אלגברה לינארית ב' גיליון 5

שימו לב, התרגילים ללא חובת הגשה לא יופיעו בתור "שאלת שיעורי הבית" בבחינה, אך הם כלולים בחומר ומומלץ מאד לפתור אותם

תרגיל 1

1. עבור אילו ערכים של $a \in \mathbb{R}$ מתקיים שהתבנית

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ax_2y_3 + ax_3y_2$$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^3$?

2. בסעיף זה תוכיחו את משפט פיתגורס ל V ממ"פ סוף מימדי כלשהו (מעל הממשיים או המרוכבים): יהיו $v_1,\ldots,v_m \in V$ וקטורים א"ג. הראו ש־ $\|v_1+\ldots+v_m\|^2 = \|v_1\|^2+\ldots+\|v_m\|^2$.

3. בסימוני סעיף 2, כעת נניח ש־ $v_1,\ldots,v_m \in V$ וקטורים א"נ. יהי $v \in V$ ונסמן $\alpha_i = \langle v, v_i\rangle$ מקדמי פוריה. יהיו $\beta_1,\ldots,\beta_n$ סקלרים כלשהם. היעזרו במשפט פיתגורס שהוכחתם כדי להראות ש־ $\|v-\sum\alpha_iv_i\| \le \|\|v-\sum\beta_iv_i\|\|^2$(תכונה זו מראה שההטלה הא"ג של v על $W = \operatorname{span}\{v_1,\ldots,v_m\}$ נותנת את האיבר הקרוב ביותר ל־v מתוך כל איברי W).

תרגיל 2 (אין חובת הגשה)

יהא V מרחב וקטורי מעל F (הממשיים או המרוכבים) ו־$W \subseteq V$ תת־קבוצה. נגדיר

$$A(W) = \{f \in V^* \mid \forall w \in W:\ f(w) = 0\}$$

1. הוכיחו כי $A(W)$ הוא תת־מרחב של V^*.
2. הוכיחו שאם $W' \subseteq W$ אז $A(W) \subseteq A(W')$.
3. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי־מרחבים. הוכיחו כי $A(U+W) = A(U) \cap A(W)$.

מעתה נניח כי V הוא סוף־ממדי.

4. יהי $W \subseteq V$ תת־מרחב. הוכיחו כי $\dim A(W) = \dim V - \dim W$.
5. יהיו $U, W \subseteq V$ תתי־מרחבים. הוכיחו כי $A(U\cap W) = A(U) + A(W)$.
6. נניח כי $V = U \oplus W$. הוכיחו כי $V^* = A(U) \oplus A(W)$.
7. עבור $X \subseteq V^*$ נגדיר $a(X) = \{v \in V \mid \forall f \in X,\ f(v) = 0\}$. הראו שזהו תת־מרחב של V והראו בנוסף שאם $W \subseteq V$ תת־קבוצה אז $a(A(W)) = \operatorname{span}W$.

תרגיל 3

יהי $V=\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית הבאה (וודאו לעצמכם שזו אכן מכפלה פנימית)

$$\langle p,q\rangle = p(0)q(0)+p(1)q(1)+p(2)q(2)$$

נגדיר: $W=\{p(x)\in V \mid p(1)=p(2)=0\}$ ונסמן ב־ $W^{\perp}$ את המרחב הניצב. תהיינה P_W , $P_{W^{\perp}}$ ההטלות הא"ג על המרחבים W , $W^{\perp}$ בהתאמה.

1. מצאו בסיס אורתונורמלי B_1 ל־ W והשלימו אותו לבסיס א"נ B של V כולו.
2. חשבו את המטריצה המייצגת של P_W בבסיס B שמצאתם קודם. מהי צורת ז'ורדן של P_W?
3. מצאו את המרחק של $p(x)=x^2-3x+7$ מ $W^{\perp}$, כלומר חשבו את $\|p(x)-P_{W^{\perp}}(p(x))\|$.

תרגיל 4

(אין קשר בין הסעיפים)

א. יהיה V מרחב מכפלה פנימית סוף־מימדי ויהיו $M,N\subseteq V$ תת־מרחבים. נניח ש־P ו־Q הן הטלות על N ו־M בהתאמה. הראו כי אם $\|Px-Qx\|<\|x\|$ לכל $0\neq x\in V$ אז $\dim M=\dim N$ (הדרכה: הראו כי $P|_M$ ו־$Q|_N$ הן חח"ע).

ב. יהי $V=M_n(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(B^*A)$, ותהי $P\in V$ מטריצה הפיכה. נגדיר אופרטור $T_P:V\to V$ על ידי $T_P(A)=P^{-1}AP$. מצאו את T_P^*.

ג. יהי $V=M_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(B^tA)$. מצאו את T^* של האופרטור $T:V\to V$ הנתון על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3d & 2c \\ -b & 4a \end{pmatrix}$$

תרגיל 5 (אין חובת הגשה)

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $U,W\subseteq V$ תתי־מרחבים. הראו כי:

1. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$.
2. אם V סוף־ממדי (למעשה מספיק ש־U ו־W יהיו סוף־ממדיים) אז $(U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.
3. אם V סוף־ממדי ו־$V=U\oplus W$ אז $V=U^{\perp}\oplus W^{\perp}$.

תרגיל 6

יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף־ממדי מעל $\mathbb{C}$ ויהי T אופרטור צמוד לעצמו: $T^*=T$ על V. הוכיחו כי:

1. $\|v+iT(v)\|=\|v-iT(v)\|$ לכל $v\in V$.
2. $v+iT(v)=0$ אם ורק אם $v=0$.
3. $I+iT$ וכן $I-iT$ הם אופרטורים הפיכים וכן $U=(I-iT)(I+iT)^{-1}$ מקיים $U*=U^{-1}$ (כזכור, U כזה נקרא אופרטור אוניטרי).

תרגיל 7

אחד השימושים החשובים של אלגוריתם גרם שמידט הוא פירוק QR: הראו שכל מטריצה הפיכה $A \in GL_n(\mathbb{C})$ ניתנת לפירוק $A = QR$ כאשר Q מטריצה אוניטרית ו־ R מטריצה משולשת עליונה הפיכה. רמז: בצעו גרם שמידט על עמודות A