גיליון תרגילים מספר 3

1 חשבו את הגבולות הבאים :

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}$ עבור $c>0$.

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot 3^n}{n!\cdot(2n)^n}$

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+6}{n^2+5n+2}\right)^n$

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

2 א. נתונה הסדרה : $a_n=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{a_{n-1}}{3}}$ כאשר $a_1=1$ הראו כי סדרה זאת מתכנסת ומיצאו את גבולה.

*ב. נתונה הסדרה $a_n=\sqrt{\alpha+\beta\cdot a_{n-1}}$ עבור $\alpha,\beta>0$ ו- $a_1=1$ הוכיחו כי a_n מתכנסת ומיצאו את גבולה.

3 הוכיחו / הפריכו את הטענות הבאות:

3.1 אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-[a_n]\right)=0$.

3.2 אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-[a_n]\right)=0$.

3.3 $a_n>0$ ו- $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ קיים וסופי.

3.4 קיימת $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n : $0<a_n<10$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

*4 נתונה הסדרה : $a_{n+2}=\frac{1}{2}\left(a_n+a_{n+1}\right)$ ותנאי התחלה $a_1=2,\ a_2=5$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת ומיצאו את גבולה.

הערה: תרגילים המסומנים בכוכב הם תרגילי רשות.