גבולות ורציפות

הגדרה 0.1 נאמר שפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ שואפת לגבול L בנקודה $(x,y)\in\mathbb{R}^n$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_\varepsilon>0$ כך שלכל ווקטור $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ מספיק קטן $0<\sqrt{h^2+k^2}<\delta_\varepsilon$ מתקיים ש $|f(x+h,y+k)-L|<\varepsilon$.

ובמילים אחרות, כאשר מתקרבים לנקודה (x,y), אז ערך הפונקציה מתקרב ל L.
אם $L=f(x,y)$ אז הפונקציה נקראת רציפה ב (x,y).

<u>הערה חשובה</u>: כאשר התעסקנו בפונקציות במשתנה אחד היו בדיוק שני כיוונים בהם יכלנו להתקרב לנקודה x_0 - מכיוון חיובי ושלילי. כאשר עוברים למימד 2 ומעלה יש אינסוף כיוונים (ישרים) בהם ניתן להתקרב לנקודה P_0 ובפרט ניתן להתקרב ל P_0 גם דרך עקומים שאינם ישרים ולכן

<u>מסקנה</u>: כדי להראות שפונקציה אינה רציפה ב P_0, מספיק למצוא סדרה Q_n כך ש $Q_n\to P_0$ אבל $f(Q_n)\not\to f(P_0)$.
דרך נוספת, היא להגדיר עקום $\varphi(t)$ כך ש $\varphi(t_0)=P_0$ ולהסתכל על הפונקציה $f(\varphi(t))$ (כלומר הערכים שהפונקציה מקבלת לאורך העקום) ולבדוק מה הגבול כאשר $t\to t_0$.

1 תרגילי חימום

<u>תרגיל 1:</u>

בדקו האם קיים גבול בראשית לפונקציה

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{3x^2+2y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב שאם קיים גבול, אז נקבל אותו גבול על כל מסלול שמתכנס לראשית. בפרט הגבול סה"כ יהיה חייב להיות $\lim\limits_{t\to 0}f(t,0)=0$ - נראה שהגבול הוא אכן אפס. כדי לבדוק גבול בראשית, מספיק להסתכל על המקרה בו $|x|,|y|<1$. ננסה לחסום את הפונקציה

$$\begin{aligned}|f(x,y)-0| &= \frac{|xy^3|}{3x^2+2y^2}\overset{(*)}{\leq}\frac{|y^3|}{3x^2+2y^2}\leq\frac{|y^3|}{2y^2}=\frac{1}{2}|y|\\ \lim_{(x,y)\to 0}|f(x,y)| &\leq \lim_{(x,y)\to 0}\frac{1}{2}|y|\to 0\end{aligned}$$

בשפת אפסילון דלתא: לכל $\varepsilon>0$ נבחר $\delta_\varepsilon=\min(1,\varepsilon)$ ולכן נקבל ש $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta_\varepsilon\leq 1$ שהיינו צריכים בשביל $(*)$, ובנוסף $|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta\leq\varepsilon$. לכן סה"כ נקבל ש $|f(x,y)-f(0,0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
הסיבה שכדאי לעבור לערך מוחלט היא ש $0\leq|f(x,y)|$ ועכשיו מקבלים ע"י כלל הסנדוויץ' שלפונקציה יש גבול בראשית.
למה כדאי להשתמש בחסם של $|x|<1$ ולא $|y|<1$ (באי שוויון הראשון משמאל)? הסבירו לעצמכם.

תרגיל 2:

בדקו האם לפונקציה הבאה יש גבול בראשית

$$f(x,y)=\frac{xy}{3x^2+2y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$

פתרון:

נשים לב שאם נתקרב לראשית דרך הצירים, כלומר עם המסלולים $(t,0)$ או $(0,t)$ נקבל שהגבול בסדר הוא אפס (כי $f(t,0)=f(0,t)=0$).
לעומת זאת נסתכל על המסלול $\varphi(t)=(t,t)$ כאשר $t\to 0$ אז מקבלים ש

$$f(\varphi(t))=\frac{t\cdot t}{3t^2+2t^2}=\frac{t^2}{5t^2}=\frac{1}{5}$$

קיבלנו שהפונקציה קבועה על הישר $\{(t,t)\ \mid\ t\in\mathbb{R}\}$ פחות הנקודה אפס, ולכן בפרט הגבול שלה לאורך הישר הזה שווה ל $\frac{1}{5}$, ולכן לא יתכן שהפונקציה רציפה בראשית. באופן כללי נוכל להסתכל על ישרים שעוברים בראשית (t,kt) ולראות שהגבולות שונים.

תרגיל 3:

הראו שלפונקציות הבאות אין גבול בראשית

$$f(x,y)=\frac{x^2-x+y^2-y}{|x|+|y|},\qquad g(x,y)=\frac{xy}{x^2+\sin^2(y)}$$

פתרון:

עבור f: נסתכל על העקום $\varphi(t)=(t,t)$ ואז נקבל

$$\lim_{t\to 0}\frac{3t^2-3t}{3\,|t|}=\frac{t}{|t|}(t-1)$$

אם t שואף לאפס מהכיוון החיובי אז הגבול הוא (-1), ואם מהכיוון השלילי אז הגבול הוא 1, ולכן אין גבול בראשית.
עבור g: נרצה שהביטויים $x^2\sim\sin^2 y$ יהיו דומים, אז נבחר את העקום $(\sin(t),t)$ - הוא עובר בראשית עבור $t=0$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\sin(t)}{2\sin^2(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin(t)}=\frac{1}{2}$$

כדי למצוא גבול נוסף בראשית, נשים לב שעבור העקום $(t,0)$ המונה הוא זהותית אפס ולכן מקבלים שהגבול בראשית הוא אפס. קיבלנו שני גבולות שונים ולכן אין גבול בראשית.

2 מעבר לקורדינטות פולריות (קוטביות)

הגדרה 2.1 תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. נאמר ש $\lim\limits_{r\to 0} f(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))=L$ כאשר ההתכנסות היא במ"ש ב θ, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_\varepsilon>0$ (**שאינו תלוי ב** θ) כך שאם $0\le r<\delta_\varepsilon$ אז

$$|f(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))-L|<\varepsilon .$$

משפט 2.2 תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. אז הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ אמ"מ $\lim\limits_{r\to 0} f(x_0+r\cos(\theta),y_0+r\sin(\theta))=L$ במ"ש ב θ.

הוכחה: אם נסמן $h=x-x_0,\ k=y-y_0$ אז בהצבה של הקור' הפולריות נקבל ש $r=\sqrt{h^2+k^2}$. שאר המשפט נובע מההגדרות של הגבולות. ■

ע"י הגדרת $g(h,k)=f(x+h,y+k)$, במקום לבדוק את הגבול של f ב (x,y) מספיק לבדוק את הגבול של g בראשית. באותה צורה ניתן להסתכל על הפונקציה $g(h,k)-L$ כדי לבדוק האם הגבול הוא 0 במקום L. בצורה זו מספיק לבדוק האם הגבול של $|g(h,k)-L|$ הוא אפס ואז צריך רק לחסום מלמעלה.

במקרה זה, כדי להראות התכנסות של פונקציה (בראשית ולאפס) נרצה ש

$$|f(x,y)|=|f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))|\le\alpha(r)\beta(r,\theta)$$

כאשר $\lim\limits_{r\to 0}\alpha(r)=0$ ו $\beta(r,\theta)$ חסומה כאשר r קטן.

<u>תרגיל 4:</u>

מצא את הגבול של הפונקציות הבאות בראשית

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+4y^2}\qquad g(x,y)=\frac{x\sin(y^2)}{x^2+y^2}$$

<u>פתרון:</u>

- ע"י הצבת המסלול $(t,0)$ ב f קל לראות שאם קיים גבול אז הוא צריך להיות אפס. נשתמש בהצבה הפולרית

$$|f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))|=\left|\frac{r^3\cos^3(\theta)+r^3\sin^3(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+4\sin^2(\theta))}\right|=r\frac{\left|\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right|}{(\cos^2(\theta)+4\sin^2(\theta))}=r\frac{\left|\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)\right|}{1+3\sin^2(\theta)}$$

הפונקציה $\alpha(r,\theta)=r$ שואפת לאפס כאשר $r\to 0$ ו $|\beta(r,\theta)|=\left|\frac{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}{1+3\sin^2(\theta)}\right|\le\frac{\left|\cos^3(\theta)\right|+\left|\sin^3(\theta)\right|}{1}\le 2$ חסומה, ולכן יש התכנסות.

- בפונקציה השנייה, הצבה של $(t,0)$ תראה שאם קיים גבול אז הוא אפס. נשים לב תחילה ש $|g(x,y)|\le\frac{\left|xy^2\right|}{x^2+y^2}$ כי $|\sin(t)|\le|t|$ לכל t, ולכן מספיק להראות שהפונקציה החוסמת מלמעלה שואפת לאפס. ע"י הצבה פולרית נקבל ש

$$\left|\frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2}\right|=r\left|\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right|\le r$$

ושוב נקבל שהפונקציה שואפת לאפס.

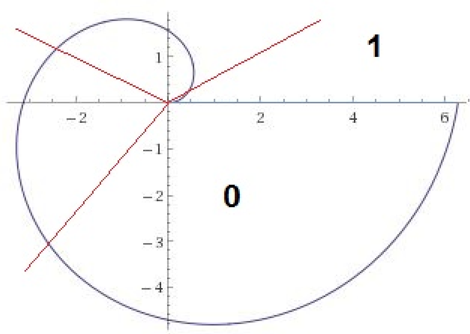
3 התכנסות במ"ש לעומת התכנסות על ישרים

הגדרה 3.1 לפונקציה $f(x,y)$ יש גבול בכיוון $v=(v_x,v_y)$ בנקודה (x_0,y_0), אם כאשר מתקדמים בכיוון v, כלומר לאורך הישר $\varphi(t)=(x_0,y_0)+t(v_x,v_y)$ לנקודה, אז קיים גבול. פורמלית

$$\lim_{t\to 0} f(\varphi(t)) \to L$$

מבחינת קורדינטות פולריות זה אומר שעבור הזווית θ_v (הקבועה!) שמתאימה לכיוון v, קיים הגבול $\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta_v), r\sin(\theta_v)) =$ L.

הערה: לפונקציה בתרגיל 2 יש גבול בראשית לאורך כל ישר שעובר בראשית, אבל אין לה גבול בראשית! נסתכל על הפונקצית "פקמן" הבאה - הפונקציה מקבלת את הערך 0 בתוך הפקמן ואת הערך 1 מחוץ לפקמן:



לא משנה איזה ישר נבחר (הישרים האדומים) , אם נתקרב מספיק לראשית, אז הישר יכנס לתוך הפקמן ולכן הפונקציה תהיה עליו אפס, ובפרט הגבול לאורך הישר יהיה אפס. לעומת זאת, אין גבול בראשית לפונקציה, כי לא משנה איזה סביבה קטנה של אפס ניקח, תמיד הפונקציה תקבל שם גם ערך אפס וגם אחד. או לחלופין, ניתן לקחת מסלול מעגלי שנכנס לפה של פקמן ועליו הפונקציה שווה 1 ולכן יש שני גבולות שונים בראשית 1 ו 0, כלומר אין גבול כפונקציה של שני משתנים.

תרגיל 5:

נגדיר $f(x,y)=\frac{xy^2}{y^4+x^2}$ לכל $(x,y)\neq(0,0)$. הראו של f יש גבול לאורך כל ישר העובר בראשית, אך אין לה גבול בראשית.

פתרון:

יהא $v=(a,b)$ ישר, אז צריך למצוא את הגבול של $f(at,bt)=\frac{ab^2t^3}{b^4t^4+a^2t^2}=\frac{ab^2t}{b^4t^2+a^2}$ כאשר $t\to 0$. נפריד למקרים:

$a=0$: הפונקציה שווה זהותית לאפס ולכן הגבול הוא אפס.

$a\neq 0$: הגבול של המכנה הוא $a^2\neq 0$ ולכן ניתן להשתמש באריתמטיקה של גבולות ונקבל שהגבול הוא $\frac{0}{a^2}=0$.

קיבלנו שהגבול לאורך כל ישר הוא אפס. לעומת זאת, אם ננוע לאורך העקום (t^2,t) (וזה ידאג שהחזקות של x,y במכנה יהיו זהות), אז נקבל

$$f(t^2,t)=\frac{t^4}{2t^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

כלומר אין גבול בראשית.

דרך נוספת להראות שיש גבולות לאורך ישרים, זה ע"י קורדינטות פולריות:

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^4\sin^4(\theta)+r^2\cos^2(\theta)} = r\left(\frac{\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\sin^4(\theta)+\cos^2(\theta)}\right)$$

כאשר קובעים את θ, אם $\cos^2(\theta)\neq 0$ אז מאריתמטיקת גבולות נקבל שהגבול הוא אפס, ואם $\cos(\theta)=0$ אז הפונקציה שווה זהותית לאפס. שימו לב שבתרגיל הזה בניגוד לתרגילים הקודמים קיבלנו פונקציה מהצורה $\alpha(r)\beta(r,\theta)$, אבל β אינה חסומה.

הערה: יהיו a,b,m,n מספרים טבעיים ונגדיר $f(x,y)=\frac{x^a y^b}{x^{2n}+y^{2m}}$. אם יש לפונקציה גבול בראשית אז הוא חייב להיות אפס ולכן מספיק לבדוק שהגבול של $|f(x,y)|=f(|x|,|y|)$ הוא אפס. הראו שאם $s,t>0$ אז הגבול של הפונקציה הנ"ל בראשית הוא אפס אמ"מ הגבול של $f\left(|x|^s,|y|^t\right)$ בראשית הוא אפס. בפרט נקבל עבור $s=m$ ו $t=m$ את הפונקציה

$$\frac{x^{ma}y^{nb}}{x^{2nm}+y^{2nm}} \rightsquigarrow \frac{r^{ma+nb}}{r^{2nm}}g(\theta)$$

כאשר $g(\theta)$ פונקציה חסומה, כלומר הגבול יהיה אפס אמ"מ $ma+nb>2nm$.

4 טריקים של רציפות

תרגיל 6 (הרכבת פונקציות רציפות):

הראו שהפונקציה הבאה רציפה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x+y)}{x+y} & x+y\neq 0\\ 1 & x+y=0\end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שבנקודות $x+y\neq 0$ נקבל שהפונקציה רציפה כהרכבה של רציפות. ניתן אף להכליל את זה בצורה הבאה - נגדיר $g(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t)}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ ואז $f(x,y)=g(x+y)$. הפונקציה g רציפה (אינפי 1) ו $(x,y)\mapsto x+y$ רציפה ולכן f היא הרכבה של רציפות (בכל המישור) ולכן רציפה בעצמה.

תרגיל 7 (פיתוח טיילור - קירוב ע"י פולינומים):

הראו שלפונקציה הבאה יש גבול בראשית

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)x}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}$$

פתרון:

כרגיל, נתחיל את התרגיל ע"י כך שנשים לב שלאורך המסלול $(0,t)$ הפונקצייה שווה זהותית לאפס, ולכן אם קיים גבול אז הוא חייב להיות אפס.

היינו רוצים להשתמש בקירובים $\sin(t),\tan(t),\ln(1+t)\sim t$ שאנחנו מכירים מפונקציות במשתנה אחד. בדרך כלל כדי לפשט פונקציות כאלו נרשום (למשל) $\sin(x)=\frac{\sin(x)}{x}x$ ואז $\frac{\sin(x)}{x}\to 1$ ונשתמש איכשהו באריתמטיקה של גבולות. הבעיה היא שיכול להיות ש $(x,y)\neq(0,0)$ אבל x כן שווה לאפס.

כדי להימנע מהבעיה הזאת נסמן $A=\{(x,y)\ \mid\ x=0\ or\ y=0\}$ ונראה שהגבול קיים בנפרד על A וכל $\mathbb{R}^2\backslash A$ ולכן הגבול קיים סה"כ. מאחר ו $\ln(1)=0$ אז $f\mid_A\equiv 0$ ולכן הגבול שם הוא אפס. ב $\mathbb{R}\backslash A$ נוכל לחלק ב x,y ונקבל ש

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\ln(1+xy)x}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\frac{x^2y}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}$$

הביטוי הראשון שואף לאחד (הרכבה של הפונקציה $\frac{\ln(1+t)}{t}$ ו $t=xy$) ולכן מספיק לחשב את הגבול של הביטוי השני ולהשתמש באריתמטיקת גבולות. כדי להיפטר מה $\sin(x)$, $\tan(y)$ במכנה ניתן לעשות חישובים דומים, או להשתמש בחסמים $|\sin(x)|\geq\frac{|x|}{2}$ עבור x מספיק קרוב לאפס וכנ"ל $|\tan(y)|\geq\frac{|y|}{2}$ עבור y מספיק קרוב לאפס (זה נובע מהגבולות $\frac{\sin(x)}{x}\to 1$ ו $\frac{\tan(y)}{y}\to 1$).

$$\left|\frac{x^2y}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}\right|=\frac{\left|x^2y\right|}{\sin^2(x)+\tan^2(y)}\leq\frac{\left|x^2y\right|}{x^2/2+y^2/2}=\frac{2\left|x^2y\right|}{x^2+y^2}$$

עכשיו הצבה רגילה של קור' פולריות תראה שהגבול של הביטוי היני הוא אפס, וע"י סנדוויץ' גם הגבול של הפונקציה המקורית הוא אפס.

<u>תרגיל 8</u> (פיצול למכפלת פונקציות והרכבה של פונקציות):

מצאו את הגבולות הבאים

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) &= \frac{(x-1)^2\ln(x)}{(x-1)^2+y^2}\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) &= \ln\left(\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש $\ln(1+t)\sim t$ כאשר $t\sim 0$ ולכן $\ln(x)\sim x-1$. נגדיר $h(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(x)}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ אז זו פונקציה רציפה (ב $x>0$) ונקבל ש

$$f(x,y)=\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2+y^2}h(x,y)$$

ועכשיו קל לבדוק שהגבול של h הוא 1 והגבול של הגורם השני הוא אפס ולכן מאריתמטיקת גבולות מקבלים שהגבול הוא אפס.

בקשר לפונקציה השנייה, מה שמופיע בתוך הלוגריתם שווה ל $3-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ וזה שואף ל 3 כאשר $(x,y)\to(0,0)$. מרציפות של הלוגריתם נקבל שהגבול יהיה $\ln(3)$.

<u>תרגיל 9</u> (הגדרת פונקציה בשני חלקים):

מצאו נקודות רציפות לפונקציה הבאה:

$$f(x,y)=\begin{cases}xy & x\geq 0\\ e^{x+y}-1 & x<0\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

אם $x>0$ או $x<0$ אז קל לראות שהפונקציה רציפה ב (x,y) לכל y כי הפונקציות xy ו $e^{x+y}-1$ רציפות.

נבדוק מה קורה בנקודות $(0,y_0)$. מאחר ו xy ו $e^{x+y}-1$ רציפות, אז כדי ש f תהיה רציפה ב $(0,y_0)$ חייב להתקיים ש $e^{0+y_0}-1=0\cdot y_0$ כלומר $e^{y_0}=1$ אמ"מ $y_0=0$. קיבלנו ש f לא רציפה ב $(0,y_0)$ לכל $y_0\neq 0$. לעומת זאת ב $(0,0)$, בגלל הרציפות של xy ו $e^{x+y}-1$ בראשית, אז לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\delta_1,\delta_2>0$ כך שאם $\sqrt{x^2+y^2}<\delta_1$ (בהתאם עם δ_2) אז $|xy-0|<\varepsilon$ (בהתאם $|(e^{x+y}-1)-0|<\varepsilon$). לכן נבחר $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$ והוא יתאים להגדרת הגבול.

תרגיל 10 (שימוש בנגזרות חלקיות):

תהי $f(x,y)$ מוגדרת לכל (x,y) כך ש

1. לכל x קבוע, הפונקציה $f_x(y) = f(x,y)$ רציפה (כפונקציה של המשתנה y)
2. לכל y קבוע, הפונקציה מקיימת $|f(x,y) - f(x_0,y)| < |x - x_0|$

   הוכח שהפונקציה רציפה.

פתרון:

אנחנו רוצה לחשב את המרחק בין (x_0,y_0) ל (x,y) ונרצה להשתמש בנתונים שיש לנו

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x_0,y_0)| &= |f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| \\
&\le |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| \\
&\le 2|x - x_0| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| \\
\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| &\le \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 2|x - x_0| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| \to 0
\end{aligned}$$

שאלה: אם מחליפים את תנאי 2 ב "לכל y קבוע הפונקציה $f_y(x) = f(x,y)$ היא רציפה", האם הפונקציה $f(x,y)$ עדיין חייבת להיות רציפה?