תורת החבורות – תרגיל בית 8 -- פתרון

שאלה 1

א) לכל A היא פונקציה חח״ע כי זה נובע מחח״ע של פונקציה $\sigma: A \to A$ היא פונקציה חח״ע כי זה נובע מחח״ע של פונקציה $\sigma \in S_n$:

אם $\sigma(i,j) = \sigma(k,t)$, אז $\sigma(i) = \sigma(k) \wedge \sigma(j) = \sigma(t)$, ולכן

$$i = k \wedge j = t \quad \Leftarrow \quad (i,j) = (k,t)$$

כמו כן הינה על: יהי $(i,j) \in A$, אז היות ו- $\sigma \in S_n$ על, קיימים $1 \le k,t \le n$ כך ש

$$\sigma(k) = i \wedge \sigma(t) = j \quad \Leftarrow \quad \sigma(k,t) = (i,j).$$

הוכחנו כי כל $\sigma \in S_A$, נותר להוכיח את הומומורפיזם.

לכל $\sigma, \mu \in S_A$ ולכל $(i,j) \in A$ מתקיים

$$(\sigma\mu)(i,j) = ((\sigma\mu)i, (\sigma\mu)j) = (\sigma(\mu(i)), \sigma(\mu(j))) =$$
$$\sigma(\mu(i), \mu(j)) = \sigma(\mu(i,j))$$

ב) תהי $\mu = (1,2)$, ויהי $(i,j) \in A$.

אם $\{i,j\} \cap \{1,2\} = \varnothing$, אז $\mu(i,j) = (i,j)$.

אם $\{i,j\} \subseteq \{1,2\}$, אז $\mu(i,j) = (j,i)$.

אם $\{i,j\} \cap \{1,2\} = \{i\}$, אז $\mu(i,j) = \begin{cases} (2,j) & i=1 \\ (1,j) & i=2 \end{cases}$

אם $\{i,j\} \cap \{1,2\} = \{j\}$, אז $\mu(i,j) = \begin{cases} (i,2) & j=1 \\ (i,1) & j=2 \end{cases}$

ג) תהי $\mu = (1,2,3)$, ויהי $(i,j) \in A$. אז $\mu(i,j) = (k,t)$, כאשר $k = \begin{cases} 1 & i=3 \\ 2 & i=1 \\ 3 & i=2 \\ 4 & i=4 \end{cases}$,

וכך גם לגבי t.

שאלה 5

כל תת-החבורות של $G=C_{45}$ הן C_d, כאשר $d=1,3,5,9,15,45$ (כי לכל d המחלק את $|C_{45}|=45$ ישנה תת-חבורה אחת מסדר d ואין תת-חבורות נוספות.)

מאותה סיבה כל ההכלות הן:

$$C_1\subseteq C_3\subseteq C_9\subseteq C_{45},\quad C_1\subseteq C_3\subseteq C_{15}\subseteq C_{45},\quad C_1\subseteq C_5\subseteq C_{15}\subseteq C_{45}$$

שאלה 6

תהי G חבורה, $x,y\in G$ מתחלפים בכפל. נניח כי $o(x)=m,\ o(y)=n$, ותהי $k=\mathrm{l.c.m}(m,n)$. אז קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ עבורם $k=\alpha m=\beta n$ ומתקיים

$$(xy)^k=x^ky^k=\left(x^m\right)^\alpha\left(y^n\right)^\beta=1\quad\Leftarrow\quad o(xy)|k.$$

אם נוותר על תנאי החילופיות, אז הטענה אינה נכונה: ראינו בכיתה דוגמא ל- $G=S_{\mathbb{N}}$ ובה שני איברים מסדר 2, כך שמכפלתם מסדר אינסופי.

עוד דוגמא: $G=S_3,\ x=(1\ 2),\ \ y=(1\ 3)$.