תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 3
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. תרגיל 2.7 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. נגדיר

$$X = \{\text{ככר שרופה}\}.$$

אזי לפי נוסחת ההסתברות הכוללת

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) + P(X|C)P(C) = \\ &= 10^{-4}(5 \cdot 25 + 4 \cdot 35 + 2 \cdot 40) = 0.0345 \end{aligned}$$

לכן

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)} = \frac{125}{345} = \frac{25}{69}.$$

<u>תרגיל 2</u>. תרגיל 2.10 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א) הטענה נכונה: $P(E|F) \leq P(E)$ גורר

$$P(F|E) = \frac{P\left(F \bigcap E\right)}{P(E)} = \frac{P\left(E|F\right)P(F)}{P(E)} \leq P(F).$$

(ב) הטענה אינה נכונה: כדוגמה נגדית ניקח

$$\begin{gathered} \Omega = \{1,2,3\}, \quad P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}, \\ E = \{\omega = 1\}, \quad F = \{\omega = 2\}, \quad G = \{\omega \in \{2,3\}\}. \\ P(E) = \frac{1}{3}, \quad P(F) = \frac{1}{3}, \quad P(G) = \frac{2}{3}. \end{gathered}$$

אזי

$$P(E|F)=0<P(E),\qquad P(G|E)=0<P(G)$$ אבל
$$P(G|F)=1>P(G).$$

דוגמה אחרת בעלת תבנית דומה:

$$\Omega=\{1,2\},\qquad P(1)=P(2)=\frac{1}{2},$$
$$E=\{\omega=1\},\qquad F=G=\{\omega=2\}.$$

<u>תרגיל 3</u>. תרגיל 2.20 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. נגדיר מאורעות

$$X=\{\text{גילוי האוניה}\},\qquad X_D=\{D \text{ גילוי האוניה תוך כדי סריקות באיזור}\}$$

אזי

(א)

$$\begin{aligned}P(X) &= P(X|A)P(A)+P(X|B)P(B)+P(X|C)P(C)+\\ &+ P(X|D)P(D)+P(X|E)P(E)=\\ &= 0.8\cdot 0.1+0.4\cdot 0.1+0.6\cdot 0.2+0.8\cdot 0.3+0.9\cdot 0.3=0.75\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}P(E|X_D^c) &= \frac{P\left(E\bigcap X_D^c\right)}{P(X_D^c)}=\frac{P\left(E\right)}{P(D^c)+P(X_D^c|D)P(D)}=\\ &= \frac{P\left(E\right)}{1-P(D)+P(X_D^c|D)P(D)}=\frac{0.3}{0.7+0.2\cdot 0.3}=\frac{15}{38}.\end{aligned}$$

(ג) עבור איזור J כל שהו

$$P(J|X^c)=\frac{P(X^c|J)P(J)}{P(X^c)}.$$

לכן אנחנו מחפשים איזור בו מכפלה (המססר המופיע בשורה הראשונה של הבטבלה) $\times$ (המספר המשלים ל- 1 את המססר המופיע בשורה השנייה של הבטבלה) היא המקסימלית. לפיכך התשובה היא: C.

<u>תרגיל 4</u>. תרגיל 12.19 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. נגדיר מאורעות

$$V_i\{A_i \text{ בעד}\}, \qquad W_k = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$$

אזי

$$\begin{aligned} P(W_1) &= P(V_1) = 1-\alpha \\ P(W_k) &= P\left(V_k \bigcap W_{k-1}\right) = P(V_k|W_{k-1})P(W_{k-1}) = \frac{2}{k}P(W_{k-1}). \end{aligned}$$

מכאן, בעזרת אינדוקציה

$$P(W_k) = \frac{2}{k}P(W_{k-1}) = \frac{2}{k}\cdot\frac{2}{k-1}P(W_{k-2}) = \ldots = \frac{2^k}{k!}(1-\alpha).$$

בהתאם לכך

$$P(W_n^c) = 1 - \frac{2^n}{n!}(1-\alpha).$$

<u>תרגיל 5</u>. יהי (Ω, P) מרחב הסתברות סופי וסמטרי. תנו דוגמה לשלושה מאורעות A, B, C בלתי תלויים.

<u>פתרון</u>. דוגמא לא טריוויאלית ניתן לתת רק אם קיימים מספרים ראשוניים p_1, p_2, p_3 כך ש- $|\Omega| \vdots p_i,\ i = 1,2,3$. אז:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$A = \{k \in \Omega | k \vdots p_1\},\ B = \{k \in \Omega | k \vdots p_2\},\ C = \{k \in \Omega | k \vdots p_3\}.$$

<u>תרגיל 6</u>. בבניין n קומות. בקומת קרקע נכנסו m אנשים, $m \geq n$. מה ההסתברות שבכל קומה יורד לפחות נוסע אחד.

<u>פתרון</u>. נסמן:

$$k_j = j \text{ מספר האנשים שירדו בקומה}, \quad A = \{k_j \geq 1\ \forall j\}.$$

אזי $\sum_{j=1}^{n} k_j = m$ ולכן (ראו פתרון של תרגיל מס' 8 מתוך תירגול מס' 3):

$$P(A) = \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m+n-1}{n-1}}$$