<u>תרגיל בית 3</u>

<u>שאלה 1:</u> (3 נק')

יהי (X,T) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי לכל A,B שתי תתי קבוצות של X, מתקיים: אם $A\subseteq B$, אזי $\operatorname{int}A\subseteq \operatorname{int}B$.

<u>שאלה 2:</u> (49 נק')

יהי (X,T) מרחב טופולוגי ויהיו $A,B\subseteq X$ תתי קבוצות של X.

לכל זוג מבין הקבוצות הבאות קבעו אילו מבין שתי ההכלות מתקיימות בין הקבוצות בזוג, ואילו אינן מתקיימות. שימו לב כי אם קבעתם כי הכלה מסויימת מתקיימת, עליכם להוכיח זאת, ואם קבעתם שהכלה מסויימת אינה מתקיימת, עליכם להוכיח זאת ע"י מתן דוגמה נגדית. אין צורך לבדוק הכלות ממש, אלא הכלות רגילות בלבד (כלומר הכלות שמאפשרות שוויון בין הקבוצות).

א. $\overline{\operatorname{int}A}$ ו- $\operatorname{int}\overline{A}$. (7 נק')

ב. $\overline{X\setminus A}$ ו- $X\setminus \operatorname{int}A$. (7 נק')

ג. $\operatorname{int}(X\setminus A)$ ו- $X\setminus \overline{A}$. (7 נק')

ד. $\operatorname{int}(A\cup B)$ ו- $\operatorname{int}A\cup \operatorname{int}B$. (7 נק')

ה. $\operatorname{int}(A\cap B)$ ו- $\operatorname{int}A\cap \operatorname{int}B$. (7 נק')

ו. $\overline{A\cup B}$ ו- $\overline{A}\cup\overline{B}$. (7 נק')

ז. $\overline{A\cap B}$ ו- $\overline{A}\cap\overline{B}$. (7 נק')

<u>שאלה 3:</u> (24 נק')

הראו כי המרחבים המטריים l_1 ו- l_2 הם מרחבים ספרביליים.

<u>רמז:</u> התבוננו בווקטורים בעלי קארדינטות רציונליות, המתאפסות החל ממקום מסויים.

<u>שאלה 4:</u> (24 נק')

יהי (X,d) מרחב מטרי ספרבילי ותהי $A\subseteq X$ תת קבוצה של X. הוכיחו כי גם המרחב המטרי $\left(A,d|_A\right)$ הוא מרחב ספרבילי.

<u>רמז:</u> קיימת תת קבוצה S של X, שהיא צפופה ב- (X,d) ובת מניה. התבוננו בקבוצת כל הכדורים הפתוחים בעלי מרכז שהוא איבר ב- S ורדיוס $\frac{1}{n}$, כאשר n טבעי, החותכים את A. בחרו נקודה מ- A בכל אחד מכדורים אלה. הראו כי קבוצת כל הנקודות שקיבלתם היא צפופה ב- $\left(A,d|_A\right)$ ובת מניה.

בהצלחה !