אינפי 3 - גליון בית 2 - אביב תשע"ז

1. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, שרכיביה $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (כלומר, $f(\vec{x})=(f_1(\vec{x}),f_2(\vec{x}),\dots,f_m(\vec{x}))$. הוכיחו כי f גזירה ב-$p\in\mathbb{R}^n$ אמ"מ לכל $1\le i\le m$, f_i גזירה ב-p.

2.

(א) תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $f(x,y,z)=\left(xyz,x^2+\sin(xy)\right)$. חשבו את הנגזרת Df.

(ב) נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=\begin{cases}x^{n/5}\sin\left(\frac{y}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. עבור אלו ערכים של $n\in\mathbb{N}$ הפונקציה גזירה ב-$(0,0)$?

3. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$p\in\mathbb{R}^n$.

(א) הוכיחו כי לכל וקטור $u\in\mathbb{R}^n$ קיים הגבול $D_uf(p)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(p+tu)-f(p)}{t}$ (הוא נקרא "נגזרת מכוונת").

(ב) הראו כי אם $u,v\in\mathbb{R}^n$, אז $D_{u+v}f(p)=D_uf(p)+D_vf(p)$.

(ג) הראו כי עבור הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כל הנגזרת המכוונות ב-$(0,0)$ קיימות, אך f אינה גזירה ב-$(0,0)$.

4. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ונגדיר $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ ע"י $g(t)=f\left(\frac{\cos t}{t},\frac{\sin t}{t}\right)$. הוכיחו כי אם g עולה, אז $Df(0,0)=(0,0)$. (הדרכה: הניחו ש-Df הוא בכיוון θ, והתבוננו בסדרת הנקודות $t_n=2\pi n+\theta$)

5.

(א) תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ גזירה ברציפות, כך ש-$\operatorname{rank}(Df(0,0))=2$. הוכיחו כי יש סביבה של $(0,0)$ שבה f חח"ע.

(ב) תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ גזירה ברציפות, כך ש-$\operatorname{rank}(Df(0,0,0))=2$. האם בהכרח אין סביבה של $(0,0,0)$ שבה f חח"ע?