קומבינטוריקה – תרגול #7 – 09/05/2016

עצים

הגדרה: עץ הוא גרף קשור חסר מעגלים.

תכונות:

(1) בעץ יש לפחות שני עלים
(2) בעץ $|E| = |V| - 1$

טענה: יהי G גרף, $|V| \geq 3$, אז הטענות הבאות שקולות:

(1) G עץ
(2) ב-G יש מסלול יחיד בין כל שני קדקודים.
(3) G גרף קשיר מינימלי (אם מורידים צלע, אז הגרף לא יהיה קשיר)

הוכחה:

(1) ⇐ (2): כיוון ש-G עץ הוא קשיר, אז קיים מסלול בין כל שני קדקודים. אם קיימים x, y כך שיש שני מסלולים ביניהם אז האיחוד שלהם יוצר מסלול סגור. כל מסלול סגור ניתן לפירוק למעלים זרים, ולכן בפרט יש מעגל בסתירה לכך ש-G עץ.

(2) ⇐ (3): ניקח $e = \{x, y\} \in E$. אם נוריד את הצלע e ועדין נשאר הגרף קשיר, אז בגרף החדש יש מסלול מ-x ל-y שלא עובר דרך e. כלומר, בגרף המקורי יש שני מסלולים בין x ל-y, בסתירה להנחה.

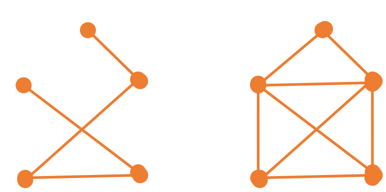
(3) ⇐ (1): על פי הנתון G קשיר. צריך להוכיח שב-G אין מעגלים. אם יש מעגל נוריד ממנו צלע $e = \{x, y\}$, והגרף לא קשיר. כלומר, קיימים a, b כך שאין מסלול ביניהם. זה אומר שבגרף המקורי המסלול עבר דרך הצלע $\{x, y\}$. נחליף את המסלול במסלול אחר שבו במקום הצלע עוברים דרך שאר צלעות המעגל (נוריד כפילויות של צלעות). מקבלים שקיים מסלול מ-a ל-b בסתירה.

תרגיל: יהי T עץ בעל k עלים, וערכיויות שאר הקדקודים הם 4,4,5,7. מהו k?

פתרון: $|V| = n$, $|E| = n - 1$. לפי הנתון $n = k + 4$, $|E| = k + 3$. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, ומחישוב $k = 14$.

הגדרה: יהי G גרף קשיר. **עץ פורש** של G הינו עץ שקדקודיו הן קדקודי G, וצלעותיו מוכלות בצלעות G.

דוגמא:



טענה: בכל גרף קשיר יש עץ פורש.

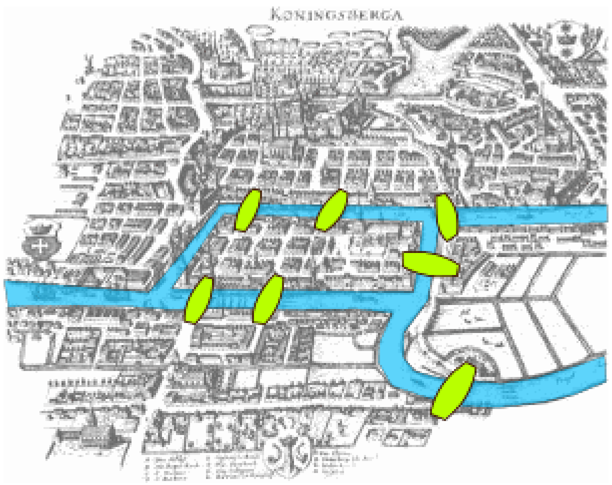
הוכחה: ההוכחה היא באינדוקציה על מס' המעגלים C.

בסיס: $C=0$. אם ב-G אין מעגלים אז G עץ.

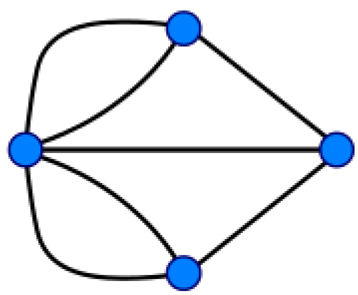
עבור $C>0$: נסתכל על אחד מהמעגלים ונוריד ממנו צלע. מס' המעגלים בגרף החדש קטן מ-C. הגרף נשאר קשיר. לפי הנחת האינדוקציה קיים עץ פורש לגרף החדש. העץ שהתקבל הוא גם עץ פורש של הגרף המקורי.

מסקנה: לכל גרף קשיר יש לפחות $|V|-1$ צלעות.

מסלולים אוילריאנים



על פני הנהר ב-Königsberg יש שבעה גשרים. אנשים רצו לעבור דרך כל הגשרים בלי לעבור פעמיים באותו הגשר, ולחזור לאותה הנק' ממנה יצאו. הם הסתבכו, והביאו את אוילר שהראה להם שאי אפשר בגלל שניתן למדל את הבעיה כגרף למטה, וערכיויות הקדקודים לא מאפשרות.

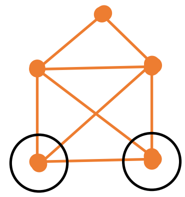


הגדרה: **מסלול אוילריאני** בגרף G הוא מסלול שעובר דרך כל הצלעות בגרף בדיוק פעם אחת. גרף נקרא **גרף אוילר** אם יש בו מסלול אוילריאני סגור.

משפט אוילר 1: גרף קשיר הוא גרף אוילר אמ"מ $\deg(v)$ זוגי לכל קדקוד v בגרף.

משפט אוילר 2: גרף קשיר מכיל מסלול אוילריאני אמ"מ מס' הקדקודים עם ערכיות אי זוגית הוא לכל היותר 2.

דוגמא:



הוכחה למש' 2: ראיתם בהרצאה שמס' הקדקודים עם ערכיות אי זוגית הוא זוגי. כלומר, במקרה שלנו מדורג ב-0 או 2.

בכיוון הראשון נניח שבגרף יש מסלול אוילריאני. אם המסלול סגור, אז לפי מש' 1, כל הערכיויות זוגיות ולכן מס' הקדקודים עם הערכיויות האי-זוגיות הוא 0. אם המסלול לא סגור, אז כל פעם שעוברים דרך קדקוד באמצע המסלול, נוסף 2 לערכיות שלו, ולכל קדקוד בקצוות המסלול יתווסף 1 לערכיות. לכן נקבל שכל הערכיויות הן זוגיות למעט עבור הקדקודים בקצוות המסלול.

בכיוון השני, אם מס' הקדקודים הוא עם ערכיות אי זוגית הוא 0, אז הגרף הוא גרף אוילר לפי מש' 1. אחרת, מס' הקדקודים עם ערכיות אי-זוגית הוא 2 – אותם נסמן ב-u, v. אם u, v לא מחוברים, נוסיף צלע ביניהם. עתה כל הערכיויות הן זוגיות, ונתחיל מעגל אוילר $u, \{u, v\}, v, e_2, \dots, e_k, u$. נוריד עתה את הצלע שהוספנו ונקבל מסלול שמתחיל ב-v ונגמר ב-u.
אם u, v מחוברים, אז נוריד את הצלע המחברת ביניהם. כל הערכיויות זוגיות, וקיים מעגל אוילר שמתחיל ב-u. נחזיר את הצלע חזרה ונוסיף אותה בתחילת המסלול, ונקבל מסלול מ-v ל-u.

הגדרה: גרף **α-רגולרי** הוא גרף בו לכל קדקוד v מתקיים $\deg(v) = \alpha$.

תרגיל: יהי $G = (V, E)$ גרף α-רגולרי. בנוסף נתון ש-$|V| = 2\alpha + 1$. הוכיחו ש-G הוא גרף אוילר.

פתרון: נראה תחילה ש-G קשיר. ניקח u, v ונראה שיש מסלול ביניהם. אם הם מחוברים בצלע, אז סיימנו.

אחרת, נסמן $N(u)$ בתור השכנים של u, וכנ"ל עבור $N(v)$. לכל אחד מהקדקודים יש α שכנים. אם $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ נקבל ש-$2\alpha + 1 = |V| \geq |N(U) \cup N(V) \cup \{u, v\}| = 2\alpha + 2$ בסתירה לנתון.
לכן ל-u, v יש שכן משותף, ולכן יש מסלול ביניהם. צריך להראות ש-α זוגי. מתקיים:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \underbrace{(2\alpha + 1)}_{\text{odd}} \alpha$$

לכן, α זוגי.