פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 9

1. א. באינדוקציה על המבנה של שם העצם $\mathbf{r}$.
- בסיס: $\mathbf{r}$ משתנה אישי או קבוע אישי.
אם $\mathbf{r = x}$ אזי $\mathbf{r<t>}$ זהה או ל-$\mathbf{x}$ או ל-$\mathbf{t}$. בכל מקרה מקבלים ש-$\mathbf{s^*(r)=s(x)=s^*(r<t>)}$.
אם $\mathbf{r \neq x}$ אזי $\mathbf{r = r<t>}$ ולכן $\mathbf{s^*(r) = s^*(r<t>)}$.
- צעד האינדוקציה: נניח $\mathbf{r = f(t_1,\ldots,t_n)}$ אזי $\mathbf{r<t> = f(t_1<t>,\ldots,t_n<t>)}$. לפי הנחת האינדוקציה $\mathbf{s^*(t_i)=s^*(t_i<t>)}$ לכל $\mathbf{i}$ ולכן:
$$\mathbf{s^*(r<t>)=s^*(f(t_1<t>,\ldots,t_n<t>)=f^M(s^*(t_1<t>),\ldots,s^*(t_n<t>))=}$$
$$\mathbf{=f^M(s^*(t_1),\ldots,s^*(t_n))=s^*(f(t_1,\ldots,t_n))=s^*(r)}$$

ב. באינדוקציה על המבנה של הנוסחה $\boldsymbol{\varphi}$.
- בסיס: $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{R(t_1,\ldots,t_n)}$. לפי א $\mathbf{s^*(t_i)=s^*(t_i<t>)}$ לכל $\mathbf{i}$ ולכן $\boldsymbol{\varphi}$ אמיתית אם ורק אם $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{<t>}$ אמיתית.
- צעד האינדוקציה: אם $\boldsymbol{\varphi = \neg\varphi_1}$ או $\boldsymbol{\varphi = \varphi_1 * \varphi_2}$ כאשר $*$ פעולות דו מקומיות של תחשיב הפסוקים אז בהסתמך על הנחת האינדוקציה לא קשה לראות ש- $\boldsymbol{\varphi}$ אמיתית אם ורק אם $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{<t>}$ אמיתית.
אם $\boldsymbol{\varphi = \exists x\varphi_1}$ או $\boldsymbol{\varphi = \forall x\varphi_1}$ אזי $\boldsymbol{\varphi = \varphi}\mathbf{<t>}$ כי אין הופעות חופשיות של $\mathbf{x}$ ב $\boldsymbol{\varphi}$ ולכן $\boldsymbol{\varphi}$ אמיתית אם ורק אם $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{<t>}$ אמיתית.
אם $\boldsymbol{\varphi = \exists y\varphi_1}$ כאשר $\mathbf{y}$ שונה מ $\mathbf{x}$ אזי לכל השמה $\mathbf{s'}$ המתלכדת עם $\mathbf{s}$ פרט אולי על $\mathbf{y}$ מתקיים ש-$\boldsymbol{\varphi_1}$ אמיתית ב-$\mathbf{s'}$ אם ורק אם $\boldsymbol{\varphi_1}\mathbf{<t>}$ אמיתית ב-$\mathbf{s'}$. מדוע? אם לא הצבנו בשום מופע של $\mathbf{x}$, אז זה מיידי; ואם כן, אז $\mathbf{y}$ אינו מופיע ב-$\mathbf{t}$ (אחרת ההצבה אינה כשרה) ולכן $\mathbf{s'(x)=s'^*(x)}$ ומותר להסתמך על הנחת האינדוקציה עבור $\mathbf{s'}$ ו-$\boldsymbol{\varphi_1}$. לכן $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{<t>}$ אמיתית ב-$\mathbf{s}$ אם ורק אם $\boldsymbol{\varphi}$ אמיתית ב-$\mathbf{s}$.
אם $\boldsymbol{\varphi = \forall y\varphi_1}$ אז באותו נימוק כמו במקרה של כמת ישי מקבלים ש-$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{<t>}$ אמיתית ב-$\mathbf{s}$ אם ורק אם $\boldsymbol{\varphi}$ אמיתית ב-$\mathbf{s}$.

ג. נניח $\mathbf{M}$ מבנה ו$\mathbf{s}$ השמה כלשהם.
- אם $\mathbf{M} \nvDash_s \mathbf{x=t}$ אז הנוסחה אמיתית.
- אם $\mathbf{M} \vDash_s \mathbf{x=t}$ אז מתקיימות ההנחות של סעיף ב ולכן $\mathbf{M} \vDash_s \boldsymbol{\varphi\to\varphi}\mathbf{<t>}$ והנוסחה שוב אמיתית.

מכיוון שהנוסחה אמיתית לכל מבנה ולכל השמה אז היא אמיתית לוגית.

2. א.
$$\varphi_1 = \forall x R(x,x)$$
$$\varphi_2 = \forall x\forall y(R(x,y) \to R(y,x))$$
$$\varphi_3 = \forall x\forall y\forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$$
$$\varphi_4 = \forall x(R(x,c) \to x=c)$$
$$\varphi_5 = \forall x(\neg x=c \to \exists y(R(x,y) \wedge \neg y=x)$$
$$\varphi_6 = \forall x\forall y\forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to (x=y \vee y=z \vee x=z))$$
פתרון: $\boldsymbol{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5 \wedge \varphi_6}$, ז"א מחלקות שקילות בגודל 2 פרט למחלקה אחת בגודל 1 שמכילה את פירוש הקבוע האישי $\mathbf{c^M}$.

אפשרות אחרת:

$f(c)=c \wedge \forall x(f(x)=x \rightarrow x=c) \wedge \forall x\forall y(f(x)=y \rightarrow x=f(y))$
פונקציה סימטרית (ולכן חח"ע ועל) שמעבירה רק את פירוש הקבוע האישי $\mathbf{c}^{\mathbf{M}}$ לעצמו.

אפשרות אחרת:

$f(c)=c \;\wedge\; \forall x((P(x) \vee x=c) \equiv \neg P(f(x))) \;\wedge\; \forall x\forall y(f(x)=f(y) \rightarrow x=y)$
פונקציה שמעבירה את הקבוצה $\mathbf{P}^{\mathbf{M}}$ על $(\mathbf{W}^{\mathbf{M}}\backslash\mathbf{P}^{\mathbf{M}})\backslash\{\mathbf{c}^{\mathbf{M}}\}$ באופן חח"ע ועל כאשר $\mathbf{c}^{\mathbf{M}}$ שייך לתוך $\mathbf{W}^{\mathbf{M}}\backslash\mathbf{P}^{\mathbf{M}}$.

אפשרות אחרת:

$\varphi_1 = \forall x\forall y\forall z(f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)))$
$\varphi_2 = \forall x(f(x,e) = x \wedge f(e,x) = x \wedge f(x,g(x)) = e)$
$\varphi_3 = \forall x(f(x,x)=e \rightarrow x=e)$
פתרון: $\boldsymbol{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3}$, ז"א חבורה שבה אין איבר מסדר 2.

ב. $\varphi_1 = \forall z\exists x\exists y(R(x) \wedge R(y) \wedge f(x,y)=z)$
$\varphi_2 = \forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2([R(x_1) \wedge R(x_2) \wedge R(y_1) \wedge R(y_2) \wedge f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)] \rightarrow [x_1=x_2 \wedge y_1=y_2])$
פתרון: $\boldsymbol{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$

ג. $\varphi_1 = \forall z\exists x\exists y(R_1(x) \wedge R_2(y) \wedge f(x,y)=z)$
$\varphi_2 = \forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2([R_1(x_1) \wedge R_1(x_2) \wedge R_2(y_1) \wedge R_2(y_2) \wedge f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)] \rightarrow [x_1=x_2 \wedge y_1=y_2])$
$\varphi_3 = \exists x(\neg R_1(x)) \wedge \exists y(\neg R_2(y))$
$\varphi_4 = \forall x\forall y(x=y)$
פתרון: $\boldsymbol{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee \varphi_4}$

ד. שדה ($\mathbf{f}^{\mathbf{M}}$ חיבור, $\mathbf{c}^{\mathbf{M}}$ אפס, $\mathbf{g}^{\mathbf{M}}$ כפל, $\mathbf{d}^{\mathbf{M}}$ יחידה):
$\varphi_1 = \forall x(f(x,c)=x)$
$\varphi_2 = \forall x\exists y(f(x,y)=c)$
$\varphi_3 = \forall x\forall y(f(x,y)=f(y,x))$
$\varphi_4 = \forall x\forall y\forall z(f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)))$
$\varphi_5 = \forall x(g(x,d)=x)$
$\varphi_6 = \forall x\exists y(\neg(x = c) \rightarrow g(x,y)=d)$
$\varphi_7 = \forall x\forall y(g(x,y)=g(y,x))$
$\varphi_8 = \forall x\forall y\forall z(g(g(x,y),z)=g(x,g(y,z)))$
$\varphi_9 = \forall x\forall y\forall z(g(x,f(y,z))=f(g(x,y),g(x,z)))$
$\varphi_{10} = \neg c=d$

פתרון: $\boldsymbol{\wedge_{1\leq i\leq 10}\, \varphi_i}$

3. א. כן. נשים לב ש $(P(x) \to R(x)) \to R(x)$ שקול לוגית ל $P(x) \vee R(x)$ וזה שקול לוגית ל $(R(x) \to P(x)) \to P(x)$. מכיוון שהעולם לא ריק אז ברור ש-$\forall x(P(x) \vee R(x)) \to \exists x(P(x) \vee R(x))$ אמיתית לוגית ולכן הנוסחה הנתונה אמיתית לוגית.

ב. לא. דוגמה נגדית: $W^M = \{ 1, 2 \}$, $P^M = R^M = \{ 1 \}$.

ג. לא. דוגמה נגדית: $W^M = \{ 1 \}$, $P^M = R^M = \varnothing$.

הערה כללית: בהינתן מבנה M וסימן יחס n-מקומי R, אזי תמיד $R^M \subseteq W^M x \ldots x W^M$ (n פעמים).