פתרון דף תרגילים 5

1. א. נסמן (c_1,c_2) ונקבל $\langle a,c\rangle = c_1+2c_2=-1, \langle b,c\rangle = -c_1+c_2=3$. מכאן $c_1=-\frac{7}{3}, c_2=\frac{2}{3}$.

ב. נקח $\alpha=(a_1,a_2)$ ונקבל $\langle \alpha,e_1\rangle e_1+\langle \alpha,e_2\rangle e_2 = a_1e_1+a_2e_2=\alpha$ כנדרש.

2.. נשים לב כי לכל מטריצה A הפונקציה f_A הינה בילנארית. לכן נותר לבדוק את דרישת הסימטריות והאי שליליות. נשים לב כי $f_A(e_i,e_j)=a_{j,i}:=A_{j,i}$. כעת f_A סימטרית אמ"ם לכל i,j מתקיים $a_{j,i}=f_A(e_i,e_j)=f_A(e_j,e_i)=a_{i,j}$. כלומר f_A סימטרית אמ"ם A סימטרית.

נניח כעת כי A סימטרית ונבדוק אי שליליות.

f_A אי שלילית אמ"מ לכל $b=(b_1,b_2)$ מתקיים $f_A(b,b)\geq 0$ כאשר שוויון מתקיים אמ"מ $b=0$.

כעת $f_A(b,b)=b_1^2f_A(e_1,e_1)+b_1b_2f_A(e_1,e_2)+b_2b_1f_A(e_2,e_1)+b_2^2f_A(e_2,e_2)=$

$=b_1^2a_{11}+2b_1b_2a_{1,2}+b_2^2a_{2,2}$

ע"י הצבת $b=e_1,e_2$ נקבל כי בהכרח $a_{1,1},a_{2,2}>0$. כעת תחת הנחה זו

$f_A(b,b)\geq 0$ אמ"ם $a_{11}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2+2a_{12}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)+a_{22}\geq 0$ עבור כל b_1 ו $b_2\neq 0$ או תנאי הפוך דומה אם $b_1\neq 0$. נקבל $f_A(b,b)>0$ אמם $4a_{12}^2-4a_{22}a_{11}>0$ אמם $\det(A)>0$. נסכם באבחנה כי $f_A(b,b)\geq 0$ עם שוויון רק עבור $b=0$ אמ"ם $a_{11},a_{22},\det(A)>0$.

3. א. נשים לב כי אכן

$\int_0^1\Sigma_{i=0}^n a_ix^i\Sigma_{j=0}^m b_jx^j\,dx=\int_0^1\Sigma_{i,j=0}^{m,m}a_ib_jx^{i+j}\,dx=\Sigma_{i,j=0}^{m,m}\frac{a_ib_j}{i+j+1}$.

כלומר לכל זוג פולינומים f,g מתקיים $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$. מכאן בבירור $\langle,\rangle$ סימטרית ובילנארית. נבדוק אי שליליות, מתקיים $\langle f,f\rangle=\int_0^1 f(x)^2dx\geq 0$ כאשר שוויון מתקיים אמ"ם $f=0$.

ב. נגדיר $A=\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{m,m}$ ונקבל

$(b_0,b_1,\dots,b_m)A\begin{pmatrix}c_0\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=\Sigma_{i,j=0}^{m,m}\frac{b_ic_j}{i+j+1}$ כלומר A זו המטריצה הנדרשת.

4. יחידות: נניח כי יש v,w עבורם $\langle v,v_i\rangle=\langle w,v_i\rangle$. כיוון ש$v_i$ בסיס נקבל כי $\langle v,u\rangle=\langle w,u\rangle$ לכל $u\in V$ או $\langle v-w,u\rangle=0$ לכל u. מכאן $v=w$.

נסמן $a_{i,j}=\langle v_j,v_i\rangle$ ונקבל $\langle [u]_B,[v]_B\rangle=u^TAv$. כעת A הפיכה שכן אחרת היה $0\neq v\in V$ עבורו $Av=0$ ואז $v^TAv=0$ בסתירה לכך ש$\langle,\rangle$ מכפלה פנימית. כיוון ש$[e_i]_B=v_i$ אוסף המשוואות מתרגם למשוואות $e_i^TAv=c_i$ או $IAv=c:=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ כיוון שA הפיכה למע' קיים פתרון v.

5. א. נשים לב כי $v=\frac{v+Jv}{2}+\frac{-iv+iJv}{2}i$ כאשר $J\left(\frac{v+Jv}{2}\right)=\frac{Jv+J^2v}{2}=\frac{v+Jv}{2}$ ועל כן $\frac{v+Jv}{2}\in W$. וגם $J\left(\frac{-iv+iJv}{2}\right)=\frac{iJv-iJ^2v}{2}=\frac{-iv+iJv}{2}$ כלומר $\frac{-iv+iJv}{2}\in W$. קיבלנו לכל וקטור v פירוק $v=u+iw$ כאשר $u,w\in W$. מכאן g נקבעת ע"י ערכיה בW. אם נניח $g_{|W}=f$ נקבל:

$$\begin{aligned} g(u_1+iw_1,u_2+iw_2) &= g(u_1,u_2)+ig(w_1,u_2)-ig(u_1,w_1)+g(w_1,w_2) \\ &= f(u_1,u_2)+if(w_1,u_2)-if(u_1,w_1)+f(w_1,w_2) \end{aligned}$$

כלומר g נקבעת באופן יחיד ע"י f.

ב. נקבל
$$g\big(J(u_1+iw_1),J(u_2+iw_2)\big)=g(u_1-iw_1,u_2-iw_2)=g(u_1,u_2)-ig(w_1,u_2)+ ig(u_1,w_2)+g(w_1,w_2)=g(u_2+iw_2,u_1+iw_1)$$

.