תורת הקבוצות ־ תרגול מספר 5
פונקציות

תזכורת ־ הגדרות

יהיו A, B קבוצות.
פונקציה $f : A \to B$ היא יחס $f \subseteq A \times B$ המקיים:

- **קיום:** לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש־$(a, b) \in f$.
- **יחידות:** לכל $a \in A$ ולכל $b_1, b_2 \in B$, אם $(a, b_1) \in f$ וגם $(a, b_2) \in f$ אז $b_1 = b_2$.

בזכות תכונות הקיום והיחידות, ניתן תמיד לכתוב $f(a)$ כדי לתאר את האיבר היחיד ב־B שנמצא ביחס f עם a.
פונקציה $f : A \to B$ יכולה לקיים שתי תכונות שהן מעין דואליות של תכונת הקיום והיחידות:

- f היא **חד־חד־ערכית** אם לכל $a_1, a_2 \in A$ מתקיים ש־$f(a_1) = (a_2) \leftarrow a_1 = a_2$.
- f היא **על** אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש־$b = f(a)$.

אם $f : A \to B$ ו־$g : B \to C$ ניתן **להרכיב** את הפונקציות: להפעיל את f ולאחר מכן להפעיל את g. התוצאה היא פונקציה חדשה, $h : A \to C$ שמקיימת $h(a) = g(f(a))$ לכל $a \in A$.
את הפונקציה המורכבת נסמן לרוב כ־gf או $g \circ f$.
לכל קבוצה A נגדיר את **פונקציית הזהות** על A: $id_A(a) = a$ לכל $a \in A$.

תרגיל ־ הפיכה חלקית של פונקציות

יהיו $A = \{1, 2, 3\}$ ו־$B = \{4, 5, 6, 7\}$ ונתונות שתי פונקציות $f : A \to B$ ו־$g : B \to A$.
האם ייתכן כי:

1. $fg = id_B$
2. $gf = id_A$

פתרון: עבור 1, קל לראות כי הדבר בלתי אפשרי משיקולי גודל הקבוצות: מכיוון ש־$|B| < |A|$ אז קיימים $b_1, b_2 \in B$ כך ש־$g(b_1) = g(b_2)$ ("עקרון שובך היונים"). אינטואיטיבית, g "מאבדת מידע" בשלב הזה ולכן לא ניתן יהיה להפוך אותה.
על מנת להוכיח פורמלית, נניח בשלילה שקיימת f כך ש־$fg = id_B$. מכיוון ש־$g(b_1) = g(b_2)$ אז אחרי הפעלת f נקבל עדיין את אותה תוצאה, $fg(b_1) = fg(b_2)$. מכאן:

$$b_1 = id_B(b_1) = fg(b_1) = fg(b_2) = id_B(b_2) = b_2$$

בסתירה לכך ש־$b_1 \neq b_2$. שימו לב שהשתמשנו רק בכך ש־f פונקציה, והפרטים של f לא היו רלוונטיים עבורנו.
עבור 2 הטענה נכונה ־ אם f היא חד־חד־ערכית, נוכל למצוא g מתאימה. למשל:

$$f(a) = a + 3$$
$$g(b) = \begin{cases} b - 3 & 4 \leq b \leq 6 \\ 1 & b = 7 \end{cases}$$

שימו לב שהגדרנו את g עבור הערכים האפשריים בתמונה של f בצורה ש"הופכת" את f, אבל עבור הערך הנוסף 7 יכלנו להגדיר את g שרירותית.

תרגיל - הגדרת פונקציה על יחסי שקילות

כזכור, $\mathbb{Z}_n$ היא קבוצת המנה $\mathbb{Z}/\equiv_n$ כאשר $\equiv_n$ הוא יחס השקילות של שקילות מודולו n.

סעיף א'

נגדיר $f:\mathbb{Z}_3\to\mathbb{Z}_4$ באמצעות הכלל $f([x]_3)=[2x]_4$. זוהי דוגמה להגדרה של פונקציה **באמצעות נציגים** - אנחנו מגדירים את f על מחלקת שקילות של $\equiv_3$ על ידי בחירת נציג x, פעולה כלשהי על הנציג הזה ($x\mapsto 2x$) ואז לקיחת מחלקת השקילות של התוצאה.

שיטת הגדרה זו היא לגיטימית אבל **מסוכנת** כי ייתכן שהתוצאה שלה היא משהו שכלל אינו פונקציה, כי אינו מקיים את תכונת ה"יחידות" של פונקציה. במילים אחרות, אנחנו עשויים לקבל שההגדרה של f על מחלקת שקילות מסויימת **תלויה בבחירת הנציג** של אותה מחלקת שקילות, ועבור נציגים שונים נקבל תוצאות שונות של f.

במקרה שלנו אנחנו יודעים כי $5\equiv_3 2$, אבל $0\equiv_4 4$ וכמו כן $2\equiv_4 10$. על כן:

$f([2]_3)=[4]_4=[0]_4$

$f([5]_3)=[10]_4=[2]_4$

והגענו לסתירה כי $[0]_4\neq[2]_4$.

במקרה כזה אומרים שהפונקציה f **אינה מוגדרת היטב** והיא לא באמת פונקציה - היא רק נסיון כושל להגדרת פונקציה.

סעיף ב'

נגדיר $f:\mathbb{Z}_3\to\mathbb{Z}_6$ באמצעות הכלל $f([x]_3)=[2x]_6$. הפעם הפונקציה מוגדרת היטב. כדי להוכיח זאת, יהיו x,y כך ש־$[x]_3=[y]_3$, כלומר $3|x-y$, כלומר $x-y=3d$ עבור $d\in\mathbb{Z}$. נכפיל ב־2 את שני האגפים ונקבל $2x-2y=6d$, כלומר $[2x]_6=[2y]_6$.

האם f חח"ע? נניח כי עבור x,y מתקיים $f([x]_3)=f([y]_3)$. כלומר, $[2x]_6=[2y]_6$, כלומר $6|2x-2y$ ולכן $3|x-y$ ולכן $[x]_3=[y]_3$. מכאן ש־f אכן חח"ע.

האם f על? בבירור זה בלתי אפשרי כי $|\mathbb{Z}_6|>|\mathbb{Z}_3|$. עם זאת, זו אינה הוכחה פורמלית אלא נימוק אינטואיטיבי. כדי להוכיח ש־f אינה על עלינו להצביע על איבר קונקרטי ב־$\mathbb{Z}_6$ שאינו התמונה של אף איבר ב־$\mathbb{Z}_3$. נוכיח ש־$[1]_6$ הוא איבר שכזה; נניח בשלילה כי $f([x]_3)=[1]_6$, כלומר $[2x]_6=[1]_6$, כלומר $6|2x-1$. אבל 6 זוגי ואילו $2x-1$ הוא אי זוגי ולכן לא ייתכן ש־6 מחלק את $2x-1$ והגענו לסתירה.

תרגיל - חח"ע ועל בהרכבת פונקציות

נתונות הפונקציות $f:A\to B$ ו־$g:B\to C$. הוכיחו/הפריכו:

1. אם f חח"ע ו־g חח"ע אז גם gf חח"ע.

   הטענה נכונה. נוכיח: יהיו $a_1,a_2\in A$ כך ש־$g(f(a_1))=g(f(a_2))$. מכיוון ש־g חח"ע, אז נקבל $f(a_1)=f(a_2)$, ומכיוון ש־f חח"ע אז $a_1=a_2$.

2. אם f על ו־g על אז gf על.

   הטענה נכונה. נוכיח: יהי $c\in C$. מכיוון ש־g על אז קיים $b\in B$ כך ש־$g(b)=c$. מכיוון ש־f על אז קיים $a\in A$ כך ש־$f(a)=b$. לכן $gf(a)=g(b)=c$.

3. אם gf על ו־g חח"ע אז f על.

   הטענה נכונה. נוכיח: יהי $b\in B$. אנו רוצים למצוא $a\in A$ כך ש־$f(a)=b$. נפעיל את g על b ונקבל $c=g(b)$. מכיוון ש־gf על, קיים $a\in A$ כך ש־$gf(a)=c$. במילים אחרות, $g(f(a))=g(b)$. מכיוון ש־f חח"ע, נקבל ש־$f(a)=b$, ומצאנו מקור ל־b על ידי f. מכאן ש־f על.