לוגיקה מתמטית - תרגיל 12

1. בשפה שבה יש סימן פונקציה חד-מקומי f וסימן יחס $=$, יהי φ הפסוק

$$(\forall x)(\neg f(x) = x \ \wedge \ f(f(f(x))) = x)$$

א. מצא את כל העוצמות κ (סופיות ואינסופיות) שעבורן קיים מודל של $\{\varphi\}$ עם עולם מעוצמה κ .

ב. הוכח שלכל עוצמה κ שמצאת בחלק א', $\{\varphi\}$ היא κ-קטגורית.

ג. האם $\{\varphi\}$ תורה שלמה ?

2. בשפה שבה יש סימן יחס דו-מקומי R וסימן יחס $=$, תהי $\sum$ התורה

$$\begin{aligned}\sum = \{ \quad & (\forall x)\neg R(x,x) \quad , \quad (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x)) \quad , \\ & (\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg y = z \wedge (\forall w)(R(x,w) \equiv (w = y \vee w = z))) \quad \}\end{aligned}$$

א. תאר במילים מתמטיות מקובלות את המודלים של $\sum$.

ב. מצא את כל העוצמות κ (סופיות ואינסופיות) שעבורן $\sum$ היא κ-קטגורית.

ג. האם $\sum$ תורה שלמה ?

3. תהי $\sum$ תורת הסדר הקווי הצפוף בלי איבר ראשון ובלי איבר אחרון.
תהי κ עוצמת הרצף (כלומר $\kappa = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$) .
הוכח כי $\sum$ איננה κ-קטגורית.

4. תן דוגמה לתורה שהיא κ-קטגורית לכל עוצמה סופית $\kappa \geq 1$, אך איננה שלמה.

5. נתבונן בשפה שבה יש סימן פונקציה חד-מקומי f וסימן יחס $=$.
יהי M המבנה שבו W^M היא קבוצת המספרים השלמים , $f^M(a) = a - 2$.

א. מצא את כל התת-מבנים של M . איזה מהם אלמנטריים ?

ב. כמה תת-מבנים לא איזומורפיים יש ל-M ?

תאריך הגשה 28.6