<u>תורת החבורות – תרגיל בית 12 – פתרון</u>

<u>שאלה 2:</u>

תהי $H \triangleq \left\langle \left\{ \left(k\ \ k+1\right) \right\}_{k=1}^{n-1} \right\rangle$. נוכיח בשלושה שלבים כי $H \supseteq S_n$ ובכך נקבל את השוויון.

שלב 1: $H \ni (1\,3)=(2\,3)(1\,2)(2\,3)$, מכאן $H \ni (1\,4)=(3\,4)(1\,3)(3\,4)$, וכך נמשיך.

אז $H \supseteq \left\{(1\,m)\right\}_{m=2}^{n}$.

שלב 2: יהיו $1 \le x < y \le n$, אז $(x\ y)=(1\,x)(1\,y)(1\,x) \in H$. כלומר, H מכילה את כל הטרנספוזיציות.

שלב 3: יהי $\mu=(x_1, x_2, \cdots, x_t) \in S_n$ t-מעגל.

אז $\mu=(x_1, x_t)(x_1, x_{t-1})\cdots(x_1, x_2) \in H$, לכן הינה מכילה את כל המכפלות של מעגלים זרים. היות וכל איבר ב-S_n הינו מכפלת מעגלים זרים, קיבלנו את ההכלה $H \supseteq S_n$.

<u>שאלה 3:</u>

לפי התרגיל הקודם מספיק להוכיח כי לכל $1 \le k \le n-1$ $(k\ \ k+1) \in \left\langle (1\,2),\ (1\,2\cdots n) \right\rangle$.

אבל $(k\ \ k+1)=(1\,2\cdots n)^{k-1}(1\,2)\left((1\,2\cdots n)^{k-1}\right)^{-1}$ לכל $1 \le k \le n-1$, ובכך סיימנו.

<u>שאלה 6:</u>

נניח בשלילה כי הטענה אינה נכונה, אז קיים מונומורפיזם $\varphi: Q_8 \to S_4$.

אז $o(\varphi(i))=o(i)=4 \Leftarrow$ $\varphi(i)$ הינו 4-מעגל, ונניח בה"כ כי $\varphi(i)=(1\,2\,3\,4)$.

$i^2=-1 \Leftarrow (1\,3)(2\,4)=\varphi(i)^2=\varphi(i^2)=\varphi(-1)$. באותו אופן לגבי $j \in Q_8$:

$j^2=-1 \Leftarrow (1\,3)(2\,4)=\varphi(-1)=\varphi(j)^2$. אבל לכל $\mu \in S_4$ מתקיים כי $\mu^2=(1\,3)(2\,4)$ אם ורק אם $\mu=(1\,2\,3\,4)$. בכך קיבלנו כי $\varphi(i)=(1\,2\,3\,4)=\varphi(j)$ בסתירה לחד-חד-ערכיות של φ.

שאלה 7:

תהי קבוצת n קוסטים של H: $X=\{x_iH\}_{i=1}^{n}$. G פועלת על X ע"י $g(x_iH)=gx_iH$.

$Imm(\varphi)\le S_X \Leftarrow |Imm(\varphi)|\le|S_X|=n!$. מצד שני, לפי המשפט הראשון של

הומומורפיזם, $Imm(\varphi)\cong G/Ker(\varphi)$.

מכאן $n!\ge|Imm(\varphi)|=\left|G/Ker(\varphi)\right|=[G:Ker(\varphi)]$.

$N\triangleq Ker(\varphi)\triangleleft G$ ונישאר להראות כי $N\subseteq H$. יהי $g\in N$, אז $\varphi(g)=id_X$.

בפרט, אם $g\in N$, אז $g(H)=H \Rightarrow gH=H \Rightarrow g\in H$.

שאלה 8:

א) זהו מקרה פרטי של תרגיל שהוכח בכיתה "אם $H\le G$ כך ש $[G:H]=p$ הראשוני הקטן היותר שמחלק את הסדר של G, אז $H\triangleleft G$."

ב) $|G|=p^2=4>1$, לכן קיים $1\ne x\in G$. לפי משפט לגרנג' $o(x)\in\{p,p^2\}$.

נגדיר $y\in G$ ע"י $y=\begin{cases}x & o(x)=p\\ x^p & o(x)=p^2\end{cases}$, $o(y)=p$.

אז $H=\langle y\rangle$ הינה תת-חבורה מסדר p, ולכן אינדקס שלה p גם כן. כעת לפי הסעיף הקודם (או לפי תרגיל כיתה הנ"ל) $H\triangleleft G$.

ג) אם G ציקלית, אז אין מה להוכיח, לכן נניח כי לא. במקרה הזה כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר p. יהי $1\ne x\in G \Rightarrow o(x)=p$. כמו כן G לא ציקלית, לכן $G\ne\langle x\rangle$

ויהי $y\in G-\langle x\rangle$. ברור כי מתקיים $o(x)=o(y)=|\langle x\rangle|=|\langle y\rangle|=p$. יותר מכך,

היות ו $y\notin\langle x\rangle$ $\langle x\rangle\cap\langle y\rangle=1$, לכן $G=\langle x\rangle\langle y\rangle$, ושתיהן תח"נ לפי סעיף א'.

נישאר להוכיח כי $xy=yx$, ואז נסיים. נוכיח זאת:

נשים לב כי $G=\langle x\rangle\langle y\rangle=\left\{x^iy^j\right\}_{1\le i,j\le p-1}$, $yx\in G$ לכן קיימים $1\le k,t\le p-1$ כך

ש $yx=x^ky^t$. אז $x^ky^{t-1}=yxy^{-1}\in\langle x\rangle$. כמו כן $x^k\in\langle x\rangle$, לכן $y^{t-1}\in\langle x\rangle\bigcap\langle y\rangle$

מכאן מקבלים כי $y^{t-1}=1 \;\Rightarrow\; t-1=0 \;\Rightarrow\; t=1$. באותו אופן $k=1$.

שאלה 9:

ישנם $9-1=8$ אפשרויות לבחור שורה ראשונה (כל האפשריות פרט לשורת-אפסים), ו $9-3=6$

אפשרויות לבחור שורה שנייה (כל האפשריות פרט לכפולה של שורה ראשונה), סה"כ $|G|=48$.

$|H|=2*3*2$ (שתי אפשרויות לבחירת כל אחד מאברי האלכסון הראשי ו-3 אפשרויות לבחירת

b), לכן $[G:H]=4$.

תהי קבוצת 4 הקוסטים של H: $X=\left\{x_iH\right\}_{i=1}^{4}$. G פועלת על X ע"י $g\left(x_iH\right)=gx_iH$ --

הומומורפיזם (שנסמנו ע"י φ) מ- G לתוך S_X שניתן לזהות עם S_4. יותר מכך הינו הומומורפיזם

על, לכן נישאר להראות כי גרעין שלו הוא $Z(G)$.

$y\in Ker(\varphi)$ אם ורק אם לכל $1\le i\le 4$ $y\left(x_iH\right)=x_iH$ אם ורק אם לכל $1\le i\le 4$

$yx_iH=x_iH$ אם ורק אם לכל $1\le i\le 4$ $x_i^{-1}yx_i\in H$ אם ורק אם לכל $x\in G$ $x^{-1}yx\in H$.

1) $x=I \;\Rightarrow\; y=x^{-1}yx\in H \;\Rightarrow\; y=\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}$ משולשת עליונה.

2) $x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}d&0\\b&a\end{pmatrix}=x^{-1}yx\in H \;\Rightarrow\; b=0 \;\Rightarrow\; y=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$ אלכסונית.

3) $x=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}a&0\\a-d&d\end{pmatrix}=x^{-1}yx\in H \;\Rightarrow\; a=d \;\Rightarrow\; y=aI$ סקלרית.

כפי שנלמד באלגברה א' $Z\left(GL_n(F)\right)=\left\{\alpha I\middle|\alpha\in F\right\}$, לכן קיבלנו כי $Ker(\varphi)\subseteq Z(G)$. להפך

ברור, כי לכל $y\in Z(G)=\left\{\alpha I\middle|\alpha\in\mathbb{Z}_3\right\}$ ולכל $x\in G$ $x^{-1}yx=y\in\left\{\alpha I\middle|\alpha\in\mathbb{Z}_3\right\}\subseteq H$.