

גיליון תרגילים מספר 7

1. תנו דוגמא לפונקציה f המקיימת את התכונות הבאות או הוכיחו כי אינה קיימת:
 - א. פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ רציפה ולא קבועה.
 - ב. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ו- $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ אבל $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) \neq c$.
 - ג. הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x + \sin x + \cos x}$ מקבלת מקסימום גלובלי.
 - ד. אם f גזירה ו- f' זוגית אז f אי-זוגית.
2. בדקו רציפות במ"ש של הפונקציות הבאות בקטעים המתאימים:
 - א. $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$ ב- $(0,1)$.
 - ב. $f(x) = \cos(x^2)$ ב- \mathbb{R} .
3. נאמר שפונקציה $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ מקיימת תנאי הולדר (Hölder) מסדר $\alpha > 0$ אם קיים קבוע $K > 0$ כך ש- $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$ לכל $x, y \in D$.
 - א. תן דוגמא לפונקציה המקיימת תנאי הולדר מסדר 0.5 שלא מקיימת תנאי ליפשיץ.
 - ב. הוכיחו שלכל $\alpha > 0$ אם f מקיימת תנאי הולדר מסדר α אז f רציפה במ"ש.
 - ג. f^* הוכיחו שאם f מקיימת תנאי הולדר עם $\alpha > 1$ אז f קבועה. (רמז: היזכרו בשאלה 6 מגיליון 5).
4. גזרו ע"פ הגדרת הנגזרת את הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן:
 - א. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
 - ב. $f(x) = x \ln x$
5. חשבו את הנגזרות של הפונקציות הבאות (בעזרת כללי גזירה) בתחום הגדרתן:
 - א. $f(x) = \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}}$
 - ב. $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$
 - ג. $[x] + [-x]$
 - ד. $\sin\left(\ln(x) \cdot x^{2.5} - \frac{1}{x^2}\right)$