## ***אינפי 1 - פתרון גיליון תרגילים מספר 8***

1. ההיפוציקלואידה נתונה בצורה פרמטרית ע"י $\begin{cases} x(t)=a(\cos(t))^3 \\ y(t)=a(\sin(t))^3 \end{cases}$ או בצורה סתומה ע"י $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

א. חשב ע"י שימוש בהצגה הפרמטרית את $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$.

פתרון: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a3(\sin t)^2\cos(t)}{a3(\cos t)^2(-\sin t)}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\tan(t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{\cos^2(t)}\frac{1}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

ב. חשב ע"י שימוש בהצגה הסתומה את המשיק להיפוציקלואידה בנקודה עם $x=0.5$ הנמצאת ברביע הראשון.

ראשית, נחשב את נקודת ההשקה: בנקודה זו, $y=(a^{2/3}-0.5^{2/3})^{3/2}$ ולכן $P=(0.5,(a^{2/3}-0.5^{2/3})^{3/2})$.

שיפוע המשיק הוא נגזרת ההיפוציקלואידה. נגזור את ההיפוציקלואידה כפי שגוזרים פונקציה סתומה: $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0$

ולכן $y'=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\frac{(a^{2/3}-0.5^{2/3})^{1/2}}{0.5^{1/3}}$. כל שנותר הוא לחשב משוואת ישר העובר דרך $P$, ששיפועו הוא $y'$ שחישבנו.

(הערה: ע"י הצבת ההגדרה הפרמטרית של העקום בנוסחה שקיבלנו, מקבלים אכן ש- $y'=-\tan(t)$, כפי שקיבלנו בסעיף א'.)

2. א. הוכח שיש פתרון חיובי אחד ושלילי אחד בלבד למשוואה $e^x=x+2$ בקטע [-2,2].

הוכחה: נגדיר: $f(x)=e^x-x-2$.

אזי: $f(-2)=e^{-2}>0,\quad f(2)=e^2-4>0,\quad f(0)=-1<0$

לפי משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות, נובע שבקטע $[0,2]$ יש למשוואה פתרון אחד לפחות, וכן בקטע $[-2,0]$.

נראה שהפונקציה מונוטונית ב- $[0,2]$:

בקטע $[0,2]$: $f'(x)=e^x-1>0$. היות והפונקציה מונוטונית, היא חח"ע ולכן לא ייתכן לה יותר מפתרון אחד חיובי בקטע. הטיפול ב- $[-2,0]$ דומה.

ב. כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $x^4+2x-1=0$ ?

פתרון: נגדיר $f(x)=x^4+2x-1$. אז $f'(x)=4x^3+2$ ולכן הנגזרת מתאפסת בדיוק פעם אחת. לפי משפט רול, למשוואה יש לכל היותר שני פתרונות ממשיים. (לו היו יותר משני פתרונות ממשיים, לפי רול, הנגזרת היתה מתאפסת יותר מפעם אחת).

$f(-2)=11,\quad f(-1)=-2,\quad f(1)=2$ ולכן, לפי משפט ערל הביניים לפונקציה יש לפחות שני פתרונות.

לכן יש בדיוק שני פתרונות.

3. הוכח שלכל $x>0$ מתקיים: $\arctan(x) \ge \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

הוכחה: נגדיר $f(x)=\arctan(x)-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. אזי $f(0)=0$. לאחר חישוב מקבלים ש- $f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}(\sqrt{1+x^2}-1)$. היות ו- $x>0$, $f'(x)>0$. מכאן, $f(x)$ פונקציה עולה. לכן $f(x)>f(0)=0$ לכל $x>0$.

4. א. תהא $f(x)$ רציפה ב- $[0,\infty)$, גזירה ב- $(0,\infty)$ ומקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x)=f(0)=0$. הוכח שקיימת $0<c<\infty$ כך ש - $f'(c)=0$.

אם $f(x)=0$ לכל $x\in[0,\infty)$ אז הנגזרת של $f(x)$ מתאפסת בכל נקודה ב- $(0,\infty)$.
אם $f(x)$ לא קבועה, אז קיימת נקודה $b\in(0,\infty)$ בה $f(b)>0$ או $f(b)<0$. נניח בה"כ ש- $f(b)>0$. נראה שבמקרה זה, קיימת נקודה בה $f(x)$ מקבלת מקסימום, וממשפט פרמה ינבע שהנגזרת של $f(x)$ מתאפסת בנקודה זו.
היות ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, קיים $M$ כך שלכל $x>M$, $f(x)<f(b)$ (*). מאחר ובברור $b$ לא מקיימת את אי השיוויון (*), $b\le M$. בקטע $[0,M]$ $f(x)$ רציפה ולכן מקבלת מקסימום. היות ו- $b\in[0,M]$, המקסימום בהכרח גדול או שווה ל- $b$, ולכן הוא המקסימום בכל הקרן.

ב. מצא דוגמא לפונקציה רציפה ב-$[0,\infty)$, גזירה ב- $(0,\infty)$ ומקיימת $f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, עבורה לא קיימת נקודה $0<c<\infty$ בה $f'(c)=0$.

דוגמא: $f(x)=1-\frac{1}{1+x}$. אזי $f(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, אבל $f(x)$ מונוטונית עולה ממש ולכן לא קיימת נקודה $0<c<\infty$ בה $f'(c)=0$.

5. תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[0,1]$ וגזירה ב- $(0,1)$. נתון כי $f(1)=1$, $f(0)=0$, ושלכל $0<x<1$ מתקיים: $f'(x)\le 2x$. הוכח ש- $f(x)=x^2$.

הוכחה: נתבונן ב- $g(x)=f(x)-x^2$. פונקציה זו מקיימת: $g(1)=0$, $g(0)=0$.
ע"י הפעלה של משפט לגרנז' בקטע $(0,x)$, מקבלים שקיימת נקודה $c\in(0,x)$ בה מתקיים:
$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(c)=f'(c)-2c\le 2c-2c=0$. היות ו- $x>0$, מקבלים ש- $g(x)\le 0$.
ע"י הפעלה של משפט לגרנז' בקטע $(x,1)$, מקבלים שקיימת נקודה $d\in(x,1)$ בה מתקיים:
$\frac{g(1)-g(x)}{1-x}=g'(d)=f'(d)-2d\le 2d-2d=0$. היות ו- $1-x>0$, מקבלים ש- $g(x)\ge 0$. משני השלבים שעשינו, הטענה נובעת.

6. חשב את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל:
הערה: לא נראה את זה כאן, אבל יש לבדוק את קיום התנאים של משפט לופיטל בכל אחד מהסעיפים הבאים.

א. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!}=0$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\ldots=\frac{1}{2}$

ג. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+\ln(x)}{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+\frac{1}{x}}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+1}{xe^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2}{e^x+xe^x+1}=\ldots=0$$

ד. $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{a\cos(ax)}{\sin(ax)}}{\frac{b\cos(bx)}{\sin(bx)}}=\lim_{x\to 0+}\frac{a\cos(ax)}{\sin(ax)}\frac{\sin(bx)}{b\cos(bx)}=$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{ax}{\sin(ax)}\frac{\sin(bx)}{bx}=1$$