משפט קיום ויחידות

נזכר במשפט הקיום והיחידות עבור מד"ר לינאריות:

משפט קיום ויחידות עבור מד"ר לינארית מנורמלת מסדר ראשון:

יהיו $p(x), q(x)$ פונקציות רציפות בקטע I ויהי $x_0 \in I$.
אז למד"ר $y' + p(x)y = q(x)$ ביחד עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ יש פתרון יחיד המוגדר על כל הקטע I.

מה קורה עבור מד"ר לא לינאריות מסדר ראשון? כלומר, בהנתן מד"ר $y' = f(x, y)$ ותנאי התחלה $y(x_0) = y_0$, האם תמיד יש פתרון יחיד? האם הפתרון תמיד מוגדר בקטע "גדול"? נראה שהתשובה היא לא לשני המקרים.
דוגמא אחת: נסתכל על המד"ר $y' = 2xy^2$ עם תנאי התחלה $y(0) = y_0$ כאשר $y_0 > 0$.
על פניו, המד"ר נראית מאוד פשוטה והיינו מצפים שיהיה פתרון יחיד שמוגדר על כל הישר. בעוד שפתרון יחיד יש, נראה איפה הוא מוגדר: כיוון שהמד"ר הינה הפרדת משתנים אזי נבדוק פתרונות סינגולריים ואנו רואים כי $y \equiv 0$ הוא פתרון המוגדר על כל הישר, אך אינו מקיים את תנאי ההתחלה. נמצא את הפתרון הכללי:

$$\int f(x)dx = \int 2xdx = x^2$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא $-\frac{1}{y} = x^2 + c$ כלומר $y = \frac{1}{c-x^2}$
וכבר אנו רואים שכל הפתרונות המתאימים ל־$c > 0$ אינם מוגדרים על כל הישר הממשי כי יש להם בעיה ב־$x = \pm\sqrt{c}$.
נשתמש בתנאי ההתחלה ונקבל $y_0 = y(0) = \frac{1}{c}$
ולכן $c = \frac{1}{y_0}$. אז הפתרון הוא $y = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - x^2}$
וכיוון שתחום ההגדרה צריך להכיל את $x = 0$ אזי תחום הגדרתו הוא $(-\frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}})$.
כלומר לא כל הישר הממשי. יש "התפוצצות" של הפונקציה בנקודות $\pm\frac{1}{\sqrt{y_0}}$. אנו רואים שעבור y_0 גדול, תחום ההגדרה קטן.
מה עם יחידות? האם תמיד יש יחידות? נסתכל על המד"ר $y(0) = 0 \qquad y' + y = y^{\frac{1}{2}}$
ראינו בחלק של משוואות ברנולי כי יש למד"ר זו לפחות שני פתרונות כאשר מצאנו כי

$$y \equiv 0$$
$$y = (-e^{-\frac{1}{2}x} + 1)^2$$

הם שני פתרונות של המד"ר המקיימות את תנאי ההתחלה.

משפט קיום ויחידות למד"ר לא לינאריות מסדר ראשון:

תהי $f(x,y)$ פונקציה בשני משתנים ותהי (x_0,y_0) נקודה בתחום ההגדרה של f. נניח כי $f(x,y), f'_y(x,y)$ רציפות בסביבת (x_0,y_0).

אז למד"ר $y'=f(x,y)$ ביחד עם תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$ יש פתרון יחיד המוגדר בקטע פתוח המכיל את x_0. כלומר למד"ר יש פתרון יחיד המוגדר בקטע פתוח המכיל את x_0 אשר הגרף שלו עובר דרך הנקודה (x_0,y_0).

הערות: 1. אין זה משנה אם f, f'_y רציפות בכל המישור. עדיין המשפט מבטיח שהפתרון מוגדר בקטע פתוח, שיכול להיות מאוד קטן, המכיל את x_0.

2. שימו לב כי f, f'_y מוגדרות בתחום במישור בעוד שהפתרון מוגדר בקטע בישר הממשי.

3. אם תנאי משפט קיום ויחידות אינם מתקיימים עבור נקודה (x_0,y_0), זה אומר שאין מידע לגבי פתרונות העוברים דרך (x_0,y_0).

4. משפט קיום ויחידות אומר שאם יש לנו שני פתרונות שונים של המד"ר, אז נקודה (x_0,y_0) בה הגרפים של הפתרונות נחתכים חייבת להיות נקודה בה תנאי המשפט לא מתקיים. לחילופין, פתרונות שונים לא נחתכים בנקודות בהן תנאי המשפט מתקיימים, שאומר שאם תנאי המשפט מתקיימים בכל המישור, אזי פתרונות שונים לא נחתכים.

5. למד"ר מהצורה $x'=f(x,y)$ צריך לבדוק האם $f(x,y), f'_x(x,y)$ רציפות.

מתי מתקיימים תנאי משפט קיום ויחידות עבור מד"ר לא לינאריות?

עבור ספרביליות $y'=f(x)\cdot g(y)$, אנו צריכים כי שתי הפונקציות

$$f(x)g(y)$$
$$\big(f(x)g(y)\big)'_y=f(x)g'(y)$$

יהיו רציפות בסביבת הנקודה (x_0,y_0), כלומר אם $f(x)$ רציפה בסביבת x_0 ו־$g(y), g'(y)$ רציפות בסביבת y_0 אזי תנאי המשפט מתקיימים.

עבור ברנולי $y'+p(x)y=g(x)y^\alpha$, נרשום אותה מחדש כ־ $y'=-p(x)y+g(x)y^\alpha$. אז תנאי משפט קיום ויחידות הם כי

$$-p(x)y+g(x)y^\alpha$$
$$\big(-p(x)y+g(x)y^\alpha\big)'_y=-p(x)+\alpha g(x)y^{\alpha-1}$$

הן רציפות בסביבת הנקודה (x_0,y_0), כלומר p,g צריכות להיות רציפות בסביבת הנקודה x_0 ובנוסף, צריך כי $y_0\neq 0$, או, במקרה ו־$y_0=0$ אנו צריכים כי $\alpha>1$ כדי שהנגזרת החלקית לפי y תהיה רציפה.

עבור מד"ר מהצורה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ צריל לרשום $y'=-\frac{P}{Q}$ ולבדוק את התנאים אז, כלומר את רציפות $-\frac{P}{Q}, \left(-\frac{P}{Q}\right)'_y$ בסביבת הנקודה (x_0,y_0).

תרגיל: נניח כי $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של $y' = f(x,y)$ הנחתכים בנקודה (x_0, y_0), כלומר $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. נגדיר

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \le x_0 \\ y_2(x) & x > x_0 \end{cases}$$

אזי $y(x)$ פתרון של המד"ר.

פתרון: ברור כי $y(x)$ רציפה מכיוון ש־ $y_1(x_0) = y_2(x_0)$. לכן

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \le x_0 \\ y_2(x) & x \ge x_0 \end{cases}.$$

בנוסף, עבור $x \ne x_0$

$$y'(x) = \begin{cases} y_1'(x) & x < x_0 \\ y_2'(x) & x > x_0 \end{cases} = \begin{cases} f\big(x, y_1(x)\big) & x < x_0 \\ f\big(x, y_2(x)\big) & x > x_0 \end{cases} = f\big(x, y(x)\big).$$

עבור $x = x_0$

$$y'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{y_2(x) - y_2(x_0)}{x - x_0} = y_2'(x_0) = f\big(x_0, y_2(x_0)\big) = f\big(x_0, y(x_0)\big)$$

וגם

$$y'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{y_1(x) - y_1(x_0)}{x - x_0} = y_1'(x_0) = f\big(x_0, y_1(x_0)\big) = f\big(x_0, y(x_0)\big)$$

ולכן הנגזרת קיימת בנקודה x_0 ומקיימת

$$y'(x_0) = f\big(x_0, y(x_0)\big).$$

לסיכום, לכל x מתקיים

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

ולכן $y(x)$ פתרון.

הערה: שימו לב כי אם $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות שונים אזי בהכרח (x_0, y_0) הינה נקודה בה תנאי משפט קיום ויחידות לא מתקיימים.

תרגיל: $y' = 5x^2(y-2)^{\frac{2}{5}} \quad y(3) = 2$

פתרון: המד"ר הינה מד"ר פרידה ואנו רואים כי $y \equiv 2$ הוא פתרון קבוע. נחשב את האינטגרלים המתאימים לפתרון לפי הפרדת משתנים:

$$\int f(x)dx = \int 5x^2dx = \frac{5}{3}x^3$$
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int (y-2)^{-\frac{2}{5}}dy = \frac{5}{3}(y-2)^{\frac{3}{5}}$$
$$\frac{5}{3}(y-2)^{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}x^3 + c \longrightarrow (y-2)^{\frac{3}{5}} = x^3 + c$$
$$y = (x^3+c)^{\frac{5}{3}} + 2$$

הוא הפתרון הכללי. נמצא איזה מאלו מקיים את תנאי ההתחלה:

$$2 = y(3) = (27+c)^{\frac{5}{3}} + 2 \longrightarrow c = -27$$

וקיבלנו שני פתרונות

$$y = (x^3-27)^{\frac{5}{3}} + 2, \quad y \equiv 2.$$

נראה כי יש למעשה עוד פתרונות. נגדיר

$$y(x) = \begin{cases} (x^3-27)^{\frac{5}{3}} + 2 & x \le 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$$

לפי התרגיל הקודם זהו פתרון. נראה זאת בכל זאת: קל לבדוק (חדו"א 1) כי הפונקציה הנ"ל רציפה וגזירה ברציפות על כל הישר ומקיימת $y(3) = 2$ וגם $y'(3) = 0$. נראה כי פתרון כלומר ש־

$$y'(x) = 5x^2(y(x)-2)^{\frac{2}{5}}$$

ברור כי הזהות מתקיימת עבור $x > 3$ או $x < 3$. נבדוק עבור $x = 3$:

$$y'(3) = 0 = 5 \cdot 3^2(2-2)^{\frac{2}{5}} = 5(3^2)(y(3)-2)^{\frac{2}{5}}$$

ולכן זהו פתרון. בנוסף, הוא מקיים את תנאי ההתחלה באופן ברור. עוד פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה

$$y(x) = \begin{cases} 2 & x \le 3 \\ (x^3-27)^{\frac{5}{3}} + 2 & x > 3 \end{cases}$$

נציין כי יש עוד אינסוף פתרונות המקיימים את תנאי ההתחלה. לא נראה זאת.

תרגיל: $y(0) = \frac{1}{2} \quad y' = (y-1)\sin(xy)$. הוכיחו כי $0 < y(x) < 1$ בכל תחום הגדרתו.

פתרון: קודם כל נשים לב כי

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-1)\sin(xy) \\ f'_y(x,y) &= \sin(xy) + (y-1)\cos(xy)x \end{aligned}$$

רציפות בכל המישור ולכן פתרונות שונים של המד"ר אינם נחתכים.

נשים לב כי $y_1 \equiv 0$ וגם $y_2 \equiv 1$ הם פתרונות של המד"ר (שלא מקיימים את תנאי ההתחלה אבל עדיין פתרונות).

נניח בשלילה כי יש x עבורו $y(x) < 0$. כיוון ש־$y(0) = \frac{1}{2}$ אז ממשפט ערך הביניים נובע כי קיים x_0 בין אפס ל־x עבורו $y(x_0) = 0$. סתירה כי פתרונות שונים לא נחתכים והפתרון שלנו לא יכול להחתך עם פתרון האפס כי אינו פתרון האפס. ולכן $y(x) > 0$ בכל תחום הגדרתו. באותו האופן, $y(x) < 1$ בכל תחום הגדרתו. כלומר $0 < y(x) < 1$ בכל תחום ההגדרה של $y(x)$.

תרגיל: נסתכל על $y' = f(x,y)$ כאשר f, f'_y רציפים בכל המישור. נניח ש־$y_1(x), y_2(x)$ פתרונות המוגדרים על קטע I ושעבור $x_1 \in I$ כלשהוא מתקיים $y_1(x_1) < y_2(x_1)$. הראו כי לכל $x \in I$ מתקיים $y_1(x) < y_2(x)$.

פתרון: כיוון ש־f, f'_y רציפים בכל המישור אז פתרונות שונים לא נחתכים. הפתרונות שלנו שונים כי יש להם ערך שונה ב־x_1.

נניח בשלילה כי קיים $x_2 \in I$ עבורו $y_1(x_2) \geq y_2(x_2)$. נגדיר $f(x) = y_1(x) - y_2(x)$. אז $f(x)$ רציפה כי $y_1(x), y_2(x)$ רציפים. בנוסף,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1(x_1) - y_2(x_1) < 0 \\ f(x_2) &= y_1(x_2) - y_2(x_2) \geq 0. \end{aligned}$$

לכן, לפי משפט ערך הביניים קיים x_3 בין x_1, x_2 עבורו $f(x_3) = y_1(x_3) - y_2(x_3) = 0$ ולכן $y_1(x_3) = y_2(x_3)$ בסתירה לזה שפתרונות שונים לא נחתכים. ולכן $y_1(x) < y_2(x)$ לכל $x \in I$.

הערה: אם אחד הפתרונות ידוע, למשל נניח כי $y_1(x)$ ידוע או נתון, אז מספיק לנו כי תנאי משפט קיום ויחידות יתקיימו רק בנקודות הגרף של $y_1(x)$ ולא בהכרח בכל המישור, כי הפתרונות ייחתכו בהכרח בנקודה במישור שהיא על הגרף של $y_1(x)$.

תרגיל: $y' = x(x^2+y^2)^4$. הוכיחו כי כל פתרון המוגדר על קטע סימטרי (ביחס לראשית) הינו פונקציה זוגית (כלומר $y(-x) = y(x)$).

פתרון: קודם כל נשים לב כי

$$f(x,y) = x(x^2+y^2)^4$$
$$f'_y(x,y) = 4x(x^2+y^2)^3 2y = 8xy(x^2+y^2)^3$$

רציפות בכל המישור ולכן פתרונות שונים של המד"ר אינם נחתכים. כלומר פתרונות שנחתכים הם פתרונות שווים.
יהי $y(x)$ פתרון המוגדר על קטע סימטרי. אנו רוצים להראות כי $y(x) = y(-x)$. אבל $y(x)$ פתרון ולכן $y(-x)$ גם הוא צריך להיות פתרון. לכן נגדיר $z(x) = y(-x)$ על הקטע הסימטרי. נראה כי $y(x) = z(x)$: נראה כי $z(x)$ פתרון של המד"ר שמקיים תנאי התחלה זהה ל-$y(x)$ ואז לפי קיום ויחידות הם שווים מה שמוכיח כי הפונקציה זוגית. נראה קודם כי $z(x)$ פתרון:

$$z'(x) = -y'(-x) = -\Big((-x)\big((-x)^2 + y(-x)^2\big)^4\Big) =$$
$$= \quad x\big(x^2 + y(-x)^2\big)^4 = x\big(x^2 + z(x)^2\big)^4$$

ולכן $z(x)$ פתרון. בנוסף $z(0) = y(-0) = y(0)$ ולכן לפי קיום ויחידות $y(x) = z(x) = y(-x)$.
שימו לב כי השתמשנו בעובדה כי $y(x)$ פתרון ולכן לכל x בתחום הגדרה מתקיים $y'(x) = x(x^2+y(x)^2)^4$ ולכן גם $y'(-x) = (-x)\big((-x)^2) + y(-x)^2\big)^4$.

תרגיל: $(x^2+y^3)dy + \arctan(xy)dx = 0$ האם פתרון העובר דרך $(1,1)$ הוא יחיד?
פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^3} = f(x,y)$$
$$f'_y(x,y) = -\frac{\frac{x}{1+(xy)^2}(x^2+y^3) - 3y^2\arctan(xy)}{(x^2+y^3)^2}$$

בנקודה $(1,1)$ אין בעיות במכנה ולכן הפונקציות f, f'_y רציפות בסביבת $(1,1)$. ולכן אם הכוונה הייתה שאנו מחפשים $y(x)$ אזי יחיד. אבל לא נאמר. אז נבדוק גם את האפשרות השניה.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+y^3}{\arctan(xy)} = f(x,y)$$
$$f'_x(x,y) = -\frac{2x\arctan(xy) - (x^2+y^3)\frac{y}{1+(xy)^2}}{\arctan(xy))^2}$$

בנקודה $(1,1)$ אין בעיות במכנה ולכן הפונקציות f, f'_x רציפות בסביבת $(1,1)$. ולכן אם הכוונה הייתה שאנו מחפשים $x(y)$ אזי יחיד.