קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 10

תאריך הגשה: יום חמישי, 26/6/2014, עד שעה 22:00

<u>שאלה 1:</u>

יהיו f , g פונקציות קמורות. הוכיחו / הפריכו:

א. $f \cdot g$ קמורה.

<u>לא נכון</u>, ד״נ: $f(x) = x^2$, $g(x) \equiv -1$.

ב. $f \circ g$ קמורה.

<u>לא נכון</u>, ד״נ: $f(x) = -x$, $g(x) = x^2$ (ואז $(f \circ g)(x) = -x^2$ קעורה).

ג. $h(x) = \max\{f(x), \ g(x)\}$ קמורה.

<u>נכון</u>: יהיו $x_1 < x_2$, צ״ל כי לכל $t \in (0,1)$, $th(x_1) + (1-t)h(x_2) \geq h(tx_1 + (1-t)x_2)$. אם נראה כי $th(x_1) + (1-t)h(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$ וגם $th(x_1) + (1-t)h(x_2) \geq g(tx_1 + (1-t)x_2)$ נסיים, אבל זה מתקיים בהכרח כי $h \geq f, g$ ומכיוון ש- f, g קמורות, ולכן:

$th(x_1) + (1-t)h(x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$, ובאותו אופן עבור g.

<u>שאלה 2:</u>

הוכיחו כי אם f גזירה פעמיים ברציפות בקטע סגור, אז בקטע זה ניתן לרשום את f כהפרש של שתי פונקציות קמורות.

הדרכה: השתמשו בכך שהנגזרת השניה רציפה בקטע הסגור ואז במשפטי ויירשטראס.

f'' רציפה בקטע סגור, לכן קיים $M \geq 0$ כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע (כלומר $-M \leq f''(x) \leq M$).

נרשום $f(x) = (f(x) + Mx^2) - Mx^2$. ברור כי Mx^2 פונקציה קמורה, נראה כי גם $f(x) + Mx^2$ פונקציה קמורה: זו פונקציה הגזירה פעמיים ברציפות, ולכן נוכל לבדוק קמירות ע״י הנגזרת השניה, שמקיימת:

$(f(x) + Mx^2)'' = f''(x) + 2M \geq -M + 2M = M \geq 0$, כלומר זו אכן פונקציה קמורה.

<u>שאלה 3:</u>

תהי f פונקציה זוגית, קמורה ושאינה קבועה. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(זהירות! לא נתון כי f גזירה, אפילו לא פעם אחת!)

f אינה קבועה, לכן קיימים $x_1 < x_2$ כך ש- $f(x_1) \neq f(x_2)$. נוכל להניח כי $f(x_1) < f(x_2)$, כי אם לא, נסתכל על $-x_2 < -x_1$, והם מקיימים $f(-x_2) < f(-x_1)$ (כי f זוגית).

מלמת השיפועים, לכל $x > x_2$ מתקיים: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. נסמן $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, אז $m > 0$, ולכל $x > x_2$, $f(x) \geq f(x_1) + m(x - x_1)$. אגף ימין שואף ל- ∞, ולכן מכלל הפיצה גם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

שאלה 4:

א. אפיינו את כל הפונקציות שהן גם קמורות וגם קעורות.

אם פונקציה היא גם קמורה וגם קעורה אז בין כל שתי נקודות היא נמצאת גם מעל (במובן החלש) למיתר המתאים וגם מתחתיו, ולכן בין כל שתי נקודות הפונקציה נמצאת בדיוק על המיתר המחבר ביניהן, ולכן הפונקציה היא למעשה קו ישר, כלומר מהצורה $f(x) = ax + b$. (שימו לב כי מדובר אכן בקו ישר, כלומר בעל שיפוע אחיד, ולא בפונקציה שמורכבת ממספר מיתרים עם שיפוע שונה – יש להראות שמצב כזה לא יתכן).
בכיוון השני, ברור כי פונקציה שהיא קו ישר היא גם קמורה וגם קעורה, ולכן קיבלנו אפיון (כלומר, הגדרה שקולה לפונקציה שהיא גם קמורה וגם קעורה.

ב. נתון כי f , g שתי פונקציות קמורות, וכי קיימים ממשיים a , b כך ש- $f(x) + g(x) = ax + b$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי גם f וגם g הן אפיניות, כלומר קיימים קבועים a_f , b_f , a_g , b_g כך ש- $g(x) = a_g x + b_g$, $f(x) = a_f x + b_f$.

נסתכל על f: מאחר והיא קמורה, בין כל שתי נקודות היא נמצאת מתחת (במובן החלש) למיתר המחבר ביניהן. כדי להראות שהיא אפינית, מספיק להראות כי לא יתכן שקיימת נקודה הנמצאת ממש מתחת למיתר. נניח אם כן כי קיימת נקודה כזו. משיקולי רציפות (היזכרו כי פונקציה קמורה היא רציפה), קיום נקודה כזו גורר קיום של קטע שלם שבו גרף הפונקציה נמצא ממש מתחת למיתר, כלומר קטע שלם שבו הפונקציה קמורה ממש, אבל אז נקבל כי בהכרח (מקמירות g), גם $f + g$ קמורה ממש בקטע זה. אבל מהנתון וסעיף א' נקבל כי $f + g$ היא קעורה, ובפרט בקטע הזה, וזו סתירה לקמירות ממש בקטע.

שאלה 5:

חקרו את הפונקציה $f(x) = \left((x-7)(x+4)\right)^{\frac{1}{2}}$ ושרטטו את גרף הפונקציה.

תחום הגדרה: $x \leq -4$, $x \geq 7$, שורשים: $x = 7$, $x = -4$. אין אסימפטוטות אנכיות או אופקיות, נקודות מינימום גלובליות הן -4 , 7 שם הפונקציה מקבלת 0, הפונקציה קעורה בכל תחום ההגדרה שלה, אסימפטוטות משופעות: $x - \frac{3}{2}$ כאשר $x \to \infty$, $-x + \frac{3}{2}$ כאשר $x \to -\infty$.