מבוא למתמטיקה שמושית -פתרון תרגיל 4 - אביב תשס"ד

1. נתונה הבעיה

$$\dot{x} = 2x - xy - x^2$$
$$\dot{y} = -y + xy - y^2$$

(א) ...

(ד) יהי

$$.R = (1,2) \times (0,1)$$

היות וציר ה-x הוא פתרון נותר להראות כי פתרון לא יכול לצאת משלושת הצלעות האחרות של המלבן. כאן נקבל

$$\dot{y}(x,1) = x - 2 < 0 \quad \forall x \in (1,2)$$
$$\dot{x}(1,y) = 1 - y > 0 \quad \forall y \in (0,1)$$
$$\dot{x}(2,y) = -2y < 0 \quad \forall y \in (0,1)$$

ומכאן נובעת הטענה מיד

2. נתונה הבעיה

$$\dot{x} = -2x + y - x^3$$
$$\dot{y} = \alpha x - 2y - y^3$$

(א) נכפול את המשוואה הראשונה ב-x ואת השניה ב-y ונסכם

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = -2r^2 + (1+\alpha)xy - x^4 - y^4 \le \left[\frac{1}{2}(1+\alpha) - 2\right] r^2 - \frac{1}{2}r^4$$

כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2}$. עבור r די גדול נקבל $\frac{dr}{dt} < 0$.

(ב) נובע מיד מאי-השוויון שלמעלה (נכון למעשה לכל $\alpha \le 1$).

(ג) כש $\alpha = 1$ נקבל $\frac{dr}{dt} < 0$ לכל $r > 0$, לכן $(0,0)$ היא נקודת שווי המשקל היחידה, והיא גם יציבה אסימפטוטית.