written by Dani Movso

(8)

1. פונקציות:

- [illegible]
לאיבר מסויים ב-B. נסמן: $f: A \to B$.
- f על, אם התמונה של f היא הטווח B כולו.
- f חח"ע, אם לכל $b \in B$ יש מקור יחיד.
- אם $f: A \to B$ חח"ע ועל, ניתן להגדיר פונקציה הפוכה $f^{-1}: B \to A$. f^{-1} מוגדרת: $f^{-1}(b) = a$ כאשר $f(a) = b$.

- הפונקציות האלמנטריות:
- פולינום ממעלה n - תחום ההגדרה: כל $\mathbb{R}$.
- פונקציות רציונליות: $f(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x), Q(x)$ הם פולינומים. תחום ההגדרה: כל $\mathbb{R}$ פרט לשורשים של $Q(x)$.
- פונקציות מעריכיות: $1 \neq a > 0$: $f(x) = a^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
הערה: $a = e \Leftarrow$ $e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.

- פונקציות טריגונומטריות: - $\sin(x)$, $\cos(x)$ - תחום הגדרה: כל $\mathbb{R}$
- $\tan(x)$ - תחום הגדרה: $\mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cot(x)$ - תחום הגדרה: $\mathbb{R} \setminus \{\pi n ; n \in \mathbb{Z}\}$
- לוגריתם: $y = \log_a x$ (כאשר $a^y = x$) - תחום ההגדרה: $x \in \mathbb{R}$.
- הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות - תחומי ההגדרה המתאים לפונקציות השונות.

! גם כל הרכבה/ אריתמטיקה בין פונקציות אלמנטריות נחשבת אלמנטרית.

- פעולות אריתמטיות בין פונקציות: בהנחה והחיתוך בין תחומי ההגדרה של הפונקציות לא ריק:
- $f_1 + f_2$: $\forall x \in D_1 \cap D_2$, $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$
- $\alpha f_1 + \beta f_2$: $(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$
- $f_1 \cdot f_2$: $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$
- בקבוצה: $D_1 \cap D_2 \setminus \{x : f_2(x) = 0\}$ מוגדרת $(\frac{f_1}{f_2})(x) = f_1(x)/f_2(x)$

- פעולת הרכבה: $f: A \to B$, $g: C \to D$ ונניח: $B \subset C$:
עבור $x \in A$ - $f(x) \in B \subset C$ $\Leftarrow$ $g \circ f: A \to D$ מוגדר: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
הערה: הרכבה בד"כ לא קומוטטיבית כי יש בעיה עם תחומי ההגדרה.

- פונקציות חסומות: - f חסומה ב-D אם יש $M > 0$ כך שמתקיים $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in D$.
- f חסומה מלעיל ב-D: $\sup_{x \in D} f = \sup\{f(x) : x \in D\}$
- f חסומה מלרע ב-D: $\inf_{x \in D} f = \inf\{f(x) : x \in D\}$
- כאשר הסופרימום / האינפימום מתקבלים בפונקציה, כלומר קיימת נק' $x_0 \in D$ עם $f(x_0) = \sup f / \inf f$ אז הפונקציה מקבלת מקסימום/ מינימום.

2. גבול של פונקציה:

- הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר של-f יש גבול L בנק' a אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - a| < \delta$, מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- טענה: אם $\lim_{x \to a} f(x) = L$ אז יש סביבה מנוקבת של a שבה f חסומה.
הוכחה: בוחרים $\varepsilon = 1$ ואז קיים $\delta_0 > 0$ מתקיים $\Leftarrow$ בסביבת δ_0 מנוקבת של a, f חסומה: $0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow L - 1 < f(x) < L + 1$

- טענה: 1. נניח קיים $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ אז קיימת סביבה נקובה בה $f(x) \neq 0$.
2. אם $L > 0$ אז קיימת סביבה נקובה של a בה $f(x) > 0$.
הוכחה: מספיק להוכיח את 2. בוחרים $\varepsilon_0 = \frac{L}{2}$ ואז מהגדרת הגבול זה מתקיים

- **משפט היינה:** $\lim_{x\to a} f(x)=L \iff$ לכל $a\neq x_n\xrightarrow{n\to\infty}a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}L$.

הוכחה: $\Leftarrow$: בהינתן הגבול של הפונקציה וקיום סדרה ששואפת ל-a. לוקחים את ה-δ שמתאים ל-$\varepsilon>0$ ספציפי, ואז משתמשים ב-δ בתור ה-ε מהגדרת הגבול של הסדרה.

$\varepsilon=\delta$, קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $0<|x_n-a|<\delta$ וזה גורר לפי הגדרת הגבול של הפונקציה שמתקיים: $|f(x_n)-L|<\varepsilon$.

מאוד שימושי. לסתירת גבול. פשוט מראים 2 סדרות ששואפות לגבולות שונים.

$\Rightarrow$: לכל סדרה $a\neq x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\to L$.

נניח בשלילה כי קיימים לפונקציה שני גבולות L, M.

מניחים כי קיים $\varepsilon_0>0$ עבורו לכל $0<\delta<r$ קיים $x_\delta\in(a-\delta,a+\delta)$ עבורו $|f(x_\delta)-L|\geq\varepsilon_0$ (*) $x_\delta:=x^r$ ולכל פעם בוחרים $x_n=x^{\frac{r}{n}}$.

בונים ככה סדרה מה-x_δ המקיימים (*) ואז מתקבלת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-a אבל $f(x_n)\not\to L$ וזו סתירה להנחה.

- **אלגברה של גבולות:** $\lim_{x\to a}f(x)=F$, $\lim_{x\to a}g(x)=G$ אז:

- $\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha F+\alpha G$
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = F\cdot G$
- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F}{G} \iff G\neq 0$

הוכחה: או ישירות או לפי היינה ומעבר לסדרות

הערה: זה מוגדר היטב לפי הטענה שכאשר $G\neq0$ קיימת סביבה מנוקבת עבורה הפונקציה גם שונה מאפס.

- **סדר של גבולות:** א. אם $F<G$ אז יש סביבה מנוקבת של a שבה $f(x)<g(x)$.

ב. אם $f(x)\geq g(x)$ לכל x בסביבה, אז: $F\geq G$.

הוכחה: א. מגדירים פונקציה $h(x)=g(x)-f(x)$ $\Leftarrow$ משתמשים באלגברה של גבולות ובטענה על סביבה שבה הפונקציה שונה מאפס $\Leftarrow$ $g(x)-f(x)>0$.

ב. מוכיחים בשלילה. מניחים כי $F<G$ ואז (א) מתקיים. סתירה להנחה ש- $f(x)\geq g(x)$.

- **משפט:** תהיינה f,g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a. $f(x)$ חסומה בסביבת a, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ אז מתקיים: $\lim_{x\to a}g(x)f(x)=0$.

הוכחה: מגדירים סדרה $a\neq x_n\to a$ ואז לפי היינה והמשפט הגולני בסדרות מוכיחים.

- **גבולות מוכללים:** - $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ $\Leftarrow$ לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $0<|x-a|<\delta$ $\Leftarrow$ $f(x)>M$.

- $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ $\Leftarrow$ לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $0<|x-a|<\delta$ $\Leftarrow$ $f(x)<-M$.

- **גבולות חד"צ:** - f מוגדרת בסביבה ימנית של a:

$\lim_{x\to a^+}f(x)=L$ $\Leftarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $0<x-a<\delta$ $\Leftarrow$ $|f(x)-L|<\varepsilon$.

- באותה הדרך מגדירים עבור סביבה שמאלית: $-\delta<x-a<0$.

הערה: הגבול בנקודה קיים אמ"מ הגבולות החד"צ קיימים ושווים לערך הגבול. (הוכחה: לפי הגדרת הגבול).

הערה: ניתן להגדיר גבולות מוכללים חד"צ. לדוגמא: $\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ אם לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $x\in(a-\delta,a)$ $\Leftarrow$ $f(x)<-M$.

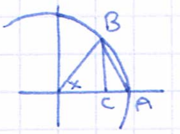
הערה: גם גבולות חד"צ ניתן להגדיר באמצעות היינה. פשוט משתמשים ב- $x_n>a$ או $x_n<a$.

- <u>גבולות באינסוף</u>: f מוגדרת בקרן (a,∞) / $(-\infty,a)$:
- $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ⇐ לכל $\varepsilon>0$ קיים $K>a$ כך שלכל $x>K$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ ⇐ לכל $\varepsilon>0$ קיים $K<a$ כך שלכל $x<K$ מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$.
- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ⇐ לכל $M>0$ קיים $K>a$ כך שלכל $x>K$ מתקיים $f(x)>M$.

- <u>משפט הסנדוויץ'</u>: $f(x)\le g(x)\le h(x)$ לכל x בסביבה מנוקבת של a. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$ אז: $\lim_{x\to a} g(x)=L$

הוכחה: זו ישירות לפי הגדרת הגבול או בעזרת הגדרת סדרה $a\ne x_n\to a$, משפט היינה ואז השימוש במשפט הסנדוויץ' לסדרות.

<u>הערה</u>: קיימת גרסאות עבור גבולות חד"צ גם משפטי היינה מתקיימים.



- <u>למה</u>: $|\sin(x)|\le|x|$ לכל x

הוכחה: בעזרת מעגל היחידה והסתכלות על הקטע $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$. $BC=\sin(x)$ ומתקיים $0<BC<BA<\hat{BA}$.

- <u>למה</u>: לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים: $0<\sin x<x<\tan x$

הוכחה: משווים שטחים בעזרת מעגל היחידה בין המשולש שה- tan יוצר והמשולשים והגזרה שה- sin יוצר.

- <u>טענה</u>: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

הוכחה: משתמשים בלמה השנייה ⇐ הופכים את אי השוויון: $\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}>\frac{\cos x}{\sin x}$ ואז כופלים ב- $\sin x$ ומשתמשים בסנדוויץ' (זה מוכיח גבול מימין) בשביל גבול משמאל משתמשים בזוגיות הפונקציה.

3. רציפות:

- <u>הגדרה</u>: f מוגדרת בסביבת הנק' a. נאמר ש- f רציפה בa אם קיים הגבול: $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

<u>הגדרה שקולה</u>: f רציפה ב- a ⇔ לכל סדרה $x_n\to a$ מתקיים: $f(x_n)\to f(a)$

- ניתן להגדיר גם רציפות מימין: $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ ורציפות משמאל: $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

<u>הערה</u>: פונקציה רציפה בנקודה ⇔ הפונקציה רציפה מימין ומשמאל בנקודה.

- <u>הגדרה</u>: f רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה בקטע.

- <u>משפט</u>: אלגברה של רציפות: f,g שתיהן רציפות בנק' a:
1. $\alpha f+\beta g$ רציפה בנק' a
2. fg רציפה בנק' a
3. אם $g(a)\ne 0$ אז f/g רציפה בנק' a

הוכחה לפי אלגברה של גבולות

- <u>הרכבה של רציפות</u>: אם f רציפה בנק' a ו- g רציפה בנקודה $b=f(a)$ אז $g\circ f$ רציפה בנקודה a.

הוכחה: בעזרת היינה. מראים בעזרת סדרה $x_n\to a$ שמתקיים $g(f(x_n))\to g(f(a))$

- <u>סוגי אי רציפויות</u>: f מוגדרת בסביבת a.
1. אי רציפות סליקה - $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים אך שונה מהערך של $f(a)$.
2. אי רציפות מסוג I (קפיצה) - הגבולות החד"צ קיימים וסופיים אך שונים זה מזה.
3. אי רציפות מסוג II (עיקרית) - לפחות אחד הגבולות החד"צ לא קיים.

- **משפט**: f פונקציה מונוטונית בקטע I. אז כל הנק' אי רציפות שלה הן מסוג קפיצה.
הוכחה: מניחים בה"כ f עולה:
- דנים בנקודה a פנימית ומחלקים למקרים: 1. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup_{x<a} f(x)$

2. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x>a} f(x)$
- מוכיחים את קיום הגבול עבור 1 ונקודת הקצה הימנית בעזרת הגדרת הסופרימום ובניית סביבה $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ שבה כל הערכים $f(x_\varepsilon)$ חסומים, וכל $a > x_\varepsilon$. אחרי זה משתמשים עם $\sup_{x<a} f(x) \le f(a) \le \inf_{x>a} f(x)$
- מראים באופן דומה עבור 2 ונקודת הקצה השנייה.
- מתייחסים למקרה שבו הגבולות החד"צ שווים ולמקרה בו הם שונים.

- **משפט ערך הביניים**: תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ נניח בה"כ $f(a)<f(b)$ ויהי $f(a)<\alpha<f(b)$. קיים $c\in[a,b]$ עבורו $f(c)=\alpha$ (*).
הוכחה: בונים סדרה של קטעים כשכל פעם חוצים את הקטע המקורי. אם הנק' האמצעית מקיימת את (*) אז סיימנו אחרת ממשיכים.
הקטעים מקיימים את הלמה של קנטור ולכן קיימת נק' c השייכת לכולם. קיימת: - סדרה של $f(a_n)\to f(c) \Leftarrow a_n\to c$
- סדרה של $f(b_n)\to f(c) \Leftarrow b_n\to c$ $\Leftarrow f(a_n)<\alpha<f(b_n)$
סנדוויץ' $f(c)$

- **טענה**: יהי $P(x)$ פולינום ממעלה אי זוגית אז יש לו לפחות שורש ממשי אחד.
הוכחה: בעזרת ערך הביניים והסתכלות על הגבולות $\lim_{x\to\infty} P(x)/x^n$, $\lim_{x\to-\infty} P(x)/x^n$

- **טענה**: f פונקציה רציפה ומקבלת ערכים בקטע $[a,b]$. אז ל-f קיימת נק' שבת בקטע $[a,b]$: קיימת $c\in[a,b]$ כך ש: $f(c)=c$.
הוכחה: מגדירים $h(x)=f(x)-x$ עבור $x\in[a,b]$ ואז משתמשים בערך הביניים.

- פונקציות חח"ע, מונוטוניות והפונקציה ההפוכה:

- **משפט**: f פונקציה חח"ע ורציפה בקטע $[a,b]$. אז: f עולה ממש או יורדת ממש.
הוכחה: מוכיחים בה"כ הפונקציה עולה. מוכיחים בשני שלבים ובשניהם נב בשלילה.
1. $x\in(a,b) \Rightarrow f(a)<f(x)<f(b)$ (*) כי אם היה מתקיים למשל $f(x)>f(b)$ אז ע"י שימוש בערך הביניים בקטע $[a,x]$ היינו מקבלים נקודה c עבורה $f(c)=f(b)$ וזו סתירה לכך שהפונקציה חח"ע.
2. קובעים שני נק' בקטע $x_1<x_2$ ומראים $f(x_1)<f(x_2)$. מניחים בשלילה $f(x_1)>f(x_2)$ ואז לפי (*) וערך הביניים בקטע (a,x_1) מקבלים נקודה c בקטע המקיימת $f(c)=f(x_2)$ סתירה לחח"ע.

חייבת להיות רציפה אחרת המשפט לא תקף.
- **משפט**: f רציפה בקטע I, אז תמונתה היא קטע.
הוכחה: מספיק להראות y_1, y_2 הנמצאים בתמונה $\Leftarrow$ (y_1,y_2) נמצא כולו בתמונה. מגדירים $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ ואז משתמשים בערך הביניים על הקטע $[x_1,x_2]$.

- **משפט**: f פונקציה מונוטונית בקטע I - אז f רציפה $\Leftrightarrow$ תמונתה קטע.
הוכחה: $\Leftarrow$: f רציפה $\Leftarrow$ תמונתה קטע - משפט קודם.
$\Rightarrow$: מניחים בשלילה כי קיימת נק' אי רציפות. חייבת להיות אי רציפות קפיצה.. קיים $\varepsilon>0$ כך ש: $\underset{\lim_{x\to a^-}f(x)}{f^-(a)}-\varepsilon$, $\underset{\lim_{x\to a^+}f(x)}{f^+(a)}+\varepsilon$ נמצאים בתמונה.
$\Leftarrow$ לא הגיוני כי $y\in(f^-(a)-\varepsilon, f^+(a)+\varepsilon)$ לא שייך לתמונה. סתירה לכך שזה קטע.

- **משפט**: f פונקציה חח"ע ורציפה בקטע I ותמונתה J. אז f^{-1} מוגדרת בקטע J והיא פונקציה רציפה שם.
הוכחה: לפי המשפט הקודם f מונוטונית. בה"כ עולה. $\Leftarrow$ צריך להוכיח f^{-1} מונוטונית ואז היא רציפה ב-J. מראים את זה לפי זה ש-f עצמה עולה ממש.

- משפט ויירשטראס: תהי f רציפה בקטע חסום וסגור $[a,b]$:

א. f חסומה בקטע

ב. המקסימום והמינימום של f מתקבלים בקטע.

הוכחה: א. נניח בשלילה f לא חסומה ⇐ $|f(x)|$ לא חסומה מלעיל.
⇐ לכל n טבעי, קיים $x_n\in[a,b]$ עבורו $|f(x_n)|>n$ ⇐ $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\infty$
x_n סדרה חסומה ⇐ לפי BW קיימת ת"ס מתכנסת $x_{n_k}\to c\in[a,b]$.
⇐ לפי היינה ורציפות בנקודה c מתקיים: $f(x_{n_k})\to f(c)$.
$f(x_{n_k})$ מתכנסת לגבול סופי ולכן חסומה. בפרט $|f(x_{n_k})|$ מתכנסת לגבול סופי. אבל זו סתירה להנחה ש-$|f(x_n)|$ שואפת לאינסוף (כי אז כל ת"ס שלה תתכנס לאותו הגבול).

ב. בה"כ הוכחת המקסימום:
⇐ לפי (א) הפונקציה חסומה ולכן מאקסיומת השלמות קיים $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$
⇐ לכל n קיים x_n עבורו מתקיים: $M-\frac{1}{n}<f(x_n)<M$ (*)
⇐ לפי BW קיימת ת"ס $x_{n_k}\to c\in[a,b]$. מרציפות: $f(x_{n_k})\to f(c)$
⇐ אבל לפי סנדוויץ' (*) מתקיים $f(x_n)\to M$ ⇐ מיחידות הגבול $f(c)=M$.

- רציפות במ"ש: תהי f מוגדרת בקטע I. f רציפה במ"ש בקטע אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$, כך שלכל זוג נק' $x_1,x_2\in I$ עבורן $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

- תנאי ליפשיץ: פונקציה המקיימת $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$ עבור M חיובי כלשהו היא פונקציה רציפה במ"ש.
הוכחה: f ליפשיץ ⇐ $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$
ואז אם $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים התנאי של רציפות במ"ש: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

- משפט: f רציפה בקטע סגור וחסום $[a,b]$ ⇐ f רציפה במ"ש בקטע
הוכחה: נניח בשלילה ש-f לא רציפה במ"ש. קיים $\varepsilon_0>0$ עבורו אין δ מתאים.
⇐ לכל $n\ge1$ נבחר $\delta=\frac{1}{n}$ ונקבל זוג נקודות $x_n,y_n\in[a,b]$ עבורן:
$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$ (*)
⇐ x_n סדרה חסומה ← BW קיימת לה ת"ס מתכנסת $x_{n_k}\to c\in[a,b]$
⇐ $y_{n_k}=x_{n_k}+(y_{n_k}-x_{n_k})\xrightarrow{k\to\infty}c$ ⇐ $x_{n_k}\to x$! $y_{n_k}\to c$ ורציפות: $f(x_{n_k})\to f(c)$, $f(y_{n_k})\to f(c)$
⇐ $f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\to0$ ⇐ סתירה להנחה (*).

- משפט: f רציפה בקטע (a,b) (חסום ופתוח), f רציפה במ"ש ⇔ קיימים הגבולות החלקיים בקצוות.
רעיון ההוכחה: הרחבת הפונקציה לכלול את הקצוות ואז הפונקציה $\tilde{f}$ היא רציפה בקטע סגור וחסום ⇐ במ"ש.

"שליחת סדרות קושי לסדרות קושי":
- $f(x)$ רציפה במ"ש ולכן שולחת סדרות קושי x_n לסדרות קושי $f(x_n)$. יהי $\varepsilon>0$ וסדרה x_n. יהי $\delta>0$ מתאים ל-ε מבמ"ש. x_n סדרת קושי ולכן קיים N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים $|x_n-x_m|<\delta$ ⇐ מבמ"ש מתקיים $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

הרחבה יחידה:
- קיום הרחבה יחידה: משתמשים ברעיון של הגדרת הפונקציה המורחבת ואז שליחת סדרות קושי לסדרות קושי בקצוות.