104195- חשבון אינפיניטסימלי

תאריך: 30/10/2014

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: תרגיל בית 1

שם המתרגל: יוחאי מעין

תרגיל בית 1

תאריך הגשה: יום חמישי, 30.10.2014.

$\boxed{1}$ מצאו עבור אילו ערכים של x מתקיימים אי-השיוויונים הבאים:

א. $4 < \left|\frac{x+2}{x-7}\right|$.

ב. $3 + |x-9| < \frac{2|x-1|}{x}$.

ג. הראו כי אם $|x-7| < \frac{1}{2}$ אזי $\left|\frac{x^2+4x-21}{x-6}\right| < \frac{261}{2}$.

$\boxed{2}$ הוכיחו (באינדוקציה או בכל דרך אחרת):

א. אם $a_1, d \in \mathbb{R}$ ואם מגדירים $a_{n+1} = a_n + d$, אזי מתקיים

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

ב. אם $a_1, d \in \mathbb{R}$ ואם מגדירים $a_{n+1} = a_n + d$, אזי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

להזכירכם, $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$. זהו סכום סדרה חשבונית.

ג. אם $a_1, q \in \mathbb{R}$ ובנוסף $q \neq 1$, ואם מגדירים $a_{n+1} = a_n q$, אזי מתקיים

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

ד. אם $a_1, q \in \mathbb{R}$ ובנוסף $q \neq 1$, ואם מגדירים $a_{n+1} = a_n q$, אזי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q-1}$$

להזכירכם, $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$. זהו סכום סדרה הנדסית.

$\boxed{3}$ הוכיחו (באינדוקציה או בכל דרך אחרת) שמתקיים

$$1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

$\boxed{4}$ את סדרת פיבונאצ'י מגדירים על ידי קביעת $a_1 = a_2 = 1$ ו-

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

הוכיחו (באינדוקציה או בכל דרך אחרת) שלמעשה מתקיים

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{5}$ השלימו את הוכחת אי-שוויון הממוצעים מהתרגול; הוכיחו את אי-השוויון בין הממוצע ההרמוני להנדסי: אם $a_1, \ldots, a_n$ חיוביים אז

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

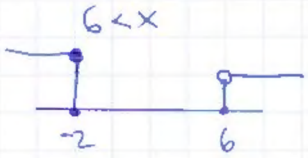
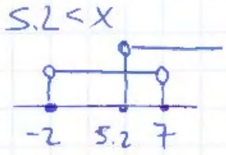
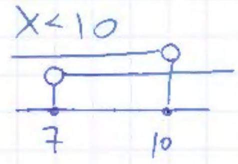
1. מצאו עבור אילו ערכים של x מתקיימים אי-השוויונים הבאים:

א. $4<\left|\frac{x+2}{x-7}\right|$

ת.הגדרה של אי השוויון $x\neq 7$.

$$4<\left|\frac{x+2}{x-7}\right| \Longrightarrow 4<\frac{|x+2|}{|x-7|} \xrightarrow[\text{חיובי.}]{\text{ערך מוחלט הוא תמיד}} 4|x-7|<|x+2|$$

נחלק לתחומים: $x>7$, $-2<x<7$, $x\le(-2)$ ($x\neq 7$ בגלל ת.ה)

$x<(-2)$ וגם $-4\cdot(x-7)<-(x+2)$	$(-2)<x<7$ וגם $-4(x-7)<x+2$	$x>7$ וגם $4(x-7)<x+2$
$30<5x$	$26<5x$	$3x<30$
$6<x$	$5.2<x$	$x<10$
		
אין פתרון בתחום זה.	$5.2<x<7$	$7<x<10$

תשובה סופית: $7<x<10$ או $5.2<x<7$ ($5.2<x<10$ $x\neq 7$).

1 ס. $3+|x-9| < \frac{2|x-1|}{x}$ ת.ה. $x\neq 0$

נחלק לתחומים - $9<x$, $1<x\le 9$, $0<x\le 1$, $x\le 0$

עבור $x\le 0$ ניתן לראות בבירור כי אגף שמאל חיובי (מספר חיובי פלוס ערך מוחלט נותן תוצאה חיובית), ואגף ימין גדול ממספר חיובי ולכן גם הוא חיובי. המונה באגף ימין חיובי (ערך מוחלט כפול מספר חיובי) והמכנה כולו הוא שלילי (בגלל שהמכנה שלילי ($x<0$)) בתחום זה. מכאן יש לנו סתירה ולכן תחום ההגדרה של אי השוויון הוא $0<x$.

$0<x$ ולכן ניתן להכפיל בו את שני האגפים של אי השוויון:

$$x(3+|x-9|)<2|x-1|$$

נמשיך בחלוקה לתחומים:

I

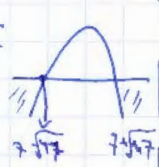
$$\begin{cases}0<x\le 1\\ x[3-(x-9)]<-2(x-1)\end{cases}$$ וגם

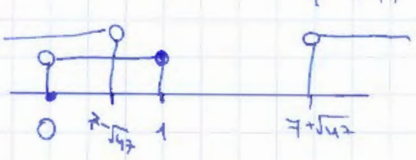
$$x(-x+12)<-2x+2$$

$$-x^2+14x-2<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4(-1)(-2)}}{-2}$$

$$=\frac{-14\pm\sqrt{188}}{-2}=7-\sqrt{47},\quad =7+\sqrt{47}$$





$$0<x<7-\sqrt{47}$$

II

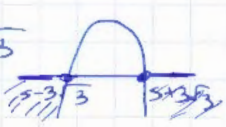
$$\begin{cases}1<x\le 9\\ x(3-(x-9))<2(x-1)\end{cases}$$ וגם

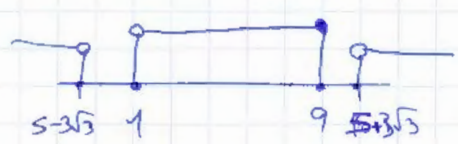
$$x(-x+12)<2x-2$$

$$-x^2+10x+2<0$$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{-2}$$

$$=\frac{-10\pm\sqrt{108}}{-2}=5-3\sqrt{3},\quad =5+3\sqrt{3}$$





אין תוצאה בתחום זה.

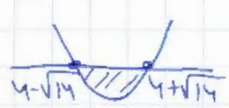
III

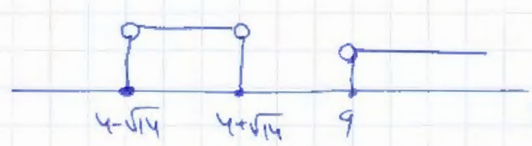
$$\begin{cases}x>9\\ x(3+(x-9))<2(x-1)\end{cases}$$ וגם

$$x(x-6)<2x-2$$

$$x^2-8x+2<0$$

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{56}}{2}=4+\sqrt{14},\quad =4-\sqrt{14}$$





אין פתרון גם בתחום זה.

תשובה סופית: $0<x<7-\sqrt{47}$

1 ג. הראו כי אם $|x-7|<\frac{1}{2}$ אזי $\left|\frac{x^2+4x-21}{x-6}\right|<\frac{261}{2}$

ת.ה - $x\neq6$

מאי השוויון הראשון עולה כי: $|x-7|<\frac{1}{2} \longrightarrow -\frac{1}{2}<x-7<\frac{1}{2} \longrightarrow 6\frac{1}{2}<x<7\frac{1}{2}$

נפתח את אי השוויון השני:

$$\left|\frac{x^2+4x-21}{x-6}\right|<\frac{261}{2}$$

$$\frac{|x+7||x-3|}{|x-6|}<\frac{261}{2}$$

מפתרון אי השוויון הראשון ידוע כי $6\frac{1}{2}<x<7\frac{1}{2}$, כלומר הערכים שאגף שמאל של אי השוויון השני יכולים לקבל הם:

$$\frac{87}{2}<\frac{|x+7||x-3|}{|x-6|}<\frac{189}{2}$$

כך שכל תוצאה היא קטנה ממש מ- $\frac{261}{2}$.

ולכן הוכחנו שעבור כל ערך של x של אי השוויון הראשון $|x-7|<\frac{1}{2}$ מתקיים $\left|\frac{x^2+4x-21}{x-6}\right|<\frac{261}{2}$.

2. הוכיחו (באינדוקציה או בכל דרך אחרת)

א. אם $a_1, d \in R$ ושם מגדירים $a_{n+1}=a_n+d$, אזי מתקיים:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

ננסה להוכיח באינדוקציה

בסיס האינדוקציה- בדיקת נכונות עבור $n=1$: $a_1 \overset{\vee}{=} a_1+(1-1)\cdot d$

$a_1=a_1$ פסוק אמת.

שלב המעבר: נניח נכונות עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$a_k=a_1+(k-1)\cdot d$ (1)

נוכיח את הטענה עבור $n=k+1$:

$a_{k+1}=a_1+(k+1-1)\cdot d=a_1+kd$ (2)

מההגדרה $\leftarrow a_{k+1}=a_k+d$ (3)

נציב את (1) ב-(3):

$a_{k+1}=a_1+(k-1)d+d$

$a_{k+1}=a_1+kd=(2)$ מ.ש.ל.

ב. אם $a_1, d\in R$ ושם מגדירים $a_{n+1}=a_n+d$ אזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

ננסה להוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה- בדיקת נכונות עבור $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \overset{\vee}{=} \frac{(a_1+a_1)\cdot 1}{2}$ פסוק אמת v.

שלב המעבר: נניח נכונות עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

(1) $\sum_{i=1}^{k} a_i=\frac{(a_1+a_k)\cdot k}{2}$

נוכיח את הטענה עבור $n=k+1$:

(2) $\sum_{i=1}^{k+1} a_i=\frac{(a_1+a_{k+1})(k+1)}{2}$

מההגדרה $\leftarrow a_{k+1}=a_k+d$ (3)

נציב (1) ב-(2):

$\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}=\frac{(a_1+a_{k+1})(k+1)}{2} \quad /\cdot 2$

$(a_1+a_k)k+2a_{k+1}=(a_1+a_{k+1})(k+1)$

$a_k k+a_{k+1}-a_1-a_{k+1}\cdot k=0$

$k(a_k-a_{k+1})+a_{k+1}-a_1=0 \underset{(3)}{\overset{\text{הצבה}}{\Rightarrow}} a_k-kd+d-a_1=0$

$\Rightarrow a_1+kd \overset{\vee}{=} a_k+d$

פסוק אמת

מ.ש.ל.

2ג. אם $a_1,q\in\mathbb{R}$ ובנוסף $q\neq 1$ ואם מגדירים $a_{n+1}=a_n\cdot q$ אז:

מתקיים: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ ננסה להוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה - בדיקת נכונות עבור $n=1$: $a_1=a_1\cdot q^0 \leftarrow a_1\overset{\vee}{=}a_1$ פסוק אמת.

שלב המעבר: נניח נכונות עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$(1)\ a_k=a_1\cdot q^{k-1}$$

נוכיח את הטענה עבור $n=k+1$

$$(2)\ a_{k+1}=a_1\cdot q^{k+1-1}=a_1\cdot q^k$$

נשתמש בהגדרה:

$$(3)\ a_{k+1}=a_k\cdot q$$

נציב את (I) ב-(III):

$$a_{k+1}=a_1\cdot q^{k-1}\cdot q=a_1\cdot q^{k-1+1}=a_1\cdot q^k$$

מ.ש.ל $\mathrm{II}=\mathrm{III}$

3. אם $a_1,q\in\mathbb{R}$ ובנוסף $q\neq 1$ ואם מגדירים $a_{n+1}=a_n\cdot q$ אז:

מתקיים $\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ ננסה להוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה - בדיקת נכונות עבור $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} a_1\overset{\vee}{=}\frac{a_1\cancel{(q-1)}}{\cancel{(q-1)}}$ פסוק אמת.

שלב המעבר: נניח נכונות עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i=\frac{a_1(q^k-1)}{q-1}$$

ונוכיח את הטענה עבור $n=k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i=\frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1}$$

נציב את הנחת האינדוקציה:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i+a_{k+1}=\frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1}$$

$$\frac{a_1(q^k-1)}{(q-1)}+a_{k+1}=\frac{a_1(q^{k+1}-1)}{q-1}$$

$$a_1\cdot(q^k-1)+a_{k+1}(q-1)=a_1(q^{k+1}-1)$$

(ע"פ הגדרה $a_{k+1}=a_k\cdot q$ ולפי סעיף ג $a_k=a_1\cdot q^{k-1}$:
$a_{k+1}=a_1\cdot q^{k-1}\cdot q=a_1\cdot q^k$)

$$\cancel{a_1}(q^k-1)+\cancel{a_1}\cdot q^k(q-1)=\cancel{a_1}\cdot(q^{k+1}-1)$$

* במקרה ש- $a_1=0$ הסדרה היא סדרה קבועה של אפסים 0, במקרה ש- $a_1\neq 0$ אפשר לחלק בו:

$$\cancel{q^k}\cancel{-1}+\cancel{q^{k+1}}-\cancel{q^k}=\cancel{q^{k+1}}\cancel{-1}$$

מ.ש.ל $0\overset{\vee}{=}0$ פסוק אמת.

3 הוכיחו באינדוקציה: $1+8+27+\ldots\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots\ldots+n)^2$

ננסה להוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה - נבדוק נכונות עבור n=1: פסוק אמת $1^3 \overset{v}{=} 1^2$

שלב המעבר - נניח נכונות עבור n=k, כלומר נניח שמתקיים:

$$1+8+27+\ldots+k^3=(1+2+3+\ldots+k)^2$$

נוכיח את הטענה עבור $n=k+1$

$$\underbrace{1+8+27+\ldots+k^3}_{\text{ע״פ הנחת האינדוקציה}}+(k+1)^3=(1+2+3+\ldots+k+(k+1))^2$$

נתייחס ל-$(1,2\ldots k)$ כאל סדרה חשבונית, ולכן חיבור האיברים מצביע על סכום האיברים מ $n=1$ עד $n=k$ ומ- $n=1$ עד $n=k+1$

$$\left(\frac{(1+k)(k)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\left(\frac{(1+k+1)(k+1)}{2}\right)^2$$

$$\cancel{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{4}+\cancel{(k+1)^2}\cdot(k+1)=\frac{(k+2)^2}{4}\cdot\cancel{(k+1)^2} \quad /\cdot 4$$

$$k^2+4k+4 \overset{v}{=} k^2+4k+4$$ פסוק אמת.

4. את סדרת פיבונאצ'י מגדירים ע"י קביעת $a_1=a_2=1$

$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n$. הוכיחו באינדוקציה שלמעשה מתקיים: $a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5}$

ננסה להוכיח באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה - נבדק נכונות עבור $n=1$: $a_1=\frac{1+\sqrt5-1+\sqrt5}{2\sqrt5}=1$ ✓

$n=2$: $a_2=\frac{(1+\sqrt5)^2-(1-\sqrt5)^2}{4\sqrt5}=1$ ✓

פסוקי אמת

שלב המעבר - נניח נכונות עבור $n=k$, כלומר נניח שמתקיים:

$$a_k=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k}{\sqrt5}$$

נוכיח את הטענה עבור $n=k+1$

$$a_{k+1}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt5}$$

ע"פ ההגדרה $a_{k+1}=a_{k-1}+a_k$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt5}+\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k}}{\sqrt5}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt5}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k+1}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1+\sqrt5}{2}-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1-\sqrt5}{2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{4+2(1+\sqrt5)-(1+\sqrt5)^2}{4}\right)=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{4+2(1-\sqrt5)-(1-\sqrt5)^2}{4}\right)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k-1}(0)=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{k-1}(0)$$

$$0\overset{\checkmark}{=}0$$

פסוק אמת

5. השלימו את הוכחת אי השוויון מהתרגול; הוכיחו את אי-השוויון בין הממוצע ההרמוני להנדסי: $a_1.....a_n$ חיוביים אז:

$$\frac{n}{\frac{1}{a}+\dots\dots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

מהוכחת אי שוויון הממוצעים (ממוצע חשבוני גדול ממוצע הנדסי) אנו [illegible]

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

נהפוך את שני האגפים (נהפוך את ההופכי ונהפוך סימן):

$$\frac{1}{\sqrt{a_1\cdots a_n}}\geq\frac{n}{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}$$

נסמן $a_i=\frac{1}{x_i}$

$$\left(x_1\cdots\cdots x_n\right)^{(-1)\cdot\frac{1}{n}\cdot(-1)}=\frac{1}{\sqrt[n]{(x_1\cdots\cdots x_n)^{-1}}}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$$

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$$

מ.ש.ל