אלגברה ב' - פתרון גליון 9

♠ תרגיל 1

נזכור שתת-חבורה היא נורמלית אם"ם היא מהווה איחוד של מחלקות-צמידות.
תהי $\sigma \in S_n$ תמורה כלשהי, ונרשום פירוק שלה כמכפלה של מעגלים זרים - $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$. נרשום $l_i = o(\tau_i)$ לכל $1 \le i \le k$, ונתאים לתמורה σ את הסדרה $(l_1, \ldots, l_k)$; סדרה זו היא המבנה המעגלי של σ, ואנו יודעים ששתי תמורות צמודות ב-S_n אם"ם יש להן אותו מבנה מעגלי.
מחלקות-הצמידות של S_4 מאופיינות, אם-כן, ע"י המבנים המעגליים

$$(1,1,1,1), (1,1,2), (1,3), (4), (2,2).$$

מבין כל אלה, רק התמורות עם מבנה $(1,1,2)$ הן תמורות אי-זוגיות, וזוהי, למעשה, הוכחה לנורמליות של A_4. נשים לב גם לכך שכל האיברים מטיפוס $(2,2)$ הם תמורות זוגיות מסדר 2, ואפשר לוודא שביחד עם איבר היחידה הם מהווים תת-חבורה נורמלית של S_4:

$$V \triangleq \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

הנורמליות מיידית, מכיוון ש-V הוגדרה להיות איחוד של מחלקות-צמידות.
אנו טוענים שאין ל-S_4 תת-חבורות נורמליות נוספות (פרט לטריוויאליות) המוכלות ב-A_4: אכן, אם תת-חבורה של A_4 מכילה מעגל באורך 3 והיא נורמלית ב-S_4, אזי היא מכילה את כל המעגלים באורך 3, ולכן היא בדיוק A_4. אם תת-חבורה של A_4 איננה מכילה 3-מעגלים, אזי היא מוכלת ב-V, ואז הנורמליות שלה ב-S_4 מכריחה אותה להכיל את כל איברי V.
כעת, אם H נורמלית ב-S_4 ומכילה תמורה איזוגית, אז היא מכילה טרנספוזיציה (ראו מבנים מעגליים ב-S_4), והנורמליות שלה מאפשרת להסיק שהיא מכילה את כל הטרנספוזיציות, ומכאן $H = S_4$.
ב-A_4 התמונה קצת שונה, שכן מחלקות-הצמידות שלה הן:

$$\{id\}, \{(12)(34), (23)(14), (13)(24)\},$$
$$\{(123), (124), (134), (234)\}, \{(132), (142), (143), (243)\}.$$

תת-החבורה V עדיין נורמלית מינימלית (כל תת-חבורה לא-טריויאלית שלה איננה נורמלית), אולם מחלקת-הצמידות של המעגלים מאורך 3 התפצלה לשתי מחלקות. כאן, הסדר של תת-חבורה נורמלית צריך גם לחלק את $|A_4| = 12$, וגם להתפרק לסכום של המספרים $1, 3, 4, 4$ - גדלי מחלקות-הצמידות, והדבר אפשרי רק עבור תת-החבורה V. בפרט, החבורה $\langle (12)(34) \rangle$ נורמלית ב-V, V נורמלית ב-A_4, אולם החבורה הקטנה לא נורמלית ב-A_4.

♠ תרגיל 2 (על פי הוכחה של **Burnside**)

יהי $n \ge 5$, ונניח ש-$H \triangleleft A_n$. הרעיון הוא להוכיח ש-H מכילה מעגל באורך 3. בשלב הבא נוכיח, שבניגוד למצב עבור $n = 4$, מחלקת כל המעגלים באורך 3 היא מחלקת-צמידות של A_n. תחילה אל השלב השני: יהא $(abc) \in A_n$ מעגל, ותהי $\sigma \in S_n$ תמורה כלשהי המקיימת $\sigma(1) = a, \sigma(2) = b, \sigma(3) = c$. אזי אחת משתי התמורות הבאות היא תמורה זוגית:

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = (\sigma(4)\,\sigma(5)) \cdot \sigma.$$

שתיהן מקיימות את הדרישה $\sigma\cdot(123)\cdot\sigma^{-1}=(abc)$, ולכן האיברים $(123),(abc)\in A_n$ צמודים ב-A_n.
כעת נצטמצם למקרה $n=5$, ונראה ש-H מכילה מעגל באורך 3. המבנים המעגליים בחבורה A_5 הם $(1,1,1,1,1),(1,1,3),(1,2,2)$. אם אין מעגלים משולשים ב-H, אז ניקח שתי תמורות שונות מטיפוס $(1,2,2)$ ב-H. ניתן להצמידן ע"י תמורות זוגיות לתמורות $(12)(34),(12)(35)$, ואנו מסיקים שאלו האחרונות גם ב-H; השתמשנו כאן בעובדה שלכל שלשה (a,b,c) של סימבולים ניתן למצוא תמורה $\sigma\in A_5$, המקיימת $\sigma(1)=a,\sigma(2)=b,\sigma(3)=c$.
כעת, נותר רק לחשב ולראות ש-

$$(345)=\underbrace{(12)(34)}\,\underbrace{(12)(35)}\,\underbrace{(12)(34)}\,\underbrace{(12)(35)}\in H.$$

♠ תרגיל 3

לכל מטריצה ממשית A עם מקדמים אי-שליליים נאמר שהמקום ה-(i,j) של A הוא מינימום ב-A, אם הוא המינימלי בין האיברים החיוביים של A. כעת, נניח כי A היא מטריצה דו-סטוכסטית כלשהי, וכי A_{ij} הוא מינימום של A. נניח שקיים אלכסון מוכלל של A המורכב כולו מאיברים חיוביים; אזי נוכל להתאים לאלכסון מוכלל זה מטריצת פרמוטציה B, ולרשום

$$A=A_{ij}B+A',$$

כאשר A' היא מטריצה בעלת סכומי-שורה=סכומי-עמודה קבועים. אם הסכומים הנ"ל שווים לאפס, הרי שהמטריצה המקורית A שווה ל-B_1. אם לא - ניתן לבנות מטריצה דו-סטוכסטית חדשה A_1, שהיא $A_1=\frac{1}{1-A_{ij}}A'$, ונקבל -

$$A=A_{ij}B_1+(1-A_{ij})A_1.$$

תהליך זה (המעבר $A\mapsto A_1$) מגדיל את מספר האפסים במטריצה, ולכן, אם מפעילים אותו מספר רב של פעמים הוא חייב להיעצר (בתנאי שאינו נתקע, כלומר: בתנאי שתמיד ניתן למצוא אלכסון מוכלל חיובי המכיל איבר-מינימום), ונקבל הצגה של A כצירוף קמור של מטריצות פרמוטציה.
נותר להוכיח שאם A_{ij} הוא איבר מינימום במטריצה (דו-סטוכסטית) A, אז קיים אלכסון מוכלל חיובי במטריצה, המכיל איבר זה. בהצלחה! (רמז: לקבלת אינטואיציה, פרקו את המטריצה הבאה תוך שימוש באלגוריתם שתיארתי -)

$$\frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix}3&2&7\\2&6&4\\7&4&1\end{bmatrix}$$

♠ תרגיל 4

נשים לב לכך ש-A היא מטריצה חיובית - כלומר: מטריצה של מכפלה פנימית - ואילו B מטר-יצה סימטרית. נוכל להתייחס לשתיהן כאל תבניות ביליניאריות סימטריות, ולהביא את A לצורה

אלכסונית סטנדרטית (I); בו-זמנית, נראה כיצד משפיע שינוי הבסיס הנ"ל על התבנית B.
המטריצה P_1 שלהלן מקיימת את הדרישה $P_1AP_1^T = I$:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad P_1BP_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

כעת נוכל למצוא מטריצה אורתוגונלית P_2, שתקיים $P_2(P_1BP_1^T)P_2^* = D$, כאשר D אלכסונית, ונשים לב לכך ש-

$$P_2(P_1AP_1^T)P_2^* = P_2IP_2^* = I,$$

כנדרש.