<u>אינטגרלים מוכללים</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

- סינגלריות של אי־חסימות הקטע:
  - תהי $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על $[a,M]$ לכל $M>a$. אם הגבול $\lim_{M\to}\int_a^M f$ קיים, נסמן אותו ב־ $\int_a^\infty f$ ונאמר שהאינטגרל מתכנס. אחרת, נאמר שהאינטגרל מתבדר. באופן דומה מגדירים את $\int_{-\infty}^a f$.
  - אם האינטגרל $\int_a^\infty f$ מתכנס אזי: $\int_a^\infty f=\left(\int_a^b+\int_b^\infty\right)f$.
  - אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ועבור $a\in\mathbb{R}$ קיימים $\int_{-\infty}^a f$ ו־ $\int_a^\infty f$ נגדיר: $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^a f+\int_a^\infty f$. זה לא תלוי בבחירת a.

    הערה: זה **לא** אותו דבר כמו $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f$. לגבול הזה קוראים $Cauchy\,principal\,value$ של f.
- סינגולריות של אי־חסימות הפונקציה:
  - תהי $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת שלכל $\epsilon>0$ היא אינטגרבילית ב־ $[a,b-\epsilon]$. אם קיים הגבול $\lim_{\epsilon\to0^+}\int_a^{b-\epsilon}f$ נגדיר אותו להיות $\int_a^b f$ ונאמר שהאינטגרל מתכנס.
  - משיקולי רציפות פונקציה צוברת שטח, ההגדרה הזו מתלכדת במקרה ש־ f חסומה.
- **ה**דוגמה:

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^p}dx<\infty\Longleftrightarrow p>1$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx<\infty\Longleftrightarrow p<1$$

- זהירות: הסינגולריות לא תמיד נמצאת בגבול העליון או התחתון של האינטגרל.
- מבחני התכנסות לפונקציות אי־שליליות:
  - מבחן ההשוואה: יהיו f,g שתי פונקציות **אי־שליליות** ב־ $[a,\infty)$ ואינטגרביליות רימן על כל תת־קטע סופי. נניח

$$f\le g$$

(מספיק החל ממקום מסוים)

אזי

$$\int_a^\infty g<\infty\Longrightarrow\int_a^\infty f<\infty$$

$$\int_a^\infty f=\infty\Longrightarrow\int_a^\infty g=\infty$$

– מבחן השוואה גבולי: יהיו f,g שתי פונקציות **אי־שליליות** ב־ $[a,\infty)$ ואינטגרביליות רימן על כל תת־קטע סופי. נסמן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L$$

אזי:

* אם $L=0$ אזי $\int_a^\infty g<\infty$ מחייב ש־ $\int_a^\infty f<\infty$.
* אם $L\in(0,\infty)$ אזי $\int_a^\infty f$ ו־ $\int_a^\infty g$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.
* אם $L=\infty$ אזי $\int_a^\infty f<\infty$ מחייב ש־ $\int_a^\infty g<\infty$.

באופן דומה מכללים כאשר הסינגולריות היא באי־חסימות הפונקציה.

- הגדרה: תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת־קטע סופי. נאמר ש־ $\int_a^\infty f$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\infty|f|<\infty$.
- מבחן אבל 1:

יהיו $g,f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. נניח ש־ $\int_a^\infty f$ קיים. g מונוטונית וחסומה. אזי: $\int_a^\infty fg$ קיים.

- מבחן אבל 2:

יהיו $g,f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. f רציף ו־ $\int_a^\infty f$ קיים. g מונוטונית וגזירה ברציפות. אזי: $\int_a^\infty fg$ קיים.

- מבחן דיריכלה:

יהיו $g,f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$. f רציף ו־ $\int_a^x f$ חסומה. g מונוטונית לאפס וגזירה ברציפות. אזי: $\int_a^\infty fg$ קיים.

תרגילים:

1. האם קיים $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$?

<u>פתרון:</u>

אם $x\geq1$ אזי $0\leq e^{-x^2}\leq e^{-x}$ וקל לראות ש־ $\int_1^\infty e^{-x}dx=e^{-1}<\infty$ לכן $\int_1^\infty e^{-x^2}dx<\infty$ אבל זה מחייב ש־ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx<\infty$. ומשיקולי סימטריות, $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$.

שימו לב שאינטגרל מוכלל מעוניין ב־ "איפה הסינגולריות מתרחשת". הערכים של $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ ו־ $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ שונים, אבל מכיוון ש־ $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ קיים (במובן הרגיל), אז סופיות אחד מהם מחייבת סופיות השני.

2. האם קיים $\int_1^\infty\frac{1}{(x-1)^p}dx$? $(p\in\mathbb{R})$

<u>פתרון:</u>

מטפלים בנפרד ב־ $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^p}$וב־ $\int_2^\infty\frac{dx}{(x-1)^p}$. על ידי החלפת משתנים, אלה מתכנסים אם ורק אם $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ ו־ $\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$ בהתאמה. ואת זה ראינו בהרצאה.

3. חשבו את $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$. $(p>0)$

פתרון:

ראינו את האינטגרל הזה בתרגול 1 תרגיל 5.

האינטגרל מתכנס בשוואה עם $e^{-\frac{x}{2}}$ כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x}{2}}x^{p-1}=0$$

ובבירור קיים $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx$ לכן קיים $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$

נבצע אינטגרציה בחלקים כמו קודם:

$$\int_0^M x^{p-1}e^{-x}dx=\frac{e^{-x}x^p}{p}\mid_0^M+\frac{1}{p}\int_0^M x^pe^{-x}dx$$

ניקח $M\to\infty$ ונקבל $\int_0^\infty x^pe^{-x}dx=p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=\ldots=p!$

מסקנה:

$$\int_0^\infty x^ne^{-x}dx=n!,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

4. האם קיים $\int_5^\infty\frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}}$?

פתרון:

הבעיה כאן היא אי־חסימות התחום. עבור x גדול מאוד, x^2 שולט על $\sqrt[3]{x}$ ואכן:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}}{\frac{1}{x^2}}=1$$

שימו לב, מאוד קל לראות ש־ $\frac{1}{x^2}>0$. דרך יפה להתחכם ולהבטיח שגם $\frac{1}{x^2-\sqrt[3]{x}}$ עבור x־ים מספיק גדולים הוא שהגבול שקיבלנו חיובי ממש! לכן ע"פ מבחן השוואה גבולי לפונקציות אי־שליליות (לפחות החל ממקום מסוים), $\int_5^\infty\frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}}$ ו־ $\int_5^\infty\frac{dx}{x^2}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו, לכן מתכנסים לפי ההרצאה.

הערה: לפעמים כדי להדגיש שהבעיה היא רק באי־חסימות התחום, נהוג לרשום $\int^\infty f$ כאשר מובן מהדיון שלוקחים גבול תחתון מתאים שממנו f אינטגרבילית על כל תת־קטע סופי, ואפילו חיובית (אם צריך).

5. האם קיים $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}}$?

פתרון:

כאן הבעיה היא בסינגולריות האינטגרנד ב־ 0, שם הוא הולך ל־ $-\infty$. לכן נתבונן ב־ $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x^2}$. עבור x־ים קרובים ל־ 0 האינטגרנד חיובי ו־

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-x^2}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=1$$

ומההרצאה $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}<\infty$, ומהשוואה גבולית, גם $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x^2}=\infty$ לכן לא קיים האינטגרל הנתון.

6. האם קיים $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}$?

<u>פתרון:</u>

במבט ראשון יש בעיה ב־ $x=0$ אבל אחרי חקירה פשוטה רואים שהיא סינגולרית סליקה, וזהו אינטגרל רימן של פונקציה רציפה.

7. האם קיים $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$?

<u>פתרון:</u>

כאן צריך לבדוק האם קיים $\int^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$ ואכן בהשוואה גבולית עם $\int^\infty \frac{dx}{x^2}$ הוא מתכנס.

8. חקור את ההתכנסות של $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(1+x)^q}$.

<u>פתרון:</u>

נסמן: $f(x)=\frac{1}{x^p(1+x)^q}$. נחקור את ההתכנסות של $\int_0^1 f$ ואת $\int_1^\infty f$ וההתכנסות של $\int_0^\infty f$ היא התכנסות שני האינטגרלים האלה.

בחירת 1 היא בבירור שרירותית.

- $\int_0^1 f$: כאן תתכן בעייה ב־ $x=0$. $f\geq 0$ ו־ $\lim_{x\to 0^+}\frac{f}{\frac{1}{x^p}}=1$ לכן $\int_0^1 f$ קיים אם ורק אם $p<1$.
- $\int_1^\infty f$: כאן יש בעייה עם חסימות הקטע. אבל $\lim_{x\to\infty}\frac{f}{\frac{1}{x^{p+q}}}=1$ ולכן יש התכנסות אם ורק אם $p+q>1$.

לסיכום, $\int_0^\infty f<\infty$ אם ורק אם $p<1$ וגם $p+q>1$.

9. האם קיים $\int_0^1 \frac{x(\cos x-1)dx}{(e^x-1)(\sin x-x)}$?

<u>פתרון:</u>

ע"י שימוש בטיילור של $\sin x, \cos x, e^x$ סביב $x_0=0$:

$$\sin x - x \sim -\frac{x^3}{3!}$$

$$e^x-1\sim x$$

$$\cos x-1\sim -\frac{x^2}{2}$$

בפרט האינטגרד חיובי ו־ $0<\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3!}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x(\cos x-1)}{(e^x-1)(\sin x-x)}}{\frac{x\cdot x^2}{x\cdot x^3}}<\infty$ ולכן בהשוואה עם $\int_0^1\frac{dx}{x}$ האינטגרל מתבדר.

10. א. האם קיים $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$? $(\alpha\in\mathbb{R})$

ב. האם קיים $\int_0^1\frac{dx}{(\ln(x+1))^\alpha}$? $(\alpha\in\mathbb{R})$

<u>פתרון:</u>

את האינטגרל הזה ראינו בתרגול 1 תרגיל 3.

א. נבצע החלפת משתנים שביצענו שם: $t=\ln x$, ונקבל שהאינטגרל הזה קיים אם ורק אם קיים $\int_{-\infty}^{\ln\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^\alpha}$ וזה אם ורק אם $\alpha>1$.

הערה: בדומה $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$.

ב. על ידי החלפת משתנים $t = x+1$ ו־ $s = \ln t$, נקבל שזה מתכנס אם ורק אם $\int_0^{\ln 2} \frac{e^s ds}{s^\alpha}$ מתכנס וזה אם ורק אם $\alpha < 1$.

11. א. האם קיים $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \cdot \ln x}$? $(p \in \mathbb{R})$

ב. האם קיים $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln x}$? $(p \in \mathbb{R})$

<u>פתרון:</u>

א. האם קיים $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \cdot \ln x}$? $(p \in \mathbb{R})$

מקרה 1: $p > 1$. כאן ה־ $\ln x$ עוזר ל־ x^p אבל x^p לבד מתגבר את אי חסימות הקטע. ז.א: $\frac{1}{x^p \ln x} \le \frac{1}{x^p}$ עבור x־ים גדולים ו־ $\int^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty$ לכן $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \cdot \ln x} < \infty$.

מקרה 2: $p < 1$. כאן $\ln x$ מנסה לעזור והשאלה היא האם הוא יכול באמת לגרום לאינטגרל להתכנס? מתברר שלא. ניקח $\epsilon > 0$ כך ש־ $p + \epsilon < 1$ ואז $\frac{1}{x^p \ln x} = \frac{1}{x^{p+\epsilon} \frac{\ln x}{x^\epsilon}}$ מכיוון ש־ $\frac{\ln x}{x^\epsilon} \to 0$ כאשר $x \to \infty$ אזי $\frac{1}{x^p \ln x} \ge \frac{1}{x^{p+\epsilon} \frac{1}{2}}$ ו־ $\int^\infty \frac{dx}{x^{p+\epsilon}} = \infty$ לכן $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln x}$מתבדר.

מקרה 3: $p = 1$. ראינו בתרגול 1 תרגיל 3 ש־ $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x$ לכן: $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \mid_2^\infty = \infty$.

לסיכום, $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln x}$ קיים אם ורק אם $p > 1$. ז.א ה־ $\ln x$ לא עוזר ל־ x^p הרי גם $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p}$ קיים אם ורק אם $p > 1$.

ב. האם קיים $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln x}$? $(p \in \mathbb{R})$

הגורם x^p אינו בכלל משפיע על הפונקציה, מקור הסינגולריות הוא מה־ $\ln x$ ב־ $x = 1$, ובאופן מתמטי:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^p \ln x}}{\frac{1}{\ln x}} = 1$$

לכן לפי מבחן השוואה לפונקציות אי־שליליות $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln x}$ קיים אם ורק אם $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ קיים.

על ידי החלפת המשתנים $t = \ln x$, זה קיים אם ורק אם $\int_0^{\ln 2} \frac{e^t dt}{t}$ קיים, אבל בהשוואה עם $\int_1^{\ln 2} \frac{dt}{t}$, זה לא קיים.

לסיכום, $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln x}$ לא קיים.

לחקור באופן דומה את $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p \ln x}$.

הערה: תנסו לפתור עם בעזרת החלפת משתנים מתאימה.

12. האם קיים $\int_1^\infty \sin\left(x^2\right) dx$?

<u>פתרון:</u>

ע"י ההצבה $t = x^2$ נקבל שזה קיים אם ורק אם קיים $\int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$ וזה אכן קיים לפי מבחן דיריכלה.

13. האם קיים $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^p} dx$? $(p > 0)$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בדיריכלה: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$. ונקבל שהאינטגרל מתכנס לכל $p > 0$.

14. האם קיים $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^p}dx$? $(p>0)$

<u>פתרון:</u>

אם $p\in(0,1]$ האינטגרנד חסום. וזה אינטגרל רימן רגיל.

אם $p>1$, נשים לב:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-1}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

לכן האינטגרל חיובי בסביבת 0 וע"פ השוואה עם $\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx$, האינטגרל קיים אם ורק אם $p-1<1$.

15. תהי f אינטגרבילית בכל תת־קטע סופי של $[a,\infty)$. הוכיחו שתנאי הכרחי ומספיק לקיום האינטגרל $\int_a^\infty f$ הוא:

לכל $\epsilon>0$ קיים M כך שלכל $b_1,b_2>M$ מתקיים: $\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\epsilon$.

<u>הוכחה:</u>

נגדיר $I(b)=\int_a^b f$. ע"פ הגדרת הגבול של קושי, הגבול $\lim_{b\to\infty}I(b)$ קיים אם ורק אם לכל $\epsilon>0$ קיים M כך שלכל $b_1,b_2>M$ מתקיים $|I(b_1)-I(b_2)|<\epsilon$. עכשיו רק נשים לב ש־

$$|I(b_1)-I(b_2)|=\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|$$

וזה מסיים.

הערה: השתמשו באפיון זה כדי להוכיח שהתכנסות בהחלט גוררת התכנסות. רמז: אי־שיוויון המשולש האינטגרלי.

למשפט זה קוראים **קריטריון קושי**, וכמובן יש מקביל עבור "קטעים סופיים ־ פונקציות לא חסומות".

16. האם קיים $\int_1^\infty x^p\sin(x)\,dx$? $(p>0)$

<u>פתרון:</u>

נשים לב שאם ניקח $[x_k,y_k]=\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ עבור k גדול, אזי:

$$\int_{x_k}^{y_k}x^p\sin(x)\,dx\geq x_k^p\frac{1}{\sqrt{2}}\longrightarrow\infty$$

לכן לפי קושי האינטגרל מתבדר.

דרך אחרת היא לשים לב ש־ $\sin(x)=x^p\sin(x)\cdot\frac{1}{x^p}$. לכן אם $\int_1^\infty x^p\sin(x)\,dx$ קיים, ע"פ מבחן אבל או דיריכלה נקבל שקיים $\int_1^\infty\sin x dx$ וזה כמובן לא נכון.

17. תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית יורדת ואי־שלילית. נתון ש־ $\int_a^\infty f<\infty$. הוכיחו:

- $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.
- $\lim_{x\to\infty}xf(x)=0$.

<u>פתרון:</u>

יהי $\epsilon > 0$. ע"פ קושי, קיים $M \geq a$ כך שלכל $b_1, b_2 \geq M$ מתקיים $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| < \epsilon$. לכן

$$\forall x \geq M+1 :\ \epsilon > \left|\int_{x-1}^{x} f\right| = \int_{x-1}^{x} f \geq f\left(x\right)$$

$$\forall x \geq 2M :\ \epsilon > \left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f\right| = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f \geq \frac{x}{2} f\left(x\right)$$

וזה מסיים.

18. תהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ כך שקיים $\int_a^\infty f$. הוכיחו ש־ $F\left(x\right) = \int_a^x f$ רציפה במידה שווה ב־ $[a, \infty)$.

<u>הוכחה:</u>

יהי $\epsilon > 0$. ע"פ קושי קיים $M > a$ כך שאם $y > x > M$ אז $\left|F\left(x\right) - F\left(y\right)\right| = \left|\int_x^y f\right| < \epsilon$. (שימו לב שלא משנה אם x, y קרובים אחד לשני או לא!!!!!!).

עבור $[a, M]$ ראינו בתרגול 2 תרגיל 8 שפונקציה זו רציפה ליפשיץ לכן רציפה במ"ש. (מכאן תקבלו את ה־ δ של הרציפות במ"ש).

ביחד, F רציפה במ"ש ב־ $[a, \infty)$.

19. תהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ רציפה במידה שווה כך ש־ $\int_a^\infty f$ קיים. הוכיחו ש־ $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$.

<u>הוכחה:</u>

נניח בדרך השלילה ש־ $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) \neq 0$. אזי קיים $\epsilon_0 > 0$ כך שלכל $M > a$ קיים $p_M > M$ כך ש־ $\left|f\left(p_M\right)\right| > \epsilon_0$. לכן בה"כ יש סדרה $\{p_n\}$ ששואפת לאינסוף, וכך ש־ $f\left(p_n\right) > \epsilon_0$. ע"פ רציפות במידה שווה יש $\delta > 0$ כך שאם $x \in \left(p_n - \delta, p_n + \delta\right)$ אזי $f\left(x\right) > \frac{\epsilon_0}{2}$ ולכן $\int_{p_n-\delta}^{p_n+\delta} f\left(x\right) dx > \delta\epsilon_0$, בסתירה לקושי.

הערה: בהמשך אנחנו נראה עוד דרך להוכיח את הטענה.

20. תן דוגמה לפונקציה רציפה $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ כך ש־ $\int_0^\infty f$ קיים אבל $\int_0^\infty f^2$ מתבדר.

<u>פתרון:</u>

$f\left(x\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. $\int_0^\infty f$ מתכנס לפי דיריכלה. $\int_0^\infty f^2$ מתבדר כי $f\left(x\right)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2x}$ ו־ $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x} dx$ קיים מההרצאה אבל $\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty$.