1 האינטגרל הכפול

נתונה פונקציה של שני משתנים המוגדרת בתחום D. מהו הנפח המוגבל בין הגרף שלה לבין מישור ה- x, y? כשחישבנו שטחים אבן הבנין היסודית היתה המלבן ששטחו הוא מכפלת אורכי הצלעות. בחישוב נפחים הצורה הבסיסית היא תיבה, ונפחה הוא מכפלת אורכי הצלעות.

1.1 הגדרת האינטגרל הכפול

נניח תחילה כי הפונקציה מוגדרת במלבן R. ניצור חלוקה P של $R = \cup R_{ij}$ למלבנים חלקיים ע"י חלוקות של הצלעות ונסמן ב- Δ_{x_i} וב- Δ_{y_j} בהתאמה את האורכים של קטעי החלוקות האלה. שטח המלבן R_{ij} יסומן ב- $|R_{ij}| = \Delta_{x_i}\Delta_{y_j}$. הקוטר של החלוקה הוא $\lambda(P) = \max\limits_{i;j}\{\Delta_{x_i}, \Delta_{y_j}\}$.

<u>הגדרה.</u> **תהי f מוגדרת במלבן R ויהיו $P = \{R_{ij}\}$ חלוקה של R ו- $t_{ij} \in R_{ij}$. סכום רימן של הפונקציה f ביחס לחלוקה P ולבחירה t_{ij} הוא**

$$R(P, f, t_{ij}) = \sum f(t_{ij})|R_{ij}| = \sum f(t_{ij})\Delta_{x_i}\Delta_{y_j} \ .$$

<u>הגדרה.</u> **נאמר שהפונקציה f המוגדרת במלבן R היא פונקציה אינטגרבילית רימן ב- R, ושהאינטגרל שלה הוא המספר I, אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ עם התכונה הבאה: לכל חלוקה $P = \{R_{ij}\}$ של R עם קוטר $\lambda(P) < \delta$ ולכל בחירה של נקודות $t_{ij} \in R_{ij}$, סכום רימן המתאים יקיים**

$$\left|I - \sum f(t_{ij})|R_{ij}|\right| < \varepsilon \ .$$

את האינטגרל של f נסמן ב- $\iint_R f$.

הוכחת הטענה הבאה דומה למקרה החד ממדי, ולא ניתן אותה.

<u>טענה.</u> **אם f אינטגרבילית במלבן, אז היא חסומה בו.**

תהי f חסומה במלבן R ותהי $P = \{R_{ij}\}$ חלוקה שלו. נסמן

$$M_{ij} = \sup_{x \in R_{ij}} f(x) \qquad ; \qquad m_{ij} = \inf_{x \in R_{ij}} f(x) \ .$$

הסכום העליון והסכום התחתון של f המתאימים לחלוקה P הם

$$U(P, f) = \sum_{i,j} M_{ij}|R_{ij}| \quad ; \quad L(P, f) = \sum_{i,j} m_{ij}|R_{ij}|$$

וכמו במקרה החד ממדי f אינטגבילית רימן במלבן R אםם לכל $\varepsilon > 0$ יש חלוקה Q כך ש- $U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$, או במילים אחרות, $\sum \omega_{ij}|R_{ij}| < \varepsilon$, כאשר ω_{ij} הוא התנודה $\omega_{ij} = \omega(R_{ij}, f) = M_{ij} - m_{ij}$ של f במלבן R_{ij}.

המשפט הבא נובע מקריטריון זה באופן דומה למקרה החד ממדי, ולא ניתן את ההוכחה.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה במלבן סגור, אז היא אינטגרבילית שם.

כדי להגדיר את האינטגרל בתחומים כלליים יותר, וכדי להוכיח את האינטגרביליות בתנאים רחבים יותר מרציפות, נצטרך להגדיר קבוצות בעלות שטח אפס.

<u>הגדרה.</u> נאמר שקבוצה F במישור היא בעלת שטח אפס אם לכל ε יש כיסוי של F ע"י מלבנים R_k כך ש- $\sum |R_k| < \varepsilon$.

לדוגמא, קבוצות בנות מניה, קטעים, איחוד בן מניה של קבוצות עם שטח אפס, גרף של פונקציה רציפה של משתנה אחד (כי די לבדוק עבור פונקציה רציפה בקטע סגור, ואז משתמשים ברציפות במ"ש - השלימו את ההוכחה!).

<u>הערה.</u> שימו לב כי בהגדרה אפשר לדרוש שהמלבנים יהיו סגורים, או פתוחים, או כלשהם. כמו כן אם F קבוצה בעלת שטח אפס שהיא סגורה וחסומה, אז ניתן לכסותה ע"י מספר סופי של מלבנים ששטחם הכולל קטן כרצוננו.

<u>משפט.</u> [לבג] תהי f חסומה במלבן R, אז היא אינטגרבילית במלבן אםם קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא בעלת שטח אפס.

<u>הגדרה.</u> תהי f פונקציה חסומה בקבוצה חסומה D במישור. יהי R מלבן המכיל את D ונרחיב את f לכל R ע"י הגדרתה כאפס ב- $R \setminus D$. נאמר ש- f אינטגרבילית ב- D אם הרחבתה ל- R אינטגרבילית שם. (ברור שההגדרה אינה תלויה בבחירה של R).

<u>הגדרה.</u> נאמר שקבוצה חסומה D במישור היא קבוצה בעלת שטח אם הפונקציה שהיא זהותית 1 על D ואפס אחרת היא אינטגרבילית. השטח של D, שיסומן ב- $A(D)$, הוא $\iint_D 1$.

נזכיר כי השפה, ∂D, של קבוצה D היא אוסף הנקודות x במישור כך שכל סביבה של x מכילה נקודות הן מהקבוצה D והן ממשלימתה. נשים לב כי ∂D היא תמיד קבוצה סגורה.

נשים לב כי קבוצת נקודות אי הרציפות של הפונקציה שהיא זהותית 1 על D ואפס אחרת היא בדיוק ∂D. ולכן מקבלים

<u>מסקנה.</u> קבוצה חסומה D היא בעלת שטח אםם שפתה, ∂D, היא בעלת שטח אפס.

הוכחה. נקבע מלבן $R \supset D$ ויש לבדוק מתי הפונקציה שהיא זהותית 1 על D ואפס על המשלים היא אינטגרבילית. אך זו בדיוק השפה של D ולכן ע"ס משפט לבג היא אינטגרבילית אםם יש ל- ∂D שטח אפס. $\square$

המשפט הבא מרכז את התכונות הבסיסיות של האינטגרל הכפול. ההנחה במשפט היא שכל הקבוצות בעלות שטח. ההוכחות ישירות, ולא ניתן אותן.

משפט. (i) אם f ו- g אינטגרביליות ב- D, כך גם $af+bg$, ומתקיים

$$\iint_D (af+bg) = a\iint_D f \;+\; b\iint_D g \; .$$

(ii) אם $f \geq 0$ אינטגרבלית ב- D אז $\iint_D f \geq 0$. באופן כללי יותר, אם $f \geq g$ אינטגרביליות ב- D אז $\iint_D f \geq \iint_D g$, ובפרט, אם $m \leq f \leq M$ ב- D אז

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f \leq M \cdot A(D) \; .$$

(iii) אם f אינטגרבלית ב- D, כך גם $|f|$, ומתקיים $\iint_D |f| \geq \left|\iint_D f\right|$.

(iv) אם f חסומה ב- D ואם $A(D)=0$, אז f אינטגרבילית ב- D, ו- $\iint_D f = 0$.

(v) אם f אינטגרבלית ב- D_1 וב- D_2 אז היא אינטגרבלית ב- $D_1 \cup D_2$, ואם $A(D_1 \cap D_2)=0$, אז $\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f \;+\; \iint_{D_2} f$.

1.2 האינטגרל הכפול והאינטגרל הנשנה

נעבור כעת לחישוב האינטגרל הכפול. מתברר שבתנאים מאוד רחבים הוא מתלכד עם האינטגרל הנשנה, וכך נוכל להשתמש לחישובו בשיטות שפיתחנו לחישוב של אינט-גרלים חד-ממדיים.

משפט. תהי f פונקציה אינטגרבילית במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$, ונניח שלכל x האינטגרל $I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ קיים. אז הפונקציה $I(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ וקיים השוויון

$$\iint_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \; .$$

הוכחה. נקבע חלוקות $\{x_i\}$ ו- $\{y_k\}$ של הקטעים $[a,b]$ ו- $[c,d]$ בהתאמה. נסמן ב- R_{ik} את המלבנים החלקיים שהן יוצרות, וב- M_{ik} ו- m_{ik} את הסופרמום והאינפימום של f ב- R_{ik}.

לכל i נבחר $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. היות ש- $m_{ik} \leq f(\xi_i,y) \leq M_{ik}$ לכל $y_{k-1} \leq y \leq y_k$, נקבל כי האינטגרל $I(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)dy = \sum_{k=1}^m \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)dy$ מקיים

$$\sum_{k=1}^m m_{ik}\Delta y_k \leq I(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{ik}\Delta y_k \, .$$

נכפיל ב- Δx_i ונסכם על i, ונקבל כי

$$\begin{aligned}\sum_{i,k} m_{ik}A(R_{ik}) &= \sum_i \sum_k m_{ik}\Delta y_k \Delta x_i \le \sum_i I(\xi_i)\Delta x_i \\ &\le \sum_i \sum_k M_{ik}\Delta y_k \Delta x_i = \sum_{i,k} M_{ik}A(R_{ik})\end{aligned}$$

אבל לפי הגדרת $\iint_R f$, גם $\sum_{i,k} m_{ik}A(R_{ik}) \le \iint_R f \le \sum_{i,k} M_{ik}A(R_{ik})$, ולכן

$$\left| \iint_R f - \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \right| \le \sum_{i,k} (M_{ik} - m_{ik})A(R_{ik}) \ .$$

נקבע כעת $\varepsilon > 0$. אגף ימין קטן מ- ε אם רק $\max(\Delta_{x_i}, \Delta_{y_k})$ קטן מספיק (כי f אינטגרבילית), אך אגף שמאל לא תלוי כלל בחלוקה של $[c,d]$. קבלנו לכן כי סכומי רימן של $I(x)$ מתכנסים, כפי שטוען המשפט, ל- $\iint_R f$. □

משפט אנלוגי נכון, כמובן גם לאינטגרל הנשנה $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$, והמשפט נכון גם לאינטגרציה על קבוצה כללית בעלת שטח, כי ממילא האינטגרל מוגדר ע"י הרחבת הפונקציה כאפס למלבן. הרחבה זו פשוטה במיוחד כאשר D הוא תחום המוגבל ע"י שני גרפים של פונקציות רציפות: $D = \{(x,y); x \in [a,b] \ : \ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$. לתחום כזה נקרא תחום נורמלי (ביחס לציר ה- x). תחום כזה הוא בעל שטח, כי לשפתו, המורכבת מהגרפים של הפונקציות ומשני קטעים אנכיים, יש שטח אפס. והנוסחה המתקבלת היא

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx \ .$$

<u>דוגמאות.</u>

(i) אם D הוא המשולש שקודקודיו הם $(1,0)$, $(0,1)$ והראשית, אז

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+xy)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+xy)dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2y + \frac{xy^2}{2} \right)_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx\end{aligned}$$

(ii) כאשר התחום נורמלי בשני הכיוונים, יש לעתים חשיבות ל"סדר האינטגרציה". נניח, למשל, ש- D הוא רבע מעגל היחידה ברביע החיובי, ונחשב את $\iint_D \sqrt{1-y^2}$. אם כתוב אותו בצורה $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}dy\right) dx$, אך החישוב יוצא מסובך. לעומת זאת אם נבצע האינטגרציה בסדר ההפוך נקבל

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}dx \right) dy = \int_0^1 (1-y^2)dy \ .$$

(iii) כדוגמא נוספת מאותו סוג נחשב את $\iint_D e^{x/y}$ כאשר D הוא המשולש שקודקודיו הם $(1,1)$, $(0,1)$ והראשית. נציג אותו כ- $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{x/y}dx\right)dy$, ונקבל

$$\int_0^1 \left(ye^{x/y}\right)_{x=0}^{y} dy = \int_0^1 (ey-1)dy \ .$$

אך בסדר ההפוך, $\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{x/y}dy\right)dx$, אין בכלל פונקציה אלמנטרית שתתאר את האינטגרל הפנימי!

1.3 הנוסחה להחלפת משתנים

נסתכל על הנוסחה להחלפת משתנה (הצבה) במשתנה אחד. אם $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ פונקציה עולה אז $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$, ואם הפונקציה φ יורדת סדר הגבולות מתהפך ומקבלים $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_b^a f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$. כתיבה אחידה לשני המקרים היא

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))|\varphi'(s)|ds \ .$$

מהי המשמעות הגיאומטרית של הגורם $|\varphi'(s)| = |\frac{dt}{ds}|$? זהו היחס המקומי שבו φ משנה אורכים: ה"מכנה" $|ds|$ הוא האורך של "קטע אינפיניטיסימלי" בסביבת הנקודה s, ואילו "המונה" $|dt|$ הוא האורך האינפיניטיסימלי של תמונתו של אותו קטע אינפיניטיסימלי. באופן יותר פורמלי, נוסחת לגרנז' אומרת ש- $|\varphi'(c)| = \left|\frac{\varphi(s+\Delta s)-\varphi(s)}{\Delta s}\right|$. אגף שמאל הוא יחס האורכים בין קטע ותמונתו, וכעת עוברים לגבול.

נעבור לשני משתנים. נניח כי D ו- R תחומים ב- $\mathbb{R}^2$ וכי $\varphi : D \to R$ העתקה חח"ע, ונציג $\varphi(s,t) = (x,y)$. באנלוגיה למקרה החד ממדי צריכה להתקבל נוסחה מהצורה הבאה

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_D f(\varphi(s,t))[\ ?\ ]dtds$$

כאשר במקום [?] צריך לעמוד ביטוי שייצג את היחס המקומי שבו φ משנה שטחים, ונראה מה צריך להיות ביטוי זה. הטיפול שלנו בנושא זה יהיה יותר אינטואיטיבי. באינפי 3 תחזרו לנושא זה, ותוכיחו באופן מדוייק את כל הנוסחאות ב- $\mathbb{R}^n$ ל- n כללי.

<u>הגדרה.</u> יהיו D ו- R שני תחומים ב- $\mathbb{R}^2$, ותהי $\varphi : D \to R$ העתקה חח"ע ועל. נציג $\varphi(s,t) = (x,y)$ ונניח שהפונקציות $x(s,t)$ ו- $y(s,t)$ הן פונקציות בעלות נגזרות חלקיות בתחום D. אז הדיטרמיננטה

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

נקראת היעקוביאן של φ ותסומן ב- $\frac{\partial xy}{\partial st}$ או J_φ (או פשוט J כאשר φ ידוע). נשים

לב שהיעקוביאן הוא בעצמו פונקציה של שני המשתנים s ו- t, ולענייננו הוא ישמש כתחליף לנגזרת במקרה החד ממדי.

הדוגמא הבאה תהיה הבסיס להבנה של משמעות היעקוביאן.

<u>דוגמא.</u>

נניח כי φ היא פונקציה לינארית הניתנת ע"י המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, כלומר $x(s,t) = as+bt$ ו- $y(s,t) = cs+dt$. אז המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ היא פשוט המטריצה הנתונה A, והיעקוביאן הוא פשוט $\det(A)$.

להעתקה כללית φ המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ היא "הקירוב הלינארי" הטוב ביותר של ההעתקה φ בסביבת הנקודה (s,t). כדי לעמוד על המשמעות הגיאומטרית של היעקוביאן נבדוק מה המשמעות הגיאומטרית של הדיטרמיננטה כשההעתקה היא בדיוק לינארית (ולא רק בקירוב).

<u>טענה.</u> **אם A מטריצה הפיכה, אז $|\det(A)|$ הוא שטח המקבילית הנוצר, ע"י העמודות שלה, כלומר, השטח של תמונת ריבוע היחידה תחת הטרנספורמציה $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.**

הוכחה. נניח כי $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. הפעלת סיבוב (כלומר, הכפלה במטריצה אורתוגונולית), אינה משנה את שטח המקבילית, ואינה משנה את הערך המוחלט של הדיטרמיננטה. ולכן נוכל להניח, בה"כ, כי $b = 0$, ואז הדיטרמיננט הוא ad, וזה גם שטח המקבילית, כי בסיסה באורך $|a|$, וגובהה $|d|$. $\square$

כעת מתברר לנו מה צריך להיות מקדם שינוי השטחים: נחלק את התחום D לריבועים קטנים מאוד. אם φ דיפרנציאבילית, אז היא ניתנת לקירוב בכל ריבוע כזה ע"י טרנספורמציה לינארית שהמטריצה שלה היא הערך של $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ באחד מקודקודי הריבוע, שנסמנו ב- P. לכן הריבוע עובר לתחום שהוא כמעט מקבילית ששטחה $|J_\varphi(P)|$. וכשעוברים לגבול (כשקוטר הריבועים שואף לאפס), נקבל כי היחס המקומי שבו φ משנה שטחים הוא הפונקציה $|J_\varphi|$.

כך "הוכחנו" את הנוסחה לשינוי משתנה באינטגרל:

<u>משפט.</u> **יהיו D ו- R שני תחומים ב- $\mathbb{R}^2$, ותהי $\varphi : D \to R$ העתקה חח"ע ועל. אם נסמן $\varphi(s,t) = (x,y)$, ואם הפונקציות $x(s,t)$ ו- $y(s,t)$ דיפרנציאביליות ב- D, אז**

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_D f(\varphi(s,t)) \left| \frac{\partial xy}{\partial st} \right| dtds \; .$$

<u>דוגמא.</u>

נחשב את $\iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$ כאשר T הוא המשולש $\{x,y\ge 0; x+y\le 1\}$. לשם כך נציב $y-x=s$ ו- $y+x=t$, ואז $x=\frac{t-s}{2}$ ו- $y=\frac{t+s}{2}$, ולכן

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \ .$$

התמונה של D תחת ההעתקה היא המשולש $D=\{|s|\le t\le 1\}$, ולכן

$$\begin{aligned} \iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy &= \iint_D e^{\frac{s}{t}}\frac{1}{2}dsdt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{-t}^t e^{\frac{s}{t}}\,ds\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(te^{\frac{s}{t}}\Big|_{s=-t}^t\right)dt = \frac{1}{4}(e-\frac{1}{e}) \end{aligned}$$

באינפי 3 תלמדו שאם גם φ^{-1} דיפרנציאבילית, אז $J_\varphi\neq 0$ ומתקיים כי $J_{\varphi^{-1}}=\frac{1}{J_\varphi}$. לפעמים קל יותר להשתמש בנוסחה זו ולחשב בפועל את $J_{\varphi^{-1}}$ במקום את J_φ.

<u>דוגמא.</u>

נחשב את שטח התחום המוגבל ע"י ארבע ההיפרבולות

$$D=\{s,t>0; 1\le st\le 2;\ 3\le s^2-t^2\le 4\} \ .$$

נציב $x=st$ ו- $y=s^2-t^2$. התמונה של D ע"י ההעתקה היא

$$D'=\{\ (x,y)\ :\ 1\le x\le 2,\ 3\le y\le 4\} \ .$$

החד חד ערכיות נובעת נובעת מכך שהעקומות $st=const.$ הן היפרבולות שאינן חותכות זו את זו, וכל היפרבולה כזו חותכת היפרבולה מהטיפוס $s^2-t^2=const.$ בדיוק בנקודה אחת.

השטח המבוקש הוא

$$A(D)=\iint_D 1\cdot dsdt = \iint_{D'} 1\cdot\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right|dxdy \ .$$

את היעקוביאן $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}$ קשה לחשב, כי לשם כך צריך לחלץ באופן מפורש את s,t כפונקציות של x,y. אבל $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{pmatrix} t & s \\ 2s & -2t\end{pmatrix}=-2(s^2+t^2)$ ולכן

$$\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right| = \frac{1}{2(s^2+t^2)} = \frac{1}{2\sqrt{y^2+4x^2}}$$

כי $(s^2+t^2)^2=(s^2-t^2)^2+4s^2t^2=y^2+4x^2$. ולסיכום

$$A(D)=\iint_D dsdt = \int_3^4\left(\int_1^2 \frac{dx}{2\sqrt{y^2+4x^2}}\right)dy \ .$$

קואורדינטות קטביות: הצבה חשובה מאוד היא העתקת המעבר לקואורדינטות קטביות $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ המעתיקה את $\{r\geq 0\ ;\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ באופן "כמעט" חח"ע על כל מישור ה- x,y: הנקודות "הרעות" מרוכזות בקרניים $\{r\geq 0\ ;\theta=0\}$ ו- $\{r\geq 0\ ;\theta=2\pi\}$ המועתקות על הקרן $\{x\geq 0\}$. קרניים אלה הן קבוצות בעלות שטח אפס, ואינן משנות את ערכי האינטגרלים, ולכן נוכל להשתמש בהצבה זו באופן חפשי.

היעקוביאן של ההעתקה הוא

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

ולכן נקבל כי לכל תחום D במישור

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta\ .$$

דוגמא.

אם D הוא העיגול ברדיוס R שמרכזו בראשית, אז שטחו הוא

$$\iint_D dxdy=\iint_{D'} rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R rdr\right)d\theta=2\pi\frac{R^2}{2}=\pi R^2\ .$$

1.4 אינטגרלים מוכללים

הטיפול באינטגרלים מוכללים אנלוגי למקרה החד-ממדי. נטפל לדוגמא במקרה ש- D תחום מישורי לא חסום ונסמן $D_R=\{P\in D:\|P\|\leq R\}$.

הגדרה. תהי f מוגדרת בתחום לא חסום D במישור ואינטגרבילית בכל תחום חסום בעל שטח $E\subset D$. נאמר שהאינטגרל המוכלל $\iint_D f$ קיים וערכו I אם לכל $\varepsilon>0$ יש R כך שלכל קבוצה בעלת שטח E המקיימת $D_R\subset E\subset D$ מתקיים כי $\left|I-\iint_E f\right|<\varepsilon$.

אם $f\geq 0$ די לבדוק כי $I \underset{n\to\infty}{\to} \iint_{E_n} f$ עבור איזושהי סדרה עולה של קבוצות חסומות E_n כך ש- $\cup E_n=D$.

דוגמא.

נראה כי $\sqrt{\pi}=I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$. לשם כך נציג

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}dx\right)dy\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty}e^{-r^2}rdr\right)d\theta=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty}=\pi\end{aligned}$$