<u>תורת החבורות – תרגיל בית 7</u>

<u>שאלה 1</u>

תהי $G=GL_n\left(F\right)$ חבורת המטריצות ההפיכות מעל שדה F.

נגדיר $SL_n\left(F\right)=\left\{A\in GL_n\left(F\right)\middle|\det\left(A\right)=1\right\}$.

<u>הוכח</u>:

א) $SL_n\left(F\right)\le GL_n\left(F\right)$. ($\le$ מסמן "תת-חבורה של")

ב) $\left\{A\in GL_n\left(F\right)\middle|a_{ij}=0 \text{ for all } i>j\right\}\le GL_n\left(F\right)$

<u>שאלה 2</u>

תהי G חבורה. <u>הוכח</u>:

א) אם H,K הינן תת-חבורות, אז $H\bigcap K\le G$ גם כן.

ב) אם $\left\{H_j\right\}_{j\in I}$ הינו אוסף כלשהו של תת-חבורות של G, אז $\bigcap\limits_{j\in I}H_j \le G$ גם כן.

<u>שאלה 3</u>

<u>הוכח</u> כי $\left(\mathbb{Z},+\right)$ פועלת על $X=\mathbb{Z}$ ע"י $z\cdot a=z+a$ לכל $z,a\in\mathbb{Z}$.

<u>שאלה 4</u>

תהי חבורה G הפועלת על קבוצה A, $a\in A$.

<u>הוכח</u> כי כל אחת מהקבוצות הבאות היא תת-חבורה:

א) $G_a=\left\{g\in G\middle|g\cdot a=a\right\}$ (המייצב של a)

ב) $\left\{g\in G\middle|g\cdot x=x \text{ for all } x\in A\right\}$ (גרעין הפעולה)

<u>שאלה5</u>

החבורה הסימטרית S_n פועלת על הקבוצה B המורכבת מכל התת-קבוצות של $\{1,2,...,n\}$ עם שני איברים, ע"י $\sigma\{i,j\}=\{\sigma i,\sigma j\}$, כאשר $\sigma\in S_n$ ו- $1\le i<j\le n$.

א) וודא כי זו אכן פעולה של S_n על הקבוצה B (בעלת $\binom{n}{2}$ איברים).

ב) חשב את הפעולה של התמורה $(1\,2)$ על B כאשר $n=4$.

ג) חשב את הפעולה של התמורה $(1\,2\,3)$ על B כאשר $n=4$.