

## אלגברה ב' - גליון תרגילים 7

### 2.7.3 [H] ♣

תהיה  $G$  חבורה אבלית סופית, ויהא  $n$  מספר שלם הזר לסדר של  $G$ . הוכיחו שלכל  $g \in G$  קיים  $x \in G$  כך ש- $x^n = g$ .

### 2.7.16 [H] ♣

תהי  $G = GL_2(\mathbb{C})$  חבורת המטריצות ההפיכות  $2 \times 2$  עם מקדמים ב- $\mathbb{C}$ , ותהי  $\Gamma$  חבורת כל ההעתקות מן הצורה -

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

נעיר כי כל העתקה כזו היא העתקה הפיכה  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , כאשר  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , ומוגדרות הפעולות

$$\infty + a = \infty, \quad a \cdot \infty = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0,$$

ולכן הצבה של  $z = \infty$  לתוך  $w(z)$  הופכת להיות דבר פשוט - אך לא טריוויאלי:

$$w(\infty) = \left. \frac{az + b}{cz + d} \right|_{z=\infty} = \left. \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \right|_{z=\infty} = \frac{a}{c}.$$

כעת, מבלי להוכיח ש- $\Gamma$  היא חבורה (תעשו זאת בקורס אנליזה קומפלקסית), ומבלי לשאול האם הפעולות עם  $\infty$  מוגדרות היטב, הוכיחו שההעתקה הבאה  $\gamma : G \rightarrow \Gamma$  היא הומומורפיזם של חבורות, וחשבו את הגרעין שלה:

- עבור כל מטריצה הפיכה  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , נגדיר פונקציה  $\gamma_A \in \Gamma$  על-ידי המשוואה

$$\gamma_A(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

ונקבע  $\gamma(A) = \gamma_A$ .

להעתקות  $\gamma_A$  קוראים טרנספורמציות מביס של  $\hat{\mathbb{C}}$ , והחבורה  $\Gamma$  מסומנת ב- $\text{Möb}_2(\mathbb{C})$ .

### ♣ שאלה 3:

יהא  $N$  אופרטור נורמלי על ממ"פ ממימד סופי  $V$ . הוכיחו שהגרעין של  $N$  הוא המשלים הניצב של התמונה שלו.

### ♣ שאלה 4:

בתנאים של שאלה 3, לכל  $v \in V$ , הראו שאם  $N^2(v) = 0$  אזי  $N(v) = 0$ .

♣ שאלה 5:

הוכיחו שמטריצה  $A \in M_n(\mathbb{C})$  היא נורמלית אם ורק אם היא מתחלפת בכפל עם המטריצה  $AA^*$ .

♣ שאלה 6:

הוכיחו שאם  $A, B$  הן מטריצות נורמליות המתחלפות בכפל, אז יש להן לכסון אוניטרי משותף, דהיינו: קיימת מטריצה אוניטארית  $U$  כך ש- $U^*AU$  ו- $U^*BU$  שתיהן אלכסוניות.

♣ [בק] 192/2:

מצא את מטריצת ההטלה האורתוגונלית על המרחב העצמי שמתאים לערך העצמי 2 של המטריצה -

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

♣ [בק] 192/3:

מצאו את הפירוק הספקטרלי של המטריצה  $A$  בתרגיל הקודם, וחשבו את  $A^{10}$ .

♡ תאריך הגשה: 14.05.2000 עד השעה 12 : 00