פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 4

.1

א. נניח בדרך השלילה ששני הפסוקים D, $\neg C$ אינם יכיחים. ממשפט השלמות נובע ששניהם אינם טאוטולוגיות. לכן קיימות השמות M_1, M_2 כך ש־ $M_1 \not\models \neg C, M_2 \not\models D$. מכיוון שאף פסוק אטומי אינו מופיע גם ב־ C וגם ב־ D, קיימת השמה M המסכימה עם M_1 על הפסוקים האטומיים המופיעים ב־ C ומסכימה עם M_2 על אלו המופיעים ב־ D. עבור M כזאת מתקיים $M \models C, M \not\models D$ ולכן $M \not\models C \to D$. מכאן נובע כי $C \to D$ אינו טאוטולוגיה, ולכן לפי משפט הנאותות אינו יכיח, בסתירה להנחה.

ב. נקח $C = D = p$, כאשר p פסוק אטומי. אז $\vdash p \to p$ אבל לא $\vdash \neg p$ וגם לא $\vdash p$,כי שני האחרונים אינם טאוטולוגיות.

.2

א. הפסוק A יכיח במערכת $\mathcal{L}_{+A}$, כי הוא אקסיומה במערכת זו, אבל איננו טאוטולוגיה, ולכן המערכת איננה נאותה.

ב. תהי M השמה שבה A שקרי (קיימת כזאת כי A איננו טאוטולוגיה). נבצע ב־ A את הפעולות הבאות: במקום כל פסוק אטומי p כך ש־ $M(p) = T$, נציב טאוטולוגיה כלשהי, ובמקום כל פסוק אטומי q כך ש־ $M(q) = F$, נציב סתירה כלשהי. נסמן ב־ $\hat{A}$ את הפסוק המתקבל בדרך זו. מכיוון ש־ $\hat{A}$ התקבל ע"י הצבת פסוקים במקום הפסוקים האטומיים ב־ A, הוא אקסיומה במערכת $\mathcal{L}_{+A}$, ולכן יכיח בה. מצד שני, לפי בנייתו $\hat{A}$ הוא סתירה, ולכן $\neg\hat{A}$ טאוטולוגיה. לפי משפט השלמות $\neg\hat{A}$ יכיח במערכת ההוכחה הרגילה, ולכן בוודאי במערכת $\mathcal{L}_{+A}$. יוצא אפוא ש־ $\hat{A}$ הוא פסוק שהוא ושלילתו יכיחים במערכת $\mathcal{L}_{+A}$.

ג. לפי למה מההרצאה, הפסוק $\neg\hat{A} \to (\hat{A} \to C)$ יכיח במערכת הרגילה לכל C. לכן הוא יכיח גם במערכת $\mathcal{L}_{+A}$, ומכיוון שגם $\hat{A}, \neg\hat{A}$ יכיחים בה, ניתן להוכיח בה את C ע"י ניתוקי רישא.

3. תהי $\sum$ קבוצת פסוקים ויהי A פסוק, כך ש־ $\sum \vdash A$. עלינו להראות כי $\sum \models A$, כלומר שלכל מודל M של $\sum$ מתקיים $M \models A$. יהי M מודל כלשהו של $\sum$, ותהי $B_1, B_2, \ldots, B_m = A$ הוכחה של A מתוך $\sum$. נוכיח באינדוקציה על i כי עבור $i = 1, \ldots, m$ מתקיים $M \models B_i$, ובכך נסיים כי $B_m = A$. נתבונן ב־ B_i כלשהו. קיימות שלוש אפשרויות:

א. B_i אקסיומה.

ב. $B_i \in \sum$.

ג. B_i נובע מפסוקים קודמים ע"י כלל היסק.

במקרה א', B_i אמיתי בכל השמה, בפרט ב־ M.
במקרה ב', נובע מן העובדה ש־ M מודל של $\sum$ שמתקיים $M \models B_i$.
במקרה ג', קיימים $j, k < i$ כך ש־ $B_j = B_k \to B_i$. לפי הנחת האינדוקציה $M \models B_k$, $M \models B_j$, ולכן לפי הגדרת האמיתות עבור גרירה, חייב להתקיים $M \models B_i$.

4. נניח כי $\sum = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. נתבונן בפסוק $B = A_1 \to (A_2 \to (\cdots (A_n \to A) \cdots))$. הפסוק הזה הוא טאוטולוגיה, כי אילו היתה השמה M שבה הוא שקרי, היא היתה חייבת לקיים $M \models A_i$ עבור $i = 1, \ldots, n$ ו־ $M \not\models A$, ואז היא היתה מודל של $\sum$ שבו A שקרי, בסתירה להנחה ש־ $\sum \models A$. לפי משפט השלמות נובע ש־ B יכיח. נוכל להוכיח את A מתוך $\sum$ באופן הבא: נכתוב הוכחה של B, נכתוב את A_1, ננתק רישא, נכתוב את A_2, ננתק רישא, וכן הלאה עד לקבלת A.