16.1

תורת המשחקים

תרגיל 9

מגישים:

1) (א) פונקציה המקיימת את כל האקסיומות מלבד אקסיומת היעילות:

תהי S קבוצת כל תתי הקבוצות של: $\{1,\dots,n\}$ בלי הקבוצה הריקה כאשר קבוצה מוגדרת לפי האיברים שהיא מכילה ולא לפי סידורם. אז נגדיר את הפונקציה:

$$\varphi_i(N,V)=\frac{1}{2^{n-1}-1}\sum_{S\in \mathcal{S}} V\big(S\cup\{i\}\big)-V(S)\big)$$

נשים לב כי:

* אקסיומת שחקן הסרק מתקיימת שכן עבור $\sum_{S\in\mathcal{S}} V(S\cup\{i\})-V(S)=(\underbrace{2^{n-1}-1}_{\text{מספר הקבוצות ב- } S\setminus\{i\} \text{ בלי הקבוצה הריקה}})\cdot V(\{i\})$

ולכן אם i שחקן סרק: $\varphi_i=V(\{i\})$

* אקסיומת השחקנים הסימטריים מתקיימת: יהיו i,j שחקנים סימטריים. אז לכל $S\subseteq S\setminus\{i,j\}$ מתקיים: $V(S\cup\{i\})-V(S)=V(S\cup\{j\})-V(S)$

ובנוסף: $V\big(S\cup\{j\}\cup\{i\}\big)-V(S\cup\{j\})=V\big(S\cup\{i\}\cup\{j\}\big)-V(S\cup\{i\})$

ולכן: $\sum_{S\in\mathcal{S}}\Big(V\big(S\cup\{i\}\big)-V(S)\Big)=\sum_{S\in\mathcal{S}}\Big(V(S\cup\{j\})-V(S)\Big)\Longrightarrow\varphi_i(N,V)=\varphi_j(N,V)$

* אקסיומת הסכום גם מתקיימת שכן עבור שני משחקים (N,W), (N,V) מתקיים:

$$\sum V(S\cup\{i\})+W(S\cup\{i\})-V(S)-W(S)=\sum V(S\cup\{i\})-V(S)+\sum W(S\cup\{i\})-W(S)$$

ולכן: $\varphi(N,V+W)=\varphi(N,V)+\varphi(N,W)$

<u>עם 3 שחקנים:</u>

* אקסיומת היעילות אינה מתקיימת נראה זאת בדוגמה נגדית עבור משחק של [illegible])

$$V(S)=\begin{cases}1 & S\in\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$\varphi_1=\frac{1}{2^2-1}\Big(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{V(\{1,2,3\})}}-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\{2,3\})}}+\overset{1}{\overset{\shortparallel}{V(\{1,2\})}}-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\{2\})}}+\overset{1}{\overset{\shortparallel}{V(\{1,3\})}}-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\{3\})}}\Big)=\frac{3}{3}=1$$

$$\varphi_2=\frac{1}{2^2-1}\Big(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{V(\{1,2,3\})}}-\overset{1}{\overset{\shortparallel}{V(\{1,3\})}}+\overset{1}{\overset{\shortparallel}{V(\{1,2\})}}-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\{2\})}}+\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\{2,3\})}}-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{V(\{3\})}}\Big)=\frac{1}{3}$$

והם שחקנים סימטריים ולכן $\varphi_3=\frac{1}{3}$. קיבלנו: $\sum_{i=1}^{3}\varphi_i=\frac{5}{3}\neq 1=V(\{1,2,3\})$

ולכן אקסיומת היעילות לא מתקיימת.

(ב) פונקציה המקיימת את 3 האקסיומות מלבד אקסיומת שחקן הסרק.

$$f_i(N,v) = \frac{v(N)}{N}$$

כלומר, הפונקציה בה כולם מקבלים ערך שווה.

נשים לב כי:

* $\sum_{i=1}^{N} f_i(N,v) = \frac{N \cdot v(N)}{N} = v(N)$ ⟸ מתקיימת אקסיומת היעילות.

* כל השחקנים מקבלים את אותו התשלום (ובפרט כל שני שחקנים סימטריים)
⟸ מתקיימת אקסיומת השחקנים הסימטריים.

* $f_i(N, v+w) = \frac{v(N)+w(N)}{N} = \frac{v(N)}{N} + \frac{w(N)}{N} = f_i(N,v) + f_i(N,w)$ לכל i ולכל שני משחקים (N,v), (N,w) ⟸ מתקיימת אקסיומת האדיטיביות.

אבל ברור כי אקסיומת שחקן הסרק אינה מתקיימת שכן אין בפונקציה f התייחסות לפונקציה האופיינית של המשחק. נראה דוגמא נגדית פשוטה:

משחק שני שחקנים עם הפונקציה האופיינית:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & S=\{1\} \\ 2 & S=\{2\} \\ 3 & S=\{1,2\} \end{cases}$$

קל לראות כי במשחק זה שני השחקנים הם שחקני סרק אבל לשני השחקנים: $\underset{\frac{3}{2}}{\underset{\parallel}{f_i(N,v)}} \neq \underset{1/2}{\underset{\parallel}{v(\{i\})}}$.

ג. פונקציה המקיימת את שלושת האקסיומות, מלבד אקסיומת השחקנים התחלפיים:

נבחר סדר כלשהו R ונגדיר

$$f_i(N,v) = v(R(i) \cup \{i\}) - v(R(i))$$

נראה שהפונק' מקיימת את שלושת האקסיומות האחרות:

• <u>יעילות</u>

יהי (N,v) משחק.

נראה כי $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(N,v) = v(N)$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(N,v) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(R(i) \cup \{i\}) - v(R(i))}_{\text{טור טלסקופי}} =$$

$$= v(N) - v(\emptyset) = v(N)$$

• <u>שחקן הסרק</u> יהי (N,v) משחק, $i \in N$ שחקן סרק.

אז

$$f_i(N,v) = v(R(i) \cup \{i\}) - v(R(i)) =$$

$$\overset{\text{מהגדרת שחקן סרק.}}{=} v(\{i\})$$

• <u>אדיטיביות</u>

יהיו (N,v), (N,ω) משחקים, $i \in N$ שחקן.

נראה כי $f_i(N,v+\omega) = f_i(N,v) + f_i(N,\omega)$.

$$f_i(N,v+\omega) = (v+\omega)(R(i) \cup \{i\}) - (v+\omega)(R(i)) =$$

$$= v(R(i) \cup \{i\}) - v(R(i)) + \omega(R(i) \cup \{i\}) - \omega(R(i)) =$$

$$= f_i(N,v) + f_i(N,\omega).$$

אבל פונקציה זו לא מקיימת את אקסיומת השחקנים התחלפיים

נגדיר למשל משחק פשוט ע"י $v(S) = 1$ אמ"מ $\{i,j\} \subseteq S$ עבור $i,j \in N$ כלשהם. אז בכל סדר R אם i מיד לפני j (בה"כ)

$f_i(N,v) = 0$ ו- $f_j(N,v) = 1$

כלומר $f_i(N,v) \neq f_j(N,v)$ למרות ש- i,j שחקנים
תחליפיים.

(ג) פונקציה המקיימת את 3 האקסיומות מלבד אקסיומת האדיטיביות:

(נביט) במשחק הבא ל שני שחקנים:

$$V(S) = \begin{cases} 1 & S=\{1\} \\ 0 & S=\{2\} \\ 2 & S=\{1,2\} \end{cases}$$

נסמן משחק זה: $(2,V^*)$. נגדיר ל משחק זה את הפונקציה:
$. g_1 = g_2 = 1$

נשים לב שמכיוון שבמשחק זה אין שחקני סרק, ואין שחקנים תחליפיים ו- $\sum g_i = V(N)$ - 3 האקסיומות מלבד אדיטיביות מתקיימות (במשחק הספציפי הזה!!)

כעת נגדיר את הפונקציה:
$$f(N,V) = \begin{cases} g & (N,V)=(N^*,V^*) \\ \text{ערך שפלי} & \text{אחרת} \end{cases}$$

אנו יודעים כי ערך שפלי מקיים את 3 האקסיומות, ובצירוף למה שהראנו ל-g : f מקיימת את 3 האקסיומות מלבד אדיטיביות. לפי מה שהגדרנו מתקיים: $f(2,V+V^*) = \underbrace{\varphi(2,V+V^*)}_{\text{ערך שפלי}}$ לכל משחק (N,V). אבל מאדיטיביות

ערך שפלי אנו יודעים כי: $\varphi(2,V+V^*) = \varphi(2,V) + \varphi(2,V^*)$

אבל: $\varphi(2,V^*) \neq g(2,V^*)$ ולכן: $\varphi(2,V+V^*) \neq \varphi(2,V) + g(2,V^*)$

$\Longleftarrow$ $f(N,V+V^*) \neq f(N,V) + f(N,V^*)$ עבור משחקים מסויימים.

ולכן אקסיומת האדיטיביות אינה מתקיימת.

✓ כיוון נכון

אבל הסבר לא ברור

מה אם $n \neq 2$?

.2

א. $[4; 3,1,1,1,1]$

נחשב תחילה את ערך שפלי עבור שחקן 2.

כדי ששחקן 2 יהיה שחקן מפתח הוא צריך להגיע

שני אחרי שחקן 1, או רביעי אחרי שחקנים 3,4,5 שלושת השחקנים

הנותרים יסתדרו אחריו או לפניו בסדר כלשהו, ולכן יש $2\cdot 3! = 12$

סדרים בהם הוא שחקן מפתח.

לכן: $\varphi_2(N,v) = \frac{2\cdot 3!}{5!} = \frac{2\cdot 6}{120} = \frac{1}{10}$.

מכיוון ששחקנים 2,3,4,5 הם תחליפיים, נקבל:

$$\varphi(N,v) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

(מכיוון שסכום התשלומים הוא 1 מאקסיומת היעילות).

ב. $[5; 4,3,1,1,1]$

נחשב תחילה את ערך שפלי עבור שחקן 1.

כדי ששחקן 1 יהיה שחקן מפתח, ישנן מס' אפשרויות:

- שחקן 1 מגיע שני ללא תלות בקודם - $4! = 24$
  סדרים אפשריים (סידור ארבעת השחקנים הנותרים בדרך כלשהי)
- שחקן 1 מגיע שלישי ללא תלות בקודמיו - $4! = 24$
  סדרים אפשריים (סידור ארבעת השחקנים הנותרים בדרך כלשהי).
- שחקן 1 מגיע רביעי אחרי שחקנים 3,4,5 - $3! = 6$
  סדרים אפשריים (סידור שלושת השחקנים 3,4,5 בדרך כלשהי,
  ידוע ששחקן 1 מגיע רביעי ושחקן 2 לפיכך חמישי).

בסה"כ 54 סדרים אפשריים, ולכן

$$\varphi_1(N,v) = \frac{54}{120} = \frac{9}{20}$$

כעת נחשב ערך שפלי עבור שחקן 3.

כדי ששחקן 3 יהיה שחקן מפתח, ישנן מס' אפשרויות:

- הוא מגיע שני אחרי שחקן 1 - $3! = 6$ לסידור
  שלושת השחקנים הנותרים.

• הוא מגיע שלישי אחרי שחקנים 2 ו-4 -

$2!=2$ לסידור הקודמים • $2!=2$ לסידור השאר

בסה"כ 4 סדרים אפשריים.

• הוא מגיע שלישי אחרי שחקנים 2 ו-5 -

$2!=2$ לסידור הקודמים. $2!=2$ לסידור השאר.

בסה"כ 4 סדרים אפשריים.

קיבלנו עבור שחקן 3 בסה"כ 14 סדרים אפשריים

ולכן $\varphi_3(N,v)=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$

מכיוון ששחקנים 3,4,5 תחליפיים נקבל $\varphi_5(N,v)=\varphi_4(N,v)=\varphi_3(N,v)=\frac{7}{60}$

מאקסיומת השחקנים התחליפיים.

ומאקסיומת היעילות נקבל בסה"כ: $\varphi(N,v)=\left(\frac{9}{20},\frac{1}{5},\frac{7}{60},\frac{7}{60},\frac{7}{60}\right)$

ג. נחשב את ערך שפלי עבור חברה זמנית.

חברה זמנית תהיה שחקן מפתח רק אם היא תגיע אחרי

כל החברות הקבועות ובדיוק 3 זמניות.

$\binom{9}{3}=84$ לבחירת הזמניות הקודמות.

$8!=40320$ לסידור הקודמים

$6!=720$ לסידור השאר.

ולכן בסה"כ ערך שפלי של חברה זמנית

הוא $\frac{\binom{9}{3}\cdot 8!\cdot 6!}{15!}=\frac{4}{2145}$

כל החברות הזמניות תחליפיות, וכן כל הקבועות

ולכן ערך שפלי הוא:

$$\varphi(N,v)=\Big(\underbrace{\tfrac{421}{2145},\tfrac{421}{2145},\tfrac{421}{2145},\tfrac{421}{2145},\tfrac{421}{2145}}_{\text{5 חברות קבועות}},\underbrace{\tfrac{4}{2145},\tfrac{4}{2145},\tfrac{4}{2145},\tfrac{4}{2145},\tfrac{4}{2145},\tfrac{4}{2145},\dots,\tfrac{4}{2145}}_{\text{10 חברות זמניות.}}\Big)$$

3. א. (N,v) סופראדיטיבי $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_n$ כולם אי-שליליים או אי-חיוביים.

$\Leftarrow$ נראה שאם קיימים a_i, a_j בעלי סימנים מנוגדים,

אז המשחק אינו סופראדיטיבי.

נניח בה"כ $|a_i| \ge |a_j|$ אז:

$$v(\{i\}) + v(\{j\}) = a_i^2 + a_j^2 \ge a_i^2 > (a_i + a_j)^2 = v(\{i,j\})$$

מכיוון ש- a_i, a_j בעלי סימנים מנוגדים, מתקיים:

$0 \le (a_i + a_j)^2 < a_i^2$ מכיוון ש- $0 \le |a_i + a_j| < |a_i|$

כלומר $v(\{i\}) + v(\{j\}) > v(\{i,j\})$

(כמובן $i \neq j$ והקב' זרות) בסתירה לסופר אדיטיביות.

$\Rightarrow$

אם $a_1, \dots, a_n$ אי-שליליים או אי-חיוביים

יהיו $S, T \subseteq N$ כך ש- $S \cap T = \emptyset$

$$v(S) + v(T) = \Big(\sum_{i \in S} a_i\Big)^2 + \Big(\sum_{j \in T} a_j\Big)^2 \le$$

(אי-שלילי מכפ' של ה-a_i-ים לא מנוגדי סימן)

$$\le \Big(\sum_{i \in S} a_i\Big)^2 + \Big(\sum_{j \in T} a_j\Big)^2 + 2\overbrace{\Big(\sum_{i \in S} a_i\Big)\Big(\sum_{j \in T} a_j\Big)} =$$

$$= \Big(\sum_{i \in S} a_i + \sum_{j \in T} a_j\Big)^2 = \Big(\sum_{i \in S \cup T} a_i\Big)^2 =$$

$$= v(S \cup T)$$

כלומר $v(S) + v(T) \le v(S \cup T)$

ולכן (N,v) סופראדיטיבי.

ב. נחשב את ערך שפלי עבור משחק כנ"ל:

$$\varphi_i(N,v) = \frac{1}{n!}\sum_{R\in L}\left(\left(\sum_{j\in R(i)} a_j + a_i\right)^2 - \left(\sum_{j\in R(i)} a_j\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{R\in L}\left(2a_i\sum_{j\in R(i)} a_j + a_i^2\right) =$$

$$= \frac{2}{n!}a_i\sum_{R\in L}\sum_{j\in R(i)} a_j + \frac{1}{n!}\sum_{R\in L} a_i^2 =$$

$$= \frac{2}{n!}a_i\cdot\frac{n!}{2}\sum_{j\in N\setminus\{i\}} a_j + a_i^2 =$$

דרוש הסבר

$$= a_i\sum_{j\in N} a_j .$$