האינטגרל המסויים

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה חסומה המוגדרת על קטע $[a,b]$. חלוקה T של הקטע היא אוסף של נקודות

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

נסמן $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$. הפרמטר של החלוקה הוא אורך התת קטע הארוך ביותר, כלומר

$$\Delta(T) = \max_{1\le k\le n} (x_k - x_{k-1}) = \max_{1\le k\le n} \Delta_k.$$

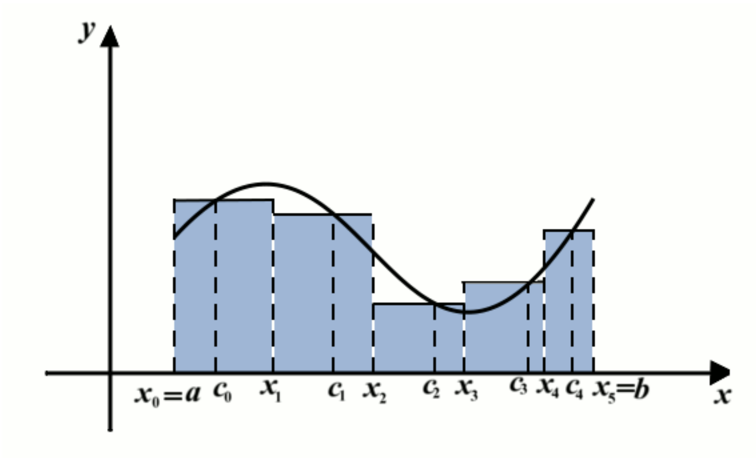
בהנתן בחירה של נקודות $c_1, c_2, \ldots, c_2$ עבורן

$$a = x_0 \le c_1 \le x_1 \le c_2 \le x_2 \le c_3 \le \cdots < x_{n-1} \le c_n \le x_n = b$$

(כלומר אנו בוחרים נקודה c_k מהקטע $[x_{k-1}, x_k]$), הסכום

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_1)(x_1-x_0)+f(c_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(c_n)(x_n-x_{n-1})$$

נקרא סכום רימן של f המתאים לחלוקה T של הקטע $[a,b]$ ולבחירת הנקודות $c_1, \ldots, c_n$.
למשל עבור $n = 5$ ובחירת נקודות מסויימת נקבל את הציור



נאמר כי פונקציה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם קיים מספר (סופי) I עבורו

$$\lim_{\Delta(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k = I$$

כאשר הגבול אינו תלוי בבחירת הנקודות c_k (שבעצמו תלוי בחלוקה T). ברישום מדוייק יותר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T של הקטע $[a,b]$ המקיימת $\Delta(T) < \delta$, ולכל בחירה של נקודות c_k, מתקיים

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta_k - I \right| < \varepsilon.$$

פונקציות f עבורן הגבול קיים נקראות פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע $[a,b]$ ונסמן

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

הערה: האינטגרל המסויים אינו השטח בין גרף הפונקציה לבין ציר x. השטח שהאינטגרל "סופר" הוא שטח עם סימן. כלומר, את החלק של הגרף שמעל ציר x, האינטגרל סופר כשטח חיובי, אבל את

השטח בין החלק של הגרף במתחת לציר x, האינטגרל המסויים "סופר" כשלילי. כך שאפשר לחשוב על האינטגרל המסויים כשטח "עם סימן".

משפט: הפונקציות הבאות הם פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע $[a,b]$.
1. פונקציות רציפות.
2. פונקציות מונוטוניות.
3. פונקציות רציפות למקוטעין או מונוטוניות למקוטעין.

תכונות האינטגרל המסויים

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

$$f\geq 0:\quad \int_a^b f(x)dx\geq 0$$

$$\text{רציפה } f,\quad f\geq 0,\quad f\neq 0:\quad \int_a^b f(x)dx>0$$

$$f\leq g:\quad \int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

$$\text{רציפות } f,g,\quad f\leq g,\quad f\neq g:\quad \int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$$

$$m\leq f\leq M:\quad m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$\text{פרט למספר סופי של נקודות } f(x)=g(x):\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

משפט: תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע I ותהי $a\in I$. נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.
1. $F(x)$ פונקציה רציפה בקטע I.
2. **[המשפט היסודי של החדו"א]** אם x_0 נקודה אשר f רציפה בה אזי F גזירה בה ומתקיים

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'\Big|_{x=x_0}=F'(x_0)=f(x_0)$$

*3. אם $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ קיים אזי $F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)$.
*4. אם $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ קיים אזי $F'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$.
5. אם f רציפה בקטע I, אז F פונקציה קדומה של f. כלומר $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

6. **[נוסחת ניוטון לייבניץ]** אם $a,b\in I$ כאשר $a<b$, וגם f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ו־G פונקציה קדומה של f אז

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b)-G(a)$$

7. אם f רציפה ו־$b(x)$ פונקציה גזירה אזי

$$\left(\int_a^{b(x)} f(t)dt\right)' = f\big(b(x)\big)b'(x)$$

8. אם f רציפה ו־$a(x),b(x)$ פונקציות גזירות אזי

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right)' = f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x)$$

הערה: עד למשפט זה לא היה קשר בין האינטגרל הלא מסויים והאינטגרל המסויים, חוץ מהדמיון בשם. המשפט היסודי ונוסחת ניוטון־לייבניץ נותנות את הקשר בין המושגים.

נוסחת אינטגרציה בחלקים עבור האינטגרל המסויים:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

נוסחת החלפת משתנים באינטגרל המסויים: אם ההצבה היא $x=g(t)$ ו־$a=g(\alpha), b=g(\beta)$ אזי

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)g'(t)dt.$$

אם $b=g(\alpha), a=g(\beta)$ אז

$$\int_{g(\beta)}^{g(\alpha)} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f\big(g(t)\big)g'(t)dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)g'(t)dt.$$

נוסחת שטח בין גרפים של פונקציות $f(x),g(x)$ שמעל הקטע $[a,b]$:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx = \int_{\{a\le x\le b|f(x)\ge g(x)\}} f(x)-g(x)dx + \int_{\{a\le x\le b|g(x)\ge f(x)\}} g(x)-f(x)dx.$$

נוסחת סכום רימן עם בחירת נקודות מסויימת (עבור פונקציה אינטגרבילית):

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(b\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(b\frac{k}{n}\right).$$

שאלה: האם נכון כי

$$\int_0^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(b\frac{k}{n}\right)$$

תרגיל: מצאו

$$\int_0^2 \frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx$$

פתרון: נשתמש באינטגרציה של פונקציה רציונלית ובניוטון לייבניץ: המכנה אי פריק ולכן

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx &= \int_0^2 \frac{2x+4+1}{x^2+4x+5}dx = \int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+5}dx = \\ &= \ln\left|x^2+4x+5\right|\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \ln 17 - \ln 5 + \arctan(x+2)\Big|_0^2 = \\ &= \ln 17 - \ln 5 + \arctan(4) - \arctan(2) \end{aligned}$$

תרגיל:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$$

פתרון: נשתמש בהצבה $x = \sin t,\ t = \arcsin x,\ dx = \cos t dt$. במקרה זה צריך להתחשב בגבולות האינטגרל. כאשר $x = 0$ אזי $t = 0$ וכאשר $x = 1$ אזי $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin t\cos t\big)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

שיטה נוספת שאפשר להשתמש בה היא לעשות את האינטגרל הלא מסויים בנפרד ואז מקבלים עם אותה ההצבה כי

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}dx = \frac{t}{8} - \frac{1}{32}\sin 4t + c = \frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{32}\sin\big(4\arcsin x\big) + c$$

ואז לפי ניוטון לייבניץ

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{32}\sin\big(4\arcsin x\big)\Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{8}\arcsin 1 - \frac{1}{32}\sin\big(4\arcsin 1\big) - \left(\frac{1}{8}\arcsin 0 - \frac{1}{32}\sin\big(4\arcsin 0\big)\right) = \\ &= \frac{1}{8}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{32}\sin\left(4\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

שיטה זו יותר נוחה כי לא צריך לגרור את גבולות האינטגרציה בהצבות, מה שצריך לעשות אם משתמשים בשיטה הראשונה.

תרגיל: מצאו

$$\int_1^e x\ln x dx$$

פתרון:

$$\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4}\Big|_1^e\right) = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

$f'(x) = x \quad g(x) = \ln x$

$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad g'(x) = \frac{1}{x}$

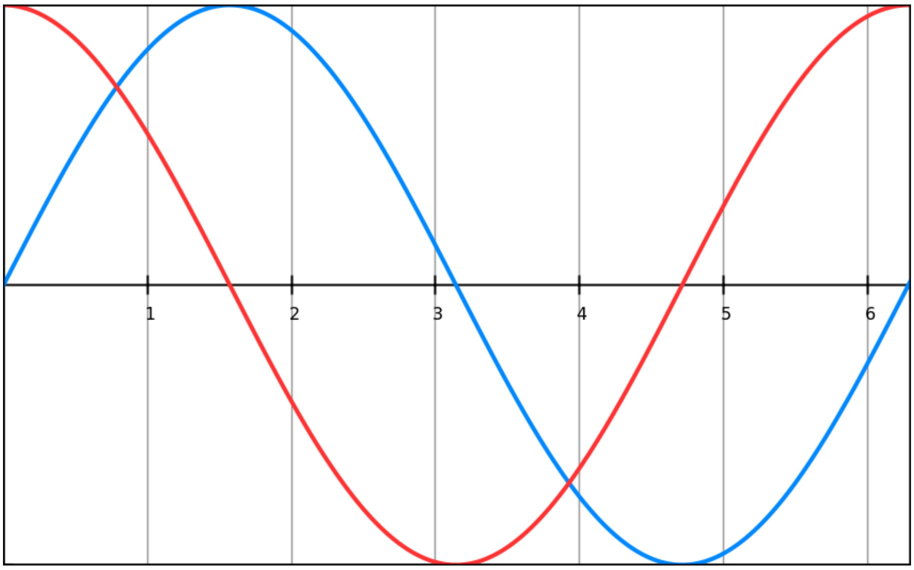
תרגיל: חשבו את השטח בין הגרפים של הפונקציות $\sin x, \cos x$ כאשר הגרפים הם מעל הקטע $[0, 2\pi]$.
פתרון: נזכר כי הנוסחא של שטח בין גרפים של פונקציות f, g הוא

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

ולכן מה מעניין אותנו הוא האינטגרל

$$\int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|dx$$

בשביל לחשב אינטגרל זה נצטרך לברר באיזה תחומים אחת הפונקציה גדולה מהשנייה:



אנו יודעים כי $\cos x \geq \sin x$ בקטע $[0, \frac{\pi}{4}]$.
$\sin x \geq \cos x$ בקטע $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.
$\cos x \geq \sin x$ בקטע $[\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$.
לכן

$$\int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - \cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x - \cos x|dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} |\sin x - \cos x|dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x - \cos x dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \cos x - \sin x dx =$$
$$= \sin x + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(-\cos x - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\right) + \left(\sin x + \cos x\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$$

תרגיל בית: חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

תרגיל: נסתכל על הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} [x^2] & 1 \leq x < 1.5 \\ 2 - x & 1.5 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

הסבירו מדוע היא אינטגרבילית בקטע $[1,3]$ וחשבו את $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

<u>**פתרון:**</u> נרשום את הפונקציה בצורה קצת יותר מפורטת ונוחה לשימוש:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x<\sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2}\le x<1.5 \\ 2-x & 1.5\le x\le 3 \end{cases}$$

כיוון ש־f רציפה למקוטעין בקטע $[1,3]$ אזי היא אינטגרבילית בו.

נחשב את $F(x)$ גם לפי מקרים:

מקרה 1: $1\le x<\sqrt{2}$:

$$\int_1^x f(t)dt=\int 1dt=x-1$$

מקרה 2: $\sqrt{2}\le x<1.5$: נשים לב כי במקרה זה באינטגרל $\int_1^x f(t)dt$ משתנה האינטגרציה t "רץ" בין $1,x$ ולכן $f(t)$ יכול לקבל את הערך 1 או 2. שזה לא טוב. אז נפריד את האינטגרל לשני מחוברים שבכל אחד מהם בנפרד לא תהיה את הבעיה הזו:

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^{\sqrt{2}} f(t)dt+\int_{\sqrt{2}}^x f(t)dt=\int_1^{\sqrt{2}} 1dt+\int_{\sqrt{2}}^x 2dt=\sqrt{2}-1+2\big(x-\sqrt{2}\big)$$

מקרה 3: $1.5\le x\le 3$: מאותו שיקול כמו במקרה הקודם, נפצל את האינטגרל לשלושה מחוברים:

$$\int_1^x f(t)dt=\int_1^{\sqrt{2}} f(t)dt+\int_{\sqrt{2}}^{1.5} f(t)dt+\int_{1.5}^x f(t)dt=\int_1^{\sqrt{2}} 1dt+\int_{\sqrt{2}}^{1.5} 2dt+\int_{1.5}^x (2-t)dt=$$
$$=\quad \sqrt{2}-1+2\big(1.5-\sqrt{2}\big)+\left(2t-\frac{t^2}{2}\Big|_{1.5}^x\right)=2-\sqrt{2}+3-\frac{9}{8}-2x+\frac{x^2}{2}=\frac{31}{8}-\sqrt{2}-2x+\frac{x^2}{2}$$

לסיכום:

$$F(x)=\begin{cases} x-1 & 1\le x<\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1+2\big(x-\sqrt{2}\big) & \sqrt{2}\le x<1.5 \\ \frac{31}{8}-\sqrt{2}-2x+\frac{x^2}{2} & 1.5\le x\le 3 \end{cases}$$

<u>**תרגיל בית:**</u> האם $F(x)$ גזירה בקטע $[1,3]$?

<u>**תרגיל:**</u> חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

<u>**פתרון:**</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\cos\frac{0\cdot\pi}{2n}+\cos\frac{1\cdot\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{n}\right)=\frac{4}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{n}\right)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{4}{\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

הלך המחשבה: כאשר אנו רואים ביטוי מהצורה

$$\frac{2}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

נסתכל עליו כך

$$\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\cos\frac{\pi}{2n}+\frac{2}{n}\cos\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\frac{2}{n}\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

ופה יש לנו בעצם n מחוברים שכל אחד בנפרד שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף. מעין סוג של אפס כפול אינסוף. במקרה זה נחשוב על הנוסחאות

$$\int_0^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(b\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(b\frac{k}{n}\right)$$

במצב כזה, מחפשים להוציא כגורם משותף את $\frac{1}{n}$. בתרגיל זה זה היה כבר נתון. אחרי זה, בתוך הביטוי בסכום שנשאר, מחפשים לקבל מספר כפול $\frac{k}{n}$. המספר נותן את b. ברגע שיש את b, מכפילים ומחלקים את $\frac{1}{n}$ במספר כדי לקבל $\frac{b}{n}$. כל מספר אחר אפשר להוציא מחוץ לגבול. בשלב זה אמור להיות צורה נוחה לשימוש בנוסחאות ואז רק צריך לפתור אינטגרל מסוים.

<u>תרגיל:</u> חשבו

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

<u>פתרון:</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=$$
$$=\arctan x\Big|_0^1=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}$$

<u>תרגיל בית:</u> חשבו את הגבולות

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו, אם קיים

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt}{\int_0^{\tan x}e^{t^4}dt}$$

<u>פתרון:</u> נשים לב כי הפונקציה $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$ גזירה ורציפה כי היא אינטגרל של פונקציה רציפה. לכן גם

$$F(\sin x)=\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt$$

גזירה ורציפה כיוון שהרכבה של גזירות, ולכן

$$\lim_{x\to\pi}\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt=\int_0^{\sin\pi}e^{t^2}dt=\int_0^{0}e^{t^2}dt=0$$

באופן דומה גם המכנה שואף לאפס ולכן אפשר להשתמש בלופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt}{\int_0^{\tan x}e^{t^4}dt}\overset{(L)}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin^2 x}\cos x}{e^{\tan^4 x}\frac{1}{\cos^2 x}}=-1$$

תרגיל: חשבו, אם קיים

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}$$

פתרון: באופן דומה לתרגיל הקודם, המונה וגם המכנה שואפים לאפס ולכן אפשר להשתמש בלופיטל ונקבל

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x^2}2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x^2}}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin|x|}{x}$$

מכיוון ש־

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

ובאופן דומה

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(-x)}{x}=-1$$

אז הגבול

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin|x|}{x}$$

אינו קיים. זה לא אומר שהגבול המקורי אינו קיים, אבל במקרה זה, ע"י מעבר לגבולות חד צדדיים בגבול המקורי, אנחנו מקבלים כי הגבול אינו קיים:

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}=\lim_{x\to0+}\frac{\sin\sqrt{x^2}2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0+}\frac{\sin\sqrt{x^2}}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0+}\frac{\sin|x|}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}=\lim_{x\to0-}\frac{\sin\sqrt{x^2}2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0-}\frac{\sin\sqrt{x^2}}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0-}\frac{\sin|x|}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0-}\frac{\sin(-x)}{x}=-\frac{2}{3}$$

ולכן הגבול המקורי אינו קיים.

תרגיל בית: מצאו את נקודות הקיצון המקומי של $F(x)=\int_0^{x^3}\arctan t dt$.

תרגיל: הראו כי

$$\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{1}{8+x^3}dx\le\frac{2}{7}$$

פתרון: נסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{1}{8+x^3}$ בקטע $[-1,1]$. המקסימום שלה בקטע זה הוא $\frac{1}{7}$ והמינימום שלה הוא $\frac{1}{9}$. כלומר

$$\frac{1}{9}\le\frac{1}{8+x^3}\le\frac{1}{7}$$

אפשר לקבל זאת מהעובדה כי $-1\le x^3\le1$ בקטע $[-1,1]$. מאי שוויון זה נובע כי

$$\frac{2}{9}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{1}{8+x^3}dx\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{7}=\frac{2}{7}$$

תרגיל: הראו כי

$$\int_0^1\frac{\sin x}{1+x^2}dx\le\frac{\pi}{4}$$

פתרון: נשים לב כי בקטע $[0,1]$

$$\frac{\sin x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}$$

וגם

$$\frac{\sin x}{1+x^2} \leq \sin x$$

בעוד שרק האי שוויון הראשון יהיה שימושי, שווה לשים לב כי יש יותר מדרך אחת לחסום פונקציות ע"י פונקציות אחרות. נעיר כי אי השוויון הראשון תקף לכל x והשני תקף רק כאשר $\sin x$ אי שלילי (והוא אי שלילי בקטע $[0,1]$).
נשתמש באי השוויון הראשון ונקבל כי

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

הערה: כיוון שהפונקציות $\frac{\sin x}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^2}$ רציפות וכיוון שיש לפחות נקודה אחת בקטע בו יש אי שוויון חריף (למשל $x=0$) אז אפשר לומר כי

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx < \frac{\pi}{4}$$

כלומר $<$ במקום $\leq$.