

תרגיל בית 5 - חשבון אינפיניטיסמלי II

הגשה עד יום חמישי ה 12.6 בשעה 13:00

תרגיל 1:

מצאו רדיוס ותחום התכנסות עבור הטורים הבאים:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (x+1)^n \frac{(-5)^n + 7^n}{n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n^2)}}{2^{n-1} n^n}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n+8}$$

תרגיל 2:

מצאו את הפיתוח לטור טיילור ואת הרדיוס התכנסות שלו לכל אחת מהפונקציות הבאות (רמז: ניתן לעשות את זה בלי חישוב תחילה של כל הנגזרות בראשית).

$$1. f_1(x) = \arctan(x) + 1$$

$$2. f_2(x) = \int_x^{2x} \ln(1+t^2) dt$$

$$3. \sinh(x)$$

תרגיל 3:

עבור כל אחד מהטורים הבאים מצאו תחום התכנסות ומצאו את הפונקציה אליה הטור מתכנס בתחום המתאים.

$$1. f_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n-2}{n-1} x^{2n+1}$$

$$2. f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

$$3. f_3(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$$

תרגיל 4:

חשבו את הגבולות של הפונקציות הבאות בראשית או הראו שהם אינם קיימים:

$$1. f_1(x, y) = (|x| + |y|)^{-(x+y)^2}$$

$$2. f_2(x, y) = \frac{xy^8}{x^6+y^{10}}$$

$$3. f_3(x, y) = \frac{x \sin(xy) \cos(x^2 y^2)}{x^2 + \tan(y^2) + \ln(\sqrt{1+|xy^5|})} \quad (\text{רמז - נסו תחילה להיפטר מכמה שיותר פונקציות טריגונומטריות ולוגריתמיות}).$$

תרגיל 5:

בדקו רציפות, ומצאו (אם קיימות) את הנגזרות החלקיות והנגזרת של הפונקציה הבאה (בכל \mathbb{R}^2):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{\sqrt{2x^2+3y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & else \end{cases}$$

תרגיל 6 (לא להגשה):

נרצה להראות בתרגיל זה ש $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

1. הראו ש $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$ מתכנס במ"ש בקטע $(0, 1)$ ל $\frac{1}{x^x}$.

2. עבור $n \in \mathbb{N}$ קבוע, הראו שלכל $k \in \mathbb{N}$ טבעי מתקיים ש $\int_0^1 x^n \ln^k x dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$.

3. הוכיחו ש $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.