

קומבינטוריקה (104286) - תרגיל בית 8

1. יהי G גרף עם n קודקודים שבו ערכיות כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכיחו כי G קשיר.
2. נתון גרף $G = (V, E)$. נבנה גרף חדש $L(G)$ באופן הבא:
הקודקודים של $L(G)$ מייצגים את הצלעות של G .
שני קודקודים של $L(G)$ מחוברים בצלע אם ורק אם לשתי הצלעות שהם מייצגים בגרף G יש קודקוד משותף.
הראו שאם G גרף אוילריאני, אז גם $L(G)$ אוילריאני. האם ההיפך נכון?
3. אוריינטציה של גרף G היא ציור של חץ על כל אחת מצלעותיו באחד משני הכיוונים האפשריים. עבור אוריינטציה נתונה וקודקוד x נסמן:
 $d_+(x)$ = מספר הצלעות המכוונות מ- x החוצה.
 $d_-(x)$ = מספר הצלעות המכוונות אל x פנימה.
אוריינטציה נקראת מאוזנת אם $d_+(x) = d_-(x)$ לכל קודקוד x .
הוכיחו שלגרף G קיימת אוריינטציה מאוזנת אם ורק אם כל הערכיות ב- G זוגיות.
4. גרף דו-צדדי שלם הוא גרף דו-צדדי $G = (A, B, E)$ שבו קיימות כל הצלעות האפשריות בין A ל- B .
אם $|A| = p$ ו- $|B| = q$, נסמן את הגרף הדו-צדדי השלם על ידי $K_{p,q}$.
לאילו ערכי p, q הגרף $K_{p,q}$ מכיל:
(א) מסלול אוילריאני סגור?
(ב) מסלול אוילריאני שאינו סגור?
5. נתונות קבוצות של n גברים ו- n נשים כך שכל אדם מכיר לפחות $\frac{n}{2}$ מבני המין האחר. הוכיחו שקיים זיווג בגודל n .

בהצלחה!