תורת הקבוצות

שניר הורדן 205689581

23 במאי 2018

.1

1. נגדיר פונקציה חח"ע ועל ונעזר בפונקציית עזר:נ

$$\psi:[0,1]\bigcup[2,3]\to[0,4]$$

נגדיר $A=\left\{ \frac{1}{2^{n}}|n\in\mathbb{N}\right\}$

$$\begin{cases} \psi\left(x\right)=2\left(x-1\right) & x\in[2,3]\\ \psi\left(x\right)=2x & x\in[0,1)\backslash A\\ \psi\left(x\right)=x & x\in A \end{cases}$$

2. נגדיר פונקציה חח"ע ועל:

$$\zeta:f\to g$$

עבור:

$$f\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\quad g\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$$

נתאר זאת:

$$\begin{cases} f: & \mathbb{N}\to\mathbb{Z}\\ g: & \mathbb{Z}\to\mathbb{N} \end{cases}$$

כך:
ניצור פונקציה חח"ע ועל כדלהלן:

$$\psi:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$$

$$\begin{cases}\psi(i)=2i & i\in\mathbb{Z},\quad positive\\ \psi(i)=2|i|-1 & i\in\mathbb{Z},\quad negative\end{cases}$$

$$\psi^{-1}:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases}\psi^{-1}(i)=\frac{i}{2} & i\in\mathbb{N},\quad even\\ \psi^{-1}(i)=-\frac{i+1}{2} & i\in\mathbb{N},\quad odd\end{cases}$$

תהי $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$. נראה קיום ויחידות של $\zeta(f)=g\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
פורמאלית, נבצע את הפעולות כך, יהא $x\in\mathbb{Z}$,
כעת נגדיר,

$$\zeta(f(x))=\psi^{-1}(f(x))$$

$$\zeta(f(x)(y))=\psi(y)$$

רצף פעולות זה הוא חח"ע ועל ולכן גם ζ כזו.
לכן, מתקיים $\left|\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}\right|=\left|\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\right|$.

3. יהא $a\in A$. a הוא קטע ב־$\mathbb{R}$ מהצורה (b,c). מעל המספרים הממשיים יש את תכונת הצפיפות. בין כל שני מספרים ממשיים יש איבר רציונאלי נסמנו q_a.
נגדיר פונקציה חח"ע ועל :

$$f:\mathbb{Q}\to A$$
$$q_a\to a$$

נתאר את בחירת q_a:

$$1.pick\quad q_1\in\mathbb{Q}$$

$$2.connect\quad to\quad randomly\quad picked\quad a_1\in A$$

$$2.pick\quad q_2\in\mathbb{Q}\setminus\{q_1\}$$

$$4.connect\quad to\quad randomly\quad picked\quad a_1\in A\setminus\{a_1\}$$

$$...ad\quad infintum$$

מאחר ושתי הקבוצות מעצה זהה,($|A| = |\mathbb{Q}|$), מאחר ו־$\mathbb{Q}$ היא בת־מנייה לפי מה שהוכחנו בכיתה. כמו כן, היא קבוצה אינסופית המורכבת מאיברים רציונאליים לכן לפי משפט היא בת־מנייה. מאחר והעוצמות שוות קיימת פונקציה חח"ע ועל ביניהם וההגדרה שלנו מגדירה אותה היטב.

4. $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. $B = \{f \in A | a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)\}$. נגדיר פונקציה חח"ע ועל:

$$f : A \to B$$

כך שכל $b \in B$ מוגדר על י די $\forall i \in \mathbb{N} \quad b(i+1) = b(i) + a(i),$ ומתקיים $b(0) = a(0)$.

לכן מתקיים $|A| = |B|$.

2.

1.

נזכור כי

$$A^{\{1,...,n\}} = a_1, a_2, ..., a_n$$

זו סדרה סופית באורך n של איברי A. $(a_i \in A)$.

נגדיר פונקציה חח"ע ועל,

$$f : A^{\{1,...,n\}} \to \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n}$$

כך:

$$f\left(A^{\{1,...,n\}}\right) = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

2. תהי $g : B \cup C \to A$ ו־$h : B^A \cup B^C \to (b, c)$ עבור $g|_B = b$ ו־$g|_C = c$.

נגדיר פונקציה חח"ע ועל:

$$\begin{cases} \psi(x) = (g|_C(x), g|_B(x)) \\ x \in B \cup C \\ \end{cases}$$

מאחר ו־$B \cap C = \emptyset$ אז זו מוגדרת היטב.

3.

1. נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

$$A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$
$$B = \mathbb{Q}$$
$$C = \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$$
$$D = \mathbb{Z}$$

$A\sim C$ וגם $B\sim D$.
אך נקבל:

$$|A\cap B|=|\emptyset|=1$$
$$|C\cap D|=|-\mathbb{N}\setminus\{0\}|=\aleph_0$$

אז לא מתקיים $A\cap B\sim C\cap D$.
2. הוכחה
נתון:
$A\sim C\Rightarrow\exists f-bijective|f:A\to C$.
$B\sim D\Rightarrow\exists g-bijective|g:B\to D$.
נגדיר

$$\phi:A\times B\to C\times D$$
$$(a,b)\to(f(a),g(b))$$

זו פונקציה חח"ע ועל, כי הפלט הוא זוג סדור של תמונה של פונקציות חח"ע ועל והקלט הוא זוג סדור של איברים בטווח של פונקציות חח"ע ועל, המתאימים זה לזה.
מ.ש.ל.
3. נפריך באמצעות דוגמא נגדית:

$$A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$
$$B=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$
$$C=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$$
$$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$|A\triangle B|=|\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}|=\aleph_0$$
$$|C\triangle D|=|\{1,2\}|=2$$

.4

.1

$$3^{\aleph_0}=\left|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\right|=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\cup\{2\}^{\mathbb{N}}\right|=\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|+\left|\{2\}^{\mathbb{N}}\right|=$$
$$=2^{\aleph_0}+|\mathbb{N}|=2^{\aleph_0}+\aleph_0\underbrace{=}_{2^{\aleph_0}>\aleph_0\to cantor's\quad lemma}2^{\aleph_0}$$

.2

$$\aleph^{\aleph}\underbrace{=}_{\aleph=2^{\aleph_0}}2^{\aleph_0^{\aleph}}\underbrace{=}_{P(\mathbb{N})=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\Rightarrow\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}}\aleph_0^{\aleph_0^{\aleph}}=\aleph_0^{\aleph_0\times\aleph}\underbrace{=}_{\aleph_0\times\aleph=\aleph\quad proved\quad in\quad class}\aleph_0^{\aleph}$$

5. הוכחה: תהי $A=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|f\left(\mathbb{N}\right)=\mathbb{N}\right\}$. כל הפרמוטציות של המספרים הטבעיים.
נניח בשלילה ש־$A\sim\mathbb{N}$. אז קיימת בייקציה $f:\mathbb{N}\to A$.
יהא$f_d\in A\backslash f\left(\mathbb{N}\right)$.
נראה בנייה של f_d. נשתמש בשיטת האלכסון של קנטור, נקח כל פעם איבר מ־$a_i\in A$,
נסדר את A כך ש־$a_0\left(0\right)\left(0\right)\neq 0$, ובכל איטרציה i על התהליך הזה, נגדיר:

$$\begin{cases} f_d\left(i\right)=a_i\left(i\right)\left(i\right)+1 & i\in\mathbb{N}\backslash\left\{0\right\} \\ f\left(0\right)=0 & 0 \end{cases}$$

באופן זה מתקיים $f_d\in A$.
אזי זו סתירה לכך ש־f היא על (מהיותה בייקציה בהנחה).
מ.ש.ל. ■

6. הוכחה: יהיו $\left\{A_i\right\}_{i\in I},\left\{B_i\right\}_{i\in I}$משפחות של קבוצות כך ש־$|B_i|<|A_i|$ לכל $i\in I$.
תהי $f:\bigcup\limits_{i\in I}A_i\times\left\{i\right\}\to\prod\limits_{i\in I}B_i$.
יהי $i\in I$, $f\left(x,i\right)=y\in\prod_{i\in I}B_i$ עבור $x\in A_i$.
מאחר ו־$|B_i|<|A_i|$ אז <u>כל</u> פונקציה $\psi_i:A_i\to B_i$ אינה על. כלומר ,

$$\exists b_i\in B_i\forall x_i\in A_i|\psi\left(x_i\right)\neq b_i$$

אזי, $y\left(i\right)\neq b_i$ $(*)$.
נשתמש בשיטת האלכסון של קנטור על מנת לבנות איבר ב־$\prod B_i$ "המתחמק" בו־זמנית מכל הקלטים $\left(x,i\right)$ האפשריים.
נבנה קבוצה כך: $b=\left\{b_i|i\in I,(*)\right\}$, עבור ה־$b_i$ שהוגדר לעיל.
מתקיים $b\in\prod_{i\in I}B_i$.
אז לא קיימת פונקציה על f. ■