הורדת סדר

בהורדת סדר נתונה לנו מד"ר

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

ובנוסף אנו מניחים כי יש לנו k פתרונות ב.ת.ל. $u_1, \ldots, u_k$ של המד"ר ההומוגנית המתאימה, כאשר $1 \leq k < n$. ברעיון, יש לנו k פתרונות של ההומוגנית המתאימה כאשר אנו צריכים n פתרונות של ההומוגנית המתאימה ועוד פתרון פרטי. חסרים לנו $n-k$ פתרונות של ההומוגנית ופתרון פרטי. ננסה להוריד את סדר המד"ר בעזרת שימוש בפתרונות הנתונים. כדי להמחיש את השיטה ניקח מד"ר מסדר 3 ביחד עם שני פתרונות $u_1(x), u_2(x)$, כלומר המד"ר היא

$$a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y = f(x)$$

כאשר נתונים לנו שני פתרונות $u_1(x), u_2(x)$ של ההומוגנית המתאימה.
דגש: הפתרונות הנתונים חייבים להיות של המד"ר ההומוגנית המתאימה. המד"ר עצמה יכולה להיות אי הומוגנית.
במקרה זה, נשתמש בהצבה
$y(x) = u_1(x)v(x)$ או $v(x) = \frac{y(x)}{u_1(x)}$. נגזור את היחס כדי להציב לתוך המד"ר ולקבל את המד"ר של $v(x)$, כאשר נהיה מעוניינים בעיקר במה $v(x)$ מוכפל:

$$\begin{aligned}
&y(x) = u_1(x)v(x) \\
&y'(x) = u_1(x)v'(x) + u_1'(x)v(x) \\
&y''(x) = u_1(x)v''(x) + 2u_1'(x)v'(x) + u_1''(x)v(x) \\
&y'''(x) = u_1(x)v'''(x) + 3u_1'(x)v''(x) + 3u_1''(x)v'(x) + u_1'''(x)v(x).
\end{aligned}$$

נציב לתוך המד"ר ונקבל

$$\begin{aligned}
& a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y = f(x) \\
& a(x)\big(u_1(x)v'''(x) + 3u_1'(x)v''(x) + 3u_1''(x)v'(x) + u_1'''(x)v(x)\big) + \\
+ \quad & b(x)\big(u_1(x)v''(x) + 2u_1'(x)v'(x) + u_1''(x)v(x)\big) + c(x)\big(u_1(x)v'(x) + u_1'(x)v(x)\big) + \\
+ \quad & d(x)u_1(x)v(x) = f(x)
\end{aligned}$$
.

נשים לב שהמקדם של $v(x)$ הוא

$$a(x)u_1'''(x) + b(x)u_1''(x) + c(x)u_1'(x) + d(x)u_1(x)$$

אבל זו ההצבה של $u_1(x)$ לתוך המד"ר ההומוגנית

$$a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y = 0$$

ונתון כי u_1 פתרון ולכן

$$a(x)u_1'''(x) + b(x)u_1''(x) + c(x)u_1'(x) + d(x)u_1(x) = 0$$

ונקבל כי המקדם של $v(x)$ הינו אפס. כלומר המד"ר של $v(x)$ היא

$$e(x)v''' + f(x)v'' + g(x)v' = f(x).$$

נשים לב לקשר בין הפתרונות של המד"ר המקורית למד"ר החדשה:

1. אם $y(x)$ פתרון של המד"ר המקורית אזי $v(x) = \frac{y(x)}{u_1(x)}$ היא פתרון של המד"ר החדשה.
2. אם $v(x)$ פתרון של המד"ר החדשה אזי $y(x) = u_1(x)v(x)$ פתרון של המד"ר המקורית.

כיוון ש־$u_2(x)$ פתרון של ההומוגנית המקורית אזי $v_2(x) = \frac{u_2(x)}{u_1(x)}$ פתרון של ההומוגנית החדשה. כלומר קיבלנו מד"ר חדשה

$$e(x)v''' + f(x)v'' + g(x)v' = f(x).$$

ביחד עם פתרון של ההומוגנית $v_2(x)$. נעשה כעת את הורדת הסדר: נציב $z(x) = v'(x)$ ונקבל מד"ר חדשה

$$e(x)z'' + f(x)z' + g(x)z = f(x).$$

עם פתרון של ההומוגנית המתאימה $z_2(x) = v_2'(x)$. כעת אפשר לחזור על תהליך הורדת הסדר ולקבל מד"ר מסדר ראשון ולפתור אותה ולחזור חזרה למעלה.

<u>נוסחת אבל לפתרון שני</u>

נניח שנתונה מד"ר $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ונתון פתרון אחד $u_1(x)$. נחפש פתרון שני $u_2(x)$ בלתי תלוי בראשון.

$$\left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\right)' = \frac{u_2'(x)u_1(x) - u_2(x)u_1'(x)}{u_1(x)^2} = \frac{W(u_1,u_2)(x)}{u_1(x)^2} = \frac{c\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right)}{u_1(x)^2}$$

$$u_2(x) = u_1(x)\cdot\left(\int\frac{c\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right)}{u_1(x)^2}dx\right) = c\cdot u_1(x)\cdot\left(\int\frac{\exp\left(-\int p(x)dx\right)}{u_1(x)^2}dx\right)$$

נבחר בד"כ $c = 1$. אין להשאיר c בנוסחת הפתרון השני.

<u>הערה:</u> נוסחת אבל לפתרון השני עובדת רק כאשר המד"ר היא מסדר שני ורק כאשר המד"ר היא הומוגנית.

תרגיל: נתון ש־ $u_1(x) = x$ פותר את $x^2y'' + xy' - y = 0$ כאשר $x > 0$. מצאו פתרון כללי. מצאו פתרון המקיים $y(1) = 5,\ y'(1) = -1$.

פתרון: נחפש פתרון שני באמצעות נוסחת אבל:

$$u_2(x) = cu_1(x) \cdot \left(\int \frac{\exp\left(-\int p(x)dx\right)}{u_1(x)^2} dx \right) = cx \left(\int \frac{\exp\left(-\int \frac{1}{x}dx\right)}{x^2} dx \right) =$$

$$= \quad cx \left(\int \frac{e^{-\ln x}}{x^2} dx \right) = x \int x^{-3} dx = -cx\frac{1}{2}x^{-2} \longrightarrow_{c=-2} u_2(x) = \frac{1}{x}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא $y = c_1x + \frac{c_2}{x}, \quad 0 < x$.

נחפש את הפתרון המתאים לתנאי ההתחלה:

$$5 = y(1) = c_1 + c_2$$
$$y'(x) = c_1 - \frac{c_2}{x^2}$$
$$-1 = y'(1) = c_1 - c_1$$

והפתרון הוא $c_1 = 2,\ c_2 = 3$ כלומר $y(x) = 2x + \frac{3}{x}$.

תרגיל: נתון ש־ $y_1(x) = x^2$ ו־ $y_2(x) = x$ הם פתרונות של $6x^3y''' - 24x^2y'' + 48xy' - 48y = 0$ כאשר $x > 0$. מצאו פתרון כללי.

פתרון: במקרה זה המד"ר היא מסדר 3 ולכן לא נוכל להשתמש בנוסחת אבל למציאת פתרון שני ולכן נשתמש בשיטת הורדת הסדר:

$$y(x) = x^2v(x)$$
$$y' = 2xv + x^2v'$$
$$y'' = 2v + 4xv' + x^2v''$$
$$y''' = 6v' + 6xv'' + x^2v'''$$
$$6x^3(6v' + 6xv'' + x^2v''') - 24x^2(2v + 4xv' + x^2v'') + 48x(2xv + x^2v') - 48x^2v = 0$$
$$6x^5v''' + (36x^4 - 24x^4)v'' + (36x^3 - 96x^3 + 48x^3)v' = 0$$
$$6x^5v''' + 12x^4v'' - 12x^3v' = 0$$
$$x^5v''' + 2x^4v'' - 2x^3v' = 0$$

נשים לב להתאמה בין הפתרונות של המד"ר המקורית למד"ר החדשה:

1. אם $y(x)$ פתרון של המד"ר המקורית אזי $v(x) = \frac{y(x)}{x^2}$ היא פתרון של המד"ר החדשה.

2. אם $v(x)$ פתרון של המד"ר החדשה אזי $y(x) = x^2 v(x)$ פתרון של המד"ר המקורית. כלומר, כיוון ש־$y_1(x) = x^2$ פתרון של המקורית אזי $v_1(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$ פתרון של החדשה. זה פתרון שהשתמשנו בו. בנוסף, כיוון ש־$y_2(x) = x$ פתרון של המקורית אזי $v_2(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ פתרון של החדשה (ודאו זאת ע"י הצבה). נעשה כעת את הורדת הסדר:

$$
\begin{aligned}
&z(x) = v'(x) \\
&x^5 z'' + 2x^4 z' - 2x^3 z = 0 \\
&z'' + \frac{2}{x} z' - \frac{2}{x^2} z = 0
\end{aligned}
$$

ולמד"ר זו $z_1(x) = v_1'(x) = 0$ ו־$z_2(x) = v_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$ פתרונות. נחפש פתרון נוסף:

$$
z_3(x) = z_2(x) \cdot \left(\int \frac{c \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{z_2(x)^2} dx \right) = -\frac{1}{x^2} \int \frac{c x^{-2}}{\frac{1}{x^4}} dx = -\frac{1}{x^2} \int c x^2 dx = -c \frac{x^3}{3x^2} =_{c=-3} x
$$

ולכן הפתרון הוא $z = c_1 x^{-2} + c_2 x$

כעת נמצא את הפתרון ב־$v(x)$ ע"י שימוש ב־$z = v'$ ונקבל

$v = \int z = -c_1 x^{-1} + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + c_3$

וחזרה ל־$y(x)$ ע"י $y = x^2 v = c_1 x + c_2 x^4 + c_3 x^2$

<u>תרגיל:</u> נתון ש־$y_1(x) = x$ פתרון של $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ כאשר $x > 0$. מצאו פתרון כללי.

<u>פתרון:</u> נשים לב שיש לנו מד"ר מסדר 3 אבל נתון רק פתרון אחד אז לכאורה אחרי הורדת סדר נקבל מד"ר מסדר שני שזה לא מספיק טוב אבל נשתמש בשיטת הורדת סדר בכל אופן ונראה מה נקבל:

$$
\begin{aligned}
&y = xv \\
&y' = v + xv' \\
&y'' = 2v' + xv'' \\
&y''' = 3v'' + xv''' \\
&x^3(3v'' + xv''') - 3x^2(2v' + xv'') + 6x(v + xv') - 6xv = 0 \\
&x^4 v''' = 0 \\
&v''' = 0 \\
&v = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \\
&y = xv = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3
\end{aligned}
$$

תרגיל: נתון ש־$u_1(x) = x$ פותר את המד"ר ההומוגנית המתאימה של $x^2y'' + xy' - y = x^3$ כאשר $x > 0$. מצאו פתרון כללי.

פתרון: נשים לב כי המד"ר אומנם מסדר שני אבל אינה הומוגנית. עם זאת, יש לנו פתרון של ההומוגנית המתאימה אז אנו יכולים להשתמש בשיטת הורדת סדר. בנוסף, המד"ר ההומוגנית המתאימה מתאימה לתרגיל הראשון שעשינו והפתרון של ההומוגנית שקיבלנו היה

$$y = c_1x + \frac{c_2}{x}$$

אבל זה לא נותן לנו פתרון של המד"ר. נפתור בהורדת סדר:

$$\begin{aligned}
&y(x) = xv(x)\\
&y' = v + xv'\\
&y'' = 2v' + xv''\\
&x^2(2v' + xv'') + x(v + xv') - xv = x^3\\
&x^3v'' + (2x^2 + x^2)v' = x^3\\
&x^3v'' + 3x^2v' = x^3\\
&z = v'\\
&x^3z' + 3x^2z = x^3\\
&z' + \frac{3}{x}z = 1\\
&z = c_1x^{-3} + \frac{x}{4}\\
&v = \int zdx = \int c_1x^{-3} + \frac{x}{4}dx = -c_1\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^2}{8} + c_2 = c_1x^{-2} + c_2 + \frac{x^2}{8}\\
&y = xv = c_1x^{-1} + c_2x + \frac{x^3}{8}
\end{aligned}$$

תרגיל: יהיו $3\sin x, x\cos x, (x+3)\cos x$ פתרונות של $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$. מצאו את הפתרון הכללי.

פתרון: תרגיל זה אינו הורדת סדר. במקרה זה נזכר שהפרש פתרונות פרטיים הוא

פתרון של ההומוגנית המתאימה ולכן

$$u_1(x) = (x+3)\cos x - x\cos x = 3\cos x$$
$$u_2(x) = x\cos x - 3\sin x$$

פתרונות בלתי תלויים של ההומוגנית המתאימה. לכן הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1\cos x + c_2(x\cos x - 3\sin x) + 3\sin x$$

הערה: הפרש פתרונות פרטיים הוא פתרון של ההומוגנית המתאימה.