משוואות מדוייקות וגורמי אינטגרציה

מוטיבציה

נניח שנתונה לנו משפחה של פונקציות $F(x,y)=c$
נחפש את המד"ר של המשפחה. אם $y(x)$ במשפחה אזי $F\big(x,y(x)\big)=c$
נגזור $F'_x\big(x,y(x)\big)+F'_y\big(x,y(x)\big)y'(x)=0$
או $F'_x\big(x,y(x)\big)+F'_y\big(x,y(x)\big)\frac{dy}{dx}=0$
נכפיל ב־dx כאילו מותר ונקבל $F'_x\big(x,y(x)\big)dx+F'_y\big(x,y(x)\big)dy=0$
באופן דומה אם $x(y)$ במשפחה (כלומר פונקציה הפוכה ל־$y(x)$) אז $F\big(x(y),y\big)=c$
נגזור $F'_x\big(x(y),y\big)+F'_y\big(x(y),y\big)y'(x)=0$
או $F'_x\big(x,y(x)\big)\frac{dx}{dy}+F'_y\big(x,y(x)\big)=0$
נכפיל ב־dy כאילו מותר ונקבל $F'_x\big(x,y(x)\big)dx+F'_y\big(x,y(x)\big)dy=0$
כלומר $F(x,y)=c$ פתרון של המד"ר $F'_x\big(x,y(x)\big)dx+F'_y\big(x,y(x)\big)dy=0$.

סוף מוטיבציה

הקדמה למשוואות מדוייקות

ראינו כבר שפתרון של משוואה יכול להיות $y(x)$ או $x(y)$. כלומר, במובן מסויים, אין העדפה של מי מ־x,y הוא הפונקציה ומי המשתנה. אחת הצורות לרישום של מד"ר בצורה נייטרלית היא

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

כאשר אנו מבינים את הפתרונות של המד"ר בצורה הבאה: $y(x)$ פתרון של המד"ר הנ"ל אם הוא פתרון של המד"ר

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

שזו מד"ר שאנו יודעים להציב לתוכה פונקציות. באופן דומה, $x(y)$ פתרון של המד"ר $Pdx+Qdy=0$ אם היא פתרון של המד"ר

$$P(x,y)\frac{dx}{dy}+Q(x,y)=0$$

כאשר, שוב, זוהי מד"ר שאנו יודעים להציב לתוכה פונקציות.

שימו לב כי אפשר לרשום את שתי המד"ר באופן הבא:

$$y' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad\qquad x' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

רישום מקוצר של $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
הוא $Pdx + Qdy = 0$

בנוסף, כל מד"ר אפשר לרשום בצורה הנ"ל:

$$\begin{aligned}
&y' = f(x,y)\\
&\frac{dy}{dx} = f(x,y)\\
&dy = f(x,y)dx\\
&f(x,y)dx - dy = 0.
\end{aligned}$$

משוואות מדוייקות

מד"ר מהצורה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$
נקראת מדוייקת אם קיימת פונקציה $F(x,y)$ המקיימת

$$F'_x(x,y) = P(x,y) \qquad F'_y(x,y) = Q(x,y)$$

ובמקרה זה הפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$F(x,y) = c.$$

כלומר בשביל למצוא את הפתרונות של מד"ר מדוייקת, כל מה שצריך זה למצוא את F.

מתי מד"ר מהצורה $Pdx + Qdy = 0$ היא מדוייקת? נצטט משפט מחדו"א: יהיו $P(x,y), Q(x,y)$ שתי פונקציות בשני משתנים. אם $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$ אזי קיימת $F(x,y)$ המקיימת

$$F'_x(x,y) = P(x,y) \qquad F'_y(x,y) = Q(x,y).$$

המשפט המצוטט אינו מנוסח בצורה הכי מדוייקת שלו אלא בצורה בו יהיה שימושי לנו בקורס זה.

איך אנו מוצאים את F? באמצעות המשוואות

$$F'_x(x,y)=P(x,y) \qquad F'_y(x,y)=Q(x,y).$$

שהן שקולות ל־

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+g(y) \qquad F(x,y)=\int Q(x,y)dy+h(x)$$

כאשר באינטגרציה לפי x אנו חושבים על y כקבוע, ואז קבוע האינטגרציה משתנה כאשר y משתנה, כלומר הוא פונקציה של y, שאנו מסמנים ע"י $g(y)$. באופן דומה, באינטגרציה לפי y אנו חושבים על x כקבוע, ואז קבוע האינטגרציה משתנה כאשר x משתנה, כלומר הוא פונקציה של x, שאנו מסמנים ע"י $h(x)$.

<u>תרגיל:</u> $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$.

<u>תרגיל:</u> נבדוק האם המד"ר מדוייקת:

$$P'_y=(2xye^{x^2}-2x)_y=2xe^{x^2}$$
$$Q'_x=(e^{x^2})_x=2xe^{x^2}\ .$$

ולכן המד"ר מדויקת. נמצא את F בשתי דרכים: דרך ראשונה: נחשב את F בשתי דרכים:

$$F=\int P(x,y)dx=\int(2xye^{x^2}-2x)dx=ye^{x^2}-x^2+g(y)$$
$$F=\int Q(x,y)dy=\int e^{x^2}dy=ye^{x^2}+h(x)$$

כלומר קיבלנו שני ביטויים עבור F. נשווה ביניהם: $ye^{x^2}-x^2+g(y)=ye^{x^2}+h(x)$ ונשים לב כי המחוברים המערבים את x,y יחד מופיעים בשני הצדדים. זה חייב לקרות ואם לא קרה, נעשתה טעות. חזרו אחורה.

אז נקבל $g(y)=h(x)+x^2$

ופונקציה של x שווה לפונקציה של y אם ורק אם שתיהן קבועות $g(y)=h(x)+x^2=c$

כלומר $g(y)=c$

וגם $h(x)=-x^2+c$

ובכל אופן נקבל $F(x,y)=ye^{x^2}-x^2+c$

קיבלנו אוסף של פונקציות. אנו מעוניינים באחת בלבד אז ניקח $c=0$ ונקבל

$$F(x,y)=ye^{x^2}-x^2.$$

שימו לב כי עד פה עשינו חדו"א בלבד.
הפתרון הכללי בצורה סתומה הוא

$$ye^{x^2} - x^2 = c$$

(לא אותו c מקודם) או בצורה מפורשת

$$y = ce^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}.$$

תרגיל לעבודה עצמית: פתרו את המד"ר כמד"ר לינארית.

דרך שניה: נחזור למצב בו אנו יודעים כי המד"ר מדוייקת. נחשב את

$$F = \int P(x,y)dx = \int (2xye^{x^2} - 2x)dx = ye^{x^2} - x^2 + g(y)$$

נזכר כעת כי $F'_y = Q$ ולכן $e^{x^2} = Q = F'_y = \left(ye^{x^2} - x^2 + g(y)\right)'_y = e^{x^2} + g'(y)$
כלומר $g'(y) = 0$
או $g(y) = c$
ואז $F(x.y) = ye^{x^2} - x^2 + c$
וממשיכים כמו קודם.

דרך "שלישית": נחזור למצב בו אנו יודעים כי המד"ר מדוייקת. נחשב את

$$F = \int Q(x,y)dy = \int e^{x^2} dy = ye^{x^2} + h(x).$$

נזכר כעת כי $F'x = P$ ולכן $2x(ye^{x^2} - 1) = P = F'_x = 2xye^{x^2} + h'(x)$
כלומר $h'(x) = -2x$
ונקבל $h(x) = -x^2 + c$
ולכן פונקציית הפוטנציאל היא $F(x.y) = ye^{x^2} - x^2 + c$
וממשיכים כמו קודם.

<u>גורמי אינטגרציה</u>

מה קורה כאשר יש לנו מד"ר מהצורה $Pdx+Qdy=0$ אבל $P'_y \neq Q'_x$? נחפש פונקציה שאינה אפס עבורה המד"ר

$$\mu(x,y)\big(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\big)=0$$
$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

הינה מדוייקת.

<u>הגדרה:</u> גורם אינטגרציה הינו פונקציה $\mu(x,y)$ אשר עבורה המד"ר

$$\mu(x,y)\big(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\big)=0$$
$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

הינה מדויקת, כלומר $(\mu(x,y)P(x,y))'_y=(\mu(x,y)Q(x,y))'_x$.

ננסה לפתור את המשוואה $(\mu(x,y)P(x,y))'_y=(\mu(x,y)Q(x,y))'_x$:

$$(\mu(x,y)P(x,y))'_y=(\mu(x,y)Q(x,y))'_x$$
$$\mu'_y(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)P'_y(x,y)=\mu'_x(x,y)Q(x,y)+\mu(x,y)Q'_x(x,y)$$
$$\mu(x,y)\big(P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\big)=\mu'_x(x,y)Q(x,y)-\mu'_y(x,y)P(x,y)$$

משוואה זו הינה משוואה דיפרנציאלית חלקית (שכן היא מערבת נגזרות חלקיות) ואינה קלה יותר לפתירה מאשר המד"ר המקורית. לכן ננסה למצוא גורם אינטגרציה פשוט, במקרה ואחד קיים:

1. <u>גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של x בלבד:</u> במקרה זה $\mu(x,y)=\mu(x)$ ולכן $\mu'_y(x,y)=\big(\mu(x)\big)'_y=0$ ונקבל

$$\mu(x,y)\big(P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\big)=\mu'_x(x,y)Q(x,y)-\mu'_y(x,y)P(x,y)$$
$$\mu(x)\big(P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)\big)=\mu'(x)Q(x,y)$$
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

שימו לב כי צד שמאל הוא פונקציה של x בלבד ולכן גם צד ימין חייב להיות פונקציה של x בלבד. כלומר תנאי לקיום גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של x בלבד הוא שהביטוי

$$\frac{P'_y(x,y)-Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

יהיה פונקציה של x בלבד. במקרה זה נקבל

$$\ln|\mu(x)| = \int \left(\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}\right) dx$$
$$\mu(x) = \exp\left(\int \left(\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)}\right) dx\right).$$

לסיכום, למד"ר $Pdx + Qdy = 0$ יש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של x בלבד בתנאי שהביטוי $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ הוא פונקציה של x בלבד ובמקרה זה גורם אינטגרציה הוא

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left(\frac{P'_y - Q'_x}{Q}\right) dx\right).$$

2. <u>גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של y בלבד:</u> במקרה זה $\mu(x,y) = \mu(y)$ ולכן $\mu'_x(x,y) = \big(\mu(y)\big)'_x = 0$ ושיקולים דומים מביאים למסקנה הבאה:
למד"ר $Pdx+Qdy = 0$ יש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של y בלבד בתנאי שהביטוי $\frac{Q'_x - P'_y}{P}$ הוא פונקציה של y בלבד ובמקרה זה גורם אינטגרציה הוא

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left(\frac{Q'_x - P'_y}{P}\right) dy\right).$$

<u>**תרגיל:**</u> $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$
<u>**פתרון:**</u> נבדוק האם המד"ר מדוייקת:

$$P'_y = (x^2 + y^2 + x)_y = 2y \qquad Q'_x = (xy)_x = y$$

אנו רואים כי המד"ר אינה מדוייקת ולכן נבדוק האם יש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של y בלבד. בשביל לבדוק זאת אנו צריכים לבדוק כי הביטוי $\frac{Q'_x - P'_y}{P}$ הוא פונקציה של y בלבד:

$$\frac{Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)}{P(x,y)} = \frac{y - 2y}{x^2 + y^2 + x} = -\frac{y}{x^2 + y^2 + x}$$

ביטוי זה אינו תלוי ב־y בלבד ולכן נחפש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של x בלבד. בשביל לבדוק זאת אנו צריכים לבדוק כי הביטוי $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ הוא פונקציה של x בלבד:

$$\frac{P'_y(x,y) - Q'_x(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

וזהו ביטוי שתלוי ב־x בלבד ולכן יש גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של x בלבד והוא

$$\mu(x) = \exp \int \frac{dx}{x} = e^{\ln|x|} = |x|$$

כמו במד"ר לינאריות, אפשר לבדוק ש־$\mu(x) = x$ הוא גורם אינטגרציה. נעשה זאת: נכפיל את המד"ר שלנו ב־$\mu(x) = x$ ונקבל

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2 y dy = 0$$

נבדוק כי המד"ר מדויקת:

$$(x^3 + xy^2 + x^2)'_y = 2xy \qquad (x^2 y)'_x = 2xy$$

ואכן היא מדוייקת. נפתור אותה כמשוואה מדוייקת:

$$\begin{aligned}
&F = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + g(y)\\
&F = \int x^2 y dy = \frac{1}{2}x^2y^2 + h(x)\\
&\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + g(y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + h(x)\\
&g(y) = h(x) - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 = c\\
&F(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + c\\
&\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 = c
\end{aligned}$$

נשים לב כי הכפלנו את המד"ר שלנו ב־x ולכן בהכרח הפונקציה $x(y) \equiv 0$ הינה פתרון של המד"ר החדשה (המדוייקת). אנו צריכים לבדוק האם פונקציה זו היא פתרון של המד"ר המקורית, כלומר של

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

כיוון שאנו בודקים האם $x(y)$ היא פתרון אנו נבדוק עבור המד"ר

$$(x^2 + y^2 + x)\frac{dx}{dy} + xy = 0$$

וכאשר נציב נקבל

$$(0 + y^2 + 0)0 + 0y = 0$$

ולכן זהו פתרון של המד"ר המקורית ולא הוספנו פתרון. אם $x(y)\equiv 0$ לא היה פתרון של המד"ר המקורית, היינו צריכים להוציא אותו מהפתרון, כלומר לרשום משהו כמו: הפתרון הכללי הוא $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3=c$ ללא הפתרון $x(y)\equiv 0$ או ,לחילופין, כיוון שפתרון זה מתקבל עבור $c=0$, נוכל לומר כי הפתרון של המד"ר המקורית הוא $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3=c$ כאשר $c\neq 0$.

הערות: 1. מה היה קורה אם היינו מחלקים ב־x כדי לקבל מד"ר מדוייקת? במקרה זה איבדנו פתרון, ואנו צריכים לבדוק אם הוא פתרון של המד"ר המקורית. אם הוא פתרון של המקורית, צריך להוסיף אותו. אם אינו פתרון של המקורית, לא מוסיפים אותו.
2. שיקולים דומים תקפים כאשר מכפילים בגורם אינטגרציה התלוי ב־y בלבד.
3. אם המד"ר $Pdx+Qdy=0$ אינה מדוייקת ואין לה גורמי אינטגרציה שתלויים במשתנה אחד בלבד, נסו להסתכל עליה בצורה $y'=-\frac{P}{Q}$ או $x'=-\frac{Q}{P}$. אחת מהן יכולה להיות צורה שאתם יודעים לפתור בשיטות אחרות.

תרגיל: $(2y+xy^2)e^{xy}dx+(3x+x^2y)e^{xy}dy=0$
הראו כי למד"ר יש גורם אינטגרציה מהצורה $x^\alpha y^\beta$.
פתרון: נכפיל את המד"ר ב־$x^\alpha y^\beta$ ונקבל

$$(2x^\alpha y^{1+\beta}+x^{1+\alpha}y^{2+\beta})e^{xy}dx+(3x^{1+\alpha}y^\beta+x^{2+\alpha}y^{1+\beta})e^{xy}dy=0$$

ונבדוק מתי $P'_y=Q'_x$:

$$\begin{aligned}
&\big((2x^\alpha y^{1+\beta}+x^{1+\alpha}y^{2+\beta})e^{xy}\big)'_y=\big((3x^{1+\alpha}y^\beta+x^{2+\alpha}y^{1+\beta})e^{xy}\big)'_x\\
&(2x^\alpha(1+\beta)y^\beta+(2+\beta)x^{1+\alpha}y^{1+\beta})e^{xy}+(2x^\alpha y^{1+\beta}+x^{1+\alpha}y^{2+\beta})e^{xy}x=\\
=\;&(3(1+\alpha)x^\alpha y^\beta+(2+\alpha)x^{1+\alpha}y^{1+\beta})e^{xy}+(3x^{1+\alpha}y^\beta+x^{2+\alpha}y^{1+\beta})e^{xy}y\\
&2(1+\beta)x^\alpha y^\beta+(2+\beta)x^{1+\alpha}y^{1+\beta}+(2x^\alpha y^{1+\beta}+x^{1+\alpha}y^{2+\beta})x=\\
=\;&3(1+\alpha)x^\alpha y^\beta+(2+\alpha)x^{1+\alpha}y^{1+\beta}+(3x^{1+\alpha}y^\beta+x^{2+\alpha}y^{1+\beta})y\\
&2(1+\beta)x^\alpha y^\beta+(2+\beta)x^{1+\alpha}y^{1+\beta}+2x^{1+\alpha}y^{1+\beta}+x^{2+\alpha}y^{2+\beta}=\\
=\;&3(1+\alpha)x^\alpha y^\beta+(2+\alpha)x^{1+\alpha}y^{1+\beta}+3x^{1+\alpha}y^{1+\beta}+x^{2+\alpha}y^{2+\beta}\\
&\big(2(1+\beta)-3(1+\alpha)\big)x^\alpha y^\beta+(\beta-\alpha-1)x^{1+\alpha}y^{1+\beta}=0\\
&\big(2(1+\beta)-3(1+\alpha)\big)+(\beta-\alpha-1)xy=0\\
&2(1+\beta)-3(1+\alpha)=0\qquad \beta-\alpha-1=0\\
&\alpha=1\quad \beta=2
\end{aligned}$$

כלומר xy^2 הוא גורם אינטגרציה והמד"ר

$$(2xy^3+x^2y^4)e^{xy}dx+(3x^2y^2+x^3y^3)e^{xy}dy=0$$

מדוייקת. הפתרון שלה הוא

$$x^2y^3e^{xy}=c$$

(אשאיר את החישובים לכם).
נשים לב כי הוספנו את הפתרונות $y\equiv 0$ ו־$x\equiv 0$ ע"י הכפלת המד"ר ב־xy^2. נבדוק האם אלו פתרונות של המד"ר המקורית:
בשביל $y\equiv 0$ נציב בצורה הבאה של המד"ר המקורית

$$(2y+xy^2)e^{xy}+(3x+x^2y)e^{xy}\frac{dy}{dx}=0$$

ונקבל

$$(0+x0)e^0+(3x+x^20)e^00=0$$

ולכן הוא פתרון של המד"ר המקורית. את $x\equiv 0$ נציב לתוך הצורה הבאה של המד"ר המקורית

$$(2y+xy^2)e^{xy}\frac{dx}{dy}+(3x+x^2y)e^{xy}=0$$

ונקבל

$$(2y+0y^2)e^00+(0+0)e^0=0$$

ולכן גם $x\equiv 0$ פתרון של המד"ר המקורית ולכן לא הוספנו פתרונות והפתרון הכללי הוא אכן

$$x^2y^3e^{xy}=c$$