דף תרגילים מס. 5 – אלגברה לינארית ב'

1. תהי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ המכפלה הסטנדרטית על R^2.
   א. יהי $a=(1,2), b=(-1,1)$ ויהי c וקטור עבורו $\langle b,c\rangle=3$, $\langle a,c\rangle=-1$. מצא את c.
   ב. לכל $\alpha\in R^2$ הראה כי $\alpha=\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\langle\alpha,e_2\rangle e_2$.
2. תהי A מטריצת 2×2 מעל הממשיים. עבור $x,y\in R^{2\times 1}$ נגדיר $f_A(x,y)=y^tAx$. הוכח כי f_A הינה מכפלה פנימית אמ"ם $A=A^t$, $A_{11}>0$, $\mathrm{A}_{22}>0$ ו $\det(A)>0$.
3. א. יהי V המרחב הוקטורי של הפולינומים עם מקדמים ממשיים, $V=R[x]$. ונגדיר: $\langle\sum_{i=0}^n a_ix^i,\sum_{j=0}^m b_jx^j\rangle=\sum_{i=0,j=0}^{n,m}\frac{a_ib_j}{i+j+1}$. הוכח כי זו מכפלה פנימית.
   רמז: שים לב כי $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ עבור זוג פולינומים f,g.

   ב. יהי W תת המרחב של V הנפרש ע"י $B=\{1,x,\dots,x^n\}$. מצא מטריצה A עבורה לכל $a,b\in W$ מתקיים $\langle a,b\rangle=[b^t]_BA[a]_B$.

4. יהי V מ"ו עם בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$. הראה כי לכל n סקלרים $c_1,\dots,c_n$ יש וקטור יחיד $v\in V$ עבורו $\langle v,v_i\rangle=c_i$.

4. יהי V מ"ו מעל C וJ הצמדה על V. יהי W מרחב וקטורי מעל R המוגדר ע"י כל ה $v\in V$ עבורם $Jv=v$ ותהי $f(\cdot,\cdot)$ מכפלה פנימית על W.
   א. הוכח כי יש מכפלה פנימית יחידה g על V המזדהה עם f על W.
   ב. $g(J\alpha,J\beta)=g(\beta,\alpha)$ לכל $\alpha,\beta\in V$.