השוואת מקדמים

נניח כי נתונה לנו מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים
$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$ עם פולינום אופייני
$\ell(r)=a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r+a_0$. יש שלושה מקרים:

1. $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=P_m(x)$ כאשר $P_m(x)$ פולינום ממעלה m. במקרה זה אנו מבררים את הריבוי $k\geq 0$ של 0 כשורש של הפ"א ואז אנו יודעים שיש פתרון מהצורה $y_p(x)=x^kR_m(x)$ כאשר $R_m(x)$ פולינום ממעלה m לכל היותר. הנעלמים פה הם המקדמים של הפולינום $R_m(x)$. מוצאים אותם ע"י הצבה של $y_p(x)$ לתוך המד"ר.
2. $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=P_m(x)e^{ax}$ כאשר $P_m(x)$ פולינום ממעלה m. במקרה זה אנו מבררים את הריבוי $k\geq 0$ של a כשורש של הפ"א ואז אנו יודעים שיש פתרון מהצורה $y_p(x)=x^kR_m(x)e^{ax}$ כאשר $R_m(x)$ פולינום ממעלה m לכל היותר. הנעלמים פה הם המקדמים של הפולינום $R_m(x)$. מוצאים אותם ע"י הצבה של $y_p(x)$ לתוך המד"ר. נשים לב ש־$a=0$ נותן את המקרה הקודם.
3. $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=P_m(x)e^{ax}\cos bx+Q_m(x)e^{ax}\sin bx$ כאשר $P_m(x),Q_m(x)$ פולינומים ממעלה לכל היותר m. במקרה זה אנו מבררים את הריבוי $k\geq 0$ של $a\pm bi$ כשורש של הפ"א ואז אנו יודעים שיש פתרון מהצורה $y_p(x)=x^kR_m(x)e^{ax}\cos bx+x^kS_m(x)e^{ax}\sin bx$. הנעלמים פה הם המקדמים של הפולינומים $R_m(x),S_m(x)$. מוצאים אותם ע"י הצבה של $y_p(x)$ לתוך המד"ר. נשים לב ש־$b=0$ נותן את מקרה 2.

<u>**הערות:**</u> 1. אין צורך למצוא פתרון כללי של ההומוגנית המתאימה בשביל למצוא פתרון פרטי בשיטת השוואת מקדמים.
2. לכל מד"ר אי־הומוגנית אפשר למצוא פתרון פרטי בעזרת וריאציית פרמטרים. לא לכל מד"ר אפשר למצוא פתרון פרטי בשיטת השוואת מקדמים. רק למד"ר הנופלות למקרים $1,2,3$.

לסיכום זריז של השוואת מקדמים נרשום את הטבלה הבאה

$Ly=P_m(x)$	$y_p(x)=x^kR_m(x)$
$Ly=P_m(x)e^{ax}$	$y_p(x)=x^kR_m(x)e^{ax}$
$Ly=P_m(x)e^{ax}\cos bx+Q_m(x)e^{ax}\sin bx$	$y_p(x)=x^k\big(R_m(x)e^{ax}\cos bx+S_m(x)e^{ax}\sin bx\big)$

תרגיל: פתרו $y'' + y' + y = x^2$
פתרון: נפתור קודם את ההומוגנית המתאימה.

$$y'' + y' + y = 0$$
$$r^2 + r + 1 = 0$$
$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \;\; e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$y_H(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

נחפש כעת פתרון פרטי לפי שיטת השוואת מקדמים. נשים לב כי אנו במקרה 1, והריבוי של 0 כשורש של הפ"א הוא אפס ולכן $k = 0$. הפולינום בצד ימין של המד"ר ממעלה 2 ולכן $m = 2$. נקבל

$$y_p(x) = R_2(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$$
$$y_p'(x) = d_1 + 2d_2 x$$
$$y_p''(x) = 2d_2$$

נציב לתוך המד"ר

$$2d_2 + d_1 + 2d_2 x + d_0 + d_1 x + d_2 x^2 = x^2$$
$$(d_0 + 2d_1 + 2d_2) + (d_1 + 2d_2)x + d_2 x^2 = x^2$$
$$d_2 = 1$$
$$d_1 + 2d_2 = 0 \longrightarrow \;\; d_1 = -2$$
$$d_0 + 2d_1 + 2d_2 = 0 \longrightarrow \;\; d_0 = 0$$
$$y_p(x) = -2x + x^2$$
$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + x^2 - 2x$$

תרגיל: פתרו $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$
פתרון: נפתור קודם את ההומוגנית המתאימה.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
$$p(r) = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$$
$$e^{2x}, \;\; xe^{2x}$$

נחפש כעת פתרון פרטי לפי שיטת השוואת מקדמים. נשים לב כי אנו במקרה 2, והריבוי של 2 כשורש של הפ"א הוא 2 ולכן $k=2$. הפולינום בצד ימין של המד"ר הוא ממעלה 1 ולכן $m=1$. נקבל

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= x^2R_1(x)e^{2x} = x^2(d_0+d_1x)e^{2x} = (d_0x^2+d_1x^3)e^{2x}\\
y_p'(x) &= \big(2d_0x+(2d_0+3d_1)x^2+2d_1x^3\big)e^{2x}\\
y_p''(x) &= \big(2d_0+(8d_0+6d_1)x+(4d_0+12d_1)x^2+4d_1x^3\big)e^{2x}
\end{aligned}$$

נציב לתוך המד"ר

$$\begin{aligned}
& \big(2d_0+(8d_0+6d_1)x+(4d_0+12d_1)x^2+4d_1x^3-8d_0x-(8d_0+12d_1)x^2-8d_1x^3+\\
+\ & 4d_0x^2+4d_1x^3\big)e^{2x} = xe^{2x}\\
& 2d_0+(8d_0+6d_1-8d_0)x+(4d_0+12d_1-8d_0-12d_1+4d_0)x^2+\\
+\ & (4d_1-8d_1+4d_1)x^3 = x\\
& 2d_0+6d_1x = x\\
& 2d_0 = 0 \longrightarrow\ d_0 = 0\\
& 6d_1 = 1 \longrightarrow\ d_1 = \frac{1}{6}\\
& y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^{2x}\\
& y(x) = c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}
\end{aligned}$$

<u>תרגיל:</u> פתרו $y''-y=e^x\cos x$

<u>פתרון:</u> נפתור קודם את ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{aligned}
& y''-y=0\\
& r^2-1=(r-1)(r+1)=0\\
& e^x, e^{-x}
\end{aligned}$$

נחפש כעת פתרון פרטי לפי שיטת השוואת מקדמים. נשים לב כי אנו במקרה 3, והריבוי של $1+i$ כשורש של הפ"א הוא 0 ולכן $k=0$. הפולינומים בצד ימין של המד"ר הם ממעלה 0 ולכן $m=0$. נקבל

$$
\begin{aligned}
&y_p(x) = R_0(x)e^x \cos x + S_0(x)e^x \sin x = d_1 e^x \cos x + d_2 e^x \sin x \\
&y_p'(x) = \big((d_1+d_2)\cos x + (d_2-d_1)\sin x\big)e^x \\
&y_p''(x) = \big(2d_2 \cos x - 2d_1 \sin x\big)e^x
\end{aligned}
$$

נציב לתוך המד"ר

$$
\begin{aligned}
&\big(2d_2 \cos x - 2d_1 \sin x - d_1 \cos x - d_2 \sin x\big)e^x = e^x \cos x \\
&(2d_2 - d_1)\cos x + (-2d_1 - d_2)\sin x = \cos x \\
&2d_2 - d_1 = 1 \\
&-2d_1 - d_2 = 0 \\
&d_1 = -\frac{1}{5} \quad d_2 = \frac{2}{5} \\
&y_p(x) = -\frac{1}{5}e^x \cos x + \frac{2}{5}e^x \sin x \\
&y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{5}e^x \cos x + \frac{2}{5}e^x \sin x
\end{aligned}
$$

הערה: שימו לב כי למרות שהחלק עם הסינוס לא היה במד"ר עצמה, יש את החלק של הסינוס בפתרון. כלומר ברגע שיש בצד שמאל של המד"ר סינוס או קוסינוס (או שניהם), אז בצורת הפתרון הפרטי לפי שיטת השוואת מקדמים אי אפשר להזניח את אחד המחוברים.

תרגיל: פתרו $y'' - 2y' + y = xe^x + 2\tan x + \sin^2 x + \frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{x}$
פתרון: קודם כל נפתור את ההומוגנית המתאימה

$$
\begin{aligned}
&y'' - 2y' + y = 0 \\
&\ell(r) = r^2 - 2t + 1 = (r-1)^2 \\
&e^x, xe^x \\
&y_H(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x
\end{aligned}
$$

נחפש כעת פתרון פרטי של האי הומוגנית. אפשר ישירות להשתמש בווריאציית פרמטרים אבל אנו נפריד במקום לכמה משוואות:

$$y'' - 2y' + y = xe^x$$
$$y'' - 2y' + y = \tan x$$
$$y'' - 2y' + y = \sin^2 x$$
$$y'' - 2y' + y = \frac{x}{e^x}$$
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

המד"ר הראשונה היא $y'' - 2y' + y = xe^x$. אפשר למצוא לה פתרון בשיטת ווריאציית פרמטרים או השוואת מקדמים. בווריאציית פרמטרים נקבל שיש פתרון פרטי מהצורה $y_1(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ והמשוואות כדי למצוא את $c_1(x), c_2(x)$ הן

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = xe^x$$

לפי השוואת מקדמים נקבל שיש פתרון מהצורה

$$y_1(x) = x^2(a + bx)e^x$$

המד"ר השנייה היא $y'' - 2y' + y = \tan x$. אפשר למצוא לה פתרון בשיטת ווריאציית פרמטרים בלבד. בווריאציית פרמטרים נקבל שיש פתרון פרטי מהצורה $y_2(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ והמשוואות כדי למצוא את $c_1(x), c_2(x)$ הן

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \tan x$$

המד"ר השלישית היא $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$. אפשר למצוא לה פתרון בשיטת ווריאציית פרמטרים. בווריאציית פרמטרים נקבל שיש פתרון פרטי מהצורה $y_3(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ והמשוואות כדי למצוא את $c_1(x), c_2(x)$ הן

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \sin^2 x$$

למעשה, ע"י שימוש בזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ אפשר למצוא פתרון לפי השוואת מקדמים. אבל צריך להפריד לשתי משוואות:

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}$$
$$y'' - 2y' + y = -\frac{\cos 2x}{2}$$

כל אחת בנפרד אפשר לפתור בהשוואת מקדמים, לחבר את הפתרונות הפרטיים ולקבל פתרון פרטי של $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$.
המד"ר הרביעית היא $y'' - 2y' + y = \frac{x}{e^x}$. אפשר למצוא לה פתרון בשיטת ווריאציית פרמטרים או השוואת מקדמים. בווריאציית פרמטרים נקבל שיש פתרון פרטי מהצורה $y_4(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ והמשוואות כדי למצוא את $c_1(x), c_2(x)$ הן

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{x}{e^x}$$

לפי השוואת מקדמים נרשום את המד"ר מחדש $y'' - 2y' + y = xe^{-x}$ ונקבל שיש פתרון מהצורה

$$y_4(x) = (a + bx)e^{-x}$$

המד"ר החמישית ואחרונה היא $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. אפשר למצוא לה פתרון בשיטת ווריאציית פרמטרים בלבד. בווריאציית פרמטרים נקבל שיש פתרון פרטי מהצורה $y_5(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ והמשוואות כדי למצוא את $c_1(x), c_2(x)$ הן

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}$$

כעת נקבל פתרון פרטי של המד"ר מקורית ע"י

$$y_p(x) = y_1(x) + 2y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + y_5(x)$$

שימו לב שיש לנו מחובר שהוא $2y_2(x)$ וזה בגלל שנמד"ר שפתרנו היא $y'' - 2y' + y = \tan x$ אבל במד"ר המקורית $\tan x$ מופיע כפול 2.

<u>תרגיל:</u> שימושים פיזיקליים: נניח כי גוף נופל נפילה חופשית מגובה רב. פועל עליו כוח המשיכה, והתנגדות האוויר. נניח כי התנגדות האוויר פרופורציונית למהירות של הגוף וכיוון ההתנגדות הפוכה לכיוון התנועה. נסמן ע"י $\gamma > 0$ את מקדם ההתנגדות. אזי אם $v(t)$ הוא המהירות של הגוף (מהירות חיובית עבור תנועה כלפי מטה), ו־m המסה של הגוף, נקבל כי $mv'(t) = mg - \gamma v(t)$
כלומר $v' + \frac{\gamma}{m}v = g$
שהפתרון שלה הוא $v(t) = ce^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{mg}{\gamma}$
אנו רואים כי $\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma}$
בלי תלות ב־c. הביטוי $\frac{mg}{\gamma}$ נקרא $terminal\ velocity$ מסיבות ברורות.

הערה: באופן כללי, אם נסמן את המרחק של הגוף ממרכז כדה"א ע"י $x(t)$ ונשתמש בביטוי היותר מדוייק עבור הכוח שמפעיל כדה"א על גוף ונסמן את המסה של כדה"א ע"י M ושל הגוף ע"י m אז נקבל את המד"ר הלא לינארית

$$mx''(t) = -\frac{GMm}{x(t)^2} + \gamma x'(t).$$

זוהי אינה מד"ר שאנחנו יודעים לפתור בקורס זה.

הוכחות

בשביל להוכיח ששיטת השוואת מקדמים אכן עובדת, נצטרך להציג סימונים חדשים.
נזכר כי

$$\frac{d^0}{dx^0}y = I(y) = y$$
$$\frac{d}{dx}y(x) = y'(x)$$
$$\frac{d^k}{dx^k}y(x) = y^{(k)}(x)$$
$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^l}{dx^l}y\right) = \frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}y$$

כאשר I היא העתקת הזהות, כלומר $I(y) = y$. נשים לב כי $\frac{d^k}{dx^k}$ היא בעצם העתקה לינארית מהפונקציות הגזירות k פעמים ברציפות, לתוך הפונקציות הרציפות.
עבור פולינום

$$\ell(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

נסמן

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right) = a_n\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0 I$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned} L(y) &= a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \\ &= a_n\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_1\frac{d}{dx}y + a_0 y = \\ &= \left(a_n\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{d}{dx} + a_0 I\right)y = \\ &= \ell\left(\frac{d}{dx}\right)y \end{aligned}$$

כלומר את המד"ר

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

עם הפולינום האופייני

$$\ell(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

אפשר לרשום כ־

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y=0.$$

מה קורה אם ניקח שני פולינומים $\ell_1(r),\ell_2(r)$ ונסתכל על המד"ר

$$\ell_1\left(\frac{d}{dx}\right)\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)y=0.$$

האם זוהי מד"ר עם מקדמים קבועים ואם כן, מה הפולינום האופייני שלה? התשובה היא שזו מד"ר עם מקדמים קבועים שהפולינום האופייני שלה הוא $\ell_1(t)\ell_2(r)$. נראה זאת:
ראינו כי

$$\begin{aligned}&\frac{d^0}{dx^0}=I\\&\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^l}{dx^l}y\right)=\frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}}\end{aligned}$$

שזה בדיוק כמו

$$\begin{aligned}&r^0=1\\&r^k\cdot r^l=r^{k+l}\end{aligned}$$

ולכן כאשר נכפיל

$$\ell_1\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)=(\ell_1\cdot\ell_2)\left(\frac{d}{dx}\right)$$

ולכן הפולינום האופייני הוא $(\ell_1\cdot\ell_2)(t)=\ell_1(r)\ell_2(r)$.
למה כל זה שימושי? נסתכל על המד"ר

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y=f(x)$$

ונניח כי $f(x)$ פתרון של המד"ר ההומוגנית עם מקדמים קבועים

$$\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)y=0$$

כלומר

$$\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=0$$

נפעיל את $\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)$ על

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y=f(x)$$

ונקבל

$$\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y\right)=\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)=0$$

כלומר

$$(\ell_2\cdot\ell)\left(\frac{d}{dx}\right)y=0$$

וזה נותן לנו מידע על y, כלומר y שהוא פתרון של

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y=f(x)$$

הוא פתרון של

$$(\ell_2\cdot\ell)\left(\frac{d}{dx}\right)y=0$$

ואנו יודעים למצוא פתרונות של מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים בעזרת השורשים של הפולינום האופייני, שבמקרה זה אנו יודעים כי הוא $(\ell_2\cdot\ell)(t)=\ell_2(r)\ell(r)$.

נחזור עכשיו למקרים בתחילת הקובץ. נעשה רק את מקרה 2. כלומר אנו מחפשים פתרון פרטי למד"ר

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=P_m(x)e^{ax}$$

כאשר $P_m(x)$ פולינום ממעלה m. נחפש מד"ר עם מקדמים קבועים אשר

$$P_m(x)e^{ax}=(a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m)e^{ax}=a_0e^{ax}+a_1xe^{ax}+\cdots+a_mx^me^{ax}$$

פתרון שלה. נשים לב כי e^{ax} פתרון של

$$y'-ay=0$$

כי הפולינום האופייני הוא $r-a$. באותו האופן נקבל כי x^ke^{ax} פתרון של

$$\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)y=0$$

כאשר $\ell_2(r)=(r-a)^{k+1}$.
לכן ניקח $\ell_2(r)=(r-a)^{m+1}$ ואז $e^{ax},\dots,x^me^{ax}$ פתרונות של

$$\ell_2\left(\frac{d}{dx}\right)y=0$$

ולכן $P_m(x)e^{ax}$ פתרון של מד"ר זו כיוון שהוא קומבינציה לינארית של $e^{ax}, \dots, x^m e^{ax}$.
לכן אנו יודעים כי פתרון פרטי של המד"ר האי־הומוגנית

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right) y = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = P_m(x)e^{ax}$$

הוא פתרון של המד"ר ההומוגנית

$$(\ell_2 \cdot \ell)\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

כאשר

$$(\ell_2 \cdot \ell)(r) = (r-a)^{m+1}\ell(r).$$

קיבלנו שכל פתרון פרטי אותו אנו מחפשים, הוא קומבינציה לינארית של פתרונות של

$$(\ell_2 \cdot \ell)\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

המתאימים לשורשים של $(r-a)^{m+1}\ell(r)$. נשים לב, כי אם אחד הפתרונות בקומבינציה הלינארית אינו מגיע מהשורש a, אז הוא שורש של $\ell(r)$ ולכן פותר את המד"ר ההומוגנית

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

ואינו "תורם" דבר לפתרון של המד"ר האי־הומוגנית

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right) y = f(x)$$

כלומר יש פתרון פרטי של המד"ר האי־הומוגנית הנ"ל שהוא קומבינציה לינארית של הפתרונות של המד"ר ההומוגנית

$$(\ell_2 \cdot \ell)\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

המגיעים מהשורש a בלבד.
נסמן ע"י k את הריבוי של a כשורש של $\ell(r)$. אזי $k+m+1$ הוא הריבוי של a כשורש של $(r-a)^{m+1}\ell(r)$. לכן הפתרונות של

$$(\ell_2 \cdot \ell)\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

המתאימים לשורש a הם $e^{ax},\dots,x^{k+m}e^{ax}$ שאומר שהפתרון הפרטי $y_p(x)$ אותו אנו מחפשים מקיים

$$y_p(x)=c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}+\cdots+c_{k+m}x^{k+m}e^{ax}$$

אבל נשים לב ש-$e^{ax},xe^{ax},\dots,x^{k-1}e^{ax}$ פתרונות של המד"ר ההומוגנית

$$\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y=a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

ולכן כאשר נציב את $y_p(x)$ לתוך המד"ר האי־הומוגנית נקבל

$$\begin{aligned}
f(x)=\ell\left(\frac{d}{dx}\right)y_p&=\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}+\cdots+c_{k+m}x^{k+m}e^{ax}\right)=\\
&= c_1\ell\left(\frac{d}{dx}\right)(e^{ax})+c_2\ell\left(\frac{d}{dx}\right)(xe^{ax})+\cdot+c_{k-1}\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^{k-1}e^{ax}\right)+\\
&+ c_k\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^ke^{ax}\right)+\cdots+c_{k+m}\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^{k+m}e^{ax}\right)=\\
&= c_k\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^ke^{ax}\right)+\cdots+c_{k+m}\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^{k+m}e^{ax}\right)=\\
&= \ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(c_kx^ke^{ax}+\cdots+c_{k+m}x^{k+m}e^{ax}\right)=\\
&= \ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^k\left(c_k+\cdots+c_{k+m}x^m\right)e^{ax}\right)=\ell\left(\frac{d}{dx}\right)\left(x^kR_m(x)e^{ax}\right)
\end{aligned}$$

כלומר יש פתרון פרטי מהצורה $y_p(x)=x^kR_m(x)e^{ax}$ כאשר $R_m(x)$ פולינום ממעלה m לכל היותר.

מקרה 3 נעשה באותו האופן כאשר $\ell_2(r)=(r^2-2ar+a^2+b^2)^{m+1}$.