<u>אינטרגל מסוים</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- אנחנו דנים בפונקציות $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומות על קטע חסום.
- לכל שתי חלוקות $P,\widetilde{P}$ של הקטע, $L(P,f)\le U\left(\widetilde{P},f\right)$ לכן $\underset{P}{sup}L(P,f)\le\underset{P}{inf}U(P,f)$
- הגדרה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה על קטע חסום. נאמר כי f **אינטגרבילית רימן** אם

$$\underset{P}{sup}L(P,f)=\underset{P}{inf}U(P,f)$$

את הערך המשותף מסמנים ב־

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ונקרא אינטגרל רימן של f.

- משפט: תהי f חסומה על $[a,b]$. התנאים הבאים שקולים:
  1. f אינטגרבילית רימן.
  2. לכל $\epsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש־ $U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$.
  3. לכל $\epsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta$ אז $U(P,f)-L(P,f)<\epsilon$.
- דוגמאות לפונקציות אינטגרביליות רימן:
  - תהי f קבועה ב־ $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן.
  - תהי f מונוטונית ב־ $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן.
  - תהי f רציפה ב־ $[a,b]$. אזי f אינטגרבילית רימן.
- קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ נקראת בעלת מידה אפס אם לכל $\epsilon>0$ קיימת סדרה של קטעים $\{I_n\}_{n\ge1}$ שהם כיסוי של E ו־ $\sum_1^\infty L(I_n)<\epsilon$.
- משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית רימן $\Longleftrightarrow$ אוסף נקודות האי־רציפות של f הוא ממידה אפס.
- משפט: f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ קיים מספר ממשי I יחיד כך שלכל $\epsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של $[a,b]$ המקיימת $\lambda(P)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות c_i מתקיים:

$$\left|\sum_i f(c_i)\triangle x_i-I\right|<\epsilon$$

- הגדרה: $\int_a^a f=0$, $\int_a^b f=-\int_b^a f$

- משפט:
  - תהי f אינטגרבילית רימן ב־ $[a,b]$ אז f אינטגרבילית רימן בכל תת־קטע.
  - אדיטיביות: אם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ וגם ב־ $[b,c]$ אז f אינטגרבילית ב־ $[a,c]$ ומתקיים השיוויון $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.
  - לניאריות: אם f ו־ g אינטגרביליות ואם c ממשי, אזי $f+cg$ אינטגרבילית ומתקיים השיוויון $\int_a^b f+cg=\int_a^b f+c\int_a^b f$.
  - אם $f:[a,b]\to[c,d]$ ו־ g רציפה ב־ $[c,d]$, אז $g\circ f$ אינטגרבילית ב־ $[a,b]$.
  - אם f אינטגרבילית אז גם f^n אינטגרבילית, $n\in\mathbb{N}$.
  - אם f,g אינטגרביליות אז גם fg.
  - אי־שיוויון המשולש: אם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ אז גם $|f|$, ו־ $\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|$.
  - אם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $f\geq 0$, אז גם $\int_a^b f\geq 0$.
  - אם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $f>0$, אז גם $\int_a^b f>0$.
  - מונוטוניות: אם f,g אינטגרביליות ב־ $[a,b]$, ו־ $f\leq g$ אזי $\int_a^b f\leq\int_a^b g$.
  - אם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־ $m\leq f\leq M$ אזי $m\leq\int_a^b f\leq M$.
  - ערך הביניים: תהי f רציפה ב־ $[a,b]$ אזי קיימת $c\in[a,b]$ כך ש־ $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a)$.
  - אם f רציפה ב־ $[a,b]$, ו־ g אינטגרבילית בעלת סימן קבוע, אזי קיימת $c\in[a,b]$ כך ש־ $\int_a^b gf=f(c)\int_a^b g$
  - תהי f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ותהי g השונה מ־ f במספר סופי של נקודות, אזי g אינטגרבילית ו־ $\int_a^b g=\int_a^b f$.

תרגילים:

1. תהי f פונקציה חסומה ב־ $[a,b]$ ורציפה פרט למספר סופי של נקודות. הוכיחו כי f אינטגרבילית רימן.

<u>הוכחה:</u>

יהי $\epsilon>0$. f חסומה לכן קיים M כך ש־ $|f|\leq M$. נניח שיש k נקודות אי־רציפות. נכסה אותם בקטעים $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\ldots(u_k,v_k)$. (מה עושים אם יש אי־רציפות ב־ a ו\או b?). ונדאג ש־ $\sum(v_i-u_i)\leq\epsilon$. נשארים עם $K=[a,b]\setminus\cup(u_i,v_i)$. K היא איחוד סופי של קטעים סגורים לכן f רציפה במ"ש שם. ומכאן יש $\delta>0$ כך ש־

$$t,s\in K,\ |t-s|<\delta\Rightarrow|f(t)-f(s)|<\epsilon$$

ניקח חלוקה P של $[a,b]$ המכילה:

- את כל הנקודות u_i,v_i
- אף נקודה מ־ u_i,v_i
- מ־ K מספיק נקודות שמרחקיהן זו מזו $<\delta$

מכאן קל להעריך ולקבל ש־

$$U\left(P,f\right)-L\left(P,f\right)\leq\left(2M+\left(b-a\right)\right)\epsilon$$

2. יהיו a,b מספרים ממשיים. הוכיחו כי $f\left(x\right)=ax+b$ אינטגרבילית רימן ב־ $[0,1]$ וחשבו את האינטגרל שלה.

<u>פתרון:</u> f רציפה ב־ $[0,1]$ לכן אינטגרבילית רימן. בהרצאה חישבנו אינטגרל של פונקציה קבועה ואת $\int_0^1 xdx$ ומלניאריות נקבל:

$$\int_0^1\left(ax+b\right)dx=a\int_0^1 xdx+b\int_0^1 1dx=a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot1$$

3. תהי נתונה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ בקטע $[1,2]$. הוכיחו כי f אינטגרבילית רימן שם ע"פ ההגדרה.

<u>הוכחה:</u>

f חסומה בקטע. נוכיח שלכל $\epsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש־ $U\left(P\right)-L\left(P\right)<\epsilon$.

תהי P_n חלוקה שבה $x_i=1+\frac{i}{n}$. אזי

$$U\left(P_n\right)-L\left(P_n\right)=\frac{1}{2n}\longrightarrow0$$

שים לב: לא קיבלנו מהו ערך האינטגרל.

4. הוכיחו ע"פ הגדרת אינטגרל רימן (סכומי דרבו) שהפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ היא פונקציה אינטגרבילית רימן ב־ $[0,1]$ וחשבו את $\int_0^1 x^2dx$.

<u>פתרון:</u>

עבור $n\in\mathbb{N}$ ניקח את החלוקה $P_n=\left\{\frac{i}{n},i=0,1,\ldots,n\right\}$. קל לחשב את $U\left(P,f\right)$ ואת $L\left(P,f\right)$ תוך שימוש בנוסחה $\sum_1^n k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ולקבל:

$$U\left(P,f\right)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6},\quad L\left(P,f\right)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{\left(n-1\right)n\left(2n-1\right)}{6}$$

ומכאן, באופן דומה לנעשה בהרצאה נקבל:

$$\frac{1}{3}=\lim_{n\to\infty}L\left(P_n,f\right)\leq sup_P L\left(P,f\right)\leq inf_P U\left(P,f\right)\leq\lim_{n\to\infty}U\left(P_n,f\right)=\frac{1}{3}$$

לכן האינטגרל העליון והתחתון שווים ל־ $\frac{1}{6}$ בפרט f אינטגרבילית ב־ $[0,1]$ ו־ $\int_0^1 f=\frac{1}{3}$.

5. תהי f פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ כך ש־ $f\geq0$. הוכיחו $\int_a^b f\geq0$ ושיוויון לאפס $\iff f\equiv0$. (בתרגיל בית אתם מתבקשים להוכיח טענה דומה אבל **ללא** ההנחה ש־ f רציפה).

<u>הוכחה:</u>

f אינטגרבילית רימן כי היא רציפה. מכיוון ש־ $f\geq0$ אזי $L\left(P,f\right)\geq0$ לכל חלוקה P לכן $\int_a^b f\geq0$.

אם $f\equiv0$ אז מההרצאה (אינטגרל של פונקציה קבועה) $\int_a^b f=0$.

להיפך, אם $\int_a^b f = 0$ עלינו להראות כי $f \equiv 0$. נניח בדרך השלילה שזה לא המצב. ע"פ רציפות f זה מחייב שיש תת־קטע $[\alpha, \beta]$ וקבוע ממשי חיובי δ כך ש־ $f(x) \geq \delta$ לכל $x \in [\alpha, \beta]$. מכאן, ע"פ הטיעון הקודם ואדיטיביות האינטגרל ותוך כדי שימוש באינטגרל של פונקציה קבועה:

$$0 = \int_a^b f = \left(\int_a^\alpha + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^b\right) f \geq 0 + \int_\alpha^\beta \delta dx + 0 = \delta(\beta - \alpha) > 0$$

סתירה.

6. תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ חסומה. אזי f אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ $\iff$ קיימת סדרת חלוקות P_n כש־ $\lim_{n\to\infty} U(P_n) = \lim_{n\to\infty} L(P_n)$. יתר על כן, הגבול הזה הוא בדיוק האינטגרל של f.

<u>הוכחה:</u>

כיוון ראשון: אם f אינטגרבילית רימן, לכל $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ קיימת חלוקה P_n של $[a, b]$ כך ש־ $U(P_n) - L(P_n) < \epsilon_n$. מכאן:

$$\int_a^b f \leq \liminf U(P_n) \leq \limsup U(P_n) = \limsup [U(P_n) - L(P_n) + L(P_n)] \leq$$

$$\leq \limsup [U(P_n) - L(P_n)] + \limsup L(P_n) = \lim [U(P_n) - L(P_n)] + \limsup L(P_n) =$$

$$= 0 + \limsup L(P_n) \leq \int_a^b f$$

כיוון שני: קיימת סדרת חלוקות P_n כש־ $\lim_{n\to\infty} U(P_n) = \lim_{n\to\infty} L(P_n)$, לכן:

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) \leq \sup_P L(P, f) \leq \inf_P U(P, f) \leq \lim_{n\to\infty} U(P_n, f)$$

לכן יש שיוויון במקום אי־שיוויון.

7. תהי f אינטגרבילית ב־ $[a, b]$ וקיים $c > 0$ כך ש־ $|f| \geq c > 0$ ב־ $[a, b]$. הוכיחו כי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית.

<u>הוכחה:</u>

מכיוון ש־ $|f| \geq c > 0$ אזי $\frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{c}$ זאת אומרת $\frac{1}{f}$ פונקציה חסומה ב־ $[a, b]$. כמו כן, לכל $t, s \in [a, b]$

$$\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(s)} = \frac{f(s) - f(t)}{f(t) f(s)}$$

מכאן, אם P חלוקה אזי

$$U\left(P, \frac{1}{f}\right) - L\left(P, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{U(P, f) - L(P, f)}{c^2}$$

יהי $\epsilon > 0$. יש חלוקה P כך ש־ $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon c^2$ ולכן $U\left(P, \frac{1}{f}\right) - L\left(P, \frac{1}{f}\right) < \epsilon$. לכן $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית רימן.

8. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן. הוכיחו ש־ $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ רציפה ליפשיצית.

<u>הוכחה:</u>

נעריך את $|g(s)-g(t)|$ עבור $t,s\in[a,b]$:

$$|g(s)-g(t)|=\left|\int_s^t f(u)\,du\right|\le\left|\int_s^t |f(u)\,du|\right|$$

הפונקציה f חסומה: $M\le|f|$. ממונוטוניות האינטגרל נקבל: $\left|\int_s^t |f(u)\,du|\right|\le M|t-s|$, וזה לכל $t,s\in[a,b]$.

9. תהי $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש־ $x_i-x_{i-1}\le w$ לכל $i=1,2,\ldots,n$.

- אם $f(x)=c_1x+c_2$ הראו ש־ $U(P,f)-L(P,f)\le w|c_1|(b-a)$.
- אם f גזירה ב־ (a,b) ורציפה ב־ $[a,b]$ כך ש־ $\left|f'(x)\right|\le c$ לכל $x\in[a,b]$. הוכיחו ש־ $U(P,f)-L(P,f)\le wc(b-a)$.

<u>פתרון:</u>

- נניח $c_1>0$. אזי

$$U(P)-L(P)=\sum_{i=1}^{n}\left[(c_1x_i+c_2)-(c_1x_i+c_2)\right]\triangle x_i\le w\sum_{i=1}^{n}c_1(x_i-x_{i-1})=wc_1(b-a)$$

באופן דומה שאר המקרים.

- ע"פ $Lagrange$ קיימות $c_1,\ldots c_n$ כך ש־ $M_i-m_i\le\left|f'(c_i)\right|\triangle x_i$, לכן:

$$U(P)-L(P)=\sum_{i=1}^{n}\left|f'(c_i)\right|(\triangle x_i)^2\le wc(b-a)$$

10. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נסמן:

$$|f|_p=\left|\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$|f|_\infty=\underset{[a,b]}{max}|f|$$

הוכיחו ש־ $\lim_{p\to\infty}|f|_p=|f|_\infty$

<u>הוכחה:</u> יהי $\epsilon>0$. נסמן $M=|f|_\infty$. קל לראות ש־ $\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le M(b-a)^{\frac{1}{p}}$, מצד שני, מכיוון ש־ f רציפה אז M מתקבל ב־ $[a,b]$. לכן יש $\delta>0$ כך ש־ $\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\ge\delta^{\frac{1}{p}}(M-\epsilon)$. מכאן:

$$M-\epsilon\le\liminf_{p\to\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\limsup_{p\to\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\le M,\ \forall\epsilon>0$$

11. תהי $E=(a_n)_{n\geq 1}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש־ E ממידה אפס.

<u>הוכחה:</u>

לכל $n\in\mathbb{N}$ ניקח $I_n=\left(a_n-\frac{\epsilon}{2^{n+1}},a_n+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$ ואז ברור ש־ $E\subseteq\cup I_n$ ו־ $length\left(I_n\right)=\frac{\epsilon}{2^n}$ לכן (באופן פורמלי)

$$\sum_{n=1}^{\infty}length\left(I_n\right)=\epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=\epsilon\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}\right)=\epsilon\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\epsilon$$