אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

אינטגרל קווי מסוג ראשון

עבור עקום חלק $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ופונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מגדירים

$$\int_\gamma f \mathrm{dl} = \int_a^b f(\gamma(t)) \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{dt}$$

תרגיל: חשבו את $\int_\gamma (x+y)\mathrm{dl}$ כאשר γ הינו המשולש במישור שקודקודיו ב $(2,0),(1,1),(1,0)$

פתרון: מחלקים לשלושה מסלולים

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1(t) &=& (1,0)+t(0,1) \qquad t\in[0,1] \quad ; \quad \gamma_1'(t)=(\ 0,\ 1) \\ \gamma_2(t) &=& (1,1)+t(1,-1) \qquad t\in[0,1] \quad ; \quad \gamma_2'(t)=(1,-1) \\ \gamma_3(t) &=& (2,0)+t(-1,0) \qquad t\in[0,1] \quad ; \quad \gamma_3'(t)=(-1,0) \end{array}$$

באופן כללי, הפרמטריזציה של ישר המתחיל בנקודה v ומסתיים בנקודה u היא $\gamma(t)=v+t(u-v)=(1-t)v+tu$ כאשר $0\le t\le 1$ ואז הנגזרת תהיה $\gamma'(t)=u-v$. נחשב:

$$\begin{array}{rcl} \int_\gamma (x+y)\mathrm{dl} &=& \int_{\gamma_1}(x+y)\mathrm{dl}+\int_{\gamma_2}(x+y)\mathrm{dl}+\int_{\gamma_3}(x+y)\mathrm{dl} = \int_0^1(1+t)\mathrm{dt}+\int_0^1(1+t+1-t)\sqrt{2}\mathrm{dt}+\int_0^1(2-t)\mathrm{dt} \\ &=& 1+\frac{1}{2}+2\sqrt{2}+2-\frac{1}{2}=3+2\sqrt{2} \end{array}$$

הערה: האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה (ובפרט לא תלוי בכיוון התקדמות). למשל, אם בוחרים $\varphi_1(t)=(1,t^2)$ כאשר $0\le t\le 1$ במקום γ_1, נקבל ש

$$.\int_{\varphi_1}(x+y)\mathrm{dl}=\int_0^1(1+t^2)\left|(0,2t)\right|\mathrm{dt}=\int_0^1(1+t^2)2t\mathrm{dt}=2\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{2}=\int_{\gamma_1}(x+y)\mathrm{dl}$$

תרגיל: (לא היה בכיתה) חשבו את המסה של מעגל ברדיוס R המרוכז בראשית אם נתון כי צפיפות המסה היא $\rho(x,y)=|y|$

פתרון: נמצא תחילה פרמטריזציה למעגל

$$(x,y)=\varphi(t)=R(\cos(t),\sin(t)); \qquad \varphi'(t)=R(-\sin(t),\cos(t))$$

אז המסה של המעגל תהיה

$$\int_\varphi \rho(x,y)\mathrm{dl} = \int_0^{2\pi}\left|R\sin(t)\right|R\mathrm{dt}=R^2\int_0^\pi\sin(t)\mathrm{dt}-R^2\int_\pi^{2\pi}\sin(t)\mathrm{dt}=R^2\left[-\cos(t)\right]_0^\pi-R^2\left[-\cos(t)\right]_\pi^{2\pi}=4R^2$$

תרגיל: (לא היה בכיתה) חשבו אורך עקום $\varphi(t)=e^t(\sin(t),\cos(t))$ כאשר $0\le t\le 100$ (ספירלה).

פתרון: אורך עקום ניתן ע"י $\int_\varphi 1\mathrm{dl}=\int_0^{100}\left|\varphi'(t)\right|\mathrm{dt}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(t) &=& e^t(\sin(t),\cos(t))+e^t(\cos(t),-\sin(t)) \\ \left|\varphi'(t)\right|^2 &=& e^{2t}\left[(\sin(t)+\cos(t))^2+(\cos(t)-\sin(t))^2\right]=e^{2t}\left[1+2\sin(t)\cos(t)+1-2\sin(t)\cos(t)\right]=2e^{2t} \end{array}$$

$$.\int_\varphi 1\mathrm{dl}=\int_0^{100}\sqrt{2}e^t=\sqrt{2}(e^{100}-1)$$

אינטגרל קווי מסוג שני

עבור עקום חלק $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ושדה ווקטורי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ מגדירים

$$\int_\gamma \bar{F} \cdot \bar{\mathrm{dl}} = \int_\gamma \left\langle \bar{F}, \frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right\rangle \mathrm{dl} = \int_a^b \left\langle \bar{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle \mathrm{dt}$$

- סימון: לעיתים נוהגים לסמן אינטגרל זה ע"י $\int_\gamma P\mathrm{dx} + Q\mathrm{dy}$ כאשר $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, וכדומה במימדים גבוהים יותר.

הערה: אוריינטציה חיובית, או כיוון חיובי מתמטי, זה כאשר העקום מסתובב נגד כיוון השעון. כאשר נתון תחום D ורוצים לבצע אינטגרציה על השפה שלו בכיוון החיובי, מבצעים זאת כאשר התחום D נמצא משמאל לעקום.

תרגיל: חשבו את האינטגרל הבא

$$\int_{\partial D} (x^2 + y)\mathrm{dx}$$

כאשר $D = \left\{(x,y) \mid 0 < y < 4 - x^2\right\}$

פתרון: מחלקים את השפה לשני עקומים

1. השפה העליונה - מתקיים ש $y = 4 - x^2$ ולכן העקום יהיה $(t, 4-t^2)$ כאשר t נע החל מ $t = 2$ ועד $t = -2$. אם רוצים אפשר להחליף את העקום להיות $(-t, 4-t^2)$ ואז t נע החל מ -2 ועד 2.

$$\int_{\gamma_1} (x^2 + y)\mathrm{dx} = \int_{-2}^{2} ((-t)^2 + (4 - t^2)) \frac{\partial(-t)}{\partial t} \mathrm{dt} = -\int_{-2}^{2} 4\mathrm{dt} = -16$$

2. השפה התחתונה - מתקיים ש $y = 0$ ו x נע מ -2 ועד 2 והמסלול הוא $(t, 0)$

$$\int_{\gamma_2} (x^2 + y)\mathrm{dx} = \int_{-2}^{2} (t^2 + 0) \frac{\partial t}{\partial t} \mathrm{dt} = \int_{-2}^{2} t^2 \mathrm{dt} = \frac{t^3}{3} \mid_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

3. לכן סה"כ מקבלים שהאינטגרל הוא

$$\int_{\partial D} (x^2 + y)\mathrm{dx} = \int_{\gamma_1} (x^2 + y)\mathrm{dx} + \int_{\gamma_2} (x^2 + y)\mathrm{dx} = -16 + \frac{16}{3} = -\frac{48}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{32}{3}$$

הערה: גם פה הפרמטריזציה של העקומים לא משנה את התוצאה כל עוד שומרים על הכיוון התקדמות. אם מחליפים את הכיוון התקדמות אז התוצאה תתקבל עם סימן הפוך.

משפט גרין

יהי D תחום פשוט קשר, γ שפת התחום עם אוריינטציה המתאימה, $F=(P,Q)$ שדה גזיר ברציפות המכיל את D ואת ∂D אז

$$\oint_\gamma P\mathrm{dx}+Q\mathrm{dy}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{dxdy}$$

תרגיל: חשבו את $I=\oint_\gamma xy\mathrm{dx}+(x^2+y^2)\mathrm{dy}$ כאשר γהוא היקף הריבוע $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$

פתרון: משתמשים במשפט גרין

$$\oint_\gamma xy\mathrm{dx}+(x^2+y^2)\mathrm{dy}=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left(\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}-\frac{\partial(xy)}{\partial x}\right)\mathrm{dxdy}=\iint_{[0,1]\times[0,1]}(2y-y)\,\mathrm{dxdy}=\frac{1}{2}$$

תרגיל: חשבו את $I=\int F\cdot\mathrm{dl}$ לאורך המסלול $x^2+y^2=a^2$, $y>0$ מ $(a,0)$ עד $(-a,0)$ כאשר $F=(e^x\sin(y)-y,e^x\cos(y)-1)$

פתרון: נשים לב תחילה ש F זה שדה ש... לא נראה יפה על נקודה כללית. לעומת זאת, אם למשל $y=0$ אז השדה שווה ל $F(x,0)=(0,e^x-1)$ וזה כבר הרבה יותר סביר.
נסמן ב $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ את העקום עליו מבקשים לעשות אינטגרל וב $\psi:[-a,a]\to\mathbb{R}^2$ את העקום $\psi(t)=(t,0)$. אז קל לראות ששרשור העקומים נותן את השפה של חצי המעגל $x^2+y^2\le a^2$ ו $y\ge 0$. לכן, לפי משפט גרין נקבל ש

$$\int_\varphi F\mathrm{dl}+\int_\psi F\mathrm{dl}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{dxdy}=\iint_D 1\mathrm{dxdy}=\frac{\pi a^2}{2}$$

ולכן $\int_\varphi=\frac{\pi a^2}{2}-\int_\psi$. מכאן שמספיק לחשב את האינטגרל על העקום ψ. הנגזרת תהיה $\psi'(t)=(1,0)$ ולכן

$$\int_\psi F\mathrm{dl}=\int_{-a}^a F(t,0)\cdot(1,0)\mathrm{dt}=\int_{-a}^a\left(0,e^t-1\right)\cdot(1,0)\,\mathrm{dt}=\int_{-a}^a 0\mathrm{dt}=0\ .$$

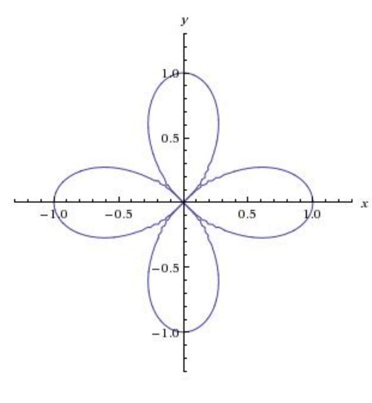
לכן סה"כ $\int_\varphi=\frac{\pi a^2}{2}$. שימו לב שהסיבה שקיבלנו 0 כבר באינגרנד בחישוב האחרון היא בגלל שהשדה F תמיד מאונך לכיוון ההתקדמות ולכן לא תורם לעבודה שמתבצעת.

שימוש: ניתן להשתמש במשפט גרין כדי לחשב שטח - נבחר שדה $F=(P,Q)$ כך ש $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ ואז נקבל ש

$$\iint_D 1\mathrm{dxdy}=\oint_{\partial D}F\mathrm{dl}$$

דוגמאות לשדות כאלו הם $(0,x),(-y,0),\frac{1}{2}(-y,x)$.

תרגיל: חשבו את השטח של $quadrifolium$ הניתן ע"י הנוסחא $\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)^2$, או ע"י מעבר לקור' פולריות $x=r\cos(\theta),\ y=r\sin(\theta)$ הנוסחא היא $r^2=\cos^2(2\theta)$.



פתרון: כדי להבין למה מקבלים את הצורה הנ"ל, נשים לב שכאשר $\theta = 0$ מקבלים ש $r = \cos(2\cdot 0) = 1$ וכאשר θ גדל (או קטן) הרדיוס קטן ויגיע לאפס כאשר $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$.
כדי לחשב את השטח נחשב רק את העלה הימני ונכפול בסוף בארבע. נשתמש במשפט גרין עם השדה $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$ כדי לחשב את השטח, כלומר אם γ פרמטריזציה לשפה של העלה הימני, אז השטח שלו יהיה $\iint_D 1\mathrm{dxdy} = \int_\gamma F\mathrm{dl}$.
כבר בעצם נתונה לנו פרמטריזציה לעקום

$$(x(t),y(t)) = r(\cos(\theta),\sin(\theta)) = \cos(2\theta)\cdot(\cos(\theta),\sin(\theta))$$

והנגזרת שלו תהיה

$$(x'(t),y'(t)) = \overbrace{-2\sin(2\theta)}^{r'(\theta)}\cdot(\cos(\theta),\sin(\theta)) + \overbrace{\cos(2\theta)}^{r(\theta)}\cdot(-\sin(\theta),\cos(\theta))$$

כדי לפשט על הכתיבה נסמן $v_\theta = (\cos(\theta),\sin(\theta))$ ו $u_\theta = (-\sin(\theta),\cos(\theta))$ ונשים לב ש $\langle v_\theta, u_\theta\rangle = 0$ ו $\langle u_\theta, u_\theta\rangle = 1$.
סה"כ נקבל ש

$$\begin{aligned}\langle F(x(t),y(t))\ ,\ (x'(t),y'(t))\rangle &= \frac{1}{2}\langle(-y(t),x(t)),(x'(t),y'(t))\rangle = \frac{1}{2}\langle r(\theta)u_\theta, r'(\theta)v_\theta + r(\theta)u_\theta\rangle \\ &= \frac{1}{2}r(\theta)r'(\theta)\langle u_\theta, v_\theta\rangle + \frac{1}{2}r(\theta)^2\langle u_\theta,u_\theta\rangle \\ &= \frac{1}{2}r(\theta)^2 = \frac{1}{2}\cos^2(2\theta)\end{aligned}$$

והאינטגרל יהיה

$$\int_\gamma F\mathrm{dl} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2(2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}$$

והשטח של הארבעה עלים יחד יהיה $\frac{\pi}{2}$.