הקדמות

פונקציות סתומות

נאמר כי פונקציה $y(x)$ המוגדרת על קטע I מוגדרת בצורה סתומה ע"י $F(x,y)=0$ אם מתקיים $F\big(x,y(x)\big)=0$ לכל $x\in I$.

דוגמא: הפונקציה $y_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $x^2+y^2=1$ כי

$$x^2+y_1(x)^2=x^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2=x^2+1-x^2=1 \qquad -1\le x\le 1$$

באופן דומה הפונקציה $y_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $x^2+y^2=1$ ותחום ההגדרה של $y_2(x)$ הוא $-1\le x\le 1$.

משפט הפונקציות הסתומות: תהי $F(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בתחום פתוח $D\subset\mathbb{R}^2$ ותהי $(x_0,y_0)\in D$ כך ש־$F(x_0,y_0)=0$ וכך ש־$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. אזי קיימת פונקציה רציפה וגזירה $y(x)$ המוגדרת בקטע פתוח I המכיל את x_0 כך ש:

$$\begin{aligned}&y(x_0)=y_0\\&F(x,y(x))=0 \quad x\in I\\&y'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}\end{aligned}$$

דוגמא: נחפש פונקציה המוגדרת הצורה סתומה ע"י $x^2+y^2=1$ העוברת בנקודה $(0,1)$. נשתמש במשפט הפונקציות הסתומות כדי לוודא שיש רק פונקציה אחת כזו:

$$\begin{aligned}&F(x,y)=x^2+y^2-1\\&F(0,1)=1\\&F'_y(x,y)=2y\\&F'_y(0,1)=2\cdot 1=2\neq 0\end{aligned}$$

ולכן יש פונקציה אחת בלבד. הפונקציה היא $y=\sqrt{1-x^2}$. שימו לב כי תחום הגדרתה הוא $[-1,1]$ אבל אם אנו דורשים גזירות של הפונקציה בכל נקודה אזי תחום ההגדרה נהיה $(-1,1)$.

האם יש פונקציה יחידה המוגדרת בצורה סתומה ע"י $x^2+y^2=1$ וגם עוברת דרך הנקודה $(1,0)$? לא. שתי הפונקציות $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ עוברות דרך הנקודה. זה אינו סותר את משפט הפונקציות הסתומות כי $F'_y(1,0)=0$.
שימו לב כי $x^2+y^2=1$ הוא צורה סתומה של הפונקציות $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ כאשר האחרון הוא צורה מפורשת של הפונקציות. בקורס זה לפעמים ניתן פונקציות אך ורק לפי צורתן הסתומה. לחלק מהפונקציות לא תהיה צורה מפורשת.

אלגברה

הגדרה: קומבינציה לינארית של וקטורים $\{v_1,\dots,v_n\}$ במרחב ווקטורי V הוא ביטוי מהצורה

$$c_1v_1+\cdots c_nv_n$$

כאשר $c_1,\dots c_n$ הם סקלרים.
נאמר שווקטורים $\{v_1,\dots,v_n\}$ במרחב ווקטורי V פורשים תת מרחב W של V אם $\{v_1,\dots,v_n\}\subset W$ וגם לכל $w\in W$ קיימים סקלרים $c_1,\dots c_n$ כך ש

$$w=c_1v_1+\cdots c_nv_n$$

כלומר אם לכל $w\in W$ קיימת קומבינציה לינארית של $v_1,\dots,v_n$ שנותנת את w.
נאמר כי ווקטורים $v_1,\dots,v_n$ במרחב ווקטורי V הם תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $c_1,\dots,c_n$ אשר לא כולם אפס, כך ש־

$$c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n=0$$

נאמר שהווקטורים הם בלתי תלויים לינארית אם הם לא תלויים לינארית, כלומר,

$$c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n=0 \iff c_1=c_2=\cdots=c_n=0$$

נאמר כי ווקטורים $\{v_1,\dots,v_n\}$ הם בסיס עבור מרחב ווקטורי W אם הם בלתי תלויים לינארית ואם הם פורשים את W. במקרה זה נאמר כי המימד של W הוא n.

המרחבים הווקטורים שיעניינו אותנו הם מרחבים ווקטורים שאבריהם פונקציות. סימונים:
עבור קטע I:
1. $C(I)$ הוא המרחב הווקטורי של הפונקציות הרציפות על הקטע I.
2. $C^1(I)$ הוא המרחב הווקטורי של הפונקציות הגזירות ברציפות על הקטע I.

3. $C^n(I)$ הוא המרחב הווקטורי של הפונקציות שהנגזרת מסדר n שלהם היא פונקציה רציפה על הקטע I.

דוגמא: נסתכל על הפונקציה $y(x) = \frac{1}{x}$. לאיזה מרחב וקטורי היא שייכת? למעשה חייבים לציין את תחום ההגדרה והוא צריך להיות קטע. ולכן אפשר לקחת $I_1 = (0, \infty)$ או $I_2 = (-\infty, 0)$. כך ש-$y(x) = \frac{1}{x}$ המוגדרת על I_1 שייכת ל-$C(I_1)$ אבל גם ל-$C^1(I_1)$. היא אינה שייכת ל-$C(-1, 1)$ כי אינה רציפה, או אפילו מוגדרת, באפס.

דוגמא: נסתכל על הפונקציות $y_1(x) = x,\ y_2(x) = |x|$. האם הן תלויות לינארית? השאלה אינה מוגדרת היטב כי לא נתנו תחום הגדרה. נסתכל למשל על שלוש מקרים:
1. הפונקציות מוגדרות על $\mathbb{R}$. נראה כי במקרה זה הפונקציות בלתי תלויות לינארית. בשלילה, אם הן תלויות לינארית אזי קיימים קבועים c_1, c_2 לא שניהם אפס כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$c_1 x + c_2 |x| = 0.$$

בפרט עבור $x = 1$ נקבל

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot |1| = c_1 + c_2 = 0.$$

ועבור $x = -1$ נקבל

$$c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot |-1| = -c_1 + c_2 = 0$$

כלומר

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

אבל הפתרון היחיד של זה הוא $c_1 = c_2 = 0$ ולכן הפונקציות בלתי תלויות לינארית כאשר תחום ההגדרה שלהן הוא $\mathbb{R}$.
2. הפונקציות מוגדרות על $[0, \infty]$. במקרה זה

$$c_1 x + c_2 |x| = c_1 x + c_2 x = (c_1 + c_2) x$$

ולכן עבור $c_1 = 1 = -c_2$ נקבל $c_1 x + c_2 |x| = x - x = 0$ לכל $x \leq 0$. ולכן הפונקציות הן תלויות כאשר תחום ההגדרה הוא $[0, \infty]$.
3. הפונקציות מוגדרות על $[-\infty, 0]$. במקרה זה

$$c_1 x + c_2 |x| = c_1 x - c_2 x = (c_1 - c_2) x$$

ולכן עבור $c_1 = 1 = c_2$ נקבל $c_1x + c_2|x| = x - x = 0$ לכל $x \geq 0$. ולכן הפונקציות הן תלויות כאשר תחום ההגדרה הוא $[-\infty, 0]$.

<u>דוגמא:</u> נראה כי $x+1, x-1$ פורשים את W שהוא תת המרחב של הפונקציות הרציפות שהוא כל הפולינומים מדרגה 1 לכל היותר:
קודם כל, ברור כי $x+1, x-1$ הם פולינומים מדרגה 1 ולכן שייכים ל־W.
נראה כי כל פולינום הוא קומבינציה לינארית של $x+1, x-1$. יהי $f(x) = a + bx$ פולינום מדרגה 1 לכל היותר. אנו מחפשים סקלרים c_1, c_2 כך ש־

$$c_1(x+1) + c_2(x-1) = ax + b$$

אז נפתור:

$$\begin{aligned}
&c_1(x+1) + c_2(x-1) = ax + b \\
&(c_1 - c_2) + (c_1 + c_2)x = ax + b \\
&c_1 - c_2 = b \\
&c_1 + c_2 = a \\
&2c_1 = b + a \\
&c_1 = \frac{a+b}{2} \\
&c_2 = a - c_1 = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

ולכן פורשים. האם הם בלתי תלויים לינארית? צריך לבדוק האם יש סקלרים שונים מאפס כך ש־

$$c_1(x+1) + c_2(x-1) = 0 = 0x + 0$$

אבל לפי חישוב קודם נובע כי

$$c_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \quad c_2 = \frac{a-b}{2} = \frac{0-0}{2} = 0$$

ולכן בלתי תלויים. ולכן הם בסיס עבור W.

<u>מטריצות</u>

<u>הגדרות:</u> מספר ממשי או מרוכב λ הוא <u>ערך עצמי</u> (ע"ע) של מטריצה A מגודל $n \times n$ אם קיים וקטור שונה מאפס v עבורו $\overline{Av = \lambda v}$ או באופן שקול $(A - \lambda I)v = 0$.
הווקטור v נקרא <u>וקטור עצמי</u> (ו"ע) של הע"ע λ.

הפולינום האופייני (פ"א) של מטריצה A מגודל $n \times n$ הוא $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
השורשים של הפולינום האופייני הם בדיוק הערכים העצמיים של המטריצה A. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש בדיוק n שורשים לפולינום האופייני כאשר אנו סופרים ריבויים. כלומר יש בדיוק n ערכים עצמיים לכל מטריצה ריבועית מגודל n.
הריבוי האלגברי (ר"א) של ע"ע λ הוא הריבוי שלו כשורש של הפולינום האופייני.
הריבוי הגיאומטרי (ר"ג) של ע"ע λ הוא המספר המקסימלי של ווקטורים עצמיים בלתי תלויים שיש לו. במילים אחרות, מספר הפתרונות הבלתי תלויים של המשוואה $(A - \lambda I)v = 0$ כלומר $n - rank(A - \lambda I)$.

תזכורות: 1. ריבוי אלגברי גדול או שווה לריבוי גיאומטרי.
2. הריבוי הגיאומטרי הוא לפחות אחד והריבוי האלגברי הוא לכל היותר n.
3. מטריצה היא לכסינה אם ורק אם לכל ע"ע של המטריצה הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.
4. דטרמיננט של מטריצה $\det(A) = |A|$ שווה למכפלת ה־ע"ע שלה.
5. עקבת המטריצה $trace(A)$ שווה לסכום ה־ע"ע של המטריצה.
6. מטריצה A היא הפיכה אס"ם הדטרמיננטה שלה שונה מאפס אס"ם כל הע"ע שלה שונים מאפס אס"ם למערכת המשוואות $A \cdot x = 0$ יש פתרון יחיד שהוא $x = 0$.
7. מטריצה A אינה הפיכה אס"ם הדטרמיננטה של היא אפס אס"ם לפחות אחד הע"ע שלה הוא אפס אס"ם למערכת המשוואות $A \cdot x = 0$ יש פתרון לא טריביאלי כלומר פתרון שאינו ווקטור האפס.

<u>תרגיל:</u> מצאו פ"א ע"ע ו"ע של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u> נמצא קודם את הע"ע בעזרת הפ"א ואז נמצא את הו"ע המתאימים

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 3-r & -2 \\ 2 & -2-r \end{pmatrix} = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$$
$$-1 : \begin{pmatrix} 3-(-1) & -2 \\ 2 & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$4c - 2d = 0$$
$$2c - d = 0$$
$$\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$2 : \begin{pmatrix} 3-2 & -2 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$c - 2d = 0$$
$$2c - 4d = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2d \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר כל הו"ע של הע"ע -1 הם מהצורה $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ וכל הו"ע של הע"ע 2 הם מהצורה $d\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>תרגיל:</u> מצאו פ"א ע"ע ו"ע

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון: נמצא קודם את הע"ע בעזרת הפ"א ואז נמצא את הו"ע המתאימים

$$p(r) = \det(A - rI) = \det\begin{pmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{pmatrix} = r^2 - 2r + 5$$

$$1 \pm 2i$$

$$1+2i: \begin{pmatrix} 3-(1+2i) & -2 \\ 4 & -1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-2i)c - 2d = 0$$

$$4c + (-2-2i)d = 0$$

$$\begin{pmatrix} c \\ c(1-i) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

שימו לב שכיוון שהמטריצה היא ממשית אז הו"ע של הע"ע $1-2i$ הם $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ שאלה הוקטורים הצמודים לו"ע של הע"ע $1+2i$.

טורי חזקות

טור חזקות סביב a הוא ביטוי מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. הטור תמיד מתכנס עבור $x=a$ כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-a)^n = a_0$. רדיוס ההתכנסות של טור חזקות הוא מספר חיובי (אולי אינסוף) $0 < R \leq \infty$ כך שאם $|x-a| < R$ אז הטור מתכנס, כלומר $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ קיים, ועבור $|x-a| > R$ הטור מתבדר.
נניח שלטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ יש רדיוס התכנסות R. נסמן $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. יש יחס בין מקדמי הטור לבין הפונקציה $f(x)$ ויחס זה נובע מנוסחת טיילור והוא $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ או $f^{(n)}(a) = n!a_n$.
טורי חזקות אפשר לגזור אבר אבר, כלומר

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור של הנגזרת הוא אותו רדיוס התכנסות של הטור של הפונקציה המקורית.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \qquad R = 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad R = 1$$

כל פולינום הוא טור טיילור סביב $a=0$ של עצמו ויש לו רדיוס התכנסות אינסוף אבל גם לכל טור חזקות סביב a של פולינום יש רדיוס התכנסות אינסוף.

נמצא טור חזקות של $p(x) = x^2 + x + 1$ סביב $a = 1$

$$
\begin{aligned}
& p(x) = x^2 + x + 1 \to p(1) = 3 \\
& p'(x) = 2x + 1 \to p'(1) = 3 \\
& p''(x) = 2 \to p''(1) = 2 \\
& p'''(x) = 0 \to p^{(n)}(1) = 0 \quad n \geq 3 \\
& p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(n)}(1)(x-a)^n}{n!} = p(1) + p'(1)(x-1) + p''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} = \\
= \quad & 3 + 3(x-1) + 2\frac{(x-1)^2}{2} = 3 + 3(x-1) + (x-1)^2
\end{aligned}
$$