טורי מספרים

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- הגדרה: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ממשית. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנסת, וערכו של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ הוא הגבול שלה. בנוסף, אומרים שהטור מתכנס בהחלט אם $\sum |a_n|$ מתכנס. אם הטור מתכנס ו־ $\sum |a_n| = \infty$ אומרים שהטור מתכנס בתנאי.
- **הדוגמה**: $\sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ לכל $|x| < 1$. וטור זה נקרא טור הנדסי.
- תנאי הכרחי: אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אזי $\lim a_n = 0$. (כיוון שני **לא** נכון)
- אם $\sum a_n$ ו־ $\sum b_n$ מתכנסים אזי $\sum a_n + b_n$ מתכנס ו־ $\sum a_n + b_n = \sum a_n + \sum b_n$, ולכל $c \in \mathbb{R}$ $\sum ca_n$ מתכנס ו־ $\sum ca_n = c \sum a_n$.
- אם $\sum |a_n| < \infty$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.
- אם $\{a_n\}$ חיובית אזי $\sum a_n < \infty$ אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה.
- מבחני השוואה לטורים חיוביים (או בעלי אותו סימן):
  - נניח $0 \le a_n \le b_n$. אם $\sum b_n < \infty$ אזי $\sum a_n < \infty$. אם $\sum a_n = \infty$ אזי $\sum b_n = \infty$.
  - אם $\sum a_n$ ו־ $\sum b_n$ טורים חיוביים וקיים מספר ממשי חיובי L כך ש־ $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$ אזי

    $$\sum a_n < \infty \Longleftrightarrow \sum b_n < \infty$$

    אם $L = 0$ אזי $\sum b_n < \infty$ מחייב ש־ $\sum a_n < \infty$.
    אם $L = \infty$ אזי $\sum a_n < \infty$ מחייב ש־ $\sum b_n < \infty$.
  - מבחן האינטגרל: תהי $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ חיובית לא עולה ואינטגרבילית רימן על כל תת־קטע סופי ב־ $[1, \infty)$. אזי

    $$\int^{\infty} f < \infty \Longleftrightarrow \sum^{\infty} f(n)$$

  - **הדוגמה**: $\sum \frac{1}{n^p} < \infty \Longleftrightarrow p > 1$.
  - מבחן ראבה: תהי a_n חיובית. אם $\lim \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) = q$ אזי:
    אם $q < 1$ הטור מתבדר.
    אם $q > 1$ הטור מתכנס.
- מבחן השורש של קושי: תהי a_n סדרה.
  אם $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
  אם $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ אזי $\sum a_n$ לא מתכנס.

- מבחן המנה של דלמבר: תהי a_n סדרה.

אם $\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

אם $\liminf\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ אזי $\sum a_n$ לא מתכנס.

נחדד: אם בודקים התכנסות בעזרת מבחן השורש או המנה, ומגלים שהטור המוחלט מתבדר, אז למעשה גם הטור המקורי מתבדר.

- מבחן לייבניץ: תהי a_n סדרה שואפת באופן מונוטוני לאפס. אזי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.
יתר על כן, הערך שלו S חיובי וקטן מ־a_1. (אם מתחילים עם (-1) אז ערכו שלילי).

- מבחן דיריכלה: תהי a_n סדרה שואפת באופן מונוטוני לאפס ו־ $\sum b_n$ טור חסום. אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

- מבחן אבל 1: תהי a_n סדרה שואפת לאפס ו־ $\sum|a_{n+1}-a_n| < \infty$ ו־ $\sum b_n$ טור חסום. אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

- מבחן אבל 2: תהי a_n סדרה שואפת באופן מונוטוני לגבול L ו־ $\sum b_n$ טור מתכנס. אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

תרגילים:

1. מצא ביטוי לסכום של n האיברים הראשונים בטור, ומצא את סכומו:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots$$

<u>פתרון:</u>

איבר כללי $a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ לכן $2a_n=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$ לכן $S_n=1-\frac{1}{2n+1}\longrightarrow 1$ לכן $\sum_1^{\infty}a_n=1$.

2. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ מתכנס?

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש־ $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\longrightarrow\frac{1}{e}\neq 0$ לכן הטור מתבדר.

שימו לב ש־ $\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}=\frac{n}{n+1}\longrightarrow 1$ לכן מבחן השורש לא עובד בדוגמא זו.

3. האם $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$ מתכנס?

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש־ $n^n\geq 2^n$ לכל $n\geq 2$. $\sum 2^{-n}<\infty$ לכן גם $\sum n^{-n}<\infty$.

דרך אחרת היא מבחן השורש:

$$\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=0<1$$

לכן הטור מתכנס.

דרך אחרת היא מבחן המנה:

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = 0$$

הערה: אם מבחן המנה עובד, מבחן השורש תמיד יעבוד. ההיפך לא נכון.

4. יהי $|q| < 1$ בדוק האם מתכנס $q^2 + q + q^4 + q^3 + q^6 + q^5 + \ldots$.

<u>פתרון:</u>

מבחן המנה **לא** עובד כאן. ומבחן השורש נותן $\left(|q|^{n\pm1}\right)^{\frac{1}{n}} \to |q| < 1$ לכן מתכנס.

5. האם $\sum \frac{1}{n^p \ln n}$ מתכנס?

<u>פתרון:</u>

אם $p < 0$ ברור שלא. נניח $p \geq 0$. האיבר הכללי יורד לאפס. לכן נשתמש במבחן הדלילות:

$$\sum 2^n \frac{1}{2^{np} n \ln 2} = \sum \frac{1}{2^{n(p-1)} n \ln 2}$$

ממבחן השורש נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n(p-1)} n}} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

אם $p - 1 > 0$ אז הגבול הזה קטן ממש מ- 1 לכן $\sum 2^n \frac{1}{2^{np} n \ln 2} < \infty$ לכן $\sum \frac{1}{n^p \ln n} < \infty$.
אם $p - 1 = 0$ אז $\sum 2^n \frac{1}{2^{np} n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum \frac{1}{n} = \infty$ לכן $\sum \frac{1}{n \ln n} = \infty$.
סך הכל הטור מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

דרך אחרת: ע"פ תרגול 4 תרגיל 11, ראינו ש- $\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln x}$ קיים אם ורק אם $p > 1$. לכן לפי מבחן האינטגרל $\sum \frac{1}{n^p \ln n}$ קיים אם ורק אם $p > 1$.

6. א. האם $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ מתכנס?

ב. האם $\sum \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$ מתכנס?

<u>פתרון:</u>

א. $\ln(x+1) - \sin(x) \sim x^2$ כש- $x \to 0$, לכן בהשוואה עם $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ הטור מתבדר.

ב. $x - \sin x \sim x^3$ כש- $x \to 0$, לכן בהשוואה עם $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^3$, הטור הנתון מתכנס.

7. האם $\sum \frac{1}{\ln^3\left(\sin \frac{1}{n}\right)}$ מתכנס?

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש- $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$ לכן $\ln^3\left(\sin \frac{1}{n}\right) \approx \ln^3\left(\frac{1}{n}\right) \approx \ln^3 n$ ועל פי מבחן הדלילות

$$\sum \frac{1}{\ln^3 n} < \infty \Longleftrightarrow \sum 2^n \frac{1}{n^3 \ln^3 2}$$

אבל $\sum \frac{2^n}{n^3} = \infty$ כי איבר כללי לא שואף ל־ 0 או לפי מבחן המנה, הרי ש־

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} \longrightarrow 2 > 1$$

דרך אחרת היא לפי מבחן האינטגרל: $f(x) = \frac{1}{\ln^3 x}$ חיובית יורדת ב־ $[5, \infty)$ ו־ $\int_5^\infty f = \int_{\ln 5}^\infty \frac{e^t dt}{t^3} = \infty$.

סך הכל $\sum \frac{1}{\ln^3 n}$ מתבדר.

נותר להצדיק את המעבר ל־ $\ln^3 n$: על פי לופיטל נקבל

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\ln^3(\sin x)}}{\frac{1}{\ln^3 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{3\ln^2 x \frac{1}{x}}{3\ln^2(\sin x)\cos x \frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\ln^2(\sin x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln x \frac{1}{x}}{2\ln(\sin x)\cos x \frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cos x} = 1$$

לכן

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\ln^3(\sin x)}}{\frac{1}{\ln^3 x}} = 1$$

לכן לפי היינה, $x_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln^3\left(\sin\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{\ln^3\frac{1}{n}}} = 1$$

לכן ע"פ מבחן השוואה (שים לב כאן שמדובר בשני טורים שליליים) והדיון הקודם, $\sum \frac{1}{\ln^3 n} = \infty$ מחייב ש־ $\sum \frac{1}{\ln^3\left(\sin\frac{1}{n}\right)} = -\infty$.

8. לאילו ערכי $p \neq 0$ מתכנס הטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$$

<u>פתרון:</u>

אם $p < 0$ איבר כללי לא שואף ל־ 0.

אם $p > 0$ אז נשים לב ש־ $\frac{-1}{n^p(n^p+(-1)^n)} = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$. הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p > 0$. והטור $\sum \frac{-1}{n^p(n^p+(-1)^n)}$ מתכנס אם ורק אם $2p > 1$. לכן הטור הנתון מתכנס אם ורק אם $p > \frac{1}{2}$.

לא הבנתי למה לא לכל p>0.
זה טוב לייבניץ החל ממקום מסוים כי קיים n כלשהו
שהחל ממנו המכנה תמיד חיובי, ואז זה טוב עם סימנים
מתחלפים כשהאיבר הכללי שואף ל0

9. נתונה סדרה a_n מתכנסת ל־0, ותהי f רציפה ב־ 0. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_{n+1})-f(a_n)$ מתכנס וחשבו את גבולו.

<u>פתרון:</u>

נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_{n+1})-f(a_n)$:

$$S_n=f(a_{n+1})-f(a_1)$$

מכיוון ש־ $a_n\to 0$ ו־ f רציף באפס לכן $S_n\to f(0)-f(a_1)$.

10. א. תהי f פונקציה גזירה באפס כך ש־ $f(0)=0$ ו־ $f'(0)\neq 0$. תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית שואפת ל־0. הראו ש־ $\sum a_n<\infty \iff \sum f(a_n)$ מתכנס.

ב. תהי $\{a_n\}$ חיובית. הראו ש־ $\sum a_n<\infty \iff \sum \frac{a_n}{1+a_n}<\infty$.

איך ניתן להכליל את סעיף א.? מה קורה אם $f(0)=f'(0)=0$ אבל $f''(0)\neq 0$? ומה אם גם $f''(0)=0$ אבל $f'''(0)\neq 0$? (בדקו אם מה שקיבלתם מתאים אם התוצאות של שאלה 6).

<u>פתרון:</u>

א. ע"פ לופיטל $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$. נניח בה"כ ש־ $f'(0)>0$ ואז $f(a_n)>0$ החל ממקום מסוים ולפי השוואה גבולית שניהם מתכנסים ומתבדרים יחדיו. אם $f'(0)<0$ מטפלים ב־ $\sum -f(a_n)$ לפי קודם זה סופי לכן מלניאריות $\sum f(a_n)$ מתכנס.

ב. כדי להשתמש בסעיף א. צריך לבדוק ש־ $\{a_n\}$ שואפת ל־ 0. נשים לב ש־ $a_n\to 0$ אם ורק אם $\frac{a_n}{1+a_n}\to 0$. כיוון אחד נובע מכיוון ש־ $\frac{t}{1+t}$ רציפה ב־ 0, השני מכיוון שההופכית שלה, $\frac{w}{1-w}$, רציפה באפס, והן שוות לאפס ב־ 0.

11. **קריטריון קושי:** הטור $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $\epsilon>0$ קיים N כך שלכל $n,m>N$ מתקיים $|\sum_{k=n}^{m}a_k|<\epsilon$.

<u>הוכחה:</u>

להפעיל את קריטריון קושי על סדרת הסכומים החלקיים.

$\star$ הוכיחו בעזרת קריטריון קושי

- התכנסות בהחלט גוררת התכנסות (שורה אחת ללא טריקים).
- איבר כללי בטור מתכנס חייב לשאוף לאפס.

12. תהיינה a_n,b_n סדרות חיוביות. נתון $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{b_{n+1}}{b_n}$ (החל ממקום מסוים). הוכיחו שאם $\sum a_n<\infty$ אזי $\sum b_n<\infty$.

<u>פתרון:</u>

ע"י הפעלת הנתון כמה פעמים (אינדוקציה), קל לראות ש־ $b_n\leq\frac{b_1}{a_1}a_n$, ואז לפי מבחן השוואה.

13. הוכח: אם $\sum a_n^2$ וגם $\sum b_n^2$ מתכנסים, אז גם הטורים $\sum |a_nb_n|$ ו־ $\sum\frac{|a_n|}{n}$

<u>פתרון:</u>

בתרגול הקודם ראינו את אי־שיוויון הולדר. ממנו נסיק ($p=q=2$) ש־ $|a_nb_n|\leq\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}$ ו־ $\frac{1}{n}|a_n|\leq\frac{1}{2n^2}+\frac{a_n^2}{2}$. מכיוון ש־ $\sum a_n^2$, $\sum b_n^2$ ו־ $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנסים אז אם $\sum\frac{a_n^2}{2}+\frac{b_n^2}{2}$ ו־ $\sum\frac{1}{2n^2}+\frac{a_n^2}{2}$ לכן ע"פ מבחן השוואה גם $\sum|a_nb_n|$ ו־ $\sum\frac{|a_n|}{n}$ מתכנסים.

14. הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס, אבל $\sum a_n^2$ מתבדר, אזי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי.

פתרון:

נניח בה"כ ש־ $|a_n| < 1$ לכל n כי $a_n \to 0$. לכן $a_n^2 \leq |a_n|$ לכן אם הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אזי $\sum a_n^2 < \infty$ בסתירה לנתון.

15. האם הטור $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \ldots$ מתכנס?

פתרון:

זהו טור מהצורה $\sum a_n b_n$ כשאר $a_n \searrow 0$ וסדרת הסכומים החלקיים של $\{b_n\}$חסומה:

$1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \ldots$ לכן הטור הנתון מתכנס לפי דיריכלה.

16. נתון הטור

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

(איברים חיוביים ושליליים לסירוגין) והטור המתקבל ממנו ע"י חילוף סדר

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots$$

(שני איברים חיוביים ואחריהם שלילי אחד וחוזר חלילה).

א. הראו ששני הטורים מתכנסים.

ב. הראו שסכומי הטורים שונים.

פתרון:

א. הטור הראשון הוא טור לייבניץ. נעבור לטור השני. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים שלו S_n. נחקור את S_{3n} מכיוון שמרגישים שכדאי לחקור כל 3 מחוברים (בכלל חוקיות הטור), במציאות זה היה רמז במבחן.

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4n\left(4n-3\right)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n\left(4n-1\right)}$$

לכן S_{3n} מתכנסת. מכיוון שאיבר כללי בטור מתכנס לאפס אז גם S_{3n+1}, S_{3n+2} מתכנסות ולאותו הגבול, לכן S_n מתכנסת.

ב. ע"פ לייבניץ הסימן של ערך הטור נקבע על ידי סימן המחובר הראשון. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. לכן סכום הטור הראשון קטן ממש מ־ $\frac{5}{6}$. מצד שני, מחקירת S_{3n} קל לראות שהגבול שלה $< \frac{5}{6}$.

17. האם $\sum_1^\infty 3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+2}}$ מתכנס?

פתרון:

כאן רואים שיש סוג של סכום טלסקופי כי יש הפרש של מחוברים דומים. אכן

$$S_n = 3 + 3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{n+1}} - 3^{\frac{1}{n+2}}$$

לכן $\sum_1^\infty 3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+2}} = 1 + 3^{\frac{1}{2}}$.

18. א. הוכיחו שלכל $x>0$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\cos\left(n^2x^2\right)$ מתכנס.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty} 2n^2xe^{-nx}\sin\left(n^2x^2\right)$ מתכנס.
ג. הוכיחו שלכל $x>0$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}\cos\left(n^2x^2\right)$ מתכנס.
מה הקשר בין הטורים?

<u>הוכחה:</u>

א. נשים לב ש־ $\sqrt[n]{e^{-nx}}=e^{-x}<1$ לכן לפי מבחן השורש $\sum e^{-nx}<\infty$ לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

ב. נשים לב ש־ $\sqrt[n]{n^2e^{-nx}}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^2e^{-x}\longrightarrow e^{-x}<1$ לכן לפי מבחן השורש $\sum_{n=0}^{\infty} n^2e^{-nx}<\infty$ הטור הנתון מתכנס בהחלט.

ג. נשים לב ש־ $\sqrt[n]{ne^{-nx}}\longrightarrow e^{-x}<1$ לכן הטור הנתון מתכנס בהחלט.

19. חקור את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ עבור $x\in\mathbb{R}$, והוכיחו שלכל $x\in(-1,1)$ מתקיים כי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^{n-1}>0$$

<u>פתרון:</u>

נסמן $f_n(x)=\frac{x^n}{n^2+1}$. על פי מבחן המנה:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=|x|\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\longrightarrow|x|$$

לכן אם $|x|<1$ הטור מתכנס בהחלט, ואם $|x|>1$ הטור מתבדר. אם $x=1$ הטור מתכנס בהשוואה ל־ $\sum\frac{1}{n^2}$ ואם $x=-1$ זהו טור לייבניץ ולכן מתכנס. לסיכום, $\sum f_n(x)$ מתכנס אם ורק אם $|x|\le 1$.
אם $x\ge 0$ ברור ש־ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^{n-1}>0$. ואם $x<0$ זהו טור לייבניץ והאיבר הראשון שלו $\frac{1}{2}>0$ לכן סכומו חיובי.

20. מבחן אבל 2: תהי a_n סדרה שואפת באופן מונוטוני לגבול L ו־ $\sum b_n$ טור מתכנס. אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u>

$$a_nb_n=(a_n-L)\,b_n+Lb_n$$

ונשתמש בדיריכלה ואריתמטיקה של טורים.

21. תהי a_n יורדת לאפס. אם $\sum a_n$ מתכנס אזי $na_n\to 0$.

22. מבחן הדלילות: תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת. אזי $\sum a_n$ ו־ $\sum 2^na_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.