טכניון - מכון טכנולוגי לישראל **הפקולטה למתמטיקה**

חשבון אינפי' 2 104281

גליון תרגילים מספר 12

תרגילים בנושא התכנסות במידה שווה של אינטגרל פרמטרי

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי סמסטר אביב תשנ"ט

1. הסבר את התופעות הבאות:

(א) היווכח בכך שלא תמיד ניתן להחליף את סדר ה-lim וה-$\int_0^\infty$ במקרה הבא:

$$\int_0^\infty 2xye^{-xy^2}dy = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(ב) היווכח בכך שלא תמיד ניתן להחליף את סדר האינטגרציה:

$$f(x,y) = (2y - 2xy^3)e^{-xy^2}$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^\infty f(x,y)dx\right] dy = 0 \ ; \ \int_0^\infty \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right] dx = 1$$

(ג) היווכח בכך שלא תמיד יש משמעות לגזירה תחת סימן האינטגרל. למשל - $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{y}dy$.

(ד) היווכח בכך שגזירה תחת סימן האינטגרל יכולה לתת תוצאה שגויה. למשל - $F(x) = \int_0^\infty x^3e^{-x^2y}dy$. מתקיים $F(x) \equiv x$, ולכן $F'(x) \equiv 1$. גזירה תחת סימן האינטגרל מניבה פונקציה לא רציפה.

2. נתון האינטגרל

$$f(x) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\cos tx dt$$

(א) הראה שהאינטגרל $f(x)$ מתכנס במידה שווה לכל $x \in R$.

(ב) ע"י אינטגרציה בחלקים הראה כי $f(x)$ מקיימת את המשוואה $2f'(x) + xf(x) = 0$.

(ג) נתון כי $f(0) = \sqrt{\pi}$. הראה כי כל פונקציה מן הצורה $f(x) = Ce^{-x^2/4}$ פותרת את המשוואה הדיפרנציאלית בסעיף ב'. מהו הקבוע C הדרוש?

3. הוכח:

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{r^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|r|}$$

רמז: פתרון המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה $y'(x) = -2y(x)$ הוא $y(x) = ke^{-2x}$ כאשר k פרמטר כלשהו. למשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל מגיעים בעזרת חילוף משתנה באינטגרל.

4. הוכח שהאינטגרלים הבאים מתכנסים במידה שווה בתחומים הרשומים ($\varepsilon > 0$):

(א) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+y^2}dy, \quad \forall x$

(ב) $\int_0^\infty \frac{e^{-xy}\sin ay}{y}dy, \ x = x_0 > 0, \ \forall a$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in (-\infty, 1-\varepsilon]$ (ג)

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}, \quad p \in [1+\varepsilon, \infty)$ (ד)

$\int_0^\infty e^{-ax} dx, \quad a \in [\varepsilon, \infty)$ (ה)

$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{ax^2} dx, \quad a \in [\varepsilon, \infty)$ (ו)

$\int_0^\infty x^2 y e^{-xy} dy, \quad x \in [\varepsilon, \infty)$ (ז)

$\int_0^\infty y^{17/5} e^{-xy^2} dy, \quad x \in [\varepsilon, \infty)$ (ח)

5. הוכח את הנוסחאות

$$\int_0^\infty e^{-px} \sin qx dx = \frac{q}{p^2+q^2}, \quad p > 0 \tag{1}$$

$$\int_0^\infty e^{-px} \cos qx dx = \frac{p}{p^2+q^2}, \quad p > 0 \tag{2}$$

בצע אינטגרציה $\int_a^b dq$ והוכח ש-

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}, \quad p > 0 \tag{3}$$

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} dx = \arctan \frac{b}{p} - \arctan \frac{a}{p} \tag{4}$$

לסיכום, הוכח ש-

$$\int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin ax}{x} = \arctan \frac{a}{p}, \quad p > 0. \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx = \ln \left| \frac{a}{b} \right|, \quad ab \neq 0 \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a < 0 \end{cases} \tag{7}$$

6. הוכח שהאינטגרל

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

מתכנס במידה שווה עבור $[\varepsilon, b]$ אבל לא במידה שווה עבור $[\varepsilon, \infty)$ או $(0, b]$, $0 < b < \infty$.

7. הוכח כי

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+y^2} dy = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x, \quad \forall x$$

והאינטגרל מתכנס במידה שווה בכל תחום חסום. פונקצית sign איננה רציפה - האם התוצאה מפתיעה? מדוע?

8. להלן דרך נוספת לחישוב הסכום $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$:

(א) קבע מה צריכים להיות הקבועים הממשיים α,β כך שלכל n טבעי יתקיים

$$\int_0^\pi (\alpha t^2+\beta t)\cos nt dt=\frac{1}{n^2}$$

(ב) חשב באמצעות סעיף א' את הסכום $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$

9. תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. הוכח כי:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\int_0^1 x^n f(x)dx\right\}=f(1)$$

הדרכה:

(א) מספיק להניח ש-$f(1)=0$ (מדוע?)

(ב) יהי h כזה ש-$|f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}$ עבור $x\in(1-h,1)$. הראה ש-

$$\left|n\int_{1-h}^1 x^n f(x)dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2},\quad \left|n\int_0^{1-h} x^n f(x)dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

10. תהי $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[1,e]$. הוכח שהסדרה $I_n=n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)dx$ מתכנסת ל-$\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$.

11. הוכח (נמק כל שלב !)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx=1$$

12. תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,a]$, $a>0$, וכך ש-$f(0)=1$ ו-$|f(x)|<1$ $\forall x\in(0,a]$.

(א) הוכח כי לכל $h\in(0,a]$ מתקיים שהסדרה $J_n(h)=n\int_h^a f^n(x)dx$ מתכנסת לאפס כאשר $n\to\infty$.

(ב) מניחים בנוסף שלפונקציה f יש נגזרת מימין ב-0: $f'(0+)=k$, $k<0$. הוכח כי הסדרה $I_n=n\int_0^a f^n(x)dx$ מתכנסת ל-$-\frac{1}{k}$ כאשר $n\to\infty$.

הדרכה לסעיף ב': לכל זוג קבועים $\alpha<k<\beta<0$ מראים שקיים קבוע $h>0$ כך שלכל $x\in[0,h]$ מתקיים $e^{\alpha x}\le f(x)\le e^{\beta x}$, ומכאן מקבלים חסמים על $\limsup I_n,\liminf I_n$.

13. חשב באמצעות תרגיל 12 את הגבולות של הסדרות הבאות:

(א) $S_n=\int_0^1\frac{ndx}{(1+x+x^2)^n}$

(ב) $T_n=\int_0^n e^{-2x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx$

14. הוכח את הנוסחאות הבאות:

(א)

$$\int_0^\infty\frac{e^{-a^2x^2}-e^{b^2x^2}}{x^2}dx=\sqrt{\pi}(b-a),\quad 0\le a<b$$

רמז: אינטגרציה ל-$\alpha>0$ $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2x^2}dx,$

(ב) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ רמז: אינטגרציה בחלקים.

(ג) $\int_0^{\pi/2} x \cot x dx = \frac{1}{2}\pi \ln 2$ רמז: אינטגרציה בחלקים.

(ד) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}|\alpha|$ רמז: אינטגרציה בחלקים.

(ה) $\int_0^\infty \frac{1-\cos \alpha x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}|\alpha|$ רמז: זהות.

(ו)

$$\int_0^\infty e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} & a \geq 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{4a} & a \leq 0 \end{cases}$$

(ז)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{8}\pi \ln 2$$

רמז: רשום $x = \tan\theta$ וקבל 3 אינטגרלים ע"י שימוש בזהות $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$

(ח)

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|, \quad |\alpha| \neq 1$$

(ט)

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cos x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \alpha > 1 \\ \frac{\pi}{4} & \alpha = 1 \\ 0 & -1 < \alpha < 1 \\ -\frac{\pi}{4} & \alpha = -1 \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha < -1 \end{cases}$$

(י)

$$y(r) = \int_0^\infty \frac{\cos rx}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\pi e^{-|r|}$$

רמז: גזור פעמיים תחת סימן האינטגרל וקבל $y'' = y$. הפתרון: $y = k_1 e^r + k_2 e^{-r}$. הראה שעבור $r \to 0+$ מתקיים $y \to \frac{\pi}{2}, \quad y' \to -\frac{\pi}{2}$

15. תהי $f : [0,\infty) \to R$ גזירה, ונסמן

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lambda, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \mu$$

אזי

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (\lambda-\mu)\ln\frac{b}{a}, \quad a,b > 0$$

16. (חורף תשנ"ב) חזור על תרגיל 15 כאשר נתון כי f „רק" רציפה.
רמז: קיימת סדרת פולינומים $P_n(x)$ כך ש-$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ ו-$\{P_n\}$ מתכנסת במידה שווה ל-f.

17. (*) חזור על תרגילים 16,15 כאשר נתון כי f „רק" אינטגרבילית.
הדרכה: התבונן בשני האינטגרלים המוכללים

$$I_1(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx, \quad I_2(L) = \int_1^L \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx.$$