תרגיל בית 1

שאלה 1:

א. נראה כי הנורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_{L_1}, \|\cdot\|_{L_\infty}$ המוגדרות על המרחבים הוקטוריים המתאימים אכן מהוות נורמות.

i. נתבונן בנורמה $\|\cdot\|_1$ המוגדרת על המרחב $\mathbb{R}^n$ על ידי:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

נבדוק את כל התנאים:

- חיוביות – טריוויאלית, שכן זהו סכום של מספרים חיוביים.
  - התאפסות - $\|x\|_1 = 0 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ אם ורק אם $|x_i| = 0$ לכל $1 \le i \le n$ וזאת כמובן אם ורק אם $x = (0,0,\cdots,0)$.
- כפל בסקלר – יהיו $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, אזי מתקיים:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n}|\lambda||x_i| = |\lambda|\sum_{i=1}^{n}|x_i| = |\lambda|\|x\|_1$$

- אי שוויון המשולש – יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ כלשהם, אזי:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i| \overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} \sum_{i=1}^{n}|x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^{n}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

ii. נתבונן בנורמה $\|\cdot\|_{L_1}$ המוגדרת על המרחב $C[a,b]$ על ידי:

$$\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)|dx$$

נבדוק את כל התנאים:

- חיובית - $|f(x)| \ge 0$ לכל $x \in [a,b]$ ולכן $\int_a^b |f(x)|dx \ge \int_a^b 0dx = 0$ כנדרש.
  - התאפסות – נניח כי $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, ונניח בשלילה כי $|f(x_0)| = C > 0$ עבור $x \in [a,b]$. אנו יודעים כי f רציפה ולכן קיימת סביבת $\delta > 0$ של x_0 כך שמתקיים $|f(x)| > C - \varepsilon > 0$ עבור $0 < \varepsilon < C$ כלשהו. אך מכאן שמתקיים:

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^{x_0-\delta} |f(x)|dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|dx + \int_{x_0+\delta}^{b} |f(x)dx$$

אך שני האיברים הקיצוניים בסכום זה אי שליליים, וכן מתקיים:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|dx > (C-\varepsilon)2\delta > 0$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\int_a^b |f(x)|dx > (C-\varepsilon)2\delta > 0$$

בסתירה להנחה. לכן נסיק כי לא קיימת נקודה x_0 כנ"ל, כלומר $f(x) = 0$.
מכאן שאכן מתקיים $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ אם ורק אם $f(x) = 0$.

- כפל בסקלר – תהא $f \in C[a,b]$ ויהא $\lambda \in \mathbb{R}$, אזי מתקיים:

$$\|\lambda f\|_{L_1} = \int_a^b |\lambda f(x)|dx = \int_a^b |\lambda||f(x)|dx = |\lambda|\int_a^b |f(x)|dx = |\lambda|\|f\|_{L_1}$$

- אי שוויון המשולש – יהיו $f, g \in C[a,b]$. אזי לכל $x \in [a,b]$ מתקיים:

$$|f(x)+g(x)| \overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} |f(x)|+|g(x)|$$

ולכן:

$$\|f(x)+g(x)\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|+|g(x)|dx$$
$$= \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = \|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1}$$

iii. נתבונן בנורמה $\|\cdot\|_{L_\infty}$ המוגדרת על המרחב $C[a,b]$ על ידי:

$$\|f\|_{L_\infty} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

כאשר מובן לנו כי הנורמה מוגדרת היטב במובן זה שכל הפונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ ולכן קיים המקסימום הנ"ל. נבדוק, אם כן, קיום התנאים הנדרשים להיות הגדרה זו נורמה כנדרש:

- חיוביות - $|f(x)| \geq 0$ לכל $x\in[a,b]$ ולכן בפרט $\|f\|_{L_\infty} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| \geq 0$.
  - התאפסות - $\|f\|_{L_\infty} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| = 0$ אם ורק אם לכל $x\in[a,b]$, מתקיים $0 = -\max_{x\in[a,b]}|f(x)| \leq f(x) \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x)| = 0$ כלומר $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$ כנדרש.
- כפל בסקלר – תהא $f\in C[a,b]$ ויהא $\lambda\in\mathbb{R}$, אזי מתקיים:

$$\|\lambda f\|_{L_\infty} = \max_{x\in[a,b]}|\lambda f(x)| = \max_{x\in[a,b]}|\lambda||f(x)| = |\lambda|\max_{x\in[a,b]}|f(x)| = |\lambda|\|f\|_{L_\infty}$$

- אי שוויון המשולש – יהיו $f,g\in C[a,b]$. אזי נזכור כי לכל $x\in[a,b]$ מתקיים:

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$

ולכן:

$$\|f+g\|_{L_\infty} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)| \leq \max_{x\in[a,b]}|f(x)|+|g(x)|$$
$$= \max_{x\in[a,b]}|f(x)| + \max_{x\in[a,b]}|g(x)| = \|f\|_{L_\infty} + \|g_{L_\infty}\|$$

ב. נראה, כי הנורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ המוגדרות על תתי המרחבים של המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^\infty$ הן אכן נורמות כנדרש.

i. נתבונן בנורמה $\|\cdot\|_1$ המוגדרת על המרחב l_1 על ידי:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$$

נראה כי פונקציה זו כפי שהיא מוגדרת אכן מהווה נורמה על פי התנאים:

- חיוביות – יהא $x\in l_1$, אזי מתקיים:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| \xrightarrow{\forall i\in\mathbb{N}\quad |x_i|\geq 0} \|x\|_1 \geq 0$$

  - התאפסות – נניח כי קיים $j\in\mathbb{N}$ ו-$x\in l_1$ כך ש-$|x_i| = C_j > 0$. אזי מתקיים:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = \sum_{i=1}^{j-1}|x_i| + |x_j| + \sum_{i=j+1}^{\infty}|x_i|$$

כאשר שני האיברים השמאלי והימני ביותר הינם טורים של מספרים אי שליליים ולכן גדולים מאפס ומכאן שמתקיים:

$$\|x\|_1 > C_j > 0$$

כלומר, נסיק, $\|x\|_1 = 0$ אם ורק אם לכל $j\in\mathbb{N}$ מתקיים $C_j = 0$ כלומר $x=0$.

- כפל בסקלר – יהא $x \in l_1$ ויהא $\lambda \in \mathbb{R}$. אזי מתקיים:

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

- אי שוויון המשולש – יהיו $x, y \in l_1$. אזי נזכיר כי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$$

ולכן מתקיים:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

ii. נתבונן בנורמה $\|\cdot\|_2$ המוגדרת על המרחב l_2 באופן הבא:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

נבדוק את כל התנאים הנדרשים ונראה כי זו אכן נורמה:

- חיוביות – לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $|x_i|^2 \geq 0$ ולכן בפרט:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \geq 0 \to \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \geq 0$$

  - התאפסות – נניח כי $\|x\|_2 = 0$ ונניח בשלילה כי קיים $j \in \mathbb{N}$ כך ש-$|x_j| = C_j > 0$. אז מתקיים:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{j-1} |x_i|^2 + |x_j|^2 + \sum_{i=j-1}^{\infty} |x_i|^2} > \sqrt{C_j^2} = C_j > 0$$

בסתירה להנחה. לכן נסיק כי לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $|x_i| = 0$ כלומר $x = 0$.

- כפל בסקלר – יהא $x \in l_2$ ויהא $\lambda \in \mathbb{R}$, אזי מתקיים:

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda^2||x_i|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$
$$= |\lambda| \|x\|_2$$

- אי שוויון המשולש – יהיו $x, y \in l_2$. אזי מתקיים:

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2} \overset{|a+b| \leq |a|+|b|}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} 2|x_i||y_i|} \ (\star)$$

עתה נזכר כי מגרסת אי שוויון קושי-שוורץ לטורים מתכנסים, מתקיים:

$$\|x\|_2 \|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2} \geq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i|$$

ולכן:

$$(\star) \le \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|} = \sqrt{(\|x\|+\|y\|)^2} = \|x\|+\|y\|$$

iii. נתבונן בנורמה $\|\cdot\|_\infty$ המוגדרת על המרחב l_∞ באופן הבא:

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$$

נבדוק, אם כן, את כל התנאים לכך שזוהי אכן נורמה:

- חיוביות – לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $|x_i|\ge 0$ וכן הסדרה חסומה ולכן נסיק כי הסופרמום קיים ובפרט אי שלילי.
  - התאפסות – $\|x\|_\infty = 0$ אם ורק אם $\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = 0$ וזאת אם ורק אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le|x_n|\le 0$ כלומר $x_n=0$ ולכן $x=0$.
- כפל בסקלר – לכל $x\in l_\infty$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\lambda x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\lambda||x_n| = |\lambda|\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = |\lambda|\|x\|_\infty$$

- אי שוויון המשולש – יהיו $x,y\in l_\infty$ כלשהם. אזי מתקיים:

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_i+y_i| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_i|+|y_i| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_i| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_i|$$
$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

שאלה 2:

נתונה קבוצה כלשהי X וכן נתונות מטריקות d,d_1,d_2 המוגדרות על X.

א. יהא $C>0$ מספר ממשי. נוכיח כי הפונקציה $Cd: X\times X\mapsto\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\forall x,y\in X \quad Cd(x,y) = c\cdot d(x,y)$$

נרצה להראות, כי פונקציה זו מהווה מטריקה על X. לשם כך, נבדוק את קיום התנאים:

i. חיוביות - לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$Cd(x,y) = \overset{\ge 0}{C}\cdot \overset{\ge 0}{d(x,y)} \ge 0$$

- התאפסות – היות ו-$C>0$ כלומר בפרט אינו אפס, נקבל כי $Cd(x,y)=0$ אם ורק אם $d(x,y)=0$ כלומר, רק עבור $x=y$.

ii. סימטריות – לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$Cd(x,y) = C\cdot d(x,y) \overset{d \text{ סימטרית}}{=} C\cdot d(y,x) = Cd(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z\in X$ מתקיים:

$$Cd(x,z) = C\cdot d(x,z) \overset{\substack{\text{אי שוויון} \\ \text{המשולש ב-}d}}{\le} C\cdot\big(d(x,y)+d(y,z)\big)$$
$$C\cdot d(x,y) + C\cdot d(y,z) = Cd(x,y)+Cd(y,z)$$

ב. עלינו להוכיח כי הפונקציה $f: X\times X\mapsto\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\forall x,y\in X \quad f(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

היא מטריקה על X. נבדוק את קיום כל התנאים, כנדרש.

i. חיוביות – לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$f(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \overset{d(x,y)\ge 0}{\ge} 0$$

- התאפסות – נשים לב כי $d(x,y)\ge 0$ ולכן המכנה של $f(x,y)$ לא מתאפס לעולם. מכאן, נסיק כי $f(x,y)=0$ אם ורק אם $d(x,y)=0$ כלומר אם ורק אם $x=y$.

ii. סימטריות – לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$f(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\overset{\text{סימטריות } d}{=}\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=f(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש – יהיו $x,y,z\in X$ כלשהם. אזי נזכיר, כי מתקיים:

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$$

נניח אם כן, בשלילה, כי עבור איברים אלו מתקיים:

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}>\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

אנו יודעים כי כל אחת מהמטריקות בביטויים אלו אי שלילית, ולכן בפרט המכנה בכל אחד מהאיברים באי השוויון הנ"ל חיוביים ממש, ולכן נוכל לכפול את שני האגפים בכולם ולקבל כי:

$$\begin{aligned}&d(x,z)\big(1+d(x,y)\big)\big(1+d(y,z)\big)\\&\quad>d(x,y)\big(1+d(x,z)\big)\big(1+d(y,z)\big)+d(y,z)\big(1+d(x,z)\big)\big(1+d(x,y)\big)\end{aligned}$$

כלומר, אם נסמן, לצורך נוחות:

$$d(x,z)=n\quad d(x,y)=m\quad d(y,z)=k$$

אזי, תחת הנחת השאלה כי $n\le m+k$, נקבל כי:

$$n(1+m)(1+k)>m(1+n)(1+k)+k(1+m)(1+n)$$

כלומר:

$$n+nm+nk+nmk>m+mn+mk+mnk+k+km+kn+mnk$$

ולאחר צמצום איברים נקבל את אי השוויון:

$$n>m+k+2mk+nmk>m+k$$

וזאת בסתירה לכך ש-$n\le m+k$. לכן נסיק כי אי שוויון המשולש אכן מתקיים כנדרש.

ג. יהא $\lambda\in[0,1]$ מספר ממשי. נרצה להוכיח כי $g:X\times X\mapsto\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$g(x,y)=(1-\lambda)\cdot d_1(x,y)+\lambda\cdot d_2(x,y)$$

היא אכן מטריקה המוגדרת על X. נבדוק את קיום כל התנאים להיותה מטריקה:

i. חיוביות – נזכור כי $0\le\lambda\le 1$ ולכן בפרט $1-\lambda\ge 0$. לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$g(x,y)=\overset{\ge 0}{(1-\lambda)}\cdot\overset{\ge 0}{d_1(x,y)}+\overset{\ge 0}{\lambda}\cdot\overset{\ge 0}{d_2(x,y)}\ge 0$$

- התאפסות – נניח כי $g(x,y)=0$. אזי לכל $\lambda\in[0,1]$, מתקיים $\lambda>0$ או $1-\lambda>0$.
לכן, נקבל כי עדיין ישנו צירוף ליניארי של מטריקות כלומר של איברים אי שליליים. מכאן נסיק שבהכרח $d_2(x,y)$ או $d_1(x,y)$ חייבים להיות 0. כלומר $x=y$.

ii. סימטריות – לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\begin{aligned}g(x,y)&=(1-\lambda)\cdot d_1(x,y)+\lambda\cdot d_2(x,y)\overset{\text{מטריקות } d_{1,2}}{=}(1-\lambda)\cdot d_1(y,x)+\lambda\cdot d_2(y,x)\\&=g(y,x)\end{aligned}$$

iii. אי שוויון המשולש – לכל $x,y,z\in X$ מתקיים:

$$\begin{aligned}g(x,z)&=(1-\lambda)\cdot d_1(x,z)+\lambda\cdot d_2(x,y)\\&\le(1-\lambda)\cdot\big(d_1(x,y)+d_1(y,z)\big)+\lambda\cdot\big(d_2(x,y)+d_2(y,z)\big)\\&=(1-\lambda)\cdot d_1(x,y)+\lambda\cdot d_2(x,y)+(1-\lambda)\cdot d_1(y,z)+\lambda\cdot d_2(y,z)\\&=g(x,y)+g(y,z)\end{aligned}$$

שאלה 3:

נתון מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$. הקטע המחבר בין שני וקטורים $v_1,v_2\in V$ מוגדר על ידי הקבוצה:

$$\{(1-\lambda)v_1+\lambda v_2|\lambda\in[0,1]\}\subset V$$

א. נרצה להראות כי הזזות ואופרטורים ליניארים המוגדרים על V מעבירים כל קטע המחבר בין שני וקטורים ב-V לקטע אחר המחבר בין שני וקטורים אחרים ב-V. נרצה להראות גם כי הם מעבירים כל קבוצה קמורה ב-V לקבוצה קמורה ב-V.

לשם כך יהיו $v_1,v_2\in V$ וקטורים ונסמן את הקטע המחבר ביניהם על ידי L. תהא טרנספורמציה ליניארית כלשהי $T:V\mapsto V$. לכל $\lambda\in[0,1]$, מתקיים:

$$u\coloneqq T\big((1-\lambda)v_1+\lambda v_2\big)\overset{\text{הגדרת אופרטור ליניארי}}{=}(1-\lambda)T(v_1)+\lambda T(v_2)$$

הקטע המחבר בין $T(v_1),T(v_2)$ מוגדר על ידי:

$$\{(1-\lambda)T(v_1)+\lambda T(v_2)|\lambda\in[0,1]\}=L$$

ולכן $u\in L'$. באותו אופן, כל איבר ב-L' ניתן לכתיבה על ידי:

$$(1-\lambda)T(v_1)+\lambda T(v_2)$$

אך מכאן שהוא בדיוק התמונה של האיבר $(1-\lambda)v_1+\lambda v_2\in L$. כלומר תמונת הקטע L על ידי T הוא הקטע L', כנדרש.

באותו אופן, תהא קבוצה קמורה כלשהי $C\subset V$ אזי, על פי הגדרה, לכל $v_1,v_2\in C$, גם הקטע המחבר את v_1,v_2 מוכל ב-C. הראינו עתה כי כל קטע מועתק לקטע על ידי ההעתקה הליניארית, ולכן בפרט הקטע המחבר את v_1,v_2 מועתק לקטע המחבר את הקטעים $T(v_1),T(v_2)$.

יהיו עתה איברים $u_1,u_2\in T(C)$. אזי, על פי הגדרה, קיימים $v_1,v_2\in C$ כך שמתקיים:

$$T(v_1)=u_1\quad T(v_2)=u_2$$

נראה כי הקטע המחבר את u_1,u_2 מוכל ב-$T(C)$. לשם כך, נתבונן באיבר בקטע הנ"ל. אזי, על פי הגדרה, קיימת $\lambda\in[0,1]$ כך שמתקיים:

$$u=(1-\lambda)u_1+\lambda u_2=(1-\lambda)T(v_1)+\lambda T(v_2)$$

אך מכאן ש:

$$u=T\big((1-\lambda)v_1+\lambda v_2\big)$$

ומכיוון ש-C קבוצה קמורה, נקבל כי $v_1,v_2\in C$ גורר כי גם $(1-\lambda)v_1+\lambda v_2\in C$ כלומר יש מקור לאיבר זה. מכאן שהקבוצה $T(C)$ קמורה כנדרש.

ב. נתון מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{R}$ וכן נתונה S ספירה ב-V. עבור $v_1,v_2\in S$ מוגדר I להיות הקטע המחבר בין v_1,v_2. נרצה להראות כי:

$$S\cap I=\{v_1,v_2\}$$

נזכיר, ראשית, כי לפי הגדרה, קיים $v_0\in V$ כלשהו וכן $0<R\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$S=\{v\in V|\|v-v_0\|=R\}$$

מכאן נסיק, כמובן, כי $\|v_1-v_0\|=\|v_2-v_0\|=R(\star)$.

יהא, אם כן, איבר $v\in S\cap I$ כלשהו. מכאן, שניתן להסיק שתי תכונות אודות v. והן שמתקיים:

$$\exists\lambda\in[0,1]\quad v=(1-\lambda)v_1+\lambda v_2$$

$$\|v-v_0\|^2=\langle v-v_0,v-v_0\rangle=R^2$$

נשים לב, מאי שוויון המשולש, כי מתקיים:

$$\|v-v_0\|=\|(1-\lambda)v_1+\lambda v_2-v_0\|=\big\|\big((1-\lambda)v_1-(1-\lambda)v_0\big)+(\lambda v_2-\lambda v_0)\big\|$$
$$\le\|(1-\lambda)(v_1-v_0)\|+\|\lambda(v_2-v_0)\|=(1-\lambda)\|v_1-v_0\|+\lambda\|v_2-v_0\|$$

נציב את הנתון מ-$(\star)$ ונקבל כי:

$$=(1-\lambda)R+\lambda R=R$$

כלומר:

$$\|v-v_0\|\le R$$

על מנת שיתקיים שוויון, נעריך את הנורמה על ידי המכפלה הפנימית באופן הבא:

$$\|v-v_0\|^2=\langle(1-\lambda)v_1+\lambda v_2-v_0,(1-\lambda)v_1+\lambda v_2-v_0\rangle$$

לאחר פישוט, תוך הסתמכות על ליניארית המ"פ במרחבים מעל-$\mathbb{R}$, מתקבל הביטוי הבא:

$$(1-\lambda)^2\|v_1\|^2+(1-\lambda)\lambda\langle v_1,v_2\rangle-(1-\lambda)\langle v_1,v_0\rangle$$
$$+\lambda(1-\lambda)\langle v_2,v_1\rangle+\lambda^2\|v_2\|^2-\lambda\langle v_2,v_0\rangle$$
$$-(1-\lambda)\langle v_0,v_1\rangle-\lambda\langle v_0,v_2\rangle+\|v_0\|^2$$

נשים לב, עתה, כי $\lambda < 1$ ולכן $(1-\lambda) < 1$ וכן $\lambda^2 < \lambda$ וכן $(1-\lambda)^2 < 1-\lambda$. כלומר נוכל להשוות את הביטוי שקיבלנו ולגלות כי:

$$\leq (1-\lambda)[\|v_1\|^2 - 2\langle v_1, v_0\rangle + \|v_0\|^2] + \lambda[\|v_2\|^2 - 2\langle v_2, v_0\rangle + \|v_0\|^2] - 2(1-\lambda)\lambda\langle v_1, v_2\rangle$$

אך נזכור כי:

$$\begin{rcases} \|v_1\|^2 - 2\langle v_1, v_0\rangle + \|v_0\|^2 = \|v_1 - v_0\|^2 \\ \|v_2\|^2 - 2\langle v_2, v_0\rangle + \|v_0\|^2 = \|v_2 - v_0\|^2 \end{rcases} = R^2$$

ולכן הביטוי שקיבלנו ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$= (1-\lambda)R^2 + \lambda R^2 - 2(1-\lambda)\lambda\langle v_1, v_2\rangle = R^2 - 2(1-\lambda)\lambda\langle v_1, v_2\rangle$$

ולסיכום, קיבלנו כי מתקיים:

$$\boxed{\|v - v_0\|^2 \leq R^2 - 2(1-\lambda)\lambda\langle v_1, v_2\rangle}$$

כאשר הגודל $\langle v_1, v_2\rangle > 0$ שכן אחרת נקבל כי $v_1 = v_2$ ומקרה זה טריוויאלי שכן זהו לא קטע אלא נקודה בודדת, ולכן נסיק כי:

$$\|v - v_0\|^2 \leq R^2 \Leftrightarrow 2(1-\lambda)\lambda\langle v_1, v_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1,0}$$

כלומר, הראינו כי:

$$v \in S \cap I \Leftrightarrow v \in \{v_1, v_2\} \Leftrightarrow \boxed{S \cap I = \{v_1, v_2\}}$$

ג. בשלב הראשון נעסוק בנורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ המוגדרות על $\mathbb{R}^n$. נניח בשלילה כי הן מושרות על יד מכפלה פנימית כלשהי. מכאן, שלפי סעיף ב', לכל ספירה שנגדיר, נסמנה S, ולכל $v_1, v_2 \in S$ שנבחר, אם נסמן ב-I את הקטע המחבר בין v_1, v_2, נקבל כי:

$$S \cap I = \{v_1, v_2\}$$

נחלק עתה למקרה של נורמת-1 ובנפרד למקרה של נורמת אינסוף:

i. נבחר ספירה מרדיוס $R > 0$ סביב הראשית, ונסמנה S. על פי הגדרה, מתקיים:

$$S = \{v \in \mathbb{R}^n | \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| = R\}$$

נבחר אם כן, את הוקטורים:

$$v_1 = (R, 0, \cdots, 0) \quad v_2 = (0, R, \cdots, 0,0)$$

אשר נמצאים על הספירה כדרוש (שכן סכום הערכים המוחלטים של רכיביהם הוא בדיוק R. אך נשים לב שלכל $\lambda \in (0,1)$ מתקיים:

$$(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 = \big((1-\lambda)R, \lambda R, 0,0, \cdots, 0\big)$$

ולכן:

$$\|(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|(1-\lambda)v_1^i + \lambda v_2^i\right| = (1-\lambda)R + \lambda R = R$$

כלומר $(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in S$ וזאת בסתירה להנחתנו כי הנ"ל לא אפשרי במרחב מכפלה פנימית.

ii. נבחר את אותה ספירה שהגדרנו במקרה הראשון, אלא שהפעם נבחר את הוקטורים:

$$v_1 = (R, R, 0, \cdots, 0) \quad v_2 = (0, R, 0, \cdots, 0)$$

ולכן מתקיים:

$$(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 = \big((1-\lambda)R, (1-\lambda)R + \lambda R, 0 \cdots, 0\big) = \big((1-\lambda)R, R, 0, \cdots, 0\big)$$

ולכן:

$$\|(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2\| = \sup_{1\leq i\leq n} \left|(1-\lambda)v_1^i + \lambda v_2^i\right| = R$$

וגם במקרה זה קיבלנו כי $(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in S$ בסתירה לכך שהנ"ל לא ייתכן במרחב מכפלה פנימית.

בשלב השני, נרצה להראות את אותו הדבר עבור הנורמות $\|\cdot\|_{L_1}, \|\cdot\|_{L_\infty}$ המוגדרות על המרחב $C[a,b]$. נניח, לשם כך, באותו אופן, כי נתונה ספירה S מרדיוס C סביב פונקציה האפס. נבחר את הפונקציות הבאות:

i. במקרה של נורמת L_1 נבחר:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2R}{b-a} & \frac{a+b}{2}\le x\le b\\ 0 & a\le x<\frac{a+b}{2}\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0 & \frac{a+b}{2}\le x\le b\\ \frac{2R}{b-a} & a\le x<\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

נשים לב כי:

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx=\frac{b-a}{2}\frac{2R}{b-a}=R\quad\int_a^b|g(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|g(x)|=\frac{2R}{b-a}\frac{b-a}{2}=R$$

ולכל $\lambda\in(0,1)$ מתקיים:

$$\big((1-\lambda)f+\lambda g\big)(x)=\begin{cases}\frac{(1-\lambda)2R}{b-a} & \frac{a+b}{2}\le x\le b\\ \frac{\lambda 2R}{b-a} & a\le x<\frac{a+b}{2}\end{cases}$$

ונקבל כי מתקיים:

$$\int_a^b\left|\big((1-\lambda)f+\lambda g\big)(x)\right|dx=\frac{2\lambda R}{b-a}\frac{b-a}{2}+\frac{(1-\lambda)2R}{b-a}\frac{b-a}{2}=\lambda R+(1-\lambda)R=R$$

כלומר קיבלנו כי $(1-\lambda)f+\lambda g\in S$ בסתירה לכך שבמרחב מכפלה פנימית הנ"ל לא ייתכן כפי שהוכחנו בסעיף ב'.

ii. במקרה של נורמת L_∞ נבחר:

$$f(x)=\begin{cases}R & x=a\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}R & x=a\\ \frac{R}{2} & x=b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

קל לראות כי הסופרמום של שתי הפונקציות בקטע הוא R ולכן הן אכן נמצאות בספירה סביב פונקציות האפס. כמו כן, לכל $\lambda\in(0,1)$ מתקיים:

$$\big((1-\lambda)f+\lambda g\big)(x)=\begin{cases}(1-\lambda)R+\lambda R & x=a\\ \frac{\lambda R}{2} & x=b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=\begin{cases}R & x=a\\ \frac{\lambda R}{2} & x=b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

וקל לראות כי הסופרמום של פונקציה זו גם הוא R ולכן היא נמצאת בספירה בסתירה לכך שבמרחב מכפלה פנימית הנ"ל לא אפשרי.

בשלב האחרון, נרצה להראות כי ניתן להראות את אותו הדבר עבור הנורמות $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_\infty$ המוגדרות על l_1,l_∞ בהתאמה. לשם כך נתבונן, כאמור, בספירה ברדיוס R סביב סדרת האפסים.

i. במקרה של נורמת ה-1, נבחר את שתי הסדרות הבאות:

$$\begin{matrix}\forall i\in\mathbb{N} & \forall i\in\mathbb{N}\\ a_i=\frac{R}{2}\frac{1}{2^i} & b_i=R\frac{1}{2^{i+1}}\end{matrix}$$

אנחנו מכירים ויודעים כי:

$$\|a\|_1=\sum_{i=1}^\infty|a_i|=\frac{R}{2}\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^i}=\frac{R}{2}\cdot 2=R\quad\|b\|_1=\sum_{i=1}^\infty|b_i|=R\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^{i+1}}=R$$

ולכן הסדרות הנ"ל נמצאות בספירה כדרוש. כמו כן, לכל $\lambda \in (0,1)$, מתקיים:

$$c_i = (1-\lambda)a_i + \lambda b_i = \frac{(1-\lambda)R}{2}\frac{1}{2^i} + \lambda R\frac{1}{2^{i+1}}$$

ונקבל כי:

$$\|c\| = \sum_{i=1}^{\infty}|c_i| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-\lambda)R}{2}\frac{1}{2^i} + \lambda R\frac{1}{2^{i+1}} = \frac{(1-\lambda)R}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} + \lambda R\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}$$

$$\frac{(1-\lambda)R}{2}\cdot 2 + \lambda R = R$$

כלומר $c \in S$, בסתירה למה שהוכחנו בדבר מרחבי מכפלה פנימית.

ii. במקרה של נורמת האינסוף, נבחר את הסדרות הבאות:

$$a_1 = R, \begin{matrix}\forall i > 1 \\ a_i = 0\end{matrix} \quad a_1 = R, a_2 = R, \begin{matrix}\forall i > 2 \\ a_i = 0\end{matrix}$$

הסופרמום של שתי סדרות אלו הוא כמובן R ולכן הן שייכות לספירה כדרוש. לכל $\lambda \in (0,1)$ נגדיר סדרה חדשה על ידי:

$$c_i = (1-\lambda)a_i + \lambda b_i$$

כלומר:

$$c_1 = (1-\lambda)R + \lambda R = R, c_2 = \lambda R < R, \begin{matrix}\forall i \in \mathbb{N} \\ c_i = 0\end{matrix}$$

הסופרמום של סדרה זו גם הוא R כלומר $c \in S$, שנית, בסתירה לתנאי שהוכחנו שנגזר מכך שהמרחב הוא מרחב מכפלה פנימית.

לסיכום, הראנו כי אף אחת מ-6 הנורמות שהוגדרו בגיליון זה, לא יכלו להיות נוצרות על ידי מכפלה פנימית, שכן אחרת היו סותרות את שהוכחנו בסעיף ב' של שאלה זו.