תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 13 – פתרון חלקי

.1

א) יהיו $y_1, y_2 \in Y$ כך ש- $y_1<y_2$. יש להוכיח שקיים $y_3 \in Y$ כך ש- $y_1<y_3<y_2$.

נניח $f{:}X \to Y$ איזומורפיזם. הפונקציה f היא על, לכן קיימים $x_1, x_2 \in X$ כך ש- $f(x_1)=y_1$ ו- $f(x_2)=y_2$.

$y_1<y_2 \Leftarrow x_1<x_2$ (כי f^{-1} שומרת סדר ו- f חח"ע).

X צפופה, לכן קיים $x_3 \in X$ כך ש- $x_1<x_3<x_2$.

נסמן: $f(x_3)=y_3$.

$x_1<x_3<x_2 \Leftarrow y_1<y_3<y_2$ (כי f שומרת סדר וחח"ע).

ב) כן, תוך שימוש בפונקציה חח"ע ועל בין $\mathbb{Z}$ ו- $\mathbb{Q}$.

ג) לא, כי ביחס טוב לכל איבר (פרט לאחרון) יש עוקב מיידי. (יש רק מקרה טריוויאלי אחד של סדר טוב צפוף: אורדינל 1).

.2

א) $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ לא איזומורפית ל- $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$: ב- $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ ניתן למצוא 3 אברים כך שבין כל שניים מהם יש אינסוף איברים, וב- $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ - לא.

ב) $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ לא איזומורפית ל- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: בדומה לסעיף הקודם.

ג) $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ לא איזומורפית ל- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: ב- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ניתן למצוא איבר כך שלפניו יש אינסוף איברים שבין כל שניים מהם יש אינסוף איברים, וב- $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ - לא.

.3 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ לא צפופה, לכן $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ היא זאת שאיזומורפית ל- $\mathbb{Q}$.

.4

א) אם X קבוצה ו- R יחס סדר טוב בה כך שגם R^{-1} סדר טוב, אז X קבוצה סופית.
הטענה נכונה.

נניח R וגם R^{-1} הם יחסי סדר טוב ב- X . ונניח בדרך השלילה ש- X קבוצה אינסופית.
יהי a_1 איבר ראשון של X לפי סדר R . לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר a_{n+1} להיות העוקב המיידי של a_n (לפי סדר R). זה אפשרי כי אם מגיעים בסדרה זאת לאיבר האחרון של X – זה אומר ש- X סופית. הסדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרה אינסופית עולה לפי סדר R – ולכן בקבוצה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אין איבר ראשון לפי סדר R^{-1} – זאת סתירה לכך שגם R^{-1} הוא יחס סדר

טוב (ניתן גם להגיד: הסדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרה אינסופית יורדת לפי סדר R^{-1} – ולכן R^{-1} אינו יחס סדר טוב).

.5
א) כן: $\mathbb{N}$.
ב) לא, כי ב- $\omega+1$ יש איבר ללא קודם מיידי.
ג) כן.
ד) כן: $\{m\text{-}1/n\}_{m,n\in\mathbb{N}}$.
ה) כן, כי $\mathbb{N}$ שקולת עצמה ל- $\mathbb{Q}$.
ו) כן, כי $\mathbb{Z}$ שקולת עצמה ל- $\mathbb{Q}$.
ז) כן. בוחרים $x_0\in X$ כלשהו, לכל $n\in\mathbb{N}$ מגדירים x_n להיות איבר כלשהו שגדול מ- $x_{n\text{-}1}$ ו- $x_{\text{-}n}$ להיות איבר כלשהו שקטן מ- $x_{\text{-}(n\text{-}1)}$. הפונקציה $f\colon \mathbb{Z}\to\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ המוגדרת ע"י $f(a)=x_a$ היא איזומורפיזם.

.6 השווה את האורדינלים הבאים:
א) $2\cdot(3+\omega),\ 2\cdot(\omega+3),\ 2\cdot\omega+3,\ 3+2\cdot\omega,\ 3+\omega\cdot 2$

$3+\omega\cdot 2=3+\omega=\omega$

$3+2\cdot\omega=3+\omega+\omega=\omega+\omega=2\cdot\omega$

$2\cdot\omega+3$ לא ניתן לכתיבה בצורה יותר פשוטה.

$2\cdot(\omega+3)=(1+1)\cdot(\omega+3)=1\cdot(\omega+3)+1\cdot(\omega+3)=\omega+3+\omega+3=$

$=\omega+(3+\omega)+3=\omega+\omega+3=2\cdot\omega+3$

$2\cdot(3+\omega)=2\cdot\omega$

לכן: $3+\omega\cdot 2 < 3+2\cdot\omega = 2\cdot(3+\omega) < 2\cdot\omega+3 = 2\cdot(\omega+3)$.