# קומבינטוריקה - תרגיל 4

1. יש שתי דרכים לבנות תמורה כזו: הדרך הראשונה - בוחרים מספר k בין 1 ל-n-1 (n-1 אפשרויות) שמים את n במקום ה-k, את k במקום ה-n, ויש $D_{n-2}$ אפשרויות לסידור שאר המספרים. סה"כ $(n-1)D_{n-2}$ אפשרויות. הדרך השנייה – בוחרים מספר k כמו קודם (n-1 אפשרויות) ומסדרים את המספרים $\{1,\ldots,n-1\}$ כך שאף מספר i אינו מופיע במקום ה-i. ($D_{n-1}$ אפשרויות). יהי j המקום בתמורה בו מופיע המספר k. כעת רושמים במקום ה -j את המספר n ובסוף הרשימה (במקום ה-n) מוסיפים את המספר k. קיבלנו תמורה של המספרים $\{1,\ldots,n\}$ כך שאף מספר i אינו מופיע במקום ה-i. סה"כ $(n-1)D_{n-1}$ אפשרויות.

נשים לב שכל תמורה מהתמורות המבוקשות בשאלה מתקבלת באופן יחיד או בדרך הראשונה (אם n מתחלף עם איבר כלשהו) או בדרך השנייה (אם n אינו מתחלף עם איבר כלשהו) לכן עפ"י עקרון החיבור

$$D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

מתקיים $D_2 = 1$ (רק התמורה (2,1) מתאימה) ו- $D_3 = 2$ (התמורות (2,3,1) ו-(3,1,2) מתאימות). לכן

$$D_4 = (4-1)(2+1) = 9$$
$$D_5 = (5-1)(9+2) = 44$$
$$D_6 = (6-1)(44+9) = 265$$

2.

א.

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 4$$
$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \ge 3)$$

אפשר לחשב

$$a_3 = 12 - 3 + 0 = 9$$
$$a_4 = 27 - 12 + 1 = 16$$
$$a_5 = 48 - 27 + 4 = 25$$

מה שמוביל לניחוש

$$a_n = n^2$$

נוכיח את הניחוש באינדוקציה על n. עבור 0,1,2 זה נתון. עבור $n \ge 3$ מתקיים $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ . נציב את ערכי $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}$ עפ"י הנחת האינדוקציה ונקבל

$$a_n = 3(n-1)^2 - 3(n-2)^2 + (n-3)^2 =$$
$$= 3(n^2 - 2n + 1) - 3(n^2 - 4n + 4) + (n^2 - 6n + 9) = n^2$$

מש"ל

אם לא עולים על הניחוש, אפשר לחשב בדרך הסטנדרטית. הפולינום האופיני הוא $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = (\alpha - 1)^3$ ולכן יש לחפש פתרונות מהצורה

$$a_n = An^2 1^n + Bn1^n + C1^n$$

מהצבת תנאי ההתחלה מקבלים A=1, B=C=0, לכן

$$a_n = 1n^2 1^n = n^2$$

ב.

$$a_1 = 9$$
$$a_2 = 12$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2n - 7 \quad (n \ge 3)$$

ננסה ליצור סדרה חדשה מהצורה

$$b_n = a_n + xn + y$$

בתקווה שעבורה נקבל נוסחה שנדע לפתור. x ו-y אמורים להיות שני קבועים. בינתיים איננו קובעים את ערכם על-מנת לאפשר לעצמנו גמישות בהמשך. נמצא כלל נסיגה עבור $b_n$:

$$b_n = a_n + xn + y = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2n - 7 + xn + y =$$
$$= (b_{n-1} - x(n-1) - y) + 2(b_{n-2} - x(n-2) - y) - 2n - 7 + xn + y =$$
$$= b_{n-1} + 2b_{n-2} - 2(x+1)n + 5x - 2y - 7$$

היה נחמד אילו היה מתקיים x+1=0 ו-5x-2y-7=0. אבל כזכור, אנו יכולים לבחור את x ואת y כרצוננו. נבחר אם כן x=-1, y=-6 וקיבלנו

$$b_1 = 2$$
$$b_2 = 4$$
$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} \quad (n \ge 3)$$

וכעת לא קשה לנחש ולהוכיח באינדוקציה

$$b_n = 2^n$$

ולכן

$$a_n = 2^n + n + 6$$

.3

א. יהי $n \ge 4$ כלשהו. מספר האפשרויות לרשום את n כסכום של 1 ו-3 כשהמספר הראשון הוא 1, שווה ל-$b_{n-1}$, שכן לאחר המחובר 1 מופיעים מספרים שסכומם n-1. באופן דומה, מספר האפשרויות לרשום את n כסכום של 1 ו-3 כשהמספר הראשון הוא 3, שווה ל-$b_{n-3}$. מעקרון החיבור מקבלים

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-3}$$

תנאי ההתחלה: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ (רק 1+1), $b_3 = 2$ (3, 1+1+1).

ב. נחשב:

$b_4 =$ איזוגי=איזוגי+זוגי

$b_5 =$ זוגי=איזוגי+איזוגי

$b_6 =$ זוגי=זוגי+זוגי

$b_7 =$ איזוגי=איזוגי+זוגי

$b_8 =$ איזוגי=זוגי+איזוגי

$b_9 =$ איזוגי=זוגי+איזוגי

$b_{10} =$ זוגי=איזוגי+איזוגי

טענה:

לכל n טבעי $b_n \equiv b_{n+7}$ (כאשר $\equiv$ מסמן קונגרואנציה מודולו 2, כלומר $x \equiv y$ אם ורק אם x ו-y שניהם זוגיים או x ו-y שניהם איזוגיים)

הוכחה באינדוקציה על n : עבור $n \le 3$ הראינו לעיל. עבור $n \ge 4$ בהנחה שהטענה נכונה עבור מספרים קטנים יותר נחשב

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-3} \equiv b_{n+6} + b_{n+4} = b_{n+7}$$

מש"ל

אפשר גם להוכיח ללא אינדוקציה:

$$b_{n+7} = b_{n+6} + b_{n+4} = b_{n+5} + b_{n+3} + b_{n+4} = b_{n+4} + b_{n+2} + b_{n+3} + b_{n+4} =$$
$$= 2b_{n+4} + b_{n+2} + b_{n+2} + b_n = 2(b_{n+4} + b_{n+2}) + b_n$$

כלומר $b_{n+7}$ שווה ל-$b_n$ ועוד מספר זוגי ולכן $b_{n+7} \equiv b_n$.

לכן $b_{70000010} \equiv b_3$ כלומר זוגי.

.4

א. נתבונן בכל התמורות של הקבוצה $\{1,\ldots,9\}$ ונחשב את השארית שלהם בחלוקה ל-53441. יש !9 תמורות ויש 53441 שאריות

אפשריות ואפשר לחשב $9!>53441$, לכן לפי עקרון שובך היונים, קיימות שתי תמורות x ו-y בעלי אותה שארית, בה"כ $x>y$, ונקבל ש-$x-y$ הפרש תמורות המתחלק ב-53441.

ב. מחזיקים מערך בגודל 53441 (עם אינדקסים מ-0 עד 53440) כשבכל כניסה במערך מקום למספר בן 9 ספרות.

עוברים על כל התמורות של $\{1,\dots,9\}$ (אפשר לעשות את זה בצורה יעילה, את זה לומדים בקורס "מבני נתונים"), לכל תמורה מחשבים את השארית בחלוקה ל-53441 ורושמים את התמורה בכניסה זו במערך. כך ממשיכים עד שמגיעים לכניסה מסוימת בפעם השנייה (זה קורה לאחר לא יותר מ-53442 תמורות) ההפרש בין שני המספרים המתאימים לכניסה זו במערך הוא הפרש תמורות המתחלק ב-53441.