אלגברה ב' – סדנה 4

מרחבי מכפלה פנימית

הגדרות

פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \longrightarrow \mathbb{C}$ נקראת מכפלה פנימית אם היא:

- <u>לינארית ברכיב הראשון</u>

$$\langle\alpha\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle = \alpha\langle\vec{u},\vec{w}\rangle + \langle\vec{v},\vec{w}\rangle$$

- <u>הרמיטיות</u>

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \overline{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle}$$

- <u>חיוביות</u>

$$\forall\vec{v}\in V, \vec{v}\neq\vec{0}, \qquad \langle\vec{v},\vec{v}\rangle > 0$$

וקטורים $\vec{u},\vec{v}$ נקראים <u>ניצבים</u> (אורתוגונליים) אם $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$.

וקטורים $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ נקראים <u>אורתוגונליים</u> אם $\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$.

וקטורים $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ נקראים אורתונורמליים אם $\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ i & i \neq j \end{cases}$.

תרגיל

הוכיחו כי לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$, $\vec{v}$ וקטור יחידה ($\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \|\vec{v}\|^2 = 1$) מתקיים:

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\underbrace{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{v}}_{P_{\vec{v}}(\vec{u})}, \vec{v}\rangle$$

פתרון:

מלינאריות:

$$\langle\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle\underbrace{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}_{1} = \langle\vec{u},\vec{v}\rangle$$

הגדרנו: $P_{\vec{v}}: V \longrightarrow sp\{\vec{v}\}$.

באופן כללי:

$$W = sp\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$$

$$P_W(\vec{v}) = \langle\vec{v},\vec{w}_1\rangle\vec{w}_1 + \langle\vec{v},\vec{w}_2\rangle\vec{w}_2 + \cdots + \langle\vec{v},\vec{w}_m\rangle$$

תהליך גרהם-שמידט

יהי $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ בסיס לממ״פ V, אזי קיים בסיס א״נ ל-V, $E=\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ כך שלכל $1\le k\le n$ מתקיים $sp\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k\}=sp\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$.

הוכחה:

הוכחה באינדוקציה על k.

<u>עבור $k=1$:</u> נבחר את $\vec{e}_1=\frac{\vec{v}_1}{\sqrt{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}}$.

אכן $\{\vec{e}_1\}$ קבוצה א״נ:

$$\|\vec{e}_1\|=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle=\left\langle\frac{\vec{v}_1}{\sqrt{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}},\frac{\vec{v}_1}{\sqrt{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}}\right\rangle=\frac{1}{\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle}\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle=1$$

<u>נניח עבור k ונוכיח עבור $k+1$:</u>

$$\vec{e}_k'=\vec{v}_k-P_{\underbrace{sp\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k\}}_{W}}(\vec{v}_k)$$

(איך הגדרנו את זה? נניח לשנייה $\vec{e}_k'=\vec{v}_k-\vec{u}$, אז צריך לדרוש $\langle\vec{v}_k,\vec{e}_j\rangle=\langle\vec{u},\vec{e}_k\rangle$)

למעשה אם $\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_m\}$ בסיס א״נ ל-W, אז $P_W(\vec{v})=\sum_{i=1}^{m}\langle\vec{v},\vec{b}_i\rangle\vec{b}_i$, לכן

$$\vec{e}_k'=\vec{v}_k-\sum_{i=1}^{k}\langle\vec{v}_k,\vec{e}_i\rangle\vec{e}_i$$

ונגדיר:

$$\vec{e}_k=\frac{\vec{e}_k'}{\sqrt{\langle\vec{e}_k',\vec{e}_k'\rangle}}$$

טענה

יהא V ממ״פ, $W \subseteq V$, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ בסיס א״נ ל-W. אזי $\|\vec{v}-P_W(\vec{v})\| = \min_{\vec{w}\in W}\|\vec{v}-\vec{w}\|$.

כיוון ש-$\langle P(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$, נקבל כי $\langle v - P_W(\vec{v}), \vec{w}\rangle = 0$ לכל $\vec{w} \in W$.

הוכחה:

יהא $\vec{w} \in W$, נראה ש-$\|\vec{v}-P_W(\vec{v})\| \geq \|\vec{v}-\vec{w}\|$.

נעלה בריבוע:

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}-P_W(\vec{v})+P_W(\vec{v})-\vec{w}\|^2 \\
&= \langle \vec{v}-P_W(\vec{v})+P_W(\vec{v})-\vec{w}, \vec{v}-P_W(\vec{v})+P_W(\vec{v})-\vec{w}\rangle \\
&= \langle \vec{v}-P_W(\vec{v}), \vec{v}-P_W(\vec{v})\rangle + \underbrace{\left\langle \vec{v}-P_W(\vec{v}), \underbrace{P_W(\vec{v})-\vec{w}}_{\in W}\right\rangle}_{=0} \\
&+ \underbrace{\left\langle \underbrace{P_W(\vec{v})-\vec{w}}_{\in W}, \vec{v}-P_W(\vec{v})\right\rangle}_{=0} + \langle P_W(\vec{v})-\vec{w}, P_W(\vec{v})-\vec{w}\rangle \\
&= \|\vec{v}-P_W(\vec{v})\|^2 + 0 + 0 + \|P_W(\vec{v})-\vec{w}\|^2 \geq \|\vec{v}-P_W(\vec{v})\|
\end{aligned}$$

נשים לב כי $P_W(\vec{v}) = \vec{w}$ נותן שוויון, לכן $\|\vec{v}-P_W(\vec{v})\| = \min_{w\in V}\|\vec{v}-\vec{w}\|$.

תרגיל

הוכיחו כי אם V ממ״פ, $\langle \vec{u}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$ לכל $\vec{w} \in V$ אז $\vec{u} = \vec{v}$.

פתרון:

מהעברת אגלים נקבל כי $\vec{u}-\vec{v}$ ניצב ל-$\vec{w}$ לכל $\vec{w} \in V$. בפרט $\vec{u}-\vec{v}$ ניצב לעצמו!

כלומר $\langle \vec{v}-\vec{u}, \vec{v}-\vec{u}\rangle = 0$, לכן מחיוביות $\vec{u} = \vec{v}$.

לבית

אם $S, T: V \longrightarrow V$ לינאריים ו-$\langle T(\vec{u}), \vec{v}\rangle = \langle S(\vec{u}), \vec{v}\rangle$ אז $T = S$.

לחשוב האם $\langle S(\vec{u}), \vec{u}\rangle = \langle T(\vec{u}), \vec{u}\rangle$ לכל $\vec{u} \in W$ גורר ש-$T = S$?

תרגיל

יהא $V=\mathbb{C}_n[x]$, $z_1,\dots,z_{n+1}\in\mathbb{C}$ מספרים שונים, נגדיר:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{i=1}^{n+1}p(z_i)\overline{q(z_i)}$$

הוכיחו כי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מ"פ על V.

פתרון:

- <u>לינאריות ברכיב הראשון:</u>

$$\langle \alpha p(x)+q(x),r(x)\rangle=\sum_{i=1}^{n+1}\big(\alpha p(z_i)+q(z_i)\big)\overline{r(z_i)}=\alpha\sum_{i=1}^{n+1}p(z_i)\overline{r(z_i)}+\sum_{i=1}^{n+1}q(z_i)\overline{r(z_i)}$$
$$=\alpha\langle p(x),r(x)\rangle+\langle q(x),r(x)\rangle$$

- <u>הרמיטיות:</u>

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{i=1}^{n+1}p(z_i)\overline{q(z_i)}=\sum_{i=1}^{n+1}\overline{q(z_i)\overline{p(z_i)}}=\overline{\langle q(x),p(x)\rangle}$$

- <u>חיוביות:</u>

$$\langle p(x),p(x)\rangle=\sum_{i=1}^{n+1}p(z_i)\overline{p(z_i)}=\sum_{i=1}^{n+1}|p(z_i)|^2\overset{(*)}{\geq}0$$

(*) כי כל המחוברים אי-שליליים

ואם הסכום הוא 0 אז $|p(z_i)|^2=0$ לכל i.

לכן $p(z_i)=0$ לכל $i=1,\dots,n+1$.

$p(x)$ פולינום ממעלה $\geq n$ שמתאפס ב-$n+1$ נקודות $\Leftarrow$ $p(x)\equiv 0$.

תרגיל

יהא $V=\mathbb{C}_2[x]$ ותהא:

$$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1)+p(0)q(0)+p(1)q(1)$$

מכפלה פנימית, מצאו בסיס א"נ ל-V.

פתרון:

נשים לב כי $\{(x-1)(x+1),x(x+1),x(x-1)\}$ קבוצה אורתוגונלית ביחס ל-$\langle\cdot,\cdot\rangle$ מגודל המימד, לכן לקבלת בסיס יש לנרמל.

$$\langle (x-1)(x+1),(x-1)(x+1)\rangle = 0\cdot 0+(-1)(-1)+0\cdot 0=1$$

$$\langle x(x+1),x(x+1)\rangle = 0\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 2=4$$

$$\langle x(x-1),x(x-1)\rangle = 2\cdot 2+0\cdot 0+0\cdot 0=4$$

ולכן $\left\{(x-1)(x+1),\frac{x(x+1)}{2},\frac{x(x-1)}{2}\right\}$ בסיס א"נ ל-V.

תרגיל

הראו כי אם $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\in\mathbb{R}^n$ עמודות של מטריצה A, אז מתקיים $(A^tA)_{ij}=\left\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\right\rangle$.

פתרון לא פורמלי:

$$\begin{pmatrix} - & \vec{v}_1 & - \\ - & \vec{v}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{v}_n & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$(A^tA)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(A^t)_{ik}(A)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(A)_{ki}(A)_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(v_i)_k\left(v_j\right)_k=\langle\vec{v}_i,\vec{v}_k\rangle$$

תרגיל

יהא $V = M_2(\mathbb{R})$ עם המ״פ $\langle A,B\rangle = tr(B^tA)$.

יהא $W = sp\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\}$.

מצאו את המרחק של $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ מ-W ומ-$W^\perp$.

פתרון :

למעשה :

$$tr(B^tA) = \sum_{j=1}^{n}(B^tA)_{jj} = \sum_{i,j=1}^{n}(B^t)_{ji}A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}(B)_{ij}(A)_{ji}$$

אם $\varphi: V \longrightarrow W$ איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle = \langle \varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2)\rangle$$

ואם $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)$ א״נ ב-W אז $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ א״נ ב-V.

לכן $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס א״נ ל-V.

נמצא בסיס א״נ ל-W באמצעות תהליך גרהם-שמידט :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right) \overset{(*)}{=} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 = 6$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2' = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\cdot 6\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{e}_2', \vec{e}_2'\rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 3$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{\sqrt{\langle \vec{e}_2', \vec{e}_2'\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

לכן בסיס א״נ ל-W :

$$\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}\right\}$$

נשים לב כי $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in W$, ולכן המרחק הוא 0 ($P_W\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$), והמרחק מ-$W^\perp$ הוא $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3}$

בכל מקרה, $P_W(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w}_1\rangle\vec{w}_1 + \langle \vec{v}, \vec{w}_2\rangle\vec{w}_2 + \cdots$.

חלק 2

מצאו את המרחק של $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ מ-W ומ-$W^\perp$.

פתרון:

$$P_W\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 12\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

הערה

דרך נוספת להגדיר את P_W בתור הטלה על W במקביל ל-$W^\perp$. ואכן הנוסחה שמצאנו

$$P_W(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{v}, \vec{w}_i\rangle\vec{w}_i$$

שולחת כל $\vec{v}_i$ לעצמו מא"נ $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j\rangle = \delta_{ij}$, וכל $\vec{w} \in W^\perp$ ל-0 (כל המקדמים מתאפסים).

הערה

המ"פ הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$ מאוד "פשוטה לחישוב", לכן רוצים "לעבוד" איתה תמיד.

כאשר יש מ"פ אחרת, מה זה בסיס א"נ ביחס אליה?

בסיס שבקידוד שלו (במעבר לוקטורי קואורדינטות) התמונה של איברי הבסיס א"ג ביחס למ"פ "הסטנדרטית": אם $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ א"נ אז:

$$\left\langle \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i}_{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i}_{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}} \right\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i}_{\left\langle \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right\rangle}$$