<u>פתרון דף 6 – אלגברה לינארית ב'</u>

1. א. עפ"י הנוסחא להיטל אורתוגונלי נקבל:

$.E(x_1,x_2) = \frac{\langle(x_1,x_2),(3,4)\rangle}{||(3,4)||^2}(3,4) = (\frac{9x_1+12x_2}{25}, \frac{12x_1+16x_2}{25})$

ב. מכאן המטריצה המייצגת הינה: $.E = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$

ג. נבדוק מתי $(3,4)(c_1,c_2) = 0$. זה קורה עבור $.sp_R\{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\}$ מכאן $w = \frac{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right\|} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ הינו בסיס אורתונורמלי למשלים האורתוגונלי. ואילו $v = \frac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\|} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ בסיס ל$.W$

ד. נקבל כי לפי הבסיס $B = \{v, w\}$ מתקיים $.[E]_B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

2. נסמן $a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ ו $.b = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$ מחשוב ישיר נקבל:

$$\langle a,b\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n, \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n\rangle =$$
$$\sum_{i=1,j=1}^{n,n} \alpha_i \beta_j \langle a_i, a_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{k=1}^{n} \langle a, a_k\rangle \overline{\langle b, a_k\rangle}$$

.

3. נסמן ב$E' = I - E$ את ההטלה האורתוגנלית על המשלים האורתוגנלי של $.W$נקבל:

$$\langle Ea,b\rangle = \langle Ea, Eb + E'b\rangle = \langle Ea, Eb\rangle = \langle Ea + E'a, Eb\rangle = \langle a, Eb\rangle.$$

4. יהי W' המרחב הניצב ל$.W$ נניח בשלילה כי קיים $v \in W'$ עבורו $.Ev \neq 0$ נתבונן בוקטור $\beta = kEv + sv$ עבור סקלרים חיוביים כלשהם $.k,s$ נקבל:

$$||E\beta||^2 = (E\beta, E\beta) = \langle kEv + sEv, kEv + sEv\rangle = (k+s)^2||Ev||^2$$

$$||\beta||^2 = \langle kEv + sv, kEv + sv\rangle = k^2||Ev||^2 + s||v||^2 + 2ksRe\langle Ev, v\rangle$$

כיוון ש$v \in W'$ נקבל $\langle Ev, v\rangle = 0$ ו $.||\beta||^2 = k^2||Ev||^2 + s^2||v||^2$

מכאן $||E\beta|| \leq ||\beta||$ אמ"מ $.2ks||Ev||^2 + s^2||Ev||^2 \leq s^2||v||^2$ עבור $s = 1$ ו

$$k > \frac{(||v||^2 - ||Ev||^2)}{2||Ev||^2}$$

נקבל כי $.||E\beta|| > ||\beta||$

5. נגדיר את U להיות מרחב כל הפונקציות הזוגיות. נשים לב כי $U \cap W = (0)$ וכי כל $f \in V$ ניתן לרשום בתור $f = g_1 + g_2$ כאשר g_1 אי זוגית וg_2 זוגית. אכן נגדיר את $.f_1 = f_{|[0,1]}, f_2 = f_{|[-1,0]}$

כעת נגדיר $g_1(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x)+f_2(-x)}{2} & if\ x \geq 0 \\ \frac{f_2(x)+f_1(-x)}{2} & if\ x \leq 0 \end{cases}$ ו $g_2(x) = \begin{cases} \frac{f_1(x)-f_2(-x)}{2} & if\ x \geq 0 \\ \frac{f_2(x)-f_1(-x)}{2} & if\ x \leq 0 \end{cases}$. נקבל כי g_1, g_2 רציפות ומתקיים כי g_1 זוגית וg_2 אי זוגית. קיבלנו כי $V = U + W$ הינו סכום ישר. נראה כי U הינו המשלים האורתוגנלי של W. אכן לכל פונקציה זוגית g ופונקציה אי זוגית f מתקיים $\int_{-1}^{1} fg(x)\,dx$=0 שכן fg אי זוגית.