משוואות פרידות

מוטיבציה

נניח שנתונה לנו משפחה של פונקציות מהצורה המיוחדת $G(y) = F(x) + c$

נחפש את המד"ר של המשפחה. אם $y(x)$ במשפחה אזי $G\big(y(x)\big) = F(x) + c$

נגזור $G'\big(y(x)\big)y'(x) = F'(x)$

נחלק ונקבל $y'(x) = \frac{F'(x)}{G'\big(y(x)\big)}$

כלומר $y' = \frac{F'(x)}{G'(y)} = F'(x) \cdot \frac{1}{G'(y)}$

סוף מוטיבציה

<u>הגדרה:</u> מד"ר מהצורה

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

נקראת <u>מד"ר פרידה</u> או הפרדת משתנים.

נפתור את המד"ר: נניח כי $y(x)$ פתרון. כלומר $y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big)$

נחלק ב־$g(y(x))$ ונקבל $\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = f(x)$

נעשה אינטגרל על המשוואה ונקבל $\int \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)}dx = \int f(x)dx + c$

האינטגרל $\int f(x)dx$ הוא רגיל ונסמנו ע"י $F(x)$. האינטגרל $\int \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)}dx$ אינו אינטגרל רגיל שכן הוא מכיל את הפונקציה הנעלמת. נעשה הצבה $y = y(x)$ אזי $dy = y'(x)dx$ ונקבל

$$\int \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)}dx = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) = G\big(y(x)\big)$$

כאשר פה השתמשנו בסימון $G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$. כלומר קיבלנו שהפתרון $y(x)$ מקיים

$$G(y) = F(x) + c$$

או באופן אחר

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

זהו הפתרון עם הפרמטר. אבל, בתהליך חילקנו בביטוי שיכול להיות אפס. בשביל לטפל בזה, נשים לב כי אם y_0 הוא מספר עבורו $g(y_0) = 0$ אז הפונקציה $y(x) = y_0$

הינה פתרון של המד"ר. נראה זאת: במקרה זה $y'(x) = 0$

נשים לב כי $g\big(y(x)\big) = g(y_0) = 0$

ואז $f(x)g\big(y(x)\big) = f(x)g(y_0) = f(x) \cdot 0 = 0$

ולכן $y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big)$

לסיכום, בשביל לפתור מד"ר פרידה, צריך למצוא את השורשים של $g(y)$. כל שורש מספק פתרון הנקרא <u>פתרון סינגולרי</u> או <u>פתרון קבוע</u>. בנוסף, צריך למצוא את האינטגרלים

$$\int \frac{dy}{g(y)}, \quad \int f(x)dx$$

ואז הפתרונות הם

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

ביחד עם הפתרונות הסינגולרים או קבועים.

<u>תרגיל:</u> $y' = -\frac{(x^2+1)(y^2-1)}{xy}$

<u>פתרון:</u> במקרה שלנו הפונקציות הן

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{x^2+1}{x} \\ g(y) &= \frac{y^2-1}{y}. \end{aligned}$$

נמצא פתרונות סינגולריים:

$$\begin{aligned} &g(y) = 0 \\ &\frac{y^2-1}{y} = 0 \\ &y \equiv \pm 1. \end{aligned}$$

נמצא כעת את הפתרון הכללי (הפתרון עם הפרמטר):

$$\begin{aligned} &\int f(x)dx = \int -\frac{x^2+1}{x}dx = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| \\ &\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{y}{y^2-1}dy = \frac{1}{2}\ln|y^2-1| \\ &\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + c \end{aligned}$$

במקרה זה אפשר וסביר לחלץ את y כפונקציה של x

$$\begin{aligned}
&\ln|y^2-1| = -x^2 - \ln x^2 + c \\
&|y^2-1| = \frac{e^{-x^2}}{x^2}e^c \\
&y^2-1 = \pm e^c\frac{e^{-x^2}}{x^2} = c_1\frac{e^{-x^2}}{x^2} \qquad c_1 \neq 0 \\
&y = \pm\sqrt{c_1\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1} \qquad c_1 \neq 0\ .
\end{aligned}$$

צריך להוסיף את הפתרונות הקבועים שמצאנו

$$y \equiv \pm 1$$

או שאפשר לרשום הכל בבת אחת

$$y = \pm\sqrt{c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1}$$

שימו לב שכיוון למד"ר יש בעיה ב־ $x=0$ אזי הפתרונות, כולל הפתרונות הקבועים, אינם מוגדרים ב־ $x=0$. כלומר הפתרונות הם

$y(x)=1$	$x>0$
$y(x)=1$	$x<0$
$y(x)=-1$	$x<0$
$y(x)=-1$	$x<0$
$y(x)=\pm\sqrt{c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1}$	$c>0 \quad x>0$
$y(x)=\pm\sqrt{c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1}$	$c>0 \quad x<0$
$y(x)=\pm\sqrt{c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1}$	$c<0 \quad x>0 \quad c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1>0$
$y(x)=\pm\sqrt{c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1}$	$c<0 \quad x<0 \quad c\frac{e^{-x^2}}{x^2}+1>0$

תרגיל: $y(0) = -1$ $\quad y' = \frac{3x^2+4x+2}{2y-2}$

פתרון: קודם נחפש פתרונות קבועים או סינגולריים: אנו מחפשים מספרים y עבורם $\frac{1}{2y-2} = 0$ ובמקרה זה אין כאלה ולכן אין פתרונות סינגולריים. נחפש את הפתרון הכללי:

$$\begin{aligned}
&\int f(x)dx = \int (3x^2+4x+2)dx = x^3+2x^2+2x \\
&\int \frac{1}{g(y)}dy = \int (2y-2)\ dy = y^2-2y \\
&y^2-2y = x^3+2x^2+2x+c
\end{aligned}$$

נחפש פתרון או פתרונות המתאימים לתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned}
&y(0) = -1 \\
&y(0)^2 - 2y(0) = 0^3 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + c \\
&(-1)^2 - 2\cdot(-1) = 0^3 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + c \\
&c = 3
\end{aligned}$$

ולכן הפתרון או פתרונות המקיימים את תנאי ההתחלה הוא, או הם

$$\begin{aligned}
&y^2 - 2y - (x^3+2x^2+2x+3) = 0 \\
&y(x) = \frac{2 \pm \sqrt{4+4x^3+8x^2+8x+12}}{2} = \\
= \ \ &1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}
\end{aligned}$$

ולכאורה קיבלנו שני פתרונות. נחזור לתנאי ההתחלה ונקבל

$$-1 = y(0) = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2$$

ואנו רואים כי צריך לקחת את סימן המינוס. לכן הפתרון הוא

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}.$$

תחום ההגדרה הוא הקטע המקסימלי המכיל את $x=0$ ועבורו $x^3+2x^2+2x+4>0$.
כיוון ש־ $x^3+2x^2+2x+4 = (x+2)(x^2+2)$
אזי תחום ההגדרה הוא $-2 < x$.
תזכורת: תחום הגדרה של פתרון הוא הקטע הכי גדול שמכיל את החלק ה־x של תנאי ההתחלה. במקרה שלנו הקטע הכי גדול שמכיל את 0.

תרגיל: $y' - 2y = y^2 - 3$

פתרון: נרשום את המד"ר כ־ $y' = y^2 + 2y - 2 = (y-1)(y+3)$

קודם נחפש פתרונות קבועים או סינגולריים: אנו מחפשים מספרים y עבורם $y^2 + 2y - 3 = 0$ כלומר $(y+3)(y-1) = 0$ ולכן $y \equiv -3,\ y \equiv 1$ פתרונות קבועים או סינגולריים. נחפש את הפתרון הכללי:

$$\int f(x)dx = \int 1dx = x + c$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{y^2 + 2y - 3} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+3}\right| + c$$
$$\ln\left|\frac{y-1}{y+3}\right| = 4x + c$$

וקיבלנו את הפתרון הכללי בצורה סתומה. במקרה זה אפשר וסביר לחפש פתרון בצורה מפורשת:

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+3}\right| = 4x + c$$
$$\left|\frac{y-1}{y+3}\right| = e^{4x}e^{c}$$
$$\frac{y-1}{y+3} = \pm e^{c}e^{4x} = c_1e^{4x} \qquad c_1 \neq 0$$
$$y - 1 = c_1e^{4x}y + 3c_1e^{4x} \qquad c_1 \neq 0$$
$$y(1 - c_1e^{4x}) = 3c_1e^{4x} + 1 \qquad c_1 \neq 0$$
$$y = \frac{3c_1e^{4x} + 1}{1 - c_1e^{4x}} \qquad c_1 \neq 0$$
$$y_1 \equiv -3 \quad y_2 \equiv 1$$

נשים לב כי $c_1 = 0$ נותן לנו את הפתרון $y \equiv 1$ ולכן נוכל לרשום

$$y = \frac{3ce^{4x} + 1}{1 - ce^{4x}}$$
$$y_1 \equiv -3$$

תרגיל: (דוגמא פיזיקלית) הטמפרטורה של גוף משתנה פרופורציונית להפרש הטמפרטורות של הגוף ושל הסביבה. בעוד כמה זמן תרד טמפרטורה של גוף המחומם ל־100 מעלות תרד ל־30 מעלות אם טמפרטורת הסביבה היא 20 מעלות ונתון כי אחרי 20 דקות הגוף התקרר ל־60 מעלות?

פתרון: נסמן ע"י $T(t)$ את הטמפרטורה של הגוף כפונקציה של הזמן כאשר הזמן הוא בדקות. אזי $T'(t)=\gamma\big(T(t)-20\big)$

כאשר $\gamma<0$ קבוע הפרופורציה. בנוסף אנו יודעים כי $T(0)=100$. אזי אנו פותרים מד"ר פרידה

$$\begin{aligned}
&T'=\gamma(T-20)\\
&\frac{T'}{T-20}=\gamma\\
&\int\frac{dT}{T-20}=\int\gamma dt\\
&\ln|T-20|=\gamma t+c\\
&|T-20|=e^ce^{\gamma t}\\
&T-20=\pm e^ce^{\gamma t}\\
&T=20+c_1e^{\gamma t}\qquad c_1\neq 0.
\end{aligned}$$

נשים לב כי $T\equiv 20$ הוא פתרון סינגולרי ובנוסף הוא מתקבל ע"י $c_1=0$ ולכן הפתרון הכללי הוא $T=20+ce^{\gamma t}$

מתנאי ההתחלה נקבל כי $100=T(0)=20+c$

ולכן $c=80$ ואז $T=20+80e^{\gamma t}$

בנוסף נתון לנו כי $60=T(20)=20+80e^{20\gamma}$

ולכן $e^{20\gamma}=\frac{1}{2}$

כלומר $\gamma=\frac{\ln\frac{1}{2}}{20}=-\frac{\ln 2}{20}$

ולכן $T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t}$

ולבסוף $30=T(t_0)=20+80e^{-\frac{\ln 2}{20}t_0}$

ולכן $e^{-\frac{\ln 2}{20}t_0}=\frac{1}{8}$

כלומר $\frac{\ln 2}{20}t_0=\ln 8$

ונקבל $t_0=20\frac{\ln 8}{\ln 2}=20\log_2 8=20\cdot 3=60$

כלומר הזמן הוא 60 דקות.

הערה: היה אפשר לפתור את המד"ר $T'=\gamma(T-20)$ כמד"ר לינארית $T'-\gamma T=-20\gamma$.

תרגיל: (דוגמא פיזיקלית) מהירות התפרקות של רדיום פרופורציונית לכמות הנוכחית שלו. ידוע כי לאחר 1600 שנים תשאר חצי מהכמות ההתחלתית. איזה אחוז של רדיום יישאר לאחר 100 שנים?

פתרון: נסמן את הכמות של רדיום ע"י $Q(t)$. אזי

$$Q'(t) = kQ(t) \quad Q(0) = Q_0$$

כאשר Q_0 אינו ידוע אבל חיובי, ו־k קבוע שלילי. אזי $Q(t) = ce^{kt}$

ומתנאי ההתחלה נקבל כי $Q_0 = Q(0) = ce^0 = c$

ולכן $Q(t) = Q_0 e^{kt}$

ידוע כי $\frac{1}{2} = \frac{Q(1600)}{Q(0)} = \frac{Q_0 e^{1600k}}{Q_0} = e^{1600k}$

ולכן $k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{1600} = -\frac{\ln 2}{1600}$

ונקבל כי $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600}t} = Q_0 \left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{1600}} = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$

ולכן כעבור 100 שנים $\frac{Q(100)}{Q(0)} = \frac{Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{1600}}}{Q_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{16}} \approx 0.9576$

מה שאומר שהאחוז הוא 95.76.

תרגיל: (דוגמא פיזיקלית) על גוף בעל מסה 1 גרם פועל כוח הפרופורציוני לזמן התנועה ופרופורציוני הפוך למהירות הגוף. ידוע כי בזמן $t = 10$ המהירות היא 0.5 מטר לשנייה והכוח 0.004 ביחידות של גרם למטר חלקי שנייה בריבוע. מהי מהירות הגוף בזמן $t = 60$?

פתרון: נסמן את המיקום של הגוף ע"י $x(t)$ כאשר היחידות של המיקום הוא במטרים ושל הזמן בשניות. אזי $v(t) = x'(t)$ המהירות של הגוף במטרים לשנייה. נקבל כי

$$mx''(t) = k\frac{t}{v} \quad x'(10) = 0.5 \quad mx''(10) = 0.004.$$

כלומר $v' = \frac{kt}{v}, \quad v(10) = 0.5, \quad v'(10) = \frac{10k}{v(10)} = 0.004$

ולכן $\frac{10k}{0.5} = 0.004$ ונקבל כי $k = 0.002$ ולכן

$$v' = \frac{0.002t}{v}, \quad v(10) = 0.5.$$

זוהי מד"ר פרידה ללא פתרונות סינגולריים ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\frac{v^2}{2} = \int v dv = \int 0.002t dt = 0.001t^2 + c.$$

נציב תנאי התחלה ונקבל $\frac{0.5^2}{2} = 0.001 \cdot 100 + c$ ולכן $c = 0.025$ ולכן

ולבסוף $v = \sqrt{0.002t^2 + 0.025}$ $v(60) = \sqrt{0.002 \cdot 3600 + 0.025} = 7.225$.