מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים --- תרגול 11

טענה 0.1 יהי X מרחב קומפקטי, Y האוסדורף. אם $f : X \to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי f הומאומורפיזם.

הוכחה: מספיק להראות ש-f סגורה. תהי $A \subseteq X$ סגורה. X קומפקטי ולכן A קומפקטית. f רציפה ולכן $f(A)$ קומפקטית. Y האוסדורף ולכן $f(A)$ סגורה. ■

משפט 0.2 יהי (X, d) מרחב מטרי קומפטי, אזי X הומאומורפי לתת קבוצה סגורה של קוביית הילברט $= [0,1]^\omega$.

הוכחה: X מטרי קומפקטי ולכן בפרט חסום. נניח בה"כ $\mathrm{diam(X)} \leq 1$. X בנוסף, X ספרבילי, תהי $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ קבוצה צפופה ב-X. נגדיר $f : X \to [0,1]^\omega$ על ידי $f(x) = (d(x, x_n))_{n=1}^\infty$.

f רציפה כי היא רציפה בכל רכיב (לכל n, $x \mapsto d(x, x_n)$ היא פונקציה רציפה)

לכן $A = f(X)$ היא קומפקטית, ולכן סגורה.

לפי הטענה הקודמת נשאר להראות ש-f חח"ע. יהיו $x \neq y \in X$, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ צפופה לכן קיים n עבורו $d(x, x_n) < \frac{d(x,y)}{2}$. ולכן $d(x, x_n) < \frac{d(x,y)}{2} < d(y, x_n)$. ובפרט $f(x) \neq f(y)$ (כי הם נבדלים ברכיב ה-n). ■

1 הלמה של אוריסון

הגדרה 1.1 מרחב X הוא נורמלי אם לכל שתי קבוצות סגורות זרות קיימות סביבות פתוחות זרות.

באופן שקול, אם לכל $A \subseteq U \subseteq X$, A סגורה, U פתוחה, קיימת V פתוחה כך ש-$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

משפט 1.2 (הלמה של אוריסון) יהי X מרחב נורמלי, $A, B \subset X$ תתי קבוצות סגורות זרות. אז קיימת פונקציה רציפה $f : X \to [0,1]$ כך ש-$f(A) = 0,\ f(B) = 1$.

הגדרה 1.3 יהי X מרחב טופולוגי, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ כיסוי פתוח סופי של X. חלוקת יחידה (partition of unity) הנשלטת על ידי הכיסוי $\{U_1, \ldots, U_n\}$ היא משפחה של פונקציות $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $\rho_i : X \to [0,1]$ רציפה לכל i.
2. $\mathrm{supp}(\rho_i) \subset U_i$ לכל i.
3. $\sum_{i=1}^n \rho_i \equiv 1$

נרצה להוכיח:

טענה 1.4 X מרחב נורמלי, $\{U_1,\dots,U_n\}$ כיסוי, אזי קיימת חלוקת יחידה הנשלטת על ידי הכיסוי.

למה 1.5 יהי X מרחב נורמלי, ויהי $\{U_1,\dots,U_n\}$ כיסוי סופי של X. אז קיים כיסוי $\{V_1,\dots,V_n\}$ של X כך ש- $\overline{V_i}\subset U_i$.

הוכחה: נתבונן ב- $A_1=(U_2\cup\ldots\cup U_n)^c$ זוהי תת קבוצה סגורה (ב-X) של U_1. לכן קיימת V_1 כך ש- $A_1\subset V_1\subset\overline{V_1}\subset U_1$ ו-$\{V_1,U_2,\dots,U_n\}$ הוא כיסוי פתוח. באותו אופן נבצע לכל $1\le i\le n$. ונקבל כיסוי פתוח $\{V_1,\dots,V_n\}$ כנדרש. ■

הוכחה: (הטענה) נשתמש פעמיים את הלמה על הכיסוי $\{U_1,\dots,U_n\}$ ונקבל כיסוי-ים $\{W_1,\dots,W_n\}$ ו-$\{V_1,\dots,V_n\}$ כך ש-

$$V_i\subset\overline{V_i}\subset W_i\subset\overline{W_i}\subset U_i$$

לפי הלמה של אוריסון לכל $1\le i\le n$ קיימת פונקציה רציפה $f_i:X\to[0,1]$ כך ש- $f_i\left(\overline{V_i}\right)=1$ ו- $f_i\left(W_i^c\right)=0$.
נשים לב שמתקיים $\operatorname{supp}(f_i)\subset\overline{W_i}\subset U_i$. וכן $\sum_{i=1}^n f_i>0$ כי $\{V_1,\dots,V_n\}$ הם כיסוי. נגדיר $f=\sum_{i=1}^n f_i$.
נגדיר

$$\rho_i=\frac{f_i}{f}$$

אזי ρ_i רציפות ומתקיימים התנאים של חלוקת יחידה הנשלטת על ידי $\{U_1,\dots,U_n\}$ ■

למעשה ניתן לנסח את הטענה הבאה:

טענה 1.6 מרחב טופולוגי X הוא נורמלי אם ורק אם לכל כיסוי סופי $\{U_1,\dots,U_n\}$ יש חלוקת יחידה נשלטת על ידי הכיסוי.

הוכחה: נשאר להראות את הכיוון $\Longleftarrow$: יהיו $A,B\subset X$ קבוצות סגורות זרות. אזי $\{A^c,B^c\}$ הוא כיסוי פתוח סופי של X. נניח ש-ρ_1,ρ_2 היא חלוקת יחידה. ונסתכל על הקבוצות הפתוחות $U=\rho_1^{-1}([0,\frac{1}{3})),\ V=\rho_2^{-1}([0,\frac{1}{3}))$. נשים לב ש-$U\cap V=\emptyset$ (כי $\rho_1+\rho_2=1$) ומתקיים $A\subset\rho_1^{-1}(0)\subset U$ (כי $supp\left(\rho_1\right)\subset A^c$ לכן $A\subset\rho_1^{-1}(0)$) ובאותו אופן $B\subset V$. ■