אינפי 3 - גליון בית 4 - אביב תשע"ז

1. מצאו את המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$ על הקבוצה $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ 5x + 4y + 3z = 0\right\}$.

2. חשבו את נפח הקבוצות הבאות:

   (א) כדור בנורמת-p: $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^p \le R^p\right\}$. (הדרכה: עבדו בקואורדינטות קרטזיות, ומצאו קשר בין נפח כדור ב-$\mathbb{R}^n$ לנפח כדור ב-$\mathbb{R}^{n+1}$)

   (ב) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x+y| + |y+z| + |x+z| \le a\right\}$ (כאשר $a > 0$ מספר קבוע)

3. תהי $G \subset \mathbb{R}^n$ סימטרית ביחס ל-x_1 (כלומר $(x_1, x_2, \ldots) \in G \Leftrightarrow (-x_1, x_2, \ldots) \in G$), ו-$f : G \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית המקיימת $f(x_1, x_2, \ldots) = -f(-x_1, x_2, \ldots)$ לכל $\vec{x} \in G$. הוכיחו כי $\int_G f = 0$.

4. הוכיחו את נוסחת קושי לאינטגרל נשנה: אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה, אז $\int_0^x \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \ldots \int_0^{z_{n-1}} f(z_n)\, dz_n \ldots dz_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$. (הדרכה: החליפו סדר אינטגרציה, כך שהאינטגרל החיצוני יהיה לפי z_n, וזהו, גיאומטרית, את קבוצת הנקודות $(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ המתאימות ל-z_n מסויים).

5. תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, ויהא $B \subset \mathbb{R}^3$ כדור היחידה. חשבו את $\iiint_B \langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (כאשר $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) (רמז: נוח לפתוח את $\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle$ לסכום של תשעה מחוברים, ולחשב את האינטגרל של כל אחד מהם בנפרד. כמובן, יש פחות מתשעה חישובים שונים לבצע...)

6. הוכיחו את הנוסחה למומנט אינרציה ($I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \rho\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$) של קליפה כדורית עבה $\left\{(x,y,z) : R_1^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R_2^2\right\}$ בעלת צפיפות אחידה: $I_z = \frac{2M}{5}\left(\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right)$.