תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 2

פתרנות יתפרסמו באתר הקורס ב- 23.11.01.

<u>תרגיל 1</u>.
יהיה X מ"א מפולג $BIN(n,p)$. מצאו m כך ש-

$$P(X=m)=\max_k P(X=k).$$

<u>פתרון</u>.
נתבונן ביחס

$$\frac{P\big(X=k\big)}{P\big(X=k-1\big)}.$$

כאשר היחס גדול מ- 1, הפונקציה $f(k)=P(X=k)$ עולה, בעוד שכאשר היחס קטן מ-1 היא יורדת. איפו שהמגמה מתהפכת יהיה לפונקציה מכסימום מקומי. אם המקסימום יהיה רק אחד הוא יהיה גם המכסימום הגלובלי.

$$g_k=\frac{P\big(X=k\big)}{P\big(X=k-1\big)}=\frac{p(n-k+1)}{(1-p)k}.$$

לכן $g_k>1$ אם ורק אם $k<(n+1)p$, דהיינו $m=[(n+1)p]$. אם $(n+1)p$ הינו מספר שלם אזי

$$P(X=m)=P(X=m-1).$$

ציירו את הגרף שך $P(X=k)$ כפונקציה של k.

<u>תרגיל 2</u>.

(א) הסיקו מאי שויון קושי- שוורץ $E\left(|X|\cdot|Y|\right)\le\sqrt{E(X^2)\cdot E(Y^2)}$ כי עבור מ"א חיובי כלשהו Z מתקיים: $E(Z)\cdot E\left(\frac{1}{Z}\right)\ge 1$.

(ב) מתאי מתקיים השוויון ?

(ג) נניח שמספר זוכים בהגרלה מסויימת הוא משתנה אקראי עם תוחלת N. עוד נניח כי פרס כספי, נגיד 100 ש"ח, יחולק בין כל הזוכים באופן שווה. מה אפשר להגיד על סמך הנתונים האלה על תוחלת של חלקו של זוכה אחד ?

פתרון.

(א) נגדיר $X = 1/\sqrt{Z}$, $Y = \sqrt{Z}$ ונפעיל את אי שוויון קושי-שוורץ.

(ב) הוכח בהרצאות כי השוויון בקושי-שוורץ מתקיים אםם $P(Y=0)=1$ או קיימת $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $P(X=\lambda Y)$. לכן, במקרה הנדון השוויון אפשרי רק אם קיימת $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $P(Z=\lambda^2)=1$. דהינו, Z הוא משתנה אקראי מנוון, קבוע דטרמיניסטי בהסתברות 1.

(ג) $\frac{100}{N} \leq E\Big($חלקו של זוכה אחד$\Big)$. השוויון מתקיים רק אם מספר הזוכים הוא קבוע דטרמיניסטי N.

תרגיל 3.

יהיו X, Y שני משתנים אקראים בלתי תלוים מפולגים גאומטרית עם פרמטר p כל אחד, דהיינו $P(X=k) = P(Y=k) = (1-p)^{k-1}p,\ k \in \mathbb{N}$. חישבו את פונקצית ההסתברות של מ"א $W = |X-Y|$.

פתרון.

עבור $k=0$:

$$\begin{aligned}
P(W=k) &= 2P(Y-X=k) = 2\sum_{j=1}^{\infty} P(X=j)P(Y=k+j) = \\
&= 2\sum_{j=1}^{\infty} p^2 q^{j-1+k+j-1} = 2p^2q^k \sum_{j=1}^{\infty} (q^2)^{j-1} = \frac{2p^2q^k}{1-q^2} = \frac{2pq^k}{1+q}.
\end{aligned}$$

עבור $k>0$:

$$\begin{aligned}
P(W=0) &= P(X=Y) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X=j)P(Y=j) = p^2 \sum_{j=1}^{\infty} (q^2)^{j-1} = \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}.
\end{aligned}$$

תרגיל 4.

יהי N מ"א בעל צפיפות $P_N(n) = P(N=n) = c \cdot n2^{-n},\ n = 1, 2, \ldots$

(א) חישבו את הקבוע c,

(ב) חישבו את התוחלת $E(N)$.

פתרון.

(א)

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) = c\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} = \frac{c}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'\Big|_{x=1/2} = \\ &= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)'\Big|_{x=1/2} = 2c,\end{aligned}$$

כלומר $c = 1/2$.

(ב)

$$\begin{aligned}E(N) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N=n) = c\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n} = c\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)2^{-n} + \\ &+ c\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} = \frac{c}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)''\Big|_{x=1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) = \\ &= \frac{c}{4}\left(\frac{1}{1-x}\right)''\Big|_{x=1/2} + 1 = 4c + 1 = 3.\end{aligned}$$

תרגיל 5.

יהי $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ מרחב הסתברות. הוכיחו כי קיים לכל היותר מספר בר מנייה של נקודות $\omega \in \Omega$ עבורם מתקיים $P(\{\omega\}) > 0$.

פתרון.

נגדיר מאורעות $A = \{\omega : P(\omega) > 0\}$ ו- $A_n = \{\omega : P(\omega) > 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. אזי $A = \bigcup_n^\infty A_n$. מאחר ו- $P(A_n) \le 1$, נקבל: $|A_n| \le n$. מכאן, A היא איחוד בר מניה של קבוצות סופיות ולכן בת מנייה.

תרגיל 6.

יהיו X, Y שני מ"א המוגדרים באותו מרחב הסתברות. הוכיחו כי $P(\omega : X < Y) = 1$ גורר $P(Y \le x) \le P(X \le x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

פתרון.

באופן כללי, אם A מאורע ו- $P(A) = 1$ אזי $P(A^c) = 0$ וכלכ מאורע אחרת B נקבל:

$$P\left(B \bigcap A\right) = P(B) - P\left(B \bigcap A^c\right) = P(B).$$

לכן:

$$P\left(Y \le x\right) = P\left(Y \le x \bigcap X < Y\right) = P\left(X < Y \le x\right) \le P\left(X \le x\right).$$

<u>תרגיל 7</u>.
תנו דוגמה למרחב הסתברות סופי ושלושה מאורעות בלתי תלוים בו.

<u>פתרון</u> .
$\Omega = \{1, 2, \dots, 30\}$, $A_1 = \{\omega \in \Omega : \omega \vdots 2\}$, $A_2 = \{\omega \in \Omega : \omega \vdots 3\}$ ו-
$A_3 = \{\omega \in \Omega : \omega \vdots 5\}$. קל לבדוק כי $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ ו-
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, כלומר הקבוצות ב"ת על פי ההגדרה.
הדוגמה בנויה על העובדה ש- $2, 3, 5$ הם מספרים ראשוניים.