12/12/2016

תרגול 7

תרגיל:

יהא (X,τ) מרחב טופולוגי ויהא $\sim$ יחס שקילות על X. תהא $\pi: X \mapsto {X}/{\sim}$ הטלה טבעית, קרי $\pi(x) = [x]$ לכל $x \in X$). תהא F העתקה מ-$\left({X}/{\sim}, \tau_\sim\right)$ למרחב טופולוגי (Y,σ). הוכיחו כי F רציפה אם ורק אם ההעתקה המוגדרת על ידי $F \circ \pi: (X,\tau) \mapsto (Y,\sigma)$ רציפה.

פתרון:

F רציפה אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה $U \subset Y$ מתקיים ש-$F^{-1}(U)$ היא קבוצה פתוחה במרחב $\left({X}/{\sim}, \tau_\sim\right)$ וזה קורה אם ורק אם $\pi^{-1}\left(F^{-1}(U)\right)$ היא קבוצה פתוחה ב-(X,τ).

הנ"ל שקול לכך ש-$(F \circ \pi)^{-1}(u)$ פתוחה ב-(X,τ), וזו בדיוק ההגדרה לכך ש-$F \circ \pi$ רציפה.

תרגיל:

הראו כי מרחב המנה של הקטע $[0,2\pi]$ המתקבל על ידי הדבקת קצוות למעגל היחידה S^1.

פתרון:

הדבקת קצוות פירושה להגדיר יחס שקילות על $[0,2\pi]$ הנוצר על ידי החלוקה $\{\{a\} | a \neq 0,2\pi\} \cup \{\{0,2\pi\}\}$. זו חלוקה כי הקבוצות זרות והאיחוד שלהן נותן את כל $[0,2\pi]$. כל חלוקה משרה יחס שקילות.

נגדיר עתה פונקציה $F: {[0,2\pi]}/{\sim} \mapsto S^1$ על ידי $F([x]) = (\cos x, \sin x)$. נשים לב, כי אין תלות בנציגים במקרה זה שכן לכל יחידות $\{a\}$ מתקבל ערך שונה על ידי הפונקציה, ועבור מחלקת השקילות $\{0,2\pi\}$ מתקבל אותו הערך.

נגדיר $f: [0,2\pi] \mapsto S^1$ על ידי $f(x) = (\cos x, \sin x)$ לכל $x \in [0,2\pi]$. אזי f רציפה, אך $f = F \circ \pi$ כאשר π הוא ההטלה הטבעית של $[0,2\pi]$ ולכן $F \circ \pi$ רציפה ולכן על פי התרגיל הקודם גם F רציפה. כמו כן F היא חד-חד ערכית ועל S^1, ולכן נוכל למצוא את ההופכי של F:

נגדיר פונקציה $\tilde{F}^{-1}: S^1 \mapsto [0,2\pi]$ על ידי:

$$\tilde{F}^{-1}(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y = 1 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y = -1 \\ 2\pi + \arctan\frac{y}{x} & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

כלומר F^{-1} מוגדרת על ידי:

$$F^{-1}(x,y)=\begin{cases}\left[\arctan\frac{y}{x}\right] & x>0, y\geq 0\\ \left[\frac{\pi}{2}\right] & x=0, y=1\\ \left[\arctan\frac{y}{x}+\pi\right] & x<0\\ \left[\frac{3\pi}{2}\right] & x=0, y=-1\\ \left[2\pi+\arctan\frac{y}{x}\right] & x>0, y<0\end{cases}$$

נשים לב, כי $\tilde{F}^{-1}$ רציפה, אבל $F^{-1}=\pi\circ\tilde{F}^{-1}$, כך שהיות ו-$\pi$ רציפה, נסיק כי F^{-1} רציפה כהרכבה של העתקות רציפות. כלומר, קיבלנו כי F הינה הומיאומורפיזם בין ${[0,2\pi]}/{\sim}$ לבין S^1.

<u>הערה</u> – על פי תרגיל בגיליון 5 כל קטע סגור וסופי הומיאומורפי ל-$[0,2\pi]$ ולכן המנה שלעיל הומיאומורפית ל-S^1.

<u>תרגיל:</u>

תהא X קבוצה ויהא ψ בסיס לטופולוגיה τ על X.

א. הראו כי לכל $a\in X$, האיברים של Ψ שמכילים את a הם בסיס לטופולוגיה ב-a.

<u>פתרון:</u>

א. לכל סביבה V של a ב-(X,τ) קיימת קבוצה $a\in \underset{\text{פתוחה}}{U}\subseteq V$ ולכן, היות ואוסף קבוצות זה הינו בסיס, נסיק כי קיים $B\in\Psi$ $B\subset U\subset V$ כך ש-$a\in B$ ולכן האיברים ב-Ψ שמכילים את a מהווים בסיס לטופולוגיה ב-a.

<u>תרגיל:</u>

ב. נניח כי τ הינה טופולוגיה על X, ולכל $a\in X$ קיים בסיס לטופולוגיה ב-a שנסמנו Ψ_a. הראו כי $\bigcup_{a\in X}\Psi_a$ הוא בסיס לטופולוגיה τ.

<u>פתרון:</u>

ב. ראשית, $\bigcup_{a\in X}\Psi_a$ הינו אוסף של קבוצות פתוחות. לכל U קבוצה פתוחה ב-(X,τ) ולכל $x\in U$ קיימת Ψ_x בסיס לטופולוגיה ב-x. כמו כן, U סביבה פתוחה של x ולכן קיים $B\in\Psi_x$ כך ש-$x\in B$. מכאן, שאכן מתקיים $x\in\bigcup_{a\in X}\Psi_a$ שכן $B\in\Psi_x$. לכן, על פי התנאים להגדרת בסיס לטופולוגיה נקבל כי זהו אכן בסיס לטופולוגיה כנדרש.