תורת הקבוצות־חזרה למבחן

1 ביולי 2018

.1

תבנה פונקציה חח"ע ועל $|A|^{|B|+1} = |A| \cdot |A|^{|B|}$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה חח"ע ועל:

$$f : A^B \times A \to A^{B\cup\{x\}}$$

על ידי

$$f\left((g,a)\right) = f_{g,a} : B\cup\{x\} \to A$$

כאשר

$$f_{g,a}(y) = \begin{cases} g(y) & y\in B \\ a & y = x \end{cases}$$

<u>f חח"ע ועל</u>

אם $f\left((g_1,a_!)\right) = f\left((g_2,a_2)\right)$ אז $g_1 = g_2$ וגם $a_1 = a_2$.

בהנתן $\psi \in A^{B\cup\{x\}}$ קיים (g,a) כך ש־$f\left((g,a)\right) = \psi$.

<u>תרגיל</u>

נגדיר

$$F = \{(\mathbb{N},\leq) : \leq \text{is a well order }\}$$

הראו ש־f איננה בת מנייה, נזכור כי $\aleph = 2^{\aleph_0} = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$

נגדיר פונקציה חח"ע

$$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to F$$

נתבונן בסדר הרגיל $\underbrace{0<1}_{a_0} < \underbrace{2<3}_{a_1}....$ נחלק אותם לזוגות. נתאים כל סדרה של 0 ו־1 לשינוי או השארת האיברים כמו שהם.

פורמאלית:

בהנתן סדרה $(a_0,a_1,...)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$2n > 2n+1 \iff a_n = 1$$

$$else - stays\, the\, same$$

זו בוודאי פונקציה חח"ע לסדרות כי כל שינוי משאיר את הסדר או משנה אותו במקום הספציפי שהגדרנו.

<u>תרגיל</u>

מצאו את עצמת הקבוצות הנ"ל

$$F_1 = \{A \subseteq \mathbb{R} : A\, finite\}$$

$$F_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = \aleph_0\}$$

$$F_3 = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = \aleph\}$$

1. $|F_1| \geq \aleph$ כי נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to F_1 \\ r &\to \{r\} \end{aligned}$$

$|F_2| \leq \aleph$ כי

$$F_1 = \bigcup \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = n\} \leq \aleph_0$$

לנמק! בדומה לסעיף מעל.

2. מצד אחד, $|F_2| \geq \aleph$ כי

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} &\to F_2 \\ r &\to \{r, 0, 1, ...\} \end{aligned}$$

חח"ע.

מצד שני, $|F_2| \leq \aleph$ כי

$$F_2 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow |F_2| \leq \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \aleph^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

3. $F_3 \subseteq 2^{\aleph}$ ולכן $|F_3| \leq 2^{\aleph}$.

נגדיר מצד שני פונקציה חח"ע

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{R}) &\to F_3 \\ A &\to g(A) \cup (10, 11) \end{aligned}$$

כאשר $g\left(x\right)=\frac{2}{\pi}arctan\left(x\right)$ שהיא פונקציה חח"ע ועל $g:\mathbb{R}\rightarrow\left(0,1\right)$.

<u>תרגיל</u>

נגדיר יחס שקילות S על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ על ידי

$$\left(x,y\right)S\left(u,v\right)\iff\left(x-u,y-v\right)\in\mathbb{Z}^{2}$$

א. מצאו את עצמת כל מחלקות השקילות של היחס S

ב. מצאו את עצמת $R\times R/S$

ג. מצאו חתך ליחס השקילות $\left[0,1\right)\times\left[0,1\right)$ כל ההפרשים בין שני מספרים השונים אחד מהשני המספר שלם כלשהו מעל הממשיים

א. מחלקת שקילות־$A\subseteq R\times R$ כך שמתקיים

$$\left[\left(a,b\right)\right]\underbrace{=}_{go\,over\,last\,tutorial\,R/Z}\left\{ \left(\overline{a},\overline{b}\right)+\left(a,b\right)\in Z\times Z\right\}$$