תרגיל בית 7

1. נשתמש בנתון $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) = 0$.

מרציפות f ב- $[0,\infty)$, נקבל כי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$.
לפי הגדרת הגבול ע"פ היינה, עבור $\frac{x}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\frac{x}{n}\neq 0$ לכל n
וכמו כן $xn\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{x}{n}\right) = 0$$

לכל $x\in[0,\infty)$.
אז $0=f \leftarrow f_n$ נקודתית.

נשלול התכנסות במ"ש:
$$\sup_{[0,\infty)}\left|f\left(\tfrac{x}{n}\right)-0\right| = \sup_{[0,\infty)}|f(x)| > 0$$
מהנתון f אינה זהותית 0

$$\sup_{[0,\infty)}|f(nx)-0| = \sup_{[0,\infty)}|h_n(x)| = \sup_{[0,\infty)}|f(x)| > 0$$

ולו היתה התכנסות במ"ש אז $\sup|h_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\sup|g_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

לכן אין התכנסות במ"ש.
נסמן $M=\sup_{[0,\infty)} f(x)$
יהי $\varepsilon>0$, לכל $x\in[0,\infty)$
קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ מתקיים $|M f(nx)| = |M|\cdot|f_n(nx)| < \varepsilon\cdot M$
קיים N_2 כך שלכל $n>N_2$ מתקיים $\left|M\cdot f\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| = |M|\cdot\left|f_n\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| < \varepsilon\cdot M$
כמו קודם:

$$\sup_{[0,\infty)}\left|f(nx)\cdot f\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| \le |f(nx)\cdot M| + \left|f\left(\tfrac{x}{n}\right)\cdot M\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כי ניתן לצמצם כרצוננו $2\cdot\varepsilon\cdot M$ אז
המכפלה $h_n(x)g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב- $[0,\infty)$.

($\sup_{[0,\infty)}\left|f(nx)\cdot f\left(\tfrac{x}{n}\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז יש התכנסות במ"ש ע"פ ההגדרה)

2.א. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמה נגדית:</u>

$f_n(x) = -(x^n)$ ב- $[0,1]$

f_n מונוטונית במובן החלש, רציפה לכל $n\in\mathbb{N}$

ו- $f_n \to f$ עבור $f = \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ -1 & x=1 \end{cases}$

אך $f_n \not\rightrightarrows f$.

2.ב. הטענה אינה נכונה.

<u>דוגמה נגדית</u>

$f_n = (x^n)$, $f=0$

נוכיח התכנסות נקודתית ב $I=[0,1)$.

יהי $\varepsilon>0$.

לכל $x\in I$ קיים N כך שלכל $n>N$ $|-(x^n)|<\varepsilon$ (כי זוהי סדרה גיאומטרית)

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

הפונקציה (x^n) רציפה בקטע ומתקיים $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = 1$

אז לכל קיים N כך שלכל n מתקיים $f_n(x)>\varepsilon$ עבור $x\in(1-\delta,1)$

עבור δ כלשהי.
$=\delta(N)$

2.ג. <u>דוגמא נגדית:</u>

נתבונן בפונ׳ $f_n(x)=(x-0.01)^n$

ישנה התכנסות נק׳ ב- $[0,1]$ $f_1 \ge f_2 \dots$.

מתקיים כי

כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N>0$ כך ש- $(x-0.01)^n<\varepsilon$ עבור $N<n$

ועבור $x\in[0,1]$.

עם זאת, לא קיימת התכנסות במ״ש בקטע, עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$

קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $(x-0.01)^n \ge \varepsilon=\frac{1}{2}$.

הפונקציה מתכנסת ל- $f\equiv 0$ בקטע $[0,1]$.

אז: מתקיימים כל התנאים הנדרשים אך אין התכנסות במ״ש ב-$[0,1]$.

2.ד. <u>דוגמא נגדית:</u>

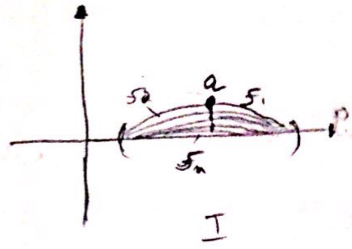
$$f_n(x)=\frac{nx}{1+(nx)^2}$$

כפי שראינו בקטע פונ׳ זו מתכנסת ל-0 נקודתית, רציפה אך אינה מתכנסת במ״ש בקטע $[0,1]$ עבור כל הדרישות לעיל.

3: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ יורדת בקטע I. קיים $a\in I$ כך ש- $f_n(x)\le f_n(a)$
לכל $n\in\mathbb{N}$ ו- $x\in I$.

ט.3: $\sum(-1)^n f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- I.

אינטו



$f_n(x)\le f_n(a)$

$\sum f_n(x) \le \sum f_n(a)$

מבחן M, $\sum(-1)^n f_n(a)$ מתכנס כמובן
ע"פ לייבניץ. ($f_n(a)$ סדרה חיובית המתכנסת לאפס)
מעבר ש היא חיובית כי לא נתון, יש משהו
היה להיא מתכנסת לאפס. נניח כי
אם $f_n(a)$ שלילי, אז קוונטו
$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $f_n(x)<f_n(a)$ לכל $x\in I$ אז
כי חסום מלעיל מתחת.

הוכחה

ראשית, נראה כי $f_n(a)$ חיובית בקטע I, $a\in I$.

לפי הנתון, $f_n(x)\le f_n(a)$* לכל $x\in I$, $n\in\mathbb{N}$.

כמו כן $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ יורדת לכל $x\in I$

נניח בשלילה כי קיים n עבורו $f_n(a)<0$.

אז מתקיים $f_n(x)<0$ לכל $x\in I$ ו-f_n יורדת. (עבור $\varepsilon=\frac{f_n(a)}{2}$ לא קיים N, כך שלכל n>N מתקיים $|f_n(x)|<\varepsilon$)

אז $\lim_{n\to\infty} f_n<0$. סתירה.

אז $f_n(a)$ סדרה חיובית היורדת לאפס.

לפי משפט לייבניץ, $\sum(-1)^n f_n(a)$ מתכנס.

אז לפי מבחן ה-M של ויירשטראס מתקיים $\sum(-1)^n f_n(x)$ לכל $x\in I$

מאחר ו- * מתקיים.

4.א. הטור מתכנס עבור $x>1$ כפי שהוכח

בכיתה.

4.ב. זו פונקציית הזטא של רימן,

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

$$\zeta'(x)=f'(x)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'=\left(\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\dots\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'$$

$\boxed{\text{משפט גזירה איבר-איבר}}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-x})'\underset{(1)}{=}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^x}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^x}$$

$$(1)\quad (n^{-x})'\underset{\text{כ. של השרשרת}}{=}\ln(n)\cdot n^{-x}\cdot(-x)'=-\ln(n)\,n^{-x}=-\frac{\ln(n)}{n^x}$$

ש. מתקיימת התכנסות במ"ש בקטע $[1+\alpha,\infty)$

לכל $\alpha>0$.

נעזר במבחן ה-M של ויירשטראס:

עבור $c\in[1+\alpha,\infty)$

$$\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^c}$$

החל ממקום מסוים.

הטור $\sum\frac{1}{n^c}$ מתכנס, לכל c, כפי שהוכחנו

בכיתה.

לכן $\zeta(x)$ מתכנסת במ"ש לכל $x\in[1+\alpha,\infty)$.

$\square$