עידו סלימאן
שניר הירן
ו205689452

קומבינטוריקה שאלון 3 – טיוטא

1. יש שני הגבלות על המשוואה הנתונה. לכן נמצא את כל פתרונות המשוואה ונעזר בעקרון ההכלה / הפרדה (Inclusion\Exclusion Principle) להתחשב בהגבלות הנ"ל.

נסמן: U - כל האפשרויות

A_1 - קבוצת הפתרונות כאשר $x_1=x_2$

A_2 - " " כאשר $x_2=2x_3$

נמצא:

$|A_1|$ - נציב $y=x_1+x_2$ כאשר $y\%2=0$.

$$y+x_3+x_4=19$$

נקבל: $\binom{20}{1}+\binom{18}{1}+\dots+\binom{2}{1}=\sum_{i=1}^{10}2i=110$

y הוא מספר זוגי לכן חילקנו למקרים וקיבלנו לפי הנוסחא $\binom{n+r-1}{r-1}$ את כמות האפשרויות לחלוקה עבור כל מקרה וסכמנו:

$|A_2|$ - נציב: $y=x_2+x_3=3x_3$ כאשר $y\%3=0$

$$y+x_1+x_4=19$$

נקבל: $\binom{20}{1}+\binom{17}{1}+\dots+\binom{2}{1}=\sum_{i=0}^{6}(2+3i)=77$

$|A_1\cap A_2|$ - $x_1=x_2 \land x_2=2x_3 \iff x_1=x_2=2x_3$

$y+x_4=19$ כאשר (OR) $y\%5=0$

אזי יש 4 אפשרויות ל-x_4: $x_4=0\lor 5\lor 10\lor 15$.

אזי סה"כ האפשרויות הן:

$$\binom{22}{3}-187+4=|U|-\left((|A_1|+|A_2|)-|A_1\cap A_2|\right)=1357$$

2. מספרים טבעיים בעלי 5 ספרות שלא מתחילים ב-0. לכן השאלה שקולה למציאת הפתרונות של המשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=22$

כאשר $9 \ge x_1 \ge 1$, $9 \ge x_i \ge 0$ עבור $2 \le i \le 5$.

נשתמש בעקרון ההכלה - הפרדה:

סימון -

U - סה"כ הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$ (1).

נימוק: מס' פתרונות זהה למשוואה $x_1+\dots+x_5=22$ כאשר $x_1 \ge 1$.

A_1 - סה"כ הפתרונות כאשר $x_1 \ge 9$ למשוואה (1).

A_i - סה"כ הפתרונות כאשר $x_i \ge 10$ למשוואה (2);

$2 \le i \le 5$.

חישובים: נתייחס למשוואה (1) כדלהלן:

$|A_1|$ - $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$ כלל הפתרונות הם $\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{12+5-1}{5-1}=\binom{16}{4}$

$|A_i|$ - $2 \le i \le 5$, $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ כלל הפתרונות הם $\binom{11+5-1}{5-1}=\binom{15}{4}$

נשים לב כי לפתרונות עבור $A_1 \cap A_2$ נקבל $x_1 \ge 9$ וגם $x_2 \ge 10$ כלומר $y_1+y_2+x_3+x_4+x_5=2$ כאשר $y_1=x_1-9$, $y_2=x_2-10$). הצבנו במשוואה (1).

אך עבור $A_2 \cap A_3$ נקבל $x_2,x_3 \ge 10$ כלומר $x_1+y_2+y_3+x_4+x_5=1$ $(y_{2,3}=x_{2,3}-10)$.

לכן, $\sum_{i \ne j} |A_i \cap A_j| = 4 \cdot \binom{6}{4} + 6 \cdot \binom{5}{4}$

(כי יש סה"כ $\binom{5}{2}=10$ מקרים)

כאשר $A_i \cap A_j \cap A_k$ נקבל כי התוצאה של (1) תהיה שלילית, וסכום מספרים אי-שליליים שגדול או שווה ל-0. סתירה..

לכן $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$ לכל $i \ne j \ne k$.

לסיכום:

$$|U| - \left(\sum_{i=1}^{5}|A_i| - \sum_{i\ne j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i \ne j \ne k}|A_i \cap A_j \cap A_k|\right) = \binom{25}{4} - \left(\binom{16}{4}+4\binom{15}{4} - \left(4\cdot\binom{6}{4}+6\binom{5}{4}\right)+0\right)$$

$$= 12650 - \left((1820+5460) - (60+30) + 0\right) = \cancel{12650+}5460$$

3. נחשב את הפתרון בשני שלבים:

① כמות הפתרונות כאשר $0 \le n \le 300$

② " " כאשר $0 \le n \le 74$

②-① הוא התשובה המבוקשת.

סימונים כלליים

נסמן - A_1 - n מתחלק ב-9

A_2 - n מתחלק ב-12

A_3 - n מתחלק ב-15

U - סה"כ המספרים בתחום המבוקש

① חישובים

$|A_1| - \lfloor \frac{300}{9} \rfloor = 33$

$|A_2| - \lfloor \frac{300}{12} \rfloor = 25$

$|A_3| - \lfloor \frac{300}{15} \rfloor = 20$

$= 78$

$|A_1 \cap A_2| - \frac{300}{3^2 \cdot 4} = \frac{300}{\lfloor 36 \rfloor} = 8$

$|A_1 \cap A_3| - \frac{300}{\lfloor 45 \rfloor} = \frac{300}{\lfloor 45 \rfloor} = 6$

$|A_2 \cap A_3| - \frac{300}{\lfloor 3 \cdot 4 \cdot 5 \rfloor} = \frac{300}{\lfloor 60 \rfloor} = 5$

$= 19$

LCM

② חישובים

$|A_1| - \lfloor \frac{74}{9} \rfloor = 8$

$|A_2| - \lfloor \frac{74}{12} \rfloor = 6$

$|A_3| - \lfloor \frac{74}{15} \rfloor = 4$

$= 18$

$|A_1 \cap A_2| - \frac{74}{3^2 \cdot 4} = 2$

$|A_1 \cap A_3| - \frac{74}{3^2 \cdot 5} = 1$

$|A_2 \cap A_3| - \frac{74}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$

$= 0$

$|U| - (① - ②) = |U| - ((78 - 19) - (18 - 5)) = 225 - 46 = 161$

4. $a_i \in \{1,2,3\}$

נסמן

A_i - הרצף 1,2,1 מתחיל מהמקום ה-i

$1\le i\le 5$

חישובים

$|A_i|$ - $1\le i\le 5$ נקבל 3^4 אפשרויות שונות

נתבונן בחיתוכים הנ"ל:

① $A_1\cap A_2$ - 1 2 1 _ _ _ _

1 2 1

מצב זה לא יתכן. ישנם 4 מקרים כאלו.

נוכל להכליל זו לכל שני קבוצות צמודות

$(A_k\cap A_{k+1})$ $1\le k\le 4$. 0 אפשרויות.

② $A_1\cap A_3$ - 1 2 1 _ _ _ _

1 2 1

ישנם שני מקומות "פנויים" לכן 3^2 אפשרויות.

נכליל זו לכל $A_k\cap A_{k+2}$ $1\le k\le 3$

ישנם 3 מקרים כאלו.

③ $A_1\cap A_4$ - 1 2 1 1 2 1 _

כאן יש מקום יחיד פנוי אזי קיימים 3 אפשרויות

אלה כל שאר המקרים. כלומר $\binom{5}{2}-3-4$.

סה"כ $\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| = (3\cdot 3+3\cdot 3^2) = 3\cdot(\binom{5}{2}-7) = 36$

$1=|A_i\cap A_j\cap A_k|$ עבור $i\neq j\neq k$ כי קיימת אפשרות

אחת בלבד $A_1\cap A_3\cap A_5$ בה התנאים מתקיימים.

אין חשיבות להיפוך סדר בחיתוך (תורת הקבוצות).

לפי עקרון ההכלה - הפרדה:

$3^7 - (5\cdot 3^4 - 36 + 1) =$

זהו מספר הסדרות אשר אינן מכילות בשלושה מקומות עוקבים את הספרות 1,2,1.

5. f היא על אם $\forall b \exists a f(a)=b$

כאשר a בתחום ו-b בטווח. כלומר, פונקציה חייבת

להיות מוגדרת לכל a בתחום.

אם $k<n$. אז יש פחות איברים בתחום מאשר בטווח.

~~נדרש שהפונקציה תהיה על.~~

לכן נצטרך לחזור על איבר כלשהו אחד לפחות פעמיים

או יותר. לכן

סה"כ האפשרויות הם: $\binom{k}{k} \cdot k! \cdot k^{n-k}$

אם $n \geq k$:

יש יותר או מספר שווה של איברים בתחום לעומת

הטווח. אז ~~כי~~ שאיבר אחד לפחות בטווח

יקבל 2 או יותר איברים מהתחום.

לכן

סה"כ האפשרויות הם: $\binom{k}{n} n! \cdot n^{k-n}$