חשבון אינפיניטסימלי 3 – ת"ב 3

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

15/12/2016

תאריך הגשה

12

קבוצת תרגול

שאלה 1:

נתונה אם כן פונקציה f, עבורה מוגדר אילוץ g, כך שהנקודה (x^0, λ^0) מהווה נקודה עבורה הלגרנז'יאן שמוגדר על ידי:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \langle \lambda, g(x) \rangle$$

מקיים $(\nabla L)(x^0, \lambda^0) = 0$. כמו כן, מדובר על נקודה שמקיימת את תנאי המשפט בדבר כופלי לגראנז' ולכן נסיק כי בהכרח מתקיים:

$$\langle \lambda^0, g(x^0) \rangle = 0$$

נתון כי L גזירה פעמיים בנקודה שכן נתון כי $H_L(x^0, \lambda^0)$ קיים ובפרט חיובי לחלוטין, ונוכל עתה לרשום קירוב על ידי פיתוח פולינום טיילור עד לסדר השני:

$$L(x^0 + h, \lambda^0) = f(x^0) + \overbrace{\langle \lambda^0, g(x^0) \rangle}^{=0} + \overbrace{[(\nabla L)(x^0, \lambda^0)]}^{=0} h + \frac{1}{2} \langle (H_L(x^0, \lambda^0)) h, h \rangle + o(\|h\|^2) (\star)$$

כאשר היות ו-$H_L(x^0, \lambda^0) > 0$ ולכן לא קיימים לה וקטורים עצמיים לערך 0 ובפרט קיים הערך:

$$0 < C = \min_{\|h\|=1} \langle (H_L(x^0, \lambda^0)) h, h \rangle$$

ומאידך מתקיים על פי הגדרה:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$$

ולכן נוכל לבחור קיימת סביבה $B((x^0, \lambda^0), r)$ עבור $r > 0$ שיהיה קטן מספיק, עבורו $|o(\|h\|)^2| < \frac{C}{2}$ לכל h בסביבה זו ולכן נקבל כי:

$$(\star) L(x^0 + h, \lambda^0) - f(x^0) = \frac{1}{2} \langle (H_L(x^0, \lambda^0)) h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq \frac{C}{2}$$

כלומר בסביבה זו, (x^0, λ^0) אכן נקודת מינימום ביחס ל-L. אך אנו מעוניינים להוכיח כי המינימום היא של f ביחס לאילוץ g. לכן נזכור כי:

$$L(x^0 + h, \lambda^0) = f(x^0 + h) - \langle \lambda^0, g(x^0 + h) \rangle$$

כלומר, בפרט עבור נקודות שמתאימות לאילוץ g יתקיים, כאמור $\langle \lambda^0, g(x^0 + h) \rangle = 0$ ואז נקבל כי:

$$(\star) \boxed{f(x^0 + h) - f(x^0) \geq \frac{C}{2} > 0}$$

ולכן, עבור נקודות על האילוץ g, נקבל כי אכן מדובר בנקודת מינימום של f כנדרש.

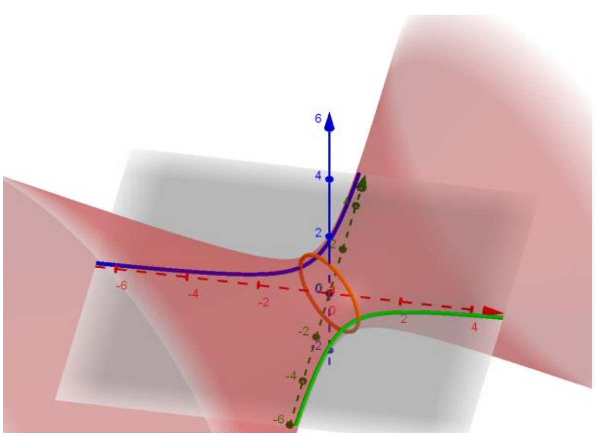
שאלה 2:

נתונה, אם כן, היריעה S הנתונה על ידי:

$$S = \{(x, y, z) | z^2 - xy = 1\}$$

ומוגדרות שלוש העקומות הבאות:

$$L_1: \{(\cos t, -\cos t, \sin t) | t \in [0, 2\pi]\}$$
$$L_2: \left\{ \left(t, -\frac{1}{t}, 0\right) \middle| t > 0 \right\}$$
$$L_3: \left\{ \left(t, -\frac{1}{t}, 0\right) \middle| t < 0 \right\}$$



איור 1 – היריעה S באדום, העקום L_1 בכתום, העקום L_2 בירוק והעקום L_3 בכחול

א. נרצה להראות כי $L_1, L_2, L_3 \subset S$. לשם כך נרצה להראות כי כל נקודה על העקומים הללו מקיימת את המשוואה שמתארת הפרמטריזציה של היריעה.

- <u>עבור L_1</u> – נשים לב, כי לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים:

$$z^2 - xy \overset{\text{הצבה}}{=} \sin^2 t - \cos t\,(-\cos t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

- <u>עבור L_2</u> – אכן, לכל $t > 0$ מתקיים:

$$z^2 - xy \overset{\text{הצבה}}{=} 0 - t\left(-\frac{1}{t}\right) = 1$$

- <u>עבור L_3</u> – באותו אופן, מתקבלת הצבה זהה ל-L_2.

נמצא את נקודות החיתוך:

- <u>$L_1 \cap L_2$</u> – נשווה בין פרמטריזציות. נדרוש כי לכל $t > 0$ יתקיים התנאי של L_2:

$$y = -\frac{1}{x} \overset{\text{הצבה מ-}L_1}{\Longrightarrow} -\cos t = -\frac{1}{\cos t} \Longrightarrow \cos^2 t = 1 \Longrightarrow \cos t = \pm 1 \Longrightarrow t = 0, \pi \overset{\cos t > 0}{\Longrightarrow} \boxed{t = 0}$$

כלומר החיתוך הינו נקודה בודדת והיא הנקודה $\boxed{(1, -1, 0)}$ (אפשר לבדוק כי $\sin t = 0$ כדי לראות שגם תנאי זה מתקיים כנדרש).

- $L_1 \cap L_3$ – נשווה בין פרמטריזציות באותו האופן. נדרוש את התנאי מ-L_3:

$$y = -\frac{1}{x} \overset{\text{הצבה מ-}L_1}{\Longrightarrow} -\cos t = -\frac{1}{\cos t} \Longrightarrow \cos^2 t = 1 \Longrightarrow \cos t = \pm 1 \Longrightarrow t = 0, -\pi \overset{t<0}{\Longrightarrow} \boxed{t = -\pi}$$

כלומר, גם במקרה זה קיבלנו כי החיתוך הינו נקודה בודדת והיא $\boxed{(-1, 1, 0)}$.

ב. נרצה להראות כי ישנה נקודה אחת לפחות ב-S שהיא נקודה שמרחקה מן הראשית הוא מינימלי ביחס לכל הנקודות האחרות ב-S. בעצם נרצה למצוא את המינימום של פונקציית המרחק $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ עבור הנקודות הנמצאות על היריעה.
נוכל לעשות זאת במספר דרכים כגון הצבת משוואת S (למשל להציב את $z^2 = 1 - xy$). אך נבצע זאת באמצעות שימוש בכופלי לגראנז'. כלומר נגדיר את האילוץ פרמטריזציית S משרה על ידי הפונקציה:

$$C(x,y,z) = z^2 - xy - 1 = 0$$

כמו כן, לשם נוחות, נזכור כי כאשר המרחק מן הראשית מינימלי אם ורק אם ריבוע המרחק יהיה גם הוא מינימלי. לכן נעבור לחישוב המינימום עבור פונקציית המרחק בריבוע.
וכאמור אנו יודעים כי המינימום של f תחת אילוץ C מתקבל בנקודות שבהן המישורים המשיקים מקבילים, כלומר כאשר וקטורי הנורמל (הניתנים על ידי הגרדיאנט של הפונקציות), הם כפולות סקלריות האחד של השני. כלומר קיים λ עבורו:

$$\nabla(f^2) - \lambda \nabla C = 0 \Longrightarrow (2x + \lambda y, 2y + \lambda x, 2z - 2\lambda z) = 0$$

אנו יודעים כי הלגרנז'יאן מינימלי ולכן נוכל לכתוב:

$$\nabla(f^2 - \lambda C) = 0 \Longrightarrow \nabla\big((1-\lambda)z^2 + x^2 + y^2 + \lambda xy + \lambda\big) = (2x + \lambda y, 2y + \lambda x, 2(1-\lambda)z) = (0,0,0)$$

נשים לב כי נוכל להפריד זאת לשתי מקרים:

- <u>$\lambda = 1$</u> – במקרה זה נציב ונקבל את המשוואות:

$$2x + y = 0 = 2y + x \Longrightarrow x = y$$

אך מכאן נקבל כי מתקיים $3x = 3y = 0$ כלומר $x = y = 0$. לאחר הצבה באילוץ נקבל כי $z^2 = 1$ כלומר $z = \pm 1$.
הנקודות הן, אם כן:

$$\boxed{(0,0,1) \quad (0,0,-1)}$$

- <u>$z = 0$</u> – נציב באילוץ ונקבל כי:

$$-xy = 1 \Longrightarrow y = -\frac{1}{x}$$

ומאידך נקבל כי:

$$2x + \lambda y = 0 \Longrightarrow y = -\frac{2}{\lambda}x \Longrightarrow x^2 = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\lambda}$$

נקבל מכך כי $y = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1}{2}\lambda}} = \mp\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$. נציב ערכים אלו במשוואה השניה ונקבל כי:

$$2y + \lambda x = 0 \Longrightarrow \mp\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \pm \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} = 0 \Longrightarrow \mp 4 \pm \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

לאחר הצבה נקבל את הנקודות:

$$\boxed{(1,-1,0) \quad (-1,1,0)}$$

עבור נקודות אלה נשים לב כי:

$$f(0,0,1) = 1 \qquad f(0,0,-1) = 1$$
$$f(1,-1,0) = \sqrt{2} \quad f(-1,1,0) = \sqrt{2}$$

כמו כן נשים לב כי אם נניח כי ישנה נקודה שעבורה $f(x,y,z) = \sqrt{C} < 1$ אזי נקבל כי:

$$x^2+y^2+z^2=C<1 \Longrightarrow x^2+y^2-C=-z^2$$

נציב זאת במשוואת היריעה ונקבל כי:

$$C-(x^2+y^2)-xy=1 \Longrightarrow x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy=C-1<0$$

אך אנו יודעים כי מאי שוויון קושי שוורץ נובע שמתקיים:

$$(x+y)^2>xy$$

ולכן עבור הביטוי שקיבלנו אין פתרון. כלומר אין אף על היריעה שמרחקה מן הראשית קטן מ-1. מכאן נסיק שישנן נקודות מינימום למרחק מהראשית על היריעה ולפחות 2 מהן הן הנקודות:

$$\boxed{(0,0,1) \quad (0,0,-1)}$$

בעבור נקודות המקסימום, נרצה להראות כי לא קיימות כאלו. נשים לב, לדוגמא, כי עבור $y=1$, נקבל מהיריעה את המשוואה:

$$z^2-x=1 \Longrightarrow x=z^2-1$$

כלומר, עבור נקודות המקיימות את הנ"ל (במקרה זה מדובר בעקום שלם), המרחק מהראשית נתון על ידי:

$$f(z^2-1,1,z^2)=\sqrt{z^4-2z^2+1+1+z^4}=\sqrt{2z^4-2z^2+2}$$

ועבור $z\to\infty$ נקבל מרחק מהראשית גדול כרצוננו, ותמיד מובטח כי הנקודה תהיה על היריעה, ולכן לא קיים מקסימום.

ג. בסעיף הקודם קיבלנו שתי נקודות חשודות כקריטיות, שהתברר כי אינן המינימום הגלובלי או מקסימום גלובלי ביחס למרחק מהראשית. הנקודות היו:

$$(1,-1,0) \quad (-1,1,0)$$

קל לראות, כי כל אחת מהנקודות נמצאות על העקום L_1, וכן אחת הנקודות נמצאת גם על L_2 והשניה על L_3. נשים לב כי פונקציית המרחק על עקומים אלה הינה:

$$L_1: f^2(\cos t,-\cos t,\sin t)=1+\cos^2 t$$
$$L_2: f^2\left(t,-\frac{1}{t},0\right)=t^2+\frac{1}{t^2}$$
$$L_3: f^2\left(t,-\frac{1}{t},0\right)=t^2+\frac{1}{t^2}$$

כאמור, אם שתי נקודות אלו אכן היו נקודות מינימה / מקסימה לוקליות, בכל סביבה של נקודות אלה הן היו מינימליות. בפרט הנ"ל היה נכון לכל סביבה של נקודות עלה על העקומים שעוברים דרכן. נראה כי זה לא קורה:

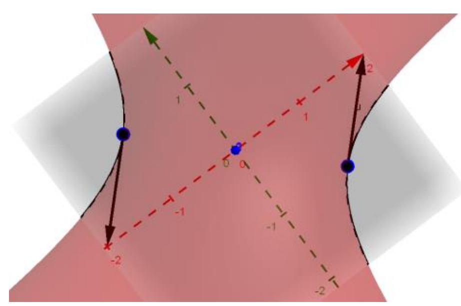
- <u>עבור $(1,-1,0)$</u> – נשים לב כי נקודה זו על L_1 ומתקבלת עבור $t=0$. כפי שניתן לראות מפונקציית המרחק בעקום זה, אכן מדובר בנקודת מקסימום מקומי, שכן עבור $t=0$ מתקבל $\cos^2 t=1$ שזה הערך המקסימלי של פונקציית המרחק הנתונה ב-L_1.

  אך מאידך אם נבדוק את הנגזרת השניה של $f^2|_{L_2}$, נקבל כי $\frac{d^2(f^2)}{dt^2}=2+6t^{-4}$ כלומר עבור $t=1$ תתקבל נקודה חיובית ולכן זו נקודת מינימום ביחס לעקום זה.

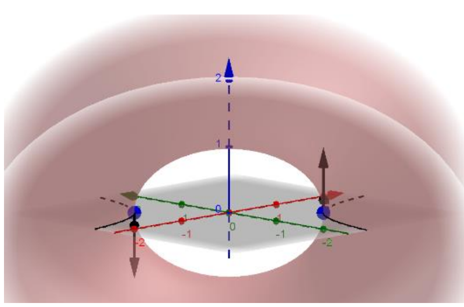
  לכן, נובע כי לכל סביבה של $(1,-1,0)$, נקודה זו תקבל ערך גדול מכל הנקודות בסביבה על L_1 וערך נמוך יותר מכל נקודה בסביבה על L_2, כלומר, זו לא נקודת מינימום ולא מקסימום מקומי.
- <u>עבור $(-1,1,0)$</u> – נבצע תהליך דומה. עבור הפונקציה המתאימה ל-L_1 נקבל כי המרחק מקסימלי, מאותו שיקול (שכן במקרה זה ההצבה תהיה $t=\pi$ ועדיין נקבל כי זהו הערך המקסימלי האפשרי על עקום זה.

  מאידך, הצבה בנגזרת השניה של $f^2|_{L_3}$ (שתהיה אותה נגזרת שניה שקיבלנו במקרה הראשון, תראה כי נקודה זו תהיה נקודת מינימום. כלומר, מאותו שיקול שהופעל במקרה של הנקודה הראשונה, נקבל כי זוהי אינה נקודת מקסימום או מינימום מקומית.

■



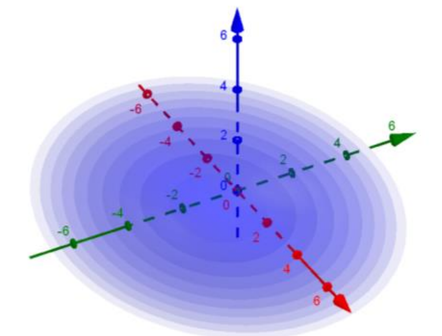
איור 2 – שתי הנקודות החשודות וכיוון הפרמטריזציה שלהן על L_2, L_3 בהתאמה. ניתן לראות כי ביחס לראשית מתקבלת היפרבולה, כאשר הנקודות החשודות מהוות מינימום ביחס למרחב מהראשית של עקום זה.



איור 3 – שתי הנקודות החשודות וכיוון הפרמטריזציה שלהן על L_1 (אליפסה). ניתן לראות כי שתי הנקודות נמצאות על הנקודות הרחוקות ביותר מהראשית ולכן מקסימליות ביחס לעקום זה.

שאלה 3:

נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציות הבאות ונסווגן:



איור 4 - תיאור גרפי חלקי מאוד של הפונקציה. קווי הגובה של הפונקציה הם אליפסואידים (כל אליפסואיד כחול באיור מהווה קו גובה של פונקציה זו).

א. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$.

ראשית נשים לב כי הפונקציה רציפה וגזירה בכל התחום, וכך שקל לראות שעבור $x,y,z \to \infty$ הפונקציה אינה חסומה ולכן לא קיים מקסימום גלובלי. הנ"ל נכון גם עבור $x,y,z \to -\infty$. לכן נסיק כי אם קיימות נקודות קריטיות, הן תהיינה נקודות בהן מתקיים $\nabla u|_{(x,y,z)} = 0$. נבדוק מתי זה קורה:

$$\nabla u|_{(x,y,z)} = (\partial_x u \quad \partial_y u \quad \partial_z u) = (2x - y + 1 \quad 2y - x \quad 2(z+1))$$

במקרה זה נקבל כי $\nabla u|_{(x,y,z)} = 0$ אם ורק אם $z = -1$ וכן מתקיים:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow 4y - y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}, x = -\frac{2}{3}$$

כלומר בנקודה:

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$$

יש חשד לנקודה קריטית. נבדוק מהו ההסיאן של הפונקציה:

$$H_u|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u & \partial_y \partial_x u & \partial_z \partial_x u \\ \partial_x \partial_y u & \partial_y^2 u & \partial_z \partial_y u \\ \partial_x \partial_z u & \partial_y \partial_z u & \partial_z^2 u \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים של מטריצה זו:

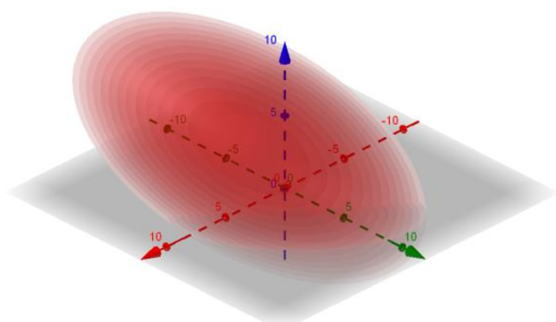
$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

כלומר, כל הערכים העצמיים של $H_u|_{(x,y,z)}$ חיוביים לכל (x,y,z) (שכן זו מטריצה קבועה), ולכן זו מטריצה חיובית לחלוטין.

מכאן, שכפי שהראינו בכיתה, נקודה זו הינה בהכרח נקודת מינימום.

$$\boxed{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right): Minimum}$$

■



איור 5 – תיאור גרפי חלקי על ידי סימון קווי הגובה. כל "אליפסואיד" בגוון שונה של אדום הינו קו גובה שונה של הפונקציה

ב. $g(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 5x - 7y - 8z$.

הנימוקים בדבר אי חסימות מלעיל של הפונקציה וגזירותה בכל התחום הינם אותם הנימוקים מסעיף קודם. לכן, על מנת למצוא נקודות קריטיות, נדרוש כי נקודות אלה תקיימנה:

$$\nabla g|_{(x,y,z)} = 0$$

נחשב ונקבל כי:

$$\nabla g|_{(x,y,z)} = (2x + y - 5 \quad x + 2y + z - 7 \quad y + 2z - 8)$$

ונדרוש כי הוא יתאפס, כלומר:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x + 2y + z - 7 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{matrix} 5 - 2x \\ 8 - 2z \end{matrix}$$

ולכן:

$$3 + 2x - 2z = 0 \Rightarrow x = z - 1\frac{1}{2} \Rightarrow y = 8 - 2z$$

נציב במשוואה האמצעית ונקבל כי:

$$z - 1\frac{1}{2} + 2(8 - 2z) + z - 7 = 0 \Rightarrow z = 3\frac{3}{4}$$

מכאן נחשב כי $x = 2\frac{1}{4}$ וכן $y = \frac{1}{2}$. נבדוק איזה סוג של נקודה זו על ידי חישוב ההסיאן:

$$H_g|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u & \partial_y \partial_x u & \partial_z \partial_x u \\ \partial_x \partial_y u & \partial_y^2 u & \partial_z \partial_y u \\ \partial_x \partial_z u & \partial_y \partial_z u & \partial_z^2 u \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים של מטריצה זו:

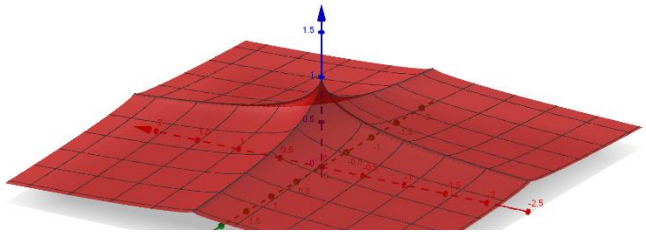
$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = (2-\lambda)\left(2-\sqrt{2}-\lambda\right)\left(2+\sqrt{2}-\lambda\right)$$

גילינו כי כל הערכים העצמיים גדולים מאפס ולכן נוכל לסמן:

$$\boxed{\left(2\frac{1}{4},\frac{1}{2},3\frac{3}{4}\right):Minimum}$$

■



ג. $f(x,y)=\frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$.
נשים לב כי פונקציה זו רציפה בכל המישור $\mathbb{R}^2$. אך ישנה בעיה של גזירות. נשים לב כי:

$$\nabla f|_{(x,y,z)}=\left(-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\left(1+x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2}\quad-\frac{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}{\left(1+x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2}\right)$$

כלומר, מטריצת הנגזרת בכלל לא מוגדרת עבור $(0,0)$ ולא מוגדרת אף עבור $x=0$ או $y=0$ (לא בהכרח ביחד). לכן, כל המקרה האלה חשודים בכך שיש בהם נקודות קריטיות. נבדוק זאת:

- $y=0$. במקרה זה נקבל את גרף הפונקציה $f(x,0)=\frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}}$. פונקציה זו חיובית תמיד, ואף קטנה מ-1 לכל x למעט עבור $x=0$. כלומר, $f(0,0)=1$. כבר בשלב זה ניתן לראות מהפונקציה המקורית כי המכנה תמיד גדול מ-1 למעט עבור $x=0,y=0$. לכן, נסיק כי הנקודה $(0,0)$ היא נקודת מקסימום גלובלי של הפונקציה.
- $x=0$. במקרה זה נקבל מקרה סימטרי למקרה של $y=0$ ולכן לא נסיק מכאן דבר לגבי נקודות נוספות.

לגבי יתר המקרים נקבל כי הפונקציה גזירה עקב רציפות הנגזרות החלקיות לכל נקודה שבה $x,y\neq 0$. אך נשים לב כי הנגזרת אינה מתאפס אף פעם. לכן נסיק כי לא קיימות נקודות קריטיות פנימיות. מכאן שהנקודה היחידה היא:

$$\boxed{(0,0):Maximum}$$

שאלה 4:

א. המרחק בין הנקודה $(0,3,3)$ לקבוצה $\{x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=1\}$ נתון על ידי מציאת המינימום של הפונקציה שמתארת את המרחק בין נקודה כללית לנקודה זו, תחת <u>האילוץ</u> שנקודה זו תהיה בקבוצה.
נוכל לעשות זאת באמצעות שימוש בכופלי לגרנז'. נגדיר את האילוצים:

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0\quad g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0$$

אנחנו יודעים כי נקודות אקסטרמום לבעיה תחת האילוץ היא הדרישה שהגרדיאנט של פונקציית המרחק יהיה כפול סקלארית של הגרדיאנט של האילוצים. לכן נדרוש:

$$\nabla\left(d_{(0,3,3)}(x,y,z)-\lambda_1 g_1(x,y,z)-\lambda_2 g_2(x,y,z)\right)=0$$

נזכיר כי פונקציית המרחק מהנקודה $(0,3,3)$ היא $\sqrt{x^2+(y-3)^2+(z-3)^2}$, אך כפי שכבר עשינו בתרגיל קודם, נוכל לעבוד במקום עם ריבוע המרחק, משום שמינימום באחד מהם הוא בהכרח מינימום בשני. לכן נגדיר:

$$d_{(0,3,3)}(x,y,z)=x^2+(y-3)^2+(z-3)^2$$

ונקבל כי:

$$\nabla(d-\lambda_1 g_1-\lambda_2 g_2)=(2x-2\lambda_1 x-\lambda_2\quad 2y-2\lambda_1 y-\lambda_2\quad 2z-2\lambda_1 z-\lambda_2)=(0\;0\;0)$$

קיבלנו, אם כן, את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}2x-2\lambda_1 x-\lambda_2=0\\2(y-3)-2\lambda_1 y-\lambda_2=0\\2(z-3)-2\lambda_1 z-\lambda_2=0\\x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(2-2\lambda_1)x-\lambda_2=0\\(2-2\lambda_1)y-6-\lambda_2=0\\(2-2\lambda_1)z-6-\lambda_2=0\\x^2+y^2+z^2=1\\x+y+z=1\end{cases}$$

נוכל לחבר את 3 המשוואות הראשונות ולקבל כי:

$$(2-2\lambda_1)\overbrace{(x+y+z)}^{=1}=3\lambda_2+12\Longrightarrow 2-2\lambda_1=3\lambda_2+12\Longrightarrow\lambda_1=-\left(\frac{3}{2}\lambda_2+5\right)$$

נוכל להציב זאת במשוואה הראשונה, ולקבל כי:

$$\left(2+2\left(\frac{3}{2}\lambda_2+5\right)\right)x-\lambda_2=0\Longrightarrow(3\lambda_2+12)x=\lambda_2\Longrightarrow x=\frac{\lambda_2}{3(\lambda_2+4)}$$

$$\left(2+2\left(\frac{3}{2}\lambda_2+5\right)\right)y=\lambda_2+6\Longrightarrow y=\frac{\lambda_2+6}{3(\lambda_2+4)}$$

$$\left(2-2\left(\frac{3}{2}\lambda_2+10\right)\right)z=\lambda_2+6\Longrightarrow z=\frac{\lambda_2+6}{3(\lambda_2+4)}$$

ומהמשוואה הרביעית, בתום הצבה, נוכל לחלץ את ערכו של λ_2:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{9(\lambda_2 + 4)^2}\left(\lambda_2^2 + 2(\lambda_2^2 + 12\lambda_2 + 36)\right) = 1$$

כלומר:

$$3\lambda_2^2 + 24\lambda_2 + 72 = 9(\lambda_2 + 4)^2$$
$$\lambda_2^2 + 8\lambda_2 + 24 = 3\lambda_2^2 + 24\lambda_2 + 48$$
$$2(\lambda_2^2 + 8\lambda_2 + 12) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = -6, -2$$

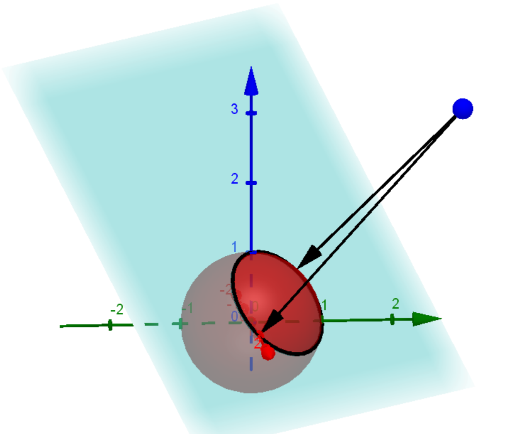
לאחר הצבה תתקבלנה שתי הנקודות:

$$(1,0,0) \qquad \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

אך לא די בכך, זאת משום שהנקודות הללו שמצאנו הינן נקודות חשודות בקיצון. לאחר הצבה, נשים לב כי הנקודה הימנית נמצאת במרחק גדול יותר מאשר הנקודה השמאלית ולכן נסיק כי השמאלית היא נקודת המינימום הדרוש.

<u>הערה:</u> ניתן להסיק זאת בדרך נוספת, משום שחיתוך של ספירה ומישור הינו מעגל. לכל נקודה מחוץ למעגל יש נקודה קרובה ביותר אליה ונקודה רחוקה ביותר ממנה (למעט מקרים טריוויאליים). לכן מובטח לנו, למעשה, כי אם קיבלנו 2 נקודות, אחת מהן תהיה מינימלית והשניה מקסימלית.

לכן נסיק כי הנקודה מהקבוצה הנתונה שמרחקה מ-(0,3,3) מינימלי היא הנקודה $\boxed{(1,0,0)}$

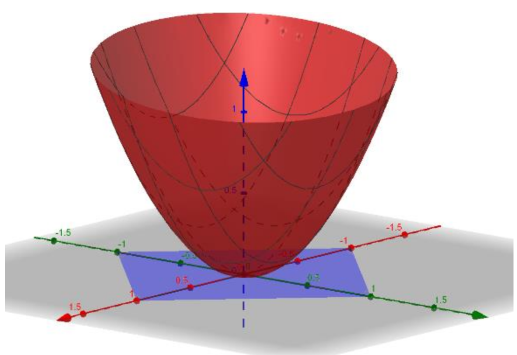


איור 6 – תיאור הבעיה ושתי הנקודות על עקום החיתוך כך שניתן לראות כי אחת מהן רחוקה יותר מהשניה, כפי שהתקבל בפיתוח.

ב. נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, ונרצה למצוא, בתחום:

$$A = \{(x,y) | |x| + |y| \le 1\}$$

את הערכים המקסימליים והמינימליים שפונקציה זו יכולה לקבל. לשם כך, נתחיל בכך שנשים לב שזו פונקציה רציפה, בתחום קומפקטי (מלבן – שניתן לראות גם באיור הצמוד). לכן, אנו יודעים בוודאות כי פונקציה זו מקבלת ערכים אקסטרמליים בתחום.



האפשרויות לנקודות אלה עלולות להיות נקודות בשפה, ועלולות להיות נקודות פנימיות עבורן הנגזרת מתאפסת. נגזור את הפונקציה ונשים לב, כי:

$$\nabla f|_{(x,y)} = (2x - y \quad -x + 2y)$$

הנקודה היחידה בה הנגזרת מתאפס, היא הנקודה (0,0). לאחר גזירה נוספת נגלה כי ההסיאן נתון על ידי:

$$H_f|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_{yx} f \\ \partial_{xy} f & \partial_y^2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה חיובית לחלוטין (עם ערכים עצמיים 2 בלבד), ולכן נסיק כי נקודה זו נקודת מינימום. נציב ונקבל כי:

$$\boxed{f(0,0) = 0: Minimum}$$

יתר החשודות כנקודות קיצון הן נקודות השפה. לשם כך, נפתח בכך שנראה כי הפונקציה אי שלילית תמיד. הפונקציה ממילא חיובית עבור x, y גדולים, ולכן אם נניח כי היא הופכת לשלילית בנקודה מסויימת, נסיק כי קיימת לה נקודת חיתוך עם הציר, (x_0, y_0). אך מכאן שניתן לבטא את x_0 באמצעות y_0 על ידי:

$$x_0 = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4y_0^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(y_0 \pm \sqrt{-3y_0^2}\right)$$

ונשים לב כי השורש הינו אי שלילי אם ורק אם $y_0 = 0$. אך מכאן שגם $x_0 = 0$ וזו בדיוק הנקודה שמצאנו. (באופן שקול עבור y_0 מבוטא באמצעות x_0 נקבל אותו דבר).כלומר, הפונקציה אכן אי שלילית ונקודת המינימום שמצאנו היא מינימום מוחלט בתחום.

את f ניתן לכתוב גם באופן הבא:

$$f(x,y) = (x-y)^2 + xy$$

ונרצה למצוא את הערך המקסימלי בתחום. לשם כך, עלינו לדרוש, ראשית, כי x, y יהיו בעלי אותו סימן. שכן אחרת נקבל כי xy שלילי וסה"כ נקבל ערך קטן יותר מאשר המקביל שלו עבורו הם שווי סימן.

כמו כן, נשים לב כי אם $x > 0, y > 0$, אזי $|x - y| < |x| + |y|$. ולכן $(x-y)^2 < (|x| + |y|)^2$. מכאן שלמעט המקרה שבו $y = 0$, $x = 0$, לכל x, y, הערך הגדול יותר יתקבל במקרה שבו הם שניהם שליליים. נפריד למקרים:

- $y = 0$. במקרה זה תתקבל הפונקציה $f(x, 0) = x^2$. הערך המקסימלי יתקבל עבור $x = 1$ והוא 1. כלומר, הנקודה $(\pm 1, 0)$ חשודה בלהיות מקסימום מקומי.
- $x = 0$ באותו אופן נקבל כאופציה את הנקודות $(0, \pm 1)$.
- $x, y < 0$. נסמן $x + y \ge -1$ אך נרצה להגדיל את ערכם של xy ולכן נדרוש שוויון כלומר $x + y = -1$. מכאן שנוכל להסיק $x = -1 - y$. נציב ונקבל כי:

$$f(-1-y, y) = (-1-y)^2 + (1+y)y + y^2 = (y+1)^2 + y(y+1) + y^2$$

$= y^2 + 2y + 1 + y^2 + y + y^2 = 3y^2 + 3y + 1$

נשים לב כי $|y| < 1$ ובתחום זה $|y|^2 < |y|$ ולכן $y^2 + y < 0$. מכאן שהפונקציה $f(-1-y, y)$ יורדת בכל התחום A. מכאן שהערך המקסימלי יתקבל עבור $y = 0$, כלומר עבור $x = -1$.
אך לחילופין היינו מקבלים את אותה התוצאה עבור $x = -1$ ו-$y = 0$.
לכן, נוכל להסיק כי הנקודות שמצאנו הן בהכרח נקודות המקסימום בקטע.

$$\boxed{\begin{matrix}(0, \pm 1) \\ (\pm 1, 0)\end{matrix} : Maximum}$$

ג. בהנתן מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אשר נתון כי היא סימטרית, כלומר כל הערכים העצמיים שלה הם ממשיים. נסמן, אם כך, על ידי $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ את הערכים העצמיים של המטריצה (ייתכנו ריבויים). נבחר בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ המורכב מהווקטורים העצמיים:

$$B = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

נתבונן עתה בפונקציה הבאה:

$$g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \quad g(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i$$

ועתה נשים לב כי הצמצום $g|_V$ כאשר $V = \{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n | \|\alpha\| = 1\}$ הוא פונקציה רציפה בתחום קומפקטי, ולכן מקבל בו מקסימום ומינימום. נסמן אותם ב-$\overline{\alpha_{max}}, \overline{\alpha_{min}}$ בהתאמה.
נשים לב כי נוכל לבחור:

$$v_{max} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{max}^{(i)} v_i \quad v_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{min}^{(i)} v_i$$

אזי נקבל כי:

$$f(v_{max}) = v_{max}^T A v_{max} = \langle v_{max}, A v_{max} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{max}^{(i)} \lambda_i$$

$$f(v_{min}) = v_{min}^T A v_{min} = \langle v_{min}, A v_{min} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{min}^{(i)} \lambda_i$$

כאמור, כל וקטור בספירת היחיד יכול להיכתב על ידי צירוף ליניארי מהצורה:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

ולכן:

$$f(\bar{u}) = \bar{u}^T A \bar{u} = \langle \bar{u}, A \bar{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i$$

אך היות וזהו וקטור בנורמה השווה לאחד, נסיק כי $\|\bar{\beta}\| = 1$ ולכן בהכרח מתקיים:

$$f(v_{min}) \le f(\bar{u}) \le f(v_{max})$$

וזאת לכל $\bar{u} \in S^1(\mathbb{R}^n)$. לכן נסיק כי אלו אכן המקסימום והמינימום, כנדרש.

■

ד. נתונות $p^1, \cdots, p^m$ נקודות ב-$\mathbb{R}^n$. נרצה להראות כי קיימת נקודה יחידה עבורה $\sum_{i=1}^{m} \|p - p^i\|^2$ מינימלי. לשם כך, נזכור כי נורמה היא פונקציה חיובית. כלומר, האיברים בסכום זה אי שליליים. מכאן שסכום זה מינימלי אם ורק אם הסכום: $\sum_{i=1}^{m} \|p - p^i\|$ מינימלי. אך מאי שוויון המשולש נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{m} \|p - p^i\| \ge \left\| mp - \sum_{i=1}^{m} p^i \right\| \ge 0$$

נשים לב כי עבור הצבת $p = \frac{\sum_{i=1}^{m} p^i}{m}$ נקבל כי הביטוי באגף הימני הוא 0. היות וכל הביטויים הם אי שליליים בהכרח נסיק כי זה קורה אך ורק עבור נקודה זו כלומר היא אכן מינימום גלובלי של הבעיה.

■

שאלה 5:

נתונה הקבוצה:

$$D = \left\{ (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{matrix} \exists x \in \mathbb{R} \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \end{matrix} \right\}$$

נרצה להראות כי $(1, 2, -4, 3, -2)$ היא נקודה פנימית של D לשם כך נראה כי לפונקציה המושרה יש פתרון ממשי אחד לפחות.
לאחר הצבה נקבל:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$$

ונשים לב כי $x = 1$ מהווה פתרון ממשי לפולינום זה. עתה נגדיר:

$$F(a, b, c, d, e, x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

נשים לב כי מתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,-4,3,-2,1)=[4ax^3+3bx^2+2cx+d]|_{(1,2,-4,3,-2,1)}=4\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1-2\cdot 4\cdot 1+3=4+6-8+3$$
$$=5\neq 0$$

כלומר, על פי משפט הפונקציה הסתומה, קיימת סביבה פתוחה של $(1,2,-4,3,-2,1)$ עבורה קיימת $g\in C^1$ המוגדרת בסביבה של $(1,2,-4,3,-2)$ שנסמנה V כך שמתקיים:

$$\forall(a,b,c,d,e)\quad F\big(a,b,c,d,e,g(a,b,c,d,e)\big)=0$$

אך מכאן נובע כי $g(a,b,c,d,e)$ הוא פתרון ממשי לכל (a,b,c,d,e) כמקדמי הפולינום ולכן:

$$(a,b,c,d,e)\in D$$

בסביבה זו. כלומר, מצאנו סביבה של $(1,2,-4,3,-2)$ שכולה מוכלת ב-D ולכן נסיק כי זו אכן נקודה פנימית.

נתבונן בנקודה $(0,0,1,0,0)$ אשר מגדירה את הפולינום:

$$P(x)=x^2$$

לפולינום זה ישנו שורש ממשי יחיד ב-$x=0$ ולכן בפרט נקבל כי $(0,0,1,0,0)\in D$. אך נשים לב כי לכל סביבת $\varepsilon>0$ של הנקודה, נוכל לבחור את הנקודה $\left(0,0,1,0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ השייכת לסביבה זו, אך היא תשרה את הפולינום:

$$P(x)=x^2+\frac{\varepsilon}{2}$$

אשר עבורו לא קיים פתרון ממשי כלל. כלומר זוהי אינה נקודה פנימית ב-D.

■

שאלה 6:

נתונות שתי ספירות ב-$\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$x^2+y^2+z^2=2ax\quad x^2+y^2+z^2=2by$$

כך ש-$a,b>0$. נרצה להראות, באמצעות משפט הפונקציה הסתומה, כי קיימים מישורים משיקים לספירות בכל נקודת חיתוך, ונרצה להראות כי משיקים אלה מאונכים זה לזה.

אני יודעים כי בהנתן תיאור מהצורה $z(x,y)$ של נקודות בחיתוך בין המשטחים (או כל וריאציה אחרת של המשתנים), נסיק כי $\nabla z(x,y)$ הינו הוקטור הנורמלי למשטח המשיק של הנקודה בחיתוך.

לשם כך נראה כי חילוצים z_1,z_2 מכל אחת מהספירות אכן קיימים. נגדיר:

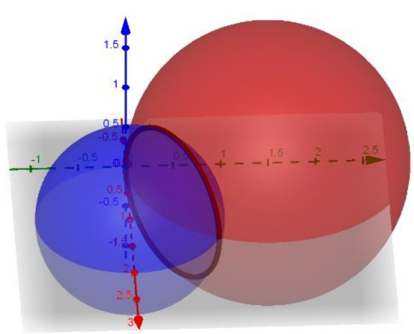
$$F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2ax=0\quad F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2by=0$$

ונשים לב כי:

$$\nabla F_1(x,y,z)=(2x-2a\quad 2y\quad 2z)\quad \nabla F_2(x,y,z)=(2x\quad 2y-2b\quad 2z)$$

אנו מעוניינים בחילוץ של משתנה אחד מבין השלושה ולכן, על מנת שתנאי משפט הפונקציה הסתומה יתקיימו, עלינו להראות כי בכל נקודה יש לפחות רכיב אחד שאינו מתאפס. ואכן נשים לב כי עבור F_1:

- $2y=2z=0\Longrightarrow y=z=0$. הצבה ב-$F_1$ תוביל לכך ש-$x(x-2a)=0$. אך נשים לב כי עבור $x=0$ נקבל הרכיב הראשון של הגרדיאנט אינו מתאפס, וכך גם עבור $x=2a$.
- $x=a,y=0$ במקרה זה לאחר הצבה ב-F_1 נקבל כי $y^2=a^2\neq 0$ ולכן הרכיב של y לא יתאפס.
- $x=a,z=0$ במקרה זה נקבל את אותו קשר $z^2=a^2\neq 0$ כלומר רכיב z אינו מתאפס.



וכן עבור F_2:

- $x=z=0$ נקבל כי $y(y-2b)=0$ כלומר $y=0,2b$, ובשניהם לאחר הצבה נקבל כי רכיב y אינו מתאפס.
- $x=0,y=b$, נציב ונקבל כי רכיב z אינו מתאפס.
- $z=0,y=b$, נציב ונקבל כי רכיב x אינו מתאפס.

כלומר, בכל נקודה במרחב ניתן למצוא חילוץ למשתנה (נניח בה"כ) $z(x,y)$. עבורו נקבל כי $\nabla F_1, \nabla F_2$ הם וקטורי הנורמל המאונכים למישור המשיק לנקודה על כל אחת מהספירות.

נרצה להראות עתה את היותם מאונכים בכל נקודה. בתרגול הוכחנו כי בהנתן F שנגזרותיה החלקיות רציפות, הגרדיאנט שלה מקבל גם משמעות גיאומטרית, והוא מייצג וקטור נורמלי למישור המשיק ל-F בנקודה. היות והפונקציה שלנו עונה על התנאים וכן הראינו כי לכל נקודה מתקיים $\nabla F_1(x,y,z), \nabla F_2(x,y,z) \neq 0$ ולכן בפרט בחיתוך, נקבל כי ניתן להניח כי בכל נקודה בחיתוך, המישורים משתי הספירות המשיקים לנקודה יאופיינו על ידי הגרדיאנט של F בנקודה.

נניח אם כן, נקודה המקיימת:

$$F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) = 0 (\star)$$

נרצה להראות כי וקטורי הנורמל שלה מאונכים (ולכן גם המישורים המשיקים לנקודה מאונכים):

$$(2x-2a \quad 2y \quad 2z)\begin{pmatrix} 2x \\ 2y-2b \\ 2z \end{pmatrix} = 4x^2 - 4ax + 4y^2 - 4yb + 4z^2 = 2\left(\overbrace{x^2+y^2+z^2-2yb}^{=0} + \overbrace{x^2+y^2+z^2-2xa}^{=0}\right) = 0$$

המכפלה הסקלרית של וקטורי הנורמל היא אפס ולכן הם מאונכים, כנדרש.

■

שאלה 7:

א. נתונה משוואת החרוט $x^2+y^2-z^2=0$ ב-$\mathbb{R}^3$. נרצה להראות כי למעט בראשית, המישור המשיק לחרוט חותך אותו בישר שלם על החרוט. נראה זאת מפורשות על ידי מציאת המישור המשיק לחרוט בכל נקודה. נשים לב כי $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0$ היא פונקציה רציפה וגזירה (אף ברציפות), שנגזרתה נתונה על ידי:

$$\nabla F|_{(x,y,z)} = (2x \quad 2y \quad -2z)$$

ואינה מתאפסת לחלוטין באף נקודה למעט בראשית. לכל נקודה שאינה בראשית, מאותם שיקולים שהפעלנו בשאלה הקודמת, ניעזר בכך שהגרדיאנט של F מתאר את כיוונו של וקטור הנורמל המאונך למשיק באותה נקודה.[1] מכאן, שעבור נקודה p שאינה הראשית, המישור המשיק לה בכל נקודה נתון על ידי:

$$2p_x(x-p_x) + 2p_y(y-p_y) - 2p_z(z-p_z) = 0$$

נרצה להראות כי החיתוך של מישור זה עם החרוט משרה ישר שלם.
לשם כך נבטא את תיאור המישור המשיק מפורשות:

$$2p_x x - 2p_x^2 + 2p_y y - 2p_y^2 - 2p_z z + 2p_z^2 = 0$$

אך הנקודה (p_x, p_y, p_z) נמצאת על החרוט ולכן מקיימת:

$$p_x^2 + p_y^2 - p_z^2 = 0$$

ולכן:

$$2p_x x - 2p_x^2 + 2p_y y - 2p_y^2 - 2p_z z + 2p_z^2 =$$

$$(2p_x)x + (2p_y)y - (2p_z)z - 2\overbrace{(p_x^2+p_y^2-p_z^2)}^{=0} =$$

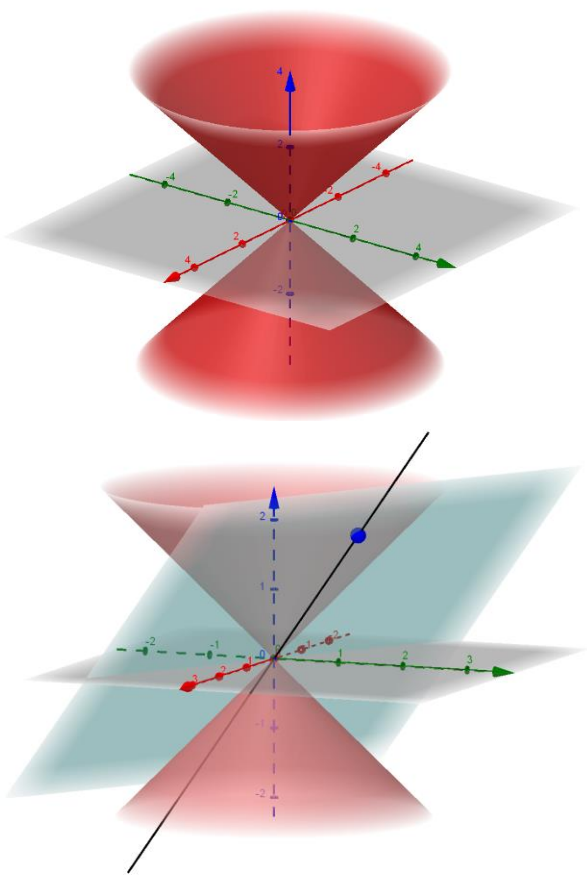
$$2(p_x \quad p_y \quad -p_z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ניעזר עתה במשוואת החרוט ונחלץ את z באופן הבא:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

נציב בחזרה בביטוי האחרון שקיבלנו ונסיק כי:

$$2(p_x \quad p_y \quad -p_z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} = 0$$



איור 7 – החרוט ונקודה לדוגמה, $(1,\sqrt{3},2)$ על החרוט. דרכה עובר המישר המתואר בכחול, ובשחור מסומן עקום החיתוך עם החרוט (שהוא קו ישר).

---

[1] כתזכורת, זאת משום שלכל נקודה על המישור המשיק אנו דורשים שיתקיים $(F_x \quad F_y \quad F_z)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = 0$ וזהו בדיוק התיאור שצוין לעיל.

כלומר:

$$2p_x x + 2p_y y = 2p_z\sqrt{x^2+y^2}$$

ולאחר שנעלה בריבוע נקבל את המשוואה:

$$4p_x^2x^2 + 4p_xp_yxy + 4p_y^2y^2 = 4p_z^2x^2 + 4p_z^2y^2 \Longrightarrow 4\overbrace{\left(p_y^2 - p_z^2\right)}^{=-p_x^2} y^2 + \left(4p_xp_y\right)xy + \overbrace{\left(4p_x^2 - 4p_z^2\right)}^{=-p_y^2} x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow -(2p_x)^2y^2 + (2p_x)x(2p_y)y - \left(2p_y\right)^2x^2 = 0$$

ניתן לזהות את נוסחת הכפל המקוצר ולקבל כי:

$$\Longrightarrow -\left[2p_xy - 2p_yx\right] = 0 \Longrightarrow \boxed{y = \frac{p_y}{p_x}x}$$

נוכל להציב זאת בביטוי שמצאנו ל-z ולקבל כי:

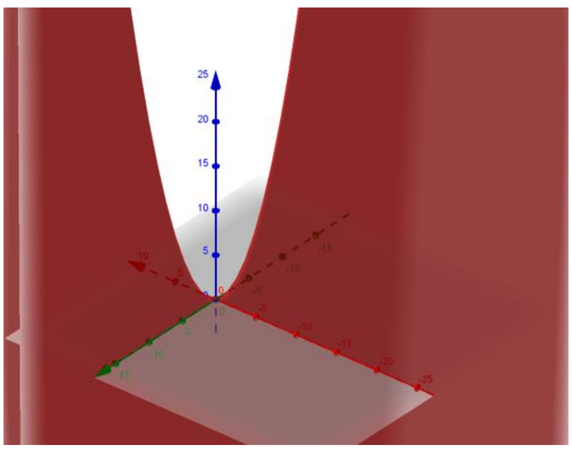
$$z = \sqrt{x^2\left(1 + \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2\right.} = x\sqrt{\frac{p_x^2 + p_y^2}{p_x^2}} = x\sqrt{\frac{p_z^2}{p_x^2}} = \frac{p_z}{p_x}x$$

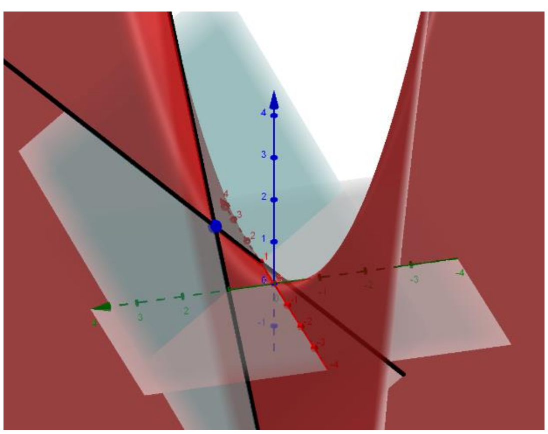
כלומר, מצאנו שכל נקודות החיתוך בין המישור המשיק לחרוט הן נקודות מהצורה:

$$\begin{pmatrix} x & \frac{p_y}{p_x}x & \frac{p_z}{p_x}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & \frac{p_y}{p_x} & \frac{p_z}{p_x} \end{pmatrix}$$

וזהו בדיוק ישר שנתון על ידי הפרמטריזציה:

$$\boxed{\gamma(t) = (0 \quad 0 \quad 0) + t\begin{pmatrix} 1 & \frac{p_y}{p_x} & \frac{p_z}{p_x} \end{pmatrix}}$$





ב. נתון המשטח $z = xy$ ב-$\mathbb{R}^3$. נרצה להראות כי בכל נקודה, המישור חותך את המשטח בשני ישרים. לשם כך, נרצה למצוא, ראשית, את המישור המשיק בכל נקודה. נחשב, בדומה לסעיף א':

$$g(x,y,z) = z - xy = 0$$

ונקבל כי:

$$\nabla g|_{(x,y,z)} = (-y \quad -x \quad 1)$$

כמובן שקיבלנו כי רכיב z אינו מתאפס באף נקודה, כלומר נוכל להניח כי בכל נקודה, וקטור הגרדיאנט הוא בדיוק וקטור הנורמל למישור המשיק באותה נקודה. מכאן שהמשיק בכל נקודה p נתון על ידי:

$$-p_y(x - p_x) - p_x\left(y - p_y\right) + (z - p_z) = 0$$

נמצא את חיתוך מישור זה עם המשטח על ידי פישוט הביטוי ותוך הצבת:

$$z = xy$$

נקבל כי:

$$-p_yx + p_xp_y - p_xy + p_yp_x + xy - p_z = 0$$

היות ואת p_z ניתן להחליף ב-p_yp_x נקבל כי:

$$-p_yx - p_xy + xy + p_xp_y = 0$$

$$p_y(x - p_x) = y(x - p_x)$$

מכאן נסיק כי ישנן שתי אפשרויות, והן:

$$y = p_y \quad x = p_x$$

עבור המקרה $y = p_y$ נוכל להציב ולקבל כי:

$$-p_y(x - p_x) - p_x\overbrace{\left(p_y - p_y\right)}^{=0} + (z - p_z) = 0$$

$$-p_yx + p_xp_y + z - \overbrace{p_z}^{=p_xp_y} = -p_yx + z = 0$$

$$z = p_yx$$

כלומר נקבל את הישר:

$$\boxed{\gamma(t) = (p_x \quad p_y \quad p_z) + t(1 \quad 0 \quad p_y)}$$

ועבור המקרה השני נציב ונקבל:

$$-p_y\overbrace{(p_x - p_x)}^{=0} - p_x\left(y - p_y\right) + z - p_xp_y = 0$$

$$-p_xy + z = 0 \Longrightarrow z = p_xy$$

כלומר נקבל את הישר:

$$\boxed{\gamma(t) = (p_x \quad p_y \quad p_z) + t(0 \quad 1 \quad p_x)}$$

■

שאלה 8:

נתונה $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ גזירה וכן נתון כי הדיפרנציאל שלה, $f'(x)$, הינו מטריצה מוגדרת חיובית לכל x. כלומר, לכל $v \in \mathbb{R}^n$ שאינו וקטור האפס מתקיים, בפרט:

$$\langle v, f'(x)v \rangle > 0$$

נניח בשלילה, אם כן, כי f אינה חד-חד ערכית. נתבונן ב-x, y עבורם מתקיים $x \neq y$ וגם $f(x) = f(y)$. נגדיר את הפונקציה:

$$g(t) = f\big(x + t(y - x)\big)$$

עבור מתקיים, כמובן:

$$g(0) = f(x) = f(y) = g(1)$$

כמו כן, פונקציה זו גזירה כהרכבה של פונקציות גזירות (הפונקציה f מורכבת על פונקציה ליניארית). נגזרתה נתונה על ידי כלל השרשרת, כלומר:

$$g'(t) = f'\big(x + t(y - x)\big)(y - x)$$

ונשים לב, עתה, כי $x \neq y$ ולכן $y - x \neq 0$. הפונקציה $g(t)$ הינה פונקציה המקיימת את תנאי משפט לגרנז', כלומר, קיים $0 < t < 1$ עבורו מתקיים:

$$g'(t) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = 0$$

אך:

$$g'(t) = \overbrace{f'\big(x + t(y - x)\big)}^{>0}\overbrace{(y - x)}^{\neq 0} \overset{\text{סתירה}}{\neq} 0$$

כלומר, מהסתירה נובע כי בהכרח הפונקציה חד-חד ערכית בכל התחום.

■