

לוגיקה מתמטית - תרגיל 4

1. יהיו C, D פסוקים כך ש- $\vdash C \rightarrow D$.

א. בהנחה שאף פסוק אטומי איננו מופיע גם ב- C וגם ב- D , הוכח: $\vdash \neg C$ או ש- $\vdash D$.

ב. תן דוגמה המראה כי ללא ההנחה שבחלק א', מסקנת חלק א' איננה נכונה.

2. יהי A פסוק שאיננו טאוטולוגיה. נתבונן במערכת ההוכחה \mathcal{L}_{+A} לתחשיב הפסוקים, המתקבלת ממערכת ההוכחה הרגילה ע"י הוספת A כסכמת-אקסיומה (כלומר, בנוסף לאקסיומות הרגילות, כל פסוק המתקבל מ- A ע"י הצבת פסוקים כלשהם במקום הפסוקים האטומיים הוא אקסיומה במערכת \mathcal{L}_{+A}).

א. הוכח שהמערכת \mathcal{L}_{+A} איננה נאותה.

ב. הוכח שהמערכת \mathcal{L}_{+A} איננה עקבית, במובן הבא: קיים פסוק שגם הוא וגם שלילתו יכחים במערכת זו.

ג. הסק שכל פסוק יכיח במערכת \mathcal{L}_{+A} .

3. הוכח את משפט הנאותות החזק.

4. הוכח בעזרת משפט השלמות את המקרה הסופי של משפט השלמות החזק:
אם \sum קבוצה סופית של פסוקים, A פסוק ו- $\sum \models A$ אזי $\sum \vdash A$.

תאריך הגשה 3.5