קומבי ת"ב 11

שניר הורדן־ליעד סלומון

24 ביוני 2018

1.

א.

הוכחה

נתונות 5 נקודות במישור כך שאף שתיים מהן אינן נמצאות על ישר המקביל לאחד הצירים.

צריך להוכיח שקיים מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים, שניים מקודקודיו הם מבין הנקודות הנתונות ופנימו נמצאת עוד אחת (לפחות) מן הנקודות הנתונות.

נקביל את פתרון השאלה לסוגיה הנ"ל:

סדרה של מספרים כך שאף מספר אינו חוזר על עצמו (אף שני נקודות אינן נמצאות על אותו ישר המקביל לציר המאוזן) ואין שני איברים באותו מקום בסדרה (אף שני נקודות אינן נמצאות על אותו ישר המקביל לציר המאונך).

לפי משפט $Erdos-Szekeres$, קיימת תת־סדרה מונוטונית לא־עולה או תת־סדרה מונוטונית עולה. לפי תנאי השאלה אף שני נקודות נמצאות על אותו קו מקביל לאחד הצירים אז נסיק שקיימת תת־סדרה מונוטונית יורדת או תת־סדרה מונוטונית עולה. מאחר ויש 5 איברים בסדרה (נקודות במישור) אז מספר האיברים בסדרות$(k-inc.,\ n-dec.)$ הוא $5=(k-1)(n-1)+1$ זה מתקיים עבור $k=3,n=3$.

נבחר אחת מהן. אז זו מגדירה מלבן כך שהאיברים הראשון והאחרון שלה מגדירים מלבן שביניהם מתקבלת נקודה נוספת, שהיא בתוך המלבן שנוצר.פירוט: נמתח קו מקביל לציר האנכי והמאוזן מכל אחד מהאיברים הראשון והאחרון. המלבן מוגדר ע"י שני נקודות אלה והחיתוך בין הישרים הנ"ל. בתוך מלבן זה שמותאם לסדרה באורך 3 קיימת נקודה (איבר בסדרה) בתוך המלבן. אם הסדרה מונוטונית עולה אז האיבר הראשון יהיה הנמוך ביותר ולהפך אם הסדרה היא המונוטונית עולה. בכל מקרה, האיבר האמצעי בסדרה הוא זה שבתוך המלבן שנוצר.

ב.

דוגמא נגדית למקרה של 4 נקודות $(3,0)\rightarrow(2,-2)\rightarrow(1,4)\rightarrow(0,1)$. כלומר זיגזג של נקודות במישור.

2.

א.

הוכחה

יהיו $G_1=(V,E_1),G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים. נגדיר גרף חדש $G=(V,E_1\cup E_2)$.

נסמן $\chi-minimum\ coloring\ number$

צ.ל. $\chi(G)\leq\chi(G_1)\chi(G_2)$.

אם $E_1=E_2$ אז טריויאלי.

המקרה בו $\chi(G_1)\chi(G_2)$ הוא הקטן ביותר הוא כאשר $E_1\cap E_2=\{0\}$.

נרצה להראות שניתן לצבוע את $K_n=(V,E)$ ב־$\chi(G_1)\,\chi(G_2)$ צבעים.
נסמן

$$f_1:V(G)\rightarrow[n]-colors\ in\ G_1$$

$$f_2:V\left(\overline{G}\right)\rightarrow[m]-colors\ in\ G_2$$

שני צביעות מינימליות.
נרצה להוכיח קיום של $f:V\rightarrow[n]\times[m]$ המקיימת תנאי צביעה, נגדיר $f(v)=(f_1(v),f_2(v))$.
נוכיח שזו צביעה, כלומר לכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $f(v)\neq f(u)$.
יהא $\{u,v\}\in E$. אז מאחר והיא שייכת לגרף השלם מתקיים, $\{u,v\}\in E_{G_1}$ או $\{u,v\}\in E_{G_2}$.
אז

$$f(v)=(c_i,x)\ or\ f(u)=(c_k,y)$$

$$f(v)=(x,c_i)\ or\ f(u)=(y,c_k)$$

עבור x,y צבעים כלשהן יכול להיות אותו הצבע, ו־c_i,c_j צבעים שונים.
בכל מקרה מתקיים $f(u)\neq f(v)$.
מ.ש.ל.
ב.
<u>הוכחה</u>
נרצה להראות שניתן לצבוע את $K_n=(V,E)$ ב־$\chi(G)\,\chi\left(\overline{G}\right)$ צבעים.
נסמן

$$f_1:V(G)\rightarrow[n]-colors\ in\ G$$

$$f_2:V\left(\overline{G}\right)\rightarrow[m]-colors\ in\ \overline{G}$$

שני צביעות מינימליות.
נרצה להוכיח קיום של $f:V\rightarrow[n]\times[m]$ המקיימת תנאי צביעה, נגדיר $f(v)=(f_1(v),f_2(v))$.
נוכיח שזו צביעה, כלומר לכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $f(v)\neq f(u)$.
יהא $\{u,v\}\in E$. אז מאחר והיא שייכת לגרף השלם מתקיימת אחת מן השתיים, $\{u,v\}\in E_G$ או $\{u,v\}\in E_{\overline{G}}$.
אז

$$f(v)=(c_i,x)\ or\ f(u)=(c_k,y)$$

$$f(v) = (x, c_i)\ or\ f(u) = (y, c_k)$$

עבור $x, y \in\in [n] \cup [m]$ צבעים כלשהן יכול להיות אותו הצבע, ו־$c_i, c_j \in [n] \cup [m]$ צבעים שונים.

בכל מקרה מתקיים $f(u) \neq f(v)$.

מ.ש.ל.

רעיון נוסף:

צ.ל. $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq |V|$.

$max\{\chi(G)\} = |V|$ במקרה, לדוגמא, של הגרף השלם.

לפי סעיף א לכל גרף ובפרט לגרף השלם מתקיים , $|V| = \max\{\chi(G)\} \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

מ.ש.ל.

3.

נשים לב שהגרף השמאלי הוא גרף מושרה, מאחר ונוכל להזיז את שני הקודקודים האמצעיים החוצה ועדיין לחבר אותם לכל הקודקודים שהם מחוברים אליהם, כך שאף שני צלעות לא יחצו אחת את השנייה. לפי משפט ארבעת הצבעים, ה־χ שלו הוא 4 . הוא גם לא 3 ־צביע כי קיים מעגל באורך אי־זוגי ושני הקודקודים במרכז המעגל גורמים לו לקיים $\chi(G_{left}) = 4$.

נשים לב שהוא 3־רגולרי, לפי טענה $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. וכן עבור $\omega - largest\,clique$, $\omega(G) \leq \chi(G)$. אזי $3 \leq \chi(G) \leq 4$. קיימת צביעה של 3 (מאחר ובגרף כזו:

4.

הוכחה

יהי $G = (V, E)$ גרף ויהי $k \geq 2$ טבעי.

נניח ש־$\chi(G) = k$. צ.ל. $|E| \geq \binom{k}{2}$

נחלק את V ל־k קבוצות ע"פ צבע. בהכרח קיימת צלע המחברת בין כל אחת מהן. אילו לא אז מספר הצביעה היה קטן יותר מ־k אך $k = \chi(G)$ הוא מספר הצביעה המינימלי.

אם כל שני קבוצות אלו לפחות מחוברות מתקיים $|E| \geq \binom{k}{2}$. על אחת וכמה כאשר $\chi(G) \geq k$.

מ.ש.ל.