תרגיל בית 2

שאלה 1: (25 נק')

א. תהי $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה באחד מבין מרחבים מטריים l_1, או l_2, או l_∞, המתכנסת לאיבר a במרחב זה. הוכיחו כי לכל k טבעי, סדרת הקואורינטות ה- k-יות של $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, שנסמנה ב- $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, מתכנסת ב- $\mathbb{R}$ (ביחס למטריקה האוקלידית) לקואורדינטה ה- k-ית של a, שנסמנה ב- $a^{(k)}$. (15 נק')

ב. עבור כל אחד ממחרבים מטריים l_1, l_2 ו- l_∞ מצאו דוגמה נגדית לטענה הפוכה לזו של סעיף א', כלומר מצאו בכל אחד ממרחבים אלה סדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ואיבר a, כך שלכל k טבעי $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- $\mathbb{R}$ (ביחס למטריקה האוקלידית) ל- $a^{(k)}$, אך הסדרה $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת ל- a במטריקה של המרחב המתאים. (10 נק')

שאלה 2: (25 נק')

א. עבור מרחבים מטריים $\left(C\left[0,1\right], d_{L^1}\right)$ ו- $\left(C\left[0,1\right], d_{L^2}\right)$ מצאו דוגמה לסדרה $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ של פונקציות רציפות בקטע $\left[0,1\right]$, המתכנסת במטריקה של המרחב המתאים ל- $f \in C\left[0,1\right]$, אך אינה מתכנסת ל- f נקודתית בקטע $\left[0,1\right]$ (המטריקות d_{L^1} ו- d_{L^2} הן המטריקות המושרות ע"י הנורמות $\|\ \|_{L^1}$ ו- $\|\ \|_{L^2}$ בהתאמה, המוגדרות על המרחב הוקטורי $C\left[0,1\right]$). (15 נק')

ב. עבור מחרבים מטריים $\left(C\left[0,1\right], d_{L^1}\right)$ ו- $\left(C\left[0,1\right], d_{L^2}\right)$ מצאו דוגמה לסדרה $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ של פונקציות רציפות בקטע $\left[0,1\right]$, המתכנסת נקודתית בקטע $\left[0,1\right]$ לפונקציה $f \in C\left[0,1\right]$, אך אינה מתכנסת ל- f במטריקה של המרחב המתאים (10 נק').

שאלה 3: (50 נק')

בשאלה זו תתבקשו להוכיח כי כל קבוצה פתוחה על הישר האוקלידי היא איחוד בן מניה (סופי או אינסופי) של קטעים פתוחים.

נתבונן במרחב המטרי $(\mathbb{R},d)$, כאשר d היא המטריקה האוקלידית. תהי U קבוצה פתוחה (לא ריקה) במרחב מטרי זה. לכל $x\in U$ נסמן ב- $I(x)$ את קבוצת כל הקטעים הפתוחים המכילים את x והמוכלים ב- U. כמו כן, נסמן ב- $a(x)$ את האינפימום של קבוצת הקצוות השמאליים של הקטעים השייכים ל- $I(x)$ וב- $b(x)$ את הסופרמום של קבוצת הקצוות הימניים של הקטעים השייכים ל- $I(x)$.

שימו לב כי $a(x)$ ו/או $b(x)$ עשויים להיות אינסופיים.

א. הוכיחו כי לכל $x\in U$ מתקיים $\left(a(x),b(x)\right)\subseteq U$. (15 נק')

ב. הוכיחו כי לכל $x_1,x_2\in U$ מתקיים $\left(a(x_1),b(x_1)\right)\cap\left(a(x_2),b(x_2)\right)=\varnothing$ או $\left(a(x_1),b(x_1)\right)=\left(a(x_2),b(x_2)\right)$. (15 נק').

ג. הוכיחו כי קבוצת הקטעים הפתוחים $I=\left\{\left(a(x),b(x)\right) \middle| \; x\in U\right\}$ היא בת מניה (סופית או אינסופית). (15 נק')

<u>רמז</u> : הוכיחו קודם כי בכל קטע על הישר הממשי קיים מספר רציונלי.

ד. הסיקו מסעיפים קודמים כי U היא איחוד בן מניה (סופי או אינסופי) של קטעים פתוחים. (5 נק')

! בהצלחה