# אינפי 3 - גליון בית 5 - אביב תשע"ז

1. הוכיחו שאינטגרל מסילתי מסוג ראשון לא תלוי בפרמטריזציה, כלומר, אם $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ו-$\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ שתי פרמטריזציות חלקות המתארות את אותה עקומה (כלומר, יש התאמה $g : [a,b] \to [c,d]$ שהיא חח"ע, על ועולה, כך ש-$\gamma_1 = \gamma_2 \circ g$), אז לכל פונקציה רציפה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מתקיים $\int_{\gamma_1} f \mathrm{d}l = \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}l$.

2. בחצי-מישור פואנקרה $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0\right\}$, "אורך" של מסילה $\gamma$ מוגדר ע"י $\int_\gamma \frac{1}{y} dl$.

(א) הראו שהמסילה בעלת האורך הקטן ביותר בין שתי נקודות, שנמצאות על ציר ה-$y$, היא קו ישר.

(ב) הראו שההעתקות $T_a(x,y) = (x-a,y)$ (עבור $a \in \mathbb{R}$), $S_k(x,y) = (kx,ky)$ (עבור $k > 0$), וכן $M(x,y) = \frac{\left(x^2+y^2-1,2y\right)}{(x+1)^2+y^2}$ מעתיקות מסילות ב-$H$ למסילות בעלות אותו אורך (תזכורת מאלגברה: כל מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ אפשר לכתוב בצורה $\sqrt{a^2+b^2}R$, כאשר $R$ היא מטריצת סיבוב, כלומר $\|Rv\| = \|v\|$ לכל $v \in \mathbb{R}^2$).

(ג) לאן ההעתקה $M$ מעבירה את (חצי) מעגל היחידה?

(ד) חשבו את אורך המסילה הקצרה ביותר בין הנקודות $(C+R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ ו-$(C+R\cos\beta, R\sin\beta)$ (כאשר $C \in \mathbb{R}$, $R > 0$ ו-$\alpha,\beta \in (0,\pi)$. האם כל שתי נקודות אפשר להציג בצורה הזו?)

3. תהי $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ויהי $F = P\hat{i} + Q\hat{j} : D \to \mathbb{R}^2$ שדה וקטורי גזיר ברציפות, כך ש-$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ בכל נקודה ב-$D$. הוכיחו שקיימים קבוע $\alpha$ ופונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כך ש-$F = \frac{\alpha}{x^2+y^2}\left(-y\hat{i} + x\hat{j}\right) + \nabla f$.

4.

(א) תהי $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ רציפה. הראו כי השדה $\vec{F}(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(x\hat{i} + y\hat{j}\right)$ משמר ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(ב) יהי $\vec{G}(x,y)$ שדה וקטורי משמר מקומית ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, המקיים $\lim_{p\to(0,0)} \|p\| \cdot \|G(p)\| = 0$. הוכיחו כי $\vec{G}$ משמר ב-$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$