

(1)

נקודה Q נבחרת באחידות במעגל שמרכזו ב- $(0, 0)$ ורדיוסו 1. יהי A המרחק Q -מ-נקודה $(-1, 0)$ ו- B המרחק מ- Q לנקודה $(1, 0)$. חשבו את $\text{Cov}(A^2, B^2)$.

(2)

א.תשלימו את הטענה ותוכיחו אותה:

"מטריצת קווריאנס של מ.א. X_1, \dots, X_n לא הפיכה אם X_1, \dots, X_n"

ב. מ.א. X_1, X_2, X_3 בלתי תלויים בזוגות.

האם שני מ.א. X_1 ו- $(X_3 - X_2)$ כמו כן בלתי תלויים? נמקו!

(3)

נתון וקטור אקראי (X, Y) בעל מקדם מתאם $\rho_{X,Y}$. אם $S = aX + b$, $T = cY + d$ כאשר a, b, c, d קבועים נתונים, $a \neq 0, c \neq 0$, מהו $\rho_{S,T}$?

(4)

המשתנים האקראיים X_1, \dots, X_n הם בלתי תלויים ומפולגים באופן זהה $N(-2, 1)$. יהי

$$Z_n = \frac{1}{n}(X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_4 + \dots + X_{n-1} X_n), \quad n \geq 3$$

א. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} EZ_n$

ב. חשבו את ה- $\text{Var}(EZ_n | X_2)$

(5)

יהיו $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ שני וקטורים אקראיים בלתי תלויים אחד בשני וכך ש- $X_i \sim N(1, 3^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ובלתי תלויים,

ו- $Y_i \sim \text{Exp}(1 + i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ וכמו כן בלתי תלויים. האוטומט בוחר

בהסתברות $0 < p < 1$ את ה- \vec{X} ובהסתברות $q = 1 - p$ את ה- \vec{Y} ומעביר את הוקטור

האקראי $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ שנוצר למערכת.

מהו המקדם המתאם בין Z_i ו- Z_j , $1 \leq i \neq j \leq n$?

(6)

מוצר של מפעל מכיל k חומרים A_1, \dots, A_k (מתוך מספר חומרים אחרים) שיכולים לגרום לפגיעה באיכות הסביבה. הכמויות היחסיות של החומרים הנ"ל במוצר, הן אקראיות לחלוטין.

א. חשבו את הפונקציית הצפיפות המשותפת של X_1, X_2 ופונקציית הצפיפות

מותנת של X_1, X_2, X_3 בהנתן X_4, \dots, X_k .

ב. גניח עתה ש- $k = 3$ וש-מ.א. X_1, X_2 מקיימים:

$$0 \leq X_1, X_2 \leq 4$$

חשבו את הפונקציית הצפיפות המשותפת של X_1, X_2 ופונקציית הצפיפות של X_3 .

האם המ.א. X_1, X_2, X_3 בלתי תלויים בזוגות? נמקו!