אינפי 3 - תרגיל בית 3

שאלה 1:

במשפט על כופלי לגרנז', נניח כי ההסיאן של $L(x,\lambda)=f(x)-\langle\lambda,g(x)\rangle$ הנו מטריצה חיובית לחלוטין בנקודה (x^0,λ^0) שבה מסקנת המשפט, $\nabla L=0$, מתקיימת. הראו כי הנקודה x^0 היא נקודת מינימום מקומית של f ביחס לאילוץ g.

שאלה 2:

יהי $S=\{(x,y,z):\ z^2-xy=1\}$ ונגדיר את שלושת העקומות

$$L_1:\ \begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=-\cos t \\ z(t)=\sin t \\ t\in[0,2\pi] \end{cases} \quad L_2:\ \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=-\frac{1}{t} \\ z(t)=0 \\ t>0 \end{cases} \quad L_3:\ \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=-\frac{1}{t} \\ z(t)=0 \\ t<0 \end{cases}$$

א. הראו ש-L_1, L_2, L_3 מוכלות ב- S ומצאו את נקודות החיתוך בין L_1 ו- L_2 ובין L_1 ו- L_3.

ב. הוכיחו שיש נקודה (לפחות אחת) ב- S הכי קרובה לראשית, אך אין נקודה ב- S הכי רחוקה מהראשית. מהו אותו מרחק מינימלי מהראשית ?

ג. בסעיף ב' קבלתם מספר נקודות קריטיות בפתרון בעית האקסטרמום תחת אילוץ. הראו שאותן הנקודות שאינן מינימום גלובלי אינן גם מקסימום או מינימום מקומי (תחת האילוץ), ע"י כך שתסתכלו רק בנקודות שלאורך העקומות L_1, L_2 ו- L_3 מהסעיף הראשון (או בכל דרך אחרת).

שאלה 3:

מצאו את נקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות, וסווגו אותן.

א. $u(x,y,z)=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$.

ב. $g(x,y,z)=x^2+xy+y^2+yz+z^2-6x-7y-8z$.

ג. $f(x,y)=\frac{1}{1+x^{2/3}+y^{2/3}}$.

שאלה 4:

א. מצאו את המרחק מהנקודה $(0,3,3)$ לקבוצה

$$\left\{x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=1\right\}$$

ב. מהם הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר המתקבלים ע"י $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ בקבוצה $A=\{|x|+|y|\le 1\}$?

ג. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית. מצאו את המקסימום ואת המינימום של $f(x)=x^TAx$ על ספירת היחידה.

ד. תהיינה $p^1,\dots,p^m$ נקודות ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי הנקודה היחידה $p\in\mathbb{R}^n$ שעבורה הביטוי $\sum_{i=1}^m \|p-p^i\|^2$ מינימלי היא הנקודה $p=\frac{\sum_{i=1}^m p^i}{m}$.

שאלה 5:

תהי

$$D=\left\{(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5 \mid ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \text{ יש פיתרון ממשי ל-}\right\}$$

הוכיחו כי $(1,2,-4,3,-2)$ הנה נקודה פנימית של D, ומצאו נקודה ב-D שאינה פנימית.

שאלה 6:

נתונות שתי ספירות ב- $\mathbb{R}^3$

$$x^2+y^2+z^2=2ax \;\; ; \;\; x^2+y^2+z^2=2by,$$

כאשר a ו- b קבועים חיוביים. הצדיקו בעזרת משפט הפונקציות הסתומות מדוע קיימים מישורים משיקים לספירות בכל נקודת חיתוך, והוכיחו כי הם מאונכים זה לזה.

שאלה 7:

א. הראו כי המישור המשיק לחרוט $z^2=x^2+y^2$ ב- $\mathbb{R}^3$ בכל נקודה פרט לראשית, חותך את החרוט לאורך ישר שלם.

ב. הראו כי המישור המשיק למשטח $z=xy$ ב- $\mathbb{R}^3$ בכל נקודה, חותך את המשטח בשני ישרים.

<u>הערה:</u> ישר ב- $\mathbb{R}^3$ מיוצג על-ידי פונקציה $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)=M_0+t\vec{a}$, כאשר M_0 היא נקודה על הישר, ו- $\vec{a}$ הוא ווקטור הכיוון שלו.

שאלה 8:

תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ גזירה, ונניח כי הדיפרנציאל $f'(x)$ היא מטריצה מוגדרת חיובית לכל x. הוכיחו כי f היא חד-חד-ערכית.