02/06/2016

קומבינטוריקה – תרגול #10

תורת רמזי

הגדרה: נאמר ש-N בעל תכונה $\boldsymbol{R(k,l)}$ אם לכל צביעה של K_N בכחול ואדום יש K_k כחול או K_l אדום. אם קיים מס' מינימלי N כך ש-K_N מקיים את התכונה $R(k,l)$, אז נאמר ש-$\boldsymbol{r(k,l)} = N$.

משפט ארדוש סקרש: $r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1)$ אם הם קיימים.

משפט רמזי: עבור k,l טבעיים, $r(k,l)$ קיים ו-$r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k1}$

דוגמאות:

(1) $r(k,l) = r(l,k)$
(2) $r(2,l) = l$
(3) $r(3,3) = 6$
(4) $r(3,4) = 9$

תרגיל: הוכיחו כי לכל l טבעי מתקיים $r(3,l) \leq \left\lceil \frac{l^2}{2} \right\rceil + 1$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה על l. בדיקה, עבור $l = 1$, $r(3,1) = 1 \leq 1 = \left\lceil \frac{l^2}{2} \right\rceil + 1$. נניח שהטענה נכונה עבור $l-1$ ונוכיח עבור l. צ"ל שב-K_t יש K_3 כחול או K_l אדום. $\deg(v) = t - 1 = \left\lceil \frac{l^2}{2} \right\rceil$ לכל v. מכל v יוצאות לפחות l צלעות כחולות, או לפחות $t - l$ צלעות אודמות. אם קיים v שיוצאים ממנו l צלעות כחולות, אם קיימים שניים מהשכנים הכחולים שמחוברים בכחול אז סיימנו כי יש K_3 כחול. אחרת, כל השכנים הכחולים מחוברים באדום, ואז יש K_l אדום וסיימנו.

במקרה השני, מכל קדקוד יוצאים לפחות $t - l$ צלעות אדומות. עבור $l = 2k + 1$ אי זוגי:

$$\left\lceil \frac{l^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(2k+1)^2}{2} \right\rceil = 2k^2 + 2k + 1 \left\lceil \frac{(l-1)^2}{2} \right\rceil$$

ולכן $t = \left\lceil \frac{l^2}{2} \right\rceil + 1$ מס' זוגי. ניקח את אחד הקדקודים. יוצאות ממנו $t - l$ צלעות אדומות. נוכיח שבשכנים האדומים K_3 כחול או K_{l-1} אדום. $t - l$. $r(3, l-1) \leq t - l$. לפי הנחת האינדוקציה:

$$r(3, l-1) \leq \left\lceil \frac{(l-1)^2}{2} \right\rceil + 1$$

$$\frac{(l-1)^2}{2} 0l + 1 = 2k^2 + 2k - l \leq t - l$$

ולכן ב-K_{t-l} יש K_3 כחול וסיימנו. אחרת , יש K_{l-1} אדום ויחד עם ה-v המקורי קיבלנו K_l אדום. עבור l זוגי, $t = \frac{l^2}{2} + 1$ אי זוגי ולכן $t - l$ אי זוגי. אם מכל v יוצאות בדיוק $t - l$ צלעות אדומות , אז כאשר נסתכל על הגרף האדום מקבלים שסכום הערכיויות $t(t-l)$ הוא מס' אי זוגי. זו סתירה, ולכן קיים קדקוד שיוצאים ממנו לפחות $t - l + 1$ צלעות אדומות. ניקח v

כזהונסתכל על השכנים האדומים שלו שיוצרים K_{t-l+1}. צריך להוכיח שיש K_3 כחול או K_{l-1} אדום. $r(3,l-1) \le t-l+1$. לכן, מהנחת האינדוקציה:

$$r(r,l-1) \le \left\lceil \frac{(l-1)^2}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{l^2-2l+1}{2} \right\rceil + 1 = \frac{l^2}{2} - l + 1 + 1 = t-l+1$$

תרגיל: נתונות 9 נק' במישור $x_1,\dots,x_9 \in \mathbb{R}^2$ הוכיחו ש-3 מתוכן נמצאות במרחק שונה מ-1 ביניהן.

פתרון: נגדיר גרף K_9 לכל נק' מהנק' הנתונות במישור נתאים קדקוד בגרף נצבע את הצלעות בכחול אם המרחק הוא 1 ובאדום אחרת. $r(4,3)=9$, ולכן K_4 כחול או K_3 אדום. לא קיימות 4 נק' במישור שהמרחק בין כל שתיים הוא בדיוק 1, ולכן לא יכול להיות K_4 כחול. לכן, יש K_3 אדום, וקיימות 3 נק' שהמרחק ביניהן שונה מ-1.

תרגיל: הוכיחו כי אם צובעים את צלעות K_{3n-1} בשני צבעים אז יש n צלעות זרות שכולן באותו צבע.

פתרון: נוכיח באינדוקציה. עבור $n=1$ הטענה טריוויאלית. נניח עתה את נכונות הטענה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. יהי K_{3n-1}. אם כל הצלעות צבועות בצבע אחד, אז:

$$\nu(K_{3n-1}) = \left\lfloor \frac{3n-1}{2} \right\rfloor \ge n$$

לכן יש זיווג בגודל n בצבע אחד. אחרת, חיש קדקוד v שממנו יוצאים יוצאות שתי צלעות בצבעים שונים – $\{v,u\}$ בכחול, ו-$\{v,w\}$ באדום. נוריד את v,u,w ואת כל הצלעות המכילות אותם, ונקבל $K_{3(n-1)-1}$. על פי הנחת האינדוקציה יש זיווג בגודל $n-1$ באחד הצבעים – למשל בכחול. נחזיר חזרה את u,v,w ואת כל הצלעות ואז הזיווג יחד עם הצלע $\{v,u\}$ יהיה זיווג בגודל n הצבוע בכחול.