28.11

10

תורת המשחקים

גליון 4

מגישים I

II

1.

א.

-3	2	-3
-2	0	-2
-2	2	

$V_1 = \max\min = -2$

$V_2 = \min\max = -2$

מתקיים $V_1 = V_2 = -2$

לכן למשחק יש ערך

והוא $V = -2$.

בהכרח זהו גם ערך המשחק בתכסיסים מעורבים $V^* = V = -2$.

נחפש תכסיסים אופטימליים:

- <u>שחקן 1</u>. נניח כי הוא משחק $(p, 1-p)$

נגד העמודה הראשונה יקבל: $-3p-2(1-p) = -p-2$.

ונגד העמודה השנייה יקבל: $2p$.

התנאי לאופטימליות הוא: $\min\{-p-2, 2p\} \geq -2$

וזה מתקיים עבור $p=0$ בלבד.

לכן לשחקן 1 תכסיס אופטימלי יחיד, והוא התכסיס הטהור של בחירת השורה השנייה.

- <u>שחקן 2</u>. נניח כי הוא משחק $(q, 1-q)$

נגד השורה הראשונה ישלם: $-3q+2(1-q) = 2-5q$

ונגד השורה השנייה ישלם: $-2q$

התנאי לאופטימליות היא

$$\max\{2-5q, -2q\} \leq -2$$

וזה מתקיים עבור $q=1$ בלבד.

לכן לשחקן 2 תכסיס אופטימלי יחיד, והוא התכסיס הטהור של בחירת העמודה הראשונה.

ב.

3	7	3
5	4	4
5	7	

$V_1 = maxmin = 4$

$V_2 = minmax = 5$

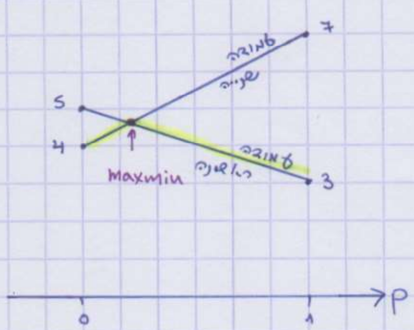
רמת הבטחון מקסימלית לשחקן 1 $V_1 = 4$

ורמת הבטחון מקסימלית לשחקן 2 $V_2 = 5$

$V_1 \neq V_2$ ולכן אין למשחק ערך.

נפתור ע"י אסטרטגיות:

• עבור שחקן 1:



נמצא את הקואורדינטות של נקודת ה- maxmin:

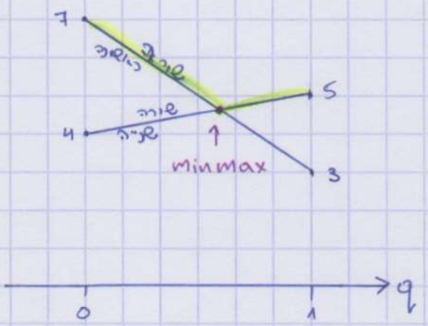
$5-2p = 4+3p$

$p = \frac{1}{5} \Rightarrow V_1^* = V^* = 4\frac{3}{5}$

כלומר ערך המשחק בתכסיסים מעורבים הוא $V^* = 4\frac{3}{5}$

והתכסיס האופטימלי היחיד של שחקן 1 הוא $(\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$.

• עבור שחקן 2:



נמצא את הקואורדינטות של נקודת ה- minmax:

$7-4q = 4+q$

$q = \frac{3}{5} \Rightarrow V_2^* = V^* = 4\frac{3}{5}$

התכסיס האופטימלי היחיד של שחקן 2 הוא $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & \end{array}$$

$v_1 = maxmin = 1$

$v_2 = minmax = 1$

ג. רמת בטחון מקסימלית לשחקן 1 $V_1 = 1$

ורמת בטחון מקסימלית לשחקן 2 $V_2 = 1$

$V_1 = V_2 = 1$ ולכן למשחק יש ערך $V = 1$.

בהכרח זהו גם ערך המשחק עבור תכסיסים מעורבים.

נחפש תכסיסים אופטימליים:

- <u>שחקן 1</u> נניח כי הוא משחק $(p, 1-p)$.

נגד העמודה הראשונה יקבל: 1

נגד העמודה השנייה יקבל: p

התנאי לאופטימליות הוא: $\min\{1, p\} \geq 1$

וזה מתקיים עבור $p = 1$ בלבד.

לכן לשחקן 1 תכסיס אופטימלי יחיד, והוא התכסיס הטהור של בחירת השורה הראשונה.

- <u>שחקן 2</u> נניח כי הוא משחק $(q, 1-q)$.

נגד השורה הראשונה ישלם: 1

נגד השורה השנייה ישלם: q

התנאי לאופטימליות הוא: $\max\{1, q\} \leq 1$

וזה מתקיים לכל $0 \leq q \leq 1$

ולכן קבוצת התכסיסים האופטימליים של שחקן 2 היא כל התכסיסים האפשריים: $\{(q, 1-q) \mid 0 \leq q \leq 1\}$

2) א - הטענה אינה נכונה. דוגמה נגדית:

יהי G_A משחק שני שחקנים סכום אפס המתואר ע"י הטבלה:

	תכסיס מינימקס	תכסיס מינימקס	תכסיס מינימקס	
תכסיס מקסימין	0	1	-1	-1
תכסיס מקסימין	-1	0	1	-1
תכסיס מקסימין	1	-1	0	-1
	1	1	1	

maxmin=-1

minmax=1

במשחק זה $|T|=|S|$ ומטריצת התשלומים אנטי-סימטרית, אך $V_1=-1$ ו- $V_2=1$,

ולכן למשחק אין ערך.

ב - הטענה נכונה.

<u>הוכחה:</u>

$G=(S,T,\pi)$ הוא משחק סימטרי ולכן ניתן לסדר את קבוצת התכסיסים כך שמטריצת התשלומים $A=(\pi(s_i,t_j))$ תהיה אנטי-סימטרית. במטריצה זו, כל איברי האלכסון הם 0. כלומר, בכל שורה ובכל עמודה מופיע הערך 0 לפחות פעם אחת. נניח בשלילה כי ערך המשחק V שונה מאפס. לפי מה שהוכחנו בתרגיל הקודם, קיימת במטריצה A נקודת אוכף שבה מופיע ערך זה. ערך נקודת האוכף מינימלי בשורה שלו ולכן בהכרח: $V<0$, אבל ערך נקודת האוכף גם מקסימלי בעמודה שלו ולכן בהכרח:

$0<V \Longleftarrow$ סתירה.

לכן $V=0$. מש"ל.

2- הטענה נכונה.

<u>הוכחה:</u>

לפי משפט המינימקס ל-G^* יש ערך בתכסיסים מעורבים.

יהי $\vec{P}\in S^*$ תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 1. אז מתקיים:

$$\vec{P}A=(p_1,\dots,p_n)\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ -a_{1n} & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}=(u_1,\dots,u_n)=\vec{u}$$

כך ש: $\min\{u_1,\dots,u_n\}=V^*$

נכן בתכסיס הנגדי של שחקן 2: $\vec{P}^T\in T^*$. מתקיים:

$$\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ -a_{1n} & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=(AP^T)\underset{\substack{\text{כי } A \\ \text{אנטי סימטרית}}}{=}-A^TP^T=-(PA)^T=-\vec{u}^T=\begin{pmatrix}-u_1\\ \vdots\\ \vdots\\ -u_n\end{pmatrix}$$

$$\max\{-u_1,\dots,-u_n\}=-\min\{u_1,\dots,u_n\}=-V^*$$

מכאן שרמת הביטחון המקסימלית של שחקן 2 בתכסיסים מעורבים היא לכל היותר $-V^*$, כלומר: $V_2^*\le -V^* \Longrightarrow V^*\le -V^*$

יהי $\vec{q}\in T^*$ תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 2. אז מתקיים:

$$A\vec{q}=(w_1,\dots,w_n)=\vec{w}$$

כך ש: $\max\{w_1,\dots,w_n\}=V^*$

מאותם שיקולים שהראנו קודם מתקיים, עבור התכסיס $\vec{q}^T\in S^*$:

$$\vec{q}^TA=-q^TA^T=-(Aq)=-\vec{w}=\begin{pmatrix}-w_1\\ \vdots\\ -w_n\end{pmatrix}$$

$$\min\{-w_1,\dots,-w_n\}=-\max\{w_1,\dots,w_n\}=-V^*$$

מכאן שרמת הביטחון המקסימלית של שחקן 1 בתכסיסים מעורבים היא לפחות $-V^*$, כלומר: $V_1^*\ge -V^* \Longrightarrow V^*\ge -V^*$.

קיבלנו: $V^*\ge -V^*\ge V^* \Longrightarrow V^*=0$. מש"ל

2. הטענה נכונה.

יהי $\vec{p} \in \Sigma_1^*$ תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 1 אשר מתאים למטריצת התשלומים האנטי-סימטרית $A=(\pi(s_i,t_j))$. לפי מה שהוכחנו בסעיף ג מתקיים:

$$\vec{p}A = (p_1,p_2,\dots,p_n)\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (u_1,u_2,\dots,u_n) = \vec{u}$$

כך ש: $\min\{u_1,\dots,u_n\}=V^*=0$

מתקיים:

$$A\vec{p}^T = -A^T\vec{p}^T = -(\vec{p}A)^T = -\vec{u}^T = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$$

כי A אנטי-סימטרית

$$\max\{-u_1,\dots,-u_n\} = -\min\{u_1,\dots,u_n\} = -V^* = 0$$

כלומר, התכסיס המעורב $\vec{p}^T \in T^*$ מבטיח לשחקן 2 רמת בטחון מקסימלית $V_2^*=0$, ומכיוון ש-0 הינו ערך המשחק $\Leftarrow$ $\vec{p}^T$ תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 2.

ניתן להראות את אותו הדבר בכיוון ההפוך, ולכן $\vec{p}$ תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 1 אמ"מ הוא גם תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 2.

$\Leftarrow$ לשני השחקנים יש אותם תכסיסים מעורבים אופטימליים. מש"ל.

3. תהי $G^* = (S^*, T^*, \pi^*)$ ההרחבה המעורבת של משחק שני

שחקנים סכום-אפס עם קבוצות תכסיסים סופיות.

ונניח $a \in \mathbb{R}$ מקיים:

$$\forall \vec{q} \in T^* \quad \exists p \in S^* \quad \pi^*(\vec{p}, \vec{q}) \geq a$$

$$\Rightarrow \forall \vec{q} \in T^* \quad \max_{\vec{p} \in S^*} \pi^*(\vec{p}, \vec{q}) \geq a$$

$$\Rightarrow \quad \min_{\vec{q} \in T^*} \max_{\vec{p} \in S^*} \pi^*(\vec{p}, \vec{q}) \geq a$$

כלומר רמת הבטחון המקסימלית של שחקן 2 מקיימת

$$V_2^* = \min_{\vec{q} \in T^*} \max_{\vec{p} \in S^*} \pi^*(\vec{p}, \vec{q}) \geq a$$

לפי משפט המינימקס ל-G^* יש ערך, וכפי ~~ש~~ שהוכחנו

עבור עבור משחקים כאלו ערך מתקיים לכן: $V^* = V_1^* = V_2^*$.

ובפרט

$$V_1^* = \max_{\vec{p} \in S^*} \min_{\vec{q} \in T^*} \pi^*(\vec{p}, \vec{q}) = V_2^* \geq a$$

כלומר, קיים תכסיס $\vec{p} \in S^*$ המבטיח רמת בטחון זו,

כלומר $\min_{q \in T^*} \pi^*(\vec{p}, \vec{q}) \geq a$

ולכן לכל $\vec{q} \in T^*$ $\pi^*(\vec{p}, \vec{q}) \geq a$.