אינטגרל לאורך עקום.

יש מספר סוגי אינטגרלים לאורך עקום.

אינטגרל של פונקציה סקלרית.

נתון עקום ב-R^3

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \\ 0 \le s \le L \end{cases}$$

האורך של העקום הוא:

$$s(t) = \int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,\mathrm{d}t ,$$

ונתונה פונקציה $f = f(p) = f(x, y, z)$
המוגדרת על Γ:

$$.f : \Gamma \subset R^3 \to R$$

למעשה $f = f(x(s), y(s), z(s))$, ואז מגדירים את האינטגרל של f על Γ ע"י

$$.\int_A^B f \mathrm{d}s = \int_\Gamma f \mathrm{d}s \equiv \int_0^L f(x(s), y(s), z(s)) \mathrm{d}s$$

ערך האינטגרל גם שווה ל:

$$\int_a^b f\left(x(t), y(t), z(t)\right)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

כאשר

$$.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)}$$

__הערה.__ לאינטגרל יש מגמה כמו לעקום Γ, מ-A ל-B:

$$\int_B^A f\mathsf{d}s = -\int_A^B f\mathsf{d}s$$

__דוגמא.__ נתון חוט ועליו מפוזר מטען חשמלי בצפיפות ρ, שהמימדים שלו הם מטען ליחידת אורך. המטען הכללי הוא

$$\begin{aligned} q &= \lim_T \sum \rho(s_i)\Delta s_i \to \int_\Gamma \rho\mathsf{d}s \\ &= \int_\Gamma \rho\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \\ &\cdot \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)}\ \mathsf{d}t \end{aligned}$$

באופן מעשי מתרגמים את הפרמטר s לפרמטר נוח כלשהו t ע"י

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

ואז האינטגרל של f לאורך Γ נתון ע"י

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}s \ = \ \int_a^b f\left(\underbrace{x(s(t))}_{x(t)}\ ,\ \underbrace{y(s(t))}_{y(t)}\ ,\ \underbrace{z(s(t))}_{z(t)}\right)\cdot$$

$$\cdot \quad \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}}_{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} \cdot \mathrm{d}t$$

למעשה, בוחרים פרמטר t שבו נוח לחשב ואז הפרמטר s אינו מופיע במפורש.

<u>דוגמא.</u> נתון $f = xy + z^2$ על הקטע Γ שקצותיו הם $A(1,2,3); B(5,9,17)$. אנו בוחרים בפרמטריזציה הבאה:

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+7t \\ z = 3+14t \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

ומחשבים באמצעותה את האינטגרל הקווי של f מעל Γ:

$$\int_\Gamma f \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^1 \left[(1+4t)(2+7t) + (3+14t)^2\right] \cdot$$

$$\cdot \quad \sqrt{4^2+7^2+14^2}\mathrm{d}t$$

<u>הערה.</u> כאשר המסלול Γ סגור, מסמנים $\oint_\Gamma f \mathrm{d}s$.

אינטגרל של שדה וקטורי.

מהו שדה וקטורי או פונקציה וקטורית?

לכל נקודה $(x, y, z) \in R^3$ מותאם וקטור

$$.\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$$

למשל שדה הכובד

$$.\vec{F}(x, y, z) = -\frac{Mm\hat{r}}{|r|^2}$$

למעשה ההתאמה היא:

$$(x, y, z) \to \vec{F}$$

$$\vec{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

כך שיש לנו $.F :\ R^3 \to R^3$

שדה הכובד, שדה הגרויטציה, מוגדר ע"י

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{(-x,-y,-z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

ואכן כיוון הוקטור הזה הוא מ-(x,y,z) אל הראשית $(0,0,0)$, וארכו

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}$$

הערה. למעשה, כל וקטור $\vec{F}$ יוצא מ- $(0,0,0)$ אבל מסיבות פיזיקליות אנו מציירים אותו כאילו יצא מ-(x,y,z) (הזזה במקביל אינה נחשבת כלל ב-R^3).

סיפור פיזיקלי.

גוף נע על מסלול Γ כשהוא נגרר על ידי כוח משתנה $\vec{F}(x, y, z)$. איזה עבודה ביצע הכוח?

כידוע:

$$\text{עבודה} = \text{כוח} \times \text{דרך}$$

אבל רק הכוח בכיוון הדרך מבצע עבודה. ולכן רק ההיטל של $\vec{F}$ בכיוון Γ, כלומר כיוון המשיק ל-Γ, מבצע עבודה.

נסמן ב: $\vec{T}$ משיק לעקום $\vec{\Gamma}$. אם

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

אז

$$\vec{T} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

אם נשתמש לפרמטריזציה של נקודות העקום ב: s, פרמטר ארך הקשת של Γ, אז נסמן

$$\widehat{T} = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

ומקבלים ש:

$$\|\widehat{T}\| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2},$$

$$\|\widehat{T}\| = 1.$$

כלומר זהו משיק בעל אורך יחידה.

מסמנים ב: F_T את ההיטל של $\vec{F}$ על הוקטור $\hat{T}$:

$$F_T = \vec{F} \cdot \hat{T},$$

וברור שההיטל הוא $||\vec{F}|| \cos\alpha$.

העבודה המתבצעת בקטע Δs קטן היא בקירוב (עד כדי סדר גודל $o(\Delta s)$) שווה $F_T \Delta s$, ולכן ביטוי לעבודה המתבצעת לאורך Γ הוא

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F_T \Delta s \to \int\limits_0^L \vec{F} \cdot \widehat{T} \mathrm{d}s$$

שהוא אינטגרל של פונקציה סקלרית לאורך קו עקום. באינטגרל הזה W היא עבודה, F_T הוא הכוח בכיוון המשיק, s פרמטר אורך הקשת ו: $\Delta s =$ תוספת הדרך.

סימון מקוצר:

$$\int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot \underbrace{\widehat{T} \mathrm{d}s}_{\vec{\mathrm{d}s}} \equiv \int\limits_\Gamma \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}s}$$

כאשר $\vec{\mathrm{d}s}$ וקטור בכיוון T ובאורך $\mathrm{d}s$.

<u>החישוב האמיתי:</u>

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}s} =$$

$$= \int_0^L (\underbrace{F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)}_{F}) \cdot$$

$$\cdot \quad \underbrace{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s})}_{T}\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^L \left(F_1(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + F_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

נחליף את המשתנה s במשתנה t ונקבל:

$$= \int_a^b \left(F_1\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}+\right.$$

$$+\ \ F_2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}+F_3\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\Big)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ \int\limits_a^b\left(F_1\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F_3\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

כלומר, למרות שההגדרה הייתה בעזרת פרמטר , בכל תאור פרמטרי יש לאינטגרל אותה צורה. לכן נסמן בקיצור מבלי לציין את הפרמטר

$$\int\limits_\Gamma\vec{F}\cdot\widehat{T}\,\mathrm{d}s\ =\ \int\limits_\Gamma\vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}s}$$

$$=\ \int\limits_\Gamma F_1\mathrm{d}x+F_2\mathrm{d}y+F_3\mathrm{d}z$$

אבל יש לזכור שאלה צורות כתיבה סימבוליות שמטרתן היא להזכיר לנו כיצד יש לבצע את האינ-גרל. החישוב המעשי הוא תמיד ע"י תאור פרמ-

טרי:

$$\int_a^b \left(F_1 \cdot \frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} + F_2 \cdot \frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}t} + F_3 \cdot \frac{\mathsf{d}z}{\mathsf{d}t}\right) \mathsf{d}t$$

הערה חשובה.

למרות שבאינטגרל המסוים מופיעים רק הערכים a, b המציינים את קצוות העקום, האינטגרל תלוי בד"כ לא רק בקצוות אלא גם במסלול שעובר ביניהם.

משפט גרין.

ננסח תחילה את משפט גרין עבור תחום סטנדר-
טי. זהו תחום במישור אשר שפתו מוגדרת ע"י
ארבעת העקומים הבאים:

C_1 הוא הגרף של פונקציה $y = g(x)$
עבור $a \leq x \leq b$,

C_2 הוא הישר $x = b$,

C_3 הוא הגרף של $y = h(x)$ ו:

C_4 הוא הקו $x = a$.

מניחים שהפונקציות $g(x)$ ו: $h(x)$ הן בעלות נגזר-
ות רציפות. מניחים גם ש: $g(x) < h(x)$ לכל
$a \leq x \leq b$.

משפט גרין (שלב ראשון).

יהי D תחום סטנדרטי כנ"ל ששפתו

$$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4.$$

תהיינה $u(x,y), v(x,y)$ פונקציות בעלות נגזר-ות חלקיות רציפות ב-$D \cup \partial D$. אז

$$\oint_{\partial D} u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y = \int\int_{D} (v_x - u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (1)$$

כאשר האינטגרציה על ∂D היא נגד כיוון השעון.

הוכחה:

תחילה נראה ש: $\int\int_{D} u_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} u\mathrm{d}x$

ואח"כ נוכיח את השיויון

$$\int\int_{D} v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} v\mathrm{d}y. \qquad (2)$$

$$\int\int_D u_y \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial y}\mathsf{d}y\right]\mathsf{d}x$$

$$= \int_a^b \left[u(x,h(x)) - u(x,g(x))\right]\mathsf{d}x$$

מצד שני האינטגרלים הקוויים $\int_{C_1} u\mathsf{d}x$ ו: $\int_{C_3} u\mathsf{d}x$

על המסלולים

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = g(t), \;\; a \le t \le b \end{cases}$$

ו:

$$C_3 : \begin{cases} x = t \\ y = h(t), \;\; a \le t \le b \end{cases}$$

הם

$$\int_a^b u(t,g(t))\cdot 1\cdot \mathrm{d}t$$

ו:

$$\int_b^a u(t,h(t))\cdot 1\cdot \mathrm{d}t$$

כי על C_3 הפרמטר t יורד מ: b אל a.

על C_2 ו: C_4 האינטגרלים הקוויים $\int\limits_{C_2} u\mathrm{d}x$

ו:$\int\limits_{C_4} u\mathrm{d}x$ מתאפסים כי שם $dx = 0$.

קיבלנו לכן ש:

$$\int\int_D u_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} u\mathrm{d}x \, .$$

עכשיו נוכיח את (2):

$$\int\int_D v_x \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \oint_{\partial D} v\mathsf{d}y ,$$

ונניח כאן תחילה ש: $g(x)$ ו: $h(x)$ הן פונקציות מונוטוניות על $a \leq x \leq b$. ליתר דיוק נניח כעת ש: g מונוטונית יורדת ו: h מונוטונית עולה. אז נסמן

$$y_0 = g(b), y_1 = g(a), y_2 = h(a), y_3 = h(b).$$

לכל $y_0 \leq y \leq y_1$ נסמן $x_1(y) = g^{-1}(y)$ ולכל $y_2 \leq y \leq y_3$ נסמן $x_2(y) = h^{-1}(y)$. אזי

$$\int\int_D v_x \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_{y_0}^{y_1}\left[\int_{x_1(y)}^{b} v_x \mathsf{d}x\right]\mathsf{d}y$$
$$+\int_{y_1}^{y_2}\left[\int_{a}^{b} v_x \mathsf{d}x\right]\mathsf{d}y + \int_{y_2}^{y_3}\left[\int_{x_2(y)}^{b} v_x \mathsf{d}x\right]\mathsf{d}y$$

מכאן מקבלים

$$\int_{y_0}^{y_3} v(b,y)dy - \int_{y_0}^{y_1} v(x_1(y),y)dy$$
$$-\int_{y_1}^{y_2} v(a,y)dy - \int_{y_2}^{y_3} v(x_2(y),y)dy$$

בכיוון ההליכה שלנו y יורד על C_1, C_3 ו: C_4 ולכן $\mathrm{d}y$ שלילי שם, ומקבלים שהביטוי האחרון הוא

$$\int_{C_1} v(x,y)\mathrm{d}y + \int_{C_2} v(x,y)\mathrm{d}y$$
$$+\int_{C_3} v(x,y)\mathrm{d}y + \int_{C_4} v(x,y)\mathrm{d}y \,,$$

וזה שווה ל:

$$\int_{\partial D} v(x,y)\mathrm{d}y \,.$$

אם יש ל: g ו: h מונוטוניות מאופי אחר (למשל g עולה) הוכחה דומה נותנת את (2) גם במקרים אלו.

אם הפונקציות $g(x)$ ו: $h(x)$ אינן מונוטוניות על $a \leq x \leq b$ אזי מחלקים את הקטע הזה למספר תתי-קטעים

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

כך ששתי הפונקציות g ו: h מונוטוניות על כל תת-קטע, ולכן (2) נכון בכל תת-תחום אשר מוגדר מעל כל תת-קטע. סיכום השיויונות על כל תתי התחומים נותן את (2) עבור D. זה מוכיח את (1), ומסיים את הוכחת נוסחת גרין עבור תחום סטנדרטי.

מסקנה:

נוסחת גרין נכונה לכל תחום שניתן לחלוקה

למספר סופי של תחומים סטנדרטיים משני טיפוסים. כיוון ההליכה הוא תמיד חיובי: כאשר הולכים על השפה בכיוון זה רואים את התחום מצד שמאל. למשל, אם זהו עיגול עם חור מעגלי, אז התנועה על העיגול החיצוני היא הפוכה לכיוון השעון, בעוד התנועה על המעגל הפנימי היא בכיוון השעון.

<u>דוגמא.</u> יהי Γ עקום סגור פשוט, כלומר לא חותך את עצמו. אם D הוא התחום המוקף ע"י Γ אזי

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y &= \int\!\!\int_D (+1)-(-1) = 2A \\ A &= \frac{1}{2}\oint_\Gamma -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

כאשר A הוא השטח של D. הייחוד בנוסחה זו שניתן לחשב שטח תחום מבלי להיכנס לתחום.

<u>דוגמא</u>: חישוב של

$$\oint_{\Gamma} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

על עקומים שונים. זהו למעשה החישוב של

$$\int \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

ויש לנו במקרה הזה

$$u = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$u_y = \frac{(-1)\left(x^2+y^2\right) - (-y)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
v_x &= \frac{1\left(x^2+y^2\right)-x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

ומקבלים ש: $u_y \equiv v_x$ כאשר $(0,0) \neq (x,y)$.

מקרה א.

Γ היא שפה של תחום D שאינו מכיל את $(0,0)$ לא בפנימו ולא בשפתו. אז כל הנגזרות רציפות ולפי נוסחת גרין:

$$
\oint_{\Gamma} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int\int_{D} (v_x - u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0
$$

מקרה ב.

Γ שפה של תחום D, ונניח ש: $(0,0)$ שייכת לפ-
נים של D. אז תנאי נוסחת גרין אינם מתקיימים.
מה באמת מתרחש במקרה הזה?

אגף ימין: $v_x - u_y \equiv 0$ פרט לנקודה אחת, נקודת ראשית הצירים. לכן $\int\int_D (v_x - u_y) = 0$, כי ערך האינטגרל אינו מושפע משינוי ערך הפונקציה על מספר סופי של נקודות.

אגף שמאל: ניקח פרמטריזציה כלשהי $x(t), y(t)$, גזירה ברציפות עבור $a \leq t \leq b$. מחשבים את האינטגרל הקווי על המסלול הפשוט Γ באמצעות

הפרמטריזציה הזו:

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} &= \int_a^b \frac{-y(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{(x(t))^2+(y(t))^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\frac{y(t)}{x(t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= \theta(b)-\theta(a) = 2\pi\end{aligned}$$

כי העקום Γ מכיל את $(0,0)$ בפנים של D, שהוא התחום אשר Γ היא שפתו. לכן, במקרה הזה תנועה לאורך Γ מנקודה כלשהי עד לחזרה לאותה נקודה יוצרת הקפה מלאה של הראשית, והזוית גדלה ב: 2π.

במקרה (א) היה לנו $\theta(b)=\theta(a)$, ואילו במקרה (ב) יש לנו $\theta(b)=\theta(a)+2\pi$.

מסקנה:

נוסחת גרין לא נכונה במקרה ב' למרות ש: u,v הן בעלות נגזרות רציפות בכל התחום פרט לנקודה אחת בלבד.

מקרה ג.

אם הנקודה $(0,0)$ נמצאת על Γ, אז אגף שמאל נותן את הזווית בין שני המשיקים. אם העקום Γ הינו חלק ב-$(0,0)$, כלומר בעל שיפוע מוגדר ויחיד, אז אגף שמאל יוצא π.

הערה:

אם Γ הוא עקום החותך את עצמו, אז הפנים שלו בעל שני רכיבים זרים.

מה קורה כאשר Γ מקיף את $(0,0)$ פעמים אחדות, ותוך כדי כך הוא חותך את עצמו?

ערך האינטגרל

$$\oint_{\Gamma} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

הוא ההפרש בין ערכי θ בנקודות הסוף וההתחלה. אם מתבצעות n הקפות של ראשית הצירים אז הערך הזה הוא $2\pi n$.

הגדרה:

$$I\left(\Gamma\right)=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^{2}+y^{2}}$$

הוא האינדקס של העקום Γ יחסית לנקודה $(0,0)$, והוא סופר גודל טופולוגי: את מספר ההקפות שמבצע Γ סביב ראשית הצירים. אם מבצעים מעוות רציף של Γ כך שהנקודה $(0,0)$ נשארת זרה ל: Γ לאורך כל ביצוע המעוות, אז ערך האינדכס I נשאר קבוע לכל העקומים המתקבלים במהלך ביצוע המעוות.