אלגברה ב 104173־גליון 4

שניר הורדן־205689581

6 ביוני 2018

.1

תהי $A=\begin{pmatrix}7&1&2&2\\1&4&-1&-1\\-2&1&5&-1\\1&1&2&8\end{pmatrix}$. נתון $\lambda=6$ הוא ערך עצמי.

$$ker\left(A-6\mathbb{I}\right)=ker\left(\begin{pmatrix}1&1&2&2\\1&-2&-1&-1\\-2&1&-1&-1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\right)=ker\left(\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&-3&-3&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

$$sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow dim\left(ker\left(A-6\mathbb{I}\right)\right)=2$$

נמצא עבור אלו ערכי k, $ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^{k}=0$.

$$ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^{2}=ker\left(\begin{pmatrix}1&1&2&2\\1&-2&-1&-1\\-2&1&-1&-1\\1&1&2&2\end{pmatrix}^{2}\right)=ker\left(\begin{pmatrix}0&3&3&3\\0&3&3&3\\0&-6&-6&-6\\0&3&3&3\end{pmatrix}\right)$$

$$ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^{3}=0_{4\times4}$$

נמצא את הפולנום האופייני ,

$$p_{A}\left(\lambda\right)=\left|\begin{pmatrix}7-\lambda&1&2&2\\1&4-\lambda&-1&-1\\-2&1&5-\lambda&-1\\1&1&2&8-\lambda\end{pmatrix}\right|=\left(7-\lambda\right)\left|\begin{pmatrix}4-\lambda&-1&-1\\1&5-\lambda&-1\\1&2&8-\lambda\end{pmatrix}\right|-1\left|\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&5-\lambda&-1\\1&2&8-\lambda\end{pmatrix}\right.$$

$$=1296-864\lambda+216\lambda^{2}-24\lambda^{3}+\lambda^{4}=\left(\lambda-6\right)^{4}$$

אזי קיים ערך עצמי יחיד.
הפולינום המינימלי הוא

$$m_A\left(\lambda\right)=\left(\lambda-6\right)^3$$

מאחר וקיבלנו את טרנספורמציית ה־0 לאחר הצבה כאשר $k=3$ לעיל.
ב.
הריבוי הגיאומרי קטן מהריבוי האלגברי לכן מטריצה זו אינה לכסינה. אך לפי משפט,
כל מטריצה ניתנת לכתיבה בצורת גורדן.
מצא שרשרת גורדן, כלומר

$$v_4\in Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^3\wedge v_4\notin Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^2$$

$$v_3\in Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^2\wedge v_3\notin Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)$$

$$v_1,v_2\in Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)\quad already\quad found$$

נתחיל בתהליך:

$$1.pick\quad arbitrary\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\in Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^3\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\notin Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^2\checkmark$$

$$2.\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\in Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)^2\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\notin Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)\checkmark$$

$$3.\left\{v_1,v_2\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\in Ker\left(A-6\mathbb{I}\right)\quad two\quad linearly\quad independent\quad vectors\checkmark$$

סיימנו. אזי,

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&-2&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1&-2\\0&0&-1&-1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&1&0\\0&0&6&1\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

.2

נתון $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = [T]_E$.

נמצא B כך ש-$J = [T]_B$. כלומר $J = B\,[T]_B\,B^{-1}$.

נמצא את הפולינום האופייני:

$$\left| \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} \right| = (2-x)^3$$

נקבל ע"ע 2 מריבוי גיאומטרי 3. נמצא את הריבוי הגיאומטרי:

$$ker\left(\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & 1 & 2-2 \end{pmatrix}\right) = ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

הריבוי הגיאומרי הוא 1. אז מאחר ויש לנו מטריצה 3×3 וע"ע אחד, לפי משפט מתקיים שמספר בלוקי גורדן שווה למספר הו"ע, נקבל מטריצה המורכבת מבלוק גורדן 1×1 ובלוק גורדן 2×2.

נמצא את השרשרת גורדן:

$$([T]_E - 2I)\,v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge v_2 \in ker\,([T]_E - 2I)^2 \Rightarrow v_2 \in ker\,([T]_E - 2I)^2 = ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \mathbb{R}^3$$

$$!\exists v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$([T]_E - 2I)\,v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge v_3 \in ker\,([T]_E - 2I)^2$$

אזי

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (not \quad only \quad choice)$$

לכן

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

.3

A^2 היא מטריצה מהצורה דלהלן פירוק למטריצה אלמנטרית כפול A^2

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}}^{A^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

יש 3 ו"ע בת"ל עבור $\lambda = 0$, אז יש שלושה בלוקי גורדן.
אז עבור פרמוטציה של איברי הבסיס נקבל,

$$[diag\left(J_6\left(0\right), J_1\left(0\right), J_4\left(0\right)\right)]_{B_2}$$

עבור

$$B_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_1\}$$

.4

נוכל להסיק עבור הע"ע 2 ו־1

$$p_A = \left(x-1\right)^3 \left(x-2\right)^4 \Rightarrow 3{,}4 = ”$$

ר"ג=$2, 3$.

אזי עבור כל ערך עצמי קיים וקטור עצמי מוכלל יחיד. נקבל צורת גורדן מהצורה

$$J = diag\left(J_1(1), J_2(1), J_1(2), J_3(2)\right)$$

.

5.

נתון $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ מתאפס עבור $A = x$.

לפי משפט $p_m(x) | p(x)$. נציב $t = x^2$ ונקבל

$$p(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \Rightarrow p(x) = \left(x^2 - 1\right)^2$$

אזי $p_m(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \quad or \quad p_m(x) = \left(x^2-1\right)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$.

נקבל לפי משפט הפירוק הפרימרי ומשפט הפירוק הספקטרלי, כל המטריצות $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ אשר $p(x)$ מאפס אותן, עד כדי דמיון:

$$A_1 = diag(1, 1, -1, -1), A_2 = diag\left(J_2(1), J_2(-1)\right)$$