

קומבינטוריקה - תרגיל 3

1. מהי פונקצית אוילר של 350 (כלומר, כמה מספרים בין 1 ל-350 אינם מתחלקים ב-2, ב-5, או ב-7)?

2. בכמה תת-קבוצות של $\{1, \dots, 30\}$ יש לפחות איבר אחד זוגי, לפחות איבר אחד המתחלק ב-3, ולפחות איבר אחד המתחלק ב-5?

3. נתונה חפיסת קלפים תקנית (52 קלפים, 4 סוגים, 13 קלפים מכל סוג, אין ג'וקרים). כמה אפשרויות יש לבחור תת-קבוצה של החפיסה, כך שיהיה לפחות קלף אחד מכל סוג (לפחות לב אחד, לפחות פיק אחד, לפחות תלתן אחד ולפחות יהלום אחד)?

4. כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x+y+z=20$ כאשר $2 < x < 7$, $3 < y < 8$, $4 < z < 13$

*5.

א. הוכיחו את הנוסח הכללי של עקרון ההכלה וההדחה:

אם X_1, \dots, X_n קבוצות ולכל $i = 1, \dots, n$ מגדירים את S_i כאוסף כל האפשרויות לבחור i מבין הקבוצות ולבחור איבר משותף לכולן, אזי מספר האיברים המופיעים בדיוק ב- m מבין הקבוצות הוא

$$E(m) = \binom{m}{m} |S_m| - \binom{m+1}{m} |S_{m+1}| + \binom{m+2}{m} |S_{m+2}| - \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} |S_n|$$

הדרכה: הראו שכל איבר המופיע בדיוק ב- m מהקבוצות נספר פעם אחת בסכום שלעיל, וכל איבר אחר נספר בסה"כ 0 פעמים.

ב. הוכיחו כי מספר האיברים המופיעים במספר אי-זוגי מבין הקבוצות הוא

$$E(\text{odd}) = |S_1| - 2|S_2| + 4|S_3| - 8|S_4| + \dots + (-2)^{n-1} |S_n|$$