מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 6

1 מרחבים טופולוגיים

תזכורת: (X,τ) מרחב טופולוגי, $A\subseteq X$. טופולוגיית תת המרחב על A היא

$$\tau|_A=\{U\cap A\,|\,U\in\tau_X\}.$$

טענה 1.1 יהיו $(X,\tau_X),(Y,\tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים. אם $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של X (כלומר $U_\alpha\in\tau_X$ ובנוסף $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$). אז $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ רציפה אם"ם $f|_{U_\alpha}:(U_\alpha,\tau_X|_{U_\alpha})\to(Y,\tau_Y)$ רציפות לכל α.

הוכחה: $\Longleftarrow$: $f:X\to Y$ רציפה, יהי α, ותהי $V\in\tau_Y$.

$$\left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(V)=\underbrace{f^{-1}(V)}_{\in\tau_X}\cap U_\alpha\in\tau_X|_{U_\alpha}$$

$\Longrightarrow$: תהי $V\in\tau_Y$.

$$\begin{aligned}f^{-1}(V)&=f^{-1}(V)\cap\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)\\&=\bigcup_\alpha\left(f^{-1}(V)\cap U_\alpha\right)\\&=\bigcup_\alpha\left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(V)\end{aligned}$$

הקבוצות $\left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(V)$ פתוחות ב-U_α. אבל U_α פתוחות ב-X, לכן $\left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(V)$ פתוחות ב-X (ר' הערה). וקיבלנו ש-$f^{-1}(V)\in\tau_X$.

הערה 1.2 אם $U\subset X$ פתוחה ב-X, ו-$V\subset U$ פתוחה ב-U, אז V פתוחה ב-X. כי קיימת $V'\in\tau_X$ כך ש-$V=U\cap V'$ אבל ידוע שגם $U\in\tau_X$ וחיתוך של שתי קבוצות פתוחות (ב-X) הוא פתוח (ב-X), לכן $V\in\tau_X$.

■

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. $x\in X$. נגדיר

$$\mathcal{V}(x)=\{V\subseteq X|x\in\mathrm{int}V\}$$

נגדיר טופולוגיה חדשה על X על ידי

$$\tau^x = \mathcal{V}(x) \cup \{\emptyset\}$$

טענה 1.3 יהיו $(X,\tau_X), (Y,\tau_Y)$ מרחבים טופולוגיים. $f:(X,\tau_X)\to(Y,\tau_Y)$ רציפה אם"ם לכל $x\in X$, $f:(X,\tau_X^x)\to(Y,\tau_Y^{f(x)})$ רציפה.

הוכחה: $\Longleftarrow$: אם $V=\emptyset\in\tau_Y^{f(x)}$ אזי ברור ש-$f^{-1}(V)=\emptyset\in\tau_X^x$. לכן נשאר להראות שאם $V\in\tau_Y^{f(x)}\setminus\{\emptyset\}$, כלומר $f(x)\in\mathrm{int}_{\tau_Y}V$, אזי $f^{-1}(V)\in\tau_X^x$ כלומר $x\in\mathrm{int}_{\tau_X}f^{-1}(V)$.

f רציפה לכן $x\in f^{-1}(\mathrm{int}_{\tau_Y}(V))\in\tau_X$ ובנוסף $f^{-1}(\mathrm{int}_{\tau_Y}(V))\subseteq f^{-1}(V)$ לכן

$$x\in f^{-1}(\mathrm{int}_{\tau_Y}(V))\subseteq \mathrm{int}f^{-1}(V)$$

כנדרש.

$\Longrightarrow$: תרגיל. ■

סגור של קבוצה

אתם תראו בשיעורי הבית שכל טופולוגיה על X ניתנת להגדרה על ידי פעולת הסגור שהיא מגדירה על הקבוצות של X. ויש התאמה חח"ע ועל בין טופולוגיות על X לבין פונקציות $\mathrm{cl}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ המקיימות את האקסיומות הבאות לכל $A,B\in\mathcal{P}(X)$:

1. $\mathrm{cl}(\emptyset)=\emptyset$
2. $\mathrm{cl}(A\cup B)=\mathrm{cl}(A)\cup\mathrm{cl}(B)$
3. $A\subseteq\mathrm{cl}(A)$
4. $\mathrm{clcl}(A)=\mathrm{cl}(A)$

יהי X מרחב טופולוגי. ותהי $A\subseteq X$. כמה קבוצות אפשר ליצור מהקבוצה A על ידי הפעלת סגור ומשלים?

טענה 1.4 לכל היותר 14.

הערה 1.5 החסם 14 מתקבל למשל עבור הקבוצה

$$\mathbb{R}\supseteq A=(0,1)\cup(1,2)\cup\{3\}\cup([4,5]\cap\mathbb{Q}).$$

הוכחה: (של הטענה) נסמן ב-k את פעולת הסגור, וב-c את פעולות המשלים.
קל לראות שמתקיימים היחסים הבאים:

$$\begin{aligned} cc &= id \\ kk &= k \end{aligned}$$

(משלים הוא אינוולוציה, סגור הוא אידמפוטנט)
לכן מספיק להסתכל על רצפים של פעולות מהצורה

$$ckck\ldots A$$

או

$$kckc\ldots A$$

כדי למצוא את החסם נראה שמתקיים היחס הבא:

$$(kc)^4 = (kc)^2 \tag{1}$$

כדי להוכיח זאת נשים לב שמתקיים $\overline{A^c} = (int(A))^c$
כי מתקיים:

$$\begin{aligned} \overline{A^c} &= \bigcap_{A^c \subset B, B^c \in \tau} B \\ (B =: U^c) &= \bigcap_{U \subset A, U \in \tau} U^c \\ \text{de Morgan} &= \left(\bigcup_{U \subset A, U \in \tau} U \right)^c \\ &= (int(A))^c \end{aligned}$$

או במילים אחרות $\mathrm{int} = ckc$.
לכן אגף ימין ב-1 הוא

$$kckcA = \overline{\mathrm{int} A}$$

ואגף שמאל הוא

$$kckckckcA = \overline{\mathrm{int}\overline{\mathrm{int} A}}$$

כלומר, כדי להוכיח את 1 נשאר להראות שלכל קבוצה מתקיים

$$\overline{\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}A}} = \overline{\mathrm{int}A}$$

לשם כך נוכיח את שתי ההכלות:

$\subseteq$: כל קבוצה מכילה את הפנים שלה לכן:

$$\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}A} \subseteq \overline{\mathrm{int}A}$$

נפעיל סגור על שני האגפים ונקבל

$$\overline{\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}A}} \subseteq \overline{\overline{\mathrm{int}A}} = \overline{\mathrm{int}A}$$

$\supseteq$: כל קבוצה מוכלת בסגור שלה, לכן:

$$\overline{\mathrm{int}A} \supseteq \mathrm{int}A$$

נפעיל פנים על שני האגפים

$$\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}A} \supseteq \mathrm{int}\mathrm{int}A = \mathrm{int}A$$

כעת נפעיל סגור ונקבל

$$\overline{\mathrm{int}\overline{\mathrm{int}A}} \supseteq \overline{\mathrm{int}A}$$

כעת ניעזר ביחס 1 כדי לחסום את מספר האיברים. תחילה נשים לב שהיחס נכון לכל קבוצה A לכן אפשר להפעיל אותו על cA ולקבל:

$$\begin{aligned} kckckckccA &= kckccA \\ kckckckA &= kckA \end{aligned}$$

מהיחס הנ"ל, נקבל שהקבוצה A וכל הקבוצות שמתקבלות מ-A על ידי סדרת איברים שנגמרת ב-k הן לכל היותר 7 הקבוצות הבאות:

$$A, kA, kcA, kckA, kckcA, kckckA, kckckcA$$

על כל אחת מהן ניתן להפעיל משלים ולקבל עוד 7 קבוצות

$$cA, ckA, ckcA, ckckA, ckckcA, ckckckA, ckckckcA$$

לכל היותר קיבלנו 14 קבוצות שונות. ■