תורת החבורות – תרגיל בית 4 – פתרון

שאלה 3

$(G,*)$ חבורה, $H\subseteq G$ תת-קבוצה לא ריקה של G כך שלכל $a,b\in H$ $\ a*b^{-1}\in H$.

הוכח: $(H,*)$ חבורה.

פתרון:

$H\neq\emptyset$, לכן קיים $x\in H \quad\Leftarrow\quad e=x*x^{-1}\in H$, בכך הוכחנו קיום אדיש.

לכן לכל $x\in H \quad\Leftarrow\quad e,x\in H \quad\Leftarrow\quad x^{-1}=e*x^{-1}\in H$ ולכל איבר ההופכי ב- H.

אסוציאטיביות נובעת מהאסוציאטיביות של G, ונישאר להראות סגירות:

לכל $x,y\in H \quad\Leftarrow\quad x,y^{-1}\in H \quad\Leftarrow\quad x*y=x*\left(y^{-1}\right)^{-1}\in H$. ■

שאלה 4

תהי $(G,*)$ חבורה, $x\in G$ איבר מסדר n.

תהי $S=\left\{x^0=1, x, x^2,\cdots, x^{n-1}\right\}$ תת-קבוצה של G. הוכח:

א) לכל $t\in\mathbb{Z}$ $\ x^t\in S$.

ב) $(S,*)$ חבורה מסדר n.

פתרון:

א) יהי $t\in\mathbb{Z}$, אז קיימים $r,q\in\mathbb{Z}$ כך ש $t=nq+r,\ 0\le r<n$. אז

$$x^t=x^{nq+r}=\left(x^n\right)^q x^r=x^r\in S$$

ב) אסוציאטיביות נובעת מהאסוציאטיביות של S, $x^0=1\in S$, ושאר האקסיומות נובעות מהסעיף הקודם:

לכל $x^k,x^j\in S$ $\ x^kx^j=x^{k+j}\in S$ וגם $\left(x^j\right)^{-1}=x^{-j}\in S$ כי $k+j,-j$ שלמים.

■

שאלה 5

תהי $GL_n(F)$ חבורת המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל שדה F.

א) <u>כמה</u> איברים יש בחבורה $GL_2(\mathbb{Z}_p)$?

ב) <u>כתבו</u> במפורש את כל אברי $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ ואת לוח הכפל, ומצאו את הסדרים של כל אברי החבורה.

ג) תהי G חבורה בעלת איברים x, y המקיימים $|x| = |xy| = 2,\ |y| = 3$, וכי כל אברי G ניתן לכתוב כמכפלת החזקות של x ו-y.
<u>כתבו</u> במפורש את כל אברי החבורה G.

<u>פתרון:</u>

א) ישנן $p^2 - 1$ אפשרויות לבחירת שורה ראשונה, שורה שנייה חייבת להיות בת"ל בראשונה: $p^2 - p$ אפשרויות לבחירתה. סה"כ: $(p^2 - p)(p^2 - 1)$.

ג) מהנתון נובע כי $G \subseteq S = \{e, x, y, y^2, xy, xy^2\}$. נוכיח כי כל אברי S הינן שונים ובכך נסיים (ההכלה ההפוכה מתקיימת מהסגירות).

תת-קבוצות $\{y, y^2\}$, $\{x, xy\}$, $\{e\}$ מכילות איברים מהסדרים $1, 2, 3$ בהתאם, לכן הן זרות. כמו כן $o(y) = 3 \ \Leftarrow\ y \neq e$, לכן גם בתוך כל אחת מתת-הקבוצות האיברים הם שונים.

נישאר להראות כי xy^2 שונה משאר האיברים.

אם $xy^2 = e$, אז $y^2 = x^{-1} \ \Rightarrow\ o(y^2) = o(x^{-1}) = 2$, סתירה.

אם $xy^2 = x$, אז $y^2 = e \ \Rightarrow\ o(y^2) \leq 2$, סתירה.

אם $xy^2 = y$, אז $y = x^{-1} \ \Rightarrow\ o(y) = o(x^{-1}) = 2$, סתירה.

אם $xy^2 = y^2$, אז $x = e \ \Rightarrow\ o(x) = 1$, סתירה.

אם $xy^2 = xy$, אז $y = e \ \Rightarrow\ o(y) = 1$, סתירה. ■

שאלה 6

תהי G חבורה, $a, b \in G$ מסדר סופי המתחלפים בכפל. <u>הוכח</u>:

א) הסדר של ab הינו סופי ומחלק את $|a| \cdot |b|$.

ב) אם הסדרים של a,b הינם זרים, אז $|ab|=|a|\cdot|b|$.

פתרון:

נניח כי $o(a)=n,\ o(b)=m$.

א) $(ab)^{nm}=\left(a^{n}\right)^{m}\left(b^{m}\right)^{n}=e^{m}e^{n}=e$, לכן הסדר של ab הינו סופי ומחלק את מכפלת הסדריהם: $o(a)\cdot o(b)$.

ב) יהי $k=o(ab)$, לפי הסעיף הקודם k סופי ומחלק את $n\cdot m$ (1). כמו כן

$$a^{k}b^{k}=(ab)^{k}=e \Leftarrow a^{k}=\left(b^{k}\right)^{-1} \Leftarrow e=\left(b^{m}\right)^{-k}=\left(\left(b^{k}\right)^{-1}\right)^{m}=\left(a^{k}\right)^{m}.$$

מכאן קיבלנו כי הסדר של a מחלק את $k\cdot m$ $\overset{(n,m)=1}{\Longrightarrow}$ $n|k$. באותו אופן מקבלים כי m מחלק את k, לכן $\text{l.c.m}(n,m)=n\cdot m$ מחלק את k (2).

ולבסוף $(1)+(2) \Rightarrow k=n\cdot m$.

שאלה 7

תהי G חבורה, $a,b\in G$ שונים מיחידה המקיימים $aba^{-1}=b^{2},\ a^{5}=1$.

א) הוכח כי $a^{2}ba^{-2}=b^{4}$.

ב) הוכח כי $a^{3}ba^{-3}=b^{8}$.

ג) מהו הסדר של b?

פתרון:

א) $a^{2}ba^{-2}=a\left(aba^{-1}\right)a^{-1}=ab^{2}a^{-1}=\left(aba^{-1}\right)^{2}=\left(b^{2}\right)^{2}=b^{4}$

ב) $a^{3}ba^{-3}=a\left(a^{2}ba^{-2}\right)a^{-1}=ab^{4}a^{-1}=\left(aba^{-1}\right)^{4}=\left(b^{2}\right)^{4}=b^{8}$

ג) $a^{4}ba^{-4}=a\left(a^{3}ba^{-3}\right)a^{-1}=ab^{8}a^{-1}=\left(aba^{-1}\right)^{8}=\left(b^{2}\right)^{8}=b^{16}$

$$a^{5}ba^{-5}=a\left(a^{4}ba^{-4}\right)a^{-1}=ab^{16}a^{-1}=\left(aba^{-1}\right)^{16}=\left(b^{2}\right)^{16}=b^{32}$$

והיות ו-$a^{5}=a^{-5}=1$, קיבלנו כי $b=b^{32}$. מכאן $b^{31}=e \Leftarrow$ $o(b)$ מחלק את 31.

אבל $b\neq e \Rightarrow o(b)\neq 1 \Rightarrow o(b)=31$. ■