תורת ההסתברות – ת"ב 1

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

15/11/2016

תאריך הגשה

11

קבוצת תרגול

שאלה 1:

א. יהא מרחב הסתברות נתון $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ויהיו שני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$. נרצה להראות כי מתקיים:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

לשם כך נזכור, כי בהנתן קבוצות A,B, מתקיים:

$$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$$

כמו כן, מתקיים:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)\quad B=(B-A)\cup(A\cap B)$$

וזהו איחוד זר[1], ולכן נסיק כי:

$$P(A)=P(A\overset{(1)}{-}B)+P(A\cap B)\quad P(B)=P(B\overset{(2)}{-}A)\cap P(A\cap B)$$

וכן מתקיים:

$$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)$$

וגם זהו איחוד זר, ולכן נקבל סה"כ כי:

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)$$

נציב את $(1),(2)$ ונקבל שמתקיים:

$$P(A\cup B)=P(A)-\cancel{P(A\cap B)}+P(B)-P(A\cap B)+\cancel{P(A\cap B)}$$

ואכן נקבל כי:

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

ב. תהא סדרת מאורעות $(A_i)_{i=1}^{n}$ כלשהם (לא בהכרח זרים). נרצה להראות כי מתקיים:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\cap_{j\in J}A_j\right)$$

נעשה זאת באינדוקציה. עבור מקרה הבסיס:

$$P(A_1)=\sum_{i=1}^{1}(-1)^2\sum_{J=\{1\}}P\left(A_j\right)=P(A_1)$$

עתה, נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$ מאורעות כלשהם, ונוכיח באמצעות זאת את נכונות הטענה עבור סדרת n המאורעות הנתונה. לשם כך, נכתוב:

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\cup A_n$$

ועבור כתיבה זו, נוכל להיעזר בתוצאה שהתקבלה בסעיף א' ולקבל כי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(A_n\cup\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)\overset{\text{סעיף א}}{=}\boxed{P(A_n)+P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)-P\left(A_n\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)}\ (\star)$$

נתבונן באיבר האחרון בביטוי זה שקיבלנו, ונשים לב כי:

$$P\left(A_n\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_n\cap A_i)\right)$$

אך זוהי הסתברות של איחוד של $n-1$ מאורעות. נוכל להשתמש בהנחת האינדוקציה ולהסיק כי:

---

[1] אנחנו יודעים שבהנתן סדרה $(A_n)_{n=1}^{N}$ של מאורעות זרים, מתקיים $P(\cup_{n=1}^{N}A_n)=\sum_{n=1}^{N}P(A_n)$

$$P\left(P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_n\cap A_i)\right)\right)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}(A_n\cap A_j)\right)$$

$$=\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)}\ (\star\star)$$

כמו כן, נשים לב כי האיבר האמצעי ב-($\star$) הינו איחוד של $n-1$ מאורעות ולכן מתקיים:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)$$

אך נשים לב כי מתקיים:

$$=\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\left(\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)-\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i-1}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)\right)}\ (\star\star\star)$$

ושקילות זו נובעת מכך שמצד אחד, אנו סוכמים את ההסתברויות של כל החיתוכים של i מאורעות כך שאף מאורע אינו A_n, ואילו מצד שני, בפיתוח האחרון שרשום להלן, סוכמים ראשית את כל החיתוכים של i מאורעות כולל אלו שמכילים את A_n, ולאחר מכן, מסירים את כל החיתוכים שבהכרח מכילים את A_n, ולכן השוויון.

נשים לב כי לכל i, הביטוי $\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)$ מופיע ב-($\star\star$) וגם ב-($\star\star\star$) אך בסימן מנוגד (כי באחרון אנחנו מקבלים את אותו סימן אך הוא עבור האינדקס $i-1$. לכן באינדקס הבא יתקבל הדרוש ובסימן מנוגד. מכאן, שהם מבטלים האחד את השני, וזאת למעט המקרה שבו $i=1$. נכתוב, אם כן, את ($\star$) תוך שנציב את הביטויים שקיבלנו. נסיק כי:

$$(\star)=P(A_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\left(\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)-\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i-1}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)\right)-\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)$$

$$=P(A_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)+\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i-1}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)$$

נשים לב, כי האיבר המסומן, כאשר $i=1$, הוא בדיוק האיבר $P(A_n)$ בסימן מינוס. ולכן הוא יצטמצם עם $P(A_n)$ בצידו השמאלי של הסכום. נקבל סה"כ כי ניתן אם כן להפריד מקרה זה מתוך הסכימה ולהתחיל ישר מהמקרה שבו $i=2$:

$$=\boxed{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)+\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i-1}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)}\binom{\star}{\star}$$

אך עתה, נתבונן בשני הסכומים הימניים ונקבל כי:

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i-1}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^i\sum_{\substack{J\subset[n-1]\\|J|=i}}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)+(-1)^{n-1}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n-1}A_j\right)\right)$$

וכעת קל לראות כי שני הסכומים הראשונים הם בדיוק אותו הסכום בשינוי סימן ולכן:

$$=(-1)^{n-1}P\left(A_n\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n-1}A_j\right)\right)=(-1)^{n+1}P\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)$$

מכאן שמתקיים:

$$\binom{\star}{\star}=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)=\boxed{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)}$$

<u>שאלה 2:</u>

<u>הוכחת החסם העליון</u> - נתון מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},P)$ וכן $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}$ מאורעות כלשהם. נרצה להראות כי מתקיים:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

נראה זאת באינדוקציה. נראה זאת עבור מקרה הבסיס, קרי עבור קבוצה יחידה, ואכן מתקיים:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{1}A_i\right)\le P(A_1)$$

נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$ מאורעות כלשהם, ונראה את נכונות הטענה עבור n מאורעות:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(A_n\cup\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)=P(A_n)+P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)-P\left(A_n\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)(\star)$$

מהנחת האינדוקציה נקבל כי:

$$(\star) \leq P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \overbrace{P\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right)}^{\geq 0} \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ולכן:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

א. נתון מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ וכן $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ מאורעות כלשהם. נרצה להראות כי מתקיים:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P\left(A_i \cap A_j\right)$$

ונעשה זאת באמצעות אינדוקציה על מספר המאורעות. עבור מקרה הבסיס של 2 מאורעות מתקיים:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

מעקרון ההכלה וההפרדה שהוכחה בשאלה 1. נניח, אם כן, את נכונות הטענה לכל $n-1$ מאורעות כלשהם, ונראה כי מכך נובעת נכונות הטענה בעבור n מאורעות.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P(A_n) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) - P\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) (\star)$$

ניעזר בהנחת האינדוקציה בעבור האיבר האמצעי ונקבל כי:

$$(\star) \geq P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} P\left(A_i \cap A_j\right) - P\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) (\star\star)$$

ועתה נשים לב, כי מתקיים:

$$P\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_n \cap A_i)\right)$$

בשלב זה נוכל להשתמש בחסם העליון שהוכחנו בסעיף א' כדי לקבל:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_n \cap A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_n \cap A_i)$$

ולכן נקבל כי:

$$(\star\star) \geq \ P(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} P\left(A_i \cap A_j\right) - \sum_{i=1}^{n} P(A_n \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P\left(A_i \cap A_j\right)$$

כלומר אכן מתקיים:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P\left(A_i \cap A_j\right)}$$

ב. בהנתן איחודים אינסופיים של מאורעות מהצורה $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ו-$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, כאשר נתון כי $B_i \subset A_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$, נקבל כי מתקיים:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

כמו כן, נשים לב, כי מתקיים:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus B_i)$$

ולכן מתקיים:

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus B_i)\right) \overset{\text{חסם האיחוד}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} |P(A_i) - P(B_i)|$$

וכן נשים לב, כי מתקיים:

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

מיחסי ההכלה, ולכן נקבל, כמבוקש:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |P(A_i) - P(B_i)|}$$

שאלה 3:

א. נתון כי $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} | A \text{ or } A^c \text{ is countable}\}$. נבדוק את התנאים להיותה σ-אלגברה.

i. $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ וזאת משום ש-$\mathbb{R}^c = \emptyset$ שהיא אכן בת מניה.

ii. לכל A בת מניה, נקבל שעבור A^c מתקיים ש-A או A^c בת מניה ולכן $A^c \in \mathcal{F}$.

iii. נתונות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$. נרצה להראות כי $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

ראשית, עבור המקרה שבו לכל $i \in \mathbb{N}$, מתקיים A_i אינה בת מניה – נקבל כי לכל i כזה, A_i^c בת מניה. אך נשים לב, אם כן, כי:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

היא חיתוך של קבוצות בנות מניה ולכן בן בניה, ומכאן ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. מקרה נוסף, הוא זה שבו לכל $i \in \mathbb{N}$, A_i בת מניה, ומכאן ש-$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. עתה, נניח כי יש לפחות קבוצה אחת בת מניה ואחת שאינה בת מניה הן במשלימים והן בקבוצות המקוריות. אזי עדיין נחזור למקרה שבו:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

ונקבל כי בחיתוך זה ישנה לכל הפחות קבוצה בת מניה אחת ולכן חיתוך זה יהיה בן מניה.

מכאן נסיק, כי כל התנאים מתקיימים כנדרש, כלומר $\mathcal{F}$ היא σ-אלגברה.

ב. מוגדרת, אם כן, P על $\mathcal{F}$, כך ש-$P(A) = 0$ אם A בת מניה ו-$P(A) = 1$ אם A^c בת מניה. נבדוק האם מתקיימים התנאים הנדרשים לכך שזו תהא פונקציית הסתברות:

i. $P(\emptyset) = 0$ כי $\emptyset$ בת מניה, וכן $P(\mathbb{R}) = 1$ כי המשלימה שלה היא הקבוצה הריקה.

ii. אם A בת מניה, אז $P(A) = 0$ וכן $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ היא קבוצה שאינה בת מניה ולכן נקבל כי מתקיים $P(A^c) = 1 = 1 - P(A)$.

iii. תהא $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ זרות. אזי אם נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, הקבוצה A_n בת מניה, אזי ממילא נקבל כי האיחוד גם הוא בן מניה, והיות ולכל n מתקיים $P(A_n) = 0$, נקבל כי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$$

עתה, נניח כי קיים לפחות קבוצה אחת שאינה בת מניה, נסמנה A_{n_0}. נשים לב כי לכל $n \neq n_0$, נתון כי הקבוצות זרות, כלומר $A_n \subseteq A_{n_0}^c$, אך קבוצה זו קבוצה בת מניה. לכן נקבל כי לכל $n \neq n_0$ מתקיים $P(A_n) = 0$ וכן $P\left(A_{n_0}\right) = 1$. כפי שהראינו קודם, האיחוד האינסופי הנ"ל הוא אינו בן מניה אך המשלים שלו כן. לכן מתקיים, כנדרש:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n_0}\right) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$$

P כפי שהוגדרה מקיימת את כל התנאים כנדרש, ולכן היא אכן מהווה פונקציית הסתברות.

<u>שאלה 4:</u>

נתונות אם כן, שתי פונקציות:

$$f: [n] \mapsto [n] \quad g: [n] \mapsto [n]$$

אשר מוגדרות כך ש-f פונקציה מקרית המפולגת באופן אחיד ואילו g מפולגת באופן אחיד אך היא חד-חד ערכית.

א. נגדיר את מרחבי ההסתברות של f, g:

$$\Omega_f = \left\{A \in M_{2\times n}([n]) \middle| \begin{matrix} \forall 1 \le j \le n \\ a_{j1} = j \end{matrix}\right\} \quad \Omega_g = \left\{A \in M_{2\times n}([n]) \middle| \begin{matrix} \forall 1 \le j \le n \\ a_{j1} = j \quad a_{j2} \neq j \end{matrix}\right\}$$

כלומר, כל פונקציה אפשרית f שהתקבלה בהתפלגות זו ניתנת לייצוג על ידי מטריצה בעלת 2 עמודות ו-n שורות, כך שהעמודה הראשונה מייצגת את המקורות, ולכל מקור, המספר הממוקם באותה שורה בעמודה השניה הינו התמונה. כך ניתן לתאר כל פונקציה אפשרית בין הקבוצה הראשונה לשניה בצורה יחידה על ידי מטריצה כנ"ל.

בעבור g, ניתן לבחור מטריצות כך שהדרישה היא שבכל שורה, בעמודה השניה יופיע מספר שונה מן העמודה הראשונה. כך, היות וממילא העמודה הראשונה ממוספרת מ-1 עד n, נקבל את המבוקש.

ב. מוגדרים המאורעות הבאים:

$$A = \left\{\begin{matrix} \text{ל } f - \text{אין} \\ \text{נקודת שבת} \end{matrix}\right\} \quad B = \left\{\begin{matrix} \text{ל } g - \text{אין} \\ \text{נקודת שבת} \end{matrix}\right\}$$

ומסמנים לכל n, ב-α_n את ההסתברות ל-A וב-β_n את ההסתברות ל-B.

נתחיל בלחשב את ההסתברות β_n. בהנתן n מקורות ו-n תמונות, סה"כ האפשרות לבחור n תמונות ל-n המקורות בצורה חד-חד ערכית, היא $n!$.

נרצה, עתה, לחשב את מספר האפשרויות לבחירת תמונות כך שלא תתקבלנה נקודות שבת.

לשם כך, נסמן את המאורעות:

$$B_i = \{g(i) = i\}$$

כלומר, ההסתברות לכך של-g כן יש נקודת שבת ב-i.

ההסתברות אותה אנו רוצים לחשב היא:

$$\beta_n = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

כפי שהוכחנו כבר בסעיפים הקודמים, ניתן לבטא את השוויון האחרון בצורה:

$$\beta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{J\subset[n] \\ |J|=i}} P\left(\cap_{j\in J} B_j\right)$$

כאשר את הביטויים מהצורה $P\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$ נוכל לחשב.

יהיה $1 \le k \le n$ ויהיו, אם כן $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ אינדקסים שמתאימים ל-B_i שונות. נשים לב כי המאורע $\bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}$ הוא המאורע "ל-g יש נקודת שבת באיברים $i_1, i_2, \cdots i_k$". נשים לב, כי למרות שסה"כ יש $n!$ אפשרויות לבחירת פונקציות g, ישנם k איברים שכבר נבחרו להם תמונות. עבור האיברים הנותרים, יש $(n-k)!$ אפשרויות ולכן:

$$\forall \begin{pmatrix} J \subset [n] \\ |J| = k \end{pmatrix} \quad P\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

ועתה נזכור, כי הסכום $\sum_{\substack{J\subset[n] \\ |J|=i}} P\left(\cap_{j\in J} B_j\right)$ מכיל את **כל** הקבוצות האפשריות כנ"ל. מספר האפשרויות שקול למספר האפשרויות לבחור k קבוצות מתוך n קבוצות קיימים, כלומר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. לכן קיבלנו סה"כ כי מתקיים:

$$\beta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left(\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\right) \frac{(n-i)!}{n!} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

נשים לב כי זהו מקרה של טור טיילור:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$$

כאשר מציבים $x = (-1)$ לכן, עבור $n \to \infty$ נקבל כי:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \beta_n = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

נחשב עתה את α_n. נעשה זאת בדרך דומה, ונסמן את המאורע:

$$A_i = \{f(i) = i\}$$

במקרה זה, סך האפשרויות לבחור פונקציה גדול יותר, שכן יש חזרות. באופן כללי, מספר האפשרויות לבחור n תמונות ל-n מקורות, עם חזרות, הוא n^n.

נשים לב, כי לכל $1 \le k \le n$, מתקיים שלכל k אינדקסים $1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$, חיתוך המאורעות $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ הוא המאורע "הפונקציה מקבלת נקודת שבת ב-i_j לכל $1 \le j \le k$". למרות שמספר הפונקציות סה"כ שניתן לבנות הוא n^n, נשים לב כי היות ומוגדרות, במקרה זה, k נקודות שבת, נסיק כי מספר הפונקציות שניתן לבנות הוא כמספר האפשרויות לבחור מתוך $n-k$ תמונות מתוך n מקורות כולל חזרות, כלומר n^{n-k}.

לכן מתקיים:

$$\forall 1 \le i \le n \quad \forall \begin{matrix} J \subset [n] \\ |J| = i \end{matrix} \quad P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{n^{n-k}}{n^n} = \frac{1}{n^k}$$

מספר החיתוכים כנ"ל הינו כמספר האפשרויות לבחור i מאורעות מתוך n, כלומר $\binom{n}{i}$. ולכן נקבל:

$$\alpha_n = 1-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{J\subset[n]\\|J|=i}}P\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right) = 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{n^i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{n^i}\binom{n}{i}$$

אך ביטוי זה הוא בדיוק הביטוי לפיתוח הבינומי של הביטוי:

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{n^i}\binom{n}{i} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

ולכן נקבל כי מתקיים:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}}$$

כלומר קיבלנו כי בשני המקרים התקבל גבול זהה כאשר $n\to\infty$. זאת משום, שכפי שראינו, מספר האפשרויות לבחירת f הינו n^n בעוד שב-g מספר האפשרויות הינו $n!$. ועל אף ש-n^n שואף לאינסוף מהר יותר מאשר g, נשים לב לכך שבעבור f מספר האפשרויות לקבלת "אי סדר" נתון על ידי $(n-1)^n$ אפשרויות. ומספר האפשרויות של g לקבלת אי סדר נתון על ידי:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!}{i!} = n!-n!+\frac{1}{2}n!-\frac{1}{6}n!+\frac{1}{24}n!\cdots \le \frac{1}{2}n!$$

כלומר, נשים לב כי בשני המקרים, מספר האפשרויות לקבלת "אי סדר" (כלומר, שלא יהיו נקודות שבת) גדל "באותו סדר גודל" של מספר האפשרויות הכללי לפונקציות. היות וההסתברות היא היחס בין גדלים אלה, נסיק באינסוף הם אסימפטוטיים ולכן יתכנסו לגבול סופי כלשהו.

שאלה 5:

נתבונן בקבוצת המספרים $[n]\coloneqq\{1,2,\cdots,n\}$ ונבחר תת קבוצה של $[n]$ באקראי ונסמנה על ידי A, כאשר ידוע כי הסיכוי לבחירת תת קבוצה כלשהי מתוך 2^n תתי הקבוצות של $[n]$ זהה לכל אחת מתתי הקבוצות.

נבחר כעת קבוצה נוספת של $[n]$ באקראי ובאופן בלתי תלוי ונסמנה על ידי B.

א. נרצה להראות כי $P(A\subset B)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$. לשם כך, נשים לב, ראשית, כי מספר האפשרויות לבחירת 2 תתי קבוצות של $[n]$ באופן בלתי תלוי הוא $2^n\cdot 2^n=4^n$. נרצה למצוא, אם כן, את מספר האפשרויות לבחירת 2 תתי קבוצות כנ"ל כך ש-$A\subset B$. לשם כך, נמיר את הבעיה לבעיה אחרת אותה אנו יודעים לפתור –
נשים לב כי בכל בחירה של $A\subset B$, ניתן להגדיר פונקציה $f:[n]\mapsto\{1,2,3\}$ המוגדרת באופן הבא:

$$f(i)=\begin{cases}1 & x\in A\subset B\\ 2 & x\in B\setminus A\\ 3 & x\notin B\end{cases}$$

כלומר, ניתן לאפיין כל בחירת $A\subset B$ באופן ייחודי על ידי פונקציה כזאת באופן חד-חד ערכי ועל. לכן נסיק כי מספר האפשרויות לבחירת תתי קבוצות כנ"ל הוא כמספר הפונקציות f שניתן לבנות מקבוצה בת n איברים לקבוצה בת 3 איברים, ולכך יש 3^n אפשרויות.
היות וההסתברות לכל בחירה שווה, נסיק כי $P(A\subset B)$ הוא בדיוק היחס בין מספר האפשרויות לבחירת תתי קבוצות כנ"ל לבין מספר כלל הבחירות האפשריות, ולכן:

$$\boxed{P(A\subset B)=\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

ב. במקרה הנ"ל, נרצה גם כן, למצוא את היחס בין סך הבחירות האפשריות לבין הבחירות התואמות את תנאי השאלה, קרי, בחירות שבהן $A \cap B = \emptyset$. את סך האפשרויות, מצאנו וראינו כי ערכו 4^n. ונשים לב כי לכל בחירה חוקית $A \cap B = \emptyset$, ניתן להגדיר פונקציה $g: [n] \mapsto \{1,2,3\}$ על ידי:

$$g(i) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 2 & x \in B \\ 3 & x \notin A \cup B \end{cases}$$

כלומר, כל בחירה חוקית יכולה להיות מאופיינת בדיוק על ידי פונקציה כזאת. לכן נסיק כי מספר הבחירות החוקיות הוא כמספר הפונקציות שניתן לבנות באופן זה. ראינו כי יש 3^n אפשרויות כנ"ל, ולכן נסיק:

$$\boxed{P(A \cap B = \emptyset) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

<u>שאלה 6:</u>

הטענה אינה נכונה באופן כללי ואראה זאת באמצעות דוגמה נגדית. נגדיר ניסוי שבו נטיל קוביה הוגנת פעמיים באופן בלתי תלוי. נגדיר את המאורעות:

$$A = \begin{Bmatrix} \text{יצא זוגי} \\ \text{בהטלה כלשהי} \end{Bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} \text{יצא זוגי} \\ \text{בהטלה השניה} \end{Bmatrix} \quad C = \begin{Bmatrix} \text{יצא 4} \\ \text{בהטלה הראשונה} \end{Bmatrix}$$

ונשים לב, שקל לראות, כי מתקיים:

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(C) = \frac{1}{6}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{12} \quad P(C \cap A) = \frac{1}{6}$$

ונשים לב עתה, כי מתקיים:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1 > P(A) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} > P(B)$$

כלומר C מעדיף את A ו-A מעדיף את B. אבל:

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \leq P(B)$$

כלומר C אינו מעדיף את B. וזו דוגמה למצב שבו הטענה אינה מתקיימת.

<u>שאלה 7:</u>

בקופסא יש 10 כדורים אדומים ו-5 שחורים. כדור נבחר באקראי מן הקופסא, ואם הוא אדום, מחזירים אותו לקופסא. אם הוא שחור, אזי מחזירים אותו לקופסא ומוסיפים שני כדורים שחורים. לאחר מכן, בוחרים כדור חדש באקראי.

א. נגדיר מאורעות על ידי:

$$A = \begin{Bmatrix} \text{נבחר שחור} \\ \text{בפעם הראשונה} \end{Bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} \text{נבחר שחור} \\ \text{בפעם השניה} \end{Bmatrix}$$

ונשים לב, כי מתקיים:

$$P(A)=\frac{1}{3}\quad P(A^c)=\frac{2}{3}$$

כמו כן, נתון לנו כי:

$$P(B|A)=\frac{7}{17}\quad P(B|A^c)=\frac{10}{17}$$

ונוכל להיעזר בנוסחת ההסתברות השלמה ולקבל כי:

$$P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{17}+\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{17}=\frac{7}{51}+\frac{20}{51}=\frac{27}{51}=\boxed{\frac{9}{17}=P(B)}\rightarrow\boxed{P(B^c)=\frac{8}{17}}$$

ב. נשתמש בנוסחה להסתברות מותנית ונקבל כי:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{17}}{\frac{9}{17}}=\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{9}=\boxed{\frac{7}{27}=P(A|B)}$$

שאלה 8:

נסמן את המאורעות על ידי:

$$A=\{\text{פרופסור}\}\quad B=\left\{\begin{matrix}\text{רוכב על}\\ \text{אופניים}\end{matrix}\right\}$$

ונתון כי:

$$P(A)=\frac{5}{100}\quad P(B|A^c)=\frac{30}{100}\quad P(B|A)=\frac{5}{100}$$

ולכן נוכל לחשב ולקבל כי:

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)=\frac{25}{100}+\frac{28.5}{100}=\frac{53.5}{100}=0.535=P(B)$$

כמו כן, מתקיים:

$$P(B|A)=\frac{\overset{=P(B\cap A)}{P(A\cap B)}}{P(A)}=\frac{5}{100}\rightarrow P(A\cap B)=\frac{25}{100}$$

ובשאלה נתבקשנו לחשב את:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{25}{100}}{\frac{53.5}{100}}\approx 0.4673}$$

שאלה 9:

כותבים את המספרים $1,2,3,\cdots,n$ על פתקים ומסדרים אותם באופן אקראי. לאחר מכן, פותחים את הפתקים לפי הסדר. עבור $k\le n$, אם על הפתק ה-k הופיע המספר הגדול ביותר מבין k הפתקים הראשונים, נרצה לבדוק מה ההסתברות שהמספר על הפתק ה-k הוא הגדול ביותר האפשרי.

נשים לב, כי בהנתן המאורעות:

$$A_k = \begin{Bmatrix} \text{המספר } n \text{ כתוב על} \\ \text{על הפתק ה} - k \end{Bmatrix} \quad B_k = \begin{Bmatrix} \text{האיבר ה} - k \\ \text{גדול מכל} \\ \text{אלה שלפניו} \end{Bmatrix}$$

את המאורע A ניתן להבין בצורה הבאה – ישנו רק פתק אחד עליו יהיה רשום המספר n. הסיכוי שהוא יהיה על כל אחד מ-n הפתקים שווה, ולכן נקבל כי:

$$P(A_k) = \frac{1}{n}$$

כמו כן, את B_k ניתן לתאר באופן הבא – בהנתן k איברים ראשונים ברשימה, ניתן לקבוע ביחידות את הגדול מביניהם. הסיכוי שהוא יהיה, אפוא, בפתק ה-i כלשהו, עבור $1 \le i \le k$, זהה לכל i, ולכן נסיק כי:

$$P(B_k) = \frac{1}{k}$$

אך נשים לב, כי ההסתברות אותה נרצה לחשב – היא ההסתברות שעל הפתק ה-k יהיה רשום המספר n, בהנתן שהוא הגדול מבין k הפתקים כולל אותו, שלפניו. כלומר:

$$P(A_k|B_k) = \frac{P(A_k \cap B_k)}{P(B_k)}$$

אך נשים לב, כי $A_k \subseteq B_k$ כי בכל מקרה שבו המספר n כתוב על הפתק ה-k, מתקיים שהוא בוודאי גדול מכל אלו שלפניו. ולכן $P(A_k \cap B_k) = P(A_k)$ כלומר:

$$\boxed{P(A_k|B_k) = \frac{P(A_k)}{P(B_k)} = \frac{k}{n}}$$