תורת הקבוצות - תרגול מספר 2
פעולות על קבוצות

פעולות בסיסיות על קבוצות:

תהא X קבוצה ("העולם") ויהיו A,B תת־קבוצות של X. נגדיר את הפעולות הבאות:

- איחוד: $A\cup B\triangleq\{x\in X\mid x\in A\vee x\in B\}$
- חיתוך: $A\cap B\triangleq\{x\in X\mid x\in A\wedge x\in B\}$
- הפרש: $A\backslash B\triangleq\{x\in X\mid x\in A\wedge x\notin B\}$
- משלים: $A^c\triangleq\{x\in X\mid x\notin A\}$ (בעצם, $A^c=X\backslash A$).
- הפרש סימטרי: $A\triangle B\triangleq(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$

שימו לב לדמיון הרב בין פעולות על קבוצות ובין קשרים לוגיים, שכמובן אינו מקרי והקשרים אף מופיעים במפורש בחלק מההגדרות.

- איחוד אנלוגי ל"או".
- חיתוך אנלוגי ל"וגם".
- משלים אנלוגי לשלילה (not).
- הפרש סימטרי אנלוגי ל"או אקסלוסיבי" (xor).
- איזו פעולה על קבוצות תהיה אנלוגית לגרירה?
  - $\{x\in X\mid x\in A\to x\in B\}=\{x\in X\mid\ \sim x\in A\vee x\in B\}=A^c\cup B$ (לא ממש טבעי לנו ולכן אין לזה סימן מפורש).

הוכחת שוויונות בקבוצות

אם $A\subseteq B$ אז על פי הגדרה, $a\in A\to a\in B$. לכן אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$ אז $a\in A\leftrightarrow a\in B$ ולכן $A=B$.

מכאן עולה דרך סטנדרטית להוכחת שוויון של שתי קבוצות: **הכלה דו־כיוונית:** על מנת להוכיח כי $A=B$ די להראות כי $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$.

תרגיל:

הוכיחו/הפריכו:

- $A\subseteq B\cap C \Leftarrow A\subseteq B\wedge A\subseteq C$.

- נכון: $x \in A$ גורר ש־$x \in B \cap C$ ולכן $x \in B$ וגם $x \in C$.

• $A \subseteq B \cup C \Leftarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$.

- לא נכון. דוגמה נגדית: $A = \{1,2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$.

תרגיל:

הוכיחו את כללי דה־מורגן עבור קבוצות, כלומר אם X העולם ו־A, B תת־קבוצות של X, אז:

• $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

• $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

פתרון:

נוכיח את הכלל הראשון. ההוכחה עבור הכלל השני דומה.

מכיוון שאנו מוכיחים שוויון בין קבוצות, נעשה זאת על ידי הוכחת הכלה דו כיוונית. מן הסתם, נשתמש בכללי דה־מורגן עבור קשרים לוגיים.

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B)^c &\underset{(1)}{\iff} x \notin A \cap B \\
&\underset{(2)}{\iff} \sim (x \in A \cap B) \\
&\underset{(3)}{\iff} \sim (x \in A \wedge x \in B) \\
&\underset{(4)}{\iff} \sim (x \in A) \vee \sim (x \in B) \\
&\underset{(5)}{\iff} x \notin A \vee x \notin B \\
&\underset{(6)}{\iff} x \in A^c \vee x \in B^c \\
&\underset{(7)}{\iff} x \in A^c \cup B^c
\end{aligned}$$

מעבר (1) נובע מהגדרת משלים. מעבר (2) נובע מהגדרת הסימן $\notin$. מעבר (3) נובע מהגדרת חיתוך. מעבר (4) נובע מכלל דה־מורגן עבור קשרים לוגיים. מעבר (5) נובע מהגדרת $\notin$. מעבר (6) נובע מהגדרת משלים. מעבר (7) נובע מהגדרת איחוד.

תרגיל:

הוכיחו כי $A \cap B = A$ אם ורק אם $A \subseteq B$.

פתרון:

• נניח כי $A \cap B = A$ ונוכיח כי $A \subseteq B$.

- יהא $x \in A$, אז מכיוון ש־$A = A \cap B$ מתקיים ש־$x \in A \cap B$ ובפרט $x \in B$, ולכן $A \subseteq B$.

• נניח כי $A \subseteq B$ ונוכיח כי $A = A \cap B$.

- אם $x \in A \cap B$ אז בפרט $x \in A$ ולכן $A \subseteq A \cap B$; בכיוון השני, אם $x \in A$ אז מכיוון ש־$A \subseteq B$ מתקיים $x \in B$ ולכן $x \in A \cap B$ ולכן $A \cap B \subseteq A$. מכאן ש־$A \cap B = A$ כנדרש.

גודל של קבוצות

- אם $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ אז מסמנים $|A|=n$.
- $|\emptyset|=0$.
- A,B הן **זרות** אם $A\cap B=\emptyset$. במקרה שבו A,B זרות האיחוד שלהן נקרא **איחוד זר**.
- אם A,B זרות אז גודל האיחוד הזר שלהן הוא סכום גדליהן: $|A\cup B|=|A|+|B|$.
- באופן כללי $A=(A\backslash B)\cup(A\cap B)$ וזהו איחוד זר, ולכן $|A|=|A\backslash B|+|A\cap B|$, כלומר $|A\backslash B|=|A|-|A\cap B|$
- עבור הפרש סימטרי נקבל:

$$\begin{aligned}|A\triangle B| &= |A\backslash B\cup B\backslash A|=|A\backslash B|+|B\backslash A|\\ &= |A|-|A\cap B|+|B|-|A\cap B|\\ &= |A|+|B|-2\,|A\cap B|\end{aligned}$$

- אם A,B הן קבוצות כלשהן, לאו דווקא זרות, אז $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$, והאיחוד באגף ימין הוא איחוד זר, ולכן:

$$\begin{aligned}|A\cup B| &= |A\triangle B|+|A\cap B|\\ &= |A|+|B|-2\,|A\cap B|+|A\cap B|\\ &= |A|+|B|-|A\cap B|\end{aligned}$$