קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 7

תאריך הגשה: יום חמישי, 26/12/2013, עד שעה $22:00$

שאלה 1:

נתון כי לכל סדרה מונוטונית $x_0 \neq x_n \to x_0$ הסדרה $f(x_n)$ מתכנסת.

א. הוכיחו כי הסדרות $f(x_n)$ מתכנסות כולן לאותו הגבול כאשר $x_0 \neq x_n \to x_0$ מונוטונית עולה.

נניח בשלילה כי קיימות 2 סדרות מונוטוניות עולות $x_0 \neq x_n, y_n \to x_0$ כך ש- $f(x_n) \to L\ ,\ f(y_n) \to K$, ו- $L \neq K$. נבנה סדרה חדשה a_n מאיברי x_n , y_n בצורה הבאה: לאיבר הראשון נבחר את הקטן מבין x_1 , y_1. נניח לשם ההדגמה כי בחרנו את x_1, אז בשלב הבא נבחר את הקטן מבין x_2 , y_1. נמשיך כך, כאשר בכל שלב נבחר את הקטן מבין האיברים הראשונים שעדיין לא השתמשנו בהם מכל אחת מהסדרות. נשים לב כי בהכרח הסדרה החדשה המתקבלת מכילה את כל איברי x_n , y_n, ובפרט מכילה אינסוף מאיברי כל אחת מהסדרות המקוריות, כי אם קיים מקום בסדרה החדשה שהחל ממנו קיימים רק איברי אחת מהסדרות המקוריות, נניח בה״כ רק איברי x_n, זה אומר כי קיימים N_1 , N_2 כך ש- $y_{N_1} \geq x_n$ לכל $n > N_2$. אבל $y_{N_1} < x_0$, כי y_n מונוטוניות עולה ל- x_0 אך כל האיברים שונים מ- x_0, ולכן מתקיים כי $x_0 = \lim x_n \leq y_{N_1} < x_0$ - סתירה. כלומר קיבלנו סדרה חדשה a_n מונוטונית עולה המתכנסת ל- x_0 (כי x_n , y_n מהוות פירוק שלה לשתי תתי סדרות המתכנסות שתיהן ל- x_0), אבל ל- $f(a_n)$ יש שתי תתי-סדרות המתכנסות לשני גבולות שונים L, K, כלומר $f(a_n)$ לא מתכנסת – סתירה לנתון.

ב. הוכיחו / הפריכו: ל- f קיים גבול ב- x_0 .

לא נכון, ד״נ: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x<0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ בנקודה $x_0 = 0$.

ג. הוכיחו / הפריכו: ל- f קיימים גבולות חד-צדדיים ב- x_0.

נכון. נוכיח עבור גבול חד-צדדי משמאל, באופן דומה מתקיים עבור גבול חד-צדדי מימין. נניח בשלילה כי לא קיים הגבול החד״צ משמאל, אז מהיינה קיימות 2 סדרות $x_0 > x_n , y_n \to x_0$ כך ש- $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$. (יתכן כי אחת או שתי הסדרות לא מתכנסות בכלל). אם $f(x_n) , f(y_n)$ מתכנסות, אבל לגבולות שונים, אז נוציא לשתי הסדרות תתי-סדרות מונוטוניות עולות x_{n_k} , y_{n_j}, ואז מהנתון ומסעיף א׳, $\lim f\left(x_{n_k}\right) = \lim f\left(y_{n_j}\right)$, אבל מכיוון שאלו תתי-סדרות של סדרות מתכנסות, נקבל כי $\lim f(x_n) = \lim f\left(x_{n_k}\right) = \lim f\left(y_{n_k}\right) = \lim\ f(y_n)$, סתירה. אם אחת מהסדרות לא מתכנסת, נניח בה״כ $f(x_n)$, אז קיימות לה שתי ת״ס $f\left(x_{n_k}\right), f\left(x_{n_j}\right)$ המתכנסות לשני גבולות שונים, ושוב נוכל להוציא לכל אחת מהסדרות x_{n_k} , x_{n_j} תת-סדרה מונטונית עולה ל- x_0, ולכן לסדרה המתקבלת מהפעלת f על כל אחת מתתי הסדרות האלו קיים אותו הגבול מסעיף א, ולכן גם $f\left(x_{n_k}\right), f\left(x_{n_j}\right)$ מתכנסות לאותו הגבול – סתירה. מכיוון שעברנו על כל המקרים האפשריים, קיבלנו סתירה ולכן בהכרח קיים הגבול החד״צ משמאל.

שאלה 2:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ב- 0 ומקיימת $f(x)=f(2x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי f קבועה.

יהי $x_0\in\mathbb{R}$. נראה כי $f(x_0)=f(0)$ וזה יראה כי f קבועה. נסתכל על הסדרה $x_n=\frac{x_0}{2^n}$. מהנתון, $f(x_n)=f(x_0)$ לכל n, לכן בפרט $\lim f(x_n)=f(x_0)$. בנוסף, $x_n\to 0$, ולכן מרציפות f ב- 0, $f(x_n)\to f(0)$. מיחידות הגבול, נקבל כי $f(x_0)=f(0)$.

ב. האם הטענה נכונה אם f אינה רציפה ב- 0? מה ניתן לומר על f במקרה זה?

אם f אינה רציפה ב- 0, הטענה לא נכונה. ד״נ: $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$. במצב כזה לא ניתן לומר דבר על f - אפילו גבולות חד-צדדיים ב- 0 לא בהכרח קיימים לה: פונקציית דיריכלה מקיימת את הנתון (כי אם $x\in\mathbb{Q}$ אז גם $2x\in\mathbb{Q}$, וכך גם עבור אי-רציונלים), ואין לה אפילו גבולות חד-צדדיים ב- 0.

שאלה 3:

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{(1+x)^{74}-1}$.

נשתמש באי-שוויון ברנולי כדי לקבל: $(1+x)^{74}-1\geq 74x$ לכל $x>-1$, ובפרט לכל $x>0$, לכן:

$0\leq\frac{x^2}{(1+x)^{74}-1}\leq\frac{x^2}{74x}=\frac{x}{74}$ (הביטוי כולו חיובי כי המכנה חיובי עבור $x>0$). מסנדוויץ׳ נקבל כי הגבול הוא 0.

ב. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(ex^2)}{\ln(x^2)}\right)^{\ln|x|}$.

$\left(\frac{\ln(ex^2)}{\ln(x^2)}\right)^{\ln|x|}=\left(\frac{\ln e+\ln x^2}{\ln x^2}\right)^{\ln|x|}=\left(1+\frac{1}{\ln|x|^2}\right)^{\ln|x|}=\left(1+\frac{1}{2\ln|x|}\right)^{\ln|x|}\to e^{\frac{1}{2}}$. (המעבר האחרון מתקיים מכיוון ש- $\ln|x|\to-\infty$ כאשר $x\to 0$).

ג. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

נרשום: $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$. מתקיים $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$, כי $(1+[x])^{\frac{1}{1+[x]}}\leq(1+x)^{\frac{1}{x}}\leq(2+[x])^{\frac{1}{[x]}}=\left((2+[x])^{\frac{1}{2+[x]}}\right)^{\frac{2+[x]}{[x]}}$, ושני הביטויים בקצוות מתכנסים ל- 1 כי $n^{\frac{1}{n}}\to 1$. מכיוון ש- ln פונקציה רציפה, נקבל כי $\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\to\ln(1)=0$.

ד. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x-3}}$.

נציב $t=x-3$, ונשים לב כי $x\to 3\Leftrightarrow t\to 0$, לכן

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x-3}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t+3}{3}\right)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0}\left(\left(1+\frac{t}{3}\right)^{\frac{3}{t}}\right)^{\frac{2}{3}}$, ובדיקת גבולות חד״צ מראה כי הביטוי האחרון מתכנס ל- $e^{\frac{2}{3}}$.

שאלה 4:

יהיו h ,g פונקציות רציפות. הוכיחו כי הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = h(x)\}$ סגורה.

נסמן $A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = h(x)\}$. תהי $\{x_n\} \subset A$ סדרה כך ש- $x_n \to x_0$. נראה כי $x_0 \in A$: g רציפה, לכן $\lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(x_0)$, ובאופן דומה $\lim h(x_n) = h(x_0)$. אבל $g(x_n) = h(x_n)$ לכל n, ולכן מיחידות הגבול נקבל כי $g(x_0) = h(x_0)$, כלומר $x_0 \in A$.

הערה: ניתן להשתמש גם בשיקולים טופולוגיים: מאריתמטיקה של פונקציות רציפות, $g-h$ היא פונקציה רציפה, ולכן $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (g-h)(x) = 0\}$, כלומר A היא קבוצת המקורות של $\{0\}$ עבור הפונקציה $g-h$. $\{0\}$ היא קבוצה סגורה, ו- $g-h$ רציפה, ולכן המקור שלה, כלומר הקבוצה A, היא קבוצה סגורה.

שאלה 5:

יהיו h , g פונקציות מונוטוניות עולות כך ש- $h + g$ רציפה ב- x_0. הוכיחו כי h, g רציפות ב- x_0. האם הטענה נכונה כאשר g מונוטונית עולה ו- h מונוטונית יורדת?

h , g מונוטוניות עולות, לכן קיימים להן הגבולות החד-צדדיים ב- x_0. נסמן ב- K_1 , L_1 את הגבולות החד״צ משמאל של h , g בהתאמה, וב- K_2 , L_2 את הגבולות החד״צ מימין של h , g בהתאמה. אם נראה כי $L_1 = L_2$ זה יראה כי g רציפה ב- x_0, כי אז ממונוטוניות יתקיים $L_1 \le g(x_0) \le L_2 = L_1$. שוב ממונוטוניות של g מתקיים בהכרח כי $L_1 \le L_2$. נניח בשלילה כי $L_1 < L_2$. באופן דומה עבור h מתקיים $K_1 \le K_2$, ולכן נקבל כי $L_1 + K_1 < L_2 + K_2$. אבל שני הביטויים האלו הם הגבולות החד״צ של $g + h$ ב- x_0, ומרציפות $g + h$ הם חייבים להיות שווים – סתירה.

כאשר הפונקציות במונוטוניות הפוכה הטענה לא נכונה, למשל עבור $g(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ ו- $h(x) = -g(x)$.

שאלה 6:

מיינו את נקודות אי-הרציפות של הפונקציה $f(x) = [x]\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

הנקודות החשודות כנקודות אי-רציפות הן רק השלמים, מכיוון שלכל מספר לא שלם קיימת סביבה שלא מכילה אף מספר שלם, ובסביבה זו f מתנהגת כמו $x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, שהיא רציפה כמכפלת רציפות.

כדי לבדוק רציפות ב- $x_0 \in \mathbb{Z}$, נבדוק גבולות חד-צדדיים, ונפריד למקרים עבור השארית של x_0 בחלוקה ל- 4. למשל, עבור $k \in \mathbb{Z}$, $x_0 = 4k$, נקבל: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-}(4k-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = (4k-1)\cos\left(\frac{4\pi k}{2}\right) = 4k-1$ (המעבר הלפני אחרון מתקיים מרציפות $\cos(x)$), ועבור הגבול החד״צ השני:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+}(4k)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = (4k)\cos(2\pi k) = 4k$. בנקודה עצמה מתקיים:

$f(4k) = 4k \cdot \cos(2\pi k) = 4k$, ולכן בנקודה זו f רציפה אם ורק אם $4k - 1 = 4k$, וזה כמובן לא מתקיים, כלומר $f(x)$ לא רציפה ב- $x_0 = 4k$, וזו אי-רציפות מסוג קפיצה (כי קיימים וסופיים הגבולות החד״צ בנקודה).

באופן דומה ניתן לבדוק ולראות כי $f(x)$ רציפה בכל הנקודות השלמות מהצורה $x_0 = 4k + 1 \ , \ 4k + 3$, ואינה רציפה (עם אי-רציפות מסוג קפיצה) בנקודות מהצורה $x_0 = 4k + 2$.

שאלה 7:

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו- A קבוע חיובי. הוכיחו כי הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} -A & f(x) < -A \\ f(x) & |f(x)| \le A \\ A & f(x) > A \end{cases}$$

רציפה.

מרציפות f, הנקודות החשודות כנקודות אי-רציפות הן רק אלו בהן $|f(x)| = A$, כי רציפות f אומרת כי לכל נקודה שבה $f(x) \neq A\ , -A$ קיימת סביבה של הנקודה שבה זה מתקיים, ובסביבה זו $g = f$ או ש- g קבועה, ובפרט g רציפה.

נראה לדוגמא כי בנקודות בהן $f(x) = A$, g רציפה, ובאופן דומה ניתן להראות זאת עבור הנקודות בהן $f(x) = -A$:

תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0) = A$. אז גם $g(x_0) = A$. תהי סדרה $x_n \to x_0$, נראה כי $g(x_n) \to A = g(x_0)$: אם ב- x_n יש רק מס׳ סופי של איברים עבורם $f(x_n) > A$, אז פרט לאיברים אלו, $g(x_n) = f(x_n)$, ולכן מרציפות f, $\lim g(x_n) = \lim f(x_n) = f(x_0) = A = g(x_0)$. באופן דומה, אם בסדרה יש רק מס׳ סופי של איברים עבורם $f(x_n) < A$, אז פרט לאיברים אלו, $g(x_n) = A$, ולכן $g(x_n) \to A = g(x_0)$. אם בסדרה יש מספר אינסופי של איברים עבורם $f(x) > A$ וגם מספר אינסופי של איברים עבורים $f(x_n) < A$, נפרק את x_n לשתי תתי סדרות, $\{x_{n_k} \mid f(x_{n_k}) \ge A\}$, ו- $\{x_{n_j} \mid f(x_{n_j}) < A\}$. מהגדרת תתי הסדרות, $g(x_{n_k}) = A \to A = g(x_0)$, וגם: $g(x_{n_j}) = f(x_{n_j}) \to f(x_0) = A = g(x_0)$, ושתי תתי סדרות אלו ממצות את כל איברי x_n, ולכן $g(x_n) \to g(x_0)$.

שאלה 8:

הוכיחו את תנאי קושי לפונקציות: $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם x, y מקיימים $|x - a|\, , |y - a| < \delta$, $0 <$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

נניח תחילה כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ויהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת הגבול, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x - a| \ , \ |y - a| < \delta$, מתקיים $|f(x) - L|, |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן מא״ש המשולש נקבל $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

בכיוון השני, נשתמש בקריטריון היינה: יהי $\varepsilon > 0$, ותהי $a \neq x_n \to a$. יהי $\delta > 0$ המתאים ל- ε מהנתון בהנחה. מהגדרת התכנסות סדרה, קיים N כך שלכל $n > N$, $|x_n - a| < \delta$, ולכן מהנתון, לכל $n, m > N$, $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. כלומר, $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי, ועבור סדרות ידוע כי זה גורר ש- $f(x_n)$ סדרה מתכנסת. זה בהכרח אומר כי כל הסדרות $\{f(x_n)\}$ מתכנסות כולן לאותו הגבול, כי אם שתי סדרות כאלו מתכנסות לגבולות שונים, נסתכל על הסדרה המערבת את האיברים שלהם לסירוגין, אז זו סדרה בעלת שני ג״ח שונים ולכן לא מתכנסת, אבל היא עצמה צריכה להתכנס לפי הנתון – סתירה. לכן לכל $a \neq x_n \to x_0$ מקיימת ש- $f(x_n)$ מתכנסת לאותו הגבול, ומהיינה זה גורר כי קיים $\lim_{x\to a} f(x)$.

<u>שאלה 9</u>: לא להגשה

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה, ונניח כי קיים קבוע $K>0$ כך ש- f מקיימת

$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|^2$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי f קבועה.

<u>הדרכה</u>: היעזרו בערך של f בנקודת האמצע בין x ו- y. לאחר מכן, השתמשו בחלוקה למספר נקודות רב יותר.