קומבינטוריקה - תרגיל מס' 3

פתרון

תרגיל מס' 1

בכתה בת 25 תלמידים בוחרים נבחרת שחמט (לוח ראשון, שני, שלישי ורביעי) ונבחרת כדורסל (חמישה שחקנים, הסדר לא משמעותי).

א. בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת השחמט?

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור את נבחרת הכדורסל?

ג. בכמה דרכים ניתן לבחור את שתי הנבחרות, אם אסור שיהיה יותר מתלמיד אחד המשתתף בשתיהן?

פתרון:

א) יש לבחור 4 אנשים מתוך 25 עם חשיבות לסדר ביניהם, יש $P(25,4) = 25 \times 24 \times 23 \times 22$ אפשרויות לעשות את זה.

ב) יש לבחור 5 אנשים מתוך 25 ללא חשיבות לסדר ביניהם ויש $\binom{25}{5}$ אפשרויות לעשות זאת.

ג) נפריד את הבעייה לשני מקרים זרים:

1) אין תלמיד משותף לשתי הנבחרות.

2) יש תלמיד משותף לשתי הנבחרות.

ברור שהמקרים הם זרים (כלומר אין בחירה שנכללת גם במקרה הראשון וגם בשני), ולכן התשובה היא סכום של מספר האפשרויות במקרה הראשון והשני לחוד.

מספר האפשרויות למקרה 1: במקרה זה אין תלמיד משותף ולכן יש לנו $P(25,4) = 25 \times 24 \times 23 \times 22$ אפשרויות לבחור את נבחרת השחמט, ואז מבין 21 התלמידים הנותרים יש לנו $\binom{21}{5}$ אפשרויות לבחור את נבחרת הכדורסל בה אין חשיבות לסדר התלמידים. לכן מספר האפשרויות במקרה זה הוא $P(25,4) \times \binom{21}{5}$.

מספר האפשרויות למקרה 2: במקרה זה יש תלמיד שמשתתף בשתי הנבחרות. ראשית נבחר את נבחרת השחמט, יש לנו כמו קודם $P(25,4)$ אפשרויות לעשות זאת. בשלב השני נבחר מבין 4 השחמטאים את התלמיד שבנוסף ישחק כדורסל יש 4 אפשרויות לעשות זאת. עתה מבין 21 התלמידים הנותרים יש לנו $\binom{21}{4}$ אפשרויות לבחור עוד ארבעה תלמידים לנבחרת הכדורסל ללא חשיבות לסדר ביניהם. לכן סך הכל מספר האפשרויות במקרה זה הוא $\binom{21}{4} \times 4 \times 22 \times 23 \times 24 \times 25$.

לקבלת התשובה הסופית, כאמור נחבר את כמות האפשרויות המקרה הראשון עם כמות האפשרויות במקרה השני ונקבל $P(25,4) \times \binom{21}{5} + P(25,4) \times 4 \times \binom{21}{4}$.

<u>תרגיל מס' 2</u>

לכל אחד מן התנאים הבאים, מיצאו את מספר הטורים בטוטו כדורגל על 16 משחקים, המקיימים את התנאי.

א. לכל i $(i=1,2,\ldots,16)$ התוצאה במשחק ה - i שונה מן התוצאה במשחק ה - $(17-i)$.

ב. יש חמש תוצאות 1, חמש תוצאות 2 ושש תוצאות x.

ג. אין אף x, יש בדיוק שלוש תוצאות 2 ואף שתיים מהן אינן מופיעות זו אחר זו.

<u>פתרון:</u>

א) נחלק את 16 השורות בטופס הטוטו ל-8 זוגות: בכל זוג תופיע השורה ה-i והשורה ה-$(17-i)$ $(i=1,2\ldots 8)$, כלומר הזוגות

שורה 1 עם שורה 16

שורה 2 עם שורה 15

$\vdots$

שורה 8 עם שורה 9

נשים לב כי לפי התנאי בכל זוג יכולות להופיע התוצאות הבאות: $(1,X),(1,2),(X,1),(X,2),(2,1),(2,X)$, לכן יש לנו בדיוק 6 אפשרויות לקבוע מה יהיה תוכן השורות בכל זוג. סך הכל יש לנו 8 זוגות כאלה ולכן יש לנו 6^8 טורים המקיימים את התנאי.

ב) יש לנו $\binom{16}{5}$ אפשרויות לבחור את השורות בהן תהיה הבחירה "1", לאחר מכן יש לנו $\binom{11}{5}$ אפשרויות לבחור מבין השורות הנותרות את השורות בהן תהיה הבחירה "2", מכאן נקבל באופן יחיד את השורות בהן הבחירה היא "X". לכן סך הכל יש לנו $\binom{16}{5}\times\binom{11}{5}=\frac{16!}{5!\times 5!\times 6!}$ טורים המקיימים את התנאי.

ג) <u>פתרון ראשון:</u>

מספר סך כל האפשרויות בלי התנאי, הוא מספר כל האפשרויות לבחור 3 שורות בהן יוצבו ה-2-ים מבין כל 16 השורות, יש $\binom{16}{3}=560$ אפשרויות לעשות זאת.

נספור ונוריד את מספר האפשרויות הלא מתאימות לתנאי.

-מספר האפשרויות בהן מופיעים שני 2-ים ברצף ואחד לחוד: במקרה זה יש עוד התפצלות לשתי אפשרויות:

--הזוג הצמוד מופיע בקצה: יש 2 אפשרויות למקם את הזוג הצמוד ועוד 13 אפשרויות למקם את הבודד, סך כל האפשרויות במקרה זה: 26.

--הזוג הצמוד לא מופיע בקצה: יש 13 אפשרויות למקם את הזוג הצמוד ועוד 12 אפשרויות למקם את הבודד, סך כל האפשרויות במקרה זה: 156.

-מספר האפשרויות בהן מופיעים כל שלשת ה-2-ים ברצף: יש 14 אפשרויות במקרה זה למקם את השלישיה.

לסכום, מספר האפשרויות הלא מתאימות הוא $26+156+14=196$ ולכן מספר האפשרויות המתאימות הוא $560-196=364$.

פתרון שני: נספור את הטפסים הלא מתאימים בצורה שונה, תוך שימוש בעקרון ההכלה-הפרדה.

נסמן A - קבוצת כל הטפסים בהם זוג ה-2-ים מופיע לפני הבודד.

נסמן B - קבוצת כל הטפסים בהם זוג ה-2-ים מופיע אחרי הבודד.

אנו מחפשים את $|A \cup B|$.

נמצא את $|A|$: נסמן x_1 - מספר ה-1-ים לפני זוג ה-2, x_2 - מספר ה-1-ים בין הזוג לבודד, x_3 - מספר ה-1-ים אחרי ה-2 הבודד. כל איבר ב- A מתאים לפתרון של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ עם $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ שלמים, שהוא שווה ל-$105 = \binom{13+3-1}{3-1} = \binom{15}{2}$. לכן $|A| = 105$. נשים לב שבדיוק באותו אופן $|B| = 105$.

עתה $|A \cap B|$ הוא בדיוק מספר הטורים בהם שלושת ה-2-ים מופיעים ברצף (חשבו למה!). ולכן $|A \cap B| = 14$.

לפי עקרון ההכלה-הפרדה מקבלים $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 105 + 105 - 14 = 196$.

ולכן מספר הטורים המתאימים לתנאי הוא $560 - |A \cup B| = 560 - 196 = 364$.

תרגיל מס' 3

קבוצה ובה 12 ילדים צריכה להתחלק לשלשות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת? (אין משמעות לסדר השלשות).

פתרון:

יש $\binom{12}{3}$ אפשרויות לבחור את השלושה הראשונה, $\binom{9}{3}$ אפשרויות לבחור את השלושה השנייה, $\binom{6}{3}$ את השלושה השלישית ו-$\binom{3}{3}$ את השלושה הרביעית. מכאן נקבל

$$\binom{12}{9} \times \binom{9}{6} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = \frac{12!}{3!^4}$$

אפשרויות. נשים לב כי אין חשיבות לסדר בין השלשות ולכן בעצם ספרנו כל שלושה $4! = 24$ פעמים ויש לחלק את התוצאה ב-24. (טעות נפוצה מאוד בקרב תלמידים היתה לא לשים לב לנקודה זו). ונקבל את התשובה:

$$\frac{12!}{3!^4 \times 4!}$$

תרגיל מס' 4^* (בונוס)

א. כמה אפשרויות יש לצבוע פאות של קוביה בשישה צבעים שונים, כאשר צביעות המתקבלות מסבובים במרחב נחשבות זהות, אבל צביעות המתקבלות זו מזו על ידי שיקוף נחשבות שונות.

ב. כמו א', אבל צובעים את 8 הקודקודים של הקובייה.

ג. כמו א', אבל עכשיו צובעים את 12 הצלעות של הקובייה.

ד. כיצד היו משתנות התשובות לסעיפים א'-ג', אם צביעות המתקבלות זו מזו על ידי שיקוף היו נחשבות זהות?

פתרון:

נשים לב, כי צביעה מסוימת ניתן לסובב במרחב ב-24 דרכים: יש 6 דרכים לקבוע את "בסיס" הקובייה, ועוד 4 דרכים לסובב את הקובייה סביב צירה. לכן, אם נספור את האפשרויות ללא התחשבות באפשרויות

הסבוב, נספור כל אפשרות 24 פעמים. לכן התשובות לשלושת הסעיפים הראשונים הם מספר האפשרויות הכולל חלקי 24:

א) $\frac{6!}{24}$

ב) $\frac{8!}{24}$

ג) $\frac{12!}{24}$

ד) אפשרות השיקוף מכפילה פי 2 את מספר באפשרויות לסובב ולשקף קובייה צבועה. לכן כל צביעה תיספר 48 פעמים והתשובות יהיו:

א) $\frac{6!}{48}$

ב) $\frac{8!}{48}$

ג) $\frac{12!}{48}$