קומבינטוריקה - תרגיל מס' 4

פתרון

תרגיל מס' 1

בכנסת בוחרים יו"ר מבין 4 מועמדים. כמה תוצאות שונות אפשריות? (הנח שכל אחד מבין 120 חברי הכנסת יכול להצביע בעד אחד המועמדים או להימנע. תוצאת ההצבעה היא מספר הקולות להם זכה כל מועמד ומספר הנמנעים.)

פתרון:

נסמן x_0 - מספר הנמנעים, x_1 - מספר הקולות שקיבל המועמד הראשון, x_2 - מספר הקולות שקיבל המועמד השני, x_3 - מספר הקולות שקיבל המועמד השלישי, x_4 - מספר הקולות שקיבל המועמד הרביעי.

אז מספר התוצאות האפשריות הוא בדיוק מספר הפתרונות של המשוואה

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120, \quad x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

והוא שווה ל-$\binom{124}{4} = \binom{120+5-1}{5-1}$

תרגיל מס' 2

א. בכמה דרכים ניתן לבחור מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_k$ כך ש: $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$? (הנח ש: $0 \leq k \leq n$)

ב. אותה שאלה, כאשר התנאי הוא: $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq n$.

ג. אותה שאלה כמו בחלק ב', כאשר דורשים בנוסף: $a_1 \neq a_k$.

פתרון:

א. מספר האפשרויות לבחור את המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_k$ מבין המספרים $1, 2, \ldots n$, כאשר הדרישה היא $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$ הוא בדיוק מספר האפשרויות לבחור k מספרים שונים מבין n מספרים, ולכן התשובה לסעיף זה היא $\binom{n}{k}$.

ב. בסעיף זה הפתרון הוא לא פשוט כמו בסעיף קודם. נגדיר משתני עזר הבאים:

$$x_1 = a_1 - 1, x_2 = a_2 - a_1, x_3 = a_3 - a_2, \ldots, x_k = a_k - a_{k-1}, x_{k+1} = n - a_k$$

נשים לב כי לכל אוסף $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ מתאים אוסף $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ אחד ויחיד (חשבו למה!). כמו כן נשים לב כי תמיד מתקיים

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} = (a_1 - 1) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_k - a_{k-1}) + (n - a_k) = n - 1$$

לכן מספר הדרכים לבחור את $a_1, a_2, \ldots, a_k$, שהוא שווה למספר הדרכים לבחור את $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$, שווה למספר הפתרונות של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} = n - 1, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \geq 0$$

מכאן שהתשובה היא $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n-1+k+1-1}{k+1-1}$.

ג. נספור כמה אפשרויות יש להוריד מתוצאת הסעיף הקודם בשביל לקבל את תוצאת הסעיף הזה: יש להוריד את האפשרויות בהן $a_1 = a_k$, ומפני ש-$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k$ זה שקול ל-$a_1 = a_2 = \ldots = a_k$. מספר האפשרויות לבחור את $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ כך שכולם שווים הוא n, לכן זהו בדיוק מספר האפשרויות אותו צריך להוריד מתוצאת הסעיף הקודם. לכן התשובה היא $\binom{n+k-1}{k} - n$.

<u>תרגיל מס' 3</u>

כמה פתרונות במספרים שלמים חיוביים יש לכל אחת מן המשוואות הבאות?

א. $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 20$

ב. $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$

ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

<u>פתרון:</u>

<u>הערה חשובה לגבי תרגיל מס' 3 כולו:</u> שימו לב שהפתרונות עליהם אנו נשאלים בשאלה זו הם שלמים <u>חיוביים</u>. התעלמות מנקודה זו גורמת לטעויות בפתרון השאלה.

א. נחליף משתנים (כדי לקבל משוואה בשלמים אי שליליים)

$$y_i = x_i - 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, 7$$

נקבל שהמשוואה שלנו שקולה למשוואה

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_7 = 13 \qquad y_1, y_2, \ldots, y_7 \ge 0$$

ומספר הפתרונות של המשוואה המקורית שווה למספר הפתרונות של המשוואה החדשה שהוא כידוע

$$\binom{13+7-1}{7-1} = \binom{19}{6}$$

ב. נפרק את הבעיה למקרים לפי הערכים של x_1, x_3. גם בסעיף זה חשוב לא לשכוח שהמשתנים גדולים ממש מ-0. נרכז את הממצאים בטבלה:

מספר הפתרונות במקרה זה	המשוואה שמתקבלת על x_2, x_4	x_1	x_3
6	$x_2 + x_4 = 7$	1	1
4	$x_2 + x_4 = 5$	2	1
2	$x_2 + x_4 = 3$	3	1
1	$x_2 + x_4 = 2$	1	2
סה"כ 13			

לכן התשובה היא 13.

ג. נפרק את הבעיה למקרים לפי הערכים של $x_1 + x_2 + x_3$ ושל $x_4 + x_5 + x_6$. גם בסעיף זה חשוב לא לשכוח שהמשתנים גדולים ממש מ-0. נרכז את הממצאים בטבלה:

$x_1+x_2+x_3$	$x_4+x_5+x_6$	מספר האפשרויות ל-x_1,x_2,x_3	מספר האפשרויות ל-x_4,x_5,x_6	סה"כ מספר האפשרויות למקרה זה
3	6	1	10	10
6	3	10	1	10
				סה"כ 20

והתשובה היא 20.

<u>תרגיל מס' 4</u>

לגבי כל אחד מן הביטויים הבאים, קיבעו האם הוא מופיע בפיתוח של $(x^6+y^5)^7$ לפי נוסחת הבינום, ואם כן - מה המקדם שלו.

א. $x^{24}y^{20}$; ב. $x^{12}y^{25}$; ג. $x^{30}y^{10}$.

<u>פתרון:</u>

$$(x^6+y^5)^7=\binom{7}{0}x^{42}+\binom{7}{1}x^{36}y^5+\binom{7}{2}x^{30}y^{10}+\binom{7}{3}x^{24}y^{15}+\binom{7}{4}x^{18}y^{20}+\binom{7}{5}x^{12}y^{25}+\binom{7}{6}x^6y^{30}+\binom{7}{7}y^{35}$$

לכן

א. $x^{24}y^{20}$ לא מופיע בפיתות.

ב. $x^{12}y^{25}$ מופיע בפיתוח עם מקדם $\binom{7}{5}=21$.

ג. $x^{30}y^{10}$ מופיע בפיתוח עם מקדם $\binom{7}{2}=21$.

<u>תרגיל מס' 5^*,(בונוס)</u>

בדומה לצורה בה ניתן היה להגדיר את $\binom{n}{k}$ באמצעות משולש פסקל, נגדיר את המספרים $\left(\binom{n}{k}\right)$ עבור $n\geq 1, 1\leq k\leq n$ על ידי המשולש הבא:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 4 & & 3 & & & \\
 & & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & & \\
 & 5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5 & \\
6 & & 16 & & 25 & & 25 & & 16 & & 6 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

או באופן יותר פורמלי:

א) $n=\left(\binom{n}{1}\right)=\left(\binom{n}{n}\right)$, לכל $n\geq 1$.

ב) $\left(\binom{n+1}{k+1}\right)=\left(\binom{n}{k}\right)+\left(\binom{n}{k+1}\right)$, לכל $n\geq 1, 0<k<n$

מצא ביטוי סגור ל-$\left(\binom{n}{k}\right)$ באמצעות המקדמים הבינומיים הרגילים.

פתרון:

תשובה: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

את התשובה ניתן לנחש או להגיע אליה מהאבחנה, כי המשולש החדש הוא סכום של שני משולשים "מוזזים".

נראה כי בשפת המשולש התנאים מתקיימים:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} = n = \left(\!\binom{n}{1}\!\right)$$

$$\binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n} = n = \left(\!\binom{n}{n}\!\right)$$

בתוך המשולש, נוכיח את נכונות הנוסחא באנדוקציה על מספר השורה n. עבור $n=1$ הנוסחא טריוויאלית. נניח נכונות עבור n ונראה עבור $n+1$:

$$\binom{n+1}{k-1} + \binom{(n+1)-1}{k} = \binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right) = \left(\!\binom{n+1}{k}\!\right)$$

הערה: את התשובה הסופית ניתן לכתוב בהרבה דרכים נכונות.