02/06/2016

קומבינטוריקה – הרצאה 10#

הערה: נשים לב לעובדות הבאות:

(1) $r(k,l)=r(l,k)$
(2) $r(1,l)=1$
(3) $r(2,l)=l$

משפט Erdős-Szekeres: יהיו $k,l\geq 2$ מספרים טבעיים. אם $r(k-1,l),r(k,l-1)$ שניהם קיימים, אז גם המספר $r(k,l)$ קיים ומתקיים:

$$r(k,l)\leq r(k-1,l)+r(k,l-1)$$

הוכחה: נסמן $n=r(k-1,l)+r(k,l-1)$. עלינו להראות שלמספר n יש התכונה $R(k,l)$. תהי נתונה צביעה כלשהי של הצלעות של K_n בכחול ובאדום. עלינו להראות שיש בה או K_k שכל צלעותיו כחולות, או K_l שכל צלעותיו אדומות. יהי x קדקוד של K_n. נסמן:

$V_{\mathrm{B}}=$ קב' הקדקודים המחוברים ל-x בצלע כחולה.
$V_{\mathrm{R}}=$ קב' הקדקודים המחוברים ל-x בצלע אדומה.

אז בהכרח מתקיים אחד משני הדברים הבאים:

(1) $|V_{\mathrm{B}}|\geq r(k-1,l)$
(2) $|V_R|\geq r(k,l-1)$

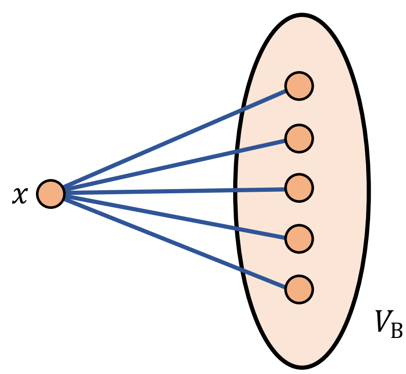
כי אחרת היה מתקיים:

$$|V_{\mathrm{B}}|\leq r(k-1,l)-1,\qquad |V_R|\leq r(k,l-1)-1$$

ואז:

$$n-1=|V_{\mathrm{B}}\cup V_{\mathrm{R}}|\leq r(k-1,l)+r(k,l-1)-2=n-2$$

נדון תחילה במקרה **(1):** $|V_{\mathrm{B}}|\geq r(k-1,l)$



הצביעה הנתונה משרה, בפרט, צביעה של צלעות הגרף השלם על V_{B} בכחול ובאדום. מכיוון ש-$|V_{\mathrm{B}}| \geq r(k-1,l)$, מתקיים לפחות אחד משני הדברים הבאים:

(א) קיים K_{k-1} שכל צלעותיו כחולות.
(ב) קיים K_l שכל צלעותיו אדומות.

אם **(א)** מתקיים, אז אותו K_{k-1} יחד עם x מהווה K_k שכל צלעותיו כחולות כנדרש. אם **(ב)** מתקיים, אז אותו K_l עונה על הדרישה. זה מסיים את הדיון בהנחה שקרה מקרה **(1)**. הדיון בהנחה שקרה מקרה **(2)** הוא אנלוגי, בחילופי צבעים.

משפט Ramsey: לכל k,l טבעיים, k,l קיים, ומתקיים:

$$r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

הוכחה: ראשית נשים לב שהטענה נכונה במקרה ש-k או l שווה ל-1. אכן,

$$r(1,l)=1, \qquad \binom{1+l-2}{1-1}=1, \qquad r(k,1)=1, \qquad \binom{k+1-2}{k-1}=1$$

נוכיח את הטענה עבור $k,l \geq 2$ באינדוקציה על $k+l$. בסיס האינדוקציה שעשינו כבר כלול בבדיקה שעשינו עבור $k=1, l=1$. צעד האינדוקציה: $k,l \geq 2$. לפי הנחת האינדוקציה, טענת המשפט נכונה לכל זוג k',l' שעבורו $k'+l' < k+l$, ובפרט לשני הזוגות $(k-1,l),(k,l-1)$. כלומר, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$r(k-1,l) \leq \binom{k+l-3}{k-2}, \qquad r(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2}$$

לכן, לפי משפט Erdős-Szekeres:

$$r(k,l) \leq r(k-1,l)+r(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2}+\binom{k+l-3}{k-2} \underset{\text{Pascal}}{=} \binom{k+l-2}{k-1}$$

כנדרש.

הגדרה: המספרים $r(k,l)$ נקראים **מספרי** Ramsey. נבנה טבלה שלהם:

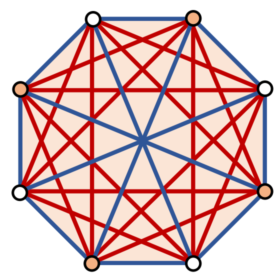
$k \backslash l$	1	2	3	4	5	6	...
1	1	1	1	1	1	1	...
2	1	2	3	4	5	6	...
3	1	3	6	9			
4	1	4	9		25		
5	1	5		25	לא ידוע		
6	1	6					
⋮	⋮	⋮					

טענה: $r(3,4)=9$.

הוכחה: עלינו להראות שני דברים:

(א) למס' 9 יש את התכונה $R(3,4)$.
(ב) למס' 8 אין את התכונה $R(3,4)$.

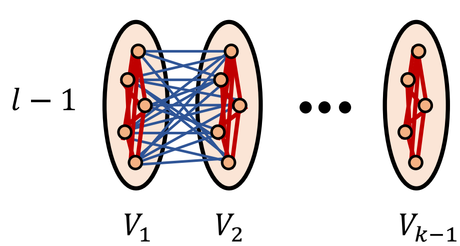
נתחיל ב-**(א)**. תהי נתונה צביעה כלשהי של הצלעות של K_9 בכחול ובאדום. נחקה את ההוכחה במשפט Erdős-Szekeres. יהי x קדקוד כלשהו של K_9. נסמן $V_\mathrm{B} =$ קב' הקדקודים המחוברים ל-x בצלע כחולה; $V_\mathrm{R} =$ קב' הקדקודים המחוברים ל-x בצלע אדומה. אם $|V_\mathrm{B}| \geq r(2,4) = 4$ אז מצליחים למצוא את הדרוש. כמו כן, אם $|V_\mathrm{R}| \geq r(3,3) = 6$, אז מצליחים למצוא את הדרוש. המקרה היחיד שלא בא על סיפוקו הוא כאשר $|V_\mathrm{R}| = 5$, $|V_\mathrm{B}| = 3$. מכיוון שבחירת x היא שרירותית, מותר לנו להניח שזה המצב לכל קדקוד x: הוא מחובר ל-3 קדקודים בצלע כחולה ול-5 קדקודים בצלע אדומה. אבל מצב זה לא יתכן, כי עבור הגרף $G = (V,E)$ המורכב מכל הצלעות הכחולות יש לנו 9 קדקודים בעליו ערכיות 3 בסתירה לכך שבכל גרף מס' הקדקודים בעלי ערכיות אי-זוגיות הוא זוגי. כעת נוכיח את **(ב)**. לשם כך עלינו להראות צביעה של K_8 בכחול ובאדום, שבה אין K_3 שכל צלעותיו כחולות, וגם אין K_4 שכל צלעותיו אדומות. הנה היא:



קל לראות שאין K_3 שכולו כחול. נניח שהיה כאן K_4 שכל צלעותיו אדומות. כדי להימנע מהצלעות הכחולות של המתומן החיצוני, חייבים לבחור ממנו כל קדקוד שני (מסומן בשרטוט בכתום), אבל אז יהיו בו קדקודים מנוגדים של המתומן אשר מחוברים בצלע כחולה.

טענה: $r(k,l) > (k-1)(l-1)$.

הוכחה: נסמן $n = (k-1)(l-1)$. עלינו להראות שלמספר n אין התכונה $R(k,l)$, כלומר עלינו להראות שקיימת צביעה של הצלעות של K_n בכחול ובאדום שאין בה K_k שכל צלעותיו כחולות, וגם שאין בה K_l שכל צלעותיו אדומות. לשם כך נחלק את הקדקודים של K_n ל-$k-1$ בלוקים בגודל $l-1$ כל אחד:



נצבע כל צלע המחברת קדקודים מבלוקים שונים בכחול, וכל צלע בתוך אחד נצבע באדום. אין K_k שכולו כחול, כי אם בוחרים k קדקודים אז לפי עקרון שובך היונים שניים מהם יהיו באותו הבלוק, ולכן מחוברים בצלע אדומה. אין K_l שכולו אדום, כי אם בוחרים l קדקודים אז לא כולם יכולים להיות באותו בלוק, ולכן יהיו שניים מבינם המחוברים בצלע כחולה.