תורת ההסתברות – תרגיל בית 5

רן קירי - 311532238

JANUARY 17, 2017

קבוצת תרגול 11

שאלה 1:

א. נתונים $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ שני משתנים מקריים, המוגדרים על אותו מרחב הסתברות כך ש-F_X,F_Y הם פונקציות ההתפלגות של משתנים אלה בהתאמה. נתון כי $P(X\geq Y)=1$. עתה, נשים לב כי על פי הגדרה:

$$F_X(t)=P(X\leq t)$$

וכן:

$$F_Y(t)=P(Y\leq t)$$

נשים לב כי על פי הגדרה:

$$P(X\geq Y)=P(\{\omega\in\Omega|X(\omega)\geq Y(\omega)\})=1$$

ולכן נוכל לרשום:

$$F_X(t)=P(X\leq t)=P(\{\omega\in\Omega|X(\omega)\leq t\})=P(\{\omega\in\Omega|\mathrm{Y}(\omega)\leq X(\omega)\leq t\})=P(Y\leq X\leq t)$$

כלומר:

$$F_X(t)=P(\{Y\leq X\}\cap\{X\leq t\})$$

ועתה, נשים לב כי מתקיים:

$$P(X\leq t|Y\leq t)=\frac{P(\{X\leq t\}\cap\{Y\leq t\})}{P(\{Y\leq t\})}$$

כאשר:

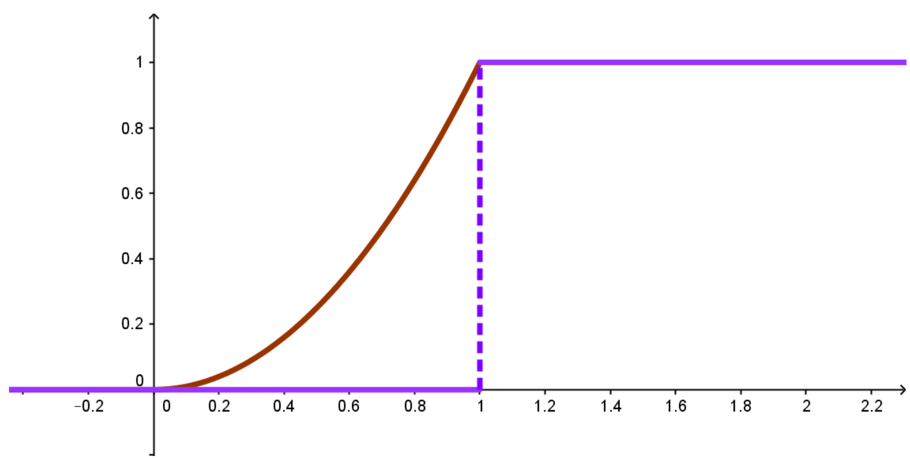
$$P(\{X\leq t\}\cap\{Y\leq t\})=P(\{\omega\in\Omega|X\leq t\cap Y\leq t\})=P(\omega\in\Omega|Y\leq X\leq t)=F_X(t)$$

ולכן נקבל סה"כ כי היות ו-$P(\{Y\leq t\})=F_Y(t)$:

$$F_X(t)=F_Y(t)\cdot\overbrace{P(X\leq t|Y\leq t)}^{\leq 1}\Longrightarrow\boxed{F_X(t)\leq F_Y(t)}$$

נשים לב כי הנ"ל אינו נכון בכיוון ההפוך. ניתן להראות זאת על ידי דוגמה נגדית:

$$F_X=\begin{cases}1 & x>1\\ x^2 & 0<x<1\\ 0 & x<0\end{cases}\quad F_Y=\begin{cases}1 & x>0.5\\ 0 & x<1\end{cases}$$



כלומר, Y במקרה זה, עבור אותו מרחב הסתברות, מקבל 1 בהסתברות 1. נשים לב כי קל לראות כי:

$$F_X(t)\leq F_Y(t)\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

אך נשים לב כי:

$$P(X\geq Y)=P(X\geq 1)=P(X=1)=0$$

ב. עתה נתון לנו כי $X\sim U([0,1])$ וכי $Y=X$. נרצה לחשב את $F_{(X,Y)}$. נעשה זאת על פי הגדרה:

$$F_{(X,Y)}(t,k)=P(\{X\leq t\}\cap\{Y\leq k\})\overset{Y=X}{=}P\big((X,Y)\in[\min\{t,k\},\min\{t,k\}]\big)=\begin{cases}0 & t<0\ \text{או}\ k<0\\ \min\{t,k\}^2 & 0<t,k<1\\ 1 & t>1,y>1\end{cases}$$

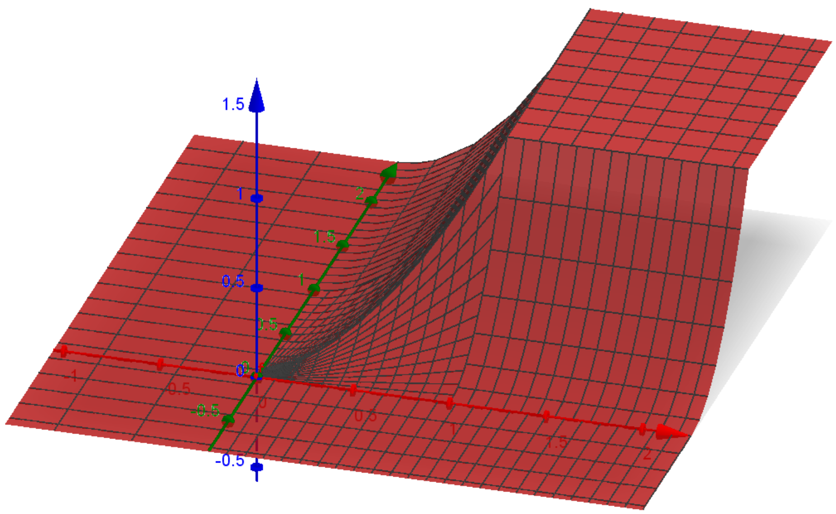
נשים לב כי לכל t,k מתקיים:

$$F_X(t)=\begin{cases}1 & t>1\\ t & 0<t<1\\ 0 & t<0\end{cases}\quad F_Y(k)=\begin{cases}1 & k>1\\ k & 0<k<1\\ 0 & k<0\end{cases}$$

וכאמור קל לראות כי לכל $0<t<k<1$ מתקיים:

$$F_{(X,Y)}(t,k)=\min\{t,k\}^2\neq tk=F_X(t)F_Y(k)$$

כלומר המשתנים אינם בלתי תלויים.



כמו כן, פונקציה זו רציפה. נראה זאת:
ראשית, בתחום שבו $x > 1, y > 1$, הפונקציה מזדהה זהותית עם 1. ונשים לב כי לכל $(x,y) \to (1,y)$ בה"כ כך ש-$x < 1$, מתקיים $F_{(X,Y)}(x,y) = x^2 \to 1$ ובאותו אופן לשאיפה מכיוון y. עבור שאיפה משניהם נשים לב כי:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \min\{x,y\}^2 \to 1$$

כלומר ישנה רציפות בתחום זה. כאמור כאשר x,y שואפים ל-0 בפרט פונקציית ההתפלגות שואפת לאפס (כי זו תהיה פונקציה ריבועית לפי x,y כאשר המינימלי ביניהם שואף לאפס). בתחום הביניים הפונקציה רציפה שכן היא פונקציה ריבועית סטנדרטית.
התחום האחרון הבעייתי הוא התחום שבו $x = y$. אך גם במקרה זה נשים לב כי אם $x < y$ כך ש-$x \to y$ אזי נקבל כי:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \min\{x,y\}^2 = x^2 \to y^2 = x^2$$

כנדרש. כלומר הפונקציה שהתקבלה אכן רציפה.

ג. נניח כי X בלתי תלוי בעצמו. אזי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F_{(X,X)}(t) = F_X(t)F_X(t) = F_X(t)^2$$

אך נשים לב כי:

$$F_{(X,X)}(t) = P(\{X \le t\} \cap \{X \le t\}) = P(\{X \le t\}) = F_X(t)$$

כלומר קיבלנו שמתקיים:

$$F_X(t) = F_X(t)^2 \Longrightarrow F_X(t)\big(1 - F_X(t)\big) = 0$$

ולכן לכל t מתקיים בהכרח $F_X(t) = 0$ או $F_X(t) = 1$. אנו יודעים כי פונקציית ההסתברות רציפה מימין ועולה וכן לא יכולה להיות זהותית אפס שכן הגבול שלה באינסוף לא יהיה אחד. לכן נסיק כי קיימת נקודה $C \in \mathbb{R}$ עבורה $F_X(C) = 1$. אך עתה מרציפות ומונוטוניות $F_X(t)$ נסיק כי לכל $t \ge C$ בהכרח $F_X(t) = 1$. כמו כן, הפונקציה לא יכולה להיות זהותית 1 שכן גבולה במינוס אינסוף הוא 0 ולכן קיימת לפחות נקודה אחת שבה $F_X(t) = 0$ אך משמאלה הפונקציה תהיה זהותית 0 ממונוטוניות הפונקציה.
משני אלו נסיק כי ניתן להגדיר את C להיות:

$$C = \inf_{F_X(t)=1} t$$

ונקודה זו קיימת ומוגדרת היטב שכן הוכחנו שקיים חסם מלרע לקבוצת נקודות זו. עבור נקודה זו יתקיים שלכל $t < C$ $F_X(t) = 0$ ולכל $t \ge C$ יתקיים $F_X(t) = 1$. לכן:

$$P(X = C) = \lim_{t \to C^+} F_X(t) - \lim_{t \to C^-} F_X(t) = 1$$

כנדרש.

ד. נבחר $-1 < t < 1$ נשים לב כי:

$$F_X(t) = P(X \le t) = P(X \le t \cap Y \in \mathbb{R}) = \iint_{(-\infty,t]\times\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{t} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} e^{-3y} dy = \int_{-0}^{\infty} \frac{3}{2}(t+1)\, e^{-3y} dxdy = -\frac{1}{2}(t+1)[e^{-3y}]_0^{\infty} = \frac{1}{2}(t+1)$$

ולכן ניתן לכתוב את פונקציית ההתפלגות של X באופן הבא:

$$F_X(t)=\begin{cases}1 & t>1\\ \frac{1}{2}(t+1) & -1<t<1\\ 0 & t<-1\end{cases}$$

וכן עתה, אם נבחר $t\geq 0$:

$$F_Y(t)=P(Y\leq t)=P(Y\leq t\cap X\in\mathbb{R})=\iint_{\mathbb{R}\times(-\infty,t]}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_0^t\frac{3}{2}e^{-3y}dy=3\int_0^t e^{-3y}dy$$
$$=[-e^{-3y}]_0^t=1-e^{-3t}$$

כלומר ניתן לכתוב את ההתפלגות של Y באופן הבא:

$$F_Y(t)=\begin{cases}1-e^{-3y} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

ועתה נשים לב כי עבור $-1<x<1, y\geq 0$ מתקיים:

$$F_{(X,Y)}(x,y)=\iint_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]}f_{(X,Y)}(\tilde{x},\tilde{y})d\tilde{x}d\tilde{y}=\int_{-1}^{x}d\tilde{x}\int_0^y\frac{3}{2}e^{-3\tilde{y}}d\tilde{y}=\frac{1}{2}(x+1)[1-e^{-3y}]=F_X(x)F_Y(y)$$

ובעבור יתר התחום, נקבל כי מדובר לפחות באחד מהרכיבים, באינטגרל על פונקציית האפס, כך שאכן ביתר התחום נקבל גם כן זהותית אפס בהתאם למכפלה בין הפונקציות התפלגות.

כלומר קיבלנו:

$$F_{(X,Y)}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

כלומר המשתנים אכן בלתי תלויים כדרוש.

שאלה 2:

נתונה $f_{(X,Y)}$ פונקציית הצפיפות של וקטור דו ממדי (X,Y) כך שמתקיים:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}ce^{-\lambda x} & 0<y<x\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

א. נרצה למצוא את c ולשם כך נזכור כי האינטגרל על כל $\mathbb{R}^2$ חייב להיות 1. נחשב:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}F_{(X,Y)}(x,y)=\iint_{\mathbb{R}^2}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$$

כמו כן, נשים לב כי $f_{(X,Y)}\equiv 0$ בתחום שבו $x>y$ ובתחום שבהם $y<0$ או $x<0$. כלומר תחום האינטגרציה הם $x\in[0,\infty)$ ולכל x תחום האינטגרציה של y יהיה $y\in[0,x)$. ולכן נקבל:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\int_0^\infty\left(\int_0^x ce^{-\lambda x}dy\right)dx=\int_0^\infty cxe^{-\lambda x}dx=c\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx\ (\star)$$

נחשב בנפרד לפי אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\left[-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx=\left[-\lambda xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty+\left[-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty=\frac{1}{\lambda^2}$$

נציב בחזרה ב-$(\star)$ ונקבל כי:

$$(\star)=\frac{c}{\lambda^2}\overset{\text{נדרוש}}{=}1\Longrightarrow\boxed{c=\lambda^2}$$

ב. עתה נוכל לחשב את פונקציות הצפיפות בהתאם:

$$F_X(t)=P(X\leq t)=P(X\leq t\cap Y\in\mathbb{R})=\iint_{(-\infty,t]\times\mathbb{R}}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\int_0^t\left(\int_0^x\lambda^2e^{-\lambda x}dy\right)dx=\int_0^t\lambda^2xe^{-\lambda x}dx$$
$$=\left[-\lambda xe^{-\lambda x}\right]_0^t+\int_0^t\lambda e^{-\lambda x}dx=-\lambda te^{-\lambda t}+\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=-\lambda te^{-\lambda t}-e^{-\lambda t}+1$$

$$\boxed{F_X(t)=\begin{cases}1-(\lambda t+1)e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}}$$

$$F_Y(t)=P(Y\leq t)=P(X\in\mathbb{R}\cap Y\leq t)=\iint_{\mathbb{R}\times(-\infty,t]}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$$

והפעם גבולות האינטגרציה שלנו יהיו שונים. זאת משום שלכל $0<y<t$ מתאימים הערכים $x>y$ בלבד. כלומר לכל y כנ"ל עלינו לבצע אינטגרציה על x בתחום (y,∞). נציב ונקבל:

$$=\int_0^t\left(\int_y^\infty \lambda^2e^{-\lambda x}dx\right)dy=\int_0^t\left[-\lambda e^{-\lambda x}\right]_y^\infty dy=\int_0^t \lambda e^{-\lambda y}dy=\left[-e^{-\lambda y}\right]_0^t=1-e^{-\lambda t}$$

$$\boxed{F_Y(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}}$$

ג. נרצה לחשב את $P\left(Y<\frac{X}{2}\right)$. כלומר נרצה לחשב:

$$P\left(\left\{(X,Y)\in\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|y<\frac{x}{2}\right\}\right\}\right)$$

היות ו-(X,Y) וקטור מקרי רציף בהחלט, נוכל להיעזר בפונקציית הצפיפות ולסכום אותה בתחום הנ"ל. לשם כך נשים לב כי לכל $x\in\mathbb{R}^2$, התחום אותו אנו מעוניינים לסכום הוא התחום $y\in\left(-\infty,\frac{x}{2}\right)$. כאמור נדרוש בנוסף $x>0,y>0$ שכן ממילא הצפיפות שם זהותית אפס. נקבל סה"כ:

$$P\left(Y<\frac{X}{2}\right)=\iint_{\mathcal{D}}f_{(X,Y)}(x,y)dxdy=\int_0^\infty\left(\int_0^{\frac{x}{2}}\lambda^2e^{-\lambda x}dy\right)dx=\int_0^\infty\left[-\lambda^2ye^{-\lambda x}\right]_0^{\frac{x}{2}}dx=\int_0^\infty -\frac{\lambda^2}{2}xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\left[\frac{\lambda}{2}xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty-\int_0^\infty\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx=-\left[\frac{1}{2}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{P\left(Y<\frac{X}{2}\right)=\frac{1}{2}}$$

ד. על פי הגדרה, מתקיים:

$$E[XY]=\iint_{\mathbb{R}^2}xyf_{(X,Y)}(x,y)dxdy\overset{0<y<x}{=}\int_0^\infty\left(\int_0^x xy\lambda^2e^{-\lambda x}dy\right)dx=\int_0^\infty x\lambda^2e^{-\lambda x}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2}x^3\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2}\lambda^2\overbrace{\int_0^\infty x^3e^{-\lambda x}dx}^{(\star)}$$

נחשב אינטגרל זה בנפרד:

$$(\star)\int_0^\infty x^3e^{-\lambda x}dx=\left[-\frac{1}{\lambda}x^3e^{-\lambda x}\right]_0^\infty-\int_0^\infty-\frac{3}{\lambda}x^2e^{-\lambda x}\,dx=\overbrace{\left[-\frac{1}{\lambda}x^3e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}^{=0}+\frac{3}{\lambda}\int_0^\infty x^2e^{-\lambda x}dx$$

$$\frac{3}{\lambda}\overbrace{\left[-\frac{1}{\lambda}x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}^{=0}-\frac{3}{\lambda}\int_0^\infty-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}dx=\frac{6}{\lambda^2}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\frac{6}{\lambda^2}\left[-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty-\frac{6}{\lambda^2}\int_0^\infty-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{6}{\lambda^3}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty=\frac{6}{\lambda^3}$$

$$\boxed{E[XY]=\frac{3}{\lambda}}$$

נחשב את השונות המשותפת:

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

ולשם כך נחשב את התוחלת של X,Y בנפרד.

$$E[X]\overset{\text{משתנה אי שלילי}}{=}\int_0^\infty 1-F_X(t)dt=\int_0^\infty 1-\left(1-(\lambda t+1)e^{-\lambda t}\right)dt=\int_0^\infty(\lambda t+1)e^{-\lambda t}dt$$

$$=\left[-\frac{1}{\lambda}(\lambda t+1)e^{-\lambda t}\right]_0^\infty-\int_0^\infty -e^{-\lambda t}dt=\left[\left(-t-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^\infty-\left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^\infty=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}$$

$$E[Y]\overset{\text{משתנה אי שלילי}}{=}\int_0^\infty 1-F_Y(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

כלומר:

$$E[X]E[Y]=\frac{2}{\lambda^2}$$

ולכן:

$$\boxed{Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{3}{\lambda}-\frac{2}{\lambda^2}}$$

<u>שאלה 3:</u>

נתונים X,Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי פונקציות התפלגות:

$$F(z)=\begin{cases}\frac{z-1}{z} & z\geq 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נרצה לחשב את $f_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)$.

פונקציית הצפיפות של X ו-Y נגזרת מההתפלגות:

$$f_X(t)=f_Y(t)=F'(t)=\begin{cases}\frac{1}{t^2} & t\geq 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

והיות והמשתנים בלתי תלויים, נסיק כי הצפיפות המשותפת שלהם נתונה על ידי:

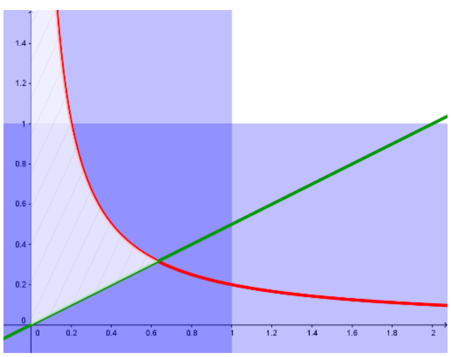
$$f_{(X,Y)}(t,k)=f_X(t)f_Y(k)=\begin{cases}\frac{1}{(tk)^2} & t,k\geq 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

עתה, נרצה לחשב את $F_{(X,Y)}(u,v)$. לשם כך נשים לב כי על פי הגדרה:

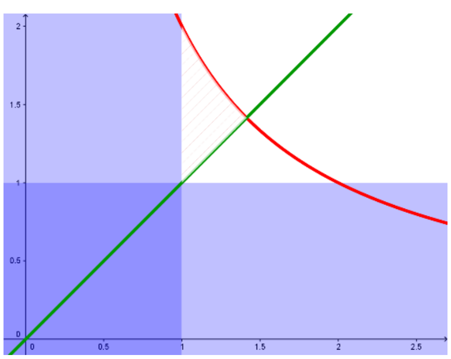
$$F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=P\left(\left\{\frac{X}{Y}\leq u\right\}\cap\{XY\leq v\}\right)$$

ועתה נפריד למקרים:

- $u<0,v<0$ – במקרה זה נקבל כי שני איי השוויון לא מתקיימים לאף x,y שמתקבלים על ידי X,Y שכן הם מקבלים ערכים חיוביים ממש ולכן נקבל כי במקרה זה $F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=0$.
- $v<1$ – במקרה זה נשים לב כי המאורע הראשון הוא $XY\leq v<1$ אך הנ"ל קורה בהסתברות 0 שכן X,Y מקבלים ערכים גדולים או שווים ל-1 בלבד. לכן עבור $v<1$ נקבל כי מתקיים $F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=0$.



- $uv<1$ – במקרה זה, נראה גם כי מתקיים $F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=0$. נשים לב כי את המאורע ההסתברות המבוקש נוכל לכתוב על ידי:
$$\left\{Y\geq\frac{1}{u}X\right\}\cap\left\{Y\leq\frac{v}{X}\right\}$$
נשים לב כי התחומים הנוצרים על ידי מאורעות אלה ב-$\mathbb{R}^2$ הם החיתוך בין תחום הנמצא מתחת להיפרבולה $y=\frac{v}{x}$ לבין התחום הנמצא מעל הקו הישר $y=\frac{1}{u}x$.
כאמור הנחנו כי $v\geq 1$ הפעם ולכן נסיק כי $u<1$. כאמור התחום בו הנקודות מקיימות את אי שוויון אלה יהיה נקודות בתחום הנ"ל. על מנת לאפיין תחום זה נרצה למצוא את נקודת החיתוך. ונשים לב כי:
$$\frac{1}{u}x=\frac{v}{x}\Longrightarrow x=\sqrt{uv}<1$$
כלומר, התחום כולו נמצא משמאל ל-$x=1$ בו X,Y לא מקבלים ערכים ולכן במקרה זה $F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=0$.



- נניח אם כן, כי $uv>1,u>0,v>1$. במצב זה נקודת החיתוך הינה הנקודה $\sqrt{uv}>1$ ולכן קיים תחום בין הישר לעקום ובתחום בו X,Y מקבלים ערכים, קרי $x>1,y>1$, כמתואר באיור.
עבור תחום זה נוכל לקבל את ההסתברות לקבל אותו באמצעות שימוש בצפיפות של הוקטור (X,Y) עבור התחום:
$$\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|1<x<\sqrt{uv}\quad\frac{1}{u}x<y<\frac{v}{x}\right\}$$
ולכן:

$$F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=\iint_{\mathcal{D}} f_{(X,Y)}(u,v)dxdy=\int_1^{\sqrt{uv}}\left(\int_{\frac{1}{u}x}^{\frac{v}{x}}\frac{1}{(xy)^2}dy\right)dx=\int_1^{\sqrt{uv}}\left[-\frac{1}{x^2y}\right]_{\frac{1}{u}x}^{\frac{v}{x}}dx=\int_1^{\sqrt{uv}}-\frac{1}{xv}+\frac{u}{x^3}dx$$

$$\left[-\frac{1}{v}\ln x-\frac{u}{2x^2}\right]_1^{\sqrt{uv}}=-\frac{\frac{1}{2}\ln uv}{v}-\frac{1}{2v}+\frac{u}{2}$$

לכן, נוכל לקבל את $f_{\left(\frac{X}{Y}XY\right)}(u,v)=\frac{\partial^2 F_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}}{\partial u\partial v}$ כלומר:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\frac{1}{2}\ln uv}{v}-\frac{1}{2v}+\frac{u}{2}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{1}{2v}\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2v^2u}$$

$$\boxed{f_{\left(\frac{X}{Y},XY\right)}(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{2v^2u} & v>1,uv>1,v>0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}}$$

שאלה 4:

בוחרים מספר באופן אחיד מתוך הקבוצה $[N]\coloneqq\{1,2,3,\cdots,N\}$ ומסמנים מספר זה ב-X_1. בוחרים נקודה באופן אחיד מתוך המספרים $\{1,2,\cdots,X_1\}$ ומסמנים נקודה זו ב-X_2. נרצה למצוא את ההתפלגות של הוקטור X_2.

ראשית נשים לב כי X_1 מקבל ערכים ב-$[N]$ בהסתברות אחידה, כלומר:

$$\forall i\in[N]\quad P(X_1=i)=\frac{1}{N}$$

עבור X_2, אנו יודעים כי בהנתן שנבחר i, לכל $i\in[N]$, מתקיים:

$$P(X_2=j|X_1=i)=\frac{1+\delta_{ij}}{N+1}\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

כאמור נשים לב כי בהתאם לנוסחת ההסתברות השלמה, ניתן לחשב:

$$P(X_2=j)=\sum_{i\in[N]}P(X_2=j|X_1=i)P(X_1=i)$$

נשים לב כי בסכום זה, לכל $i\neq j$, נקבל את ההסתברות $\frac{1}{N+1}$ ועבור $i=j$ נקבל את ההסתברות $\frac{2}{N+1}$. סה"כ נקבל $N-1$ איברים שהסתברותם $\frac{1}{N+1}$ ואיבר יחיד שהסתברותו $\frac{2}{N+1}$. סה"כ:

$$P(X_2=j)=(N-1)\frac{1}{N+1}\frac{1}{N}+\frac{2}{N+1}\frac{1}{N}=\frac{N-1}{N(N+1)}+\frac{2}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}$$

לכן נוכל להגדיר עתה את התפלגות עבור משתנים אלה:

$$F_{X_1}(i)=F_{X_2}(j)=\begin{cases}1 & i>N\\ \frac{\lfloor i\rfloor}{N} & 1\leq i\leq N\\ 0 & i<1\end{cases}$$

עתה משאנו יודעים את ההתפלגות של שני המשתנים בנפרד, ויודעים אף כי היא שווה, נתבונן בווקטור המקרי (X_1,X_2). נמצא את ההתפלגות של ווקטור זה.

ראשית, עבור $i<1$ או $j<1$ ודאי שיתקיים $F_{(X_1,X_2)}(i,j)=0$. עבור $i>N$ נקבל כי $F_{(X_1,X_2)}(i,j)=F_{X_2}(j)$ שכן לכל תוצאה אפשרית של בחירת המספר נקבל כי $X_1\leq N$. באותו אופן אם $j>N$ נקבל כי $F_{(X_1,X_2)}(i,j)=F_{X_1}(i)$. כאמור מכאן מידי להסיק שעבור $i,j>N$ נקבל כי $F_{(X_1,X_2)}(i,j)=1$.

עתה נתבונן במקרים שבהם $1\leq i,j\leq N$. נשים לב כי:

$$F_{(X_1,Y_1)}(i,j)=P(\{X_1\leq i\}\cap\{X_2\leq j\})$$

נפריד עתה למקרים (נניח כי הם שלמים. התוצאה תהיה זהה בעיגול לערך השלם המתאים):

א. $j < i$ – ראינו כי באופן כללי לכל $1 \le j' \le j$ מתקיים:

$$P(X_2 = j' | X_1 = i') = \frac{1 + \delta_{i'j'}}{N + 1}$$

ולכן היות וכל תוצאה i', j' כנ"ל המאורעות יהיו זרים, נוכל לסכום:

$$P(\{X_1 \le i\} \cap \{X_2 \le j\}) = \sum_{1 \le j' \le j} P(\{X_1 \le i\} \cap \{X_2 = j'\}) \overset{\text{בייס}}{=} \sum_{1 \le j' \le j} \sum_{1 \le i' \le i} P(X_2 = j' | X_1 = i') P(X_1 = i')$$

$$= \sum_{1 \le j' \le j} \sum_{1 \le i' \le i} \frac{1 + \delta_{i'j'}}{N(N + 1)} (\star)$$

כדי לחשב את הסכום הנ"ל, נשים לב כי לכל j', הסכום הפנימי מכיל בדיוק i איברים. בהנתן $j' \le i$ נקבל כי קיים איבר אחד בדיוק בסכום שהוא מגודל $\frac{2}{N(N+1)}$, אך אם $j' > i$ נקבל כי כל האיברים הם $\frac{1}{N(N+1)}$.

מכאן שנוכל לכתוב:

$$(\star) = i \left[\frac{2}{N(N + 1)} + \frac{(i - 1)}{N(N + 1)} \right] + (j - i) \frac{i}{N(N + 1)} = \frac{i(i + 1)}{N(N + 1)} + \frac{(j - i)i}{N(N + 1)} = \frac{i(i + 1 + j - i)}{N(N + 1)} = \frac{i(j + 1)}{N(N + 1)}$$

כלומר, במקרה זה נקבל כי:

$$F_{(X_1, X_2)}(i, j) = \frac{i(j + 1)}{N(N + 1)}$$

ב. $j \ge i$ – במקרה זה סכום דומה לזה שקיבלנו במקרה הראשון, אלא שכן לכל j קיים מהשיקול שהפעלנו קודם לכן, מאורע מבין האיחוד שהסתברותו $\frac{2}{N(N+1)}$. לכן במקרה זה נקבל:

$$P(\{X_1 \le i\} \cap P\{X_2 \le j\}) = j \left[\frac{2}{N(N + 1)} + \frac{i - 1}{N(N + 1)} \right] = \frac{j(i + 1)}{N(N + 1)}$$

ונוכל לסכם:

$$\boxed{F_{(X_1, X_2)}(i, j) = \begin{cases} 1 & i > N, j > N \\ \lfloor j \rfloor & i > N, 1 \le j \le N \\ \lfloor i \rfloor & 1 \le i \le N, j > N \\ \dfrac{i(j + 1)}{N(N + 1)} & 1 \le i < j \le N \\ \dfrac{j(i + 1)}{N(N + 1)} & 1 \le j < i \le N \\ 0 & i < 1 \text{ או } j < 1 \end{cases}}$$