



2015

מחברת בחינה



ציונים לשימוש הבוחן  
יש לרשום את הציון כאן

94

\* מס' תעודה זהות

302564307

	ציוויל
0	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

88

סה"כ

0	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
3	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
5	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/>
9	<input type="checkbox"/>

\* יש למלא X בתוך המשבצות בטבלה שלහלן עבור כל ספרה  
של תעודה זהות, כולל ספרת הביקורת (סה"כ 9 ספרות),  
כאשר כל עמודה מייצגת ספרה בתעודה זהות

מחברת 1 מתוק

22/9/16

תאריך

2016

סמסטר

אילעדי כ' 2016

שם מקצוע

1731451

מספר מקצוע

234 12/2016

חדר מבחן

רשות הדעת

פקולטה

2016

סמסטר

נא הדבק/י את המדבקה  
במרכז המלון

لتשומת לבן !!!

1. אין לשడן סיכות נוספת, לסיכה הקיימת, למחברת הבחינה.
2. אין לתלוш דפים ממחברת הבחינה.
3. אין להוסיף דפים למחברת הבחינה שלא אושרו על-ידי המתרגל או מרצה הקורס.
4. יש לכתוב במחברת הבחינה בעט בלבד (לא בעפרו).
5. הקפיד למלא בטבלת המשבצות של תעודה זהות את ה- X בתוך המשבצת.
6. במידה וטעית במקום ה- X בטבלת המשבצות, השחרר את הריבוע לחלוין.

2

$$A^3 \neq 0$$

$$A^4 = 0$$

①

$$m_A(x) = x^4, \quad \Delta_A(x) = x^6$$

sc  $\Delta^2 = A$  -> 2) 5) ec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_A(x) = (x-2)^3$$

②

$$m_A(x) = (x-2)^2$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{row reduction}} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{x \neq 0} \quad \downarrow t = t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad -x - y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$\text{R2} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow -x - z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x-1 \\ x \end{pmatrix}$$

1)  $\exists$   $B$ הנ"ט, נ"מ  $A$  מושג  $\Delta A(x)$  ו- $m_A(x)$  א"כ  $A$  מושג

$$\Delta A(x) \neq 0 \quad \text{ולפ' } A^4 = 0$$

$$\Delta A(x) = x^6 \quad \text{ו-} \quad \Delta A(x) \neq 0 \quad \text{ולפ' } A^4 = 0$$

$$m_A(x) = x^4 \quad \text{ולפ' } m_A(x) \neq 0 \quad \text{ולפ' } A^4 = 0$$

$$B^2 = A \quad \text{ולפ' } B \text{ מושג נ"מ } \sqrt[4]{A} \text{ נ"מ}$$

$$A^4 = (B^2)^2 = B^4 = 0 \quad \text{ולפ' } (B^2 \text{ מושג}) \quad \text{ולפ' } B \text{ מושג נ"מ}$$

$$(B^2 \text{ מושג } B \text{ מושג}) \quad \Delta_B(x) = x^6 \quad \text{ולפ' } B^6 = 0$$

$$\Delta_B(0) = 0 \quad \text{ולפ' } B^6 = 0 \quad \text{ולפ' } B \text{ מושג נ"מ}$$

$$0 = B^6 = (B^2)^3 = A^3$$

$$\text{ולפ' } B^6 = 0 \quad \text{ולפ' } B^2 \text{ מושג נ"מ, } 0 = A^3 \quad \text{ולפ' } B^3 \text{ מושג נ"מ}$$

$$!A \in \text{M}(A)$$

$$\checkmark \quad B \quad \text{ולפ' } B \in \text{M}(A)$$

 $\frac{12}{12}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{2. Schleife}$$

Die 1. und 2. Zeile von A ist linear abhängig, da der 2. ein Vielfaches des 1. ist.

$$\rightarrow \text{R} \leftrightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2$$

$$\Delta_A(x) = (x-2)^3 - 2 \quad \text{für } x \neq 2 \quad \text{da } A \text{ singulär}$$

$$m_A(x) = (x-2)^2 - 1 \quad \text{für } x \neq 2$$

Die 1. und 2. Zeile von A sind linear abhängig.

1x1 Matrix für 1x1 Block: 2 ist ein Eigenwert von A.

$\lambda = 2$  ist ein Eigenwert von A.

$$(A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = t \\ y = -x \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \checkmark \quad \text{richtig, } \text{R} \leftrightarrow R_1 \otimes$$

(D3), 2. Linie 2 ist kein Eigenvektor.

$$(A - 2I)^2 \vec{v}_3 = 0 \quad \text{-2. Linie 2 ist kein Eigenvektor}$$

$$(A - 2I)\vec{v}_3 = \vec{0}, \quad \text{da } \vec{v}_3 \text{ ein Nullvektor ist.}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \text{: OK} \otimes$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{לכידת איברים} \rightarrow P \rightarrow P$$

(2 בדיקת עונס)

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \text{לכידת איברים} \rightarrow J_A$$

15  
16

$k(C)$ 

$$\langle T(A), B \rangle = \langle P^* A P, B \rangle = \text{tr}(B^t P^* A P) = \dots$$

$$\dots = \text{tr}(B^t Q^* A) = \text{tr}((Q^{-1} B Q)^t A) = \dots \quad (5)$$

$$\dots = \langle A, P^{-1} B Q \rangle \Rightarrow T^*(B) = P^{-1} \otimes P^t$$

$$T^* T = T T^* \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow T(v) = 0 \quad \Leftrightarrow v \in \ker T \quad : \quad \ker T \subseteq \ker T T^*$$

$$\underbrace{T T^*(v)}_{\in \ker T} = T^* T(v) = T^*(v) = 0$$

$$: \ker T T^* \subseteq \ker T$$

$$T T^*(v) = 0$$

$$0 = \langle T T T(v), v \rangle = \langle T T(v), T^*(v) \rangle$$

$$T(v) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \neq 0$$

$$\lambda_1 |\lambda_1|^2 v_1 + \dots + \lambda_n |\lambda_n|^2 v_n = 0$$

$$T T T T^* T^* T^*$$

$$(T T^* T)(T^* + T^*)$$

3, Re

$\langle T(A), \phi \rangle = \langle A, T^*(\phi) \rangle$  - וראנו  $T^*$  מילוק שנים נק' (ב)

$(A, B \in V)$   $\rightarrow C$   $\cup D$   $\subseteq B\beta$

• (x) רהיטים :

$$\langle T(A), B \rangle = \langle P^{-1} A P, B \rangle \stackrel{\Delta}{=} \text{tr}(B^t P^{-1} A P) = \text{tr}(P B^t P^{-1} A) = \dots$$

$$2^{-t} = 2^{t-1}$$

$$= \text{tr}((\rho^{-1} B P^t)^t_A) = \text{tr}((P^t B \rho^t)^t_A) \stackrel{?}{=} \langle A, P^{t-1} B P^t \rangle$$

Lemma 2.3 If  $\beta$  is a root for  $T^*(\beta) = P^{t-1} \beta P^t$

$\Leftarrow 2^t = p$  ok so  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$  etc. so  $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$T^*(B) = P^{-1} B P^* = P^{-1} B P = T(B)$$

4. Aufgabe

( $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$ )  $\Leftrightarrow$  für alle  $v \in V$  gilt  $\|T^n v\| \rightarrow 0$

$(TT^* = T^*T) \quad \text{Beweis } \rightarrow \text{Cave } T: V \rightarrow V$

$\ker T = \ker TT^* \stackrel{\text{Def}}{=} \ker T$  (I)

:  $\ker T \subseteq \ker TT^*$  (II)

:  $\ker T \subseteq \ker TT^*$  (III)

:  $v \in \ker T$ ,  $T(v) = 0$  pr.,  $v \in \ker T$

$TT^*(v) = T^*T(v) = T^*(0) = 0 \Rightarrow v \in \ker TT^*$  ~~und~~ und

( $\ker T \subseteq \ker TT^*$ ) :  $\ker TT^* \subseteq \ker T$  (IV)

$0 \neq v \in \ker TT^*$

~~ob ( $T^*(v) = 0$ )  $v \in \ker T^*$   $v \in \ker T$~~

~~$T(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \ker T$~~

~~$(0 = 0 \text{ pr.}) \quad T(v) = 0 \cdot v = 0 \text{ pr.}$~~

~~$v \in \ker T \quad \text{und} \quad v \in \ker TT^* \quad \text{d.h.} \quad v \in \ker T$~~

~~$T(v) \neq 0$~~

:  $T \not\in \mathcal{R}(T)$  ~~und~~ und

(4. free ev.)

$$\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

~~$$T(v) = \dots, T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \dots$$~~

~~$$\dots = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = (\alpha_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (\alpha_n \lambda_n) v_n \neq 0$$~~

~~$$\alpha_i, \lambda_i \neq 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq n \quad \text{পৰি } \Rightarrow \text{পৰি}$$~~

~~$$TT^*(v)$$~~

~~$$\text{পৰি } \text{পৰি} \neq 0$$~~

~~$$TT^*(v) = T(T(v)) = T^*((\alpha_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (\alpha_n \lambda_n) v_n) = \dots$$~~

~~$$\dots = (\alpha_1 \lambda_1)^2 v_1 + \dots + (\alpha_n \lambda_n)^2 v_n = 0$$~~

~~$$\text{পৰি } T^* \text{ পৰি}$$~~

~~$$v \in \ker TT^*$$~~

~~$$\lambda_i \neq 0 \text{ এবং } \alpha_i, \lambda_i \neq 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq n \quad \text{পৰি } \text{পৰি}$$~~

~~$$0 \text{ নয় } \text{পৰি } \text{পৰি} \cdot \text{পৰি} \text{ কোনো } 1, 2, 3, \dots, n \text{ পৰি } \text{ কোনো } 1, 2, 3, \dots, n$$~~

~~$$\text{পৰি } \text{পৰি} \text{ কোনো } 1, 2, 3, \dots, n, \text{ পৰি } \text{ কোনো } 1, 2, 3, \dots, n$$~~

~~$$v \in \ker T \quad \text{পৰি } \text{ কোনো } 1, 2, 3, \dots, n$$~~



(u, T(v) zu zeigen)

- p) ( $TT^*(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker TT^*$ )

$$0 = \langle TT^*(v), v \rangle = \langle TT(v), v \rangle = \langle T(v), T^*(v) \rangle = \dots$$

$\checkmark$        $\checkmark$

$$T^* = T$$

$$\dots = \langle T(v), T(v) \rangle = 0$$

$v \in \ker T \Leftrightarrow T(v) = 0 \quad \text{zu zeigen}$



$$\frac{10}{10}$$

$(\ker T^3 \subseteq \ker T) \quad T(v) = 0 \Leftrightarrow T^3(v) = 0 \quad \text{zu zeigen}$

$v \in \ker T^3 \Leftrightarrow T^3(v) = 0$

$$(TTT)^* = T^* T^* T \quad \text{zu zeigen}$$

$v \in \ker(TT^*TT^*T) \Leftrightarrow T -> \text{zu zeigen}$

$$(TT^*T)^* = T^*TT^* \quad \text{zu zeigen}$$

$v \in \ker S \Leftrightarrow v \in \ker S^* \quad S = TT^*T$

$$\ker TT^*T$$

$\cap$

$\ker S^* = \ker S$

$\text{zu zeigen} \quad S^* = S$

$$- \text{zu zeigen} \quad TT^*T(v) = 0$$

$$0 = \langle TT^*T(v), T(v) \rangle = \langle T^*T(v), T^*T(v) \rangle = \dots$$

$\dots = \langle TT^*(v), TT^*(v) \rangle = 0 \Rightarrow v \in \ker TT^* \Rightarrow v \in \ker T$

$\text{zu zeigen}$

$$TT^*(v) = 0$$

$$k \quad \text{zu zeigen}$$

$$T(v) = 0$$

$$\frac{9}{10} \quad \text{zu zeigen}$$



$\Sigma \rightarrow \text{place}$ 

$$w = (w \cap v) \oplus (w \cap v^\perp) \Leftarrow w = (w \cap v) \oplus (w \cap v^\perp)$$

ונור- $P_v$  מינ' קי

$$u^\perp \in w \cap v^\perp \Rightarrow u \in w \cap v \quad \text{because } w \in W \quad \text{and } v \in V$$

$$(u \in w \cap v \Rightarrow u = u + u^\perp) \quad w = u + u^\perp$$

ולפ' מ- $P_v$  מינ'  $u^\perp \in w \cap v^\perp$   $v \in P_v$   $w \in P_v$   $\Rightarrow w \in W$ 

$$P_v(u^\perp) = 0 : u^\perp \in v^\perp \quad \text{and} \quad P_v(u) = u : u \in v$$

:  $w \in W$  (נבדק)

$$P_v(w) = P_v(u + u^\perp) = P_v(u) + P_v(u^\perp) = u + 0 = u \in (w \cap v)$$

$$\forall u \in P_v \quad u \in w \Leftarrow u \in w \Leftarrow w \cap v \subseteq w \quad \text{because } P_v \subseteq W$$

$$\text{ולפ' מ-} P_v \quad u \in w \Leftarrow u \in w \Leftarrow w \cap v \subseteq w \quad \text{because } P_v \subseteq W$$

$$w = (w \cap v) \oplus (w \cap v^\perp)$$

$$w \in W \quad \text{because } w \subseteq v \quad \text{and} \quad v = U \oplus U^\perp \quad \text{because } v \in V$$

$$(u \in w \cap v \Rightarrow u = u + u^\perp) \quad w = u + u^\perp \Leftarrow w \in V \quad \text{because } v \in V$$

$$u^\perp \in w \cap v^\perp \Rightarrow u \in w \cap v^\perp \quad \text{because } v^\perp \subseteq W$$

$$w = (w \cap v) \oplus (w \cap v^\perp) \quad \text{because } v \in V$$

$$w \cap v \subseteq W \quad \text{because } v \in V \quad \text{and} \quad w \cap v^\perp \subseteq W \quad \text{because } v^\perp \subseteq W$$

(S  $\rightarrow$   $\mathbb{R}^n$  2&1)

$$\underbrace{u}_{\in W} + \underbrace{u^\perp}_{\in U^\perp} = u \in W$$

(\*)  $P_U(w) = P_U(u+u^\perp) = P_U(u) + P_U(u^\perp) = u \in W$

$w \in W - u \in U^\perp$

$P_U(w) \in W, \forall w \in P$

$u \in W \cap U \Leftrightarrow u \in W \quad \text{und} \quad u \in U - \text{wegen } p$

$u \in W \cap U \Leftrightarrow u \in W \quad \text{und} \quad u \in U - \text{wegen } p$

$$(u+u^\perp) + (-u) = u - u + u^\perp = u^\perp \in W \Rightarrow u^\perp \in W \cap U^\perp$$

$\sqrt{w}$

$u^\perp \in U^\perp$



6. פיקט

: A קומוניטיבי (&lt;math&gt;\mathbb{K}&lt;/math&gt;) ו- &lt;math&gt;\text{cpn}(\mathbb{K})&lt;/math&gt;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_3 \\ C_2 - C_3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 - \frac{1}{2}R_1 \\ C_3 - \frac{1}{2}C_1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 - \frac{1}{2}R_2 \\ C_3 - \frac{1}{2}C_2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sign}(A) = 3$$

~~(כיתה 02)~~ ~~00222~~ ~~0.5~~ ~~0.5~~ ~~0.5~~ ~~0.5~~ ~~0.5~~

~~$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$~~

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$f(u, v) = \frac{1}{\pi} (g(u+v) - g(u) - g(v))$$

(6)

... נסמן  $f$  כפונקציית  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f = f_1 + f_2$

$f_1(u, v) = \frac{1}{\pi} g(u+v)$

$f_2(u, v) = \frac{1}{\pi} (-g(u) - g(v))$

$f_1(u, v) = \frac{1}{\pi} g(u+v)$

$f_2(u, v) = \frac{1}{\pi} (-g(u) - g(v))$

(6)  $\lambda_k$  (2w)

~~sign(f)=2 -> f(x) > 0~~  $f(x) > 0 \Rightarrow \lambda_k > 0$

~~לפ' פונקציית פולינום ממעלה n שORTHOGONAL ל- f(x) ב- L^2([0,1])~~

~~בנוסף ל- A~~

~~לפ' פונקציית פולינום ממעלה n שORTHOGONAL ל- g(x) ב- L^2([0,1])~~

$(A^T = A) \Rightarrow C_{n,0} \lambda_0^2 \in \mathbb{R}$  (1)

$\text{POLY } A \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow \boxed{\lambda_0^2 \in \mathbb{R}}$

(6, 1/2)

$$\text{Def: } A^t = A \rightarrow \text{sign}(A) = k \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{Def: } A \Rightarrow A^2 - I \rightarrow \text{sign}(A)$$

$\lambda \geq 0$  ->  $\lambda I \leq A$  (def)  $\rightarrow$   $\lambda^2 I \leq A^2$   $\rightarrow$   $\lambda \leq \text{sign}(A)$

$A^2 \geq 0$   $\rightarrow$   $\lambda^2 \geq 0$   $\rightarrow$   $\lambda \geq 0$  (def)

sign  $\geq 0$

sign  $A^2 \geq 0 \Rightarrow \text{sign}(A^2) \geq 0 \Rightarrow \text{sign}(A) \geq 0$

~~sign  $A^2 \geq 0 \Rightarrow \text{rank}(A^2) \geq \text{rank}(A)$~~

$A^2 \geq 0 \Rightarrow \text{sign}(A^2) \geq 0$

sign  $(A^2) = k$   $\Rightarrow$  sign  $(A) = k$

sign  $(A) = k$   $\Rightarrow$  sign  $(A^2) = 2k$

sign  $(A^2) \geq k$   $\Rightarrow$  sign  $(A) \geq k$

~~sign  $(A^2) \geq k$~~

(5) (10)

sign  $(A) = \text{sign}(A^2) \Rightarrow A^2 - I \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

sign  $(A) \leq k$   $\Rightarrow$   $A^2 - I \leq kI$

sign  $(A^2)$

Def:  $A \geq 0 \Rightarrow \text{sign}(A) \leq k$

~~sign  $(A^2) \leq k$~~

