אלגברה ב – פונקציונלים לינארים והמרחב הדואלי

נושאים:

1. המרחב הדואלי
2. העתקות דואליות
3. תרגיל

המרחב הדואלי

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל שדה F. אוסף הפונקציונלים הלינאריים $\varphi : V \to F$ (ז"א העתקות לינאריות מ – V ל – F כמ"ו מעל עצמו) מסומן ב – $Hom_F(V, F)$ או ב - V^*

<u>טענה (הוכח בכיתה):</u> יהי V מ"ו סוף ממדי מעל F, אזי V^* מ"ו סוף ממדי מעל F המקיים $dim(V^*) = dim(V)$

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו ממימד סופי מעל F, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V. בסיס $C = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ של V^* כאשר φ_i מוגדר להיות $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ נקרא הבסיס הדואלי של B.

<u>טענה:</u> יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי, B בסיס של V, אז ל - V^* קיים בסיס דואלי יחיד לבסיס B.

הערה: לרוב מסמנים את אברי הבסיס הדואלי של B כ – $v_1^*, \dots, v_n^*$.

<u>משפט:</u> קיים איזומורפיזם $V \simeq V^{**}$

<u>רעיון ההוכחה:</u> עבור בסיס B של V, והבסיס הדואלי C של V^* , הבסיס הדואלי ל – C ב - V^{**} מזוהה עם הבסיס B עצמו, דרך הפעולה $v(\varphi) := \varphi(v)$ / $\forall v \in V, \varphi \in V^*$

העתקות דואליות

<u>הגדרה:</u> יהיו V,W מ"ו סוף ממדיים מעל F, ותהי $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. הפונקציה $T^t : W^* \to V^*$ המוגדרת ע"י $(T^t(g))(v) := g(T(v))$ $\forall g \in W^*, v \in V$ נקראת "הפונקציה הדואלית ל – T"

<u>הערה:</u> $Image(T) \subset V^*$ כיוון שעבור $g \in W^*, a, b \in F, v_1, v_2 \in V$ מתקיים:

$T^t(g)(av_1 + bv_2) = g(T(av_1 + bv_2)) = ag(T(v_1)) + bg(T(v_2)) = aT^t(g)(v_1) + bT^t(g)(v_2)$ לכן $T^t(g)$ אכן פונקציונל (ז"א העתקה לינארית מ -V ל – F).

<u>משפט:</u> יהיו V, W מ"ו סוף ממדיים מעל F, תהא $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. הפונקציה T^t היא העתקה לינארית.

<u>הוכחה:</u> נראה כי T^t מכבדת את החיבור וכפל בסקלר. עבור $g_1, g_2 \in W^*, \ v \in V, \ a \in F$ כלשהם מתקיים:

$$T^t(g_1 + g_2)(v) = (g_1 + g_2)(T(v)) = g_1(T(v)) + g_2(T(v)) = T^t(g_1)(v) + T^t(g_2)(v)$$
$$T^t(ag_1)(v) = ag_1(T(v)) = aT^t(g_1)(v)$$
.

<u>משפט:</u> יהיו V,W מ"ו סוף ממדיים מעל F, $T : V \to W$ העתקה לינארית. יהיו B_v, B_w בסיסים של V,W. נניח כי T מיוצגת בבסיסים B_v, B_w ע"י המטריצה A_T , אזי ההעתקה T^t מיוצגת בבסיסים הדואליים B_v^*, B_w^* ע"י המטריצה A^t .

<u>הוכחה:</u> נוכיח את הטענה עבור T אופרטור (להעתקה כללית ההוכחה באותו אופן). יהי

$B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, ו – $C=\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ הבסיס הדואלי. נסמן A_T המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B, R_{T^t} המטריצה המייצגת את T^t ביחס לבסיס C.
מתקיים: $T^t(v_i^*)=\sum_{i=1}^n r_{ij}v_j^*$, $T(v_i)=\sum_{i=1}^n a_{ij}v_j$, לכן $T^t(v_i^*)(v_j)=r_{ij}$. מצד שני, מתקיים:
$T^t(v_i^*)(v_j)=v_i^*(T(v_j))=\sum_{k=1}^n a_{jk}v_i^*(v_k)=\sum_{k=1}^n a_{jk}\delta_{ik}=a_{ji}$ לכן קיבלנו $r_{ij}=a_{ji}$.

<u>מסקנה:</u> אם $T:V\to W$ העתקה לינארית בין מ"ו ממימד סופי מעל F, אז $(T^t)^t=T$.

<u>הערה:</u> נשים לב שמשיוויון המימדים $dim(V)=dim(V^*)$ אנו יודעים שיש איזומורפיזם בין V ל - V^* , אבל המסקנה לעיל היא הסיבה שמייחסים חשיבות גדולה יותר לאיזומורפיזם בין V ל- V^{**} , כי הוא "יותר טבעי" (ז"א האופרטורים נשמרים זהותית תחת איזומורפיזם זה).

<u>תרגיל</u>

יהי $V=R_2[x]$. עבור $s,t\in R$ נגדיר את הפונקציונל $f(p)=\int_s^t p(x)dx$. נסתכל על $D:V\to V$ אופרטור הגזירה. מהו $D^t(f)$?

פתרון: לפי המשפט לעיל, אנו יכולים לחשב את D^t דרך המטריצה המייצגת שלו ביחס לבסיס דואלי. נבחר בסיס של V, למשל $B=\{1,x,x^2\}$. המטריצה המייצגת את D ביחס ל – B היא המטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, לכן המטריצה המייצגת את D^t ביחס לבסיס הדואלי של B היא המטריצה $R=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$. נסמן את הבסיס הדואלי ל – B ב – f_1,f_x,f_{x^2} .
כיצד נייצג את f כצירוף לינארי של הבסיס הדואלי? נכתוב $f=M_1f_1+M_2f_x+M_3f_{x^2}$ אז עבור פולינום $p=ax^2+bx+c$ נקבל $f(p)=M_1c+M_2b+M_3a$, מצד שני
$f(p)=(\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx)|_{x=s}^{x=t}=a(\frac{t^3-s^3}{3})+b(\frac{t^2-s^2}{2})+c(t-s)$ וזה נכון לכל פולינום לכן נקבל:

$$M_1=(t-s)$$
$$M_2=\frac{t^2-s^2}{2}$$
$$M_3=\frac{t^3-s^3}{3}$$

. כעת נחשב את $D^t(f)$: $D^t(f)=R\begin{pmatrix}M_1\\M_2\\M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\M_1\\2M_2\end{pmatrix}$. נחזיר לייצוג לפי הבסיס הדואלי ונקבל ש - $D^t(f)=(t-s)f_x+\frac{t^2-s^2}{2}f_{x^2}$.