מבוא להסתברות-ח - 104034

חוברת תרגילי בית

הטכניון - מוסד טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה

1 מרחבי הסתברות

1.1 מסובבים שני סביבונים אשר פאותיהם מסומנות 4,3,2,1. נגדיר את המאורעות: A - שני הסביבונים מראים 3. B - סכום הנקודות על שני הסביבונים זוגי. C - לכל היותר אחד משני הסביבונים מראה 3. D - לפחות אחד משני הסביבונים מראה מספר זוגי.

א. רשום מרחב מדגם מתאים ובטא את A, B, C, D כתת קבוצות שלו.

ב. בטא במילים וגם במפורש כקבוצות את כל אחד מן המאורעות הבאים: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap D$, $B \cap C^c$, $D^c \cap B$

ג. תאר במילים את המשלימים של המאורעות A, B, C, D

1.2 זורקים קוביה הוגנת

א. רשום מרחב הסתברות המתאים לניסוי.

ב. מהי ההסתברות שתוצאת הזריקה תהיה מספר ראשוני (לא כולל 1) ?

1.3 זורקים קוביה "מזויפת" כך שהסתברות הופעת פאה מסויימת פרופורציונית למספר המופיע עליה.

א. רשום מרחב הסתברות המתאים לניסוי.

ב. חשב את ההסתברות שתוצאת הזריקה היא מספר ראשוני.

1.4 במרחב המדגם $\{D_1, D_2, \dots D_6\}$ הסבר למה לא ייתכן ש- $P(\{D_1, D_2, D_3, D_4\}) = 0.8$ ו- $P(\{D_3, D_5, D_6\}) = 0.1$.

1.5 הראה שיש הסתברות גדולה יותר לקבל לפחות פעם אחת 6 בזריקה של ארבע קוביות מאשר לפחות פעם אחת (6,6) ב-24 זריקות של שתי קוביות.

1.6 אלו מבין הפונקציות הבאות המוגדרות על תת הקבוצות של $\Omega = \{1..., n\}$ מגדירות הסתברות ? הוכח טענותיך ($|A|$ מספר האיברים בקבוצה A).

א. $P(A) = |A|/n$

ב. $P(A) = |A|^2/n^2$

1.7 $P(B^C) = 1/4, P(A) = 1/3$ האם A ו-B זרים ? הוכח.

1.8 הוכח: $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

1.9 שלושה מטבעות הוגנים (המסומנים H ו-T כ"א) נזרקים בבת אחת.

א. רשום מרחב מדגם המתאים לנסוי.

ב. מצא את ההסתברות של המאורעות הבאים:

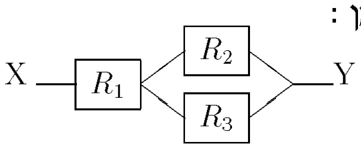
* H מופיע לפחות פעם אחת.
* מתקבלים רק H-ים או רק T-ים

1.10 נתון משולש שווה צלעות. בוחרים באקראי נקודה במשולש.

א. רשום מרחב הסתברות המתאים לנסוי.

ב. מה ההסתברות שמרחק הנקודה מכל הקודקודים יהיה גדול ממחצית אורך הצלע?

1.11 המערכת שבציור עובדת אם יש מסלול תקין מ-X ל-Y. יהיה Ω מרחב המדגם המורכב מכל 8 האפשרויות לפעולת הרכיבים. סמן :



A = {R_2 מקולקל אך המערכת עובדת}

B = {R_3 מקולקל אך המערכת עובדת}

C = { המערכת עובדת}

א. הצג את אברי Ω, A, B, C.

ב. האם A ו-B זרים ? האם A ו-C זרים ? האם B ו-C זרים?

1.12 זורקים שתי קוביות סימטריות (הוגנות). יהי M המספר הגדול ביותר מבין שני המספרים שהתקבלו ב-2 הקוביות. מצא את ההסתברות של המאורעות הבאים:

$$\{M \leq 3\}, \quad \{M < 3\}, \quad \{M \geq 5\}, \quad \{2 < M < 5\}, \quad \{2 \leq M < 4\}$$

1.13 עורכים סדרה של 5 הטלות מטבע הוגן. מצא את ההסתברויות של המאורעות המשלימים למאורעות הבאים:

א. לא היתה אף הצלחה

ב. היו לפחות 4 הצלחות

1.14 הקיסר הרומי הזמין n זוגות (בחור ובחורה) לנשף תחפושות. הוא סידר את המשתתפים באופן אקראי לזוגות (לאו דווקא בחור ובחורה) עבור הריקודים.

א. מה ההסתברות שכל הזוגות המקוריים רוקדים ביחד ?

ב. מה ההסתברות שכל זוג מכיל בחור ובחורה ?

1.15 נתונה חפיסה רגילה של 52 קלפים.

א. האם המאורעות "לבבות" ו-"שחור" בלתי תלויים ?

ב. האם המאורעות "לבבות" ו-"מלך" בלתי תלויים ?

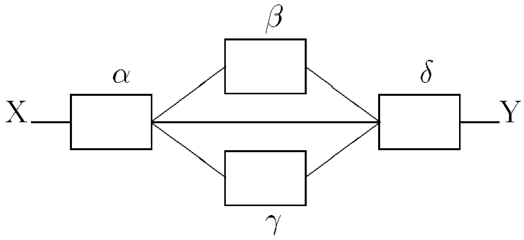
1.16 הוכח את הטענות הבאות

א. לכל שני מאורעות A ו- B, $\quad P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

ב. לכל n מאורעות $\quad P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq P(A_1) + \ldots.. + P(A_n) - (n-1)$

1.17 מערכת מורכבת מ-3 רכיבים בלתי תלויים כמו בציור ב-1.11, כאשר R_1, R_2 ו-R_3 תקינים בהסתברויות 0.9, 0.5 ו-0.6 בהתאמה. מהי ההסתברות שהמערכת כולה תקינה ?

1.18 כמו השאלה הקודמת, מצא את ההסתברות שהמערכת המתוארת למטה תקינה, במונחים של $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$, שהן ההסתברויות שהרכיבים תקינים.



1.19 פקיד מכניס באקראי n מכתבים אישיים ל-n מעטפות שעל גביהן כבר רשומות הכתובות. מה ההסתברות לכך שאף מכתב לא הוכנס למעטפה הנכונה

א. כאשר $n=3$?

ב. כאשר n גדול (בקירוב) ?
הדרכה: סמן $A_i = \{$ המכתב מס' i הוכנס למעטפה הנכונה $\}$.

2 הסתברות מותנית

2.1 זורקים שתי קוביות בו זמנית. ידוע שסכום התוצאות הוא לפחות 10.

א. מהי ההסתברות המותנית שהאחת מראה 6 והשנייה מראה 5 ?

ב. מהי ההסתברות המותנית שהתוצאה הקטנה ביותר ביניהן היא 4 ?

2.2 אם A, B בלתי תלויים, הראה ש-A, B^c גם בלתי תלויים וכך גם A^c, B^c.

2.3 השלם והוכח: A ו-A^c לא יכולים להיות בלתי תלויים אלא אם כן...

2.4 הוכח או הפרך: אם E ו-F מאורעות זרים אזי E ו-F בלתי תלוים.

2.5 מערכת מורכבת מנגד וקבל. נסמן $R=\{$הנגד תקין$\}$, $C=\{$הקבל תקין$\}$. על סמך תצפיות התקבלו ההסתברויות: $P(C|R^c)=0.95$, $P(C|R)=0.95$, $P(R)=0.9$.
חשב את $P(R^c|C^c)$, $P(R|C)$, $P(R\cap C)$, $P(C)$.

2.6 מכיתה בה לומדים 30 בנים ו 10 בנות בוחרים משלחת בת ארבעה תלמידים.

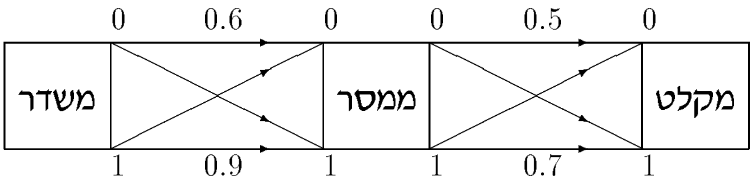
א. מה ההסתברות שהראשון שנבחר הוא בת ?

ב. הראה שההסתברות שהשני שנבחר הוא בת שווה להסתברות ב-א'.

ג. מה ההסתברות שהמשלחת תמנה 2 בנים ו- 2 בנות ?

2.7 במאפיה שלושה תנורים. A, B, C. ב-A נאפת 25% מכמות הלחם ביום, ב-B - 35% וב-C - 40%. אחוז הככרות השרופים בתנור A הוא 5% מתפוקתו, ב-B - 4% וב-C - 2%. מהי ההסתברות שככר שרופה נאפתה בתנור A ?

2.8 נתונה מערכת תקשורת המורכבת ממשדר, תחנת ממסר ומקלט. משדרים מסרים בע-זרת הספרות "0" ו-"1". על הציור מסומנות הסתברויות המעבר.



א. חשב את ההסתברות לקלוט 0 אם ידוע ששודר 0.

ב. אם משדרים 0 בהסתברות 0.8 חשב את ההסתברות לשדר 1 ולקלוט בסוף 1.

2.9 בהינתן מאורע B המקיים $P(B) > 0$ ניתן להתאים לכל מאורע A את הערך $P(A|B)$. נגדיר $P^*(A) = P(A|B)$. הוכח ש-P^* היא פונקצית הסתברות.

2.10 נאמר שמאורע F נושא אינפורמציה שלילית על מאורע E אם $P(E|F) \leq P(E)$, ונסמן זאת $E \searrow F$. הוכח או הפרך:

א. אם $E \searrow F$ אזי $F \searrow E$

ב. אם $E \searrow F$ ו- $F \searrow G$ אזי $E \searrow G$.

2.11 כד מכיל 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים. כדור מוצא באופן מקרי ובמקומו מוכנס כדור בעל הצבע האחר. לאחר מכן מוצא כדור נוסף.

א. מצא את ההסתברות לכך שהכדור השני שהוצא הוא אדום.

ב. מצא את ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו אדומים.

ג. אם שני הכדורים שהוצאו הם מאותו צבע, מצא את ההסתברות לכך ששניהם היו לבנים.

2.12 אם $P(A) = 1/2$, $P(B) = P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/8$ ו- $P(A \cap B \cap C) = 1/32$, חשב את

א. $P(A \cup B|C)$

ב. $P(A|B \cap C)$

ג. $P(A \cap B|C)$

2.13 בפירמידה משולשת סימטרית צבועה הפאה הראשונה באדום, השנייה בכחול, השלישית בירוק והרביעית באדום, כחול וירוק. נגדיר E = {הפאה עליה נופלת הפירמידה מכילה אדום} F = {הפאה עליה נופלת הפירמידה מכילה כחול} G = {הפאה עליה נופלת הפירמידה מכילה ירוק}.
האם E, F, G תלויים ? האם E, F, G תלויים בזוגות ?

2.14 במשחק רולטה רוסית, בוחר המשתתף באופן מקרי באחד משלושה אקדחים. כל אקדח מכיל 6 תאים לכדורים. מספר התאים הריקים הוא 2, 3 ו- 4 בהתאמה.

א. המשתתף במשחק נהרג. מה ההסתברות שהוא בחר באקדח בעל 4 תאים ריקים ? באקדח בעל 3 תאים ריקים ? באקדח בעל שני תאים ריקים ?

ב. המשתתף נהרג. מה ההסתברות שבחר באחד מהאקדחים או עם 3 תאים ריקים או עם ארבעה תאים ריקים ?

ג. תענה לסעיף א' אם נתון עתה שהמשתתף במשחק נשאר בחיים.

2.15 תחנה משדרת אחד מ-4 האותות a, b, c, d כאשר $P(a) = 0.1$, $P(b) = 0.15$, $P(c) = 0.25$, $P(d) = 0.5$. אם נסמן ב-$P(e|x)$ את ההסתברות לשגיאה במקלט כאשר שודר x ($x = a, b, c, d$), $P(e|a) = 0.4$, $P(e|b) = 0.4$, $P(e|c) = 0.2$, $P(e|d) = 0.5$. בשידור בו ידוע כי לא שודר d היתה שגיאה. מה ההסתברות שהאות ששודר היה b ?

2.16 מלבד ליאת יש k משתתפים נוספים בהגרלה, כאשר k יכול להיות 4,3,2,1,0 או 5, וזאת בהסתברות שהיא פרופורציונלית ל-$(k+1)^2$, דהיינו $P(\text{נוספים } k) = C(k+1)^2$.

א. מהו C ?

ב. מהי ההסתברות שליאת תזכה בהגרלה ?

ג. חזור על הסעיפים א) ו-ב) כאשר יש לכל היותר n משתתפים נוספים (במקום 5).

2.17 אם ידוע שהמערכת בשאלה 1.17 תקינה, מהן ההסתברויות לכך שכל אחד מהרכיבים תקין ?

2.18 הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

ב. $P(A|B^c) = 1 - P(A|B)$

2.19 כל אחד מ- n כדים מכיל w כדורים לבנים ו- b כדורים שחורים. מעבירים כדור מהכד הראשון לשני, מהשני לשלישי, וכוא, כאשר בכל שלב הכדור שמועבר נבחר באקראי. מהי ההסתברות שהכדור שבסוף מוצא מהכד ה- n-י יהיה לבן, עבור

א. $n = 1,\ 2,\ 3$?

ב. n כללי ?

2.20 אוניה במצוקה נמצאת באחד מן האזורים A, B, C, D, E לפי ההסתברויות בטבלה (שורה ראשונה). מטוס קל המסייר באזור שבו נמצאת האוניה יגלה אותה לפי ההסתברות בטבלה (שורה שניה).

אזור	E	D	C	B	A
הסיכוי שהאוניה נמצאת באזור	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1
הסיכוי לגילויה אם היא נמצאת באזור	0.9	0.8	0.6	0.4	0.8

א. המטוס סורק את כל האזורים (פעם אחת). מה ההסתברות שיגלה את האוניה ?

ב. אם האוניה לא התגלתה ב-D, מה ההסתברות שהיא נמצאת ב-E ?

ג. בהסתמך על כך שנערך חפוש בכל האזורים והאוניה לא התגלתה, באיזה אזור תימצא האוניה בהסתברות הגבוהה ביותר ? נמק!

3 משתנים מקריים בדידים

3.1 בכד אחד נמצאים 3 כדורים במשקלים 1, 2, 2 ק"ג. בכד שני נמצאים 3 כדורים שמשקלם 2, 4, 4 ק"ג. בוחרים בכד באופן מקרי וממנו מוציאים באופן מקרי כדור. מהן פונקצית ההסתברות ופונקצית ההתפלגות של משקל הכדור שנבחר ?

3.2 זורקים זוג קוביות הוגנות. מצא ושרטט את פונקצית ההסתברות ופונקצית ההתפלגות של התוצאה הגדולה מבין שתי התוצאות שתתקבל (במקרה שלשתי הקוביות מספר זהה - המספר עצמו).

3.3 מטילים קוביה סימטרית פעמיים. נגדיר את המשתנים המקריים הבאים:
המינימום בין שתי התוצאות= W התוצאה הראשונה פחות התוצאה השניה= D.
מצא לכל אחד מהמשתנים המקריים הללו את פונקציות ההסתברות וההתפלגות.

3.4 זורקים שני ארבעונים משוכללים שפאותיהם מסומנות ב-1,2,3,4. מכפלת התוצאות תסומן ב-X. מצא את פונקציות ההסתברות וההתפלגות של X.

3.5 מכונה ליצירת מספרים אקראיים מוציאה בכל לחיצה על כפתור, בהסתברויות שוות ובאופן בלתי תלוי, ספרה אחת מתוך 0,1,...,9. מפעילים את המכונה 7 פעמים. מה ההסתברות לכך ש-

א. הספרה 0 הופיעה בדיוק 3 פעמים?

ב. הספרה 0 הופיעה לפחות 3 פעמים?

ג. הספרה 8 הופיעה לכל היותר 3 פעמים?

3.6 סוג מסויים של ממסר פועל 95% מהזמן. מבצעים 10 ניסויים בלתי תלוים. חשב את

א. ההסתברות שהממסר יפעל ב-7 ניסויים ויכשל ב-3.

ב. ההסתברות שהממסר יפעל בלפחות 7 ניסויים אם ידוע שפעל בלפחות חמישה.

3.7 הנסיון מראה כי 10% מהאנשים המזמינים מקומות במסעדה מסויימת, ובה 38 מקומות, אינם מופיעים. אם נרשמו 40 הזמנות מהי ההסתברות שלכל הסועדים שיופיעו יהיה מקום ? השווה את הפתרון המדוייק עם הקירוב הפואסוני.

3.8 מערכת ובה 4 נורות הדולקות באופן בלתי תלוי מופעלת במשך 10 שעות. ההסתברות לכך שנורה תפעל יותר מ-10 שעות היא p=0.4. המערכת נכשלת כאשר יותר מ-2 נורות לא פועלות. חשב את ההסתברות ש-

א. המערכת לא תיכשל.

ב. המערכת לא תיכשל אם ידוע שלפחות נורה אחת תפעל יותר מ-10 שעות.

3.9 נתונה סדרת נסויי ברנולי בלתי תלויים עם הסתברות להצלחה p. נגדיר:
X =מספר הנסויים עד ההצלחה השניה, Y =מספר הנסויים עד ההצלחה ה-i -ית.
מצא את פונקציות ההסתברות של X ושל Y.

3.10 אדם שיכור חוזר לביתו ובידיו צרור של n מפתחות אשר בו רק אחד הפותח את דלת ביתו. בכל פעם הוא מנסה מפתח עד שהדלת נפתחת (כל מפתח שנכשל מוחזר לצרור).

א. מצא את ההסתברות שהדלת תפתח בניסיון ה- k-י.

ב. מצא את ההסתברות שהדלת תיפתח לכל היותר ב-k נסיונות.

ג. מהי התשובה לסעיף א' אם האדם מספיק פיקח בכדי לא להחזיר לצרור מפתח שנכשל ?

3.11 מטילים מטבע בעל הסתברות p להצלחה עד שמצליחים לראשונה, או עד שמגיעים ל-n הטלות. סמן את מספר הפעמים שהמטבע הוטל ב-X.

א. אלו ערכים יכול X לקבל ?

ב. חשב את פונקצית ההסתברות של X.

3.12 כד מכיל n כדורים. מוציאים מהכד כדור ומחזירים אותו. ממשיכים את התהליך עד שמוצא כדור שכבר הוצא קודם ואז מפסיקים. נגדיר: X - מספר ההוצאות עד להפסקת התהליך ועד בכלל.

א. אילו ערכים יכול X לקבל ?

ב. מצא את פונקצית ההסתברות של X.

3.13 זורקים קוביה 5 פעמים. מהי ההסתברות לקבל פעמיים את הפאה 1, פעמיים את הפאה 2 ופעם אחת פאה השונה משתי הפאות הקודמות ?

3.14 קופסא מכילה 5 כדורים אדומים, 4 לבנים ו-3 כחולים. בוחרים כדור מהקופסא באו-פן מקרי, מציינים את צבעו ומחזירים אותו לקופסא. מצא את ההסתברות שמתוך 6 כדורים המוצאים בצורה זו, 3 הם אדומים, 2 לבנים ואחד כחול.

3.15 אדם נושא עמו 2 קופסאות גפרורים, אחת אדומה והשניה כחולה, כל אחת מכילה N גפרורים. כל פעם שהוא רוצה גפרור, וכל עוד בשתי הקופסאות נשארו גפרורים, הוא בוחר אחת מהן באקראי (בהסתברות p את האדומה ובהסתברות q את הכחולה) ומוציא גפרור אחד. מהרגע שאחת הקופסאות מתרוקנת, הוא ניגש לקופסה השניה ללא הגרלה. יהי A_r המאורע שהקופסה האדומה מתרוקנת כאשר בכחולה נשארו r גפרורים.

א. מהי $P(A_r)$ עבור $1 \leq r \leq N$?

ב. חשב את ההסתברות לכך שהקופסה האדומה תתרוקן לפני הכחולה, במקרים $N=5, \quad p=\frac{1}{3}$ ו- $N=8, \quad p=\frac{1}{2}$.

3.16 במשלוח 25 נגדים מהם 5 פגומים. מדגם של 4 נגדים הוצא באקראי וללא החזרה, ובמדגם יש X נגדים פגומים.

א. מצא את פונקצית ההסתברות של X.

ב. מהי ההסתברות שבמדגם יימצא לפחות נגד אחד פגום ?

3.17 עבור המשתנה המקרי X ידוע כי $P\{X>k+l|X>l\}=P\{X>k\}$ לכל זוג מספרים טביעים k,l. תכונה זו נקראת תכונת חוסר זכרון.

א. הסבר במילים מה המשמעות של תכונה זו.

ב. הראה שאם X משתנה בדיד המקבל רק ערכים טבעיים אזי ל-X יש התפלגות גיאומטרית אם ורק אם הוא בעל תכונת חוסר זכרון.

3.18 A, B ו-C משחקים בהטלת מטבע הוגן לפי הכלל הבא: A ו- B משחקים. הזוכה בין השניים משחק עם C. אם זוכה שוב, נגמר המשחק בנצחונו, אך אם יזכה C יישחק הוא עם השלישי, וכך הלאה. המשחק נגמר כאשר אחד השחקנים זוכה פעמיים ברציפות. מהי ההסתברות ש-A יזכה ? B יזכה ? C יזכה ?

3.19 מספר האלקטרונים הנפלטים מקטודה של שפופרת ריק במשך שעה מהווה משתנה מקרי פואסוני X עם פרמטר 3, דהיינו $\quad x = 0, 1, \ldots \quad p_X(x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!},$.

א. חשב את ההסתברות שנפלט במשך שעה לפחות אלקטרון אחד, בדיוק אלקטרון אחד, לכל היותר אלקטרון אחד.

ב. האלקטרונים פוגעים בהסתברות $p = 0.7$ בלוחית מתכת. חשב את ההסתברות שמבין האלקטרונים שנפלטו במשך שעה לפחות אחד פגע בלוחית.

3.20 נתון שמספר תאונות הדרכים X ביום נתון בכביש מסויים מפולג פואסונית עם $\lambda = 5$.

א. מצא את ההסתברות שיהיו לפחות 3 תאונות בכביש זה באותו יום.

ב. חשב את $P(X > 3|X > 0)$. האם ההתפלגות הפואסונית חסרת זכרון ?

3.21 נניח שמספר הפעמים שאדם מצטנן בשנה מפולג פילוג פואסוני עם פרמטר $\lambda = 5$. פותחה תרופה מונעת חדשה שמקטינה את λ מ-5 ל-3 עבור 75% מהאוכלוסיה. על יתר 25% מהאוכלוסיה אין התרופה משפיעה כלל. אם אדם לוקח את התרופה במשך שנה ומצטנן פעמיים באותה שנה, מהי ההסתברות שאותו אדם נכלל בין האנשים עליהם התרופה משפיעה ?

3.22 מספר הלקוחות המגיעים לקבל שרות מסויים מהווה משתנה מקרי X המפולג פואסונית עם פרמטר $\lambda = 3$. ספק השרות מסוגל לטפל לכל היותר בשני לקוחות ובמקרה הצורך אלה נבחרים באקראי מבין הפונים. כל לקוח בו מטפלים יהיה מרוצה מהשרות בהסתב-רות $p = 2/3$ (בלי תלות בלקוחות האחרים).

א. אדם מסויים ניגש לקבל שרות. מבחנתו (דהיינו, הוא כבר יודע שמספר המגיעים הוא לפחות אחד) מהי ההסתברות שבסך הכל יגיעו k פונים ?

ב. אדם מסויים ניגש לקבל שרות. מה ההסתברות שייצא משם מרוצה ?

ג. מה ההסתברות שיהיה בדיוק לקוח אחד מרוצה ? (בלי תנאים מראש).

4 משתנים מקריים רציפים ומעורבים. טרנספורמציות.

מפרק זה והלאה כל פונקציות הצפיפות שוות ל-0 בתחום בו לא הוגדרו במפורש

4.1 האם הפונקציות הבאות הן פונקציות צפיפות ?

$f(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 4x - 1), \quad 0 \le x \le 1 \qquad g(x) = 6x(1-x), \quad 0 \le x \le 1$

$h(x) = xe^{-\frac{x}{10}}, \quad 0 < x \qquad l(x) = |\sqrt{z}|, \quad 2 \le x$

4.2 מצא את פונקצית ההתפלגות של הצפיפות $f_X(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta,$ וחשב את ההסתברות $P(\theta + 1 \le X \le \theta + 2)$.

4.3 נתונה הפונקציה $f(x) = 1/2 - 1/4|x|, \quad |x| \le 2$.

א. בדוק שזו פונקצית צפיפות וסרטט אותה.

ב. חשב את $P(-1 < X < 1|)$ ואת $P(X > -1/2)$.

ג. חשב את פונקצית ההתפלגות של X ושרטט אותה.

4.4 למשתנה מקרי X יש פונקצית צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x \le 1 \\ a & 1 < x \le 2 \\ -ax + 3a & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

א. חשב את a.

ב. חשב את פונקצית ההתפלגות $F_X(x)$ וצייר אותה.

4.5 זמן הכשלון T של מערכת מכ"מ הוא מעריכי: $f_T(t) = ae^{-bt}, \quad t > 0$.

א. מהו הקשר בין a ו-b בכדי ש-f_T תהיה צפיפות ?

ב. חשב את ההסתברות ש-$T \le 1$ אם $b = 2$.

4.6 לאורך החיים X של מערכת יש צפיפות $f_X(x) = \frac{81}{x^4}, \quad x > 3$.

א. מצא את פונקצית ההתפלגות של X.

ב. מהי ההסתברות שהמערכת תפעל לפחות 10 שעות אם היא כבר פעלה 5 שעות ?

ג. האם לצפיפות של X יש חוסר זכרון ?

4.7 הצפיפות של אורך החיים X (בחודשים) של רכיב אלקטרוני היא $f_X(x) = \frac{1}{5}$ כאשר $0 \le x \le 5$. אם הרכיב כבר פעל במשך חודש ימים, מהי ההסתברות שיפעל לפחות חודש, אך לא יותר מחודשיים, נוספים ?

4.8 בדוק שהפונקציה $f_X(x) = \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$ היא אכן פונקצית צפיפות וחשב את $P(X \le x)$, $P(\pi/6 \le X \le \pi/4)$, $P(X > \pi/3)$.

4.9 העזר בטבלה של פונקצית ההתפלגות הנורמלית התקנית על מנת לחשב:

א. $P(X < 7)$ ו- $P(X > 9)$ כאשר $X \sim N(3,4)$.

ב. $P(Y \le 1.5)$ ו- $P(3.5 \le Y \le 8)$ כאשר $Y \sim N(2.5,16)$.

4.10 אם $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ הוכח ש- $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$ לכל מספר ממשי t.

4.11 אם קיים מספר a כך ש- $f_X(a+t)=f_X(a-t)$ לכל t, הוכח ש- $F_X(a)=\frac{1}{2}$.

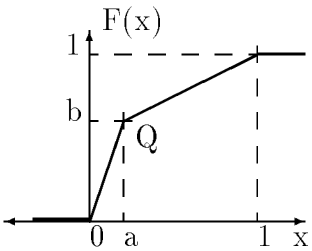
4.12 אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, מהן $P(X<\mu)$ ו- $P(X<\mu-1.96\sigma)$?

4.13 לאורכה X של שיחת טלפון (בדקות) יש פונקצית התפלגות $F_X(x)=1-\frac{1}{2}(e^{-\frac{x}{3}}+e^{-[\frac{x}{3}]})$ עבור כל $x>0$ ($[a]$: החלק השלם של a).

א. הראה שזו אכן פונקצית התפלגות וצייר אותה.

ב. מהי ההסתברות שהשיחה תארך: (i) 5 דקות או יותר; (ii) פחות מ-4 דקות; (iii) בדיוק 3 דקות; (iv) פחות מ-9 דקות אם ארכה כבר יותר מ-5 דקות ?

4.14 X מפולג עם פונקצית התפלגות המתוארת בציור, כאשר $Q(a,b)$ הינה נקודה נתונה.



א. מהן $P(X\le a)$, $P(X=a)$, $P(|X-\frac{a}{2}-\frac{1}{4}|<\frac{1}{4})$?

ב. מהי השונות המירבית שניתן להשיג ע"י בחירה מתאימה של הנקודה Q ?

ג. תאר ניסוי המוביל למשתנה מקרי בעל פונקצית ההתפלגות כנ"ל.

4.15 נתון משתנה מקרי X בעל פונקצית התפלגות $F_X(x)=ce^x$ כאשר $x<0$ ו- $F_X(x)=\frac{1+ax}{b+x}$ כאשר $x>0$, ומתקיים ש- $P(X>-1)=0.9$ ו- $P(X>0)=\frac{2}{3}$.

א. מצא את $a,\ b,\ c$.

ב. מצא את $P(X=0)$ ואת $F_X(0)$.

ג. צייר את הגרף של $F_X(x)$.

4.16 חנן, המגיע לסידור בעירייה, מופנה בהסתברויות שוות לאחד מ-4 פקידים. אצל פקיד מספר k יש זמן המתנה אחיד $U[0,k-1]$, $k=1,...,4$. סמן ב-X את זמן ההמתנה בפועל של חנן. שרטט את $F_X(x)$.

4.17 למתח של אות הנקלט בגלאי ריבועי יש צפיפות נורמלית $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. אם נגדיר את $Y=4X^2$ מצא את $f_Y(y)$.

4.18 X משתנה מקרי בעל פונקצית הסתברות פואסונית $p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ עבור $k=0,1,2\ldots$. מצא את פונקצית ההסתברות של $Y=aX+b$. (הבחן בין המקרים $a\neq 0$ ו- $a=0$).

4.19 X משתנה מקרי בעל פונקצית התפלגות אחידה בקטע $[0,1]$.

א. מצא את פונקציות ההתפלגות והצפיפות של $Y=\frac{1}{X}$.

ב. מצא את פונקציות ההתפלגות והצפיפות של $Z=\ln X$.

4.20 להתנגדות R של מעגל חשמלי יש צפיפות $f_R(r)=\frac{1}{30}$ עבור $20\le r\le 50$. מצא את פונקצית הצפיפות f_Y של המוליכות $Y=\frac{1}{R}$.

4.21 הקלט האקראי X של מערכת מפולג עם הצפיפות $-1 \le x \le 1$,$f_X(x) = \frac{1}{2}(x+1)$,
בעוד שהפלט Y שלה מגודר ע"י $Y = g(X)$ כאשר $g(X) = \begin{cases} 0 & X \le 0 \\ X & X > 0 \end{cases}$.
מצא את $F_Y(y)$, צייר את הגרף וקבע את סוג ההתפלגות (רציפה, בדידה, מעורבת).

4.22 משודר אות אקראי המפולג באחידות בקטע $[-3,5]$, אך עקב מגבלותיו של המקלט נרשם רק $Y = g(X)$, כאשר $g(x) = \begin{cases} 4 & x \ge 4 \\ x & |x| < 4 \\ -4 & x \le -4 \end{cases}$. מצא את $F_Y(y)$.

4.23 לקלט X של מיישר גל יש פונקצית התפלגות $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1) & -1 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$
והפלט הוא $Y = |X|$. מצא את פונקצית ההתפגלות F_Y של Y.

5 התוחלת

5.1 מטילים מטבע הוגן 3 פעמים. נגדיר: X = מספר ההצלחות ו- Y = אורך מקבץ ההצלחות המקסימלי שמתקבל. חשב את EX ו- EY.

5.2 מאוכלסויה של a עצמים מסוג א' ו- b מסוג ב', לוקחים מדגם אקראי בגודל n ($n \le a$ ו- $n \le b$), כאשר X הוא מספר העצמים מסוג א' במדגם. הראה ש- $EX = \frac{an}{a+b}$.

5.3 אם X משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, חשב את EX^2 ו- את Ee^X.

5.4 אם X מפולג פואסונית עם פרמטר λ, חשב את $E\frac{1}{X+1}$.

5.5 מכד המכיל 3 כדורים אדומים ו-2 לבנים מושכים כדורים בזה אחר זה באופן מקרי וללא החזרה. יהי X מספר המשיכות עד למופע הראשון של כדור אדום ועד בכלל. מצא את הפלוג של X וחשב את התוחלת שלו.

5.6 חברה מבטחת 10,000 איש נגד פריצה. ההסתברות לפריצה במשך שנה, בכל בית היא 0.006 (אין סכוי ליותר מפריצה אחת בבית נתון) וכל הפריצות בלתי תלויות. כל מבוטח משלם פרמיה של 1,200 ש"ח ובמקרה של פריצה מקבל פיצוי קבוע של 120,000 ש"ח. (השאר את התשובות ל-א' כסכום).

א. מהי ההסתברות שהחברה תפסיד כסף ?

ב. מהי הפרמיה ההוגנת בתנאים הנ"ל ? (ציין מהי לדעתך "פרמיה הוגנת"; אפשר להתעלם מהצורך של חברת הביטוח להרויח כסף)

5.7 חשב את EX כאשר $(i) \quad f_X(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$

$(ii) \quad f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$ $(iii) \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$.

5.8 הוכח: אם משתנה X מקבל רק ערכים חיוביים אז $E(X)=\int_0^\infty(1-F_X(x))dx$.

5.9 הקלט של גלאי מפולג מלבנית (באחידות) בין 2 ל-8.

א. מצא את פונקצית הצפיפות $f_Y(y)$ של הפלט $Y=\frac{1}{4}X^2$.

ב. מצא את התוחלת של הפלט (בשתי דרכים !)

5.10 מתח אקראי X מפולג עם צפיפות נורמלית תקנית, אך בפועל מתעניינים רק ב- $Y=|X|$. חשב את EY.

5.11 X משתנה המאופיין ע"י

$$\begin{cases} P(X=2^k)=2^{-(2k+1)} & k=1,2,\ldots \\ P(X=0)=\text{ההסתברות הנותרת} & \end{cases}$$

ו- Y משתנה שני עם

$$\begin{cases} P(Y=2^k)=2^{-(2k+1)} & k=1,2,\ldots \\ P(Y=-2^k)=2^{-(2k+1)} & k=1,2,\ldots \\ P(Y=0)=\text{ההסתברות הנותרת} & \end{cases}.$$

האם קיימות התוחלות של X ושל Y ? אם כן, חשב אותן.

5.12 תחנת ממסר קולטת 4 אותות אקראיים: U_1 המפולג אחיד ב-[0,1], U_2 המפולג אחיד ב-[0,2], U_3 המפולג אחיד ב-[0,3] ו-U_4 המפולג אחיד ב-[0,4]. אחד מהם נבחר באקראי, וזאת בהסתברויות 0.2, 0.2,0.3,0.3 בהתאמה, ומשודר הלאה. זהו המספר האקראי -- נכנה אותו X -- שמתקבל במקלט.

א. בנה טבלה של ההסתברויות $P(U_i \mid X<b)$ הוא זה שנבחר לשידור הלאה) עבור $i=1,2,3,4$ ו- $b=0.5,1.5,2.5,3.5$.

ב. מצא ושרטט את פונקצית ההתפלגות $F_X(x)$ של X.

ג. חשב את התוחלת של X.

5.13 לקלט X של מערכת יש צפיפות $f_X(x)=\begin{cases} 1+x & -1<x<0 \\ 1-x & 0<x<1 \end{cases}$, בעוד שהפלט Y מוגדר כ- $\sqrt{X}$ כאשר X חיובי, וכ- -1 כאשר X שלילי.

א. מצא ושרטט את פונקצית ההתפלגות $F_Y(y)$ של Y תוך ציון ה"פרטים המזהים".

ב. ציין האם Y משתנה בדיד, רציף או מעורב. נמק !

ג. חשב את התוחלת EY של הפלט.

5.14 עסק מסויים מגדיר לעצמו כל יום משתנה מקרי Y (המכונה יעילות) שמושפע ממספר הלקוחות שפונים אליו באותו יום. ליתר דיוק, אם יגיעו n לקוחות $(n=0,1,2...)$ פונקצית ההתפלגות של היעילות תהיה $F(y)=y^n,\quad y\in[0,1]$. מספר הלקוחות N שיגיעו בפועל ביום נתון הינו בעצמו משתנה מקרי בעל פונקצית הסתברות $P_N(n)=\frac{3}{4^{n+1}}$, עבור $n=0,1,2\ldots$.

א. מצא ושרטט את פונקצית ההתפלגות $F_Y(y)$ של Y תוך ציון ה"פרטים המזהים".

ב. ציין האם Y משתנה בדיד, רציף או מעורב. נמק !

ג. חשב את התוחלת EY של הפלט.

5.15 עד עכשיו תמך חיים תמיד בהפועל חיפה במשחקיה נגד מכבי חיפה, אך מעתה תיקבע אהדתו בכל משחק ע"י מטבע: "עץ" (בהסתברות p) ← יחליף את הקבוצה מהפעם הקודמת; "פלי" (בהסתברות $q = 1 - p$) ← לא יחליף קבוצה. כל ההטלות בלתי תלויות. תוך כמה משחקים, בממוצע, יתמוך חיים לראשונה שוב בהפועל ?

6 השונות, מומנטים ופונקציה יוצרת המומנטים

6.1 אם $EX = 1$ ו- $EX^2 = 4$, מהי השונות של $Y = 2X - 3$?

6.2 חשב את התוחלת וסטיית התקן של $Y = aX^* + b$ כאשר X משתנה מקרי נתון ו- $X^* = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$.

6.3 הוכח ש- $f_X(x) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ אכן פונקצית צפיפות, כאשר $\lambda > 0$ ו- $r = 1, 2, \ldots$ שני פרמטרים נתונים, וחשב את EX ו- $\text{var}X$ במונחים של λ ו- r.

<u>תזכורת:</u> $\int_0^\infty x^k e^{-ax}\, dx = \frac{k!}{a^{k+1}}$ לכל $a > 0$ ו- $k = 0, 1, 2, \ldots$.

6.4 חשב את השונות של המשתנים המקריים המופיעים בתרגילים 5 ו- 7.

6.5 יהי X משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר $\lambda > 0$ (דהיינו $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$).

א. מהי ההסתברות ש-X יסטה מהתוחלת שלו ביותר מסטית תקן אחת ?

ב. מצא את הנקודה x_0 עבורה $P(X < x_0) = P(X > x_0) = 1/2$.

6.6 יהיה X מספר הפאות השונות המתקבלות בשלוש זריקות של קוביה הוגנת (למשל $X = 1$ עבור (4,4,4) ו- $X = 2$ עבור (3,2,3)). מצא את התוחלת והשונות של X.

6.7 מהן התוחלת וסטיית התקן של המשתנה המקרי X מהתרגיל 4.16 וסטיית התקן של Y מהתרגיל 5.14.

6.8 X מתפלג נורמלית עם פרמטרים μ ו-σ^2. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של X והוכח בעזרתה שהעתקה לינארית על משתנה מקרי נורמלי גם כן מתפלגת נורמלית (עם אילו פרמטרים ?). מותר להשתמש בעובדה שאין שתי התפלגויות שונות בעלות אותה פונקציה יוצרת מומנטים.

6.9 נתונה הצפיפות, $f_X(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad |x| > 1$, הראה שבפועל אין ל-$X$ פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(s)$. ליתר דיוק, ציין עבור אילו ערכים של s מתקיים $M_X(s) < \infty$?

6.10 האם קיים משתנה מקרי X שעבורו מתקיים $P(\mu_X - 2\sigma_X \le X \le \mu_X + 2\sigma_X) = 0.6$?

6.11 אפריים יוצא מביתו כל בוקר בשעה 7.30 כדי להגיע למקום עבודתו ב- 8. הנסיעה לוקחת חצי שעה בממוצע, עם סטיית תקן של 5 דקות. ביום מסויים עליו לפגוש לקוח חשוב, ואם יגיע לעבודה אחרי 8.30 יפוטר. הראה שהסכוי שזה יקרה קטן מ- 3%.

6.12 סמן ב- X את המספר שמופיע בהטלה בודדת של קוביה הוגנת.

א. חשב במדויק את $P(|X-3.5|>2.5)$.

ב. איזה חסם היית מקבל אילו השתמשת באי השויון של צ'בישב ?

6.13 תהי $M_X(s)=Ee^{sX}$ פונקציה יוצרת המומנטים של X. חשב את EX ואת $\mathrm{var}X$ כאשר

א. $M_X(s)=(1-s)^{-1}, \quad s<1$,

ב. $M_X(s)=\exp\{6s+s^2\}$,

ג. $M_X(s)=C(2-s)^{-3}, \quad s<2$ (עליך לקבוע את ערכו של הקבוע C !) .

7 וקטוריים אקראיים

7.1 פונקצית ההסתברות המשותפת של (X,Y) נתונה בטבלה. מצא את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

X \ Y	0	1	2
2	1/12	1/6	1/12
3	1/6	1/4	1/12
4	1/12	1/12	0

א. X קטן מ- 3.5

ב. X זוגי

ג. $X-Y$ זוגי

ד. Y זוגי אם ידוע ש- X זוגי.

7.2 מחפיסת קלפים מוציאים שני קלפים ללא החזרה. מספר האסים ומספר המלכים שהתקבלו יסומנו ב- X וב- Y בהתאמה.

א. מצא את פונקצית ההסתברות המשותפת של (X,Y).

ב. חשב את $P(X>Y)$.

7.3 בקבוצה של חמישה טרנזיסטורים שניים פגומים. בודקים אותם אחד-אחד (טרנזיסטור שנבדק, מוצא מהקבוצה). נסמן ב- N_1 וב- N_2 את מספר הבדיקות הנחוצות עד אשר מאתרים את הטרנזיסטור הפגום הראשון והשני, בהתאמה (ועד בכלל). מצא את פונקצית ההסתברות המשותפת של (N_1,N_2) ואת פונקציות ההסתברות השוליות.

7.4 בסידרת ניסויי ברנולי, עם הסתברות p להצלחה בניסוי בודד, סמן ב- X_i את מספר הניסויים עד ההצלחה מס' i ועד בכלל, $i=1,2$. מצא את פונקצית ההסתברות המשותפת של (X_1,X_2) ואת פונקצית ההסתברות השולית של X_2.

7.5 פונקצית ההסתברות המשותפת של (X,Y) נתונה ע"י $p_{X,Y}(m,n)=\frac{e^{-7}4^m3^{n-m}}{m!(n-m)!}$ כאשר $n=0,1,2,\ldots$ ו- $m=0,1,\ldots,n$.

א. הראה ש- X ו- Y אינם בלתי תלויים.

ב. חשב את ההסתברות ש- $X=i$ ו- $Y-X=j$ לכל $i=0,1,\ldots$ ו- $j=0,1,\ldots$.

ג. האם X ו- $(Y-X)$ בלתי תלויים ?

7.6 אם $f_{X,Y}(x,y)=1/\pi$ עבור $x^2+y^2<1$ מצא את $f_X(x)$.

7.7 אם $f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)}$ עבור $x>0$ ו- $y>0$, האם X ו- Y בלתי תלויים ? נמק.

7.8 אם $f_{X,Y}(x,y)=Cxye^{-(2x^2+y^2)}$ עבור x ו- y אי שליליים ועבור קבוע $C>0$ מתאים

א. מצא את $f_X(x)$.

ב. חשב את $P(X\le 1, Y\le 1)$ ו- $P(X\le 1|Y\le 1)$.

7.9 בוחרים באקראי ובאופן בלתי תלוי שתי נקודות על הקטע $[0,1]$. מהי ההסתברות שמשלושת הקטעים שנוצרים ניתן להרכיב משולש ?

7.10 בחור ובחורה מגיעים לבית קפה באופן בלתי תלוי, כל אחד בזמן אקראי בין $9^{\underline{00}}$ ל- $10^{\underline{00}}$. מהי ההסתברות שאכן ייפגשו אם הסכימו מראש לא לחכות זה לזו יותר מ- 10 דקות ?

7.11 בוחרים נקודה באקראי ובאופן בלתי תלוי על כל אחת משתי צלעות סמוכות נתונות של רבוע ומחברים בינהן. מהי ההסתברות ששיטחו של המשולש שנוצר יהיה

א. קטן מ- $1/8$ שטח הרבוע ?

ב. גדול מ- $1/2$ שטח הרבוע ?

האם התשובות ישתנו אם מגרילים את זוג הצלעות הסמוכות - בדרך כלשהי - במקום לקבוע אותם באופן שרירותי.

7.12 הצפיפות של (X,Y) נתונה ע"י $f_{X,Y}(x,y)=A(x+y)$ עבור $0\le x\le y\le 1$, כאשר $A>0$ הינו קבוע מתאים. חשב את $P(X^3>Y)$ ואת $P(X^{1/3}>Y)$.

7.13 בשאלה 7.12 האם אפשר היה לדעת מיד את אחת ההסתברויות על סמך השניה (מבלי שוב לחשב אינטגרל) ?

7.14 נתון ש- $F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} xy & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ x & 0<x<1,\ 1<y \\ y & 1<x,\ 0<y<1 \end{cases}$.

א. מצא את $F_{X,Y}(-2,3)$ ואת $F_{X,Y}(2,3)$.

ב. חשב את $F_X(x)$ ואת $F_Y(y)$.

ג. כיצד היית מתאר במילים את ההתפלגות של (X,Y) ? (פחות משורה!)

7.15 אם $f_{X,Y}(x,y)=k\frac{1+x+y}{(1+x)^4(1+y)^4}$ עבור $y>0$, $x>0$ ו- k קבוע מתאים, מצא את פונקצית הצפיפות השולית של X.

7.16 עוצמות הרעש X ו- Y הנמדדות בשתי נקודות A ו- B בהתאמה מהוות וקטור אקראי בעל צפיפות אחידה במשולש אשר קודקודיו הם $(0,0)$, $(2,0)$ ו- $(1,2)$.

א. מצא את f_X ו- f_Y ובדוק האם X ו- Y בלתי תלויים.

ב. מהי ההסתברות שעוצמת הרעש ב- A גדולה מזו שב- B ?

ג. מהי ההסתברות שסכום עוצמות הרעש גדול מ- 3 יחידות ?

7.17 נתון ש- $f_{X,Y,Z}(x,y,z)=12\,x^2yz$ כאשר $0\le x,y,z\le 1$. חשב את $P(X<Y<Z)$.

7.18 כשרינה מגיעה לעירייה לסדר עניין מסויים, הפקיד מתחיל שיחת טלפון אשר אורכה X (בדקות) מפולג אקספוננציאלית עם פרמטר $\lambda_X = 0.1$. בתום השיחה הפקיד יתחיל לטפל בעניינה של רינה, טיפול אשר ייקח 5 דקות. מצד שני, כעבור Y דקות מהגעתה של רינה לעירייה, המחשב יפול, ועבודת העירייה תשותק עד סוף היום. נתון ש- Y מפולג אקספוננציאלית עם פרמטר $\lambda_Y = 0.05$, באופן בלתי תלוי ב-X. מהי הסתברות שרינה תצליח להשלים את הסידורים ?

7.19 נתון ש- $f_{X,Y}(x,y) = 3xy^2$ עבור $x > 1$ ו- $0 < y < \frac{1}{x}$. מצא את $F_{X,Y}(2,2)$ ואת $F(4, \frac{1}{2})$.

7.20 המקדמים האקראיים A, B ו- C במשוואה הריבועית $Ax^2 + Bx + C = 0$ בלתי תלויים ומפולגים באחידות ב- $[0,1]$ כל אחד. מהי ההסתברות שיהיו למשוואה שני פתרונות ממשיים שונים ? פתרון ממשי אחד ?

8 פונקציה של וקטור אקראי

8.1 אם X ו- Y משתנים מקריים נורמליים תקניים בלתי תלוים, ו- $Z = \frac{X}{Y}$. מצא את $f_Z(z)$.

8.2 יהיו $X_1, \ldots, X_5$ משתניים מקרים בלתי תלויים, כל אחד מפולג פואסונית עם פרמטר $\lambda > 0$. מהי פונקצית ההסתברות $p_Z(k)$ של $Z = X_1 + \ldots + X_5$?

8.3 אורכי החיים (בשבועות) של שלושה רכיבים A, B ו- C, הפועלים באופן בלתי תלוי, מפולגים באחידות ב- $[0,8]$ כל אחד.

א. המערכת L מורכבת מ- A ו- B, כך ש- B נכנס לפעולה כאשר A מתקלקל. מצא את הצפיפות של אורך החיים של L.

ב. המערכת M מורכבת מ- L ו- C במקביל (דהיינו, M פועלת כאשר L או C - או שניהם - פועלים). חשב את ההסתברות ש- M תפעל פחות מ- 10 שבועות אם היא כבר פעלה במשך 5 שבועות.

8.4 וקטור אקראי (X,Y) בעל צפיפות $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{x^2}{8}-\frac{(y-2)^2}{2}}$, מיוצג גם ע"י הקואורדינטות הקוטביות (R,Θ). מצא את $f_{R,\Theta}(r,\theta)$, עבור $r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi$.

8.5 הוכח שאם $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ ו- $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ בלתי תלויים אז $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$.

8.6 סוניה ואלקס מתעכבים אצל פקיד הדואר זמנים אקספוננציאליים בלתי תלויים עם פרמטריים $\lambda = 1$ ו- $\lambda = 2$ בהתאמה.

א. מהי ההסתברות שהסידור של אלקס ייקח יותר זמן מזה של סוניה ?

ב. מהי ההסתברות שלפחות אחד משניהם יתעכב יותר מ- 5 דקות אצל הפקיד ?

8.7 אם X משתנה נורמלי סטנדרטי ו- Y בלתי תלוי ב-X עם צפיפות $f_Y(y) = ye^{-y^2/2}$ כאשר $y > 0$ מצא ושרטט את פונקצית הצפיפות של $Z = XY$.
(אפשר להיעזר בנוסחה: $\int_0^\infty \exp\{-(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2})\}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\{-2|\alpha|\}$).

8.8 אם $X \sim U[0,1]$ ו- $Y \sim U[0,2]$ בלתי תלויים

א. מצא את הצפיפות של $S = X+Y$ ואת פונקצית ההתפלגות של $Z = \max(X,Y)$.

ב. עבור $V = \frac{1}{2}(X-Y)$ מצא את $f_{X,V}(x,v)$ ואת $f_V(v)$.

8.9 X ו- Y משתנים בלתי תלויים שניהם בעלי פונקצית התפלגות $F(z) = \frac{z-1}{z}$ עבור $z \geq 1$. חשב את $f_{\frac{Y}{X},XY}(u,v)$.

8.10 התיקון של מכשיר נעשה בשני שלבים, שאורכם X ו- Y שעות בהתאמה. לוקטור האקראי (X,Y) יש צפיפות $f_{X,Y}(x,y) = xe^{-(x+y)}$ עבור x ו- y חיוביים. מצא את הצפיפות של משך התיקון כולו ואת פונקצית ההתפלגות של אורך השלב הארוך ביותר מבין שני שלבי התיקון.

8.11 לנקודה Q על המישור יש רכיבים נורמליים תיקניים בלתי תלויים. חשב את פונקצית ההתפלגות של שטח העיגול שמרכזו בראשית הצירים והיקפו עובר דרך Q.

8.12 יניב ואורלי השותפים בקו טלפון השתמשו בו כל אחד זמן אקספוננציאלי עם פרמטר $\lambda > 0$, כאשר הזמנים האלה בלתי תלויים. הראה שהחלק היחסי של הזמן בו יניב השתמש בקו מפולג באחידות ב-$[0,1]$.

8.13 למתחים X ו- Y של זוג אותות אקראיים יש צפיפות $f_{X,Y}$. ענה על השאלות הבאות עבור

(i) $f_{X,Y}(x,y) = 6x$ במשולש שקודקודיו $(0,0)$, $(0,1)$ ו- $(1,0)$

(ii) $f_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{5}(x+y^2)$ ברבוע $[0,1]^2$.

א. מצא את ההסתברות שהסכום $X+Y$ יהיה בין 0.5 ו- 0.75.

ב. מצא את הצפיפות השולית $f_X(x)$ וחשב את EX ואת $\mathrm{var}X$.

ג. חזור על סעיף ב' עבור Y במקום X.

ד. חשב את $Eg(X)$ כאשר $g(x) = \begin{cases} 4x^2 & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{x} & x > \frac{1}{2} \end{cases}$.

8.14 X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים. מצא את פונקצית הצפיפות/הסתברות של $|X-Y|$ כאשר

א. X ו- Y מפולגים מעריכית עם פרמטר $\lambda > 0$.

ב. X ו- Y מפולגים גיאומטרית עם פרמטר $p \in (0,1)$.

8.15 ענת ופנינה זורקות קוביה הוגנת כל אחת פעם אחר פעם. הראשונה שמקבלת את התוצאה "6" מפסיקה, בעוד שהשניה ממשיכה לזרוק את קוביתה, אלא שעכשיו עליה לשלם לחברתה 1 ש"ח לפני כל זריקה. המשחק מסתיים כאשר גם השחקנית השניה מקבלת "6". כמה כסף בממוצע מחליף ידיים ? (אפשר להשתמש בתוצאה מתוך 8.14).

8.16 בוחרים באקראי ובאופן בלתי תלוי מספר נקודות $P,Q,R,\ldots$ מתוך הקטע $[0,1]$, כך שהערך המספרי של כל אחד מהם מפולג עם צפיפות $f(x)$ עבור $x \in (0,1)$. נכנה בשם I מקלון באורך $1/2$ אותו ניתן להחליק שמאלה או ימינה על פני הקטע $[0,1]$.

א. תהי $f(x) \equiv 1$ (צפיפות אחידה) ונניח שהוגרלו 2 נקודות P ו- Q. מצא את ההסתב-רות לכך שניתן למקם את I על $[0,1]$ כך ש-

א1) לא יכיל אף אחת מהנקודות P ו- Q

א2) יכיל בדיוק אחת מהנקודות P ו- Q

א3) יכיל גם את P וגם את Q

א4) כל שלושת הברירות לעיל תהיינה אפשריות.

ב. תהי $f(x) = 6x(1-x)$ ונניח שהוגרלו 6 נקודות. נניח גם ש- I ימוקם ב-$[0,1]$ כך שקצהו השמאלי יהווה משתנה מקרי אחיד ב-$[0, \frac{1}{2}]$ (בלתי תלוי בהגרלת הנקודות). מהי תוחלת מספר הנקודות שתהיינה כלולות ב- I ?

ג. תהי $f(x) \equiv 1$ ונניח שוב שהוגרלו 2 נקודות.

ג1) חשב את פונקציה יוצרת המומנטים $M_X(s)$ של המרחק X בין P ו- Q

ג2) חשב את התוחלת ואת השונות של X.

8.17 רכבת מגיעה לתחנה בזמן המפולג באחידות ב-$[0,1]$, ורכבת שניה מגיעה זמן מעריכי (עם פרמטר $\lambda = 1$ ובלתי תלוי בזמן הגעת הרכבת הראשונה) אחרי הרכבת הראשונה.

א. מצא את הצפיפות $f(t)$ של זמן הגעת הרכבת השניה.

ב. חשב את $\int_0^\infty t^k f(t)\,dt$, עבור $k = 0,1,2$. (נסה לעקוף את השימוש בסעיף (א)).

ג. עלי לפגוש נוסעת ברכבת השניה. מהו הזמן האחרון שבו מותר לי להגיע לתחנה, אם יש לדאוג לכך שהסכוי שחברתי תיאלץ לחכות לי ברציף לא יעלה על 0.5 ?

8.18 נסמן ב-O את ראשית הצירים במישור וב- Q_x ו- Q_y את נקודות ההטלה של נקודה Q על ציר x ועל ציר y בהתאמה. מהן התוחלת והשונות של שטח המלבן OQ_xQQ_y כאשר

א. Q מוגרלת באחידות מתוך העיגול בעל רדיוס R שמרכזו ב- O ?

ב. Q מוגרלת באחידות מתוך <u>שפת</u> אותו עיגול ?

8.19 למשתנה מקרי X יש פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(s) = \frac{2e^s}{3-e^s}$. כמו כן, Y שווה ל- 0 או 1 בהסתברות 0.5 כ"א, ובלתי תלוי ב- X. חשב את התוחלת ואת השונות של $X+Y$.

8.20 מהי פונקציה יוצרת המומנטים של הגדול מבין שני מספרים אקראיים בלתי תלויים, כל אחד אחיד ב-$[0,1]$?

8.21 לכל $\lambda > 0$ ו- $r \in \mathbf{N}$ נגדיר צפיפות

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

צפיפות זו מכונה צפיפות <u>גאמא</u> עם פרמטרים r ו- λ. יהי X משתנה מקרי כזה ש- f_X היא צפיפות כנ"ל (נסמן זאת ע"י $X \sim \Gamma(r,\lambda)$).

א) הוכח שהפונקציה יוצרת המומנטים של X נתונה ע"י $M_X(s) = \frac{1}{(1-s/\lambda)^r}$.

ב) נניח ש- $X_1, X_2, \ldots, X_8$ משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים עם פרמטר $\lambda > 0$. מהי פונקצית הצפיפות של $S = X_1 + X_2 \cdots X_8$?
(לא צריך שום חשבון. <u>רמז</u>: מה הקשר בין צפיפות מעריכית לבין צפיפות גאמא ? השתמש בסעיף (א)).

ג) מהן EX ו- $\mathrm{var}X$?

9 התפלגות מותנית ותוחלת מותנית

9.1 נתונות שתי פונקציות הצפיפות המשותפות (בכל מקרה a הינו קבוע חיובי מתאים) $f_{X,Y}(x,y) = a(2+xy)$ עבור $0 \le x \le 1$ ו- $0 \le y \le 1$ ו- $f_{Z,W}(z,w) = a\,zw$ עבור $0 \le z \le w \le 2$.

א. מצא את ארבעת פונקציות הצפיפות השוליות.

ב. מצא את הצפיפויות המותנות $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$, $f_{W|Z}(w|z)$ ו- $f_{Z|W}(z|w)$.

ג. האם X ו- Y בלתי תלויים זה בזה ? W ו- Z ? מה לגבי הזוג (Y,Z) ?

9.2 לזוג אותות אקראיים (X,Y) יש צפיפות $f_{X,Y}(x,y) = 2$ עבור $0 \le x \le 1$ ו- $0 \le y \le 2x^3$.

א. חשב את $P(X > \frac{1}{2} | Y < 1)$.

ב. מצא את $f_{Y|X}(y|x)$.

ג. האם X ו- Y בלתי תלויים ?

9.3 מצא את $f_{X|Y}(x|y)$ כאשר

א. אם (X,Y) וקטור אקראי אחיד בעיגול היחידה.

ב. אם (X,Y,Z) וקטור אקראי אחיד בכדור היחידה

9.4 נתון ש- X משתנה אחיד ב- $[0,1]$ ו- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{2y}{x^2}$ עבור $0 \le y \le x \le 1$.

א. מצא את $f_{X|Y}(x|y)$.

ב. חשב את $P(Y > 0.3)$ ואת $P(X < 0.5\,,\, Y \le 0.4)$.

9.5 עבור וקטור אקראי (X,Y) אחיד בתחום $\{(x,y) |\, 0 < x < 1,\;\; 0 < y < x^3\}$

א. חשב את $P(X > 0.5 \,|\, Y < 0.1)$.

ב. מצא את $f_{Y|X}(y|x)$.

9.6 עבור זוג נקודות A, B במישור, נסמן ב- $\mathcal{R}[A,B]$ את הריבוע לו הקטע AB משמש כאחד האלכסונים. יהי $(X,Y) \sim U\left(\mathcal{R}[(0,0),(1,1)] \bigcup \mathcal{R}[(1,1),(2,2)]\right)$.

א. חשב את $P(X > Y^2 \,|\, Y < 1)$.

ב. מצא את $f_{X|Y}(x|y)$.

9.7 עבור זוג פרמטרים אקראיים (X,Y) נתון ש- $f_Y(y) = 2y$ עבור $0 < y < 1$, וגם ש- $f_{X|Y}$, כפונקציה של x היא צפיפות אחידה בקטע $[0,y]$, לכל $y \in (0,1)$.

א. מצא את $f_{X,Y}(x,y)$ ואת $f_X(x)$.

ב. מצא את $E(X|Y)$ ואת $E(Y|X)$.

9.8 לרכיב אלקטרוני מספר פואסוני של תקלות בפרק זמן נתון, עם פרמטר $\lambda = U^2$, כאשר U עמצו משתנה מקרי המפולג באחידות ב-$[1,6]$. מהי תוחלת מספר התקלות ?

9.9 נתונה סידרה $X_1, X_2, \ldots$ של משתנים מקריים אי שליליים, בלתי תלויים ומפולגים זהה, נסמן $a = EX_1, \quad b^2 = \mathrm{var} X_1$. כמו כן, עבור משתנה מקרי N המקבל ערכים טבעיים, ובלתי תלוי בכל ה-X־ים, נרשום $c = EN, \quad d^2 = \mathrm{var} N$.
הגדר $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

א. מהן $E(Y|N)$ ו- $E(Y^2|N)$?

ב. חשב את EY ואת $\mathrm{Var}\ Y$.

9.10 אם X ו- Y משתנים פואסוניים בלתי תלויים עם פרמטרים λ_X ו- λ_Y בהתאמה, הוכח ש- $p_{X|X+Y}(x|z)$ הינה פונקצית הסתברות בינומית עם פרמטרים $n = z$ ו- $p = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}$.

9.11 מתרגל במבוא להסתברות מודיע על שעות קבלה מהשעה 13^{00}, אך מאחר להגיע ב-X דקות, כאשר X משתנה מקרי מעריכי, אשר תוחלתו 10 דקות. לכל $t > 0$, מספר הסטודנטים המגיעים למשרדו ב- t הדקות הראשונות אחרי השעה 13^{00} מהווה שתנה מקרי פואסוני עם פרמטר $\lambda_t = 0.1t$ (והוא בלתי תלוי באיחורו שך המתרגל). כל סטודנט מחכה למתרגל לכל היותר 10 דקות, ולאחר מכן מגיש תלונה באגודת הסטודנטים. חשב את התוחלת ואת השונות של מספר התלונות שיוגשו.

9.12 יהי $X_0 \sim U[0,1]$. ניצור סידרה אינדוקטיבית יורדת של מספרים ע"י הגרלת X_n (באח-ידות) מתוך הקטע $[0, X_{n-1}]$ לכל $n = 1, 2, \ldots$.

א. מהי הצפיפות המשותפת של (X_0, X_1), ומהן הצפיפויות של X_1, של X_2 ושל X_3 ?

ב. נחש, מתוך סעיף (א), את הנוסחה של $f_{X_n}(x)$ עבור n כללי.

ג. חשב את EX_n (ניתן לחשב אותו מתוך סעיף (ב) או בלעדיו; השווה).

ד. מצא את הצפיפות המותנית $f_{X_{n-1}|X_n}(x|y)$.

9.13 לחברת ביטוח מגיעיות בחודש אחד מספר פואסוני (עם פרמטר $\lambda > 0$) של תביעות בגין נזקי תאונות דרכים קלות. גובהה של כל אחת מהן מפולגת באחידות ב-$[1,000, 6,000]$ (בש"חף כל התביעות בלתי תלויות זו בזו). החברה משלמת לכל מבוטח את סכום תביעתו עד לתיקרה של $4,000$ ש"ת. מהי תוחלת סה"כ התשלומים באותו חודש בגין התביעות האלו ?

9.14 חזור על השאלה 8.18, כעת בהנחה שהרדיוס $R = V^2$ כאשר $V \sim N(0, \sigma^2)$.

9.15 זמן הפליטה של החלקיק הראשון מחומר רדיואקטיבי שמסתו M מפולג מעריכית עם פרמטר $\lambda = \alpha M$, כאשר $\alpha > 0$ קבוע נתון. אם המסה בעצמה אקראית עם $F_M(m) = 1 - \frac{1}{m}$ עבור $m \geq 1$, כמה זמן נמתין בממוצע עד הפליטה הראשונה ?

9.16 n רכיבים מורכבים בטור, אורכי החיים שלהם בלתי תלויים ומפולגים מעריכית עם פרמטרים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ בהתאמה.

א. מצא את הצפיפות של אורך החיים T של המערכת.

ב. אם <u>מספר</u> הרכיבים מפולג גיאוטרית עם פרמטר p (בלי תלות באורכי החיים), ו- $\lambda_k = \lambda > 0$ לכל k, חשב עתה אתת $f_T(t)$ ואת ET.

9.17 סולם מונח על קיר (שגובהו בלתי מוגבל) כמו בציור.

א. יהי $X = 1$ ו- $f_\Theta(\theta) = \cos\theta$ עבור $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. מצא את פונקציות הצפיפות והתוחלות של L ו- H.

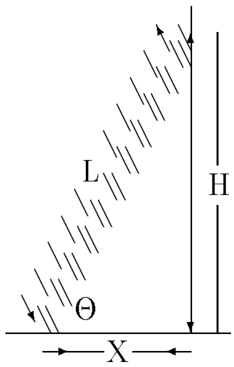
ב. נניח עתה ש- (X, Θ) מהווה וקטור אקראי עם צפיפות $f_{X,\Theta}(x,\theta) = C\,\frac{x^3}{\cos\theta}$ עבור $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ו- $0 < x < \cos\theta$.

ב1. מהו C ?

ב2. מצא את הצפיפות המשותפת של H ו- L.

ב3. חשב את $E(H|L)$.

ב4. בהינתן ש- $H = \frac{1}{2}$ מהו הערך של a עבורו $E(L-a)^2$ תהיה מינימלית ?



9.18 מקל באורך L נשבר בשתי נקודות אקראיות בלתי תלויות לשלושה קטעים.

א. מהי ההסתברות שהקטע הקצר ביותר הוא האמצעי ?

ב. מהו, בממוצע, אורכו של הקטע הקצר ביותר ?

כעת נחלק את המקל בדרך אחרת: ראשית שוברים אותו בנקודה אקראית, לאחר מכן בוחרים באקראי אחד הקטעים שנוצרו ושוברים <u>אותו</u> בנקודה אקראית.

ג. מצא את פונקצית הצפיפות של מיקום נקודת השבירה השנייה (בתוך הקטע המקורי $[0,1]$).

ד. מהו עתה, בממוצע, אורכו של הקטע הקצר ביותר ?

9.19 המספר X של חלקיקים הנפלטים ממקור רדיואקטיבי במשך פרק זמן $[0,t]$, הוא משתנה מקרי פואסוני עם פרמטר λt. נסמן ב-T את זמן הפליטה של החלקיק השני.

א. מצא את פונקצית ההתפלגות $F_T(t)$ והצפיפות $f_T(t)$ של T.

ב. אם ידוע כי החלקיק הראשון נפלט בזמן t_o, ו-R הוא זמן ההמתנה בין פליטת החלקיק הראשון לשני, מצא את פונקציות הצפיפות $f_R(t)$ של R.

ג. מה הקשר בין התשובה לחלק ב' לצפיפות של זמן הפליטה של החלקיק הראשון ?

10 קורלציה וחזאים

10.1 נקודה Q מוגרלת באחידות מתוך עיגול היחידה, ו-(R,Θ) מציינים את הקואורדינטות הפולריות של Q (מוסכם ש- $0 \le \Theta < 2\pi$).

א. האם R ו- Θ מתואמים ?

ב. מהו החזאי האופטימאלי של R באמצעות Θ ?

10.2 נסמן את החזאי הכללי (הלינארי) האופטימאלי של Y באמצעות X ע"י $g(X)$ (ע"י $h(X)$ בהתאמה). עבור הצפיפויות הבאות מצא את הפונקציות g ו- h (תוך כדי ציון תחום הגדרתן) ובכל מקרה סרטט אותן על מערכת צירים משותפת.

א. $f_{X,Y}(x,y) = 6x, \quad 0<x<1, \;\; 0<y<1-x$

ב. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{5}(x+y^2), \quad 0<x<1, \;\; 0<y<1$

ג. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}, \quad -1<x<1, \;\; |y|<1-|x|$

ד. $f_{X,Y}(x,y) = 10y, \quad 0<x<1, \;\; 0<y<x^2$

ה. $f_{X,Y}(x,y) = 96(x+y)^{-5}, \quad 1<x, \;\; 1<y$

ו. Y ו- Z בלתי תלויים, $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Z \sim \mathrm{U}([0,2])$ ו- $X = Y+Z$

ז. בהתייחס לשאלה 9.12, $X = X_1$ ו- $Y = X_0$.

10.3 עבור וקטור אקראי (X,Y) נתון ש- $f_{X,Y}(x,y) = 8xy$ כאשר $0<y<x<1$.

א. חשב את $E(Y|X)$ ואת $E(X|Y)$.

ב. חשב את מקדם המתאם $\rho_{X,Y}$.

10.4 נקודה Q נבחרת באחידות במעגל שמרכזו ב-$(0,0)$ ורדיוסו 1. יהי A המרחק מ-Q לנקודה $(-1,0)$ ו- B המרחק מ- Q לנקודה $(1,0)$. חשב את $\mathrm{Cov}(A^2,B^2)$.

10.5 נתון וקטור אקראי (X,Y) בעל מקדם מתאם $\rho_{X,Y}$. אם $T = cY+d$, $S = aX+b$ כאשר a,b,c,d קבועים נתונים, $a \ne 0, c \ne 0$, מהו $\rho_{S,T}$?

10.6 בשתי קופסאות יש כדורים לבנים וכחולים, ומכל אחת מהן מוציאים באקראי מספר נתון (לא בהכרח שווה) של כדורים (לא באופן בלתי תלוי), כך שהקורלציה בין מספר הכדורים הכחולים שהוצאו משתי הקופסאות היא 0.2 .

א. מהי הקורלציה בין מספר הכדורים הלבנים שהוצאו משתי הקופסאות ?

ב. מהי הקורלציה בין מספר הכדורים הכחולים שהוצאו מהקופסה הראשונה לבין מספר הכדורים הלבנים שהוצאו מהקופסה השניה ?

ג. אוספים ביחד את כל הכדורים שהוצאו משתי הקופסאות ומחזירים את הכחולים לקופסה הראשונה ואת הלבנים לקופסה השניה. מהי עתה הקורלציה בין מספר הכדורים הכחולים שבשתי הקופסאות ?

10.7 מטילים מטבע, בעל סכוי p להצלחה, N פעמים באופן בלתי תלוי, כאשר N משתנה אקראי בלתי תלוי בתוצאת ההטלות ובעל תוחלת μ_N ושונות σ_N^2.

א. הראה שהשונות של המספר X של הצלחות נתון ע"י $pq\mu_N + p^2\sigma_N^2$.

ב. מהי הקורלציה בין N ו-X ?

ג. אם N מפולג פואסונית, מהי הקורלציה בין N ו- X ?

ד. מהי הקורלציה בין N לבין המספר Y של כשלונות ? (אפשר לרשום את התשובה מיד בעזרת התשובה לסעיף ב').

ה. אם N מפולג פואסונית, מהי הקורלציה בין X ו- Y ?

10.8 מהי הקורלציה בין מספר ה-"1"-ים לבין מספר ה-"6"-ים שמתקבלים ב-n זריקות בלתי תלויות של קוביה הוגנת ?

10.9 כל אחד מ-n כדורים מוכנס באקראי, ובלי תלות בכדורים האחרים, לתוך אחד מ-k תאים נתונים ($k \geq 2$). מהי הקורלציה בין כמות הכדורים שיוכנסו לשני תאים נתונים מראש ? האם אפשר היה לדעת את הסימן של מקדם המתאם לפני החישוב המדוייק ?

10.10 מטריצת הקווריאנס של (X, Y, Z) נתונה ע"י $\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$. חשב את $\rho_{X+Y,Y+Z}$.

10.11 נתונים משתנים מקריים בלתי תלויים $X_1, X_2, \ldots, X_n$ כולם בעלי אותה תוחלת ואותה שונות. לכל $1 \leq m \leq n$ נגדיר $S_m = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$.

א. הוכח: לכל $1 \leq l \leq m \leq n$ מתקיים $\rho_{S_l,S_m} = \sqrt{\frac{l}{m}}$.

ב. במשפחה ברוכת ילדים, מהי הקורלציה בין מספר הבנות מתוך 4 הילדים הראשונים לבין מספר הבנות מתוך 9 הילדים הראשונים ?

10.12 במסע אלונקות כל חייל מחזיק מעמד בנשיאת האלונקה זמן אקספוננציאלי עם פרמטר $\lambda > 0$ ולאחר מכן מוחלף ע"י חייל חדש (נתרכז באחת מידיות האלונקה ונתעלם משלושת הידיות האחרות; זמני ההשתתפות של החיילים השונים בלתי תלויים). כך נוצרת סידרה עולה $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \cdots$ של זמני ההחלפה האקראיים.

א. מצא את חזאי הטוב ביותר של T_3 באמצעות T_1.

ב. מצא את החזאי הטוב ביותר של T_1 באמצעות T_3.
(אכן המונח "חזאי" לא מתאים כאן, הרי מדובר בשערוך של מאורע מן העבר).

ג. חזור על שני הסעיפים הקודמים כאשר במקום T_1 ו- T_3 נסתכל בהתאמה על T_k ו- T_n ($k < n$).

ד. חזור על סעיף ג' עבור החזאי <u>הלינארי</u> הטוב ביותר.

<u>הדרכה:</u> אם פתרת את 8.21 תסכים שהפונקציה שמופיעה שם היא הצפיפות של T_r.

10.13 עבור וקטור אקראי (X, Y) עם $EY^2 < \infty$, סמן ב- $\hat{Y}$ את החזאי הלינארי האופטימאלי של Y באמצעות X. סדר את הגדלים הבאים בסדר לא יורד, ונמק את תשובתך.

א. $E(Y - E(Y|X))^2, \quad \mathrm{Var}Y, \quad E(Y - \hat{Y})^2$.

ב. $E(Y-\hat{Y})^2, \quad E(Y+\hat{Y})^2$.

10.14 וקטור אקראי (X,Y) מפולג באחידות בתחום שבין ציר x לבין העקום $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

א. חשב את התוחלת והשונות של Y.

ב. חשב את מקדם המתאם בין X ו- Y וזה שבין X^2 ו- Y.

ג. האם X ו- Y בלתי תלויים ?

10.15 (תרגיל על סמך נסיון אישי)
הכביש מביתו של אדם אל עבודתו מכיל n פסי האטה. עם יציאתו מהבית, הוא מדליק את מכשיר הרדיו אך, עקב מגע רופף, הרדיו מתחלף בכל פס האטה בין המצבים "פועל" ו- "מושבת", וזאת בהסתברות $0<p<1$ ובאופן בלתי תלוי מפס לפס.

א. מהי ההסתברות לכך שעם הגיעו לעבודה הרדיו יפעל, ומהו הגבול של הסתברות זו כאשר $n\to\infty$?

ב. אם $p=\frac{3}{7}$ ואם עבור $k=1,2$
$$X_k=\begin{cases}1 & \text{הרדיו פועל אחרי } k \text{ פסים}\\ 0 & \text{הרדיו מושבת אחרי } k \text{ פסים}\end{cases}$$
חשב את מקדם המתאם בין X_1 ו- X_2.

11 פונקציה אופיינית, סדרות של משתנים והסתברויות גבוליות

11.1 חשב את הפונקציה האופיינית $\phi_X(t)$ של משתנה מקרי X כאשר

א. $X\sim\mathrm{Geom}(p)$,

ב. $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$,

ג. $X=\sum_{k=1}^{5}X_k$, כאשר כל המחוברים בלתי תלויים ו-$X_k\sim U[k-1,k]$, $k=1,\ldots,5$.

11.2 השתמש (ללא צורך בהוכחה) בעובדה ש- $\phi_X(t)=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ אם ורק אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ כדי להוכיח שהסכום של שני משתנים מקרים גאוסיים בלתי תלויים גם הוא גאוסי.

11.3 אם הפונקציה האופיינית של משתנה מקרי X נתונה ע"י $\phi_X(t)=2\left(\frac{1-\cos t}{t^2}+i\frac{t-\sin t}{t^2}\right)$ עבור $t\neq 0$, חשב את המומנטים EX^k, $k=0,1,2,\ldots$ של X.

11.4 מצא מספר k כזה שבהסתברות 0.5 מספר ההצלחות ב-1000 הטלות מטבע הוגנת יהיה בין 440 ל-k.

11.5 התוכנה של בנק מעגלת כל סכום כסף לשקלים שלמים לפני שהיא מפקידה אותו לחשבון המתאים, וע"י כך מוסיפה אליו משתנה מקרי אחיד ב-$[-0.5,0.5]$ (התוספות הקשורות להפקדות שונות הינן בלתי תלויות). מהי ההסתברות שב-100 הפקדות כאלו בחשבון נתון, הלקוח יפסיד בשל כך 10 ש"ח או יותר ?

11.6 הערך את המספר המינימלי של נסויי ברנולי (עם הסתברות של $p=0.5$ להצלחה בודדת) שיש לבצע על מנת שבהסתברות של 0.75 לפחות השכיחות היחסית של הצלחות תהיה בין 0.4 ל- 0.6

א. בעזרת אי השויון של צ'בישב

ב. באמצעות משפט הגבול המרכזי.

11.7 בבית חרושת מייצרים רכיבים אלקטרוניים, כאשר אורכי חייהם בלתי תלויים ומפולגים כל אחד עם צפיפות $f(x) = \frac{3}{x^4}$, עבור $x > 3$.

א. חשב את ההסתברות שרכיב מסויים יפעל פחות מ-5 שעות עם כבר פעל 4 שעות.

ב. מחברים ביחד 100 רכיבים למערכת כך שהיא תפעל אם לפחות 85 מהרכיבים בה תקינים. מצא את ההסתברות לכך שהמערכת תפעל לפחות 5 שעות.

ג. מהי ההסתברות לכך שהסכום של אורכי חייהם של 100 רכיבים יהיה גדול מ-500 שעות ?

ד. מניחים ש- 4% מהרכיבים פגומים. מצא (בעזרת הקירוב הנורמלי) את הגודל המינימלי של מדגם כך שהשכיחות היחסית של רכיבים פגומים בו תהיה בין 3% ו- 5% בהסתברות 0.99.

11.8 בבית אריזה לקמח מצה ישנה מכונה שאורזת שקיות באופן שמשקל כל שקית מתפלג באחידות בתחום $[470, 520]$ (בגרמים, ובלי תלות בשקיות האחרות). שקיות אלו נארזות בקרטונים המכילים 40 שקיות כ"א. מהי (בקירוב) ההסתברות שמשקלו של קרטון נתון יהיה בין 19 ק"ג ל- 21 ק"ג ?

11.9 אם יאמרו לנו שב-300 זריקות בלתי תלויות של קוביה הוגנת התקבלה התוצאה "6" יותר מ- 100 פעמים, נופתע מאוד. השתמש בחוק המספרים הגדולים בכדי לבטא הפתעה זו בצורה מתמטית, ונסה לכמת אותה בעזרת משפט הגבול המרכזי.

11.10 ניתן להעזר בתשובה לשאלה 8.2 כדי לענות על סעיף א'.

א. הראה שניתן להציג משתנה מקרי פואסוני X כלשהו כ- $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ כאשר n שרירותי ו- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ הינם משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים זהה. (הסמון $U \stackrel{\mathcal{D}}{=} V$ עבור שני משתנים בדידים U ו-V פרושו של- U ו- V יש אותה פונקצית הסתברות).

ב. מאפיה מכינה 45 חלות עבור לקוחותיה, אשר מספרם הוא פואסוני עם תוחלת 36. מהי ההסתברות שהחלות לא תספקנה ? (כל לקוח לוקח חלה אחת).

11.11 לכל מספר n טבעי יהי $X_n \sim \mathrm{Pois}(n)$. מצא, לכל α ממשי, את $\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq n+n^\alpha)$.

11.12 מחוג הדקות של שעון ישן מתקדם כל דקה $1, 0$ או 2 דקות, עם הסתברות של $\frac{1}{3}$ לכל אפשרות, ובאופן בלתי תלוי מדקה לדקה. מהי ההסתברות שכעבור שעתיים וחצי השעון יאחר ב- 5 דקות או יותר ?

12 תרגילים נוספים

12.1 כל אחד מ-N חלקיקים יכול להמצא באחד מ-n $(n \leq N)$ מצבים $a_1, a_2, \ldots, a_n$. מתוך N החלקיקים נבחרו באקראי וללא החזר (כלומר אחד אחרי השני) n חלקיקים.

א. מה הסתברות שכל n חלקיקים במדגם יהיו באותו מצב?

ב. מה הסתברות שבמדגם לפחות שני חלקיקים יהיו באותו מצב?

ג. יהי $N = 200$. בעזרת מחשבון מצא גודל מינימלי של מדגם ללא החזר שעבורו ההסתברות שבסעיף הקודם גדולה מ-$1/2$.

12.2 אם α (ביחידות מסוימות) תוצרת חודשית של מפעל אזי ההכנסה החודשית של המפעל שווה ל-$\alpha^2 2^\alpha$ ש"ח וההוצאה החודשית שלו מסתכמת ב-$\alpha\beta$ ש"ח. מניחים ש-(α, β) נקודה אקראית ב- $[0,2]\times[0,1]$. חשב את ההסתברות שרווח חודשי של המפעל יהיה גדול מ-$7\alpha\beta$.

12.3 נקודה נבחרת באקראי מתוך עיגול בעל רדיוס 1 שמרכזו בראשית. נסכים לסמן ב-A מאורע " הנקודה נבחרה מתחום A" נגדיר שלושת התחומים הבאים בעזרת קואורדינטות קוטביות:

$$A_1 = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi\},$$

$$A_2 = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \alpha\}$$

$$B = \{(r,\varphi) : 0 \le r \le 1/4, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

מצא ערך של α כך שהמאורעות A_1, A_2 יהיו בלתי תלוים בהנתן המאורע B.

12.4 יהיו המאורעות A, B בלתי תלוים בהנתן מאורע C. האם $\bar{A}$ ו-B בעלי אותה התכונה?

12.5 משתנה אקראי Z מפולג $N(0;1)$. בעזרת כלל לופיטל חשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(Z > x + \frac{a}{x})}{P(Z \ge x)}$$

12.6 מספר רכיבים של מערכת היוצאים מכלל פעולה במשך חודש ימים הוא משתנה אקראי פואסוני עם פרמטר $ln2$. בסוף כל חודש כל הרכיבים המקולקלים מוחלפים לחדשים והמערכת מתחילה לפעול מחדש ובאופן בלתי תלוי בעבר. אם במשך חודש מתקלקלים יותר מ-3 רכיבים למערכת נשלח אות אזהרה בסוף אותו החודש. כשמערכת מקבלת שני אותות אזהרה היא נסגרת. חשב בעזרת מחשבון את ההסתברות שמערכת תפעל 5 חודשים בדיוק.

12.7 ידוע שאות מגיע לקולט ברגע אקראי T הנמצא עם הסתברות α בקטע הזמן $[1,3]$ ועם הסתברות $1-\alpha$ בקטע הזמן $[4,8]$. מצא פונקציות הצפיפות וההתפלגות של T וצייר אותן.

12.8 יהי X משתנה אקראי המפולג לפי פ' צפיפות

$$f(x) = cx, \quad x \in [0,1],$$

כש-c קבוע נירמול. ודא שעבור משתנה אקראי הנ"ל תכונה של חוסר זכרון לא מתקיימת וקבע כיוון האי-שיויון שמתקבל.

12.9 יהי X משתנה אקראי המפולג לפי פ' צפיפות

$$f(x) = cx, \quad x \in [0,1],$$

כש-c קבוע נירמול. עבור מספר טיבעי נתון N מוגדר משתנה אקראי $Y = [NX]$, כש $[z]$ מסמן חלק שלם של מספר z, כלומר $[-2.4] = -3, \quad [2.6] = 2$. חשב פונקציה הסתברות

$$p_Y(k) = P(Y = k)$$

של Y וצייר גרף של פונקצית התפלגות של Y עבור $N = 5$.

12.10 רעש במערכת הוא משתנה אקראי X המפולג $N(\mu; \sigma^2)$ מערכת משדרת אות Y שהוא טרנספורמציאה הבאה של הרעש:

$$Y = \begin{cases} \frac{X-\mu}{\sigma}, & |X - \mu| \le \sigma \\ 0, & |X - \mu| > \sigma. \end{cases}$$

א. מצא פי התפלגות של Y והצג אותה כתערובת של התפלגות רציפה ובדידה.

ב. חשב תוחלת של Y.

12.11 הוכיחו את הנוסחה

$$EX = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))dx$$

עבור משתנה אקראי בדיד ואי-שלילי X המפולג לפי פונקציה התפלגות F.

12.12 מצא נוסחת הדמייה של פונקציה צפיפות

$$f(x) = c\sqrt{x}, \quad x \in [1,2],$$

כש-c קבוע נירמול.

12.13 כל פעם משודר אות אחד מ-r האותות $A_1, A_2, \quad, A_r$, כך שההסתברות לשדר את האות A_i שווה ל-$p_i, \quad i = 1, \dots, r$.

נסמן $X_i, \quad i = 1, \dots, r$ מספר פעמים ששודר אות $A_i, \quad i = 1, \dots, r$ כעבור $3r$ שידור-ים בלתי תלויים הנ"ל.

א. מצא את פונקצית ההסתברות המשותפת של המשתנים האקראיים X_1 ו-X_3

ב. מצא את המטריצת קובריאנס של וקטור אקראי $(X_1, \quad \dots, X_n)$

12.14 X מפולג $U(0;1)$, Y מפולג $N(0;1)$ והם בלתי תלוים. משתנה אקראי $Z = X + Y$.

א. מהו החזאי האופטימלי של X ע"י Z?

ב. מצא הפונקצית הצפיפות מותנת $f_{x|z}(x|z)$

12.15 משתנה אקראי X מפולג $N(0;\sigma^2)$. מבצעים n מדידות של X:

$$Y_i = X + \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

כאשר השגיאות במדידות $i = 1, 2, \ldots n \quad \delta_i,$ בלתי תלויות ,מפולגות $N(0;4)$ ובלתי תלויות ב-X. מהו החזאי האופטימלי ומה הוא החזאי הלינארי אופטימלי של X ע"י המדידות $Y_1, \ldots, Y_n$?

12.16 $\eta = (X_1, X_2)^T$-וקטור אקראי גאוסי בעל תוחלת $m_\eta = (1,2)^T$ ומטריצת קובריאנס

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

מצא מטריצה A ווקטור b כך ש $\zeta = A\eta + b$ יהיה בעל תוחלת $m_\zeta = (1,1)^T$ ורכיבים בלתי תלוים.

12.17 יהי $(X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ וקטור אקראי גאוסי בעל וקטור תוחלות **0** ומטריצת קובריאנס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. מה הוא החזאי האופטימלי של X_1 ע"י X_4?

ב. מה הוא החזאי האופטימלי של X_1 ע"י X_3, X_4?

ג. מה הוא החזאי האופטימלי של X_1X_4 ע"י X_3, X_2?

12.18 $Z \sim Pois(\lambda)$, $W = max\{Z, 1\}$.

מהו המשערך האופטימלי של Z ע"י W ומהי תוחלת של ריבוע השגיאה?

12.19 $n(n \geq 2)$ חברי הנהלה $A_1, A_2, \ldots, A_n$ מצביעים "בעד" או"נגד" בנושא של תקציב. עקב ניגוד ענינים בינם מתקיים:

$$Pr.(A_k : YES|A_i : YES,\ i = 1, \ldots, k-1) = \tfrac{2}{k},\ k = 2, \ldots, n,$$

$$Pr.(A_1 : NO) = \alpha > 0$$

מה הסתברות שלא תהיה הצבעה פה אחד "בעד" ?

12.20 מתוך כל סידורים אפשריים של מספרים $n \geq 3$ $1, 2, \ldots, n$ נבחר באקראי סידור אחד.

א. מה הסתברות שבסידור שנבחר סכום של מספר ראשון ואחרון שווה ל-n?

ב. מה הסתברות ששלושת המספרים $1, 2$ ו- n יופיעו בסדר עולה?

12.21 א. הוכח באינדוקציה את האי-שיוויון של בול:
עבור כל מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ מתקיים

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ב. A_1, A_2, A_3 הם שלושה מאורעות המקיימים

$$P(A_i|A_3) = \frac{i}{3},\ i = 1,2 \quad P(A_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1,2,3, \quad P(A_1A_2|\ \bar{A}_3) = \frac{1}{9}$$

חשב

$$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcap \bar{A}_3)$$

12.22 המאורעות A ו- B בלתי תלויים במאורע C.
א. האם A ו- B בלתי תלויים במאורע $\bar{C}$?
ב. האם $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ בלתי תלויים במאורע C?

12.23 מטילים קובית משחק הוגנת. תנו דוגמא של מאורעות A ו-B בלתי תלויים וכך ש-$0 < P(A) < 1,\ 0 < P(B) < 1.$

12.24 משתנה אקראי X מוגדר כמספר ניסויים ברנולי בלתי תלויים עד וכולל כשלון ראשון, כשההסתברות ההצלחה שווה ל-$0 < p < 1$ והסתברות הכשלון שווה ל-$q = 1 - p$.
חשבו

$$P(6 \le X \le 10|X \ge 3)$$

12.25 כל אחד מ-$2n+3$ לקוחות מחליט עם הסתברות $0 < \alpha < 1$ לקבל הצעה של חברת ביטוח ועם הסתברות $1 - \alpha$ לדחות אותה, וזה באופן בלתי תלוי אחד בשני. לקוח שהחליט "כן" להצעה, בוחר באקראי אחד מ-$3n$ תחנות שירות של חברה וניגש אליה. בהנחה ש-n גדול מאוד, מה הסתברות שלתחנה מסוימת יגשו יותר משני לקוחות?

12.26 יהיו F ו-f פונקציות התפלגות וצפיפות בהתאמה של משתנה אקראי.
א.חשב את הקבוע הנירמול C של פונקציית הצפיפות g הניתנת ע"י:

$$g(x) = Cf(x)e^{-F(x)},\ x \in R.$$

ב. מצא את פונקצית ההתפלגות המתאימה ל-g.

12.27 מספר אירועים בפרק זמן $t > 0$ הוא משתנה אקראי פואסוני $\lambda > 0$,$Pi(\lambda t)$. עבור משתנה אקראי T_2- זמן המתנה עד וכולל התרחשות של שני ארועים, יש לודא אי-קיום של התכונה "חוסר הזכרון" ולקבוע את הכיוון האי-שוויון.

12.28 משתנה אקראי רציף בהחלט X מפולג לפי פונקצית התפלגות $F(x),\ x \in R$.
חשבו $VarX$.

12.29 יהי$\{\Omega, \Upsilon, P\}$ מרחב הסתברות ו-$A \in \Upsilon$ מאורע נתון. נגדיר משתנה אקראי I_A :

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

א. חשבו $EI_{A \bigcup B}$, עבור מאורעות A, B נתונים.

ב. יהי X משתנה אקראי מעריכי עם פרמטר $\lambda > 0$ ומאורע $A = \{X \geq 2\}$.
חשבו $VarI_A$.