## פתרון תרגיל 8 באלגברה לינארית ב'

1. $u \in V$ ניצב ל-$imT^*$ אמם עבור כל $w \in V$:
$0 = \langle u, T^*w \rangle = \langle Tu, w \rangle$
האחרון מתקיים בבירור אמ"ם $Tu = 0$ או $u \in kerT$.

2. נגדיר $S_p(B) = PBP^{-1}$ ונקבל
$\langle T_pA, B \rangle = tr(PAP^{-1}B^*) = tr(AP^{-1}B^*P) = tr(A(P^{-1}BP)^*) = \langle A, S_pB \rangle$ .
מיחידות האופרטור הצמוד (בהגדרתו) נקבל כי $S_p$ הצמוד של $T_p$.

3. אם $E = E^*$ נקבל כי $EE^* = E^2 = E^*E$.
להפך, נניח $E$ מתחלפת עם $E^*$. $E$ נורמלי אך כהיטל יש לו ערכים עצמיים 0 או 1. אופרטור נורמלי עם ע"ע ממשיים הינו הרמיטי כלומר $E = E^*$.

4. נבחר בסיס אורתונורמלי $B_1$ ל-$W$ ובסיס אורתונורמלי $B_2$ עבור $W'$ נקבל כי $B = B_1 \cup B_2$ הינו בסיס אורתנורמלי ל-$V$ (שכן $W$ ו $W'$ ניצבים) על פיו:
$$[U]_B = \begin{pmatrix} I_W & 0 \\ 0 & -I_{W'} \end{pmatrix}$$
מכאן $U$ נורמלי בעל ערכים עצמיים ולכן הרמיטי ובעל ע"ע אשר ערכם המוחלט הינו 1 ולכן אוניטרי.
ב. מחישוב ישיר נקבל כי
$$W' = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$
כעת $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a+c}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a-c}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ולכן $U\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$ כלומר
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. א. נניח $dimV = n$. אז $dimL(V) = dimL(W) = n^2$. לכן מספיק להראות כי ההעתקה חח"ע אך כיוון ש $U$ הפיכה נקבל $UTU^{-1} = 0$ אמ"ם $T = 0$.
ב. נעזר בטענה כי עקבה של מטריצה אינה תלויה בבסיס בו היא מחושבת. נקח בסיס $B$ של $V$ ונגדיר את הבסיס $B'$ כתמונת $B$ תחת ההעתקה $U^{-1}$. נקבל כי $[U]_{B',B}$ (המטריצה המייצגת כהעתקה מבסיס $B$ לבסיס $B'$ הינה הזהות. בפרט יש שוויון מטריצות: $[UTU^{-1}]_{B'} = [T]_B$ ולכן:
$tr(UTU^{-1}) = tr([UTU^{-1}]_{B'}) = tr([T]_B) = tr(T)$.
ג. כאן מניחים כי $U^* = U^{-1}$. ונקבל: $(UTU^{-1})^* = U^{-1^*}T^*U^* = U^{**}T^*U^{-1} = UTU^{-1}$.
ד. נסמן $\tilde{U}(T) = UTU^{-1}$ ונראה כי $\tilde{U}$ שומרת על מכפלה פנימית:
$\langle \tilde{U}(T_1), \tilde{U}(T_2) \rangle = tr(UT_1U^*UT_2^*U^*) = tr(UT_1T_2^*U^*) = tr(T_1T_2^*) = \langle T_1, T_2 \rangle$.

כלומר $\tilde{U}$ אופרטור אוניטרי.