

תרגיל בית מס' 3 – אלגברה לינארית ב'

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ ו- T האופרטור הנתון ע"י פעולת A על הבסיס הסטנדרטי. מצא את הפרוק הפרימרי של A (מצא בסיס למרכיבים הפרימריים). מצא ייצוג ל- T עפ"י הבסיסים הנ"ל.
2. תהי $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ו- T האופרטור הנתון ע"י פעולת B על הבסיס הסטנדרטי. מצא אופרטורים D, N (כתוב את המטריצות בבסיס הסטנדרטי) עבורם $T = D + N$, D לכסי, N נילפוטנטי D, N מתחלפים.
3. יהי T אופרטור אשר הפולינום האופייני שלו הינו: $\Delta(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{r_i}$. נסמן ב- W_i את הרכיב הפרימרי המתאים ל- λ_i . הוכח כי $\dim W_i = r_i$.
רמז: הגדר $T_i = T|_{W_i}$ והוכח כי הפולינום האופייני של $T_i - \lambda_i I$ הוא מהצורה x^{e_i} .
4. יהי V מרחב המטריצות $n \times n$ מעל F . נקבע $A \in V$ ונגדיר $T(B) = AB - BA$ אופרטור על V . הוכח כי אם A נילפוטנטית אז גם T נילפוטנטי.
5. מה דעתך על התהליך הבא למציאת D, N עבור האופרטור T מעל שדה סגור אלגברית F ? (נכון או לא ?)
הפולינום המינימלי של T הינו מכפלת גורמים ליניאריים ולכן T דומה למטריצה משולשת עליונה U . כעת ניתן להגדיר את D כאלכסון של U ו- $N = U - D$.
6. יהי $T: V \rightarrow V$ לינארי עם פולינום מינימלי m . עבור $v \in V$ נגדיר את m_v להיות הפולינום המינימלי שאינו 0 ועבורו $0 = m_v(T)v$. הוכח כי יש $v \in V$ עבורו $m_v = m$.