אלגברה ב' - מועד א' אביב 2016

הצעה לפתרון - דניאל מיטלמן

21 בספטמבר 2016

<u>הערה</u>: את הפתרון הזה כתבתי בזמן הלמידה למבחן. השוויתי עם פתרונות אחרים והשתדלתי לדייק כמה שיותר, אבל זהו אינו פתרון רשמי של הסגל (לא שיהיה אחד כזה)

שאלה 1

נשתמש בבסיס הסטנדרטי לפולינומים ממעלה 3: $E_P=\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ ונציב כל וקטור בסיס באופרטור D:

$$\begin{aligned} D\left(1\right) &= 0 \\ D\left(x\right) &= 1 \\ D\left(x^2\right) &= 2x \\ D\left(x^3\right) &= 3x^2 \end{aligned}$$

כלומר, המטריצה המייצגת של האופרטור D הינה:

$$[D]_E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה המייצגת של האופרטור T לפי הבסיס הסטנדרטי:

$$T=D+3D^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בשלב זה, קל לראות (מכיוון שהמטריצה משולשת עליונה) שהפולינום האופייני של T הינו:

$$\triangle_T\left(x\right)=x^4$$

נחשב את הפולינום המינימלי ע"י מציאת החזקה המקסימלית שאינה מתאפסת. נבדוק עבור x^3 תחילה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, החזקה השלישית אינה מאפסת את הפולינום ולכן הפולינום המינימלי הינו:

$$m_T\left(x\right)=x^4$$

מהפולינום האופייני אנו לומדים שהע"ע 0 מופיע ארבע פעמים על האלכסון הראשי של J, ומהפולינום המינימלי אנו לומדים שהבלוק הגדול ביותר ב־J הינו $J_4\left(0\right)$. לכן:

$$J=J_4\left(0\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

א.

קל לראות (מכיוון שהמטריצה משולשת עליונה) שמתקיים:

$$\triangle_A\left(x\right)=x^5$$

נחשב את הפולינום המינימלי ע"י מציאת החזקה המקסימלית שאינה מאפסת את הפולינום:

$$x^2\quad:\quad\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^3\quad:\quad\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן שהפולינום המינימלי הוא:

$$m_A\left(x\right)=x^3$$

ב.

מהפולינום האופייני אנו לומדים שהע"ע 0 מופיע חמש פעמים על האלכסון הראשי של J, ומהפולינום המינימלי אנו לומדים שהבלוק הגדול ביותר הינו $J_3\left(0\right)$. עובדות אלו מותירות לנו שתי אפשרויות ליתר מטריצת הז'ורדן: שני בלוקים נוספים של $J_1\left(0\right)$ או בלוק נוסף של $J_2\left(0\right)$.
ניעזר בנוסחה לחישוב מס' הבלוקים בגודל 1 וניעזר בחזקות שחישבנו בסעיף א':

$$n_1=\underbrace{rank\left(A^2\right)}_{1}+\underbrace{rank\left(I\right)}_{5}-\underbrace{2\cdot rank\left(A\right)}_{4}=2$$

כלומר, ישנם 2 בלוקים בגודל 1 במטריצת הז'ורדן, ולכן:

$$J=\begin{pmatrix} J_3\left(0\right) & \cdots & 0\\ \vdots & J_1\left(0\right) & \vdots\\ 0 & \cdots & J_1\left(0\right) \end{pmatrix}$$

ג.

לא יודע, משהו באלגוריתם מציאת מטריצה מז'רדנת לא מסתדר עם השאלה הזאת

שאלה 3

א.

מהגדרת תת־המרחב W נמצא לו בסיס:

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נבחין כי $\dim(W) = 3$, ומכיוון שע"פ משפט $W \oplus W^{\perp} = M_2(\mathbb{R})$, נצפה ש־$\dim W^{\perp} = 1$.
נחפש וקטור אורתוגונלי לשלושת הוקטורים בבסיס:

$$\begin{aligned}
\langle v, b_1 \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad tr\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad tr\begin{pmatrix} a-c & \\ & b-d \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{a+b-c-d=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v, b_2 \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad tr\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad tr\begin{pmatrix} c & \\ & b \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{b+c=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v, b_3 \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad tr\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad tr\begin{pmatrix} 0 & \\ & d \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \boldsymbol{d=0}
\end{aligned}$$

נפתור את מערכת המשוואות ונקבל:

$$v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$W^{\perp} = sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ב.

הקירוב הטוב ביותר של מטריצה ב־$M_2(\mathbb{R})$ לת"מ W הוא הטלת הוקטור על הת"מ.
נמצא נוסחה להטלה $P = P_W^{W^\perp}$, כאשר $ImP = W,\ \ker P = W^\perp$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} a = & \alpha + 2\delta \\ b = & \alpha + \beta - \delta \\ c = & -\alpha + \beta + \delta \\ d = & -\alpha + \gamma \end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{cases} \alpha = & \frac{a+b-c}{3} \\ \beta = & \frac{b+c}{2} \\ \gamma = & \frac{a+b-c+3d}{3} \\ \delta = & \frac{2a-b+c}{6} \end{cases}$$

כעת נבנה את ההטלה:

$$P\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{P\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} + \beta \underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} + \gamma \underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} + \delta \underbrace{P\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}$$

נציב את ערכי הפרמטרים ונקבל:

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{a+b-c}{3} & \frac{a+b-c}{3} \\ \frac{-a-b+c}{3} & \frac{-a-b+c}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a+b-c+3d}{3} \end{pmatrix} + 0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a+b-c}{3} & \frac{2a+5b+c}{6} \\ \frac{-2a+b+5c}{6} & \frac{b+c+2d}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת נציב ונמצא את הקירוב:

$$P\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

הערה: היה אפשר מלכתחילה להציב את ערכי המטריצה במקום a, b, c, d וזה היה חוסך את ההצבה בסוף

שאלה 4

א.

נוכיח תחילה כי T אופרטור צמוד לעצמו: נזכור כי לפי ההגדרה, אופרטור הינו צמוד לעצמו אם המטריצה המייצגת שלו בבסיס אורתונורמלי צמודה לעצמה (מעל $\mathbb{R}$ - סימטרית).

נחשב את המטריצה המייצגת בבסיס הסטנדרטי:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

קל לראות כי זו מטריצה סימטרית, ומכיוון שהבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא בסיס א"נ, הרי שהאופרטור צמוד לעצמו.
נמצא ע"ע ו־ו"ע:

$$\triangle_T(x)=(x+1)^2(x-2)$$

עבור $\lambda_1=-1$:

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\Longrightarrow x+y-z=0\Longrightarrow\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\Longrightarrow\begin{cases}x+z&=0\\y+z&=0\end{cases}\Longrightarrow\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נציב את הו"ע במטריצה P:

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

ונקבל כי P מלכסנת את A, כלומר בבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ נקבל כי

$$[T]_B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ב.

נחשב את ההטלות $P_{V_{\lambda_1}}^{V_{\lambda_2}},P_{V_{\lambda_1}}^{V_{\lambda_2}}$.
ההטלה על V_{λ_1}:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

נחשב ונקבל:

$$\begin{cases}\alpha=&\frac{a+b+2c}{3}\\\beta=&\frac{-a+2b+c}{3}\\\gamma=&\frac{-a+b+c}{3}\end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
P_{V_{\lambda_1}}^{V_{\lambda_2}}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} &= \alpha P\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta P\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\underbrace{P\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{=0}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{a+b+2c}{3}\\0\\\frac{a+b+2c}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{a-2b-c}{3}\\\frac{-a+2b+c}{3}\\0\end{pmatrix}+0\\
&= \begin{pmatrix}\frac{2a-b+c}{3}\\\frac{-a+2b+c}{3}\\\frac{a+b+2c}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ההטלה על V_{λ_2}:

$$\begin{aligned}
P_{V_{\lambda_2}}^{V_{\lambda_1}}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} &= \alpha\underbrace{P\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=0}+\beta\underbrace{P\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=0}+\gamma P\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{a-b-c}{3}\\\frac{a-b-c}{3}\\\frac{-a+b+c}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר, הפירוק הספקטרלי של $[T]_E$ הינו:

$$\begin{aligned}
[T]_E &= \lambda_1 P_{V_{\lambda_1}}^{V_{\lambda_2}}+\lambda_2 P_{V_{\lambda_2}}^{V_{\lambda_1}} = -\begin{pmatrix}\frac{2a-b+c}{3}\\\frac{-a+2b+c}{3}\\\frac{a+b+2c}{3}\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{a-b-c}{3}\\\frac{a-b-c}{3}\\\frac{-a+b+c}{3}\end{pmatrix}\\
&= -\begin{pmatrix}2/3 & -1/3 & 1/3\\ -1/3 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1/3 & -1/3 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & -1/3\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

הערה: יש לי כאן טעויות חישוביות, לא כל התאים נסכמים נכונה. דרך הפתרון אמורה להיות נכונה.

שאלה 5

א.

נסתכל על התנאים הנדרשים להתקיים מהמטריצה:

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id\\ e+if & g+ih\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-ib & e-if\\ c-id & g-ih\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+ib=a-ib & \Rightarrow b=0\\ c+id=e-if & \Rightarrow e=c\\ c-id=e+if & d=-f\\ g+ih=g-ih & \Rightarrow h=0\end{cases}$$

קיבלנו שישנם 4 משתנים שיכולים לקבל ערך כלשהו, ולכן $\dim V=4$ מעל $\mathbb{R}$.

ב.

נחשב את הדטרמיננטה של מטריצה העונה לתנאים שחישבנו בסעיף א' (החלפתי את סימוני האותיות לשם נוחות):

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{vmatrix} = ad - (b+ic)(b-ic) = ad - \left(b^2 - (ic)^2\right) = ad - b^2 - c^2 \in \mathbb{R}$$

ג.

נזכור כי לכל תבנית ריבועית קיימת תבנית בי־לינארית סימטרית. נציג את התבנית $q(A) = 2|A|$ כתבנית בי־לינארית $f(A,A)$ שהמטריצה המייצגת שלה סימטרית. כלומר, נחפש מטריצה סימטרית המקיימת:

$$q\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 2|A| = 4ad - 2b^2 - 2c^2$$

עם קצת ניסוי וטעייה מגיעים ל:

$$q\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 4ad - 2b^2 - 2c^2$$

כנדרש, ומכיוון שקיימת תבנית בי־לינארית שהמטריצה המייצגת שלה סימטרית, הרי שהתבנית ריבועית מעל V.

ד.

<עוד לא סגור על הנושא הזה>

שאלה 6

ע"פ חוק ההתמדה של סילבסטר, לשתי מטריצות ממשיות סימטריות חופפות יש את אותו מספר ע"ע חיוביים ושליליים.
הפולינומים האופייניים הינם:

$$\begin{aligned} \Delta_A(x) &= x(x-1)(x+1) \Rightarrow \lambda_A = 0,1,-1 \\ \Delta_B(x) &= x(x-2)(x-1) \Rightarrow \lambda_B = 0,1,2 \end{aligned}$$

כלומר, A ו־B אינן חופפות. עם זאת, נזכור כי הע"ע של מטריצה בחזקת k הינם הע"ע מועלים לחזקת k, כלומר עבור חזקות זוגיות נקבל כי למטריצות $A^k,\ B^k$ שני ע"ע חיוביים ואחד נוסף שהינו 0, ועבור חזקות אי־זוגיות המצב לא יהיה כך. לכן - התשובה היא $\{k \in \mathbb{N} :\ k \mod 2 \equiv 0\}$