תרגיל בית 8

תאריך הגשה: יום שני, 16/6/2014, עד שעה 22:00

שאלה 1:

חשבו, על פי ההגדרה, את הנגזרת ואת תחום הגדרתה עבור הפונקציות הבאות:

א. $\cos^2 x$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2(x+h)-\cos^2(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)^2-\cos^2(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos^2(x)(\cos^2(h)-1)}{h}+\frac{-2\sin x\cos x\sin h\cos h}{h}+\frac{\sin^2(x)\sin^2(h)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(\cos^2 x\sin h\left(\frac{\sin h}{h}\right)-2\sin x\cos x\cos h\left(\frac{\sin h}{h}\right)+\sin^2 x\sin h\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]=-2\sin x\cos x$$

ב. x^2e^x .

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2e^{x+h}-x^2e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\left[x^2e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right)+2xe^{x+h}+he^{x+h}\right]=x^2e^x+2xe^x$$

(הגבול $\frac{e^h-1}{h}$ ב-0 ידוע מחישוב הנגזרת של e^x).

שאלה 2:

תהי $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע״י: $f_n(x)=\begin{cases}x^n\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

א. הראו כי f_{2n} גזירה n פעמים בדיוק ב- 0.

נקבע $n\in\mathbb{N}$. ניתן להראות (באינדוקציה או בחישוב ישיר) כי לכל $0<j<n$, הנגזרת ה- j-ית של $f_{2n}(x)$ עבור $x\neq 0$ היא מהצורה $P(x)\sin\frac{1}{x}+Q(x)\cos\frac{1}{x}$, כאשר עבור j אי-זוגי, $P(x)$ הוא פולינום ממעלה $2n-j$ המכיל רק חזקות אי-זוגיות, ו- $Q(x)$ הוא פולינום המכיל רק חזקות זוגיות שהחזקה הנמוכה ביותר בו היא ממעלה $2n-2j$, ועבור j זוגי, $P(x)$ הוא פולינום ממעלה $2n-j$ המכיל רק חזקות זוגיות והמעלה הנמוכה ביותר בו היא $2n-2j$, ו- $Q(x)$ פולינום ממעלה $2n-j-1$ המכיל רק חזקות אי-זוגיות. (העיקר שיש להבחין בו הוא שאחד הפולינום מכיל רק חזקות זוגיות, השני רק חזקות אי-זוגיות, ואת מעלת החזקה הנמוכה ביותר).

מכך נובע שהפונקציה גזירה n פעמים ב-0 וכל הנגזרות האלו הן 0, אבל הפונקציה לא גזירה $n+1$ פעמים ב- 0 , מכיוון שהגבול בחישוב הנגזרת ע״פ הגדרה לא קיים (גם לא במובן הרחב).

ב. הראו כי f_{2n+1} גזירה n פעמים ברציפות (כלומר, הנגזרות גם הן רציפות) בדיוק ב- 0.

באופן דומה לסעיף א׳ ניתן לקבל כי הפונקציה גזירה בדיוק n פעמים ב-0. בנוסף, המעלה הנמוכה ביותר של הפולינומים $P(x),\ Q(x)$ כפי שהוגדרו בסעיף א׳ לאחר הנגזרת ה- n-ית היא 1, ולכן קיים הגבול $\lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=0=f^{(n)}(0)$, ולכן הנגזרת ה- n-ית רציפה ב- 0. (כמובן שכל הנגזרות הקודמות גם הן רציפות, מכיוון שהן גזירות).

שאלה 3:

חשבו את הנגזרת בתחום ההגדרה עבור הפונקציות הבאות:

א. $\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

$\left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)' = \frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$. תחום הגדרה: כל $\mathbb{R}$.

ב. $\arcsin(\sin x - \cos x)$.

$(\arcsin(\sin x - \cos x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}} \cdot (\cos x + \sin x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

תחום ההגדרה: $\pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n < x < 2\pi n + \frac{\pi}{2}$.

ג. $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

שימוש בנגזרת של מנה ומכפלה ובכך שעבור $x > 1$, $(\ln x)^x = e^{x \ln\ln x}$, נקבל שתחום ההגדרה הוא $x > 1$,

והנגזרת היא: $\frac{(\ln x)^x\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)x^{\ln x}-\frac{x^{\ln x}(2\ln x)(\ln x)^x}{x}}{x^{2\ln x}}$.

שאלה 4:

חשבו את $f^{(74)}(0)$ עבור $f(x) = \ln(1+x)\arctan x$.

באינדוקציה ניתן להראות כי:

$\arctan^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 2j \\ (-1)^{j+1}(2j-2)! & n = 2j-1 \end{cases}$, וגם: $(\ln(1+x))^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$, ולכן:

$f^{(74)}(0) = \sum_{j=0}^{37}\binom{74}{2j-1}(-1)^{j+1}(2j-2)!\,(75-2j)!$.

שאלה 5:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^\alpha$ עבור $M > 0$ ו- $\alpha > 1$. הוכיחו כי f קבועה.

לכל $x, h \in \mathbb{R}$, מתקיים: $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le \frac{Mh^\alpha}{h} = Mh^{\alpha-1} \xrightarrow{h\to 0} 0$ (המעבר האחרון מתקיים כי $\alpha > 1$), ולכן לכל $x \in \mathbb{R}$, f גזירה ב- x, ומתקיים $f'(x) = 0$, ולכן מתקיים ש- f קבועה.

שאלה 6:

הוכיחו / הפריכו:

א. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב- 0 אז: $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ קיים אם ורק אם $f(0)=0$.

נכון. אם $f(0)=0$ אז $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{\frac{1}{x}-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}$, והגבול האחרון קיים כי f גזירה ב- 0. בכיוון השני, נניח בשלילה $f(0)\neq0$, אז $xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f(0)}{\frac{1}{x}-0}+\frac{f(0)}{\frac{1}{x}}$, ואז $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}+\lim_{t\to0^+}\frac{f(0)}{t}$, אבל המחובר הראשון מתכנס (כי f גזירה ב- 0), והמחובר השני מתכנס ל- ∞ או $-\infty$, בהתאם לסימן של $f(0)$, ולכן הגבול $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים – סתירה.

ב. אם $f'(x)<g'(x)$ לכל x, אז קיים x_0 כך ש- $f(x_0)\leq g(x_0)$.

לא נכון, ד״נ: $f(x)=\pi\,,g(x)=\arctan x$.

ג. אם $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה, ו- $\lim_{x\to0^+} g'(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to0^+} g(x)=-\infty$.

לא נכון, ד״נ: $g(x)=\sqrt{x}$.

ד. אם f רציפה ב- 0 אז $g(x)=xf(x)$ גזירה ב- 0.

נכון: $\lim_{h\to0}\frac{hf(h)-0\cdot f(0)}{h}=\lim_{h\to0}f(h)=f(0)$.

ה. אם f רציפה ליפשיץ אז היא גזירה.

לא נכון, ד״נ: $f(x)=|x|$ רציפה ליפשיץ בכל $\mathbb{R}$ (עם קבוע ליפשיץ = 1), אבל לא גזירה ב- 0.

ו. אם הגבול $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$ קיים וסופי, אז f גזירה ב- x.

לא נכון, ד״נ: $f(x)=|x|$ ו- $x=0$ מקיימת שהגבול הנ״ל הוא 0 (כי זו פונקציה זוגית, ולכן המונה הוא זהותית 0 כאשר $x=0$ ו- $h\to0$), אבל לא גזירה ב- 0.

ז. קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש- $f'(x)=[x]$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

לא נכון, ראינו כי לנגזרת יכולות להיות רק נקודות אי-רציפות עיקריות, ולכן לא יתכן ש- $[x]$ היא נגזרת של פונקציה כלשהי.