חזרה על טורי חזקות

נניח $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

1. רדיוס ההתכנסות הוא המספר $R>0$ עבורו הטור מתכנס עבור $|x|<R$ ומתבדר עבור $|x|>R$.
2. אפשר לגזור טור חזקות אבר אבר, כלומר

$$y'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$
$$y''(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)''=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)''=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$$

ובנוסף, רדיוס ההתכנסות של הנגזרת שווה לרדיוס ההתכנסות של הטור של $y(x)$.

3. טורי חזקות הם שווים אם ורק אם כל המקדמים שלהם שווים, כלומר

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \iff a_n=b_n \quad \forall n\geq 0$$

4. הזזת אינדקסים:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-k}x^{n-k}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=-k}^{\infty}a_{n+k}x^{n+k}$$

כאשר השוויונות האחרונים הם לכל k שלם, כלומר גם k שלם שלילי. במילים: אם אנו מזיזים את איפה שהסכום מתחיל ב־k קדימה , אנו מזיזים את האינדקס בתוך הסכום k אחורה. והפוך.

5. נשתמש בנוסחא הבאה כדי לקשר בין המקדמים לבין הנגזרות של הפונקציה:

$$a_k=\frac{y^{(k)}(0)}{k!} \qquad k!a_k=y^{(k)}(0)$$

נוסחא זו באה מפולינום טיילור, או מגזירה והצבה של $x=0$.

פתרון בעזרת טורים

נתונה המד"ר

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

כאשר נתון כי למקדמים יש טורי חזקות עם רדיוס ההתכנסות $R > 0$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$
$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

אזי לכל פתרון $y(x)$ של המד"ר יש טור חזקות $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ עם רדיוס התכנסות לפחות R. אנו למעשה מחפשים את המקדמים של טור חזקות זה, כלומר את a_n עבור $n \geq 0$. שימו לב כי $y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$ מה שאומר שבעצם שני המקדמים הראשונים נקבעים ע"י תנאי התחלה, אם זה נתון בנקודה $x = 0$. את יתר המקדמים מוצאים ע"י הצבת הטור חזקות לתוך המד"ר. בשביל זה נצטרך כמה נוסחאות שימושיות, שמסתמכות על גזירה אבר אבר והזזת אינדקסים:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

תרגיל: $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

פתרון: נפתור לפי טורי חזקות. כל פתרון הוא מהצורה $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ וע"י הצבה למד"ר נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n\Big)x^n = 0$$
$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad n \geq 0$$

המעבר בין השורה השניה לשלישית מתבצע ע"י השוואות המקדמים של שני הטורים (כאשר אנו זוכרים כי הטור חזקות של אפס הוא טור חזקות בו כל המקדמים הם אפס). בנוסף, שימו לב כי פה אנו עוצרים בשאלה. יחס הרקורסיה בין המקדמים הוא מה שחשוב לנו. לא בהכרח כסוף תרגיל (למרות שבתרגיל הזה זה הסוף) אלא כי זה הכלי המרכזי שלנו להמשיך ולפתור, אם צריך. למשל כמו בתרגיל הבא.

תרגיל: מהו $y(\frac{1}{2})$ של הפתרון $y(x)$ של

$$y'' - 2xy' + 10y = 0$$
$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$$

פתרון: זהו התרגיל קודם עבור $\lambda = 10$. נוסחת הרקורסיה המתקבלת היא

$$a_{n+2} = \frac{2n-10}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad n \geq 0$$

ולכן אנו רואים כי המקדמים של החזקות הזוגיות תלויים אך ורק במקדם $a_0 = y(0) = 0$ ולכן כולם אפס, כלומר $a_{2n} = c \cdot a_0 = y(0) = 0 \quad n \geq 0$
ולכן נשאר לנו למצוא את המקדמים של החזקות האי־זוגיות

$$a_3 = \frac{2-10}{(1+1)(1+2)}a_1 = -\frac{4}{3}a_1 = -\frac{4}{3}y'(0) = -4$$
$$a_5 = \frac{6-10}{(3+1)(3+2)}a_3 = \frac{4}{5}$$
$$a_7 = \frac{10-10}{(5+1)(5+2)}a_5 = 0 \longrightarrow a_{2k+1} = 0 \quad k \geq 3$$

ולכן הפתרון הוא $y(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 = 3x - 4x^3 + \frac{4}{5}x^5$

וחישוב פשוט נותן ש־ $y(\frac{1}{2}) = 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{41}{40}$

תרגיל:

$$y'' + \sin xy' + \cos xy = \sin x$$
$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

מהו a_3?

פתרון: נשים לב כי $a_0 = y(0) = 0$ ו־$a_1 = y'(0) = 1$. נזכר כי טורי החזקות של $\cos x, \sin x$ הם

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

כאשר אנו עוצרים בחזקה השלישית כי חזקות יותר גבוהות לא יעזרו לנו בחיפוש a_3.
נרשום את טורי החזקות של $y(x)$ ונגזרותיו

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$
$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$
$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots$$

כאשר שוב אנו עוצרים בחזקה השלישית כיוון שחזקות גבוהות יותר לא יתרמו. נציב למד"ר

$$\begin{aligned}
& \big(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots\big) + \\
+ \quad & \big(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\big)\big(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots\big) + \\
+ \quad & \big(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\big) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \\
& \big(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots\big) + \\
+ \quad & \big(a_1 x + 2a_2 x^2 + (3a_3 - \frac{1}{3!}a_1)x^3 + \dots\big) + \\
+ \quad & \big(a_0 + a_1 x + (a_2 - \frac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 - \frac{1}{2!}a_1)x^3 + \dots\big) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

כעת נשווה מקדמים כאשר נתחיל מהמקדם החופשי, אח"כ המקדם של x ואח"כ המקדם של x^2 וכן הלאה עד שנקבל מה שנרצה. השוואת המקדמים החופשיים נותן לנו

$$2a_2 + a_0 = 0 \longrightarrow a_2 = 0$$

השוואת המקדמים של x נותן לנו

$$6a_3 + a_1 + a_1 = 1 \longrightarrow a_3 = -\frac{1}{6}$$

וסיימנו.

תרגיל:

$$\begin{aligned} &y'' + x^4 y = 0 \\ &y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \ . \end{aligned}$$

איזה מהבאים מתקיים:

1. $a_1 = 0$ וגם $a_k = \frac{(-1)^k}{k!6^k}$ עבור $k \geq 2$.
2. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ וגם $a_6 = \frac{1}{30}$ וגם $a_7 = \frac{1}{210}$.
3. יש טור חזקות המתכנס ל־$y(x^{\frac{1}{6}})$ על הציר האי שלילי .
4. $y(x) - 1$ היא פונקציה איזוגית.

פתרון: נשים לב כי $a_0 = y(0) = 1, \quad a_1 = y'(0) = 0$.
נרשום את הפתרון ונגזרותיו הרלבנטיות

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

נציב למד"ר

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+4} = 0 \\ &\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} x^n = 0 \end{aligned}$$

שימו לב כי איננו יכולים לאחד את הסכומים כיוון שאחד מתחיל ב־0 והשני ב־4. לכן נרשום את ארבעת המחוברים הראשונים של הסכום שמתחיל ב־0 ואז נסכם את יתר האברים

$$\left(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\right)+\sum_{n=4}^{\infty}a_{n-4}x^n=0$$

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_{n-4}\Big)x^n=0$$

כעת נשווה מקדמים ונקבל

$$\begin{aligned}&a_2=a_3=a_4=a_5=0\\&a_{n+2}=-\frac{a_{n-4}}{(n+2)(n+1)}\quad n\geq 4\\&a_{n+6}=-\frac{a_n}{(n+6)(n+5)}\quad n\geq 0\end{aligned}$$

ואנו רואים שכיוון ש־$a_1=y'(0)=0$ אז גם $a_7=0$ וגם $a_{13}=0$ וכן הלאה $a_{6n+1}=0$ לכל $n\geq 1$. באותו האופן, כיוון ש־$a_2=a_3=a_4=a_5=0$ נובע שכל המקדמים, חוץ ממקדמים של חזקות המתחלקות ב־6, שווים לאפס. כלומר

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{6n}x^{6n}$$

ולכן 3 היא הנכונה כי עכשיו, לכל $0\leq x$

$$y\big(x^{\frac{1}{6}}\big)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{6n}\big(x^{\frac{1}{6}}\big)^{6n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{6n}x^n.$$

עם זאת, בואו נפיל את שאר האפשרויות בעזרת המידע שקיבלנו:

1 נופל מכיוון ש־$a_2=0$.

2 נופל מכיוון ש־$a_7=0$.

4 נופל מכיוון ש־

$$1-y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{6n}x^{6n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}a_{6n}x^{6n}$$

וזו פונקציה זוגית.

תרגיל:

$$y'' - 2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2$$
$$y(0) = 3 \quad y'(0) = 12 \ .$$

פתרון: נציב את טור החזקות הרגיל לתוך המד"ר

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -2na_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_nx^{n+1} = 2 + 2x + x^2$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -2(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n = 2 + 2x + x^2$$
$$2a_2 + (6a_3 + 4a_0)x + (12a_4 - 2a_1 + 4a_1)x^2 +$$
$$\sum_{n=3}^{\infty}\big((n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2(n-1)a_{n-1}x^n + 4a_{n-1}\big)x^n = 2 + 2x + x^2$$

כאשר רשמנו בצד שמאל של המשוואה בנפרד את החזקות עד חזקה שנייה כדי שיתאים לצד ימין של המד"ר שם מופיע גם עד חזקה שנייה. נזכר בתנאי ההתחלה ונשווה מקדמים

$$a_0 = y(0) = 3 \quad a_1 = y'(0) = 12$$
$$x^0 : \quad 2a_2 = 2 \to a_2 = 1$$
$$x^1 : \quad 6a_3 + 4a_0 = 2 \to a_3 = -\frac{5}{3}$$
$$x^2 : \quad 12a_4 - 2a_1 + 4a_1 = 1 \to a_4 = -\frac{23}{12}$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2(n-1)a_{n-1}x^n + 4a_{n-1} = 0 \quad n \geq 3$$
$$a_{n+2} = \frac{2n-6}{(n+1)(n+2)}a_{n-1} \quad n \geq 3$$
$$a_{n+3} = \frac{2(n+1)-6}{(n+2)(n+3)}a_n = \frac{2n-4}{(n+2)(n+3)}a_n \quad n \geq 2$$

ופה אנו עוצרים.