אינטגרלים כפולים

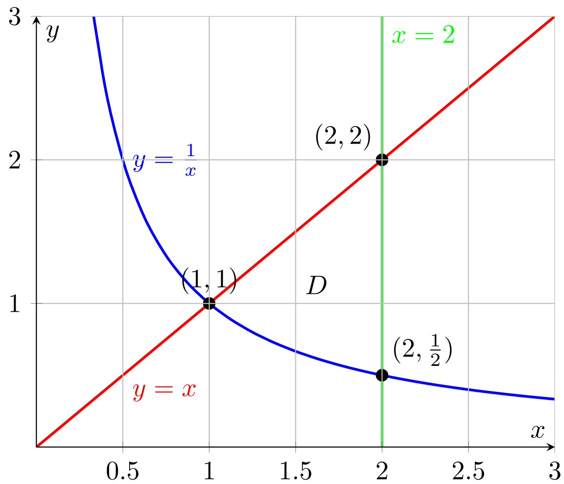
תרגיל 1:

חשבו את האינטגרל הבא בתחום D המוגדר ע"י: $0 \le x \le 2,\ y \le x,\ y \ge \frac{1}{x}$.

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dxdy}$$

פתרון:

נשרטט תחילה את התחום D.



נבצע אינטגרציה ע"י אנטגרלים נשנים. נבחר את הפרמטר החיצוני להיות x והפנימי להיות y.

הגבולות של x: כדי למצוא את הגבולות נשאל מהם ה x־ים כך שקיים y עבורם $(x,y) \in D$ (או במילים אחרות, אם מטילים את D על ציר x, מה הקבוצה המתקבלת). התנאים סה"כ הם $0 \le x \le 2$ ו $\frac{1}{x} \le y \le x$. כדי שיהיה y שיקיים את התנאים נקבל ש $\frac{1}{x} \le x$ כלומר $1 \le x^2$ ויחד עם זה ש x חיובי נקבל ש $1 \le x \le 2$. שימו לב שקל לראות את זה בציור.

הגבולות של y: בהינתן x_0 כלשהו, מהם ה y כך ש $(x_0, y) \in D$? קל עכשיו לראות שהתנאים הם $\frac{1}{x_0} \le y \le x_0$ (בציור ־ y נע מהקו $y = \frac{1}{x}$ התחתון לקו $y = x$ העליון). סה"כ נקבל את האינטגרל

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dxdy} &= \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{1/x}^{x}\mathrm{dx} = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{x} - \left(-\frac{x^2}{1/x}\right)\right]\mathrm{dx} = \int_1^2 \left[x^3 - x\right]\mathrm{dx} \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{16}{4} - \frac{4}{2}\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

ניתן לעשות את אותו הדבר עם סדר אינטגרציה הפוך, אך נשים לב שבעוד שעבור y_0 נתון הגבול העליון של x הוא תמיד 2, הגבול התחתון ניתן ע"י שתי פונקציות ־ פעם אחת $x = y$ ופעם אחת $x = \frac{1}{y}$ (כתלות בהאם $1 \le y \le 2$ או $\frac{1}{2} < y < 1$). לכן

נפריד את האינטגרל לשתיים כדי שיהיה יותר נח לרשום אותו:

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1}\left[\int_{1/y}^{2}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} \quad &+ \quad \int_{1}^{2}\left[\int_{y}^{2}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} = \int_{1/2}^{1}\left[\frac{1}{3}\frac{8-\frac{1}{y^3}}{y^2}\right]\mathrm{dy} + \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{3}\frac{8-y^3}{y^2}\right]\mathrm{dy} \\ &= \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\left[\frac{8}{y^2}-\frac{1}{y^5}\right]\mathrm{dy} + \frac{1}{3}\int_{1}^{2}\left[\frac{8}{y^2}-y\right]\mathrm{dy} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4y^4}-\frac{8}{y}\right]_{1/2}^{1} + \frac{1}{3}\left[-\frac{y^2}{2}-\frac{8}{y}\right]_{1}^{2} \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}-8-\frac{16}{4}+16\right] + \frac{1}{3}\left[-\frac{4}{2}-\frac{8}{2}+\frac{1}{2}+\frac{16}{2}\right] = \frac{17}{12}+\frac{10}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}\end{aligned}$$

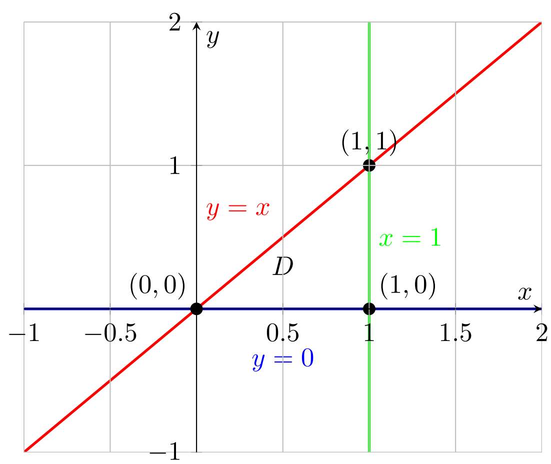
תרגיל 2:

חשבו את האינטגרל הבא

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{y}^{1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}$$

פתרון:

אנחנו לא יודעים מה הפונקציה הקדומה של $\frac{\sin(x)}{x}$ לפי x ולכן לא ניתן לעשות את האינטגרל הפנימי (הערה: לפונקציה $\frac{\sin(x)}{x}$ לא קיימת פונקציה קדומה **אלמנטרית**, למרות שכמובן כן קיימת לה פונקציה קדומה, למשל בגלל שהיא רציפה). אם נחליף את סדרה האינטגרציה, אז יהיה יותר פשוט כי קל לעשות ל $\frac{\sin(x)}{x}$ אינטגרל לפי y. בשביל זה צריך למצוא מה התחום אינטגרציה: הפרמטר y נמצא ב $0 \le y \le 1$, ובהינתן y הפרמטר x נמצא ב $y \le x \le 1$, כלומר בין הישרים $x = y$ ו $x = 1$. ובציור נקבל את התחום



לכן אם מסתכלים קודם על x אז הוא נע בין 0 ל 1 ובהינתן x, הפרמטר y נע בין 0 ל x ונקבל

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{y}^{1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} \quad = \quad \int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_{0}^{1}\sin x\mathrm{dx} = -\cos(x)\mid_{0}^{1} = 1-\cos(1)$$

תרגיל 3:

חשבו את $a \geq 0 \quad ; \quad I(a) = \int_0^a \arctan(\sqrt{x})\mathrm{dx}$.

פתרון 1:

נשים לב ש

$$\int_0^b \frac{\mathrm{dy}}{1+y^2} = \arctan(b) - \arctan(0) = \arctan(b)$$

ולכן

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{dy}}{1+y^2}\right]\mathrm{dx} = \int_0^{\sqrt{a}} \left[\int_{y^2}^a \frac{\mathrm{dx}}{1+y^2}\right]\mathrm{dy} = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{a-y^2}{1+y^2}\mathrm{dy} = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{a+1-1-y^2}{1+y^2}\mathrm{dy} \\ &= \int_0^{\sqrt{a}} \left(\frac{a+1}{1+y^2} - 1\right)\mathrm{dy} = \left[(a+1)\arctan(y) - y\right]_0^{\sqrt{a}} = (a+1)\arctan(\sqrt{a}) - \sqrt{a} \end{aligned}$$

פתרון 2:

ניתן לנסות לפתור באמצעות טורים (רק בתחום ההתכנסות ובמקרה שלנו זה יהיה $0 \leq a \leq 1$). ניזכר תחילה ש $\arctan(t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$ כאשר ההתכנסות היא במ"ש ב $[-1,1]$ ולכן $\arctan(\sqrt{x}) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{x})^{2n+1}$ בתחום $[0,1]$ כאשר גם פה ההתכנסות היא במ"ש. מכאן מקבלים ש

$$\begin{aligned} \int_0^a \arctan(\sqrt{x})\mathrm{dx} &= \int_0^a \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{x})^{2n+1}\mathrm{dx} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{dx} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{a^{n+\frac{3}{2}}}{n+\frac{3}{2}}\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{\sqrt{a}^{2n+3}}{2n+3}\mathrm{dx} \end{aligned}$$

נותר לבדוק מהו הטור $f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{2n+3} x^{2n+3}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} = x \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x\arctan(x) \\ f(x) &= \int x\arctan(x)\mathrm{dx} = x^2\arctan(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{dx} = x^2\arctan(x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{dx} \\ &= x^2\arctan(x) - x + \arctan(x) + C = \left(x^2+1\right)\arctan(x) - x + C \end{aligned}$$

הצבה של $x=0$ נותנת $f(x)=0$ ולכן $C=0$. מחפשים את $f(\sqrt{a})$ ומקבלים

$$f(\sqrt{a}) = (a+1)\arctan(\sqrt{a}) - \sqrt{a}.$$

הערה: אם $f(x,y)$ לא רציפה אז לא בהכרח אפשר להפוך את סדר האינטגרציה. למשל עבור

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

יש אי רציפות רק בראשית, והפונקציה מקיימת ש

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy} = \frac{\pi}{4} \qquad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = -\frac{\pi}{4}$$

החלפת משתנים

יהיו $D, D' \subseteq \mathbb{R}^2$ שני תחומים ושתי פונקציות $x(u,v), y(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ כך שהצמצום שלהן ל D' הוא חח"ע ועל D. נניח בנוסף ש $0 \neq \left| det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \right| = \left| det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right) \right| = J(u,v)$ לכל נקודה $(u,v) \in D'$ אז מתקיים ש

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \iint_{D'} f(\, x(u,v),\ y(u,v)\,) \cdot J(u,v) \cdot \mathrm{dudv}$$

תרגיל 4: חשבו את האינטגרלים הבאים

$$\int_{D_1} (x^2+y^2)\mathrm{dxdy} \qquad D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1 \quad y \ge x\}$$
$$\int_{D_2} e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{dxdy} \qquad D_2 = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x+y \le 2\}$$

פתרון:

.1

$$(x,y) = r(\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \Rightarrow \quad D'_1 = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1 \quad \sin(\theta) \ge \cos(\theta)\} = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1 \quad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}\right\}$$
$$\frac{\partial x,y}{\partial r,\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \left|\frac{\partial x,y}{\partial r,\theta}\right| = r$$
$$\int_{D'_1} (x^2+y^2)\mathrm{dxdy} = \int_0^1 \left[\int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^2 \cdot r\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{dr} = \int_0^1 \left[r^3\pi\right]\mathrm{dr} = \frac{\pi}{4}$$

2. כדי לפשט את הפונקציה באינטגרנד נבחר את ההצבה $u = x+y$, $v = x-y$, או לחלופין $x = \frac{u+v}{2}$ ו $y = \frac{u-v}{2}$.

$$\begin{aligned} u &= x+y,\ v = x-y \quad \Rightarrow \quad D'_2 = \left\{(u,v) \mid \frac{u+v}{2} \ge 0,\ \frac{u-v}{2} \ge 0,\ 1 \le u \le 2\right\} \\ &= \{(u,v) \mid v \ge -u,\ u \ge v,\ 1 \le u \le 2\} \end{aligned}$$
$$J(u,v) = \left|\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$
$$\int_{D_2} e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{dxdy} = \int_1^2 \left[\int_{-u}^{u} \frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}\mathrm{dv}\right]\mathrm{du} = \frac{1}{2}\int_1^2 \left[ue^{\frac{v}{u}}\right]_{v=-u}^{u}\mathrm{du} = \frac{1}{2}\int_1^2 u\left(e-e^{-1}\right)\mathrm{du} = \frac{3}{4}\left(e-e^{-1}\right)$$

הערה 1: ההעתקה $x(u,v), y(u,v) : D' \to D$ לא חייבת להיות "ממש" חח"ע ועל. למשל, בתרגיל הראשון היא לא חח"ע כי $x(0,\theta) = 0$ לכל θ. זה אינו משפיע על החישוב מאחר והקבוצה $\{(0,\theta)\}$ היא קבוצה ממידה אפס (זהו קו ב $\mathbb{R}^2$ ולכן אין לו שטח). באותה צורה מספיק שהתמונה תהיה "כמעט" כל D, כלומר הכל פרט לקבוצה ממידה אפס.

הערה 2: לעיתים קל יותר למצוא את העתקות ההפוכות $u := u(x,y)$ ו $v := v(x,y)$ ולהוכיח בצורה כלשהי שקיימות העתקות $x := x(u,v), y := y(u,v)$ שהן חח"ע ועל בלי ממש למצוא אותן. במקרה זה (כפי שרואים באינפי 3) מתקיים ש

$$\left|\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right| = \left|\det\left(\frac{\partial u,v}{\partial x,y}\right)\right|^{-1}$$

למרות שצריך לשים לב שבדרך אגף שמאל יהיה נתון במשתנים u,v בעוד שאגף ימין במשתנים x,y. למשל, בתרגיל השני מתקיים ש

$$\left|\det\left(\frac{\partial u,v}{\partial x,y}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left|\det\left(\frac{\partial x,y}{\partial u,v}\right)\right| .$$

תרגיל 5:

חשבו את $\iint_D \sqrt{xy}\mathrm{dxdy}$ כאשר D התחום החסום בין $y=\frac{9}{x},\ y=\frac{4}{x}$, $y^2=3x$ ו $y^2=6x$.

פתרון:

נבחר הצבה כך שהתחום החדש יהיה יותר יפה. נסמן $u=yx$ ו $v=\frac{y^2}{x}$ ואז התחום החדש יהיה $D'=\{(u,v)\mid\ 4\le u\le 9,\ 3\le v\le 6\}$ שהוא מלבן. כדי למצוא את x,y בפונקציה של u,v נשים לב ש $uv=y^3$ ולכן $y=\sqrt[3]{uv}$ ואז $x=\frac{u}{y}=\frac{u}{\sqrt[3]{uv}}$ (לשים לב שבתחום שלנו $uv\neq 0$). מאחר וקיבלנו העתקות הופכיות אחת לשנייה אז הן חח"ע ועל בין D ו D'.

במקום לחשב את היעקוביאן $\frac{\partial x,y}{\partial u,v}$, נחשב את $\frac{\partial u,v}{\partial x,y}$ שנראה יותר פשוט (אין שורש שלישי) ואז ניקח את ההופכי:

$$\det\left(\frac{\partial u,v}{\partial x,y}\right)=\det\begin{pmatrix} y & x\\ -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x}\end{pmatrix}=3\frac{y^2}{x}=3v$$

$$.\iint_D\sqrt{xy}\mathrm{dxdy}=\iint_{D'}\sqrt{u}(3v)^{-1}\mathrm{dudv}=\frac{1}{3}\int_4^9\sqrt{u}\mathrm{du}\int_3^6\frac{1}{v}\mathrm{dv}=\frac{1}{3}u^{3/2}\mid_4^9\ln(v)\mid_3^6$$

תרגיל 6: (לא היה בכיתה) חשבו את האינטגרל $\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$ כאשר $f(x,y)=\frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}$ ו התחום נתון ע"י $D=\left\{(x,y)\mid 1-x\le y\le 4-x,\quad 4x^3\le y\le 16x^3\right\}$

פתרון: נשים לב שאם $x\le 6$ אז $y\le 16x^3\le 0$ ואז $x+y\le 0$, אבל מצד שני צריך להתקיים ש $x+y\ge 1$ ונקבל סתירה. לכן מקבלים שאם $(x,y)\in D$ אז $x>0$ ולכן גם $y\ge 4x^3>0$. נעביר תחילה למערכת קורדינטות יותר קלה $u=x+y$, $v=\frac{y}{x^3}$ (לא חילקנו באפס!) ואז $D'=\{(u,v)\mid 1\le u\le 4,\quad 4\le v\le 16\}$

$$\frac{\partial u,v}{\partial x,y}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3\frac{y}{x^4} & \frac{1}{x^3}\end{pmatrix}\qquad J^{-1}=\left(\frac{1}{x^3}+3\frac{y}{x^4}\right)^{-1}\quad\rightarrow\quad J^{-1}=\frac{x^4}{x+3y}$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}=\iint_{D'}\frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}=\frac{x^4}{x+3y}\mathrm{dudv}=\int_1^4\left[\int_4^{16}e^v\mathrm{dv}\right]\mathrm{du}=4(e^{16}-e^4)$$

נותר להראות שבאמת קיימות העתקות $x=x(u,v)$ ו $y=y(u,v)$ שהן חח"ע ועל. נשים לב ש $vx^3=y=u-x$ ולכן $x^3+\frac{1}{v}x-\frac{u}{v}=0$ (לא חילקנו באפס!). זהו פולינום מדרגה 3 ולכן יש לו לפחות שורש אחד. אם היו לפולינום שני שורשים שונים, אז לנגזרת היה גם שורש אבל הנגזרת שווה ל $3x^2+\frac{1}{v}>0$ כי $v>0$ ולכן יש שורש יחיד שנסמנו ב $x(u,v)$. נסמן עתה $y(u,v)=u-x(u,v)$ וקיבלנו העתקות מ u,v ל x,y שהן ההופכיות להעתקות $u=x+y$ ו $v=\frac{y}{x^3}$ (כלומר $x(u(x,y),v(x,y))=x$ ו $y(u(x,y),v(x,y))=y$). ההרכבה בכיוון ההפוך היא גם הזהות כי לפי ההגדרה מקבלים ש

$$\begin{aligned}u(x(u,v),y(u,v)) &= x(u,v)+y(u,v)=x(u,v)+(u-x(u,v))=u\\ v(x(u,v),y(u,v)) &= \frac{y(u,v)}{x(u,v)^3}=\frac{v\cdot y(u,v)}{v\cdot x(u,v)^3}=\frac{v\cdot(u-x(u,v))}{u-x(u,v)}=v\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהגדרה של $x(u,v)$ כשורש של הפולינום $vx^3=u-x$. סה"כ קיבלנו שהפונקציות הופכיות לשני הכיוונים ולכן החישוב שעשינו למעלה נכון.

תרגיל 7 (לא היה בכיתה):

בדקו אינטגרביליות וחשבו את $I=\iint_D \frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dxdy}$ כאשר $D=\left\{(x,y)\ \mid\ 0\le y\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$ (תחום בצורת משולש).

פתרון:

הפונקציה $f(x,y)=\frac{\sin(x)}{x+y}$ היא רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ פרט לנקודות מהצורה $(t,-t)$, והנקודה היחידה מהצורה הזאת בנמצאת בתחום היא $(0,0)$. הפונקציה אין גבול שם, אפילו אם מצטמצים רק לתחום D, מאחר ושני המסלולים $(t,0)$, (t,t) עבור $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ נמצאים בתחום ומתקיים ש

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t+t}=\frac{1}{2}\neq 1=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t+0}.$$

מה שכן ניתן להראות זה שהפונקציה חסומה בתחום כי

$$\left|\frac{\sin(x)}{x+y}\right|\le\frac{|x|}{|x+y|}=\frac{x}{x+y}\le 1$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש $x,y\ge 0$ ו $|\sin(x)|\le|x|$. הפונקציה חסומה ורציפה פרט למספר סופי של נקודות ולכן אינטגרבילית.

כדי להשתמש במשפט פוביני צריך שהפונקציה תהיה רציפה (למרות שניתן להרחיב את התנאים של המשפט גם לפונקציה הזאת). עבור $\frac{\pi}{2}\ge\varepsilon>0$, נחלק את התחום לשני חלקים (תלויים באפסילון) $D=D_1\cup D_2$ כאשר $D_1=\{(x,y)\ \mid\ 0\le y\le x\le\varepsilon\}$ ו $D_2=D\backslash D_1=\left\{(x,y)\ \mid\ \varepsilon<x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le x\right\}$. נקבל $\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}$ ובנוסף

$$\left|\iint_{D_1}\frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dxdy}\right|\le\iint_{D_1}\left|\frac{\sin(x)}{x+y}\right|\mathrm{dxdy}\le\iint_{D_1}1\mathrm{dxdy}=\frac{\varepsilon^2}{2}$$

ולכן כאשר נשאיף את ε לאפס נקבל ש $\iint_{D_2}$ שואף ל $\iint_D$.

$$\begin{aligned}\iint_{D_2}\frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dxdy}&=\int_\varepsilon^1\left[\int_0^x\frac{\sin(x)}{x+y}\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}=\int_\varepsilon^1\sin(x)\left[\ln(x+x)-\ln(x+0)\right]\mathrm{dx}=\int_\varepsilon^1\sin(x)\ln(2)\mathrm{dx}\\&=(\cos(\varepsilon)-\cos(1))\ln(2)\overset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow}(1-\cos(1))\ln(2)\end{aligned}$$

שימושים לאינטגרל כפול

- שטח של תחום D - $A(D)=\iint_D 1\mathrm{dxdy}$
- עבור צפיפות $\rho(x,y)$ בתחום D, חישוב המסה ע"י $\iint_D\rho(x,y)\mathrm{dxdy}$
- מרכז הכובד

$$\hat{x}=\frac{1}{A(D)}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{dxdy}\qquad \hat{y}=\frac{1}{A(D)}\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{dxdy}$$

- נפח בין גרפים של שתי פונקציות $f(x,y),g(x,y)$ בתחום D נתון ע"י

$$\iint_D(f(x,y)-g(x,y))\mathrm{dxdy}$$

תרגיל 8 :

חשבו את הנפח של יהלום הניתן ע"י $|x|+|y|+|z|\le 1$.

פתרון:

הפני שטח של היהלום מורכבים מהחלק העליון $(z\ge 0)$ והחלק התחתון $(z\le 0)$ וצריך לחשב את הנפח בין שני הגרפים. עבור החלק העליון הגרף של הפונקציה יתקבל ע"י $z=1-|x|-|y|$ ומסימטריה מספיק לחשב את הנפח מתחת לפונקציה הזהות (ומעל $z=0$) ולכפול ב 2 . בנוסף מספיק לחשב את הנפח ברביע החיובי $(x,y\ge 0)$ ולכפול סה"כ ב 8.
לכן קיבלנו סה"כ את הפונקציה $z(x,y)=1-x-y$ (כל המשתנים אי שליליים), $x,y\ge 0$ (נמצאים ברביע החיובי) ו $x+y\le 1$ (כי אחרת $|x|+|y|+|z|>1$). מכאן מקבלים שהתחום הוא $0\le x,y$ ו $x+y\le 1$.

$$\begin{aligned}\iint_D(1-x-y)\mathrm{dxdy} &= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\ |_{y=0}^{y=1-x}\right]\mathrm{dx}\\ &= \int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\mathrm{dx}=-\frac{(1-x)^3}{6}\ |_0^1=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

תרגיל 9:

מצאו את המסה של גוף עם צפיפות $\rho(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ בתחום $x^2+y^2\ge 4$, $x^2+y^2\le 4x$.

פתרון: נשים לב תחילה שהתחום שקול ל

$$x^2+y^2\le 4x \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+4+y^2\le 4 \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2+y^2\le 4$$

נבצע החלפת קורדינטות $(x,y)=r(\cos(\theta),\sin(\theta))$ ומקבלים שהתחום החדש הוא

$$r\ge 2 \qquad r^2\le 4r\cos(\theta)\ \Rightarrow\ r\le 4\cos(\theta)$$

ובפרט נקבל ש $2\le r\le 4\cos(\theta)$. כדי שעבור בחירה של θ יהיה r שמקיים את האילוצים, אנחנו חייבים שיתקיים ש $\cos(\theta)\ge\frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$. מכאן מקבלים ש

$$\int_D\rho(x,y)\mathrm{dxdy}=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[\int_2^{4\cos(\theta)}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{dr}\right]\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left[4\cos(\theta)-2\right]\mathrm{d}\theta=4\left[\sin(\theta)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}-\frac{4\pi}{3}=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$$

תרגיל 9:

נתון מעגל יחידה $D=\left\{x^2+y^2\le 1\right\}$ עם צפיפות 1 בחלק $x\ge 0$ וצפיפות 2 בחלק $x<0$. מצאו את מרכז המסה של המעגל.

פתרון:

בשביל מרכז מסה צריך לחשב את המסה : $\iint_D\rho(x,y)$ ואת האינטגרלים $\iint_D x\rho(x,y)$ ו $\iint_D y\rho(x,y)$.
נשים לב תחילה שמסה של מעגל ברדיוס r בצפיפות c זה בדיוק שטח המעגל כפול c, כלומר $c\pi r^2$. בפרט מסה של מעגל יחידה עם צפיפות 1 היא π ושל חצי מעגל היא $\frac{1}{2}$. החצי מעגל השני הוא עם צפיפות 2 ולכן כבד פי 2 , כלומר המסה שלו היא 1 וסה"כ המסה של כל המעגל היא $\frac{3}{2}$.

- נחשב עתה את קורדינטת ה x של מרכז הכובד.

$$\begin{aligned}\iiint_D x\rho(x,y)\mathrm{dxdy} &= \iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x<0}}x\cdot 2\mathrm{dxdy}+\iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0}}x\cdot 1\mathrm{dxdy}\\ &= 2\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x\mathrm{dydx}+\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}x\mathrm{dydx}\\ &= 2\int_{-1}^0 2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}+\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}\end{aligned}$$

נעשה הצבה $t=1-x^2$ ואז $\mathrm{dt}=-2x\mathrm{dx}$ (שימו לב לגבולות אינטגרציה):

$$= \quad -2\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{dt} - \int_1^0 \sqrt{t}\mathrm{dt} = -2\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{dt} + \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{dt} = -\int_0^1 t^{1/2}\mathrm{dt} = -\frac{t^{3/2}}{3/2}\mid_0^1 = -\frac{2}{3}$$

לכן סה"כ הקורדינטת x תהיה $\frac{\iint x\rho(x,y)}{\iint \rho(x,y)} = \frac{-2/3}{3/2} = -\frac{4}{9}$. שימו לב שהקורדינטה היא שלילית (וציפינו לכך כי יש יותר צפיפות בחלק השלילי של המעגל) והיא נמצאת בתוך המעגל יחידה (אם היינו מקבלים נקודה מחוץ למעגל אז בוודאי שהיא לא יכולה להיות מרכז המסה מה שאומר שיש טעות בחישוב).

- נחשב עתה את קורדינטת ה y של מרכז הכובד. מאחר שעבור הציר הזה יש סימטריה אז נצפה (ונקבל) שהמרכז מסה נמצא ב $y=0$. הסיבה שזה קורה באינטגרל היא ש $g(x,y)=y\rho(x,y)$ היא פונקציה אי זוגית ב y, כלומר $g(x,-y)=-g(x,y)$ ובנוסף התחום D (מעגל היחידה) הוא סימטרי ב y, כלומר $(x,y)\in D$ אמ"מ $(x,-y)\in D$.

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} g(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} g(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} 0\mathrm{dx} = 0$$

כאשר השתמשנו בכך שעבור x קבוע הפונקציה $g(x,y)$ (כפונקציה של y) היא אי זוגית. ההוכחה עבור g ו D כלליים יותר כמו שכתוב למעלה היא דומה.