אינפי 3 - גליון בית 6 - אביב תשע"ז

1. תהי $f:[a,b]:\mathbb{R}^+$ גזירה ברציפות. נסמן ב-$S\subset\mathbb{R}^3$ את המשטח המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה (ב-$\mathbb{R}^2\times\{0\}$) סביב ציר ה-x (כלומר, נקודה (x_0,y_0) יוצרת מעגל $\left\{(x,y,z):\ x=x_0\ ,y^2+z^2=y_0^2\right\}$).
הראו שהשטח של S הוא $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

2. תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. לכל $p_0\in\mathbb{R}^3$ ו-$r>0$, נסמן ב-$S(r;p_0)=\partial B(r;p_0)$ את הספירה ברדיוס r סביב p_0.
   (א) הראו כי הפונקציה $g(r)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S(r;p_0)}f\,ds$ (כלומר, הממוצע של f על $S(r;p_0)$) גזירה, ונגזרתה היא $\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S(r;p_0)}(\nabla f)\cdot d\vec{s}$ (כאשר הנורמל פונה החוצה).
   (ב) חשבו את $\lim_{r\to0^+}g(r)$.
   (ג) הראו כי אם f הרמונית (כלומר, $f\in C^2$ ו-$\Delta f=0$), אז $g(r)=f(p_0)$ לכל r.
   (ד) הוכיחו שלפונקציה הרמונית אין נקודות קיצון (אלא אם הן קבועות מקומית).

3. יהי S משטח סגור וחלק שהוא השפה של $A\subset\mathbb{R}^3$, ויהי $0\neq\vec{l}\in\mathbb{R}^3$. לכל $p\in S$, נסמן ב-$\alpha(p)$ את הזווית שבין הנורמל ל-S בנקודה p ובין $\vec{l}$. חשבו את $\iint_S\cos(\alpha(p))\,ds$.

4. יהי $\vec{F}(x,y,z)=\left(2y^3,x^3,3z^3\right)$, ויהי $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,\gamma_3(t))$ $(0\le t\le2\pi)$ עקום סגור חלק בחצי העליון של $\mathbb{R}^3$ (כלומר $\gamma_3(t)>0$). הראו שהאינטגרל $\oint_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{l}$ אינו תלוי ב-γ_3, וחשבו אותו.