סיכום מד"ר

מרצה: מיכאל ז'יטומירסיקי
נכתב ע"י: אדריאן קיריש
נערך ע"י: תומר שטח

28 ביוני 2011

תוכן עניינים

1 משפט קיום ויחידות 3
2 משוואות אוטונומיות 3
2.1 תאוריה מוחלטת של משוואות אוטונומיות 4
2.2 מקרים של נקודות סינגולריות 4
2.3 חישוב t^-, t^+ על ידי פונקציה הפוכה 5
2.4 כאשר אין נקודות סינגולריות 6
2.5 תמונה פאזית 6
2.6 אלגוריתם כללי לפתרון משוואות אוטונומיות 7
3 משוואות אוטונומיות מסדר 2 (בעיות בשני גופים) 7
3.1 משוואת האנרגיה 7
3.2 בעיית הטיל 8
3.3 משפט קיום ויחידות עבור מד"ר מסדר 2 8
3.4 תכונות של מד"ר אוטונומי מסדר 2 9
3.5 בעיית מטוטלת / נדנדה (שיכולה להתהפך) 10
4 טכניקות לפתירת מד"ר לא אוטונומי 11
4.1 משוואה לינארית הומוגנית מסדר 1 11
4.2 משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר 1 11
4.3 משוואות עם משתנים נפרדים 12
4.4 משוואות הומוגניות מהצורה $x'(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$ 13
4.5 משוואות בישר 13
4.6 הצבות אחרות לפי תרגילים 14
5 מערכת משוואות לינאריות 15
5.1 המקרה הכללי 15
5.2 מטריצות לכסינות מעל $\mathbb{C}$ 15
5.3 מטריצות שאינן לכסינות 16
5.4 מערכת לינארית לא הומוגנית 17
6 תמונות פאזיות של מערכת משוואות 18
6.1 סוגי תמונות פאזיות 18
6.1.1 תמונה פאזית אוכף (saddle) 18
6.1.2 תמונה פאזית צומת יציב (stable node) 19
6.1.3 תמונה פאזית צומת לא יציב (unstaible node) 20
6.1.4 תמונה פאזית מערבולת (focus) 21
6.1.5 תמונה פאזית מרכז (center) 22
6.2 מקרי קיצון 22
6.3 לינאריזציה של פתרון 24
7 מד"ר מסדר K 24
7.1 פתרון מד"ר לינארי מסדר K (עם מקדמים קבועים) 25
7.2 משוואות מסדר גבוה לא הומוגני 26

1 משפט קיום ויחידות

בהנתן

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f(t,x(t)) \quad (1)\\
x(t_0) &= x_0 \quad (2)
\end{aligned}
$$

האם קיים פתרון של (1) המקיים את (2)?

משפט 1.1 משפט הקיום והיחידות
אם קיימת קבוצה <u>פתוחה</u> U כך שמתקיים $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ומתקיימים התנאים הבאים:

- $f \in \mathbb{C}^0(U)$
- $f(t,x)$ גזירה בקבוצה U לפי x.
- $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \in \mathbb{C}^0(U)$ אז:

אז:

- קיום: למשוואה $x'(t) = f(t,x(t))$ יש פתרון המקיים את תנאי ההתחלה אם $(t_0,x_0) \in U$.
- יחידות: נניח $x(t)$ פתרון של (1) המקיים את תנאי ההתחלה (2) מוגדר בקטע $I=(a,b)$ ומתקיים $t_0 \in (a,b)$ וגם $\tilde{x}(t)$ פתרון של (1) המקיים את תנאי ההתחלה (2) ומוגדר בקטע $\tilde{I} = \left(\tilde{a},\tilde{b}\right)$ ומתקיים $t_0 \in \left(\tilde{a},\tilde{b}\right)$ אז לכל $t \in I \cap \tilde{I}$ מתקיים $x(t) = \tilde{x}(t)$.

הערה: ללא תנאי התחלה יהיו אינסוף פתרונות עם תנאי התחלה שונים. גם אם תנאי התחלה יהיו אינסוף פתרונות כי פתרון מוגדר גם על פי תחום הגדרתו.

2 משוואות אוטונומיות

משוואות מהצורה

$$x'(t) = f(x(t))$$

למה 2.1 למת הזזת זמן
אם $x'(t) = f(x(t))$ ופתרון $x(t)$ מוגדר בקטע (a,b), אז לכל $r \in \mathbb{R}$ הפונקציה $\tilde{x}(t) = x(t-r)$ היא גם פתרון של אותה משוואה אוטונומית בקטע $(a+r,b+r)$.

משפט 2.2 משפט למשוואות אוטונומיות
אם $f(x) \in \mathbb{C}^1(U)$, כאשר U קבוצה פתוחה (תנאים אלו מבטיחים פתרון לפי משפט הקיום), ואם $x(t)$ פתרון של $x'(t) = f(x(t))$ כך שגרף של $x(t)$ מוכל בקבוצה U וגם $x(t) \neq const$ אז $x'(t) \neq 0$ לכל $t \in (a,b)$. כלומר $x(t)$ פונקציה מונוטונית.
רעיון ההוכחה: אם $x'(t_0) = 0$ אז קיים פתרון קבוע בנקודה t_0 כלשהי שבה הנגזרת מתאפסת וזו סתירה למשפט היחידות בקטע.

<u>**הרחבת פתרון**</u>:

נכון לכל מד"ר מסדר 1, ולא רק לאוטונומי.

משפט 2.3 אם $x(t)$ פתרון של המד"ר $x'(t) = f(t, x(t))$ אז מוגדר בקטע (a, b) ומתקיים $\lim_{t\to b^-} x(t) = B \neq \pm\infty$ וגם $f(t, x(t))$ מקיימת את תנאי משפט הקיום בסביבה של (b, B) אז קיימת הרחבה ימנית של הפתרון כלומר $t^+ > b$. כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך שקיים פתרון בקטע $(a, b+\varepsilon)$.

הערה: באופן אנלוגי להרחבה שמאלית.

2.1 תאוריה מוחלטת של משוואות אוטונומיות

הגדרה 2.4 נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ תיקרא סינגולרית (קריטית) של משוואה $x'(t) = f(x(t))$ אם $f(x_0) = 0$.

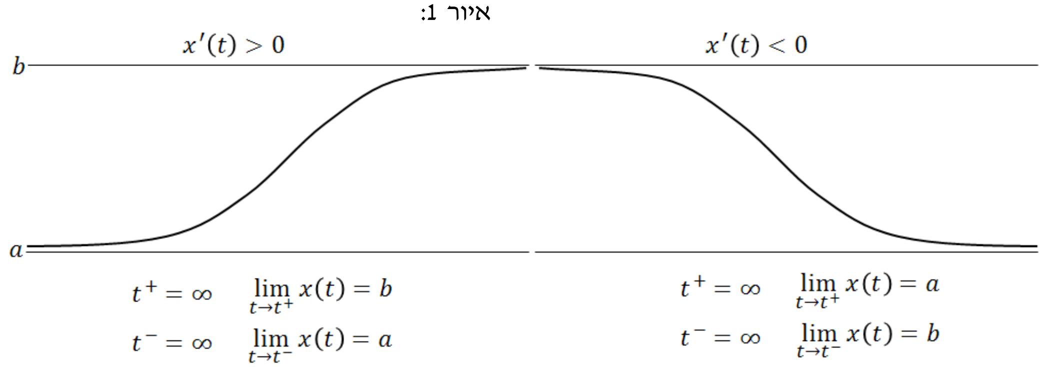
אם x_0 היא נקודה סינגולרית אז $x(t) \equiv x_0$ הוא פתרון של $x'(t) \equiv f(x(t))$. (אחרת נקבל סתירה למשפט הקיום והיחידות)

הערה: אם $x(t)$ אוטונומית ומתקיים $a < b$ שתי נקודות סינגולריות ואין עוד נקודות סינגולריות בין a ל-b וגם $x_0 \in (a, b)$ אז הפתרון יקיים $a \le x(t) \le b$ וגם $x(t)$ תהיה מונוטונית בקטע זה.

2.2 מקרים של נקודות סינגולריות

1. אם $x(t)$ בין שתי נקודות סינגולריות a, b אז קיימות שתי אופציות:

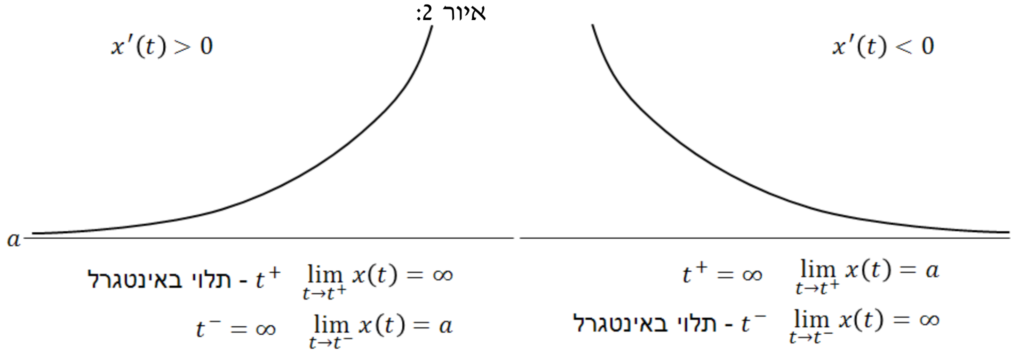
איור 1:



2. אם $x\left(t\right)$ עם נקודה סינגולרית אחת a אז קיימות ארבע אופציות:

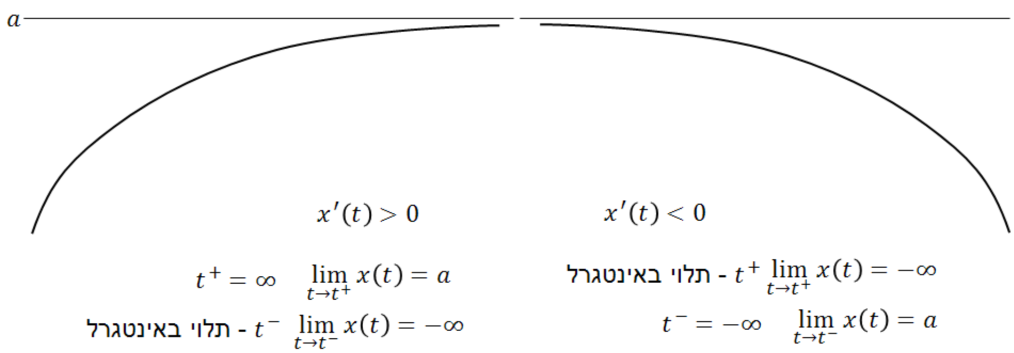
(א) אם $x_0>a$ אז:

איור 2:



(ב) אם $x_0<a$ אז:

איור 3:



<u>נקודות פיתול:</u>

נקודות שבהן הנגדרת השנייה מתאפסת כלומר $x''\left(t_0\right)=f'\left(x\left(t\right)\right)=0$

דוגמא:

$$f\left(x\right)=\sin\left(x\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\cos\left(x\right)$$

ונוכל למצוא $x\left(t\right)$ שהן נקודות פיתול. מציאת הזמן t על ידי הצבה של $x\left(t\right)$ המבוקש באינטגרל.

2.3 חישוב t^-,t^+ על ידי פונקציה הפוכה

אם

$$t'\left(x\right)=\frac{1}{x'\left(t\right)}\Rightarrow t'\left(x\right)=\frac{1}{f\left(x\right)}$$

ואז נקבל:

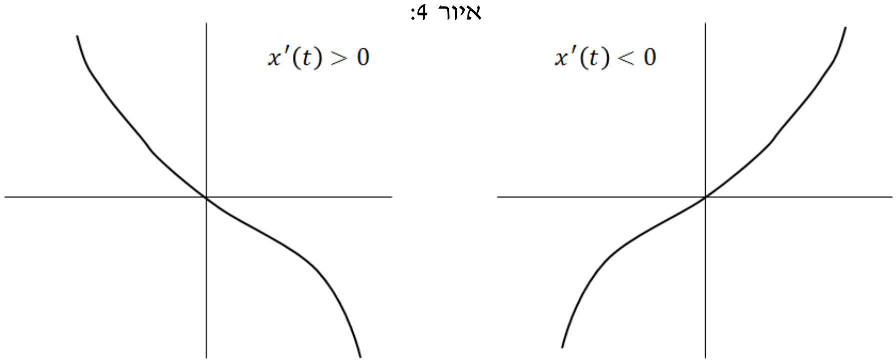
$$t\left(x\right)-t\left(x_0\right)=\int_{x_0}^{x}t'\left(s\right)ds=\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{f\left(s\right)}$$

ואז בנוגע לקיום t^+,t^- משאיפים את x לאינסוף ובודקים אם $\int_{x_0}^{\infty}\frac{ds}{f(s)}$ מתכנס. מציאת t ספציפי עבור x מסוים זאת הצבה רגילה באינטגרל.

2.4 כאשר אין נקודות סינגולריות

אנו יודעים כי $x\left(t\right)$ מונוטונית ולכן תמיד מתקיים:

איור 4:



$\lim_{t\to t^+}x(t)=-\infty$ t^+ - תלוי באינטגרל

$\lim_{t\to t^-}x(t)=\infty$ t^- - תלוי באינטגרל

$\lim_{t\to t^+}x(t)=\infty$ t^+ - תלוי באינטגרל

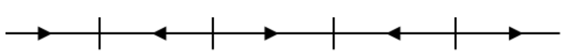
$\lim_{t\to t^-}x(t)=-\infty$ t^- - תלוי באינטגרל

2.5 תמונה פאזית

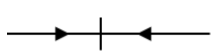
נסמן על ישר נקודות סינגולריות של $x'\left(t\right)$ ואת סימן הנגזרת בכל חלק כי מובטח שבין כל שתי נקודות סינגולריות הפונקציה מונוטונית.

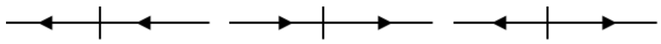
דוגמא: נניח עבור $x'\left(t\right)=f\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$ נקבל:

איור 5:



הגדרה 2.5 נקודה סינגולרית תקרא:

- יציבה אם התמונה הפאזית שלה תראה כך: 
- לא יציבה אם היא אחת מהתמונות הפאזיות הבאות:



איור 6:

2.6 אלגוריתם כללי לפתרון משוואות אוטונומיות

1. מצאו נקודות סינגולריות.
2. ציירו תמונה פאזית עם כיוונים.
3. אתרו נקודות סינגולריות יציבות ולא יציבות.
4. גזור את $f\left(x\right)$ למצוא נקודות פיתול.
5. מצא פונקציה הפוכה

$$t\left(x\right)-t\left(x_{0}\right)=\int_{x_{0}}^{x}\frac{ds}{f\left(s\right)}$$

6. צייר גרף לפי המקרים של הנקודות הסינגולריות

3 משוואות אוטונומיות מסדר 2 (בעיות בשני גופים)

מד"ר אוטונומי מסדר 2, כלומר הכוח תלוי במקום בלבד. הצורה הכללית הינה:

$$x''=f\left(x\right)$$

3.1 משוואת האנרגיה

אם $x\left(t\right)$ פתרון של $x''=f\left(x\right)$ אז משוואת האנרגיה היא:

$$\frac{\left(x'\left(t\right)\right)^{2}}{2}-\int_{x_{0}}^{x\left(t\right)}f\left(s\right)ds=const$$

כאשר הקבוע הוא האנרגיה הכללית של המערכת.

משפט 3.1 חוק האנרגיה:
לכל משוואה $x''=f\left(x\right)$ ולכל פתרון שלה האנרגיה הכוללת של הפתרון היא קבוע.

הוכחה: נגזור את משוואת האנרגיה ונקבל אפס. מסקנה: הפונקציה קבועה. ■

חוק הגרוויטציה של ניוטון (טיל שנשלח לחלל):

$$\begin{aligned}x''\left(t\right) &= -\frac{k}{x^{2}}\\ k &> 0\end{aligned}$$

3.2 בעיית הטיל

המהירות הקריטית הינה: $v_{0,crit}=\sqrt{2gR}$

- הטיל יחזור אם ורק אם $v_0<\sqrt{2gR}$.
- הטיל לא יחזור אם ורק אם $v_0\geq\sqrt{2gR}$.

משפט 3.2 אם הטיל לא חוזר אז מתקיים: $\lim_{t\to\infty}x\left(t\right)=\infty$.

מקרה כללי: אם $x''=-f\left(x\right)$ וגם $x\left(t\right)\underset{t\to\infty}{\to}\infty$ אז האינטגרל המוכלל $\int_{x_0}^{\infty}f\left(s\right)ds$ מתכנס.

אם $\int_{x_0}^{\infty}f\left(s\right)ds=\infty$ אז $x\left(t\right)\underset{t\to\infty}{\nrightarrow}\infty$.

הערה: נוסחת אנרגיה ניתנת לנו משוואה אוטונומית מסדר 1 אז אפשר לחשב זמני t בנקודה שבה $x'\left(t\right)=0$ ובנקודות ביניים. (לפי פונקציה הפוכה)

3.3 משפט קיום ויחידות עבור מד"ר מסדר 2

משפט 3.3 משפט הקיום והיחידות:
נניח שקיים $x''=f\left(t,x,x'\right)$ כאשר $x=x\left(t\right)$. אם מתקיים:

- $f\left(t,x,x'\right)$ פונקציה גזירה.
- הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x'}$ הן פונקציות רציפות בתחום $f\in\mathbb{C}^1\left(U\right)$. כאשר U קבוצה פתוחה

אז:

- לכל תנאי התחלה

$$\begin{aligned}x\left(t_0\right)&=x_0\\x'\left(t_0\right)&=v_0\end{aligned}$$

כך שמתקיים $\left(t_0,x_0,v_0\right)\in U$ אז יש פתרון המקיים את תנאי ההתחלה.

- אם $x\left(t\right),\widetilde{x}\left(t\right)$ פתרונות המקיימים את תנאי ההתחלה, וגם $\left\{t,x,x'\left(t\right)\right\}_{t\in I}$ גרף של $x\left(t\right)$ ב-$\mathbb{R}^3$ וגם $\left\{t,\tilde{x},\tilde{x}'\left(t\right)\right\}_{t\in\tilde{I}}$ גרף של $\tilde{x}\left(t\right)$ ב-$\mathbb{R}^3$ הן עקומות ב-U אז $x\left(t\right)=\tilde{x}\left(t\right)$ לכל $t\in I\cap\tilde{I}$.

משפט 3.4 משפט ההרחבה:
עבור משוואה מהצורה $x''=f\left(t,x,x'\right)$ ומתקיים $f\in\mathbb{C}^1\left(U\right)$ ואם $t\in\left(a,b\right)$. $x\left(t\right)$ פתרון עם גרף בקבוצה U ואם קיימים וסופיים הגבולות:

$$\lim_{t\to b}x\left(t\right),\ \lim_{t\to b}x'\left(t\right)$$

אז יש הרחבה ימנית.(הרחבה שמאלית באופן אנלוגי)

3.4 תכונות של מד"ר אוטונומי מסדר 2

1. הזזת זמן: גם כאן בדומה למשוואות אוטונומיות מסדר 1 מתקיימת למת הזזת הזמן. אם $x\left(t\right)$ פתרון בקטע $\left(a,b\right)$ אז גם $x\left(t+r\right)$ פתרון לכל $r\in\mathbb{R}$ בקטע $\left(a+r,b+r\right)$.

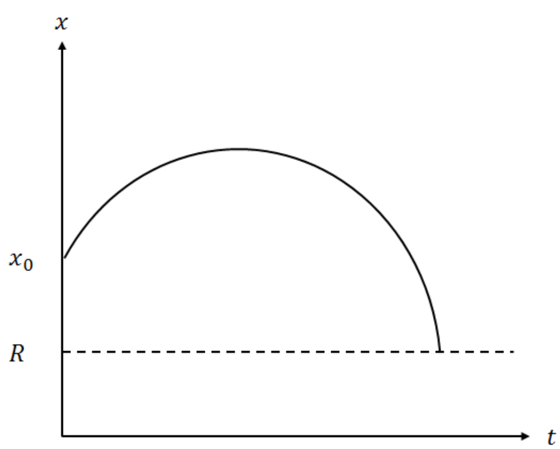
2. הפיכת זמן: אם $x\left(t\right)$ פתרון של $x''=f\left(x\right)$ אז גם $x\left(-t\right)$ פתרון.

משפט 3.5 סימטריה עבור $x''=f\left(x\right)$, $f\left(x\right)\in\mathbb{C}^{1}\left(\mathbb{R}\right)$
אם $x\left(t\right)$ פתרון כך שמתקיים $x'\left(t_{1}\right)=0$ אז $x\left(t_{1}+t\right)=x\left(t_{1}-t\right)$ לכל t כך ש$x\left(t_{1}+t\right),x\left(t_{1}-t\right)$ מוגדרים.

למה 3.6 אם $x\left(t\right)$ מוגדר לכל t ויש סימטריה לפי t_{1} וגם t_{2} כאשר $t_{1}<t_{2}$ אז $x\left(t\right)$ פונקציה מחזורית עם מחזור $2\left(t_{1}-t_{2}\right)$.
שיטת הוכחה: לשחק עם הגדרת סימטריה עבור t_{1},t_{2}.

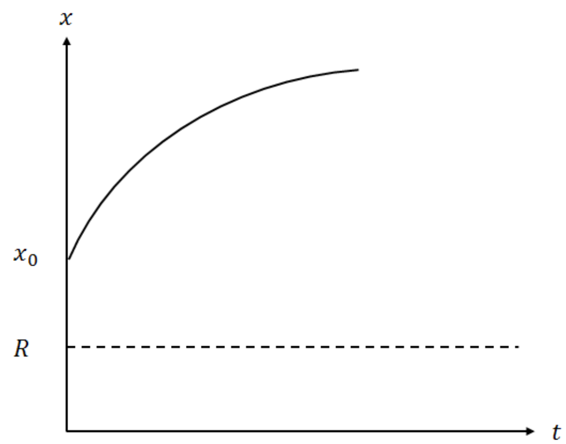
משפט 3.7 בבעיה של שני גופים בישר יש רק שני מקרים:

1. הגוף יחזור והגרף יראה:



איור 7:

2. הגרף לא יחזור והגרף יראה:



איור 8:

הערה: באופן כללי עבור מערכת מהצורה

$$\begin{aligned} x''(t) &= -f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \\ x'(t_0) &= v_0 \end{aligned}$$

אז מתקיימים אחד מהשניים:

1. $v_0 \geq \sqrt{2\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx} \iff x(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty$
2. $v_0 < \sqrt{2\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx} \iff$ הגוף חוזר

הערה: אם $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ אינו מתכנס רק מקרה 2 יתכן כלומר הגוף יחזור כי מניחים v_0 סופי.

3.5 בעיית מטוטלת / נדנדה (שיכולה להתהפך)

הבעיה הכללית היא:

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= -\frac{g}{l}\sin(\theta(t)) \\ \theta'(0) &= v_0 \\ \theta(0) &= \theta_0 \end{aligned}$$

כאשר v_0 היא מהירות זוויתית. נהוג לסמן $v_0 > 0$ ובהתאם לכך לבחור את כיוון הציר.
משוואת האנרגיה:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\theta'(t))^2 - \frac{g}{l}\cos\theta &= \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{g}{l}\cos\theta_0 \\ v_{0,crit} &= \sqrt{\frac{2g}{l}(1+\cos\theta_0)} \end{aligned}$$

משפט 3.8 מטוטלת

- אם $v_0 > v_{0crit}$ אז המטוטלת תתהפך.
- אם $v_0 < v_{0crit}$ אז המטוטלת לא תתהפך
- אם $v_0 = v_{0crit}$ אז כאשר $t \to \infty$ נקבל $\theta(t) \to \infty,\ \theta'(t) \to 0$

4 טכניקות לפתירת מד"ר לא אוטונומי

4.1 משוואה לינארית הומוגנית מסדר 1

משוואה מהצורה:

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t)$$

פתרון של משוואה מהצוקה הזו ניתן על ידי:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s) ds}$$

4.2 משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר 1

משוואה מהצורה:

$$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

פתרון בעזרת וריאציה של קבוע.

משפט 4.1 יש פתרון של $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ מהצורה $x(t) = c(t) \cdot e^{At}$

שיטת פתרון: תחילה נמצא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית מהצורה:

$$x(t) = c(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s) ds}$$

נסמן:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

ואז נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית:

$$a(t) \cdot x(t) + b(t) \overset{def}{\equiv} x'(t) = c'(t)\, e^{A(t)} + c(t) \cdot e^{A(t)} \cdot a(t)$$

נציב $x(t) = c(t) \cdot e^{A(t)}$ ונקבל:

$$\begin{aligned} a(t) \cdot c(t) \cdot e^{A(t)} + b(t) &= c'(t)\, e^{A(t)} + c(t) \cdot e^{A(t)} \cdot a(t) \\ b(t) &= c'(t) \cdot e^{A(t)} \\ c'(t) &= b(t) \cdot e^{-A(t)} \\ c(t) &= \int b(t) \cdot e^{-A(t)} + D \end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה במשוואה המקורית ונקבל פתרון.

4.3 משוואות עם משתנים נפרדים

משוואות מהצורה:

$$x'(t) = a(t) \cdot b(x(t))$$

שיטה לפתרון: לפי הסימונים של לייבניץ:

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot b(x) \Rightarrow \int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)\, dt + c$$

לא לשכוח לוודא ש־$b(x)$ לא מתאפס בתחום.

משפט 4.2 תהי $A(t)$ כך שמתקיים $A'(t) = a(t)$ וגם $B(x)$ כך שמתקיים $B'(x) = \frac{1}{b(x)}$ אז:

- אם $x(t)$ פתרון אז $A(t) - B(x) = const$
- אם $A(t) - B(x) = const$ אז $x(t)$ פתרון.

הערה: המשפט נכון רק אם $b(t)$ לא מתאפס.

הערה: יש לשים לב במשוואה פרידה באלו נקודות $b(x)$ מתאפסת כי אלו הנקודות הסינגולריות שלנו והן רומזות על התחום בו $x(t)$ נמצא בהתאם לתנאי התחלה וזה מבטיח לנו גם ש$x(t)$ מונוטונית בתחום זה ומאפשר לנו לפתור את האינטגרלים ולהסיק מידע על הגרף.
וגם החלק $a(t)$ מתאפס זה לא אומר כלום על התחום שבו $x(t)$ מוגדר.

דרך נוספת לרשום כדי להסיק מידע על מה קורה כאשר $t \to \pm\infty$ או $x \to \pm a$ או משהו בסגנון:

$$\int_{x(0)}^{x} \frac{dy}{b(y)} = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

ואז ניתן לקבוע לפי התכנסות/התבדרות האינטגרלים. ישנן המון קבוצות מד"ר שבעזרת הצבה ניתן להעביר משלוש הצורות הנ"ל.

4.4 משוואות הומוגניות מהצורה $x'(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$

שיטת פתרון: הצבה של

$$y(t) = \frac{x(t)}{t}$$

ואז נקבל:

$$y' = \frac{x'(t) \cdot t - x(t)}{t^2}$$

נבודד ונציב חזרה ונקבל:

$$y' = \frac{f(y) - y}{t}$$

וזו משוואה פרידה.

4.5 משוואות בישר

משוואות מהצורה

$$x'(t) = \frac{a_{11}x + a_{12}t + b_1}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}$$

שיטה לפתרון: נציב

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + \alpha \\ t &= \tilde{t} + \beta \end{aligned}$$

ונקבל:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{a_{11}(\tilde{x} + \alpha) + a_{12}\left(\tilde{t} + \beta\right) + b_1}{a_{21}(\tilde{x} + \alpha) + a_{22}\left(\tilde{t} + \beta\right) + b_2}$$

ונדרוש α, β כך שיאפסו את b_1, b_2. כלומר נחפש α, β כך שיתקיים:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$$

נסמן את המטריצה A.

- אם מתקיים $\det A \neq 0$ נפתור את המשוואה הזו ונמצא את α, β.
- אם מתקיים $\det A = 0$ אז השורות תלויות לינארית, נוציא את הגורם המשותף ונסמן אותו $u(t)$ נציב ונקבל שוב משוואה פרידה.

4.6 הצבות אחרות לפי תרגילים

אם

$$x'(t) = \sin(ax+bt)$$

נציב:

$$u(t) = ax+bt$$

ואז נקבל:

$$u'(t) = ax'(t) + b \Rightarrow x'(t) = \frac{u'(t)-b}{a}$$

מצד שני:

$$x'(t) = \sin(u)$$

ולכן נקבל:

$$\frac{u'(t)-b}{a} = \sin(u) \Rightarrow u'(t) = a\sin(u) + b$$

וזהו מד"ר אוטונומי. הפתרון נתון על ידי:

$$\int \frac{du}{a\sin(u)+b} = \int dt = t+c$$

הערה: לפעמים מד"ר יהיה נתון בצורה שיהיה קל לפתור את הפונקציה ההפוכה ואז לבודד את x כלומר נפתור את המד"ר של $t'(x)$ במקום $x'(t)$ ונבודד את x.

דוגמא: אם נתונה המד"ר

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{e^x - t} \\ x(t_0) &= x_0 \\ t_0 &\neq e^{x_0} \end{aligned}$$

ולכן:

$$x'(t_0) \neq 0$$

אז ניתן לדבר על פונקציה הפוכה $t(x)$ ואז:

$$t'(x) = e^x - t$$

ואז פותרים בשיטת וריאציה של קבוע פתרון כללי עבור המשוואה הוא $t'(x) = -t$ ופתרון פרטי עבור $t'(x) = e^x - t(x)$.

5 מערכת משוואות לינאריות

5.1 המקרה הכללי

מערכת מהצורה:

$$x' = Ax$$

פתרון כללי הוא מהצורה:

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0)$$

לפי טור טיילור נקבל:

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + o\left(t^3\right) \\ \frac{d}{dt}e^{At} &= A\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{3!} + o\left(t^3\right)\right) \end{aligned}$$

הערה: עבור מטריצה נילפוטנטית נקבל סכום סופי.

מקרה פרטי: לכן למשל כדי לחשב את e^A נמצא פתרונות עם תנאי התחלה $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t$ כדי להחזיר עמודה i במטריצה e^A ונציב $x(1)$.

משפט 5.1 קבוצת כל הפתרונות היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד n.

משפט 5.2 יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ וקבוצת פתרונות $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ פתרונות עם תנאי התחלה $x^i(0) = v_i$.אז מתקיים:
$\left\{x^1(t), \ldots, x^n(t)\right\}$ בסיס $\iff$ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בת"ל.

דוגמא: נדרוש שתנאי ההתחלה יהיו בת"ל למשל הבסיס הסטנדרטי.

משפט 5.3 עבור A לכסינה דוגמא לבסיס של מרחב הפתרונות עבור $x' = Ax$ הוא: יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ערכים עצמיים עם הוקטורים העצמיים $v_1, \ldots, v_n$ אז בסיס למרחב הפתרונות הוא:

$$x^i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot v_i$$

הערה: פתרון זה נכון גם כאשר הערכים העצמיים זהים (כל עוד המטריצה לכסינה)

5.2 מטריצות לכסינות מעל $\mathbb{C}$

משפט 5.4 משפט אוילר

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

משפט 5.5 בדרך כלל $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq e^{\lambda_1 t}\cdot e^{\lambda_2 t}$. השיוויון מתקיים רק אם λ_1, λ_2 מתחלפים בכפל, כלומר $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_2 \cdot \lambda_1$

מסקנה 5.6 $e^{(a+bi)} = e^{at}\left(\cos\left(bt\right) + i\sin\left(bt\right)\right)$

תזכורת: במטריצה $A_{2\times 2}$ (ובכל מטריצה אחרת) מתקיים כי $traceA$ הוא סכום הערכים העצמיים ו$\det A$ הוא מכפלת הערכים העצמיים.

כאשר A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אז בסיס למרחב הפתרונות יהיה נתון כמו קודם לכל ערך עצמי גם הצמוד שלו ערך עצמי והוקטור העצמי המתאים לו הוא הוקטור העצמי הצמוד המתאים.
ואיך נעבור לבסיס ממשי? כל פתרון מרוכב בבסיס מופיע הוא עצמו והצמוד שלו לכן בכל פתרון כזה נפריד לחלק ממשי וחלק מדומה וסיימנו.

דוגמא: נניח כי $x\left(t\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 5 & 1-i & 3+2i \end{pmatrix}^t$, פתרון בבסיס שלנו אז כמובן גם הפתרון הצמוד בבסיס שלו יהפוך אותו לשני פתרונות ממשיים בת"ל: $Re\left(x\left(t\right)\right), Im\left(x\left(t\right)\right)$.
בדוגמא שלנו:

$$e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1-i \\ 3+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ \left(1-i\right)e^{2t} \\ \left(3+2i\right)e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow Re = \begin{pmatrix} 5e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}, Im = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

עבור ערכים עצמיים לא ממשיים אותו הדבר רק קצת יותר עבודה בלהפריד לחלק ממשי ומדומה.

דוגמא:

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1-i \\ 3+2i \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ x\left(t\right) &= e^{2t}\cdot\left(\cos t + i\sin t\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 1-i \\ 3+2i \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ Re &= e^{2t}\begin{pmatrix} 5\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix},\ Im = e^{2t}\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + \sin t \\ 2\cos t + 3\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.3 מטריצות שאינן לכסינות

במקרה שבו A לא לכסינה, נפעל על פי השלבים הבאים:

1. נעבור לצורת ג'ורדן. עבור $n=2$, צורת ג'ורדן היחידה היא:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

עבור $n=3$ נשים לב לשתי התכונות:

- הריבוי האלגברי של הע"ע הוא מספר הפעמים שהוא מופיע על האלכסון.
- הריבוי הגיאומטרי הוא מספר הבלוקי ג'ורדן של אותו ערך עצמי.
- נדגים את המקרים האפשריים:

(א)

ע"ע	λ_1	λ_2
ריבוי אלגברי	1	2
ריבוי גיאומטרי	1	1

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(ב)

ע"ע	λ_1
ריבוי אלגברי	3
ריבוי גיאומטרי	1

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

(ג)

ע"ע	λ_1
ריבוי אלגברי	3
ריבוי גיאומטרי	2

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

2. נמצא מטריצת מעבר: תמיד נסמן $T^{-1}AT = J$. לכן נקבל $AT = TJ$. לדוגמא עבור המטריצה:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

נפעל כך: נסמן את מטריצת המעבר $T = (T_1 T_2 T_3)$ כאשר T_i היא העמודה ה־i שבמטריצת המעבר. עתה נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} A \cdot T_1 = \lambda_1 T_1 \\ A \cdot T_2 = T_1 + \lambda_1 T_2 \\ A \cdot T_3 = \lambda_2 T_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_1 I) \cdot T_1 = 0 \\ (A - \lambda_1 I) \cdot T_2 = T_1 \\ (A - \lambda_2 I)\, A \cdot T_3 = 0 \end{cases}$$

3. מציאת פתרון כללי למערכת: במערכת שלנו נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda_1 y_2 + y_3 \\ y_3' = \lambda_2 y_3 \end{cases}$$

אחרי שמצאנו פתרון כללי מוצאים בסיס על ידי הצבת שלושת תנאי התחלה בלתי תלויים (לדוגמא הבסיס הסטנדרטי) ומוצאים ככה את הקבועים שלנו מהפתרונות הכלליים.

4. המרה לבסיס של x כלומר כופלים את הבסיס שמצאנו T. נניח כי $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ הוא בסיס למטריצה המג'ורדנת אז הבסיס שאנו רוצים הוא $Ty^{(1)}, Ty^{(2)}, Ty^{(3)}$.

5.4 מערכת לינארית לא הומוגנית

הצורה הכללית היא:

$$x' = Ax + g(t)$$

שיטה: מוצאים פתרון כללי עבור $x' = Ax$ (פתרון כללי הוא $\tilde{x}(t) = e^{At} \cdot c$) ואז מחפשים לינאריזציה של קבוע לפתרון פרטי מהצורה $x(t) = e^{At} \cdot c(t)$.

המטרה: למצוא את $c(t)$ ולהציב חזרה. נוכל למצוא על ידי $c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-sA} g(s)\, ds$. דוגמא בתרגול.

6 תמונות פאזיות של מערכת משוואות

תמונה פאזית למערכת $x' = V(x)$ כאשר $V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}$ לאו דווקא לינארי כאשר $x \in \mathbb{R}^2$.

דוגמא: מערכת משוואות מהצורה:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1 - x_2^2 \\ x_2'(t) &= \sin x_1 + \cos x_2 \end{aligned}$$

עבור פתרון מהצורה $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ העקומה הפאזית שלו הוא הגרף במערכת הצירים:

$$\{x_1(t), x_2(t)\} \subseteq \mathbb{R}^2 = x_1(t) \times x_2(t)$$

משפט 6.1 אם γ_1, γ_2 שתי עקומות פאזיות אז קיימות אחת משתי האופציות:

- γ_1, γ_2 הם אותו העקום עד כדי הזזה.
- לשני העקומים אין נקודות חיתוך.

רעיון ההוכחה: נניח בשלילה ונקבל סתירה למשפט הקיום והיחידות.

6.1 סוגי תמונות פאזיות

6.1.1 תמונה פאזית אוכף (saddle)

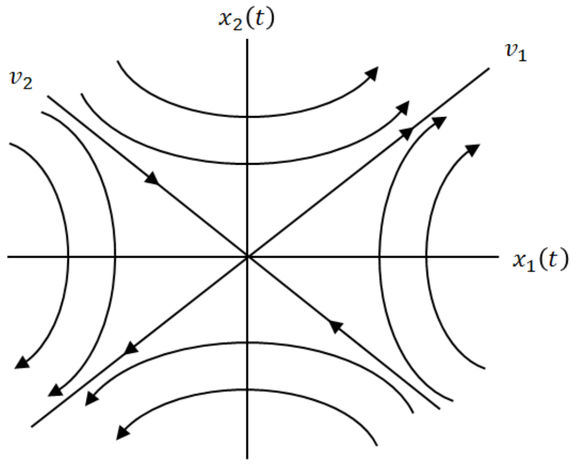
עבור מערכת

$$x' = Ax$$

עם יש שני ערכים עצמיים $\lambda_2, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ המקיימים

$$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$$

והוקטורים v_2, v_1 הם וקטורים עצמיים בהתאמה אז התמונה הפאזית תיראה כך:



איור 9:

לישר v_2 קוראים ישר אינווריאנטי או יציב (הגדרה שקולה: הפתרונות עליו שואפים לאפס) ולישר v_1 קוראים ישר לא אינווריאנטי (לא יציב)

6.1.2 תמונה פאזית צומת יציב (stable node)

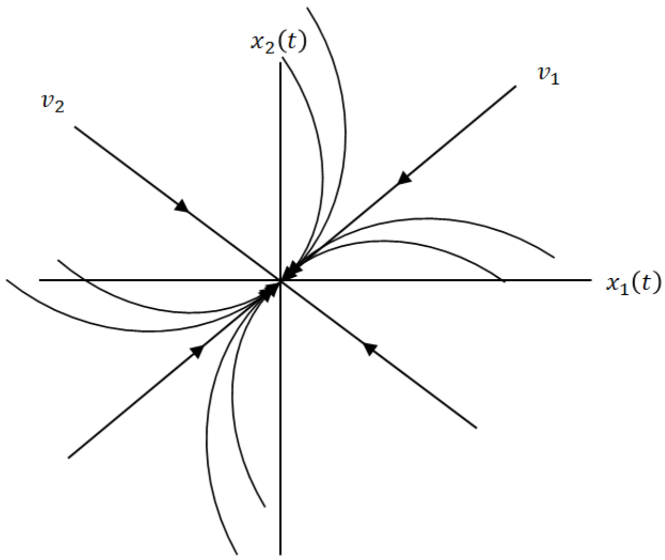
עבור מערכת

$$x' = Ax$$

עם יש שני ערכים עצמיים $\lambda_2, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ המקיימים

$$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$$

והוקטורים v_2, v_1 הם וקטורים עצמיים בהתאמה. נניח $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ אז התמונה הפאזית תיראה כך:



איור 10:

6.1.3 תמונה פאזית צומת לא יציב (unstaible node)

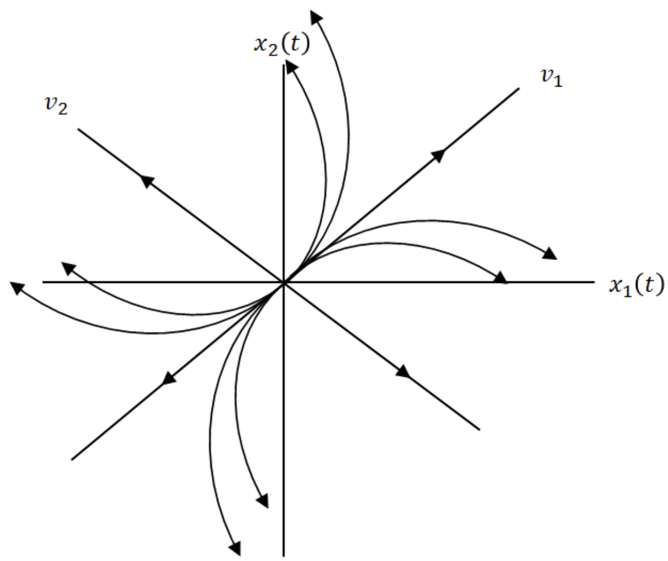
עבור מערכת

$$x' = Ax$$

עם יש שני ערכים עצמיים $\lambda_2, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ המקיימים

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$$

והוקטורים v_2, v_1 הם וקטורים עצמיים בהתאמה. נניח $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ אז התמונה הפאזית תיראה כך:



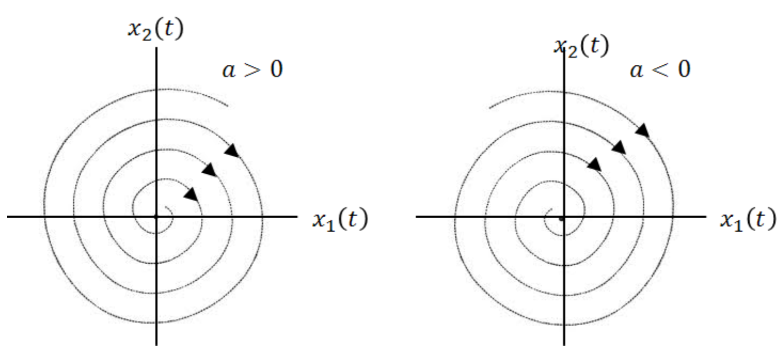
איור 11:

6.1.4 תמונה פאזית מערבולת (focus)

עבור

$$x' = Ax$$

וערכים עצמיים $\lambda_k = a_k + b_k i$ כאשר $k = 1,2$ וגם $a_k, b_k \neq 0$. קיימים שני סוגי מערבולות(מערבולת אחת מכוונת פנימה והשנייה החוצה):



איור 12:

איך נקבע כיוון הספירלה? נבחר מקום ספציפי למשל $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ונבדוק מהירות בנקודה x' ולפי כיוון הוקטור מהירות נקבע כיוון (בהתחשב שאנו יודעים אם הספירלה נכנסת או יוצאת יש רק אופציה אחת)

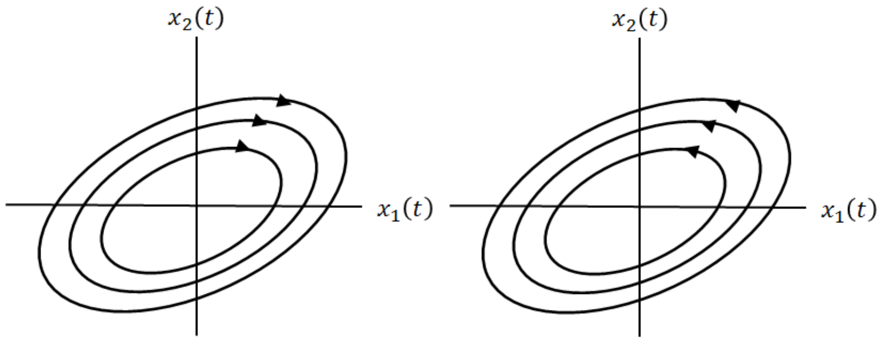
6.1.5 תמונה פאזית מרכז (center)

עבור המערכת:

$$x' = Ax$$

וערכים עצמיים $\lambda_{1,2} = \pm bi$כאשר $b \neq 0$ לפתרון כללי אין חלק ממשי ולכן אליפסה. התמונה הפאזית תראה כך:

איור 13:



גם כאן נקבע את כיוון האליפסות על פע נקודה ספציפית. (כי כל האליפסות הן באותו כיוון)

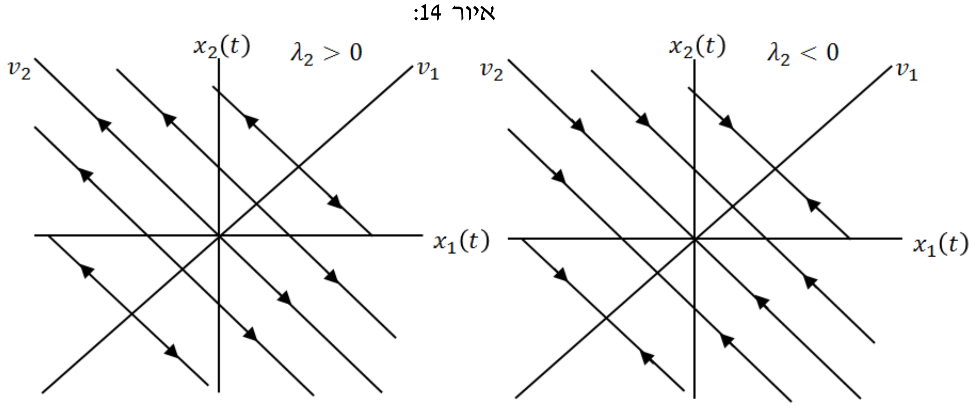
6.2 מקרי קיצון

עבור המערכת

$$x' = Ax$$

אם אחד הערכים העצמיים הוא $\lambda_1 = 0$ (אז הערך עצמי השני בהכרח ממשי $\lambda_2 \in \mathbb{R}$), אז התמונה הפאזית תראה כדלקמן:

איור 14:



הגדרה 6.2 נקודה $p \in \mathbb{R}^n$ היא סינגולרית של מערכת משוואות $x' = V(x)$ אם $V(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

הגדרה 6.3 נקודה סינגולרית p תקרא יציבה (לפי לפונוב) אם לכל סביבה U של p יש סביבה $W \subseteq U$ כך שאם $x(t)$ פתרון וגם $x(0) \in W$ אז $x(t) \in U$ לכל $t \geq 0$.

הגדרה 6.4 נקודה סינגולרית p תיקרא יציבה אסימפטוטית אם p יציבה ויש סביבה R של p כך שאם $x(0) \in R$ אז $x(t) \underset{t\to\infty}{\to} p$.

עבור התמונות הפאזיות שראינו:

- אוכף לא יציב.
- צומת יציב הוא יציב אסימפטוטית.
- צומת לא יציב הוא לא יציב (לא הייתם מנחשים אה?!).
- מערבולת שפונה פנימה היא יציבה אסימפטוטית.
- מערבולת שפונה החוצה לא יציבה.
- מרכז יציב אבל לא אסימפטוטית.

משפט 6.5 עבור המערכת $x' = Ax$ הנקודה $0 \in \mathbb{R}^n$ היא נקודה סינגולרית יציבה אסימפטוטית אם ורק אם $Re\lambda_i < 0$ לכל ערך עצמי λ_i של A.

משפט 6.6 עבור המערכת $x' = Ax$ הנקודה $0 \in \mathbb{R}^n$ היא נקודה סינגולרית יציבה אם ורק אם $Re\lambda_i \leq 0$ לכל ערך עצמי λ_i של A.

הערות:

- אם $x(t)$ הוא ב־$span$ של איברי בסיס אם ערכים עצמיים שליליים חלק ממשי בלבד אז $x(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.
- מספיק שלפתרון $x(t)$ יכיל איבר בסיס אחד של ערך עצמי בעל חלק ממשי חיובי אז $x(t) \to \infty$.
- אם $x(t)$ ב־$span$ של איברי בסיס מהצורה $\sin, \cos$ אז $x(t)$ מחזורי.

הגדרה 6.7 מרחב יציב W^{st} מרחב הנוצר על ידי הוקטורים העצמיים בעלי ערכים עצמיים שליליים בחלק הממשי

הגדרה 6.8 נקודה סינגולרית היא יציבה אסימפטוטית $\iff W^{st} = \mathbb{R}^n$

הערה: יציבות אסימפטוטית ויציבות ויציבות רגילה דורשת שכל הפתרונות יהיו יציבים ולא רק כאלה שנפרשים על ידי W^{st}

6.3 לינאריזציה של פתרון

עבור המערכת:

$$x' = V(x)$$

והנקודה $p \in \mathbb{R}^n$ סינגולרית אז נגדיר:

$$A = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_p$$

נרשום עבור $v(x)$ פיתוח טיילור מסדר 1 (או הגדרה של דיפרציאביליות) ונקבל:

$$V(x) = A(x-p) + o(\|x-p\|)$$

וקיבלנו מערכת לינארית שנכונה לסביבה מספיק קטנה של p.

משפט 6.9 משפט לפונוב

- אם $Re\lambda_i < 0$ לכל ערך עצמי λ_i של המטריצה A של לינאריזציה של $v(x)$ בנקודה סינגולרית p אז p יציבה אסימפטוטית.
- אם קיים ערך עצמי λ כך שמתקיים $Re\lambda > 0$ אז p לא יציבה.
- אם $Re\lambda_i \leq 0$ לכל ערך עצמי λ_i ויש ערך עצמי המקיים $Re\lambda = 0$ אז היציבות תלויה בחלק הלא לינארי $o(\|x-p\|)$ (אי אפשר לדעת)

7 מד"ר מסדר K

פה נתעסק בפתרון המד"ר:

$$x^{(k)}(t) = f\left(t, x, x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)\right)$$

עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= x_1 \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(0) &= x_{k-1} \end{aligned}$$

מדוע קיים פתרון עבור מד"ר מסוג זה? ניתן על ידי הצבה להמיר אותו למד"ר לינארי:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t) \\ y_2(t) &= x'(t) \\ &\vdots \\ y_k(t) &= x^{(k-1)}(t) \end{aligned}$$

ואז נקבל:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{k-1}'(t) &= y_k \\ y_k' &= f(t, y_1, \ldots, y_k) \end{aligned}$$

וממשפט הקיום והיחידות נובע שקיים פתרון.

7.1 פתרון מד"ר לינארי מסדר K (עם מקדמים קבועים)

כאן נתעסק בפתרון מד"ר מהסוג:

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$

משפט 7.1 קבוצת כל הפתרונות של המשוואה ההומוגנית הנ"ל היא מרחב וקטורי ממימד k.

סימון: $p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ כאשר במקום λ נציב אופרטור גזירה $\frac{d}{dt}$ נקבל כי $p\left(\frac{d}{dt}\right)$ אופרטור דיפרנציאלי.

משפט 7.2 $p\left(\frac{d}{dt}\right)(e^{\mu t}) = p(\mu) e^{\mu t}$

משפט 7.3 חוג הפולינומים מעל $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ איזומורפי לחוג האופרטורים הדיפרנציאליים עם מקדמים קבועים עם פעולות חיבור והרכבה.

משפט 7.4 אם $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$שונים אז הפונקציות $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}$ הן בת"ל מעל $\mathbb{C}$.

משפט 7.5 אם לפולינום $p(\lambda)$ (ממעלה k) יש k שורשים שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ אז $\left\{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}\right\}$ הוא בסיס של מרחב כל הפתרונות של $p\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t)) = 0$.

משפט 7.6 אם $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^r$ אז למשוואה $p\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t)) = 0$ יש בסיס פתרונות בת"ל מהצורה:

$$\left\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r-1} e^{\lambda_1 t}\right\}$$

<u>מקרה כללי</u>

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

אז למשוואה ההומוגנית $p\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t)) = 0$ יש k פתרונות מהצורה:

$$\left\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{r_2 - 1} e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_s t}, \ldots, t^{r_s - 1} e^{\lambda_s t}\right\}$$

ומתקיים כי k הפתרונות הם בת"ל ודוגמא לבסיס.

7.2 משוואות מסדר גבוה לא הומוגני

משוואות מהצורה:

$$x^{(k)}+a_{k-1}x^{(k-1)}+\cdots+a_2x''+a_1x+a_0x=f\left(t\right)\neq 0$$

כלומר:

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)\left(x\left(t\right)\right)=f\left(t\right)$$

שיטת פתרון: (נמחיש את הפתרון על המשוואה $x''+2x'-3x=f\left(t\right)$)

- עוברים להצבה:

$$\begin{aligned}y_1\left(t\right)&=x\left(t\right)\\ y_2\left(t\right)&=x'\left(t\right)\end{aligned}$$

ואז נקבל:

$$\begin{aligned}y_1'&=y_2\\ y_2'&=f\left(t\right)+3y_1-2y_2\end{aligned}$$

- מוצאים פתרון כללי למשוואה ההומוגנית כלומר פתרון למשוואה:

$$\begin{aligned}y_1'&=y_2\\ y_2'&=3y_1-2y_2\end{aligned}$$

כלומר מוצאים בסיס ממשי ואז הפתרון הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס:

$$y\left(t\right)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

- מוצאים פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית כלומר c_1 , c_2 הופך להיות $c_1\left(t\right)$, $c_2\left(t\right)$ בהתאמה.

- נבחין כי מתקיים: ($f\left(t\right)$ הוא החלק הלא הומוגני)

$$y'=Ay+\begin{pmatrix}0\\f\left(t\right)\end{pmatrix}$$

מצד שני:

$$y'=\left[c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right]'$$

משווים אגפים מצמצמים ומקבלים מערכת למציאת $c_1'\left(t\right)$, $c_2'\left(t\right)$ ומוצאים את $c_1\left(t\right),c_2\left(t\right)$ (ניתן על פי כלל קרמר), מבצעים אינטגרציה (לא לשכוח להוסיף קבועים) ומציבים חזרה.

מה קורה כאשר יש:

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t))=f(t)+g(t)+h(t)$$

מהלינאריות נפצל לפתרונות נפרדים של כל אחד מהרכיבים וסכומם יהיה הפתרון המבוקש + פתרון כללי של המערכת ההומוגנית.

משפט 7.7 אם μ הוא שורש של $p(\lambda)$ מריבוי r אז למערכת $p\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t))=e^{\mu t}$ יש פתרון:

$$x(t)=\frac{t^{r}e^{\mu t}}{p^{(r)}(\mu)}$$

מקרה פרטי הוא $r\equiv 0$ אם ורק אם μ לא שורש. פתרון זה נכון רק אם $p^{(r)}(\mu)\neq 0$ איך נמצא $p^{(r)}(\mu)$? אם $p(\lambda)=(\lambda-\mu)^{r}\cdot Q(\lambda)$ (חשוב לציין שהגורם $(\lambda-\mu)$ חייב להיות לינארי) אז:

$$p^{(r)}(\mu)=r!\cdot Q(\mu)$$

הערה: כאשר הפתרון של הפרטי הוא אקספוננציאלי או $\sin,\cos$ נעביר את $\sin,\cos$ להצגה אקספוננציאלית $e^{i(something)t}$ ונפתור לפי המשפט.

כלומר אם ניתן להציג את החלק הלא הומוגני על ידי $e^{\mu t}$ (μ יכול להיות מרוכב) אז פתרון של $p\left(\frac{d}{dt}\right)(x(t))=e^{\mu t}$ הוא:

- אם μ שורש של הפולינום $p(\lambda)$ פתרון נתון לפי המשפט

$$x(t)=\frac{t^{r}e^{\mu t}}{p^{(r)}(\mu)}$$

- אם μ אינו שורש אז הפתרון נתון על ידי:

$$x(t)=\frac{e^{\mu t}}{p(\mu)}$$

הערה: לא לשכוח שלפעמים הפתרון המבוקש הוא החלק הממשי/מרוכב של הפתרון האקספוננציאלי ויש צורך להפריד אותו מהפתרון שמצאנו.

כאשר מקבלים מערכת משוואות לינאריות מסדר k לא הומוגניות כאשר הפתרון אינו ניתן לביטוי כאקספוננט נבצע את ההצבה כמו קודם.

דוגמא: אם נתון $x''(t)+2x'(t)-3x(t)=\sqrt{t}$ נעבור למערכת משוואות:

$$\begin{aligned}y_1(t)&=x(t)\\y_2(t)&=x'(t)\end{aligned}$$

ואז נקבל:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_2(t) \\ y_2(t) &= 3y_1 - 2y_2 + \sqrt{t} \end{aligned}$$

ונפתור תחילה את המערכת ההומוגנית

$$y'(t) = A \cdot y(t)$$

ונוסיף פתרון פרטי לחלק הלא הומוגני על ידי וריאציה של קבוע.