קומבינטוריקה - סמסטר חורף תשס"ג - תרגיל מס' 2

להגשה עד ה - 6.11.02

תרגיל מס' 1

הוכיחו בשתי דרכים (חשבונית וקומבינטורית), כי:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j} = \binom{m}{n} 2^n$$

רמז: מנו בשני אופנים את גודל האוסף: $\{(A,B)\ :\ A,B \subset [m],\ A \cap B = \phi,\ |A|+|B| = n\}$

תרגיל מס' 2

יהיו a, b טבעיים. מסלול על השריג השלם (כלומר, עובר רק בנקודות עם קואורדינטות שלמות) מ - $(0,0)$ ל - (a,b) נקרא חיובי אם בכל צעד נעים ימינה או למעלה.

א. מהו מספר המסלולים החיוביים מ - $(0,0)$ ל - (a,b)?

ב. יהא $0 \le k \le b$ ויהא $0 \le j \le a$. הראו כי מספר המסלולים החיוביים מ - $(0,0)$ ל - (a,b), הכוללים את הצלע: $(k,j) \to (k+1,j)$ הוא:

$$\binom{k+j}{j}\binom{a-k-1+b-j}{b-j}$$

ג. הוכיחו כי:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{m-j}\binom{r+j}{j} = \binom{n+r+1}{m}$$

ד. הוכיחו כי מספר המסלולים החיוביים מ - $(0,0)$ ל - (n,n), שאינם מכילים נקודה (x,y) עם: $x < y$ הוא:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

תרגיל מס' 3

הראינו בכיתה כי:

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} \qquad (1)$$

א. חשבו את: $\sum_{k=1}^{n} k$

ב. העזרו בנוסחה: $k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$ וב - (1), כדי לחשב את: $\sum_{k=1}^{n} k^2$

ג. מצאו a, b, c ממשיים, כך ש: $k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$ ונצלו זאת ואת (1), כדי לחשב את: $\sum_{k=1}^{n} k^3$

תרגיל מס' 4

הוכיחו, כי עבור $l \le n$ טבעיים, מתקיים:

$$\sum_{k=l}^{n} \binom{k}{l}\binom{n}{k} = \binom{n}{l} 2^{n-l}$$

תרגיל מס' 5

א. הוכיחו כי עבור כל n טבעי, מתקיים:

$$\binom{n}{0} \le \binom{n}{1} \le \cdots \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \ge \cdots \ge \binom{n}{n-1} \ge \binom{n}{n}$$

ב. הוכיחו כי:

$$\frac{1}{n+1} \cdot 2^n \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \le 2^n$$

תרגיל מס' 6

א. מהו מספר האיברים בפיתוח של: $(x+y+z+w)^{11}$?

ב. מהו סכום מקדמי הפיתוח: $(x+y+z+w)^{13}$?

ג. מהו המקדם של: $x^5y^3z^3w^3$ בפיתוח של: $(x+y+z+w)^{14}$?

ד. מהו המקדם של: x^{18} בפיתוח של: $\left(1+x^3+x^5+x^7\right)^{100}$?

ה. מהו המקדם של: x^8 בפיתוח של: $\left(1+x+x^2+\cdots+x^{10}\right)^3$?

תרגיל מס' 7

יהא p מספר ראשוני.

א. הוכיחו, כי לכל $1 \le k \le p-1$ מתקיים: $\binom{p}{k} \equiv 0 \ (mod\ p)$

ב. הוכיחו, כי לכל a, b שלמים מתקיים: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ (mod\ p)$

תרגיל מס' 8

חשבו בעזרת נוסחת הבינום או בכל דרך אחרת (כלומר, מצאו ביטוי "סגור" לסכום), את תוצאת:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

תרגיל מס' 9

יהא p ראשוני. בכמה אופנים אפשר לסדר p כדורים במעגל, אם הכדורים נלקחים ממאגר בלתי מוגבל של כדורים הצבועים בצבעים: $1, 2, \ldots, n$ וכל הכדורים שצבועים באותו הצבע - זהים?
הוכיחו כי התשובה היא: $n + \frac{n^p - n}{p}$

תרגיל מס' 10

א. מהו מספר הסדרות ב: $\{0,1\}^n$ (כלומר, סדרות של אפסים ואחדים באורך n), המכילות מספר זוגי של אפסים?

ב. מהו מספר הסדרות ב: $\{0,1,2\}^n$, המכילות מספר זוגי של אפסים?

ג. מהו מספר הסדרות ב: $\{0,1,\ldots,m-1\}^n$, המכילות מספר זוגי של אפסים?

בהצלחה!