

תורת החבורות – תרגיל בית 5 – פתרון

שאלה 1

$$\text{הסדר הינו } 10, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = (1, 2, 3, 4, 5)(8, 9) \quad (\text{א})$$

$$\text{הסדר } 9, (1 \ 2 \ 3)(4 \ 5)(1 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9)(1 \ 5) = (1 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 2 \ 3) \quad (\text{ב})$$

$$\text{וסדר הינו } 3, (1 \ 5)(1 \ 2 \ 3)(1 \ 5) = (2 \ 3 \ 5) \quad (\text{ג})$$

שאלה 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 3 & 2 & 8 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \in S_9, \text{ תהי}$$

$$o(\sigma) = 10 \iff \sigma = (1 \ 7 \ 4 \ 3 \ 9)(2 \ 5)(6 \ 8) \quad (\text{א})$$

(ב)

$$\sigma^{101} = \sigma^1 = \sigma,$$

$$\sigma^{1357}(9) = \sigma^7(9) = (1 \ 7 \ 4 \ 3 \ 9)^7(9) = (1 \ 7 \ 4 \ 3 \ 9)^2(9) = 7$$

$$\sigma^{2488}(5) = \sigma^8(5) = (2 \ 5)^8(5) = 5$$

$$\psi = \sigma^{-1}(4 \ 5), \text{ לכן} \quad (\text{ג})$$

$$\sigma = ((1 \ 7 \ 4 \ 3 \ 9)(2 \ 5)(6 \ 8))^{-1}(4 \ 5) =$$

$$= (6 \ 8)(2 \ 5)(1 \ 9 \ 3 \ 4 \ 7)(4 \ 5) = (1 \ 9 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5 \ 7)(6 \ 8)$$

$$\mu_2 = (1 \ 3 \ 7 \ 9 \ 4)(2 \ 6 \ 5 \ 8) \quad (\text{ד})$$

$$\mu_3 = (1 \ 4 \ 9 \ 7 \ 3)(2 \ 5)(6 \ 8)$$

שאלה 3

(א) נניח כי $d = (m, i)$ ויהי $m = d \cdot k$, $i = d \cdot j$.

תהי σ m -מעגל $\sigma = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_{d+d}, x_{2d+1}, \dots, x_{2d+d}, \dots)$ ואז

$$\begin{aligned} \sigma^i &= \sigma^{d \cdot j} = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_{d+d}, x_{2d+1}, \dots, x_{2d+d}, \dots)^{d \cdot j} = \\ &= (x_1, x_{d+1}, x_{2d+1}, \dots, x_{(k-1)d+1})^j (x_2, x_{d+2}, x_{2d+2}, \dots, x_{(k-1)d+2})^j \cdots (x_d, x_{2d}, x_{3d}, \dots, x_{kd})^j \end{aligned}$$

לכן אם $(m, i) > 1$, אז σ^i אינה m -מעגל.

להפך, אם $(m, i) = 1$, אז קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ כך ש $\alpha i + \beta m = 1$.

לכן $\sigma = \sigma^1 = \sigma^{\alpha i + \beta m} = (\sigma^i)^\alpha$ מכפלת σ^i מעגלים זרים, או $(\sigma^i)^\alpha$ מכפלת

t מעגלים זרים לפחות. היות ו- $\sigma = (\sigma^i)^\alpha$ מקבלים כי σ^i "מכפלה" של מעגל אחד שהינו m -מעגל.

(ב) נשתמש בסימוני של הסעיף הקודם, אז $k = \frac{m}{d} = \frac{m}{i}$ ו- $d = i$, $j = 1$, $k = \frac{m}{d}$ ו- σ^i הינה

מכפלת $d = i$ מעגלים באורך $k = \frac{m}{i}$ כל אחד.

שאלה 4

תהי $\sigma \neq id$ וניתן להניח כי σ הינה t -מעגל $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_t)$.

אם $t = 2$ היות ו- $n \geq 3$ קיים $\{x_1, x_2\} - \{1, 2, \dots, n\}$ ואז נבחר $\mu = (x_1, y)$.

אם $t > 2$ נבחר $\mu = (x_1, x_2)$.

בכל מקרה קיימת $G \in \mu$ כך ש- $\sigma \mu \neq \mu$.