פתרון תרגיל בית מספר 7 :

1)

א) אין פונקציה $f:\Re\to\{0,1\}$ רציפה ולא קבועה.

נניח בשלילה כי קיית כזו f אז יש $x_1\in\Re$ כך ש $f(x_1)=0$ וכן $x_2\in\Re$ כך ש $f(x_2)=1$ לכן, ע"פ משפט ערך הביניים קיים x_3 בין x_1 לבין x_2 כך ש $f(x_3)=\frac{1}{2}$. אולם זה בסתירה לכך שהטווח הוא $\{0,1\}$.

ב) הטענה נכונה. קיימות f ו- g כך ש- $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ו- $\lim_{y\to b} g(y)=c$ אבל $\lim_{x\to a} g\circ f(x)\neq c$. ברור ששתי פונקציות רציפות לא יהוו דוגמא ולכן נבחר g לא רציפה לדוגמא:

$g(y)=\begin{cases}1 & y=0\\ 0 & y\neq 0\end{cases}$. נבחר $f:\ f(x)=0$ אז: $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ וגם $\lim_{y\to 0} g(y)=0$. אבל,

$\lim_{x\to 0} g\circ f(x)=\lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{x\to 0} g(0)=\lim_{x\to 0} 1=1$.

ג) הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x+\sin x+\cos x}$ מקבלת מקסימום אך לא מינימום בקטע המוכלל $[0,\infty)$. הוכחה:

נשים לב כי : $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $f(0)=1$. בנוסף, f רציפה כי $x+\sin x+\cos x>0$ בכל הקטע. לכן גם $\forall x\quad f(x)>0$. לכן, קיים $b>0$ כך שלכל $x>b$ מתקיים: $f(x)<1$. ע"פ משפט ווירשטראס, f מקבלת מקסימום M ב $[0,b]$ זהו מקסימום גלובלי כי $M\geq f(0)=1$. לא קיים מינימום כי הפונקציה חיובית ושואפת לאפס באינסוף.

ד) לא נכון, דוגמא נגדית : $f(x)=1+\dfrac{x^3}{3}$. f אינה אי זוגית אבל $f'(x)=x^2$ היא זוגית.

2)

א) הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$ רציפה במידה שוה בקטע $(0,1)$:

לכל $x,y\in(0,1)$ כך ש- $|x-y|<\delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{1}{x^2-x-2}-\frac{1}{y^2-y-2}\right|=\left|\frac{y^2-y-2-x^2+x+2}{\left(y^2-y-2\right)\left(x^2-x-2\right)}\right|=$$

$$=\left|\frac{y^2-x^2+x-y}{(y-2)(y+1)(x-2)(x+1)}\right|$$

הפונקציה $\left|(x+1)(x-2)\right|$ מקבלת מינימום בנקודה $x=1$ בקטע $[0,1]$ ולכן:

$$\le\left|\frac{y^2-x^2+x-y}{(-1)\cdot2\cdot(-1)\cdot2}\right|=|y-x|\left|\frac{y+x-1}{4}\right|\le\delta\frac{|x+y|+1}{4}\le\frac{\delta}{2}<\varepsilon$$

לכן, נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל שהפונקציה רציפה במ"ש.

ב) הפונקציה $f(x)=\cos(x^2)$ אינה רציפה במ"ש ב- $\Re$ כי עבור

שתי הסדרות: $a_n=\sqrt{2\pi n}$, $b_n=\sqrt{2\pi n+\dfrac{\pi}{2}}$ מתקיים:

$$|f(a_n)-f(b_n)|=\left|\cos(2\pi n)-\cos\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|1-0|=1$$

אבל : $\left|a_n-b_n\right|=\left|\sqrt{2\pi n}-\sqrt{2\pi n+\dfrac{\pi}{2}}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

לכן עבור $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$, לכל $\delta>0$ נוכל למצוא N כך ש: $|a_N-b_N|<\delta$ אבל $|f(a_N)-f(b_N)|=1>\varepsilon_0$.

3)

א) פונקצית הלדר מסדר 0.5 שלא מקימת תנאי ליפשיץ:

$f(x)=\sqrt{x}$ כי לכל x,y מתקיים : $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\le\sqrt{|x-y|}$.

ב) אם f מקיימת תנאי הלדר מסדר $\alpha>0$ אז f היא פונקצית ליפשיץ:

יהי $\varepsilon>0$ נתון, אז לכל $|x-y|<\delta$ מתקיים:

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le K\left|x-y\right|^{\alpha} \le K\delta^{\alpha} \le \varepsilon$$

נבחר $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{-\alpha}$.

4) נגזור את הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן:

א) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ עבור $a \ne 1$:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{a+h+1}{a+h-1}-\frac{a+1}{a-1}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h+1)(a-1)-(a+1)(a+h-1)}{h(a-1)(a+h-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(a-1)(a+h-1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{(a-1)(a+h-1)}=\frac{-2}{(a-1)^2}$$

עבור $a=1$ הפונקציה אינה רציפה ולכן אינה גזירה.

ב) הפונקציה מוגדרת עבור $x>0$ ולכן עבור $a>0$:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(h+a)\ln(h+a)-a\ln a}{h}=\lim_{h\to 0}\left(1+\tfrac{a}{h}\right)\ln(h+a)-\tfrac{a}{h}\ln a=$$

$$=\lim_{h\to 0}\ln(h+a)+\tfrac{a}{h}\ln\left(\tfrac{a+h}{a}\right)=\ln a+\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\tfrac{h}{a}\right)^{\frac{a}{h}}=\ln a+1$$

5) נחשב את הנגזרות הבאות:

א) $f'(x)=x^{-0.5}e^{\sin x}\cos x-0.5\cdot x^{-1.5}e^{\sin x}$

ב) $f'(x)=2x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)-\sin\tfrac{1}{x}$ ובאפס הנגזרת היא אפס.

ג) $f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin Z\\ 0 & x\in Z\end{cases}$ ולכן הנזרת קיימת רק עבור נקודות לא שלמות ושוה לאפס בהן.

ד) $f'(x)=\cos\left((\ln x)x^{2.5}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x^{1.5}+2.5x^{1.5}\ln x+\frac{2}{x^3}\right)$