תרגיל בית 1

שאלה 1: (35 נק')

א. בדקו כי הנורמות הבאות המוגדרות על מרחבים וקטוריים מתאימים אכן מהוות נורמות:

$\| \ \|_1$ המוגדרת על המרחב $\mathbb{R}^n$ ע"י $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$ (5 נק')

$\| \ \|_{L_1}$ המוגדרת על המרחב $C[a,b]$ (מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$) ע"י $\|f\|_{L_1} = \int_a^b |f(x)|dx$ לכל $f \in C[a,b]$.

(6 נק')

$\| \ \|_{L_\infty}$ המוגדרת על המרחב $C[a,b]$ ע"י $\|f\|_{L_\infty} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ לכל $f \in C[a,b]$ (6 נק')

ב. בדקו כי הקבוצות הבאות הן תתי מרחב של המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^\infty$ (מרחב הסדרות הממשיות) ובדקו כי הנורמות המוגדרות עליהן אכן מהוות נורמות:

$l_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$ עם הנורמה $\| \ \|_1$ המוגדרת ע"י $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ לכל $x \in \mathbb{R}^\infty$ (6 נק')

$l_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ עם הנורמה $\| \ \|_2$ המוגדרת ע"י $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$ לכל $x \in \mathbb{R}^\infty$ (6 נק')

$l_\infty = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \middle| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$ עם הנורמה $\| \ \|_\infty$ המוגדרת ע"י $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ לכל $x \in \mathbb{R}^\infty$ (6 נק')

שאלה 2: (30 נק')

תהי X קבוצה ויהיו d, d_1, d_2 מטריקות על X.

א. יהי $c > 0$ מספר ממשי. הוכיחו כי הפונקציה $cd : X \times X \to \mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $cd(x,y) = c \cdot d(x,y)$ לכל $x, y \in X$, היא גם מטריקה על X. (8 נק')

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f : X \times X \to \mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $f(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ לכל $x, y \in X$, היא גם מטריקה על X, המקבלת ערכים בקטע $[0,1]$. (14 נק')

ג. יהי $\lambda \in [0,1]$ מספר ממשי. הוכיחו כי הפונקציה $g : X \times X \to \mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $g(x,y) = (1-\lambda)\cdot d_1(x,y) + \lambda \cdot d_2(x,y)$ לכל $x, y \in X$, היא גם מטריקה על X. (8 נק')

שאלה 3 : (35 נק')

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. הזכרו מהתרגול כי לכל שני וקטורים $v_1, v_2 \in V$, הקטע המחבר בין v_1 ל- v_2 מוגדר להיות הקבוצה $\left\{(1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \middle| \lambda \in [0,1]\right\} \subset V$. הזכרו גם כי הקבוצה $C \subset V$ נקראת קבוצה קמורה ב- V אם לכל שני וקטורים $v_1, v_2 \in C$ מתקיים כי הקטע המחבר בינהם מוכל ב- C.

א. הוכיחו כי הזזות ואופרטורים לינאריים המוגדרים על V מעבירים כל קטע המחבר בין שני וקטורים ב- V, לקטע (אחר) המחבר בין שני וקטורים (אחרים) ב- V. הוכיחו גם כי הם מעבירים כל קבוצה קמורה ב- V לקבוצה קמורה ב- V. (9 נק')

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. תהי S ספירה ב- V ויהיו $v_1, v_2 \in S$. יהי I קטע המחבר בין v_1 ל- v_2. הוכיחו כי $S \cap I = \{v_1, v_2\}$. (13 נק')

ג. השתמשו בסעיף ב' לעיל על מנת להוכיח כי הנורמות $\|\ \|_1$ ו- $\|\ \|_\infty$ על $\mathbb{R}^n$, $\|\ \|_{L_1}$ ו- $\|\ \|_{L_\infty}$ על $C[a,b]$ והנורמות $\|\ \|_1$ ו- $\|\ \|_\infty$ על l_1 ו- l_∞ בהתאמה, אינן מושרות ע"י שום מכפלה פנימית. (13 נק')

בהצלחה !