תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 4

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.
נסמן: $\lambda = 2\ln 2$ ו- p=ההסתברות שהמערכת תקבל אות הזהרה בסוף החודש, $p = 1 - q$.

$$p = 1 - \sum_{n=0}^{3} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

התשובה לשאלה היא:

$$P_5 = \binom{4}{1} p^4 q \cdot p.$$

<u>תרגיל 2</u>.
לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} p^{i-1} q = p^{n-1}.$$

לכן:

$$P(5 \leq X \leq 9 | X \geq 3) = \frac{P(X \geq 5) - P(X \geq 10)}{P(X \geq 3)} = \frac{p^4 - p^9}{p^2} =$$
$$= p^2(1 - p^5).$$

<u>תרגיל 3</u>.
ההסתברות שאיש נתון בוחר בתכנית שרות מסוימת:

$$p = \frac{\alpha}{5n - 7}.$$

(א)

$$p_n(k) = \binom{10n+2}{k} p^k (1-p)^{10n+2-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 10n + 2.$$

(א)
לפי משפט "קרוב בינומי על ידי פואסוני":

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{(2\alpha)^k}{k!}e^{-2\alpha}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

<u>תרגיל 4.</u>
נסמן:

$$X_{\alpha,\beta} = \text{number of events occurred in } [\alpha, \beta].$$

(א)

$$P(X_{t_1,t_2} \text{ is even}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (t_2 - t_1)^n}{(2n)!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} = \\ = e^{-\lambda(t_2-t_1)} \cosh\big(\lambda(t_2 - t_1)\big).$$

(ב)
אמאורעות לתי תליים כי:

$$P(\{X_{t_1,t_2} = 0\})P(\{X_{t_2,t_3} = 0\}) = P(\{X_{t_1,t_2} = 0\} \cap \{X_{t_2,t_3} = 0\}) = \\ = P(\{X_{t_1,t_3} = 0\}) = e^{-\lambda(t_3-t_1)}.$$

<u>תרגיל 5.</u>
(א)

$$F_X(x) = \int_3^x f_x(x)dx = 1 - 27x^{-3}, \quad x \geq 3.$$

(ב)

$$P(X \geq 10 | X \geq 4) = \frac{1 - F_x(10)}{1 - F_x(4)} = \frac{8}{125}.$$

(ג) אין כי $P(X \geq 8 | X \geq 4) \neq P(X \geq 4)$.

תרגיל 6.

$$P(Y=k)=\frac{P(X=k-1)}{1-e^{-\lambda}}, \qquad k\geq 2.$$

הגרף הוא מדריגות שקופצות בכל מספר טבעי גדול ממש מ- 1. בפרט: $F_X(x)=0$ עבור $x<2$.

תרגיל 6.

$$P(X>1)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X>1|\beta=n)P(\beta=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}=pq^{n-1}=$$
$$=1-\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}=1-\frac{p}{q}f(q),$$

כאשר

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad x\in[0,1).$$

נחשב את $f(x)$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

$f(0)=0$, ולכן:

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x).$$

סופית:

$$P(X>1)=1+\frac{p\ln p}{q}.$$