טכניון - מכון טכנולוגי לישראל **הפקולטה למתמטיקה**

חשבון אינפי' 2 104281

גליון תרגילים מספר 7 - תרגילים בהתכנסות במידה שווה וטורי פונקציות

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי סמסטר אביב תשנ"ט

1. בדוק התכנסות במידה שווה של הסדרות הבאות בקטעים הנתונים:
   (א) $\sqrt{n}e^{-nx}, \quad x \in [0,1]$
   (ב) $n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right), \quad x \in [1,4]$
   (ג) $\frac{1}{n}\cos(n^2 x), \quad x \in (-\infty,\infty)$
2. מגדירים סדרת פונקציות $f_n(x) = \sqrt{n}\, x e^{-nx}$ עבור $x \geq 0$.
   (א) באיזה תחום הסדרה מתכנסת נקודתית ומהו גבולה?
   (ב) באיזה תחום הסדרה מתכנסת במידה שווה?
3. עבור אילו ערכי α מתכנסת הסדרה $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ כאשר $x \in [0,1]$, ועבור אילו ערכי α ההתכנסות היא במידה שווה?
4. הוכח שכל אחת מן הסדרות הבאות מתכנסת בקטע I במידה שווה, ובקטע J לא במידה שווה ($\alpha > 0$):
   (א) $\sqrt[n]{\sin x}\ ;\ I = \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]\ ;\ J = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
   (ב) $\sin^n x\ ;\ I = \left[0, \frac{\pi}{2} - \alpha\right]\ ;\ J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
   (ג) $\frac{x+n}{n}\ ;\ I = [a,b]\ ;\ J = (-\infty,\infty)$
   (ד) $\frac{x}{x+n}\ ;\ I = [0,b]\ ;\ J = [0,\infty)$
   (ה) $\frac{nx}{1+n^2x^2}\ ;\ I = [\alpha,\infty)\ ;\ J = (0,\infty)$
   (ו) $\frac{nx}{1+nx}\ ;\ I = [\alpha,\infty)\ ;\ J = (0,\infty)$
   (ז) $n^2x^2e^{-nx}\ ;\ I = [\alpha,\infty)\ ;\ J = (0,\infty)$
   (ח) $\frac{1}{n}\ln(1+nx)\ ;\ I = [0,b]\ ;\ J = [0,\infty)$
   (ט) $\frac{\sin nx}{1+nx}\ ;\ I = [\alpha,\infty)\ ;\ J = (0,\infty)$
   (י) $\frac{x^n}{1+x^n}\ ;\ I = [0,1-\alpha]\ ;\ J = [0,1)$
5. תהי f פונקציה רציפה המוגדרת על $[0,\infty)$, כך ש-$f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, אבל f לא זהותית אפס. מגדירים שתי סדרות של פונקציות
$$h_n(x) = f(nx), \quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$$
   (א) הוכח כי $\{h_n\}$ ו-$\{g_n\}$ שתיהן מתכנסות לפונקציה $F(x) \equiv 0$ על $[0,\infty)$ אך לא במידה שווה.
   (ב) מגדירים סדרת פונקציות נוספת - $\hat{f}_n(x) = h_n(x)g_n(x)$. הוכח כי סדרה זו מתכנסת ל-$F(x) \equiv 0$ במידה שווה על $[0,\infty)$.
6. הסדרות $f_n(x)$ ו-$g_n(x)$ מתכנסות במידה שווה על קטע משותף I. הוכח כי $f_n(x) + g_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על I. מה ניתן לומר על $f_n(x) \cdot g_n(x)$?
7. מצא תחום התכנסות של טורי הפונקציות הבאים, ותחום התכנסות במידה שווה:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{n^2(x^2-3x+2)}$

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$

(ה) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2n}$

8. האם ניתן לגזור איבר-איבר את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$?

9. עיין בסדרות הפונקציות הבאות:

(א) $f_n(x)=x^n,\ [0,1]$

(ב) $f_n(x)=nxe^{-nx^2},\ \ [0,1]$.

מצא את גבול הסדרה $f_n(x)$, וקבע האם ההתכנסות היא במידה שווה. חשב את גבול סדרת האינטגרלים $\int_0^1 f_n(x)dx$. האם סדרת האינטגרלים מתכנסת ל-$\int_0^1 f(x)dx$? הסבר.

10. עיין בסדרות הפונקציות הבאות:

(א) $f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^3x^3},\ \ [0,1]$

(ב) $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\ \ [-1,1]$

(ג) $f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan(x^n),\ \ (-\infty,\infty)$

מצא את גבול הסדרה $f(x)$ וקבע האם ההתכנסות היא במידה שווה. חשב את גבול סדרת הנגזרות $f_n'(x)$. האם סדרת הנגזרות מתכנסם ל-$f_n'(x)$? הסבר.

11. (חורף תשנ"ח) מגדירים

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$$

(א) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(ב) באיזה תחום $f(x)$ רציפה?

(ג) באיזה תחום $f(x)$ גזירה?

12. הוכח כי הטורים הבאים מתכנסים במידה שווה בתחום הנתון:

(א) $\sum\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n\ ;\ [1,\infty)$

(ב) $\sum n^2x^n\ ;\ \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(ג) $\sum\frac{e^{nx}}{5^n}\ ;\ (-\infty,\alpha],\ \alpha<\ln 5$

(ד) $\sum\frac{x^n}{n^2}\ ;\ [-1,1]$

(ה) $\sum(x\ln x)^n;\ (0,1]$

ו) $\sum \frac{x^n}{n^n}$; $x = 1, 2, \dots, k$

ז) $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2+1}$; $(-\infty, \infty)$

ח) $\sum \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; $(-1000, 2000)$

ט) $\sum nxe^{-nx}$; $[\alpha, \infty)$ $\alpha > 0$

י) $\sum e^{-n} \sin(nx)$; $(-\infty, \infty)$

כ) $\sum \frac{1}{n^x}$; $[1+\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$

ל) $\sum ne^{-nx}$; $[\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$

13. מגדירים פונקציה בצורה רקורסיבית:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sqrt{x}, & x \ge 0 \\ f_{n+1}(x) &= \sqrt{f_n(x) + x}, & n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

הוכח כי הסדרה מתכנסת, ובמידה שווה לכל $x \ge 0$.

14. תהי $f_0(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0, a]$. נגדיר $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt$. הוכח כי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x) \equiv 0$ בקטע $[0, a]$.

15. תהי $f : [-a, a] \to R$ פונקציה רציפה כך ש-$f(0) = 0$, וכך ש-

$$|f(x)| < |x|, \quad \forall x \ne 0, \ x \in [-a, a].$$

מגדירים סדרת פונקציות באופן רקורסיבי

$$\begin{cases} g_1(x) = f(x) \\ g_{n+1}(x) = f(g_n(x)), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

הוכח כי הסדרה $\{g_n\}$ מתכנסת במידה שווה ל-$G(x) \equiv 0$ בקטע $[-a, a]$.

16. בדוק התכנסות במידה שווה של סדרות הפונקציות הבאות בתחום המצוין:

א) $u_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$, $x \in [0, 1]$

ב) $u_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1, 1]$

17. מצא תחום התכנסות, ותחום התכנסות במידה שווה של

א) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

ב) $u_n(x) = \frac{x}{(1+nx)[1+(n+1)x]}$

ג) $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}$

ד) $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$, $x \ne 1$

ה) $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$, $x > 0$

(ו) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$

(ז) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$

18. תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות המתכנסת ל-$f(x)$ במידה שווה על קטע I, וכך ש-$|f(x)| < M$ לכל $x \in I$. הוכח כי אזי קיימים קבועים $K \in R^+$ ו-N טבעי, כך ש-$|f_n(x)| < K$ לכל $n > N$.

19. קרא את ה„הוכחה" הבאה:

„נעיין בטור

$$\sum f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{n}$$

טור הנגזרות .

$$\sum f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$$

מתכנס במידה שווה ב-$[-\pi, \pi]$ כי

$$\left| -\frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{\pi}{n^2}$$

בקטע זה. ע"י אינטגרציה איבר-איבר של טור מתכנס זה, מקבלים שגם $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{n}$ מתכנס במידה שווה ב-$[-\pi, \pi]$."

(א) הראה שהמסקנה איננה נכונה.

(ב) מהי הטעות ב„הוכחה"?

(ג) כיצד ניתן לתקן טעות זו?

20. מגדירים סדרת פונקציות

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^p}, \quad x \in [0,1], \quad p > 0.$$

עבור אילו ערכי p הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה לגבול $f(x)$? האם

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$$

עבור $p = 2$?, עבור $p = 4$?

21. (אביב תשנ"ה) תהי $R \to \Phi[0,1]$ רציפה, $\Phi(x)$ לא זהותית אפס. נגדיר סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ ע"י $f_n(x) = x^n\Phi(x)$. הוכח כי הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה בתחום $[0,1]$ אם ורק אם $\Phi(1) = 0$.

22. (אביב תשנ"ה) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x) = \cos^n x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(א) חשב את גבול הסדרה $f_n(x)$.

(ב) האם הסדרה מתכנסת במידה שווה?

(ג) חשב את $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

הפולינומים של ברנשטיין (S. Bernstein, 1937)

הגדרה: תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$. מגדירים את פולינום ברנשטיין מסדר n של הפונקציה f ע"י

$$B_n(x;f) \triangleq \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]$$

1. הוכח את הנוסחאות הבאות לגבי פולינומי ברנשטיין:
   (א) $B_n(x; f\equiv 1) = 1$
   (ב) $B_n(x; f\equiv x) = x$
   (ג) $B_n(x; f\equiv x^2) = x^2 + \frac{1}{n}x(1-x)$
2. הוכח את התכונות הבאות של פולינומי ברנשטיין:
   (א) $B_n(x;f)$ הוא פולינום ממעלה n לכל היותר.
   (ב) $B_n(x;f)$ לינארי בפונקציה של f, כלומר
      i. $B_n(x;\alpha f) = \alpha B_n(x;f)$
      ii. $B_n(x;f+g) = B_n(x;f) + B_n(x;g)$
3. נסמן

$$p_{kn}(x) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{m-k}$$

הוכח:

   (א) $\sum_{k=0}^{n} p_{kn}(x) \equiv 1$
   (ב) $\sum_{k=0}^{n} kp_{kn}(x) = nx$ (הסתמך על תרגיל 1)
   (ג) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{kn}(x) = n(n-1)x^2$ (הסתמך על תרגיל 1)
   (ד) $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 p_{kn}(x) = nx(1-x)$ (הסתמך על הסעיפים הקודמים)
4. הסתמך על שאלה 3 כדי להוכיח את <u>משפט ברנשטיין</u>: תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$. אזי $\lim_{n\to\infty} B_n(x;f) = f(x)$, וההתכנסות היא במידה שווה בקטע $[0,1]$.

<u>הדרכה:</u> תהי $\delta > 0$ ונסמן ב-J את קבוצת האינדקסים:

$$J = \left\{ k \in \{0,1,\ldots,n\} \;\middle|\; \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta \right\}$$

הוכח כי

$$\sum_{k\in J} p_{kn}(x) \leq \sum_{k\in J} \frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{\delta^2} p_{kn}(x) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

עתה f רציפה במידה שווה ב-$[0,1]$ ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך ש-

$$|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

(δ לא תלוי ב-x). רשום

$$|f(x) - B_n(x;f))| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]p_{kn}(x)\right| \leq \sum_{J^c}|\cdots| + \sum_{J}|\cdots|$$

כאשר $|\cdots|$ מייצג את כל הביטוי שבסכום הקודם. הראה כי הסכום הראשון (על J^c - קבוצת האינדקסים המשלימה ל-J) קטן מ-ε.

עתה, מכיוון ש-f חסומה ב-$[0,1]$, $M \leq |f(x)|$, לכן נובע עי הסכום השני (על J) חסום ע"י הביטוי

$$2M\sum_{J} p_{kn}(x) \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

הסק מכאן ש-$B_n(x;f)$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$ בקטע $[0,1]$.

<u>הערה:</u> משפט ברנשטיין נותן דוגמא לפולינום שאת קיומו מבטיח משפט ויירשטראס: תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$, אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $P_\varepsilon(x)$ כך ש-

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$