תרגיל 1

צריך להוכיח:

$$(*)\quad \sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}=\binom{m}{n}2^{n}$$

הוכחה I - חשבונית

שים לב כי:

$$\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}=\frac{m!}{j!\,\cancel{(m-j)!}}\cdot\frac{\cancel{(m-j)!}}{(n-j)!\,(m-n)!}\cdot\frac{n!}{n!}$$

$$=\binom{m}{n}\binom{n}{j}$$

לכן:

$$(*)=\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{n}\binom{n}{j}=\underbrace{\binom{m}{n}}_{\text{אינו תלוי ב-}j}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}=\binom{m}{n}2^{n}$$

הוכחה II

נתבונן בקבוצה:

$$\{(A,B):\ A,B\subset[m],\ A\cap B=\emptyset,\ |A|+|B|=n\}$$

כלומר, הזוגות הסדורים של תת קבוצות של $[m]$, שהן זרות ומכילות ביחד n איברים.

(*) דרך ספירה ראשונה: נבחר תת קבוצה בגודל n מתוך $[m]$ ונחלק אותה לשתי תת קבוצות זרות בכל הדרכים האפשריות (כלומר, נבחר תת קבוצה שתהיה A וכל המשלים יהיה B). לכן יש בדיוק $2^{n}\binom{m}{n}$ דרכים.

(*) דרך ספירה שניה: לכל $j=0,\dots,n$ נבחר את A בגודל j מתוך $[m]$ ב-$\binom{m}{j}$ דרכים.
את B בגודל $n-j$ נבחר מתוך $m-j$ האיברים שנותרו. סה"כ $\binom{m-j}{n-j}$ דרכים.

סה"כ

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}\binom{m-j}{n-j}$$

ולכן יש שוויון

תרגיל ב

א) מסלול מ- $(0,0)$ ל- (a,b) הוא צעדים ימינה או למעלה בכל כזה
הוא רצף של a צעדים למעלה ו b צעדים ימינה.
כלומר, עלינו לסדר a צעדים למעלה ו b צעדים ימינה,
וזאת ניתן לעשות ב: $\binom{a+b}{b}$ דרכים.

ב) אם במסלול ישנה הצלע $(k,j) \to (k+1,j)$ יש לנו חופש
בבחירת מסלולים חוקיים מ- $(0,0)$ ל- (k,j)
ומשך בין $(k+1,j)$ ל- (a,b).
כלומר (לפי א)

$$\underbrace{\binom{k+j}{k}}_{\text{מסלולים עד } (k,j)}\underbrace{\binom{a-(k+1)+(b-j)}{k-j}}_{\text{מסלולים מ } (k+1,j) \text{ עד } (a,b)}$$

ג) אם נתבונן כעת בצד ימין למעלה אז,
זהו מס' המסלולים החוקיים מ $(0,0)$ ל- $(n+r+1-m,m)$
(לפי שאלה א), כלומר: $\binom{n+r+1}{m}=\binom{a+b}{b}$
(אם $b=m$ ו $a=n+r+1-m$).

כעת נספור את המסלולים הללו שעוברים בין $(r,j) \to (r+1,j)$
לפי ב יש כאלה:

$$\binom{r+j}{j}\binom{n+r+1-m-r-1+m-j}{m-j}$$
$$\parallel$$
$$\binom{r+j}{j}\binom{n-j}{m-j}$$

וזהו בדיוק האיבר בתוך הסכום בצד שמאל.
ברור כי כל מסלול עובר איפשהו את קו הגובה $r \to r+1$ ולכן
שני האגפים סופרים אותה כמות ולכן שווים!

ד) הוכח בכיתה בהרצאה!

תרגיל 3

ידוע כי:
$$\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

(א) נציב $r=1$ ונקבל:
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}$$

(ב) נשים:
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\left[2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right]=2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\Big[\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}+\underbrace{\binom{1}{2}}_{0}\Big]+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$\downarrow r=2$$
$$=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$

לכן:
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=2\binom{n+1}{3}+\binom{n-1}{2}$$

(ג) נפתח את הביטוי באגף ימין:
$$a\binom{k}{3}+b\binom{k}{2}+c\binom{k}{1}=a\left(\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\right)+b\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)+ck$$
$$=\frac{a}{6}\left[(k^2-k)(k-2)\right]+\frac{b}{2}\left[k^2-k\right]+ck$$
$$=\frac{a}{6}\left(k^3-3k^2+2k\right)+\frac{b}{2}\left(k^2-k\right)+ck=k^3\left(\frac{a}{6}\right)+k^2\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+k\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)$$

כדי להשוות ל k^3 נדרוש:

(I) $\frac{a}{6}=1 \Rightarrow a=6$

(II) $-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=0 \Rightarrow b=6$

(III) $\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=0 \Rightarrow c=1$

$$\Bigg\}\quad k^3=6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$$

כעת, נחשב את הסכום:
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}\left[6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right]=6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}+6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}$$
$$\xrightarrow[r=1,2,3]{\text{לפי}}\ =6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$

תרגיל 4

$$\sum_{k=l}^{n}\binom{k}{l}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n-l}\binom{k+l}{l}\binom{n}{k+l}=$$

הזזת האינדקס k

$$\sum_{k=0}^{n-l}\frac{\cancel{(k+l)!}}{l!\,k!}\cdot\frac{n!}{\cancel{(k+l)!}\,(n-k-l)!}\cdot\frac{(n-l)!}{(n-l)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-l}\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}=\binom{n}{l}\sum_{k=0}^{n-l}\binom{n-l}{k}=\binom{n}{l}2^{n-l}$$

ת' 5

א) נבדוק מתי

$$\binom{n}{k}\le\binom{n}{k+1}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\le\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$\Updownarrow$$

$$k\le n-k$$

$$\Updownarrow$$

$$k\le\frac{n}{2}$$

לכן, סדרת מקדמי הבינום של n היא סדרה עולה עד $k=\frac{n}{2}$ ולאחר מכן היא יורדת.

עבור n אי-זוגי $n=2k+1$ מתקיים: $\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}$.

כלומר 2 האיברים האמצעיים שווים.

ד) ידוע כי: (א) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

וכן: $\binom{n}{k}\le\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$

לכן:

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\le\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=(n+1)\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2^n}{n+1}\le\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$

מצד שני, בגלל (א) כי: $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\le 2^n$ לכן שני האי-שוויונים נכונים.

תרגיל 6

(א) בפיתוח של $(x+y+z+w)^{11}$ יש איבר לכל בחירה של a,b,c,d כך ש-:

$$a+b+c+d=11$$
$$11\geq a,b,c,d\geq 0$$

כלומר: $\binom{11+3}{3}=\binom{14}{3}$

(ב) סכום המקדמים הוא:

$$\sum_{a+b+c+d=13}\binom{13}{a;b;c;d} = \sum_{a+b+c+d=13}\binom{13}{a;b;c;d}\cdot1^a\cdot1^b\cdot1^c\cdot1^d = (1+1+1+1)^{13}=4^{13}$$

(ג) המקדם הוא $\binom{n}{a;b;c;d}$

אם $n=14$, $a=5, b=c=d=3$: כלומר:

$$\binom{14}{5;3;3;3} = \frac{14!}{5!\cdot3!\cdot3!\cdot3!} = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14}{6\cdot6\cdot6} = 3,363,360$$

(ד) הפיתוח נראה כך:

$$\sum_{a+b+c+d=100}\binom{100}{a;b;c;d}x^{3b}x^{5c}x^{7d} = \sum_{a+b+c+d}\binom{100}{a;b;c;d}x^{3b+5c+7d}$$

מתי נקבל:

$$3b+5c+7d=18 \ ?$$

b	c	d	a=
1	3	0	96
6	0	0	94

ולכן המקדם הוא: $\binom{100}{96;1;3;0}+\binom{100}{94;6;0;0}$

(ה) הפיתוח הוא:

$$(1+x+x^2+\dots+x^{10})(1+x+\dots+x^{10})(1+x+\dots+x^{10})$$

כדי לקבל 8 צריך לבחור חזקה a מהסוגריים הראשונים, חזקה b מהשניים וחזקה c מהשלישיים, כך ש- $a+b+c=8$, $0\leq a,b,c\leq 10$

כל בחירה כזו תתרום 1 למקדם, ולכן: $\binom{8+2}{2}=\binom{10}{2}=45$ אפשרויות.

תרגיל 7

(א) יהי p ראשוני! ו- $p > k \geq 1$.

טענת עזר: לכל $n \geq k$ מתקיים:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\cdot k\,(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

ולפתרון התרגיל:

אם p ראשוני ו- k מתקבל:

$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$$

$$\Downarrow$$

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$$

לכן ימין מתחלק ב- p ולכן גם אגף שמאל מתחלק ב- p.

אבל $k < p$ ומכיוון ש- p ראשוני, נובע מכך ש:

$$p \,\Big|\, \binom{p}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$$

(ב) נפתח את $(a+b)^p$ לפי הבינום, גם p ראשוני ובפיתוח:

$$(a+b)^p = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}a^i b^{p-i}$$

פרט ל- $i=0,p$ המקדם הבינומי $\binom{p}{i}$ שווה ל- 0 מודולו p לפי (א) ולכן נותר ש:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

תרגיל 8

לפי נוסחת הבינום:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

נבצע אינטגרציה את שני האגפים ולפי x, בין 0 ל- 1 (אינטגרל מסוים)

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_{x=0}^{1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}\Big|_{x=0}^{1}$$

נציב $x=1$ ונקבל

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

ת' 9

כיוון ש p ראשוני, פרט לסדרה של p חרוזים באותו צבע, אין סדרה (המכילה יותר מצבע אחד) אשר יכולה להתקבל מסדרה אחרת ע"י סיבוב.

לכן, כל סדרה מתוך n^p-n הסדרות של p חרוזים ב n צבעים, נספרת בדיוק p פעמים.

נותר להוסיף את הסדרות של p חרוזים באותו צבע - לכן יש n אפשרויות.

לכן, סה"כ יש $\frac{n^p-n}{p}+n$ סדרות.

ת' 10

(א) נשים לב, כשראינו, כי:

$$0=(1+(-1))^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^n=\sum_{i\text{ זוגי}}\binom{n}{i}-\sum_{i\text{ אי-זוגי}}\binom{n}{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i\text{ זוגי}}\binom{n}{i}=\sum_{i\text{ אי-זוגי}}\binom{n}{i}$$

כלומר, סכום המקדמים הבינומיים עם i זוגי שווה לסכום המקדמים עם i אי-זוגי.

מכאן, נקבל:

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\sum_{i\text{ זוגי}}\binom{n}{i}+\sum_{i\text{ אי-זוגי}}\binom{n}{i}=2\sum_{i\text{ זוגי}}\binom{n}{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i\text{ זוגי}}\binom{n}{i}=2^{n-1}$$

מס' הסדרות ב: $\{0,1\}^n$ עם מס' זוגי של אפסים הינו:

$$\sum_{i\text{ זוגי}}\binom{n}{i}=2^{n-1}$$

לפי הטענה מתרגול

(3) נשים לב כי הביטוי, (ק) יתקבל עבור $m=3$.

מס' הסדרות הדרוש:

$$\sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i}$$

מיקום i זוגי של אפסים

ערכים של השאר

לכן, נקבל כי:

$$(m-2)^n = ((m-1)+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i}(-1)^i$$

$$= \sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} - \sum_{i \text{ אי-זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \text{ אי-זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} = \sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} - (m-2)^n$$

וכעת:

$$m^n = ((m-1)+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} = \sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} + \sum_{i \text{ אי-זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i}$$

$$= \sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} + \sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} - (m-2)^n$$

$$= 2\sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} - (m-2)^n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i \text{ זוגי}} \binom{n}{i}(m-1)^{n-i} = \underline{\frac{m^n - (m-2)^n}{2}}$$

(ק) נציב ב (3) $m=3$ ונקבל תשובה: $\frac{3^n-1}{2}$

שים לב כי (ק) מתקבל מ הביטוי ב $m=2$.