

תרגיל מספר 3, אינפי 2 2015

1. * (שאלת בונוס 20 נקודות)

תנו דוגמה לפונקציה אינטגרבילית עם מספר לא ניתן להימנות של נקודות אי רציפות.

2. הוכיחו בעזרת הגדרת דרבו שאם $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a, b]$ ו- $[b, c]$ אז היא אינטגרבילית בקטע $[a, c]$.

3. הוכיחו ישירות מהגדרת אינטגרל רימן שהפונקציה הבאה אינטגרבילית וחשבו את האינטגרל שלה בין 0 ל-1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{אם } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases}$$

4. א. תהא $f(x)$ פונקציה חיובית אינטגרבילית בתחום $[0, A]$ לכל $A > 0$, והמקיימת

$$\int_0^\infty f(x) dx = \infty$$

הוכיחו: קיימת פונקציה $g(x) \geq 0$ ש-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ו-

$$\int_0^\infty g(x) dx = \infty$$

ב. תהא $f(x)$ פונקציה חיובית אינטגרבילית בתחום $[0, A]$ לכל $A > 0$, והמקיימת

$$\int_0^\infty f(x) dx < \infty$$

הוכיחו: קיימת פונקציה $g(x) \geq 0$ ש-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$$

ו-

$$\int_0^\infty g(x) dx < \infty$$