פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - פתרון חלקי לגליון תרגילים מס' 4

2. (**א**) כל פונקציה היא מדידה, כיוון שה- σ-אלגברה היא <u>כל</u> קבוצת החזקה ולכן כל הקבוצות הן מדידות.
(**ב**) שתי פונקציות שוות כב"מ אם"ם הן שוות - כי המידה של כל נקודה היא 1.

3. נתון: $f : X \to [0,\infty]$ פונקציה מדידה ש- $\int_X f\,d\mu = \alpha$, $0 < \alpha < \infty$ ו- $p > 0$.
צ"ל: עבור $f_n = n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^p\right]$ לחשב את $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

פתרון: נשים לב שלכל $x \in X$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \infty & 0<p<1 \\ f(x) & p=1 \\ 0 & 1<p<\infty \end{cases}$.

נשתמש בהדרכה: עבור $p < 1$ נשתמש בלמת Fatou (בדקו שהפונקציות f_n הן מדידות ואי-שליליות):

$$\infty \;=\; \int_X \infty\,d\mu \;=\; \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

(שימו לב שהשוויון השמאלי נכון כיוון שנתון ש- $\alpha > 0$, ולכן $\mu(X) > 0$) כלומר, עבור $p < 1$
$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \infty$.
עבור $p \ge 1$ נשים לב תחילה שלכל $a,b > 0$ מתקיים: $a^p + b^p \le (a+b)^p$ (כיוון שהפונקציה $F(t) = t^p$ היא קמורה, מוגדרת על $[0,\infty)$ ו- $F(0) \le 0$ - ולכן תת-אדיטיבית.) ונזכור גם ש- $\log(1+b) \le b$ (- בעזרת הקעירות של $\log t$, למשל) ולכן לכל $x \in X$

$$n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^p\right] \le n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)\right]^p = pn\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)\right] \le pn\frac{f(x)}{n} = pf(x)$$

כלומר, $0 \le f_n \le pf \in L^1(\mu)$, ולכן ניתן להשתמש בהתכנסות נשלטת - (הרי f_n מדידות):

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \begin{cases} \int_X f\,d\mu & p=1 \\ \\ 0 & 1<p<\infty \end{cases}$$

4. צ"ל: דוגמה לסדרת פונקציות מדידות $f_n : X \to [0,\infty]$ ש- $\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ו- $g \in L^1(\mu)$ שלכל $n \in \mathbb{N}$ $g\cdot f_n \in L^1(\mu)$ אבל $\int_X gf_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

דוגמא: לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\chi_n = \chi_{[n,n+\frac{1}{n^3}]}$ ונגדיר: $g(x) = \sum_{n=1}^\infty n\chi_n(x)$, $f_n(x) = n^2\chi_n(x)$.

5. נתון: פונקציה מדידה $f : X \to \mathbb{R}$ <u>במרחב מידה סופי</u>. נגדיר $A = f^{-1}(\mathbb{Z})$.
צ"ל: ש- A מדידה וש- $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_X \cos^{2n}(\pi\cdot f)\,d\mu$.
פתרון: A מדידה כמקור של קבוצת בורל ע"י פונקציה מדידה. לגבי הגבול - סדרת הפונקציות המדידות $f_n(x) = \cos^{2n}(\pi f(x))$ מקיימת $f_n \searrow \chi_A$. המידה סופית ו- $|f_1| \le 1$, כלומר $f_1 \in L^1(\mu)$ ולכן ניתן להשתמש בהתכנסות מונוטונית (למרות שהסדרה <u>יורדת</u>) ולהסיק ש-
$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \chi_A\,d\mu = \mu(A)$ (ללא הנתון שמרחב המידה הוא סופי הטענה לא נכונה - למשל $f(x) \equiv \frac{1}{4}$ עבור $X = \mathbb{R}$).

6. נתונות פונקציות ממשיות מדידות $f, \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^1(\mu)$ כך ש- $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ כב"מ ו-
$\int_X |f|\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X |f_n|\, d\mu$. צ"ל: $\int_X |f_n - f|\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

פתרון: בעזרת הטענה שהוכחנו בביתה, שהיא הכללה של משפט ההתכנסות הנשלטת: אם נתונות שלוש סדרות של פונקציות ממשיות $\{F_n\}, \{G_n\}, \{H_n\}$ עם $F_n(x) \le G_n(x) \le H_n(x)$ כב"מ לכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F$, $G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} G$ ו- $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} H$ כב"מ ובנוסף מתקיים: $\int_X F_n\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X F\, d\mu \ne \pm\infty$, $\int_X H_n\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X H\, d\mu \ne \pm\infty$ אז בהכרח גם $\int_X G_n\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X G\, d\mu \ne \pm\infty$.

אם ניקח כעת $F_n = -(|f_n| + |f|) \;\le\; G_n = |f_n - f| \;\le\; H_n = |f_n| + |f|$ נקבל מש"ל.

7. נתון: f פונקציה ממשית מדידה כך ש- $\int_X f^n\, d\mu = c$ קבוע לכל $n \in \mathbb{N}$.
צ"ל: קיימת $A \in \mathcal{M}$ ש- $f = \chi_A$ כב"מ.
פתרון: תהי $B = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$ ונגדיר $g_n = f^{2n}\chi_B$. B בודאי קבוצה מדידה, ולכן הפונקציות g_n מדידות. יתר-על-כן $g_n \nearrow \infty \cdot \chi_B$ ולכן - ע"פ התכנסות מונוטונית

$$c \;\ge\; \int_B f^{2n}\, d\mu \;=\; \int_X g_n\, d\mu \;\xrightarrow[n\to\infty]{}\; \int_B \infty\, d\mu$$

ולכן בהכרח $\mu(B) = 0$, כלומר: $|f| \le 1$ כב"מ. מכך נסיק ש- $f^3 \le |f|^3 \le f^2$, אבל כיוון ש- $\int_X f^3\, d\mu = \int_X f^2\, d\mu$ נקבל $f^3 = f^2$ כב"מ (מדוע?) - כלומר $f \in \{0, 1\}$ כב"מ (מדוע?).
קיבלנו, אם-כן, $f = \chi_A$ כב"מ עבור $A = \{x \in X : f(x) = 1\} \in \mathcal{M}$.