

# אלגברה 104167

תאריך: 2/12/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: דירוג מטריצות

מספר תרגול: 32

שם המתרגל: גלית מזרחי

פרק 13 תרגיל 2א

שאלה מספר 2.

א. לפניך שתי מטריצות מעל  $Z_5$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . ידוע ששתי

המטריצות שקולות שורה. מצא מטריצות אלמנטריות  $E_1, E_2, \dots, E_k$  כך ש-

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_k B$$

פרק 13 עמוד 3 תרגיל 2

שאלה מספר 2.

א. מצא את הצורה הקנונית מעל  $Z_5$  של המטריצה  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

ב. כמה מטריצות קטניות בעלות 3 עמודות ארבע שורות ודרגה השווה ל-2 יש מעל השדה

$Z_p$  (כאשר  $n$  מספר ראשוני)? רשום את כל המטריצות הקטניות עבור  $p = 2$  ו-  $p = 3$ .

פרק 13 עמוד 7 תרגיל 3

שאלה מספר 3.

לפניך מטריצה קומפלכסית:  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a & 2 & -a+1 & a+1 \\ a & 2 & a^3-a & 2a+1 \\ -a & -1 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}$  כאשר  $a$  הוא קומפלכסי.

א. עבור אילו ערכים של  $a$  שווה דרגת המטריצה  $A$  ל-1?

ב. עבור אילו ערכים של  $a$  שווה דרגת המטריצה  $A$  ל-2?

ג. עבור אילו ערכים של  $a$  שווה דרגת המטריצה  $A$  ל-3?

ד. עבור אילו ערכים של  $a$  שווה דרגת המטריצה  $A$  ל-4?

30 נקודות

פרק 13 עמוד 11 תרגיל ב1

ב. לפניך מטריצה מעל  $Z_5$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . חשב את הדרגה של  $A$  ומצא מטריצה  $B$  בסדרה

$$AB = 0 \quad (Z_5)^{1 \times 2}$$

14 נקודות

## דוגמה 1: מטריצה 2x2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_5$  מעלה

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_5$  מעלה

המטריצה  $A$  היא  
מטריצה שורה.

מטריצה מטריצה מטריצה

$$A = E_1 \cdot E_2 \dots E_n \cdot B$$

נבדוק אם  $B$  היא מטריצה שורה  $A$  (כלומר  $A$  היא מטריצה שורה  $B$ ).

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה מטריצה מטריצה  
מטריצה מטריצה מטריצה

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 = 3R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל המטריצות, שמתחת להן  $\Phi$  (כלומר  $\Phi$  מטריצה מטריצה מטריצה) היא  $\Phi A$  (כלומר  $\Phi A$  מטריצה מטריצה מטריצה)  $\Phi A = \Phi(I) \cdot A$ .

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

כלומר:

## 2 סדרה 3

(א) מצא את הצורה הקטנית של  $Z_5$  על  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

← הצורה הקטנית של  $Z_5$  והמחיצה המתונה

ה.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ 

$p^2$  אלמנטים

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ 

$p$  אלמנטים

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ 

1 אלמנט

סדרה  $Z_p$  (פולינום)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

1 אלמנט

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

2 אלמנטים

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

$2^2=4$  אלמנטים

$p^2+p+1$  סדרה -  $Z_3$

7 אלמנטים =  $2^2=4$  אלמנטים + 2 אלמנטים + 1 אלמנט

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

$3^2=9$  אלמנטים

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

3 אלמנטים

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

1 אלמנט

13 אלמנטים = 1 אלמנט + 3 אלמנטים +  $3^2=9$  אלמנטים



### פרק 13 שאלה 7 תרגיל 3

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a & 2 & -a+1 & a+1 \\ a & 2 & a^3-a & 2a+1 \\ -a & -1 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix}$$
 רשם קוטרות קוטרות  
 a קוטרות:

אנחנו נבצע את ההצטרפות

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a & 2 & -a+1 & a+1 \\ a & 2 & a^3-a & 2a+1 \\ -a & -1 & -1 & a^2-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \\ R_4 = R_3 + R_1}} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & a^3-a & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_3 - R_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & a^3-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix}$$

נסתכל על האגפים האחרונים:

$$a^2+a-2=0, \quad a^3-1=0, \quad a=0$$

$$a^2+a-2=0 \rightarrow a^2+2a-a-2=0 \rightarrow (a+2)(a-1)=0 \rightarrow a=2 \text{ או } a=-1$$

$$a^3-1=0 \rightarrow a^3=1 \rightarrow r^3 \operatorname{cis} 3\theta = \operatorname{cis} 0 \rightarrow r^3=1, r=1, 3\theta=360^\circ \rightarrow \theta=120^\circ$$

$$a = \operatorname{cis} 0, \quad a = \operatorname{cis} 120, \quad a = \operatorname{cis} 240$$

כלומר, יש לנו את המקרים:  $a = \operatorname{cis} 240, a = \operatorname{cis} 120, a = 2, a = -1, a = 0$   
 אלו הם המקרים שבהם

פרק 3 - תורת המרחב 13 ק"פ

$$\begin{matrix} \text{row 1, 3} \\ \text{row 2, 4} \\ \text{row 1} \end{matrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$$

$a=1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(a=1) = 3$

$a=-2$ :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(a=-2) = 3$

$a=0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_2 = R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_3 = R_3 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_4 = R_4 + R_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(a=0) = 3$



# סדר 13 3/17 7 קורס 3-הדרגה

$a = \text{cis } 120$

$$\begin{pmatrix} \text{cis } 120 & 1 & 1 & \text{cis } 120 \\ 0 & 1 & -\text{cis } 120 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis } 120 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis}^2 120 + \text{cis } 120 - 2 \end{pmatrix}$$

יש לי 10 דלת

$\text{cis}^3 120 = \text{cis } 240$

$\text{cis } 120 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\text{cis}^3 120 + \text{cis } 120 - 2 = -3$

$\text{cis } 240 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$-\text{cis } 120 = \text{cis } 300$

הצורה המובנית

$$\begin{pmatrix} \text{cis } 120 & 1 & 1 & \text{cis } 120 \\ 0 & 1 & -\text{cis } 120 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis } 120 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$R_4 = \text{cis } 120 \cdot R_4 + 3 \cdot R_3$

$$\begin{pmatrix} \text{cis } 120 & 1 & 1 & \text{cis } 120 \\ 0 & 1 & \text{cis } 300 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis } 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(a = \text{cis } 120) = 3$

$a = \text{cis } 240$

$$\begin{pmatrix} \text{cis } 240 & 1 & 1 & \text{cis } 240 \\ 0 & 1 & -\text{cis } 240 & 1 \\ 0 & 0 & \text{cis}^3 240 - 1 & \text{cis } 240 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis}^2 240 + \text{cis } 240 - 2 \end{pmatrix}$$

יש לי 10 דלת

$-\text{cis } 240 = \text{cis } 60$

$\text{cis}^3 240 - 1 = \text{cis}(3 \cdot 240) = \text{cis } 0$

$\text{cis}^2 240 + \text{cis } 240 - 2 = -3$

הצורה המובנית

$$\begin{pmatrix} \text{cis } 240 & 1 & 1 & \text{cis } 240 \\ 0 & 1 & \text{cis } 60 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis } 240 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$r(a = \text{cis } 240) = 3$

$$\begin{pmatrix} \text{cis } 240 & 1 & 1 & \text{cis } 240 \\ 0 & 1 & \text{cis } 60 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cis } 240 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# pena-3 sima 7 aint 13 pro

$$r(1) = \emptyset \quad (1c)$$

$$r(2) = \emptyset \quad (2)$$

$$r(3): a=0, a=1, a=t2, a=cis_{240}^{\circ}$$

$$a=cis_{240}^{\circ}$$

$$r(4): a \neq 0, a \neq 1, a \neq -2, a \neq cis_{120}^{\circ}$$

$$a \neq cis_{240}^{\circ}$$