תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 7

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.

$$\varphi_X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{it(a+nb)}p_n.$$

$\varphi_X(0)=1$ תמיד. מעבר לזה:

$$|\varphi_X(t)|=1 \Leftrightarrow [E(\cos(tX))]^2+[E(\sin\,(tX))]^2=1.$$

אבל לפי אי-שויון של ינסן

$$[E(\cos(tX))]^2+[E(\sin\,(tX))]^2\le E[\cos^2(tX)+\sin\,^2(tX)]=1,$$

והשויון אפשרי רק אם

$$P(\cos(tX)=\gamma_1,\sin\,(tX)=\gamma_2)=1 \Leftrightarrow\;\; P(tX=t_0+2\pi k,k\in\mathbb{N})=1,$$

עבור מספרים מסוימים $t_0\in\mathbb{R}$, $\gamma_1,\gamma_2\in[0,1]$, $\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$.
לכן, אם (אבל שימו לב שזה לא נתון) $p_n>0$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אזי

$$|\varphi_X(t)|=1,t\ne 0\Leftrightarrow b=\frac{2\pi n_0}{t},$$

עבור מספר מסוים $n_0\in\mathbb{N}$.

הפונקציה יכולה להיות מחזורית. דוגמה: $a=b=2\pi$.

הפונקציה יכולה להיות לא מחזורית. דוגמה: $a=\sqrt{2},b=1,p_n=2^{-n-1}$. במקרה הזה:

$$\varphi_X(t)=\frac{e^{it\sqrt{2}}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{itn}2^{-n}=\frac{e^{it\sqrt{2}}}{2}\frac{1}{1-e^{it}/2}=\frac{e^{it\sqrt{2}}}{2-e^{it}}.$$

אילו הפונקציה הזו היתה מחזורית עם מחזור α הינו מקבלים "זהות":

$$\frac{1}{2-e^{it}} = \frac{e^{i\alpha\sqrt{2}}}{2-e^{it}e^{i\alpha}}, \quad \forall\, t.$$

ה"זהות" האחרונה היא משוואה לינארית עבור e^{it} שהפתרון שלה לא תלוי ב -t.
הגענו לסתירה.

באופן כללי: אם קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\varphi_X(t+\alpha) = \varphi_X(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

אזי

$$\varphi_X(-\alpha) = \varphi_X(-\alpha+\alpha) = 1.$$

אם נניח כי $p_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אז זה גורר

$$a = 2\pi n_1,\ b = \frac{2\pi n_2}{\alpha}, \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

קל גם לראות כי (2) גורר (1). זאת אומרת שהפונקציה מחזורית אם ורק אם $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Z}$.

<u>תרגיל 2</u>.
בגלל הקמירות

$$g(y) - g(x) \geq g'(x)(y-x), \qquad \forall\, x, y.$$

לכן:

$$g(X) - g\left(\frac{\mu}{3}\right) \geq g'\left(\frac{\mu}{3}\right)\left(X - \frac{\mu}{3}\right),$$

$$E(g(X)) \geq g\left(\frac{\mu}{3}\right) + g'\left(\frac{\mu}{3}\right)\left(E(X) - \frac{\mu}{3}\right) = g\left(\frac{\mu}{3}\right) + \frac{2\mu}{3}g'\left(\frac{\mu}{3}\right).$$

<u>תרגיל 3</u>.
אין סיכוי:

$$P(X - \mu_X \geq 4\sigma_X) \leq P(|X - \mu_X| \geq 4\sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{16\sigma_X^2} < 0.3.$$

<u>תרגיל 4</u>.

(א)

$$\mathrm{VAR}\ (1-4|X|) = 16\mathrm{VAR}\ (X) = 16\sigma^2.$$

(ב)

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} 4x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} 4(\mu+t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-t^2/2\sigma^2}dt \\ &= \int_{-\sigma}^{\sigma} 4(\mu+t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-t^2/2\sigma^2}dt = \int_{-1}^{1} 4(\mu+y\sigma)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy = \\ &= 4\mu\left(\Phi(1)-\Phi(-1)\right) + \sigma\int_{-1}^{1} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy = 4\mu\left(2\Phi(1)-1\right). \end{aligned}$$

האינטגרל האחרון שווה לאפס כי הפונקציה היא אי-זוגית.

<u>תרגיל 5</u>.

כידוע, $g_X(0)=1$, $g_X^{(n)}(0)=E(X^n)$, $\mathrm{VAR}\ (X) = E(X^2)-[E(x)]^2$. **לכן:**

Case A: $E(X)=1,\ E(X^2)=2,\ \mathrm{VAR}\ (X)=1$

Case B: $E(X)=6,\ E(X^2)=38,\ \mathrm{VAR}\ (X)=2$

Case C: $C=8,\ E(X)=3/2,\ E(X^2)=3,\ \mathrm{VAR}\ (X)=3/4$

<u>תרגיל 6</u>. הוכחנו בתרגולים כי $F_X(X)\sim U(0,1)$ ולכן גם $Y\sim U(0,1)$.
הוכחה דרך פונקציות אופיניות:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= E\left(e^{itY}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it-itF_X(x)}dF_X(x) = \int_0^1 e^{it-itu}du \\ &= (v=1-u)\ \int_0^1 e^{itv}dv = \varphi_W(t), \end{aligned}$$

כאשר $W\sim U(0,1)$.

<u>תרגיל 7</u>.

$$P(|X|\ge a) \le \frac{1+a^r}{a^r}E\left(\frac{|X|^r}{1+|X|^r}\right).$$

זהו אי-שוויון של צ'בישב $P(Y \geq a) \leq E(g(Y))/g(a)$ עבור מ"א $Y = |X|$ ופונקציה $g(x) = x^r/(1+x^r)$. כמובן, יש לבדוק שתנאים של המשפט מתקיימים.