כך, נזכיר כי לכל P מתקיים:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_i (M_i - m_i) \cdot vol(R_i)$$

עתה, היות ו-f רציפה במלבן שהינו קבוצה קומפקטית, נקבל כי f רציפה במידה שווה. כלומר, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $\|x-y\| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{vol(R)}$. נבחר, אם כן, חלוקה P כלשהי כך שכל תיבה תהיה בעלת צלעות שאורכן אינו עולה על $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ וכך נקבל כי בנורמה 2 למשל, מתקיים:



$$\|x-y\| < \delta$$

עבור P מסוג זה, יתקיים:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_i \underbrace{(M_i - m_i)}_{<\frac{\varepsilon}{vol(R)}} vol(R_i) < \varepsilon$$

כנדרש.

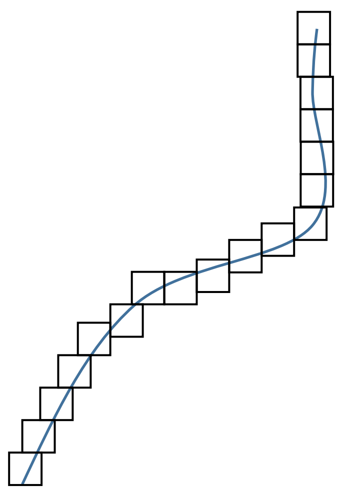
11.13 הגדרה – נאמר כי $X \subset \mathbb{R}^n$ הינה <u>קבוצה בעלת נפח 0</u>
אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים מספר סופי של מלבנים $R_1, R_2, \cdots, R_s$ כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{s} vol(R_i) < \varepsilon \quad X \subset \bigcup_{i=1}^{s} R_i}$$

11.14 טענה – תהא $f: R \mapsto \mathbb{R}$ חסומה, ונניח כי:

$$\boldsymbol{X = \left\{ x \in R \middle| \begin{array}{c} f \text{ אינה} \\ x - \text{רציפה ב} \end{array} \right\}}$$

היא קבוצה בעלת נפח אפס. אזי f אינטגרבילית ב-R.



איור 16 – עקום רציף לדוגמה שהוא קבוצה בעלת נפח אפס. רואים שניתן להקטין את המלבנים כרצוננו ועדיין להיות מסוגלים לכסות את כל העקום.

<u>הוכחה:</u>

נשים לב כי:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_i (M_i - m_i) vol(R_i)$$

נתון כי f חסומה, ולכן נסיק כי קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in R$ מתקיים $|f(x)| < M$. לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $R_1', \cdots, R_s'$ המכסים את X, ומתקיים:

$$\sum_{i=1}^{s} vol(R_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

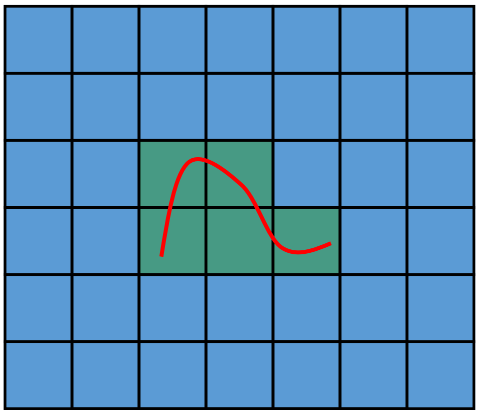
ניקח חלוקה P של R כך שכל R_i' הוא איחוד של מלבנים בחלוקה, ויתקיים:

$$\sum_{i=1}^{s} (M_i - m_i) vol(R_i') < \frac{\varepsilon}{2}$$

עתה נתבונן ב-$Y = \overline{R \setminus (R_i')}$. אנו יודעים כי f רציפה על Y וניקח חלוקה מספיק עדינה כך שמתקיים:

$$U(f, P \setminus \{R_i'\}) - L(f, P \setminus \{R_i'\}) =$$

$$\sum_{R_i \subset P \setminus \{R_i'\}} (M_i - m_i) vol(R_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$



איור 17 – הרעיון בהוכחה הוא שאם נניח כי העקום באדום הוא קבוצת נקודות האי רציפות, אז עבור הקטנת קוטר החלוקה, כלומר הקטנת התיבות, נוכל להקטין את התרומה של התיבות שמכילות את העקום כרצוננו, שכן התרומה שלהם תהיה קטנה ממכפלת נפח כל התיבות בחסם העליון של f שנתון כי f חסומה. וכך נוכל להזניח בסופו של דבר, כרצוננו, את התרומה של הקבוצה ה"בעייתית"

ונקבל שעבור P, מתקיים, כנדרש:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

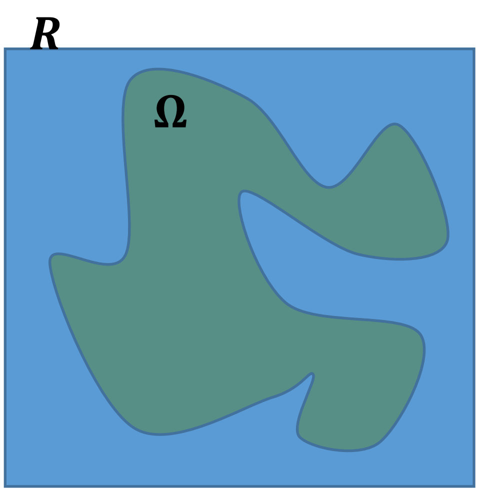
<u>אינטגרביליות בתחום כללי:</u>

11.14 הגדרה - $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ נקרא <u>תחום בעל נפח</u> אם הוא סגור של קבוצה פתוחה וחסומה, ואם נקודות השפה של Ω הן בעלות נפח אפס.

<u>הערה</u> – (לא נוכיח) אם $\partial\Omega$ ניתנת להצגה כתמונה של פונקציה חלקה ב-$X \subset \mathbb{R}^m$ קומפקטית, שנסמנה ϕ המקיימת $\phi \in C^1$, $\phi: X \mapsto \mathbb{R}^n$ ו-$\phi(X) = \partial\Omega$.

יהא, אם כן, תחום $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ תחום בעל נפח. ויהא $\Omega \subset R$ מלבן. תהא, אם כן, $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ חסומה, ונגדיר:

$$\tilde{f}: R \mapsto \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



ונאמר כי f אינטגרבילית על Ω אם $\tilde{f}$ אינטגרבילית על R, ומתקיים:

$$\int_{\Omega} f dv = \int_{R} \tilde{f} dv$$

11.15 טענה – אם $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ רציפה, אזי f אינטגרבילית.

<u>הוכחה:</u>

נקודות האי רציפות של $\tilde{f}$ מוכלות ב-$\partial\Omega$ (כי בתחום של המלבן שמחוץ ל-Ω הפונקציה רציפה לחלוטין). לכן זו קבוצה בעלת שטח אפס ומהטענה שהוכחנו, הפונקציה f אינטגרבילית כנדרש.

11.16 הגדרה – <u>נפח</u> של תחום כללי $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ מוגדר להיות:

$$\boldsymbol{vol(\Omega) = \int_\Omega 1dv}$$

נשים לב כי הפונקציה 1 ודאי רציפה ועל כן ביטוי זה מוגדר היטב לכל תחום Ω.

11.17 טענה - f, g אינטגרביליות על Ω ונניח כי $f \le g$. אזי מתקיים:

$$\boldsymbol{\int_\Omega f dv \le \int_\Omega g dv}$$

<u>הוכחה:</u>

יהא $\Omega \subset R$ מלבן. אזי מתקיים $\tilde{f} \le \tilde{g}$ במלבן הנתון. נגדיר, אם כן $\tilde{h} = \tilde{g} - \tilde{f} \ge 0$ על R ונקבל כי $L(\tilde{h}, P) \ge 0$ לכל חלוקה P של המלבן. כאמור $\tilde{h}$ אינטגרבילית ומתקיים כנדרש:

$$0 \le \int_R \tilde{h} dv = \int_R \tilde{g} dv - \int_R \tilde{f} dv = \int_\Omega g dv - \int_\Omega f dv$$

11.18 משפט פוביני – נניח כי f אינטגרבילית על מלבן $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ונניח כי לכל $x \in [a, b]$, הפונקציה:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy}$$

מוגדרת ואינטגרבילית על $[a, b]$. אזי מתקיים:

$$\boldsymbol{\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx}$$

11.18.1 משפט פוביני – מקרה כללי – אם $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ונניח כי:

$$\boldsymbol{\int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) dx_n = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}$$

$$\boldsymbol{\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) dx_n = F_2(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2})}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx_n = I}$$

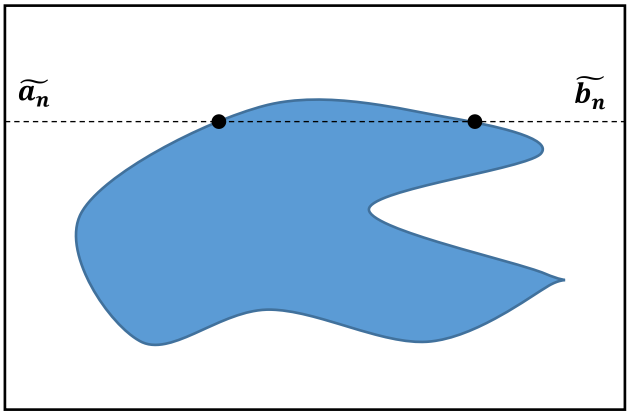
אזי מתקיים: $I = \int_R f dv$.

הרצאה 17

תזכורת – משפט פוביני:

$$\int_R f dr=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\cdots\int_{a_n}^{b_n}f dx_n$$

אם f אינטגרבילית בתחום פשוט $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ מהצורה:



$$\Omega=\begin{cases} a_1\le x_1\le b_1\\ a_2(x_1)\le x_2\le b_2(x_1)\\ a_3(x_1,x_2)\le x_3\le b_3(x_1,x_2)\\ \vdots\\ a_n(x_1,\cdots,x_{n-1})\le x_n\le b_n(x_1,\cdots,x_{n-1})\end{cases}$$

ומקיימת את תנאי משפט פוביני במלבן $\Omega\subset R$ אזי מתקיים:

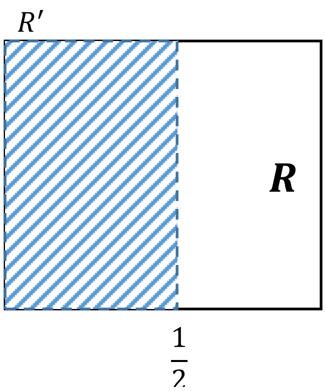
$$\int_\Omega f dv=\int_R \tilde{f}dv=\int_{\widetilde{a_1}}^{\widetilde{b_1}}x_1\int_{\widetilde{a_2}}^{\widetilde{b_2}}dx_2\cdots\int_{\widetilde{a_n}}^{\widetilde{b_n}}\tilde{f}dx_n$$
$$=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\cdots\int_{a_n}^{b_n}f dx_n$$

<u>דוגמאות:</u>

נגדיר:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x=0,y\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

עבור המלבן $R=[0,1]\times[0,1]$. נשים לב כי f אינטגרבילית על R (שכן הפונקציה מתאפסת בכל מקום למעט על ציר ה-y בקבוצה בעלת שטח אפס), ומתקיים $\int_R f dv=0$. אך נשים לב כי הנ"ל לא מתקבל ממשפט פוביני שכן:



$$F(x)=\int_0^1 f(x,y)dy$$

לא מוגדר.

מאידך, נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & y\in Q\\ 2x & y\notin Q\end{cases}$$

עבור המלבן $R=[0,1]\times[0,1]$. נשים לב כי:

$$\forall y\quad F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=1\Longrightarrow\int_0^1 F(y)dy=1$$

$$\Longrightarrow\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=1$$

אך נראה עתה, כי על אף הקיום של הנ"ל, f איננה אינטגרבילית במלבן.

נשים לב כי עבור המלבן הקטן (שאם f אינטגרבילית במלבן R אזי היא בהכרח אינטגרבילית גם במלבן הנ"ל), מתקיים:

$$U(f,P)=\frac{1}{2}$$

אך כל $\varepsilon>0$ ניתן למצוא P כך שמתקיים:

$$\left|L(f,P)-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$$

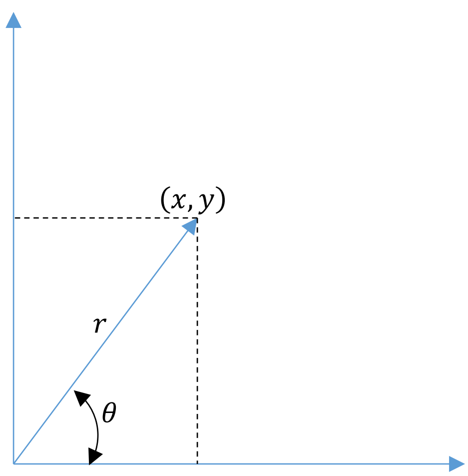
כאשר $\frac{1}{4}$ מתקבל מניסיון להשתמש במשפט פוביני עבור המלבן הנ"ל.

כלומר, משפט פוביני הינו כלי, ולכן, כאשר התנאים אינם מספיקים על מנת לממשו, עלול בהחלט להיווצר מצב שבו לא נוכל להיעזר בו ככלי.

החלפת משתנים:

תזכורת – בקואורדינטות פולריות, הגדרנו את הטרנספורמציה:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$



כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2}$ זהו המרחק מן הראשית. ביטוי זה מוגדר היטב בכל $\mathbb{R}^2$ ובפרט $r\geq 0$ לכל (x,y).

θ זוהי הזווית ביחס לציר x ולכן נעה על מקטע שאורכו 2π. ניתן להגדיר למשל מטעמי נוחות $0\leq\theta\leq 2\pi$. זווית זו מוגדרת לכל $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

כאשר אנו מבצעים החלפת משתנים, אנו מעתיקים את $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ לפס:

$$\begin{cases}r>0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$$

וזוהי העתקה C^1 וחד-חד ערכית. בנוסף, נשים לב כי מתקיים:

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\begin{vmatrix}x_r & y_r\\ x_\theta & y_\theta\end{vmatrix}=r\neq 0$$

וראינו באינפי II כי מתקיים:

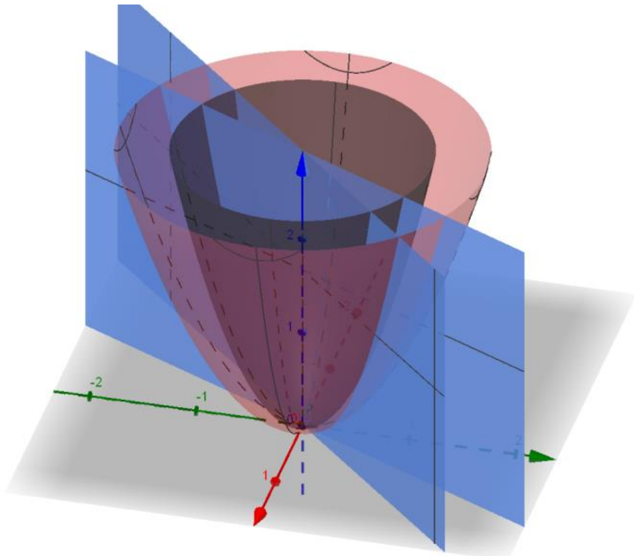
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\tilde{D}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)|r|drd\theta$$

הערה – החלפת המשתנים מתבצעת עבור $D\setminus[0,\infty)$.

החלפת משתנים ב-$\mathbb{R}^3$:

יהא $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ הגוף החסום על ידי:

$$y=x\quad y=2x\quad z=x^2+y^2\quad z=2(x^2+y^2)$$



וכן:

$$z = h, h > 0$$

ונרצה לחשב את הנפח של Ω עבור $x, y, z \geq 0$:

$$V = \iiint_{\Omega} 1dxdydz$$

נעבוד בקואורדינטות גליליות, r, θ, z.
הטרנספורמציה במקרה זה תהיה:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

נחשב את היעקוביאן של העתקה זו ונקבל כי:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0$$

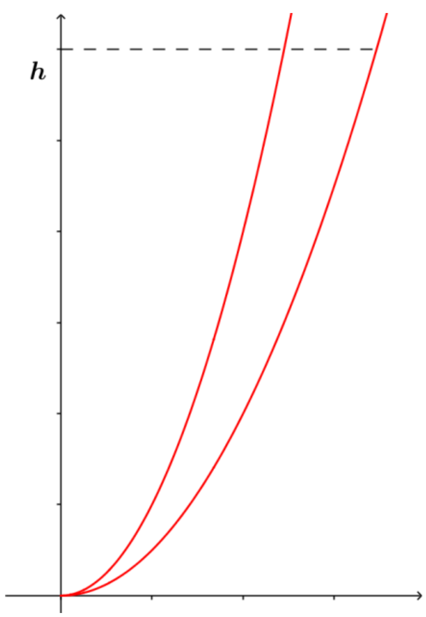
למעט המקרים של הנקודות שנמצאות בדיוק על ציר z אך במקרה של חסימות על ידי $z < h$ נקבל כי זוהי קבוצה בעלת שטח אפס ולכן לא מהווה בעיה.

נתבונן בתמונת Ω על ידי הצגת החלפת המשתנים באמצעות אילוצים:

$$y = x \Longrightarrow r\sin\theta = r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$y = 2x \Longrightarrow r\sin\theta = 2r\cos\theta \Longrightarrow \tan\theta = 2 \Longrightarrow \theta = \arctan 2$$

$$z = x^2 + y^2 \Longrightarrow z = r^2$$



$$z = 2(x^2 + y^2) \Longrightarrow z = 2r^2$$

$$z = h$$

כאשר למעט דרישות אלו נזכור כי תנאי לטרנספורמציה הינו $r \geq 0$ וכן $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

סה"כ נקבל כי האילוצים שנקבל הם:

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arctan 2 \quad \sqrt{\frac{z}{2}} \leq r \leq \sqrt{z} \quad 0 \leq z \leq h$$

ולכן האינטגרל החדש שיתקבל יהיה:

$$V = \iiint_{\widetilde{\Omega}} rdrd\theta dz = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{z}} rdr$$

$$= \left(\arctan 2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^h \left[\frac{z}{2} - \frac{z}{4}\right] r dr = \frac{h}{2}\frac{z}{4}\left(\arctan 2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

<u>הערה</u> – למעשה, שימוש בקואורדינטות גלילות שימושי במיוחד כאשר עוסקים באובייקטים המתקבלים מנפח גוף סיבוב (או חלק ממנו).

<u>דוגמה נוספת:</u>

נרצה לחשב את נפחו של כדור בעל רדיוס R. לשם כך נתבונן בכדור מהצורה:

$$\Omega = \{(x,y,z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2\}$$

נפח הכדור, אינו תלוי, כאמור, בנקודת המרכז ולכן נגדיר:

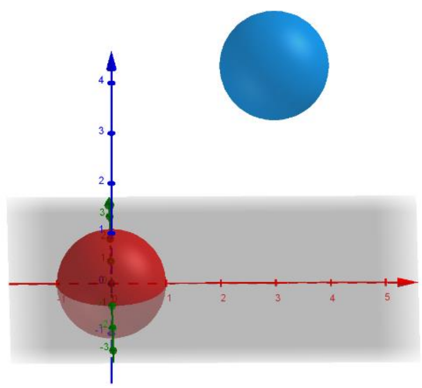
$$\begin{cases} \tilde{x} = x - x_0 \\ \tilde{y} = y - y_0 \\ \tilde{z} = z - z_0 \end{cases}$$

ותמונה הכדור $B(x_0, R)$ על ידי העתקה זו תהיה פשוט הכדור $B(0, R)$ במרחב $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$.

נחשב את היעקוביאן של העתקה זו:

$$J^{-1} = \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(זהו ההופכי של היעקוביאן שכן היעקוביאן מחושב על ידי גזירת המשתנים הישנים לפי משתני "ההעתקה" החדשים). לכן נקבל כי:



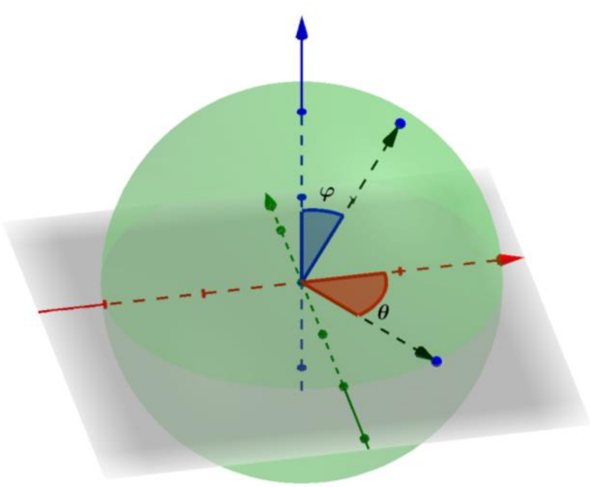
איור 18 –הכדור הישן בכחול והחדש באדום, לדוגמה

$$J = (J^{-1})^{-1} = 1 \neq 0$$

בפרט, היות והיעקוביאן שונה מאפס בכל התחום ומדובר בהעתקה ליניארית, אזי נסיק כי העתקה חד-חד ערכית.

ולכן נקבל כי:

$$V_{B(x_0,R)} = \iiint_{B(x_0,R)} 1 dx dy dz = \iiint_{B(0,R)} 1 J d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z}$$
$$= \iiint_{B(0,R)} 1 d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} \; (\star)$$



ניעזר בקואורדינטות ספריות (כדוריות) המתקבלות על ידי הטרנספורמציה הבאה:

$$\begin{cases} \tilde{x} = r \cos\theta \sin\varphi & r \geq 0 \\ \tilde{y} = r \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \tilde{z} = r \cos\varphi & 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

היעקוביאן של העתקה זו הינו:

$$J=\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & 0\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\cos\varphi\left[-r^2\sin\varphi\cos\varphi\right]-r\sin\varphi\left[rsin^2\varphi\right]=-r^2\sin\varphi$$

$$|J|=r^2\sin\varphi$$

תמונת $B(0,R)$ מתקבלת תחת האילוץ:

$$r^2\le R^2$$

ולכן:

$$\tilde{\Omega}=\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le R\end{cases}$$

כלומר, במקרה זה קיבלנו כי $\tilde{\Omega}$ מלבן ולכן:

$$(\star)=\iiint_{\tilde{\Omega}}r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi=\int_0^R r^2dr\cdot\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3$$

<u>הערה</u> – קואורדינטות כדוריות שימושיות כאשר Ω הינו פלח תחום על סימטריה סביב הראשית.

<u>דוגמה נוספת:</u>

נחשב את:

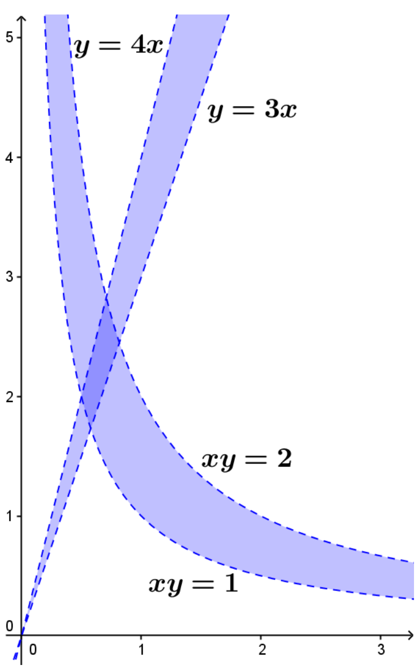
$$I=\iiint_\Omega\frac{xy}{z}dxdydz$$

כאשר:

$$\Omega=\{z\le x^2+y^2<3z|1\le xy\le 2,3x\le y\le 4x\}$$

גם בתחום זה, נקבל גוף הכלוא בין שני פרבולואידים ועל כן נעבוד בקואורדינטות גליליות.

את ההצבה תבצעו <u>כתרגיל</u>.



הרצאה 18

אינטגרל רימן – תזכורת:

על מנת לפתוח בבסיס מסוים, הגדרנו נפח של תיבה מהצורה $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ על ידי:

$$Vol(R) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

הסיבה להגדרת פונקציית נפח התיבה באופן כזה, היא שהיא הפונקציה הרציפה היחידה העומדת תחת מספר דרישות טריוויאליות. כלומר, אם נרצה להגדיר פונקציה מהצורה $f(x,y) = g_y(x)$. אזי נרצה לדרוש:

א. $g_y(x) \geq 0$.
ב. $g_y(x_1 + x_2) = g_y(x_1) + g_y(x_2)$.

תחת הנחות אלה (וכן הנחות כגון רציפות ומוגדרות היטב וכו'), נגלה כי הפונקציה המקיימת את הנ"ל חייבת להיות:

$$g_y = C_y \cdot x$$

ובאותו אופן נסיק כי:

$$f(x,y) = C \cdot x \cdot y$$

ותחת הנחת נרמול (כגון, $f(1,1) = 1$ כלומר ששטחו של מלבן שצלעותיו 1 הוא 1), נקבל $C = 1$ וכך תתקבל הפונקציה המבוקשת.

בשלב זה הגדרנו חלוקה של R מהצורה:

$$P = \left\{ a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j \middle| \forall \quad j = 1, \cdots, n \right\}$$

וניתן, תוך הבנה שמדובר ב"התעללות בסימון" / Abuse of notation, להתייחס ל-P כאל אוסף של תיבות:

$$P = \{R_i\} \quad R = \bigcup R_i$$

כאמור אם $f : R \mapsto \mathbb{R}$ חסומה, נוכל להגדיר סכום (רימן)עליון, מהצורה:

$$U(f,P) = \sum_{R_i \in P} M_i Vol(R_i) \quad M_i = \sup_{x \in R_i} f(x)$$

וכן סכום רימן תחתון:

$$L(f,P) = \sum_{R_i \in P} m_i Vol(R_i) \quad m_i = \inf_{x \in R_i} f(x)$$

וראינו, כי f נקראית <u>אינטגרבילית על R</u> אם מתקיים:

$$\overbrace{\underline{\int_R} f}^{\text{אינטגרל תחתון}} := \sup_{P \text{ חלוקה}} L(f,P) = \inf_{P \text{ חלוקה}} U(f,P) =: \overbrace{\overline{\int_R} f}^{\text{אינטגרל עליון}}$$

לערך המשותף קוראים אינטגרל (רימן) של f על R ומסמנים $\int_R f = \int_R f(x)dx = \int_R f dV$.

12.1 הגדרה – לקבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^n$ יש <u>נפח אפס</u> אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $R_1, \cdots, R_m$ כך שמתקיים $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} R_i$ וכן מתקיים $\sum_{i=1}^{m} Vol(R_i) < \varepsilon$.

<u>הערה</u> – הקבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת בעלת <u>מידה 0</u> אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים אוסף $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ וכן מתקיים $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(R_i) < \varepsilon$.

12.2 משפט (מקורס 104165) - $f: R \mapsto \mathbb{R}$ אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ המידה של נקודות אי הרציפות שלה ממידה 0.

מקרה מיוחד של משפט זה הינו:

12.3 משפט – אם $f: R \mapsto \mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי רציפות מנפח אפס, אזי f אינטגרבילית.

12.4 הגדרה – קבוצה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת <u>תחום בעל נפח</u> אם היא הסגור של קבוצה פתוחה ו-$\partial\Omega$ היא קבוצה בעלת נפח אפס.

12.5 הגדרה - אם $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ נגדיר:

$$\int_{\Omega} f dV \coloneqq \int_{R} f \chi_{\Omega} dV$$

כאשר R תיבה כלשהי כך ש-$R \supset \Omega$ וכן:

$$\chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

12.6 הגדרה – אם $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום בעל נפח, אנו מגדירים:

$$Vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dV = \int_{R} \chi_{\Omega} dV$$

כלומר, לכל חלוקה מגדירים את סכום רימן אשר סוכם את שטח כל התיבות המכילות לפחות נקודה אחת מ-Ω. כלומר:

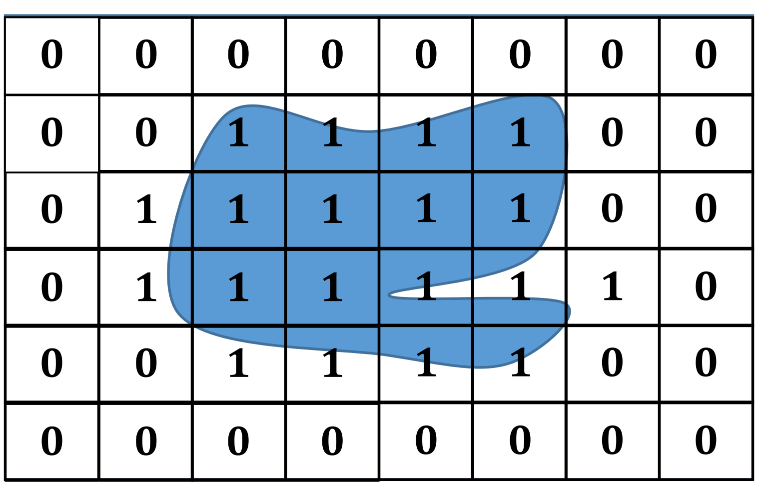
$$U(\chi_{\Omega}, P) = \sum_{R_i \in P_{\supseteq}} Vol(R_i)$$

כאשר:

$$P_{\supseteq} = \{R \in P | R_i \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

<u>הערה</u> - $Vol(\Omega) = \inf_{P} \sum_{R_i \in P_{\supseteq}} Vol(R_i)$

ובאופן דומה ניתן להגדיר קירוב "מבפנים" תוך הסתמכות על היות התחום סגור של תחום פתוח בעל שפה בעלת שטח 0.



<u>הערה</u> – אם $f \geq 0$ אינטגרבילית בתיבה R, אזי מתקיים:

$$Vol\left(\left\{(x,y) \in R \times \mathbb{R} \middle| \begin{matrix} 0 \leq y \leq f(x) \\ x \in R \end{matrix} \right\}\right)$$

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $f: R \mapsto [0, M]$ עבור:

$$\Omega := \left\{(x,y) \in R \times \mathbb{R} \middle| \begin{matrix} 0 \le y \le f(x) \\ x \in R \end{matrix}\right\}$$

אזי:

$$Vol(\Omega) = \int_{R\times[0,M]} \chi_\Omega dV = \int_R \left(\int_{[0,M]} \chi_\Omega(x,y)dy\right)dx = \int_R \left(\int_0^M \chi_{[0,f(x)]}(y)dy\right)dx = \int_R f(x)dx$$

הרצאה 19

12.7 משפט פוביני – תהיינה $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ תיבות. תהא $f: A \times B \mapsto \mathbb{R}$ אינטגרבילית. לכל $x \in A$, נגדיר:

$$\boldsymbol{g_x: B \mapsto \mathbb{R} \quad g_x(y) = f(x,y)}$$

אזי אם g_x אינטגרבילית על B לכל x, אזי מתקיים:

$$\int_A \left(\int_B \boldsymbol{g_x(y)\, dy} \right) \boldsymbol{dx} = \int_{A\times B} \boldsymbol{f(x,y) dxdy}$$

<u>הערה</u> - הסימון dx, dy במקרה זה מתאימים ל-dV_m ו-dV_n המתאימים, וכן $dxdy$ שקול לסימון dV_{m+n}.

<u>הוכחה:</u>

נגדיר:

$$G(x) = \int_B g_x dV_n$$

תהא, אם כן, P_A חלוקה של A, וכן P_B חלוק של B ונסמן:

$$P = P_A \times P_B$$

כחלוקה מתאימה[7] של $A \times B$. נוכיח עתה טענת עזר:

12.8 טענה - $L(f,P) \le L(G,P_A) \le U(G,P_A) \le U(f,P)$.

<u>הוכחה:</u>

יהא $x \in A$. אזי קיימת תיבה $R_A \in P_A$ עבור $x \in R_A$. מתקיים, כמובן:

$$G(x) \le U(g_x, P_B) = \sum_{R_B \in P_B} M_{R_B}(g_x) Vol(R_B) = (\star)$$

כאשר:

$$M_{R_B}(g_x) \coloneqq \sup\left\{ \overbrace{g_x(y)}^{f(x,y)} \middle| y \in R_B \right\}$$

מהגדרת M_{R_B} ודאי שמתקיים:

$$M_{R_B}(g_x) \le \sup\{f(\xi,y) | (\xi,y) \in R_A \times R_B\}$$

ומכאן שמתקיים:

$$(\star) \le \sum_{R_B \in P_B} M_{R_A \times R_B}(f) Vol(R_B)$$

כמו כן מתקיים:

$$U(G,P_A) = \sum_{R_A \in P_A} M_{R_A}(G) Vol(R_A) \le \sum_{R_A \in P_A} \sum_{R_B \in P_B} M_{R_A \times R_B}(f) Vol(R_B) Vol(R_A) \le U(f,P)$$

עתה, בהנתן שהוכחנו טענו זה, נוכל להוכיח את המשפט.

בהנתן $\varepsilon > 0$, תהא $P = P_A \times P_B$ חלוקה כך שמתקיים $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\ (\star)$. מטענת העזר נקבל כי $U(G,P_A) - L(G,P_B) < \varepsilon$. מכאן ש-$G$ אכן אינטגרבילית. בפרט נקבל כי:

---

[7] הצגה בצורה זו הינה, בשנית, וריאציה של "Abuse of notation". הכוונה בסימון זה היא חלוקה לכל המכפלות הקרטזיות בפתיחת A, B לכל המשתנים שלהם, בהתאמה.

$$\int f-\varepsilon<\int_A G\leq U(G,P_A)\leq U(f,P)<\int f+\varepsilon$$

וזאת משום שמ-($\star$) נובע בפרט כי $U(f,P)-\int f<\varepsilon$ ובפרט $U(G,P_A)-\int f<\varepsilon$.

<u>הערה</u> – במשפט הבא ייעשה שימוש במושג "יעקוביאן". עד עתה המונח תיאר את מטריצת הנגזרות. במקרים רבים ישנו שימוש במושג לתיאור הדטרמיננטה של מטריצה זו. במשפט שיוכח זה עתה, השימוש במונח ייעשה על מנת להתייחס למטריצת הנגזרות (לא לדטרמיננט).

12.9 משפט החלפת המשתנים – יהא $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום בעל נפח, ונניח כי $\Omega\subseteq U$ פתוחה, ושנתונה $g\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$. נניח כי g חד-חד ערכית ובעלת נגזרת הפיכה בכל נקודה. אזי, אם:

א. $g(\Omega)$ תחום בעל נפח.
ב. $f\colon g(\Omega)\mapsto\mathbb{R}$ אינטגרבילית.
ג. $f\circ g\colon\Omega\mapsto\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

אזי מתקיים:

$$\int_{g(\Omega)}f(y)dy=\int_{\Omega}[f\circ g(x)]\left|det\big(Dg(x)\big)\right|dx$$

<u>הערות:</u>

א. מספיק להוכיח כי g מקיימת את התנאים למעט בקבוצה בעלת נפח אפס, על מנת שהנוסחה עדיין תהיינה נכונה.
ב. אפשר להראות ש-$g(\Omega)$ בעל נפח תחת ההנחה ש-Ω מקיים את התנאים הנדרשים.

12.10 הגדרה – אם $v_1,\cdots,v_n\in\mathbb{R}^n$ אזי המקבילון הנוצר על ידי וקטורים אלו זו הקבוצה:

$$P(v_1,\cdots,v_n)=\{\sum a_iv_i\,|0\leq a_i\leq 1\}$$

12.10.1 הגדרה - אם $a\in\mathbb{R}^n$ אזי גם $a+P(v_1,\cdots,v_n)$ נקרא מקבילון. כאשר $v_1,\cdots,v_n$ תלויים ליניארית, המקבילון נקרא מקבילון מנוון.

<u>כתרגיל</u> – השטח של מקבילית ב-$\mathbb{R}^2$ נתון על ידי בסיס × גובה. כלומר:

$$Vol\big(a+P(v_1,v_2)\big)=\|v_1\times v_2\|=|\det(v_1|v_2)|=\|v_1\|\cdot\|v_2\||\sin\angle(v_1,v_2)|$$

<u>כתרגיל</u> – אם $\Omega_2\subseteq\mathbb{R}^n$,$\Omega_1\subseteq\mathbb{R}^m$ תחומים בעלי נפח, אזי מתקיים:

$$Vol(\Omega_1\times\Omega_2)=Vol(\Omega_1)Vol(\Omega_2)$$

<u>למה 0</u> – אם Q מקבילון לא מנוון אזי Q תחום בעל נפח, ואם Q מנוון אזי ל-Q נפח אפס.

<u>למה 0 – תוספת</u> – אם $T\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ ליניארית אזי אם Q מקבילון, גם $T(Q)$ הוא מקבילון.

12.11 למה 1 – אם $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ תחום בעל נפח ו-$T\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ ליניארית, אזי $T(\Omega)$ בעל נפח, או בעל נפח 0. כלומר:

$$\boldsymbol{Vol\big(T(\Omega)\big)=|det(T)|\cdot Vol(\Omega)}$$

<u>הערה</u> - $P(v_1,\cdots,v_n)=T\big(P(e_1,\cdots,e_n)\big)$ עבור $v_i=Te_i$. נקבל:

$$[T]=[v_1|\cdots|v_n]$$

ולכן:

$$Vol\big(P(v_1,\cdots,v_n)\big) = \big|\det Vol\big(P(e_1,\cdots,e_n)\big)\big|$$

נוכיח עתה – נניח כי T הפיכה. כלומר, T ניתנת להצגה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות מהצורה:

$$T = E_1 \cdots E_m$$

כאשר כל E_k לכל $1 \le k \le m$ היא מטריצה מהצורה:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & \cdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & C & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \cdots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & C & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מכפלת שורה בסקלר   החלפת שורות   הוספת שורה מוכפלת בסקלר

נניח עתה כי T אלמנטרית. מההרצאה הקודמת ראינו כי:

$$Vol(\Omega) = \sup_P \sum_{R_i \in P_\subseteq} Vol(R_i)$$

עבור P חלוקה של $R \subseteq \Omega$. "נקבל" עתה, חלוקה של $T(R)$ למקבילונים מהצורה $\{T(R_i) | R_i \in P\}$.

כמו כן, מתקיים:

$$Vol\big(T(\Omega)\big) \ge \sum_{R_i \in P_\subseteq} Vol\big(T(R_i)\big) \overset{(\star)}{=} \sum_{R_i \in P_\subseteq} |\det T| Vol(R_i)$$

כאשר השוויון $(\star)$ מן ההנחה בה"כ שמתקיים T = מטריצת הוספת שורה מוכפלת בסקלר, כלומר $T = E_{r_1 \to r_1 + c r_2}$.

עבור sup על P נקבל כי:

$$Vol\big(T(\Omega)\big) \ge |\det T| Vol(\Omega)$$

(את הצד השני של אי השוויון ניתן להוכיח כתרגיל).

נגדיר עתה סימונים – $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ וכן נזכיר:

$$\|T\|_\infty = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad T: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

<u>הערה</u> – בהנתן תיבה מהצורה:

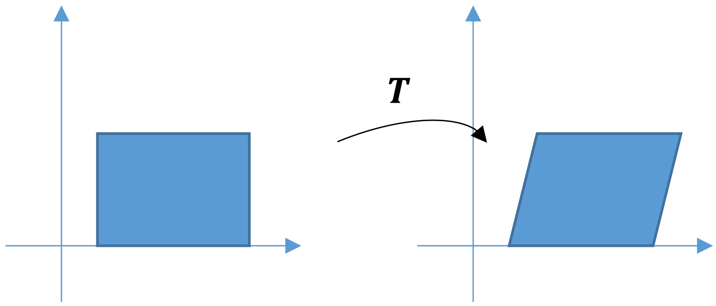
$$Q = a + [0, L_1] \times \cdots \times [0, L_n]$$

נשים לב כי אם, כפי שתיארנו קודם, T אלמנטרית אזי מתקיים:

$$T(Q) = Ta + \left(\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [0, L_1] \times [0, L_2]\right) \times \cdots \times [0, L_n]$$

ובמקרה הדוד ממדי, לדוגמא, נקל לראות כי:

$$Vol\left(\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [0, L_1] \times [0, L_2]\right) = L_1 \times L_2$$



12.12 למה 2 – תהא $g \in C^1$ מוגדרת בסביבה של תיבה $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ עם מרכז ב-a. יהא $\varepsilon > 0$. נניח כי:

$$\forall x \in Q \quad \left\| Dg(a)^{-1} Dg(x) - I_n \right\| < \varepsilon$$

אזי מתקיים:

$$Vol\big(g(Q)\big) \le (1+\varepsilon)^n |det\, Dg(a)| Vol(Q)$$

<u>הוכחה:</u>

נניח כי Q קוביה עם צד באורך $2r$ ונגדיר $\phi: [-r,r]^n \mapsto \mathbb{R}^n$ על ידי:

$$\phi(x) = Dg(a)^{-1}\big(g(x+a) - g(a)\big)$$

אזי מתקיים:

איור 19 – במקרה הדו ממדי. קל לראות כי טרנספורמציה אלמנטרית של הוספת שורה מוכפלת בסקלר לא משנה את ה"בסיס" ואת ה"גובה" ולכן שטח המקבילית נשאר זהה

נשים לב כי מכאן נובע.

$$\|D\phi\|_\infty < 1+\varepsilon \Longrightarrow \phi([-r,r]^n) \subseteq [-(1+\varepsilon)r, (1+\varepsilon)r]^n$$

נשים לב כי לכל $x \in [-r,r]$ מתקיים $x + a \in Q$ ולכן:

$$g(x+a) = Dg(a)\phi(x) + g(a)$$

ובאופן כללי נוכל לכתוב:

$$g(Q) = Dg(a) \cdot \phi([-r,r]) + g(a) \subseteq Dg(a)([-(1+\varepsilon)r, (1+\varepsilon)r]) + g(a)$$

ומכאן שמתקיים:

$$Vol\big(g(Q)\big) \le |\det Dg(a)| (1+\varepsilon)^n Vol(Q)$$

<u>כתרגיל</u> – לקבל אי שוויון עבור תיבה כללית.

עתה, נוכיח את המשפט:

נרצה להראות כי:

$$\int_{g(\Omega)} f(y)dy = \int_{\Omega} f \circ g(x)\, |\det Dg(x)| dx$$

תהא P חלוקה כך שכל תיבה שתורמת לסכום $U(f \circ g|\det Dg|, P)$ נמצאת בתוך U. נסמן:

$$Q = \bigcup_{R_i \cap \Omega \neq \emptyset} R_i$$

יהא $\varepsilon > 0$. כמו כן, יהא M כך שמתקיים $|f| \leq M$ וכן $\|(Dg)^{-1}\| \leq M$ ב-Q.

נניח כי P עדינה כך שמתקיים:

$$\begin{matrix} \forall x, y \in R_i \\ \forall R_i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \|Dg(x) - Dg(y)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{M} \\ \left|\det\left(Dg(x)\right) - \det\left(Dg(y)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{M} \end{matrix}$$

ואם a_i המרכז של התיבה R_i, אזי מתקיים:

$$\|Dg(a_i)^{-1}Dg(x) - I\|_\infty \leq \|Dg(a_i)^{-1}\| \|Dg(x) - Dg(a_i)\| < \varepsilon$$

עתה נשים לב, כי:

$$\int_{g(\Omega)} f(y)dy \leq \sum \int_{g(R_i)} f(y)dy \leq \sum M_i Vol\left(G(r_i)\right) \leq (\star)$$

עבור הסימון:

$$M_i = \sup_{y \in g(R_i)} f(y) = \sup_{x \in R_i} f \circ g(x)$$

וכן:

$$(\star) \leq \sum M_i(1+\varepsilon)|\det Dg(a_i)| Vol(R_i) \leq \sum \widetilde{M_i}(1+\varepsilon)^n Vol(R_i) + \varepsilon(1+\varepsilon)^n \sum Vol(R_i) = (\star)$$

וזאת עבור הסימון:

$$\widetilde{M_i} = \sup_{s \in R_i} f \circ g(x) |\det Dg(x)|$$

ונעזרנו בכך שמתקיים:

$$M_i |\det Dg(a_i)| \leq \widetilde{M_i} + \varepsilon$$

$$\int_{g(\Omega)} f(y)dt \leq U(f \circ g|\det Dg|, P)(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n \cdot C$$

נמשיך את ההוכחה בהרצאה הבאה.

הרצאה 20

תזכורת – משפט החלפת המשתנים:

ראינו כי תחת התנאים הנדרשים במשפט זה מתקיים:

$$\int_{g(\Omega)} f dV = \int_{g(\Omega)} f(y) dV = \int_{\Omega} f \circ g |J| dV = \int_{\Omega} f \circ g |\det Dg(x)| dV(x)$$

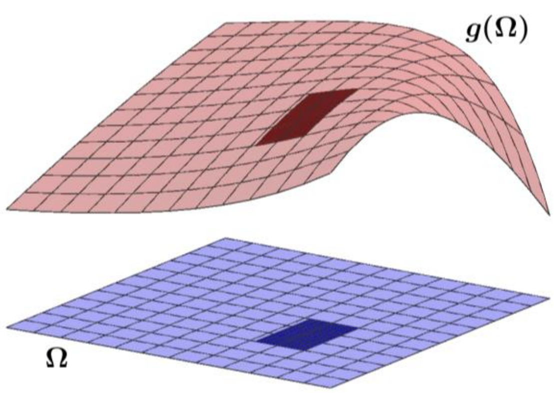
בפרט:

$$Vol\big(g(\Omega)\big) = \int_{g(\Omega)} 1 dV(y) = \int_{\Omega} |\det Dy(x)| dV(x)$$

כפי שניתן ללמוד מן האיור שלהלן, היות ואנו יודעים כי g בסביבה לוקלית של כל נקודה מתנהגת בדומה להעתקה ליניארית, אנו יודעים שככל שנבחר תיבה קטנה יותר במקור, תמונת g שתתקבל עבור תיבה זו תהיה קרובה יותר ויותר למקבילית אשר $|\det Dg(x)|$ הוא היחס בין שטח המקבילית לבין שטח התיבה שנבחרה.

כלומר, עבור תיבה במקור ששטחה נתון על ידי ביטוי מהצורה $dx_1 dx_2$, ההעתקה g מבטיחה כי שטח המקבילית שתתקבל בתמונה ישאף ל-$|\det Dg(x)| dx_1 dx_2$.

על מנת לקבל את כל השטח של $g(\Omega)$, עלינו לסכום את שטחי כל המקביליות.



איור 20 – דוגמה לפרמטריזציה של יריעה כלשהי ו"פיסות" שטח על היריעה ועל קבוצת המקור שלה ביחס לפרמטריזציה

דוגמה:

נניח כי $a < b$ כלשהם, אזי עבור $0 \le u \le 2\pi \quad 0 \le v \le 2\pi$ נגדיר:

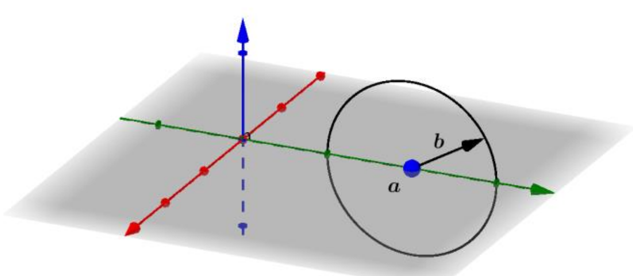
$$\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & 0 & -\sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin v & 0 & \cos v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + b\cos u \\ b \sin u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a + b\cos u)\cos v \\ b \sin u \\ (a + b\cos u)\sin v \end{bmatrix}$$

זוהי פרמטריזציה של טורוס. על מנת לקבל אותה, מבחינה אינטואיטיבית, נתבונן במישור xy, ונבחר בנקודה a על ציר ה-x. סביב נקודה זו נבנה מעגל ברדיוס b, כמתואר באיור 2. (נניח כי y הוא הציר הכחול, x הציר הירוק ו-z הוא הציר האדום).

לאחר מכן, את המעגל הנ"ל נרצה להגדיר עבור כל "סיבוב" של מערכת הצירים כשציר y הינו ציר הסיבוב. לשם כך נרצה להרכיב על נקודות מעגל זה סיבוב בזווית $0 \le v \le 2\pi$.

לשם כך נרצה להבין כיצד נראה אופרטור הסיבוב סביב ציר y במרחב תלת ממדי.

כפי שניתן לראות באיור 3, סיבוב של המערכת כך שציר הסיבוב הוא ציר y משאיר את ערך y של כל נקודה כמו שהיא.



איור 21 – שלב א' בבניית הטורוס, בחירת המעגל הראשון לסיבוב

היות ובסיבוב זה אנו מצפים שהמרחק מן הראשית יישאר, נשים לב כי המרחק של a' מהראשית זהה למרחק של a מהראשית. ולכן, עבור רכיבי x, z מתקיים:

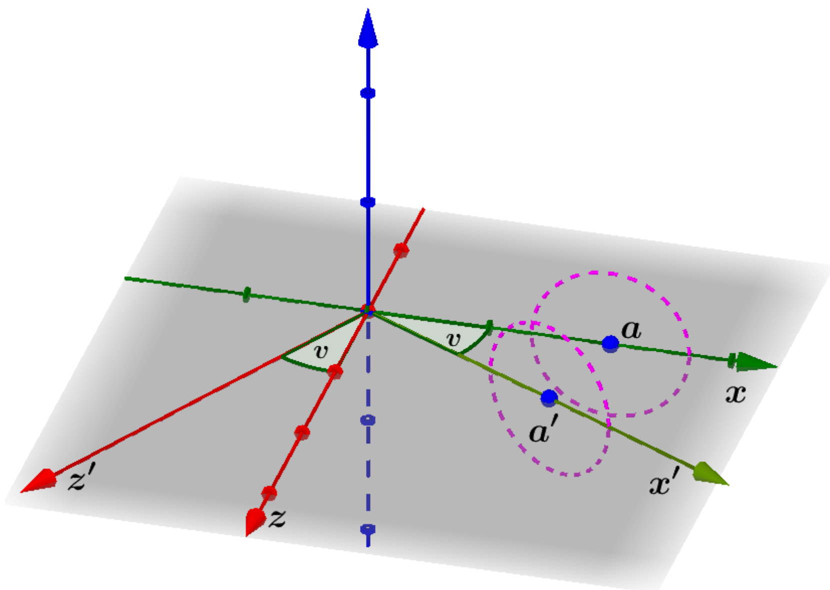
$$x = p_x \cos v$$
$$z = p_x \sin v$$

ונקבל כי עבור נקודה כללית, המטריצה שהגדרנו לעיל היא מטריצה אורתוגונלית ופעולתה על וקטור היא בדיוק סיבוב כנ"ל.

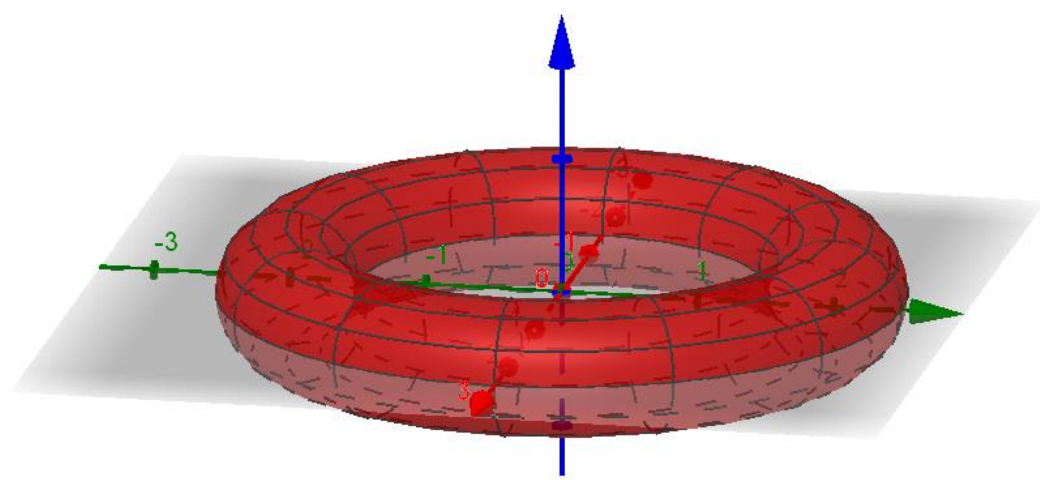
עתה כאשר ראינו כי לכל נקודה על המעגל הראשון שמצאנו מתקיים:

$$p_x = a + b\cos u$$
$$p_y = b \sin u$$
$$p_z = 0$$

נוכל להסיק כי אכן הטורוס יתקבל מהפרמטריזציה הנ"ל (קרי, בחירת כל הנקודות על המעגל הראשי שבחרנו, וסיבובן מסביב לציר y סיבוב שלם).



איור 23 – הדגמה של סיבוב המעגל על ידי סיבוב כל המערכת בזווית v



איור 22 – טורוס בעל רדיוס ראשי 2 ורדיוס משני 0.5

אך עתה נרצה להגדיר פרמטריזציה לפנים של הטורוס. ולכן נוכל להגדיר:

$$g(t,u,v) = \begin{bmatrix} (a + t\cos u)\cos v \\ b \sin u \\ (a + t\cos u)\sin v \end{bmatrix} \quad \Omega = [0,b] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi]$$

והנפח שנרצה לחשב הוא $Vol(\widetilde{\Omega})$ כאשר $\widetilde{\Omega} = g(\Omega)$. g, באופן כללי, איננה חד-חד ערכית על Ω והנגזרת שלה אף אינה רגולרית בכל מקום, אך הנ"ל מתקיים בקבוצה בעלת שטח 0. כפי שראינו, אין הנ"ל משפיע על חישוב הנפח.

למרות זאת, g אכן חד-חד ערכית על התחום $(0,b]\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)$ ומתקיים:

$$Dg=\begin{bmatrix}\cos u\sin v & -t\sin u\cos v & -(a+t\cos u)\sin v\\ \sin u & t\cos u & 0\\ \cos u\sin v & -t\sin u\sin v & (a+t\cos u)\cos v\end{bmatrix}$$

$Dg\neq 0$ למעט במקרה שבו $t=0$ או $a=-t\cos u$ אך כל הנקודות בהן הנ"ל מתקיים הינן קבוצת נקודת בעלת שטח אפס.

$$|\det Dg|=\cdots=t(a+t\cos u)$$

ולכן:

$$Vol\big(g(\Omega)\big)=\int_{g(\Omega)}1dV_{(x,y,z)}=\int_{\Omega}1|\det Dg(t,u,v)|dV_{(t,u,v)}$$

$$=\int_{[0,b]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]}t(a+t\cos u)dV\overset{\text{פוביני}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}t(a+t\cos u)dtdudv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{b^2a}{2}+\frac{b^3}{3}\cos u\right)dudv=2\pi^2b^2a$$

כעת, נרצה לחשב את שטח הפנים של טורוס. לרוב, אנו עוסקים במשטחים, יריעות חלקות. ננסה לבצע קירוב שלהם למלבנים קטנים, ולסכום אותם (שטח הפנים שלהם), וכך נקבל את שטח הפנים של המשטח.

<u>נפח k-ממדי:</u>

יהיו $v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{R}^n$ ו-a. נרצה להגדיר נפח k-ממדי של מקבילות הנתון על ידי $a+P(v_1,\cdots,v_k)$. נניח אם כן, כי $v_i=\begin{bmatrix}v_i^1\\ \vdots\\ v_i^n\end{bmatrix}$ כאשר $v_i^{k+1}=\cdots=v_i^n=0$, כלומר ניתן לכתוב:

$$v_i=\begin{bmatrix}\tilde{v_i}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\quad \tilde{v_i}\in\mathbb{R}^k\quad \forall 1\leq i\leq k$$

נגדיר במקרה זה:

$$Vol_k\big(a+P(v_1,\cdots v_k)\big)=Vol\big(P(\widetilde{v_1},\cdots,\widetilde{v_k})\big)=|\det[\widetilde{v_1}|\cdots|\widetilde{v_k}]|=|\det\tilde{v}|$$

ועתה, אם נסמן:

$$\tilde{V}=[\widetilde{v_1}|\cdots|\widetilde{v_k}]$$

נוכל לרשום:

$$V=[v_1|\cdots|v_k]=\begin{bmatrix}\tilde{V}\\ 0\end{bmatrix}$$

נקבל כי V הינה מטריצת בלוקים כאשר $V^*=[\tilde{V}^*\quad 0]$ ולכן מתקיים:

$$\left|\det\tilde{V}\right|=\sqrt{\det\tilde{V}^*\tilde{V}}=\sqrt{\det V^*V}$$

13.1 הגדרה - יהיו $\boldsymbol{v_1, \cdots, v_k} \in \mathbb{R}^n$ וקטורים כלשהם. הנפח ה-$\boldsymbol{k}$ ממדי של המקבילון $\boldsymbol{a + P(v_1, \cdots, v_k)}$ מוגדר להיות:

$$\boldsymbol{Vol_k\big(a + P(v_1, \cdots, v_k)\big) = \sqrt{\det V^*V} \quad V = [v_1| \cdots |v_k]}$$

מקרה מיוחד – כאשר $k = 2, n = 3$, נקבל כי:

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$Vol\big(P(v_1, v_2)\big) = \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}\right)}$$

$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}} = \cdots = \sqrt{(x_1y_2 - y_1x_2)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2}$$

$$= \|v_1 \times v_2\|$$

וזאת כאשר המכפלה הוקטורית הנ"ל מוגדרת להיות:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

נשים לב כי בניגוד למכפלה הסקלרית, במקרה זה $v_1 \times v_2$ הוא וקטור שאורכו הוא $\|v_1\|\|v_2\| \cdot \sin\alpha$ כאשר α הינה הזווית בין שני הווקטורים. כיוון וקטור זה יהיה ניצב למישור שוקטורים אלה פורשים.

מכאן ששטח המקבילית שהם פורשים נתון על ידי:

$$\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\|\|v_2\||\sin\alpha|$$

מה עושות העתקות ליניאריות למקבילונים?

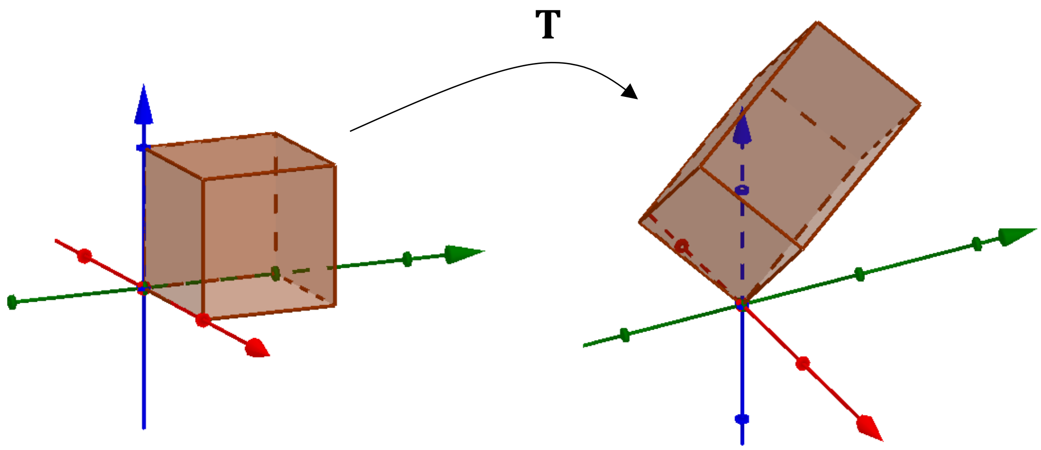
תהא $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית. אם $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי מתקיים:

$$T\big(P(v_1, \cdots v_k)\big) = P(Tv_1, \cdots Tv_k)$$

ואכן מתקיים:

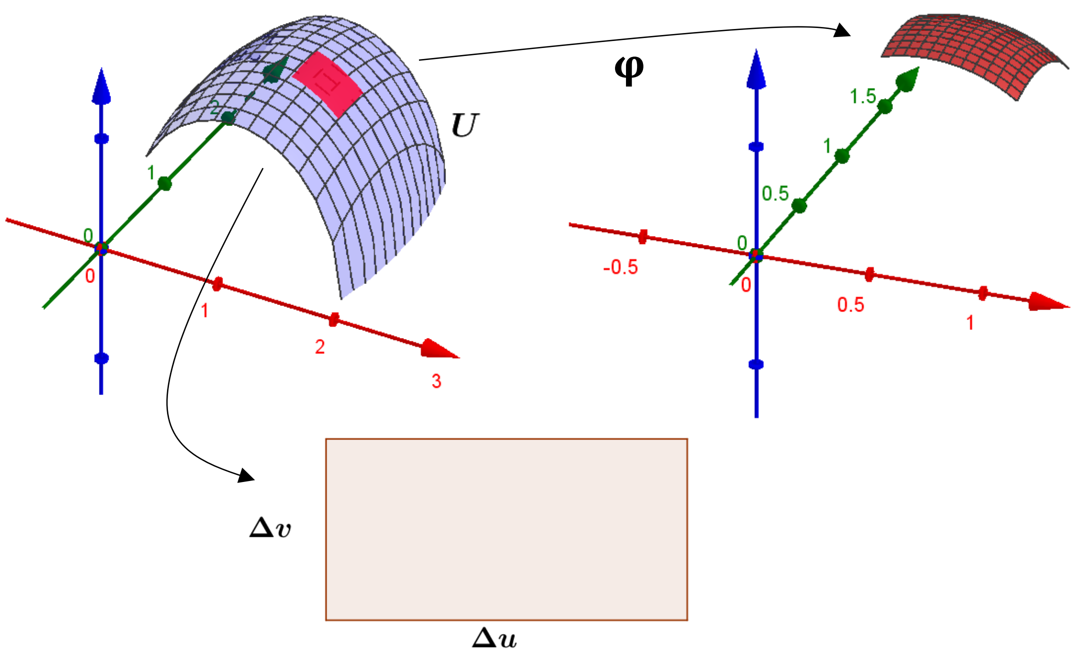
$$Vol_k\left(T\big(P(v_1, \cdots, v_k)\big)\right) = \sqrt{\det(TV)^*TV} = \sqrt{\det T^*T \det V^*V} = \sqrt{\det T^*T}\, Vol\big(P(v_1, \cdots, v_k)\big)$$

13.2 מסקנה – העתקה ליניארית $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ מנפחת נפח $\boldsymbol{k}$-ממדי של מקבילון בגורם $\boldsymbol{\sqrt{\det T^*T}}$



איור24 – דוגמה להעתקה ליניארית במרחב תלת ממדי המעתיקה תיבה למקבילון

עתה, נניח $U \subset \mathbb{R}^2$ ו-$\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ פרמטריזציה של פיסה מיריעה כך ש-φ חד-חד ערכית ו-C^1 וכך שמתקיים $\operatorname{rank} D\varphi = 2$.



איור 25 – תיאור המקרה

$$\text{מלבן} = (u,v) + P\left(\begin{pmatrix}\Delta u\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\Delta v\end{pmatrix}\right) \to \approx \varphi(u,v) + D\varphi\left(P\left(\begin{pmatrix}\Delta u\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\Delta v\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$D\varphi\begin{pmatrix}0\\\Delta v\end{pmatrix} = \varphi_v \Delta v, D\varphi\begin{pmatrix}\Delta u\\0\end{pmatrix} = \varphi_u \Delta u \Longrightarrow S = \|\varphi_u \times \varphi_v\| \Delta v \Delta u$$

13.3 הגדרה – שטח פנים של S הנתונה כפי שתיארנו זה עתה, מוגדרת להיות:

$$\boldsymbol{A(S) = \int_U \sqrt{det\left(D\varphi^*(u,v)D\varphi(u,v)\right)}dudv = \int_U \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv}$$

<u>מקרה חשוב</u> – אם $T \equiv \varphi$ ליניארית כלשהי, אזי $D\varphi = T$ ומתקיים:

$$A(S) = \int_U \sqrt{\det T^*T}\, dudv = \sqrt{\det T^*T}\, Vol_2(U)$$

הרצאה 21

13.4 הגדרה – תהא $U \subset \mathbb{R}^k$ וכן $\Omega \subset U$ תחום בעל נפח. תהא $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\varphi \in C^1$, חד-חד ערכית, כך שמתקיים $\operatorname{rank} D\varphi \equiv k$. נסמן $S = \varphi(\Omega)$. נגדיר את <u>שטח הפנים ה-k-ממדי של S</u>, להיות:

$$A_k(S) := \int_\Omega (\det(D\varphi^* D\varphi))^{\frac{1}{2}} dV$$

<u>הערה</u> – אפשר לדרוש חד-חד ערכיות או $\operatorname{rank} D\varphi = k$ למעט קבוצה בעלת נפח אפס בה זה לא יתקיים.

<u>הערה 2</u> – כאשר $k = 2$, $n = 3$, זהו בדיוק שטח פנים של (פיסה של) משטח דו ממדי במרחב התלת ממדי.

<u>דוגמה</u> – מקרה פרטי – עבור $k = 1$, למשל $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\varphi'(t) \neq 0$ לכל $t \in [a, b]$, נקבל כי $A_1(\varphi[a, b])$ הוא "שטח פנים 1-ממדי של $\varphi[a, b]$", כלומר, מדובר על אורכו של עקום. ואכן:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix} \quad \varphi'(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) \end{bmatrix} = D\varphi|_t$$

מכאן שמתקיים:

$$D\varphi^*(t) D\varphi(t) = [\varphi_1'(t), \cdots, \varphi_n'(t)] \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \left(\varphi_i'(t)\right)^2$$

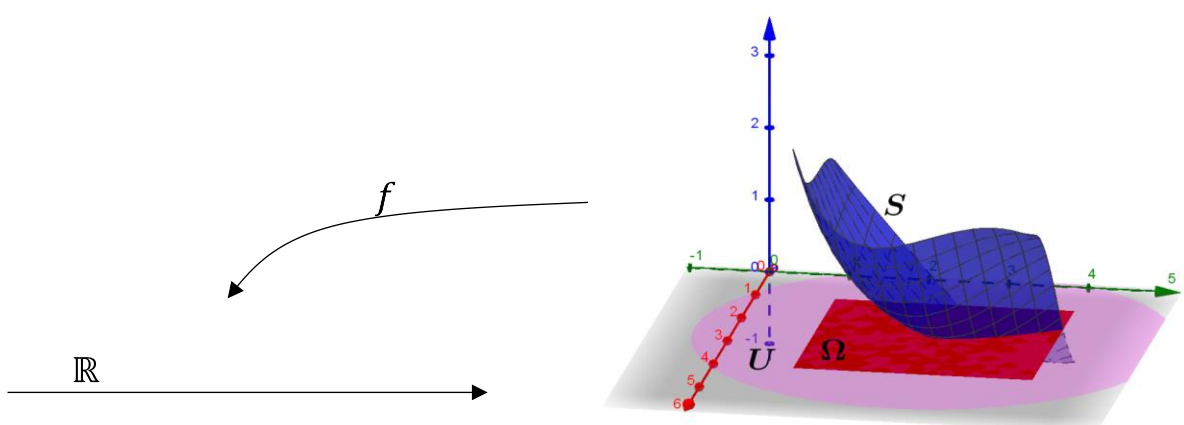
כלומר יתקיים:

$$A_1(\varphi[a, b]) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\varphi'(t)\right)^2}\, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt$$

ואכן, הגדרה 21.1 תואמת את ההגדרה שלנו לאורך עקום שהוכחה קודם לכן.

13.5 הגדרה – (בסימוני ההגדרה הקודמת), נניח כי $n = 3, k = 2$. תהא $f: \overset{\varphi(\Omega)}{S} \to \mathbb{R}$.

אזי האינטגרל הסקלרי של f על S מוגדר להיות:



$$\overbrace{\int_S f dA = \int_S f d\sigma = \int_S f(\sigma) d\sigma}^{\text{סימונים שונים}} := \int_\Omega (f \circ \varphi) \cdot (\det(D\varphi^* D\varphi))^{\frac{1}{2}} dV$$

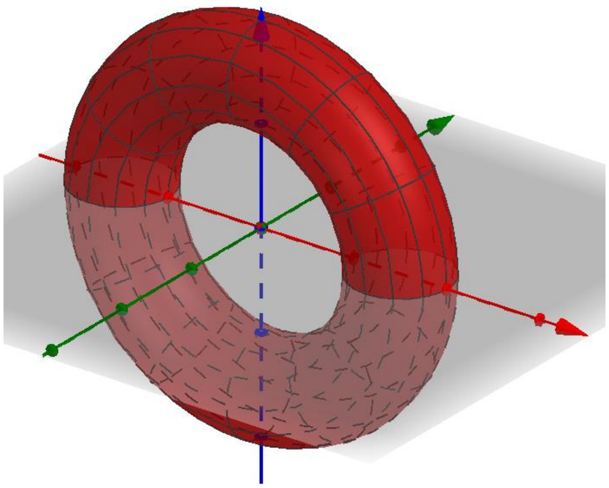
$$= \int_\Omega (f \circ \varphi) \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

<u>דוגמה:</u> רוצים לחשב משקל של גלגל-ים (טורוס):

$$S = \mathbb{T}^2 = \varphi([0,2\pi] \times [0,2\pi])$$

כאשר:

$$\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} (a + b\cos u)\cos v \\ b \sin u \\ (a + b\cos u)\sin v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



איור 26 – גלגל-ים, קרי $\varphi([0,2\pi] \times [0,2\pi])$

נניח, כמו כן, כי צפיפות המסה של גלגל זה נתונה על ידי:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \rho(x,y,z)$$

המסה נתונה ידי:

$$\int_S f dA = \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} f \circ \varphi(u,v) \|\varphi_u \times \varphi_v\| dudv$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos u} b(a + b\cos u) dudv$$

$$= \cdots = b4\pi^2$$

13.6 טענה – אינטגרל משטחי אינו תלוי בפרמטריזציה – נניח כי $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$ וכן נתונות לכל $i = 1, 2$ פונקציה מהצורה $\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^3$ חד-חד ערכיות, C^1, $\mathrm{rank}\, D\varphi_i = 2$. כמו כן, נניח כי $\Omega_i \subset U_i$ תחום בעל שטח ונניח כי $\varphi_1(U_1) = \varphi_2(U_2)$ ובפרט $\varphi_1(\Omega_1) = \varphi_2(\Omega_2)$.

נסמן:

$$J_i = (\det D\varphi_i^* D\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

אזי יתקיים:

$$\int_{\Omega_2} f \circ \varphi_2 \cdot J_2 dV = \int_{\Omega_1} f \circ \varphi_1 \cdot J_1 dV$$

כלומר, $\int_S f dA$ אינו תלוי בפרמטריזציה.

<u>הוכחה:</u>

שלב א' – נוכיח כי קיימת $h: U_1 \to U_2$ כך ש-$h \in C^1$, חד-חד ערכית והפיכה כך שמתקיים $\varphi_2 \circ h = \varphi_1$ (יוכח בהמשך).

שלב ב' – נחשב באופן ישיר ונראה כי ערך האינטגרל לא משתנה תחת רה-פרמטריזציה:

$$\int_{\Omega_2} f\circ\varphi_2\cdot J_2 dV \overset{\text{החלפת משתנים}}{=} \int_{\Omega_1} f\circ \overbrace{\varphi_2\circ h}^{=\varphi_1}\cdot\overbrace{J_2\circ h\cdot|\det Dh|}^{(\star)}\, dv$$

ונשים לב כי:

$$J_1(u,v)=\sqrt{\det\left(D\varphi_1^*(u,v)D\varphi_1(u,v)\right)}$$

ונציב:

$$D\varphi_1(u,v)=D(\varphi_2\circ h)(u,v)=D\varphi_2\big(h(h,v)\big)Dh(u,v)$$

כלומר:

$$J_1(u,v)=\sqrt{\det\left[D\varphi_2\big(h(u,v)\big)^* D\varphi_2\big(h(u,v)\big)\right]\det[Dh^*(u,v)Dh(u,v)]}=J_2\circ h(u,v)\cdot|\det Dh(u,v)|$$

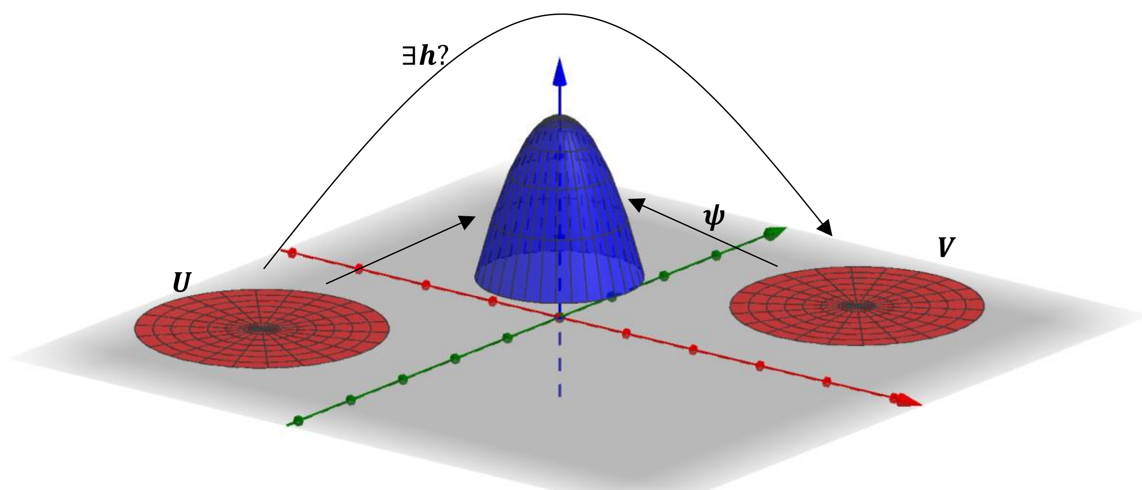
כלומר $(\star)=J_1(u,v)$ ואכן לאחר הצבה נקבל כי האינטגרלים שווים כנדרש. נותר להוכיח את שלב א' ונקבל כי הטענה אכן נכונה כנדרש.

<u>הרצאה 22</u>

14.1 טענה – יהיו $\varphi:U\to\mathbb{R}^3,\ \psi:V\to\mathbb{R}^3$ אשר שתיהן C^1, חד-חד ערכיות וכן מתקיים $\operatorname{rank} D\varphi=\operatorname{rank} D\psi=2$ בכל נקודה. כמו כן, נניח כי $S\coloneqq\varphi(U)=\psi(V)$.

אזי קיימת $h:U\to V\in C^1$ הפיכה אשר הפונקציה ההפוכה שלה היא C^1, כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{\psi\circ h=\varphi}$$



<u>הוכחה:</u>

נגדיר $h=\psi^{-1}\circ\varphi$ ונשים לב כי מתקיים, כמובן $\psi\circ h=\psi\circ\psi^{-1}\circ\varphi=\varphi$. וכן h הפיכה כהרכבה של כאלו. נרצה להראות כי $h\in C^1$ אך ψ^{-1} מוגדרת על התחום S וכן $\varphi\in C^1$ מוגדרת $\varphi:U\to\mathbb{R}^2$ – אך זו לא תהא בעיה.

נראה כי בסביבת כל נקודה ב-U, h גזירה ברציפות.

הרעיון – נמשיך את ψ^{-1} לפונקציה $\tilde{\psi}^{-1}$ שמוגדרת בסביבה של S:

$$C^1 \ni \psi: V \to \mathbb{R}^3 \quad \psi(u,v) = \begin{bmatrix} \psi_1(u,v) \\ \psi_2(u,v) \\ \psi_3(u,v) \end{bmatrix}$$

נשים לב כי מתקיים:

$$D\psi = \begin{bmatrix} \partial_u\psi_1 & \partial_v\psi_1 \\ \partial_u\psi_2 & \partial_v\psi_2 \\ \partial_u\psi_3 & \partial_v\psi_3 \end{bmatrix} \quad \operatorname{rank} D\psi \overset{\text{נתון}}{=} 2$$

ובלי הגבלת הכלליות נניח כי:

$$\det \begin{bmatrix} \partial_u\psi_1 & \partial_v\psi_1 \\ \partial_u\psi_2 & \partial_v\psi_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

ומכאן שנוכל להגדיר $\tilde{V} = \overset{\subset\mathbb{R}^2}{V} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ ועבורה:

$$\tilde{\psi}: \tilde{V} \to \mathbb{R}^3 \quad C^1 \ni \tilde{\psi}(u,v,w) = \psi(u,v) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix}$$

ומתקיים:

$$D\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} D\psi & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = \frac{\partial(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_3)}{\partial(u,v,w)} \Longrightarrow \boxed{\det D\tilde{\psi} \neq 0}$$

נשים לב, עתה כי:

$$\tilde{\psi}(u,v,0) = \psi(u,v)$$

והיות ו-$D\tilde{\psi}$ הפיכה, נסיק כי $\tilde{\psi}$ הפיכה מקומית (עם הפוכה $\tilde{\psi}^{-1}$). לכל $(u_0,v_0) \in V$ יש סביבה של $(u_0,v_0,0)$ שבה $\tilde{\psi}$ מוגדרת הפיכה עם הפוכה C^1 ו-$\tilde{\psi}^{-1}$ מוגדרת ו-C^1 בסביבה W של:

$$S \ni \psi(u_0,v_0) = \tilde{\psi}(u_0,v_0,0)$$

לכן היא על $\varphi^{-1}(W \cap S)$. מתקיים:

$$h = \psi \circ \varphi = \tilde{\psi}^{-1} \circ \varphi \in C^1$$

אינטגרציה וקטורית / תבניות דיפרנציאליות:

תזכורת – יהא C עקום פשוט וחלק וכן:

$$\gamma([a,b]) = C$$

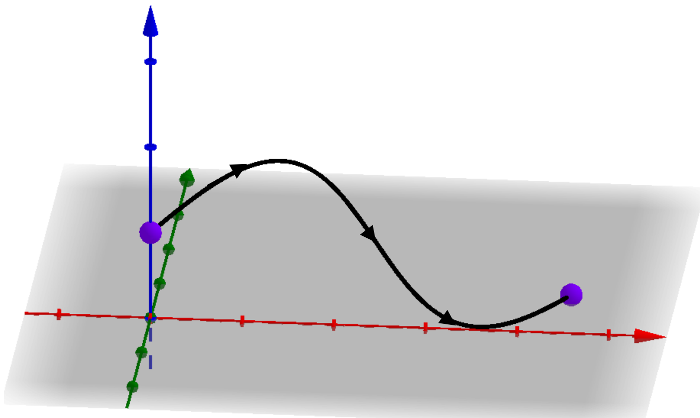
עבור:

1. $\mathbb{R}^n \leftarrow [a,b]: \gamma \in C^1$.
2. $\gamma'(t) \neq 0$ לכל t.
3. γ חד-חד ערכית למעט בנקודות הקצה.

14.2 הגדרה – עקום C נקרא <u>עקום מכוון</u> אם זוכרים את כיוון התנועה. לעתים נהוג לסמן $\vec{C}$.

נגדיר:

$$-C = -\vec{C} = \begin{Bmatrix} \tilde{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n \\ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t) \end{Bmatrix}$$



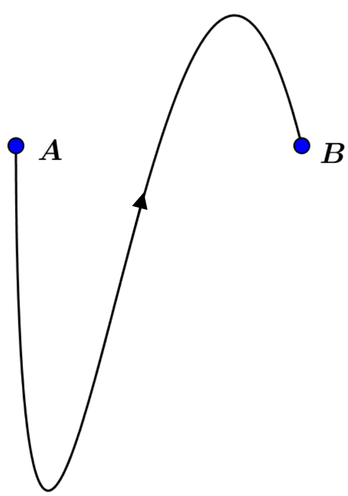
14.3 הגדרה – בהנתן $F = (F_1, \cdots, F_n)$ שדה וקטורי, הגדרנו:

$$\int_C \sum_i F_i dx_i = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \overbrace{\gamma_i'(t) dt}^{dx_i}$$

14.4 לביטוי $w = \sum_i F_i dx_i$, $w(x) = \sum_i F_i(x) dx_i$ קוראים <u>1-תבנית דיפרנציאלית</u>.

<u>תרגיל</u> – הוכיחו כי מתקיים $\int_{-C} w = -\int_C w$.



כאמור במצב כזה מתקיים:

$$\underbrace{\sum_i F_i dx_i}_{\text{תבנית דיפרנציאלית}} \Leftrightarrow \underbrace{F = (F_1, \cdots, F_n)}_{\text{שדה וקטורי}}$$

14.5 הגדרה – תהא $f \in C^1$ בקבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$. <u>הנגזרת החיצונית</u> של f זו ה-1 תבנית:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \Rightarrow \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

<u>הערה</u> – זו פשוט התבנית שמתאימה לשדה וקטורי את הגרדיאנט שלו.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \Leftrightarrow \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

14.6 טענה – יהא C עקום פשוט וחלק עם נקודת התחלה A ונקודת סיום B. נניח כי f גזירה ברציפות בסביבה של C. אזי אם $w = df$ אזי מתקיים:

$$\int_C w = \int_C df = f(B) - f(A)$$

<u>בפרט</u> – עבור עקום C פשוט **וסגור**, יתקיים:

$$\int_C df = 0$$

<u>הוכחה:</u>

תהא $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ פרמטריזציה כך ש-$\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$. אזי:

$$\int_C w = \int_C df = \int_C \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) dt \overset{\text{המשפט היסודי}}{=} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

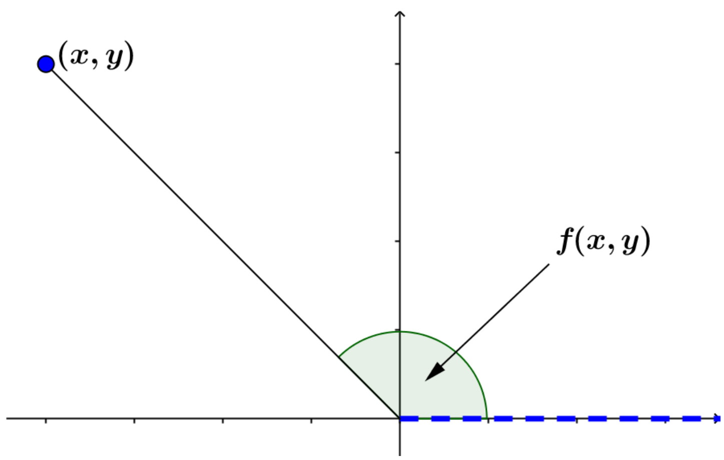
<u>דוגמה:</u>

נגדיר:

$$w = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

מוגדר ו-C^1 ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. ועתה נגדיר בנוסף:

$$f(x,y) = \arg(x+iy) \quad f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \geq 0\}$$



כאשר הפונקציה $f(x,y)$ היא הפונקציה שמחזירה את הזווית ש-(x,y) יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x, כמתואר בציור.

כאמור, הסיבה לתחום ההגדרה ש"מסיר" את הישר $y = 0$ עבור $x > 0$, הוא שתפגע החד-חד ערכיות.

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y < 0 \end{cases}$$

ונשים לב כי ניתן לבדוק ולקבל כי אכן:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = w$$

ולכן מתקיים על פי הטענה, לכל עקום חלק המתחיל ב-A ומסתיים ב-B.

$$\int_C w = f(B) - f(A)$$

<u>דוגמה:</u>

עבור $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. עקב בעיית חד-חד ערכיות, נגדיר בנפרד:

$$\gamma_1 = \gamma|_{[0,\pi]} \qquad \gamma_1^\varepsilon = \gamma|_{[\varepsilon,\pi]}$$
$$\gamma_2 = \gamma|_{[\pi,2\pi]} \qquad \gamma_2^\varepsilon = \gamma|_{[\pi,2\pi-\varepsilon]}$$

ונקבל כי:

$$\int_{C_1^\varepsilon} w = \int_{C_1^\varepsilon} df = f\big((-1,0)\big) - f(\cos\varepsilon, \sin\varepsilon) = \pi - \varepsilon$$

ולכן:

$$\int_{C_1} w = \pi$$

ובאותו אופן עבור העקום C_2 נקבל π כאורך העקום. כלומר $\int_C w = 2\pi$.

משפט גרין:

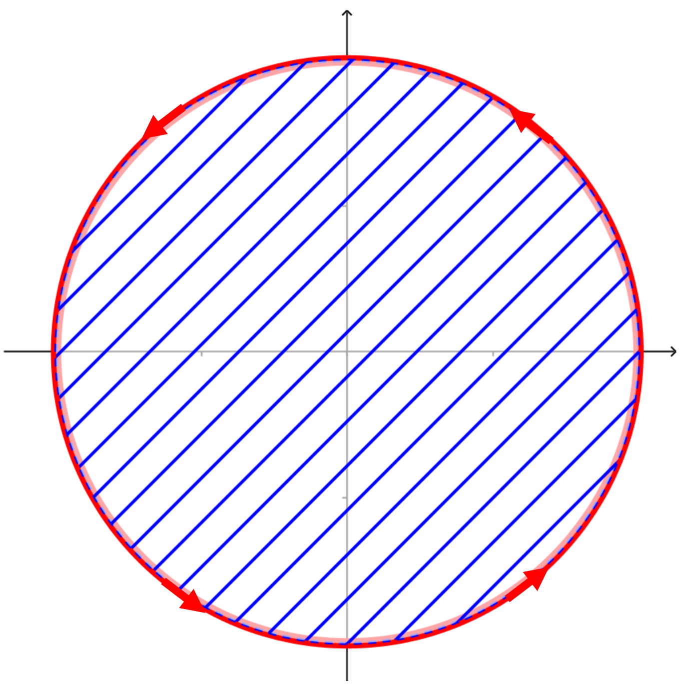
רקע – יהא $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום בעל שטח כך ש-$\partial\Omega$ הוא איחוד סופי של עקומים פשוטים וחלקים.

14.7 הגדרה – <u>הכיוון הטבעי</u> על $\partial\Omega$ מוגדר להיות הכיוון כך שלאורך התקדמות על העקום $\partial\Omega$, Ω נמצאת "מצד שמאל" של העקום.

14.8 משפט גרין – יהא $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום בעל שטח כך ש-$\partial\Omega$ מורכבת ממספר סופי של עקומים פשוטים וחלקים. תהיינה P, Q פונקציות C^1 בסביבת Ω. אזי:

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{Pdx + Qdy} = \int_\Omega \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}}\right) \boldsymbol{dV}$$

כאשר על $\partial\Omega$ בוחרים את ה"כיוון הטבעי".



<u>דוגמה:</u>

נניח כי:

$$\Omega = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$$

ונגדיר על $\partial\Omega$:

$$P(x,y) = 0 \quad Q(x,y) = x$$

על פי משפט גרין, יתקיים:

$$\int_{\partial\Omega} xdy = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int_\Omega 1dV = \text{שטח העיגול}$$

כלומר אנו מצפים כי האינטגרל השמאלי יהיה שווה לשטח העיגול. ואכן:

$$\int_{\partial\Omega} xdy = \int_0^{2\pi} (\cos t)\cos t\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$$

<u>הוכחת המשפט:</u>

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dV = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\bigg|_{(x,y)} dx\right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{(x,y)} dy\right) dx$$

$$\overset{\substack{\text{המשפט} \\ \text{היסודי}}}{=} \int_c^d \big(Q(b,y) - Q(a,y)\big)dy - \int_a^b \big(P(x,d) - P(x,c)\big)dx = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy$$

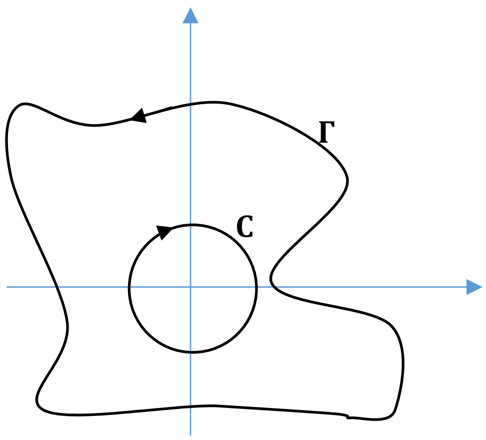
<u>שלב ב'</u> – ניתן להראות כי בהנתן נכונות משפט גרין עבור Ω, אזי הוא נכון גם עבור $g(\Omega)$ כאשר g מקיימת את תנאי משפט החלפת המשתנים.

הרצאה 23

בהרצאה הקודמת התבוננו בתבנית הדיפרנציאלית:

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

ונניח עתה כי נתון לנו עקום כללי Γ, ועקום פנימי C מהצורה:



נסמן ב-Ω את התחום התחום על ידי Γ ו-C. כלומר מתקיים:

$$\partial\Omega = \Gamma \cup C$$

עם הכיוון הטבעי נקבל כי:

$$\partial\vec{\Omega} = \vec{\Gamma} - \vec{C}$$

ולכן נסמן:

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2} \quad P = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

ונשים לב כי:

$$P_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = Q_x$$

ולפי משפט גרין נקבל כי:

$$\int_\Gamma \omega + \int_{-C} \omega = \int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy \overset{\text{משפט גרין}}{=} \int_\Omega \omega = \int_C \omega = 2\pi$$

14.9 הגדרה – אם Γ עקום פשוט וחלק ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, מגדירים את <u>מספר הליפוף</u> להיות:

$$\boldsymbol{ind(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega}$$

<u>אוריינטציה:</u>

כזכור, הגדרנו נפח של מקבילון להיות נתון על ידי:

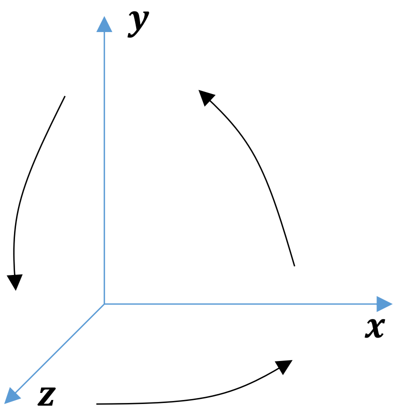
$$\mathrm{Vol}\big(P(v_1,\cdots,v_n)\big) = |\det(v_1|v_2|\cdots|v_n)|$$

14.10 הגדרה – יהיו $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\cdots,\mathbf{v_n}\} \in \mathbb{R}^n$ בסיס סדור. אזי נאמר כי $\{\mathbf{v_1},\cdots,\mathbf{v_n}\}$ בעל <u>אוריינטציה חיובית</u> אם $\mathbf{det(v_1|\cdots|v_n) > 0}$.

כלומר, אם הגודל בעל אותו סימן כמו הגודל $\det(e_1|\cdots|e_n)$ עבור הבסיס הסטנדרטי.

<u>לדוגמה:</u>

ב-$\mathbb{R}^2$ הבסיס הסטנדרטי נתון על ידי $\{e_1,e_2\}$. במקרה זה נקבל כי $\{e_2,e_1\}$ בעל אוריינטציה שלילית ואילו בסיס מהצורה $\{e_1+e_2,e_2\}$ הוא בעל אוריינטציה חיובית.



דוגמה נוספת:

במקרה של $\mathbb{R}^3$, למשל בפיזיקה, ידוע הכלל שקרוי "כלל יד ימין" שקובע את האוריינטציה של בניית מערכת צירים, גם היא בהתאם להגדרת האוריינטציה שהגדרנו זה עתה.

במקרה זה נוצר החוק ככלל עזר, שכן יד המצביעה בכיוון אחד הצירים ועוברת לציר הבא בהתאם לאוריינטציה חיובית, תסתובב ימינה ביחס לכיוון המקורי שלה.

עתה, נניח $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ תחום קשיר בעל נפח.

14.11 הגדרה – אוריינטציה של $\boldsymbol{\Omega}$ היא פונקציה רציפה:

$$\boldsymbol{\Omega \ni x \mapsto \{v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x)\}}$$

כאשר $\boldsymbol{\{v_1(x), \cdots, v_n(x)\}}$ בסיס סדור של המרחב. תחום בעל אוריינטציה יסומן $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$.

14.11.1 טענה - $\boldsymbol{\det\big(v_1(x)\big|\cdots\big|v_n(x)\big)}$ בעלת סימן קבוע.

דוגמה:

נגדיר בכל נקודה $\{v_1(x), \cdots, v_n(x)\} = \{e_1, \cdots, e_n\}$.

14.12 הגדרה – תחום עם אוריינטציה נקרא בעל אוריינטציה חיובית אם $\boldsymbol{\{v_1(x), \cdots, v_n(x)\}}$ בעל אוריינטציה חיובית לכל $\boldsymbol{x}$.

14.12.1 הגדרה – אם $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ תחום בעל אוריינטציה אזי:

$$\mathbf{sgn}\,\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{אוריינטציה חיובית} \\ \mathbf{-1} & \text{אחרת} \end{cases}$$

אינטגרציה מסומנת:

14.13 הגדרה – אם $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ תחום בעל אוריינטציה נפח עם אוריינטציה ו-$\boldsymbol{f: \Omega \to \mathbb{R}}$, נגדיר:

$$\boldsymbol{\int_{\vec\Omega} f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \mathbf{sgn}\big(\vec\Omega\big) \int_{\Omega} f dV}$$

אם $g \in C^1$ וכן חד-חד ערכית והפיכה בסביבת Ω, אזי בהנתן אוריינטציה על Ω, g משרה אוריינטציה על $g(\Omega)$.

משפט החלפת המשתנים:

אם $\vec\Omega$ תחום בעל נפח עם אוריינטציה, $g\big(\vec\Omega\big)$ תחום בעל אוריינטציה מושרית, ואם g מקיימת את תנאי משפט החלפת המשתנים, אזי:

$$\int_{g(\vec\Omega)} f(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \int_{\vec\Omega} f\big(g(x)\big) \det\big(Dg(x)\big)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

אוריינטציה מושרית על השפה:

אם $\vec\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום בעל שטח ואוריינטציה, אזי נגדיר על $\partial\Omega$ אוריינטציה מושרית $\partial\vec\Omega$ – בוחרים משיק כך ש-$\{n(p), T(p)\}$ בעל אותה אוריינטציה כמו $\{v_1(p), v_2(p)\}$.

במקרה זה ניתן לנסח את משפט גרעין באופן הבא:

$$\int_{\partial\vec{\Omega}}\left(Pdx + Qp_y\right) = \int_{\vec{\Omega}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy$$

הרצאה 24

אוריינטציה על משטחים:

בהרצאה הקודמת, הגדרנו כי בהנתן תחום בעל אוריינטציה ניתן להגדיר את הגודל:

$$\int_{\vec{\Omega}} f(x)dx_1 \wedge dx_2 = \operatorname{sign}(\vec{\Omega}) \int_{\Omega} f(x)dA = \operatorname{sign}(\vec{\Omega}) \int_{\Omega} f(x)dx_1 dx_2$$

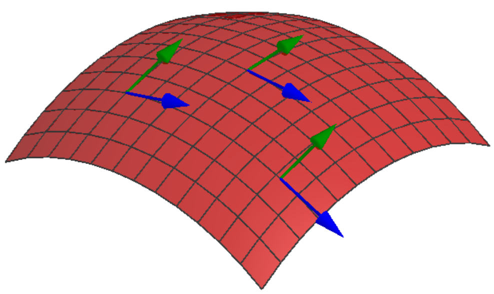
14.14 הגדרה - נאמר כי $S \subseteq \mathbb{R}^3$ הינו <u>משטח דו ממדי</u>, אם ניתן להציג כ-$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\Omega})$ כאשר:

$$\boldsymbol{\varphi}: \left(\begin{matrix}\text{סביבה של}\\ \boldsymbol{\Omega}\end{matrix} \subset \mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R}^3 \quad \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^1 \quad \text{חד חד ערכית } \boldsymbol{\varphi} \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{D\varphi} \equiv 2$$

14.15 הגדרה – <u>אוריינטציה ל-S</u> הינה פונקציה רציפה:

$$\boldsymbol{S} \ni \boldsymbol{p} \mapsto \{\boldsymbol{v_1}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v_2}(\boldsymbol{p})\}$$

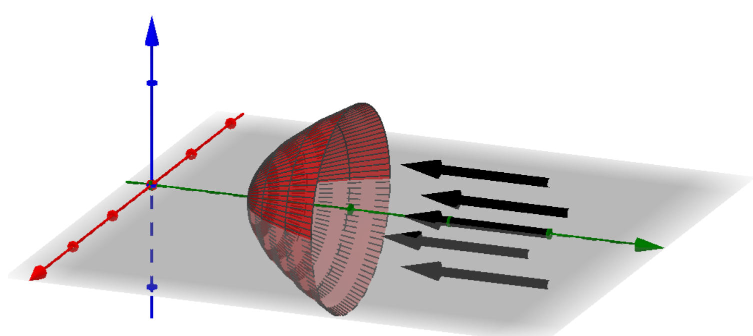
כך ש-$v_1(p), v_2(p)$ הינם זוג סדור של וקטורים משיקים ל-S בנקודה p. כלומר זהו <u>בסיס סדור</u> ל-$T_p(S)$.



נשים לב, כי $v_1(p) \times v_2(p)$ הינו וקטור הניצב למרחב המשיק (הנורמל למשטח). לכן, בהנתן ש-$v_1(p), v_2(p)$ הם פונקציות רציפות, אזי שבהכרח $n(p) = \frac{v_1(p)\times v_2(p)}{\|v_1(p)\times v_2(p)\|}$ הוא פונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות.

14.15.1 הגדרה (שקולה) – <u>אוריינטציה ל-S</u> זו פונקציה רציפה $S \ni p \mapsto n(p)$ כאשר $n(p)$ הינו וקטור יחידה נורמלי.

שטף:



14.16 הגדרה - נניח כי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום בעל שטח וכן $g \in C^1$ מוגדרת בסביבת Ω לתוך $\mathbb{R}^3$, חד-חד ערכית כך שמתקיים $\operatorname{rank} Dg \equiv 2$. נסמן:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Omega})$$

אזי, אם על Ω יש אוריינטציה $\vec{\Omega}$, נגדיר על S אוריינטציה מושרית $\vec{S}$. בנקודה $g(p)$ נתאים את הזוג $\{dg(p)v_1, dg(p)v_2\}$ או הנורמל:

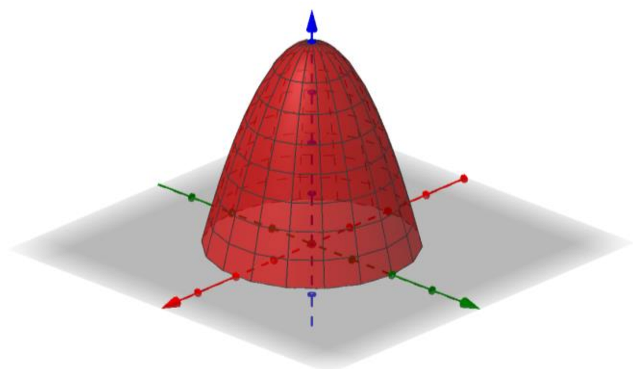
$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) = \frac{(\boldsymbol{dg}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v_1}) \times (\boldsymbol{dg}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v_2})}{\|\boldsymbol{dg}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v_1} \times \boldsymbol{dg}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v_2}\|}$$

14.17 הגדרה – אם S מוגדר בהתאם ל-24.3, ונניח כי מוגדרת $F = (F_1, F_2, F_3)$ שהיא שדה וקטורי בסביבת S, אזי נגדיר את <u>אינטגרל השטף</u> של F על $\vec{S}$ להיות:

$$\int_{\vec{S}} \boldsymbol{F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2} = \int_{\vec{\Omega}} \boldsymbol{F \circ g(u,b) \cdot (g_u \times g_v) du \wedge dv}$$

$$= \iint_{\Omega} \boldsymbol{F \circ g(u,v) \cdot n\big(g(u,v)\big) dA}$$

<u>**דוגמה:**</u>



נניח כי נתון המשטח:

$$S = \left\{(x,y,z)\middle|_{z = 4 - x^2 - y^2}^{z \geq 0}\right\}$$

אוריינטציה – נשים לב כי לנורמל רכיב z חיובי לכל המשטח.

נחשב את השטף של השדה:

$$F(x,y,z) = (xz, yz, x^2 + y^2)$$

הנתון על ידי:

$$\int_{\vec{S}} xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + (x^2 + y^2) dx \wedge dy$$

על מנת לחשב את הנ"ל, נמצא פרמטריזציה:

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 4\}$$

$$\varphi(u,v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$$

נשים לב כי:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2u & -2v \end{bmatrix} \Longrightarrow \varphi_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{bmatrix} \quad \varphi_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2u & 2v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2u & -2v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{bmatrix}$$

אם על Ω האוריינטציה הרגילה, נקבל כי האוריינטציה המושרית על ידי φ היא האוריינטציה הסטנדרטית.

לכן נוכל להציב ולקבל:

$$\int_{\vec{\Omega}} F\big(\varphi(u,v)\big) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) du \wedge dv$$

$$= \int_{\Omega} [u(4-u^2-v^2), v(4-u^2-v^2), u^2+v^2] \cdot [2u, 2v, 1] dudv$$

$$= \int_{\Omega} (u^2+v^2)[2(4-u^2-v^2)+1] dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r^2-2r^3) r dr d\theta = \cdots = 22\pi$$

הרצאה 25

משפט סטוקס:

14.18 הגדרה - תהא $F=(F_1,F_2,F_3)$ שדה וקטורי ב-$\mathbb{R}^3$. הרוטור של F מוגדר להיות:

$$\mathbf{rot}\,F=\mathbf{curl}\,F=\nabla\times F:=\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3},\frac{\partial F_1}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_1},\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

ניתן לקבל את הרוטור גם על ידי ביצוע המכפלה הוקטורית:

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}$$

14.19 משפט סטוקס (Stokes) – יהא S משטח דו פרמטרי ב-$\mathbb{R}^3$ הנתון על ידי פרמטריזציה מהצורה $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^3$ כאשר Ω תחום בעל נפח עם שפה $\partial\Omega$ עקום פשוט סגור וחלק למקוטעין. כמו כן נניח כי φ גזירה ברציפות, חד-חד ערכית ורגולרית בסביבת Ω.

יהא F שדה וקטורי גזיר ברציפות בסביבת S. אזי:

אינטגרל השטף של $\mathbf{rot}\,F$ על S	$=$	האינטגרל הקווי מסוג שני של F על ∂S

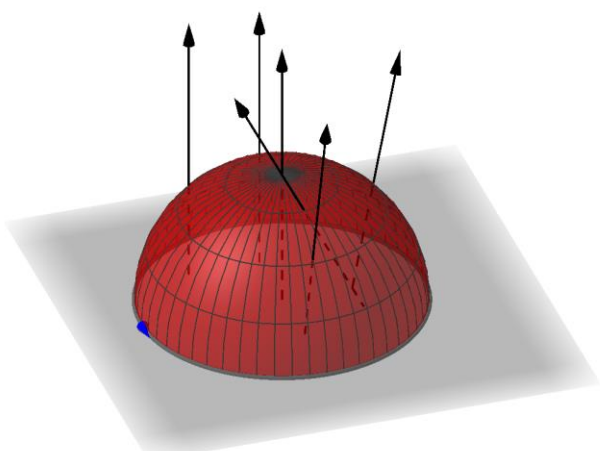
כלומר:

$$\int_{\partial\vec{S}}F_1dx_1+F_2dx_2+F_3dx_3=$$

$$\int_{\vec{S}}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3$$

$$+\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1$$

$$+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2$$



כלומר:

$$\int_{\partial S}F\cdot T\,ds=\int_S(\nabla\times F)\cdot n\,dA$$

כאשר:

dA – אלמנט שטח פנים n – נורמל יחידה ds – אלמנט אורך קשת T – וקטור משיק יחידה

הערה – אם נגדיר "נגזרת חיצונית" של 1-תבנית, נקבל את $df=\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$

$$d(F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3)$$
$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_2 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

זו, בעצם נקראת 2-תבנית ואפשר לרשום כך את משפט סטוקס על ידי:

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

לכל 1-תבנית ω. באופן כללי, בדרך זו ניתן להכליל תהליך זה על מנת לקבל מקרה כללי עבור S יריעה עם שדה מממד $k+1$ כך ש-ω היא k-תבנית דיפרנציאלית.

<u>הוכחה:</u>

נניח $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ פרמטריזציה (עם כיוון) של $\partial\vec{\Omega}$. אזי $\varphi \circ \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ פרמטריזציה של ∂S.

אזי:

$$\int_{\partial \vec{S}} \sum_i F_i dx_i = \int_a^b F\left(\varphi\big(\gamma(t)\big)\right) \cdot [\varphi \circ \gamma]'(t)dt \; (\star)$$

נסמן $(u,v) \in \Omega$ כך שיתקיים:

$$[\varphi \circ \gamma]'(t) = D\varphi\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \quad \gamma'(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}\varphi[\varphi_u \quad \varphi_v] \Rightarrow \varphi_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \end{bmatrix} \quad \varphi_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$(\star) \int_a^b F\left(\varphi\big(\gamma(t)\big)\right) \cdot \varphi_u u'(t)dt + F\left(\varphi\big(\gamma(t)\big)\right) \cdot \varphi_v v'(t)dt$$

$$= \int_{\partial\vec{\Omega}} [(F \circ \varphi) \cdot \varphi_u]\, du + [(F \circ \varphi)\varphi_v]dv$$

$$\overset{\text{גרין}}{=} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial u}\big((F\circ\varphi)\varphi_v\big) - \frac{\partial}{\partial v}\big((F\circ\varphi)\varphi_u\big)\right) dudv$$

עתה נשים לב כי:

$$\frac{\partial}{\partial u}\big((F\circ\varphi)\varphi_v\big) - \frac{\partial}{\partial v}\big((F\circ\varphi)\varphi_u\big) =$$
$$\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial u}\varphi_v + F\circ\varphi\cdot\varphi_{vu} - \frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial v}\varphi_u - F\circ\varphi\cdot\varphi_{uv}$$

ועתה היות והנחנו C^2, נקבל כי $\varphi_{vu} = \varphi_{uv}$. ושני איברים אלו מתבטלים וניוותר עם:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial u}\big((F\circ\varphi)\varphi_v\big) - \frac{\partial}{\partial v}\big((F\circ\varphi)\varphi_u\big)\right) dudv = \int_\Omega \left[\frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial u}\varphi_v - \frac{\partial(F\circ\varphi)}{\partial v}\varphi_u\right] dudv$$

ועלינו להראות עתה כי האינטגרנד הוא אכן $(\nabla \times F)\cdot(\varphi_u \times \varphi_v)$. נשים לב כי אכן:

$$\big(DF\big(\varphi(u,v)\big)\varphi_u\big)\cdot\varphi_v - \big(DF\big(\varphi(u,v)\big)\varphi_v\big)\cdot\varphi_u$$

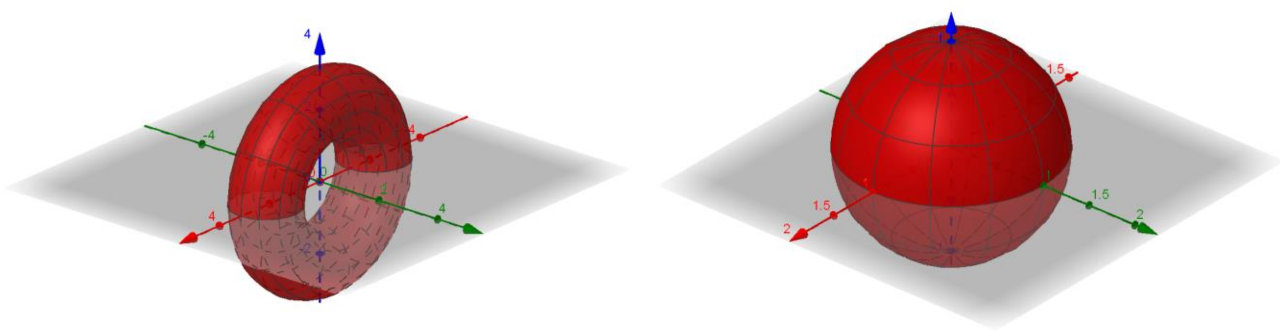
$$= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} - \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}$$

<u>כתרגיל</u> – לאסוף איברים ולסדרם כך שניתן יהיה להגיע לביטוי המבוקש.

הרצאה 26

נתבונן בספרה ובטורוס במרחב $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 = \partial B_3 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$$
$$\mathbb{T}^2 = \left\{\left((a+b\cos u)\cos v\,, b\sin u\,, (a+b\cos u)\sin v\right)\middle|\begin{matrix}0\le u\le 2\pi\\ 0\le v\le 2\pi\end{matrix}\right\}$$



בהרצאות קודמות נשאלה השאלה – האם קיים דיפאומורפיזם:

$$f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$$

התשובה לכך, היא ש**לא** קיים דיפאומורפיזם כנ"ל (ולמעשה, על אף שזה לא יוכח בקורס, לא קיים אף הומאומורפיזם ביניהם).

הרעיון הכללי, הוא שבהנתן C עקום פשוט חלק וסגור ב-$\mathbb{T}^2$, עבור הנחת שלילה שקיימת $\Gamma = f(C) \subset \mathbb{S}^2$ נשים לב כי לכל Γ כזו מתקיים $\mathbb{S}^2 \setminus \Gamma$ לא קשיר.

כלומר, תחת ההנחה קיים C כך ש-$\mathbb{T}^2 \setminus C$ קשיר, אבל $f(\mathbb{T}^2 \setminus C)$ כתמונת פונקציה רציפה היא קבוצה לא קשירה תחת ההנחה שלנו, וזו סתירה לרציפות f.

דרך נוספת להסתכל על הבעיה –

0.1 הגדרה - יהא X מרחב טופולוגי. <u>עקום סגור</u> ב-X זו קבוצה $C = \gamma([0,1])$ עבור $\gamma\colon [0,1] \to X$ רציפה עבורה מתקיים $\gamma(0) = \gamma(1)$.

0.2 הגדרה – אם $C_i = \gamma_i([0,1])$ עבור $i = 0,1$ אזי <u>הומוטופיה בין C_0 ל-C_1</u> היא פונקציה $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ רציפה המקיימת:

$$H(s,0) = H(s,1) \qquad \begin{matrix} H(0,t) = \gamma_0(t) \\ H(1,t) = \gamma_1(t)\end{matrix}$$

ב-$\mathbb{S}^2$ כל עקום סגור הומוטופי לנקודה. נראה זאת, על ידי שנניח $\Gamma = \gamma([0,1])$ ונניח כי $(0,0,-1) \notin \gamma$ ונסמן:

$$F_S\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{S}^2$$

$$F_S(x,y,z) = \frac{s(0,0,1) + (1-s)(x,y,z)}{\|s(0,0,1)+(1-s)(x,y,z)\|}$$

עבורה קל לראות כי מתקיים:

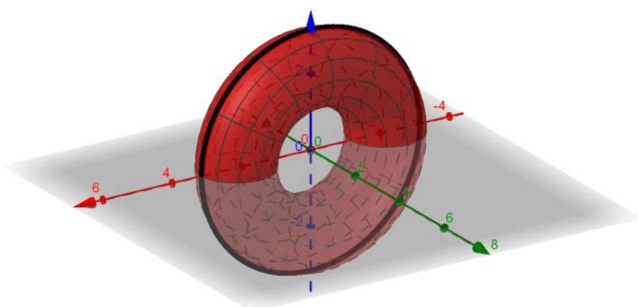
$$H(s,t)=\gamma_s(t)=F_s\big(\gamma(t)\big)$$

כלומר זו אכן הומוטופיה. עתה נרצה להראות כי בניגוד לכך, בטורוס $\mathbb{T}^2$, אין הומוטופיה שלוקחת את העקום:

$$C_1=\{(a+b)\cos v\,,0,(a+b)\sin v\,|v\in[0,2\pi]\}$$

לנקודה. ובזאת תסתיים ההכוחה כי אם אכן קיימת אותה f דיפאומורפיזם ונתבונן ב-$H(s,t)$ אשר לוקחת את $\Gamma=f(C_1)$ לנקודה, אזי $f^{-1}\circ H$ לוקחת את γ_1 לנקודה.

נראה כי הנ"ל מוביל לסתירה – על ידי התבוננות באינטגרל:



$$\int_{C_1}\underbrace{-\frac{z}{x^2+z^2}dx+\frac{x}{x^2+z^2}dz}_{=\omega}=2\pi$$

שאותו הוכחנו כבר בהרצאות הקודמות. זו ה-1-תבנית הדיפרנציאלית המוגדרת עבור:

$$F=\left(-\frac{z}{x^2+y^2},0,\frac{x}{x^2+z^2}\right)$$

ומתקיים:

$$\nabla\times F=0$$

אם C_1 ו-C_2 קרובים אז $\int_{C_1}\omega=\int_{C_2}\omega$ וזאת כנובע מכך ש-F לוקלית מתקבלת כגרדיאנט של פונקציה סקלרית.

$$\nabla\times\nabla f=\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots\right)\overset{f\in C^2}{=}0$$

<u>הסבר נוסף:</u>

על $\mathbb{T}^2$ קיים שדה וקטור C^1 משיק שאינו מתאפס ועל $\mathbb{S}^2$ אין.

0.3 הגדרה – שדה וקטורי על יריע $M\subset\mathbb{R}^3$ היא פונקציה $F:M\to\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{F_p\in T_p(M)}$$

כלומר נחשוב על $T_p(M)$ כמרחב וקטורי דרך 0.

כלומר, אם ישנו שדה וקטורי $0\neq$, אזי יש גם שדה מנורמל $\frac{F(x)}{\|F(x)\|}$. לדוגמה, $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$F\big((a+b\cos u)\cos v\,,b\sin u\,,(a+b\cos u)\sin v\big)=(-(a+b\cos u)\sin v\,,0,(a+b\cos u)\cos v)$$

הינו שדה המשיק שאינו מתאפס באף נקודה.

0.4 משפט – על $\mathbb{S}^2$ לא קיים שדה וקטורי משיק מנורמל.

<u>הערה</u> – בהקשר של הבעיה בה אנו עוסקים בשיעור, לו הייתה $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{S}^2$ אזי $G:\mathbb{S}^2\to\mathbb{R}^3$ שדה משיק שאינו מתאפס, היה מקיים:

$$G\big(f(p)\big)=df(p)[F(p)]$$

בסתירה למשפט, ולכן נסיק כי אין כזו f.

נניח בשלילה כי קיים שדה וקטורי משיק מנורמל $F(x) \mapsto x \ni \mathbb{S}^2$ כלומר שדה וקטורי המקיים כמובן $\|F(x)\| = 1$.
נזכיר כי על פי הגדרה:

$$F(x) \cdot x = 0 \Leftrightarrow F(x) \in T_x(\mathbb{S}^2)$$

נסמן:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2} \right\}$$

על $\mathbb{S}^2$ נגדיר את $f_t(x) = x + tF(x)$ ונרחיב את F ואת f_t ל-A על ידי:

$$\begin{matrix} F(rx) = rF(x) \\ f_t(rx) = rx + rtF(x) = rf_t(x) \end{matrix} \quad \forall \|x\| = 1$$

נקל לראות כי $f_t, F \in C^1$ בסביבת A.

0.5 למה - קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ מתקיים f_t חד-חד ערכית ועל A (כמובן שגם רגולרית) וכן מתקיים:

$$\boldsymbol{Vol\big(f_t(A)\big) =} \begin{matrix}\text{פונקציה פולינומית} \\ \text{ב} - t\end{matrix}$$

<u>הוכחה:</u>

$F \in C^1$ בסביבת A ולכן ליפשיצית. כלומר קיים C עבורו מתקיים:

$$\forall x, y \in A \quad \|F(x) - F(y)\| \leq C\|x - y\|$$

נבחר $\varepsilon_1 = C^{-1}$. עבור $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$

מתקיים:

$$f_t(x) = f_t(y) \Longrightarrow x + tF(x) = y + tF(y) \Longrightarrow \|x - y\| = |t|\|F(x) - F(y)\| \leq |t|C\|x - y\| < \|x - y\|$$

ולכן מתחייב כי $x = y$ אחרת נקבל סתירה.

נסמן:

$$Df_t(x) = I + t\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)\right]$$

ונשים לב כי:

$$\det Df_t(x) = \underbrace{1}_{=0} + d_1(x)t + d_2(x)t^2 + \cdots$$

קיים ε_2 כך שמתקיים לכל $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$:

$$\det Df_t(x) > 0$$

נסמן $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. אם המשתנים החלפת משפט תנאי ומתקיים $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$Vol\big(f_t(A)\big) = \int_{f_t(A)} dV = \int_A \det Df_t(x)\, dV(x) = \int_A \sum_i d_i(x)t^i\, dV(x) = \sum_i a_i t_i$$

עבור הסימון $a_i = \int_A d_i(x)V(x)$.

0.6 למה – לכל $\frac{1}{2} \le r \le \frac{3}{2}$ הפונקציה f_t מעתיקה את $r\mathbb{S}^2$ על $\sqrt{1+t^2}r\mathbb{S}^2$.

<u>הערה</u> - $F(x) \perp x$

$$\|f_t(rx)\|^2 = \|rx + trF(x)\|^2 = r^2(1+t^2)$$

וכן ראינו כי $f_t: r\mathbb{S}^2 \to \sqrt{1+t^2}r\mathbb{S}^2$ חד-חד ערכית.

<u>הוכחת המשפט</u> –

תחת ההנחה שקיים שדה כזה, F, ראינו כי ניתן להרחיב אותו ל-f_t שהגדרנו זה עתה. אך נשים לב כי מתקיים:

$$f_t(A) = \sqrt{1+t^2}A$$

וזאת לפי הלמה. בנוסף ראינו כי ניתן לכתוב:

$$Vol\left(f_t(A)\right) = (1+t^2)^{\frac{3}{2}}Vol(A)$$

אך מצד שני, אנו יודעים כי $Vol\left(f_t(A)\right)$ צריך היות פולינום מדרגה שלישית ב-t, אך זאת סתירה משום ש-$(1+t)^{\frac{3}{2}}$.

<u>הוכחה למה 2:</u>

מספיק להראות כי:

$$f_t(\mathbb{S}^2) = \sqrt{1+t^2}\mathbb{S}^2$$

כלומר תחת ההנחה ש-$r = 1$ שכן לכל המקרה האחרים מדובר על מכפלה בסקלר. כבר ראינו את ההכלה $\subseteq$.

נתבונן בתמונה $f_t\left(\left\{\frac{1}{2} < \|x\| < \frac{3}{2}\right\}\right) \Leftarrow$ ממשפט ההעתקה הפתוחה מתקיים שזו קבוצה פתוחה $\mathbb{R}^3$.

בפרט מתקיים:

$$\sqrt{1+t^2}\mathbb{S}^2 \cap f_t\left(\left\{\frac{1}{2} < \|x\| < \frac{3}{2}\right\}\right) = f_t(\mathbb{S}^2)$$

וזאת משום שבמובן הטופולוגי האגף השמאלי צריך להיות קבוצה קומפקטית, סגורה, לא ריקה ופתוחה ב-$\sqrt{1+t^2}\mathbb{S}^2$ ומכאן שמדובר בהכרח ב-$\sqrt{1+t^2}\mathbb{S}^2$ עצמה, כנדרש.

הרצאה 27

רוטור:

נבחר דיסקה דו ממדית בתוך $\mathbb{R}^3$ שרדיוסה r סביב הנקודה p, ונסמן $D_r = D_r(p)$, וב-n נסמן את הנורמל לדיסקה. לפי סטוקס מתקיים:

$$\int_{\partial D_r} F \cdot dr = \int_{\partial D_r} F \cdot T ds = \int_{D_r} (\nabla \times F) \cdot n dA$$

כמו כן, אנו יודעים כי מתקיים:

$$\nabla \times F(p) \cdot n = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r} \nabla \times F \cdot n dA = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial D_r} F \cdot dr$$

למעשה, משמעות הרוטור, היא תיאור של "מידת" הסיבוב של השדה F. לדוגמה:

$$F(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

אזי נקבל כי:

$$\nabla \times F = \left(\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1\right) = (0,0,2)$$

ושדה זה אכן מסתובב סביב ציר z בלבד.

14.20 טענה – תהא $U \subset \mathbb{R}^3$ פתוחה, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, אזי:

$$\boldsymbol{\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{curl}(\mathbf{grad}\, f) = 0}$$

<u>הוכחה:</u>

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\overbrace{\partial_{x_2}\partial_{x_3} f - \partial_{x_3}\partial_{x_2} f}^{=0}, \cdots, \cdots\right) = (0,0,0)$$

בסימונים של התבניות הדיפרנציאליות (נגזרת חיצונית), הכוונה היא:

$$d(df) = d^2 f = 0$$

שדות משמרים:

14.21 הגדרה – יהא F שדה וקטורי בקבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^3$. נאמר כי F <u>שדה משמר</u> אם לכל עקום פשוט וחלק למקוטעין ערך האינטגרל $\int_C F \cdot dr$ תלוי אך ורק בנקודת ההתחלה והסוף.

14.22 טענה – F שדה משמר ב-U אם ורק אם $\int_C F \cdot dr = 0$ לכל עקום פשוט, חלק למקוטעין וסגור C.

14.23 הגדרה – פונקציה $f: U \to \mathbb{R}$ נקראת <u>הפוטנציאל של השדה $F: U \to \mathbb{R}^3$</u> אם $F = \nabla f$.

14.24 משפט – תהא $U \subset \mathbb{R}^3$ פתוחה וקשירה. F שדה משמר ב-U אם ורק אם ל-F קיים פוטנציאל f.

<u>הוכחה:</u>

כיוון ראשון – הראינו כי אם $F = \nabla f$ אזי לכל עקום γ:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

וניתן לראות זאת בדרך נוספת על ידי כך שנבחר לכל עקום פשוט וסגור C משטח S כלשהו הכלוא בתוכו, ונקבל ממשפט סטוקס כי:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = \int_S \overbrace{\nabla \times (\nabla f)}^{=0} ndA = 0$$

כיוון השני – נניח כי F שדה משמר ונרצה להוכיח כי קיימת ל-F פונקציית פוטנציאל. נבחר p_0 שרירותית ונגדיר:

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F \cdot dr$$

שזהו אינטגרל קווי מסוג שני על עקום חלק למקוטעין כלשהו שמחבר בין p_0 ל-p. כמובן שהנ"ל מוגדר היטב שכן היות ו-F שדה משמר, נסיק כי אינטגרל זה אינו תלוי במסלול שנבחר.

נשים לב כי:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_i) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_{p_0}^{p+he_i} F \cdot dr - \int_{p_0}^{p} F \cdot dr}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_j \int_{p_j}^{p_j + \delta_{ij} he_j} F \cdot dr}{h}$$

כל הרכיבים למעט הרכיב ה-i מתאפסים ולכן: ניוותר עם האינטגרל:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_{p_i}^{p_i + he_i} F \cdot dr}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 F(p_0 + the_i) he_i dt = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \int_0^1 F(p_0 + the_i) e_i dt = F_i(p)$$

ולכן נקבל, כצפוי כי f הנ"ל אכן מהווה פונקציית פוטנציאל ל-F.

14.25 הגדרה – יהי $\boldsymbol{F = (F_1, F_2, F_3)}$ שדה וקטורי ב-$\boldsymbol{U \subset \mathbb{R}^3}$. אזי הדיברגנס של $\boldsymbol{F}$ זו הפונקציה:

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla \cdot F} = \left(\boldsymbol{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}}\right) \cdot (\boldsymbol{F_1, F_2, F_3})$$

14.26 משפט הדיברגנס – יהא $\boldsymbol{\Omega \subset \mathbb{R}^3}$ תחום בעל נפח ונניח כי $\boldsymbol{S = \partial\Omega}$ מורכב מאיחוד סופי של משטחים חלקים. יהא $\boldsymbol{F \in C^1}$ שדה וקטורי המוגדר בסביבת $\boldsymbol{\Omega}$. אזי:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{div\,(F) dV} = \int_S \boldsymbol{F \cdot ndA}$$

כאשר $\boldsymbol{n}$ הוא הנורמל הפונה "החוצה" מן המשטח.

כלומר, אינטגרל השטף של F החוצה מהתחום דרך השפה, כמוהו כאינטגרל על התחום של הדיברגנס.

<u>הוכחה:</u>

בשלב הראשון נניח כי Ω תחום "פשוט ביחס ל-z". כלומר, קיים תחום בעל שטח $D \subset \mathbb{R}^2$ וקיימות פונקציות $h, g \in C^1$ כך שמתקיים:

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{matrix}g(x,y)<z<h(x,y)\\(x,y)\in D\end{matrix}\right\}$$

נניח גם כי:

$$F(x,y,z)=\big(0,0,P(x,y,z)\big)$$

כאשר P פונקציה סקלרית כלשהי. אזי:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)dV=\int_\Omega \frac{dP}{dz}dV=\int_D\left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)}\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$\int_{\mathrm{D}}\big[P\big(x,y,h(x,y)\big)-P\big(x,y,g(x,y)\big)\big]dxdy$$

עתה נחשב שטף. אם יש לתחום "קירות" (כמו בקוביה, למשל), אז עליהם מתקיים $F\cdot n=0$ ולכן מספיק לחשב את השטף דרך המשטח התחתון.

$$S_1=\{(x,y,z)|(x,y)\in D\quad z=g(x,y)\}$$
$$S_2=\{(x,y,z)|(x,y)\in D\quad z=h(x,y)\}$$

נחשב:

$$\int_{S_1}F\cdot ndA$$

כאשר:

$$S_1=\{\varphi(u,v)|(u,v)\in D\}$$

כלומר:

$$\varphi(u,v)=\big(u,v,g(u,v)\big)\quad \varphi_u\times\varphi_v=\begin{bmatrix}1\\0\\g_u\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\g_v\end{bmatrix}=(-g_u,-g_v,1)$$

ולכן:

$$\int_{S_1}F\cdot \underset{\text{למטה}}{n}dA-\int_{S_2}F\cdot\underset{\text{למעלה}}{n}dA=-\int_D F\circ\varphi(\varphi_u\times\varphi_v)dudv$$

$$=-\int_D(0,0,P\circ\varphi)\cdot(-g_u,-g_v,1)dudv=-\int_D P\big(u,v,g(u,v)\big)dudv$$

בינתיים קיבלנו כי אם Ω פשוט קשר ביחס לציר z וכן $F=(0,0,P)$ אזי:

$$(\star)\int_\Omega \operatorname{div}(F)\,dV=\int_S F\cdot ndA$$

ובאופן דומה, אם Ω פשוט בציר y (ובאופן דומה לגבי x) ו-$F=(0,P,0)$, אזי $(\star)$ מתקיים באותו האופן.

אם F כללי, ו-Ω פשוט בכל הצירים, אזי:

$$F=(F_1,0,0)+(0,F_2,0)+(0,0,F_3)$$

נפעיל $(\star)$ על כל אחד מהרכיבים בנפרד ונחבר, וכך נקבל כי הנ"ל יתקיים גם במקרה זה.

ניתן להראות, בדומה לאופן שבו הוכחנו את משפט סטוקס, כי עבור Ω כללי, ניתן לקבל את נכונות המשפט על ידי החלפת משתנים כך שתחום הפרמטריזציה הוא תחום פשוט, בהנחה שהפרמטריזציה היא C^2.

אם $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ איחוד מסוג מסויים, כאשר $(\star)$ מתקיים עבור Ω_1, Ω_2 אזי משפט הדיברגנס יהיה נכון עבור Ω. בפרט, במקרה שישנה שפה משותפת, אנו יודעים כי וקטורי הנורמל יהיו הפוכים בכיוונם וגודל האינטגרל יהיה זהה ולכן הם יקזזו האחד את השני.

הרצאה 28

בהרצאה הקודמת הוכחנו את משפט הדיברגנץ. כלומר, הראינו כי:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

עבור האופרטור שהוגדר באופן הבא:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

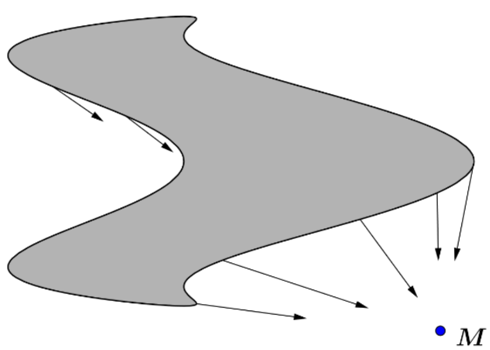
וכן הסברנו כי האופרטור מתקבל למעשה על ידי הגבול:

$$\operatorname{div}(\vec{F})\,(p) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{Vol(B_r(p))} \int_{B_r(p)} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{Vol(B_r(p))} \int_{\partial B_r(p)} F \cdot n dA$$

ולמעשה אופרטור זה מודד את השטף של שדה $\vec{F}$ החוצה מכדור קטן (כלומר $B_r(p)$ עבור רדיוס קטן).

<u>דוגמה:</u>

נתבונן ב-$\vec{F}$ המתאר את השדה הגרביטציוני:



$$F(x, y, z) = -\frac{GM}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z)$$

ונסמן:

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad r = \|\vec{r}\|$$

כך שנוכל לכתוב:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

נניח כי Ω תחום "יפה" וכן כי $(0,0,0) \notin \Omega$, ונרצה להוכיח כי $\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = 0$:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = -GM\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}\right)$$

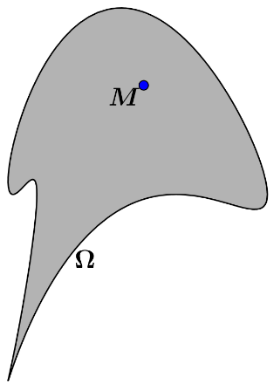
ונשים לב כי לדוגמה:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3r_X x}{r^4}\right] = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \quad r_X = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}$$

כלומר סה"כ:

$$\nabla \cdot F = \left[\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right] = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$

והנ"ל נכון לכל $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. ואכן עבור $0 \notin \Omega$ נקבל כי:



$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = 0$$

ועתה נניח כי $0 \in \operatorname{int} \Omega$.

ראשית נטפל במקרה שבו $\Omega = B_r = B_r(0)$.

נקבל כי:

$$\int_{\partial B_r} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -GM \int_{\partial B_r} \frac{(x,y,z)}{r^3} \cdot \frac{(x,y,z)}{r} dA$$

$$= -GM \int_{\partial B_r} \frac{r^2}{r^4} dA = -\frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 = -4\pi GM$$

עתה נניח R גדול מספיק כך שמתקיים:

$$\Omega \subseteq \operatorname{int} B_R$$

ונוכל להתבונן על התחום $B_R \setminus \Omega$ וממשפט הדיברגנס נקבל כמובן:

$$0 \int_{B_R \setminus \Omega} \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \int_{\partial(B_R \setminus \Omega)} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \left(\int_{\partial B_R} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA\right)$$

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_{\partial B_R} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -4\pi GM}$$

עתה נדון במקרה שבו יש מספר גופים M_i עבור $1 \le i \le M$ ומיקומים r_i בהתאמה, אזי שדה הכבידה שמפעיל M_i הוא:

$$F_i(x,y,z) = -\frac{GM_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

$\begin{cases} 0 & \vec{r}_i \notin \Omega \\ -4\pi GM_i & \vec{r}_i \in \operatorname{int}\Omega \end{cases} =$ השטף של F_i על תחום Ω. אם ישנן מסות $M_1, \cdots, M_n$ בנקודות $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n$.

שדה כח הכבידה הפועל על חלקיק עם מסה 1:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

ומכך מתקבל החוק הפיזיקלי הקרוי **חוק גאוס**, על פיו:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -4\pi G \cdot M$$

כאשר M הינה המסה הנמצאת בתוך Ω. חוק זה נכון גם כאשר המסה נתונה על ידי צפיפות מסה רציפה. כלומר, בהנתן פונקציה $\rho: \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ כך שמתקיים:

$$\int_R \rho dV = R \text{ מסה בתחום}$$

וזאת לכל תחום בעל נפח, אזי ניתן לקבל כי:

$$\frac{1}{Vol\big(B_r(p)\big)}\int_{\partial B_r(p)} \vec{F}\cdot\hat{n}dA = Const\cdot X$$

כאשר X הינה כמות המסה בתוך $B_r(p)$. ולכן, כאשר $r\to 0$ נקבל בדיוק את המשמעות של צפיפות המסה (קרי מסה ליחידת נפח בכל נקודה), כלומר:

$$\mathrm{div}\big(\vec{F}\big)(p) = Const\cdot\rho(p)$$