אלגברה ב' - פתרון גליון 3

♠ **הערה חשובה:** בדף הפתרונות הקודם חישבנו את סדר החבורה $G = GL_2(\mathbb{Z}_p)$ - היא חבורת כל המטריצות ההפיכות 2×2 עם מקדמים בשדה $\mathbb{Z}_p$. באותו דף לא חישבנו את סדרה של תת-החבורה H של כל המטריצות הנ"ל שהדטרמיננט שלהן הוא 1.

ובכן, תהי $x \in G$ מטריצה בעלת דטרמיננט d. נבנה פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצה D של כל המטריצות בעלות דטרמיננט d לבין תת-החבורה H:

$$f : \begin{cases} D \to H \\ y \mapsto x^{-1}y \end{cases} \qquad g : \begin{cases} H \to D \\ y \mapsto xy \end{cases} .$$

בדקו ש-$g = f^{-1}$, ומכאן נובע שמספר המטריצות מדטרמיננט 1 שווה למספר המטריצות מכל דטרמיננט נתון השונה מאפס (כל המטריצות ב-G הפיכות). לפיכך, הסדר של H שווה לסדר של G אחרי חלוקתו במספר הדטרמיננטים האפשריים:

$$|H| = \frac{(p^2-1)(p^2-p)}{p-1} = (p-1)p(p+1).$$

♠ **[HK]** :8.2.4 V הוא ממ"פ, ומגדירים פונקציה $d : V \times V \to \mathbb{R}$ ע"י $d(x,y) = \|x-y\|$. נוכיח את התכונות הדרושות:

(a+b) נסמן $v = x - y$, ואז $d(x,y) = \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \leq 0$, ושוויון אם ורק אם $v = 0$ - וזה אם"ם $x = y$.

(c) כאן נחשב ישירות:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)| \cdot \|y-x\| = 1 \cdot d(y,x) = d(y,x).$$

(d) שוב, נחשב על-פי הגדרה:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

♠ **[HK]** :8.2.6

(a) אנו מחפשים נוסחה עבור ההטלה האורתוגונלית E של $V = \mathbb{R}^2$ על תת-המרחב $W = Sp\{(3,4)\}$. הוקטור $(3,4)$ פורש את W, ולכן הוא עצמו (כיחידון) מהווה בסיס אורתוגונלי ל-W. לפיכך נקבל:

$$E((x_1,x_2)) = \frac{\langle (x_1,x_2),(3,4)\rangle}{\|(3,4)\|^2}(3,4) = \frac{3x_1+4x_2}{3^2+4^2}(3,4) = \frac{1}{25}(9x_1+12x_2, 12x_1+16x_2).$$

(b) נחשב את $E((1,0)), E((0,1))$, ונבנה מהם את המטריצה המייצגת את E (תוצאות החישוב של ערכי E מוצגות במטריצה כעמודות!!).

$$[E]_{std} = \left[E((1,0))^t, E((0,1))^t\right] = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

(c) $(x,y) \in W^-$ אם ורק אם $(x,y) - (3,4)$, שכן $(3,4)$ פורש את W. מכאן מתקבלת המשוואה $3x + 4y = 0$ עבור המרחב W^-:

$$W^- = \{(x,y) | 3x + 4y = 0\},$$

ואפשר לראות שהוקטור $(4,-3)$ מהווה פתרון למשוואה זו ופורש את מרחב פתרונותיה. לפיכך -

$$W^- = Sp\{(4,-3)\}.$$

לסיום סעיף זה נעיר רק, שניתן היה לחשב את W^- מעצם היותו $W^- = \ker E$.

(d) מן הפתרון של הסעיף הקודם עולה שהקבוצה $\{(3,4),(4,-3)\}$ היא קבוצה אורתוגונלית המהווה בסיס של V (הרי $\dim V = 2$). ננרמל את הוקטורים בקבוצה על-מנת לקבל בסיס אורתונורמלי של V:

$$v_1 = \frac{1}{25}(3,4),\ v_2 = \frac{1}{25}(4,-3).$$

נזכור כי $v_1 \in W, v_w \in W^-$, ולכן $E(v_1) = v_1,\ E(v_2) = 0$, ולכן המטריצה המייצגת את E יחסית לבסיס זה תהיה -

$$[E]_{(v_1,v_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

♠ [HK] 8.2.7: נתונה נורמה (המושרית ממכפלה פנימית) על $V = \mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\| = (x-y)^2 + 3y^2 = x^2 + 4y^2 - 2xy.$$

אנו מעוניינים תחילה לשחזר את המכפלה הפנימית:

$$u, v \in V \Rightarrow \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

נציב $u = (x_1,y_1),\ v = (x_2,y_2)$, נחשב ונקבל:

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4y_1y_2.$$

ביחס לבסיס הסטנדרטי, המטריצה של מכפלה פנימית זו היא $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. אנו ננצל תוצאה זו בחישובים הבאים.

(a) את אופרטור ההטלה הניצבת על $W = Sp\{(3,4)\}$ נחשב כמו בשאלה הקודמת. לפני-כן נוח לח בצע את החישוב הבא:

$$\langle (x,y),(3,4)\rangle = 3x - 4x - 3y + 16y = -x + 13y$$
$$\langle (3,4),(3,4)\rangle = (3-4)^2 + 3\cdot 4^2 = 49$$

$$E\left((x,y)\right) = \frac{\langle (x,y),(3,4)\rangle}{\|(3,4)\|^2}(3,4) = \frac{13y - x}{49}(3,4).$$

(b) $[E]_{std} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -3 & 39 \\ -4 & 52 \end{bmatrix}$.

(c) כעת נחשב באמצעות $W^- = \ker E$, כלומר $(x,y) \in W^-$ אם ורק אם (ראו a) $13y - x = 0$, ולכן נוכל לרשום כי $W^- = Sp\{(13,1)\}$.

(d) כמו מקודם, מספיק לנרמל את הוקטורים $u_1 = (3,4),\ u_2 = (13,1)$ על-מנת לקבל את הבסיס הנדרש (ראו פתרון תרגיל קודם).

♠ **[HK]** 8.2.8: $V = \mathbb{R}_3[x]$, עם המ"פ $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, ועבורנו יספיק לזכור כי

$$\langle x^i, x^j\rangle = (i+j+1)^{-1}.$$

(a) עלינו למצוא את המשלים הניצב של מרחב כל הפולינומים הקבועים - דהיינו: אנו מחפשים את תת-המרחב $W = 1^-$. נחשב:

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 + dx^3 \in W \quad &\Leftrightarrow \quad \langle 1, a + bx + cx^2 + dx^3\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^1 (a + bx + cx^2 + dx^3)dx = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0. \end{aligned}$$

מכאן אנו מסיקים כי $W = Sp\left\{x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{1}{4}\right\}$.

(b) עליכם לבצע Gram-Schmidt על הבסיס הסדור $(1, x, x^2, x^3)$ של V. התשובות הן:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,\ \|u_1\|^2 = 1 \\ u_2 &= x - \frac{1}{2},\ \|u_2\|^2 = \frac{1}{6} \\ u_3 &= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12},\ \|u_3\|^2 = \frac{79}{360} \\ u_4 &= \text{מעל ומעבר ליכולותיי החישוביות}\ . \end{aligned}$$

אלגברה ב' - פתרון גליון 4

♠ **[H]** 2.5.14: בהיקבע תת-חבורה $H < G$, נרצה להוכיח כי הקבוצה

$$C_G(H) = \{g \in G |\, x \in H \Rightarrow gx = xg\}$$

גם היא מהווה תת-חבורה של G. נעיר שגם עבור איברים של החבורה ניתן להגדיר מבנה דומה -

$$C_G(x) \triangleq \{g \in G | gx = xg\} = C_G(\langle x \rangle).$$

ובכן, $e \in C_G(H)$, ולכן יש טעם לדבר על איברים ב-$C_G(H)$, ועלינו להוכיח סגירות לכפל ולהיפוך:

$$a \in C_G(H),\ x \in H\ \Rightarrow ax = xa \Leftrightarrow a^{-1}(ax)a^{-1} = a^{-1}(xa)a^{-1} \Leftrightarrow xa^{-1} = a^{-1}x,$$

ואנו רואים כי $a \in C_G(H)$ גורר $a^{-1} \in C_G(H)$. באותו אופן:

$$\begin{aligned} a, b \in C_G(H)\, x \in H \quad &\Rightarrow \quad axa^{-1} = xa\, bxb^{-1} = x \\ &\Rightarrow \quad (ab)x(ab)^{-1} = a(bxb^{-1})a^{-1} = axa^{-1} = x. \end{aligned}$$

כלומר, לכל $x \in H$ המכפלה ab מתחלפת עם x, ולכן $ab \in C_G(H)$.

♠ **[H]** 2.5.15: בפתרון כאן נקצר, ונפעל על-פי ה-"שאלה-רמז" שבסוף התרגיל: קל לראות ש-$Z(G) = C_G(G)$, ולכן $Z(G)$ מהווה תת-חבורה ב-G.

♠ **[H]** 2.5.37: בתרגיל זה, חשוב מאוד לשים לב למספר תכונות של ביטויים מן הצורה bab^{-1}:

א. $(bab^{-1})^n = ba^nb^{-1}$;

ב. לכל $a \in G$ נסמן ב-$Ad_a : G \to G$ את הפונקציה $Ad_a(g) = aga^{-1}$. פונקציה זו היא העתקה חח"ע של G על עצמה (קוראים לה "ההצמדה ב-a"), והיא מקיימת, בנוסף, את הזהויות הבאות (לבדוק!):

$$\begin{aligned} (Ad_a \circ Ad_b)(g) &= Ad_{ab}(g) \\ Ad_a(g) \cdot Ad_a(h) &= Ad_a(gh). \end{aligned}$$

כעת נתמקד בתרגיל שלפנינו. האיבר b הוא איבר המקיים $b^5 = e$, ו-a מקיים את יחס ההצמדה $bab^{-1} = a^2$, או, במילים אחרות: $Ad_b(a) = a^2$. נמשיך מכאן:

$$id_G = Ad_e = Ad_{b^5} = (Ad_b)^5,$$

כאשר $(Ad_b)^5$ - משמעו הרכבה של ההעתקה Ad_b על עצמה חמש פעמים. נקבל:
<u>**טענה:**</u> אם $Ad_b(a) = a^k$ אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $Ad_b^n(a) = a^{k^n}$.

- אכן, ברור שהטענה מתקיימת בהצבת $n=1$, וכעת נפעל באינדוקציה:

$$\begin{aligned} Ad_b^{n+1}(a) &= (Ad_b \circ Ad_b^n)(a) \\ &= Ad_b\left(Ad_b^n(a)\right) \\ &= b \cdot a^{k^n} \cdot b^{-1} \\ &= (bab^{-1})^{k^n} = (a^k)^{k^n} = a^{k \cdot k^n} = a^{k^{n+1}} \end{aligned}$$

מן הטענה נובע כי במקרה שלנו $a = id_G(a) = Ad_b^5(a) = a^{2^5} = a^{32}$, כלומר - $a^{31} = e$, ומכאן (31 הוא ראשוני) נובע, בהיות $o(a)|31$, כי הסדר של a הוא 31 או ש-$a = e$.

♠ [H] 2.5.38: תהי G חבורה סופית, ונתון שהקבוצות $V_n = \{x \in G | x^n = e\}$ מקיימות $|V_n| \leq n$ לכל n טבעי. נגדיר כעת גם קבוצות

$$U_n = \{x \in G | o(x) = n\} \subseteq V_n$$

נשים לב, שאם U_n כלשהי איננה ריקה, אזי כל $x \in U_n$ מקיים ש-$\langle x \rangle \subseteq V_n$, ואז

$$|\langle x \rangle| = o(x) = n, \ |V_n| \leq n \ \Rightarrow |V_n| = n,$$

ואנו מקבלים כי $V_n = \langle x \rangle$. לפיכך מספר האיברים ב-U_n שווה למספר היוצרים של $\langle x \rangle$, השווה ל-$\phi(n)$ - פונקציית אוילר של n. נסמן, אם-כן $\psi(n) = |U_n|$, ואנו יודעים כי $\psi(n) = \phi(n)$ אם ורק אם U_n איננה ריקה. כעת, נזכור שהקבוצות U_n, V_n אינן ריקות רק אם $n \big| |G|$, ולכן נוכל לרשום:

$$\begin{aligned} G &= \bigsqcup_{n \big| |G|} U_n \quad \text{(איחוד זר!!)} \\ |G| &= \sum_{n \big| |G|} |U_n| = \sum_{n \big| |G|} \psi(n) \end{aligned}$$

מצד שני, ידוע לנו מתורת המספרים כי $|G| = \sum_{n \big| |G|} \phi(n)$, ולכן בהיות $\psi(n) < \phi(n)$ אם"ם $U_n = \emptyset$, אנו מסיקים כי $\psi(n) = \phi(n)$ לכל $n \big| |G|$ - ובפרט $U_{|G|}$ איננה ריקה, והוכחנו את קיומו של איבר מסדר $|G|$ ב-G.

♠ [H] 2.5.24: נתון ש-G היא חבורה מסדר זר ל-3, וכי $(ab)^3 = a^3b^3$ לכל $a, b \in G$. מאסוציאטיביות+אינדוקציה ברור שגם $(abc)^3 = a^3b^3c^3$ לכל $a, b, c \in G$, ולכן:

$$\begin{aligned} ab^3a^{-1} &= (aba^{-1})^3 \\ &= a^3b^3a^{-3} \\ \Rightarrow b^3a^2 &= a^2b^3. \end{aligned}$$

הוכחנו, אם-כן כי $b^3 \in C_G(a^2)$, ולכן גם $\langle b^3 \rangle \in C_G(a^2)$. ברם, המספר 3 זר לסדר החבורה, ולכן הוא גם זר לסדר של a, ולכן $\langle b^3 \rangle = \langle b \rangle$ ובפרט $b \in C_G(a^2)$, כלומר $ba^2 = a^2b$.
מכאן נוכל להסיק כי $a^2b^2 = b^2a^2$, ואז נפתח את הזהות שנתונה לנו:

$$ababab = (ab)^3 = a^3b^3 = aaabbb$$

נצמצם a משמאל ו-b מימין, ונקבל את השוויון:

$$baba = aabb = a^2b^2 = b^2a^2.$$

צמצום נוסף מבטיח $ab = ba$.
נותר רק להעיר, שרעיון ההוכחה שלי נולד מהתבוננות בשלב האחרון שלה: ראיתי שכדאי להוכיח ש-$a^2b^2 = b^2a^2$.

♠ [**HK**] 8.3.13: S היא תת-קבוצה בממ"פ V. אנו רוצים להוכיח כי $Span(S) \subseteq S^{--}$, ומספיק להוכיח כי $S \subseteq S^{--}$, מכיוון $Span(S)$ הוא תת-המרחב המינימלי של V המכיל את S - וידוע ש-S^{--} הוא תת-מרחב (הרי A^- הוא תת-מרחב של V לכל תת-קבוצה $A \subseteq V$). ובכן, ניקח $s \in S$ ו-$x \in S^-$ ונראה כי $\langle s, x\rangle = 0$: בהיות x וקטור כלשהו של S^- נוכיח בכך ש-s שלקחנו ניצב לכל S^- - כנדרש.

$$\begin{aligned} x \in S^- \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{r\in S}\langle x, r\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad \langle x, s\rangle = 0, \end{aligned}$$

וסיימנו את ההוכחה.
כעת עלינו להוכיח שאם המימד של V סופי (נניח n), אזי מתקיים שוויון בהכלה שהוכחנו. לשם כך נוכיח כי $dim\left(Span(S)\right) = dim\left(S^{--}\right)$.
נזכור כי $Span(S)^- = S^-$, ואז ידועים לנו הפירוקים הבאים של V:

$$V = Span(S) \oplus Span(S)^bot = S^- \oplus (S^-)^-$$

מכאן, על-ידי מעבר למימדים נוכל להסיק:

$$dim(Span(S)) + dim(S^-) = dim(S^-) + dim(S^{--}) \Rightarrow dim(Span(S)) = dim(S^{--}).$$