תורת הקבוצות - תרגול מספר 6
שקילות עוצמה

תזכורת - הגדרות

יהיו A,B קבוצות.

אנחנו אומרים ש־A,B **שוות עוצמה** ומסמנים $|A|=|B|$ או $A\sim B$ אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$.

אם קיימת פונקציה חח"ע (לאו דווקא על) $f:A\to B$ מסמנים זאת $|A|\le|B|$

A **סופית** אם $A\sim\{1,2,\dots,n\}$ עבור n טבעי כלשהו (אם $n=0$ אז $\{1,2,\dots,n\}=\emptyset$).

אם A סופית או אם $A\sim\mathbb{N}$ אומרים ש־A **בת מניה**.

ראינו דוגמאות פשוטות:

1. $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^{+}$ עם הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^{+}$ שמוגדרת על ידי $f\left(n\right)=n+1$.
2. $\{0,1\}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$ עם הפונקציה $g:\{0,1\}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ שמוגדרת על ידי $g\left(a,n\right)=2n+a$.
3. $\mathbb{Z}\sim\mathbb{N}$, למשל עם הפונקציה $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ שמוגדרת על ידי $h\left(a\right)=\begin{cases}2a & a\ge0\\ 2\left|a\right|-1 & a<0\end{cases}$.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין: אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע וקיימת $g:B\to A$ חח"ע אז קיימת $h:A\to B$ חח"ע ועל, כלומר $A\sim B$.

בניסוח אחר: אם $|A|\le|B|$ וגם $|B|\le|A|$ אז $|A|=|B|$.

כמו כן, מכיוון שהרכבת פונקציות חח"ע היא חח"ע, הרי שאם $|A|\le|B|$ וגם $|B|\le|C|$ ניתן להסיק $|A|\le|C|$.

תרגיל

נוכיח ש־$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.

פתרון מפורש הוא לא קל, אבל עם קנטור־שרדר־ברנשטיין הפתרון מיידי:

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ נתון פשוט על ידי $f\left(n\right)=\left(n,0\right)$.

בכיוון השני, נמספר את הראשוניים: $p_0,p_1,p_2,\dots$ (הוכחה לקיום אינסוף ראשוניים: נניח שיש רק מספר סופי $p_0,p_1,\dots,p_n$, אז המספר $p_0\cdots p_n+1$ חייב להתחלק על ידי ראשוני שאינו ברשימה הזו).

נגדיר $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא: $g\left(n,k\right)=p_k^{n+1}$.

חח"ע נובעת מכך שאם $p^a=q^b$ עבור p,q ראשוניים ו־$a,b>0$ אז $p=q$ ו־$a=b$ ("המשפט היסודי של האריתמטיקה").

מסקנה: $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$, שכן $|\mathbb{Q}|\le|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|\le|\mathbb{Q}|$ ולכן כל האי־שוויונים בשרשרת הם שוויונות. זוהי תוצאה מפתיעה למדי, שכן הרציונליים הם קבוצה צפופה בהרבה מהטבעיים - בין כל שני טבעיים יש אינסוף רציונליים. קנטור עצמו אמר על תוצאה זו "אני רואה זאת אך איני מאמין בזאת".

תרגיל

תהא $A=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ - קבוצת כל הסדרות האינסופיות של טבעיים (פונקציות מהטבעיים לעצמן).

תהא $B\subseteq A$ קבוצת כל הסדרות של טבעיים שהן **מונוטוניות עולות**, כלומר $k<n\to a_k<a_n$.

נראה פונקציה $f:B\to A$ שהיא חח"ע ועל: $f\left(a\right)=b$ כאשר:

$b_0=a_0$

$b_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ לכל $n\ge0$.

במילים: b היא סדרת **ההפרשים** בין אברי a.

נוכיח ש־f חח"ע ועל על ידי כך שנציג לה פונקציה הופכית g. אינטואיטיבית, הרעיון הוא שהצלחנו "לקודד" את a בצורה מושלמת בתוך b, כך שאנחנו מסוגלים לשחזר את a המקורית מתוך כל b שנקבל.

g תוגדר כך: $g\left(b\right)=c$ כך ש־

$c_0=b_0$

$c_{n+1} = c_n + b_{n+1}$

נוכיח שזה עובד, כלומר שלכל a מתקיים $g\left(f\left(a\right)\right)=a$, כלומר שמתקיים $c=a$:

נוכיח באינדוקציה על n שמתקיים $c_n=a_n$.

בסיס: $c_0=b_0=a_0$ על פי הגדרה.

צעד, עבור $n\ge 1$:

$$c_n=c_{n-1}+b_n=c_{n-1}+\left(a_n-a_{n-1}\right)=a_{n-1}+\left(a_n-a_{n-1}\right)=a_n$$

כנדרש.

תרגיל

נוכיח כי $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\sim\mathbb{R}$.

ההוכחה תהיה דו־שלבית: נוכיח כי $\left(0,1\right)\sim\mathbb{R}$ וכי $\left(0,1\right)\sim\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ ונסתמך על הטרנזיטיביות של היחס $\sim$.

את היחס $\left(0,1\right)\sim\mathbb{R}$ ניתן להוכיח על ידי כל פונקציה חח"ע שהתמונה שלה על קטע פתוח היא כל $\mathbb{R}$. למשל, $\tan x$ היא חח"ע כך ש־$\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mathbb{R}$. אז נבנה את f שלנו באופן הבא: ראשית נבצע מניפולציות על $\left(0,1\right)$ שיהפכו אותו ל־$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ואז נפעיל $\tan$ על התוצאה.

ראשית, נהפוך את $\left(0,1\right)$ ל־$\left(0,\pi\right)$ על ידי $f_1\left(x\right)=\pi x$.

שנית, נהפוך את $\left(0,\pi\right)$ ל־$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ על ידי $f_2\left(x\right)=x-\frac{\pi}{2}$.

לבסוף נפעיל את $\tan$. נקבל את הפונקציה $f:\left(0,1\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f\left(x\right)=\tan\left(f_2\left(f_1\left(x\right)\right)\right)=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$ שהיא חח"ע ועל.

כעת נוכיח כי $\left(0,1\right)\sim\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ בעזרת קנטור־שרדר־ברנשטיין.

ראשית נציג פונקציה $f:\left(0,1\right)\to\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$. הרעיון יהיה להסתכל על כל מספר ב־$\left(0,1\right)$ בייצוג עשרוני ולהגדיר את הפונקציה בעזרתו: $a=0.a_1a_2a_3,\dots$.

כזכור, יש מספרים עם יותר מייצוג עשרוני אחד, למשל $0.399\dots=0.4000\dots$, אז נחליט שתמיד בוחרים את הייצוג שמסתיים באינסוף 9 כדי שהפונקציה שלנו תהיה מוגדרת היטב.

כעת נגדיר:

$$f\left(0.a_1a_2a_3,\dots\right)=\left\{10^k+a_k\mid k\ge 1\right\}$$

הפונקציה חח"ע מכיוון שכל ספרה a_k מקיימת $0\le a_k\le 9$.

כעת נציג פונקציה $g:\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\to\left(0,1\right)$. יש הרבה תעלולים שאפשר לנקוט בהם לצורך כך, ואנחנו נשתמש במשהו דמוי פונקציה מציינת:

$g\left(A\right)=0.a_0a_1a_2,\dots$ כך ש־$a_n=\begin{cases}1 & n\in A\\0 & n\notin A\end{cases}$

הבניה הזו **כמעט** עובדת, אבל יש בה בעיה: אם $A=\emptyset$ אז נקבל $g\left(A\right)=0$, ו־$0\notin\left(0,1\right)$. יש לבעיה טכנית לא מהותית זו שלל פתרונות אפשריים.

פתרון אחד לדוגמה: נגדיר $a_n=\begin{cases}1 & n\in A\\2 & n\notin A\end{cases}$ במקום ההגדרה הקודמת. פתרון אחד: להגדיר את הפונקציה g אל הקטע החצי פתוח $\left[0,1\right)$ ולהוכיח בנפרד ש־$\left[0,1\right)\sim\left(0,1\right)$ (איך?)