

תרגיל בית 1 - חשבון אינפיניטיסמלי II

אינטגרלים לא מסויימים

הגשה עד יום חמישי 27.3.14, בשעה 23:59

תרגיל 1:

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו פונקציה קדומה בתחום ההגדרה המתאים.

$$1. f_1(x) = x \cdot \arctan(x^2 - 1)$$

$$2. f_2(x) = \sin^3(x) \cos^7(x)$$

$$3. f_3(x) = \frac{e^{2x}}{e^{5x} + 2e^{3x} + e^x}$$

$$4. f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$5. f_5(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

$$6. f_6(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$7. f_7(x) = \sin(\ln(x))$$

$$8. f_8(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}$$

תרגיל 2:

פתחו נוסחת נסיגה ל $I_n(x) = \int x^n \cos(ax) dx$ כאשר $a \neq 0$. השתמשו בנוסחת נסיגה כדי למצוא נוסחא סגורה ל $I_n(x)$

תרגיל 3:

לכל n טבעי, מצאו פונקציה קדומה לפונקציות הבאות

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}$$

$$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2) \cdots (x^2+n)}$$

תרגיל 4:

יהא $P(x)$ פולינום כלשהו ונסמן $f(x) = |P(x)|$. הראו שקיימת פונקציה רציפה $F(x)$ על כל \mathbb{R} כך ש $\int f(x) = F(x)$.
חשבו את הפונקציה $F(x)$ עבור הפולינום $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

תרגיל 5:

תהא $f(x) = [x]$ פונקציית הערך השלם.

1. הראו של $f(x)$ אין פונקציה קדומה על כל \mathbb{R} . מצאו קטע מקסימלי מהצורה (a, b) שמכיל את $\frac{1}{2}$, בו יש ל $f(x)$ פונקציה קדומה והסבירו למה לא ניתן להגדילו.

2. הראו שקיימת פונקציה $F(x)$ רציפה כך ש $F'(x) = f(x)$ לכל $x \notin \mathbb{Z}$.

תרגיל 6:

נגדיר את הסינוס והקוסינוס ההיפרבולים בצורה הבאה

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. הוכיחו את הזהות $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

2. מצאו את הנגזרות של $\sinh(x)$ ו $\cosh(x)$.

3. הראו ש $\sinh(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ו $\cosh(x) : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 1}$ הן פונקציות הפיכות. נסמן את ההופכיות שלהן ב $\operatorname{arsinh}(x)$ ו $\operatorname{arcosh}(x)$.

4. חשבו את האינטגרלים הבאים

$$\int \sinh(x) \cos(x) dx \quad ; \quad \int \operatorname{arsinh}(x) dx \quad ; \quad \int \operatorname{arcosh}(x) dx$$

5. השתמשו בהצבות $x = a \sinh(t)$ ו $x = a \cosh(t)$ כדי למצוא את האינטגרלים הבאים

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad ; \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

(מומלץ גם לנסות לפתור את האינטגרלים הללו בשיטות אחרות ולהשוות בין הפתרונות השונים).