תרגול 12

תרגיל:

נתון השדה:

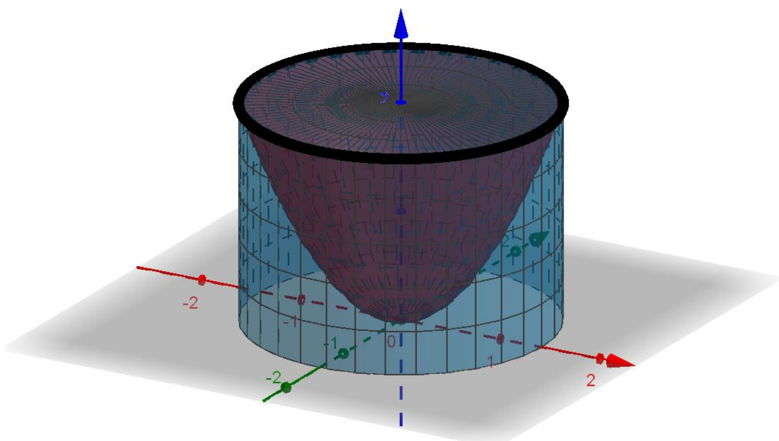
$$\vec{F} = (2xz - y, 2yz + x, x^2 + y^2 - z)$$

ומשטח הנתון על ידי:

$$S = \{z = x^2 + y^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}$$

חשבו את העבודה של השדה על שפת המשטח בכיוון מחוגי השעון.

פתרון:



נשים לב כי התחום S,למעשה, מוגבל בין מעטפת של פרבולואיד (דו-ממדי) לבין צילינדר מלא (תלת ממדי), שהוא אובייקט משטחי ובמקרה זה מדובר במעטפת פרבולואיד המוגבל ב-$z = 2$. השפה של תחום זה, קל לבדוק – הינו עקום.

במקרה שלנו מדובר במעגל הנתון על ידי:

$$x^2 + y^2 = 2$$

לכן, על מנת לחשב את העבודה על תחום זה, האינטגרל שיחושב יהיה אינטגרל קווי מסוג 2.

על אף שדרך אחד לגיטימית לפתור בה את התרגיל הינה לבצע את האינטגרל על פי הגדרה – קרי, למצוא פרמטריזציה γ לעקום החיתוך, ולבצע אינטגרל קווי מסוג שני, ננסה לבדוק האם ניתן להשתמש במשפט סטוקס, שכן הוא עלול, כפי שיתברר זה עתה, להקל את החישוב עבור מקרים כגון אלה.

נבדוק האם כדאי להשתמש במשפט סטוקס, על ידי חישוב $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

$$F \in C^1 \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xz - y & 2yz + x & x^2 + y^2 - z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כלומר אכן יתאים לנו, ונעדיף להשתמש במשפט סטוקס על פני חישוב מפורש. כלומר:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (0,0,2) \cdot \hat{n} d\sigma$$

כאשר למעשה משפט סטוקס מאפשר לנו לבחור כל תחום אשר ∂S הינו השפה שלו. לכן נעדיף לבצע את המשטח עבור:

$$S_1 = \{z = 2 | x^2 + y^2 \leq 2\} \quad \hat{n} = (0,0,-1)$$

כלומר:

$$\iint_{S_1} (0,0,2) \cdot (0,0,-1) d\sigma = \iint_{S_1} -2 d\sigma = -2 \cdot \begin{pmatrix} \text{שטח פנים} \\ S_1 \text{ של} \end{pmatrix} = -4\pi$$

דרך נוספת:

נבדוק בכל זאת כיצד היה ניתן לפתור את הבעיה בשימוש במשפט סטוקס עבור S:

$$\iint_S (0,0,2)\cdot \hat{n}d\sigma$$

לשם כך נמצא פרמטריזציה למשטח באמצעות שימוש בקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} 0 \le z = r^2 \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \Longrightarrow D = \left\{ (r,\theta) \middle| \begin{matrix} -\sqrt{2} \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \right\}$$

$$S(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r^2)$$

$$\hat{n} = S_r \times S_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2r \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\sin(\theta), r)$$

אך עלינו לשים לב, כי הנורמל שחושב נמצא בכיוון פנים הפרבולואיד, וכאמור אנו יודעים שמשפט סטוקס דורש מציאת נורמל שכיוונו כלפי חוץ ולכן נבחר:

$$\hat{n} = (2r^2\cos(\theta), 2r^2\sin(\theta), -r)$$

ונחשב:

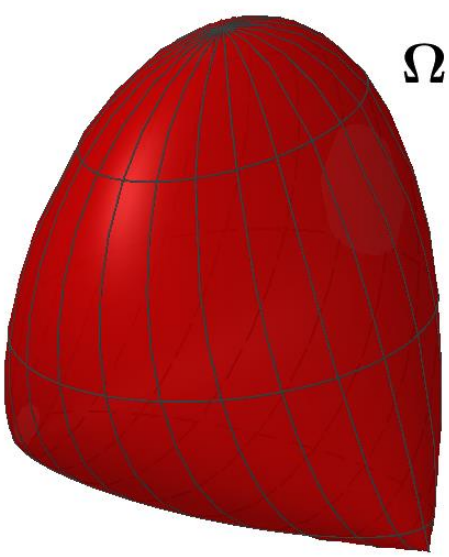
$$\iint_S (0,0,2)\cdot \hat{n}d\sigma = \iint_D -2rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} rdr = 4\pi$$

<u>תרגיל:</u>

חשב את $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$ עבור:

$$L = \{x^2+y^2+z^2 = 4 | x^2+y^2 = 1 | z \ge 0\}$$
$$\vec{A} = \left(2y, 2x, -\frac{y^2}{2}\right)$$

משפט הדיברגנס של גאוס:



יהא Ω תחום פשוט ב-$\mathbb{R}^3$, $S = \partial\Omega$ משטח השפה של Ω, וכן $\hat{n}$ נורמל חיצוני למשטח.

נניח $F = (P,Q,R)$ שדה גזיר ברציפות של Ω ועל שפתו. אזי:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iiint_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdydz$$

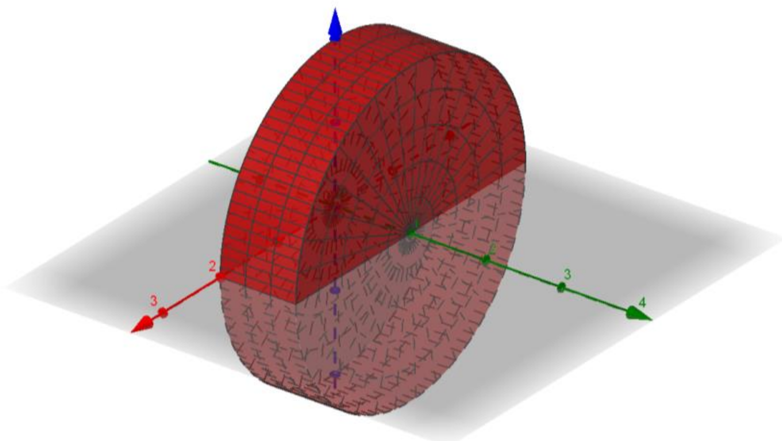
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את השטף של $\vec{F}=(x,y,z)$ דרך המשטח:

$$S=\{x^2+z^2=4|0\le y\le 1\}$$

<u>פתרון:</u>



מדובר על $I=\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma$ שהוא אינטגרל משטחי מסוג שני בעל $\hat{n}$ וקטור נורמל חיצוני למשטח.

נרצה לנסות לפתור את התרגיל באמצעות משפט גאוס. נחשב:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=1+1+1=3$$

המשטח S איננו סגור ולכן נרצה לסגור אותו על ידי הוספת המרכיב:

$$S_0=\{y=0|x^2+z^2\le 4\}$$
$$S_1=\{y=1\ |x^2+z^2\le 4\}$$

ונשים לב כי:

$S\cup S_0\cup S_1$ הוא משטח סגור החוסם את:

$$\Omega=\{x^2+z^2\le 4|0\le y\le 1\}$$

$\hat{n}$, נדרוש, יהיה נורמל חיצוני למשטח. וכאמור $F\in C^1$ ולכן:

$$\iint_{S\cup S_0\cup S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma=\iiint_\Omega 3dxdydz=12\pi$$

על S_0 מתקיים:

$$\iint_{S_0}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma\quad \hat{n}=(0,-1,0)$$

ולכן:

$$\vec{F}\cdot\hat{n}=(x,y,z)\cdot(0,-1,0)=-y=0$$

כלומר האינטגרל עבור S_0 מתאפס. עבור S_1 נקבל באופן דומה כי הנורמל הפעם בכיוון השני, כלומר חיובי, ומאידך:

$$\vec{F}\cdot\hat{n}=(x,y,z)\cdot(0,1,0)=y=1$$

ולכן האינטגרל יקבל את הערך של השטח של S_1, כלומר 4π.

סה"כ:

$$\iint_S\vec{F}\cdot\hat{n}=\oiint_{S\cup S_0\cup S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}-\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}-\iint_{S_0}\vec{F}\cdot\hat{n}=8\pi$$

<u>תרגיל:</u>

יהא S משטח סגור וחלק המהווה שפה של תחום $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. יהא $\hat{n}$ וקטור נורמל חיצוני למשטח. לכל $p\in S$ נסמן $\theta(p)$ בתור הזווית בין $\hat{n}(p)$ לבין הוקטור $\vec{l}\neq 0$ נתון קבוע. חשבו את:

$$I=\iint_S \cos\big(\theta(p)\big)\,d\sigma$$

<u>פתרון:</u>

זהו אינטגרל משטחי מסוג I:

$$\cos\theta(p)=\frac{\hat{n}\cdot\vec{l}}{|\hat{n}|\cdot|\vec{l}|}\overset{|\hat{n}|=1}{=}\left(\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}\right)\cdot\hat{n}$$

$$I=\iint_S\left(\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}\right)\cdot\hat{n}d\sigma$$

אך זהו השטף של $\vec{F}=\frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}$ כלומר ניתן להסיק ממשפט כאוס כי גודל זה שווה:

$$I=\iiint_\Omega\nabla\cdot\left(\frac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}\right)dxdydz=0$$

<u>תרגיל נוסף:</u>

הוכיחו על ידי חישוב ישיר את משפט הדיברגנס של גאוס במקרה הפרטי:

$$\vec{F}=\big(0,0,R(x,y,z)\big)\quad R\in C^1$$

כאשר Ω התחום החסום על ידי:

$$x=0\quad y=0\quad z=0\quad x+y+z=1$$

כלומר, בהנתן תנאי משפט Gauss, הראו כי:

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma=\iiint_\Omega\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dxdydz$$