1/11/2016

תרגול 2:

חזרה משיעור קודם:

אי שוויון המשולש – יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{R}$. אזי לכל $v,u \in V$ מתקיים:

$$\|v+u\| \le \|v\| + \|u\|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם u,v תלויים באופן אי שלילי.

הוכחה:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \overset{\substack{\text{אי שוויון} \\ \text{קושי–שוורץ}}}{\le} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

ולכן מתקיים אי השוויון כנ"ל.

מההוכחה ברור כי השוויון מתקיים אם ורק אם $\langle u,v\rangle = \|v\|\|u\|$. אם u,v תלויים ליניארית בצורה אי שלילית, אז הם ת"ל ולכן על פי קושי שוורץ, יתקיים שוויון.

להיפך, נניח כי $\langle v,u\rangle = \|u\|\|v\|$. אזי אם $v=0$, אזי נקבל כי $v = 0\cdot u$ ולכן u,v תלויים ליניארית בצורה אי שלילית. אחרת, נקבל כי $v \neq 0$ ועל פי אי שוויון קושי שוורץ u,v תלויים ליניארית. כלומר, קיימים α,β סקלרים ב-$\mathbb{R}$, כך שמתקיים:

$$\alpha v + \beta u = 0$$

ו-α,β לא יכולים להיות שניהם אפס. עתה נשים לב כי לא יתכן אף כי $\beta = 0$ שכן נקבל כי $\alpha v = 0$ $(v \neq 0)$ ואז נסיק כי בהכרח $\alpha = 0$ בסתירה לתלות הליניארית. לכן נחלק ב-β ונקבל כי $u = -\frac{\alpha}{\beta} v$. כלומר:

$$\langle u,v\rangle = \langle -\frac{\alpha}{\beta} v, v\rangle = -\frac{\alpha}{b}\langle v,v\rangle = -\frac{\alpha}{\beta}\|v\|^2 = \|u\|\|v\|$$

$v \neq 0$ ולכן נוכל לחלק בנורמה שלו ולקבל כי:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\|v\| = \|u\|$$

כלומר אכן מדובר בתלות ליניארית אי שלילית כנדרש.

נורמות:

נבדוק, כי $\|\cdot\|_\infty$ על $\mathbb{R}^n$ היא אכן נורמה על פי הגדרה.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$$

א. אי השליליות של הנורמה הנ"ל ברורה (ערך מקסימלי מבין ערכים מוחלטים אי שליליים).

ב. יהא $\lambda \in \mathbb{R}$, אזי מתקיים:

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda x_i|\} = \max_{1\le i\le n}\{|\lambda||x_i|\} = |\lambda| \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\} = |\lambda|\|x\|_\infty$$

ג. אי שוויון המשולש – יהיו $x,y \in \mathbb{R}^n$, אזי מתקיים:

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{|x_i + y_i|\}$$

אך בנורמת הערך המוחלט הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}$ מתקיים אי שוויון המשולש, ולכן:

$$\max_{1\le i\le n}\{|x_i+y_i|\} \le \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\} + \max_{1\le i\le n}\{|y_i|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

נבדוק, את קיומו של השוויון באי שוויון המשולש עבור נורמה זו ב-$\mathbb{R}^2$. נבחר $u=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ שני וקטורים מ-$\mathbb{R}^2$, אזי נשים לב כי:

$$\|u\|_\infty = 2 \quad \|v\| = 1$$

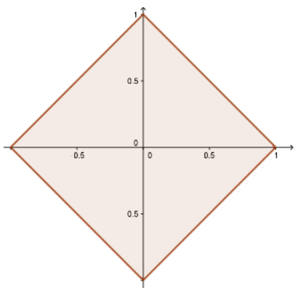
וכן:

$$\|u+v\| = 3$$

וקיבלנו כי מתקיים השוויון, אך u,v **אינם** תלויים ליניארית בניגוד למקרה של הנורמה שעסקנו בה בתחילת השיעור. המסקנה היא, כמובן, שנורמת האינסוף **אינה** מושרית על ידי אף מכפלה פנימית.

כדורים פתוחים, סגורים, וספירות:

נזכיר כי ב-$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_1)$ כדור פתוח ברדיוס r זוהי קבוצת נקודות $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ כך שמתקיים:



איור 1 – כדור בנורמת 1

$$|x-x_0|+|y-y_0|<r \rightarrow |y-y_0|<r-|x-x_0|$$

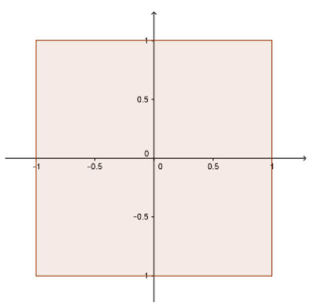
ולכן:

$$-r+|x-x_0|<y-y_0<r-|x-x_0|$$

וכן נזכיר כי ב-$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ כדור פתוח ברדיוס r הוא קבוצת נקודות $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ המקיימים:

$$\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}<r$$

כלומר:



איור 2 – כדור בנורמת אינסוף

$$|x-x_0|<r \Leftrightarrow |y-y_0|<r$$

והנ"ל שקול לכך ש:

$$-r+x_0<x<r+x_0 \quad -r+y_0<y<r+y_0$$

2.1 – הגדרה (תזכורת) – יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהא $u\in V$.
אזי פונקציה $f:V\mapsto V$ נקראת הזזה ב-u אם $f(v)=v+u$ לכל $v\in V$.

2.2 – טענה – כדורים בעלי אותו רדיוס במרחב נורמי $(V,\|\cdot\|)$ מתקבלים זה מזה על ידי הזזה.

<u>הוכחה:</u>

תהא f הזזה בווקטור u כלשהו של V. נראה איך מתארים תמונה של כדור $B(x_0,r)$ על ידי f. נשים לב כי בהנתן $v\in f\big(B(x_0,r)\big)$ נסיק כי קיים $w\in B(x_0,r)$ כך ש-$f(w)=v=v+u$. כלומר $w=v-u$. הנ"ל אומר כי $v\in f\big(B(x_0,r)\big)$ אם ורק אם:

$$\|v-u-x_0\|<r$$

כעת, יהיו $B_1(x_0,r)$ ו-$B_2(x_1,r)$ שני כדורים פתוחים:

1/11/2016

$$B_1(x_0,r)=\{v\in V|\|v-x_0\|<r\}\quad B_2(x_1,r)=\{v\in V|\|v-x_1\|<r\}$$

כלומר, נשים לב כי $B_1(x_0,r)$ מתקבל על ידי $B_2(x_1,r)$ על ידי הזזה בווקטור x_0-x_1. שכן $v\in f\big(B_1(x_0,r)\big)$ כלומר אם ורק אם $\|v-(x_0-x_1)-x_1\|=\|v-x_0\|<r$ כלומר $v\in B_1(x_0,r)$.