09/06/2016

קומבינטוריקה – הרצאה 11#

תזכורת: ראינו שמתקיים:

$$(k-1)(l-1) < r(k,l) \le \binom{k+l-2}{k-1}$$

בפרט, במקרה הפרטי $k = l$:

$$(k-1)^2 < r\left(k,\text{ל}\right) \le \binom{2(k-1)}{k-1}$$

החסם מלרע הוא פולינום ב-k. לגבי החסם מלעיל, ראינו:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

ולכן:

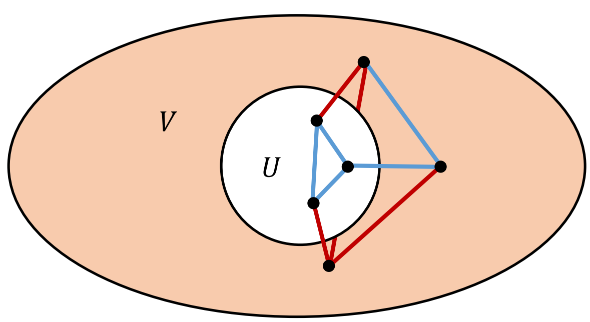
$$\binom{2(k-1)}{k-1} \sim \frac{2^{2k-2}}{\sqrt{\pi(k-1)}}$$

כלומר, החסם מלעיל הוא מעריכי ב-k.

משפט Erdős: לכל $k \ge 2$ מתקיים:

$$\binom{r(k,k)}{k} \ge 2^{\binom{k}{2}-1}$$

הוכחה: נסמן $n = r(k,k)$. נתבונן בגרף השלם K_n עם קב' קדקודים V, כאשר $|V| = n$. המספר הכולל של צביעות של הצלעות של K_n בכחול ובאדום הוא $2^{\binom{n}{2}}$. כעת נתבונן בתת קב' מסוימת $U \subseteq V$, $|U| = k$.



מס' הצביעות של הצלעות של K_n בכחול ובאדום שבהן כל הצלעות בתוך u הן כחולות הוא $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$. לכן, מס' הצביעות של K_n בכחול ובאדום שבהן *קיימת* U כנ"ל שכל הצלעות בה כחולות הוא לכל היותר:

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$$

אותו דבר נכון לגבי אדום, ולכן מס' הצביעות של הצלעות של K_n בכחול ובאדום שבהן קיימת U בגודל k שכל הצלעות בתוכה מאותו צבע הוא לכל היותר:

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1}$$

אבל, לפי הגדרת n, כל הצביעות הן כאלה, ולכן:

$$2^{\binom{n}{2}} \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}+1}$$

נצמצם ונקבל:

$$1 \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}+1}$$

כלומר:

$$\binom{n}{k} \geq 2^{\binom{k}{2}-1}$$

כמו שרצינו.

מסקנה: לכל $k \geq 2$ מתקיים $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

הוכחה: עבור $k = 2$: $r(2,2) = 2$, $2^{\frac{2}{2}} = 2$. מכאן והלאה נניח $k \geq 3$. אנחנו יודעים כי:

$$\frac{r(k,k)^k}{k!} \geq \binom{r(k,k)}{k} \geq 2^{\binom{k}{2}-1}$$

לכן:

$$r(k,k)^k \geq k!\, 2^{\binom{k}{2}-1} = k!\, 2^{\frac{k^2-k-2}{2}}$$

לכן, די להראות כי:

$$k!\, 2^{\frac{k^2-k-2}{2}} \geq 2^{\frac{k^2}{2}}$$

כלומר די להראות כי:

$$k! \geq 2^{\frac{k+2}{2}}$$

ואת זה קל להראות באינדוקציה על k החל מ-$k = 3$.

לסיכום: ידועים לנו כעת החסמים:

$$2^{\frac{k}{2}} \leq r(k,k) \leq 2^{2k}$$

שני החסמים הם מעריכיים ב-k, אבל הבסיס של המעריך הוא בין $\sqrt{2}$ לבין 4.

צביעה ומישוריות

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף. **צביעה של G ב-k צבעים** זו פונ' $f:V\to\{1,2,\dots,k\}$ המקיימת:

$$\{x,y\}\in E\Rightarrow f(x)\neq f(y)$$

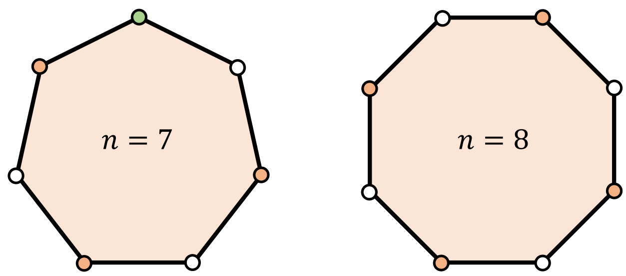
G נקרא **k-צביע** אם קיימת צביעה שלו ב-k צבעים. **מספר הצביעה** של G, המסומן ע"י $\chi(G)$, הוא ה-k הקטן ביותר שעבורו G הוא k-צביע.

דוגמאות:

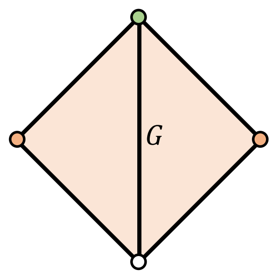
(1) עבור הגרף השלם K_n, $\chi(K_n)=n$:

(2) עבור המעגל C_n:

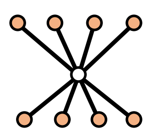
$$\chi(C_n)=\begin{cases}2, & n\equiv_2 0\\ 3, & n\equiv_2 1\end{cases}$$



(3) עבור הגרף הבא, $\chi(G)=3$:



(4) בגרף הבא, $\chi(G)=2$:



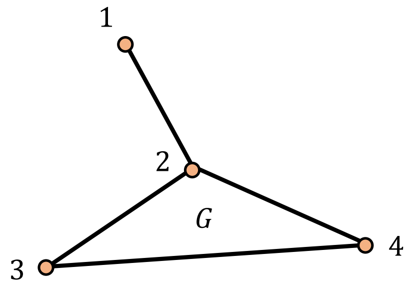
הערה: G הוא 2-צביע $\Leftrightarrow$ G הוא דו צדדי.

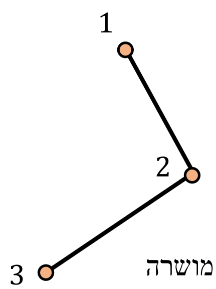
הגדרה: יהיה $G=(V,E)$ גרף. **תת גרף** של G הוא גרף מהצורה $G'=(V',E')$ + כאשר $V'\subseteq V, E'\subseteq E$.

תת גרף מושרה של G על תת קב' $V'\subseteq V$, המסומן ע"י $G[V']$, הוא גרף מהצורה $G'=(V',E')$ שבו:

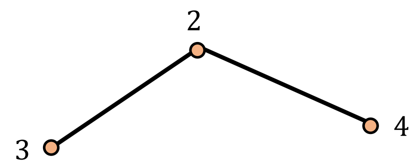
$$E'=\left\{\{x,y\}\in E\middle|x,y\in E'\right\}$$

דוגמא:



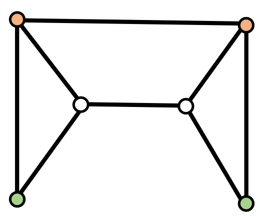


תת-גרף מושרה

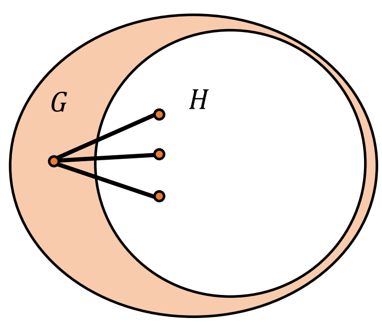


תת-גרף שאינו מושרה

משפט: יהי $G=(V,E)$ גרף ויהא k מספר טבעי. נניח שבכל תת-גרף מושרה G' של G קיים קדקוד x כך ש-$d_{G'} \le k-1$, אז G הוא k-צביע.



הוכחה: באינדוקציה על מס' הקדקודים n. בסיס: $n=1$ – טריוויאלי. צעד: $n \ge 2$. הנחת האינדוקציה אומרת שכל גרף עם פחות מ-n קדקודים המקיים את תנאי המשפט הוא k-צביע. מכיוון ש-G הוא תת-גרף מושרה של עצמו, לפי הנחת המשפט קיים קדקוד x ב-V עם $d_G(x) < k-1$. נתבונן בגרף המורה $H = G[V \setminus \{x\}]$.



H מקיים את תנאי המשפט, ויש בו פחות מ-n קדקודים. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, H הוא k-צביע. ניקח צביעה שלו ב-k צבעים, ואז נותר לנו למצוא צבע חוקי עבור x. יש בסה"כ k צבעים ולכל היותר $k-1$ איסורים, ולכן בהכרח קיים צבע חוקי עבור x.

סימון: $\Delta(G)$ מסמן את הערכיות המקס' ב-G.

מסקנה: בכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים:

$$\chi(G) \le \underbrace{\Delta(G)+1}_{k}$$