משפטי ההשוואה וההפרדה של שטורם

משפט ההשוואה של שטורם: נתונות המד"ר הבאות:

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{1}$$

$$y'' + P(x)y = 0 \tag{2}$$

כאשר נתון כי $p(x), P(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגם כי בקטע מתקיים $p(x) \leq P(x)$ וגם שיש $a \leq x_0 \leq b$ עבורו $p(x_0) < P(x_0)$.
יהי $u(x)$ פתרון לא אפס של (1) המקיים $u(a) = u(b) = 0$.
אזי כל פתרון של המד"ר (2) מתאפס לפחות פעם אחת בקטע (a,b).

משפט ההפרדה של שטורם: נתונה המד"ר

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר $p(x), q(x)$ רציפים בקטע I.
יהיו $u(x), v(x)$ פתרונות בלתי תלויים (בפרט אינם פתרון האפס) המוגדרים על I. אם $a < b$ אפסים עוקבים של $u(x)$ בקטע I, כלומר אם $u(a) = u(b) = 0$ וגם $u(x) \neq 0$ לכל $a < x < b$, אז ל־$v(x)$ יש בדיוק אפס אחד בקטע (a,b).

<u>הערה:</u> יהיו $u(x), v(x)$ שני פתרונות של המד"ר

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

אם אחד מהפתרונות הוא פתרון האפס, אין עניין. לכן נניח כי שני הפתרונות אינם הפתרון הטריביאלי.
אם יש נקודה x_0 בה $u(x_0) = v(x_0) = 0$, כלומר אם ל־$u(x), v(x)$ נקודת התאפסות משותפת, אזי הורונסקיאן של הפתרונות שווה לאפס בנקודה x_0, ולכן הפתרונות תלויים לינארית ואז אחד הפתרונות הוא כפולה בסקלר שונה מאפס של השני ואז האפסים שלהם זהים לחלוטין. לכן הפרדת אפסים מעניינת אך ורק עבור פתרונות בלתי תלויים. ועבור פתרונות בלתי תלויים יש לנו בדיוק את משפט ההפרדה.

תרגיל: הוכיחו כי כל פתרון של המשוואה

$$y'' + xy = 0$$

מתאפס אינסוף פעמים, והמרחק בין אפסים עוקבים שואף לאפס כאשר $x \to \infty$.
פתרון: יהי $y(x)$ פתרון של המד"ר $y'' + xy = 0$. נסתכל על שני המד"ר

$$y'' + a^2 y = 0$$
$$y'' + xy = 0$$

על הקטע $[a^2, \infty)$. נשתמש במשפט ההשוואה של שטורם. נשים לב שעל הקטע מתקיים $x \geq a^2$ וברור כי אין שוויון. בנוסף, $\sin ax$ פתרון של $y''+a^2y = 0$ המתאפס בנקודות $\frac{k\pi}{a}$ כאשר מרחק בין אפסים עוקבים הוא $\frac{\pi}{a}$ ולכן, לפי משפט ההשוואה של שטורם, $y(x)$ מתאפס לפחות פעם אחת בין $\frac{(k+1)\pi}{a}, \frac{k\pi}{a}$ עבור כל k עבורו $\frac{k\pi}{a} \geq a^2$, כלומר לכל k עבורו $k \geq \frac{a^3}{\pi}$. לכן אם x_1, x_2 אפסים עוקבים של $y(x)$ המקיימים $x_1, x_2 \geq a^2$ אזי המרחק בינהם לכל היותר $\frac{2\pi}{a}$.
לכן, בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $a > 0$ עבורו $\varepsilon < \frac{2\pi}{a}$, כלומר $a > \frac{2\pi}{\varepsilon}$, למשל $a = \frac{4\pi}{\varepsilon}$. אז אם $x_1, x_2 \geq a^2 = \frac{16\pi^2}{a^2}$ הם אפסים עוקבים של $y(x)$ אזי המרחק בינהם לכל היותר $\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. כלומר מצאנו מספר $M = a^2 = \frac{16\pi^2}{a^2}$ עבורו על שני שורשים עוקבים של $y(x)$ הגדולים מ-M, מרחקם קטן מ-ε. לפי הגדרה זה אומר כי מרחק שורשים עוקבים שואף לאפס כאשר x שואף לאינסוף.

אם נרצה לנסח זאת בדרך אחרת, לכל k שלם חיובי, נסתכל על המד"ר

$$y'' + (\pi k)^2 y = 0$$
$$y'' + xy = 0$$

בקטע $[(\pi k)^2, \left(\pi(k+1)\right)^2]$. הפונקציה $\sin \pi k x$ היא פתרון של $y'' + (\pi k)^2 y = 0$ שמתאפס בנקודות עוקבות שמרחקן $\frac{1}{k}$. בנוסף הפונקציה x גדולה או שווה מ-$(\pi k)^2$ בקטע $[(\pi k)^2, \left(\pi(k+1)\right)^2]$. לכן לפי משפט ההשוואה, $y(x)$ מתאפס לפחות פעם אחת בין כל שני אפסים של $\sin \pi k x$, והמרחק בין אפסים עוקבים של $\sin \pi k x$ הוא $\frac{1}{k}$ ויש כמה כאלה בגלל אורך הקטע, ולכן המרחק בין אפסים עוקבים של פתרון של $y'' + xy = 0$ בקטע $[(\pi k)^2, \left(\pi(k+1)\right)^2]$ הוא לכל היותר $\frac{2}{k}$.

הערה: במה השתמשנו בתרגיל זה? רק בעובדה כי המקדם של y במד"ר הנתונה שואף לאינסוף. לכן, פתרון זה בעצם נותן כי אם נתונה לנו מד"ר $y'' + P(x)y = 0$ כאשר $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ אזי כל פתרון מתאפס אינסוף פעמים והמרחק בין אפסים עוקבים

שואף לאפס כאשר $x \to \infty$.
תרגיל למחשבה: מה אפשר להגיד עבור המד"ר $y'' + P(x)y = 0$ אם ידוע כי $\lim_{x\to\infty} P(x) = L > 0$? כלומר, מה אפשר להגיד על האפסים של כל פתרון?
תרגיל בית: נסחו אנלוג לשאלה זו כאשר $x \to -\infty$.
תרגיל בית: הראו כי אם $P(x)$ מונוטונית עולה ממש על קטע I אז המרחק בין אפסים עוקבים קטן, כלומר אם $x_1 < x_2 < x_3$ אפסים עוקבים, אז $x_3 - x_2 < x_2 - x_1$.
רמז: $p(x) = P(x - (x_2 - x_1))$.

תרגיל: הוכיחו כי אם $p(x) \leq 0$ רציפה בקטע I, אז כל פתרון לא טריביאלי של המשוואה

$$y'' + p(x)y = 0$$

מתאפס לכל היותר פעם אחת.
פתרון: אם $p(x) \equiv 0$ אזי המד"ר היא $y'' = 0$ שפתרונה הכללי הוא $y = ax + b$ ואם הפתאון אינו טריביאלי אזי מתאפס לכל היותר פעם אחת.
נניח $p(x) \leq 0$ וגם $p(x)$ אינו זהותית אפס. נשתמש במשפט ההשוואה עם $y''+0y = 0$. נקבל שאם יש פתרון לא טריביאלי של $y'' + p(x)y = 0$ המתאפס פעמיים בקטע, אזי כל פתרון של $y'' + 0y = 0$ מתאפס לפחות פעם אחת שם. אבל $y = 1$ פתרון של $y'' + 0y = 0$ שאינו מתאפס אפילו פעם אחת. סתירה. לא יכול להיות פתרון לא טריביאלי של $y'' + p(x)y = 0$ המתאפס פעמיים.

תרגיל: תהי $r(x)$ פונקציה חיובית וגזירה ברציפות בקטע $[a, b]$. נתונות המד"ר הבאות:

$$\big(r(x)y'\big)' + p(x)y = 0 \tag{3}$$

$$\big(r(x)y'\big)' + P(x)y = 0 \tag{4}$$

כאשר נתון כי $p(x), P(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$ וגם כי בקטע מתקיים $p(x) \leq P(x)$ וגם שיש $a \leq x_0 \leq b$ עבורו $p(x_0) < P(x_0)$.
יהי $u(x)$ פתרון לא אפס של (3) המקיים $u(a) = u(b) = 0$.
אזי כל פתרון של המד"ר (4) מתאפס לפחות פעם אחת בקטע (a, b).
פתרון: בה"כ a, b הם אפסים עוקבים של $u(x)$ ו־$u(x) > 0$ עבור $a < x < b$. אזי $u'(a) \geq 0, \quad u'(b) \leq 0$.
נניח כי $v(x)$ אינו מתאפס בקטע (a, b) ונניח בה"כ כי הוא חיובי בקטע זה. בפרט $v(a), v(b) \geq 0$. אזי

$$\big(r(x)u'(x)\big)' + p(x)u(x) = 0$$
$$\big(r(x)v'(x)\big)' + P(x)v(x) = 0$$

נכפיל מד"ר ראשונה ב־v ואת השנייה ב־u

$$v(x)\big(r(x)u'(x)\big)' + p(x)u(x)v(x) = 0$$
$$u(x)\big(r(x)v'(x)\big)' + P(x)v(x)u(x) = 0$$

ונחסר בינהם ונקבל

$$u(x)\big(r(x)v'(x)\big)' - v(x)\big(r(x)u'(x)\big)' + \big(P(x) - p(x)\big)v(x)u(x) = 0$$

נעשה אינטגרל ונקבל

$$\int_a^b u(x)\big(r(x)v'(x)\big)' - v(x)\big(r(x)u'(x)\big)' + \big(P(x) - p(x)\big)v(x)u(x)dx = 0$$
$$\int_a^b u(x)\big(r(x)v'(x)\big)' - v(x)\big(r(x)u'(x)\big)'dx + \int_a^b \big(P(x) - p(x)\big)v(x)u(x)dx = 0.$$

נשים לב כי $\big(P(x)-p(x)\big)v(x)u(x)$ פונקציה רציפה ואי שלילית שבנקודה אחת לפחות היא חיובית ולכן האינטגרל המתאים הוא חיובי, כלומר

$$\int_a^b \big(P(x) - p(x)\big)v(x)u(x)dx > 0.$$

מצד שני, בעזרת אינטגרציה בחלקים ו־$u(a) = u(b) = 0$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u(x)\big(r(x)v'(x)\big)' - v(x)\big(r(x)u'(x)\big)'dx = \\
= \;&\int_a^b u(x)\big(r(x)v'(x)\big)'dx - \int_a^b v(x)\big(r(x)u'(x)\big)'dx = \\
= \;&u(x)r(x)v'(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)r(x)v'(x)dx - v(x)r(x)u'(x)\big|_a^b + \int_a^b v'(x)r(x)u'(x)dx = \\
= \;&u(b)r(b)v'(b) - u(a)r(a)v'(a) - v(b)r(b)u'(b) + v(a)r(a)u'(a) = \\
= \;&v(a)r(a)u'(a) - v(b)r(b)u'(b) \geq 0
\end{aligned}$$

כאשר אי השוויון האחרון נובע מזה ש־$v(a), v(b), r(a), r(b) \geq 0$ וגם $u'(a) \geq 0,\ u'(b) \leq 0$. לכן

$$\int_a^b u(x)\big(r(x)v'(x)\big)' - v(x)\big(r(x)u'(x)\big)'dx + \int_a^b \big(P(x) - p(x)\big)v(x)u(x)dx > 0$$

סתירה כי שווה לאפס. לכן ל־$v(x)$ יש אפס בקטע הפתוח (a,b).
תרגיל בית: הוכיחו תרגיל זה בדרך אחרת: הראו כי יש פונקציה חיובית $k(x)>0$ אשר תלויה ב־$r(x)$ בלבד, ואשר עבורה, אם משתמשים בהצבה $z(x)=k(x)y(x)$ מקבלים מד"ר מהצורה

$$z''+f(x)z=0.$$

עבור $f(x)$ מסויימת. מצאו את $f(x)$ והשתמשו בהצבה זו כדי לפתור את התרגיל.

<u>**תרגיל:**</u> הוכיחו כי אם $\cos x$ פתרון של מד"ר $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ כאשר $p(x),q(x)$ רציפים על הישר, אזי x^2-1 אינו יכול להיות פתרון של המד"ר.
<u>**פתרון:**</u> לפי משפט ההפרדה, כל פתרון בלתי תלוי ב־$\cos x$ צריך להתאפס בדיוק פעם אחת בין שני אפסים עוקבים של $\cos x$ ולכן צריך להיות לו אינסוף אפסים. ל־x^2-1 יש שני אפסים בלבד. לא אפשרי.

הערה: בשביל לפסול את x^2-1 כפתרון היינו צריכים רק קטע בו $\cos x$ מתאפס 4 פעמים כדי לקבל 3 אפסים הכרחיים עבור x^2-1.
היה אפשר גם להוכיח זאת ע"י שימוש בעובדה כי $x^2-1=(x-1)(x+1)$ מתאפס בנקודות $x=\pm1$ ולכן $cos(x)$ צריך להתאפס פעם אחת בקטע $[-1,1]$ והוא לא.
תרגיל בית: הראו כי גם $\sin x^2$ אינו יכול להיות פתרון תחת אותן הנחות.