<u>פתרון לדף תרגילים 4 – אלגברה לינארית ב'</u>

1. נשים לב כי לאחר חיסור 2I השורה הראשונה והשניה זהות ועל כן 2 הינו ע"ע. של A. יהיו a,b שני הערכים העצמיים האחרים אז $2ab = \det(A) = 2$ ו $2 + a + b = tr(A) = 2$. מכאן $a = i$ ו $b = -i$. כלומר A לכסינה מעל C. מכאן מעל R הפולינום האופייני של A מתפרק לשני גורמים אי פריקים $\Delta_A(x) = (x-2)(x^2+1)$.
עפ"י הגדרה $W_2 = \ker(A - 2I)$ ו $W_1 = \ker(A^2 + I)$. לאחר דירוג נקבל כי
$$A - 2I \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ו
$$A^2 + I \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
כש $\sim$ מציין שקילות ע"י דירוג. מכאן $W_1 = span_R\{e_1 + 2e_3\}, W_2 = span_R\{e_3, e_1 + e_2\}$.
נייצג את A לפי הבסיס $B = \{v_1 = e_1 + 2e_3, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_3\}$.
$$Av_1 = 2e_1 + 4e_3 = 2v_1$$
$$Av_2 = 3e_1 + 3e_2 + 5e_3 = 3v_2 + 5v_3$$
$$Av_3 = -2e_1 - 2e_2 - 3e_3 = -2v_2 - 3v_3$$
ונקבל $[A]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2. נשים לב כי $1,2$ ע"ע של B וכי הריבוי הגאומטרי של שניהם הוא 1. נחשב את הפולינום האופייני (בדיוק באותה הדרך כמו בסעיף א') ונקבל: $\Delta_A(x) = (x-1)(x-2)^2$.
כפי שעשינו בסעיף א' נחשב :
$W_1 = \ker(B - I) = sp\{e_1 + 2e_3\}, W_2 = \ker(B - 2I) = sp\{e_1 + e_2, e_3\}$. כעת עפ"י הוכחת הפירוק $f_1 = (x-2)^2, f_2 = x - 1$.נבצע חלוקת פולינומים ונקבל
$$(x-2)^2 = (x-3)(x-1) + 1$$
ולכן $f_1(x) - (x-3)f_2(x) = 1$. נגדיר $h_1(x) = f_1(x), h_2(x) = -(x-3)f_2(x)$. נציב ונקבל: $E_2 = h_2(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = h_1(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
דרך אחרת: ניתן למצוא בסיס לW_1, W_2 ולחשב את ההיטל על W_1 במקביל לW_2...
נקבל: $D = 2E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ו $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. יהי $m(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{t_i}$. W_i מוגדר כ $\ker(T-\lambda_i)^{t_i}$. נקבל כי הפולינום המינימלי של T_i הוא $(x-\lambda_i)^{t_i}$ (ההסבר לכך מופיע בשאלה 6). מכאן כי הפולינום האופייני של T_i הינו $(x-\lambda_i)^{e_i}$ כאשר $e_i = dimW_i$. ממשפט הפירוק הפרימרי $V = W_1 + \cdots + W_r$ הינו סכום ישר של גורמים T-אינווריאנטים. מכאן כי
$\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{r_i} = \Delta_T(x) = \Delta_{T_1}(x) \dots \Delta_{T_r}(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{e_i}$. מכאן $e_i = r_i$.

4. נשים לב כי T^k מכיל אך ורק גורמים מהצורה A^sBA^t כאשר $s + t = k$. אכן נראה זאת באינדוקציה: עבור $k = 1$ הטענה טריוויאלית. נקח גורם A^sBA^t כאשר $s + t = k$ ונפעיל

עליו את T (כך מוגדר גורם של T^{k+1}) ונקבל: $T(A^sBA^t) = A^{s+1}BA^t - A^sBA^{t+1}$ ואכן מתקיים $s+1+t = k+1 = s+t+1$.

נניח $A^r = 0$ ונתבונן בT^{2r}. נקבל כי כל גורמיו מהצורה A^sBA^t כאשר $s+t=2r$. מכאן או $s \geq r$ או $t \geq r$ ולכן $A^s = 0$ או $A^t = 0$ ובכל מקרה $A^sBA^t = 0$. נסיק כי $T^{2r} = 0$.

5. D אכן אלכסונית N אכן נילפוטנטית אך D,N לאו דווקא מתחלפים ועל כן התהליך אינו מספק את הפירוק הנדרש. דוגמא:

$$[T]_E = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

.

$$DN = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, ND = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

6. נפרק את m לגורמים אי פריקים מעל השדה: $m = m_1^{e_1} \dots m_k^{e_k}$. נסמן ב$W_i$ את הרכיבים הפרימריים של T ובT_i את צמצום T ל W_i. על פי הגדרה $W_i = \ker\left(m_i(T)^{e_i}\right)$. נשים לב כי לכל וקטור ב$W_i$ הפולינום המינימלי הוא $m_v = m_i(x)^{f_i}$ עבור איזשהו $f_i \leq e_i$. כיוון שm הינו הפולינום המינימלי יש וקטור $v_i \in W_i$ עבורו $m_{v_i} = m_i(x)^{e_i}$.

הסבר: אחרת הפולינום המינמלי של T_i הוא $m_i^{f_i}$ כאשר $f_i < e_i$ ונקבל כי $m(x) = lcm(m_{T_i})$ מתחלק ב $m_i^{f_i}$ אבל לא ב$m_i^{e_i}$ בסתירה לפירוקו.

נתבונן ב $v = v_1 + \dots + v_k$. כיוון ש$v_1, \dots, v_k$ בלתי תלוים ונמצאים במרחבים T-שמורים שונים נקבל כי לכל פולינום f מתקיים $f(T)v_1 + \dots + f(T)v_k = f(T)v = 0$ אמ"ם $f(T)v_i = 0$ לכל i. מכאן $m_i^{e_i}|f$. נקבל כי $m|f$. כיוון ש$m(T)v = 0$ נקבל $m = f$.