

1. הוכח את קיום האינטגרלים הבאים וחשב את ערכם:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx \quad (\aleph)$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad (\beth)$$

2. האם האינטגרל הבא מתכנס?

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x dx}{x \ln^2(x+1)}$$

3. בדוק את התכנסות האינטגרלים:

$$\int_2^\infty \frac{e^{x/4}}{x^3 \ln^5 x} dx \quad (\aleph)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6} \quad (\beth)$$

$$\int_1^\infty \frac{x dx}{1-e^x} \quad (\aleph)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{1+t} dt \quad (\daleth)$$

4. עבור אילו ערכי s, p, q חיוביים מתכנסים האינטגרלים הבאים?

(בסעיפים ג' ד' נא לצייר את התחום המותר במישור (p, q))

$$\int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx \quad (\aleph)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s} dx \quad (\beth)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(1+x)^q} \quad (\aleph)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q} \quad (\daleth)$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-px}}{\ln x} dx \quad (\heartsuit)$$

$$\int_0^{1/2} \frac{e^{-px}}{\ln x} dx \quad (\heartsuit)$$

5. חשב את האינטגרלים המתכנסים, ונמק את אילו המתבדרים:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x \tan x} dx \quad (\aleph)$$

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^3} \quad (\beth)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad (\aleph)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \quad (\text{ד})$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^k x} \quad (\text{ה})$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (\text{ו})$$

$$\int_0^\infty \sin x dx \quad (\text{ז})$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x}} \quad (\text{ח})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+4x^2} \quad (\text{ט})$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \quad (\text{י})$$

6. הוכח התכנסות או התבדרות; אל תנסה לחשב:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (\text{א})$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int_2^\infty \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}} \quad (\text{ג})$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad (\text{ד})$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx \quad (\text{ה})$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x dx}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{ו})$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x \ln |x| dx \quad (\text{ז})$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} |\ln x|} \quad (\text{ח})$$

7. תן דוגמא לפונקציה $f(x)$ חיובית ורציפה כך ש- $\int_0^\infty f(x) dx$ מתכנס אך $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$.

8. תהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\ln x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

הוכח:

(א) $f(x)$ גזירה ב- $(0, 1]$ אך לא ב- $x = 0$.

(ב) $f'(x)$ אינטגרבילית ב- $[0, 1]$

$$\int_0^1 f'(x) dx = 0 \quad (\text{ג})$$

9. תהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית בקטע (a, b) , וכך שהאינטגרל המוכלל $I = \int_a^b f(x) dx$ מתכנס. הוכח שאזי הסדרה:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

מתכנסת ל- I כאשר $n \rightarrow \infty$.

מצא דוגמא לפונקציה $f(x)$ כך שהאינטגרל המוכלל $\int_a^b f(x) dx$ מתכנס, אבל הסדרה לעיל איננה מתכנסת.

10. הוכח ש-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\tan x) dx = -\ln 2$$

11. פתור:

(א) עבור אילו ערכי α מתכנס או מתבדר האינטגרל $\int_0^1 x^\alpha \ln x dx$?

(ב) הראה שעבור ערכי α האלו, מתכנסים האינטגרלים

$$\int_0^\pi \sin^\alpha x \ln(\sin x) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha \ln(\sin x) dx.$$

12. תהי $f(x)$ רציפה במידה שווה בתחום $[a, +\infty)$, וכך שנתון ש- $\int_a^\infty f(x) dx$ מתכנס. הוכח שאזי נובע ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

13. הסתמך על שאלה 12 והוכח כי $\int_0^\infty \sin(\sin x) dx$ מתבדר, וכן שהפונקציה $f(x) = \sin(x^2)$ איננה רציפה במידה שווה על R .

14. (*) תהי $f(x)$ אינטגרלית בכל קטע סגור של R^+ , וכך ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mu$. הוכח שהאינטגרל הבא מתכנס לערך הנתון:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (\lambda - \mu) \ln \frac{b}{a}$$

15. תהי $f(x)$ פונקציה חיובית מונוטונית יורדת על $[1, \infty)$, כך ש- $\int_1^\infty f(x) dx$ מתבדר ל- $+\infty$. נסמן

$$I_n = \int_1^n f(x) dx, \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad n = 1, 2, \dots$$

הוכח כי הסדרה המוגדרת ע"י $u_n = S_n - I_n$ מתכנסת.

16. הוכח על סמך שאלה 15 כי הסדרה

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

מתכנסת. למען ההשכלה הכללית, הגבול של סדרה זו מכונה קבוע אוילר (Euler), וערכו $\gamma \approx 0.5772156649 \dots$.

תרגילים בנושא פונקציות ביתא וגאמא

17. הוכח את הנוסחאות הבאות עבור פונקציות $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{x-1} dt, \quad x > 0 \quad (\text{א})$$

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2} dt, \quad x > 0 \quad (\text{ב})$$

$$\Gamma(x) = p^x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-pt} dt, \quad x > 0, p > 0 \quad (\text{ג})$$

$$\Gamma(x) = p^x \int_0^1 t^{p-1} \left(\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt, \quad x > 0, p > 0 \quad (\text{ד})$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{ה})$$

18. הוכח את הנוסחאות הבאות עבור פונקציה $B(x)$:

$$B(p, q) = B(q, p), \quad p > 0, q > 0 \quad (\text{א})$$

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx, \quad p > 0, q > 0 \quad (\text{ב})$$

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta, \quad p > 0, q > 0 \quad (\text{ג})$$

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q), \quad p > 0, q > 0 \quad (\text{ד})$$

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^r)^{q-1} dx = \frac{1}{r} B\left(\frac{p}{r}, q\right), \quad p > 0, q > 0, r > 0 \quad (\text{ה})$$

תרגילי חזרה בנושא אינטגרלים

19. נגדיר את הסדרה הבאה

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \int_0^{a_n} \sin(t^2) dt$$

הוכח כי $\{a_n\}$ מתכנסת, וחשב את גבולה.

20. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[a, b]$. נגדיר שתי פונקציות

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad h(y) = \int_a^y g(x) dx, \quad x, y \in [a, b]$$

$$h(b) = \frac{(b-a)^2}{2} f(\theta) \quad \text{כד ש-} a \leq \theta \leq b \quad \text{הוכח שקיימת}$$

21. מצא נקודות אקסטרמום מקומי ונקודות פיתול של הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x \left[\int_0^y t^{2/3} (t-2)^{4/3} dt \right] dy$$

22. תהי $f(x)$ רציפה ב- $[0, 1]$ ויהי $0 < a < b$, חשב את הגבול הבא אם הוא קיים:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x)}{x} dx$$

23. תהי $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע $[1, n]$ (n טבעי, $n > 1$). הוכח כי:

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$$

24. תהי $f(x)$ אינטגרלית בקטע $[0, 1]$. הוכח שקיימת $0 \leq \theta \leq 1$ כך ש-

$$\int_0^\theta f(x)dx = \int_\theta^1 f(x)dx$$

25. הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{1 + n^2 x^2} = 0$

26. תהי $f(x)$ רציפה ב- R , ונתון שמתקיים לכל $u \in R$: $\int_{-u}^u f(x)dx = 0$.

(א) הוכח כי אזי בהכרח $f(x)$ פונקציה אי-זוגית.

(ב) מצא דוגמא לפונקציה אינטגרלית שמקיימת $\int_{-u}^u f(x)dx = 0$, אך איננה זוגית.

27. נתונה $f(x)$ רציפה וכך שלכל $u(x)$ רציפה מתקיים $\int_a^b f(x)u(x)dx = 0$. הוכח כי $f(x) \equiv 0$.

28. הוכח את הזהויות הבאות:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x+1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1} dx, \quad p > 0 \quad (\text{א})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{x+1} dx, \quad 0 < p < 1 \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+p)\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{p}}, \quad p > 0 \quad (\text{ג})$$

29. עבור איזה p מתכנס האינטגרל הבא (a) גדול לפי הצורך:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x) \cdots \underbrace{(\ln \cdots \ln x)}_{p-1 \text{ times}} \underbrace{(\ln \cdots \ln x)}_{p \text{ times}}}$$

(אינדוקציה!).

30. הוכח כי האינטגרלים $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$, $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x} dx$ מתכנסים ולאותו ערך. הוכח כי אחד מהם מתכנס בהחלט, ואילו האחר מתכנס בתנאי.

31. (בחן חורף תשנ"ח) בדוק האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$\int_{10}^\infty \ln x dx \quad (\text{א})$$

$$\int_{10}^\infty \ln \left(\sin \frac{1}{x} \right) dx \quad (\text{ב})$$

32. עבור אילו ערכי p, q ממשיים מתכנס האינטגרל $\int_1^\infty \frac{x^p}{x^q - 1} dx$

33. עבור אילו ערכי p ממשיים מתכנס $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^p}{\ln 2x} dx$

34. הוכח:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

הדרכה:

(א) בצע הצבה $y = \frac{\pi}{2} - x$ והיזכר שהאינטגרלים זהים.

(ב) הוכח שהאינטגרלים מתכנסים, וסמן את ערכם I .

(ג) סכם את שני האינטגרלים $(2I)$, בצע חילוף משתנים $y = 2x$ ואחר-כך $u = \pi - y$.