א׳

1 **א** הוכחה קומבינטורית -

צד שמאל - סדור של n מספרים ב n תאים $n!$

צד ימין - בכל סדור אפשרי ישנם k במקום ו $n-k$ שאינם במקום

ולכן נבחר k איברים נסדרם במקום $\binom{n}{k}$

ואת $n-k$ הנותרים נשים באי-סדר $O(n-k)$ $\Leftarrow \binom{n}{k}O(n-k)$

ניתן לעשות זאת עבור כל k ואין חפיפה בין המקרים -

ולכן צד ימין = צד שמאל

ב הראנו בתרגול [illegible] כי זאת היא הנוסחת נסיגה של $O(n)$

ג

2 בכיתה 25 תלמידים נגדיר

$A_E = \{$ כל התלמידים דוברי ספרדית $\} \Rightarrow |A_E| = 14$

$A_F = \{$ " " " צרפתית $\}$ $|A_F| = 12$ $|A_E \cap A_F| = 6$ $|A_F \cap A_G| = ? = X_{FG}$

$A_G = \{$ גרמנית — " — $\}$ $|A_G| = 6$ $|A_E \cap A_G| = 5$ $|A_E \cap A_F \cap A_G| = 2$

$A = A_F \cup A_E \cup A_G$ $|A| = y$, $A^c = \{$ התלמידים שאינם דוברי שפה זרה $\}$ $|A^c| = x$

ממילא נקבל

$|A| + |A^c| = 25$ $\quad 25 - x = y = 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - X_{FG} + 2 \Rightarrow 2 = x - X_{FG}$

$y + x = 25$

כמו כן נתון שכל דוברי הגרמנית הם דוברי שפה אחרת נקבל

$$|(A_G \cap A_E) \cup (A_G \cap A_E)| = 6$$

$$\Rightarrow 6 = 5 + X_{FG} - 2 \Rightarrow X_{FG} = 3 \qquad \Rightarrow X = 2 + 3 = 5 \quad \Rightarrow \boxed{X = 5}$$

3

$x_1 + x_2 + x_3 = 30$

$4 \le x_1 < 10$

$7 \le x_2 < 15$

$10 \le x_3 < 25$

$\rightarrow$ נבצע את החלפת המשתנים

$y_1 = x_1 - 4$

$y_2 = x_2 - 7$

$y_3 = x_3 - 10$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ y_1 + y_2 + y_3 = 9 \\ (2)\ 0 \le y_1 < 6 \\ (3)\ 0 \le y_2 < 8 \\ (4)\ 0 \le y_3 < 15 \end{cases}$$

פתרון בעזרת הכלה והפרדה

$A_0 = \{$ כל הפתרונות של משוואה (1) כאשר $y_1, y_2, y_3 \ge 0$ $\}$

$A_1 = \{$ כל הפתרונות של משוואה (1) כאשר $y_2, y_3 \ge 0$ $y_1 \ge 6$ $\}$

$A_2 = \{$ כמו A_1 רק $y_1, y_3 \ge 0$; $y_2 \ge 8$ $\}$

$A_3 = \{$ כמו A_1 רק $y_3 \ge 15$ $y_1, y_2 \ge 0$ $\}$

ג׳ פתרון המבוקש שלנו הוא $|A \setminus A_1\cup A_2\cup A_3| = |A|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$

כי $A_1\cup A_2\cup A_3\subset A$

$$A=\binom{9+3-1}{3-1}=\binom{11}{2}$$

בשביל למצוא את A_1, A_2, A_3 נבצע החלפת משתנים כאשר y_1, y_2, y_3 ישנו בהתאם כמו בשלב א ונקבל:

$$|A_1|=\left|\left\{ \text{הפתרונות של } \begin{matrix} z_1+z_2+z_3=3 \\ z_1,z_2,z_3\geq 0\end{matrix} \right\}\right| = \binom{5}{2} \qquad |A_2|=\binom{3}{2} \qquad |A_3|=0 \Rightarrow A_3=\phi$$

ונמצא את החיתוך רק לראות $|A_i\cap A_3|=0$

$$A_1\cap A_2=\left\{ \text{כל הפתרונות של } \begin{matrix} y_1+y_2+y_3=9 \\ \text{כאשר } y_1\geq 6, y_2\geq 8\end{matrix} \right\} \underset{\text{ניתן לראות}}{=} \phi \Rightarrow |A_1\cap A_2|=0$$

ומכאן $|A_1\cup A_2\cup A_3|=\binom{5}{2}+\binom{3}{2}$

$$|A\setminus A_1\cup A_2\cup A_3| = \binom{11}{2}-\binom{5}{2}-\binom{3}{2}$$

4א ראינו בתרגול את סעיף ב. נפתור אותו בעזרת עיקרון ההכלה וההפרדה.

$A_2 = \{$ כל המספרים שהם ריבועים שלמים בין $1 \ldots 999{,}999$ $\} \Rightarrow |A_2| = 999$

$A_3 = \{$ כל רק בתחום ריבועים שלמים חזקות שלישיות $\} \Rightarrow |A_3| = 99$

$A_4 = \{$ כל, חזקות רביעיות שלמות $\} \Rightarrow |A_4| = 31$

$A_6 = A_2\cup A_3 \qquad |A_6| = 9$ הסבר: כדי שמספר יהיה גם חזקה שלישית של מספר שלם וגם ריבוע של מספר שלם אזי הוא בהכרח חזקה 6 של מספר שלם

$x^2=y^3 \Rightarrow (\sqrt[3]{x})^2 = y$ - מספר שלם $\Rightarrow \sqrt[3]{x}$ מספר שלם

$|A_{12}|=|A_4\cup A_3| = 3$

$A_2\cup A_4 = A_4$

הפתרון הינו $999{,}999-|A_2\cup A_3\cup A_4| = 999{,}999-(999+99+31-31-9-3+3)$

$= 998910$

6ג באותו אופן כלל מספר תתי הקבוצות של k הוא 2^k ולכן מספר האיחודים השונים (כולל הקבוצה הריקה, ואיחוד יחיד A_i) הינו 2^k

מספר הקבוצות האפשריות [illegible] הינו 2^k-1 ולכן הפתרון הוא $(2^k-1)^n$

[illegible] - באותו אופן כמו בסעיף א נגדיר את X_{it} ונקבל בדיוק

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i 2^{k(n-i)}$$

4א

$X = \{$ כל המספרים בני 4 ספרות $\} = |X| = 9\cdot 10^3 = 9000$

$A_1 = \{$ כל המספרים בני 4 ספרות ללא הספרה 1 $\} = 8\cdot 9^3 = 5832$

$A_2 = \{$ ללא הספרה 2 —״— $\} = 8\cdot 9^3 = 5832$ וכן $|A_3| = 5832$

$A_i \cap A_j = \{$ כל המספרים בני 4 ספרות ללא הספרות i,j $\} = 7\cdot 8^3 = 3584$, $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{$ כל המספרים בני 4 ספרות ללא 1,2,3 $\} = 6\cdot 7^3 = 2058$

ולכן הפתרון $|A| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 9000 - (5832\cdot 3 - 3\cdot 3584 + 2058) = 198$

4ב

$X = \{$ כל המספרים בין $1 \ldots 6000$ $\} \Rightarrow |X| = 6000$

$A_3 = \{$ כל המספרים המתחלקים ב-3 בין $1 \ldots 6000$ $\} \Rightarrow A_3 = 2000$

$A_5 = \{$ באותו אופן ל-5 $\} \Rightarrow A_5 = 1200$

$A_{15} = A_3 \cap A_5 = \{$ כל המספרים המתחלקים ב-15 $\}$ $A_{15} = 400$

$|A| = |X| - |A_3 \cup A_5| = 6000 - (2000 + 1200 - 400) = 3200$

4ג

מספרים הזרים צריך אם אין להם שום מחלק משותף פרט ל-1

30 מתחלק ב 2,3,5 ולכן נגדיר A_2, A_3, A_5 כמו שהגדרנו קודם

$A_2 = \{$ כל המספרים המתחלקים ב-2 $1 \ldots 29$ $\} = 14$ $A_3 = 9$ $A_5 = 5$ $A_6 = 4$ $A_{10} = 2$

$A_6 = A_2 \cup A_3$ $A_{10} = A_2 \cup A_5$ $A_{15} = A_3 \cup A_5$, $A_2 \cup A_3 \cup A_5 = A_{30}$ $A_{15} = 1$ $A_{30} = 0$

ולכן

$29 - A_2 \cup A_3 \cup A_5 = 29 - (14 + 9 + 5 - 4 - 2 - 1 + 0) = 8$

ע״ט.

5 נעזר בזהויות הבאות - שהראנו בכיתה.

1) $\binom{J}{q}\binom{p}{J}=\binom{p}{q}\binom{p-q}{J-q}$ 2) $\sum_{i=0}^{t}(-1)^i\binom{t}{i}=0$

<u>הוכחה 1</u> ניתן לראות שלבחירת כנסת עם J חברים (מתוך p אנשים) ובחירת q חברי ממשלה מתוכה ניתן לעשות בשתי דרכים 1 בחירת J חברי הכנסת ומתוכם בחירת q חברי ממשלה. 2 בחירת q חברי הממשלה מתוך p ובחירת J-q חברי הכנסת הנותרים מתוך p-q האנשים שנותרו.
צד שמאל זה דרך 1, צד ימין זה דרך שניה.

<u>הוכחה 2</u> עבור t אי-זוגי קל לראות כי זה מתאפס היות ו $(-1)^i\binom{t}{i}+(-1)^{t-i}\binom{t}{t-i}=0$
אבל באופן כללי עבור t מספר תתי קבוצות בגודל זוגי ומספר תתי קבוצות בגודל אי זוגי הוא זהה ולכן זה 0

$$\sum_{J=q}^{p}(-1)^{J+q}\binom{J}{q}\binom{p}{J} \underset{\text{עפ"י 1}}{=} \sum_{J=q}^{p}(-1)^{J+q}\binom{p}{q}\binom{p-q}{J-q}=\binom{p}{q}\sum_{J=q}^{p}(-1)^{J+q}\binom{p-q}{J-q} \underset{i=J-q}{=} \binom{p}{q}\sum_{i=0}^{p-q}(-1)^{i}\binom{p-q}{i} \underset{\text{הוכחה 2}}{=} 0$$

$(-1)^{i+2q}=(-1)^i$

6 דרך צד שמאל - חישוב ישיר, לכל מספר ב-$[n]$ ישנן אפשרויות הבאות
$x\in A \vee x\in B \vee x\in C \vee x\in A\cup B \vee x\in A\cup C \vee x\in B\cup C \vee x\in A\cup B\cup C$
ומכיוון לכל מספר ישנם 7 אפשרויות ולכן מספר האפשרויות הוא 7^n

דרך צד ימין
נגדיר את הקבוצות הבאות

$X=\{(A,B,C) \mid A,B,C \text{ הינן תתי קבוצות של } [n]\}$ $|X|=(2^n)^3=2^{3n}$

$X_{i,t}=\{(A,B,C) \mid A,B,C \text{ הינן תתי קבוצות של } [n]\setminus[t]\}$ $|X_i|\ (2^{n-i})^3=2^{3(n-i)}$

$[t]\subseteq[n]$ $|[t]|=i$

$X_{n,t}=\{(A,B,C) \mid A,B,C=\emptyset \text{ רק כלומר}\} \Rightarrow |X_{n,t}|=1$

פתרון השאלה הינו

$\left|X\setminus \bigcup_{\text{לכל } t} X_{1t}\right|$

$$\left|\bigcup X_{1t}\right| = \sum_{\text{לכל } t} X_{1t} - \sum_{\text{לכל } t} X_{2t} + \dots - X_{nt} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i-1}2^{3(n-i)}$$

$\binom{n}{1}$

$$|X|-\left|\bigcup X_{1t}\right| = 2^{3n}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i}2^{3(n-i)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i}2^{3(n-i)}$$

.5

7. על פי הרמז של אירנון יוצא: $f(m,n) = n\,f(m-1,n) + n\,f(m-1,n-1)$

נוכיח באינדוקציה על n (ניתן גם לעשות באינדוקציה על i כאשר $m=n+i$)

בדיקה: $f(m,1)=1$ לכל m

הנחה: לכל מספר m מתקיים $f(m,n)$ מתחלק ב-$n!$

צעד. שלב גורר: לכל מספר k מתקיים $f(k,n+1)$ מתחלק ב-$(n+1)!$

$$f(k,n+1) \underset{\text{לפי הרמז}}{=} (n+1)\,f(k-1,n+1) + \underbrace{(n+1)\,f(k-1,n)}_{\substack{\text{מתחלק ב-}(n+1)! \\ \text{לפי הנחת האינדוקציה}}}$$

$$= (n+1)\Big((n+1)\,f(k-2,n+1) + \underbrace{(n+1)\,f(k-2,n)}_{\text{מתחלק באותה}}\Big) + \underbrace{(n+1)\,f(k-1,n)}_{n+1}$$

ניתן להמשיך $\Rightarrow$ $k-n-1$ צעדים ...

$$\overset{\text{ונקבל}}{=} \underbrace{(n+1)^{k-n-1} f(n+1,n+1)}_{\substack{\text{מתחלק ב-}(n+1)! \text{ כי} \\ f(n+1,n+1)=(n+1)!}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-n-1} (n+1)^i f(k-i,n)}_{\substack{\text{מתחלק ב-}(n+1)! \\ \text{על הנחת האינדוקציה}}} \Rightarrow f(k,n+1) \text{ מתחלק ב-}(n+1)!$$

ובמילא הוכחנו את הטענה.

9. נגדיר

$A_1 = \{$ כל האפשרויות בהן שום איש לא יקבל את מטריתו חזרה $\}$

$A_2 = \{$ כנ"ל – כובעים $\}$

$|A_1| = |A_2| = D(n)\cdot n!$

והפתרון של השאלה הוא $|A_1 \cup A_2|$ – כלומר אף לא קבל אחד מהם את שתי מצדו הנלחיים

לשם כך צריך למצוא

$A_1 \cap A_2 = \{$ כל האפשרויות בהן שום איש לא יקבל לא את כובעו והן את מטריתו $\}$

$|A_1 \cap A_2| = D(n)\cdot D(n)$

הסבר $|A_1| = D(n)\cdot n!$ כי בכדי לחלק n מטריות ל-n אנשים בא' סדר יש $D(n)$ אפשרויות והואיל וכל אפשרות חלה על חלוקת הכובעים ניתן להתאים $n!$ אפשרויות של חלוקת מטריות באי סדר ומכאן $A_1 = D(n)\cdot n!$

$|A_1 \cap A_2| = D^2(n)$ כי לחלוקת כובעים בא' סדר יש $D(n)$ אפשרויות ולחלוקת מטריות בא' סדר $D(n)$ אפשרויות. בכדי ששני התנאים יתקיימו בתוך לכמוה ולכל אפשרות של א' סדר של כובע ניתן לצרף את כל א' הסדרים של המטריות ניקבל צמות

$$|A_1 \cup A_2| = n!\,D(n) + n!\,D(n) - D^2(n)$$

8 א)

$X = \{$ כל הסידורים של $1 \ldots 9 \} \Rightarrow |X| = 9!$

$X_2 = \{$ כל הסידורים בהם 2 במקומו הטבעי $\} \Rightarrow |X_2| = 8!$

$|X_2| = |X_4| = |X_6| = |X_8|$

$A = X \setminus X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_8 = \{$ כל המספרים רק שבו מספר זוגי אינו במקומו $\}$

$X_i \cap X_j = \{$ כל הסידורים רק i,j במקומם, $i,j \neq 0 \} \Rightarrow |X_i \cap X_j| = 7!$

באותו אופן $|X_i \cap X_j \cap X_k| = 6!$; $|X_i \cap X_j \cap X_k \cap X_l| = 5!$

ולכן

$$|A| = 9! - |X_2 \cup X_4 \cup X_6 \cup X_8| = 9! - \left(4 \cdot 8! - \binom{4}{2}7! + \binom{4}{3}6! - \binom{4}{4}5!\right)$$

ב) X מוגדר כמו בא

$X_{6+8} = \{$ כל הסידורים רק $6+8$ צמודים $\} \Rightarrow |X_{6+8}| = 7!$ נתייחס אליהם כאל מספר אחד

$X_{23} = \{ 23$ -"- $\} \Rightarrow |X_{23}| = 8! = X_{45}$

הפתרון $= |(X \setminus X_{23} \cup X_{6+8} \cup X_{45})| = |X| - |X_{23} \cup X_{6+8} \cup X_{45}|$

$|X_{23} \cap X_{6+8}| = 6! = |X_{45} \cap X_{6+8}|$ $\Rightarrow$ הפתרון $= 9! - (7! + 2 \cdot 8! - 7! - 2 \cdot 6! + 5!)$

$|X_{23} \cap X_{45}| = 7!$ $\quad |X_{23} \cap X_{45} \cap X_{6+8}| = 5!$

ג) כמו בסעיף ב ולכן $|X| = 9!$ $\quad |X_{34}| = |X_{45}| = 8!$ $\quad |X_{6+8}| = 7!$ $\quad |X_{34} \cap X_{6+8}| = |X_{45} \cap X_{6+8}| = 6!$

$X_{34} \cap X_{45} = X_{345} \Rightarrow |X_{345}| = 7!$ $\quad |X_{34} \cap X_{45} \cap X_{6+8}| = |X_{345} \cap X_{6+8}| \Rightarrow \cap X_{ijk} = 5!$

ולכן שהפתרון בסעיף ג הינו אותו פתרון כמו בסעיף ב.