# עקומים ריבועיים

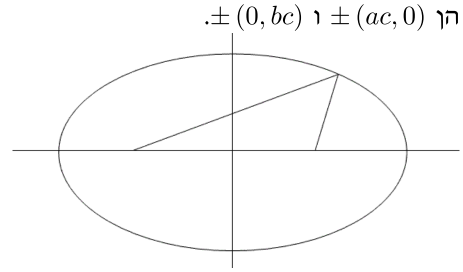
עקום ריבועי מתואר ע"י פולינום ריבועי בשני משתנים -

$$P(x,y)=Ax^2+Bx+Cy^2+Dy+Exy+F=0$$

בקורס הזה נניח כמעט תמיד ש $E=0$ (ראו הערה בסוף). בנוסף נרצה להיפטר מהגורמים של $x,y$. מבצעים זאת בעזרת השלמה לריבוע $Ax^2+Bx=A(x+\frac{B}{2})^2-A\frac{B^2}{4}$.
לאחר ההשלמה לריבוע נישאר עם פולינום מהצורה $a(x-x_0)^2+b(y-y_0)^2+c=0$. מבחינה גאומטרית, ההשלמה לריבוע זה הזזת המרכז. למשל $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ זה עיגול יחידה סביב הנקודה $(1,2)$ במקום סביב הראשית. בצורה יותר כללית, החיסור ב $x_0,y_0$ זו בעצם הזזה של הראשית לנקודה $(x_0,y_0)$.
נסתכל עתה על עקומים בצורה הקנונית - $ax^2+by^2=c$.

1. המקדמים של $x^2,y^2$ חיוביים, לכן לשם נוחיות נסתכל על העקום $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm c^2$. נפריד למקרים לפי הסימן של $\pm c^2$.

(א) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2>0$ - אליפסה (בה"כ $a\geq b$). כל הנקודות $(x,y)$ שסכום המרחק שלהם מהמוקדים $(\pm\sqrt{a^2c^2-b^2c^2},0)$ הוא $2ac$. כאשר $a=b$ מקבלים מעגל ברדיוס $ac=bc$. נקודות החיתוך עם הצירים הן $\pm(ac,0)$ ו $\pm(0,bc)$.



(ב) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ - נקודה בודדת בראשית. נשים לב שכאשר $c^2\to 0$ גם המוקדים שואפים לראשית וגם הרדיוס שואף לאפס, כלומר בעצם מקבלים אליפסה "מנוונת".

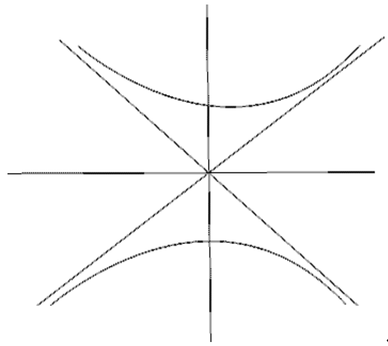
(ג) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-c^2<0$ - מאחר ו $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 0>-c^2$ אז אין פתרון, כלומר קיבלנו קבוצה ריקה.

2. המקדם של $x^2$ חיובי והמקדם של $y^2$ שלילי. שוב לשם הנוחיות נסתכל על $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm c^2$ (בה"כ $a,b>0$).

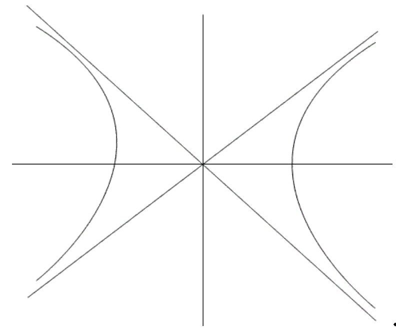
(א) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=c^2>0$ - היפרבולה. כל הנקודות $(x,y)$ שהפרש המרחקים שלהן מהמוקדים $(\pm\sqrt{a^2c^2+b^2c^2},0)$ שווה ל $2ca$.
נשים לב שאפשר לרשום $c^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$. כאשר $x\to\infty$ עבור $y\geq 0$ נקבל ש $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{c^2}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}\to 0$ (כי הנחנו ש $a,b>0$), כלומר העקומה שואפת לישר $y=\frac{b}{a}x$, ואם $y\leq 0$ אז העקומה תשאף ל $y=-\frac{b}{a}x$. אותו הדבר קורה כאשר $x\to-\infty$, כלומר ההיפרבולה "שואפת" לישרים $ay=\pm bx$ באינסוף.
נקודת החיתוך עם ציר האיקס היא $c^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}$, כלומר $x=\pm ac$ ואין נקודות חיתוך עם ציר ה $y$ כי $-\frac{y^2}{b^2}\leq 0<c^2$.

(ב) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - כאשר $c\to 0$ בדוגמא הקודמת, נקבל שנקודות החיתוך עם ציר האיקס שואפות לראשית ואז באמת נקבל ש $a^2x^2=b^2y^2$ ולכן $y=\pm\frac{a}{b}x$ - כלומר שני הישרים שנחתכים בראשית (הישרים של האסימפטוטות).

(ג) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-c^2<0$ - ע"י כפל ב $(-1)$ נקבל את המשוואה $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=c^2$, כלומר את אותה משוואה כמו בסעיף הראשון רק שהמשתנים $x,y$ מתחלפים.



ג.



א.

3. היפרבולה חשובה נוספת שאינה מהצורה הקנונית היא $xy = c$.

4. אם המקדם של $y = 0$ נקבל ש $\frac{x^2}{a^2} = \pm c^2$, כלומר $x^2 = \pm a^2c^2$. לכן נקבל שני קווים אנכיים (עבור $x^2 = a^2c^2 > 0$), את ציר $Y$ (אם $x^2 = 0$) וקבוצה ריקה (אם $x^2 = -a^2c^2 < 0$). בצורה דומה אם המקדם של $x$ הוא אפס, אז נקבל קווים אופקיים.

5. שאר המקרים מתקבלים ע"י כפל ב $(-1)$ כדי לקבל את אחד מהמקרים הקודמים.

**הערה 0.1** (למתקדמים) אם נתון עקום ריבועי כללי מהצורה $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, אז תמיד ניתן לכתוב אותו ע"י

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d.$$

הסוג של העקום נקבע לפי הערכים של המטריצה. כפי שראיתם/תראו בלינארית ב' כל מטריצה סימטרית ממשית ניתן ללכסן ע"י מטריצה אורתוגונלית. במילים אחרות, עד כדי בחירה מחדש של מערכת צירים (אורתונורמלית) המטריצה היא אלכסונית, כלומר בדיוק אחד מהמקרים שתיארנו למעלה. בצורה יותר מפורטת, אם הערכים העצמיים של המטריצה הם $\lambda_1, \lambda_2$ והוקטורים העצמיים הם $v_1, v_2$, אז מקבלים את העקום $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = d$, רק שהוא מיושר למערכת צירים הנקבעת ע"י $\{v_1, v_2\}$.

למשל, עבור $xy = 1$ נקבל את המטריצה $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. הע"ע הם $\pm\frac{1}{2}$ המתאימים לוקטורים העצמיים $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שהם הישרים בזוויות $\pm\frac{\pi}{4}$ (45 מעלות) ולכן נקבל את העקום $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$ מיושר למערכת צירים שהיא סיבוב ב $\frac{\pi}{4}$ של מערכת הצירים הרגילה.

**הגדרה 0.2** תהא $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. קו גובה של הפונקציה בגובה $C$, הוא הקבוצה $\{(x,y)\ \mid\ f(x,y)=C\}$.

**הערה 0.3** שימו לב שלמרות השם, קו גובה הוא לא בהכרח קו. למשל $f(x,y)=xy$ ולכל $C$ נקבל ש $f(x,y)=C$ הוא איחוד של שני קווים.

**טענה 0.4** מצאו את קווי הגובה של הפונקציה $f(x,y)=\frac{2x^2-y^2-1}{x^2-y^2}$ בתחום ההגדרה $x\neq\pm y$.

**הוכחה:** קו הגובה בגובה $C$, הוא קבוצת הפתרונות של המשוואה $f(x,y)=C$. נרשום בצורה הקנונית

$$C=f(x,y)\iff(2-C)x^2+(C-1)y^2=1.$$

נפריד למקרים לפי הסימן של $2-C$ ו $C-1$, כלומר נפריד לתחומים:

- $C<1$: אז $C-1<0$ ו $2-C>0$ ולכן מקבלים היפרבולה. נקודות חיתוך עם הצירים הן כאשר $y=0$ ו $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2-C}}$.
- $C=1$: מקבלים $x=\pm1$ - אלו שני ישרים אנכיים.
- $1<C<2$: שני המקדמים חיוביים ולכן מקבלים אליפסה. נקודות חיתוך עם הצירים הן $(0,\pm\frac{1}{\sqrt{C-1}})$ ו $(\pm\frac{1}{\sqrt{2-C}},0)$.
- $C=2$: מקבלים $y^2=1$ כלומר $y=\pm1$ - אלו שני ישרים אופקיים.
- $2<C$: אז $2-C<0$ בעוד ש $C-1>0$. מקבלים שוב היפרבולה עם נקודות חיתוך $x=0$ ו $y=\frac{1}{\sqrt{C-1}}$.

הערה: **<u>קווי גובה לא יכולים להיחתך!</u>** הקווי גובה שרשמנו למעלה כן נחתכים, אבל החיתוך נעשה רק כאשר $x=\pm y$, והנקודות האלו לא נמצאות בתוך התחום הגדרה של הפונקציה.

■

**טענה 0.5** נתונה המשוואה $\alpha(x^2+1)+y^2=1$. קבעו את צורת העקום עבור כל $\alpha\in\mathbb{R}$

**הוכחה:** תחילה נעביר את המשוואה לצורה הקאנונית - $\alpha x^2+y^2=1-\alpha$. עתה נפריד למקרים לפי הסימן של $\alpha,1-\alpha$.

1. $\alpha>1$: ולכן $1-\alpha<0$ ו $\alpha>0$. המקדמים של $x^2,y^2$ חיוביים ולכן $\alpha x^2+y^2\geq0$ בעוד ש $0>1-\alpha$ ולכן הקבוצה ריקה.
2. $\alpha=1$: העקום יהיה $x^2+y^2=0$, לכן נקבל נקודה בודדת בראשית.
3. $1>\alpha>0$: המקדמים של $x^2,y^2$ חיוביים וגם $1-\alpha>0$ ולכן נקבל אליפסה.
4. $\alpha=0$: העקום יהיה $y^2=1$ ולכן $y=\pm1$ - נקבל שני ישרים מקבילים.
5. $0>\alpha$: נקבל ש $1-\alpha>0$ בעוד ש $\alpha<0$ ולכן מקבלים היפרבולה.

■