תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 5 - פתרון חלקי

.2

א)

$$x \in f^{-1}[D \setminus E]$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) \in D \setminus E$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) \in D \\ f(x) \notin E \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x \in f^{-1}[D] \\ x \notin f^{-1}[E] \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in f^{-1}[D] \setminus f^{-1}[E]$$

ב) <u>כיוון 1</u>:

נתון: f חד-חד-ערכית,

רוצים להוכיח: לכל $A, B \subseteq X$ מתקיים $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$.

- נוכיח $f[A \setminus B] \supseteq f[A] \setminus f[B]$:

  יהי $y \in f[A] \setminus f[B]$.

  כלומר, $y \in f[A]$ ו- $y \notin f[B]$.

זה אומר: קיים $x \in A$ כך ש- $f(x)=y$ ו- x זה לא שייך ל- B (כי אם $x \in B$ ו- $y=f(x)$, אז $y \in f[B]$). כלומר $x \in A \setminus B$.. לכן $y \in f[A \setminus B]$.

(הערה: לא השתמשנו כאן בחד-חד-ערכיות של f ולכן ההכלה הזאת נכונה לכל פונקציה).

- נוכיח $f[A \setminus B] \subseteq f[A] \setminus f[B]$:

  יהי $y \in f[A \setminus B]$.

  זה אומר: קיים $x \in A \setminus B$ כך ש- $f(x)=y$.

  $x \in A$, ולכן $f(x) \in f[A]$ כלומר $y \in f[A]$.

  אילו היה $y \in f[B]$, זה היה אומר שקיים $x' \in B$ כך ש- $y=f(x')$.

  אבל f חד-חד-ערכית, לכן $f(x)=f(x') \Leftarrow x=x' \Leftarrow x \in B$ (כי $x' \in B$) בסתירה להגדרת x., לכן $y \notin f[B]$.

  קיבלנו $y \in f[A]$ ו- $y \notin f[B]$, כלומר $y \in f[A] \setminus f[B]$.

<u>כיוון 2</u>:

נתון: לכל $A, B\subseteq X$ מתקיים $f[A\setminus B]=f[A]\setminus f[B]$,

רוצים להוכיח: f חד-חד-ערכית.

נניח בדרך השלילה ש- f לא חד-חד-ערכית.

זה אומר: קיימים $x, x'\in X$ <u>שונים</u> כך ש- $f(x)=f(x')$.

נסמן: $y=f(x)=f(x')$ ונבחר: $A=\{x\}$, $B=\{x'\}$.

אז: $f[A]=f[B]=\{y\}$ ולכן $f[A]\setminus f[B]=\emptyset$,

ואילו $A\setminus B=\{x\}$ ולכן $f[A\setminus B]=\{y\}$.

כלומר עבור A ו- B שבחרנו, לא מתקיים $f[A\setminus B]=f[A]\setminus f[B]$, וזאת סתירה לנתון.

ג) <u>כיוון 1</u>:

נתון: f חד-חד-ערכית.

רוצים להוכיח: לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f[A^c]\subseteq (f[A])^c$.

יהי $y\in f[A^c]$.

זה אומר: קיים $x\in A^c$ כך ש- $f(x)=y$.

נניח (בדרך השלילה) ש- $y\in f[A]$.

אז קיים $x'\in A$ כך ש- $f(x')=y$.

לפי הנתון f חד-חד-ערכית, לכן $f(x)=f(x') \Leftarrow x=x'$.

אבל זה לא ייתכן כי $x\in A^c$ ו- $x'\in A$, כלומר קיבלנו סתירה.

לכן $y\notin f[A]$, כלומר $y\in (f[A])^c$.

<u>כיוון 2</u>:

נתון: לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f[A^c]\subseteq (f[A])^c$.

רוצים להוכיח: f חד-חד-ערכית.

נניח בדרך השלילה ש- f לא חד-חד-ערכית.

זה אומר: קיימים $x, x'\in X$ <u>שונים</u> כך ש- $f(x)=f(x')$.

נסמן: $y=f(x)=f(x')$ ונבחר: $A=\{x\}$.

אז: $x'\notin A \Leftarrow x'\in A^c \Leftarrow y\in f[A^c]$.

כמו כן, $x\in A \Leftarrow y\in f[A] \Leftarrow y\notin (f[A])^c$.

כלומר עבור A שבחרנו, $y\in f[A^c]$, ו- $y\notin (f[A])^c$, וזאת סתירה לנתון – $f[A^c]\subseteq (f[A])^c$.

ד) <u>כיוון 1</u>:

נתון: f על.

רוצים להוכיח: לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f[A^c]\supseteq (f[A])^c$.

יהי $y\in (f[A])^c$.

f היא על, לכן קיים $x\in X$ כך ש- $f(x)=y$.

x זה אינו שייך ל- A כי אחרת $y\in f[A]$.

כלומר $x\notin A$, לכן $x\in A^c$, לכן $y\in f[A^c]$.

<u>כיוון 2</u>:

נתון: לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f[A^c]\supseteq (f[A])^c$.

רוצים להוכיח: f על.

נניח בדרך השלילה ש- f לא על. כלומר קיים $y\in Y$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $f(x)\neq y$.

נבחר $A=X$.

אז $y\notin f[A] \Leftarrow y\in(f[A])^c$.

כמו כן, $y\notin f[A^c]$.

קיבלנו: $y\in(f[A])^c$ ו- $y\notin f[A^c]$ בסתירה לנתון $f[A^c]\supseteq (f[A])^c$.

.3

א) לפי הנתון, קיימות $f: A\to C$ ו- $g: B\to D$, שתיהן חח"ע ועל.

נגדיר $h: A\times B\to C\times D$ באופן הבא:

$(a,b)\mapsto (f(a),g(b))$.

<u>נוכיח ש- h היא על</u>:

יהי $(c,d)\in C\times D$.

f היא על ולכן קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=c$.

g היא על ולכן קיים $b\in B$ כך ש- $g(b)=d$.

עבור a ו- b אלה, $h(a,b)=(f(a),g(b))=(c,d)$ ו<u>לכן f היא על</u>.

<u>נוכיח ש- h חח"ע</u>:

נניח $h(a,b)=h(a',b')$.

מכאן, $(f(a),g(b))=(f(a'),g(b'))$.

לכן $f(a)=f(a')$ ו- $g(b)=g(b')$.

הפונקציות f ו- g חד-חד-ערביות, לכן $a=a'$ ו- $b=b'$.

מכאן $(a,b)=(a',b')$ – כלומר הוכחנו ש- <u>h חח"ע</u>.

בנינו פונקציה חח"ע ועל מ- $A\times B$ ל- $C\times D$, לכן קבוצות אלו שקולות-עוצמה.

ב) נגדיר $h: X\times X\to X^{\{0,1\}}$ באופן הבא:

$(x,y)\mapsto \{(0,x),(1,y)\}$.

הפונקציה הזאת היא חח"ע ועל (הבדיקה קלה), לכן הקבוצות שקולות-עוצמה.

ג) $P(X) \sim \{0, 1\}^X$ לכל קבוצה X.

נגדיר $h: P(X) \to \{0,1\}^X$ באופן הבא:

לכל $A \in P(X)$, נגדיר $h(A)$ להיות "הפונקציה האופיינית של A", כלומר $h(A)=\chi_A$ כאשר $\chi_A: X \to \{0, 1\}$ המוגדרת ע"י $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

<u>לדוגמא</u>: אם $X=\{1, 2, 3\}$, אז

$$h(\varnothing) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 0 \\ 3 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, h(\{1\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 0 \\ 3 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, h(\{2\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, h(\{3\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 0 \\ 3 \mapsto 1 \end{Bmatrix},$$

$$h(\{1,2\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 0 \end{Bmatrix}, h(\{1,3\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 0 \\ 3 \mapsto 1 \end{Bmatrix}, h(\{2,3\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 0 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 1 \end{Bmatrix}, h(\{1,2,3\}) = \begin{Bmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 1 \end{Bmatrix}$$

ד) הפונקציה $f: \{x \in \mathbb{Z}: 2|x\} \to \{x \in \mathbb{Z}: 2\nmid x\}$ המוגדרת ע"י

$$x \mapsto x+1$$

היא חד-חד-ערכית ועל, לכן הקבוצות שקולות-עוצמה.

ה) הפונקציה $f: \{x \in \mathbb{Z}: 5|x\} \to \{x \in \mathbb{Z}: 8|x\}$ המוגדרת ע"י

$$x \mapsto \frac{8}{5} \cdot x$$

היא חד-חד-ערכית ועל, לכן הקבוצות שקולות-עוצמה.

ו) ידוע ש- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

בנוסף, $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ ולכן, לפי מה שהוכחנו בסעיף א', $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

לסיכום, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

.4

א) $f: [1, 3] \to [4, 8]$

$$x \mapsto 2x+2$$

ב) נגדיר $f: [0, 1] \to (0, 1)$ באופן הבא:

$f(0)=1/2$

$f(1)=1/3$

$f(1/2)=1/4$

$f(1/3)=1/5$

...

(כלומר, לכל x מהצורה $1/n$ כש- n טבעי, מגדירים $f(1/n)=1/(n+2)$.)
ועבור $x \notin \{1/n: n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ נגדיר $f(x)=x$.
כלומר:

$$x \mapsto \begin{cases} x, & x \in (0,1] \setminus \{1/n : n \in N\} \\ 1, & x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2}, & x = 1/n, n \in N \end{cases}$$

ג) f: $[0, 1]\cup(2, 3] \to [0, 2]$

$$x \mapsto \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x-1, & x \in (2,3] \end{cases}$$

ד) f: $[0, 1]\cup[2, 3] \to [0, 2]$

$$x \mapsto \begin{cases} x-1, & x \in [2,3] \\ x, & x \in [0,1) \setminus \{1/n : n \in N\} \\ \dfrac{1}{n+1}, & x = 1/n, n \in N \end{cases}$$

ה) f: $[0, 2] \to [0, 1)\cup(2, 3]$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1, & x \in (1,2] \\ x, & x \in [0,1) \setminus \{1/n : n \in N\} \\ \dfrac{1}{n+1}, & x = 1/n, n \in N \end{cases}$$

ו)
$$f: [0, 1]\cup(2, 3] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}-1, & x\in(0,1]\setminus\{1/n : n\in N\} \\ 1/2, & x=0 \\ \frac{1}{n+2}, & x=1/n : n\in N \\ 1-\frac{1}{x-2}, & x\in(2,3] \end{cases}$$

ז)
$$f: [0, 1)\cup(1, 2] \to (3, +\infty)$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{2}, & x\in(0,1)\cup(1,2] \\ \frac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$$

.5

א) נניח (בדרך השלילה) ש- $\mathbb{Z} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.
זה אומר שקיימת פונקציה $\varphi: \mathbb{Z} \to \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ חד-חד-ערכית ועל.
לכל $x\in\mathbb{Z}$, $\varphi(x)$ זו פונקציה מ- $\mathbb{Z}$ ל- $\{0, 1\}$ – ולכן לכל $y\in\mathbb{Z}$, $(\varphi(x))(y)\in\{0, 1\}$.
נגדיר $f: \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ באופן הבא: $f(x)=1-(\varphi(x))(x)$.
מאחר ש- f היא איבר של $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, היא חייבת להיות בתמונה של φ (כי הנחנו ש- φ היא על $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$) .
זה אומר: קיים $\alpha\in\mathbb{Z}$ כך ש- $f=\varphi(\alpha)$.
אז לכל $x\in\mathbb{Z}$ מתקיים $f(x)=(\varphi(\alpha))(x)$.
ובפרט עבור $x=\alpha$ מתקיים $f(\alpha)=(\varphi(\alpha))(\alpha)$.
אבל לפי הגדרת f , $f(\alpha)=1-(\varphi(\alpha))(\alpha)$.
משתי השורות האחרונות נובע: $(\varphi(\alpha))(\alpha)=1-(\varphi(\alpha))(\alpha)$.
נסמן: $z=(\varphi(\alpha))(\alpha)$. z הוא איבר של $\{0, 1\}$, ומתקיים $z=1-z$.
וזה לא ייתכן: אין ב- $\{0, 1\}$ איבר שמקיים את השוויון הזה.
לכן לא קיים α כך ש- $f=\varphi(\alpha)$,
לכן f לא שייכת לתמונה של φ ,
לכן φ היא לא על, בסתירה להנחה.

ב) נניח (בדרך השלילה) ש- $(0, 1) \sim (0, 1)^{(0, 1)}$.
זה אומר שקיימת פונקציה $\varphi: (0, 1) \to (0, 1)^{(0, 1)}$ חד-חד-ערכית ועל.
לכל $x\in(0, 1)$, $\varphi(x)$ זו פונקציה מ- $(0, 1)$ ל- $\{0, 1\}$ –

ולכן לכל $y\in(0,1)$, $(\varphi(x))(y)\in(0,1)$.

נגדיר $f:(0,1)\to(0,1)$ באופן הבא: $f(x)=\frac{1}{2}\cdot(\varphi(x))(x)$.

מאחר ש- f היא איבר של $(0,1)^{(0,1)}$, היא חייבת להיות בתמונה של φ (כי הנחנו ש- φ היא על $(0,1)^{(0,1)}$) .

זה אומר: קיים $\alpha\in(0,1)$ כך ש- $f=\varphi(\alpha)$.

אז לכל $x\in(0,1)$ מתקיים $f(x)=(\varphi(\alpha))(x)$.

ובפרט עבור $x=\alpha$ מתקיים $f(\alpha)=(\varphi(\alpha))(\alpha)$.

אבל לפי הגדרת f , $f(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot(\varphi(\alpha))(\alpha)$.

משתי השורות האחרונות נובע: $(\varphi(\alpha))(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot(\varphi(\alpha))(\alpha)$.

נסמן: $z=(\varphi(\alpha))(\alpha)$. z הוא איבר של $(0,1)$, ומתקיים $z=\frac{1}{2}\cdot z$.

וזה לא ייתכן: אין ב- $(0,1)$ איבר שמקיים את השוויון הזה.

לכן לא קיים α כך ש- $f=\varphi(\alpha)$,

לכן f לא שייכת לתמונה של φ ,

לכן φ היא לא על, בסתירה להנחה.

ג) כידוע, $\mathbb{R}\sim(0,1)$.

אם $(0,1)\sim\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$, אז לפי הטרנזיטיביות של שקילות-עוצמה גם $\mathbb{R}\sim\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$.

אבל זה לא נכון – מוכיחים בשיטת האלכסון.

לכן $(0,1)\nsim\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$.

ד) רוצים להוכיח:

$\mathbb{N}$ איננה שקולת-עוצמה לקבוצה X של כל הפונקציות f מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ שמקיימות: $f(n)$ זוגי לכל n זוגי, ו- $f(n)$ אי-זוגי לכל n אי-זוגי.

(<u>לדוגמא</u>: הסדרה הבאה שייכת ל- X: $(5, 6, 1, 8, 3, 12, 7, 6, \ldots\ldots)$)

נניח (בדרך השלילה) ש- $X\sim\mathbb{N}$.

זה אומר שקיימת פונקציה $\varphi:\mathbb{N}\to X$ חד-חד-ערכית ועל.

לכל $x\in\mathbb{N}$, $\varphi(x)$ היא איבר של X, כלומר זו פונקציה מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ בעלת התכונה

$$\forall n\in N:\quad 2\,|\,(\varphi(x))(n)\Leftrightarrow 2\,|\,n$$

– ולכן לכל $y\in\mathbb{N}$, $(\varphi(x))(y)\in\mathbb{N}$.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $f(x)=(\varphi(x))(x)+2$.

אם x זוגי, אז $(\varphi(x))(x)$ זוגי (כי $\varphi(x)\in X$), לכן גם $f(x)$ זוגי.

אם x אי-זוגי, אז $(\varphi(x))(x)$ אי-זוגי (כי $\varphi(x)\in X$) , לכן גם $f(x)$ אי-זוגי.

לכן גם $f\in X$.

מאחר ש- f היא איבר של X , היא חייבת להיות בתמונה של φ (כי הנחנו ש- φ היא על X) .

זה אומר: קיים $\alpha\in\mathbb{N}$ כך ש- $f=\varphi(\alpha)$.

אז לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(x)=(\varphi(\alpha))(x)$.

ובפרט עבור $x=\alpha$ מתקיים $f(\alpha)=(\varphi(\alpha))(\alpha)$.

אבל לפי הגדרת f , $f(\alpha)=(\varphi(\alpha))(\alpha)+2$.

משתי השורות האחרונות נובע: $(\varphi(\alpha))(\alpha)=(\varphi(\alpha))(\alpha)+2$.

נסמן: $z=(\varphi(\alpha))(\alpha)$. z הוא איבר של $\mathbb{N}$, ומתקיים $z=z+2$.

וזה לא ייתכן: אין ב- $\mathbb{N}$ איבר שמקיים את השוויון הזה.

לכן לא קיים α כך ש- $f=\varphi(\alpha)$,

לכן f לא שייכת לתמונה של φ ,

לכן φ היא לא על, בסתירה להנחה.