תרגיל בית 5

שאלה 1: (5 נק׳)

א. יהיו (X,d_1), (Y,d_2) ו-(Z,d_3) מרחבים מטריים. יהיו $f:X\to Y$ ו- $g:Y\to Z$ איזומטריות. הוכיחו כי $g\circ f:X\to Z$ גם היא איזומטריה. (2 נק׳)

ב. יהיו (X,T_1), (Y,T_2) ו-(Z,T_3) מרחבים טופולוגיים. יהיו $f:X\to Y$ ו- $g:Y\to Z$ הומיאומורפיזמים. הוכיחו כי $g\circ f:X\to Z$ גם היא הומיאומורפיזם. (3 נק׳)

שאלה 2: (35 נק׳)

יהיו (a,b) ו-(a',b') שני קטעים (סופיים או אינסופיים) על הישר הממשי, המצויידים במטריקה האוקלידית.

א. הוכיחו כי הקטעים (a,b) ו-(a',b') הם הומיאומורפיים כמרחבים טופולוגיים. (15 נק׳)

ב. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שהקטעים (a,b) ו-(a',b') יהיו איזומטריים כמרחבים מטריים. הוכיחו את תשובתכם. (20 נק׳)

שאלה 3: (15 נק׳)

יהיו $[a,b]$ ו-$[a',b']$ שני קטעיים סגורים וסופיים על הישר הממשי. הוכיחו כי המרחבים המטריים $\left(C[a,b],d_{L^\infty}\right)$ ו- $\left(C[a',b'],d_{L^\infty}\right)$ הם איזומטריים.

שאלה 4: (10 נק׳)

תהי $f:X\to Y$ העתקה חח״ע ועל מקבוצה X למרחב מטרי (Y,ρ).

א. הוכיחו כי ההעתקה d המוגדרת על $X\times X$ על ידי $d(x,y)=\rho\big(f(x),f(y)\big)$ לכל $x,y\in X$ היא מטריקה על הקבוצה X. (5 נק׳)

ב. הוכיחו כי הפונקציה f היא איזומטריה בין מרחבים מטריים (X,d) ו- (Y,ρ). (5 נק׳)

שאלה 5: (35 נק׳)

יהי $(\mathbb{R},d)$ מרחב מטרי, כאשר $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים ו- d היא המטריקה האוקלידית על $\mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי העתקה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא איזומטריה בין $(\mathbb{R},d)$ לעצמו אם ורק אם קיים $c\in\mathbb{R}$, כך ש- $F(x)=\pm(x+c)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. (15 נק׳)

ב. נניח כי העתקה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא רציפה כהעתקה מ- $(\mathbb{R},d)$ לעצמו. הוכיחו כי F היא הומיאומורפיזם בין $(\mathbb{R},d)$ לעצמו, אם ורק אם היא מונוטונית ממש (עולה או יורדת) ועל $\mathbb{R}$. (20 נק׳)

בהצלחה !