פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 2

1. נוכיח שהקבוצה $\{\downarrow\}$ היא שלמה ע"י כך ש"נגדיר" בעזרת הקשר $\downarrow$ את הקשרים $\neg$, $\wedge$ ו- $\vee$:

$$p\vee q \equiv (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q) \qquad p\wedge q \equiv (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q) \qquad \neg p \equiv p\downarrow p$$

את השקילויות בודקים בעזרת טבלאות האמת.

2. א. נוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק שעבור השמה שנותנת ערך "אמת" לכל פסוק אטומי, התוצאה היא בהכרח אף היא "אמת". נניח **A** פסוק כלשהו המורכב מהקשרים הנתונים.

בסיס: אם **A** פסוק אטומי אזי ערכו בהשמה לפי הנתון "אמת".

צעד האינדוקציה: **A** מהצורה **B * C** כאשר * הוא אחד הקשרים הדו-מקומיים הנתונים. לפי הנחת האינדוקציה **B** ו- **C** מקבלים ערך "אמת". לפי טבלאות האמת של כל הקשרים הנתונים התוצאה אף היא "אמת".

מההוכחה הנ"ל רואים בפרט שאי אפשר לממש שלילה של פסוק אטומי ולכן קבוצת הקשרים אינה שלמה.

ב. כמו בתרגיל קודם נסתמך על קומוטטיביות ואסוציאטיביות של הקשר $\equiv$ ועל האפשרות לצמצם זוגות של פסוקים אטומיים תוך כדי שמירת שקילות. כאן בנוסף נעזר בכך ש-$A\equiv\neg B$ שקול ל-$\neg(A\equiv B)$ ובכך ש-**A** שקול ל-$\neg\neg A$ ולכן שניתן "להזיז" בפסוק את סימן השלילה כרצונינו (כל עוד שומרים על חוקיות הביטוי מבחינה תחבירית) ולצמצם זוגותיו תוך כדי שמירת שקילות של הפסוקים המתקבלים.

נראה שלא לכל פונקצית אמת דו-מקומית ניתן למצוא פסוק עם שני פסוקים אטומיים שהיה תואם אותה ובכך נוכיח אי-השלמות של קבוצת הקשרים.

בסך הכל יש **16** פונקציות אמת דו-מקומיות שונות זו מזו. בהסתמך על התכונות של הקשרים הנתונות למעלה מקבלים שכל פסוק עם 2 פסוקים אטומיים, **p** ו-**q**, שקול לאחד הפסוקים הבאים:

p

q

$\neg p$

$\neg q$

$q\equiv q \quad (p\equiv p)$

$\neg q\equiv q \quad (\neg p\equiv p)$

$p\equiv q$

$\neg p\equiv q$

בסך הכל יש 8 פסוקים שהם לא שקולים הדדית. 8 < 16 ולכן לא לכל פונקצית אמת ניתן למצוא פסוק שהיה תואם אותה. מכאן שקבוצת הקשרים אינה שלמה.

3. הוכחה של $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$:

(1)	$(\neg p \rightarrow ((q \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p))$	(A2)
(2)	$(\neg p \rightarrow ((q \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$	(A1)
(3)	$(\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)$	(1,2)
(4)	$\neg p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$	(A1)
(5)	$\neg p \rightarrow \neg p$	(3,4)
(6)	$(\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)$	(A3)
(7)	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$	(5,6)

4. א. דוגמה נגדית: ניקח $A = p$, $B = \neg p$ ו-$\Sigma = \varnothing$ (p פסוק אטומי). $A \vee B$ מתפרש כ-$\neg A \rightarrow B$. בשאלה קודמת ראינו בפרט ש- $\neg p \rightarrow \neg p$ יכיח (שורה 5). אבל מכיוון ש-$\neg p$ ו-p אינם טאוטולוגיות אז ממשפט הנאותות מקבלים ששני הפסוקים אינם יכיחים.

ב. נרשום הוכחות של שני הפסוקים אחת אחרי השניה ובעזרת כלל ההיסק נסיק B כפסוק אחרון בהוכחה. על כן $\Sigma \vdash B$.