סוגי התכנסות של סדרות של פונקציות

<u>הגדרה:</u> סדרת פונקציות היא סדרה של פונקציות, כלומר כל אבר בסדרה הוא פונקציה. נסמן $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

תחום התכנסות של סדרה של פונקציות הוא אוסף כל ה־x עבורם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים.

אם נסמן $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ אזי $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת על תחום ההתכנסות של סדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. נאמר כי הסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת נקודתית** לפונקציה $f(x)$.

טור פונקציות הוא ביטוי מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כאשר $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות.

תחום ההתכנסות של טור של פונקציות הוא אוסף כל ה־x עבורם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ קיים.

אם נסמן $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ אזי $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת על תחום ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. נרשום $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. נאמר כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **מתכנס נקודתית** לפונקציה $f(x)$.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי סדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה $f(x)$ בתחום I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שכאשר $n > N$ אז $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in I$.

באופן שקול, סדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בתחום I אם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

נאמר כי טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **מתכנס במידה שווה** לפונקציה $f(x)$ בתחום I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שכאשר $n > N$ אז $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ לכל $x \in I$.

באופן שקול, טור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה לפונקציה $f(x)$ בתחום I אם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| = 0.$$

<u>משפט[מבחן M של ויארשטראס]:</u> תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות המוגדרות על תחום I עבורה קיימת סדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n ולכל $x \in I$ מתקיים $|f_n(x)| \le M_n$.

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בתחום I.

<u>משפט:</u> 1. תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות רציפות על קטע I המתכנסת במידה שווה בקטע I לפונקציה $f(x)$. אז $f(x)$ פונקציה רציפה.

2. תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ המתכנסת במידה שווה בקטע $[a,b]$ לפונקציה $f(x)$. אז $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית ב־$[a,b]$ ומתקיים

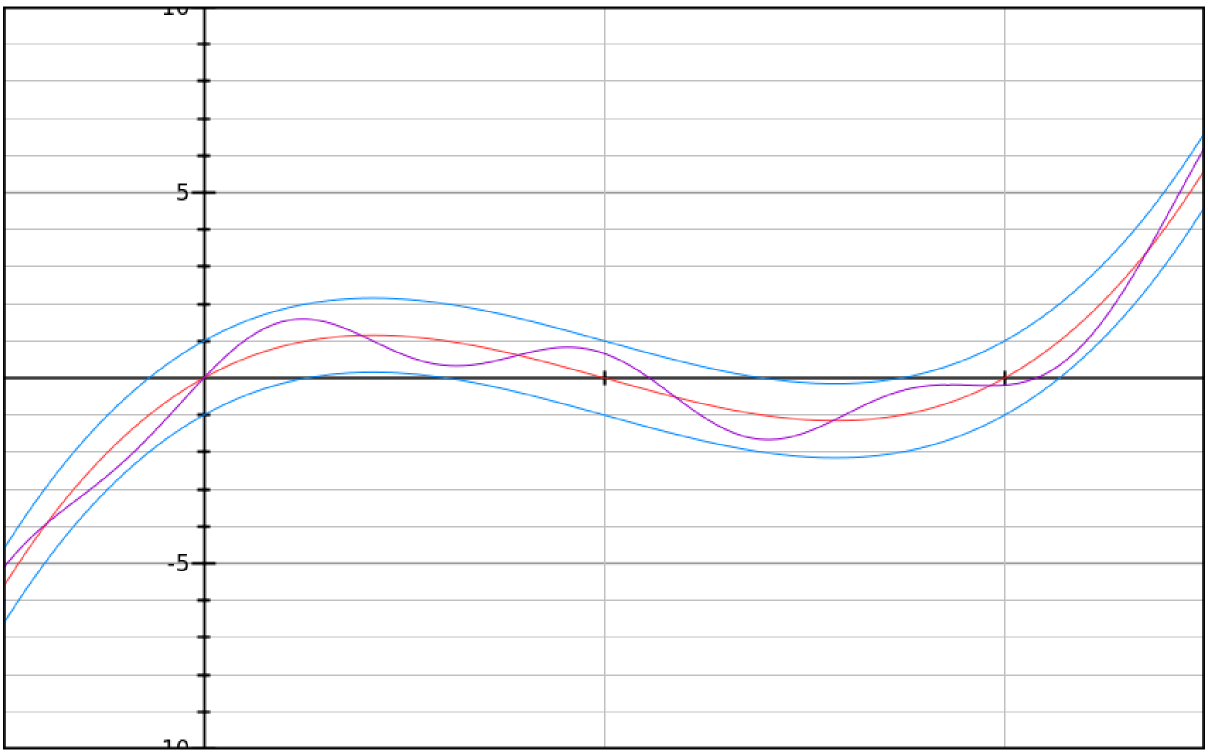
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

3. נניח כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות רציפות המתכנס במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע I. אז $f(x)$ רציפה ב־I.

4. נניח כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות אינטגרביליות המתכנס במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$. אז $f(x)$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$ ומתקיים

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

בציור הבא הפונקציה $f(x)=3x(x-1)(x-2)$ מצויירת באדום.
בכחול הפונקציות $3x(x-1)(x-2)\pm 1$.
שימו לב כי למרות שנראה בעין כי בקצה הימני והשמאלי הפונקציה האדומה קרובה יותר לכחולים, זוהי אשליה. המרחק הוא מרחק אנכי ולא המרחק הקצר בין הגרפים.
בסגול הגרף של $g(x)=3x(x-1)(x-2)+\frac{2}{3}\sin 8x$.
המרחק בין f,g הוא לכל היותר $\frac{2}{3}$.



כל גרף של פונקציה $h(x)$ המקיימת כי לכל x בתחום $[-0.5,2.5]$

$$|f(x)-h(x)|<1$$

נמצא בין שני הגרפים הכחולים.

משפט: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות בקטע חסום וסגור I.
אם $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על I וגם $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לפחות בנקודה אחת של I, אז $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על I ומתקיים

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

משפט: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות בקטע חסום וסגור I.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנסת במ"ש על I וגם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנסת לפחות בנקודה אחת של I, אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנסת במ"ש על I ומתקיים

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

הערה: אפשר להחליף בין סדרות פונקציות וטורי פונקציות באופן הבא:
אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות, נגדיר $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.
אם $\{g_n(x)\}_n$ סדרת פונקציות, נגדיר $f_1(x) = g_1(x),\ \ f_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$. אז

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = g_n(x).$$

בכל מקרה, ההתכנסות, סוג ההתכנסות, הגבול וכו של $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ושל $\{g_n(x)\}_n$ שקולות.

תרגיל: נתונה סדרת הפונקציות
$$f_n(x)=\frac{nx^2}{1+nx^2}.$$

1. מצאו תחום ההתכנסות של הסדרה ואת הפונקציה הגבולית.
2. הראו כי לכל $\delta>0$ הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $|x|\geq\delta$.
3. הראו כי לכל $\delta>0$ הסדרה אינה מתכנס במידה שווה בתחום $[-\delta,\delta]$.

פתרון: 1. אם $x=0$ אז $f_n(0)=0$ ולכן
$$f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0.$$

אם $x\neq 0$ אזי
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2}{1+nx^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{\frac{1}{n}+x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

קיבלנו כי תחום ההתכנסות הוא כל הישר והפונקציה הגבולית היא
$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$$

2. יהי $\delta>0$.
$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx^2}{1+nx^2}-1\right|=\left|\frac{nx^2-(1+nx^2)}{1+nx^2}\right|=\left|\frac{1}{1+nx^2}\right|=\frac{1}{|1+nx^2|}\leq\frac{1}{nx^2}\leq\frac{1}{n\delta^2}$$

ולכן בהנתן $\varepsilon>0$ נבחר $N=\frac{1}{\delta^2\varepsilon}$.

3. יהי $\delta>0$.
$$\sup_{|x|\leq\delta}\left|\frac{nx^2}{1+nx^2}-1\right|=\sup_{|x|\leq\delta}\frac{1}{1+nx^2}\geq_{x=\frac{1}{\sqrt{n}}}\quad\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leq\delta}|f_n(x)-f(x)|$ אינו אפס. כלומר הסדרה לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\delta,\delta]$.

הסבר חלופי: סדרת הפונקציות
$$f_n(x)=\frac{nx^2}{1+nx^2}.$$

היא סדרה של פונקציות רציפות על כל הישר. אם הן היו מתכנסות המידה שווה בקטע $[\delta,\delta]$ אז הפונקציה הגבולית הייתה גם היא רציפה בקטע זה. אבל הפונקציה הגבולית היא
$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$$

שאינה רציפה באפס ולכן אינה רציפה בקטע $[-\delta,\delta]$. סתירה.

תרגיל: הראו כי הסדרה
$$f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$$

מתכנסת במ"ש בקטע $(0,1]$.

פתרון: כיוון ש־
$$\lim_{t\to 0^+}t\ln t=0$$

אז לפי משפט היינה, כיוון שלכל $x>0$ מתקיים כי $t_n=\frac{x}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0^+$ אז
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}=0.$$

ולכן $f(x)=0$ עבור $0<x\leq 1$ היא פונקציית הגבול הנקודתי. נראה כעת כי ההתכנסות היא במ"ש:

$$\left(\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right)'=\frac{1}{n}\ln\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\frac{1}{\frac{x}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}\ln\frac{ex}{n}$$

ולכן הנגזרת היא שלילית עבור $n\geq 3\geq e$. כיוון שהגבול באפס הוא אפס אז הערך המינימלי שמתקבל ע"י $\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ הוא בקצה הימני של הקטע ובו הערך הוא

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}.$$

נקבל כי

$$\sup_{0<x\leq 1}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

כלומר ההתכנסות היא במ"ש.

הערה: שימו לב כי שינוי קל בפתרון מראה כי יש התכנסות במ"ש על כל קטע מהצורה $(0,b]$.

תרגיל: הראו כי הסדרה $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ אינה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$.

פתרון: חישוב פשוט מראה כי פונקציית הגבול הנקודתי היא $f(x)=0$ בקטע $[0,1]$.

הנגזרת של הסדרה היא

$$\big((x^n(1-x^n)\big)'=nx^{n-1}(1-2x^n)$$

והנגזרת מתאפסת בנקודות $x=0$ ו־$x=\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$. כיוון שבקצוות הפונקציה מתאפסת אז $x=2^{-\frac{1}{n}}$ היא נקודת מקסימום מוחלט בקטע $[0,1]$. לכן

$$\sup_{0\leq x\leq 1}|x^n(1-x^n)|=\big(2^{-\frac{1}{n}}\big)^n\big(1-\big(2^{-\frac{1}{n}}\big)^n\big)=\frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{2}\big)=\frac{1}{4}$$

שאינו שואף לאפס ולכן אין התכנסות במ"ש.

תרגיל: הראו כי הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ מתכנס במ"ש לפונקציה $f(x)=e^x$ על כל קטע מהצורה $[-a,a]$.

פתרון:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|\leq\frac{a^n}{n!}=M_n.$$

כיוון ש־

$$\sum_{n=0}^{\infty}M_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=e^a<\infty$$

ולכן לפי מבחן M של ויארשטראס הטור מתכנס במ"ש לפונקציה $f(x)$ בקטע $[-a,a]$. אבל אנו יודעים כי

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

הוא פולינום מקלורין של $f(x)=e^x$ ולכן לכל n טבעי ולכל $|x|\leq a$ קיים c בין $0,x$ עבורו

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=|R_n(x)|=\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq\frac{e^a}{(n+1)!}a^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ולמעשה אי־שוויון זה נותן גם התכנסות במ"ש.

תרגיל: יהי $\delta>0$. הראו כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\cos nx$ מתכנס במ"ש ב־$[\delta,\infty)$.

פתרון: כיוון ש־

$$\left|e^{-nx}\cos nx\right| \le e^{-\delta n} = M_n$$

וכיוון ש־

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\delta n} < \infty$$

אז לפי מבחן M של ויארשטראס, הטור מתכנס במ"ש בקטע.

תרגיל: חשבו

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin nx}{e^n} dx.$$

פתרון: כיוון ש־

$$\left|\frac{n\sin nx}{e^n}\right| \le \frac{n}{e^n}$$

וכיוון ש־

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n} < \infty$$

אז לפי מבחן M של ויארשטראס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin nx}{e^n}$$

מתכנס במ"ש לפונקציה שנסמנה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin nx}{e^n}$ ובגלל שאברי הטור הן פונקציות רציפות אז כך גם פונקציית הגבול. נקבל כי

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin nx}{e^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{n\sin nx}{e^n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{e^n} \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}\left(1-(-1)^n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^{2k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2}{e}}{e^{2k-2}} = \frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(e^2\right)^{k-1}} = \\
&= \frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^{k-1} = \frac{2}{e}\frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{2}{e-\frac{1}{e}} = \frac{2e}{e^2-1}
\end{aligned}$$

תרגיל: תנו דוגמא לסדרת פונקציות $\{f_n\}_n$ כך שסדרת הנגזרות שלה מתכנסת במ"ש בקטע חסום וסגור I אבל סדרת הפונקציות עצמה אינה מתכנסת.

פתרון:

$$f_n(x) = n \qquad f_n'(x) = 0$$

תרגיל: תנו דוגמא לסדרת פונקציות $\{f_n\}_n$ כך שסדרת הנגזרות שלה מתכנסת במ"ש על הישר, הסדרה עצמה מתכנסת בנקודה אחת לפחות, אבל סדרת הפונקציות עצמה אינה מתכנסת במ"ש על כל הישר.

פתרון:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad f_n'(x) = \frac{1}{n}$$

אז ברור כי סדרת הנגזרות מתכנסת במ"ש לאפס על הישר כולו, אבל הסדרה עצמה מתכנסת נקודתית לאפס כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

ואינה מתכנסת במ"ש לאפס על כל הישר מכיוון ש־

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sup_{\mathbb{R}} \frac{x}{n} = \infty.$$

שימו לב כי על כל קטע חסום וסגור, הסדרה $f_n(x) = \frac{x}{n}$ מתכנסת במ"ש לאפס. היא פשוט אינה מתכנסת במ"ש לאפס על כל הישר.

<u>תרגיל:</u> האם ניתן לגזור איבר איבר את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

<u>פתרון:</u> כיוון ש־

$$\left|\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right| \le \left|\frac{x}{n^2}\right| = \frac{|x|}{n^2}$$

אז לפי מבחן M של ויארשטראס הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

מתכנס במ"ש על כל קטע חסום, ובפרט לכל x. בנוסף

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{n^4}}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}$$

ולכן

$$\left|\left(\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)'\right| \le \frac{1}{n^2}$$

ושוב, לפי מבחן M של ויארשטראס, הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)'$$

מתכנס במ"ש על כל הישר. לפי המשפט על נגזרות אבר אבר של טור,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}$$

לכל x.