1 פונק' יוצרת עבור $A(n)$ מספר החלוקות של n שאינם מתחלקים ב-3 - a_n

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n = (1+x+x^2+x^3 \dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2k})(1+x^4+x^8+\dots+x^{4k})$$

מספר הפעמים שמופיע המספר 1 - התחלקה | מספר הפעמים שמופיע המספר 2 | " " המספר 4

(שים לב, המספר 3 לא מופיע)

פונק' f מקיימת שהמקדם של $a_n x^n$ הוא מספר החלוקות של n למספרים שאינם מתחלקים ב-3

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdots=\prod_{\substack{i=1 \\ i \text{ לא מתחלק ב-3}}}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

פונק' יוצרת עבור $B(n)$ מספר החלוקות של n שבו מספר מופיע מקסימום פעמיים b_n

$$g(x)=\sum b_n x^n=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(\quad)(\quad)(1+x^k+x^{2k})$$

(המספר 1 מופיע 0 1 או 2 פעמים) | המספר k מופיע 0,1,2 פעמים

ונקבל

$$g(x)=\frac{1-\cancel{x^3}}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{\cancel{1-x^3}}\cdots=\prod_{i \text{ מתחלק ב-3}}(1-x^i)\cdot\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}=\prod_{\substack{i \text{ לא} \\ \text{מתחלק ב-3}}}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

מש"ל

2 נמצא פונק' שהיא חח"ע ועל מ- $B \to A$ $\quad f: A\to B$

כאשר $n=a_1+\dots+a_k$

a_i אינו מתחלק ב-3

נכתוב את n: $n=\underbrace{a_1+a_1 \dots}_{f_1 \text{ פעמים}}\ \underbrace{a_2+\dots}_{f_2 \text{ פעמים}}+\dots+\underbrace{a_k+\dots+a_k}_{f_k \text{ פעמים}}$

נכתוב את f_i בבסיס 3 כלומר $f_i=\alpha_0 3^0+\alpha_1 3^1+\alpha_2 3^2 \dots$ כאשר $\alpha_i\in\{0,1,2\}$

ונקבל $n=a_1(\alpha_{0_1}3^0+\alpha_{1_1}3^1\dots)+\dots+a_k(\alpha_{0_k}3^0+\alpha_{1_k}3^1\dots)$

כאשר $\forall_{i,j}\ a_i\neq a_j$

$=3^0(a_1\alpha_{01}+a_2\alpha_{02}+\dots+a_k\alpha_{0k})+3^1(a_1\alpha_{11}+a_2\alpha_{12}+\dots)+\dots$

$=\alpha_{01}a_1 3^0+\alpha_{0_2}a_2 3^0+\dots+\alpha_{ij}a_j 3^i \quad \Rightarrow$ כאשר $\alpha=\{1,2\}$

היות! $a_k\neq a_j$ לכל k,j ואינם מתחלקים ב-3 ממילא $a_j 3^i\neq a_k 3^l$

לכן אני מקבל חלוקה. וממילא כל מספר מופיע מקסימום פעמיים כי $\alpha_i\leq 2$

הפונק' היא חח"ע

בהינתן שתי חלוקות שונות של n בהכרח קיים a_i (נקבל) לפחות אחד משונים

אז קיים $f_{iy}\neq f_{ix}$ f_{ix} בחלוקה x, f_{iy} בחלוקה y או קיים a_i ב-x ולא ב-y ב.ה.כ

ממילא נקבל באופן דומה בהכרח ונקבל שקיים $a_i(\alpha_{0_{iy}}3^0+\dots)\neq a_i(\alpha_{0_{ix}}3^0+\alpha_{1_{ix}}3^1+\dots)$

$\alpha_{J_{iy}}\neq\alpha_{J_{ix}} \Leftarrow a_i\alpha_{J_{iy}}\neq a_i\alpha_{J_{ix}} \Leftarrow$ החלוקות ב-B שונות ובאותו אופן כאשר קיים a_i ב-x ולא ב-y

כעת נראה שהפונקציה היא על.

נגדיר העתקה הפוכה g $g: B \to A$ ונראה שהיא חח"ע

$$n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

כאשר $\alpha_i \in \{1,2\}$

נכתוב כל a_i בצורה הבאה

$\bar{a}_i 3^{r} = a_i$ כאשר $\bar{a}_i$ אינו מתחלק ב־3

ונקבל $n = \alpha_1 \bar{a}_1 3^{r_1} + \dots + \alpha_k \bar{a}_k 3^{r_k}$

וכעת נכתוב את n כך

$$n = \underbrace{\bar{a}_1 + \dots}_{(3^{r_1} + \alpha_2 3^{\ell} \dots) \text{ פעמים}} + \dots + \underbrace{\bar{a}_k}_{(3^{r_k} + \alpha_k 3^{r}) \text{ פעמים}} =$$

חלוקה זו כל $\bar{a}_i$ אינו מתחלק ב־3 ולכן שייכת ל־A

נראה חח"ע עבור

$n = \alpha_{1x} a_{1x} + \dots$

$n = \alpha_{1y} a_{1y} + \dots$

קיימים 2 חלוקות שונות לפיכך קיים i עבורו $a_{iy} \neq a_{ix}$ או קיים i $\alpha_{ix} \neq \alpha_{iy}$

$\Leftarrow$ אם $a_{iy} \neq a_{ix} \Leftarrow \tilde{a}_{iy} \neq \tilde{a}_{ix}$ או $3^{iy} \neq 3^{ix}$

$\Downarrow$ חלוקות שונות

$\Leftarrow$ חלוקות שונות כי

ואם $\alpha_{ix} \neq \alpha_{iy} \Leftarrow$

$\tilde{a}_{ix}$ ו־ $\tilde{a}_{iy}$ מופיעים במספר שונה של פעמים ומכיוון ש־a_i אחד לא יכול להופיע כי המכפלה של 3 לכל a_i אחר שונה.

מש"ל

לדוגמא

$$17 = 3 + 3 + 2 + 6 + 4 + 1 \to 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^0$$

$$\to 1(2 \cdot 3^1 + 3^0) + 2(3^0 + 3^1) + 4 \cdot 3^0 = \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{7 \text{ פעמים}} + \underbrace{2+2+2+2}_{4 \text{ פעמים}} + 4$$

$$17 = \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{7 \text{ פעמים}} + \underbrace{2+2+2+2}_{4 \text{ פעמים}} + 4 = 1(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1) + 2(3^0 + 3^1) + 4(3^0)$$

$$= 1 + 2 \cdot 3 + 2 + 6 + 4 = 1 + 3 + 3 + 2 + 6 + 4$$

2

a2 $$G'(x) = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{O(n)}{n!} x^n\right)' \underset{|x|<1}{=} \sum_{n\geq 0}^{\infty} \left(\frac{O(n)}{n!} x^n\right)' = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^{n-1}$$

$$\int x G'(x)dx = \int x \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^{n-1} dx = \int \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^n dx = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\frac{O(n)n}{n!} \int x^n dx\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 2}^{\infty} \frac{O(n-1)(n-1)}{n!} x^n$$

ב $$\int x G(x)dx = \int x \sum_{n\geq 0} \frac{O(x)}{n!} x^n dx = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \left(\int x^{n+1} dx \frac{O(n)}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \frac{O(n)}{n!} = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n (n-1) O(n-2)}{n!}$$

ג $$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n\geq 0} \frac{O(n)}{n!} x^n} = \frac{x}{1-x} \iff (1-x)G'(x) = G(x)x$$

$$\Rightarrow (1-x)\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^{n-1} - \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{O(n)n}{n!} x^n = f_1(x)$$

$$x \sum_{n\geq 0} \frac{O(n)}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{O(n)}{n!} x^{n+1} = f_2(x)$$

קל לראות: המקדם של x^0 זה 0.

נראה כי לכל n המקדם x^n שלו ב $f_1(x)$ ו $f_2(x)$:

המקדם של x_n ב $f_1(x)$: $\frac{O(n+1)(n+1)}{(n+1)!} - \frac{O(n)n}{n!}$ ושל f_2 $\frac{O(n-1)}{(n-1)!}$

$$\frac{O(n+1)(n+1)}{(n+1)!} - \frac{O(n)n}{n!} = \frac{O(n+1) - O(n)n}{n!} = \frac{n(O(n) + O(n-1)) - O(n)n}{n!} = \frac{O(n-1)}{(n-1)!} \Leftarrow$$ המקדם של f_2

שווה

ד עם כלל האינטגרציה:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x))$$

ולכן

$$\ln(G(x)) = \int \frac{G'(x)}{G(x)} = \int \frac{x}{1-x} = -x - \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow \ln(G(x)) = -x - \ln(1-x)$$

$$G(x) = e^{-x-\ln(1-x)}$$

3 א.

- ע -

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
A	-1	0	0	0	0	0
B	1	-1	0	-1	0	-1
C	0	1	1	0	0	0
D	0	0	-1	1	1	[illegible]
E	0	0	0	0	-1	1

ב. אם G הוא יער ← אין מעגלים

⇐ נראה שאם יש מעגל ← שהמטריצה היא תלויה לינארית. נניח כי זהו מעגל $v_1 \dots v_J v_1$, $e_1 \dots e_i e_J$

מתקיים כלומר שקיימים $\alpha_1 \dots \alpha_i$: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_i e_i = e_J$

כאשר $\alpha_1 \dots \alpha_i = 1$ או -1.

מכיוון שיש מעגל אז ניתן לצעוד במעגל מכוון ע״י כלל ש״ ab הבלה ב או נקודה ba.

וכן לדוגמא

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

ממילא הראנו שאם המטריצה בלתי תלויה ← אין מעגלים (לוגיקה בסיסית)

$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$

ג. הוכחנו ובייער מתקיים $|V|=|E|+c(G)$ (הוכחנו ובפרט גם מתקיים $|V|=|E|+1$) ממילא ביער מתקיים

$|V|=|E|+c(G) \Leftarrow \sum|V_i| = \sum|E_i| + 1$

$|E| = |V| - c(G) = n - c(G) \Leftarrow$ לכל G יער.

כעת נראה $r(A(G)) = |E^*|$ – מספר הצלעות ביער של G כאשר יער של G זהו G^* שנבנה מעצים הפורשים של כל רכיב קשירות.

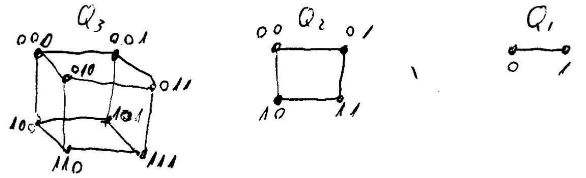
מסעיף ב ראינו שקבוצת וקטורים בלתי תלויים אמ״מ הגרף הוא יער ולכן הדרגה של $A(G)$ היא בדיוק הדרגה של יער של G - $A(G^*)$

ולכן $r(A(G)) = r(A(G^*)) = n - c(G)$

מספר הקודקודים ורכיבי הקשירות של G ו-G^* הוא שווה.

4. הוכחה $2|E| = \sum d(v)$ מכאן $\sum d(v)$ זה מספר זוגי ומכאן
סכום כל הקודקודים בעלי ערכיות אי-זוגית הוא זוגי ומכאן יש מספר זוגי של קודקודים עם ערכיות אי-זוגית

5. א.



ב. ערכיות כל הקודקודים שווה מטעמי סימטריה וישנם 2^n קודקודים.
ומכל קודקוד יוצאים n צלעות (לכל שינוי קורדינטה יש צלע)
ולכן $d(v)=n$

ג. $2|E| = \sum d(v) = |V|d(v) \Leftarrow |E| = \frac{1}{2}\cdot|V|d(v) = \frac{1}{2}2^n n \Leftarrow |E| = 2^{n-1}n$
כי הערכיות זהות

ד. נראה שבין כל 2 קודקודים ישנו מסלול המחבר ביניהם.
יהיו v_1,v_2 שני קודקודים המייצגים שני מספרים בכתיבה בינרית.
הם שונים ב-k קורדינטות, הואיל ועבור כל שינוי יחיד של קורדינטה בין שני קודקודים ישנה צלע, ומכאן קיימות k צלעות המהוות מסלול בין שני הקודקודים ויש k פעמים שינוי יחיד של קורדינטה.

ה. בשביל להראות שזהו גרף דו צדדי יש לחלק את V לשתי קבוצות A,B
כך שכל הצלעות בגרף הינם מקבוצה A ל-B
A = {כל הקודקודים בעלי מספר זוגי של אחדות בכתיבה בינרית}
B = {כל הקודקודים בעלי מספר של אחדות אי-זוגי בכתיבה בינרית}
קל לראות $A\cap B=\phi$, $A\cup B=V$
וכל צלע בגרף G היא בין a ל-b
כי שינוי קורדינטה יחיד הינו שינוי במספר האחדות בתוספת 1 או בהפחתה של 1.

ב) המשך:

מצד שני: נוכיח כי אם אין מעגלים $\Leftarrow$ קב' העמודות המתאימות לצלעות בת״ל.

נניח כי G קשיר (אחרת, נסתכל על רכיבי קשירות בנפרד).

כיוון ש G קשיר ללא מעגלים, G עץ.

נניח ש v_1 הוא עלה. נתבונן במט':

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & \tilde{A} & \end{pmatrix}
\end{array}$$

בשורה של v_1 יש רק מס' אחד: נניח ש v_1 הוא על הצלע e_1.

נתבונן בתת-מטריצה $\tilde{A}$

ונוכל להניח באינדוקציה שעמודותיה בת״ל (כי היא מייצגת עץ),

לכן e_1 ועם עמודות $\tilde{A}$ עם 0 ברכיב הראשון בת״ל.