תורת ההסתברות

תרגיל בית מס׳ 4

<u>תרגיל 1.</u>
יהי $X \sim U(-3,3)$, דהינו $f_X(x) = 1/6$ עבור $-3 \leq x \leq 3$. נגדיר: $Y = h(X)$ כאשר הפונקציה $h(x)$ נתונה על ידי

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{if} \quad x \leq -1, \\ x & \text{if} \quad -1 < x \leq 1, \\ 4x & \text{if} \quad x > 1. \end{cases}$$

חשבו את $f_Y(y)$ ו- EY.

<u>תרגיל 2.</u>
יהא וקטור (X, Y) מפולג באופן אחיד על התחום $0 \leq x, y \leq 1$.

(א) הוכיחו כי $P(XY \leq 1/4) \leq P(X + Y \geq 1/4)$.

(ב) מצאו את ההסתברות המותנת $P(X + Y \geq 1/4 | X + Y \leq 1/4)$.

<u>תרגיל 3.</u>
עבור פרמטר $\lambda > 0$ יהא X מ"א בעל צפיפות $f_X(x) = c_\lambda \cdot x^{-1-\lambda}$, $x \geq 1$. נגדיר עבור פרמטר $\alpha > 0$ משתנה אקראי חדש $Y = h(X)$, כאשר $h(x) = x^\alpha$.

(א) מצאו את הקבוע c_λ.

(ב) מהי פונקצית ההתפלגות של X ?

(ג) מצאו את הצפיפות של מ"א Y.

(ד) חישבו את EY עבור פרמטר α כלשהו.

<u>תרגיל 4.</u>
יהא $X \sim N(0,1)$. מצאו את הצפיפות של מ"א $\lambda > 0$,$Y = \exp\{\lambda X\}$.

<u>תרגיל 5.</u>
יהי $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ מרחב הסתברות. הוכיחו כי קיים לכל היותר מספר בר מנייה של נקודות $\omega \in \Omega$ עבורם מתקיים $P(\{\omega\}) > 0$.

__תרגיל 6__.
יהיו X, Y שני מ"א המוגדרים באותו מרחב הסתברות. הוכיחו כי $P(\omega : X < Y) = 1$ **גורר** $P(Y \le x) \le P(X \le x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

__תרגיל 7__.
תנו דוגמה למרחב הסתברות סופי ושלושה מאורעות בלתי תלוים בו.