

אלגברה 104167

תאריך: 09/12/2014

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: מערכת משוואות

שם המתרגל: גלית מזרחי (תרגול 32)

מערכת משוואות

פרק 6 שאלות 4,5

4. קבע איזה קשר מתקיים בין a, b, c כך שלמערכת הבאה:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases} \quad \text{(א) פתרון יחיד ; (ב) אינסוף פתרונות ; (ג) אין אף פתרון}$$

5. קבע לאילו ערכי k יש למערכת ההומוגנית הבאה פתרון יחיד ולאילו אינסוף פתרונות:

$$\begin{cases} x + k y + z = 0 \\ k x + y + k z = 0 \\ (k + 1)x - y + z = 0 \end{cases}$$

פרק 6 שאלה 8

8. בשאלה זו תתכנה כמה תשובות נכונות – סמן את כולן. נתונה המערכת:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$$

(א) למערכת פתרון יחיד בו $x_5 = 1$.

(ב) למערכת אינסוף פתרונות ו- x_5 יכול להיקבע שרירותית.

(ג) למערכת אינסוף פתרונות ובכולם $x_5 = 1$.

(ד) דרגת מטריצת המקדמים היא 4.

(ה) דרגת מטריצת המקדמים קטנה או שווה ל-3.

פרק 6 שאלות 11,12:

11. תהי $A \in F^{3 \times 4}$.

(א) נתון שדרגת המטריצה A היא 1. כמה פרמטרים (דרגות חופש) יש למשפחת הפתרונות $Ax = 0$?

(ב) למטריצה A יש עמדות ראשונה שלישית ורביעית שוות. כמה פרמטרים (לפחות) יש למשפחת

הפתרונות $Ax = 0$?

12. נתון: $A \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, כמה פתרונות יש ל- $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$?

20. נתון $A \in (Z_2)^{3 \times 5}$ (מטריצה מסדר 3×5 עם איברים ב- Z_2). למערכת $Ax = b$ יש בדיוק 8 פתרונות (כאשר $x \in (Z_2)^{5 \times 1}$, $b \in (Z_2)^{3 \times 1}$). הוכח או הפוך:

- (א) למערכת $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות.
 (ב) ☒ למערכת $Ax = 0$ בדיוק 8 פתרונות.
 (ג) ☐ למערכת $Ax = c$ תמיד יש פתרון (לכל $c \in (Z_2)^3$).
 (ד) קיים $c \in (Z_2)^3$ שעבורו למערכת $Ax = c$ יש אינסוף פתרונות.
 (ה) ☒ קיים $c \in (Z_2)^3$ שעבורו למערכת $Ax = c$ יש פתרון יחיד.

שאלה מספר 2

$$\begin{cases} x + by + bz + bw = a \\ x + (1+b)y + (a+b)z + 2bw = a + b \\ 2x + 2by + (a+2b)z + (a+2b)w = 3a \\ 3x + 3by + 3bz + (a+2b)w = 4a + 2 \end{cases}$$

לפניך מערכת משוואות מעל הממשיים:

כאן הנעלמים הם x, y, z, w ואילו a, b הם פרמטרים.

- א. עבור אילו ערכים של a ו- b יש למערכת פתרון יחיד?
 ב. עבור אילו ערכים של a ו- b יש למערכת אינסוף פתרונות, פרט מספר דרגות החופש לבחירה חופשית של הנעלמים על פי הערכים של a ו- b .
 ג. עבור אילו ערכים של a ו- b אין למערכת פתרון?
 26 מקודות (2 עבור הדרג ו-8 לכל חלק).

- ב. ☒ תהי A מטריצה ריבועית 9×9 מעל Z_5 . ידוע כי מספר הפתרונות של מערכת המשוואות $Ax = 0$ הוא גדול מ-40 וקטן מ-150. מהי דרגת המטריצה A ?

פרק 6 תרגיל 4

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-y+2z=b \\ x-5y+8z=c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -1 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2=R_2-3R_1 \\ R_3=R_3-R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & -7 & 11 & c-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{array} \right)$$

(א) פתרון יחיד \emptyset

(ב) אינסוף פתרונות $(r(A)=r(A|b)<n) \quad c-b+2a=0$

(ג) אין פתרון $(r(A)<r(A|b)) \quad c-b+2a \neq 0$

פרק 6 תרגיל 5

$$\begin{cases} x+ky+z=0 \\ kx+y+kz=0 \\ (k+1)x-y+z=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ k & 1 & k & 0 \\ k+1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2=R_2-kR_1 \\ R_3=R_3-(k+1)R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1-k(k+1) & -k & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=(1-k^2)R_3+(k^2+k+1)R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2+k & 0 \end{array} \right)$$

$$k=0: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A)=r(A|b)<n \rightarrow$ פתרון ∞

$$k=1: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A)=r(A|b)<n \rightarrow$ פתרון ∞

$$k \neq -1: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A)=r(A|b)<n \rightarrow$ פתרון ∞

תשובה: אינסוף פתרונות כאשר: $k=0, k=1, k \neq -1$

אין פתרון יחיד כאשר: $k \neq 0, k \neq 1, k \neq -1$

סדר 6, תרגיל 8

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 &= -1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_5 &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 7 & 6 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \\ R_4 = R_4 - 3R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_3 = R_3 - 2R_2 \\ R_4 = R_4 - 4R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R_4 = R_4 - R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$3 = r(A) = r(A|b) < n \rightarrow$ פתרון ∞
 ה' נתון - צריך להסתכל על שורה 3:
 ע' נכון - משוואת אינסוף פתרונות, נבחר $x_5 = 1$
 (רשימת משוואות צמודה 3)

סדר 6, תרגיל 11

$A \in F^{3 \times 4}$ קב"ה

(א) נתון - $r(A) = 1$. $Ax = 0$ כמה צימודים חופשיים יש למערכת ההומוגנית?

$$A \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A|b) < n = 4 \rightarrow$ אינסוף פתרונות
 זה 3 צימודים חופשיים
 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$

(ב) להסתכל על A ולנסות להשיג משהו. כמה פתרונות?
 2 צימודים חופשיים הפתרון $Ax = 0$?

$$A \begin{pmatrix} a & g & a & a \\ b & h & b & b \\ c & i & c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_1 + x_3 + x_4) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$x_1 + x_3 + x_4 = 0$ וכן $x_2 = 0$
 2 צימודים חופשיים

פסק 6 שאלה 12

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{נתון:}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3a + 7b + 9c + 2d = 3 \\ 3e + 7f + 9g + 2h = 7 \\ 3i + 7j + 9k + 2l = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

$r(A) = r(A|b) < n = 4$ \Rightarrow אין פתרון ייחודי. יש אינסוף פתרונות.

יש פתרון חופשי אחד w . ממשותקים $x=3, y=7, z=9, w$.

באחד הפתרונות יהיו מדוברות $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \\ w \end{pmatrix}$

פסק 6 שאלה 20

$$A \in (\mathbb{Z}_2)^{3 \times 5} \quad Ax = b \quad (x \in (\mathbb{Z}_2)^5, b \in (\mathbb{Z}_2)^3)$$

(א) $Ax=0$ או $Ax=c$ קיים פתרון ממשותקים \mathbb{Z}_2 כל. ישו לביטוי שפתרונות יש וזהו פתרון סופי לא אינסופי כי השדה \mathbb{Z}_2 סופי.

(ב) פתרונות $Ax=0$ כפיוק שמונה פתרונות - נתון.

נתון שפתרונות $Ax=b$ יש שמונה פתרונות, לפיכך $Ax=0$ אותו מספר פתרונות יש מה שמשמע ולכן צורה סגורה (כנראה).

(ג) צורה סגורה מתייחסת מספר הפתרונות מהם שדה סופי - מספר הפתרונות $2^{n-r(A)}$

התקרה למעלה $8 = 2^{3-r(A)}$, כלומר $r(A)=3$, מה שתייבז על יוקר

מפיתרון אחד כי $5 = r(A|b) = r(A) = 3 < n=5$ \Rightarrow אין פתרון ייחודי, פתרון

אין תחת שדה סופי על מספר כס של פתרונות, יוקר מאחד.

(ד) פתרונות $Ax=c$ תמיד יש פיתרון. צוהלל:

$$r(A) = 2 < r(A|b) = 3 \quad \rightarrow \quad \text{אין פיתרון במקרה זה}$$

אם $r(A) < r(A|b)$ אז אין פתרון. כלומר $r(A) < r(A|b)$ אז אין פתרון.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

תרגיל 9: 3 נק' B

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b & b & b & a \\ 1 & 1+b & a+b & 2b & a+b \\ 2 & 2b & a+2b & a+2b & 3a \\ 3 & 3b & 3b & a+2b & 4a+2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - 2R_1 \\ R_4 = R_4 - 3R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b & b & b & a \\ 0 & 1 & a & b & b \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a-b & a+2 \end{array} \right)$$

$$a=0 \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & b & b & b & a \\ 0 & 1 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 2 \end{array} \right)$$

$r(A) = r(A/b) < n$ איננו פתור

$$a=b \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & b & b & b & b \\ 0 & 1 & b & b & b \\ 0 & 0 & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array} \right)$$

$b = (-2) : r(A) = r(A/b) < n \rightarrow$ איננו פתור

$b \neq (-2) : r(A) = r(A/b) \rightarrow$ פתור

$a \neq b$ או $a=0$ איננו פתור

$3: r(A) = r(A/b) < n = 4 : a = b = (-2)$ איננו פתור

אם $a=b \neq (-2)$ אז פתור.

$a=b \neq (-2)$ איננו פתור

סדר 14 חמישי 2 תרגיל 3 ב'

תהי A מטריצה ריבועית 9×9 מעל \mathbb{Z}_5 . ידוע כי מספר הפתרונות של מערכת המשוואות $Ax=0$ הוא 40 וקטן מ- 150 . מהי צורת המטריצה A .

שלב ראשון: מנוסחה למציאת מספר הפתרונות של שדה סופי.

$$p^{n-r(A)} = 5^{9-r(A)}$$

$$40 < 5^{9-r(A)} < 150$$

מספר	$r(A)=9$	$40 < 5^0 < 150$	לא מתקיים
------	----------	------------------	-----------

מספר	$r(A)=8$	$40 < 5^1 < 150$	לא מתקיים
------	----------	------------------	-----------

מספר	$r(A)=7$	$40 < 5^2 < 150$	לא מתקיים
------	----------	------------------	-----------

מספר	$r(A)=6$	$40 < 5^3 < 150$	מתקיים ✓
------	----------	------------------	----------

מספר	$r(A)=5$	$40 < 5^4 < 150$	לא מתקיים
------	----------	------------------	-----------

לכן, הצורה היחידה פוטנציאלית של A היא 6 .