תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 8

פתרונות

תרגיל 1.

(א)

(i)

$$f_{X,Z}(x,z) = \int_0^2 g(x,y,z)dy = \frac{f(x) + 2f(x)f(z) + f(z)}{6}.$$

(ii)

$$f_X(x) = \int_0^2 f_{X,Z}(x,z)dz = \frac{2f(x) + 2f(x) + 1}{6} = \frac{4f(x) + 1}{6}.$$

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{x^3+1}{6}dx = \frac{32}{30} + \frac{1}{3} = \frac{7}{5}.$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\frac{x^3+1}{6}dx = \frac{64}{36} + \frac{8}{18} = \frac{20}{9}.$$

$$\text{VAR }(X) = \frac{20}{9} - \frac{49}{35} = 2 + \frac{2}{9} - \frac{14}{35} = 2 - \frac{8}{45} = 1\frac{37}{45}.$$

(ב)

עבור כל מספרים ממשיים a, b, c, d מתקיים:

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = V(b,d) - V(b,c) + V(a,c) - V(a,d) = 0.$$

לכן $V(x,y)$ אינה פונקצית התפלגות.

(ג)

לפי ההגדרה של תחום D:

$$(a,b) \in D \Rightarrow \ P(X \le a, Y \le b) = 1.$$

נגדיר:

$$x^* := \inf\{x : P(X < x) = 1\}, \quad y^* := \inf\{y : P(Y < y) = 1\}.$$

בהגדרה הזאת מניחים כרגיל ש- $\inf\{\emptyset\} = \infty$.
נשים לב כי מצד אחד

$$\begin{aligned}
&P(X \le x^*) = 1, P(Y \le y^*) = 1 \;\Rightarrow \\
&P(X \le x^*, Y \le y^*) = 1 \;\Rightarrow \\
&(x^*, y^*) \in D
\end{aligned}$$

ומצד שני

$$\begin{aligned}
&\text{if either} \quad P(X \le x) < 1 \quad \text{or} \quad P(Y \le y) < 1 \;\Rightarrow \\
&P(X \le x, Y \le y) < 1 \;\Rightarrow \\
&(x, y) \notin D.
\end{aligned}$$

פרושו של הדבר:

$$D = [x^*, \infty) \times [y^*, \infty).$$

<u>תרגיל 2</u>.

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dx = 2 + \varphi(y) \int_0^1 \varphi(x)dx = \\
&= 2 + \varphi(y) \left(\int_0^{1/2} (4x-1)dx + \int_{1/2}^1 (4x-3)dx \right) = \\
&= 2\varphi(y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 y f_Y(y)dy = \\
&= 2 \left(\int_0^{1/2} y(4y-1)dy + \int_{1/2}^1 y(4y-3)dy \right) = \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X>2Y) &= \int\int_{x>2y} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{1/2}^{1} dx \int_{x/2}^{1/2} f_{X,Y}(x,y)dy = \\ &= \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1}(4x-3)dx\int_{x/2}^{1/2}(4y-1)dy = \\ &= \frac{1}{2} + \int_{1/2}^{1}(4x-3)\frac{x}{2}(1-x)dx = \ (t=1-x) \\ &= \frac{1}{2} + \int_{0}^{1/2}(1-4t)\frac{1-t}{2}tdt = \frac{47}{96}. \end{aligned}$$

תרגיל 3.

$$\begin{aligned} P(X<Y\geq Z) &= \int\int\int_{x<y\geq z} f_{X,Y,Z}(x,y,z)dxdydz = \\ &= 12\int_0^1 ydy\int_0^y x^2dx\int_0^y zdz = \\ &= 2\int_0^1 y^6dy = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

תרגיל 4.
נסמן:

$$x_n = E(S_n) - E(S_{n-1}).$$

לפי נוסחת הנסיגה:

$$E(S_{n+1}) = \alpha E(S_n) + E(Z) = \alpha E(S_n) + \frac{1}{p}. \tag{1}$$

$$E(S_n) = \alpha E(S_{n-1}) + E(Z) = \alpha E(S_{n-1}) + \frac{1}{p}. \tag{2}$$

נחסיר מהשורה הראשונה את השניה ונקבל באינדוקציה:

$$x_{n+1} = \alpha x_n = \ldots = \alpha^n x_1 = \alpha^n\left(\alpha + \frac{1}{p}\right).$$

לכן:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i + 1 = 1 + \left(\alpha + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right).$$

באופן דומה, אם נניח כי ה"תוספת" Z כל פעם ב"ת ב- S_n,

$$VAR(S_{n+1}) = \alpha VAR(S_n) + VAR(Z) = \alpha VAR(S_n) + \frac{q}{p^2},$$

ולכן:

$$VAR(S_n) = \frac{q}{p^2}\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right).$$

תרגיל 5.

יהיו $x_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ **כך ש-** $x_1 + \ldots + x_m = n$

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\ldots\binom{N_m}{x_m}}{\binom{N}{n}}.$$

יהיה $y_1 = 0$ **ו-** $y_j = \sum_{i=1}^{j-1} x_i$ **עבור** $j = 2, \ldots, m$. **את הנוסחה הקודמת ניתן לרשום באופן הבא:**

$$\begin{aligned} &P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \\ &= \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_m!}\prod_{j=1}^{m}\frac{N_j(N_j-1)\ldots(N_j-x_j+1)}{(N-y_j)(N-y_j-1)\ldots(N-y_j-x_j+1)}. \end{aligned}$$

לכן:

$$\lim_{N\to\infty, N_j/N\to\alpha_j} P(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_m!}\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\ldots\alpha_m^{x_m}.$$