פתרון תרגיל בית מס' 9

1. א. הע"ע הינם: 0,2 להם מתאימים הוקטורים העצמיים $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.ועבור $P = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ נקבל $P^tAP = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$.

ב. הע"ע הינם: $-1{,}3$ להם מתאימים הוקטורים העצמיים $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$.ועבור $P = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ נקבל $P^tAP = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$.

2. נבחר $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ זו אינה נורמלית (היא אינה לכסינה – היא כבר בצורת ז'ורדן וצורת ז'ורדן שלה יחידה). אך $A^2 = 0$ נורמלית.

3. נשים לב למבנה הבלוקים של $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & \multicolumn{2}{c}{B}\\0 & & \end{pmatrix}$ לכן נבחר מטריצה אוניטרית מלכסנת עבור B ... $P_1 = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$. ונגדיר $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \multicolumn{2}{c}{P_1}\\0 & & \end{pmatrix}$ נקבל $P^tAP = \begin{pmatrix}1 & * & *\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ אלכסונית.

4. א. A סימטרית ממשית (הרמיטית) ולכן קיימת P ממשית אורתגונלית עבורה $D = P^tAP$ אלכסונית עם ערכים עצמיים ממשיים. נניח $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \ddots & 0\\0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}$ אז בבירור עבור $D' = \begin{pmatrix}\sqrt[3]{\lambda_1} & 0 & 0\\0 & \ddots & 0\\0 & 0 & \sqrt[3]{\lambda_k}\end{pmatrix}$ נקבל $D'^3 = D$ ולכן $P\ \ D'^3P^t = D$ = $(P\ \ D'P^t)^3$. כיוון ש-P, D' ממשיות נקבל כי $B = P\ \ D'P^t$ ממשית סימטרית עבורה $B^3 = A$.

ב. A אי שלילית ולכן קיימת P אוניטרית עבורה $D = P^tAP$ אלכסונית עם ערכים עצמיים. אי שליליים. נניח $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \ddots & 0\\0 & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}$ ו $\lambda_i \geq 0$ אז עבור $D' = \begin{pmatrix}\sqrt[2]{\lambda_1} & 0 & 0\\0 & \ddots & 0\\0 & 0 & \sqrt[2]{\lambda_k}\end{pmatrix}$. נקבל כי D' אי שלילית עבורה $D'^2 = D$ ולכן $P\ \ D'^2P^t = D$ = $(P\ \ D'P^t)^2$. נקבל כי $B = P\ \ D'P^t$ אי שלילית עבורה $B^2 = A$.

5. T דומה אוניטרית לאלכסונית D . נניח P אוניטרית עבורה $P^*TP = D$. האלכסון של D מכיל את הערכים העצמיים של T נסמן אוסף זה ב$x_1, \dots, x_k$ $(x_i \neq x_j)$. יהי $l_i(x)$ פולינום לגרנז' המחזיר 0 על כל x_j עבור $j \neq i$ ו 1 על x_i. אז הפולינום $f(x) = \sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i l_i(x)$ מקבל בx_i את $\bar{x}_i$ ולכן $f(D) = D^*$. מכאן $f(T) = P^{-1^*}f(P^tTP)P^{-1} = PD^*P^* = (PDP^*)^* = T^*$.