פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - גליון תרגילים מס' 4

להגשה: עד יום א', 17.12.00. שאלה עם $*$ היא שאלת רשות.

בכל השאלות להלן $(X,\mathcal{M},\mu)$ הוא מרחב מידה; μ חיובית, אלא אם כן צוין אחרת.

1. תהא $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה ש- $0\le f(x)<\infty$ כב"מ. נגדיר:

$$f_n:X\to\mathbb{R}\qquad f_n(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\le n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכיחו ש- $\int_X f\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f_n\,d\mu$.

2. תהי μ מידת הספירה על $(\mathbb{Z},\mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

א. תארו את הפונקציות הממשיות המדידות.

ב. מתי שתי פונקציות ממשיות שוות כב"מ?

ג. מתי קיים האינטגרל $\int_{\mathbb{Z}} f\,d\mu$?

ד. מה אומרים משפט ההתכנסות המונוטונית ומשפט ההתכנסות הנשלטת במקרה זה?

3. תהא $f:X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה ש- $\int_X f\,d\mu=\alpha$, $0<\alpha<\infty$. נתון $p>0$, הוכיחו ש-

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^p\right]d\mu(x)=\begin{cases}\infty & 0<p<1\\ \alpha & p=1\\ 0 & 1<p<\infty\end{cases}$$

רמז: במקרה $p\ge 1$ האינטגרנדים נשלטים ע"י pf. במקרה $p<1$ השתמשו בלמת Fatou.

4. תהיינה $f_n:X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ש- $\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. נתונה $g\in L^1(\mu)$ שלכל $n\in\mathbb{N}$ $g\cdot f_n\in L^1(\mu)$. האם נכון ש- $\int_X gf_n\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$?

5. תהי $f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה מדידה. נגדיר $A=f^{-1}(\mathbb{Z})$. הוכיחו ש- A מדידה וש- $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\int_X\cos^{2n}(\pi\cdot f)\,d\mu$.

6*. תהיינה $f,\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\in L^1(\mu)$ פונקציות ממשיות מדידות כך ש- $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ כב"מ ו- $\int_X|f_n|\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_X|f|\,d\mu$. הוכיחו כי $\int_X|f_n-f|\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

7. תהי f פונקציה ממשית מדידה כך ש- $\int_X f^n\,d\mu=c$ קבוע לכל $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו שקיימת $A\in\mathcal{M}$ ש- $f=\chi_A$ כב"מ.

בהצלחה.

אריאל.