

תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 3 פתרונות

תרגיל 1. תרגיל 2.7 מהחוברת.

פתרון. נגדיר

$$X = \{\text{ככר שרופה}\}.$$

אזי לפי נוסחת ההסתברות הכוללת

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C) = \\ &= 10^{-4}(5 \cdot 25 + 4 \cdot 35 + 2 \cdot 40) = 0.0345 \end{aligned}$$

לכן

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)} = \frac{125}{345} = \frac{25}{69}.$$

תרגיל 2. תרגיל 2.10 מהחוברת.

פתרון.

(א) הטענה נכונה: $P(E|F) \leq P(E)$ גורר

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)} \leq P(F).$$

(ב) הטענה אינה נכונה: כדוגמה נגדית ניקח

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, 3\}, \quad P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}, \\ E &= \{\omega = 1\}, \quad F = \{\omega = 2\}, \quad G = \{\omega \in \{2, 3\}\}. \\ P(E) &= \frac{1}{3}, \quad P(F) = \frac{1}{3}, \quad P(G) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

אזי

אבל $P(E|F) = 0 < P(E), \quad P(G|E) = 0 < P(G)$
 $P(G|F) = 1 > P(G).$

דוגמה אחרת בעלת תבנית דומה:

$$\Omega = \{1, 2\}, \quad P(1) = P(2) = \frac{1}{2},$$
$$E = \{\omega = 1\}, \quad F = G = \{\omega = 2\}.$$

תרגיל 3. תרגיל 2.20 מהחוברת.

פתרון. נגדיר מאורעות

$$X = \{\text{גילוי האוניה}\}, \quad X_D = \{D \text{ סריקות באיזור } D\}$$

אזי

(א)

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C) + \\ &+ P(X|D)P(D) + P(X|E)P(E) = \\ &= 0.8 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.75 \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned} P(E|X_D^c) &= \frac{P(E \cap X_D^c)}{P(X_D^c)} = \frac{P(E)}{P(D^c) + P(X_D^c|D)P(D)} = \\ &= \frac{P(E)}{1 - P(D) + P(X_D^c|D)P(D)} = \frac{0.3}{0.7 + 0.2 \cdot 0.3} = \frac{15}{38}. \end{aligned}$$

(ג) עבור איזור J כל שהו

$$P(J|X^c) = \frac{P(X^c|J)P(J)}{P(X^c)}.$$

לכן אנחנו מחפשים איזור בו מכפלה (המספר המופיע בשורה הראשונה של הבטבלה) \times (המספר המשלים ל- 1 את המספר המופיע בשורה השנייה של הבטבלה) היא המקסימלית. לפיכך התשובה היא: C .

תרגיל 4. תרגיל 12.19 מהחוברת.

פתרון. נגדיר מאורעות

$$V_i\{\text{בעד } A_i\}, \quad W_k = \bigcap_{i=1}^k V_i$$

אזי

$$P(W_1) = P(V_1) = 1 - \alpha$$

$$P(W_k) = P\left(V_k \cap W_{k-1}\right) = P(V_k | W_{k-1})P(W_{k-1}) = \frac{2}{k}P(W_{k-1}).$$

מכאן, בעזרת אינדוקציה

$$P(W_k) = \frac{2}{k}P(W_{k-1}) = \frac{2}{k} \cdot \frac{2}{k-1}P(W_{k-2}) = \dots = \frac{2^k}{k!}(1 - \alpha).$$

בהתאם לכך

$$P(W_n^c) = 1 - \frac{2^n}{n!}(1 - \alpha).$$

תרגיל 5. יהי (Ω, P) מרחב הסתברות סופי וסמטטרי. תנו דוגמה לשלושה מאורעות A, B, C בלתי תלויים.

פתרון. דוגמא לא טריוויאלית ניתן לתת רק אם קיימים מספרים ראשוניים

כך ש- p_1, p_2, p_3 $|\Omega|$. אז:

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$A = \{k \in \Omega | k \vdots p_1\}, \quad B = \{k \in \Omega | k \vdots p_2\}, \quad C = \{k \in \Omega | k \vdots p_3\}.$$

תרגיל 6. בבניין n קומות. בקומת קרקע נכנסו m אנשים, $m \geq n$. מה ההסתברות שבכל קומה יורד לפחות נוסע אחד.

פתרון. נסמן:

$$k_j = j \text{ מספר האנשים שירדו בקומה } j, \quad A = \{k_j \geq 1 \quad \forall j\}.$$

אזי $\sum_{j=1}^n k_j = m$ ולכן (ראו פתרון של תרגיל מס' 8 מתוך תירגול מס' 3):

$$P(A) = \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{n-1}}$$