תרגיל בית 6

תאריך הגשה: יום שני, 26/5/2014, עד שעה $22:00$

<u>שאלה 1:</u>

נתון כי לכל סדרה מונוטונית $x_0 \neq x_n \to x_0$ הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת.

א. הוכיחו כי הסדרות $f(x_n)$ מתכנסות כולן לאותו הגבול כאשר $x_0 \neq x_n \to x_0$ מונוטונית עולה.

נניח בשלילה כי קיימות 2 סדרות מונוטוניות עולות $x_0 \neq x_n, y_n \to x_0$ כך ש- $f(x_n) \to L\ ,\ f(y_n) \to K$, ו- $L \neq K$. נבנה סדרה חדשה a_n מאיברי $x_n\ , y_n$ בצורה הבאה: לאיבר הראשון נבחר את הקטן מבין $x_1\ , y_1$. נניח לשם ההדגמה כי בחרנו את x_1, אז בשלב הבא נבחר את הקטן מבין $x_2\ , y_1$. נמשיך כך, כאשר בכל שלב נבחר את הקטן מבין האיברים הראשונים שעדיין לא השתמשנו בהם מכל אחת מהסדרות. נשים לב כי בהכרח הסדרה החדשה המתקבלת מכילה את כל איברי $x_n\ , y_n$, ובפרט מכילה אינסוף מאיברי כל אחת מהסדרות המקוריות, כי אם קיים מקום בסדרה החדשה שהחל ממנו קיימים רק איברי אחת מהסדרות המקוריות, נניח בה״כ רק איברי x_n, זה אומר כי קיימים $N_1\ , N_2$ כך ש- $y_{N_1} \geq x_n$ לכל $n > N_2$. אבל $y_{N_1} < x_0$, כי y_n מונוטוניות עולה ל- x_0 אך כל האיברים שונים מ- x_0, ולכן מתקיים כי $x_0 = \lim x_n \leq y_{N_1} < x_0$ - סתירה. כלומר קיבלנו סדרה חדשה a_n מונוטונית עולה המתכנסת ל- x_0 (כי $x_n\ , y_n$ מהוות פירוק שלה לשתי תתי סדרות המתכנסות שתיהן ל- x_0), אבל ל- $f(a_n)$ יש שתי תתי-סדרות המתכנסות לשני גבולות שונים L, K, כלומר $f(a_n)$ לא מתכנסת – סתירה לנתון.

ב. הוכיחו / הפריכו: ל- f קיים גבול ב- x_0.

לא נכון, ד״נ: $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ בנקודה $x_0 = 0$.

ג. הוכיחו / הפריכו: ל- f קיימים גבולות חד-צדדיים ב- x_0.

נכון. נוכיח עבור גבול חד-צדדי משמאל, באופן דומה מתקיים עבור גבול חד-צדדי מימין. נניח בשלילה כי לא קיים הגבול החד״צ משמאל, אז מהיינה קיימות 2 סדרות $x_0 > x_n\ , y_n \to x_0$ כך ש- $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$. (יתכן כי אחת או שתי הסדרות לא מתכנסות בכלל). אם $f(x_n)\ , f(y_n)$ מתכנסות, אבל לגבולות שונים, אז נוציא לשתי הסדרות תתי-סדרות מונוטוניות עולות $x_{n_k}\ , y_{n_j}$, ואז מהנתון ומסעיף א׳, $\lim f(x_{n_k}) = \lim f\left(y_{n_j}\right)$, אבל מכיוון שאלו תתי-סדרות של סדרות מתכנסות, נקבל כי $\lim f(x_n) = \lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = \lim\ f(y_n)$, סתירה. אם אחת מהסדרות לא מתכנסת, נניח בה״כ $f(x_n)$, אז קיימות לה שתי ת״ס $f(x_{n_k}), f\left(x_{n_j}\right)$ המתכנסות לשני גבולות שונים, ושוב נוכל להוציא לכל אחת מהסדרות $x_{n_k}\ , x_{n_j}$ תת-סדרה מונטונית עולה ל- x_0, ולכן לסדרה המתקבלת מהפעלת f על כל אחת מתתי הסדרות האלו קיים אותו הגבול מסעיף א, ולכן גם $f(x_{n_k}), f\left(x_{n_j}\right)$ מתכנסות לאותו הגבול – סתירה. מכיוון שעברנו על כל המקרים האפשריים, קיבלנו סתירה ולכן בהכרח קיים הגבול החד״צ משמאל.

שאלה 2:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ב- 0 ומקיימת $f(x)=f(2x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי f קבועה.

יהי $x_0\in\mathbb{R}$. נראה כי $f(x_0)=f(0)$ וזה יראה כי f קבועה. נסתכל על הסדרה $x_n=\frac{x_0}{2^n}$. מהנתון, $f(x_n)=f(x_0)$ לכל n, לכן בפרט $\lim f(x_n)=f(x_0)$. בנוסף, $x_n\to 0$, ולכן מרציפות f ב- 0, $f(x_n)\to f(0)$. מיחידות הגבול, נקבל כי $f(x_0)=f(0)$.

ב. האם הטענה נכונה אם f אינה רציפה ב- 0? האם ניתן להסיק לגבי קיום גבולות חד״צ ב- 0 במקרה זה?

אם f אינה רציפה ב- 0, הטענה לא נכונה. ד״נ: $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$. במצב כזה לא ניתן לומר דבר על f - אפילו גבולות חד-צדדיים ב- 0 לא בהכרח קיימים לה: פונקציית דיריכלה מקיימת את הנתון (כי אם $x\in\mathbb{Q}$ אז גם $2x\in\mathbb{Q}$, וכך גם עבור אי-רציונלים), ואין לה אפילו גבולות חד-צדדיים ב- 0.

שאלה 3:

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{(1+x)^{74}-1}$.

נשתמש באי-שוויון ברנולי כדי לקבל: $(1+x)^{74}-1\geq 74x$ לכל $x>-1$, ובפרט לכל $x>0$, לכן:

$0\leq\frac{x^2}{(1+x)^{74}-1}\leq\frac{x^2}{74x}=\frac{x}{74}$ (הביטוי כולו חיובי כי המכנה חיובי עבור $x>0$). מסנדוויץ׳ נקבל כי הגבול הוא 0.

ב. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(ex^2)}{\ln(x^2)}\right)^{\ln|x|}$.

$\left(\frac{\ln(ex^2)}{\ln(x^2)}\right)^{\ln|x|}=\left(\frac{\ln e+\ln x^2}{\ln x^2}\right)^{\ln|x|}=\left(1+\frac{1}{\ln|x|^2}\right)^{\ln|x|}=\left(1+\frac{1}{2\ln|x|}\right)^{\ln|x|}\to e^{\frac{1}{2}}$. (המעבר האחרון מתקיים מכיוון ש- $\ln|x|\to-\infty$ כאשר $x\to 0$).

ג. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

נרשום: $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$. מתקיים $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$, כי

$(1+[x])^{\frac{1}{1+[x]}}\leq(1+x)^{\frac{1}{x}}\leq(2+[x])^{\frac{1}{[x]}}=\left((2+[x])^{\frac{1}{2+[x]}}\right)^{\frac{2+[x]}{[x]}}$, ושני הביטויים בקצוות מתכנסים ל- 1 כי $n^{\frac{1}{n}}\to 1$. מכיוון ש- ln פונקציה רציפה, נקבל כי $\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\to\ln(1)=0$.

ד. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{7}{x-4}}$.

נציב $t=x-4$, ונשים לב כי $4\neq x\to 4\Leftrightarrow 0\neq t\to 0$, לכן

ובדיקת גבולות חד״צ מראה כי הביטוי האחרון , $\lim_{x\to4}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{7}{x-4}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{t+4}{4}\right)^{\frac{7}{t}}=\lim_{t\to0}\left(\left(1+\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{7}$

מתכנס ל- $e^{\frac{7}{4}}$.

שאלה 4:

יהיו h , g פונקציות רציפות. הוכיחו כי הקבוצות $\{x\in\mathbb{R}\ |\ g(x)<h(x)\}$, $\{x\in\mathbb{R}\ |\ g(x)>h(x)\}$ הן פתוחות.

נראה כי $A=\{x\in\mathbb{R}\ |g(x)<h(x)\}$ פתוחה: יהי $x\in A$. מהגדרת A, $g(x)<h(x)$, לכן $g(x)-h(x)>0$. $g-h$ היא פונקציה רציפה כהפרש רציפות, ולכן מהגדרת הגבול עבור $\varepsilon=\frac{g(x)-h(x)}{2}>0$ נקבל שקיים $\delta>0$ כך ש- $g(t)-h(t)>\varepsilon>0$ לכל $t\in(x-\delta,x+\delta)$, כלומר $g(t)>h(t)$ לכל $t\in(x-\delta,x+\delta)$, כלומר $(x-\delta,x+\delta)\subset A$, ולכן A פתוחה.

שאלה 5:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת: $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(1)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=f(-1)$. הוכיחו כי f מקבלת מינימום ומקסימום.

נסתכל על הקרן $[1,\infty)$, ונראה כי הפונקציה מקבלת מקסימום על קרן זו: אם לכל $x\in[1,\infty)$ מתקיים $f(x)\le f(1)$ אז $f(1)$ הוא הערך המקסימלי בקרן, ונסמנו M_1. אם קיים x_0 בקרן כך ש- $f(x_0)>f(1)$, אז מהגדרת הגבול עבור $\varepsilon=\frac{f(x_0)-f(1)}{2}>0$ נקבל כי קיים $x_1>1$ כך שלכל $x>x_1$ מתקיים $f(x)<f(1)+\varepsilon<f(x_0)$, לכן $f(x_0)$ חסם של הפונקציה ב- $[x_1,\infty)$. ב- $[1,x_1]$ הפונקציה רציפה ולכן מויירשטראס מקבלת שם מקסימום M, ובהכרח $M_1\ge f(x_1)$, ולכן M_1 הוא המקסימום של הפונקציה בכל הקרן $[1,\infty)$. באותו אופן הפונקציה מקבלת מקסימום M_2 ב- $(-\infty,-1]$, ומרציפות מקבלת מקסימום M_3 ב- $[-1,1]$, ולכן $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$ הוא המקסימום של כל הפונקציה. באופן דומה הפונקציה מקבלת גם מינימום.

שאלה 6:

מיינו את נקודות אי-הרציפות של הפונקציה $f(x)=\left[\sqrt{|x|}\right]\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

מכיוון ש- $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ רציפה, הנקודות החשודות כאי-רציפות של f הן רק נקודות אי-הרציפות של $\left[\sqrt{|x|}\right]$, ואלו הן הנקודות בהן $\sqrt{|x|}\in\mathbb{Z}$, כלומר נקודות מהצורה $x_0=\pm m^2$ עבור $m\in\mathbb{Z}$ כלשהו. נשים לב שעבור m זוגי, $x_0=\pm m^2$ מתחלק ב-4, ולכן $\sin\left(\frac{\pi x_0}{2}\right)=0$, לכן בפרט $f(x_0)=0$, ולכן $\lim_{x\to x_0}f(x)=0=f(x_0)$, כלומר f רציפה לכל $x_0=\pm m^2$ עבור $m\in\mathbb{Z}$ זוגי. עבור $m=2k+1$ אי-זוגי נפריד לפי סימן x_0:

אם $x_0 = m^2 > 0$, אז $x_0 = 4k^2 + 4k + 1$, כלומר ל- x_0 שארית 1 בחלוקה ל- 4, ולכן $\sin\left(\frac{\pi x_0}{2}\right) = 1$. בדיקת גבולות חד״צ ב- x_0 מראה כי f לא רציפה שם, ואי-הרציפות היא מסוג קפיצה. באופן דומה עבור $x_0 = -m^2$ כאשר $m \in \mathbb{Z}$ אי-זוגי נקבל כי ל- x_0 שארית 3 בחלוקה ל- 4, לכן $\sin\left(\frac{\pi x_0}{2}\right) = -1$, ושוב בדיקת גבולות חד״צ מראה כי ל- f אי-רציפות מסוג קפיצה ב- x_0.

שאלה 7:

יהיו $f , g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. הוכיחו כי הפונקציות $\max\{f(x) , g(x)\}$, $\min\{f(x) , g(x)\}$ הן רציפות.

נראה עבור המקסימום, באופן דומה מתקיים עבור המינימום. נסמן $h(x) = max\ \{ f(x), g(x)\}$. יש להבחין כי הנקודות היחידות החשודות באי-רציפות הן אלו בהן $f(x) = g(x)$. תהי אם כן x_0 המקיימת $f(x_0) = g(x_0)$, ותהי סדרה $x_n \to x_0$. נסתכל על קבוצות האינדקסים $N_1 = \{n \mid f(x_n) \geq g(x_n)\}$, $N_2 = \{ n \mid f(x_n) < g(x_n)\}$. אם אחת מקבוצות האינדקסים האלו היא סופית, נניח בה״כ N_1 סופית, אז החל ממקום מסוים $f(x_n) < g(x_n)$, ולכן החל ממקום מסוים $h(x_n) = g(x_n)$, ולכן מרציפות g נקבל כי $\lim h(x_n) = \lim g(x_n) = g(x_0)$. בנוסף $h(x_0) = g(x_0)$, לכן $h(x_n) \to h(x_0)$. אם שתי קבוצות האינדקסים הן אינסופיות אז הן מגדירות שתי ת״ס של x_n, x_{n_k} ו- x_{n_j}, שבאופן דומה למקרה הקודם מקיימות $h(x_{n_k}) \to h(x_0)$, $h\left(x_{n_j}\right) \to h(x_0)$, ומכיוון ששתי סדרות אלו ממצות את איברי x_n נקבל כי $h(x_n) \to h(x_0)$. בסה״כ קיבלנו כי לכל $x_n \to x_0$ מתקיים $h(x_n) \to h(x_0)$, ולכן h רציפה.