אלגברה א'

נושא: מ"ו ומרחב נפרש

שם: שניר הירדן

מספר ת"ז: 205689581

מרצה אחראי: פרחי

תאריך: 30/04/18

1. נוכיח כי זו קבוצה המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

נוכיח כי מתקיימות תכונות ~~השפעה~~ המרחב הוקטורי:

נזכור כי $V=\mathbb{R}^2$.

① סגירות לחיבור → עבור $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ (1)

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)\in\mathbb{R}^2$$

② סגירות לכפל בסקלר → עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ (2), $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\alpha\boxdot(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\ \alpha y)\in\mathbb{R}^2$$

③ קומוטטיביות בחיבור → עבור (1)

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2)=(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)=(x_2,y_2)\oplus(x_1,y_1)$$

④ קומוטטיביות בכפל בסקלר → עבור $(x,y)\in\mathbb{R}$ ו-(2),

$$\alpha\boxdot(x,y)=(\alpha x-\alpha+1,\ \alpha y)=(x,y)\boxdot\alpha$$

⑤ אסוציאטיביות בחיבור →

$$((x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2))\oplus(x_3,y_3)=$$

$$(x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)\oplus(x_3,y_3)=(x_1+x_2+x_3-2,\ y_1+y_2+y_3)$$

$$=(x_1,y_1)\oplus(x_2+x_3-1,\ y_2+y_3)=(x_1,y_1)\oplus((x_2,y_2)\oplus(x_3,y_3))$$

⑥ אסוציאטיביות בכפל בסקלר → ~~יהי $\beta,\alpha\in\mathbb{R}$~~

$$\cancel{\alpha\boxdot(\beta\boxdot(x,y))=\alpha\boxdot(\beta x-\beta+1,\ \beta y)\overset{*}{=}\beta\boxdot(\alpha\boxdot(x,y))}$$

אין צורך להוכיח כי הוקטורים הם ממשיים אז קוואפי יש אסוציאטיביות.

$$\cancel{{}^{*}(\alpha(\beta x-\beta+1)-\alpha+2,\ \alpha\beta y)}$$

⑦ קיים איבר ניטרלי → $(1,0)$ הוא האיבר הניטרלי.

⑧ קיים איבר נגדי → עבור $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ נגדיר את האיבר הנגדי כ $(-x_1,-y_2)$. הפעולה לעשות זו כי הפעולות הן מעל $\mathbb{R}$.

⑨ קיים איבר ניטרלי בכפל → $\alpha=0$ ונקבל את האיבר החיבורי.

⑩ קיים איבר הפכי → אין צורך כי הכפל הוא ע"י סקלר.

1. המשך

(ii) דיסטריבוטיביות

$$\alpha \odot \left[(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)\right] = \alpha \odot (x_1+x_2-1,\ y_1+y_2)$$

$$= (\alpha x_1+\alpha x_2-\alpha-\alpha+1,\ \alpha y_1+\alpha y_2) = (\alpha x_1-\alpha+1,\ \alpha y_1) \oplus (\alpha x_2-\alpha+1,\ \alpha y_2)$$

$$= \alpha \odot (x_1,y_1) + \alpha \odot (x_2,y_2)$$

מאחר ואנו כופלים בסקלר בוודאי שקיימת דיסטריבוטיביות גם ברמת סקלרים.

בזו הסתיימה ההוכחה.

$\square$

2. א. הטענה נכונה..

$\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

נראה כי מתקיימים התנאים לקיום תמ"ו:

(1) $W \neq \{0\}$, נכון כי $W=\mathbb{R}^2$

(2) סגירות לחיבור - $\mathbb{R}^2 = \left\{ \binom{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$

מסגירות לחיבור ב-$\mathbb{R}$ נסיק כי חיבור והכפל אלו יניבו סגירות ב-$\mathbb{R}^2$.

(3) סגירות לכפל בסקלר - יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, לכל $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$

מתקיים

$$\alpha \cdot \binom{a}{b} = \binom{\alpha a}{\alpha b} \in \mathbb{R}^2.$$

$\square$

2. ב. (1) הטענה נכונה.

נגדיר $W=A=\{$ הוקטורים המקיימים $f(1)=f(4)\}$. בוודאי כי $A \subseteq V$.

(1) $A \neq \{0\}$, למשל

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x=1 \\ 3 & x=4 \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(2) סגירות לחיבור - אם $f(1)=f(4)$ אז גם חיבור פונקציות יניב עדיין $f(1)=f(4)$, לפי תכונות הקומוטטיביות בחיבור.

(3) סגירות לכפל בסקלר - יהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(1)=f(4) \Rightarrow \alpha f(1) = \alpha f(4)$$

אז כפל של הפונקציה בסקלר לא יפר את סגירות הקבוצה.

2.ב.(ii) הטענה נכונה.

נשים לב $W=\{f(x)=f(-x)\}$ פונ' הזוגיות

ראשית $W\subseteq V$ כי אלה סוג של פונקציות.

① $W\neq\{0\}$, למשל $\cos(x)\in W$

② סגירות לחיבור תהיינה g,f שתי פונקציות המקיימות $f(x)=f(-x)$, כלומר זוגיות.

לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{cases} f(x)=f(-x) \\ g(x)=g(-x) \end{cases} \Rightarrow f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)$$

והתנאי מתקיים.

③ סגירות לכפל בסקלר יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, נכפול את f פונ' זוגית כלשהי בו ונקבל

$$\alpha f(x)=\alpha\cdot f(-x)$$

והתנאי מתקיים.

ב(ii) הטענה אינה נכונה.

נסתור באמצעות דוגמה נגדית:

עבור $W\ni\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\notin W$$

(iii) הטענה נכונה.

נשים לב כי $A=2A^*-A \Leftarrow A=A^*$, כלומר המטריצות סימטריות

ראשית $W\subseteq V$.

① $W\neq\{0\}$, למשל $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

② סגירות לחיבור. חיבור של כל מטריצה סימטרית עם אחרת הוא מטריצה סימטרית.

③ סגירות לכפל בסקלר - המטריצה תשאר סימטרית

שקיון הטענה נכונה.

ראשית, $V \supseteq W$, כי אלו מטריצות לשכן.

① $W\neq\{0\}$, לדוגמה $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ מקיימת הכלה ב-W.

② סגירות לחיבור - תהי M מטריצה המקיימת $ra(A)=1$.
אז A היא מטריצה $\begin{pmatrix}1&a&b&c&d\\0&0&0&0&0\\ \vdots & & & & \vdots\end{pmatrix}$.

חיבור של שתי מטריצות כאלה לא ייעלה אותן דרגה
כי אנו מבצעים רק פעולות אלמנטריות על השורה הראשונה בלבד.
אם $ra(A)=0$ אז זו מטריצת אפסים, אז זה טריוויאלי.

③ סגירות לכפל בסקלר ←
לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $ra(\alpha\cdot A)=ra(A)$.
לכן יש סגירות..

$\square$

ד. (i) $V=F^{2\times 2}$.

$(a+b)^2+(a-b)^2=0 \longrightarrow 0=2a^2+2b^2 \longrightarrow a^2=-b^2$ נתמונן בתנאי:

תנאי זה מתקיים אם"ם $a=b=0$.

לכן $W=\{0\}$, אך הוא אינו תת-מרחב וקטורי של V.

4. (ii) $AP=3P \Leftarrow A=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&3\ddots\end{pmatrix}$ מסדר n.

אין סגירות לחיבור כי לאחר החיבור התנאי לא יתקיים.
אז W אינה ת"מ של V.

4 (iii) עמיר

$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-4\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-5\\-3&5\end{pmatrix}$

וקיבלנו כי $-3\neq 1+5$ בסתירה לתנאי.

אז אין סגירות לחיבור.

3. <u>הוכחה</u>

יהא $v_0 \in V$.

אם $v_0 \in U$, אז מכיוון ש-U הוא תת-מרחב של V מתקיים סגירות לכפל בסקלר. אז אילו כל איבר ב-V שאינו ב-U היה כפולה בסקלר של v_0 אז $U = V$, בסתירה לנתון.

אם $v_0 \in V$, $v_0 \notin U$,

אז אילו כל איבר ב-V שאינו ב-U הוא כפולה בסקלר של v_0 אז היינו מקבלים:

$v = \alpha v_0$ עבור $\alpha \in F$ כלשהו

אז מאחר ונתון כי U הוא תת-מרחב של V קיים לה תת-מרחב משלים. אך תת-מרחב זה ח"ב להיות $\{0\}$ עצמה שלא יהיה V עצמו, מאחר ו- $v_0 \notin U$. זו בסתירה לכך ש- $U \neq \{0\}$.

אז לכל $v_0 \in V$ לא ייתכן שכל איבר ב-V שאינו ב-U הוא כפולה בסקלר של v_0.

∎

4.א. הטענה נכונה.

<u>הוכחה</u>

נתון כי התת-קבוצה לא ריקה וסגורה לחיבור.

עלינו להוכיח כי היא סגורה לכפל בסקלר, על מנת להוכיח שהיא תת-מרחב של V.

מעל השדה Z_p עבור p ראשוני מתקיים

$$\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| a \in Z_p \right\} \subseteq V$$

עבור $\alpha \in Z_p$,

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$^{*}(\alpha a) \bmod p \in Z_p$ לכן קיים סגירות לכפל.

$*\ \alpha (\bmod p) \cdot a (\bmod p) \in Z_p$ מהנתון ומכפלה אלגברית

$\square$

4.ב. הטענה אינה נכונה.

נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

$V = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$

$v + 3u \in W$

$u, v \notin W$

$u = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$

$v = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$

$W \cup \{u, v\} \not\subseteq V$ ולכן אינו תמ"ו.

4.ש. <u>הוכחה</u>

כי המטריצות סימטריות. $V=\left\{ \begin{pmatrix} a & e & f \\ e & b & g \\ f & g & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c,e,f,g \in \mathbb{R} \right\}$

<u>נתבונן בתתי-מרחבים הנ"ל:</u>

$V_1=\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ e & b & g \\ g & f & c \end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ e & 0 & g \\ g & f & c \end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix} 0 & e & f \\ e & 0 & g \\ f & g & 0 \end{pmatrix}$, $V_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \\ f & g & 0 \end{pmatrix}$

כל אחד מתתי-מרחבים האלו שונה ממשנהו, ומוכל בזה שאחריו, ושונה מ-$\{0\}$.

□

4.ד. $\boxed{\text{הוכחה}}$

לפי הנתון $V=V_1+V_2+V_3$ ו-

$$\begin{cases} V_1 \cap V_2=\{0\} \\ V_2\cap V_3=\{0\} \\ V_1\cap V_3=\{0\} \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} V_1\cap V_2\cap V_3=\{0\}$$

נגדיר $V'=V_1+V_2$ מאחר ו-(1) מתקיים אז $V'\cap V_3=\{0\}$

לסיכום, מתקיים $V=V'+V_3$ ו- $V'\cap V_3=\{0\}$ אז לפי השאלה סכום ישר כל איבר ב-V ניתן לרשום בצורה אחידה. בפרט בצורה $V=V'+V_3=V_1+V_2+V_3$

כאשר $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$ ו- $v_3 \in V_3$.

□

4.ה. <u>הוכחה</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה אינסופי.
מאחר והמרחב אינו ניתן לפרשו ע"י איבר בודד, אז קיימים לפחות שני איברים שונים הפורשים אותו.

נסמן אותם $u\neq v$.

אז $Sp\{u,v\}=\alpha_1 u+\alpha_2 v$ עבור α_1,α_2 בשדה אינסופי לבחור.

אז אם נקבע את האחד נקבל ∞ אפשרויות לבחירת (צירופים לינאריים), כל אחד מהם הוא תת-מרחב כי מתקיים סגירות לחיבור וכפל וכולם מכילים $\{0\}$.
לכן קיימים ∞ תתי-מרחבים ל-V.

□