אלגברה לינארית ב'
תרגיל בית מס' 1

להגשה עד יום שלישי 17.04.18 באופן אלקטרוני במודל

תרגיל 1

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי $n \geq 2$ שלם ותהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות $n \times n$. הוכיחו:

א. $|\mathrm{adj}A| = |A|^{n-1}$

ב. $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}B \cdot \mathrm{adj}A$

ג. $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = |A|^{n-2} A$

תרגיל 2

א. יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהי $A \in M_2(\mathbb{F})$. הראו ש־ $A^2 - (\mathrm{tr}A)A + |A|I = 0_{2\times 2}$.

ב. תהי $A \in M_4(\mathbb{R})$ המקיימת $\mathrm{r}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 2$, וסכום איברי כל עמודה של A הוא 3. מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $A^5 = aA^2 + bA^3$.

ג. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. מצאו פולינום $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש־ $\deg(p(x)) = 2018$ ו־ $p(A) = 0_{3\times 3}$.

תרגיל 3

יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $W_1, ..., W_t \subseteq V$ תתי־מרחבים. כזכור, הגדרנו שהסכום $\sum_{i=1}^{t} W_i$ הוא <u>ישר</u> אם $W_i \cap \left(\sum_{k\neq i} W_k\right) = \{0\}$ לכל $1 \leq i \leq t$.

הוכיחו שהבאים שקולים:

א. הסכום $\sum_{i=1}^{t} W_i$ הוא סכום ישר.

ב. לכל $v \in \sum_{i=1}^{t} W_i$ יש הצגה <u>יחידה</u> כסכום $v = w_1 + ... + w_t$ כאשר $w_i \in W_i$.

ג. $\dim\left(\sum_{i=1}^{t} W_i\right) = \sum_{i=1}^{t} \dim W_i$

<u>רמז:</u> הראו שאם $\sum_{i=1}^{t} W_i$ הוא סכום ישר ו־ B_i הוא בסיס של W_i אז איחוד הבסיסים $\bigcup B_i$ הוא בסיס של $\sum_{i=1}^{t} W_i$.

תרגיל 4

יהא V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $W,U,X \subseteq V$ תתי־מרחבים של V.
נתון כי $V = W + U + X$ וכמו כן $W \cap U = W \cap X = U \cap X = \{0\}$.
הוכיחו או הפריכו: $V = W \oplus U \oplus X$.