תורת ההסתברות

עבודת בית מס' 5
פתרונות

תרגיל 1. בעיה 4.4 מהחוברת.

פתרון.

$$1 = \int_0^3 f_X(x)dx = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$F_X(x) = 1 = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{אם} \quad x \le 0 \\ a\frac{x^2}{2} & \text{אם} \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{a}{2} + a(x-1) & \text{אם} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{7a}{2} - a\frac{x^2}{2} + 3a(x-2) & \text{אם} \quad 2 < x \ge 3 \\ 1 & \text{אם} \quad x \ge 3. \end{cases}.$$

תרגיל 2. בעיה 4.11 מהחוברת.

פתרון.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx + \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx = \\ &= \int_0^{\infty} f_X(a-t)dt + \int_0^{\infty} f_X(a+t)dt = 2\int_0^{\infty} f_X(a-t)dt = 2F_X(a). \end{aligned}$$

תרגיל 3. בעיה 4.14 מהחוברת.

פתרון.

(א) עבור $a \in (0,1)$, $F_X(x)$ רציפה בכל מקום ולכן $P(X = x) = 0$ עבור כל x

שהוא.

$$\begin{aligned} P(X \le a) &= F_X(a) = b, \quad P(X = a) = 0, \\ P\left(\left|X - \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}\right) &= P\left(\frac{a}{2} < X < \frac{1+a}{2}\right) = \\ &= F_X\left(\frac{1+a}{2}\right) - F_X\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 xF'_X(x)dx = \int_0^a x\frac{b}{a}dx + \int_a^1 x\frac{1-b}{1-a}dx = \frac{ab}{2} + \\ &+ \frac{(1+a)(1-b)}{2} = \frac{1+a-b}{2}. \\ E(X^2) &= \int_0^1 x^2F'_X(x)dx = \int_0^a x^2\frac{b}{a}dx + \int_a^1 x^2\frac{1-b}{1-a}dx = \frac{a^2b}{3} + \\ &+ \frac{(1+a+a^2)(1-b)}{3} = \frac{1+a+a^2-b-ab}{3}. \\ VAR(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = f(a,b). \end{aligned}$$

נמצא את המכסימום של $f(a,b)$ בתחום סגור וחסום $[0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{1+2a-b}{3} - \frac{1+a-b}{2} = \frac{a+b-1}{6}, \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{-1-a}{3} + \frac{1+a-b}{2} = \frac{a-3b+1}{6}. \end{aligned}$$

למערכת משוואות $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0$ יש פתרון יחיד $a = b = \frac{1}{2}$. נשווה את $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ עם ערך של $f(a,b)$ בגבולות:

$$\begin{aligned} f(a,0) &= \frac{1-2a+a^2}{12} = \frac{(1-a)^2}{12}, \\ f(a,1) &= \frac{a^2}{12}, \\ f(0,b) &= \frac{(1-b)(1+3b)}{12}, \\ f(1,b) &= \frac{b(4-3b)}{12}. \end{aligned}$$

מכאן: $\max f(a,b) = f\left(0,\frac{1}{3}\right) = f\left(1,\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$.

(ג) הצפיפות היא תערובת של $U[0,a]$ עם משקל b ושל $U[a,1]$ עם משקל $1-b$. ניתן לתאר ניסוי שמוביל להתפלגות נתונה: מטילים מטבע מזוויפת בעלת פרמטר ההצלחה b. אם התקבלה ההצלחה מגרילים מספר באקראי מתוך קטע $[0,a]$, בעוד שבמקרה של אי הצלחה מגרילים מספר באופן אחיד מתוך קטע $[a,1]$.

<u>תרגיל 4</u>. בעיה 12.5 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P\left(Z > x + \frac{a}{x}\right)}{P\left(Z \geq x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-f_X\left(x + \frac{a}{x}\right)}{-f_X(x)} = e^{-a},$$

כאשר $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

<u>תרגיל 5</u>. בעיה 12.7 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < 1, \\ \alpha\frac{x-1}{2} & \text{if} \quad 1 \leq x < 3, \\ \alpha & \text{if} \quad 3 \leq x < 4, \\ \alpha + (1-\alpha)\frac{x-4}{4} & \text{if} \quad 4 \leq x < 8, \\ 1 & \text{if} \quad 8 \leq x. \end{cases}$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x < 1, \\ \frac{\alpha}{2} & \text{if} \quad 1 \leq x < 3, \\ 0 & \text{if} \quad 3 \leq x < 4, \\ \frac{1-\alpha}{4} & \text{if} \quad 4 \leq x < 8, \\ 0 & \text{if} \quad 8 \leq x. \end{cases}$$

<u>תרגיל 6</u>. תרגיל 12.25 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. נגדיר משתנים אקרעיים:

$X =$ מספר הלקוחות של חברת הביטוח

$Y =$ מספר הלקוחות שניגשו לתחנה מסוימת

אזי

$$Y \sim BIN(2n+3, \alpha \cdot 1/3n).$$

לכן הנוסחה המדוייקת היא

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) - P(Y=2) = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{2n+3}{k} \left(\frac{\alpha}{3n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{3n}\right)^{2n+3-k}. \end{aligned}$$

מכיוון ש- n גדול מאוד ניתן להשתמש בקירוב פואסוני למשתנה אקראי Y ($\lambda = \frac{2}{3}\alpha \approx \frac{1}{3n} \cdot \alpha(2n+3)$):

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &\approx 1 - \sum_{j=0}^{2} \left(\frac{1}{3n} \cdot \alpha(2n+3)\right)^j \cdot \frac{1}{j!} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{3n} \cdot \alpha(2n+3)\right\} \approx \\ &\approx 1 - \sum_{j=0}^{2} \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^j \cdot \frac{1}{j!} \cdot \exp\left\{-\frac{2\alpha}{3}\right\}. \end{aligned}$$