אלגברה ב' 104173 מועד א אביב תשעו 315716803

1. ראשית נראה שהפעולה נילפוטנטית כי נגזרת רביעית של כל פולינום שמעלתו לכל היותר 3 היא 0 לכן המטריצה נילפוטנטית ואיברי האלכסון הם בהכרח 0, כעת ניקח את האיבר מעולה

$x^3, T(x^3) = 3x^2 + 18x, T^2(x^3) = 6x + 18 + 18, T^3(x^3) = 6$ כלומר מצאנו איבר שמתאפס רק אחרי הפעלת הפעולה 4 ולכן יש בלוק ז'ורדן בגודל 4, ולכן צורת הז'ורדן היא:

$$J(T) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

✓ 12/12

2. א. ודאי שהפולינום האופייני הוא x^5 בגלל דרגת המטריצה והעובדה שהיא אלכסונית עליונה עם 0 על האלכסון, כעת נחשב: מעולה

$$A^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, A^3 = 0$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא x^3.

✓ 4/4

ב. מכיוון שדרגת המטריצה המקורית היא 2 ($5-3$) אנחנו יודעים שיש 3 בלוקי ג'ורדן, בנוסף אנחנו יודעים שיש אחד בגודל 3, לכן צורת ז'ורדן חייבת להיות:

$$J(A) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

הסבר?

8/8

ג. וקטורים עצמיים של A:

$$A\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} b+c+e=0 \\ c+d+e=0 \end{matrix}, v_1 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}, v_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}, v_3 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}, A(v_3) = v_4 = \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, A(v_4) = v_5 = \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

הסבר חסר!

כאשר את השלושה האחרונים בנינו בניחושים אבל מכיוון שהם מהווים שרשרת באורך 3 הם מתאימים לנו בשביל המקרה הזה. נסדר את הוקטורים בהתאם לצורת ז'ורדן ונקבל: ✓

גמ"ר: 75

שאלה	ניקוד
1	12
2	19
3	12
4	18
5	18
6	4

סה"כ: 86

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]
1	[illegible]
2	[illegible]
3	[illegible]
4	
7	
8	[illegible]

[illegible]

$$
P = \begin{matrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{matrix}
$$

$$
P^{-1}AP = J(A)
$$

7/8

$$
AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}
$$

מכיוון שהמטריצה "דוחפת" את השרשרת ומוחקת את הוקטורים שאינם בשרשרת זוהי אכן המטריצה (או לפחות אחת מהן) שרצינו, אני לא אחשב את ההופכי אבל הוא אמור לעבוד.

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A_4 = \begin{matrix} e & f \\ g & h \end{matrix}
$$

$$
tr(A_1^t A_4) = 0 \to tr\begin{pmatrix} e-g & \cdots \\ \cdots & f-h \end{pmatrix} = e+f-g-h = 0
$$

3. א. על פי הגדרת מאונך:

$$
tr(A_2^t A_4) = 0 \to tr\begin{pmatrix} g & \cdots \\ \cdots & f \end{pmatrix} = g+f = 0
$$

$$
tr(A_3^t A_4) = 0 \to tr\begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \cdots & h \end{pmatrix} = h = 0
$$

$$
A_4 = \cancel{W^{\perp}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$W^{\perp} = Sp\{A_4\}$

[illegible]

ב. ידוע שהנקודה הכי קרובה היא ההטלה ולכן ננסח את המטריצה כסכום איברים בW ובניצבו וניקח את

$$\begin{matrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{matrix} = \alpha\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$P_{w^\perp} = \delta\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\gamma = 4$$

$$\alpha + 2\delta = -2$$

$$\alpha + \beta - \delta = 3$$

$$-\alpha + \beta + \delta = 1$$

$$2\beta = 4, \beta = 2$$

$$2\delta + \delta - 2 = -2 - 3$$

$$3\delta = -3$$

$$\delta = -1$$

$$\alpha = 0$$

$$\begin{matrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{matrix} = 0\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

הניצב :

$$\boxed{P_{w^\perp} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}$$

המטריצה הקרובה היא P_w, ולא $P_{w^\perp}$

$\frac{4}{8}$

$$T = \begin{matrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{matrix}$$

4. א. $\left\langle T\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}, \begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\rangle = (y-z)a + (x-z)b + (-x-y)c = ay - az + bx - bz - cx - cy$ ולכן על פי

$$\left\langle \begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}, T\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\rangle = (b-c)x + (a-c)y + (-a-b)z = ay - az + bx - bz - cx - cy$$

ההגדרה של צמוד לעצמו הפעולה אכן צמודה לעצמה.

✓ 4/4

[illegible]

לב
$xI+A$
ולא
$xI-A$

ב. נמצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים (לא השתמשתי בווקטורים בסוף):

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - x - (x-1) - (-1+x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

הפו': $(x+1)^2(x-2)$ ולכן

מה שפתרת!

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$-2a + b - c = 0$$

$$a - 2b - c = 0$$

$$a + b + 2c = 0$$

$$b + 2b + 2c + c = 0$$

$$b = -c$$

$$-2a + 2b = 0$$

$$a = b$$

$$v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$a + b - c = 0$$

$$v_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{1,2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8/12

$$P_\lambda = \prod \frac{A-q}{q-\lambda}, q \neq \lambda$$

מעניין שכאן לא:
כי לך הע"ע
הם 2 ו -1 !
אין דמיון קודם
רק כי הם 1 ו 2 !

$$P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

ידוע שהטלות מקיימות:

$$P_{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$P_{-1} + P_2 = I$$

$$\boxed{T = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}}$$

5. א. נמצא את התנאים: $\begin{pmatrix}a+bi & c+di\\ e+fi & g+hi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-bi & e-fi\\ c-di & g-hi\end{pmatrix}$ 4 תנאים ולכן מ8 נעלמים מקבלים 4

$b=0, h=0, c=e, d=-f$

דרגות חופש, כלומר 4 מימדים. $\Leftarrow$ $dim_R V=4$ (יש לקחת בסיס בעל 4 איברים) 3/3

ב. $A \in V = \begin{pmatrix}a & c+id\\ c-id & g\end{pmatrix}, a,c,d,g \in R$ וידוע שמכפלה וסכום של ממשיים הוא ממשי.

$|A| = ag - (c+id)(c-id) = ag - c^2 - d^2$ 3/3

לא A אלא הגיון A !!

ג. $q(v) = 2(ag - c^2 - d^2)$

עם אינם

שמירה לא חפיפה אלא דמיון !!

נכתוב בעזרת מטריצה סימטרית: $q\begin{pmatrix}a\\c\\d\\g\end{pmatrix} = (a \quad c \quad d \quad g)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\\d\\g\end{pmatrix}$ 6/8

וידוע שפעולות שניתנות ליצוג כמטריצה כנ"ל הן תבניות ריבועית, לחלופחן אפשר לומר שה"חוזק" של כל איבר בq היא 2. כלומר כל הכפלה של הוקטור בסקלר תכפיל את התוצאה בריבועו.

ד. הדרגה היא 4 כי המטריצה הפיכה, מכיוון שהערכים העצמיים הם $-2,-1,1$ הסיגנטורה היא מינוס 2. 5/8

6. $\Delta A(x) = x(x-1)(x+1)$
$\Delta B(x) = x(x-1)(x-2)$ ידוע שחפיפה נקבעת על פי מספר הערכים העצמיים החיוביים, מספר השליליים, ומספר האפסים. 7/10

(-2) עבור תוצאה סימטרית מגושמת!

במקרה הנ"ל כל חזקה זוגית תהפוך את שני הפולינומים לדרגה 2 וסיגנטורה 2, זו לא טענה נכונה כלל

-7

כל חזקה אי זוגית תהפוך (\תשאיר) את שניהם בדרגה 2 אך A יהיה סיגנטורה 0 וB סיגנטורה -2 ולכן התשובה היא חזקות זוגיות. (ב0 שניהם היחידה אז ודאי חופפות).

יש לומר כי A סימטרית ממשית
ולכן לכסינה ע"י שהיא דמיון
חפיפה !! וכן ...

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]