

1. $\int \frac{x+1}{x} dx$
2. $\int (\sqrt{x} - 5x^6) dx$
3. $\int \tan^2 x dx$
4. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$
6. $\int \frac{dx}{4x^2+1}$
7. $\int \frac{dx}{3-x}$
8. $\int x e^x dx$
9. $\int \ln^2 x dx$
10. $\int e^x \cos 2x dx$
11. $\int x^2 \cos x dx$
12. $\int \ln(1+x^2) dx$
13. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$
14. $\int e^x \cos(e^x) dx$
15. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$
16. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
17. $\int \tan x dx$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$
19. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}$
20. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4}}$

21. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 8}$
22. $\int \frac{(x + 2)dx}{x^2 - 6x + 25}$
23. $\int \frac{12x + 5}{x^2(x^2 + 2x + 5)}dx$
24. $\int \frac{2x^3dx}{2x^2 - 4x + 3}$
25. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1}$
26. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(2x + 1)}$
27. $\int \arctan x dx$
28. $\int \sqrt{e^x + 1} dx$
29. $\int \arcsin x dx$
30. $\int \frac{e^x dx}{e^{-x} + e^x}$
31. $\int x \arcsin(x^2) dx$
32. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$
33. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$
34. $\int \frac{\sqrt{3 - x^2}}{x^2} dx$
35. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$
36. $\int \frac{dx}{2 - \cos x}$
37. $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$
38. $\int \cos^3 x dx$
39. $\int \frac{\sin x \cos x}{2 + 3 \cos x} dx$
40. $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$
41. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$
42. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$
43. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - 3}}$
44. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 3x + 2}$

$$45. \int \frac{\ln^2 x dx}{x(\ln^2 x + 1)}$$

$$46. \int e^x \ln(1 + e^x) dx$$

$$47. \int \frac{2x + 1}{x(x - 1)^2} dx$$

$$48. \int \frac{x^3 + 2}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$49. \int \frac{dx}{x(x + 1) \cdots (x + n)}$$

$$50. \int \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}} dx$$

51. כזכור, האינטגרל הלא מסוים $\int g(x) dx$ מוגדר עבור פונקציה $g(x)$ המוגדרת באינטרוול מסוים. בתרגיל זה נרצה לדון באפשרות להרחיב את ההגדרה למצב שבו $g(x)$ איננה מוגדרת בנקודה מבודדת פנימית לאינטרוול. לשם הבהרת הנושא נדון בנוסחא הבאה:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

מה קורה אם $f(x)$ איננה גזירה בנקודה מסוימת? הדרכה: התבונן בשלש הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

מהו $f'(x)$ בכל אחד מהמקרים?

מהו $\int f'(x) dx$?

התוכל לנסח חוק כללי?

שני סוגי הצבות שלא נגיע אליהן בתרגול:

(I) עבור אינטגרנד שהוא פונקציה רציונלית של

$$x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^\alpha, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^\beta, \dots$$

כאשר α, β, \dots מספרים רציונליים, נשתמש בהצבה:

$$t^m = \frac{ax + b}{cx + d}$$

כאשר m השלם הקטן ביותר כך שהמכפלה $m \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \dots$ היא מספר שלם.

(II) עבור אינטגרנד שהוא פונקציה רציונלית של

$$x, \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad a > 0$$

נשתמש בהצבה

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}$$

(*) \pm נבחר לפי הבעיה הספציפית

(*) שיטה זו טובה במיוחד למקרה שהביטוי $ax^2 + bx + c$ הוא אי-פריק

תרגילים - בנושא הנ"ל, וגם אחרים (חלק מהם קשים):

52. $\int (a+x)^{2/3} x^3 dx$

53. $\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/3}}$

54. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + bx + a}}$

56. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + 1}}$

57. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

58. $\int (1+x^3)^{-1/3} dx$

59. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$

60. $\int x \tan^2 x dx$

61. $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$

62. $\int \sin(\ln x) dx$

63. $\int \frac{x^2 dx}{(\cos x + x \sin x)^2}$

64. $\int \frac{x^2 dx}{(\sin x - x \cos x)^2}$

65. $\int \sqrt{a + \tan^2 x} dx$

66. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx$

67. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

68. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$

69. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$$70. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$$

71. לפתח נוסחת נסיגה עבור

$$I_p = \int \frac{dx}{(1+x^2)^p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

72. לפתח נוסחת נסיגה עבור

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(לבדוק עבור $m = 0$, $m < 0$, $m > 0$)