תרגול חזרה 3 – תבנית בילינארית

חזרה על מושגים

הגדרות:

1. יהי V מ"ו מעל F. תבנית בילינארית היא פונקציה $f:V\times V\to F$ כך ש – $f(av_1+bv_2,u)=af(v_1,u)+bf(v_2,u)$ (ליניאריות בקורדינטה השמאלית) וכן $f(v,au_1+bu_2)=af(v,u_1)+bf(v,u_2)$ (ליניאריות בקורדינטה הימנית).
2. תבנית בילינארית נקראת סימטרית אם $f(v,u)=f(u,v)$ לכל $u,v\in V$.
3. תבנית בילינארית נקראת מתחלפת אם $f(u,v)=-f(v,u)$ לכל $u,v\in V$.

טענה: יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי, יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס. לכל f תבנית בילינארית ולכל $u,v\in V$, $f(u,v)=[u]_B^T[f]_B[v]_B$ כאשר $[f]_B$ היא המטריצה $([f]_B)_{ij}=f(v_i,v_j)$.

הערות:

1. המטריצות המייצגות של תבנית בבסיסים שונים הם מטריצות חופפות (ז"א קיימת P הפיכה כך ש – $[f]_B=P^T[f]_CP$ ל – B,C בסיסים שונים).
2. תבנית בילינארית סימטרית מיוצגת ע"י מטריצה סימטרית (לכל בסיס B שנבחר).
3. תבנית בילינארית נקראת אנטי-סימטרית אם קיים בסיס בו המטריצה המייצגת את f היא מטריצה אנטי-סימטרית. אם $char\,F\neq 2$, אז תבנית בילינארית היא מתחלפת אם ורק אם היא אנטי-סימטרית.

הגדרה:

1. $rank(f):=rank([f]_B)$ ל – B בסיס כלשהו של V.
2. תבנית בילינארית נקראת סינגולרית אם $rank(f)<dim(V)$, אחרת רגולרית.

הגדרה: עבור תבנית בילינארית סימטרית f, הפונקציה $q:V\to F$ המוגדרת ע"י $q(v)=f(v,v)$ נקראת תבנית ריבועית.

טענה: עבור $char(F)\neq 2$, לכל תבנית ריבועית $q:V\to F$ מתאימה תבנית בילינארית סימטרית יחידה f הנתונה ע"י $f(u,v)=\frac{1}{4}(q(u+v)-q(u-v))$.

תרגילים

1. יהי V מ"ו מעל שדה F המוכל בשדה המרוכבים. תהי f תבנית בילינארית אנטי-סימטרית. הראה כי $rank(f)=2$ אם ורק אם קיימים L_1,L_2 פונקציונלים בת"ל על V כך ש – $f(u,v)=L_1(u)L_2(v)-L_1(v)L_2(u)$.

פתרון: אם קיימים פונקציונלים כאלו, הם חלק מבסיס של V^* , ונסמן ב – $B=\{v_1,\dots,v_m\}$ את הבסיס הדואלי לבסיס הזה של V^* (כאשר v_1,v_2 דואלים בהתאמה ל – L_1,L_2). תחת סימונים אלו, נקבל כי $f(v_1,v_j)=\delta_{2j}$ ו – $f(v_2,v_i)=-\delta_{1i}$ לכן הדרגה של $[f]_B$ היא לפחות 2. מצד שני, לכל v_i,v_j כך ש – $i>2$ נקבל $f(v_i,v_j)=0$ ז"א שאר השורות של f הן אפסים, לכן $rank(f)=2$.
בכיוון ההפוך, נניח כי $rank(f)=2$. f תבנית בילינארית אנטי-סימטרית, לכן לפי משפט המיון, קיים בסיס $B=\{v_1,\dots,v_m\}$ של V – כך ש- $[f]_B$ מיוצגת ע"י מטריצת בלוקים, כאשר כל בלוק הוא בגודל 1×1 (ואז הערך הוא 0), או בלוק בגודל 2×2 מהצורה $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

כיוון שהדרגה של f היא בדיוק 2, יש רק בלוק 1 כזה, נניח כי זה הבלוק הראשון, ז"א מתקיים $f(v_1, v_2)=1,\ f(v_2, v_1)=-1$. נסתכל על הבסיס הדואלי של $v_1, \dots, v_m$ (נסמנו $L_1, \dots, L_m$), אז עבור L_1, L_2 מתקיים $L_1(v_i)L_2(v_j)-L_1(v_j)L_2(v_i)=\delta_{1i}\delta_{2j}-\delta_{j1}\delta_{i2}$, בעוד שעבור f נקבל $f(v_i, v_j)=\delta_{i1}\delta_{j2}-\delta_{i2}\delta_{j1}$, לכן מתקיים $f(v_i, v_j)=L_1(v_i)L_2(v_j)-L_1(v_j)L_2(v_i)$. מהלינאריות בכל קורדינטה נקבל שהשוויון הזה נותן גם שיוויון $f(u, v)=L_1(u)L_2(v)-L_1(v)L_2(u)$ לכל $u, v\in V$.

2. תהי f התבנית הבילינארית הבאה על R^3 :
$f(x, y)=x_1y_1+2x_1y_2-x_1y_3+2x_2y_1+3x_2y_2-x_3y_1+ax_3y_3$ כאשר $x=(x_1, x_2, x_3), y=(y_1, y_2, y_3)$. עבור אילו ערכי a קיים בסיס של R^3 בו המטריצה המתאימה לתבנית f היא המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$?

פתרון: f תבנית בילינארית סימטרית על R. לפי משפט המיון, עבור תבנית בילינארית f על מרחב וקטורי V ממימד n כך ש- $rank(f)=k$ ו- $signature(f)=m$ – ל $1\le k\le n, m\le k$ קיים ל- V – בסיס $v_1, \dots, v_n$ כך ש- f מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית עם $n-k$ אפסים, r אחדות ו- s איברי (-1) כאשר $r+s=k, r-s=m$. כמו כן, k, m הם אינווריאנטים של התבנית (ז"א בלתי תלויים בבסיס).עבור f כזו, תת המרחב של V עליו f מוגדרת חיובית הוא ממימד r (ז"א עבור $V^+=\{v\in V | f(v, v)>0\}\cup\{0\}$ מתקיים $dim(V^+)=r$), תת המרחב עליו f מוגדרת שלילית ממימד s (ז"א $V^-=\{v\in V | f(v, v)<0\}\cup\{0\}$ מקיים $dim(V^-)=s$).

במקרה שלנו, עבור המטריצה A מתקיים $rank(A)=3, signature(A)=1$, בפרט $dim((R^3)^+)=2, dim((R^3)^-)=1$, לכן צריך למצוא ערכים של a כך ש – $rank(f)=3, signature(f)=1$.את הדרגה של f נחשב דרך המטריצה המייצגת את f בבסיס הסטנדרטי, שהיא המטריצה $[f]_E=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\-1&0&a\end{pmatrix}$. הדרגה של מטריצה זו היא 3 אם ורק אם המטריצה הפיכה, ז"א $|[f]_E|\neq 0$. $|[f]_E|=-a-3$, לכן $rank(f)=3$ אם ורק אם $a\neq -3$.
נשים לב כי למטריצות חופפות $Y=P^T XP$ מתקיים $det(Y)=det(P^T XT)=det(X)det(P)^2$ ז"א הסימן של הדטרמיננטה שלהן אותו סימן. בפרט נובע שעבור f רגולרית, $signature(f)$ משפיעה על הסימן של $det([f]_B)$ (ז"א אם f רגולרית אז $det([f]_B)>0$ אם ורק אם $dim(V^-)$ זוגי, וזה לכל בסיס B).
במקרה שלנו, $det(A)<0$ ולכן צריך $det([f]_E)<0$, ז"א $a>-3$. קיבלנו כי אם $a>-3$ אז $dim(V^-)\in\{1,3\}$. נבדוק האם יכול להיות מצב ב – $dim(V^-)=3$? ל – $v=(x_1, x_2, x_3)$ נקבל $f(v, v)=x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2+ax_3^2$. נשים לב שעבור $v=(x, x, 0)$ בהכרח $f(v, v)>0$ אם $x\neq 0$, לכן $dim(V^-)<3$, ובפרט אם $a>-3$ נקבל ש – $dim(V^-)=1$, ז"א $signature(f)=1$.

מסקנה – קיים בסיס בו f מיוצגת ע"י המטריצה $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ אם ורק אם $a>-3$.
עבור הבסיס $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ בו f מיוצגת ע"י C, נעבור לבסיס $w_1=\sqrt{2}v_1, w_2=v_2, w_3=\sqrt{3}v_3$. בבסיס w_1, w_2, w_3 התבנית f מיוצגת ע"י A.

3. תהי $C\in M_{n\times n}(R)$ מטריצה הפיכה, ונגדיר $f(A,B)=tr(ACB)$ ל – $A,B\in M_{n\times n}(R)$.
הוכח כי לא קיימת $B\in M_{n\times n}(R)$ כך ש – $f(A,B)=0$ לכל $A\in M_{n\times n}(R)$.

פתרון: נכתוב $C=(c_{ij})$. נשים לב ש – f תבנית ביליניארית. לא קיימת B כנ"ל אם ורק אם f לא סינגולרית, ז"א $rank(f)=n^2$. נסתכל על הבסיס הסטנדרטי E_{ij} (עם הסדר הלקסיקוגרפי, ז"א $E_{11},E_{12},\dots,E_{1n},E_{21},\dots E_{2n},E_{31},\dots,E_{nn}$, ונחשב את המטריצה המייצגת. נקבל $f(E_{ij},E_{kl})=tr(E_{ij}CE_{kl})=tr(E_{kl}E_{ij}C)$. כזכור, $E_{kl}E_{ij}=\delta_{li}E_{kj}$, לכן נקבל $f(E_{ij},E_{kl})=\delta_{li}tr(E_{kj}C)=\delta_{li}c_{jk}$. איך נראית $[f]_E$? בשורות $1\le k\le n$ מופיעה השורה $(c_{k1},0,0,\dots,0,c_{k2},0,\dots,c_{kn},0,\dots 0)$ כאשר בין כל שני איברים c_{ki} מפרידים $n-1$ אפסים. ב – n שורות הבאות, השורה תראה $(0,c_{k1},0,\dots,0,c_{k2},\dots,)$ וכן הלאה. למשל עבור $n=2$, המטריצה המייצגת של f בבסיס E תהיה:

$$[f]_E=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{12} & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & c_{11} & 0 & c_{12} \\ 0 & c_{21} & 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

. ברור כי n השורות הראשונות בת"ל בשאר השורות, וכן הלאה, לכן הדרגה של f היא n^2 אם ורק אם כל קבוצת שורות $k+jn$ ל – j קבוע ו - $1\le k\le n$ הן בת"ל, אבל זה מתקיים כי אלו בדיוק השורות של C (עם אפסים באותם המקומות), ו – C הפיכה לכן מדרגה מלאה.