תכונות של טורי חזקות

נפעיל את ידיעותינו על טורי פונקציות וניישם אותם לטורי חזקות.

1. רציפות.

משפט. נתון טור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R וסכומו הוא $S(x)$ ב- $(-R,R)$.
אז $S(x)$ היא פונקציה רציפה ב- $(-R,R)$.

הוכחה: ניקח נקודה קבועה x_0 ב- $(-R,R)$. נבחר $0 < r < R$ כך ש- $|x_0| < r < R$. הטור מתכנס במ"ש ב- $[-r,r]$ לכן רציף שם, בפרט ב- x_0 . לכן $S(x)$ רציפה ב- x_0 . זה

נכון לכל x_0 ב- $(-R,R)$, ולכן $S(x)$ רציפה ב- $(-R,R)$.

מה קורה בקצוות?

<u>משפט.</u> אם ל- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ רדיוס התכנסות R והטור מתכנס ב- $x = R$, אז $S(x)$ רציפה משמאל ב- $x = R$.

<u>הוכחה:</u> הוכחנו כי אם הטור מתכנס ב- $x = R$ אז ההתכנסות היא במ"ש ב- $[0,R]$. לכן הסכום $S(x)$ רציף ב- $[0,R]$.

פרוש "רציפות ב- x_0" היא שמותר להחליף סדר סכימה ולקיחת גבול ב:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \, .$$

2. אינטגרציה.

<u>משפט.</u> נתון שלטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ רדיוס התכנסות R.

אז

(א) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (המתקבל ע"י אינטגרציה איבר-איבר) יש אותו רדיוס התכנסות R.

(ב) נסמן $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אז לכל $|x|<R$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt \\ &= \int_0^x S(t)dt\end{aligned}$$

ההתכנסות היא במ"ש עבור $-r \le x \le r$ אם $0<r<R$.

(ג) אם הטור הנתון מתכנס ב- $x=R$, אז גם טור האינטגרלים מתכנס ב- $x=R$ והנוסחה בסעיף (ב) נכונה עבור $0 \le x \le R$.

(כנ"ל לגבי $x=-R$).

<u>הוכחה:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_{m-1}}{m}\right) \cdot x^m$$

רדיוס ההתכנסות של הטור הזה הוא

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{R}} &= \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{a_{m-1}}{m}\right|} \\ &= \frac{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_{m-1}|}}{\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m}} = \frac{\frac{1}{R}}{1} = \frac{1}{R}\end{aligned}$$

הסבר:

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \equiv \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_{m-1}|}$$

כי

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1}x^m &= x \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1}x^{m-1} \\ &= x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\end{aligned}$$

ולשני הטורים יש אותו רדיוס התכנסות.

(ב),(ג) נובעים ממשפטים על התכנסות טורי פונ-
קציות במ"ש: פעם ב- $[-r,r] \subset (-R,R)$
ופעם ב- $[0,R]$.

מסקנה: אפשר לבצע אינטגרציה איבר-איבר
מספר כלשהו של פעמים.

גזירת טורי חזקות

משפט. נניח כי לטור $\sum a_n x^n$ רדיוס התכנסות
R, וסכומו $S(x)$. אז

(א) לטור המתקבל ע"י גזירת מחובר-מחובר,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

יש אותו רדיוס התכנסות R .

ב) לכל R $|x| < R$ קיים

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

כלומר

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_n x^n)$$

ג) אם טור הנגזרות מתכנס ב- $x = R$, אז גם הטור המקורי מתכנס ב- $x = R$, וסעיף (ב) מתקיים גם ב- $x = R$.

<u>הוכחה:</u> (א) חישוב רדיוס ההתכנסות:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \\
= \ & \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \lim\sup \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \\
= \ & 1 \cdot \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

(ב) ניקח נקודה אחת x_0, $|x_0| < R$ ונבדוק גזירות שם. $|x_0| < R$ לכן נבחר קבוע r כך ש- $|x_0| < r < R$.

ראינו שטור הנגזרות הוא בעל רדיוס התכנסות R ולכן מתכנס במ"ש ב- $[-r, r]$. גם הטור המקורי מתכנס במ"ש ל- $S(x)$ ב- $[-r, r]$.

אבל הוכחנו כי אם $\sum u'_n(x)$ מתכנס במ"ש ו- $\sum u_n(x)$ מתכנס ל- $S(x)$ אז $S(x)$ גזיר ו-

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)'.$$

בפרט זה קורה במקרה שלנו ולכן $S(x)$ גזירה בכל $[-r, r]$, בפרט ב- x_0. אבל x_0 הייתה נקודה כלשהי ב- $(-R, R)$ לכן הוכחנו את (ב) ב- $(-R, R)$.

שוב אותו עקרון: נקודה בפנים $(-R,R)$ אפשר לעטוף בקטע סגור:

$$x_0 \in [-r,r] \subset (-R,R)$$

(ג) נניח כי טור הנגזרות מתכנס בקצה $x=R$, כלומר $\sum n a_n x^{n-1}$ מתכנס גם עבור $x=R$. אז מסעיף (ב) של המשפט על אינטגרציה נובע שטור האינטגרלים אבר-אבר, כלומר הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ב: $[0,R]$.

בנוסף, טור הנגזרות מתכנס עד R, לכן מתכנס במ"ש ב- $[0,R]$ והטור מקורי כנ"ל, לכן

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n)$$

ב- $[0,R]$ ו: $\frac{d}{dx}S=\sum\left(a_nx^n\right)'$ מתקיים ב- $[0,R]$ כולל הקצה.

אפשר לחזור על תהליך הגזירה מספר כלשהו של פעמים ולקבל שאם יש לטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ רדיוס התכנסות R וסכום $S(x)$, אז

$$S^{(p)}(x)=\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-p+1)a_nx^{n-p}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+p)(m+p-1)\cdots(m+1)a_{m+p}x^m$$

ולכל p הטור המתקבל הוא בעל אותו רדיוס התכנסות.

פיתוח פונקציה לטור חזקות:

טור טיילור

תזכורת: נוסחת טיילור עם שארית:

אם $f, f', \ldots, f^{(n)}$ רציפות, $f^{(n+1)}$ קיימת (ולא דווקא רציפה), אז

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} \cdot x^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!} \cdot x^{(n+1)}$$

עבור איזשהו $0 < c < x$.

נתון שהטור $\sum^{\infty} a_k x^k$ הוא בעל רדיוס התכנסות $0 < R$, ונסמן את סכומו ב: $f(x)$. לפי מה

שהוכחנו, $f(x)$ גזירה ב- $(-R, R)$ מספר כלשהו של פעמים, ו: $f^{(n)}$ מיוצגת ע"י טור חזקות

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k x^{k-n}$$

לכל $-R < x < R$, ובפרט עבור $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n$$

ומקבלים מזה

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}, \quad n = 0, 1, \ldots ,$$

ולכן

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} \cdot x^n, \quad -R < x < R .$$

זה היה בהנחה שנתון שקיים טור חזקות עבור $f(x)$, והשאלה המעניינת יותר היא ההפוכה:

נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת סביב $x = 0$.
באיזה תנאי אפשר להציג אותה כטור חזקות?

לפי האמור למעלה, אם יש טור, יש לו אינסוף נגזרות. לכן <u>תנאי הכרחי</u> לקיום טור חזקות הוא של $f(x)$ יהיו אינסוף נגזרות. אבל זה לא תנאי מספיק.

<u>דוגמא.</u>

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

תרגיל. הוכח כי $f^{(n)}(0)=0$ לכל n.

למשל,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} \\ &= \lim_{s\to\infty}\frac{s}{e^{s^2}} = 0 \end{aligned}$$

באופן דומה מחשבים

$$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \ldots = 0.$$

מתקבל ש: $f^{(n)}(0)=0$ לכל $n\geq 0$, אבל

$$f(x)\not\equiv 0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n.$$

<u>משפט.</u> (תנאי מספיק לפיתוח לטור חזקות)

נתון ש- $f(x)$ גזירה מסדר כלשהו ב- $[-r,r]$, $r>0$ וקיים חסם M כך ש:

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$$

לכל $n = 0,1,2,\ldots$ ולכל $-r \leq x \leq r$. אז לטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} \cdot x^k$$

יש רדיוס התכנסות R המקיים $R \geq r$, וב- $[-r,r]$ הטור הזה מתכנס ל- $f(x)$.

<u>הוכחה:</u> נכתוב את נוסחת טילור עם שארית:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} \cdot x^k + R_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}\cdot x^{n+1}\right| \\
&\leq \frac{M\cdot r^{n+1}}{(n+1)\,!}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

כי $r < x < c < 0$. אבל ידוע שלכל r קבוע מתקיים $\lim_{m\to\infty} r^m/m! = 0$. לכן

$$
|R_n(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\cdot x^k\right| \to 0
$$

במידה שווה עבור $-r \leq x \leq r$.

דוגמאות: פונקציות אלמנטריות שונות

<u>דוגמא 1.</u> $f(x)=e^x$ על $[-r,r]$, r כלשהו.
כאן

$$f^{(n)}(x) = e^x \le e^r \equiv M$$

$$e^x = f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}\cdot x^k = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k\,!}$$

על כל $[-r,r]$, לכן $R=\infty$.

<u>דוגמא 2.</u> $f(x)=\sin x$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1 \quad \Longleftarrow \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \pm\sin x \\ \pm\cos x \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(0) &= -1 \end{aligned}\right\}$$

מחזור 4

$$f^{(4)} = \sin x = f(x) \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

<u>תרגיל.</u> לחשב את טור טיילור של $\cos x$.

<u>דוגמא 3.</u> ידוע

$$|x| < 1 \quad , 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_0^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$$

<u>הערה.</u> כאן $M \leq \left|f^{(n)}(x)\right|$ לא מתקיים כי

$\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} = 1$, אבל גם לא נחוץ.

מותר לגזור ב- $(-1,1)$ ולקבל

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^\infty kx^{k-1} = \sum_{m=0}^\infty (m+1) \cdot x^m \quad (2)$$

עבור $|x| < 1$. גזירה נוספת נותנת

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{m=1}^\infty (m+1)(m) \cdot x^{m-1} \\ &= \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{2} \cdot x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \cdot x^n \quad , |x| < 1$$

<u>**תרגיל.**</u> לחשב את $\frac{1}{(1-x)^p}$, $p = 1, 2, 3, \ldots,$.

<u>**דוגמא 4.**</u> למעלה נחליף $-x = t$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad |t| < 1$$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \, \frac{x^k}{k}, \qquad |x| < 1$$

כאן יש תוספת: הטור מתכנס עבור $x = 1$,
כי אז הוא $\sum \frac{(-1)^k}{k}$. לכן סכום הטור הוא
פונקציה רציפה עד $x = 1$, כלומר

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$$
$$-1 < x \leq 1$$

אך לא ב- $x = -1$.

בפרט עבור $x = 1$ מקבלים

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots$$

<u>שאלה.</u> כמה מחוברים יש לקחת כדי להבטיח
שהשארית $|R_n| < 10^{-6}$?

הערה. $\log(1+x)$ מוגדר עבור $-1 < x < \infty$ והטור מתכנס רק עבור $-1 < x \le 1$. ההסבר לזה יבוא בקורס בפונקציות מרוכבות.

תרגיל. כיצד לחשב למשל את $\log 7$?

מחשבים טור עבור

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = \sum \ldots$$

ובהצבה $s = \dfrac{1+x}{1-x}$ נקבל טור בחזקות של x, לא של s, עבור $\log s$.

דוגמא 5. בטור עבור $\dfrac{1}{1-x}$ ניקח $-x = t^2$:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}$$

עבור $|t| < 1$, ואינטגרציה עבור $0 \leq t \leq x$ נותנת

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$$

עבור $|x| < 1$. הטור מתכנס גם עבור $x = \pm 1$, ולכן מתכנס במ"ש על $[-1,1]$. בפרט, עבור $x = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan(1) = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \end{aligned}$$

__הערה.__ $\arctan x$ מוגדר לכל x , הטור רק ל- $|x| \leq 1$.

פיתוח $(1+x)^\alpha$ לכל α

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^\alpha, \ldots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

$$
a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},
$$

$$
0! = 1
$$

נסתכל בטור

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n \\
&= 1 + \alpha x + \ldots
\end{aligned}
$$

בינתיים לא ברור מתי הטור מתכנס ואם כן, האם ל- $f(x)$?

חישוב רדיוס התכנסות:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|\alpha-n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-\alpha} = 1 \end{aligned}$$

לכן הטור מתכנס וגזיר עבור $|x| < 1$.

מה סכומו?

נסתכל ב-

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x)^{-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}\right]$$

$$= \; (-\alpha)(1+x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \ldots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$+ \; (1+x)^{-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \ldots (\alpha-n+1)}{n!} n \cdot x^{n-1}$$

$$= \; (1+x)^{-\alpha-1} \left[(-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \alpha \ldots (\alpha-n+1)}{n!} \right.$$

$$\left. + \; (1+x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \ldots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \right]$$

$$= \; (1+x)^{-\alpha-1} \cdot \left[(-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \alpha \ldots (\alpha-n+1)}{n!} \right.$$

$$+ \; 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \ldots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$$

$$\left. + \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \ldots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^n \right]$$

$$= \; (1+x)^{-\alpha-1} \cdot [\underbrace{(-\alpha)+\alpha}_{n=0} +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n$$
$$\cdot \quad [(-\alpha) + (\alpha - n) + n]] \equiv 0$$

לכן הביטוי קבוע ועבור $x = 0$ ערכו 1 .

<u>שאלה.</u> מה קורה כאשר α שלם חיובי?

שימוש של נוסחא זו לחישוב טור טיילור של $\arcsin x$ הוא כדלקמן:

$$(1+x)^\alpha \longrightarrow (1+x)^{-1/2} \longrightarrow (1-t^2)^{-1/2}$$
$$\longrightarrow \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$