תרגיל בית 9

תאריך הגשה: יום חמישי, 9/1/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

חשבו, על פי ההגדרה, את הנגזרת ואת תחום הגדרתה עבור הפונקציות הבאות:

א. $\sin^2 x$.

נשתמש בזהויות $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$, $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, ונקבל:

$$\frac{\sin^2(x+h)-\sin^2 x}{h}=\frac{1}{h}\cdot\left(\sin^2 x\cos^2 h+2\sin x\cos x\sin h\cos h\ +\sin^2 h\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$=2\sin x\cos x\cos h\left(\frac{\sin h}{h}\right)+\frac{\sin h}{h}\cdot\sin h\cos^2 x-\sin^2 x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\sin h\overset{h\to 0}{\to}2\sin x\cos x$$

הגבול הנ״ל קיים וסופי לכל x, ולכן תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$.

ב. $x\ln x$.

מתקיים: $\frac{(x+h)\ln(x+h)-x\ln x}{h}=\frac{x}{h}(\ln(x+h)-\ln x)+\ln(x+h)=\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}+\ln(x+h)$.

בדיקת גבולות חד״צ (כאשר $h\to 0$) לביטוי שבתוך ה- ln הראשון מראה כי ביטוי זה שואף ל- e, ולכן מרציפות ln, המחובר הראשון שואף ל- 1, ושוב מרציפות ln נקבל כי המחובר השני שואף ל- $\ln x$, לכן הגבול הוא $\ln x+1$.

תחום ההגדרה של $\ln x$ הוא $x>0$, ובתחום זה הגבול הנ״ל קיים וסופי, ולכן זהו גם תחום ההגדרה של הנגזרת.

שאלה 2:

הוכיחו / הפריכו:

א. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב- 0 אז: $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ קיים אם ורק אם $f(0)=0$.

נכון. אם $f(0)=0$ אז $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{\frac{1}{x}-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, והגבול האחרון קיים כי f גזירה ב- 0. בכיוון השני, נניח בשלילה $f(0)\neq 0$, אז $xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{\frac{1}{x}-0}+\frac{f(0)}{\frac{1}{x}}$, ואז $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}+\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0)}{t}$, אבל המחובר הראשון מתכנס (כי f גזירה ב- 0), והמחובר השני מתכנס ל- ∞ או $-\infty$, בהתאם לסימן של $f(0)$, ולכן הגבול $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים – סתירה.

ב. אם $f'(x)<g'(x)$ לכל x, אז קיים x_0 כך ש- $f(x_0)\leq g(x_0)$.

לא נכון, ד״נ: $f(x)=\pi$, $g(x)=\arctan x$.

ג. אם $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה, ו- $\lim_{x\to 0^+} g'(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

לא נכון, ד״נ: $g(x)=\sqrt{x}$.

ד. אם f רציפה ב- 0 אז $g(x)=xf(x)$ גזירה ב- 0.

נכון: $\lim_{h\to 0}\frac{hf(h)-0\cdot f(0)}{h}=\lim_{h\to 0} f(h)=f(0)$.

ה. אם $g(x)=xf(x)$ גזירה ב- 0, אז f רציפה ב- 0.

לא נכון, ד"נ: $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, אז $g(x)\equiv 0$, ובפרט g גזירה, אבל f לא רציפה ב- 0.

ו. אם f רציפה ליפשיץ אז היא גזירה.

לא נכון, ד"נ: $f(x)=|x|$ רציפה ליפשיץ בכל $\mathbb{R}$ (עם קבוע ליפשיץ = 1), אבל לא גזירה ב- 0.

ז. אם הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$ קיים וסופי, אז f גזירה ב- x.

לא נכון, ד"נ: $f(x)=|x|$ ו- $x=0$ מקיימת שהגבול הנ"ל הוא 0 (כי זו פונקציה זוגית, ולכן המונה הוא זהותית 0 כאשר $x=0$ ו- $h\to 0$), אבל לא גזירה ב- 0.

ח. אם f רציפה ב- x_0, גזירה בסביבה מנוקבת של x_0 ומתקיים $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$, אז f גזירה ב- x_0.

לא נכון, ד"נ: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ מקיימת את כל הדרישות ב- $x_0=0$, אך לא גזירה ב- 0.

ט. קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש- $f'(x)=[x]$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

לא נכון, כי אם היתה קיימת f כזו, היא בפרט היתה רציפה, ומקיימת $f'(x)=0$ לכל $x\in[0,1)$, ולכן קבועה בקטע $(0,1)$. נסמן את ערכה בקטע זה ב- c, אז מרציפות נקבל כי $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=c$, ולכן $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$, בסתירה לכך שאמור להתקיים $f'(1)=[1]=1$ (בפרט הגבולות החד"צ של הגבול בהגדרת הנגזרת אמורים להיות 1).

שאלה 3:

חשבו את הנגזרת בתחום ההגדרה עבור הפונקציות הבאות:

א. הפונקציה ההפוכה של x^x.

x^x חח"ע ב- $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ וב- $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$, ובקטעים אלו ניתן להגדיר פונקציה הפוכה (עם תחום וטווח מתאימים).

מתקיים: $x^x=e^{x\ln x}$, לכן $(x^x)'=x^x\cdot(1+\ln x)$. נסמן $f(x)=x^x$, אז מנוסחת נגזרת של פונקציה הפוכה, נקבל: $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{(f^{-1}(y))^{f^{-1}(y)}\cdot(\ln(f^{-1}(y)+1)}$. נשים לב כי $\left(f^{-1}(y)\right)^{f^{-1}(y)}=x^x=y$, לכן: $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{y\cdot(\ln(f^{-1}(y)+1)}$.

ב. $[x]\sin(\pi x)$.

לכל $x\notin\mathbb{Z}$ קיימת סביבה של הנקודה שבה הפונקציה אלמנטרית וניתן לחשב מכללי נגזרות כי בנקודות כאלו, $f'(x)=[x]\pi\cos(\pi x)$. לכל $x_0\in\mathbb{Z}$, נחשב נגזרות חד-צדדיות:

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{[x]\sin(\pi x)-[x_0]\sin(\pi x_0)}{x-x_0}=x_0\cdot\lim_{x\to x_0^+}\frac{\sin(\pi x)-\sin(\pi x_0)}{x-x_0}$. הגבול באגף ימין הוא בדיוק הגדרת הנגזרת

של $\sin(\pi x)$ ב- x_0, ולכן הנגזרת החד-צדדית מימין היא $x_0 \cdot \pi\cos(\pi x_0)$. מצד שמאל, נקבל:

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{(x_0-1)\sin(\pi x)-x_0\sin(\pi x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{[x]\sin(\pi x)-[x_0]\sin(\pi x_0)}{x-x_0}$. מכיוון ש- $\sin(\pi x_0)=0$, מתקיים $x_0\sin(\pi x_0) = (x_0-1)\sin(\pi x_0)$, ולכן:

$\lim_{x\to x_0^-}\frac{\sin(\pi x)-\sin(\pi x_0)}{x-x_0} (x_0-1) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{(x_0-1)(\sin(\pi x)-\sin(\pi x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{(x_0-1)\sin(\pi x)-x_0\sin(\pi x_0)}{x-x_0}$. כמו

מקודם, $\lim_{x\to x_0^-}\frac{\sin(\pi x)-\sin(\pi x_0)}{x-x_0} = \pi\cos(\pi x_0)$, ולכן הנגזרת החד-צדדית משמאל היא $(x_0-1)\cos(\pi x_0)$,

ולכן הנגזרות החד-צדדיות שונות, ולכן f לא גזירה בכל $x_0\in\mathbb{Z}$.

ג. $(\ln x)^{\tan x}$.

בנקודות בהן $x>1$ וגם $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ ל- $k\in\mathbb{N}$, הפונקציה גזירה. ל- x כאלו

נרשום $(\ln x)^{\tan x} = e^{\tan x\cdot\ln(\ln x)}$, ומכללי נגזרות נקבל: $f'(x) = (\ln x)^{\tan x}\cdot\left(\frac{\ln(\ln x)}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{x\ln x}\right)$. ב-

$x=1$ הפונקציה אמנם מוגדרת ורציפה מימין, אך בדיקת הנגזרת ע״פ הגדרה מראה כי היא אינה גזירה (הגבול החד״צ מימין בהגדרת הנגזרת הוא $-\infty$).

שאלה 4:

חשבו את $f^{(74)}(x)$ עבור $f(x)=x^4e^x$.

נשתמש בכלל לייבניץ לנגזרות מסדר גבוה של מכפלה, בנגזרות הידועות של x^4 ובפרט בכך שכל הנגזרות האלו, החל מהחמישית, הן 0, וכמובן בכך ש- $(e^x)^{(n)} = e^x$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ונקבל:

$$f'(x) = x^4e^x + 74\cdot 4x^3e^x + \binom{74}{2}12x^2e^x + \binom{74}{3}24xe^x + \binom{74}{4}24e^x.$$

שאלה 5:

תהי f גזירה ב- a. הוכיחו כי אם $x_n\to a^+$ ו- $y_n\to a^-$, אז $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = f'(a)$.

נשתמש בכך שאם f גזירה ב- a, ניתן לכתוב את f בסביבת a כך: $f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a)$, כאשר $\alpha(x)\to 0$ כאשר $x\to a$. נעשה זאת עבור הסדרות $f(y_n)$, $f(x_n)$, ונקבל:

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \frac{f'(a)(x_n-y_n)+\alpha(x_n)(x_n-a)+\alpha(y_n)(y_n-a)}{x_n-y_n} = f'(a)+\frac{\alpha(x_n)(x_n-a)}{x_n-y_n}+\frac{\alpha(y_n)(y_n-a)}{x_n-y_n}.$$

מכיוון ש- $y_n\le a\le x_n$ לכל n, מתקיים $|x_n-a| > |x_n-y_n|$, ולכן $\left|\frac{\alpha(x_n)(x_n-a)}{x_n-y_n}\right| \le \left|\frac{\alpha(x_n)(x_n-a)}{x_n-a}\right| = |a(x_n)|\to 0$.

באותו אופן גם המחובר השלישי שואף ל- 0 כאשר $n\to\infty$, ומאריתמטיקה של גבולות נקבל כי כל הביטוי מתכנס ל- $f'(a)$.

שאלה 6:

א. חשבו את $f^{(n)}(x)$ עבור $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

$$f'(x) = (1-x)^{-2},\ f''(x) = 2(1-x)^{-3},\ \cdots,\ f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}.$$

ב. חשבו את $g^{(n)}(x)$ עבור $g(x)=\frac{x^2}{1-x}$.

$g'(x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$, $g''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$, $g^{(3)}(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$, $\cdots$, $g^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

ג. הסבירו את הקשר בין סעיף א׳ וסעיף ב׳.

קיבלנו שכל הנגזרות החל מהנגזרת השניה של שתי הפונקציות הן זהות, וזה מתקיים מכיוון שהנגזרות הראשונות של שתי הפונקציות נבדלות בקבוע: $1=\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2}=\frac{1-2x+x^2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.