23/11/2016

# תרגול 5

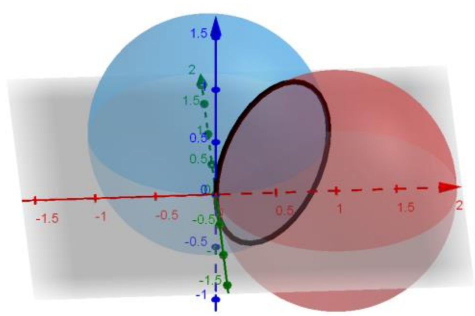
**תרגיל:**

יהיו שתי ספירות נתונות על ידי המשוואה:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2ax \\ x^2+y^2+z^2=2by \end{cases} \quad a,b>0$$

חשבו את הווקטור המשיק לעקום החיתוך בכל נקודת חיתוך.

**פתרון:**



*איור 1 – שתי ספירות ועקום החיתוך ביניהן (בשחור)*

עקום ב-$\mathbb{R}^3$ נתון על ידי פרמטריזציה מהצורה:

$$\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big) \quad t\in\mathbb{R}$$

ואת הנ"ל ניתן לכתוב בצורה:

$$\gamma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^3 \quad t\mapsto\big(x(t),y(t),z(t)\big)$$

אם $x'(t),y'(t),z'(t)$ קיימים ולא מתאפסים בו זמנית, אזי קיים וקטור משיק לעקום ב-$t$, הנתון על ידי:

$$\gamma'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$$

עתה נסמן:

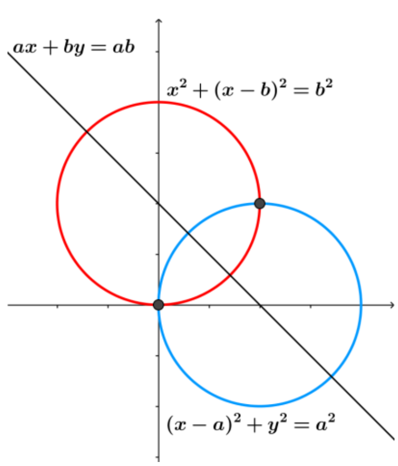
$$\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2ax=0 \\ G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2by=0 \end{cases}$$

מערכת המשוואות מגדירה את עקום החיבור. נרצה להראות כי היא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודת החיתוך $p_0(x_0,y_0,z_0)$.

א. $F(p_0)=G(p_0)=0$ שכן נתון כי $p_0$ נקודה בחיתוך בין שני המשטחים.
ב. $F,G$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^3$.

אילו משתנים נרצה לחלץ, אפוא?

נשים לב:




$$\begin{pmatrix} -\nabla F- \\ -\nabla G- \end{pmatrix}_{2\times3}=\begin{pmatrix} 2x-2a & 2y & 2z \\ 2x & 2y-2b & 2z \end{pmatrix}\Bigg|_{p_0}$$

על מנת שיתקיים חילוץ, נרצה לקבל כי מטריצת הנגזרות החלקיות של המשתנים שנרצה לחלץ תהיה בעלת דרגה מלאה. כלומר, נבדוק האם קיים בלוק $2\times2$ שהוא הפיך.

במקרה שבו $z_0\neq0$ נקבל כי ניתן לחלץ את $y(x),z(x)$ או $x(y),z(y)$. אך אם $z=0$ נבדוק האם ניתן לחלץ את $x(z),y(z)$, ונקבל כי:

$$\det\begin{pmatrix} 2x-2a & 2y \\ 2x & 2y-2b \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow bx+ay=ab$$

אך נשים לב, כי כפי שניתן לראות באיור 2 – הישר שעבור הדטרמיננט מתאפס לא חותך את עקום החיתוך בין הספירות. לכן נקבל כי בכל נקודה בעקום החיתוך הדטרמיננט הנ"ל אינו מתאפס כלומר בלוק זה כן הפיך.

כלומר תנאי משפט הפונקציה הסתומה מתקיימים בכל נקודת חיתוך על העקומים ולכן קיים חילוץ.

למשל, עבור $z_0 = 0$ קיים חילוץ מהצורה:

$$x = f(z) \quad y = g(z)$$

ולכן נקבל פרמטריזציה לעקום חיתוך על ידי:

$$\gamma(z) = (f(z), g(z), z)$$

ווקטור המשיק נתון על ידי:

$$\gamma(z) = (f'(z), g'(z), 1)$$

ניעזר בנוסחה, שחישבנו בתרגול הקודם, ונקבל כי:

$$\begin{pmatrix} \frac{df}{dz} \\ \frac{dg}{dz} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_z \\ G_z \end{pmatrix}$$

<u>כתרגיל</u> – להשלים את החישוב המפורש של וקטור המשיק בכל נקודה.

## **<u>מישורים ב-$\mathbb{R}^3$:</u>**

מישור ב-$\mathbb{R}^3$ נתון על ידי ווקטור $\vec{N}$ שמאונך לו (נורמל) ועל ידי נקודה $p_0$ שנמצאת עליו. משוואת הנורמל נתונה על ידי:

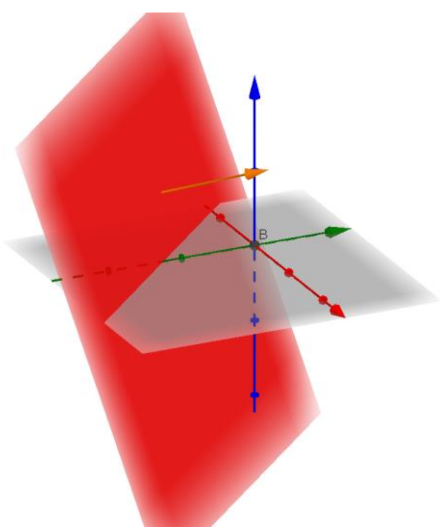
$$\vec{N} \cdot (p - p_0) = 0$$

ובהנתן $\vec{N} = (A, B, C)$ ונקודה $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, המישור שמתואר על ידי $\vec{N}$ ועובר דרך הנקודה $p_0$, הינו:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

ובמקרה הפשוט יותר נקבל כי:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$




*איור 2 – אילוסטרציה של מישור (באדום) ווקטור הנורמל שלו (בכתום)*

<u>דוגמאות:</u>

א. עבור המישור הנתון על ידי $Ax + By + D = 0$ נקבל כי וקטור הנורמל נתון על ידי:

$$\vec{N} = (A, B, 0)$$

וזהו מישור המקביל לציר $z$.

ב. $Cz + D = 0$ הינו מישור הנתון על ידי וקטור הנורמל $\vec{N} = (0,0,C)$. מישור זה מקביל למישור $xy$.

ג. מישור משיק לגרף של פונקציה $z = f(x, y)$ עבור $f$ דיפרנציאבילית, מתקבל מהקירוב הליניארי:

$$z = f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{משוואת מישור}}$$
$$+ \underbrace{\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{\text{שארית/שגיאה}}$$

כלומר, המשמעות הגיאומטרית של הגדרת הדיפרנציאביליות, היא קיומו של קירוב ליניארי בסביבת הנקודה $\Leftrightarrow$ קיים פיתוח טיילור מסדר ראשון סביב הנקודה $\Leftrightarrow$ קיים מישור משיק לגרף הפונקציה בנקודה, הנתון על ידי:

$$\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

ומכאן גם נוכל להסיק כי וקטור הנורמל נתון על ידי:

$$\big(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1\big)$$

<u>דוגמא:</u>

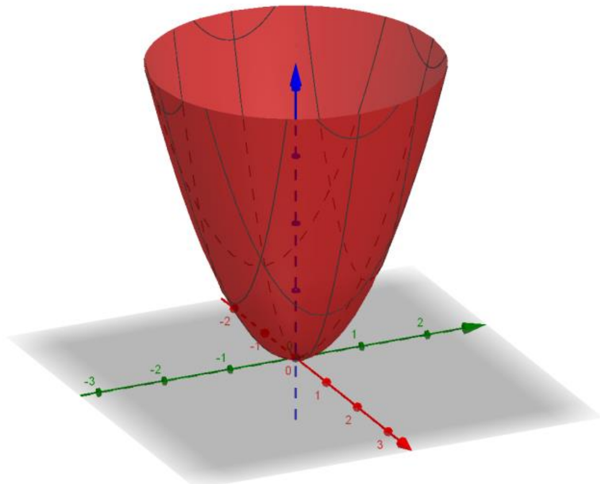
נחשב את המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$ בנקודה $(0,3)$.

היות ו-$f$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות ולכן דיפרנציאבילית, נסיק כי אכן קיים מישור כנ"ל בנקודה $(0,3,f(x_0,y_0)) = (0,3,9)$ והוא נתון על ידי וקטור הנורמל:

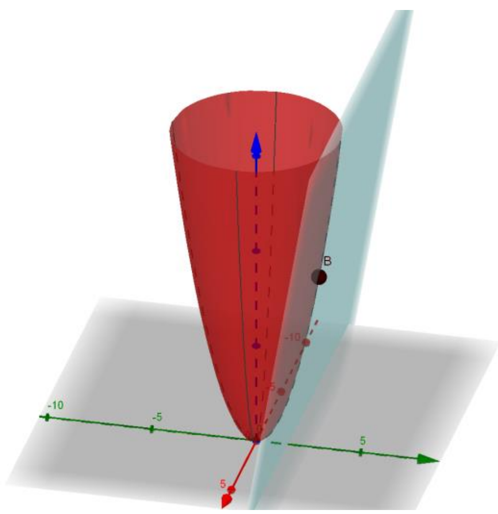
$$\vec{N} = (0,6,-1)$$

כלומר, המישור המשיק נתון על ידי:

$$6y - z - 9 = 0$$



*איור 3 – גרף הפונקציה* $f(x,y) = x^2 + y^2$



*איור 4 – המישור המשיק לפרבולואיד* $x^2 + y^2 - z = 0$ *בנקודה* $(0,3,9)$

כפי שניתן לראות באיור 3 שלהלן, משוואות הפונקציה מתארת אובייקט שנקרא פרבולואיד. ניתן לנתח את משמעות הצורה שמתקבלת באופן הבא:

עבור $x = 0$ נקבל את המשוואה $z = y^2$ שהיא פרבולה. כך גם, עבור $y = 0$ נקבל את המשוואה $z = x^2$ שהינה פרבולה ביחס לציר $y$. נשים לב, כי עבור $z = C$ נקבל את המשוואה $x^2 + y^2 = C$, שתיאורה הגרפי תלוי בערכו של $C$. שכן:

i. עבור $C > 0$ נקבל כי מדובר במעגל המקביל למישור $xy$.

ii. עבור $C < 0$ אין נקודות המקיימות את המשוואה.

iii. עבור $C = 0$ נקבל את הראשית בלבד.

בנוסף, מדובר באובייקט המכונה משטח סיבוב.

### 5.1 הגדרה – משטח סיבוב הינו משטח התלוי ב-$z$ וב-$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

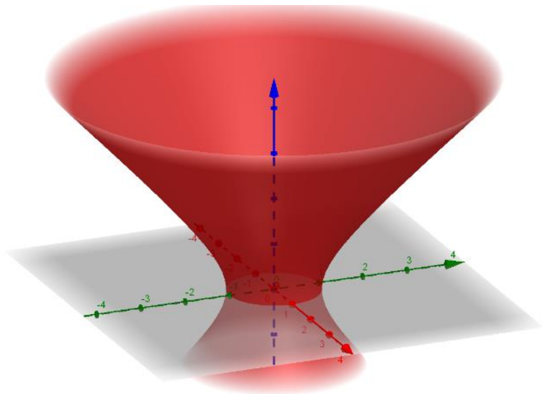
במקרה שלנו, מדובר במשטח סיבוב עבור $z = r^2$, משוואה המתארת פרבולה ביחס ל-$r$, ונאמר כי ציר $z$ הינו ציר הסיבוב ו-$r$ הוא המרחק מציר $z$.

<u>דוגמה</u> – המשוואה $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ מתארת היפרבולואיד חד יריעתי.

ד. משוואת מישור למשטח כללי ב-$\mathbb{R}^3$. ראינו כי עלינו לדרוש מישור המתקבל מקירוב ליניארי, כלומר מישור מהצורה:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) & f_z(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

אך זו בדיוק ההגדרה למישור דרך $p_0$ שווקטור הנורמל שלו הוא בדיוק הגרדיאנט $\nabla f$.



*איור 5 – ההיפרבולואיד $z^2+1=x^2+y^2$*

**5.2 משפט – יהא $S \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח נתון על ידי $F(x,y,z)=0$, כאשר $F\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות. תהא $p_0(x_0,y_0,z_0)$ נקודה על המשטח כך ש-$\nabla F(p_0) \neq 0$, אזי $\vec{\nabla} F(p_0)$ מהווה נורמל למישור המשיק למשטח ב-$p_0$, משוואת המישור המשיק נתונה על ידי:**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(p_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0$$

<u>הערה</u> – לגרדיאנט יש משמעות גיאומטרית רק כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית.