<u>טורי חזקות</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- הגדרה: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נקרא טור חזקות.
- משפט: אם טור החזקות מתכנס ב־ x_0 אזי הטור מתכנס בהחלט לכל $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ ובמ"ש ב־ $[-|x|, |x|]$ עבור $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.
- תכונות התכנסות:
  - קיים R ב־ $[0, \infty]$ כך שלכל $|x| < R$ הטור מתכנס ולכל $|x| > R$ הטור מתבדר.
  - הטור מתכנס בהחלט ב־ $(-R, R)$.
  - אם הטור מתכנס ב־ $x = R$ אז יש התכנסות במ"ש ב־ $[0, R]$.
  - אם הטור לא מתכנס ב־ $x = R$ אז אין התכנסות במ"ש ב־ $[0, R)$.
  - ? הטור מתכנס במ"ש לוקלית.
  - נוסחה לרדיוס ההתכנסות:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- רציפות: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס לפונקציה רציפה בתחום ההתכנסות. אם יש משמעות להתכנסות בקצות, הכוונה היא לרציפות חד־צדדית.
- אינטגרביליות: אם $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס R, אז $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ בעל רדיוס R. כמו כן, לכל x בתחום ההתכנסות

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

בנוסף, אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ב־ R אז גם $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

- גזירות: אם $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס R, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ בעל רדיוס R. כמו כן, לכל בתחום ההתכנסות

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

בנוסף, אם $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ מתכנס ב־ R אז גם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- הגדרה: אם f מוגדרת בתחום $(-R, R)$ והיא שווה לטור חזקות שם, אומרים ש־ f ניתנת לפיתוח לטור חזקות.

  מתמטיקאים משתמשים גם במינוח "**אנליטית**".

- משפט: אם ל־ f יש פיתוח לטור חזקות ב־ $(-R,R)$, הפיתוח יחיד כאשר $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ונקרא טור טיילור של f סביב $x_0=0$.
- משפט טיילור: אם f גזירה ∞ פעמים ב־ $[-r,r]$ וקיים M כך ש־ $\sup_{[-r,r]}|f^n|\leq M$, אזי ל־ f יש פיתוח טיילור סביב $x_0=0$.

  הערה: אם לכל r מוצאים $M=M(r)$, זה אומר שהפיתוח תקף ב־ $\mathbb{R}$.
- **הדוגמאות:**

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in\mathbb{R}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R}$$

תרגילים:

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

<u>פתרון:</u>

מקדמי הטור הראשון $a_n = n^n$ לכן $\sqrt[n]{|a_n|} = n \to \infty$ לכן $R = 0$. לגבי הטור השני, המקדמים הם $a_n = \frac{1}{n^n}$ לכן $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n} \to 0$ לכן $R = \infty$.

2. מצאו את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n \left(\ln n\right)^2}$$

<u>פתרון:</u>

מקדמי הטור $a_n = \frac{1}{2^n n \ln^2 n}$ לכן:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln n}{\ln\left(n+1\right)}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

לכן $R = 2$. ב־ $x = -2$ מקבלים טור לייבניץ וב־ $x = 2$ הטור מתכנס לפי למשל מבחן הדלילות כי

$$\sum 2^n \frac{1}{2^n \left(\ln 2\right)^2 n^2} < \infty$$

3. חשבו את רדיוס ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n!\right)^3}{\left(3n\right)!} x^{3n}$$

<u>פתרון:</u>

נסמן $w = x^3$. נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} w^n$. מקדמיו הם $a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ לכן

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\left(n+1\right)!\right)^3}{\left(3n+3\right)!}\frac{\left(3n\right)!}{\left(n!\right)^3} = \frac{\left(n+1\right)^3}{\left(3n+1\right)\left(3n+2\right)\left(3n+3\right)} \to \frac{1}{27}$$

לכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} w^n$ בעל רדיוס $r = 27$ לכן רדיוס הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n}$ הוא $R = \sqrt[3]{27} = 3$.

לדעתי עדיף לפתור את זה בדומה לתרגיל הבא..

4. מצא את תחום ההתכנסות של הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$$

<u>פתרון:</u>

מקדמי הטור הם

$$a_k = \begin{cases} n^n & k = n^2 \\ 0 & k \notin \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

כמו כן, $\lim \sqrt[n^2]{n^n} = 1$. מכאן, ל־ $\sqrt[n]{|a_n|}$ יש שני גבולות חלקיים: $\{0,1\}$. לכן $R = 1$. עבור $x \in \{-1,1\}$ איבר כללי של הטור לא שואף לאפס לכן תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$.

5. יהיו $\sum_0^\infty a_n x^n$ ו־ $\sum_0^\infty b_n x^n$ שני טורי חזקות עם רדיוס התכנסות R_1 ו־ R_2 בהתאמה. נניח שקיים קבוע ממשי M כך ש־ $|a_n| \le M |b_n|$ פרט אולי למספר סופי של n־ים. הוכיחו כי $R_1 \ge R_2$.

<u>פתרון:</u>

מהנתון:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{M |b_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|b_n|}$$

6. א. הראו שהטור $\sum_0^\infty \left(\frac{x}{(-1)^n+4}\right)^n$ מגדיר פונקציה גזירה בקטע $(-3,3)$.

ב. הראו שעבור $x \in [0,3)$ מתקיים $0 \le f'(x) \le \frac{3}{(3-x)^2}$.

<u>פתרון:</u>

א. מקדמי הטור $a_n = \frac{1}{((-1)^n+4)}$ לכן $a_{2n} = \frac{1}{5}$ ו־ $a_{2n+1} = \frac{1}{3}$ מכאן

$$\lim \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{5}$$

$$\lim \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \frac{1}{3}$$

לכן $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3}$ מכאן $R = 3$. לכן $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ גזיר ב־ $(-3,3)$.

ב. לכל $x \in [0,3)$ מתקיים $f'(x) = \sum_1^\infty \frac{n}{((-1)^n+4)^n} x^{n-1}$ לכן

$$0 \le f'(x) \le \sum_1^\infty \frac{n}{((-1)^n+4)^n} x^{n-1} \le \sum_{n\ge1} \frac{n}{3^n} x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

אבל $\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{3}{3-x}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{3-x}\right) = \frac{3}{(3-x)^2}$.

7. תהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה ל מספרים ממשיים.
ידוע כי לכל $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ הטור $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ מתכנס, אך $\sum_0^{\infty} a_n (-2)^n$ לא מתכנס.
הוכח או הפרך ע"י דוגמה נגדית:

- הטור $\sum_0^{\infty} a_n$ מתכנס.
- הטור $\sum_0^{\infty} 2^n a_n$מתכנס.
- הטור $\sum_0^{\infty} 2^n a_n$מתבדר.

<u>פתרון:</u>

מהנתון ניתן להסיק שהטור מתכנס ב־ $x \in (-2, 2)$. אם כן, $\sum_0^{\infty} a_n$ מתכנס כי $1 \in (-2, 2)$.

הטור $\sum_0^{\infty} 2^n a_n$ לאו דווקא מתכנס. למשל, ניקח $a_n = \frac{1}{2^n}$, אבל אם ניקח $a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ אז $\sum_0^{\infty} 2^n a_n$ מתכנס.

8. חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ לכל $|x| < 1$, לכן $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ לכל $|x| < 1$, נשים לב שטור החזקות הזה מתכנס ב־ $x = -1$.

בגלל שהטור מתכנס ב־ $x = -1$, אז יש התכנסות במ"ש ב־ $[-1, 0]$, לכן הטור רציף שם. ז.א יש f כך ש־

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

לכל $x \in [-1, 0]$ ו־ f רציף ב־ $[-1, 0]$ אבל לפי קודם $f(x) = \ln(1-x)$ לכל $x \in (-1, 0]$. לכן

$$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) == \lim_{x \to -1} -\ln(1-x) = -\ln 2$$

ברמת העקרון, יכול להיות ש־ $f(x) = -\ln(1-x)$ לכל $x \in (-1, 0]$ ו־ $f(-1) \neq -\ln 2$, אבל רציפות f לא מאפשרת זאת.

סך הכל $-\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = f(-1)$ ומכאן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

9. א. יהי $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס R. הוכיחו כי אם יש התכנסות במ"ש ב־ $(0, R)$ אז הטור מתכנס ב־ $x = R$.

ב. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ אינו מתכנס במ"ש ב־ $(1, \infty)$.

<u>פתרון:</u>

א. לכל $\epsilon > 0$ קיים N_ϵ כך שלכל $x \in (0, R)$ ו־ $m \geq n \geq N_\epsilon$ מתקיים $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \leq \epsilon$.

לכן ניקח $x \to R$ ומשיקולי רציפות נקבל שלכל $m \geq n \geq N_\epsilon$ $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k R^k\right| \leq \epsilon$.

הערה: יש כיוון שאומר שאם יש התכנסות ב־ $x = R$ אז יש התכנסות במ"ש ב־ $[0, R]$. זה כבר לא טריוויאלי.

ב. בדיוק אותו רעיון של סעיף קודם, אם יש התכנסות במ"ש ב־ $(1,\infty)$, אז:

לכל $\epsilon>0$, קיים N_ϵ כך שלכל $x\in(1,\infty)$ ו־ $m\geq n\geq N_\epsilon$ מתקיים:

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{n^x}<\epsilon$$

ניקח $x\to1^+$ ונקבל סתירה.

הערה: זה לא טור חזקות.

10. א. הוכיחו כי אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ מתכנס, אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$.

ב. הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty}na_nR^{n-1}$ מתכנס, אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ מתכנס.

<u>פתרון:</u>

א. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס במ"ש ב־ $[0,R]$. נבצע אינטגרציה ב־ $[0,R]$ על $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

ב. $a_nR^n=na_nR^{n-1}\cdot\frac{R}{n}$. לכן לפי מבחן דיריכלה.

הערה: שני הסעיפים זהים, אבל מוצגים שני פתרונות שונים.

המשמעות: באינטגרציה איבר־איבר ייתכן שמרוויחים התכנסות בקצוות. בגזירה איבר־איבר ייתכן שמאבדים התכנסות בקצוות.

11. פתחו לטור חזקות את הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ סביב $x_0=1$.

<u>פתרון:</u>

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2x+3}{2+x-1}=(2x+3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2x+3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=$$

$$=\frac{2(x-1)+5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

זה נכון כאשר $|x-1|<2$.

12. א. פתחו את $f(x)=\ln(1+x)$ לטור טיילור סביב $x_0=0$.

ב. פתחו את $f(x)=\ln(1+x)$ לטור חזקות סביב $x_0=0$.

<u>פתרון:</u>

א. השאלה שקולה ל־ "חשבו את $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$". מחשבים ומקבלים $\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ לכל $n\geq1$ ועבור $n=0$ מקבלים 0 בבירור.

ואז פיתוח טיילור הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots$.

שים לב: לא טענו שזה שווה ל־ $f(x)$.

ב. השאלה כאן שקולה ל־ "הוכיחו ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x)$ בסביבת 0". או שמראים שתנאי משפט טיילור מתקיימים. או שעושים משחקים כמו בתרגיל 11:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

וזה לכל $|x|<1$. שים לב שהטור מתכנס ב־ $x=1$ וב־ $x=-1$ הוא לא מתכנס.

13. הוכיחו ש־ $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ אנליטית ב־ 0, זאת אומרת שווה לטור חזקות סביב 0.

פתרון:

איך מוכיחים שהטור מתכנס דווקא לפונקציה הזו?

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$$

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

וכל זה נכון לכל x.

הערה: זאת לא פונקציה אלמנטרית.

באופן דומה, הוכיחו ש־ $\int_0^x e^{-t^2}dt$ אנליטית.

14. פתחו את $\frac{x}{\sin x}$ לטור חזקות סביב $x_0=0$.

פתרון:

נרשום

$$\frac{x}{\sin x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

ואז

$$1=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)$$

מיחידות טור טיילור של הפונקציה הקבועה 1 נשווה מקדמים ונקבל

$$a_m=\begin{cases}0 & m\notin 2\mathbb{Z}\\ 1 & m=0\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}a_{2n-2k} & m=2n\geq 2\end{cases}$$

15. מצאו סכום של $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

<u>פתרון:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

לכל $x\in(-1,1)$, לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}$$

וע"י חישוב פשוט נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, לכל $x\in(-1,1)$.

16. א. חשבו $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}+\ldots$

ב. חשבו $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)n!}$

<u>פתרון:</u>

ידוע ש־ $e^x=\sum_0^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. לכן

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$e-2=\int_0^1 x^2e^xdx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\,n!}$$

17. חשבו $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots$

<u>פתרון:</u>

מההרצאה

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

לכל $x\in[-1,1]$.

לכן

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots$$

נקודה למחשבה: $\arctan x$ היא פונקציה חלקה ב־ $\mathbb{R}$, אבל הטור פתאום מפסיק להתכנס מחוץ ל־ $[-1,1]$, למה?

רמז: הרצאה ראשונה באלגברה, ומי שילמד קורס ב**פונקציות מרוכבות** יקבל את התשובה המלאה שם.

18. בתרגיל בית 3א. התבקשתם להוכיח ש־ $u_n = S_n - I_n$, עבור $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ו־ $I_n = \ln n$, מתכנסת.
בתרגול 5 הוכחנו ש־ $\ldots - + + - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1$ מתכנס.
חשבו את $\ldots - + + - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1$.

<u>פתרון:</u>

מההוכחת ההתכנסות ראינו ש־

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

לכן

$$S_{3n} = -\frac{1}{2} S_n + S_{2n} - \frac{1}{2} S_{2n-1}$$

ומכאן

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n}{\sqrt{n}\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$$

19. תהי $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לכל $x \in \mathbb{R}$ המקיימת

$$(1-x)\, y'' - y = 0$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

מצא נוסחה ריקורסיבית של מקדמי הטור.

<u>פתרון:</u>

אפשר לגזור טור חזקות איבר־איבר ∞ פעמים בתחום ההתכנסות. לכן

$$(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

נסדר את הביטוי ונקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\, n a_{n+1} - a_n\right] x^n = 0$$

מיחידות טור טיילור נקבל:

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - (n+1)\, n a_{n+1} - a_n = 0$$

משמעות: אם נתונים a_0, a_1, ז.א. נתון $y(0), y'(0)$, קיבלנו את a_n לכל n, ו־ y נקבע באופן יחיד.
זה לא במקרה שב־ $(1-x)\, y'' - y = 0$ יש עד נגזרת שנייה ל־ y ונוסחת הריקורסיה שקיבלנו היא מסדר 2.

מי שילמד קורס ב**משוואות דיפרנציאליות** הוא ישתמש בשיטה זו כדי לפתור משוואות מסוג זה לעיתים קרובות.

למשל, באותו אופן, פתרו את

$$y^{'} - y = 0,\, y\left(0\right) = 1$$

$$y^{''} + y = 0,\, y\left(0\right) = 0,\, y^{'}\left(0\right) = 1$$

רמז: y הוא טור שאתם כבר מכירים. לצורך בדיקה, אתם יכולים להציב את התוצאה הסופית ולבדוק שהכל עובד.