

אלגברה לינארית ב' קיץ תשע"ו - מועד א'

הנחיות לנבחנים:

- משך הבחינה שלוש שעות.
- סך כל הנקודות הוא 102.
- כל חומר עזר אסור בשימוש.
- יש לנמק את תשובותיכם היטב.
- בבחינה יש 6 שאלות. יש לענות על כולן.
- שאלה 2 היא שאלת ש"ב.

1 (12 נק'). יהי F שדה ותהי $A \in M_6(F)$ מטריצה נילפוטנטית מאינדקס נילפוטנטיות 4. הוכיחו כי לא קיימת מטריצה $B \in M_6(F)$ כך ש $B^2 = A$.

2 (16 נק'). נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה בצורת ג'ורדן J כך ש $P^{-1}AP = J$.

3 ✗ (16 נק'). יהי $V = M_n(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר $n \times n$ עם המ"פ הסטנדרטית (כלומר $\langle A, B \rangle := \text{tr}(B^t A)$). תהי $P \in V$ מטריצה הפיכה ונגדיר אופרטור $T : V \rightarrow V$ ע"י $T(A) = P^{-1}AP$.
 א (8 נק'). מצאו את T^* .
 ב (8 נק'). מצאו תנאי הכרחי ומספיק על P כדי ש T יהיה צ"ע.

4 (20 נק'). יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל \mathbb{C} ויהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי.
 א (10 נק'). הוכיחו כי $\ker T = \ker TT^*$.
 ב (10 נק'). הוכיחו כי אם $T^3(v) = 0$ אזי $T(v) = 0$.

5 ✓ (18 נק'). יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל \mathbb{C} ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. תהי $P_U : V \rightarrow V$ ההטלה האורתוגונלית על U ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב. הוכיחו כי W הוא ת"מ P_U אינווריאנטי אם $W = (W \cap U) \oplus (W \cap U^\perp)$.

6 ✗ (10 נק'). תהא $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ התבנית הריבועית הממשית המוגדרת ע"י: $q(x, y, z) = y^2 + 5z^2 + 4xy - 2yz - 4xz$.
 האם קים בסיס של \mathbb{R}^3 שבו המטריצה המייצגת של q היא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$

7 ✗ (10 נק'). תהא A מטריצה סימטרית ממשית. הוכיחו כי A חופפת ל- A^2 אם A היא אי-שלילית.

בהצלחה