קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 5

תאריך הגשה: יום שני, 12/5/2014, עד שעה 22:00

<u>שאלה 1:</u>

הוכיחו:

א. אם g , f פונקציות מונוטוניות בעלות אותה מגמה, אז $f \circ g$ מונוטונית עולה.

נניח f , g מונוטוניות עולות, ויהיו $x_1 < x_2$. אז:

$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1)) \overset{g(x_1)\le g(x_2)}{\leqq} f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$. באופן דומה אם שתיהן מונוטוניות יורדות.

ב. אם f, g פונקציות מונוטוניות בעלות מגמה הפוכה, אז $f \circ g$ מונוטונית יורדת.

נניח f מונוטונית עולה, g מונוטונית יורדת, ויהיו $x_1 < x_2$. אז:

$(f \circ g)(x_1) = (f(g(x_1)) \overset{g(x_1)\ge g(x_2)}{\geqq} (f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$. באופן דומה עבור f יורדת, g עולה.

ג. אם $f \circ g$ הפיכה, אז f על ו- g חח״ע.

אם $f \circ g$ הפיכה, אז היא חח״ע ועל. נסמן את התחום והטווח של $f \circ g$ ב- A. התמונה של $f \circ g$ מוכלת בתמונה של f, כי $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, לכן התמונה של f מכילה את A, ולכן f על. אם g לא חח״ע, אז קיימים $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $g(x_1) = g(x_2)$, אבל אז $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, בסתירה לכך ש- $f \circ g$ חח״ע.

ד. אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה זוגית, ו- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי, אז $f \circ g$ פונקציה זוגית.

האם ניתן לקבוע את הזוגיות של $f \circ g$ כאשר g היא אי-זוגית (ו- f פונקציה כלשהי)?

יהי $x \in \mathbb{R}$, אז: $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. אם g אי-זוגית לא ניתן לקבוע את זוגיות ההרכבה: למשל, אם f זוגית אז ההרכבה היא זוגית, ואם f אי-זוגית ההרכבה היא אי-זוגית.

<u>שאלה 2:</u>

תהי $f : A \to B$ פונקציה (כאשר $A , B \subset \mathbb{R}$), ותהי $x_0 \in A$. נאמר ש- f חסומה מקומית ב- x_0 אם קיים $\delta > 0$ כך ש- f חסומה ב- $(x_o - \delta , x_0 + \delta)$ $\cap A$.

תהי $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. הוכיחו כי אם g חסומה מקומית בכל נקודה ב- $[a, b]$ אז g חסומה ב- $[a, b]$.

מהנתון, לכל $x \in [a, b]$ קיימים M_x , δ_x (קבועים התלויים רק ב- x) כך שלכל $t \in [a, b] \cap (x - \delta_x , x + \delta_x)$ מתקיים $|f(t| \le M_x$. האוסף $\{(x - \delta_x , x + \delta_x)\}_{x\in[a,b]}$ מהווה כיסוי פתוח של הקטע הסגור $[a, b]$, ולכן מהיינה-בורל קיים לו תת-כיסוי סופי, כלומר קיימות נקודות $x_1 , \dots , x_N$ כך ש- $[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} \left(x_j - \delta_{x_j} , \ x_j + \delta_{x_j}\right)$. הקבוצה $\left\{M_{x_j}\right\}_{j=1}^{N}$ היא

סופית, ולכן קיים לה מקסימום M. M הנ״ל הוא חסם על $|f(x)|$ לכל נקודה הנמצאת באחת מהקבוצות $\left(x_j-\delta_{x_j}, x_j+\delta_{x_j}\right)\cap[a,b]$, ואיחוד הקבוצות האלו הוא בדיוק $[a,b]$, ולכן M הוא חסם על $|f(x)|$ לכל $x\in[a,b]$, כלומר f חסומה

שאלה 3:

הוכיחו בלשון δ , ε (ולא ע״י סדרות):

א. $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$.

יהי $\varepsilon>0$. מהזהות $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ נקבל: $\left|\sqrt[3]{x}-2\right|=\frac{|x-8|}{\left|x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4\right|}$. אם נדרוש $\delta<8$ אז $|x-8|<\delta$ גורר בפרט $|x|>0$, ואז $\frac{|x-8|}{\left|x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+4\right|}<\frac{|x-8|}{4}$. לכן נבחר $\delta=\min\{8,4\varepsilon\}$, ואז לכל x המקיים $0<|x-8|<\delta$ מתקיים $\left|\sqrt[3]{x}-2\right|<\varepsilon$.

ב. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x-7x^2}{4x^2-6}=-\frac{7}{4}$.

יהי $\varepsilon>0$. מתקיים: $\left|\frac{-6x-7x^2}{4x^2-6}-\left(-\frac{7}{4}\right)\right|=\frac{|-12x-42|}{|8x^2-12|}$. נרצה שיתקיימו הדברים הבאים לטובת פשטות החישוב: גם המונה וגם המכנה יהיו חיוביים (על מנת שנוכל להוריד את הערך המוחלט), ובמכנה שיתקיים $8x^2-12>x^2$. חישובים פשוטים נותנים תנאים עבור שלושת המצבים, אך למען הפשטות מספיק לבחור $M<-4$ על מנת שכולם יתקיימו. לכן לכל x המקיים $x<-4$ יתקיים: $\frac{|-12x-42|}{|8x^2-12|}=\frac{-12x-42}{8x^2-12}<-\frac{12x}{x^2}=-\frac{12}{x}$ (שימו לב כי זה ביטוי חיובי כי $x<-4$ ובפרט שלילי). לכן נבחר $M=\min\left\{-4,-\frac{12}{\varepsilon}\right\}$ ואז לכל $x<M$ יתקיים $\frac{|-12x-42|}{|8x^2-12|}<\varepsilon$.

ג. לא קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}[2\sin(x^2)]$ (כאשר $[\cdot]$ היא פונקציית הערך השלם).

נניח בשלילה כי הגבול קיים, נסמנו L, ויהי M המתאים ל- $\varepsilon=1$ מהגדרת הגבול. נסתכל על $x_1=\sqrt{2\pi([M^2]+1)}$ ועל $x_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi([M^2]+1)}$. מתקיים $x_1, x_2>M$, ולכן $|f(x_1)-L|, |f(x_2)-L|<\varepsilon$. חישוב פשוט מראה כי $f(x_1)=0$, $f(x_2)=2$, ולכן נקבל מצד אחד $|L|<1$ ומצד שני $|L-2|<1$, כלומר גם $L<1$ וגם $L-2>-1$, כלומר $L>1$ - סתירה.

שאלה 4:

א. נתון כי $\lim_{x\to a} f(x) = b$, וכי קיימת סביבה נקובה של a כך שבסביבה זו הערכים ש- f מקבלת שייכים לסביבה נקובה של b, וכן כי $\lim_{y\to b} g(y) = c$. הראו כי $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

יהי $\varepsilon > 0$. מהנתון על הסביבות של a, b , קיימים $\delta_1, \delta_2 > 0$ כך שאם $0 < |x-a| < \delta_1$, אז $0 < |f(x) - b| < \delta_2$. מהנתון על הגבול של g , קיים δ_3 כך שאם $0 < |y-b| < \delta_3$, אז $|g(y) - b| < \varepsilon$.
נפעיל את הגדרת הגבול על f עם $\varepsilon = \delta_3$, ונקבל שקיים $\delta_4 > 0$ כך שאם $0 < |x-a| < \delta_4$, אז $|f(x) - b| < \delta_3$.
נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_4\}$, ונקבל שאם $0 < |x-a| < \delta$, אז $0 < |f(x) - b| < \delta_3$, ולכן $\big|g\big(f(x)\big) - c\big| < \varepsilon$.

ב. הראו כי לא ניתן לוותר על התנאי על ערכי f. כלומר, הראו כי $\lim_{x\to a} f(x) = b$ וגם $\lim_{y\to b} g(y) = c$ אינו גורר $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

נסתכל על $f(x) \equiv 1$, ועל $g(y) = \begin{cases} 1 & y = 1 \\ 0 & y \neq 1 \end{cases}$. אז לכל a , $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{y\to 1} g(y) = 0$, אבל $\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = 1 \neq 0$.

שאלה 5:

הוכיחו כי ההגדרות הבאות של $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ שקולות:

א. לכל M קיים a כך שלכל $x < a$ מתקיים: $f(x) > M$.

ב. לכל סדרה a_n המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$.

נניח כי (א) מתקיים, תהי $a_n \to -\infty$, ויהי M. מהגדרת התכנסות סדרה למינוס אינסוף, לכל a קיים N כך שלכל $n > N$, $a_n < a$, ואז מ- (א) נובע כי לכל $n > N$, $f(a_n) > M$, כלומר $f(a_n) \to \infty$.

נניח כעת כי (ב) מתקיים. נניח בשלילה כי קיים M כך שלכל a קיים $x < a$ עבורו $f(x) \leq M$. נבנה סדרה המתכנסת למינוס אינסוף בצורה הבאה: לכל n נבחר את a_n להיות מספר המקיים $a_n < -n$ וגם $f(a_n) \leq M$ (נוכל לעשות זאת מהנחת השלילה). מתקיים כי $a_n \to -\infty$, אבל $f(a_n) \leq M$ לכל n, ולכן גם $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq M$, בסתירה לכך שהנחנו כי (ב) מתקיים.

שאלה 6:

הוכיחו לפי הגדרה:

א. אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, אז $\lim_{x\to 0} f(5x^2 - 2x + x_0) = L$.

יהי $\varepsilon > 0$. מתקיים: $|(5x^2 - 2x + x_0) - x_0| = |5x^2 - 2x| = |x||5x-2|$. חישוב פשוט מראה כי אם $|x| < 1$ אז $|5x-2| < 7$. מהגדרת הגבול הנתון, קיים $\delta' > 0$ המקיים שאם $0 < |t - x_0| < \delta'$ אז $|f(t) - L| < \varepsilon$. נבחר $\delta = \min\left\{1, \frac{\delta'}{7}\right\}$, ואז אם $|x| < \delta$ מתקיים מהחישוב שעשינו כי $|(5x^2 - 2x + x_0) - x_0| < \delta'$, ולכן $|f(5x^2 - 2x + x_0) - L| < \varepsilon$.

א. אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, אז: $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = L$.

יהי $\varepsilon > 0$. מהגבול הראשון, קיים M כך שלכל $x > M$, $|f(x) - L| < \varepsilon$, ומהגדרת הגבול השני, קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים $g(x) > M$. לכן לכל x המקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים $\left|f\big(g(x)\big) - L < \varepsilon\right|$.