קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 7

תאריך הגשה: יום שלישי, 10/6/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

תהי $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, המקיימת כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)f(y)$. הראו כי קיים $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל x, $f(x)=a^x$.

הדרכה: הראו תחילה כי הטענה מתקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל x מהצורה $x=\frac{1}{n}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו. לאחר מכן הסיקו את הטענה לכל x רציונלי ומכאן לכל x ממשי.

נסמן $a=f(1)$. מהנתון ניתן להראות באינדוקציה כי לכל $x_1,x_2,\cdots,x_n$ מתקיים:
$f(x_1+x_2+\cdots x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$. לכן, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$f(n)=f(1+1+\cdots 1)=f(1)\cdot f(1)\cdot\cdots\cdot f(1)=\left(f(1)\right)^n=a^n$. בנוסף, לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$a=f(1)=f\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots\frac{1}{m}\right)=\left(f\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$, ולכן: $a^{\frac{1}{m}}=f\left(\frac{1}{m}\right)$. לכל $q\in\mathbb{Q}$ נרשום $q=\frac{m}{n}$, ואז:
$f(q)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\frac{1}{n}\right)=\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=a^q$, כלומר הטענה מתקיימת לכל מס׳ רציונלי. לסיום, יהי $r\in\mathbb{R}$. נבחר סדרה $q_n\in\mathbb{Q}$ המקיימת $q_n\to r$, אז מרציפות f ומהוכחת הטענה עבור רציונלים נקבל:
$f(r)=f(\lim q_n)=\lim f(q_n)=\lim a^{q_n}=a^r$.

שאלה 2:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $|f(x)+x^3|\le x^2$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הראו כי f היא על.

פירוק אי-השוויון בצורה מפורשת נותן: $-x^3-x^2\le f(x)\le x^2-x^3$. מתקיים שאגף ימין שואף ל- $-\infty$ כאשר $x\to\infty$, ולכן מפיצה $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$. באופן דומה מהסתכלות על אגף שמאל נקבל $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$. נראה כי f על: יהי $\lambda\in\mathbb{R}$. מהגבולות שמצאנו, קיים $x_1<0$ כך שלכל $x<x_1$, $f(x)>\lambda$, וקיים $x_2>0$ כך שלכל $x>x_2$, $f(x)<\lambda$.
נסתכל על הקטע $[x_1-1,x_2+1]$: בקטע זה מתקיימים תנאי משפט ערה״ב, וגם $f(x_1-1)>\lambda$, $f(x_2+1)<\lambda$, ולכן ממשפט ערה״ב נקבל כי קיים $c\in(x_1-1,x_2+1)$ כך ש- $f(c)=\lambda$.

שאלה 3:

תהי $f\ :[a,b]\to[a,b]$ מונוטונית עולה. הראו כי קיימת ל- f נקודת שבת, כלומר: קיים $x_0\in[a,b]$ כך ש- $f(x_0)=x_0$.

הדרכה: השתמשו בטכניקה המשמשת להוכחת משפט ערך הביניים. שימו לב כי f אינה בהכרח רציפה!

אם $f(a)=a$ או $f(b)=b$ סיימנו. אחרת, בהכרח $f(b)<b$, $f(a)>a$. נסתכל על $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$: אם $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{a+b}{2}$, סיימנו. אם לא, נבדוק את $f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a+b}{2}$: אם גודל זה חיובי (כלומר, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{a+b}{2}$), נסמן $b_1=b$, $a_1=\frac{a+b}{2}$. אם גודל זה שלילי, נסמן $b_1=\frac{a+b}{2}$, $a_1=a$. בשלב הבא, נסתכל על $\frac{a_1+b_1}{2}$: אם מתקיים $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=\frac{a_1+b_1}{2}$ סיימנו, ואם לא, נבחר את הקטע הבא $[a_2,b_2]$ כך שאחת מנקודות הקצה שלו היא $\frac{a_1+b_1}{2}$, והשניה היא אחת מתוך a_1, b_1 עבורה הסימן של $f(x)-x$ הפוך מהסימן בנקודה $\frac{a_1+b_1}{2}$. נמשיך כך, עד שנמצא בשלב כלשהי נקודה מהצורה $\frac{a_n+b_n}{2}$ שהיא נקודת שבת של f, או שנקבל סדרה אינסופית של קטעים סגורים $\{[a_n,b_n]\}$ המקיימים לכל n כי $f(a_n)>a_n$ וגם $f(b_n)<b_n$.

קטעים אלו מקיימים בדיוק את תנאי הלמה של קנטור, ולכן בחיתוך של כל הקטעים האלו נמצאת נקודה יחידה x_0, שמקיימת $x_0=\lim a_n=\lim b_n$. מכיוון ש- f מונוטונית עולה, קיימים לה הגבולות החד״צ בכל נקודה, בפרט ב- x_0, ומכיוון ש- a_n היא סדרה מונוטונית עולה נקבל כי הסדרה $f(a_n)$ היא סדרה מתכנסת, המתכנסת ל- $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$, ומקיימת $\lim f(a_n)\geq \lim a_n=x_0$. באותו אופן נקבל עבור הסדרה המונוטונית היורדת b_n כי מתקיים $\lim f(b_n)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ וגם $\lim f(b_n)\leq \lim b_n=x_0$. ממונוטוניות f והעובדה כי $a_n<b_n$ לכל n נקבל גם כי $\lim f(a_n)\leq \lim f(b_n)$. בסה״כ קיבלנו אם כן: $x_0\leq \lim f(a_n)\leq \lim f(b_n)\leq x_0$, כלומר $x_0\leq \lim_{x\to x_0^-}f(x)\leq \lim_{x\to x_0^+}f(x)\leq x_0$, ולכן שני הגבולות החד״צ האלו קיימים ושווים ל- x_0, ולכן $\lim_{x\to x_0}f(x)=x_0$. אבל, ממונוטוניות f נקבל גם כי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)\leq f(x_0)\leq \lim_{x\to x_0^+}f(x)$, לכן מתקיים גם $f(x_0)=x_0$, כלומר x_0 זו היא נקודת השבת שחיפשנו.

שאלה 4:

הוכיחו כי לכל $\alpha<-1$ קיים פתרון למשוואה $x^2+\cos x+\alpha=0$. הסיקו כי הפונקציה $f(x)=x^2+\cos x$ היא על $(1,\infty)$.

יהי $\alpha<-1$. נגדיר $g(x)=x^2+\cos x+\alpha$. מתקיים: $g(0)=1+\alpha<0$, ו- $g(1-\alpha)=(1-\alpha)^2+\cos(1-\alpha)+\alpha=1-\alpha+\alpha^2+\cos(1-\alpha)\geq -\alpha+\alpha^2>2>0$. g רציפה ב- $[0,1-\alpha]$, ולכן ממשפט ערה״ב נקבל כי קיימת נק׳ ביניים $c\in(0,1-\alpha)$ המקיימת $g(c)=0$.

ע״י העברת אגפים נקבל כי לכל $\beta>1$ קיים פתרון למשוואה $x^2+\cos x=\beta$, כלומר קיימת $x_\beta\in\mathbb{R}$ המקיימת $f(x_\beta)=\beta$, ולכן f על $(1,\infty)$.

שאלה 5:

א. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$, ותהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה. הראו כי f רציפה במ״ש ב- (a,b) אם ורק אם קיימים הגבולות החד צדדים $\lim_{x\to b^-}f(x)$, $\lim_{x\to a^+}f(x)$.

אם קיימים הגבולות החד״צ, אז ניתן להגדיר $\tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע״י: $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\lim_{x\to a^+}f(x) & x=a\\ f(x) & a<x<b\\ \lim_{x\to b^-}f(x) & x=b\end{cases}$.

$\tilde{f}$ רציפה בקטע הסגור ולכן רציפה שם במ״ש, ולכן בפרט רציפה במ״ש ב- (a,b), ולכן f רציפה במ״ש ב- (a,b).

בכיוון ההפוך, נניח כי f רצופה במ״ש. ראינו כי במקרה כזה ניתן להרחיב את f בצורה יחידה לפונקציה רציפה על $\overline{(a,b)}$, כלומר על $[a,b]$. כלומר קיימת $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה המקיימת $g|_{(a,b)}=f$. בפרט, $\lim_{(x\to a^+)} g(x)=g(a)$, ולכן $\lim_{(x\to a^+)} f(x)=g(a)$, ובפרט קיים הגבול החד״צ מימין ב- a. באותו אופן קיים גם הגבול החד״צ משמאל ב- b.

ניתן גם להראות את קיום הגבול בצורה ישירה ע״י שנסתכל על סדרה $a<x_n\to a$. $\{x_n\}$ מתכנסת, בפרט קושי, ולכן $\{f(x_n)\}$ גם היא סדרת קושי (כי רציפה במ״ש מעבירה סדרות קושי לסדרות קושי), ולכן קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. בשלב הבא יש להראות כי לכל סדרה $a<x_n\to a$ כנ״ל, הסדרה $\{f(x_n)\}$ מתכנסת לאותו הגבול, ולכן קיים הגבול החד״צ ע״י קריטריון היינה.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיימים וסופיים. הראו כי f רציפה במ״ש.

יהי $\varepsilon>0$. נסמן $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L_-$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=L_+$. מתנאי קושי, קיים $x_2>0$ כך שלכל $x,y>x_2$, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, ובאופן דומה קיים $x_1<0$ כך שלכל $x,y<x_1$, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. בקטע $[x_1-1,x_2+1]$ f רציפה ולכן רציפה במ״ש. יהי $\delta'>0$ המתאים לרציפות במ״ש בקטע עבור ε, ונסמן $\delta=\min\{\delta',1\}$. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x-y|<\delta$. מכיוון ש- $\delta\le 1$, בהכרח x,y שייכים לפחות לאחד מהקטעים (x_2,∞) , $[x_1-1,x_2+1]$, $(-\infty,x_1)$, ולכן $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, ולכן f רציפה במ״ש.

שאלה 6:

הוכיחו ע״פ הגדרה כי $f(x)=x^2+\sin x$ רציפה במ״ש בכל קטע סגור.

יהיו $a<b\in\mathbb{R}$, נראה כי f רציפה במ״ש ב- $[a,b]$. יהי $\varepsilon>0$. נסמן $M=\max\{|a|,|b|\}$. נחשב:

$$|f(x)-f(y)|=|x^2+\sin x-y^2-\sin y|=\left|(x-y)(x+y)+2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

$$\le|x-y||x+y|+2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\le|x-y||x+y|+2\frac{|x-y|}{2}=|x-y|(|x+y|+1)$$

$$\le|x-y|(|x|+|y|+1)\le|x-y|(2M+1)$$

לכן נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2M+1}$, ואז לכל x,y המקיימים $|x-y|<\delta$, יתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

שאלה 7:

בדקו רציפות במ״ש במקרים הבאים, הוכיחו טענותיכם:

א. $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ב- $(0,\infty)$.

לפונקציה קיים הגבול החד״צ מימין ב- 0, וכן קיים גבול כאשר $x\to\infty$, כי

$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$, ולכן משאלה 5 נקבל כי הפונקציה רציפה במ״ש בכל $(0,\infty)$. (שימו לב כי שאלה 5 לכאורה מדברת לחוד על פונקציה המוגדרת על קטע או על כל הישר, אך למעשה

בהוכחת שני הסעיפים טיפלנו לחוד בכל אחד מקצוות הקטע, ולכן גם פונקציה כמו זו שיש לה גבול חד״צ בקצה אחד וגבול כאשר $x \to \infty$ היא רציפה במ״ש מאותם השיקולים).

ב. $x \sin x$ ב- $(0, a)$, כאשר $a > 0$.

הפונקציה רציפה ב- $[0, a]$, לכן רציפה שם במ״ש, ולכן בכל תת קטע, ובפרט ב- $(0, a)$.

ג. $x \sin x$ ב- $(0, \infty)$.

נסתכל על $y_n = 2\pi n$, $x_n = 2\pi n + \frac{1}{n}$. מתקיים כי $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$, ו-

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left(2\pi n + \frac{1}{n}\right)\sin\left(2\pi n + \frac{1}{n}\right) = \left(2\pi n + \frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 2\pi n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 2\pi \cdot 1 + 0 = 2\pi$$

נניח בשלילה כי $x\sin x$ רציפה במ״ש, ויהי $\delta > 0$ המתאים ל- $\varepsilon = \pi$ מהגדרת רציפות במ״ש. קיים N המקיים שלכל $n > N$, $|x_n - y_n| < \delta$, ואז מרציפות במ״ש אמור להתקיים $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon = \pi$ לכל $n > N$, אבל $|f(x_n) - f(y_n)| \to 2\pi$, ולכן בפרט $|f(x_n) - f(y_n)| > \pi$ החל ממקום מסוים – סתירה.

ד. $\frac{x}{1+e^x}$ ב- $\mathbb{R}$.

ניתן להראות כי הפונקציה היא ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ 2, ולכן היא רציפה במ״ש.