# פתרון חלקי לתרגיל בית 1

1) צ"ל : לכל $n \in N$ מתקיים $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

הוכחה:

ע"פ נוסחת הבינום : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

נציב $a=1, b=1$ ונקבל $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

מש"ל

2) צ"ל : לכל $n,m \in N$ $\sqrt[n]{m}$ הוא שלם או אי רציונלי.

הוכחה:

יהי $m$ כזה שלכל $a \in N$ $m \neq a^n$ . נניח בשלילה ש $\sqrt[n]{m} \in Q$ .

אז קיימים $l,k \in N$ כך ש $\sqrt[n]{m} = \frac{l}{k}$ ו- $\frac{l}{k}$ שבר מצומצם.

כלומר $\sqrt[n]{m} \cdot k = l$ ולכן $m \cdot k^n = l^n$.

נפרק את $l,k,m$ לגורמים ראשוניים:

$$m = g_1^{\gamma_1} \cdot g_2^{\gamma_2} \cdots g_j^{\gamma_j} \quad , \; k = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s} \; , \; l = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

כש- $j,s,r$ שלמים , $p_i, g_i, q_i$ ראשוניים לכל $i$ וכל ה $p_i$-ים שונים ביניהם , כל ה $q_i$-ים שונים ביניהם וכל ה $g_i$-ים שונים ביניהם.

נקבל את המשוואה :

$$\left(g_1^{\gamma_1} \cdot g_2^{\gamma_2} \cdots g_j^{\gamma_j}\right) \cdot \left(q_1^{n\beta_1} \cdot q_2^{n\beta_2} \cdots q_s^{n\beta_s}\right) = \left(p_1^{n\alpha_1} \cdot p_2^{n\alpha_2} \cdots p_r^{n\alpha_r}\right)$$

מכיוון ש- $m \neq a^n$ . קיים $1 \leq i \leq j$ כך ש- $\gamma_i$ אינו מתחלק ב $n$.

בגלל השיוון קיים $1 \leq f \leq r$ ש- $g_i = p_f$ ( אחרת קיים גורם ראשוני בצד שמאל של המשוואה שאינו מופיע בצד ימין שלה ).

אם קיים $1 \le h \le s$ כך ש- $q_h = g_i$ נקבל ש- $g_i = q_h = p_f$ ולכן $\frac{l}{k}$ לא מצומצם בסתירה לבחירתו.

אם לא קיים $1 \le h \le s$ כך ש- $q_h = g_i$ נקבל $b^{\gamma_i} = b^{n\alpha_f}$ ( כש $b = g_i = p_f$ ) ושוב זה אינו אפשרי, מפני שבחרנו את $\gamma_i$ כך שלא יתחלק ב $n$.

קיבלנו שלא יתכן כי $\sqrt[n]{m}$ רציונלי.

(3

א. צ"ל : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin Q$ .

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = q \in Q$ אז $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(q-\sqrt{5}\right)^2$ .

לכן $2+3+2\sqrt{6} = q^2 - 2q\sqrt{5}+5$

ולכן $\sqrt{6}+q\sqrt{5} = q'$ נעלה שוב בריבוע ונקבל $6+2q\sqrt{30}+5q^2 = q''$ ולכן ( מסגירות הרציונלים תחת חיבור, חיסור, כפל וחילוק ) נקבל $\sqrt{30} \in Q$ . סתירה.

ב. צ"ל : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} \notin Q$

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} = q \in Q$ נקבל $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^2 = q^2$ ולכן

$\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{16} = q'$ ולכן $\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2} = q''$

ולכן $\sqrt[3]{2} = \left(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right) \in Q$ . סתירה.

4) א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ .

ג. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$

6) ב. הוכח שאם $|x-4|<1$ אז $\left|\frac{x^2-6x+8}{x+4}\right| < \frac{3}{7}$ .

הוכחה:

יהי $|x-4|<1$ (אז $3 \le x \le 5$ ) ולכן :

$$\left|\frac{x^2-6x+8}{x+4}\right| = \left|\frac{(x-4)(x-2)}{x+4}\right| = |x-4| \cdot \left|\frac{x-2}{x+4}\right| \le \left|\frac{x-2}{x+4}\right| \le \frac{3}{|x+4|} \le \frac{3}{7}$$

7) תהא $B \subset \Re$ קבוצה חסומה ו- $A \subset B$. הוכח כי $A$ חסומה ומתקיים:

$\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$

<u>הוכחה</u>:

$B$ חסומה ולכן קיימים $s = \sup B, i = \inf B$.

לכל $b \in B$ מתקיים $i \le b$. $A \subseteq B$ ולכן כל $a \in A$ , $a \in B$ ולכן לכל $a$ מתקיים $i \le a$ ולכן $i$ חסם מלרע של $A$. לכן $i \le \inf A$. באותו אופן, $s$ חסם מלעיל של $A$ ולכן $\sup A \le s$. יהי $a \in A$ אז $\inf A \le a \le \sup A$ .

ולסיכום קיבלנו ש- $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$.

8) א. $A = \{x \in \Re | x < 2\}$

ב. לא יתכן שגם $A$ חסומה מלעיל וגם $A^C$ חסומה מלעיל מכיוון שאם $A$ חסומה מלעיל אז כל $x > \sup A \Leftarrow x \notin A \Leftarrow x \in A^C$ ולכן $A^C$ אינה חסומה.

ג. לא יתכן ש- $A$ חסומה מלעיל ולכל $a \in A$ מתקיים $|a - \sup A| < \frac{1}{100}$. מכיוון שאז $a - \sup A < \frac{1}{100}$ ואז כל $a \in A$ יקיים $a < \sup A - \frac{1}{100}$ כלומר $\sup A - \frac{1}{100}$ חסם מלעיל הקטן מ $\sup A$. סתירה.

ד. ב- $\{5\}$ מתקיים $\inf A = \sup A$.