<u>תרגילי חזרה לבוחן</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

1. חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{4n}\frac{1}{k}$.

<u>פתרון:</u>

$$\sum_{k=2n}^{4n}\frac{1}{k}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+2n}=\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{4n}$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2n}^{4n}\frac{1}{k}=\int_0^2\frac{dx}{2+x}+0=\ln 2$$

2. מצאו עבור כל ערכי $q,p\geq 0$, עבורם האינטגרלים הבאים מתכנסים

א. $\int_0^\infty\frac{dx}{x^p+x^q}$

ב. $\int_0^\infty\frac{dx}{x^p(1+x)^q}$

ג. $\int_0^\infty x^pe^{-x}dx$

<u>תשובה:</u>

א. $\max\{p,q\}>1$ וגם $\min\{p,q\}<1$.

ב. $p<1$ וגם $p+q>1$.

ג. לכל $p\geq 0$.

מלאו את הפרטים.

3. *חשבו את $\sum_{n=0}^\infty\cos^{3^3}(\pi n)\frac{n^3+(3!)^{3n}}{n!}$.

<u>פתרון:</u>

קל לראות ש- $\sum_{n=0}^\infty\frac{(-3!)^{3n}}{n!}=e^{(-3!)^3}$ ו- $\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{n^3}{n!}=x\left(x\left(xe^x\right)'\right)'|_{x=-1}=e^{-1}$.

4. יש לציין איזה מהטענות הבאות נכונה, ועבור טענה לא נכונה תנו דוגמא נגדית ויש לתקן את הטענה.

(א) אם f_n סדרה המתכנסת ל- f ב- $\mathbb{R}$, ו- $a_n\to a$ אזי $f_n(a_n)\to f(a)$.

(ב) אם f אינטגרבילית רימן ב- $[0,1]$ אז יש לה פונקציה קדומה שם.

(ג) אם f רציפה ב- $[0,2016]$ אזי $F(x)=\int_0^x f$ מונוטונית ב- $[0,2016]$.

(ד) *אם f_n מתכנסות במ"ש ב- $[1,\infty)$ לפונקציה f אזי $\int_1^\infty f_n\to\int_1^\infty f$.

(ה) אם f רציפה ב- $[1,\infty]$ ו- $\int_1^\infty f$ קיים אזי $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

(ו) *אם $a_n\leq\frac{1}{n^2}$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

(ז) אם f מונוטונית ב- $[0,1]$ אזי $F(x)=\int_0^x f$ רציפה ב- $[0,1]$.

(ח) *אם $\sum f_n'$ מתכנס במ"ש ב־ $[0,1]$, אזי $\sum f_n$ מתכנס ב־ $[0,1]$.

(ט) *טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מתכנס במ"ש ב־ $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

(י) אם $f \geq 0$ רציפה ב־ $[1,\infty)$ ו־ $\sum_1^{\infty} f(n)$ קיים אזי $\int_1^{\infty} f$ קיים.

(יא) אם f_n מתכנסות ב־ $[0,1]$ל־ f, אזי $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$.

(יב) אם $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ קיים אזי $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

(יג) אם $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ אזי $\sum f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ קיים.

(יד) אם f מונוטונית יורדת ב־ $[1,\infty)$ ו־ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ אזי $\sum (-1)^n f(n)$ קיים.

(טו) *אם f_n ו־ g_n סדרות של פונקציות המתכנסות במ"ש ל־ f ו־ g בהתאמה ב־ E. אזי $f_n \cdot g_n$ מתכנסת במ"ש ב־ E.

(טז) *אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אזי גם $\sum a_n^2$.

(יז) *אם $\int_1^{\infty} f$ מתכנס בהחלט אזי גם $\int_1^{\infty} f^2$.

(יח) *$f \geq 0$ וגם $\int_0^x f = 0$ לכל $x \in [0,1]$ אזי $f \equiv 0$.

<u>פתרון:</u>

(א) לא נכון. דוגמא: אוהלים מצטברים ב־ $[0,1]$ עם מרכז $a_n = \frac{1}{n}$ וגובה n. תיקון: מתכנסות במ"ש.

(ב) לא נכון. דוגמא: מדרגה. תיקון: f רציפה.

(ג) לא נכון. דוגמא: $\sin x$. תיקון: f אי־שלילית.

(ד) לא נכון. דוגמא: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,2n]}$. תיקון: בקטע סגור.

(ה) לא נכון. דוגמא: אוהלים. תיקון: f מונוטונית או f רציפה במ"ש שם.

(ו) לא נכון. דוגמא: $a_n = -1$. תיקון: $a_n \geq 0$.

(ז) נכון. פונקציה מונוטונית בקטע סגור וחסום היא בהכרח אינטגרבילית רימן, לכן F רציף שם.

(ח) לא נכון. דוגמא: $f_n(x) = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$. תיקון: אם בנוסף $\sum f_n$ מתכנס באיזושהי נקודה.

(ט) לא נכון. תיקון: הטור מתכנס נקודתית ב־ $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

(י) לא נכון. דוגמא: הזזה של אוהלים. תיקון: f מונוטונית יורדת.

(יא) לא נכון. דוגמא: $f_n = n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$, $f \equiv 0$. תיקון: f_n מתכנסות במ"ש ב־ $[0,1]$.

(יב) לא נכון. דוגמא: דיריכלה. תיקון: f רציפה.

(יג) לא נכון. דוגמא: $f(x) = \sqrt{x}$. תיקון: f גזירה ב־ 0 כך ש־ $f(0) = 0,\ f'(0) \neq 0$.

(יד) נכון. זה טור לייבניץ'.

(טו) לא נכון. דוגמא: $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, $g_n(x) = x$, $E = \mathbb{R}$. תיקון: f_n ו־ g_n חסומות במידה אחידה ב־ E.

(טז) נכון.

(יז) לא נכון. דוגמא: אוהלים עם בסיס $b_n = n^{-3}$ וגובה $h_n = n$. תיקון: f מונוטונית לאפס.

(יח) לא נכון. דוגמא: הביסייד. תיקון: f רציפה.

5. הוכיחו שאינטגרל של פונקציה רציפה אי־זוגית בתחום סימטרי הוא אפס.

הוכחה:

נשתמש בהחלפת משתנים:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{-a} f(-t)\,(-dt) = \int_{-a}^{a} f(-t)\,dt = -\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$$

הערה: זה נכון עם לפונקציה אינטגרבילית רימן.

6. יהיו $I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$, $I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$, $I_3 = \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}dx$.

הוכיחו ששלושתם קיימים ושווים, אבל רק אחד מהם מתכנס בהחלט.

הוכחה:

כולם קיימים לפי דיריכלה למשל. כמו כן, $\frac{1}{x^2}$ שולט על $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ עבור $x \gg 1$ לכן I_1 מתכנס בהחלט.

מצד שני,

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$$

לפי דיריכלה, $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ מתכנס, אבל $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$, לכן I_2 מתכנס בתנאי, ובדומה עבור I_3.

נרשום את $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים עם $u = \sin^2 x$ ו־ $v' = \frac{1}{x^2}$ ואז

$$\int_0^\infty uv' = uv\,|_0^\infty - \int_0^\infty vu' = \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}dx =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\frac{dt}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

זה מראה ש־ $I_1 = I_2 = I_3$.

7. תהי f גזירה ברציפות ב־ $[0,\infty)$ כך ש־ $\int_0^\infty f$ ו־ $\int_0^\infty f'$ קיימים. הוכיחו ש־ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

הוכחה:

$$\int_0^M f' = f(M) - f(0)$$

לכן קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$. אבל $\int_0^\infty f$ קיים לכן בהכרח $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

8. לאילו ערכי α מתכנס או מתבדר כל אחד מהטינטגרלים

א. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$

ב. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$

פתרון:

א. נשים לב ש־ $\frac{\sin x}{x^\alpha}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ לכן לפי השוואה, $\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha-1<1$.

ב. לכל $\alpha>0$ האינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה. עבור $\alpha\leq 0$:

$$\sin x=x^{-\alpha}\sin x\cdot\frac{1}{x^{-\alpha}}$$

לכן אם $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ קיים אזי לפי מבחן דיריכלה או אבל, נקבל ש־ $\int_1^\infty\sin x dx$ מתכנס, וזה לא נכון.

9. קבעו עבור אילו ערכי α ו־ β מתכנס הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\alpha-\frac{(n-\beta)^n}{n^n}\right)$$

פתרון:

ברור שצריך לדרוש ש־ $\alpha=e^\beta$. ואז $\alpha-\frac{(n-\beta)^n}{n^n}$ יורדת לאפס וקיבלנו טור לייבניץ'.

10. נתונה סדרה a_n מונוטונית יורדת לאפס ויהי $k\in\mathbb{N}$ מספר טבעי. הוכיחו שהטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}a_n$$

פתרון:

הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}$ חסום, למשל על ידי k, לכן לפי דיריכלה הטור מתכנס.

11. תהי $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\left(\frac{x}{n}\right)$ לכל $x\in(0,1]$. בדוק האם f_n מתכנסות במ"ש שם.

פתרון:

שימו לב ש־

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0 \tag{1}$$

נגדיר $f_n(0)=0$, ומזה קיבלנו ש־ $f_n(x)\longrightarrow 0$ לכל $x\in[0,1]$.

לצורך בדיקת רציפות במ"ש נעריך את $\max_{[0,1]}|f_n(x)-0|$. נשים לב ש־ $|f_n(x)|=-f_n(x)$ וגם עבור $x\in(0,1)$

$$\frac{d}{dx}x\ln x=0\Longleftrightarrow x=e^{-1}$$

לכן

$$f_n'(x)=0\Longleftrightarrow x_n=ne^{-1}$$

אבל $x_n\notin(0,1)$ לכן $|f_n|$ מונוטונית ב־ $[0,1]$ ו־ $f_n(0)=0$, $f_n(1)=\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$ מכאן

$$M_n=\max_{[0,1]}|f_n(x)-0|=\left|\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right|$$

ושוב לפי (1) נקבל $M_n\to 0$, ז.א., $f_n\twoheadrightarrow 0$ ב־ $[0,1]$.

12. התבוננו בטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\cos\left(n^2x^2\right)$$

הראו שהטור מתכנס לפונקציה גזירה ב־ $(0,\infty)$.

<u>פתרון:</u>

נסמן $f_n(x)=e^{-nx}\cos\left(n^2x^2\right)$ ו־ $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}\cos\left(n^2x^2\right)$.

יהי $\alpha>0$. הטור מתכנס ב־ $x=\alpha$ בבירור. כמו כן

$$u_n^{'}(x)=-e^{-nx}\left(n\cos\left(n^2x^2\right)+2xn^2\sin\left(n^2x^2\right)\right)$$

הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}2n^2xe^{-nx}\sin\left(n^2x^2\right)$ ו־ $\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-nx}\cos\left(n^2x^2\right)$ מתכנסים במ"ש ב־ $[\alpha,\infty)$ לפי משפט ויירשטראס.

מכאן, הגבול S הוא פונקציה גזירה ב־ $[\alpha,\infty)$. וזה לכל $\alpha>0$, לכן S גזיר ב־ $(0,\infty)$.

זהירות: זה לא אומר שיש התכנסות במ"ש ב־ $(0,\infty)$. הוכיחו שאין התכנסות במ"ש ב־ $(0,\infty)$!

13. *הוכיחו ש־

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}$$

<u>הוכחה:</u>

ברור ש־

$$\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$$

לכל $x\in\mathbb{R}$, נבצע אינטגרציה איבר־איבר.

14. מצאו סכום של

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

<u>פתרון:</u>

מכיוון ש־ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ אזי $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ לכל $x\in(-1,1)$. לכל x שם, נבצע אינטגרציה איבר־איבר ב־ $[0,x]$ ונקבל:

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ועל ידי חישוב ישיר נקבל

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

וכל זה נכון לכל $x\in(-1,1)$.

15. חשבו

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\left(nx\right)}{2^n}dx$$

<u>פתרון:</u>

ניתן לבצע אינטגרציה איבר־איבר ונקבל

$$\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\left(nx\right)}{2^n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\left(-1\right)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}=\frac{4}{3}$$

16. תהי f אינטגרבילית רימן ב־ $[a,b]$. הוכיחו ש־ f^2 אינטגרבילית רימן שם.

<u>הוכחה:</u>

נניח $|f|_{\infty}\leq M$. נשים לב ש־

$$\left|f^2\left(x\right)-f^2\left(y\right)\right|\leq 2M\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|$$

לכן

$$U\left(P,f^2\right)-L\left(P,f^2\right)\leq 2M\left(U\left(P,f\right)-L\left(P,f\right)\right)$$

17. האם הטור $\sum\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ מתכנס במ"ש ב־ $[2015,2016]$?

<u>פתרון:</u>

$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right|\leq\frac{2016}{n^2}$ ב־ $[2015,2016]$, לכן הוא מתכנס במ"ש שם.

18. *תהי f_n מתכנסת במ"ש לפונקציה רציפה f ב־ $[a,b]$. נניח ש־ $0\neq f$ ב־ $[a,b]$. הוכיחו ש־ f_n לא מתאפסות לכל n מספיק גדול.

<u>הוכחה:</u>

קיים $\delta>0$ כך ש־ $\left|f\left(x\right)\right|\geq\delta$, אבל לכל $n\gg 1$

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{\delta}{2}$$

לכל $x\in[a,b]$.

לכן מתקיים

$$\left|f_n\left(x\right)\right|=\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)+f\left(x\right)\right|\geq\left|\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|-\left|f\left(x\right)\right|\right|\geq\frac{\delta}{2}$$

19. *הוכיחו ש־ $f_n\left(x\right)=\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$ מתכנסת במ"ש לוקאלית אבל לא בכל $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה:</u>

לוקאלית: בכל קבוצה קומפקטית ב־ $\mathbb{R}$. למי שלא אוהב את המילה קומפקטית, שיוכיח שיש התכנסות במ"ש בכל קבוצה חסומה.

ההתכנסות במ"ש בקבוצות חסומות נובעת ממשפט דיני: f_n עולה ל־ e^{-x^2} שהיא רציפה.

מצד שני,

$$M_n = \sup_{\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} - f_n(x) \right| \geq \left| (1-n)^n - e^{-n^2} \right|$$

לכן $M_n \to \infty$. לכן ברור שאין התכנסות במ"ש.

20. לאילו ערכי p ממשיים הטור הבא מתכנס בהחלט, בתנאי ומתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-p}$$

<u>פתרון:</u>

אם $p \leq 0$ ברור שהטור מתבדר כי איבר כללי לא שואף לאפס. אם $p > 0$ ברור שהוא מתכנס כי זה טור לייבניץ'. כמו כן, מההרצאה הוא מתכנס בהחלט אם ורק אם $p > 1$.

לסיכום:

* $p \leq 0 \Longleftrightarrow$ מתבדר.
* $p \in (0,1] \Longleftrightarrow$ מתכנס בתנאי.
* $p > 1 \Longleftrightarrow$ מתכנס בהחלט.

21. נגדיר a_n ע"י $a_n = \frac{1}{n} e^{-a_{n-1}}$ כש־ a_1 נתון. האם $\sum a_n$ מתכנס?

<u>פתרון:</u>

נניח לצורך הדיון ש־ $a_n \to 0$. אבל אז $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} \to 1$ לכן הטור מתבדר.

22. בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

א. $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

ב. $\sum \cos(\pi n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

ג. $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

<u>פתרון:</u>

א. לא, בהשוואה אם $\frac{1}{n}$.

ב. כן, זה טור לייבניץ'.

ג. נשים לב ש־

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \begin{cases} \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) & N \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & N \notin 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

לכן $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$.