קומבי 7

ליעד סלומון־שניר הורדן

27 במאי 2018

1.
א. נתאר בנייה של עץ זה:
נתחיל מצורת הבסיס כאשר $n = 4$:

כעת נבחר עלה כלשהו (B, C, D) ונחבר אליו שני צלעות. נקבל עץ הנראה כך:

נוסיף שני קודקודים, נבחר עלה כלשהו ונחבר אליו שני צלעות מכל אחד מהקודקודים שהוספנו אליו. נמשיך כך רקורסיבית עד שנגיע ל־n קודקודים.
קיבלנו עץ עם $n \geq 4$ זוגי של קודקודים.
ב. <u>הוכחה</u>
לא קיים עץ כזה. נניח בשלילה כי n אי זוגי ו<u>לכל</u> קודקוד שאינו עלה יש ערכיות 3.
נסמן:

$$l - number \quad of \quad leaves$$
$$n - l - number \quad of \quad non - leaves$$

קיימים שני מקרים:

1. l זוגי ו־$n - l$ אי זוגי

2. l אי־זוגי ו־$n-l$ זוגי

נראה איך נגיע לסתירה משני המקרים האלו:

1. נקבל סה"כ

$$1 \times l + 3 \times (n-l) = even \quad number + (odd \times odd) = even + odd = odd$$

2. נקבל סה"כ

$$1 \times l + 3 \times (n-l) = odd \quad number + (odd \times ecen) = odd + even = odd$$

בשני המקרים קיבלנו מספר ערכויות אי זוגי בסתירה למשפט $|V| = 2|E|$ המחייב כמות זוגית של ערכויות.

בזו סיימנו.

מ.ש.ל.

2.

א.

ב. בכל סדרה בינארית יש אפשרות אחת בלבד להפוך אותה לסדרה שנבדלת ממנה בקואורדינטה אחת בדיוק לכל אחת מן הערכים בה. כלומר n אפשרויות לכל הקואורדינטות.

ג. נחשוב על קוביה ממימד n כקוביה ממימד $n-1$ בתנועה. נקודה בתנועה יוצרת קטע, קטע בתנועה יוצא ריבוע וריבוע בתנועה יוצר קוביה וכן הלאה, נקבל קוביה ממימד n. לקובייה ממימד 2 (ריבוע) יש 4 צלעות, ובתנועה, מ־4 הקודקודים של הריבוע נוצרו צלעות חדשות. כך שיש לנו 4 צלעות מהריבוע לפני התנועה, 4 אחרי התנועה ו4 שנוספו תוך כדי התנועה.

אם נזיז קוביה אז מספר הצלעות שיהיו לקוביה החדשה (שהיא בתנועה) היא פעמיים המספר הצלעות של הקוביה ממימד נמוך יותר ועוד הקודקודים שהיו בתנועה. ע"פ הסעיף הקודם, מספר הצלעות שיוצאות מכל קודקוד שווה לn, ומספר הקודקודים הינו2^n נכפיל אותם ונקבל$n2^n$, אך ספרנו כל צלע פעמיים, לכן נחלק ב־2 ונקבל שמספר הצלעות בקוביה החדשה ה־n מימדי הוא $n2^{n-1}$.

(בדיקה עבור $n = 1, 2$ עובדת.)

ד. גרף הוא גרף קשיר אם קיים קיים מסלול בין כל שני נקודות.

יהא Q_n גרף. יהיו $x, y \in V$. כל קודקוד הוא $\{0,1\}^n$.

נבנה מסלול מ־xל־y. נתחיל מ־x ונספור את כמות ה־1 ובאותו אופן עבור y.

נתחיל מהנקודה עם הכמות המינימלית של 1. לפי ההגדרה, קיימת צלע בין כל קודקוד השונה מהאחר בספרה אחת.

נגדיר את כל הקודקודים עם אותה כמות של 1 ־ים בתור "שלב".

לכל איבר ב־"שלב" יש קישור לשלב שמתחתיו ומעליו.

אם קיים מסלול ישיר ביניהם, סיימנו.

אם לא אז נאלץ לעלות מספר כלשהו של שלבים מעל השלב הדרוש ואז לרדת חזרה.

מובטח שיהיה קיים מסלול כזה כי קיים מסלול בין האיבר היחיד בשלב הגבוה ביותר $h = \{1_1, ..., 1_n\}$ לכל שאר האיברים.

הוכחה: יהי $x \neq h \in V$. נראה כי קיים מסלול כלשהו בין xל־h.

נראה כי קיים מסלול כזה לכל איבר בשלב כלשהו באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: אילו x בשלב האחד לפני האחרון, אז חייב להיות מסלול כי כל האיברים בשלב זה שונים בספרה 1 מ־h אז מחוברים ל־h.

הנחת האינדוקציה: נניח נכונות עבור שלב $n-k$. נוכיח עבור $n-k-1$.

לפי ההנחה קיים מסלול לכל איבר מ־h ל־$n-k$. נתבונן באיברים בשלב $n-k-1$. אם נשנה ספרת אפס כלשהי לאחת נקבל איבר בשלב $n-k$. כל האפשרויות $\binom{n}{n-k-1}$ של 1־ים נמצאים בשלב זה, אם נשנה את אחד האפסים עבור כל אחד מהאיברים בשלב $n-k-1$ נקבל את כל האיברים בשלב $n-k$. מאחר ויש חיבור עבור כל שינוי כזה בין קודקודים־יש צלעות המחברות בין השלבים.

בזו הסתיימה האינדוקציה.

מ.ש.ל.

ה. לפי משפט גרף קשיר הוא אוילריאני אם"ם כל הערכויות זוגיות. אזי עבור לכל n זוגי Q_n הוא גרף אולריאני. אז קיים מסלול אוילריאני סגור ע"פ הגדרה של גרף אוילריאני.

3.

לא ייתכן. נתבונן בלוח 8×8.

כל משבצת היא קודקוד בגרף המחוברת לקודקוד מעליה מימינה משמאלה ומלמטה.

מעין מטריצה 8×8.

לפי משפט, גרף הוא אוילריאני אם"ם כל הערכויות זוגיות.

אך עבור כל הקודקודים בפינה (אלו שבאו במקום המשבצות בצדדים) יש ערכיות 3 כי אין להם אחד מן הכיוונים.

עבורם לא קיים מסלול המתחיל ומסתיים באותה משבצת ללא חזרות (מסלול אוילריאני סגור).

כנ"ל עבור המקרה $m \times n$.

בזו סיימנו