אלגברה ב' - פתרון גליון 8

♠ תרגיל 1

נניח ש-$T \in L(V)$ הוא אופרטור נורמלי, ו-$W < V$ תת-מרחב T-אינווריאנטי; נוכיח ש-$W^\perp$ הוא T^*-אינווריאנטי. לשם כך ניקח $x \in W^\perp$, ונראה ש-$T^*(x)$ ניצב לכל $w \in W$:

$$\langle T^*(x), w\rangle = \langle x, T(w)\rangle = 0,$$

מכיוון ש-$T(w) \in W$, ו-$x \in W^\perp$.

להיפך, נניח שכל תת-מרחב T-שמור הוא גם T^*-שמור. הדבר שקול לכך שאם $W < V$ אינווריאנטי תחת T, אז גם $W^\perp$ אינווריאנטי תחתיו. נעבוד באינדוקציה על מימד-המרחב (בסיס האינדוקציה - מימד אפס - הוא טריוויאלי); אם נמצא תת-מרחב לא טריוויאלי W שהוא גם T-אינווריאנטי - סיימנו, שכן האופרטורים $T\big|_W \in L(W),\ T\big|_{W^\perp} \in L(W^\perp)$ מקיימים את את הנחות הטענה במרחבים ממימד נמוך יותר.

אם שדה-הבסיס הוא $\mathbb{C}$, אז ניתן למצוא וקטור עצמי לאופרטור הנתון, וסיימנו. אם שדה-הבסיס הוא $\mathbb{R}$, נניח שאין ל-T וקטורים עצמיים (אחרת סיימנו), ונבחר בסיס $\beta \subset V$, ונבנה מטריצה $A = [T]_\beta$; למטריצה זו נמצא זוג וקטורים עצמיים מנורמלים $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^n$, המתאימים לזוג ערכים עצמיים צמודים $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$. נמצא וקטורים $x, y \in V$, כך ש-

$$[x]_\beta = \frac{1}{2}(v + \bar{v}),\ [y]_\beta = \frac{1}{2i}(v - \bar{v}),$$

ונגדיר $W = Sp_{\mathbb{R}}\{x, y\}$. זהו תת-מרחב אינווריאנטי, שצמצומו של T אליו הוא אופרטור נורמלי, לפי הבניה (כדי לבדוק, בונים מטריצה מייצגת בבסיס האורתונורמלי $\{x, y\}$ - בדקו זאת). לפיכך, אם $W = V$ - סיימנו, ואם לא - נפעיל את המעבר האינדוקטיבי שהוגדר לעיל. בפרט, הוכחנו שאופרטור על ממ"פ ממשי ממימד סופי הוא נורמלי אם ורק אם קיים בסיס אורתונורמלי של המרחב אשר ביחס אליו מוצג האופרטור ע"י מטריצת-בלוקים אלכסונית שכל הבלוקים שלה הם מגודל 1×1 או בלוקים 2×2 מן הצורה -

$$\rho \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}).$$

השלימו את הפרטים. על-מנת להגיע לייצוג כזה של $T\big|_W$, יש לבחור $\lambda = \rho \cdot cis(\theta)$, ולהציב בהגדרה של הוקטורים x, y שלעיל.

♠ תרגיל 2

יחידות: רוצים להוכיח שאם $NU = MV$ כאשר U, V אופרטורים אוניטריים ו-N, M אופרטורים אי-שליליים, אז $N = M$. ובכן, נתחיל מכך ש-"הסדר לא ממש חשוב":

$$NU = MV \Rightarrow U^*M = V^*N \Leftrightarrow VU^*M = N,$$

וזאת מכיוון שאופרטור אי-שלילי תמיד צמוד לעצמו. מן השוויון האחרון אנו מסיקים ש-$\ker M =$ $K \triangleq \ker N$, ולכן שני הצמצומים $N\big|_{K^\perp}$ ו-$M\big|_{K^\perp}$ הם אופרטורים חיוביים של המרחב $K^\perp = \mathrm{im}(N) =$

$\mathrm{im}(N)$ (להשלים פרטים!!!). בפרט, השוויון $VU^*M = N$ גורר גם שהתמונה המשותפת של N, M היא תת-מרחב VU^*-אינווריאנטי, ולכן אנו רואים שבתת-מרחב זה השוויון הנ"ל מציג שני פירוקי NU של אותו אופרטור הפיך, ומיחידות הפירוק לאופרטור כזה נקבל שהצמצומים של M, N למרחב $K^\perp$ מזדהים - כנדרש.

♠ תרגיל 3

נתון כי $T = NU$ כאשר U אוניטרי, ו-N אי-שלילי. אם $NU = UN$, נקבל -

$$\begin{aligned} NU = UN,\ N^* = N \quad &\Rightarrow \quad U^*N = NU^* \\ (NU)^*NU \quad &= \quad (U^*N)NU = NU^*NU = N^2 \cdot I \\ &= \quad N^2UU^* = NUU^*N = NU(NU)^*. \end{aligned}$$

בכיוון ההפוך, נניח ש-T נורמלי. אזי:

$$\begin{aligned} T^*T &= TT^* \\ U^*N^2U &= NUU^*N\,(= N^2) \\ N^2U &= UN^2; \end{aligned}$$

ברם, N אי-שלילי - בפרט נורמלי - ולכן N מתקבל כפולינום ב-N^2 (אפשר להשתמש למשל בפירוק ספקטרלי של N^2). מכאן ש-N מתחלף בכפל עם U.

♠ תרגיל 4

נניח כי $A = PDP^1$, כאשר D אלכסונית ו-P הפיכה. נפרק $P = HU$ כאשר H חיובית ו-U נורמלית, ואז:

$$A = PDP^{\perp 1} = NUDU^*N^{\perp 1} \Rightarrow N^{\perp 1}AN = UDU^*,$$

והמטריצה מימין נורמלית, בהיותה דומה אוניטארית למטריצה האלכסונית D.

♠ תרגיל 5

תהיינה A, B מטריצות חיוביות. לכל אחת מהן ניתן למצוא שורש חיובי:

$$A = X^2,\ B = Y^2.$$

מצבנו כעת נראה פחות אנוש מאשר קודם:

$$X^{\perp 1}(AB)X = XBX = XYYX = (YX)^*YX,$$

ואנו רואים שהמטריצה AB דומה למטריצה מוגדרת חיובית. לפיכך הערכים העצמיים שלה כולם ממשיים חיוביים.

ניקח את המטריצות הבאות 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

המטריצות הנ"ל מוגדרות חיובית עבור $\alpha > 0$, ואם הפרמטר ייבחר גדול מספיק, ערכיה העצמיים של המכפלה יפסיקו להיות ממשיים חיוביים (לבדוק!).

♠ תרגיל 6

זה קל. אנו יודעים שכל תת-מטריצה ריבועית של מטריצה מוגדרת חיובית היא בעצמה מוגדרת חיובית (זבקן עמ' 722, משפט 3). לפיכך $rk(B) = k$, ומכיוון ש-$rk(C) \leq n, k$, נקבל -

$$k = rk(B) \leq rk(C) \leq n, k \Rightarrow rk(B) = rk(C) = k.$$

♠ תרגיל 7

לפנינו שלושה מקרים: אם G איננה אבלית, הרי ש-$Inn(G)$ לא טריוויאלית, וסיימנו; אם G אבלית, אזי ההעתקה $x \mapsto x^{\perp 1}$ היא אוטומורפיזם, אבל הוא יהיה טריוויאלי אם"ם הסדר של כל איבר ב-G חסום מלעיל ע"י 2.

לפיכך, נניח ש-G היא חבורה (אבלית) סופית שבה מתקיימת הזהות $x^2 \equiv 1$ לכל $x \in G$. נא לבדוק שהפעולה הבאה מגדירה על G מבנה של מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{Z}_2 \times G &\to G \\ (0, g) &\mapsto 1 \\ (1, g) &\mapsto g. \end{aligned}$$

דהיינו, כפל באפס מנטרל כל איבר, וכפל ב-1 אינו משפיע. היות והחבורה סופית, המימד שלה מעל $\mathbb{Z}_2$ סופי (נגיד d), ונוכל לקבוע בסיס $(x_i)_{i=1}^d$ של איברים ב-G.

כעת בדקו שפונקציה $f : G \to G$ היא אנדומורפיזם של G אם"ם היא מהווה אופרטור ליניארי של G לתוך עצמה, ואז נקבל ש-$Aut(G) \cong GL_d(\mathbb{Z}_2)$, והמשמעות היא, בפרט, ש-$Aut(G)$ איננה טריוויאלית עבור $d \geq 2$ - כנדרש.

♠ תרגיל 8

נתבונן בחבורה $G = (\mathbb{Z}_{a^n \perp 1}, +)$. אנו יודעים שאז

$$Aut(G) \cong \mathcal{U}_{a^n \perp 1},$$

והאיזומורפיזם מתאים את ההעתקה $\varphi_m(x) = mx \,(\mathrm{mod}\,(a^n - 1))$ למחלקת השארית של m מודולו $a^n - 1$.

להוכחת הטענה, נוודא שהאנדומורפיזם ϕ_a הוא איבר מסדר n ב-$Aut(G)$; היות ש-$|Aut(G)| =$ $\varphi(a^n - 1)$, נקבל כי $n | \varphi(a^n - 1)$.

$$(\varphi_a)^n(x) = a^n x \,(\mathrm{mod}(a^n - 1)) = 1 \cdot x \,(\mathrm{mod}(a^n - 1)),$$

כלומר, $\varphi_a^n = id_{\mathbb{Z}_{a^n \perp 1}}$, ובפרט אנו רואים כי $\varphi_a \in Aut(G)$. בנוסף, בהיות $a^{n \perp 1} < a^n - 1$ עבור $a \geq 2, n \geq 2$, אנו רואים ש-n היא החזקה המינימלית המנטרלת את φ_a בחבורה $Aut(G)$.