# בחינה מועד א' באלגברה לינארית ב' - 104173

01.02.2016

<u>**הנחיות**</u>: משך המבחן שעתיים וחצי.

השימוש בכל חומר עזר **אסור בהחלט**.

יש **לנמק היטב** כל תשובה.

ניתן לכתוב משני צידי הדף.

**שאלה 1. (25 נקודות)**

ב $R^3$ מוגדרת מכפלה פנימית באופן הבא

$$< u,v > = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_3v_3,$$

כאשר $u = (u_1,u_2,u_3)\ ,v = (v_1,v_2,v_3)$.

א) השלימו את הווקטור $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$ לבסיס אורתונורמלי של $R^3$ ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

ב) יהא $T: R^3 \to R^3$ אופרטור לינארי הנתון על ידי
$T\big((a,b,c)\big) = (a+b+c, b+2c, -2b+c)$ לכל $(a,b,c) \in R^3$.

מצאו במפורש תת-מרחב $T^*$-אינווריאנטי חד-מימדי (מספיק למצוא בסיס).

פתרון:

א) ניקח בסיס $\left\{w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\right\}$ ונפעיל עליו האלגוריתם של גראם-שמידט.

$$\|w_1\| = \sqrt{< w_1,w_1 >} = 1 \Rightarrow u_1 = w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$$

$$w_2 = e_2 - < e_2,u_1 > u_1 = e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}u_1 = \left(\frac{1}{2},1,0\right),\ < e_2,u_1 > = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{< w_2,w_2 >} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}w_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2},1,0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)$$

$$w_3 = e_3 - < e_3,u_1 > u_1 - < e_3,u_2 > u_2 = e_2 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_2 = \left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right),$$

$$< e_3,u_1 > = 0, < e_3,u_2 > = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{< w_3,w_3 >} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow u_3 = w_1 = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$$

קיבלנו בסיס א"נ $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)\right\}$.

ב) נמצא הצגה מטריצית של $T$ בבסיס א"נ $B$ בעזרת $[T]_E$ ומטריצת מעבר מ- $E$ ל- $B$.

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, P_{E\to B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \det(P) = 1$$

בעזרת $adj$ נמצא $P^{-1}$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} adj(P) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

$$[T]_B = P^{-1}[T]_E P =$$
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{13\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

כיוון ש-$B$ בסיס א"נ ביחס למכפלה הפנימית הנתונה,
$[T^*]_B = ([T]_B)^* = ([T]_B)^T$.

לכן,

$$[T^*]_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{13\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{13\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני של $T$.

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 + 4) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

ברור, ש- $\lambda = 1$ הוא ע"ע עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1. כלומר, המרחב העצמי שלו הוא המרחב ה$T^*$ המבוקש.

נמצא את המרחב העצמי, בשביל זה נפתור את המערכת

$$([T^*]_B - I)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{13\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{13\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן נקבל פתרון כללי $V_{\lambda=1} = Span\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0,1\right)\right\}$ שהנו המרחב המבוקש.

**שאלה 2. (25 נקודות)**

הוכיחו כי אם $T$ הינו אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית $V$ אז:

א) $T(v)=0$ אם ורק אם $T^*(v)=0$.

ב) $T-\lambda I$ הוא אופרטור נורמלי.

ג) אם $T(v)-\lambda v=0$ אז $T^*(v)-\bar{\lambda}v=0$.

ד) אם $T(v)-\lambda_1 v=0$ ו- $T(w)-\lambda_2 w=0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$ אז $<w,v>=0$.

<u>פתרון:</u>

א) $T(v)=0 \Leftrightarrow <Tv,Tv>=0 \Leftrightarrow <v,T^*Tv>=0$

$$\underset{T\ is\ normal}{\Longleftrightarrow} <v,TT^*v>=0 \Leftrightarrow <T^*v,T^*v>=0 \Leftrightarrow T^*(v)=0$$

ב) $(T-\lambda I)(T-\lambda I)^*=(T-\lambda I)(T^*-(\lambda I)^*)=(T-\lambda I)\left(T^*-\bar{\lambda}I^*\right)=$
$=(T-\lambda I)\left(T^*-\bar{\lambda}I\right)=TT^*-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}=T^*T-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}=$
$\left(T^*-\bar{\lambda}I\right)(T-\lambda I)=(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)$

ג) נשים לב, ש $(T-\lambda I)^*(v)=T^*(v)-\bar{\lambda}v$.

לפי סעיף ב), $T-\lambda I$ הינו אופרטור נורמלי. ולפי סעיף א) אופרטור נקבל שאם $(T-\lambda I)v=0$ אז גם

$(T-\lambda I)^*(v)=T^*(v)-\bar{\lambda}v=0$. לכן $T^*(v)=\bar{\lambda}v$.

ד) נניח ש $T(v)-\lambda_1 v=0$ ו- $T(w)-\lambda_2 w=0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$. אז:
$(\lambda_1-\lambda_2)<w,v>=\lambda_1<w,v>-\lambda_2<w,v>=$

$$=<w,\overline{\lambda_1}v>-<\lambda_2 w,v>=<w,T^*v>-<Tw,v>=$$

$$=<Tw,v>-<Tw,v>=0$$

קיבלנו ש $(\lambda_1-\lambda_2)<w,v>=0$. כיוון ש- $\lambda_1\neq\lambda_2$ אז $<w,v>=0$.

**שאלה 3. (25 נקודות)**

הוכיחו כי תבנית בילינארית ממשית, סימטרית ולא סינגולרית ניתנת להצגה באמצעות מטריצה אלכסונית שאיברי האלכסון שלה שייכים לקבוצה $\{1,-1\}$.

<u>הערה</u>: א) ההצגה המבוקשת אינה מתייחסת לדמיון מטריצות אלא לחפיפה שלהן.

ב) ניתן להשתמש בטענות של השאלה 2) גם אם לא הצלחתם להוכיח אותן.

<u>הוכחה</u>: הוכחה באינדוקציה על מימד המרחב הווקטורי $V$.

אם $\dim V=1$ אז הטענה טריוויאלית.

נניח כי הטענה נכונה לכל תבנית כנ"ל על מרחב וקטורי $V$ כך ש $\dim V\leq n-1$ ונוכיח עבור $V$ כך ש $\dim V=n$.

נשים לב כי $\mathrm{char}\,\mathbb{R}\neq 2$ ולכן מכך ש $f$ תבנית בילינארית וסימטרית ולא סינגולרית נובע כי קיים $0\neq v\in V$ כך ש $f(v,v)=c\neq 0$. נגדיר $v'=k\cdot v$ כאשר $k=\sqrt{c}$ או $k=\sqrt{-c}$ כך שיתקיים $f(v',v')=\pm 1$.

נסמן ב $U=\mathrm{span}\{v'\}$ ו $W=\{w\in V \mid f(w,v')=0, \forall v\in U\}$

בהכרח $W\subset V$ תת מרחב כי $0\in W$ והבילינאריות נובעת מתכונות הלינאריות של התבנית.

כמו כן אם $v\in U\cap W$ אז $f(v,v)=0$ אבל $f$ לא סינגולרית ולכן $v'=0$ כלומר $U\cap W=\{0\}$

כעת יהי $v\in V$ וקטור כלשהו. נגדיר

$u=\pm f(v,v')\cdot v'$ ו $w=v\mp u$

ברור כי $u\in U$ כי $v'\in U$ ו $f(v,v')$ סקלר וגם

$$f(w,v') = f(v-f(v,v')v', v') =$$

$$= f(v,v') - f(v,v')\,f(v',v') = 0$$

גמירה! $f(v',v') = -1$ נגדיר $W = V-(-u)$

ולכן $w \in W$ כלומר $V = U \oplus W$.

$\dim W = n-1$ ולכן מהנחת האינדוקציה

קיים בסיס $\{e_2,\dots,e_n\}$ ל-$W$ כך שהמטריצה

של $f$ בבסיס זה היא מטריצה אלכסונית

שאברי האלכסון הם $\{0,1,-1\}$. והקבוצה

$\{v', e_2,\dots,e_n\}$ היא בסיס ל-$U\oplus W$ המקיים

את הנדרש.

הוכחה נוספת

$f$ תבנית בילינארית ממשית סימטרית

ולא סינגולרית ולכן קיים בסיס $\{e_1,\dots,e_n\}$ ל-$V$

כך ש-$f$ הצגה על ידי מטריצה ממשית

סימטרית ולא סינגולרית $A$. מטריצה זו דומה

על ידי מטריצה אורתוגונלית $P$ למטריצה אלכסונית

שבאלכסון הערכים העצמיים של $A$

$$B = P^{-1} A P.$$

מאחר ו-$P$ אורתוגונלית. אזי מעל השדה

הממשי! $P^t = P^{-1}$ ולכן

$$B = P^t A P.$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \neq 0$.

אם $\lambda_i > 0$ נגדיר $e_i' = \dfrac{e_i}{\sqrt{\lambda}}$

ואם $\lambda_i < 0$ נגדיר $e_i' = \dfrac{e_i}{\sqrt{-\lambda}}$

אזי המצגה של $f$ בבסיס $\{e_1', \dots, e_n'\}$

היא המצגה המתבקשת.

**שאלה 4. (25 נקודות)**

א) תהי מטריצה $A$ - מטריצת ז'ורדן המכילה שני בלוקים $J_5(0), J_6(0)$
(כאשר $J_m(\lambda)$ הוא בלוק ז'ורדן $m \times m$ המתאים לערך $\lambda$).
מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה $A^2$.

ב) הוכח או הפרך (בעזרת דוגמא נגדית) את הטענה הבאה:
יהיו $A, B \in R^{n\times n}$, $n \geq 3$. נתון:

i. ל- $A$ ו-$B$ יש אותו פולינום אופייני $p(\lambda)$.
ii. כל שורש ממשי של $p(\lambda)$ הוא בעל ריבוי קטן או שווה ל-3.
iii. ל- $A$ ו-$B$ יש אותו פולינום מאפס מינימלי $\psi(\lambda)$ ומעלת $\psi(\lambda)$ היא $n-2$.

אז $A$ ו-$B$ בהכרח דומות.

מאחר והבלוק הגדול ביותר ב $A$ הוא מסדר 6
נובע ש הפולינום המינימלי של $A$ הוא $X^6$.
כלומר $A^6 = (A^2)^3 = 0$ ו $A^i \neq 0$
לכל $i \leq 6$ ובפרט $(A^2)^i \neq 0$ עבור
$i \leq 3$. ומכאן הפולינום המינימלי של $A^2$ הוא
$X^3$. לכן הבלוק ג'ורדן הגדול ביותר בצורת
ג'ורדן של $A^2$ הוא 3. כדי למצוא את $N_3(0)$
מספר הבלוקים מסדר 3, נשתמש בנוסחה ונחשב
את $N_3(0) = \mathrm{rank}((A^2)^{3-1}) - 2\,\mathrm{rank}(A^2)^3 + \mathrm{rank}((A^2)^4)$
אבל $A^6 = A^8 = 0$ ולכן נותר לחשב
את $\mathrm{rank}\, A^4$. לשם כך נסמן
ב $J = P^{-1}AP$ צורת ג'ורדן של $A$ אז
$$J^4 = P^{-1}A^4P$$
ולכן יש לחשב את דרגה

דרגת המטריצה יורדת ב 1 לכל בלוק $\neq 0$

בכל פעם שמעלים את החזקה ב 1.

יש לנו 2 בלוקים גדולים מ 4 ולכן

$\mathrm{rank}\,A = 5+4 = 9$ יש לנו שני בלוקים

ומעלים בחזקה 3 פעמים נקבל

$$\mathrm{rank}(A^4) = \mathrm{rank}\,J^4 = 9 - 2\cdot 3 = 3$$

כלומר $k_3(0) = 3$.

באותו האופן נחשב את מספר הבלוקים ממימד 2

$$k_2(0) = \mathrm{rank}(A^2)^{2-1} - 2\,\mathrm{rank}(A^2)^2 + \mathrm{rank}(A^2)^3$$

$$\mathrm{rank}\,A^2 = 7,\ \mathrm{rank}\,A^4 = 3 \qquad \mathrm{rank}\,A^6 = 0$$

מספר העליות בחזקה היא 2 ולכן

$$k_2(0) = 7 - 2\cdot 3 = 1$$

כלומר צורת ג'ורדן היא

$$\begin{pmatrix} J_3(0) & & & \\ & J_3(0) & & \\ & & J_3(0) & \\ & & & J_2(0) \end{pmatrix}$$

(6)

## סעיף ב

$A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ , $n\geq 3$ . הפולינומים האופייניים $R(x)$ של A ו B זהים

הריבוי של שורש משותף של $p(x)$ הוא לכל היותר 3

הפולינומים המינימליים $m(x)$ של A ו B זהים ו $\deg m(x)=n-2$ , האם A ו B דומות?

אם $\lambda\in\mathbb{C}$ שורש של $p(x)$ אזי גם $\bar{\lambda}$ שורש של $p(x)$.

ולכן האפשרויות היחידות הן

(1) $\lambda_i\in\mathbb{R}$ , $p(\lambda_i)=0$ , $p(x)=\dots(x-\lambda_i)^3\dots$

ו $m(x)=\dots(x-\lambda_i)\dots$

(2) יש $\lambda_i,\lambda_j$ $\lambda_i\neq\lambda_j$ כך שאם הריבוי של $\lambda_i,\lambda_j$ ב $p(x)$ הוא $r_i$ $r_j$ בהתאמה אז הריבוי של $\lambda_i,\lambda_j$ ב $m(x)$ הוא $r_i-1$, $r_j-1$ בהתאמה.

ולכן ב (1) בצורת ז'ורדן יהיה לנו 3 בלוקים בגודל 1 ל $\lambda_i$ ושאר הבלוקים של A ו B זהים.

ב (2) לכל הבלוקים המתאימים לערכים עצמיים שונים מ $\lambda_i$ ו $\lambda_j$ הבלוקים זהים. עבור $\lambda_i$ יהיה בלוק אחד בגודל $r_i-1$ ועוד בלוק בגודל 1 וכנ"ל עבור $\lambda_j$.

בשני המקרים צורת ז'ורדן נקבעת באופן יחיד ולכן המטריצות A ו B דומות.