חשבון אינפיניטסימלי חורף 2016־2017

תרגיל בית מס' 2

חלק א'

שאלה 1
א) הראו כי הפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ אינה גזירה ב־$(0,0)$.
ב) הראו כי אם פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מקיימת $|f(x)|\leq||x||^2$ אז היא גזירה ב־0.

שאלה 2
פונקציה $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ הינה ביליניארית אם ל־ $x,x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$, $y,y_1,y_2\in\mathbb{R}^m$ ו־$a\in\mathbb{R}$ מתקיים
i) $f(ax,y)=af(x,y)=f(x,ay)$
ii) $f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)$
iii) $f(x,y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2)$
א) הראו כי אם f הינה בילינארית אז $\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|}=0$.
כאן הסימון $|\cdot|$ משמש לתיאור נורמה כללית על המרחבים המתאימים, מבלי להתייחס להגדרה הספציפית של הנורמה (שהרי כולן שקולות).
ב) הוכיחו $Df(a,b)(x,y)=f(a,y)+f(x,b)$ ((a,b) נקודה ב־$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ בה מחושבת הנגזרת).

שאלה 3
תהיינה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ו־ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ מוגדרות על ידי:
$g(x,y)=(2ye^{2x},xe^y)$
$f(x,y)=(3x-y^2,2x+y,xy+y^3)$
א) הראו כי בסביבה של $(0,1)$ g מעתיקה חח"ע ועל סביבה של $(2,0)$.
ב) מצאו $D(f\circ g^{-1})$ בנקודה $(2,0)$.

שאלה 4
בהרצאה ראיתם כי אם $f:A\to\mathbb{R}^n$ הינה ממחלקה $C^1(A)$ וחח"ע על A וכך ש־$Df(x)$ אינה סינגולרית לכל $x\in A$, אז הקבוצה $f(A)$ פתוחה ב־$\mathbb{R}^n$ והפונקציה ההפכית $f^{-1}:f(A)\to A$ הינה ממחלקה $C^1(f(A))$. וודאו כי הינכם מבינים ההוכחה והכלילו: אם f ממחלקה $C^r(A)$ כאשר $r>1$, אז f^{-1} הינה ממחלקה $C^r(f(A))$.

שאלה 5
א) הראו כי אם הנגזרת של פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הינה מוגדרת וחיובית ממש בכל נקודה, אז הפונקציה חח"ע.
א) הוכיחו/הפריכו: אם כל האיברים של מטריצת הנגזרת הינם חיוביים ממש, אזי הפונקציה היא חד־חד ערכית

חלק ב'

שאלה 6

תהא A קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^{k+n}$. תהא $0 \neq f : A \to \mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה.
נכתוב f בצורה $f(x,y)$ כאשר $x \in \mathbb{R}^k$ ו־$y \in \mathbb{R}^n$, ואז Df נרשמת
בצורה $Df = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}]$. נניח כי ישנה פונקציה $g : B \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת
על קבוצה פתוחה $B \subset \mathbb{R}^k$ וממחלקה $C^1(B)$, כך ש־ $f(x,g(x)) = 0$
וכן $[\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))]$ הפיכה לכל $x \in B$. הוכיחו כי אז לכל $x \in B$ מתקיים:
$Dg(x) = -[\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))]^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))$.

שאלה 7

תהא $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ממחלקה C^1, ונניח כי $f(2,-1) = -1$.
נגדיר
$G(x,y,u) = f(x,y) + u^2$
וכן
$H(x,y,u) = ux + 3y^3 + u^3$.
למשוואות $G(x,y,u) = 0$ ו־ $H(x,y,u) = 0$ קיים פתרון $(x,y,u) = (2,-1,1)$.
א) אלו תנאים על Df מבטיחים כי קיימות פונקציות ממחלקה C^1
$x = g(y)$ ו־$u = h(y)$ המוגדרות על קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ המקיימות שתי המשוואות
הנ"ל, וכך ש־ $g(-1) = 2$ וכן $h(-1) = 1$?
ב) תחת הנחות סעיף קודם, ובהנחה ש־ $Df(2,-1) = [1 \ \ -3]$ מצאו
$g'(-1)$ וכן $h'(-1)$.

שאלה 8

יהא $n \geq 1$ מספר שלם. נניח כי $b_i, a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (כאשר $i,j = 1..n$) הינן
פונקציות גזירות, ונניח כי $det(a_{ij}(t)) \neq 0$ לכל $t \in \mathbb{R}$. נניח גם כי
$s_1, ..., s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הינן הפונקציות הפותרות את המשוואות
$i = 1, ..., n \quad \sum_{j=1}^n a_{ji}(t)s_j(t) = b_i(t)$.
הראו כי הפונקציות $s_i(t)$ הינן גזירות ומצאו $s_i'(t)$.

שאלה 9

תהא $f : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ ממחלקה C^1. נניח כי $f(a) = 0$ וכן ל־$Df(a)$
דרגה n. הראו כי אם c נקודה ב־$\mathbb{R}^n$ קרובה מספיק ל־0, אז למשוואה
$f(x) = c$ יש פתרון.

שאלה 10

א) נניח ש־ $b^2 - 4ac > 0$ ונסמן ב־ x_1, x_2 את פתרונות המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$.
בהינתן $\epsilon > 0$ מצאו δ התלוי ב־a,b,c,ϵ כך שאם
$|c - c'|, |b - b'|, |a - a'|$ כולם קטנים מ־δ אז הפתרונות x_1', x_2' של המשוואה
המתאימה, מקיימים $|x_1 - x_1'|, |x_2 - x_2'| < \epsilon$.
ב) חיזרו על סעיף א' עבור המשוואה $a_nx^n + ... + a_1x + a_0 = 0$ עם שורשים פשוטים
(לא להיבהל אם יוצא מעט "מלוכלך")
ג) תארו במילים ובצורה לא פורמלית מה קורה כאשר מתקרבים לאפסים המרובים.