

פתרון

לוגיקה מתמטית - תרגיל 12

1. א. כל העוצמות האינסופיות וכל העוצמות הסופיות שמתחלקות ב-3.
- הסבר: f^M מגדירה שלישיות של איברי העולם במובן הבא: לכל a בעולם קיימים b ו- c שונים זה מזה ומ- a כך ש- $f^M(a)=b$, $f^M(b)=c$ ו- $f^M(c)=a$.
- ב. נניח N ו- M שני מבנים עם עולמות מאותה העוצמה. קבוצות נציגים של השלישיות הנ"ל בשני המבנים גם מאותה העוצמה (במקרה סופי עוצמת קבוצת הנציגים היא שליש של עוצמת העולם) ולכן קיימת פונקציה g חח"ע ועל שמעבירה קבוצת נציגים של N על קבוצת נציגים של M .
- עתה נבנה הרחבה $h: W^N \rightarrow W^M$ של g באופן הבא:
- לכל נציג a מ- W^N נגדיר:
- $$h(a) := g(a) \quad h(f^N(a)) := f^M(g(a)) \quad h(f^N(f^N(a))) := f^M(f^M(g(a)))$$
- כבר מההגדרה של h לא קשה לראות ש- h מהווה איזומורפיזם בין N ל- M .
על כן לכל עוצמה κ מסעיף א, התורה היא κ -קטגורית.
- ג. התורה היא לא שלמה מכיוון שהפסוק
- $$\exists x \exists y \exists z (\neg x=y \wedge \neg x=z \wedge \neg y=z \wedge \forall w (w=x \vee w=y \vee w=z))$$
- אמיתי רק במבנה עם עולם שעוצמתו 3.
2. א. כל המודלים הם גרפים לא מכוונים (יתכן אינסופיים) שבהם לכל קודקוד יש בדיוק 2 שכנים שונים.
- ב. 3, 4 ו-5. עבור 6 כבר אין קטגוריות מכיוון שיתכן גרף שמורכב מ-2 משולשים ויתכן גרף שהוא מעגל אחד של כל ששת האיברים.
- ג. התורה היא לא שלמה. דוגמה: פסוק משאלה 1, סעיף ג.
3. ניקח מבנה M_1 עם העולם $W^{M_1} = (0,2)$ וניקח מבנה M_2 עם העולם $W^{M_2} = (0,1) \cup (1,2)$. מתורת הקבוצות ידוע שלא קיימת פונקציה חח"ע ועל בין שני העולמות שהייתה שומרת על הסדר. על כן שני המבנים אינם איזומורפיים.
4. ניקח כדוגמה סדר קווי:
- $$\forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y ((R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow x=y) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)) \wedge \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$$
- התורה הזאת היא κ -קטגורית לכל עוצמה κ סופית אך היא לא שלמה כי הפסוק $\exists x \forall y R(x,y)$ אמיתי בכל מבנה עם עולם סופי, אבל לא אמיתי במבנה M בו $W^M = (-\infty, \infty)$ ו- R^M הוא הסדר הרגיל על הממשיים.

5. א. $M_{1,k}$ עם $W^{M1,k}$ – מספרים שלמים אי-זוגיים קטנים מ- k
 $M_{2,l}$ עם $W^{M2,l}$ – מספרים שלמים זוגיים קטנים מ- l
 $(k, l \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\})$
 $N_{k,l}$ עם $W^{Nk,l} = W^{M1,k} \cup W^{M2,l}$

התת-מבנים האלמנטריים הם: $N_{\infty,\infty}$ ($M=$), $M_{1,\infty}$ ו- $M_{2,\infty}$.
 ב. יש בסך הכל 5 מחלקות שקילות של איזומורפיזם:

$N_{\infty,\infty}$ ($M=$)
 $M_{1,\infty}$ ו- $M_{2,\infty}$
 $N_{k,l}$ עבור $k, l < \infty$
 $M_{1,k}$, $M_{2,l}$ עבור $k, l < \infty$
 $N_{\infty,l}$ ו- $N_{k,\infty}$ עבור $k, l < \infty$