אלגברה ב' - גליון תרגילים 6

♣ תרגיל 1 (זהות הקיטוב): יהיו V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, וכן $u, v \in V$. הוכיחו את הזהות הבאה:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right]$$

♣ תרגיל 2: השתמשו בזהות של התרגיל הקודם על-מנת להוכיח שאם V, W הם ממ"פ (מעל אותו שדה), ו-$T \in L(V, W)$, אזי T שומרת על מכפלה פנימית אם"ם $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$.

♣ (3) **[HK]** 8.4.6 (הגדרה של שיקוף ליניארי): יהא V ממ"פ ממימד סופי, ויהא W תמ"ו שלו. לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה מן הצורה $v = w + w_0$, כאשר $w \in W$ וכן $w_0 \in W^\perp$.

א. הראו שההעתקה הליניארית $R_W \in L(V)$ המוגדרת על-ידי $R_W(v) = w - w_0$ היא אופרטור אוניטרי וצמוד לעצמו. העתקה זו נקראת "השיקוף ב-W".

ב. חשבו את המטריצה של R_W הנ"ל בבסיס הסטנדרטמ של $V = \mathbb{R}^3$, כאשר $W = Sp\{(1,0,1)\}$.

♣ (4) **[HK]** 8.4.12 (אפיון של שיקוף ליניארי): בתנאים של תרגיל 3, הראו שכל אופרטור ליניארי $T \in L(V)$ אוניטרי וצמוד לעצמו הוא שיקוף, דהיינו: הראו שקיים תת-מרחב W כך ש-$T = R_W$.

♣ (5) **[H]** 2.6.1: הוכח שאם H היא תת-חבורה של G, שמכפלת כל שני קוסטים ימניים שלה היא שוב קוסט ימני, אזי H נורמלית ב-G.

♣ (6) **[H]** 2.6.3: תהיינה $H < G,\ K \triangleleft G$ תת-חבורות ב-G. הוכח כי $HK < G$.

♣ (7) **[H]** 2.6.11: הוכח שמכפלתן של שתי תת-חבורות נורמליות של חבורה G גם היא תת-חבורה נורמלית.

♣ (8) **[H]** 2.6.12: תהיינה M, N תת-חבורות נורמליות של חבורה G, המקיימות $M \cap N = \{e\}$ (כלומר: הן "זרות אלגברית"). הוכיחו שלכל $m \in M, n \in N$ מתקיים $mn = nm$.

<u>תאריך הגשה:</u> 4.05.2000 עד השעה $12:00$.