תרגיל 1

א) כיוון שהקוביות שונות, עלינו לספור את האפשרויות לתוצאות בכל קוביה:
כל אחת מ-n הקוביות יכולה לקבל 6 תוצאות שונות, ולכן התשובה:

$$\underbrace{6}_{\text{אפשרויות לקוביה 1}}\cdot\underbrace{6}_{\text{אפשרויות לקוביה 2}}\cdots\underbrace{6}_{\text{אפשרויות לקוביה } n}=6^n$$

ב) כיוון שהקוביות זהות, ואנו מבדילים בין התוצאות רק על-פי מס' הפעמים שהופיעה כל תוצאה.

נגדיר: x_1 - מס' הפעמים שמופיע המס' 1

⋮

x_6 - " " " " 6

והתשובה היא אותה תשובה לשאלה: מהו מס' הפתרונות למשוואה:

$$x_1+x_2+\dots+x_6=n$$
$$x_i\ge 0$$

זה, כידוע: $\binom{n+5}{5}$

תרגיל 2

א) לפי מה שראינו בכיתה ובתרגול, התשובה תהיה: $\binom{26+5-1}{5-1}=\binom{30}{4}$

ב) כאן, $x_i>0$ ולכן לפי מה שראינו בתרגול, התשובה תהיה: $\binom{26-1}{5-1}=\binom{25}{4}$

תרגיל 3

(א) חלוקה של $2n$ אנשים ל-n זוגות אינה מתחשבת בסדר הזוגות וגם בסדר האנשים בכל זוג.

כיצד נבחר זוגות?

- נבחר מתוך $2n$ האנשים 2 לזוג הראשון, ב-$\binom{2n}{2}$ דרכים.
- " " $2n-2$ הנותרים, " " השני, ב-$\binom{2n-2}{2}$ דרכים

$\vdots$

- " " 2 " " " ה-n-י, ב-$\binom{2}{2}$ דרכים.

כעת, נבין כי אין חשיבות לסדר הזוגות - אף שבאופן בו ספרנו הענקנו לו חשיבות (בחרנו זוג ראשון, שני וכו'). על כן כל חלוקה תספר $n!$ פעמים (בדיוק!) ולכן התשובה הסופית תהיה:

$$\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!}=\frac{\frac{2n(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\cdots\frac{2\cdot 1}{2}}{n!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$$

(ב) הביטוי שמופיע בסעיף זה הוא דוגמה להכללה מסעיף (א). זהו בדיוק מספר אפשרויות לבעיה קומבינטורית, ולכן בהכרח הוא מספר שלם!

תרגיל 5

נסתכל על בחירה לפי התנאים. נסמן: 1 לכל מס' שנבחר ו-0 לכל מספר שלא נבחר:

1	0	0	1	0	1	0	0		0	1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n

אפשר להסתכל על ה-'1' וה-'0' כעל כדורים ומחיצות. יש לנו בדיוק k מחיצות ו-$(n-k)$ כדורים והתנאי הוא שבין k המחיצות יהיה לפחות כדור אחד בכל-אחד, כיוון שאין לימנית ומשמאל לשמאלית.

ולכן דרושה כזו.

כלומר, עלינו לחלק $(n-k)$ כדורים ל-$(k+1)$ תאים, כך ש-$(k-1)$ התאים האמצעיים חייב להיות לפחות כדור אחד.

מס' הדרכים לעשות כן הוא:

מס' הכדורים · $k-1$ נשים בכפיה מס' המרכזים · מס' המחיצות

$$\binom{n-k-(k-1)+(k+1-1)}{k+1-1}=\binom{n-k+1}{k}$$

תרגיל 6

ג) נניח בפתרון זה ש קדקדי המצולע ממוספרים.

פתרון I

נמספר את קדקדי המצולע מ-1 עד n. עלינו לבחור k מתוך הקדקדים ללא בחירת 2 עוקבים וללא בחירת $n,1$ ביחד.

כלומר, אלו כל הבחירות מה-5 ונוריד מהן את הבחירות שכוללות את $n,1$ ביחד.

כמה אפשרויות צריך להוריד?

אם בחרנו כבר את $n,1$ אז נותר לנו לבחור $(k-2)$ מס' מתוך $\{3,\dots,n-2\}$ - כלומר מתוך $(n-4)$ מס' וזאת ניתן לעשות לפי ה-5 ב: $\binom{(n-4)-(k-2)+1}{k-2}=\binom{n-k-1}{k-2}$ דרכים.

לכן, התשובה: $\binom{n-k+1}{k}-\binom{n-k-1}{k-2}$

פתרון II

נחלק את בחירת הקדקדים לשני מקרים:

- בחרנו את קדקד מס' 1 - נותר לבחור $k-1$ קדקדים מתוך $\{3,\dots,n-1\}$ וזאת ניתן לעשות לפי ה-5 ב: $\binom{n-k-1}{k-1}$ דרכים.
- לא בחרנו את קדקד 1 - נותר לבחור k קדקדים מתוך $\{2,\dots,n\}$ וזאת ניתן לעשות לפי ה-5 ב: $\binom{n-k}{k}$

לכן הפתרון: $\binom{n-k-1}{k-1}+\binom{n-k}{k}$

אפשר לראות שגם השוויון זהות, כך:

$$\binom{n-k+1}{k}-\binom{n-k-1}{k-2}-\left[\binom{n-k-1}{k-1}+\binom{n-k}{k}\right]$$

$$=\cancel{\binom{n-k}{k}}+\underbrace{\binom{n-k}{k-1}}-\binom{n-k-1}{k-2}-\binom{n-k-1}{k-1}-\cancel{\binom{n-k}{k}}$$

$$=\cancel{\binom{n-k-1}{k-1}}+\cancel{\binom{n-k-1}{k-2}}-\cancel{\binom{n-k-1}{k-2}}-\cancel{\binom{n-k-1}{k-1}}=0$$

תרגיל 8

(ג) כל איבר, $x\in[n]$ יכול להשתייך בדיוק לאחת מבין האפשרויות הבאות:

1. $x\in C$ בלבד ! $x\notin A,B$
2. $x\in B \Rightarrow x\in C$! $x\notin A$
3. $x\in A \Rightarrow x\in B,C$
4. $x\notin C$

לכן הפתרון: 4^n.

(ד) באותו אופן כמו (ג) הבחירות האפשריות $A\subseteq B\subseteq[n]$ - מספרן 3^n. נוריד מהן את המקרים בהם $A=B$. כאלו יש 2^n (כל תת קבוצה).

לכן הפתרון:

$$3^n-2^n$$

תרגיל 9

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

(א) כל מחלק של n הוא מהצורה: $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$

עם: $0\le r_i\le\alpha_i$

לכן עלינו רק לבחור את ה-r_i-ים. כל בחירה שונה תתן מחלק שונה (כיוון שה-p_i-ים ראשוניים).

לכן יש ל-n:

$\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$ מחלקים

ב) כאן, מתווספת מגבלה ש-γ_i צריך להיות זוגי (כדי שיהיה ריבוע של מספר).
כמה כאלו יש בין 0 ל-α_i? התשובה היא: $\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \rfloor + 1$

צריך ערך תחתון

לכן, הפתרון פה: $\prod_{i=1}^{k} \left(\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \rfloor + 1 \right)$

ג) פה יש מגבלה ש: $\beta_i \le \gamma_i \le \alpha_i$

לכן הפתרון: $\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i + 1)$

תרגיל 10

נפתח את הביטוי בצד ימין:

$$\binom{n-1}{a_1-1, a_2, \ldots, a_k} + \cdots + \binom{n-1}{a_1, \ldots, a_k-1} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(a_1-1)!\,a_2! \cdots a_k!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{a_1! \cdots (a_k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!} \left[a_1 + a_2 + \cdots + a_k \right] = \frac{(n-1)!}{a_1! \cdots a_k!} \cdot n = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k}$$

תרגיל 11

לפי נוסחת פיתוח המולטינום נקבל:

$$(-1-1+1+1)^n = \sum_{a+b+c+d=n} \binom{n}{a, b, c, d} (-1)^{a+b}$$

כמו שבשאלה, אם נציב
אגף 1. זה שווה ל: $0^n = 0$
לכן, הסכום שבשאלה שווה ל: 0.

שאלה 4:

(א) k קבוע, גדול, טבעי. הצגת את m בבסיס k.

נוכיח באינדוקציה על m.

בסיס: $m=1 \Rightarrow m=k^0$

הנחה: לכל מס' קטן מ-m ניתן להציג בבסיס k.

צעד: נבחר את החזקה הגדולה ביותר של k שקטנה מ-m.

נניח j היא החזקה הזו $0<k^j<m$

אז את $m-k^j<m$ ניתן להציג, לפי ההנחה

כי: $m-k^j=\sum_{i\geq 0} a_i k^i$

ואז:

$$m=\sum_{i\geq 0} a_i k^i + k^j = \sum_{i\geq 0} a_i' k^i$$

רק מקדם אחד ישתנה

ראינו שיש הצגה של m בבסיס k.

כעת, נראה כי היא יחידה.

נניח: $\sum_{i\geq 0} a_i k^i = \sum_{i\geq 0} b_i k^i$

נבחר את ה- i_0 המינימלי עבור $a_{i_0}\neq b_{i_0}$. לכן:

$$k^{i_0}\sum_{i\geq i_0} k^{i-i_0}(a_i-b_i)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{a_{i_0}-b_{i_0}}_{<k} + \underbrace{\sum_{i\geq i_0+1} k^{i-i_0}(a_i-b_i)}_{\text{מתחלק ב- } k}=0$$

כי $0\leq a_{i_0}, b_{i_0}\leq k-1$

קיבלנו סתירה, כי "0" מתחלק ב-k ולכן בהכרח שגם ה-"$\sum$" מתחלק ב-k, אך החלק השמאלי אינו מתחלק ב-k. לכן $a_i=b_i$ לכל i והצגה יחידה.

(ג) סעיף. ההוכחה היא באינדוקציה, k קבוע.

בסיס: $m=1$, $m=\binom{k}{k}$

הנחה: לכל מה קטן מ m יש הצגה כזו:

$$\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\dots+\binom{a_t}{t}$$

$$a_k>a_{k-1}>\dots>a_t$$

צעד: נבחר a_k מקסימלי כך ש:

$$\binom{a_k}{k}\le m$$

נסתכל על:

$$m-\binom{a_k}{k}$$

כיוון ש:

$$\binom{a_k}{k}+\binom{a_k}{k-1}=\binom{a_k+1}{k}>m$$

כי a_k מקסימלי

ולכן:

$$m-\binom{a_k}{k}<\binom{a_k}{k-1}$$

ולכן אפשר להמשיך באינדוקציה על $m-\binom{a_k}{k}$ ולמצוא a_{k-1} מקס' אחרון $\binom{a_{k-1}}{k-1}\le m-\binom{a_k}{k}$ ולהבטיח ש:

$$a_{k-1}<a_k$$

הדגמה: $k=5$, $m=82$,

בדיקה קלה מגלה ש:

$$a_5=8$$

$$56=\binom{8}{5}<82$$

$$82-\binom{8}{5}=26<\binom{8}{4}$$

כעת:

$$a_4=6$$

$$15=\binom{6}{4}<26$$

$$26-\binom{6}{4}=11<\binom{6}{3}$$

מצא:

$$a_3=5$$

$$10=\binom{5}{3}<11$$

$$11-\binom{5}{3}=1<\binom{5}{2}$$

$$1=\binom{2}{2},\ a_2=2$$

!

קיבלנו:

$$82=\binom{8}{5}+\binom{6}{4}+\binom{5}{3}+\binom{2}{2}$$

הוכחת יחידות. נניח

$$\binom{a_k}{k}+\dots+\binom{a_t}{t}=\binom{b_k}{k}+\dots+\binom{b_t}{t}$$

טענת עזר:

$$\binom{a_k}{k}+\dots+\binom{a_t}{t}<\binom{a_k+1}{k}$$

הוכחת טענת העזר באינדוקציה על k

בסיס: $k=1$: $a_k < a_k+1$

הנחה: עבור כל קטן מ-k, הטענה נכונה לכל t.

צעד:

$$\binom{a_k}{k}+\underbrace{\binom{a_{k-1}}{k-1}+\dots+\binom{a_t}{t}}_{\text{לפי ההנחה}}<\binom{a_k}{k}+\binom{a_k}{k-1}\underset{\text{נוסחת פסקל}}{=}\binom{a_k+1}{k}$$

הוכחת היחידות:

נניח $a_k < b_k$ (בה"כ):

$$\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\dots+\binom{a_t}{t}\geq\binom{a_k}{k}\underset{\text{הנחה}}{\geq}\binom{b_k+1}{k}\underset{\text{טענת עזר}}{>}\binom{b_k}{k}+\dots+\binom{b_t}{t}$$

קיבלנו סתירה!

(3) פתרון קומבינטורי.

כמה תמורות של $[n+1]$ יש כך שקיימת ספרה שלא במקומה?

ברור שהתשובה היא: $(n+1)!-1$

(כל התמורות פרט ל"אידיאלית" $1|2|3|\dots|n+1$).

כעת נספור אותן לפי המיקום הגדול ביותר בו מופיעה ספרה שלא במקומה. מקום זה יסומן k והוא יכול להיות בין 2 ל-$n+1$ (מדוע לא יתכן $k=1$?).

את המס' k נבחר ב-$k-1$ אפשרויות ואת שאר $k-1$ המס' ב-$(k-1)!$ דרכים במקומות הנותרים.

סה"כ:

$$\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)(k-1)!=\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$$

יש לנו הוכחה!

(3) הוכחת קיום באינדוקציה על m.

בסיס: $n=1$, $m=1=1!$

הנחה: לכל מה קטן מ-m יש הצגה כדרוש: $m=\sum_{k\geq 1} a_k k!$

צעד: נבחר את ה-s המקסימלי כך ש
$$s! \leq m$$
ואז a_s כך ש: $a_s \cdot s! \leq m$.

אם $m=a_s\cdot s!$ סיימנו.

כעת, נסתכל על:
$$m-a_s\cdot s! < s!$$
ונמשיך איתו באינדוקציה:

דוגמה: $m=1234$.

$s=6$, כי $720=6!<1234$ והוא המקסימלי כזה.

כעת:
$$1234-720=514$$
נמשיך:
$$514>5!=120$$
$$514>4\cdot 5!=480 \quad !$$
נמשיך:
$$514-480=34$$
$$34>4!=24$$
$$34-24=10$$
$$10>3!=6$$
$$10-6=4$$
$$4=2\cdot 2!$$
וקיבלנו:
$$1234=6!+4\cdot 5!+4!+3!+2\cdot 2!$$

הוכחת יחידות: נניח: $\sum_{k\ge 1} a_k\cdot k! = \sum_{k\ge 1} b_k\cdot k!$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k\ge 1}(a_k-b_k)k! = 0$$

נבחר k_0 מינימלי שעבורו $a_{k_0}-b_{k_0}\neq 0$

אז:

$$\sum_{k\ge k_0}(a_k-b_k)k! = k_0!\sum_{k\ge k_0}(a_k-b_k)k(k-1)\cdots(k_0+1) = 0$$

נחלק ב $k_0!$ ונקבל:

$$\underbrace{a_{k_0}-b_{k_0}}_{\le k_0} + \underbrace{\sum_{k\ge k_0}(a_k-b_k)k(k-1)\cdots(k_0+1)}_{\text{מתחלק ב } k_0+1} = 0$$

ומכאן בגלל של (c) נקבל: $a_{k_0}=b_{k_0}$, סתירה!

תרגיל 7

טענת עזר: $(1+x)^{2^n} \equiv 1+x^{2^n} \pmod 2$

הוכחה באינדוקציה על n:

בסיס: $n=1$: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \equiv 1+x^2 \pmod 2$

הנחה: הטענה נכונה ל $n-1$

צעד:

$$(1+x)^{2^n} = \left((1+x)^{2^{n-1}}\right)^2 \equiv \left(1+x^{2^{n-1}}\right)^2 \pmod 2$$

$$= 1+2x^{2^{n-1}}+\left(x^{2^{n-1}}\right)^2 \equiv 1+x^{2^n} \pmod 2$$

כעת, כל m ניתן לרשום את m בבסיס 2 בצורה:

$$m=\sum_{k\ge 0} a_k 2^k \qquad (a_k=0,1)$$

ולכן:

$$(1+x)^m = (1+x)^{\sum_{k\ge0} a_k 2^k} = (1+x)^{a_0}\cdot(1+x)^{a_1\cdot 2}\cdot(1+x)^{a_2\cdot 2^2}\cdots(1+x)^{a_l\cdot 2^l}$$

לפי טענת העזר:

$$(1+x)^m \equiv \left(1+x^{a_0}\right)\left(1+x^{a_1\cdot 2}\right)\cdots\left(1+x^{a_l\cdot 2^l}\right) \pmod 2$$

אם נפתח את הסוגריים באגף ימין, נקבל מס' איברים שהינו חזקה של 2.

המקדם של כל איבר ב $(1+x)^m$ הוא אי זוגי אם הוא מופיע באגף ימין, כלומר יש חזקה של 2' איברים אי-זוגיים בשורה של m במשולש פסקל.

הדגמה: $13=8+4+1=2^3+2^2+2^0$.

לכן: $(1+x)^{13}=(1+x)^{2^3}(1+x)^{2^2}(1+x)^{2^0} \equiv (1+x^8)(1+x^4)(1+x) \pmod 2$

$$\equiv 1+x+x^4+x^8+x^5+x^9+x^{12}+x^{13} \pmod 2$$

האיברים בשורה ה-13 במשולש פסקל שהם אי זוגיים, לפיכך, הם:

$\binom{13}{0}, \binom{13}{1}, \binom{13}{4}, \binom{13}{8}, \binom{13}{5}, \binom{13}{9}, \binom{13}{12}, \binom{13}{13}$