<u>אלגברה ב – חבורות חופשיות</u>

נושאים:

1. בניית החבורה החופשית
2. התכונה האוניברסלית של החבורה החופשית
3. דוגמה מעשית

<u>בניית החבורה החופשית</u>

נזכר בבנייה של החבורה החופשית:

<u>הגדרה:</u> תהי $X=\{x_i\}_{i\in I}$ קבוצה כלשהי (נקרא לאבריה אותיות). **מילה** הינה רצף של אברים מהקבוצה X הנראית באופן כללי כך: $w=x_{i_1}^{\epsilon_1}\dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ כאשר $\epsilon_j\in\{1,-1\}$ לכל j. מילה תקרא מצומצמת אם לכל $1\le n\le k-1$ מתקיים ש - $x_{i_n}\neq x_{i_{n+1}}$ או $x_{i_n}=x_{i_{n+1}}$ ו - $\epsilon_n=\epsilon_{n+1}$ (ז"א, במילה w לא יופיע צירוף מהצורה xx^{-1} או $x^{-1}x$). אוסף המילים המצומצמות מסומן ב - $F(X)$

<u>הגדרה:</u> עבור $w_1,w_2\in F(X)$ מילים מצומצמות, שרשור של w_1 ו - w_2 הוא המילה המצומצמת המתקבלת מכתיבת האותיות של w_1 , אחריהן האותיות של w_2 וביצוע כל הצמצומים האפשריים.

דוגמה: נניח $X=\{a,b\}$. ב - $F(X)$ יש למשל את שתי המילים המצומצמות $w_1=aaba^{-1}bb$ ו - $w_2=b^{-1}abba$. השרשור של w_1,w_2 הוא $w_1w_2=aaba^{-1}babba$.

<u>הערה:</u> לטובת קיצור, נוטים לסמן רצפים של האות x כ - x^n ל – n מספר שלם. למשל המילה w_1 מהדוגמה לעיל מסומנת בצורה מקוצרת כ – $w_1=a^2ba^{-1}b^2$.

<u>טענה:</u> הקבוצה $F(X)$ עם פעולת השרשור היא חבורה. איבר היחידה הוא המילה הריקה. עבור $w=x_{i_1}^{\epsilon_1}\dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$, המילה ההופכית היא $w^{-1}=x_{i_k}^{-\epsilon_k}\dots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$. כמו כן, לכל קבוצה X שנבחר קיימת החבורה החופשית $F(X)$.

<u>הערה:</u> החבורה $F(X)$ עם השרשור נקראת "החבורה החופשית הנוצרת ע"י X".

<u>טענה:</u>

1. עבור $X=\{a\}$, $F(X)$ איזומורפית ל – Z.
2. עבור X קבוצה עם יותר מאבר אחד, $F(X)$ חבורה לא אבלית.

הוכחה: הטענה הראשונה ברורה, האיזומורפיזם שנגדיר הוא $\varphi(a^n)=n$ ל – n מספר שלם. הטענה השנייה גם ברורה, כי אם ב – X יש שתי אותיות למשל a, b, אז המילה $aba^{-1}b^{-1}$ היא מילה מצומצמת שאינה המילה הריקה, אבל $ab=ba$ מחייב $aba^{-1}b^{-1}=e$.

<u>התכונה האוניברסלית של החבורה החופשית</u>

תהא X קבוצה ונסמן ב – $i:X\to F(X)$ את ההעתקה הקבוצתית ששולחת את האות $a\in X$ למילה המצומצמת $w=a$ ב - $F(X)$. לצורך הבהירות, נסמן את אברי X באותיות גדולות בעוד את המופעים במילים ב - $F(X)$ נסמן באותיות קטנות. ז"א עבור $A_i\in X$ אות, נגדיר $i(A_i)=a_i$ המילה ב - $F(X)$ המורכבת מהאות A_i .

החבורה החופשית מקיימת את התכונה הבאה:

תהי G חבורה, $f:X\to G$ העתקה קבוצתית, אז קיים הומומורפיזם יחיד $\varphi:F(X)\to G$ עבורו מתקיים $\varphi\circ i=f$.

הוכחה: נראה שקיימת φ כנדרש. עבור מילה מצומצמת $w=a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{i_k}^{\epsilon_k}$ (ל - a_{i_j} תמונה

של האות A_{i_j} ב- $F(X)$ ו- $\epsilon_j\in\{1,-1\}$), נגדיר $\varphi(a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{i_k}^{\epsilon_k})=f(A_{i_1})^{\epsilon_1}\cdot\dots\cdot f(A_{i_k})^{\epsilon_k}$.
למה זה הומומורפיזם? נסתכל על שתי מילים $w_1=a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{i_k}^{\epsilon_k},\ w_2=b_{j_1}^{\delta_1}\dots b_{j_m}^{\delta_m}$. נניח תחילה כי $a_{i_k}^{\epsilon_k}\neq(b_{j_1}^{\delta_1})^{-1}$, אז w_1w_2 מילה מצומצמת ונקבל מההגדרה:
$\varphi(w_1)\varphi(w_2)=f(A_{i_1})^{\epsilon_1}\cdot\dots\cdot f(A_{i_k})^{\epsilon_k}\cdot f(B_{j_1})^{\delta_1}\cdot\dots\cdot f(B_{j_m})^{\delta_m}=\varphi(w_1w_2)$. במקרה ש – w_1w_2 אינה מילה מצומצמת, הצמצומים הם רק בין אותיות של w_1 ו- w_2 , אז לכל זוג $a_t^{\epsilon_t}, b_p^{\delta_p}$ שמצטמצם, בהכרח A_t, B_p מייצגים את אותה אות ב – X, ו- $\epsilon_t=-\delta_p$, לכן $f(A_t)^{\epsilon_t}\cdot f(B_p)^{\delta_p}=e_G$ ולכן האיברים האלה מצטמצמים גם במכפלה של $\varphi(w_1)\cdot\varphi(w_2)$ ובסוף נשארים בדיוק עם $\varphi(w_1w_2)$ (הערך שהגדרנו תחת φ למילה המצומצמת המתאימה ל – w_1w_2). עבור $A\in X$ נקבל $\varphi\circ i(A)=\varphi(a)=f(A)$ כנדרש.
יחידות: נניח קיים הומומורפיזם $\psi:F(X)\to G$ המקיים $\psi\circ i=f$, בפרט לכל $A\in X$ נקבל $\psi(a)=\varphi(a)$, ז"א ψ ו- φ שוות על מילים באורך 1 (שהן בהגדרה מצומצמות).
עבור מילה מצומצמת $w=a_{i_1}^{\epsilon_1}\dots a_{i_k}^{\epsilon_k}$ נקבל:
$\psi(w)=\psi(a_{i_1})^{\epsilon_1}\cdot\dots\cdot\psi(a_{i_k})^{\epsilon_k}=\varphi(a_{i_1})^{\epsilon_1}\cdot\dots\cdot\varphi(a_{i_k})^{\epsilon_k}=\varphi(w)$. השוויון הראשון נובע מכך ש- ψ הוא הומומורפיזם, השני נובע מהשוויון שהראנו של ψ ו- φ על מילים באורך 1. השוויון האחרון נובע מכך ש- φ הומומורפיזם ו – w מצומצמת.

דוגמה: נסתכל על $X=\{A,B\}$. במקרה זה, המילים ב- $F(X)$ הם מהצורה:
א. a^n . ב. b^m . ג. $a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}$ ל- $k\geq 2$. ד. $a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}b^{m_k}$ ל- $k\geq 2$
ה. $b^{m_1}a^{n_1}\dots b^{m_k}$ ל- $k\geq 2$. ו. $b^{m_1}a^{n_1}\dots b^{m_k}a^{n_k}$ ל- $k\geq 2$. עבור $i:X\to F(X)$ הנתון ע"י $i(A)=a, i(B)=b$.

נסתכל על $G=\{1,t,t^2\}$ (ז"א חבורה כפלית עם 3 אברים, כאשר $t^3=1$).
ההעתקות הקבוצתיות $f:X\to G$ מתאימות ל – A,B אחד מאברי G. נסתכל למשל על $f(A)=t, f(B)=t^2$.
מהי $g:F(X)\to G$ המתאימה ל – f? נסתכל על התמונה של המילים לפי הקבוצות לעיל:
א. $g(a^{3k})=1, g(a^{3k+1})=t, g(a^{3k+2})=t^2$. ב. $g(b^{3k})=1, g(b^{3k+1})=t^2, g(b^{3k+2})=t$.
ג. $g(a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k})=t^r$ עבור $r=\sum_{i=1}^{k-1}(n_i+2m_i)+n_k \mod 3$.
ד. $g(a^{n_1}b^{m_1}\dots a^{n_k}b^{m_k})=t^r$ עבור $r=\sum_{i=1}^{k}(n_i+2m_i) \mod 3$.
ה. $g(b^{m_1}a^{n_1}\dots b^{m_k})=t^r$ עבור $r=\sum_{i=1}^{k-1}(n_i+2m_i)+2m_k \mod 3$.
ו. $g(b^{m_1}a^{n_1}\dots b^{m_k}a^{n_k})=t^r$ עבור $r=\sum_{i=1}^{k}(n_i+2m_i) \mod 3$.