קומבינטוריקה - תרגיל 5

1. עבור גרף $G=(V,E)$ נתון, נאמר כי $G'=(V',E')$ הוא תת-גרף של G אם V' תת-קבוצה של V ו-E' תת-קבוצה של E. (שימו לב ש-G' בעצמו צריך להיות גרף. למשל אם $\{u,v\}$ צלע ב-G' אזי לא יתכן ש-v אינו קודקוד ב-G'). תת-גרף G' יקרא מושרה אם מתקיים התנאי הבא: לכל שני קודקודים u,v ב-G', אם הם מחוברים ב-G אזי הם בהכרח מחוברים ב-G'. למשל, בדף המצורף, G_1 הוא תת-גרף מושרה של G, אבל G_2 הוא תת-גרף לא מושרה של G, כי הקודקודים 2 ו-3 מחוברים ב-G ואינם מחוברים ב-G'.

   א. כמה תת-גרפים יש ל-G בדף המצורף ? כמה מהם מושרים ? (שימו לב, אנו מבחינים בין הקודקודים של G. למשל, G_2 ו- G_3 יספרו כשני תת-גרפים שונים, למרות שהם איזומורפיים).
   ב. הוכיחו שבעץ כל תת-גרף קשיר הוא מושרה.

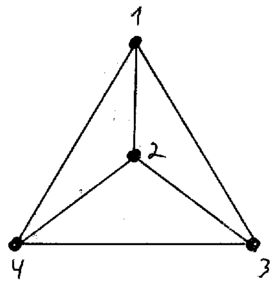
2. יהי T עץ ויהיו $t_1,\ldots,t_n$ תת-עצים של T (כלומר תת-גרפים של T שהם בעצמם עצים). נתון ש- $t_1,\ldots,t_n$ נחתכים בזוגות, כלומר לכל שנים מתוכם יש לפחות קודקוד משותף אחד. הוכיחו שיש קודקוד המשותף לכל $t_1,\ldots,t_n$.

רמז: מומלץ להוכיח באינדוקציה על n. מומלץ להיעזר במשפטים שהוכחו בכיתה. בכיתה הוכחה הטענה שבשאלה עבור $n=3$. כמו-כן הוכח שחיתוך שני עצים הוא עץ בעצמו (בתנאי שאינו ריק).

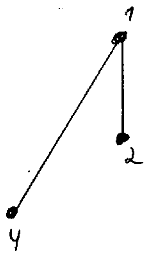
3. * נתונות 3 קבוצות ילדים X_1,X_2,X_3 כל שני ילדים (מאותה קבוצה או מקבוצות שונות) יכולים להכיר זה את זה או לא להכיר זה את זה. שני ילדים יקראו רחוקים אם אינם מכירים זה את זה ואין להם מכר משותף. נתון:
   1. בכל קבוצה יש לפחות ילד אחד.
   2. בכל איחוד $X_i \cup X_j \quad (i \neq j)$ יש שני ילדים רחוקים.
   3. באיחוד $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ יש שלושה ילדים שכל שנים מהם רחוקים (לאו דווקא מקבוצות שונות),

הוכיחו שיש שלושה ילדים, $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3$, (אחד מכל קבוצה) שלא מכירים זה את זה (לאו דווקא רחוקים).

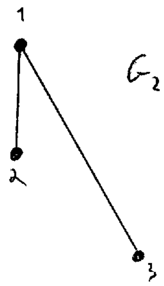
רמז: מומלץ להשתמש בלמה של שפרנר ובגרף S שבדף המצורף.



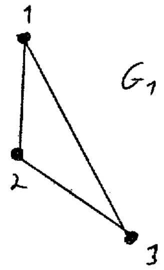
G



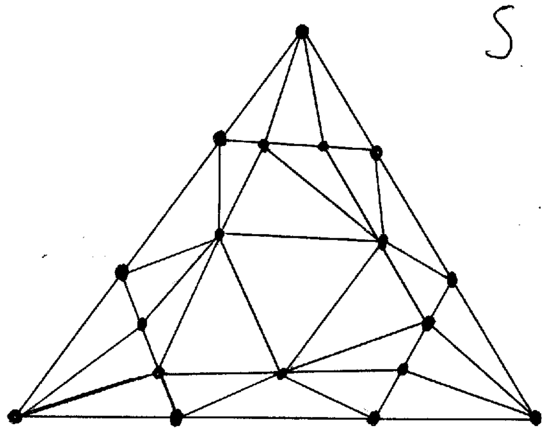
G_3



G_2



G_1



S