תורת הקבוצות־תרגיל בית 2

שניר הורדן־205689581

6 במאי 2018

.1
סכום מינקובסקי: $A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$.
וכן: $\lambda A=\{\lambda a|a\in A\}$.
א.

$$\{4,7,-6\}+2\{0,3\}=\{4,7,-6\}+\{0,6\}=\{4,7,-6,0,10,13\}$$

ב.

$$(0,1)+[2,3]=(2,4)$$

ג.

$$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}\Rightarrow 3\mathbb{Z}=\{...,-6,-3,0,3,6,...\}$$

ד.

$$\mathbb{N}+(-1)\mathbb{N}=\mathbb{Z}$$

ה.

$$\frac{1}{3}[0,1]+\frac{2}{3}=\left[0,\frac{1}{3}\right]+\frac{2}{3}=\left[\frac{2}{3},1\right]$$

.2
א. הטעות בהוכחה היא שרק $a\in A$ וה־b הוא b כלשהו. הטענה שגויה כי נוכל להגדיר יחס שהוא סימטרי וטרנזיטיבי אך לא יחס שקילות. לדוגמא, היחס <u>הדו־מקומי</u> $R_n\subseteq\mathbb{N}^2$,

$$R_n=\{(a,b)\,|\neg(n|a)\wedge\neg(n|b),a,b\in\mathbb{N},a\neq b\}$$

המחלקים הזרים <u>השונים</u> של מספר כלשהו, $n\in\mathbb{N}$.
ב. תנאי הכרחי ומספיק לכך שיחס סימטרי וטרנזיטיבי יהיה רפלקסיבי הוא שמתקיים $a,b\in A$ ולא רק $a\in A$.

.3

א. $E_1 \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $E_1=\{(x,y)\,|xy>0\}$.

נציג למחלקת שקילות:

$$[x]=\mathbb{N}\backslash\{0\}$$

עבור $x\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

ב. $E_2\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}, E_2=\{(x,y)\,|x-y\in\mathbb{Z}\}$

נציג למחלקת שקילות:

$$[x]=\mathbb{Z}$$

עבור $x\in\mathbb{Z}$.

ג. $E_3\subseteq\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, E_3=\{(f,g)\,||f(x)\neq g(x)|\leq 100, x\in\mathbb{Z}\}$

זה אינו יחס שקילות. הוא אינו מקיים את תכונת הטרנזיטיביות. **הוכחה:** נוכיח באמצעות דוגמה נגדית:

$f,g,h\in\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$.

$f=$הכל אפסים פרט לאיברים באינדקסים 100-1, שהם 1.

$g=$הכל אפסים פרק לאיברים באינדקסים 120-60, שהם 1.

$h=$הכל אפסים פרק לאיברים באינדקסים 170-70, שהם 1 .

אז נקבל fE_3g וגם gE_3h, אך לא מתקיים fE_3g. סתירה לתכונת הטרנזיטיביות ביחסי שקילות. ■

עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם הן מוגדרות היטב או לא:

א. $f_1:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}$ המוגדרת $f_1([a])=a$.

קיום- לכל $z\in\mathbb{Z}_n$ קיימת מחלקת שקילות (מתכונת הרפלקסיביות) ולכן קיים פלט שהוא האיבר עצמו.

יחידות- יהיו $z_1,z_2\in\mathbb{Z}_n$, כך שמתקים $[z_1]=[z_2]$זה ייתכן אם קיים יחס R כך ש-z_1 ו-z_2 שניהם ביחס חלוקה אז נקבל שעבור אותו קלט נקבל שני פלטים שונים. כלומר הפוננקציה תלויה בנציג שאנו בוחרים עבור מחלקת השקילות. סתירה ליחידות.

לכן זו אינה פונקצייה מוגרת היטב.

ב. $f_2:\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n\to\mathbb{Z}_n$ המוגדרת $f_2([a],[b])$=$[a+b]$.

קיום- לכל $z\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ קיימת מחלקת שקילות שהיא מחלקת השקילות שלסכום האיברים של הנציגים של מחלקות השקילות של z.

יחידות- עבור שני מחלקות שקילות זהות נקבל פלטים שונים התלויים בנציגים שאותם בחרנו עבור המחלקות שקילות בקלט.

לכן, זו אינה פונקציה מוגדרת היטב.

ג. $f_3:P(P(\mathbb{N}))\to P(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f_3(X)=\bigcap X$.

קיום- לכל קבוצה $X\in P(P(\mathbb{N}))$ נוכל לקבל את האיחוד של האיברים שלה ולכן יהיה קיים פלט לכל איבר בתחום.

יחידות- לכל איבר בתחום יש דרך יחידה להצגה באיחוד של האיברים שלו.

לכן, פונקציה זו מוגדרת היטב.

.4

א. התמונה של הפונקציה היא $[-2,2]$.

נימוק: פונקציית הסינוס היא פונקציה מחזורית אשר תמונתה היא $[-1,1]$ אם נכפיל אותה פי 2 נקבל את הדרוש.
ב.$\mathbb{Q}$
נימוק: הפונקצייה מתארת את כל המספרים הרציונאליים, גם השליליים למרות שהמכנה תמיד חיובי. וכן מתקיים $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
ג. $[0,\infty)$
נימוק: הפלט הוא העצמה של הקלט. עצמה של מספר מרוכב היא מספר ממשי ועבור כל המספרים המרוכבים נקבל את כל העצמות האפשריות שהן כל הממשיים.
ד. $\mathbb{R}$
נימוק: פונקציית הטנגנס היא בעלת אסימפטוטות אנכיות ב־$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$, לכן עבור התחום הנ"ל תמונתה מכסה את כל הממשיים.
5. הוכחה: לפי ההגדרה קבוצת קנטור היא:

$$C_{\rm n} = \frac{1}{3}C_{n-1} + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1})$$

כאשר $C_0 = [0,1]$.
נתבונן בקבוצה $C = \frac{1}{3}C \bigcup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right)$ כאשר $C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n = liminf C_n$.
נשים לב כי $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n \to C_\infty$ כאשר C_∞ הוא גבול כלשהו, מאחר ו־$C_n \subset C_{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נוכיח זאת באינדוקציה:
בסיס: $n=1$ אזי מתקיים $C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3},1\right] \subset [0,1] = C_0$.
צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n \geq 2$ ונוכיח עבור $n+1$.

$$C_n \subset C_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3}C_n + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n) \subset \frac{1}{3}C_{n-1} + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}) \Rightarrow C_{n+1} \subset C_n$$

בזו הסתיימה האינדוקציה.
לכן

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}C_{n-1} + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}) \underbrace{=}_{limit \Rightarrow index-makes-no-difference} \bigcap_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}C_n + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n) \underbrace{=}_{arithmetic-of-limits} \frac{1}{3}C + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C)$$

■

6.
א. הוכחה
נתבונן בביטוי $E_n = \left\{\left(\bar{a},\bar{b}\right) \in X_n^n | \exists \lambda \in \mathbb{R} \left(\bar{a} = \lambda\bar{b}\right)\right\}$.
(1)סימטריות־ נראה כי אם $\bar{a} \sim \bar{b}$ אז $\bar{b} \sim \bar{a}$.
נניח כי $\bar{a} \sim \bar{b}$.

אזי

$$\bar{a}\sim\bar{b}\iff\exists\lambda\in\mathbb{R}\left(\bar{a}=\lambda\bar{b}\right)\iff\exists\lambda_1\in\mathbb{R}\left(\lambda_1\bar{a}=\bar{b}\right)\iff\bar{b}\sim\bar{a}$$

(2)<u>רפלקסיביות־</u> נראה כי $\bar{a}\sim\bar{a}$.

$$\left\{\bar{a}=\lambda\bar{a}\quad\lambda=1\right.$$

(3)<u>טרנזיטיביות־</u>
נניח כי $\bar{a}\sim\bar{b}$ וגם $\bar{b}\sim\bar{c}$. אזי

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}\left(\bar{a}=\lambda\bar{b}\right)\wedge\exists\lambda_1\in\mathbb{R}\left(\lambda_1\bar{c}=\bar{b}\right)\Rightarrow a=\lambda\lambda_1c$$

ומתקיים $\lambda\lambda_1\in\mathbb{R}$(סגירות לכפל מעל הממשיים) אז מצאנו קבוע ממשי המקיים את היחס.
מ.ש.ל.
ב.<u>הוכחה</u>
תהי הפונקציה $\psi:\left(\mathbb{P}^n\mathbb{R}\backslash H_n\right)\to\mathbb{R}^n$

$$\psi\left([\bar{a}]\right)=\left(\frac{a_1}{a_{n+1}},...,\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

(1)<u>הוכחה מוגדרת היטב:</u>
ראשית, אין חילוק ב־0 כי $\bar{a}\notin H_n\Rightarrow a_{n+1}\neq0$.
נראה קיום של פלט לכל קלט,
$\bar{a}=(a_1,...,a_{n+1})$ ומתקיים $\bar{a}\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ אז יהיה פלט לא טריויאלי לכל $\bar{a}$.
(2)<u>הוכחת חח"ע ועל:</u>
נראה יחידות של הפלט עבור כל קלט של ψ.
נניח $\left[\bar{b}\right]=[\bar{a}]$. אזי $\exists\lambda\left(\bar{a}=\lambda\bar{b}\right)$. אזי,

$$\left(\frac{a_1}{a_{n+1}},...,\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\underbrace{=}_{\bar{b}\notin H_n\Rightarrow b_{n+1}\neq0}\left(\frac{\lambda b_1}{\lambda b_{n+1}},...,\frac{\lambda b_n}{\lambda b_{n+1}}\right)\underbrace{=}_{reduction-of-\lambda}\left(\frac{b_1}{b_{n+1}},...,\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)$$

הראנו כי לכל נציג של מחלקת שקילות הפלט זהה. הוכחנו חח"ע.
נראה כי לכל $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ קיים $\left[\bar{b}\right]\in\left(\mathbb{P}^n\mathbb{R}\backslash H_n\right)$ כך שמתקיים $\psi\left(\left[\bar{b}\right]\right)=\bar{a}$.
נשים לב כי $\left[\bar{b}\right]=\left[(\lambda a_1,...,\lambda a_n,\lambda)\right]\in\left(\mathbb{P}^n\mathbb{R}\backslash H_n\right)$ כאשר $\lambda\neq0\in\mathbb{R}$ עונה על תנאי זה.
אז הפונקציה היא על.
ג. תהי $\psi:H_n\to\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ המוגדרת כך:

$$\psi\left([\bar{a}]\right)=\left[(a_1,...,a_{n-1})\right]$$

זו פונקציה חח"ע ועל.

ד. קבוצת הנציגים היא קבוצת הנקודות במעגל היחידה. אלו מייצגים את כל הוקטורים הקיימים ב-$\mathbb{R}^2$ כי אם נכפיל נקודה כלשהי בסקלר כלשהו נגיע לכל וקטור במישור, זהו חתך של מרחב המנה.

כל האיברים בקבוצה הנ"ל פרט ל-$(1,0)$ עוברים ל-$\mathbb{R}$ על ידי ψ. $H_1 = \{(1,0)\}$.

ה. קבוצת הנציגים הנ"ל הן ספרת היחידה, $H_2 = \left\{(x,y,0) \,|x^2+y^2=1\right\}$ כלומר מעגל היחידה, וכל האיברים הנ"ל עוברים ל-$\mathbb{R}^2$ על ידי ψ פרט לאיברים ב-H_2.