אלגברה ב – צורת ג'ורדן 1

נושאים:

1. פירוק פרימרי
2. פירוק ציקלי
3. אופרטורים נילפוטנטים

פירוק פרימרי

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל F, יהי T אופרטור. W<V נקרא T-אינווריאנטי אם T(W) < W.

<u>משפט הפירוק הפרימרי:</u> יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי, יהי T אופרטור. נניח כי הפולינום המינימלי של T הוא $p=p_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{r_k}$ כאשר p_i פולינומים אי פריקים מתוקנים ללא גורמים משותפים. עבור $W_i=ker(p_i^{r_i}(T))$ מתקיים:

1. $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$.
2. W_i הוא T-אינווריאנטי.
3. עבור $T_i=T|_{W_i}$ הפולינום המינימלי של T_i הוא $p_i^{r_i}$.

<u>הוכחה:</u> נסמן $f_i=\frac{p}{p_i^{r_i}}$, אזי הפולינומים f_i שונים מאפס והמחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1, לכן קיימים g_i כך ש – $\sum_{i=1}^k g_i f_i=1$. נגדיר $h_i=f_i g_i$ ו – $E_i=h_i(T)$. מתקיים $E_1+\ldots+E_k=(h_1+\ldots+h_k)(T)=1$ (הצבת T בפולינום הקבוע 1 נותן 1). עבור $i\neq j$ מתקיים $E_i E_j=h_i\cdot h_j(T)=q\cdot f_i\cdot f_j(T)=0$ (כי $f_i\cdot f_j$ מתחלק ב – p), לכן E_i נותנים פירוק של $V=E_1(V)\oplus\ldots\oplus E_k(V)$ (E_i היטלים). נוכיח כי $E_i(V)=W_i$. נניח $v\in Image(E_i)$ אז $E_i(v)=v$ לכן $p_i^{r_i}(T)v=p_i^{r_i}(T)h_i(T)v=0$ כי $p_i^{r_i}f_i=p$ הפולינום המינימלי של T. נניח $v\in Ker(p_i^{r_i}(T))$. $v=E_1(v)+\ldots+E_k(v)$, אבל עבור $j\neq i$ מתקיים ש – $f_j g_j$ מתחלק ב - $p_i^{r_i}$, לכן $E_j(v)=h_j(T)(v)=0$ לכן $v=E_i(v)$ (לכן (1) נכון).
W_i אינווריאנטי תחת T – עבור $v\in W_i=ker(p_i^{r_i}(T))$ מתקיים
$p_i^{r_i}(T)(Tv)=T p_i^{r_i}(T)(v)=0$ לכן $T(v)\in W_i$. (לכן (2) נכון).
ברור כי $p_i^{r_i}$ מאפס את T_i מההגדרה של W_i. נניח $g\in F[x]$ מקיים $g(T_i)=0$, אז $g(T)\cdot f_i(T)=0$ (כי f_i מאפס את T על כל W_j ל - $j\neq i$ ו – g מאפס על W_i), לכן $g\cdot f_i$ מתחלק ב – p, ז"א $p_i^{r_i}f_i$ מחלק את $g\cdot f_i$, לכן $p_i^{r_i}$ מחלק את g.

פירוק ציקלי

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל F, $T:V\to V$ אופרטור, ויהי $u\in V$ וקטור:

1. $Z(u;T)=span\{u,T(u),T^2(u),\ldots\}$ נקרא T-מרחב הציקלי הנפרש ע"י u.
2. $M(u;T)=\{p(x)\in F[x]\,|\,p(T)u=0\}$ נקרא ה – T-מאפס של u.

<u>הערות:</u>

1. $M(u;T)$ אידיאל של $F[x]$ לכן קיים פולינום מתוקן p_u המקיים $M(u;T)=(p_u)$. הפולינום p_u גם נקרא ה – T-מאפס של u.
2. $Z(u;T)$ תת מרחב של V ומתקיים $dim(Z(u;T))=deg(p_u)$ (ל - $u\neq 0$). *(כי $p_u(T)u$ הוא בדיוק הצירוף הליניארי המינימלי של חזקות $T^k(u)$ שמתאפס).* יתרה מכך, אם $deg(p_u)=k$, אז $u,T(u),\ldots,T^{k-1}(u)$ בסיס של $Z(u;T)$
3. $Z(u;T)$ הוא מרחב T-אינווריאנטי, ועבור האופרטור $S:Z(u;T)\to Z(u;T)$ הצמצום של T על $Z(u;T)$, p_u הוא הפולינום המינימלי של S.

<u>משפט הפירוק הציקלי:</u> יהי V מ"ו ממימד סופי מעל F, יהי T אופרטור על V. קיימים

$v_{1,}\dots,v_r\in V$ שונים מאפס עם T-מאפסים $p_{1,}\dots,p_r$ כך ש:

1. $V=Z(v_1;T)\oplus\dots\oplus Z(v_r;T)$
2. p_k מתחלק ב - p_{k-1} ל - $2\le k\le r$

<u>משפט קיילי המילטון (המורחב):</u> יהי T אופרטור על מ"ו סוף ממדי V מעל F. יהי m_T, p_T הפולינום המינימלי והאופייני של T, אז:

1. m_T מחלק את p_T .
2. אם $p_T=f_1^{r_1}\cdot\dots\cdot f_k^{r_k}$ פירוק של p_T לגורמים ראשוניים (פולינומים זרים), אז $m_T=f_1^{d_1}\cdot\dots\cdot f_r^{d_r}$ כאשר $d_i=\frac{dim(Ker(f_i^{r_i}(T)))}{deg(f_i)}$.

<u>אופרטורים נילפוטנטיים</u>

<u>הגדרה:</u> אופרטור T נקרא נילפוטנטי אם קיים $k>0$ עבורו $T^k=0$. k המינימלי המקיים זאת נקרא "דרגת הנילפוטנטיות של T".

<u>טענה:</u> יהי V מ"ו ממימד n, יהי T אופרטור נילפוטנטי, אז הפולינום האופייני של T הוא x^n והפולינום המינימלי הוא x^k ל – k דרגת הנילפוטנטיות של T.

- אם קיים וקטור $u\in V$ כך ש – $V=Z(u;T)$ ל – T נילפוטנטי, אז המטריצה המייצגת את T בבסיס $u,T(u),\dots,T^{k-1}(u)$ היא מטריצה עם אפסים בכל הערכים למעט האלכסון שמעל לאלכסון הראשי, שם האברים הם 1.
- ל – T נילפוטנטי על מרחב וקטורי V כללי, יש בסיס בו T מיוצג ע"י מטריצת בלוקים כשכל בלוק מהצורה לעיל. הבסיס הוא בדיוק איחוד הבסיסים של המרחבים ה – T-ציקליים המתקבלים בפירוק הציקלי של V.

דוגמה: יהי T האופרטור הנתון ע"י המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}4&1&-3\\4&0&-2\\6&1&-4\end{pmatrix}$. הראה ש – T נילפוטנטי, מצא את המטריצה הנילפוטנטית המתאימה והבסיס בו T מיוצג ע"י מטריצה זו.

פתרון: A נילפוטנטית – הפולינום האופייני של A הוא x^3 לכן A נילפוטנטית, מדרגה n (ל - $2\le n\le3$, כי $A\neq0$). ל - R^3 פירוק ציקלי ביחס ל – T, ז"א יש $v_1,\dots,v_k$ ($1\le k\le3$) כך ש – V סכום ישר של המרחבים ה – T-ציקליים של v_i . בכל מרחב T-ציקלי כזה, אחד מוקטורי הבסיס הוא $T^{n-1}(v_i)$, וזה וקטור עצמי של T עם ערך עצמי 0, לכן נדע כמה רכיבים יש בפירוק הציקלי לפי המימד של $Ker(T)$. חישוב ישיר מראה שמרחב הוקטורים העצמיים נפרש ע"י $v_1=(1,2,2)$, ז"א V הוא מרחב T-ציקלי והמטריצה הנילפוטנטית המתאימה היא $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. איך נמצא את $v_{2,}v_3$ הנותנים בסיס בו T מיוצגת לפי B?

אנחנו יודעים שהבסיס של V נתון ע"י $v,T(v),T^2(v)$, כאשר במקרה שלנו $T^2(v)=(1,2,2)$. הוקטור v_2 שיקיים $T(v_2)=(1,2,2)$ הוא הפתרון של המערכת $Ax=(1,2,2)$. חישוב ישיר נותן $v_2=(1,0,1)$. הוקטור v_3 שמקיים $T(v_3)=v_2$ הוא כמובן (0,1,0) ולכן הבסיס שבו T מיוצגת ע"י B הוא $\{(0,1,0),(1,0,1),(1,2,2)\}$.