אלגברה ב – הוכחה של משפט הפירוק הפרימרי

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל F, יהי T אופרטור. W<V נקרא T-אינווריאנטי אם T(W) < W.

<u>משפט הפירוק הפרימרי:</u> יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי, יהי T אופרטור. נניח כי הפולינום המינימלי של T הוא $p=p_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{r_k}$ כאשר p_i פולינומים אי פריקים מתוקנים ללא גורמים משותפים. עבור $W_i=ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$ מתקיים:

1. $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$.
2. W_i הוא T-אינווריאנטי.
3. עבור $T_i=T|_{W_i}$ הפולינום המינימלי של T_i הוא $p_i^{r_i}$.

<u>הוכחה:</u> נסמן $f_i=\frac{p}{p_i^{r_i}}$, אזי הפולינומים f_i שונים מאפס והמחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1, לכן קיימים g_i כך ש – $\sum_{i=1}^{k} g_i f_i=1$ (לפי תרגיל 8, שאלה 1 סעיף ב').
נגדיר $h_i=f_i g_i$ ו – $E_i=h_i(T)$. מתקיים $E_1+\ldots+E_k=(h_1+\ldots+h_k)(T)=Id$ (הצבת T בפולינום הקבוע 1 נותן 1). עבור $i\neq j$ מתקיים
$E_i E_j=h_i\cdot h_j(T)=f_i(T)g_i(T)f_j(T)g_j(T)=f_i(T)f_j(T)(g_i(T)g_j(T))=0$ (כי $f_i\cdot f_j$ מתחלק ב – p). מהשיוויון $Id=E_1+\ldots+E_k$ נקבל (ע"י הפעלת E_i) את השיוויון $E_i=E_i(E_i)$ (כי ראינו ש – $E_i E_j=0$), לכן E_i היטלים ונקבל פירוק $V=E_1(V)\oplus\ldots\oplus E_k(V)$. נוכיח כי $E_i(V)=W_i$.
נניח $v\in Image(E_i)$ אז $E_i(v)=v$ לכן $p_i^{r_i}(T)v=p_i^{r_i}(T)h_i(T)v=0$ כי $p_i^{r_i}f_i=p$ הפולינום המינימלי של T. נניח $v\in Ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$. $v=E_1(v)+\ldots+E_k(v)$, אבל עבור $j\neq i$ מתקיים ש – $f_j g_j$ מתחלק ב - $p_i^{r_i}$, לכן $E_j(v)=h_j(T)(v)=0$ לכן $v=E_i(v)$ (לכן (1) נכון).
נוכיח כי W_i אינווריאנטי תחת T: עבור $v\in W_i=ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$ מתקיים $p_i^{r_i}(T)(Tv)=T\,p_i^{r_i}(T)(v)=0$ לכן $T(v)\in W_i$. (לכן (2) נכון).
ברור כי $p_i^{r_i}$ מאפס את T_i מההגדרה של W_i. נניח $g\in F[x]$ מקיים $g(T_i)=0$, אז $g(T)\cdot f_i(T)=0$ (כי f_i מאפס את T על כל W_j ל - $j\neq i$ ו – g מאפס על W_i), לכן $g\cdot f_i$ מתחלק ב – p, ז"א $p_i^{r_i}f_i$ מחלק את $g\cdot f_i$, לכן $p_i^{r_i}$ מחלק את g.