אלגברה ב' - פתרון גליון 10

♠ תרגיל 1

תהי G חבורה מסדר p^2, p ראשוני. אזי $Z(G)$ תת-חבורה לא טריוויאלית של G, ולכן האינדקס שלה מחלק את p. בפרט, $G/Z(G)$ ציקלית, ונוכל לקבוע עבורה יוצר $aZ(G)$. אזי, לכל $x \in G$ קיימים $n_x \in \mathbb{Z}$, $z_x \in Z(G)$ כך ש-$x = a^{n_x} z_x$, ונוכל לרשום:

$$\begin{aligned} xy &= a^{n_x} z_x a^{n_y} z_y = a^{n_x} a^{n_y} z_x z_y \\ &= a^{n_y} a^{n_x} z_y z_x = a^{n_y} z_y a^{n_x} z_x = yx, \end{aligned}$$

והוכחנו שכל שני איברים של G מתחלפים בכפל.

♠ תרגיל 2

בעצם אנו מוכיחים את הטענה -
אם G חבורה מסדר p^n, אז יש לה תת-חבורות מכל סדר p^k, $k < n$.
בשלילה, תהי G דוגמת-נגד מסדר מינימלי, דהיינו: אם $\bar{G}$ היא חבורת-p מסדר הקטן מן הסדר של G, אזי $\bar{G}$ מכילה תת-חבורות מכל סדר. נשים לב שעל-מנת להגיע לידי סתירה, מספיק להוכיח שיש תת-חבורה מאינדקס p ב-G - ואז תת-חבורה כזו מכילה, תת-חבורות מכל סדר המחלק את $|G|/p$.
מקרה ראשון: G אבלית. יש ב-G תת-חבורה (נורמלית) H מסדר p (הנוצרת ע"י איבר מסדר זה), ונוכל להתבונן במנה G/H, המכילה תת-חבורות מכל סדר, ובפרט מכילה תת-חבורה $\bar{H}$ מאינדקס p. המקור ב-G של תת-חבורה זו תחת העתקת-המנה $G \to G/H$ הוא תת-חבורה מאינדקס p ב-G.
מקרה שני: G איננה אבלית, ואז $Z = Z(G)$ הוא תת-חבורה לא טריוויאלית של G. שוב, המנה G/Z מכילה תת-חבורה מאינדקס p, שהמקור שלה ב-G הוא מאינדקס p, וסיימנו.
עליכם להשלים רק את הפרט הבא: אם $f : G \to \bar{G}$ הוא אפימורפיזם של חבורות, אזי לכל $\bar{H} < \bar{G}$ מתקיים $[G : f^{-1}(\bar{H})] = [\bar{G} : \bar{H}]$.

♠ תרגיל 3

תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נשים לב לתופעה הבאה -

$$(AB)^k = A(BA)^{k-1}B,\ (BA)^k = B(AB)^{k-1}A.$$

המסקנה המיידית הנובעת מכך היא שלכל פולינום $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים השוויון:

$$xf(x)\big|_{x=AB} = A \cdot f(BA) \cdot B,$$

ובפרט נקבל ש-$f(BA) = 0$ גורר בהכרח ש-$xf(x)\big|_{x=AB} = 0$. לפיכך נקבל שהפולינום $xm_{BA}(x)$ מאפס את AB, ולחילופין - $xm_{AB}(x)$ מאפס את BA. בסך-הכל:

$$m_{AB}(x) | xm_{BA}(x),\ m_{BA}(x) | xm_{AB}(x)$$

וזוהי טענת התרגיל.

♠ תרגיל 4

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$, ותהיינה J - צורת ג'ורדן של A - ו-K - צורת ג'ורדן של A^T. תהי P מטריצה הפיכה המקיימת $J = PAP^{-1}$, ואז גם $J^T = P^{-T}A^TP^T$. נותר, אם-כן, להוכיח ש-J היא צורת-ג'ורדן של J^T, ולשם-כך די להניח ש-J היא בלוק ג'ורדן אלמנטרי.

בדקו שהצמדה של J במטריצת-הפרמוטציה A_σ המתאימה לתמורת ההיפוך המלא

$$\sigma = (1,n)(2,n-1)\cdots(\left[\frac{n}{2}\right], n+1-\left[\frac{n}{2}\right])$$

אכן נותנת את המטריצה J^T.