תורת החבורות – תרגיל בית 3

שאלה 1

א) קבע אם הפעולה $a*b=a\cdot b+1$ המוגדרת על קבוצת מספרים השלמים הינה אסוציאטיבי.

ב) הוכח כי חיבור מחלקות השקילות (השארית) ב- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הינו אסוציאטיבי.

ב) הוכח כי כפל מחלקות השקילות (השארית) ב- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הינו אסוציאטיבי.

ג) הוכח כי לכל $n>1$ טבעי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ אינה חבורה ביחס לפעולת הכפל הנ"ל.

שאלה 2

תהי X קבוצת השברים המצומצמים. לכל אחת מהקבוצות הבאות בדוק אם היא חבורה ביחס לפעולת חיבור:

$$1)\quad Y=\left\{\frac{a}{b}\in X\,\middle|\,b\text{ is odd}\right\}$$

$$2)\quad Z=\left\{\frac{a}{b}\in X\,\middle|\,b\text{ is even}\right\}$$

שאלה 3

תהי $G=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x<1\}$, ונגדיר את הפעולה על G באופן הבא: $a*b=\{a+b\}$,

כלומר $a*b=a+b-\lfloor a+b\rfloor$.

הוכח: $(G,*)$ חבורה אבלית.

שאלה 4

תהי $G=\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^n=1, n\in\mathbb{Z}^+\}$ -- אוסף כל שורשי היחידה. הוכח:

א) $(G,\cdot)$ חבורה.

ב) $(G,+)$ אינה חבורה.

שאלה 5

תהי G חבורה, $x \in G$ $a,b,$ שלמים חיוביים.

א) הוכח: $\left(x^{a}\right)^{b} = x^{ab}$, $x^{a+b} = x^{a} x^{b}$

ב) הוכח: $\left(x^{a}\right)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^{a}$

ג) נסח את חלק א' לכל a,b שלמים.

שאלה 6

תהיינה A,B חבורות. הוכח: $A \times B$ אבלית אם ורק אם A,B אבליות.

שאלה 7

תהי G חבורה בה לכל a,b מתקיים כי $\left(ab\right)^{3} = a^{3}b^{3}$ וגם $\left(ab\right)^{5} = a^{5}b^{5}$.

הוכח: $\left(G,*\right)$ חבורה אבלית.

שאלה 8

תהי $\left(G,*\right)$ קבוצה סופית עם פעולה כך שלכל שלושה איברים $a,b,c \in G$ מתקיים

1) $a * b \in G$
2) $\left(a * b\right) * c = a * \left(b * c\right)$
3) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$
4) $b * a = c * a \Rightarrow b = c$

א) הוכח: $\left(G,*\right)$ חבורה.

ב) האם הטענה תישאר נכונה אם נוותר על תנאי הסופיות?