12.12

תורת המשחקים

גליון 6

מגישים:

I [redacted]

II [redacted]

10

	q I	$1-q$ II
p I	1,3	-1,0
$1-p$ II	0,0	0,2

1. א.

יש במשחק זה שתי נקודות

שיווי-משקל בתכסיסים טהורים:

(I, I) עם תשלומים $(1,3)$

ו- (II, II) עם תשלומים $(0,2)$.

נחפש נקודות שיווי-משקל נוספות בהרחבת העירוב.

לא ייתכנו במשחק זה נקודות שיווי-משקל בהן אחד השחקנים משתמש

בתכסיס טהור, והשני משתמש בתכסיס מעורב ממש.

נותרה האפשרות בה שני השחקנים משתמשים בתכסיס מעורב ממש

לכן: $supp(\vec{p}) = \{I, II\}$ וגם $supp(\vec{q}) = \{I, II\}$.

לכן תנאי האדישות מתקיימים:

$$3p = 2(1-p) \qquad q-(1-q) = 0$$

$$p = \frac{2}{5} \qquad q = \frac{1}{2}$$

ומצאנו שבהרחבת העירוב של המשחק ישנן 3 נקודות שיווי-משקל:

- $((1,0), (1,0))$ עם תשלומים $(1,3)$
- $((0,1), (0,1))$ עם תשלומים $(0,2)$
- $((\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ עם תשלומים $(0, 1\frac{1}{5})$

	I (q)	II ($1-q$)
I (p)	$2,-1$	$1,4$
II ($1-p$)	$2,4$	$3,1$

ב.

במשחק זה קיימת נקודת שיווי-משקל
אחת בתכסיסים טהורים:
(II, I) עם תשלומים $(2,4)$.

נחפש נקודות שיווי-משקל נוספות בתכסיסים מעורבים.
מתכונת האדישות נובע שתתכן נקודת שיווי-משקל אחת
בלבד בה אחד השחקנים משתמש בתכסיס
טהור, והשני משתמש בתכסיס מעורב ממש:

שחקן 2 משחק $(1,0)$ ושחקן 1 $(p,1-p)$

ונקבל $I \in supp(\vec{q})$, $II \notin supp(\vec{q})$ ולכן

מתקיים: $-p+4(1-p) \ge 4p+(1-p)$

$8p \le 3$

$p \le \frac{3}{8}$

לכן לכל $p \le \frac{3}{8}$ $((p,1-p),(1,0))$ היא נקודת
שיווי משקל עם תשלומים $(2, 4-5p)$

כעת נבחן את האפשרות בה שני השחקנים משתמשים בתכסיס מעורב ממש
ולכן: $supp(\vec{p}) = \{I, II\}$, $supp(\vec{q}) = \{I, II\}$

ולכן מתנאי האדישות מתקיים:

$2q+(1-q) = 2q+3(1-q)$ $\qquad$ $-p+4(1-p) = 4p+(1-p)$

$q = 1$ $\qquad$ $p = \frac{3}{8}$

בסתירה לכך ש- $II \in supp(\vec{q})$

ולכן נקודות שיווי המשקל היחידות הן:

$((p,1-p),(1,0))$ עם תשלומים $(2, 4-5p)$

לכל $0 \le p \le \frac{3}{8}$

ג.

		q I	$1-q$ II
p	I	3,4	2,3
$1-p$	II	4,4	1,5

במשחק זה אין נקודות שווי-משקל
בתכסיסים טהורים.
נחפש, אם כן, נקודות שווי משקל
בהרחבת העירוב.

לא יתכנו במשחק זה נקודות שווי-משקל בהן אחד השחקנים
משתמש בתכסיס טהור והשני משתמש בתכסיס
מעורב ממש (מתנאי האדישות).

נותרה האפשרות בה שני השחקנים משתמשים בתכסיס מעורב
ממש, כלומר: $supp(\bar{p}) = \{I, II\}$, $supp(\bar{q}) = \{I, II\}$

ולכן מתנאי האדישות מתקיים:

$$3q + 2(1-q) = 4q + (1-q) \qquad 4p + 4(1-p) = 3p + 5(1-p)$$

$$q = \tfrac{1}{2} \qquad p = \tfrac{1}{2}$$

לכן נקודת שווי-המשקל היחידה במשחק זה היא:
$\left((\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\right)$ עם תשלומים $(2\tfrac{1}{2}, 4)$

2. יהא $G=(S,T,\pi_1,\pi_2)$ משחק שני שחקנים

ללא נקודות שיווי-משקל, כאשר $|S|=|T|=2$.

נראה שלהרחבת העירוב G^* יש נקודת שיווי-משקל יחידה:

- נראה כי לא ייתכן נקודת שיווי משקל בהן אחד השחקנים משתמש באסטרטגיה טהורה.

נניח בשלילה שקיימת נקודה כנ"ל, נניח בה"כ כי שחקן 2 משתמש באסטרטגיה טהורה: בחירת עמודה 1.

ברור כי שחקן 1 משתמש באסטרטגיה מעורבת ממש (מכיוון שנתון שאין נקודות שיווי-משקל ב-G) ונניח שהוא משחק $(p,1-p)$ כאשר $p\neq 0,1$.

אזי מתנאי האדישות עבור שחקן **1** מתקיים:

$$(*)\quad \pi_1(s_1,t_1)=\pi_1(s_2,t_1)$$

ובנוסף, מהתנאי השני לנקודת שיווי-משקל מתקיים:

$$(**)\quad p\cdot\pi_2(s_1,t_1)+(1-p)\,\pi_2(s_2,t_1)\ge p\cdot\pi_2(s_1,t_2)+(1-p)\,\pi_2(s_2,t_2)$$

אבל מכך שאין נקודת שיווי-משקל ב-G אני יודעים:

- $\pi_2(s_1,t_1)<\pi_2(s_1,t_2)$ כי אחרת, בצירוף עם $(*)$ היה נובע כי (I,I) נקודת שיווי-משקל ב-G.
- $\pi_2(s_2,t_1)<\pi_2(s_2,t_2)$ כי אחרת, בצירוף עם $(*)$ היה נובע כי (II,I) נקודת שיווי-משקל ב-G.

$\Downarrow$

קיבלנו סתירה ל-$(**)$ ולכן לא תיתכן נקודת שיווי-משקל בה אחד השחקנים משתמש באסטרטגיה טהורה.

האפשרות היחידה שניתנה לנקודת שיווי-משקל ב-G^* היא אם שני השחקנים משתמשים בתכסיסים מעורבים ממש.

נניח כי שחקן 1 משחק $(p,1-p)$ ושחקן 2 $(q,1-q)$.

ראינו כי הנקודה $((p,1-p),(q,1-q))$ תהיה נקודת שיווי-משקל אומ"מ מתקיים תנאי האדישות:

(התנאי השני לא רלוונטי כיוון כי $supp(\vec{p}) = supp(\vec{q}) = \{1,2\}$ וזה הכל)

- $p\,\pi_2(s_1,t_1) + (1-p)\,\pi_2(s_2,t_1) = p\,\pi_2(s_1,t_2) + (1-p)\,\pi_2(s_2,t_2)$
- $q\,\pi_1(s_1,t_1) + (1-q)\,\pi_1(s_1,t_2) = q\,\pi_1(s_2,t_1) + (1-q)\,\pi_1(s_2,t_2)$

ולמשוואות אלו ישנו פתרון יחיד:

$$p = \frac{\pi_2(s_2,t_2) - \pi_2(s_2,t_1)}{\pi_2(s_1,t_1) - \pi_2(s_2,t_1) - \pi_2(s_1,t_2) + \pi_2(s_2,t_2)}$$

$$q = \frac{\pi_1(s_2,t_2) - \pi_1(s_1,t_2)}{\pi_1(s_1,t_1) - \pi_1(s_1,t_2) - \pi_1(s_2,t_1) + \pi_1(s_2,t_2)}$$

מכך של-G אין נקודת שיווי-משקל נובע כי $0 < p,q < 1$ $\leftarrow$

כנדרש ולכן מצאנו נקודת שיווי-משקל יחידה:

$((p,1-p),(q,1-q))$

עבור p,q הנ"ל.

* נראה כי אכן $0<p,q<1$ כנדרש:

בהכרח מתקיים כי: $a = \pi_2(s_2,t_2) - \pi_2(s_2,t_1)$

$b = \pi_2(s_1,t_1) - \pi_2(s_1,t_2)$

שווי סימן (ובהכרח לא אפסים)

כי נניח שהם שוני סימן, בה"כ ~~[illegible]~~

ונקבל כי: $\pi_2(s_2,t_2) > \pi_2(s_2,t_1) \wedge \pi_2(s_1,t_1) < \pi_2(s_1,t_2)$

אז: אם $\pi_1(s_1,t_2) \geq \pi_1(s_2,t_2)$ אז (I,II)

נקודת שווי-משקל ב-G בסתירה לכך שאין לה.

ואחרת $(\mathrm{II},\mathrm{II})$ נקודת שווי-משקל ב-G בסתירה לכך שאין לה.

$$\Downarrow$$

$$0 < p = \frac{a}{a+b} < 1$$

מכיוון ש- a,b שווי סימן.

~~[illegible]~~ ובאותו אופן מראים עבור q.

3.

א. נניח כי החקלאי יביא Q קילו עגבניות לשוק. אזי פונקציית התשלום שלו נתונה ע"י:

$$\pi(Q) = (a-bQ)Q$$

נחפש את הנקודה בה $\pi(Q)$ מקסימלית.

נעשה זאת ע"י גזירה:

$$\pi'(Q) = a-2bQ = 0$$

$$Q = \frac{a}{2b}$$

כלומר $Q = \frac{1}{2}\frac{a}{b}$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה

ולכן כדי למקסם את תשלומו, החקלאי יביא לשוק $\frac{a}{2b}$ קילו עגבניות וירוויח $\frac{a^2}{4b}$.

ב. נניח כי $\pi_1(Q_1,Q_2)=[a-b(Q_1+Q_2)]Q_1$ היא פונק' התשלום לחקלאי 1

ו- $\pi_2(Q_1,Q_2)=[a-b(Q_1+Q_2)]Q_2$ היא פונק' התשלום לחקלאי 2.

תהיה (Q_1,Q_2) נקודת שווי משקל נאש

$$\pi_1(Q_1,Q_2) = \max_{\tilde{Q}_1} \pi_1(\tilde{Q}_1,Q_2)$$

$$\pi_2(Q_1,Q_2) = \max_{\tilde{Q}_2} \pi_2(Q_1,\tilde{Q}_2)$$

ולכן נקבע Q_2 ונמצא נקודת מקסימום ל π_1:

$$\pi_1(Q_1,Q_2) = [a-b(Q_1+Q_2)]Q_1$$

$$\pi'(Q_1,Q_2) = a-bQ_2-2bQ_1 = 0 \quad \text{(לפי } Q_1\text{)}$$

$$Q_1 = \frac{a-bQ_2}{2b}$$

ובאותו אופן נקבע Q_1 ונמצא נקודת מקסימום של π_2

ונקבל ש- $Q_2 = \frac{a-bQ_1}{2b}$

ולכן משני התנאים נקבל:

$$2bQ_1 = a - \frac{b(a-bQ_1)}{2b}$$

$$\left(2b-\frac{b}{2}\right)Q_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow Q_1 = \frac{a}{3b}$$

ולכן גם $Q_2 = \frac{a}{3b}$

לכן $(\frac{a}{3b}, \frac{a}{3b})$ היא נקודת שיווי-המשקל היחידה

והרווח של כל חקלאי בה הוא $(a-b\cdot\frac{2a}{3b})\frac{a}{3b} = \frac{a^2}{9b}$

ג.

	השוק המונופוליסטי	השוק הדואופוליסטי
כמות העגבניות בשוק	$\frac{a}{2b}$	$\frac{2a}{3b}$
מחיר העגבניות	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$
התשלום שחקלאי מקבל	$\frac{a^2}{4b}$	$\frac{a^2}{9b}$

בסעיף ב': חסרות ∞ נק' ש"מ

בהן $Q_1, Q_2 \geq \frac{a}{b}$

(והתשלום לכל שחקן הוא 0)