התכנסות שאינה בהכרח בהחלט

הקריטריונים לעיל (למעט לייבניץ) מדברים למעשה על התכנסות בהחלט, ורק כבדרך אגב נובעת התכנסות. המשפט הבא אינו קשור להתכנסות בהחלט. נזדקק לטענת העזר הבאה, שמהווה אנלוג דיסקרטי לנוסחת האינטגרציה בחלקים.

<u>למה.</u> נוסחת סיכום בחלקים). תהיינה $\{a_n\}$ ו: $\{b_n\}$, $n \geq 1$, סדרות כלשהן, ונסמן $B_0 = 0$ ו:

$$.B_n = b_1 + b_2 \cdots + b_n$$

אז

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i) . \quad (1)$$

הנוסחא הזו מקבילה ל:

$$\int_a^b fg = F(b)g(b) - \int_a^b F g'$$

כאשר $F(x) = \int_a^x f$ (ובפרט $F(a) = 0$).

הוכחה:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i\end{aligned}$$

מאחר ו: $B_0 = 0$ נשאר

$$= a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i$$

מה שמוכיח את (1).

<u>משפט (דיריכלה)</u>. יהי $\sum b_n$ טור חסום, כלומר קים קבוע $M > 0$ כך שמתקיים

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| < M$$

לכל $n \geq 1$, ותהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית, יורדת לאפס באופן מונוטוני. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

<u>הערה</u>. קריטריון לייבניץ נובע מהמשפט הזה כדלקמן: אם $\{a_n\}$ כמו במשפט, אז הטור

$\sum(-1)^n a_n$ מתקבל מבחירת $b_n = (-1)^n$, ועבור סדרה זו $|B_n| = 0, 1$, ותנאי המשפט מתקיימים.

<u>הוכחה.</u> בהוכחה הזו אנו נסמנים

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n ,$$

ונתון ש: $|S_n| < M$ לכל n. נוכיח התכנסות ע"י שימוש בקריטריון Cauchy, כך שצריך להראות שבהינתן $\epsilon > 0$ מתקיים

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i b_i\right| < \epsilon \qquad (1)$$

לכל $N(\epsilon) < n < m$. את הסכום באגף שמאל של (1) אנו מבטאים באמצעות נוסחת הסיכום

בחלקים:

$$\sum_{i=n+1}^{m} a_i b_i = a_m B_m - \sum_{i=n+1}^{m-1} B_i (a_{i+1} - a_i) \tag{2}$$

כאשר כאן

$$.B_i = b_{n+1} + \cdots + b_i = S_i - S_n$$

ברור שמתקיים

$$,|B_i| = |S_i - S_n| \le |S_i| + |S_n| \le 2M$$

ולכן עבור המחובר הראשון באגף ימין של (2)

$$,|a_m B_m| \le 2M a_m$$

והוא שואף ל: 0, כי $a_m \to 0$.

נותר להראות שהמחובר השני ב: (2) הוא קטן כרצוננו, ונעריך את ערכו המוחלט:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m-1} B_i(a_{i+1}-a_i)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m-1} 2M|a_{i+1}-a_i|.$$

אולם $a_{i+1}-a_i<0$ לכל i כי $\{a_i\}$ היא סדרה יורדת, ולכן

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{m-1} 2M|a_{i+1}-a_i| &= 2M\sum_{i=n+1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})\\ &= 2M(a_{n+1}-a_m).\end{aligned}$$

חזרה למשואה (2). המחובר הראשון באגף ימין שם חסום ע"י $2Ma_m$. אם מצרפים את

החסמים על המחובר הראשון והמחובר השני באגף ימין של (2) מקבלים

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m-1} B_i(a_{i+1}-a_i)\right| \\ \leq 2M(a_m + a_{n+1} - a_m) \\ = 2Ma_{n+1}$$

משאיפה לאפס של a_n נובע שהביטוי האחרון יהיה קטן כרצוננו כאשר n יהיה גדול מספיק. זה מוכיח שהסדרה $\{S_n\}_{n=1}$ היא סדרת קושי, ולכן מתכנסת, וזוהי טענת המשפט.

<u>הערה.</u> רואים מההוכחה שאפשר להחליף את

ההנחה $a_i \geq a_{i+1}$ בהנחה הבאה:

$$\lim_{i\to\infty} a_i = 0 \text{ וגם } \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - a_{i+1}| < +\infty, \quad (3)$$

כמו לעיל בהערכת אגף שמאל ב: (2) מקבלים

$$\cdots \leq 2M \cdot \epsilon + 2M \cdot \sum_{i=n+1}^{m} |a_{i+1} - a_i|$$

והמחובר השני יהיה קטן כרצוננו אם n גדול מספיק, מתחת לתנאי ההתכנסות (3). בווריציה הזו מתקבל המשפט הבא:

<u>משפט.</u> נניח שקיים $M > 0$ כך ש:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| < M$$

לכל $n \geq 1$. נניח ש: $a_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$,
ונניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. אז
הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ הוא טור מתכנס.

<u>דוגמא.</u> נראה שהטור

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n + (-1)^n}$$

מתכנס, כאשר θ איזשהו מספר קבוע. נבחר

$$a_n = \frac{1}{n + (-1)^n}, \ b_n = \sin n\theta ,$$

ונראה שהטור $\sum b_n$ הוא טור חסום. ואמנם

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{n+2}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

הסדרה $\{a_n\}$ אינה מונוטונית, אך מקיימת את התנאי (3):

$$a_{n+1}-a_n=\begin{cases}\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+1} & n=2k\\ \frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k} & n=2k+1\end{cases}$$

ולכן בכל מקרה $|a_{n+1}-a_n|<3/(2k)^2$, או

$$|a_{n+1}-a_n|<3\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2=\frac{12}{n^2},$$

ולכן הטור $\sum|a_{n+1}-a_n|$ מתכנס.

עוד ווריציה על הנושא הזה היא:

<u>משפט.</u> נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, ונניח ש: $\{a_n\}$ היא סדרה מונוטונית (עולה או יורדת) וחסומה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ הוא טור מתכנס.

__הערה.__ אין במשפט הזה הנחה ש: $a_n \to 0$.

__הוכחה.__ הסדרה $\{a_n\}$ היא סדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת: $a_n \to a$ עבור מספר כלשהו a. לכן ההפרש $a_n - a$ שואף ל: 0 באופן מונוטוני. נכתוב את הסכום החלקי ה: nי בצורה הבאה:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a) b_i + a \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{4}$$

ונבחן את שני המחוברים באגף ימין של (4).

הראשון

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a) b_i$$

מתכנס כי $a_n - a$ שואף לאפס באופן מונוטוני, $\sum b_n$ הוא טור חסום (אפילו מתכנס), ומשתמשים במשפט הקודם.

המחובר השני $a\sum_{i=1}^{n} b_i$ מתכנס בגלל הנחת ההתכנסות של $\sum b_n$. לכן S_n ב: (4) שואף לגבול כאשר $n \to \infty$, ופרוש הדבר שהטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

<u>דוגמא.</u> טענת המשפט האחרון איננה נכונה אם מוותרים על תנאי ההתכנסות המונוטונית של $\{a_n\}$. כי תהיינה

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

אז $a_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$, ואילו הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

הוא טור מתכנס, לפי קריטריון לייבניץ. אבל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הוא טור מתבדר.

פעולות מותרות על טורים

לפי הגדרתנו, בחינת ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שקולה לבחינת תכונות התכנסות של סדרת הסכומים החלקיים

$$.S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

זה אומר שאנו מוסיפים את המחוברים a_n אחד-אחד לפי סדר הופעתם, ובודקים את הסכומים המתקבלים באופן הזה.

אפשר היה לסכם באופן אחר: לסכם תחילה את n_1 המחוברים הראשונים

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1})$$

אחר כך את כל המחוברים עד האבר ה: n_2,
$(n_2 > n_1)$:

$$(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) \, ,$$

אחר כך את כל המחוברים עד האבר ה: n_3,
$(n_3 > n_3)$:

$$(a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \cdots + a_{n_3}) \, ,$$

וכ"ו. כלומר, אנו מציבים סוגריים בטור
ומחשבים אותו כדלקמן:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2})$$
$$+ \cdots + (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}}) + \cdots$$

<u>משפט.</u> אם הטור $\sum a_n$ הוא טור מתכנס, אז אפשר להוסיף סוגריים ופעולה זו אינה משנה את ערך הסכום. אולם הפעולה ההפוכה אסורה: בדרך כלל אסור להסיר סוגריים, והסרת סוגריים עלולה לשנות את תכונות ההתכנסות של הטור.

<u>הוכחה.</u> נתון שהטור $\sum a_n$ הוא טור מתכנס, נגיד ל: S, ונתונה סדרה של מספרים טבעיים

$$.n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

אני טוען שאז גם הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}})$$

מתכנס, ולאותו הגבול S. הסיבה היא: אם נסמן

$$A_k = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}},\ k \geq 0,$$

עם הסימון $n_0 = 0$, אז הטור המתקבל בהצבת סוגריים הוא הטור $\sum_i A_i$. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים שלו

$$T_k = \sum_{i=0}^{k} A_i,$$

ואז יוצא שהסדרה $\{T_k\}$ היא תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

למעשה

$$T_0 = S_{n_1},\ T_1 = S_{n_2}, \ldots, T_{k-1} = S_{n_k}.$$

מאחר ו: $\{S_n\}$ סדרה מתכנסת ל: S, נובע שגם תת-הסדרה שלה $\{T_k\}$ מתכנסת, ולאותו הגבול S.

בדרך כלל הסרת סוגריים אינה מהווה פעולה מותרת. למשל $\sum(1-1)$ מתכנס, אך הטור

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

אינו מתכנס. הסיבה היא שבהסרת הסוגריים אנו מוסיפים סכומים חלקיים אשר לא היו נוכחים עבור הטור עם סוגריים. לכן יתכן שהסדרה החדשה לא תתכנס למרות שהסדרה המקורית, שהיא תת-סדרה שלה, כן מתכנסת.

אבל בצד החיובי יש את המשפט הבא:

משפט. אם בכל זוג סוגריים מופיעים אברים בעלי אותו סימן, אז מותר להסיר את הסוגריים, בלי לשנות את תכונות ההתכנסות ואת ערך הסכום (אם הוא מתכנס).

הוכחה: נתון שהטור

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}}) + \cdots$$

מתכנס, ואנו מסמנים עבור $k \geq 0$

$$A_k = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}}$$

(כאשר מסמנים $n_0 = 0$) ו:

$$.T_k = \sum_{i=0}^{k} A_i$$

מאחר והסדרה T_k מתכנסת היא סדרת קושי, ובהינתן $\epsilon > 0$ קים $N(\epsilon)$ כך ש: $|T_k - T_l| < \epsilon$ אם $k, l > N(\epsilon)$. יהי

$$.N_0 = n_{N(\epsilon)+1}$$

אנו נראה שלכל שני מספרים טבעיים $m, n > N_0$ מתקיים

$$.|S_n - S_m| < 3\epsilon$$

כל אחד מהמספרים m ו: n משתייך לאיזשהו בלוק הנוצר מסוגריים, נגיד

$$n \in \{n_k + 1, n_k + 2, ..., n_{k+1}\},\ k > N(\epsilon)$$

$$.m \in \{n_l + 1, n_l + 2, ..., n_{l+1}\},\ l > N(\epsilon)$$

(אנו בוחנים את המקרה בו m ו- n משתייכים לבלוקים שונים. המקרה בו הם שייכים לאותו הבלוק הוא קל יותר.) אנו מעריכים כדלקמן:

$$|S_n-S_m| \leq |S_n-T_k|+|T_k-T_l|+|T_l-S_m|. \quad (1)$$

מאחר ו- $k,l > N(\epsilon)$ נובע ש:

$$|T_k - T_l| < \epsilon. \quad (2)$$

עבור המחובר $|S_n - T_k|$ יש את הביטוי

$$\begin{aligned}|T_k - S_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n_{k+1}}| \\ &\leq |a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \cdots + a_{n_{k+1}}|\end{aligned}$$

כי מאחר וכולם בעלי אותו סימן, הגדלת מספר המחוברים מגדילה את ערך הסכום. אבל

$$|a_{n_k+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n_{k+1}}|$$
$$=|T_k-T_{k-1}|<\epsilon$$

המסקנה היא ש:

$$.|S_n-T_k|<\epsilon$$

באופן דומה מקבלים

$$.|T_l-S_m|<\epsilon$$

מאי השיויונות הללו יחד עם (2), נובע מאי-השיויון ב: (1) ש: $|S_n-S_m|<3\epsilon$, וזה לכל $m,n>N_0$. זה מוכיח ש: $\{S_n\}$ היא סדרת קושי, ומסיים את הוכחת המשפט.