אינטרגל לא מסוים

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- הגדרה: $F(x)$ נקראת פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע I אם לכל $x \in I$ מתקיים ש־ $F'(x) = f(x)$.
- משפט: תהי F פונקציה קדומה של f בקטע I. אזי אוסף כל הפונקציות הקדומות של f בקטע I הוא

$$\{F(x) + c \,:\, c \in \mathbb{R}\}$$

ומסומן ב־

$$\int f(x)\,dx$$

נחדד: זהו אוסף של פונקציות הנבדלות אחת מהשניה בקבוע!

- לא לכל פונקציה יש פונקציה קדומה: מדרגה (הביסייד). מתברר שלפונקציה רציפה יש פונקציה קדומה (בהמשך).
- כללים ־ לינאריות:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\; a \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

זהירות: צריך להיזכר שכאן זהו חיבור ושיוויון בין משפחות של פונקציות. בחירת נציג משתי משפחות נותן נציג מהמשפחה השלישית.

- נוסחה שימושית:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

- אינטגרציה בחלקים:

$$(uv)' = u'v + uv' \Longrightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

- פונקציה רציונלית היא מנה של פולינומים:

$$\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}$$

בהנחה ש־ $q\left(x\right)\neq0$.

  – אם $deg\left(q\right)\leq deg\left(p\right)$ מחלקים
  – אם $deg\left(q\right)>deg\left(p\right)$ משתמשים לפי המקרה ב־
    * פירוק לשברים חלקיים
    * השלמה לריבוע
    * השלמה לנגזרת

- שיטת ההצבה: נניח שלפונקציה $f\left(x\right)$ יש פונקציה קדומה בקטע I. תהי $\phi:J\rightarrow I$, $\phi\left(t\right)=x$, גזירה **(לאו דווקא הפיכה)**. אזי:

$$\int f\left(x\right)dx=\int f\left(\phi\left(t\right)\right)\cdot\phi'\left(t\right)dt$$

- הצבה טריגונומטרית:

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\sin\left(x\right)=\frac{2t}{1+t^{2}},\qquad\cos x=\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}},\qquad\tan x=\frac{2t}{1-t^{2}}$$

$$x=2\arctan t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^{2}}$$

תרגילים:

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int\left(3x^{2}+6x-2\right)dx$$

$$\int\left(1+\sqrt[3]{x^{2}}\right)^{2}dx$$

$$\int e^{\sin x}\cos xdx$$

$$\int\frac{x^{2}+1}{x^{3}+3x+5}dx$$

<u>פתרון:</u>

על ידי אינטגרציה מידית נקבל:

$$\int \left(3x^2+6x-2\right)dx = x^3+3x^2-2x+C$$

$$\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx = \int 1+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}dx = x+2\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}+C$$

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x}+C$$

על ידי שימוש בנוסחה:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$$

ובחירת $f(x)=x^3+3x+5$ נקבל:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+5}dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x+5\right)+C$$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$\int \tan^2(x)\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x},\ n\geq 1$$

<u>פתרון:</u>

מכיוון ש־ $\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ מתקיים:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \tan x - x + C$$

עבור האינטגרל $\int \frac{dx}{\cos^n x}$: חישבתם בהרצאה עבור $n=1$, וכרגע חישבנו עבור $n=2$. עבור n טבעי כלשהו נמצא נוסחה ריקורסיבית. הטריק כאן הוא לרשום את האינטגרל בצורה הבאה:

$$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\cos x}{\cos^{n+1} x}dx$$

כעת נשתמש באינטגרציה בחלקים: ניקח $u=\cos^{-n-1}x$ ו־ $v'=\cos x$ ונקבל:

$$I_n=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+2}x}dx=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)\left(I_{n+2}-I_n\right)$$

נסדר את הביטוי ונקבל:

$$I_{n+2}=\frac{n}{n+1}I_n+\frac{1}{n+1}\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x},\ n\geq 0$$

כאשר I_1,I_2 ידועים.

3. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=x+0.5e^{2x}-e^x+C$$

$$\int\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}},\ \alpha\neq 1$$

$$\int\frac{dx}{x\ln x}$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

<u>פתרון:</u>

את $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ מחשבים על ידי ההצבה: $t=e^x>0$ ואז $dt=tdx$ ולכן

$$\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{t^3+1}{t+1}\frac{dt}{t}=\int\left(t^3+1\right)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\int t^2+\frac{1}{t}dt-\int t^2-t+1dt=$$

$$=\int\frac{1}{t}dt+\int t-1dt=\ln t+\frac{t^2}{2}-t+C=x+\frac{e^{2x}}{2}-e^x+C$$

עבור $\int\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ כדאי מאוד לקחת $t=\ln x$ כי אנחנו מזהים את $dt=\frac{dx}{x}$ בתוך האינטגרנד ומכאן "קל" לנחש:

$$\int\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}=\frac{\left(lnx\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C$$

האינטגרל $\int\frac{dx}{x\ln x}$ מידי אחרי שחושבים קצת ומגלים ש־

$$\left(\ln\ln x\right)'=\frac{1}{x\ln x}$$

כדי לחשב $\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ נציב $t=\sqrt{x+1}$. אפשר גם לשים לב ש־

$$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int\sqrt{x+1}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

ומכאן זה קל.

4. חשבו:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2},\, a\in\mathbb{R}_+$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},\, a\in\mathbb{R}_+$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\, a\in\mathbb{R}_+,\, x\in(-a,a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\, a\in\mathbb{R}_+,\, x>a$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

<u>פתרון:</u>

יש דמיון בין האינטגרלים השונים וגם יש דמיון באיך לחשב אותם. צריך לשתמש בין היתר בנוסחאות:

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

נפתור את האינטגרל הראשון שהוא מידי:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

עבור האינטגרל השני נבצע החלפת משתנים: $x=a\sinh t$ ואז $dx=a\cosh t dt$ וניזכר כי $1+\sinh^2 t=\cosh^2 t$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int \frac{a\cosh t dt}{a\sqrt{1+\sinh^2 t}}=t+C=arcsinh\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

עבור האינטגרל השלישי נציב: $x=a\sin t$ ואז $dx=a\cos t dt$ וניזכר כי $1-\sin^2 t=\cos^2 t$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a\cos t dt}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}=t+C=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

האינטגרל הרביעי מחושב על ידי ההצבה: $x=a\cos ht$ באופן דומה.

האינטגרל האחרון הוא מידי:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\sqrt{x^2+a^2}+C$$

5. לכל $p>0$ ממשי, חשבו את:

$$I\left(p\right)=\int x^{p-1}e^{-x}dx$$

<u>פתרון:</u> על ידי אינטגרציה בחלקים.

כאן כדאי לקחת: $u=e^{-x},\, v^{'}=x^{p-1}$ ואז

$$I\left(p\right)=\frac{e^{-x}x^{p}}{p}+\frac{1}{p}I\left(p+1\right)$$

6. יהיו a,α מספרים ממשיים כך ש $a\neq0$, ויהי $n>1$ מספר טבעי. חשבו את:

$$\int\frac{dx}{x-\alpha}$$

$$\int\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{n}}$$

$$\int\frac{xdx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}$$

<u>פתרון:</u>

האינטגרל $\int\frac{dx}{x-\alpha}$מידי:

$$\int\frac{dx}{x-\alpha}=\ln\left|x-\alpha\right|+C$$

האינטגרל $\int\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{n}}$מידי עבור $n>1$:

$$\int\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^{n}}=\frac{\left(x-\alpha\right)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

האינטגרל $\int\frac{xdx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}$ מידי עבור $n>1$:

$$\int\frac{xdx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}=\frac{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{-n+1}}{2\left(-n+1\right)}+C$$

כדי לחשב $\int\frac{dx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}$ יש טריק שראיתם בהרצאה: נשתמש באינטגרציה בחלקים כאשר $u=\left(x^{2}+a^{2}\right)^{-n}$ ו־ $v^{'}=1$ ונקבל:

$$\int\frac{dx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}=\frac{x}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n}}+2n\int\frac{x^{2}dx}{\left(x^{2}+a^{2}\right)^{n+1}}$$

נטפל במחובר השני באגף ימין:

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

ומכאן אם נסמן $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ נקבל:

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\, I_n$$

I_1 חושב בתרגיל קודם (אינטגרל כמעט מידי), וזה מסיים.

7. יהיו A, B, p, q מספרים ממשיים ומתקיים: $p^2-4q<0$. יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. חשבו את:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$$

<u>פתרון:</u>

מוטיבציה:

כאן אנחנו מעוניינים להבין איך מחשבים אינטגרל של פונקציה רציונלית. אחרי שמבצעים פירוק לשברים חלקיים מגיעים לאינטגרלים מהסוג:

$$\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^n}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx,\ p^2-4q<0$$

את הסוג הראשון קל מאוד לתקוף לפי התרגיל הקודם, את השני צריך קצת לעבוד.

חקירת $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$: הטריק הוא לרשום $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ ולבצע החלפת משתנים $t = x+\frac{p}{2}$ ולקבל:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(t^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}dt$$

ומההנחה ש- $p^2-4q<0$ נסמן $a = q-\frac{p^2}{4} > 0$ וקיבלנו:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= A\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

ובזה אנחנו כבר טיפלנו קודם.

הערה: במקרה של $n=1$ ניתן לפתור עם השלמה לנגזרת כפי שלמדתם בהרצאה

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{q-\frac{p^2}{4}}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2}$$

וזה כבר מידי.

8. חשבו את:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$$

<u>פתרון:</u>

נשתמש בהצבה טריגונומטרית:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{1 + (1+t)^2} = \arctan\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

9. השמתשו בזהות:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

כדי לחשב את האינטגרל הלא מסוים:

$$\int 2\cos 3x \ \sin 2x \, dx$$

<u>פתרון:</u>

על פי הנתון:

$$2\cos 3x \sin 2x = \sin 5x - \sin x$$

לכן

$$\int 2\cos 3x \sin 2x = -\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x + C$$

חשבו תוך שימוש בזהויות טריגונומטריות את

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

<u>פתרון:</u>

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\sin^2 2x - \cos 2x \sin^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \sin^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) - \frac{1}{8}\frac{\sin^3 2x}{3 \cdot 2} + C$$

10. נתונה פונקציה $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה. ויהי $a\neq 1$ מספר חיובי ממשי. הוכיחו ש־

$$\int a^{u(x)}\cdot u^{'}\left(x\right)dx=\frac{a^{u(x)}}{\ln a}+C$$

<u>פתרון:</u>

נגזור את $\frac{a^{u(x)}}{\ln a}$ ונקבל:

$$\left[\frac{a^{u(x)}}{\ln a}\right]^{'}=\frac{1}{\ln a}\cdot a^{u(x)}u^{'}\left(x\right)\ln a$$

וזה מסיים.

11. א. בתרגיל 4 מצאנו ש־ $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=arcsinhx+C$. חשבו את אותו אינטגרל בעזרת ההצבה

$$0<t=x+\sqrt{1+x^2}$$

ב. הוכיחו:

$$arcsinhx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ x\in\mathbb{R}$$

<u>פתרון:</u>

קל לראות ש־ $dt=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ומכאן $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln t+C=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. לכן קיים C קבוע ממשי כך ש־

$arcsinhx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$, נציב $x=0$ וזה מסיים.

הערה: מי שלוקח בעתיד קורס "פונקציות מרוכבות" הוא ילמד את הזהות באופן יותר רחב.

באופן דומה ניתן לחשב $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x>1$ בשתי דרכים

- דרך א: שימו לב ש־ $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ הציבו $t=1-\frac{1}{x^2}$ ותקבלו $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C$
- דרך ב: הציבו $x=\cosh t$ ותקבלו $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=tanh\left(arcoshx\right)+C$

על ידי לקיחת $x=1$ (ליתר דיוק $x\to1^+$) נקבל:

$$tanh\left(arcoshx\right)=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},\ x>1$$