אלגברה ב'   שניר חרק / 205689381

4. נפריך באמצעות דוגמה נגדית:

עבור $V \subseteq \mathbb{R}^3$, $V = sp\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \}$

$$W = sp\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \}$$
$$U = sp\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \}$$
$$X = sp\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \}$$

בוודאי מתקיים $X+U+W=V$ וכן $X\cap U = W\cap X = W\cap U = \{0\}$.

אך $X \cap (W \cup U) = sp\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \}$. סתירה להשערה

סכום ישר מעל שלושה לא מתקיים.

1.א. צ.ל. $|adj A| = |A|^{n-1}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $n\geq 2$

הוכחה: נעזר במשפט $A\cdot adj A = |A|\cdot I_{n\times n}$.

נפעיל דטרמיננטה על שני האגפים:

$$|A\cdot adj A| = ||A|\cdot I| \overset{(1)}{\Longrightarrow} |A|\cdot|adj(A)| = |A|^n$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} |adj(A)| = |A|^{n-1}$$

(1) באגף ימין נקבל מטריצה אלכסונית (סקלרית) אשר כל איברי האלכסון הם $|A|$. לפי משפט, הדטרמיננטה של מטריצה אלכסונית היא כפל איברי האלכסון שלה. מטריצת היחידה מסדר $n\times n$ לכן יש n איברים באלכסון, הכפל שלהם הוא $|A|^n$.

(2) חילוק ~~שלא~~ בסקלר

1.ב. צ.ל.: $adj(AB) = adj B\cdot adj A$, $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $n\geq 2$

נוכיח נשתמש בהגדרה של המשפט מהקודמת:

$$A\cdot adj(A) = |A|\cdot I \Longrightarrow A^{-1}A\, adj\, A = A^{-1}|A|\cdot I$$
$$\Longrightarrow adj(A) = A^{-1}\cdot |A|$$
$$adj(B)\cdot adj(A) = B^{-1}|B|A^{-1}|A| \overset{*}{=} (AB)^{-1}|AB|$$
$$= adj(AB)$$

* לפי הכללים: $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$, $|A||B| = |AB|$.

1.ב. צ.ל. $adj(adj(A))=|A|^{n-2}A$, $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $n\geq 2$

הוכחה: נשתמש בוריאציה מתרגול כ': עבור A הפיכה

$$adj(A)=|A|\cdot A^{-1} \Longrightarrow adj(adj(A))=adj(|A|\cdot A^{-1})$$

$$\Longrightarrow \quad " \quad " \quad = adj(A^{-1})\cdot adj(|A|) \Longrightarrow \quad " \quad " \quad = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1}\cdot ||A||\cdot |A|^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad " \quad " \quad = |A|^{n}\cdot |A|^{-2}\cdot A \Longrightarrow adj\, adj\, A = |A|^{n-2}\cdot A$$

עבור A לא הפיכה: נקבל מינורים בעלי שורות התלויות
הפרות: ולא $adj(adj(A))$ תהיה מטריצת ה-0 ובנוסף ימין $0=|A|$.

השתמשנו פעמיים בוריאציה (1).

וכן $(A^{-1})^{-1}=A$, נימוקים מתרגול א' עבור $||A||$,

ושם $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

(כולל בונוס להסבר מלא ומפורט) $\square$

2.א. הוכחה

יהא $\mathbb{F}$ שדה ותהי $A\in M_2(\mathbb{F})$.

נעזר במשפט קיילי-המילטון:

יהיו λ_1,λ_2 ע"ע של המטריצה A. הם קיימים כי נוכל להפוך כל מטריצה מסדר 2 למטריצה משולשת עליונה, שהיא לכסינה לפי משפט, (ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות).

$$\Delta p(A)=A^2-(\lambda_1+\lambda_2)A+(\lambda_1\cdot\lambda_2)I=0_{2\times 2}$$

לפי משפט $tr A=\lambda_1+\lambda_2$, $det A=\lambda_1\cdot\lambda_2$

אזי $A^2-tr(A)+|A|I=0_{2\times 2}$

כנדרש.

2.ב. נמצא את הע"ע:

① דרגת המטריצה היא 2 והמטריצה מסדר 4

לכן $\lambda_1=0$ מר"ב 2.

② סכום איברי כל שורה הוא 3 אזי $\lambda_2=3$

לפי משפט.

③ $tr(A)=2$ ולפי משפט $\lambda_3+0+3=2$

$\Longleftarrow$ $\lambda_3=-1$

בזה סיימנו.

הפולינום האופייני הוא $\Delta p(\lambda) = \lambda^2(\lambda-3)(\lambda+1)$

<u>נימוק</u>: מצאנו שני ע"ע נוספים לכן עבור $\lambda_1=0$ ר"א = ר"ג = 2.

לכן המטריצה לכסינה.

$$\Delta p(A) = A^4-2A^3-3A^2=0 \xRightarrow{\text{כפל ב-}A} A^5-2A^4-3A^3=0$$

$$\underset{\text{הצבה}}{\Longrightarrow} A^5-2(2A^3+3A^2)-3A^3=0 \Rightarrow A^5=7A^3+6A^2$$

$a=6 \quad b=7$

2.ב. נמצא את הפולינום האופייני:

① $\lambda_1=5$ כי סכום כל שורה במטריצה הוא 5.

② $\lambda_2=-1$

$$A-1\cdot I = \begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}$$

$$rg\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{pmatrix}=1$$

לכן הר"ג = ר"א = 2 של λ_2

אזי ר"א = ר"ג = 1 של λ_1

$$\Delta p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5) = (\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda-5) =$$
$$= \lambda^3-3\lambda^2-9\lambda-5$$

לפי קיילי-המילטון: $\Delta p(A) = A^3-3A^2-9A-5I = O_{3\times3}$

נכפול ב- A^{2015} ונקבל $O_{3\times3} = A^{2018}-3A^{2017}-9A^{2016}-5A^{2015}$

כנדרש.

3. נבדוק הוכחה מעגלית:

<u>(א) ⇐ (ב)</u>

נניח כי הסכום הוא סכום ישר. צ"ל שמתקיים $W_1\oplus\dots\oplus W_n = W$ וכן $W_i \cap \sum_{j\neq i} W_j=\{0\}$

והן b_i בסיס ל-W_i ו-b_j בסיס ל-$\sum_{j\neq i} W_j$.

לפי ההנחה מתקיים $b_i \cap \sum_{j\neq i} b_j = \{0\}$ אזי $b_1+\dots+b_n=\cup b_i$

הוא בסיס של W.

<u>נימוק</u>: הווקטורים בין כל בסיס לשאר הבסיסים הם בת"ל

והם פורשים את כל תתי-המרחבים W_i, מכיוון ו... אשר

סכומם הוא המ"ו W לכן הם פורשים את W ובת"ל.

כל הבסיסים בת"ל והאיחוד שלהם פורש את W' לכן

$$\dim \sum W_i = \sum \dim W_i$$

(ג) ⇐ (ב) (נוכיח NOT(ב) ⇐ NOT(ג))

נניח בשלילה כי קיימות שתי הצגות לוקטור $v \in \sum W_i$.

אזי $v = w_1 + \dots + w_n = u_1 + \dots + u_n$ $w_i, u_i \in W_i$ לפי ההגדרה

הצגה יחידה.

נקבל $(w_1-u_1)+\dots+(w_n-u_n)=\vec{0}$, $(w_i-u_i) \in W_i$.

ההצגות שונות, לכן קיים אינדקס z_1, z_2 כך ש-

$w_{z_1}-u_{z_1} \neq \vec{0}$ ו- $w_{z_2}-u_{z_2} \neq \vec{0}$, לפחות.

הסכום שווה ל-0 אז נקבל

$$W_{z_1} \ni -(w_{z_1}-u_{z_1}) = (w_1-u_1)+\dots+(w_{n-1}-u_{n-1})$$

(סוף ו-n, $z_1 \neq 1$, בסכום לא כללנו את אינדקס z_1). כלומר הוא

צ"ל של וקטורים מתתי-מרחבים אחרים. נסיק

כי קיים איבר בבסיס תת-מרחב W_z, שהוא צ"ל

של איברי בסיס של תתי-המרחבים האחרים.

לכן, $\dim \sum W_i < \sum \dim W_i$. סתירה. כמו כן, מתקיים*

$\dim \sum W_i \le \sum \dim W_i$. לכן בהכרח מתקיים שוויון.

(ב) ⇐ (א)

יהא $v \in V$.

נניח כי קיימת לו הצגה יחידה. כלומר, $v = w_1 + \dots + w_n$ (1)

כאשר $w_i \in W_i$, $1 \le i \le n$.

לפי הנתון $W_i \subseteq V$ לכל $1 \le i \le n$.

נניח בשלילה: כי הסכום $\sum_{i=1}^{n} W_i$ אינו ישר.

אזי קיים אינדקס z כלשהו כך ש- $W_z \cap \sum_{i \neq z} W_i \neq \{0\}$.

אז נוכל להביע את w_i כצירוף לינארי של שאר הוקטורים,

w_k, $1 \le k \le n$, $k \neq i$. קיימים סקלרים $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ כך ש-

$w_z = \alpha_1 w_{k_1} + \dots + \alpha_{n-1} w_{k_{n-1}}$.

אם נציב זו בביטוי (1) נקבל הצגה נוספת

עבור הוקטור v, בסתירה לכך שקיימת

הצגה יחידה.

* מימד התת-מרחב שווה לכמות האיברים בבסיס.

<u>בונוס</u>

נוכיח את 1 בהנחה ש- $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $n\geq 2$

אינן הפיכות. (המקרה לא השאלה).

1.א. A אינה הפיכה אם"ם $|A|=0$, מאלגברה א'.

אז ש"ם $|A|^{n-1}=0$.

לכן <u>צ.ל.</u> $|adj A|=0$ אם $|A|=0$.

<u>הוכחה</u>

אם נוכיח $|A|\neq 0 \Longleftarrow |adj A|\neq 0$ הוכחנו את

הטענה עצמה. (כי $Z \Leftarrow T$ אם"ם $\bar{T} \Leftarrow \bar{Z}$)

נניח כי $|adj A|\neq 0$.

נניח בשלילה כי $|A|=0$.

לפי הזהות, $A\cdot adj = |A|\cdot I$

נקבל $A\cdot adj(A)=0_{n\times n}$

אם $A=0$ אז בוודאי כי $adj(A)=0$ (כל המינורים אפסים).

אם $A\neq 0$ אז $adj(A)=0$ בהכרח כי המכפלה

שלהם היא 0.

אז קיבלנו $|adj A|=0$.

סתירה.

לכן $|A|\neq 0$.

מכאן נסיק כי אם $|A|=0$ אז $|adj A|=0$.

$\square$

בונוס

1.ב. נתבונן באיברים בקבוצה $\{b_{nn},\dots,b_{11}, a_{nn},\dots,a_{11}\}$ כאשר הם פונקציות רציונליות.

הטענה $adj(AB) = adj\,B\cdot adj\,A$ מתקיימת כפי שהוכחנו עבור מטריצות הפיכות.

כעת נשתמש בתחום של פולינומים. הם בוודאי מוכלים בפונקציות רציונליות לכן נוכל להתאים כל מטריצה שהיא למשוואה לעיל והנוסחה תעבוד.

□

1.ג. נציב בנוסחת $A\cdot adj\,A = |A|\,I$ $\quad A = adj(A)$

ונקבל $adj\,A\cdot adj\,adj\,A = |adj\,A|\,I$

לפי סעיף ג: $adj\,A\cdot adj\,adj\,A = |A|^{n-1} I = 0_{n\times n}$

כאשר A אינה הפיכה.

לכן $adj\,A = 0$ או $adj\,adj\,A = 0$.

בשני המקרים $adj\,adj\,A_{n\times n} = 0_{n\times n}$ (כי $adj\,0_{n\times n} = 0_{n\times n}$).

לכן כאשר A אינה הפיכה $(|A|=0)$:

$$adj\,adj\,A = |A|^{n-2} A = 0$$

□

Scanned by CamScanner