מערכות משוואות אי הומוגניות־וריאציית פרמטרים

עד כה, טיפלנו במערכות הומוגניות. עכשיו נניח כי נתונה לנו מערכת משוואות לינארית אי־הומוגנית

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\overline{x}' = A(t)\overline{x} + \overline{b}(t).$$

נניח כי $\overline{u^1}(t), \dots, \overline{u^n}(t)$ פתרונות בלתי תלויים עבור המערכת ההומוגנית המתאימה, כלומר בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה. אז יש פתרון פרטי מהצורה

$$\overline{x}_p(t) = c_1(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n(t)\overline{u^n}(t).$$

נחפש תנאים על הפונקציות הסקלריות $c_1(t), \dots, c_n(t)$ עבורם נקבל פתרון פרטי. נגזור את הביטוי

$$\overline{x}_p'(t) = c_1'(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n'(t)\overline{u^n}(t) + c_1(t)\overline{u^1}'(t) + \dots + c_n(t)\overline{u^n}'(t)$$

נציב למערכת ונקבל בצד שמאל

$$\overline{x}_p'(t) = c_1'(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n'(t)\overline{u^n}(t) + c_1(t)\overline{u^1}'(t) + \dots + c_n(t)\overline{u^n}'(t)$$

ומצד שני, בצד ימין

$$\begin{aligned} & A(t)\overline{x}_p(t) + \overline{b}(t) = A(t)\left(c_1(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n(t)\overline{u^n}(t)\right) + \overline{b}(t) = \\ = \ & c_1(t)A(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n(t)A(t)\overline{u^n}(t) + \overline{b}(t) = \\ = \ & c_1(t)\overline{u^1}'(t) + \dots + c_n(t)\overline{u^n}'(t) + \overline{b}(t) \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש־$\overline{u^i}'(t) = A(t)\overline{u^i}(t)$. ולכן כאשר נשווה נקבל כי

$$c_1'(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n'(t)\overline{u^n}(t) = \overline{b}(t)$$

הוא התנאי על הפונקציות הסקלריות $c_1(t), \dots, c_n(t)$ כך ש־

$$\overline{x}_p(t) = c_1(t)\overline{u^1}(t) + \dots + c_n(t)\overline{u^n}(t)$$

הוא פתרון של המערכת האי־הומוגנית.

<u>תרגיל:</u>

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 16te^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u> נפתור קודם את ההומוגנית המתאימה

$$p(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} 1-r & 2 \\ 2 & -2-r \end{pmatrix} = r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2)$$

$$3: \begin{pmatrix} 1-(-3) & 2 \\ 2 & -2-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2: \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת, נחפש פתרון פרטי בשיטת וריאציית פרמטרים

$$x_p(t) = c_1(t)e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1'(t)e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2'(t)e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16te^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1'(t)e^{-3t} + 2c_2'(t)e^{2t} = 16te^t$$

$$-2c_1'(t)e^{-3t} + c_2'(t)e^{2t} = 0$$

$$c_2'(t) = 2c_1'(t)e^{-5t}$$

$$c_1'(t)e^{-3t} + 4c_1'(t)e^{-5t}e^{2t} = 16te^t$$

$$5c_1'(t)e^{-3t} = 16te^t$$

$$c_1'(t) = \frac{16}{5}te^{4t}$$

$$c_2'(t) = \frac{32}{5}te^{-t}$$

$$c_1(t) = \frac{1}{5}e^{4t}(4t-1) + c_1$$

$$c_2(t) = -\frac{32}{5}e^{-t}(t+1) + c_2$$

$$x_p(t) = c_1(t)e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + c_2(t)e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}e^{4t}(4t-1)e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - \frac{32}{5}e^{-t}(t+1)e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} =$$
$$= e^t\begin{pmatrix}\frac{4}{5}t - \frac{1}{5} - \frac{64}{5}t - \frac{64}{5}\\ -\frac{8}{5}t + \frac{2}{5} - \frac{32}{5}t - \frac{32}{5}\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}-12t-13\\ -8t-6\end{pmatrix}$$
$$x(t) = c_1e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}-12t-13\\ -8t-6\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u> נתון כי הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה עבור

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}te^t\\ te^{2t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}$$

הוא

$$x_H(t) = c_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix}1\\t\\0\end{pmatrix} + c_3e^t\begin{pmatrix}2t\\t^2\\2\end{pmatrix}$$

מצאו את הפתרון הכללי.

<u>פתרון:</u> נחפש פתרון כללי בשיטת וריאציית פרמטרים

$$x_p(t) = c_1(t)e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2(t)e^t\begin{pmatrix}1\\t\\0\end{pmatrix} + c_3(t)e^t\begin{pmatrix}2t\\t^2\\2\end{pmatrix}$$
$$c_1'(t)e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_2'(t)e^t\begin{pmatrix}1\\t\\0\end{pmatrix} + c_3'(t)e^t\begin{pmatrix}2t\\t^2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}te^t\\ te^{2t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}c_2'(t)e^t + 2c_3'(t)te^t\\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t + c_3'(t)t^2e^t\\ 2c_3'(t)e^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}te^t\\ te^{2t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}c_2'(t) + 2c_3'(t)t\\ c_1'(t) + c_2'(t)t + c_3'(t)t^2\\ 2c_3'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\ te^t\\ e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$c_3'(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$$
$$c_2'(t) = t - te^{2t}$$
$$c_1'(t) = te^t - t^2 + \frac{1}{2}t^2e^{2t}$$
$$c_1(t) = te^t - e^t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{2t} + c_1$$
$$c_2(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + c_2$$
$$c_3(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + c_3$$
$$x_p(t) = \left(te^t - e^t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{2t}\right) e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \quad \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\right) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}e^{2t}e^t \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \quad \left(te^t - e^t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{2t}\right) e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \quad \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\right) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}e^{3t} \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$x(t) = c_1e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3e^t \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \quad \left(te^t - e^t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2e^{2t} - \frac{1}{4}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{2t}\right) e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \quad \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\right) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}e^{3t} \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$