תרגיל בית 10

תאריך הגשה: יום חמישי, 16/1/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

א. יהיו g , f רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b) כך ש- $f(b)=g(b)$, $f(a)=g(a)$, וכך ש- $f'(x)\le g'(x)$ לכל $x\in(a,b)$. הוכיחו כי $f(x)=g(x)$ לכל $x\in[a,b]$.

נגדיר $h(x)=g(x)-f(x)$. מהנתונים h רציפה בקטע הסגור, רציפה בפתוח ומתאפסת בקצות הקטע. לכל $x\in(a,b)$, ממשפט לגרנז׳ קיימת $c\in(a,x)$ כך ש- $h'(c)=\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$, ומכיוון שהנגזרת חיובית והמכנה חיובי נובע כי $h(x)-h(a)=h(x)\ge 0$. באותו אופן, אם נסתכל על הקטע (x,b) נקבל כי $h(x)\le 0$, ולכן $h(x)=0$. זה מתקיים לכל $x\in(a,b)$, וגם בקצות הקטע, לכן $h(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$, כלומר $f(x)=g(x)$ בקטע הסגור.

ב. תהי f גזירה כך ש- $f'(x)\le\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ לכל x, ונתון כי $f(\sqrt{3})=2$, $f(2\sqrt{2})=3$. מצאו את $f(2)$.

נגדיר $g(x)=\sqrt{1+x^2}$, ונשים לב כי $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. בנוסף, $f(\sqrt{3})=2$, $g(2\sqrt{2})=3$, כלומר f , g מקיימות את תנאי סעיף א׳, ולכן נקבל ממנו כי $f(x)=g(x)$ ב- $[\sqrt{3},2\sqrt{2}]$, ובפרט $f(2)=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

שאלה 2:

הוכיחו כי $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\arctan x$ לכל $x>0$.

נגדיר $f(x)=\arctan x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. מתקיים $f(0)=0$, ולכל $x>0$ מתקיים:

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=0$, ולכן בקרן $(0,\infty)$ $f(x)$ עולה ממש, ומרציפות f נקבל כי f עולה ממש ב- $[0,\infty)$, כלומר $f(x)>f(0)=0$ לכל $x>0$.

שאלה 3:

א. הוכיחו כי למשוואה $\cos x=x$ קיים פיתרון יחיד x_0, וכי $x_0\in(0,1)$.

נגדיר $f(x)=x-\cos x$. מתקיים $f(1)=1-\cos 1>0$, $f(0)=-1<0$, לכן מרציפות f ב- $[0,1]$ וממשפט ערה״ב נקבל כי קיים לפחות שורש אחד x_0 ל- f ב- $(0,1)$. בנוסף, $f'(x)=1+\sin x\ge 0$, ולמעשה

$f'(x) > 0$ פרט לנקודות מהצורה $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, ולכן, מרציפות, f עולה ממש בכל $\mathbb{R}$ (כי הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת הן מבודדות, ובכל שאר הנקודות הנגזרת חיובית ממש), ולכן חח״ע, ולכן קיים לה לכל היותר שורש אחד, ולכן השורש שמצאנו בחלק הראשון הוא היחיד של f.

ב. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר $a_1 = \cos\alpha$, ולכל $n \geq 1$ נגדיר: $a_{n+1} = \cos a_n$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

הדרכה: השתמשו במשפטי גזירות כדי להעריך את $|a_n - x_0|$.

ראשית נשים לב כי מהגדרת הסדרה מתקיים כי לכל n, $a_n \in [-1,1]$, ומכיוון ש- $[-1,1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, נובע כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n \in (0,1]$, ולכן לכל $n \geq 3$ מתקיים $a_n \in (0,1)$.

אם קיים N כך ש- $a_N = x_0$, אז מכיוון ש- x_0 מקיים $\cos x_0 = x_0$, מתקיים כי לכל $n \geq N$, $a_n = x_0$, כלומר הסדרה קבועה החל מהמקום ה- N-י, ובפרט מתכנסת ל- x_0. נניח אם כן כי לכל n, $a_n \neq x_0$.

$\cos x$ רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$, ובפרט בכל קטע סגור, ולכן ממשפט לגרנז׳, לכל n קיים c_n הנמצא בין x_0 ל- a_n כך ש- $\frac{|a_{n+1}-x_0|}{|a_n-x_0|} = \frac{|\cos a_n - \cos x_0|}{|a_n - x_0|} = |(\cos c_n)'|$, כאשר $|(\cos c_n)'| = |\sin c_n|$. מכיוון שגם x_0 וגם a_n (ל- $n \geq 3$) נמצאים ב- $(0,1)$, גם $c_n \in (0,1)$, ומונוטוניות $\sin x$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ נקבל כי $\sin c_n \leq \sin 1 < 1$ לכל $n \geq 3$. נסמן $b_n = |a_n - x_0|$, אז קיבלנו כי $\frac{b_{n+1}}{b_n} = |\sin c_n| \leq \sin 1 < 1$, ולכן ממבחן המנה נקבל כי $b_n \to 0$, כלומר $a_n \to x_0$, כנדרש (שימו לב כי לא הנחנו ש- $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנסת, עצם העובדה כי הסדרה b_n מקיימת $0 \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} < q < 1$ מספיקה כדי שינבע ש- $b_n \to 0$).

שאלה 4:

יהיו f, g גזירות כך ש- $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי בין כל 2 שורשים של f קיים שורש של g, ובין כל 2 שורשים של g קיים שורש של f.

יהיו $x_1 < x_2$ 2 שורשים של f. נשים לב כי בהכרח $g(x_1), g(x_2) \neq 0$, כי אז היינו מקבלים, למשל עבור x_1, כי $f'(x_1)g(x_1) = 0 = f(x_1)g'(x_1)$, בסתירה לנתון. נניח בשלילה כי לא קיים שורש ל- g בקטע (x_1, x_2). מגזירות f ו- g זה גורר כי $\frac{f(x)}{g(x)}$ גזירה בקטע (x_1, x_2), ויחד עם אי-התאפסות g בקצות הקטע נקבל כי $\frac{f}{g}$ גם רציפה בקטע הסגור $[x_1, x_2]$. מכיוון ש- f מתאפסת בקצות הקטע, גם $\frac{f}{g}$ מתאפסת שם, ולכן ממשפט רול נקבל כי קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ שבה $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = 0$, כלומר $\frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)} = 0$, כלומר $f'(c)g(c) - f(c)g'(c) = 0$, בסתירה לנתון.

שאלה 5:

הוכיחו כי לכל $0 < a < b$ מתקיים:

א. $1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$.

נשתמש במשפט לגרנז׳ עבור $f(x)=\ln x$ בקטע $[a,b]$ ונקבל כי קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-
$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=f'(c)=\frac{1}{c}$. $\frac{1}{x}$ מונוטונית יורדת ב- $(0,\infty)$, לכן $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$, כלומר $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$, וע״י שימוש בכללי לוגים וכפל ב- $b-a>0$ נקבל: $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

ב. $\frac{1}{5b^5}<\frac{\ln b-\ln a}{b^5-a^5}<\frac{1}{5a^5}$.

x^5 היא פונקציה עולה ממש, לכן אם $0<a<b$ אז גם $0<a^5<b^5$. כמו בסעיף א׳, נפעיל את משפט לגרנז׳ על הפונקציה $\ln x$ בקטע $[a^5,b^5]$, ונקבל $\frac{1}{b^5}<\frac{\ln b^5-\ln a^5}{b^5-a^5}<\frac{1}{a^5}$. שימוש בכללי לוגים וחלוקה ב- 5 יתנו את הדרוש.

שאלה 6:

א. הוכיחו כי למשוואה $e^x=x+2$ יש בדיוק 2 פתרונות בקטע $[-2,2]$, אחד חיובי ואחד שלילי.

נגדיר $f(x)=e^x-x-2$. f רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ ולכן בכל קטע סגור. מתקיים:
$f(0)=-1<0$, $f(-2)=e^{-2}>0$, $f(2)=e^2-4>0$. לכן מערה״ב קיים שורש ל- f ב- $(-2,0)$ וקיים שורש ב- $(0,2)$. בנוסף, $f'(x)=e^x-1$, לכן $f''(x)=e^x>0$, כלומר הנגזרת השניה לא מתאפסת, ולכן ממשפט רול ל- f' יש לכל היותר שורש אחד, ושוב ממשפט רול זה גורר כי ל- f יש לכל היותר 2 שורשים, ולכן השורשים שמצאנו הם היחידים.

ב. כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $x^4=1-2x$?

נסמן $f(x)=x^4+2x-1$. f רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ ובפרט בכל קטע סגור. מתקיים: $f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$, $f(-2)=11>0$, לכן מערה״ב קיימים שורש אחד ב- $(0,1)$ ושורש אחד ב- $(-2,0)$. בנוסף, $f'(x)=4x^3+2$, ולכן $f''(x)=12x^2$, כלומר $f''(x)>0$ פרט ל- 0 (וכמובן רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$), לכן f' עולה ממש בכל $\mathbb{R}$, בפרט חח״ע, ולכן ל- f' יש לכל היותר שורש אחד, ולכן ממשפט רול ל- f יש לכל היותר 2 שורשים, ולכן השורשים שמצאנו הם היחידים, כלומר ל- f בדיוק 2 שורשים.

שאלה 7:

תהי f גזירה בסביבה של 0, כך ש- f' רציפה ב- 0, ונתון כי קיימת סדרה $0<x_n\to 0$ כך ש- $f(x_n)f(x_{n+1})<0$ לכל n. הוכיחו כי $f(0)=f'(0)=0$.

נוכל להניח כי לכל n, x_n נמצא בסביבה של 0 שבה f גזירה, אחרת נזרוק את כל האיברים הראשונים בסדרה עד שזה מתקיים (זה בהכרח מתקיים החל ממקום מסוים כי $x_n\to 0$). מהנתון נובע כי לכל n, אחד מתוך $f(x_{n+1})$, $f(x_n)$ חיובי והשני שלילי, ולכן ממשפט ערה״ב (שתנאיו מתקיימים מרציפות f בסביבה של 0) לכל n קיים c_n בין x_n ל- x_{n+1} המקיים $f(c_n)=0$. כעת, ממשפט רול (תנאיו מתקיימים מגזירות f בסביבה של 0), לכל n קיים d_n הנמצא בין c_n ל- c_{n+1} כך ש-

$f'(d_n)=0$. מכיוון שלכל n, $|c_n| \le \max\{|x_n|,|x_{n+1}|\}$, מתקיים כי $c_n \to 0$, ובאותו אופן מתקיים גם כי $d_n \to 0$.
מרציפות f ב- 0 נקבל כי $f(0)=\lim_{n\to\infty} f(c_n)=0$, ומרציפות f' ב- 0 נקבל כי $f'(0)=\lim_{n\to\infty} f'(d_n)=0$.

שאלה 8:

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$\cos x>0$ בסביבה של 0, לכן נוכל לרשום: $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln \cos x^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\frac{\ln\cos x}{x^2}}$. שימוש בלופיטל עבור החזקה (זהו גבול מהצורה "$\frac{0}{0}$") נותן כי החזקה שואפת ל- $\frac{\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{2x}=-\frac{1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\to -\frac{1}{2}$, לכן מרציפות e^t נקבל כי הגבול המקורי הוא $e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

ב. $\lim_{x\to 0^+}(\ln x+\cot x)$.

$\ln x+\cot x=\ln x+\ln e^{\cot x}=\ln xe^{\cot x}=\ln\frac{e^{\cot x}}{\frac{1}{x}}$. שימוש בלופיטל עבור הגבול שבתוך ה- ln נותן $\frac{e^{\cot x}.\left(-\frac{1}{sin^2(x)}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=e^{\cot x}\cdot\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\to\infty$ (הביטוי האחרון שואף ל- ∞ כי $\cot x\to\infty$ כאשר $x\to 0^+$).
מרציפות ln נקבל כי גם הביטוי כולו שואף ל- ∞ כאשר $x\to 0^+$.

ג. חשבו ללא לופיטל: $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$ עבור $a>0$.

מתקיים: $\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^0}{\frac{1}{x}}=x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$. נציב $t=\frac{1}{x}$, ואז $t\to 0^+ \Leftrightarrow x\to\infty$, לכן $\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-a^0}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-a^0}{t}$. הגבול האחרון הוא הגדרת הנגזרת של a^x ב- $x=0$, ולכן הגבול הוא $\ln a\cdot a^0=\ln a$.

ד. חשבו ללא לופיטל: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{xe^x}-\frac{1}{x}\right)$.

מתקיים: $\frac{\frac{\cos x-e^x}{e^x}-0}{x}=\frac{\cos x-e^x}{xe^x}=\frac{\cos x}{xe^x}-\frac{1}{x}$. הגבול האחרון הוא הגדרת הנגזרת עבור $f(x)=\frac{\cos x-e^x}{e^x}$ ב- $x=0$, וזו פונקציה גזירה בכל $\mathbb{R}$ המקיימת $f'(x)=\frac{(-\sin x-e^x)e^x-(\cos x-e^x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-\sin x-\cos x}{e^x}$. בפרט, ב- $x=0$ נקבל $f'(0)=-1$, ולכן זהו הגבול המבוקש.