

תרגיל מס' 1 בתורת המשחקים

1. לבן ושחור משחקים את המשחק הבא: לפני השחקנים מונחת ערימה ובה שלוש אבנים. כל שחקן בתורו (לבן ראשון) לוקח מתוך הערימה אבן אחת, או שתי אבנים, או שהוא מוותר על תורו ואינו לוקח אף אבן. לכל שחקן מותר לוותר על תורו לכל היותר פעם אחת. מנצח השחקן שלוקח את האבן האחרונה.

א. צייר את עץ המשחק.

ב. סמן את כל הקודקודים ע"י W או B כמו בהוכחת משפט פון-נוימן.

ג. לאיזה שחקן יש תכסיס נצחון במשחק כולו? תאר מילולית תכסיס זה.

2. במשחק "נים" נתונות k ערימות גפרורים ובהן a_1, a_2, \dots, a_k גפרורים בהתאמה. כל שחקן בתורו (לבן מתחיל) בוחר אחת מן הערימות שעוד נותרו בה גפרורים, ומוציא ממנה מספר גפרורים כרצונו (לפחות אחד ולכל היותר מספר הגפרורים שעוד נותרו בערימה). מנצח השחקן שלוקח את הגפרור האחרון (בכלל).

א. נתח את המשחק עבור $k = 2$, כלומר: קבע עבור אילו זוגות a_1, a_2 יש לכל אחד מן השחקנים תכסיס נצחון, ותאר את תכסיסי הנצחון.

ב. הכלל את הפתרון ל- k כלשהו. (רמז: כתוב את המספרים a_1, a_2, \dots, a_k בכתוב בינארי זה מתחת לזה. התבונן בזוגיות של מספר ה-1ים בכל עמודה.)

3. לבן ושחור משחקים את המשחק הבא: כל שחקן בתורו (לבן ראשון) בוחר ספרה מבין הספרות $0, 1, \dots, 9$. לאחר סדרה אינסופית של בחירות $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, כאשר ה- a_i נבחרו ע"י לבן וה- b_i ע"י שחור, לבן מנצח אם המספר שפיתוחו העשרוני הוא $0.a_1b_1a_2b_2\dots$ הוא רציונלי, אחרת שחור מנצח. האם יש לאחד השחקנים תכסיס נצחון? אם כן - למי?