

אינפי 1 - גיליון תרגילים מספר 6

1. הגדר את המושגים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty & \text{ג. } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq -3 \\ \text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3 & \text{ד. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq 3 \end{array}$$

2. הוכח את הגבולות הבאים לפי ההגדרה :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{10} & \text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 3x + 3} = \infty \end{array}$$

3. בדוק האם הגבולות הבאים קיימים, ואם כן - חשב אותם :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] & \text{ד. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{6x^2 + 10} \\ \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x + [x]} & \text{ה. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+a) - \sin(a)}{\sin(x)} \\ \text{ג. } \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{|x - 3|} & \text{ו. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x^2 - a^2} \end{array}$$

4. מניין את נקודות אי הרציפות של $f(x) = [|x|] - [x]$.

5. תהא $f: R \rightarrow R$ ו- A קבוע חיובי. הוכח שבכל נקודה בה $f(x)$ רציפה, גם $g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} -A & f(x) < -A \\ f(x) & |f(x)| \leq A \\ A & f(x) > A \end{cases} \quad \text{רציפה, כאשר } g(x) \text{ נתונה ע"י:}$$

6. תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[0, \infty)$ וחיובית ממש, כלומר, $f(x) > 0$ לכל $x \geq 0$. נניח

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \text{ש-} \inf_{x \in [0, \infty)} f(x) > 0 \quad \text{הוכח ש-}$$

7. הוכח או הפרד :

$$\text{א. אם } f(x) \text{ מוגדרת בכל } R \text{ ו- } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ אז } \lim_{x \rightarrow 0} f(1/x) = 0$$

$$\text{ב. אם } g(x) = (f(x))^2 \text{ רציפה ב- } a \text{ אזי } f(x) \text{ רציפה ב- } a$$

$$\text{ג. קיימות פונקציה } f(x) \text{ רציפה ב- } a \text{ וסדרה } a_n \rightarrow a \text{ שעבורן } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \text{ לא קיים.}$$

$$\text{ד. אם } f(x) \text{ חסומה בסביבת } x = 0 \text{ אזי קיים } \lim_{x \rightarrow 0} xf(x)$$

$$\text{ה. ל- } f(x) = x^5 + x^3 + x - 1 \text{ קיים פתרון בקטע } (0,1).$$