

<p>1. The first step in the process of developing a new product is to identify a market need. This involves conducting market research to determine what consumers want and need. Once a need is identified, the next step is to develop a concept that addresses this need.</p> <p>2. The second step is to develop a business plan. This involves determining the costs of production, the pricing strategy, and the marketing plan. The business plan also includes a financial forecast and a break-even analysis.</p> <p>3. The third step is to secure financing. This can be done through a variety of sources, including banks, venture capitalists, and angel investors. Once financing is secured, the next step is to develop a prototype of the product.</p> <p>4. The fourth step is to conduct a pilot test. This involves producing a small quantity of the product and testing it in a limited market. This allows the entrepreneur to gather feedback from consumers and make any necessary adjustments to the product or the business plan.</p> <p>5. The fifth step is to launch the product. This involves producing a larger quantity of the product and marketing it to a wider audience. The entrepreneur should continue to monitor the market and make adjustments as needed.</p>	<p>1. The first step in the process of developing a new product is to identify a market need. This involves conducting market research to determine what consumers want and need. Once a need is identified, the next step is to develop a concept that addresses this need.</p> <p>2. The second step is to develop a business plan. This involves determining the costs of production, the pricing strategy, and the marketing plan. The business plan also includes a financial forecast and a break-even analysis.</p> <p>3. The third step is to secure financing. This can be done through a variety of sources, including banks, venture capitalists, and angel investors. Once financing is secured, the next step is to develop a prototype of the product.</p> <p>4. The fourth step is to conduct a pilot test. This involves producing a small quantity of the product and testing it in a limited market. This allows the entrepreneur to gather feedback from consumers and make any necessary adjustments to the product or the business plan.</p> <p>5. The fifth step is to launch the product. This involves producing a larger quantity of the product and marketing it to a wider audience. The entrepreneur should continue to monitor the market and make adjustments as needed.</p>
--	--

10110

2	0	5	6	8	9	5	8	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

ציון

תאריך 15/05/18

* יש למלא X בתוך המשבצות בטבלה שלהלן עבור כל ספרה של תעודת הזהות, כולל ספרת הביקורת (סה"כ 9 ספרות), כאשר כל עמודה מייצגת ספרה בתעודת הזהות.

ה

1. אין לשדך סיכות נוספות, לסיכה הקיימת, למחברת הבחינה.
2. אין לתלוש דפים ממחברת הבחינה.
3. אין להוסיף דפים למחברת הבחינה שלא אושרו על ידי המתרגל או מרצה הקורס.
4. יש לכתוב במחברת הבחינה בעט בלבד (לא בעפרון).
5. הקפד למלא בטבלת המשבצות של תעודת הזהות את ה' X בתוך המשבצת.
6. במידה וטעית במיקום ה' X בטבלת המשבצות, השחר את הריבוע לחלוטין.

בוחן באלגברה א (104166) - אביב תשע"ח 14.5.18.

- משך הבוחן שעהיים.
- בבוחן 4 שאלות, יש לענות על כולן.
- יש לכתוב את התשובות על טופס הבחינה.
- לרשותכם דף ריק בסוף הבחינה למקרה שהמקום לא יספיק.
- אין להשתמש בחומר עזר (כולל מחשבי כיס).
- עליכם לצטט כל טענה או משפט עליהם אתם מסתמכים.
- בכל שאלה או סעיף ממנה, אם רושמים רק את המילים "אני לא יודע/ת" מקבלים את הערך השלם של 20% מהנקודות של אותה שאלה או סעיף. אם לא מופיעות המילים: "אני לא יודע/ת" **בלבד**, השאלה או הסעיף ייבדקו במלואם ויזכו לניקוד מלא, חלקי או אפס.

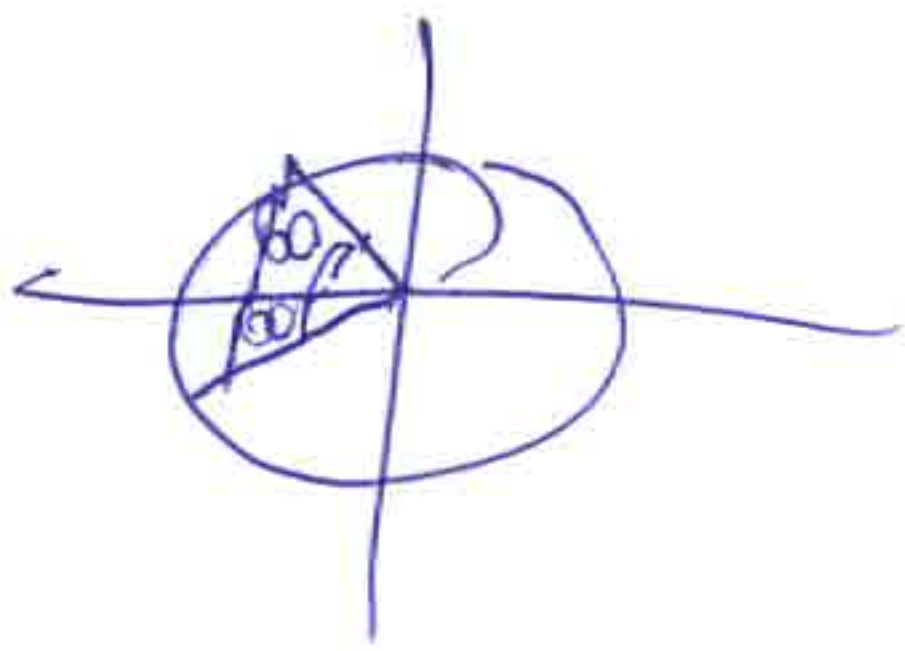
שאלת שעורי הבית היא שאלה 1 ג .

בהצלחה

א. (9 נק') נתון: $z \in \mathbb{C}$, $0 \neq z$ המקיים: $z + \frac{1}{z} = -1$. הוכיחו: $z^3 = 1$.

נפתור את המשוואה $z + \frac{1}{z} = -1$

נכפול ב- z (כ- $z \neq 0$)
 $z^2 + z + 1 = 0$
 נשתמש בנוסחת השורשים
 $z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$



$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \text{cis}(120^\circ) = \text{cis}(120^\circ)$
 $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \text{cis}(240^\circ) = \text{cis}(240^\circ)$

9/9

נבדוק: $z_1^3 = 1^3 \text{cis}(3 \cdot 120^\circ) = 1 \cdot \text{cis}(360^\circ) = 1$
 $z_2^3 = 1^3 \text{cis}(3 \cdot 240^\circ) = 1 \cdot \text{cis}(720^\circ) = 1$
 ב. (9 נק') נתון $z \in \mathbb{C}$ המקיים: $|z| = 2$. חשבו את ערך הביטוי: $|z^{2018} + (\bar{z})^{2018}|^2 + |z^{2018} - (\bar{z})^{2018}|^2$

נזכר כי $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$, $z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$
 $|z^{2018}| = |z|^{2018}$, $\frac{z^{2018}}{z^{2018}} = \bar{z}^{2018}$

$|z^{2018} + (\bar{z})^{2018}|^2 = |2 \text{Re}(z^{2018})|^2 \in \mathbb{R}$

$|z^{2018} - (\bar{z})^{2018}|^2 = |2i \text{Im}(z^{2018})|^2 \in \mathbb{R}$

$4 = (\text{Im}(z))^2 + (\text{Re}(z))^2 \iff \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \iff |z| = 2$

$4 = 4 |\text{Re}(z^{2018})|^2 + 4 |\text{Im}(z^{2018})|^2 =$

~~$4 (\text{Re}(z)^{4036} + \text{Im}(z)^{4036}) = 4 \cdot 4^{2018} = 4^{2019}$~~

$4 (|z^{2018}|)^2 = 4 \cdot |z|^{2018} = 4 \cdot 2^{2018} = 2^2 \cdot 2^{2018} = 2^{2020}$

!! \times $\frac{2}{-2}$

ג. (10 נק') יהא z מספר מרוכב שונה מ-0. הוכיחו כי $\operatorname{Re}\left(\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right)\right) < 1$.

$$0 \neq z \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right)\right) &= \operatorname{Re}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z\bar{z}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(1-\frac{z-\bar{z}}{|z|^2}-\frac{1}{|z|^2}\right) \stackrel{(1)}{=} \operatorname{Re}\left(1-\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}-\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

נתבונן בביטוי:

$$1 - \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2} - \frac{1}{|z|^2}$$

$z \in \mathbb{C} \implies |z| \geq 0$, $|z|^2 > 0$, $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$
 ובאשר ל- $z \neq 0$, אין שוויון ($|z| \neq 0$) , $|z| > 0$
 ובפרט $|z|^2 > 0$.

~~$\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$~~ ~~$|z|^2 = \operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Re}(z)^2$~~ ~~$|z|^2 > 0$~~

$1 - \frac{1}{|z|^2} < 1$ (3) $0 \leq \frac{1}{|z|^2} < 1$ כבר

~~$\frac{2\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Re}(z)^2} < 0$~~ ~~$|z|^2 = \operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Re}(z)^2$~~ ~~$|z|^2 > 0$~~

$\operatorname{Re}\left(\frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2}\right) = 0$ כי $\operatorname{Re}(\operatorname{Im}(z)) = 0$, החדר

החדר של החדר החדר של מספר מרוכב
 מספרים
 כל

$= \operatorname{Re}\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) \stackrel{(3)}{=} 1 - \frac{1}{|z|^2} \stackrel{(3)}{<} 1$ כאן

f.e.n

(1) $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)$, החדר

15/26

+025

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3w = 0 \\ x + (k+1)y + z + w = 1 \\ x + 2y + kz + 4w = 0 \\ 3x + ky + z + 2w = 1 \end{cases}$$

לפניכם מערכת משוואות מעל \mathbb{Z}_5 :כאן הנעלמים הם x, y, z, w ואילו k הוא פרמטר.א. עבור אילו ערכים של k יש למערכת: (i) פתרון יחיד.

(ii) יותר מפתרון אחד.

(iii) אין למערכת אף פתרון.

ב. במקרה שיש למערכת יותר מפתרון אחד, רשום את כל הפתרונות.

ג. מצא את כל הפתרונות: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ של המערכת ההומוגנית המתאימה המקיימים: $xy = 3$.

$$x = \frac{3}{y}$$

בשאלה זו יש לפתור פתרון מלא ומנומק ואת התשובות יש לרכז בטבלה שבסוף השאלה.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k & 4 & 0 \\ 3 & k & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ \rightarrow \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & k+4 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & k & 0 & 0 \\ 5 & k+4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

נכיר כי אנו מעל \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & k+4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & k+4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{פארת'} \\ \mathbb{Z}_5: -1=4 \\ \rightarrow \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & k+4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \leftrightarrow R_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & k+4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

קצת
-3

א' דעלדל . ע

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4+k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w = 0$$

$$z = 0$$

$$(4+k)y +$$

$$k = \pm$$

$$4+k=0$$

$$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x &= -4y \\ 2x &= y \end{aligned}$$

$$2x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$3 \cdot y = 3$$

$$\boxed{y = 1}$$

ל' 3' $k=1$ ~~ל' 3' $k=1$~~

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

105
106
107
108

$k=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

310

$2w=4$
 $w=2$

$(3+3y, 1-4y, y, 2)$

$4y+z=1 \Rightarrow z=1-4y$
 $2x+4y+1=0 \Rightarrow 2x=-1-4y \Rightarrow x=-\frac{1}{2}-2y$

א. פתרון יחיד (i)	א. יותר מפתרון אחד (ii)	א. אף פתרון (iii)
$k \neq 0, 1$ שם	$k=0$ שם	$k=1$
ב. כל הפתרונות בסעיף ב'	ג. כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה המקיימים: $xy=3$	
$y \begin{pmatrix} 3+3y \\ 1-4y \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3z \\ 1z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	

-6



ל' 3' $k=1$
ל' 3' $k=1$

ב. (16 נק') לגבי כל אחת מקבוצות עליכם לקבוע אם W_i תת מרחב וקטורי של V הנתון או לא.

אם כן, הוכיחו זאת ואם לא – נמקו מדוע לא.

בכל אחד מהסעיפים מדובר בפעולות הרגילות של המרחב.

$$F = \mathbb{R} \quad V = \mathbb{R}_3[x]. i$$

$$W_1 = \{f(x) \in V \mid f(x) \text{ שורש ממשי אחד}\}$$

סו' בר ה-ים של V תהא W_1 .

אוק ע-ים ע'ם ק"ם שורש ממשי פ'לם.
ע'כ'ן W_1 אינ' תת-מרחב וקטורי של V .

ע'ס מספר ה'ל' של פ'ל'ם האפס.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ תהא } F = \mathbb{R} \quad V = \mathbb{R}^{2 \times 2}. ii$$

$W_2 =$ אוסף כל המטריצות ב- V השקולות שורה למטריצה A איחוד עם מטריצת האפס.

W_2 אינ' תת-מרחב וקטורי של V .

ע'ס ח'ב ע'ס'ביר - ס'ם נ'ח'ב ש'כ'י מ'ח'ב' ש'כ'י
ע'ס'ביר - ע'ס'ביר ש'כ'י מ'ח'ב' ש'כ'י
ע'ס'ביר - ע'ס'ביר ש'כ'י מ'ח'ב' ש'כ'י

כ'פ'ס ב'טק'ס מ'ש'ר א'ב
מ'ח'ב' ה'ש'ר

ע'כ'ן ע'ס'ביר ת'ת-מ'ח'ב' וקטורי של W_2 .
ע'כ'ן ע'ס'ביר ת'ת-מ'ח'ב' וקטורי של W_2 .

ע'כ'ן ע'ס'ביר

X

שאלה 4 - 20 נק'

הוכח או הפוך כל אחת מהטענות הבאות:

א. (10 נק') נתונה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש: A^{2017}, A^{2018} סקאלריות שונות זו מזו.
אז: A סקאלרית.

הטענה נכונה.
הוכחה
ידין סקאלרית.

10/40

נניח בסעיף א. A אינה סקאלרית.
יבוא כי אם $BC = AB = BA$ A נאליציה (הזנחה)
סקאלרית עם α באמצען הסופי.

בשאלה זו $A^{2017} = A^{2018}$ (1)
על מנת A - סקאלרית טווין זה
היא ח"ק א"ק סקאלרית עם
סבירה אכן A אינה סקאלרית.

✓

אכן A סקאלרית.

ב. (10 נק') אם A, B שקולות שורה אז למערכות המשוואות: $A\bar{x} = \bar{b}$, $B\bar{x} = \bar{b}$ יש את אותו פתרון לכל \bar{b} .

הטענה סוינה נכונה.

נבדוק באמצעות דוגמה נשפ'ת:

10/10

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ נאליציה פשוטות כמ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

✓

השורה
השורה
השורה

$$\text{Row}(A) = \text{sp} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{sp} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Row}(B)$$

אם מתקיים

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

קיבלו שני פתרונות $\bar{X}_{1,2}$ שונים עבור
לוא $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ כאשר A ו- B מקבלות

ערכים. כך שהראינו למחרת השורה שלהם
שזה נובע מן העובדה שאם \bar{b} נובע
מסוגל למצוא עם נותן משיג מאותו
עם השורה.

כך נעבדנו את הערה.

