1 טורי מספרים

1.1 מושגים כלליים

נתונה סדרת מספרים $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$, ונרצה לסכם את כל אבריה ולדבר על הסכום האינסופי

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ונעשה זאת ע"י תהליך גבולי. נסמן ב- $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ את הסכום החלקי של n האברים הראשונים בסדרה.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס כאשר סדרת הסכומים החלקיים שלו, $\{S_n\}$, מתכנסת. אם גבולה הוא $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ נאמר שסכום הטור הוא S ונסמן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

אם $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ לא קיים נאמר שהטור מתבדר.

המינוח האנגלי הוא sequence (סדרה) ו- series (טור).

<u>דוגמאות.</u>

(i) טור גיאומטרי אינסופי $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$.

כאשר $q \neq 1$ הסכומים החלקיים הם

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \; .$$

אם $|q| < 1$ אז הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ קיים, ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} \; .$$

אם $|q| \geq 1$ הגבול לא קיים, והטור מתבדר. בפרט עבור $q = \pm 1$ מתקבלים הטורים המתבדרים $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \ldots$.

(ii) הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס וסכומו 1, כי נציג את האבר הכללי בצורה

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

(סכום שבו ניתן להציג $a_k = b_k - b_{k-1}$, ולכן $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0$, נקרא "סכום טלסקופי").

(iii) הטור $\sum \frac{1}{\sqrt{j}}$ מתבדר כי

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty\ .$$

התכונות היסודיות של טורים מתקבלות ע"י תרגום של התוצאות האנלוגיות לסדר-ות. לא ניתן את ההוכחה המידית למשפט הבא.

<u>משפט.</u> (i) אם הטור $\sum a_k$ מתכנס אז לכל מספר ממשי c גם הטור $\sum ca_k$ מתכנס, וסכומו הוא $c \sum a_k$.

(ii) אם הטורים $\sum a_k$ ו- $\sum b_k$ מתכנסים, אז גם $\sum (a_k + b_k)$ מתכנס וסכומו הוא $\sum a_k + \sum b_k$. (הכיוון ההפוך אינו נכון כמובן. תנו דוגמא נגדית!)

(iii) (קריטריון קושי). הטור $\sum a_k$ מתכנס אםם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $m > n > N$ מתקיים

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| = |S_m - S_n| < \varepsilon\ .$$

<u>דוגמאות.</u>

(i) הטור $\sum \frac{1}{j^2}$ מתכנס, כי

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{m} a_j &= \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=n+1}^{m} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

בתנאי ש- $n + 1 > 1/\varepsilon$.

(ii) הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{k}$ מתבדר כי אינו מקיים את תנאי קושי: בהנתן n נבחר $m = 2n$, ואז

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0\ .$$

<u>משפט.</u> אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז $\lim a_k = 0$.

הוכחה. נציג $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$ $\square$

חשוב להדגיש שהמשפט נותן רק תנאי הכרחי שאיננו מספיק. ראינו למשל שהטור $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ והטור ההרמוני מתבדרים, למרות שסדרת אבריהם שואפת לאפס.

<u>הערה.</u> שינוי של מספר סופי מאברי הטור אינו משפיע על התכנסותו או התבדרותו. (כאשר הטור מתכנס השינוי יכול, כמובן, להשפיע על ערך הסכום).
לטור מהצורה $r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ נקרא "זנב של הטור" (או "שארית הטור") $\sum a_k$.
ע"ס ההערה מקבלים שהטור המקורי מתכנס אםם הזנבות שלו הם טורים מתכנסים, ובמקרה זה $\lim_{m\to\infty} r_m = 0$.

1.2 טורים עם אברים חיוביים

הטיפול בטורים אינסופיים דומה מאד לטיפול באינטגרלים מוכללים בקרן אינסופית. למעשה, ניתן להציג כל טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ כאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ עבור הפונקציה f המוגדרת ע"י

$$f(x) = a_k \quad \text{כאשר } x \text{ בקטע } [k, k+1) \ .$$

כמו שעשינו באינטגרלים מוכללים, גם כאן נטפל תחילה בטורים עם אברים בעלי סימן קבוע, ובה"כ נניח שהם חיוביים. המפתח לכך שהטיפול בטורים עם אברים בעלי סימן קבוע פשוט יותר מהטיפול בטורים כלליים הוא המשפט הבא

<u>משפט.</u> **אם $a_n \geq 0$ לכל n, אז $\sum a_n$ מתכנס אםם סדרת הסכומים החלקיים S_n היא סדרה חסומה.**

הוכחה. מאי השליליות של ה- a_n-ים נובע שהסדרה S_n מונוטונית עולה, וידוע כי לסדרה מונוטונית יש גבול אםם היא חסומה. $\square$

המשפט מאפשר בדיקת ההתכנסות של טור חיובי ע"י בדיקה פשוטה יותר - עלינו רק לבדוק חסימות. אנחנו גם נשתמש (לטורים עם אברים חיוביים בלבד!) בסימון $\sum a_n < \infty$ לטור מתכנס וב- $\sum a_n = \infty$ לטור מתבדר.

<u>משפט.</u> [קריטריון ההשוואה]. **יהיו $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ טורים עם אברים אי-שליליים. אם קיים קבוע חיובי $K > 0$ כך שלכל n**

$$0 \leq a_n \leq K b_n$$

ואם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum a_n \leq K \sum b_n$.

הוכחה. נסמן ב- $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ ו- $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ את הסכומים החלקיים של הטורים. עפ"י הנתון B_N סדרה חסומה ו- $0 \leq A_N \leq KB_N$ לכל N, לכן גם A_N חסומה ולכן מתכנסת. אי השוויון בין סכומי הטורים נובע ממעבר לגבול. $\square$

<u>הערה.</u> להתכנסות הטור $\sum a_n$ אין צורך לדרוש כי $0 \le a_n \le Kb_n$ לכל n ומספיק שיש N כך שזה יתקיים רק לכל $n > N$, כלומר עבור n גדולים מספיק - אך ברור שאז אי השוויון בין הסכומים אינו חייב להתקיים. הערה דומה תהיה נכונה גם למשפטים רבים בהמשך ובדר"כ לא נציין אותה במפורש.

המסקנה המיידית הבאה נוחה מאד לשימוש.

<u>מסקנה.</u> **נניח כי a_n, b_n חיוביים וכי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם $0 < L < \infty$ אז $\sum a_n$ מתכנס אםם $\sum b_n$ מתכנס.**

הוכחה. לפי הגדרת הגבול נמצא N כך ש- $0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ לכל $n \ge N$, והמסקנה נובעת מהמשפט. $\square$

הוכחה דומה מראה שאם $L = 0$ ו- $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הטור $\sum \frac{n}{n^3-1}$ מתכנס, כי לכל $n > 1$ מתקיים ש- $0 < \frac{n}{n^3-1} < \frac{2}{n^2}$ והטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לחילופין, נשתמש במסקנה ובכך ש- $\lim \left(\frac{n}{n^3-1} \Big/ \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

(ii) לכל $x > 0$ קטן מתקיים $x/2 < \sin x < x$, ולכן הטורים החיוביים $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ו- $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתנהגים כמו הטורים $\sum \frac{1}{n}$ ו- $\sum \frac{1}{n^2}$ בהתאמה, וראינו כי הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר, ואילו $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס.
לחילופין, אפשר להשתמש במסקנה כי $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

מבחני ההתכנסות הבאים הם מאוד שימושיים. שניהם נובעים בקלות ממשפט ההשוואה כאשר משווים עם טור גיאומטרי מתכנס.

<u>משפט.</u> יהיו a_n חיוביים.

(i) [מבחן השורש (קושי)] **אם קיימים $0 < q < 1$ ו- N כך ש- $\sqrt[n]{a_n} \le q$ לכל $n \ge N$, אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.**

(ii) [מבחן המנה (ד'אלמבר)] **אם קיימים $0 < q < 1$ ו- N כך ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ לכל $n \ge N$, אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.**

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות $N = 1$.

(i) נעלה את אי השוויון בחזקת n ונקבל כי $a_n \le q^n$, ואגף ימין הוא האבר הכללי של טור גיאומטרי מתכנס.

(ii) רואים באידוקציה כי $a_n \le a_1 q^{n-1}$, ושוב אגף ימין הוא האבר הכללי של טור גיאומטרי מתכנס. $\square$

הערה. תנאי המשפט שקולים לכך ש- $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ או, בהתאמה, לכך ש- $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. במקרים שהגבולות קיימים (ואין צורך לעבור לגבולות חלקיים), פשוט מחשבים את הגבול.

דוגמאות.

(i) $\sum \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ מתכנס כי מאי השוויונים $2^n+4^n < 2\cdot 4^n$ ו- $3^n+5^n > 5^n$ נובע כי

$$\sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}} < \sqrt[n]{\frac{2\cdot 4^n}{5^n}} \to \frac{4}{5} < 1.$$

(ii) $\sum \frac{A^n}{n!}$ מתכנס לכל $A > 0$, כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A}{n+1} \to 0 < 1$.

הערות. (i) אי השוויון החריף $q < 1$ חשוב, והתנאי החלש יותר $\sqrt[n]{a_n} < 1$ לכל n (או $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$) אינו מספיק ואינו נותן שום אינפורמציה. לדוגמא, אם $a_n = \frac{1}{n^2}$ ו- $b_n = \frac{1}{n}$ אז $\sqrt[n]{a_n} < 1$ וגם $\sqrt[n]{b_n} < 1$ לכל n, אך $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר! (ובאופן דומה גם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ו- $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ לכל n).

(ii) אפשר לנסח "משפטים הפוכים", למשל, אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, או אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ אז הטור $\sum a_n$ מתבדר. אין טעם לנסות ולזכור אותם בע"פ - בכולם הסיבה להתבדרות היא "טריביאלית" - האבר הכללי אינו שואף לאפס - ובדוגמאות קונקרטיות קל לראות זאת ישירות.

(iii) השימוש במבחן המנה מוגבל כי אפשר להשתמש בו רק כאשר כל ה- a_n-ים (החל ממקום מסוים) חיוביים ממש. מבחינה זו וודאי שמבחן השורש כללי יותר, אך למעשה הוא חזק ממבחן המנה במובן בסיסי יותר: אם מתקיימים תנאי מבחן המנה, כלומר, אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ לכל n, אז גם לכל k

$$a_k = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \le a_1 q^{k-1}$$

ולכן $\sqrt[k]{a_k} \le \sqrt[k]{a_1 q^{k-1}} \le q_1 < 1$ אם רק k גדול מספיק, ומתקיימים גם תנאי מבחן השורש.

כלומר, אם כי מבחן המנה הוא לעתים נוח יותר לשימוש, הרי שבאופן עקרוני כל פעם שאפשר להשתמש בו אז ההתכנסות היתה נובעת גם משימוש במבחן בשורש.

טורים חיוביים ומונוטוניים

כאשר מוסיפים להנחת החיוביות של ה- a_n-ים גם את ההנחה שהסדרה a_n מונוטונית יורדת, מקבלים מבחני התכנסות (או התבדרות) חזקים בהרבה.

נתחיל בדוגמא פשוטה הנותנת תנאי הכרחי חזק יותר מאשר $a_n \to 0$ להתכנסות טורים כאלה.

משפט. תהי $\{a_n\}$ סדרה אי שלילית ויורדת. אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

הוכחה. המונוטוניות וקריטריון קושי עבור $m = 2n$ נותנים כי

$$na_{2n} \le \sum_{j=n+1}^{2n} a_j \to 0$$

ולכן גם $2na_{2n} \to 0$, ומהמונוטוניות נובע כי למעשה $na_n \to 0$. □

<u>הערות.</u> (i) המשפט נותן רק תנאי הכרחי שאינו מספיק. נראה בהמשך כי $\sum \frac{1}{n \ln n}$ מתבדר למרות ש- $n\frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{\ln n} \to 0$.

(ii) המשפט נותן הוכחה נוספת שהטור ההרמוני מתבדר: הסדרה n^{-1} יורדת אך $n \cdot n^{-1} \not\to 0$.

המשפט הבא נותן קשר פורמלי בין התכנסות של טור להתכנסות אינטגרל מוכלל.

<u>משפט.</u> [מבחן האינטגרל] תהי f פונקציה חיובית לא עולה בקרן $x \ge 0$, ואינטגרבילית בכל קטע חלקי $[0, b]$. אז האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אםם הטור $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ מתכנס.

אם הטור והאינטגרל מתכנסים אז

$$. \sum_{k=1}^\infty f(k) \le \int_0^\infty f(x)dx \le \sum_{k=0}^\infty f(k)$$

הוכחה. נסמן $S_n = \sum\limits_{k=1}^n f(k)$. הפונקציה f יורדת, ולכן $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ כאשר $x \in [k, k+1]$. אינטגרציה בקטע נותנת כי $f(k+1) \le \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$, וכשנסכם את אי השוויונות האלה עבור $0 \le k < n$ נקבל

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

או

$$S_n \le \int_0^n f(x)dx \le f(0) + S_{n-1}$$

כלומר, הסדרה S_n חסומה (ולכן הטור מתכנס) אםם סדרת האינטרלים $\int_0^n f$ חסומה (ולכן האינטגרל מתכנס).

מעבר לגבול נותן כי $\sum\limits_{k=1}^\infty f(k) \le \int\limits_0^\infty f \le \sum\limits_{k=0}^\infty f(k)$. □

<u>דוגמאות.</u>

המשפט, בצירוף השיטות שפיתחנו לחישוב והערכת אינטגרלים, מאפשר בדיקה פשו-
טה לטורים רבים.

(i) ראינו שהאינטגרל $\int^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \le 1$. לכן גם הטור $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \le 1$.

(ii) נבדוק לאילו ערכים של q הטור $\sum \frac{1}{k(\ln k)^q}$ מתכנס. נציב באינטגרל $\int^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^q}$ את $y = \ln x$, ואז $dy = \frac{dx}{x}$ ונקבל את $\int^{\infty} \frac{dy}{y^q}$ המתכנס אסם $q > 1$.

(iii) בדקו כתרגיל עבור אלו ערכי q הטור $\sum \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^q}$ מתכנס.

<u>משפט.</u> [מבחן הכיווץ] תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית יורדת. אז הטורים $\sum a_n$ ו- $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

הוכחה. נסמן ב- $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ וב- $T_k = \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j}$ את הסכומים החלקיים של שני הטורים.

נניח תחילה כי הטור המכווץ מתכנס, כלומר שה- T_k-ים סדרה חסומה, ונסמן ב- T את סכום הטור. היות שה- S_n-ים סדרה עולה, הרי שכדי לראות שזו סדרה חסומה די להראות שיש לה תת סדרה חסומה. ואמנם, מהמונוטוניות של ה- a_n-ים נובע כי

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k - 1}) + a_{2^k} \\ &\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^{k-1}} + a_{2^k} \le a_1 + T_{k-1} + a_{2^k} \le T + 2a_1 \end{aligned}$$

בכיוון ההפוך נעריך באופן דומה

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k} \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots a_{2^k}) \\ &\ge a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{T_k}{2} \end{aligned}$$

ומחסימות S_n נקבל שגם הסדרה T_k חסומה. $\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) לכל $p > 0$ הסדרה n^{-p} יורדת, ולכן הטור $\sum n^{-p}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum (2^{1-p})^n = \sum 2^n \cdot 2^{-np}$ מתכנס. אבל זהו טור גיאומטרי עם $q = 2^{1-p}$, והוא מתכנס אסם $2^{1-p} = q < 1$, כלומר אסם $p > 1$.

(ii) לכל $p > 0$ הסדרה $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ יורדת, ולכן הטור $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ מתכנס אסם הטור $\frac{1}{(\ln 2)^p} \sum \frac{1}{n^p} = \sum 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p}$ מתכנס. ע"ס (i) זה קורה אסם $p > 1$.

(iii) לכל $p>0$ הסדרה $\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ יורדת, ולכן הטור $\sum\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ מתכנס אסם הטור $\sum\frac{1}{\ln 2\cdot n\cdot(\ln 2+\ln n)^p} = \sum 2^n\cdot\frac{1}{2^n(\ln 2^n)(\ln\ln 2^n)^p}$ מתכנס. ע"ס (ii) הטור הזה מתכנס אסם $p>1$.

באותה שיטה אפשר להמשיך ולטפל בביטויים מתאימים עם איטרציות מכל סדר של $\ln$.

1.3 טורים עם סימנים מתחלפים לסירוגין.

<u>משפט.</u>[לייבניץ] אם $a_n>0$ סדרה מונוטונית יורדת לאפס אז הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס וסכומו S מקיים $0<S<a_1$.

זנב הטור $r_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מקיים $|r_m|<a_{m+1}$ וסימנו $(-1)^m$.

הוכחה. להוכחת ההתכנסות נציג

$$S_{2n-1}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n-2}-a_{2n-1}) \ .$$

כל הפרש a_k-a_{k+1} הוא חיובי, ולכן $S_{2n-1}<a_1$ והסדרה $\{S_{2n-1}\}$ יורדת. חישוב דומה נותן כי

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})>0$$

וכי S_{2n} עולה. כמו כן $S_{2n}=S_{2n-1}+a_{2n}>S_{2n-1}$ ו- $a_{2n}\to 0$, ולכן מתקיימים תנאי הלמה של קנטור ויש לשתי הסדרות גבול משותף שנסמנו ב- S, כלומר הטור מתכנס וסכומו S. ההערכה $0<S<a_1$ נובעת ממעבר לגבול.

ההערכה לזנב נובעת ממה שכבר הוכחנו, כי גם $r_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ הוא טור עם סימנים מתחלפים לסירוגין. $\square$

<u>דוגמא.</u>

הטור $\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p>0$ (ולא, כמו הטור בלי השמת הסימנים, רק ל- $p>1$). זו הקדמה טובה לנושא הבא שבו נטפל: השמת סימנים יכולה הביא לצמצומים שיגרמו להתכנסות הטור.

<u>הערות.</u> (i) בחישובים מעשיים מחליפים טורים אינסופיים בסכומים חלקיים מספיק רחוקים. כדי לדעת את שגיאת החישוב יש להעריך את $|r_m|$, ומשפט לייבניץ אכן נותן הערכה כזו.

(ii) הנחת המונוטוניות חשובה. לדוגמא נגדיר

$$a_j=\begin{cases}1/k & \text{כאשר } j=2k-1 \text{ איזוגי}\\ 1/k^2 & \text{כאשר } j=2k \text{ זוגי}\end{cases}$$

ואז

$$S_{2n}=\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}a_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\to\infty \ .$$

1.4 טורים עם אברים כלשהם

<u>הגדרה.</u> נאמר שהטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. אם הטור $\sum a_n$ מתכנס - אך לא בהחלט - נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

<u>משפט.</u> טור מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס. (הכיוון ההפוך אינו נכון כמובן: הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט).

הוכחה. נסמן

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases} .$$

שני הטורים האלה אי-שליליים ו- $a_n = a_n^+ - a_n^-$ ואילו $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. אם $\sum |a_n| < \infty$ אז ממשפט ההשוואה גם $\sum a_n^+$ וגם $\sum a_n^-$ מתכנסים, ואז מתכנס גם

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- .$$

$\square$

<u>דוגמא.</u>

נבדוק עבור אילו x-ים הטור הטור $\sum \frac{x^n}{n}$ מתכנס ומתי הוא מתכנס בהחלט.
עבור $|x| > 1$ האבר הכללי לא שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר ועבור $|x| < 1$ הטור מתכנס בהחלט.
עבור $x = 1$ זה הטור ההרמוני המתבדר, ואילו עבור $x = -1$ הטור מתכנס (טור לייבניץ), אך לא בהחלט.

<u>הערה.</u> מבחני ההתכנסות לטורים חיוביים נותנים, ע"י מעבר מ- a_n ל- $|a_n|$, מבחנים דומים להתכנסות בהחלט, ואנחנו נשתמש בהם באופן חפשי.

אינטגרציה בחלקים היתה מכשיר חשוב בטיפול באינטגרלים מוכללים המתכנסים בתנאי. הלמה הבאה היא אנלוג דיסקרטי לנוסחה זו.

<u>למה.</u> [נוסחת הסכימה בחלקים] תהיינה $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ סדרות כלשהן, ונסמן $B_0 = 0$ ו- $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. אז

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i)$$

(נשים לב שע"י החלפת a_n ב- f, b_n ב- g, $a_{i+1} - a_i$ ב- f', B_n ב- $G(x) = \int_a^x g$ וסכומים באינטגרלים אכן מתקבלת הנוסחה $\int_a^b fg = f(b)G(b) - \int_a^b Gf'$).

הוכחה.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) B_i\end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו ב- $B_0 = 0$. □

נאמר שהטור $\sum b_n$ הוא טור חסום אם קיים קבוע M כך שלכל $n \geq 1$ מתקיים ש- $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq M$.

<u>משפט.</u> [משפט דיריכלה] יהי $\sum b_n$ טור חסום ונניח כי $a_n \to 0$ ושהטור $\sum |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. אז גם הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

נשים לב שהתנאי $\sum |a_{n+1} - a_n| < \infty$ בוודאי מתקיים אם הסדרה a_n מונוטונית, כי אז $\sum |a_{n+1} - a_n| = |\sum (a_{n+1} - a_n)| = |a_1|$ כססכום טלסקופי.

הוכחה. נסמן $B_i = \sum_{i=1}^{i=1} b_i$ (ו- $B_0 = 0$), ונניח כי $|B_i| \leq M$ לכל i. עפ"י סכימה בחלקים

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i)$$

אבל $a_n B_n \to 0$ (כי $a_n \to 0$ ו- B_n חסומה), ואילו הטור $\sum B_i (a_{i+1} - a_i)$ מתכנס בהחלט כי

$$\sum |B_i (a_{i+1} - a_i)| \leq M \sum |a_{i+1} - a_i| < \infty\ .$$

□

<u>דוגמאות.</u>

(i) משפט לייבניץ הוא מקרה פרטי של המשפט כאשר $a_n = \frac{1}{n}$ ו- $b_n = (-1)^n$ (ואז הטור $\sum (-1)^n$ חסום).

(ii) הטור $\sum \frac{\sin n\theta}{n}$ מתכנס לכל מספר קבוע θ. עבור $\theta = 0$ אין מה להוכיח, ולכן נניח כי $\theta \neq 0$.

הסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת לאפס, לכן ע"ס משפט דיריכלה יש רק לבדוק שהטור $\sum \sin n\theta$ חסום, ונחשב ביטוי זה בעזרת מספרים מרוכבים:

נזכור את הנוסחה $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$, ובפרט $\sin\alpha = Im(e^{i\alpha})$. נוסיף גם מחובר (שהוא ממילא אפס) המתאים ל- $n = 0$ ונקבל

$$\sum_{n=0}^{N} \sin n\theta = Im\left(\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right) = Im\left(\frac{e^{i(N+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

כססכום של טור גיאומטרי. נזכור כעת כי $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ ונקבל כי

$$e^{i(N+1)\theta} - 1 = 2ie^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} \frac{e^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{-(N+1)\theta}{2}}}{2i} = 2ie^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} \sin\frac{(N+1)\theta}{2}$$

ובאותו אופן $e^{i\theta}-1=2ie^{i\theta/2}\sin\frac{\theta}{2}$. מנת הסינוסים $\frac{\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ ממשית, ואילו החלק המדומה של המקדם הוא

$$Im\left(e^{i\frac{(N+1)\theta-\theta}{2}}\right)=\sin\frac{N\theta}{2}$$

ומכאן נקבל כי לכל N

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\sin n\theta\right|=\left|\frac{\sin\frac{N\theta}{2}\,\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|\le\left|\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| .$$

(iii) אם $|c_n|<\sqrt{n}$ אז הטור $\sum\frac{\sin n\theta}{n+c_n}$ מתכנס לכל θ קבוע. כאן הסדרה $\frac{1}{n+c_n}$ איננה בהכרח מונוטונית, אך נראה שהיא מקיימת $\sum|a_{n+1}-a_n|<\infty$. לשם כך נראה כי לכל $n>3$ מתקיים

$$|a_{n+1}-a_n|=\left|\frac{1}{n+1+c_{n+1}}-\frac{1}{n+c_n}\right|\le\frac{|c_n-c_{n+1}-1|}{|n+1+c_{n+1}|\cdot|n+c_n|}\le\frac{12}{n^{3/2}}$$

וההתכנסות תנבע מהתכנסות הטור $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$.

ואמנם, $|c_n-c_{n+1}-1|<2\sqrt{n}+1<3\sqrt{n}$ ואילו אי השוויונים $|n+c_n|\ge\frac{n}{2}$ ו- $|n+1+c_{n+1}|\ge\frac{n}{2}$ נותנים כי $|n+1+c_{n+1}|\cdot|n+c_n|\ge\frac{n^2}{4}$.

פעולות מותרות על טורים

פעולת החיבור היא פעולה אסוציאטיבית וקומוטטיבית, והיא דיסטריבוטיבית ביחס לכפל. הפעלת חוקים אלה על סכומים סופיים נותנת את הכללים הבאים:

א. אפשר לשים בסכום סוגריים כרצוננו:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=(a_1+\ldots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots+(a_{n_k+1}+\ldots+a_n)$$

לכל $1\le n_1<n_2<\ldots<n_k<n$.

ב. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{\pi(k)}$ לכל פרמוטציה π של $\{1,\ldots,n\}$.

ג. $\sum_{i=1}^{nm}w_i=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)$, כאשר ה- w_i-ים הם כל המכפלות האפשריות a_kb_j (מסודרות בסדר כלשהו).

האם כללים אלה נשמרים גם לסכומים אינסופיים?

<u>משפט.</u> אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אז בכל השמת סוגריים מתקבל טור מתכנס - ולאותו הסכום.

הוכחה. נסמן ב- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ את הסכום החלקי ה- n-י של הטור ללא הסוגרים, וב- S את סכום הטור.

נקבע $0 = n_0 < n_1 < n_2 \ldots$ ונסמן $A_k = a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}$, ואז הטור המתקבל בהצבת סוגריים הוא $\sum A_k$. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים שלו ב- $T_m = \sum_{k=0}^m A_k$. הסדרה $\{T_m\}$ היא תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי S_n (כי $T_0 = S_{n_1}; T_1 = S_{n_2}; \ldots; T_{k-1} = S_{n_k}$) ומאחר שהסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת ל- S, כך גם $\{T_k\}$. □

הפעולה ההפוכה - הסרת סוגריים, היא בדר"כ אסורה. למשל, אם $a_n = (-1)^n$ אז הטור $\sum a_n$ אינו מתכנס, אך אם נשים בסוגריים כל זוג מהטיפוס $a_{2n} - a_{2n-1}$ נקבל טור של אפסים.

הסיבה היא שבלי הסוגריים מתקבלים גם סכומים חלקיים (שלא היו בטור עם סוגריים) שבהם אין צמצומים. לכן המשפט הבא איננו מפתיע.

<u>משפט.</u> אם מוסיפים סוגריים לטור $\sum a_n$ כך שבכל סוגריים מופיעים אברים בעלי אותו סימן, ואם הטור עם הסוגריים מתכנס, אז גם הטור המקורי, $\sum a_n$, מתכנס - ולאותו הסכום.

הוכחה. נסמן ב- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ את הסכום החלקי ה- n-י של הטור ללא הסוגרים. נסמן את הטור עם הסוגריים ב- $\sum A_k$, כאשר $A_k = a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}$ ואת סדרת הסכומים החלקיים שלו ב- $T_m = \sum_{k=0}^m A_k$. עפ"י ההנחה הטור $\sum A_k$ מתכנס, ונסמן את סכומו ב- A. נשים לב שמהתכנסות הטור נובע כי $A_k \to 0$.

בהנתן n, נקבע m כך ש- $n_m + 1 \le n \le n_{m+1}$, ונציג

$$S_n = \sum_{k=1}^{m-1} A_k + \sum_{j=n_m+1}^{n} a_j = T_{m-1} + \beta_n$$

כאשר $\beta_n = \sum_{j=n_m+1}^n a_j$. ואז

$$|S_n - A| \le |T_{m-1} - A| + |\beta_n| \le |T_{m-1} - A| + |A_m| \to 0$$

□

לפני שנעבור למשפטים הבאים נזכיר שהגדרנו

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \ge 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ -a_n & a_n \le 0 \end{cases}$$

ואז $a_n^\pm \ge 0$, והטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אםם שני הטורים החיוביים $\sum a_n^+$ ו- $\sum a_n^-$ מתכנסים. אם הטור מתכנס בתנאי אך לא בהחלט אז $\sum a_n^+ = \sum a_n^- = \infty$.

נעבור לדון בשינוי סדר המחוברים בטור אינסופי.

<u>משפט.</u> אם משנים את סדר המחוברים בטור מתכנס בהחלט, אז הטור החדש מתכנס - ולאותו הסכום.

הוכחה. נניח כי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט ונסמן את סכומו ב- S. תהי π פרמוטציה (כלומר, העתקה חח"ע ועל) של $\mathbb{N}$, וצריך להוכיח שגם $\sum a_{\pi(n)}$ מתכנס ושסכומו הוא S.

נראה תחילה כי נוכל להניח שהטור חיובי. ואמנם נציג $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$, ואז $\sum a_{\pi(n)} = \sum a_{\pi(n)}^+ - \sum a_{\pi(n)}^-$, ולכן די באמת להראות ששני הטורים באגף ימין מתכנסים (ולאותם סכומים).

נסמן ב- $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ וב- $T_n = \sum_{i=1}^n a_{\pi(i)}$ את הסכומים החלקיים של שני הטורים.

נקבע n ונסמן $k = \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$. מהחיוביות של ה- a_n-ים נובע כי

$$T_n = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \ldots + a_{\pi(n)} \leq a_1 + a_2 + \ldots a_k \leq S$$

ולכן הסדרה המונוטונית $\{T_n\}$ חסומה, וגבולה T מקיים $T \leq S$.

שיקול דומה, כשמסתכלים על $\sum a_n$ כטור המתקבל משינוי סדר המחוברים של הטור $\sum a_{\pi(n)}$, מראה כי $S \leq T$, ולכן $T = S$. $\square$

<u>משפט.</u>[רימן] יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי (כלומר, הוא מתכנס - אך לא בהחלט). אז לכל מספר ממשי S אפשר לסדר מחדש את אברי הטור כך שיתקבל טור מתכנס שסכומו הוא S. יתר על כן, אפשר גם לסדר את אברי הטור באופן שהטור שמתקבל מתכנס ל- ∞ או ל- $-\infty$ או שאיננו מתכנס כלל.

הוכחה. כדי לפשט את הכתיבה נסמן $p_n = a_n^+$ ו- $q_n = a_n^-$, ואז $\sum p_n = \sum q_n = \infty$, ובודאי ש- $p_n, q_n \to 0$.

יהי $n_1 \geq 1$ הקטן ביותר כך ש- $A_1 = p_1 + \ldots + p_{n_1} > S$ (יש כזה כי $\sum p_n = \infty$).

ואז $p_1 + \ldots + p_{n_1 - 1} \leq S$ ולכן $S < A_1 = (p_1 + \ldots + p_{n_1-1}) + p_{n_1} \leq S + p_{n_1}$, ובפרט

$$|S - A_1| \leq p_{n_1}$$

יהי כעת $m_1 \geq 1$ הקטן ביותר כך ש- $A_1 - (q_1 + \ldots + q_{m_1}) < S$ (יש כזה כי $\sum q_n = \infty$), ונסמן $A_2 = q_1 + \ldots q_{m_1}$. ואז $A_1 - A_2 < S \leq A_1 - A_2 + q_{m_1}$, ו-

$$|S - (A_1 - A_2)| \leq q_{m_1}$$

נמשיך באינדוקציה ונגדיר $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ ו- $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$ כך שאם נסמן

$$A_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} p_n & \text{איזוגי} \quad k = 2j+1 \quad \text{כאשר} \\ \\ \displaystyle\sum_{n=m_j+1}^{m_{j+1}} q_n & \text{זוגי} \quad k = 2(j+1) \quad \text{כאשר} \end{cases}$$

אז

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k A_k \right| < \alpha_n$$

כאשר $\alpha_n = p_{n_i}$ או q_{m_i} בהתאם לזוגיות של n. היות ו- $0 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} p_{n_i}, q_{m_i}$, נקבל כי הטור $\sum (-1)^k A_k$ מתכנס וסכומו הוא S.

הטור הזה מתקבל מהטור $\sum a_n$ ע"י שינוי סדר המחוברים והשמת סוגריים, אבל בכל סוגר יש אברים בעלי אותו סימן (חיובי אם n איזוגי ושלילי אם הוא זוגי), ולכן מהתכנסות הטור המסודר מחדש עם הסוגריים נובעת גם התכנסותו ללא הסוגריים.

את הסיפא של המשפט מוכיחים בשיטה דומה (הוכיחו זאת כתרגיל!). $\square$

מכפלת טורים

משפט. אם הטורים $\sum a_i = A$ ו- $\sum b_j = B$ מתכנסים בהחלט אז גם הטור $\sum w_k$ שאבריו הם כל המכפלות האפשריות $\{a_i b_j\}_{i,j\geq 1}$, כשהן מסודרות בסדר כלשהו, מתכנס - וסכומו הוא $W = AB$.

הוכחה. ע"י הסתכלות בנפרד בסכומי האברים החיוביים ובסכומי האברים השליליים של שני הטורים (באופן דומה למה שעשינו בהוכחת המשפט על שינוי סדר המחוברים) נוכל, בה"כ, להניח שכל הטורים הם בעלי אברים חיוביים.

נסמן את הסכומים החלקיים של הטורים ב- $A_m = \sum_{i=1}^m a_i$, $B_m = \sum_{j=1}^m b_j$ ו- $W_n = \sum_{k=1}^n w_k$ בהתאמה, ונסמן ב- $k(i,j)$ את האינדכס k כך ש- $a_i b_j = w_k$.

נקבע כעת n ונסמן $m = \max\{\max(i,j) : k(i,j) \leq n\}$, כלומר m הוא האינדכס הגדול ביותר (i או j) שמופיע באחת המכפלות המגדירות את האברים $\{w_k\}_{k\leq n}$. מחיוביות האברים מקבלים לכן כי

$$w_1 + \ldots + w_n \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = A_m B_m \leq AB$$

כלומר, הטור החיובי $\sum w_n$ חסום ולכן מתכנס, וסכומו מקיים $W \leq AB$.

נפנה להוכחת אי השוויון ההפוך. בהנתן m נגדיר $n = \max\{k(i,j) : i,j \leq m\}$. כלומר, n הוא האינדכס הקטן ביותר כך שכל המכפלות $\{a_i b_j\}_{i,j\leq m}$ מופיעות בין ה- w_k-ים הראשונים.

מחיוביות האברים ועפ"י הגדרת n מקבלים כי $A_m B_m \leq W_n \leq W$ ולכן גם בגבול $AB \leq W$. $\square$

הערות. (i) ללא ההנחה שהטורים מתכנסים בהחלט למשפט אין משמעות כי אז הטור $\sum w_n$ בודאי שאיננו מתכנס בהחלט (ולכן יש חשיבות לסדר הסכימה): הטור $\sum a_i$ אינו מתכנס בהחלט, ולכן $\sum a_i^+ = \infty$. נקבע j_0 כך ש- $b_{j_0} > 0$ (יש כזה כי $\sum b_j^+ = \infty$), ואז $\sum w_n^+ \geq \sum_i a_i^+ b_{j_0} = \infty$.

יתר על כן, לא נוכיח זאת אך גם אין סידור אחד "קנוני" שבו טור המכפלה תמיד יתכנס לכל זוג טורים $\sum a_i$ ו- $\sum b_j$.

(ii) דרך נוחה, לפעמים, לסכם את מכפלת הטור היא ע"י השמת סוגריים "לאורך אלכסונים", כלומר על הטור $\sum d_n$ כאשר

$$d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_i a_i b_{n-i} = \sum_i a_{n-i} b_i$$

<u>דוגמא.</u>

נראה בהמשך כי לכל x ממשי סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (שאנו יודעים שהוא מתכנס בהחלט) הוא e^x. נראה כי $e^x e^y = e^{x+y}$ ע"י הכפלת טורים.

נסכם, כפי שמוצע בהערה, עפ"י האלכסונים ונקבל

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!}\right)$$

אבל עפ"י נוסחת הבינום

$$\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}x^iy^{n-i}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}=\frac{(x+y)^n}{n!}$$

ומקבלים כי

$$e^xe^y=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e^{x+y}$$