פונקציית Γ

פונקציית Γ מוגדרת לכל $x>0$, ע"י $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. ע"י אינטגרציה בחלקים, נקבל את נוסחת הנסיגה

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt=\left(-t^x e^{-t}\right)|_{t=0}^{t\to\infty}-\int_0^\infty -xt^{x-1}e^{-t}dt=0-0+x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x)$$

נוכל לחשב ישירות את $\Gamma(1)$: $\Gamma(1)=\int_0^\infty t^0e^{-t}dt=-e^{-t}|_{t=0}^{t\to\infty}=1$, וע"י נוסחת הנסיגה, נקבל שאם x שלם, אז $\Gamma(x)=(x-1)!$.

ביטוי נוסף לפונקציית Γ, מתקבל ע"י שינוי משתנה $t=u^2$:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \left(u^2\right)^{x-1}e^{-u^2}\cdot 2udu=2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du$$

פונקציית B

פונקציית B מוגדרת לכל $x,y>0$, ע"י $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ (אם x,y שלמים, אז זה אינטגרל של פולינום). כדי לעבור להצגה טריגונומטרית, נציב $t=\sin^2\theta$ (ואז $1-t=\cos^2\theta$), ונקבל

$$B(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{x-1}\left(\cos^2\theta\right)^{y-1}\cdot 2\sin\theta\cos\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta$$

במקום המקדם 2, נוכל להכפיל את תחום האינטגרציה ל-$[0,\pi]$ (תוך שימוש בזהויות $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ ו-$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$), ונקבל $B(x,y)=\int_0^\pi \sin^{2x-1}\theta\left|\cos\theta\right|^{2y-1}d\theta$.

הקשר בין הפונקציות

עבור $x,y>0$, נחשב (ע"י הביטוי השני) את $\Gamma(x)\Gamma(y)$:

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv=4\int_0^\infty du\int_0^\infty dv u^{2x-1}v^{2y-1}e^{-u^2-v^2}$$

נחליף לקואורדינטות פולריות (התחום הוא הרביע הראשון, ולכן $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$):

$$\ldots=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty dr\left(r\sin\theta\right)^{2x-1}\left(r\cos\theta\right)^{2y-1}e^{-r^2}\cdot r=\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta\right]\left[2\int_0^\infty r^{2x+2y-1}e^{-r^2}dr\right]=$$
$$=B(x,y)\Gamma(x+y)$$

ולכן נקבל $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

באמצעות הנוסחה הזו, נקבל גם $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)$. מכיוון ש-$\Gamma(1)=1$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^\pi\sin^0\theta\left|\cos\theta\right|^0d\theta=\pi$ ו-$\Gamma(x)>0$, נקבל $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.