מבוא לחבורות   תרגיל מס' 12

1. יהי $\sigma \in S_n$. נגדיר $\varepsilon(\sigma) := \frac{\prod_{i<j}(i-j)}{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}$.

א. הראו כי $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$.

ב. הראו כי $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ לפי הזוגיות של מספר היפוכי הסדר ב- σ.

ג. הוכיחו כי לכל $\sigma, \rho \in S_n$, $\varepsilon(\sigma\rho) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho)$.

ד. הוכיחו כי $\varepsilon(\tau) = -1$ לכל טרנספוזיציה τ.

ה. הוכיחו כי אם σ מכפלה של m טרנספוזיציות, אז $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$.

2. הוכיחו כי S_n נוצרת ע"י הטרנספוזיציות $(1\ 2),(2\ 3),...,(n-1\ n)$ לכל $n \geq 2$.

3. הוכיחו כי S_n נוצרת ע"י שני האיברים $(1\ 2),\ (1\ 2\ 3\ ...\ n)$ לכל $n \geq 2$.

4. הוכיחו כי חבורת הסימטריות של הטראדר הרגולרי איזומורפית ל- A_4.

5. הוכיחו כי החבורה הדיהדרית D_8 איזומורפית לתת-חבורה של S_4.

6. הוכיחו כי חבורת הקווטרניונים Q_8 אינה איזומורפית לאף תת-חבורה של S_4.

7. הוכיחו כי אם G חבורה כלשהי ו- H תת-חבורה מאינדקס n, אז קיימת תת-חבורה נורמלית N של G המוכלת ב- H כך ש-$[G:N] \leq n!$.

8. א. הוכיחו כי אם p מספר ראשוני ו- G חבורה מסדר חזקה של p, אז כל תת-חבורה מאינדקס p של G היא נורמלית ב- G.

ב. הסיקו כי לכל חבורה מסדר p^2 יש תת-חבורה נורמלית מסדר p.

ג. הוכיחו כי כל חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

9. יהי $G = GL_2(3) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ ad-bc \neq 0\}$, ויהי

$$H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : c = 0\}$$

א. חשבו את $[G:H]$ והוכיחו שקיים הומומורפיזם מ- G ל- S_4.

*ב. הוכיחו כי גרעין ההומומורפיזם הוא המרכז $Z(G)$ של G, מסדר 2 ומורכב מהמטריצות הסקלריות ב- G. הסיקו ש- $G/Z(G) \cong S_4$.