

תרגיל בית 6 - חשבון אינפיניטיסמלי II

הגשה עד סוף הסמסטר

תרגיל 1:

תהא $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש f קבועה על כל מעגל סביב הראשית (כלומר לכל $R > 0$ קיים $C_R \in \mathbb{R}$, כך שאם (x, y) נקודה על המעגל ברדיוס R סביב הראשית אז $f(x, y) = C_R$).

1. הראו שהנגזרת של f בראשית היא $(0, 0)$.

נסמן עתה $g(x) = f(x, 0)$.

2. חשבו את הנגזרת של f בנקודה (x_0, y_0) כלשהי בהינתן הפונקציות $g(t)$ ו $g'(t)$.

תרגיל 2:

יהא $M > 0$ מספר ממשי. נניח כי הפונקציה $f: [-M, M] \times [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבלית ורציפה בראשית. נסמן ב- B_r את הקבוצה $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$. הראו כי

$$f(0, 0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} f(x, y) dx dy$$

תרגיל 3:

חשבו את האינטגרל הבא $y, b > 0$; $F(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 \cos^2(x) + b^2 \sin^2(x)) dx$

תרגיל 4:

נסמן ב $F(b) = \int_0^\infty f(x, b) dx$ ו $f(x, b) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-bx}$

1. הראו ש $F(b)$ קיים וסופי לכל $b \geq 0$.

2. הניחו ש- $\lim_{b \rightarrow 0^+} F(b) = F(0)$ והראו ש- $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

3. (לא להגשה) הראו ש- $\lim_{b \rightarrow 0^+} F(b) = F(0)$.

תרגיל 5:

חשבו את האינטגרלים הבאים

1.

$$\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dx dy$$

כאשר D הוא התחום החסום ע"י הפרבולות $y^2 = \frac{\pi}{2}x$, $y^2 = \pi x$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$

2.

$$\iint_D \frac{y(4x - \sin 2x)}{2x \sin^2 x \tan x} dx dy$$

כאשר

$$D = \{(x, y) | 2 \tan x \leq y \leq 4 \tan x, y^2 \leq x \leq 2y^2\}$$

תרגיל 6: (לא להגשה)

$$F(t) = \int_0^1 f(x, t) dx \text{ ו } f(x, t) = \begin{cases} \frac{xt^3}{(x^2+t^2)^2} & (x, t) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, t) = (0, 0) \end{cases} \text{ נגדיר}$$

הראו שלא ניתן להשתמש בכלל לייבניץ על מנת לחשב את $F'(0)$, כלומר הראו ש $F'(0)$ ו $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) dx$ קיימים אבל אינם שווים.