מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים – ת"ב 4

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

1/12/2016

תאריך הגשה

11

קבוצת תרגול

שאלה 1:

יהא מרחב טופולוגי (X,τ) כך שנתונות $A_1,\cdots,A_k$ קבוצות דלילות ב-(X,τ). נרצה להראות כי $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ היא קבוצה דלילה ב-(X,τ).

לשם כך, תהא קבוצה פתוחה כלשהי $B\in\tau$. מהגדרת A_i לכל i, קיימות נקודות x_i לכל i כך שלנקודות אליה קיימות סביבות U_i עבורן $U_i\cap A_i=\emptyset$.

נבנה קבוצה כזו בצורה איטרטיבית באופן הבא:

עבור B, קיימת סביבה $B_1\subset B$ עבורה $B_1\cap A_1=\emptyset$. עתה, נתבונן ב-B_1 שהינה קבוצה פתוחה, ונסיק כי עבורה קיימת סביבה $B_2\subset B_1$ כך ש-$B_2\cap A_2=\emptyset$.

כך, לכל $1\le i\le k$ נוכל לבחור קבוצות כנ"ל ולקבל לכל i קבוצה B_i כך ש:

$$B\supset B_1\supset B_2\cdots\supset B_k$$

ונגדיר את $U=\bigcap_{i=1}^{k} B_i=B_k$. נשים לב כי לכל $x\in B_k$, מתקיים שלכל i, $x\notin A_i$ משום שבפרט $x\in B_i$ שעל פי הגדרה זרה ל-A_i, ולכן $x\notin\bigcup_{i=1}^{k} A_i$. כמו כן, נשים לב כי U הינה חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ולכן פתוחה ובפרט נמצאת ב-τ על פי הגדרה.

כלומר, הראינו כי לכל $B\in\tau$ ניתן למצוא סביבה פתוחה $U\subset B$ כך ש-$U\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\emptyset$, כלומר הקבוצה הנתונה $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ אכן דלילה ב-X כדרוש.

■

שאלה 2:

א. על מנת להראות כי $\|\cdot\|:(V,d)\mapsto(\mathbb{R},d_1)$ רציפה, נראה כי המקור של כל קבוצה פתוחה ב-$(\mathbb{R},d_1)$ הוא קבוצה פתוחה ב-(V,d). לשם כך, תהא קבוצה פתוחה $U\subseteq(\mathbb{R},d_1)$.
בתרגיל הבית השני, הראינו כי כל קבוצה פתוחה U בישר הממשי ניתנת לכתיבה כאיחוד בן מניה של קטעים פתוחים. כלומר:

$$U=\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$$

עתה, על מנת להראות כי $F^{-1}(U)$ פתוחה, נרצה להראות כי לכל $u\in U$ מתקיים $F^{-1}(u)$ פתוח.
היות ו-$u\in U$ נובע כי קיים i עבורו $u\in(a_i,b_i)$. נשים לב כי:

$$F^{-1}(u)=\{v\in V|\|v\|=u\}=\{v\in V|a_i<\|v\|<b_i\}=\{v\in V|a_i<\|v-\bar{0}\|<b_i\}$$

$$\overset{\|x-y\|=d(x,y)}{=}\{v\in V|a_i<d(v,\bar{0})<b_i\}=\left\{v\in V\middle|\begin{matrix}v\notin B(0,a_i)\\ v\in B(0,b_i)\end{matrix}\right\}=\underbrace{B(0,b_i)}_{\text{קבוצה פתוחה}}\cap\underbrace{(B[0,a_i])^c}_{\text{משלים של קבוצה סגורה}}$$

ומפני שחיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם הוא פתוח, נסיק כי $F^{-1}(u)$ קבוצה פתוחה. מכאן שמתקיים:

$$F^{-1}(U)=\bigcup_{u\in U}F^{-1}(u)$$

גם היא קבוצה פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות. לכן נסיק כי $\|\cdot\|:(V,d)\mapsto(\mathbb{R},d_1)$ רציפה.

■

ב. יהא $\lambda\in\mathbb{R}$ סקלר כלשהו, ויהא מרחב מטרי (V,d) כלשהו. נגדיר את ההעתקה:

$$f:V\mapsto V\quad f(v)=\lambda v$$

ונרצה להראות כי העתקה זו הינה רציפה.

נרצה להראות זאת על ידי שימוש בהגדרה שהוכחנו את שקילותה, לפיה f רציפה אם ורק אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
תהא, אם כן, סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה הנ"ל מתקיים. אזי, על פי הגדרת התכנסות סדרות במרחבים מטריים, נסיק כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

עתה, נשים לב כי בהנתן $\varepsilon > 0$, מובטח כי גם בבחירת $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|x_n - x\| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. אך מכאן שלכל n כנ"ל מתקיים:

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|\lambda x_n - \lambda x\| = |\lambda| \|x_n - x\| < \frac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

כלומר, הראינו כי עבור סדרה מתכנסת $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים שגם $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$f(x)$. לכן נסיק כי f אכן רציפה כדרוש.

■

ג. יהא (V,d) מרחב וקטורי כלשהו, ויהא $v \in V$. נגדיר העתקה על ידי:

$$f: V \mapsto V \quad f(u) = u + v$$

נרצה להראות כי העתקה זו רציפה.
גם כאן, בדומה לסעיף ב', נשתמש בהגדרה השקולה לפיה f רציפה אם ורק אם כל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל-$x \in V$ גוררת כי $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת גם היא ל-$f(x)$.
תהא, אם כן, סדרה כנ"ל, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה מתקיים $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. כלומר, על פי הגדרת ההתכנסות לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\|u_n - u\| < \varepsilon$. אך מכאן שמתקיים:

$$\varepsilon \geq \|u_n - u\| = \|u_n + v - u - v\| = \|f(u_n) - f(u)\|$$

כלומר $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)$ לכל סדרה כנ"ל ולכן נסיק כי f רציפה כדרוש.

■

ד. $(2 \Longrightarrow 1)$ נניח כי T העתקה רציפה ב-$x = 0$ כהעתקה מהמרחב המטרי לעצמו. כלומר, לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, מתקיים בנוסף $\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$. נרצה להראות כי עבור כל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, מתקיים בנוסף $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. ונזכור כי:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ואכן מתקיים:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{\substack{\text{הנחת} \\ \text{עבור } (2) \\ y_n = x_n - x}}{\Leftrightarrow} \|T(x_n - x)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow \|Tx_n - Tx\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$\Leftrightarrow Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} Tx$$

כלומר נקבל כי T אכן רציפה בכל המרחב הוקטורי כדרוש.
$(1 \Longrightarrow 3)$ נניח כי T העתקה רציפה ב-(V,d) כהעתקה ממרחב וקטורי לעצמו. נרצה להראות כי הפונקציה $f: V \mapsto \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \|Tx\|$ היא פונקציה חסומה בספירת היחידה שמרכזה ב-$x = 0$.
לשם כך נניח בשלילה כי אין זה נכון. כלומר, נניח כי לכל $M > 0$ קיים $x \in V$ כך ש-$\|x\| = 1$ אך מתקיים $f(x) = \|Tx\| > M$. נגדיר, אם כן, סדרה חדשה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|x\| = 1$ אך מתקיים $f(x_n) = \|Tx_n\| > n^2$. (כאמור, הנחת השלילה מבטיחה כי ניתן לבחור x_n כנ"ל).
עתה, נבחר סדרה חדשה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתוגדר על ידי $y_n = \frac{1}{n} x_n$. ונשים לב כי:

$$\|y_n\| = \left\|\frac{1}{n} x_n\right\| = \left|\frac{1}{n}\right| \|x_n\| = \left|\frac{1}{n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כלומר נסיק כי $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. מרציפות f, אם כך, מובטח כי $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ תקיים $f(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(0) = 0$, אך מתקיים:

$$\|f(y_n)-f(0)\|=\left\|T\left(\frac{1}{n}x_n\right)-T(0)\right\|=\left|\frac{1}{n}\right|\|Tx_n\|>\left|\frac{1}{n}\right|n^2=n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

וזאת בסתירה לרציפות f. לכן נסיק כי אכן קיים M עבורו לכל $x\in V$, אם $\|x\|=1$ אז $f(x)<M$.

$(3\Rightarrow 2)$ נניח כי קיים חסם $M>0$ כך שלכל $x\in V$, אם $\|x\|=1$ אזי מתקיים $f(x)=\|Tx\|<M$.

נרצה להראות כי T רציפה ב-$x=0$, כלומר, שבהנתן סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה $x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ מתקיים בהכרח $Tx_n\xrightarrow{n\to\infty}T(0)=0$. לשם כך, תהא סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ עבורה מתקיים, כאמור, $x_n\xrightarrow{n\to\infty}0$. אזי בפרט מתקיים $\|x_n\|\xrightarrow{n\to\infty}0$, ולכן:

$$\|Tx_n\|=\|x_n\|\left\|T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\|\overset{\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\|=1}{=}\|x_n\|f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)<M\|x_n\|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

כלומר $Tx_n\xrightarrow{n\to\infty}0=T(0)$ כלומר T אכן רציפה ב-$x=0$ כדרוש.

הראנו, סה"כ כי:

$$3\Rightarrow 2\Rightarrow 1\Rightarrow 3$$

ולכן כאמור, כל התנאים הללו שקולים.

■

שאלה 3:

נתונה העתקה רציפה, $F:(X,\tau)\mapsto(Y,\sigma)$ וכן נתונות $V\subset X$ וכן $W\subset Y$ בהתאמה.

א. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$F:(\mathbb{R}^2,d_{Eucl})\mapsto(\mathbb{R},d_{Eucl})\quad F(x,y)=x$$

קרי ההטלה על ציר ה-x, אשר הוכחנו בכיתה כי היא רציפה. נבחר את $W=\mathbb{R}$, ונבחר את V בתור הקבוצה:

$$V=S\big((0,0),1\big)=\{(x,y)|\|(x,y)\|_2=1\}$$

נשים לב כי:

$$F(V)=\{x\in\mathbb{R}|\exists(x,y)\in V\quad F(x,y)=x\}=\{x\in\mathbb{R}|\exists y\in\mathbb{R}\quad x^2+y^2=1\}$$

כלומר מתקיים:

$$F(V)=[-1,1]\Rightarrow \operatorname{Int}F(V)=(-1,1)$$

אך נשים לב, כי:

$$\operatorname{Int}V=\emptyset$$

וזאת משום שלספירה אין נקודות פנימיות, היא קבוצה סגורה. אך מכאן שמתקיים:

$$F(\operatorname{Int}V)=\emptyset$$

כלומר:

$$\boxed{\operatorname{Int}\big(F(V)\big)\nsubseteq F(\operatorname{Int}V)}$$

עתה, נתבונן בהעתקה:

$$F:(\mathbb{R},d_{Eucl})\mapsto(\mathbb{R}^2,d_{Eucl})\quad F(x)=(\cos x,\sin x)$$

ונתבונן בהעתקה עבור $V=[0,2\pi]\subseteq(\mathbb{R},d_{Eucl})$ ו-$W=S\big((0,0),1\big)\subseteq(\mathbb{R}^2,d_{Eucl})$. נשים לב כי ההעתקה לוקחת את V ומתאימה לה את מעגל היחידה (לא באופן חח"ע).

כמו כן, העתקה זו רציפה מרציפות הרכיבים $\cos x,\sin x$.[1] נשים לב כי:

$$F(V)=S\big((0,0),1\big)\Rightarrow \operatorname{Int}F(V)=\emptyset$$

אך:

$$\operatorname{Int}V=(0,2\pi)\Rightarrow F(\operatorname{Int}V)=S\big((0,0),1\big)\setminus\{(1,0)\}$$

---

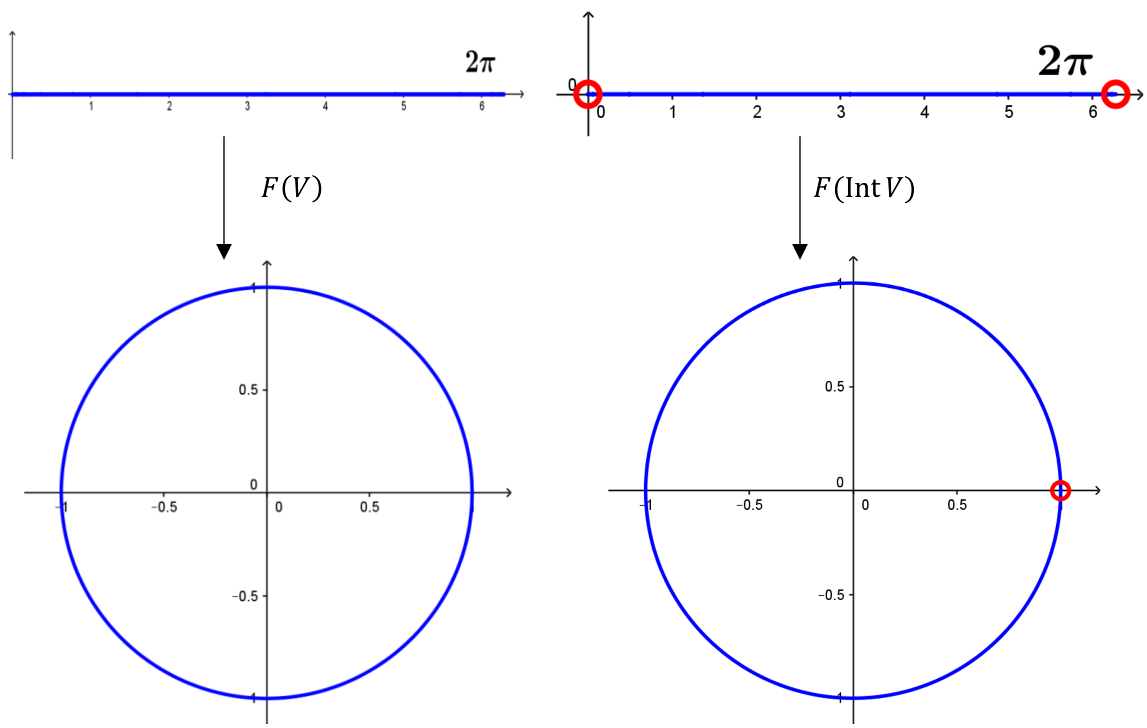
[1] הפונקציות $\cos x,\sin x$ הן פונקציות רציפות ולכן לכל $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ מתקיים $\sin x_n\xrightarrow{n\to\infty}\sin x$ וכן $\cos x_n\xrightarrow{n\to\infty}\cos x$ ולכן ההתכנסות בפרט תהיה עבור $(\cos x_n,\sin x_n)$.

כלומר:

$$\boxed{F(\operatorname{Int}V)\nsubseteq \operatorname{Int}F(V)}$$

ולכן אין הכלה ככלל לאף אחד מהכיוונים.

■



ב. תהא $X=\{a,b\}$ עליה נגדיר את הטופולוגיה הבאה:

$$\sigma=\big\{\emptyset,\{a,b\},\{a\}\big\}$$

ונגדיר, ראשית, העתקה, באופן הבא:

$$F:(X,\sigma)\mapsto(X,\sigma)\qquad \begin{matrix}F(a)=a\\ F(b)=a\end{matrix}$$

ונרצה להראות כי העתקה זו רציפה. נשים לב כי לכל קבוצה פתוחה, המקור שלה הוא קבוצה פתוחה שכן:

$$F^{-1}(\{a,b\})=\{a,b\}\quad F^{-1}(\{a\})=\{a,b\}\quad F^{-1}(\emptyset)=\emptyset$$

אך נשים לב, כי עבור בחירת $V=X=\{a,b\}$ מתקיים:

$$F(\bar{V})=F\big(\overline{\{a,b\}}\big)=F(\{a,b\})=\{a\}\quad \overline{F(V)}=\overline{F(\{a,b\})}=\overline{\{a\}}=\{a,b\}$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\boxed{F(\bar{V})\nsupseteq\overline{F(V)}}$$

עתה, נשים לב כי בהנתן מרחב טופולוגי ותתי קבוצות כנתון בשאלה, נתבונן ב-$u\in F(\bar{V})$. על פי הגדרה קיים $v\in\bar{V}$ עבורו מתקיים $F(v)=u$. נפריד עתה ל-2 מקרים אפשריים:

i. אם $v\in V$, נקבל כי $u\in F(V)$ ולכן בפרט $u\in\overline{F(V)}$.

ii. אם $v\notin V$, נקבל כי לכל סביבה $v\in V'$ מתקיים $V'\cap V\neq\emptyset$. נבחר, עתה, סביבה $u\in U'$. אזי, מרציפות F נובע כי $F^{-1}(U')$ היא סביבה של v. אך מכאן שמתקיים:

$$F^{-1}(U')\cap V\neq\emptyset\Longrightarrow\exists v'\in V\quad v'\in F^{-1}(U')$$

אך מכאן בפרט מתקיים $F(v')\in U'$ וגם $F(v')\in F(V)$, כלומר $F(V)\cap U'\neq\emptyset$ וזאת לכל סביבה $u\in U'$. לכן, על פי הגדרה, מתקיים $u\in\overline{F(V)}$. ולכן מתקיים:

$$\boxed{F(\bar{V}) \subseteq \overline{F(V)}}$$

■

ג. יהיו מרחבים טופולוגיים $(X,\tau),(Y,\sigma)$ ותתי קבוצות $V \subset X$ וכן $W \subset Y$ בהתאם לתנאי השאלה. ונשים לב כי עבור v כלשהו מתקיים:

$v \in F^{-1}(\operatorname{Int} W)$ $\Longleftrightarrow$

$\exists w \in \operatorname{Int} W \quad F(v) = w$ $\Longleftrightarrow$

קיים $w \in W$ עבורו קיימת סביבה $w \in W' \subseteq W$ וכן $F(v) = w$ $\Longleftrightarrow$

קיים $w \in W$ עבורו $F(v) = w$, כך שקיימת עבורו סביבה $w \in W' \subseteq W$ ועבור סביבה זו מתקיים, מרציפות F, $V' = F^{-1}(W') \subseteq V$ סביבה פתוחה עבורה בפרט $v \in V'$, ולכן גם מתקיים $F(V') = W' \subset W$ $\Longleftrightarrow$

קיימת סביבה $v \in V'$ עבורה $V' \subseteq F^{-1}(W)$ $\Longleftrightarrow$

$v \in \operatorname{Int} F^{-1}(W)$

ולסיכום:

$$\boxed{F^{-1}(\operatorname{Int} W) = \operatorname{Int} F^{-1}(W)}$$

■

ד. יהיו מרחבים טופולוגיים $(X,\tau),(Y,\sigma)$ ותתי קבוצות $V \subset X$ וכן $W \subset Y$ בהתאם לתנאי השאלה. נשים לב כי לכל $v \in V$ מתקיים:

$v \in \overline{F^{-1}(W)}$ אם $v \in F^{-1}(W)$ או $v \in \overline{F^{-1}(W)} \setminus F^{-1}(W)$. נפריד למקרים:

i. עבור $v \in F^{-1}(W)$ נסיק כי קיים $w \in W$ כך ש-$w = F(v)$, אך היות וממילא $w \in \bar{W}$ נקבל כי מתקיים $v \in F^{-1}(\bar{W})$.

ii. $v \notin F^{-1}(W)$ וגם $v \in \overline{F^{-1}(W)}$.
נסמן $w = F(v)$. מרציפות F נובע כי לכל סביבה $w \in W'$ מתקיים $F^{-1}(W')$ פתוחה. אך מתקיים, בנוסף לכך, $v \in F^{-1}(W')$ ולכן מכך ש-$v \in \overline{F^{-1}(W)}$, נובע כי מתקיים:
$$F^{-1}(W') \cap F^{-1}(W) \neq \emptyset$$
כלומר, קיים $v' \in F^{-1}(W)$ עבורו מתקיים גם $v' \in F^{-1}(W')$. ומכאן שמתקיים:
$$F(v') \in W' \cap W$$
אך מכאן נובע כי לכל $F(v) \in W'$ מתקיים $W' \cap W \neq \emptyset$ ולכן $F(v) \in \bar{W}$, כלומר מתקיים, כנדרש $v \in F^{-1}(\bar{W})$.

כלומר:

$$\boxed{\overline{F^{-1}(W)} \subseteq F^{-1}(\bar{W})}$$

עתה נתבונן בטופולוגיה אותה הצגתי בסעיף ב', קרי בקבוצה $X = \{a,b\}$ והטופולוגיה:

$$\tau = \{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}\}$$

כאשר נגדיר את ההעתקה הבאה:

$$F:(X,\tau) \mapsto (X,\tau) \quad \begin{matrix} F(a) = b \\ F(b) = b \end{matrix}$$

ונראה שהעתקה זו רציפה על ידי כך שנראה כי המקור של כל $V \in \tau$ פתוח:

$$F^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad F^{-1}(\{a,b\}) = \{a,b\} \quad F^{-1}(\{a\}) = \emptyset$$

כלומר זו אכן העתקה רציפה. אך נשים לב, כי עבור $W = \{a\}$ נקבל כי:

$$F^{-1}(\bar{W}) = F^{-1}\left(\overline{\{a\}}\right) = F^{-1}(\{a,b\}) = \{a,b\} \quad \overline{F^{-1}(W)} = \overline{F^{-1}(\{a\})} = \bar{\emptyset} = \emptyset$$

כלומר:

$$\boxed{F^{-1}(\bar{W}) \not\subseteq \overline{F^{-1}(W)}}$$

∎