אינפי 2 - דף עזר בנושא אינטגרלים כפולים.

נסמן אינטגרל כפול ב - $\int\limits_D f(x,y)ds$ או ב - $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ כאשר D הוא תחום בעל שטח.

תכונות:

1. לינאריות: $\int\limits_D cf+g = c\int\limits_D f + \int\limits_D g$
2. $\int\limits_D 1ds = S(D)$ (כאשר $S(D)$ הוא השטח של D).
3. מונוטוניות: $f \le g \Leftarrow \int\limits_D f \le \int\limits_D g$.
4. אדיטיביות: אם ל - D_1 ול - D_2 אין נקודה פנימית משותפת, אז $\int\limits_{D_1\cup D_2} f = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f$.
5. $\left|\int\limits_D f\right| \le \int\limits_D |f|$.
6. אם $m \le f(x,y) \le M$ אז $m\cdot S(D) \le \int\limits_D f \le M\cdot S(D)$.
7. אם f רציפה בתחום סגור וקשיר D, אז קיימת נקודה $(a,b)\in D$, כך ש- $\int\limits_D f = f(a,b)\cdot S(D)$.

משפטים:

א. f רציפה $\Leftarrow$ f אינטגרבילית.

ב. f אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא בעלת מידה 0.

ג. משפט פוביני: תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן הסגור $D=[a,b]\times[c,d]$. אזי $\int\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

ד. תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$. אם $\int\limits_D f(x,y)ds$ קיים, ולכל $x\in[a,b]$ גם האינטגרל $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ קיים, אזי $I(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$ אינטגרבילית ב - $[a,b]$, ו- $\int\limits_D f(x,y)ds = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

ה. תהא $g(x)$ רציפה ב - $[a,b]$ ו - $h(y)$ רציפה ב - $[c,d]$. נסמן: $f(x,y)=g(x)h(y)$ ו - $D=[a,b]\times[c,d]$. אזי: $\int\limits_D f(x,y)ds = \left(\int\limits_a^b g(x)ds\right)\left(\int\limits_c^d h(y)dy\right)$.

ו. אם D תחום פשוט (כלומר, $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, ו- $y_1(x),y_2(x)$ רציפות), אזי: $\int\limits_D fds = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$ (ובאופן דומה אם התחום פשוט ביחס לציר השני).

החלפת משתנים באינטגרל כפול

משפט: אם שתי הפונקציות $x = x(u,v)$ ו - $y = y(u,v)$ הן גזירות ברציפות (כלומר, יש להן נגזרות חלקיות רציפות), ומגדירות העתקה חח"ע בין מישור (u,v) למישור (x,y) (בתחום הנידון), והיעקוביאן $J(u,v)$ אינו מתאפס בכל התחום הנידון במישור (u,v), אזי:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \,|\, J \,|\, dudv,$$

כאשר:

- S הוא התמונה של R ע"י ההעתקה $(x,y) \to (u,v)$ ו - R חסומה וסגורה ובעלת שטח
- היעקוביאן $J(u,v)$ מוגדר ע"י: $J(u,v) \equiv \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

מקרה פרטי: מעבר לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \Leftarrow \quad J \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

לכן: $\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr d\theta$.

הערה: הנוסחה האחרונה נכונה גם כאשר S מכיל את הראשית, למרות שתנאי המשפט לפיו $J \neq 0$ לא מתקיים.