15.10.96

מהי קומבינטוריקה?

טור של טוטו. מה הסיכוי לנחש את כל 15 המשחקים כאשר שולחים טור באקראי? תשובה. כמה טורים צריך לשלוח כדי להבטיח זכיה בפרס הראשון? תשובה. כמה טורים צריך לשלוח כדי להבטיח זכיה בפרס השני לפחות? 3^{14} בוודאי יספיקו. המספר המינימלי לא ידוע.

סימון: f_n = המספר המינימלי של טורים המבטיח זכיה בפרס השני לפחות, כאשר מנחשים n משחקים.

הראינו: $f_{15} \le 3^{14}$.

באופן כללי: $f_n \le 3^{n-1}$.

טענה: $f_n \ge \frac{3^n}{2n+1}$. הוכחה.

דוגמה: $f_3 \ge \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$. זה אומר שאי-אפשר ב-3 טורים או פחות, אבל לא אומר שאפשר ב-4 טורים. אבל מתברר (אם כי לא נוכיח זאת) כי:

משפט: אם $\frac{3^n}{2n+1}$ מספר שלם אז $f_n = \frac{3^n}{2n+1}$.

הערה: $\frac{3^n}{2n+1}$ מספר שלם אם ורק אם $2n+1$ חזקה של 3.

דוגמה: $n=13$. $f_{13} = \frac{3^{13}}{3^3} = 3^{10}$.

מסקנה: $f_{15} \le 3^{10} \cdot 3^2 = 3^{12}$

באותו אופן,

$$f_{16} \le 3^{10} \cdot 3^3 = 3^{13}$$
$$\vdots$$
$$f_{40} \le 3^{10} \cdot 3^{27} = 3^{37}$$

אבל $f_{40} = \frac{3^{40}}{3^4} = 3^{36}$

סיכום מה שידוע עבור $n=15$: $\frac{3^{15}}{31} \le f_{15} \le 3^{12}$.

דוגמה: $n=4$. $f_4 = \frac{3^4}{3^2} = 3^2$. בניה של 9 טורים שעובדים:

a	1	1	1	2	2	2	x	x	x
b	1	2	x	1	2	x	1	2	x
$c=a+b$	2	x	1	x	1	2	1	2	x
$d=b+c$	x	2	1	1	x	2	2	1	x

חברה ובה n בחורים ו-n בחורות. כל בחור מדרג את הבחורות (1-הטובה ביותר, 2-השניה, וכן הלאה), וכל בחורה מדרגת את הבחורים באופן דומה. כתיבה של הדירוגים בשתי טבלאות (כל שורה מתאימה לבחור, וכל עמודה לבחורה). דוגמה לאי-יציבות.

הגדרה: נישואים זו רשימה של n זוגות, כך שכל בחור וכל בחורה מופיעים בזוג יחיד. נישואים יציבים זו רשימה כזאת, כך שלא קיימים בחור b ובחורה g שאינם נישואים זה לזה, כך ש-b מעדיף את g על-פני זוגתו, וגם g מעדיפה את b על-פני בן-זוגה.

משפט Gale-Shapley: תמיד קיימים נישואים יציבים.

הקשר לבעית קבלת סטודנטים לאוניברסיטאות.
דוגמה למודל הנישואים:

בחורות / בחורים	1	2	3
1	3 1	2 3	3 2
2	2 1	1 2	1 3
3	1 3	3 1	2 2

כאשר הספרה השמאלית במשבצת היא הדרוג של הבחור את הבחורה והימנית הדרוג של הבחורה את הבחור.
הנישואים $(1,1),(2,2),(3,3)$ בלתי יציבים בגלל הזוג $(2,1)$, הנישואים $(2,1),(3,2),(1,3)$ יציבים.

22.10.96

תזכורת: בעיית הנישואים היציבים והמשפט. הוכחה: זו הוכחה אלגוריתמית. תיאור בע"פ ובכתב של האלגוריתם של Gale-Shapely , עם חסם של n^2 על זמן פעולתו. הוכחת יציבות הנישואים המתקבלים.
דיון בע"פ: אלה הנישואים היציבים האופטימלים עבור הבחורים. היפוך התפקידים מוביל לנישואים יציבים אופטימלים עבור הבחורות. לפעמים כדאי לדווח על דירוג שונה מהאמיתי.

בעיית מנייה בסיסיות: מתי מחברים? כאשר סופרים עצמים המתחלקים לתת-קבוצות שאין ביניהן חפיפה. דוגמה. דוגמה של חפיפה שבה אסור לחבר. מתי מכפילים? דוגמה. הכלל: כאשר יש מספר בחירות בלתי-תלויות. דוגמה עם תלות שבה אסור להכפיל, אלא צריך להפריד מקרים.

דוגמה: בכמה אופנים יכולה כיתה להרכיב נבחרת שחמט? הגדרה: כאשר נתונים n עצמים, רשימה של k עצמים שונים מתוכם (כאשר הסדר משמעותי) נקראת k-תמורה של n עצמים. מספר ה-k-תמורות של n עצמים מסומן $P(n,k)$ (עבור $k \le n$ טבעי).

ראינו $P(20,4) = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$.

באופן כללי $P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.
במקרה הפרטי $k = n$ אומרים תמורה(במקום n-תמורה). מספר התמורות של n עצמים הוא $P(n,n) = n!$. אפשר לכתוב $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
הערה: $0! = 1$.

כמה תמורות מעגליות יש של n עצמים? הסבר והדגמה.
תשובה: $\frac{P(n,n)}{n} = (n-1)!$. לפעמים רוצים שלא להבחין בין תמורות מעגליות המתקבלות זו מזו ע"י היפוך. אז התשובה היא: $(n \ge 3)$, $\frac{(n-1)!}{2}$.

29.10.96

שאלה: בכמה אופנים ניתן לבחור וועד ובו 4 תלמידים בכיתה בת 20 תלמידים? תשובה.

הגדרה: כאשר נתונים n עצמים, בחירה של k עצמים מתוכם (כאשר הסדר לא משמעותי) נקראת k-צירוף של n עצמים. מספר ה-k-צירופים של n עצמים מסומן ע"י $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. (כאן $n \geq k \geq 0$). במילים n בחר k. הערה על קיום סימונים ומינוחים אחרים.

הנוסחה:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

מסקנה: $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. הסבר.

שאלה: בהנתן טור בטוטו, כמה טורים "נכונים" הוא מנחש ב-12 מקומות בדיוק? תשובה. הסבר בע"פ על חסם מלרע עבור מספר הטורים שיש לשלוח כדי להבטיח לפחות פרס רביעי.

שאלה: בהנתן k_1 עצמים מסוג 1, k_2 עצמים מסוג 2,..., k_r עצמים מסוג r, בכמה אופנים אפשר לסדר את $n = k_1 + \cdots + k_r$ העצמים? תשובה בשתי דרכים.

מקרים פרטיים:

1. $k_1 = \cdots = k_r = 1$
2. $r = 1$
3. $r = 2$

שאלה: כמה מילים שונות אפשר ליצור ע"י סידור כלשהו של אותיות המילה "קומבינטוריקה"? תשובה. באנגלית?

שאלה: בהנתן כמות בלתי מוגבלת של עצמים מ-r סוגים שונים, בכמה אופנים אפשר לבחור k עצמים? $(k \geq 0, r \geq 1)$.

תשובה: תרגום הבעיה למס' הפתרונות במספרים שלמים אי-שליליים של $x_1 + \cdots + x_r = k$. לכל פתרון כזה נתאים סדרה של 0-ים ו-1-ים, כאשר נחליף כל x_i ב-x_i 1-ים וכל + ב-0. דוגמה. ניתן לשחזר. תכונות הסדרה שמתקבלת. מס' הסדרות הוא $\begin{pmatrix} r-1+k \\ k \end{pmatrix}$.

שאלה:כמו קודם, אבל חייבים לבחור לפחות עצם אחד מכל סוג. $(k \geq r \geq 1)$.

תשובה: ע"י רדוקציה למקרה הקודם,

$$\begin{pmatrix} k-1 \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-1+k-r \\ k-r \end{pmatrix}.$$

דוגמה: בכמה אופנים ניתן לקנות 10 עוגיות בקונדיטוריה שבה 4 סוגי עוגיות? תשובה. אם רוצים לפחות עוגיה אחת מכל סוג? תשובה.

5.11.96

נוסחת הבינום:
$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n_1} + \cdots + \binom{n}{n} x^n y^0$$

הסבר הסימון $\sum$. המינוח: מקדמים בינומיים. כתיבה מפורשת של הנוסחה עבור $n = 1, 2, 3$.

מסקנה 1 של נוסחת הבינום: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. הסבר קומבינטורי.

מסקנה 2 של נוסחת הבינום: $0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. כתיבה מחדש בצורה $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$. הסבר קומבינטורי.

נוסחת Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ עבור $1 \le k \le n-1$ הסבר קומבינטורי.

משולש Pascal: תיאור הבנייה שלו, הוכחה באינדוקציה על n שזה נותן את המקד-מים הבינומיים.

טענה: אם n זוגי אז
$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \binom{n}{\frac{n}{2}+1} > \cdots > \binom{n}{n}.$$
אם n איזוגי אז
$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \binom{n}{\frac{n+3}{2}} > \cdots > \binom{n}{n}.$$
הערה על שיטות ההוכחה של תכונות המקדמים הבינומיים.

הוכחת הטענה ע"י חילוק שני מקדמים עוקבים.

כמה גדול הוא המקדם הגדול בשורה ה-n-ית?

נוסחת Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. הסבר על π, e ועל המובן שבו מתקיים הקירוב. ההוכחה מתבססת על אינפי ולא תינתן כאן.

חישוב מקורב של $\binom{2n}{n}$. הסבר התוצאה בגודלו היחסי של המקדם הגדול ביותר. יישום בע"פ לשאלה: ב-$2n$ הטלות מטבע, מה ההסתברות למספר שווה של שתי התוצאות?

7.4.98

עקרון ההכלה-הפרדה (Inclusion-Exclusion):

דוגמה (סיפור עם שתי קבוצות). ציור. הכנסת סימונים ומינוח:
$|X|, A\cup B, A\cap B$. במונחים אלה רצינו לחשב את $|A\cup B|$ והשתמשנו בנוסחה $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$. זוהי נוסחת ההכלה-הפרדה לשתי קבוצות.

עבור שלוש קבוצות:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

ציור. בדיקת נכונות הנוסחה לפי מספר הפעמים שכל איבר נספר.

חזרה על המקרים של שתי קבוצות, שלוש קבוצות.

עקרון ההכלה-הפרדה: תהיינה $A_1, A-2, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. אזי

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \cdots +$$

$$+(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

הוכחה.

תזכורת של מושגים מתורת המספרים:

מספר m מחלק מספר n, $m|n$. מספר ראשוני. כל מספר $n>1$ ניתן לכתיבה בצורה $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$ כאשר $p_1, \ldots, p_t$ ראשוניים, $k_1, \ldots, k_t$ טבעיים.

מ.מ.מ. (m,n). כ.מ.מ. $[m,n]$. $(m,n)\cdot[m,n] = m\cdot n$.

אם מספר מחלק גם את m וגם את n אז הוא מחלק את (m,n).

אם מספר מתחלק גם ע"י m וגם ע"י n אז הוא מתחלק ע"י $[m,n]$.

m, n זרים אם $(m,n)=1$. תנאים שקולים: $[m,n] = m\cdot n$, אין מספר ראשוני p המחלק את שניהם.

הגדרה: לכל מספר טבעי n, $\varphi(n)$ הוא מספר המספרים הזרים ל-n מבין המספרים $1, 2, \ldots, n$. הפונקציה φ נקראת פונקצית אוילר. כמה דוגמאות. המטרה היא למצוא נוסחה כללית עבור $\varphi(n)$. אם n ראשוני אז $\varphi(n) = n-1$.

אם $n = p^k$ חזקה של ראשוני אז $\varphi(p^k) = \frac{p^k}{p}(p-1) = p^k(1-\frac{1}{p})$ כלומר $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p})$. נתבונן במקרה הכללי: $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}$.

נסמן ב-A_i את קבוצת המספרים מבין $1, 2, \ldots, n$ המתחלקים ב-p_i.

אז $A_1\cup\cdots\cup A_t$ היא קבוצת המספרים מבין $1, 2, \ldots, n$ שאינם זרים ל-n.

$$\varphi(n) = n - |A_1\cup\cdots\cup A_t| = n - (\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_t}) + \sum_{1\le i<j\le t}\frac{n}{p_ip_j} - \sum_{1\le i<j<k\le t}\frac{n}{p_ip_jp_k} + \cdots$$

$$+\cdots + (-1)^t\frac{n}{p_1p_2\cdots p_t} = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_t})$$

דוגמה: $\varphi(200)=\varphi(2^3\cdot 5^2)=200(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=80$

דוגמה: אדם כותב n מכתבים ל-n אנשים שונים. ומכין n מעטפות עם הכתובות. הוא מכניס לכל מעטפה מכתב באקראי ושולח. מה ההסתברות שאף אדם לא יקבל את המכתב שנועד לו?

תשובה: נייצג כל סידור אפשרי של המכתבים במעטפות כתמורה של $1,2,\ldots,n$. דוגמה. אנו מעוניינים בתמורות שבהן אף מספר אינו מופיע במקום שלו. דוגמה.

נסמן ב-A_i את קבוצת התמורות שבהן המספר i מופיע במקום שלו.

אז $A_i\cup\ldots\cup A_n$ היא קבוצת התמורות שבהן לפחות מספר אחד מופיע במקום שלו.

אנו מעוניינים במספר $D_n=n!-|A_1\cup\ldots\cup A_n|$ שהוא מספר האי-סדרים של n עצמים.

$$D_n = n!-(\underbrace{(n-1)!+(n-1)!+\cdots+(n-1)!}_{\text{פעמים } n})+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots$$

$$=n!(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(1)^n\frac{1}{n!})$$

$$=n!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

לכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{D_n}{n!}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$. זהו סכום שעבור n גדול קשה לחשבו במדויק, אבל לחישוב מקורב די בכמה מחוברים ראשונים. כאשר $n\to\infty$, $\frac{D_n}{n!}\to\frac{1}{e}$.

12.11.96 (רון אהרוני)

עקרון ההכלה-הפרדה: המקרה של מאורעות בלתי-תלויים, המקרה הכללי, derangements.

חזרה על עקרון ההכלה-הפרדה: תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. רוצים לחשב את מספר העצמים הנמצאים באחת הקבוצות לפחות, כלומר ב-$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \cup_{i=1}^n A_i$. נסמן ב-$|X|$ את מספר העצמים בקבוצה X. אזי:

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_n \\ \| \quad \| \quad\quad \| \\ 1 \quad 2 \quad\quad n}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}|$$

שאלה: כמה מספרים טבעיים בין 1 ל-500 אינם מתחלקים באף אחד מן המספרים 4,6,9? פתרון.

שאלה: כמה מספרים טבעיים בין 1 ל-n זרים ל-n? (זרות פירושה היעדר מחלק משותף גדול מ-1).

פתרון:סימון $\varphi(n)$-פונקצית אוילר. כתיבת $\varphi(n)$ עבור $n = 1, 2, \ldots, 12$. עבור p ראשוני: $\varphi(p) = p-1$,$\varphi(p^2) = p^2 - p$ ובאופן כללי $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1-\frac{1}{p})$.

עבור n מהצורה $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, $p_1 \neq p_2$:

$A_1 =$ המספרים המתחלקים ב-p_1

$A_2 =$ המספרים המתחלקים ב-p_2

$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2| = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1 p_2} = n(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1 p_2}) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})$$

במקרה הכללי $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, p_i ראשונים שונים, k_i טבעיים, חישוב באותה דרך נותן $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$. פירוש הנוסחה במונחי אי-תלות המאורעות "התחלקות ב-p_i".

דוגמה:חישוב $\varphi(693)$.

נוסחת נסיגה ופתרונן.

דוגמה: על המשבצות של לוח שחמט מניחים גרעינים, כך שעל הראשונה גרעין אחד, ועל כל משבצת אחרת כפליים מקודמתה. כמה גרעינים יש על המשבצת ה-n-ית?

תשובה: $\begin{cases} g_n = 2g_{n-1} & n = 2, 3, \ldots \\ g_1 = 1 \end{cases}$ נוסחת נסיגה

פתרון מפורש: $g_n = 2^{n-1}$.

דוגמה: נתון לוח משבצות $2 \times n$. מכסים את הלוח ללא חפיפה ע"י כלי דומינו 2×1. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

תשובה: $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n = 2, 3, \ldots \\ F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{cases}$ נוסחת נסיגה.

אלה נקראים מספרי Fibonacci. חישוב ערכים אחדים.

26.11.96

תזכורת: בעית כיסוי לוח $2 \times n$ ע"י כלי דומינו. נוסחת הנסיגה. נפתור את נוסחת הנסיגה.

נניח שסדרה מהצורה $A_n = q^n, q \neq 0$ מקיימת $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.

נציב: $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$. נצמצם: $q^2 = q + 1$. נפתור: $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

קבלנו שתי סדרות מהצורה הנ"ל: $A_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n, B_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

הן לא מקיימות את תנאי ההתחלה. כל צירוף לינארי שלהן מקיים את התנאי של הנסיגה. קיבלנו פתרון כללי מהצורה $C_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. נבחר c_1, c_2 כך שיתקיימו תנאי ההתחלה. לשם-כך נפתור שתי משוואות בשני נעלמים. נציב בפתרון הכללי ונקבל $C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$. זה מקיים את נוסחת הנסיגה עם תנאי ההתחלה ולכן $P_n = C_n$.

השיטה עובדת באופן כללי לפתרון נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית עם מקד-מים קבועים, כלומר מהצורה

$$H_n = a_1 H_{n-1} + a_2 H_{n-2} + \cdots + a_k H_{n-k} \; n \geq k$$

כאשר a_i מספרים כלשהם, $a_k \neq 0$, עם תנאי ההתחלה

$$\begin{gathered} H_0 = b_0 \\ H_1 = b_1 \\ \vdots \\ H_{k-1} = b_{k-1} \end{gathered}$$

כתיבה במפורש של שיטת הפתרון, קודם למקרה של שורשים שונים. הסבר בע"פ על מטריצת Vandermonde. במקרה של שורשים עם ריבוי: אם q_i שורש כפול אז לא רק q_i^n אלא גם nq_i^n מקיים את התנאי של הנסיגה. אם q_i שורש משולש אז $q_i^n, nq_i^n, n^2q_i^n$ מקיימים את התנאי, וכן הלאה.

(ללא הסבר) בסך הכל יש k סדרות, וכותבים פתרון כללי ומוצאים קבועים כמו קודם.

דוגמה: $H_1 = 2, H_0 = 1, H_n = 6H_{n-1} - 9H_{n-2}$.

פתרון תוך בדיקה ש-$n \cdot 3^n$ מקיים את התנאי, והסבר בע"פ מדוע זה נכון באופן כללי.

3.12.96

דוגמה: "מגדלי הנוי"

תיאור המשחק, סימון H_n, הדגמה עבור H_0, H_1, H_2, מציאת נוסחת הנסיגה $H_n = 2H_{n-1} + 1$, פתרון ע"י הצבות חוזרות, בדיקה באינדוקציה.

דוגמה: הגדרת מצב כללי לגבי קבוצת ישרים במישור. נתונים n ישרים במצב כללי במישור. לכמה תחומים הם מחלקים את המישור? סימון R_n. הדגמה עבור R_0, R_1, R_2, R_3. מציאת נוסחת הנסיגה $R_n = R_{n-1} + n$, פתרון ע"י הצבות חוזרות, ניתן לבדוק באינדוקציה.

עקרון שובך יונים: $n+1$ יונים, n תאים $\Leftarrow$ יש שתיים באותו תא.

נוסח מוכלל: $2n+1$ יונים, n תאים $\Leftarrow$ יש שלוש באותו תא.

$rn+1$ יונים, n תאים $\Leftarrow$ יש $r+1$ באותו תא.

שימושים:

1. מכל שלושה בני אדם נורמליים יש שניים בני אותו מין.
2. מכל 13 בני אדם יש שניים שיום הולדתם חל באותו חודש.
3. יש שני תושבים בחיפה בעלי אותו מספר שערות על הראש.
4. מכל חמש נקודות בתוך ריבוע שצלעו 2 יש שתיים שמרחקן $\sqrt{2}$ לכל היותר.
5. יהיו $a_1, \dots, a_m$ מספרים שלמים (לאו דווקא שונים), אזי קיימים $0 \leq k, l$ $k < l \leq m$, כך ש- $a_{k+1} + \cdots + a_l$ מתחלק ב-m.

   הערה: זה לא ניתן לשיפור, במובן הבא: קיימים $a_1, \dots, a_{m-1}$ שלמים כך שאף אחד מהסכומים הנ"ל אינו מתחלק ב-m.
6. מכל 101 מספרים מבין הטבעיים מ-1 עד 200, יש אחד המחלק אחר.

17.12.96

שימושים בנוסח המוכלל של עקרון שובך היונים:

1. בבוחן בקומבינטוריקה השתתפו 60 סטודנטים. כל סטודנט ענה על 3 שאלות מבין 4 שהיו בבוחן. הוכח שיש שאלה שנבחרה ע"י 45 סטודנטים לפחות.

   הוכחה ע"י התבוננות בזוגות (שאלה, סטודנט) כיונים ובשאלות כתאים. ניסוח אלטרנטיבי במונחי ממוצעים.

   אם כל הציונים בין 90 ל-100, כמה סטודנטים חייבים לקבל אותו ציון?

2. משפט Erdös-Szekeres: יהיו m, n מספרים טבעיים. תהי נתונה סדרה $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ של מספרים ממשיים. אזי: או שקיימת תת-סדרה עולה באורך $m+1$ או שקיימת תת-סדרה לא-עולה באורך $n+1$.

   דוגמה: $m = 2, n = 3$. ניסיון לבנות דוגמה נגדית.

   הוכחה ע"י התבוננות ב-$f(i)$=האורך המכסימלי של תת-סדרה לא-עולה המתחילה ב-a_i. תיאור ההוכחה בציור. mn לא מספיק (ציור).

תורת רמזי:

דוגמה: בכל קבוצה של 6 אנשים יש 3 המכירים זה את זה או 3 שאינם מכירים זה את זה (אף שניים מהם). תרגום השאלה לשפה של נקודות, קווים וצבעים. הדגמה בציור. הוכחת הטענה.

הערה: הטענה בוודאי נכונה לכל מספר של אנשים שהוא 6 או יותר. אבל היא לא נכונה לפחות מ-6 אנשים. לשם-כך מספיק להראות שהיא לא נכונה ל-5 אנשים. ציור.

דיון בע"פ בהכללות של הטענה: מה אם רוצים 4 המכירים זה את זה או 4 שאינם מכירים? מה לגבי 5? הסבר הקושי למציאת המספר המדויק. מה אם רוצים 4 המכירים זה את זה או 3 שאינם מכירים? מה אם צובעים ביותר צבעים? מה אם צובעים שלשות. או באופן כללי t-יות? ניסוח בע"פ של המשפט הכללי. פירוש: בכל בלגן מספיק גדול יש סדר בגודל נתון.

24.12.96

הגדרה: יהיו t,m מספרים טבעיים. תהי S קבוצה. צביעה של ה-t-יות של S ב-m-צבעים זוהי פונקציה f המתאימה לכל תת-קבוצה A של S בגודל t צבע $f(A)$ שהוא אחד המספרים $1,2,\dots,m$. הסבר בע"פ. דוגמה עם $t=2, m=3, |S|=4$.

הגדרה: בהנתן צביעה של ה-t-יות של S ב-m-צבעים, תת-קבוצה H של S נקראת הומוגנית מצבע i אם כל ה-t-יות של H צבועות בצבע i, כלומר לכל תת-קבוצה A של H בגודל t, $f(A)=i$. הסבר בדוגמה.

משפט Ramsey : יהיו t,m מספרים טבעיים. ויהיו $k_1,k_2,\dots,k_m$ מספרים טבעיים כך ש-$k_i \geq t$ לכל i. אזי קיים מספר טבעי n (התלוי במספרים $k_1,\dots,k_m$) בעל התכונה הבאה:
לכל צביעה של ה-t-יות של קבוצה S ב-m-צבעים, כאשר S קבוצה בגודל n, או שיש קבוצה הומוגנית מצבע 1 בגודל k_1, ..., או שיש קבוצה הומוגנית מצבע m בגודל k_m.

הערה: אם n הוא בעל התכונה המופיעה במשפט, אז בוודאי כל $n' \geq n$ הוא בעל התכונה הזאת. אם קיים n כזה, נסמן את ה-n הקטן ביותר בעל התכונה ע"י $R^t(k_1,\dots,k_m)$. למשל ראינו ש- $R^2(3,3)=6$.

הוכחה: באינדוקציה על t. בדיקה עבור $t=1$:
$R^1(k_1,\dots,k_m)=k_1+\cdots+k_m-m+1$. הסבר והקשר לעקרון שובך היונים.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור $t-1$. נוכיח עבור t, באינדוקציה על $k_1+\cdots+k_m$.

מקרה הבסיס: $k_1=\cdots=k_m=t$. $R^t(t,\dots,t)=t$. מקרה נוסף: חלק מה-k_i-שווים ל-t וחלק גדולים מ-t. בלי הגבלת הכלליות $k_{r+1},\dots,k_m>t$, $k_1=\cdots=k_r=t$. אז $R^t(t,\dots,t,k_{r+1},\dots<k_m)=R^t(k_{r+1},\dots,k_m)$ וזה קיים בגלל הנחת האינדוקציה.

נשאר המקרה: $k_1,\dots,k_m>t$. זה המקרה העיקרי.

נסמן:, $a_1=R^t(k_1-1,k_2,\dots,k_m)$,
$a_2=R^t(k_1,k_2-1,k_3,\dots,k_m),\dots,a_m=R^t(k_1,k_2,\dots,k_{m-1},k_m-1)$.

הדגמה מספרות. ניקח $n=R^{t-1}(a_1,\dots,a_m)+1$. רעיון ההוכחה כהכללה של ההוכחה עבור 6 נקודות.

תהי נתונה צביעה f של ה-t-יות של קבוצה S בגודל n ב-m-צבעים. ניקח איבר x של S. נגדיר צביעה g של ה-t-יות של $S\setminus\{x\}$ באופן הבא לכל תת-קבוצה A של $S\setminus\{x\}$ בגודל $t-1$, $g(A)=f(A\cup\{x\})$.

מכיוון שגודל $S\setminus\{x\}$ הוא $R^{t-1}(a_1,\dots,a_m)$, קיימת עבור איזשהו i, $1\leq i\leq m$, קבוצה הומוגנית H מצבע i בגודל a_i.

מה אומרת ההומוגניות הזאת?

מכיוון שגודל H הוא $R^t(k_1,\dots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\dots,k_m)$, או ש-

1. קיימת תת-קבוצה H_i של H שהיא הומוגנית מצבע i וגדלה k_i-1, או ש-

2. קיימת תת-קבוצה H_j של H שהיא הומוגנית מצבע $j(j \neq i)$ וגדלה k_j.

אם קרה 1: הקבוצה $H_i \cup \{x\}$ היא בגודל k_i והיא הומוגנית מצבע i, כי כל t-יה שלה המוכלת ב-H_i צבועה בצבע i, וכל t-יה המורכבת מ-x ועוד $t-1$-יה של H_i גם צבועה i.
אם קרה 2: הקבוצה H_j היא בגודל k_j והיא הומוגנית מצבע j.

31.12.96

קבוצות אינסופיות. מה זו קבוצה סופית? מניה.

הגדרה: קבוצה בת-מניה. (כולל את המקרה של קבוצות סופיות).

דוגמאות: המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$, המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, המספרים הרציונלים $\mathbb{Q}$.

משפט Cantor: קבוצת המספרים הממשים $\mathbb{R}$ איננה בת-מניה. הוכחה.

טענה: תת-קבוצה של קבוצה בת-מניה הוא קבוצה בת-מניה. הוכחה.

טענה: איחוד של שתי קבוצות בנות-מניה הוא קבוצה בת-מניה. הוכחה. באינדוקציה זה נובע לכל מספר סופי של קבוצות בנות-מניה.

טענה: איחוד בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא קבוצה בת-מניה. הוכחה.

הגדרה: פונקציה חד-חד-ערכית, פונקצית על. ציור. הקשר בין התאמה חד-חד-ערכית ועל לבין השוואת גדלים של קבוצות סופיות.

הגדרה: קבוצות A, B שוות-עצמה. סימון: $|A| = |B|$.

הערה: במונחים אלה, קבוצה היא בת-מניה אם ורק אם היא סופית או שוות-עצמה לקבוצת המספרים הטבעיים.

סימון: העצמה של הקבוצות האינסופיות בנות-מניה מסומנת $\aleph_0$. כותבים $|A| = \aleph_0$. הסבר הסימון.

דוגמה: קבוצת המספרים הטבעיים שוות עצמה לקבוצה החלקית שלה $\{2, 3, 4, \ldots\}$. זה לא קורה בקבוצות סופיות. ספור המלון.

הגדרה:קבוצה A קטנה או שווה בעצמתה מקבוצה B. סימון: $|A| \leq |B|$.

הגדרה: קבוצה A קטנה בעצמתה מקבוצה B. סימון: $|A| < |B|$.

דוגמה: $\mathbb{N} < \mathbb{R}$.

סיפור השערת הרצף.

7.1.97

גרפים: ציור לדוגמה. הגדרה של גרף. כתיבה של V, E במפורש עבור הציור. דוגמה: שני ציורים של אותו גרף.

גרפים יותר כלליים שבהם לא נעסוק: לולאות, צלעות מקבילות, גרפים מכוונים, אינסוף קודקודים.

הגדרה: שכן של כל קדקד. ערכיות של קדקד. סימון $d(x)$.

דוגמה: ערכיות הקדקדים בגרף שלם K_n. עוד דוגמה.

טענה: $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$. הוכחה.

מסקנה 1: סכום הערכיות זוגי.

מסקנה 2: מספר הקדקדים בעלי ערכיות אי-זוגיות הוא זוגי.

הגדרה: מסלול $x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 \cdots e_k x_k$, קדקדים לאו-דווקא שונים, צלעות שונות זו מזו, האורך k. דוגמה.

הגדרה: גרף קשיר. דוגמה.

הערה: פירוק יחיד למרכיבים קשירים. הגרף קשיר אם ורק אם יש לו מרכיב קשיר יחיד. דוגמה. קדקד מבודד.

הגדרה: מסלול סגור. מעגל (מאורך 3 או יותר). דוגמאות. מסלול לא טריביאלי מתפרק למעגלים.

הגדרה: עץ. ציור. הסבר על הניגוד בין קשירות להעדר מעגלים.

הערה: גרף חסר מעגלים מתפרק למרכיבים קשירים שהם עצים.

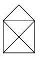
מינוח: יער. ציור.

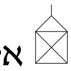
טענה: בעץ $|E| = |V| - 1$. הוכחה.

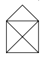
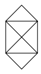
מסקנה: בעץ עם $|V| \geq 2$ יש לפחות שני קדקדים בעלי ערכיות 1. הוכחה. מתי יש בדיוק שניים?

מינוח:עלה.

14.1.97

 אפשר לצייר בלי להרים את הגיר מהלוח ובלי לחזור פעמיים על אותו קטע.

 אי-אפשר.

 אי-אפשר לצייר בלי להרים את הגיר מהלוח , בלי לחזור פעמיים על אותו קטע, כך שמתחילים ומסיימים באותה נקודה.  אפשר.

תרגום הבעיה למונחי תורת הגרפים: הגדרה: מסלול אוילריאני. גרף הוא אוילריאני אם יש בו מסלול אוילוריאני סגור. חזרה לדוגמאות. אוילר והגשרים של קניגסברג. בעיית הדוור הסיני. בדיקת ערכיות בדוגמאות.

משפט Euler: יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר . אזי G אוילריאני אם ורק אם כל הערכיות ב-G זוגיות.

הסבר על המקרה הלא קשיר. הסבר על קלות בדיקת התנאי.

הוכחה: הכיוון הקל. הכיוון הקשה: באינדוקציה על מספר הצלעות. בדיקה עבור $|E| = 0$. צעד האינדוקציה: מציאת מעגל C. יהי G_0 הגרף המתקבל לאחר הרחקת הצלעות של C. המרכיבים הקשירים $G_1 = (V_1, E_1), \ldots, G_r = (V_r, E_r)$ של G_0 הם אוילריאנים, וכל אחד מהם מכיל לפחות קדקד אחד של C. ציור. בחירה של מסלול אוילריאני סגור C_i ושל קדקד x_i עליו ועל המעגל C לכל i. בניית מסלול אוילריאני סגור ב-G.

הזכרת בעיית הנישואים היציבים . כעת נדון בבעיה אחרת.

בעיית החתונה: נתונות קבוצה A של m בחורים וקבוצה B של n בחורות. כל בחור מכיר תת-קבוצה של הבחורות. רוצים למצוא "שידוך" של הבחורים, כלומר למצוא לכל בחור בחורה שהוא מכיר, כך שלבחורים שונים מתאימות בחורות שונות. באיזה תנאים זה אפשרי? מציאת תנאים ההכרחיים.

משפט החתונה (Hall): בהנתן קבוצות A, B כנ"ל, ורשימת היכרויות, קיים שידוך של הבחורים אם ורק אם לכל m $\leq k \leq 1$, כל קבוצה של k בחורים מכירים (ביחד) לפחות k בחורות.

21.1.97

ניסוח משפט החתונה. הערה: ניתן לייצג בעיית חתונה על-ידי גרף. דוגמה. גרף כזה נקרא גרף דו-צדדי כותבים $G=(A,B,E)$. שידוך של הבחורים במונחי הגרף. סימון: $N(x)$ עבור $x\in A$. $N(S)$ עבור $S\subseteq A$. דוגמה. כתיבת תנאי המשפט בצורה $|N(S)|\ge|S|$ לכל $S\subseteq A$. בדיקה בדוגמה.

הוכחת המשפט: הכיוון הקל: אם התנאי לא מתקיים אז אין שידוך. הוכחה. הכיוון הקשה: אם התנאי מתקיים אז יש שידוך. הוכחה באינדוקציה על מספר הבחורים m. בדיקה עבור $m=1$ טריביאלי. צעד האינדוקציה: נתונה בעיית חתונה עם m בחורים, $m\ge 2$. נניח שלכל בעיית חתונה עם m' בחורים, $m'<m$, המשפט נכון. נניח שהבעייה הנתונה מקיימת את תנאי המשפט. צריך להוכיח שיש שידוך.

מקרה ראשון: לכל $1\le k<m$ ולכל קבוצה של k בחורים, הם מכירים ביחד לפחות $k+1$ בחורות.

במקרה זה נבחר שרירותית בחור x, נבחר שרירותית בחורה y שהוא מכיר, ונשדך בינהם. כעת די לפתור את בעיית החתונה על הבחורים $A\setminus\{x\}$ והבחורות $B\setminus\{y\}$. ציור. לפי הנחת האינדוקציה, די להראות שהתנאי מתקיים עבור בעייה זו. אכן הוא מתקיים.

מקרה שני: קיים $1\le k<m$ וקיימת קבוצה של k בחורים המכירים ביחד בדיוק k בחורות.

תהי X קבוצה של k בחורים המכירים ביחד רק את הבחורות ב-Y, $|Y|=k$. ציור. כעת די לפתור את בעיית החתונה על הבחורים $A\setminus X$ והבחורות $B\setminus Y$. לפי הנחת האינדוקציה, די להראות שהתנאי מתקיים עבור בעיה זו. אם לא, אז תהי Z קבוצה של l בחורים המכירים ביחד רק את הבחורות ב-W, $|W|=p<l$. אז $N(X\cup Z)=Y\cup W$, $|X\cup Z|=k+l$, אבל $|Y\cup W|=k+p<k+l$, סתירה.

הכללה של בעיית החתונה: שידוך חלקי. שאלה: מה הגודל המכסימלי של שידוך חלקי? אם התנאי מתקיים, הוא m. אם לא- פחות מ-m. כמה פחות? דוגמה עם מחסור. הסבר על חיפוש המחסור המכסימלי.

סימון: $h=\max\{|S|-|N(S)|:S\subseteq A\}$.

הכללה של משפט החתונה: הגודל המכסימלי של שידוך חלקי הוא $m-h$.

הוכחה: חלק ראשון: כל שידוך חלקי הוא בגודל לכל היותר $m-h$. הוכחה. חלק שני: קיים שידוך חלקי בגודל $m-h$. נשים-לב שזו הכללה של הכיוון הקשה בהוכחת משפט החתונה. נבנה בעיית חתונה חדשה ע"י הוספת h בחורות חדשות. ציור. עבור הבעיה החדשה מתקיים תנאי משפט החתונה. לכן קיים עבורה שידוך של הבחורים. בשידוך זה h מהצלעות הולכות לבחורות החדשות. אחרי שנזרוק צלעות אלה, יישאר לנו שידוך חלקי בבעיה המקורית בגודל $m-h$.

23.6.98

טענה: בכל קבוצה של 6 אנשים, או שיש 3 שכל שניים מהם מכירים, או שיש 3 שכל שניים מהם לא מכירים.

תרגום לגרפים. צביעה בכחול ובאדום. בדיקה בציור. הוכחת הטענה.

הערה: אם מחליפים את 6 ב-5, הטענה כבר אינה נכונה. ציור.

הגדרה: יהיו k, l מספרים טבעיים. אנו אומרים שלמספר הטבעי n התכונה $R(k, l)$ אם לכל צביעה של הצלעות של K_n בכחול ובאדום, או שיש K_k כחול או שיש K_l אדום.

דוגמה: ראינו שלמספר 6 יש התכונה $R(3, 3)$, ואילו ל-5 לא.

הערה: אם למספר n יש התכונה $R(k, l)$, אז גם לכל $m \geq n$ יש אותה תכונה. לכן, עבור k, l נתונים, נתעניין בשתי שאלות:

א. האם קיים מספר n בעל התכונה $R(k, l)$?

ב. אם התשובה ל-א' חיובית, מהו המספר הקטן ביותר בעל התכונה?

סימון: אם התשובה ל-א' חיובית, נסמן ב-$r(k, l)$ את ה-n הקטן ביותר בעל התכונה $R(k, l)$, ונאמר כי $r(k, l)$ קיים. אם התשובה ל-א' שלילית, נאמר כי $r(k, l)$ אינו קיים.

דוגמה: מה שהראינו קודם בא לידי ביטוי בצורה $r(3, 3) = 6$. נראה עוד כמה עובדות פשוטות על המספרים $r(k, l)$.

א. $r(k, l) = r(l, k)$

ב. $r(1, l) = 1$

ג. $r(2, l) = l$

משפט (Erdös-Szekeres): יהיו k, l מספרים טבעיים, $k, l \geq 2$. אם $r(k-1, l)$ ו-$r(k, l-1)$ שניהם קיימים, אז גם $r(k, l)$ קיים ומתקיים $r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1)$. הוכחה.

משפט (Ramsey): לכל שני מספרים טבעיים k, l, $r(k, l)$ קיים ומתקיים

$$r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

הוכחה.

במשפט קיבלנו חסם מלעיל על מספרי Ramsey, לא ערכים מדויקים. טבלה של מספרי Ramsey. הקשר למשולש Pascal. $r(3, 4) = 9$. $r(4, 4) = 18$. $r(5, 5)$ לא ידוע.

תרגיל מס' 1 בקומבינטוריקה

1. בהרצאה הוכח החסם מלרע $f_n \geq \frac{3^n}{2n+1}$ עבור מספר הטורים המינימלי שיש לשלוח בטוטו כדי להבטיח זכיה בפרס השני לפחות ($n-1$ ניחושים נכונים מתוך n משחקים).

   יהי g_n מספר הטורים המינימלי שיש לשלוח בטוטו על n משחקי כדורסל כדי להבטיח זכיה בפרס השני לפחות. (זכור כי בכדורסל אין תוצאת תיקו.)

   (א) מצא והוכח חסם מלרע אנלוגי עבור g_n.

   (ב) מצא את g_3 וכתוב במפורש קבוצת טורים מתאימה.

2. בחברה בת 4 בחורים ו-4 בחורות נתונות ההעדפות:

בחורות/ בחורים	1	2	3	4
1	4	2	3	2
2	2	1	4	3
3	1	3	2	4
4	3	4	1	1

דרוג הבחורים ע"י הבחורות

בחורות/ בחורים	1	2	3	4
1	4	2	3	1
2	2	4	3	1
3	2	1	3	4
4	1	2	4	3

דרוג הבחורות ע"י הבחורים

   (א) בצע את האלגוריתם של Gale-Shapely ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

   (ב) בצע את האלגוריתם האנלוגי, שבו הבחורות הן המחזרות אחרי הבחורים, ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

תרגיל מס' 2 בקומבינטוריקה

1. בכיתה בת 30 תלמידים בוחרים נבחרת שחמט (לוח ראשון, שני, שלישי ורביעי) ונבחרת כדורסל (חמישה שחקנים, הסדר לא משמעותי).

   (א) בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת השחמט?

   (ב) בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת הכדורסל?

   (ג) בכמה דרכים ניתן לבחור את שתי הנבחרות, אם אסור שיהיה יותר מתלמיד אחד המשתתף בשתיהן?

2. לכל אחד מן התנאים הבאים, מצא את מספר הטורים בטוטו על 15 משחקי כדורגל, המקיימים את התנאי.

   (א) לכל i, $(i = 1, 2, \ldots, 15)$, התוצאה במשחק ה-i זהה לתוצאה במשחק ה-$(16 - i)$.

   (ב) לכל i, $(i = 1, 2, \ldots, 15)$, התוצאה במשחק ה-i שונה מן התוצאה במשחק ה-$(16 - i)$.

   (ג) התוצאות בשלושת המשחקים שונות זו מזו, והתוצאה במשחק הרביעי זהה לתוצאה במשחק החמישי אך שונה מהתוצאה במשחק השישי.

   (ד) יש ארבע תוצאות 1, חמש תוצאות 2 ושש תוצאות x.

   (ה) אין אף x, יש בדיוק שלוש תוצאות 2 ואף שתיים מהן אינן מופיעות זו אחר זו.

3. לכל אחד מן התנאים הבאים, מצא את מספר הסידורים האפשריים של שישה רקדנים במעגל, המקיימים את התנאי. (אין להבחין בין שני סידורים המתקבלים זה מזה ע"י סיבוב).

   (א) שולה איננה אוחזת בידו של אריה.

   (ב) שולה ואריה רוקדים זה מול זה.

   (ג) הבנים והבנות מופיעים לסירוגין (הנח שיש שלושה בנים ושלוש בנות).

   (ד) שולה קרובה יותר ליצחק מאשר לאריה.

תרגיל מס' 3 בקומבינטוריקה

1. בהנחה ש $0 \le k \le n$:

   (א) בכמה אופנים ניתן לבחור מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_k$ כך ש- $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le n$?

   (ב) אותה שאלה, כאשר התנאי הוא $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le n$.

   (ג) אותה שאלה כמו בחלק ב', כאשר דורשים בנוסף $a_1 \neq a_k$.

2. בכיתה שבה יש 10 בנים ו-15 בנות, צריכים לבחור נבחרת כדורסל ובה 5 שחקנים, מהם לפחות שתי בנים ולפחות שתי בנות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3. קבוצה ובה 15 ילדים צריכה להתחלק לשלשות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? (אין חשיבות לסדר השלשות).

4. בכנסת בוחרים יו"ר מבין שלושה מועמדים. כמה תוצאות שונות אפשריות? (הנח שכל אחד מ-120 חברי הכנסת יכול להצביע בעד אחד המועמדים או להמנע. תוצאת ההצבעה היא מספר הקולות להם זכה כל מועמד ומספר הנמנעים.)

5. כמה פתרונות במספרים שלמים חיובים יש לכל אחת מן המשוואות הבאות?

   (א) $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 17$

   (ב) $3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 16$

   (ג) $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5) = 18$

תרגיל מס' 4 בקומבינטוריקה

1. לגבי כל אחד מן הביטויים הבאים, קבע אם הוא מופיע בפיתוח של $(x^6+y^5)^7$ לפי נוסחת הבינום, ואם כן- מה המקדם שלו.

   (א) $x^{18}y^{25}$

   (ב) $x^{12}y^{25}$

   (ג) $x^{24}y^{15}$

2. (א) הוכח: לכל n טבעי ולכל $1 \le k \le 2^n - 1$, $\binom{2^n}{k}$ הוא מספר זוגי.

   (רמז: אפשר להוכיח באינדוקציה על n.)

   (ב) האם $\binom{33}{17}$ הוא זוגי או אי-זוגי?

3. הוכח: המכפלה של כל k מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת ב- $k!$.

4. (א) מה מספר הסדרות באורך n שבהן מופיעה בכל מקום אחת הספרות 0,1,2, והספרה 0 מופיעה בדיוק פעם אחת?

   (ב) הוכח: $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ לכל n טבעי.

   (רמז:זה קשור לחלק א'.)

5. הוכח (רצוי ע"י הסבר קומבינטורי): $\binom{2n}{3} = 2\binom{n}{3} + 2n\binom{n}{2}$

תרגיל מס' 5 בקומבינטוריקה

1. (א) יהיו k,n מספרים שלמים, $0 \le k < n$. הוכח כי $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}$ הוא חיובי אם k זוגי, והוא שלילי אם k אי-זוגי (כלומר, סימנו של הסכום הוא כסימנו של המחובר האחרון בו).

   (ב) יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. נניח שמבצעים הכלה-הפרדה רק עד השלב ה-k-י ($k \le n$), כלומר מחשבים את:

$$I_k = \sum_{j=1}^{n}|A_j| - \sum_{j_1<j_2}|A_{j_1}\cap A_{j_2}| + \cdots + (-1)^{k+1}\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k}|A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}|$$

   הוכח כי $I_k \le |\cup_{j=1}^{n} A_j|$ אם k זוגי, ו- $I_k \ge |\cup_{j=1}^{n} A_j|$ אם k אי-זוגי.

2. בצנצנת יש 15 סוכריות טופי, 7 סוכריות דבש ו-8 סוכריות מנטה. כמה שקיות שונות של 16 סוכריות אפשר להוציא ממנה? כמה של 20? כמה של 25?

3. כמה מספרים טבעיים בין 100 ל-1000 אינם מתחלקים באף אחד מבין המספרים 12, 5,8?

4. חשב את פונקצית אוילר $\varphi(n)$ עבור $n = 10, 17, 222$.

5. מצא את מספר התמורות של המספרים $1, 2, \ldots, 10$ שאין בהן רצף של שבעה (או יותר) מספרים עוקבים. (למשל, התמורה $1\underbrace{3456789}210$ פסולה בגלל הרצף המסומן.)

תרגיל מס' 6 בקומבינטוריקה

1. יהיו m, n מספרים טבעיים זרים. הוכח: $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

2. סביב שולחן עגול עם 10 כסאות יושבות 5 נשים כך שבין כל שתיים יש כיסא פנוי. בכמה אופנים שונים יכולים להתיישב 5 הבעלים של הנשים בכסאות הפנויים, אחד בכל כסא, כך שאף גבר לא ישב על-יד אשתו?

3. אדם עולה את 10 המדרגות המובילות לדירתו, כאשר בכל צעד הוא עולה מדרגה אחת או שתיים. בכמה אופנים שונים הוא יכול לעשות זאת?

4. הוכח: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$ לכל n טבעי. (F_n הם מספרי פיבונאצ'י)

5. חלקיק נע במישור לפי הכללים הבאים:

במצב ההתחלתי הוא נמצא בראשית הצירים (הנקודה $(0,0)$). בכל שניה הוא נע מרחק של 1 ימינה, שמאלה או למעלה (כלומר, מן הנקודה (x, y) לנקודה $(x+1, y)$, לנקודה $(x-1, y)$, או לנקודה $(x, y+1)$). לעולם, החלקיק איננו חוזר לנקודה ממנה יצא בשניה הקודמת. נסמן ב- P_n את מספר המסלולים האפשריים למהלך החלקיק במשך n שניות.

(א) הוכח ש-P_n מקיים את נוסחת הנסיגה:
$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 3 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad , n \geq 2 \end{cases}$$

(ב) מצא במפורש את P_n.

תרגיל מס' 7 בקומבינטוריקה

1. אדם עולה n מדרגות, כאשר בכל צעד הוא עולה מדרגה אחת, שתיים או שלוש. אחרי צעד של שלוש מדרגות, הוא רשאי (אך לא חייב) לנוח שלב אחד, כלומר לעשות צעד של אפס מדרגות. יהי S_n מספר האופנים לעשות זאת.

   (א) מצא נוסחת נסיגה עבור S_n.

   (ב) פתור אותה וקבל נוסחה מפורשת עבור S_n.

2. סדרת המספרים $H_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ מקיימת $H_n = -2H_{n-1} - H_{n-2}$ לכל $n \geq 2$, וכן $H_{30} = 15, H_{17} = 11$. מצא את H_{100}.

3. יהי J_n מספר התת-קבוצות של קבוצת המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$ (כולל התת-קבוצה הריקה) שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. מצא ביטוי עבור J_n באמצעות מספרי פיבונאצ'י.

4. הוכח: בכל קבוצה של 25 בני-אדם, יש שלושה שיום הולדתם חל באותו חודש.

5. בודקים את ידיעת השפות עברית, ערבית, רוסית ואנגלית בקבוצה מסוימת של 100 אנשים. מתברר שאיש אינו יודע את כל ארבע השפות, וכל יודעי העברית יודעים גם אנגלית. הוכח שיש עשרה אנשים היודעים אותן שפות בדיוק.

6. במשולש שווה-צלעות שאורך צלעותיו 1 נתונות $2^{2n} + 1$ נקודות (n מספר טבעי כלשהו). הוכח שקיימות שתי נקודות ביניהן המרוחקות זו מזו מרחק של $\frac{1}{2^n}$ לכל היותר.

תרגיל מס' 8 בקומבינטוריקה

1. יהי $f(n)$ המספר הטבעי הקטן ביותר שעבורו מתקיים:

   לכל קבוצה של $f(n)$ מספרים מבין $1, 2, \ldots, 2n$ יש בקבוצה מספר המחלק מספר אחר בקבוצה.

   מצא במפורש את $f(n)$ כפונקציה של n (n מספר טבעי).

2. הוכח: בכל קבוצה של 50 בני-אדם, יש שמונה שהפרש הגילים בין כל שניים מהם (בשנים שלמות) מתחלק בשבע.

3. יהי α מספר ממשי ויהי q מספר טבעי.

   (א) הוכח שקיים מספר טבעי b , $1 \leq b \leq q$, כך שהמרחק מ- $b\alpha$ למספר השלם הקרוב ביותר הוא לכל היותר $\frac{1}{q}$.

   (ב) הסק מחלק א' ש-α ניתן לקירוב עד כדי $\frac{1}{bq}$ ע"י מספר רציונלי בעל מכנה b שאינו עולה על q(כלומר, קיים a שלם וקיים $1 \leq b \leq q$ כך ש- $|\alpha - \frac{a}{b}| \leq \frac{1}{bq}$).

4. נתונות חמש נקודות במישור, כך שאף שתיים מהן אינן נמצאות על ישר המקביל לאחד הצירים. הוכח שקיים מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, שניים מקדקדיו הם מבין הנקודות הנתונות, ובפנימו נמצאת עוד אחת (לפחות) מן הנקודות הנתונות. הראה ע"י דוגמה שהטענה אינה נכונה עבור ארבע נקודות.

5. במסיבה משתתפים 8 בחורים ו-13 בחורות. כל בחור מכיר לפחות 5 מהבחורות. הוכח שיש בחורה המכירה לפחות 4 מהבחורים. (הנח שיחס ההיכרות סימטרי.)

תרגיל מס' 9 בקומבינטוריקה

1. (א) הוכח: $R^2(k,l) \le R^2(k-1,l) + R^2(k,l-1)$ לכל $k,l \ge 3$.

(רמז: זה מקרה פרטי של צעד האינדוקציה בהוכחת משפט Ramsey. כתוב את ההוכחה מחדש עבור מקרה זה.)

(ב) הוכח: $R^2(k,l) \le \begin{pmatrix} k+l-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ לכל $k,l \ge 2$.

2. הוכח: $R^2(3,3,3) \le 17$.

3. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה:

לכל קבוצה של n נקודות במרחב, או שיש ביניהן 4 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן הוא לכל היותר 1, או שיש ביניהן 5 כך שהמרחק בין כל שתיים מהן עולה על 1. מצא במפורש n (לאו-דווקא הקטן ביותר) כזה.

4. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה:

יהיו נתונים n קטעים על הישר, כך שאף נקודה אינה נמצאת ביותר משני קטעים. אזי קיימים 10 מבין הקטעים שהם זרים בזוגות (כלומר לאף שניים מהם אין נקודה משותפת).

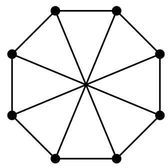
5. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה:

יהיו נתונים n מספרים ממשיים חיוביים. אזי או שיש בינהם 100 שכל שלושה מהם הם ארכי הצלעות של משולש כלשהו, או שיש ביניהם 100 שאף שלושה מהם אינם ארכי הצלעות של המשולש.

תרגיל מס' 10 בקומבינטוריקה

1. יהיו n,t,m מספרים טבעיים, $t \geq n$. תהי S קבוצה בגודל n. מה מספר הצביעות של ה-t-יות של S ב-m צבעים?

2. (א) נתונות שמונה נקודות המהוות קדקדים של מתומן. צובעים את כל הצלעות של המתומן בשחור, וכן צובעים בשחור את כל המיתרים המחברים קדקדים נגדיים (ראה ציור).



צובעים את כל שאר המיתרים בלבן. הוכח שאין קבוצה הומוגנית מצבע שחור בגודל 3, ואין קבוצה הומוגנית מצבע לבן בגודל 4.

(ב) הסק מחלק א' כי $R^2(3,4) \geq 9$.

3. הוכח שלכל $k \geq 2$ טבעי מתקיים $R^2(k,k) > (k-1)^2$.

4. (א) מצא חלוקה של המספרים $1,2,3,4$ לשתי קבוצות, כך שלמשוואה $x+y=z$ אין פתרון שבו x,y,z מאותה קבוצה.

(ב) הוכח שעבור המספרים $1,2,3,4,5$ לא קיימת חלוקה כזו.

5. תהי S קבוצת המספרים הטבעיים מ-1 עד 100. מגדירים צביעה של השלשות של S כשישה צבעים באופן הבא:
$f(\{a,b,c\})$ היא השארית של $a+b+c$ בחילוק בשש (לפי הגדרה זו, ששת הצבעים הם $0,1,\ldots,5$).

(א) מה הגודל המכסימלי של קבוצה הומוגנית (מצבע כלשהו)?

(ב) כמה קבוצות הומוגניות בגודל 4 יש ?

תרגיל מס' 11 בקומבינטוריקה

1. אילו מן הקבוצות הבאות הן בנות-מניה? נמק.

   (א) קבוצת המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$.

   (ב) קבוצת נקודות הסריג במישור $\mathbb{Z}^2$.
   (אלה הן הנקודות במישור בעלות קוארדינטות שלמות)

   (ג) קבוצת הסדרות האינסופיות $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ המקיימות: לכל n, $a_n = n$ או $a_n = -n$.

2. הוכח כי $|A| = |B|$ בכל אחד מן המקרים הבאים:

   (א) $A = \mathbb{Z}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} : 7$ מתחלק ב-$b\}$

   (ב) $A = [0,1]$, $B = [0,3]$

   (ג) $A = (0,1)$, $B = (0,\infty)$

   (ד) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

3. נתונה קבוצה של קטעים פתוחים לא ריקים זרים בזוגות על הישר (כלומר, כל קטע הוא מהצורה (a,b) כאשר $a < b$, ולאף שני קטעים אין נקודה משותפת).

   הוכח שקבוצת הקטעים הזו היא בת-מניה.

4. גרף הקוביה ה-n-מימדית Q_n מוגדר באופן הבא:

הקדקדים הם הסדרות של אפסים ואחדים באורך n. שני קדקדים מחוברים בצלע אם הסדרות המתאימות שונות זו מזו בקוארדינטה אחת בדיוק.

   (א) צייר את Q_1, Q_2, Q_3.

   (ב) מה הערכיות של כל קדקד ב-Q_n?

   (ג) מה מספר הצלעות ב-Q_n ?

תרגיל מס' 12 בקומבינטוריקה

1. בקבוצה מסוימת של n אנשים $(n \geq 2)$ חלק מן הזוגות של אנשים לחצו ידיים. הוכח שיש שני אנשים שלחצו אותו מספר של ידיים.

2. יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר, $|V| \geq 2$. הוכח שיש לפחות שני קדקדים $x \in V$ בעלי התכונה הבאה: אם נרחיק מ-G את x ואת כל הצלעות המכילות אותו, הגרף שיישאר יהיה קשיר.

3. נתון לוח שחמט (8×8). על הלוח נע צריח, כאשר בכל צעד הוא יכול לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן או במאונך. רוצים שהצריח ינוע על הלוח באופן שיסיים באותה משבצת שהתחיל, ובדרך יופיע כל צעד חוקי בדיוק פעם אחת (כאשר לכיוון הצעד אין חשיבות, לדוגמה צריך להופיע או $\longrightarrow$ או $\longleftarrow$, אך לא שניהם; למקום הצעד על הלוח יש חשיבות). האם הדבר אפשרי?

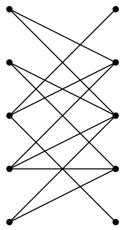
4. בגרף G יש בדיוק שני קדקדים, x ו-y, בעלי ערכיות אי-זוגית. הם אינם מחוברים בצלע. יהי G^* הגרף המתקבל מ-G ע"י הוספת הצלע $\{x, y\}$. הוכח כי G^* קשיר אם ורק אם G קשיר.

5. רוצים למצוא בגרף השלם על n קדקדים K_n קבוצה של מסלולים, כך שכל צלע תופיע בדיוק במסלול אחד בקבוצה. נסמן ב-$f(n)$ את המספר הקטן ביותר של מסלולים בקבוצה המקיימת את הדרוש. מצא במפורש את $f(n)$ כפונקציה של n.

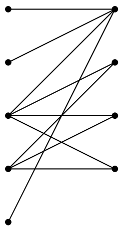
תרגיל מס' 13 בקומבינטוריקה

1. בכל אחת מן הדוגמאות הבאות, מצא שידוך חלקי גדול ביותר:

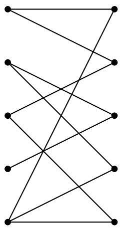
א.



ב.



ג.



2. במסיבה משתתפים n בחורים ו-n בחורות. כל בחור מכיר בדיוק k מהבחורות, וכל בחורה מכירה בדיוק k מהבחורים. רוצים לארגן את המשתתפים ל-k ריקודי זוגות, כך שבכל ריקוד ישתתפו כל הנוכחים (בסידור של n זוגות), ירקדו כבני-זוג רק בחור ובחורה שמכירים, וכל בחור ובחורה שמכירים ירקדו פעם כבני-זוג. הוכח שהדבר אפשרי.

3. יהיו k,n מספרים טבעיים, $k < \frac{n}{2}$. תהי S קבוצה בת n איברים, ונסמן
$$\left(\begin{array}{c} S \\ k \end{array}\right) = \{A \subseteq S : |A| = k\}, \left(\begin{array}{c} S \\ k+1 \end{array}\right) = \{B \subseteq S : |B| = k+1\}$$
הוכח שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f : \left(\begin{array}{c} S \\ k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c} S \\ k+1 \end{array}\right)$ המקיימת
$f(A) \supseteq A$ לכל $A \in \left(\begin{array}{c} S \\ k \end{array}\right)$.

4. רוצים להניח צריחים על לוח שחמט כך שאף צריח לא יוכל להכות צריח אחר (כזכור, גודל הלוח 8×8, וצריח יכול לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן או במאונך, ולהכות צריח במשבצת אליה הגיע). נתונה תת-קבוצה R של המשבצות, ומותר להניח צריח רק על משבצת ב-R. מצא, בעזרת ההכללה של משפט החתונה, ביטוי עבור המספר הגדול ביותר של צריחים שאפשר להניח על R.

בוחן בקומבינטוריקה

104286

<u>סמסטר חורף תשנ"ז</u>

משך הבחינה 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר, פרט למילון. יש לנמק היטב כל טענה.

ענה על <u>שלוש</u> (ולא יותר) מארבע השאלות הבאות.

1. נסח והוכח את משפט Gale-Shapely על נישואים יציבים.

2. יהיו m,n מספרים שלמים אי-שליליים. הוכח: מספר הסדרות המכילות בדיוק m אפסים ו-n אחדים ואין בהן שני אחדים רצופים הוא $\begin{pmatrix} m+1 \\ n \end{pmatrix}$.

   הערה: ביטוי זה מוגדר כאפס אם $n > m+1$.

3. בארנק יש 9 מטבעות של 5 אגורות, 12 מטבעות של 50 אגורות ו-17 מטבעות של שקל. כמה סכומי כסף שונים אפשר לשלם (ללא עודף) ע"י שימוש ב-24 מטבעות בדיוק מתוך הארנק?

4. ילד מקבל 10 שקלים דמי-חנוכה. בכל יום (עד גמר הכסף) הוא קונה את אחד הממתקים הבאים: מסטיק (1 ש"ח), קרמבו (1 ש"ח), שוקולד (2 ש"ח) או סופגניה (2 ש"ח).

   (א) בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת? (סדר הקניות חשוב)

   (ב) בכמה מן הדרכים האלה, יספיק הכסף לשמונה ימים בדיוק?

בהצלחה!

בחינה בקומבינטוריקה (104286)

מועד א', חורף תשנ"ז

משך הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר, גם לא מחשבון. יש לנמק היטב כל טענה.

ענה על <u>ארבע</u> (ולא יותר) מבין חמש השאלות הבאות.

1. כמה מספרים טבעיים יש בין 100 ל-10,000, שבהם כל ספרה (פרט לראשונה) גדולה או שווה מקודמתה?

2. נתונה סדרה של שבעה מספרים שלמים $a_1, a_2, \ldots, a_7$, לאו דווקא שונים. הוכח שקיימים שני אינדכסים שונים i, j, כך ש- $a_i + a_j$ או $a_i - a_j$ מתחלק בעשר.

3. הוכח: $R^2(k,l) \leq R^2(k-1,l) + R^2(k,l-1)$
לכל שני מספרים טבעיים $k, l \geq 3$.

4. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, קבע אם היא בת-מניה:

(א) קבוצת המעגלים במישור שמרכזם באחת מנקודות הסריג ורדיוסם מספר שלם.

(ב) קבוצת המעגלים במישור העוברים דרך שתי הנקודות $(1,0), (-1,0)$.

5. יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. רוצים לחלק את צלעות הגרף השלם על n קדקדים $K_n = (V,E)$ לקבוצות $E_1, E_2, \ldots, E_r$, כך שכל צלע תופיע בדיוק באחת מן הקבוצות, וכל אחד מן הגרפים $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, \ldots, r$, יהיה עץ על n קדקדים. הוכח שהדבר אפשרי אם ורק אם n זוגי.
(רמז: אינדוקציה יכולה לעזור)

בהצלחה!

בחינה בקומבינטוריקה (104286)

מועד ב', חורף תשנ"ז

משך הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר, גם לא מחשבון. יש לנמק היטב כל טענה.

ענה על ארבע (ולא יותר) מבין חמש השאלות הבאות.

1. במדינת טוטומניה מנסים לנחש בטוטו תוצאות של 8 משחקי כדורגל (לכל משחק 3 תוצאות אפשריות: $1, 2, x$). אדם שולח 386 טורים. נתון שבין הטורים האלה, יש שניים המתלכדים זה עם זה ב-6 המשחקים הראשונים. הוכח שקבוצת טורים זו לא מבטיחה זכייה בפרס שני לפחות.
(פרס ראשון = 8 ניחושים נכונים, פרס שני = 7 ניחושים נכונים)

2. רוצים לתכנן לוח זמנים ליציאת רכבות מחיפה לתל-אביב על-פי הדרישות הבאות:

(א) לוח הזמנים צריך להיות זהה לכל מחזור של 12 שעות מחצות עד הצהריים או מהצהריים עד חצות (למשל, אם יש רכבת ב-2 בלילה יש גם ב-2 אחה"צ).

(ב) הרכבות יכולות לצאת רק בשעות שלמות.

(ג) בכל מחזור של 12 שעות צריכות לצאת 3 רכבות.

(ד) מרווח הזמנים בין רכבת לרכבת הוא לפחות 3 שעות.

כמה לוחות זמנים שונים אפשריים?

3. יהיו m, n מספרים טבעיים. תהי נתונה סדרה $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ של מספרים ממשיים. הוכח: או שקיימת תת-סדרה לא-יורדת באורך $m+1$, או שקיימת תת-סדרה לא-עולה באורך $n+1$.

4. נגדיר צביעה של זוגות של $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ בשני צבעים באופן הבא: זוג מספרים נצבע בירוק אם אחד מהם מחלק את השני (ללא שארית), אחרת הוא נצבע באדום. מה הגודל המכסימלי של קבוצה הומוגנית:

(א) מצבע ירוק?

(ב) מצבע אדום?

5. נתון עץ. הוכח שאפשר לבחור לכל צלע את אחד הקדקדים שלה, באופן שלצלעות שונות תמיד ייבחרו קדקדים שונים.

בהצלחה!

בוחן בקומבינטוריקה

104286

<u>סמסטר אביב תשנ"ח</u>

משך הבוחן 2 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר, כולל מחשבון. יש לנמק היטב כל טענה.

ענה על <u>שלוש</u> (ולא יותר) מארבע השאלות הבאות.

1. נסח והוכח את משפט Gale-Shapely על נישואים יציבים.

2. חשב כל אחד מן הסכומים הבאים:

(א) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$ עבור $n\geq 1$.

(ב) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}$ עבור $n\geq k\geq 0$.

3. בכמה אופנים אפשר לסדר n זוגות נשואים במעגל, כך שב-$2n$ המקומות נמצאים גברים ונשים לסירוגין, ואף אשה אינה נמצאת מול בעלה (כלומר במרחק n מקומות ממנו)?

הערה: סידורים המתקבלים זה מזה ע"י סיבוב נחשבים זהים.

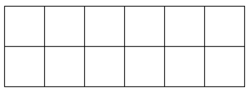
4. כמה מספרים שלמים חיוביים יש, שבהצגתם העשרונית כל ספרה גדולה מקודמתה (פרט כמובן לראשונה, שאין לה קודמת), ואין מופיעות שלוש ספרות עוקבות כלשהן?

בהצלחה!

בחינה בקומבינטוריקה (104286)
מועד א', אביב תשנ"ח

משך הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר, כולל מחשבון. יש לנמק היטב כל טענה וכל חישוב.
ענה על <u>ארבע</u> (ולא יותר) מבין חמש השאלות הבאות.

1. יהיו $k \le n$ מספרים טבעיים. הוכח כי מספר הפתרונות של $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \le n$ במספרים טבעיים הוא $\binom{n}{k}$.

2. נתון לוח משבצות $2 \times n$ (ראה ציור עבור $n = 6$).  רוצים לכסות את הלוח ללא חפיפה וללא חריגה ע"י לוחיות 2×1. נתונה כמות בלתי-מוגבלת של לוחיות משני צבעים: כחול ואדום. לוחיות כחולות מותר להניח במאוזן או במאונך, לוחיות אדומות רק במאוזן. בכמה אופנים אפשר לעשות זאת? הבע תשובתך כפונקציה של n.

3. 17 סטודנטים קיבלו ציונים באינפי, אלגברה, קומבינטוריקה ומבוא למרעי המחשב. כל הציונים הם מספרים שלמים. הוכח שיש שניים מהם שממוצע ציוניהם בכל אחד מהמקצועות מספר שלם.

4. יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_1 = (V, E_2)$ שני גרפים קשירים על אותה קבוצת קודקודים. כך ש-$E_1 \cap E_2 = \emptyset$. יהי $G = (V, E_1 \cap E_2)$. עבור כל אחת משתי הטענות הבאות, קבע אם היא נכונה או לא. אם כן- הוכח אותה. אם לא- תן דוגמה נגדית.

   (א) אם G_1 וגם G_2 אוילריאניים אז G אוילריאני.

   (ב) אם G_1 וגם G_2 הם בעלי מסלול אוילריאני אז G בעל מסלול אוילריאני.

5. נסח והוכח את משפט Ramsey על צביעות של גרפים בשני צבעים. (יש לנסח ולהוכיח גם כל משפט שמסתמכים עליו.)

בהצלחה!

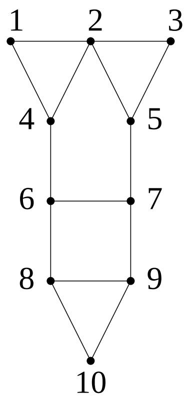
בחינה בקומבינטוריקה (104286)
מועד ב', אביב תשנ"ח

משך הבחינה $2\frac{1}{2}$ שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר, כולל מחשבון. יש לנמק היטב כל טענה וכל חישוב.

ענה על <u>ארבע</u> (ולא יותר) מבין חמש השאלות הבאות. בהצלחה!

1. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $x_1^3 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8 = 15$ במספרים שלמים אי-שליליים?

2. בבחינה בקומבינטוריקה השתתפו 100 סטודנטים. באחת השאלות הוצג הגרף שבציור, והנבחנים נתבקשו למצוא קבוצה בת 7 קדקדים מבין קדקדי הגרף, כך שאף 3 מבין ה-7 אינם יוצרים משולש (K_3) בגרף. כל הנבחנים נתנו תשובות נכונות. הוכח שיש 4 נבחנים שמצאו אותה קבוצה.



3. עבור כל אחת מן הקבוצות הבאות, קבע אם היא בת-מניה:
($\mathbb{Q}$ מסמן את קבוצת המספרים הרציונליים)

   (א) קבוצת כל המספרים הממשיים x כך ש-$(x+1)(x-1) \in \mathbb{Q}$.

   (ב) קבוצת כל הזוגות הסדורים (x,y) של מספרים ממשיים כך ש-$y \neq 0$ ו-$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

4. נסח והוכח את משפט Euler על גרפים אוילראניים.

5. בכיתה 30 תלמידים. הוקמו בכיתה מספר מסוים של וועדות לנושאים שונים, כך שבכל וועדה חברים 3 תלמידים בדיוק, ואין שתי וועדות שיש להן אותם 3 חברים. בשלב שני הוחלט להרחיב את כל הוועדות, כך שיהיו בכל אחת 4 תלמידים בדיוק. הוכח שניתן לעשות זאת על-ידי הוספת תלמיד אחד לכל וועדה קיימת, כך שלאחר ההרחבה לא תהיינה שתי וועדות עם אותם 4 חברים.

בהצלחה!

תרגיל מס' 1 בקומבינטוריקה

1. בהרצאה הוכח החסם מלרע $f_n \geq \frac{3^n}{2n+1}$ עבור מספר הטורים המינימלי שיש לשלוח בטוטו כדי להבטיח זכיה בפרס השני לפחות ($n-1$ ניחושים נכונים מתוך n משחקים). בתירגול הוכח חסם מלרע עבור זכיה בפרס חמישי לפחות.

   יהי g_n מספר הטורים שיש לשלוח בטוטו על n משחקי כדורסל כדי להבטיח זכיה בפרס השני לפחות.

   ויהי h_n מספר הטורים שיש לשלוח על מנת לזכות בפרס רביעי לפחות (לנחש לפחות $n-3$ נכונות).

   (א) מצא והוכח חסם מלרע אנלוגי עבור g_n.

   (ב) מצא את g_3. וכתוב במפורש קבוצת טורים מתאימה.

   (ג) מצא והוכח חסם מלרע עבור h_n.

2. בחברה בת 4 בחורים ו-4 בחורות נתונות ההעדפות:

בחורות/ בחורים	1	2	3	4
1	1	4	4	2
2	2	1	3	4
3	3	3	2	1
4	4	2	1	3

דרוג הבחורים ע"י הבחורות

בחורות/ בחורים	1	2	3	4
1	4	1	3	2
2	2	3	1	4
3	4	3	1	2
4	1	2	4	3

דרוג הבחורות ע"י הבחורים

   (א) בצע את האלגוריתם של Gale-Shapley ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

   (ב) בצע את האלגוריתם האנלוגי, שבו הבחורות הן המחזרות אחרי הבחור-ים, ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

3. בכיתה בת 40 תלמידים בוחרים ניבחרת שחמט (לוח ראשון , שני, שלישי ורביעי) וניבחרת כדורסל (חמישה שחקנים, הסדר לא משנה).

   (א) בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת השחמט?

   (ב) בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת הכדורסל?

תרגיל מס' 3 בקומבינטוריקה

1. (א) בכמה אופנים ניתן לבחור מספרים טבעיים $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$?
   (ב) אותה שאלה כאשר התנאי הוא $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq n$?
   (ג) כאשר מוסיפים לחלק ב' את הדרישה $a_1 \neq a_k$?

2. בכיתה שבה 12 בנים ו-14 בנות, צריך לבחור ניבחרת כדורסל ובה 5 שחקנים, מהם לפחות שני בנים ולפחות שתי בנות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

3. קבוצה ובה 18 ילדים צריכה להתחלק לשלשות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת (אין חשיבות לסדר השלשות)?

4. בכנסת בוחרים יושב ראש מבין חמישה מעומדים. כמה תוצאות שונות אפשריות? (הנח שכל אחד מ-120 חברי הכנסת יכול להצביע בעד אחד המעומדים או להימנע. תוצאות ההצבעה היא מספר הקולות להם זכה כל מעומד ומספר הנמנעים).

5. כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש לכל אחת מן המשוואות הבאות?
   (א) $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 17$
   (ב) $3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 16$
   (ג) $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5) = 18$ (<u>רמז</u>: פרקו את 18 למכפלה של 2 גורמים.)
   (ד) $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)(x_1 + x_2 + x_3) = 51$

תרגיל מס' 4 בקומבינטוריקה

1. (א) הוכח כי לכל n טבעי ולכל $1 \le k \le 2^n - 1$ $\binom{2^n}{k}$ הוא מספר זוגי.

   (ב) האם $\binom{33}{17}$ הוא זוגי או אי-זוגי?

2. הוכח כי מכפלת k מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת ב-$k!$.

3. הוכח (רצוי ע"י הסבר קומבינטורי): $\binom{2n}{3} = 2\binom{n}{3} + 2n\binom{n}{2}$.

4. הוכח כי מספר הדרכים לחלק את $\{1, \dots, n\}$ ל-3 קבוצות או פחות (כלומר יכול להיות שאחת או שתיים מהקבוצות הן ריקות) הוא 3^n.

   והסבר מדוע $(1+2)^n = 3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$. (הסבר קומבינטורי, מבחינה חישובית אין מה להסביר).

5. (א) $0 \le k < n$ שלמים. הוכח כי $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i}$ הוא חיובי אם k זוגי ושלילי אם k אי-זוגי. (כלומר, סימנו של הסכום הוא כסימנו של המחובר האחרון בו).

   (ב) יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות סופיות. נניח שמבצעים הכלה-הפרדה רק עד לשלב ה-k-י, $(k \le n)$. כלומר מחשבים

$$I_k = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i-1<i_2} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

   הוכח כי $I_k \le |\cup_{i=1}^{n} A_i|$ אם k זוגי וכי $I_k \ge |\cup_{i=1}^{n} A_i|$ אם k אי-זוגי.

6. בצנצנת יש 15 סוכריות טופי, 6 סוכריות דבש ו-8 סוכריות מנטה. כמה שקיות שונות של 18 סוכריות אפשר להוציא ממנה?

7. כמה מספרים טבעיים בין 100 ל-1000 אינם מתחלקים באף אחד מבין המספרים 12, 5,8?

תרגיל מס' 6 בקומבינטוריקה

1. הוכח: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$ לכל n טבעי.
(F_n הם מספרי פיבונצ'י)

2. חלקיק נע במישור לפי הכללים הבאים:

במצב ההתחלתי הוא נמצא בראשית הצירים (הנקודה $(0,0)$). בכל שניה הוא נע מרחק של 1 ימינה, שמאלה או למעלה (כלומר, מן הנקודה (x,y) לנקודה $(x+1,y)$, לנקודה $(x-1,y)$, או לנקודה $(x,y+1)$). לעולם, החלקיק איננו חוזר לנקודה ממנה יצא בשניה הקודמת. נסמן ב- P_n את מספר המסלולים האפשריים למהלך החלקיק במשך n שניות.

(א) הוכח ש-P_n מקיים את נוסחת הנסיגה:
$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 3 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad , n \geq 2 \end{cases}$$

(ב) מצא במפורש את P_n.

3. בניסיון לפתור בעיה, אומרים כי אדם נמצא בשלב ה-n אם הוא נמצא n צעדים מהפתרון. בכל שלב יש לו 5 אפשריות. שתיים מהן מובילות אותו ישר לשלב ה-$(n-2)$ ושלוש מהן לשלב ה-$(n-1)$. נסמן ב-a_n את מספר המסלולים שיכול להגיע לפיתרון החל מהשלב ה-n-י.

(א) מצא נוסחת הנסיגה עבור a_n.

(ב) מצא נוסחה מפורשת ל a_n.

4. יהי b_n מספר ה-n-יות הבנויות מספרות 1,0, ו -1, כאשר אין מרשים שני מספרי 1 עוקבים וגם לא שני מספרי -1 עוקבים. מצא נוסחת נסיגה עבור b_n והסבר את האנלוגיה לשאלה 2.

תרגיל מס' 7 בקומבינטוריקה

1. אדם עולה n מדרגות, כאשר בכל צעד הוא עולה מדרגה אחת, שתיים או שלוש. אחרי צעד של שלוש מדרגות, הוא רשאי (אך לא חייב) לנוח שלב אחד, כלומר לעשות צעד של אפס מדרגות. יהי S_n מספר האופנים לעשות זאת.
   (א) מצא נוסחת נסיגה עבור S_n.
   (ב) פתור אותה וקבל נוסחה מפורשת עבור S_n.

2. סדרת המספרים $H_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ מקיימת $H_n = -2H_{n-1} - H_{n-2}$ לכל $n \geq 2$, וכן $H_{30} = 15, H_{17} = 11$. מצא את H_{100}.

3. יהי J_n מספר התת-קבוצות של קבוצת המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$ (כולל התת-קבוצה הריקה) שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. מצא ביטוי עבור J_n באמצעות מספרי פיבונאצ'י.

4. הוכח: בכל קבוצה של 25 בני-אדם, יש שלושה שיום הולדתם חל באותו חודש.

5. בודקים את ידעת השפות עברית, ערבית, רוסית ואנגלית בקבוצה מסוימת של 100 אנשים. מתברר שאיש אינו יודע את כל ארבע השפות, וכל יודעי העברית יודעים גם אנגלית. הוכח שיש עשרה אנשים היודעים אותן שפות בדיוק.

6. במשולש שווה-צלעות שאורך צלעותיו 1 נתונות $2^{2n} + 1$ נקודות (n מספר טבעי כלשהו). הוכח שקיימות שתי נקודות ביניהן המרוחקות זו מזו מרחק של $\frac{1}{2^n}$ לכל היותר.

תרגיל מס' 8 בקומבינטוריקה

1. מסלול של אוטובוס מקצה אחד למשנהו מונה 100 תחנות (כולל הקצוות). בנסיעה מקצה אחד לאחר הוא עצר ב-40 תחנות (כולל הקצוות). הוכח כי בנסיעה זו חייב היה האוטובוס לעצור בשתי תחנות שמרחקן 10,9, או 19 תחנות.

2. יורים למטרה שצורתה משולש שווה צלעות, שאורך צלעו 1. נניח כי מספר הפגיעות הוא לפחות 2^{2n+1}. הוכח כי צריכים להיות שתי יריות לפחות שה-מרחק בינהן קטן או שווה ל-$\frac{1}{2^n}$.

3. 10 בנות ו-10 בנים יושבים ליד שולחן עגול, עליו מונחת 20 צלחות שבהן גלידה או עוגת קצפת. (יתכן כי בכל הצלחות גלידה או בכולן עוגת קצפת, או כל צירוף אפשרי אחר). הבנות מעדיפות גלידה, הבנים מעדיפים עוגת קצפת. הוכח כי ניתן לסובב את השולחן כך שלפחות 10 מהילדים יטעמו את הקינוח המעודף.

4. הוכח: בכל קבוצה של 50 בני אדם, יש שמונה שהפרש הגילים בין כל שניים מהם (בשנים שלמות) מתחלק בשבע.

תרגיל מס' 9 בקומבינטוריקה

1. מצא פונקציה חד-חד-ערכית ועל מ-$(0,1)$ ל-$[0,1]$.

2. נניח כי משכנים במישור עותקים זרים של האות X. הוכח כי אפשר לשכן לכל היותר $\aleph_0$ עותקים.

   (הכוונה בעותקים זרים היא שאין נקודה במישור השייכת לשני X-ים).

3. תהא A קבוצה בת-מניה ו-B קבוצה כלשהי. ותהא $f : A \to B$ פונקציה מ-A ל-B. נסמן ב-C את התמונה של A $C = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$. הוכח כי יש פונקציה חד-חד-ערכית $g : C \to A$.

4. הוכח כי עוצמת קבוצת הנקודות בעיגול הפתוח $\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ שונה לעוצמת המישור.

5. הוכח כי יש ישר במישור העובר דרך הנקודה $(0,0)$ אך אינו עובר בשום נקודת סריג שונה מ-$(0,0)$. (נקודת סריג היא נקודה עם שיעורים שלמים).

תרגיל מס' 10 בקומבינטוריקה

1. מחלקים דף נייר למספר סופי של תחומים ע"י כך שמעבירים מספר קוים ישרים. נומר כי 2 תחומים הם שכנים אם אפשר להפוך אותם לתחום אחד ע"י מחיקת אחד הקווים. הוכיחו כי ניתן לצבוע את התחומים בשני צבעים כך שתחומים שכנים יצבעו בצבעים שונים (כדוגמת לוח שחמט).

   הוכיחו באופן הבא: הגדירו גרף שקודקודיו הם התחומים ויש צלע בין 2 קודקודים (תחומים) אם הם (התחומים) שכנים. הראו כי גרף זה הוא דו-צדדי, והוכיחו כי אפשר לצבוע את הקדקדים של גרף דו צדדי בשני צבעים כך שקוקודים שכנים יצבעו בצבעים שונים.

2. הוכיחו כי בכל גרף יש 2 קודקודים בעלי אותה דרגה (ערכיות).

3. בכוכב מסוים יש 1998 מדינות ו-10 חברות תעופה. נתון שאם חברת תעופה עושה טיסות ממדינה a למדינה b אזי היא גם עושה טיסות מ-b ל-a. ונתון כי אפשר לטוס מכל מדינה לכל מדינה.

   הראו כי ניתן לצאת ממדינה אחת, לבקר במספר אי-זוגי של מדינות ולחזור למדינה הראשונה, כל זאת ע"י טיסות בחברה אחת.

   רמז: $2^{10} < 1998$. הגדירו גרפים מתאימים (הקודקודים הם המדינות, הצל-עות הם הטיסות של חברה נתונה) והשתמשו בעובדה שגרף ללא מעגלים אי-זוגים הוא דו-צדדי. ותוכיחו את הטענה בעזרת אינדוקציה על n עד ל-$n = 10$. אפשר גם ליפתור בדרך אחרת.

4. נגדיר את $Q_n =$ גרף הקוביה ה-n-ממדית: קבוצת הקודקודים היא קבוצת הסדרות באורך n של אפסים ואחדים. יש בין 2 קודקודים צלע אס"ם הם שונים במקום אחד בדיוק.

   (א) מצאו את הערכיות (הדרגה) של כל קדקד.

   (ב) עבור אידה n-ים זהו גרף דו-צדדי.

תרגיל מס' 11 בקומבינטוריקה

1. יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, $|V|\geq 2$. הוכח שיש לפחות שני קדקדים $x\in V$ בעלי התכונה הבאה: אם נרחיק מ-G את x ואת כל הצלעות המכילות אותו, הגרף שיישאר יהיה קשיר.

2. יהא Q_n גרף הקוביה ה-n מימדית.

   (א) הוכח כי אם n-זוגי אז Q_n אוילריאני.

   (ב) הוכח כי אם n-אי-זוגי אז אפשר לפרק את G ל-2^{n-1} מסלולים זרים.

   (ג) הוכח כי אפשר בסעיף ב' לדרוש שכל המסלולים יהיו באותו אורך ומצא אורך זה.

3. מה המספר המינימלי m כך שאפשר לפרק את K_n (הגרף השלם על n קדקדים) ל-m מסלולים זרים? (שים לב ש-m תלוי ב-n).

4. נתון $G=(V,E)$ ונתון כי $|V|=n$ וכי G הוא עץ וכי יש בו מסלול אוילר (מסלול העובר על כל צלע פעם אחת בדיוק) צייר את כל האפשריות ל-G עבור $n=1,2,3,4,5$.

5. נתון לוח שחמט (8×8). על הלוח נע צריח, כאשר בכל צעד הוא יכול לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן או במאונך. רוצים שהצריח ינוע על הלוח באופן שיסיים באותה משבצת שהתחיל, ובדרך יופיע כל צעד חוקי בדיוק פעם אחת (כאשר לכיוון הצעד אין חשיבות, לדוגמה צריך להופיע או $\longrightarrow$ או $\longleftarrow$, אך לא שניהם; למקום הצעד על הלוח יש חשיבות). האם הדבר אפשרי?

תרגיל מס' 12 בקומבינטוריקה

1. ראינו בתירגול כי אם יש n אברכים ו-n בתולות, ואם כל אברך מכיר בדיוק k בתולות וכל בתולה מכירה בדיוק k אברכים, אזי אפשר למצוא שידוך (כלומר אפשר לחלק אותם ל-n זוגות כך שכל אברך יכיר את בת-זוגו וכל בתולה תכיר את בן זוגה).

   הראו כי ניתן למצוא k שידוכים שונים, כך שכל זוג אפשרי (אברך ובתולה המכירים זה את זו) ישודך בדיוק באחד מ-k השידוכים הנ"ל. הסיקו את הטענה השקולה הבאה: אם $G=(A,B,E)$ גרף דו-צדדי המקיים $|B| = |A| = n$, והדרגה של כל קדקד היא k, אזי אפשר לצבוע את צלעות G ב-k צבעים, כך שבכל קודקוד k הצלעות שהוא שייך אליהן יצבעו בצבעים שונים.

2. נתון צופן סודי (לא ידוע) המורכב מ-26 האותיות האנגליות (כל אות מופיע בדיוק פעם אחת בצופן). מטרתינו היא לכתוב מספר צפנים, כך שלפחות באחד מהם אחת האותיות תופיע באותו מקום בו היא מופיע בצופן הסודי.

   (א) הראו כי ניתן לרשום 14 צפנים כך שבוודאות נשיג את מטרתינו.

   (ב) הראו כי אי אפשר לרשום 133 צפנים כך שבוודאות נשיג את מטרתינו.

   (צופן הוא פרמוטציה של האותיות האנגליות).

   <u>רמז ל-ב':</u> אפשר לחשוב על כל אות כאברך וכל מקום אפשרי (בצופן) כבתולה. נאמר כי "אות" מכירה "מקום" אם באף אחד מ-13 הצפנים שרשמנו ה"אות" לא מופיע במקום הנתון. הראו כי כל קבוצה של k אותיות מכירה לפחות k מקומות (כדאי להבדיל בין המקרה $k \le 13$ לבין המקרה $k > 13$) והסיקו ממשפט החתונה כי יש "שידוך", כלומר יש צופן שאינו מזדהה בשום מקום עם אף אחד מ-13 הצפנים שרשמנו.

3. יהיו k,n מספרים טבעיים, $k < \frac{n}{2}$. תהי S קבוצה בת n איברים, ונסמן
$$\binom{S}{k} = \{A \subseteq S : |A| = k\}, \binom{S}{k+1} = \{B \subseteq S : |B| = k+1\}$$
הוכח שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f : \binom{S}{k} \to \binom{S}{k+1}$ המקיימת
$A \subseteq f(A)$ לכל $A \in \binom{S}{k}$.

תרגיל בית בקומבינטוריקה- רמזי

1. הוכח שקיים n טבעי שעבורו הטענה הבאה נכונה:

יהיו n קטעים על הישר, כך שאין נקודה הנמצאת ביותר משני קטעים. אזי קיימים 10 מבין הקטעים שהם זרים בזוגות, (כלומר לאף שניים מהם אין נק' משותפת).

2. הוכח כי יש n, כך שאם למסיבה מגיעים n אנשים אזי בסוף המסיבה נוכל למצוא 5 מתוכם אשר לחצו ידיים אחד לשני במהלך המסיבה, או 5 מתוכם שאף שניים מהם לא לחצו ידיים במהלך המסיבה. מצא n כזה.

3. הסק ממשפט רמזי כי לכל m,n יש k כך שבכל סידרה בת k איברים של מספרים ממשיים, או שיש תת סדרה מונוטונית עולה באורך n, או שיש תתי סדרה מונוטונית יורדת באורך m.

השווה בין ה-k המתקבל ממשפט רמזי לבין ה-k המתקבל ממשפט הרדש-סקרש.

4. הוכח (באינדוקציה על n) כי לכל n מספרים טבעיים $k_1, k_2, \ldots, k_n$ יש $r = r(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ כך שאם צובעים את צלעות K_r ב-n צבעים אזי יש $1 \leq j \leq n$ כך שעבורו יש תת גרף שלם בגודל k_j אשר צלעותיו צבועות בצבע ה-j-י. ומצא חסם עליון עבור $r(k_1, k_2, k_3)$.