מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים

תרגיל בית 7

27/12/2016

רן קירי - 311532238
קבוצת תרגול – 11

שאלה 1:

נתון $(\mathbb{R},\tau)$ מרחב טופולוגי כאשר $\mathbb{R}$ קבוצת הממשיים ו-τ הינה הטופולוגיה האוקלידית. מגדירים את $\mathbb{R}^\infty$ להיות קבוצת כל הסדרות הממשיות. כמו כן, יהיו τ_{box},τ_{prod} טופולוגיות התיבות והמכפלה על $\mathbb{R}^\infty$. לכל $i\in\mathbb{N}$, π_i היא ההטלה הטבעית – לכל $\{x_n\}_{n=1}^\infty\in\mathbb{R}^\infty$ מתקיים $\pi_i(\{x_n\}_{n=1}^\infty)=x_i$.

א. נרצה להראות כי בהנתן $D:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^\infty$ המוגדרת על ידי $D(x)=(x,x,\cdots)$ לכל $x\in\mathbb{R}$, נובע כי לכל $i\in\mathbb{N}$, הפונקציה:

$$\pi_i\circ D:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$$

רציפה ביחס לטופולוגיה τ על $\mathbb{R}$, אך ש-D אינה רציפה כהעתקה בין $(\mathbb{R},\tau)$ ל-$(\mathbb{R}^\infty,\tau_{box})$.

<u>רציפות $\pi_i\circ D$</u> - תהא סביבה פתוחה $U\in\tau$, נשים לב כי לכל $i\in\mathbb{N}$:

$$(\pi_i\circ D)^{-1}(U)=\{x\in\mathbb{R}|(\pi_i\circ D)(x)\in U\}=\{x\in\mathbb{R}|\pi_i(D(x))\in U\}=\{x\in\mathbb{R}|\pi_i(\{x\}_{n=1}^\infty)\in U\}$$

$$\{x\in\mathbb{R}|x\in U\}=\mathbb{R}\cap U=U$$

ולכן, היות ו-$U\in\tau$, נסיק כי $\pi_i\circ D$ אכן רציפה ביחס ל-τ על $\mathbb{R}$. (כמו כן, על אף העבודה ביחס להגדרה הישרה של רציפות, נקל לראות כי פונקציה זו כמוה כפונקציית הזהות, ולכן בפרט רציפה).

<u>אי רציפות D</u> – נגדיר את הקבוצה:

$$U=\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$$

קבוצה זו אכן פתוחה כמכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות מ-τ על $\mathbb{R}$, ולכן בפרט $U\in\tau_{box}$ (כמכפלה קרטזית של תתי קבוצות של $\mathbb{R}$, על פי ההגדרה – והוכחה עבור קבוצה דומה בסעיף ב').

קבוצה זו מכילה את כל הסדרות $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ עבורן מתקיים:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n\in\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$$

נרצה להראות כי המקור של קבוצה זו על ידי D הינו קבוצה סגורה – ומכאן תנבע אי רציפות D.

נשים לב כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$D(x)=(x,x,\cdots)$$

כלומר, זו סדרה קבועה כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $x_n=x$. אם נניח כי $D(x)\in U$ (קרי $x\in D^{-1}(U)$), אזי נסיק כי לכל n מתקיים:

$$x_n=x$$

אך בנוסף, מהגדרת U, מתקיים:

$$x_n\in\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\Longrightarrow x\in\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$$

כלומר:

$$x\in\bigcap_{n=1}^\infty\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=\{1\}\Longrightarrow\boxed{D^{-1}(U)=\{1\}}$$

אך זוהי קבוצה סגורה (יחידון בטופולוגיה האוקלידית, שכן $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ היא קבוצה פתוחה), ולכן D אינה רציפה עבור טופולוגיות אלה, כנדרש.

■

ב. נתונה תת הקבוצה של $\mathbb{R}^\infty$ הנתונה על ידי:

$$U=\prod_{n=1}^\infty\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$$

ונרצה להראות כי $U\in\tau_{box}$ אך $U\notin\tau_{prod}$. נראה כי הראשון אכן מתקיים:

הוכחנו כי Ψ_{box} הינו בסיס לטופולוגיה τ_{box}, והוא נתון על ידי:

$$\Psi_{box}=\{\textstyle\prod_{n=1}^\infty U_n\,|\forall n\in\mathbb{N}\quad U_n\in\tau_n\}$$

ואכן, היות ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\tau_n=\tau_{Eucl}$, נסיק כי בפרט כי $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in\tau_n$ ולכן אם נסמן $U_n\coloneqq\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, נקבל:

$$U=\prod_{n=1}^\infty\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=1}^\infty\overset{\in\tau_n}{U_n}\in\Psi_{box}\subseteq\tau_{box}\Longrightarrow U\in\tau_{box}$$

עבור τ_{prod}, נשים לב כי בגיליון בית קודם, הוכחנו בעבור טופולוגיה זו כי בהנתן העתקה $F:X\mapsto Y$, עבור $(X,\tau),(Y,\tau_{prod})$ כאשר $Y=\prod_{i=1}^\infty Y_i$ עבור אוסף $\left((Y_i,\tau_i)\right)_{i=1}^\infty$ כלשהו, אזי F רציפה ביחס למרחבים אלו אם ורק אם $\pi_i\circ F:X\mapsto Y_i$ רציפה לכל $i\in\mathbb{N}$.

עבור טענה זו, נסמן:

$$(X,\tau)=(\mathbb{R},\tau)\quad(Y,\tau_{prod})=(\mathbb{R}^\infty,\tau_{prod})\quad F=D$$

ונקבל כי היות והראינו ש-$\pi_i\circ D$ רציפה לכל i, מתקיים ש-D רציפה ביחס למרחבים אלו.

אך עתה נראה, כי מאותו שיקול שביצענו בסעיף א', אם נניח כי $U \in \tau_{prod}$, אזי עבור הקבוצה U מתקיים:
$$D^{-1}(U) = \{0\}$$
שכן עבור $x \in D^{-1}(U)$ מתקיים $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$. אך זוהי קבוצה סגורה, על אף ש-U קבוצה פתוחה כמכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות. מכאן נקבל כי D אינה רציפה בסתירה לטענה.
אך D בהכרח רציפה מרציפות $\pi_i \circ D$ ולכן נסיק כי הסתירה נבעה מכך שהנחנו $U \in \tau_{prod}$. כלומר $U \notin \tau_{prod}$, כנדרש.

■

ג. עבור הסדרה הקבועה $a = \{0\}_{n=1}^{\infty} = (0,0,\cdots) \in \mathbb{R}^{\infty}$, נגדיר את סדרת האיברים:
$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \quad y_n^{(k)} = \begin{cases} n & k = n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
ונראה עתה כי אכן לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $\{\pi_i(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\pi_i(a) = 0$. ואכן, הסדרה y_n, הכל לכל $n > i$, מקיימת:
$$\pi_i(y_n) = y_n^{(i)} = 0$$
כלומר הסדרה זהותית 0 ולכן בפרט מתכנסת ל-0 (לכל סביבה של $\pi_i(a) = 0$ נקבל כי כל איברי הסדרה החל מ-$n > i$ מועתקים לסביבה זה, כי הם 0 זהותית).
נראה עתה כי הסדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת ב-$(\mathbb{R}^{\infty}, \tau_{box})$ ל-a.
לשם כך, נשים לב כי ניתן לבחור סביבה של $a = (0,0,\cdots)$, לדוגמה $\prod_{n=1}^{\infty}(-1,1) \in \tau_{box}$ (כמכפלה קרטזית של תתי קבוצות פתוחות ב-τ), ועבורה נשים לב כי לא קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $y_n \in \prod_{n=1}^{\infty}(-1,1)$ שכן לכל $n \geq 1$ מתקיים בפרט $y_n^{(n)} = n > 1$ ולכן אינו בסביבה. כלומר, הסדרה אינה מתכנסת בטופולוגיה זו.

■

ד. נרצה להראות כי המרחב $\left(R^{\infty}, \tau_{prod}\right)$ מקיים את האקסיומה השניה של המניה. לשם כך, נרצה להראות כי קיים בסיס בן מניה הפורש את τ_{prod}.
נסמן ב-B את קבוצת כל הסדרות של מספרים טבעיים כך שלכל סדרה כזו קיים $N \in \mathbb{N}$ שהחל ממנה הסדרה תהא זהותית אפס. נשים לב כי קבוצה זו בעלת עצמה שווה לקבוצת כל הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים, כלומר קבוצה זו בת מניה.
עתה, לכל q נגדיר:
$$A_q = \left\{\prod_{i=1}^{\infty} U_{b_i} \middle| \{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in B\right\} \quad U_{b_i} = \begin{cases} \left[q - \dfrac{1}{b_i}, q + \dfrac{1}{b_i}\right] & b_i \neq 0 \\ \mathbb{R} & b_i = 0 \end{cases}$$
כלומר מכפלה קרטזית שבה כל הרכיבים הם $\mathbb{R}$, למעט מספר סופי של רכיבים שהם כדורים ב-$(\mathbb{R}, \tau)$ סביב q ברדיוס רציונלי.
היות וכל סדרה $b_i \in B$ קובעת איבר ב-A_q באופן יחיד, נסיק כי גם זו קבוצה בת מניה.
בשלב הבא, נגדיר את הבסיס הבא:
$$\Psi = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$$
קבוצה זו הינה קבוצת כל המכפלות הקרטזיות שבהן מופיעים $\mathbb{R}$ בכל רכיב למעט מספר סופי של רכיבים בהם מופיע כדור סביב נקודה רציונלית כלשהי, ברדיוס רציונלי.
כאשר זהו איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה ולכן גם הוא בן מניה. נראה כי זהו בסיס ל-τ_{prod}). אנו יודעים כי Ψ_{prod} שהוגדר בכיתה הינו בסיס ל-τ_{prod}. לכן מספיק שנראה כי כל איבר מ-Ψ_{prod} מתקבל על ידי איחוד איברים מ-Ψ. ואז, היות וכל איבר ב-Ψ הוא מכפלה קרטזית בת מניה של $\mathbb{R}$ למעט מספר סופי של תתי קבוצות ממש של $\mathbb{R}$, כלומר $\Psi \subseteq \Psi_{prod}$, אזי נסיק כי Ψ בסיס של הטופולוגיה שמתקבלת על ידי Ψ_{prod} (כי הוא מוכל בה מחד, ופורש לפחות אותה מאידך).
יהא איבר ב-Ψ_{prod} שנסמנו U, אזי מתקיים:
$$U = \prod_{i=1}^{\infty} V_i$$
כאשר קיימת קבוצה סופית של מספרים טבעיים J_i עבורה $V_j \neq \mathbb{R}$ לכל $j \in J_i$. לכל $j \in J_i$ מתקיים $V_j \subseteq \tau$. ראינו בכיתה כי:
$$V_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{V_i}$$
כאשר B_{V_i} כדור ב-$\mathbb{R}$ בעל מרכז ורדיוס רציונלי (ראינו בגליון קודם כי כל קבוצה פתוחה על הציר ניתנת לכתיבה בצורה כזאת).
לכן ניתן לכתוב:
$$U = \prod_{i=1}^{\infty} V_i = \prod_{i=1}^{j_1 - 1} \mathbb{R} \times \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{V_{j_1}^k}\right) \times \prod_{i=j_1+1}^{j_2-1} \mathbb{R} \times \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{V_{j_2}^k}\right) \cdots$$
ומתכונות המכפלה הקרטזית נוכל לפרק את כל האיחודים שלהלן לאיחודים של מכפלות קרטזיות בנות מניה כאשר כולן איברים ב-Ψ. לכן כל איבר ב-Ψ_{prod} ניתן להצגה כאיחוד של איברים מ-Ψ. כלומר, Ψ אכן בסיס ל-τ_{prod} כנדרש. היות וזוהי קבוצה בת מניה, בפרט נסיק כי $(\mathbb{R}^{\infty}, d_{\infty})$ מקיים את האקסיומה השניה של מניה.

■

שאלה 2:

נתונה הטופולוגיה האוקלידית על קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ וכן נתון τ_{cc} האוסף של תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ הנתון על ידי:

$$\tau_{cc} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid |\mathbb{R} \setminus U| \leq \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$$

א. נראה כי τ_{cc} הינה טופולוגיה.

a. $\phi \in \tau_{cc}$ על פי הגדרת הקבוצה, וכן $\mathbb{R} \in \tau$ היות ו-$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}| = 0 \leq \aleph_0$.

b. נניח $U_\alpha \in \tau_{cc}$ לכל $\alpha \in I$ קבוצת אינדקסים כלשהי. אזי על פי הגדרה $|\mathbb{R} \setminus U_\alpha| \leq \aleph_0$. אך מכאן שמתקיים:

$$\left|\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)\right| \overset{\forall \alpha \in I}{\leq} |\mathbb{R} \setminus U_\alpha| \leq \aleph_0$$

וכמובן שמתקיים $\bigcup_{\alpha \in I} \overset{\subseteq \mathbb{R}}{U_\alpha} \subseteq \mathbb{R}$ ולכן על פי הגדרה $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau_{cc}$.

c. יהיו $U_1, \cdots, U_k \in \tau_{cc}$, כלומר $U_i \subseteq \mathbb{R}$ וכן $|\mathbb{R} \setminus U_i| \leq \aleph_0$ לכל $1 \leq i \leq k$. אזי מתקיים:

$$\left|\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right)\right| = \left|\mathbb{R} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right)^c\right| = \left|\mathbb{R} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i^c\right)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} (\mathbb{R} \cap U_i^c)\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} \overset{|\cdot| \leq \aleph_0}{(\mathbb{R} \setminus U_i)}\right| \leq \aleph_0$$

וכמובן ש-$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \subseteq \mathbb{R}$ ולכן נקבל על פי הגדרה כי אכן $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau_{cc}$ כנדרש.

כאמור, האוסף מקיים את כל הדרישות של טופולוגיה.

■

ב. נרצה להראות כי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-a במרחב $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$ אם ורק אם קיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n > N$ מתקיים $x_n = a$.

$\Longrightarrow$ טריוויאלי. אם $x_n = a$ לכל $n > N \in \mathbb{N}$ כלשהו, אזי לכל $a \in U \in \tau_{cc}$ יתקיים בפרט כי לכל $n > N$, $x_n \in U$ כלומר $x_n \xrightarrow{n \to \infty} a$ על פי הגדרה.

$\Longleftarrow$ נניח כי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ונניח בשלילה כי לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n > N$ אך $x_n \neq a$. כלומר, בפרט נסיק כי ישנו מספר בן מניה של אינדקסים עבורם $x_n \neq a$. נסמן ב-Y את קבוצת כל האיקסים הללו. נשים לב כי מכאן שהמשלימה של קבוצה זו נמצאת ב-τ_{cc} (כי קבוצה זו כמשלימה של המשלימה שלה, בת מניה). כמו כן, המשלימה מכילה את a ומכאן שהיא סביבה של a. אך נשים לב כי זו סביבה של a כך שיש מספר בן מניה של איברי סדרה שלא נמצאים בה, וזו סתירה להתכנסות.

לכן בהכרח קיים מספר N כנדרש.

■

ג. נרצה להראות כי 0 הינו נקודה בסגור של הקטע $[0,1]$. לשם כך, נניח בשלילה כי הוא אינו בנקודת הסגור של הקטע. מכאן שקיימת סביבה $0 \in U \in \tau_{cc}$ עבורה $U \cap [0,1] = \emptyset$. אך מכאן נסיק כי $[0,1] \in U^c$ כלומר המשלימה של U אינה בת מניה וזאת בסתירה לכך שהיא נמצאת בטופולוגיה. כלומר אכן לכל סביבה $0 \in U \in \tau_{cc}$ מתקיים $U \cap [0,1] \neq \emptyset$.

עתה נשים לב, כי לו הייתה קיימת סדרה שאיבריה ב-$[0,1]$ המתכנסת ל-0, היינו מקבלים כי מסעיף ב' נובע שיש מספר בן מניה של איברים בסדרה השווים ל-0 בסתירה להיות שייכים לקטע $(0,1]$.

■

ד. נראה כי פונקציית הזהות $Id: (\mathbb{R}, \tau_{cc}) \mapsto (\mathbb{R}, \tau)$ איננה רציפה על ידי הבאת דוגמה נגדית. נשים לב כי $(0,1) \in \tau$, אך מתקיים:

$$Id^{-1}\big((0,1)\big) = (0,1) \notin \tau_{cc}$$

כלומר מצאנו קבוצה פתוחה ב-τ שהמקור שלה על ידי ההעתקה אינו קבוצה פתוחה בטופולוגיה.

אך נשים לב, כי בהנתן סדרה מתכנסת ב-τ_{cc}, נסיק מסעיף ב' כי החל מ-N מסוים, הסדרה הינה זהותית הגבול שלה, מכאן שוודאי שהעתקת הזהות בין המרחבים תעתיק סדרה זו לסדרה ב-τ שגם היא זהותית החל מ-N מסויים ולכן גם היא תתכנס ב-τ כנדרש.

■

ה. ראשית נראה כי המרחב הוא אכן מרחב T_1. לשם כך נשים לב כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$, מתקיים $\mathbb{R} \setminus \{y\}, \mathbb{R} \setminus \{x\} \in \tau_{cc}$ כקבוצות שהמשלימה שלהן סופית. אך מתקיים $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$ וכן $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$ אך כמובן ש-$y \notin \mathbb{R} \setminus \{y\}$ וכן $x \notin \mathbb{R} \setminus \{x\}$.

נראה כי מרחב זה אינו T_2.

לשם כך נניח בשלילה כי עבור $x, y \in \mathbb{R}$ קיימות סביבות $U, V \in \tau_{cc}$ כך ש-$x \in U, y \in V$ וכן $U \cap V = \emptyset$. אנו יודעים כי $U \in \tau_{cc}$ ולכן המשלים שלה בן מניה/סופי, ומכאן שעצמת U היא עצמת הרצף. היות ו-$U \cap V = \emptyset$, נסיק כי $V \subseteq U^c$, אך מכאן ש-V בת מניה / סופית ומכאן ש-$V \notin \tau_{cc}$ בשלילה להנחתנו. מכאן שמרחב זה אינו האוסדורף.

■