

קומבינטוריקה - סמסטר חורף תשס"ג - תרגיל מס' 1

להגשה עד ה - 30.10.02

תרגיל מס' 1

א. כמה תוצאות שונות ניתן לקבל ע"י הטלת n קוביות שונות?

ב. כמה תוצאות שונות ניתן לקבל ע"י הטלת n קוביות זהות?

תרגיל מס' 2

מהו מספר הפתרונות של המשוואה : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26$

א. כאשר $x_i \geq 0$ לכל $i = 1, \dots, 5$.

ב. כאשר $x_i > 0$ לכל $i = 1, \dots, 5$.

תרגיל מס' 3

א. נתונה קבוצה של $2n$ אנשים. בכמה אופנים ניתן לחלק אותם ל- n זוגות?

ב. הוכיחו כי לכל n שלם, $\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{2^n}$ הוא מספר שלם.

תרגיל מס' 4

א. יהא k קבוע. הוכיחו כי לכל מספר טבעי m יש הצגה יחידה מהצורה

$$m = \sum_{j \geq 0} a_j k^j$$

כאשר $0 \leq a_j \leq k - 1$.

ב. יהא k קבוע. הוכיחו כי לכל מספר טבעי m יש הצגה יחידה מהצורה

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_t}{t}$$

כאשר $a_k > a_{k-1} > \dots > a_t$.

ג. הוכיחו כי: $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$

ד. הוכיחו כי לכל מספר טבעי m יש הצגה יחידה מהצורה

$$m = \sum_{k \geq 1} a_k \cdot k!$$

עם $0 \leq a_k \leq k$

תרגיל מס' 5

הוכיחו כי מספר הקבוצות בגודל k מתוך $\{1, \dots, n\}$ שאינן מכילות שני מספרים עוקבים הוא $\binom{n-k+1}{k}$.

תרגיל מס' 6

נתון מצולע משוכלל עם n קודקודים.

א. בכמה אופנים ניתן לבחור 3 מבין קודקודי המצולע כך שצלעות המשולש הנוצר הינן אלכסונים במצולע המקורי (ולא צלעות).

ב. בכמה אופנים ניתן לבחור k מבין קודקודי המצולע כך שצלעות המצולע הנוצר הינן אלכסונים במצולע המקורי (ולא צלעות).

תרגיל מס' 7

הוכיחו כי מספר המספרים האי-זוגיים בסדרה $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ הוא חזקה של 2.

תרגיל מס' 8

א. חשבו את מספר השלשות (A, B, C) כאשר $A \subseteq B \subseteq C \subseteq [n]$.

ב. חשבו את מספר הזוגות (A, B) כאשר $A, B \subseteq [n]$ ומתקיים $A \subset B, A \neq B$.

תרגיל מס' 9

יהא $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ פירוק n למכפלת חזקות ראשוניים.

א. מה מספר המחלקים של n ?

ב. מה מספר המחלקים של n שהם ריבועים?

ג. מה מספר המחלקים של n המתחלקים ב- $m = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$?

תרגיל מס' 10

יהיו a_1, \dots, a_k טבעיים המקיימים $a_1 + \dots + a_k = n$. הוכיחו:

$$\binom{n}{a_1; \dots; a_k} = \binom{n-1}{a_1-1; a_2; \dots; a_k} + \binom{n-1}{a_1; a_2-1; \dots; a_k} + \dots + \binom{n-1}{a_1; a_2; \dots; a_k-1}$$

תרגיל מס' 11

חשבו:

$$\sum_{(a,b,c,d): a+b+c+d=n} \binom{n}{a; b; c; d} (-1)^{a+b}$$

בהצלחה!