# <u>מד"ר לינאריות מסדר ראשון</u>

## <u>מוטיבציה</u>

נסתכל על המד"ר $y' - 1 = 0$
או באופן שקול $y' = 1$
הפתרון שלה, ע"י אינטגרציה פשוטה, הוא $y(x) = x + c$
ניתן לראות כי כל מד"ר מהצורה $y' - f(x) = 0$
או באופן שקול $y' = f(x)$
אפשר לפתור בצורה פשוטה ע"י אינטגרציה $y(x) = \int f(x)dx + c$
ננסה לרשום צורה קצת פחות פשוטה. נניח שהמד"ר היא $(\mu(x)y)' - f(x) = 0$
כאשר $\mu(x)$ היא פונקציה ידועה. אז $(\mu(x)y)' = f(x)$
ולכן $\mu(x)y = \int f(x)dx + c$
כלומר $y = \frac{c}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int f(x)dx$

נחזור למד"ר $(\mu(x)y)' = f(x)$
נשתמש בנוסחת נגזרת של מכפלה ונקבל $\mu(x)y' + \mu'(x)y = f(x)$
כלומר הפתרון של המד"ר האחרונה הוא $y = \frac{c}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)} \int f(x)dx$
וכל זה בהנחה שאנו יודעים את $\mu(x)$.

## <u>סוף מוטיבציה</u>

**<u>הגדרה:</u>** מד"ר מהצורה

$$a(x)y' + p(x)y = q(x)$$

נקראת <u>מד"ר לינארית מסדר ראשון</u>.
אם $a(x) \equiv 1$ אזי המד"ר נקראת מד"ר לינארית <u>מנורמלת</u> $y' + p(x)y = q(x)$
אם $q(x) \equiv 0$ אזי המד"ר נקראת מד"ר לינארית <u>הומוגנית</u> $a(x)y' + p(x)y = 0$

ננסה לפתור מד"ר לינארית מנורמלת, כלומר $y' + p(x)y = q(x)$
נשים לב כי אם נתונה לנו פונקציה $\mu(x)$ השונה תמיד מאפס, אזי הפתרונות של המד"ר

$$y' + p(x)y = q(x)$$

ושל המד"ר

$$\mu(x)y' + p(x)\mu(x)y = q(x)\mu(x)$$

הם אותם הפתרונות כי רק הכפלנו את המד"ר הראשונה בפונקציה שתמיד שונה מאפס ולכן לא שינינו את הפתרונות.

נחפש $\mu(x)$ כזו עבורה המד"ר $\mu(x)y' + p(x)\mu(x)y = q(x)\mu(x)$

היא בעצם $(\mu(x)y)' = q(x)\mu(x)$

כלומר אנו רוצים ש־ $(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + p(x)\mu(x)y$

נגזור צד שמאל לפי נגזרת של מכפלה $\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)y' + p(x)\mu(x)y$

או $\mu'(x)y = p(x)\mu(x)y$

ובשביל זה מספיק ש־ $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x)$

נשים לב כי צד שמאל הוא נגזרת של $\ln|\mu(x)|$ $(\ln|\mu(x)|)' = p(x)$

נעשה אינטגרל לשני הצדדים $\ln|\mu(x)| = \int p(x)dx + c$

נוציא $\ln$ $|\mu(x)| = \exp\left(\int p(x)dx + c\right)$

נוריד ערך מוחלט $\mu(x) = (\pm e^c)\exp\left(\int p(x)dx\right)$

כלומר לכל $c$ הביטוי עבור $\mu(x)$ מקיים $(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + p(x)\mu(x)y$

אנו מחפשים אחת. ניקח $c=0$ וסימן פלוס $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right)$

<u>**הגדרה:**</u> תהי $y'+p(x)y = q(x)$ מד"ר לינארית מנורמלת. פונקציה $\mu(x)$ שאינה זהותית אפס נקראת <u>גורם אינטגרציה</u> עבור המד"ר אם $(\mu(x)y)' = \mu(x)y' + p(x)\mu(x)y$, כלומר אם הכפלה ב־$\mu(x)$ מביא את המד"ר למצב הבא: $(\mu(x)y)' = q(x)\mu(x)$
מפה זה פשוט לפתור ע"י אינטגרציה:

$$y = \frac{c}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)}\int q(x)\mu(x)dx$$

או $$y = c\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right) + \exp\left(-\int p(x)dx\right)\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx$$

לסיכום: בשביל לפתור מד"ר לינארית $a(x)y'+p(x)y = q(x)$ יש תחילה לנרמל אותה, כלומר לחלק ב־$a(x)$

$$y' + \frac{p(x)}{a(x)}y = \frac{q(x)}{a(x)}$$

ואז למצוא גורם אינטגרציה $\mu(x) = \exp\left(\int \frac{p(x)}{a(x)}dx\right)$

ולפתור רגיל.

<u>**הערה:**</u> אם יוצא כי $|m(x)|$ הינו גורם אינטגרציה, אזי גם $m(x)$ הינו גורם אינטגרציה. במקום להוכיח זאת, פשוט יותר לבדוק שמתקיים $(m(x)y)' = m(x)y' + p(x)m(x)y$ ישירות.

**משפט קיום ויחידות עבור מד"ר לינארית מנורמלת מסדר ראשון:** יהיו $p(x), q(x)$ פונקציות רציפות בקטע $I$ ויהי $x_0 \in I$.
למד"ר $y'+p(x)y = q(x)$ ביחד עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ יש פתרון יחיד המוגדר על כל הקטע $I$.
**הוכחה:** נסמן $F(x) = \int p(x)dx$, כלומר $F'(x) = p(x)$.
נסמן $G(x) = \int q(x)e^{F(x)}dx$ כלומר $G'(x) = q(x)e^{F(x)}$. אז כל פתרון של המד"ר הוא מהצורה

$$y = ce^{-F(x)} + e^{-F(x)}G(x).$$

נשים לב כי $F(x), G(x)$ הן פונקציות גזירות בקטע $I$ וש-$y(x) = ce^{-F(x)}+e^{-F(x)}G(x)$ פתרון של המד"ר המוגדר על כל $I$. נבדוק זאת:

$$\begin{aligned}
& y(x) = ce^{-F(x)} + e^{-F(x)}G(x) \\
& y'(x) = -ce^{-F(x)}F'(x) - F'(x)e^{-F(x)}G(x) + e^{-F(x)}G'(x) = \\
= \;& -cp(x)e^{-F(x)} - p(x)e^{-F(x)}G(x) + e^{-F(x)}q(x)e^{F(x)} = \\
= \;& -cp(x)e^{-F(x)} - p(x)e^{-F(x)}G(x) + q(x)
\end{aligned}$$

וזה לכל $x \in I$. ולכן כאשר נציב למד"ר נקבל

$$\begin{aligned}
& y' + p(x)y = q(x) \\
& \big(-cp(x)e^{-F(x)} - p(x)e^{-F(x)}G(x) + q(x)\big) + p(x)\big(ce^{-F(x)} + e^{-F(x)}G(x)\big) = q(x) \\
& q(x) = q(x)
\end{aligned}$$

לכל $x \in I$. כלומר כל פתרון מוגדר על כל $I$.
נציב את תנאי ההתחלה $y_0 = y(x_0) = ce^{-F(x_0)} + e^{-F(x_0)}G(x_0)$
ונקבל $c = \big(y_0 - e^{-F(x_0)}G(x_0)\big)e^{F(x_0)}$
ולכן הפתרון היחיד הוא

$$y(x) = \big(y_0 - e^{-F(x_0)}G(x_0)\big)e^{F(x_0)}e^{-F(x)} + e^{-F(x)}G(x)$$

■

**תרגיל:** $y' + y = e^x \qquad y(0) = 0$

**פתרון:** במקרה זה המד"ר מנורמלת וגם $p(x) = 1$ וגם $q(x) = e^x$. לכן האינטגרל הראשון הוא $P(x) = \int p(x)dx = \int 1dx = x$

והאינטגרל השני הוא $Q(x) = \int q(x)e^{P(x)}dx = \int e^x e^x dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

ולכן הפתרון הכללי הוא $y(x) = c \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$

נשתמש עכשיו בתנאי ההתחלה: $0 = y(0) = c \cdot e^0 + \frac{1}{2}e^0 = c + \frac{1}{2}$

ולכן $c = -\frac{1}{2}$ כלומר $y(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$

נשים לב כי $p(x) = 1,\ q(x) = e^x$ רציפים על כל הישר הממשי ולכן תחום ההגדרה של הפתרון הוא $\mathbb{R}$.

נפתור לפי גורם אינטגרציה: המד"ר מנורמלת ולכן $\mu(x) = exp(\int 1dx) = e^x$

ולכן נכפיל את המד"ר בג"א $e^x y' + e^x y = e^{2x}$

ונקבל $(e^x y)' = e^{2x}$

ולכן $e^x y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

ולבסוף $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$

נשתמש עכשיו בתנאי ההתחלה: $0 = y(0) = c \cdot e^0 + \frac{1}{2}e^0 = c + \frac{1}{2}$

ולכן $c = -\frac{1}{2}$ כלומר $y(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$

**תרגיל:** $y' = \frac{1}{e^y - x} \qquad y(x_0) = y_0$

**פתרון:** קודם כל נשים לב לדרישה על תנאי ההתחלה: כיוון שפתרון של המד"ר ביחד עם תנאי ההתחלה $y(x)$ חייב לקיים $y'(x) = \frac{1}{e^{y(x)} - x}$ וגם $y(x_0) = y_0$ אזי

$$y'(x_0) = \frac{1}{e^{y(x_0)} - x_0} = \frac{1}{e^{y_0} - x_0}$$

ולכן $x_0 \neq e^{y_0}$.

במקרה זה, כיוון שאיננו יודעים לפתור את המד"ר, ננסה לפתור את המד"ר של הפונקציות ההפוכות לפתרונות של המד"ר. כלומר, במקום לחפש את הפתרונות $y(x)$, נחפש את הפתרונות $x(y)$ אבל נצטרך למצוא את המד"ר של $x(y)$.

תזכורת של פונקציות הפוכות: אם $f(x)$ הפיכה אזי $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$ או $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ . ברישום אחר $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. ואז $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{e^y - x}} = e^y - x$

כלומר $x' + x = e^y$ היא המד"ר שהפתרונות שלה הן הפונקציות ההפוכות לפתרונות של המד"ר המקורית.

תנאי ההתחלה של המד"ר החדשה הוא $x(y_0) = x_0$.

לפי התרגיל הקודם $x(y) = c \cdot e^{-y} + \frac{1}{2}e^y$

נציב תנאי התחלה $x_0 = ce^{-y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0}$

ולכן $c = (x_0 - \frac{1}{2}e^{y_0})e^{y_0}$

שימו לב שקיבלנו את $x$ כפונקציה של $y$ בעוד שרצינו את $y$ כפונקציה של $x$. אבל זה בסדר כי לפעמים נקבל פתרונות בצורה סתומה ולא בצורה מפורשת. הביטוי $x = c \cdot e^{-y} + \frac{1}{2}e^{y}$ נותן לנו את $y$ כפונקציה של $x$ בצורה סתומה

תזכורת: נאמר שפונקציה $y(x)$ מוגדרת בצורה סתומה ע"י $F(x,y) = 0$ אם $F(x, y(x)) = 0$ לכל $x$ רלבנטי.

**<u>תרגיל:</u>** $y' = \frac{y}{y-x}$

**<u>פתרון:</u>** ננסה לפתור את המד"ר של הפונקציות ההפוכות לפתרונות של המד"ר. אזי

נקבל $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{y}{y-x}} = \frac{y-x}{y}$

כלומר $x' = 1 - \frac{x}{y}$

או $x' + \frac{x}{y} = 1$

חישוב פשוט מראה כי $y$ הוא גורם אינטגרציה של המד"ר $yx' + x = y$

ונקבל $(yx)' = y$

כלומר $yx = \frac{1}{2}y^2 + c$

ולכן $x = \frac{y}{2} + \frac{c}{y}$

אבל בעוד שבתרגיל הקודם המגזרת של $y$ הייתה תמיד שונה מאפס ולכן יש פונקציה הופכית, במקרה זה יש מקרה בו הנגזרת מתאפסת וזה כאשר $y = 0$. ולכן צריך לבדוק האם איבדנו פתרון זה, שאין לו פונקציה הפוכה, כאשר עברנו למד"ר של הפונקציות ההפוכות. ואכן, ע"י הצבה נקבל כי

$$0 = (0') = \frac{0}{0-x} = \frac{0}{x} = 0 \qquad x \neq 0$$

ולכן $y \equiv 0$ הוא פתרון שאיבדנו וצריך להוסיף אותו. שימו לב כי למעשה אלה הם שני פתרונות כי בהצבה לתוך המד"ר קיבלנו זהות רק עבור $x \neq 0$. כלומר הפתרון בצורה סתומה הוא

$$x = \frac{y}{2} + \frac{c}{y}$$

ביחד עם שני פתרונות נוספים שהם

| | |
|---|---|
| $y \equiv 0$ | $x > 0$ |
| $y \equiv 0$ | $x < 0$ |

ולבסוף נשים לב כי אפשר לחלץ את $y$ בצורה מפורשת מ־ $x = \frac{y}{2} + \frac{c}{y}$:

$$\begin{aligned}
&x = \frac{y}{2} + \frac{c}{y}\\
&2yx = y^2 + 2c\\
&y^2 - 2xy + c = 0\\
&y_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4c}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - c}
\end{aligned}$$

**תרגיל:** נראה כי אם $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של $y' + p(x)y = q(x)$, אזי $y_2(x) - y_1(x)$ פתרון של $y' + p(x)y = 0$.

**פתרון:** כיוון ש־$y_1$ פתרון אז $y_1'(x) + p(x)y_1(x) = q(x)$

כיוון ש־$y_2$ פתרון אז $y_2'(x) + p(x)y_2(x) = q(x)$

נחסר את המשוואות ונקבל $y_2'(x) - y_1'(x) + p(x)y_2(x) - p(x)y_1(x) = 0$

כלומר $\big(y_2(x) - y_1(x)\big)' + p(x)\big(y_2(x) - y_1(x)\big) = 0$

ולכן $y_2(x) - y_1(x)$ פתרון של $y' + p(x)y = 0$.

**תרגיל:** $y' + (e^{x^2}\tan x)y = 0 \qquad y(\pi) = 0$

**פתרון:**

$$y = c \cdot exp\left(-\int e^{x^2}\tan x dx\right)$$
$$0 = y(\pi) = c \cdot e^{?}$$
$$c = 0$$
$$y \equiv 0$$

ותחום ההגדרה הוא אחד הקטעים $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ המכיל את $\pi$, כלומר $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.
אפשר לפתור גם עם משפט קיום ויחידות: $y \equiv 0$ הוא פתרון כיוון שמד"ר היא לינארית הומוגנית. הוא מקיים את תנאי ההתחלה ולכן הוא יחיד. אבל, הוא יחיד בקטע רציפות של המקדמים המכילים את $\pi$, ופה אנו מקבלים מה שקיבלנו קודם.

**תרגיל:** מצאו פתרון פרטי אחד של $xy' + 3y = x^2$ המוגדר על כל הישר.

**פתרון:** ננרמל את המד"ר $y' + \frac{3}{x}y = x$

נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x) = \exp\left(\int \frac{3}{x}dx\right) = \exp\left(3\ln|x|\right) = |x|^3 = |x^3|$

לפי הערה קודמת גם $x^3$ הינו ג"א. נבדוק זאת: נכפיל את המד"ר המנורמלת ב־$x^3$

$$x^3y' + 3x^2y = x^4$$

נשים לב כי $(x^3y)' = x^3y' + 3x^2y$

כלומר $x^3$ הינו ג"א ולכן

$$(x^3y)' = x^4$$
$$x^3y = \frac{x^5}{5} + c$$
$$y = cx^{-3} + \frac{x^2}{5}$$

אנו רואים שעבור $c = 0$ נקבל את הפתרון $y = \frac{x^2}{5}$ אבל אנו יודעים כי הוא פתרון עבור $x > 0$ או $x < 0$. נראה שהוא פתרון עם תחום הגדרה שהוא כל הישר הממשי:

$$y = \frac{x^2}{5}$$
$$y' = \frac{2x}{5}$$
$$xy'(x) + 3y(x) = (x\frac{2x}{5}) + 3(\frac{x^2}{5}) = \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x^2 = x^2$$

וזהות זו מתקיימת לכל $x$ ולכן $y = \frac{x^2}{5}$ הוא פתרון המוגדר על כל הישר הממשי.

**<u>תרגיל:</u>** $y' + p(x)y = g(x)$ כאשר נתון ש־$y_1(x) = 3\sin(x),\ y_2(x) = 8x\cos(x)$ פתרונות של המשוואה. מצאו את הפתרון הכללי.

**<u>פתרון:</u>** עבור משוואה לינארית, הפרש של פתרונות פרטיים הוא תמיד פתרון של ההומוגנית המתאימה. כלומר $3\sin(x) - 8x\cos(x)$ הוא פתרון של $y' + p(x)y = 0$ כלומר $c(3\sin(x) - 8x\cos(x))$ הוא הפתרון הכללי של ההומוגנית המתאימה. ולכן הפתרון הכללי של המד"ר המקורית הוא

$$y = c(3\sin(x) - 8x\cos(x)) + 3\sin(x)$$

**תרגיל:** (דוגמא פיזיקלית) נסתכל על מוליך חשמל בעל התנגדות $R$ ומקדם השראה $L$. ידוע כי המתח לאורך מוליך זה שווה ל־ $L\frac{dI}{dt}+RI$ כאשר $I=I(t)$ הוא הזרם המשתנה של החשמל במוליך.
נתון כי המתח יורד מ־$2$ וולט ל־$1$ וולט לינארית במשך $10$ שניות. איזה זרם יהיה לאחר הזמן הזה אם בהתחלה הוא היה $\frac{50}{3}$ אמפר? ידוע כי $R=0.12$ וכי $L=0.1$ הנרי.
**פתרון:** נרשום את המד"ר $L\frac{dI}{dt}+RI=2-\frac{t}{10}$
כלומר $\frac{dI}{dt}+1.2I=20-t$
זוהי מד"ר לינארית שהפתרון שלה הוא $I=ce^{-1.2t}+\frac{625}{36}-\frac{5}{6}t$
נשתמש בתנאי ההתחלה $\frac{50}{3}=I(0)=c+\frac{625}{36}$
ונקבל כי $c=-\frac{25}{36}$
ולכן $I=-\frac{25}{36}e^{-1.2t}+\frac{625}{36}-\frac{5}{6}t$
ולכן $I(10)=-\frac{25}{36}e^{-12}+\frac{625}{36}-\frac{50}{6}\approx 9.03$