בחינה באלגברה לינארית ב' - מועד א'

<u>הנחיות לנבחנים:</u>

- משך הבחינה שלוש שעות.
- סך כל הנקודות הוא 100.
- כל חומר עזר אסור בשימוש.
- יש לנמק את תשובותיכם היטב.
- בבחינה יש 6 שאלות. יש לענות על כולן.

---

1 (16 נק', שאלת שיעורי בית) נתונות שתי המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

ידוע כי ל-A ול-B אותם הערכים העצמיים. מצאו את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של המטריצות.

2 (15 נק') תהיינה A ו-B שתי מטריצות מרוכבות מסדר 7×7.
נתון כי $m_A(x)=m_B(x)=(x-2)^3$ וכן כי הריבוי הגיאומטרי של 2 בשתי המטריצות הוא r. הוכיחו כי $r\geq 3$ וכן כי אם $r=4$ אזי A ו-B דומות.

3 (20 נק') תהיינה A_1 ו-A_2 שתי מטריצות ממשיות, סימטריות והפיכות מסדר 2×2.

א. (8 נק') מהם הערכים האפשריים לסיגנטורה (סימנית) של המטריצות?

ב. (12 נק') הוכיחו כי אם A_1 ו-A_2 <u>אינן</u> חופפות אזי A_1 ו-A_2 חופפות סימולטנית למטריצות אלכסוניות, כלומר: קיימות מטריצות אלכסוניות D_1 ו-D_2 וקיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$P^tA_1P=D_1$ וכן $P^tA_2P=D_2$.

4 (20 נק') יהי $V=\mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ (ממימד 4!!) עם המ"פ:

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Re}\left(z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}\right)$$

יהיו $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ו- $u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ ונסמן $U = \mathrm{span}\left\{u_1, u_2\right\}$.

א. (10 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$U^\perp$.

ב. (10 נק') מצאו את ההיטל האורתוגונלי של הוקטור $\begin{pmatrix} i-1 \\ 1+3i \end{pmatrix}$ על $U^\perp$.

5 (15 נק') יהי V מרחב אוניטרי ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. נתון כי $TT^* = 6T - 8I$. הוכיחו כי T אופרטור חיובי.

6 (14 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי $W \subsetneq V$ תת-מרחב T-שמור. הוכיחו כי קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של T וקיים וקטור $v \in V$ כך ש-$v \notin W$ וכן $(T - \lambda I)(v) \in W$. (רמז: ניתן להשתמש במרחב מנה.)