אינפי 2 - דף עזר בנושא אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

אינטגרל קווי מסוג I .

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית רציפה.

יהא γ עקום חלק הנתון ע"י $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ל- $a \le t \le b$.

נגדיר: $\int_\gamma f ds \equiv \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$.

הערות:

1. אם $f \equiv 1$, נקבל את אורך העקום γ.
2. אם העקום γ נתון בהצגה מפורשת $y = \varphi(x)$, אז $\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$.
3. אם העקום γ נתון בהצגה פולרית $(\theta,\rho(\theta))$, כלומר: $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$ ל- $\alpha \le \theta \le \beta$,

   אזי $\int_\gamma f ds \equiv \int_\alpha^\beta f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta$.

אינטגרל קווי מסוג II.

יהא $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף הנתון ע"י: $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$.

יהא γ עקום חלק הנתון ע"י $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ל- $a \le t \le b$.

נגדיר: $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$.

הערות:

1. אינטגרל קווי מסוג II מסומן גם ע"י: $\int_\gamma Pdx + Qdy$.
2. המשמעות הפיסיקלית שלו היא עבודת שדה לאורך מסלול.
3. האינטגרל תלוי בכיוון המוגדר ע"י γ.
4. אם $\gamma = \{(x,c) \mid a \le x \le b\}$ (כלומר, מקביל לציר x), אז $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \int_a^b P(x,c)dx$

   (או, $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \int_a^b Q(c,y)dy$ אם γ מקביל ציר y).

משפט גרין:

יהא D תחום קשיר ב - R^2. תהא $\Gamma=\partial D$ (שפת D) עם מגמה חיובית (כלומר, בתנועה לאורך Γ, תמיד D משמאל).

יהא $\vec{F}$ שדה וקטורי ב - C^1 (כלומר, בעל נגזרות חלקיות רציפות) על $\overline{D}$.

אזי: $\oint\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

מסקנה: אם $\Gamma=\partial D$, אז השטח של D נתון ע"י $\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}xdy-ydx$.

הגדרה: יהא $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\hat{i}+Q(x,y)\hat{j}$ שדה וקטורי.

אם קיימת פונקציה סקלרית $\phi(x,y)$ המקיימת $\nabla\phi=\vec{F}(x,y)=(P,Q)$ (כלומר, $\frac{\partial\phi}{\partial x}=P,\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q$), אז:

$\phi(x,y)$ נקראת "הפוטנציאל הסקלרי של $\vec{F}$", והשדה $\vec{F}$ נקרא "שדה משמר."

במקרה זה נאמר ש - $Pdx+Qdy$ הוא דיפרנציאל מדוייק.

משפטים (אי תלות של אינטגרל קווי מסוג II במסלול):

1. יהא $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף על תחום D. אז התנאים הבאים שקולים:

א. לכל מסלול סגור Γ ב - D מתקיים: $\oint\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

ב. האינטגרל $\int\limits_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ על מסלול בין A ל - B אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו- B.

ג. $Pdx+Qdy$ דיפרנציאל מדוייק, ו - $\int\limits_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A)$.

2. אם $\vec{F}$ הוא C^1 והתחום D הוא פשוט קשר, אז התנאים הנ"ל שקולים גם ל -

ד. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.