פונקציות סתומות

<u>הגדרה:</u> נאמר כי פונקציה $y = y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $f(x, y) = 0$ אם

$$f\big(x, y(x)\big) = 0$$

לכל x בתחום ההגדרה של $y(x)$.
באופן דומה, נאמר כי פונקציה $x = x(y)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $f(x, y) = 0$ אם

$$f\big(x(y), y\big) = 0$$

לכל y בתחום ההגדרה של $x(y)$.
שימו לב כי אם $f(x_0, y_0) = 0$ וגם $y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $f(x, y) = 0$ וגם $x = x(y)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $f(x, y) = 0$ וגם $x(y_0) = x_0$, $y(x_0) = y_0$, אז $y(x), x(y)$ הן פונקציות הפוכות אחת לשניה (בסביבות קטנות של x_0, y_0).

נאמר כי פונקציה $z = z(x, y)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $f(x, y, z) = 0$ אם

$$f\big(x, y, z(x, y)\big) = 0$$

לכל (x, y) בתחום ההגדרה של $z(x, y)$.
הגדרות דומות קיימות עבור $y(x, z), x(y, z)$.

נאמר כי פונקציות $y = y(x), z = z(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

אם

$$\begin{aligned} f\big(x, y(x), z(x)\big) &= 0 \\ g\big(x, y(x), z(x)\big) &= 0 \end{aligned}$$

לכל x בתחום ההגדרה של $y(x), z(x)$.
הגדרות דומות קיימות עבור $x = x(y), z = z(y)$ ועבור $x = x(z), y = y(z)$.

נאמר כי פונקציות $u = u(x, y), v = v(x, y)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v) &= 0 \\ g(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned}$$

אם

$$\begin{aligned} f\big(x, y, u(x, y), v(x, y)\big) &= 0 \\ g\big(x, y, u(x, y), v(x, y)\big) &= 0 \end{aligned}$$

לכל x, y בתחום ההגדרה של $u(x, y), v(x, y)$.

ננסח כמה ממשפטי פונקציות סתומות.

<u>משפט:</u> תהי $f(x, y)$ פונקציה ותהי (x_0, y_0) נקודה בתחום ההגדרה של $f(x, y)$ שאינה נקודת שפה.
אם
1. $f(x, y)$ פונקציה שהיא גזירה ברציפות (כלומר הנגזרות החלקיות שלה הן פונקציות רציפות) בסביבת הנקודה (x_0, y_0).

2. $f(x_0,y_0)=0$.
3. $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

אז קיימת פונקציה יחידה $y(x)$ המוגדרת בסביבה של x_0 המקיימת כי
1. $y(x_0)=y_0$.
2. $f\big(x,y(x)\big)=0$ בסביבת הנקודה x_0.
3. $y(x)$ גזירה ברציפות בסביבת הנקודה x_0.
4. $y'(x_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$.

משפט: תהי $f(x,y)$ פונקציה ותהי (x_0,y_0) נקודה בתחום ההגדרה של $f(x,y)$. אם
1. $f(x,y)$ פונקציה שהיא גזירה ברציפות (כלומר הנגזרות החלקיות שלה הן פונקציות רציפות) בסביבת הנקודה (x_0,y_0).
2. $f(x_0,y_0)=0$.
3. $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$.

אז קיימת פונקציה יחידה $x(y)$ המוגדרת בסביבה של y_0 המקיימת כי
1. $x(y_0)=x_0$.
2. $f\big(x(y),y\big)=0$ בסביבת הנקודה y_0.
3. $x(y)$ גזירה ברציפות בסביבת הנקודה y_0.
4. $x'(y_0)=-\frac{f'_y(x_0,y_0)}{f'_x(x_0,y_0)}$.

משפט: תהי $f(x,y,z)$ פונקציה ותהי (x_0,y_0,z_0) נקודה בתחום ההגדרה של $f(x,y,z)$ שאינה נקודת שפה. אם
1. $f(x,y,z)$ פונקציה שהיא גזירה ברציפות (כלומר הנגזרות החלקיות שלה הן פונקציות רציפות) בסביבת הנקודה (x_0,y_0,z_0).
2. $f(x_0,y_0,z_0)=0$.
3. $f'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

אז קיימת פונקציה יחידה $z(x,y)$ המוגדרת בסביבה של (x_0,y_0) המקיימת כי
1. $z(x_0,y_0)=z_0$.
2. $f\big(x,y,z(x,y)\big)=0$ בסביבת הנקודה (x_0,y_0).
3. $z(x,y)$ גזירה ברציפות בסביבת הנקודה y_0.
4.

$$z'_x(x_0,y_0)=-\frac{f'_x(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}$$
$$z'_y(x_0,y_0)=-\frac{f'_y(x_0,y_0,z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

משפט: תהיינה $f(x,y,z),g(x,y,z)$ פונקציות ותהי (x_0,y_0,z_0) נקודה בתחום ההגדרה של $f(x,y,z),g(x,y,z)$ שאינה נקודת שפה. אם
1. $f(x,y,z),g(x,y,z)$ פונקציות שהן גזירות ברציפות (כלומר הנגזרות החלקיות שלהן הן פונקציות רציפות) בסביבת הנקודה (x_0,y_0,z_0).
2.

$$f(x_0,y_0,z_0)=0$$
$$g(x_0,y_0,z_0)=0$$

3.

$$\det\begin{pmatrix} f'_y(x_0,y_0,z_0) & g'_y(x_0,y_0,z_0) \\ f'_z(x_0,y_0,z_0) & g'_z(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}\neq 0$$

אז קיימות פונקציות יחידות $y(x),z(x)$ המוגדרות בסביבה של x_0 המקיימות כי
1. $y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0$.

.2

$$f\big(x,y(x),z(x)\big)=0$$
$$g\big(x,y(x),z(x)\big)=0$$

בסביבת הנקודה x_0.

3. $y(x),z(x)$ גזירות ברציפות בסביבת הנקודה x_0.

.4

$$\begin{pmatrix}y'(x_0)\\ z'(x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'_y(x_0,y_0,z_0) & g'_y(x_0,y_0,z_0)\\ f'_z(x_0,y_0,z_0) & g'_z(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f'_x(x_0,y_0,z_0)\\ g'_x(x_0,y_0,z_0)\end{pmatrix}$$

<u>**משפט:**</u> תהיינה $f(x,y,u,v),g(x,y,u,v)$ פונקציות ותהי (x_0,y_0,u_0,v_0) נקודה בתחום ההגדרה של $f(x,y,u,v),g(x,y,u,v)$ שאינה נקודת שפה. אם

1. $f(x,y,u,v),g(x,y,u,v)$ פונקציות שהן גזירות ברציפות (כלומר הנגזרות החלקיות שלהן הן פונקציות רציפות) בסביבת הנקודה (x_0,y_0,u_0,v_0).

.2

$$f(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$$
$$g(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$$

.3

$$\det\begin{pmatrix}f'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\\ f'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\end{pmatrix}\neq 0$$

אז קיימות פונקציות יחידות $u(x,y),v(x,y)$ המוגדרות בסביבה של (x_0,y_0) המקיימות כי

1. $u(x_0,y_0)=u_0,\ \ v(x_0,y_0)=v_0$.

.2

$$f\big(x,y,u(x,y),v(x,y)\big)=0$$
$$g\big(x,y,u(x,y),v(x,y)\big)=0$$

בסביבת הנקודה (x_0,y_0).

3. $u(x,y),v(x,y)$ גזירות ברציפות (כלומר הנגזרות החלקיות שלהן הן פונקציות רציפות) בסביבת הנקודה (x_0,y_0).

.4

$$\begin{pmatrix}u'_x(x_0,y_0)\\ v'_x(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\\ f'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f'_x(x_0,y_0,u_0,v_0)\\ g'_x(x_0,y_0,u_0,v_0)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u'_y(x_0,y_0)\\ v'_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\\ f'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) & g'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f'_y(x_0,y_0,u_0,v_0)\\ g'_y(x_0,y_0,u_0,v_0)\end{pmatrix}$$

תרגיל: הראו כי
$$xy + xz + yz = 11$$
מגדיר פונקציה $z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2)$ המקיימת $z(1,2)=3$. מצאו את משוואת המישור המשיק ל־$z(x,y)$ בנקודה $(1,2)$. מצאו את $z''_{xy}(1,2)$.
פתרון: נגדיר $f(x,y,z) = xy + xz + yz - 11$.
ברור כי f גזירה ברציפות (כי היא פולינום בשני משתנים).
בנוסף $f(1,2,3) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 - 11 = 0$.
כיוון ש־ $f'_z(x,y,z) = x+y$ אז $f'_z(1,2,3) = 1+2 = 3 \neq 0$, ולכן תנאי משפט הפונקציות הסתומות מתקיימים ולכן יש פונקציה (יחידה) $z(x,y)$ המוגדרת בסביבת $(1,2)$ המקיימת:
1. $z(1,2) = 3$.
2. $xy + xz(x,y) + yz(x,y) = 1$ לכל (x,y) בסביבת $(1,2)$.
3. $z(x,y)$ גזירה ברציפות בסביבת הנקודה $(1,2)$.
4.

$$z'_x(1,2) = -\frac{f'_x(1,2,3)}{f'_z(1,2,3)} = -\frac{y+z}{x+y}\Big|_{(x,y,z)=(1,2,3)} = -\frac{2+3}{1+2} = -\frac{5}{3}$$
$$z'_y(1,2) = -\frac{f'_y(1,2,3)}{f'_z(1,2,3)} = -\frac{x+z}{x+y}\Big|_{(x,y,z)=(1,2,3)} = -\frac{1+3}{1+2} = -\frac{4}{3}.$$

משוואת המישור המשיק היא
$$z = z'_x(1,2)(x-1) + z'_y(1,2)(y-2) = -\frac{5}{3}(x-1) - \frac{4}{3}(y-2).$$

בשביל למצוא את $z''_{xy}(1,2)$ נצטרך לחזור אחורה קצת: נסתכל על המשוואה
$$xy + xz(x,y) + yz(x,y) = 1.$$

נגזור את הזהות לפי x ונקבל
$$y + z(x,y) + xz'_x(x,y) + yz'_x(x,y) = 0.$$

$$y + z(x,y) + xz'_x(x,y) + yz'_x(x,y) = 0$$
$$y + z(x,y) + (x+y)z'_x(x,y) = 0.$$

נציב את הנקודה $(1,2)$ ונקבל
$$2 + z(1,2) + (1+2)z'_x(1,1) = 0$$
$$2 + 3 + (1+2)z'_x(1,2) = 0$$

ומפה בעצם קיבלנו כי $z'_x(1,2) = -\frac{5}{3}$.
עכשיו ניקח את הזהות
$$y + z(x,y) + xz'_x(x,y) + yz'_x(x,y) = 0.$$

ונגזור אותה שוב, הפעם לפי y:
$$1 + z'_y(x,y) + xz''_{xy}(x,y) + z'_x(x,y) + yz''_{xy}(x,y) = 0.$$

נציב את הנקודה $(1,2)$ ונקבל
$$1 + z'_y(1,2) + 1z''_{xy}(1,2) + z'_x(1,2) + 2z''_{xy}(1,2) = 0$$
$$3z''_{xy}(1,2) = -1 - z'_y(1,2) - z'_x(1,2) = -1 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 2$$
$$z''_{xy}(1,2) = \frac{2}{3}.$$

הערות: 1. באותו האופן אפשר למצוא את $z''_{xx}(1,2), z''_{yy}(1,2)$.
2. במקרה זה אפשר ממש לחלץ את z:

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= 11 \\ xy + (x+y)z &= 11 \\ z &= \frac{11 - xy}{x+y} \end{aligned}$$

שבאמת מוגדרת בסביבת $(1,2)$. ובאמת, למשל,

$$z'_x(1,2) = \frac{-y(x+y) - (11-xy)}{(x+y)^2}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = \frac{-6-9}{3^2} = -\frac{5}{3}.$$

תרגיל: מצאו את המישור המשיק למשטח הרמה של $w = 4xy^2z + xy + e^{xyz}$ העובר דרך הנקודה $(1,2,0)$.

פתרון: משטח הרמה של $w = 4xy^2z + xy + e^{xyz}$ העובר דרך הנקודה $(1,2,0)$ מתאים ל־

$$w = 4 \cdot 2^2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + e^{1 \cdot 2 \cdot 0} = 3.$$

כלומר המשטח הוא

$$4xy^2z + xy + e^{xyz} = 3.$$

מצד אחד, אנו יודעים כי הגרדיאנט של $g(x,y,z) = 4xy^2z + xy + e^{xyz} - 3$ הוא נורמל למשטח. נחשב אותו:

$$\begin{aligned} g'_x(x,y,z) &= 4y^2z + y + yze^{xyz} \longrightarrow g'_x(1,2,0) = 2 \\ g'_y(x,y,z) &= 8xyz + x + xze^{xyz} \longrightarrow g'_y(1,2,0) = 1 \\ g'_z(x,y,z) &= 4xy^2 + xye^{xyz} \longrightarrow g'_z(1,2,0) = 18 \end{aligned}$$

ולכן $(2,1,18)$ הוא נורמל למישור המשיק העובר דרך הנקודה $(1,2,0)$. מכאן כי משוואת המישור המשיק היא

$$2(x-1) + (y-2) + 18z = 0.$$

מצד שני, חישבנו כי $g'_z(1,2,0) = 18 \neq 0$ וברור כי g גזירה ברציפות, ולכן יש לנו פונקציה $z(x,y)$ הגזירה (ברציפות) בסביבת הנקודה $(1,2)$ והמקיימת $z(1,2) = 0$. בנוסף:

$$\begin{aligned} z'_x(1,2) &= -\frac{g'_x(1,2,0)}{g'_z(1,2,0)} = -\frac{1}{9} \\ z'_y(1,2) &= -\frac{g'_y(1,2,0)}{g'_z(1,2,0)} = -\frac{1}{18}. \end{aligned}$$

לכן משוואה המישור המשיק היא

$$z - 0 = z'_x(1,2)(x-1) + z'_y(1,2)(y-2) = -\frac{1}{9}(x-1) - \frac{1}{18}(y-2) \longrightarrow 2(x-1) + (y-2) + 18z = 0.$$

זה לא צריך להפתיע אותנו כי יש לנו שתי נוסחאות עבור הנורמל:

$$(g'_x, g'_y, g'_z) \quad (z'_x, z'_y, -1)$$

אבל בהקשר שלנו,

$$z'_x = -\frac{g'_x}{g'_z} \quad z'_y = -\frac{g'_y}{g'_z}$$

ונקבל כי

$$(z'_x, z'_y, -1) = (-\frac{g'_x}{g'_z}, -\frac{g'_x}{g'_z}, -1) = -\frac{1}{g'_z}(g'_x, g'_y, g'_z).$$

אנו רואים כי הנורמלים מקבילים, כמו שאמור להיות.