קומבינטוריקה – תרגול 3# – 07/04/2016

עקרון ההכלה-הפרדה

תרגיל: במועדון ספורט יש 54 חברים: 34 – טניס, 22 – גולף, 11 – כדורסל, 10 – טניס וגולף, 4 – כדורסל וגולף, 6 – טניס וכדורסל, 2 – הכל.

א) כמה מחברי המועדון לא משחקים טניס ולא גולף?
ב) כמה באים למועדון רק בשביל לשתות קפה?

פתרון:

א) נחשב כמה משחקים טניס ו/או גולף - $34+22-10=46$. לא משחקים טניס ולא גולף - $54-46=8$.
ב) נספור את כל אלה שמשחקים משהו - $34+22+11-10-4-6+2=49$, ולכן באם לשתות קפה - $54-49=5/$

משפט: נסמן ב-Ω את העולם. $A_1,\dots,A_n\subseteq\Omega$. אזי:

$$|A_1,\dots,A_n|=|A_1|+\cdots+|A_n|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|\dots-|A_{n-1}\cap A_n|+|A_1\cap A_2\cap A_n|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|\bigcap_{j=1}^{n}A_{i_j}\right|\right)$$

בד"כ נחשב $|\Omega|-|\bigcup_{1\le k\le n}A_k|$.

תרגיל: כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=20$, לכל $i=1,2,3$ $0\le x_i\le 8$.

פתרון: נפתור ללא מגבלות - $\binom{22}{2}=\binom{20+3-1}{3-1}$. לכל $i\in[8]$ נגדיר $A_i=$ כל הפתרונות של המשוואה בהם $x_i\ge 9$. נסמן: $x_1=y_1+9$. לכן, לחישוב $|A_i|$, נדרוש $y_1+x_2+x_3=11$, ומס' הפתרונות השלמים הוא $\binom{11+2}{2}=|A_i|$, ויש $\binom{3}{1}=3$ כאלה. נחשב את $|A_i\cap A_j|$. נסמן $x_i=9+y_i,\ x_j=9+y_j$. לכן, מס' הפתרונות הטבעיים של המשוואה, שעכשיו נראית כך $y_1+y_2+x_3=2$, הוא $\binom{2+2}{2}=4$, ויש $\binom{3}{2}=3$ אפשרויות לבחירת $i\neq j$. $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$ בבירור. מנוסחאת ההכלה-הפרדה:

$$|\cup A_i|=\binom{3}{1}\binom{13}{2}-\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}0$$

ולכן מס' הפתרונות הוא:

$$\binom{22}{2}-\binom{3}{1}\binom{13}{2}+\binom{3}{2}\binom{4}{2}$$

טענה: לכל $x,n\in\mathbb{N}$ יש בדיוק $\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor$ מספרים טבעיים שקטנים או שווים ל-n ומתחלקים ב-x.

הוכחה: המס' שמתחלקים ב-x:

$$x,2x,3x,\dots,kx\le n$$

$$k \leq \frac{n}{x}$$

וכיוון ש-k הוא השלם הכי גדול שמקיים זאת, אז $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = k$.

תרגיל: כמה מס' טהעיים יש השייכים לקב' $X = \{1,2,\dots,119\}$ שאינם מתחלקים ב-3,5,7.

פתרון: $|\Omega| = 119$. נחשב כמה מס' מתחלקים באחד מהם.

$A_1 =$ מתחלקים ב-3, $A_2 =$ מתחלקים ב-5, $A_3 =$ מתחלקים ב-7.

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{119}{3} \right\rfloor = 39, \qquad |A_2| = \left\lfloor \frac{119}{5} \right\rfloor = 23, \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{119}{7} \right\rfloor = 17$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{119}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 7, \qquad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{119}{3 \cdot 7} \right\rfloor = 5, \qquad |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{119}{5 \cdot 7} \right\rfloor = 3$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{119}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 1$$

$$\therefore \quad 119 - 39 - 23 - 17 + 7 + 5 + 3 - 1 = 54$$

תרגיל: בסעודה יושבים n זוגות מסביב לשולחן גדול. מה מס' האפשרויות לסדר אותם כך שאף זוג לא יושב ביחד?

פתרון: $\Omega =$ סידור של $2n$ אנשים במעגל. $|\Omega| = (2n-1)!$. נגדיר $A_i =$ אפשרויות הסידור כך שהזוג ה-i יושב ביחד.
לחישוב $|A_i|$, נתייחס לזוג כלאיש אחד גדול התופס שני כיסאות. לכן, אפשר להתייחס לבעיה כסידור של $2n-1$ במעגל, ביחד עם סידור של הזוג ביניהם (מי מימין ומי משמאל):

$$|A_i| = 2] \cdot (2n-2)!$$

ויש $\binom{n}{1} = n$ זוגות כאלה. באותו האופן, עבור אינדקסים שונים $(2n-2)$ אנשים במעגל כפול הסידור הפנימי של כל זוג:

$$|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot (2n-3)!$$

ויש $\binom{n}{2}$ קב' כאלה. עבור אינדקס כללי k, יש $\binom{n}{k}$ קב' מהסוג $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$:

$$\left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| = 2^k (2n-k-1)!$$

לכן:

$$|\Omega| - |\cup A_i| = (2n-1)! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^k (2n-k-1)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k-1)!$$

תרגיל: הוכיחו בצורה אלגברית וקומבינטורית את הזהות:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k$$

פתרון:

הוכחה אלגברית: $1 = 1^n = \left(2 + (-1)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k$

הוכחה קומבינטורית: נספור את מספר הסדרות באורך n שבהן כל האיברים הם אפסים. מצד ימין, 1. מצד שמאל, ניקח את כל הסדרות באורך n – יש 2^n כאלה. נסמן $A_i =$ כל הסדרות שבהן במקום ה-i מופיע 1. אזי:

$$|A_i| = 2^{n-1}, \qquad |A_i \cap A_j| = 2^{n-2}, \qquad \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = 2^{n-k}$$

מהכלה-הפרדה:

$$2^n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k$$