

תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 5

פתרונות יתפרסמו באתר הקורס ב- 17.01.02

תרגיל 1.

יהי Z מ"א נורמלי תקין: $Z \sim N(0, 1)$. מצאו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Z \geq x+a/x)}{P(Z \geq x)}$ עבור קבוע $a \in \mathbb{R}$.

תרגיל 2.

(א) יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי צפיפויות $f_X(x)$ ו- $f_Y(y)$ בהתאמה. הוכיחו כי $P(X \geq Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)P(X \geq y)dy$.

(ב) יהיו X ו- Y משתנים מקריים שעבורם $P(X \leq x, Y \leq y) = y(b + ce^{-x})$ לכל $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x < \infty$. חשבו את הערכים b ו- c .

תרגיל 3.

יהי (X, Y) וקטור אקראי בעל צפיפות

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy) & \text{if } |x| \leq 1, |y| \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי המשתנים המקריים X ו- Y אינם בלתי תלויים.

(ב) הוכיחו כי המשתנים המקריים X^2 ו- Y^2 בלתי תלויים.

(ג) חשבו את $COV(X^2, X^2 + Y^2)$.

תרגיל 4.

יהי X משתנה מקרי חיובי בעל צפיפות נתונה $f_X(x)$ ויהי $Y = \frac{1}{X}$.

(א) מצאו תנאי על $f_X(x)$ המבטיח כי X ו- Y מפולגים באופן זהה ב- $(0, \infty)$.

(ב) יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x < 1 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^3 & \text{if } 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

הוכיחו כי $f_X(x)$ מקיימת את התנאי של סעיף (א), וחשבו את $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

(ג) אם $f_X(x) = 1/2$ לכל $0 \leq x \leq 1$, והצפיפות $f_X(x)$ מקיימת את תנאי (א) לגבי המשתנה $Y = \frac{1}{X}$, חשבו את $f_X(x)$ לכל $1 \leq x < \infty$.

תרגיל 5.

יהי X משתנה מקרי מפולג באופן אחיד בקטע $(0; 1]$ ויהי Y משתנה מקרי מפולג באופן אחיד בקטע $(0; \frac{1}{X^2}]$.

(א) מצאו את $f_Y(y)$.

(ב) חשבו את $E(\sqrt{Y})$ ו- $E\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)$.

תרגיל 6.

יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים, כאשר X מפולג באופן אחיד על $(0, 1)$ ו- Y מפולג באופן אחיד על $(0, 2)$. נגדיר: $S = X + Y$, $V = X - Y$.

(א) מצאו את הצפיפות $f_S(s)$.

(ב) מצאו את פונקציית ההתפלגות של $Z = \max\{X, Y\}$.

(ג) מצאו את $f_{S,V}(s, v)$ ואת $f_V(v)$.