תורת ההסתברות

תרגיל בית מס׳ 6
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.
נניח כי נק׳ (X,Y) נבחרה באקראי מתוך מעגל ברדיוס אחד עם מרכזו ב- $(0,0)$,
כלומר $f_{X,Y}(x,y)=1/\pi$, עבור $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$. מצאו את $f_{Y|X}(y|x)$.

<u>פתרון</u>
עבור $-1<x<1$ נקבל:

$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

לכן:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}}, \qquad 0<x^2+y^2<1$$

<u>תרגיל 2</u>. יהיו $X_1,X_2,\ldots$ משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים באופן אחיד
על $(0,1)$. נגדיר $Y_n=\prod_{k=1}^{n} X_k$ ו- $Z_n=\log Y_n=\sum_{k=1}^{n}\log X_k$.

(א) חשבו את EY_n ואת EZ_n.

(ב) חשבו את $VAR(Y_n)$ ואת $VAR(Z_n)$.

(ג) בעזרת משפט הגבול המרכזי ל- Z_n, הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Y_n \leq e^{-n+t\sqrt{n}}\right)=\Phi(t).$$

מהו $\lim_{n\to\infty} P\left(Y_n \leq e^{-n}\right)$?

<u>פתרון</u>

(א)

$$\begin{aligned} EY_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n, \\ EZ_n &= nE\log X_1 = n\int_0^1 \log x dx = -n\left\{x - x\log x|_0^1\right\} = -n. \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned} EY_n^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ VAR(Z_n) &= nVAR(\log X_1) = n\left(\int_0^1 \log^2 x dx - 1\right) = n, \end{aligned}$$

מכיוון ש-

$$\int_0^1 \log^2 x dx = \int_{-\infty}^0 t^2 e^t dt = -\int_{-\infty}^0 2te^t dt = 2.$$

(ג) נובע ממשפט גבול המרכזי עבור Z_n :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\left(Y_n \le e^{-n+t\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(Z_n \le -n + t\sqrt{n}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n - nE(\log X_1)}{\sqrt{nVAR(\log X_1)}} \le t\right) = \Phi(t). \end{aligned}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} P\left(Y_n \le e^{-n}\right) = \Phi(0) = 1/2$.

תרגיל 3.

נתונים 48 מספרים $X_1, X_2, \dots, X_{48}$ שהוגרלו באקראי. נסמן $S = \sum_{k=1}^{48} X_k$ ו- $T = \sum_{k=1}^{48} \overline{X_k}$, כאשר $\overline{x}$ מסמן את המספר השלם, הקרוב ביותר ל- x. נניח כי ההפרשים $X_k - \overline{X_k}$ מפולגים באופן אחיד בקטע $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(א) בעזרת משפט הגבול המרכזי העריכו את $P\left(|S-T| \ge 4\right)$.

(ב) השתמשו באי-שוויון צ'בישב כדי להעריך את $P\left(|S-T| \ge 4\right)$.

פתרון

(א) נגדיק $Y_i = X_k - \overline{X_k}$. לכן $\mu = EY_i = 0,\ \sigma^2 = VARY_i = \frac{1}{12}$. מככאן

$$P\left(|S-T| \geq 4\right) = P\left(\left|\sum_0^{48} Y_i\right| \geq 4\right) = 2P\left(\frac{\sum_0^{48} Y_i}{\sqrt{\frac{48}{12}}} \geq \frac{4}{\sqrt{\frac{48}{12}}}\right) \approx 2(1-\Phi(2)).$$

(ב)

$$P\left(|S-T| \geq 4\right) = P\left(\left|\sum_0^{48} Y_i\right| \geq 4\right) \leq \frac{48VAR(Y_i)}{16} = \frac{1}{4}.$$

תרגיל 4.

מטילים מטבע אחת אינסוף פעמים, עם סיכוי להצלחה p. נסמן ב- X_n את מספר ההטלה שבה התקבלה הצלחה n–ית. למשל, אם סדרת ההטלות של המטבע הניבה את הוקטור $(0,0,1,0,1,0,0,1,\dots)$, כאשר 1 מסמן הצלחה ו- 0 כשלון, אזי $X_1 = 3$, $X_2 = 5$, $X_3 = 8$ וכו'.

(א) הוכיחו ן- X_k ו- X_{k-1} תלוים ביניהם.

(ב) האם לדעתכם $X_1, X_2 - X_1, \dots, X_n - X_{n-1}$ הם בלתי תלוים ? תנו נימוק קצר ומשכנע.

(ג) השתמשו בייצוג $X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + (X_3 - X2) + \dots + (X_n - X_{n-1})$ כדי לחשב את $VAR(X_n)$. ניתן להעזר בעובדה כי $VAR(X_1) = \frac{1-p}{p^2}$.

(ד) אם התשובה ל- (ב) חיובית, השתמשו בזאת כדי לחשב בעזרת משפט הגבול המרכזי את

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_n > \frac{n}{p} + x\sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}\right)$$

לכל $-\infty < x < \infty$.

פתרון

(א)

$$0 = P(X_k = 2k, X_{k-1} = 3k) \neq P(X_k = 2k)P(X_{k-1} = 3k).$$

(ב) משתנים מקריים $X_1, X_2 - X_1, \ldots, X_n - X_{n-1}$ מסמנים אורך הזמן בין שתי הצלחות עקביות. אי תלות אם כן נובעת מתכונת חוסר הזכרון שיש לסדרה של נסויים בלתי תלויים כלשהיא.

(ג) ברור כי המשתנים $X_1, X_2 - X_1, \ldots, X_n - X_{n-1}$ לא רק בלתי תלוים אלה גם מפולגים באופן זהה, כאשר $X_1 \sim GEOM(p)$. לכן

$$\begin{aligned} VAR(X_n) &= VAR(X_1 + (X_2 - X_1) + \ldots + (X_n - X_{n-1})) = \\ &= n\frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

(ד) לפי משפט הגבול המרכזי

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_n > \frac{n}{p} + x\sqrt{\frac{n(1-p)}{p^2}}\right) = 1 - \Phi(x).$$

לכל $-\infty < x < \infty$.

<u>תרגיל 5.</u>

יהא (X, Y) ו"א המפולג לפי $f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \exp\{-x - 2y\},\ x, y \geq 0$. נגדיר: $U = \min\{X, Y\}$ ו- $V = \max\{X, Y\}$.

(א) מצאו את $f_{U,V}(u, v)$

(ב) נגדיר: $W = \frac{U}{U+V},\ Q = U + V$. מצאו את $f_{W,Q}(w, q)$

(ג) האם מ"א W ו- Q ב"ת ?

<u>פתרון</u>

(א) המשתנים X ו- Y בלתי תלויים ולכן:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= e^{-x}, \quad 0 < x < \infty; \\ f_Y(y) &= 2 \cdot e^{-2y}, \quad 0 < y < \infty. \end{aligned}$$

לכן (כדאי לשרטט את הגרף הדו-מימדי של התחומים):

$$F_{U,V}(u,v) = P\big(\min\{X,Y\} \le u,\ \max\{X,Y\} \le v\big) =$$

$$= \begin{cases} P(X \le v,\ Y \le v) & \text{אם} \quad 0 \le v \le u, \\ P(X \le u,\ Y \le v) + P(u < X \le v,\ Y \le u) & \text{אם} \quad 0 \le u \le v \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \left(1-e^{-v}\right)\left(1-e^{-2v}\right) & \text{אם} \quad 0 \le v \le u, \\ \left(1-e^{-u}\right)\cdot\left(1-e^{-2v}\right) + \left(e^{-u}-e^{-v}\right)\cdot\left(1-e^{-2u}\right) & \text{אם} \quad 0 \le u \le v. \end{cases}$$

מכאן

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2 F_{U,V}(u,v)}{\partial u \partial v} = 2\left(e^{-2u}e^{-v} + e^{-u}e^{-2v}\right) \quad \text{עבור } 0 \le u \le v.$$

(ב) הטרנספורמציה היא חח"ע ולכן עבור $0 \le q < \infty$, $0 \le w \le \frac{1}{2}$ נקבל:

$$\begin{aligned} f_{W,Q}(w,q) &= \frac{1}{\left|\frac{\partial(w,q)}{\partial(u,v)}\right|} f_{U,V}(u,v) = \\ &= \left|\frac{1}{\frac{v}{(u+v)^2}\cdot 1 + \frac{u}{(u+v)^2}\cdot 1}\right| \cdot 2\left(e^{-2u}e^{-v} + e^{-u}e^{-2v}\right) = \\ &= 2qe^{-q}\left(e^{-wq} + e^{-(1-w)q}\right). \end{aligned}$$

(ג) קל לראות כי $f_{W,Q}(w,q) \neq f_Q(q) f_W(w)$ ולכן המשתהים המקריים תלויים.