<u>מקדמים קבועים</u>

במד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, נתונה לנו מד"ר מהצורה

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

כאשר המקדמים הם קבועים, כלומר $a_n, \ldots, a_0$ הם מספרים ממשיים. נסמן את הצד השמאלי של מד"ר לינארית מסדר n ע"י

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

נציב את הפונקציה $y(x) = e^{rx}$ לתוך הצד השמאלי של המד"ר ונחפש תנאים על r כך שנקבל פתרון:

$$\begin{aligned} &y(x) = e^{rx} \\ &y'(x) = re^{rx} \\ &\vdots \\ &y^{(n)}(x) = r^n e^{rx} \end{aligned}$$

וההצבה של $y(x) = e^{rx}$ לתוך צד שמאל של המד"ר נותנת

$$\begin{aligned} L(e^{rx}) &= a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = \\ = \;& e^{rx}\left(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0\right) \end{aligned}$$

ואנו רואים כי אם נבחר r_0 שהוא שורש של הפולינום $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ אז נקבל פתרון של המד"ר, מה שמוביל אותנו להגדרה הבאה:
<u>הגדרה:</u> הפולינום האופייני של המד"ר

$$L(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

הוא

$$\ell(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

והמשוואה האופיינית של המד"ר היא

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

כלומר הפתרונות של המשוואה האופיינית הם השורשים של הפולינום האופייני.
אנו רואים כי אם יש לנו n שורשים שונים של הפולינום האופייני אז יש לנו n פתרונות שונים של המד"ר המתאימה. נראה בסוף הקובץ כי הם ב.ת.ל.

אבל מה אנו עושים אם השורשים אינם שונים? נטפל בזה בסוף הקובץ.
נזכר כי לפולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים כולל ריבוי.
נזכר כי r_0 הוא שורש מריבוי k של הפולינום $\ell(r)$ אם"ם $\ell(r) = (r-r_0)^k q(r)$ כאשר $q(r)$ פולינום עבורו $q(r_0) \neq 0$, אם"ם $(r-r_0)^k$ מחלק את $\ell(r)$ אבל $(r-r_0)^{k+1}$ אינו מחלק את $\ell(r)$, אם"ם

$$\begin{aligned}
&\ell(r_0) = 0\\
&\ell'(r_0) = 0\\
&\vdots\\
&\ell^{(k-1)}(r_0) = 0\\
&\ell^{(k)}(r_0) \neq 0.
\end{aligned}$$

כיוון שאנו מחפשים n פתרונות ב.ת.ל. ויש לנו n שורשים של הפולינום האופייני, ננסה להוציא מכל שורש של הפולינום האופייני מספר פתרונות השווה לריבוי שלו, וכיוון שסכום הריבויים של כל השורשים הוא n נקבל n פתרונות.
סיכום של מציאת הפתרונות בהנתן שיש לנו את השורשים של הפולינום האופייני:
1. אם r_0 הוא שורש ממשי מריבוי k אזי k הפתרונות שנובעים ממנו הם

$$e^{r_0x}, xe^{r_0x}, \dots, x^{k-1}e^{r_0x}$$

נראה זאת בסוף הקובץ.
2. נניח כי $r_0 = a+ib$ שורש מריבוי k שאינו ממשי, כלומר $b \neq 0$. נזכר בזהות אוילר

$$e^{c+id} = e^c(\cos d + i\sin d).$$

כיוון שלפולינום האופייני יש מקדמים ממשיים אזי גם $\overline{r_0} = a-ib$ הינו שורש של הפולינום האופייני ומאותו הריבוי. לכן

$$e^{(a+ib)x}, xe^{(a+ib)x}, \dots, x^{k-1}e^{(a+ib)x}$$

וגם

$$e^{(a-ib)x}, xe^{(a-ib)x}, \dots, x^{k-1}e^{(a-ib)x}$$

פתרונות של המד"ר. אבל אינם פתרונות ממשיים של המד"ר ואנו מעוניינים אך ורק בפתרונות ממשיים. כיוון ש־

$$\begin{aligned}
x^je^{(a+ib)x} &= x^je^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))\\
x^je^{(a-ib)x} &= x^je^{ax}(\cos(bx) + i\sin(-bx)) = x^je^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))
\end{aligned}$$

ומכיוון שכל קומבינציה לינארית של פתרונות של מד"ר הומוגנית נשאר פתרון, אז

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(x^j e^{(a+ib)x} + x^j e^{(a-ib)x}\right) = \\
= \ & \frac{1}{2}\left(x^j e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) + x^j e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))\right) = \\
= \ & x^j e^{ax}\cos(bx)
\end{aligned}
$$

וגם

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2i}\left(x^j e^{(a+ib)x} - x^j e^{(a-ib)x}\right) = \\
= \ & \frac{1}{2i}\left(x^j e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) - x^j e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))\right) = \\
= \ & x^j e^{ax}\sin(bx)
\end{aligned}
$$

פתרונות של המד"ר ההומוגנית עם המקדמים הקבועים.
אנו רואים כי משני השורשים הצמודים מריבוי k אנו מקבלים $2k$ פתרונות

$$
\begin{gathered}
e^{ax}\cos bx,\ \ xe^{ax}\cos bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\
e^{ax}\sin bx,\ \ xe^{ax}\sin bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx
\end{gathered}
$$

משפט: אוסף n הפתרונות בתהליך המתואר לעיל מספק n פתרונות ב.ת.ל ולכן בסיס למרחב הפתרונות, כלומר מערכת יסודית של פתרונות.

הערה: ראינו כי אם a שורש של הפולינום מריבוי k, אז $e^{r_0x}, xe^{r_0x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_0x}$ פתרונות. גם ההפך נכון, כלומר אם $x^pe^{r_0x}$ פתרון של מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים, אז r_0 שורש של הפולינום האופייני מריבוי לפחות $p+1$.
באופן דומה, ראינו כי אם $r_0 = a \pm bi$ שורשים מריבוי k, אז

$$
\begin{gathered}
e^{ax}\cos bx,\ \ xe^{ax}\cos bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\
e^{ax}\sin bx,\ \ xe^{ax}\sin bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx
\end{gathered}
$$

פתרונות של המד"ר. גם ההפך נכון, כלומר אם $x^pe^{ax}\cos bx$ פתרון של מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים, אז $a \pm bi$ שורשים של הפולינום האופייני מריבוי לפחות $p+1$.

תזכורות לגבי שורשים של פולינומים:

1. r_0 הוא שורש של פולינום $\ell(r)$ מריבוי לפחות k אס"ם $(r-r_0)^k$ מחלק את הפולינום $\ell(r)$ אס"ם

$$\begin{aligned}&\ell(r_0)=0\\&\ell'(r_0)=0\\&\vdots\\&\ell^{(k-1)}(r_0)=0\end{aligned}$$

2. r_0 הוא שורש של הפולינום $\ell(r)$ מריבוי k אס"ם $(r-r_0)^k$ מחלק את הפולינום $\ell(r)$ וגם $(r-r_0)^{k+1}$ אינו מחלק את הפולינום אס"ם

$$\begin{aligned}&\ell(r_0)=0\\&\ell'(r_0)=0\\&\vdots\\&\ell^{(k-1)}(r_0)=0\\&\ell^{(k)}(r_0)\neq 0\end{aligned}$$

3. אם מספר רציונלי מצומצם $\frac{p}{q}$ הוא שורש של פולינום עם <u>מקדמים שלמים</u> $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ אז p מחלק את המקדם החופשי ו־q מחלק את מקדם החזקה הגבוהה, כלומר $p|a_0$ וגם $q|a_n$.

כלומר, בשביל שמספר רציונלי מצומצם $\frac{p}{q}$ יהיה שורש של פולינום עם <u>מקדמים שלמים</u> $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, הכרחי כי $p|a_0$ וגם $q|a_n$ (במילים: p מחלק את המקדם החופשי ו־q מחלק את מקדם החזקה הגבוהה).

המשמעות של זה היא כי אם אנו רוצים למצוא שורשים רציונליים של פולינום עם מקדמים שלמים, האפשרויות מוגבלות. שורש רציונלי חייב להיות מהצורה $\frac{p}{q}$ כאשר p מחלק את המקדם החופשי ו־q מחלק את מקדם החזקה הגבוהה. שימו לב כי החלוקה היא בשלמים, אז המחלקים של 8 למשל, הם $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$.

מתוך כל האפשרויות שמצאנו, מציבים אחד אחד ובודקים מי שורש. לא הכרחי כי יהיה שורש. אם לא מצאתם שורש בצורה זו, אז אין שורש רציונלי וצריך להשתמש בשיטות אחרות.

תרגיל: $y^{(4)} - 6y^{(3)} + 14y'' - 16y' + 8y = 0$

פתרון: הפולינום האופייני הוא $\ell(r) = r^4 - 6r^3 + 14r^2 - 16r + 8$ ולכן אם יש שורשים רציונליים מצומצמים $\frac{p}{q}$ אזי $p|8$ וגם $q|1$ כלומר $p = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ וגם $q = \pm1$ כלומר $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$. ע"י הצבה של כל 8 האפשרויות אנו רואים כי 2 הוא שורש. נמצא ריבוי.

$$\ell'(2) = 4 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 - 16 = 32 - 72 + 56 - 16 = 0$$
$$\ell''(2) = 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 28 = 48 - 72 + 28 \neq 0$$

ולכן הריבוי הוא 2.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad r^4 - 6r^3 + 14r^2 - 16r + 8\big) : \big(r^2 - 4r + 4\big) = r^2 - 2r + 2 \\
\underline{-r^4 + 4r^3 \quad - 4r^2} \\
\qquad\quad -2r^3 + 10r^2 - 16r \\
\qquad\quad \underline{\;\; 2r^3 \quad - 8r^2 \quad + 8r} \\
\qquad\qquad\qquad 2r^2 \quad - 8r + 8 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2r^2 \quad + 8r - 8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

כלומר $\ell(r) = (r-2)^2(r^2 - 2r + 2)$ והשורשים של $r^2 - 2r + 2$ הם $1 \pm i$ ולכן השורשים הם $2, 2, 1+i, 1-i$ והפתרונות הם $e^{2x},\ xe^{2x},\ e^x \cos x,\ e^x \sin x$ כלומר זהו בסיס למרחב הפתרונות או מערכת יסודית של פתרונות. כלומר

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^x \cos x + c_4 e^x \sin x\ .$$

תרגיל: $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 2y^{(3)} - 12y'' + y' - 6y = 0$

פתרון: הפולינום האופייני הוא $\ell(r) = r^5 - 6r^4 + 2r^3 - 12r^2 + r - 6$ ולכן אם יש שורשים רציונליים מצומצמים $\frac{p}{q}$ אזי $p| - 6$ וגם $q|1$ כלומר $p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ וגם $q = \pm1$ כלומר $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. ע"י הצבה של כל 8 האפשרויות אנו רואים כי 6 הוא שורש. נמצא ריבוי. $p'(6) \neq 0$ ולכן הריבוי הוא אחד.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad r^5 - 6r^4 + 2r^3 - 12r^2 + r - 6\big) : \big(r - 6\big) = r^4 + 2r^2 + 1 \\
\underline{-r^5 + 6r^4} \\
\qquad\qquad\quad 2r^3 - 12r^2 \\
\qquad\qquad \underline{-2r^3 + 12r^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad r - 6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-r + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

כלומר $\ell(r) = (r-6)(r^2+1)^2$ והשורשים הם $6, i, i, -i, -i$ והפתרונות הם $e^{6x}, \ \cos x, \ \sin x, \ x\cos x, \ x \sin x$ כלומר זהו בסיס למרחב הפתרונות או מערכת יסודית של פתרונות. כלומר

$$y(x) = c_1 e^{6x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \cos x + c_5 x \sin x \ .$$

תוספת לתרגיל: אילו מהפתרונות של המד"ר חסומים? אילו חסומים על ציר המספרים האי שלילי? אילו חסומים על ציר המספרים האי חיובי?
הפתרון הכלל הוא

$$y(x) = c_1 e^{6x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \cos x + c_5 x \sin x \ .$$

וקל לראות כי אם c_1 או c_4 או c_5 אינם אפס אזי נקבל פתרון שאינו חסום. וכיוון ש־$\sin x, \cos x$ חסומים אזי הפתרונות החסומים הם כל הפתרונות מהצורה

$$c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

לגבי פתרונות החסומים על ציר המספרים האי שליליים, שוב אנו רואים שאנו מקבלים אותה התשובה

$$c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

לגבי פתרונות החסומים על ציר המספרים האי חיובי, פה אנו רואים כי e^{6x} חסום עליו ולכן התשובה במקרה זה היא

$$c_1 e^{6x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

<u>תרגיל:</u> $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 3y'' - 2y' + 2y = 0$
א. ודאו כי $\sin x$ הוא פתרון.
ב. מצאו פתרון כללי.
<u>פתרון:</u> א. נציב למד"ר

$$\sin x + 2\cos x - 3 \sin x - 2 \cos x + 2 \sin x = 0 \ .$$

ב. כיוון ש־$\sin x$ פתרון אנו יכולים לנחש כי i הוא שורש של הפולינום האופייני. ניחוש הוא נחמד אבל צריך לוודא. נציב את i בפולינום האופייני:

$$\ell(i) = i^4 - 2i^3 + 3i^2 - 2i + 2 = 1 + 2i - 3 - 2i + 2 = 0$$

ולכן גם $-i$ שורש. ולכן $r^2+1=(r-i)(r+i)$ מחלק את הפוילנום האופייני.

$$\begin{array}{l}
\left(\quad r^4-2r^3+3r^2-2r+2\right):\left(r^2+1\right)=r^2-2r+2 \\
\underline{-r^4 \qquad\qquad -r^2} \\
\quad -2r^3+2r^2-2r \\
\quad \underline{2r^3 \qquad\quad +2r} \\
\qquad\quad 2r^2 \qquad +2 \\
\qquad \underline{-2r^2 \qquad -2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

והשורשים של r^2-2r+2 הם $1\pm i$ ולכן השורשים הם $i,-i,1+i,1-i$ ומערכת יסודית של פתרונות היא $\cos x,\ \sin x,\ e^x\cos x,\ e^x\sin x$, כלומר הפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3e^x\cos x+c_4e^x\sin x.$$

תוספת לעבודה עצמית: אילו מהפתרונות של המד"ר חסומים? אילו חסומים על ציר המספרים האי שלילי? אילו חסומים על ציר המספרים האי חיובי? לאילו מהפתרונות יש גבול כאשר x שואף לאינסוף? לאילו מהפתרונות יש גבול כאשר x שואף למינוס אינסוף?

תרגיל: מצאו מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר מינימלי עבורה הפונקציות $e^x, x^2\sin x$ פתרונות.

פתרון: אם e^x פתרון אז 1 צריך להיות שורש של הפולינום האופייני מריבוי 1 לכל הפחות.

אם $x^2\sin x$ פתרון אז $\pm i$ צריכים להיות שורשים של הפולינום האופייני מריבוי לפחות 3. לכן

$$p(r)=(r-1)(r^2+1)^3=(r-1)(r^6+3r^4+3r^2+1)=r^7-r^6+3r^5-3r^4+3r^3-3r^2+r-1$$

מה שאומר כי

$$y^{(7)}-y^{(6)}+3y^{(5)}-3y^{(4)}+3y^{(3)}-3y''+y'-y=0$$

מד"ר הומוגנית עם מקדמים קבועים אשר $e^x, x^2\sin x$ פתרונות שלה.

הוכחות

סיכום של מציאת הפתרונות בהנתן שיש לנו את השורשים של הפולינום האופייני:

1. אם r_0 הוא שורש ממשי מריבוי k אזי k הפתרונות שנובעים ממנו הם

$$e^{r_0x}, xe^{r_0x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_0x}$$

2. אם $r_0 = a + ib$ מריבוי k אזי גם $a - ib$ שורש מריבוי k ו־$2k$ הפתרונות שנובעים מהם הם

$$\begin{gathered} e^{ax}\cos bx,\ \ xe^{ax}\cos bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx,\ \ xe^{ax}\sin bx, \cdots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{gathered}$$

משפט: אוסף n הפתרונות בתהליך המתואר לעיל מספק n פתרונות ב.ת.ל ולכן בסיס למרחב הפתרונות, כלומר מערכת יסודית של פתרונות.

הוכחה: קודם נראה כי אלו פתרונות:

נניח r_0 שורש מריבוי k. ראינו שהצבת e^{r_0x} נותן

$$\begin{aligned} L(e^{r_0x}) &= a_n r_0^n e^{r_0x} + a_{n-1}r_0^{n-1}e^{r_0x} + \cdots + a_1 r_0 e^{r_0x} + a_0 e^{r_0x} = \\ = \quad & e^{r_0x}\left(a_n r_0^n + a_{n-1}r_0^{n-1} + \cdots + a_1 r_0 + a_0\right) = e^{r_0x}\ell(r_0) = 0 \end{aligned}$$

כאשר $\ell(r_0) = 0$ כי r_0 שורש של $\ell(r)$ מריבוי k.

נניח כעת כי $k > 1$. נראה כי גם xe^{r_0x} פתרון. נזכר כי לכל r, x

$$L(e^{rx}) = a_n r^n e^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = e^{rx}\ell(r)$$

נגזור לפי r:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} &= \frac{\partial\big(e^{rx}\ell(r)\big)}{\partial r} \\ \frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} &= xe^{rx}\ell(r) + e^{rx}\ell'(r) \end{aligned}$$

ונציב r_0 כאשר נזכור כעת כי $\ell(r_0) = \ell'(r_0) = 0$ וזאת מכיוון שהריבוי של r_0 גדול מאחד.

$$\frac{\partial L(e^{r_0x})}{\partial r} = xe^{r_0x}\ell(r_0) + e^{r_0x}\ell'(r_0) = 0$$

כלומר

$$\frac{\partial L(e^{r_0x})}{\partial r} = 0.$$

עכשיו נסתכל על $y_r(x) = e^{rx}$. זוהי פונקציה שאפשר לגזור אותה לפי r, x וסדר הנגזרות לא משנה כי הנגזרות החלקיות מכל הסדרים רציפות. כלומר

$$\frac{\partial^i\left(\frac{\partial^j(e^{rx})}{\partial^j r}\right)}{\partial^i x} = \frac{\partial^j\left(\frac{\partial^i(e^{rx})}{\partial^i x}\right)}{\partial^j r}$$

נשים לב כי

$$L(e^{rx}) = a_n\frac{\partial^n(e^{rx})}{\partial^n x} + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}(e^{rx})}{\partial^{n-1}x} + \cdots + a_1\frac{\partial(e^{rx})}{\partial x} + a_0 e^{rx}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(e^{rx})}{\partial r} &= \frac{\partial\Big(a_n\frac{\partial^n(e^{rx})}{\partial^n x} + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}(e^{rx})}{\partial^{n-1}x} + \cdots + a_1\frac{\partial(e^{rx})}{\partial x} + a_0 e^{rx}\Big)}{\partial r} = \\
&= a_n\frac{\partial\left(\frac{\partial^n(e^{rx})}{\partial^n x}\right)}{\partial r} + a_{n-1}\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1}(e^{rx})}{\partial^{n-1}x}\right)}{\partial r} + \cdots + a_1\frac{\partial\left(\frac{\partial(e^{rx})}{\partial x}\right)}{\partial r} + a_0\frac{\partial(e^{rx})}{\partial r} = \\
&= a_n\frac{\partial^n\left(\frac{\partial(e^{rx})}{\partial r}\right)}{\partial^n x} + a_{n-1}\frac{\partial\left(\frac{\partial(e^{rx})}{\partial r}\right)}{\partial^{n-1}x} + \cdots + a_1\frac{\partial\left(\frac{\partial(e^{rx})}{\partial r}\right)}{\partial x} + a_0 x e^{rx} = \\
&= a_n\frac{\partial^n(xe^{rx})}{\partial^n x} + a_{n-1}\frac{\partial(xe^{rx})}{\partial^{n-1}x} + \cdots + a_1\frac{\partial(xe^{rx})}{\partial x} + a_0 x e^{rx} = \\
&= a_n\left(xe^{rx}\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(xe^{rx}\right)^{(n-1)} + \cdots + a_1\left(xe^{rx}\right)' + a_0\left(xe^{rx}\right)
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
xe^{rx}\ell(r) + e^{rx}\ell'(r) &= \frac{\partial L(e^{r_0x})}{\partial r} = \\
&= a_n\left(xe^{rx}\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(xe^{rx}\right)^{(n-1)} + \cdots + a_1\left(xe^{rx}\right)' + a_0\left(xe^{rx}\right)
\end{aligned}$$

נציב r_0 ונקבל

$$\begin{aligned}
0 = xe^{r_0x}\ell(r_0) + e^{r_0x}\ell'(r_0) &= \frac{\partial L(e^{r_0x})}{\partial r} = \\
&= a_n\left(xe^{r_0x}\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(xe^{r_0x}\right)^{(n-1)} + \cdots + a_1\left(xe^{r_0x}\right)' + a_0\left(xe^{r_0x}\right)
\end{aligned}$$

כלומר

$$a_n\left(xe^{r_0x}\right)^{(n)} + a_{n-1}\left(xe^{r_0x}\right)^{(n-1)} + \cdots + a_1\left(xe^{r_0x}\right)' + a_0\left(xe^{r_0x}\right) = 0$$

כלומר ההצבה של xe^{r_0x} למד"ר נותן זהות ולכן זהו פתרון של המד"ר.
אם $k > 2$ אז גוזרים לפי r פעמיים ומשתמשים באותם הכללים.
ההוכחה כי הפתרונות המתקבלים הם ב.ת.ל. ארוכה מדי ונביא רק את ההוכחה כאשר השורשים ממשיים ושונים, כלומר הריבוי של כל שורש הוא אחד: במקרה זה הפתרונות הם

$$e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx}$$

כאשר $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ השורשים של הפולינום האופייני. נראה כי ב.ת.ל.: נניח כי

$$c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx} = 0$$

לכל x. אז

$$0 = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx} = e^{r_nx}\left(c_1e^{(r_1-r_n)x} + c_2e^{(r_2-r_n)x} + \cdots + c_n\right)$$

לכל x. כלומר

$$0 = c_1e^{(r_1-r_n)x} + c_2e^{(r_2-r_n)x} + \cdots + c_n$$

וכיוון שכל ביטוי מהצורה $r_i - r_n$ שלילי אזי

$$0 = \lim_{x\to\infty} c_1e^{(r_1-r_n)x} + c_2e^{(r_2-r_n)x} + \cdots + c_n = c_n$$

ונקבל

$$c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_{n-1}e^{r_{n-1}x} = 0$$

נפעיל את אותה השיטה שוב ונקבל $c_{n-1} = 0$ וכן הלאה נקבל כי כל המקדמים חייבים להיות אפס ולכן הם בלתי תלויים.

■