אולשבכרה גל

נושא: מ"י ומרחב נפרש

שם: שני הירדן

מספר ספר: 205689581

מרצה אחראי: ניר בן-דוד

תאריך: 5/12/17

1. נוכיח כי זו קבוצה המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

נוכיח כי מתקיימות תכונות הגדרת המרחב הוקטורי:

נזכור כי $V=\mathbb{R}^2$.

① סגירות לחיבור ← עבור $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ (1)

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)\in\mathbb{R}^2$$

② סגירות לכפל בסקלר ← עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ (2), $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\alpha\boxdot(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\ \alpha y)\in\mathbb{R}^2$$

③ קומוטטיביות בחיבור ← עבור (1)

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)=(x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)$$

④ קומוטטיביות בכפל בסקלר ← עבור $(x,y)\in\mathbb{R}$ ו-(2),

$$\alpha\boxdot(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\ \alpha y)=(x,y)\boxdot\alpha$$

⑤ אסוציאטיביות בחיבור ←

$$((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3)=$$

$$(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)\oplus(x_3,y_3)=(x_1+x_2+x_3-2,\ y_1+y_2+y_3)$$

$$=(x_1,y_1)\oplus(x_2+x_3-1,\ y_2+y_3)=(x_1,y_1)\oplus((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3))$$

⑥ אסוציאטיביות בכפל בסקלר ← ~~יהי $\beta,\alpha\in\mathbb{R}$~~

$$\cancel{\alpha\boxdot(\beta\boxdot(x,y))=\alpha\boxdot(\beta x-\beta+1,\ \beta y)\overset{*}{=}\beta\boxdot(\alpha\boxdot(x,y))}$$

אין צורך להוכיח כי הוקטורים הם ממשיים אז פעולות יש אסוציאטיביות.

$$\cancel{*(\alpha(\beta x-\beta+1)-\alpha+2,\ \alpha\beta y)}$$

⑦ קיים אדיש חיבורי ← $(1,0)$ הוא האדיש החיבורי.

⑧ קיים איבר נגדי ← עבור $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ נגדיר את האיבר הנגדי כב $(-x_1,-y_2)$. הכולם לעצמות

וזה כי הפעולות הן מעל $\mathbb{R}$.

⑨ קיים אדיש בכפל ← $\alpha=0$ ונקבל את האדיש החיבורי.

⑩ קיים איבר הפכי ← אין צורך כי הכפל הוא ע"י סקלר.

1. המשך

(11) דיסטריבוטיביות בין פת

$\alpha \odot ((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)) = \alpha\odot(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)$

$= (\alpha x_1+\alpha x_2-\alpha-\alpha+1,\ \alpha y_1+\alpha y_2) = (\alpha x_1-\alpha+1,\ \alpha y_1)\oplus(\alpha x_2-\alpha+1,\ \alpha y_2)$

$= \alpha\odot(x_1,y_1) + \alpha\odot(x_2,y_2)$

מאוחר ואנו כופלים בסקלר בוודאי שקיימת דיסטריבוטיביות גם בחיבור סקלרים.

בכך הסתיימה ההוכחה.

$\square$

2.א. הטענה נכונה..

$\mathbb{R}^2\subseteq\mathbb{R}^3$ נראה כי מתקיימים התנאים עבור ת"מ:

(1) $W\neq\{0\}$, נכון כי $W=\mathbb{R}^2$

(2) סגירות לחיבור - $\mathbb{R}^2=\{\binom{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

מסגירות לחיבור ב-$\mathbb{R}$ נסיק כי חיבור והכפל אלו יניבו סגירות ב-$\mathbb{R}^2$.

(3) סגירות לכפל בסקלר - יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, לכל $\binom{a}{b}\in\mathbb{R}^2$ מתקיים

$\alpha\cdot\binom{a}{b}=\binom{\alpha a}{\alpha b}\in\mathbb{R}^2$.

$\square$

2.ב.(ו) הטענה נכונה.

נגדיר $W=A=\{$הפונ' המקיימות $f(1)=f(4)\}$. בוודאי כי $A\subseteq V$.

(1) $A\neq\{0\}$, לדוגמא

$$f(x)=\begin{cases}3 & x=1\\ 3 & x=4\\ 1 & \text{אחרת}\end{cases}$$

(2) סגירות לחיבור - אם $f(1)=f(4)$ אז חיבור פונקציות יהיה עדיין $f(1)=f(4)$, לפי תכונת הקומוטטיביות בחיבור.

(3) סגירות לכפל בסקלר - יהי $\alpha\in\mathbb{R}$.

$f(1)=f(4)\Rightarrow \alpha f(1)=\alpha f(4)$

אז כפל של הפונקציה בסקלר לא יפר את סגירות הקבוצה.

2. ב.(ii) הטענה נכונה.

נסמן $W = \{f(x)=f(-x) \text{ פונ' המקיימות}\}$

ראשית $W \subseteq V$ כי אלה כולם פונקציות.

① $W \neq \{0\}$, למשל $\cos(x) \in W$

② סגירות לחיבור תהיינה g, f שני פונקציות המקיימות $f(x)=f(-x)$, כלומר זוגיות.

לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ g(x) = g(-x) \end{cases} \Longrightarrow f(x)+g(x) = f(-x)+g(-x)$$

והתנאי מתקיים.

③ סגירות לכפל בסקלר: יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, נכפיל את f, פונ' זוגית בסקלר כלשהו ונקבל

$$\alpha f(x) = \alpha \cdot f(-x)$$

והתנאי מתקיים.

ג)(i) הטענה אינה נכונה.

נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

עבור $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \in W$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin W$$

(ii) הטענה נכונה.

נשים לב כי $A = 2A^t - A \Longleftarrow A = A^t$, כלומר המטריצות סימטריות.

ראשית $W \subseteq V$.

① $W \neq \{0\}$, למשל $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

② סגירות לחיבור: חיבור של כל מטריצה סימטרית עם אחרת הוא מטריצה סימטרית.

③ סגירות לכפל בסקלר – המטריצה תישאר סימטרית

שקול השערה נכונה.

ראשית, $W \subseteq V$, כי אלו מטריצות כלשהן.

① $W \neq \{0\}$, לדוגמא $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ מקיימת הכלה ב-W.

② <u>סגירות לחיבור</u> - תהי M מטריצה המקיימת $ra(A)=1$.
אז A היא מטריצה $\begin{pmatrix}1&a&b&c&d\\0&0&0&0&0\\ \vdots&&&&\\ \cdots&&&&\end{pmatrix}$.

חיבור של שתי מטריצות אלה לא יעלה אותן דרגה
כי אנו מבצעים פעולות אלמנטריות על השורה הראשונה בלבד.
אם $ra(A)=0$ אז זו מטריצת האפס, אז זה טריוויאלי.

③ <u>סגירות לכפל בסקלר</u> ←
לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים $ra(\alpha \cdot A) = ra(A)$.
לכן יש סגירות..

$\square$

3. (i) $V=F^{2\times 2}$.

<u>נתבונן בתנאי:</u>

$(a+b)^2+(a-b)^2=0 \Rightarrow 0=2a^2+2b^2 \Rightarrow a^2=-b^2$

התנאי זה מתקיים אמ"מ $a=b=0$.

לכן $W=\{0\}$, אז היא אינה תת-מרחב וקטורי של V.

4. (ii) $AP=3P \Leftarrow A=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&3\\&&&\ddots\end{pmatrix}$ מסדר n.

אין סגירות לחיבור כי לאחר החיבור התנאי לא יתקיים.
אז W אינה ת"מ של V.

4 (iii) עמיר

$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-4\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-5\\-3&5\end{pmatrix}$

וקיבלנו כי $-5+1\neq-3$ בסתירה לתנאי.

אז אין סגירות לחיבור.

3. <u>הוכחה</u>

יהא $v_0 \in V$.

אם $v_0 \in U$, אז מכיוון ש-U הוא תת-מרחב
של V מקיים סגירות לכפל בסקלר. אז אילו
כל איבר ב-V שאינו ב-U היה כפולה בסקלר
של v_0 אז $U=V$, בסתירה לנתון.

אם $U \not\ni v_0 \in V$,

אז אילו כל איבר ב-V שאינו ב-U הוא כפולה
בסקלר של v_0 אז היינו מקבלים:

$v = \alpha v_0$ עבור $\alpha \in F$ כלשהו

אז' מאחר ונתון כי U הוא תת-מרחב של V
ק"ם לה תת-מרחב. אך תת-מרחב בכל ח"ב להכיל $\{0\}$
עומנת שלא ומיה V עצמו, מאחר ו- $v_0 \notin U$.
זו בסתירה לכך ש- $U \neq \{0\}$.

אז' לכל $v_0 \in V$ לא ייתכן שכל איבר ב-V
שאינו ב-U הוא כפולה בסקלר של v_0.

$\square$

4.א. הטענה נכונה.

הוכחה

נתון כי התת-קבוצה לא ריקה וסגורה לחיבור.
עלינו להוכיח כי היא סגורה לכפל בסקלר, על מנת להוכיח שהיא תת-מרחב של V.

מעל השדה Z_p עבור p ראשוני מתקיים

$$\left\{\begin{pmatrix}a\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix} \,\middle|\, a\in Z_p\right\} \subseteq V$$

עבור $\alpha\in Z_p$,

$$\alpha\begin{pmatrix}a\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$$

$^{*}(\alpha a) \bmod p \in Z_p$ לכן קיים סגירות לכפל.

~~אבל~~

* $\alpha(\bmod p)\cdot a(\bmod p)\in Z_p$ מהגדרתן ומבחינה אלגברית

$\square$

4.ב. הטענה אינה נכונה.

נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

נגדיר $W=\left\{\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$

$V=\left\{\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$

$v+3u\in W$

$u,v\notin W$

$u=\left\{\begin{pmatrix}3a\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$

$v=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \,\middle|\, b\in\mathbb{R}\right\}$

$W\cup\{u,v\}\nsubseteq V$ ולכן אינו תת"מ.

4.ש. הוכחה

$V=\left\{\begin{pmatrix}a&e&f\\e&b&g\\f&g&c\end{pmatrix}\middle| a,b,c,e,f,g\in\mathbb{R}\right\}$ כי המטריצות סימטריות.

נתבונן בתתי-מרחבים הנ"ל:

$V_1=\begin{pmatrix}0&e&f\\e&b&g\\g&f&c\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}0&e&f\\e&0&g\\g&f&c\end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix}0&e&f\\e&0&g\\f&g&0\end{pmatrix}$, $V_4=\begin{pmatrix}0&0&f\\0&0&g\\f&g&0\end{pmatrix}$

כל אחד מתתי-מרחבים אלו שונה ממשנהו, ומוכל בזה שאחריו, ויש שונה מ- $\{0\}$.

□

4.ד. $\boxed{\text{הוכחה}}$

עפ"י הנתון $V=V_1+V_2+V_3$ ו-

$$\begin{cases}V_1\cap V_2=\{0\}\\ V_2\cap V_3=\{0\}\\ V_1\cap V_3=\{0\}\end{cases}\overset{(1)}{\Longrightarrow} V_1\cap V_2\cap V_3=\{0\}$$

נגדיר $V'=V_1+V_2$ מאחר ו-(1) מתקיים אז $V'\cap V_3=\{0\}$

לסיכום, מתקיים $V=V'+V_3$ ו- $V'\cap V_3=\{0\}$ אז עפ"י השפה סכום ישר כל איבר ב-V ניתן להציג בצורה אחידה. בפרט בצורה $V=V'+V_3=V_1+V_2+V_3$

כאשר $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$ ו- $v_3\in V_3$.

□

4.ה. הוכחה יהי V מרחב וקטורי מעל שדה אינסופי.
מאחר והמרחב אינו ניתן לפרשו ע"י איבר בודד, אז קיימים לפחות שני איברים שונים הפורשים אותו.

נבחר אותם $u\neq v$.

אז $span\{u,v\}=\alpha_1 u+\alpha_2 v$ עבור α_1,α_2 בשדה אינסופי כלשהו.

אז אם נקבע את היא נקבל ∞ אפשרויות לצירופים ליניאריים, כל אחד מהם הוא תת-מרחב כי מתקיים סגירות לחיבור וכפל ויכול להיות אפס $\{0\}$.
לכן קיימים ∞ תתי-מרחבים ל-V.

□