

אינפי 1 - גיליון תרגילים מספר 8

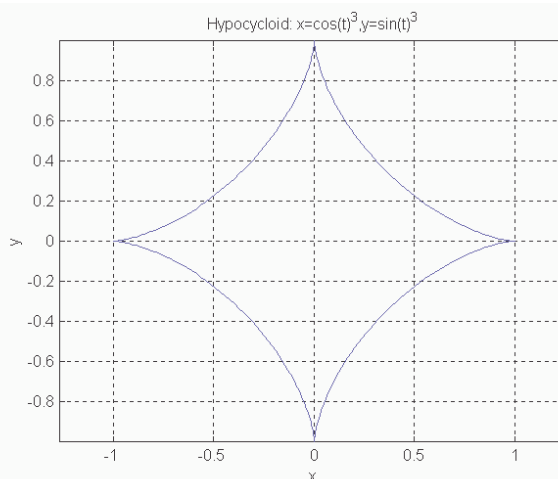
1. ההיפוציקלואידה נתונה בצורה פרמטרית ע"י $\begin{cases} x(t) = a(\cos(t))^3 \\ y(t) = a(\sin(t))^3 \end{cases}$ או בצורה

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

א. חשב ע"י שימוש בהצגה הפרמטרית את $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

ב. חשב ע"י שימוש בהצגה הסתומה את המשיק להיפוציקלואידה בנקודה עם $x = 0.5$ הנמצאת ברביע הראשון.

* הערה: באתר
<http://mathworld.wolfram.com/Hypocycloid.html>
 אפשר לראות איך יוצרים את
 ההיפוציקלואידה וכן עקומים
 פרמטריים רבים אחרים



2. א. הוכח שיש פתרון חיובי אחד ושלילי אחד בלבד למשוואה $e^x = x + 2$ בקטע $[-2, 2]$.

ב. כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $x^4 + 2x - 1 = 0$?

3. הוכח שלכל $x > 0$ מתקיים: $\arctan(x) \geq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4. א. תהא $f(x)$ רציפה ב- $[0, \infty)$, גזירה ב- $(0, \infty)$ ומקיימת $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0) = 0$.

הוכח שקיימת $0 < c < \infty$ כך ש- $f'(c) = 0$.

ב. מצא דוגמא לפונקציה רציפה ב- $[0, \infty)$, גזירה ב- $(0, \infty)$ ומקיימת $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $f(0) = 0$ עבורה לא קיימת נקודה $0 < c < \infty$ בה $f'(c) = 0$.

5. תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$ וגזירה ב- $(0, 1)$. נתון כי $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ושכל $0 < x < 1$ מתקיים: $f'(x) \leq 2x$. הוכח ש- $f(x) = x^2$.

6. חשב את הגבולות הבאים בעזרת כלל לופיטל:

ג. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \ln(x)}{e^x + x}$

א. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$

ב. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$