מרחבי מכפלה פנימית

<u>הגדרה:</u> יהי נתון מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$
פונקציה המתאימה לכל זוג וקטורים $u,v \in V$
מספר בשדה ($\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$) נקראת מכפלה פנימית
אם:

(1) היא לינארית משמאל: אם $a,b \in F$ $(F = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\langle au_1+bu_2, v\rangle = a\langle u_1,v\rangle + b\langle u_2,v\rangle$$

(2) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

(3) $\langle u,u\rangle \geq 0$; $\langle u,u\rangle=0$ אם ורק אם $u = 0$.

אנו מסמנים פונקציה זו ב $\langle \cdot , \cdot \rangle$

מרחב V עם פונקציה $\langle \cdot , \cdot \rangle$ כנ"ל יקרא
<u>מרחב מכפלה פנימית</u>

נסמן, $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$\langle u,u\rangle$ הוא מספר ממשי כי $\langle u,u\rangle=\overline{\langle u,u\rangle}$ והוא
אי שלילי ולכן $\|u\|$ מוגדר.

$\|u\|$ יקרא <u>הנורמה</u> או <u>האורך</u> של u

נשים לב כי

$$\langle u, av_1+bv_2\rangle = \bar{a}\langle u,v_1\rangle + \bar{b}\langle u,v_2\rangle$$

ולכן אם $F=\mathbb{R}$ אזי יש לינאריות מימין.

מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ יקרא <u>מרחב אוקלידי</u>.

מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ יקרא <u>מרחב אוניטרי</u>.

<u>דוגמאות</u>

(1) $V=\mathbb{R}^n$, $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$, $v=(v_1,\dots,v_n)$

ונגדיר $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

באופן $\langle u,v\rangle = u_1v_1+u_2v_2+\dots+u_nv_n\in\mathbb{R}$

ברור כי $\langle au_1+bu_2, v\rangle = a\langle u_1,v\rangle + b\langle u_2,v\rangle$

וכן $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

כמו כן $\langle u,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

ואם $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0$ אזי $u_i=0 \quad \forall i$

ולכן $u=0$

(2) אם $V=\mathbb{C}^n$ ו- $u=(u_1,\dots,u_n)$

$v=(v_1,\dots,v_n)$ אזי נגדיר

$$\langle u,v\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \dots + u_n\bar{v}_n \in \mathbb{C}$$

<u>תרגיל:</u> לבדוק כי זו מכפלה פנימית.

המרחבים $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{C}^n$ עם המכפלות הפנימיות הנ״ל נק׳ המרחבים הסטנדרטיים.

(3) <u>דוגמא:</u> $V=M_n(\mathbb{R})$ אוסף המטריצות $n\times n$ מעל $\mathbb{R}$. נגדיר עבור $A,B\in V$

$$\langle A\cdot B\rangle = tr(B^tA)$$

ואם $V=M_n(\mathbb{C})$ נגדיר

$$\langle A\cdot B\rangle = tr(B^*A)$$

B^* זו המטריצה שאבריה הם הצמודים של B^t.

זאת מכפלות פנימית כי הלינאריות ברורה

$$\langle B,A\rangle = tr(A^tB) = tr(A^tB)^t = tr(B^tA) = \langle A,B\rangle$$ ו-

וכמו כן $tr(A^tA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$

ולכן $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = 0$ אם ורק אם $a_{ij} = 0$

לכל i ו j.

(4) <u>דוגמא!</u> יהי V מרחב הפונקציות הממשיות

הרציפות $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

נגדיר עבור $f, g \in V$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt \quad \in \mathbb{R}$$

ואם V הוא אוסף הפונקציות הרציפות ל $\mathbb{C}$

נגדיר

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$$

נבדוק האקסיומות קודם כי עבור $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \int_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\, g(t)\, dt =$$

$$\alpha \int_a^b f_1(t) \cdot g(t)\, dt + \beta \int_a^b f_2(t) \cdot g(t)\, dt =$$

$$\alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$$

וגם

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt = \int_a^b g(t) f(t)\, dt = \langle g, f \rangle$$

וכן $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2 dt = 0$

$\Leftarrow$ $f(t)=0$ על $[a,b]$.

<u>הערה:</u> אם $\sqrt{\langle u,u\rangle} = \|u\| = 1$

נאמר כי u הינו <u>וקטור יחידה</u> או <u>וקטור</u> <u>מנורמל</u>

כל וקטור $v \in V$ ניתן לנרמל כי אם

$v \in V$ ו $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ אזי

$$\langle v_1, v_1\rangle = \left\langle \frac{1}{\|v\|}v, \frac{1}{\|v\|}v \right\rangle = \frac{1}{\|v\|^2}\cdot\langle v,v\rangle = \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} = 1$$

<u>הערה:</u> בהינתן שני וקטורים $u,v \in V$ ניתן

להסתכל על המספר $\|u-v\| \in \mathbb{R}$

מספר זה יקרא <u>המרחק</u> בין u ו v.

נשים לב כי $\|u-v\| = \|v-u\|$.

וכי $\|u-v\|=0$ אם ורק אם $u-v=0$ כלומר

$u=v$.

אי שוויון קושי שורץ

<u>משפט:</u> אם V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית

אזי לכל $u,v \in V$ ק"ים

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$$

<u>הוכחה:</u> אם $u=0$ אזי $\|u\|\cdot\|v\| = 0$

$$\langle 0,v\rangle = \langle 0+0, v\rangle = \langle 0,v\rangle + \langle 0,v\rangle$$!

ולכן $\langle 0,v\rangle = 0$

ולכן ניתן להניח כי גם u ; גם v לא אפס.

נזכור כי $z\cdot\bar{z} = |z|^2$ עבור לכל $z \in \mathbb{C}$

ולכן אם $t \in \mathbb{R}$ כלשהו ק"ים

$$0 \le \|u - \langle u,v\rangle t v\|^2 = \langle u-\langle u,v\rangle t v,\ u-\langle u,v\rangle t v\rangle =$$

$$= \langle u,u\rangle - \overline{\langle u,v\rangle}\, t\langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle t\langle v,u\rangle +$$

$$\langle u v\rangle\cdot\overline{\langle u v\rangle} t^2\langle v,v\rangle =$$

$$\|u\|^2 \quad 2t|\langle u,v\rangle|^2 + |\langle u,v\rangle|^2\cdot t^2\|v\|^2$$

כי נכון לכל $t\in\mathbb{R}$ ובפרט ל $t = \frac{1}{\|v\|^2}$

ואז :

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{2|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

נכפול ב $\|V\|^2$ ונוציא שורש ונקבל ש

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|V\|$$

$\square$

מסקנה!

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \|v\|^2 \leq$$

$$\|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

נוציא שורש ונקבל

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$\square$ וזהו אי שוויון המשולש

לכן הפונקציה

$$d(u,v) = \|u-v\|$$

מקיימת :

(1) $d(u,v) = d(v,u)$

(2) $d(u,v) \geq 0$ ו $d(u,v)=0$ $\Leftarrow$ $u=v$

(3) לכל $z \in V$ קיים

$$d(u,v) \leq d(u,z) + d(z,v)$$

כי $d(u,v) = \|u-v\| = \|\underbrace{u-z}+\underbrace{z-v}\| \leq$

$$\|u-z\| + \|z-v\|$$

ולכן $\|u-v\|$ הוא <u>מטריקה</u>.

<u>דוגמאות:</u> אם $V=(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{C}^n$ ו $u=(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{C}^n$

אזי $\langle u,v\rangle = (u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \dots + u_n\bar{v}_n)^2 \leq$

$$(u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2)(v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2).$$

<u>דוגמאות:</u> אם $g,f:[0,1]\to\mathbb{R}$ אזי

$$\langle f,g\rangle^2 = \left(\int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,d(t)\right)^2 \leq$$

$$\left(\int_0^1 f(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)^2\,dt\right) = \|f\|\cdot\|g\|$$

המכפלה הפנימית מאפשרת לנו להגדיר את
המושג החשוב הבא!

אורתוגונליות (ניצבות)

יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית
נאמר כי הווקטורים $u,v \in V$ אורתוגונליים
אם מתקיים $\langle u,v \rangle = 0$.

ברור כי אם $\langle u,v \rangle = 0$ אזי $\langle v,u \rangle = 0$
וכי ה- $0 \in V$ ניצב (אורתוגונלי) לכל $v \in V$
ואם $\langle u,v \rangle = 0$ לכל $v \in V$ אזי $u = 0$
כי במקרה $\langle u,u \rangle = 0$.

אם V מרחב מכפלה פנימית ; $W \subset V$ תת-
קבוצה אזי ניתן לדבר על המשלים הניצב
(אורתוגונלי) של W ב V המסומן ב $W^{\perp}$
וזהו

$$W^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v,w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \}$$

<u>מסקנה</u> $W^\perp$ הוא תת מרחב

<u>הוכחה!</u> $0 \in W^\perp$ כי $\langle 0,w\rangle = 0$

אם $u, v \in W^\perp$ אז

$$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle = 0+0 = 0$$

ולכל $k \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$ קיים

$$\langle ku,w\rangle = k\langle u,w\rangle = k\cdot 0 = 0$$

□

<u>משפט!</u> אם $W \subset V$ הוא תת מרחב אז

$$V = W \oplus W^\perp$$

<u>הוכחה!</u> ברור כי $W^\perp, W$ תתי מרחבים

אם $v \in V$ ו- $w' \in W$ נסתכל על

$w = \frac{w'}{\|w'\|} \in W$ ואז

$$\langle v - \langle v,w\rangle w, w\rangle =$$

$$\langle v,w\rangle - \langle v,w\rangle\langle w,w\rangle = \langle v,w\rangle - \langle v,w\rangle\cdot 1 = 0$$

ולכן הווקטור $v - \langle v,w\rangle\cdot w$ ב $W^\perp$

מצד שני $\langle v,w\rangle w \in W$

ולכן $v = \underbrace{v - \langle v,w\rangle w}_{\in W^{\perp}} + \underbrace{\langle v,w\rangle w}_{\in W}$

כלומר כל וקטור ב V ניתן להצגה כסכום של וקטור ב W ו וקטור ב $W^{\perp}$.

אם $w \in W$ ו $w \in W^{\perp}$ אזי $\langle w, w\rangle = 0$

ולכן $w = 0$ כלומר $W^{\perp} \cap W = 0$

ולכן $V = W \oplus W^{\perp}$

<u>הגדרה:</u> אם V מרחב מכפלה פנימית <u>ממשי</u> ניתן להגדיר זווית θ בין שני וקטורים $u, v \in V$

באופן $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$

ברור כי $-1 \le \cos\theta \le 1$ מאי שוויון קושי שוורץ

ואם $\langle u,v\rangle = 0$ כלומר הם ניצבים אזי

$\cos\theta = 0$ כלומר $\theta = \frac{\pi}{2}$

<u>הגדרה:</u> יהא V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית $\langle\, ,\,\rangle$; $U = \{u_1, \dots, u_n\} \in V$

קבוצה של וקטורים ב V נאמר כי U

קבוצה אורתוגונלית אם לכל $i \neq j$ מתקיים

$(u_i, u_j) = 0$ והיא אורתונורמלית אם $\|u_i\| = 1$

לכל i.

<u>דוגמא:</u> $V = \mathbb{R}^3$

$$e_1 = (1,0,0),\; e_2 = (0,1,0),\; e_3 = (0,0,1)$$

הינן אורתוגונלית ואורתונורמלית כי

$$(e_i, e_j) = 0 \;;\; \langle e_i, e_i \rangle = 1 .$$

באופן כללי אם $V = \mathbb{R}^n$; $e_1, \dots, e_n$

הבסיס הסטנדרטי אזי הינו אורתונורמלי.

<u>דוגמא:</u> יהי V המרחב הוקטורי של פונקציות

רציפות ב $[-\pi/2, \pi/2]$ אזי הפונקציות

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

הינן קבוצה אורתונורמלית של V כי מתקיים

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nt \cdot \cos mt \, dt = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 nt \, dt = 1 \qquad !$$

למה! אם $v_1, \dots, v_r \in V$ היא קבוצה אורתוגונלית (נורמלית) אז היא בלתי תלויה לינארית

הוקטור
$$w = u - \langle u v_1 \rangle v_1 - \langle u v_2 \rangle v_2 - \dots - \langle u v_r \rangle v_r$$
הוא אורתוגונלי לכל אחד מה v_i, אם $\| v_j \| = 1$

הוכחה! אם $v_1, \dots, v_r$ תלויים לינארית אזי קיימים קומבינציה לינארית שלא כל מקדמיה 0 כך ש

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = 0$$

לכן המכפלה של הוקטור זה לכל אחד מה v_i היא אפס ולכן לכל j קיים

$$0 = \langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r , v_j \rangle = a_j \langle v_j , v_j \rangle$$

אבל מאחר ולפחות אחד $a_j \neq 0$ קיים $v_j = 0$ בסתירה.

כמו כן

$$\langle w\cdot v_j\rangle = \langle u-\langle u v_1\rangle v_1-\dots\langle u v_m\rangle v_m\,,\,v_j\rangle =$$

$$\langle u,v_j\rangle - \langle u\,v_j\rangle\cdot\langle v_j,v_j\rangle = 0$$

לכן W אורתוגונלי לכל אחד מה v_j

□

בהינתן מרחב וקטורי V עם מכפלה פנימית נוח מאוד לעבוד עם בסיסים שהם אורתונורמליים. המשפט הבא מוכיח שהם קיימים תמיד.

<u>משפט:</u> (שיטת האורתוגונליזציה של גרהם שמידט (Graham Schmidt):

יהי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס כלשהו של מרחב מכפלה פנימית V. אזי קיים בסיס אורתונורמלי $u_1,\dots,u_n$ ל V כך שמטריצת המעבר מ $\{v_1,\dots,v_n\}$ ל $\{u_1,\dots,u_n\}$ היא משולשית כלומר

$$u_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots\ a_{ii}v_i$$

בלבד.

<u>הוכחה!</u> נבחר $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

לכן $\{u_1\}$ הקבוצה אורתונורמלית.

נבחר $w_2 = v_2 - \langle v_2 u_1 \rangle u_1$

ו $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

ראינו במשפט הקודם כי w_2 אורתוגונלי ל u_1

ולכן $\{u_1, u_2\}$ הקבוצה אורתונורמלית.

נמשיך $w_3 = v_3 - \langle v_3 u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 u_2 \rangle u_2$

ברור (כמו מקודם) כי

$$0 = \langle w_3 \cdot u_1 \rangle = \langle w_3 , u_2 \rangle$$

ואז נסמן $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

ו $\{u_1, u_2, u_3\}$ אורתונורמלית.

ובאופן כללי.

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \langle v_{i+1}, u_2 \rangle u_2 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i$$

ברור כי $\langle w_{i+1}, u_j \rangle = 0$

לכל $j = 1, \dots i$

ואז נסמן $u_{i+1} = \frac{w_{i+1}}{\| w_{i+1} \|}$

באינדוקציה נקבל קבוצה אורתונורמלית שכזו
כמובן בלתי תלויה לינארית ולכן

$$V = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$$

נשים לב כי $w_{i+1} \neq 0$ כי

$$V_{i+1} \notin \operatorname{span}(v_1, \dots, v_i) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_i)$$

ומשמעות הבניה ברור כי מטריצת המעבר
היא משולשית כי כל וקטור חדש נפרש
רק ע"י וקטורים בעלי אינדקס קטן ממנו.

<u>דוגמא:</u> $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (0,1,1), \quad v_3 = (0,0,1)$$

נקבל

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2 = v_2 - (v_2, u_1)u_1 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{\omega_2}{\|\omega_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\omega_3 = V_3 - \langle V_3, u_1 \rangle u_1 - \langle V_3, u_2 \rangle u_2 =$$

$$(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad u_3 = \frac{\omega_2}{\|\omega_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

<u>הגדרה!</u> אופרטור לינארי $E: V \to V$ יקרא <u>הטלה</u> (<u>projection</u>) אם

$$E^2 = E$$

<u>טענה!</u> אם $E: V \to V$ הטלה אזי:

(1) $\mathrm{Im}\, E = \{x \in V \mid Ex = x\}$

(2) $V = \mathrm{Im}\, E \oplus \mathrm{Ker}\, E$

<u>הוכחה!</u> אם $x \in \mathrm{Im}\, E$ אזי קיים $y \in V$ כך ש
$x = Ey$ ואז $Ex = E^2(y) = Ey = x$

ואם $Ex = x$ אזי $x \in \mathrm{Im} E$.

(2) אם $v \in V$ נכתוב

$$v = \underbrace{Ev}_{\in \operatorname{Im} E} + (I_V - E)(v)$$

ואז,

$$E(I_V - E)(v) = Ev - E^2(v) = E(v) - E(v) = 0$$

לכן $(I_V - E)(v) \in \ker E$

ומכאן כל $v \in V$ ניתן לכתיבה כ- $v = u + w$

כאשר, $u \in \operatorname{Im} E$ ו- $w \in \ker E$.

אם $v \in \ker E \cap \operatorname{Im} E$ אזי $E(v) = v$ ו- $E(v) = 0$

ולכן $v = 0$ כלומר הפירוק יחיד ולכן

$$V = \operatorname{Im} E \oplus \ker E$$

<u>הערה:</u> אם $V = U \oplus W$ אזי קיים אופרטור יחיד E (הטלה) כך ש- $\operatorname{Im} E = U$ ו- $W = \ker E$.

<u>הוכחה:</u> אם $V = U + W$ אזי לכל $v \in V$ $v = u + w$ ואז נגדיר $E(v) = u$. קל לראות ש- $\operatorname{Im} E = U$ ו- $\ker E = W$.

<u>תרגיל:</u> השלימו הפרטים!

□

<u>הערה!</u> אם E היטל נוכל לבחור בסיס ל V

שהוא איחוד הבסיסים של $\operatorname{Im} E$; $\ker E$

ואם $\operatorname{rank} E = r$ (כלומר $\dim \operatorname{Im} E = r$)

אזי לבסיס של $\operatorname{Im} E$ מתקיים $Ex = x$

(בפרט) ומצורת הייצוג של E בבסיס כזה

הוא

$$\left(\begin{array}{ccc} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{r} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{array}\right)_{n \times n}$$

<u>משפט!</u> אם $V = U \oplus W$; $T: V \to V$

אופרטור אזי U ; W הם T-אינווריאנטיים

(כלומר $T|_U \subseteq U$; $T|_W \subseteq W$)

אם ורק אם $ET = TE$ כאשר $E: V \to U$

הוא ההיטל הנקבע ע"י U.

<u>הוכחה!</u> אם $ET = TE$; $u \in U$ אזי

מאחר ; $Eu = u$ נקבל

$$T(u) = TE(u) = ET(u) = E(T(u)) \in U$$

לכן U הוא T-אינווריאנטי.

אם $w \in W$ אזי $Ew = 0$

ואז

$$E(T(w)) = (ET)(w) = T(E(w)) = T(0) = 0$$

לכן $T(w) \in W$

כלומר W הוא T-אינווריאנטי.

אם U ו- W T-אינווריאנטים ו- $v \in V$

כך ש $v = u + w$ אזי

$$E(T(u)) = T(u) \quad , \quad E(T(w)) = 0$$

ולכן

$$ET(v) = ET(v+w) = ET(u) + ET(w) =$$

$$= E(T(u)) + E(T(w)) = T(u)$$

$$TE(v) = TE(u+w) = T(E(u+w)) =$$

$$T(E(u)+0) = T(u)$$

ולכן $TE = ET$.

פונקציונליים לינאריים ואופרטורים צמודים

יהי V מרחב וקטורי. פונקציה לינארית $\varphi: V \to K$

$K = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ יקרא פונקציונל לינארי.

נשים לב כי לכל $u \in V$ מגדיר העתקה

$$\hat{u}: V \to K$$

באופן

$$\hat{u}(v) = \langle v, u \rangle$$

אם $a, b \in K$; $v_1, v_2 \in V$ קיים

$$\hat{u}(av_1 + bv_2) = \langle av_1 + bv_2, u \rangle =$$

$$a\langle v_1, u\rangle + b\langle v_2, u\rangle = a\hat{u}(v_1) + b\hat{u}(v_2)$$

כלומר $\hat{u}$ זו פונקציה לינארית

ולכן פונקציונל.

נשאלת אם כן השאלה האם כל פונקציונל מוגדר כמכפלה פנימית

באיבר נתון.

<u>משפט:</u> יהי V ו- $\varphi: V \to K$ פונקציונל לינארי

על מרחב מכפלה פנימית <u>ממימד סופי</u>.

אזי קיים וקטור <u>יחיד</u> $u \in V$ כך ש

לכל $v \in V$ מתקיים $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$.

<u>הוכחה:</u> יהי $\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס

אורתונורמלי של V נגדיר

$$u = \overline{\varphi(e_1)}\, e_1 + \overline{\varphi(e_2)}\, e_2 + \dots + \overline{\varphi(e_n)}\, e_n$$

נגדיר פונקציונל לינארי $\hat{u}$ באופן

$$\hat{u}(v) = (v, u)$$

כדי להוכיח כי $\varphi(v) = \hat{u}(v)$ מספיק להראות שוות על בסיס (מאחר ושניהם פונקציות לינאריות)

ואמנם

$$\hat{u}(e_i) = \langle e_i, u \rangle =$$

$$\left(e_i, \overline{\varphi(e_1)}\, e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)}\, e_n\right) = \varphi(e_i)$$

אם u' ב V הינו וקטור אחר המקיים

$$\varphi(v) = \langle v, u' \rangle$$

נקבל כי $\langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle$ לכל $v \in V$

אזי

$$\langle v, u - u' \rangle = 0$$

ובפרט עבור $v = u - u'$

נקבל

$$\langle u - u', u - u' \rangle = 0$$

כלומר $u - u' = 0$

אז $u = u'$.

<u>משפט:</u> יהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי על מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי. אזי קיים אופרטור לינארי <u>יחיד</u> T^*

$$T^* : V \longrightarrow V$$

כך ש

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$$

לכל $u, v \in V$. אם A היא המטריצה של T בבסיס אורתונורמלי $\{e_1, \dots, e_n\}$ של V אזי המטריצה המוחלפת A^* היא המטריצה של T^*.

<u>הוכחה:</u> יהי $v \in V$ וקטור קבוע ב-V

נגדיר העתקה $u \longrightarrow \langle T(u), v \rangle$

העתקה זו היא פונקציונל על V.

לכן מהמשפט הקודם קיים וקטור v' ב-V

<u>יחיד</u> כך ש $\langle T(u), v \rangle = \langle u, v' \rangle$

לכל $u \in V$. לכן נגדיר

$$T^*: V \longrightarrow V$$

באופן $T^*(v) = v'$

ולכן $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$

לכל $u, v \in V$

צריך להוכיח כי $T^*: V \to V$ היא העתקה לינארית. כלומר אם $a, b \in K$, $u, v_1, v_2 \in V$ קיים:

$$\langle u, T^*(av_1 + bv_2) \rangle = \langle T(u), av_1 + bv_2 \rangle =$$

$$= \bar{a} \langle T(u), v_1 \rangle + \bar{b} \langle T(u), v_2 \rangle =$$

$$\bar{a} \langle u, T^*(v_1) \rangle + \bar{b} \langle u, T^*(v_2) \rangle =$$

$$\langle u, aT^*(v_1) + bT^*(v_2) \rangle$$

ובגלל לכל u ולכן קבלנו

$$T^*(av_1+bv_2)=aT^*(v_1)+bT^*(v_2)$$

טענה: אם $T:V\to V$ ~~אז~~ ! $\{e_1,\dots,e_n\}$
בסיס אורתונורמלי אזי אם A הינו
המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס
$\{e_1,\dots,e_n\}$ אזי

$$a_{ij}=(T(e_j),e_i)$$

הוכחה:

$$T(e_1)=(T(e_1),e_1)e_1+(T(e_1),e_2)e_2+\dots+(T(e_1),e_n)e_n$$

$$\vdots$$

$$T(e_n)=(T(e_n),e_1)e_1+\dots+(T(e_n),e_n)e_n$$

A הינה המטריצה לפי מוקדמת

ולכן $a_{ij}=(T(e_j),e_i)$

כך נסיים את הוכחת המשפט!

מלמה:

$$a_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle$$

$$b_{ij} = \langle T^*(e_j), e_i \rangle$$

נקבל

$$b_{ij} = \langle T^*(e_j), e_i \rangle = \overline{\langle e_i, T^*(e_j) \rangle} =$$

$$= \overline{\langle T(e_j), e_j \rangle} = \overline{a_{ij}}$$

□

<u>הגדרה:</u> נאמר כי אופרטור $T: V \to V$ על מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית יש אופרטור צמוד T^* על V אם $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$ לכל $u, v \in V$.

אנו רוצים לבדוק מהם התכונות המאפיינות את האופרטורים הצמודים.

קודם כל נוכיח את המשפט הבא!

משפט: יהיו $S,T: V \to V$ אופרטורים לינאריים על מרחב מכפלה פנימית V. ויהי $k \in K$. אזי:

(1) $$(S+T)^* = S^* + T^*$$

(2) $$(kT)^* = \bar{k}\, T^*$$

(3) $$(ST)^* = T^* S^*$$

(4) $$(T^*)^* = T$$

הוכחה:

(1) $$\langle (S+T)(u), v \rangle = \langle S(u) + T(u), v \rangle =$$

$$\langle S(u), v \rangle + \langle T(u), v \rangle = \langle u, S^*(v) \rangle + \langle u, T^*(v) \rangle$$

$$= \langle u, S^*(v) + T^*(v) \rangle = \langle u, (S^* + T^*)(v) \rangle$$

לכל $u,v \in V$ ולכן מיחידות הצמוד

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$

<u>יחיד</u>

(2) לכל $u,v \in V$ קיים

$$\langle (kT)u, v \rangle = \langle kT(u), v \rangle = k \langle T(u), v \rangle =$$

$$k \langle u, T^*(v) \rangle = \langle u, \bar{k}\, T^*(v) \rangle = \langle u, (\bar{k} T^*)(v) \rangle$$

ושוב מיחידות הצמוד נובע

כי $(kT)^* = \bar{k}\, T^*$

(3) לכל $u,v \in V$

$$\langle (ST)(u), v \rangle = \langle S(T(u)), v \rangle = \langle T(u), S^*(v) \rangle =$$
$$= \langle u, T^*(S^*(v)) \rangle = \langle u, (T^*S^*)(v) \rangle$$

ולכן מיחידות הצמוד

$$(ST)^* = T^* S^*$$

(4) לכל $u,v \in V$ מתקיים

$$\langle T^*(u), v \rangle = \overline{\langle v, T^*(u) \rangle} = \overline{\langle T(v), u \rangle} =$$
$$\langle u, T(v) \rangle$$

ומיחידות הצמוד נסיק כי $(T^*)^* = T$

יש התאמה מסוימת בין ההצמדה

$z \longrightarrow \bar{z}$ $\quad z, \bar{z} \in \mathbb{C}$

ובין ההצמדה $T \longrightarrow T^*$

המקבילות הבולטות ניתנות במשפט הבא!

משפט: יהי $\lambda \in K$ ערך עצמי של אופרטור

לינארי $T: V \to V$ אזי:

(1) אם $T^* = T^{-1}$ אזי $|\lambda| = 1$

(2) $T^* = T$ אזי $\lambda \in \mathbb{R}$ (ממשי).

(3) $T^* = -T$ אזי λ מדומה טהור

(4) אם $T = S^*S$ כאשר S סינגולרי

אזי $\underline{\lambda \in \mathbb{R}^+}$

הגדרה:

אם $T^* = T^{-1}$ אזי T נקרא <u>אורתוגונלי</u> אם $K=\mathbb{R}$

T נקרא <u>יוניטרי</u> $K=\mathbb{C}$

אם $T^* = T$ T יקרא <u>סימטרי</u> $K=\mathbb{R}$

<u>הרמיטי</u> $K=\mathbb{C}$

אם $T^* = -T$ T נקרא <u>אנטי סימטרי</u> $K=\mathbb{R}$

<u>אנטי הרמיטי</u> $K=\mathbb{C}$

אם T כמו ב (4) T יקרא <u>חיובי בהחלט</u>

הוכחה: יהי $v \in V$, $v \neq 0$ ווקטור עצמי

של $T : V \to V$ כך ש- $T(v) = \lambda v$.

נשים לב כי $\langle v, v \rangle > 0$.

ואז

(1)

$$\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle =$$

$$\langle v, T^* T(v) \rangle = \langle v, I(v) \rangle = \langle v, v \rangle$$

אבל $\langle v, v \rangle > 0$ לכן $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$

ולכן $|\lambda| = 1$.

(2)

$$\lambda \cdot \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle = \langle v, T^*(v) \rangle =$$

$$= \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

אבל $\langle v, v \rangle > 0$ ולכן $\lambda = \bar{\lambda}$

כלומר $\lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\lambda\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\langle T(v),v\rangle=\langle v,T^*(v)\rangle=$

$\langle v,-T(v)\rangle=\langle v,-\lambda v\rangle=-\bar{\lambda}\langle v,v\rangle.$

$\langle v,v\rangle>0$ ולכן $\lambda=-\bar{\lambda}$

כלומר λ מדומה טהור.

(4) S לא סינגולרי לכן $S(v)\neq 0$ ולכן
$\langle S(v),S(v)\rangle>0$

ואז $\lambda\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\langle T(v),v\rangle=$
$\langle S^*S(v),v\rangle=\langle S(v),S(v)\rangle$

ובכל גם $\langle v,v\rangle>0$ ולכן $\lambda>0$.

ניתן דוגמא לפונקציונל על מרחב וקטורי
אין סוף מימדי שלא אינו ניתן ע"י מכפלה
פנימית באיבר כלשהו במרחב.

דוגמא: יהי V מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$
עם המכפלה הפנימית $f,g \in V$ אזי

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$$

נסתכל על הפונקציה $\varphi: V \to \mathbb{R}$ לינארית
ע"י

$$\varphi(f) = f(0)$$

נניח כי $h(t) \in V$ כך ש

$$\varphi(f) = f(0) = \int_0^1 f(t)\,h(t)\,dt$$

לכל $f(t) \in V$.

נשים לב כי $\varphi(t f(t)) = 0$

לכן $\int_0^1 t f(t)\,h(t)\,dt = 0$

לכל פולינום $f(t)$ ובפרט עבור

$$f(t) = t\,h(t)$$

ומכאן $\displaystyle\int_0^1 t\,h(t)\cdot t\,h(t)\,dt =$

$$\int_0^1 t^2 h^2(t)\,dt = 0$$

ומכאן $h(t) \equiv 0$ כפולינום

אבל $\varphi(f) = \langle f, h\rangle = \langle f, 0\rangle = 0$ לכל f

אבל $\varphi \not\equiv 0$ כפונקציונל.

נחזור כעת למהלך הדברים:

אופרטורים אורתוגונליים יוניטריים

הגדרנו: אופרטור U לינארי של מרחב מכפלה פנימית - כ אורתוגונלי או יוניטרי אם

$$U^* = U^{-1}$$

או

$$U^*U = UU^* = 1$$

מאפיינים נוספים של אופרטורים כגון נתונים במשפט:

משפט: התנאים הבאים על אופרטור U שקולים

(1) $U^* = U^{-1}$

(2) לכל v,w ב V, $\langle U(v), U(w) \rangle = \langle v,w \rangle$

U שומר על מכפלה פנימית

(3) U שומר על אורכים: לכל $v \in V$

קיים $\| U(v) \| = \| v \|$

נראה לפני כן את המשפט הבא!

משפט: יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי אזי כל אחת

מהתנאים הבאים גוררת ש $T \equiv 0$.

(1) $\langle T(u), v \rangle = 0$ $\quad \forall u, v \in V$

(2) V מרוכב ! $\forall u \in V, \ \langle T(u), u \rangle = 0$

(3) $T^* = T$! $\langle T(u), u \rangle = 0$ לכל $u \in V$

הוכחה:

(1) נבחר $v = T(u)$ ואז $\langle T(u), T(u) \rangle = 0$

לכן $T(u) = 0$ לכל $u \in U$ כלומר

$$T \equiv 0$$

(2) לפי ההנחה $\langle T(v+w), v+w \rangle = 0$

ומכאן מאחר ו $\langle T(v), v \rangle = \langle T(w), w \rangle = 0$:

נקבל כי

$$\langle T(v), w \rangle + \langle T(w), v \rangle = 0$$

בפרט עבור iw

נקבל

$$\langle T(iw), v \rangle = i \langle T(w), v \rangle ;$$

$$\langle T(v), iw \rangle = \bar{i} \langle T(v), w \rangle$$

אבל $\bar{i} = -i$

ולכן $-i\langle T(v), w\rangle + i\langle T(w), v\rangle = 0$

נחלק ב i ונקבל

$$\langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle = 0$$

ונקבל ש $\langle T(w), v\rangle = 0$ לכל w, v

ולכן $T \equiv 0$

(3) כמו נבדוק את במקרה הממשי

$$\langle T(v+w), v+w\rangle = 0$$

אבל $T^* = T$ ו $K = \mathbb{R}$ ולכן

$$\langle T(w), v\rangle = \langle w, T(v)\rangle = \langle T(v), w\rangle$$

נקבל ב $\langle T(v), w\rangle + \langle T(w), v\rangle = 0$

ונקבל ש $\langle T(v), w\rangle = 0$ לכל v, w

ולכן $T \equiv 0$

הוכחה:

נניח כי (1) קיים כלומר $U^* = U^{-1}$

אזי

$$\langle U(v), U(w) \rangle = \langle v, U^*U(w) \rangle =$$

$$\langle v, w \rangle$$

נניח כי (2) מתקיים אזי

$$\| U(v) \| = \sqrt{\langle U(v), U(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \| v \|$$

נניח כי (3) מתקיים אזי

$$\langle U^*U(v), v \rangle = \langle U(v), U v \rangle = \langle v, v \rangle$$

ומכאן $\langle (U^*U - I)(v), v \rangle = 0$

לכל $v \in V$.

אבל $U^*U - I$ הינו צמוד לעצמו

כי $(U^*U - I)^* = U^*U - I$

ולכן $U^*U = I$

כלומר $U^* = U^{-1}$.

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$ דוגמא!

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

מאחר :

$$x^2\cos^2\theta - 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta \; +$$
$$x^2\sin^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\cos^2\theta \; +$$
$$z^2 \qquad =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2$$

לכן | $\|\bar{v}\| = \|T(v)\|$

כלומר T היא אופרטור אורתוגונלי.

נסתכל על המרחב הוקטורי הזה |
סוף מימדי הפעם!

$$V=\{(a_1,a_2,a_3\dots)\mid a_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty\}$$

כלומר סכום הריבועים של איברי הסדרות הוא
סופי.

נגדיר

$$(a_1,a_2,a_3\dots)+(b_1,b_2,b_3\dots)=$$

$$(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\dots)$$

$$k(a_1,a_2,a_3\dots)=(ka_1,ka_2,ka_3\dots)$$

מכפלה פנימית

$$\langle(a_1,a_2,a_3\dots),(b_1,b_2,b_3\dots)\rangle=$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i$$

צריך להראות כי הסכום סופי.

לכל n סופי נכון אי שוויון קושי
שוורץ

$$|a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n|\le$$

$$|a_1b_1|+|a_2b_2|+\dots+|a_nb_n|\le$$

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right) \le$$

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}\right)$$ — גודל סופי.

שאלה מיותר! אם הסדרה $(a_1, a_2, \ldots)$

נמצאת ב V גם הסדרה

$$(|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots)$$

נמצאת ב V כי

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$$

לכן סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n = |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \ldots + |a_n b_n|$$

היא סדרה חסומה ומונוטונית עולה.

על V נתון נגדיר אופרטור לינארי

$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

T - לינארי וברור כי T שומר על אורך אבל האיבר

$$(1,0,0,\dots) \notin \operatorname{Im} T$$

לכן T אינו על ולכן ~~אינו~~ לא הפיך.

בפרט המשפט שהוכחנו אינו נכון עבור מרחבים וקטוריים בעלי מימד אין סופי.

הגדרה: העתקה $T: V \to V$ השומרת על מרחקים תיקרא איזומטריה.

כלומר אופרטור אורתוגונלי או יוניטרי
הוא איזומטריה.

<u>הגדרה:</u> מטריצה מרוכבת A עם

$$A^* = A^{-1}$$

תיקרא מטריצה יוניטרית

מטריצה ממשית A עם $A^t = A^{-1}$

תקרא מטריצה אורתוגונלית

המשפט שהוכחנו עבור האופרטור נכון, כמובן,
גם עבור מטריצות

<u>משפט:</u> התנאים הבאים על A שקולים

(1) A יוניטרית (אורתוגונלית)

(2) שורות A יוצרות קבוצה אורתונורמלית

(3) עמודות A יוצרות קבוצה אורתונורמלית.

<u>דוגמא:</u> המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה

$T: V \to V$ היא

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואנו רואים שכל העמודות וכן השורות

הן וקטורים אורתונורמליים.

לאור התפקיד החשוב שממלאים בסיסים

אורתונורמליים בכל רחבי מרחבי מכפלה פנימית

נשאלת השאלה כיצד עוברים מבסיס

כזה לבסיס אחר שגם הוא

אורתונורמלי.

התשובה במשפט:

<u>משפט:</u> אם $\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס אורתונורמלי

למרחב מכפלה פנימית V. אזי

מטריצת המעבר P מבסיס

$\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס אורתונורמלי ונניח

הינו יוניטרית (אורתוגונלית) המתאים לשדה.

ואם P מטריצה יוניטרית או אורתוגונלית

אזי $\{P(e_1), \dots, P(e_n)\}$

הינו בסיס אורתונורמלי.

<u>הוכחה:</u> יהי $\{f_1, \dots, f_n\}$

בסיס אורתונורמלי אזי

$$f_i = b_{i1}e_1 + b_{i2}e_2 + \dots + b_{in}e_n$$

ומאחר: $\delta_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$ נקבל

$$b_{i1}\overline{b_{j1}} + b_{i2}\overline{b_{j2}} + \dots + b_{in}\overline{b_{jn}} = \delta_{ij}$$

לכן אם $B = (b_{ij})$ אזי B הינו

מטריצה המעבר מ e_i ל f_j

ראינו כי $BB^* = (c_{ij})$

וכי $c_{ij} = b_{i1}\overline{b_{j1}} + \dots + b_{in}\overline{b_{jn}}$.

ו $c_{ij} = \delta_{ij}$ לכן $B \cdot B^* = I$

אם $P = (a_{ij})$ אורתונורמלית P

אזי $\langle e_i', e_j' \rangle = a_{1i}\overline{a_{1j}} + \dots + a_{ni}\overline{a_{nj}}$

כאשר $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$

הוא העמודה ה-i של P.

לכן מאחר ו-P אורתוגונלית

נקבל $\langle e_i', e_j' \rangle = \delta_{ij}$

<u>הגדרה</u>: שתי מטריצות מרוכבות

A ו-B הן שקולות יוניטרית

אם קיימת מטריצה יוניטרית P

כך ש $B = P^* A P$

A ו- B שקולות אורתוגונלית אם
יש מטריצה אורתוגונלית P כך ש

$$B = P^t A P$$

אופרטורים חיוביים

<u>הגדרה:</u> אם T אופרטור לינארי על מרחב מכפלה פנימית V נאמר כי T <u>חיובי</u> אם קיים $T = S^*S$ עבור S כלשהו. ונאמר כי T <u>חיובי ממש</u> אם S <u>לא</u> <u>סינגולרי</u>.

<u>משפט:</u> התנאים הבאים על אופרטורים T שקולים

(1) $T = P^2$, $P^* = P$

(2) $T = S^*S$ עבור S כלשהו

(3) $T = T^*$ ו $\langle T(u), u \rangle \geq 0$ לכל $u \in V$

לפני שנוכיח את המשפט נוכיח מספר טענות:

<u>הגדרה:</u> אופרטור סימטרי הוא אופרטור המקיים $T^* = T$

<u>טענה:</u> יהי $T:V \to V$ אופרטור סימטרי אזי

(1) הפולינום האופייני של T $\Delta(t)$ הוא מכפלה של פולינומים לינאריים מעל $\mathbb{R}$.

(2) ל-T וקטור עצמי $v \in V$ $v \neq 0$

(3) וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים הם ניצבים זה לזה

<u>הוכחה:</u>

(1) תהי A המטריצה של T בבסיס אורתונורמלי (כלשהו) של V. אזי $A^t = A$

אבל $\Delta(t)$ הוא הפולינום האופייני של A

A הינה מטריצה סימטרית ממשית

ולכן ל-A ערכים עצמיים ממשיים ולכן

$$\Delta(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$$

ובפרט מעל $\mathbb{C}$ ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$

לכן $\Delta(t)$ הוא מכפלה של גורמים לינאריים

מעל $\mathbb{R}$.

(2) מ (1) נקבל של T יש ערך עצמי אמיתי

ממשי. ולכן ל T יש ערך עצמי שונה

מ אפס מעל $\mathbb{R}$.

(3) אם $T(v) = \lambda v$; $T(w) = \mu w$

; $\lambda \neq \mu$ אזי

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$$

$$= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

אבל $\lambda \neq \mu$ כלומר $\langle v, w \rangle = 0$

לכן v ניצב ל w ולכן הם פאלי

וקטורים ניצבים.