מערכת משוואות לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

מערכת משוואות לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים היא מערכת מהצורה

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\overline{x}$$

כאשר המטריצה היא מטריצה קבועה. נציב לתוך המערכת את הפונקציה הוקטורית

$$\overline{x}(t) = e^{rt}\overline{v}$$

כאשר r הוא סקלר ו־$\overline{v}$ הוא וקטור קבוע. אזי

$$\overline{x}'(t) = \left(e^{rt}\overline{v}\right)' = \left(e^{rt}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right)' = \begin{pmatrix} v_1 e^{rt} \\ \vdots \\ v_n e^{rt} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \left(v_1 e^{rt}\right)' \\ \vdots \\ \left(v_n e^{rt}\right)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 r e^{rt} \\ \vdots \\ v_n r e^{rt} \end{pmatrix} = re^{rt}\overline{v}$$

ולכן כאשר נציב את הפונקציה הוקטורית למערכת נקבל

$$re^{rt}\overline{v} = A\left(e^{rt}\overline{v}\right) = e^{rt}A\overline{v}$$

נחלק ב־e^{rt} ונקבל כי $A\overline{v} = r\overline{v}$

שזה אומר ש־$\overline{v}$ הוא וקטור עצמי של הערך העצמי r. כלומר $\overline{x}(t) = e^{rt}\overline{v}$ הוא פתרון של המערכת כאשר r ערך עצמי של A עם וקטור עצמי $\overline{v}$. לכן אנו רוצים לחפש את הערכים עצמיים של המטריצה A ובשביל זה אנו צריכים את הפולינום האופייני של המטריצה A

$$p(r) = \det(A - rI)$$

שזה פולינום ממעלה n שהשורשים שלו הם הערכים העצמיים של A.

תזכורת: הריבוי האלגברי p של ערך עצמי r_0 הוא הריבוי שלו כשורש של הפולינום האופייני של המטריצה A.

הריבוי הגיאומטרי q של ערך עצמי r_0 הוא המספר המקסימלי של וקטורים עצמיים בלתי תלויים שיש ל־r_0. כיוון שהוקטורים העצמיים הם פתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $(A - r_0 I)\overline{v} = 0$ אז הריבוי הגיאומטרי הוא $n - rank(A - r_0 I)$ שזה מספר הפרמטרים החופשיים שיישארו אחרי פתירת המשוואה.

הריבוי האלגברי תמיד גדול או שווה לריבוי הגיאומטרי, כלומר $1 \leq q \leq p \leq n$.

כיוון שסכום הריבויים האלגברים של כל הערכים העצמיים הוא n, נרצה להתאים לכל ערך עצמי מריבוי אלגברי p מספר זהה של פתרונות בלתי תלויים, כלומר p פתרונות

בלתי תלויים. אם הריבוי האלגברי p של ערך עצמי r_0 שווה לריבוי הגיאומטרי q של אותו ערך עצמי, אז מצבנו טוב. נמצא p וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p$ ואז $e^{r_0 t}\overline{v}_1, \ldots, e^{r_0 t}\overline{v}_p$ הם פתרונות בלתי תלויים לינארית.

מה עושים אם r_0 הוא ערך עצמי מרוכב עבורו ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי? במקרה זה, גם $\overline{r}_0$ הוא ערך עצמי מאותו ריבוי (אלגברי וגיאומטרי). נמצא p וקטורים עצמיים (עם קואורדינטות מרוכבות) $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p$ ואז $e^{r_0 t}\overline{v}_1, \ldots, e^{r_0 t}\overline{v}_p$ פתרונות מרוכבים, אבל גם $\overline{e^{r_0 t}\overline{v}_1}, \ldots, \overline{e^{r_0 t}\overline{v}_p}$ ואז, כמו במד"ר מסדר n, ניקח חלק ממשי ומרוכב, כלומר, נקבל $2p$ פתרונות

$$\begin{array}{l} Re\left(e^{r_0 t}\overline{v}_1\right), \ldots, Re\left(e^{r_0 t}\overline{v}_p\right) \\ Im\left(e^{r_0 t}\overline{v}_1\right), \ldots, Im\left(e^{r_0 t}\overline{v}_p\right). \end{array}$$

מה נעשה אם יש לנו ערך עצמי r_0 עבורו הריבוי האלגברי p גדול מהריבוי הגיאומטרי q, כלומר $q < p$? במקרה זה אין לנו מספיק וקטורים עצמיים. יש לנו q וקטורים עצמיים עבור r_0 אבל אנו צריכים p פתרונות בלתי תלויים.

ללא הוכחה, יש p פתרונות בלתי תלויים מהצורה

$$e^{r_0 t}\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

כאשר $p_i(t)$ פולינומים מדרגה לכל היותר $p-q$. ע"י הצבה לתוך המערכת $\overline{x}' = A\overline{x}$ נקבל תמיד p פתרונות בלתי תלויים, כלומר, מתוך כל המקדמים של הפולינומים $p_i(t)$, בדיוק p יישארו חופשיים.

שימו לב כי אם נפעיל אלגוריתם זה עם $p = q$, אז $p - q = 0$ ונקבל

$$e^{r_0 t}\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} = e^{r_0 t}\overline{v}$$

שזה מתאים למה שאמרנו שקורה כאשר ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי.

לסיכום, כאשר נתון לנו

$$\overline{x}' = A\overline{x}$$

נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה $p(r) = \det(A - rI)$
נמצא את כל הערכים העצמיים והריבוי האלגברי של כל אחד מהם.
אם r_0 שורש ממשי מריבוי אלגברי p ששווה לריבוי הגיאומטרי שלו, נמצא p וקטורים עצמיים בלתי תלויים $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p$ ואז

$$e^{r_0 t}\overline{v}_1, \ldots, e^{r_0 t}\overline{v}_p$$

p פתרונות בלתי תלויים שמתאימים לו.
אם r_0 שורש מרוכב מריבוי אלגברי p ששווה לריבוי הגיאומטרי שלו, נמצא p וקטורים עצמיים (עם רכיבים מרוכבים) בלתי תלויים $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_p$ ואז

$$\begin{array}{l} Re\left(e^{r_0 t}\overline{v}_1\right), \ldots, Re\left(e^{r_0 t}\overline{v}_p\right) \\ Im\left(e^{r_0 t}\overline{v}_1\right), \ldots, Im\left(e^{r_0 t}\overline{v}_p\right). \end{array}$$

$2p$ פתרונות בלתי תלויים שמתאימים לו ולצמוד שלו.
אם r_0 שורש ממשי מריבוי אלגברי p וריבוי גיאומטרי q אזי יש לנו p פתרונות מהצורה

$$e^{rt}\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

כאשר $p_i(t)$ פולינומים מדרגה לכל היותר $p - q$. שימו לב שכאשר r_0 ממשי אין בעיות אבל כאשר r_0 מרוכב אז ממשיכים כרגיל אבל מוצאים פתרון מרוכב, ואז לוקחים חלק ממשי וחלק מרוכב כדי לקבל $2p$ פתרונות שמתאימים ל־$r_0, \overline{r}_0$.

אקספוננט של מטריצה

ההגדרה של אקספוננט של מטריצה היא

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

התכונות של אקספוננט של מטריצה

$$(\exp(At))' = A\exp(At)$$
$$T^{-1}\exp(At)\,T = \exp\left(T^{-1}ATt\right) \longrightarrow \exp(At) = T\exp\left(T^{-1}ATt\right)T^{-1}$$

אם $D = diag(d_1,\ldots,d_n)$ מטריצה אלכסונית אזי

$$\exp(Dt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{diag(d_1^k,\ldots,d_n^k)t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} diag\left(\frac{d_1^k t^k}{k!},\ldots,\frac{d_n^k t^k}{k!}\right) =$$
$$= diag\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_1^k t^k}{k!},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_1^k t^k}{k!}\right) = diag(e^{d_1 t},\ldots,e^{d_n t})$$

לכן אם A מטריצה לכסינה ו־$T^{-1}AT = D = diag(d_1,\ldots,d_n)$ אזי

$$\exp(At) = T\exp\left(T^{-1}ATt\right)T^{-1} = T\exp(Dt)\,T^{-1} = Tdiag(e^{d_1 t},\ldots,e^{d_n t})T^{-1}.$$

בנוסף, עמודות המטריצה e^{At} הן פתרונות של המערכת $\overline{x}' = A\overline{x}$ כאשר העמודה ה־i מקיימת את תנאי ההתחלה שהוא וקטור אפס בכל קואורדינטה חוץ מהקואורדינטה ה־i שהיא שווה לאחד (תזכורת: וקטור זה מסומן ע"י e_i). כמסקנה, אם מצאנו n פתרונות $\overline{u}_1(t),\ldots,\overline{u}_n(t)$ המקיימים $\overline{u}_i(0) = e_i$ אזי אלה עמודות e^{At}.

תרגיל (ע"ע ממשיים, ר"א=ר"ג):

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \overline{x}$$

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 3-r & -2 \\ 2 & -2-r \end{pmatrix} = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$$

ולכן $-1, 2$ הם הערכים העצמיים. נמצא את הוקטורים העצמיים שלהם

$$-1 : \begin{pmatrix} 3-(-1) & -2 \\ 2 & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4c - 2d = 0$$

$$2c - d = 0$$

$$\begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to_{c=1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2 : \begin{pmatrix} 3-2 & -2 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c - 2d = 0$$

$$2c - 4d = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2d \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to_{d=1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שיטה נוספת לפתירת המערכת נקראת שיטת האלימינציה

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2$$
$$x_2' = 2x_1 - 2x_2$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $2x_2 = 3x_1 - x_1'$. נגזור את המשוואה הראשונה ונקבל

$$x_1'' = 3x_1' - 2x_2' = 3x_1' - 2(2x_1 - 2x_2) = 3x_1' - 2\big(2x_1 - 3x_1 + x_1'\big)$$

כלומר

$$x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0$$

הפולינום האופייני הוא $\ell(r) = r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$. ולכן הפתרון הכללי הוא

$$x_1(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{3}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_1'(t) = \frac{3}{2}\left(c_1e^{2t} + c_2e^{-t}\right) - \frac{1}{2}\left(2c_1e^{2t} - c_2e^{-t}\right) = \\ &= c_1\left(\frac{3}{2}e^{2t} - e^{2t}\right) + c_2\left(\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right) = \frac{c_1}{2}e^{2t} + 2c_2e^{-t} \end{aligned}$$

שימו לב כי אי אפשר לרשום c_1 במקום $\frac{c_1}{2}$ כיוון שה־c_1 מופיע בביטוי עבור $x_1(t)$. נקבל כי הפתרון הוא

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ \frac{c_1}{2}e^{2t} + 2c_2e^{-t} \end{pmatrix} = c_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{c_1}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שיטה נוספת בעזרת אקספוננט של מטריצה: בחישובים שעשינו מצאנו כי A לכסינה וכי

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה מלכסנת, כי העמודה הראשונה היא הוקטור העצמי של 2 והעמודה השניה היא הוקטור העצמי של -1. ולכן

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = diag(2, -1)$$

ולכן לפי נוסחאות של אקספוננט של מטריצה נקבל כי

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= T \cdot diag(e^{2t}, e^{-t})T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} & -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & -e^{2t} + 4e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן

$$\overline{u}_1(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_2(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ -e^{2t} + 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

הם שני פתרונות בלתי תלויים המקיימים

$$\overline{u}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{u}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי הוא

$$\overline{x}(t) = \frac{c_1}{3}\begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{c_2}{3}\begin{pmatrix} -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ -e^{2t} + 4e^{-t} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2e^{2t} + 2e^{-t} \\ -e^{2t} + 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

תרגיל (ע"ע ממשיים, ר"א=ר"ג):

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overline{x}$$

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 4-r & -1 & -1 \\ 1 & 2-r & -1 \\ 1 & -1 & 2-r \end{pmatrix} = -(r-3)^2(r-2)$$

ולכן $3, 2$ הם הערכים העצמיים כאשר הריבוי האלגברי של 2 הוא אחד והריבוי האלגברי של 3 הוא שתיים. זה אומר שאנו צריכים למצוא וקטור עצמי אחד עבור 2 ושני וקטורים עצמיים בלתי תלויים עבור 3.

$$3: \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c - d - e = 0 \to c = d + e \to \begin{pmatrix} d+e \\ d \\ e \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן שני וקטורים עצמיים בלתי תלויים עבור 3 הם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

נמצא כעת וקטור עצמי אחד (שונה מאפס) עבור 2.

$$2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2c - d - e = 0$$

$$c - d = 0 \to c = d \to 2c - c - e = 0 \to c = e \to \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c=1]{} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\overline{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל בית: חשבו את e^{At}.

תרגיל (ע"ע מרוכבים, ר"א=ר"ג):

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \overline{x}$$

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{pmatrix} = r^2 - 2r + 5$$

ולכן השורשים הם $1 \pm 2i$. נמצא וקטור עצמי עבור $1+2i$

$$1+2i : \begin{pmatrix} 3-(1+2i) & -2 \\ 4 & -1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(2-2i)c - 2d = 0$$
$$4c + (-2-2i)d = 0$$
$$\begin{pmatrix} c \\ c(1-i) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \rightarrow_{c=1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

כעת נרשום את הפתרון המתאים, ונפריד אותו לחלק ממשי וחלק מדומה

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^t \cos 2t + ie^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t + ie^t \sin 2t - ie^t \cos 2t + e^t \sin 2t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t \cos 2t + e^t \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t - e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

ולכן מערכת יסודית של פתרונות היא

$$\begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t \cos 2t + e^t \sin 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t - e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי הוא

$$\overline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

איך נחשב במקרה כזה את e^{At}? אפשר למצוא את המטריצה המלכסנת מעל המרוכבים ולמעשה יש לנו אותה. היא

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1-i & 1+i\end{pmatrix}$$

כיוון שזו המטריצה של הוקטורים העצמיים מעל המרוכבים, ואז משתמשים בנוסחה

$$\exp\left(At\right)=T\exp\left(T^{-1}ATt\right)T^{-1}=T\exp\left(Dt\right)T^{-1}=T\begin{pmatrix}e^{(1+2i)t} & 0\\ 0 & e^{(1-2i)t}\end{pmatrix}T^{-1}$$

כאשר משתמשים בזהות $e^a(\cos b+i\sin b)$.

תרגיל בית: עשו זאת.

נעשה זאת בצורה אחרת. מצאנו את הפתרון הכללי.

$$\overline{x}(t)=c_1e^t\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}+c_2e^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}.$$

נמצא את הפתרון המתאים לתנאי ההתחלה

$$\overline{x}(0)=c_1e^0\begin{pmatrix}\cos 0\\ \cos 0+\sin 0\end{pmatrix}+c_2e^0\begin{pmatrix}\sin 0\\ \sin 0-\cos 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_1-c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow c_1=1\quad c_2=1$$

ונקבל את העמודה הראשונה של e^{At} שהיא

$$\overline{u}_1(t)=e^t\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}+e^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}\cos 2t+\sin 2t\\ 2\sin 2t\end{pmatrix}.$$

ובאופן דומה, בשביל למצוא את העמודה השניה של e^{At} נמצא את הפתרון המתאים לתנאי ההתחלה

$$\overline{x}(0)=c_1e^0\begin{pmatrix}\cos 0\\ \cos 0+\sin 0\end{pmatrix}+c_2e^0\begin{pmatrix}\sin 0\\ \sin 0-\cos 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_1-c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\longrightarrow c_1=0\quad c_2=-1$$

ונקבל את העמודה השניה של e^{At} שהיא

$$\overline{u}_2(t)=-e^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}.$$

כלומר

$$e^{At}=e^t\begin{pmatrix}\cos 2t+\sin 2t & -\sin 2t\\ 2\sin 2t & -\sin 2t+\cos 2t\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל (ע"ע ממשיים, ר"א>ר"ג):</u>

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \overline{x}$$

<u>פתרון:</u> נחשב את הפולינום האופייני

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ -1 & -3-r \end{pmatrix} = (r+1)^2$$

לכן -1 ערך עצמי מריבוי אלגברי 2. נחפש וקטורים עצמיים עבורו

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי ר"א=2 אבל ר"ג=1. כלומר ההפרש הוא 1. לכן נשתמש בשיטת וקטור פולינומים. כיוון שההפרש בין הריבוי האלגברי לריבוי הגיאומטרי הוא 1 אזי

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix} \\
\frac{dx}{dt} &= -e^{-t} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -a_0 + a_1 - a_1 t \\ -b_0 + b_1 - b_1 t \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a_0 + 4b_0 + (a_1 + 4b_1)t \\ -a_0 - 3b_0 + (-a_1 - 3b_1)t \end{pmatrix} \\
\frac{dx}{dt} &= e^{-t} \begin{pmatrix} -a_0 + a_1 - a_1 t \\ -b_0 + b_1 - b_1 t \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a_0 + 4b_0 + (a_1 + 4b_1)t \\ -a_0 - 3b_0 + (-a_1 - 3b_1)t \end{pmatrix} = Ax
\end{aligned}$$

מהשוואת קואורדינטות ומקדמים של הפולינומים נקבל

$$\begin{aligned}
-a_1 &= a_1 + 4b_1 \\
-a_0 + a_1 &= a_0 + 4b_0 \\
-b_1 &= -a_1 - 3b_1 \\
-b_0 + b_1 &= -a_0 - 3b_0
\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 + 4b_0 \\
b_1 &= -a_0 - 2b_0
\end{aligned}$$

ואז

$$\overline{x}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}a_0+a_1t\\ b_0+b_1t\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}a_0+(2a_0+4b_0)t\\ b_0+(-a_0-2b_0)t\end{pmatrix}=$$
$$=\quad a_0e^{-t}\begin{pmatrix}1+2t\\ -t\end{pmatrix}+b_0e^{-t}\begin{pmatrix}4t\\ 1-2t\end{pmatrix}$$

קיבלנו ר"א פתרונות בלתי תלויים. כיוון ש־-1 הוא הע"ע היחיד אזי אלו כל הפתרונות.
שאלה למחשבה: קיבלנו בתחילת החישובים כי $\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ וקטור עצמי ולכן $e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ פתרון. האם הוא מופיע בפתרון הכללי?

דרך פתרון נוספת:
נמצא את הפתרון לפי וקטור חבר. בשיטה זו אנו מחפשים קודם וקטור עצמי של -1,

$$p(r)=\det(A-rI)=\det\begin{pmatrix}1-r & 4\\ -1 & -3-r\end{pmatrix}=(r+1)^2$$
$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-2b\\ b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow_{b=1}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

ואז אנו מחפשים את וקטור החבר שהוא פתרון (לא הפתרון. רק פתרון) של

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$
$$2a+4b=-2\rightarrow a=-1-2b\rightarrow\begin{pmatrix}-1-2b\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow_{b=0}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

שימו לב כי כל בחירה של b הייתה בסדר. הבחירה $b=0$ היא שרירותית אבל נוחה.
אז יש לנו שני פתרונות שמתאימים לע"ע -1

$$e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},\ e^{-t}\left(t\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right)=e^{-t}\begin{pmatrix}-2t-1\\ t\end{pmatrix}$$

כיוון ש־-1 הוא הע"ע היחיד אזי הפתרון הכללי הוא

$$\overline{x}(t)=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}-2t-1\\ t\end{pmatrix}$$

איך שני הביטויים שקיבלנו עבור הפתרון הכללי אותו הדבר?
איך אנו מוצאים את e^{At} במקרה זה? במקרה זה המטריצה לא לכסינה אז נשתמש

בשיטה של תנאי ההתחלה. יש לנו את הפתרון הכללי. אז נמצא שני פתרונות המתאימים לתנאי התחלה, ונקבל את העמודות של e^{At}. כלומר נפתור את שתי המשוואות

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= a_0 e^{-t}\begin{pmatrix}1+2t\\ -t\end{pmatrix} + b_0 e^{-t}\begin{pmatrix}4t\\ 1-2t\end{pmatrix}\\
\overline{u}_1(0) &= a_0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + b_0\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
\overline{u}_2(0) &= a_0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + b_0\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ובמקרה זה הפתרון פשוט ויוצא כי

$$e^{At} = e^{-t}\begin{pmatrix}1+2t & 4t\\ -t & 1-2t\end{pmatrix}$$

תרגיל (ע"ע ממשיים, ר"א>ר"ג):

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{x}$$

פתרון: נחשב את הפולינום האופייני

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 1-r & -1 & 1 \\ 0 & 1-r & -1 \\ 0 & 0 & 1-r \end{pmatrix} = (1-r)^3$$

נחפש וקטורים עצמיים עבור 1

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי ר"א=3 אבל ר"ג=1. לכן נשתמש בשיטת וקטור פולינומים. כיוון שההפרש בין הריבוי האלגברי לריבוי הגיאומטרי הוא 2 אזי

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= e^t \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{pmatrix} \\
\overline{x}' &= e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 t \\ b_1 + 2b_2 t \\ c_1 + 2c_2 t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + (a_1 + 2a_2)t + a_2 t^2 \\ b_0 + b_1 + (b_1 + 2b_2)t + b_2 t^2 \\ c_0 + c_1 + (c_1 + 2c_2)t + c_2 t^2 \end{pmatrix} = \\
= \quad & A\overline{x} = e^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{pmatrix} = \\
= \quad & e^t \begin{pmatrix} a_0 - b_0 + c_0 + (a_1 - b_1 + c_1)t + (a_2 - b_2 + c_2)t^2 \\ b_0 - c_0 + (b_1 - c_1)t + (b_2 - c_2)t^2 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

משורה שלישית נקבל

$$\begin{aligned}
& c_2 = c_2 \\
& c_1 + 2c_2 = c_1 \longrightarrow c_2 = 0 \\
& c_0 + c_1 = c_0 \longrightarrow c_1 = 0
\end{aligned}$$

משורה שניה נקבל

$$\begin{aligned} &b_2 = b_2 - c_2 \longrightarrow c_2 = 0 \\ &b_1 + 2b_2 = b_1 - c_1 \longrightarrow b_2 = 0 \\ &b_0 + b_1 = b_0 - c_0 \longrightarrow b_1 = -c_0 \end{aligned}$$

מהשורה הראשונה נקבל

$$\begin{aligned} &a_2 = a_2 - b_2 + c_2 \longrightarrow a_2 = a_2 \\ &a_1 + 2a_2 = a_1 - b_1 + c_1 \longrightarrow a_2 = \frac{1}{2}c_0 \\ &a_0 + a_1 = a_0 - b_0 + c_0 \longrightarrow a_1 = c_0 - b_0 \end{aligned}$$

שימו לב שאנו צריכים לקבל שלושה פתרונות בלתי תלויים כי ר"א=3 וקיבלנו שלושה פרמטרים חופשיים a_0, b_0, c_0.

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \end{pmatrix} &= e^t \begin{pmatrix} a_0 + (c_0 - b_0)t + \frac{1}{2}c_0 t^2 \\ b_0 - c_0 t \\ c_0 \end{pmatrix} = \\ = \quad a_0 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_0 e^t \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &+ c_0 e^t \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \\ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וקיבלנו מערכת יסודית של פתרונות.

שיטת פתרון בעזרת וקטור חבר:

יש לנו מצב בו ר"א=3 ור"ג=1. לכן יש לנו וקטור עצמי אחד

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב כי אנו צריכים רק נציג ולכן בחרנו את $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. כעת נמשיך לפתור את

$$(A-rI)\overline{w}=\overline{v}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}a\\-1\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\rightarrow_{a=0}\overline{w}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

ולבסוף אנו צריכים לפתור $(A-rI)\overline{z}=\overline{w}$

$$\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\rightarrow_{a=0}\overline{z}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

ולכן הפתרונות המתאימים לערך העצמי -1 הם

$$e^{-t}\overline{v},\ e^{-t}\Big(t\overline{v}+\overline{w}\Big),\ e^{-t}\Big(\frac{t^2}{2}\overline{v}+t\overline{w}+\overline{z}\Big)$$

כלומר

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ e^{-t}\left(t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right),\ e^{-t}\left(\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

או

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ e^{-t}\begin{pmatrix}t\\-1\\0\end{pmatrix},\ e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}\\-t+1\\1\end{pmatrix}$$

הראו איך פתרון זה תואם את הפתרון הקודם שקיבלנו, ומצאו את e^{At}.

<u>תרגיל:</u>

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u> זוהי אינה מערכת משוואות מסדר ראשון כיוון שיש נגזרות מסדר גבוה יותר. לכן נגדיר שתי פונקציות דמה $x_3(t), x_4(t)$ כדי לקבל מערכת משוואות מסדר ראשון, כאשר המטרה פה היא להוסיף מספר משתני דמה כמספר הנגזרות מעל סדר אחד. יש לנו נגזרת שנייה פעמיים אז יש "חריגה" של 2 מעל נגזרת מסדר ראשון. נגדיר:

$$x_3 = \frac{dx_1}{dt}$$
$$x_4 = \frac{dx_2}{dt}$$

ואז נקבל

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_4$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = x_2$$
$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1$$

כלומר נקבל מערכת מד"ר מסדר ראשון שהיא

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}$$

נפתור את המערכת. הפולינום האופייני הוא

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} -r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -r \end{pmatrix} = r^4 - 1 = (r^2-1)(r^2+1)$$

ולכן הערכים העצמיים הם $1, -1, i, -i$. נמצא את הוקטורים העצמיים

$$1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$i: \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$$

נטפל בערכים העצמיים המרוכבים קודם:

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\cos t - i \sin t \\ i \cos t - \sin t \\ -i \cos t + \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי של

$$\overline{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{x}$$

הוא

$$c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי של

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

הוא שתי השורות הראשונות, כלומר

$$c_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

שימו לב כי תנאי התחלה הוא מהצורה

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= d_1 \\ x_1'(t_0) &= d_2 \\ x_2(t_0) &= d_3 \\ x_2'(t_0) &= d_4 \end{aligned}$$