מבוא לחבורות   תרגיל מס' 13

1. יהי $N \lhd G$. הוכיחו כי $C_G(N) \lhd G$. [הגדרה: תהי $A \subseteq G$. אז $C_G(A) := \{g \in G \mid ga = ag \ \forall a \in A\}$. רמז: G פועלת על N ע"י הצמדה.]

2. יהי p מספר ראשוני. חבורה G נקראת *חבורת-* p אםם $|G| = p^n$ עבור איזשהו n. הוכיחו כי המרכז של חבורת- p לא טריוויאלי ($|Z(G)| > 1$).
[רמז: משוואת המחלקות]

3. תהי G חבורה מסדר 15. הוכיחו כי G ציקלית לפי השלבים הבאים:

   א. לפי משפט Cauchy, יש ב- G איבר x מסדר 3 ואיבר y מסדר 5. נרשום $M = \langle x \rangle, N = \langle y \rangle$. הוכיחו כי $N \lhd G$. [G פועלת על הקוסטים השמאליים של N בכפל משמאל (הצגת Cayley). הראו כי גרעין הפעולה הוא בהכרח N.]
   ב. מחלק א, G פועלת על N ע"י הצמדה, ובהתאם יש הומומורפיזם $f: G \to AutN$. הראו כי $f(G) = \{1\}$ ולכן $N \subseteq Z(G)$.
   ג. הראו כי G אבלית. [x, y יוצרים את G ו- $xy = yx$.]
   ד. הראו כי G ציקלית.
   ה. הכלילו את התרגיל לחבורה מסדר pq, p, q ראשוניים כך ש- p אינו מחלק את $q-1$.

4. א. חישבו את הסדרים של כל מחלקות הצמידות ב- S_5.
   ב. מצאו נציג σ לכל מחלקת צמידות ב- S_5 ולכל נציג מצא את המרכז $C_{S_5}(\sigma)$ שלו ב- S_5. [היעזרו בחלק א.]

5. חשבו את הסדרים של כל מחלקות הצמידות ב- A_5. [היעזרו בחלק ב. של התרגיל הקודם, ושימו לב ש- $C_{A_5}(\sigma) = C_{S_5}(\sigma) \cap A_5$ עבור $\sigma \in A_5$.
אזהרה: שני איברים של A_5 שצמודים ב- S_5 לאו דווקא צמודים ב- A_5!]

6. הוכיחו כי A_5 חבורה פשוטה. [כל תת-חבורה נורמלית של A_5 היא איחוד של מחלקות צמידות של A_5.]

7. מצאו את $Aut(V_4)$.

8. יהי V חבורה אבלית חיבורית כך שקיים מספר ראשוני p כך ש- $pV = \{0\}$, דהיינו $pv = 0$ לכל $v \in V$.

   א. הוכיחו כי V מרחב וקטורי מעל השדה $F_p := \mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$.
   ב. הסיקו שאם V סופית, אז $|V| = p^n$, ו- $n = \dim_{F_p} V$.

ג. הוכיחו כי כל אוטומורפיזם של V כחבורה הוא אופרטור ליניארי הפיך על V כמרחב וקטורי.

ד. הסיקו שאם $|V|=p^n$, אז $Aut(V)\simeq GL_n(F_p)$.

ה. השוו עם תרגיל מס' 7.