אלגברה ב – תבניות בילינאריות

נושאים:
1. הגדרות בסיסיות
2. תבניות מתחלפות וסימטריות
3. תרגיל

הגדרות בסיסיות

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל שדה F. תבנית בילינארית היא פונקציה $\varphi: V\times V\to F$ המקיימת:
$\varphi(au_1+bu_2,v)=a\varphi(u_1,v)+b\varphi(u_2,v)$
$\varphi(u,av_1+bv_2)=a\varphi(u,v_1)+b\varphi(v,u_2)$
לכל $a,b\in F,\ u,v,u_1,u_2,v_1,v_2\in V$.

דוגמאות:
1. ל- $f,g:V\to F$ פונקציונלים, $\varphi(v,u)=f(v)g(u)$ תבנית בילינארית
2. ל– $A\in F^{nxn}$, $\varphi:F^n\times F^n\to F$ המקיימת $\varphi((u_1,..,u_n),(v_1,..,v_n))=(u_1,..,u_n)A\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$
היא תבנית בילנארית (בכתיב מקוצר $\varphi(u,v)=u^tAv$ ל- F^n מרחב עמודות).
3. ל – V ממ"פ מעל R, המכפלה הפנימית $\langle,\rangle:V\times V\to R$ תבנית בילנארית.

<u>תכונות בסיסיות (הוכח בכיתה):</u> יהי V מ"ו מעל F ממימד n.
א. אוסף התבניות הבילינאריות על V (מסומן $B(V)$) הוא מרחב וקטורי.
ב. אם $v_1,..,v_n$ בסיס ל – V, ו - $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ הבסיס הדואלי, אז $f_{ij}(u,v)=\varphi_i(u)\varphi_j(v)$ בסיס ל - $B(V)$ (בפרט, $dim_F(B(V))=n^2$).
ג. עבור $f\in B(V)$ נסמן $a_{ij}=f(v_i,v_j)$, אזי f מתאימה לתבנית בילינארית מדוגמה 2 על מרחב העמודות F^n (מרחב הקורדינטות של V ביחס לבסיס $v_1,..,v_n$) עבור המטריצה $A=(a_{ij})$. A נקראת ההצגה המטריציונית של f לפי הבסיס $v_1,\dots,v_n$.
ד. אם $u_1,\dots,u_n$ בסיס אחר של V, ו – P מטריצת מעבר הבסיסים, אז המטריצה המייצגת את f ביחס ל – $u_1,\dots,u_n$ היא $B=P^tAP$.

<u>הערה:</u> תכונות אלו אומרות למעשה שעבור V מ"ו מעל שדה F ממימד n, $B(V)\simeq M_{nxn}(F)$ כמרחבים וקטוריים.

<u>הגדרה:</u>
א. הדרגה של תבנית בילנארית f מעל V היא $rank(A)$ ל – A מטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס כלשהו של V. ערך זה מסומן $rank(f)$.
ב. אם $rank(A)<rank(V)$ התבנית f נקראת *"מנוונת"(או סינגולרית)* , אחרת נקראת *"לא מנוונת"(או רגולרית).*

<u>הערה:</u> על פי סעיף ד' לעיל, הדרגה מוגדרת היטב (כי P הפיכה ולכן משמרת דרגה).

<u>טענה:</u> יהי V מ"ו מעל F ממימד n ו- f תבנית בילנארית על V. $rank(f)=n$ אם ורק אם לכל $u\neq 0$ קיים v כך ש – $f(u,v)\neq 0$ אם ורק אם לכל $v\neq 0$ קיים u כך ש – $f(u,v)\neq 0$.

<u>הוכחה:</u> תהי A המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס B , אז קיים $v\neq 0$ כך ש $f(u,v)=0$ לכל $u\in V$ אם ורק אם $([u]_B)^tA[v]_B=0$, $\forall u\in V$, אם ורק אם $A[v]_B=0$, שזה אם ורק אם $[v]_B$ ו"ע של A עם ע"ע 0, אם ורק אם $rank(f)=rank(A)<n$. באופן דומה עבור $u\neq 0$.

<u>תבניות מתחלפות וסימטריות</u>

<u>הגדרה:</u>
א. תבנית בילינארית f נקראת מתחלפת אם לכל $v\in V$ מתקיים $f(v,v)=0$
ב. תבנית בילינארית f תקרא אנטי סימטרית אם לכל $u,v\in V$ מתקיים $f(u,v)=-f(v,u)$.
ג. תבנית בילינארית f נקראת סימטרית אם לכל $u,v\in V$ מתקיים $f(u,v)=f(v,u)$.

<u>הערות:</u>
1. אם V מ"ו מעל F והמציין של F אינו 2, אז תבנית בילינארית היא אנטי סימטרית אם ורק אם היא מתחלפת.
2. אם f תבנית (אנטי-)סימטרית, אז המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס כלשהו היא מטריצה (אנטי-)סימטרית.

<u>משפט:</u> תהי f תבנית מתחלפת על מ"ו V מעל F, אז קיים בסיס B של V בו המטריצה המייצגת את f היא מטריצת בלוקים כאשר כל בלוק הוא $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ או 0.
<u>משפט:</u> תהי f תבנית סימטרית על מ"ו V מעל F, אז קיים בסיס B בו המטריצה המייצגת את f היא אלכסונית.

<u>טענה:</u> תהי f תבנית בילינארית על מ"ו V, אז f ניתנת להצגה יחידה כסכום של תבנית סימטרית ואנטי-סימטרית.
<u>הוכחה:</u> בדיוק כמו למטריצות, מפרקים $f(u,v)=\frac{(f(u,v)+f(v,u))}{2}+\frac{(f(u,v)-f(v,u))}{2}$.

<u>תרגיל</u>

יהי $V=R_2[x]$ ונגדיר $f(p,q)=6\int_0^1 p'(x)q(x)dx$ $f:V\times V\to R$.
א. מצא את המטריצה המייצגת של f ביחס לבסיס הסטנדרטי.
ב. מהי הדרגה של f?
ג. פרק את f לחלק הסימטרי והאנטי-סימטרי.

פתרון:

א. חישוב ישיר נותן את המטריצה המייצגת היא $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&3&2\\6&4&3\end{pmatrix}$.
ב. הדרגה של f היא 2 (ברור מהייצוג של המטריצה).
ג. ניתן לבצע את הפירוק בשתי דרכים – ישירות דרך התבנית או בעזרת פירוק המטריצה לחלק הסימטרי והאנטי-סימטרי, וחזרה ממרחב קורדינטות לפולינומים.
בפירוק הישיר, נקבל:

$$f(p,q)=\frac{6\int_0^1 p'(x)q(x)dx+6\int_0^1 q'(x)p(x)dx}{2}+\frac{6\int_0^1 p'(x)q(x)dx-6\int_0^1 q'pdx}{2}=$$

$$=3(p(1)q(1)-p(0)q(0))+3((p(1)q(1)-p(0)q(0))-2\int_0^1 q'(x)p(x)dx)$$

(לפי הנוסחה הידועה $pq=\int p'qdx+\int pq'dx$). אם נפרק את המטריצות, נקבל (למשל לסימטרית) $\frac{A+A^T}{2}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$ *וחישוב ישיר מראה שהחלק הסימטרי הוא בדיוק* $3(p(1)q(1)-p(0)q(0))$.