פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - פתרון חלקי לגליון תרגילים מס' 3

1. נתונות קבוצות מדידות $A_1,\ldots,A_n$ ולכל $k=1,\ldots,n$ C_k הוא אוסף הנקודות השייכות בדיוק ל-k קבוצות כנ"ל. צ"ל ש- $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)=\sum_{k=1}^n k\mu(C_k)$.

הוכחה: דרך I: הקב' $\{C_k\}_{k=1}^n$ הן זרות בזוגות ו- $\bigcup_{k=1}^n C_k=\bigcup_{i=1}^n A_i$, ולכן - לכל $1\le i\le n$ מתקיים: $\mu(A_i)=\sum_{k=1}^n \mu(A_i\cap C_k)$ ולכן: $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)=\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n \mu(A_i\cap C_k)$. עלינו להוכיח, אם כן, שלכל $1\le k\le n$ $\sum_{i=1}^n \mu(A_i\cap C_k)=k\mu(C_k)$.

נעשה זאת באינדוקציה על k. ניתן להניח בה"כ ש- $C_k\neq\emptyset$. בסיס האינדוקציה: עבור $k=1$ הקבוצות $\{A_i\cap C_k\}_{i=1}^n$ זרות בזוגות והטענה מתקיימת. נניח שהטענה מתקיימת עבור $k-1$ ונגדיר את הקבוצות: $B_i=A_i\cap C_k$, $D_i=B_i\backslash(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_{i-1})$ עבור $i=1,\ldots,n$. אז הקבוצות D_i הן זרות בזוגות וכן $\bigcup_{i=1}^n B_i=\bigcup_{i=1}^n D_i=C_k$ ולכן

$$\sum_{i=1}^n\left[\mu(B_i\backslash D_i)+\mu(D_i)\right]=\left[\sum_{i=1}^n \mu(B_i\backslash D_i)\right]+\mu(C_k)$$

כיוון שכל איבר ב- C_k מופיע בדיוק ב- $k-1$ מהקבוצות $\{B_i\backslash D_i\}_{i=1}^n$, נקבל, ע"פ הנחת האינדוקציה, מש"ל. $\square$

דרך II: בעזרת הטריק הבא: נתבונן בפונקציה $f(x)=\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x)$; מתקיים $f(x)=k$ אם"ם x שייך ל- k מהקבוצות הנתונות, כלומר - $\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x)=\sum_{k=1}^n k\chi_{C_k}(x)$. אינטגרציה של השוויון הנ"ל תיתן את מש"ל. $\square$

2. **(א)** צ"ל אם μ היא מידה אז $|\mu|$ היא מידה חיובית.

פתרון: עלינו להוכיח σ-אדטיביות של $|\mu|$. תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ קבוצות מדידות וזרות בזוגות ו- $B=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$. מצד אחד, אם לכל $i\in\mathbb{N}$ $\{C_n^i\}_{n=1}^\infty$ היא חלוקה מדידה של B_i אז $\{C_n^i\}_{i,n\in\mathbb{N}}$ היא חלוקה מדידה של B. לכן $\sum_{i,n=1}^\infty|\mu(C_n^i)|\le|\mu|(B)$ ולכן $\sum_{i=1}^\infty|\mu|(B_i)\le|\mu|(B)$. מצד שני, נשים לב כי אם $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ היא חלוקה מדידה של B אז $\{B_i\cap C_n\}_{i,n\in\mathbb{N}}$ אף היא כזו והיא עידון של החלוקה המקורית וכן לכל $i\in\mathbb{N}$ $\{B_i\cap C_n\}_{n=1}^\infty$ היא חלוקה מדידה של B_i. על-כן, $\sum_{n=1}^\infty|\mu(C_n)|\le\sum_{i,n=1}^\infty|\mu(B_i\cap C_n)|\le\sum_{n=1}^\infty|\mu|(B_i)$ - כלומר, $|\mu|(B)\le\sum_{i=1}^\infty|\mu|(B_i)$ ובסה"כ קיבלנו מש"ל. $\square$

(ב) צ"ל של- μ ממשית, ש- μ^+,μ^- הן מידות חיוביות.

פתרון: נוכיח רק עבור μ^+ כי $\mu^-=(-\mu)^+$. μ^+ בודאי חיובית, כי לכל $A\in\mathcal{M}$ $\emptyset\subset A$ ולכן $\mu^+(A)\ge\mu(\emptyset)=0$. σ-אדטיביות - בדומה לסעיף הקודם. עבור B, $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ כנ"ל, אם $C_i\subset B_i$ ו- C_i מדידות לכל $i\in\mathbb{N}$ אז $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i\subset B$ מזה נובע ש- $\mu^+(B)\ge\sum_{i=1}^\infty\mu^+(B_i)$. בכיוון ההפוך - אם $C\subset B$ מדידה אז לכל $i\in\mathbb{N}$ נגדיר $C_i=C\cap B_i$ ואז $C_i\subset B_i$ לכל i ולכן $\mu(C)=\sum_{i=1}^\infty\mu(C_i)\le\sum_{i=1}^\infty\mu^+(B_i)$ ולכן: $\mu^+(B)\le\sum_{i=1}^\infty\mu^+(B_i)$. $\square$

(ג) צ"ל: ל- μ ממשית $|\mu|=\mu^++\mu^-$, $\mu=\mu^+-\mu^-$.

פתרון: $\mu=\mu^+-\mu^-$: (כל הקבוצות להלן מדידות)

בהנתן קבוצה A, $\varepsilon>0$ ו- $C\subset A$ עם $\mu(C)\ge\mu^+(A)-\varepsilon$ נקבל:

$$\begin{aligned}\mu(A\backslash C)&=\mu(A)-\mu(C)\le\mu(A)-\mu^+(A)+\varepsilon\\ \Rightarrow\ \mu^-(A)&\ge-\mu(A\backslash C)\ge\mu^+(A)-\mu(A)-\varepsilon\end{aligned}$$

ומכך נסיק ש- $\mu^-\ge\mu^+-\mu$. מצד שני, אותו שיקול עבור $-\mu$ במקום μ ייתן $\mu^+=(-\mu)^-\ge(-\mu)^+-(-\mu)=\mu^-+\mu$ ובסה"כ נקבל מש"ל. $\square$

נראה ש- $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$:

נשים לב שלכל B מדידה מתקיים $|\mu(B)| \le \mu^+(B) + \mu^-(B)$ (כי $|\mu(B)| \le \max\{\mu^+(B), \mu^-(B)\}$) ולכן לכל חלוקה מדידה $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ של A נקבל

$$\sum_{n=1}^\infty |\mu(A_n)| \;\le\; \sum_{n=1}^\infty [\mu^+(A_n) + \mu^-(A_n)] \;=\; \mu^+(A) + \mu^-(A)$$

כלומר, $|\mu|(A) \le \mu^+(A) + \mu^-(A)$. מצד שני, אם $C \subset A$ כך ש- $\mu(C) \ge \mu^+(A) - \varepsilon$ אז $\{C, A\backslash C\}$ היא חלוקה של A ולכן

$$|\mu|(A) \ge |\mu(C)| + |\mu(A\backslash C)| \ge \mu^+(A) - \varepsilon + [\underbrace{\mu^+(A) - \mu(A)}_{=\mu^-(A)} - \varepsilon] = \mu^+(A) - \mu^-(A) - 2\varepsilon$$

ובסה"כ קיבלנו מש"ל. $\square$

3. נתון: μ מידה חיובית וסופית, $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה אינסופית של קבוצות מדידות עבורה $\forall i \in I \;:\; \mu(A_i) \ge \alpha > 0$.

צ"ל: שקיימת סדרת אינדקסים (שונים) $\{i_n\}_{n=1}^\infty \in I$ ש- $\bigcap_{n=1}^\infty A_{i_n} \neq \emptyset$.

פתרון: ניקח סדרה כלשהי של קבוצות מתוך המשפחה: $\{A_{i_k}\}_{k=1}^\infty$. ע"פ הנתון, $\mu(A_{i_k}) \ge \alpha > 0$ לכל $k \in \mathbb{N}$ ולכן (מדוע?) $\limsup_{k\to\infty} \mu(A_{i_k}) \ge \alpha > 0$ וע"פ האי-שוויון שהוכחנו בביתה, כיוון שהמידה μ סופית: $\mu(\limsup_{k\to\infty} A_{i_k}) \ge \limsup_{k\to\infty} \mu(A_{i_k}) \ge \alpha > 0$ ובפרט,
$\limsup_{k\to\infty} A_{i_k} \neq \emptyset$. אם ניקח איזשהו $x \in \limsup_{k\to\infty} A_{i_k}$ אז יש אינסוף k-ים ש- $x \in A_{i_k}$, ולכן יש תת-סדרה $\{A_{i_{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ עם $x \in A_{i_{k_n}}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4. צ"ל: עבור μ חיובית ו- $f : X \to [0,\infty]$ מדידה, $\int_X f\,d\mu = 0$ אם"ם $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$.

פתרון: נסמן $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$, $A_n = \{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$ עבור $n \in \mathbb{N}$ (שימו לב שקבוצות אלה מדידות). נשים לב ש- $A_n \nearrow A$ ולכן $\mu(A_n) \nearrow \mu(A)$, ומכיוון ש- $f \ge 0$, $0 \le f\chi_{A_n} \nearrow f\chi_A = f$ ולכן (ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית) $0 \le \int_{A_n} f\,d\mu \nearrow \int_X f\,d\mu$. בגלל ש- $\int_{A_n} f\,d\mu \ge \frac{1}{n}\mu(A_n)$ נסיק ש- (בדקו שכל שקילות אכן נכונה)

$$\int_X f\,d\mu = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N} \ \int_{A_n} f\,d\mu = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N} \ \mu(A_n) = 0 \iff \mu(A) = 0. \quad \square$$

5. נתון: μ חיובית ופונקציה $f : X \to [0,\infty]$ מדידה עם $\int_X f\,d\mu = \alpha < \infty$.

(**א**) צ"ל שהקבוצה $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ היא איחוד בן-מנייה של קבוצות בעלות מידה סופית.

הוכחה: לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה $A_n = \{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$ מקיימת, ע"פ אי-שוויון צ'בישב: $\mu(A_n) \le n\alpha < \infty$, ובודאי: $\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\square$

(**ב**) צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש - $\mu(\{x \in X : f(x) \ge y\}) < \varepsilon$.

פתרון: קחו את A_n מהסעיף הקודם עם $n > \frac{\alpha}{\varepsilon}$.

(**ג**) צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(A) < \delta$ אז $\int_A f\,d\mu < \varepsilon$.

פתרון: נראה קודם שעבור N גדול דיו מתקיים $\int_{\{f(x)\ge N\}} f\,d\mu < \varepsilon$. נבחין ש- (כיוון ש- $f \ge 0$, ע"פ התכנסות מונוטונית) $\alpha = \sum_{n=1}^\infty \int_{\{n-1\le f(x)<n\}} f\,d\mu$, ולכן, עבור $N \in \mathbb{N}$ גדול דיו נקבל $\int_{\{f(x)\ge N\}} f\,d\mu = \sum_{n=N}^\infty \int_{\{n-1\le f(x)<n\}} f\,d\mu < \varepsilon$ - כזנב של טור מתכנס. כעת, ניקח $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$ ונקבל שעבור כל A מדידה עם $\mu(A) < \delta$ מתקיים

$$\begin{aligned}\int_A f\,d\mu &= \int_{A\cap\{f(x)\ge N\}} f\,d\mu + \int_{A\cap\{f(x)<N\}} f\,d\mu \\ &\le \int_{\{f(x)\ge N\}} f\,d\mu + \int_A N\,d\mu \;\le\; \varepsilon + N\mu(A) < 2\varepsilon \quad \square\end{aligned}$$

$*$**6.** נתון: μ חיובית ו- ν מידה נוספת על $(X,\mathcal{M})$ ש- $|\nu|$ סופית.
צ"ל: (א) לכל $A\in\mathcal{M}$ מתקיים שאם $\mu(A)=0$ אז גם $\nu(A)=0$
אם"ם (ב) לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\mu(A)<\delta$ אז $|\nu(A)|<\varepsilon$.
הוכחה: לא (א) $\Leftarrow$ לא (ב) - ברור. נוכיח לא (ב) $\Leftarrow$ לא (א):
אם (ב) לא מתקיים אז קיים $\varepsilon>0$ וקיימת סדרת קבוצות מדידות $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש- $\mu(A_n)<\frac{1}{2^n}$ ו- $\varepsilon\le|\nu(A_n)|\le|\nu|(A_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$. נסמן $A=\limsup_{n\to\infty}A_n$; הרי $\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)<\infty$,
ועפ"י בורל קנטלי - $\mu(A)=0$. מצד שני, כיוון ש- $|\nu|$ מידה חיובית וסופית,
$\varepsilon\le\limsup_{n\to\infty}|\nu|(A_n)\le|\nu|(A)$ ולכן יש $B\subset A$ מדידה עם $|\nu(B)|>0$. כיוון ש-
$\mu(B)=0$, נקבל ש- (א) לא מתקיים. $\square$

7. נתון: μ סופית ופונקציה $\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ אדיטיבית (סופית) שלכל $\{A_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{M}$ אם $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$ אז גם $\lim_{n\to\infty}\nu(A_n)=0$.
צ"ל: ν היא מידה על $(X,\mathcal{M})$.
פתרון: תהיינה $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ זרות בזוגות, נסמן $B_n=\bigcup_{k=n}^\infty A_k$. כיוון ש- μ מידה סופית,
$\mu(B_n)=\sum_{k=n}^\infty\mu(A_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (- כזנב של טור מתכנס) ולכן גם $\nu(B_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (ע"פ ב').
בהנתן $\varepsilon>0$ נבחר n גדול דיו כך ש- $|\nu(B_n)|<\varepsilon$ ונקבל

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)=\nu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\;\cup\;B_n\right)=\sum_{i=1}^n\nu(A_i)\;+\;\nu(B_n)$$

כלומר,

$$\left|\nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)-\sum_{i=1}^n\nu(A_i)\right|<\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^\infty\nu(A_i)\triangleq\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\nu(A_i)=\nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right). \quad\square$$