קומבינטוריקה - תרגיל מס' 1

פתרון

תרגיל מס' 1

עבור שני טורים: t_1, t_2 בטוטו כדורגל, נסמן ב - $d(t_1, t_2)$ את מספר המקומות (משחקים) שבהם שני הטורים שונים זה מזה. על כמה טורים חולשים (מסכימים ב $n-1$ מקומות לפחות) גם t_1 וגם t_2, אם:

א. $d(t_1, t_2) \geq 3$?

פתרון:

נתון, כי שני הטורים: t_1, t_2 שונים בשלושה משחקים לפחות. נניח, כי אלו שלושת המשחקים: $1 \leq i, j, k \leq n$. נניח, כי t_1 חולש על הטור t_0. לכן, t_1 מזדהה עם t_0 בלפחות $n-1$ מקומות. מתוך $n-1$ מקומות אלו, נמצאים לפחות שניים מן המשחקים: i, j, k. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי אלו הם המשחקים: i, j. עבור שני משחקים אלו, הסימונים בטור t_2 שונים מאשר ב t_1, ולכן אנו מקבלים כי הטור t_2 מזדהה עם t_0 בלכל היותר $n-2$ מקומות, ולכן אינו חולש עליו. זאת אומרת, אין טור אשר נחלש על ידי t_1 ו - t_2 ביחד.

מ.ש.ל

ב. $d(t_1, t_2) = 2$?

פתרון:

ניתן למצוא, בקלות, שני טורים הנחלשים ביחד על ידי t_1, t_2 ואלו הם הטורים בהם:
$t_0(i) = t_1(i)$, $t_0(j) = t_2(j)$ ואילו שאר הסימונים זהים לאלו אשר ב - t_1, t_2;
$t_0(j) = t_1(j)$, $t_0(i) = t_2(i)$ ואילו שאר הסימונים זהים לאלו אשר ב - t_1, t_2.
ישנם שלושה מקרים נוספים לגבי הטור t_0 בהשוואה לטורים t_1, t_2, והם:
א. המשחק $k \neq i, j$ מסומן בצורה שונה ב - t_0 מאשר ב - t_1, t_2 - זה לא ייתכן, כי אז השוני במשחקים i, j בין t_1, t_2 מראה לנו שהם אינם יכולים לחלוש על הטור הנ"ל.
ב. המשחק ה - i (או ה - j, באותו אופן) מסומן ב - t_0 בצורה שונה מאשר ב - t_1 ו - t_2 - גם פה, לא תהיה חלישה של אחד מן הטורים t_1, t_2 לפחות, כיוון ש: $t_1(j) \neq t_2(j)$.
ג. הטור $t_0 = t_1$ - גם זה לא ייתכן, כי אז t_2 אינו חולש של t_0 (ובדומה, אם $t_0 = t_2$).
לכן: קיימים רק שני טורים הנחלשים על ידי t_1, t_2 יחד במקרה זה.

מ.ש.ל

ג. $d(t_1, t_2) = 1$?

פתרון:

נסמן, כמקודם, כי הטורים t_1, t_2 אינם מסכימים במשחק i. נניח, כמקודם, כי הטור t_0 נחלש על ידי t_1, t_2 ביחד. ברור, ראשית, כי הטורים בהם הניחוש במשחק ה - i הוא כרצוננו ויתר הסימונים זהים לאלו אשר ב - t_1, t_2 (אשר מזדהים ביתר הניחושים) - נקבל שלושה טורים שייחלשו על ידי t_1, t_2 ביחד.
כעת, נניח כי: $t_0(j) \neq t_1(j) = t_2(j)$ עבור משחק $j \neq i$. נקבל, כי t_1 חייב להסכים עם t_0 בשאר המשחקים, כלומר צריך להתקיים בפרט: $t_1(i) = t_0(i)$. אבל, ידוע כי: $t_2(i) \neq t_1(i)$, ולכן: $t_2(i) \neq t_0(i)$ וכך, t_2 מזדהה עם t_0 בלכל היותר $n-2$ ניחושים, ולכן אינו חולש עליו. לכן: יש רק 3 טורים אשר נחלשים על ידי t_1, t_2 ביחד!

מ.ש.ל

טעות נפוצה בפתרון שאלה זו:

סטודנטים רבים הראו x טורים, עליהם חולשים ביחד t_1, t_2 (לרוב, התשובות היו נכונות!), ומכך הסיקו כי מספר הטורים הדרוש הוא x.
טעות! מן העובדה שמצאנו x טורים כאלה, ניתן להסיק כי לפחות x טורים מקיימים את התנאי - ועל מנת להראות שזהו בדיוק המספר הדרוש, יש להראות כי לא ייתכנו טורים נוספים, כפי שנעשה כאן בפתרון סעיפים ב', ג'.

תרגיל מס' 2

יהי f_n מספר הטורים המינימלי שיש לשלוח בטוטו כדורגל, כדי להבטיח זכיה בפרס שני לפחות ($n-1$ ניחושים נכונים, לפחות, מתוך n משחקים).

א. הוכיחו כי: $f_{n+k} \leq 3^k f_n$ לכל n, k טבעיים.

דרך 1:

נבנה קבוצה חולשת (כפי שהוגדרה בכיתה) עבור טוטו עם $n+k$ משחקים באופן הבא:
ניקח את קבוצת הטורים אשר מבטיחה זכיה בפרס שני, לפחות, עבור n משחקים (ז"א, קבוצה חולשת). גודלה, כאמור, הוא: f_n. כל אחד מן הטורים אשר בה, נחליף ב - 3^k טורים חדשים באופן הבא: עבור טור מן הקבוצה המקורית - n הסימונים במשחקים הראשונים יישארו כשהיו, ואילו את k המשחקים האחרונים נסמן בכל אחד מן הצירופים האפשריים להם. כל משחק ניתן לסמן בשלוש אפשרויות, ולכן עבור k משחקים אלו, יש לנו 3^k אפשרויות סימון.
באופן זה, יצרנו קבוצה בגודל $3^k f_n$. אבל, קבוצה זו היא קבוצה חולשת עבור $n+k$ משחקים. למה? יהי t טור כלשהו עבור $n+k$ משחקים. עבור n המשחקים הראשונים, יש בקבוצתנו 3^k טורים הזהים ב - n המשחקים הראשונים ומזדהים עם הטור t בלפחות $n-1$ סימונים (זכרו, כי בנינו את הקבוצה החדשה על בסיס קבוצה חולשת עבור n המשחקים הראשונים). מבין 3^k טורים אלו, אחד מהם ינחש נכון גם את k המשחקים האחרונים (כי לגביהם סימנו את כל האפשרויות), ולכן נקבל בסה"כ טור אשר מנחש נכון לפחות $n+k-1$ משחקים. כלומר, הבטחנו פרס שני, לפחות עבור $n+k$ משחקים.
כיוון שהגודל f_{n+k} מסמן את גודלה <u>המינימלי</u> של קבוצה חולשת, מתקיים: $f_{n+k} \leq 3^k f_n$.

טעויות נפוצות בפתרון שאלה זו:

א. כמה מכם השתמשו בשתי העובדות הבאות:

$$f_n \leq 3^{n-1}; f_{n+k} \leq 3^{n+k-1}$$

על מנת להסיק:

$$\frac{f_{n+k}}{f_n} \leq \frac{3^{n+k-1}}{3^{n-1}} = 3^k$$

ומכאן הדרך קצרה, כדי לומר של:

$$f_{n+k} \leq 3^k f_n$$

שימו לב, שהאי-שוויון לגבי השברים <u>אינו נכון</u>! לדוגמא: $3 \leq 4$, $3 \leq 3$, אבל: $\frac{3}{4} > \frac{3}{3}$.
ב. אחרים, הוכיחו את הטענה ישירות, באמצעות הטיעון הבא:

$$f_{n+k} \leq 3^{n+k-1} = 3^k \cdot 3^{n-1} \leq 3^k f_n$$

האי-שוויון האחרון אינו נכון, כיוון ש: $f_n \leq 3^{n-1}$ ולא להיפך!
<u>הערה נוספת</u>: לאינדוקציה (כמו לדרבי...) - חוקים משלה. ניתן, אמנם, לעשות אינדוקציה על שני משתנים, אך הדבר דורש הקפדה יתירה על מבנה האינדוקציה וזהירות מירבית.

ב. מיצאו את f_2.

<u>פתרון:</u>

על פי מה שנלמד בכיתה, מתקיים:

$$\frac{3^n}{2n+1} \leq f_n \leq 3^{n-1}$$

נציב: $n = 2$, ונקבל:

$$\frac{9}{5} = \frac{3^2}{4+1} \leq f_2 \leq 3^1 = 3$$

כיוון ש - f_2 הינו מספר שלם (הוא מציין את גודלה של קבוצה סופית כלשהי), ברור כי ניתן להסיק מכך, כי בעצם:

$$2 \leq f_2 \leq 3$$

אם נוכיח כי: $f_2 > 2$, אזי ינבע כי: $f_2 = 3$.
נניח, לכן, כי $f_2 = 2$, כלומר קיימת קבוצה חולשת על שני משחקים, בת שני טורים. נסמן טורים אלו ב: t_1, t_2. נתבונן בתוצאה אפשרית של שני משחקים: המשחק הראשון יסתיים בתוצאה אשר שונה מן התוצאה המסומנת עבורו ב - t_1 וב - t_2, וכנ"ל לגבי המשחק השני.
קיבלנו תוצאה אפשרית, אשר לא נחלשת על ידי אף אחד מן הטורים בקבוצה. כיוון שלקחנו קבוצה <u>כלשהי</u> בת שני טורים - הרי ש<u>אף</u> קבוצה בת שני טורים לא תוכל לחלוש על טוטו בן שני משחקים, ולכן: $f_2 > 2$, ולכן: $f_2 = 3$.
<u>הערה</u> אפשר לבדוק, שהקבוצה הבאה בת שלושה טורים, היא קבוצה חולשת על טוטו בן שני משחקים:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

מ.ש.ל

<u>הערה לגבי הוכחת חסמים או הפרכתם:</u>

נניח, כי מקבלים: $y \leq f_n \leq x$.

על מנת להראות ש: $f_n \neq x$, מספיק <u>למצוא</u> קבוצה חולשת <u>אחת</u> שגודלה קטן ממש מ - x.
על מנת להראות ש: $f_n = x$, צריך <u>להוכיח</u> כי <u>כל</u> קבוצה בת פחות מ - x טורים, אינה יכולה לחלוש.
על מנת להראות ש: $f_n \neq y$, צריך <u>להוכיח</u> כי <u>כל</u> קבוצה בת y טורים אינה יכולה לחלוש (למשל, כפי שנעשה בסעיף ב' לעיל).
ולבסוף, על מנת להראות ש: $f_n = y$, מספיק <u>למצוא</u> קבוצה חולשת בת y טורים.
שימו לב לדקויות הנ"ל - הן מאוד מאוד חשובות בכל הנוגע לחסמים בכלל!

תרגיל מס' 3

יהי g_n מוגדר כמו f_n, אלא שעבור טוטו כדורסל (זיכרו, כי בכדורסל אין תוצאת תיקו).

א. מיצאו והוכיחו חסם מלרע עבור g_n, שהוא אנלוגי לחסם המלרע שהוכח בהרצאה עבור f_n.

פתרון:

נשחזר את תהליך מציאת החסם התחתון (חסם מלרע) מן ההרצאה.
עבור טור טור מסוים בטוטו כדורסל, נחשב על כמה טורים הוא חולש (כפי שהוגדר בכיתה): הטור יחלוש על כל הטורים השונים ממנו במשחק אחד בדיוק, דהיינו: n טורים (כיוון שכעת, כאשר בכל משחק יש רק שתי תוצאות אפשריות, ניתן להחליף כל משחק בתוצאה אחת בלבד), ובנוסף הוא יחלוש על עצמו. סה"כ, כל טור חולש על $n+1$ טורים.
מספר הטורים הכולל שיש לחלוש עליהם הוא: 2^n, ולכן לפי מה שראינו בכיתה, מתקיים:

$$g_n \cdot (n+1) \geq 2^n \Longrightarrow g_n \geq \frac{2^n}{n+1}$$

מ.ש.ל

ב. מיצאו את g_3.

פתרון:

לפי החישוב מסעיף א', עבור: $n=3$, מתקיים:

$$g_3 \geq \frac{8}{4} = 2$$

אם נמצא קבוצה חולשת בת שני טורים, אזי ינבע כי: $g_3 = 2$, ואכן: נוכיח כי הקבוצה הבאה היא חולשת:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ברור כי המקרים האפשריים הם:
א. הקבוצה המסומנת ב - '1' ניצחה בכל המשחקים - יש בידינו טור זוכה במקום הראשון.
ב. הקבוצה המסומנת ב - '1' ניצחה בשני משחקים בדיוק - במקרה זה, יש בידינו טור המנחש נכונה שניים מן המשחקים (הטור אשר כולו '1'-ים).
ג. הקבוצה המסומנת ב - '1' ניצחה במשחק אחד בדיוק - במקרה זה, ברור כי הקבוצה המסומנת ב - '2' ניצחה בשני משחקים בדיוק, ויש בידינו טור המנחש נכונה שניים מן המשחקים (הטור אשר כולו '2'-ים).
ד. הקבוצה המסומנת ב - '1' לא ניצחה באף משחק - כלומר, הקבוצה המסומנת ב - '2' ניצחה בכל המשחקים. במקרה זה, יש בידינו טור זוכה (הטור אשר כולו '2'-ים).
אלו הם כל המצבים האפשריים, וראינו כי בכל מקרה - קבוצת הטורים שבידינו מנחשת נכונה לפחות שני משחקים, ולכן היא קבוצה חולשת. מכאן:

$$g_3 = 2$$

מ.ש.ל