שניר הורב
205689581

פתרון:

1. א. $\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$.

נסמן $L=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

נשים לב כי:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln(e) = 1$$

מרציפות פונקצית ה- ln ושקול ידוע מאינפי 1

אזי: $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = L = \lim_{n\to\infty} L\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

מאחר ו- $L>1$, מצפיפות המספרים הממשיים, קיים $L>p>1$.

לפי הגדרת הגבול, קיים N כך שלכל n>N, מתקיים

$$\left|p\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n - L\right| < \left|n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)-L\right| < \varepsilon$$

אזי,

מכיוון כי $p<L$ והגבולות שווים

$$0 < L-\varepsilon < p\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n < n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < \varepsilon+L$$

~~נזכיר במשפט האומר כי אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ ו- $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס. (עבור טורים חיוביים)~~
~~נסיק כי אם $\frac{a_n}{a_{n+1}}\ge\frac{b_n}{b_{n+1}}$, אז משיקולים אנלוגיים, ...~~

מהשוויון מתקיים $0<\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\frac{n}{p}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ ⟸ $0<n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{n}{p}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

⟸ $0<\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{p}\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ ⟸ (מונוטוניות ה- ln) $\frac{n+1}{n}<\frac{1}{p}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}$ (מספר קטן מ-1) ⟸ $p\cdot\frac{n+1}{n}<\frac{a_n}{a_{n+1}}$

נחשב את הגבול: $\lim_{n\to\infty} p\cdot\frac{n+1}{n} = p > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

והטור מתכנס, לפי מבחן המנה לסדרות. □

1. ב. <u>הוכחה</u> (לרשות)

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = L = \lim_{n\to\infty} L\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (1).$$

נסמן

תהי $\varepsilon>0$.

נניח כי $L<1$:

אז קיים $0<L<p<1$ מצפיפות המספרים הממשיים, a_n חיובי.

לפי הגדרת הגבול של (1)

קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$0< n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$$

אז,

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Leftarrow n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} < np\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}<1 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \Leftarrow 0<\frac{a_n}{a_{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \Leftarrow$$

ממונוטוניות ה-$\ln$

כי זה חיובי אפשר ב-$\ln$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Leftarrow$$

לפי מבחן המנה, $\sum a_n$ מתבדר.

□

1. ש. <u>הטור ניתן לכתיבה כך:</u>

$$A_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+2}\right) \quad , \quad a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+2}$$

נתבונן בביטוי:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k+2}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+2}} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+2}\right) \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)+2}}{\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k+2}\right)} = \frac{2n+1}{2n+4}$$

אז: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+4}{2n+1}$

<u>נעזר בסעיף א:</u>

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+4}{2n+1}\right)^n$$

נשים לב כי,

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{לופיטל } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)'}{\left(\frac{2x+4}{2x+1}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{(x+2)(2x+1)}$$

$$\underset{\text{לופיטל } \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{4x+7} = \frac{3}{2}$$

לפי היינה נסיק,

אז: $\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{3}{2} > 1$ לפי ראבה

הטור מתכנס. □

3. א. <u>הוכחה</u>

תהי $a_n \to \infty$.

2. נתבונן בטור

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots$$

נפריד לשני טורים:

$$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} \ldots$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \ldots$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{72} \ldots$$

אז, סדרות התתי-סכומים הן:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{3}\,1}{3k-2}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

נשים לב כי לכל n, כי $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n} > 0$ וידוע כי $\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, מתבדר. לכן לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ מתבדר.

כמו כן לכל n, $0 < \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס מאחר וידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

אז $\lim_{n\to\infty} A_n + B_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = \infty + \text{"קבוע"} = \infty$ ← אריתמ' של גבולות.

לכן, בפרט $a_n + b_n = C_n$ מתבדר.

כנדרש.

□

3.א. ראשית, נגדיר $f(n)=a_n$* לכל $n\in\mathbb{N}$.

$\int_a^x f$ חיובית ומונוטונית עולה, לפי הנתון ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

נגדיר $g(x)=\int_a^x f$, ושם $b(n)=\frac{1}{\int_a^n f}=\frac{1}{g(n)}$, $b(n)$ מונוטונית יורדת ושואפת ל-0.

נתבונן באינטגרל $\int_1^\infty \frac{f}{\int_a^x f}$.

$$\int_1^\infty \frac{f}{\int_a^x f} \underset{\text{לפי } N-L}{=} \int_1^\infty \frac{g'}{g} \underset{N-L}{=} \ln(g)\Big|_1^\infty = \lim_{M\to\infty} \ln(g(M)) - \ln(1) = \infty$$

נשתמש במבחן האינטגרל לטורים. (בשאלה של אחד התנאים המפורט כבגלון)

נבדוק כי התנאים מתקיימים:

1. הפונקציות f,g חיוביות ו-$\frac{f}{g}$ מונוטונית יורדת
2. אם $\int_1^\infty \frac{f}{g}$ מתבדר אז $\sum a_n b_n$ מתבדר.

* נזכיר כי בין כל $n\in\mathbb{N}, n+1$ כלשהן f מונו' עולה, ורציפה (לכן אינט' בקטע).

א. $E=(-1,1)$. זהו סכום של טור גיאומטרי אז

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ עבור

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$$

---

4. ג. ראשית נוכיח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|$ אינו מתכנס.

נסמן $a_n=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| \Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>0$

נעזר במבחן ההשוואה לטורים חיוביים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{-0.5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)}=\sqrt{1}=1$$

אזי הטורים מתכנסים/מתבדרים יחדיו ובפרט מתבדרים יחדיו.

לכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתבדר.

כעת נוכיח כי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.

נשתמש במשפט ע"פ לייבניץ, עבור $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ונקבל כי הטור מתכנס.

נחשב את מכפלת קושי של הטור הזה עם עצמו:

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)$$

עלינו להוכיח כי $C_n \not\to 0$.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{n-k}}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{n-k}}{\sqrt{kn-k^2+k+n-k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{-k^2+nk+n+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{n}}$$

ע״כ $C_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.. (הטור מתכנס לערך סופי שאינו אפס) לפי משפט לייבניץ

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{n}}$$

□

4. ב. הוכחה

נשים לב כי,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

מאחר ונתון כי הטור מתכנס, נשתמש במכפלת קושי:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} x^j \cdot x^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{j=0}^{n} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

האינדקס תלוי אך ורק ב-n

שינוי תחילת האינדקס אינו משפיע על הסכום

מה שדרוש להוכיח.

□