קומבי גליון 6

326991890־205689581

18 במאי 2018

.1

נשתמש בעקרון שובך היונים.
נתון

$$(1)\sum_{i=1}^{60} x_i = 100, x_i \geq 1$$

נסמן

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} x_i, 1 \leq j \leq 60$$

נגדיר 20 תאים ו־60 יונים, כאשר התאים הם $\{0, 1, ..., 19\}$ והיונים הם $S_j\%20$.
לפי עקרון שובך היונים, יש שני אפשרויות:

$$\begin{cases} (1) & \exists cell - with - 4 - pigeons \\ (2) & \forall cells - have - exactly - 3 - pigeons \end{cases}$$

<u>אופציה 1 ־</u> אזי קיימים j, k, l, w כך ש־ $20|S_j, S_k, S_l, S_w$, $|S_i - S_q| = 20$ עבור $i, q \in \{j, k, l, w\}$ סיימנו.
אילו לא אז $min\{|S_i - S_q|\} \geq 40$, אזי $\exists(|S_i - S_k|) = 20$ כי אם נניח בשלילה, שכולם מקיימים $min\{|S_z - S_t|\} \geq 40$, קיימים לפחות 3 הפרשים כאלה, נקבל $\max\{S_j\} \geq 120$סתירה ל־(1).
<u>אופציה 2 ־</u>נתבונן בתא 0 .
אזי קיימים j, k, l כך ש־ $20|S_j , < S_k, < S_l$, אם $S_j = 20$ סיימנו.
אם לא אז הסכום≤ 60 . אם $S_k = 20$סיימנו. אילו לא,נשים לב כי $S_l = 100$ קיימים שני אפשרויות שההפרשים שנוצרים הם 20 ו־60 או 40 ו־40 . אם זה המקרה הראשון סיימנו.
אם זה המקרה השני אז נקבל $100 - 80 = 20$.
כנדרש.

.2

תהי $f : \{1, ..., 15\} \to \mathbb{N}$ המוגדרת $\sum_{i=1}^{15} f(i) = 100$.

(א)נגדיר $\{0, ..., 13\}$ כתאים כאשר $f(i) + f(i+1)$ הם היונים לכל $i \in [15]$. נזכור כי $f(15+1) = f(1)$.

אז ישנם 15 יונים. תחום הסכומים האפשריים עבור היונים הוא $0 \to 100$. כל תא מייצג ערך של סכום אפשרי מודולו 14.

לפי עקרון שובך היונים קיים תא עם שתי יונים. נניח בשלילה כי הסכומים בכל התאים הם קטנים מ־14 . אז נקבל,

$$f(i) + f(i+1) \leq 13$$

אזי,

$$max\left\{\sum_{i=1}^{15} f(i)\right\} = \frac{max\left\{\sum_{i=1}^{15} f(i)\right\} + max\left\{\sum_{i=1}^{15} f(i)\right\}}{2} = \frac{max\left\{\sum_{i=1}^{15} f(i)\right\} + max\left\{\sum_{i=1}^{15} f(i+1)\right\}}{2}$$

$$\underbrace{=}_{series-sum-laws} \frac{max\left\{\sum_{i=1}^{15} f(i) + f(i+1)\right\}}{2} = \frac{15 \times 13}{2} = 97.5 \neq 100$$

סתירה. המקרה המינימלי הוא היונה נמצאת בתא 0 ואז הסכום הוא 14.

לכן, קיים $i \in [15]$, $f(i) + f(i+1) \geq 14$.

מ.ש.ל.

(β) נשתמש בשיטת פתרון שונה עבור סעיף זה.

נגדיר $\{0, ..., 21\}$כתאים כאשר $2f(i) + f(i+1)$ הם היונים לכל $i \in [15]$. נזכור כי $f(15+1) = f(1)$.

נחשב את הממוצע לכל שלישייה

$$(*)\, f(i) + f(i) + f(i+1)$$

ישנם 15 שלישיות מסוג $(*)$ ו־300 $\underbrace{=}_{f(15+1)=f(1)} 2\sum_{i=1}^{15} f(i) + \sum_{i=1}^{15} f(i+1) \underbrace{=}_{series-sum-laws} \sum_{i=1}^{15} (*)$.

נחשב את הממוצע:

$$\frac{\sum_{i=1}^{15} (*)}{15} = \frac{300}{15} = 20$$

נתבונן בביטוי $\sum_{i=1}^{15} f(i) = 100$.

לא ייתכן ש־$f(i) = n \in \mathbb{N}$ לכל $i \in \{1, 2, ..., 15\}$ כי $\frac{100}{15} = 6\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N}$.

לכן $2f(i) + f(i+1) \neq 20$ בפרט. אך הממוצע הוא 20. אזי,

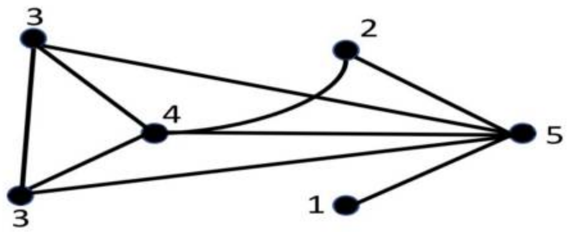
$$\exists i | 2f(i) + f(i+1) \geq 21$$

כנדרש.

3. $(\aleph)$לא ייתכן גרף עם 6 קודקודים בעלי ערכיות זו מכיוון שע"פ הנתון קיימים 2 קודקודים בעלי ערכיות 5. כלומר, מכל קודקוד בעל ערכיות 5 יש צלע לכל אחד משאר הקודקודים. ז"א שבמקרה שלנו הערכיות הכי נמוכה של קודקוד כלשהו מתוך ה־6 הינה לכל הפחות 2, וזה בסתירה לנתון.

(β)לפי נוסחאת סכום הדרגות $\sum deg\left(v\right)=2\left|E\right|$. גם לפי מסקנה שהוכחנו בכיתה, כמות הקודקודים בגרף עם מספר ערכיות אי־זוגי הוא מספר זוגי, בניגוד לדוגמא זו. לכן זה לא ייתכן.

(γ)



4. **הוכחה:** יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר המקיים $|E|=|V|-1$.

עלינו להוכיח כי ב־G אין מעגלים ואז נסיק שהוא עץ.

נניח בשלילה כי קיים מעגל פשוט בגרף G, כלומר הוא לא עץ.

קיימים $|V|-1$ צלעות בגרף.נבנה מחדש את הגרף כשנתחיל מממעגל כלשהו שהנחנו שקיים אחד כזה לפחות.

במעגל, מספר הצלעות שווה למספר הקודקודים. כל קודקוד שנוסיף לגרף יוסיף צלע לספירה כי הגרף קשיר.

אזי $|E|\geq|V|$מכיוון שלפחות מעגל אחד בגרף.

סתירה. לכן Gחסר מעגלים והוא קשיר אזי הוא עץ ע"פ ההגדרה.

מ.ש.ל. ■

5. **הוכחה:** $\Rightarrow$

נניח כי Gהוא חסר מעגלים מקסימלי. בפרט הוא חסר מעגלים אזי הוא עץ.

$\Leftarrow$

יהא $G=(V,E)$ עץ.

על פי ההגדרה G הוא גרף קשיר (קיים מסלול בין כל שני קודקודים בגרף) וחסר מעגלים.

יהא $\{x,y\}\in V$ זוג קודקודים. נבחר $z\neq x\wedge z\neq y\in V$ ונתבונן בזוג $\{x,z\}$. נחבר ביניהם באמצעות ענף. מכיוון שהגרף הוא קשיר בהכרח קיים ביניהם מסלול אז אם נחבר ביניהם נקבל מעגל.

מאחר וזה מקרה כללי, כל צלע שנוסיף בין הקודקודים הקיימים(שאינם כבר מחוברים), נקבל מעגל.

כנדרש.

מ.ש.ל. ■