פתרון
לוגיקה מתמטית – תרגיל 11

1. א. N אינו תת מבנה של M מכיוון ש- f^N איננה צמצום של f^M ל- W^N
דוגמה: ניקח $p = 2$. $f^N(1,1) = 0$, אבל $f^M(1,1) = 2$.

ב. N תת מבנה של M מכיוון ש- f^N היא צמצום של f^M. אבל N אינו תת מבנה אלמנטרי של M מכיוון שהפסוק $\exists x\exists y(\neg x=y \wedge f(x,x)=f(y,y))$ אמיתי ב-M אבל לא אמיתי ב-N.

ג. N תת מבנה של M מכיוון ש- $R^N = R^M \cap W^N$, אבל N אינו תת מבנה אלמנטרי של M מכיוון שהפסוק $\exists x\neg R(x)$ אמיתי ב-M אבל לא אמיתי ב-N.

2. א.
- K אינו תת מבנה אלמנטרי של N מכיוון שהפסוק $\exists x\forall y\neg R(x,y)$ אמיתי ב-N ולא אמיתי ב-K.
- K תת מבנה אלמנטרי של M.
- N אינו תת מבנה אלמנטרי של M מכיוון שהפסוק $\exists x\forall y\neg R(x,y)$ אמיתי ב-N ולא אמיתי ב-M.

3. נניח Σ_F היא קבוצת 10 האקסיומות של שדה. נגדיר:
$\Sigma_0 = \{ \neg f(d,d)=c, \neg f(f(d,d),d)=c, \neg f(f(f(d,d),d),d)=c, \dots\}$

כל המודלים של $\Sigma_F \cup \Sigma_0$ הם כל השדות בעלי קרקטריסטיקה 0. לכן אם φ נוסחה אמיתית בכל שדה בעל קרקטריסטיקה 0, אזי לפי משפט השלמות של גדל היא יכיחה מתוך $\Sigma_F \cup \Sigma_0$.

מכיוון שההוכחה מורכבת ממספר סופי של נוסחאות אזי משתמשים בה רק במספר סופי של הנחות מתוך הקבוצה Σ_0.

אם לא משתמשים בהוכחה בפסוקים של Σ_0 בכלל אזי φ אמיתית בכל שדה.

אם משתמשים בפסוקים של Σ_0, אזי קיים מספר טבעי n שהוא מספר מקסימלי של הופעות של הקבוע האישי d בפסוקים של Σ_0 שמשתמשים בהוכחה. לא קשה לראות שאם ניקח $q = n + 1$ אזי לכל שדה בעל קרקטריסטיקה גדולה או שווה ל-q הנוסחה תהיה אמיתית.