אינפי 1 - פתרון גיליון תרגילים מספר 4

1. ראשית נוכיח ש- a_n סדרה יורדת וש- b_n סדרה עולה. יש להוכיח ש- $b_{n+1} \ge b_n$, $a_{n+1} \le a_n$, כלומר, ש - $b_{n+1} \ge \sqrt{a_n b_n}$, $a_{n+1} \le \dfrac{a_n + b_n}{2}$. שני הביטויים שקולים ל- $a_n \ge b_n$. נוכיח באינדוקציה: הבדיקה נובעת מהנתון, $a_1 = 4, b_1 = \dfrac{1}{2}$.
כעת נניח ש - $a_n \ge b_n$. מאי שיוויון הממוצעים נובע ש- $a_{n+1} \ge b_{n+1}$:
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ge \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}.$$
כעת נראה ש- a_n חסומה מלמטה: הראינו ש- $a_n \ge b_n$ וש- b_n עולה ולכן $a_n \ge b_1$. מראים ש- b_n חסומה מלמעלה באופן דומה.
נובע שלשתי הסדרות יש גבול. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. מאריתמטיקה של גבולות ושימוש בהגדרה הרקורסיבית של אחת מהסדרות (a_n) נובע ש - $a = \dfrac{a+b}{2}$ ולכן הגבולות שווים.

2. על פי קריטריון קושי, מספיק להראות שלכל ε קיים N כך שלכל $m > n > N$ מתקיים: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.
$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = \left|\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \ldots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)}\right| \le$$
$$\frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2m-1)^2} \le \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{m(m-1)} =$$
$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$
ולכן אפשר לבחור $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

3. הסדרה ניתנת לפישוט לצורה $a_n = \begin{cases} 2 & n(\text{mod } 4) = 0 \\ 0 & n(\text{mod } 4) \ne 0 \end{cases}$, ולכן הגבולות החלקיים שלה הם 2,0 ו - $\limsup(a_n) = 2, \liminf(a_n) = 0$.

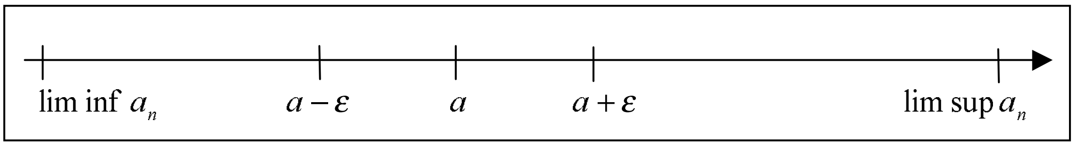
4. א. צריך להוכיח ש- $\liminf(-a_n) = -\limsup(a_n)$
נסמן: $a = \limsup(a_n)$. תהא a_{n_k} תת הסדרה המממשת את a, כלומר, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
טענה: $-a_{n_k}$ מממשת את $\liminf(-a_n)$.
אם הטענה נכונה, אז מתקיים $\liminf(-a_n) = \lim_{k\to\infty} -a_{n_k} = -\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\limsup(a_n)$.
הוכחת הטענה: נניח בשלילה ש- $-a_{n_k}$ לא מממשת את $\liminf(-a_n)$. היות ו- $-a_{n_k}$ היא תת סדרה של a_n, $\liminf(-a_n) < \lim_{k\to\infty}(-a_{n_k}) = -a$. נסמן $-c = \liminf(-a_n)$.
תהא $-a_{j_l}$ תת הסדרה שמממשת את $-c$. אז $\lim_{l\to\infty} -a_{j_l} = -c$, ולכן $\lim_{l\to\infty} a_{j_l} = c$. אבל a_{j_l} היא תת סדרה של a_n ו - $a < c$. מתקבלת סתירה ביחס לכך ש- $a = \limsup(a_n)$.

ב. צריך להראות ש- $\liminf(a_n+b_n)\ge\liminf(a_n)+\liminf(b_n)$. תרגיל זהה למעט כיוון האי שיוויון והחלפת ה - inf ב- sup נעשה בתירגולים ולכן לא נוכיח אותו כאן.

ג. צריך להוכיח ש - $\liminf(a_n+b_n)\le\limsup(a_n)+\liminf(b_n)$.
מסעיפים א׳ וב׳ נובע ש-

$$\liminf(a_n+b_n)-\limsup(a_n)=\liminf(a_n+b_n)+\liminf(-a_n)\le$$
$$\le\liminf(a_n+b_n-a_n)=\liminf(b_n)$$

5. יש להניח בשאלה זו כי a_n היא סדרה בעלת ∞ ערכים (כלומר, לא מקבלת מספר סופי של ערכים בלבד).
תהא $a\in[\liminf a_n,\limsup a_n]$. יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים n כך ש- $|a_n-a|<\varepsilon$.
נניח בשלילה שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $n\in N$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$.



היות ו- $\liminf a_n$ הוא גבול חלקי של a_n, ∞ מאברי הסדרה נמצאים בקטע $(\liminf a_n-(a-\varepsilon-\liminf a_n),a-\varepsilon)$ ומסיבה דומה קיימים ∞מאברי הסדרה ב- $(a+\varepsilon,\limsup a_n+(a+\varepsilon-\limsup a_n))$. במשלים של שתי הסביבות האלה יש לכל היותר מספר סופי של איברים של a_n ולכן לכל N טבעי אפשר למצוא $n>N$ כך ש-

$$a_n\in(\liminf a_n-(a-\varepsilon-\liminf a_n),a-\varepsilon)$$

ו- $a_{n+1}\in(a+\varepsilon,\limsup a_n+(a+\varepsilon-\limsup a_n))$. אזי $|a_{n+1}-a_n|>\varepsilon$, בסתירה לנתון על התכנסות סדרת ההפרשים.

6 צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיימת נקודה $x\ne a\in A$ הנמצאת בסביבת ε של x.
על פי הנתון, לכל $n\ge1$, x_n היא נקודת הצטברות של A, ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיימות אינסוף נקודות, שכולן שייכות ל- A, שונות מ- x_n ונמצאות בסביבה בגודל $\varepsilon/2$ של x_n. לכל $n\ge1$, נבחר אחת מהנקודות האלה, השונה גם מ- x , ונסמנה ב - a_n.
$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$, $|x_n-x|<\varepsilon/2$.

לכל n גדול מ - N זה: $|x-a_n|=|x-x_n+x_n-a_n|\le|x-x_n|+|x_n-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$
ולכן a_n היא ה - a הנדרשת.

7 יש להוכיח לגבי α שאינו רציונלי. נבחר סדרת רציונליים $r_n\to\alpha$. אז לכל $n\in N$ מתקיים $a^{r_n}>b^{r_n}$. לכן בגבול (שאינו תלוי באופן בחירת סדרת הרציונלים r_n) מתקיים: $a^\alpha\ge b^\alpha$.
אם $a^\alpha=b^\alpha$ אזי $(a^\alpha)^{1/\alpha}=(b^\alpha)^{1/\alpha}$ כלומר, $a=b$, סתירה. לכן $a^\alpha>b^\alpha$.