קומבינטוריקה – הרצאה #8 – 19/05/2016

משפט החתונה

הגדרה: בעיית החתונה: נתונה קבוצה A של m בחורים, ונתונה קב' B של n בחורות. לכל בחור $x \in A$ נתונה תת קבוצה $N(x) \subseteq B$ של בחורות שהוא מכיר. אנחנו מעוניינים להתאים לכל בחור $x \in A$ בחורה שהוא מכיר כדי שהוא יתחתן איתה. כמובן שלבחורים שונים צריכות להתאים בחורות שונות. התאמה כזו תקרא **זיווג של הבחורים**.

השאלה היא: מתי זה אפשרי? ברור שתנאי הכרחי הוא ש-$N(x) \neq \emptyset$ לכל $x \in A$. כלומר שכל בחור מכיר לפחות בחורה אחת. כמו כן, תנאי הכרחי הוא שלכל שני בחורים $x, y \in A$ יתקיים $|N(x) \cup N(y)| \geq 2$. באופן יותר כללי, נכתוב לכל $S \subseteq A$:

$$N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x)$$

אז, תנאי הכרחי לקיים של הבחורים הוא שלכל תת-קבוצה $S \subseteq A$ יתקיים:

$$|N(S)| \geq |S|$$

משפט החתונה (Hall): תהי נתונה קב' A של m בחורים, ותהי נתונה קב' B של n בחורות, ולכל בחורה תהי נתונה תת קב' $N(x) \subseteq B$ של בחורות אותן x מכיר. תנאי הכרחי ומספיק לקיום זיווג של הבחורים (כלומר התאמה לכל בחור של בחורה שונה שהוא מכיר) הוא שלכל תת קב' $S \subseteq A$, יתקיים:

$$|N(S)| \geq |S|$$

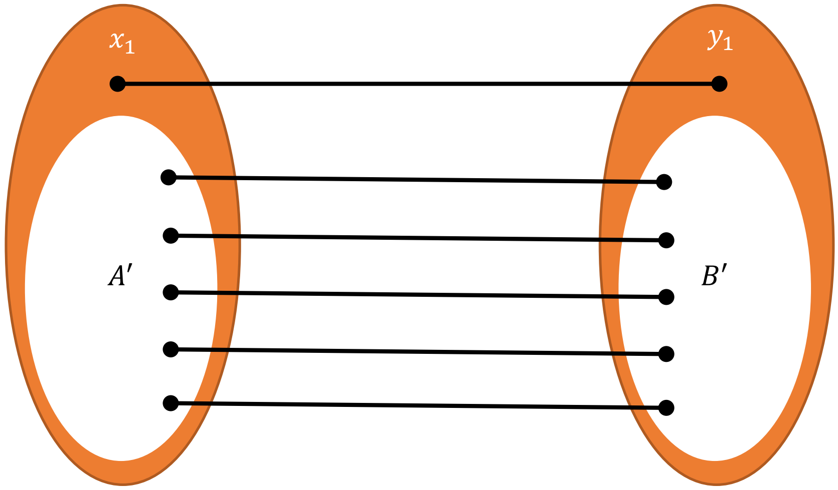
הוכחה: הכיוון הקל – התנאי הכרחי:

נניח שקיים זיווג של הבחורים. תהי $S \subseteq A$. אז הקב' $N(S)$ בוודאי מכילה את בנות הזוג של הבחורים ב-S, ולכן גודלה הוא לפחות $|S|$. כלומר, $|N(S)| \geq |S|$ כנדרש בתנאי.

הכיוון הקשה – התנאי מספיק:

נניח שתנאי המשפט מתקיים, עלינו להראות שקיים זיווג של הבחורים. נוכיח את זה באינדוקציה על מס' הבחורים m.
בסיס: $m = 1$. יש בחור אחד. לפי תנאי המשפט, הוא מכיר לפחות בחורה אחת. נבחר אחת כזו ונחתן אותם. צעד, $m \geq 2$. אנחנו מתבוננים בבעיית חתונה עם m בחורים המקיימת את תנאי המשפט. הנחת האינדוקציה אומרת שלכל בעיית חתונה עם פחות מ-m בחורים המקיימת את תנאי המשפט, קיים זיווג של הבחורים. עלינו למצוא זיווג של הבחורים בבעיה הנתונה עם m בחורים. נחלק את המשך ההוכחה לשני מקרים.

מקרה ראשון: לכל $\emptyset \neq S \subsetneq A$ מתקיים $|N(S)| > |S|$. במקרה זה, מבחר באופן שרירותי בחור $x_1 \in A$. לפי תנאי המשפט $N(x_1) \neq \emptyset$ ונבחר באופן שרירותי $y_1 \in N(x_1)$ ונחתן אותם.

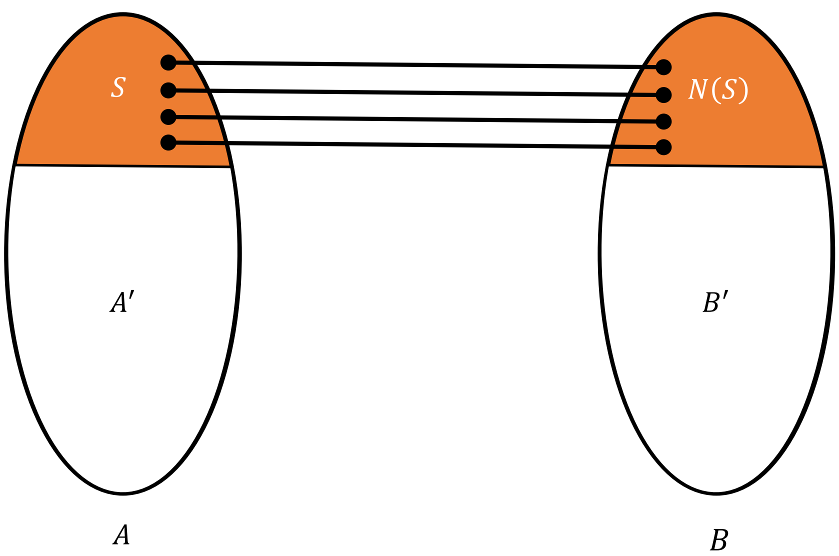


נתבונן בבעיית החתונה הנותרת. כלומר:

$$A' = A \setminus \{x_1\}, \qquad B' = B \setminus \{y_1\}$$

לכל $x \in A'$, $N'(x) = N(x) \setminus \{y_1\}$. נשים לב שלכל $\emptyset \neq S \subseteq A'$ מתקיים $N'(S) = N(S) \setminus \{y_1\}$. לכן $|N'(S)| \geq |N(S)| - 1 \geq |S|$ כאשר המעבר האחרון הוא לפי הנחת האינדוקציה.
כלומר, תנאי המשפט מתקיים לבעיה עם A', B', N' ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש זיווג של הבחורים בבעיה זו. יחד עם הזוג $\{x_1, y_1\}$ זה נותן זיווג של הבחורים בבעיה המקורית.

מקרה שני: קיימת $A \subsetneq S \neq \emptyset$ שעבורה $|N(S)| = |S|$. במקרה זה, נתבונן בנפרד על שתי בעיות חתונה. בראשונה, משתתפים הבחורים ב-S והבחורות ב-$N(S)$. מכיוון שתנאי המשפט התקיים בבעיה המקורית, הוא מתקיים גם בבעיה זו.

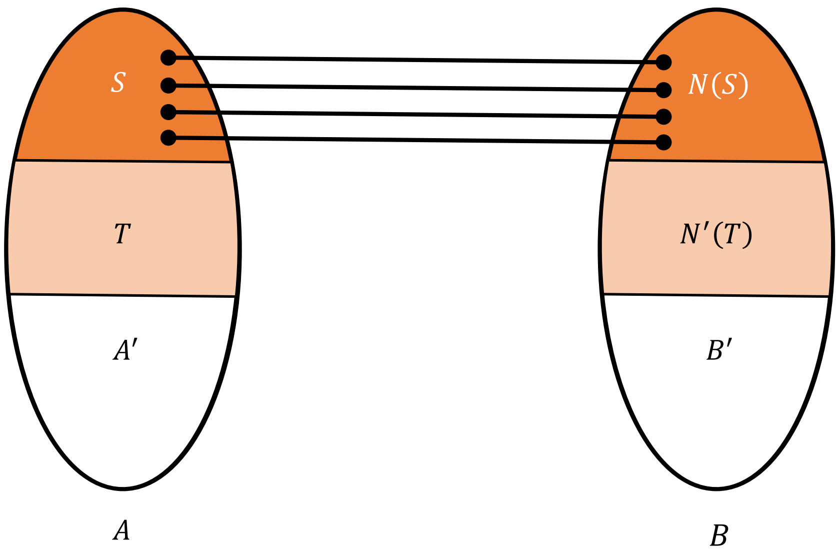


מכיוון ש-$S \subsetneq A$, אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה עבור בעיה זו, ולהסיק שקיים זיווג של הבחורים ב-S. בבעיה השניה, משתתפים הבחורים והבחורות הנותרים.

$$A' = A \setminus S, \qquad B' = B = \setminus N(S)$$

לכל $x \in A'$: $N'(x) = N(x) \setminus N(S)$. אם נראה שתנאי המשפט מתקיים עבור בעיה זו, אז מכיוון ש-$|A'| < |A|$, נוכל להשתמש בהנחת האינדוקציה עבור בעיה זו, ולהסיק שקיים זיווג של הבחורים ב-A' יחד עם הזיווג של הבחורים ב-S שמצאנו קודם, נקבל זיווג של כל הבחורים ב-A כנדרש. לכן, נותר להראות שלכל תת קב' $T \subseteq A'$ מתקיים:

$$|N'(T)| \geq |T|$$



נניח בדרך השלילה שעבור $T \subseteq A'$ מסוימת מתקיים $|N'(T)| < |T|$. נתבונן כעת על $A \supseteq S \cup T$, אז:

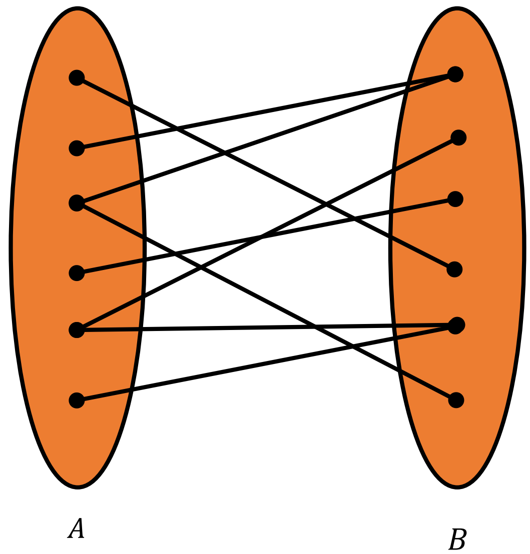
$$N(S \cup T) = N(S) \cup \underbrace{N'(T)}_{N(T) \setminus N(S)}$$

לכן:

$$|N(S \cup T)| = |N(T)| + |N'(T)| < |S| + |T| = |S \cup T|$$

וקיבלנו סתירה לקיים תנאי המשפט בבעיה המקורית עבור קב' הבחורים $S \cup T$.

הגדרה: גרף $G = (V, E)$ נקרא **דו-צדדי** אם קיימת חלוקה $V = A \cup B$ של קב' הקדקודים כך שלכל צלע ב-E יש קצה אחד ב-A וקצה אחד ב-B. במקרה זה נכתוב $G = (A, B, E)$.

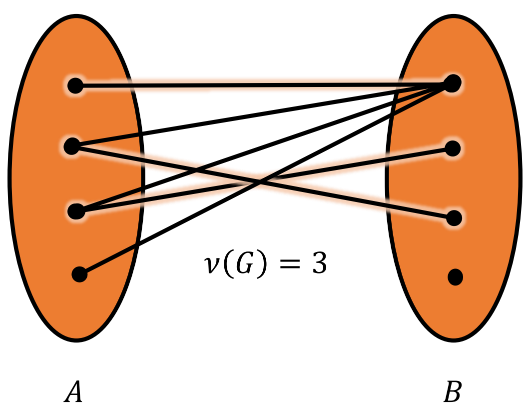


הערה: במונחים אלה אפשר לתאר על בעיית חתונה ע"י גרף דו צדדי $G = (A, B, E)$, כאשר הקדקודים ב-A מייצגים את הבחורים, הקדקודים ב-B מייצגים את הבחורות, ושני קדקודים מחוברים בצע אם ורק אם הבחור המיוצג ע"י קדקוד ב-A מכיר את הבחורה ע"י הקדקוד ב-B.
הסימון $N(x)$ לקב' הבחורות ש-x מכיר מתלכד עם בסימון $N(x)$ לקב' השכנים של x בגרף G. כמו כן, נכניס את הסימון לגרפים:

$$N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x)$$

הגדרה: קבוצה M של צלעות בגרף $G = (V, E)$ נקראת **זיווג** אם לכל שתי צלעות בגרף M אין קדקוד משותף אנחנו מסמנים ב-$\nu(G)$ את **מספר הזיווג** של G. כלומר, בגודל המקס' של זיווג בגרף G.

הערה: קל להראות שבכל גרף דו צדדי $G = (A, B, E)$ מתקיים:
$$\nu(G) \leq \min\{|A|, |B|\}$$



הערה: כעת נוכל לנסח מחדש באופן שקול את משפט החתונה כמשפט על גרפים דו צדדיים.

משפט Hall: יהי $G = (A, B, E)$ גרף דו צדדי, אזי $\nu(G) = |A|$ אם ורק אם לכל $S \subseteq A$, $|N(S)| \geq |S|$.