

אינפי 3 - תרגיל בית 5

שאלה 1:

אם $G \subset \mathbb{R}^n$ סימטרי ביחס ל- x_1 , $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \iff (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$, ופונקציה f אינטגרבילית ב- G מקיימת

$$f(-x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

לכל $(x_1, \dots, x_n) \in G$, הוכיחו ש-

$$\int \cdots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

שאלה 2:

מטרת התרגיל היא לחשב נפח של פרמידה כללית ב- \mathbb{R}^n . בגיליון הקודם חישבתם את נפח הפרמידה ה- n מימדית $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ שקודקודיה הם $0, e_1, \dots, e_n$, כאשר e_i הם וקטורי היחידה בכיוון הצירים. כלומר:

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$$

בתרגיל זה נכניס את שתי ההכללות הבאות:

א. חשבו את נפח הפרמידה $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ שקודקודיה הם $0, v_1, \dots, v_n$.

ב. חשבו את נפח הפרמידה $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ שקודקודיה הם v_0, v_1, \dots, v_n .

רמז: שימו לב אם אתם יכולים להעזר במקרה שכבר חישבתם.

שאלה 3:

שנו סדר אינטגרציה כדי להפוך את האינטגרל

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$$

ל- $\int dz \int dx \int f(x, y, z) dy$ עם גבולות אינטגרציה מתאימים.

שאלה 4:

העבירו את האינטגרל $\int \int_{\Omega} y f(z) dx dy dz$ לאינטגרל חד-מימדי, כאשר הגוף Ω מוכל בחצי המרחב העליון, וחסום על ידי המשטחים $x^2 + y^2 = 2x$, $z = y$.

שאלה 5:

יהא $z = x^2 + y^2$ פרבולואיד, בתחום $0 < z < 1$.

א. חשבו את שטח הפנים של הפרבולואיד, על ידי חישוב מפורש של אינטגרל של שטח משטח.

ב. חשבו את $\int_0^1 2\pi\sqrt{z}dz$. האם הגעתם לאותה תשובה כמו בסעיף א? חשבו מדוע.

ג. חשבו את שטח הפנים של שפת הפרבולואיד המלא $x^2 + y^2 < z < 1$.

שאלה 6:

תהא $f(x)$ פונקציה חיובית וגזירה ברציפות על קטע $[a, b]$. גוף הסיבוב הנוצר על ידי f הוא המשטח ב- \mathbb{R}^3 הנוצר על ידי סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר x . הוכיח כי שטח הפנים של גוף הסיבוב נתון על ידי

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

שאלה 7:

הגוף $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}$ משמש כמיכל דלק של מכונית.

א. יצרני המכונית התקינו מד גובה פני הדלק במיכל - מצוף שיכול לנוע מעלה ומטה על ציר z , אשר שולח ללוח השעונים במכונית את ערך ה- z בו נמצא המצוף. בשביל שהנהג יידע מה מצב המיכל שלו, לוח השעונים מציג את הערך $\frac{z}{\sqrt{2}}$. כך, למשל, כאשר המיכל מלא, הנהג רואה את הערך 1, ככל שכמות הדלק יורדת, כך גם הערך יורד, וכאשר המיכל ריק הנהג רואה 0. הסבירו מדוע הערך שמוצג לנהג אינו נכון. הסבירו איך לתקן זאת.

ב. חשבו את מסת המיכל הריק (כלומר את המסה של ∂U), עבור צפיפות מסה אחידה, ועבור צפיפות מסה $\rho(x, y, z) = z$.