אלגברה ב־גליון 2

שניר הורדן־205689581

3 במאי 2018

1. א. נבטא את המ"ו W בוקטורי קואורדינטות:

$$W = span\left\{x^4 - x^2, 3x^4 - x^3 + 1\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא משלים לבסיס באמצעות וקטורי קואורדינטות:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

מתקיים $u_i \bigcap \sum\limits_{i\neq j} u_j = \{0\}$ לכן הסכום הוא ישר (הוקטורים בת"ל).
נמיר לבסיס מעל הפולינומים הממשיים כנדרש. אזי נגדיר:

$$V = span\left\{x^2 + 1, x^3 + x, x^2 + x^4\right\}$$

1.ב. יהא V מ"ו מעל שדה אינסופי F. נניח כי $W = span\{w_1, ..., w_k\}$ תת־מרחב של V שאינו טריוויאלי (אינו $\{0\}$ או V).
יהיו $\{u_1, ..., , u_n\}$ וקטורים בת"ל ל־W. כך ש־$dim(V) = n + k$. כעת נקח וקטור כלשהו u_i ונכפיל אותו בקבוע $\omega \neq 0 \in F$. נקבל:

$$U = span\{u_1, .., \omega u_i., u_n\}$$

מאחר ו־F שדה אינסופי יש אינסוף דרכים לעשות זאת. כמו כן, זהן בסיס מאחר ו־$span\{\omega u_i\} = span\{u_i\}$ וקיבלנו משלים ישר ל־W.
כנדרש.

2.א. יהי $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $P_i : V \to V$ אופרטורי הטלה כך ש־$\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = \mathbb{I}$. צ.ל. לכל $i \neq j$ מתקיים $P_i \circ P_j = 0$. **הוכחה:** עלינו להוכיח כי $P_i \circ P_j = 0$ כאשר $i \neq j$.

נתון כי מתקיים $P_i^2 = P_i$ לכל $0 \le i \le n$, מתכונות של הטלות. כמו כן, לפי משפט שהוכחנו בהרצאה, P לכסין ומתקיים $dim\left(ImP_i\right) = tr\left(P_i\right) = rank\left(P_i\right)$. אזי, מתקיים:

$$dimV = dim\mathbb{I} = dim\left(\sum_{i=1}^{n} ImP_i\right) \underbrace{=}_{proven-in-class} tr\left(\sum_{i=1}^{n} ImP_i\right)$$
$$\underbrace{=}_{property-of-trace-Algebra1} \sum_{i=1}^{n} tr\left(ImP_i\right) = \sum_{i=1}^{n} dim(ImP_i)$$

זו תכונה הכרחית של סכום ישר שהוכחה בגליון 1. לכן, מתקיים $ImP_i \bigcap \sum_{k\neq i} ImP_k = \{0\}$ (1). נותר להוכיח שמתקיים ש-P_i הטלה על ImP_i במקביל ל-$\sum_{k\neq i} ImP_k$.
יהא $w \in V$'. נניח כי $w \in \sum_{k\neq i} ImP_k$, אזי $w = \sum_{i\neq k} w_k \Rightarrow w \in \sum_{k\neq i} ImP_k$. לכן אזי כאשר נפעיל את P_i על w נקבל -

$$P_i\left(w\right) \underbrace{=}_{w\in\sum_{k\neq i} ImP_k} P_i\left(\sum_{k\neq i} w_k\right) \underbrace{\Rightarrow}_{question2B} w \in ImP_i \Rightarrow w \in \sum_{k\neq i} ImP_k \bigcap ImP_i$$
$$\Rightarrow w = 0 \Rightarrow P_i\left(w\right) = P_i\left(\sum_{k\neq i} w_k\right) \underbrace{=}_{\forall i|P_i(0)=0} 0$$

זאת אומרת,

$$\sum_{k\neq i} w_k \in KerP_i$$

יש לנו את ההכלה $\sum_{k\neq i} ImP_k \subset KerP_i$ כעת נותר להוכיח שוויון בין שני תתי-המרחבים. נוכיח באמצעות שוויון מימדים:

$$dim\left(\sum_{k\neq i} ImP_k\right) \underbrace{=}_{direct-sum} \sum_{k\neq i} dim\left(ImP_k\right) = \sum_{k=1}^{n} dim\left(ImP_k\right) - ImP_i$$
$$= dimV - dimImP_i \underbrace{=}_{dimension-theorem} dimKerP_i$$

לכן ההטלה היא על ImP_i במקביל ל-$\sum\limits_{k\neq i} P_k$.

לכן מתקיים עבור $v\in V$, הניתן לפירוק בצורה אחידה $v = w_1+...+w_n$ כאשר $w_i\in W_i = ImP_i$, מתקיים,

$$P_i\circ P_j(v) \underbrace{=}_{\forall k\neq j|P_j(w_k)=0} P_i\circ P_j(w_j) \overbrace{=}^{\exists w_J|P_j(v)=w_J} P_i(w_J) \underbrace{=}_{w_J\in KerP_i} \vec{0}$$

כאשר $i\neq j$.

מ.ש.ל. ■

2.ב. תהי $P:V\to V$ הטלה על W. **הוכחה:** נוכיח את שני הכיוונים:

$\Rightarrow$

יהא $w\in W$. נראה הכלה דו כיוונית.

מאחר ו-P הטלה מתקיים:

$$P^2(w)=p(w)\Rightarrow P^2(w)-P(w)=0\Rightarrow P(P(w)-w)=0\Rightarrow P(w)-w\in KerP$$

מאחר ו-$W=ImP$ אז מתקיים $P(w)\in ImP$ וגם $-w\in ImP$ (כפל בסקלר). אז $P(w)-w\in ImP$.

אך מכיוון ש-Pהטלה מתקיים $ImP\bigcap KerP=\{0\}$. לכן:

$$P(w)-w=0\Rightarrow P(w)=w$$

$\Leftarrow$

הכיוון השני ברור כי $ImP=W$ אז בוודאי $w\in W$.

בזו הסתיימה ההוכחה. ■

2.ג. עלינו להוכיח כי T הוא הטלה. לפי ההגדרה ז"א שמתקיים, $T^2=T$.

לפי הנתון T הוא אופרטור ליניארי עם ע"ע 0 ו-1 בלבד. T לכסינה אז היא דומה לאלכסונית.

אזי קיימת טרנספורמציה הפיכה Qוטרנספורציה אלכסונית Dכך ש-

$$D^2 \underbrace{=}_{SeeProofBelow} D=QTQ^{-1}=\left(QTQ^{-1}\right)^2 \underbrace{=}_{Proven-in-AlgebraI} QT^2Q^{-1}$$

נכפיל את שני האגפים ב-Q מימין ו-Q^{-1} משמאל ונקבל $T^2=T$, כנדרש.

<u>טענת עזר:</u> $D=D^2$ כאשר Dאלכסונית ובעלת ערכים 0,1 בלבד על האלכסון הראשי.

לפי הגדרת כפל מטריצות:

$$[D^2]_{ii} = [DD]_{ii} \underbrace{=}_{D-is-diagonal} [D]_{ii}[D]_{ii} = \begin{cases} 1 & if-[D]_{ii} = 1 \\ 0 & [D]_{ii} = 0 \end{cases}$$

מ.ש.ל.
דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^1$$

3א. הוכחה: יהא V מ"ו, יהא $B = \{b_1, ..., b_n\}$ בסיס שלו ו־$T : V \to V$ אופרטור לינארי.

ראשית, נוכיח כי כל תת־מרחב של T הוא T שמור.

ידוע כי לכל קבוצת וקטורים בת"ל $\{b_1, ..., b_k\}$ כאשר $k = n-1$ ו־$b_i \in V$ מתקיים $T\left(span\left\{b_1, ..., b_k\right\}\right) \subseteq span\left\{b_1, ..., b_k\right\}$.

נשים לב כי $b_1 = \{b_1, ..., b_{n-1}\} \bigcap B \setminus \{b_{n-1}\} \bigcap B \setminus \{b_{n-2}\} \bigcap ... \bigcap B \setminus \{b_2\}$.

זה נכון לכל $b_i \in B$ כלשהו.

לכן, לפי תורת הקבוצות,

$$\begin{aligned} T\left(span\left\{b_i\right\}\right) &= T\left(span\left\{\{b_1, ..., b_{n-1}\} \bigcap B \setminus \{b_{n-1}\} \bigcap B \setminus \{b_{n-2}\} \bigcap ... \bigcap B \setminus \{b_2\}\right\}\right) \\ &\underbrace{=}_{linearity} T\left(span\left\{b_1, ..., b_{n-1}\right\}\right) \bigcap T\left(span\left\{B \setminus \{b_{n-1}\}\right\}\right) \bigcap ... \bigcap T\left(span\left\{B \setminus \{b_{n-1}\}\right\}\right) \\ &\subseteq span\left\{\{b_1, ..., b_{n-1}\} \bigcap B \setminus \{b_{n-1}\} \bigcap B \setminus \{b_{n-2}\} \bigcap ... \bigcap B \setminus \{b_2\}\right\} = span\left\{b_i\right\} \end{aligned}$$

וכן מתקיים:

$$T\left(span\left\{B \setminus \{b_1\} \bigcup B \setminus \{b_2\}\right\}\right) = T\left(span\left\{B\right\}\right) \subseteq span\left\{B \setminus \{b_1\} \bigcup B \setminus \{b_2\}\right\} = span\left\{B\right\}$$

בדרך הראשונה נוכל להראות עבור מימד בגודל k כאשר $k \leq n-1$ שכל תת־מרחב ממימד k הוא T־שמור. הוכנו כי גם כל תת־מרחב ממימד n הוא T־שמור. לכן כל תת־מרחב של V הוא T־שמור.

יהא $v \neq 0 \in V$.

מאחר וכל תת־מרחב וקטורי הוא T־שמור אז מתקיים בפרט עבור v:

$$T(v) \underbrace{=}_{single-vector} \lambda v$$

עבור $\lambda \neq 0 \in \mathbb{F}$ כלשהי, כי $v \neq 0$.
יהא $v_1 \neq 0 \in V$. באופן דומה הוא מקיים שקיים $\lambda_{v_1} \in \mathbb{F}$עבורה מתקיים $T(v_1) = \lambda_{v_1} v_1$.
<u>מקרה I -</u> v_1, v הם בת"ל.
אז מתקיים $T(v_1+v) = \lambda_+(v_1+v)$ עבור $\lambda_+ \in \mathbb{F}$ כי כל תת־מרחב הוא T־שמור.
לכן מכך, מהרשום לעיל, ומכך ש־T טרנספורמציה לינארית נקבל,

$$T(v_1+v) = \lambda_+(v_1+v) = T(v_1) + T(v) = \lambda_{v_1} v_1 + \lambda v$$

לכן,

$$\lambda_+(v_1+v) = \lambda_{v_1} v_1 + \lambda v \Rightarrow (\lambda_+ - \lambda_{v_1})\, v_1 + (\lambda_+ - \lambda)\, v = 0 \Rightarrow \lambda_+ = \lambda, \lambda_+ = \lambda_{v_1}$$

אזי לכל וקטור בת"ל עם v נקבל טרנספורמציה סקלרית זהה.
<u>מקרה II -</u> $v = \alpha v_1$ עבור $\alpha \neq 0 \in \mathbb{F}$. (הם ת"ל והסקלר אינו 0 כי v אינו 0)
אז מתקיים

$$\lambda v = T(v) = T(\alpha v_1) \underbrace{=}_{linearity} \alpha T(v_1) = \alpha \lambda_{v_1} v_1 = \lambda_{v_1} \alpha v_1 \underbrace{\Rightarrow}_{equality} \lambda_{v_1} = \lambda$$

<u>מקרה III -</u> $v = 0$ (כלומר $V = \{0\}$) ואז בוודאי מתקיים כי זו טרנספורמציית ה־0.
לכן, $T(v) = \lambda v$ כלומר $T = \lambda \mathbb{I}$ עבור $\lambda \in \mathbb{F}$. מ.ש.ל. ■

3.ב. $\Leftarrow$
יהי B בסיס המקיים T_B, S_B אלכסוניות סימולטנית.
אז $S_B T_B = T_B S_B$ כי שתיהן אלכסוניות (מחישוב ישיר). מאחר ומצאנו בסיס המקיים זאת זה נכון לכל בסיס של V, כי הן לכסינות כלומר כל טרנספורמציה בבסיס כלשהו דומה לאלכסונית שלה $S_B = PSP^{-1}$ עבור P הפיכה כלשהי.לכן, $ST = TS$.
$\Rightarrow$
נתון כי $ST = TS$.
ראשית, נראה כי כל מ"ע W_iשל T הוא S־שמור. נתון כי T לכסינה לכן ניתן לפרק אותה לסכום ישר של תתי־מרחבים עצמיים, לפי משפט הפירוק הספקטרלי. כלומר:

$$\left\{ V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_{\lambda_i} \quad W_{\lambda_i} = \{v \in V | Tv = \lambda_i v\} \right.$$

<u>טענת עזר 1# :</u> יהיו $S, T : V \to V$ אופרטורים לינאריים לכסינים. אם $ST = TS$ אז הם משמרים את המרחבים העצמיים אחד של השני, כלומר עבור $W_\lambda \subseteq T(V)$ מתקיים $S(W_\lambda) \subseteq W_\lambda$, ולהפך.
<u>הוכחה 1# :</u> יהי $v \in V$. נתבונן בביטוי:

$$Tv = \lambda v \Rightarrow T(Sv) = STv = S\lambda v = \lambda(Sv)$$

אז S שולחת כל וקטור במ"ע של T לוקטור במ"ע של T.
מ.ש.ל.

טענת עזר #2: יהי Vמ"ו (ממימד סופי) , יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי לכסין ו־$W \subseteq V$תת־מרחב T־שמור. אז האופרטור $T|_W : W \to W$ הוא לכסין.

הוכחה #2: יהא $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של Tו־$m_{T|_W}(x)$ הפולינום המינימלי של $T|_W$.

נוכיח כי הפולינום המינימלי של $T|_W$ מחלק את הפולינום המינימלי של T, כלומר $m_{T|_W}(x)|m_T(x)$. אם נוכיח זאת אז בוודאי ש־$T|_W$ לכסין כי הוא מחלק פולינום עם גורמים לינאריים שונים יחידים (ממעלה 1) אז גורמיו הם בהכרח גורמים לינאריים שונים יחידים (ממעלה 1)־זאת לפי תכונה של פולינומים־ אז לפי משפט שהוכחנו בהרצאה הוא לכסין.

נשים לב כי T מאפס ("הורג") את $m_{T|_W}(x)$כאשר Tהיא מעל W, כלומר $m_{T|_W}(T|_W) = 0$. אז כאשר Tהיא מעל V נקבל שמתקיים $m_{T|_W}(T) = 0$. לכן מתקיים ש־$m|T_W$ מורכב מגורמים לינארים שונים המוכלים ב־$m_T(x)$. כלומר הוא מחלק אותו.

לכן, $T|_W$ הוא לכסין.

מ.ש.ל.

נתבונן על $S|_W$. מצאנו לעיל כי $S|_{W_i}$ הוא T־שמור לפי טענה #1 ושהוא לכסין (כי המרחב העצמי W_i T־שמור) לפי טענה #2. עלינו להוכיח כי הבסיס של הוקטורים העצמיים של T משותף לשתי הטרנספורמציות.

נשים לב כי גם $T|_{W_{\lambda_i}}$ ו־$S|_{W_{\lambda_i}}$ מתחלפות בכפל כי שתיהן לכסינות ומהנתון ש־$ST = TS$.

לכן, לפי טענה #2, קיים בסיס W_{λ_i} של ו"ע המלכסן את $S|_{W_i}$ לכל i. כמו כן אותו בסיס מלכסן גם את $T|_{W_i}$, כי <u>כל</u> הוקטורים ב־W_{λ_i} הם וקטורים עצמיים של $T|_{W_i}$ כי לפי טענה 1 הם משמרים את המרחבים העצמיים אחד של השני. אז מצאנו בסיס משותף המלכסן את $T|_{W_i}$ ואת $S|_{W_i}$ סימולטנית.

נזכר כי המרחבים העצמיים W_{λ_i} הם בת"ל והסכום הישר שלהם הוא כל המרחב V. לכן אם נרוץ על המרחבים העצמיים W_{λ_i} נקבל בסיס של ו"ע המלכסן סימולטנית את S ו־T.

מאחר והבסיס מורכב מו"ע של S ו־T אז שתיהן אלכסוניות במטריצה המייצגת לפי בסיס זה.

מ.ש.ל.

4. יהי $T : M_{2x2}(\Re) \to M_{2x2}(\Re)$ אופרטור לינארי הנתון ע"י $T(A) = 2A^t$.
לפי משפט הפירוק הספקטרלי:

$$T = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i P_i$$

ראשית, נמיר את בסיס המטריצות לבסיס קואורדינטות:

$$T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים

$$p_\delta(T)=det(T_E-x\mathbb{I})=\begin{vmatrix}2-x&0&0&0\\0&-x&2&0\\0&2&-x&0\\0&0&0&2-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-x&0&0&0\\0&-x&2&0\\0&2&-x&0\\0&0&0&2-x\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}2-x&0&0&0\\0&2&-x&0\\0&-x&2&0\\0&0&0&2-x\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-x&0&0&0\\0&2&-x&0\\0&0&2-\frac{x^2}{2}&0\\0&0&0&2-x\end{vmatrix}=(2-x)^2\left(4-x^2\right)$$

אז הערכים העצמיים הם: $\begin{cases}\lambda_1=2 & \text{amount:3}\\ \lambda_2=-2 & amount:1\end{cases}.$

נמצא את הבסיס לפי הערכים העצמיים:

$$Ker(T-2\mathbb{I})=Ker\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-2&2&0\\0&2&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$Ker(T+2\mathbb{I})=Ker\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&2&0\\0&2&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נביע את הוקטור הכללי:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\zeta_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\zeta_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\zeta_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+\zeta_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

נפתור את מע המשוואות:

$$\begin{cases}\zeta_1=x\\ \zeta_2+\zeta_3=y\\ \zeta_2-\zeta_3=z\\ \zeta_4=w\end{cases}$$

נקבל:

$$2\zeta_2 = y+z \wedge 2\zeta_3 = y-z \Rightarrow \zeta_2 = \frac{y+z}{2}, \zeta_3 = \frac{y-z}{2}$$

לכן,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y+z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y-z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נציב את וקטורי הבסיס ואז P_1 תהיה המטריצה שסוכמים עד הוקטור השלישי כולל, ו־P_2 הוא הוקטור הרביעי.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשתמש באינטרפולציית לגראנג',

$$\phi_i(T) = P_i$$

כאשר

$$\phi_i(x) = \prod_{i\neq k} \frac{x-\lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$$

לכן,

$$P_1 = \phi_1(T) = \prod_{i\neq k} \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda_k \mathbb{I}_{4\times 4}}{\lambda_1 - \lambda_k} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda_2 \mathbb{I}_{4\times 4}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{2 - -2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2=\phi_2(T)=\prod_{i\neq k}\frac{\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&2&0\\0&2&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\lambda_k\mathbb{I}_{4\times4}}{\lambda_2-\lambda_k}=\frac{\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&2&0\\0&2&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\lambda_1\mathbb{I}_{4\times4}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&2&0\\0&2&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}}{-2-2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

והפירוק הספקטרלי הוא

$$T=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2=2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&2&0\\0&2&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

כנדרש.