

## קומבינטוריקה - תרגיל מס' 7

להגשה עד ה - 22.05.01, בשעה 17.00

### תרגיל מס' 1

יהי  $J_n$  מספר התת-קבוצות של קבוצת המספרים  $\{1, 2, \dots, n\}$  (כולל התת-קבוצה הריקה) שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. בטא את  $J_n$  באמצעות מספרי פיבונאצ'.

### תרגיל מס' 2

אדם עולה  $n$  מדרגות, כאשר בכל צעד הוא עולה מדרגה אחת, שתיים או שלוש. מייד אחרי צעד של שלוש מדרגות, הוא רשאי (אך לא חייב) לנוח שלב אחד, כלומר לעשות צעד של אפס מדרגות (אפשרות זאת קיימת גם אם הצעד של שלוש מדרגות הביא אותו לקצה). יהי  $S_n$  מספר האופנים לעשות זאת. א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $S_n$ . ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור  $S_n$ .

### תרגיל מס' 3

סדרת המספרים:  $H_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  מקיימת:  $H_n = -2H_{n-1} - H_{n-2}$  לכל  $n \geq 2$ , וכן:  $H_{17} = 11$ ,  $H_{30} = 15$ . מצא את:  $H_{100}$ .

### תרגיל מס' 4

יהי  $T_n$  מספר הסדרות:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  המקיימות:  
(\*) כל  $a_i$  הוא אחד המספרים:  $0, 1, 2, 3$ .  
(\*\*) אם  $a_i$  הוא  $0$ , אז  $a_j$  הוא  $0$ , לכל  $j > i$ .  
א. מצא נוסחת נסיגה עבור  $T_n$ .  
ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור  $T_n$ .

תרגיל מס' 5 חלקיק נע במישור לפי הכללים הבאים: במצב ההתחלתי הוא נמצא בראשית הצירים (הנ-קודה  $(0, 0)$ ). בכל שניה הוא נע מרחק של  $1$  ימינה, שמאלה או למעלה (כלומר, מן הנקודה  $(x, y)$  לנקודה  $(x+1, y)$ , לנקודה  $(x-1, y)$  או לנקודה  $(x, y+1)$ ). לעולם, החלקיק איננו חוזר לנקודה ממנה יצא בשניה הקודמת. יהי  $P_n$  מספר המסלולים האפשריים למהלך החלקיק במשך  $n$  שניות. א. הוכח ש-  $P_n$  מקיים את נוסחת הנסיגה:

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 3 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ב. פתור את נוסחת הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור  $P_n$ .

### תרגיל מס' 6

הוכח: בכל מאה יש  $15$  שנים שה-  $1$  בינואר חל בהן באותו יום בשבוע.

## בהצלחה!

גלגולו של שם: Dirichlet, אשר ניסח את עקרון שובך היונים - ניסח אותו לגבי פנינים וקופסאות נעליים. משם, כנראה בעקבות טעות בתרגום, נוסח העקרון באנגלית לגבי מכתבים ומגירות שולחן (*pigeonholes*). משם, קצרה הדרך לדבר על שובכים (*pigeonholes*) - וכאן נכנסו לתמונה היונים...