אלגברה ב – אופרטורים הרמיטיים

נושאים:
1. תכונות אופרטורים הרמיטיים
2. ע"ע ואופרטורים של ממ"פ
3. תרגילים

תכונות של אופרטורים הרמיטיים

משפט (הוכח בכיתה): יהי T אופרטור הרמיטי על ממ"פ V סוף ממדי. אם v_1, v_2 וקטורים עצמיים של T עם ע"ע $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אז $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. בנוסף, כל ע"ע של T הוא ממשי.

משפט (הוכח בכיתה): יהי T אופרטור הרמיטי על ממ"פ V סוף ממדי, אז ל – T יש וקטור עצמי שונה מאפס.

משפט (הוכח בכיתה): יהי V ממ"פ סוף ממדי, ויהי T אופרטור הרמיטי, אז קיים בסיס א"נ של V כך שכל וקטור הוא וקטור עצמי של T.

מסקנה: תהי $A \in F^{n\times n}$ הרמיטית (F = C,R), אז קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש - $P^{-1}AP$ אלכסונית.

הוכחה: ניקח $F=C$. נגדיר $V=C^n$ ו - $T(v)=Av$. T אופרטור הרמיטי כי A הרמיטית. ל – V קיים בסיס א"נ המורכב מוקטורים עצמיים של T, נסמנו B, אז מטריצת מעבר הבסיס בין הבסיס הסטנדרטי ל – B היא מטריצה אוניטרית (מעבירה בין בסיסים א"נ). אם A ממשית, מתחילים פשוט מ – $V=R^n$.

ע"ע ואופרטורים של ממ"פ

משפט (הוכח בכיתה): יהי V ממ"פ ו – T אופרטור, אזי:
1. אם T אוניטרית, כל ע"ע של T מקיים $|\lambda|=1$.
2. אם T הרמיטית, כל ע"ע של T ממשי.
3. אם T חיובית, כל ע"ע של T חיובי.

מסקנה:
1. אם T אופרטור אוניטרי וחיובי אז T הוא הזהות
2. אם T אופרטור אוניטרי והרמיטי, אז $T^2=id$.

תרגילים

1. יהי V ממ"פ, $E:V\to V$ היטל אורתוגונלי של V ל – W תת מרחב. הראה שקיים אופרטור סימטרי T המקיים $T^2=I+P$.

הוכחה: ניקח בסיס א"נ של V - $B=\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ כך ש - $v_1,\dots,v_k$ בסיס של W.

הייצוג של P בבסיס זה הוא מטריצה מהצורה $P=\begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$, לכן הייצוג של T^2 לפי הבסיס B צריך להיות $\begin{pmatrix} 2\cdot I_{k\times k} & 0 \\ 0 & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$, ז"א נקח את T להיות האופרטור $T(v_i)=\sqrt{(2)}v_i$ עבור $1\le i\le k$ ו – $T(v_i)=v_i$ ל - $k<i\le n$. חישוב ישיר מראה שזה אופרטור סימטרי המקיים את הנדרש.

2. יהי V ממ"פ, $u\in V$ וקטור. נגדיר אופרטור $S(v)=v-\alpha\langle v,u\rangle u$ ל - $0\neq\alpha\in R$.
   1. הוכח ש – S אופרטור הרמיטי

2. עבור אילו ערכי α S הוא אופרטור אוניטרי?
3. מהם הערכים העצמיים של S עבור α מסעיף 2?
4. מה הפירוש הגיאומטרי של פעולת S? (עבור V ממימד גדול מ - 1)

פתרון: סעיף 1 – חישוב ישיר.

סעיף 2 – S אוניטרית אם ורק אם שומרת על נורמות. חישוב ישיר של $\|S(v)\|=\|v\|$ מראה שצריך להתקיים $\alpha=\frac{2}{\|u\|}$.

סעיף 3 – עבור הערך של α מסעיף 2, הערכים העצמיים האפשריים היחידים הם 1 ו- -1 , כי S הרמיטית ואוניטרית. אם V ממימד 1, הערך העצמי היחיד הוא 1- (מתקבל עבור u). אם ל – V מימד הגדול מ – 1, נראה ששני הערכים הללו מתקבלים: עבור u עצמו מתקיים $S(u)=u-\frac{2}{\|u\|}\|u\|u=-u$. עבור v המאונך ל – u (שבהכרח קיים) מתקבל $S(v) = v$.

4. הפירוש הגיאומטרי של פעולת S היא שיקוף ביחס לוקטור המאונך ל – u.
נסתכל למשל על $V=R^2$ ו – $u=(1,0)$, אז S הוא בדיוק פעולת השיקוף סביב ציר y.