תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 8
פתרונות

<u>תרגיל 1.</u>
לקוחה צריכה לבחור באחת משתי הקופות ביציאתה מסופרמרקט: הקופה מס' 1 פנויה, והקופאי שם יערוך את החשבון בזמן אקספוננציאלי עם פרמטר $\lambda = 1$; הקופאית בקופה מס' 2 הסמוכה זריזה יותר, אצלה זה ייקח זמן אקספוננציאלי עם פרמטר $\lambda = 2$, אלא שזה עתה התחילה לטפל בקונה אחר (עם קניה באותו גודל). שני הקופאים עובדים בלי תלות האחד בשני. מהי ההסתברות שבקופה מס' 2 זה יילך מהר יותר (כולל ההמתנה בתור)?

<u>רמז.</u>
יהיו X ו- Y שני מ"מ ב"ת בעלי צפיפות $f_X(x)$ ו- $f_Y(y)$ בהתאמה. נגדיר מ"מ $Z = X + Y$. אזי

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y) dy dx.$$

לכן

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

הנוסחה לצפיפות של סכום של שני מ"מ ב"ת נקראת נוסחת הקונוולוציה, לפעמים משתמשים בסימון $f_Z = f_X * f_Y$.

<u>פתרון</u>
נגדיר מ"א
X : הזמן שייקח לה בקופה 1; $\quad X \sim \mathrm{Exp}(1)$

Y : הזמן שייקח לה בקופה 2; $Y \sim \mathrm{Exp}(2) * \mathrm{Exp}(2)$ (קונוולוציה)

$$f_Y(y) = \int_{\underset{\text{כי } u>0}{0}}^{\overset{\text{כי } y-u>0}{y}} 4e^{-2u}e^{-2(y-u)}\,du = 4y\,e^{-2y} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f_{X,Y}(x,y) = 4e^{-x}ye^{-2y}, \qquad x,y>0 \qquad \Longrightarrow$$

$$P(Y<X) = 4\int_0^\infty ye^{-2y}\underbrace{\left(\int_y^\infty e^{-x}\,dx\right)}_{e^{-y}}dy = \frac{4}{3}\underbrace{\int_0^\infty 3ye^{-3y}\,dy}_{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

<u>תרגיל 2.</u>

התרגיל הבא הוא יחסית קשה ובטוח לא יככל במבחן.

נתונה הצפיפות $f_{X,Y}(x,y) = Ce^{-\frac{1}{2}(2x^2+2xy+y^2+2x+2y)}$, כאשר C קבוע מתאים .

(א) חשבו את מקדם המתאם $\rho_{X,Y}$.

(ב) אם $U = 4X + \alpha Y$ ו- X בלתי תלויים, חשבו את $P(U+2>0)$.

<u>פתרון</u>

(א) (X,Y) מהווה וקטור גאוסי. התבנית הריבועית באקספוננט של הצפיפות נתונה ע"י המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן מטריצת הקווריאנס היא $\Sigma = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ובפרט $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \rho_{X,Y}$.

(ב) הוקטור (X,U) הוא טרנספורמציה לינארית של (X,Y), ובתור שכזה וקטור גאוסי בעצמו. אם כן, אם U ו- X יהיו בלתי מתואמים, יהיו גם בלתי תלויים.

$$\mathrm{cov}(U,X) = \mathrm{cov}(4X+\alpha Y\ ,\ X) = 4\sigma_X^2 + \alpha\sigma_{X,Y} = 4-\alpha$$

ולכן U ו- X יהיו בלתי תלויים כאשר $\alpha = 4$.

כעת, U משתנה גאוסי ועלינו למצוא את התוחלת והשונות שלו. לצורך זה תחילה יש לחשב את EX ואת EY, אותן נמצא בתור נקודת המקסימום של החזקה שבצפיפות המשותפת. נקבל את המשוואות

$$\left.\begin{array}{l} 4x+2y+2=0 \\ 2x+2y+2=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\mu_X,\mu_Y) = (0,-1)$$

ולכן $EU = 4 \times 0 + 4 \times (-1) = -4$ ו-

$$\sigma_U^2 = 16\sigma_{X+Y}^2 = 16(\sigma_X^2 + 2\sigma_{X,Y} + \sigma_Y^2) = 16 \ .$$

לבסוף, ותוך שימוש במשתנה עזר $Z \sim N(0,1)$, נקבל

$$P(U > -2) = P\left(Z > \frac{-2+4}{4}\right) = \boxed{1 - \Phi(0.5) \approx 0.308} \ .$$

<u>תרגיל 3</u>.
הוכיחו כי אם קיים t_0 עבורו

$$\left|Ee^{iXt_0}\right| = 1$$

אזי מ"א X הנו משתנה סריג, כלומר קיימים a, b ממשיים כך ש-

$$P\big(X \in \{na + b, \ n \in \mathbb{N}\}\big) = 1.$$

<u>פתרון</u>

$$\left|Ee^{iXt_0}\right| = 1 \Longleftrightarrow \big(E\cos(Xt_0)\big)^2 + \big(E\sin(Xt_0)\big)^2 = 1.$$

לפי אי שוויון קושי-שוורץ (או אי שוויון ינסן):

$$\begin{aligned} \big(E\cos(Xt_0)\big)^2 &\leq E\cos^2(Xt_0), \\ \big(E\sin(Xt_0)\big)^2 &\leq E\sin^2(Xt_0), \end{aligned}$$

כלומר $\left|Ee^{iXt_0}\right| = 1$ אם ורק אם

$$\begin{aligned} \big(E\cos(Xt_0)\big)^2 &= E\cos^2(Xt_0), \\ \big(E\sin(Xt_0)\big)^2 &= E\sin^2(Xt_0), \end{aligned}$$

כלומר

$$VAR(\cos(Xt_0)) = VAR(\sin(Xt_0)) = 0.$$

נלמד בהרצאות כי מכאן נובע שמשתנים $\cos(Xt_0)$ ו- $\sin(Xt_0)$ הם קבועים בהסתברות אחת. מכאן נובע כי:

$$P(Xt_0 = 2\pi n + \theta) = 1,$$

כאשר $\theta = \pm \arccos(Xt_0)$.

תרגיל 4.

יהי T אורך החיים של מערכת מסויימת. נניח כ י $F_T(t) = 1 - e^{-G(t)}$, $t > 0$ ופונקציה $G(t)$ גזירה, בעלת הנגזרת $g(x) = G'(x)$, כלומר $G(t) = \int_0^t g(x)dx$. הוכיחו כי עבור כל $s, t > 0$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\text{if } g(x) \text{ is strictly decreasing then } P(X > s + t | X > s) > P(X > t), \\
&\text{if } g(x) \text{ is a constant then } P(X > s + t | X > s) = P(X > t), \\
&\text{if } g(x) \text{ is strictly increasing then } P(X > s + t | X > s) < P(X > t).
\end{aligned}$$

<u>פתרון</u> הטענה נובעת מכך ש- $P(X > t) = \exp\left\{-\int\limits_0^t g(t)dt\right\}$ ו-

$$\begin{aligned}
P(X > s + t | X > s) &= \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \\
&= \frac{\exp\{-G(s+t)\}}{\exp\{-G(s)\}} = \frac{\exp\left\{-\int\limits_0^{s+t} g(t)dt\right\}}{\exp\left\{-\int\limits_0^{s} g(t)dt\right\}} = \\
&= \exp\left\{-\int\limits_s^{s+t} g(t)dt\right\}.
\end{aligned}$$

לדוגמה, אם $g(t)$ היא פונקציה עולה אזי

$$\begin{aligned}
P(X > s + t | X > s) &= \exp\left\{-\int\limits_s^{s+t} g(t)dt\right\} < \exp\left\{-\int\limits_0^{t} g(t)dt\right\} = \\
&= P(X > t),
\end{aligned}$$

דהיינו המערכת מתעייפת עם הזמן.

תרגיל 5.
יהי $X \sim U(-3,5)$. נגדיר

$$Y = \begin{cases} -2 & \text{if} \quad X \leq -2, \\ X & \text{if} \quad -2 < X \leq 4, \\ 4 & \text{if} \quad X > 4. \end{cases}$$

חשבו את $VAR(Y)$.

פתרון
נגדיר:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \notin [-3,5] \\ -2 & \text{if} \quad x \in [-3,2) \\ x & \text{if} \quad x \in [-2,4) \\ 4 & \text{if} \quad x \in [4,5]. \end{cases} \\ h(x) &= g^2(x) \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx = \int_{-3}^{-2} (-2)\frac{1}{8} dx + \int_{-2}^{4} x\frac{1}{8} dx + \int_{4}^{5} 4\frac{1}{8} dx = \\ &= -\frac{2}{4} + \frac{1}{16} \cdot \left(4^2 - (-2)^2\right) + \frac{4}{8} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EY^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_x(x) dx = \int_{-3}^{-2} 4\frac{1}{8} dx + \int_{-2}^{4} x^2\frac{1}{8} dx + \int_{4}^{5} 16\frac{1}{8} dx = \\ &= \frac{4}{8} + \frac{1}{24} \cdot \left(4^3 - (-2)^3\right) + \frac{16}{8} = \frac{11}{2}, \end{aligned}$$

$$VAR(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{11}{2} - 1 = \frac{9}{2}.$$

תרגיל 6.

התרגיל הבא מתאר מודל לתהליך התפשתות חיידקים. התרגיל הוא קשה ולכן בטוח לא יככל במבחן. המטרה היא להמחיש אחד השמושים של פונקציות יוצרות מומנטים.

נסמן ב- Z_n מספר החיידקים בזמן n, כאשר $n = 0, 1, 2, \ldots$. נניח כי $Z_0 = 1$ וש- Z_{n+1} מהווה סכום של Z_n מ"מ ב"ת X_i, כל אחד בעל החוק $P(X_k = 0) = P(X_k = 2) = 1/2$. במלים אחרות, כל שנייה כל חיידק החיי באותו זמן מת בהסתברות חצי או מתפצל לשנים, גם זה בהסתברות חצי. הנחת האי תלות משקפת את העובדה כי גורלו של חיידק אחד אינו תלוי בגורלם של האחרים.

(א) נסמן ב- $f(s)$ את פונקצית יוצרת מומנטים של מ"מ X_k, $f(s) = Es^{X_k}$, $s \in [0,1]$. וידאו כי $f(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$.

(ב) לפי הנתון $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_k$. השתמשו בזאת כדי להוכיח כי $E(Z_n) = 1$ לכל n.

(ג) נסמן ב- $\Phi_n(s)$ את פונקצית יוצרת מומנטים של מ"מ Z_n, $\Phi_n(s) = Es^{Z_n}$, $s \in [0,1]$. השתמשו בנוסחה $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_k$ כדי להוכיח כי

$$\Phi_{n+1}(s) = E\left[E\left(s^{Z_{n+1}}|Z_n\right)\right] = E\left[(f(s))^{Z_n}\right] = \Phi_n(f(s)).$$

הסיקו מכאן כי

$$\Phi_n(s) = f(f(\ldots f(f(s))\ldots)),$$

כאשר פונקציה f מופעלת בנוסחה האחרונה בדיוק n פעמים.

(ד) לפי התוצאה של הסעיף הקודם

$$\Phi_{n+1}(s) = f\left(\Phi_n(s)\right).$$

הסיקו מכאן ומסעיף (א) כי עבור כל $s \in [0,1]$, $\Phi_n(s)$ היא סדרה עולה. מכיוון שהסדרה חסומה על ידי 1, מכאן נובע כי לכל s קיים גבול $\Phi(s) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(s)$. הוכיחו כי $\Phi(s) \equiv 1$.

<u>דיון</u>

הוכחנו כי פונקציה יוצרת מומנטים של Z_n שואפת לפונקציה יוצרת מומנטים של קבוע 0. בדיוק כמו בהוכחות של משפט הגבול המרכזי ושל חוק החלש של המספרים הגדולים (דרך פונקציות אופייניות) מזה משתמע כי Z_n עצמו שואף לאפס במובן מסויים. ניתן להוכיח שההתכנסות הזאת היא במובן החזק ביותר: $P\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\right) = 1$. וזאת למרות ש- $E(Z_n) \equiv 1$!

<u>פתרון</u>

(א)

$$f(s) = Es^{X_k} = s^0 P(X_k = 0) + s^2 P(X_k = 2) = \frac{1}{2}(1 + s^2).$$

(ב)

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}) &= E\big(E\left(Z_{n+1}|Z_n\right)\big) = E\left(E\left(\sum_{k=1}^{Z_n} X_k \;\Big|\; Z_n\right)\right) = \\ &= E\left(Z_n E(X_1)\right) = E\left(Z_n\right)\cdot E(X_1) = E(Z_n) = \ldots = \\ &= E(Z_0) = 1. \end{aligned}$$

(ג) נסמן ב- $\Phi_n(s)$ את פונקצית יוצרת מומנטים של מ"מ Z_n, $\Phi_n(s) = Es^{Z_n}$, $s \in [0,1]$. השתמשו בנוסחה $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_k$ כדי להוכיח כי

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(s) &= E\left[E\left(s^{Z_{n+1}}|Z_n\right)\right] = E\left[E\left(s^{\sum_{k=1}^{Z_n} X_k} \;\Big|\; Z_n\right)\right] = \\ &= E\left[\prod_{k=1}^{Z_n} E\left(s^{X_k}\right)\right] = E\left[(f(s))^{Z_n}\right] = \Phi_n(f(s)). \end{aligned}$$

באינדוקציה:

$$\Phi_n(s) = \underbrace{f(f(\ldots f(f(s))\ldots))}_{n \text{ פעמים}}.$$

(ד) לפי התוצאה של הסעיף הקודם

$$\Phi_{n+1}(s) = f\left(\Phi_n(s)\right).$$

לכן

$$\Phi_{n+1}(s) = f\left(\Phi_n(s)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi_n(s)^2\right) \geq \Phi_n(s),$$

כלומר $\Phi_n(s)$ היא סדרה עולה. הסדרה חסומה על ידי 1. מכאן נובע כי לכל s קיים גבול $\Phi(s) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(s)$. הגבול צריך להיות נקודת השבת של משוואת הנסיגה: נעבור בגבול במשוואה

$$\Phi_{n+1}(s) = f\left(\Phi_n(s)\right)$$

ונקבל (f רציפה)

$$\Phi(s) = f(\Phi(s)) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi(s)^2\right),$$

כלומר $\Phi(s) = 1$ לכל $s \in [0,1]$.