אלגברה ב׳ - פתרון גליון 2

♠ [HK] תרגיל 8.1.9: עלינו להוכיח את הזהות: $||\alpha+\beta||^2+||\alpha-\beta||^2=2\left(||\alpha||^2+||\beta||^2\right)$.
נחשב בנפרד את המחוברים שבאגף שמאל:

$$\begin{aligned}
||\alpha+\beta||^2 &= <\alpha+\beta,\alpha+\beta> \\
&= <\alpha,\alpha>+<\alpha,\beta>+<\beta,\alpha>+<\beta,\beta> \\
&= ||\alpha||^2+||\beta||^2+2\cdot Re(<\alpha,\beta>); \\
||\alpha-\beta||^2 &= <\alpha-\beta,\alpha-\beta> \\
&= <\alpha,\alpha>-<\alpha,\beta>-<\beta,\alpha>+<\beta,\beta> \\
&= ||\alpha||^2+||\beta||^2-2\cdot Re(<\alpha,\beta>).
\end{aligned}$$

על-ידי חיבור שני השוויונות שקיבלנו נקבל את השוויון הדרוש. לסיום נעיר, שמשמעותה הגאומטרית של הטענה היא שסכום אורכי הצלעות של מקבילית שווה לסכום אורכי אלכסוניה (מומלץ לצייר זאת).

♠ [HK] תרגיל 8.1.11: נראה שהתבנית

$$\langle\sum_j a_jx^j,\sum_k b_kx^k\rangle \triangleq \sum_{j,k}\frac{a_jb_k}{j+k+1}$$

אכן מהווה מכפלה פנימית על $\mathbb{R}[x]$.
ידוע לנו שהמרחב $C[0,1]$ של כל הפונקציות הממשיות הרציפות המוגדרות בקטע $[0,1]$ הוא ממ״פ ממשי עם המ״פ, המוגדרת ע״י $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. כעת, $\mathbb{R}[x]$ הוא תת-מרחב וקטורי של $C[0,1]$, ועבור כל זוג פולינומים $p,q\in\mathbb{R}[x]$ נוכל לחשב את מכפלתם הפנימית ב-$C[0,1]$:

$$\langle\sum_j a_jx^j,\sum_k b_kx^k\rangle=\int_0^1\left(\sum_j a_jx^j\cdot\sum_k b_kx^k\right)dx=\sum_{j,k}a_jb_k\int_0^1 x^{j+k}dx=\sum_{j,k}\frac{a_jb_k}{j+k+1}.$$

אנו רואים, אם-כן, שהמ״פ שהגדרנו ב-$\mathbb{R}[x]$ היא צמצומה של המ״פ המוגדרת כבר במרחב $C[0,1]$, ולכן היא בוודאי מ״פ.

♠ [HK] תרגיל 8.1.12: V מ״ו עם מ״פ $\langle\_,\_\rangle$ ו-$\beta=\{v_1,\dots,v_n\}$ **בסיס ל-**V. יהיו $x,y\in V$, ונוכל לרשום:

$$x=\sum_{i=1}^n x_iv_i,\ y=\sum_{i=1}^n y_iv_i \Leftrightarrow [x]_\beta=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},[y]_\beta=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

נגדיר מטריצה $A_{ij}=\langle v_i,v_j\rangle$, ואז נקבל את הזהות:

$$\langle x,y\rangle=\langle\sum_{i=1}^n x_iv_i,\sum_{j=1}^n y_jv_j\rangle=\sum_{i,j=1}^n a_i\overline{b_j}\langle v_i,v_j\rangle=[x]_\beta^*A[y]_\beta$$

המטריצה A הפיכה - אחרת קיים וקטור $0\neq\xi\in\mathbb{C}^n$ המקיים $A\xi=0$, ואז הוקטור $v=\sum_{i=1}^n\xi_iv_i\in V$ יקיים את השוויון $\langle v,v\rangle=\xi^tA\xi=0$ למרות היותו שונה מוקטור האפס - סתירה.

עתה, נשים לב כי לכל $v \in V$ עם וקטור-קואורדינטות $[v]_\beta = \xi$, ולכל $1 \le j \le n$ מתקיים השוויון:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle v_i, v_j \rangle = \xi^t A,$$

ולכן, בהיות A מטריצה הפיכה, למערכת $\xi^t A = c$ קיים פתרון יחיד לכל וקטור שורה c.

♠ **[BK]** תרגיל 6.4.1: ניתן לבדוק כי התבנית $\langle (a,b),(c,d) \rangle = ac + bd + (a+c) + 1$ היא מכפלה פנימית על המרחב, אולם לא נתעכב על כך, שכן חשוב לנו יותר להבין את המקורות להגדרה כזו. נתבונן מחדש בפעולות המוגדרות במרחב:

$(a,b) + (c,d) = (a+c+1, b+d),\ \alpha(a,b) = (\alpha a + \alpha - 1, \alpha b)$

איבר האפס הוא $(-1,0)$, ואנו מוצאים שני וקטורים בת"ל $e_1 = (0,0)$ ו-$e_2 = (-1,1)$, הפורשים את המרחב:

$\langle (a+1)(0,0) + b(-1,1) = (a,0) + (-1,b) = (a,b).$

נסמן $\beta = (e_1, e_2)$, ואז לכל מכפלה פנימית על המרחב תתקיים הזהות הבאה:

$$\langle u,v \rangle = [x]_\beta^t A [y]_\beta; \quad A_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

אם כך, הרי שנותר להגדיר את המטריצה A באופן שתתקבל מכפלה פנימית. בדוגמה שהובאה לעיל נבחרה המטריצה $A = I_{2\times 2}$.

♠ **[H]** תרגיל 2.3.4: נסקור בקצרה את רעיון ההוכחה:

א. מוכיחים שאם $(ab)^{k+1} = a^{k+1}b^{k+1}, (ab)^k = a^k b^k$, אז $a^k \cdot b = b \cdot a^k$; נוכיח זאת:

$$a(a^k b)b^k = a^{k+1}b^{k+1} = (ab)^{k+1} = ab(ab)^k = a(ba^k)b^k,$$

וצמצום a משמאל ו-b^k מימין נותן את התוצאה הדרושה.

ב. בהינתן שהשוויון $(ab)^k = a^k b^k$ מתקיים לשלוש חזקות עוקבות (נאמר, $k, k+1, k+2$), הרי שהמסקנה של א' מתקיימת לשתי חזקות עוקבות ($k, k+1$). כלומר, b מתחלף בכפל עם שתי חזקות עוקבות של a - ולכן גם עם ההפרש שלהן:

$$a^k b = ba^k,\ a^{k+1}b = ba^{k+1} \Rightarrow \left(a^{k+1}(a^k)^{-1}\right) b = b \left(a^{k+1}(a^k)^{-1}\right) \Leftrightarrow ab = ba.$$

♠ **[H]** תרגיל 2.3.14: נתון ש-G היא קבוצה סופית עם פעולה בינארית אסוציאטיבית, ומתקיימים חוקי צמצום (משני הצדדים), כלומר: לכל $g \in G$, ולכל $x,y \in G$ מתקיימים התנאים:

$$\begin{aligned} gx = gy \quad &\Rightarrow \quad x = y, \\ xg = yg \quad &\Rightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

משמעותם של תנאים אלו היא, שלכל $g \in G$ הפונקציות $\phi_g(x) = gx, \phi^g(x) = xg$, המוגדרות על G, הן פונקציות חד-חד-ערכיות. בהיות G קבוצה סופית, פונקציות אלה חייבות להיות גם על G. כאן, עקרונית, ניתן כבר לעצור, שכן ידוע לנו כי אם לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$ קיים פתרון

ב-G, אז G היא חבורה. ברם, אם עובדה זו איננה ידועה, נוכל להמשיך כדלהלן:
בהיקבע $g \in G$, אם-כן, נוכל למצוא $x_0 \in G$ כך ש-$\phi_g(x_0) = g$, וגם $x^0 \in G$ המקיים $\phi^g(x^0) = g$.
נוכיח כי x_0 הוא יחידה ימנית ב-G, וכי x^0 הוא יחידה שמאלית ב-G: לשם כך ניקח $h \in G$, ונמצא איברים $a, b \in G$ המקיימים $ag = gb = h$, ואז -

$$hx_0 = (ag)x_0 = a(gx_0) = a\phi_g(x_0) = ag = h,$$
$$x^0 h = x^0(gb) = (x^0 g)b = \phi^g(x^0)b = gb = h.$$
$$\Rightarrow x^0 = x^0 x_0 = x_0,$$

ואנו רואים שיש יחידה $e = x^0 = x_0$ ב-G.
כעת, בהיקבע $g \in G$ נוכל למצוא איברים $x, y \in G$ כך ש-$\phi_g(x) = \phi^g(y) = e$ (כלומר - $gx = yg = e$), ואז $y = ye = y(gx) = (yg)x = ex = x$, והוכחנו שקיים איבר הופכי ל-g, ו-G היא חבורה.

♠ [H] תרגיל 2.3.17: קבוצת המספרים הטבעיים (עם פעולת החיבור) היא דוגמה כנדרש.

♠ [H] תרגיל 2.3.26: עלינו לספור את איברי החבורה של כל המטריצות ההפיכות 2×2 עם מקד-מים ב-$\mathbb{F}_p$.
נזכור שמטריצה A היא הפיכה אם"ם שורותיה בלתי-תלויות. השורה הראשונה היא וקטור שונה מאפס ב-$\mathbb{F}_p^2$, ולכן היא נבחרת ב-$p^2 - 1$ אופנים; שורתה השניה של המטריצה יכולה להיות כל וקטור שאינו כפולה סקלרית של השורה הראשונה, ומכאן שהיא נבחרת ב-$p^2 - p$ אופנים. מספר האיברים בחבורה הוא, אפוא, $(p^2 - 1)(p^2 - p)$.

אלגברה ב' - תכונות של פונקציית אוילר

<u>הגדרה:</u> $\phi(n)$ הוא מספר המספרים הטבעיים $k < n$ הזרים ל-n.
מטרתנו העיקרית כאן היא להוכיח את התוצאה הבאה -

$$\phi\left(p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1}\right).$$

טענה 1: לכל מספר $d > 0$ המחלק את n, מספר המספרים הטבעיים $x < n$ המקיימים $(n,x) = d$ שווה בדיוק ל-$\phi\left(\frac{n}{d}\right)$.

הוכחה: אם $(n,x) = d$, אזי $\left(\frac{n}{d}, \frac{x}{d}\right) = 1$. מכאן אנו רואים שגודלה של קבוצת כל המספרים x כנ"ל שווה לגודלה של קבוצת כל המספרים $\frac{x}{d}$ הקטנים מ-$\frac{n}{d}$ וזרים לו; המספר האחרון הוא בדיוק $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$.

טענה 2: לכל מספר טבעי n מתקיים השוויון $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.
הוכחה: לכל $d|n$ נסמן ב-A_d את קבוצת כל המספרים הטבעיים הקטנים או שווים ל-n והמקיימים $(n,k) = d$. אזי הקבוצות A_d זרות בזוגות, ואיחודן שווה לקבוצת כל המספרים הטבעיים הקטנים או שווים ל-n. מכך שמספר האיברים ב-A_d הוא בדיוק $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ נוכל להסיק כי:

$$n = \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \phi(d),$$

כאשר ההבדל בין שני הסכומים האחרונים הוא בסדר הסכימה בלבד.

טענה 3: אם p הוא מספר ראשוני, אזי $\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.

הוכחה: עבור $r = 1$, ברור כי $\phi(p) = p - 1$, שכן כל מספר טבעי הקטן מ-p חייב להיות זר לו. עבור $r > 1$, נרשום:

$$p^r = \sum_{d|p^r} \phi(d) = \sum_{i=1}^{r} \phi(p^i) = \phi(p^r) + \sum_{i=1}^{r-1} \phi(p^i) = \phi(p^r) + p^{r-1}.$$

טענה 4: אם m, n הם מספרים טבעיים זרים, אזי $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

הוכחה: נוכל לרשום את mn בשני אופנים:

$$\begin{aligned} mn &= \sum_{x|mn} \phi(x) = \phi(mn) + \sum_{x|mn,\, x<mn} \phi(x) \\ mn &= \sum_{d|m} \phi(d) \cdot \sum_{e|n} \phi(e) = \phi(m)\phi(n) + \sum_{d|m,\, e|n,\, de<mn} \phi(d)\phi(e) \end{aligned}$$

כוונתנו להשתמש באינדוקציה על הערך של mn על-מנת להוכיח שהסכומים בשתי המשוואות לעיל זהים (איבר-איבר). אכן, אם $mn = 1$, ברור כי $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n) = 0$.

נניח כעת כי $\phi(de) = \phi(d)\phi(e)$ כל אימת שמתקיים אי-השוויון $de < mn$. במקרה זה, נוכל לראות שהסכומים שלעיל זהים אם נבנה התאמה חח"ע ועל בין קבוצת המחלקים x של mn לבין אוסף הזוגות (d, e) כאשר $d|m, e|n$. קל לראות שההתאמה $x \mapsto ((x, m), (x, n))$ היא התאמה כזו, וסיימנו את ההוכחה.