עולם המשפטים

הגדול 2

איך ללמוד למבחן ?המלצתי, היא זו:

תוכנית א'

- לקרוא את כל סיכומי ההרצאות (כ 3 ימי עבודה).
- לעבור על תקצירי ההרצאות, ולהשתכנע שאתם יודעים לשחזר, לפחות מדגמית, את ההוכחות. (כיום עבודה אחד.)
- ללמוד היטב את המשפטים במיקוד למבחן. יש מלא שאלות של רק ל"הגדר".
- לעבור על התרגיל - שיעורי תרגיל, שיעורי בית, ופתרונות (חצי יום עבודה).
- לפתור מה שיותר מבחנים משנים קודמות. לפחות 10 מבחנים, אך כמה שיותר. (כ 3-7 ימי עבודה).

תוכנית ב': לאלה שקצרים בזמן.

- לטחון את הספר של אלכס קופרמן. פשוט מעולה.
- לעבור על מבחנים ביום יומיים האחרונים.

תעבדו הכי קשה שאתם יכולים, ובלי תירוצים. למדנו לחרא הזה כל הסמסטר.

נצליח או שלא כל כך נצליח. יהיה בסדר. ומקסימום – נתראה במועד ב'.

פונקציות

הגדרת פונקציה:

יהיו A ו- B שתי קבוצות כל שהן. פונקציה f מ A לתוך B מסומנת: $f : A \to B$

היא כלל שמתאים לכל איבר $x \in A$ איבר אחד ויחיד: $f(x) \in B$.

- A נקרא תחום ההגדרה של f . = כל ערכי האיקס "החוקיים" שנמצאים בקבוצה A.
- הטווח של f הוא $B = f(x) \ni y$. כך שקיים $x \in A$ ו $f(x) = y$. = כל הערכי ה-y החוקיים שהפונקציה יכולה לקבל
- התמונה של f היא קבוצת כל המספרים ש f "באמת" מקבלת.
- דוגמה - $f(x) = [x]$ - טווח – כל R, טווח – כל R – תמונה – כל Z.

~~~~

תכונות בסיס;

- מונוטוניות;

הפונקציה $f(x)$ על R נקראת עולה (ממש) אם לכל $x_1 > x_2$ מתקיים $f(x_1) \geq f(x_2)$, ויורדת (ממש) אם לכל $x_1 > x_2$ מתקיים $f(x_1) \leq f(x_2)$. כמו כן: אם f מוגדרת בקטע I נאמר ש f עולה (יורדת) ב I.

- חסומה;

פונקציה ממשית נקראת חסומה מלמעלה או חסומה מלעיל אם קיים קבוע M כך ש -$f(x) \leq M$ לכל x בתחום הגדרתה .

- פונקציה חח#ע *3 דרכים) 2;2

- פונקציה f תיקרא חח"ע אם היא מקיימת $\underbrace{x_1 \neq x_2}_{x_1, x_2 \in A} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{x_1, x_2 \in A} \Rightarrow x_1 = x_2$
- תרגום – לכל ערך איקס יש y אחד, לכל ערך y יש x אחד.

- פונקציה על

פונקציה $f : A \longrightarrow B$ תיקרא על אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.

- תרגום – לכל ערך בקטע מוגדר (לדוגמה, $[-23,1000]$ קיים ערך x עבורו בטווח קיימים כל הערכים האפשריים בקטע $[-23,1000]$. על כך הפונקציה תקרא "על" הקטע. $[-23,1000]$ כך גם יכולה להיות פונקציה "על" R.
~~~~

- פונקציה הפיכה *סימון ($g = f^{-1}$)

- $f: A \longrightarrow B$ תיקרא הפיכה אם קיימת $g: B \longrightarrow A$ כך ש ; לכל $a \in A$ מתקיים $g\left(f(a)\right)=a$ וגם לכל $b \in B$ מתקיים $f\left(g(b)\right)=b$,
- תרגום – כפי שפונקציית המקור "בולעת" איקסים ומוציאה עים, כך הפונקציה ההפוכה לה בולעת עים ומוציאה איקסים, "באותו אופן". הפונקציה מצויירת כתמונת מראה לציר הישר $y = x$, ואין זה מקרי – היא בדיוק השיקוף של הערכים, בדיוק החלופה של הערכים עבור x וy. על כן, במצב של ההרכבה, ערך איקס הנכנס יצא כאותו ערך איקס, ועבור ההרכבה ההפוכה, ערך y הנכנס יוציא את אותו ערך y.
- עוד מילה על פונקציות הפיכות: הם עושות בלאגן בראש. במיוחד בעת הוכחת תכונות וגזירה. מציע מאוד מאוד בחום לזכור את הנגזרות בעל פה, גרפי הפונקציות ותכונות כל פונקציה.

- פונקציה זוגית ; $f(x)= f(-x)$,
- פונקציה אי זוגית ; $f(-x)=-f(x)$,

- פונקציה מחזורית :

- היא פונקציה אשר הערכים שהיא מקבלת חוזרים על עצמם כאשר מוסיפים למשתנה הבלתי תלוי שלה גורם קבוע, כלומר, $f(x+T)=f(x)$ לכל x, עבור קבוע T (שונה מאפס) מתאים. גורם קבוע זה קרוי מחזור . המחזור החיובי הקטן ביותר של הפונקציה, אם קיים, נקרא המחזור היסודי.

- נקודת שבת ; כאשר $f(x_0)=x_0$ או קיצר, x=y

משפטים – תכונות בסיס:

- f הפיכה <==> f חח״ע ועל. (כמו באלגברה ☺)

הגדרת הגבול

שתי ההגדרות של הגבול- שקולות (קושי והיינה)

(על פי קושי):

תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר ש $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-l|<\varepsilon$.

- תרגום: - לשם הוכחת גבול: נניח שיש לנו דלטא מספיק קטנה ונבדוק אם זה גורר אפסילון מספיק קטן:

$$|x-x_0|<\delta \quad \to \quad |f_{(x)}-L|<\varepsilon$$

הגדרות נוספות לגבול :

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש A כך שלכל $x<A$ יתקיים: $|f(x)-l|<\varepsilon$.
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש A כך שלכל $x>A$ יתקיים: $|f(x)-l|<\varepsilon$.
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ אם לכל M יש $\delta>0$ כך שלכל X המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $M<f(x)$.
4. $\lim_{x\to x\infty} f(x)=\infty$ אם לכל M יש f כך שלכל $x>A$ מתקיים $M<f(x)$.

הערה: אם הופכים סימון מפלוס אינסוף למינוס אינסוף, הופכים את שאר הסימנים. A- על ציר ה-X, M- על ציר ה-Y.

דוגמה קצרה – הוכחה על פי הגדרה:

$$\lim_{x\to3} x^2 \overset{?}{=} 9$$

$$|x^2-9|=|x-3|\cdot|x+3|<\varepsilon$$

$$|x+3|<c \Rightarrow |x-3|<\frac{\varepsilon}{c}$$

$$|x-3|<1 \Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow c_{\max}=7$$

$$\left.\begin{array}{l} |x-3|<\frac{\varepsilon}{c}=\frac{\varepsilon}{7} \\ |x-3|<1 \end{array}\right\} \delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{7}) \Rightarrow \varepsilon=\begin{cases} \varepsilon>7\delta & \delta=1 \\ 7\delta & \delta\neq1 \end{cases}$$

מצבור הוכחות של תכונות הגבול, אריתמטיקה וכו':

http://he.wikibooks.org/wiki/%D7%97%D7%A9%D7%91%D7%95%D7%9F_%D7%90%D7%99%D7%A0%D7%A4%D7%99%D7%A0%D7%99%D7%98%D7%A1%D7%99%D7%9E%D7%9C%D7%99/%D7%92%D7%91%D7%95%D7%9C%D7%95%D7%AA/%D7%94%D7%95%D7%9B%D7%97%D7%95%D7%AA

אריתמטיקה של גבולות – המוכר -

- נניח ש $\lim_{x\to a} f(x)=l$ וגם $\lim_{x\to a} g(x)=m$ אזי:
- $\lim_{x\to a} f(x)\pm g(x)=l\pm m$.
- $\lim_{x\to a}(fg)(x)=lm$.
- אם $c\in R$ אז: $\lim_{x\to a}(cf)(x)=cl$.
- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{m}$ אם $m\neq 0$

אריתמטיקה של גבולות – הפחות מוכר –

תקציר ; $\frac{0}{\infty}, \infty+\infty=\infty, \infty\cdot\infty=\infty, L\cdot\infty=\infty \left(L\neq 0\right)$ חסומות * שואפות לאינסוף וכו':

אם $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ $\lim_{n\to\infty} c_n=L$ אז:

$$\lim_{n\to\infty} a_n+b_n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n\pm c_n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=\infty$$

$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot c_n=\infty$ כאשר $L>0$

$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot c_n=-\infty$ כאשר $L<0$

(על פי היינה):

תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר ש $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אם עבור כל סדרה $\{x_n\}$ בתוך הסביבה המנוקבת כך ש: $0\neq x_n\to a$, $f(x_n)\to l$.

כלי חשוב! תרגום- לקחת את כל הידע שלנו בסדרות וליישם אותו בפונקציות – מוסיפים את תנאי ה"נקובה" בצורה של Xn אינו שווה a, וכך מגדירים אינסוף סדרות ששואפות לa, באותו אופן שאיקסים שואפים ל a כאשר $x\to a$.
אפשר עתה להציב סדרות מוכרות במקום איקסים המקיימים את הדרישה, כדי להוכח ולהפריך דברים שהם כאב ראש להפרכה בכל דרך אחרת.

לקט משפטים רלוונטים עבור הוכחות – סדרות ← פונקציות

נושא גדולי'

- **קיים באוסף המשפטים הגדול שפורסם לצד הגיליון הנוכחי. יש לתרגם אותם לשפת הפונקציות בהתאם לצורך. הרבה מההוכחות ניתן לעשות בשינויים קלים מאלו של סדרות, או ע"י השימוש בהיינה**

~~~~~

גבולות חד צדדיים:

הגדרה* עבור קושי;

נניח ש f מוגדרת בסביבה "ימנית" ("שמאלית") של x_0 מהסוג (x_0,x_0+r) ((x_0-r,x_0)). נאמר שהגבול של f כאשר $x\to x_0$ מימין (שמאל) שווה ל l. אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x_0<x<x_0+\delta$ ($x_0-\delta<x<x_0$) מתקיים: $|f(x)-l|<\varepsilon$.

מסומן: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ (או $\lim_{x\to x_0^-} g(x)=l$)

⇐ כל המשפטים על הגבול נכונים גם לגבולות חד צדדיים (אם ניתנים להשמה על צד אחד)

הגדרה* עבור היינה;

צד אחד: עבור $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$: אם לכל סדרה $x_0<x\to x_0$ אזי: $f(x_n)\to l$.

הכללה: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 : $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ וגם $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ קיימים ושווים.
~~~~~

משפטים עבור פעולות בין פונקציות:

- משפט ההרכבה 2; תהי g מוגדרת בסביבה מנוקבת של a ו f מוגדרת בסביבה שלמה של l אם $\lim_{x\to a} g(x) = l$ ו- $\lim_{x\to l} f(x) = m$ אזי: $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = m$.
- משפט ההרכבה 3; *גרסה שונה) אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$ אז $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = L$
- הערה; הרכבה; אם $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ו- $\lim_{x\to b} g(x) = c$ לאו דווקא מתקיים $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

לקט משפטים נוספים על גבול - השארתי מקום לבחירתכם

- f מקיימת $|f(x)| \le |x|$ לכל x, אז $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\sup(f(x) - g(x)) \le \sup f(x) + \sup g(x)$

  $b > 1 \quad b^n \ge n^b$
- $\frac{n^b}{b^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

חישובי גבולות

כלים חשובים לחישוב גבולות – ארגז כלים :

1. נגזרות ולופיטל

סממנים: יש פונקציה, לופיטל. בבקשה לא יותר משלוש פעמים. לא עבד – לחשוב על דברים אחרים (אני כולל בתוך זה גם את הפירוק הלוגריתמי ל ln והבאה למכנה וכדומה)

2. טיילור

סממנים: לופיטל לא עובד, יש פולינום במכנה.

3. כלי עזר : אריתמטיקה של גבולות, כולל אינסופיים.

שימושי ביותר בחישובי גבולות ארוכים ומפרכים – לנסות לפרק לביטויים קטנים יותר ולסלק אותם מהמשוואה לצדדים אם גבולות ניתן להסקה.

4. סנדויץ'

סממנים: שורשים על כל הביטוי, לא הלך עם דברים אחרים.

5. קירוב למבנה של e –

סממנים: כל חזק ביותר לגבולות מסובכים ששאר השיטות כשלו. בדרך כלל ניתן להמשיך עם לופיטל.

6. שימוש בפונקציות מוכרות וגבולות מוכרים (פרק קצר מוקדש בהמשך)

7. פישוט טריגונומטרי - $|\cos x, \sin x| \le 1$, $|\sin x| \le |x|$

8. זהויות טריגונומטריות

~~~~~~

9. סדרות : מבחן המנה רק על סדרות חיוביות, או הגדרה של ערך מוחלט מראש!

10. סדרות : מבחן השורש רק על סדרות חיוביות, או הגדרה של ערך מוחלט מראש!

11. סדרות : מעבר מאחד לשני $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$

12. סדרות : קירוב למבנה של e

13. סדרות : משפט החזקה $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = L, \lim\limits_{n\to\infty}B_n = K, \to \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^{B_n} = L^K$ רק על סדרה An חיוביות

14. סדרות : משפט הממוצעים
~~~~~~

דוגמאות חשובות בחישובי גבולות חסר

כלים חשובים להוכחה לפי הגדרה – ארגז כלים :

1. הוספה וחיבור של איברים
2. כפל בצמוד – במקרה של שורשים
3. נוסחאות הכפל והבינום – ביחוד ל $(x \pm a)^3$

.1 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ **.2** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **.3** $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

.4 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ **.5** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

4. זהויות טריגונומטריות

5. פישוט טריגונומטרי - $|\cos x, \sin x| \le 1$, $|\sin x| \le |x|$
6. עבור $k, \varepsilon, L > 0$ כלשהם : $\left|\frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{L^2}\right| = \frac{|f(x)-L| \cdot |f(x)+L|}{f(x)^2 \cdot L^2} < \frac{k|f(x)-L|}{L^3} < \frac{k\varepsilon}{L^3}$
7. לא נראה לי רלוונטי : אבל בינום של ניוטון :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ , \quad 0! = 1$$

כלים חשובים להוכחת גבולות– ארגז כלים : חסר

1. הגדרה (של קושי) עם אפסילון ודלטא
2. היינה ומשפטי סדרות.
3. קרטריון קושי
4. גבולות חד צדדיים
5. נגזרות ולופיטל
6. זהויות טריגונומטריות
7. סדרות : פירוק לסכומי חשבונית והנדסית :

סידרה חשבונית $a_n = a_1 + (n-1)d \quad , \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

סידרה הנדסית $a_n = a_1 q^{n-1} \quad , \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

כלים חשובים להפרכת גבולות– ארגז כלים : חסר

1. לנגח את ההגדרה – למצוא אפסילון/M עוברו לא מתקיים התנאי הדרוש.
2. היינה. למצוא שתי סדרות המקיימות את תנאי היינה, אך בעת הצבה גבולם לא שווה.
3. לנגח את יחידות הגבול – להראות שקיימים שני גבולות בנקודה.
4. להוכיח שהגבולות החד צדדים לא שווים.
5. שימוש בפונקציות מוכרות $\sin(\frac{1}{x})$
6.

מוסכמות – פונקצית מוכרות וסדרות מוכרות חסר

	לאפס	
עבור $\alpha,\beta\neq 0$ מתקיים: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (קל להוכיח עם לופיטל, יכול להוציא ממצבים שלופיטל לא עובד)	(וגם ההופכי מקיים את הזהות.) (קל להוכיח עם לופיטל, יכול להוציא ממצבים שלופיטל לא עובד) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (כנ"ל לופיטל)
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ (כנ"ל לופיטל)	עבור $a,b>0$ מתקיים: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right]\right)=\frac{b}{a}$	$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
	לאחד	
	$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$ (כנ"ל לופיטל)	
	לב כללי	
$\lim_{x\to a}f(x)=0$ אז $\lim_{x\to a}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=1$.	אם $\lim_{x\to a}f(x)=L$ אז $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)^2}\right)=\frac{1}{L^2}$	
	לאינסוף	
$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$	$\sqrt[n]{Const}\xrightarrow{n\to\infty}1$ $\quad\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
	גבולות שלא קיימים	
	הגבול $\lim_{x\to\infty}e^{x-[x]}$ לא קיים (היינה).	

לאחרונה – זהויות טריגונומטריות

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$$

$$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=1/2\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=1/2\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

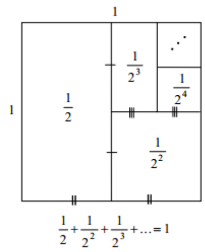
$$\cos\alpha\cos\beta=1/2\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha,\quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

שפנפני אינפי ופנינים נוספות

	להוכחה לפי הגדרה	
$\|x-y\| \ge \big\|\|x\|-\|y\|\big\|$	$\|a+b\| \le \|a\|+\|b\|$	$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
$n! < n^n$	נובע מהכפלה בצמוד $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	☙ עוד **נוסחה** הנובעת מהבינום: אי שיוויון ברנולי. **בתנאי:** $\{a > -1 , a \in N\}$ $(1+a)^n \ge 1+na$
	גבולות	
 	$\sqrt[n]{a^n+b^n} \to a \quad a>b$	למי שמסתבך עם חלק מההוכחות – קיימות הוכחות מגניבות ללא מילים התקפות במבחן בקובץ שצורף.
	פונקציות וטריגו	
$\cos(90-\alpha) < \alpha \quad \cos(\alpha) < \alpha - 90$	$\|\sin a\| \le \|a\| \quad \|\sin b - \sin a\| \le \|b-a\|$	זהויות טריגונומטריות
	לוגריתמים	
$\ln x < x$	$x \ge 3 \Rightarrow \ln(x) > 1$	

רציפות

הגדרה (רציפות):

תהי f מוגדרת בסביבה שלמה של x_0. נאמר ש f רציפה ב x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושווה $f(x_0)$.

שקול; קושי; f רציפה ב x_0 אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|x-a|<\delta$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

שקול; היינה; לכל סדרה $x_n\to a$, $f(x_n)\to f(x_0)$

הגדרה: עבור קטעים

תהי f רציפה בקטע פתוח I. נאמר ש f רציפה ב I אם היא רציפה בכל נקודה של I.

שקול; היינה; תהי f מוגדרת בקטע I כלשהו. f רציפה ב I $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{x_n\}$ ב I שמתכנסת לנקודה $x_0\in I$ ו- $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

- f רציפה בקטע פתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה בקטע.
- f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אם f רציפה בקטע הפתוח (a,b), כך שהיא רציפה מימין ב-a ורציפה משמאל ב-b.
- כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום הגדרתה.

הגדרות לנקודת אי-רציפות;

א. אם קיימים גבולות חד צדדיים ב x_0 והם סופיים ושווים, אבל או שהם שונים מ $f(x_0)$ או ש $f(x_0)$ לא מוגדרת, קוראים ל x_0 נקודת אי רציפות סליקה.

ב. אם קיימים הגבולות החד צדדיים והם סופיים אך שונים זה מזה, נקרא ל x_0 נקודת אי רציפות מסוג I.

ג. כל שאר הנקודות ז"א כשהגבולות לא קיימים או שואפים לאינסוף נקראות נקודות אי רציפות מסוג II.

רשימת פונקציות רצופות;

$\cos x, \sin x, x^{\alpha}, \alpha^{x}$ (כאשר $\alpha>0$), כל פולינום, כל פונקציה רציונלית בתחום הגדרתה (מכנה שונה מ-0), מנה של פולינומים כאשר המכנה שונה מ-0, $a^{\frac{1}{x}}$ כאשר $x\neq 0$, כל הרכבה, חיסור, סכום, מכפלה, חילוק (לא ב-0) של פונקציה רצופה בפונקציה רצופה. בקיצור – כל פונקציה אלמנטרית.

משפטים - רציפות ;

1. יהיו f ו- g מוגדרות בסביבת x_0 ורציפות ב x_0 ויהי $c \in R$ אזי: $f \pm g$, $f \cdot g$ ו cf רציפות ב x_0. ואם $g(x_0) \neq 0$ גם f/g רציפה. אם h רציפה ב $f(x_0)$ אז הפונקציה המורכבת $h \circ f$ רציפה גם היא ב x_0.

2. אם $[a,b] \to \mathbb{R}$: f רציפה ומונוטונית ממש, אז f הפיכה ו- f^{-1} רציפה ומונוטונית.

3. אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה, אז היא מונוטונית ממש.

4. משפט ערך הבינים

- תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ויהי $f(b) \geq \gamma \geq f(a)$ אזי קיים $c \in [a,b]$ כך ש- $f(c) = \gamma$.

השלכות- משפט ערך הביניים:

- נניח ש f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ויש- $f(a) \cdot f(b) < 0$ אזי קיים $c \in [a,b]$ כך ש- $f(c) = 0$.

תהיי $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

גרסה שונה; אם ל- $f(a)$ ול- $f(b)$ יש סימנים הפוכים, אז קיימת $a < c < b$ כך ש- $f(c) = 0$.

משפטים – הרחבות - רציפות ;

- וירשטרס*)

תהי f מוגדרת ורציפה בקטע סגור I. אזי f חסומה ב I ומקבלת שם מקסימום ומינימום/

- תהי f פונקציה מונוטונית ב $(0,b)$ אזי תמיד קיימים הגבולות החד צדדיים: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ו- $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

- תהיי f מונוטונית בקטע I, ותהיי $a \in I$. אזי או ש-f רציפה ב-a או שיש לה אי רציפות מסוג קפיצה ב-a

- משפט ההרכבה *רציפות) ; אם 2 פונקציות רציפות בנק' מתאימות אז ההרכבה שלהן גם כן רציפה. דוגמא: $\cos x = \sin(\pi / 2 - x)$

- אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית, אז f רציפה $\Longleftrightarrow$ התמונה של f היא קטע סגור.

רציפות במידה שווה

הגדרה;

תהי f מוגדרת על קטע I, נאמר כי f רציפה במידה שווה על I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $x, y \in I$ ו- $|x-y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

תרגום : זוהי תכונה על קטע, בניגוד לתכונת הרציפות שמוגדרת על נקודה. עקרונית האינטואיציה היא ששום x לא בורח רחוק מדי מאף y. או בעצם, ששיפוע הפונקציה חסום – יש חסם שעבורו ה-y תמיד יהיה בטווח כל x שנרצה. אסימפטוטות ואי רציפות מכל סוג לא באות בחשבון, וכך גם כל פונקציה שנגזרתה לא חסומה, אם מדברים על כל הפונקציה בשלמותה. ההוכחה של רציפות – דומה מאוד להוכחה לפי הגדרה של קרטריון קושי.

משפטים;

- קנטור : תהי f רציפה על קטע סגור אזי f רציפה במידה שווה שם.
- אם פונקציה רציפה במ״ש בקטע מסוים אז היא גם רציפה באותו קטע (לאו דווקא קטע סגור)

דוגמא;

אם $|x_1 - x_2| < \delta$ אז זה גורר $|f_{(x_1)} - f_{(x_2)}| < \varepsilon$ בתוך התחום הנבדק.

דוגמא:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in (\frac{1}{2}, 1)$$

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2 \cdot x_1}\right| < \left|\frac{x_2 - x_1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right| = 4 \cdot |x_2 - x_1| < \varepsilon \qquad |x_2 - x_1| < \delta \;\Rightarrow \varepsilon = 4 \cdot \delta$$

אם נרצה להפריח את הרציפות במ"ש אז נניח עבור למדה ונוכיח שאפסילון תמיד קטן יותר ולא גדול יותר (אפסילון לא שואף לאפס).

- פונקציית ליפשיץ : אם קיים קבוע $K \geq 0$ עבור לכל $x, y \in D$ הפונקציה מקיימת: $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

אינטואיטיבית, פונקציה המקיימת את תנאי ליפשיץ מוגבלת בקצב ההשתנות שלה, או בעלת השתנות חסומה: לכל קו המחבר שתי נקודות כלשהן על גרף הפונקציה יהיה שיפוע קטן יותר ממספר מסוים, הנקרא קבוע ליפשיץ של הפונקציה.

הפונקציה $f(x) = x^2$ עם $\mathbb{R}$ כתחומה אינה מקיימת את תנאי ליפשיץ. היא נעשית תלולה כרצוננו כאשר $x \to \infty$. לעומת זאת, היא מקיימת את תנאי ליפשיץ באופן מקומי.

הפונקציה $f(x) = x^2$ המוגדרת על $[-3, 7]$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, וקבוע ליפשיץ שלה הוא $K = 14$, על-פי חישוב הנגזרת (ראו להלן).

הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ המוגדרת עבור כל המספרים הממשיים מקיימת את תנאי ליפשיץ, עם קבוע ליפשיץ $K = 1$.

הפונקציה $f(x) = |x|$ המוגדרת על הממשיים מקיימת את תנאי ליפשיץ וקבוע-ליפשיץ שלה הוא 1. זוהי דוגמה לפונקציה המקיימת את תנאי ליפשיץ שאינה גזירה.

נגזרות

נוסחת הנגזרת -שפוע המשיק : 1) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2) $f'(x)=\lim\limits_{h=\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

משוואת המשיק : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

משפטים ;

1. תהי f מוגדרת בסביבת x_0 וגזירה ב x_0, אזי f רציפה.
2. נניח כי f ו g מוגדרות בסביבת x_0 וגזירות בסביבת x_0 ו c קבוע כלשהו, אזי :

א. $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.

ב. $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.

ג. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

ד. $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

ה. $\left(f/g\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

כאשר : $g(x_0)\neq 0$

הנגזרות הרגילות שאנחנו מכירים מהתיכון.

ואחת חשובה מאוד, שאף אחד לא מספר לנו עליה :

$$[f(x)^{g(x)}]'=f^g[g'\cdot\ln(f)+f'\cdot\frac{g(x)}{f(x)}]$$

$$[x^{x^2}]'=x^{x^2}[2x\cdot\ln x+1\cdot\frac{x^2}{x}]$$

ו. כלל ליבנייץ : נגזרות מסדר גבוה ; אם f ו g- הן פונקציות גזירות n פעמים, אזי :

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)\quad,\quad\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

כאשר $C_n^k=\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, המקדם הבינומי. וגם מתקיים:

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$$

$$(cf)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}$$

נגזרות ולוגריתמים

תכונות לוגריתמים ;

1. $a^{\log_a x} = x$.
2. $\ln x = \log_e x \Rightarrow \ln(e^x), e^{\ln x} = x$.
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
4. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$.
5. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

אם a>1 // 0<a<1 , אז פונקצית הלוגריתם עולה ממש // יורדת ממש.

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \ \lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$$

$$\ln(x) < x \quad , \quad \ln(x+1) < x$$

נגזרות חשובות ;

תרגום : חשוב מאוד לזכור את הנגזרות על בוריאן – עבור מקרה שלא מופיע x בפונקציה, אלא f(x), לדוגמה :

$$[\arcsin(5x^2)]' = \frac{1}{\sqrt{1+f(x)^2}} \cdot f'(x) = \frac{10x}{\sqrt{1+25x^4}}$$

מציבים בנוסחה איך שהיא, עם f(x) במקום, וכופלים בנגזרת הפנימית.

$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, **במקרה פרטי** $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, **במקרה פרטי** $\left(e^x\right)' = e^x$

$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x}$, **במקרה פרטי** $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x, \quad \left(\cos x\right)' = -\sin x, \quad \left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **כאשר** $|x|<1$

$\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\left(\operatorname{arc}\cot x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3. חוק השרשרת :

תהי g גזירה ב x_0 ו- f גזירה ב $g(x_0)$ אזי : $f\circ g$ גזירה ב x_0, $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

4. יהי $f(x)=y$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0. תהי $y_0 = f(x_0)$ הפונקציה ההפוכה שהיא רציפה ב y_0,

אזי $g(x)$ גזירה ב y_0 ומתקיים : $f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)}$.

לקט משפטי מתמטקאים

1. פרמה

נניח ש f מוגדרת בסביבת x_0 ומקבלת מקסימום או מינימום מקומי ב x_0 אם $f'(x_0)$ קיים, אז $f'(x_0)=0$

תרגום: המשפט המוכר והחרוש מהתיכון עכשיו ברשמי. יש לשים לב: נקודות קיצון יכולות להופיע גם כאשר הנגזרת לא מתאפסת, כדוגמה: נקודת קיצון בקצה, ונקודות קיצון באי גזירות, וגם מתקיים שאם הנגזרת מתאפסת, לא בהכרח הנקודה היא קיצון, אלא יתכן גם שפיתול.

2. רול

תהי f מוגדרת ורציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), ונניח $f(a)=f(b)$, אזי קיים $c\in(a,b)$ ששם $f'(c)=0$.

תרגום: מקרה פרטי של לגראנג' – מעולה להוכחת קיום או אי קיום שורשים של פונקציה ונקודות חיתוך עם פונקציות מסוימות (קבועות ולינאריות בעיקר).

3. לגראנז'- משפט הערך הממוצע

נניח ש- f מוגדרת ורציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) אזי קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

מסקנות: 1) נניח ש- f מוגדרת ורציפה בקטע I ולכל $x\in I$, $f'(x)=0$ אזי f קבוע.

2) אם f גזירה בקטע I ו- $f'(x)>0$, $\forall x\in I$ אז f עולה ממש ב- I. כמו כן אם $f'(x)<0$, $\forall x\in I$ אז f יורדת ממש ב- I.

3) $f'(x)=g'(x)$ לכל x בקטע $\Leftarrow$ קיים c כך ש- $f(x)=g(x)+c$.

תרגום: המשפט החשוב ביותר באוסף – משמש לפתרון אי שיוויונים מסובכים, להוכחת מכל תכונות הקשורות לנגזרת של הפונקציה שאתם מקבלים בשאלה, ומשמש להוכחת הרבה מהמשפטים הבאים.

4. קושי- הערך הממוצע המוכלל

נניח ש f ו- g רציפות ב $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b) ונניח $0\neq g'(x)\in(a,b)$ אזי:

א. $g(a)\neq g(b)$

ב. קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

תרגום: הכללה של לגראנג' – משפט משני המשמש בעיקר לשאלות עם נתון על נגזרות של שתי פונקציות והקשר בינהן.

5. דרבו

תהי f גזירה בקטע $[a,b]$, אזי $f'(x)$ תחזיר בקטע כל ערך הנמצא בין $f_+'(a)$ ובין $f_-'(b)$.

מסקנה: אם f גזירה בכל נקודה של $[a,b]$ אזי כל נקודת אי רציפות של f' חייבת להיות מסוג עיקרי.

תרגום : ערך הביניים לנגזרת.

6. כלל לופיטל :

נניח ש f ו- g מוגדרות וגזירות בסביבה $(a,a+\delta)$ וגם $g'(x)\neq 0$ עוד נניח ש- $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0$ וגם $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה L, אזי גם $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה L.

הכללה : כלל לופיטל מתקיים גם בקטע $(a-\delta,a)$ כאשר $x\to a^-$ וגם בקטע דו צדדי.

קטע אינסופי, (a,∞) כאשר $x\to\infty$. או $(-\infty,a)$ כאשר $x\to-\infty$.

7. כלל לופיטל לאינסופים :

נניח ש f ו- g מוגדרות וגזירות בסביבה $(a,a+\delta)$ וגם $g'(x)\neq 0$ עוד נניח ש- $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$ וגם $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה L, אזי גם $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה L.

גם לכלל זה נכונות ההכללות הנ"ל.

כלל לופיטל טוב מאוד כדי לבדוק גבול במקרים הבאים : א) $\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0}=0\cdot\infty$,

ב) $1^{\infty}=e^{\ln 1^{\infty}}=e^{0\cdot\infty}=e^{\frac{0}{0}}$,

ג) ∞^{0} כמו ב).

טיילור

הגדרת פולינום טיילור :

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

משפט טיילור :

תהי f מוגדרת וגזירה $(n+1)$ פעמים בסביבה N של x_0 ויהי פולינום טיילור ה-n-י של f ב-x_0 , נרשום :

$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$, (שארית= $R_n(x)$).

אזי : לכל $x\in N$ קיים c בין x ל x_0 כך ש : $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

תרגום : מעבר לשימושים בעולם שקדם למחשבון, אותנו טיילור משמש בחישוב גבולות (רמז עבה יהיה פולינום מכל סוג במבחן), להוכחות משונות.

השארית של פולימום טיילור מסדר n ע#פ Lagrange $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$

ולכן: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

דוגמה ; הוכחה ;

הראה שלכל מספר ממשי x, הטור מקלורן של $\sin(x)$ מתכנס אל $\sin(x)$:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

נראה ש $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

$|f^{(2n)}(x)|=|(-1)^n\sin(x)|\le1,\ |f^{(2n+1)}(x)|=|(-1)^n\cos(x)|\le1$ לכן $|f^{(n+1)}(c)|\le1$ (c תלוי ב x) לכל x ולכל $n\ge0$.

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

טענת עזר ;

טענה : $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ לכל x.

ולכן $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ לכל x .

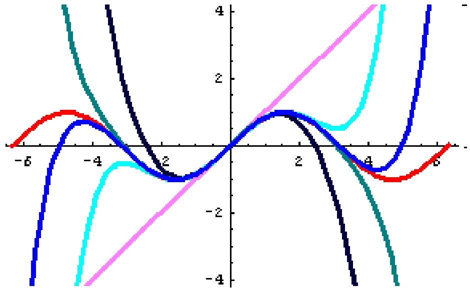
נראה ש $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ לכל x

אם $x=0$ הגבול הוא 0. אם $x \neq 0$, נסמן $a_n = \frac{x^n}{n!}$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

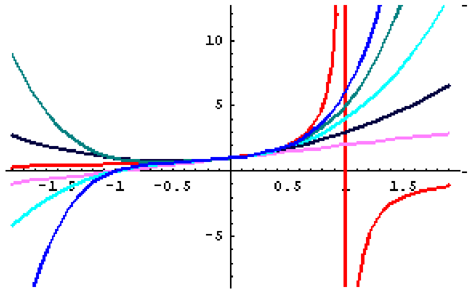
לכן $r<1$ $\sum a_n$ מתכנס ו $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

לפנינו הגרף של $\sin(x)$ (באדום) עם מספר פולינומי טיילור.



טיילור לא תמיד עובד: בדוגמה הקודמת, ראינו שהטור מקלורן של $\sin(x)$ מתכנס אל $\sin(x)$ לכל מספר ממשי x.

לעומת זאת, הטור מקלורן של $f(x)=\frac{1}{1-x}$ שהוא $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס רק ב $(-1,1)$. בשרטוט הבא אנו רואים שמחוץ ל $(-1,1)$ פולינומי מקלורן אינם נותנים קירוב טוב לפונקציה.



ראינו גם שהטור מקלורן של $\sin(x)$ מתכנס אל $\sin(x)$ לכל מספר ממשי x.

ניתן גם להראות שהטור מקלורן של $\cos(x)$ מתכנס אל $\cos(x)$ לכל מספר ממשי x.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$ (הוכח שזהו הטור ובדוק ההתכנסות)

וכן ניתן גם להראות שהטור טיילור של e^x מתכנס אל e^x לכל מספר ממשי x.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ (הוכח שזהו הטור ובדוק ההתכנסות)

עם זאת חשוב להעיר, <u>לא</u> כל פונקציה אשר ניתן לפתח עבורה טור טיילור הטור שיתקבל אכן יתכנס לפונקציה ואפילו לא בקטע פתוח קטן אחד.

לדוגמה, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ניתן להראות (ע"י שימוש בכלל לופיטל) ש $f'(0)=0$ ושל f נגזרות מכל סדר ו $f^{(n)}(0)=0$ לכל $n \geq 0$. מכאן שהפיתוח טיילור של f זו הפונקציה 0 אבל $f(x)=e^{-1/x^2} \neq 0$ לכל $x \neq 0$ ולכן הטור טיילור של f אינו מתכנס ל f לכל $x \neq 0$.

דוגמה זו מראה שטור טיילור של פונקציה לא תמיד מתכנס אל הפונקציה הנתונה בקטע פתוח המכיל את 0 ולכן דוגמה זו מדגישה את החשיבות של נוסחת השארית של Lagrange וחשיבות הטענה:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

קירוב נומרי

דוגמה מצא מספר שלם n כך שלכל x בקטע $[-\pi,\pi]$, $P_n(x)$ מקרב את $\sin(x)$ עם "שגיאה" שאינה עולה על 10^{-9}.

$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\ x^{n+1}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ לכן $|R_n(x)| \le \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$ עבור $|x| \le \pi$, לכן מספיק למצוא מספר שלם חיובי n כך ש $\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-9}$. נעזר במחשב על מנת לבדוק שעבור $n \ge 20$ האי שויון מתקיים. הערך המוחלט של ההפרש בין ערך הפולינום טיילור ה20 (שהוא שווה לפולינום טיילור ה 19), $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!}$ לבין $\sin(x)$ קטן מ 10^{-9} לכל x ב $[-\pi,\pi]$

דוגמה קרב את המספר e עם שגיאה קטנה מ 0.001

נסמן $f(x) = e^x$. אזי $f(1) = e^1 = e$. אנו רוצים לקרב את $f(1)$. אם נשתמש בקירוב $P_n(1)$ אז השגיאה היא $|f(1) - P_n(1)| = |R_n(1)|$. אנו מחפשים n כך ש $|R_n(1)| < 0.001$ ואז $P_n(1)$ הנו הקירוב המבוקש. לפי משפט טילור אנו יודעים שישנו מספר c בין 0 ו 1 כך ש $R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}1^{n+1}$

$f^{(n+1)}(c) = e^c$ ו $e < 3$ אזי $e^c < e^1 = e < 3$ כך ש $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$ נחשב את הערך של $\frac{3}{(n+1)!}$ עבור $n = 1, 2, \ldots, 6$ ונקבל ש$|R_n(1)| < 0.001$ כאשר $n \ge 6$. מכאן ש $\frac{3}{(n+1)!}$ הוא הקירוב המבוקש. $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$,

לכן $P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \approx 2.718055556$

חקירת פונקציות

הגדרות;

1) תחומי עליה וירידה:

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- (a,b), תנאי הכרחי ומספיק לכך ש $f(x)$ לא עולה (לא יורדת) בקטע הוא: $f'(x)\le 0$ ($f'(x)\ge 0$).

2) נקודת מינ/מקס מקומי:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0 אנו אומרים כי $f(x)$ מחזירה מקסימום מקומי (מינימום מקומי) אם קיימת סביבה של x_0 שבה לכל X $f(x)\le f(x_0)$ ($f(x)\ge f(x_0)$).

3) נקודת מינ/מקס גלובלי:

x_0 נקודת מקסימום גלובלי (מינמום גלובלי) עבור $f(x)$ אם לכל X בתחום ההגדרה $f(x)\le f(x_0)$ ($f(x)\ge f(x_0)$).

4) פונקציה קמורה היא כזו שהקו המחבר שתי נקודות על הגרף שלה נמצא תמיד על או מעל לגרף:

הגדרה: פונקציה f המוגדרת בקטע I נקראת קמורה אם לכל $x,y\in I$ ולכל $0\le\lambda\le 1$ מתקיים אי השוויון $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

אפשר לנסח זאת גם כך: לכל $x<u<y$ בקטע, מתקיים $(y-x)f(u)\le(y-u)f(x)+(u-x)f(y)$.

5) f היא פונקציה קעורה אם הקו המחבר כל שתי נקודות על הגרף עובר תמיד מתחת לגרף, כלומר הפונקציה הנגדית $-f$ קמורה. מכאן שהנגזרת השנייה מאפשרת להכריע בין קמירות לקעירות: בקטעים שבהם הנגזרת השנייה חיובית הפונקציה קמורה (במובן החזק), ובקטעים שבהם היא שלילית הפונקציה קעורה. הנקודות שבהן הפונקציה עוברת מקמירות לקעירות או להפך (ולכן הנגזרת השנייה מתאפסת, אם היא מוגדרת בסביבת הנקודה) נקראות נקודות פיתול.

6) אסימפטוטה של פונקציה ממשית היא קו ישר המתקרב לגרף הפונקציה באופן כזה שהמרחק ביניהם שואף לאפס כאשר מתרחקים מראשית הצירים לאינסוף.

סוגים:

- אסימפטוטה אנכית: זוהי אסימפטוטה מהצורה $x=a$, כאשר הפונקציה f שואפת לאינסוף או למינוס אינסוף, מימין או משמאל (או משני הצדדים), בנקודה a.

לדוגמה, הישר x=0 הוא אסימפטוטה של $y=\frac{1}{x}$, וגם של הפונקציה $y=\log(x)$, המוגדרת רק מימין לאסימפטוטה.

לעומת זאת, לפונקציה $y=\sqrt{x}$ אין אסימפטוטה אנכית.

- אסימפטוטה אופקית היא אסימפטוטה מהצורה $y = b$, כאשר הפונקציה שואפת ל b-עבור x השואף לאינסוף או למינוס אינסוף. לדוגמה y=0, היא אסימפטוטה של ההיפרבולה שהוזכרה לעיל, וגם של הפונקציה $y = \frac{x}{x^2+1}$.

- אסימפטוטה משופעת היא ישר מהצורה $y = ax + b$, כאשר הגבול של ההפרש $f(x) - (ax+b)$ הוא אפס עבור x השואף לאינסוף או למינוס אינסוף. זוהי הכללה של הטיפוס האופקי, המתקבל כאשר פרמטר השיפוע הוא a=0. כדי לאתר אסימפטוטה כזו, אפשר לבחון את הגבול של $\frac{f(x)}{x}$, או (אם הפונקציה גזירה) של $f'(x)$; אם הגבולות קיימים, ערכם הוא מקדם שיפוע אפשרי של האסימפטוטה. לאחר שחושב a, אפשר למצוא את b על ידי חישוב הגבול של ההפרש f(x)-ax.

את האסימפטוטה האנכית לא ניתן לחתוך ואילו את האסימפטוטות האופקיות והמשופעות ניתן לחתוך- אך באינסוף ובמינוס אינסוף הפונקציה חייבת לשאוף לאסימפטוטה.

שלבים בחקירת פונקציות:

1. זיהוי תחום הגדרה – יעשה ע״י היכרות עם הפונקציות הנתונות וחישוב תחום הגדרתן בהתאם.

2. זיהוי נקודות אי גזירות – נובעות מהימצאות
   a. אי רציפות/אי הגדרה של הפונקציה (לא מחייב תמיד)
   b. ערך מוחלט ונקודות האיפוס שלו
   c. הימצאות שורש

3. גזירה לפי נוסחה. נקודות בהם הנגזרת לא מוגדרת לפי הנוסחה הם חשד גדול לנקודות אי גזירות שפספסתם בבדיקה 2.
4. חישוב נקודות אי גזירות לפי הגדרת הנגזרת – הוכחה שקיימות או לא, ומה ערכן. אם רק מחפשים ערכי קיצון, ניתן פשוט להציב אותם בפונקציה ולחשב את ערך ה- y .
5. חישוב נקודות קיצון – השוואת הנגזרת ל-0, הצבת הערכים המתקבלים בפונקציה והצבה בטבלה למצוא את סוגן. יש גם להוסיף נקודות אי גזירות ונקודות קצה הקטע, ואף אסימפוטוטות אנכיות.
6. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה
7. חישוב אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, והלהיט החדש – אסימפטוטות משופעות. אסימפטוטות לא בהכרח חייבות להיות קו ישר.
8. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים
9. גזירה שניה אם צריך- ומציאת נקודות פיתול
10. מציאת תחומי קעירות וקמירות
11. ריכוז המידע בטבלה מסודרת
12. סרטוט גרף הפונקציה/

משפטים – קיצון ;

מבחן הנגזרת השניה: על מציאת מינימום ומקסימום :

- תהי f מוגדרת, רציפה ובעלת שתי נגזרות בסביבת x_0 אזי אם $f'(x)=0$ וגם $f''(x_0)<0$ אז x_0 נקי' מקסימום מקומי. אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 נקי' מינימום מקומי.
- מסקנות
  - ❖ : נניח ש f מוגדרת ובעלת נגזרת רציפה בקטע I ונניח כי f' מתאפסת רק בנקודה אחת : $x_0\in I$. אם x_0 נקודת מקסימום (מינימום) מקומי עבור f היא גם נקודת מקסימום (מינימום) גלובלי ל f ב I.
  - ❖ תהי $f(x)$ מוגדרת ב (a,b) ו- $x_0\in(a,b)$ אם x_0 נקודת מינ/מקס אזי : או ש $f(x)$ לא גזירה ב- x_0 או $f'(x_0)=0$.
  - ❖ תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ב- (a,b) פרט אולי ל- x_0 :

    $f(x_0)$ נקי' מקסימום מקומי אם מתקיים : א. $f'(x)>0$ עבור $\forall x<x_0$

    ב. $f'(x)<0$ עבור $\forall x>x_0$

    $f(x_0)$ נקי' מינימום מקומי אם מתקיים : א. $f'(x)<0$ עבור $\forall x<x_0$

    ב. $f'(x)>0$ עבור $\forall x>x_0$
  - ❖ אם $f'(x)$ שומרת סימן אזי $f(x_0)$ לא נקודת מקסימום או מימנימום.
- נקודות חשודות/קריטיות :

  א. נקודות בהן $f'(x_0)=0$.

  ב. נקודות בהן $f'(x)$ לא קיימת.

  ג. קצות קטע ההגדרה.

והכללה על נגזרת מסדר גבוה : אם $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0 וגזירה שם n פעמים ונניח כי :

$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ אבל $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ אזי :

א. אם n זוגי ב אין נקודות מקסימום או מינימום.

ב. אם n אי זוגי אזי : 1) $f^{(n)}<0 \Leftarrow$ x_0 נקודת מקסימום מקומי.

2) $f^{(n)}>0 \Leftarrow$ x_0 נקודת מינימום מקומי.

משפטים – פיתול וקעירות ;

משפט: אם f גזירה פעמיים ב-x וקמורה בסביבה של x, אז $f''(x) \geq 0$ (מן הקמירות נובע שהמונה באגף שמאל של הזהות הוא חיובי, ולכן הגבול אינו שלילי.)

מכאן נובעת מיד

מסקנה: אם f גזירה פעמיים בקטע, וקמורה שם , אז $f''(x) \geq 0$ בכל הקטע.

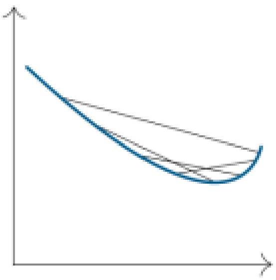
בכיוון ההפוך :

משפט: אם f גזירה פעמיים בקטע והנגזרת השנייה מקיימת $0 \leq f''(x)$ בכל הקטע, אז הפונקציה קמורה בקטע .

משפט : פונקציה ממשית הקמורה בקטע I רציפה בכל נקודה בפנים I.

שלא כמו רציפות או גזירות, לקמירות אין משמעות בנקודה אחת, אלא רק בקטע. אומרים שהפונקציה קמורה מקומית ב-x או קמורה בנקודה x, (אם קיימת סביבה של x שבה הפונקציה קמורה).

משפט: אם הפונקציה f קמורה בקטעים פתוחים I ו- J שאינם זרים, אז היא קמורה גם באיחוד שלהם $I \cup J$.



פונקציה קמורה – נגזרת שניה חיובית בקטע.

קשר חשוב:

הקשר בין תכונת הקמירות לנגזרת השנייה נובע מן האבחנה הבאה, שאפשר להיווכח בנכונותה על ידי הפעלה של כלל לופיטל פעמיים: אם הפונקציה f גזירה פעמיים בנקודה x, אז

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\beta-\alpha)f(x+\gamma h)-(\gamma-\alpha)f(x+\beta h)+(\gamma-\beta)f(x+\alpha h)}{h^2} = \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{2}f''(x),$$

וזאת לכל α,β,γ קבועים. אם $\alpha<\beta<\gamma$, כפי שנניח מעתה, אז המקדם באגף ימין הוא חיובי.

ולסוף ; למת המיתרים ;

הגדרה: פונקציה f נקראת *קעורה* אם המינוס שלה, $-f$, היא פונקציה קמורה.

אחרי הגדרות ודוגמאות, הגיע זמן טוב לניסוי. ניקח נקודות $a<b<c\in I$. את b אפשר לכתוב כצירוף קמור של a,c באופן הבא: $b=\frac{c-b}{c-a}a+\frac{b-a}{c-a}c$. הקמירות של f נותנת:

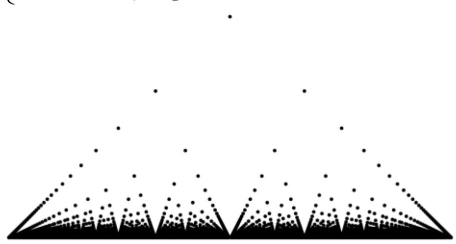
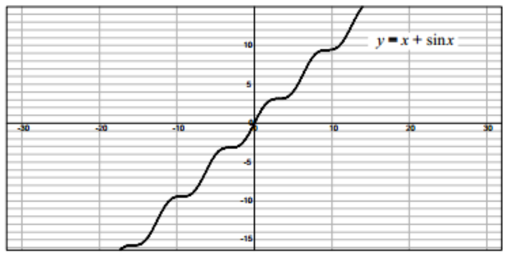
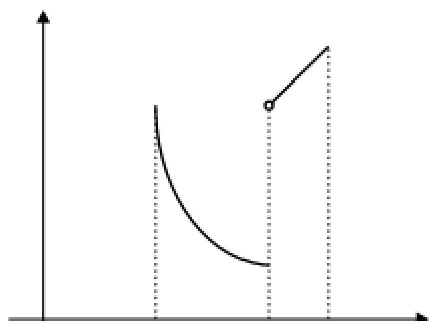
$$\frac{c-b}{c-a}f(a)+\frac{b-a}{c-a}f(c)\geq f(b) \implies (c-b)f(a)+(b-a)f(c)\geq (c-a)f(b)$$

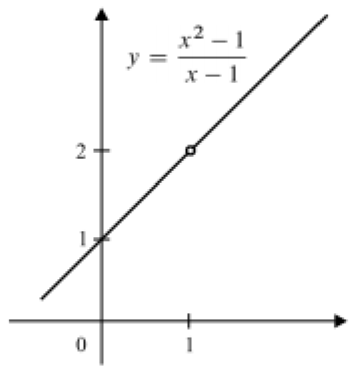
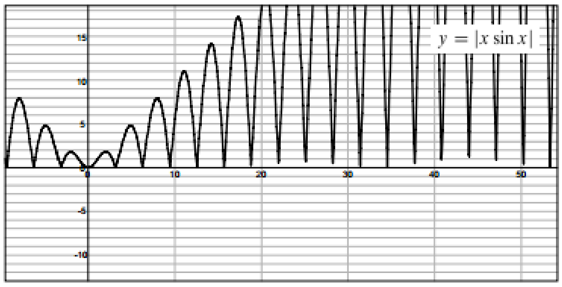
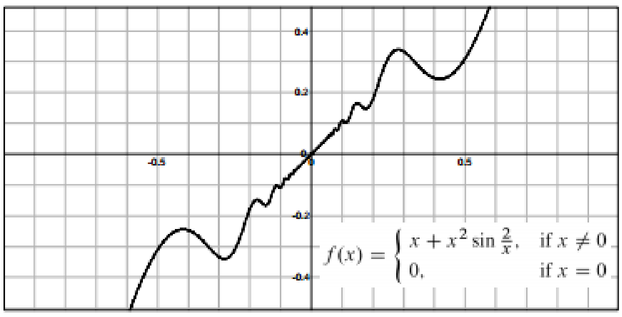
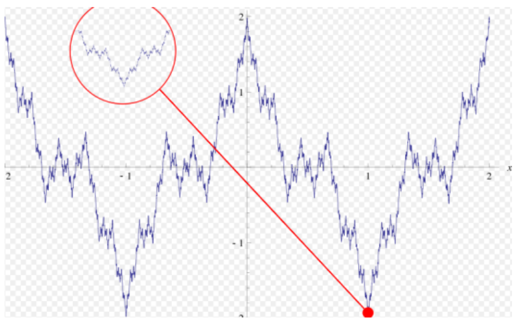
אפשר לשכתב אי-שיוויון זה בתור $(c-a)(f(c)-f(b))\geq(c-b)(f(c)-f(a))$ וגם בתור $(b-a)(f(c)-f(a))\geq(c-a)(f(b)-f(a))$, מה שנותן את הלמה הבאה:

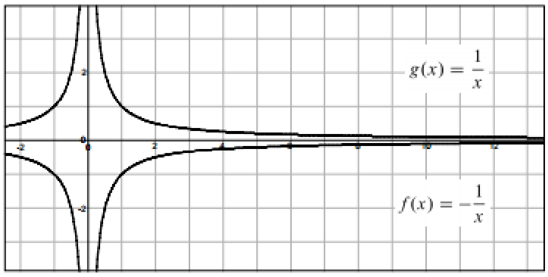
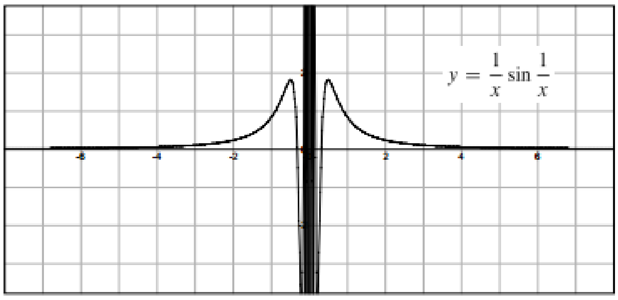
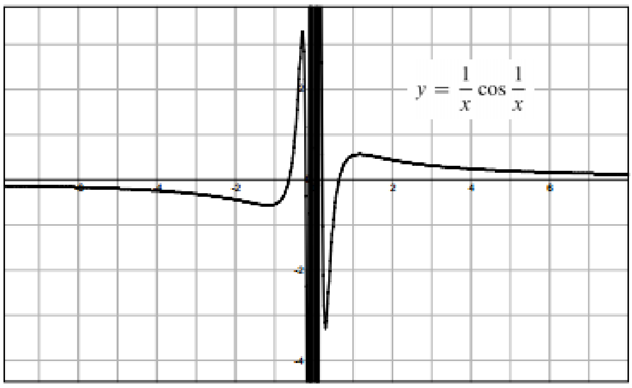
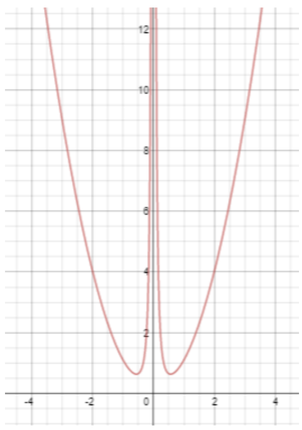
למת המיתרים: $\forall a<b<c\in I: \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\geq\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\geq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

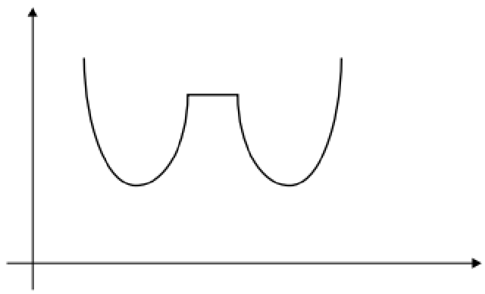
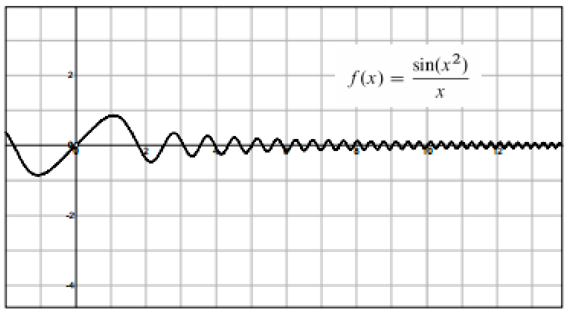
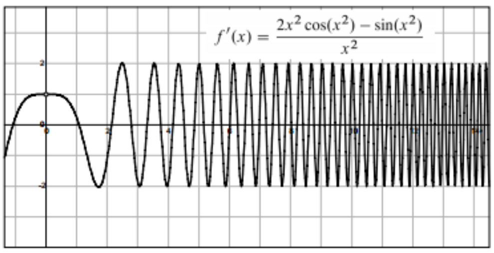
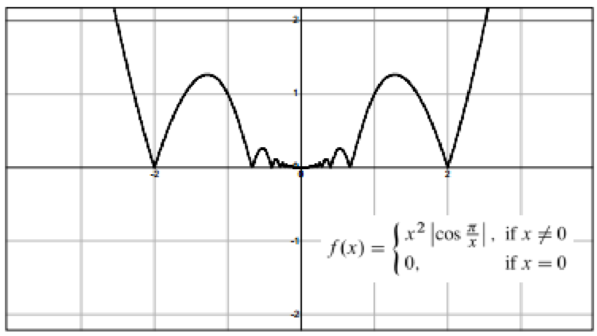
מצבור דוגמאות נגדיות: חסר

מובן מאליו – נא להדפיס את אוסף הפונקציות של צנזור. הרבה דוגמאות מעולות.

הפונקציה	תכונות מעניינות ושימושים:
. פונקציית רימן מוגדרת ע״י: $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)$ קיים לכל $x_0 \notin \mathbb{Q}$ $$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \frac{p}{q}=x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$ 	פונקציית הפופקורן. רציפה בכל האי רציונליים, אי רציפות מסוג קפיצה בכל ערך רציונלי.
x+sinx 	דוגמה מעולה לסכומים של פונקציות שלא יוצרים פונקציה מונוטונית. ניתן ללכוד אותה או פיתוחים שלה בין כל שני ישרים אלכסוניים.
	הפונקציה על וחח״ע בקטע המתואר, ויש לה הופכית למרות שאינה רציפה או מונוטונית. X^2 בחלק מסוים קו ישר בחלק אחר.

	אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית כצפוי, אלא רק אי רציפות סליקה
	פונקציה אינסופית, רציפה, אי שלילית לכל איקס, עם אינסוף חיתוכים עם הצירים.
	עולה ורציפה ב0, לא עולה או יורדת בשום סביבה של 0.
	פונקציית ווירשטראס – רציפה ולא גזירה באף נקודה. הגדרתה מסובכת, בחרתי שלא להוסיף.

	פונקציה אחת גדולה מהשניה לכל איקס, אך גבולם זהה.
	0 אינו אסימפטוטה אנכית של הפונקציה. הפונקציה מרצדת בין אינסוף למינוס אינסוף. אי רציפות העיקרית ביותר שיש.
	לא חסומה באף נקודה בסביבת האפס, הגבולות החד צדדים, גם בערך מוחלט! לא קיימים.
 $\frac{x^4+0.1}{x^2}$	לפונקציה אין ערך מקסימום בין כל שני ערכי מינימום. (לא רציפה)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>הפעם פונקציה רציפה, מה שכן, ניתן להגדיר את כל הקטע כ"ערך" מקסימום.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>גבול הפונקציה קיים באינסוף (0), גבול הנגזרת באינסוף לא קיים.

</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>בכל סביבה של 0 נוכל למצוא נקודות אי גזירות של הפונקציה, אך ב0 הפונקציה גזירה ושווה 0.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">דוגמאות הכי חזקות "בארסנל" (או איזה שקר שאתם רוצים לקרוא לזה) –
ערך מוחלט של x
פונקציות הדירכלה ופיתוחם (ניתן לשחק איתם כדי להתאים לשאלה)
הפונקציות הטריגונומטריות השונות שמופיעות בדף הגרפים הנפוצים.</td>
</tr>
</table>

שאלות שחוזרות על עצמן לאורך הקורס : מאוד חסר

הוכחת שורש יחיד של פונקציה

מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש.

נספח – בסיס מתמטי

אי שיוויני המשולש :

- אי שויון המשולש **הראשון**, על כל שני גדלים: $|a+b| \leq |a|+|b|$
- אי שויון המשולש **השני**, על כל שני גדלים: $|a-b| \geq ||a|-|b||$

- אי שיוויון **הממוצעים** :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq (a_1\cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$$

חשבוני > הנדסי > הרמוני

הבינום של ניוטון :

- **מקדמי הבינום:** לכל n חפצים ב-k סידורים חדשים יש בדיוק $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ אופציות לסידור, זאת ללא כפילויות כמו 1,2 ו 2,1 וכדומה. שימושים בקומבינטוריקה ופירוק משוואות הזויות.

- **נוסחת הבינום** של ניוטון – דרך לפירוק צמדי גדלים בחזקה ע"י נוסחה: (מספרים מהטבעיים בלבד)

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

לשימושינו באינפי:

- $$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
- $$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3.$$

- עוד **נוסחה** הנובעת מהבינום: **בתנאי:** $\{a>-1\,,\,a\in N\}$

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

חוקי אריתמטיקה קדומים :

- המשפט **היסודי** של האריתמטיקה: כל מספר טבעי יכול להיכתב **כמכפלה ייחודית** של **מספרים ראשוניים**, עד כדי שינוי הסדר של הגורמים.

- **צפיפות הרציונליים:** כקבוצה סדורה, המספרים הרציונליים מהווים קבוצה **צפופה** :עבור כל שני מספרים רציונליים, ניתן למצוא מספר רציונלי שגדול מהקטן יותר וקטן מהגדול יותר (למעשה, יש אינסוף כאלו). כמו כן, כאשר מסתכלים על הישר הממשי , ניתן להתקרב כרצוננו לכל מספר ממשי באמצעות מספרים רציונליים, **כלומר, המספרים הרציונליים הם קבוצה צפופה בממשיים.**

לקט משפטים רלוונטים עבור הוכחות – סדרות ← פונקציות

- הוספתי רק משפטים מורכבים, שקשה לזכור. השאר נמצאים באוסף המשפטים השני על סדרות.

- ## תכונות של סדרות:

- **סכום** של סדרה **מתכנסת** וסדרה **מתבדרת** - מתבדר.
- **סכום** של **סדרות מתבדרות יכול להתכנס** אך לא חייב

- ## גבולות:

- גבול של סדרה **חיובית** מתכנסת מקיים (**ערך מוחלט**) :

$$1. An > 0,\ \ 2. \lim_{n\to\infty}(\mathrm{An}) \to\ \mathrm{L} \longleftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}(|An|) \to |\mathrm{L}|$$

- סעיף נגרר מהסעיף קודם - **שורש** של גבול :

$$1.\, \alpha_n > 0,\ \ 2. \lim_{n\to\infty}(\alpha_n) \to \mathrm{L} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}(\sqrt{\alpha_n}) \to \sqrt{L}$$

- אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס

- **משפט הפיצה –**

אם $\alpha_n \geq B_n$ **לכל n, ו-** $\lim_{n\to\infty}(B_n) \to \infty$ ⇐ **אזי** $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n) \to \infty$

- **משפט ה"זנב" (שם עממי) - אם סדרה** α_n מתכנסת לגבול L,

והסדרה B_n מתקבלת מ- α_n ע"י שינוי מספר סופי של איברים, אז B_n מתכנסת לאותו גבול.

$$\lim_{n\to\infty} B_n$$

על הקשר בין הגבול לגודל הסדרה:

ההפרשים בין שתי גבולות, **נכון רק החל ממקום מסוים בסדרות**

$$\lim_{n\to\infty} B_n \to L\,,\ \lim_{n\to\infty} B_n \to K\,,\ L \leq K\ \to\ \alpha_n \leq B_n$$

המשפט ההופכי גם הוא נכון בתנאי שהסדרות **מתכנסות**

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \to L\,,\ \lim_{n\to\infty n} B_n \to K\,,\ \alpha_n \le B_n \to\ L \le K$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n) \to L\,,\ \alpha_n \ge 0\ \ \to L \ge 0$$

מבחן המנה של ד'אלמבר –

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אינסופי. נסמן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

1. אם $1 < q$ הטור מתכנס.
2. אם $1 > q$ הטור מתבדר.
3. אם $1 = q$ המבחן אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי אינסופי. נסמן $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

1. אם $1 < q$ הטור מתכנס.
2. אם $1 > q$ הטור מתבדר.
3. אם $1 = q$ המבחן אינו מספק מידע על התכנסות או התבדרות הטור.

- **מבחן המנה** של ד'אלמבר **חזק יותר** ממבחן השורש של קושי. כלומר - מבחן המנה מכריע עבור כל טור שעבורו מבחן השורש מכריע, אבל מבחן השורש לא בהכרח מכריע עבור כל טור שעבורו מבחן המנה מכריע. עם זאת, במקרים רבים נוח יותר להשתמש במבחן השורש מאשר במבחן המנה.

משפט הירושה

התכונות הבאות עוברות מן הסדרה (a_n) לכל תת־סדרה שלה:

- חסימות מלעיל, מלרע ודו־צדדית.
- עליה, ירידה, עליה ממש, ירידה ממש.
- התכנסות למספר L.

מסקנה מהמשפט הקודם: כל סדרה עם שתי תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים **מתבדרת**.

לכל סדרה יש תת־סדרה עולה ממש או תת סדרה יורדת.

הלמה של קנטור;

תהי (a_n) סדרה עולה ו־(b_n) סדרה יורדת, כך שלכל n, $a_n \leq b_n$. אז קיים c כך שלכל n, $a_n \leq c \leq b_n$.

אם לכל $\epsilon > 0$ קיים n כך ש־$b_n - a_n < \epsilon$ אז c זה הוא יחיד.

<u>הלמה של קנטור</u>

$$a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

מונוטונית יורדת מונוטונית עולה $\underbrace{a_n \leq a_{n+1}} \leq \underbrace{b_{n+1} \leq b_n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$

בלשון פונקציות;

(משפט הסנדויץ) המרה לפונקציות

נניח שבסביבה מנוקבת של a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ וש- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ אזי: $\lim_{x\to a} g(x) = l$.