30/11/2016

תרגול 6

פולינום טיילור:

תרגיל:

פתחו לפולינום טיילור עד סדר $f(x,y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ סביב הנקודה $(1,1)$.

פתרון:

$f\in C^3$ בסביבת הנקודה ולכן נסיק כי אכן קיים פיתוח טיילור מסדר 2, כלומר פיתוח מהצורה:

$$f(x,y)=T_2(x,y)+R_2(x,y)=\underbrace{f(1,1)}_{\text{סדר 0}}$$

$$+\underbrace{f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)}_{\text{סדר 1}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right]}_{\text{סדר 2}}+R_2(x,y)$$

הערה:

באופן כללי, המחובר ה-k בפיתוח מכיל את כל הנגזרות החלקיות מסדר k מחושבות בנקודה (x_0,y_0) ומוכפלות בחזקות מתאימות של $(x-x_0),(y-y_0)$, ואלו מוכפלים ב-$\frac{1}{k!}$ ובגורם קומבינטורי מתאים.[1]

נחשב את המקדמים:

$$f(x,y)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y\Longrightarrow f(1,1)=0$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
f_x&=\frac{1}{x} \qquad & f_x(1,1)&=1\\
f_y&=-\frac{1}{y} \qquad & f_y(1,1)&=-1\\
f_{xx}&=-\frac{1}{x^2} \qquad & f_{xx}(1,1)&=-1\\
f_{xy}&=0 \qquad & f_{xy}(1,1)&=0\\
f_{yy}&=\frac{1}{y^2} \qquad & f_{yy}(1,1)&=1
\end{aligned}$$

ולכן הפיתוח יהיה:

$$\boxed{f(x,y)=(x-1)-(y-1)+\frac{1}{2!}\left[-(x-1)^2+(y-1)^2\right]+R_2(x,y)}$$

[1] וזאת משום שבעבור פונקציה גזירה ברציפות, הנגזרות החלקיות מתחלפות בסדר ולכן, למשל, במקרה זה, $f_{xy}=f_{yx}$ ולכך הכוונה בכפילה בגורם קומבינטורי מתאים (כמה פעמים הנגזרת החלקית חוזרת על עצמה בסדר שונה).

<u>הערה:</u>

א. פולינום טיילור הוא יחיד. זהו הפולינום היחיד מסדר קטן או שווה ל-n עבורו מתקיים:

$$f(x,y)=T_n(x,y)+R_n(x,y) \qquad \lim_{p\to p_0}\frac{R_n(p)}{|p-p_0|^n}=0$$

ב. מותר לחבר, להכפיל, ולהרכיב פולינומי טיילור.

<u>דוגמה:</u>

במקרה של הפונקציה שבה עסקנו, $f(x,y)=\ln x-\ln y$ נשים לב כי:

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\tilde{R}_2(x)=\tilde{T}_2(x)+\tilde{R}_2(x)$$

$$\ln y=(y-1)-\frac{1}{2!}(y-1)^2+\tilde{R}_2(y)=\tilde{T}_2(y)+\tilde{R}_2(y)$$

ונקבל כי בהכרח:

$$f(x,y)=T_2(x,y)+R_2(x,y) \qquad \begin{array}{l} T_2(x,y)=\tilde{T}_2(x)-\tilde{T}_2(y) \\ \tilde{R}_2(x,y)=\tilde{R}_2(x)-\tilde{R}_2(y)\end{array}$$

ג. בפרט, אם $f(x,y)$ היא פולינום, אזי f מהווה פיתוח טיילור של עצמה.

<u>דוגמה:</u>

עבור הפולינום $f(x,y)=xy$, פיתוח טיילור סביב $(1,2)$ הינו:

$$f(x,y)=xy=(x-1)(y-2)+2x+(y-2)$$

$$(x-1)(y-2)+2(x-1)+(y-2)+2$$

ונשים לב כי התקבל הביטוי:

$$f(x,y)=\underbrace{2+2(x-1)+(y-2)}_{T_1(x,y)}+\underbrace{2(x-1)(y-2)}_{R_1(x,y)}=xy$$

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה $f(x,y)=e^{xy}\sin y$. מהי $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(0,0)$?

נפתח את f לפיתוח טיילור סביב הראשית עד סדר 4. הנגזרת המבוקשת תהיה המקדם של x^3y אשר מוכפל ב-$\frac{1}{4!}$ ובגורם קומבינטורי $\binom{4}{3}\binom{4}{1}=4$. נעשה זאת על ידי שימוש בתכונה לפיה ניתן להרכיב לחבר ולכפול טורי טיילור. נחשב עבור 3 פונקציות המרכיבות את $f(x,y)$ בנפרד:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\text{שגיאה}\Longrightarrow e^{xy}=1+xy+\frac{(xy)^2}{2!}+\text{שגיאה}$$

הסיבה שיכלנו להציב $t=xy$ הינה משום שמדובר בפולינום טיילור של $g(x,y)=xy$. ועל ידי כך אנו מבצעים הרכבה של פולינומי טיילור, וכאמור, הרכבה של פולינומי טיילור הינה פולינום טיילור. נמשיך ונקבל כי:

$$\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\text{שגיאה}$$

עתה, נוכל לקבל כי:

$$f(x,y)=e^{xy}\sin y=\left(1+xy+\frac{(xy)^2}{2!}+\text{שגיאה}\right)\left(y-\frac{y^3}{3!}+\text{שגיאה}\right)$$

$$\overset{\text{לפי סדר החזקות}}{=} \underbrace{0}_{\text{סדר } 0} + \underbrace{y}_{\text{סדר } 1} + \underbrace{0}_{\text{סדר } 2} + \underbrace{\left(-\frac{y^3}{3!} + xy^2\right)}_{\text{סדר } 3} + \underbrace{0}_{\text{סדר } 4} + R_4(x,y)$$

אך מכאן נסיק כי:

$$\boxed{\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,0) = 0}$$

עבור דוגמה נוספת, ננסה לחשב את $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)$. לשם כך נשים לב כי הוא יופיע כמקדם של y^3 מוכפל ב-$\frac{1}{3!}$ ובגורם הקומבינטורי $\binom{3}{3}$. לכן, בהתבוננות בפיתוח שלנו, נקבל כי $\boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) = -1}$.

<u>תרגיל:</u>

תהא $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ונתון פיתוח טיילור שלה סביב $(1,2,3)$:

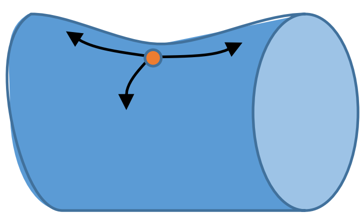
$$f(x,y,z) = 1 + 2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 2(z-3)^2$$
$$+(x-1)(y-2) + (y-2)(z-3) + (z-3)(x-1) + R_2(x,y,z)$$

האם $(1,2,3)$ נקודת קיצון מקומית?

<u>הערה</u> – נקודת קריטיות / חשודות לקיצון מקומי הן נקודות בהן $\vec{\nabla} f(p) = 0$ או לא קיים.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי $f \in C^3$ ולכן הגרדיאנט קיים בכל נקודה בתחום ובפרט $\vec{\nabla} f(1,2,3)$. הגרדיאנט הוא בדיוק הנגזרות החלקיות מסדר 1 בפיתוח טיילור. היות ואלו לא קיימות (אין איברים ליניארים בפיתוח טיילור) ולכן נסיק כי מתקיים $\vec{\nabla} f(1,2,3) = 0$ ולכן זו נקודה חשודה בקיצון.



איור 1 – נקודת אוכף, בה יש לפחות כיוון עליה אחד וכיוון ירידה אחת ולכן לא ייתכן כי זו נקודת קיצון

כמו כן, בהנתן p_0 נקודה קריטית, נרצה לדעת האם מדובר במקסימום או מינימום, או שמא מדובר בנקודת אוכף.

אם $f \in C^2$ בסביבת p_0, ונסתכל על מטריצת ההסיאן:

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

ונשים לב כי עבור $f \in C^2$ מובטח כי הנגזרות החלקיות מתחלפות בסדר ולכן זו תהיה מטריצה סימטרית.

האפשרויות הן, אפוא:

א. p_0 נקודת מינימום אם H מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow p^T H p > 0$ לכל $p \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_i > 0$ לכל i.[2]

---

[2] ההגדרה של Δ_i הוא הדטרמיננט של תת המטריצה 1×1 העליונה, שראשיתה בראשית המטריצה המקורית. במקרה זה, למשל, $\Delta_1 = \det(f_{xx})$ ו-$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ וכאמור אם לכל i מתקיים $\Delta_i > 0$, נסיק כי המטריצה מוגדרת חיובית (משפט מאלגברה).

ב. p_0 נקודת מקסימום אם H מוגדרת שלילית $\Leftrightarrow p^T H p < 0$ לכל $p \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_i > 0$ עבור i זוגי ועבור i אי זוגי מתקיים $\Delta_i < 0$.
ג. אחרת, אם $\det H \neq 0$ נקבל כי p_0 נקודת אוכף. ואם $\det H = 0$ לא נוכל להסיק שום דבר לגבי הנקודה.

במקרה של התרגיל שלנו, נוציא נגזרות חלקיות מסדר 2 מהפיתוח על ידי התבוננות במקדמים של איברי הפולינום המתאימים.

$$f_{xx} = 4 \quad f_{yy} = 4 \quad f_{zz} = 4 \quad f_{xy} = 1 \quad f_{xz} = 1 \quad f_{yz} = 1$$

ולכן המטריצה תהיה, במקרה זה:

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ונרצה לבדוק האם H מוגדרת חיובית או שלילית על ידי כך שנסתכל על וקטור כללי $p^T H p$:

$$(x, y, z) H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$= (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) > 0$$

ולכן H_f מוגדרת חיובית כלומר $(1,2,3)$ הינה נקודת מינימום מקומית.

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + b(x-y)^2 + cx^3$$

ונרצה לסווג את הנקודה $(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

$$f_x = ax^3 + 2b(x-y) + 3cx^2$$

$$f_y = 4y^3 - 2b(x-y)$$

כלומר קל להציב ולראות כי $\vec{\nabla} f(0,0) = 0$ ולכן זו נקודה קריטית / חשודה.

נחשב את ההסיאן:

$$\begin{matrix} f_{xx} = 12x^2 + 2b + 6cx \\ f_{xy} = -2b \\ f_{yy} = 12y^2 + 2b \end{matrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2b & -2b \\ -2b & 2b \end{pmatrix}$$

ונשים לב כי מתקיים:

$$\Delta_1 = 2b \quad \Delta_2 = 0$$

כלומר הסיווג שלנו לא עוזר.

ננתח את הפונקציה בדרך אחרת. נשים לב, כי באופן כללי הפונקציה מורכבת משלוש איברים עיקריים, שהראשון מביניהם חיובי תמיד, השני בעל סימן קבוע, והשלישי משנה סימן.

נשים לב כי על המסלול $x = y$:

$$f(x,x) = 2x^4 + cx^3 = x^3(2x + c)$$

כלומר, לכל $c \neq 0$ בסביבת הראשית יש סימן קבוע.

אם $c = 0$ אזי גם כן בסביבת הראשית מתקבל סימן קבוע ועבור $b \geq 0$ תתקבל נקודת מינימום ועבור $b < 0$
נשים לב כי מתקבלת נקודת מקסימום.