קומבי גליון 8 ־ 104286

שניר הורדן־205689581

1. **הוכחה:** יהי $G=(V,E)$ גרף עם n קודקודים שבו ערכיות כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$.
נשתמש בעקרון שובך היונים. נסמן

$$n-pigeons$$

$$\left\{\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}+1,...,n-1\right\}-holes$$

אזי קיים תא עם 2 יונים לפחות. אז נקבל ערכיות של $\frac{n-1}{2}\times 2=(n-1)$ לפחות עבור שני קודקודים אז בהכרח קיים רכיב שקילות יחיד. אילו היו קיימים שני רכיבי קשירות אז היינו מקבלים ערכיות מקסימלית משותפת של שני הקודקודים $n-2$. סתירה לכך שמצאנו ערכיות משותפת של $n-1$ שגדולה מהמספר המקסימלי כביכול. אזי קיים רכיב קשירות אחד. ■

2. **הוכחה:** נתון גרף $G=(V,E)$. נבנה גרף $L(G)$ באופן הבא:
הקודקודים של $L(G)$ מיצגים את הצלעות של G.
שני קודקודים של $L(G)$ מחוברים בצלע אסם לשתי הצלעות שהם מייצגים בגרף G יש קודקוד משותף.
נניח G אוילריאני.
אזי ל־G קיים מסלול אוילריאני סגור וגם הערכיות של כל קודקוד היא זוגית.
תהי $e\in E$. צלע זו מחוברת בהכרח לשני קודקודים ע"פ הגדרה, $v_1,v_2\in V$.
מתקיים $deg(v_1)\wedge deg(v_2)\quad are\quad even$.
אזי

$$deg(v_1)+deg(v_2)-\underbrace{2}_{removed\quad degrees\quad of\quad connecting\quad edge}\quad is\quad even$$

לכן לפי הגדרת $L(G)$, כל קודקודי $L(G)$ הם ממעלה זוגית.
אזי $L(G)$ אוילריאני. ■

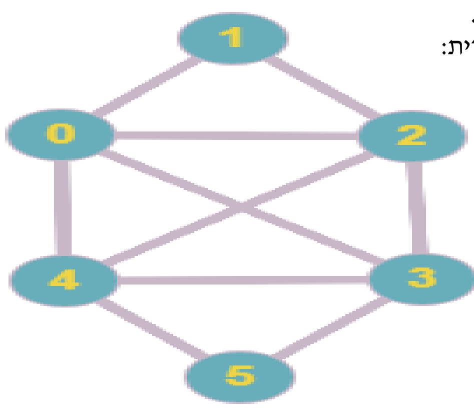
3. **הוכחה:** יהא $G=(V,E)$ גרף.
עלינו להוכיח G קיימת אוריאנטציה מאוזנת אסם כל הערכיות ב־G זוגיות.
$\Leftarrow$
נניח כי קיימת אוריאנטציה מאוזנת. אז מתקיים לכל $v\in V$ מתקיים $d_+(v)=d_-(v)$.
נסמן $x=d_+(v)$

נשים לב כי $deg(v) = d_+(v) + d_-(v) = 2x$ זה תמיד מספר זוגי.
$\Rightarrow$
נניח כי $\forall v \in V (deg(v) \quad is \quad even)$.
הגרף אינו בהכרח קשיר, אז נתבונן בכל מרכיב קשירות בנפרד.
יהא $k = (V_k, E_k)$ מרכב קישרות ארביטררי של G.
מתקיים $\forall v_k \in V_k (deg(v_k) \quad iis \quad even)$ וגם המרכיב קשיר.
אז לפי משפט קים בו מסלול אוילריאני סגור.
טענת עזר־יהי G_k גרף קשיר. אם G_k־ אוילריאני אז לגרף G_k קיימת אוריאנטציה זוגית.
הוכחת טענת העזר
נבחר קודקוד כלשהו $v_k \in V_k$ ונתחיל ונסיים בו את המסלול האוילריאני.
לפי הגדרה מסלול אוילריאני מכסה את כל כל הצלעות ב־G_k. הוא מהצורה

$$v_{k_1} e_{k_1} v_{k_2} e_{k_2} ... e_{k_n} v_{k_1}$$

נסמן כל $e_{k_{i-1}}$ שמשמאל ל־v_{k_i} בתור צלע המכוונת פנימה שלו, וכל $e_{k_{i+1}}$ בתור צלע המכוונת החוצה שלו.
אז לכל v_k מתאימים מספר כלשהו של זוגות של צלעות המכוונות פנימה והחוצה, מאחר ואנחנו לא נשארים באף קודקוד וחוזרים חזרה לקודקוד שהתחלנו ממנו.
מ.ש.ל.
לכן, בהסתמך על טענת העזר ומכך שבחרנו מרכיב קשירות כלשהו של G נסיק כי G בעל אוריאנטציה מאוזנת.
כנדרש. ■

ב.
הכיוון ההפוך אינו מתקיים.
נפריך באמצעות דוגמא נגדית:



אז נקבל קודקוד עם ערכיות 5 ב־G. הצלעות $0, 2, 3, 4, 5$ חולקות קודקוד משותף כי הצלע 3 מחוברת אליהם (פרט לעם עצמו) ישירות וקיים מסלול בין כל אחד לשני. אז זה חייב להיות קודקוד יחיד. סתירה למשפט גרף הוא אוילריאני אםם כל הערכיות זוגיות.

4.
א. ערכי p, q כך שקיים מסלול אוילרייאני סגור

$$\begin{cases} p \quad is \quad even \\ q \quad is \quad even \end{cases}$$

ב.לפי משפט, G קיים מסלול אוילריאני שאינו סגור אסם לכל הקודקודים קיימת ערכיות זוגית פרט לשניים.
ב.$p-odd$ וגם $q=2$
5. הוכחה: עלינו להוכיח כי $\forall S\subseteq A\left(|S|\leq|N\left(S\right)|\right)$.
נתון $\forall x\in A,B\left(N\left(x\right)\geq\frac{n}{2}\right)$.
<u>טענת עזר:</u> יהי $G=\left(A,B,E\right)$ גרף דו"צ נסמן ב־ψ את הערכיות המינימלית של A וב־ϕ את הערכיות המקסימלית ב־B. אזי אם $\phi\leq\psi$ אז קיים זיווג עבור A ב־G.
<u>הוכחה</u>
עלינו להוכיח $|S|\leq N\left(S\right)$ לכל תת־קבוצה $S\subseteq A$. אז נשתמש במשפט $Hall$.
תהי $S\subseteq A$.
נסמן

$$E_0-edges\quad from\quad S$$

$$E_1-edges\quad from\quad N\left(S\right)$$

אז מאחר ו־$\phi\leq\psi$ נקבל $E_1\subseteq E_0$.
אזי

$$|E_1|\leq|E_0|\Rightarrow\psi\left|S\right|\leq|E_1|\leq|E_0|\leq\phi N\left(S\right)$$

$$|S|\underbrace{\leq}_{\phi\leq\psi}\frac{\psi}{\phi}\left|S\right|\leq\left|N\left(S\right)\right|$$

כנדרש.
מ.ש.ל.
מסקנה: אם הערכויות זהות (הגרף d־רגולרי) אז קיים זיווג שלם.
נתון שהערכיות המינימלית בשני הצדדים היא <u>לפחות</u> $\frac{n}{2}$.
נשמיט צלעות מהגרף הדו־צדדי G כך שהערכויות יהיו זהות ל־A ו־B, כלומר $\frac{n}{2}$.
לפי המסקנה, קיים זיווג.
סיימנו. ■