חשבון אינפיניטסימלי 3 – ת"ב 5

רן קירי
שם 1

אלכסנדרה טרוסט
שם 2

311532238 + 314158148
תעודת זהות + תעודת זהות 2

17/01/2016
תאריך הגשה

12
קבוצת תרגול

שאלה 1:

נתון $G \subset \mathbb{R}^n$ תחום סימטרי ביחס ל-x_1. כלומר לכל $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$ מתקיים:

$$(-x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G$$

וכן נתונה פונקציה f אינטגרבילית ב-G ואי זוגית בתחום זה ביחס ל-x_1, כלומר:

$$f(-x_1, x_2, \cdots, x_n) = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \forall (x_1, \cdots, x_n) \in G$$

היות ו-f אינטגרבילית בכל G, אזי כפי שהראינו בכיתה, היא אינטגרבילית בפרט בכל תת תחום של G. לכן נגדיר 3 תחומים:

$$G^- = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G | x_1 < 0\} \quad G^+ = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G | x_1 > 0\} \quad G_0 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in G\}$$

וכאמור f בהכרח אינטגרבילית בכל אחת מתחומים אלה. נשים לב, ראשית, כי G_0 הינו תחום בעל נפח 0.[1] לכן בהכרח מתקיים:

$$\int_{G_0} f(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

עבור G^+, נסמן:

$$S = \int_{G^+} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

ועבור G^- נשים לב כי לכל $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G^-$ מובטח כי $(-x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G^+$ ולכן נוכל להיעזר בנוסחת החלפת המשתנים ולבנות העתקה:

$$\varphi: G^- \to G^+ \quad \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

עבור העתקה זו:

- φ הינה העתקה רציפה, ואף גזירה ברציפות שכן מתקיים:
$$D\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \operatorname{rank} D\varphi = n \quad \det D\varphi = -1$$
- $\varphi(G^-)$, לכן הינו תחום בעל נפח שכן G תחום בעל נפח (כי f אינטגרבילית בו).
- $f \circ \varphi$ אינטגרבילית כנובע מאינטגרביליות f ב-G ולכן ב-G^+.

ולכן נסיק כי מתקיים:

$$\int_{G^-} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\varphi(G^-)} f \circ \varphi(x_1, \cdots, x_n) |\det D\varphi| dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{G^+} f(-x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{G^+} -f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = -\int_{G^+} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = -S$$

ולכן, לסיכום:

$$\int_G f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{G^-} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \int_{G^+} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \int_{G_0} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

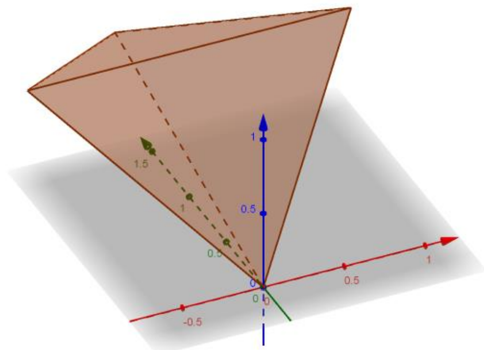
$$= -S + S + 0 = 0$$

■

[1] שכן נשים לב כי לכל חלוקה שנבחר לתחום זה המורכבת ממלבנים $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ניתן להגדיר את המלבן הראשון במכפלה, שהוא הרכיב של x_1, להיות $[-\varepsilon, \varepsilon]$ כך שלכל נפח שנרצה נוכל לבחור $\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו ולהקטין את הנפח. (שכן לכל חלוקה אנחנו מניחים כמובן כי יתר המלבנים הם בפרט חסומים ולכן המכפלה ב"אורך הצלעות" שלהם חסומה, ומכאן שאכן ניתן לבחור לכל חלוקה $\varepsilon > 0$ קטן כנדרש. כלומר זוהי אכן קבוצה בעלת נפח אפס כנדרש.

שאלה 2:

א. נתונה הפירמידה $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ שקדקודיה הם $0, v_1, \cdots, v_n$. עבור וקטורי היחידה בכיווני הצירים שנסמנם e_i לכל $1 \le i \le n$, אנו יודעים כי קיימים צירופים ליניאריים כך שניתן לכתוב:



$$\begin{cases} v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} e_i \\ v_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} e_i \\ \vdots \\ v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} e_i \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall 1 \le i, j \le n \\ \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

ולכן נוכל להגדיר את ההעתקה הליניארית הבאה:

$$\varphi: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \Omega \quad \varphi(e_1, \cdots, e_n) = (v_1, \cdots, v_n)$$

וניתן להגדיר העתקה זו בצורה מטריציונית על ידי הגדרת:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ddots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \varphi(\bar{u}) = A\bar{u}$$

העתקה זו הינה פולינום ברכיבי u ולכן גזירה ברציפות ומתקיים:

$$D\varphi = A$$

ועתה, נשים לב כי ניתן לדרוש כי A תהיה מדרגה מלאה, וזאת משום שאחרת נקבל כי אחד הוקטורים v_i הינו צירוף ליניארי של הוקטורים האחרים, ונקבל כי הפירמידה מנוונת. למעשה, נפחה ב-$\mathbb{R}^n$ יהיה 0.[2]

לכן, עתה, נניח כי $\operatorname{rank} D\varphi = \operatorname{rank} A = n$. מכאן ש-$A$ הפיכה ומגדירה את ההעתקה ההפוכה:

$$A^{-1}: (e_1, \cdots, e_n) \mapsto (v_1, \cdots, v_n)$$

וכן היות שידוע לנו כי הפירמידה המוגדרת על ידי $e_1, \cdots, e_n$ היא בעלת נפח, אזי תחת העתקה גזירה ברציפות $A^{-1} = \varphi^{-1}$ מתקיים שהפירמידה Ω גם היא בעלת נפח. יתרה מכך, עבור הפונקציה $f \equiv 1$ שהיא אינטגרבילית, אנו יודעים כי מתקיים, תחת סימון Ω_e כפירמידה שצלעותיה וקטורי היחידה:

$$\int_\Omega 1 dV = \int_{\Omega_e} 1 |\det D\varphi| dV'$$

נזכיר, כי בגליון הבית הקודם הוכחנו כי עבור Ω_e מתקיים:

$$Vol(\Delta N) = \int_{\Omega_e} 1 dV_e = \frac{\prod_{i=1}^{N} a_i}{N!}$$

כאשר N הוא הממד של הפירמידה ו-a_i הם המקדמים של הוקטורים המקבילים לצירים, במקרה שלנו $a_i = 1$ לכל $1 \le i \le n$.

נשים לב כי $D\varphi = A$ שהיא מטריצה קבועה, ולכן $|\det A|$ הינו גודל קבוע. ומתקיים:

$$\int_\Omega 1 dV = \int_{\Omega_e} 1 |\det D\varphi| dV' = \frac{|\det A|}{n!} \Longrightarrow \boxed{Vol(\Omega) = \frac{|\det A|}{n!}}$$

■

ב. עתה מוגדרת פירמידה דומה לזו שהוגדרה בסעיף הקודם, אלא שהפעם הפירמידה מוזזת ביחס לראשית. נשים לב כי תחת הגדרת ההעתקה:

$$\xi: \Omega \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto -v_0 + (x_1, \cdots, x_n)$$

נקבל כי העתקה זו גזירה ברציפות (הזזה – פולינום ממעלה ראשונה), ומתקיים:

$$D\xi = I \quad \det D\xi = 1$$

כלומר זו גם העתקה הפיכה, ולמעשה חד-חד ערכית ועל. מתקיימים, בדומה לסעיף א', כל התנאים הדרושים לשימוש במשפט החלפת המשתנים. נשים לב כי ההעתקה מקיימת שקדקודי הפירמידה מוזזים ל-$(v_0, v_1, \cdots, v_n) \mapsto (0, v_1 - v_0, \cdots, v_n - v_0)$ ולכן:

$$Vol(\Omega) = \int_\Omega 1 dV = \int_{\Omega_{ב}} 1 dV' = Vol\left(\Omega_{ב}\right) = \frac{|\det A|}{n!}$$

[2] ניתן לראות זאת משום שלו היינו מגדירים מלכתחילה את ההעתקה הליניארית ההפוכה, היינו יכולים לבצע העתקה הפיכה רק ביחס ל-$n-1$ וקטורים לכל היותר שכן בסיס המקור הוא ממימד $n-1$. במקרה כזה היינו מקבלים כי ה"פירמידה" שלנו מתאימה לפירמידה כללית המוגדרת על ידי וקטורי יחידה מממד נמוך יותר אשר נפחם ב-$\mathbb{R}^n$ הוא אפס.

כאשר A היא מטריצה המעבר עבור נפח פירמידה שקדקוד אחד שלה נמצא בראשית כפי שהגדרנו בסעיף א'. ■

שאלה 3:

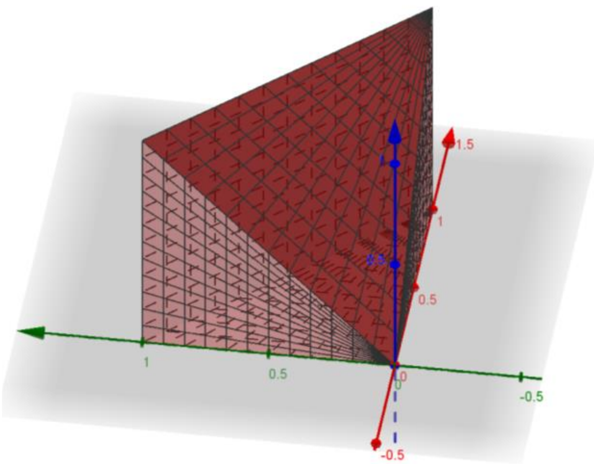
נתון האינטגרל:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

ונרצה להחליף את סדר האינטגרציה לאינטגרל מהצורה:

$$\int dz \int dx \int f(x,y,z)dy$$

לשם כך נתאר ראשית את תחום האינטגרציה שלנו:



$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le x+y \end{matrix} \right\}$$

ראשית נשים לב כי עבור z ניתן להסיק משתי המשוואה הראשונות, כי:

$$0 \le z \le x+y \le x+(1-x) = 1$$

כלומר מצאנו כי $\boxed{0 \le z \le 1}$ הוא תחום האינטגרציה עבור z. נרצה עתה לבטא את x ביחס ל-z. לשם כך, נשים לב כי אם נקבע את ערכו של z מסויים, נקבל כי:

$$x+y \ge z$$

אך מאי השוויון השני אנו יודעים כי $0 \le y \le 1-x$ כלומר y יכול לקבל 0 כערך מינימלי בכל מקרה ולכן חייבים לדרוש את אי השוויון:

$$x+y \ge x+0 = x \ge z$$

ובשילוב עם אי השוויון הראשון מהגדרת התחום $\mathcal{D}$ לאחר הצבת הערך המקסימלי האפשרי של y, נקבל:

$$x = x+1-x \ge x+y \ge x \ge z \Longrightarrow \boxed{z \le x \le 1}$$

ועתה נשים לב כי עבור קיבוע ערך של x הערכים האפשריים של y נקבעים באופן יחיד על ידי אי השוויון:

$$\boxed{\max\{0, z-x\} \le y \le 1-x}$$

לכן נוכל להגדיר את תחום האינטגרציה:

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} 0 \le z \le 1 \\ z \le x \le 1 \\ \max\{0, z-x\} \le y \le 1-x \end{matrix} \right\}$$

ולכן האינטגרל יהיה (וניתן להגדיר אותו כי הפרדת האינטגרלים העידה על קיומם של תנאי משפט פוביני ממילא):

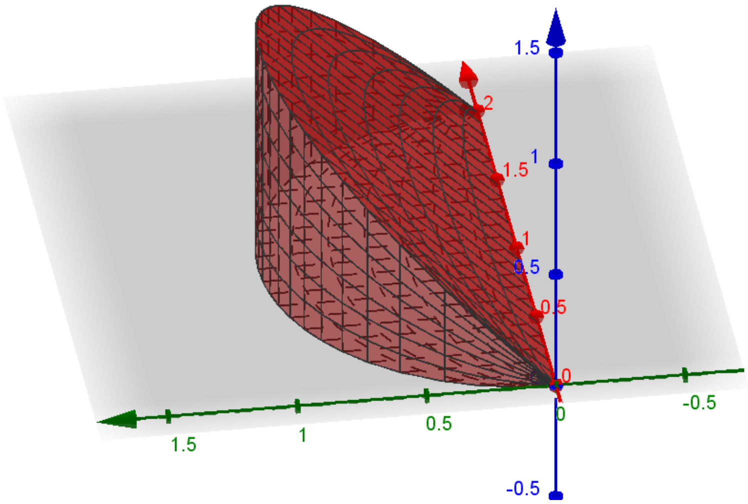
$$\boxed{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_{\max\{0,z-x\}}^{1-x} f(x,y,z)dy}$$

■

שאלה 4:

נתון האינטגרל:

$$\iiint_{\Omega} yf(z)dxdydz$$



המוגדר על התחום:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} 0 \leq z \leq y \\ x^2 + y^2 \leq 2x \end{matrix}\right\}$$

ונרצה להעביר אינטגרל זה לאינטגרל חד ממדי. לשם כך נשים לב כי האינטגרנד שלנו מוגדר על ידי פונקציה התלויה ב-z בלבד המוכפלת ב-y. נרצה, אם כך, למצוא תחום מתאים עבורו נקבל אינטגרל מהצורה:

$$\int \left(\int \left(\int yf(z)\, dx\right) dy\right) dz$$

לשם כך נשים לב כי את אי השוויון האחרון ניתן לכתוב בצורה:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

כלומר:

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

ונסיק מכך כי אי שוויון זה מתאר גליל שמרכזו בנקודה $(1,0)$ ורדיוסו 1. כלומר, אנו יודעים עתה, עבור y, כי:

$$0 \leq y \leq 1$$

משום שהוא אי שלילי כמסקנה מאי השוויון הראשון, וקטן מ-1 כתוצאה מאי השוויון השני, כלומר עבור הגליל.

אך מכאן נסיק כי ניתן להגדיר את z על ידי:

$$\boxed{0 \leq z \leq 1}$$

כאשר עבור z נתון, ניתן להגביל את ערכו של y על ידי:

$$\boxed{z \leq y \leq 1}$$

כך שעתה, בהנתן y,z מקובעים, יתקיים:

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq \sqrt{1-y^2} \Rightarrow \boxed{x \leq \sqrt{1-y^2} + 1}$$

ולכן ניתן להגדיר את תחום האינטגרציה שלנו עתה באופן הבא:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{matrix} 0 \leq z \leq 1 \\ z \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} + 1 \end{matrix}\right\}$$

כך שנקבל לבסוף את האינטגרל:

$$\iiint_{\Omega} yf(z)dxdydz = \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}+1} yf(z)dx\right) dy\right) dz = \int_0^1 \left(\int_z^1 [x]_0^{\sqrt{1-y^2}+1} yf(z)\, dy\right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\sqrt{1-y^2} + 1\right) yf(z)dy\right) dz \; (\star)$$

נשים לב כי:

$$\int_z^1\left(\sqrt{1-y^2}+1\right)ydy \overset{\substack{y=\sin u\\ dy=\cos u du}}{=} = \int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-\sin^2 u}+1\right)\sin u\cos u\, du = \int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}(\cos u+1)\sin u\cos u\, du$$

$$\int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\sin u+\sin u\cos u\, du = \int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\sin u\, du+\frac{1}{2}\int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2u\, du$$

נחשב את שני הביטויים בנפרד:

$$\frac{1}{2}\int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2u\, du = -\frac{1}{4}[\cos 2u]_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-2z^2) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2$$

$$\int_{\arcsin z}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\sin u\, du \overset{\substack{t=\cos u\\ dt=-\sin u du}}{=} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}$$

ולכן סה"כ נקבל:

$$\int_z^1\left(\sqrt{1-y^2}+1\right)ydy = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}$$

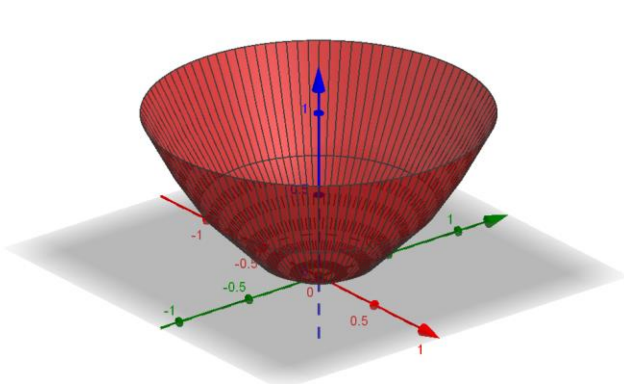
נוכל להציב זאת ב-$(\star)$ ולקבל אינטגרל חד ממדי כנדרש:

$$(\star)\ \int_0^1\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\right]f(z)dz$$

■

שאלה 5:

נתון $z=x^2+y^2$ פרבולואיד בתחום $0<z<1$.



נרצה לחשב את שטח הפנים של הפרבולואיד הנתון.
לשם כך, נשים לב כי ניתן להגדיר את הפרבולואיד על ידי הטרנספורמציה:

$$\varphi(\theta,z)=\begin{pmatrix}\sqrt{z}\cos\theta\\ \sqrt{z}\sin\theta\\ z\end{pmatrix}$$

$$D\varphi=\begin{bmatrix}-\sqrt{z}\sin\theta & \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\theta\\ \sqrt{z}\cos\theta & \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

כלומר מתקיים:

$$\varphi_\theta=\begin{bmatrix}-\sqrt{z}\sin\theta\\ \sqrt{z}\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}\quad \varphi_z=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\theta\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin\theta\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\|\varphi_\theta\times\varphi_z\| = \left|\begin{matrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ -\sqrt{z}\sin\theta & \sqrt{z}\cos\theta & 0\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\theta & \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin\theta & 1\end{matrix}\right| = \left\|\left|\begin{matrix}\sqrt{z}\cos\theta & 0\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin\theta & 1\end{matrix}\right|,\left|\begin{matrix}-\sqrt{z}\sin\theta & 0\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\theta & 1\end{matrix}\right|,\left|\begin{matrix}-\sqrt{z}\sin\theta & \sqrt{z}\cos\theta\\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\theta & \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin\theta\end{matrix}\right|\right\|$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{z}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{z}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)^2} = \sqrt{z+\frac{1}{4}}$$

$$\iint_{\mathcal{D}}\|\varphi_\theta\times\varphi_z\|d\theta dz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{z+\frac{1}{4}}dz = 2\pi\left[\frac{2}{3}\left(z+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{6}\left[5^{\frac{3}{2}}-1\right]$$

א. נחשב:

$$\int_0^1 2\pi\sqrt{z}dz = 2\pi\int_0^1 z^{\frac{1}{2}}dz = 2\pi\left[\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$$

קיבלנו שטח שונה. נשים לב כי יעקוביאן רגיל של קואורדינטות גליליות הוא r בעוד שבחישוב שטח הפנים הפקטור שהופיע באינטגרל היה $\sqrt{r^2+\frac{1}{4}}$ זאת משום שבמקרה של חישוב אינטגרל כפול רגיל מהצורה $\iint rd\theta dz$ אנו מחשבים למעשה נפח (במובן הדו ממדי) הכלוא בין גרף למישור (שכן כל יריעה ניתנת להצגה באופן מקומי כגרף של פונקציה). במקרה השני מדובר בשטח פנים, המביא בחשבון את האוריינטציה ומידת הכיווץ של יריעה.

■

ב. עתה אנו רוצים לחשב את שטח הפנים של הפרבולואיד המלאה הנתון על ידי:

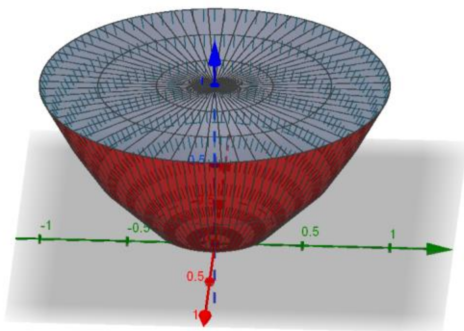
$$x^2+y^2<z<1$$

נשים לב כי במקרה זה קיבלנו את אותו שטח פנים של פרבולואיד כמקודם, למעט בקו הגובה שבו $z=1$ אשר "נסגר" ואשר מהווה בעצמו שטח פנים. אך נשים לב כי בקו גובה זה מתקיים:

$$x^2+y^2<z=1$$

כלומר, המעטפת שלנו עתה היא אותה מעטפת של הפרבולואיד מקודם, בתוספת שטחו של העיגול ש"אוטם" את הפרבולואיד מלעיל. רדיוסו אחד ולכן שטחו π. ומכאן שנוכל לומר באופן מידי כי מתקיים:

$$\boxed{\text{שטח פנים} = \frac{7}{3}\pi}$$



■

שאלה 6:

נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית וגזירה ברציפות על הקטע $[a,b]$. גוף הסיבוב הנוצר על ידי f הינו המשטח ב-$\mathbb{R}^3$ הנוצר על ידי סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר x. נרצה להראות כי שטח הפנים של גוף הסיבוב נתון על ידי:

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

נשים לב כי f הינה פרמטריזציה של עקום המוגדר על ידי $\Gamma(a,b)$. כל נקודה מהצורה $(x,f(x))$ הנמצאת על גרף הפונקציה נמצאת במרחק של $f(x)$ מציר ה-x.

סיבוב הפונקציה סביב ציר ה-x צריך לשמור על מרחק הנקודה מציר ה-x. כלומר, לכל סיבוב של $0\le\theta\le 2\pi$ סביב ציר ה-x, המרחק של הנקודה שתתקבל חייב להשאר $f(x)$ המקורית.

נשים לב, שניתן להגדיר פרמטריזציה ליריעה הדו ממדית ב-$\mathbb{R}^3$ הנ"ל על ידי:

$$\varphi(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$$

ונשים לב כי:

$$D\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f'(x)\cos\theta & -f(x)\sin\theta \\ f'(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{bmatrix}$$

רגולרית וחד-חד ערכית למעט בקבוצה בעלת נפח 0, ולכן ניתן להגדיר באמצעותה את השטח של היריעה הנ"ל על ידי:

$$\int_S \|\varphi_x\times\varphi_\theta\| dxd\theta$$

נחשב את הוקטור הנ"ל:

$$\varphi_x\times\varphi_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\sin\theta \\ 0 & -f(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix} = \hat{\imath}[f'(x)f(x)\cos^2\theta + f'(x)f(x)\sin^2\theta] - \hat{\jmath}f(x)\cos\theta - \hat{k}f(x)\sin\theta$$

$$\varphi_x \times \varphi_\theta = \begin{bmatrix} f'(x)f(x) \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{bmatrix} \Longrightarrow \|\varphi_x \times \varphi_\theta\| = \sqrt{\left(f'(x)f(x)\right)^2 + f^2(x)\cos^2 x + f^2(x)\sin^2 x} = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}$$

ולכן לאחר הצבה נקבל כי היות והתחום שלנו הוא:

$$\Omega = \left\{(x,\theta)\middle| \begin{matrix} a \le x \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}\right\}$$

$$S = \iint_\Omega \|\varphi_x \times \varphi_\theta\| dx d\theta = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} d\theta\right) dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

■

שאלה 7:

א. הערך שמציג הצג לנהג אינו נכון. ערך זה מוצג תחת הנחה שגויה כי נפח הדלק במיכל פרופורציונית לגובה מד הדלק עד כדי נרמול. זו כמובן טעות. נשים לב לצורת המיכל:
אי השוויון השמאלי, $x^2+y^2<z$ הינה משוואה של גוף פרבולואיד מלרע את מיכל הדלק. מלעיל ישנו אי השוויון $z<\sqrt{2-x^2-y^2}$ אשר מתאר חלק מכיפה של ספירה (עד לגובה שבו היא מתלכדת עם הפרבולואיד). נשים לב כי למשל בגובה $z=\frac{1}{2}$, כאשר הדלק נמצא כולו בטווח של הפרבולואיד ולא נמצא כלל בתוך החלק הספרי של המיכל, נוכל לחשב את נפח הדלק עד לגובה וזה ונראה כי הוא אינו $\frac{z}{\sqrt{2}}$.
נשתמש בקואורדינטות גליליות ונגדיר את ההעתקה:

$$(r,\theta,z) \to (x,y,z)$$

כאשר התחום שלנו הינו התחום:

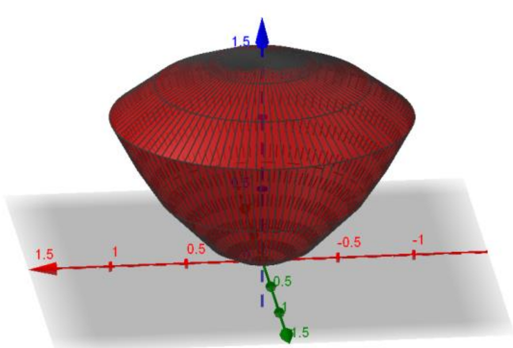
$$\Omega = \left\{(r,\theta,z)\middle| \begin{matrix} 0 \le z \le \frac{1}{2} \\ 0 \le r \le z \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}\right\}$$

וכאשר היעקוביאן, כפי שכבר ראינו, ערכו r, נקבל:

$$\iiint_\Omega 1 dV = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^z r dr \int_0^{2\pi} d\theta\right) dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^z r dr\right) dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} z^2 \, dz == \frac{1}{6} \cdot 2\pi z^3 = \frac{1}{48} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{24} \neq \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}$$

כלומר, מד הדלק לא לוקח בחשבון שככל ש-z גובהה, למשל בשלב שבו המיכל כולו עדיין בצורת פרבולואיד טהור – קצב גדילת הנפח גדל ב-2 סדרי גודל יותר מהר מאשר הגובה, ולכן הסטיה גדלה מאוד ככל שמיכל הדלק מלא יותר (לא כולל החלק הספרי שנמצא מלעיל).
על מנת לתקן זאת עלינו לבדוק מהו נפח הכלי כתלות ב-z בצורה מדויקת על ידי ביצוע אינטגרציה על נפח הכלי ולבדוק את תלות הנפח ב-z.

ב. נרצה לחשב את מסת המכל הריק, קרי ∂U בהנתן צפיפות מסה משטחית אחידה $\rho(x,y,z)=z$.
נחלק את התחום לשני חלקים. החלק של הפרבולואיד והחלק של הספירה.



- עבור הפרבולואיד - התחום שלנו הינו:

$$\partial U_p = \left\{(x,y,z)\middle| \begin{matrix} x^2+y^2=z \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}\right\}$$

שכן נשים לב שעבור $z=1$ מתקבל עקום חיתוך בין האילוצים:

$$\sqrt{2-x^2-y^2} > 1$$
$$\Longrightarrow 2-x^2-y^2 > 1$$
$$x^2+y^2 < 1$$

וגם עבור האילוץ השני:

$$x^2+y^2 < 1$$

והערך המינימלי של האילוץ הראשון מתקבל בשוויון וכך גם לגבי הערך המקסימלי של האילוץ השני, ובמקרה זה יתקבל המעגל:

$$x^2+y^2=1$$

לכן ההצדקה להפריד את תחום האינטגרציה לחלק של הפרבולואיד והחלק הספרי. אם כך, עבור הפרבולואיד נקבל בקואורדינטות גליליות:

$$(x,y,z) \mapsto (r,\theta,z) \quad J=r$$

כאשר התחום שלנו הוא התחום שבו:

$$0 \leq r = z \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ולכן:

$$M_p = \iint_{\partial U_p} \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho(x,y,z)zd\theta \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} z^2 d\theta \right) dz = \int_0^1 2\pi z^2 dz$$

$$= 2\pi \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

ועתה נעבור לרכיב של הספירה. כאמור, התחום שלנו הוא התחום שבו:

$$1 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

וזהו רכיב של כדור שכן ניתן לרושמו בצורה הבאה:

$$1 < z^2 < 2 - x^2 - y^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 2$$

ניעזר בקואורדינטות כדוריות ונגדיר את ההעתקה:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta \quad y = r\sin\varphi\sin\theta \quad z = r\cos\varphi$$

כאשר מאי השוויון אנו יודעים לדרוש כי:

$$r = \sqrt{2}$$

ובנוסף לכך עלינו לוודא כי $z > 1$ ולכן נדרוש:

$$\sqrt{2}\cos\varphi > 1 \Longrightarrow \cos\varphi > \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

עבור θ נדרוש כרגיל $0 \leq \theta \leq 2\pi$ שכן לכל z שנקבע x,y יכולים להיות כל נקודה על המעגל שמרכזו ב-$(0,0,z)$ ורדיוסו נתון על ידי $\frac{z}{\cos\varphi}$ והוא מקביל למישור xy. נזכיר כי היעקוביאן שלנו הוא $r\sin^2\theta$ (הראינו בתרגול) ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$M_s = \iiint_\Omega \rho dV = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2}(\sqrt{2}\cos\varphi)\sin^2\theta\, d\theta \right) d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

נחשב את האינטגרלים בנפרד:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = 2\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta) + 1 d\theta =$$

$$2\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_0^{2\pi} = \pi$$

וסה"כ נקבל כי:

$$M_s = \frac{2\sqrt{2}}{2}\pi = \sqrt{2}\pi$$

והמסה הכוללת של מיכל הדלק היא:

$$\boxed{M = M_s + M_p = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{2}\pi}$$

■