תרגול 10

אינטגרל מוכלל

תהא $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, ונניח $f: A \to \mathbb{R}$ רציפה פרט אולי לקבוצה בעלת נפח אפס.

נסמן:

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad f_- = \max\{-f, 0\}$$

ונסמן ב-$\mathcal{D}$ את אוסף הקבוצות הקומפקטיות בעלות נפח המוכלות ב-A. עתה, אם:

$$\sup_{\mathcal{D}} \int_D f_+ \quad \sup_{\mathcal{D}} \int_D f_-$$

קיימים, אזי נאמר ש-$\int_A f$ קיים, ונגדיר:

$$\int_A f = \sup_{\mathcal{D}} \int_D f_+ - \sup_{\mathcal{D}} \int_D f_-$$

טענה – קיימת סדרת קבוצות קומפקטיות $\{C_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{C_k \subseteq int\, C_{k+1} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = A}$$

טענה 2 - $\int_A f$ קיים $\Leftrightarrow$ $\left\{\int_{C_k} |f|\right\}_{k=1}^{\infty}$ חסומה.

במקרה זה:

$$\int_A f = \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} f$$

<u>דוגמה:</u>

נניח:

$$\alpha > 0 \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^{\alpha}} \quad A = (0,1)^n$$

נתבונן ראשית בחזקה $\alpha = 2$

$$\|x\|^2 = \sum x_i^2 = n \frac{\sum x_i^2}{n} \overset{\text{אי שוויון הממוצעים}}{\geq} n\left(\prod x_i^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

כלומר:

$$\|x\| \geq \sqrt{n}\left(\prod x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

ולכן באופן כללי נוכל לרשום:

$$\frac{1}{\|x\|^{\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}^{\alpha}} \prod \frac{1}{x_i^{\frac{\alpha}{n}}}$$

בהתאם לטענה נתבונן בסדרת הקבוצות $C_k = \left(\frac{1}{k}, 1\right)^n$ לכל $k \in \mathbb{N}$, אשר שואפת בבירור כאשר $k \to \infty$ ל-$(0,1)^n$. עבורן מתקיים:

$$\int_A f = \lim_{k\to\infty} \int_{\left(\frac{1}{k},1\right)^n} f \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^{\alpha}} \int_{\left(\frac{1}{k},1\right)^n} \prod \frac{1}{x_i^{\frac{\alpha}{n}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}^{\alpha}} \prod \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{dx_i}{x_i^{\frac{\alpha}{n}}}$$

גבול זה קיים אם $\frac{\alpha}{n} < 1$, כלומר $\alpha < n$. באותו האופן נסיק כי $f(x) = \frac{1}{\|x\|^{\alpha}}$ אינטגרבילי על $A = (0,1)^n$ עבור $\alpha > n$.

נפח כדור ב-$\mathbb{R}^n$:

יהא B_R כדור ב-$\mathbb{R}^n$, כלומר קבוצת הנקודות המקיימות את אי השוויון:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$$

נפח הכדור נתון על ידי האינטגרל:

$$V = \int \cdots \int_{B_R} 1 \, dx_1 \cdots dx_n$$

נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1 \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r\left(\prod_{i=1}^{n-2}\sin\varphi_i\right)\cos\varphi_{n-1} \\ x_n &= r\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i \end{aligned}$$

כאשר נציב למשוואה $r^2 \leq R^2$. בנוסף, $r \geq 0$ וכן מתקיים:

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq i \leq n-2 \qquad & 0 \leq \varphi_i \leq \pi \\ i = n-1 \qquad & 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi \end{aligned}$$

נחשב יעקוביאן:

$$J_n = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})}\right|$$

ונחשב לפי העמודה האחרונה, שם מופיעות הנגזרות מהצורה $\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{n-1}}$. יתקיים:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi_{n-1}} = \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_{n-1}} M_{n,n} - \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \varphi_{n-1}} M_{n-1,n} = r \prod_{i=1}^{n-2} [\cos\varphi_{n-1} \cdot M_{n,n} + \sin\varphi_{n-1} \cdot M_{n-1,n}]$$

וזאת כאשר:

$$M_{n,n} = \left| \frac{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1})}{\partial(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2})} \right| = \cos\varphi_{n-1} J_{n-1}$$

$$M_{n-1,n} = \sin\varphi_{n-1} J_{n-1}$$

נציב את J_n ונקבל כי:

$$J_n = r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} J_{n-1} = \cdots = r^{n-1} \sin\varphi_1^{n-2} \sin\varphi_2^{n-3} \cdots \sin\varphi_{n-2}$$

נפח הכדור יהיה, אם כן:

$$V = \int \cdots \int_{\tilde{\Omega}} J_n \, dr d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} = \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^\pi \sin\varphi_1^{n-2} d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}$$

$$= \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{t=1}^{n-2} \int_0^{n-2} \sin^t \varphi \, d\varphi$$

עתה נרצה לפתח נוסחה עבור האינטגרל $\int_0^\pi \sin^t \varphi \, d\varphi$

נגדיר פונקציית בטא המוגדרת על ידי:

$$B(p,q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta \, d\theta$$

ובמקרה שלנו:

$$\int_0^\pi \sin^t \varphi \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^t \varphi \, d\varphi = B\left(\frac{1}{2}, \frac{t+1}{2}\right)$$

כלומר מתקיים:

$$V = \frac{2\pi R^n}{n} \prod_{t=1}^{n-2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{t+1}{2}\right)$$

נרצה להוכיח עתה כי מתקיים:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt$$

<u>הערה</u> – פונקציית Γ מוגדרת היטב לכל $p > 0$ באמצעות השווה עם $e^{-\frac{t}{2}}$.

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \underbrace{\int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt}_{\substack{t=x^2 \\ dt=2xdx}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty s^{q-1} e^{-s} ds}_{\substack{s=y^2 \\ ds=2ydy}} = \int_0^\infty x^{2p-2} e^{-x^2} 2x dx \cdot \int_0^\infty 2y^{2q-1} e^{-y^2} dy$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2+y^2}dxdy$$

זהו אינטגרל כפול מוכלל של $f(x,y) > 0$ על הרביע הראשון. נעבור לקואורדינטות פולאריות:

$$= 4\iint_{\substack{r>0 \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} (r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$\overset{r^2=t,2drdv=dt}{=} 2\int_0^\infty r^{2p+2q-1}e^{-r^2}dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$$

כנדרש.

עתה, נשים לב כי נפח הכדור יהיה נתון על ידי:[1]

$$V = \frac{2\pi R^n}{n}\prod_{t=1}^{n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)} = \frac{2\pi R^n}{n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi R^n}{n}\sqrt{\pi}^{n-2}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

אם $n = 2k$ נקבל כי:

$$V = \frac{\pi^k R^{2k}}{k!}$$

ואם $n = 2k+1$ נקבל כי:

$$V = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}R^{2k+1}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \cdots = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}R^{2k+1}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi^k R^{2k+1}2^{k+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2k+1)}$$

אינטגרלים משטחיים:

תחום ההגדרה – יהיה משטח $S \subset \mathbb{R}^n$ עבור $n \ge 3$. על מנת לפתור אינטגרל זה נשתמש בפרמטריזציה:

$$S(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

נגדיר נורמל למישור המשיק על ידי:

$$\vec{N} = S_u \times S_v$$

ואז יתקיים:

$$\underbrace{\iint_S f d\sigma}_{\text{אינטגרל משטחי}} = \underbrace{\iint_D f\big(s(u,v)\big)\left|\vec{N}\right|dudv}_{\text{אינטגרל כפול}}$$

[1] $\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall x > 0$