סדרות וטורים של פונקציות

נתונה סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בעלות תחום הגדרה משותף, הקבוצה I בישר הממשי. לכל נקודה $x_0 \in I$, $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת מספרים. אם לסדרה הזו יש גבול אנו מסמנים

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

צריך להדגיש שלא לכל $x_0 \in I$ חייב להתקיים הגבול הזה.

<u>דוגמאות.</u> הסדרה $f_n(x) = x^n$ מוגדרת ב: $[0,1]$, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לכל $x \in [0,1]$, והפונקציה הגבולית היא $f(x) = 0$ אם $0 \le x < 1$ ו: $f(1) = 1$.

הסדרה $f_n = \frac{x}{x^2+n^2}$ מוגדרת ב: $[0,\infty)$
והפונקציה הגבולית היא $f(x) = 0$ לכל
$0 \le x < \infty$.

<u>הגדרה מדויקת</u>. תהיינה $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$
מוגדרות ב: I. נאמר שהסדרה $\{f_n\}$ שואפת
לפונקציה f ב: I אם לכל $x \in I$ ולכל $\epsilon > 0$
קיים $N(x,\epsilon)$ כך ש: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ לכל
$n > N(x,\epsilon)$. זו נקראת התכנסות נקודתית.

אומרים שטור הפונקציות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס
ב: I אם סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n(x)\}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

היא סדרה מתכנסת.

<u>התכנסות במידה שווה (במ"ש)</u>

בהגדרת ההתכנסות הנקודתית ראינו שלכל ϵ מתאים $N(x,\epsilon)$, כלומר $f_n(x)$ מתקרבת ל: $f(x)$ בקצב שונה בנקודות שונות, כי N תלוי ב: x. לכן זוהי נקראת "התכנסות נקודתית". אם אפשר לתת הערכת קצב התקרבות אחידה אז זו נקראת "התכנסות במידה שווה".

<u>הגדרה.</u> אומרים שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב: I במידה שווה (במ"ש) לפונקציה $f(x)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים

$N(\epsilon)$ כך ש: $\epsilon > |f_n(x) - f(x)|$ לכל $N(x,\epsilon) < n$ ולכל $x \in I$.

<u>הערה.</u> מושג ההתכנסות במידה שווה תלוי בתחום. לעיתים נשתמש בסימון $f_n \mapsto\to f(x)$ לציון התכנסות זו.

<u>תרגיל.</u> מהי השלילה של ההתכנסות במ"ש?

סדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במ"ש אם קיים $0 < \epsilon_0$ כך שלכל k טבעי קיים טבעי $n_k > k$ וקיימת נקודה $x_{n_k} \in I$ כך ש:

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \epsilon_0.$$

זה שולל את האפשרות שקיים N_0 כך שאי השיויון ההפוך מתקיים לכל $n > N_0$ ולכל $x \in I$. או במילים אחרות, לא חשוב כמה רחוק נלך בסדרה, תמיד תימצא נקודה בה הפונקציות f_{n_k} ו: f אינן קרובות.

<u>דוגמא.</u> סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n$ מתכנסת ב: $[0,1]$ נקודתית אך לא במידה שווה לפונקציה

$$.f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

ואכן, אם נבחר $x_n = \sqrt[n]{1/2}$ נקבל סדרה ב $[0,1]$ אשר מתכנסת ל: 1, ומתקיים עבורה

$$.|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} - 0 = 1/2$$

אם לוקחים, למשל, $\epsilon_0 = 1/4$ אז ברור שלכל k טבעי, לא חשוב כמה גדול, קיים איזשהו $n > k$ כך ש: $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon_0$, ולכן ההתכנסות איננה במ"ש אלא נקודתית בלבד.

פירוש גיאומטרי של מושג ההתכנסות במ"ש הוא שאם לוקחים רצועה ברוחב ϵ מסביב לגרף של f אז הגרף של f_n מוכל ברצועה הזו בתנאי ש: n גדול מספיק, כלומר $n > N_0$ עבור איזשהו N_0 התלוי ב: ϵ בלבד.

<u>דוגמא.</u> הסדרה $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ על $[0, \infty)$ מתכנסת במדה שווה על תחומה לפונקציה $f(x) = 0$.

דוגמא. הסדרה $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $n \geq 1$, מוגדרת על $[0,1]$, ולכל $0 \leq x \leq 1$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = 0$$

ותהי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0,1]$. נראה שההתכנסות איננה במ"ש, ולשם כך נחשב את

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} x^n(1-x^n)$$

והמכסימום מתקבל כאשר $x^n = 0.5$ (כי המכסימום של $t(1-t)$ מתקבל ב: $t = 0.5$).
ולכן, בסימון

$$\tilde{x}_n = \sqrt[n]{1/2}$$

מקבלים

$$|f_n(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n)| = \frac{1}{4},$$

ורואים מזה שההתכנסות אינה במידה שווה.

באופן גרפי סדרת הגרפים של f_n,
$n = 1, 2, 3, \ldots$ נראים כמו "גל" שיש לו נקודת
מכסימום המתקרבת משמאל ל: 1, גובה הגל
בנקודת המכסימום הוא $1/4$, ובשאר הנקודות
ערך הגל דועך ל: 0.

<u>תרגיל.</u> מצא דוגמא לסדרת פונקציות $\{f_n\}$
מוגדרות על $[0, 1]$ אשר מתכנסת נקודתית
לפונקציה $f(x) = 0$, אך

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \max_{0\le x\le 1} f_n(x) \right\} = +\infty \, .$$

התכנסות במ"ש של טורים

הגדרה. תהי $\{u_n(x)\}$ סדרת פונקציות על I,
ונסמן את סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

אומרים שהטור $\sum u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל: $S(x)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$ כך ש:

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

לכל $n > N(\epsilon)$ ולכל $x \in I$. נבחין שהביטוי באגף שמאל הוא

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right|.$$

משפט. קריטריון (Cauchy). נתונה הסדרה $\{f_n(x)\}$ על I. תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות במ"ש של $\{f_n(x)\}$ על I הוא שלכל $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$ כך ש

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

לכל $m, n > N(\epsilon)$ ולכל $x \in I$.

א. התנאי הכרחי: אם $f_n(x) \to f(x)$ במ"ש אז בהינתן $\epsilon > 0$ קים טבעי N כך ש:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכל $N > m, n$ ולכל $I \ni x$. אבל אז מתקיים

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$$
$$+|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$$

לכל $N > m, n$ ולכל $I \ni x$.

ב. <u>התנאי מספיק</u>: אם $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ לכל $N > m, n$ ולכל $I \ni x$, נקח בפרט x_0 קבוע, ויתקיים עבורו $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \epsilon$ לכל $N > m, n$. לכן מתקיים התנאי המספיק של Cauchy להתכנסות של סדרת המספרים $\{f_k(x_0)\}$. לכן סדרה זו מתכנסת ונסמן את גבולה ב $f(x_0)$. מאחר וזה נכון לכל $I \ni x_0$ בנפרד, נובע שקיים לסדרה הגבול הנקודתי

$f(x)$ לכל $x \in I$. עכשיו נראה שהגבול הנקודתי הוא למעשה גבול במידה שווה.

אנו זוכרים ש:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \qquad (1)$$

לכל $m, n > N(\epsilon)$ ולכל $x \in I$. נקבע איזשהו $n > N(\epsilon)$ וניקח ב: (1) את הגבול $m \to \infty$. מאחר ו: $f_m(x) \to f(x)$ כאשר $m \to \infty$, מקבלים

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

לכל $n > N(\epsilon)$ ולכל $x \in I$. לכן התכנסות הסדרה ל: f היא במידה שווה.

דרך נוחה לבדיקת התכנסות במ"ש היא כדלקמן. עבור סדרה $\{f_n\}$ מתיחסים לגודל

$$d_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

וצריך לבדוק אם $d_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$.
התכונה הזו שקולה להתכנסות במ"ש של הסדרה ל: f.

עבור טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ המשפט הבא נותן תנאי מספיק להתכנסות במ"ש.

<u>משפט (Weirstrass)</u>. נתיחס לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ על I. אם קיים טור מספרים $\sum a_k$ כך ש: $|u_k(x)| \le a_k$ לכל $x \in I$, ואם טור

המספרים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במידה שווה על I.

<u>הוכחה</u>. הטור האי-שלילי $\sum a_k$ מתכנס, ולכן לכל $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$ כך ש:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \epsilon$$

לכל $m, n > N$. (זהו התנאי ההכרחי של קושי.) אבל

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)|$$
$$< \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \epsilon$$

לכל $x \in I$, וזהו התנאי המספיק של קושי להתכנסות במ"ש.

__הערה.__ תכונת ההתכנסות שמסיקים בתוצאה הזו כוללת גם את תכונת ההתכנסות בהחלט.

__דוגמאות.__ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n^2$ מתכנס במ"ש על $(-\infty,+\infty)$, כי

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

לכל x ממשי, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ מתכנס.

__דוגמא.__ הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

מתכנס במ"ש על $[0,1]$ אך לא לפי משפט ויירשטרס, ולכן הקריטריון של ויירשטרס איננו

תנאי הכרחי. ואכן הטור הוא טור לייבניץ, ועל כן השארית ה־mית מקיימת

$$r_m(x) \le |u_{m+1}(x)| = \tfrac{1}{x+m+1}$$
$$\le \tfrac{1}{m+1} < \epsilon$$

אם $m > 2/\epsilon$, וזה לכל $x \in [0,1]$. אולם לא ניתן למצוא טור מתכנס $\sum a_n$ כך ש:
$|u_n(x)| \le a_n$ לכל $x \in [0,1]$, מאחר ו:
$\max |u_m(x)| = 1/m$, והטור $\sum\limits_{m=1}^{\infty} 1/m$ מתבדר.

תכונות של טורים מתכנסים בהחלט

ראינו ש: סדרת הפונקציות הרציפות $f_n = x^n$ מתכנסת נקודתית לפונקציה לא רציפה: $f(x) = 0$ על $[0, 1)$ ו: $f(1) = 1$. תופעה כזו לא תיתכן בהתכנסות במ"ש.

<u>משפט.</u> נתון שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ל: $f(x)$ על $[a, b]$. אם כל הפונקציות f_n רציפות בנקודה $x_0 \in [a, b]$ אז גם הפונקציה הגבולית $f(x)$ רציפה ב: x_0.

<u>מסקנה.</u> אם כל אחת מהפונקציות f_n הינה רציפה בכל הקטע $[a, b]$ והסדרה $\{f_n\}$

מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)$ אז f רציפה בכל $[a,b]$.

<u>הוכחת המשפט:</u> נניח ש: $f \mapsto\rightarrow f_n$ (כלומר במ"ש). אז לכל $\epsilon > 0$ קיים n גדול דיו כך שמתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (1)$$

לכל $x \in [a,b]$. בשאר ההוכחה נשאיר את הערך הזה n קבוע. מאחר ו: f_n היא פונקציה רציפה ב: x_0, קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (2)$$

לכל x אשר מקיים $|x - x_0| < \delta$. עכשיו נחשב עבור f:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)|$$
$$+|f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

המחוברים ראשון ושלישי קטנים מ: $\epsilon/3$ בגלל (1), ואילו המחובר השני קטן מ: $\epsilon/3$ בגלל (2). מקבלים לכן ש:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

לכל $x \in [a, b]$ אשר מקיים $|x - x_0| < \epsilon$, מה שמוכיח את הרציפות של f ב: x_0.

ניסוח שקול של

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

הוא

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

כי $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$.

<u>ניסוח המשפט עבור טורים</u>: אם כל אחת מהפונקציות u_n היא פונקציה רציפה על הקטע J, ואם הטור $\sum u_n$ מתכנס במ"ש בקטע J, אז גם סכום הטור הוא פונקציה רציפה על J.

המסקנה נובעת מכך שכל אחד מהסכומים החלקיים

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

הוא פונקציה רציפה על J, ו:

$S_n(x) \mapsto\rightarrow S(x)$ במ"ש.

כמו לעיל עבור סדרות, ניסוח שקול עבור טורים הוא:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

ראינו שהתכנסות במ"ש גוררת גבול רציף (אם אברי הסדרה רציפים). ההיפך אינו נכון: סדרת הפונקציות הרציפות $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ מתכנסת נקודתית על $[0,1]$ לפונקציה הרציפה

$f(x)=0$, אך ראינו שההתכנסות איננה במ"ש.
יש מקרה מיוחד בו אפשר להסיק מסקנה מהסוג הזה:

<u>משפט (Dini)</u>. תהיינה $u_n(x)\geq 0$, $n\geq 1$, פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$, ונתיחס לטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. אם הטור מתכנס וסכומו $S(x)$ רציף, אז ההתכנסות היא במידה שווה.

<u>הוכחה:</u> נתון ש:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$
$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

הן פונקציות רציפות, ומכיון ש: $u_n(x) \geq 0$ היא סדרה עולה:

$$S(x) \geq S_{n+1}(x) \geq S_n(x).$$

נסמן את שארית הטור

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

$R_n(x)$ הן פונקציות רציפות אשר מהוות סדרה יורדת אשר מתכנסת ל: 0 לכל x. נוכיח ש:
$R_n(x) \mapsto\to 0$ במ"ש על $[a, b]$.

<u>הערה.</u> למעשה תרגמנו את המשפט מלשון טורים ללשון סדרות, ואת הטענה שקבלנו עבור סדרות ננסח בסוף כמשפט בפני עצמו.

המשך ההוכחה: נניח בשלילה ש: $\{R_n\}$ אינה מתכנסת במ"ש ל: 0 בקטע $[a,b]$. אז קיים $\epsilon_0 > 0$ וקיימת תת-סדרה של השלמים

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

ונקודות x_{n_k} בקטע $[a,b]$ כך ש:

$$R_{n_k}(x_{n_k}) > \epsilon_0\,,$$

(כי לכל k טבעי קיים $n_k > k$ עבורו זה נכון).
ניקח עתה מספר טבעי m כלשהו. אז בגלל המונוטוניות, קיים לכל $n_k > m$

$$R_{n_k}(x) \le R_m(x)$$

לכל $x \in [a,b]$, ובפרט עבור $x = x_{n_k}$:

$$\epsilon_0 \le R_{n_k}(x_{n_k}) \le R_m(x_{n_k}).$$

מתוך הסדרה האינסופית $\{x_{n_k}\} \subset [a,b]$
נוציא תת-סדרה מתכנסת $x_{n_{k_l}} \to x_0 \in [a,b]$.
אזי מתקיים

$$R_m(x_{n_{k_l}}) \geq \epsilon_0,$$

ומאחר ו: R_m היא פונקציה רציפה, נובע ש:

$$R_m(x_0) \geq \epsilon_0.$$

מאחר ו: m הוא טבעי כלשהו זה סותר את

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x_0) = 0.$$

לכן $\{R_n(x_0)\}$ כן מתכנס במ"ש ל: 0 על $[a,b]$.

<u>מסקנה.</u> אם $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות רציפות שמתכנסות באופן מונוטוני לפונקציה רציפה $f(x)$ ב: $[a,b]$, אז ההתכנסות היא במ"ש.

זה נובע מכך שלוקחים בהוכחה האחרונה
$R_n(x) = f_n(x) - f(x)$, ואז $\{R_n(x)\}$ היא
סדרת פונקציות רציפות, $R_n(x) \to 0$,
והשאיפה לאפס היא מונוטונית, כמו במשפט
האחרון.