סכום וחיתוך של תת-מרחבים

רשימת התרגילים הפתורים: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9

תזכורת:

- $U,W < V, \quad U+W = \left\{ u+w \,\middle|\, u \in U, w \in W \right\}$
- $U,W \subseteq U+W$
- $B_1, B_2 \subseteq V, U = Sp(B_1), W = Sp(B_2) \Rightarrow U+W = Sp(B_1 \cup B_2)$
- $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

תרגיל 1: חסר הנתון $U \cap W = 0$ (מעתה ואילך, מרחב-האפס מסומן ע"י 0) - אחרת, הטענה אינה נכונה. יש להראות שלכל וקטור $v \in U+W$ קיימת הצגה יחידה כסכום של וקטור מתוך U עם וקטור מתוך W. הדגש כאן הוא על יחידות, כי כל וקטור בסכום, לפי הגדרה, ניתן להצגה כזו.

ניקח שתי הצגות של $v \in U+W$:

$$v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2; \quad u_i \in U, w_i \in W, i = 1,2.$$
$$\Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1.$$

בשלב האחרון, קיבלנו וקטור - נסמנו ב-x. אז:

$$\left.\begin{matrix} x = u_1 - u_2 \in U \\ x = w_2 - w_1 \in W \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in U \cap W = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ w_1 = w_2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

תרגיל 2א: נתון כי - $U \subseteq W, \dim U = k, \dim W = m$.

יהא B בסיס של U. אז B הוא תת-קבוצה בת"ל ב-W. לפי משפט, ניתן להשלים כל קבוצה בת"ל ב-W לבסיס של W, לכן: אם B אינו בסיס של W (B איננה קבוצה פורשת עבור W), אז אפשר להשלים את B לקבוצה B', המכילה את B. לפיכך מספר האיברים ב-B ($=k$) קטן או שווה מספר האיברים ב-B' ($=m$).

תרגיל 2ב: נתון כי $U \subseteq W, \dim U = \dim W = m$.

יהא B בסיס של U. אז B הוא תת-קבוצה בת"ל ב-W, שמספר-האיברים בה שווה למימד של W. לכן B - בסיס של W, ואז $W = Sp(B) = U$.

תרגיל 2ג: כאן יש טעות-דפוס. הניסוח הנכון הוא:

נתון - $V = U + W$;

הוכח: $U \cap W = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim U + \dim W$.

הפתרון מתבסס על שתי עובדות:

- $\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W})+\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W})=\mathbf{dim}\,\boldsymbol{U}+\mathbf{dim}\,\boldsymbol{W}$
- $\mathbf{dim}\,\boldsymbol{X}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{X}=0$ (לכל מרחב וקטורי $\boldsymbol{X}$). ■

<u>תרגיל 3:</u> $\boldsymbol{U},\boldsymbol{W}<\boldsymbol{R}^5,\ \mathbf{dim}\,\boldsymbol{U}=\mathbf{dim}\,\boldsymbol{W}=3$;

$$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}<\boldsymbol{R}^5\Rightarrow\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W})\le 5$$
$$\Rightarrow\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W})=\mathbf{dim}\,\boldsymbol{U}+\mathbf{dim}\,\boldsymbol{W}-\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W})=6-\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W})\le 5$$
$$\Rightarrow\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W})\ge 1\Rightarrow\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W}\ne 0\quad\blacksquare$$

<u>תרגיל 4א:</u> נקבל בסיס ל-$\boldsymbol{U}$:

$$\begin{bmatrix}1&2&4&1\\1&-1&3&2\\1&11&7&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4&1\\0&3&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\quad\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Sp}\{(1,2,4,1),(0,3,1,-1)\}$$

$\boldsymbol{W}$ נפרש ע"י שני וקטורים שאינם פרופורציוניים, ולכן הם יוצרים בסיס ל-$\boldsymbol{W}$.

לפיכך, $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}$ נפרש ע"י איחוד הבסיסים הנ"ל, וכעת נקבל בסיס למרחב ע"י דירוג:

$$\begin{bmatrix}1&5&5&0\\1&2&4&1\\0&3&1&-1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&5&5&0\\0&3&1&-1\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\quad\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}=\boldsymbol{Sp}\{(1,5,5,0),(0,3,1,-1),(0,0,2,4)\}.$$

נשים לב שהוקטור $\boldsymbol{e}_4^t=(0,0,0,1)$ משלים את הבסיס שקיבלנו לבסיס של $\boldsymbol{R}^4$.

כדי לחשב בסיס לחיתוך, נתחיל משיקולי-מימד:

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W})=\mathbf{dim}\,\boldsymbol{U}+\mathbf{dim}\,\boldsymbol{W}-\mathbf{dim}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W})=2+2-3=1,$$

לפיכך, מספיק למצוא וקטור אחד שונה מאפס בחיתוך (והוא יפרוש את החיתוך). רואים שהוקטור $(1,5,5,0)$, השייך ל-$\boldsymbol{W}$ (לפי נתון) הוא סכום וקטורי-הבסיס שמצאנו עבור $\boldsymbol{U}$, ולכן הוא שייך גם ל-$\boldsymbol{U}$. מכאן נובע שהוא פורש את החיתוך.

<u>תרגיל 4ג:</u> בסיס ל-$\boldsymbol{U}$: $\{1,\ \boldsymbol{x}^2+1,\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-1)\}$. כדי למצוא בסיס ל-$\boldsymbol{W}$, נשים לב כי:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{W}\Leftrightarrow\boldsymbol{p}(1)=\boldsymbol{p}(-1)=0\Leftrightarrow\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+1)\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}),\quad\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}_1[\boldsymbol{x}]$$
$$\Leftrightarrow\exists\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}:\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+1)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{x}^2-1)+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-1).$$

אנו מסיקים ש-$\boldsymbol{W}$ נפרש ע"י $\{\boldsymbol{x}^2-1,\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-1)\}$, וזהו בסיס, מכיוון שאין בו שני איברים ממעלות שוות. נשים לב, בנוסף, כי:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x}^2-1=1\cdot(\boldsymbol{x}^2+1)-2\cdot 1\in\boldsymbol{U}\\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-1)\in\boldsymbol{U}\end{array}\right\}\Rightarrow\boldsymbol{W}=\boldsymbol{Sp}\{\boldsymbol{x}^2-1,\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-1)\}\subseteq\boldsymbol{U}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}\end{cases}$$

ואין כאן מה לחשב יותר.

על-מנת להשלים את הבסיס שקיבלנו עבור תת-המרחב $U+W=U$ לבסיס של $V=R_3[x]$:

$$\dim V=4,\dim U=3\wedge p(x)=x\notin U\Rightarrow V=Sp\{1,x,x^2+1,x(x^2-1)\}. \quad \blacksquare$$

<u>תרגיל 4ה:</u> $V=M_3(R)$.

$$U=\left\{A\in V \;\middle|\; trA=0,\ A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=0\right\}, W=Sp\left\{B_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\right\}.$$

המטריצות B_1,B_2 אינן פרופורציוניות, ולכן W נתון לנו ע"י בסיס.

נמצא צורה כללית למטריצה $A\in U$. לפי הנתונים, מתקיים:

- סכום העמודות של A הוא אפס.
- העמודה הראשונה שווה לעמודה השניה.

לפיכך למטריצה A הצורה הכללית הבאה:

$$A=\begin{bmatrix}a&a&-2a\\b&b&-2b\\c&c&-2c\end{bmatrix}, trA=a+b-2c=0\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a&a&-2a\\b&b&-2b\\\frac{a+b}{2}&\frac{a+b}{2}&-a-b\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{a}{2}\begin{bmatrix}2&2&-4\\0&0&0\\1&1&-2\end{bmatrix}+\frac{b}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&2&-4\\1&1&-2\end{bmatrix}\Rightarrow U=Sp\{A_1,A_2\}.$$

נראה כי $U\cap W=0$:

<u>דרך 1:</u> מכיוון ששני המרחבים W,U הם ממימד 2, מספיק להראות שסכומם ממימד 4. לשם-כך נשטח את המטריצות בבסיסים ונדרג (העיקר - לא לפחד):

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&2&-4&0&0&0&1&1&-2\\0&0&0&2&2&-4&1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4&5&6&7&8\\0&0&-6&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&2&*&*&*&*&*\end{bmatrix}$$

<u>דרך 2:</u> נניח כי $A\in U\cap W$, אז אפשר לרשום:

$$A\in W\Rightarrow A=aB_1+bB_2$$

$$A\in U\Rightarrow 0=A\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=aB_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+bB_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=bB_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow b=0\Rightarrow A=aB_1.$$

$$tr(A)=a\cdot trB_1=3a=0\Rightarrow a=0\Rightarrow A=0.$$

מכאן נובע , כמו מקודם, ש- $\{A_1,A_2,B_1,B_2\}$ הוא בסיס ל- $U+W$.

תרגיל 5: התשובות הנכונות הן ב׳ ו-ה׳, כיוון ש- $U\cap W$ תמיד תת-מרחב. בנוסף -

$$U\cap W\subseteq R^3\Rightarrow \dim(U\cap W)\le 3.$$

ומכאן ש-ג׳ ו-ד׳ שגויים.

$$U+W<R^3\Rightarrow \dim(U+W)\le 3$$
$$\Rightarrow \dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=4-\dim(U+W)\ge 1$$
$$\Rightarrow U\cap W\ne 0\Rightarrow U+W\ne U\oplus W.$$

ולכן גם טענה א׳ איננה נכונה.

תרגיל 8: הטענה איננה נכונה:

$$V=R^2,\quad V_1=Sp\{(1,0)\},V_2=Sp\{(0,1)\},V_3=\{(1,1)\}.$$

תרגיל 9א: יהא V מרחב וקטורי ממימד סופי, $U<V$ תמ״ו, $U\ne 0,V$. ניקח בסיס כלשהו B של U, ונשלים אותו לבסיס B' של כל המרחב V. נגדיר $W=Sp(B'-B)$, ואז $V=U\oplus W$. יש להעיר, שההשלמה המתקבלת איננה יחידה: היא תלויה בבחירה של B', וידוע שניתן למצוא הרבה קבוצות עם התכונה המגדירה את B'.

תרגיל 9ג: תחילה נמצא בסיס ל-U:

$$p(x)\in U\Leftrightarrow p(0)=p(2)=0\Leftrightarrow p(x)=(x^2-2x)(ax+b),\quad a,b\in R$$
$$\Leftrightarrow p(x)=b(x^2-2x)+a(x^3-2x^2),\quad a,b\in R.$$
$$U=Sp\left\{x^2-2x,x^3-2x^2\right\}.$$
$$W=Sp\{1,x\}.$$

שוב, הבחירה של W איננה יחידה, אולם היא ברורה במקרה זה, מכיוון שדאגנו לכך שכל המעלות באיחוד הבסיסים תהיינה שונות.

<u>מטריצות הפיכות</u>

<u>רשימת התרגילים הפתורים:</u> 20 ,19 ,18, 17 ,15 ,14 ,13 ,12 ,10 ,1

<u>תרגיל 1:</u>

$$ad-bc\neq 0\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$E^2=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{bmatrix}=2E+3I\Rightarrow E^2-2E=3I\Rightarrow\frac{1}{3}E(E-2I)=I\Rightarrow E^{-1}=\frac{1}{3}(E-2I).$$

<u>תרגיל 10א:</u> הטענה נכונה. מימד מרחב-הפתרונות של $Ax=0$ הוא $n(A)=4-r(A)$, ונתון שהוא שווה 4, לכן: $r(A)=0 \Leftarrow A=0$.

<u>תרגיל 10ב:</u> הטענה אינה נכונה:

$$A=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

נשים לב כי $A+B=I$, וזוהי מטריצה הפיכה.

<u>תרגיל 10ג:</u> הטענה אינה נכונה, לדוגמה:

$$A=I,\ B=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$$

<u>תרגיל 10ד:</u> הטענה נכונה, כי אם $r(A)+r(B)=8$, אז בהיות $r(A),r(B)\leq 4$ (כי אלו הן מטריצות 4×4), נקבל: $r(A)=r(B)=4$, ואז שתיהן הפיכות, ולכן גם AB הפיכה, בסתירה לנתון.

<u>תרגיל 12:</u> תהי $A\in M_n(F)$. A הפיכה אם"ם $r(A)=n$, אם"ם $n(A)=0$, אם"ם מספר דרגות החופש במערכת $Ax=0$ שווה לאפס, אם"ם למערכת ההומוגנית פתרון יחיד - הפתרון הטריוויאלי.

<u>הערה:</u> $A\in M_n(F)$ הפיכה, אם"ם לכל $b\in F^n$ למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.

<u>תרגיל 13:</u> אם A הפיכה, אז לכל k אפשר למצוא מטריצה הפוכה ל-A^k: $\left(A^k\right)\left(A^{-1}\right)^k=I$.

אם עבור k מסויים, A^k הפיכה, אז קיימת $\left(A^k\right)^{-1}$, ולכן A הפיכה, כי: $A\cdot A^{k-1}\cdot\left(A^k\right)^{-1}=I$.

<u>הערה:</u> למעשה, אם קיים k טבעי שעבורו A^k הפיכה, אז כל חזקה של A היא מטריצה הפיכה.

תרגיל 14: הטענה נכונה. למערכת $A^2x=b$ פתרון יחיד אם"ם $r(A^2)=n$, אם"ם A^2 הפיכה, אם"ם A הפיכה (לפי תרגיל קודם) אם"ם $r(A)=n$, אם"ם למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.

תרגיל 15: נתון שלמערכת $A^{17}v=0$ יש פתרון לא טריוויאלי - $v=(1,x)^t$ - ולכן A^{17} איננה הפיכה, וזה קורה אם"ם A לא הפיכה, כלומר - שורותיה תלויות.

$$A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{bmatrix},\ (1,a)=b(2a,1)\Rightarrow\begin{cases}2ab=1\\ a=b\end{cases}\Rightarrow 2a^2=1\Rightarrow a^2=\frac{1}{2}.$$

תרגיל 17:
$$I=I-A^5=(I-A)(I+A+A^2+A^3+A^4)\Rightarrow B^{-1}=I+A+A^2+A^3+A^4.$$

תרגיל 18: $A\in F^{n\times m}$. נניח, בלא להגביל את הכלליות, כי $m>n$. אז המטריצה $B=A^tA$ איננה הפיכה: למערכת $Ax=0$ יש n משוואות ב-m נעלמים, ומכיוון שיש יותר-מדי נעלמים, קיים פתרון לא טריוויאלי - x_0, ואז:

$$Bx_0=(A^tA)x_0=A^t(Ax_0)=A^t\cdot 0=0,$$

כלומר למשוואה $Bx=0$ יש פתרון לא טריוויאלי (x_0), ולכן B איננה הפיכה.

תרגיל 19: למערכת $Ax=0$ רק הפתרון הטריוואלי: ניקח x כלשהו המקיים $Ax=0$ -

$$x=Ix=(CA)x=C(Ax)=C\cdot 0=0.$$

מכאן:
$$\left.\begin{array}{l}0=n(A)=m-r(A)\Rightarrow r(A)=m.\\ A\in F^{n\times m}\Rightarrow r(A)\le\min\{m,n\}\end{array}\right\}\Rightarrow m\le n.$$

באותו אופן, למערכת $Bx=0$ רק הפתרון הטריוויאלי, ולכן $n\le m$.

לפיכך n=m, ואנו מקבלים:
$$C=CI=C(AB)=(CA)B=IB=B\Rightarrow C=B=A^{-1},$$

ובפרט - B הפיכה.

תרגיל 20: הטענה אינה נכונה. אפשר לקחת $A=0$; B,C - כלשהן.

בהגבלה ש-$A\neq 0$, רושמים: $ABC=A\Leftrightarrow A(BC-I)=0$, וכעת מסמנים $D=BC-I$, ובוחרים מטריצות $A,D\neq 0$ כך ש-$AD=0$. כתוצאה מכך אנו מקבלים $BC=\underbrace{I+D\neq 0}_{D\neq 0}$.

טרנספורמציות לינאריות

רשימת התרגילים הפתורים: 7, 8, 9, 10, 11, 19, 20, 26, 27, 28

סימונים: עבור טרנספורמציה לינארית $T:V \to \hat{V}$, ותת-מרחב $U < V$, מגדירים:

(i) הגרעין של T:
$$KerT = \{v \in V | Tv = 0\}$$
האפסיות של T:
$$n(T) = \dim(KerT).$$

(ii) התמונה של T:
$$\operatorname{Im} T = \{\hat{v} \in \hat{V} | \exists v \in V: Tv = \hat{v}\} = \{Tv | v \in V\}$$
הדרגה של T:
$$r(T) = rank(T) = \dim(\operatorname{Im} T)$$

(iii) נוסחאת-הדרגה:
$$\dim V = r(T) + n(T)$$

(iv) הצמצום של T ל-U:
$$\begin{cases} T|_U : U \to \hat{V} \\ \quad u \mapsto Tu \end{cases}$$

תכונות של הצמצום:
$$Ker(T|_U) = U \cap KerT,$$
$$\operatorname{Im}(T|_U) = T(U) = \{Tu | u \in U\} \subseteq \operatorname{Im} T.$$

תרגיל 7ג:

$$p(x) \in KerT \Leftrightarrow T(p(x)) = 0 \Leftrightarrow p(0) = p(1) = p(2) = 0$$
$$\Leftrightarrow p(x) = ax(x-1)(x-2),\ a \in R.$$

ולכן בסיס לגרעין של T ניתן ע"י: $\{x(x-1)(x-2)\}$, ומכאן ש- $n(T) = 1$, ו-T איננה חח"ע.

ניקח בסיס סטנדרטי ל-$R_3[x]$ - $\{1, x, x^2, x^3\}$ - ואז הקבוצה:

$$\{T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)\} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 8\end{bmatrix}\right\}$$

היא קבוצה פורשת עבור $\operatorname{Im} T$. נמצא בסיס ע"י שיטוח ודירוג:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1 & 4\\0 & 1 & 1 & 8\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \quad \operatorname{Im} T = Sp\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$
$$r(T) = \dim \operatorname{Im} T = 3 < 4 = \dim M_2(R) \Rightarrow \operatorname{Im} T \neq M_2(R).$$

תרגיל 8: תהי $A \in M_n(R)$. A מגדירה ט"ל: $T: R^n \to R^n; Tv = Av$.

$$KerT = \{v \in R^n | Av = 0\} = Ker(A); \operatorname{Im} T = \{Av | v \in R^n\} = C(A).$$

למערכת $Ax=0$ פתרון יחיד אם״ם $Ker(A)=0$ אם״ם $KerT=0$ אם״ם $n(T)=0$, ולפי נוסחאת הדרגה זה מחייב $n=r(T)=\dim \operatorname{Im} T=\dim C(A)=r(A)$.

<u>תרגיל 9:</u>

$$r(T)+n(T)=2 \wedge \operatorname{Im} T=KerT \Rightarrow r(T)=n(T)=1.$$
$$\operatorname{Im} T=Sp\{T(1,0),T(0,1)\}=Sp\{(a,1),(b,2)\}$$

מהדרישה $r(T)=1$ נובע שהוקטורים $(a,1),(b,2)$ פרופורציוניים, ולכן $b=2a$ -

$$T(x,y)=(ax+2ay,x+2y)=(x+2y)(a,1)$$
$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im} T=KerT \Rightarrow \operatorname{Im} T\subseteq KerT\\ (a,1)\in \operatorname{Im} T\end{array}\right\} \Rightarrow T(a,1)=0 \Leftrightarrow (a+2)(a,1)=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow b=-4.$$

<u>תרגיל 10:</u>

$$A\in R^{m\times n}, T:R^n\to R^m, Tv=Av$$

כמו בתרגיל 8, מקבלים:

$$KerT=\left\{v\in R^n \mid Av=0\right\}=Ker(A);\ \operatorname{Im} T=\left\{Av \mid v\in R^n\right\}=C(A).$$

בכלל, במצב זה מקבלים את העובדות הבאות:

$$n=\dim R^n=r(T)+n(T)=r(A)+n(A).$$
$$r(A)=r(T)=\dim \operatorname{Im} T\le \dim R^m=m$$

בהנחות נוספות:

$$KerT=0 \Leftrightarrow n(T)=n(A)=0 \Leftrightarrow r(T)=r(A)=n \quad (\Rightarrow n\le m)$$
$$\operatorname{Im} T=R^m \Leftrightarrow r(T)=r(A)=m \quad (m+n(T)=n \Rightarrow m\le n)$$

לכן התשובות א׳,ב׳ נכונות, ואילו ג׳,ד׳ שגויות.

ה׳,ו׳ אינן נכונות, למשל, עבור $A=0$.

<u>תרגיל 11:</u> הגרעין של T מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם B, וברור שמטריצת-היחידה מתחלפת עם B בכפל, לפיכך: $0\ne I\in KerT \Rightarrow KerT\ne 0$, ולכן T איננה חח״ע לכל ערך של A.

<u>תרגיל 19א:</u>

$$v\in KerT \Leftrightarrow Tv=0 \Rightarrow T^2v=T(Tv)=T(0)=0 \Rightarrow v\in Ker(T^2)$$

<u>תרגיל 19ב:</u>

$$v\in \operatorname{Im} T^2 \Rightarrow \exists u\in V: T^2u=v \Rightarrow v=T(Tu)\in \operatorname{Im} T$$

<u>תרגיל 19ג:</u> נגדיר טרנספורמציה לינארית S להיות הצמצום של T לתת-המרחב $U=\operatorname{Im} T$:

$$S=T|_U: U\to V;\quad S(u)=Tu.$$

מן ההערות בתחילת הפרק -

$$Ker\,S=U\cap Ker\,T=\operatorname{Im} T\cap Ker\,T,$$
$$\operatorname{Im} S=T(U)=T(\operatorname{Im} T)=\operatorname{Im} T^2;$$
$$(*)\ r(T)=\dim U=\dim Ker\,S+\dim \operatorname{Im} S=\dim(KerT\cap \operatorname{Im} T)+\underbrace{\dim \operatorname{Im} T^2}_{=r(T^2)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} r(T)=\dim V-n(T) \\ r(T^2)=\dim V-n(T^2)\end{array}\right\}\Rightarrow n(T^2)\underset{(*)}{=}\dim(Ker T\cap \operatorname{Im} T)+n(T).$$

<u>תרגיל 19ד:</u> תחילה נעיר, כי: $Ker\,T\subseteq Ker\,T^2, \operatorname{Im} T\supseteq \operatorname{Im} T^2$, ולכן:

$$Ker\,T=Ker\,T^2\Leftrightarrow \dim Ker\,T=\dim Ker\,T^2\Leftrightarrow n(T)=n(T^2),$$
$$\operatorname{Im} T=\operatorname{Im} T^2\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T=\dim \operatorname{Im} T^2\Leftrightarrow r(T)=r(T^2).$$

כמו-כן: $\operatorname{Im} T\cap Ker\,T=0\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} T\cap Ker\,T)=0$

ולפי 19ג׳: $\dim(\operatorname{Im} T\cap Ker\,T)=n(T^2)-n(T)$

זאת אומרת, כי: $\operatorname{Im} T\cap Ker\,T=0\Leftrightarrow n(T)=n(T^2)$, שוב, לפי 19ג׳, רואים שזה שקול ל- $r(T)=r(T^2)$.

בכלל, מנוסחאות הדרגה נובע כי $n(T)=n(T^2)\Leftrightarrow r(T)=r(T^2)$, ואת השקילות השניה אפשר להראות בדרך ישירה: נניח כי $Ker\,T=Ker\,T^2$.

$$v\in \operatorname{Im} T\cap Ker\,T\Leftrightarrow \begin{cases} v\in Ker\,T \\ v\in \operatorname{Im} T\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} Tv=0 \\ \exists u: Tu=v\end{cases}\Rightarrow T(Tu)=Tv=0\Rightarrow u\in Ker\,T^2=Ker\,T$$
$$\Rightarrow Tu=0\Leftrightarrow v=0.$$

להפך: אם $\operatorname{Im} T\cap Ker\,T=0$, אז:

$$v\in Ker\,T^2\Rightarrow T^2v=T(Tv)=0\Rightarrow \begin{cases} Tv\in Ker\,T \\ Tv\in \operatorname{Im} T\end{cases}\Rightarrow Tv\in Ker\,T\cap \operatorname{Im} T=0\Rightarrow Tv=0$$
$$\Rightarrow v\in Ker\,T.$$

זאת-אומרת שהוכחנו כי $Ker\,T\supseteq Ker\,T^2$, וההכלה ההפוכה נכונה תמיד; מכאן שהוכחנו שוויון.

<u>תרגיל 19ה:</u> $T^2=0\Leftrightarrow \operatorname{Im} T^2=0\Leftrightarrow T(\operatorname{Im} T)=0\Leftrightarrow \operatorname{Im} T\subseteq Ker\,T$

<u>תרגיל 20:</u> תחילה נראה כי: $Ker\,ST=0\Rightarrow Ker\,T=0,\ Ker\,S\cap \operatorname{Im} T=0.$

$$v\in Ker\,T\Rightarrow Tv=0\Rightarrow (ST)v=S(Tv)=0\Rightarrow v\in Ker\,ST=0\Rightarrow v=0;$$
$$v\in Ker\,S\cap \operatorname{Im} T\Leftrightarrow \begin{cases} Sv=0 \\ \exists u: v=Tu\end{cases}\Rightarrow (ST)u=S(Tu)=0\Rightarrow u\in Ker\,ST=0\Rightarrow u=0\Rightarrow v=0.$$

בתרגיל זה, S,T הם אופרטורים על מ״ו ממימד סופי V, ולכן נוכל להשתמש בנוסחת-הדרגה, כדי לקבל: T חח״ע $\Leftarrow$ T על $\Leftarrow$ $\operatorname{Im} T=V\Rightarrow Ker\,S=Ker\,S\cap V=0$.

מכל אלה: א׳ - נכון, ב׳ - לא נכון, ג׳ - נכון.

כעת ננתח את המקרה $\operatorname{Im} ST=0$: $\operatorname{Im} ST=0\Leftrightarrow S(\operatorname{Im} T)=0\Leftrightarrow \operatorname{Im} T\subseteq Ker\,S.$

מכאן נובע ש-ד׳ נכון.

תשובות ד',ה',ו' שגויות, לדוגמה:

$S,T: R^2 \to R^2$
$T(x,y) = (0,x),\ S(x,y) = (x,0).$

<u>תרגיל 26:</u> ראינו בשאלה 10 כי: $Ker\,T_A = KerA, \operatorname{Im} T_A = C(A)$, וכנ"ל עבור B.

A לא-הפיכה, ולכן: $Ker\,T_A \neq 0, \operatorname{Im} T_A \neq F^n$, $trA \neq 0 \Leftarrow A \neq 0 \Leftrightarrow Ker\,T_A \neq F^n, \operatorname{Im} T_A \neq 0$.

B הפיכה, ולכן: $Ker\,T_B = 0, \operatorname{Im} T_B = F^n$.

מכאן א', ב', ד' נובעים מיד, ובשביל ג' צריך לזכור כי AB ו-BA לא הפיכות.

<u>תרגיל 27:</u>

$$\operatorname{Im} T \subseteq V \Rightarrow \operatorname{Im} ST = S(\operatorname{Im} T) \subseteq S(V) = \operatorname{Im} S \Rightarrow r(ST) \leq r(S)$$

נסמן ב-L את הצמצום של S לתמונה של T: $L = S|_{\operatorname{Im} T}$, אז:

$$\left.\begin{array}{l} r(T) = \dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} L + \dim Ker\,L \\ \operatorname{Im} L = S(\operatorname{Im} T) = \operatorname{Im} ST \end{array}\right\} \Rightarrow r(T) = r(ST) + \dim Ker\,L.$$

בפרט, $\dim Ker\,L \geq 0$ גורר ש-$r(ST) \leq r(T)$, והוכחנו כי $r(ST) \leq \min\{r(S), r(T)\}$.

כעת נחשב את $\dim Ker\,L$ כדי לקבל את אי-השוויון השני:

$$Ker\,L = Ker\,(S|_{\operatorname{Im} T}) = Ker\,S \cap \operatorname{Im} T.$$

$$(*) \quad \dim(Ker\,S \cap \operatorname{Im} T) = \dim Ker\,S + \dim \operatorname{Im} T - \dim(Ker\,S + \operatorname{Im} T)$$
$$= [\dim V - r(S)] + r(T) - \dim(Ker\,S + \operatorname{Im} T).$$

$$(**) \quad \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Im} T + Ker\,S \Rightarrow r(T) = \dim \operatorname{Im} T \leq \dim(\operatorname{Im} T + Ker\,S)$$

משני אלה, ע"י הצבת (**) לתוך (*), אנו מקבלים:

$$\dim Ker\,L = \dim V - r(S) + r(T) - \dim(Ker\,S + \operatorname{Im} T) \leq \dim V - r(S) + r(T) - r(T)$$
$$= \dim V - r(S).$$

$$r(ST) = r(T) - n(L) \geq r(T) - [\dim V - r(S)] = \dim V - [r(T) + r(S)]. \quad \blacksquare$$

<u>תרגיל 28:</u> לפי 19ד' מספיק להוכיח כי $Ker\,T \cap \operatorname{Im} T = 0$:

$$V = \operatorname{Im} T + Ker\,T$$
$$\Leftrightarrow \dim V = \dim(\operatorname{Im} T + Ker\,T) = \dim \operatorname{Im} T + \dim Ker\,T - \dim(\operatorname{Im} T \cap Ker\,T)$$
$$= r(T) + n(T) - \dim(\operatorname{Im} T \cap Ker\,T) = \dim V - \dim(\operatorname{Im} T \cap Ker\,T)$$
$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} T \cap Ker\,T) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} T \cap Ker\,T = 0,$$

כנדרש. $\blacksquare$

<u>הצגת אופרטור ע"י מטריצה</u>

<u>רשימת התרגילים הפתורים:</u> 3, 5, 10, 11, 17, 21

<u>סימונים, תכונות:</u>

- תזכורת: בסיס <u>לא סדור</u> מסומן ע"י סוגריים מסולסלים - למשל, $\{v_1,\dots,v_n\}$ - ואילו בסיס סדור יסומן ע"י סוגריים רגילים - $(v_1,\dots,v_n)$ - על-מנת להדגיש את הסידור של איברי-הבסיס, למשל: בסיס סדור (v_3,v_1,v_2), במ"ו ממימד 3, שונה מן הבסיס הסדור (v_1,v_2,v_3), למרות ששניהם מתארים את אותו הבסיס (הלא-סדור).
- אם $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס סדור של V, אז:
$$[v]_B=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\overset{def.}{\Leftrightarrow} v=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$$
- אם B בסיס (סדור) של V, C בסיס של W, ו- $T:V\to W$ אז קיימת מטריצה אחת ויחידה מגודל $\dim W\times\dim V$, המסומנת ב-$[T]_B^C$, כך שלכל $v\in V$ מתקיים: $[Tv]_C=[T]_B^C\cdot[v]_B$.
- כמו-כן, אם $S:W\to U$, ו-D הוא בסיס סדור של U, אז: $[ST]_B^D=[S]_C^D\cdot[T]_B^C$, כלומר: הרכבה של טרנספורמציות מיוצגת ע"י מכפלת ההצגות שלהן.
- בנוסף, ידוע כי אם $B=(v_1,\dots,v_n)$, אז: $[T]_B^C=\left[[Tv_1]_C\ \ \cdots\ \ [Tv_n]_C\right].$
- אם, בנוסף B' הוא בסיס של V ו-C' הוא בסיס של W, אז: $[T]_{B'}^{C'}=P_C^{C'}\cdot[T]_B^C\cdot P_{B'}^B$

כאשר $P_{B'}^B$ היא המטריצה היחידה המקיימת: $[v]_B=P_{B'}^B\cdot[v]_{B'}$ לכל $v\in V$.

$P_C^{C'}$ היא המטריצה היחידה המקיימת, לכל $w\in W$: $[w]_{C'}=P_C^{C'}\cdot[w]_C$.

<u>תרגיל 3ב:</u> יש לעבוד בצורה הבאה:

- נחשב את T של איברי-הבסיס f:

$$f_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},Tf_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\15\end{bmatrix};\quad f_2=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix},Tf_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\26\end{bmatrix}$$

- נמצא קואורדינטות עבור $Tf_i,\ i=1,2$ בבסיס f:

$$\begin{bmatrix}7\\15\end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\3&5&15\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&2&7\\0&1&6\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=6\end{cases}\Rightarrow[Tf_1]_f=\begin{bmatrix}-5\\6\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}12\\26\end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&2&12\\3&5&26\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&2&12\\0&1&10\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=-8\\b=10\end{cases}\Rightarrow[Tf_2]_f=\begin{bmatrix}-8\\10\end{bmatrix}.$$

* מכאן תתקבל מטריצה מייצגת:

$$[T]_f = [T]_f^f = \left[[Tf_1]_f \quad [Tf_2]_f \right] = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

<u>תרגיל 5:</u> עבור וקטור כללי $(x,y)^t \in R^2$, נקבל:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a = x - 2b = 2y - 3x \\ b = 2x - y \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Tf_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow [Tf_1]_f = \begin{bmatrix} 18 \\ -11 \end{bmatrix} \\ Tf_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow [Tf_2]_f = \begin{bmatrix} 25 \\ -15 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow [T]_f = \begin{bmatrix} 18 & 25 \\ -11 & -15 \end{bmatrix}$$

$$[T]_f \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} 18 & 25 \\ -11 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y-3x \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36y - 54x + 50x - 25y \\ -22y + 33x - 30x + 15y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 11y \\ 3x - 7y \end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \right]_f = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ x + y \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} 2(x+y) - 3(2x-3y) \\ 2(2x-3y) - (x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x + 11y \\ 3x - 7y \end{bmatrix} = [T]_f \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_f .$$

<u>תרגיל 10א:</u>

$$[T]_e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>תרגיל 10ב:</u> אנו מחפשים מטריצה P, המקיימת $[v]_e = P \cdot [v]_\omega$ לכל v, ז"א: $P = P_\omega^e$.

העמודות של P הן:

$$P = \left[[w_1]_e \quad [w_2]_e \quad [w_3]_e \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>תרגיל 10ג:</u> ישנן שתי דרכים לחשב את $[T]_\omega$:

1. לחשב את $[T\omega_i]_\omega, i = 1,2,3$, ולבנות את המטריצה המייצגת;
2. להשתמש בנוסחה - $[T]_\omega = P_e^\omega \cdot [T]_e \cdot P_\omega^e = P^{-1} \cdot [T]_e \cdot P$.

נעבוד בדרך השניה. את המטריצה P^{-1} ניתן לחשב ישירות, או (לעתים זה קל יותר -) לרשום:

$$P^{-1} = P_e^\omega = \left[[e_1]_\omega \quad [e_2]_\omega \quad [e_{31}]_\omega \right].$$

בכל מקרה, תתקבל התשובה:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

כל שנותר הוא להציב בנוסחה את כל המטריצות הדרושות.

<u>תרגיל 11:</u>

$$f=\left\{f_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, f_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\},\quad [T]_f=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_f=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\Leftrightarrow a\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Leftrightarrow a=b=\tfrac{1}{3}.$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_f=\begin{bmatrix}1&2\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=1\cdot f_1+2\cdot f_2=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}.$$

<u>תרגיל 17:</u> יהא $B=(v_1,\dots,v_m)$ בסיס סדור של $W<V$, כאשר W - תת-מרחב אינווריאנטי של אופרטור T, המוגדר על V. אפשר להשלים את B לבסיס $\hat{B}=(v_1,\dots,v_m,\dots,v_n)$ של כל V.
W הוא תמ"ו אינווריאנטי, כלומר: $T(W)\subseteq W$. מבחינתנו, זה אומר שלכל $w\in W$, הוקטור Tw הוא צירוף לינארי של $v_1,\dots,v_m$:

$$i\le m\Rightarrow Tv_i=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}v_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}v_i,\quad \forall k>m: a_{ki}=0.$$

$$\Rightarrow[Tv_i]_{\hat{B}}=\begin{bmatrix}a_{1,i}\\\vdots\\a_{m,i}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Rightarrow[T]_{\hat{B}}=\begin{bmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,m}&a_{1,m+1}&\cdots&a_{1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m,1}&\cdots&a_{m,m}&a_{m,m+1}&\cdots&a_{m,n}\\&&&\vdots&&\vdots\\&0&&a_{n,m+1}&\cdots&a_{n,n}\end{bmatrix}$$

<u>הערה:</u> הריבוע השמאלי העליון במטריצת-בלוקים כנ"ל הוא $\left[T|_W\right]_B$.

<u>תרגיל 21:</u> טעות בניסוח: במקום $T:F^{2\times2}\to F^{2\times2}$, צריך להיות $T:F^2\to F^2$.
נתון שהאופרטור T מקיים $T^2=0$, לפיכך: אם $T=0$, אין מה להוכיח. אחרת - $T^2=0, T\neq0$, ולכן קיים וקטור $v\in F^2$ כך ש- $Tv\neq0$. נראה כי $S=(Tv,v)$ הוא בסיס סדור של F^2, ואז:

$$[T]_S=\left[[T(Tv)]_S\quad[T(v)]_S\right]=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

מספיק להראות כי S היא קבוצה בת"ל, מכיוון ש-$\dim F^2=2$:

$$aTv+bv=0\Rightarrow T(aTv+bv)=T(0)=0\Rightarrow aT^2v+bTv=bTv=0\underset{Tv\neq0}{\Rightarrow}b=0$$
$$\Rightarrow aTv=0\underset{Tv\neq0}{\Rightarrow}a=0.$$

דטרמיננטים

רשימת התרגילים הפתורים: 9, 11, 13, 14, 18, 21, 25, 28, 31, 32, 34, 37

תרגיל 9א: יהא F תת-שדה של C, ותהי $A \in M_n(F)$, כאשר n אי-זוגי. אז:

$$A=-A^t \Rightarrow |A|=\left|-A^t\right|=(-1)^n\left|A^t\right|=(-1)^n|A|=-|A| \Rightarrow 2|A|=0 \Rightarrow |A|=0.$$

תרגיל 9ב:

$$A^t=A^{-1} \Rightarrow \left|A^t\right|=\left|A^{-1}\right| \Rightarrow |A|=\frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2=1 \Rightarrow |A|=\pm 1.$$

תרגיל 9ג:

$$A^3=(-A^t)^5 \Rightarrow \left|A^3\right|=\left|(-A^t)^5\right| \Leftrightarrow |A|^3=(-1)^n|A|^5$$

נסמן $x=|A|$, ואז, עבור המקרים השונים נקבל:

$$A \in M_3(R) \Rightarrow x^3=-x^5 \Leftrightarrow x^3\underbrace{(1+x^2)}_{\neq 0}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow |A|=0,$$

כלומר, A איננה הפיכה במקרה זה.

$$A \in M_4(R) \Rightarrow x^3(1-x^2)=0 \Rightarrow x \in \{0,1,-1\},$$

ואז ייתכן ש-A הפיכה, עם דטרמיננט ± 1.

$$A \in M_3(C) \Rightarrow x^3(1+x^2)=0 \Rightarrow x \in \{0,i,-i\},$$

וזה אומר שוב ש-A יכולה להיות הפיכה, עם דטרמיננט $\pm i$.

תרגיל 11:

$$A,B \in M_3(F),\ F \subseteq C,\ AB=-BA \Rightarrow |AB|=(-1)^3|BA| \Leftrightarrow |A||B|=-|B||A|$$
$$\Leftrightarrow 2|A||B|=0 \Rightarrow |A||B|=0 \Rightarrow |A|=0 \vee |B|=0.$$

כלומר, לפחות אחת המטריצות B,A איננה הפיכה.

תרגיל 13: תמיד מתקיים - $A \in M_n(F) \Rightarrow A \cdot adj(A)^t=|A| \cdot I$ לפיכך, אם A הפיכה, אז:

$$|A| \cdot |adj(A)|=\det\left(|A| \cdot I\right)=|A|^n \cdot |I|=|A|^n \Rightarrow |adj(A)|=|A|^{n-1}.$$

אם A איננה הפיכה, אזי:

$$A=0 \Rightarrow adj(A)=0$$
$$A \neq 0 \Rightarrow A \cdot adj(A)=0$$

בשני המקרים, $|A|=0$; במקרה הראשון מקבלים ש- $adj(A)=0$, ובפרט הדטרמיננט שלה אפס, ואילו במקרה השני, $adj(A)$ מחלקת-אפס, ולכן איננה הפיכה, ושוב הדטרמיננט שלה הוא אפס.

מכאן שהנוסחה $|adj(A)|=|A|^{n-1}$ נכונה תמיד.

תרגיל 14: אם A הפיכה, אז גם $adj(A)$ הפיכה, כיוון ש- $|A|\neq 0 \Rightarrow |adj(A)|=|A|^{n-1}\neq 0.$

כעת, אם A מדרגה $r(A)=n-1$, אז יש בה $n-1$ שורות בת"ל, ולכן כל המינורים המורכבים משורות אלו שונים מאפס. מצד שני, נזכור כי $AB=0 \Rightarrow r(A)+r(B)\leq n$:

$$A\cdot adj(A)^t = |A|\cdot I = 0 \Rightarrow r(A)+r(adj(A))\leq n \Rightarrow r(adj(A))\leq n-r(A)=1,$$

אבל הראינו כי $adj(A)$ איננה אפס, ולכן $r(adj(A))=1$.

במקרה שבו $r(A)\leq n-2$, כל $n-1$ שורות של A - ת"ל, ולכן כל המינורים הם בעלי דטרמיננט שווה לאפס, ולכן $adj(A)$ היא מטריצת-האפס.

תרגיל 18:

$$\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$$

$$=6\cdot\begin{vmatrix} a_1+2b_1-3c_1 & a_2+2b_2-3c_2 & a_3+2b_3-3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overset{R_1-2R_2+3R_3}{=} 6\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 6\cdot 3 = 18.$$

תרגיל 21:

$$|B| = t\cdot x + y,$$

$$x=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{11}+a_{21}t & a_{12}+a_{22}t & a_{13}+a_{23}t & a_{14}+a_{24}t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \underset{(ii)\, R_2\cdot\left(\frac{1}{t}\right)}{\overset{(i)\, R_2-R_1}{=}} t\cdot|A|;$$

$$y=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11}+a_{21}t & a_{12}+a_{22}t & a_{13}+a_{23}t & a_{14}+a_{24}t \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \underset{(ii)\, R_2\leftrightarrow R_1}{\overset{(i)\, R_2-t\cdot R_1}{=}} -|A|.$$

$$|B| = t^2|A|-|A| = |A|\cdot\left(t^2-1\right) \quad\Rightarrow\quad \left(|B|=0 \Leftrightarrow \left(|A|=0 \vee t=\pm 1\right)\right).$$

כלומר, אם A הפיכה, אז Bהפיכה אם"ם $t\neq\pm 1$.

תרגיל 25: תהא $A\in M_n(F)$ מטריצה כלשהי.

אם A היא מטריצת-האפס, אז אפשר לבחור את B להיות מטריצה לא-הפיכה כלשהי, השונה מאפס.

אם A איננה אפס, אז יש לה עמודה שונה מאפס (לה"כ, העמודה ה-i, $i\neq 1$). נרשום את העמודות של A:

$A=\begin{bmatrix}C_1 & \cdots & C_n\end{bmatrix}, C_i\neq 0, i\neq 1.$

כעת נגדיר את B הדרושה לנו: $B=\begin{bmatrix}C_1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}C_1+C_i & C_2 & \cdots & C_n\end{bmatrix}$

$|A+B|=\begin{vmatrix}C_1+C_i & C_2 & \cdots & C_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{vmatrix}=|A|.$

<u>תרגיל 28:</u> $A=(d_1,\cdots,d_n), d_i\in R, \exists i_0 : d_{i_0}\neq 0$

$$B=AA^t=\begin{bmatrix}d_1 & \cdots & d_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}=d_1^2+\ldots+d_n^2>0$$

<u>הערה:</u> את המכפלה האחרונה רשמנו כמספר - מטריצות 1×1 תמיד נרשמות כמספרים.

$$C=A^tA=\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d_1 & \cdots & d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1d_1 & d_1d_2 & \cdots & d_1d_n\\ d_2d_1 & d_2d_2 & \cdots & d_2d_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ d_nd_1 & d_nd_2 & \cdots & d_nd_n\end{bmatrix}\Rightarrow [C]_{ij}=d_id_j.$$

אנו רואים שהמטריצה B מקיימת: $r(B)=1, \det B=B$.

ב-C, כל שורה i היא מן הצורה $d_i\cdot\begin{bmatrix}d_1 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$, הרי שכל השורות פרופורציוניות, והשורה ה-i_0 שונה מאפס; לפיכך $r(C)=1, \det(C)=0$, והתשובה הנכונה היא א׳.

<u>תרגיל 31:</u> $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{bmatrix}$, ונתון כי למערכת $A^{17}Y=0$ יש פתרון לא טריוויאלי. זה קורה אם״ם

הדטרמיננט של A מתאפס: $\det(A^{17})=0\Leftrightarrow \det A=0\Leftrightarrow 1-2a^2=0\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}.$

<u>תרגיל 32:</u> נסמן, ונשים לב שמתקיים:

$$D_n=\begin{bmatrix}1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}, D_n=\left[\begin{array}{c|cccc}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & D_{n-1} & \\ 1 & & & & \end{array}\right]$$

נסמן גם $d_n=|D_n|$. עלינו לחשב את d_n. נפתח את d_n לפי העמודה הראשונה:

$$d_n=1\cdot d_{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot\begin{vmatrix}1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 1\end{vmatrix}=d_{n-1}+(-1)^{n-1}\quad\Rightarrow\quad d_n-d_{n-1}=(-1)^{n-1};$$

$$d_n=d_n+(-d_{n-1}+d_{n-1})+\ldots+(-d_2+d_2)+(-d_1+d_1)$$
$$=(d_n-d_{n-1})+(d_{n-1}-d_{n-2})+\ldots+(d_2-d_1)+d_1=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k=\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

<u>תרגיל 34ב:</u> נתונה המטריצה של ***Wandermonde***:

$$W(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{array}\right]_{n\times n},$$

רוצים לחשב את:

$$w(x_1,x_2,\dots,x_n)\overset{def.}{=}\left|W(x_1,x_2,\dots,x_n)\right|.$$

בהינתן $x_1,\dots,x_n\in F$, נסמן: $p_n(x)=w(x_1,\dots,x_{n-1},x)$

כלומר, אנו מציבים את המשתנה x במקום הקבוע x_n לתוך המטריצה, ומקבלים פונקציה של x.
פונקציה זו היא פולינום. נראה זאת ע״י פיתוח הדטרמיננט לפי שורה אחרונה:

$$w(x_1,\dots,x_{n-1},x)=\left|\begin{array}{cccc|c}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}\end{array}\right|=w(x_1,\dots,x_{n-1})x^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}a_i(x_1,\dots,x_{n-1})x^i$$

כאשר a_i הם דטרמיננטים מסדר $n-1$, התלויים ב-$x_1,\dots,x_{n-1}$ בלבד (כי מחשבים אותם בחלק העליון של המטריצה, שלא מופיעות בו חזקות של x). לפיכך $p_n(x)$ הוא פולינום ממעלה $n-1$ עם מקדם מוביל $w(x_1,\dots,x_{n-1})$.

כעת נשים לב, שלכל $i\le n-1$ מתקיים $p_n(x_i)=w(x_1,\dots,x_i,\dots,x_{n-1},x_i)=0$ (כי בדטרמיננט המתאים העמודה האחרונה שווה לעמודה ה-i), ומכאן שמצאנו $n-1$ שורשים ל-$p_n(x)$, ואפשר לרשום:

$$p_n(x)=w(x_1,\dots,x_{n-1})\cdot\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)=w(x_1,\dots,x_{n-1})\cdot\prod_{i<n}(x-x_i)$$

כעת, נשים לב כי: $w(x_1,x_2)=x_2-x_1$ - וזהו בסיס-האינדוקציה.

נניח, באינדוקציה, כי: $w(x_1,\dots,x_{n-1})=\prod_{i<j\le n-1}(x_j-x_i)$, ואז נקבל את שלב-המעבר:

$$w(x_1,\dots,x_n)=p_n(x_n)=w(x_1,\dots,x_{n-1})\cdot\prod_{i<n}(x_n-x_i)$$

$$=\left[\prod_{i<j\le n-1}(x_j-x_i)\right]\cdot\left[\prod_{i<n}(x_n-x_i)\right]=\prod_{i<j\le n}(x_j-x_i).\quad\blacksquare$$

<u>תרגיל 37:</u> יש לשים לב כי $\omega=\omega^4$, ולכן את הדטרמיננט הנתון ניתן לרשום כ-$w(x_1,x_2,x_3)$ (דטרמיננט ונדרמונדה - ראה תרגיל 34ב׳!!), כאשר: $x_1=1,\ x_2=\omega,\ x_3=\omega^2$.