פתרון גיליון תרגילים מספר 9

1) רשמו פיתוחי טיילור לפונקציות הבאות:

א) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ סביב הנקודה $a=0$:

$$f(0)=1\ ,\ f'(x)=\tfrac{1}{3}(1+x)^{-2/3}\Rightarrow f'(0)=\tfrac{1}{3}\ ,\ f''(x)=\tfrac{-2}{9}(1+x)^{-5/3}$$

$$\Rightarrow f''(0)=\tfrac{-2}{9}\ ,\ f'''(x)=\tfrac{10}{27}(1+x)^{-8/3}\Rightarrow f'''(0)=\tfrac{10}{27}$$

ובאופן כללי : $f(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2+3(n-2))}{3^n}$. ולכן:

$$T_n(x)=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}x^2+\ldots+\frac{(-1)^n}{3^n}\prod_{k=1}^{n}(2+3(k-2))x^n$$

ב) $f(x)=x\sqrt{x}$ סביב $a=1$:

נפתח את הפונקציה $\sqrt{x}$ סביב 1.

$$f(1)=1\ ,\ f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2},\ \ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(-1+2(k-1))$$

לכן :

$$T_n(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(-1+2(k-1))(x-1)^n$$

פולינום טיילור של x סביב 1 הוא: $P_n(x)=1+(x-1)$

נכפיל את שני הפולינומים ונקבל :

$$M_n(x)=T_n(x)+(x-1)T_n(x)=1+\left(\frac{1}{2}+1\right)(x-1)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$$

$$+\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)(x-1)^3+\ldots+\left[\prod_{k=1}^{n}(-1+2(k-1))-2\prod_{l=1}^{n-1}(-1+2(l-1))\right]\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n}$$

ולכן: $M_n(x)=1+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\left[(2n-5)\prod_{k=1}^{n-1}(-1+2(k-1))\right](x-1)^n$

ג) $m \in N \quad f(x) = (1+x)^m$ סביב הנקודה $a = 0$.

זהו פולינום ממעלה m: $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$

לכן: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k$

2) בעזרת פיתוח טיילור חשבו קירוב מספרי של:

א) $\sin(1^\circ)$ בדיוק של 10^{-9}.

$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad$. הטור של $\sin(x)$ הוא:

$T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ והשארית:

$|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{\cos(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \le \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|$ יש לבדוק עבור איזה n מתקיים:

$\left| R_n\left(\frac{\pi}{180}\right) \right| \le 10^{-9}$. מכיוון ש- $\frac{\pi}{180} < 1$ אז נחפש: $(2n+2)! \ge 10^9$. $n = 6$ יספיק.

הערה: יש להציב את $\frac{\pi}{180}$ בדיוק של 10^{-9}. ניתן לעשות זאת לדוגמא, בעזרת הפיתוח של $\arccos(-1)$ סביב אפס.

ב) $\sqrt{28}$ בדיוק של 10^{-3}.

הפיתוח של $f(x) = \sqrt{25+x}$ סביב אפס:

$$f(0) = 5, \quad f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+25)^{-1/2} \quad f'(0) = \tfrac{1}{10}, \quad f''(x) = \tfrac{-1}{4}(x+25)^{-3/2}$$

$$f''(0) = \tfrac{-1}{4}, \quad f'''(x) = \tfrac{3}{8}(x+25)^{-5/2}$$

$$R_2(3) = \tfrac{3}{8}(c+25)^{-5/2} \tfrac{3^3}{3!} < \tfrac{3}{8}(0+25)^{-5/2} \tfrac{3^3}{3!} = \tfrac{54}{100000} < 10^{-3}$$

לכן מספיק לפתח עד סדר 2:

$f(x) = 5 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{4 \cdot 2}x^2 + R_2(x)$ ולכן: $\sqrt{28} \approx 5 + \frac{3}{10} - \frac{9}{42}$

ג) $\ln(2)$ בדיוק של $5\cdot 10^{-2}$.

מחשבים את פיתוח טיילור של $\ln(1+x)$ סביב אפס. ע"פ חישוב השארית יש לפתח עד $n=4$ ואז : $\ln(2)=-\ln(\frac{1}{2})$ נציב בפיתוח $x=-\frac{1}{2}$ ונקבל:

$T_4(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right)^4=-\frac{131}{192}$ ולכן $\ln 2=\frac{131}{192}\pm\frac{1}{20}$.

3) תהי $f:\Re\to\Re$ קמורה.

א) הוכיחו שאם קיימים $x_1<x_2$ כך ש-$f(x_1)<f(x_2)$ אז f מונוטונית עולה ממש ב- $[x_2,\infty)$.

הוכחה: f קמורה ולכן מתקיים: $f(ty+(1-t)x)\le tf(y)+(1-t)f(x)$. ראינו בכיתה שאם $x_1<x_2<x_3<x_4$ אז $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$.נתון כי $f(x_2)>f(x_1)$ ולכן $\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}\ge 0$ ולכן $f(x_4)-f(x_3)\ge 0$.

ב) הסיקו שמתקיים אחד מהמקרים הבאים:

i) f מונוטונית.

ii) קיים x_0 כך ש f מונוטונית יורדת ב-$(-\infty,x_0]$ ומונוטונית עולה ב $[x_0,\infty)$.

הוכחה:

נסמן: $A=\{y\mid \exists x<y\ :\ f(x)<f(y)\}$.

נניח כי f אינה מונטונית יורדת. אז קיימים $x_1<x_2$ כך ש $f(x_1)<f(x_2)$. ולכן $x_2\in A$ כלומר $A\ne\phi$.

נניח כי f אינה מונוטונית עולה. קיימים $x_3<x_4$ כך ש $f(x_3)>f(x_4)$.לכן, $x_3\notin A$. כי אחרת ע"פ סעיף קודם f היתה מונוטונית עולה ב$[x_3,\infty)$. בנוסף, x_3 הוא חסם מלרע לA (מדוע?).

לכן קיים $x_0=\inf A$. ע"פ הסעיף הקודם f מונוטונית עולה ב$[x_0,\infty)$. באופן

סימטרי ניתן להראות שאם קיים $x_1 < x_2$ כך ש $f(x_1) > f(x_2)$ אז f

מונוטונית יורדת ב $(-\infty, x_1]$. ולכן f מונוטונית עולה ב $(-\infty, x_0]$.

4) נתונה $f:\Re \to \Re$ קמורה. הוכח / הפרך :

א) אם $\lim_{x\to\infty} f(x)$ סופי אז f מונוטונית לא עולה.

נכון. ע"פ שאלה קודמת.

ב) אם a נקודת קיצון מקומית של f אז a מינימום גלובלי.

נכון. אפשר לעשות זאת לפי הלמה על שיפועי מיתרים:

השיפוע של l1 > השיפוע של l2 > השיפוע של l3 > השיפוע של l4