תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 8 – פתרון חלקי

1. א) הקרדינלים לא שווים: $2^{2^{\aleph}} = 2^{2\cdot 2^{\aleph}} = (2^2)^{2^{\aleph}}$ ו- $2^{\aleph} = 2^{4\cdot\aleph} = (2^4)^{\aleph}$.

ב) הקרדינלים שווים: $2^{\aleph} = 2^{\aleph\cdot\aleph_0} = 2^{2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0} = (2^{(2^{\aleph_0})})^{\aleph_0}$.
כל הנימוקים הדרושים – מקרים פרטיים של שאלה 3.

2. א) כן. לדוגמא: $\alpha = 2^{\aleph}, \beta = \aleph, \gamma = \aleph_0$. (לקחנו α גדול, ש"יבלע" כל המעריכים, השווה עם פתרון של שאלה 3 ג' .)
ב) כן. לדוגמא: $\beta = \aleph, \alpha = \gamma = \aleph_0$.
ג) כן, קיימים...

3.

א) עבור i=0 – $\alpha_0 = \aleph_0$: $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ו- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ – משפטים ידועים.
נניח שהטענות נכונות עבור i ונוכיח אותן עבור i+1 :
$\alpha_{i+1} \cdot \alpha_{i+1} = 2^{\alpha_i} \cdot 2^{\alpha_i} = 2^{\alpha_i \cdot \alpha_i} = 2^{\alpha_i} = \alpha_{i+1}$;
מכאן $\alpha_{i+1} = 1 \cdot \alpha_{i+1} \le 2 \cdot \alpha_{i+1} \le \alpha_{i+1} \cdot \alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}$ $\Leftarrow$
$2 \cdot \alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}$ $\Leftarrow$ $\alpha_{i+1} + \alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}$.
(הערה: לכל קרדינל α מתקיים $2\cdot\alpha=\alpha+\alpha$ כי אם $|A|=\alpha$ אז
$2\cdot\alpha=|\{0,1\}\times A|=|(\{0\}\times A)\cup(\{1\}\times A)|=|\{0\}\times A|+|\{1\}\times A|=\alpha+\alpha$)

ב) ממשפט קנטור נובע $\alpha_i < \alpha_j$.
לכן $\alpha_j = 1 \cdot \alpha_j \le \alpha_i \cdot \alpha_j \le \alpha_j \cdot \alpha_j = \alpha_j$ $\Leftarrow$ $\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha_j$
ו- $\alpha_j = 0 + \alpha_j \le \alpha_i + \alpha_j \le \alpha_j + \alpha_j = \alpha_j$ $\Leftarrow$ $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_j$.

ג) מהנתון נובע: $\gamma=\alpha_i$, $\beta=\alpha_j$ כאשר i<j ומכאן i≤j-1 .
לכן $\beta^{\gamma} = \alpha_j^{\alpha_i} = (2^{\alpha_{j-1}})^{\alpha_i} = 2^{\alpha_{j-1}\cdot\alpha_i} = 2^{\alpha_{j-1}} = \alpha_j = \beta$.

ד) לפי סעיף א' , $\beta\cdot\gamma=\gamma$. לכן:
$2^{\gamma} \le \beta^{\gamma} \le (2^{\beta})^{\gamma} = 2^{\beta\cdot\gamma} = 2^{\gamma}$

4. א) $|\mathsf{R}^{[0,1]}| = |\mathsf{R}|^{|[0,1]|} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.
ב) נסמן את הקבוצה ב- X .
חסמים מיידיים: $|X| \le 2^{\aleph}$ כי $X \subseteq \mathsf{R}^{[0,1]}$ ו- $|X| \ge \aleph$ כי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה $f(x)\equiv\alpha$ – רציפה.
ניזכר בעובדה מחשבון דיפרנציאלי שפונקציה רציפה נקבעת לגמרי ע"י הערכים שלה בנקודות הרציונליות. נגדיר

$$\varphi : X \to \mathsf{R}^{[0,1]\cap \mathsf{Q}}$$
$$f \mapsto f|_{[0,1]\cap \mathsf{Q}}$$

מוכיחים ש- φ חח"ע (כלומר, את העובדה המנוסחת לעיל: אם שתי פונקציות רציפות מתלכדות בנקודות הרציונליות של תחום ההגדרה, אז הן מתלכדות בכל בנקודות של תחום ההגדרה. יש להיעזר בהגדרת Heine של רציפות (הגדרת הרציפות "לפי הסדרות")). מכאן $|X| \le |\mathsf{R}^{[0,1]\cap \mathsf{Q}}| = |\mathsf{R}|^{|[0,1]\cap \mathsf{Q}|} = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

ג) תשובה: **א**. רעיון לפתרון: לכל $\alpha\in[0, 1]$ קבוצת הפונקציות הלא רציפות רק ב- α – בעלת העצמה **א** – בדומה לסעיף הקודם. קיימים **א** מספרים ב- $[0, 1]$ (מועמדים ל- α), לכן בסה"כ יש **א=א·א** פונקציות כאלה.

5. א) העצמה של X , קבוצת כל היחסים ב- $\mathbb{N}$, שווה ל- **א** כי $X=P(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \Leftarrow |X| = 2^{|\mathsf{N}\times\mathsf{N}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

ב) העצמה של Y , קבוצת כל יחסי השקילות ב- $\mathbb{N}$, שווה ל- **א**:
מצד אחד $Y\subseteq X$ ולכן $|Y| \le \aleph$.
מצד שני, לכל $A\in P(\mathbb{N})$ נגדיר יחס שקילות R_A באופן הבא:

$$(x,y)\in R_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \exists n\in A : x=2n-1, y=2n \end{array}\right.$$

ההתאמה $A \mapsto R_A$ היא חח"ע ולכן $|P(\mathbb{N})|\le Y$.

6.

$$|A| = |\mathsf{Q}|^{|\mathsf{N}|} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

$|C| = \aleph$ כי לכל $X\in P(\mathbb{N})$ ניתן להגדיר איבר f_X של C :
$f_X(n) = \begin{cases} 1/n & ,n\in X \\ 0 & ,n\notin X \end{cases}$. $|B| = \aleph$ כי $C\subseteq B\subseteq A$.

$|D| = \aleph$ כי לכל $X\in P(\mathbb{N})$ ניתן להגדיר איבר f_X של D :
$f_X(n) = \begin{cases} 1 & ,n\in X \\ 0 & ,n\notin X \end{cases}$.

$|F| = \aleph_0$: יש להוכיח שכל סדרה כזאת – קבועה ממקום מסויים.

גם ל- E ו- G עצמה **א** ...