תרגיל מס' 10 בתורת המשחקים

1. נתבונן בשוק הכפפות הבא. קבוצת השחקנים היא $N = N_1 \cup N_2$, כאשר $N_1 = \{1, \ldots, k\}$, $N_2 = \{k+1, \ldots, k+\ell\}$. כל שחקן ב־$N_1$ מחזיק כפפה שמאלית אחת, וכל שחקן ב־N_2 מחזיק כפפה ימנית אחת. המחיר של זוג כפפות (שמאלית וימנית) הוא 1, ואין הגבלה על מספר הזוגות שאפשר למכור.

   א. כתוב משחק המתאר שוק זה.

   ב. חשב את הליבה של משחק זה (הבחן בין מקרים שונים על־פי ערכי k, ℓ).

2. משחק (N, v) נקרא קמור אם לכל $S, T \subseteq N$ מתקיים:

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

   א. הוכח שכל משחק קמור הוא סופראדיטיבי.

   ב. תן דוגמה של משחק סופראדיטיבי שאיננו קמור.

   ג. יהי (N, v) משחק פשוט. הוכח ש־(N, v) קמור אם ורק אם (N, v) משחק אוננימיות.

   ד. בהינתן משחק (N, v) וסדר קווי R על N, נסמן ב־$\vec{x}(R)$ את וקטור התרומות השוליות בסדר R, כלומר הוקטור ב־$\mathbb{R}^n$ שרכיבו ה־i־י הוא:

$$x_i = v(R(i) \cup \{i\}) - v(R(i))$$

   הוכח ששלושת התנאים הבאים על משחק (N, v) שקולים:

   I. (N, v) קמור.

   II. לכל שחקן i ולכל שתי קואליציות $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ מתקיים:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

   III. לכל סדר קווי R על N מתקיים $\vec{x}(R) \in C(N, v)$.

   ה. הוכח שאם (N, v) קמור אז $\varphi(N, v) \in C(N, v)$.

3. בשדה תעופה נוחתים מטוסים מ־m סוגים שונים. למטוס מסוג j דרוש מסלול נחיתה שאורכו לפחות ℓ_j, כאשר $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_m$. בניית מסלול באורך ℓ_j עולה ℓ_j. רוצים לחייב כל מטוס נוחת i בדמי נחיתה c_i כך שהעלות של מסלול ℓ_m המשרת את כל המטוסים תחולק בצורה הוגנת.
   לשם כך מתבוננים במשחק (N, v) הבא:
   $N = \bigcup_{j=1}^{m} N_j$, כאשר N_j היא קבוצת הנחיתות של מטוסים מסוג j,
   לכל $\emptyset \neq S \subseteq N$ מגדירים $v(S) = -\ell_{j(S)}$ כאשר $j(S) = \max\{j | \, S \cap N_j \neq \emptyset\}$.
   (השווי של קואליציה הוא מינוס העלות הדרושה כדי לשרת רק את חברי הקואליציה.)
   דמי הנחיתה נקבעים לפי ערך שפלי: $c_i = -\varphi_i(N, v)$.

א. הוכח ש־(N,v) משחק קמור.

ב. לכל $k=1,\ldots,m$ נסמן $M_k=\bigcup_{j=k}^{m} N_j$ ונגדיר משחק (N,v_k) ע"י

$$v_k(S)=\begin{cases} \ell_{k-1}-\ell_k & S\cap M_k\neq\emptyset \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר $\ell_0=0$.

הראה ש־(N,v) הוא סכום המשחקים (N,v_k), $k=1,\ldots,m$.

ג. חשב את דמי הנחיתה למטוס מסוג j, $j=1,\ldots,m$. תן הסבר אינטואיטיבי להגיון שמאחורי חלוקה זו של העלות.