תורת הקבוצות־104290 גליון 4

שניר הורדן 205689581

7 ביוני 2018

.1

1. <u>הוכחה</u>

יהיו $x, y, z \in \mathbb{N}$.

1. רפלקסיביות־ עבור $k = 1 \in \mathbb{N}$ מתקיים $x = x^1$. לכן מתקיים $x \leq x$.
2. אנטי־סימטריות־ נניח $x \leq y$ וגם $y \leq x$. אז קיימים $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $y = x^{k_1}$ וגם $x = y^{k_2}$. אז $y = y^{k_2^{k_1}} = y^{k_1 \times k_2}$ אזי $k_1 \times k_2 = 1$ מאחר ושניהם טבעיים מתקיים $k_1 = k_2 = 1$. אזי $x = y$.
3. טרנזיטיביות־ נניח $x \leq y$ וגם $y \leq z$. אזי $y = x^{k_1}$ וגם $z = y^{k_2}$, עבור $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. אזי $z = x^{k_1 \times k_2}$. אזי עבור $k = k_1 \times k_2 \in \mathbb{N}$ מתקיים $z = x^k$ כלומר $x \leq z$.

מ.ש.ל.

2.<u>איברים מקסימליים\גדולים ביותר</u> ־$\forall n \in \mathbb{N} \left(n^0 = 1\right)$אז 1 ניתן להשוואה עם כל $n \in \mathbb{N}$ ומקיים $n \leq 1$. אז הוא הגדול ביותר.

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה שקיים איבר מקסימלי שאינו 1 $m \in \mathbb{N} \neq 0, 1$. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \leq m$.

אך $m^2 \in \mathbb{N}$ ומתקיים $m \leq m^2$. סתירה.

<u>איברים מינימליים־ $\left\{n \in \mathbb{N} | n \neq 1, \forall k \in \mathbb{N} \left(\sqrt[k]{n} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}\right)\right\}$</u>

<u>איבר קטן ביותר</u>־לא קיים כי קיימים מספר איברים מינימליים כך שאין איבר הקטן ממש מהם.

.2

1. תהא $(A, \leq)$ קבוצה סדורה בסדר מלא.

נניח שלכל $\emptyset \neq B \subseteq A$ חסומה מלעיל קיים חסם עליון, כלומר קיים איבר מינימלי בקבוצה $\{a \in A | \forall b \in B \left(b \leq a\right)\}$.

תהי $\emptyset \neq B \subseteq A$חסומה מלרע.

נתבונן בקבוצה $\emptyset \neq C = \{a \in A | \forall b \in B \left(a \leq b\right)\} \subseteq A$.

זו קבוצה חסומה מלעיל על ידי האיבר הראשון ב־B שקיים כי A סדורה היטב.

לפי ההנחה, לקבוצה זו קיים חסם עליון $c \in C$.

c הוא החסם התחתון של B.

מ.ש.ל.

2. $[0, 1]$. לכל תת־קבוצה חסומה ולא ריקה קיים חסם עליון.

.3

תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי מעל A.

תהי F משפחה של יחסי סדר מעל A המרחיבים את R.
1.$F \neq \emptyset$ כי R מרחיב את עצמו באופן ריק.
2.עלינו להראות שלכל שרשרת קיים חסם מלעיל.
יהא $T = \bigcup C_i$ כאשר C_i היא שרשרת של יחסי סדר חלקיים המרחיבים את R ביחס ההכלה.
3.נראה שמתקיים $T \in F$
נתבונן בתכונות של T, $T \subseteq A$ ומקיים
1.רפלקסיביות־לכל איבר $x \in T$ קיים $j \in I$ כך ש־$x \in C_j$ ומתקיים שם $x \leq x$ כי C_j הוא קס"ח. בפרט, $C_j \subseteq T$ אז תכונה זו מתקיימת גם ב־T.
2. טרנזיטיביות־יהיו $x, y, z \in T$.נניח שמתקיים $x \leq y \wedge y \leq z$. אזי קיימים $i, j, k \in I$ ושרשראות בה"כ $C_k \subseteq C_k \subseteq C_i$. כך ש־$x, y \in C_j \Rightarrow x \leq y$, $y, z \in C_k \Rightarrow y \leq z$.
אזי קיים C_i המרחיב את C_k המקיים $x \leq z$. $C_i \subseteq T$ אז זה מתקיים גם ב־T.
3. אנטי־סימטריות־ יהיו $x, y \in T$קיים $j \in I$ כך ש־$x, y \in C_j$ ומתקיים שם $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$. מאחר ו־$C_j \subseteq T$ זה מתקיים ב־T.
אנו עונים על תכונות קס"ח אז T היא קס"ח המרחיב את R אז הוא שייך ל־F.
4.לפי הלמה של צורן קיים איבר מקסימלי ביחס להכלה.
5.איבר מקסימלי זה הוא יחס סדר מלא.
הוכחה
הוכחנו ש־$T \in F$ אז הוא יחס סדר חלקי. נותר להוכיח שכל שני איברים ב־T ניתנים להשוואה.
עלינו להוכיח $\forall x, y \in T$ מתקיים $x \leq y$ או $y \leq x$.
יהא $x, y \in T$. קיים איזשהו יחס סדר חלקי מעל A המרחיב את Rכך ש־ $x \leq y$ או $y \leq x$.
נסמנו C_α. T הוא מקסימלי ביחס ההכלה אז בהכרח $C_\alpha \subset T$.
לכן x ו־y ניתנים להשוואה. אזי T הוא יחס סדר **מלא**.
מ.ש.ל.
4.
1. הוכחה
תהי X קבוצה ו־$A = 2^X$ עם יחס הסדר $\subseteq$ הרגיל.
יהיו $x, y \in A$.
נתבונן בקבוצה $\{x, y\}$.
מקרה 1 ־ בה"כ $x \subseteq y$
אז מתקיים $x \leq x$ וגם $x \leq y$ לכן x חסם תחתון של $\{x, y\}$.
באופן דומה y חסם עליון של $\{x, y\}$.נגדיר
מקרה 2 ־ קיימים $t_i \in X$ כך שבה"כ $t \in x$ אך $t \notin y$ או\וגם להפך.
נתבונן בקבוצה $x \setminus \{t_1 ... t_n\}$ אז מתקיים $x \setminus \{t_1, ..., t_n\} \subseteq y$.
באופן דומה אפשר להתבונן בקבוצה $y \setminus \{t_1, ..., t_n\}$.
אז קיבלנו קבוצה שהיא חסם תחתון.
נתבונן בקבוצה $y \cup \{t_1, ..., t_2\}$. זהו החסם העליון המבוקש. (או להפך עם x).
כל מקרה 2 הוא פירוט על פעולות האיחוד וחיתוך.
כעת, נניח בשלילה שהוא לא החסם מלעיל הקטן ביותר. אזי קיימת קבוצה מגודל קטן ממנו המקיימת זו. אך אם נוריד איבר נקבל שאחת הקבוצות x או y אינה מוכלת בו. סתירה.
פעולת $Meet$־חיתוך בין הקבוצות
פעולת $Join$־איחוד בין הקבוצות
2.הוכחה

עבור $A=\mathbb{N}$ ופעולת $|$ המוגדר על ידי חלוקה.
יהיו $x,y\in A$,
נגדיר:
פעולת LCD־$Meet$ של x ו־x
פעולת LCM־$Join$
אז קיימים חסם עליון ותחתון עבור כל $\{x,y\}$.
מ.ש.ל.
.5
.1
1. הוכחה
יהיו $x,y,z\in\mathbb{N}$.

1. רפלקסיביות־ עבור $k=1\in\mathbb{N}$ מתקיים $x=x^1$. לכן מתקיים $x\leq x$.
2. אנטי־סימטריות־ נניח $x\leq y$ וגם $y\leq x$. אז קיימים $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ כך ש־ $y=x^{k_1}$ וגם $x=y^{k_2}$. אז $y=y^{k_2^{k_1}}=y^{k_1\times k_2}$ אזי $k_1\times k_2=1$ מאחר ושניהם טבעיים מתקיים $k_1=k_2=1$. אזי $x=y$.
3. טרנזיטיביות־ נניח $x\leq y$ וגם $y\leq z$. אזי $y=x^{k_1}$ וגם $z=y^{k_2}$, עבור $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. אזי $z=x^{k_1\times k_2}$. אזי עבור $k=k_1\times k_2\in\mathbb{N}$ מתקיים $z=x^k$ כלומר $x\leq z$.

מ.ש.ל.
.2איברים מקסימליים\גדולים ביותר ־$\forall n\in\mathbb{N}\left(n^0=1\right)$אז 1 ניתן להשוואה עם כל $n\in\mathbb{N}$ ומקיים $n\leq 1$. אז הוא הגדול ביותר.
הוכחה
נניח בשלילה שקיים איבר מקסימלי שאינו 1 $1,0\neq m\in\mathbb{N}$. כלומר, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n\leq m$.
אך $m^2\in\mathbb{N}$ ומתקיים $m\leq m^2$. סתירה.
איברים מינימליים־$\left\{n\in\mathbb{N}|n\neq 1,\forall k\in\mathbb{N}\left(\sqrt[k]{n}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\right)\right\}$
איבר קטן ביותר־לא קיים כי קיימים מספר איברים מינימליים כך שאין איבר הקטן ממש מהם.
.2
1. תהא $(A,\leq)$ קבוצה סדורה בסדר מלא.
נניח שלכל $\emptyset\neq B\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים חסם עליון, כלומר קיים איבר מינימלי בקבוצה $\{a\in A|\forall b\in B\,(b\leq a)\}$.
תהי $\emptyset\neq B\subseteq A$חסומה מלרע.
נתבונן בקבוצה $\emptyset\neq C=\{a\in A|\forall b\in B\,(a\leq b)\}\subseteq A$.
זו קבוצה חסומה מלעיל על ידי האיבר הראשון ב־B שקיים כי A סדורה היטב.
לפי ההנחה, לקבוצה זו קיים חסם עליון $c\in C$.
c הוא החסם התחתון של B.
מ.ש.ל.
2. $[0,1]$. לכל תת־קבוצה חסומה ולא ריקה קיים חסם עליון. הקבוצה סופית לכן כל תת־קבוצה שלה היא חסומה וקיים לה סופרמום (מאינפי 1).
.3
תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי מעל A.
תהי F משפחה של יחסי סדר מעל A המרחיבים את R.
.1$F\neq\emptyset$ כי R מרחיב את עצמו באופן ריק.

2.עלינו להראות שלכל שרשרת קיים חסם מלעיל.
יהא $T=\bigcup C_i$ כאשר C_i היא שרשרת של יחסי סדר חלקיים המרחיבים את R ביחס ההכלה.
3.נראה שמתקיים $T\in F$
נתבונן בתכונות של T, $T\subseteq A$ ומקיים
1.רפלקסיביות־לכל איבר $x\in T$ קיים $j\in I$ כך ש־$x\in C_j$ ומתקיים שם $x\le x$ כי C_j הוא קס"ח. בפרט, $C_j\subseteq T$ אז תכונה זו מתקיימת גם ב־T.
2. טרנזיטיביות־יהיו $x,y,z\in T$.נניח שמתקיים $x\le y\wedge y\le z$. אזי קיימים $i,j,k\in I$ ושרשראות בה"כ $C_k\subseteq C_k\subseteq C_i$. כך ש־$x,y\in C_j\Rightarrow x\le y$, $y,z\in C_k\Rightarrow y\le z$.
אזי קיים C_i המרחיב את C_k המקיים $x\le z$. $C_i\subseteq T$ אז זה מתקיים גם ב־T.
3. אנטי־סימטריות־ יהיו $x,y\in T$קיים $j\in I$ כך ש־$x,y\in C_j$ ומתקיים שם $x\le y\wedge y\le x\Rightarrow x=y$. מאחר ו־$C_j\subseteq T$ זה מתקיים ב־T.
אנו עונים על תכונות קס"ח אז T היא קס"ח המרחיב את R אז הוא שייך ל־F.
4.לפי הלמה של צורן קיים איבר מקסימלי ביחס להכלה.
5.איבר מקסימלי זה הוא יחס סדר מלא.
הוכחה
הוכחנו ש־$T\in F$ אז הוא יחס סדר חלקי. נותר להוכיח שכל שני איברים ב־T ניתנים להשוואה.
עלינו להוכיח $\forall x,y\in T$ מתקיים $x\le y$ או $y\le x$.
יהא $x,y\in T$. קיים איזשהו יחס סדר חלקי מעל A המרחיב את Rכך ש־ $x\le y$ או $y\le x$.
נסמנו C_α. T הוא מקסימלי ביחס ההכלה אז בהכרח $C_\alpha\subset T$.
לכן x ו־y ניתנים להשוואה. אזי T הוא יחס סדר **מלא**.
מ.ש.ל.

4.

1. הוכחה
תהי X קבוצה ו־$A=2^X$ עם יחס הסדר $\subseteq$ הרגיל.
יהיו $x,y\in A$.
נתבונן בקבוצה $\{x,y\}$.
מקרה 1 ־ בה"כ $x\subseteq y$
אז מתקיים $x\le x$ וגם $x\le y$ לכן x חסם תחתון של $\{x,y\}$.
באופן דומה y חסם עליון של $\{x,y\}$.נגדיר
מקרה 2 ־ קיימים $t_i\in X$ כך שבה"כ $t\in x$ אך $t\notin y$ או\וגם להפך.
נתבונן בקבוצה $x\backslash\{t_1...t_n\}$ אז מתקיים $x\backslash\{t_1,...,t_n\}\subseteq y$.
באופן דומה אפשר להתבונן בקבוצה $y\backslash\{t_1,...,t_n\}$.
אז קיבלנו קבוצה שהיא חסם תחתון.
נתבונן בקבוצה $y\cup\{t_1,...,t_2\}$. זהו החסם העליון המבוקש. (או להפך עם x).
כל מקרה 2 הוא פירוט על פעולות האיחוד וחיתוך.
כעת, נניח בשלילה שהוא לא החסם מלעיל הקטן ביותר. אזי קיימת קבוצה מגודל קטן ממנו המקיימת זו. אך אם נוריד איבר נקבל שאחת הקבוצות x או y אינה מוכלת בו. סתירה.
פעולת $Meet$־חיתוך בין הקבוצות
פעולת $Join$־איחוד בין הקבוצות
2.הוכחה
עבור $A=\mathbb{N}$ ופעולת $|$ המוגדר על ידי חלוקה.
יהיו $x,y\in A$,

פעולת LCD־$Meet$ של x ו־yנגדיר x
פעולת LCM־$Join$
אז קיימים חסם עליון ותחתון עבור כל $\{x,y\}$.
מ.ש.ל.
5.
א.<u>הוכחה</u>
תהא X קבוצה.
יהא $\leq$ יחס בינארי מעל X שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי (קדם סדר).
<u>רפלקסיביות־</u> $\forall x\in X\left(x\leq x\wedge x\geq x\right)$
<u>סימטריות־</u> $\forall x.y\in X\left(x\leq y\wedge x\geq y\right)$
<u>טרנזיטיביות־</u> $\forall x,y,z\in X\left(x\leq z\wedge x\geq z|\left(x\leq y\wedge y\leq z\right)\wedge\left(x\geq y\wedge y\geq z\right)\iff x\equiv y,y\equiv z\right)$
אז זה יחס שקילות
מ.ש.ל.
ב.<u>הוכחה</u>
נסמן $A\triangleq X/\equiv$.
<u>$(*)$מוגדר היטב־</u>
לכל $c\in[b]$ מתקיים $b\geq c\wedge b\leq c$ אז $b=c$.
לכן אם $[a]\leq_{A}[b]$ אז גם $\forall d\in[a],c\in[b]\left(d\leq c\right)$ ולהפך.
סיימנו.
<u>יחס סדר חלקי־</u>
רפלקסיביות וטרנזיטיביות מכך ש־$[a]\leq_{A}[a]$ אסם $a\leq a$ וזהו קדם סדר.
אנטי־סימטריות־ נניח $[x]\leq_{A}[y]\wedge[x]\geq_{A}[y]$.
אזי $x\leq y\wedge x\geq y$ לכל האיברים בקבוצות הנ"ל המתאימות לפי $(*)$ אזי $x\equiv y$.
מאחר וזו תכונה מוגדרת היטב, אזי x,y הם נציגים שונים לאותה מחלקת שקילות, כלומר $[x]=[y]$.
מ.ש.ל.
6.
1. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ המוגדרת כך $f\left(x\right)=x$. זו פונקציה חח"ע השומרת סדר (הרגיל על $\mathbb{Q}$ ו־$\mathbb{Z}$).
לא קיימת פונקציה חח"ע שומרת סדר בין $\mathbb{Q}$ ל־$\mathbb{Z}$.
נניח בשלילה שקיימת כזו.
יהא$x\in\mathbb{Z}$ כך שעבור $q_{1},q_{2}\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f\left(q_{1}\right)=x$ ו־$f\left(q_{2}\right)=x+1$.
אלה קיימים כי העצמות של $\mathbb{Z}$ ו־$\mathbb{Q}$ זהות אז אם מאחר ו־f מוגדרת לכל $q\in\mathbb{Q}$ והיא חח"ע לכל $z\in\mathbb{Z}$ קיים $q_{0}\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $f\left(q_{0}\right)=z$.
לפי תכונת הצפיפות של $\mathbb{Q}$, $\exists q\left(q_{1}<q<q_{2}\right)$. אזי מאחר ו־$f$ שומרת סדר $\exists z\left(x<z<x+1\right)$.
אך המספרים השלמים אינם צפופים. סתירה.
2.$f:\left(2^{\mathbb{N}},\subseteq\right)\to\left(\left[0,1\right],\leq\right)$ המוגדרת כך:
יהא $x\in\left\{0,1\right\}^{\mathbb{N}}$.
נגדיר משקל כלשהו עבור כל קואורדינטה בסדרה הבינארית האינסופית x. כך: $x_{n}=\frac{1}{2^{n+1}}$
נתבונן בביטוי $f\left(x\right)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_{i}$ זה מגדיר פונקציה חח"ע ושומרת סדר כנדרש.
<u>הוכחה</u>
יהיו $x,y\in2^{\mathbb{N}}$.
<u>חח"ע</u>

אם $x \neq y$ נמפה אותם לצורה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ואז קיימת לפחות קואורדינטה אחת שונה ביניהם כלומר $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_i \neq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_i$.

מ.ש.ל.

<u>שומרת סדר</u>

אם $y \subseteq x$ אז קיים איבר נוסף ב־yשאינו ב־x או שהן שוות. אם קיים איבר נוסף אז הסכום יגדל אם הן שוות הוא יהיה זהה.

לכן, $f(x) \leq f(y)$.

מ.ש.ל.

3.נגדיר $f:(0,1) \to [0,1]$, $g:[0,1] \to (0,1)$ חח"ע ושומרות סדר.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

f היא פונקציית הזהות אז בוודאי שומרת סדר וחח"ע. g היא פונקציה חח"ע, על ושומרת סדר על $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ אז בוודאי שחח"ע ושומרת סדר על $(0,1) \subseteq \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

4. $[0,1]$ ו־$\mathbb{Z}$. הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$ שונה מהסדר הרגיל על $\mathbb{Z}$. אילו הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר מ־$[0,1]$ל־$\mathbb{Z}$ אז היינו מקבלים לפי משפט קנטור $\leq |[0,1]| \underbrace{=}_{axiom} |\mathbb{R}|$ $|\mathbb{Z}| \Rightarrow \aleph \leq \aleph_0$ סתירה.

אילו הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר מ־$\mathbb{Z}$ ל־$[0,1]$אז עבור היה קיים $z \in \mathbb{Z}$ כך ש־$f(z) = 0$. לכל איבר ב־$\mathbb{Z}$ קיים קודם מיידי לכן קיים z_0 כך שמתקיים $z_0 \leq z$. אז מכך שהפונקציה שומרת סדר, $\exists r \in [0,1] \, (f(z_0) = r \wedge r \leq 0)$.

אך הפונקציה חח"ע, אז $r < 0$, סתירה.

אז לא קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר בין $\mathbb{Z}$ ל־$[0,1]$ אז $\mathbb{Z}$ לא ניתנת לשיכון בו.

א.<u>הוכחה</u>

תהא X קבוצה.

יהא $\leq$ יחס בינארי מעל X שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי (קדם סדר).

<u>רפלקסיביות־ $\forall x \in X \, (x \leq x \wedge x \geq x)$</u>

<u>סימטריות־ $\forall x.y \in X \, (x \leq y \wedge x \geq y)$</u>

<u>טרנזיטיביות־ $\forall x,y,z \in X \, (x \leq z \wedge x \geq z | \, (x \leq y \wedge y \leq z) \wedge (x \geq y \wedge y \geq z) \iff x \equiv y, y \equiv z)$</u>

אז זה יחס שקילות

מ.ש.ל.

ב.<u>הוכחה</u>

נסמן $A \triangleq X/\equiv$.

<u>$(*)$מוגדר היטב־</u>

לכל $c \in [b]$ מתקיים $c \leq b \wedge c \geq b$ אז $b = c$.

לכן אם $[a] \leq_A [b]$ אז גם $\forall d \in [a], c \in [b] \, (d \leq c)$ ולהפך.

סיימנו.

<u>יחס סדר חלקי־</u>

רפלקסיביות וטרנזיטיביות מכך ש־$[a] \leq_A [a]$ אםם $a \leq a$ וזה קדם סדר.

אנטי־סימטריות־ נניח $[x] \leq_A [y] \wedge [x] \geq_A [y]$.

אזי $x \leq y \wedge x \geq y$ לפי $(*)$ אזי $x \equiv y$.

מאחר וזו תכונה מוגדרת היטב, אזי x,y הם נציגים שונים לאותה מחלקת שקילות, כלומר $[x]=[y]$.

מ.ש.ל.

6.

1. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ המוגדרת כך $f\left(x\right)=x$. זו פונקציה חח"ע השומרת סדר (הרגיל על $\mathbb{Q}$ ו־$\mathbb{Z}$).

לא קיימת פונקציה חח"ע שומרת סדר בין $\mathbb{Q}$ ל־$\mathbb{Z}$.

נניח בשלילה שקיימת כזו.

יהא$x\in\mathbb{Z}$ כך שעבור $q_1,q_2\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f\left(q_1\right)=x$ ו־$f\left(q_2\right)=x+1$.

אלה קיימים כי העצמות של $\mathbb{Z}$ ו־$\mathbb{Q}$ זהות אז אם מאחר ו־f מוגדרת לכל $q\in\mathbb{Q}$ והיא חח"ע לכל $z\in\mathbb{Z}$ קיים $q_0\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $f\left(q_0\right)=z$.

לפי תכונת הצפיפות של $\mathbb{Q}$, $\exists q\left(q_1<q<q_2\right)$. אזי מאחר ו־$f$ שומרת סדר $\exists z\left(x<z<x+1\right)$.

אך המספרים השלמים אינם צפופים. סתירה.

2. $f:\left(2^{\mathbb{N}},\subseteq\right)\to\left(\left[0,1\right],\leq\right)$ המוגדרת כך:

יהא $x\in\left\{0,1\right\}^{\mathbb{N}}$.

נגדיר משקל כלשהו עבור כל קואורדינטה בסדרה הבינארית האינסופית x. כך: $x_n=\frac{1}{2^{n+1}}$

נתבונן בביטוי $f\left(x\right)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_i$ זה מגדיר פונקציה חח"ע ושומרת סדר כנדרש.

<u>הוכחה</u>

יהיו $x,y\in2^{\mathbb{N}}$.

<u>חח"ע</u>

אם $x\neq y$ נמפה אותם לצורה $\left\{0,1\right\}^{\mathbb{N}}$ ואז קיימת לפחות קואורדינטה אחת שונה ביניהם כלומר $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_i\neq\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}y_i$.

מ.ש.ל.

<u>שומרת סדר</u>

אם $x\subseteq y$ אז קיים איבר נוסף ב־yשאינו ב־x או שהן שוות. אם קיים איבר נוסף אז הסכום יגדל אם הן שוות הוא יהיה זהה.

לכן, $f\left(x\right)\leq f\left(y\right)$.

מ.ש.ל.

3. נגדיר $f:\left(0,1\right)\to\left[0,1\right]$, $g:\left[0,1\right]\to\left(0,1\right)$ חח"ע ושומרות סדר.

$$f\left(x\right)=x$$

$$g\left(x\right)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$

f היא פונקציית הזהות אז בוודאי שומרת סדר וחח"ע. g היא פונקציה חח"ע, על ושומרת סדר על $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ אז בוודאי שחח"ע ושומרת סדר על $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\subseteq\left(0,1\right)$.

4. $\left[0,1\right]$ ו־$\mathbb{Z}$. הסדר הרגיל על $\mathbb{R}$ שונה מהסדר הרגיל על $\mathbb{Z}$. אילו הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר מ־$\left[0,1\right]$ל־$\mathbb{Z}$ אז היינו מקבלים לפי משפט קנטור $\left|\left[0,1\right]\right|\ \underbrace{=}_{axiom}\ \left|\mathbb{R}\right|\leq$

$\aleph\leq\aleph_0\Rightarrow\left|\mathbb{Z}\right|$ סתירה.

אילו הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר מ־$\mathbb{Z}$ ל־$[0,1]$אז עבור היה קיים $z\in\mathbb{Z}$ כך ש־$f(z)=0$. לכל איבר ב־$\mathbb{Z}$ קיים קודם מיידי לכן קיים z_0 כך שמתקיים $z_0\leq z$. אז מכך שהפונקציה שומרת סדר, $\exists r\in[0,1]\,(f(z_0)=r\wedge r\leq 0)$.

אך הפונקציה חח"ע, אז $r<0$, סתירה.

אז לא קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר בין $\mathbb{Z}$ ל־$[0,1]$ אז $\mathbb{Z}$ לא ניתנת לשיכון בו.