תרגיל בית 8

שאלה 1: (10 נק')

תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במרחב מטרי (X,d).

א. הוכיחו כי כל תת סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ גם היא סדרת קושי. (5 נק')

ב. תהי $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ב- (X,d). הוכיחו כי אז גם $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב- (X,d) לאותו גבול. (5 נק')

שאלה 2: (15 נק')

מצאו דוגמה לשני מרחבים מטריים, (X,d_1) ו- (X,d_2), הומיאומורפיים כמרחבים טופלוגיים, כך ש- (X,d_1) הוא שלם, ואילו (X,d_2) אינו שלם.

שאלה 3: (15 נק')

יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ של תתי קבוצות סגורות ולא ריקות של X, היורדת ביחס להכלה (כלומר $A_{n+1}\subseteq A_n$ לכל n טבעי), כך שסדרת קוטריהן שואפת ל- 0 (כלומר $diam\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), קיים איבר $x_0\in X$, כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{A_n\}=\{x_0\}$.

שאלה 4: (20 נק')

הוכיחו כי המרחב המטרי l_∞ הוא מרחב שלם.

שאלה 5: (40 נק')

תהי $N=1,2,3\ldots$ קבוצת המספרים הטבעיים. נגדיר פונקציה $d:N\times N\to R$ המוגדרת ע"י

$$d(m,n)=\begin{cases}0 & m=n\\ 1+\dfrac{1}{\min(m,n)} & m\neq n\end{cases}$$ לכל $(m,n)\in N\times N$.

א. הוכיחו כי d היא מטריקה על N. (5 נק')

ב. הוכיחו כי המרחב המטרי (N,d) הוא מרחב שלם. (15 נק')

ג. מצאו סדרה $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ של כדורים סגורים ב- (N,d), היורדת ביחס להכלה (כלומר $B_{n+1}\subseteq B_n$ לכל n טבעי), כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{B_n\}=\varnothing$ (שימו לב לכך שלא נדרש למצוא סדרה $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ של כדורים כלעיל, כך שסדרת הרדיוסים שלהם שואפת ל- 0).

(20 נק')

בהצלחה !