מבוא לחבורות   תרגיל מס׳ 14

1. תהי G חבורה, H,K תת-חבורות כך ש- $H,K \lhd G,\ H \cap K = \{1\}$.
הוכיחו כי כל איבר ב- H מתחלף עם כל איבר ב- K, ולכן $HK \cong H \times K$.
[התבוננו ב״קומוטטור״ $(h,k) = hkh^{-1}k^{-1}$, כאשר $h \in H, k \in K$.]

(נ.ב. מקרה פרטי $G = HK$.)

2. תהי G חבורה, הנוצרת ע״י קבוצה S, כך שכל איברי S מתחלפים ביניהם בכפל. הוכיחו כי G אבלית.

3. תהי G חבורה כך ש- $G/Z(G)$ ציקלית, כאשר $Z(G)$ המרכז של G.
הוכיחו כי G אבלית.

4. הוכיחו כי כל חבורה אבלית G מסדר 8 איזומורפית לאחת מהחבורות $Z_8, Z_4 \times Z_2, Z_2 \times Z_2 \times Z_2$.

5. הוכיחו כי כל חבורה לא אבלית G מסדר 8 איזומורפית לאחת מהחבורות D_8, Q_8. [חלקו לפי שני מקרים: (א) יש ב- G איבר אחד בלבד מסדר 2; (ב) יש ב- G יותר מאיבר אחד מסדר 2.]

6. חבורת הייזנברג מעל שדה F היא תת-החבורה H_F של $GL_3(F)$ המורכבת מכל המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את המרכז $Z(H_F)$.
ב. אם F הוא השדה $\mathbb{Z}_p$, מהו הסדר של H_F?
ג. אם $p = 2$ בחלק ב., H_F איזומורפית לאחת החבורות מסדר 8 בשאלות 4,5. איזה?

7. הוכיחו כי חבורה סופית G לא שווה לאיחוד של הצמודים של אף תת-חבורה ממש H של G.

8. הוכיחו כי לכל שדה F ולכל n, $Z(GL_n(F)) = F^{\times}I$ (המטריצות הסקלריות).

[דרך 1: בכתה ראינו שאם T הוא אופרטור ליניארי (הפיך) על $V = F^n$ שאינו סקלרי, אז קיים אופרטור S (סינגולרי) כך ש- $ST \neq TS$. אמרנו שאז מספיק להוכיח שכל אופרטור סינגולרי הוא סכום של אופרטורים לא סינגולריים. ראו תרגיל 9.]

[דרך 2: כמו בכתה, יהי T אופרטור ליניארי (הפיך) על $V = F^n$ שאינו סקלרי. אז קיים וקטור $v \in V$ כך ש- $v, T(v)$ בלתי תלויים ליניארית. נרחיב את $v, T(v)$ לבסיס $\{v, T(v), v_3, \ldots, v_n\}$ של V. אז קיים אופרטור N על V כך ש- $N(v) = 0, N(T(v)) = v, N(v_3) = \ldots = N(v_n) = 0$. אז $N^2 = 0$, ו- $NT \neq TN$. נגדיר $S := I + N$. הראו כי S הפיך, וש- $ST \neq TS$.]

9. הוכיחו כי כל מטריצה ריבועית סינגולרית שווה לסכום של שתי מטריצות לא סינגולריות. [תהי A מטריצה סינגולרית ($A \neq 0$). קיימות מטריצות הפיכות P, Q כך ש- $PAQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצת בלוקים, כאשר I מטריצת היחידה בגודל מתאים. הראו כי הטענה נכונה ל- PAQ. עכשו הראו כי הטענה נכונה ל- A.]