מבוא למתמטיקה שמושית -פתרון 2 - אביב תשס"ד

1. ב) נחפש ראשית את הפתרון הרגולרי כש $\epsilon \to 0$. נציב

$$x^{(1)} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j x_j^{(1)}$$

נקבל

$$x^{(1)} \sim \epsilon + \epsilon^5 + O\left(\epsilon^9\right)$$

נחפש עתה פתרונות לא רגולריים (יש שניים כאלו). נציב במשוואה

$$x = \frac{y}{\delta}$$

נקבל

$$\frac{\epsilon^2}{\delta^3} y^3 - \frac{y}{\delta} + \epsilon = 0$$

היות ו $\epsilon \gg \delta^{-1}$, הרי שאם רוצים לשמור על האיבר עם y^3 בתוך משוואת הסדר המוביל צריך לדרוש

$$\frac{\epsilon^2}{\delta^3} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow \delta = \epsilon$$

נקבל

$$y^3 - y + \epsilon^2 = 0$$

נציב (היות ובמשוואה מופיע הפרמטר ϵ^2, והיות וכל השורשים של משוואת הסדר המוביל פשוטים)

$$y \sim \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^{2j} y_j$$

ונקבל בסדר המוביל

$$y_0^3 - y_0 = 0 \Rightarrow y_0^{(1,2)} = \pm 1$$

עבור המאזן של גדלים מ-$O(\epsilon^2)$ נקבל

$$3y_0^2 y_1 - y_1 + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$$

מכאן

$$y^{(1,2)} = \pm 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O\left(\epsilon^4\right)$$

או

$$x^{(2,3)} = \pm\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2}\epsilon + O\left(\epsilon^3\right)$$

2. נדון ראשית במקרה $\omega \ll 1$. כאן $\epsilon = \omega$, $(A+\epsilon B)V = \lambda V$, ו-

$$A = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

נרשום

$$\lambda_i \sim \alpha_i + \epsilon\lambda_i^{(1)} + \epsilon^2\lambda_i^{(2)} + O\left(\epsilon^3\right)$$
$$V_i \sim e_i + \epsilon V_i^{(1)} + \epsilon^2 V_i^{(2)} + O\left(\epsilon^3\right).$$

קל לראות כי

$$\alpha_1 = E_1 \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\alpha_2 = E_2 \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

המאזן מ-$O(\epsilon)$ עבור $i=1$ נראה (הטיפול במקרה $i=2$ דומה מאוד ולא יובא כאן)

$$\left(A - E_1 I\right) V_1^{(1)} = \left(\lambda_1^{(1)} I - B\right) e_1$$

היות וA סימטרית נכפיל מימין ב-$e_1^\dagger$ ונקבל $\lambda_1^{(1)} = 0$. נפתור את המשוואה עבור $V_1^{(1)}$:

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{E_2} e_2 + C e_1$$

כאשר C קבוע שרירותי שניתן לקובעו כ-$C=0$ היות ווקטורים עצמיים נקבעים עד כדי קבוע. כדי למצוא את $\lambda_1^{(2)}$ נרשום את המאזן מ-$O\left(\epsilon^2\right)$:

$$\left(A - E_1 I\right) V_1^{(2)} = \lambda_1^{(2)} e_1 - B V_1^{(1)}$$

מכפלה מימין ב-$e_1^\dagger$ נותנת $\lambda_1^{(2)} = 1/E_2$. קבלנו אם כן

$$\lambda_1 \sim E_1 + \epsilon^2 \frac{1}{E_2} + O\left(\epsilon^3\right)$$
$$V_1 \sim e_1 + \epsilon \frac{1}{E_2} e_2 + O\left(\epsilon^2\right).$$

נדון כעת במקרה $\omega \gg 1$. כאן $\epsilon = \omega^{-1}$, $(A + \epsilon B)V = \epsilon \lambda V$, ו-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}.$$

נגדיר $\mu = \epsilon\lambda$, ונרשום ($j = 1, 2$)

$$\mu_j \sim \alpha_j + \epsilon \mu_j^{(1)} + \epsilon^2 \mu_j^{(2)} + O\left(\epsilon^3\right)$$
$$V_i \sim V_j^{(0)} + \epsilon V_j^{(1)} + \epsilon^2 V_j^{(2)} + O\left(\epsilon^3\right).$$

קל לראות ממשוואת הסדר המוביל

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i \quad V_{1,2}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}.$$

נדון במקרה $j = 1$ (המקרה $j = 2$ הוא הצמוד הקומפלכסי שלו). המאזן מ- $O(\epsilon)$ נותן

$$(A - iI)\, V_1^{(1)} = \left(\mu_1^{(1)} I - B\right) V_1^{(0)}$$

היות ו $A^* = -A$ נכפיל מימין ב- $\left(V_1^{(0)}\right)^*$ ונקבל

$$\mu_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2\right)$$

נפתור את המשוואה עבור $V_1^{(1)}$ ונקבל (עד כדי קבוע כפול ב-$V_1^{(0)}$)

$$V_1^{(1)} = \frac{i}{4}\left(E_1 - E_2\right) V_2^{(0)}$$