<u>המשפט היסודי</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. אזי $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ רציפה.
- **המשפט היסודי:** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ גזירה ו־ $F'(x)=f(x)$. בפרט, ל־ f יש פונקציה קדומה.

  הכללה (בהנחות הנכונות):

$$\frac{d}{dx}\int_{B(x)}^{A(x)} f(t)\,dt=f(A(x))\cdot A'(x)-f(B(x))\cdot B'(x)$$

- **נוסחת ניוטון־לייבניץ:** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ותהי F פונקציה קדומה שלה. אזי

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

  ניסוח אחר שימושי:

$$\int_a^b F'=F(b)-F(a)$$

- משפט (אינטגרציה בחלקים): אם ל־ u,v יש נגזרות רציפות ב־ $[a,b]$ אז:

$$\int_a^b uv'=uv\mid_a^b-\int_a^b u'v$$

- משפט (שינוי משתנים): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ גזירה ברציפות (לאו דווקא הפיכה) ומתקיים כי $\phi(\alpha)=a,\ \phi(\beta)=b$. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

תרגילים:

1. הוכח\הפרך: אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ב־ $[0,1]$ אז קיימת $c\in[0,1]$ כך ש־ $\int_0^1 f=f(c)$.

<u>פתרון:</u>

לא נכון. ניקח $f=\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$.

2. עבור איזה ערך של x לאינטגרל

$$\int_x^{x+3} t\left(5-t\right)dt$$

יש ערך מקסימלי?

<u>פתרון:</u>

נגדיר $f\left(x\right)=\int_x^{x+3} t\left(5-t\right)dt$. זו פונקציה גזירה לכל x. כמו כן, $\lim_{|x|\to\infty} f=-\infty$ לכן יש לה מקסימום גלובלי. נגזור:

$$f'\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(5-x-3\right)\cdot 1-x\left(5-x\right)\cdot 1$$

זה שווה ל־ 0 אם ואק אם $x=1$. לכן זהו בהכרח המקסימייזר של f.

3. חשבו את

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan\left(t\right)dt}{\int_0^{\sin x} t^2 dt}$$

<u>פתרון:</u>

ע"י לופיטל (מונה ומכנה שואפים לאפס), נגזור מונה ומכנה, ונקבל:

$$\frac{\tan\left(x^2\right)\cdot 2x}{\left(\sin x\right)^2}$$

אם לוקחים $x\to 0$ קל לראות שהגבול הוא 0.

4. הוכיחו ש־

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\left(x\right)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$$

<u>פתרון:</u>

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\left(x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\sin x dx=\left(2n-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{2n-2}x dx$$

נסמן ב־ I_n את האינטגרל הנתון ואז ע"י העברת אגפים:

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

ולכן:

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} I_0, \; I_0 = \frac{\pi}{2}$$

5. * תזכורת: בתרגול הקודם ראינו ש־ $\ln x$ אינטגרבילית רימן ב־ $[1,2]$.
חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right)$$

<u>פתרון:</u>

בתרגול הקודם, הוכחנו ש־ $\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$. מסכומי דרבו היגענו לסכום ואמרנו שאם היינו יודעים מה האינטגרל שווה, היינו יודעים לאן סכום הזה מתכנס. עכשיו אנחנו יודעים מהו האינטגרל: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$. נחזור לחלוקות שלקחנו שם, P_n, ואז:

$$U(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+(i-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

ידוע ש־ $U(P_n) \to \ln 2$, ומכאן

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

נשאלת השאלה אין היינו "מנחשים" שצריך להשתמש ב־ $\ln x$. מה שבאמת עושים זה שמתחילים עם הסכום וממנו מנסים להגיע לסכום דרבו \ סכומי רימן. למשל כאן:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

וכאן למשל רואים כדאי לקחת את הפונקציה $g(x) = \frac{1}{1+x}$ עם חלוקה $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, 1\right\}$ ונדוקות רימן $\left\{\frac{k}{n}\right\}$ ואז סכום רימן המתאים:

$$\sum_{k=1}^{n} g(c_k) \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

וזה מתכנס ל־ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+1) - \ln(1+0)$.

6. חשבו את $\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+(3n+7)^5}{n^6}$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש־

$$\frac{1^5+2^5+\cdots+(3n+7)^5}{n^6}=\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{7}\frac{(3n+k)^5}{n^6}$$

הסכום הראשון הוא סכום רימן של $f(x)=x^5$ בקטע $[0,3]$ והסכום השני הוא סכום סופי של 7 סדרות המתכנסות ל־ 0. לכן הגבול הוא סך הכל: $\int_0^3 x^5dx=\frac{3^6}{6}$.

7. חשבו את אורך העקום: $\{y^2=x^3,\ x\in[0,4]\}$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בכך שאם γ עקום הנתון ע"י גרף של פונקציה $\{(x,f(x))\,,\ x\in[a,b]\}$ גזירה ברציפות אז

$$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

אצלינו: ניקח $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $a=0,\ b=4$. אז אורך העקום הוא:

$$2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

8. חשבו את השטח החסום ע"י שתי הפונקציות e^x ו־ e^{-x}, והישר $x=1$.

<u>פתרון:</u>

ע"י ציור הפונקציות, קל להבחין שהשטח המבוקש הוא:

$$\int_0^1 e^x-e^{-x}dx$$

וחישוב בעזרת $N-L$:

$$\int_0^1 e^x-e^{-x}dx=e^x+e^{-x}\mid_{x=0}^{x=1}=\left(e+\frac{1}{e}\right)-2=2(\cosh 1-1)$$

9. יהיו $p,q>1$, כך ש־ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. הוכיחו שאם $a,b\geq 0$ אז

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

ושיוויון $\iff b=a^{p-1}$.

<u>הוכחה:</u> הביטוי $\frac{a^p}{p}$ מזכיר את $\int_0^a x^{p-1}dx$. נסמן $y=x^{p-1}$. חישבנו את השטח בין גרף הפונקציה לציר x ב־ $[0,a]$.

נהפוך את הפונקציה $x=y^{\frac{1}{p-1}}$ ואז השטח בין הרגף לציר y ב־ $[0,b]$ שווה ל־ $\int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy=\frac{b^q}{q}$. וקל מאוד לראות שאכן זה יותר מאשר שטח המלבן $[0,a]\times[0,b]$ והוא בדיוק המלבן אמ"ם $y(a)=b$.

10. חשבו את $\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx$.

<u>פתרון:</u>

קיימת סדרה $\{x_n\}$ כך ש־ $x_n\in[n,n+1]$ כך ש־ $\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin x_n}{x_n}$ לכן זה שואף ל־ 0, כי $\lim_{y\to\infty}\frac{\sin y}{y}=0$ (היינה).

11. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה. חשבו:

$$\lim_{x\searrow 0}x\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt$$

<u>פתרון:</u>

אם $f(0)=0$ אז קל לראות לפי רציפות "פונקציה צוברת־שטח" שהגבול הוא $0\cdot\int_0^1\frac{f}{t}dt=0$.

נניח כעת $f(0)>0$, לכן יש סביבת δ של אפס ו־ $\epsilon>0$ כך ש־ $f(t)>\epsilon$ בסביבה זו. כמו כן על פי מונוטוניות האינטגרל ו־ $N-L$:

$$\int_x^\delta\frac{f(t)}{t}dt\geq\epsilon(\ln\delta-\ln x)\xrightarrow{x\searrow 0}\infty$$

לכן נשתמש בלופיטל ("אם הגבול קיים"):

$$\lim_{x\searrow 0}x\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt=\lim_{x\searrow 0}f(x)\,x=0$$

באופן דומה אם $f(0)<0$.

12. הוכיחו שאינטגרל של פונקציה רציפה, אי זוגית, בתחום סימטרי הוא אפס.

והוכיחו שאם $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ זוגית ורציפה אזי

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

הסיקו ש־

$$\int_{-R}^R\frac{2x}{x^2+1}dx=0,\ \forall R>0$$

<u>פתרון:</u>

נובע ישירות מהחלפת משתנים.

למחשבה: האם הטענה נכונה אם מניחים רק ש־ f אינטגרבילית רימן?

13. * הוכח\הפרך: f אינטגרבילית $\Longleftrightarrow$ ל־ f יש פונקציה קדומה

<u>פתרון:</u>

$\Longrightarrow$לא נכון. למשל $\frac{1}{x}$ יש לה פונקציה קדומה ב־ $(0,1)$ שהיא $\ln x$ ולא אינטגרבילית רימן שם, הרי היא אפילו לא חסומה.

$\Longleftarrow$תקחו את פונקצית המדרגה. ראיתם בהרצאה שאין לה פונקציה קדומה (בגלל משפט דרבו) אבל היא רציפה פרט לנקודה אחת, ולפי התרגול הקודם היא אינטגרבילית רימן.

14. תהי f פונקציה אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ותהי F רציפה שם. כמו כן, השוויון $F'(x) = f(x)$ קיים פרט אולי למספר סופי. הוכיחו:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

15. אם f רציפה ב־ $[a,b]$, ו־ g אינטגרבילית בעלת סימן קבוע, אזי קיימת $c \in [a,b]$ כך ש־ $\int_a^b gf = f(c)\int_a^b g$