תורת המשחקים

תרגיל 8

9.1.13

מגישים: I

II

10

1) א- צ"ל: כל משחק פשוט מונוטוני על 3 שחקנים הינו משחק רוב משוקלל.

<u>הוכחה:</u>

הקואליציות האפשריות במשחק 3 שחקנים הן: $\{1\},\{2\},\{3\},\{12\},\{13\},\{23\},\{123\}$

נציג בטבלה את כל הצירופים האפשריים של קואליציות זוכות במשחק פשוט מונוטוני על 3 שחקנים, ועבור כל צירוף נמצא w_1,w_2,w_3,q המקיימים:

קבוצה S הינה זוכה אמ"מ $\sum_{i\in S} w_i \ge q$.

הקואליציות הזוכות	w_3	w_2	w_1	q
1, 2, 3, 12, 13, 23, 123	1	1	1	1
1, 2, 12, 13, 23, 123	0	1	1	1
1, 3, 12, 13, 23, 123	1	0	1	1
2, 3, 12, 13, 23, 123	1	1	0	1
1, 12, 13, 123	0	0	1	1
1, 12, 13, 23, 123	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
2, 12, 23, 123	0	1	0	1
2, 12, 23, 13, 123	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
3, 13, 23, 123	1	0	0	1
3, 12, 13, 23, 123	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
12, 123	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
13, 123	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
23, 123	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
12, 13, 123	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
12, 23, 123	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
13, 23, 123	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
12, 13, 23, 123	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
123	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

נשים לב כי אלו הצירופים האפשריים של קואליציות זוכות מתכונת המונוטוניות (אם קבוצה היא זוכה, אז גם כל הקבוצות המכילות אותה זוכות).

הראנו כי לכל משחק פשוט מונוטוני על 3 שחקנים קיימים w_1,w_2,w_3 ו-q ממשיים המקיימים $0<q<\sum_{i=1}^{3} w_i$ כך ש-S זוכה אמ"מ $\sum_{i\in S} w_i \ge q$. ומכאן שכל משחק פשוט מונוטוני על 3 שחקנים הינו משחק רוב משוקלל. מש"ל.

ב- נתאר את המשחק הבא, מונוטוני, עם 4 שחקנים כדלהלן:
לשחקן מס' 1 יש כפפה ימנית כחולה.
" " 2 " " שמאלית כחולה.
" " 3 " " ימנית אדומה.
" " 4 " " שמאלית אדומה.

מצוב המורכב מכפפה שמאלית וכפפה ימנית באותו צבע ניתן להפיק תועלת 1.
נבנה משחק עם $N=4$ ופונקציה אופיינית:

$$V(S)=\begin{cases}1 & S\in\left\{\{1,2\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\right\}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

נניח בשלילה כי קיימים $0\le \omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ ומספר ממשי q כך ש:
$0<q\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ וכל $S\subseteq N$ מתקיים: $\sum_{i\in S}\omega_i\ge q \iff V(S)=1$.

אז מתקיים:

① $\omega_1+\omega_2\ge q$

② $\omega_3+\omega_4\ge q$

③ $q>\omega_1+\omega_4$

④ $q>\omega_2+\omega_3$

מחיבור משוואות 1 ו-3: $\omega_1+\omega_2+q>q+\omega_1+\omega_4$

$\omega_2>\omega_4$

מחיבור משוואות 2 ו-4: $\omega_3+\omega_4+q>q+\omega_2+\omega_3$

$\omega_4>\omega_2$

סתירה!

לכן לא קיימים $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ ו-q המקיימים את הדרישות
$\Leftarrow$ לא ניתן להציג את המשחק כמשחק רוב משוקלל.

2) עם $N=15$, כאשר שחקנים $i=1,\dots,5$ הם החברות הקבועות ושחקנים $i=6,\dots,15$ הם החברות הזמניות. הפונקציה האופיינית היא:

$$V(S)=\begin{cases} 1 & 1,2,3,4,5\in S \text{ וגם } |S|\geq 9 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב- כן, זהו משחק רוב משוקלל. ניתן להציגו לדוגמא כך:

$$\left[16;3,3,3,3,3,\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right]$$

ברור כי לפי תיאור זה קואליציה היא זוכה אמ"מ $1,\dots,5\in S$ וגם $|S|\geq 9$.

3. נסמן לכל $T \subseteq N$ ולכל $\sigma \in S_n$

$$\sigma(T) = \{\sigma(i) \mid i \in T\}$$

א. • $SYM(G) \neq \emptyset$

תמורת הזהות $e \in S_n$ מקיימת שלכל $i=1,\dots,n$ $e(i) = i$

ולכן לכל $T \subseteq N$ $e(T) = T$

$\Leftarrow$ לכל $T \subseteq N$ $v(e(T)) = v(T)$

ולכן $e \in SYM(G)$.

• סגירות.

יהיו $\sigma, \tau \in SYM(G)$, נראה כי $\sigma\tau \in SYM(G)$.

יהא $T \subseteq N$.

$\tau \in SYM(G) \Leftarrow v(\tau(T)) = v(T)$

$\tau(T) \subseteq N$, $\sigma \in SYM(G) \Leftarrow v(\sigma(\tau(T))) = v(\tau(T))$

וקיבלנו בסה"כ

$$v(\sigma(\tau(T))) = v(\sigma\tau(T)) = v(\{\sigma\tau(i) \mid i \in T\}) =$$
$$= v(\tau(T)) = v(T)$$

$\Leftarrow$ $v(\sigma\tau(T)) = v(T)$ לכל $T \subseteq N$.

ולכן $\sigma\tau \in SYM(G)$.

• קיום הפכי

תהא $\sigma \in SYM(G)$, נראה כי $\sigma^{-1} \in SYM(G)$

יהי $T \in N$

אז $\sigma^{-1}(T) \in N$ ולכן $v(\sigma(\sigma^{-1}(T))) = v(\sigma^{-1}(T))$

אבל $\sigma(\sigma^{-1}(T)) = T$ ולכן:

$$v(T) = v(\sigma^{-1}(T))$$

לכל $T \subseteq N$.

$\Leftarrow$ $\sigma^{-1} \in SYM(G)$

$\Downarrow$

$SYM(G)$ תח' של S_n.

ב. I $SYM(G) - S_3$

מכיוון שלכל $S \subseteq N$ ולכל $\sigma \in S_3$ $|S| = |\sigma(S)|$

ומתקיים לכל $\sigma \in S_3$

$$v(S)=1 \iff |S| \geq 2 \iff |\sigma(S)| \geq 2 \iff v(\sigma(S)) = 1$$

ולכן $v(\sigma(S)) = v(S)$ לכל $S \subseteq N$

ולכן $\sigma \in SYM(G)$

(ולפי סעיף א')

II $SYM(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

כלומר $\sigma \in SYM(G) \iff \sigma(1) = 1$

מכיוון ש-

$$v(S) = 1 \iff |S| \geq 2 \wedge 1 \in S$$

ולכן $v(S) = v(\sigma(S))$ לכל $S \subseteq N$ אמ"מ $\sigma(1) = 1$.

III $(N = P \cup T)$

$\sigma \in SYM(G) \iff$ לכל $i \in P$ $\sigma(i) \in P$

כלומר $\sigma(P) = P$

$\Rightarrow$ לכל $S \subseteq N$ $|\sigma(S)| = |S|$.

ואם $\sigma(P) = P$ אז:

$$v(S) = 1 \iff |S| \geq 9 \wedge P \subseteq S \iff$$

$$\iff |\sigma(S)| \geq 9 \wedge P \subseteq \sigma(S) \iff v(\sigma(S)) = 1$$

ולכן $v(S) = v(\sigma(S))$ לכל $S \subseteq N$

$\Rightarrow \sigma \in SYM(G)$

$\Leftarrow$ אם $\sigma(P) \neq P$ נראה כי $\sigma \notin SYM(G)$.

קיים $i \in P$ כך ש- $\sigma(i) \in T$

ולכן גם קיים $j \in T$ כך ש- $\sigma(j) \in P$

עבור $S = N \setminus \{j\}$ מתקיים $|S| = 14 \geq 9$ ו- $P \subseteq S$

ולכן $v(S) = 1$

ג.

$SYM(G) = S_n \iff$ קיימת $f:\{0,1,\dots,n\} \to \mathbb{R}$

(G סימטרי) המקיימת $f(0)=0$

לכל $T \subseteq N$ $v(T) = f(|T|)$.

$\Rightarrow$ נניח שקיימת פונקציה כנ"ל.

תהא $\sigma \in S_n$. נראה כי $\sigma \in SYM(G)$.

תהא $T \subseteq N$. אזי $|\sigma(T)| = |T|$

ולכן $v(\sigma(T)) = f(|\sigma(T)|) = f(|T|) = v(T)$

$\Leftarrow$ לכל $T \subseteq N$ $v(\sigma(T)) = v(T)$

ולכן $\sigma \in SYM(G)$.

$\Leftarrow$ $SYM(G) \supseteq S_n$

ומהגדרה $SYM(G) \subseteq S_n$

ולכן $SYM(G) = S_n$

ו- G סימטרי.

$\Leftarrow$ נניח שהמשחק סימטרי. נגדיר $f:\{0,\dots,n\} \to \mathbb{R}$ $f(0)=0$.

אז: לכל $T,S \subseteq N$ כך ש- $|T| = |S|$

קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש- $T = \sigma(S)$.

G סימטרי ולכן $\sigma \in SYM(G)$

ולכן $v(T) = v(\sigma(S)) = v(S)$

כלומר $x = |S| = |T| \Rightarrow v(T) = v(S)$

ונוכל להגדיר $f(x) = v(T)$

ואז לכל $S \subseteq N$ קיימת $T \subseteq N$ $|T| = |S|$

כך ש- $f(|S|) = v(T)$

וראינו $v(T) = v(S) \Leftarrow f(|S|) = v(S)$

כנדרש.

.3

I

מתקיים לכל $\sigma \in SYM(G)$:

$$v(S)=1 \iff v(\sigma(S))=1 \iff \sum_{i\in\sigma(S)} w_i \ge q$$

$\sigma \in SYM(G)$; $[q;w_1,\dots,w_n]$ היא הצגה של G

$$\iff \sum_{i\in S} w_{\sigma(i)} \ge q$$

כלומר $v(S)=1 \iff \sum_{i\in S} w_{\sigma(i)} \ge q$

ולכן גם $[q; w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(n)}]$ היא הצגה של G לכל $\sigma\in SYM(G)$.

II

$$v(S)=1 \iff \sum_{i\in S} w_i \ge q \ \wedge\ \sum_{i\in S} w'_i \ge q'$$

$[q;w_1,\dots,w_n]$, $[q';w'_1,\dots,w'_n]$ הצגות של G.

באמת? $$\iff \sum_{i\in S} w_i + w'_i \ge q+q'$$

ולכן $[q+q'; w_1+w'_1,\dots,w_n+w'_n]$ היא הצגה של G.

III

ניקח הצגה $[q;w_1,\dots,w_n]$ כלשהי של המשחק.

ראינו שלכל $\sigma\in SYM(G)$ בסעיף I.

גם $[q; w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(n)}]$ היא הצגה של המשחק.

לפי סעיף II, גם

$\left[\,|SYM(G)|\cdot q;\ \sum_{\sigma\in SYM(G)} w_{\sigma(1)},\ \dots,\ \sum_{\sigma\in SYM(G)} w_{\sigma(n)}\right]$ היא הצגה של המשחק.

אם עבור $i,j\in N$ קיימת $\tau\in SYM(G)$

כך ש- $\tau(i)=j$ אז $\sum_{\sigma\in SYM(G)} w_{\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in SYM(G)} w_{\sigma(j)}$

מכיוון שהסכומים זהים ("מסדר אחר")