משפחות אורתוגונליות

נזכר כי שני ישרים $y = mx + n$ ו־$y = ax + b$ נחתכים ב־$90°$ אם $m \cdot a = -1$.
כמסקנה, שתי פונקציות $f(x), g(x)$ נחתכות ב־$90°$ אם הן נחתכות בנקודה x_0, כלומר $f(x_0) = g(x_0)$, וגם בנקודת החיתוך, הישרים המשיקים לפונקציות, מאונכים, כלומר $f'(x_0)g'(x_0) = -1$.
המטרה שלנו פה היא להתחיל עם משפחת פונקציות, הנתונה בדר"כ בצורה סתומה, ולמצוא משפחת פונקציות אחרת, כך שבכל פעם שגרף פונקציה ממשפחה אחת נחתך עם גרף פונקציה ממשפחה שניה, הזווית בין הפונקציות יהיה $90°$. כיוון שזווית בין פונקציות נקבע ע"י הנגזרת שלהם, זה מקום טוב להשתמש בו במשוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.
האלגוריתם הוא כזה:

1. נתונה משפחת פונקציות בצורה סתומה $F(x, y, c) = 0$
2. נחפש את המד"ר שמתאימה למשפחה זו, כלומר המד"ר שהמשפחה הנתונה היא הפתרון שלה. זה אומר להסתכל על $F(x, y(x), c) = 0$
לגזור יחס זה לפי x ולקבל $F'_x(x, y(x), c) + F'_y(x, y(x), c)y'(x) = 0$
ומשתי משוואות אלו, לקבל משוואה אחת ללא c. כלומר לבטל או לחלץ את הפרמטר c.
זה ייתן לנו משוואה דיפרנציאלית שהפתרון שלה הוא המשפחה המקורית $y' = g(x, y)$
דגש: אין להשאיר את הפרמטר במד"ר.
הערה: בשלב זה מומלץ <u>שלא</u> לנסות לרשום את המשפחה המקורית בצורה מפורשת. זה עלול לסבך את החישובים. גזרו את הצורה הסתומה וחלצו את הפרמטר. ברוב מוחלט של המקרים זה עובד יותר טוב.
3. לכל $y_1(x)$ מהמשפחה המקורית ולכל $y_2(x)$ מהמשפחה האורתוגונלית מתקיים $y'_1(x)y'_2(x) = -1$ היכן שהפונקציות נחתכות. כלומר

$$y'_2(x) = -\frac{1}{y'_1(x)} = -\frac{1}{g(x, y_1(x))} = -\frac{1}{g(x, y_2(x))}$$

כאשר השוויון האחרון הוא מכיוון שהפונקציות נחתכות ולכן $y_1(x) = y_2(x)$.
כלומר, פונקציה מהמשפחה האורתוגונלית היא פתרון של המד"ר $y' = -\frac{1}{g(x,y)}$.
צעד זה הוא צעד טכני מאוד וקצר מאוד, והוא מסתכם בזה: במד"ר של המשפחה המקורית, החליפו כל מופע של y' ב־$-\frac{1}{y'}$.
4. פתרו את המד"ר $y' = -\frac{1}{g(x,y)}$. הפתרון הוא המשפחה האורתוגונלית.

<u>**תרגיל:**</u> מצאו את המשפחה האורתוגונלית של $y = kx^2$.
<u>**פתרון:**</u> נתונה לנו המשפחה. נמצא את המד"ר שנתאימה לה: נתון $y = kx^2$
נגזור כפונציה סתומה (אם כי פה היא מפורשת) $y' = 2kx$
אזי $kx = \frac{y'}{2}$ ולכן $y = kx^2 = (kx)x = \frac{y'}{2}x$

וקיבלנו את המד"ר של המשפחה הנתונה $y' = \frac{2y}{x}$

שימו לב כי המטרה היא "להפטר" מהפרמטר k. אסור להשאיר אותו.

עכשיו נרשום את המד"ר של המשפחה האורתוגונלית $-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}$

שימו לב כי כל מה שעשינו זה בעצם להחליף את y' ב־$-\frac{1}{y'}$.

נפשט $y' = -\frac{x}{2y}$

ונפתור כמד"ר פרידה: אין פתרונות סינגולריים ולכן $\int -xdx = -\frac{x^2}{2}$

וגם $\int 2ydy = y^2$

ולכן הפתרון הכללי בצורה סתומה הוא $y^2 = -\frac{x^2}{2} + c$

הפתרון בצורה מפורשת $y = \pm\sqrt{-\frac{x^2}{2} + c}$

או בצורה ברורה מבחינה גיאומטרית $y^2 + \frac{x^2}{2} = c$

כלומר אליפסות.

תרגיל: מצאו את המשפחה האורתוגונלית של $y^2 = ke^x + x + 1$.

פתרון: נתונה לנו המשפחה. נמצא את המד"ר שנתאימה לה: נתון $y^2 = ke^x + x + 1$

נגזור כפונציה סתומה (מומלץ פה לא להגיע לצורה מפורשת) $2yy' = ke^x + 1$

אזי נציב $ke^x + 1$ לתוך המשוואה הראשונה $y^2 = ke^x + 1 + x = 2yy' + x$

וקיבלנו את המד"ר של המשפחה הנתונה $y^2 = 2yy' + x$

שימו לב, שוב, כי המטרה היא "להפטר" מהפרמטר k. אסור להשאיר אותו.

עכשיו נרשום את המד"ר של המשפחה האורתוגונלית $y^2 = 2y\left(-\frac{1}{y'}\right) + x$

שימו לב כי כל מה שעשינו זה בעצם להחליף את y' ב־$-\frac{1}{y'}$.

נפשט $y' = \frac{2y}{x-y^2}$

נהפוך תפקידי x, y ונקבל $x' = \frac{x-y^2}{2y} = \frac{1}{2y}x - \frac{y}{2}$

או $x' - \frac{1}{2y}x = -\frac{y}{2}$

וזו מד"ר לינארית שהפתרון שלה הוא $x = c|y|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}y^2$

נשים לב כי כאשר הפכנו את התפקידים איבדנו את הפתרון $y \equiv 0$ ולכן צריך להוסיף אותו. כלומר הפתרון הכללי בצורה סתומה הוא $x = c|y|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}y^2$ ביחד עם $y \equiv 0$.

תרגיל: מצאו את המשפחה האורתוגונלית של $x^2 + y^2 = cx^2 + 1$.

פתרון: נתונה לנו המשפחה. נמצא את המד"ר שנתאימה לה: נתון $x^2 + y^2 = cx^2 + 1$

נגזור כפונציה סתומה (מומלץ פה לא להגיע לצורה מפורשת) $2x + 2yy' = 2cx$

נחלק ב־2, נכפיל ב־x ואז נוסיף אחד ונקבל $x^2 + xyy' = cx^2 + 1 = x^2 + y^2$

וקיבלנו את המד"ר של המשפחה הנתונה $y' = \frac{y^2-1}{xy}$

שימו לב, שוב, כי המטרה היא "להפטר" מהפרמטר c. אסור להשאיר אותו.

עכשיו נרשום את המד"ר של המשפחה האורתוגונלית $-\frac{1}{y'} = \frac{y^2-1}{xy}$

שימו לב כי כל מה שעשינו זה בעצם להחליף את y' ב־$-\frac{1}{y'}$.

נפשט $y' = \frac{xy}{1-y^2}$

המד"ר היא מד"ר פרידה. נמצא קודם את הפתרונות הסינגולריים: $\frac{y}{1-y^2} = 0$ נותן לנו כי $y \equiv 0$ הוא פתרון סינגולרי או קבוע. נמצא את יתר הפתרונות:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \qquad \int \frac{1-y^2}{y} dy = \ln|y| - \frac{y^2}{2}$$

ולכן נקבל $\ln|y| - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$

או $-x^2 - y^2 + \ln y^2 = c$

כאשר נזכור להוסיף את הפתרון $y \equiv 0$. כלומר ברישום יותר מקיף

$$-x^2 - y^2 + \ln y^2 = c, \qquad y \equiv 0$$

הערות ששווה לכתוב שוב: 1. במד"ר של המשפחה המקורית אסור שיהיה הפרמטר של המשפחה.

2. כאשר מחפשים משפחה אורתוגונלית, מומלץ שלא לנסות לרשום את המשפחה המקורית בצורה מפורשת. זה עלול לסבך את החישובים. גזרו את הצורה הסתומה וחלצו את הפרמטר. ברוב מוחלט של המקרים זה עובד טוב יותר.