טכניון - מכון טכנולוגי לישראל **הפקולטה למתמטיקה**

חשבון אינפי' 2 104281

גליון תרגילים מספר 10 - תרגילים בנושא נגזרות חלקיות ושימושים גאומטריים

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי סמסטר אביב תשנ"ט

1. תהי $\varphi(x)$ פונקציה גזירה. הוכח שהפונקציה $z(x,y)=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ פותרת את המשוואה

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$$

2. תהיינה $G(t),\ F(t)$ גזירות ברציפות פעמיים ותהיינה $u(x,y),\ v(x,y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות עד סדר שני. מהם התנאים על הפונקציות u,v על מנת שהפונקציה $z(x,y)=uF(v)+G(v)$ תקיים את המשוואה:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

התוכל לתת דוגמאות לפונקציות u,v כאלה ?

3. תהי $f(u,v,w)$ דיפרנציאבילית ב-R^3. מגדירים $f(x,y,z)=g(x,xy,xyz)$. מצא תנאי על f המבטיח ש-g איננה תלויה ב-x.

4. חשב את הנגזרות f_{yx},f_{xy},f_y,f_x בנקודה $(0,0)$ של הפונקציות הבאות:

(א)

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ב)

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & x\neq 0\wedge y\neq 0\\ 0 & x=0\vee y=0\end{cases}$$

הסבר את התוצאה לגבי f_{yx},f_{xy}.

5. הוכח כי לכל n,m טבעיים מתקיים

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^n\partial x^m}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)=2(-1)^{m+n+1}(m+n-1)!\frac{my-nx}{(x+y)^{m+n+1}}$$

6. חשב $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}z(x,y)$ עבור $z(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

7. הוכח שהפונקציות

$$u(x,y)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$$

הן פתרונות של משוואת לפלס: $w_{xx}+w_{yy}=0$.

8. חשב את הגרדיאנט של $f(x,y,z)=x^2+yz$ בנקודה $(-3,1,-2)$, ואת הנגזרת המכוונת של f זו, בכיוון היוצר זויות חדות זהות עם הצירים החיוביים.

9. תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-(x_0,y_0). הוכח כי בהכרח קיים כיוון שבו הנגזרת המכוונת של f קיימת ושווה ל-0.

10. תהי $f(u,v,w)$ דיפרנציאבילית ב-R^3 ונתון שהיא מקיימת

(א) $f(x,y,2x^2+y^2)=3x-5y$ לכל (x,y).

(ב) $\hat{n}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial n}(1,2,6)=1$

חשב את $\nabla f(1,2,6)$

11. הוכח כי לפונקציה $f(x,y)=x^{\frac{k}{n}}y^{\frac{n-k}{n}}$ (k טבעי, n טבעי אי-זוגי, $n>k$) קיימת נגזרת מכוונת בכל כיוון בנקודה $(0,0)$. האם f דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$?

12. מצא את משוואת המישור המשיק והישר הנורמל למשטח הנתון ע"י $z=e^x\sin y$ בנקודה $(0,0,0)$. רשום את הישר הנורמל גם ע"י פרמטר אורך הקשת.

13. מצא את משוואת הישר המשיק והמישור הנורמל לעקום הבא בנקודה $t=\frac{\pi}{6}$:

$$x(t)=\frac{4}{5}\cos t,\ \ y(t)=1-\sin t,\ \ z(t)=-\frac{3}{5}\cos t.$$

התוכלו לציין מהו העקום ?

14. הוכח שהמשטחים הבאים נחתכים בזויות ישרות. נתון $0<r<a<s<b<t<c$

$$\frac{x^2}{a^2-r^2}+\frac{y^2}{b^2-r^2}+\frac{z^2}{c^2-r^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2-s^2}+\frac{y^2}{b^2-s^2}+\frac{z^2}{c^2-s^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2-t^2}+\frac{y^2}{b^2-t^2}+\frac{z^2}{c^2-t^2}=1$$

תן פרוש גאומטרי !

15. תהי $L(u,v)$ רציפה וגזירה ברציפות. מציבים $u=y(t),\ v=y'(t)$ עבור y רציפה וגזירה ברציפות. הוכח כי הביטוי $H\triangleq v\frac{\partial L}{\partial v}-L$ איננו תלוי ב-t, אם נתון שמתקיים $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)-\frac{\partial L}{\partial u}=0$ (למען ההשכלה הכללית: ביטויים אלו מתארים מערכות פיסיקליות, ואז L נקרא הלגרנז'יאן (Lagrangian) של המערכת ו-H נקרא ההמילטוניאן (Hamiltonian) של המערכת).

16. נתונות הסדרות הבאות $\{a_{nm}\}_{n,m=1,\ldots,\infty}$ בשני משתנים שלמים n,m. קבע באם קיים הגבול $\lim\limits_{n,m\to\infty}a_{nm}$, ואם הוא קיים, חשב אותו. נמק !

(א) $a_{nm}=\frac{m}{m+n}$

(ב) $a_{nm}=\frac{m+n}{m^2+n^2}$

(ג) $a_{nm}=\frac{mn}{m^2+n^2}$

(ד) $a_{nm}=\frac{n}{m^2e^{n/m}}$

17. נתון שפונקציה $f(x,y)$ מקיימת את משוואת לפלס $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ הוכח כי הפונקציה $\Phi(x,y)\triangleq f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ מקיימת אף היא את משוואת לפלס.

18. נתון ש-$f(x,y,z)=g(u)$, כאשר $u=x^2+y^2+z^2$. הוכח שגם הביטוי $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ תלוי ב-u בלבד.

19. מגדירים את משפחת הפונקציות $\overline{\underline{\lim}}_{y\to b} f(x,y)$ ע"י

$$\overline{\underline{\lim}}_{y\to b} f(x,y) = \left\{ g(x) \;\middle|\; \underline{\lim} f(x,y) \le g(x) \le \overline{\lim} f(x,y),\ y\to b \right\}$$

ובדומה מגדירים גם $\overline{\underline{\lim}}_{x\to a} f(x,y)$.
נעיין בשני ה,,גבולות":

$$\left\{ \lim_{x\to a} \left(\overline{\underline{\lim}}_{y\to b} f(x,y) \right) \right\},\quad \left\{ \lim_{y\to b} \left(\overline{\underline{\lim}}_{x\to a} f(x,y) \right) \right\}.$$

(כל ,,גבול" כזה מהווה למעשה קטע (לכל היותר) של ישר).
הוכח כי אם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, אזי קיימים גם שני הגבולות ה,,מוכללים" לעיל, והם שווים לו.

20. פונקציה $f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר m אם היא מקיימת

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

לכל x, y, λ.

(א) הוכח כי כל פונקציה הומוגנית מסדר m ניתן להציג ע"י

$$f(x,y) = x^m F\left(\frac{y}{x}\right), \quad \forall x \neq 0$$

(ב) הוכח כי כל פונקציה f הומוגנית מסדר m מקיימת את המשוואה

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf(x,y)$$