קומבי גליון 8 - 104286

שניר הורדן-205689581

1. **הוכחה:** יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קודקודים שבו ערכיות כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$.
נשתמש בעקרון שובך היונים. נסמן

$$n-pigeons$$

$$\left\{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}+1,...,n-1\right\}-holes$$

אזי קיים תא עם 2 יונים לפחות. אז נקבל ערכיות של $\frac{n-1}{2}\times 2=(n-1)$ לפחות עבור שני קודקודים אז בהכרח קיים רכיב שקילות יחיד. אילו היו קיימים שני רכיבי קשירות אז היינו מקבלים ערכיות מקסימלית משותפת של שני הקודקודים $n-2$. סתירה לכך שמצאנו ערכיות משותפת של $n-1$ שגדולה מהמספר המקסימלי כביכול. אזי קיים רכיב קשירות אחד. ■

2. **הוכחה:** נתון גרף $G=(V,E)$. נבנה גרף $L(G)$ באופן הבא:
הקודקודים של $L(G)$ מיצגים את הצלעות של G.
שני קודקודים של $L(G)$ מחוברים בצלע אסם לשתי הצלעות שהם מייצגים בגרף G יש קודקוד משותף.
נניח G אוילריאני.
אזי ל-G קיים מסלול אוילריאני סגור וגם הערכיות של כל קודקוד היא זוגית.
תהי $e\in E$. צלע זו מחוברת בהכרח לשני קודקודים ע"פ הגדרה, $v_1,v_2\in V$.
מתקיים $deg(v_1)\wedge deg(v_2)\quad are\quad even$.
אזי

$$deg(v_1)+deg(v_2)-\underbrace{2}_{removed\quad degrees\quad of\quad connecting\quad edge}\quad is\quad even$$

לכן לפי הגדרת $L(G)$, כל קודקודי $L(G)$ הם ממעלה זוגית.
אזי $L(G)$ אוילריאני. ■

ב.
הכיוון ההפוך אינו מתקיים.

נפריך באמצעות דוגמא נגדית:

לפי משפט, עבור G גרף קשיר כל הערכויות זוגיות אם"ם הגרף אוילריאני. בגרפים לעיל, ב־G לא קיים ערך זוגי כלל ואילו $L\left(G\right)$ אולריאני. סתירה.

3. הוכחה: יהא $G=\left(V,E\right)$ גרף.

עלינו להוכיח G קיימת אוריאנטציה מאוזנת אסם כל הערכויות ב־G זוגיות.

$\Leftarrow$

נניח כי קיימת אוריאנטציה מאוזנת. אז מתקיים לכל $v\in V$ מתקיים $d_{+}\left(v\right)=d_{-}\left(v\right)$.
נסמן $x=d_{+}\left(v\right)$

נשים לב כי $deg\left(v\right)=d_{+}\left(v\right)+d_{-}\left(v\right)=2x$ זה תמיד מספר זוגי.

$\Rightarrow$

נניח כי $\forall v\in V\left(deg\left(v\right)\quad is\quad even\right)$.

הגרף אינו בהכרח קשיר, לכן לא נוכל להשתמש במפשט שהוכנו בכיתה, אז נתבונן בכל מרכיב קשירות בנפרד.

יהא $k=\left(V_{k},E_{k}\right)$ מרכב קישרות ארביטררי של G.

מתקיים $\forall v_{k}\in V_{k}\left(deg\left(v_{k}\right)\quad is\quad even\right)$ וגם המרכיב קשיר.

אז לפי משפט קיים בו מסלול אוילריאני סגור.

<u>טענת עזר</u>־יהי G_k גרף קשיר. אם G_k אוילריאני אז לגרף G_k קיימת אוריאנטציה זוגית.

<u>הוכחת טענת העזר</u>

נבחר קודקוד כלשהו $v_{k}\in V_{k}$ ונתחיל ונסיים בו את המסלול האוילריאני.

לפי הגדרה מסלול אוילריאני מכסה את כל כל הצלעות ב־G_k. הוא מהצורה

$$v_{k_{1}}e_{k_{1}}v_{k_{2}}e_{k_{2}}...e_{k_{n}}v_{k_{1}}$$

נסמן כל $e_{k_{i-1}}$ שמשמאל ל־v_{k_i} בתור צלע המכוונת פנימה שלו, וכל $e_{k_{i+1}}$ בתור צלע המכוונת החוצה שלו.

אז לכל v_k מתאימים מספר כלשהו של <u>זוגות</u> של צלעות שאחת מהן מכוונת פנימה והשנייה החוצה, בהתאמה. עבור הקודקודים שאינם נקודת המוצא זה בוודאי מתקיים. עבור קודקוד המוצא כפי שניתן לראות לעיל $\left(e_{k_!},e_{k_{2}}\right)$ הן זוג צלעות כך שאחת מכוונת פנימה ואחת החוצה.

מ.ש.ל.

בהסתמך על טענת העזר ומכך שבחרנו מרכיב קשירות כללי של G אנו מכסים את כל הקודקודים ב־G.

נסיק כי G בעל אוריאנטצייה מאוזנת.

כנדרש. ■

4.

א. ערכי p,q כך שקיים מסלול אוילרייאני סגור

$$\begin{cases} p & is & even \\ q & is & even \end{cases}$$

(או להפך).

ב.לפי משפט, G קיים מסלול אוילריאני שאינו סגור אסם לכל הקודקודים קיימת ערכיות זוגית פרט לשניים.

$p-odd$ וגם $q=2$ או להפך.

5. הוכחה: תהי $S\subseteq A$. עלינו להוכיח $|S|\leq|N(S)|$.

<u>מקרה I $|S|\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$</u>

כל בן ב־S מכיר לפחות $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ בנות אז $|N(S)|\geq\lceil\frac{n}{2}\rceil$ אז בוודאי מתקיים $|S|\leq|N(S)|$.

אילו $S=\emptyset$ אז מתקיים שוויון.

<u>מקרה II $n\geq|S|>\lceil\frac{n}{2}\rceil$</u>

נניח בשלילה שקיימת קבוצה S כך ש־$|S|>|N(S)|$.

נתבונן בקבוצה $B\backslash N(S)$.

יהא $x\in B\backslash N(S)$. לפי הנתון $|x|\geq\lceil\frac{n}{2}\rceil$.

מאחר ו־$|S|>\lceil\frac{n}{2}\rceil$ אזי $|A\backslash S|<\frac{n}{2}$.

לכן, בהכרח קיימים $a\in S$, $e\in E$ כך ש־$e=\{a,x\}$.

זו בסתירה לכך ש־$x\notin N(S)$.

לכן $\forall S\subseteq A\left(|S|\leq\left|N(S)\right|\right)$ ולפי משפט $Hall$ קיים זיווג. ■