דף עבודה בהעתקות ליניאריות

שניר הורגן

205689581

ניר בן-שוף

205684581 שניר הרבן   **העתקות ליניאריות**

1.א. נשים לב כי: עבור

$T(2+0x+0x^2+0x^3+0x^4+0x^5) = \begin{pmatrix}0&2\\0&8\end{pmatrix}$

$T(1+0x+0x^2+0x^3+0x^4+0x^5) = \begin{pmatrix}0&1\\0&4\end{pmatrix}$

שני המטריצות אלו הן תל״ל.

לכן $\mathrm{Im}\,T = sp\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

ב. לפי משפט המימדים, $\dim R_5[x] = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$

$6 = \dim \ker(T) + \dim sp\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

$\dim \ker(T) = 4$

1.ג. לפי סעיף ב', בסיס הגרעין הוא בגודל 4.

$F(1)=2$

$T(F) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

נציג את הפולינומים כוקטור קואורדינטות.

$\{(0,0,2,0,0,0), (0,0,0,2,0,0), (0,0,0,0,2,0), (-2,0,0,0,0,1)\}$

זו קבוצה בגודל מתאים עם 4 איברים שהם בת״ל.

1.ד. נמצא בסיס לתת-מרחב U של $R_5[x]$ כך ש- $R_5[x] = U \oplus Ker(T)$.

לשם כך נשלים את בסיס $KerT$ שמצאנו בסעיף ג' כך שיתקיים שהוא בסיס ל-$R_5[x]$.

$\dim R_5[x] = 6$ וזוהי עצמת הבסיס הנדרש.

נגדיר

$U = \{(0,1,0,0,0,0), (1,0,0,0,0,0)\}$

① מתקיים $U \cap B = \{0\}$ עבור B הוא הבסיס של $\ker(T)$.

② מתקיים $sp\{R_5[x]\} = sp\{U \cup B\}$ ← (1) [illegible]

לפי הגדרת הסכום הישר מתקיים $R_5[x] = U \oplus B$.

ה. נתבונן בקבוצה:

$$W = \{ (0,1,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,1) \}$$

מתקיים כי $W \neq U$ וכמו כן $sp\, \mathbb{R}_5[x] = sp\, W \cup B$ (1).

איברי W הם בת"ל.

(1) נימוק:

לפי משפט המימדים: $\dim \mathbb{R}_3[x] = \dim B + \dim Im(T)$

נשים לב כי: $sp\{Im\, T\} = sp\{T(W)\} = sp\{T(B)\}$.

לכן, בסיסים אלגבראיים הם בסיס ה-$Ker\,T$ פורשים את $\mathbb{R}_5[x]$.

2.א. הטענה אינה נכונה. נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

T חח"ע $\Leftarrow Kr(T)=\{0\} \Leftarrow$ ϕ למע' הפתרונות של

$A\underline{x}=0$

עבור $A_{3\times 2}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \vec{X} = 0$$

למע' זו יש ∞ פתרונות כי יש יותר משוואות מנעלמים (לאחר דירוג).

סתירה.

2.ב. הטענה אינה נכונה. נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{2\times 3 \\ m\times n}}$ $\qquad rg(A)=2=m$

כעת נתבונן במע' הנ"ל:

$$A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אילו T היתה על היינו מקבלים וקטור בסיס ל-R^2, לפי משפט האומר כי הבסיס של התחום לאחר ט"ל הוא הבסיס של הטווח.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin B$ עבור B בסיס ל-R^2.

2.ג. הטענה נכונה.

הוכחה

T חח"ע $\Leftarrow Ker(T)=\{0\} \Leftarrow$ (1) למע' ההומוגנית יש רק את הפתרון הטריוויאלי.

נניח בשלילה כי $rg(A)\neq m$, זא"ז כי $rg(A)<m$.

אז קיימת לפחות שורה אחת שהיא שורת אפסים.

לפי הגדרה קיים פרמטר חופשי אחד לפחות, למע' ההומוגנית אז יש ∞ פתרונות.

סתירה ל-(1).

לכן $rg(A)=m$.

2.ב. הטענה נכונה.

<u>הוכחה</u>

נראה כי T היא על.

לכל $k\in R^m$ קיים $r_0\in R^n$ כך ש- $T(r_0)=A\cdot r_0=k$.

① לפי משפט, כל איבר בבסיס של R^m ניתן לקבל ע"י

הפעלת $T(a)=b$ כאשר a הוא איבר בבסיס R^n

ו- b איבר בבסיס R^m.

נזכור כי, לפי משפט, $ra(A)=\dim Col(A)$ ②.

אילו $\dim Col(A)<n$ היינו מקבלים עמודת אפסים במטריצה A.

לכן, עבור איבר בבסיס הסטנדרטי של R^n, היה מתקיים

$A\cdot u=\vec{0}$. וזו סתירה לפי ①.

לכן $\dim Col=n \Rightarrow ra(A)=n$ לפי ②.

2.ג. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמא נגדית:</u>

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

מתקיים עבור איבר בבסיס הסטנדרטי של R^3 $(0,0,1)$

כי $T((0,0,1))=\vec{0}$.

וזו בסתירה לכך כי כל איבר בבסיס של R^3 צריך להיות

מועתק לאיבר בבסיס של R^2 אילו ההעתקה T היתה על,

לפי משפט.

סתירה.

2.ד. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמא נגדית:</u>

<u>נגדיר:</u>

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

<u>מתקיים כי:</u>

$ra(A)=2$, $n-m=2$

אזי קיימים 3 פרמטרים חופשיים למערכת ההומוגנית, אזי

$\dim \ker T=3$.

סתירה.

3.א. <u>הוכחה</u>

$T, S: V \to V$.

נתון כי $\ker\{ST\} = \{0\}$.

לפי משפט, ההעתקה ST היא חח"ע.

אזי לכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים אם $S \circ T(v_2) = S \circ T(v_1)$

אז $v_1 = v_2$.

נניח $\ker T = \{0\}$.

אם $\ker S \neq \{0\}$ צ"ל כי S אינה חח"ע.

לכן קיימים $T(v_1), T(v_2) \in V$ כך ש- $S(T(v_1)) = S(T(v_2))$ אך

$v_1 \neq v_2$ כי T חח"ע, סתירה.

נניח $\ker S = \{0\}$.

אם $\ker T \neq \{0\}$ אז קיימים $v_1, v_2 \in V$ כך ש: $T(v_1) = T(v_2)$

אך $v_1 \neq v_2$. נרכיב אותם על S ונקבל $S \circ T(v_1) = S \circ T(v_2)$

אם $v_1 \neq v_2$, סתירה.

אילו שניהם אינן חח"ע בוודאי הרכבתם אינה חח"ע.

לכן $\ker S = \{0\}$ <u>וגם</u> $\ker T = \{0\}$.

3.ב. <u>הטענה אינה נכונה</u>

<u>דוגמא נגדית</u>

נגדיר S להיות טרנספורמציית ה-0.

צ"ל כל $v \in V$ מקיים $S(v) = 0$.

נגדיר T להיות טרנספורמציית הזהות.

צ"ל כל $v \in V$ מקיים $T(v) = v$

נקבל כי $S \circ T(v) = 0$ לכל $v \in V$.

כלומר $\mathrm{Im}(ST) = \{0\}$ אך $\ker T = \{0\}$.

סתירה.

3.ג. <u>הטענה אינה נכונה</u>

<u>דוגמא נגדית</u>

נגדיר $V = \mathbb{R}^3$.

$S\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ker S = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Im}\, S = sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ker T = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Im}\, T = sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

קיבלנו כי $\mathrm{Im}\, ST = \{0\}$ אך $\mathrm{Im}\, S \not\subset \ker T$

2.3. <u>הטענה נכונה</u>

<u>הוכחה</u>

נתון כי $Im(ST)\neq\{0\}$.

נניח בשלילה כי קיים $v_0\in V$ כך ש $v_0\in ImT$ אם
$v_0\notin KerS$.

מאחר ו- $S\circ T$ מוגדרת - כלומר הטווח של T הוא התחום
של S. לכן $S(v_0)\in ImS$.

בסתירה לנתון.

5. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמא נגדית.</u>

$S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ לכל $x \in \mathbb{R}^2$

$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$

מתקיים כי $\ker T = \ker S \neq \{0\}$ והוא $sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

כמו כן $Im S = Im T$ והוא $sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

אך $T \neq S$.

סתירה.

6. <u>הוכחה</u>

נוכיח באמצעות שיוויון בין קבוצות:
יהי $v_0 \in V$,

$$A_1 = \{ v \in V \mid T(v) = T(v_0) \} \iff \{ v \in V \mid T(v) - T(v_0) = \vec{0} \}$$

$$\iff \{ v \in V \mid T(v - v_0) = \vec{0} \} \iff \{ v \in V \mid v - v_0 \in \ker T \}$$

$$\iff \{ v_0 + u \mid u = v - v_0 \in \ker T \} = A_2$$

לכן $A_1 = A_2$.

7. <u>הוכחה</u>

יהי $n \geq 2$.

לפי הנתון קיימים $u, v \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $T(v) = S(u) = 0$ אך $S(v) \neq 0$, $T(u) \neq 0$ (3)

כלומר $u \in \ker\{S\}$ ו- $\notin \ker\{T\}$ (1) וכן $v \in \ker T$ ו- $\notin \ker S$ (2).

לפי משפט המימדים

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker T + \dim Im T$

לפי הנתון $\dim Im T \leq 1$.

לפי (1) ו-(2), וידוע כי קיימים וקטורים הפורשים את התמונה כי היא ממימד אחד ובכל אחת מן הטרנספורמציות קיים וקטור שאינו נמצא ב-ker, לכן (3) הוא פורש את התמונה.

אז כל מימד של ה-ker הוא בסדר גודל $n-1$.

לפי שאלה <u>מהשאלון הקודם</u> עבור בסיסים הפורשים את המרחב ובכל אחד יש וקטור שאינו מוכל בשני, אז $\dim(\ker T \cap \ker S) = n-2$, כי לכל הוגר יש וקטור אחד השונה מביניהם ושניהם שווים ל-$n-1$.

8. <u>הוכחה</u>

נגדיר העתקה לינארית $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a + bx + cx^2$.
העתקה זו, $T: F^3 \to V$ עבור $V = R_2[x]$,
היא חח"ע כי כל וקטור ב-F^3 נותן וקטור
שונה ב-V. כמו כן, היא על כי לכל פולינום
ב-$R_2[x]$ קיימים מקדמים המייצגים אותו.
לכן זהו איזומורפיזם.

.4 $T(x,y,z) = (x+z,\ x-z,\ y)$

לכל $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3$ קיים וקטור V מהצורה (x,y,z) כך ש-

$$T(x,y,z) = (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

$$T(x,y,z) = (x+z,\ x-z,\ y) = (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

$$\begin{cases} x+z = x_1 \\ x-z = x_2 \\ y = x_3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\operatorname{Im} T = R^3 \Longrightarrow sp\{(x+z,\ x-z,\ y)\} = R^3 \longrightarrow sp[T(0,0,1), T(1,0,0), T(1,0,0)]$

$\boxed{\text{3:ל}}$

$\ker T = \{0\} \Longrightarrow T(x,y,z) = \vec{0} \in R^3$

אם"ם

$(x,y,z) = \vec{0}$

נמצא פונ' ההופכית T^{-1}:

$$T^{-1}(x+z,\ x-z,\ y) = (x,y,z)$$

בסיס ל-T: $[(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)]$

$$\begin{rcases} x = (x+z)+(x-z) \\ y = y \\ z = \dfrac{(x+z)-(x-z)}{2} \end{rcases} \Longrightarrow T^{-1}(x,y,z) = \left((x+y)+(x-y),\ z,\ \frac{(x+y)-(x-y)}{2}\right)$$

Scanned by CamScanner