תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 7 **להגשה עד 22.12.2002**

(*) – סעיפי רשות.

1. הגדרות:
   - <u>פולינום עם מקדמים שלמים</u> – פונקציה מהצורה $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ כאשר $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\in\mathbb{Z}$.
   - <u>מעלה של פולינום</u> – החזקה הגבוהה n של המשתנה x כך ש- $a_n\neq 0$.
   - <u>שורש ממשי</u> של פולינום כזה – מספר ממשי c שעבורו $p(c)=0$.
   - <u>מספר אלגברי</u> – מספר ממשי שהוא שורש של איזשהו פולינום <u>עם מקדמים שלמים</u> שאינו פולינום האפס.
   - מספר ממשי שאינו אלגברי נקרא <u>טרנסצנדנטי</u> (בלטינית, transcendens "יוצא מהגבולות"). הדוגמאות המפורסמות של מספרים טרנסצנדנטיים – π ו- e.

א) הוכח: קבוצת הפולינומים עם מקדמים שלמים – בעלת העוצמה $\aleph_0$.

ב) (*) הוכח: $\sqrt{2}$ – מספר אלגברי.

ג) (*) הוכח: $\sqrt[5]{3+\sqrt{6}}$ – מספר אלגברי.

ד) באלגברה מוכיחים: לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ממשיים. היעזר במשפט זה כדי להוכיח: קבוצת המספרים האלגבריים – בעלת העוצמה $\aleph_0$.

ה) הוכח: קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים – בעלת העוצמה $\aleph$.

2. הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית:

א) אם $Y\subseteq X$ ו- $|X|=|Y|=\aleph_0$ אז $|X\setminus Y|=\aleph_0$.

ב) אם $Y\subseteq X$ ו- $|X|=|Y|=\aleph_0$ אז $|X\setminus Y|<\aleph_0$.

ג) אם $Y\subseteq X$, $|X|=\aleph$ ו- $|Y|=\aleph_0$ אז $|X\setminus Y|=\aleph$.

ד) קבוצה אינסופית היא בת מניה אם ורק אם היא שקולה לכל תת-קבוצה אינסופית שלה.

3.

א) הוכח: $|\{x\in\mathbb{R}: \sin(x)\in\mathbb{Q}\}|=\aleph_0$.

ב) מצא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $|\{x\in\mathbb{R}: f(x)\in\mathbb{Q}\}|>\aleph_0$.

4.

א) תהי X קבוצה בת מניה של ישרים שונים במישור. תהי Y קבוצה של נקודות החיתוך של אברי X (כלומר, קבוצה של כל הנקודות במישור ששייכות לשניים או יותר ישרים מ- X). הוכח ש- Y בת מניה.

ב) תהי X קבוצה של ישרים שונים במישור. תהי Y קבוצה של נקודות החיתוך של אברי X. נתון ש- Y בת מניה. הוכח ש- X בת מניה.

ג) (*) תהי X תת-קבוצה של $P(\mathbb{N})$ בעלת התכונה הבאה:
   - לכל A ו- B, שני איברים שונים של X, מתקיים $|A\cap B|=1$.

   הוכח ש- X בת מניה.

ד) (*) מצא דוגמא של X , תת-קבוצה של $P(\mathbb{N})$, בעלת התכונות הבאות:

- $|X|=\aleph_0$.
- לכל A ו- B , שני איברים שונים של X , מתקיים $|A\cap B|=1$.
- לכל A , B ו- C , שלושה איברים שונים של X, מתקיים $A\cap B\cap C=\varnothing$.
- איחוד של כל אברי X הוא $\mathbb{N}$.

5. תהי S קבוצה בת מניה של נקודות במישור.

א) הוכח: קיימת נקודה P במישור שיש לה התכונה הבאה:

- כל הנקודות של S נמצאות במרחק שונה מ- P.

ב) נסמן ב- X את הקבוצה של כל הנקודות בעלות התכונה מסעיף א'.
הוכח: $|X|=\aleph$.

6. (*) תהי X קבוצה של כל הישרים במישור. הוכח: $|X|=\aleph$.

7. בשאלות 1-אבגדה, 3-א, 4-אבג, 5-אב, 6 בתרגיל בית זה התבקשת להוכיח טענות מסוימות. אחת מהן – לא נכונה. מצא את הטענה הלא נכונה, הבא דוגמא נגדית, (*) הצע תיקון לשאלה כך שהטענה תהפוך לנכונה והוכח אותה בצורה המתוקנת.