

אינפי 2 - דף עזר בנושא פונקציות של שני משתנים: גבולות ורציפות

גבולות

הגדרה: נאמר ש- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \iff 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

(ניסוח שקול: $|f(x,y) - L| < \varepsilon \iff 0 < |y-b| + |x-a| < \delta$, $|y-b| < \delta$, $|x-a| < \delta$).

הגדרה שקולה (הינה): $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל סדרת נקודות המקיימת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = L \text{ , מתקיים } (a,b) \neq (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a,b)$$

גבולות נישנים: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right), \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right)$

משפטים:

1. אריתמטיקה של גבולות.

2. אם ל- $f(x,y)$ יש גבולות שונים כאשר (x,y) שואף ל- (a,b) לאורך מסלולים שונים, אז אין ל- $f(x,y)$ גבול ב- (a,b) .

3. אם קיים הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ וגם קיים אחד מהגבולות הנישנים, אז הם שווים.

4. מעבר לקואורדינטות פולריות: תהא $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים. אם $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = F(r)G(\theta)$, ומתקיים $F(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ ו- $G(\theta)$ חסומה, אז $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

רציפות

הגדרה: נאמר ש- $f(x,y)$ רציפה בנקודה (a,b) אם $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

משפטים:

1. $f(x,y)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה $\iff f$ חסומה ומקבלת מינימום ומקסימום

2. $f(x,y)$ רציפה בקבוצה קשירה (פתוחה/סגורה) $\iff f$ מקיימת את תכונות ערך הביניים.

הגדרה: $f: R^2 \rightarrow R$ תיקרא רציפה במ"ש בתחום $D \subseteq R^2$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in D$ מתקיים: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff d(x,y) < \delta$.
(כאן $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$).

משפט: $f(x,y)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה $\iff f$ רציפה שם במ"ש.