הטכניון - הפקולטה למתמטיקה

תורת הקבוצות (104290) - גליון תרגילים מס' 7;

שניר הורדן 205689581

1.א. רפלקסיביות

$\{n\in\mathbb{N} \mid f(n)\neq f(n)\}=\emptyset$ וזו קבוצה סופית

סימטריות

$f\,R\,g \iff \{n\in\mathbb{N} \mid f(n)\neq g(n)\} = \{n\in\mathbb{N} \mid g(n)\neq f(n)\} \iff g\,R\,f$

טרנזיטיביות: נניח $f\,R\,g$, $g\,R\,h$

$f(n)\neq g(n)$ סופית
$g(n)\neq h(n)$ סופית
$\Rightarrow f(n)\neq h(n)$ סופית

איחוד של איברים סופיים זו קבוצה סופית.

1.ב. $[f]=\{g \mid \{n \mid g(n)\neq f(n)\}$ במספר סופי של איברים $\}\subseteq\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

נראה כי: $|[f]|=\aleph_0$.

הוכחה

מחלקת השקילות היא אוסף הפונ' שאינן שונות מ-f ב-∞ איברים. כלומר, פונ' השונות מ-f פרט למס' סופי של איברים. סה"כ הקומבינציות של מספר סופי זה הוא לכל היותר 2^n, $n\in\mathbb{N}$. לכן $|[f]|=\aleph_0$

1.ג. $R/X=\{[f] \mid f(a)\neq g(a)$ עבור אינסוף איברים $a\in\mathbb{N}\}$

מאחר ו-$a\in\mathbb{N}$ אז זו קבוצה בת מניה.

כלומר $|R/X|=\aleph_0$

לכל קבוצה ששונה במספר סופי של איברים קיימת כך ש- $f\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ מספר $f(n)\neq g(n)$ בן מניה של פעמיים, ט קיימות שתי אפשרויות ו-N קומבינציות שלהן (ספירות).

ב.א. זו הקבוצה של פונקציות $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ כך שהחל
ממקום מסוים הן 1 או זהותית 0.
נבנה פונ' חח"ע ועל. $f: \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
נסמן $a_0 \in \mathbb{R}$ - האינדקס בו הפונקציה עולה.
לכל סדרה קיים אינדקס "יחידי" כזה. עבור הסדרה
שהיא זהותית 0, $a_0 = 0$.
כל אינדקס כזה הוא מספר ממשי.
בכך קיבלנו התאמה חח"ע ועל, מאחר וכל הסדרות
אינן יורדות ושונות אחת מהשנייה באינדקס
העלייה.

לכן $|A| = \aleph$

ב.ב. טיעון

לכל ממשי $a_n \in \mathbb{Q}$

לכל שבול קיימת סדרה של מספרים רציונליים
המתכנסת לשבול.
לפי צפיפות הרציונליים, קיימות a_n-ים סדר
שונה של $|\mathbb{Q}| = \aleph_0 \le |\mathbb{N}|$ סדרות כאלה.

הוכחה

לפי משפט, קיימת סדרה מונו' המתכנסת ל-0
שהיא רציונאלית. נשתמש בטענה על תכונת
הצפיפות ב-$\mathbb{Q}$. נסמן סדרה זו ב-a_n.
בין כל a_n ו-a_{n+1} קיים a_i כלשהו רציונלי.
נרכיב את הסדרה ברקורסיה כך, וקיבלנו את הסדרה
מונו' יורדת ל-0 שהיא רציונאלית. נמשיך בתהליך כזה
ונקבל ∞ סדרות כאלו שלכל אחת יש התאמה

ה.ב. חח"ע ועל עם $\mathbb{Q}_1 \supseteq \mathbb{Q}$. כי בבניית הספרות אנו בוחרים מספר בין שני איברים בסדרה הקודמת שבהכרח אינו שווה להם.

אזי העוצמה היא

$$|\mathbb{Q}_1| = |\aleph_0|$$

מנייה

$(\mathbb{Q} \cap \mathbb{N})$

3.א. $X=\{A\in P(\mathbb{R}) \mid |\mathbb{R}\setminus A| \le \aleph_0\}$

$|\mathbb{R}\setminus A| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = \aleph_0 + |A|$

נוכל לקחת את תתי-קבוצות של $\mathbb{R}$ כך ש- $|\mathbb{R}\setminus A|\le\aleph_0$.

על מנת ש- $|\mathbb{R}\setminus A|$ תהיינה קבוצה בת-מנייה

$A\in P(\mathbb{R})$.

~~מכאן זה לא ייתכן כי כל תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ היא בעוצמת $\aleph$ (לפחות) או ם~~

מכאן זה ייתכן רק עבור קבוצות סופיות, והקבוצות $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ו- $\mathbb{Z}$, מהקבוצות האינסופיות. אז זה

זה מתקיים מספר בן-מנייה של פעמים, לכן $|X|=\aleph_0$

3.ב. $Y=\{A\in P(\mathbb{R}) \mid |A|=\aleph\}$

$|P(\mathbb{R})| = |\{0,1\}^{\mathbb{R}}| = 2^{\aleph}$

לפי משפט, כל תת-קבוצה של $\mathbb{R}$ מכילה קטע בעוצמה $\aleph$.

לכן נכונות בפועל כל $A\subseteq\mathbb{R}$ הוא בעל עוצמה $\aleph$

נקבל $|Y|=2^{\aleph}$.

Scanned by CamScanner

שאלון 2

4. נניח כי המישור הינו איחוד בן-מנייה של ישרים.
המישור הוא קבוצה של ישרים המתאימים לציר
הממשי. נסמן ישר ב-l, ונק' ב-p.

$$\mathbb{Q}^2 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} l$$

בלי הגבלה,

אם כך אז כי $\mathbb{Q} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} p$.

נשים לב כי, $\left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}} p\right| = |\mathbb{N}|$

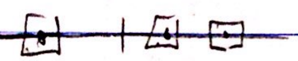
אז נקבל $\aleph_0 = \aleph$

סתירה.

*נימוקים: עבור $x,y\in\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{Q} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (x_i,y_i)$

נוכל לייצג כל ישר באמצעות ערך יחיד בקואורדינטות.
בהוכחה, התבוננו רק בישרים בציר מסוים.

5. ראשית, נתבונן בריבוע במישור $[0,1]\times[0,1]$.
ידוע כי $\mathbb{R}\sim[0,1]$ אז לפי חוקי חזקות



$$[0,1]^2 \sim \mathbb{R}^2 = \aleph\cdot\aleph = \aleph$$

נסמן X - קבוצת הריבועים הזרים במישור.
נוכיח כי X היא העוצמה מעוצמה $\aleph$.
בכל ריבוע ניתן לבחור נק' בעלת שתי קואורדינטות רציונליות.
קיימת התאמה חח"ע ועל בין ריבוע לקואורדינטה כזו, מאחר והריבועים זרים, ולא ייתכן כי אותה קואורדינטה תצביע לשני ריבועים.

כפי שהראינו בתחילת ההוכחה, עוצמת כל ריבוע במישור היא $\aleph$. נוכל להסיק כי קיימים $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ריבועים כאלו (או מספר בנים, אין הבדל מהותי).

לסיכום, סה"כ העוצמה היא $\aleph \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph$

כי קיימים ספר של $Q \times Q$ רביעים כאלו.

לפי משפט, $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$ $\left(\left((\aleph \cdot \aleph_0) \aleph_0 = \aleph \cdot \aleph_0 = \aleph \right) \right)$.

<u>6.א. גרסה ג</u>

כל תתי-הסדרות השונות.

1 2 3 4 ...
2 4 8 16
3 9 81

א. נגדיר חלוקה $A_n = \{a \mid a = n^k, k \in \mathbb{N}\}$.

חלוקה זו מוגדרת לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי קיימות $\aleph_0$ קבוצות כאלו.

נוכיח $|A_n| = \aleph_0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

כל A_n היא קבוצה אינסופית.

לפי טענה, לכל קבוצה אינסופית, ובפרט לכל A_n, קיימת תת-קבוצה בעוצמה $\aleph_0$.

אזי $\aleph_0 \leq |A_n| \leq |\mathbb{N}| = \aleph_0$

כי זו תת-קבוצה של $\mathbb{N}$

$A_n \subseteq \mathbb{N}$

לפי CSB, $|A_n| = \aleph_0$

אזי קיימת חלוקה של $\mathbb{N}$ ל-$\aleph_0$ קב' מעוצמה $\aleph_0$.

□

$A^0 = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

6.ב. נתבונן בקבוצה

עבור A_n מהסעיף הקודם

$\mathbb{N} \subseteq \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

זהו איחוד בן מנייה של קבוצות בנות

מניה. לפי משפט, איחוד כזה הוא בן-מנייה.

אזי $|\mathbb{N}| \le |A^\circ| \le \aleph_0$

לפי CSB, $|A^\circ| = \aleph_0$

כנדרש