פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 8

1. א. אין שינוי לאחר ההצבה: $(\forall x)R(x) \to (\exists y)R(y)$. ההצבה היא כשרה.

ב. לאחר ההצבה מקבלים: $(\exists x)(\exists y)x=y \to g(y)=f(y)$. ההצבה היא כשרה.

ג. לאחר ההצבה מקבלים: $(\forall y)(\forall z)f(y,z)=f(f(y,c),z)$. ההצבה לא כשרה.

2. א. - אם $\mathbf{M}$ מבנה ו $\mathbf{s}$ השמה כך ש $\mathbf{M} \vDash_s \varphi(t)$. נגדיר השמה חדשה $\mathbf{s'}$ כך ש $\mathbf{s'}$ מזדהה עם $\mathbf{s}$ על כל המשתנים פרט לx ובx מקבלת $\mathbf{s'(x)}$ את הערך של $\mathbf{s^*(t)}$. מכיוון שההצבה כשרה ו $\mathbf{M} \vDash_s \varphi(t)$ אזי לפי משפט שהוכח בהרצאה $\mathbf{M} \vDash_{s'} \varphi$. מכיוון שs' מתלכדת עם $\mathbf{s}$ פרט אולי על $\mathbf{x}$ מקבלים ש $\mathbf{M} \vDash_s \exists x\varphi$ ולכן $\mathbf{M} \vDash_s \varphi(t) \to \exists x\varphi$.

- אם $\mathbf{M}$ מבנה ו $\mathbf{s}$ השמה כך ש $\mathbf{M} \nvDash_s \varphi(t)$ אז ברור ש $\mathbf{M} \vDash_s \varphi(t) \to \exists x\varphi$.
על כן מקבלים ש $\varphi(t) \to \exists x\varphi$ אמיתית לוגית.

ב. דוגמה: $\mathbf{t = \text{“}y\text{”}}$, $\varphi = \forall y(\, x = y\,)$ (לכן $\varphi(t) = \forall y(\, y = y\,)$). נניח ש- $\mathbf{W^M = \{ 1, 2 \}}$, אזי $\mathbf{M} \vDash \varphi(t)$ אבל $\mathbf{M} \nvDash \exists x\varphi$ ולכן $\nvDash \varphi(t) \to \exists x\varphi$.

3. א.
$\forall x R(x,x) \wedge$
$\forall x\forall y[R(x,y)\to R(y,x)] \wedge$
$\forall x\forall y\forall z[(R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z)]$

ב.
$\forall x R(x,x) \wedge$
$\forall x\forall y\forall z[(R(x,y)\wedge R(y,z))\to R(x,z)] \wedge$
$\forall x\forall y[(R(x,y)\wedge R(y,x))\to x=y]$

ג. כמו ב) ובנוסף: $\forall x\forall y[R(x,y)\vee R(y,x)]$

4. $\forall x[\, \neg P(x)\equiv P(f(x))\,] \;\wedge\; \forall x\forall y[\, f(x)=f(y) \to x=y\,]$

אפשרות אחרת

$\forall x[\, \neg x=f(x)\,] \;\wedge\; \forall x\forall y[\, x=f(y) \to y=f(x)\,]$

אפשרות אחרת

$\forall x\forall y\forall z[\, f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z)) \wedge f(x,e)=x \wedge f(e,x)=x \wedge f(g(x),x)=e\,] \wedge$

$\wedge\; \exists x[\, \neg x=e \wedge f(x,x)=e\,]$

כאשר $\mathbf{e}$ קבוע אישי.