האינטגרל המוכלל

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על קטע $[a,\infty)$ ואינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[a,b]$ עבור $a<b$. נאמר כי האינטגרל המוכלל (לא אמיתי) של f על $[a,\infty)$ קיים או מתכנס, אם הגבול $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ קיים. נסמן גבול זה ע"י

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על קטע $(-\infty,b]$ ואינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[a,b]$ עבור $a<b$. נאמר כי האינטגרל המוכלל של f על $(-\infty,b]$ קיים או מתכנס, אם הגבול $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ קיים. נסמן גבול זה ע"י

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על קטע $(a,b]$ ואינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[c,b]$ עבור $a<c<b$. נאמר כי האינטגרל המוכלל של f על $(a,b]$ קיים או מתכנס, אם הגבול $\lim\limits_{c\to a^+}\int_a^b f(x)dx$ קיים. נסמן גבול זה ע"י

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx$$

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על קטע $[a,b)$ ואינטגרבילית על כל קטע מהצורה $[a,c]$ עבור $a<c<b$. נאמר כי האינטגרל המוכלל של f על $[a,b)$ קיים או מתכנס, אם הגבול $\lim\limits_{c\to b^-}\int_a^b f(x)dx$ קיים. נסמן גבול זה ע"י

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

אם באינטגרל $\int\limits_a^b f(x)dx$ יש יותר מבעיה אחת, חייבים לפרק את האינטגרל לסכום של אינטגרלים אשר בכל אחד מהם יש רק בעיה אחת ולחשב כל אחד מהם בנפרד, ואז האינטגרל המקורי קיים אם"ם כל אחד מהאינטגרלים קיים.

תכונות של האינטגרל המוכלל

בהנחה כי האינטגרלים הלא אמיתיים $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b g(x)dx$ קיימים או מתכנסים (כלומר $b=\infty$ או $a=-\infty$ או ש־a,b סופיים אבל f,g אינן מוגדרות ב־a או ב־b) אז:

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

$$f\geq 0:\quad \int_a^b f(x)dx\geq 0$$

$$f\leq g:\quad \int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

בהנחה כי $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ מתכנס: $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

אם $f(x)=g(x)$ בקטע $[a,b]$ פרט למספר סופי של נקודות, אז $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם"ם $1<p$. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם"ם $p<1$.

אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי שליליות

משפט: 1. תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית בקטע $[a,\infty)$ כך ש־f אינטגרבילית בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־$[a,\infty)$. נסמן $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. אז $\int_a^\infty f(x)dx$ קיים אם"ם $F(x)$ חסומה.
2. תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית בקטע $(-\infty,b]$ כך ש־f אינטגרבילית בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־$(-\infty,b]$. נסמן $F(x)=\int_x^b f(t)dt$. אז $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ קיים אם"ם $F(x)$ חסומה.
3. תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית בקטע $[a,b)$ כך ש־f אינטגרבילית בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $[a,b)$. נסמן $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. אז $\int_a^b f(x)dx$ קיים אם"ם $F(x)$ חסומה.
4. תהי $f(x)$ פונקציה אי שלילית בקטע $(a,b]$ כך ש־f אינטגרבילית בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $(a,b]$. נסמן $F(x)=\int_x^b f(t)dt$. אז $\int_a^b f(x)dx$ קיים אם"ם $F(x)$ חסומה.

הערה: המשפט נכון גם עבור פונקציות אי חיוביות. באופן כללי, אם נתונה פונקציה אי חיובית $f(x)$, כדאי להסתכל על $-f(x)$ ולהפעיל עליה את הכלים שיש על פונקציות אי שליליות.

משפט [קריטריון ההשוואה]:
1. תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,\infty)$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $[a,\infty)$. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $a\le x$ וגם $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ קיים, אז $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ קיים ומתקיים $\int\limits_a^\infty f(x)dx\le\int\limits_a^\infty g(x)dx$.
2. תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $(-\infty,b]$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $(-\infty,b]$. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\le b$ וגם $\int\limits_{-\infty}^b g(x)dx$ קיים, אז $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ קיים ומתקיים $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx\le\int\limits_{-\infty}^b g(x)dx$.
3. תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,b)$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $[a,b)$. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $a\le x<b$ וגם $\int\limits_a^b g(x)dx$ קיים, אז $\int\limits_a^b f(x)dx$ קיים ומתקיים $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$.
4. תהיינה $f(x),g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $(a,b]$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $(a,b]$. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $a<x\le b$ וגם $\int\limits_a^b g(x)dx$ קיים, אז $\int\limits_a^b f(x)dx$ קיים ומתקיים $\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx$.
5. בכל אחד מהסעיפים, אם $0\le f\le g$ וגם $\int f$ אינו מתכנס, אז גם $\int g$ אינו מתכנס.

הערה: אפשר לנסח את קריטריון ההשוואה כך: אם $0\le f\le g$ בקטע, וגם האינטגרל של g על הקטע מתכנס, אז האינטגרל של f על הקטע מתכנס גם הוא.
באופן שקול, אם $0\le f\le g$ בקטע וגם האינטגרל של f אינו מתכנס, אז גם האינטגרל של g על הקטע אינו מתכנס.

משפט [קריטריון ההשוואה הגבולי]:

1. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,\infty)$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $[a,\infty)$. נניח כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים לשווה ל־L.

כאשר $0<L<\infty$: $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אם"ם $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0\le L<\infty$: אם $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0<L\le\infty$: אם $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

2. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $(-\infty,b]$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $(-\infty,b]$. נניח כי $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים לשווה ל־L.

כאשר $0<L<\infty$: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ מתכנס אם"ם $\int\limits_{-\infty}^b g(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0\le L<\infty$: אם $\int\limits_{-\infty}^b g(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0<L\le\infty$: אם $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_{-\infty}^b g(x)dx$ מתכנס.

3. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $[a,b)$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $[a,b)$. נניח כי $\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים לשווה ל־L.

כאשר $0<L<\infty$: $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס אם"ם $\int\limits_a^b g(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0\le L<\infty$: אם $\int\limits_a^b g(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0<L\le\infty$: אם $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_a^b g(x)dx$ מתכנס.

4. תהיינה $f(x), g(x)$ פונקציות אי שליליות בקטע $(a,b]$ כך ש־f,g אינטגרביליות בכל קטע חסום וסגור המוכל ב־ $(a,b]$. נניח כי $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים לשווה ל־L.

כאשר $0<L<\infty$: $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס אם"ם $\int\limits_a^b g(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0\le L<\infty$: אם $\int\limits_a^b g(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס.

כאשר $0<L\le\infty$: אם $\int\limits_a^b f(x)dx$ מתכנס אז $\int\limits_a^b g(x)dx$ מתכנס.

הערה: אפשר לנסח את קריטריון ההשוואה הגבולי כך: אם הגבול של $\frac{f(x)}{g(x)}$ שואף ל־L כאשר x שואף לנקודה הבעייתית, אז כאשר $0<L<\infty$ האינטגרלים של f,g מתכנסים או מתבדרים ביחד, כאשר $0\le L<\infty$ אז התכנסות האינטגרל של g גוררת את ההתכנסות של האינטגרל של f, וכאשר $0<L\le\infty$ אז ההתכנסות של האינטגרל של f גוררת את התכנסות האינטגרל של g.

אינטגרל מתכנסים בהחלט ובתנאי

הגדרה: נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int f$ (על קטע סופי או אינסופי) מתכנס בהחלט אם $\int|f|$ מתכנס. אם $\int f$ מתכנס אבל $\int|f|$ לא מתכנס נאמר שההתכנסות היא בתנאי.

משפט: אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\int|f|$ מתכנס, אז $\int f$ מתכנס.

תרגיל: חשבו את האינטגרל

$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

פתרון:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b \lim_{b\to\infty} -e^{-b}+1 = 1$$

תרגיל: הראו כי האינטגרל

$$\int_0^\infty \sin x dx$$

אינו קיים.

פתרון:

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty} -\cos x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\cos b + 1$$

וגבול זה אינו קיים (הראו זאת).

תרגיל: הראו כי האינטגרל

$$\int_1^\infty x^{-p}dx$$

מתכנס אם"ם $p > 1$.

פתרון:

$$\int_1^\infty x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^b & p\neq 1 \\ \ln|x|\Big|_1^b & p=1\end{cases} = \lim_{b\to\infty}\begin{cases} \frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1} & p\neq 1 \\ \ln b & p=1\end{cases}$$

וגבול זה קיים אם"ם $p > 1$.

תרגיל: הראו כי האינטגרל

$$\int_0^1 x^{-p}dx$$

מתכנס אם"ם $p < 1$.

פתרון:

$$\int_0^1 x^{-p}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-p}dx = \lim_{a\to 0^+}\begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^1 & p\neq 1 \\ \ln|x|\Big|_a^1 & p=1\end{cases} = \lim_{a\to 0^+}\begin{cases} \frac{1}{-p+1}-\frac{a^{-p+1}}{-p+1} & p\neq 1 \\ -\ln a & p=1\end{cases}$$

וגבול זה קיים אם"ם $p < 1$.

תרגיל: הראו כי האינטגרל

$$\int_0^\infty x^{-p}dx$$

אינו מתכנס לכל ערך של p.

פתרון: אינטגרל זה מתכנס אם"ם שני האינטגרלים $\int_0^1 x^{-p}dx,\ \int_1^\infty x^{-p}dx$ מתכנסים ביחד. אין ערך של p עבורו זה קורה ולכן האינטגרל מתבדר.

תרגיל: חשבו

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2-x-2}$$

פתרון: קודם כל אנו רואים כי אינסוף היא נקודה בעייתית. נברר אם יש עוד נקודה בעייתית, כלומר אם המכנה מתאפס בתחום האינטגרציה:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$$

וכיוון שהשורשים הם $-1,2$ אז אין בעיות נוספות. נחשב:

$$\begin{aligned}
&\int_3^\infty \frac{dx}{x^2-x-2}=\int_3^\infty \frac{dx}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\int_3^\infty \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}dx=\\
=\;&\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\big(\ln|x-2|-\ln|x+1|\big)\Big|_3^b\right)=\\
=\;&\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\big(\ln|b-2|-\ln|b+1|-\ln 1+\ln 4\big)=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\Big(\ln\frac{|b-2|}{|b+1|}+\ln 4\Big)=\\
=\;&\frac{1}{3}\big(\ln 1+\ln 4\big)=\frac{1}{3}\ln 4
\end{aligned}$$

הערה: שימו לב כי לא יכולנו להפריד

$$\int_3^\infty \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}dx=\int_3^\infty \frac{1}{x-2}dx-\int_3^\infty \frac{1}{x+1}dx$$

כי האינטגרלים בצד ימין אינם קיימים.

תרגיל: חשבו

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

פתרון: כיוון שיש לנו שתי נקודות בעייתיות, אנו צריכים לפרק את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=$$

ועכשיו לכל אחד מהמחוברים בצד ימין יש רק בעייה אחת ולכן

$$\begin{aligned}
=\;&\lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b=\\
=\;&\lim_{a\to-\infty}\big(\arctan 0-\arctan a\big)+\lim_{b\to\infty}\big(\arctan b-\arctan 0\big)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi
\end{aligned}$$

תרגיל: חשבו

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+4e^{-x}}$$

פתרון: נחשב את האינטגרל הלא מסויים בנפרד:

$$\int \frac{dx}{e^x+4e^{-x}}=\int \frac{dx}{e^{-x}\big(e^{2x}+4\big)}=\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}=\underset{t=e^x\ dt=e^x dx}{\int \frac{dt}{t^2+4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}+c=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}+c$$

ולכן, כמו קודם, נפריד את האינטגרל לסכום ונפתור

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+4e^{-x}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{e^x+4e^{-x}}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{e^x+4e^{-x}}=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}\Big|_{0}^{\infty}=$$
$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^0}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{e^{-\infty}}{2}+\frac{1}{2}\arctan\frac{e^{\infty}}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{e^0}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arctan 0+\frac{1}{2}\arctan\infty-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

הערה: שימו לב כי בתרגיל זה לא עברנו לגבולות בחישוב האינטגרל המוכלל. היינו יכולים לעשות את החישובים ללא מעבר ישיר לגבול לחשב אותו בעזרת האריתמטיקה של הגבולות ובעזרת הגבול הידוע של $\arctan x$ באינסוף.

תרגיל: חשבו

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$$

פתרון: הבעיה היא בנקודה 1. נחשב את האינטגרל הלא מסויים קודם

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\int\frac{t^2+1}{t}2tdt=2\int t^2+1dt=\frac{2}{3}t^3+2t+c=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}+c$$
$$t=\sqrt{x-1}\ \ t^2+1=x\ \ dx=2tdt$$

ולכן

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x-1}\Big|_1^2=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

את האינטגרל הלא מסויים היה אפשר גם ע"י

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}=\int\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}dx=\int(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+c$$

תרגיל: חשבו

$$\int_0^1\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$$

פתרון: בתרגיל זה ננסה לעשות הצבה תוך כדי פתרון האינטגרל

$$\int_0^1\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}=-\int_{\infty}^{e}1dt=\int_e^{\infty}1dt=\infty$$
$$t=e^{\frac{1}{x}}\quad dt=-e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}dx$$

ולכן האינטגרל המוכלל אינו קיים.

תרגיל: חשבו

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$$

פתרון: בתרגיל זה, נחשב קודם את הפונקציה הקדומה

$$\int\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+c=-\frac{1}{\ln x}+c$$
$$t=\ln x\quad dt=\frac{1}{x}dx$$

ולכן

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_0^{e^{-1}} = -\frac{1}{\ln e^{-1}} = 1$$

<u>תרגיל:</u> חשבו

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי 1 היא נקודה בעייתית ולכן אנו חייבים לפצל את האינטגרל לסכום של שני אינטגרלים.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_0^1 (x-1)^{-\frac{2}{3}}dx + \int_1^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \quad 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1 + 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_1^3 = 3 + 3\cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

<u>הערה:</u> שימו לב כי אם היינו פותרים ומתעלמים מהנקודה הבעייתית, היינו מקבלים את התשובה הנכונה אבל הדרך שגויה!

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^3 = 3\cdot 2^{\frac{1}{3}} + 3$$

אבל שוב! הדרך שגויה!

<u>תרגיל:</u> חשבו

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי 1 היא נקודה בעייתית ולכן אנו חייבים לפצל את האינטגרל לסכום של שני אינטגרלים.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} + \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

אבל

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b (x-1)^{-\frac{4}{3}}dx = \lim_{b\to 1^-} -3(x-1)^{-\frac{1}{3}}\Big|_0^b = \lim_{b\to 1^-} -3(b-1)^{-\frac{1}{3}} - 3 = \infty$$

ולכן $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$ לא מתכנס שאומר כי $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$ לא מתכנס.

<u>הערה:</u> שימו לב כי אם היינו פותרים ומתעלמים מהנקודה הבעייתית, היינו מקבלים תשובה שגויה וגם דרך שגויה!

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = -3(x-1)^{-\frac{1}{3}}\Big|_0^3 = -3\cdot 2^{-\frac{1}{3}} - 3$$

<u>תרגיל:</u> בדקו האם האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$$

מתכנס.

<u>פתרון:</u> אפשר היה לחשוב כי האינטגרל הוא אפס כי הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ היא פונקציה איזוגית. אין זה המצב. כיוון שלאינטגרל יש שתי "בעיות" אז אנו חייבים להפריד לאינטגרלים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{2xdx}{x^2+1} + \int_0^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

כיוון ש-
$$\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = \ln(1+x^2)\Big|_0^\infty = \ln\infty - \ln 1 = \infty$$
אזי האינטגרל $\int\limits_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ אינו מתכנס ולכן האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ אינו מתכנס.

הערה: אם $f(x)$ פונקציה איזוגית על הישר ואם האינטגרל $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ מתכנס אז הוא שווה לאפס.

הערה: שימו לב להבדל בין שאלה המבקשת שתחשבו את האינטגרל לבין שאלה השואלת האם האינטגרל מתכנס. במקרה השני אין צורך לחשב את האינטגרל ובדר"כ משתמשים במבחני התכנסות. בשאלות הבאות אתם מתבקשים לברר האם האינטגרל המוכלל מתכנס או לא.

תרגיל: בדקו האם האינטגרל מתכנס
$$\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3}dx}{3x^2+x+100}$$

פתרון: כיוון שהבעיה באינסוף, ננסה קודם להעריך את האינטגרנד (עבור x גדול):
$$\frac{\sqrt{x^3}}{3x^2+x+100} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{100}{x^2}\right)} = \frac{1}{\left(3+\frac{1}{x}+\frac{100}{x^2}\right)}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$
וקיבלנו $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ כפול ביטוי ששואף למספר. זה נותן לנו אינדיקציה חזקה שעלינו להשתמש במבחן ההשוואה ונשווה עם $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. כלומר $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{3x^2+x+100}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^3}}{3x^2+x+100}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(3+\frac{1}{x}+\frac{100}{x^2}\right)} = \frac{1}{3}$$
לכן האינטגרלים
$$\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3}dx}{3x^2+x+100}, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$$
מתכנסים או מתבדרים ביחד. כיוון ש- $\int_2^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ מתבדר אז $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3}dx}{3x^2+x+100}$ מתבדר.

תרגיל: בדקו האם האינטגרל מתכנס
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\tan x}dx}{3x+x^3+86x^5}$$

פתרון:

כיוון שהבעיה באפס, ננסה קודם להעריך את האינטגרנד (עבור x חיובי וקטן):
$$\frac{\sqrt{\tan x}}{3x+x^3+86x^5} = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\frac{\sqrt{\sin x}}{x\left(3+x^2+86x^4\right)} = \sqrt{\frac{\sin x}{x}}\frac{1}{\cos x\left(3+x^2+86x^4\right)}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
וקיבלנו כי האינטגרנד מתנהג כמו $\frac{1}{\sqrt{x}}$ כפול ביטוי ששואף ל- $\frac{1}{3}$. לכן נשווה את $f(x) = \frac{\sqrt{\tan x}}{3x+x^3+86x^5}$ ל- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ונקבל
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{\tan x}}{3x+x^3+86x^5}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\frac{1}{\cos x\left(3+x^2+86x^4\right)} = \frac{1}{3}$$

לכן האינטגרלים

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\tan x}dx}{3x+x^3+86x^5}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

מתכנסים או מתבדרים ביחד. כיוון ש־ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס אז $\int_0^1 \frac{\sqrt{\tan x}dx}{3x+x^3+86x^5}$ מתכנס.

הערה: בחלק מהמקרים, אנו יכולים לראות מהו סדר הגודל של האינטגרנד ולהשוות את האינטגרנד למשהו פשוט יותר שאת התכנסות האינטגרל שלו אנו יכולים לדעת יותר בקלות.

תרגיל: בדקו האם האינטגרל מתכנס

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}dx}{1+x^2}$$

פתרון: במקרה כזה, למצוא פונקציה "פשוטה" שהתכנסות האינטגרל שלה שקולה להתכנסות האינטגרל הנתון אינו סביר (נסו למצוא פונקציה כזו). במקרה כזה, מסתכלים על האינטגרנד ומנסים לנחש אם האינטגרל מתכנס. במקרה זה, האינטגרנד הוא $\frac{e^{3x}}{1+x^2}$ והנקודה הבעייתית היא מינוס אינסוף, ושם האקפוננט שואף לאפס מהר מספיק כדי להתכנס, למעשה המכנה רק גורם לשאיפה לאפס להיות מהירה יותר, ולכן אנו מעריכים כי האינטגרל יתכנס ונפעל להראות זאת ע"י מציאת פונקציה $g(x)$ שהיא גדולה יותר מהאינטגרנד ושהאינטגרל שלה מתכנס. במקרה זה ניקח $g(x) = e^{3x}$. כיוון שלכל x

$$\frac{e^{3x}}{1+x^2} \leq e^{3x}$$

אז, אם האינטגרל $\int_{-\infty}^2 e^{3x}dx$ מתכנס אז האינטגרל $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}dx}{1+x^2}$ מתכנס.

$$\int_{-\infty}^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{-\infty}^2 = e^6$$

ולכן $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}dx}{1+x^2}$ מתכנס.

הערה: שימו לב כי היינו יכולים גם לקחת $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ כי לכל $x \leq 2$

$$\frac{e^{3x}}{1+x^2} \leq \frac{e^6}{1+x^2}$$

וכיוון שהאינטגרל $\int_{-\infty}^2 \frac{e^6 dx}{1+x^2}$ מתכנס (הראו זאת) אז האינטגרל $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}dx}{1+x^2}$ מתכנס.

תרגיל: בדקו האם האינטגרל מתכנס

$$\int_0^\infty \frac{(x^4+1)dx}{x^6}$$

פתרון: במקרה זה יש לנו שתי נקודות בעייתיות ולכן נפריד את האינטגרל לשני אינטגרלים, אשר בכל אחד מהם יש בעייה אחת בלבד.

$$\int_0^\infty \frac{(x^4+1)dx}{x^6} = \int_0^1 \frac{(x^4+1)dx}{x^6} + \int_1^\infty \frac{(x^4+1)dx}{x^6}$$

נטפל קודם באינטגרל $\int_0^1 \frac{(x^4+1)dx}{x^6}$.
הבעייה פה היא באפס. ליד אפס, $1+x^4$ הוא בערך 1 ולכן ניקח $g(x) = \frac{1}{x^6}$. נקבל כי

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+x^4}{x^6}}{\frac{1}{x^6}} = \lim_{x\to 0^+} 1+x^4 = 1$$

ולכן ההתכנסות של האינטגרל $\int_0^1 \frac{(x^4+1)dx}{x^6}$ שקולה להתכנסות האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^6}$. כיוון שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^6}$ אינו מתכנס, אז האינטגרל $\int_0^1 \frac{(x^4+1)dx}{x^6}$ אינו מתכנס.

הערה: אין צורך לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty \frac{(x^4+1)dx}{x^6}$ (אפילו שהוא מתכנס). ברגע שאנו יודעים כי אחד המחוברים אינו מתכנס, זה אומר כי האינטגרל המקורי אינו מתכנס.

תרגיל: בדקו האם האינטגרל מתכנס

$$\int_{-\infty}^0 (3x^3+1)e^x dx$$

פתרון: במקרה זה, יש לנו את e^x במונה, וכיוון שנקודה הבעייתית היא מינוס אינסוף, אז e^x שואפת לאפס "מהר". יותר מהר מכל פולינום. אז מכפלה של e^x ב־$3x^3+1$ עדיין צריך להתכנס. זה לפחות הניחוש. נראה זאת באופן רשמי:
ננסה להגדיל קצת את e^x כך שמה שנקבל יהיה יותר גדול מ־$(3x^3+1)e^x$ אבל שהאינטגרל של הפונקציה החדשה עדיין יתכנס.
לפני זה, עלינו לטפל בעובדה כי $(3x^3+1)e^x$ אינה חיובית. אם $x \leq -1$ אז $(3x^3+1)e^x \leq 0$. לכן נפצל את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^0 (3x^3+1)e^x dx = \int_{-\infty}^{-1} (3x^3+1)e^x dx + \int_{-1}^0 (3x^3+1)e^x dx$$

המחובר הימני הוא אינטגרל מסויים רגיל ולכן התכנסות האינטגרל $\int_{-\infty}^0 (3x^3+1)e^x dx$ שקולה להתכנסות האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} (3x^3+1)e^x dx$. בנוסף התכנסות האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} (3x^3+1)e^x dx$ שקולה להתכנסות האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} -(3x^3+1)e^x dx$.
לסיכום, עלינו לברר האם $\int_{-\infty}^{-1} -(3x^3+1)e^x dx$ מתכנס:
ננסה להגדיל קצת את e^x כך שהביטוי החדש גדול מ־ $-(3x^3+1)e^x$ וגם שהאינטגרל החדש יתכנס. ניקח $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$. אז

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-(3x^3+1)e^x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to-\infty} -(3x^3+1)e^{\frac{x}{2}} = 0$$

ולכן אם האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} e^{\frac{x}{2}} dx$ מתכנס אז האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} -(3x^3+1)e^x dx$. מתכנס.

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{\frac{x}{2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{-\infty}^{-1} = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

ולכן האינטגרל $\int_{-\infty}^{-1} -(3x^3+1)e^x dx$ מתכנס ולכן האינטגרל $\int_{-\infty}^0 (3x^3+1)e^x dx$ מתכנס.

הערה: במקום $e^{\frac{x}{2}}$ היינו יכולים לקחת e^{ax} כאשר $0 < a < 1$ מספר כלשהו. אנחנו לקחנו $\frac{1}{2}$. הרעיון באופן כללי הוא כזה: אם נתונה לנו הפונקציה e^{bx} כאשר $0 < b$, ואנו רוצים להחליף אותה בפונקציה קצת יותר גדולה אבל עדיין מספיק "דומה", ניקח e^{ax} עבור $0 < a < b$ כלשהו. במקרה זה $\frac{e^{bx}}{e^{ax}} = e^{(b-a)x}$ ו־ $b - a > 0$.

תרגיל: עבור אילו ערכי m האינטגרלים הבאים מתכנסים

1.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^m x}$$

2.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^m x}$$

.3

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln^m x}$$

פתרון: נשתמש בהצבה $t=\ln x \quad dt=\frac{1}{x}dx=\int\frac{dt}{t^m}$ ונקבל

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^m x}=\int_{\ln 1}^{\ln 2}\frac{dt}{t^m}=\int_0^{\ln 2}\frac{dt}{t^m}$$
$$t\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^m x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^m}$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln^m x}=\int_{\ln 1}^{\infty}\frac{dt}{t^m}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^m}$$

ולכן:

1. מתכנס אם"ם $m<1$.
2. מתכנס אם"ם $1<m$.
3. לא מתכנס לכל ערך של m.

תרגיל: נניח כי $f(x)$ פונקציה רציפה המוגדרת בקטע $(0,1]$ ומקיימת

$$\lim_{x\to 0^+} x^p f(x)=6.$$

הראו כי $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס אם"ם $p<1$.

פתרון: נשים לב כי בעוד ש־$f(x)$ איננה פונקציה אי שלילית, היא אי שלילית בסביבה ימנית מנוקבת של 0 מכיוון ש־ $\lim_{x\to 0^+} x^p f(x)=6$. כיוון שהבעיה של האינטגרל היא ב־0 אז אפשר להתייחס ל־$f(x)$ כפונקציה אי שלילית לצורך שימוש במבחני ההשוואה. כיוון ש־

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}=\lim_{x\to 0^+} x^p f(x)=6$$

אז התכנסות האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ שקולה להתכנסות האינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$. האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ מתכנס אם"ם $p<1$.

תרגיל: הראו כי האינטגרל

$$\int_1^\infty \big(\ln(1+e^x)-x\big)dx$$

מתכנס.

פתרון: לא ברור מהו סימן האינטגרנד. ננסה לפשט:

$$\ln\big(1+e^x\big)-x=\ln\big(1+e^x\big)-\ln e^x=\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)=\ln\big(1+e^{-x}\big)>0$$

ולכן האינטגרנד חיובי. בנוסף, כיוון ש־ $\ln(1+t)\le t$ לכל $t>-1$ אז

$$0<\ln\big(1+e^x\big)-x=\ln\big(1+e^{-x}\big)\le e^{-x}$$

וכיוון ש־ $\int\limits_1^\infty e^{-x}dx$ מתכנס, אז לפי מבחן ההשוואה נובע כי האינטגרל $\int\limits_1^\infty \big(\ln(1+e^x)-x\big)dx$ מתכנס גם הוא.

תרגיל: הראו כי האינטגרל

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\big(\ln(1+e^x)-x\big)dx$$

מתכנס.

פתרון: במקרה זה האינטגרנד $\sin(x^2)\big(\ln(1+e^x)-x\big)$ אינו אי שלילי. אבל

$$\big|\sin(x^2)\big(\ln(1+e^x)-x\big)\big| \le \ln(1+e^x)-x$$

ולכן מהתכנסות האינטגרל $\int\limits_1^\infty \big(\ln(1+e^x)-x\big)dx$ נובעת התכנסות האינטגרל $\int\limits_1^\infty \big|\sin(x^2)\big(\ln(1+e^x)-x\big)\big|dx$ ולכן האינטגרל $\int\limits_1^\infty \sin(x^2)\big(\ln(1+e^x)-x\big)dx$ מתכנס.