נגזרות ממעלה גבוהה.

נתיחס לפונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות. ייתכן של: f_x, בעצמה פונקציה של x,y, יש נגזר-ות $(f_x)_y$, $(f_x)_x$. כמו כן יתכן שקיימות הנגזרות $(f_y)_y$, $(f_y)_x$.

בקיצור נסמן את הנגזרות האילו

$$f_{yy}\ ,\ f_{yx}\ ,\ f_{xy}\ ,\ f_{xx}.$$

<u>שאלה</u>: האם $f_{yx} = f_{xy}$?

<u>דוגמת נגד.</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x \neq (0,0) \\ 0 & x = (0,0) \end{cases}$$

אם $(0,0) \neq (x,y)$ אז

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{\left[y(x^2-y^2)+xy(2x)\right](x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ -\frac{xy(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

מאידך אם $x = y = 0$ אז

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

ומקבלים ש:

$$(f_x)_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y}$$

ומאחר ו:

$$f_x(0, \Delta y) = -\frac{(\Delta y)^3 \cdot (\Delta y)^2}{(\Delta y)^4} = -\Delta y$$

מקבלים ש:

$$(f_x)_y(0,0) = \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1.$$

משיקולי סימטריה מקבלים ש:

$$(f_y)_x(0,0) = 1,$$

כי $f(x,y) = -f(y,x)$. לכן מתקיים

$$(f_x)_y \neq (f_y)_x$$

בנקודה $(0,0)$.

התוצאה הבאה נותנת תנאי מספיק לקיום השוויון $f_{xy} = f_{yx}$.

משפט. אם שתי הנגזרות החלקיות f_{xy}, f_{yx} קיימות בתחום ורציפות בו, אזי הן שוות.
הוכחה: נגדיר את הביטוי הסימטרי $W(\Delta x, \Delta y)$ ע"י

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y}\left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0)\right]$$

אפשר לכתוב אותו בצורה הבאה:

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta y} - \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\right].$$

אם מסמנים

$$\varphi(x) \equiv \frac{f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y}$$

אז אפשר לכתוב

$$.W(\Delta x,\Delta y)=\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}$$

φ גזירה כפונקציה של x, ולכן לפי לגרנג'

$$W(\Delta x,\Delta y)=\varphi'(x_0+\theta\Delta x)$$

עבור איזשהו $0<\theta<1$. מהגדרת φ זה נותן עבור $W(\Delta x,\Delta y)$ את הביטוי

$$.\frac{f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)}{\Delta y}$$

הפונקציה f_x הינה גזירה לפי y, ולכן מקבלים מהביטוי האחרון:

$$W(\Delta x,\Delta y)=(f_x)_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta'\Delta y)$$

עבור איזשהו $0 < \theta' < 1$. אבל $(f_x)_y$ היא פונ-
קציה רציפה, לכן הגבול של $W(\Delta x, \Delta y)$ כאשר $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ הוא $(f_x)_y(x_0, y_0)$.

בגלל הסימטריה בתפקידי x, y ב W, ע"י החלפת הסדר ביניהם זהו גם הערך של $(f_y)_x(x_0, y_0)$, מה שמוכיח את השיויון הנטען במשפט.

<u>הערה.</u> טענה כללית יותר עבור פונקציות של מספר משתנים $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ מוכחת באו-
פן דומה.

בשלב הזה אפשר לפנות לשני כיוונים:

(א) להמשיך ולפתח את החשבון הדיפרנציאלי ע"י נוסחת טיילור, חקירת פונקציות, קביעת מכסימום ומינימום.

(ב) לפנות לחשבון האינטגרלי: אינטגרלים לאורך קשת ואינטגרלים כפולים.

אנו ממשיכים בכיוון ב', כאשר א' יהיה נושא ההתענינות ב: אינפי' 3.

אינטגרל התלוי בפרמטר.

כדי להגיע למושג אינטגרל כפול, נכין תחילה חומר רקע אודות אינטגרל התלוי בפרמטר.

משפט. נתונה פונקציה $f(x,u)$, מוגדרת ורציפה עבור $a \le x \le b$, $\alpha \le u \le \beta$. אז

$$F(u) = \int_a^b f(x,u)$$

הינה פונקציה רציפה עבור $\alpha \le u \le \beta$.

הוכחה: $f(x,u)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה (מלבן) לכן רציפה שם במ"ש: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\varepsilon)$ כך ש $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$ כאשר $d(P_1, P_2) < \delta$ ולכל P_1, P_2 במלבן.

כדי להוכיח ש $F(u)$ רציפה ב: u, ניקח u_1, u_2 בקטע $[\alpha, \beta]$ כך ש $\delta > |u_1 - u_2|$. אז

$$d((x, u_1), (x, u_2)) < \delta$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} |F(u_1) - F(u_2)| \leq \int_a^b |f(x, u_1) - f(x, u_2)| dx \\ < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

זו היתה תכונת <u>רציפות</u>, ועכשיו נעסוק בתכונת <u>גזירות</u> של אינטגרל פרמטרי.

משפט. תהי $f(x,u)$ מוגדרת במלבן $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq u \leq \beta$ ונתון ש:

(א) לכל u ב: $[\alpha,\beta]$, $f(x,u)$ רציפה ב x, $a \leq x \leq b$.

(ב) $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ רציפה במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$.

אז

$$F(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

גזירה עבור $\alpha \leq u \leq \beta$, ונגזרתה היא

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$$

<u>הוכחה:</u> עלינו לחשב את $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta u}$. אצלנו

$$\begin{aligned}\Delta F &= \int_a^b f(x,u+\Delta u)dx - \int_a^b f(x,u)dx \\ &= \int_a^b \left[f(x,u+\Delta u) - f(x,u)\right]dx\end{aligned}$$

ולפי לגרנז'

$$\begin{aligned}&= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x,u+\theta\Delta u)\cdot\Delta u\right]dx \\ &= \Delta u\cdot\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x,u+\theta\Delta u)\right]dx\end{aligned}$$

כאן $0<\theta<1$, $\theta=\theta(u,x,\Delta u)$ ומקבלים

$$\frac{\Delta F}{\Delta u} = \int_a^b \frac{\partial f(x,u+\theta\Delta u)}{\partial u}dx \qquad (1)$$

נחסיר משני אגפים את $\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx$:

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta u} - \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|$$

$$\leq \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,u+\theta\Delta u)}{\partial u} - \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right| dx \quad (2)$$

אבל $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)$ רציפה במלבן

$$\{a \leq x \leq b,\ \alpha \leq u \leq \beta\}$$

ולכן רציפה במ"ש:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(P_1) - \frac{\partial f}{\partial u}(P_2)\right| < \varepsilon$$

לכל P_1, P_2 אשר מקיימים $d(P_1,P_2) < \delta(\varepsilon)$.

אם $|\Delta u| < \delta$ אז המרחק בין הנקודה (x,u)

והנקודה $(x, u+\theta\Delta u)$ אכן קטן מ: δ, ולכן ב: (2) למעלה מקבלים עבור $|\Delta u| < \delta$:

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta u} - \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx\right| \leq \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b-a).$$

זה בדיוק אומר ש:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta u} = \int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx,$$

או במילים אחרות:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_a^b f(x,u) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) dx.$$

עכשיו נוסיף פרמטרים גם לגבולות האינטגרל.

<u>משפט.</u> נתון ש: $f(x,u)$ היא פונקציה רציפה ב:

$$\{a \leq x \leq b,\, \alpha \leq u \leq \beta\}$$

$A(u), B(u)$ רציפות עבור $\alpha \leq u \leq \beta$,

$a \leq A(u), B(u) \leq b$.

אזי הפונקציה

$$F(u) = \int_{A(u)}^{B(u)} f(x,u)dx$$

רציפה עבור $\alpha \leq u \leq \beta$.

<u>הוכחה:</u> $a \leq A(u), B(u) \leq b$ מבטיח כי x משתנה בתחום בו $f(x,u)$ רציפה.

$$F(u+\Delta u) - F(u) =$$

$$= \int_{A(u+\Delta u)}^{B(u+\Delta u)} f(x, u+\Delta u)dx$$
$$- \int_{A(u)}^{B(u)} f(x,u)dx$$

נפרק את האינטגרל על

$[A(u+\Delta u), B(u+\Delta u)]$ לשלושה אינטגרלים

על $[A(u+\Delta u), A(u)]$, $[A(u), B(u)]$ ו:

$[B(u), B(u+\Delta u)]$:

$$\begin{aligned}
= & \int_{A(u+\Delta u)}^{A(u)} f(x, u+\Delta u)dx \\
+ & \int_{A(u)}^{B(u)} f(x, u+\Delta u)dx \\
+ & \int_{B(u)}^{B(u+\Delta u)} f(x, u+\Delta u)dx \\
- & \int_{A(u)}^{B(u)} f(x,u)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{A(u)}^{B(u)} \underbrace{f(x,u+\Delta u)-f(x,u)}_{<\varepsilon} dx \\
&+ \int_{A(u+\Delta u)}^{A(u)} \underbrace{f(x,u+\Delta u)}_{\leq M} dx \\
&+ \int_{B(u)}^{B(u+\Delta u)} \underbrace{f(x,u+\Delta u)}_{\leq M} dx
\end{aligned}
$$

לכן, כאשר $|\Delta u| < \delta$

$$
\begin{aligned}
|\Delta F| &\leq \left|\int_{A(u)}^{B(u)} \cdot \epsilon dx\right| + \left|\int_{A(u+\Delta u)}^{A(u)} M dx\right| \\
&+ \left|\int_{B(u)}^{B(u+\Delta u)} M dx\right|
\end{aligned}
$$

(הערך המוחלט, כי לא ידוע מי יותר גדול, $A(u)$ או $B(u)$)

$$
\leq \varepsilon|B(u)-A(u)| + M|A(u)-A(u+\Delta u)|
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad M|B(u+\Delta u) - B(u)| \\
&\leq \quad \varepsilon \cdot (b-a) + M \cdot \underbrace{|\Delta A|}_{<\varepsilon_2} + M \cdot \underbrace{|\Delta B|}_{<\varepsilon_3}
\end{aligned}
$$

עבור δ_2, δ_3 $|\Delta u| <$ כי $B(u), A(u)$ רציפים. לכן

$$|\Delta F| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon_2 M + \varepsilon_3 M$$

כאשר

$$.|\Delta u| < \min(\delta, \delta_2, \delta_3)$$

נעבור לעסוק בגזירות של אינטגרל ביחס לפרמ-טר.

<u>משפט:</u> נניח ש: $f(x,u)$ רציפה במלבן למעלה, ונניח שגם $f_u(x,u)$ רציפה במלבן הזה. תהיינה

$A(u)$ ו: $B(u)$ כמו במשפט הקודם, ונניח שהן גזירות. אז

$$F(u) = \int_{A(u)}^{B(u)} f(x,u)$$

היא פונקציה גזירה בקטע $\alpha \le u \le \beta$, ונגזרתה היא

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} &= \int_{A(u)}^{B(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx \\ &+ f\left(B(u),u)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u} - f\left(A(u),u)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\end{aligned}$$

<u>הוכחה:</u> נסמן

$$G(s,t,u) = \int_s^t f(x,u)dx$$

ברור שיש ל-$G(s,t,u)$ נגזרות חלקיות רציפות:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = f(t,u)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial s} &= -f(s,u) \\
\frac{\partial G}{\partial u} &= \int_s^t \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx
\end{aligned}
$$

ברור ש: G רציפה ב-(s,t,u), וברור שגם שלושת הנגזרות G_t, G_s ו: G_u רציפות, האחרון בגלל ש- $\frac{\partial f}{\partial u}$ רציפה. הפונקציה $F(u)$ מתקבלת מהרכבת הפונקציות $s=A(u)$ ו: $t=B(u)$ עם $G(s,t,u)$:

$$F(u)=G\left(\underbrace{A(u)}_{s},\underbrace{B(u)}_{t},u\right).$$

לכן, לפי כלל השרשרת,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = \frac{\partial G}{\partial s}\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}+\frac{\partial G}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}u}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u}$$

בנקודה $s=A(u)$ ו: $t=B(u)$, ולכן

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{d}F}{\mathsf{d}u} &= -f\left(A(u),u\right)A'(u)\\ &+ f\left(B(u),u\right)B'(u)\\ &+ \int_{A(u)}^{B(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\end{aligned}$$

<u>**תרגיל.**</u> נתונה הפונקציה

$$.F(u)=\int_0^u\frac{(u-x)^n}{n!}f(x)dx$$

חשב את הנגזרות $F'(u)$, $F''(u)$,...,$F^{(n)}(u)$.