מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 5

1 משפט נקודת השבת של בנך

משפט 1.1 (נקודת השבת של בנך) יהי X מרחב מטרי שלם, ותהי $f : X \to X$ פונקציה מכווצת. כלומר, קיים $0 < q < 1$ כך ש-

$$\forall x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$$

אז ל-f יש נקודת שבת יחידה. כלומר קיימת נקודה יחידה $a \in X$ כך ש-$f(a) = a$.

הוכחה: יחידות: נניח $a, b \in X$ נקודות שבת של f, אז $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq qd(a, b)$. מצד שני $0 < q < 1$ לכן $d(a, b) = 0$ כלומר $a = b$.

קיום: נבחר $x_0 \in X$, נסתכל על הסדרה $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, נוכיח:

1. סדרת קושי:
   נשים לב שלכל $n, p \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
d(f^n(x), f^{n+p}(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \ldots + d(f^{n+p-1}(x), f^{n+p}(x)) \\
&\leq q^n d(x, f(x)) + \ldots q^{n+p-1} d(x, f(x)) \\
&= d(x, f(x)) \cdot (q^n + ... + q^{n+p-1}) \\
&= d(x, f(x)) \cdot q^n (1 + ... + q^{p-1}) \\
&\leq d(x, f(x)) \cdot q^n \frac{1}{1-q}
\end{aligned}$$

   כאשר הביטוי האחרון שואף ל-0 כאשר $n \to \infty$ (בלי תלות ב-p), לכן זו סדרת קושי.

2. X מרחב שלם, לכן יש לה גבול, נסמנו ב-a.
   נראה ש-a אכן נקודת שבת. כלומר צריך להראות ש-$f(a) = a$:
   אבל ידוע לנו ש-$f^n(x_0) \to a$, ומרציפות f (f ליפשיצית ולכן בפרט רציפה) ניתן להפעיל את f על הגבול ולקבל ש-$f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) \to f(a)$. מיחידות הגבול נקבל $a = f(a)$.

■

הערה 1.2 ממשפט נקודת השבת של בנך ניתן להסיק את משפט הקיום והיחידות של פתרון למד"ר:

משפט 1.3 למד"ר הבאה יש פתרון יחיד בסביבה של t_0:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

כאשר הפונקציה f ליפשיצית רציפה ב-y, ורציפה ב-t.

הוכחה: (הסבר) נגדיר את האופרטור

$$F(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

אם $y(t)$ הוא פתרון אז הוא למעשה נקודת שבת של האופרטור F (כלומר $F(y) = y$), את הסביבה של t_0 שבה הפתרון יוגדר בוחרים כך שהאופרטור F יהיה מכווץ חזק. ואז לפי משפט נקודת השבת של בנך מקבלים נקודת שבת $y(t)$ במרחב הפונקציות. נראה זאת בדוגמה הבאה: ■

טענה 1.4 קיים פתרון ב-$C((-1,1), \mathbb{R})$ למערכת הבאה:

$$\begin{cases} y'(x) = \sin y(x) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

הוכחה: יהי $0 \le \epsilon < 1$ כלשהו, נראה שיש פתרון יחיד ב-$X = C([-\epsilon, \epsilon], \mathbb{R})$. נגדיר את האופרטור $F : X \to X$ על ידי

$$F(y)(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \sin y(t)dt$$

נראה ש-F מכווץ חזק: לכל $y_1, y_2 \in X$ מתקיים

$$\begin{aligned} \|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty &= \sup_{|x|\le\epsilon} |\int_0^x \sin y_1(t) - \sin y_2(t)dt| \\ &= \sup_{|x|\le\epsilon} \int_0^x |\sin y_1(t) - \sin y_2(t)|dt \\ &\le \sup_{|x|\le\epsilon} \int_0^x |y_1(t) - y_2(t)|dt \\ &\le \sup_x \int_0^x \|y_1 - y_2\|_\infty dt \\ &\le \epsilon \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

לכן, לפי משפט נקודת השבת של בנך יש פתרון יחיד. ■

תרגיל: קיימת תת קבוצה יחידה $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה, סגורה, חסומה המקיימת $A = \left(\frac{1}{3}A\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A\right)$. הוכחה: נסתכל על המרחב $X = \mathcal{F}_b(\mathbb{R})$ של קבוצות סגורות חסומות לא ריקות, עם מטריקת האוסדורף. ראינו ש-(X, d_H) מרחב מטרי שלם. נסתכל על האופרטור

$$F : \mathcal{F}_b(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}_b(\mathbb{R})$$

המוגדרת על ידי

$$F(A) = \left(\frac{1}{3}A\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A\right)$$

נשים לב ש-F מוגדרת היטב (כלומר, תמונה של קבוצה סגורה חסומה ולא ריקה היא גם סגורה חסומה ולא ריקה). ושהיא מכווצת עם קבוע כיווץ $q = \frac{1}{3}$. אזי לפי משפט נקודת השבת של בנך קיימת נקודת שבת יחידה כנדרש. ■

הקבוצה הנ"ל היא קבוצת קנטור $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$. המוגדרת על ידי

$$\mathcal{C} = \{x \in [0,1] \,|\, \exists x_i \in \{0,2\} : (x)_3 = 0.x_1x_2x_3\ldots\}$$

כאשר $(x)_3$ הוא הייצוג בבסיס 3 של x.
ומוגדרת גם כחיתוך של איטרציות של F על הקטע $[0,1]$. כלומר,

$$\mathcal{C} = \bigcap_n F^n([0,1])$$