קומבינטוריקה – תרגיל #2 (31/03/2016)

בעיות מניה בלי חשיבות לסדר ועם חזרות

ניסוחים שקולים:

(1) חלוקת k כדורים ל-n תאים
(2) מס' הפתרונות השלמים למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots x_n = k$

המספר הוא $\binom{k+n-1}{n-1}$.

תרגיל: נתונה קופסה מלאה בכדורים בצבעים אדום, כחול וירוק. בוחרים 10 כדורים ומכניסים לקופסא קטנה.

א) כמה אפשרויות שונות יש?
ב) בכמה מהאפשרויות יש לפחות 5 כדורים כחולים?
ג) בכמה מהאפשרויות יש לכל היותר 4 כדורים כחולים?

פתרון:

א) x_1 – מס' הכדורים בצבע כחול, x_2 – מס' הכדורים בצבע אדום, x_3 – מס' הכדורים בצבע ירוק. סה"כ:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

לכן, מס' האפשרויות הוא $\binom{10+2}{2} = \binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$ כאשר נעזרנו בנוסחא:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

ב) $x_1 \geq 5$, ולכן נוכל להגדיר $x_1 = y_1 + 5$. מכאן $y_1 + 5 + x_2 + x_3 = 10$ וצריך לספור פתרונות שלמים:

$$y_1 + x_2 + x_3 = 5$$

לכן, מס' האפשרויות הוא $\binom{5+2}{2} = 21$.

ג) אם אין לכל היותר 4 כחולים, זה אומר שיש לכל הפחות 5 כחולים שזה בדיוק סעיף ב'. לכן, מס' הפתרונות הוא המשלים של סעיף ב': $66 - 21 = 45$

תרגיל: כמה פתרונות יש למשוואה $3x_1 + x_2 + x_3 = 18$, כאשר $x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 2$ שלמים.

פתרון: $x_1 = 1 + y_1, x_2 = y_2, x_3 = 2 + y_3$.

$$\Rightarrow\ 3(1+y_1) + y_2 + y_3 + 2 = 18$$

$$\Rightarrow\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 13$$

$$\Rightarrow\ y_2 + y_3 = 13 - 3y_1$$

$$\therefore\ y_1 \in \{0, \dots, 4\}$$

נציב בטבלה:

y_1	y_2+y_3	**מס' הפתרונות**
0	13	$\binom{\mathbf{13+1}}{\mathbf{1}}=\mathbf{14}$
1	10	**11**
2	7	**8**
3	4	**5**
4	1	**2**
		40

זהויות קומבינטוריות

מקדם הבינום:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

הבינום של ניוטון:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

תכונות של משולש פסקל:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \quad (1)$$
$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \quad (2)$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad (3)$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0 \quad (4)$$
$$\binom{k}{1}\binom{n}{k}=k\binom{n}{k}=\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} \quad (5)$$

נוכיח את (5) קומבינטורית:

אגף שמאל: כיתה בגודל n. בוחרים ועד בגודל k. מתוך הועד בוחרים ראש ועד.

אגף ימין: בוחרים ראש ועד, ואז משלימים עוד $k-1$ אנשים לועד.

תרגיל: הוכיחו את הזהויות הקומבינטוריות הבאות:

א) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}^2$

ב) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

ג) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{n-k} = 2^{2n}$

פתרון:

א) n גברים ו-n נשים. בצד שמאל בוחרים שני אנשים. בציד ימין, בוחרים שני גברים או שתי נשים או גבר ואישה.

ב) שיטה קומבינטורית: מתקיים בוחן בקומבינטוריקה. באגף ימין בוחרים סטודנט אחד שיקבל 100, ואת כל השאר לשתי קב' – אלה שיקבלו 60, ואלה שיקבלו 40. באגף שמאל, בוחרים k אנשים שיעברו, וכל השאר יקבלו 40. מתוך האנשים שעברו בוחרים 1 שיקבל 100, וכל השאר 60.

שיטה אנליטית:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

נגזור:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}$$

נציב $x = 1$:

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$$

ג) שיטה קומבינטורית: באגף ימין זהו מס' הסדרות של 0/1 באורך $2n+1$ שבהן יש יותר 1-ים מ-0-ים. $= \frac{2^{2n+1}}{2}$ 2^{2n}. באגף שמאל, מניחים שיש לפחות $n+1$ 1-ים. ה-1 ה-$n+1$ מופיע במקומות מ-$n+1$ ועד $2n+1$. כלומר, הוא מופיע במקום $n+k+1$ עבור k כלשהו: ה-1 ה-$n+1$ מופיע במקום $n+k+1$. לפניו יש $n+k$ מקומות ובתוכם n 1-ים ו-k 0-ים. מתוך $n+k$ המקומות שלפני, $\binom{n+k}{k}$ אפשרויות לבחור איפה יהיו ה-0-ים. נשארים $n-k$ מקומות אחריו ששם לכל מקום יש את שתי אפשרויות – 1 או 0.