תורת ההסתברות

עבודת בית מס' 6
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. בעיה 4.19 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א) נגדיר $h(x) = 1/x$. אזי $h'(x) = -1/x^2 = -h^2(x)$. לכן עבור y כל שהו ו- $x = h^{-1}(y)$ נקבל

$$f_Y(y) = \frac{1}{|h'(x)|} f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{y^2} & \text{if} \quad 0 < x. \end{cases}$$

מכאן

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{y} & \text{if} \quad 1 < y. \end{cases}$$

(ב) מי שלא זוכר את הנוסחה במבחן לא נשאר לו אלה לפתח אותה. במקרה הפרטי:

$$F_Z(z) = P(\ln X \leq z) = P(X \leq e^z) = F_X(e^z) = \begin{cases} e^z & \text{if} \quad z \leq 0, \\ 1 & \text{if} \quad 0 \geq z. \end{cases}$$

מכאן

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} e^z & \text{if} \quad z \leq 0, \\ 0 & \text{if} \quad 0 \geq z. \end{cases}$$

<u>תרגיל 2</u>. בעיה 4.22 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. בפתרון להלן אנחנו יוצאים מתוך ההנחה כי בחוברת התגנבה טעות דפוס והכוונה הייתה $X \sim U[-5, 5]$ ולא $[-3, 5]$ כפי שזה כתוב. אם כן:

$$F_Y(y) \quad = \quad P(g(X) \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y < -4, \\ \frac{1}{10} & \text{if} \quad y = -4, \\ \frac{x+5}{10} & \text{if} \quad -4 \leq y < 4, \\ 1 & \text{if} \quad 4 \leq y. \end{cases}$$

$F_Y(y)$ היא פונקציה רציפה פרט לנקודות $-4,4$ בהן עושה קפיצות. לכן משתנה מקרי Y הוא משתנה מעורב.

אם $X \sim U[-3,5]$ אזי

$$F_Y(y) \;=\; P(g(X) \le y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y \le -3, \\ \frac{1}{8}(x+3) & \text{if} \quad -3 \le y < 4, \\ 1 & if \quad 4 \le y. \end{cases}$$

<u>תרגיל 3</u>. בעיה 4.23 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. X הינו משתנה רציף ולכן עבור $y \ge 0$ נקבל

$$F_Y(y) \;=\; P(|X| \le y) = F_X(y) - F_X(-y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{if} \quad 0 \le y \le 1, \\ \frac{1}{4}(y+1) & \text{if} \quad 1 \le y \le 3, \\ 1 & \text{if} \quad 3 \le y. \end{cases}$$

<u>תרגיל 4</u>. בעיה 12.10 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y < -1, \\ \Phi(y) - \Phi(-1) & \text{if} \quad -1 \le y < 0, \\ \Phi(y) + \Phi(-1) & \text{if} \quad 0 \le y \le 1, \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le y. \end{cases}$$

לכן

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 2\Phi(-1) \cdot F_Y^d(y) + (1 - 2\Phi(-1)) \cdot F_Y^c(y) = \\ &= 2\Phi(-1) \cdot F_Y^d(y) + 2\Phi(1) \cdot F_Y^c(y), \end{aligned}$$

כאשר

$$F_Y^d(y) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y < 0, \\ 1 & \text{if} \quad 0 \le y. \end{cases}$$

$$F_Y^c(y) = \frac{1 - 2\Phi(-1) \cdot F_Y^d(y)}{2\Phi(1)} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y \le -1, \\ \Phi(y) - \Phi(-1) & \text{if} \quad -1 \le y \le 1, \\ 1 & \text{if} \quad 1 \le y. \end{cases}$$

(ב) $EY=0$ מטעמי סימטריה.

תרגיל 5. בעיה 12.12 מהחוברת.

פתרון.

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad x<1, \\ \frac{2}{3}c\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right) & \text{if} \quad 1\le x<2, \\ 1=\frac{2}{3}c\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right) & \text{if} \quad 2\le x. \end{cases}$$

לכן $c=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}-1}$,

$$G(y)=F_X^{-1}(y)=\left(\frac{3y}{2c}+1\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad 0\le y\le 1.$$

נזכיר כי אם $Y\sim U(0,1)$ אזי $G(Y)\sim X$.

תרגיל 6. תרגיל 12.27 מהחוברת.

פתרון. לאורך הפתרון נניח כי $t,s>0$. נגדיר משתנים אקרעיים:

מספר הארועים בפרק זמן עד $N_t=t$

אזי

$$P(T_2>t)=P(N_t\le 1) \;=\; e^{-\lambda t}(1+\lambda t).$$

מכאו

$$\begin{aligned} P(T_2>t+s|T_2>s) &= \frac{P(T_2>t+s)}{P(T_2>s)}=e^{-\lambda t}\frac{1+\lambda(t+s)}{1+\lambda s}< \\ &< e^{-\lambda t}(1+\lambda t)=P(T_2>t), \end{aligned}$$

כלומר המערכת מתעיפת עם הזמן. לדוגמה יותר כללית תראו את תרגיל 4 מתוך תירגול 5.