written by Dani Movso

8. טיילור:

- הגדרה: [illegible]

הוא:

$$T_n(x) = T_{n,x_0}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f(x_0))^{(i)}}{i!} \cdot (x-x_0)^i$$

- משפט טיילור הראשון: תהי f פונקציה גזירה n פעמים בנקודה x_0 אז מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \qquad \left(\text{כ"א:} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \right)$$

הוכחה: באינדוקציה על n.
כאשר רוצים להראות את השבר נעזרים בלופיטל.

- משפט טיילור השני: תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת x_0. אז לכל x בסביבה זו יש נק' בינים $C=C_x$ בין x ל- x_0 כך ש:

השארית לפי לגראנז' $\leftarrow$ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

הערה: המקרה הלינארי מסדר $n=0$ נובע ממשפט לגראנז'.

הוכחה: בה"כ $x>x_0$. בונים פונקציית עזר: $h(t) = \underbrace{f(t)-T_n(t)}_{R_n(t)} - \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1}$
עבור $t\in[x_0,x]$.

כי הנגזרות $n \geq i \geq 0$ מקיימות $h^{(i)}(x_0)=0$ בנוסף $h(x)=0$.
מפעילים את משפט רול n פעמים על הפונקציה h כשכל פעם מצמצמים את הקטע להיות (x_0, C_n). בסוף נגיע לקטע $[x_0, C_n]$
הנקודה שמתקבלת
מהפעלת רול על n-ה: הנקודה
שבה $h^{(n-1)}(c)=0$
ובקטע הזה מפעילים את רול בפעם האחרונה ונקבל:

$$0 = h^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(n+1)!$$

$\Leftarrow$ לאחר סידור המשוואה והעברת אגפים מתקבלת בדיוק הגדרת השארית.

- משפט: תהי f גזירה מכל סדר בסביבת הנק' x_0. נניח שקיים $M>0$ כך שמתקיים האי-שוויון $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ לכל x בסביבה זו.
אז לכל x בסביבה מתקיים: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

הוכחה:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{(M|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[\uparrow]{n\to\infty} 0$$

בעזרת מבחן המנה: $a_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \Leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha}{n+1} \to 0 \Leftarrow a_n \to 0$

הערה: המשפט נותן תנאי מספק אבל לא הכרחי לכך שהשארית שואפת לאפס כאשר $n\to\infty$. דג': $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

- משפט: (שימוש לניתוח נק' קריטיות): תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 $(n\geq 2)$ כך שמתקיים: $0=f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)$
ומתקיים: $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ אז:
א. n זוגי $\Leftarrow$ x_0 נק' קיצון: $f^{(n)}(x_0)>0$ $\Leftarrow$ מינימום מקומי
$f^{(n)}(x_0)<0$ $\Leftarrow$ מקסימום מקומי
ב. n אי זוגי $\Leftarrow$ אינה נק' קיצון. זו נק' פיתול.

הוכחה: א. n זוגי $\Leftarrow$ לפי משפט טיילור מתקיים: $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$
$\Leftarrow$ משחקים עם הביטוי ומתקבל:

$$f(x)-f(x_0) = (x-x_0)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \underbrace{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}}_{\to 0} \right\}$$

קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ מתקיים $\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right| < \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!}$ ואז הביטוי בסוגריים חיובי.
$\Leftarrow$ $f(x)-f(x_0)>0$ ולכן x_0 מינימום מקומי. מ.ש.ל.

המשך הוכחה: ב. n אי זוגי ⇐ נגדיר $g(x)=f'(x)$ ⇐ $g(x)$ מקיימת את התנאים של (א) עבור n זוגי, כי $n-1$ זוגי.
⇐ x_0 נק' מינימום/מקסימום של $g=f'$ ⇐ x_0 נק' פיתול של f.

תכונות O (קטן):

- הגדרה: - נסמן פונקציות המקיימות $\frac{f(x)}{x-x_0}\xrightarrow{x\to x_0}0$ ב- $O(x-x_0)$
- נסמן פונקציות המקיימות $\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow{x\to x_0}0$ ב- $O(x-x_0)^n$

- תכונות O:
- אם f היא $O(x^n)$ אז היא בפרט $O(x^m)$ לכל $1\le m\le n$.

מכפלות:
- $x\cdot O(x^n)=O(x^{n+1})$*
- $x^k\cdot O(x^n)=O(x^{k+n})$*
- $O(x^n)\cdot O(x^k)=O(x^{k+n})$*

סכומים.
- $O(x^k)+O(x^n)=O(x^{\min\{k,n\}})$
- $x^k+O(x^k)=O(x^{k-1})$

בכל ההוכחות פשוט צריך להראות: $\frac{O(\dots)}{(\dots)}\xrightarrow{x\to 0}0$
$(\dots)$ מייצג את הצד הימני של השוויון*

פיתוחי טיילור שימושיים:

1. $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$
2. $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$
3. $\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+\dots$
4. $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

9. חקירת פונקציה:

- הגדרה: הקו הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה לפונקציה f ב: ∞ אם מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$$

בצורה אנלוגית מגדירים אסימפטוטה ב- $-\infty$.

כאשר קיימת אסימפטוטה ב: $+\infty$, מתקיים בפרט: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ (*)
דרך לחשב השיפוע של האסימפטוטה

קיום (*) לא מבטיח קיום אסימפטוטה.

הערה: במקרה הפרטי בו $a=0$ מתקיים פשוט $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ ואז האסימפטוטה היא $y=b$.

- הגדרה: אם $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$ נאמר שקיימת ל-f אסימפטוטה אנכית בנקודה x_0, והיא נתונה ע"י הישר $x=x_0$.