אלגוריתם למציאת בסיס ז'ורדן

1. מצאו את הפ"א של T.
בדקו האם הוא מתפרק לגורמים לינאריים מעל F.
אם כן - המשיכו לשלב 2
אם לא - עצרו או המשיכו מעל שדה מורחב שמכיל את השורשים של הפ"א (שדה סגור אלגברית לדוגמא)

2. מצאו את כל המ"ע המוכללים $U_\lambda = ker(T-\lambda I)^{m_\lambda}$ (כאשר m_λ הוא הר"א של הע"ע λ), כלומר, מצאו את הבסיסים של U_λ עבור כל ע"ע λ.

3. לכל ע"ע λ של T הפעילו את החזקות של $(T-\lambda I)$ על וקטורי הבסיס של U_λ (משלב 2) ומצאו את אינדקס הנילפוטנטיות של $(T-\lambda I)|_{U_\lambda}$ שנסמנו ב-k_λ.

4. לכל ע"ע λ נסמן $S=(T-\lambda I)$ ו-$k=k_\lambda$.

   (א) מציאת בסיס B_0:

   i. מצאו בסיס B_{k-1} עבור $kerS \cap ImS^{k-1}$

   ii. השלימו את B_{k-1} לבסיס של $KerS \cap ImS^{k-2}$ שנסמנו ב-B_{k-2}.

   iii. השלימו את B_{k-2} לבסיס של $KerS \cap ImS^{k-3}$ שנסמנו ב-B_{k-3}.

   iv. נמשיך כך עד שנגיע לבסיס B_1 שהוא בסיס של $KerS \cap ImS$ שאותו נשלים ל-B_0 בסיס של $KerS$.

   (ב) נתבונן ב-B_0.
   עבור כל $v_i \in B_0$ נסמן $l_i = max\{j\}$ כך ש-$v_i \in B_j$, כלומר, $v \in KerS \cap ImS^{l_i}$.
   כעת מצאו וקטור u_i כך ש-$S^{l_i}(u_i) = v_i$.

   (ג) בסיס ז'ורדן עבור $T|_{U_\lambda}$ נוצר ע"י רישום של השרשרת הבאה: $\{S^{l_i}(u_i), S^{l_i-1}(u_i), ..., u_i\}$.
   הבסיס הנ"ל מתאים לבלוק ז'ורדן $J_{e_i+1}(\lambda)$.

5. רשמו לפי הסדר את בסיס ז'ורדן שמצאתם לכל ע"ע λ ותקבלו בסיס ז'ורדן עבור T.

<u>דוגמא:</u> $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. נתונה המטריצה $[T]_E = A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

צריך למצוא צורת ז'ורדן ובסיס ז'ורדן.

<u>שלב 1:</u> $\Delta_A(x) = x^3$

<u>שלב 2:</u> $A^3(\bar{v}) = 0$ ($\bar{v} \in V$) $\Leftarrow$ $U_{\lambda=0} = \mathbb{R}^3$ ולכן ניקח את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ $\Leftarrow$ $B_{U_0} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

<u>שלב 3:</u> נחשב את A^2 $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}^2 = A$ (k_0 = אינדקס הנילפוטנטיות של ע"ע 0 הוא 3)

שלב 4:

א) נמצא $B_{3-1} = B_2 = span\{kerA \cap ImA^{3-1}\}$.

$$kerA = span\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\};\ ImA^2 = span\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\} \Rightarrow B_2 = span\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\}$$

$$B_1 = span\{kerA \cap ImA\} \Rightarrow B_1 = span\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\}$$

$$B_0 = span\{kerA\} \Rightarrow B_0 = span\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\}$$

ב) מצאנו $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $v_1 \in B_0$. $l_1 = 2$ (האינדקס המקסימלי של הבסיס בו הוא מופיע).

כעת עלינו למצוא $\bar{u_1}$ כך שמתקיים כי $A^2(\bar{u_1}) = v_1$.

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\4 & 2 & -4\\4 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftarrow$ למשל עבור $x = 0$ ו־$z = 0$ נקבל את $u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

ג) נמצא בסיס ז'ורדן (שלב רישום השרשרת): $\{\underset{(A^2u_1)}{v}, Au_1, u_1\}$ ע"י הצבת u_1ו־ $A^2u_1 = v_1$ וחישוב Au_1 נקבל כי הבסיס הוא $\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\}$ המתאים לצורת ז'ורדן $J = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.