פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - גליון תרגילים מס' 1

להגשה: עד יום א', 12.11.00. שאלה עם $*$ היא שאלת רשות.

1. הוכיחו שאין σ-אלגברה אינסופית שהיא בת-מנייה (רמז: בהנתן σ-אלגברה אינסופית מיצאו בה סדרה של קבוצות זרות).
2. נתונה קבוצה X ומשפחה $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ של σ-אלגבראות של X. הוכיחו או הפריכו:
   א. $\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i$ היא σ-אלגברה.
   ב. $\bigcup_{i\in I}\mathcal{M}_i$ היא σ-אלגברה.
3. נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,\infty]$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$. הוכיחו שהטענות הבאות שקולות (וכל אחת מהן יכולה לשמש כהגדרה ל- $\alpha=\limsup_{n\to\infty}a_n$).
   א. $\alpha=\lim_{n\to\infty}b_n$ כאשר $b_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\dots\}$; $n=1,2,3,\dots$.
   ב. $\alpha=\inf\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כנ"ל.
   ג. α הוא סופרמום הגבולות החלקיים של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
   ד. α הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
   ה. $\alpha=\inf\ \{x\in\mathbb{R}:$ רק למספר סופי של n-ים $a_n\geq x\}$.
4. תהיינה נתונות הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[-\infty,\infty]$. הוכיחו:
   א. $\limsup_{n\to\infty}(-a_n)=-\liminf_{n\to\infty}a_n$.
   ב. $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leq\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n$. (בתנאי שהסכומים אינם מהצורה $\infty-\infty$).
5. נתונות הפונקציות $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, כאשר X מרחב מדיד ו- Y,Z מרחבים טופולוגיים. הוכיחו שאם f מדידה ו- g מדידה בורל אז $g\circ f$ מדידה.
6. נתונה הפונקציה $f:X\to\mathbb{R}$, כאשר X מרחב מדיד. הוכיחו או הפריכו:
   א. f מדידה $\iff$ f^2 מדידה.
   ב. f מדידה $\iff$ f^3 מדידה.
7. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית.
   א. הוכיחו של-f יש מספר בן-מנייה, לכל היותר, של נקודות אי-רציפות.
   ב. הוכיחו ש- f מדידה בורל.

$*$ 8. הוכיחו שעצמת ה-σ-אלגברה של בורל ב- $\mathbb{R}$ (או ב- $\mathbb{R}^n$) היא עצמת הרצף $\mathcal{C}$. (הדרכה: ר' שאלה 31 בע"מ 161 בספר של לינדנשטראוס).

בהצלחה.