סיכום משפטים – חבורות

תורת המספרים – משפטים

1. אם k מחלק משותף (לאו דווקא מקסימלי) של m, n, אז הוא מחלק כל צ"ל של m, n בעל מקדמים שלמים.
2. משפט אוקלידס – אם $n = am + r$, אזי $\gcd(m, n) = \gcd(m, r)$.
3. אם $d = \gcd(m, n)$ אזי קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים - $d = am + bn$. d הוא המספר השלם הקטן ביותר המקיים תכונה זו.
4. מסקנה - m, n זרים אם ורק אם קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך שמתקיים - $1 = am + bn$.
5. $\gcd(m, n) \cdot lcm(m, n) = m \cdot n$
6. נניח כי $m = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, $n = p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{b_n}$. אזי:
   - $\gcd(m, n) = p_1^{\min\{a_1, b_1\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min\{a_n, b_n\}}$
   - $lcm(m, n) = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max\{a_n, b_n\}}$
7. $\mathrm{n} = \sum_{0<d|n} \phi(d)$.
8. $\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$
9. משפט השאריות הסיני – לכל m, n זרים, a שלם, קיים x יחיד כך שמתקיים $x = a \ (mod\ m)$ וגם $x = a \ (mod\ n)$.
10. אם m, n זרים, אזי $m^{\phi(n)} = 1 \ (mod\ n)$.

תמורות - משפטים

1. אם σ היא k- מעגל ב-S_n, $d = \gcd(k, m)$ עבור m שלם כלשהו, אזי σ^m היא מכפלה של d מעגלים בגודל $\frac{k}{d}$.
2. צמידות תמורות הוא יחס שקילות.
3. למת ההצמדה – אם $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ אזי $\tau\sigma\tau^{-1} = \left(\tau(a_1), \ldots \tau(a_n)\right)$.
4. שתי תמורות הן צמודות אם ורק אם יש להן את אותו מבנה מעגלי.
5. כל תמורה ב-S_n ניתנת לכתיבה כמכפלה של טרנספוזיציות. בכל מכפלה כזאת, הזוגיות של מספר הטרנספוזיציות תהיה זהה.
6. מכפלה של תמורות מאותה זוגיות היא תמורה זוגית, מכפלה של תמורות מזוגיות שונה היא תמורה אי-זוגית.

חבורות - משפטים

1. בוחן תת-חבורה – H תת-חבורה של G אם ורק אם :
   - $e \in H$.
   - H סגורה לכפל.
   - כל איבר ב-H הפיך.

   או באופן שקול :

   - $\mathrm{H} \neq \emptyset$.
   - $g, h \in H \Rightarrow g \cdot h^{-1} \in H$.
2. חיתוך של תתי-חבורות הוא תת-חבורה.
3. איחוד של תתי-חבורות הוא חבורה אם ורק אם חבורה אחת מוכלת באחרת.
4. אם $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{G}$, אז $\langle S \rangle$ היא התת-חבורה הקטנה ביותר של G שמכילה את S.
5. אם $g^m = e$ אזי $\mathrm{O}(g)|m$.
6. תת-חבורה של חבורה ציקלית היא ציקלית.
7. אם סדר של חבורה הוא ראשוני, אז החבורה ציקלית.
8. אם $\mathrm{H} = \langle g^m \rangle$, $n = O(g)$, $d = \gcd(m, n)$ אזי $\mathrm{H} = \langle g^d \rangle$, ומתקיים $\#\mathrm{H} = \frac{n}{d}$.
9. מסקנה – אם $G = \langle g \rangle$ מסדר n, אז $\langle g^m \rangle$ יוצר של G אם ורק אם $\gcd(m, n) = 1$, ולכן מספר היוצרים של חבורה ציקלית מסדר n הוא $\phi(n)$.
10. $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ אבלית אם ורק אם H,G אבליות.
11. מכפלה קרטזית של תתי-חבורות היא תת-חבורה של המכפלה הקרטזית.
12. $o\big((a, b)\big) = lcm\big(o(a), o(b)\big)$.
13. לחבורה ציקלית יש תת-חבורה מכל סדר שמחלק אותה.
14. המרכז של S_n הוא טריוויאלי.
15. משפט קושי – אם G חבורה, p ראשוני ו-$p|\#G$, אז קיימת ב-G איבר מסדר p.
16. אם G חבורה מסדר $2p$ ($p > 2$ ראשוני), אז G ציקלית.
17. אם G חבורת-p, אז המרכז של G לא טריוויאלי.

תתי-חבורות נורמליות - משפטים

1. כל הצמדה מהצורה gHg^{-1} היא תת-חבורה.
2. כל תת-חבורה של חבורה אבלית היא נורמלית.
3. $H \lhd \mathrm{G}$ אםם $gHg^{-1} \subseteq H$ לכל $g \in G$.
4. חיתוך של תתי-חבורות נורמליות הוא תת-חבורה נורמלית.

5. אם קבוצה הפיכה S יוצרת של חבורה G, אז כדי לבדוק נורמליות של H ב-G מספיק לבדוק את התנאי ממשפט מס׳ 3 על איברי S בלבד.
6. עבור $H,K \leq G$ מתקיים - $H \cdot K \leq G$ אם ורק אם $H \cdot K = K \cdot H$.
7. אם $K \lhd$ G אזי $H \cdot K = K \cdot H$.
8. אם $K,H \lhd$ G אזי $H \cdot K \lhd$ G.
9. אם $K \lhd$ G, $H \subseteq G$ אזי $H \cdot K = \langle H \cup K \rangle$.
10. המרכז של חבורה הוא תת-חבורה נורמלית.
11. כדי שתת-חבורה של S_n תהיה נורמלית, תנאי הכרחי שכל התמורות ממבנה מעגלי מסוים יהיו שייכות לחבורה.

הומומורפיזמים - משפטים

1. $\alpha(e) = e$.
2. $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$.
3. הומומורפיזם נקבע באופן בלעדי על ידי הפעולה שלו על היוצרים של החבורה.
4. $\mathrm{Ker}(\alpha) \lhd G_1$.
5. α חח״ע אם ורק אם $\mathrm{Ker}(\alpha) = \{e\}$.
6. $Im(\alpha) \leq G_2$.
7. $O(\alpha(g)) | O(g)$. אם α חח״ע אז מתקיים שוויון בין השניים.
8. אם $H_1 \leq G_1$ אזי $\alpha(H_1) \leq G_2$.
9. משפט השאריות הסיני – אם m, n זרים אז $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$.
10. כל חבורה ציקלית מסדר n איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_n$.
11. משפט קיילי – תהא G חבורה. אז G איזומורפית לתת-חבורה של $Sym(G)$. במקרה הסופי - $G \cong H \leq S_n$.

קוסטים וחבורות מנה - משפטים

1. בתתי-חבורות נורמליות, הקוסטים השמאליים שווים לקוסטים הימניים.
2. $|gH| = |Hg| = |H|$.
3. $g_1 H = H \Leftrightarrow g_1 \in H, Hg_2 = H \Leftrightarrow g_2 \in H$.
4. $g_1 H = g_2 H \Leftrightarrow g_1 \in g_2 H \Leftrightarrow g_2 \in g_1 H$.
5. שני קוסטים הם או שווים או זרים (קבוצת הקוסטים מגדירה יחס שקילות על H).
6. $x^{-1}y \in H \Leftrightarrow xH = yH$
7. משפט לגרנז׳ – אם $H \leq G$ ושתיהן סופיות, אז #H|#G.

8. עבור $G \leq H$, שתיהן סופיות, מתקיים - $|G\backslash H| = [G:H] = \frac{\#G}{\#H}$.
9. אם $G \rhd N$, $G \leq H$ אזי - $\#H \cdot N = \frac{\#H \cdot \#N}{\#H \cap N}$.
10. אם $G \rhd H, K$ כך ש-$H \cap K = \{e\}$, $HK = G$ אז $G \cong H \times K$.
11. משפט האיזומורפיזם הראשון - $G\backslash Ker(\alpha) \cong Im(\alpha)$.
12. משפט האיזומורפיזם השני – יהיו $H \leq G, N \lhd G$. אזי $(H \cdot N)\backslash N \cong H\backslash(H \cap N)$.
13. משפט האיזומורפיזם השלישי – יהיו $K \leq N, K, N \lhd G$. אזי - $G\backslash K \cong \frac{G\backslash N}{N\backslash K}$.
14. משפט ההתאמה – תהא $N \lhd G$. אז קיימת התאמה חח״ע ועל בין $\{H|N \leq H \leq G\}$ לבין $\{U|U \leq G\backslash N\}$ המוגדרת ע״י $H \longmapsto H\backslash N$. התאמה זו מקיימת:
    - $H_1 \leq H_2 \Leftarrow H_1\backslash N \leq H_2\backslash N$ (שימור יחס הסדר).
    - אם $H \lhd G$ אז $H\backslash N \lhd G\backslash N$ (שימור הנורמליות).
    - $[G\backslash N : H\backslash N] = [G\backslash H]$ (שימור האינדקס).
15. אם G אבלית/ציקלית, אז כל חבורת מנה שלה היא אבלית/ציקלית בהתאמה.
16. אם G אבלית, $H \lhd G$ מאינדקס n, אז $g^n \in H$ לכל $g \in G$.
17. אם G חבורה מסדר $2p$ ($2 < p$ ראשוני), $N \lhd G$ מאינדקס p, אז $N \leq Z(G)$.
18. אם $N_1 \lhd G_1, N_2 \lhd G_2$ אזי $N_1 \times N_2 \lhd G_1 \times G_2$ ומתקיים:
$$\frac{G_1 \times G_2}{N_1 \times N_2} \cong \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}$$
19. אם $H \lhd G$ מאינדקס ראשוני, אז לכל $K \leq G$ מתקיים - $K \leq H$ או $HK = G$.

__פעולת חבורה על קבוצה - הגדרות__

1. פעולה של חבורה G על קבוצה X היא הומומורפיזם $\alpha: G \to Sym(X)$.
2. באופן שקול - $\alpha: G \times X \to X$ נקראת פעולה של G על X אם היא מקיימת:
    - $\alpha(e, x) = x \ \ \forall x \in X$.
    - $\alpha(gh, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$.
3. גרעין של פעולה α מוגדר להיות - $Ker(\alpha) = \{g \in G | \alpha(g) = Id\}$.

__פעולת חבורה על קבוצה - משפטים__

1. $Ker(\alpha) = \bigcap stab(x)$.
2. $X = \bigcup orb(x)$. האיחוד הוא זר.
3. $stab(x) \leq G$.

4. $|orb(x)| = [G: stab(x)]$.
5. משפט מסלול-מייצב - $\#G = |orb(x)| \cdot |stab(x)|$.
6. במקרה של פעולת ההצמדה - $|cl(x)| = \frac{\#G}{\#stab(x)} = \frac{\#G}{\#C(x)}$ (כאשר C(x) הוא הרכז).
7. משוואת המחלקה - $\#\mathrm{G} = \#\mathrm{Z(G)} + \sum|\mathrm{cl(x)}| == \#\mathrm{Z(G)} + \frac{\sum(\#\mathrm{G})}{\#C(x)}$.
8. לחבורה מסדר p ראשוני הפועלת על חבורה מסדר זר ל-p יש נקודת שבת.

<u>משפטי סילו</u>

1. אם $\#\mathrm{G} = p^k m$ כאשר p ראשוני, $(p, m) = 1$, נסמן $d_p(G) = k$.
2. תת-חבורה $\mathrm{P} \leq G$ מסדר p^{d_p} תיקרא חבורת p-סילו.
3. משפט סילו הראשון – אם $p|\#G$ אז ל-G יש תת-חבורת p-סילו.
4. משפט סילו השני – כל שתי תתי-חבורות p-סילו הן צמודות אחת לשנייה, ועל כן הן גם איזומורפיות.
5. משפט סילו השלישי – יהא n_p מספר תתי-חבורות p-סילו של G. אזי $n_p \equiv_p 1$ וגם $n_p|[G: P]$. מסקנה - $n_p = \frac{\#G}{p^{d_p}}$.
6. מסקנה ממשפט סילו השני – תת-חבורת p-סילו היא נורמלית אם ורק אם היא יחידה.