מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 4

1 שלמות ושקילות של מטריקות

אם על X שתי מטריקות שקולות טופולוגית d_1, d_2. אם (X, d_1) שלם $\Longleftarrow$ (X, d_2) שלם?

לא, לדוגמה $X = \mathbb{R}$, והמטריקות $d_1(x, y) = |x - y|$, $d_2(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ הן שקולות טופולוגית. (X, d_1) שלם, אבל (X, d_2) אינו שלם, לדוגמה הסדרה $a_n = n$ היא סדרת קושי (ביחס ל-d_2) שאינה מתכנסת.

לכן שלמות היא לא תכונה טופולוגית.

(עוד דוגמה $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ עם המטריקה הרגילה אינו שלם. המטריקה הרגילה שקולה טופולוגית למטריקה הדיסקרטית, אבל עם המטריקה הדיסקרטית X שלם.

2 משפט Baire

משפט 2.1 X מרחב מטרי שלם, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות המקיימות $\text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset$ ב-X, אז לקבוצה $A = \cup_n A_n$ יש פנים ריק.

מסקנה 2.2 X מרחב מטרי שלם, $X = \cup A_n$, A_n סגורות, אז קיים m כך ש-$\text{int}(A_m) \neq \emptyset$.

האם לכל מרחב מטריזבילי (X, τ) קיימת מטריקה שלמה? לא, לדוגמה:

מסקנה 2.3 אין מטריקה שלמה על $\mathbb{Q}$ ששקולה טופולוגית למטריקה הסטנדרטית.

הוכחה: אחרת,

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

זה איחוד בן מנייה של קבוצות סגורות בעלות פנים ריק, ונקבל סתירה למשפט בר. ■

האם קיימת פונקציה רציפה $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ שאינה גזירה באף נקודה ב-$[0, 1]$.

טענה 2.4 קיימת פונקציה כזאת.

הוכחה: יהי $X = C([0, 1], \mathbb{R})$, ותהי d מטריקת ה-sup על X. (X, d) הוא מרחב מטרי שלם (תרגיל).

נסמן

$$D = \{f \mid \exists x \in [0,1] : f \text{ is differentiable at } x\}$$

צריכים להוכיח $D \subsetneq X$.
לכל $m, n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$A_{m,n} = \left\{ f \mid \exists x \in [0,1], \forall t \in [0,1] \,:\, 0 < |t-x| < \frac{1}{m} \implies \left| \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \right| \leq n \right\} \tag{1}$$

נראה:

1. $D \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{m,n}$.
2. $A_{m,n}$ סגורה לכל $n, m \in \mathbb{N}$.
3. $A_{m,n}$ בעלת פנים ריק.

ממשפט Baire נקבל ש-

$$D \subseteq \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{m,n} \subsetneq X$$

הוכחת 1: תהי $f \in D$. קיים $x \in [0,1]$ כך ש-

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

לכן $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ חסומה בסביבת x. כלומר קיימים $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$\left| \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \right| \leq n$$

כלומר $f \in A_{m,n}$. מ.ש.ל. 1.
הוכחת 2: תהי $f_i \to f$, $f_i \in A_{m,n}$. צ.ל. $f \in A_{m,n}$.
$f_i \in A_{m,n}$ לכן קיים x_i עבורו מתקיים התנאי ב-1. על ידי מעבר לתת סדרה נוכל להניח בה"כ $x_i \to x$ עבור $x \in [0,1]$.
נראה ש-f מקיים 1 עבור x.
יהי $t \in [0,1]$ כך ש-$0 < |t-x| < \frac{1}{m}$. נשים לב ש-

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{i \to \infty} \frac{f_i(t)-f_i(x_i)}{t-x_i}$$

$\frac{f_i(t)-f_i(x_i)}{t-x_i} \leq n$ עבור i מספיק גדול. לכן $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq n$. מ.ש.ל. 2.
הוכחת 3: יהי $f \in X, \epsilon > 0$. צ.ל. $B(f,\epsilon) \nsubseteq A_{m,n}$.

תחילה נבחר $g_1 \in X$ ליפשיצית כך ש-$d(f, g_1) < \frac{\epsilon}{2}$. ניתן לעשות את זה כי אוסף הפונקציות הליפשיציות צפופות ב-X (למשל כי כל פונקציה רציפה ניתן לקרב על ידי פונקציות לינאריות למקוטעין). נסמן ב-K את קבוע ליפשיץ של g_1.

תהי $\phi : [0,1] \to (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ פונקציית "זיג-זג" בעלת שיפועים גדולים מ-$(K+n)$. כלומר מקיימת שלכל x קיים t קרוב כרצוננו כך ש-

$$\frac{\phi(t) - \phi(x)}{t - x} > K + n$$

נסתכל על $g = g_1 + \phi$. נוכיח ש-$g \in A_{m,n} \setminus B(f, \epsilon)$:

כי $g \in B(f, \epsilon)$

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty \leq \|f - g_1\|_\infty + \|\phi\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$g \notin A_{m,n}$ כי לכל $x \in [0,1]$ קיים $t \in [0,1]$ כך ש-$0 < |t - x| < \frac{1}{m}$ עבורו

$$\left|\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\right| \geq \left|\frac{\phi(t) - \phi(x)}{t - x}\right| - \left|\frac{g_1(t) - g_1(x)}{t - x}\right| > (n + K) - K = n$$

מ.ש.ל. 3 ■