

## בחינת מועד א באלגברה לינארית ב - 104171

20.7.2014

**הנחיות:** משך הבחינה 3 שעות. השימוש בכל חומר עזר **אסור בהחלט**. יש **לנמק היטב** כל תשובה.

**בהצלחה!**

1. (20 נק) יהא  $V$  מרחב וקטורי ממימד סופי מעל המרוכבים שהוא מרחב מכפלה פנימית עם המכפלה הפנימית  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . תהא  $T : V \rightarrow V$  העתקה לינארית נורמלית והיו  $v, w \in V$  ו- $\lambda, \theta \in \mathbb{C}$  הראו כי:

(א) אם  $T(v) = 0$  אם ורק אם  $T^*(v) = 0$  (העתקה הצמודה ל- $T$ ).

(ב)  $T - \lambda I$  נורמלית.

(ג) אם  $T(v) - \lambda v = 0$  אז  $T^*(v) - \bar{\lambda}v = 0$ .

(ד) אם  $T(v) - \lambda v = 0$  ו- $T(w) - \theta w = 0$  ו- $\lambda \neq \theta$  אז  $\langle v, w \rangle = 0$ .

2. (16 נק) יהא  $V = \mathbb{C}^2$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$  עם המכפלה הפנימית הבאה (אין צורך לבדוק שאכן מדובר במכפלה פנימית):

$$\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = \operatorname{Re}(z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2)$$

לכל  $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ .

מצאו בסיס אורתונורמלי לתת מרחב  $\operatorname{Sp}\{(1, i), (i, -1)\}^\perp$ .

3. (16 נק)

(א) מצאו את הדרגה והסיגנטורה של התבנית הריבועית :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 7x_2^2 - 10x_2x_3 + 8x_3^2$$

(ב) הראו כי התבנית  $h(v, w) = f(v, w) + \langle v, w \rangle$  היא מכפלה פנימית על  $\mathbb{R}^3$ , כאשר  $v, w \in \mathbb{R}^3$  ו- $f(\cdot, \cdot)$  היא התבנית הסימטרית המתאימה ל- $q(\cdot, \cdot)$  ו- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית על  $\mathbb{R}^3$ .

4. (16 נק) יהא  $V$  מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל  $\mathbb{C}$  ותהא  $T : V \rightarrow V$  טרנספורמציה לינארית.

(א) הראו כי  $\text{Ker} T = \text{Ker} T^* T$ .

(ב) הראו כי אם  $T$  היא העתקה נורמלית ו- $W$  הוא תת מרחב של  $V$  שאינווריאנטי ל- $T$  (זאת אומרת,  $T(W) \subseteq W$ ), אז  $W^\perp$  אינווריאנטי ל- $T^*$ .

5. (16 נק)

(א) מצאו את צורת ז'ורדן של מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{C})$  שהפולינום האופייני שלה שווה לפולינום המינימלי שלה.

(ב) תהא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$

מצאו מטריצה הפיכה  $P \in M_4(\mathbb{C})$  כך שהמטריצה  $P^{-1}AP$  היא בצורת ז'ורדן.

6. (16 נק) נסחו והוכיחו את אי שוויון קושי-שוורץ.