<u>מסקנה</u>

מהטענות של אופ צמוד עצמי ומדרך ההוכחה של המשפט שאופ נורמלי הוא לכסין אוניטרית נובע:

אם $T:V\to V$ אופ לינארי מעל V ממ"פ סוף מימדי מעל $\mathbb{R}$ אז T לכסין אורתוגונלית אסם T צ.ע.

בפרט: אם $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מט סימטרית אז לכסינה א"ג כלומר דומה א"ג למטריצה אלכסונית $\underbrace{D}_{diagonal\quad columns} = P^{-1}AP = \underbrace{P}_{columns\quad are\quad unitary\quad base} P^tA$

מתקיים מתוך משפט הפירוק הספקטרלי־ $A=\sum\lambda_iQ_i$ עבור Q_i ההטלה האורתוגונלית על W_i ובפרט $Q=Q*$ (ההרמטית שלה).

<u>איך נמצא את Q במפורש?</u>

נניח ש־$\{v_1,...v_n\}$ הוא בסיס אוניטארי למ"ע V_λ אזי $Q_i=v_1v_1^t+...+v_nv_n^t$.

זאת משום שמתקיים $Q_i\left(e_1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle e_1,v_i\right\rangle v_i$.\

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

אזי $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$.

$$V_{\lambda_1}=span\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda_2}=span\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

אזי =

$$Q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$Q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A=5Q_1-Q_2$$

תזכורת:

יהא $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$. עבור $A\in M_n\left(F\right)$ הגדרנו ש־A חיובית לחלוטין אם $A=A*$ וגם $x^*Ax>0$ לכל $x\neq0\in F$. נאמר ש־A היא אי־שלילית אם $A=A^*$ וגם $x^*Ax\geq0$ לכל $x\in F$.

<u>טענה</u>

תהי $A=A^*$ אזי הבאים שקולים :

1. A אי־שלילית (חיובית לחלוטין)
2. הע"ע של A הם אי־שליליים(חיוביים ממש)
3. יש מטריצה הרמטית (הפיכה) C כך ש־$A = C^2$.
4. יש מטריצה B (הפיכה) כך ש־$A = B^*B$

<u>הוכחה</u>
$1 \to 2$
יהי λ ע"ע אז יש $x \neq \vec{0}$ כך ש־$Ax = \lambda x$ ולכן

$$0 \underbrace{\leq}_{Given} x^*Ax = x^*\lambda x = \lambda ||x||^2 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

$2 \to 3$
יהא $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i$ הפירוק הספקטרלי של A.
נגדיר

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} Q_i$$

.
אז C הרמטית כסכום של כאלו ומתקיים ש־$A = C^2$ כי $Q_iQ_j = Q_i\delta_{ij}$.
$3 \to 4$
נגדיר $B = C$.
$4 \to 1$

$$x^*Ax = x^*B^* \underbrace{Bx}_{y} = ||y||^2 \geq 0$$

<u>הערה</u>
ניתן לראות ש־C בסעיף ג נקבעת באופן יחיד ואי־שלילית בעצמה אז קוראים לה <u>השורש</u> של A
<u>עוד הערה</u>
תהא $A = A^*$. אז Aאי־שלילית אסם המינורים הראשיים שלה אי־שליליים. (ש"ב)
<u>סיכומון</u>
תהא $A \in M_n(F)$ מטריצה נורמלית .

- A הרמטית אסם העע שלה ממשיים
- A אי־שלילית (חיובית לחלוטין) אסם הע"ע ממשיים ואי־שליליים (חיוביים ממש)
- A אוניטארית אסם הע"ע שלה על מעגל היחידה

<u>משפט</u> (הפירוק הפרימרי)
תהי $A \in M_n(F)$ אז קיימות u אוניטארית ו־R אי־שלילית כך ש־$A = uR$.(אם A הפיכה אז R חיובית לחלוטין).

<u>הוכחה</u>
נוכיח עבור A הפיכה.
ראינו A^*A תמיד אי־שלילית ולכן קיים R הפיכה אי־שלילית (שורש של A).
כך ש־$R^2 = A^*A$ אם A הפיכה אז R הפיכה (ובפרט חיובית לחלוטין) ונוכל להגדיר $u = R^{-1}A$.
נראה ש־u אוניטארית:
צ.ל. $u^*u = I$.

$$u^*u = \left(R^{-1}A\right)^* \left(R^{-1}A\right) = A^*R^{-1^*} \underbrace{R^{-1}}_{unitary} A = A^*IA = I$$

מ.ש.ל.