1.א. הוכחה אלגברית:

$$\binom{2n}{2}=\frac{2n!}{2!(2n-2)!}=\frac{2n(2n-1)}{2}=2n^2-n=n^2+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2+2\frac{n!}{2!(n-2)!}=n^2+2\binom{n}{2}$$

הוכחה קומבינטורית: אם נתונים n כדורים שונים ירוקים ו-n כדורים אדומים שונים, יש $\binom{2n}{2}$ אפשרויות לבחור 2 מתוכם. מצד שני אפשר לחלק לשלושה מקרים:

נבחרו 2 כדורים אדומים: $\binom{n}{2}$ אפשרויות.

נבחרו 2 כדורים ירוקים: $\binom{n}{2}$ אפשרויות.

נבחרו כדור אדום וכדור ירוק: n^2 אפשרויות.

לפי עקרון החיבור מקבלים

$$\binom{2n}{2}=n^2+2\binom{n}{2}$$

מש"ל.

ב. הוכחה קומבינטורית: אם נתונים n כדורים שונים ירוקים ו-m כדורים אדומים שונים, יש $\binom{m+n}{k}$ אפשרויות לבחור k מתוכם. מצד שני אפשר לחלק ל-k+1 מקרים:

יש $\binom{n}{k}\binom{m}{0}$ אפשרויות לבחור k כדורים ירוקים ו-0 אדומים.

יש $\binom{n}{k-1}\binom{m}{1}$ אפשרויות לבחור k-1 כדורים ירוקים ו-1 אדום.

יש $\binom{n}{k-2}\binom{m}{2}$ אפשרויות לבחור k-2 כדורים ירוקים ו-2 אדומים.

.

.

.

יש $\binom{n}{0}\binom{m}{k}$ אפשרויות לבחור 0 כדורים ירוקים ו-k אדומים.

לכן לפי עקרון החיבור

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

הוכחה אלגברית: אפשר להוכיח באינדוקציה. דרך אחרת היא לשים לב ש-
$(1+x)^{m+n}=(1+x)^n(1+x)^m$

המקדם של x^k באגף שמאל הוא $\binom{m+n}{k}$ ואילו המקדם של x^k באגף ימין הוא
$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\dots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$
לכן
$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\dots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

ג. הוכחה אלגברית:
$$(-1)^n=(1-2)^n=2^0\binom{n}{0}-2^1\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}-2^3\binom{n}{3}+2^4\binom{n}{4}-2^5\binom{n}{5}+\dots$$

נעביר אגפים ונקבל

$$(-1)^n+2^1\binom{n}{1}+2^3\binom{n}{3}+2^5\binom{n}{5}+\dots=2^0\binom{n}{0}+2^2\binom{n}{2}+2^4\binom{n}{4}+\dots$$

הוכחה קומבינטורית:
נתבונן ב-n זוגות של גבר ואישה:

$A=\{m_1,w_1,m_2,w_2,\dots,m_n,w_n\}$

(כש-w_i נשואה ל-m_i) ונגדיר X כקבוצת כל התת-קבוצות של A שיש בהן לפחות נציג אחד מכל זוג, ויש סה"כ מספר זוגי של גברים. נגדיר Y כקבוצת כל התת-קבוצות של A שיש בהן לפחות נציג אחד מכל זוג, ויש סה"כ מספר אי-זוגי של גברים.
קל לראות ש-

$$|Y|=2^1\binom{n}{1}+2^3\binom{n}{3}+2^5\binom{n}{5}+\dots$$
$$|X|=2^0\binom{n}{0}+2^2\binom{n}{2}+2^4\binom{n}{4}+\dots$$

נראה כעת שעבור n זוגי מתקיים |X|-1=|Y| ועבור n אי-זוגי מתקיים |X|=|Y|-1. לשם כך לכל תת-קבוצה B של A שיש בה לפחות אישה אחת נגדיר f(B) באופן הבא: תהי w_i האישה בעלת האינדקס i המינימלי הנמצאת

ב-B. אם בעלה נמצא – נוציא אותו, כלומר אם $m_i \in B$ נגדיר $f(B) = B \setminus \{m_i\}$
ואם בעלה לא נמצא – נכניס אותו, כלומר אם $m_i \notin B$ נגדיר $f(B) = B \cup \{m_i\}$.
נשים לב שבכל איברי X ו-Y יש לפחות אישה אחת מלבד ב-$M = \{m_1,...,m_n\}$,
כמו-כן לכל תת-קבוצה B של A שיש בה לפחות אישה אחת מתקיים

$$f(f(B))=B \qquad (*)$$

כעת, אם n זוגי אזי $W \in X$. מתוך (*) לא קשה להשתכנע ש-f פונקציה חח"ע מ-Y על $X \setminus \{W\}$. לכן $|Y|=|X|-1$. אם n אי-זוגי אזי $W \in Y$. מתוך (*) לא קשה להשתכנע ש-f פונקציה חח"ע מ-X על $Y \setminus \{W\}$. לכן $|X|=|Y|-1$.

בשני המקרים $|X| = |Y| + (-1)^n$ כלומר

$$(-1)^n + 2^1\binom{n}{1} + 2^3\binom{n}{3} + 2^5\binom{n}{5} + \ldots = 2^0\binom{n}{0} + 2^2\binom{n}{2} + 2^4\binom{n}{4} + \ldots$$

הערה: השוו הוכחה זו עם ההוכחה שבקבוצה סופית לא ריקה מספר התת-קבוצות הזוגיות שווה למספר התת-קבוצות האי-זוגיות. שימו לב שההפרש 1 (הנובע מ-W) מתאים בדיוק למקרה הקבוצה הריקה שעבורה אין שיוויון.

2. הפרופסור טועה. בחירת תת-קבוצה בגודל k אינה שקולה לבחירת תת-קבוצה בגודל m ובחירת תת-קבוצה שלה בגודל k. למשל הבחירה של $\{3\}$ כתת-קבוצה של $\{1,2,3\}$ נספרת רק פעם אחת ב-$\binom{3}{1}$ אבל היא נספרת פעמים ב-$\binom{3}{2}\binom{2}{1}$: פעם ראשונה בתוך האפשרות לבחור את $\{1,3\}$ כתת-קבוצה של $\{1,2,3\}$ ואז לבחור את $\{3\}$ כתת-קבוצה של $\{1,3\}$, ופעם שנייה בתור האפשרות לבחור את $\{1,2\}$ כתת-קבוצה של $\{1,2,3\}$ ואז לבחור את $\{3\}$ כתת-קבוצה של $\{1,2\}$. ואכן,

$$\binom{3}{2}\binom{2}{1} = 6 \neq 3 = \binom{3}{1}$$

3. א. הוכחה אלגברית: מכפלת שני מספרים שאף אחד מהם אינו כפולה של p, איננה בעצמה כפולה של p. באינדוקציה אפשר להסיק מכאן שכל מכפלה סופית של מספרים שאף אחד מהם אינו כפולה של p, איננה בעצמה כפולה של p. בפרט !k ו-!(p-k) אינן כפולות של p ומכאן שגם !k!(p-k) אינה כפולה של p. אבל !p כפולה של p ומתקיים

$$p!=\binom{p}{k}(p-k)!k!$$

לכן $\binom{p}{k}$ כפולה של p.

הוכחה קומבינטורית: נתבונן בחדר עשוי מקרטון בצורת מצולע משוכלל בעל p צלעות. יהי A אוסף האפשרויות לצבוע k מהקירות בלבן ו-p-k בשחור, כאשר שתי צביעות נחשבות זהות אם הן מתקבלות זו מזו ע"י סיבוב החדר.

כעת נתבונן ב-p לוחות קרטון המסודרים בשורה. יהי B אוסף האפשרויות לצבוע k מהלוחות בלבן ו-p-k בשחור.

מחד כמובן $|B|=\binom{p}{k}$. מאידך, אפשר לקבל את איברי B באופן הבא: קודם בוחרים צביעה מ-A (יש $|A|$ אפשרויות לעשות זאת) אח"כ בוחרים אחת מפינות החדר (יש p פינות) גוזרים בפינה זו, פורשים את הקרטון ומקבלים צביעה של לוחות המסודרים בשורה, כלומר איבר מ-B. לכן

$$|A|p=|B|=\binom{p}{k}$$

ומכאן

$$|A|=\frac{\binom{p}{k}}{p}$$

כלומר $\frac{\binom{p}{k}}{p}$ פתרון של בעיה קומבינטורית, יש קבוצה בעלת $\frac{\binom{p}{k}}{p}$ איברים, לכן בהכרח המספר $\frac{\binom{p}{k}}{p}$ הוא שלם, כלומר $\binom{p}{k}$ כפולה של p.

ב. אם p אינו ראשוני יתכן שיהיה איבר ב-B שיתקבל בשתי דרכים שונות. למשל אם k=2, p=4, ו-a הצביעה ב-A המתקבלת מצביעת שני קירות מקבילים בריבוע בלבן ושני הקירות המקבילים האחרים בשחור, אזי בשל הסימטריה יש שתי פינות שאם נגזור בהן נקבל אותה צביעה (לבן, שחור, לבן, שחור) ב-B. לכן החישוב של $|A|$ המובא בסעיף א' אינו תקף עוד.

ג. אם ניקח כמו בסעיף ב' k=2, p=4, נקבל $\binom{p}{k}=\binom{4}{2}=6$ ו-6 איננו כפולה של המספר 4.

<u>הערה:</u> התשובה לסעיף ב' מעלה תהיות חדשות לגבי סעיף א'. מדוע אם p ראשוני לא תתכן סימטריה? ובכן, תהי $b=(c_1,c_2,c_3,\ldots,c_p)$ צביעה ב-B (כאשר כל c_i הוא צבע: שחור או לבן) ולשם פשטות הסימון נגדיר

$c_{p+1}=c_1, c_{p+2}=c_2,\ldots,c_{2p}=c_p, c_{2p+1}=c_1, c_{2p+2}=c_2,\ldots,c_{3p}=c_p$.

נתבונן בצביעה a מ-A המתקבלת מ-b ע"י קיפול. נסמן ב- $v_0,v_1,\ldots,v_{p-1}$ את פינות החדר. בלי פגיעה בכלליות הדיון הצביעה b מתקבלת מהצביעה a ע"י גזירה בפינה v_0.

נניח בשלילה שקיימת עוד פינה v_m שאם נגזור בה את a נקבל את b. כלומר לכל i=1,2,…,p מתקיים $c_{i+m}=c_i$. נראה, שעבור p ראשוני זה בלתי אפשרי.

נניח תחילה ש-m איננו 1. הואיל ו-p אינו מתחלק ב-m אף כפולה של m איננה בדיוק p. תהא jm הכפולה המינימלית של m הגדולה מ-p, ולפי ההגדרה המספר m'=jm-p קטן מ-m. ואז לכל i=1,2,…,p מתקיים

$$c_i=c_{i+m}=c_{i+2m}=\ldots=c_{i+jm}=c_{i+m'}$$

כלומר מצאנו מספר קטן יותר בעל אותה תכונה. לכן אם נחפש את המספר m הקטן ביותר שעבורו לכל i=1,2,…,p מתקיים $c_{i+m}=c_i$, אזי בהכרח m=1 כלומר

$$c_1=c_2=c_3=c_4=\ldots=c_{p-1}=c_p$$

במילים אחרות, כל הלוחות צבועים באותו צבע. לכן k=0 או k=p. זאת בסתירה לנתון ש-k מספר בין 1 ל-p-1. הגענו לסתירה, ומכאן ש- v_0 הפינה היחידה של החדר שבה אפשר לגזור את b כדי לקבל את a.

4.א.

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}=n\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=n\binom{n-1}{k-1}$$

ב. לפי סעיף א'

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+n\binom{n-1}{2}+\ldots+n\binom{n-1}{n-1}$$

נוציא גורם משותף ונקבל

$$n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right)$$

ולפי נוסחת הבינום, זה שווה ל- $n(1+1)^{n-1}$ כלומר $n2^{n-1}$.

ג. נתבונן בקבוצה של n אנשים ונשאל כמה אפשרויות יש לבחור מתוכם ועדה ולבחור מתוכה יו"ר. אם ידוע שבועדה k אנשים אזי התשובה היא $k\binom{n}{k}$. אם לא ידוע מספר האנשים בועדה, יש לסכום על כל המקרים האפשריים, לכן מקבלים

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$$

מצד שני, אפשר קודם לבחור את היו"ר (יש n אפשרויות לכך) ואז לבחור את שאר הועדה (יש 2^{n-1} אפשרויות לכך) לכן

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$$

ד.

$$2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+4\binom{n}{3}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n} = 1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}+$$

$$+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n} = n2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = n2^{n-1}+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)-\binom{n}{0} =$$

$$= n2^{n-1}+2^{n}-1=(n+2)2^{n-1}-1$$