טכניון - מכון טכנולוגי לישראל    הפקולטה למתמטיקה

# חשבון אינפי' 2    104281

# גליון תרגילים מספר 6 - תרגילים בטורים כלליים

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי    סמסטר אביב תשנ"ט

1. נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. הוכח כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.
2. בדוק התכנסות בתנאי ובהחלט:

(א) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n}$$

(הסימן $[\cdot]$ מסמל את הערך השלם).

(ב) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\ln n}$$

3. עבור אילו ערכי $p$ מתכנס הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$?
4. נתונים $a,b>0$. בדוק את התכנסות הטור $\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots$.
5. הוכח כי הטור

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}-\cdots$$

מתכנס עבור $0<\alpha<\beta$ ומתבדר עבור $0<\beta<\alpha$. מה קורה עבור $\alpha=\beta$?

6. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ מתכנס וסכומו שווה ל-1.
7. בדוק עבור אילו ערכים של $\alpha$ מתכנס הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^{\alpha}}$.
8. יהי $A>0$. הוכח כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת סדרת מספרים $a_i\in R$ $i=1,\dots,m$ כך ש-$\sum_{i=1}^{m}a_i=A$ ו-$\sum_{i=1}^{m}a_i^2<\varepsilon$.
9. פתור:

(א) תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת ו-$\sum a_n$ מתכנס. הוכח כי $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

(ב) הראה ע"י דוגמא שהטענה איננה נכונה אם לא מניחים כי $\{a_n\}$ מונוטונית.

10. תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה של מספרים חיוביים. קבע איזה תנאי צריכים אברי הסדרה לקיים כדי שהטור הבא יתכנס

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\cdots$$

11. חשב את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$, כאשר

$$u_n=\frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$$

תשובה: $\frac{2}{9}$.

12. יהיו $P,Q$ שני פולינומים בעלי מקדמים מ-$R$ (או מ-$C$). מגדירים $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$. ($u_n$ מוגדר עבור $n$ מספיק גדול).

(א) הוכח כי הטור $\sum u_n$ מתכנס אם ורק אם $\deg Q \geq \deg P + 2$.

(ב) הוכח כי הטור $\sum (-1)^n u_n$ מתכנס אם ורק אם $\deg Q \geq \deg P + 1$.

(הסכימה מתבצעת עבור $n \geq N_0$, כך ש-$u_n$ מוגדר לכל $n \geq N_0$).

13. בדוק התכנסות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, כאשר

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n = 2,4,6,\ldots \\ \frac{1}{2^{n-2}} & n = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

14. בדוק התכנסות של הטורים הבאים

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{2/3}}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right]$

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right]$

(ה) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

(ו) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

(ז) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$

(ח) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n\alpha)|}{n}$

(ט) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$, ($[\cdot]$ - הערך השלם)

(י) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin\frac{1}{n}$

(כ) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a - (-1)^n\sqrt{n}}{n - (-1)^n\sqrt{n}}$

(ל) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$

(מ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^{1/2} - 1\right\}$

15. הוכח כי אם הטור $\sum a_n$, $a_n > 0$, איננו מתכנס, אזי גם הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ איננו מתכנס.

16. תהי $\{a_n\}$ סדרה של מספרים חיוביים, כך שנתון ש-$\sum a_n^2$ טור מתכנס. הוכח כי גם $\sum \frac{a_n}{n}$ טור מתכנס. (הערה: לא נאמר כלום לגבי $\sum a_n$! למשל $a_n = \frac{1}{n}$).

17. נגדיר סדרה רקורסיבית באופן הבא:

$$u_n = \frac{1}{n}e^{u_{n-1}}$$

$u_1$ נתון. האם $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס?

18. יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתבדר. נסמן $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. הוכח כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ מתבדר.

19. יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי (לא בהחלט). הוכח:

(א) $\sum a_n n^k$ מתבדר לכל $k > 1$.

(ב) אם $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ מתכנס אזי גם $\sum \frac{a_n}{n^\beta}$ מתכנס לכל $\beta > \alpha$.

20. (בחן אביב תשמ"ט) נתון כי $\sum a_n$ מתכנס אך $\sum a_n^2$ מתבדר. הוכח כי אזי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי. תן דוגמא לסדרה כזו.

21. (אביב תשנ"ט) תהיינה $\{a_n\}, \ \{b_n\}$ סדרות של מספרים חיוביים. הוכח כי אם

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1} \geq l > 0$$

החל מ-$n$ מסוים, אזי $\sum a_n$ טור מתכנס. (קריטריון זה נתגלה ע"י Kummer בשנת 1835).
<u>הדרכה:</u> הראה כי $\sum(a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1})$ טור טלסקופי מתכנס.

22. תהי $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-1,1]$ וכך ש-$f(0) = 0, \ f'(0) \neq 0$, הוכח כי

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.