אינטגרלים כפולים

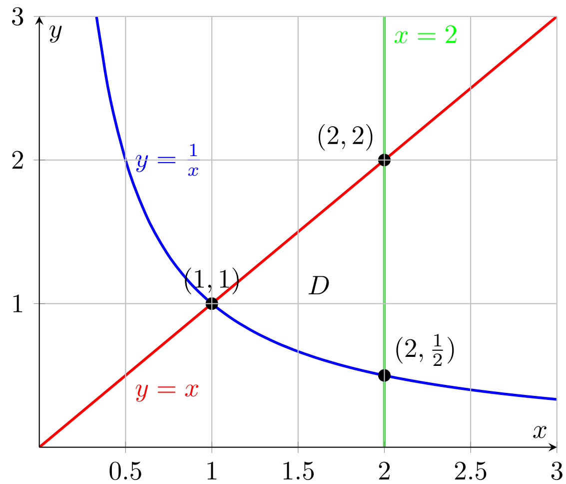
תרגיל 1:

חשבו את האינטגרל הבא בתחום D המוגדר ע"י: $y \geq \frac{1}{x},\ y \leq x,\ 0 \leq x \leq 2$.

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dxdy}$$

פתרון:

נשרטט תחילה את התחום D.



נבצע אינטגרציה ע"י אנטגרלים נשנים. נבחר את הפרמטר החיצוני להיות x והפנימי להיות y.
<u>הגבולות של x:</u> כדי למצוא את הגבולות נשאל מהם ה x־ים כך שקיים y עבורם $(x,y) \in D$ (או במילים אחרות, אם מטילים את D על ציר x, מה הקבוצה המתקבלת). התנאים סה"כ הם $0 \leq x \leq 2$ ו $x \leq y \leq \frac{1}{x}$. כדי שיהיה y שיקיים את התנאים נקבל ש $\frac{1}{x} \leq x$ כלומר $1 \leq x^2$ ויחד עם זה ש x חיובי נקבל ש $1 \leq x \leq 2$. שימו לב שקל לראות את זה בציור.
<u>הגבולות של y:</u> בהינתן x_0 כלשהו, מהם ה y כך ש $(x_0,y) \in D$? קל עכשיו לראות שהתנאים הם $\frac{1}{x_0} \leq y \leq x_0$ (בציור ־ y נע מהקו $y = \frac{1}{x}$ התחתון לקו $y = x$ העליון). סה"כ נקבל את האינטגרל

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dxdy} &= \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{1/x}^{x}\mathrm{dx} = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{x} - \left(-\frac{x^2}{1/x}\right)\right]\mathrm{dx} = \int_1^2 \left[x^3 - x\right]\mathrm{dx} \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{16}{4} - \frac{4}{2}\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

ניתן לעשות את אותו הדבר עם סדר אינטגרציה הפוך, אך נשים לב שבעוד שעבור y_0 נתון הגבול העליון של x הוא תמיד 2, הגבול התחתון ניתן ע"י שתי פונקציות ־ פעם אחת $x = y$ ופעם אחת $x = \frac{1}{y}$ (כתלות בהאם $1 \leq y \leq 2$ או $\frac{1}{2} < y < 1$). לכן נפריד את האינטגרל לשתיים כדי שיהיה יותר נח לרשום אותו:

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1} \left[\int_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} + \int_1^2 \left[\int_y^2 \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} &= \int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{3}\frac{8 - \frac{1}{y^3}}{y^2}\right]\mathrm{dy} + \int_1^2 \left[\frac{1}{3}\frac{8 - y^3}{y^2}\right]\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1} \left[\frac{8}{y^2} - \frac{1}{y^5}\right]\mathrm{dy} + \frac{1}{3}\int_1^2 \left[\frac{8}{y^2} - y\right]\mathrm{dy} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4y^4} - \frac{8}{y}\right]_{1/2}^{1} + \frac{1}{3}\left[-\frac{y^2}{2} - \frac{8}{y}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4} - 8 - \frac{16}{4} + 16\right] + \frac{1}{3}\left[-\frac{4}{2} - \frac{8}{2} + \frac{1}{2} + \frac{16}{2}\right] = \frac{17}{12} + \frac{10}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

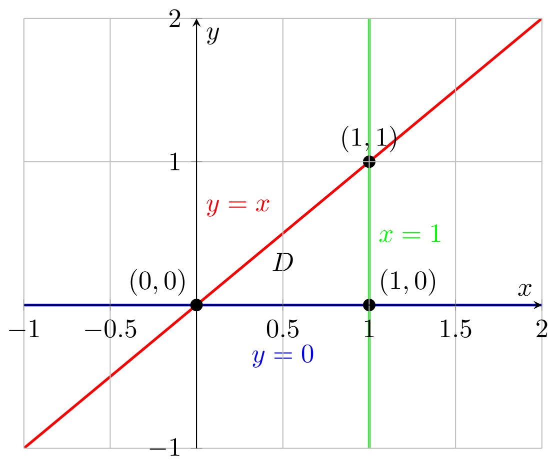
תרגיל 2:

חשבו את האינטגרל הבא

$$\int_0^1 \left[\int_y^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{dx}\right] \mathrm{dy}$$

פתרון:

אנחנו לא יודעים מה הפונקציה הקדומה של $\frac{\sin(x)}{x}$ לפי x ולכן לא ניתן לעשות את האינטגרל הפנימי (הערה: לפונקציה $\frac{\sin(x)}{x}$ לא קיימת פונקציה קדומה **אלמנטרית**, למרות שכמובן כן קיימת לה פונקציה קדומה, למשל בגלל שהיא רציפה). אם נחליף את סדר האינטגרציה, אז יהיה יותר פשוט כי קל לעשות ל $\frac{\sin(x)}{x}$ אינטגרל לפי y. בשביל זה צריך למצוא מה התחום אינטגרציה: הפרמטר y נמצא ב $0 \le y \le 1$, ובהינתן y הפרמטר x נמצא ב $y \le x \le 1$, כלומר בין הישרים $x = y$ ו $x = 1$. ובציור נקבל את התחום



לכן אם מסתכלים קודם על x אז הוא נע בין 0 ל 1 ובהינתן x, הפרמטר y נע בין 0 ל x ונקבל

$$\int_0^1 \left[\int_y^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{dx}\right] \mathrm{dy} \quad = \quad \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{\sin x}{x} \mathrm{dy}\right] \mathrm{dx} = \int_0^1 \sin x \mathrm{dx} = -\cos(x) \mid_0^1 = 1 - \cos(1)$$

תרגיל 3:

חשבו את $\iint_D \sin(x+y)\mathrm{dxdy}$ בתחום $D = \left\{x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

פתרון:

נשים לב שהפונקציה $f(x,y) = \sin(x+y)$ מקיימת $f(-x,-y) = -f(x,y)$ (פונקציה אי זוגית ביחס לשני המשתנים בבת אחת). מצד שני גם התחום D הוא סימטרי במובן של אם $(x,y) \in D$ אז גם $(-x,-y) \in D$ ולכן נצפה שהאינטגרל יהיה אפס. נוכיח גם ע"י חישוב:

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin(x+y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = -\int_{-1}^{1}\left[\cos(x+y)\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx} = -\int_{-1}^{1}\left[\cos(x-\sqrt{1-x^2})-\cos(x+\sqrt{1-x^2})\right]\mathrm{dx}$$

עתה קל לראות שהפונקציה $g(x) = \cos(x-\sqrt{1-x^2})-\cos(x+\sqrt{1-x^2})$ היא אי זוגית, כלומר $g(-x) = -g(x)$ ו $[-1,1]$ הוא תחום סימטרי, ולכן נקבל שהאינטגרל הוא אפס.

תרגיל 4:

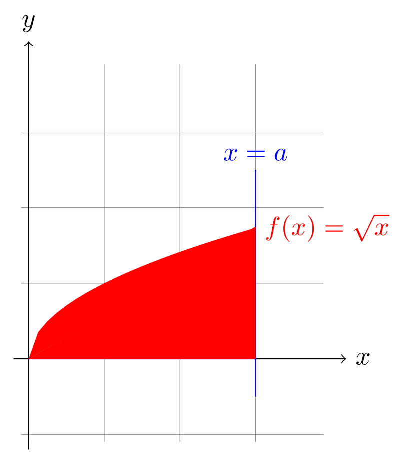
חשבו את $a \geq 0 \quad ; \quad I(a) = \int_0^a \arctan(\sqrt{x})\mathrm{dx}$. (רמז - אינטגרלים כפולים!)

פתרון 1:

נשים לב ש

$$\int_0^b \frac{\mathrm{dy}}{1+y^2} = \arctan(b) - \arctan(0) = \arctan(b)$$

ולכן $I(a) = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{dy}}{1+y^2}\right]\mathrm{dx}$. נרצה להחליף סדר אינטגרציה, ולכן תחילה נבדוק מהו התחום - x נע בין 0 ל a, ועבור x קבוע בתחום הזה, y נע בין העקומים $y=0$ ועד $y=\sqrt{x}$. כלומר:



אם מחליפים את הסדרת אז y נע בין 0 ל $\sqrt{a}$ ו x נע בין $y = \sqrt{x}$, כלומר $x = y^2$ עד $x = a$.

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{dy}}{1+y^2}\right]\mathrm{dx} = \int_0^{\sqrt{a}}\left[\int_{y^2}^{a}\frac{\mathrm{dx}}{1+y^2}\right]\mathrm{dy} = \int_0^{\sqrt{a}}\frac{a-y^2}{1+y^2}\mathrm{dy} = \int_0^{\sqrt{a}}\frac{a+1-1-y^2}{1+y^2}\mathrm{dy} \\
&= \int_0^{\sqrt{a}}\left(\frac{a+1}{1+y^2}-1\right)\mathrm{dy} = \left[(a+1)\arctan(y)-y\right]_0^{\sqrt{a}} = (a+1)\arctan(\sqrt{a})-\sqrt{a}
\end{aligned}$$

פתרון 2:

ניתן לנסות לפתור באמצעות טורים (רק בתחום ההתכנסות ובמקרה שלנו זה יהיה $0 \le a \le 1$). ניזכר תחילה ש $\arctan(t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$ כאשר ההתכנסות היא במ"ש ב $[-1,1]$ ולכן $\arctan(\sqrt{x}) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{x})^{2n+1}$ בתחום $[0,1]$ כאשר גם פה ההתכנסות היא במ"ש. מכאן מקבלים ש

$$\begin{aligned}\int_0^a \arctan(\sqrt{x})\mathrm{dx} &= \int_0^a \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{x})^{2n+1}\mathrm{dx} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{dx} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{a^{n+\frac{3}{2}}}{n+\frac{3}{2}}\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\sqrt{a}^{2n+3}}{2n+3}\mathrm{dx}\end{aligned}$$

נותר לבדוק מהו הטור $f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{2n+3} x^{2n+3}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} = x\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x\arctan(x) \\ f(x) &= \int x\arctan(x)\mathrm{dx} = x^2\arctan(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{dx} = x^2\arctan(x) - \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{dx} \\ &= x^2\arctan(x) - x + \arctan(x) + C = \left(x^2+1\right)\arctan(x) - x + C\end{aligned}$$

הצבה של $x=0$ נותנת $f(x)=0$ ולכן $C=0$. מחפשים את $f(\sqrt{a})$ ומקבלים

$$.f(\sqrt{a}) = (a+1)\arctan(\sqrt{a}) - \sqrt{a}$$

הערה 1: תהא $f(x,t)$ פונקציה כלשהי ורוצים לחשב את $F(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{dt}$. בשיטה לחישוב עם נגזרת מתחת לסימן האינטגרל עשינו את הצעדים הבאים:

1. גזרנו $F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,t)\mathrm{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{dt}$.
2. קיווינו שהפונקציה שהתקבלה מספיק יפה ועשינו לה אינטגרל כדי לקבל חזרה את $F(x)$, כלומר

$$.F(s) - F(0) = \int_0^s F'(x)\mathrm{dx} = \int_0^s F'(x)\mathrm{dx} = \int_0^s \left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{dt}\right]\mathrm{dx}$$

נראה שהשוויון הנ"ל נכון גם בלי להשתמש בנגזרת מתחת לסימן האינטגרל, ובמקום זאת נשתמש בהחלפת סדר אינטגרלים נשנים.

$$\int_0^s \left[\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{dt}\right]\mathrm{dx} = \int_a^b \left[\int_0^s \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dt} = \int_a^b [f(s,t) - f(0,t)]\,\mathrm{dt} = F(s) - F(0)$$

הערה 2: אם $f(x,y)$ לא רציפה אז לא בהכרח אפשר להפוך את סדר האינטגרציה. למשל עבור

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

יש אי רציפות רק בראשית, והפונקציה מקיימת ש

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} = \frac{\pi}{4} \qquad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = -\frac{\pi}{4}$$

החלפת משתנים

יהיו $D,D' \subseteq \mathbb{R}^2$ שני תחומים ושתי פונקציות $x(u,v),y(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך שהצמצום שלהן ל D' הוא חח"ע ועל D. נניח בנוסף ש $0 \neq \left|det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right| = \left|det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right| = J(u,v)$ לכל נקודה $(u,v)\in D'$ אז מתקיים ש

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \iint_{D'} f(\,x(u,v),\ y(u,v)\,)\cdot J(u,v)\cdot \mathrm{dudv}$$

תרגיל 5:

חשבו את האינטגרלים הבאים

$$\int_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{dxdy} \qquad D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1 \quad y\ge x\}$$

$$\int_{D_2} e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{dxdy} \qquad D_2=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ 1\le x+y\le 2\}$$

פתרון:

1. נשתמש בהצבה של קורדינטות פולריות. נמצא תחילה את התחום החדש (ע"י הצבת הקור' החדשות בתנאים של התחום D_1) ואת היעקוביאן.

$$(x,y) = r(\cos(\theta),\sin(\theta)) \quad\Rightarrow\quad D'_1=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1 \quad \sin(\theta)\ge\cos(\theta)\}=\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1 \quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\right\}$$

$$\frac{\partial x,y}{\partial r,\theta}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{\partial x,y}{\partial r,\theta}\right|=r$$

לכן סה"כ נקבל

$$\int_{D'_1}(x^2+y^2)\mathrm{dxdy}=\int_0^1\left[\int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^2\cdot r\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{dr}=\int_0^1\left[r^3\pi\right]\mathrm{dr}=\frac{\pi}{4}$$

2. כדי לפשט את הפונקציה באינטגרנד נבחר את ההצבה $u=x+y$, $v=x-y$, או לחלופין $x=\frac{u+v}{2}$ ו $y=\frac{u-v}{2}$.

$$\begin{aligned} u &= x+y,\ v=x-y \quad\Rightarrow\quad D'_2=\left\{(u,v)\mid \frac{u+v}{2}\ge 0,\ \frac{u-v}{2}\ge 0,\ 1\le u\le 2\right\}\\ &= \{(u,v)\mid v\ge -u,\ u\ge v,\ 1\le u\le 2\}\\ & \quad J(u,v)=\left|\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right|=\left|\det\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

שימו לב שגם התחום המקורי וגם התחום החדש הם טרפזים, כאשר היחס בינהם הוא $2:1$. זה לא מפתיע, כי המטריצת המעבר $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ מקיימת $AA^T=2I$, כלומר זו מטריצה שהיא איזומטריה ואז מתיחה פי 2.

$$\int_{D_2}e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{dxdy}=\int_1^2\left[\int_{-u}^{u}\frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}\mathrm{dv}\right]\mathrm{du}=\frac{1}{2}\int_1^2\left[ue^{\frac{v}{u}}\right]_{v=-u}^{u}\mathrm{du}=\frac{1}{2}\int_1^2 u\left(e-e^{-1}\right)\mathrm{du}=\frac{3}{4}\left(e-e^{-1}\right)$$

הערה 1: ההעתקה $x(u,v),y(u,v):D'\to D$ לא חייבת להיות "ממש" חח"ע ועל. למשל, בתרגיל הראשון היא לא חח"ע כי $x(0,\theta)=0$ לכל θ. זה אינו משפיע על החישוב מאחר והקבוצה $\{(0,\theta)\}$ היא קבוצה ממידה אפס (זהו קו ב $\mathbb{R}^2$ ולכן אין לו שטח). באותה צורה מספיק שהתמונה תהיה "כמעט" כל D, כלומר הכל פרט לקבוצה ממידה אפס.

הערה 2: לעיתים קל יותר למצוא את ההעתקות ההפוכות $u:=u(x,y)$ ו $v:=v(x,y)$ ולהוכיח בצורה כלשהי שקיימות העתקות $x:=x(u,v),y:=y(u,v)$ שהן חח"ע ועל בלי ממש למצוא אותן. במקרה זה (כפי שרואים באינפי 3) מתקיים ש

$$\left|\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right|=\left|\det\left(\frac{\partial u,v}{\partial x,y}\right)\right|^{-1}$$

למרות שצריך לשים לב שבדרך אגף שמאל יהיה נתון במשתנים u,v בעוד שאגף ימין במשתנים x,y. למשל, בתרגיל השני מתקיים ש

$$\left|\det\left(\frac{\partial u,v}{\partial x,y}\right)\right|=\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right|=2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left|\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right|.$$

תרגיל 6:

חשבו את $\iint_D\sqrt{xy}\mathrm{dxdy}$ כאשר D התחום החסום בין $y=\frac{9}{x},\ y=\frac{4}{x}$, $y^2=3x$ ו $y^2=6x$.

פתרון:

נבחר הצבה כך שהתחום החדש יהיה יותר יפה. נסמן $u=yx$ ו $v=\frac{y^2}{x}$ ואז התחום החדש יהיה $D'=\{(u,v)\mid\ 4\le u\le 9,\ 3\le v\le 6\}$ שהוא מלבן. כדי למצוא את x,y בפונקציה של u,v נשים לב ש $uv=y^3$ ולכן $y=\sqrt[3]{uv}$ ואז $x=\frac{u}{y}=\frac{u}{\sqrt[3]{uv}}$ (לשים לב שבתחום שלנו $uv\neq 0$). מאחר וקיבלנו העתקות הופכיות אחת לשנייה אז הן חח"ע ועל בין D ו D'.

במקום לחשב את היעקוביאן $\frac{\partial x,y}{\partial u,v}$, נחשב את $\frac{\partial u,v}{\partial x,y}$ שנראה יותר פשוט (אין שורש שלישי) ואז ניקח את ההופכי:

$$\det\left(\frac{\partial u,v}{\partial x,y}\right)=\det\begin{pmatrix}y & x\\ -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x}\end{pmatrix}=3\frac{y^2}{x}=3v$$

$$\iint_D\sqrt{xy}\mathrm{dxdy}=\iint_{D'}\sqrt{u}(3v)^{-1}\mathrm{dudv}=\frac{1}{3}\int_4^9\sqrt{u}\mathrm{du}\int_3^6\frac{1}{v}\mathrm{dv}=\frac{1}{3}u^{3/2}\mid_4^9\ln(v)\mid_3^6.$$

תרגיל 7:

חשבו את האינטגרל $\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$ כאשר $f(x,y)=\frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}$ ו התחום נתון ע"י
$D=\left\{(x,y)\mid 1-x\le y\le 4-x,\quad 4x^3\le y\le 16x^3\right\}$

פתרון:

נשים לב שאם $x\le 6$ אז $y\le 16x^3\le 0$ ואז $x+y\le 0$, אבל מצד שני צריך להתקיים ש $x+y\ge 1$ ונקבל סתירה. לכן מקבלים שאם $(x,y)\in D$ אז $x>0$ ולכן גם $y\ge 4x^3>0$. נעביר תחילה למערכת קורדינטות יותר קלה $u=x+y$, $v=\frac{y}{x^3}$ (לא חילקנו באפס!) ואז $D'=\{(u,v)\mid 1\le u\le 4,\quad 4\le v\le 16\}$

$$\frac{\partial u,v}{\partial x,y}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3\frac{y}{x^4} & \frac{1}{x^3}\end{pmatrix}\quad J^{-1}=\left(\frac{1}{x^3}+3\frac{y}{x^4}\right)^{-1}\quad\to\quad J^{-1}=\frac{x^4}{x+3y}$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}=\iint_{D'}\frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}=\frac{x^4}{x+3y}\mathrm{dudv}=\int_1^4\left[\int_4^{16}e^v\mathrm{dv}\right]\mathrm{du}=4(e^{16}-e^4)$$

נותר להראות שבאמת קיימות העתקות $x = x(u,v)$ ו $y = y(u,v)$ שהן חח"ע ועל. נשים לב ש $vx^3 = y = u - x$ ולכן $x^3 + \frac{1}{v}x - \frac{u}{v} = 0$ (לא חילקנו באפס!). זהו פולינום מדרגה 3 ולכן יש לו לפחות שורש אחד. אם היו לפולינום שני שורשים שונים, אז לנגזרת היה גם שורש אבל הנגזרת שווה ל $3x^2 + \frac{1}{v} > 0$ כי $v > 0$ ולכן יש שורש יחיד שנסמנו ב $x(u,v)$. נסמן עתה $y(u,v) = u - x(u,v)$ וקיבלנו העתקות מ u,v ל x,y שהן ההופכיות להעתקות $u = x+y$ ו $v = \frac{y}{x^3}$ (כלומר $x(u(x,y),v(x,y)) = x$ ו $y(u(x,y),v(x,y)) = y$). ההרכבה בכיוון ההפוך היא גם הזהות כי לפי ההגדרה מקבלים ש

$$\begin{aligned}
u(x(u,v),y(u,v)) &= x(u,v) + y(u,v) = x(u,v) + (u - x(u,v)) = u \\
v(x(u,v),y(u,v)) &= \frac{y(u,v)}{x(u,v)^3} = \frac{v \cdot y(u,v)}{v \cdot x(u,v)^3} = \frac{v \cdot (u - x(u,v))}{u - x(u,v)} = v
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהגדרה של $x(u,v)$ כשורש של הפולינום $vx^3 = u - x$. סה"כ קיבלנו שהפונקציות הופכיות לשני הכיוונים ולכן החישוב שעשינו למעלה נכון.

שימושים לאינטגרל כפול

- שטח של תחום D - $A(D) = \iint_D 1\mathrm{dxdy}$
- עבור צפיפות $\rho(x,y)$ בתחום D, חישוב המסה ע"י $\iint_D \rho(x,y)\mathrm{dxdy}$
- מרכז הכובד

$$\hat{x} = \frac{1}{A(D)} \iint_D x\rho(x,y)\mathrm{dxdy} \qquad \hat{y} = \frac{1}{A(D)} \iint_D y\rho(x,y)\mathrm{dxdy}$$

- נפח בין גרפים של שתי פונקציות $f(x,y), g(x,y)$ בתחום D נתון ע"י

$$\iint_D (f(x,y) - g(x,y))\mathrm{dxdy}$$

תרגיל 8 :

חשבו את הנפח של יהלום הניתן ע"י $|x| + |y| + |z| \le 1$.

פתרון:

הפני שטח של היהלום מורכבים מהחלק העליון ($z \ge 0$) והחלק התחתון ($z \le 0$) וצריך לחשב את הנפח בין שני הגרפים. עבור החלק העליון הגרף של הפונקציה יתקבל ע"י $z = 1 - |x| - |y|$ ומסימטריה מספיק לחשב את הנפח מתחת לפונקציה הזהות (ומעל $z = 0$) ולכפול ב 2 . בנוסף מספיק לחשב את הנפח ברביע החיובי ($x, y \ge 0$) ולכפול סה"כ ב 8.

לכן קיבלנו סה"כ את הפונקציה $z(x,y) = 1 - x - y$ (כל המשתנים אי שליליים), $x, y \ge 0$ (נמצאים ברביע החיובי) ו $x + y \le 1$ (כי אחרת $|x| + |y| + |z| > 1$). מכאן מקבלים שהתחום הוא $0 \le x, y$ ו $x + y \le 1$.

$$\begin{aligned}
\iint_D (1 - x - y)\mathrm{dxdy} &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1 - x - y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \mid_{y=0}^{y=1-x}\right]\mathrm{dx} \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\mathrm{dx} = -\frac{(1-x)^3}{6} \mid_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

תרגיל 9:

מצאו את המסה של גוף עם צפיפות $\rho(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ בתחום $x^2 + y^2 \ge 4 \quad x^2 + y^2 \le 4x,$.

פתרון: נשים לב תחילה שהתחום שקול ל

$$x^2+y^2\le 4x \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+4+y^2\le 4 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+y^2\le 4$$

נבצע החלפת קורדינטות $(x,y)=r(\cos(\theta),\sin(\theta))$ ומקבלים שהתחום החדש הוא

$$r\ge 2 \qquad r^2\le 4r\cos(\theta) \ \Rightarrow \ r\le 4\cos(\theta)$$

ובפרט נקבל ש $2\le r\le 4\cos(\theta)$. כדי שעבור בחירה של θ יהיה r שמקיים את האילוצים, אנחנו חייבים שיתקיים ש $\cos(\theta)\ge\frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$. מכאן מקבלים ש

$$\int_D \rho(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[\int_2^{4\cos(\theta)}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{dr}\right]\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[4\cos(\theta)-2\right]\mathrm{d}\theta=4\left[\sin(\theta)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}-\frac{4\pi}{3}=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$$

תרגיל 10:

נתון מעגל יחידה $D=\left\{x^2+y^2\le 1\right\}$ עם צפיפות 1 בחלק $x\ge 0$ וצפיפות 2 בחלק $x<0$. מצאו את מרכז המסה של המעגל.

פתרון:

בשביל מרכז מסה צריך לחשב את המסה : $\iint_D \rho(x,y)$ ואת האינטגרלים $\iint_D x\rho(x,y)$ ו $\iint_D y\rho(x,y)$.

נשים לב תחילה שמסה של מעגל ברדיוס r בצפיפות c זה בדיוק שטח המעגל כפול c, כלומר $c\pi r^2$. בפרט מסה של מעגל יחידה עם צפיפות 1 היא π ושל חצי מעגל היא $\frac{1}{2}$. החצי מעגל השני הוא עם צפיפות 2 ולכן כבד פי 2 , כלומר המסה שלו היא 1 וסה"כ המסה של כל המעגל היא $\frac{3}{2}$.

- נחשב עתה את קורדינטת ה x של מרכז הכובד.

$$\begin{aligned}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{dxdy} &= \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x<0}} x\cdot 2\mathrm{dxdy}+\iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0}} x\cdot 1\mathrm{dxdy}\\ &= 2\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\mathrm{dydx}+\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\mathrm{dydx}\\ &= 2\int_{-1}^0 2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}+\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}\end{aligned}$$

נעשה הצבה $t=1-x^2$ ואז $\mathrm{dt}=-2x\mathrm{dx}$ (שימו לב לגבולות אינטגרציה):

$$= \quad -2\int_0^1\sqrt{t}\mathrm{dt}-\int_1^0\sqrt{t}\mathrm{dt}=-2\int_0^1\sqrt{t}\mathrm{dt}+\int_0^1\sqrt{t}\mathrm{dt}=-\int_0^1 t^{1/2}\mathrm{dt}=-\frac{t^{3/2}}{3/2}\mid_0^1=-\frac{2}{3}$$

לכן סה"כ הקורדינטת x תהיה $\frac{\iint x\rho(x,y)}{\iint\rho(x,y)}=\frac{-2/3}{3/2}=-\frac{4}{9}$. שימו לב שהקורדינטה היא שלילית (וציפינו לכך כי יש יותר צפיפות בחלק השלילי של המעגל) והיא נמצאת בתוך המעגל יחידה (אם היינו מקבלים נקודה מחוץ למעגל אז בוודאי שהיא לא יכולה להיות מרכז המסה מה שאומר שיש טעות בחישוב).

- נחשב עתה את קורדינטת ה y של מרכז הכובד. מאחר שעבור הציר הזה יש סימטריה אז נצפה (ונקבל) שהמרכז מסה נמצא ב $y=0$. הסיבה שזה קורה באינטגרל היא ש $g(x,y)=y\rho(x,y)$ היא פונקציה אי זוגית ב y, כלומר $g(x,-y)=-g(x,y)$ ובנוסף התחום D (מעגל היחידה) הוא סימטרי ב y, כלומר $(x,y)\in D$ אמ"מ $(x,-y)\in D$.

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} g(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_{-1}^1\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} g(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}=\int_{-1}^1 0\mathrm{dx}=0$$

כאשר השתמשנו בכך שעבור x קבוע הפונקציה $g(x,y)$ (כפונקציה של y) היא אי זוגית. ההוכחה עבור g ו D כלליים יותר כמו שכתוב למעלה היא דומה.

תרגיל 11:

נתונים התחומים $V_1 = \left\{(x,y,z) \mid \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2^2}\right\}$, $V_2 = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$. חשבו את הנפח של $V_1 \cap V_2$

פתרון:

מסמנים ב $D = \left\{(x,y) \mid \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2^2}\right\}$ ואז הנפח יהיה

$$2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{dxdy}$$

נעבור לקורדינטות פולריות

$$\frac{1}{4} \geq x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \quad \Rightarrow \quad x \geq x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad r\cos(\theta) \geq r^2 \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) \geq r$$

מאחר ו $r \geq 0$ אז מקבלים ש $\cos(\theta) \geq 0$, כלומר $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ואז

$$\begin{aligned}(*) &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{\cos(\theta)}\sqrt{1-r^2}r\mathrm{dr}\right]\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{3/2}\right]_0^{\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[1-\left|\sin^3(\theta)\right|\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{3}\left[\pi - \frac{4}{3}\right] = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\end{aligned}$$