1. נסמן ב- X_7 את קבוצת כל המספרים בין 1 ל-350 המתחלקים ב-7. באופן דומה נגדיר את X_2 ו- X_5. אנו מחפשים את $350-|X_2 \cup X_5 \cup X_7|$. קל לראות ש-

$$|X_2| = \frac{350}{2} = 175$$

$$|X_5| = \frac{350}{5} = 70$$

$$|X_7| = \frac{350}{7} = 50$$

לחישוב גדלי החיתוכים נשים לב שלמשל $X_2 \cap X_5$ היא קבוצת כל המספרים בין 1 ל-350 המתחלקים גם ב-2 וגם ב-5, כלומר אלה המתחלקים ב-10. לכן $|X_2 \cap X_5| = \frac{350}{10} = 35$. באופן דומה

$$|X_2 \cap X_7| = \frac{350}{14} = 25$$

$$|X_5 \cap X_7| = \frac{350}{35} = 10$$

$$|X_2 \cap X_5 \cap X_7| = \frac{350}{70} = 5$$

עפ"י עקרון ההכלה וההדחה

$$\phi(350) = 350 - |X_2 \cup X_5 \cup X_7| = 350 - 175 - 70 - 50 + 35 + 25 + 10 - 5 = 120$$

2. בדומה לשאלה הקודמת, נסמן ב- X_5 את קבוצת כל המספרים בין 1 ל-30 המתחלקים ב-5. באופן דומה נגדיר את X_2 ו- X_3. נגדיר את Y_5 כמשלים של X_5, כלומר קבוצת כל המספרים **שאינם** מתחלקים ב-5 בין 1 ל-30. באופן דומה נגדיר את Y_2 ו- Y_3. נגדיר את A_5 כקבוצת כל התת-קבוצות של $\{1,...,30\}$ שאין בהן אף איבר המתחלק ב-5. למעשה, A_5 היא קבוצת כל התת-קבוצות של Y_5. נהוג לסמן $A_5 = P(Y_5)$. באופן דומה נגדיר $A_2 = P(Y_2)$ ו- $A_3 = P(Y_3)$. בשאלה שואלים כמה תת-קבוצות של $\{1,...,30\}$ אינן ב- A_2, אינן ב- A_3 ואינן ב- A_5. כלומר צריך לחשב

$$2^{30} - |A_2 \cup A_3 \cup A_5|$$

נחשב:

$$|A_2| = 2^{|Y_2|} = 2^{15}$$

$$|A_3| = 2^{|Y_3|} = 2^{20}$$

$$|A_5| = 2^{|Y_5|} = 2^{24}$$

כעת יש לחשב את גודלי החיתוכים. $A_2 \cap A_3$ למשל היא קבוצת כל התת-קבוצות של $\{1,...,30\}$ שאין בהן אף איבר זוגי ואף איבר המתחלק ב-3. במילים אחרות $A_2 \cap A_3$ היא קבוצת כל התת-קבוצות של $Y_2 \cap Y_3$ (באופן כללי לכל שתי קבוצות X,Y מתקיימת הנוסחה $P(X) \cap P(Y) = P(X \cap Y)$), לכן יש למצוא את הגודל של $Y_2 \cap Y_3$. אפשר ישירות:

$$|Y_2 \cap Y_3| = |\{1,5,7,11,13,17,19,23,25,29\}| = 10$$

ואפשר לרשום

$$|Y_2 \cap Y_3| = 30 - |X_2 \cup X_3|$$

ואז להשתמש בעקרון ההכלה וההדחה שוב עבור X_2 ו-X_3. בכל אופן אפשר לחשב:

$$|A_2 \cap A_3| = 2^{|Y_2 \cap Y_3|} = 2^{10}$$

$$|A_2 \cap A_5| = 2^{|Y_2 \cap Y_5|} = 2^{12}$$

$$|A_5 \cap A_3| = 2^{|Y_5 \cap Y_3|} = 2^{16}$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 2^{|Y_2 \cap Y_3 \cap Y_5|} = 2^{\phi(30)} = 2^8$$

ולפי עקרון ההכלה וההדחה קיבלנו את התשובה

$$2^{30} - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 2^{30} - 2^{15} - 2^{20} - 2^{24} + 2^{10} + 2^{12} + 2^{16} - 2^8 = 1055953664$$

3. בחירת תת-קבוצה של החפיסה שקולה לבחירת תת-קבוצה של כל אחד מהסוגים. בחירת תת-קבוצה של החפיסה שיש בה לפחות קלף אחד מכל סוג שקולה לבחירת תת-קבוצה **לא ריקה** של כל אחד מהסוגים. יש 13 קלפים מכל סוג, לכן יש סה"כ $2^{13}-1$ תת-קבוצות לא ריקות ומספר האפשרויות לבחור תת-קבוצה לא ריקה מכל אחד מהסוגים הוא

$$\left(2^{13}-1\right)^4$$

4. דרך א':

יש 4 אפשרויות לבחור את x ו-4 אפשרויות לבחור את y. לכל בחירה של x ו-y יש בחירה אחת אפשרית של z מלבד הבחירה x=3, y=4 שעבורה אין אף בחירה מתאימה של z. לכן סה"כ מספר הפתרונות המתאימים לתנאי השאלה הוא $4 \cdot 4 - 1 = 15$.

דרך ב':

נרשום

$$a = x - 3$$
$$b = y - 4$$
$$c = z - 5$$

ונקבל

$$a + b + c = 8$$
$$0 \le a < 4$$
$$0 \le b < 4$$
$$0 \le c < 8$$

נסמן ב-A את קבוצת כל הפתרונות בשלמים אי-שליליים של המשוואה שבהם $a \ge 4$. באופן דומה נסמן ב-B את קבוצת כל הפתרונות בשלמים אי-שליליים של המשוואה שבהם $b \ge 4$, ונסמן ב-C את קבוצת כל הפתרונות בשלמים אי-שליליים של המשוואה שבהם $c \ge 8$. ידוע שסה"כ יש $\binom{8+3-1}{2} = 45$ פתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה (כי הדבר שקול לפיזור 8 כדורים זהים בשלושה תאים) לכן המספר המבוקש הוא

$$45 - |A \cup B \cup C|$$

למציאת |A| נגדיר d=a-4 ונקבל את המשוואה d+b+c=4 שלה $\binom{4+3-1}{2} = 15$ פתרונות. לכן |A|=15 ובאותו אופן |B|=15. ב-C יש רק איבר אחד (אם $c \ge 8$ בהכרח a=0, b=0, c=8) וב-$A \cap B$ רק איבר אחד (a=4, b=4, c=0). כמו כן

$$A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \phi$$

לכן לפי עקרון ההכלה וההדחה

$$|A \cup B \cup C| = 15 + 15 + 1 - 1 = 30$$

והתשובה לשאלה היא 45-30=15.

5. א. כל איבר המופיע בדיוק ב-m קבוצות נספר רק פעם אחת: ב-S_m. יש להראות שכל איבר אחר נספר סה"כ 0 פעמים. כל איבר המופיע בפחות מ-m קבוצות בודאי אינו מופיע באף אחת מ-$S_m,\ldots,S_n$ ולכן אינו נספר כלל. נבדוק כמה פעמים נספר איבר המופיע ב-k קבוצות כאשר k>m. ב-S_m הוא מופיע $\binom{k}{m}$ פעמים, ב-S_{m+1} הוא מופיע $\binom{k}{m+1}$ פעמים, וכן הלאה, לכן סה"כ הוא נספר

$$\binom{m}{m}\binom{k}{m}-\binom{m+1}{m}\binom{k}{m+1}+\ldots+(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{k}{k}=$$
$$=\binom{k}{m}\binom{k-m}{0}-\binom{k}{m}\binom{k-m}{1}+\ldots+(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{k-m}{k-m}=$$
$$=\binom{k}{m}(\binom{k-m}{0}-\binom{k-m}{1}+\ldots+(-1)^{k-m}\binom{k-m}{k-m})=\binom{k}{m}(1-1)^{k-m}=0$$

כלומר אפס פעמים. מש"ל

ב.

$$E(odd)=E(1)+E(3)+E(5)+\ldots=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{k}{1}|S_k|+\sum_{k=3}^{n}(-1)^{k-1}\binom{k}{3}|S_k|+\sum_{k=5}^{n}(-1)^{k-1}\binom{k}{5}|S_k|+\ldots=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\binom{k}{1}+\binom{k}{3}+\binom{k}{5}+\ldots)|S_k|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}2^{k-1}|S_k|=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}|S_k|=|S_1|-2|S_2|+4|S_3|-8|S_4|+\ldots$$