

תרגיל מספר 4, אינפי 2 2015

1. הוכיחו בצורה מדויקת ש- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ מתכנס.

הדרכה: הגדירו $a_n = \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x}$
 הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ הוא טור לייבניץ
 הגדירו $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}$
 והראו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} a_n = 0$.

בנוסף 10 נקודות: הראו כי האינטגרל אינו מתכנס בהחלט. רמז: בדקו באילו קטעים מתקיים $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$.

2. בדקו את התכנסות האיטגרלים הבאים:

(א)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

(ב)

$$\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x}) \sqrt{\sin x}}{\tan x^{\frac{3}{2}}} dx$$

3. בדקו את התכנסות הטורים הבאים:

(א)

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

(ב)

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt$$

4. העריכו את סכום הטור $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ בדיוק של 0.3. (כמובן דרוש נימוק מדוע הקירוב שלכם טוב מספיק).

5. הוכיחו או הפריכו:

- אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו- $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנסים אז גם $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ מתכנס.
- אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו- $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנסים ואחד מהם מתכנס בהחלט אז גם $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ מתכנס.
- אם $\int_1^\infty f(x)$ מתכנס ו- $f(x)$ רציפה על כל הציר הממשי, אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- אם $\int_1^\infty f(x)$ מתכנס ו- $f(x)$ רציפה על כל הציר הממשי, אז $f(x)$ חסומה.
- אם $\int_1^\infty f(x)$ מתכנס אז $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}$ מתכנס.