תרגיל בית 4

שאלה 1: (10 נק׳)

הוכיחו כי איחוד סופי של קבוצות דלילות במרחב טופולוגי $\left(X,T\right)$ הוא קבוצה דלילה. (10 נק׳)

שאלה 2: (42 נק׳)

יהי V מרחב וקטורי מעל R שעליו מוגדרת נורמה $\|\ \|$. נסמן ב- d את המטריקה על V המוגדרת ע״י הנורמה $\|\ \|$.

א. הוכיחו כי הנורמה $\|\ \|$ היא פונקציה רציפה ממרחב מטרי $\left(V,d\right)$ למרחב מטרי $\left(R,d_1\right)$, כאשר d_1 היא המטריקה האוקלידית על R. (5 נק׳)

ב. יהי $\lambda \in R$ סקלר כלשהו. הוכיחו כי העתקה $f:V\to V$, המוגדרת ע״י $f\left(x\right)=\lambda x$ לכל $x\in V$, היא רציפה כהעתקה ממרחב מטרי $\left(V,d\right)$ לעצמו. (5 נק׳)

ג. יהי $v\in V$ וקטור כלשהו. הוכיחו כי העתקה $f:V\to V$, המוגדרת ע״י $f\left(x\right)=x+v$ לכל $x\in V$, היא רציפה כהעתקה ממרחב מטרי $\left(V,d\right)$ לעצמו. (5 נק׳)

ד. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. הוכיחו כי הטענות הבאות שקולות: (27 נק׳)

1. T הוא העתקה רציפה כהעתקה ממרחב מטרי $\left(V,d\right)$ לעצמו.
2. T היא העתקה רציפה ב- $x=0$ (האיבר האדיש של V) כהעתקה ממרחב מטרי $\left(V,d\right)$ לעצמו.
3. פונקציה $f:V\to R$, המוגדרת ע״י $f\left(x\right)=\|Tx\|$, היא פונקציה חסומה (ביחס למטריקה האוקלידית על R) בספירת היחידה שמרכזה ב- $x=0$.

שאלה 3: (48 נק׳)

תהי F העתקה רציפה ממרחב טופולוגי $\left(X,T\right)$ למרחב טופולוגי $\left(Y,S\right)$. יהיו V ו- W תתי קבוצות לא ריקות של X ו- Y בהתאמה.

לכל זוג מבין הקבוצות הבאות קבעו אילו מבין שתי ההכלות מתקיימות בין הקבוצות בזוג, ואילו אינן מתקיימות. שימו לב כי אם קבעתם כי הכלה מסויימת מתקיימת, עליכם להוכיח זאת, ואם קבעתם שהכלה מסויימת אינה מתקיימת, עליכם להוכיח זאת ע״י מתן דוגמה נגדית. אין צורך לבדוק הכלות ממש, אלא הכלות רגילות בלבד (כלומר הכלות שמאפשרות שוויון בין הקבוצות).

א. $\operatorname{int}\left(F\left(V\right)\right)$ ו- $F\left(\operatorname{int}V\right)$. (12 נק׳)

ב. $\overline{F\left(V\right)}$ ו- $F\left(\overline{V}\right)$. (12 נק׳)

ג. $\operatorname{int}\left(F^{-1}\left(W\right)\right)$ ו- $F^{-1}\left(\operatorname{int}\left(W\right)\right)$. (12 נק׳)

ד. $\overline{F^{-1}\left(W\right)}$ ו- $F^{-1}\left(\overline{W}\right)$. (12 נק׳)

בהצלחה !