פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - פתרון חלקי לגליון תרגילים מס' 5

3. נתון: $f \in L^1(\mu)$, μ מידה סופית, $D \in \mathbb{C}$ קבוצה במישור המרוכב. עבור $A \in \mathcal{M}$ עם $\mu(A) > 0$ נגדיר את הממוצע $M_A(f) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu$.

(א) צ"ל שאם $f(x) \in \overline{B}(z,r)$ עבור כל $x \in A$, אז $M_A(f) \in \overline{B}(z,r)$.

פתרון: $$|M_A(f) - z| = \left| \frac{1}{\mu(A)} \int_A (f(x) - z) \, d\mu(x) \right| \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x) - z| \, d\mu(x) \leq r$$

כלומר $M_A(f) \in \overline{B}(z,r)$.

(ב) צ"ל שעבור D סגורה מתקיים שאם $M_A(f) \in D$ עבור כל A מדידה עם מידה חיובית, אז $f(x) \in D$ עבור כמעט כל $x \in X$.

פתרון: תהי $E = f^{-1}(D^c)$, אז $E \in \mathcal{M}$ ונניח בשלילה ש- $\mu(E) > 0$. כיוון ש- D^c היא קבוצה פתוחה, לכל $z \in D^c$ יש כדור פתוח B_z שהסגור שלו - $\overline{B}_z \subset D^c$. נעיין כעת בקבוצות $D_n = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{n} \leq d(z,D) \leq n\} \nearrow D^c$; מתקיים $\mathcal{M} \ni E_n = f^{-1}(D_n) \nearrow f^{-1}(D^c) = E$ ומכך נסיק (ע"פ סדרה מתרחבת) שקיים $n \in \mathbb{N}$ ש- $\mu(E_n) > 0$. כעת - D_n היא קבוצה קומ-פקטית ש- $\{B_z\}_{z \in E_n}$ מהווה כיסוי פתוח שלה, ולכן יש לו תת-כיסוי סופי: $\{B_{z_1}, \ldots, B_{z_k}\}$ עם $D_n \subset \bigcup_{i=1}^k \overline{B}_{z_i} \subset D^c$. מכך נובע שיש $1 \leq i \leq k$ שעבור $A = f^{-1}(\overline{B}_{z_i}) \in \mathcal{M}$ מתקיים $\mu(A) > 0$ וע"פ **(א)** נקבל שאז $M_A(f) \subset \overline{B}_{z_i} \subset D^c$, בסתירה לנתון.

4. צ"ל: כל קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ היא איחוד בן-מנייה של קוביות דיאדיות חצי פתוחות זרות.
הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $\mathcal{I}_n = \left\{ \left[\frac{a}{2^n}, \frac{a+1}{2^n}\right) : a \in \mathbb{Z} \right\}$, ו- $\mathcal{Q}_n = \{\prod_{i=1}^n I_i : \forall i \ I_i \in \mathcal{I}_n\}$ אז $\mathcal{Q}_n$ הוא אוסף בן-מנייה של קוביות דיאדיות חצי פתוחות וזרות בזוגות. תהי כעת $G \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $\mathcal{A}_n = \{Q \in \mathcal{Q}_n : Q \subset G\}$ ו- $\mathcal{B}_n = \{Q \in \mathcal{A}_n : Q \subset (\cup \mathcal{A}_{n-1})^c\}$ (כאשר $\mathcal{A}_0 = \emptyset$). אז האוסף $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n$ הוא אוסף בן-מנייה של קוביות דיאדיות חצי פתוחות זרות בזוגות ש- $\cup \mathcal{F} = G$ (מדוע? איפה השתמשנו בנתון ש- G פתוחה?).

5. נתון: תיבה B וקבוצה $A \subset B$ ב- $\mathbb{R}^n$. נגדיר את המידה הפנימית m_i של A (ביחס ל-B) ע"י: $m_i(A) = v(B) - m_e(B \backslash A)$.
צ"ל: A מדידה לבג אם"ם $m_i(A) = m_e(A)$.
הוכחה: הכיוון $\Leftarrow$ פשוט, כי אם A קב' לבג אז $v(B) - m_e(B \backslash A) = v(B) - m(B \backslash A) = m(A)$.
כדי להוכיח את הכיוון השני, נשים לב שלכל $E \subset \mathbb{R}^n$ מתקיים $m_e(A) = \inf\{m(D) : D \in \mathcal{B}_n\}$, כאשר $\mathcal{B}_n$ היא ה- σ-אלגברה של בורל ב- $\mathbb{R}^n$. על-כן,

$$\begin{aligned}
m_i(A) &= v(B) - m_e(B \backslash A) = v(B) - \inf\{v(D) : D \in \mathcal{B}_n \ , \ B \backslash A \subset D\} \\
&= v(B) - \inf\{v(D) : D \in \mathcal{B}_n \ , \ B \backslash A \subset D \subset B\} = \Big(\text{ניקח } D' = B \backslash D \Big) \\
&= v(B) - \inf\{v(B) - v(D') : D' \in \mathcal{B}_n \ , \ D' \subset A\} \\
&= \sup\{v(D') : \mathcal{B}_n \ni D' \subset A\} \quad .
\end{aligned}$$

לכן אם $m_i(A) = m_e(A)$ אז לכל $\varepsilon > 0$ יש $D, D' \in \mathcal{B}_n$ ש- $D \subset A \subset D'$ עם $m(D) - m(D') = m(D \backslash D') < \varepsilon$. אם ניקח עבור D זה קבוצה פתוחה G, $D \subset G$ עם $m(G \backslash D) < \varepsilon$ נקבל: $m(G \backslash A) \leq m(G \backslash D') = m(G \backslash D) + m(D \backslash D') < 2\varepsilon$ - מש"ל.

6. צ"ל: קבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ היא מדידה לבג אם"ם לכל $B \subset \mathbb{R}^n$ חסומה מתקיים $m_e(B) = m_e(B \cap A) + m_e(B \backslash A)$.

הוכחה: תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ נתונה, בה"כ ניתן להניח ש- A חסומה כי A מדידה לבג אם"ם $A \cap B(0,n)$ מדידה לבג לכל $n \in \mathbb{N}$. אם לכל $B \subset \mathbb{R}^n$ חסומה מתקיים $m_e(B) = m_e(B \cap A) + m_e(B \backslash A)$ אז בהנתן $\varepsilon > 0$ ניקח קבוצה פתוחה וחסומה B, $A \subset B$ עם $m(B) \leq m_e(A) + \varepsilon$ ונקבל $m_e(B \backslash A) = m_e(B) - m_e(B \cap A) = m(B) - m_e(A) \leq \varepsilon$ - כלומר A מדידה לבג. להפך, אם A מדידה לבג אז בהנתן $B \subset \mathbb{R}^n$ חסומה, ניקח לכל $\varepsilon > 0$ קבוצה פתוחה G, $B \subset G$, עם $m(G) \leq B + \varepsilon$ ונקבל שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים (כיוון ש- A ו- G מדידות לבג):

$$m_e(B) \geq m(G) - \varepsilon = m(G \cap A) + m(G \backslash A) - \varepsilon \geq m_e(B \cap A) + m_e(B \backslash A) - \varepsilon \quad .$$

קיבלנו ש- $m_e(B) \geq m_e(B \cap A) + m_e(B \backslash A)$ והאי-שוויון ההפוך מתקיים באופן טריויאלי בגלל התת-אדיטיביות של m_e.