קומבינטוריקה - תרגיל מס' 9

להגשה עד ה - 12.06.01, בשעה 16.00

תרגיל מס' 1

גרף הקוביה ה - n-מימדית Q_n מוגדר באופן הבא: הקדקדים הם כל הסדרות של אפסים ואחדים באורך n. שני קדקדים מחוברים בצלע אם הסדרות המתאימות שונות זו מזו בקואורדינטה אחת בדיוק.

א. צייר את Q_1, Q_2, Q_3.

ב. מה הערכיות של כל קדקד ב - Q_n?

ג. מה מספר הצלעות ב - Q_n?

ד. הוכח כי Q_n גרף קשיר.

ה. הוכח כי Q_n גרף דו-צדדי.

תרגיל מס' 2

יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר, $|V| \geq 2$. הוכח שיש לפחות שני קדקדים $x \in V$ בעלי התכונה הבאה (כל אחד בנפרד): אם נרחיק מ - G את x ואת כל הצלעות המכילות אותו, הגרף שיישאר יהיה קשיר.

תרגיל מס' 3

יהי G גרף שיש בו בדיוק שני קדקדים בעלי ערכיות אי-זוגית. קדקדים אלה (שנסמנם: x, y) אינם מחוברים בצלע. יהי G^* הגרף המתקבל מ - G ע"י הוספת הצלע $\{x, y\}$. הוכח כי G^* קשיר אם ורק אם G קשיר.

תרגיל מס' 4

יהי G עץ.

א. הוכח: אם x קדקד בעל ערכיות d ו - G^- הוא הגרף המתקבל מ - G ע"י הרחקת הקדקד x וכל הצלעות המכילות אותו, אז G^- הוא יער בעל d מרכיבים קשירים.

ב. הוכח: הערכיות המקסימלית של קדקדי G היא לכל היותר כמספר העלים ב - G.

ג. תאר את העצים G שעבורם מתקיים שוויון בחלק ב'.

תרגיל מס' 5

יהי $G = (V, E)$ גרף. הוכח כי 3 הטענות הבאות שקולות:

א. G עץ (ז"א, G קשיר וחסר מעגלים).

ב. G קשיר ו: $|E| = |V| - 1$.

ג. G קשיר מינימלי (ז"א, הורדת כל צלע תהפוך את G ללא-קשיר).

תרגיל מס' 6

נתון לוח שחמט ($8 * 8$ משבצות). על הלוח נע צריח, כאשר בכל צעד הוא יכול לנוע מספר כלשהו של משבצות במאוזן או במאונך. רוצים לתכנן מהלך תנועה של הצריח על הלוח באופן כזה ש:

א. הצריח יתחיל ויסיים את המהלך באותה משבצת.

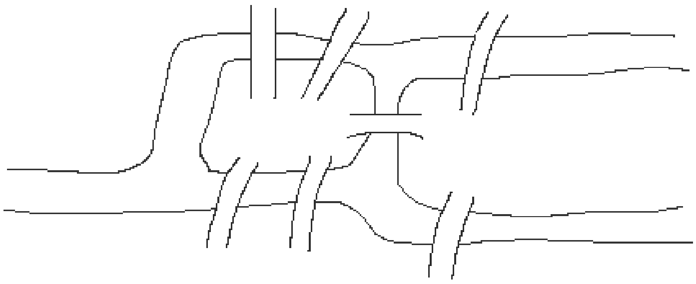
ב. לכל זוג משבצות שהצריח יכול להגיע מהאחת לשניה (כלומר שנמצאות באותה שורה או באותו טור), יהיה בדיוק צעד אחד במהלך שבו הצריח עובר מהאחת לשניה (לא חשוב באיזה כיוון).

האם הדבר אפשרי?

תרגיל מס' 7

תאר את כל העצים שיש בהם מסלול אוילריאני.

בהצלחה!



רגע של היסטוריה - הפעם הראשונה:

המאמר הראשון אשר עשה שימוש בגרפים הוא, כנראה, של ליאונרד אוילר (התפרסם בשנת 1736). אוילר התמודד עם בעיה אמיתית, אשר צצה בחייהם של תושבי קוניגסברג, פרוסיה (היום: קלינינגרד, רוסיה). עירם שכנה על גדות נהר הפרגל (היום: פרגוליה), והופרדה על ידו לארבעה חלקים שונים; החלקים חוברו ע"י 7 גשרים, כמתואר בציור. נסיונות לטייל בין כל חלקי העיר, תוך חציית כל גשר פעם אחת בדיוק - נכשלו. אוילר הצליח להוכיח כי הדבר אינו אפשרי. מדוע?! עם מעט סבלנות, נגיע גם לזה!