תירגול מס. 10

אינטגרל מסויים

א הגדרת אינטגרל רימן

סכומי רימן

תהא $f(x)$ פונקציה שמוגדרת בקטע סגור $[a,b]$, ותהא P חלוקה של הקטע:

$$P\ :\quad a\ =\ x_0\ <\ x_1\ <\ x_2\ <\ \ldots\ <\ x_N\ \ =\ b$$

בכל אחד מ- N קטעי החלוקה: $[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ \ldots\ ,\ [x_{N-1},x_n]$ נבחר נקודה:

$$c_i\ \in\ [x_{i-1},x_i] \qquad i\ =\ 1,2,\ldots,N$$

ובנוסף, נסמן את אורכו של קטע החלוקה ה i-י ע"י: $\Delta x_i\ =\ x_i-x_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,N)$
הסכום:

$$\sigma\left(P\right)\ =\ \sum_{i=1}^{N}\Delta_i\cdot f(c_i)$$

נקרא **סכום רימן של** $f(x)$ **בקטע** $[a,b]$ **המבוסס על החלוקה** P.[1]

פרמטר החלוקה: $\lambda\left(P\right)\ =\ \max\left\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_N\right\}$ **מודד עד כמה החלוקה עדינה.** (**סימון מקובל אחר:** $|P|$)

הגדרה 1 פונקציה $f(x)$ שמוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$, נקראת **אינטגרבילית רימן בקטע** אם

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sigma\left(P\right)\ =\ I$$

במובן זה **שלכל** $\varepsilon>0$ **קיימת** $\delta>0$, כך **שלכל** חלוקה P של הקטע אשר $\lambda\left(P\right)<\delta$ **ולכל** סכום רימן $\sigma=\sigma\left(P\right)$ שמבוסס עליה, מתקיים: $|\sigma-I|<\varepsilon$. ובמקרה כזה נסמן: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\ =\ I$

באופן שקול, $f(x)$ **אינטגרבילית רימן ב-** $[a,b]$, **ו-** $\int_a^b f(x)\,dx\ =\ I$ **א.ס.ם לכל סדרה של סכומי רימן** $\{\sigma_n\}$ **שמבוססים על סדרת חלוקות** $\{P_n\}$ **של הקטע שעבורן** $\lambda_n=\lambda\left(P_n\right)\to0$, **סדרת סכומי רימן** $\{\sigma_n\}$ **מקיימת:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=I$.

תרגיל 1 **נתבונן בפונקציה** $f(x)=x^2$ **בקטע** $[0,1]$. **לכל** n **טבעי, תהא** $P_n\,:\,0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n}{n}$ **החלוקה הרגולרית ה** n**-ית של הקטע** $[0,1]$ **(חלוקה ל-**n **קטעים שווים). תהא** $\{\sigma_n\}$ **סדרה של סכומי רימן שמבוססת על סדרת החלוקות הרגולריות** $\{P_n\}$. **הוכיחו ש-** $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{3}$
רמז, אפשר להעזר בנוסחא: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

פתרון: **האיבר ה** n **-י בסדרת סכומי-רימן** $\{\sigma_n\}$ **הוא מהצורה:**

$$\sigma_n\ =\ \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\cdot f(c_k)\ =\ \tfrac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}(c_k)^2 \tag{1}$$

כאשר נקודות הביניים $c_1,c_2,\ldots,c_n$ **מקיימות**

$$c_k\ \in\ \left[\tfrac{k-1}{n},\tfrac{k}{n}\right]\ ,\qquad k\ =\ 1,2,\ldots,n \tag{2}$$

(לכל n **מדובר בבחירה אחרת של** n **נקודות ביניים).**
כעת, מכיוון ש- $f(x)=x^2$ **מונוטונית עולה בקטע, אז מ-** (2) **נקבל -**

$$\frac{(k-1)^2}{n^2}\ \le\ f(c_k)\ \le\ \frac{k^2}{n^2}\ ,\qquad k\ =\ 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

[1] על כל חלוקה P מבוססים סכומי רימן רבים בהתאם לבחירת נקודות הביניים.

מ- (1) ו- (3) נקבל:

$$\tfrac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{n^2} \quad\le\ \sigma_n\ \le\quad \tfrac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}$$

ע"פ הנוסחא, הביטוי באגף ימין שווה:

$$\tfrac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} \ =\ \tfrac{1}{n^3}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right) \ =\ \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

וזה שבאגף שמאל הוא:

$$\tfrac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{n^2} \ =\ \tfrac{1}{n^3}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right) \ =\ \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

שני הביטויים האלה שואפים ל- $\frac{1}{3}$ כאשר $n\to\infty$, ומכאן ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n \ =\ \frac{1}{3}$

<u>תרגיל 2</u> לחשב את הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{(n+k)^2}$

<u>רמז:</u> להעזר בכך ש- $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$ ומתקיים: $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\frac{-1}{1+x}\bigg|_0^1=\tfrac{1}{2}$

<u>פתרון</u> עלינו לחשב את גבולה של הסדרה: $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}$

נרשום כמה איברים ראשונים בסדרה כדי להבין איך היא נראית[2] :

$$\sigma_1 \ =\ \tfrac{1}{4} \quad , \quad \sigma_2 \ =\ \tfrac{2}{9}+\tfrac{2}{16} \quad , \quad \sigma_3 \ =\ \tfrac{3}{16}+\tfrac{3}{25}+\tfrac{3}{36}$$

הרעיון בתרגיל זה ובתרגילים דומים לו, הוא להראות שהסדרה היא למעשה סדרה של סכומי-רימן של איזו שהיא פונקציה אינטגרבילית בקטע מסויים[3], ולהסיק שהיא מתכנסת לאינטגרל של הפונקציה בקטע.

נקבע n וננסה להציג את האיבר σ_n כסכום רימן. נחפש סכום רימן שמבוסס על החלוקה של הקטע $[0,1]$ ל- n קטעים שווים. כלומר נחפש הצגה מהצורה:

$$\sigma_n \ =\ \textstyle\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\cdot f(c_k) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f(c_k) \quad , \qquad c_k \ \in\ \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$$

לשם כך נרשום:

$$\begin{aligned}\sigma_n \ &\equiv\ \textstyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{(n+k)^2}\\ &= \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+k}\right)^2 \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\end{aligned}$$

כלומר

$$c_k \ =\ \tfrac{k}{n} \qquad \text{-ו} \qquad f(x) \ =\ \frac{1}{(1+x)^2}$$

כעת, מכיוון שהפונקציה אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$ ומכיוון שהסדרה σ_n היא סדרת סכומי רימן אשר $\lambda\left(\sigma_n\right)=\frac{1}{n}\to 0$ אז:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n \ =\ \int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2} \quad = \quad \frac{-1}{1+x}\bigg|_0^1 \quad = \quad \frac{1}{2}$$

---

[2] שימו לב שלא מדובר בסדרת סכומים חלקיים של טור (כי n מופיע בתוך הביטוי שסוכמים)

[3] בד"כ מדובר בקטע $[0,1]$ ובסדרה של סכומי רימן שמבוססים על סדרת החלוקות הרגולריות של הקטע

(*) <u>תרגיל 3</u> פונקציית רימן מוגדרת באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q} \quad (\text{זרים } q \text{ ו- } p) \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

הוכיחו שהיא אינטגרבילית רימן (למשל) בקטע - $[0,1]$.

<u>פתרון</u> נוכיח ע"פ ההגדרה ש- $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. צריך למצוא $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ כך שלכל חלוקה P של הקטע שמקיימת: $\lambda(P) < \delta$ ולכל סכום רימן $\sigma(P)$ (שמבוסס עליה), מתקיים: $|\sigma(P) - 0| < \varepsilon$.
נבחר n_0 טבעי אשר

$$\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

<u>טענה</u> בקטע $[0,1]$ יש רק מספר סופי של מספרים רציונליים:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_N}{q_N} \qquad (\text{כולם מוצגים כשברים מצומצמים})$$

שמקיימים:

$$n_0 > q_k \qquad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (5)$$

(כלומר, לכל שבר מצומצם $\frac{p}{q} \in [0,1]$ שאינו אחד מהם, יתקיים: $q \geq n_0$).

<u>הסבר</u> נסדר את כל הרציונליים, $\frac{p}{q} \in [0,1]$ (מוצגים כשברים מצומצמים) באופן הבא:

$$\underbrace{\frac{0}{1}}_{p+q=1}, \underbrace{\frac{1}{1}}_{p+q=2}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{p+q=3}, \underbrace{\frac{1}{3}}_{p+q=4}, \underbrace{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}}_{p+q=5}, \underbrace{\frac{1}{5}}_{p+q=6}, \underbrace{\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}}_{p+q=7}, \ldots$$

ונשים לב שהחל ממקום מסויים בסדרה זאת, המכנה, q, של כל איבר בסדרה יקיים: $n_0 \leq q$.

נסמן כעת:

$$M = \max\left\{ f\left(\frac{p_1}{q_1}\right), f\left(\frac{p_2}{q_2}\right), \ldots, f\left(\frac{p_N}{q_N}\right) \right\} = \max\left\{ \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \ldots, \frac{1}{q_N} \right\} \qquad (6)$$

ונשים לב שפרט ל- N הנקודות "הרעות" האלה, לכל נקודה $c \in [0,1]$ (רציונלית או אי-רציונלית) יתקיים:

$$0 \leq f(c) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(c \neq \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_N}{q_N}\right) \qquad (7)$$

כי אם c אי-רציונלית אז $f(c) = 0$, ואם $c = \frac{p}{q}$ היא רציונלית שאינה אחת מ- N הנקודות "הרעות", אז ראינו שהמכנה שלה מקיים: $n_0 \leq q$, ומכאן ש-

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

נתבונן כעת בסכום רימן כללי: $\sigma = \sum_{i=1}^{K} \Delta_i \cdot f(c_i)$. מבין K נקודות הביניים: $c_1, c_2, \ldots, c_K$,
יש לכל היותר N נקודות "רעות", שעבורן $0 < f(c) \leq M$ (לפי הגדרת M). והשאר מקיימות $0 \leq f(c) < \frac{\varepsilon}{2}$.
נובע שהתרומה- σ_1 של הנקודות "הרעות" לסכום הכללי תקיים $0 \leq \sigma_1 \leq N \cdot M \cdot \lambda(P)$
והתרומה- σ_2 של יתר הנקודות תקיים:[4]

$$0 \leq \sigma_2 \leq \sum \Delta_i \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum \Delta_i \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{לפי } 7)$$

[4] כי סכום אורכי כל התת-קטעים הוא אחד.

בסה"כ קיבלנו שלכל חלוקה P ולכל סכום רימן $\sigma(P)$ שמבוסס עליה יתקיים:

$$0 \ \le \ \sigma(P) \ \le \ N \cdot M \cdot \lambda(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

וצריך רק לבחור $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ כך שאם $\lambda(P) < \delta$, אז המחובר הראשון לא יעלה על $\frac{\varepsilon}{2}$. לשם כך נבחר:

$$\delta \ = \ \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{M \cdot N}$$

<u>תרגיל 4</u> תהא $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע - $[a,b]$, הוכיחו שהיא חסומה בקטע.

<u>פתרון:</u> אם נסמן: $I \ = \ \int_a^b f(x)\,dx$ אז מהגדרת האינטגרל של רימן, נובע שעבור $\varepsilon = 1$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P של הקטע אשר $\lambda(P) < \delta$ ולכל סכום רימן $\sigma(P)$ שמבוסס עליה, מתקיים:

$$I - 1 \ < \ \sigma(P) \ < \ I + 1 \tag{8}$$

נבחר חלוקה, P_0 כלשהי של הקטע אשר $\lambda(P_0) < \delta$, כלומר $P_0 \ : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N =; b$
נראה שהפונקציה $f(x)$ חסומה בכל אחד מ- N קטעי החלוקה- P_0. ז"א, קיימים N מספרים: $M_1, M_2, \ldots, M_N$ כך ש-

$$\forall \ x \in [x_{k-1}, x_k] \ , \qquad |f(x)| \ \le \ M_k \quad , \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

<u>נראה למשל חסימות בקטע החלוקה הראשון $[x_0, x_1]$</u> לשם כך, נבנה סכום רימן על החלוקה P_0 באופן הבא: בקטע החלוקה הראשון - $[x_0, x_1]$ נבחר נקודה שרירותית

$$c_1 \quad \in \quad [x_0, x_1] \qquad \text{כלשהי} \tag{9}$$

וביתר $N-1$ הקטעים נבחר את הנקודה הימנית. נקבל סכום רימן:

$$\sigma \ = \ \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k \cdot f(c_k) \quad = \quad f(c_1) \cdot \Delta x_1 \ + \ \sum_{k=2}^{N} f(x_k) \cdot \Delta_k$$

המחובר השני בביטוי האחרון הוא גודל קבוע שאינו תלוי בבחירה של c_1, נסמנו ב- C.
אז:

$$\sigma \ = \ \Delta x_1 \cdot f(c_1) \ + \ C$$

אבל החלוקה P_0 נבחרה כך ש-

$$I - 1 \ < \ \sigma \ < \ I + 1$$

ומכאן שלכל c_1 בקטע החלוקה הראשון - $[x_0, x_1]$, מתקיים:

$$I - 1 \ < \ \Delta x_1 \cdot f(c_1) \ + \ C \ < \ I + 1$$

כלומר:

$$\forall c_1 \in [x_0, x_1] \ , \qquad \frac{I - C - 1}{\Delta x_1} \ < \ f(c_1) \ < \ \frac{I - C + 1}{\Delta x_1}$$

מה שמראה שהפונקציה $f(x)$ חסומה בקטע החלוקה הראשון.
חוזרים על אותו תהליך בכל אחד מ- n קטעי החלוקה - P_0, ומסיקים ש- $f(x)$ חסומה ב- $[a,b]$.

ננסח זאת באופן הבא:

אם $f(x)$ אינה חסומה בקטע - $[a,b]$,
אז היא אינה אינטגרבילית רימן בקטע

טענה זו מספקת לנו תנאי הכרחי לאינטגרביליות-רימן. להלן שני תנאים מספיקים

ב תנאים מספיקים לאינטגרביליות רימן

תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע סגור - $[a,b]$.

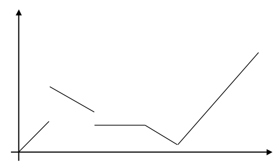
טענה 1 אם $f(x)$ **חסומה** בקטע -$[a,b]$, **ורציפה** בו פרט (אולי) למספר **סופי** של נקודות, אז היא **אינטגרבילית–רימן** בקטע.

<u>הערה</u> אם $f(x)$ רציפה בכל הקטע הסגור - $[a,b]$, אז היא בוודאי גם חסומה שם, (למה?) ולכן אינטגרבילית.
אבל, למשל, הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

מוגדרת בכל הקטע הסגור - $[0,1]$, ורציפה בו פרט לנקודה אחת, אבל אינה חסומה בקטע ולכן לא אינטגרבילית רימן.

הגדרה 2 פונקציה $f(x)$ שמוגדרת בקטע $[a,b]$ היא **מונוטונית למקוטעין** בקטע, אם ניתן לחלק אותו למספר **סופי** של תת-קטעים כך שהיא מונוטונית בכל תת-קטע.



טענה 2 אם $f(x)$ **מוגדרת, חסומה ומונוטונית למקוטעין** בקטע הסגור $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית רימן בקטע.

<u>הערה</u> שוב, כדאי להעיר שאם $f(x)$ מונוטונית בכל הקטע הסגור $[a,b]$, אז היא גם חסומה בקטע
(כי אם היא למשל מונוטונית עולה אז $f(a)$ הוא חסם מלרע, ו- $f(b)$ חסם מלעיל)

התרגיל הבא מראה ששני התנאים האלה הם תנאים מספיקים אבל לא הכרחיים - כלומר יש פונקציות אינטגרביליות שמקיימות רק אחד מהם או שאינן מקיימות את שניהם.

<u>תרגיל 5</u>

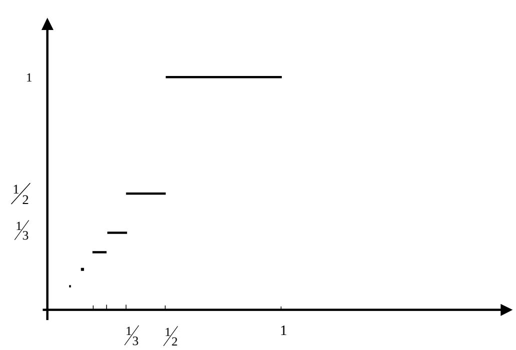
א. להראות שהפונקציות הבאות אינטגרביליות ב- $[0,1]$. (מי מבין שני התנאים המספיקים הן מקיימות, ומי לא?)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[1/x]} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ב. למצוא פונקציה שאינה מקיימת אף אחד משני התנאים המספיקים, ובכל זאת היא אינטגרבילית רימן ב - $[0,1]$

<u>פתרון</u>

א. נתחיל בפונקציה $f(x)$ שהגרף שלה הוא:



היא מונוטונית עולה (במובן החלש) בכל הקטע $[0,1]$, והיא כמובן חסומה בקטע, לכן היא אינטגרבילית רימן (ע"פ הטענה השניה). עם זאת, יש לה אינסוף נקודות אי-רציפות בקטע, ולכן לא מתקיים התנאי הראשון.
נתבונן בפונקציה $g(x)$, היא חסומה ב- $[0,1]$, ורציפה שם פרט לנקודה אחת, ולכן אינטגרבילית רימן ב- $[0,1]$. עם זאת, היא אינה מונוטונית למקוטעין בקטע (קיימים אינסוף תת-קטעים בהם היא עולה ממש, ואינסוף תת-קטעים בהם היא יורדת ממש).

ב. אם נגדיר פונקציה חדשה $h(x) = f(x) + g(x)$ אז היא תהיה אינטגרבילית רימן ב - $[0,1]$ כסכום של שתי אינטגרביליות, אבל היא לא תהיה מונוטונית למקוטעין בקטע ויהיו לה שם אינסוף נקודות אי רציפות.
דוגמא אחרת היא פונקציית רימן שאינה מונוטונית למקוטעין ב - $[0,1]$, ויש לה שם אינסוף נקודות אי-רציפות, ועם זאת, היא אינטגרבילית רימן ב - $[0,1]$.

ג תכונות של אינטגרל רימן

<u>תרגיל 6</u> הוכיחו:

א. אם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ ומקיימת שם $m \le f(x) \le M$, אז $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

ב. אם $f(x)$ רציפה ב - $[a,b]$ ומקיימת שם $0 \le f(x)$, והיא אינה זהותית אפס בקטע, אז $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

<u>שאלה</u> האם זה נשאר נכון אם מניחים רק שהפונקציה אינטגרבילית בקטע (ולא רציפה) ?

<u>פתרון</u>

א. נתבונן בסכום רימן (כללי) של $f(x)$ בקטע - $[a,b]$ כלומר $\sigma = \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k \cdot f(c_k)$
מכיוון שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים: $m \le f(x) \le M$ אז:

$$\underbrace{m \cdot \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k}_{m\cdot(b-a)} \quad \le \quad \sigma \quad \le \quad \underbrace{M \cdot \sum_{k=1}^{N} \Delta x_k}_{M\cdot(b-a)}$$

תהא כעת σ_n סדרה של סכומי רימן של $f(x)$ בקטע אשר $\lambda(\sigma_n) \to 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx$
כמו כן, לכל n מתקיים: $m(b-a) \le \sigma_n \le M(b-a)$, ולכן כשנעבור לגבול נקבל:

$$m \cdot (b-a) \ \le\ \int_a^b f(x)\,dx \ \le\ M \cdot (b-a)$$

ב. ראשית, מכיוון ש - $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, אז היא גם אינטגרבילית בקטע והתוצאה של סעיף א' תקפה. אפשר להסיק מיד ש- $0 \le \int_a^b f(x)\,dx$ (אבל צריך להראות אי-שיוויון חזק).
משמעות הנתון, שהפונקציה אינה זהותית אפס בקטע, היא שקיים $x_0 \in [a,b]$ כך ש $f(x_0) \ne 0$, ומכאן ש $f(x_0) > 0$ (למה?). נניח להלן ש - x_0 היא נקודה פנימית (עבור נקודת קצה, ההוכחה דומה). נסמן $c = f(x_0) > 0$. מכיוון ש- $f(x)$ רציפה ב - x_0, אז (עבור $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$) קיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים:

$$x \in \Big(x_0 - \delta, x_0 + \delta\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big|f(x) - c\Big| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \tfrac{c}{2} < f(x)$$

נפרק את האינטגרל לסכום של שלושה אינטגרלים:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx \ + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \ + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

(כאן הנחנו שבלי הגבלת הכלליות δ מספיק קטנה כך ש- $x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta \ \in\ [a,b]$).

לגבי המחובר הראשון והמחובר השלישי, אפשר להסיק שמכיוון שמדובר בפונקציה אי-שלילית, אז שניהם אי-שליליים (לפי סעיף א'). נתבונן במחובר השני: מכיוון שבקטע $(x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)$ מתקיים $f(x) > \frac{c}{2}$ אז

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \quad \ge \quad \tfrac{c}{2} \cdot \underbrace{2\delta}_{\text{אורך הקטע}} \ = \ c \cdot \delta$$

כלומר:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \ge \quad 0 \ + \ c\cdot\delta \ + \ 0 \ > \ 0 \qquad \checkmark$$

__דרישת הרציפות הכרחית בסעיף זה:__ נתבונן למשל בפונקציה: $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$
היא מתלכדת בקטע $[0,2]$ עם הפונקציה $f(x) \equiv 0$ פרט לנקודה אחת, ומכאן שהיא אינטגרבילית בקטע ו -

$$\int_0^2 g(x)\,dx \quad = \quad \int_0^2 f(x)\,dx \quad = \quad 0$$

כלומר, $g(x)$ אינטגרבילית ב - $[0,2]$, מקיימת שם $g(x) \geq 0$ ואינה זהותית אפס בקטע. למרות זאת,

$$\int_a^b g(x)\,dx \quad \not> \quad 0$$

מה שמראה שכדי לקבל אי-שיוויון חזק, חייבים לדרוש רציפות (לפחות בנקודה x_0 שבה $g(x_0) > 0$).

ד תרגילים חישוביים

__תרגיל 7__ לחשב

$$\text{(א)} \quad \int_1^e x^2 \ln x\,dx \qquad \text{(ב)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \sin x\,dx \qquad \text{(ג)} \quad \int_0^2 \min\{\sqrt{x}, x\}\,dx$$

__פתרון__

א. נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int_1^e \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx \quad = \quad \underbrace{\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e}_{e^3/3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx \quad = \quad \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e \quad = \quad \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

ב. נציב $t = \cos x \quad \Leftarrow \quad dt = -\sin x\,dx$. נבדוק איך משתנה קטע האינטגרציה בהצבה זו:
מתקיים $t = 0 \quad \Leftarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$ ואילו $t = -1 \quad \Leftarrow \quad x = \pi$ ומכאן מקבלים:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \sin x\,dx \quad = \quad \int_0^{-1} t^3(-dt) \quad = \quad \int_{-1}^0 t^3\,dt \quad = \quad \frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^0 \quad = \; -\frac{1}{4}$$

ג. מתקיים: $$\min\left\{\sqrt{x}\,,\, x\right\} \;=\; \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \sqrt{x} & , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
נפרק את האינטגרל לאינטגרל בקטע $[0,1]$, ולאינטגרל בקטע $[1,2]$:

$$\int_0^2 \min\{\sqrt{x}, x\}\,dx \quad = \quad \int_0^1 x\,dx \;+\; \int_1^2 \sqrt{x}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}x^2\,\Big|_0^1 \;+\; \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,\Big|_1^2 \;=\; \ldots$$

__תרגיל 8__ תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית-רימן בקטע - $[-a,a]$. הוכיחו:

א. אם $f(x)$ אי-זוגית אז - $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

ב. אם $f(x)$ זוגית אז - $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

__פתרון__ נוכיח את א' (ב' דומה).

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx \quad = \quad \underbrace{\int_{-a}^0 f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^a f(x)\,dx}_{I_2}$$

באינטגרל I_1 נציב: $t = -x \quad \Leftarrow \quad dt = -dx$ ונקבל:

$$I_1 \;=\; \int_{-a}^0 f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^0 f(-t)\,(-dt) \quad = \quad \int_0^a f(-t)\,dt \quad \overset{\text{אי-זוגית } f}{=} \quad -\int_0^a f(t)\,dt \;=\; -I_2$$

(ודאו שהמעבר האחרון ברור לכם!). קיבלנו ש- $I_1 = -I_2$, ולכן $\int_{-a}^a f(x)\,dx = I_1 + I_2 = 0$.

דוגמא: נחשב $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin^2 x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$. נתבונן לשם כך בפונקציה: $f(x) = \sin^2 x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
קל לבדוק שהיא מוגדרת ורציפה בקטע $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ולכן אינטגרבילית שם. נבדוק זוגיות:

$$f(-x) = \sin^2(-x) \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \sin^2 x \cdot \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) = -\sin^2 x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

כלומר, היא אי-זוגית, ולכן לפי התרגיל:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin^2 x \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$$

שימו לב שצריך לבדוק אינטגרביליות, כי למשל בקטע $[-1,1]$ היא לא חסומה ולכן אינטגרל רימן לא קיים.

תרגיל 9 תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב - $[-1,1]$. להוכיח ש-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$$

פתרון ראשית, שתי הפונקציות: $f(\sin x)$ ו- $f(\cos x)$ רציפות (בכל $\mathbb{R}$), ולכן שני האינטגרלים קיימים.
נצא מהאינטגרל השמאלי, בעזרת הזהות $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ נקבל:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos(\tfrac{\pi}{2} - x)\right)\, dx$$

באינטגרל האחרון נציב:

$$t = \tfrac{\pi}{2} - x \quad \Leftarrow \quad dt = -dx$$ והקצוות עוברים ל- $$x = 0 \to t = \tfrac{\pi}{2}, \qquad x = \tfrac{\pi}{2} \to t = 0$$

אז כהמשך לשיוויון האחרון נקבל

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) \cdot (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cost)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cost)\, dt$$

ובסה"כ קיבלנו את השיויון המבוקש.

דוגמא נחשב: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ עבור $f(x) = x^2$, נובע מהתרגיל ש-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

ומכאן ש-

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

ולכן ערכו של האינטגרל המבוקש הוא: $I = \frac{\pi}{4}$.

הערה כדי לחשב אינטגרל לא מסויים $\int \sin^2 x\, dx$ אפשר להעזר בזהות[5] $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

[5] שתי הזהויות: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ו- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ הן מאוד שימושיות, ומומלץ לזוכרן (או לזכור איך לקבלן מנוסחת הזוית הכפולה: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

ה המשפט היסודי של החדו"א

משפט 1 תהא $f(x)$ אינטגרבילית-רימן ב- $[a,b]$. ונגדיר פונקציה חדשה:

$$\forall x \in [a,b]\,, \qquad F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

א. הפונקציה $F(x)$ **רציפה** ב- $[a,b]$.

ב. אם $f(x)$ **רציפה ב** $[a,b]$ (ולא "רק" אינטגרבילית), אז $F(x)$ **גזירה ב** $[a,b]$, ונגזרתה שם היא: $F'(x) = f(x)$
(בקצות הקטע מדובר בניגזרות החד-צדדיות המתאימות).

מסקנה אם $f(x)$ רציפה והפונקציות $\alpha(x)$ ו- $\beta(x)$ גזירות[6], אז הפונקציה:

$$F(x) \quad = \quad \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

היא פונקציה גזירה, ונגזרתה נתונה ע"י:

$$\boxed{F'(x) \quad = \quad \beta'(x)\cdot f(\beta(x)) \;-\; \alpha'(x)\cdot f(\alpha(x))}$$

הוכחת המסקנה נגדיר: $G(y) = \int_0^y f(t)\,dt$ $(y\in\mathbb{R})$ אז לפי המשפט היסודי: $G'(y) \;=\; f(y)$ (לכל $y\in\mathbb{R}$).
בנוסף, מתקיים:

$$F(x) \;=\; \int_0^{\beta(x)} f(t)\,dt \;-\; \int_0^{\alpha(x)} f(t)\,dt \;=\; G\Big(\beta(x)\Big) \;-\; G\Big(\alpha(x)\Big)$$

נגזור בעזרת כלל השרשרת ונקבל:

$$F'(x) \quad = \quad G'\Big(\beta(x)\Big)\cdot\beta'(x) \;-\; G'\Big(\alpha(x)\Big)\cdot\alpha'(x)$$

נשתמש בנוסחת הנגזרת של הפונקציה $G(y)$ ונקבל את השיוון המבוקש.

תרגיל 10 לחשב את הגבול: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan t\,dt}{\int_0^{\sin x} t^2\,dt}$

פתרון נסמן: $F(x) \;=\; \int_0^{x^2} \tan t\,dt$ ו- $G(x) \;=\; \int_0^{\sin x} t^2\,dt$ אז צריך לחשב $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{G(x)}$
לפי החלק הראשון של המשפט היסודי של החדו"א, $F(x)$ ו- $G(x)$ שתיהן רציפות. כמו כן $F(0)=G(0)=0$ ולכן הגבול הוא גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$". נשתמש בכלל לופיטל, כאשר את המונה והמכנה נגזור בעזרת המסקנה. נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\tan x^2}{\sin^2 x\cdot\cos x} \;=\; \lim_{x\to 0}\, 2x\cdot\frac{1}{\cos x\cdot\cos x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x} \;=\; 0\cdot 1\cdot 1\cdot 1 \;=\; 0$$

תרגיל 11 (הוכחת משפט ערך הביניים האינטגרלי בעזרת המשפט היסודי)

תהא $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$. להוכיח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;=\; f(c)$

הערה: הקושי העיקרי הוא להראות שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ פנימית. אפשר לעשות זאת בעזרת התוצאות של תרגיל 6 (בדקו). מטרת התרגיל היא להראות זאת בעזרת המשפט היסודי של החדו"א.

[6] לשם פשטות נניח שגם הרציפות של f, וגם הגזירות של $\alpha(x)$ ושל $\beta(x)$ מתקיימות בכל $\mathbb{R}$

פתרון נסמן $t = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (זה קבוע מספרי) צריך להראות שקיימת $c\in(a,b)$ כך ש $f(c)=t$.

נגדיר פונקציה $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $F(x)=\int_a^x f(u)\,du \ , \ \forall x\in[a,b]$ אז מתקיים:

$$F(a) \ = \ 0 \qquad \text{ו-} \qquad F(b) \ = \ \int_a^b f(u)\,du \ = \ (b-a)\cdot t$$

יתר על כן, לפי המשפט היסודי, $F(x)$, גזירה ב- $[a,b]$, ונגזרתה שם היא: $F'(x)=f(x)$.
צריך לכן להראות שקיימת $c\in(a,b)$ כך ש

$$F'(c) \ = \ \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \quad \text{(בדקו)}$$

וזה נובע ממשפט לגרנז' המופעל על הפונקציה $F(x)$ בקטע $[a,b]$.

תרגיל 12 תהא $f(x)$ גזירה ברציפות ב- $[0,2\pi]$ כך ש- $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=1$.
להוכיח ש $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin^2(nx)\,dx=\frac{1}{2}$ (רמז: אינטגרציה בחלקים).

פתרון יש לנו שתי אפשרויות לבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\text{(א)} \quad \int_0^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{u'}\cdot\underbrace{\sin^2(nx)}_{v}\,dx \qquad\qquad \text{(ב)} \quad \int_0^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{u}\cdot\underbrace{\sin^2(nx)}_{v'}\,dx$$

אפשרות א' נפסלת כי לא ניתן לחשב את הפונקציה הקדומה של $u'=f(x)$. (אומנם $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ היא פונקציה קדומה, אבל זה לא עוזר הרבה[7]).
נעבור לאפשרות ב': כדי למצוא את $v=\int\sin^2(nx)\,dx$ צריך להעזר בזהות $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$. אבל משהבנו שצריך להעזר בזהות הנ"ל, כדאי להתחיל בפישוט האינטגרל בעזרתה:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin^2(nx)\,dx \ = \ \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx \ = \ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx$$

ומספיק להראות ש $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx=0$. נבצע כעת אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{u}\cdot\underbrace{\cos(2nx)}_{v'}\,dx \ = \ f(x)\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(2nx)\,dx \ = \ \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(2nx)\,dx$$

וכדי להראות שזה שואף לאפס כאשר $n\to\infty$, מספיק להראות ש $\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(2nx)\,dx$ חסום. ובאמת,

$$\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(2nx)\,dx\right| \ \le \ \int_0^{2\pi} |f'(x)\sin(2nx)|\,dx \ \le \ \int_0^{2\pi} |f'(x)|\cdot 1\,dx$$

ומכיוון שהנגזרת $f'(x)$ היא רציפה אז לפי ווירשטרס היא חסומה בקטע הסגור $[0,2\pi]$ ולכן:

$$\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(2nx)\,dx\right| \ \le \ \int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx \ \le \ \int_0^{2\pi} M\,dx \ = \ 2\pi M$$

[7] טעות חמורה היא לחשוב שמכיוון ש $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=1$ אז $u=1$. (אם $u=1$ אז $u'=0\neq f(x)$).