פתרון חלקי לתרגיל 2 :

1. $\sim(\forall a,b \;\; a<b)(\exists c)(a<c<b)$ שקול ל
$(\exists a,b \;\; a<b)(\forall c)(a \ge c \;\vee\; c \ge b)$.
כלומר קיימים שני מספרים $a<b$ כך שלכל מספר c : $a \ge c$ או $c \ge b$.

2. **א.** A,B קבוצות חסומות. אז $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$ חסומה מלעיל ע"י
$\sup A+\sup B$ כי : $a \le \sup A, \;\; b \le \sup B \;\; \Rightarrow \mathrm{a+b \le supA+supB}$.
זהו חסם עליון של $A+B$ כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $b(\varepsilon/2), a(\varepsilon/2)$ כך ש-
$\sup A-\frac{\varepsilon}{2}<a(\varepsilon/2)$ ו $\sup B-\frac{\varepsilon}{2}<b(\varepsilon/2)$ אז $(a+b)_\varepsilon=a(\varepsilon/2)+b(\varepsilon/2)$
כי :

$$\sup A+\sup B-\varepsilon=\left(\sup A-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\sup B-\frac{\varepsilon}{2}\right)<a(\varepsilon/2)+b(\varepsilon/2)=(a+b)_\varepsilon$$

ב. אפס הוא, כמובן, חסם מלרע נוכיח שהוא הגדול ביותר: $|\sin(n)| \ge 0$ ולכן:
$\frac{1}{n+|\sin(n)|} \le \frac{1}{n}$ לכן לכל $\varepsilon>0$ נבחר $k=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ ואז $\frac{1}{k}<0+\varepsilon$.

3. נתונים a,b כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $\delta>0$ מתקיים $a+\varepsilon>b-\delta$. לכן אי השיוויון נכון גם עבור $\delta=\varepsilon$ ולכן, לכל $\varepsilon>0$ מתקיים: $a+2\varepsilon>b$. נניח בשלילה ש- $b>a$ אז $a+2\frac{b-a}{4}=\frac{b+a}{2}<b$ ולכן אי השיוויון $a+2\varepsilon>b$ אינו מתקיים עבור $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$. סתירה. לכן, $a \ge b$.

4. **ב.** צ"ל : $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+1}{n^2+2n} \ne 4$

<u>צ"ל</u>: קיים $\varepsilon_0>0$ שלכל m טבעי קיים $m<n$ שעבורו : $\left|\frac{4n^3+1}{n^2+2n}-4\right| \ge \varepsilon$

<u>חשבון</u>:

$$\left|\frac{4n^3+1}{n^2+2n}-4\right|=\left|\frac{4n^3+1-4n^2+8n}{n^2+2n}\right| \ge \left|\frac{4n^3-4n^2}{\frac{3}{2}n^2}\right|=\left|\frac{8}{3}n-\frac{8}{3}\right|>1=\varepsilon_0$$

שני אי השיוויונים נכונים עבור $n \ge 2$.
<u>הוכחה</u>: עבור $\varepsilon_0=1$ לכל m טבעי נבחר $n=\max\{2,m\}$ ואז, ע"פ החשבון הנ"ל יתקיים $|a_m-L| \ge \varepsilon_0$.

ג. צ"ל : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+1}{n^2+2n}=\infty$

<u>צ"ל</u>: לכל $M>0$ קיים $N(M)$ טבעי שלכל $n>N(M)$ מתקיים $\frac{4n^3+1}{n^2+2n}\ge M$

<u>חשבון</u>: $\frac{4n^3+1}{n^2+2n}>\frac{4n^3}{\frac{3n^2}{2}}=\frac{8}{3}n>M$

<u>הוכחה</u>: $M>0$ נתון. נבחר $N(M)=\frac{3}{8}M$ ואז ע"פ החשבון הנ"ל נקבל $a_n\ge M$.

5. **א.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5}\right)^2=4$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}}\right)^2=2^2=4$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+5}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5-n}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{0}{1+1}=0$$

6.

א. לא. דוגמא : $a_n=\begin{cases}1 & n=2^k\\ 0 & n\ne 2^k\end{cases}$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ לא קיים אבל לכל n :

$a_{2n}-a_n=\begin{cases}1-1=0 & n=2^k\\ 0-0=0 & n\ne 2^k\end{cases}$ ולכן גם $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}-a_n=0$.

ב. לא. דוגמא: $a_n=\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$

ג. נכון . הוכחה : נניח בשלילה ש- $\left(a_n+b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז ע"פ אריתמטיקה של גבולות : $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)-\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ולכן קיים בסתירה לנתון.

ד. נכון. $\lim_{n\to\infty} b_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \right)^{-1}$ ולכן קיים.

ה. לא. לדוגמא: $a_n = n$, $b_n = n+1$.