תירגול מס. 12

טורים מספריים

א מבחני התכנסות בסיסיים לטורים חיוביים

(ראו גם סיכום בנושא טורים שמופיע באתר הקורס).

תרגיל 1 לבדוק התכנסות של הטורים הבאים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n-\ln n}$ (ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

(ד) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ (ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

פתרון:

א. זה טור חיובי. האיבר הדומיננטי במכנה הוא n ולכן נשווה עם הטור ההרמוני המתבדר:

לכל n מתקיים: $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n-\ln n}$ ולכן הטור מתבדר (ע"פ מבחן ההשוואה).

ב. זה טור חיובי, ועבור n-ים גדולים מתקיים: $\frac{\sin\frac{1}{n}}{n-\ln n} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$ נשווה עם הטור המתכנס: $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{n}}{n-\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\ln n}{n}} = 1 > 0$$

ונובע ששני הטורים מתכנסים יחדיו.

ג. זה טור חיובי, ומכיוון ש $\sqrt[n]{n} \to 1$ אז עבור n-ים גדולים מתקיים: $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$
נשווה עם הטור ההרמוני המתבדר:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 > 0$$

ומכאן ששני הטורים מתבדרים יחדיו.

ד. זה טור חיובי. נשתמש במבחן השורש (לטורים חיוביים):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

ונובע ממבחן השורש שהטור הנתון מתכנס.

ה. נשתמש במבחן המנה (לטורים חיוביים). האיבר הכללי בטור הוא $a_n = \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. ומתקיים:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n\cdot n!} = 3\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = 3\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

ומכאן ש -

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$$

ונובע ממבחן המנה שהטור הנתון - $\sum a_n$, מתבדר.

ו. האיבר הכללי של הטור מקיים: $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$ כלומר $a_n \not\to 0$ ולכן הטור מתבדר.

<u>תרגיל 2</u> לבדוק את התכנסותו של הטור: $\sum(\sqrt[n]{n}-1)$.

<u>פתרון</u> ננסה לנחש כיצד מתנהג האיבר הכללי של הטור - $a_n = \sqrt[n]{n}-1$, כאשר $n\to\infty$
נזכר בגבול הסטנדרטי:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a \quad \text{לכל } a>0.$$

סביר לצפות שעבור n-ים גדולים יתקיים:

$$n\cdot\left(\sqrt[n]{n}-1\right) \sim \ln n \tag{1}$$

ואם זה נכון אז ינבע שעבור n-ים מספיק גדולים יתקיים:

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n}-1\right) \sim \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

ומהשוואה עם הטור ההרמוני ינבע שהטור הנתון - $\sum a_n$ מתבדר.
לא נבדוק את הנכונות של (1) (אתם מוזמנים לבדוק זאת בעצמכם[1]), אבל נוודא ש -

$$a_n > \frac{1}{n} \quad \text{(עבור } n\text{-ים מספיק גדולים.)}$$

וזה באמת מתקיים כי :

$$a_n > \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[n]{n}-1 > \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad n > \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

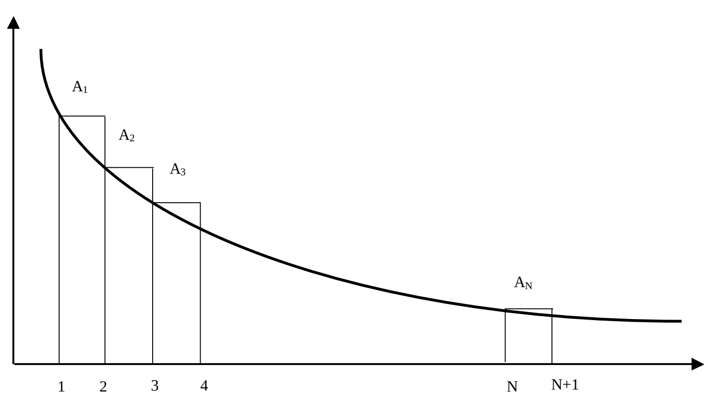
וזה בוודאי נכון לכל $n>3$.

ב מבחן ההתכנסות האינטגרלי

משפט 1 תהא $f(x)$ אי-שלילית ומונוטונית (במובן הרחב) ב $[1,\infty)$. נסמן $a_n = f(n)$ (לכל n טבעי). אז

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס **א.מ.ם** האינטגרל המוכלל $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס

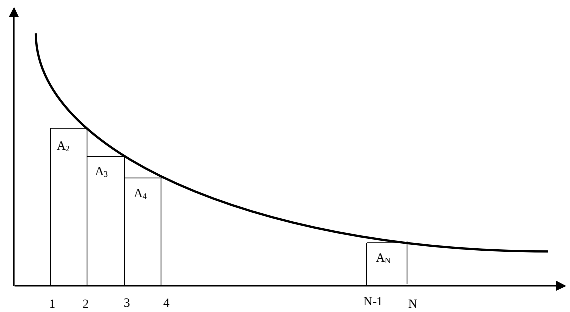
<u>הסבר</u> נניח למשל ש $f(x)$ מונוטונית יורדת. יהי N טבעי כלשהו, לפי השרטוט הבא מקבלים:



$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{2}$$

ולפי השרטוט הבא:

[1] צריך להראות ש $\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}=1$ (הציבו $x=\frac{1}{n}$ והעזרו בלופיטל).



$$\sum_{n=2}^{N} a_n \quad \leq \quad \int_1^N f(x)\,dx \tag{3}$$

כך שבסה"כ:

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{N} a_n \quad \leq \quad a_1 \;+\; \int_1^N f(x)\,dx$$

ונובע שהטור מתכנס א.מ.ם מתכנס האינטגרל.

<u>מסקנה 1</u> הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס א.מ.ם מתכנס האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ כלומר א.מ.ם $1 < \alpha$

<u>מסקנה 2</u> נתבונן בפונקציה $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \cdot (\ln x)^\beta}$ מוגדרת ואי-שלילית ב $[2,\infty)$.
ניתן להראות שהיא מונוטונית ב $[X_0,\infty)$ (עבור X_0 מספיק גדול). ואפשר להסיק ע"פ מבחן האינטגרל[2] ש-

הטור: $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha \cdot (\ln n)^\beta}$ מתכנס א.מ.ם מתכנס האנטגרל $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$

כלומר:

- אם $1 < \alpha$ הטור מתכנס (לכל β).
- אם $1 > \alpha$ הטור מתבדר (לכל β).
- אם $\alpha = 1$ אז הטור מתכנס א.מ.ם $1 < \beta$.

<u>תרגיל 3</u> לבדוק התכנסות: (א) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{(\ln n)^2}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(\ln \sin \frac{1}{n}\right)^2}$

<u>פתרון</u>

א. עבור n-ים גדולים: $\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\ln^2 n} \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{\ln^2 n} = \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ נשווה לכן עם הטור המתכנס[3]: $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^2 n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right) / \left(\ln^2 n\right)}{1/\left(n \cdot \ln^2 n\right)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \;=\; 1$$

ולכן שניהם מתכנסים יחדיו.

---

[2] העובדה שהיא אולי לא מונוטונית בכל הקטע $[2,\infty)$ לא מפריעה, כי מספר סופי של איברים בטור לא משפיע על ההתכנסות.
[3] זה טור כמו במסקנה 2 שבו $\alpha = 1, \beta = 2$

ב. זה טור חיובי ועבור n-ים גדולים: $\left(\ln\sin\frac{1}{n}\right)^2 \sim \left(\ln\frac{1}{n}\right)^2 = (-\ln n)^2 = \ln^2 n$

נשווה עם הטור המתבדר $(\alpha=0,\beta=2)$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln^2\sin\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2 n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln\sin\frac{1}{n}}\right)^2$$

זה גבול מהצורה "$\left(\frac{\infty}{-\infty}\right)^2$" בעזרת "לופיטל פנימי" נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\cdot\cos\frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{n^2}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{\cos\frac{1}{n}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 = 1$$

ומכאן ששני הטורים מתבדרים יחדיו.

<u>תרגיל 4</u> לבדוק התכנסות (א) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln(\ln n)}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}\cdot e^{\sqrt{n}}}$

<u>פתרון:</u>

א. נתבונן בפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$ היא אי-שלילית ומונוטונית יורדת ב $[3,\infty)$

ולכן לפי מבחן האינטגרל, הטור הנתון מתכנס א.מ.ם מתכנס האינטגרל[4]: $\int_3^{\infty}f(x)\,dx$

כדי לבדוק את התכנסותו של האינטגרל האחרון, נציב: $t=\ln x \;\Leftarrow\; dt=\frac{dx}{x}$

$$\int_3^{\infty}f(x)\,dx = \int_{\ln 3}^{\infty}\frac{dt}{t\cdot\ln t}$$

האינטגרל הזה מתבדר $(\alpha=\beta=1)$ ומכאן שהטור הנתון מתבדר.

ב. מכיוון שהפונקציה: $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ אי שלילית ומונוטונית יורדת ב - $[1,\infty)$,

אז לפי מבחן האינטגרל הטור הנתון מתכנס א.מ.ם מתכנס האינטגרל: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$

נציב $t=\sqrt{x} \;\Leftarrow\; dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ונקבל:

$$\int_1^{\infty}\frac{dt}{e^t} = -e^{-t}\Big|_1^{\infty} = 0-\left(-e^{-1}\right) = e^{-1}$$

זה מוכיח שהאינטגרל מתכנס ולכן גם הטור הנתון מתכנס[5].

ג מבחן הדלילות (מבחן העבוי)

אפשר לוותר על הסעיף הזה.

משפט 2 מבחן הדלילות (העיבוי) תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי-שלילית ומונוטונית יורדת (במובן הרחב).

שני הטורים: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot a_{2^n}$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.

---

[4] אפשר לנסח כלל לגבי התכנסותו של אינטגרל מהצורה $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}x\cdot(\ln\ln x)^{\gamma}}$
במקרה זה ההשפעה של γ תבוא לידי ביטוי רק במקרה הגבולי: $\alpha=\beta=1$.

[5] סכום הטור אינו שווה לערך האינטגרל (אבל אפשר לקבל הערכות לסכום הטור ע"י ערך האינטגרל).

<u>הוכחה</u> נתבונן בסדרות הסכומים החלקיים: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ו- $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$ מצד אחד מתקיים:

$$\sigma_n \quad = \quad a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \ldots + \underbrace{(a_{2^n} + a_{2^n} + \ldots + a_{2^n})}_{\text{פעמים } 2^n}$$

ומכיוון שהסדרה a_n מונוטונית יורדת אז הסכום האחרון גדול או שווה מ -

$$\sigma_n \ \geq \ a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots \ + \ (a_{2^n} + a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}-1}) \ = \ S_{2^{n+1}-1}$$

כלומר

$$\sigma_n \quad \geq \quad S_{2^{n+1}-1} \qquad (4)$$

מצד שני מתקיים גם:

$$\tfrac{1}{2}\left(\sigma_n - a_1\right) \ = \ a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \ldots + \underbrace{(a_{2^n} + a_{2^n} + \ldots + a_{2^n})}_{\text{פעמים } 2^{n-1}}$$

ומכיוון שהסדרה a_n מונוטונית יורדת אז הסכום האחרון קטן שווה מ -

$$\tfrac{1}{2}\left(\sigma_n - a_1\right) \ \leq \ a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \ldots + a_{2^n}) \ = \ S_{2^n} \ - \ a_1$$

כלומר: $\frac{1}{2}\left(\sigma_n - a_1\right) \leq S_{2^n} - a_1$ או באופן שקול:

$$\sigma_n \quad \leq \quad 2S_{2^n} \ - \ a_1 \qquad (5)$$

מ - (4) ו- (5) נובע שלכל n טבעי מתקיים:

$$S_{2^{n+1}-1} \quad \leq \quad \sigma_n \quad \leq \quad 2S_{2^n} - a_1 \qquad (6)$$

כעת, מכיוון שהסדרה a_n אי-שלילית אז שתי הסדרות σ_n ו- S_n הן מונוטוניות עולות, ולכן מתכנסות א.מ.ם הן חסומות מלעיל. אבל מ - (6) נובע ש - σ_n חסומה מלעיל א.מ.ם S_n חסומה מלעיל, ומכאן ששתי סדרות הסכומים החלקיים מתכנסות או מתבדרות יחדיו. מ.ש.ל.

<u>תרגיל 5</u> לבדוק התכנסות של הטור $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

<u>פתרון</u> לטורים כאלה מתאים במיוחד מבחן הדלילות: הסדרה $a_n = \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ היא חיובית ומונוטונית יורדת ולכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ מתכנס א.מ.ם מתכנס הטור[6]:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad = \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln\ln 2^n)^{\ln 2^n}} \quad = \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln(n\ln 2))^{n\ln 2}}$$

נסמן $c = \ln 2 > 0$ אז הטור האחרון הוא:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\left(\ln(c\cdot n)\right)^c}\right)^n$$

עבור n-ים מספיק גדולים: $\frac{1}{2} > \frac{2}{\left(\ln(c\cdot n)\right)^c} > 0$ (למה?)

ולכן הטור האחרון מתכנס ע"פ השוואה עם הטור הגאומטרי המתכנס: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

ד תרגילי הוכחה

<u>תרגיל 6</u> (כל הסכומים להלן עבור $n = 1$ עד ∞)

א. להוכיח שאם $\sum |a_n|$ מתכנס אז גם $\sum a_n^2$ מתכנס.

ב. נניח ש - $\sum a_n^2$ ו- $\sum b_n^2$ מתכנסים. הוכיחו שגם $\sum |a_n \cdot b_n|$ ו- $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנסים.

---

[6] זכרו שמס. סופי של איברים לא משפיע על התכנסות הטור.

<u>פתרון</u>

א. מכיוון ש - $\sum |a_n|$ מתכנס, אז $|a_n| \to 0$ ונובע שקיים N כך ש-

לכל $n > N$ מתקיים: $|a_n| < 1 \quad \Leftarrow \quad 0 \leq a_n^2 < |a_n|$

ולפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים: מכיוון ש - $\sum |a_n|$ מתכנס אז גם $\sum a_n^2$ מתכנס.

ב. לפי אי-שיוויון הממוצעים (שמופעל על שני המספרים האי-שליליים: $x_1 = a_n^2$ ו- $x_2 = b_n^2$):

$$|a_n \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 \cdot b_n^2} \overset{\text{א״ש הממוצעים}}{\leq} \tfrac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

ולכן מהנתון נובע ש - $\sum |a_n \cdot b_n|$ מתכנס. כעת,

$$0 \leq (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 \leq a_n^2 + b_n^2 + 2|a_n \cdot b_n|$$

ולכן לפי הנתון והתוצאה הקודמת גם $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

<u>תרגיל 7</u> תהא a_n סדרה אי-שלילית, הוכיחו ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס א.מ.ם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ מתכנס

<u>פתרון</u>

- כיוון קל: מכיוון ש- $0 \leq a_n$ אז $0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$ ולכן אם $\sum a_n$ מתכנס אז גם $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.
- כיוון שני: נניח ש- $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס, אז $\frac{a_n}{a_n+1} \to 0$ ולכן קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים:

$$0 \leq \frac{a_n}{1 + a_n} < \tfrac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad 0 \leq 2a_n < 1 + a_n \quad \Leftarrow \quad 0 \leq a_n < 1$$

ומכאן מקבלים שלכל $N < n$ מתקיים:

$$0 \leq \tfrac{1}{2}a_n = \frac{a_n}{1+1} \overset{\text{מקטינים מכנה}}{<} \frac{a_n}{1 + a_n}$$

ולפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים מכיוון ש $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס אז גם $\sum \frac{1}{2}a_n$ מתכנס ולכן $\sum a_n$ מתכנס.

ה משפט לייבניץ לטורים עם סימנים מתחלפים

משפט 3 תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי-שלילית ומונוטנית יורדת לאפס. נתבונן בטור: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

ונסמן בנוסף: $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ סכום הטור, ו- $S_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n$ הסכום החלקי ה N-י. אז:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

ב. לכל N מתקיים: $|R_N| \equiv |S - S_N| \leq a_{N+1}$

<u>תרגיל 8</u> לקבוע האם הטור הבא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

<u>פתרון</u>

- הוא בוודאי אינו מתכנס בהחלט, כי טור הערכים המוחלטים הוא הטור ההרמוני.
- אנחנו נראה שהוא מתכנס (כלומר מתכנס בתנאי).

הטור הנתון אינו טור לייבניץ. נוכיח את התכנסות ע"פ ההגדרה[7], כלומר נראה שסדרת הסכומים החלקיים: $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n}$$

להוכחת התכנסותה מספיק להראות שסדרת האיברים הזוגיים וסדרת האיברים האי זוגיים מתכנסות לאותו גבול:

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = L$$

יהי N טבעי כלשהו, ונתבונן באיבר:

$$S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}- \dots + \frac{(-1)^{N-1}}{2N-1} + \frac{(-1)^N}{2N}$$

$$S_{2N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k}}{2k}$$

כלומר הצגנו את סדרת האיברים הזוגיים כסכום של שתי סדרות: $S_{2N} = A_N + B_N$ כאשר

$$B_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k}}{2k} \qquad \text{ו-} \qquad A_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

אבל שתי הסדרות A_N ו- B_N הן סדרות הסכומים החלקיים של שני טורי לייבניץ ולכן הן מתכנסות:

$$\lim_{N\to\infty} B_N = B \qquad \text{ו-} \qquad \lim_{N\to\infty} A_N = A$$

וע"פ אריתמטיקה של גבולות: $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty} (A_N+B_N) = A+B \equiv L$

כדי לסיים את ההוכחה, עלינו להראות שגם: $\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = L$ ובאמת:

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \Big(S_{2N} + \underbrace{\tfrac{(-1)^{\left[\frac{2N+1}{2}\right]}}{2N+1}}_{\text{האיבר ה- }(2N+1)} \Big) = L + 0 = L$$

ו שאלות מבחינות

<u>תרגיל 9</u> נניח ש $f(0)=0$ ו- $f'(0)=1$, הוכיחו ש $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס, ואילו $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.

<u>פתרון</u> נציג: $f(x) = \underbrace{f(0)}_{0} + \underbrace{f'(0)}_{1}\cdot x + \underbrace{x\cdot\varepsilon(x)}_{R_1(x)}$ כאשר $\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ ומכאן ש -

$$f\left(\tfrac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\Big(1+\varepsilon\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\Big) \qquad , \qquad f\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\Big(1+\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right)\Big)$$

מכיוון ש -

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon\left(\tfrac{1}{n^2}\right) = 0$$

אז עבור n-ים מספיק גדולים, הביטויים: $f\left(\frac{1}{n}\right)$ ו- $f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ חיוביים. ובנוסף (מאותה סיבה):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \text{וכן} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

כך שלפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים[8], נובע ש - $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר, ו - $\sum f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

---

[7] אפשר להוכיח התכנסות גם בעזרת מבחן דריכלה לטורים (למי שמכיר).

[8] השוונו עם $\sum \frac{1}{n}$ ו- $\sum \frac{1}{n^2}$ בהתאמה.

(*) תרגיל 10 להוכיח או להפריך: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה אשר $|f'(x)|<1$ ו- a_n היא סדרה מונוטונית עולה כך שלכל n מתקיים:

$$f(a_n) \;=\; 1 + \frac{(-1)^n}{n} \tag{7}$$

אז $a_n \to \infty$. (רמז: בדקו התכנסות של הטור: $\sum(a_{n+1}-a_n)$).

פתרון נכון: לפי לגרנז', לכל n, קיימת $a_n < c_n < a_{n+1}$ כך ש -

$$\left|\frac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n}\right| \;=\; |f'(c_n)| \;\overset{\text{לפי הנתון}}{<}\; 1$$

ע"י הכפלה בביטוי החיובי $(a_{n+1}-a_n)$ נקבל שלכל n מתקיים:

$$(a_{n+1}-a_n) \;>\; \left|f(a_{n+1})-f(a_n)\right| \;\overset{\text{לפי }(7)}{=}\; \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \;>\; \frac{1}{n}$$

ומכאן (לפי השוואה עם הטור ההרמוני) נובע שהטור החיובי $\sum(a_{n+1}-a_n)$ מתבדר.
ולכן סדרת הסכומים החלקיים שלו שואפת לאינסוף. כלומר:

$$\infty \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) \;\overset{\text{סכום טלסקופי}}{=}\; a_n - a_1$$

קיבלנו ש - $(a_n-a_1)\to\infty$, ונובע ש - $a_n\to\infty$.