תורת החבורות – תרגיל בית 1

שאלה 1

א. חשב את $d=(315,483)$ ומצא a,b שלמים כך ש $d=a\cdot 315+b\cdot 483$.

ב. חשב את $d=(585,1260)$ ומצא a,b שלמים כך ש $d=a\cdot 585+b\cdot 1260$.

שאלה 2

יהיו a,b זרים שונים מאפס, הוכח מבלי להשתמש בפירוק לראשוניים:

א. אם c זר ל-b, אז ac,b זרים.

ב. $4a+3b,\ 3a+2b$ גם הם זרים.

שאלה 3

הוכח כי לכל a,b,n שלמים מתקיים $n\cdot(a,b)=(n\cdot a,n\cdot b)$.

שאלה 4

יהי n מספר טבעי, הוכח:

א. אם $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$, אז לכל $k\in\mathbb{N}$ $a^k\equiv b^k\ (\mathrm{mod}\ n)$.

ב. אם $a_i\equiv b_i\ (\mathrm{mod}\ n)$ לכל $1\le i\le m$, אז לכל $k_1,\cdots,k_m$ שלמים

$$\sum_{i=1}^{m}k_ia_i\equiv\sum_{i=1}^{m}k_ib_i\ (\mathrm{mod}\ n).$$

ג. אם $(a,n)=1$, אז כל שני פתרונות של המשוואה $ax=1\ (\mathrm{mod}\ n)$ שווים מודולו n

שאלה 5

א. מצא את הספרה האחרונה של המספר 777^{777}.

ב. מצא את שארית החלוקה של $5555^{2222}+2222^{5555}$ ב-7.

שאלה 6

הוכח כי לכל a,b,n שלמים מתקיים $a^2+b^2 \neq 4\cdot n+3$.

שאלה 7

יהיו $p,n\in\mathbb{N}$ טבעיים, p ראשוני.

מצא k שלם אי-שלילי הגדול ביותר כך ש p^k מחלק את $n!$.

שאלה 8 (שאלת חזרה)

חלק 1: תהי $X=\mathbb{R}^3$ ונגדיר רלציה R על קבוצה X באופן הבא: לכל $x,y\in X$ $(x,y)\in R$ אם ורק אם x,y נמצאים על אותו מישור $x-2y+8z=t$ עבור איזשהו $t\in\mathbb{R}$.

הוכח ישירות (מבלי להשתמש בתוצאות התרגול) כי

א. R הינה רלצית שקילות על קבוצה X;

ב. $V=\left\{\left[\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}\right]\,\middle|\,\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ הינו אוסף כל מחלקות השקילות;

ג. V מרחב וקטורי מעל $F=\mathbb{R}$ ביחס לפעולות כפי שהוזכר בתרגול.

חלק 2: תהי $X=\{1,2,3\}$.

א. מצא את כל התמורות על X ורשום אותן בצורה $f_j=\begin{pmatrix}\cdots & x_i & \cdots\\ \cdots & y_i & \cdots\end{pmatrix}$, כאשר לכל i,j מתקיים כי $f_j(x_i)=y_i$. קבוצת כל התמורות על X נסמן ע"י S_3.

ב. מצא את הגודל של S_3 – $|S_3|$.

ב. לכל $1\le j\le |S_3|$ תהי R_j רלצית שקילות על X המוגדרת בעזרת f_j כפי שעשינו בשיעור. פרט את כל מחלקות השקילות עבור כל $1\le j\le |S_3|$.

בהצלחה!