תורת הקבוצות - תרגולים 4+5
קבוצות בנות מניה ולא בנות מניה, לכסון, חשבון עוצמות

תרגיל

תהא A קבוצה של קטעים זרים ב-$\mathbb{R}$. דהיינו, לכל $x \in A$ מתקיים ש-$x = (a,b)$ עבור $a,b \in \mathbb{R}$ כלשהם, וכמו כן אם $x,y \in A$ אז $x \cap y = \emptyset$.

נוכיח כי A היא בת מניה.

לשם כך, נציג פונקציה $f : A \to \mathbb{Q}$ שהיא חח"ע.

נשתמש בתכונה חשובה של $\mathbb{Q}$: הרציונליים **צפופים** ב-$\mathbb{R}$. כלומר, לכל $a,b \in \mathbb{R}$ קיים $a < c < b$ כך ש-$c \in \mathbb{Q}$. כלומר: כל קטע פתוח (a,b) בישר הממשי כולל בתוכו לפחות רציונלי אחד. תכונה זו נובעת ישירות מבניית המספרים הממשיים.

אי לכך קיימת פונקציה $f : A \to \mathbb{Q}$ שלכל קטע $x \in A$ מתאימה מספר רציונלי כלשהו שנמצא בתוך x.

החח"ע של A נובעת מכך שאם $f(x) = f(y) = q$ אז $q \in x$ וגם $q \in y$ ולכן $x \cap y \neq \emptyset$ ומכיוון שהקטעים ב-A זרים אז $x = y$ בהכרח.

because of what? axiom of choice?

תרגיל

why?

תהא $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ קבוצת המספרים האי-רציונליים. נרצה להוכיח כי A איננה בת מניה. נעשה זאת בשתי דרכים שונות.

<u>בדרך הראשונה</u>, נתבסס על כך שידוע כי $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ ואילו $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$. נניח בשלילה כי $|A| = \aleph_0$, נשים לב לכך ש-$A \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ונשתמש במשפט לפיו איחוד של מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה. נקבל ש-$|\mathbb{R}| = \aleph_0$ והגענו לסתירה.

<u>דרך שניה</u>: על מנת לתרגל את טכניקת הלכסון של קנטור, נוכיח כעת באופן ישיר כי A איננה בת מניה. די להוכיח כי $B = A \cap (0,1)$ איננה בת מניה. נתחיל באופן דומה להוכחת האלכסון של קנטור: תהא $f : \mathbb{N} \to B$. נרצה להוכיח כי f איננה על, כלומר למצוא $d \in B$ כך ש-$d \neq f(n)$ לכל n. נסמן $r_n \triangleq f(n)$ ונכתוב $r_n = 0.r_0^n r_1^n r_2^n \ldots$ כך ש-r_k^n היא הספרה ה-k אחרי הנקודה בייצוג העשרוני של r_n (אם ל-r_n יש שני ייצוגים עשרוניים אנו בוחרים את זה מביניהם שמסתיים בסדרה של אפסים).

בשיטת האלכסון של קנטור הגדרנו $d = 0.d_0 d_1 d_2 \ldots$ כך ש-$d_n = \begin{cases} 4 & r_n^n = 3 \\ 3 & r_n^n \neq 3 \end{cases}$. אם נשתמש בהגדרה זו כעת נקבל אמנם מספר d כך ש-$d \neq r_n$ לכל n, אבל לא מובטח לנו ש-$d \in B$ כי ייתכן ש-d רציונלי. נזכור שמספר הוא רציונלי אם ורק אם הפיתוח העשרוני שלו הוא מחזורי החל ממקום מסויים. כלומר, אם קיימים קיימים N,k כך ש-$d_n = d_{n+k}$ לכל $n > N$ אז d רציונלי. עלינו למנוע את האפשרות שדבר כזה יתרחש.

הפתרון הוא לנצל את בחירת הספרות של d לשתי מטרות שונות. הספרות במקומות **האי-זוגיים** ישמשו כדי להבטיח ש-$d \neq r_n$ לכל n; הספרות במקומות **הזוגיים** ישמשו כדי להבטיח ש-d הוא אי רציונלי.

ראשית נשים לב לכך שהמספר הבא אינו רציונלי: $d = 0.110100010000000\ldots$: במספר זה, הספרות במקומות שהם חזקות של 2 הן 1 ואילו יתר הספרות הן 0: $d_n = \begin{cases} 1 & n = 2^t \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל N,k נבחר n כך ש-$2^n > N, k$, אז הספרה במקום ה-2^n היא 1 אבל מכיוון ש-$2^n + k < 2^k + 2^k = 2^{k+1}$

but possible that n>2*k and then 2^n>2^k and inequality is false, only if we choose minimal n that satisfies equation then valid

הספרה במקום ה-$2^n + k$ אינה 1 ולכן המספר אינו מחזורי עם פרמטרים N,k.

נשים לב לכך שאין חשיבות לשאלה מה יש במקומות האי-זוגיים של המספר פרט לכך שלא מופיע שם 1. לכן אנחנו מסוגלים להגדיר את d באופן הבא שמשלב את שתי ההגדרות שהצענו:

$$d_n = \begin{cases} 1 & n = 2^t \\ 4 & n = 2k+1 \wedge r_n^k = 3 \\ 3 & \text{else} \end{cases}$$

לכל k טבעי, $d_n \neq r_n^k$ ולכן $d \neq r_k$, כמבוקש. שימו לב שמכיוון שאנחנו קובעים את הספרה ה-n-ית של d, אנחנו בוחרים אותה בהתאם לספרה ה-n-ית של r_k, למרות ש-$n \neq k$. נסו להבהיר לעצמכם מדוע הגדרה שבודקת האם $r_k^k = 3$ הייתה נכשלת. זו המחשה לכך ש"אלכסון" לא באמת נראה כמו אלכסון ברוב המקרים.

תזכורת

ראינו כי ניתן להגדיר פעולות של חיבור, כפל וחזקה על עוצמות, באמצעות פעולות מתאימות על קבוצות. נניח כי A,B הן קבוצות כלשהן ונסמן את עוצמותיהן ב-$|A| = \kappa, |B| = \lambda$, אז נגדיר:

- $\kappa + \lambda = |A \times \{1\} \cup B \times \{2\}|$ (המכפלה ב-$\{1\}$ וב-$\{2\}$ נועדה לוודא שהאיחוד הוא איחוד זר).

- $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$
- $\kappa^{\lambda} = \left|A^{B}\right|$

הגדרות אלו תקפות גם לקבוצות סופיות (כלומר, למקרה שבו העוצמות הן מספרים טבעיים) ומקיימות את חוקי החשבון המוכרים לנו (חיבור וכפל מקיימים את חוקי הפילוג, הקיבוץ והחילוף).

נהוג לסמן $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ("אלף־אפס") ו־$\aleph = |\mathbb{R}|$. ניתן להוכיח כי $\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$ ו־$\aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph + \aleph$.

תרגיל

הוכיחו כי עוצמת קבוצת הסדרות האינסופיות של ממשיים A שווה לעוצמת קבוצת הסדרות האינסופיות של טבעיים B.

חשבון עוצמות נותן פתרון מיידי:

$$|A| = \aleph^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = |B| \leq |A|$$

קיבלנו שרשרת של אי־שוויונות שמתחילה ונגמרת באותו איבר ולכן כל המעברים הם שוויונות ממש.

תרגיל

נוכיח שחוקי חזקות המוכרים לנו מהמספרים השלמים מתקיימים גם כאן.

יהיו A, B, C קבוצות ו־$|A| = \kappa, |B| = \lambda, |C| = \mu$

בהרצאה ראיתם ש־$\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$ ובתרגיל הבית אתם מראים ש־$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$. כאן נוכיח:

1. $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$
2. אם $\kappa \leq \lambda$ אז $\kappa^{\mu} \leq \lambda^{\mu}$

כדי להוכיח את החוקים הללו נציג במפורש פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות הרלוונטיות.

במקרה הראשון, אנו רוצים למצוא פונקציה חח"ע ועל $\Psi : (A \times B)^{C} \to A^{C} \times B^{C}$.

אינטואיציה: באגף שמאל יש לנו פונקציה שמקבלת איבר ב־C ומחזירה זוג איברים האחד מ־A והשני מ־B.

באגף ימין יש לנו זוג פונקציות שמקבלות כל אחת איבר ב־C ומחזירות האחת איבר ב־A והשניה איבר ב־B.

באופן כללי פונקציה $f(x) = (a, b)$ ניתן לתאר בתור זוג של פונקציות: $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. זו ההתאמה שנבצע גם כאן:

$\Psi(f) = (f_1, f_2)$ כאשר $f_1(x) = [f(x)]_1$ ו־$f_2(x) = [f(x)]_2$. כאן הסימון $[]_i$ מתאר את **ההטלה** של האיבר על הרכיב ה־i שלו ($[(a_1, \ldots, a_n)]_i = a_i$).

Ψ בבירור הפיכה: בהינתן (f_1, f_2) נגדיר פונקציה $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ וקל לראות שהעתקה זו הופכת את Ψ.

במקרה השני, נתון לנו ש־$\kappa \leq \lambda$, כלומר כבר קיימת פונקציה חח"ע (לאו דווקא על) $\varphi : A \to B$. אנו רוצים למצוא פונקציה חח"ע (לאו דווקא על) $\Psi : A^{C} \to B^{C}$. הרעיון פשוט: הרכבה של φ על הפונקציה שהתקבלה כקלט. כלומר, אם $f : C \to A$ אז $\varphi f : C \to B$ היא הפונקציה שמעניינת אותנו. פורמלית, $\Psi(f) = \varphi f$.

נוכיח ש־Ψ חח"ע: נניח כי $\Psi(f_1) = \Psi(f_2)$, כלומר $\varphi f_1 = \varphi f_2$. יהא $a \in A$ כלשהו ונרצה להוכיח כי $f_1(a) = f_2(a)$. נשים לב לכך ש־$\varphi(f_1(a)) = \varphi(f_2(a))$; מכיוון ש־$\varphi$ היא חח"ע קיבלנו את התוצאה המבוקשת.

שימו לב: אם $\kappa < \lambda$ זה **לא אומר** ש־$\kappa^{\mu} < \lambda^{\mu}$! למשל, $2 < \aleph_0$ אבל $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_0^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, אבל נראה $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ולכן $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$.

כדי להראות כי $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נשתמש בקנטור־שרדר־ברנשטיין.

בכיוון אחד, $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ נתונה על ידי מיון אברי הקלט A ואולי חזרה אינסופית על האיבר האחרון (למשל, אם $A = \{4, 1, 17\}$ אז $A \mapsto 1, 4, 17, 17, 17, \ldots$).

בכיוון השני, $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ נתונה על ידי קידוד אברי הסדרה כחזקות של ראשוניים: $\{a_n\} \mapsto \left\{p_n^{a_n+1} \mid n \geq 0\right\}$ כאשר p_n הוא הראשוני ה־n־י.

axiom of coice? there are many sets equivelent to that