

## תרגיל מספר 5, אינפי 2 2015

1. תהא  $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ . כתבו סדרה של פונקציות רציפות בקטע  $[0, 2]$  שמתכנסת נקודתית ל- $f(x)$ .

2. תנו דוגמה לסדרת פונקציות  $f_n(x)$  שמוגדרות בכל הישר, שואפות נקודתית לפונקציה ה-0, ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n(x) = \infty$ .

3. תנו דוגמה לסדרת פונקציות  $f_n(x)$  שמוגדרות בכל הישר, כולן לא חסומות מלעיל, ושואפות נקודתית לפונקציה ה-0. הסבירו מדוע ההתכנסות לא יכולה להיות במידה שווה.

4. תנו דוגמה לסדרת פונקציות  $f_n(x)$  שמוגדרות בקטע  $[0, 1]$ ,  $\int_0^1 f_n(x) = 1$  לכל  $n$ , ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

5. תנו דוגמה לטור פונקציות רציפות  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  שמתכנס לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

6. הוכיחו או הפריכו:

אם  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  במידה שווה בקטע  $[0, 1]$  ולכל  $n$  יש סדרה  $f_n^k(x)$  של פונקציות עבורן  $f_n^k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_n(x)$  במידה שווה בקטע  $[0, 1]$ , אז  $f_n^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  במידה שווה.

7. (בנוסף 10 נקודות) מצאו סדרה של פונקציות אינטגרביליות על  $[0, 1]$  המתכנסת נקודתית לפונקציה לא אינטגרבילית על  $[0, 1]$ .