לוגיקה מתמטית - סיכום אביב 2016

24 בספטמבר 2016

תחשיב הפסוקים

<u>הגדרה:</u> **עומק של נוסחא** מוגדר בצורה אינדוקטיבית

1. אם α נוסחא שהיא פסוק אטומי אחד אז $depth(\alpha)=0$.
2. אם α נוסחא מעומק k אז $\sim\alpha$ היא מעומק $k+1$.
3. אם α נוסחא מעומק k ו־βנוסחא מעומק l אז $depth(\alpha\_\beta)=max(k,l)+1$.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי **השמה** M **מקיימת נוסחא** α ונרשום $M\models\alpha$ אם :

1. אם α מעומק 0, כלומר $\alpha=p$ אז $M\models\alpha$ אמ"מ $M(p)=T$.
2. אם $\alpha=\sim\beta$ מגדירים $M\models\alpha \iff M\not\models\beta$.
3. אם $\alpha=\beta\wedge\gamma$ מגדירים $M\models\alpha \iff M\models\beta$ וגם $M\models\gamma$.
   אם $\alpha=\beta\vee\gamma$ מגדירים $M\models\alpha \iff M\models\beta$ או $M\models\gamma$.
   אם $\alpha=\beta\to\gamma$ מגדירים $M\models\alpha \iff M\models\gamma$ או $M\not\models\beta$.
   אם $\alpha=\beta\leftrightarrow\gamma$ מגדירים $M\models\alpha \iff M\models\beta\to\gamma$ וגם $M\models\gamma\to\beta \iff M(\gamma)=M(\beta)$.

<u>הגדרה:</u> אם $M\models\alpha$ נגדיר $M(\alpha)=T$ אחרת $M(\alpha)=F$.
<u>הגדרה:</u> נוסחא α נקראת **טאוטולוגיה** אם $M\models\alpha$ לכל השמה. אם α היא טאוטולוגיה נסמן $\models\alpha$
<u>הגדרה:</u> α ו־ β נקראות **שקולות** אם לכל M מתקיים $M\models\alpha \iff M\models\beta$.
<u>משפט:</u> αו־ β שקולות $\iff$ $\alpha\leftrightarrow\beta$ היא טאוטולוגיה.
<u>הגדרה:</u> קבוצת קשרים K נקראת **מספקת/שלמה** אם לכל נוסחא αיש נוסחא β שמשתמשת רק בקשרים מ־ K ושקולה ל־ α.
<u>משפט:</u> הקבוצות $\{\sim,\vee,\wedge\}$, $\{\sim,\vee\}$, $\{\sim,\wedge\}$, $\{\sim,\to\}$, $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$הן מספקות.
$\alpha\uparrow\beta\equiv\sim\alpha\vee\sim\beta$
<u>$\alpha\downarrow\beta\equiv\sim\alpha\wedge\sim\beta$</u>
<u>משפט:</u> לכל נוסחא α יש נוסחא שקולה בצורת CNF (מכפלת סכומים) ונוסחא שקולה בצורת DNF (סכום מכפלות).
<u>משפט:</u> $De-Morgn$:

1. $\models[\sim(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\sim\alpha\vee\sim\beta]$
2. $\models[\sim(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow\sim\alpha\wedge\sim\beta]$

נביעה לוגית

<u>הגדרה:</u> תהא $\sum$ קבוצת נוסחאות ו־ α נוסחא. נסמן $\sum\models\alpha$ ($\sum$ גוררת לוגית את α או α נובעת לוגית מ־ $\sum$), אם לכל השמה M ש־ $M\models\sum$ ($M\models\sigma$ לכל $\sigma\in\sum$) מתקיים $M\models\alpha$.
<u>טענה:</u> $\alpha\models\beta \iff \models\alpha\to\beta$.

קבוצות אינסופיות של נוסחאות

<u>משפט הקומפקטיות של תחשיב הפסוקים:</u> קבוצת נוסחאות אינסופית $\sum$ היא ספיקה $\iff$ כל תת קבוצה סופית של $\sum$ היא ספיקה.
<u>הגדרה:</u> במרחב טופולוגי יש קבוצות סגורות ופתוחות. מרחב X נקרא **מרחב קומפקטי** אם לכל משפחה A_iשל קבוצות פתוחות ש $\cup_{i\in I}A_i=X$ יש $J\subseteq I$ סופית כך ש־ $\cup_{j\in J}A_j=X$. אם נעבור ל־ A_i^c, נתון $\cup A_i=X$ לכן לפי דה מורגן $\cap A_i^c=X^c=\emptyset$.
<u>הגדרה שקולה:</u> לכל משפחה $i\in I$,B_i של קבוצות סגורות, אם $\cap B_i=\emptyset$ אז יש $J\subseteq I$ סופית כך ש־ $\cap_{j\in J}B_j=\emptyset$ (תכונת החיתוך הסופי).
<u>תזכורת:</u> A סגורה אם לכל $L\leftarrow a_i\in A$ מתקיים $L\in A$.
<u>משפט טיכונוף:</u> מכפלה של מרחבים קומפקטים היא קומפקטית.

<u>הכללה למשפט הקומפקטיות:</u> $\sum\models\alpha \iff$ קיימת $\sum'$ סופית כך ש־ $\sum'\models\alpha$.
<u>משפט ארדש־דה ברוין:</u> גרף G הוא k צביע $\iff$ כל תת קבוצה סופית של קודקודים היא k צביעה.

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים

1. כלל היסק MP - $Modus\ Ponens$.
2. אקסיומות :

$$\begin{array}{lc} (1) & \alpha\to(\beta\to\alpha) \\ (2) & (\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma)) \\ (3) & (\sim\beta\to\sim\alpha)\to((\sim\beta\to\alpha)\to\beta) \end{array}$$

<u>הגדרה:</u> תהא $\sum$ קבוצת נוסחאות (=הנחות). הוכחה של נוסחא α מ־ $\sum$ היא סידרה $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n=\alpha$ כשלכל $i\le n$ α_iהיא או אקסיומה או הנחה מתוך $\sum$ או מסקנה מ־ α_iקודמים עם MP. כאשר α_i מסקנה באמצעות MP פירושו שקיימים $j,k<i$ כך ש־ α_j ו־ $\alpha_k=\alpha_j\to\alpha_i$. אם קיימת הוכחה כנ"ל נסמן $\sum\vdash\alpha$.
<u>משפט הנאותות:</u> אם $\sum\vdash\alpha$ אז $\sum\models\alpha$.
<u>טענה:</u> $\vdash\alpha\to\alpha$.
<u>טענה:</u> $\alpha\to\beta,\beta\to\gamma\vdash\alpha\to\gamma$.
<u>טענה:</u> $\vdash(\sim\alpha\to\alpha)\to\alpha$
<u>טענה:</u> $\alpha\to(\beta\to\gamma)\vdash\beta\to(\alpha\to\gamma)$.
<u>משפט הדדוקציה של $Herbrand$:</u> $\sum\vdash\alpha\to\beta \iff \sum,\alpha\vdash\beta$.
<u>טענה:</u> $\vdash(\sim\beta\to\sim\alpha)\to(\alpha\to\beta)$.
<u>טענה:</u> $\alpha\to(\beta\to\gamma),\beta\vdash\alpha\to\gamma$.
<u>טענה:</u> $\vdash\sim\sim\alpha\to\alpha$.
<u>טענה:</u> $\vdash\alpha\to\sim\sim\alpha$.

משפט השלמות

<u>משפט השלמות:</u> $\sum\models\alpha \iff \sum\vdash\alpha$.
<u>משפט:</u> אם α טאוטולוגיה אז $\vdash\alpha \iff \models\alpha$.
<u>טענה:</u> $\sum,\alpha\vdash\beta\Rightarrow\sum,\sim\beta\vdash\sim\alpha$
<u>למה:</u> אם $\sum,\alpha\vdash\beta$ וגם $\sum,\sim\alpha\vdash\beta$ אז $\sum\vdash\beta$.
<u>למה:</u> כל שורה בכל לוח אמת אפשר להוכיח. או בניסוח מדוייק: תהא α נוסחא במשתנים $p_1,...,p_k$ ותהא M השמה אז נגדיר :

$$p_i'=\begin{cases}p_i & M(p_i)=T\\ \sim p_i & M(p_i)=F\end{cases}$$

ותהא:

$$\alpha'=\begin{cases}\alpha & M\models\alpha\\ \sim\alpha & M\not\models\alpha\end{cases}$$

אז מתקיים : $p_1',p_2',...,p_k'\vdash\alpha'$.
<u>מסקנה:</u> $\sum\models\alpha \iff$ יש תת קבוצה סופית $\sum'$ של $\sum$ כך ש־ $\sum'\models\alpha$.
<u>למה:</u> אם $M\models\sum$ השמה ו־ $\sum\vdash\alpha$ ($M(\sigma)=T,\ \forall\sigma\in\sum$) אז $M\models\alpha$.
<u>הגדרה:</u> $\sum$ היא **בעלת סתירה** אם קיימת α ש־ $\sum\vdash\alpha,\sim\alpha$. (אם $\sum$ בעלת סתירה אז היא לא ספיקה).
<u>הגדרה:</u> תורה חסרת סתירה נקראת **עיקבית**.
<u>משפט:</u> $\sum$ עקבית $\iff$ $\sum$ ספיקה.
<u>למה:</u> אם $\sum\not\vdash\alpha$ אז $\sum,\sim\alpha$ עקבית.
<u>מסקנה:</u> אם $\sum,\alpha$ לא עקבית וגם $\sum,\sim\alpha$ לא עקבית אז $\sum$ לא עקבית.
<u>הגדרה:</u> אם $\sum$ תורה ו־ M השמה ש־ $M\models\sum$ נאמר כי M **מודל** של $\sum$.
<u>משפט:</u> לתורה עקבית יש מודל (גם ההפך נכון).
<u>למה:</u> $\sum$ עקבית $\iff$ כל $\sum'\subseteq\sum$ סופית היא עקבית.
<u>מסקנה:</u> כל תורה עקבית מוכלת בתורה עקבית מקסימלית.

תחשיב היחסים (תחשיב הכמתים)

תהא L שפה, מבנה M הוא קבוצה W^M והתאמה: לכל קבוע אישי c מתאימים ב־ M איבר c^M, לכל סימן יחס $R(x,y)$ מתאימים סימן יחס $R^M(x,y)$. לכל סימן פונ' $f(x,y,z)$ מתאימה פונ' $f^M(x,y,z)$.
<u>הגדרה:</u> **שם עצם** (זהו איבר בשפה) הוא תוצאה של הצבת משתנים וקבועים בסימני פונ'. ההגדרה היא אינדוקטיבית :

1. כל קבוע הוא שם עצם.
2. כל משתנה אישי הוא שם עצם.
3. אם $t_1,...,t_k$ הם שמות עצם ו־ $f(x_1,...,x_k)$ סימן פונ' אז $f(t_1,...,t_k)$ הוא שם עצם.

<u>הגדרה:</u> **משתנה חופשי** = משתנה אישי (x,y,z וכו'...).
<u>הגדרה:</u> **שם עצם סגור** הוא שם עצם שאין בו משתנים חופשיים.
<u>הגדרה אינדוקטיבית לנוסחאות:</u>

1. בסיס: $R(t_1,...,t_k)$ כש־R סימן יחס k מקומי ו־ t_i שמות עצם זו היא נוסחא אטומית.
2. בהינתן נוסחאות α,β אז $\sim\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\to\beta$... הן נוסחאות.
3. אם α נוסחא אז $\forall x\alpha$ ו־ $\exists x\alpha$ הם נוסחאות.

<u>הגדרה:</u> תהא L שפה ויהיו M,N מבנים שמתאימים לה. ההעתקה $\phi: M\to N$ נקראת **איזומורפיזם** אם:

1. ϕ חח"ע ועל.
2. לכל קבוע c בשפה $\phi(c^M)=c^N$.
3. לכל סימן יחס $R(x,y)$ ולכן $a,b\in W^M$: $(a,b)\in R^M \iff (\phi(a),\phi(b))\in R^N$
4. לכל סימן פונ' $f(x)$: $f^M(x)=b \iff f^N(\phi(a))=\phi(b)$.

הסמנטיקה של תחשיב היחסים

<u>הגדרה:</u> תהא L שפה ו־ M מבנה. אם αנוסחא אטומית : $R(c,d)$ אומרים ש־ α מתקיימת ב־ M ומסמנים $M\models\alpha$ אם $(c^M,d^M)\in R^M$.
<u>הגדרה:</u> **השמה** ־ פונקציה $W^M\leftarrow$משתנים אישיים: S נגדיר לכל השמה S מה פירוש $M\models_S\alpha$: למשל $M\models_S R(x,y)$ פירושו $(s(x),s(y))\in R^M$.
נאמר שבשפה יש סימני פונ' $f(x,y)$, $g(z)$, קבוע c וסימן יחס $T(x,y,z)$ אז :

$$M\models_S T(f(c,y),g(z),g(c)) \iff (f^M(c^M,s(y)),g^M(s(z)),g^M(c^M))\in T^M$$

מרחיבים את ההשמה S לפוקנציה $W^M\leftarrow$שמות עצם: S^*:

1. לקבוע c $S^*(c)=c^M$.
2. למשתנה אישי x $S^*(x)=S(x)$.
3. אם $t=f(t_1,...,t_m)$ (כש־ $S^*(t_i)$ מוגדר כבר) אז $S^*(t)=f^M(S^*(t_1),...,S^*(t_m))$.

<u>הגדרה:</u> למבנה M נגדיר באינדוקציה על העומק של α מה פירוש $M\models_S\alpha$ לכל S.
בסיס: $\alpha=R(t_1,...,t_m)$ מגדירים $M\models_S\alpha$ אם $R^M(S*(t_1),...,S^*(t_m))$ שפירושו $(S*(t_1),...,S^*(t_m))\in R^M$.
צעד: נניח ש־ $\alpha=\sim\beta$ אז נגדיר $M\models_S\alpha$ אם $M\not\models_S\beta$.
נניח ש־ $\alpha=\beta\wedge\gamma$ אז נגדיר $M\models_S\alpha$ אם $M\models_S\beta$ וגם $M\models_S\gamma$.
נניח ש־ $\alpha=\beta\to\gamma$ אז נגדיר $M\models_S\alpha$ אם $M\models_S\gamma$ או $M\not\models_S\beta$.
נניח ש־ $\alpha=\forall x\beta$ אז נגדיר $M\models_S\alpha$ אם לכל השמה S' שזהה ל־S פרט אולי ל־x ($S'(z)=S(z)$ לכל $z\neq x$) מתקיים $M\models_S\beta$.
נניח ש־ $\alpha=\exists x\beta$ אז נגדיר $M\models_S\alpha$ אם קיימת S' ש־ $S\equiv S'$ פרט אולי ל־x ו־ $M\models_S\beta$.
בסה"כ $M\models\alpha$ אם $M\models_S\alpha$ לכל השמה S.
<u>הגדרה:</u> **מופעים חופשיים וקשורים של משתנים.** ב־ $p(x)$ x הוא חופשי וב־ $\forall xR(x,y)$ x הוא קשור.
<u>הגדרה:</u> נוסחא שבה אין משתנים חופשיים נקראת **פסוק**.
<u>סימון:</u> $Fv(\alpha)$ ־ אוסף המשתנים החופשיים ב־α. α פסוק אם $Fv(\alpha)=\emptyset$.
<u>סימון:</u> תהא $\sum$ קבוצת נוסחאות. כותבים $M\models\sum$ אם $M\models\sigma$ לכל $\sigma\in\sum$ וכותבים $\sum\models\alpha$ ($\sum$ גוררת את α) אם לכל מבנה M ש־ $M\models\sum$ מתקיים $M\models\alpha$. אם $\emptyset\models\alpha$ (כלומר, מתקיים בכל מבנה) נאמר כי α אמיתית לוגית.
<u>משפט:</u> אם α פסוק אז לכל מבנה M ולכל 2 השמות S_1,S_2מתקיים $M\models_{S_1}\alpha \iff M\models_{S_2}\alpha$ (הנכונות של פסוק לא תלויה בהשמה).
<u>משפט:</u> אם α פסוק אז לכל מבנה M מתקיים $M\models\alpha$ או $M\not\models\alpha$.
<u>משפט:</u> הקיום של α בהשמה S תלוי רק בערכי S על המשתנים החופשיים של α. כלומר, יהיו S_1,S_2 השמות ש־ $S_1|_{Fv(\alpha)}=S_2|_{Fv(\alpha)}$ אז $M\models_{S_1}\alpha \iff M\models_{S_2}\alpha$.
<u>מסקנה:</u> אם αפסוק אז אם $\sum,\alpha\models\beta$ אז $\sum\models\alpha\to\beta$.
<u>טענה:</u> אם $x\notin Fv(\alpha)$ אז $\models\forall x(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\forall x\beta)$.

מערכת הוכחה לתחשיב היחסים

הגדרה: $\exists x\alpha :=\sim \forall x \sim \alpha$ (נובע מדה־מורגן).
אקסיומות:

1. 3 אקסיומות מתחשיב הפסוקים.
2. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$ בתנאי ש־ $x \notin Fv(\alpha)$.
3. $\forall x\alpha(x) \to \alpha(t)$ לכל שם עצם t שהוא הצבה כשרה.

הגדרה: תהא $\alpha(x)$ נוסחא ו־ t שם עצם אז הצבת t ב־ αבמקום x **לא כשרה** אם קיים ב־t משתנה y ויש מופע של x שמופיע חופשי תחת כמת $\forall y$ או $\exists y$.
שני כללי היסק:

1. MP.
2. GRN: $\alpha \to \forall x\alpha$.

טענה: $\forall x\alpha \vdash \alpha$.
טענה: $\forall x\forall y\alpha \vdash \forall y\forall x\alpha$.
משפט הדדוקציה: אם $\sum, \alpha \vdash \beta$ אז $\sum \vdash \alpha \to \beta$ בתנאי שבהוכחה $\sum, \alpha \vdash \beta$ לא מפעילים GEN על $x \in Fv(\alpha)$. זה נכון במיוחד אם α הוא פסוק.
טענה: אם α פסוק ו־ $\sum, \sim \alpha \vdash \beta, \sim \beta$ אז $\sum \vdash \alpha$.
טענה: $\sum, \alpha \vdash \beta, \sim \beta \Rightarrow \sum \vdash\sim \alpha$.
טענה: $\vdash \forall xP(x) \to \exists xP(x)$.
טענה: $\vdash \exists x(P(x) \to \forall xP(x))$.
סימן השוויון: $=^M$הוא תמיד הזהות.
אקסיומות השוויון:

1. $\forall x\, x = x$
2. $x = y \to (\alpha(x, x) \to \alpha(x, y))$ לכל נוסחא $\alpha(x, x)$. כאשר $\alpha(x, y)$ מתקבל מ $\alpha(x, x)$ ע"י הצבת y במקום x. זו הצבה כשרה בחלק מין ה־xים .

הגדרה: תורה $\sum$ נקראת **שלמה** אם לכל פסוק α מתקיים $\sum \vdash \alpha$ או $\sum \vdash\sim \alpha$.
הגדרה: $Th(M) = \{\alpha : \alpha, M \models \alpha$ פסוק$\}$.
טענה: $Th(M)$ שלמה.
הערה: אם $\sum$בעלת סתירה אז $\sum$ שלמה כי $\sum \vdash \beta$ לכל β.
משפט: אם $\sum$ מקסימלית חסרת סתירה אז $\sum$שלמה. (ההוכחה מבוססת על כך שלכל פסוק α או ש־ $\alpha \in \sum$ או ש־ $\sim \alpha \in \sum$).
הערה: $\sum$ מקסימלית חסרת סתירה $\iff$ $\sum = Th(M)$ עבור מבנה כלשהו M.

משפט השלמות של גדל

משפט: אם $\sum \models \alpha$ אז $\sum \vdash \alpha$ (כל דבר נכון אפשר להוכיח). זה שקול לכך שאם תורה Π היא חסרת סתירה אז יש לה מודל.
ניסוח חזק יותר למשפט השלמות: תהא $\sum$ תורה בשפה עם k סימנים $(k \geq \aleph_0)$ אם $\sum$ חסרת סתירה אז יש לה מודל מעוצמה $\leq k$.
הגדרה: **מודל ל־** Π הוא מבנה M כך ש־ $M \models \Pi$.
טענה: לכל תורה עקבית יש מודל $\Leftarrow$ משפט השלמות.
משפט: לתורה חסרת סתירה יש מודל.
רעיון להוכחת המשפט:
נרצה לבנות מבנה $M \models \sum$.
שלב א' : מוסיפים ∞ קבועים b_i־ים, עדים לנוסחאות $\exists$ ומוסיפים נוחסאות $(\sim \forall x\alpha_k(x) \to\sim \alpha_k(b_{i_k}))$.
שלב ב' : תהא $\sum'$ התורה שמתקבלת, מראים שהיא חסרת סתירה.
שלב ג' : מגדירים את המבנה M(W^M־ שמות העצם הסגורים, $f^M(g(c, d)) = f(g(c, d))$, $c^M = c$ (עבור c קבוע).
שלב ד' : לוקחים $\Pi \supseteq \sum'$ חסרת סתירה מקסימלית (הקיום מובטח מהלמה של צורן).
שלב ה' : לכל סימן יחס $R(x_1, ..., x_m)$ ושמות עצם סגורים $t_1, t_2, ..., t_m$מגדירים $(t_1, ..., t_m) \in R^M$ אם $\Pi \vdash R(t_1, ..., t_m)$.
שלב ו' : מראים באינדוקציה על העומק של α ש־ $\alpha \in \Pi \iff M \models \alpha$ לכל פסוק α.
משפט השלמות לתורות עם שוויון: $x = y$, דרישה $=^M$ הוא הזהות. להוכחה הנ"ל של חנקין נוסיף הגדרה $\bar{t}$: מחלקת השקילות של t ביחס $\cong$. $\bar{M}$ הוא מבנה בו $=^{\bar{M}}$ הוא הזהות ו־ $W^{\bar{M}}$ הוא מחלקות השקילות.
משפט: אם ל־ $\sum$ יש מודלים סופיים לא חסומים בגודלם, אז ל־ $\sum$ יש מודל אינסופי.

איך להוכיח שלמות בעזרת משפט השלמות

ניזכר כי תורה חסרת סתירה $\sum$ נקראת **שלמה** אם לכל פסוק α מתקיים $\sum \vdash \alpha$ או $\sum \vdash \sim \alpha$, ו-$\sum$ נקראת **מושלמת** אם לכל פסוק α $\alpha \in \sum$ או $\sim \alpha \in \sum$.

משפט: תהא $\sum$ חסרת סתירה אז התנאים הבאים שקולים

1. $\sum$ מקסימלית חסרת סתירה.
2. $\sum$ מושלמת.
3. קיים מבנה M ש- $Th(M) = \sum$.

משפט: אם $\sum$ חסרת סתירה בשפה מעוצמה k אז :

1. ל- $\sum$ יש מודל מעוצמה $\leq k$.
2. אם ל- $\sum$ יש מודל אינסופי, אז לכל $\lambda \geq k$ יש ל- $\sum$ מודל מעוצמה λ.

הגדרה: שני יחסים בין מבנים :

1. **שקולים אלמנטרית** : מבנים M ו- N נקראים שקולים אלמנטרית אם $Th(M) = Th(N)$.
2. M ו- N הם **איזומורפים** ($M \cong N$) אם יש $\phi : W^M \to W^N$ חח"ע ועל שמקיימת :
   (א) לכל קבוע c : $\phi(c^M) = c^N$.
   (ב) לכל סימן פונקציה $g(x)$: $g^M(\phi(a)) = \phi(g^N(a))$.
   (ג) לכל סימן יחס $R(x, y)$ מתקיים $(a, b) \in R^M \iff (\phi(a), \phi(b)) \in R^N$.

מתקיים כי $M \cong N \Leftarrow M, N$ שקולים אלמנטרית.
דוג': שפה : $P(x)$ ואין $=$. $\sum = \{\forall x P(x)\}$. זוהי תורה שלמה, מראים שלכל 2 מבנים M, N מתקיים $Th(M) = Th(N)$, כלומר, לכל נוסחא α $N \models \alpha \iff M \models \alpha$. באינדוקציה על העומק של α (בדרך מוכיחים כי $M \models_{s_2} \alpha \iff M \models_{s_1} \alpha$ לכל 2 השמות s_1, s_2).

קטגוריות

הגדרה: תורה $\sum$ נקראת **קטגורית** אם כל המודלים שלה איזומורפים.
טענה: אם $\sum$ קטגורית אז לכל המודלים יש אותה עוצמה, והיא סופית.
משפט: במקרה הסופי אפשר לבטא כל דבר בעזרת נוסחאות. ניסוח מתמטי : אם N, M סופיים ו- $Th(M) = Th(N)$ אז $M \cong N$. כלומר, אם $\sum$ שלמה ויש לה מודל סופי אז היא קטגורית.
משפט: תורה עקבית $\sum$ היא שלמה $\iff$ לכל שני מודלים שלה M, N $Th(M) = Th(N)$ (M, N שקולות אלמנטרית).
הגדרה: תהא k עוצמה אינסופית, תורה $\sum$ נקראת **k -קטגורית** אם לכל $N, M \models \sum$ מעוצמה k מתקיים $M \cong N$.
טענה: אם $\sum$ היא k קטגורית וכל מודל של $\sum$ הוא אינסופי אז $\sum$ שלמה.
משפט: תורת הסדר המלא הצפוף בלי קצוות היא $\aleph_0$ קטגורית.
מסקנה: תורת הסדר המלא הצפוף היא שלמה.
מסקנה: תורת הסדר המלא הצפוף לא $\aleph$ קטגורית (כי $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R} \backslash \{0\}$).

תורת המספרים ותורת גדל

תורת המספרים

שפה : $\bar{0},\ s(x),\ x+y,\ \cdot,\ E,\ <,\ =$.
סימון: $\bar{3} = s(s(s(\bar{0})))$ בשפה $\bar{k} = s^k(\bar{0})$.
$\sum = Th(\mathbb{N})$ - תורת המספרים.
טענה: $\sum = Th(\mathbb{N}) \cup \{c > \bar{0}, c > \bar{1}, c > \bar{2}, ...\}$ חסרת סתירה.
עובדה: אם $M = Th(\mathbb{N})$ אז $\mathbb{N} \subseteq M$, כלומר, יש $\varphi : \mathbb{N} \to M$ חח"ע השומרת על יחסים ופעולות.
כעת ל- $\sum$ יש מודל M אז M מכיל עותק של הטבעיים ו- $c^M \in W^M$ כך ש- $c^M > k$ לכל k.

תורת דגל

<u>הגדרה:</u> תורה $\sum$ נקראת **רקורסיבית** אם יש אלגוריתם שיודע להחליט לכל נוסחא α שנותנים לו אם $\alpha \in \sum$ או לא.
<u>הגדרה:</u> **כריעות** ־ תורה $\sum$ נקראת כריעה אם $cons(\sum)$ רקורסיבית. כלומר, יש אלגוריתם שבהינתן נוסחא α מחליט אם $\sum \vdash \alpha$ או לא.
<u>משפט גדל:</u> אם $\sum \subseteq Th(\mathbb{N})$ מערכת אקסיומות רקורסיבית לתורת המספרים אז $\sum$ לא שלמה.
<u>מסקנה:</u> $Th(\mathbb{N})$ לא רקורסיבית.
<u>אקסיומות פיאנו PA:</u>

$$\forall x \ \sim (x < x)$$
$$\forall x \forall y \ (x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)$$
$$\forall x \forall y \forall z \ ((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow (x < z)$$
$$s(a + b) = a + s(b) = s(a) + b$$
$$\forall x \ (\bar{0} + x = x)$$
$$\forall a \forall b \ a \cdot s(b) = a \cdot b + a$$
$$\phi(\bar{0}) \wedge (\forall x \, (\forall y (y < x) \rightarrow \phi(y)) \rightarrow \phi(x))$$

כאשר האחרון הוא אקסיומת האינדוקציה לכל נוסחא $\phi(x)$ (עם משתנה חופשי אחד). מערכת אקסיומות פיאנו היא רקורסיבית.
<u>משפט אי השלמות:</u> PA לא שלמה. או באופן כללי יותר : כל מערכת אקסיומות רקורסיבית לתורת המספרים אינה שלמה.
(הרעיון להוכחה הוא למצוא פסוק γ ש־ $PA \not\vdash \gamma$ וגם $PA \not\vdash \sim\gamma$, בלי הגבלת הכלליות $\mathbb{N} \models \gamma$, כלומר $cons(PA) \subsetneq Th(\mathbb{N})$.
<u>מספור גדל:</u> תרגום של נוסחאות למספרים.

1. ממספרים את סימני השפה, לדוג'

$\forall$	(	$\bar{0}$	)	s	$\sim$	$<$	$\rightarrow$	$+$	$=$	$\cdot$	x_1	E	$*$		x_2	...
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...

אז אם $\alpha = \forall x(x = x)$ מספר גדל יהיה :

$$g(\alpha) = 2^0 \cdot 3^{11} \cdot 5^1 \cdot 7^{11} \cdot 11^9 \cdot 13^{11} \cdot 17^3$$

2. מתאימים גם מספר גדל להוכחות.

<u>הגדרה:</u> קבוצת מספרים A נקראת **רקורסיבית** אם יש אלגוריתם שבודק לכל מספר אם הוא ב־ A. דוגמאות : $\mathbb{N}$, זוגיים, ראשוניים.
דוגמא קלאסית לקבוצה לא רקורסיבית : $\{g(\alpha) : \alpha \in Th(\mathbb{N})\}$.
<u>הגדרה:</u> קבוצת נוסחאות $\sum$ נקראת **רקורסיבית** אם $\{g(\sigma) : \sigma \in \sum\}$ היא רקורסיבית.
<u>הגדרה:</u> קבוצת מספרים A היא **גדירה** אם קיימת נוסחא $\alpha(x)$ שלכל $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \models \alpha(\bar{n}) \iff n \in A$.
<u>הגדרה:</u> קבוצת נוסחאות $\sum$ היא **גדירה** אם $\{g(\sigma) : \sigma \in \sum\}$ היא גדירה.
<u>משפט טרסקי:</u> $Th(\mathbb{N})$ לא גדירה.
<u>טענות:</u>

1. שלמות + רקורסיביות $\Leftarrow$ כריעות. כלומר, אם $\sum$ שלמה ורקורסיבית אז יש אלגוריתם שבודק יכיחות מ־ $\sum$.
2. PA לא כריעה, ולכן לא שלמה.
3. רקורסיביות $\Leftarrow$ גדירות (אפשר להגדיר בנוסחא את תוכנת המחשב שבודקת שייכות ל־ $\sum$).
4. כריעות $\not\Leftarrow$ רקורסיביות.
5. גדירות $\not\Leftarrow$ רקורסיביות.
6. $\sum$ רקורסיבית $\not\Leftarrow$ $cons(\sum)$ רקורסיבית. (לדוג' PA).
7. $\sum$ גדירה $\Leftarrow$ $cons(\sum)$ גדירה. (יש נוסחא $\Pi(x, y)$: מגדירה y הוא מספר גדל של הוכחה לנוסחא ש־α $g(\alpha) = x$).
8. אפשר לכתוב נוסחא γ שמבטאת "אני לא יכיחה" כלומר, $PA \vdash \gamma \iff \mathbb{N} \not\models \gamma$*. אם γ לא נכונה $\mathbb{N} \not\models \gamma$ אז $PA \vdash \gamma$ ואז $\mathbb{N} \models \gamma$ (נאותות). מסקנה־ $\mathbb{N} \models \gamma$ ולכן מ־* $PA \not\vdash \gamma$.

<u>משפטי גדל:</u>

1. $Th(\mathbb{N})$ לא רקורסיבית.

2. PA לא שלמה. כל קבוצת אקסיומות רקורסיבית היא לא שלמה.

3. PA לא כריעה ($cons(PA)$ לא רקורסיבית).
כל תורה רקורסיבית אינה כריעה, לדוג' $\emptyset$ לא כריעה.

4. $PA \nvdash \tau$ כאשר τ אומר PA עקבית.

טענה: אם קבוצת נוסחאות $\sum$ היא גדירה, כלומר $B = \{g(\alpha) : \alpha \in \sum\}$ גדירה, כלומר יש נוסחא $\beta(x)$ ש־ $n \in B \iff \mathbb{N} \models \beta(\bar{n})$. אז $C = \{\alpha : \sum \vdash \alpha\}$ גדירה. כלומר, יש נוסחא $\Pi(x)$ ש־ $n \in C \iff \mathbb{N} \models \Pi(\bar{n})$, כלומר, α יכיחה מ־ $\sum \iff \mathbb{N} \models \Pi(g(\bar{\alpha}))$.
הגדרה: **פונקציה שניתנת לחישוב עפ"י גדל**. נגדיר משפחה של פונקציות שנקראות "רקורסיביות" כאשר ההגדרה היא רקורסיבית.
תהא R משפחת הפונקציות המינימלית שמקיימת את התנאים הבאים:

1. $0 \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n) \in R$.

2. $f(x) = x + 1 \in R$.

3. $x_i \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n) \in R$ ־ היטל על קורדינטה i.

4. הצבה: $h_1(x_1, x_2, ..., x_m), ..., h_n(x_1, x_2, ..., x_m) \in R$ ו־ $f(y_1, ..., y_n) \in R$ אז $f(h_1(x_1, x_2, ..., x_m), ..., h_n(x_1, x_2, ..., x_m)) \in R$.

5. הגדרה רקורסיבית: אם $h(z_1, ..., z_{n+2}), g(x_1, ..., x_n) \in R$ אז הפונקציה היחידה המוגדרת ע"י

$$f(x_1, ..., x_n, y + 1) = h(x_1, ..., x_n, y, f(x_1, ..., x_n, y))$$
$$f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n)$$

6. מינימום של קבוצה : אם $f(x_1, ..., x_n, y)$ רקורסיבית ואם לכל $x_1, ..., x_n$ יש y ש־ $f(x_1, ..., x_n, y) = 0$ אז הפונקציה $g(x_1, ..., x_n) = min\{y : f(x_1, ..., x_n, y) = 0\}$ רקורסיבית.

הגדרה: תהא $\sum$ קבוצת נוסחאות. **יחס** $R(a_1, ..., a_n)$ ב־ $\mathbb{N}$ נקרא **יציג ב־** $\sum$ אם קיימת נוסחא $\rho(x_1, ..., x_n)$ שלכל $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(a_1, ..., a_n) \in R \iff (\mathbb{N} \models \rho(\bar{a_1}, ..., \bar{a_n})) \Leftarrow \sum \vdash \rho(\bar{a_1}, ..., \bar{a_n})$.
$(a_1, ..., a_n) \notin R \Leftarrow \sum \vdash \sim \rho(\bar{a_1}, ..., \bar{a_n})$.
$f(a_1, ..., a_n)$ נקראת **יציגה ב־** $\sum$ אם קיימת נוסחא $\phi(x_1, ..., x_n, y)$ שלכל $a_1, ..., a_n$ $\sum \vdash \underbrace{\exists!}_{only\ one} y\phi(\bar{a_1}, ..., \bar{a_n}, y)$ והיחס $f(a_1, ..., a_n) = y$ יציג ע"י ϕ.
משפט (גדל): f רקורסיבית $\iff$ היא יציגה ב־ PA.
משפט (גדל): PA או כל קבוצת אקסיומות רקורסיבית אינה כריעה.
הערה: $Enderton$ בנה מערכת אקסיומות **סופית** A_E:

1. $\forall x\ S(x) \neq \bar{0}$
2. $(S(x) = S(y)) \to x = y$
3. $x < S(y) \to x \leq y$
4. $\forall x \forall y\ x = y \vee x < y \vee y < x$
5. $x + 0 = x$
6. $x + S(y) = S(x + y)$
7. $x \cdot 0 = 0$
8. $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$
9. $xE0 = \bar{1} = S(\bar{0})$
10. $xEs(y) = (xEy) \cdot x$