תורת ההסתברות

תרגיל בית מס׳ 4

<u>תרגיל 1</u>.
יהי $X \sim U(-3,3)$, דהינו $f_X(x) = 1/6$ עבור $-3 \le x \le 3$. נגדיר: $Y = h(X)$ כאשר הפונקציה $h(x)$ נתונה על ידי

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{if} \quad x \le -1, \\ x & \text{if} \quad -1 < x \le 1, \\ 4x & \text{if} \quad x > 1. \end{cases}$$

חשבו את $f_Y(y)$ ו- EY.

<u>פתרון</u> .
$h(x)$ היא פונקציה מונוטונית עולה, הנגזרת שלה קיימת בכל מקום פרט לשתי נקודות $x = -1$ ו- $x = 1$:

$$h'(x) = \begin{cases} 2 & \text{if} \quad x < -1, \\ 1 & \text{if} \quad -1 < x < 1, \\ 4 & \text{if} \quad x > 1. \end{cases}$$

לכן, לפי נוסחת הטרנספורמציה:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_X(x) & \text{if} \quad x < -1, \\ \\ f_X(x) & \text{if} \quad -1 < x < 1, \\ \\ \frac{1}{4} f_X(x) & \text{if} \quad x > 1. \end{cases}$$

כלומר:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{if} \quad -6 < y < -2, \\ \\ \frac{1}{6} & \text{if} \quad -1 < y < 1, \\ \\ \frac{1}{24} & \text{if} \quad 4 < y < 12 \\ \\ 0 & \text{otherwise} \quad . \end{cases}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-6}^{-2} \frac{y}{12} dy + \int_{-1}^{1} \frac{y}{6} dy + \int_{4}^{12} \frac{y}{24} dy = -\frac{32}{24} + \frac{128}{48} = \frac{4}{3}.$$

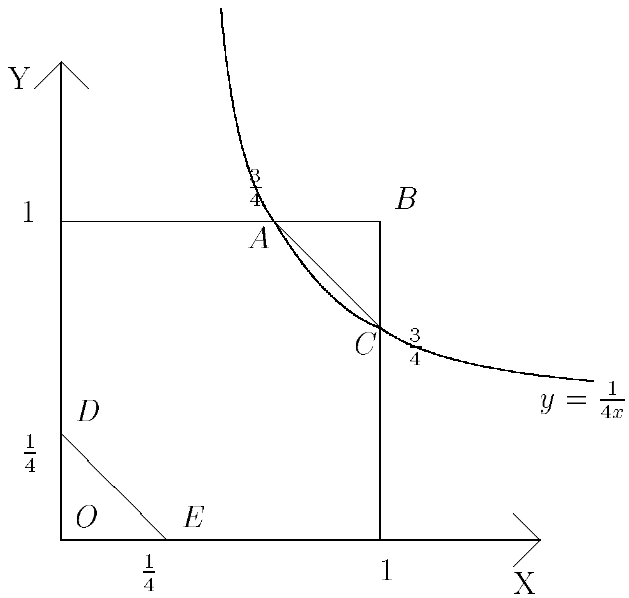
תרגיל 2.

יהא וקטור (X,Y) מפולג באופן אחיד על התחום $0 \le x, y \le 1$.

(א) הוכיחו כי $P(XY \le 1/4) \le P(X+Y \ge 1/4)$.

(ב) מצאו את ההסתברות המותנת $P(X+Y \ge 1/4 | X+Y \le 3/4)$.

פתרון.



(א) בעזרת הציור:

$$P(XY \le 1/4) \le 1 - S_{\triangle ABC} = 1 - S_{\triangle DEO} = P(X+Y \ge 1/4).$$

(ב)

$$\begin{aligned} P(X+Y \ge 1/4 | XY \le 1/4) &= \frac{P(X+Y \ge 1/4 \cap X+Y \le 3/4)}{P(X+Y \le 3/4)} = \\ &= \frac{1-1/16}{1-1/32} = \frac{30}{31}. \end{aligned}$$

__תרגיל 3.__

עבור פרמטר $\lambda > 0$ יהא X מ"א בעל צפיפות $f_X(x) = c_\lambda \cdot x^{-1-\lambda}$, $x \geq 1$. נגדיר עבור פרמטר $\alpha > 0$ משתנה אקראי חדש $Y = h(X)$, כאשר $h(x) = x^\alpha$.

(א) מצאו את הקבוע c_λ.

(ב) מהי פונקצית ההתפלגות של X ?

(ג) מצאו את הצפיפות של מ"א Y.

(ד) חישבו את EY עבור פרמטר α כלשהו.

__פתרון.__

(א)

$$1 = \int_1^\infty f_X(x)dx = -\frac{c_\lambda}{\lambda} x^{-\lambda}\Big|_1^\infty = \frac{c_\lambda}{\lambda},$$

כלומר $c_\lambda = \lambda$.

(ב) $F_X(1) = 0$. לכן:

$$F_X(x) = F_X(x) - F_X(1) = \int_1^x f_X(x)dx = 1 - x^{-\lambda}.$$

(ג) לפי נוסחת הטרנספורמציה:

$$f_Y(y) = \left|\frac{1}{h'(x)}\right| f_X(x) = \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \lambda x^{-\lambda-1} = \frac{\lambda}{\alpha} y^{-\frac{\lambda}{\alpha}-1}, \quad y \geq 1.$$

(ד)

$$EY = \int_1^\infty y f_Y(y)dy = \int_1^\infty \frac{\lambda}{\alpha} y^{-\frac{\lambda}{\alpha}} dy = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-\alpha}, & \lambda > \alpha \\ \infty, & \lambda \leq \alpha \end{cases}.$$

תרגיל 4.
יהא $X \sim N(0,1)$. מצאו את הצפיפות של מ"א $\lambda > 0$,$Y = \exp\{\lambda X\}$.

פתרון.

$$F_Y(y) = P(e^{\lambda X} \le y) = F_X\left(\frac{\log y}{\lambda}\right)$$

לכן:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(F_Y(y)\Big) &= \frac{d}{dy}\left(F_X\left(\frac{\log y}{\lambda}\right)\right) = \frac{1}{\lambda \cdot y}F'_X\left(\frac{\log y}{\lambda}\right) = \\ &= \frac{1}{\lambda \cdot y}f_X\left(\frac{\log y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda \cdot y} \cdot \exp\left\{-\frac{(\log y)^2}{2\lambda^2}\right\}. \end{aligned}$$