אלגברה ב – היטלים ואופרטורים אוניטריים

נושאים:

1. היטלים
2. אופרטורים אוניטריים (ומטריצות אוניטריות)

היטלים

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F. אופרטור $T:V\to V$ נקרא היטל אם $T^2=T$.

משפט (הוכח בכיתה): ל – V מ"ו מעל F עם היטל E, מתקיים $V=Image(E)\oplus Ker(E)$

הערה: עבור $U=Image(E),W=Ker(E)$, E נקרא היטל על U לאורך W.

טענה (הוכחה בכיתה): יהי V מ"ו מעל F, ונניח $V=U_1\oplus U_2$ אז קיים היטל יחיד $E:V\to V$ המקיים $Image(E)=U_{1,}Ker(E)=U_2$.

דוגמא: $V=R^2$, ונסתכל על $U_1=span\{(1,-1)\},\ U_2=span\{(1,2)\}$. מהו ההיטל E המייצג את הפירוק $V=U_1\oplus U_2$?

פתרון: $(1,2),(1,-1)$ מהווים בסיס ל – V. נגדיר $E((1,-1))=(1,-1)$, $E((1,2))=(0,0)$ ונרחיב לינארית. לפי ההוכחה של הטענה זה ההיטל המבוקש. נוסחה כללית להיטל נמצא באופן הבא: נייצג וקטור כללי לפי הבסיס שבחרנו:

$$(a,b)=x(1,-1)+y(1,2)\to a=x+y,b=2y-x\to y=\frac{a+b}{3},x=\frac{2\cdot a-b}{3}$$ *, לכן נקבל:*

$$E((a,b))=\frac{a+b}{3}E((1,-1))+\frac{2a-b}{3}E((1,2))=(\frac{a+b}{3},\frac{-a-b}{3})$$.

אופרטורים ומטריצות אוניטריות

הגדרה: יהי V ממ"פ מעל F, יהי $T:V\to V$ אופרטור

1. T נקרא אוניטרי אם מתקיים $T^*=T^{-1}$ (כאשר $F=R$, T אורתוגונלי)

2. T נקרא הרמיטי אם $T^*=T$ (אם $F=R$, T סימטרי)

משפט (הוכח בכיתה): יהי V ממ"פ, $T:V\to V$ אופרטור, התנאים הבאים שקולים:

1. T אוניטרי.

2. T שומר על מכפלות פנימיות (ז"א $\langle T(v),T(u)\rangle=\langle v,u\rangle$ לכל $u,v\in V$)

3. T שומר על נורמות של אברי V.

הערה: אופרטור אוניטרי הוא למעשה אוטומורפיזם של V כמרחב מכפלה פנימית.

הגדרה: מטריצה $A\in M_{nxn}(C)$ נקראת אוניטרית אם $A^*A=I$. מטריצה $A\in M_{nxn}(R)$ נקראת אורתוגונלית אם $A^*A=I$

טענה: יהי V ממ"פ ו – $T:V\to V$ אופרטור. T אוניטרי אם ורק אם המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אוניטרית.

הוכחה: בשיעור שעבר ראינו שאם A מייצגת את T בבסיס אורתונורמלי כלשהו אז המייצגת של T^* היא A^* . ידוע שהמטריצה המייצגת של הרכבת אופרטורים ביחס לבסיס כלשהו הוא מכפלת המטריצות המייצגות, לכן מתקיימת הטענה.

תרגילים:

1. יהי $V=M_{nxn}(C)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=trace(AB^*)$. עבור $M\in V$ נגדיר אופרטור $T_M:V\to V$ ע"י $T_M(A)=MA$. הוכח ש - T_M אוניטרי אמ"ם M אוניטרית.

הוכחה: נניח ש – M אוניטרית. עבור $A\in V$ נקבל:

$$\langle T_M(A), T_M(A)\rangle = trace(MA(MA)^*) = trace(MAA^*M^*) = trace(MM^*AA^*) = trace(AA^*) = \langle A, A\rangle$$

לכן T_M שומרת על נורמות, ולפי המשפט היא אוניטרית.

נניח T_M אוניטרית. נשים לב ש – $T_M(I)=M$,לכן

$n=\langle I, I\rangle=\langle T_M(I), T_M(I)\rangle=trace(MM^*)$. נסתכל על המטריצה $A=MM^*-I$. נרצה להראות ש – $A = 0$. מספיק להראות ש – $trace(AA^*)=0$ (כי $trace(AA^*)$ הוא סכום הערכים המוחלטים בריבוע של אברי A).

$trace(AA^*)=trace((MM^*-I)(MM^*-I)^*)=trace(MM^*MM^*)-2\cdot trace(MM^*)+n$. נשים לב ש - $MM^*=(MM^*)^*$ לכן

$trace(MM^*MM^*)=trace(MM^*(MM^*))=\langle MM^*, MM^*\rangle=\langle M^*, M^*\rangle=trace(MM^*)=n$ כי $T_M(M^*)=MM^*$ ו - T_M אוניטרית, לכן קיבלנו $trace(AA^*)=0$ והטענה הושלמה.

2. יהי V ממ"פ סוף ממדי, $W<V$ תת מרחב. ל – $v\in V$ נסמן $v=w+u$ ל – $w\in W$ ו – $u\in W^{\perp}$. נגדיר אופרטור $T(v)=w-u$.

i. הוכח ש – T אוניטרי והרמיטי.

ii. נניח $V=R^3$ עם מ"פ סטנדרטית ו – W תת המרחב הנפרש ע"י (1,0,1). מצא מטריצה מייצגת ל – T ביחס לבסיס הסטנדרטי.

פתרון: ל – v כללי מתקיים $\langle v, v\rangle=\langle w, w\rangle+\langle u, u\rangle$ כי w,u ניצבים, לכן

$\langle T(v), T(v)\rangle=\langle w-u, w-u\rangle=\langle w, w\rangle+\langle u, u\rangle=\langle v, v\rangle$ לכן T אוניטרי. ל – $v_1, v_2\in V$ מתקיים

$\langle T(v_1), v_2\rangle=\langle w_1, w_2\rangle-\langle u_1, u_2\rangle=\langle v_1, T(v_2)\rangle$ ומיחידות האופרטור הצמוד נקבל ש – T הרמיטי.

נניח $V=R^3$. נרחיב את הוקטור הנתון לבסיס אורתוגונלי $\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$.

וקטור כללי ב – V ניתן לייצוג כ - $(a,b,c)=\frac{a+c}{2}(1,0,1)+b(0,1,0)+\frac{c-a}{2}(-1,0,1)$ ואז

התמונה תחת T היא $T((a,b,c))=\frac{a+c}{2}(1,0,1)-b(0,1,0)+\frac{a-c}{2}(-1,0,1)=(c,-b,a)$,

והמטריצה המייצגת בבסיס הסטנדרטי היא $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.