מבוא למתמטיקה שמושית -פתרון תרגיל 5 - אביב תשס"ד

1. מקדמי פורייה נתונים ע"י

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx = \begin{cases} (-1)^n \frac{2}{n^2} & n \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{3} & n = 0 \end{cases}$$

זהות Parseval נותנת מיד

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

2. מקדמי פורייה נתונים ע"י

$$\hat{f}_n = \begin{cases} \frac{i}{2n\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-i2\pi\frac{n}{2k}} - e^{-i2\pi\frac{n}{2k+1}}\right] & n \neq 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right] & n = 0 \end{cases}$$

טור פורייה מתכנס לפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$g(0)$ איננו ניתן לחישוב באמצעות משפט Dini.

3. נשתמש בתכונת החד-חד ערכיות של טרנספורם פורייה:

$$\mathcal{F}(f * (g * h)) = \hat{f}\mathcal{F}(g * h) = \hat{f}\hat{g}\hat{h}$$
$$\mathcal{F}((f * g) * h) = \mathcal{F}(f * g)\hat{h} = \hat{f}\hat{g}\hat{h}$$

והשוויון מוכח גם במקור.

(א) $\hat{f} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}$

(ב) יהי

$$I(z) = \int_0^{\infty} |x|^{-1/2}e^{-zx}dx$$

כאשר $\Re z > 0$. אינטגרציה בחלקים נותנת

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{1}{2z}I$$

ומכאן

$$I = \frac{C}{z^{1/2}}$$

כדי לחשב את C נחשב את $I(1)$. נשתמש לשם כך בהצבה $x = u^2$

$$\int_0^\infty |x|^{-1/2} e^{-x} dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

לכן

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{z^{1/2}}$$

קל לראות ש

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[I(a+i\xi) + I(a-i\xi) \right]$$

ומכאן

$$\hat{f} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+\xi^2}}{a^2+\xi^2}}$$