# קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 1

## תאריך הגשה: יום ראשון, 23/3/2014, עד שעה 22:00

**שאלה 1:**

א. הוכיחו כי $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}$ אי-רציונלי.

נסמן $q=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3}(1+\sqrt[3]{3})$, ונניח בשלילה כי מספר זה רציונלי. על ידי הכפלה ב- $(1-\sqrt[3]{3})$ והעברת אגפים נקבל: $\sqrt[3]{3}=\frac{q+3}{q+1}$. באופן דומה להוכחת $\sqrt{2}$ לא רציונלי ניתן לקבל גם כי $\sqrt[3]{3}$ אינו רציונלי, אבל אם $q$ רציונלי אז גם $\frac{q+3}{q+1}$ רציונלי (מסגירות לחיבור, כפל וחילוק בשדה, ונשים לב כי $q+1\neq 0$), ולכן $\sqrt[3]{3}$ רציונלי – סתירה.

ב. יהיו $r_1, r_2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $q\in\mathbb{Q}$. האם המספרים הבאים הם רציונליים, אי-רציונליים או שלא ניתן לקבוע? הוכיחו טענותיכם.

1) $r_1+q$      2) $r_1+r_2$

3) $r_1r_2$      4) $r_1q$ כאשר $q\neq 0$.

1) אי-רציונלי: אחרת $r_1=(r_1+q)-q$ רציונלי (מסגירות הרציונליים לחיבור)

2) לא ניתן לקבוע. למשל: $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}$ אי-רציונלי, כפי שהוכח בסעיף קודם, אך $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$

3) לא ניתן לקבוע, למשל: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}$, אך $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ .

4) $r_1q\notin\mathbb{Q}$ מסגירות רציונלים לכפל, כמו ב- (1).

**שאלה 2:**

א. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, כאשר $a\neq 0$. הוכיחו שאם $b^2-4ac>0$ אז למשוואה $ax^2+bx+c=0$ יש שני פתרונות ממשיים שונים.

ראשית נוכל להניח $a>0$, אחרת נעביר את כל המחוברים אגף. נשתמש בהשלמה לריבוע, נקבל: $ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$, לכן $ax^2+bx+c=0$ נותן לנו: $\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\frac{b^2-4ac}{4a}$. אם $b^2-4ac>0$ זה נותן 2 פתרונות שונים עבור $x$.

ב. נסמן ב- $p(x)$ את הפולינום הריבועי $p(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i x+b_i)^2$, כאשר $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ לכל $i=1,\dots,n$. הראו שאם $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ אינם כולם אפס, אז ל- $p(x)=0$ יש לכל היותר פתרון ממשי אחד.

$p(x)$ הוא סכום של ביטויים אי-שליליים, ולכן יכול להיות שווה ל- 0 אם ורק אם כל אחד מהביטויים בנפרד שווה ל-0, כלומר $a_i x+b_i=0$ לכל $i$. נניח בה״כ כי $a_1\neq 0$, ואז $x=-\frac{b_1}{a_1}$ הוא הפיתרון היחיד של $a_1 x+b_1=0$, ולכן הוא המועמד היחיד להיות פיתרון של $p(x)=0$, לכן ל- $p(x)=0$ יש לכל היותר פתרון אחד.

ג. יהיו $a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$. הוכיחו את אי השוויון הבא, הנקרא אי שוויון קושי-שוורץ:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

ניעזר בסעיפים קודמים: עבור $p(x)=\sum(a_i x+b_i)^2=\left(\sum a_i^2\right)x^2+2\left(\sum a_i b_i\right)x+\sum b_i^2$ מסעיף ב׳ חייב להתקיים $b^2-4ac\le 0$ (כאשר $a,b,c$ כפי שהוגדרו בסעיף א), אחרת ל- $p(x)$ היו שני פתרונות ממשיים שונים. (נשים לב כי נוכל להניח שלא כל ה- $a_i=0$, אחרת אי השוויון טריוויאלי מכיוון שאגף ימין אי-שלילי).

לכן צריך להתקיים: $4\left(\sum a_i b_i\right)^2 \le 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$, וסיימנו.

ד. יהיו $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\sum_{i=1}^{n}y_i=1$. הוכיחו כי: $\frac{1}{n}\le\sum_{i=1}^{n}y_i^2$.

נשתמש באי-שוויון קושי שוורץ עבור $a_i=y_i$ ו- $b_i=\frac{1}{\sqrt{n}}$, ונקבל את הדרוש.

## שאלה 3:

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת את הנוסחאות הבאות:

א. אם $a_1, d \in \mathbb{R}$, ונגדיר $a_{n+1}=a_n+d$, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ (זהו סכום סדרה חשבונית).

עבור $n=1$ נקבל $a_1=a_1$. נניח כי מתקיים עבור $n$, ואז: $\sum_{i=1}^{n+1}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}=\frac{(a_1+a_n)n}{2}+a_{n+1}=\frac{na_1+(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}-nd}{2}$. ניתן להראות (באינדוקציה פשוטה) כי $a_1+nd=a_{n+1}$, ולכן קיבלנו כי $\sum_{i=1}^{n+1}a_i=\frac{(a_1+a_{n+1})(n+1)}{2}$, כנדרש.

ב. אם $a_1, q \in \mathbb{R}$ ובנוסף $q \neq 1$, ונגדיר $a_{n+1} = a_1 q^n$, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$

(זהו סכום סדרה הנדסית).

עבור $n = 1$ נקבל $a_1 = a_1$. נניח כי מתקיים עבור $n$, ואז: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} + a_1 q^n = \frac{a_1(q^n-1)+(q-1)a_1 q^n}{q-1} = \frac{a_1\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}$, כנדרש.

<u>שאלה 4:</u>

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{2}.$$

ל- $n = 1$ נקבל $1^2 = \frac{(-1)^2 \cdot 1 \cdot 2}{2}$. נניח כי מתקיים עבור $n$, נבדוק עבור $n + 1$:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 + (-1)^{n+2} \cdot (n+1)^2 \overset{(*)}{=}$$

$$\frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{2} + (-1)^{n+2} \cdot (n+1)^2 = \frac{(-1)^{n+2}\left(2(n+1)^2 - n(n+1)\right)}{2} = \frac{(-1)^{n+2}\left(n^2+3n+2\right)}{2} =$$

$$\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(n+2)}{2}$$

המעבר (*) מתקיים מהנחת האנדוקציה.

ב. את סדרת פיבונצ׳י מגדירים על ידי קביעת $a_1 = a_2 = 1$, ו- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ לכל $n \geq 1$.

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי למעשה מתקיים: $a_n = \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{\sqrt{5}}$.

עבור $n = 1$ נקבל 1=1. נניח שמתקיים עד n, ונשתמש בהגדרת סדרת פיבונצ׳י ובהנחת האינדוקציה נקבל:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right)\right) =$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$. לסיום, נשים לב כי:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

<u>שאלה 5 :</u>

לכל אחת מהטענות הבאות, רשמו את הטענה ההפוכה לה (כלומר, את שלילת הטענה). $a_n$ מייצג איבר כללי של סדרה נתונה כלשהי.

א. לכל מספר ממשי $M$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n < M$.

ב. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל מספר טבעי $n$ המקיים $n > N$ מתקיים : $|a_n - L| < \varepsilon$.

ג. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N$ כך שלכל שני מספרים טבעיים $m, n$ המקיימים $m, n > N$, מתקיים : $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

א. קיים מספר ממשי $M$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq M$.

ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $N$ קיים טבעי $n$ המקיים $n > N$ מתקיים : $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

ג. קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $N$ כך שקיימים שני טבעיים $n, m > N$ המקיימים $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$.

<u>שאלה 6 – לא להגשה :</u>

עבור כל אחד משני הביטויים הבאים, מצאו ביטוי שווה התלוי ב- $n$ ובכל אחת מארבע פעולות החשבון האלמנטריות פעם אחת לכל היותר. הוכיחו את טענותיכם.

א. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

ב. $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$