התכנסות בהחלט של אינטגרל

עד עתה דיברנו בעיקר על פונקציות המקיימות $0 \geq f$. אם f מחליפה סימנים יתכן ש:

א. $\int^{\infty} f$ מתכנס בגלל ש: f מבצע תנודות כך שהתרומות החיוביות והשליליות מבטלות חלקית, וצורת הגרף היא למשל כמו עבור $\frac{\sin x}{x}$.

ב. $\int^{\infty} f$ מתכנס כי f דועך מהר, כמו למשל עבור $\frac{\sin x}{x^2}$, $x > 1$.

אנו רוצים להבחין בין שתי האפשרויות. כזכור אם f אינטגרבילית ב: $[a, b]$ אז גם $|f|$

אינטגרבילית ב: $[a,b]$. נניח להלן ש f אינטגרבילית על כל קטע $[a,b]$, $b > a$.

<u>הגדרה.</u> אם $\int_a^\infty |f|$ קיים, אז נאמר ש: "האינטגרל מתכנס בהחלט" converges absolutely. אם $\int_a^\infty |f|$ לא קים אבל $\int_a^\infty f$ כן קיים, נאמר ש: $\int_a^\infty f$ "מתכנס בתנאי" converges conditionally.

<u>משפט.</u> אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס.

<u>הוכחה:</u> כדי להוכיח ש: $\int_a^\infty f$ מתכנס נשתמש בקריטריון קושי. בהנתן $\epsilon > 0$ קיים $B > 0$ כך

ש:

$$\int_{b_1}^{b_2} |f| < \epsilon$$

לכל B > b_1 > b_2, כי $\int_a^\infty |f|$ מתכנס. אך אז נובע מ:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f| < \epsilon$$

לכל B > b_1 > b_2 שגם $\int_a^\infty f$ מתכנס.

<u>הערה.</u> ברור שקיים

$$\left|\int_a^\infty f\right| \leq \int_a^\infty |f| ,$$

כי לכל b סופי

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| .$$

עבור פונקציה בעלת סימן קבוע אין חשיבות למושג הזה. הוא משמעותי רק עבור פונקציות אשר מחליפות סימן אינסוף פעמים.

<u>דוגמא</u>. האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

מתכנס (ומתכנס בהחלט), כי $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ מתכנס ו: $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. נימוק דומה לא יועיל בחקירת האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

כי $1/x$ לא יורד מספיק מהר לאפס. אולם ההתכנסות של $\int^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ עשויה להתקבל

בגלל קיזוזים של ערכים חיוביים ושליליים.
המשפט הבא ייתן מענה לשאלת ההתכנסות
עבור הדגמא הזן.

משפט, מבחן ההתכנסות של Dirichlet.

נתון ש $f(x)$ אינטגרביליית בכל $[a, b]$ וקיים
קבוע $C > 0$ כך ש

$$\left|\int_a^b f\right| \leq C$$

לכל $\infty > b > a$. נתון שהאינטגרל $\int_a^{\infty} |g'|$
קיים, ו $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. אזי האינטגרל המוכלל

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$$

קיים. בפרט אם $g'(x)$ בעלת סימן קבוע עבור $x > x_0$, אז

$$\int_{x_0}^{\infty} |g'| = \pm \int_{x_0}^{\infty} g' = \mp g(x_0).$$

<u>הוכחה:</u> נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\int_a^x f(t)g(t)dt \ = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt.$$

המחובר הראשון: $F(x)g(x) \to 0$ כאשר $x \to \infty$, כי F חסומה ו: $g(x) \to 0$.

המחובר השלישי מתכנס בהחלט, כי $|F(t)g'(t)| \leq C|g'(t)|$ ו: $\int_a^{\infty} |g'| < \infty$, ומקריטריון ההשוואה גם

$\int_a^\infty |F(t)g'(t)| < \infty$, ו: $F(t)g'(t)$ אינטגרבילי בהחלט על $[a,\infty)$.

<u>דוגמא.</u> ניקח $f(x) = \sin x$ ו: $g(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. אז

$$\left|\int_a^x \sin t dt\right| = |\cos a - \cos x| \leq 2,$$

וגם יוצא שהאינטגרל

$$\int_1^\infty |g'| = \int_1^\infty \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} dt$$

מתכנס. לכן מתקיימים תנאי משפט דיריכלה, והמסקנה היא ש: $\int^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס לכל $\alpha > 0$.

נראה עוד ש: $\int^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ לא מתכנס, ובזאת נראה ש: $\int^{\infty}\frac{\sin x}{x}$ מתכנס בתנאי אך לא בהחלט.

הוכחה: נשתמש באי-השיויונות

$$0 \leq \sin^2 x \leq |\sin x| \leq 1.$$

נוכיח ש: $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}$ מתבדר, וינבע מכך שגם $\int^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ מתבדר.

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\sin^2 x}{x}dx &= \int_1^b \frac{1-\cos 2x}{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}dx\end{aligned}$$

כאשר $b \to \infty$, האינטגרל על $1/x$ מתבדר
והאינטגרל על $\cos 2x/x$ מתכנס, והמסקנה
היא שהאינטגרל על $\sin^2 x/x$ מתבדר.

אינטגרל מוכלל של פונקציה לא חסומה

עד כאן עסקנו בקטע לא חסום, ועכשיו נעסוק בפונקציה לא חסומה. הטיפול הוא דומה.

<u>הגדרה.</u> תהי $f(x)$ מוגדרת ב $[a,b]$, אינטגרבילית בכל קטע $[\alpha,\beta]\subset(a,b]$, אבל לאו דוקא חסומה בסביבת הנקודה a. אם

$$\lim_{\epsilon\to0+}\int_{a+\epsilon}^{b} f$$

קיים, אז נאמר ש"האינטגרל $\int_a^b f$ מתכנס ב: a", או ש: $\int_a^b f$ קיים כאינטגרל מוכלל.

יתירה מכך, אם f לא חסומה בסביבת נקודה c, אבל אינטגרבילית בכל תת-קטע של $[a,c)$ ושל $(c,b]$, אז נאמר ש $\int_a^b f$ קיים כאינטגרל מוכלל בתנאי ששני הגבולות

$$\lim_{\epsilon_1\to 0+}\int_a^{c-\epsilon_1} f,\ \ \lim_{\epsilon_2\to 0+}\int_{c+\epsilon_2}^{b} f$$

קיימים. כמו למעלה לא מספיק קיום של הגבול

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_a^{c-\epsilon} f+\int_{c+\epsilon}^{b} f\right].$$

בצורה דומה אם האינטגרל קיים על כל קטע $[\alpha,\beta]\subset[a,b)$ ומגדירים את $\int_a^b f$ כאינטגרל מוכלל.

<u>דוגמא.</u> מתי האינטגרל $\int_0^5 \frac{dx}{x^p}$ קיים? ברור שהגבול העליון 5 יכול להיות מוחלף ע"י כל

מספר $0 < c$. אם $p \neq 1$ אז

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 x^{-p} = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_\epsilon^1 = \frac{1-\epsilon^{1-p}}{1-p}$$

הגבול של ϵ^{1-p} באגף ימין כאשר $\epsilon \to 0+$ הוא 0 אם $p < 1$ ו: $+\infty$ אם $p > 1$. עבור $p = 1$ מקבלים

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x} = \ln x|_\epsilon^1 = -\ln \epsilon$$

והגבול של אגף ימין כאשר $\epsilon \to 0$ הוא $+\infty$.

לסיכום:

$$\int_0^1 x^{-p} dx = \begin{cases} +\infty & \text{אם } p \geq 1 \\ \text{קיים} & \text{אם } p < 1 \end{cases}.$$

<u>דוגמא.</u> האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ הוא מוכלל בגלל שתי הסיבות: גם קטע האינטגרציה אינו סופי,

וגם האינטגרנד, כלומר הפונקציה עליה מבצעים אינטגרציה, אינו חסום בסביבת $x = 0$.

לחקירת האינטגרל נכתוב אותו בצורה

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_0^3 \frac{dx}{x^p} + \int_3^\infty \frac{dx}{x^p}$$

ונחקור את כל אחד מהאינטגרלים בנפרד. יוצא שהראשון קיים עבור $p < 1$ ומתבדר עבור $p \geq 1$, ואילו השני קים עבור $p > 1$ ומתבדר עבור $p \leq 1$. לכן האינטגרל על $[0, \infty)$ מתבדר לכל p, כי לכל p לפחות אחד האינטגרלים מתבדר. עבור $p = 1$ שני האינטגרלים מתבדרים.

<u>דוגמא, פונקצית Γ.</u> לכל $z > 0$ מגדירים

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

האינטגרל מוכלל ב: $t \to \infty$, ואם $0 < z \leq 1$
גם בסביבת $t = 0$. נפצל $I = I_1 + I_2$ כאשר

$$.I_1 = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt,\ I_2 = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

<u>עבור I_1</u>: כאן הגורם e^{-t} אינו חשוב והגורם הדומיננטי הוא t^{z-1}, כי עבור $0 \leq t \leq 1$

$$.\frac{1}{3} t^{z-1} \leq t^{z-1} e^{-t} \leq t^{z-1}$$

מקריטריון ההשוואה הביטוי הקובע הוא

$$\int_0^1 t^{z-1} dt$$

והאינטגרל הזה קיים לכל $z > 0$. לכן I_1 קים וסופי לכל $z > 0$.

עבור I_2: בקטע $[1,\infty)$ כל חזקה זניחה ביחס לאקספוננט:

$$t^{z-1}e^{-t} = \frac{t^{z-1}}{e^{t/2}} \cdot e^{-t/2} \le Ke^{-t/2}$$

עבור איזשהו קבוע $0 < K < \infty$, כי

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{z-1}}{e^{t/2}} = 0$$

לכל $z > 0$. אבל $\int_1^\infty e^{-t/2}dt$ מתכנס וסופי.

מסקנה. האינטגרל $\Gamma(z)$ קיים לכל $z > 0$.

נחשב את $\Gamma(z+1)$ במונחים של $\Gamma(z)$.
מההגדרה

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}dt ,$$

ומאינטגרציה בחלקים מקבלים

$$= t^z(-e^{-t})|_0^\infty - \int_0^\infty zt^{z-1}\cdot(-e^{-t})dt$$

(אנו כותבים בקיצור

$$\left(.\int_0 \cdots = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon \cdots\right.$$

המשך החישוב נותן:

$$= -\left.\frac{t^z}{e^t}\right|^\infty + 0 + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

אשר שווה ל: $z\Gamma(z)$. קיבלנו לכן את הקשר הבא:

$$.\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ z>0 \qquad (1)$$

ביטוי כמו (1) אשר מבטא את הערך של פונקציה בנקודה $z+1$ בתלות בערך הפונקציה

בנקודה z נקראת "נוסחת נסיגה", או "נוסחת רקורסיה". במיוחד מקבלים

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^\infty$$
$$= 0 - (-e^0) = 1$$

ולכן לכל k טבעי, בסימון $k = z + 1$,

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1)$$
$$= (k-1)(k-2)\Gamma(k-2)$$

ומהפעלות חוזרות ונשנות של נוסחת הרקורסיה מקבלים

$$\Gamma(k) = (k-1)\cdots 2 \cdot 1\Gamma(1) = (k-1)!$$

וקיבלנו ש: $\Gamma(k) = (k-1)!$.

למעשה אפשר היה להגדיר את פונקצית Γ בכל המישור המרוכב $\mathrm{Re} z > 0$, ובאותם נימוקים כמו לעיל להראות שהיא מוגדרת סופית ומקיימת את נוסחת הנסיגה (1) בחצי המישור הזה. בהמשך נחשב את $\Gamma(1/2)$.