**טכניון - מכון טכנולוגי לישראל** **הפקולטה למתמטיקה**

# חשבון אינפי' 2 104281

## גליון תרגילים מספר 11 - תרגילים בנושא אינטגרל פרמטרי

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי סמסטר אביב תשנ"ט

1. חשב את הנגזרות הבאות באמצעות כלל לייבניץ

(א) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x}\frac{1-e^{-xy}}{y}dy$

(ב) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{\sin xy}{y}dy$

2. חשב את הנגזרות הבאות בשתי דרכים: ע"י אינטגרציה ישירה וגזירה וע"י משפט לייבניץ:

(א) $\int_{0}^{x/2}\sqrt{x^2-y^2}dy$

(ב) $\int_{x}^{x^3}(x^2+y^2)dy$

3. תהי $f[a,\infty)\to R$ רציפה. נגדיר

$$I_n(x)=\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt, \quad n=1,2,\ldots$$

הוכח כי

$$\frac{d^n}{dx^n}I_n(x)=(n-1)!f(x)$$

4. הוכח את הזהות

$$\int_0^1 x^p(\ln x)^m dx=\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{m+1}}, \quad p>1$$

5. הוכח כי אם $y(x)$ מקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$y(x)=4\int_0^x (t-x)y(t)dt-\int_0^x (t-x)f(t)dt$$

אזי $y(x)$ מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=f(x)$$

עם תנאי ההתחלה

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0$$

נתון $y,f\in C^2$.

6. תהי $V(y)$ רציפה בקטע $[0,1]$, ונגדיר

$$k(x,y)=\begin{cases} x(1-y) & x\le y \\ y(1-x) & x>y \end{cases}$$

הוכח כי הפונקציה $u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)dy$ מקיימת את הזהות

$$u''(x)=-v(x), \quad \forall x\in[0,1]$$

7. חשב באמצעות משפט לייבניץ את האינטגרלים המסויימים הבאים:

(א) $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+ax)^2}$ הדרכה: התבונן בפונקציה $F(y)=\int_0^1 \frac{dx}{1+xy}$

(ב) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ הדרכה: התבונן בפונקציה $F(y)=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$

(ג) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ הדרכה: התבונן בפונקציה $F(y)=\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}dx$

(ד) $\int_0^1 x^n \ln x dx$ הדרכה: התבונן בפונקציה $F(y)=\int_0^1 x^y dx$

(ה) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)dx$ הדרכה: התבונן בפונקציה

$$F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)dx$$

8. השתמש במשפט פוביני לחישוב האינטגרלים המסויימים הבאים:

(א) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ הדרכה: התבונן בפונקציה $f(x,y)=x^y$.

(ב) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ הדרכה: התבונן בפונקציה $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2y^2}$.

(ג) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$ הדרכה: העזר בסעיף א'

9. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

חשב את $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy,\ \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx$. הסבר את התופעה!

10. **הרחבת משפט לייבניץ:**

תהי $\tilde{f}(x,y,z)$ פונקציה רציפה בקוביה $\{a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ e\le z\le f\}$ ונניח שגם $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y,z)$ ו-$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y,z)$ רציפות בקוביה זו. נגדיר

$$F(x,y)=\int_e^f \tilde{f}(x,y,z)dz$$

הוכח כי אזי נובע ש-$F(x,y)$ דיפרנציאבילית במלבן $\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ ומתקיים

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\int_e^f \frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,y,z)dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\int_e^f \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x,y,z)dz$$

## תרגילים בנושא קונוולוציה

תהיינה $\bar{f}(x),\bar{g}(x),\bar{h}(x)$ פונקציות אינטגרביליות בתחומים חסומים $K,J,I$ בהתאמה. נגדיר

$$f:R\to R,\quad f(x)=\begin{cases} \bar{f}(x) & x\in I \\ 0 & x\in R\setminus I \end{cases}$$

ובדומה נגדיר גם את $g(x)$ ו-$h(x)$.

מגדירים את הקונוולוציה של $f$ עם $g$ באופן הבא: זוהי פונקציה חדשה, שנסמנה ב-$f * g$, והיא נתונה ע"י הנוסחא:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

(לפעולה זו חשיבות עצומה בתורת הבקרה ובתורת התקשורת והאינפורמציה).

7. הוכח את התכונות הבאות של הקונוולוציה:

(א) $f * g = g * f$

(ב) $\left.\begin{array}{r}(f+g)*h = f*h + g*h \\ (\alpha f)*g = \alpha(f*g)\end{array}\right\}$ $\quad \forall \alpha \in R$

(ג) $(f*g)*h = f*(g*h)$

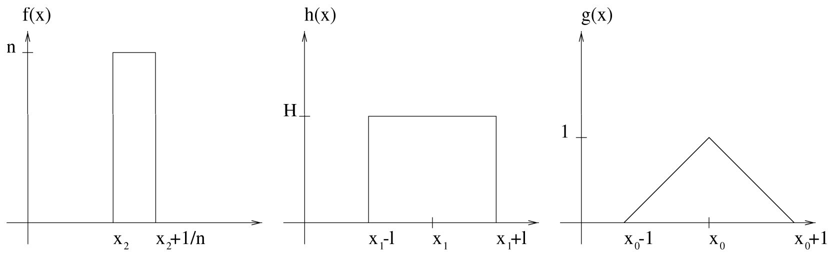
8. נניח עתה כי $I, J, K$ הם תחומים המוכלים ב-$[0,+\infty)$. נגדיר

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx, \quad s \geq 0$$

(זהו מקרה פרטי של התמרת לפלס). הוכח כי

$$\int_0^{\infty} (f*g)(x)e^{-sx}dx = F(s)G(s)$$

9. נניח כי




חשב ושרטט את הפונקציות הבאות:

א. $h*h$ ב. $h*g$ ג. $g*g$

תן משמעות גאומטרית.

חשב את $f*g$ ואת $f*h$. מה קורה כאשר $n$ גדל ? התוכל לנסח משפט כללי ? התוכל להוכיח אותו?