מעבדה א

מטריצות הפיכות

שם: שניר הורפן

תאריך: 21/01/18

ת"ז: 205689581

מרצה: ניר בן-דוד

מטריצות הפיכות

1. ראשית, נדרג את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2aR_1} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-2a^2 \end{pmatrix}$$

לפי הנתון קיים פתרון למע' ההומוגנית שאינו הפתרון הטריוויאלי.
אז לאחר דירוג שאנו מבצעים נקבל שורת אפסים.
נימוק: $n-r(A)$ הוא מספר "הנעלמים החופשיים" ואפשר קיים (מס' נעלמים)
פתרון לא טריוויאלי למע' הומוגנית קיים אחד כזה לפחות

אז נדרוש $1-2a^2=0 \Leftarrow 2a^2=1 \Leftarrow \boxed{a^2=\frac{1}{2}}$

2. הוכחה

נניח בדרך השלילה כי AA' הפיכה וגם $A'A$ הפיכה.
לפי משפט,

$$Row(AA') \subseteq Row(A')$$
$$Row(A'A) \subseteq Row(A)$$

כמו כן $A\cdot A^t \in F^{m\times m}$ ו- $A^t\cdot A \in F^{n\times n}$ $(m\neq n)$.

שניהן הפיכות, ע״פ ההנחה, אזי לפי משפט ובמטריצות הפיכות כל השורות בת״ל

$$m = \dim Row(AA') \leq \dim Row(A')$$
$$n = \dim Row(A'A) \leq \dim Row(A)$$

כמו כן מתקיים,

$$(1)\ \dim Row(A) = \dim Row(A') = \dim Col(A)$$

אזי מאחר ו- A מגודל $m\times n$,

$$\dim(A) \leq m$$
$$\dim(A') \leq n$$

לבסוף נסיק כי

$$\dim Row(A') = m,\ \dim Row(A) = n \Leftarrow \begin{cases} m \leq \dim Row(A') \leq m \\ n \leq \dim Row(A) \leq n \end{cases}$$

אך לפי (1) מתקיים $m=n$. סתירה לכך ש- $m\neq n$.

לכן, לפחות אחת מן המטריצות AA' ו- $A'A$ הפיכות.

$\square$

הטענה אינה נכונה.

3. ג. <u>דוגמא נגדית</u>

נגדיר

$A=B=C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,

$$A\cdot B\cdot C=A$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

אך $B\neq C^{-1}$, מכיוון שאילו $B=C^{-1}$ אז $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. סתירה.

3. ב. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמא נגדית</u>

$U_1\cap U_2=\{0\}$ כי מטריצת האפס קיימת ב-U_1 וב-U_2, ואילו

יתכן כי קיימת מטריצה הפיכה ולא-הפיכה בו-זמנית.

נגדיר $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ ו- $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$

בסיס של U_1 ו- U_2, בהתאמה.

נגדיר $B=B_1\cup B_2$. זהו בסיס למרחב המטריצות המשולשות עליונות וממשיות מסדר 3x3, הנסמנו U

$$Sp\{B\}=U$$

וכמו כן כל אחת מן המטריצות היו בת"ל ביחס לקודמיה.

סתירה.

לכן <u>ניתן</u> לכתוב את המרחב U כסכום ישר $U_1\oplus U_2$

Scanned by CamScanner

4. נראה כיצד ניתן למצוא את המטריצה ההפיכה P:

נשים לב כי A אינה אפס וכל שורותיה הן כפולות בסקלר של השורה הראשונה.

[illegible] ~~[illegible]~~ של A:

$$\begin{pmatrix} -A_1- \\ -\alpha_1 A_1- \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} A_1- \end{pmatrix}$$

עבור קבועים סקלרים $\{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\}$.

$r(A)=1$ כי כל שורותיה פרט לראשונה הם ת"ל.

אז נ' באמצעות צעדי דירוג נוכל להגיע לצורתה הקנונית.

$$\begin{pmatrix} -A_1- \\ -\alpha_1 A_1- \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} A_1- \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-\alpha_1 A_1} \dots \xrightarrow{R_n \to R_n-\alpha_{n-1} A_1} \begin{pmatrix} -A_1- \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כל פעולת דירוג ניתן לבצע באמצעות כפל במטריצות אלמנטריות.
אלו הן:

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_1 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \end{pmatrix}, \dots, E_{n-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\alpha_{n-1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

לפי משפט, מטריצה שהיא כפולה של מטריצות אלמנטריות הפיכה.

עכן נגדיר $P=E_{n-1}\cdots E_1$

כך מוצאים את P.

$\square$