תרגול 3

משפט כופלי לגרנז':

המטרה היא מציאת נקודות אקסטרמום גלובליות של פונקציות בתחום D נתון.

נקודות חשודות לבדיקה הן נקודות אשר:

א. נקודות פנימיות בהן $\nabla f = 0$ או לא קיים.
ב. נקודות חיתוך של השפות, בהן האילוץ אינו גזיר.
ג. נקודות שפה שאינן מקיימות את משפט כופלי לגרנז', כלומר כאשר $\{\nabla g_i\}$ תלויים ליניארית.
ד. נקודות שפה המתקבלות ממשפט כופלי לגרנז' באופן הבא:
נגדיר:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$$

ונדרוש כי יתקיים $\nabla L = 0$.

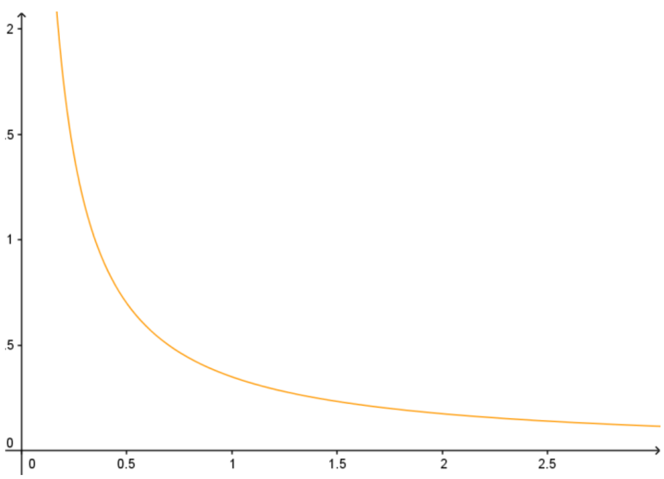
<u>תרגיל:</u>

נתונים $p, q > 1$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. נרצה למצוא מינימום לפונקציה:

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

עבור האילוץ $g(x, y) = xy - k = 0$ $k > 0, x, y > 0$.

<u>פתרון:</u>



איור 1 – תחום האילוץ $xy = k$

בהנתן תחום כמתואר באיור 1, האם קיים מינימום גלובלי של $f(x, y)$ על D?

f רציפה, כאמור, ו-D תחום סגור, אך איננו חסום, וכן אי אפשר להשתמש במשפט ויירשטראס.

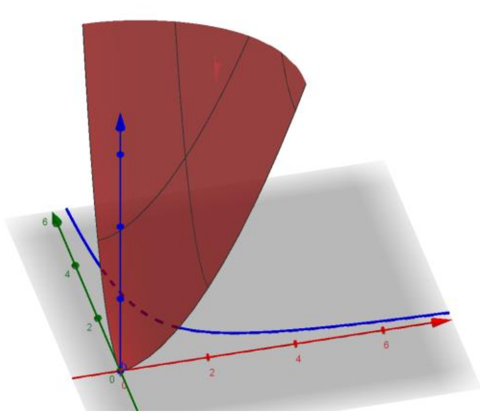
נתבונן על:

$$h(x) = f\left(x, \frac{k}{x}\right)$$

<u>כתרגיל עצמי</u> - $h(x)$ מוגדרת על הקרן $(0, \infty)$ ומקיימת $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ ולכן לפי ויירשטראס, h מקבלת מינימום גלובלי בקטע .

אם כן קיבלנו כי $f(x, y)$ מקבלת מינימום גלובלי. נמצא אותו באמצעות כופלי לגרנז' על ידי כך שנסמן:

$$g(x, y) = xy - k = 0$$


איור 2 - הפונקציה $f(x, y)$ באדום והאילוץ בכחול

תנאי המשפט דורשים שנראה כי $\nabla g \neq 0$ בתחום. ואכן נשים לב כי:

$$\nabla g=(y,x)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$$

אך נקודה זו אינה בתחום ולכן נסיק כי תנאי משפט כופלי לגרנז' מתקיימים.

נגדיר את הלגרנז'יאן באופן הבא:

$$L(x,y,\lambda)=f+\lambda g=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}+\lambda(xy-k)$$

ונדרוש שיתקיים $\nabla L=0$.

$$(I)L_x=x^{p-1}+\lambda y=0\to x^p+\lambda xy=0$$
$$(II)L_y=y^{q-1}+\lambda x=0\to y^q+\lambda xy=0$$
$$(III)L_\lambda=xy-k=0$$

מכאן נקבל כי:

$$x^p=y^q\to \boxed{x=y^{\frac{q}{p}}}$$

נציב זאת במשוואה (III) ונקבל כי:

$$k=xy=y^{\frac{q}{p}-1}=y^{q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}=y^q$$

כלומר נקבל כי:

$$\boxed{y=k^{\frac{1}{q}}\quad x=k^{\frac{1}{p}}}$$

קיבלנו את הנקודה $\left(k^{\frac{1}{p}},k^{\frac{1}{q}}\right)$ וזו נקודת המינימום המבוקשת. הערך של הפונקציה בנקודה זו הוא:

$$f\left(k^{\frac{1}{p}},k^{\frac{1}{q}}\right)=\frac{k}{p}+\frac{k}{q}=k$$

<u>הערה:</u> בצורה זו הוכחנו למעשה את אי שוויון Young, לפיו עבור $p,q>1$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, לכל $x,y>0$ מתקיים:

$$xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הנקודה הקרובה ביותר והרחוקה ביותר מהראשית על האליפסה:

$$a,b>0\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

<u>פתרון:</u>

יש למצוא, בעצם, את נקודת המינימום של הפונקציה:

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

תחת האילוץ:

$$g(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

דרך אחת לפתור בעיה זו תהיה על ידי שימוש בכופלי לגרנז' כפי שראינו קודם. הדרך השניה, תתבצע על ידי הצבת האילוץ בפונקציה, כלומר:

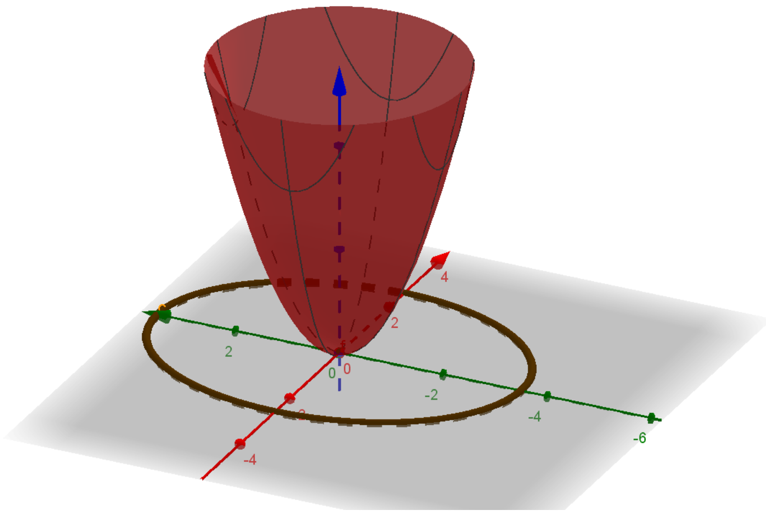
$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

ונקבל כי:

$$x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=h(x)$$

נמצא מינימום ומקסימום של $h(x)$ ונקבל כי:



איור 3 – הפונקציה $f(x,y)$ באדום והאילוץ $g(x,y)$ הוא האליפסה הכהה על מישור xy

$$h'(x)=2x\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

נשים לב כי $x=0$ מהווה פתרון ועבורו נקבל מהאילוץ את הנקודות $y=\pm b$. מצאנו אם כן שתי נקודות:

$$(0,-b)\quad(0,b)$$

נציב לפונקציה ונקבל כי:

$$f(0,-b)=f(0,b)=b^2$$

נשים לב – קיבלנו ערך יחיד לפונקציה שמהווה נקודת קיצון על אף שמשפט ויירשטראס מבטיח כי לפונקציה זו תחת אילוץ זה צריך להיות הן מינימום והן מקסימום גלובליים בקטע. את ה"סתירה" לכאורה, ניתן לפתור בכך שנתבונן בתחום ההגדרה של $h(x)$:

$h(x)$ מוגדרת לכל $x\in[-a,a]$ והדרך שבה פתרנו, קרי על ידי גזירה, ימצא אך ורק נקודות קיצון פנימיות בקטע, ולכן נרצה לבדוק את קצוות הקטע בנפרד, הלא הן הנקודות:

$$(-a,0)\quad(a,0)$$

ונקבל כי:

$$f(a,0)=f(-a,0)=a^2$$

ובהתאם ליחסי הגדלים בין a,b נקבל כי אחת הנקודות תהיינה מקסימלית ואחת מהן תהיה מינימלית, כדרוש.

<u>תרגיל:</u>

מצאו מינימום עבור הפונקציה:

$$f(x,y)=2x^2+y^2-4x$$

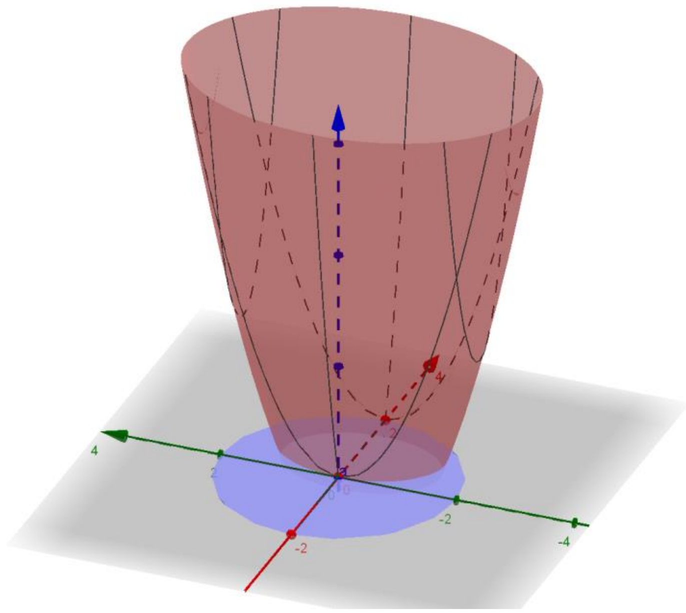
בתחום:

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4 \quad -x\leq y\}$$

<u>פתרון:</u>

אנו יודעים כי D תחום סגור וחסום, וכן ש-f רציפה. לכן ממשפט ויירשטראס נסיק כי אכן קיימים נקודות מינימום ומקסימום.

נבדוק את הנקודות החשודות:



איור 4 – הפרבולואיד $f(x,y)$ באדום והתחום $x^2+y^2\leq 4$

א. נקודות פנימיות בהן $\nabla f=0$ או לא קיים. נשים לב:
$$\nabla f=(4x-4,2y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=\boxed{(1,0)}$$

ב. השפה מורכבת מן המעגל:
$$x^2+y^2=4$$
ומישר $y=-x$. נקודות החיתוך של תחומים אלה הם $\boxed{(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})}$.

ג. נפתור את בעיית כופלי הלגרנז' עבור המעגל (ללא אילוץ הישר). כלומר נמצא אקסטרמום לפונקציה $f(x,y)$ תחת האילוץ:
$$g(x,y)=x^2+y^2-4=0$$
תנאי משפט כופלי לגרנז' הם ש-$\nabla g=(2x,2y)\neq 0$ בתחום, ואכן $(2x,2y)=0$ אם ורק אם $(x,y)=0$ אך זו נקודה שאינה עונה לאילוץ $g(x,y)=0$ ולכן בתחום זה אכן מתקיימים תנאי משפט כופלי לגרנז'.
נגדיר אם כן:
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$
ונשים לב כי:
$$(I)L_x=4x-4+2\lambda x=0$$
$$(II)L_y=2y+2\lambda y=0$$
$$(III)L_\lambda=x^2+y^2-4=0$$
נתחיל בכך שנתבונן במשוואה (II) ונקבל כי:
$$(1+\lambda)y=0\rightarrow \lambda=-1 \quad y=0$$
במקרה שבו $y=0$ נקבל כי $x=\pm 2$ כלומר יתקבלו הנקודות:
$$(\pm 2,0)\xrightarrow[\text{התחום}]{-x\leq y}\boxed{(2,0)}$$
במקרה שבו $\lambda=-1$ נקבל ממשוואה 1 כי $x=2$ ולכן תתקבל הנקודה $(2,0)$ שכבר מצאנו.

ד. נפתור את בעיית כופלי לגרנז' עבור האילוץ של הישר הנתון. כלומר נמצא את המינימום של הפונקציה $f(x,y)$ בהנתן אילוץ $g(x,y)=x+y=0$. במקום לפתור את הבעיה בשיטת כופלי לגרנז', במקרה זה נוכל להציב פשוט את האילוץ היות והוא פשוט למדי, ונפתור עבור פונקציה במשתנה יחיד.
$$f(x,-x)=2x^2+(-x)^2-4x=3x^2-4x$$
כלומר:

$$f'(x,-x)=6x-4\rightarrow x=\frac{2}{3},y=-\frac{2}{3}\rightarrow \boxed{(x,y)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)}$$

<u>הערה</u> – בעיקרון אל לנו לשכוח כי התחום של x בפונקציה זו הוא הקטע $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, אך את המקרה של נקודות אלה כבר פתרנו ולכן הפעם לא נזדקק לבדיקה נוספת.

קיבלנו סה"כ 5 נקודות חשודות, נציב אותן בפונקציה ונקבל כי:

$$f(1,0)=-2\quad f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=6-4\sqrt{2}\quad f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=6+4\sqrt{2}\quad f(2,0)=0\quad f\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$$

כלומר נקודת המקסימום היא הנקודה $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ והמינימום $(1,0)$.

<u>תרגיל:</u>

נתונה אליפסה ב-$\mathbb{R}^3$ על ידי חיתוך המשטחים:

$$g(x,y,z)=2x^2+y^2-4=0$$
$$h(x,y,z)=x+y+z=0$$

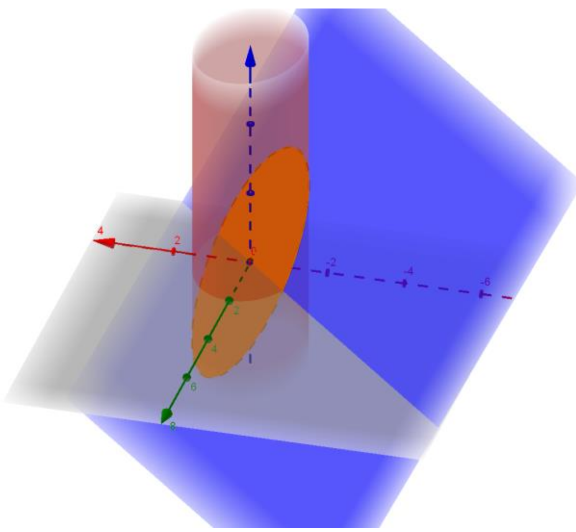
מצאו את הנקודה הקרובה ביותר והרחוקה ביותר מציר y הנמצאות על האליפסה. כלומר נרצה למצוא את המינימום של הפונקציה:

$$f(x,y,z)=x^2+z^2$$

בהנתן שני האילוצים $g(x,y,z),h(x,y,z)$. על מנת שיתקיימו תנאי המשפט לשימוש בכופלי לגרנז', נרצה שיתקיים:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix}=2$$

שכן אז נקבל כי אכן וקטורי הגרדיאנט אינם תלויים ליניארית כדרוש מתנאי המשפט.



איור 5 – גליל אליפטי $g(x,y,z)$ ומישור $h(x,y,z)$ והאליפסה שנוצרת מהחיתוך ביניהם (בכתום)

נשים לב, אם כן:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\neq 2\Leftrightarrow x=0,y=0$$

כלומר הנקודות היחידות שבהן לא מתקיימים תנאי המשפט הן ציר z, קרי נקודות מהצורה $(0,0,z)$. נקודות אלה ממילא אינן מקיימות את האילוץ $g(x,y,z)$ ולכן נסיק כי כל הנקודות שכן מקיימות את האילוץ הן נקודות שבהן מתקיימים תנאי המשפט.

נגדיר אם כן:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$$

ונדרוש:

$$\nabla L=0$$

כלומר:

$$(I)L_x = 2x + 4\lambda x + \mu = 0$$
$$(II)L_y = 2\lambda y + \mu = 0$$
$$(III)L_z = 2z + \mu = 0$$
$$(IV)L_\lambda = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$(V)L_\mu = x + y + z = 0$$

ככלל אצבע, היות ואנו יודעים שעיקר מטרתנו היא למצוא את x, y, z, נרצה ראשית לבודד את μ, λ. אין זה הכרחי אך לרוב זה יחסוך התעסקות מיותרת במשוואות נוספות. במקרה זה, למשל, נקבל ממשוואה (III) כי:

$$\mu = -2z$$

<u>כתרגיל</u> – לסיים את החישוב בבית.

<u>תרגיל:</u>

יהיו $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ קבועים כך שלא כולם אפס. מצאו $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$$

וכך שמתקיים:

$$a_1x_2 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

הינו מקסימלי.

<u>פתרון:</u>

פונקציית המטרה שלנו היא:

$$\max_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

לשם כך נשים לב, ראשית, כי התחום שלנו הוא כדור היחידה $B(0,1)$ ב-$\mathbb{R}^n$. אופציה ראשונה היא לנסות לפתור את בעיה זו באמצעות שימוש בכופלי לגרנז'.

דרך נוספת לראות בעיה זו היא להבין שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

ובעצם הבעיה היא למצוא את המקסימום של בעיה זו כאשר ישנו האילוץ:

$$\|x\|_2 \leq 1$$

אך ניתן לכתוב:

$$\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1} \cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית בין הוקטורים. היות וכך נסיק כי המקסימום יתקבל כאשר $\alpha = 0$. כלומר הווקטור חייב להיות מקביל לווקטור $\vec{a}$ והיות וישנה דרישה שהנורמה שלו תהיה 1, נוכל לכתוב:

$$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}}$$

דרך נוספת לכתוב את הבעיה היא על ידי הצגתה בצורה:

$$\max f(x) = a^T x$$

תחת האילוץ:

$$g(x) = x^T x \leq 1$$

במקרה זה נקבל כי הלגרנז'יאן יהיה:

$$L(x, \lambda) = f + \lambda g = a^T x + \lambda (x^T x - 1)$$

וזו תבנית ריבועית מהצורה:

$$x^T Q x + b^T x + c$$

כאשר תבנית מסוג זה היא תבנית שלמדנו לגזור כבר בתרגול הקודם, מה שגם כן יקל על פתרון הבעיה.