גזירות

<u>הגדרה</u>: הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה $P\in\mathbb{R}^n$ ונגזרתה היא $\nabla f(P)=(a_1,...,a_n)$ אם

$$\lim_{\mathbb{R}^n\ni h\to 0}\frac{|f(P+h)-f(P_0)-\sum a_ih_i|}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}}=0$$

או לחילופין

$$\left\|f(P+h)-f(P)-\sum a_ih_i\right\|=\|h\|\,\varepsilon(h)\qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

שימו לב שאם $\bar{a}=(a_1,...,a_n)$ ו $\bar{h}=(h_1,...,h_n)$ אז $\sum a_ih_i=\langle\bar{a},\bar{h}\rangle$, כלומר הנגזרת היא הטרנספורמציה הלינארית $\bar{h}\mapsto\langle\bar{a},\bar{h}\rangle$.

תרגיל 1:

מצאו את הנגזרות (לפי ההגדרה) של הפונקציה $f_1(x,y)=x^2+y^2,\ f_2(x,y)=xy$

פתרון: ננסה לנחש את הנגזרת. בשביל זה אנחנו צריכים לדעת איך נראה הביטוי $f(x+h,y+k)-f(x,y)$.

$$f_1(x+h,y+k)-f_1(x,y)=(x+h)^2+(y+k)^2-x^2-y^2=2xh+h^2+2yk+k^2=2x\cdot h+2y\cdot k+(h^2+k^2)$$

הביטוי $2x\cdot h+2y\cdot k$ הוא לינארי ב h,k (x,y הם קבועים!) ולכן ננחש שהנגזרת היא $(2x,2y)$. כדי לבדוק נכונות נבדוק שהגבול הבא הוא אכן אפס:

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f_1(x+h,y+k)-f_1(x,y)-2xh-2yk|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to 0}\frac{\left|h^2+k^2\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to 0}\sqrt{h^2+k^2}=0\ .$$

החישוב בפונקציה השנייה יעשה באותה צורה:

$$f_2(x+h,y+k)-f_2(x,y)=(x+h)(y+k)-xy=y\cdot h+x\cdot k+hk$$

לכן ננחש שהנגזרת היא (y,x) ונקבל ש

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f_2(x+h,y+k)-f_2(x,y)-yh-hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{r}=0\ .$$

תרגיל 2:

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(\bar{x})=\langle\bar{a},\bar{x}\rangle+b=\sum_1^n a_ix_i+b$, כאשר $\bar{a}\in\mathbb{R}^n,\ b\in\mathbb{R}$. מצאו את הנגזרת של הפונקציה.

פתרון:

נגזרת של הפונקציה זה בעצם קירוב ליניארי ולכן הנגזרת כנראה תהיה $\bar{a}$ (כמו שהנגזרת של הפונקציה $f(x)=ax+b$ היא פשוט a).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|f(\bar{x}+\bar{h})-f(\bar{x})-\sum a_ih_i\right\|}{\left\|\bar{h}\right\|}=\lim_{h\to 0}\frac{\left\|\left[\sum a_i\left(x_i+h_i\right)+b\right]-\left[\sum a_ix_i+b\right]-\sum a_ih_i\right\|}{\left\|\bar{h}\right\|}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{\left\|\bar{h}\right\|}=0\ .$$

הגדרה: תהא $f(x_1,...,x_n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ונסמן ב $\{e_i\}_1^n$ את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$, כלומר e_i הוא וקטור אפסים עם 1 במקום ה i. עבור $P=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ ו $i\in\{1,...,n\}$ הצמצום של f לישר בכיוון e_i שעובר בנקודה P, זו הפונקציה $f^{(i)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f^{(i)}(t):=f(P+te_i)=f(a_1,...,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},...,a_n).$$

הנגזרת החלקית של f בנקודה P בכיוון e_i מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(P): &= \left(f^{(i)}\right)'(0)=\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{f^{(i)}(h)-f^{(i)}(0)}{h}\\ &= \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_{i-1},a_i,a_{i+1},...,a_n)}{h}\end{aligned}.$$

שימו לב שזו נגזרת של פונקציה במשתנה אחד x_i, כאשר כל שאר המשתנים קבועים.

משפט:

תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

1. אם f גזירה ב P, אז כל הנגזרות החלקיות שלה ב P קיימות, ובנוסף מתקיים ש $\nabla f(P)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P),...,\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\right)$.
2. אם הנגזרות החלקיות של f קיימות בסביבת P ורציפות ב P אז גם f גזירה ב P.

תרגיל 3:

נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=x^2y+e^{zy}$. מצאו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה. אם f דיפרנציאבילית, מצאו את הנגזרת שלה.

פתרון:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2+ze^{zy} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=ye^{zy}$$

הנגזרות החלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^3$ ולכן הפונקציה גזירה ונגזרתה היא

$$\nabla f(x,y,z)=\left(2xy,x^2+ze^{zy},ye^{zy}\right)$$

תרגיל 4:

נתונה הפונקציה $f(x,y)=y\ln(1+x^2+\frac{1}{2}\sin(y^2x))+x^2(1+y)+e^{x^2+y^2}$. מצאו את $f'_x(1,0)$.

פתרון:

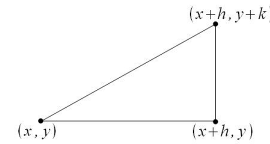
נגדיר $g(x):=f(x,0)$ - הצמצום של f לישר $y=0$. לפי ההגדרה $f'_x(1,0)=g'(1)$, ולכן כדי למצוא את $f'_x(1,0)$ ניתן קודם להציב $y=0$ (לעבור ל g) ואז לגזור.

$$\begin{aligned}f(x,0) &= x^2+e^{x^2}\\ f'_x(x,0) &= 2x+2xe^{x^2}=|_{x=1}\, 2+2e\end{aligned}$$

תרגיל 5:

נתונה פונקציה f עם נגזרות חלקיות חסומות. הוכיחו ש f פונקציה רציפה.

פתרון:



.

אנחנו לא יודעים לחשב את ההפרש $f(x+h,\ y+k)-f(x,y)$. הנתון שיש לנו על הפונקציה הוא רק ההתנהגות שלה כאשר x קבוע (ואז אנחנו יודעים שהנגזרת לפי y חסומה) וכאשר y קבוע. אז נחלק את ההפרש הנ"ל לשני צעדים - קודם נזוז לפי y כאשר x קבוע ואז נזוז לפי x כאשר y קבוע.

$$\begin{aligned}|f(x+h,\ y+k)-f(x,y)| &= |f(x+h,\ y+k)-f(x+h,y)+f(x+h,y)-f(x,y)| \\ &\le |f(x+h,\ y+k)-f(x+h,y)|+|f(x+h,y)-f(x,y)|=(*)\end{aligned}$$

משפט לגראנז' נותן לנו קשר בין הערכים של פונקציה f בקצוות הקטע $[a,b]$ ואורך הקטע:

<u>משפט לגראנז':</u> נתונה g רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב (a,b), אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

עבור x קבוע הפונקציה $h_x(y)=f(x,y)$ היא פונקציה גזירה, והנגזרת שלה היא בעצם הנגזרת החלקית של f, כלומר $\frac{dh_x}{dy}(y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. באותה צורה הפונקציה $g_y(x)=f(x,y)$. זה בעצם אומר שאנחנו יכולים להפעיל את משפט לגראנז' על הנגזרות החלקיות:

$$\frac{f(x+h,\ y+k)-f(x+h,y)}{(y+k)-y}=\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,\tilde{y}) \qquad \frac{f(x+h,\ y)-f(x,y)}{(x+h)-x}=\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},y)$$

כאשר $\tilde{y}$ נמצא בין y ל $y+k$ ו $\tilde{x}$ נמצא בין x ל $x+h$.

$$\begin{aligned}(*) &= \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,\tilde{y})\right||k|+\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},y)\right||h|\le M(|k|+|h|) \\ &\Rightarrow \lim_{(h,k)\to 0}|f(x+h,\ y+k)-f(x,y)|\le\lim_{(h,k)\to 0}M(|k|+|h|)=0\end{aligned}$$

כאשר M הוא החסם של הנגזרות החלקיות.

תרגיל 6:

נתונה פונקציה $f(x,y)$ המקיימת $|f(x,y)|\le x^2+y^2=\|(x,y)\|^2$. הראו שהפונקציה גזירה בראשית

פתרון:

תחילה $|f(0,0)|\le 0$ ולכן $f(0,0)=0$

$$|f(h_x,h_y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\le h_x^2+h_y^2$$

הפונקציה $h_x^2+h_y^2$ שואפת הרבה יותר מהר לאפס בראשית מאשר פונקציה לינארית כלשהי. אנחנו מחפשים T לינארית שתקרב את הביטוי $f(h_x,h_y)-f(0,0)$ בראשית, ולכן נבחר $T=0$ ואז $h_x^2+h_y^2$ יהיה השארית. נראה ש $T=0$ היא באמת הנגזרת

$$\lim_{(h_x,h_y)\to 0}\frac{\left|f(h_x,h_y)-f(0,0)-\overbrace{T(h_x,h_y)}^{=0}\right|}{\|(h_x,h_y)\|}\le\lim_{(h_x,h_y)\to 0}\frac{h_x^2+h_y^2}{\|(h_x,h_y)\|}=\lim_{(h_x,h_y)\to 0}\frac{\|(h_x,h_y)\|^2}{\|(h_x,h_y)\|}=\lim_{(h_x,h_y)\to 0}\|(h_x,h_y)\|=0$$

ולכן f גזירה בראשית ונגזרתה היא אפס.

הערה: הטענה הנ"ל נכונה לכל $|f(x,y)|\le\|(x,y)\|^\alpha$ כאשר $\alpha>1$.

מסקנה: אם נתונה פונקציה g גזירה ב 0, ופונקציה f המקיימת $|f(x,y)-g(x,y)| \le x^2+y^2$, אז f גזירה בראשית ו $f'(0)=g'(0);\ f(0)=g(0)$

הוכחה: הפונקציה $F(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$ גזירה ונגזרתה אפס בראשית (מהתרגיל), ולכן $f(x,y)=F(x,y)+g(x,y)$ גזירה בראשית (סכום של פונקציות גזירות) ואז נגזרתה $f'(0,0)=F'(0,0)+g'(0,0)=g'(0,0)$.

מסקנה: קיימות פונקציות שגזירות בראשית (או באופן כללי בנקודה P כלשהי) אך לא רציפות בשום נקודה אחרת.

הוכחה: נכליל את פונקצית דיריכלה לשני משתנים בצורה הבאה $D(x,y)=1$ אם $x,y\in\mathbb{Q}$ ואחרת הפונקציה שווה לאפס. הפונקציה $f(x,y)=D(x,y)(x^2+y^2)$ תקיים את תנאי התרגיל ולכן גזירה בראשית, ובנוסף קל לבדוק שהיא אינה רציפה בשום נקודה אחרת. בפרט אם U סביבה פתוחה של הראשית אז היא מכילה נקודה $(x,y)\neq 0$ כך $x,y\in\mathbb{Q}$ ולכן אין שם נגזרת חלקית. מכאן ניתן להסיק שהתנאי שהנגזרות חלקיות רציפות בנקודה הוא תנאי מספיק אך אינו הכרחי.

תרגיל 7:

בדקו רציפות, קיום נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות של הפונקציה הבאה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון:

רציפות: בכל נקודה פרט לראשית הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. בראשית:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-f(0,0)|=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}\right|=\lim_{r\to0}\frac{r^3\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{r^2(1+\cos^2\theta)}=\lim_{r\to0}r\frac{\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)}{(1+\cos^2\theta)}=0$$

כלומר הגבול הוא אפס ולכן הפונקציה רציפה גם בראשית. נגזרות חלקיות:

$$(x_0,y_0)\neq(0,0)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{3x^2(2x^2+y^2)-4x(x^3+y^3)}{(2x^2+y^2)^2}=\frac{2x^4+3x^2y^2-4xy^3}{(2x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{3y^2(2x^2+y^2)-2y(x^3+y^3)}{(2x^2+y^2)^2}=\frac{y^4+6x^2y^2-2yx^3}{(2x^2+y^2)^2}$$

$$(x_0,y_0)=(0,0)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1$$

גזירות: בכל נקודה פרט לראשית הנגזרות החלקיות רציפות ולכן הפונקציה גזירה שם. בראשית הנגזרות לא רציפות, למשל $\varphi(t)=(0,t)$

$$\lim_{t\to0}\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))=\lim_{t\to0}\frac{0}{t^4}=0\neq\frac{1}{2}$$

זה לא גורר שהפונקצה לא גזירה (המשפט נותן תנאי מספיק אך לא הכרחי). אם הפונקציה גזירה, אז הנגזרת שלה שווה ל $Df(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=\left(\frac{1}{2},1\right)$ - נבדוק האם זו הנגזרת

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to0}\frac{\left\|f(h,k)-f(0,0)-\frac{1}{2}h-1\cdot k\right\|}{\|(h,k)\|}&=\lim_{(h,k)\to0}\frac{\left|\frac{h^3+k^3}{2h^2+k^2}-\frac{1}{2}h-k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to0}\frac{\left|h^3+k^3-h^3-\frac{1}{2}k^2h-2h^2k-k^3\right|}{\sqrt{h^2+k^2}\,(2h^2+k^2)}\\&=\lim_{(h,k)\to0}\frac{\left|-\frac{1}{2}k^2h-2h^2k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}\,(2h^2+k^2)}=\lim_{r\to0}\frac{\left|\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta+2\cos^2\theta\sin\theta\right|}{1+\cos^2\theta}\neq0\end{aligned}$$

למשל עבור $\theta=\frac{\pi}{4}$ נקבל ש $\cos(\theta)=\sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ ולכן עבור הזווית הזאת הגבול הוא חיובי ממש. מכאן שהפונקציה לא גזירה בראשית.