אינטגרציה ע"י הצבה: החלפת משתנים

בסעיף הזה נוח לציין את שם משתנה האינטגרציה. במקום $\int_a^b f$ נכתוב $\int_a^b f(x)$ ואפילו $\int_a^b f(x)dx$. כאן הביטוי dx הוא זכר ושריד היסטורי ל: Δx_i בביטוי $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. השם הספציפי של המשתנה הוא חסר כל חשיבות:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

<u>משפט.</u> תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, $\varphi(t)$ בעלת נגזרת רציפה ב: $[\alpha, \beta]$, הטווח של $\varphi(t)$ הוא $[a, b]$ ומתקיים

$$.\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$$

אזי

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \,. \qquad (3)$$

<u>הערה.</u> באופן פורמלי $x=\varphi(t)$ ו: $dx=\varphi'(t)dt$ מזכיר את $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$. (הערה זו מקלה על זכירת התוצאה, אך בודאי אינה מהווה הוכחה.)

<u>הוכחת המשפט:</u> האינטגרל $\int_a^b f$ קיים כי f רציפה. גם $f(\varphi(t))$ ו: $\varphi'(t)$ הן רציפות, ולכן האינטגרל באגף ימין של (3) קיים. לפונקציה

הרציפה $f(x)$ יש פונקציה קדומה $F(x)$ ב: $[a,b]$, כך ש $F'(x)=f(x)$ בקטע הזה. נסמן

$$G(t)=F(\varphi(t))$$

כאשר יש ל: F ו: φ נגזרות רציפות, ולכן $G(t)$ בעלת נגזרת רציפה

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \end{aligned}$$

כלומר לפונקציה $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ יש פונקציה קדומה $G(t)$ ב: $[\alpha,\beta]$. לפי המשפט היסודי

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) &= G(\beta)-G(\alpha) \\ &= F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(b)-F(a) \\ &= \int_a^b f \end{aligned}$$

הערה. φ אינה בהכרח מונוטונית, וערכי $\varphi(t)$ מכסים את $[a,b]$ לאו דוקא באופן 1-1.

דוגמא קיצונית. נתיחס לאינטגרל $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$. נבצע הצבה $x=\cos t$, $\pi \le t \le 20\pi$. אז מקבלים את האינטגרל:

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{20\pi}\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot(-\sin t)dt &= \\ \int_{\pi}^{20\pi}|\sin t|\cdot(-\sin t)dt &= \\ \int_{19\pi}^{20\pi}|\sin t|\cdot(-\sin t)dt &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

בחירה סבירה של הצבה תהיה $x=\cos t$ בתחום $\pi \le t \le 2\pi$, היכן שמתקיים

$\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sin t$, ומקבלים

$$\int_\pi^{2\pi} (-\sin t)\cdot(-\sin t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

אינטגרלים מוכללים

עד כאן הגדרנו אינטגרל מסוים של פונקציה חסומה (אינטגרנד) על קטע חסום. מה קורה אם אחד מתנאי החסימות אינו מתקיים? נתיחס תחילה לקטע אינסופי $[a,\infty)$.

__הגדרה.__ תהי $f(x)$ אנטגרבילית בכל קטע $[a,b]$, $a<b<\infty$, ונתבונן בגודל

$$I(b) = \int_a^b f.$$

אם קים הגבול $\lim_{b\to\infty} I(b)$ נאמר ש: "אינטגרבילית ב: $[a,\infty)$", ונסמן

$$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f .$$

אם הגבול אינו קיים אז נאמר ש: "$\int_a^\infty f$ לא קיים". אם הגבול הוא $+\infty$, אז נאמר ש: "$\int_a^\infty f = \infty$" או "$\int_a^\infty f$ מתבדר ל: ∞".

<u>הערה.</u> אי אפשר להגדיר את האינטגרל על הקטע $[0,\infty)$ באמצעות סכומי דרבו או סכומי רימן. למשל, הונקציה הקבועה c $= f(x)$.

<u>דוגמא.</u> $\int_0^\infty \sin x$. הגבול אינו קיים.

<u>דוגמא חשובה.</u> $\int_1^\infty x^{-p}$. מבחינים בין שלושה מקרים: $p > 1$, $p = 1$ ו: $p < 1$. אם $p = 1$ אז $\ln x$ היא פונקציה קדומה של x^{-1}, ולכן האינטגרל מתבדר. עבור $p \neq 1$ פונקציה קדומה של x^{-p} היא $x^{1-p}/(1-p)$ ולכן האינטגרל מתבדר אם $p < 1$ והוא מתכנס אם $p > 1$.

<u>דוגמא.</u> האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x}$ מתכנס.

באופן דומה להגדרת $\int_a^\infty f$ מגדירים את $\int_{-\infty}^a f$

<u>הערה.</u> עובדת קיומו או אי קיומו של האינטגרל $\int_a^\infty f$ אינה תלויה ב: a, אולם ערכו של האינטגרל (אם הוא קים) תלוי ב: a, כי

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f.$$

לכן לעיתים נאמר ש: "$\int^{\infty} f$" קיים בלי לציין גבול תחתון.

<u>הגדרה.</u> אם $\int_c^{\infty} f$ ו: $\int_{-\infty}^{c} f$ קיימים נגדיר

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f .$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f$ אינו תלוי בבחירת c.

<u>הערה.</u> ההגדרה הזו שקולה לקיום הגבול הכפול של $\int_a^b f$ כאשר $a \to -\infty$ ו: $b \to +\infty$ בצורה בלתי תלויה. אך בשום אופן אינה שקולה לקיום הגבול הסימטרי

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f .$$

לדוגמא נסתכל על האינטגרל

$$.f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

כאן $\int_0^\infty f$ ו: $\int_{-\infty}^0 f$ לא קיימים, אולם

$$\int_{-R}^{R} f = 0$$

לכל R.

אבל: אם ידוע שהאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f$ קיים, אזי הוא אכן שווה ל: $\int_{-R}^{R} f$.

תכונות של האינטגרל המוכלל.

1. $\int_a^\infty cf = c\int_a^\infty f$.

2. $\int_a^\infty (f_1+f_2) = \int_a^\infty f_1 + \int_a^\infty f_2$
3. $\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$.

<u>משפט.</u> (קריטריון Cauchy). תהי a נקודה קבועה, f אינטגרבילית על $[a,b]$ לכל $a<b<\infty$. תנאי הכרחי ומספיק לקיום $\int_a^\infty f$ הוא שלכל $\epsilon>0$ קיים $B>a$ כך ש:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| < \epsilon$$

לכל $b_2>b_1>B$.

<u>הוכחה:</u>

$$\int_{b_1}^{b_2} f = \int_a^{b_2} f - \int_a^{b_1} f = I(b_2) - I(b_1),$$

ואי השיויון הוא תנאי הכרחי ומספיק לקיום הגבול $\lim_{b\to\infty} I(b)$, כלומר זהו תנאי Cauchy הידוע לקיום גבול של פונקציה.

<u>משפט.</u> (קריטריון השוואה). a נקודה קבועה, f, g אינטגרביליות על $[a,b]$ לכל $a<b<\infty$. נניח שקיים קבוע חיובי $K>0$ כך ש:

$$0 \le f(x) \le Kg(x)$$

לכל $\infty > x \geq a$. אזי:

1. אם האינטגרל $\int_a^\infty g$ קים , אז גם האינטגרל $\int_a^\infty f$ קים.

2. אם האינטגרל $\int_a^\infty f$ מתבדר ל: $+\infty$, אז גם האינטגרל $\int_a^\infty g$ מתבדר.

(במקרה בו $f(x) \geq 0$ אז או שהאנטגרל $\int_a^\infty f$ מתבדר, או שהאינטגרל הזה קים, מאחר ו: $b \mapsto \int_a^b f$ מונוטוני.)

<u>הוכחה:</u> נסמן

$$I(b) = \int_a^b f,\ J(b) = \int_a^b g.$$

אז $I(b)$ פונקציה עולה, כי עבור $b_2 > b_1 > a$ קים

$$I(b_2) = I(b_1) + \int_{b_1}^{b_2} f \geq I(b_1).$$

באותו אופן מסיקים שגם $J(b)$ פונקציה עולה.

להוכחת החלק הראשון, נסמן

$$\lim_{b\to\infty} J(b) = M .$$

אז בנוסף על המונוטוניות של $I(b)$ יש חסימות של $I(b)$, כי

$$I(b) \leq KJ(b) \leq KM.$$

נובע ש: $I(b)$ פונקציה עולה וחסומה, ולכן שואפת לגבול סופי כאשר $b \to \infty$.

הוכחת החלק השני: אם $I(b)$ אינה חסומה על $[a,\infty)$, אז גם $J(b)$, שאינה קטנה מ: $I(b)/K$, גם היא אינה חסומה.

הערה. אין צורך ש: $0 \leq f(x) \leq Kg(x)$ יתקיים לכל $x \geq a$, אלא מספיק שזה יתקיים על איזשהו קטע $[c, \infty)$ עם $c \geq a$, כלומר עבור ערכי x שהם גדולים מספיק.

דוגמא. האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2}$ קיים כי $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ עבור $1 \leq x < \infty$, ו: $\int_1^\infty e^{-x}$ קיים וסופי.

משפט השוואה. תהיינה $f, g \geq 0$ על $[a, \infty)$ וקיים

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

אם $0 < L < \infty$ אז $\int^\infty f$ ו: $\int^\infty g$ מתכנסים ביחד או מתבדרים ל: ∞ ביחד.

הוכחה: לפי הגדרת הגבול לכל $\epsilon > 0$ קטן, (למשל $0 < \epsilon < L/2$), קיים $x_0(\epsilon)$ כך ש

$$0 < L - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \epsilon$$

עבור $x > x_0$. לכן

$$0 \leq f(x) \leq (L + \epsilon)g(x).$$

מצד שני

$$0 \leq g(x) \leq \frac{1}{L - \epsilon}f(x).$$

ומכאן שתי המסקנות נובעות לפי המשפט הקודם.

הערה. אם $L = 0$ אז הטענה הראשונה נשארת נכונה, כלומר: התכנסות עבור g גוררת

התכנסות עבור f, אך לא ההיפך. נעיר שתוצאות מדויקות יותר ניתן לקבל בשימוש ב: $\liminf$ ו: $\limsup$ במקום ב: $\lim$.