קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 11 (ואחרון...)

תאריך הגשה: יום חמישי, 23/1/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

א. רשמו את פיתוח מקלורן עד סדר רביעי של הפונקציות הבאות:

1. $\arcsin x^3$.

דרך א': חישוב מפורש של הנגזרות מראה כי כל הנגזרות מתאפסות ב- 0 פרט לשלישית, שהיא $f^{(3)}(x)=\frac{6x^2+69x^6+6}{(1-x^6)^{\frac{5}{2}}}$, ולכן $f^{(3)}(0)=6$, ולכן $T_4(x)=\frac{6}{3!}x^3=x^3$.

דרך ב': נפתח את $\arcsin x$ עד סדר ראשון: $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, לכן $T_1(x)=x$, ולכן $T_1(x^3)=x^3$, וחזקת 4 לא מופיעה בפולינום, לכן $\hat{T}_4(x)=x^3$. (כאשר $\hat{T}$ הוא הפולינום המבוקש).

2. $\ln(1+\sin x)$.

ע"י חישוב מפורש של הנגזרות והצבת 0, מקבלים: $f(0)=0\,,f'(0)=1\,,f''(0)=-1$, $f^{(3)}(0)=1\,,f^{(4)}(0)=-2$, ולכן: $T_4(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}$.

ב. נתון כי $f(x)=1+2x+x^2+2x^3+o(x^3)$, וכי $g(x)=3+x+3x^2+x^3+o(x^3)$. חשבו את $(f\cdot g)^{(3)}(0)$.

ע"י הכפלת הביטויים הנתונים, נקבל כי המקדם של x^3 הוא: $1\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 3=14$, (מתקבלים ממכפלות של מחוברים שסכום החזקות שלהם הוא 3), לכן: $\frac{(f\cdot g)^{(3)}(0)}{3!}=14$, ומכאן:

$(f\cdot g)^{(3)}(0)=14\cdot 6=84$.

שאלה 2:

חשבו את $\sqrt{5}$ בדיוק של 10^{-4}.

נפתח את $f(x)=\sqrt{x}$ מסביב ל- 4, נשתמש בנוסחת השארית לפי לגרנז' ונדרוש ש- $|R_n(5)|<10^{-4}$. ניתן לחשב ולמצוא כי לכל $n\ge 1$, $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3))}{2^n\cdot x^{\frac{2n-1}{2}}}$. מכיוון שנקודת הביניים c תהיה תמיד בין 4 ל- 5, יתקיים $\left|f^{(n)}(c)\right|\le\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot 4^{\frac{2n-1}{2}}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{3n-1}}$, ולכן: $|R_{n-1}(5)|\le\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(2^{3n-1})n!}$. ניתן להראות (למשל, באינדוקציה) כי $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{(2^{3n-1})n!}\le\frac{1}{2^n\cdot n!}$, ולכן נדרוש $\frac{1}{2^n\cdot n!}<10^{-4}$, כלומר $n\ge 6$, כלומר $|R_5(5)|<10^{-4}$, ולכן הסדר המספיק כדי להשיג את הטעות המבוקשת הוא 5. הפיתוח מסדר 5 של $\sqrt{x}$ מסביב ל- 4 הוא:

$T_5(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{16384}(x-4)^4 + \frac{7}{131072}(x-4)^5$. נציב $x=5$ ונקבל:
$\sqrt{5} \approx \frac{293087}{131072}$.

שאלה 3:

א. נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות וכי $f(0) = f'(0) = 0$. הוכיחו כי קיים A כך ש- $|f(x)| \le Ax^2$ לכל $x \in [-1,1]$.

נשתמש בנתונים ונפתח את f מסביב ל- 0 עד סדר ראשון עם שארית ע״פ לגרנז׳: $f(x) = \frac{f''(c)}{2}x^2$, כאשר c בין 0 ל- x. לכל $x \in [-1,1]$, גם $c \in [-1,1]$. f'' רציפה בקטע הסגור הנ״ל, לכן חסומה שם, לכן קיים M כך ש- $f''(t) \le M$ לכל $t \in [-1,1]$, בפרט עבור c. לכן $|f(x)| \le \frac{M}{2}x^2$ בקטע הנ״ל. נסמן $A = \frac{M}{2}$ וסיימנו.

ב. נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות בסביבת 2, וכן כי $f''(2) = 1$, $f'(2) = -1$. תהי $2 \neq a_n \to 2$, ותהי $b_n = \frac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2}$. חשבו את $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n+1}{a_n-2}$.

נפתח את f עד סדר 1 עם שארית מסביב ל- 2, נקבל: $f(x) = f(2) - (x-2) + \frac{1}{2}f''(c)(x-2)^2$ (כאשר c בין x ל- 2). לכן: $b_n = \frac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2} = \frac{f(2)-(a_n-2)+\frac{1}{2}f''(c_n)(a_n-2)^2-f(2)}{a_n-2} = -1 + \frac{\frac{1}{2}f''(c_n)(a_n-2)^2}{a_n-2}$, כאשר c_n בין a_n ל- 2. לכן: $\frac{b_n+1}{a_n-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)(a_n-2)^2}{(a_n-2)^2} = \frac{1}{2} \cdot f''(c_n)$. כאשר $n \to \infty$, $a_n \to 2$, ולכן מסנדוויץ׳ גם $c_n \to 2$, ומרציפות f'' נקבל כי $f''(c_n) \to f''(2) = 1$, לכן $\frac{b_n+1}{a_n-2} \to \frac{1}{2}$.

ג. נתון כי f גזירה פעמיים, וכן כי $f''(0) = 3$, $f'(0) = 2$, $f(0) = 0$. מצאו ממשיים α, β, L כך שיתקיים: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\alpha\sin x-\beta\cos x}{x^2} = L$.

אם $\beta \neq 0$, הגבול הנ״ל אינו סופי אלא $\pm\infty$ בהתאם לסימן של β, לכן בהכרח $\beta = 0$. לכן הביטוי $\frac{f(x)-\alpha\sin x}{x^2}$ הוא מהצורה ״$\frac{0}{0}$״, לכן נשתמש בלופיטל ונקבל $\frac{f'(x)-\alpha\cos x}{2x}$. כמו מקודם, נדרוש שהמונה ישאף ל- 0 אחרת נקבל גבול אינסופי, ומכיוון ש- f' גזירה, ובפרט רציפה, מתקיים $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$, ולכן נדרוש $\alpha = f'(0) = 2$.
כדי למצוא את L נחשב אם כן את הגבול $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-2\sin x}{x^2}$. נשים לב כי לא ידוע ש- f'' רציפה, ולכן לופיטל לא יעזור מכיוון שלא ידוע מהו הגבול של $f''(x) + 2\sin x$. נשתמש בפיתוח מקלורן של f מסדר 2:
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 2x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$, ולכן:
$\frac{f(x)-2\sin x}{x^2} = \frac{2x+\frac{3}{2}x^2-2\sin x+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} + \frac{2(x-\sin x)}{x^2} + \frac{o(x^2)}{x^2}$. ניתן להשתמש בלופיטל כדי לראות שהמחובר האמצעי שואף ל- 0, ובנוסף $\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$, לכן הביטוי כולו שואף ל- $\frac{3}{2}$, וזה ה- L הדרוש.
בסה״כ: $\alpha = 2, \beta = 0, L = \frac{3}{2}$.

שאלה 4:

היעזרו בפיתוחים המתאימים לחישוב הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{x^4}$.

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o(x^4) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$, לכן:

$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = -\frac{x^4}{12}+o(x^4)$, ולכן: $\sin\left(\cos x - e^{-\frac{x^2}{x}}\right) = -\frac{x^4}{12}+o(x^4)$. מכאן

נקבל: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$.

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(e^{\sin(x^2)}-1\right)}{\cos(x^2)-1+x^2}$.

כמו מקודם, נרשום: $\sin(x^2) = x^2+o(x^2)$, לכן $e^{\sin(x^2)} = 1+x^2+o(x^2)$, ולכן:

$e^{\sin x^2}-1 = x^2+o(x^2)$, ומכאן: $\arcsin\left(e^{\sin(x^2)}-1\right) = x^2+o(x^2)$. עבור המכנה, מכיוון שאין חזקות

אי-זוגיות בפיתוח של $\cos x$, מתקיים: $\cos x = 1+o(x)$, ולכן: $\cos x^2 = 1+o(x^2)$, ולכן:

$\cos x^2 - 1 + x^2 = x^2+o(x^2)$. לכן יש לחשב $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$. (שימו לב! לא מדובר ב- 1 זהותית, מכיוון

שאין סיבה להניח שהשאריות במונה ובמכנה שואפות באותו קצב ל- 0). נחלק מונה ומכנה ב- x^2, ונקבל:

$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$, ומאריתמטיקה של גבולות נקבל כי הגבול הוא 1.

שאלה 5:

יהיו $f\,,\,g$ פונקציות קמורות. הוכיחו / הפריכו:

א. $f\cdot g$ קמורה.

<u>לא נכון</u>, ד״נ: $f(x)=x^2\,,\,g(x)\equiv -1$.

ב. $f\circ g$ קמורה.

<u>לא נכון</u>, ד״נ: $f(x)=-x\,,\,g(x)=x^2$ (ואז $(f\circ g)(x)=-x^2$ קעורה).

ג. $h(x)=\max\{f(x)\,,\ g(x)\}$ קמורה.

<u>נכון</u>: יהיו $x_1<x_2$, צ״ל כי לכל $t\in(0,1)$, $th(x_1)+(1-t)h(x_2)\ge h(tx_1+(1-t)x_2)$. אם נראה כי

$th(x_1)+(1-t)h(x_2)\ge f(tx_1+(1-t)x_2)$ וגם $th(x_1)+(1-t)h(x_2)\ge g(tx_1+(1-t)x_2)$

נסיים, אבל זה מתקיים בהכרח כי $h\ge f,g$ ומכיוון ש- f,g קמורות, ולכן:

$th(x_1)+(1-t)h(x_2)\ge tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\ge f(tx_1+(1-t)x_2)$, ובאותו אופן עבור g.

שאלה 6:

א. הוכיחו כי אם f גזירה פעמיים ברציפות בקטע סגור, אז בקטע זה ניתן לרשום את f כהפרש של שתי פונקציות קמורות.

רמז: השתמשו בכך שהנגזרת השניה רציפה בקטע הסגור.

f'' רציפה בקטע סגור, לכן קיים $M \geq 0$ כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע (כלומר $-M \leq f''(x) \leq M$).

נרשום $f(x) = (f(x) + Mx^2) - Mx^2$. ברור כי Mx^2 פונקציה קמורה, נראה כי גם $f(x) + Mx^2$ פונקציה קמורה: זו פונקציה הגזירה פעמיים ברציפות, ולכן נוכל לבדוק קמירות ע״י הנגזרת השניה, שמקיימת: $(f(x) + Mx^2)'' = f''(x) + 2M \geq -M + 2M = M \geq 0$, כלומר זו אכן פונקציה קמורה.

ב. תהי f פונקציה זוגית, קמורה ושאינה קבועה. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(זהירות! לא נתון כי f גזירה, אפילו לא פעם אחת!)

f אינה קבועה, לכן קיימים $x_1 < x_2$ כך ש- $f(x_1) \neq f(x_2)$. נוכל להניח כי $f(x_1) < f(x_2)$, כי אם לא, נסתכל על $-x_2 < -x_1$, והם מקיימים $f(-x_2) < f(-x_1)$ (כי f זוגית).

מלמת השיפועים, לכל $x > x_2$ מתקיים: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$. נסמן $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, אז $m > 0$, ולכל $x > x_2$, $f(x) \geq f(x_1) + m(x - x_1)$. אגף ימין שואף ל- ∞, ולכן מכלל הפיצה גם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

שאלה 7:

חקרו את הפונקציה $f(x) = \left((x-7)(x+4)\right)^{\frac{1}{2}}$ ושרטטו את גרף הפונקציה.

תחום הגדרה: $x \leq -4$, $x \geq 7$, שורשים: $x = 7$, $x = -4$. אין אסימפטוטות אנכיות או אופקיות, נקודות מינימום גלובליות הן 7 , -4 שם הפונקציה מקבלת 0, הפונקציה קעורה בכל תחום ההגדרה שלה, אסימפטוטות משופעות: $x - \frac{3}{2}$ כאשר $x \to \infty$, $-x - \frac{3}{2}$ כאשר $x \to -\infty$.