תכונות של טורים חיוביים ומונוטוניים

אנו יודעים שאם $\sum a_n$ מתכנס אז $a_n \to 0$. אם נוסיף עוד הנחה שהטור גם מונוטוני יורד, נקבל מהתנאי ההכרחי גם מידע נוסף על קצב ההתכנסות:

<u>משפט.</u> נתון ש: $\sum a_n$ מתכנס, $a_n > 0$ והסדרה $\{a_n\}$ אינה עולה (כלומר $0 < a_{n+1} \leq a_n$). אזי $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

<u>הוכחה:</u> על פי קריטריון קושי

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \epsilon$$

עבור כל $m > n > N(\epsilon)$. עבור $n > N(\epsilon)$
נבחר $m > 2n$:

$$(m-n)a_m \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \epsilon$$
(1)

כי יש בסכום $m-n$ מחוברים, והקטן שבהם
הוא a_m. מ: $m > 2n$ נובע $m - n \geq m/2$ ולכן
מקבלים מ: (1)

$$\frac{1}{2}m \cdot a_m < \epsilon \Rightarrow m a_m < 2\epsilon$$

לכל $m > 2N(\epsilon)$. אבל זה בדיוק אומר שקיים
הגבול $\lim_{m\to\infty} m a_m = 0$.

<u>הערה.</u> זהו תנאי הכרחי, לא מספיק,
להתכנסות.

דוגמא. $a_n = n^{-p}$. מהמשפט האחרון תנאי הכרחי להתכנסות הוא $n^{1-p} \to 0$, וזה מתקיים אמ"ם $p > 1$. המסקנה היא שהטור מתבדר אם $p \leq 1$.

משפט. יהי הטור $\sum a_n$ כך ש: $a_n > 0$ והסדרה $\{a_n\}$ אינה עולה. אזי הטורים: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n},$$

או שניהם מתכנסים, או שניהם מתבדרים.

הוכחה: נסמן את הסכומים החלקיים של שני הטורים כדלקמן:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$.T_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}$$

מהמונוטוניות של a_n נובע ש:

$$,S_{2^k} \le T_k$$

ולכן, בגלל החיוביות של $\{a_n\}$, התכנסות של הסדרה המונוטונית $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ גוררת את ההתכנסות של הסדרה המונוטונית $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

עבור הכיוון ההפוך, לכל טבעי n יהי k כזה שמתקיים

$$.2^k < n \le 2^{k+1} \qquad (2)$$

נעריך את S_n כדלקמן:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4)$$
$$+(a_5 + \cdots a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots a_{2^k})$$
$$+(a_{2^k+1} + \cdots + a_n)$$
$$\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k}$$

אבל הביטוי האחרון הוא $\frac{1}{2}T_k$, וקבלנו לכן

$$S_n \geq \frac{1}{2}T_k ,$$

כאשר n, k הם כמו ב: (2). מכאן נובע שאם S_n סדרה מתכנסת, אז גם הסדרה T_k מתכנסת, מה שמשלים את ההוכחה.

דוגמא. נתיחס שוב לטור $\sum n^{-p}$. לככל $p > 0$ הסדרה n^{-p} אינה עולה, לכן הטור מתכנס אמ"ם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-np} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

מתכנס. אבל הטור האחרון הוא טור גיאומטרי עם $q = 2^{1-p}$, והוא מתכנס אמ"ם $1 > q = 2^{1-p}$, כלומר כאשר $p > 1$. כלומר קבלנו שוב שהטור הנידון מתכנס אמ"ם $p > 1$.

טורים עם סימנים מתחלפים לסירוגין.

נושא זה הוא מורכב יותר מהנושא של טורים חיוביים.

משפט (Leibnitz). נתונה סדרת המספרים $a_1, a_2, ...$ כך ש: $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$, ו:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

אז:

א. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

מתכנס.

ב. סכום הטור מקיים $0 < S < a_1$.

ג. זנב הטור r_m (כלומר השארית לאחר סיכום m מחוברים) מקיים

$$|r_m| < a_{m+1},\ (-1)^m r_m > 0.$$

<u>הערה.</u> החשיבות של r_m נובעת מכך שבאופן מעשי אנו לרוב מסכמים מספר סופי של מחוברים. אם מסכמים m מחוברים אז r_m הוא ההפרש בין הסכום החלקי ובין הסכום המלא, כלומר שגיאת החישוב. לכן חשוב להיות מסוגל להעריך את $|r_m|$, כלומר את גודל שגיאת החישוב.

<u>הוכחה:</u> להוכחת א. נכתוב:

$$S_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots$$
$$-(a_{2n-2} - a_{2n-1}) < a_1$$

ומבחינים שכל ביטוי $a_{2k}-a_{2k+1}$ הוא חיובי, ולכן הסדרה $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת. מאידך אפשר לכתוב

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots$$
$$+(a_{2n-1}-a_{2n})>0$$

ועל כן הסדרה $\{S_{2n}\}$ היא סדרה מונוטונית עולה, ובפרט חסומה מלרע (מלמטה). מאחר ו:

$$S_{2n-1}=S_{2n}+a_{2n} \tag{1}$$

נובע מ: $a_{2n}\to 0$ שגם $\{S_{2n-1}\}$ חסומה מלרע, ומאחר והיא מונוטונית יורדת, נובע שהיא מתכנסת. נסמן את גבולה ב: S, ומ: (1) נובע

שגם $\{S_{2n}\}$ מתכנסת ל: S, ולכן הסדרה כולה $\{S_n\}$ מתכנסת ל: S. רואים ש:

$$a_1-(a_2-a_3)>S_{2n}>a_1-a_2>0\,,$$

ובגבול $n\to\infty$ מקבלים

$$a_1>a_1-(a_2-a_3)\geq S\geq a_1-a_2>0\,,$$

ומסיקים ש: $a_1>S>0$, מה שמוכיח את ב.

ג. זנב הטור (השארית) מקיים

$$r_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\,,$$

והוא עצמו טור לייבניץ עם סימנים מתחלפים (פרט, אולי, לסימנו ההתחלתי), כך שהוא שווה

$$(-1)^m[a_{m+1}-a_{m+2}+\cdots].$$

לכן סימן הטור הזה כסימן האבר הראשון, כלומר $(-1)^m$, וסכומו קטן בערכו המוחלט מהאבר הראשון בסוגריים, a_{m+1}, כלומר $|r_m| < a_{m+1}$.

<u>הערה.</u> לא מספיק להניח $a_n > 0$ ו: $a_n \to 0$, והכרחי להניח שגם a_n ישאף באופן מונוטוני ל: 0. לדוגמא נתיחס לטור

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \cdots$$

כאן $a_n \to 0$ אבל לא באופן מונוטוני, כי

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$$

(הוכח זאת כתרגיל). ואכן הטור אינו מתכנס, כי

$$S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$
$$= \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2}{n-1} \to \infty$$

<u>דוגמא.</u> הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p > 0$.

אנו זוכרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אמ"ם $p > 1$, ויוצא בפרט שהטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר. אך הטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים מקיים את תנאי משפט לייבניץ, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס.

התכנסות בהחלט של טורים

<u>משפט</u> אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u> מאי-שיויון המשולש

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m| \le |a_{n+1}|+\cdots+|a_m|. \quad (1)$$

בהינתן $\epsilon > 0$ קיים, מקריטריון קושי, $N = N(\epsilon)$ כך שאם $m > n > N$ אז אגף ימין של (1) קטן מ: ϵ, וכמובן גם אגף שמאל של (1) קטן מ: ϵ. משימוש נוסף בקריטריון קושי נובעת התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

__הגדרה.__ אומרים שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ הוא טור מתכנס.

בשימוש בהגדרה הזו המשפט לעיל ניתן לניסוח באופן הבא:

__משפט.__ טור מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס.

הכיוון ההפוך הוא, כמובן אינו נכון: הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט.

__מסקנה.__ יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ טור עם סימנים כלשהם. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ אז הטור הנ"ל מתכנס,

ואילו אם $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ אז הטור הנ"ל אינו מתכנס.

<u>הוכחה:</u> החלק הראשון ברור, כי נובע שהטור מתכנס בהחלט. אם מתקיים התנאי בחלק השני אז ישנם אינסוף איברים a_n כך ש: $|a_n| > 1$, ולכן $a_n \not\to 0$, והטור לא מתכנס.

<u>משפט.</u> יהי $\sum a_n$ טור בעל סימנים כלשהם, ונניח שקיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

אם $L < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט, ואם $L > 1$ אז הטור אינו מתכנס.

<u>דוגמא.</u> מתי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n}$ מתכנס? מתי מתכנס בהחלט?

<u>קריטריונים להתכנסות שאינה בהכרח בהחלט</u>

הקריטריונים לעיל (למעט לייבניץ) מדברים למעשה על התכנסות בהחלט, ורק כבדרך אגב נובעת התכנסות. המשפט הבא אינו קשור להתכנסות בהחלט. נזדקק לטענת העזר הבאה, שמהווה אנלוג דיסקרטי לנוסחת האינטגרציה בחלקים.

<u>למה.</u> (נוסחת הסיכום בחלקים). תהיינה $\{a_n\}$ ו: $\{b_n\}$, $n \geq 1$, סדרות כלשהן, ונסמן $B_0 = 0$ ו:

$$B_n = b_1 + b_2 \cdots + b_n.$$

אז

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i) \ . \quad (1)$$

הנוסחא הזו מקבילה ל:

$$\int_a^b fg = F(b)g(b) - \int_a^b F g'$$

כאשר $F(x) = \int_a^x f$ (ובפרט $F(a) = 0$).

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i
\end{aligned}$$

מאחר ו: $B_0 = 0$ נשאר

$$= a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

מה שמוכיח את (1).

<u>משפט (דיריכלה).</u> יהי $\sum b_n$ טור חסום,

כלומר קים קבוע $M > 0$ כך שמתקיים

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| < M$$

לכל $n \geq 1$, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית,

יורדת לאפס באופן מונוטוני. אזי הטור

$$\sum^{\infty} a_n b_n$$

מתכנס.

הערה. קריטריון לייבניץ נובע מהמשפט הזה כדלקמן: אם $\{a_n\}$ כמו במשפט, אז הטור $\sum(-1)^n a_n$ מתקבל מבחירת $b_n = (-1)^n$, ועבור סדרה זו

$$|B_n| = 0, 1$$

ותנאי המשפט מתקיימים.