# מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 3

## 1 מרחק בין קבוצות

**הגדרה 1.1** עבור $(X,d)$ מרחב מטרי, $A \subset X$ ונקודה $x \in X$ נגדיר

$$d(x,A) = inf\{d(x,y)|y \in A\}$$

.

ועבור שתי קבוצות $A,B \subset X$ נגדיר

$$d(A,B) = inf\{d(x,y)|x \in A, y \in B\}$$

**טענה 1.2** $(X,d)$ מרחב מטרי, $A \subseteq X$, $x \in X$. $d(x,A) = 0$ אם ורק אם $x \in \overline{A}$.

**הוכחה:**

$$\begin{aligned} d(x,A) = 0 &\iff d(x,A) \leq 0 \\ &\iff \forall r > 0 \exists a \in A : d(x,a) < r \\ &\iff \forall r, B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff x \in \overline{A} \end{aligned}$$

■

במילים אחרות, הוכחנו שאם $A$ סגורה, $d(x,A) = 0$ אם ורק אם $\{x\} \cap A \neq \emptyset$.

שאלה: האם לכל $A,B \subseteq X$ סגורות. $d(A,B) = 0$ אם ורק אם $A \cap B \neq \emptyset$?

תשובה: לא. למשל $A = \mathbb{R} \times \{0\}, B = \{(x,y)|xy = 1\} \subseteq X = \mathbb{R}^2$ לא מקיימות את הכיוון $\Longleftarrow$.

## 2 מטריקת האוסדורף

יהי $(X,d)$ מרחב מטרי, נסמן ב-$\mathcal{F}_b(X)$ את אוסף הקבוצות הסגורות, חסומות, לא ריקות ב-$X$.

לכל $A,B \in \mathcal{F}_b(X)$ נגדיר

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\right\}$$

**טענה 2.1** $(\mathcal{F}_b(X), d_H)$ מרחב מטרי.

**הוכחה:** נוכיח תחילה ש-$d_H : \mathcal{F}_b(X) \times \mathcal{F}_b(X) \to [0, \infty)$. יהיו $A, B \in \mathcal{F}_b(X)$. $A$ חסומות, $B$ לא ריקה לכן קיים $r > 0$ ו-$b \in B$ כך ש-

$$A \subseteq B(b, r)$$

לכן לכל $a \in A$, $d(a, B) \leq d(a, b) < r$. לכן $\sup_{a \in A} d(a, B) < r$.
באותו אופן, $\sup_{b \in B} d(b, A) < r'$. ולכן $d_H(A, B) \in [0, \infty)$.
נוכיח ש-$d_H$ חיובית: ברור $d_H(A, A) = 0$. נראה שאם $d_H(A, B) = 0$ אזי $A = B$.

$$\begin{aligned} d_H(A, B) = 0 \quad &\implies \quad \sup_{a \in A} d(a, B) = 0 \\ &\implies \quad \forall a \in A, d(a, B) = 0 \\ (B \text{ is closed}) \quad &\implies \quad \forall a \in A, a \in B \\ &\implies \quad A \subseteq B \end{aligned}$$

באותו אופן, $B \subseteq A$ ולכן $A = B$.
$d_H$ סימטרית: ברור.
$d_H$ מקיימת את אי שיוויון המשולש: תרגיל. ■

**הערה 2.2** ההעתקה $(X, d) \hookrightarrow (\mathcal{F}_b(X), d_H)$ המוגדרת על ידי $x \mapsto \{x\}$, היא שיכון איזומטרי (כלומר $d(x, y) = d_H(\{x\}, \{y\})$ לכל $x, y \in X$).

**טענה 2.3** אם $(X, d)$ שלם אזי $(\mathcal{F}_b(X), d_H)$ שלם.

**הוכחה:** תהי $A_n \in \mathcal{F}_b(X)$ סדרת קושי. נראה ש-

$$A_\infty = \{x \in X | d(x, A_n) \to 0\}$$

היא קבוצה ב-$\mathcal{F}_b(X)$ (תרגיל), ומתקיים $A_n \to A_\infty$.
נפרק את ההוכחת הגבול לשני חלקים:
חלק 1. נראה $\sup_{a_\infty \in A_\infty} d(a_\infty, A_n) \to 0$:
יהי $\epsilon > 0$, צריך להראות שקיים $N$ כך שלכל $n \geq N$ ולכל $a_\infty \in A_\infty$ מתקיים $d(a_\infty, A_n) < \epsilon$.
$A_n$ קושי, לכן קיים $N$ כך שלכל $n, m \geq N$ מתקיים $d_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$.
יהי $a_\infty \in A_\infty$. מהגדרת $A_\infty$ קיים $m \geq N$ כך ש-$d(a_\infty, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$. כלומר, קיים $a_m \in A_m$ כך ש-$d(a_\infty, a_m) < \frac{\epsilon}{2}$.
לכל $n \geq N$ מתקיים $d_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$ לכן קיים $a_n \in A_n$ כך ש-$d(a_n, a_m) < \frac{\epsilon}{2}$.
מכאן קיבלנו שלכל $n \geq N$

$$d(a_\infty, A_n) \leq d(a_\infty, a_n) \leq d(a_\infty, a_m) + d(a_m, a_n) < \epsilon$$

חלק 2. $\sup_{a_n \in A_n} d(a_n, A_\infty) \to 0$. תרגיל. ■