אינפי 104195

תאריך: 20/11/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

שם המתרגל: יוחאי מעיין

תרגיל בית 4

תרגיל בית 4

תאריך הגשה: יום חמישי, 20.11.2014.

$\boxed{1}$ חשבו את הגבולות הבאים:

א. יהי $a\in\mathbb{R}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

ג. יהיו $a_1,\dots,a_k>0$ מספרים שונים. יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_k>0$. חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1 a_1^n+\cdots+\alpha_k a_k^n}$$

ד. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$a_n=\sqrt[n]{2^n+8\cdot 6^n},\quad b_n=\sqrt[n]{7^n+4^n+9^{n+1}},\quad c_n=\sqrt[n]{4\cdot 5^n+3^n+5^{n+1}}$$

$\boxed{2}$ הוכיחו על פי ההגדרה:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-16}{n+1}=\infty$.

ב. לא מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-16}{n^2+1}=\infty$.

$\boxed{3}$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ כאשר $L\in\mathbb{R}$.

א. הראו כי סדרות הממוצעים ההרמוניים:

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

מתכנסת גם היא ל-L.

ב. הראו כי סדרת הממוצעים ההנדסיים:

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

מתכנסת גם היא ל-L.

נניח כעת כי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ (כאשר כבר לא מניחים שכל איברי הסדרה חיוביים).

ג. הראו כי סדרת הממוצעים החשבוניים שלה מקיימת

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\infty$$

ד. הראו כי, אם הסדרה חיובית, אזי סדרת הממוצעים ההרמוניים שלה מקיימת

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\infty$$

ה. הראו כי, אם הסדרה חיובית, אזי סדרת הממוצעים ההנדסיים שלה מקיימת

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=\infty$$

ו. תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית כך ש-$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\infty$. הראו כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\infty$.

$\boxed{4}$ הוכיחו שהסדרות הבאות מתכנסות במובן הרחב וחשבו את גבולן:

א. $\sqrt[n]{n!}$.

ב. עבור $0<\alpha<1$ נגדיר

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\alpha a_n-1 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ יהיו $a,b>0$. נגדיר

$$\begin{cases} a_1=a \\ a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \end{cases},\quad \begin{cases} b_1=b \\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n} \end{cases}$$

הראו ששתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

1א. יהי $a\in\mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

לפי מבחן המנה $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$, כלומר:

$$\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a^{n+1}|}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|a^n|} = \frac{|a|\cdot|a^n|\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot|a^n|} = \frac{|a|}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

n מספר טבעי, אין צורך בערך מוחלט

לפי המשפט ~~ש~~אם ערך מוחלט של סדרה שואף לגבול מסויים אז הסדרה עצמה שואפת לאותו גבול: $|0|=0$ ולכן $\left|\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\right|=0$ במקרה זה שווה $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n}\implies 1$$

מתייחס לסדרה זו כסדרת הממוצעים החשבוניים של הסדרה $\sqrt[n]{n}$.
$\sqrt[n]{n}\to 1$ לפי ההוכחה בהרצאה, ולכן גם סדרת הממוצעים החשבוניים שואפת ל-1

ג. יהיו $a_1,\dots,a_k$ מספרים חיוביים, יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_k$

חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{\alpha_1\cdot a_1^n+\dots+\alpha_k\cdot a_k^n}}_{S_n}$

נבחר $\alpha_m b^n=\max[\alpha_1\cdot a_1^n\dots\alpha_k\cdot a_k^n]$

$$\overbrace{\sqrt[n]{\alpha_m}}^{1}\cdot b=\sqrt[n]{\alpha_m b^n}\le S_n\le\sqrt[n]{\alpha_m\cdot k\cdot b^n}=\overbrace{\sqrt[n]{\alpha_m\cdot k}}^{1}\cdot b$$

מספר קבוע

מספר האיברים בסדרה המקורית כפול המספר המקסימלי

מספר קבוע

b

כלומר, קיבלנו על פי כלל הסנדביץ' שהמספר המבוקש n הוא הגבול של הסדרה הנתונה שהוא ~~[illegible]~~ את המספר $\alpha_m b^n$ המקסימלי מבין הסדרה.

1ב) חשב את הגבולות:

$$a_n=\sqrt[n]{2^n+8\cdot 6^n}$$

$$\cancel{\sqrt[n]{8}}^{\,1}\cdot 6=\sqrt[n]{8\cdot 6^n}\le a_n\le\sqrt[n]{8\cdot 6^n+8\cdot 6^n}=\sqrt[n]{16\cdot 6^n}=\cancel{\sqrt[n]{16}}^{\,1}\cdot 6$$

6 6 6

$a_n=\sqrt[n]{2^n+8\cdot 6^n}=6$ לפי כלל הסנדוויץ'

$$b_n=\sqrt{7^n+4^n+9^{n+1}}$$

$$\cancel{\sqrt[n]{9}}^{\,1}\cdot 9=\sqrt[n]{9\cdot 9^n}=\sqrt[n]{9^{n+1}}\le b_n\le\sqrt[n]{9^{n+1}+9^{n+1}+9^{n+1}}=\sqrt[n]{3\cdot 9^{n+1}}=\sqrt[n]{27\cdot 9^n}=\cancel{\sqrt[n]{27}}^{\,1}\cdot 9$$

9 9 9

$b_n=\sqrt[n]{7^n+4^n+9^{n+1}}=9$ לפי כלל הסנדוויץ'

$$c_n=\sqrt[n]{4\cdot 5^n+3^n+5^{n+1}}=\sqrt[n]{4\cdot 5^n+3^n+5\cdot 5^n}=\sqrt[n]{3^n+9\cdot 5^n}$$

$$\cancel{\sqrt[n]{9}}^{\,1}\cdot 5=\sqrt[n]{9\cdot 5^n}\le c_n\le\sqrt[n]{9\cdot 5^n+9\cdot 5^n}=\sqrt[n]{18\cdot 5^n}=\cancel{\sqrt[n]{18}}^{\,1}\cdot 5$$

5 5 5

$c_n=\sqrt[n]{4\cdot 5^n+3^n+5^{n+1}}=5$ לפי כלל הסנדוויץ'

2) הוכיחו עפ"י הגדרה:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-16}{n+1} = \infty$

הגדרה של גבול אינסופי: $\forall M>0 \quad \exists N(M); \forall n>N \quad a_n>M$

צ"ל: $\forall M>0 \quad \exists N(M); \forall n>N \quad \frac{n^2-16}{n+1}>M$

$$\frac{n^2-16}{n+1} = \frac{(n-4)(n+4)}{(n+1)} > \frac{(n-4)\cancel{(n+4)}}{\cancel{(n+4)}} = n-4>M$$

נבצע הערכה, הגדלנו מכנה והקטנו את המספר.
נניח שעבור $n>4$ על מנת שהמספר ישאר חיובי.

מכאן, $n>M+4$

נבחר, $\boxed{N=M+5}$ הוכחנו כי החל מ-$N=M+5$ הסדרה שואפת לאינסוף!

ב. לא מתקיים: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-16}{n^2+1} = \infty$

צ"ל: $\exists M>0 \ ; \ \frac{n^2-16}{n^2+1} \le M$

הגדלנו מונה הקטנו מספר

$$\frac{n^2-16}{n^2+1} \le \frac{n^2}{n^2} = 1 \le M$$

הקטנו מונה הגדלנו מספר

מכאן, הראינו שהסדרה קטנה מ-M סופי, ולכן היא אינה שואפת לאינסוף! (n יכול להיות כל מספר ולכן, בכל מקום הסדרה לא שואפת לאינסוף).

3. יהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים המקיימת

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $L\in\mathbb{R}$.

א. הראו כי סדרת הממוצעים ההרמוניים שלה מתכנסת ל-L:

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} = L$$

נגדיר סדרה חדשה: $b_n = \frac{1}{a_n}$

מכאן שהגבול שלה: $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$ (*) ($a_n>0$, ולכן אין בעיה עם 0),

הגבול של סדרת הממוצעים החשבוניים של b_n שווה לגבול של הסדרה:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{L}$$

$$H_n = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{L}} = L$$

(*) נציין עבר- a_n סדרה חיובית ולכן היא אינה שווה ממש לאפס, הסדרה לא יכולה להיות סדרה קבועה שכולה אפסים ולכן אפשר לחלק ב-L כי היא יכול לשאוף לאפס

ב. הראו כי סדרת הממוצעים ההנדסיים גם מתכנסת ל-L:

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

ידוע לנו כי סדרת הממוצעים החשבוניים שואפת ל-L, והראנו עכשיו בסעיף א' שגם סדרת הממוצעים ההרמוניים שואפת ל-L

לפי אי שוויון הממוצעים: ממוצע הרמוני $\le$ ממוצע הנדסי $\le$ ממוצע חשבוני

$H_n \to L$

L L L

לפי כלל הסנדביץ',

הוכחנו כי גם סדרת הממוצעים ההנדסיים מתכנסת ל-L.

3ג. נתון: $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ (איברי הסדרה לאו דווקא חיוביים).

החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה חיוביים בגלל שהחל ממקום מסוים
כל איברי הסדרה שואפים לאינסוף (שהוא חיובי), כלומר:

$$\forall k>0 \quad \exists N(k);\ \forall n>N \quad a_n>k$$

נבחר $k=2m>0$,

צריך להוכיח: $\forall m>0 \quad \exists N_1(m);\ \forall n>N_1 \quad \frac{a_1+\dots+a_n}{n}>m$

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{n}=\frac{\overbrace{a_1+\dots+a_N}^{t\text{ - מספר קבוע}}}{n}+\frac{a_{N+1}+\dots+a_n}{n}=\frac{t}{n}+\frac{a_{N+1}+\dots+a_n}{n}$$

$$>\frac{a_{N+1}+\dots+a_n}{n}-\left|\frac{t}{n}\right|>\frac{(n-N)k}{n}-\frac{|t|}{n}>m$$

החל ממקום מסוים כל איבר' הסדרה גדולים מ-k. n גדול.

$$(n-N)k-|t|>mn$$

$$nk-mn>|t|+Nk$$

$$n>\frac{|t|+Nk}{k-m}=\frac{|t|+N\cdot 2m}{2m-m}=\frac{|t|+2m\cdot N}{m}$$

נבחר: $N_1=\frac{|t|+2m\cdot N}{m}+1$

$$N_2=\max\{N_1,N\}$$

מצאנו כי עבור $n>N_2=\max\{N_1,N\}$ מתקיים שסדרת הממוצעים
החשבוניים שואפת ל-∞, ומכאן שסדרת הממוצעים החשבוניים
גם שואפת ל-∞

4. הוכיחו שהסדרות הבאות מתכנסות במובן הרחב וחשבו את גבולן:

א. $\sqrt[n]{n!}$. נשתמש במשפט, אם סדרה היא חיובית והגבול של $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ אז גם $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1\to\infty$$

ב. יהיו $0<\alpha<1$, נגדיר:
$$\begin{cases}a_1=1\\ a_{n+1}=\alpha\cdot a_n-1\end{cases}$$

<u>שלב א' - הסדרה יורדת:</u> נוכיח באינדוקציה

<u>בסיס:</u> $a_2=\alpha\cdot 1-1<1=a_1$

נניח נכונות עד n ונוכיח עבור $n+1$: $a_{n+1}\overset{?}{<}a_n$

$a_{n+1}=\alpha\cdot a_n-1<\alpha a_{n-1}-1=a_n$

לפי הנחת האינדוקציה $a_n<a_{n-1}$.

<u>שלב ב' - "ניחוש הגבול"</u>

נניח שהגבול של a_n הוא L $\lim_{n\to\infty}a_n=L$

ב-∞ a_{n+1},a_n שואפים שניהם ל-L, כלומר:

$a_{n+1}=a_n\cdot\alpha-1$

$\xrightarrow{n\to\infty}$ $L=L\alpha-1$

אם קיים גבול זה הגבול: $L(1-\alpha)=-1\to\boxed{L=\frac{1}{\alpha-1}}$

מספר שלילי!

<u>שלב ג' - הסדרה חסומה מלרע ע"י $L=\frac{1}{\alpha-1}$</u> ונוכיח באינדוקציה:

<u>בסיס:</u> (נתון $\alpha<1$) $\alpha\overset{\checkmark}{<}2\longrightarrow\alpha-1<1\xrightarrow{}1>\frac{1}{\alpha-1}$

נחלק ב-$\alpha-1$, $\alpha-1$ מספר שלילי, שינוי סימן

נניח ש $a_n>\frac{1}{\alpha-1}$ ונוכיח ש- $a_{n+1}>\frac{1}{\alpha-1}$

$a_{n+1}>\frac{1}{\alpha-1}$ $=\alpha\cdot a_n-1\longrightarrow a_n>\frac{\frac{1}{\alpha-1}+1}{\alpha}$ לפי הנחת האינדוקציה

$a_n>\frac{1}{\alpha-1}$ אם נוסיף 1 ונחלק ב-α שהוא שבר חיובי, אנו נקבל את המספר כי $\frac{1}{\alpha-1}$ הוא מספר שלילי).

קיבלנו $\{a_n\}$ יורדת וחסומה מלרע ע"י $\frac{1}{\alpha-1}$ ולכן לפי המשפט, מתכנסת לגבול סופי. לפי שלב ב' הגבול הוא בהכרח $\frac{1}{\alpha-1}$.

2) יהיו סדרות. נגדיר:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \end{cases}$$

הראו ששתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

שלב א' - נוכיח מונוטוניות:

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$$

$$b_{n+1}^2 = a_n \cdot b_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{b_{n+1}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n \cdot b_n}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}} \quad (II)$$

לפי א' שוויון הממוצעים, עבור $n \geq 1$ (ממוצע חשבוני $\geq$ ממוצע הנדסי) $a_n \geq b_n$

במקרה שהם שווים מדובר על סדרות קבועות) ומכיוון, ובגלל ש- $a, b > 0$,

והפעולות שורש, כפל, חילוק וחזקה אינם מחליפים סימן $IV \; \sqrt{a_n} > \sqrt{b_n}$

$$(IV)+(II) \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}} > 1$$

סדרה b_{n+1} עולה עבור $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$2a_{n+1} = a_n + b_n$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n - a_{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n - \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$(I) \quad a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

לפי א' שוויון הממוצעים, עבור $n \geq 1$

$(II) \; a_{n+1} \geq b_{n+1}$ (ממוצע חשבוני $\geq$ ממוצע הנדסי)

$(I) \; a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} =$ מספר שלילי

$a_n \geq b_n$ (במקרה שהם שווים מדובר על סדרות קבועות), כלומר $a_n > a_{n+1}$

סדרה a_{n+1} הינה יורדת, עבור $n \geq 1$

שלב ב': נראה חסימות:

נניח כי $a_n \neq b_n$ (אחרת הסדרות קבועות והן שוות: $a_n = b_n = a = b$
וזה גבולן).

מכיוון, לפי א' שוויון הממוצעים $a_{n+1} > b_{n+1}$ לכל $n \geq 1$,
כלומר a_{n+1} מהווה חסם עליון ל- b_{n+1} ו- b_{n+1} מהווה
חסם תחתון ל- a_{n+1}. מכאן, שתי הסדרות חסומות.

* מכלל ששתי הסדרות מונוטוניות וחסומות, הרי לפי המשפט יש להן
גבול.

המשך תרגיל 2- שאלה ג' - מציאת הגבול:

לפי הגדרה, סופרמום (ההפך מאינפימום מסויים) של המספרים מסדרה שואפים לגבול. כלומר, סופרמום c_n ו- c_{n+1} שואפים שניהם לאותו L.

נסמן את הגבול של b_n - L_B ואת של a_n - L_A

נתון כי: $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ $\quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$

נשתמש בהגדרת הסדרה של a_n:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

$$2a_{n+1} = a_n+b_n \xrightarrow{n\to\infty} 2L_A = L_A+L_B$$

$$\underline{\underline{L_A \overset{\downarrow}{=} L_B}}$$

כאמור, מצאנו כי הגבול של שתי הסדרות שווה.