09/06/2016

קומבינטוריקה – תרגול 11#

תזכורת: **צביעה של גרף ב-k צבעים** היא פונ' $f: V \to [k]$ כך ש-$f(v) \neq f(u)$ עבור $\{u, v\} \in E$. במקרה זה נאמר ש-G הוא **k-צביע** ונסמן ב-$\chi(G)$ את מס' הצביעה המינימלי.

דוגמאות:

(1) $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow E = \emptyset$

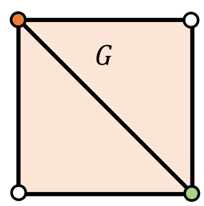
(2) $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ גרף דו"צ לא ריק.

(3) $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \equiv_2 0 \\ 3, & n \equiv_2 1 \end{cases}$

(4) $\chi(K_n) = n$

סימון: נסמן ב-$\omega(G)$ את גודל תת הגרף השלם הגדול ב-G.

דוגמא: $\omega(G) = 3$



טענה: בכל גרף G $\chi(G) \geq \omega(G)$.

הגדרה: **גרפי מיצ'לסקי** – בניה אינדוקטיבית של גרפים כך שבכל אחד מהגרפים אין משולשים. כלומר, $\omega = 2$ ו-χ גדל ב-1.

הוכחה: כדי לצבוע את ה-K המקס' דרושים $\omega(G)$ צבעים ולכן כדי לצבוע את כל הגרף נצטרך לפחות $\omega(G)$ צבעים.

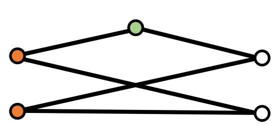
הבסיס $n = 2$:

$\boldsymbol{G_1}$

$\chi = 2, \qquad \omega = 2$

נרצה גרף שבו $\omega = 2$, $\chi = 3$:

$\boldsymbol{G_2 = C_5}$



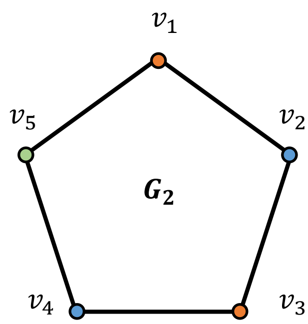
$\chi = 2, \qquad \omega = 2$

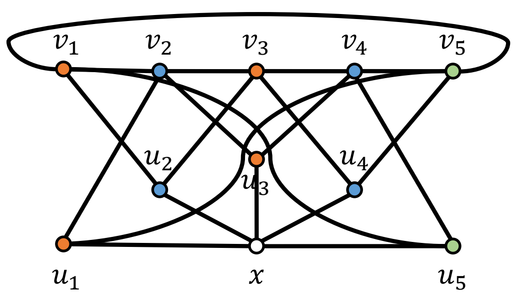
באופן כללי בהינתן G_n בונים G_{n+1} באופן הבא:

$V(G_n) = \{v_1, \dots, v_k\}$

$$V(G_{n+1}) = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_k, .x\}$$

על $\{v_1, \dots, v_k\}$ מציירים את G_n. מחברים את x לכל אחד מה-u_i. ומכאן, $\{v_i, u_j\} \in E(G_{n+1})$ אם ורק אם $\{v_i, v_j\} \in E(G_n)$. כך נבנה את G_3. ניקח את $G_2 = C_5$:





G_3

לאחר שצובעים באופן חוקי את u_i. לא נשאר צבע פנוי ל-x מתוך 3 צבעים. ולכן חייבים להשתמש בלפחות 4 צבעים, ויש צביעה ב-4 צבעים, ולכן $\chi = 4$.

תרגיל: יהי G גרף ויהי $\bar{G}$ המשלים של G. נסמן $|V| = n$. הוכיחו:

(א) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$

(ב) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$

פתרון: ל-**(א)**: כיוון ש-$\chi(K_n) = n$, נראה שניתן לצבוע את K_n ב-$\chi(G)\chi(\bar{G})$ צבעים. מתקיים $K_n = G \cup \bar{G}$. יהיו:

$f: V(G) \to [\chi(G)] = [k]$ – צביעה מינימלית של G.

$\bar{f}: V(\bar{G}) \to [\chi(\bar{G})] = [m]$ – צביעה מינימלית של $\bar{G}$.

נגדיר $g: V(K_n) \to [k] \times [m]$ ע"י $g(v) = \left(f(v), \bar{f}(v)\right)$. נניח $e = \{v, u\} \in K_n$, אז צ"ל ש-$g(u) \neq g(v)$. אם $e \in E(G)$ אז בגלל ש-$f(u) \neq f(v)$ מתקיים $g(v) \neq g(u)$. אחרת, $e \in E(\bar{G})$ אז בגלל ש-$\bar{f}(u) \neq \bar{f}(v)$ מתקיים $g(v) \neq g(u)$.

עבור **(ב)**: באינדוקציה על n. בבסיס האינדוקציה, $n = 1$, אז $G = \bar{G} = (\{\cdot\}, \emptyset)$, וכן $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = 1 + 1 \leq n + 1$. עתה, נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח עבור $n + 1$. נתון גרף G כך ש-$|V(G)| = n + 1$. נוריד קדקוד כלשהו v:

$$\chi(G \setminus \{v\}) + \chi\left(\overline{G \setminus \{v\}}\right) \leq n + 1, \;\; \overline{G \setminus \{v\}} = \bar{G} \setminus \{v\}$$

במקרה א': אם $\chi(G \setminus \{v\}) + \chi\left(\overline{G \setminus \{v\}}\right) \leq n$ ואז אם כל אחד ממספרי הצביעה גדל ב-1 כאשר מחזירים את v אז מתקיים:

$$\chi(G \setminus \{v\}) + \chi\left(\overline{G \setminus \{v\}}\right) \leq n + 2$$

וסיימנו. *אחרת:* $\chi(G \setminus \{v\}) + \chi\left(\overline{G \setminus \{v\}}\right) = n + 1$. אם $\deg_G(v) < \chi(G \setminus \{v\})$. אז כשמחזירים את v יש צבע שלא השתמשנו בו ונוכל לצבוע בו את v ולקבל צביעה חוקית של G ב-$\chi(G \setminus \{v\})$ צבעים, ואז:

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) = \chi(G \setminus \{v\}) + \chi(\bar{G}) \leq n + 2$$

אם $\deg_G(v) < \chi(\bar{G} \setminus \{v\})$, אז מאותן סיבות מקבלים את הדרוש. עכשיו, אם $\deg_G(v) \geq \chi(G \setminus \{v\})$ וגם $\deg_G(v) \geq \chi(\bar{G} \setminus \{v\})$, אז היות וערכיות של כל קדקוד ב-K_{n+1} היא n:

$$n = \deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) \geq n + 1$$

וקיבלנו סתירה.

תרגיל: הוכיחו שאם $G = (V, E)$ ומתקיים $\chi(G) = k$, אז $|E| \geq \binom{k}{2}$.

פתרון: בהינתן צביעה מינימלית ב-k צבעים, מחלקים את V ל-k קבוצות. מהנתון, בין כל שתי קב' צריכה להיות לפחות צלע אחת, כי אחרת היינו יכולים לצבוע את שתי הקב' באותו הצבע ולהקטין את מס' הצביעה. יש $\binom{k}{2}$ אפשרויות לבחור זוגות של קב' שיש ביניהן לפחות צלע אחת, ולכן $|E| \geq \binom{k}{2}$.