קומבינטוריקה – תרגול 4# – 14/04/2016

נוסחאות נסיגה

שיטה לפתרון נוסחאות נסיגה:

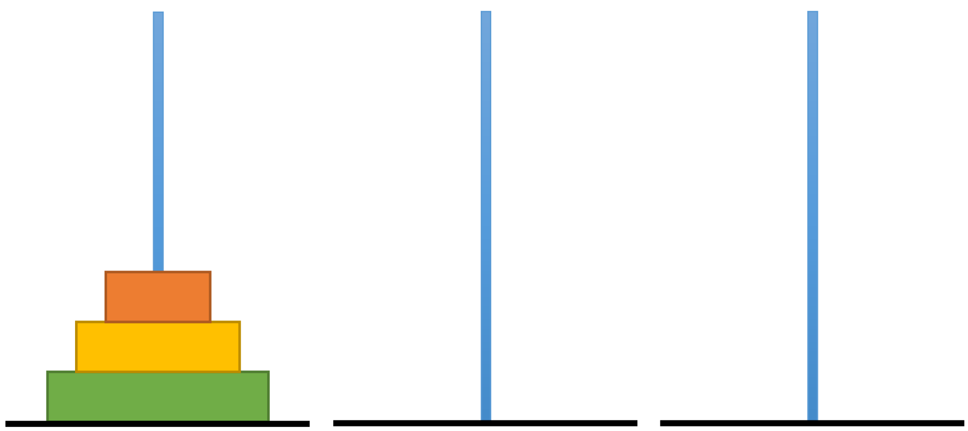
שלב א': מציאת נוסחת נסיגה מתאימה ותנאי התחלה.

שלב ב': מציאת נוסחת נסיגה מתאימה ותנאי התחלה.

תרגיל: נזירים בסין רוצים להעביר n טבעות בגודל עולה מעמוד א' לעמוד ב' כאשר אסור לשים טבעת גדולה על קטנה. כמה מהלכים הם צריכים לעשות בכדי לסיים?

פתרון: נחשב את האיברים הראשונים של הסדרה:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_3 = 7, \qquad \dots$$



a_n: מעבירים $n-1$ טבעות עליונות ב-a_{n-1} צעדים מעמוד א' ל-ב'. מעבירים את הטבעת התחתונה ל-ג' בצעד 1, ואחר כך צריך להעביר $n-1$ טבעטת מ-ב' ל-ג' ב-a_{n-1} צעדים. סה"כ:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \qquad a_1 = 1$$

פותרים:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2(2(2a_{n-2} + 1) + 1) + 1 = \cdots$$
$$= 2\left(2\left(\dots\left(2\underbrace{a_1}_{1} + 1\right) + 1\right) + \cdots + 1\right) + 1$$

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

תרגיל: מהו מס' הסדרות

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{-1,1\}^n$$

כך שלכל $k \leq n$ מתקיים $\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \leq 1$?

פתרון: נסמן את מס' הסדרות באורך n ב-H_n:

$$\begin{array}{ll} H_0 = 1 & (\,) \\ H_1 = 2 & (1), \quad (-1) \\ H_3 = 2 & (1,-1), \quad (-1,1) \\ H_4 = 4 & (1,-1,1), \quad (-1,1,1), \quad (1,-1,-1), \quad (-1,1,-1) \end{array}$$

H_n: אם הסדרה מתחילה ב-1, האפשרויות הן:

$$1 \quad -1 \quad \underbrace{\text{A legal sequence of length } n-2}_{H_{n-2}}$$

$$-1 \quad 1 \quad \underbrace{\text{A legal sequence of length } n-2}_{H_{n-2}}$$

סה"כ:

$$H_n = 2H_{n-2}, \qquad H_0 = 1, \qquad H_1 = 2$$

ניתן לפתור את הנוסחא בעזרת איטרציות. אנו נפתור בעזרת פולינום אופייני – מניחים $H_n = q^n$:

$$q^n = 2q^{n-2} \quad \Rightarrow \quad q = \pm\sqrt{2}$$

הפתרון הוא:

$$\epsilon_n = A\left(\sqrt{2}\right)^n + B\left(-\sqrt{2}\right)^n$$

$$n = 0: \quad A + B = 1, \qquad n = 1: \quad \sqrt{2}A - \sqrt{2}B$$

$$\therefore \quad A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \qquad B = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

נציב:

$$H_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^n$$

נבדוק שאכן אנו מקבלים תוצאות שלמות. עבור כל k שלם ואי-שלילי:

$$H_{2k} = 2^k\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = 2^k$$

$$H_{2k+1} = 2^k\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{2k+2} = 2^{k+1}$$

תרגיל: מצאו נוסחא מפורשת לנוסחת הנסיגה הבאה:

$$H_n = 8H_{n-1} - 21H_{n-2} + 18H_{n-3}$$

כאשר:

$$H_0 = 0, \qquad H_1 = 1, \qquad H_2 = 22$$

פתרון: נשתמש בפולינום אופייני:

$$q^n = 8q^{n-1} - 21q^{n-2} + 18q^{n-3}$$

$$P(q) \equiv q^3 - 8q^2 + 21q - 18$$

משתמשים בניחוש האינטיליגנטי או בכל שיטה אחרת, ומקבלים ש-2 שורש:

$$P(q) = (q-2)(q^2 - 6q + 9) = (q-2)(q-3)^2$$

$$C_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n = c_1 2^n + (c_2 + c_3 n) 3^n$$

$$H_0 = 0 = c_1 + c_2$$

$$H_1 = 2c_1 + 3c_2 + 3c_3$$

$$H_2 = 2 = 4c_1 + (c_2 + 2c_3) \cdot 9$$

לאחר פתרון מע' משוואות מקבלים:

$$c_1 = -4, \qquad c_2 = 4, \qquad c_3 = -1$$

$$H_n = -4 \cdot 2^n - (4-n) \cdot 3^n$$

תרגיל: מהו מספר הסדרות $a_1, \dots, a_7$, $a_i \in \{1,2,3\}$ עבור $i = 1, \dots, 7$ אשר אינן מכילות בשלושה מקומות עוקבים את הספרות 1,2,1 בסדר זה? תנו תשובה מפורשת.

פתרון: אפשר לפתור בעזרת נוסחאות נסיגה, אבל לא מומלץ. נפתור בעזרת הכלה-הפרדה: סך כל הסדרות: 3^7. מס' הסדרות שמכילות 1,2,1:

$$\square \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad \square \quad \square \quad \square$$

אז יש 5 אפשרויות למקם את הרצף 121 ולכל שאר אברי הסדרה יש 3^4 אפשרויות סך הכל $5 \cdot 3^4$.

$3 \cdot 3^2$ פעמים מופיע הרצף:

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad \square \quad \square$$

וכן $3 \cdot 3$ פעמים מופיע הרצף:

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad \square$$

עכשיו, 3 פעמים מופיע הרצף ב-

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

לכן, התוצאה היא:

$$3^7 - 5 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 3^2 - 1 = 1817$$