מחברת זו הינה רכוש הטכניון
והיא מיועדת לצרכי בחינה בלבד

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מחברת בחינה

2014

*** מס' תעודת הזהות**

3 0 3 0 5 0 9 9 1

0		X		X		X			
1									X
2									
3	X		X						
4									
5					X				
6									
7									
8									
9							X	X	

שם מקצוע ______

מספר מקצוע ______

חדר מבחן ______

פקולטה ______

סמסטר ______

תאריך ______

מחברת ____ מתוך ____ מחברות

* יש למלא X בתוך המשבצות בטבלה שלהלן עבור כל ספרה של תעודת הזהות, כולל ספרת הביקורת (סה"כ 9 ספרות), כאשר כל עמודה מייצגת ספרה בתעודת הזהות

ציונים לשימוש הבוחן

ציון ______

שאלה	ציון
שאלה מס' 1	25
שאלה מס' 2	25
שאלה מס' 3	25
שאלה מס' 4	25
שאלה מס' 5	
שאלה מס' 6	
שאלה מס' 7	
שאלה מס' 8	
שאלה מס' 9	
שאלה מס' 10	
סה"כ	100

---

010 2015.01-104173-1 01.02.16
'אלגב.ליניארית.ב
פקולטה: מתמטיקה
303050991
104173
303050991

לתשומת לבך !!!

1. אין לשדך סיכות נוספות, לסיכה הקיימת, למחברת הבחינה.
2. אין לתלוש דפים ממחברת הבחינה.
3. אין להוסיף דפים למחברת הבחינה שלא אושרו על-ידי המתרגל או מרצה הקורס.
4. יש לכתוב במחברת הבחינה בעט בלבד (**לא בעפרון**).
5. הקפד למלא בטבלת המשבצות של תעודת הזהות את ה- X בתוך המשבצת.
6. במידה וטעית במיקום ה- X בטבלת המשבצות, השחר את הריבוע לחלוטין.

בחינה מועד א' באלגברה לינארית ב' - 104173

01.02.2016

<u>הנחיות</u>: משך המבחן שעתיים וחצי.

השימוש בכל חומר עזר **אסור בהחלט**.

יש **לנמק היטב** כל תשובה.

ניתן לכתוב משני צידי הדף.

25

שאלה 1. (25 נקודות)

ב R^3 מוגדרת מכפלה פנימית באופן הבא

$$< u,v > = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_3v_3,$$

כאשר $u = (u_1,u_2,u_3)$, $v = (v_1,v_2,v_3)$.

א) השלימו את הווקטור $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$ לבסיס אורתונורמלי של R^3 ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

ב) יהא $T: R^3 \to R^3$ אופרטור לינארי הנתון על ידי $T\big((a,b,c)\big) = (a+b+c, b+2c, -2b+c)$ לכל $(a,b,c) \in R^3$.

מצאו במפורש תת-מרחב T^*-אינווריאנטי חד-מימדי (מספיק למצוא בסיס).

א)

$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{1} = \left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right)$

$\|v_1\|^2 = <v_1,v_1> = <\left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right)> = 2\cdot\frac12 = 1$

$w_2 = v_2 - <v_2,u_1>u_1 = (0,1,0) + \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right) = (0,1,0)+\left(\frac12,0,0\right) = \left(\frac12,1,0\right)$

$<v_2,u_1> = <(0,1,0),\left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right)> = 0-0-\frac{1}{\sqrt2} = -\frac{1}{\sqrt2}$

$\|w_2\|^2 = <w_2,w_2> = <\left(\frac12,1,0\right),\left(\frac12,1,0\right)> = 2\cdot\frac14 - \frac12 - \frac12 + 2 = \cancel{\frac12} - \cancel{\frac12} - \frac12 + 2 = \frac32$

$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \sqrt{\frac23}\left(\frac12,1,0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},0\right)$

$w_3 = v_3 - <v_3,u_1>u_1 - <v_3,u_2>u_2 = (0,0,1) - \frac{2}{\sqrt6}\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},0\right) = (0,0,1) - \left(\frac13,\frac23,0\right) = \left(-\frac13,-\frac23,1\right)$

$<v_3,u_1> = <(0,0,1),\left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right)> = 0-0-0+0+0 = 0$

$<v_3,u_2> = <(0,0,1),\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},0\right)> = \frac{2}{\sqrt6}$

$\|w_3\|^2 = <w_3,w_3> = <\left(-\frac13,-\frac23,1\right),\left(-\frac13,-\frac23,1\right)> = \frac29 - \left(-\frac13\right)\left(-\frac23\right) - \left(-\frac23\right)\left(-\frac13\right) + 2\cdot\frac49 - \frac23 - \frac23 + 1 = \frac29 \cancel{-\frac29} \cancel{-\frac29 + \frac89} - \frac69 - \frac69 + 1 =$

$= \frac39 = \frac13$

$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \sqrt3\left(-\frac13,-\frac23,1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3\right)$

לכן הבסיס הוא:

$\{u_1,u_2,u_3\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt2},0,0\right),\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},\sqrt3\right)\right\}$

סעיף ב':

מתקיים

$T(u_1) = T(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0) = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$, כלומר $Tu_1 = u_1$

לכן תת המרחב $W = span\{u_1\}$ הוא T-אינווריאנטי, כי $Tu_1 \in W$.

לכן יהי $w \in W$ אזי $w = ku_1$ לכן $Tw = T(ku_1) = kT(u_1) = ku_1 = w \in W$ לכן $Tw \in W$.

לכן W הוא T-אינווריאנטי.

נראה כי $W^\perp = span\{u_2,u_3\}$.

- יהי $v \in span\{u_2,u_3\}$ אזי $v = a_2u_2 + a_3u_3$ כאשר $a_2,a_3 \in \mathbb{R}$ סקלרים, ויהי $w \in W$ אזי $w = ku_1$ כאשר $k \in \mathbb{R}$ סקלר, לכן:

$\langle w,v \rangle = \langle ku_1, a_2u_2+a_3u_3 \rangle = k\cdot a_2\langle u_1,u_2 \rangle + ka_3\langle u_1,u_3 \rangle = 0+0=0$

לכן $v \in W^\perp$ לכן $span\{u_2,u_3\} \subseteq W^\perp$.

- יהי $v \in W^\perp$ אזי $v = a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3$ כאשר $a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}$ סקלרים ויהי $w \in W$ אזי $w = k\cdot u_1$ כאשר $k \in \mathbb{R}$ סקלר.

מתקיים $\langle w,v \rangle = 0$, כלומר $0 = \langle w,v \rangle = \langle k\cdot u_1, a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3 \rangle = k\cdot a_1\overset{1}{\langle u_1,u_1 \rangle} + k\cdot a_2\overset{0}{\langle u_1,u_2 \rangle} + k\cdot a_3\overset{0}{\langle u_1,u_3 \rangle} = 0$

$k\cdot a_1 = 0$

זה נכון לכל $w \in W$, כלומר לכל $k \in \mathbb{R}$, לכן בהכרח $a_1 = 0$, לכן $v = a_2u_2+a_3u_3$ לכן $v \in span\{u_2,u_3\}$

לכן $W^\perp \subseteq span\{u_2,u_3\}$.

הראינו הכלה בכל כיוון, לכן $W^\perp = span\{u_2,u_3\}$, לכן $\{u_2,u_3\}$ בסיס של $W^\perp$.

והראינו כי W הוא T-אינווריאנטי, לכן בהינתן $w \in W$, $v \in W^\perp$ מתקיים $\langle w,v \rangle = 0$ וגם $Tw \in W$ לכן $\langle Tw,v \rangle = 0$

לכן $0 = \langle Tw,v \rangle = \langle w,T^*v \rangle = 0$ כלומר הוכחנו כי לכל $w \in W$ מתקיים $\langle w,T^*v \rangle = 0$

לכן $T^*v \in W^\perp$, לכן $W^\perp$ הוא T^* אינווריאנטי.

$W^\perp$ הוא ממימד 2, ולפחות אני רוצה שאיך של מרחב T^* אינווריאנטי חד מימדי.

לכן נסתכל על $U = span\{u_2\}$. יהי $u \in U$ ויהי $w \in W$ מתקיים $u = a_2u_2$, $w = a_1u_1$ לכן

$\langle w,u \rangle = \langle a_1u_1, a_2u_2 \rangle = a_1a_2\langle u_1,u_2 \rangle = a_1a_2\cdot 0 = 0$

לכן בהינתן $w \in W$ וגם $Tw \in W$, לכן גם מתקיים $\langle Tw,u \rangle = 0$ לכן $0 = \langle Tw,u \rangle = \langle w,T^*u \rangle = 0$

וזה נכון לכל $w \in W$, לכן $T^*u \in U$, לכן U הוא T^*-אינווריאנטי והוא תת מרחב ממימד 1 כנדרש.

שאלה 2. (25 נקודות)

הוכיחו כי אם T הינו אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית V אז:

א) $T(v) = 0$ אם ורק אם $T^*(v) = 0$.

ב) $T - \lambda I$ הוא אופרטור נורמלי.

ג) אם $T(v) - \lambda v = 0$ אז $T^*(v) - \bar{\lambda}v = 0$.

ד) אם $T(v) - \lambda_1 v = 0$ ו- $T(w) - \lambda_2 w = 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אז $< w, v > = 0$.

25

סעיף א': $\Leftarrow$: נתון $Tv=0$ לכן $\langle Tv,Tv\rangle=0$, לכן:

$$0=\langle Tv,Tv\rangle=\langle v,T^*Tv\rangle \overset{\text{נורמלי}}{=} \langle v,TT^*v\rangle=\langle T^*v,T^*v\rangle=0$$

לכן $T^*v=0$.

$\Rightarrow$: נתון $T^*v=0$, לכן $\langle T^*v,T^*v\rangle=0$, לכן:

$$0=\langle T^*v,T^*v\rangle=\langle v,TT^*v\rangle \overset{\text{נורמלי}}{=} \langle v,T^*Tv\rangle=\langle Tv,Tv\rangle=0$$

לכן $Tv=0$.

סעיף ב': נראה כי $(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)=(T-\lambda I)(T-\lambda I)^*$:

$$(T-\lambda I)^*(T-\lambda I)=(T^*-\bar{\lambda}I)(T-\lambda I)=T^*T-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}I \overset{\text{נורמלי}}{=} TT^*-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}I=$$

$$=T^*(T-\lambda I)-\bar{\lambda}(T-\lambda I)=(T-\lambda I)(T^*-\bar{\lambda}I)=(T-\lambda I)(T-\lambda I)^*$$

סעיף ג': נתון $(T-\lambda I)v=0$, לפי סעיף (ב) מתקיים כי $(T-\lambda I)$ נורמלי, לכן לפי סעיף (א') מתקיים $(T-\lambda I)^*v=0$

כלומר $(T^*-\bar{\lambda}I)v=0$ כלומר $T^*v-\bar{\lambda}v=0$ כלומר $T^*v=\bar{\lambda}v$.

סעיף ד': נתון $Tv=\lambda_1 v$, וכן $Tw=\lambda_2 w$ וגם $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן מתקיים:

$$\lambda_2\langle w,v\rangle=\langle\lambda_2 w,v\rangle=\langle Tw,v\rangle=\langle w,T^*v\rangle \overset{\text{סעיף (ג)}}{=} \langle w,\bar{\lambda}_1 v\rangle=\lambda_1\langle w,v\rangle$$

קיבלנו $\lambda_1\langle w,v\rangle=\lambda_2\langle w,v\rangle$ לכן $(\lambda_1-\lambda_2)\langle w,v\rangle=0$ ונתון $\lambda_1\neq\lambda_2$ לכן $(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$

לכן בהכרח $\langle v,w\rangle=0$.

$T_v=0$

שאלה 3. (25 נקודות)

הוכיחו כי תבנית בילינארית ממשית, סימטרית ולא סינגולרית ניתנת להצגה באמצעות מטריצה אלכסונית שאיברי האלכסון שלה שייכים לקבוצה $\{1,-1\}$.

<u>הערה</u>: א) ההצגה המבוקשת אינה מתייחסת לדמיון מטריצות אלא לחפיפה שלהן.

ב) ניתן להשתמש בטענות של השאלה 2) גם אם לא הצלחתם להוכיח אותן.

נוכיח תחילה כי לתב"ל f ממשית וסימטרית מעל שדה F המקיים $char(F)\neq 2$ קיים בסיס בו ל-f הצגה אלכסונית.

נוכיח באינדוקציה על המימד המרחב.

<u>בסיס</u>: אם $n=1$ אזי כל בסיס הוא הצגה אלכסונית.

אם $f\equiv 0$ אזי כל בסיס הוא הצגה אלכסונית.

<u>הנחה</u>: נניח נכונות על מרחבים ממימד $(n-1)$ וכן נניח כי $f\neq 0$.

<u>צעד</u>: נוכיח נכונות עבור $\dim V=n$.

נניח בשלילה כי לכל $v\in V$ מתקיים $f(v,v)=0$.

לכן בפרט אם $v=u+w\in V$ מתקיים $f(v,v)=0$, לכן:

$$0=f(v,v)=f(u+w,u+w)=f(u,u)+f(u,w)+f(w,u)+f(w,w)=0$$

לכן $f(u,w)+f(w,u)=0$

וסימטריות $2f(u,w)=0$

$char(F)\neq 2$ לכן בהכרח $f(u,w)=0$.

זה נכון לכל $u,w\in V$, לכן קיבלנו כי $f\equiv 0$ בסתירה להנחה.

לכן קיים $v_1\in V$ כך שמתקיים $f(v_1,v_1)\neq 0$.

נסמן $U=span\{v_1\}$, $W=\{w\in V \mid f(w,v_1)=0\}$.

נראה כי $V=U\oplus W$.

יהי $v\in U\cap W$ אזי $v\in U$ לכן $v=kv_1$.

$v\in W$ לכן $f(v,v_1)=0$, לכן $0=f(v,v_1)=kf(v_1,v_1)$

ונתון $f(v_1,v_1)\neq 0$ לכן בהכרח $k=0$, לכן $v=kv_1=0$

לכן $U\cap W=\{0\}$.

יהי $v\in V$ ונסתכל על $w=v-\frac{f(v,v_1)}{f(v_1,v_1)}\cdot v_1$, מתקיים:

$$f(w,v_1)=f(v,v_1)-\frac{f(v,v_1)}{\cancel{f(v_1,v_1)}}\cancel{f(v_1,v_1)}=f(v,v_1)-f(v,v_1)=0$$

נתון $f(v_1,v_1)\neq 0$

לכן $v\in W$, לכן $v=\underbrace{w}_{\in W}+\underbrace{\frac{f(v,v_1)}{f(v_1,v_1)}\cdot v_1}_{\in U}\in V$

לכן $V=U\oplus W$.

מכיוון כי $\dim(U)=1$ וכן $V=U\oplus W$ לכן $\dim(W)=n-1$, לכן לפי הנחת האינדוקציה קיים בסיס $\{u_2,\dots,u_n\}$ עבור W בו ל-f הצגה אלכסונית. כמו כן מהגדרת W מתקיים $f(v_1,u_i)=0$ וכן $\{v_1,u_2,\dots,u_n\}$ בסיס כי $V=U\oplus W$

לכן וידוא הבסיסים שהם היוו בסיס עבור V, לכן $\{u_1,\dots,u_n,v_1\}$ הוא בסיס ל-V בו
ל-f הצגה אלכסונית, כי $f(u_i,u_j)=0$ וגם $f(v_1,u_i)=0$, לכן כל האיברים מחוץ לאלכסון הם 0, לכן הצגה אלכסונית.

והוכחנו את המשפט מההרצאה שכל תב"ס סימטרית וממשית בשדה המקיים $char(F)\neq 2$ יש בסיס בו יש לה הצגה
אלכסונית והיחס הוא יחס חפיפה ללא דמיון כי במעבר בסיסים ההצגות של התב"ס מקיימות יחס חפיפה ללא דמיון,
מה זה שהוכחנו משפט שאיננו משתמש בלכסון, אלא בתכונות של תב"ס, לכן היחס הוא חפיפה.
לכן ע"פ המשפט לתב"ס f סימטרית יש בסיס $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ בו יש לה הצגה אלכסונית.
כלומר $f(v_i,v_j)=0$ כאשר $i\neq j$ וכן נסמן $f(v_i,v_i)=c_i$.
לכן עבור תב"ס ממשית, סימטרית ולא סינגולרית נראה שמתקיים $f(v_i,v_i)=c_i\neq 0$ כי אם קיים i עבורו $f(v_i,v_i)=c_i=0$
אז לה אומר שבמטריצה האלכסונית המייצגת את f בבסיס זה שורה שלה שורת אפסים, ולכן היא סינגולרית ולכן התב"ס היא סינגולרית
ומכאן סתירה לנתון.
לכן קיבלנו כי עבור f מתקיים בבסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ כי $f(v_i,v_i)=c_i\neq 0$.
נגדיר בסיס חדש $\{u_1,\dots,u_n\}$ כך שמתקיים:

$$u_i=\begin{cases}\frac{v_i}{\sqrt{c_i}}, & c_i>0\\ \frac{v_i}{\sqrt{-c_i}}, & c_i<0\end{cases}$$

ולכן בבסיס זה נקבל כי מתקיים עבור $i\neq j$:

$$f(u_i,u_j)=f\left(\frac{v_i}{a_i},\frac{v_j}{a_j}\right)=\frac{1}{a_i}\cdot\frac{1}{a_j}f(v_i,v_j)=0$$

כאשר $a_i\in\left\{\frac{1}{\sqrt{c_i}},\frac{1}{\sqrt{-c_i}}\right\}$
$a_j\in\left\{\frac{1}{\sqrt{c_j}},\frac{1}{\sqrt{-c_j}}\right\}$.

ועבור אינדקס i עבורו מתקיים $c_i>0$ נקבל:

$$f(u_i,u_i)=f\left(\frac{v_i}{\sqrt{c_i}},\frac{v_i}{\sqrt{c_i}}\right)=\frac{1}{c_i}f(v_i,v_i)=\frac{c_i}{c_i}=1$$

ואם אינדקס i עבורו מתקיים $c_i<0$ נקבל:

$$f(u_i,u_i)=f\left(\frac{v_i}{\sqrt{-c_i}},\frac{v_i}{\sqrt{-c_i}}\right)=\frac{1}{-c_i}f(v_i,v_i)=\frac{c_i}{-c_i}=-1$$

לכן קיבלנו כי בבסיס $\{u_1,\dots,u_n\}$ לתב"ס f יש הצגה אלכסונית עם $\{1,-1\}$ באלכסון.

שאלה 4. (25 נקודות)

א) תהי מטריצה A - מטריצת ז'ורדן המכילה שני בלוקים $J_5(0), J_6(0)$

(כאשר $J_m(\lambda)$ הוא בלוק ז'ורדן $m \times m$ המתאים לערך λ).

מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה A^2.

ב) הוכח או הפרך (בעזרת דוגמא נגדית) את הטענה הבאה:

יהיו $A, B \in R^{n\times n}$, $n \geq 3$. נתון: הנשאר הוא λ, ייתכן שורש מרוכב.

ומקדמים ממשיים.

i. ל- A ו-B יש אותו פולינום אופייני $p(\lambda)$. - מעל לבד"ח שורש מרוכב.

ii. כל שורש ממשי של $p(\lambda)$ הוא בעל ריבוי קטן או שווה ל-3.

iii. ל- A ו-B יש אותו פולינום מאפס מינימלי $\psi(\lambda)$ ומעלת $\psi(\lambda)$ היא $n-2$.

אז A ו-B בהכרח דומות.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_5(0)} & \\ & \boxed{J_6(0)} \end{pmatrix}$$

סעיף א': בגלל ש-A מורכבת מ-2 בלוקים, היא נראית באופן סימטרי:

לכן זה ב-A וזה ב-A^2 ניתן ~~...~~ לחשב את כל מטריצה שמורכבת מתת-מטריצות

$$A^2 = \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}$$

נסמן לשם הנוחות $B = J_5(0)$, $C = J_6(0)$, כלומר, $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, וכן

נמצא צורת ז'ורדן עבור B^2: מתקיים

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ &0&1&0&0 \\ &&0&1&0 \\ &&&0&1 \\ &&&&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ &0&0&0&0 \\ &&0&0&0 \\ &&&0&0 \\ &&&&0 \end{pmatrix}, \quad B^2 \cdot B^2 \cdot B^2 = 0$$

לכן B^2 נילפוטנטית מסדר 3, כי $(B^2)^2 \neq 0$ אבל $(B^2)^3 = 0$. (נותר למצוא כמה בלוקים יש בצורת ז'ורדן של B^2.)

לכן הבלוק הכי גדול בצורת ז'ורדן של B^2 הוא בגודל 3x3.

לכן נפתור $B^2 x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, לכן ל-B^2 יש 2 וע"ע: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

לכן בצורת ז'ורדן יש 2 בלוקים: בלוק בגודל 3x3 ובלוק בגודל 2x2, לכן צורת ז'ורדן של B^2 היא:

$$J_{B^2} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0&1&0&0&0 \\ &0&1&0&0 \\ &&0&0&0 \\ \hline &&&0&1 \\ &&&&0 \end{array}\right)$$

באופן דומה נפתור עבור C^2: מתקיים

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0&1&&&& \\ &0&1&&& \\ &&0&1&& \\ &&&0&1& \\ &&&&0&1 \\ &&&&&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&&&& \\ &0&1&&& \\ &&0&1&& \\ &&&0&1& \\ &&&&0&1 \\ &&&&&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ &0&0&1&0&0 \\ &&0&0&1&0 \\ &&&0&0&1 \\ &&&&0&0 \\ &&&&&0 \end{pmatrix}, \quad C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0 \\ &0&0&0&0&1 \\ &&0&0&0&0 \\ &&&0&0&0 \\ &&&&0&0 \\ &&&&&0 \end{pmatrix}, \quad C^2 \cdot C^2 \cdot C^2 = 0$$

לכן גם C^2 נילפוטנטית מסדר 3, כי $(C^2)^2 \neq 0$ אבל $(C^2)^3 = 0$, לכן הבלוק הכי גדול בצורת ז'ורדן של C^2 הוא בגודל 3x3.

נמצא כמה בלוקים יש ע"י פתרון $C^2 x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, לכן ל-$C^2$ יש 2 וע"ע $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

לכן ל- C^2 יש 2 בלוקים מסדר 3×3, כלומר

$$J_{C^2}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&1&0&&& \\ 0&0&1&&& \\ 0&0&0&&& \\ \hline &&&0&1&0 \\ &&&0&0&1 \\ &&&0&0&0 \end{array}\right)$$

ולכן צורת ז'ורדן של A^2 היא:

$$J_{A^2}=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0&1&&&& \\ 0&0&&&& \\ \hline &&0&1&& \\ &&0&0&& \\ \hline &&&&0&1 \\ &&&&0&0 \end{array}\right)$$

<u>סעיף ב' של השאלה נכונה.</u>

יהי הפ"א $p(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)^{m_n}$ כאשר $3\geq m_i$ אז נתון (ii)

$\psi(x)$ הוא פולינום מינימלי, לכן לכל גורם $(x-\lambda_i)$ צריך להיות חזקה ב- $\psi(x)$.

אז הנתון על דרגת $\psi(x)$ יתכנו 2 מקרים:

1) אחד יחיד $(x-\lambda_i)$ איבד 2 דרגות בפולינום המינימלי ביחס לפ"א, כלומר נניח שזהו הגורם הראשון אזי:

$$\psi(x)=(x-\lambda_1)^{m_1-2}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)^{m_n}$$

2) 2 גורמים $(x-\lambda_i),(x-\lambda_j)$ <u>שונים</u> איבדו דרגה כל אחד, כלומר:

$$\psi(x)=(x-\lambda_1)^{m_1-1}(x-\lambda_2)^{m_2-1}(x-\lambda_3)^{m_3}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)^{m_n}$$

נתייחס לכל מקרה.

במקרה (1) בהכרח $m_1=3$, כי אחרת $(x-\lambda_1)$ נדרש שיהיה נעלם בפולינום המינימלי. לכן בצורת ז'ורדן של פ"ע זה לע"ע λ_1 יש 3 בלוקים בגודל 1×1 ועבור הע"ע λ_i יש בלוק יחיד בגודל $m_i\times m_i$ ולכן צורת הז'ורדן אשר פ"מ לה $\psi(x)$ היא <u>יחידה</u>, כלומר אין מס' קומבינציות אפשריות ולכן A,B דומות לאותה מטריצת ז'ורדן ולכן בטרנזיטיביות דומות זו לזו.

במקרה (2) לע"ע λ_i,λ_j שאיבדו כל אחד מעלה אחת בפ"מ $\psi(x)$ יש לכל אחד 2 בלוקים: בלוק בגודל 1×1 ובלוק בגודל $(m_i-1)\times(m_i-1)$ ולשאר הע"ע יש בלוק יחיד בגודל $m_k\times m_k$ ולכן צורת ז'ורדן אשר פ"מ זה $\psi(x)$ היא <u>יחידה</u>, כלומר אין מס' קומבינציות אפשריות ולכן A,B דומות לאותה מטריצת ז'ורדן ולכן בטרנזיטיביות דומות זו לזו.

!100

מצוין

מחכים לקשים

<u>הצדקה</u> לטרנזיטיביות דומות זו לזו, כי:

$$J=P^{-1}AP$$
$$J=Q^{-1}BQ$$

לכן

$$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ$$
$$A=PQ^{-1}BQP^{-1}=(QP^{-1})^{-1}B(QP^{-1})$$

לכן A,B דומות.