1 פונקציות של כמה משתנים ממשיים

עד עכשיו טיפלנו בפונקציות של משתנה אחד, אך תופעות בטבע תלויות בדר"כ בכמה משתנים. למשל, התפלגות הטמפרטורה של גוף מרחבי תלויה במיקום (שהוא בעצמו נתון ע"י שלושה משתנים) ובזמן, כלומר ע"י פונקציה $T(x,y,z,t)$, כאשר x,y,z הן הקואורדינטות של הנקודה ו- t הוא הזמן.

בפרק זה נעסוק בפונקציות של כמה משתנים ממשיים, נכליל את מה שלמדנו על פונקציות של משתנה אחד ונטפל בתופעות חדשות המיוחדות לפונקציות כאלה.

1.1 המרחב האוקלידי ה- n-ממדי

דרך נוחה מאוד להסתכל על פונקציות של כמה משתנים היא להסתכל עליהן כפונקציות של משתנה אחד, שהוא <u>וקטור n- ממדי</u>. נתחיל, לכן, בהבנת המבנה של המרחב האוקלידי ה- n-ממדי, $\mathbb{R}^n$.

המרחק בין שתי נקודות $P=(p_1,\ldots,p_n)$ ו- $Q=(q_1,\ldots,q_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$ יסומן ע"י

$$d(P,Q)=\left(\sum_{i=1}^n (p_i-q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

את המרחק של P מהראשית, $\left(\sum_{i=1}^n p_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, נסמן ב- $\|P\|$, ונקרא לו הנורמה של P. נשים לב כי $d(P,Q)=\|P-Q\|$.

למרחק יש התכונות הבאות:

(i) סימטריות: $d(P,Q)=d(Q,P)$.

(ii) חיוביות: $d(P,Q)\geq 0$ ו- $d(P,Q)=0$ אםם $P=Q$.

(iii) אי שוויון המשולש: $d(P,R)\leq d(P,Q)+d(Q,R)$.

שני החלקים הראשונים טריביאליים, ולהוכחת השלישי נצטרך הכנות נוספות.

המכפלה הפנימית של שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ ניתנת ע"י הנוסחה

$$\langle P,Q\rangle=\sum_{i=1}^n p_iq_i .$$

לפעמים מסמנים את המכפלה הפנימית גם ב- (P,Q) או ב- $P\cdot Q$. נשים לב כי $\langle P,P\rangle=\|P\|^2$.

למכפלה הפנימית יש התכונות הבאות, ששלוש הראשונות מיידיות:

(i) סימטריות: $\langle P,Q\rangle=\langle Q,P\rangle$.

(ii) חיוביות: $\langle P,P\rangle\geq 0$ ו- $\langle P,P\rangle=0$ אםם $P=0$.

(iii) לינאריות: $\langle \alpha_1P_1+\alpha_2P_2,Q\rangle=\alpha_1\langle P_1,Q\rangle+\alpha_2\langle P_2,Q\rangle$ (ובאופן דומה בקואורדינטה השניה). בפרט מקבלים, ע"י כתיבה מפורשת של הנוסחאות ופתיחת הסוגריים, כי

$$\|P+Q\|^2=\|P\|^2+\|Q\|^2+2\langle P,Q\rangle .$$

(iv) אי שוויון קושי-שוורץ: $|\langle P, Q\rangle| \leq \|P\|\,\|Q\|$, ויש שוויון אםם יש מספר λ כך ש-$Q = \lambda P$ או ש- $P = 0$.

הוכחת אי שוויון קושי-שוורץ: נניח כי $P, Q \neq 0$. לכל t מתקיים

$$0 \leq \|tP + Q\|^2 = t^2\|P\|^2 + 2t\langle P, Q\rangle + \|Q\|^2$$

ואגף ימין הוא פולינום ריבועי במשתנה הממשי t שנסמנו ב- $f(t)$. פולינום כזה יכול להיות בעל סימן קבוע רק כאשר הדיסקרימיננטה שלו אי-חיובית, כלומר כאשר

$$(2\langle P, Q\rangle)^2 - 4\|P\|\,\|Q\| \leq 0$$

ואחרי העברה באגפים והוצאת שורש זהו אי השוויון המבוקש.
אם יש שוויון, אז הדיסקרימיננטה היא 0 ולמשוואה הריבועית יש שורש יחיד, $f(t_0) = 0$. כשנציב אותו נקבל כי $\|t_0P + Q\|^2 = 0$, ולכן $t_0P + Q = 0$, כלומר $Q = -t_0P$.

הוכחת אי שוויון המשולש. לכל שני ווקטורים A ו- B מתקיים, ע"ס אי שוויון קושי שוורץ, כי

$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + 2\langle A, B\rangle + \|B\|^2 \leq \|A\|^2 + 2\|A\|\,\|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2$$

כלומר, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, ולכן

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \|P - R\| = \|(P - Q) + (Q - R)\| \\ &\leq \|P - Q\| + \|Q - R\| = d(P, Q) + d(Q, R) \end{aligned}$$

בעזרת המרחק נוכל להכליל מושגים רבים מהישר הממשי למרחב האוקלידי. נסמן ב- $B(P, r) = \{Q \in \mathbb{R}^n : d(P, Q) < r\}$ את הכדור הפתוח ברדיוס r עם מרכז P. כדורים כאלה ישמשו כהכללה הטבעית של קטע פתוח, או של סביבה של נקודה על הישר.
אפשר גם להסתכל על סביבות מסוגים אחרים, כגון קוביה פתוחה שמרכזה ב- P ושאורך צלעה הוא $2r$

$$C = \{Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n : |q_i - p_i| < r \quad ; \quad 1 \leq i \leq n\}$$

או, באופן כללי יותר, על תיבה שאורך צלעותיה הוא $2r_i$ בהתאמה, כלומר על הקבוצה המוגדרת ע"י אי השוויונות $|q_i - p_i| < r_i$.

הערה. מבחינות רבות זה לא ישנה לנו איזה מין סביבה ניקח כי אי השוויון

$$\max|q_i - p_i| \leq \left(\sum (q_i - p_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n}\max|q_i - p_i|$$

מראה שכל כדור סביב P מכיל ומוכל בתיבות בגדלים מתאימים.

המושג הבסיסי בפיתוח החשבון האינפיניטיסימלי במשתנה אחד היה מושג הגבול. אחרי שהגדרנו את מושג המרחק במרחב האוקלידי ההכללה ברורה

<u>הגדרה.</u> נאמר שסדרת נקודות $P_k \in \mathbb{R}^n$ מתכנסת לנקודה P אם $d(P_n,P) \to 0$, ובלשון ε, N: אם לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך ש- $d(P_n,P) < \varepsilon$ לכל $n > N$.

הטענה הבאה תיתן לנו דרך נוחה מאד לבדוק אם סדרת נקודות מתכנסת. כדי לפשט את הסימונים ננסח ונוכיח אותה רק ל- $n = 2$.

<u>טענה.</u> הסדרה $P_k = (x_k, y_k)$ מתכנסת לנקודה $P = (x,y)$ אםם $x_k \to x$ ו- $y_k \to y$.

הוכחה. ההוכחה נובעת מיידית מאי השוויונות

$$\max\{|x_k - x|, |y_k - y|\} \le \left((x_k - x)^2 + (y_k - y)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\max\{|x_k - x|, |y_k - y|\}$$

□

נאמר שקבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת באיזשהו כדור. (בדקו שכל סדרה מתכנסת היא חסומה).

<u>משפט.</u>[משפט בולצ'נו-ויירשטראס] לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה. כדי לפשט את הסימונים נוכיח את המשפט רק ל- $n = 2$, ונסמן את אברי הסדרה ב- $P_k = (x_k, y_k)$.

מחסימות הסדרה נובע שגם סדרת המספרים x_k היא סדרה חסומה, ולכן ע"ס המקרה החד ממדי של המשפט יש לה תת סדרה מתכנסת x_{k_j}.

נסתכל כעת על הסדרה y_{k_j}. גם זו סדרה חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $y_{k_{j_m}}$. תת הסדרה המבוקשת היא $P_{k_{j_m}}$, כי הסדרה $x_{k_{j_m}}$ מתכנסת (כתת סדרה של סדרה מתכנסת) ועפ"י הבחירה גם $y_{k_{j_m}}$ מתכנסת. □

באופן אנלוגי למקרה החד-ממדי מגדירים סדרת קושי ומוכיחים שסדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

<u>הגדרה.</u> (i) נאמר שהנקודה P היא נקודה פנימית של הקבוצה C אם יש סביבה של P (כדור או תיבה) המוכלת כולה ב- C. לדוגמא, הנקודות ה"פנימיות" של כדור (או קטע במקרה החד ממדי).

(ii) קבוצה תקרא פתוחה אם כל נקודותיה פנימיות. למשל כדור או תיבה פתוחים.

(iii) נאמר שהנקודה P היא נקודה מבודדת של הקבוצה C אם יש סביבה של P שאיננה מכילה אף נקודה של C פרט ל- P. למשל הנקודה 1 בסדרה $\{\frac{1}{n}\}$.

(iv) נאמר שהנקודה P היא נקודת הצטברות של הקבוצה C אם כל סביבה של P מכילה נקודה של C שונה מ- P. למשל 0 היא נקודת הצטברות של הסדרה $\{\frac{1}{n}\}$ (ושימו לב ש- P אינה חייבת להשתייך לקבוצה C), או של הקטע $[0,1]$.

(v) קבוצה תקרא סגורה אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה. למשל כדור או תיבה סגורים.

(vi) נאמר שהנקודה P היא נקודת שפה של הקבוצה C אם אינה נקודה פנימית של C וגם אינה נקודה פנימית של המשלים של C.

הערות. (i) אם P נקודת הצטברות של C אז למעשה כל סביבה שלה מכילה אינסוף נקודות של C. כי אילו היה כדור פתוח $B(P,r)$ המכיל רק מספר סופי $P_1,\ldots,P_n$ של נקודות מ- C השונות מ- P, היינו מגדירים $\varepsilon=\min\{r,\min_{1\le i\le n}\|P-P_i\|\}$, ואז הכדור הפתוח $B(P,\varepsilon)$ לא היה יכול להכיל אף נקודה של C פרט לנקודה היחידה P עצמה - אם היא בכלל שייכת לקבוצה. (ציירו את ההוכחה!).

(ii) קבוצה C היא פתוחה אםם משלימתה סגורה. כי אם C פתוחה ו- $P\in C$ אז יש סביבה של P המוכלת כולה ב- C, ולכן P אינה יכולה להיות נקודת הצטברות של המשלים של C, כלומר המשלים מכיל את כל נקודות ההצטברות שלו - ולכן הוא קבוצה סגורה. הוכחת הכיוון ההפוך דומה.

הקוטר של קבוצה C הוא $diam(C)=sup\{d(P,Q):P,Q\in C\}$.
שני החלקים של המשפט הבא הם הכללות פשוטות של המקרה החד-ממדי.

משפט. (i) [הלמה של קנטור] אם C_k סדרת קבוצות סגורות וחסומות ב- $\mathbb{R}^n$ כך ש- $C_{k+1}\subset C_k$ אז $\cap C_k\neq\emptyset$. אם גם $diam(C_k)\to 0$ אז החיתוך $\cap C_k$ מכיל בדיוק נקודה אחת.

(ii) [משפט היינה-בורל] תהי C תיבה סגורה, אז לכל כיסוי פתוח של C יש תת-כיסוי סופי.

הוכחה. (i) לכל k נבחר נקודה $P_k\in C_k$. הקבוצה C_1 חסומה, וכל הקבוצות האחרות מוכלות בה, לכן הסדרה P_k חסומה. עפ"י משפט בולצ'אנו ווירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת. נניח כי $P_{k_j}\to P$ ונוכיח שהנקודה P נמצאת בחיתוך. ואמנם, אם נקבע k, אז כל ה- P_{k_j}-ים, פרט למספר סופי מהן, נמצאות ב- C_k - אבל C_k סגורה, ולכן גם הגבול P נמצא ב- C_k.
אם גם $diam(C_k)\to 0$ לא ייתכן שהחיתוך יכיל שתי נקודות $Q\neq P$, כי אז היינו מקבלים שלכל k מתקיים $diam(C_k)\ge\|P-Q\|>0$, בסתירה להנחה.

(ii) לא ניתן את ההוכחה, שהיא אנלוגית להוכחה במקרה החד ממדי (בשיטת "אריה במדבר"). נעיר רק שהמשפט נכון לכל קבוצה סגורה וחסומה C, ולא רק לתיבה סגורה: נבחר תיבה סגורה $C\subset T$ ונוסיף לכיסוי הנתון $\{U_\alpha\}$ את הקבוצה הפתוחה $\mathbb{R}\setminus C$. מקבלים כיסוי פתוח של התיבה T, ולכן ע"ס המקרה הפרטי של תיבה יש תת כיסוי סופי של T - והוא מכסה את C גם אם נשמיט ממנו את $\mathbb{R}\setminus C$. $\square$

יש לנו כעת את "השפה המתמטית" הדרושה להגדרת הרציפות של פונקציות בין קבוצות חלקיות של מרחבים אוקלידיים.

הגדרה. תהי D קבוצה חלקית כלשהי ב- $\mathbb{R}^n$, ותהי $f:D\to\mathbb{R}^m$. נאמר ש- f רציפה בנקודה $P\in D$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $Q\in D$ מקיימת $\|Q-P\|<\delta$, אז $\|f(P)-f(Q)\|<\varepsilon$.

הערות. (i) כמו ביחס לפונקציות של משתנה אחד, הגדרה זו שקולה להגדרה בעזרת סדרות: f רציפה בנקודה $P\in D$ אםם לכל סדרה של נקודות $P_k\in D$ המתכנסת לנקודה P מתקיים שהסדרה $f(P_k)$ מתכנסת ל- $f(P)$.

(ii) הסימונים שהכנסנו מאוד יעילים. שימו לב שהמרחקים וההתכנסויות במקור ובתמונה הם במרחבים שונים (כי בדר"כ $m \neq n$), אך הכתיבה היא "כללית" ודומה מאוד לכתיבה במקרה החד-ממדי. למרות האנלוגיה המלאה הזו בכתיבה, הרי, כפי שנראה בהמשך, במרחב ממימד גדול מ- 1 יש "יותר כיוונים" להתקרב לנקודה P והגיאומטריה של התכנסות ושל גבולות יותר מסובכת מאשר בישר.

(iii) מההגדרה נובע באופן ישיר (כמו במקרה החד ממדי) שאם ההרכבה $G \circ F$ מוגדרת היטב, ואם F רציפה בנקודה P ו- G רציפה בנקודה $F(P)$, אז $G \circ F$ רציפה בנקודה P.

עיקר העיסוק שלנו בקורס זה יהיה בפונקציות ממשיות של כמה משתנים, כלומר בפונקציות $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subset \mathbb{R}^n$. אך בהגדרות הבאות נתעניין דוקא בפונקציות מקטע $I \subset \mathbb{R}^1$ לתוך $\mathbb{R}^n$.

הגדרה. **יהי $I \subset \mathbb{R}^1$ קטע. פונקציה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ נקראת מסילה לתוך $\mathbb{R}^n$. אם $I = [a, b]$ קטע סגור, אז לנקודות $\gamma(a)$ ו- $\gamma(b)$ נקרא נקודת ההתחלה ונקודת הסיום (בהתאמה) של γ.**

אם $\gamma(a) = \gamma(b)$ אז המסילה נקראת סגורה.

התמונה של γ היא עקום מסויים ב- $\mathbb{R}^n$, ודרך טובה לחשוב על המסילה היא שחלקיק נע על פני העקום הזה כך שבזמן t הוא נמצא בנקודה $\gamma(t)$. שימו לב שאנחנו מתייחסים כאן לפונקציה γ ולא, כפי שהיה טבעי אולי לחשוב, רק לעקום שהוא תמונתו. באופן כזה אותו עקום מתואר ע"י הרבה מסילות.

לדוגמא, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \leq t \leq 2\pi$ היא מסילה במישור שהעקום שהיא מתארת הוא מעגל היחידה. גם $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ עבור $0 \leq t \leq \pi$ מתאר את אותו עקום, וגם $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \leq t \leq 5\pi$ מתאר אותו, אך שתי המסילות הראשונות עוברות על המעגל פעם אחת (והמסילה השניה מתארת תנועה במהירות כפולה מהראשונה), והשלישית מתארת הקפה של המעגל פעמיים וחצי.

הגדרה. קבוצה חלקית $D \subset \mathbb{R}^n$ נקראת קשירה מסילתית אם לכל שתי נקודות P, Q ב- D **יש מסילה $\gamma : [a, b] \to D$ כך ש- $\gamma(a) = P$ ו- $\gamma(b) = Q$. (ונאמר ש- γ מקשרת בין P ו- Q).**

קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית נקראת תחום.

הקבוצות הקשירות מסילתית בישר הן רק קטעים. במימד גבוה יש קבוצות רבות כאלה, והנחת הקשירות המסילתית תהיה התחליף הטבעי כשנרצה להכליל משפטים על פונקציות רציפות או גזירות בקטע לפונקציות רציפות או גזירות בקבוצות חלקיות של $\mathbb{R}^n$.

1.2 פונקציות ממשיות בכמה משתנים

לשם פשטות נצטמצם מעתה לפונקציות של שני משתנים ונכתוב $z = f(x, y)$.

הגרף של פונקציה כזו $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ הוא "משטח" דו ממדי במרחב התלת ממדי. הקבוצות $\{(x, y) : f(x, y) \equiv c\}$ נקראות קווי הגובה של f. (חישבו על מפה טופוגרפית).

דוגמאות.

$(i)\quad f(x,y)=x+y$. זוהי פונקציה לינארית שהגרף שלה הוא מישור. קו הגובה שלה המתאים לערך c הוא הישר $x+y=c$. ("שרטטו" את הגרף של f).

$(ii)\quad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ עבור $(x,y)\neq(0,0)$. כדי לחשב את קו הגובה שלה המתאים לערך c צריך לפתור את המשוואה $\frac{xy}{x^2+y^2}=c$. במקום לעשות זאת נשים פשוט לב שהפונקציה קבועה על כל ישר (מנוקב בראשית) מהצורה $y=\lambda x$, וערכה עליו הוא $c=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ (ו- $c=0$ על ציר ה- y המנוקב בראשית) .

זו דוגמא טובה כדי להראות שמושג הגבול בכמה משתנים אכן יותר מורכב מה-מקרה החד ממדי. על הישרים השונים דרך הראשית מתקבלים ערכים שונים, והגבול בראשית לא קיים! (איך נראה הגרף של הפונקציה?)

$(iii)\quad f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ עבור $(x,y)\neq(0,0)$. כאן $\lim_{x,y\to 0}f(x,y)=0$, כי $\frac{|xy|}{x^2+y^2}<1$ לכל x,y, ולכן אפילו רק $x\to 0$ מספיק כדי ש- $x\frac{xy}{x^2+y^2}\to 0$.

אחד המכשירים שנשתמש בהם כדי להבין ולנתח את המבנה של פונקציה $f(x,y)$ הוא לקבוע את הערך של אחד המשתנים (למשל לקבוע x_0) ולהסתכל על $f(x_0,y)$ כפונקציה של המשנה האחר, y, בלבד.

באופן גיאומטרי הפעולה שאנחנו עושים היא צמצום של הפונקציה לאיזשהו ישר המקביל לצירים הראשיים. הבנה של כל הצמצומים האלה נותן כלי להבנה של המבנה של הפונקציה כולה. אך הבנה זו היא בדר"כ חלקית בלבד. למשל, בדוגמא (ii), לכל הפונקציות $f(x_0,y)$ ו- $f(x,y_0)$ יש אי רציפות סליקה ב- 0, ואם נגדיר $f(0,0)=0$, הן תהיינה כולן רציפות - אך לפונקציה המקורית אין כלל גבול בראשית.

סכום, מכפלה, מנה (כשהמכנה שונה מאפס) והרכבה $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה. גם המשפטים הבאים על פונקציות רציפות תקפים בכמה משתנים.

<u>משפט.</u> [משפט ערך הביניים] תהי f רציפה בקבוצה קשירה מסילתית D. אם $P_0,P_1\in D$ מקיימות ש- $f(P_0)<\alpha<f(P_1)$ עבור איזשהו מספר α, אז יש נקודה Q ב- D כך ש- $f(Q)=\alpha$.

הוכחה. הקבוצה D קשירה מסילתית, ולכן יש מסילה $\gamma(t)$ בקטע $[0,1]$ כך ש- $\gamma(t)\in D$ לכל t וכך ש- $\gamma(0)=P_0$ ו- $\gamma(1)=P_1$. ההרכבה $g(t)=f(\gamma(t))$ היא פונקציה רציפה בקטע ומקיימת $g(0)<\alpha<g(1)$ ולכן, עפ"י משפט ערך הביניים במשתנה אחד, יש t_0 בקטע כך ש- $g(t_0)=\alpha$ ונבחר $Q=\gamma(t_0)$. $\square$

לא ניתן את ההוכחות של שני שמשפטים הבאים. ההוכחות חזרות על ההוכחות במקרה החד-ממדי תוך שימוש במשפט בולצ'אנו ווירשטראס (או היינה בורל) עבור קבוצות ב- $\mathbb{R}^n$.

<u>משפט.</u> [משפט ווירשטראס] תהי f רציפה בקבוצה סגורה וחסומה D. אז f חסומה ומקבלת ב- D מכסימום ומינימום.

נאמר ש- f רציפה במידה שווה בקבוצה D אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ (התלוי רק ב- ε) כך ש- $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$ לכל $P,Q\in D$ המקיימות $\|P-Q\|<\delta$.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה בקבוצה סגורה וחסומה D. אז f רציפה שם במדה שווה.

1.3 חשבון דיפרנציאלי בכמה משתנים

<u>הגדרה.</u> הנגזרת החלקית של f לפי x בנקודה (x_0, y_0) היא

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

ונסמן גם $f_x(x_0, y_0)$ או $f'_x(x_0, y_0)$ או $D_1 f(x_0, y_0)$. הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial y}$ לפי המשתנה y, מוגדרת באופן דומה.

לדוגמא, אם $f(x,y) = x^y$ (עבור $x > 0$) אז $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$.
קיום הנגזרות החלקיות אינו חזק כמו קיום נגזרת במשתנה אחד (ונסביר זאת בפירוט מיד). הוא נותן אינפורמציה על קצב הגידול של הפונקציה רק בכיוונים הראשיים, וזה לא מספיק אפילו להבטחת הרציפות שלה. ראינו למשל שהפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

רציפה בראשית, אך $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ כי f זהותית אפס על הצירים הראשיים.

במשתנה אחד קיום נגזרת בנקודה x_0 אומר שהפונקציה משתנה באופן רגולרי בסביבת הנקודה: יש לגרף משיק (ששיפועו $f'(x_0)$), והפונקציה ניתנת לקירוב טוב ע"י פונקציה לינארית - ראינו באינפי 1 שפונקציה של משתנה אחד היא גזירה בנקודה x_0 אםם יש קבוע A ופונקציה $\varepsilon(t)$ כך ש- $\lim_{t\to 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$ כך שמתקיים

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \tag{1}$$

ובמקרה זה $A = f'(x_0)$.
קיום נגזרות חלקיות בנקודה P אומר רק שהפונקציה משתנה באופן מאד רגולרי <u>בכיוונים הראשיים</u> בסביבת הנקודה, ושלגרפים של הצמצומים שלה לישרים דרך הנקודה המקבילים לצירים יש משיקים (ששיפועיהם הם $f'_x(P)$ ו- $f'_y(P)$). אך זה לא מספיק כדי לתאר את התנהגות הפונקציה בכיוונים אחרים, ובפרט זה לא אומר שהיא ניתנת לקירוב טוב ע"י פונקציה לינארית. האנלוג הדו-ממדי המלא לגזירות הוא קיום <u>מישור משיק</u> לגרף בנקודה P, וההגדרה הבאה היא הניסוח האנליטי לכך.

<u>הגדרה.</u> פונקציה $f(x,y)$ היא דיפרנציאבילית בנקודה $P = (x_0, y_0)$ אם יש קבועים A ו- B ופונקציה $\varepsilon(s,t)$ כך ש- $\lim_{s,t\to 0} \frac{\varepsilon(s,t)}{\sqrt{s^2+t^2}} = 0$ באופן שמתקיים

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(P) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \tag{2}$$

<u>הערות.</u> (i) שימו לב כי $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ הוא המרחק בין הנקודה $P = (x_0, y_0)$ לבין הנקודה $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, והגדרת הדיפרנציאביליות (2) אנלוגית לגמרי לנוסחה (1) במקרה החד-מימדי.

(ii) המישור המשיק לגרף של f בנקודה P הוא המישור

$$. \; z = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0)$$

יהיה לנו נוח, לעתים, לכתוב את תנאי הדיפרנציאביליות בצורה קצת שונה

<u>למה.</u> הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $P = (x_0, y_0)$ אמם יש קבועים A ו- B ופונקציות $\alpha(s,t)$ ו- $\beta(s,t)$ כך ש- $\lim_{s,t\to 0}\alpha(s,t) = \lim_{s,t\to 0}\beta(s,t) = 0$, וכך שמתקיים

$$. \; f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(P) + A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

הוכחה. נוכיח רק שתנאי הלמה גוררים דיפרנציאביליות (וזה גם הכיוון שבו נשתמש בהמשך). השלימו כתרגיל את הכיוון השני.
נגדיר $\varepsilon(s,t) = \alpha(s,t)s + \beta(s,t)t$, ויש רק לבדוק כי $\frac{\alpha(s,t)s+\beta(s,t)t}{\sqrt{s^2+t^2}} \to 0$, ובאמת, עפ"י אי שוויון קושי שוורץ $|\alpha(s,t)s+\beta(s,t)t| \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{s^2+t^2}$, הגורם הראשון שואף לאפס, והשני מצטמצם עם המכנה. $\square$

<u>הערה.</u> חישוב ישיר אומר כי לפונקציה דיפרנציאבילית יש נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + \varepsilon(|\Delta x|, 0)}{\Delta x} = A$$

ובאופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = B$.

הכיוון ההפוך לא נכון. בדקו למשל עפ"י ההגדרה שהפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

איננה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. (בהמשך נראה שפונקציה דיפרנציאבילית היא רציפה, וראינו שהפונקציה הזו איננה רציפה בראשית).

בהגדרת הנגזרות החלקיות בדקנו את קצב השתנות הפונקציה בשני כיוונים מסוימים שנקבעו בבחירה שרירותית של מערכת הצירים. נגדיר כעת נגזרות בכיוון כללי.

<u>הגדרה.</u> יהי $V \neq 0$ וקטור ב- $\mathbb{R}^n$. הנגזרת המכוונת של f בנקודה P בכיוון V היא

$$\frac{\partial f}{\partial V}(P) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(P+tV) - f(P)}{t}$$

ונשתמש גם בסימון $D_V f(P)$.

באופן גיאומטרי רואים שקיום מישור משיק מבטיח קיום ישרים משיקים לפונ-קציה בכל הכיוונים. המשפט הבא אומר זאת באופן אנליטי, ואף נותן את הנוסחה לחישוב הנגזרות המכוונות.

משפט. אם f דיפרנציאבילית בנקודה $P=(x_0,y_0)$ אז קיימות לה הנגזרות המכוונות ב- P, והנגזרת המכוונת שלה בכיוון $V=(v,w)$ ניתנת ע"י הנוסחה

$$\frac{\partial f}{\partial V}(P)=vf_x(P)+wf_y(P) \ .$$

הווקטור $(f_x(P),f_y(P))$ נקרא הגרדיאנט של f ב- P, והוא מסומן ע"י $\nabla f(P)$. בסימון זה הנוסחה היא $\frac{\partial f}{\partial V}(P)=\langle\nabla f(P),V\rangle$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}\frac{f(P+tV)-f(P)}{t} &= \frac{f_x(P)\cdot tv+f_y(P)\cdot tw+\varepsilon(tV)}{t}\\ &= \langle\nabla f(P),V\rangle+\frac{\varepsilon(tV)}{t}\underset{t\to0}{\longrightarrow}\langle\nabla f(P),V\rangle\end{aligned}$$

$\square$

הערה. ל- $\nabla f(P)$ יש משמעות גיאומטרית חשובה. זהו הכיוון שבו יש ל- f קצב גידול מכסימלי בנקודה P. ואמנם, לכל ווקטור יחידה V מתקיים, עפ"י אי שוויון קושי שוורץ, אי השוויון

$$D_Vf(P)=\langle\nabla f(P),V\rangle\leq\|\nabla f(P)\|\,\|V\|$$

ויש בו שוויון אסם V ו- $\nabla f(P)$ הם באותו כיוון.

טענה. אם f דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אז היא רציפה שם.

הוכחה.

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\underset{\Delta x,\Delta y\to0}{\longrightarrow}0$$

$\square$

ראינו שקיום נגזרות חלקיות אינו גורר רציפות, ולכן בודאי שאינו גורר דיפר-נציאביליות. מתברר שאם הנגזרות החלקיות קיימות לא רק בנקודה, אלה גם בסביבה שלה, ואם הן רציפות בנקודה, אז f אכן דיפרנציאבילית שם.

משפט. אם יש ל- f נגזרות חלקיות בסביבה של הנקודה (x_0,y_0) ואם הן רציפות ב- (x_0,y_0), אז f דיפרנציאבילית שם.

הוכחה. נציג

$$\begin{aligned} & f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\ = & \left\{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\right\} + \left\{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right\} \end{aligned}$$

ונטפל בכל מחובר בנפרד.

עפ"י משפט לגרנז' יש $0<\theta_1<1$, התלוי ב- x_0, y_0, Δx ו- Δy, כך ש-

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot\Delta x$$

ולכן נוכל להציג את המחובר הראשון בצורה $f_x(x_0,y_0)\Delta x + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x$ כאשר

$$\alpha(\Delta x,\Delta y) = f_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\Delta y) - f_x(x_0,y_0) \to 0$$

מכיוון ש- f_x רציפה ב- (x_0,y_0).

באופן דומה

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) &= f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y \\ &= f_y(x_0,y_0)\Delta y + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y \end{aligned}$$

כאשר $\beta(\Delta x,\Delta y) = f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f_y(x_0,y_0) \to 0$. □

<u>הערה.</u> התנאי במשפט מספיק בלבד, ונגזרות חלקיות של פונקציה דיפרנציאבילית אינן צריכות להיות רציפות. למשל, הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$ (ניקח $A=B=0$), אך $\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ לא קיים ולכן f_x בוודאי לא רציפה.

אם יש ל- f נגזרות חלקיות רציפות בתחום D, נאמר לפעמים ש- f גזירה ברציפות ב- D.

המשפט שהוכחנו מפתיע מאוד. האינפורמציה הנתונה דנה לכאורה רק בהשתנות של הפונקציה בכיווני הצירים הראשיים, אך המסקנה היא על מבנה הפונקציה כולה - המישור המשיק מקרב את הפונקציה היטב בכל הכיוונים! ההסבר הוא שתנאי הרציפות של הנגזרות החלקיות "מכריח" את הפונקציה להתנהג באופן רגולרי, אך קשה לראות באופן גיאומטרי איך זה קורה, וההוכחה היא מתמטית טכנית (שימוש במשפט לגרנז') ואיננה תורמת להבנה אינטואיטיבית של התופעה.

<u>משפט.</u> [כלל השרשרת] תהי f דיפרנציאבילית בתחום קשיר מסילתית D, ונניח שהפונקציות $x(t), y(t)$ הן פונקציות גזירות (לפי t) ומקיימות ש- $(x(t),y(t))\in D$ לכל t. אז הפונקציה $F(t)=f\big(x(t),y(t)\big)$ גזירה, ונגזרתה היא

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

או, בכתיבה אחרת, $F' = f_x\cdot x' + f_y\cdot y'$.

הוכחה. מהרציפות והגזירות של $x(t)$ ו- $y(t)$ נובע כי אם

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) \quad ; \quad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$$

אז כאשר $\Delta t \to 0$ גם $\Delta x, \Delta y \to 0$, וכן $\frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'(t)$ ו- $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t)$. היות ש- f דיפרנציאבילית ב- D, נציג

$$\begin{aligned} & F(t+\Delta t) - F(t) = f\big(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)\big) - f\big(x(t), y(t)\big) \\ = \quad & \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \end{aligned}$$

כאשר ע"ס האמור בפתיחה $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$. ולכן

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = f_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} f_x \cdot x' + f_y \cdot y' \ .$$

$\square$

<u>הערה.</u> תהי $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ מסילה. נאמר שהמסילה גזירה אם הפונקציות $x(t)$ ו- $y(t)$ גזירות. במקרה זה נסמן $\gamma(t)' = (x(t)', y(t)')$. במונחים אלה כלל השרשת הוא

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \ .$$

לפני המסקנה הבאה נציין (ללא הוכחה) שאם D תחום פתוח וקשיר מסילתית, אז לכל שתי נקודות P, Q בתחום יש מסילה <u>גזירה</u> $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ המוכלת כולה ב- D כך ש- $\gamma(0) = P$ ו- $\gamma(1) = Q$.

<u>מסקנה.</u> אם f גזירה ברציפות בתחום קשיר מסילתית D כך ש- $f_x \equiv f_y \equiv 0$ בתחום, אז f קבועה ב- D.

הוכחה. אם $P, Q \in D$ אז יש מסילה גזירה $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ המוכלת כולה ב- D כך ש- $\gamma(0) = P$ ו- $\gamma(1) = Q$, ונסמן $F(t) = f\big(\gamma(t)\big)$. עפ"י הנתון

$$\frac{dF}{dt} = f_x \cdot x' + f_y \cdot y' \equiv 0$$

ולכן F קבועה ומתקיים $F(0) = F(1)$, כלומר $f(P) = f(Q)$. $\square$

1.4 נגזרות מסדר גבוה

הנגזרת חלקית f_x של f, יכולה גם היא להיות בעלת נגזרות חלקיות $(f_x)_x$ או- $(f_x)_y$, ונסמן אותן ב- f_{xx} ו- f_{xy} בהתאמה. באופן דומה נסמן f_{yx} ו- f_{yy}.

לנגזרות f_{xy} ו- f_{yx} קוראים הנגזרות המעורבות מסדר שני.

<u>דוגמא.</u>

בדר"כ $f_{xy} \neq f_{yx}$. למשל, אם $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ אז כאשר $(x,y) \neq (0,0)$ מתקיים $f_x(x,y) = \frac{\left[y(x^2-y^2)+xy(2x)\right](x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, ובפרט

$$f_x(0,\Delta y) = -\frac{(\Delta y)^3 \cdot (\Delta y)^2}{(\Delta y)^4} = -\Delta y \ .$$

והיות ש-

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

מקבלים

$$(f_x)_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} = \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1 \ .$$

חישוב דומה (או שימוש בזהות $f(x,y) = -f(y,x)$) מראה ש- $(f_y)_x(0,0) = 1$. כלומר $(f_x)_y(0,0) \neq (f_y)_x(0,0)$.

אך מתברר שהשוויון $f_{xy} = f_{yx}$ דוקא כן מתקיים בתנאים מאוד רחבים.

<u>משפט.</u> אם שתי הנגזרות החלקיות המעורבות f_{xy}, f_{yx} קיימות בתחום ורציפות בו, אז הן שוות.

הוכחה. אפשר להוכיח את המשפט, ואפילו משפט כללי יותר, באופן ישיר (ראו בספר של מייזלר). אנחנו נדחה את ההוכחה, וניתן אותה בסעיף הבא בעזרת אינטגרלים התלויים בפרמטר. □

1.5 אינטגרל התלוי בפרמטר

הנגזרות החלקיות של פונקציה של שני משתנים מתקבלות כאשר "מקפיאים" את הערך של משתנה אחד וגוזרים אותה עפ"י המשתנה האחר. באופן דומה נוכל גם לבצע אינטגרציה עפ"י משתנה אחד ולקבל פונקציה חדשה $F(u) = \int_a^b f(x,u)dx$ התלויה רק במשתנה האחר. למשתנה u מתייחסים לפעמים כאל פרמטר, ומכאן השם אינטגרל התלוי בפרמטר.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה במלבן $[a,b] \times [\alpha,\beta]$. אז הפונקציה $F(u) = \int_a^b f(x,u)dx$ היא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha,\beta]$.

הוכחה. נקבע $\varepsilon > 0$. הפונקציה f רציפה בקבוצה סגורה וחסומה (מלבן סגור), ולכן היא רציפה שם במ"ש ויש $\delta = \delta(\varepsilon)$ כך ש- $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ לכל P, Q במלבן המקיימות $d(P, Q) < \delta$.

תהיינה כעת $u_1, u_2 \in [\alpha, \beta]$ כך ש- $|u_1 - u_2| < \delta$. אז גם $d((x, u_1), (x, u_2)) < \delta$ ולכן

$$|F(u_1) - F(u_2)| \le \int_a^b |f(x, u_1) - f(x, u_2)| dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a) \ .$$

□

למעשה נכון משפט כללי יותר

<u>משפט.</u> תהי f מוגדרת במלבן $[a, b] \times [\alpha, \beta]$. אם f רציפה במלבן אז הפונקציה $F(s, t, u) = \int_s^t f(x, u) dx$ רציפה בתיבה $[a, b] \times [a, b] \times [\alpha, \beta]$.

בפרט, אם $A, B : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ הן שתי פונקציות רציפות, אז גם הפונקציה $\varphi(u) = \int_{A(u)}^{B(u)} f(x, u) dx$ היא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha, \beta]$.

הוכחה. לשם פשטות נניח שהגבול התחתון קבוע, ונסתכל בפונקציה של שני משתנים $F(t, u) = \int_a^t f(x, u) dx$.

נקבע $\varepsilon > 0$, ונציג את $F(t + \Delta t, u + \Delta u) - F(t, u)$ כסכום

$$\int_a^t \big(f(x, u + \Delta u) - f(x, u)\big) dx + \int_t^{t + \Delta t} f(x, u + \Delta u) dx$$

ונעריך כעת כל מחובר בנפרד.

את המחובר הראשון נעריך כמו במשפט הקודם. מרציפות במ"ש נמצא δ כך ש- $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ לכל P, Q במלבן המקיימות $d(P, Q) < \delta$. ואז אם $|u_1 - u_2| < \delta$ אז

$$\int_a^t |f(x, u_1) - f(x, u_2)| dx < \varepsilon(t - a) \le \varepsilon(b - a) \ .$$

להערכת המחובר השני נשתמש בכך שפונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה היא פונקציה חסומה, ונמצא M כך ש- $|f(x, y)| \le M$ לכל (x, y) במלבן. ואז

$$\left| \int_t^{t + \Delta t} f(x, u + \Delta u) dx \right| \le M |\Delta t| \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

הרציפות של φ נובעת מהחלק הראשון ומהרציפות של הרכבת פונקציות רציפות.

□

נעבור כעת לגזירה של האינטגרל עפ"י הפרמטר.

משפט. [כלל הגזירה מתחת לסימן האינטגרל] תהי f מוגדרת במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ כך ש- f גזירה עפ"י y, וכך ש- f ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות. אז הפונקציה $F(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$, ונגזרתה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\frac{dF}{du}(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx \ .$$

הוכחה. על פי משפט לגרנז' יש $\theta=\theta(u,x,\Delta u)$ עם $0<\theta<1$ כך ש

$$\Delta F=\int_a^b \big[f(x,u+\Delta u)-f(x,u)\big]dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,u+\theta\Delta u)\cdot\Delta u\,dx \ .$$

עפ"י המשפט הקודם $G(y)=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ היא פונקציה רציפה, ולכן

$$\frac{\Delta F}{\Delta u}=\int_a^b \frac{\partial f(x,u+\theta\Delta u)}{\partial y}dx=G(u+\theta\Delta u)\underset{\Delta u\to 0}{\longrightarrow}G(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx \ .$$

$\square$

כמו ביחס לרציפות, גם כאן יש משפט כללי יותר.

משפט. תהי f מוגדרת במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ כך ש- f גזירה עפ"י y, וכך ש- f ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן. אז הפונקציה $F(s,t,u)=\int_s^t f(x,u)dx$ דיפרנציאבילית בתיבה $[a,b]\times[a,b]\times[\alpha,\beta]$.

בפרט, אם הפונקציות $A,B:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ הן שתי פונקציות גזירות, אז גם הפונקציה $\varphi(u)=\int_{A(u)}^{B(u)} f(x,u)dx$ גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$ ונגזרתה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\frac{dF}{du}(u)=B'(u)f(B(u),u)-A'(u)f(A(u),u)+\int_{A(u)}^{B(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx \ .$$

הוכחה. נוכיח את הדיפרנציאביליות של F ע"י כך שנראה שהיא גזירה עפ"י שלושת המשתנים, וכי נגזרותיה החלקיות רציפות בתיבה.

ואמנם, עפ"י המשפט הקודם $\frac{\partial F}{\partial u}(s,t,u)=\int_s^t \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx$, וזו פונקציה רציפה בתיבה עפ"י הנחת הרציפות של $\frac{\partial f}{\partial y}$ ועפ"י המשפט על רציפות.

בחישוב שתי הנגזרות החלקיות האחרות ערך הפרמטר קבוע, ולכן נשתמש במשפט היסודי של החדו"א ונקבל כי

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t,u)=f(t,u) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial s}(s,t,u)=-f(s,u)$$

ועפ"י הנתון אלה פונקציות רציפות.

הגזירות של φ, והנוסחה לנגזרתה נובעות מכלל השרשרת. $\square$

הגדרה. אם הפונקציה $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ אינטגרבילית בקטע $[\alpha,\beta]$, אז לאינטגרל שלה $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$ נקרא אינטגרל נשנה של f. באופן דומה אפשר גם לבצע את האינטגרציות בסדר הפוך, ולקבל את האינטגרל הנשנה $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right) dx$.

מתברר שבתנאים די כלליים שני האינטגרלים הנשנים שווים. (איפורמציה נוספת עליהם נקבל בפרק על האינטגרל הכפול). אנחנו נוכיח רק מקרה מאוד פשוט.

משפט. אם f רציפה במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$, אז

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right) dx \ .$$

הוכחה. נגדיר שתי פונקציות של המשתנה t

$$\varphi(t)=\int_\alpha^t \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy \qquad ; \qquad \psi(t)=\int_a^b \left(\int_\alpha^t f(x,y)dy\right) dx$$

ונראה שהן שוות, ובפרט $\varphi(\beta)=\psi(\beta)$ כמבוקש. היות ש- $\varphi(\alpha)=\psi(\alpha)$, די שנראה ש- $\varphi'=\psi'$, ולשם כך נשתמש במשפטים שלמדנו.

הפונקציה $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ רציפה, ולכן עפ"י המשפט היסודי של החדו"א

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}\int_\alpha^t F(y)dy = F(t) = \int_a^b f(x,t)dx \ .$$

שוב עפ"י המשפט היסודי של החדו"א, הפונקציה $G(x,t)=\int_\alpha^t f(x,y)dy$ גזירה עפ"י t ונגזרתה $\frac{\partial G}{\partial t}(x,t)=f(x,t)$ רציפה, ולכן גזירה מתחת לסימן האינטגרל נותנת כי גם

$$\psi'(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b G(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(x,t)dx = \int_a^b f(x,t)$$

כמבוקש. $\square$

דוגמא.

נקבע $0<a<b$ ונחשב את $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}dx$. לשם כך נשים לב כי $\frac{x^b-x^a}{\log x}=\int_a^b x^y dy$, וע"י החלפת סדר האינטגרציה נקבל כי

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x}dx &= \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y dy\Big)dx = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y dx\Big)dy \\ &= \int_a^b \Big(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1}\Big)dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log\frac{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

נחזיר כעת חוב מהסעיף הקודם ונוכיח את המשפט הבא

<u>משפט.</u> אם שתי הנגזרות החלקיות המעורבות f_{xy}, f_{yx} קיימות בתחום D ורציפות בו, אז הן שוות.

הוכחה. נחשב תחילה את האינטגרל הנשנה $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right) dy$ כאשר המדבן $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ מוכל ב- D.

הפונקציה $\varphi(y) = \int_a^b f_x(x,y)dx = f(b,y)-f(a,y)$ גזירה, וחישוב ע"י גזירה מתחת לסימן האינטגרל מראה שנגזרתה היא $\varphi'(y) = \int_a^b f_{x,y}(x,y)dx$, ולכן

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right) dy &= \int_\alpha^\beta \varphi'(y)dy = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\\ &= f(b,\beta)-f(a,\beta)-f(b,\alpha)+f(a,\alpha)\end{aligned}$$

חישוב דומה מראה שגם

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f_{xy}(x,y)dy\right) dx = f(b,\beta)-f(a,\beta)-f(b,\alpha)+f(a,\alpha)$$

כלומר האינטגרלים $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f_{xy}(x,y)dy\right) dx$ שווים.

נניח כעת שיש נקודה P ו- $\delta > 0$ כך ש- $f_{xy}(P) > f_{yx}(P) + 2\delta$ ואז, מרציפות הנגזרות העורבות, נקבל שיש מלבן קטן $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ שמרכזו ב- P ויש קבוע K כך שלכל Q במלבן מתקיימים אי השוויונים $f_{xy}(Q) \geq K$ ו- $f_{yx}(Q) \leq K-\delta$. לכן

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right) dy \leq (K-\delta)|R| < K|R| \leq \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f_{xy}(x,y)dy\right) dx$$

בסתירה לכך ששני האינטגרלים שווים. $\square$