גליון ראשון:

תרגיל 2:

אינטגרציה בחלקים - גוזרים את x^n ועושים אינטגרל ל $\cos(ax)$.

תרגיל 3:

ידוע שניתן לכתוב את $f(x)$ כ $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x+k}=\frac{1}{\prod_1^n(x+k)}$ בפירוק לשברים. כדי למצוא את A_k עוברים למכנה משותף באגף ימין ומציבים $x=-k$. דבר דומה ניתן לעשות עם $g(x)$ ע"י הצבה של $x=\pm i\sqrt{k}$.

תרגיל 4:

תהא $Q(x)=\int P(x)\mathrm{dx}$ פונקציה קדומה כלשהי של $P(x)$. אם $x_1<x_2<\cdots<x_n$ הם כל השורשים של $P(x)$, אז בקטע (x_i,x_{i+1}) או ש $P(x)$ חיובית כל הזמן או שלילית כל הזמן ולכן הפונקציה הקדומה באותו קטע היא $Q(x)+C_i$ או $-Q(x)+C_i$. כדי למצוא פונקציה קדומה על כל הישר צריך רק למצוא קבועים C_i כך שהפונקציות הקדומות בקטעים $[x_{i-1},x_i]$ ו $[x_i,x_{i+1}]$ מזדהות ב x_i.

תרגיל 5:

1. בקטע $(0,1)$ ניתן למצוא פונקציה קדומה והסיבה שלא ניתן להרחיב את הקטע נובעת מכך שלנגזרת של פונקציה תמיד יש את תכונת ערך הביניים.
2. בכל קטע $(n,n+1)$ מקבלים ש $F'(x)=f(x)=[x]=n$ קבועה ולכן $F(x)=A_nx+B_n$ עבור קבועים A_n,B_n ובנוסף $A_n=[x]$. בחירה של קבועים B_n שדואגים שהפונקציה תהיה רציפה נותנת $f(x)=[x]\,x-\binom{[x]+1}{2}$.

גליון 2:

תרגיל 1:

כדי להוכיח את השוויון עושים אינטגרציה בחלקים של $\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{dt}$ - גוזרים את $\frac{(x-t)^n}{n!}$ ומבצעים אינטגרציה על $f^{(n+1)}(t)$. מוכיחים את השוויון ע"י אינדוקציה. העובדה שניתן לכתוב את השארית כשארית לגראנז' נובעת ממשפט הערך הממוצע.

תרגיל 2:

מהשרטוט של הפונקציה צריך לזהות את הסימטריה שלה - בפרט "רואים" ש $g(x)=\arctan(e^x)-\arctan(e^0)$ היא פונקציה אי זוגית ולכן

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{dx}=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{dx}+\int_{-\pi}^{\pi}\arctan(1)\mathrm{dx}$$

תרגיל 3:

1. מראים שהנגזרת שווה לאפס.
2. מראים שהנגזרת שווה לאפס. (לשים לב ש $\sqrt{x^2}=|x|$ ולא תמיד מתקיים ש $\arccos(\cos(x))=x$ ו $\arcsin(\sin(x))=x$.

תרגיל 6:

סעיף 3 (סעיף 4 דומה): מתקיים ש $\sin(t)+t > 0$ כאשר $t > 0$ ולכן $\ln(1+\sin(t)+t) > 0$ מוגדר ורציף ב $t > 0$.
בנוסף, כאשר $t \sim 0$ מקבלים ש $\ln(1+\sin(t)+t) \sim \sin(t)+t \sim 2t$ ולכן $\int_0^x \ln(\cdots)\mathrm{dt} \sim \int_0^x 2t\mathrm{dt} = x^2$.
פותרים ע"י מבחן השוואה עם $\frac{x^p}{x^2}$.

תרגיל 7:

אפשר להוכיח ע"י תנאי קושי להתכנסות או ע"י כך ששמים לב ש $0 = f - f \leq g - f \leq h - f$ הן פונקציות אי שליליות ולכן ניתן להשתמש במבחן ההשוואה כדי להראות ש $\int_0^\infty (g-f)$ מתכנס ולכן גם $\int_0^\infty g$ מתכנס.

גליון 3:

תרגיל 3:

אם $f(x)$ רציפה במ"ש עם $\varepsilon > 0$ ו $\delta_\varepsilon > 0$ מתאימים אז בכל נקודה בה $f(x) \geq 2\varepsilon$ (בצורה דומה $f(x) \leq -2\varepsilon$) נקבל ש $f(x+h) \geq \varepsilon$ לכל $|h| < \delta_\varepsilon$. בפרט $\int_{x-\delta_\varepsilon}^{x+\delta_\varepsilon} f(x)\mathrm{dx} \geq 2\delta_\varepsilon\varepsilon$. תנאי קושי להתכנסות אומר בפרט ש $\int_{x-\delta_\varepsilon}^{x+\delta_\varepsilon} f(x)\mathrm{dx} \to 0$ כאשר $x \to \infty$ ולכן מקבלים שעבור x־ים מספיק גדולים מתקיים ש $|f(x)| < 2\varepsilon$ ולכן $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

תרגיל 4:

נניח ש $f^{(m)}(0) = 0$ לכל $0 \leq m < l$ אז מפיתוח טיילור מקבלים ש $f(x) = \left(\frac{f^{(l)}(0)}{l!} + \varepsilon(x)\right)x^l$ כאשר $\varepsilon(x) \to 0$. אם $f^{(l)}(0) \neq 0$ ניתן לעשות מבחן השוואה של $f\left(\frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right)$ עם $\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l$ ולקבל ש $l > k$.

תרגיל 6:

2. מחשבים את תחילת הטור עד האיבר העשירי ומקרבים את שאר הטור ע"י האינטגרל. מסעיף ראשון ההבדל קטן מהאיבר הראשון של הטור (החדש) שהוא $\frac{1}{11}$.
3. מתרגיל קודם מספיק להראות שהטור הבא מתכנס

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} - \left[\frac{1}{6i+2} + \frac{1}{6i+4} + \frac{1}{6i+6}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3i+1} + \frac{1}{3i+2} + \frac{1}{3i+3}\right]$$

נסמן ב $H(N) = \sum_1^N \frac{1}{k}$. אם סוכמים עד האיבר ה M בטור מקבלים

$$\begin{aligned} \sum_0^M \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2}\sum_0^M \left[\frac{1}{3i+1} + \frac{1}{3i+2} + \frac{1}{3i+3}\right] &= H(2M+2) - \sum_0^M \frac{1}{2i+2} - \frac{1}{2}H(3M+3) \\ &= H(2M+2) - \frac{1}{2}H(M+1) - \frac{1}{2}H(3M+3) \end{aligned}$$

עתה נותר לחשב את הגבול הנ"ל ע"י הקירוב של $H(M)$ ע"י אינטגרלים (בעצם $H(M) \sim \ln(M)$).