תורת המשחקים

תרגיל מס 5

5.12.12

מגישים: I

II

10

1)

5	7	10	5
6	7	9	6
14	11	0	0
14	11	10	

maxmin=6

minmax=10

למשחק אין ערך בתכסיסים טהורים, ניתן לשים לב שהעמודה השנייה נשלטת חזק ע"י עירוב העמודות האחרות באופן הבא:

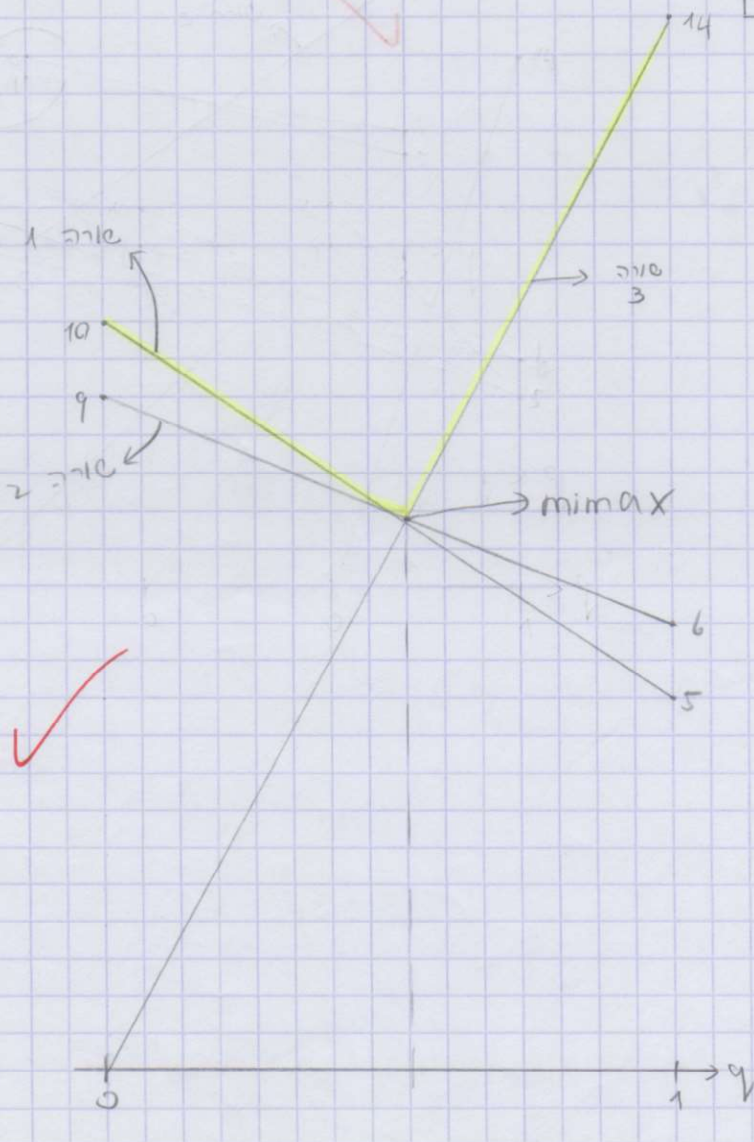
$$\frac{5}{7}\begin{bmatrix}5\\6\\14\end{bmatrix} + \frac{2}{7}\begin{bmatrix}10\\9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\frac{3}{7}\\6\frac{6}{7}\\10\end{bmatrix} \begin{matrix}<\\<\\<\end{matrix} \begin{bmatrix}7\\7\\11\end{bmatrix}$$

לכן ניתן להשמיט את העמודה השנייה, ועדיין לשמור על ערך המשחק ועל קבוצת התכסיסים האופטימליים.

5	10
6	9
14	0

נצייר דיאגרמה המתאימה לכל $0\le q\le 1$, מה מקבל שחקן 2 בבחירה $(q,1-q)$ מול כל אחת מהשורות:

מקסימום -



$14q = 9-3q$

$q = \frac{9}{17}$

$$\boxed{V^* = 7\frac{7}{17} = \frac{126}{17}}$$

קיבלנו כי ערך המשחק בתכסיסים מעורבים הוא: $V^*=\frac{126}{17}$, וכי התכסיס המעורב האופטימלי היחיד של שחקן 2 הוא: $\left(\frac{9}{17},0,\frac{8}{17}\right)$.

נשים לב שהשורה הראשונה אינה משווה, (כי מול התכסיס האופטימלי של שחקן 1 היא נותנת $\frac{125}{17}<V^*$). לכן היא אינה פעילה. כלומר, כל תכסיס אופטימלי של שחקן 1 הוא בהכרח מהצורה: $(0,p,1-p)$.
מכיוון שעמודות 1, 3 הן פעילות, הן גם משוות, ולכן תכסיס אופטימלי של שחקן 1 צריך לתת בדיוק V^* נגד כל אחת מהעמודות הללו. לדוגמה, נגד עמודה 1: $5\cdot 0+6p+14(1-p)=\frac{126}{17} \Longleftarrow p=\frac{14}{17}$.

לסיכום, $V^*=\frac{126}{17}$, התכסיס האופטימלי היחיד של שחקן 1 הוא: $\left(0,\frac{14}{17},\frac{3}{17}\right)$ והתכסיס האופטימלי היחיד של שחקן 2 הוא: $\left(\frac{9}{17},0,\frac{8}{17}\right)$.

2) אז- נניח במטריצה A:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

אם $a_k \geq 0$ אז: $\max\limits_{s\in S}\pi(s,t_k)=a_k \ , \ \min\limits_{t\in T}\pi(s_k,t)=0$

ואם $a_k \leq 0$ אז: $\max\limits_{s\in S}\pi(s,t_k)=0 \ , \ \min\limits_{t\in T}\pi(s_k,t)=a_k$

כי A אלכסונית.

ומכיוון שנתון שיש בין ה-a_i-ים גם מספרים ≥ 0 וגם מספרים ≤ 0, מתקיים:

$$\max_{s\in S}\min_{t\in T}\pi(s,t)=0$$

וגם:

$$\min_{t\in T}\max_{s\in S}\pi(s,t)=0$$

מכאן שלמשחק יש ערך בתכסיסים טהורים: $V^*=0$.

התכסיסים הטהורים האופטימליים של שחקן 1: {בחירת השורה ה-i | $a_i \geq 0$}

התכסיסים הטהורים האופטימליים של שחקן 2: {בחירת העמודה ה-i | $a_i \leq 0$}

ברור כי כל עירוב של תכסיסים טהורים אופטימליים של שחקן כלשהו הוא תכסיס מעורב אופטימלי, כיוון שהוא שומר על רמת הביטחון המקסימלית 0.

כמו כן כל עירוב הכולל תכסיסים טהורים שאינם אופטימליים משנה את רמת הביטחון המקסימלית כך שהיא קטנה מאפס עבור שחקן 1 וגדולה מאפס עבור שחקן 2, ולכן כל עירוב שכזה אינו תכסיס מעורב אופטימלי.

לכן התכסיסים המעורבים האופטימליים של שחקן 1/שחקן 2 הם:
כל עירוב של תכסיסים טהורים אופטימליים של שחקן 1/שחקן 2, המוזכרים לעיל.

ב- ראשית נראה כי כל השורות פעילות!

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

$$a_1, \dots, a_n \qquad maxmin = 0$$

$$0 < minmax = min\{a_1, \dots, a_n\}$$

ברור כי לכל תכסיס מעורב של שחקן 2, רמת הביטחון המקסימלית גדולה ממש מ-0. לכן: $0 < V^*$

נניח בשלילה כי $z_i \in Z_2$ אינה פעילה. כלומר, לכל תכסיס אופטימלי של שחקן 1, השורה i משוחקת בהסתברות אפס. אז עבור תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 1:

$$(P_1, P_2, \dots P_i = 0, \dots, P_n) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i = 0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

מכיון ש- $\{u_1, \dots, u_n\}$ מורכבת מאיברים אי שליליים, מתקיים:

$V^* = 0 = min\{u_1, \dots, u_n\}$. סתירה לכך ש- $0 < V^*$.

לכן כל השורות פעילות (ומכאן גם העמודות).

עבור תכסיס מעורב אופטימלי של שחקן 2 מתקיים:

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_* \\ V_* \\ \vdots \\ V_* \end{pmatrix}$$

כלומר: $a_1 q_1 = a_2 q_2 = \dots = a_n q_n = V^*$. $q_i = \frac{V^*}{a_i}$

וכן: $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{V^*}{a_i} = V^* \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

וקיבלנו כי ערך המשחק הוא:

$$\boxed{V^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}}$$

התכסיס המעורב האופטימלי היחיד של שחקן 2 הוא:

$$\vec{q}^* = \left(\frac{V^*}{a_1}, \frac{V^*}{a_2}, \dots, \frac{V^*}{a_n}\right)$$

נראה כי התכסיס המעורב האופטימלי היחיד עבור שחקן 1 הוא: $\vec{p}^* = \vec{q}^*$:

יהי $\vec{p}^* \in S^*$ תכסיס אופטימלי של שחקן 1, אז מתקיים:

$$(p_1, \dots, p_n)\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

כך ש- $\min(u_1, \dots, u_n) = V^*$

השייך לתכסיס המעורב האופטימלי של שחקן 2 שמצאנו

נניח: $u_k = V^* \Longleftarrow p_k a_k = V^* \Longleftarrow p_k = \frac{V^*}{a_k} = q_k$

אם $p_i \in \vec{p}$ שונה מ-q_i אז מתקיים: $p_i a_i \neq q_i a_i = V^*$

ומכך $V^* = \min(u_1, \dots, u_n)$ ולכן: $p_i a_i > V^*$

$$\Downarrow$$

$$p_i > q_i$$

ולכן אז: $p_i \geq q_i \quad \forall i$, ומכאן ש: $1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \geq \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

ולכן מתקיים שוויון: $p_i = q_i \quad \forall i$.

ולכן התכסיס המעורב האופטימלי היחיד של שחקן 1 הוא:

$$\vec{p}^* = \left(\frac{V^*}{a_1}, \dots, \frac{V^*}{a_n}\right)$$

2 - עבור G ה-a_i-ים שליליים, אז כי הוכחה דומה, עם היפוך של שחקנים 1 ו-2, נקבל כי:

$$V^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

וכי התכסיס המעורב האופטימלי היחיד של שחקנים 1 ו-2 הוא:

$$\vec{p}^* = \vec{q}^* = \left(\frac{V^*}{a_1}, \dots, \frac{V^*}{a_n}\right)$$

(נשים לב כי $V^* < 0$, $a_1, \dots, a_n < 0$)

(ולכן ההסתברויות חיוביות כנדרש)

3) א- פונקציית התשלום היא:

$$\Pi(s_i,t_j)=\begin{cases}\frac{i-j}{N}+\frac{ij}{N^2} & i<j\\ \frac{i-j}{N}-\frac{ij}{N^2} & i>j\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\qquad \begin{matrix} i=0,1,\dots,N\\ j=0,1,\dots,N\end{matrix}$$

ב- נשים לב כי המשחק הוא סימטרי: $|S|=|T|$, $\Pi(s_i,t_j)=-\Pi(s_j,t_i)$

לכן לפי מה שהוכחנו בתרגיל מס' 4, ערך המשחק בתכסיסים מעורבים הוא: $V^*=0$.

ג- $\underline{N=1}$:

p	0	-1	-1
$1-p$	1	0	0
	1	0	maxmin=0
		minmax=0	

למשחק יש ערך בתכסיסים טהורים: $V=0$.

השורה השנייה היא תכסיס טהור אופטימלי גם מעורב של שחקן 1,
העמודה השנייה היא תכסיס טהור אופטימלי גם מעורב של שחקן 2.
נבדוק תכסיסים מעורבים עבור שחקן 1:

$\min\{1-p,-p\}\geq 0 \iff p=0$ (זה התכסיס הטהור שכבר מצאנו).

לכן לשחקן 1 יש תכסיס אופטימלי יחיד - בחירת השורה השנייה. (ולא יותר מאחד)
כפי שהוכחנו בתרגיל מס' 4 עבור משחק סימטרי לשני השחקנים יש אותם תכסיסים מעורבים אופטימליים. לכן גם לשחקן 2 תכסיס אופטימלי יחיד - בחירת העמודה השנייה. (ולא יותר מאחד).

$\underline{N=2}$:

0	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
$\frac{1}{2}$	0	0	0
1	0	0	0
1	0	0	maxmin=0
	minmax=0		

למשחק יש ערך בתכסיסים טהורים: $V=0$.
השורה הראשונה נשלטת חזק ע"י שורות 2 ו-3,
והעמודה הראשונה נשלטת חזק ע"י עמודות 2 ו-3.

לכן נקבל למשחק:

0	0
0	0

כיוון ברור כי כל תכסיס מעורב הוא אופטימלי, לכן:

התכסיסים המעורבים האופטימליים של שחקן 1 הם: $(0,p,1-p)$ $\forall p\in[0,1]$

התכסיסים המעורבים האופטימליים של שחקן 2 הם: $(0,q,1-q)$ $\forall q\in[0,1]$

כמו כן נציין כי התכסיסים הטהורים האופטימליים של השחקנים הם:

עבור שחקן 1 - בחירת השורה השנייה או השלישית.

עבור שחקן 2 - בחירת העמודה השנייה או השלישית.

$N=3$:

0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-1
$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

maxmin $=0$

minmax $=0$

למשחק יש ערך בתכסיסים טהורים:

$V=0$.

שורה 3 היא תכסיס טהור אופטימלי של שחקן 1.

עמודה 3 היא תכסיס טהור אופטימלי של שחקן 2.

נשים לב כי שורות 1 ו-2 נשלטות חזק ע"י שורות 3 ו-4, וכן כי עמודות 1 ו-2 נשלטות חזק ע"י עמודות 3 ו-4. לכן נקבל את המשחק:

p	0	$\frac{1}{3}$	0
$1-p$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
	0	$\frac{1}{3}$	

maxmin $=0$

minmax $=0$

נבדוק תכסיסים מעורבים:

$$\min\left\{\frac{p}{3}-\frac{1}{3}, \frac{p}{3}\right\} \geq 0 \iff p=1,$$

לכן לשחקן 1 אין תכסיסים מעורבים אופטימליים מלבד התכסיס הטהור שכבר מצאנו, וכן גם לשחקן 2.

$N=4$:

0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	-1
$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	

maxmin $=0$

minmax $=0$

למשחק יש ערך בתכסיסים טהורים $V=0$.

שורה 3 היא תכסיס טהור אופטימלי של שחקן 1 ועמודה 3 היא תכסיס טהור אופטימלי של שחקן 2.

משיקולי עמודות ושורות נשלטות חזק נוכל לקבל את המשחק הבא:

0	$\frac{1}{8}$	0
$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$	0

שוב לפי שליטה נוכל לצמצם

משיקולים דומים למשחק הבא:

0	$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{8}$	0

שניתן לצמצם למשחק הבא:

0

לכן לשחקן 1 תכסיס אופטימלי יחיד בתכסיסים מעורבים: בחירת השורה השלישית.

לשחקן 2 תכסיס אופטימלי יחיד בתכסיסים מעורבים: בחירת העמודה השלישית.

$\underline{n=5}$:

למשחק אין ערך בתכסיסים טהורים!

0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	-1	-1
$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{25}$	$-\frac{7}{25}$	$-\frac{11}{25}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{25}$	0	$\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{25}$	$-\frac{1}{25}$	0	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{2}{25}$	$-\frac{7}{27}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{25}$
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{3}{5}$	

$maxmin = -\frac{1}{25}$

$minmax = \frac{1}{25}$

מחיקת שורות ועמודות נשלטות חזק נקבל:

P_1	0	$\frac{1}{25}$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{5}$
P_2	$-\frac{1}{25}$	0	$\frac{7}{25}$	$\frac{1}{5}$
P_3	$\frac{2}{25}$	$-\frac{7}{25}$	0	$\frac{3}{5}$
P_4	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0

כעת נניח כי $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3,p_4)$ הוא תכסיס אופטימלי

של שחקן 1 במשחק המצומצם החדש שהתקבל.

אזי מתקיים: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$ ומכאן $\min_{1\le i\le 4} V_i \ge 0$

כלומר לכל $i=1,2,3,4$, $V_i \ge 0$.

$$(P_1, P_2, P_3, P_4)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{25} & 0 & \frac{7}{25} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{25} & -\frac{7}{25} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = (V_2, V_2, V_3, V_4)$$

כלומר מתקיים:

$$V_1 = -\frac{1}{25}p_2 + \frac{2}{25}p_3 + \frac{1}{5}p_4 \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$$

$$V_2 = \frac{1}{25}p_1 - \frac{7}{25}p_3 - \frac{1}{5}p_4 \geq 0$$

$$V_3 = -\frac{2}{25}p_1 + \frac{7}{25}p_2 - \frac{3}{5}p_4 \geq 0$$

$$V_4 = -\frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{3}{5}p_3 \geq 0$$

ומדרישות אלו נקבל כי בהכרח $p_1 = \frac{5}{11}, p_2 = \frac{5}{11}, p_3 = 0, p_4 = \frac{1}{11}$

לכן התכסיס המעורב $\left(0, 0, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}, 0, \frac{1}{11}\right)$ הוא התכסיס האופטימלי היחיד של שחקן 1.

לכן גם התכסיס המעורב $\left(0, 0, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, 0, \frac{1}{11}\right)$ הוא התכסיס האופטימלי היחיד של שחקן 2.

נסכם בטבלה:

N	תכסיס מעורב אופטימלי (של שני השחקנים)
1	לירות אחרי צעד אחד
2	לירות אחרי צעד אחד בהסתברות p ואחרי 2 צעדים בהסתברות $1-p$ (כל $0 \leq p \leq 1$)
3	לירות אחרי 2 צעדים
4	לירות אחרי 2 צעדים
5	לירות אחרי שני צעדים בהסתברות $\frac{5}{11}$, לירות אחרי שלושה צעדים בהסתברות $\frac{2}{11}$, לירות אחרי חמישה צעדים בהסתברות $\frac{1}{11}$.