לוגיקה מתמטית - תרגיל 11

1. עבור כל אחד מן הזוגות הבאים של מבנים , קבע האם N תת-מבנה של M , ואם כן האם הוא תת-מבנה אלמנטרי:

א. $W^M = \{0,1,2,\dots\}$, f^M פעולת החיבור.
$W^N = \{0,1,2,\dots p-1\}$, f^N פעולת החיבור מודולו p.

ב. (הממשיים) $W^M = \mathbb{R}$, f^M פעולת הכפל.
$W^N = \{a \in \mathbb{R} | a \geq 0\}$, f^N פעולת הכפל.

ג. (השלמים) $W^M = \mathbb{Z}$, (הזוגיים) $R^M = 2\mathbb{Z}$ (R סימן יחס חד-מקומי).
$W^N = 2\mathbb{Z}$, $R^N = 2\mathbb{Z}$.

הערה: בסעיפים א, ב יש בשפה $=$, בסעיף ג אין.

2. בשפה שבה יש סימן יחס דו-מקומי R (ורק הוא) , נתבונן בשלושה מבנים :

$$W^M = \mathbb{R}$$
$$W^N = [0,1]$$
$$W^K = (0,1)$$

ובשלושתם R מתפרש כיחס $<$ על איברי העולם.
האם K הוא תת-מבנה אלמנטרי של N ? של M ?
האם N הוא תת-מבנה אלמנטרי של M ?
הערה: תשובה שלילית יש להוכיח. בתשובה חיובית די לנמק אינטואיטיבית.

3. הוכח : אם תכונה מסוימת (מסדר ראשון) של שדות מתקיימת בכל שדה בעל קרקטריסטיקה 0 , אז קיים מספר טבעי q כך שאותה תכונה מתקיימת בכל שדה בעל קרקטריסטיקה גדולה או שווה ל-q .
הערה 1: להזכירך , המספר הטבעי p הקטן ביותר כך ש- $\underbrace{1+1+\dots+1}_{p \text{ פעמים}} = 0$ נקרא הקרקטריסטיקה של השדה.
אם אין מספר טבעי כזה , נאמר שהקרקטריסטיקה היא 0.
הערה 2: כדי לנסח פורמלית את הטענה ולהוכיחה , יש להתבונן בשפה שבה יש שני סימני פונקציה דו-מקומיים , f המתפרש כחיבור ו-g המתפרש ככפל , סימן יחס $=$, ושני קבועים אישיים , c המתפרש כ- 0 ו-d המתפרש כ- 1 .
תכונה (מסדר ראשון) של שדות היא פסוק בשפה זו.

תאריך הגשה 21.6