אלגברה ב' - פתרון גליון 7

♠ תרגיל 1

נתונה חבורה אבלית סופית G. ידוע לנו כי אבליות גוררת את הזהות $(ab)^n = a^n b^n$ על G, כלומר: לכל $n \in \mathbb{Z}$, ההעתקה $\mu_n(x) = x^n$ היא הומומורפיזם של G לתוך עצמה (אנדומורפיזם).
בהינתן $(n, |G|) = 1$, ההעתקה μ_n חד-חד ערכית:

$$x \in \ker \mu_n \Leftrightarrow \mu_n(x) = e \Leftrightarrow x^n = e \Leftrightarrow o(x)\big|n \Rightarrow o(x) = 1,$$

וזאת מכיוון שהסדר של x מחלק גם את n וגם את $|G|$. מכאן נובע כי $x = e$, כלומר: $\ker \mu_n = \{e\}$.
כעת, בהיות G סופית, אנו רואים ש-μ_n היא על - כיוון שהיא חד-חד-ערכית - ולכן לכל $g \in G$ קיים מקור x תחת μ_n, כנדרש. ■

♠ תרגיל 2

תרגיל זה הוא תרגיל חישובי גרידא. ניקח שתי מטריצות -

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

ונראה שמתקיים $\gamma(M) \circ \gamma(N) = \gamma(MN)$:

$$\begin{aligned} MN &= \begin{bmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{bmatrix}; \\ \gamma_{MN}(z) &= \frac{(aA+bC)z+(aB+bD)}{(cA+dC)z+(cB+dD)}; \\ \gamma_M(\gamma_N(z)) &= \gamma_M\left(\frac{Az+B}{Cz+D}\right) = \frac{a\frac{Az+B}{Cz+D}+b}{c\frac{Az+B}{Cz+D}+d} = \frac{a(Az+B)+b(Cz+D)}{c(Az+B)+d(Cz+D)} = \gamma_{MN}(z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♠ תרגיל 3

N הוא אופרטור נורמלי על ממ"פ ממימד סופי V. ניזכר בנוסחה -

$$T \in L(V) \Rightarrow \ker(T^*) = (\mathrm{Im} T)^\perp,$$

ונזכור גם שאופרטור נורמלי תמיד מקיים (ו-N הוא אופרטור נורמלי): $\ker(N) = \ker(N^*)$.
מכאן אנו מסיקים מייד כי $\ker(N) = \ker(N^*) = (\mathrm{Im} N)^\perp$, וזה מה שהיה להוכיח.
נוכיח כעת את הטענות שבהן השתמשנו:

$$\begin{aligned} x \in \ker(T^*) &\Leftrightarrow T^*(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall_{v \in V} \langle v, T^*(x) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall_{v \in V} \langle T(v), x, = \rangle 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathrm{Im} T)^\perp, \end{aligned}$$

והוכחנו את הנוסחה שלעיל; באשר לתכונה האמורה של אופרטורים נורמליים, נשים לב כי -

$$\begin{aligned} \forall_{v\in V}\ \|N(v)\|^2 &= \langle N(v), N(v)\rangle = \langle v, N^*N(v)\rangle \\ &= \langle v, NN^*(v)\rangle = \langle N^*(v), N^*(v)\rangle = \|N^*(v)\|^2 \\ \forall_{v\in V}\ \|N(v)\| &= \|N^*(v)\| \end{aligned}$$

בפרט:

$$\begin{aligned} \|N(v)\| = 0 &\iff \|N^*(v)\| = 0 \\ N(v) = 0 &\iff N^*(v) = 0 \\ v \in \ker(N) &\iff v \in \ker(N^*), \end{aligned}$$

כלומר, הוכחנו כי אם N נורמלי, אז $\ker(N) = \ker(N^*)$.

♠ תרגיל 4

נניח כי $N^2(v) = 0$. הדבר שקול לכך ש-$N(v) \in \ker(N)$. ברם, מתקיים גם $N(v) \in \mathrm{Im}N$, ולכן נקבל:

$$N(v) \in \ker(N) \cap \mathrm{Im}N = (\mathrm{Im}N)^\perp \cap \mathrm{Im}N = 0,$$

ואנו רואים ש-$N(v) = 0$. ■

♠ תרגיל 5

נתונה $A \in M_n(\mathbb{C})$, ונניח שהיא נורמלית, כלומר: $A^*A = AA^*$. אזי -

$$A(AA^*) = A(A^*A) = (AA^*)A,$$

ואנו רואים ש-A מתחלפת עם AA^*. להיפך, נניח ש-A מתחלפת עם המטריצה $P = AA^*$, ונרצה להוכיח ש-A נורמלית. ההוכחה שניתן כאן רחוקה מכוונת-המשורר כאשר מדובר בקריטריונים של פשטות, אולם היא מדגימה היטב את עקרונות הצמצום:
אנו מתייחסים לכל המטריצות כאל אופרטורים ב-$L(\mathbb{C}^n)$, ונסמן ב-E_λ את המרחב העצמי ה-λ של AA^*. היות ש-$A(AA^*) = (AA^*)A$, כל E_λ הוא תת-מרחב אינווריאנטי של A. בנוסף, נשים לב שגם A^* מתחלף בכפל עם AA^*, ולכן E_λ אינווריאנטי גם תחת הפעולה של A^*.
משמעות התצפית הנ"ל היא שמתקיים השוויון $(A|_{E_\lambda})^* = (A^*)|_{E_\lambda}$, ואז ישנם שני מקרים:

$\lambda \neq 0$: במקרה זה, במרחב E_λ, אנו רואים שהאופרטור $(1/\lambda)A^*$ הוא ההופכי של A, ולכן הוא מתחלף עמו בכפל, בפרט - A^* מתחלף עם A.

$\lambda = 0$: במקרה זה, $AA^* = 0$, ואנו רוצים להוכיח כי $A^*A = 0$. אני שוב מדגיש שאנו עובדים כעת במרחב $E_\lambda = E_0 = \ker(AA^*)$.
במרחב זה, אנו רואים כי $\mathrm{Im}A^* \subseteq \ker(A)$; אבל, $\mathrm{Im}A^* = (\ker A)^\perp$, ואנו מקבלים ש-

$$(\ker A)^\perp \subseteq \ker A.$$

מכאן נובע ש-$\ker A$ הוא כל המרחב - דהיינו: $A = 0$ -מש"ל.

הוכחנו ש-$A^*A = AA^*$ על כל אחד מן המרחבים E_λ, ולכן השוויון נכון גם על סכומם, שהוא כל V.

♠ תרגיל 6

נתייחס למטריצות A, B כאל אופרטורים של $\mathbb{C}^n$. יהיו $E_1, \ldots, E_k$ תת-המרחבים העצמיים של A. היות שנתון $AB = BA$, אנו רואים שכל E_i הוא תת-מרחב אינווריאנטי של B; בגלל הנורמליות של B נקבל גם ש-E_i אינווריאנטי תחת B^*. לפיכך, הצמצום של B למרחב E_i הוא אופרטור נורמלי, וניתן לבחור בסיס אורתונורמלי β_i של וקטורים עצמיים של B ב-E_i. מן ההגדרה של E_i נובע ש-β_i מורכב מוקטורים עצמיים של A, ולכן $\beta = \bigcup_{1 \le i \le k} \beta_i$ הוא בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים המשותפים ל-A ול-B. המטריצה הנדרשת U היא המטריצה שעמודותיה הן איברי הבסיס β.

♠ תרגיל 7+8

המטריצה A נורמלית (ואם לא (והיא לא) - אז היא בכל-זאת נורמלית), ואנו רוצים לחשב את ערכיה העצמיים. חישוב ישיר מביא אותנו אל הפולינום האפייני $\chi_A(t) = (t-2)^2(t-1)$, ואנו זוכרים שהפירוק הספקטרלי יינתן על-ידי פולינומי-האינטרפולציה הבאים:

$$\begin{aligned}
E_1 = p_1(t)\big|_{t=A} &= \frac{t-2}{1-2}\Big|_{t=A} = \frac{1}{2}(2-t)\Big|_{t=A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}; \\
E_2 = p_2(t)\big|_{t=B} &= \frac{t-1}{2-1}\Big|_{t=A} = \frac{1}{2}(t-1)\Big|_{t=A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

נותר רק לרשום ש-$A = 2 \cdot E_2 + E_1$, ולכן מתכונות הפירוק הספקטרלי נקבל גם הצגה עבור A^{10}: $A^{10} = 2^{10} E_2 + E_1$.

תרגיל זה מלמד אותנו לשאול את השאלה: "האם גם למטריצה לא נורמלית יש פירוק ספקטרלי?", והתשובה - תתפלאו - חיובית: "כן, בתנאי שהמטריצה לכסינה"; שימו לב שאל הפירוק הנ"ל אנו מגיעים אך-ורק בהסתמך על כך שיש ל-A צורה אלכסונית בבסיס כלשהו, וההבדל בין המצב הנוכחי למצב הנורמלי הוא ב"איכות" של ההטלות בפירוק, שכן במקרה הכללי לא בהכרח מתקבלות הטלות הניצבות אחת לשניה (אבל הן מקבילות).