תרגול 3

3.1 הגדרה – יהא V מרחב נורמי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $v_1, v_2 \in V$, אזי הקטע המחבר בין v_1 ל-v_2 הוא הקבוצה:

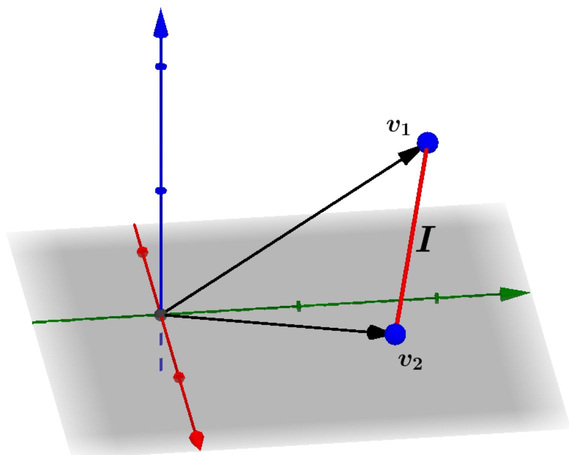
$$\boldsymbol{I = \{\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 | \lambda \in (0,1)\}}$$

<u>דוגמה:</u>

נניח כי $V = \mathbb{R}^2$ או $V = \mathbb{R}^3$. אזי כמתואר באיור להלן, הקטע המחבר ביניהם הוא בדיוק הקבוצה שבה כל הנקודות ניתנות לתיאור על ידי:

$$v = v_2 - \lambda(v_2 - v_1)$$

באופן שמתאים להגדרה 3.1 שנתנו.



איור 1 – שני וקטורים $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ והקטע I המחבר ביניהם (באדום)

3.2 הגדרה – קבוצה $S \subset V$ נקראת קמורה ב-V אם לכל $v_1, v_2 \in S$, גם הקטע המחבר בין v_1, v_2 נמצא ב-S.

<u>דוגמה:</u>

נראה כי כדור פתוח (וסגור) כלשהו במרחב נורמי V מעל $\mathbb{R}$ הוא קבוצה קמורה.

לשם כך, נתבונן בכדור פתוח בעל רדיוס $r > 0$ עם המרכז ב-$v = 0$, ונסמנו $B(0,r)$. יהיו, אם כן, $v_1, v_2 \in B(0,r)$ וכן יהא $\lambda \in [0,1]$ כלשהו. עלינו להראות כי $\|\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2\| < r$ כאשר ידוע לנו כי מתקיים $\|v_1\| < r$ וכן $\|v_2\| < r$. על פי אי שוויון המשולש מתקיים:

$$\|\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2\| \leq |\lambda|\|v_1\| + |1-\lambda|\|v_2\| = \lambda\|v_1\| + (1-\lambda)\|v_2\| < \lambda r + (1-\lambda)r = r$$

ולכן $B(0,r)$ הינו קבוצה קמורה. הוכחה דומה מתקבלת עבור המקרה של כדור סגור בשינוי אי השוויונות בהתאם.

היות וכל כדור במרחב (פתוח/סגור) מתקבל מכדור עם המרכז ב-$v = 0$ על ידי הזזה (ראינו בהרצאות הקודמות), ועל פי תרגיל בית 1 גם הוא קבוצה קמורה.

<u>תרגיל:</u>

יהא (X,d) מרחב מטרי. תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת ל-$a \in X$. הוכיחו כי לכל סדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב-(X,d) מתקיים כי $y_n \to a$ אם ורק אם $d(x_n, y_n) \to 0$.

<u>הוכחה:</u>

$(\Leftarrow)$לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$0 \leq d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(y_n, a)$$

כאשר אנו יודעים כי $x_n \to a$. מכאן, שאם נתון כי $y_n \to a$, אזי מהגדרת ההתכנסות נובע כי שני האיברים באגף הימני של אי השוויון שואפים לאפס כלומר כל האגף הימני שואף לאפס עבור $n \to \infty$, מכלל הסנדוויץ' נקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, a) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, a) = 0$$

$$\to \boxed{\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0}$$

$(\Longrightarrow)$נוכל להיעזר גם כאן באי שוויון המשולש ולקבל כי:

$$0 \le d(y_n, a) \le d(x_n, y_n) + d(x_n, a)$$

ולכן בהנתן כי שני האיברים הימניים שואפים ל-0 כאשר $n \to \infty$, תתקבל תוצאה זהה מכלל הסנדוויץ' כלומר:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} d(y_n, a) = 0}$$

<u>תרגיל:</u>

תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. הוכיחו כי אם לכל $1 \le i \le n$ סדרת הקואורדינטות ה-i, קרי $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, מתכנת ב-$\mathbb{R}$ עם הנורמה האוקלידית, אזי גם הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב-$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.

<u>הוכחה:</u>

נסמן ב-$x^{(i)}$ את הגבול של הסדרה $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ לכל $1 \le i \le n$. יהא $\varepsilon > 0$ כלשהו, ועבורו מובטח כי לכל $1 \le i \le n$ קיים N_i טבעי כך שלכל $n \ge N_i$ מתקיים $\left|x_n^{(i)} - x^{(i)}\right| < \varepsilon$. נסמן $N_0 = \max_{1\le i\le n} N_i$ ונשים לב כי לכל $n \ge N_0$ מתקיים שלכל $1 \le i \le n$, $\left|x_n^{(i)} - x^{(i)}\right| < \varepsilon$ ולכן $d_\infty(x_n, x) = \max_{1\le i\le n}\left|x_n^{(i)} - x^{(i)}\right| < \varepsilon$ כלומר הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אכן מתכנסת ל-$x = \left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}\right)$ כנדרש.

<u>תרגיל:</u>

יהא (X, d) מרחב מטרי כלשהו, ותהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה במרחב זה המתכנסת בו לאיבר $a \in X$. תהא $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת בו לאיבר $b \in X$. הוכיחו כי סדרת המספרים הממשיים $\left\{d(x_n, y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$d(a, b)$.

<u>הוכחה:</u>

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$d(x_n, y_n) \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} d(x_n, a) + d(a, y_n) \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n)$$

ולכן:

$$d(x_n, y_n) - d(a, b) \le d(x_n, a) + d(b, y_n)$$

מאידך מתקיים:

$$d(a, b) \le d(a, x_n) + d(x_n, b) \le d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b)$$

כלומר:

$$d(a, b) - d(x_n, y_n) \le d(a, x_n) + d(b, y_n)$$

כלומר קיבלנו כי מתקיים:

$$|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \le d(x_n, a) + d(y_n, b)$$

אך שני האיברים באגף הימני של אי השוויון האחרון, היות ונתון שהסדרות הללו מתכנסות, שואפים לאפס כאשר $n \to \infty$, ולכן מכלל הסנדוויץ' נקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} |d(x_n, y_n) - d(a,b)| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a,b)}$$

<u>תרגול:</u>

נתבונן במרחב $\left(C[a,b], d_{L_\infty}\right)$. הוכיחו כי אם סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ במרחב זה מתכנסת לפונקציה f במטריקה d_{L_∞}, אזי, הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בקטע (a,b) לפונקציה f.

<u>הוכחה:</u>

מתקיים $\max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = d_{L_\infty}(f_n, f)$ ונתון כי כאשר $n \to \infty$ מתקיים $d_{L_\infty}(f_n, f) \to 0$, אך מכאן נקבל כי $\max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ וזו בדיוק ההגדרה של התכנסות של פונקציה במידה שווה בתחום $[a,b]$. אך התכנסות במידה שווה היא בפרט התכנסות נקודתית, כנדרש.

3.3 הגדרה – התכנסות נקודתית – תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I. נאמר כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ב-I, אם לכל $x \in I$ מתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

<u>המשך לתרגיל</u> – הראו שהגדרה 3.3 לא מספיקה כדי שתהיה התכנסות ב-d_{L_∞}.

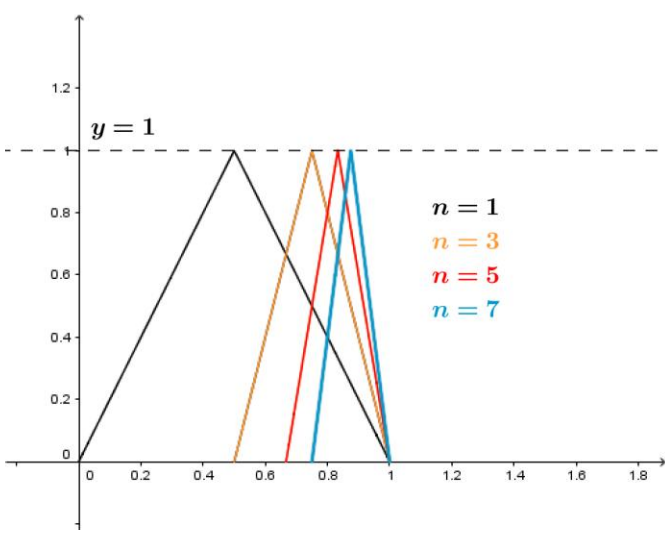
<u>דוגמה נגדית:</u>

נבחר את הפונקציה:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x - (n-1) & n-1 \le x < n \\ -(n+1)x + (n+1) & n \le x \le n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

קל לראות כי הפונקציה מתכנסת נקודתית ל-0 שכן לכל $x \in I$ נבחר $x < N \in \mathbb{N}$ ונקבל את המבוקש שכן הפונקציה תהיה זהותית אפס החל מאותו N.

אך התכנסות במידה שווה (קראי התכנסות בנורמת L_∞) לא מתקיימת שכן $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$ הוא תמיד 1 בנקודה $x = \frac{n}{n+1}$ ולכן לא מתקיימת ההתכנסות במ"ש עבור פונקציה זו.



איור 2 – מספר ערכים עבור f_n להמחשה