תירגול מס. 14

טורי חזקות

א רדיוס התכנסות ותחום התכנסות

נתון טור חזקות[1]: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (ההסכם הוא ש - $x^0 \equiv 1$, כלומר a_0 הוא מקדם חופשי).

משפט 1 קיים $R \in [0,\infty]$ שנקרא **רדיוס ההתכנסות**, כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x| < R$, ומתבדר לכל $|x| > R$.

- רדיוס ההתכנסות מקיים: $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- ובנוסף, אם קיים הגבול (סופי או אינסופי) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ אז הוא שווה ל - R.

בכל אחד מהקצוות: $x = \pm R$ הטור יכול להתכנס או להתבדר.

בתחום ההתכנסות הטור מגדיר פונקציה: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ומתקיים:

- בכל תת-קטע סגור המוכל בתחום ההתכנסות[2]: $[-r,r]$ טור החזקות מתכנס במ"ש ל - $f(x)$.
- הפונקציה $f(x)$ רציפה בתחום ההתכנסות (אם יש התכנסות בקצה, אז יש רציפות חד-צדדית באותו קצה).
- הפונקציה $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה פנימית בתחום ההתכנסות - כלומר בקטע הפתוח - $(-R,R)$.

משפט 2 (גזירה ואינטגרציה איבר איבר)
בקטע $(-R,R)$ מותר לבצע גזירה ואינטגרציה איבר איבר, כלומר לכל $x \in (-R,R)$ מתקיים:

$$f'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \qquad \text{ו-} \qquad \int_0^x f(t)\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

הערה: רדיוסי ההתכנסות של הטורים שמתקבלים אחרי גזירה ואינטגרציה איבר איבר שווים לרדיוס ההתכנסות של הטור המקורי, אבל ההתכנסות בקצוות לא עוברת בירושה[3].

<u>תרגיל 1</u> למצוא את תחומי התכנסותם של טורי החזקות הבאים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \cdot x^n$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}} \cdot x^{3n}$ (ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot x^{2n+1}$

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+m}{n} \cdot x^n$ (m הוא מס' טבעי קבוע)

<u>פתרון</u>

א. נתחיל בחישוב רדיוס ההתכנסות, R, של הטור שנתון ע"י: $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

לכל $n \geq 3$ מתקיים: $\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{\ln^2 n} < \sqrt[n]{n^2}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^2 n} = 1$ ומכאן ש -

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln^2 n}}{\sqrt[n]{n}} \;=\; 1 \qquad \Leftarrow \qquad R \;=\; 1$$

נבדוק התכנסות בקצוות: עבור $x = -1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}(-1)^n$ ועבור $x = 1$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$

הראשון הוא טור לייבניץ מתכנס, והשני מתבדר כי $\frac{1}{n} < \frac{\ln^2 n}{n}$. ובסה"כ תחום ההתכנסות הוא: $[-1,1)$.

---

[1] באופן יותר כללי, כל מה שנאמר כאן יהיה נכון גם לטור חזקות מהצורה $\sum a_n (x-x_0)^n$.

[2] אם למשל יש התכנסות בקצה $x = R$ אז יש התכנסות במ"ש ב - $[0,R]$,
אבל אם אין התכנסות עבור $x = R$ אז ההתכנסות ב - $[0,R)$ אינה במ"ש. (הוכחות אפשר למצוא במייזלר).

[3] ליתר דיוק: אם הטור המקורי מתכנס באחד הקצוות אז הטור שמתקבל ע"י אינטגרציה יתכנס גם הוא באותו קצה, אבל הטור שמתקבל ע"י גזירה לא בהכרח יתכנס באותו קצה.

ב. אפשר למצוא את תחום ההתכנסות בשני אופנים:

דרך ראשונה היא להסתכל על הטור כטור חזקות בחזקות של x כלומר $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

כאשר המקדמים נתונים ע"י:

$$a_k = \begin{cases} \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}} & , \quad k=3n \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}}\right)^{\frac{1}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(7^{3n}+5^{3n}\right)^{\frac{1}{3n^3}}$$

ומכיוון שלכל n מתקיים:

$$7^{\frac{1}{n^2}} < \left(7^{3n}+5^{3n}\right)^{\frac{1}{3n^3}} < 2^{\frac{1}{3n^3}} \cdot 7^{\frac{1}{n^2}} \quad \Leftarrow \quad 7^{3n} < \left(7^{3n}+5^{3n}\right) < 7^{3n}+7^{3n}$$

אז לפי סנדוויץ' נקבל שרדיוס ההתכנסות הוא - $R=1$.

נבדוק התכנסות בקצוות: עבור $x=1$ ו- $x=-1$ מקבלים את הטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}} \quad \text{ו-} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}} \cdot (-1)^{3n}$$

שניהם טורים מתבדרים כי סדרות האיברים שלהם לא שואפות לאפס, ולכן תחום ההתכנסות הוא: $(-1,1)$.

האפשרות השניה למציאת תחום ההתכנסות היא להציב $t=x^3$ ולקבל טור חזקות בחזקות של t:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cdot t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{7^{3n}+5^{3n}} \cdot t^n$$

רדיוס ההתכנסות שלו הוא:

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\tilde{a}_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(7^{3n}+5^{3n}\right)^{\frac{1}{n^3}} \overset{\text{סנדוויץ'}}{=} 1$$

כמו כן מהצבת $t=\pm 1$ מתקבלים טורים מתבדרים, ולכן תחום התכנסותו הוא $(-1,1)$.
ונובע שהטור המקורי מתכנס א.מ.מ $x^3=t\in(-1,1)$ כלומר א.מ.מ. $x\in(-1,1)$.

ג. כאן היינו רוצים לחשב את רדיוס ההתכנסות בעזרת הגבול $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ אבל המקדמים נתונים ע"י:

$$a_k = \begin{cases} \frac{4^n n!}{n^n} & , \quad k=2n+1 \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

כך שהסדרה $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ לא מוגדרת (המכנה מתאפס) ולא ניתן להשתמש ישירות בשיטה הנ"ל.
אם ננסה לחשב את רדיוס ההתכנסות בדרך הרגילה, נקבל גבול קצת בעייתי[4]:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$$

האם אפשר לפתור ע"י הצבה כמו קודם? - אין הצבה מיידית כי החזקות הן x^{2n+1} אבל נציג:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot x^{2n+1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot x^{2n} \tag{1}$$

אז לשני הטורים: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot x^{2n+1}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot x^{2n}$ יש אותו תחום התכנסות[5].

נמצא את תחום ההתכנסות של הטור השני: נציב $t=x^2$ ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot t^n \tag{2}$$

---

[4] אפשר לחשבו אם מציגים: $\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \left(\sqrt[n]{\frac{4^n n!}{n^n}}\right)^{\frac{n}{2n+1}}$
ומחשבים את הגבול הפנימי בעזרת הטענה שאם $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$ אז גם $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$

[5] כי מ- (1) נובע שלכל $x_0 \neq 0$ שנציב שני הטורים יתכנסו או יתבדרו יחדיו (ועבור $x_0=0$ שניהם מתכנסים).

מתקיים: $$\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{a}_{n+1}} = \frac{4^n n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{4n^n} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e}{4}$$
ולכן רדיוס ההתכנסות של הטור (2) הוא $\tilde{R}=\frac{e}{4}$.
נבדוק התכנסות בקצוות: עבור $t=\pm\frac{e}{4}$ מקבלים את הטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot e^n \quad \text{ו-} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot(-e)^n$$

נתחיל בראשון: נסיון להשתמש במבחן המנה לטורים חיוביים לא עוזר כי מקבלים (בדקו)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

ולא ניתן לקבוע בעזרת מבחן המנה האם הוא מתכנס או מתבדר.
נתבונן בסדרת האיברים שלו: $a_n=\frac{n!}{n^n}e^n$, לפי הפיתוח של e^x לכל n טבעי מתקיים:

$$e^n = 1+n+\frac{n^2}{2!}+\frac{n^3}{3!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\ldots$$

ומכאן שלכל n טבעי מתקיים:

$$e^n > \frac{n^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{n!}{n^n}e^n > 1$$

בפרט סדרת האיברים אינה שואפת לאפס ולכן הטור מתבדר (וכך גם הטור השני).
נובע שהטור מתכנס א.מ.ם $x^2=t\in\left(-\frac{e}{4},\frac{e}{4}\right)$ כלומר א.מ.ם $x\in\left(-\frac{\sqrt{e}}{2},\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$.

<u>הערה</u> דרך נוספת לחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור המקורי, היא להשתמש בעובדה שאחרי גזירה איבר איבר של טור חזקות מקבלים טור עם אותו רדיוס התכנסות[6]. לכן אפשר להתחיל מגזירה איבר איבר של הטור הנתון ולקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{(2n+1)n^n}x^{2n}$$

ולמצוא את רדיוס ההתכנסות שלו ע"י ההצבה $t=x^2$ כמו קודם (בדקו).

ד. נחשב את רדיוס ההתכנסות:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{m+n+1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(m+n)!}{n!m!}\cdot\frac{(n+1)!m!}{(m+n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+m+1} = 1$$

נבדוק התכנסות בקצוות: עבור $x=\pm1$ מתקבלים הטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m+n}{n} \quad \text{ו-} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\binom{m+n}{n}$$

שניהם מתבדרים שכן:

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)\cdot(m+n-1)\cdot(m+n-2)\cdots(m+1)}{n!} = \frac{m+n}{n}\cdot\frac{m+(n-1)}{n-1}\cdots\frac{m+1}{1}$$

במכפלה האחרונה יש n גורמים שכ"א מהם >1, ומכאן שלכל n טבעי: $\binom{m+n}{n}>1$ וסדרות האיברים של הטורים הנ"ל אינן שואפות לאפס. תחום ההתכנסות של טור החזקות הוא איפוא $(-1,1)$.

<u>תרגיל 2</u> לחשב את הסכומים הבאים:

(א) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\cdot x^n$ (ב) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\cdot x^n$ (ג) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$

[6] אבל ההתכנסות בקצוות לא בהכרח נשמרת.

<u>פתרון:</u>

א. נרשום: $\sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\cdot x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}x^n \;+\; 2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

לפי הנוסחא לסכום סדרה הנדסית אינסופית[7], לכל $|x|<1$ מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$

ובאופן דומה לכל $|x|<1$ נקבל -

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \;=\; x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \overset{\text{גזירה איבר איבר}}{=} x\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' \;=\; x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)' \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}$$

כך שבסה"כ לכל $|x|<1$ מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+2n)\cdot x^n \;=\; \frac{1}{1-x} \;+\; \frac{2x}{(1-x)^2} \;=\; \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

הערה: קל לבדוק שתחום התכנסותו של הטור הנתון הוא $(-1,1)$.

ב. נשתמש בגזירה איבר איבר כדי להציג:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)x^n \;=\; \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+2}\right)'' \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''$$

וע"פ סכום סדרה הנדסית נקבל:

$$=\;\tfrac{1}{2}\left(x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'' \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' \;=\; \frac{1}{(1-x)^3}$$

ג. כאן צריך לבצע אינטגרציה איבר איבר, ונוח לעשות זאת באופן הבא:
קל לבדוק שתחום ההתכנסות של הטור הנתון הוא $[-1,1]$. נסמן:

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$$

אז ע"י גזירה איבר איבר נקבל, שעבור $x\in(-1,1)$ מתקיים:

$$f'(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n \;=\; \frac{1}{1+x^2}$$

כעת, מכיוון שלפי ההגדרה $f(0)=0$, אז לכל $x\in(-1,1)$ מתקיים:

$$f(x)=f(x)-f(0) \;=\; \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

כלומר: $\forall\, x\in(-1,1)\,,\quad \arctan x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}$

<u>הערה</u> מכיוון שהטור מתכנס ב - $[-1,1]$, השיוויון למעשה תקף בכל הקטע הסגור[8] $[-1,1]$.

<u>תרגיל 3</u> לחשב $f'\left(\tfrac{1}{2}\right)$ כאשר: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$

---

[7] לכל $|q|<1$ מתקיים: $1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$

[8] כי $f(x)$ רציפה ב $[-1,1]$, ולכן למשל עבור $x=1$ מתקיים: $f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\arctan x=\arctan 1$.

<u>פתרון</u> קל לראות שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא $R = 1$

ולכן הפונקציה מוגדרת היטב וגזירה ב - $x = \frac{1}{2}$. נגזור איבר איבר ונקבל: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$

כדי לחשב את הסכום האחרון נגזור פעם נוספת: $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1}$

ז"א[9]: $f''(x) = -x + x^3 - x^5 + x^7 - \ldots = \frac{-x}{1+x^2}$ כמו כן, מהטור של $f'(x)$ רואים ש $f'(0) = 0$, ולכן

$$\forall |x| < 1 \qquad f'(x) \;=\; f'(x) - f'(0) \;=\; \int_0^x f''(t)\,dt \;=\; \int_0^x \frac{-t}{1+t^2}\,dt \;=$$

נציג זאת כאינטגרל של נגזרת לוגריתמית (המונה = נגזרת של המכנה)

$$=\; -\tfrac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt \;=\; -\tfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^x \;=\; -\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

ועבור $x = \frac{1}{2}$ נקבל: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

<u>הערה</u> במקום לגזור פעם שניה, היה אפשר להשתמש בפיתוח הסטנדרטי

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \;=\; x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \ldots \quad , \qquad x \in (-1, 1]$$

ובעזרתו לקבל: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\left(x^2\right)^n}{n} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

ב יחידות הפיתוח לטור חזקות

נאמר שלפונקציה $f(x)$ יש פיתוח לטור חזקות סביב אפס אם קיים $0 < R$ כך שמתקיים:

$$\forall\, x \in (-R, R)\,, \qquad f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

ז"א שלכל $x \in (-R, R)$ טור החזקות מתכנס, וסכומו הוא $f(x)$.

משפט 3 אם יש ל - $f(x)$ פיתוח לטור חזקות מהצורה (3), אז הוא **יחיד**, והמקדמים הם[10]: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
כלומר הטור ב- (3) הוא טור מקלורן של הפונקציה.

<u>הערות</u>

א. אם $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים באפס, אז אפשר לבנות את טור מקלורן הפורמלי שלה, אבל ייתכן שרדיוס ההתכנסות שלו, R, מתאפס. גם אם $R > 0$ לא בהכרח יתקיים שיוויון בין סכום הטור לבין הפונקציה[11]

ב. אם לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש פיתוחים לטורי חזקות ב - $(-R, R)$ גם לסכומן $f + g$ ולמכפלתן $f \cdot g$ יש פיתוחים בקטע, ואם g לא מתאפסת אז גם למנה f/g יש פיתוח בקטע.

ג. כנ"ל לגבי הרכבה של פונקציות $f\left(g(x)\right)$ כאשר הן בעלות פיתוחים בתחומים "מתאימים"[12].

<u>תרגיל 4</u> לחשב $f^{(5)}(0)$ עבור: א. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$ ב. $f(x) = \tan x$

---

[9] זאת סדרה הנדסית שמתחילה ב- $-x$ והמנה שלה היא $-x^2$.

[10] זכרו שהפונק' גזירה אינסוף פעמים בתחום ההתכנסות

[11] למשל ראינו שהפונקציה $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ גזירה אינסוף פעמים, אבל טור מקלורן שלה הוא טור האפס שמתלכד עם הפונקציה רק באפס. (ומכאן שאין לה פיתוח לטור חזקות סביב אפס).

[12] אם $g : (-R_1, R_1) \to (-R_2, R_2)$ בעלת פיתוח ב- $(-R_1, R_1)$. ו- $f : (-R_2, R_2) \to \mathbb{R}$ בעלת פיתוח ב- $(-R_2, R_2)$ אז $f\left(g(x)\right)$ בעלת פיתוח ב- $(-R_1, R_1)$.

<u>פתרון:</u>

א. נשתמש בפיתוח הסטנדרטי: $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$
לכל $x\neq 0$ נחלק את שני האגפים ב x ונקבל:

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

השיוויון הזה נכון לכל $x\neq 0$ ובנוסף, עבור $x=0$ סכום הטור באגף ימין שווה 1. לכן

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\,,\qquad f(x)\;=\;1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

מצאנו שלפונקציה $f(x)$ יש פיתוח לטור חזקות (שתקף בכל $\mathbb{R}$) ולכן המקדם a_5 של x^5 בפיתוח זה מקיים $a_5=\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ ומכיוון ש - $a_5=0$ אז $f^{(5)}(0)=0$.

ב. ראשית, ל $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ יש פיתוח לטור חזקות בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ כמנה של שתי פונקציות בעלות פיתוחים בקטע שבו המכנה לא מתאפס. כלומר קיים פיתוח:

$$f(x)\;=\;a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots$$

ומתקיים $f^{(5)}(0)=5!a_5$ כדי למצוא את a_5 נשתמש בפיתוחים הסטנדרטיים של $\sin x$ ו- $\cos x$ ונרשום:

$$\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots}\;=\;f(x)\;=\;a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots$$

נכפיל את שני האגפים במכנה של אגף שמאל ונקבל:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\;=\;\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)$$

נשווה מקדמים של חזקות זהות של x בשני האגפים:

$$\begin{array}{lll}
x^0 & : & 0\;=\;a_0\\
x^1 & : & 1\;=\;a_1\\
x^2 & : & 0\;=\;a_2-\frac{a_0}{2!}\quad\Rightarrow\quad a_2\;=\;0\\
x^3 & : & -\frac{1}{3!}\;=\;a_3-\frac{a_1}{2!}\quad\Rightarrow\quad a_3\;=\;\frac{1}{3}\\
x^4 & : & 0\;=\;a_4-\frac{a_2}{2!}+\frac{a_0}{4!}\quad\Rightarrow\quad a_4\;=\;0\\
x^5 & : & \frac{1}{5!}\;=\;a_5-\frac{a_3}{2!}+\frac{a_1}{4!}\quad\Rightarrow\quad a_5\;=\;\frac{1}{120}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\;=\;\frac{16}{120}
\end{array}$$

לכן $f^{(5)}(0)=5!a_5=16$.

<u>תרגיל 5</u> לחשב: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arctan x)-x+\frac{1}{2}x^3}{x^5}$

<u>פתרון:</u> זה גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$" אבל אם מנסים להשתמש בכלל לופיטל, מקבלים ביטוי מאוד מסובך[13].
נמצא את פיתוח מקלורן של המונה (מספיק לפתח עד סדר 5):
כדי למצוא פיתוח של $\arctan x$ נזכור ש $\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$, ועבור $|x|<1$ זה סכום טור גאומטרי עם מנה $-x^2$ כלומר:

$$\arctan' x=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots\qquad(|x|<1)$$

נבצע אינטגרציה איבר איבר, ונקבל את הפיתוח של $\arctan x$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\qquad(|x|<1)$$

נציב את זה בתוך הפיתוח הסטנדרטי $\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$ ונקבל:

$$\sin(\arctan x)=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3}+\dots\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{x^3}{3}+\dots\right)^5-\dots$$

מקבלים רק חזקות אי-זוגיות, כלומר: $\sin(\arctan x)=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\dots$ נחשב את המקדמים a_1,a_3,a_5

[13] אם מציבים $x=tant$ מקבלים גבול שאחרי קצת פישוט אפשר לפתור בעזרת לופיטל (פעם או פעמיים).

- איברים שבהם החזקה של x היא 1 יגיעו רק מהסוגריים הראשונים, שמהם מקבלים x, כלומר $a_1 = 1$
- איברים שמכילים x^3 יגיעו רק מהסוגריים הראשונים והשניים. הסוגריים הראשונים תורמים $-\frac{x^3}{3}$ והסוגריים השניים תורמים $-\frac{1}{3!}x^3$ ובסה"כ $a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- איברים המכילים x^5 יגיעו מהסוגריים הראשונים השניים והשלישיים (ורק מהם). הראשונים תורמים $\frac{x^5}{5}$, והשלישיים תורמים $\frac{1}{5!}x^5$. נחשב את התרומה של:

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \ldots\right)^3 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \ldots\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \ldots\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$$

זו מכפלה של שלושה טורים וכדי לקבל x^3 צריך לבחור x בשניים מבינהם ו- $-\frac{x^3}{3}$ בשלישי. יש שלוש אפשרויות כאלה ולכן נקבל $3\left(-\frac{x^5}{3}\right) = -x^5$ ולכן התרומה של הסוגריים השניים היא $-\frac{1}{3!} \cdot (-x^5) = \frac{x^5}{6}$ ובסה"כ $a_5 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5!} = \frac{3}{8}$

מכאן ש-

$$\sin(\arctan x) \;=\; x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5) \qquad (as\ x \to 0)$$

כאשר $o(x^5)$ מסמן ביטוי ששואף לאפס יותר מהר מ x^5 (כאשר $x \to 0$).

הסבר: מיחידות הפיתוח לטור חזקות נובע שפיתוח מקלורן מסדר 5 הוא:

$$\sin(\arctan x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + R_5(x)$$

וכזכור $R_5(x) = x^5 \cdot \varepsilon(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ או בסימון מקובל $R_5(x) = o(x^5)$ (כש- $x \to 0$).

מסקנה:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arctan x) - x + \frac{1}{2}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5)\right) - x + \frac{1}{2}x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{8} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = \frac{3}{8}$$

<u>הערות</u> למעשה אפשר להעריך את השארית $R_5(x)$ ביתר דיוק:

1. מכיוון שיש רק חזקות אי זוגיות בפיתוח, אז הפיתוחים מסדר 5 ו 6 מתלכדים ולכן $R_5(x) \equiv R_6(x) = o(x^6)$.
2. יתר על כן, מכיוון שמדובר בטור חזקות והחזקה הבאה היא x^7 אז אפשר לרשום:

$$\sin(\arctan x) \;=\; x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + O(x^7) \qquad (as\ x \to 0)$$

כאשר $O(x^7)$ שואף לאפס לפחות כמו x^7. כלומר $R(x) = x^7 \cdot \alpha(x)$ כאשר $\alpha(x)$ חסום בסביבת $x = 0$.

3. באופן כללי, אם $f(x)$ גזירה ברציפות $n+1$ פעמים בסביבת x_0 (לשם פשטות נניח $x_0 = 0$) אז הצגת לגרנז' של השארית ה n-ית היא:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \;\equiv\; \alpha(x) \cdot x^{n+1} \qquad (c = c(x) \text{ תלוי ב } x \text{ ונמצא בין } x \text{ לאפס})$$

ומכיוון ש $f^{(n+1)}(x)$ רציפה בסביבת $x_0 = 0$ אז $\alpha(x)$ חסום בסביבת אפס. ולכן במקרה כזה מתקיים[14]: $R_n(x) = O(x^{n+1})$ (כש $x \to 0$).

<u>כתרגיל</u> חשבו את הגבול[15]: $\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 - e^{\sin x}}{x^4}$ (מצאו פיתוח מסדר 4 של $e^{\sin x}$).

<u>(*) תרגיל 6</u> כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה הבאה:

$$\int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}\, dt \;=\; x \tag{4}$$

א. אין פתרון האינטגרל מתבדר. ב. ∞ פתרונות. ג. פתרון יחיד. ד. שלושה פתרונות.

[14] אם $f(x)$ בעלת פיתוח לטור חזקות בתחום $(-R, R)$ אז היא גזירה ∞ פעמים בתחום ולכן: $R_n(x) = O(x^{n+1})$ לכל n.

[15] תשובה: הפיתוח מסדר 4 הוא $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4$ ולכן הגבול שווה $\frac{7}{24}$

<u>פתרון:</u> נתחיל מבדיקת התכנסותו של האינטגרל: נתבונן באינטגרנד $f(t) = \dfrac{1-e^{-t^2}}{t^2}$
הוא לא מוגדר באפס, אבל אי הרציפות שלו באפס סליקה כי

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} \;=\; „\tfrac{0}{0}" \;\overset{\text{לופיטל}}{=}\; \lim_{t\to 0} \frac{2te^{-t^2}}{2t} \;=\; 1$$

ונובע שלכל x ממשי האינטגרל קיים (במובן רימן!).
נעבור למציאת מס' השורשים הממשיים של המשוואה (4), ראשית נשים לב ש - $x=0$ הוא פתרון.
וכמו כן ניתן להציג אותה באופן שקול ע"י:

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt \;=\; x \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_0^x \left(\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} - 1\right) dt \;=\; 0$$

נגדיר:

$$F(x) \;=\; \int_0^x \left(\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} - 1\right) dt \;=\; \int_0^x \frac{1-e^{-t^2}-t^2}{t^2}\,dt$$

מתקיים $F(0)=0$. נראה ש - $F'(x)<0$ ונסיק שהשורש יחיד. (כי הפונק' מונוטונית יורדת ממש).

$$F'(x) \;=\; \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^2}$$

אם $|x| \geq 1$ אז $1-x^2 \leq 0$ וכמובן ש- $-e^{-x^2} < 0$ ולכן: $F'(x) < 0$.
נראה שגם עבור $|x|<1$ זה מתקיים: בעזרת הפיתוח של e^x נקבל:

$$e^{-x^2} \;=\; 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \ldots \;=\; 1 - x^2 + \tfrac{x^4}{2!} - \tfrac{x^6}{3!} + \tfrac{x^8}{4!} + \ldots$$

ומכאן ש - (בדקו)

$$F'(x) \;=\; \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^2} \;=\; -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{3!} - \tfrac{x^6}{4!} + \tfrac{x^8}{5!}$$

או -

$$F'(x) \;=\; -x^2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{x^2}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{5!} + \ldots\right)$$

כדי לסיים מספיק שנראה שלכל $|x_0|<1$ הסכום של הטור בסוגריים חיובי.
ובאמת, לכל x_0 כנ"ל נקבל טור לייבניץ שעבורו:

$$\Big|S(x_0) - S_1(x_0)\Big| \;\leq\; |a_2| \qquad \Rightarrow \qquad \Big|S(x_0) - \tfrac{1}{2}\Big| \;\leq\; \tfrac{x_0^2}{3!}$$

כלומר לכל $|x_0|<1$ סכום הטור שבסוגריים, $S(x_0)$ מקיים:

$$S(x_0) \;\geq\; \tfrac{1}{2} - \tfrac{x_0^2}{6} \qquad \Leftarrow \qquad -\tfrac{x_0^2}{3!} \;\leq\; S(x_0) - \tfrac{1}{2} \;\leq\; \tfrac{x_0^2}{3!}$$

ובפרט

$$S(x_0) \;\geq\; \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} \;=\; \tfrac{1}{3}$$ מ.ש.ל.

<u>כתרגיל</u> בדקו כמה שורשים ממשיים יש למשוואה: $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \;=\; \frac{x}{2}$