הרצאה 9

משפט קושי

תהיי a_n סדרה. a_n נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש $|a_n - a_m| < \varepsilon$ לכל n,m>N.

כל סדרת קושי היא חסומה.

משפט- מתכנסת אזי קושי

אם a_n מתכנסת <== a_n סדרת קושי.

הערה:

לא מספיק לדרוש $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. דוגמא:

$$1,2,2+\tfrac{1}{2},3,3+\tfrac{1}{3},3+\tfrac{2}{3},4,4+\tfrac{1}{4},.....,k,k+\tfrac{1}{k},k+\tfrac{2}{k},.....,k+1,k+1+\tfrac{1}{k+1},....$$

המרחק בין האיברים שואף ל-0. אבל הסדרה לא מתכנסת לגבול סופי.

הוכחה ==>:

a_n מתכנסת. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכן לכל n,m>N:

$$|a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| \le |a_m - L| + |a_n - L| < \varepsilon$$

טענת עזר: כל סדרת קושי היא חסומה.

יהי $\varepsilon = 1$. ניקח איבר a_n עם אינדקס שגדול מ- N ושמתאים ל $\varepsilon = 1$. אזי כל האיברים אחרי a_n (אינדקס $m > n$) מקיימים $|a_m - a_n| < 1$ כלומר: $a_n - 1 < a_m < a_n + 1$.

נגדיר: $M = \max\{|a_1|,|a_2|,......,|a_n|,|a_{n-1}|,|a_{n+1}|\}$ ואז $|a_k| \le M$ לכל K.

הוכחה <==:

תהיי a_n סדרת קושי.

לפי טענת העזר היא חסומה.

לפי BW יש תת סדרה מתכנסת, נסמן גבולה ב L.

נראה כי $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

יהי $\varepsilon > 0$. לפי קושי קיים N כך שלכל n,m>N מתקיים $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. ניקח $m > N$ שמקיים $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז לכל $n > m$ מתקיים:

$$|a_n - L| = |a_n - a_m + a_m - L| \le |a_n - a_m| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ניסוח שקול של קושי:

a_n סדרת קושי <==> לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ ולכל P טבעי מתקיים: $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$

דוגמא 1:

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ נראה שהיא מתכנסת.

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\sum^{n+p}-\sum^{n}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+.....+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\Rightarrow\quad <\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+......+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$\Rightarrow\quad =\left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+.....+\left(\cancel{\frac{1}{n+p-1}}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$\Rightarrow\quad =\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow N=\frac{1}{\varepsilon}$$

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $N=\frac{1}{\varepsilon}$ אז לכל $n>N$ ולכל $p\in\mathbb{N}$:...

הלמה של היינה-בורל

הגדרות

תהיי $\sum$ כיסוי פתוח של קטע סגור. אזי יש ל $\sum$ תת כיסוי סופי.

הערה:

$\sum=\{\left(\frac{1}{n},2\right)\}$ זה כיסוי של [0,1], אבל אין לו תת כיסוי סופי.

$\sum=\{[1,0],[\frac{1}{n},1]\}$ זה כיסוי של [1,0] אבל אין לו תת כיסוי סופי.

הוכחת היינה בורל

נניח בשלילה שאין תת כיסוי סופי. נסמן את הקטע הסגור $[a_0,b_0]$. נחצה אותו לשניים. לפחות לחצי אחד אין תת כיסוי סופי, נסמנו $[a_1,b_1]$ וכו. נקבל סדרה של קטעים סגורים $[a_n,b_n]$ שאין להם תת כיסוי סופי. בנוסף מתקיימים התנאים של הלמה של קנטור.

לכן יש נקודה יחידה C כך ש: $c\in[a_n,b_n],\forall n$.

היות ש $\sum$ כיסוי של $[a_0,b_0]$, יש איבר ב- $\sum$, כלומר קטע פתוח שנסמן כ-I כך ש $c\in I$. לכן יש סביבה $(c-\lambda),(c+\lambda)$ כך ש: $(c-\lambda,c+\lambda)\subseteq I$.

$\frac{b_0-a_0}{2^n}<\lambda$ ($[a_n-b_n]$=2) . ואז $c\in[a_n,b_n]\subseteq(c-\lambda,c+\lambda)\subseteq I$. זו סתירה כי לפי הבנייה ל $[a_n,b_n]$ אין תת כיסוי סופי, אבל גילינו שיש לו תת כיסוי עם איבר יחיד I!.

הוכחת BW בעזרת היינה בורל

$a\le a_n\le b$. נניח בשלילה שאין תת סדרה מתכנסת. בפרט אין ל a_n גבולות חלקיים. לכן לכל $x\in[a,b]$ יש סביבה I_x שמכילה רק מספר סופי של איברי a_n. $\sum$ יהיה אוסף כל ה-I_x-ים. זהו כיסוי פתוח של כל הקטע. לפי היינה-בורל, יש תת כיסוי סופי.

זו סתירה כי בכל I_x יש מס' סופי של אבירים של a_n!

הרצאה 10

הגדרה לחזקות ממשיים

לכל $0 < x \ni \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $0 < y \ni \mathbb{R}$ יחיד כך ש- $y^n = x$ (y מסומן $\sqrt[n]{x}$ או $x^{\frac{1}{n}}$).

משפט- תזכורת לקושי

אם a_n מתכנסת <==> a_n סדרת קושי.

הערה: המרחק בין האיברים שואף ל-0. אבל הסדרה לא מתכנסת לגבול סופי.

הוכחת יחידות:

נניח בשלילה שיש $y_1 \neq y_2$ כך ש $y_1^n = y_2^n = x$ נניח ש $y_1 < y_2$ אבל אז $y_1^n < y_2^n$. סתירה.

הוכחת קיום:

תהיי E קבוצת כל הממשיים החיוביים t שמקיימים $t^n < x$.

E אינה ריקה:

$t = \frac{x}{1+x} \ni E$, כי $0<t<1$. ולכן $t^n < t < x$.

E חסומה מלמעלה:

יהי $t_0 = 1 + x$. אם $t > t_0$ אז $t^n > t > t_0 > x$ ולכן $t \notin E$ ולכן t_0 חסם מלמעלה.

<== יש ל E סופרמום. נקרא לו y.

נראה כי $y^n = x$. נראה שלא ייתכן ש $y^n > x$ ולא ייתכן $y^n < x$.

מקרה 1: נניח $y^n < x$. נבחר $0<h<1$ כך ש $h < \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}$.

תזכורת נוסחת הבינום: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$(y+h)^n = y^n + \binom{n}{1} y^{n-1} h + \binom{n}{2} y^{n-2} h^2 + ... + \binom{n}{n} h^n$$
$$\Rightarrow \leq y^n + h[\binom{n}{1} y^{n-1} + \binom{n}{2} y^{n-2} + ...\binom{n}{n}]$$
$$\Rightarrow = y^n + h[(1+y)^n - y^n]$$
$$\Rightarrow < y^n + (x - y^n) = x$$

קיבלנו כי $x > (y+h)^n$ ולכן $y + h \ni E$. סתירה.

מקרה 2: נניח $y^n > x$ נבחר 0<k<1 כך ש y>k ו $k<\dfrac{y^n-x}{(1+y)^n+y^n}$. אזי, אם $t \ge y-k$:

$$\begin{aligned} t^n &\ge (y-k)^n = y^n - \binom{n}{1}y^{n-1}k + \binom{n}{2}y^{n-2}k^2 + \dots + (-1)^n\binom{n}{n}k^n \\ &= y^n - k[\binom{n}{1}y^{n-1} - \binom{n}{2}y^{n-2}k + \dots - (-1)^n\binom{n}{n}k^{n-1}] \\ &\ge y^n - k[\binom{n}{1}y^{n-1} + \binom{n}{2}y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}] \\ &= y^n - k\left((1+y)^n - y^n\right) > y^n - (y^n - x) = x \end{aligned}$$

קיבלנו כי $t \notin E$ <== y-k חסם מלמעלה (כי כל מי שגדול ממנו לא בקבוצה). זו סתירה כי y סופרמום.

עכשיו נוכל להגדיר חזקות רציונליות:

עבור a>0 ועבור $q=\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. נגדיר $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

הערה: נוכל תמיד לקחת n חיובי. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ עבור m טבעי.

מתקיימים הכללים המוכרים של חזקות טבעיות, למשל:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$
3. $a^p b^p = (ab)^p$
4. $a > b > 0, p > 0 \Rightarrow a^p > b^p$
5. $a > 1, p > q \Rightarrow a^p > a^q$
6. $1 > a > 0, p > q \Rightarrow a^p < a^q$

תרגיל עזר

$$\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mn} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = a^m$$
$$\Rightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

הוכחת 1: $\left(a^p a^q = a^{p+q}\right)$

צ"ל: $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{md+cn}{nd}}$. כלומר צ"ל $(a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{c}{d}})^{nd} = a^{md+cn}$:

$$(a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{c}{d}})^{nd} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nd} \left(a^{\frac{c}{d}}\right)^{nd} = \left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)^d \left(\left(a^{\frac{c}{d}}\right)^d\right)^n$$

על פי המסקנת עזר:

$$\left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)^d \left(\left(a^{\frac{c}{d}}\right)^d\right)^n = \left(a^m\right)^d \left(a^c\right)^n = a^{md+cn}$$

עכשיו יודעים מה זה $\pi^{\frac{3}{2}}$. אבל מה זה $\pi^{\sqrt{2}}$?

עכשיו יהי $0<a\neq 1$. ו $x\in\mathbb{R}$. נרצה להגדיר a^x .

- נניח $0<X$ (כי עבור $0>X$ נגדיר $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$).
- נניח $a>1$ (כי עבור $0<a<1$ נגדיר $a^x=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$).

תהיי X_n סדרה עולה של רציונליים כך ש $\lim_{n\to\infty}X_n=x$. למשל נוכל לקחת $X_n=\alpha.\alpha_1\alpha_2......\alpha_n$

כאשר $\alpha.\alpha_1\alpha_2......\alpha_n$ הוא הפיתוח העשרוני של X_n .

כיוון ש X_n סדרה עולה, גם a^{X_n} סדרה עולה (לפי 5).

אם $x<q\in\mathbb{Q}$ אז לכל n, $a^{X_n}<a^q$ ולכן a^{X_n} חסומה מלמעלה.

לכן a^{X_n} מתכנסת ונוכל להגדיר $a^X=\lim_{n\to\infty}a^{X_n}$ צריך להוכיח שזה מוגדר היטב

צ"ל שאם $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ סדרה עולה של רציונליים, אז $\lim_{n\to\infty}a^{X_n}=\lim_{n\to\infty}a^{y_n}$.

טענת עזר: אם $t_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\mathbb{Q}\ni t_n$ אז $a^{t_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

נראה עבור a>1.

הוכחה:

יהי $\varepsilon>0$. ראינו $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ וגם $a^{\frac{1}{-n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

לכן קיים K כך ש $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{k}}<a^{\frac{1}{k}}<1+\varepsilon$ נבחר N כך שלכל n>N מתקיים $-\frac{1}{k}<t_n<\frac{1}{k}$ ואז :

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{k}}<a^{t_n}<a^{\frac{1}{k}}<1+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$a^{t_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

מש"ל.

נראה ש a_n מוגדר היטב.

אם $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ וגם $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ אז : $t_n=y_n-x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x-x=0$ לכן :

$$\frac{a^{y_n}}{a^{x_n}}=a^{y_n-x_n}=a^{t_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$
$$\Downarrow$$
$$a^{y_n}=\frac{a^{y_n}}{a^{x_n}}a^{x_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}a^x$$

זהו מקרה מוגדר היטב. ויתר על כן x_n לא חייבת להיות עולה $a^x=\lim_{n\to\infty}a^{x_n}$ כאשר $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ $\mathbb{Q}\ni$.

משפט- חוקי חזקות: $x, y \in \mathbb{Q}$ $\qquad b, a > 0,$

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. אם $b > a > 0$ אז:
   - אם $x > 0$ אז $a^x < b^x$
   - אם $x < 0$ אז $a^x > b^x$
5. אם $x < y$ אז:
   - אם $a > 0$ אז $a^x < a^y$
   - אם $0 < a < 1$ אז $a^x > a^y$
6. אם $\mathbb{R} \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ אז $a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^x$
7. אם $0 < a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ אז ${a_n}^x \xrightarrow[n\to\infty]{} a^x$
8. אם $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אז:
   - אם $a > 0$ אז $a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
   - אם $0 < a < 1$ אז $a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
9. אם $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ אז:
   - אם $a > 0$ אז $a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   - אם $0 < a < 1$ אז $a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

הוכחת 1:

נבחר $\mathbb{Q} \ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \;\&\; \mathbb{Q} \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

אזי $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$

$$a^x a^y = \left(\lim_{n\to\infty} a^{x_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} a^{y_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a^{x_n} a^{y_n}\right) =$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} = a^{x+y}$$

הוכחת 5: עבור $a>1$:

יהי $y>x$, ניקח $\mathbb{Q} \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ עולה, $\mathbb{Q} \ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ יורדת. כך ש $x < t < s < y$ $\qquad t, s \in \mathbb{Q},$

מכללי חזקות רציונליות: $(a>1)$

- לכל n $S < y_n \Rightarrow a^s < a^{y_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^y \geq a^s$
- לכל $t > x_n \Rightarrow a^t > a^{x_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x \leq a^t$
- $a^t < a^s$

מסקנה: $a^y \geq a^s > a^t \geq a^x$.

הוכחת 6:

לפי 5 שהוכחנו, טענת העזר נכונה גם עבור $t_n \in \mathbb{R}$. לכן אם $x_n \in \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ אז :

$$a^{x_n} = \underset{\substack{\downarrow \\ a^x}}{a^x} \bullet \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{a^{x_n - x}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^x$$

הרצאה 11

טופולוגיה בממשיים ($\mathbb{R}$)

הגדרה

תהיי $E \subseteq \mathbb{R}$. נקודה $a \in \mathbb{R}$ תיקרא נקודת הצטברות (או גבול) של E אם:

כל סביבה של a מכילה לפחות נקודה אחת $a \neq b \in E$.

שקול: כל סביבה נקובה של a מכילה נקודה מ-E.

שקול: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $b \in E$ כך ש- $0 < |b-a| < \varepsilon$.

שקול: לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $b \in E$ כך ש- $b \neq a, a-\varepsilon < b < a+\varepsilon$

הגדרה- נקודה מבודדת

תהיי $E \subseteq \mathbb{R}$. $a \in E$ תיקרא נקודה מבודדת אם קיימת סביבה נקובה של a שאינה מכילה אף נקודה מ-E.

הערה: $a \in E$ מבודדת <==> a לא נקודת הצטברות.

דוגמאות:

1. $E=(0,1)$ - כל נקי היא נקי הצטברות ואוסף כל נקודות ההצטברות של E הוא הקטע $[0,1]$.
2. $E=\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ - כל נקי E הן מבודדות. ל-E יש נקודת הצטברות אחת, שהיא 0.

תרגיל לבית

1. הוכח כי אם a נקודת הצטברות של E אז קיימת סדרה $a \neq a_n \in E$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
2. (משפט BW) אם $E \subseteq \mathbb{R}$ אינסופית וחסומה, אז יש ל-E נקודת הצטברות.

סימון: את אוסף נקודות ההצטברות של E נסמן ע"י E'.

הגדרה- קבוצה פתוחה וסגורה

E תיקרא סגורה אם $E' \subseteq E$ (כלומר E מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה).

E תיקרא פתוחה אם לכל $a \in E$ יש סביבה המוכלת ב-E (כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $E \supseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, נקודה a כזו נקראת נקודה פנימית).

דוגמאות

1. $E=[a,b]$ - סגורה.
2. $E=(a,b)$ - פתוחה.
3. $E=(a,b]$ - לא סגורה (כי a נקודת הצטברות של שייכת ל-E) ולא פתוחה
4. $E=\mathbb{R}$ - פתוחה וסגורה.
5. $E=\varnothing$ - פתוחה וסגורה.

קבוצה ב- $\mathbb{R}$ איננה דלת

6. E קבוצה סופית- סגורה (אין לה נקי הצטברות ולכן E' ריקה ולכן מוכלת בE)
7. E קבוצה דיסקרטית (כל נקי היא מבודדת)- E לא בהכרח סגורה (דוגמה: $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$).
8. סדרה מתכנסת בתוספת הגבול שלה- סגורה.
9. $E=\mathbb{Z} \setminus E=\mathbb{N}$ - סגורה.
10. $E=\mathbb{Q}$ - לא פתוחה ולא סגורה.

משפט- קבוצה ומשלים לה

קבוצה היא סגורה <==> המשלים ($E^c = \mathbb{R} \setminus E$) שלה הוא קבוצה פתוחה.

ניסוחים שקולים :

1. E סגורה <==> E^c פתוחה
2. E לא סגורה <==> E^c לא פתוחה
3. A^c לא סגורה <==> A לא פתוחה

הוכחה 3

A לא פתוחה<==> קיימת $a \in A$ שאינה נקודה פנימית

<== קיימת $a \in A$ שאין לה סביבה שמוכלת ב-A

<== קיימת $a \in A$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \notin A$ כך ש- $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

<== קיימת $a \in A$ כך ש-a נקודת הצטברות של A^c .

<== A^c לא סגורה.

הגדרה / סימון לסגור : $\overline{E} = E \bigcup E'$ נקרא הסגור של E.

משפטים עבור טופולוגיה

1. $\overline{E}$ סגורה.
2. E סגורה <==> $E=\overline{E}$
3. $A\subseteq E$ <== $\overline{A}\subseteq\overline{E}$
4. $\overline{E}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את E.

הוכחת 4

לפי 1- $\overline{E}$ סגורה. לפי הגדרה היא מכילה את E.

תהיי F סגורה שמכילה את E. נראה ש- $\overline{E}\subseteq F$.

לקחנו $E\subseteq F$. לפי 3- $\overline{E}\subseteq\overline{F}$, לפי 2- $\overline{F}=F$ כי F סגורה, ולכן $\overline{E}\subseteq F$.

משפטים נוספים עבור טופולוגיה

1. איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
2. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
3. חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
4. איחוד סופי של סגורות הוא קבוצה סגורה.

הוכחת 1

יהיו E_i פתוחות. נסמן $E=\bigcup E_i$. נראה ש-E פתוחה.

תהיי $x\in E$. יהי i כך ש $x\in E_i$. קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $x\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$, אבל $E_i\subseteq E$ ולכן יש ל-x סביבה שמוכלת ב-E.

הוכחת 2

יהיו E_i פתוחות (אוסף סופי). נסמן $E=\bigcap_{i=1}^{n}E_i$. נראה ש-E פתוחה.

תהיי $x\in E$. אזי $x\in E_i$ לכל i. לכן קיימים ε_i כך שלכל i מתקיים $x\in(x-\varepsilon_i,x+\varepsilon_i)\subseteq E_i$. נגדיר $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i\}$ ואז $x\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq(x-\varepsilon_i,x+\varepsilon_i)$ לכל i. לכן יש ל-x סביבה המוכלת ב-E.

הערה : חיתוך כלשהו (לא בהכרח סופי) של פתוחות הוא לא בהכרח פתוחה.

דוגמא : $E_n=\left(-1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$, $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=[-1,1]$.

הוכחת 3

יהיו E_i סגורות. נסמן $E=\bigcap E_i$. נראה ש-E סגורה.

E_i סגורות <== E_i^c פתוחות <== (לפי 1) $\bigcup\left(E_i^c\right)$ פתוחה <== (לפי דה מורגן) $\left(\bigcap E_i\right)^c$ פתוחה<== $\bigcap E_i$ סגורה <== E סגורה.

כללי דה מורגן

איחוד של משלימים = המשלים של החיתוך ($\left(A\bigcap B\right)^c = A^c \bigcup B^c$).

חיתוך של משלימים = המשלים של האיחוד ($\left(A\bigcup B\right)^c = A^c \bigcap B^c$).

הגדרה- נקודות פנימיות

אוסף הנקודות הפנימיות של A מסומן A° ונקרא הפנים של A.

משפטים עבור נקודות פנימיות

1. A° פתוחה.
2. A פתוחה <==> $A = A^\circ$.
3. אם $A \subseteq B$ <== $A^\circ \subseteq B^\circ$.
4. A° היא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר שמוכלת ב-A.

תרגיל

1. הלמה של היינה בורל: E סגורה וחסומה. אזי לכל כיסוי של E ע"י קבוצות פתוחות יש תת כיסוי סופי.
2. הלמה של קנטור: E_i סגורות וחסומות ומקיימות $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots$ <== $\bigcap E_i \neq \varnothing$.

הרצאה 12

פונקציות

הגדרה

בהינתן 2 קבוצות D ו-E, פונקציה היא כלל המתאים לכל איבר מ-D איבר יחיד ב-E.

סימון: $f:D\longrightarrow E$

טווח, כלל העתקה, תחום

אצלנו, בדר"כ $D\subseteq\mathbb{R},E\subseteq\mathbb{R}$. נתון בדר"כ ע"י נוסחה $f(x)=y$.

$x\in D$ מקור, $y\in E$ תמונה

$f(D)\subseteq E$ התמונה של f.

<u>הערה:</u>

סדרה היא פונקציה. $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ כך ש: $f(n)=a_n$.

דוגמאות

1. $f(x)=x+2$ (גרף של f זה אוסף הנקי' (x,y) שמקיימות $y=f(x)$).
   פונקציה זו מיוצגת ע"י גרף של קו ישר. תחום הפונקציה הוא x לכל x ולכל y
2. $f(x)=x^2$.
   $D=\mathbb{R},\ E=\mathbb{R},\ f(D)=\mathbb{R}_+$

2'. $f(x)=x^2$

$D=\mathbb{R}_+,\ E=\mathbb{R}_+$ (הגרף ייראה שונה).

3. $f(x)=|x|$
4. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$
   תיראה כקו רציף על 0 מצד שמאל, ופרבולה עולה מ-0 מצד ימין.
5. $f(x)=[x]$
   $f(D)=\mathbb{Z}$
6. $f(x)=\sin x$
7. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ (פונק' דיריכלה).

הגדרה למונוטוניות

f מונוטונית בתחום D:

- $x_1<x_2\Leftarrow f(x_1)<f(x_2)$ עולה ממש.
- $x_1<x_2\Leftarrow f(x_1)\le f(x_2)$ עולה.
- $x_1<x_2\Leftarrow f(x_1)>f(x_2)$ יורדת ממש.

- $x_1 < x_2 \Leftarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ יורדת.

דוגמאות:

1. $\sin x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ עולה ממש.
2. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ עולה.

פונקציה זוגית:

f נקראת פונקציה זוגית אם לכל $x\in D$, $f(x)=f(-x)$

דוגמאות:

1. $\cos x$
2. $f(x)=|x|$
3. $f(x)=x^2$

פונקציה אי זוגית

f נקראת אי זוגית אם לכל $x\in D$, $-f(x)=f(-x)$

דוגמאות:

1. $f(x)=\sin x$
2. $f(x)=x^3$
3. $f(x)=\tan x$

הגדרה- מחזורית

f תיקרא מחזורית אם קיים T כך ש- $\forall x$,$f(x+T)=f(x)$.

דוגמאות:

1. $f(x)=\sin x$, $T=2\pi$.

הגדרה- חסומה

f נקראת חסומה מלמעלה אם $\forall x,\ f(x)\leq M$.

f נקראת חסומה מלמטה אם $\forall x,\ f(x)\geq m$.

f נקראת חסומה אם היא חסומה מלמטה וגם מלמעלה .

טענה- חסומה (ליפשיצית)

f חסומה <==> קיים k כך ש- $|f(x)|\leq k$

דוגמאות:

1. $0\leq|\sin x|\leq 1,\ \forall x$ - ולכן חסומה.

הגדרה- סופרמום ואינפימום

תהיי $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$. נגדיר:

$$\sup f=\sup\left\{f(x)\,|\,x\in D\right\}$$

$$\inf f=\inf\left\{f(x)\,|\,x\in D\right\}$$

דוגמאות:

1. $f(x)=\arctan x$ - הsup שלה הוא $\frac{\pi}{2}$ (אסימפטוטה)

פעולות על פונקציות

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
2. $(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},(g\neq 0)$
4. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ - נקרא הרכבה.

דוגמאות:

$$f(x)=\frac{1}{x},g(x)=\sin x$$

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\sin x}$$

$$(g\circ f)(x)=\sin\tfrac{1}{x}$$

דרך נוספת לתאר פונקציות:

- ייתכנו x-ים רבים שנשלחים לאותו y. למשל $\sin 0=\sin\pi$
- ייתכן y שאינו תמונה של אף x. למשל $\sin(\ \ )\neq 2$
- **אסור** שיהיה x שנשלח לy-ים שונים.
- **אסור** שיהיה x שלא נשלח ל-y ($x\in D$ ללא תמונה).

הגדרה- פונקציה על

$f:D\longrightarrow E$ נקראת על E אם לכל $y\in E$ קיים $x\in D$ כך ש- $f(x)=y$.

דוגמאות:

$\sin x$ היא לא על $\mathbb{R}$

$\sin x$ היא על $[-1,1]$

הגדרה- פונקציה חח"ע

$f:D\longrightarrow E$ נקראת חד-חד-ערכית (חח"ע) אם:

$x_1\neq x_2 \Leftarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

שקול: $x_1=x_2 \Leftarrow f(x_1)=f(x_2)$

דוגמאות

1. $\sin x$ חח"ע בתחום $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

משפט- מונוטונית ממש אז חח"ע

f מונוטונית ממש בתחום D <== f חח"ע ב-D.

הוכחה- לבד.

הגדרה- הפיכה

$f:D\longrightarrow E$ נקראת הפיכה אם קיימת $f^{-1}:E\longrightarrow D$ המקיימת $f^{-1}(f(x))=x$ וגם $f(f^{-1}(y))=y$.

משפט- הפיכה אזי חח"ע ועל

$f:D\longrightarrow E$ הפיכה <==> f חח"ע ועל E.

הוכחה <==:

נתון כי f הפיכה, צ"ל חח"ע ועל.

נראה כל E: ניקח $y\in E$ ונמצא $x\in D$ כך ש- $f(x)=y$. ואמנם x יהיה פשוט $f^{-1}(y)$ כי לפי הגדרת פונקציה הפיכה $f(x)=f(f^{-1}(y))=y$.

נראה f חח"ע: אם $f(x_1)=f(x_2)$ אז $x_1=f^{-1}(f(x_2))=f^{-1}(f(x_2))=x_2$.

הוכחה ==>:

$e^x:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ חח"ע ועל. הפונקציה ההפיכה היא $\ln x:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$.

ההפיכה של x^3 היא $\sqrt[3]{x}$. (תלוי תחום)

$x^2:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ הפיכה. הפונקציה ההפיכה היא $\sqrt{x}$. (תלוי תחום)

$\tan x:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ הפיכה. הפונקציה ההפיכה היא $\arctan x$. (תלוי תחום)

$\sin x:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow[-1,1]$ הפיכה. הפונקציה ההפיכה היא $\arcsin x$. (תלוי תחום)

$\cos x$ הפיכה. הפונקציה ההפיכה היא $\arccos x$. (תלוי תחום)

<u>פונקציות אלמנטריות</u>

1. פולינומים
2. פונקציות רציונליות: $\frac{p(x)}{q(x)}$ כאשר $p,q\neq 0$ פולינומים.
3. מעריכיות: a^x כאשר $x\in\mathbb{R}, 1\neq a>0$.
4. פונקציות טריגונומטריות: $\sin,\cos,\tan$.
5. כל ההפוכות של הפונקציות 1-4 + כל פונקציה שמתקבלת מכל הנ"ל ע"י הפעולות האלמנטריות $+,-,x,\%,\circ$

הרצאה 13

גבולות של פונקציות

נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ או $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} L$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך ש- $x>M$ <== $|f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$

תרגיל

הוכח לפי הגדרה $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+1}=3$

פיתרון

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $M=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ואז אם $x>M$ (כלומר $x>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ כלומר $x^2>\varepsilon$ כלומר $\frac{1}{x^2}<\varepsilon$) אז:

$$|f(x)-L|=\left|\frac{3x^2+2}{x^2+1}-3\right|=\left|\frac{3x^2+2-3x^2-3}{x^2+1}\right|=\left|\frac{-1}{x^2+1}\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2}\underset{x^2>\frac{1}{\varepsilon}}{<}\varepsilon$$

תרגיל 2

1. הגדירו $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ (לנסח הגדרה)
2. הוכיחו לפי הגדרה: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

משפטים מסדרות שתופסים לפונקציות (יש עוד) ששואפות לאינסוף

- אריתמטיקה
- חסומה כפול שואפת לאפס- שואף ל-0
- משפט הסנדויץ'
- יחידות הגבול

משפט הסנדוויץ'

אם $h(x)\le f(x)\le g(x)$ לכל x ו- $\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=L$ אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

הוכחה

יהי $\varepsilon>0$. קיים M_1 כך ש- $x>M_1$ <== $L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$

קיים M_2 כך ש- $x>M_2$ <== $L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$

ניקח $M=\max\{M_1,M_2\}$ ואז $x>M$ <== $L-\varepsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<L+\varepsilon$

הגדרה לגבול

נאמר כי $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ (a הוא חור בפונקציה) או $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} L$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $0<|x-a|<\delta$ <== $|f(x)-L|<\varepsilon$

תרגיל

הוכח $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{2}=1$ לפי הגדרה

פיתרון

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $\delta=2\varepsilon$ ואז אם $0<|x-3|<\delta$ אז:

$$|f(x)-L|=\left|\frac{x-1}{2}-1\right|=\left|\frac{x-1-2}{2}\right|=\left|\frac{x-3}{2}\right|=\frac{|x-3|}{2}$$

$$\frac{|x-3|}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

הערה:

אם $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2}, & x\neq 3\\ \pi\sqrt{e}, & x=3\end{cases}$ אז עדיין מתקיים $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=1$.

תרגיל

הוכח לפי הגדרה $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

פיתרון

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $\delta=\varepsilon$ ואז אם $0<|x-a|<\delta$ אז:

$$|\sin x-\sin a|=|2|\left|\sin\tfrac{x-a}{2}\cos\tfrac{x+a}{2}\right|=2\cdot\left|\sin\tfrac{x-a}{2}\cos\tfrac{x+a}{2}\right|=2\left|\sin\tfrac{x-a}{2}\right|\left|\cos\tfrac{x+a}{2}\right|$$

$$\Downarrow\ \forall x,\ |\sin x|\le x,\ |\cos\square|\le 1$$

$$2\left|\sin\tfrac{x-a}{2}\right|\left|\cos\tfrac{x+a}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|<\varepsilon$$

תרגיל

הוכח לפי הגדרה $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$

פיתרון

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{7}\right\}$ ואז אם $0<|x-3|<\delta$ אז:

$$|f(x)-L|=|x^2-9|=|(x+3)(x-3)|=|(x+3)||(x-3)|\underset{\delta\le 1}{\le}|x-3|\cdot 7$$

$$|x-3|\cdot 7\underset{\delta\le\frac{\varepsilon}{7}}{<}\varepsilon$$

משפט- גבול אלמנטרית

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה אלמנטרית המוגדרת בסביבת $x=a$, אזי $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=f\left(a\right)$.

תרגיל

חשב $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\left(2\sqrt{\frac{\cos x}{3x+4}}\right)$

פיתרון

$$\arctan\left(2\sqrt{\frac{\cos x}{3x+4}}\right)_{x=0}=\arctan\left(2\sqrt{\frac{\cos 0}{3\cdot 0+4}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

משפטים לגבולות

1. אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ אז הוא יחיד.
2. אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=L$ אז f חסומה בסביבה נקובה של a.

הוכחת משפט 2

ניקח $\varepsilon=1$. מהגדרת הגבול קיים δ כך ש- $\underbrace{0<\left|x-a\right|<\delta}_{a\neq x\in(a-\delta,a+\delta)}$ ==> $\underbrace{\left|f\left(x\right)-L\right|<1}_{L-1<f(x)<L+1}$.

מסקנה: אם f מוגדרת גם ב- $x=a$ (וגם בסביבת a) ומתקיים $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=L$ אז f חסומה בסביבת a כי $M=\max\left\{L+1, f\left(a\right)\right\}$ ו- $m=\min\left\{L-1, f\left(a\right)\right\}$.

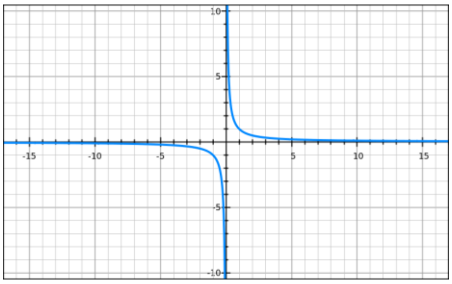
הרצאה 14

תזכורת הגדרת גבול

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה $x=a$ (פרט אולי לנקודה x עצמה), נאמר כי $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\underbrace{0<|x-a|<\delta}_{a-\delta<x<a+\delta}$ <== $\underbrace{|f(x)-L|<\varepsilon}_{L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon}$

דוגמה- אין גבול

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

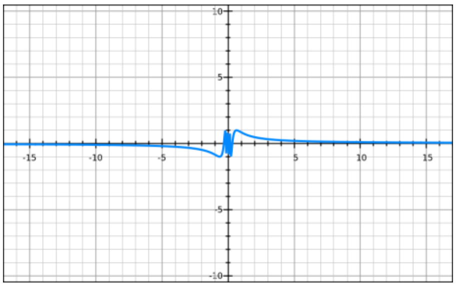


אין גבול ב- $x=0$.

2. $f(x)=[x]$

אין גבול בכל $x\in\mathbb{Z}$ **(לצייר גרף)**

3. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$



אין גבול ב- $x=0$.

תרגיל

אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו- $L>0$ אז יש סביבה נקובה של a שבה $f(x)>0$

להוכיח לבד

משפט (אריתמטיקה)

יהיו f,g מוגדרות בסביבה נקובה של $x=a$, נניח כח $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=K$ אזי:

1. $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\cdot f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\alpha L$
2. $f(x)+g(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}L+K$
3. $f(x)\cdot g(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}LK$
4. $(g(x)\neq 0, K\neq 0), \frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{L}{K}$

הוכחה 1

אם $\alpha\neq 0$ אז:

יהי $\varepsilon>0$. קיים $\chi>0$ כך ש- $0<|x-a|<\chi$ אז $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{|a|}$, לכן אם $0<|x-a|<\chi$ אז:

$$|\alpha f(x)-\alpha L|=|\alpha||f(x)-L|<|\alpha|\cdot\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon$$

אם $\alpha=0$ אז הטענה טריויאלית.

הוכחה 3

נניח $K\neq 0$. יהי $\varepsilon>0$.

קיים χ_1 כך ש- $0<|x-a|<\chi_1$ <== $|f(x)|<M$.

קיים χ_2 כך שס- $0<|x-a|<\chi_2$ <== $|g(x)-K|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

קיים χ_3 כך ש- $0<|x-a|<\chi_3$ <== $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2|K|}$.

נגדיר $\chi=\min\{\chi_1,\chi_2,\chi_3\}$ ולכן אם $0<|x-a|<\chi$:

$$|f(x)g(x)-LK|=|f(x)g(x)-f(x)K+f(x)K-LK|$$
$$\leq|f(x)||g(x)-K|+|f(x)-L||K|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2|K|}\cdot|K|=\varepsilon$$

לחשוב איך להוכיח במקרה ש- $K=0$

משפט היינה

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ <==> **לכל** סדרה $a \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

הוכחה ==> :

תהיי $a \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. צ"ל $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

יהי $\varepsilon > 0$. נתון $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$. לכן קיים $\chi > 0$ כך ש- $0<|x-a|<\chi$ ==> $|f(x)-L|<\varepsilon$.

כיוון ש- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ קיים N כך ש- $n>N$ ==> $0<|x_n-a|<\chi$

ולכן עבור $n>N$ ==> $|f(x_n)-L|<\varepsilon$.

הוכחה <== :

אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ (בין אם הגבול לא קיים או שקיים אבל שונה מ-L)

אז יש ε_0 כך שלכל $\delta>0$ יש x שמקיים $0<|x-a|<\delta$ אבל $|f(x)-L|\ge\varepsilon_0$.

לכן לכל n יש x_n שיקיים $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n)-L|\ge\varepsilon_0$.

התנאי לא מתקיים כי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ אבל $f(x_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

הוכחה 4 בעזרת היינה (גבול של מנה)

$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ ==> (לפי היינה) לכל $a \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} K$ ==> (לפי היינה) לכל $a \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $g(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} K$

==> לכל $a \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{L}{K}$ (לפי המשפט עבור סדרות). מש"ל לפי היינה.

נוכיח שאין גבול ב- $x \neq 0$ ל- $\sin\frac{1}{x}$.

נגדיר $x_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ ==> $0 \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

נגדיר $y_n = \frac{1}{2\pi n-\frac{\pi}{2}}$ ==> $0 \neq y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

אבל $f(x)=\frac{1}{x_n}=1$ לכל n ו- $f(y_n)=\sin\frac{1}{y_n}=-1$ לכל n.

לכן $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,\ f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

מסקנה: אין גבול לפי היינה.

משפטים עבור פונקציות

1. (סנדויץ') אם לכל x בסביבה של a מתקיים $h(x)\le f(x)\le g(x)$, ובנוסף $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$ אז $\lim_{x\to a} f(x)=L$.
2. $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$ <==> $|f(x)|\xrightarrow[x\to a]{}0$
3. $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}L \Rightarrow |f(x)|\xrightarrow[x\to a]{}|L|$
4. $f(x)\ge g(x)$ לכל x בסביבה של a ו- $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)-K$ אז $L\ge K$

4'. אם $f(x)\ge 0$ בסביבת a ו- $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אז $L\ge 0$.

<u>הערה:</u>

4 לא תקף עם >, הגבול לא יהיה גדול ממש.

5. אם $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ו- g חסומה בסביבה של a אז $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$

<u>הוכחת 5 דרך א'</u>

לפי הנתון $|g(x)|<M$ בסביבת a

<== $-M<g(x)<M$ בסביבת a

<== $-M<|g(x)|<M$ בסביבת a

<== $\underbrace{-M|f(x)|}_{\downarrow x\to a \atop 0}<\underbrace{|g(x)||f(x)|}_{\downarrow x\to a \atop 0}<\underbrace{M|f(x)|}_{\downarrow x\to a \atop 0}$ בסביבת a (סנדוויץ')

<== $f(x)g(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

<u>הוכחת 5 דרך ב'</u>

$\lim_{x\to a} f(x)=0$ <== (היינה) לכל סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ $x_n\ne a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

<== לכל סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ $x_n\ne a$ מתקיים $\underbrace{f(x_n)}_{\downarrow \atop 0}\underbrace{g(x_n)}_{blocked}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (כי g פונקציה חסומה)

<== לפי היינה $f(x)g(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$

<u>הוכחת 5 דרך ג'</u>

לפי $\delta-\varepsilon$ (להוכיח לבד)

<u>דוגמא</u>

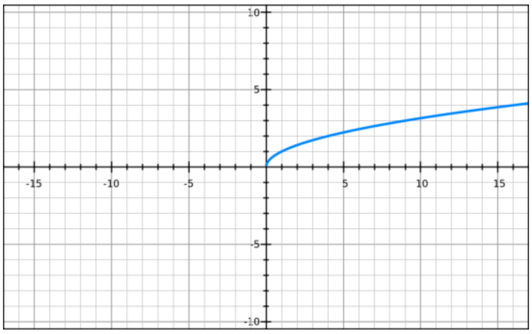
$$\lim_{x\to 0}\underset{\downarrow \atop 0}{x}\underset{\text{blocked}}{\sin\tfrac{1}{x}}=0$$

גבול חד צדדי

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית $\left(a,a+\mu\right)$ של הנקודה $x=a$ (פרט אולי לנקודה x עצמה),
נאמר כי $\lim\limits_{x\to a^{+}} f\left(x\right)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $a<x<a+\delta$ <== $\underbrace{\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon}_{L-\varepsilon<f\left(x\right)<L+\varepsilon}$

דוגמא

$f\left(x\right)=\sqrt{x}$



$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ (הוכיחו לפי הגדרה).

$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\sqrt{x}=0$

תרגיל

1. הגדירו $\lim\limits_{x\to a^{-}} f\left(x\right)$ (סביבה שמאלית)
2. נסחו והוכיחו את כל המשפטים עבור גבול חד צדדי.

דוגמא

$f\left(x\right)=\left[x\right]$

בכל $x\in\mathbb{Z}$ קיים גבול מימין וקיים גבול משמאל אבל הם לא שווים.

משפט- קיום גבולות חד צדדיים

$\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ קיים (סופי) <==> 2 הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים זה לזה.

דוגמא

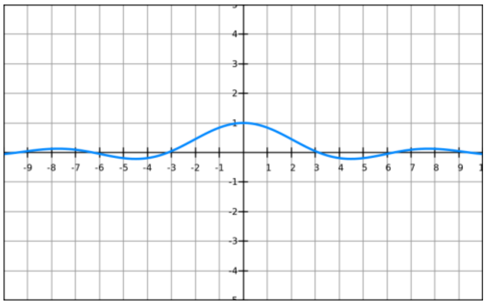
ל- $f\left(x\right)=\left[x\right]$ אין גבול ב- $x=2$ כי $\lim\limits_{x\to 2^{-}}\left[x\right]=1$ ו- $\lim\limits_{x\to 2^{+}}\left[x\right]=2$

19.01 צנזור אינפי 1מ
08: 30

הרצאה 15

תרגיל

הוכח $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



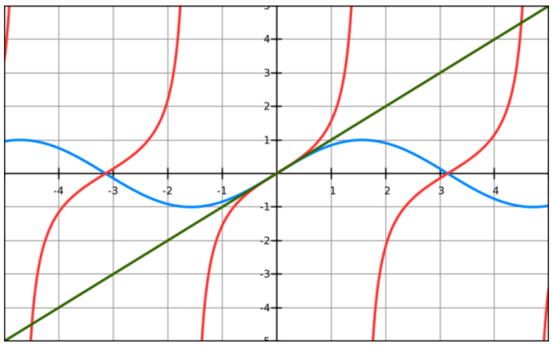
פיתרון

טענת עזר:

לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $\sin x < x < \tan x$.

לכל $-\frac{\pi}{2}<x<0$ מתקיים $\tan x < x < \sin x$.

הערה: לכן $|\sin x| \le |x|$ לכל x.



לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x \Longleftarrow \frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}>\frac{1}{\tan x} \Longleftarrow 0<\sin x<x<\tan x$

כך ש: $\underset{\substack{\downarrow x\to 0^+\\ 1}}{1} > \underset{\substack{\downarrow \text{sandwitch}\\ \downarrow x\to 0^+\\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} > \underset{\substack{\downarrow x\to 0^+\\ 1}}{\cos x}$.

באופן דומה $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$ ולכן מש"ל.

סיכום שימושים שימושיים של היינה

1. הצדקה שלפונקציה אין גבול ע"י מציאת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ו- $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.
2. הוכחת משפטים על פונקציות באמצעות משפטים מקבילים לסדרות.
3. חישוב גבול של סדרה באמצעות פונקציה.

תרגיל

חשב $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$

פיתרון

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

לפי היינה אם ניקח $x_n = \frac{1}{n}$ נקבל $n\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

משפט- מונוטונית וחסומה

תהיי f מונוטונית וחסומה בסביבה ימנית של a, אזי יש ל-f גבול מימין בנקודה a.

הוכחה

נניח בה"כ ש-f עולה. נסמן $m = \inf\left\{ f(x) \mid x > a \right\}$, ונראה $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = m$.

יהי $\varepsilon > 0$. מחפשים סביבה ימנית של a שבה מתקיים $\left| f(x) - m \right| < \varepsilon$, כלומר $m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$.

$m - \varepsilon < f(x)$ --> נכון לכל x כי m הוא האינפימום.

$f(x) < m + \varepsilon$ --> m הוא האינפימום ולכן יש x_0 כך ש- $f(x_0) < m + \varepsilon$. F עולה ולכן לכל $a < x < x_0$ מתקיים $f(x) \le f(x_0) < m + \varepsilon$. ניקח $\delta = x_0 - a$.

מסקנה עבור גבול חד צדדי

אם f מונוטונית בקטע I אז יש ל-f גבולות חד צדדיים בכל נקודה פנימית בקטע.

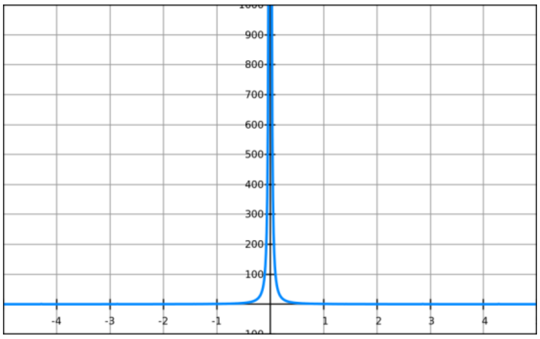
גבולות של פונקציות במובן הרחב

נאמר כי $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ אם לכל M קיים $\delta>0$ כך ש- $0<|x-a|<\delta$ <== $f(x)>M$.

תרגיל

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

הוכח לפי הגדרה- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$



פיתרון

יהי $M>0$. ניקח $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ ואז אם $0<|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ אזי:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}>M$$

תרגיל

הגדירו $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ וכו' (יש 15, להוכיח לבד)

הערה:

לא כל המשפטים תקפים בגבולות אינסופיים! למשל:

$$f(x)=x^2\frac{1}{x^2}="0\cdot\infty"=1\xrightarrow[x\to 0]{}1$$ או $$f(x)=\frac{x^2-1}{3x^2}="\frac{\infty}{\infty}"=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{3}$$

איתן לוין

משפט הפיצה

אם $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ ו- $g(x)\ge f(x)$ (לכל x בסביבה של a) אז $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$.

קריטריון קושי

תהיי f מוגדרת בסביבה נקובה של a. נאמר ש-f מקיימת את תנאי קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $0<|x-a|<\delta$ וגם $0<|y-a|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

משפט- קיום תנאי קושי

קיים $\lim_{x\to a} f(x)$ <==> f מקיימת תנאי קושי בסביבת a.

רציפות

תהיי f מוגדרת בסביבת a. f רציפה בנקודה a אם $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

הערות:

1. זו תכונה נקודתית.
2. 99% זה קיום הגבול (רק לבדוק בסוף שהגבול הוא באמת ערך הפונקציה בנקודה).

הגדרות שקולות לרציפות:

f רציפה ב-a אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|x-a|<\delta$ <== $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

f רציפה ב-a אם לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.

משפט- אלמנטרית אז רציפה

כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום הגדרתה.

עיקרי ההוכחה

1. מראים שנציגות של המשפחות האלמנטריות (לוגריתמיות, טריגונומטריות וכו') הן רציפות.
2. מראים אריתמטיקה של פונקציות רציפות (מיידי מאריטמתיקה של גבולות).
3. מראים הרכבה

משפט- רציפות הרכבה

אם g רציפה ב-a ו-f רציפה ב- $g(a)$ אזי $f\circ g$ רציפה ב-a.

הוכחה

תהיי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ <== $g(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} g(a)$ <== $f(g(x_n))\xrightarrow[n\to\infty]{} f(g(a))$

תרגיל

א. הוכח בבית עם ε,δ
ב. שאלת רשות תרגיל בית

19.01 צנזור אינפי מ1
08:30

הרצאה 16

רציפות

f רציפה בנקודה $x=a$ אם $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ <==>

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|x-a|<\delta$ <== $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ <==>

לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$

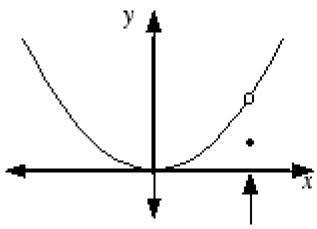
משפטים עבור רציפות

1. אריתמטיקה של רציפות
2. הרכבה של רציפות
3. כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בתחום הגדרתה

סוגי אי רציפות

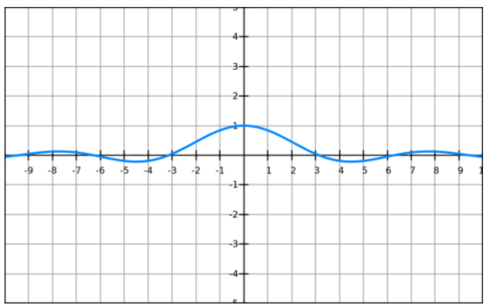
אי רציפות סליקה

ב-a יש אי-רציפות סליקה אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים אבל לא שווה ל- $f(a)$.



דוגמה:

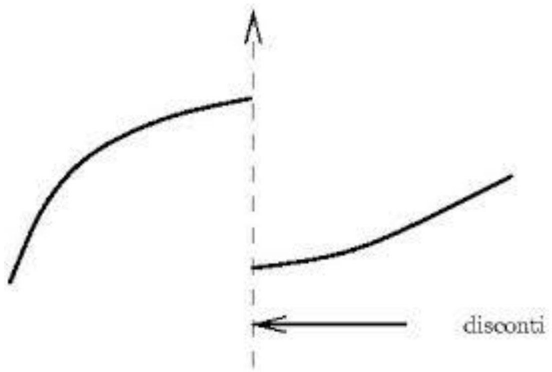
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



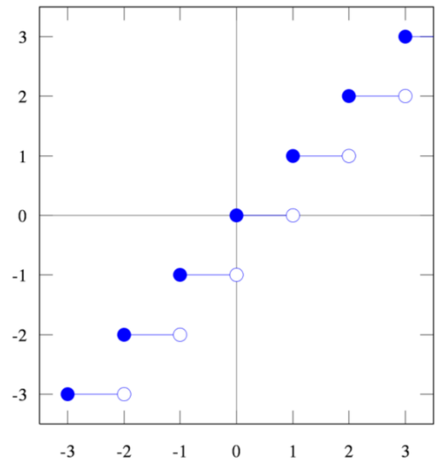
על מנת ליצור רציפות בנקודה 0 על הפונקציה להיות שווה ל-1.

<u>אי רציפות קפיצה</u>

ב-a יש אי- רציפות מסוג קפיצה אם 2 הגבולות החד צדדיים קיימים אבל שונים.

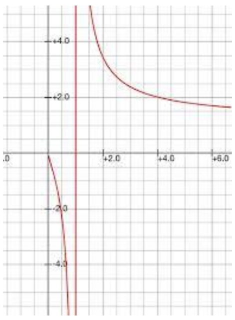


<u>דוגמה:</u> $f\left(x\right)=\left[x\right]$



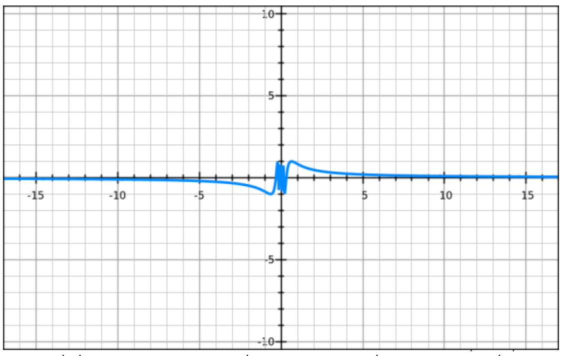
<u>אי רציפות עיקרי</u>

ב-a יש אי- רציפות מסוג עיקרי אם אחד הגבולות החד צדדיים בכלל לא קיים (סוג של אסימפטוטה).



<u>דוגמה:</u>

$f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x}$ ב-0.



משפט- מונוטוניות ורציפות

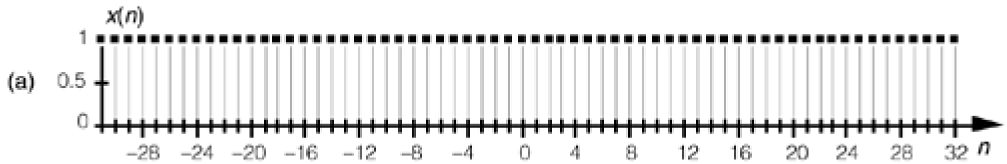
תהיי f מונוטונית בקטע I, ותהיי $a \in I$. אזי או ש-f רציפה ב-a או שיש לה אי רציפות מסוג קפיצה ב-a.

הוכחה:

לפרמלך לבד. להראות לפי ההגדרה שלא תיתכן אי רציפות סליקה. ולפי המשפט שאמר שלפונקציה מונוטונית יש גבולות חד צדדיים בכל נקודה, לא תיתכן אי רציפות עיקרית.

דוגמא

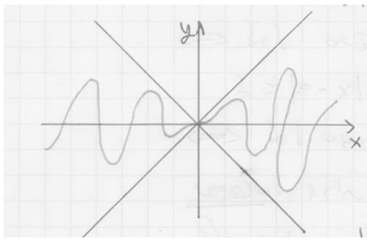
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ דיריכלה



ל-f אין גבול באף נקודה. בפרט ל-f יש אי רציפות עיקרית בכל נקודה.

משפט- טענת עזר יעילה

נניח ש-f מקיימת $|f(x)| \le |x|$ לכל x, אזי $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.



הוכחה:

$f(0) = 0$ כי $|f(0)| \le 0$. צ"ל: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $\delta = \varepsilon$ ואז אם $|x - 0| < \delta$ אז:

$$|f(x) - 0| = |f(x)| \le |x| = |x - 0| < \varepsilon$$

דוגמא

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(להוסיף ציור של 2 הגרפים כנקודות)

בכל $a \ne 0$ לא קיים $\lim_{x \to a} f(x)$

ב- $a = 0$ f רציפה (לפי טענת העזר).

הגדרות רציפות חד צדדית ובקטע

1. f רציפה מימין ב-a אם $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ (באופן דומה רציפה משמאל).
2. f רציפה בקטע פתוח (a,b) אם f רציפה בכל נקודה בקטע.
3. f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ אם f רציפה בקטע הפתוח (a,b), כך שהיא רציפה מימין ב-a ורציפה משמאל ב-b.

סימון: קבוצה קומפקטית- קבוצה סגורה וחסומה.

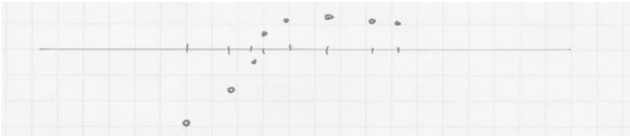
פונקציות רציפות בקטע סגור

ערך ביניים 0

תהיי $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה.

אם ל-$f(a)$ ול-$f(b)$ יש סימנים הפוכים, אז קיימת $a<c<b$ כך ש- $f(c)=0$.

הוכחה (על בסיס הלמה של קנטור)



אם $f(e_i)=0$ סיימנו (e מייצג אמצע קטע כלשהו).

אחרת נקבל סדרה של קטעים $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ (שאמצעי הקטעים שלהם הם e_i) שמקיימים:

1. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$
2. $b_n-a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

לפי קנטור יש C (יחידה) כך ש- $\forall n, a_n\le C\le b_n$ ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=c=\lim_{n\to\infty}b_n$.

טענה: $f(c)=0$

הוכחה:

$f(a_n)<0<f(b_n)$ לכל n.

מרציפות $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}c$ ולכן $f(c)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(a_n)$ <== $f(c)\le 0$.

מרציפות $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}c$ ולכן $f(c)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(b_n)$ <== $f(c)\ge 0$.

אם $f(c)\le 0$ וגם $f(c)\ge 0$ אזי $f(c)=0$.

דוגמאות

1. הוכח כי לפולינום x^5-4x+1 יש שורש בקטע $[0,1]$:

פיתרון:

נסמן $f(x)=x^5-4x+1$. f רציפה על $[0,1]$.

$$f(0)=1>0$$

$$f(1)=-2<0$$

מש״ל.

2. הוכח כי למשוואה $\sin x=x-1$ יש פיתרון :

פיתרון:

נגדיר $f(x)=\sin x-x+1$, מחפשים c כך ש $f(c)=0$. f רציפה.

$$f(0)=1>0$$

$$f(\pi)=-\pi+1<0$$

מש״ל.

3. לכל פולינום ממעלה אי זוגית מעל $\mathbb{R}$ יש שורש ממשי.

(אפשר לפתוח עם הכלים שלמדנו בשיעור הזה, ואפשר עם שורש צמוד של שורש מרוכב)

משפט ערך הביניים

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה.

יהי y_0 ערך בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אזי קיימת $a<x_0<b$ כך ש- $f(x_0)=y_0$.

הוכחה:

(אפשר גם להוכיח ישירות, אנחנו נוכיח בהסתמכות על משפט קודם)

נניח בה״כ $f(a)<y_0<f(b)$. נגדיר $g(x)=f(x)-y_0$.

- g רציפה ב- $[a,b]$
- $g(a)=f(a)-y_0<0$
- $g(b)=f(b)-y_0>0$

לכן לפי המשפט הקודם (המקרה הפרטי של ערך הביניים) יש x_0 כך ש- $g(x_0)=0$

ולכן $f(x_0)-y_0=0$ כלומר $f(x_0)=y_0$.

הרצאה 17

רציפות

f רציפה בנקודה $x=a$ אם $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ <==>

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $|x-a|<\delta$ ==> $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ <==>

לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$

משפט ערך הביניים

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה.

יהי y_0 ערך בין $f(a)$ ל- $f(b)$. אזי קיימת $a<x_0<b$ כך ש- $f(x_0)=y_0$

אי רציפויות

סליקה: קיים $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ אבל לא שווה ל- $f(a)$.

קפיצה: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ קיימים אבל שונים.

עיקרית: אחד הגבולות החד צדדיים לא קיים.

משפט- מונוטונית גורר קפיצה

אם f מונוטונית בקטע $[a,b]$ יכולות להיות ל-f רק נקודות אי רציפות מסוג קפיצה.

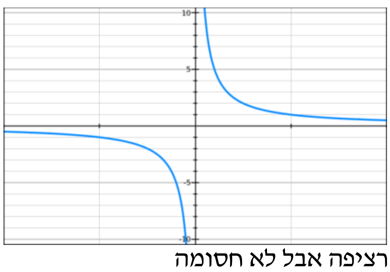
משפטי ויירשטראס

תהיי $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה. אזי:

1. f חסומה.
2. f מקבלת מינימום ומקסימום בקטע.

דוגמאות

1. $f(x)=\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$



רציפה אבל לא חסומה

'1. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ בקטע $[0,1]$

לא רציפה.

2. $f(x)=x$ על $(0,1)$

אין לה מינימום ומקסימום.

הוכחת ויירשטראס 1

נניח בשלילה ש-f לא חסומה.

בה"כ נניח שלא חסומה מלמעלה.

לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת $a \le x_n \le b$ כך ש- $f(x_n) \ge n$

הסדרה x_n חסומה (בקטע $[a,b]$), לכן לפי בולשאנו ויירשטראס יש לה תת סדרה x_{n_k} שמתכנסת

כך ש- $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \underset{\in[a,b]}{x_0}$, כאשר $a \le x_0 \le b$.

f רציפה ולכן $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$ אבל מהבנייה $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. סתירה.

הוכחת ויירשטראס 2

לפי הוכחה 1, f חסומה. לכן קיים $M = \sup\{f(x) | a \le x \le b\}$, נראה שקיימת $x_0 \in [a,b]$ כך ש-
$f(x_0) = M$.

M סופרמום <== לכל n טבעי קיימת $a \le x_n \le b$ כך ש- $M - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le M$.

x_n חסומה ולכן לפי BW יש לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$.

f רציפה ולכן $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. מצד שני, לכל k: $M - \frac{1}{n_k} \le f(x_{n_k}) \le M$.

לפי סנדוויץ' $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} M$. מיחידות הגבול $M = f(x_0)$.

משפט- רציפות קטע סגור

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ רציפה.

אזי התמונה של f היא קטע סגור.

הוכחה:

לפי ויירשטראס 2 (ההוכחה מההרצאה הזאת) m ומקסימום M בקטע.

לפי ערך הביניים כל y_0 המקיים $m \le y_0 \le M$ גם מתקבל. לכן התמונה של f היא הקטע $[m,M]$.

משפט- מונוטוניות

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית. אזי:

f רציפה <==> התמונה של f היא קטע סגור.

הוכחה <==: הוכח במשפט הקודם.

רעיון הוכחה ==>:

ל-f ייתכנו רק אי רציפויות מסוג קפיצה (על פי משפט קודם), נניח בה"כ f עולה.

לא ייתכן (להצדיק) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) > \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, לכן אם x_0 אי רציפות אז $\lim_{x\to x_0^+} f(x) < \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

ואז כל ערך ביניהם לא בתמונה, והתמונה אינה הקטע.

אם הגבול משמאל בבנקודה מסוימת גדול מהגבול מימין זו סתירה, ולכן הגבול מימין קטן מהגבול משמאל.

משפט- מונוטוניות ורציפות

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ מונוטונית ממש ורציפה. אזי f הפיכה ו-f^{-1} גם היא מונוטונית ממש ורציפה.

סיכומון:

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה. אזי:

1. f חסומה.
2. f מקבלת מינימום ומקסימום.
3. f מקבלת כל ערך בין המינימום למקסימום.

משפט- רציפה וחח"ע

$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה וחח"ע <== אזי f מונוטונית ממש. (<== f הפיכה <== f^{-1} רציפה)

הגדרת רציפות במידה שווה

$f(x)$ נקראת רציפה במידה שווה (במ"ש) בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$

כך שלכל $x_1,x_1\in D$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$, מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

משפט- רציפות במ"ש גורר רציפות

רציפות במידה שווה <== רציפות.

הוכחה:

תהיי f רציפה במידה שווה בתחום D. יהי $x_0\in D$. נראה ש-f רציפה ב- x_0. יהי $\varepsilon>0$ מרציפות במידה שווה.

קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in D$ המקיים $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

דוגמא 1

$f(x)=\sin x$ על $D=\mathbb{R}$. נראה שרציפה במ"ש.

יהי $\varepsilon>0$. ניקח $\delta=\varepsilon$ ואז אם $|x-y|<\delta$:

$$|f(x)-f(y)|=|\sin x-\sin y|=2\left|\sin\tfrac{x-y}{2}\right|\left|\cos\tfrac{x+y}{2}\right|\le 2\left|\sin\tfrac{x-y}{2}\right|\underset{|\sin x|\le|x|}{\le}2\left|\tfrac{x-y}{2}\right|=|x-y|$$

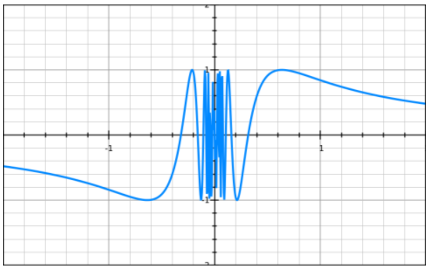
הערה: ככה בדיוק הראינו ש $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

דוגמא 2

$f(x)=\frac{1}{x}$ על $(0,1)$ רציפה, אבל לא במ"ש.

דוגמא 3

$f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x}$ ב- $\left(0,1\right)$ רציפה, אבל לא במ״ש.



אינטואיציה:

אם ״התלילות״ של f חסומה, אז f רציפה במידה שווה.

אם ״התלילות״ של f שואפת לאנך, אז f לא רציפה במ״ש.

משפט קנטור היינה

אם f רציפה בקטע סגור, אז f רציפה במ״ש.

הוכחה:

נניח בשלילה ש-f אינה רציפה במ״ש. אזי קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל n קיימים $x_n',x_n''\in\left[a,b\right]$

המקיימים $\left|x_n'-x_n''\right|<\frac{1}{n}$ אבל $\left|f\left(x_n'\right)-f\left(x_n''\right)\right|\geq\varepsilon_0$.

נתבונן בסדרה x_n'. זו סדרה חסומה ולכן לפי BW יש לה תת סדרה מתכנסת $x_{n_k}'\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0\in\left[a,b\right]$.

טענה: $x_{n_k}''\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0$. כי לכל k מתקיים $\left|x_{n_k}'-x_{n_k}''\right|<\frac{1}{n_k}$ כלומר $\underbrace{x_{n_k}'-\frac{1}{n_k}}_{\downarrow k\to\infty \atop x_0}<\underbrace{x_{n_k}''}_{\Downarrow\atop \downarrow k\to\infty \atop x_0}<\underbrace{x_{n_k}'+\frac{1}{n_k}}_{\downarrow k\to\infty \atop x_0}$.

לכן, מרציפות f נובע $f\left(x_{n_k}''\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}f\left(x_0\right)$, $f\left(x_{n_k}'\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}f\left(x_0\right)$.

$f\left(x_{n_k}'\right)-f\left(x_{n_k}''\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ וזו סתירה לכך ש-$\left|f\left(x_n'\right)-f\left(x_n''\right)\right|\geq\varepsilon_0$. משל.

הרצאה 18

נגזרות

באופן כללי, אם $f(t)$ מייצגת איזשהו גודל שמשתנה עם הזמן אז $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ הוא קצב השינוי הרגע.

הגדרת נגזרת מתמטית

נאמר כי הפונקציה גזירה בנקודה x_0, אם קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

אם הגבול קיים מסמנים אותו ב- $f'(x_0)$ או $\frac{df}{dx}(x_0)$ וקוראים לו הנגזרת של f בנקודה x_0.

<u>הערה</u>: הביטוי הבא שקול-

f גזירה ב- x_0 אם קיים $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, כי נסמן $h=x-x_0$.

הנגזרת בנקודה x_0 היא "שיפוע הגרף" בנקודה x_0.

הגדרת נגזרת גיאומטרית

אם ל- f יש נגזרת בנקודה x_0 אז הישר $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ נקרא המשיק לגרף של f בנקודה x_0.

- המשיק הוא ישר ששיפועו $f'(x_0)$ ועובר דרך הנקודה $(x_0,f(x_0))$.
- המשיק הוא לא ישר שלא חותך את הגרף ולא ישר שעובר רק מצד אחד...

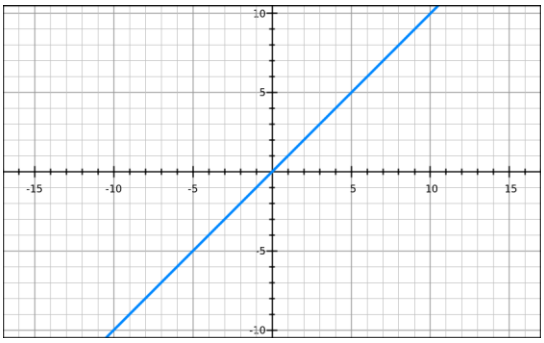
<u>דוגמא 1</u>

$f(x)=c$ (פונקציית קו ישר, c קבוע)

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$$

<u>דוגמא 2</u>

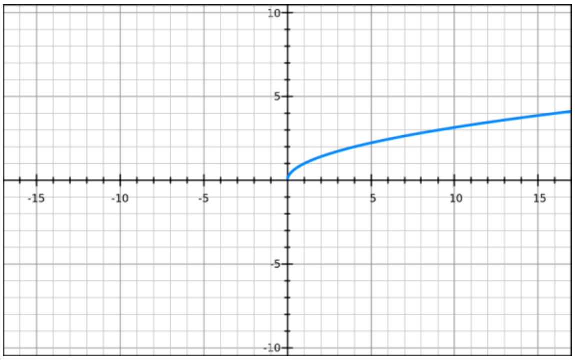
$$f(x)=x$$



$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

דוגמא 3

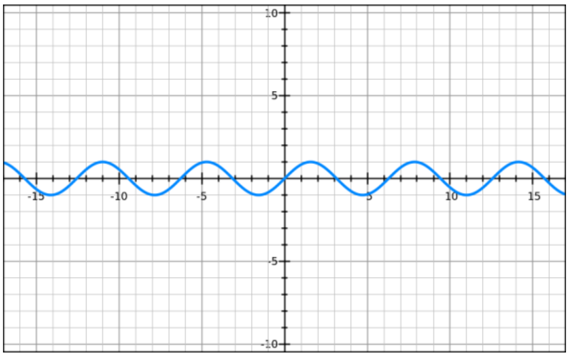
$$f(x)=\sqrt{x}$$



$$(x_0>0)\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}=$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

דוגמא 4

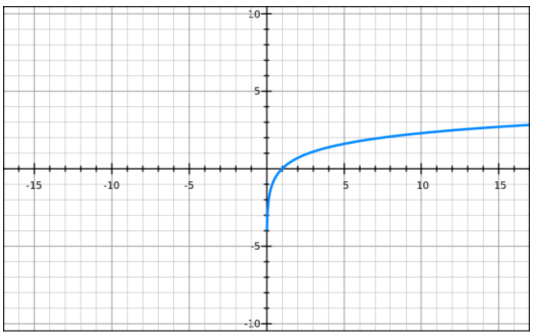
$$f(x)=\sin x$$



$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\cos x_0$$

דוגמא 5 (לבד)

$$(x>0)\Rightarrow f(x)=\ln x$$



משפט- גזירה אז רציפה

אם f גזירה ב- x_0 אז f רציפה ב- x_0.

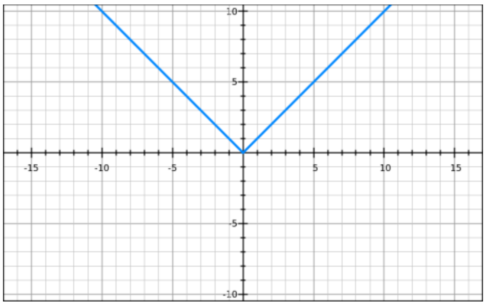
הוכחה:

f גזירה ב- x_0 <== קיים $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

נסתכל על $0\xrightarrow[x\to x_0]{}\underbrace{(x-x_0)}_{\substack{\downarrow x\to x_0\\ 0}}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\downarrow x\to x_0\\ f'(x_0)}}=f(x)-f(x_0)$ <== $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}f(x_0)$.

הערות:

1. ההפך אינו נכון (רציפה לא גורר גזירה).
דוגמא נגדית:
$f(x)=|x|$ - רציפה. נראה שהיא לא גזירה ב- x_0.



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{x_0=0}{=}\frac{|x|-|0|}{x}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

אין גבול (לנגזרת) כאשר $x\longrightarrow 0$

2. מסקנה מהמשפט: אם f לא רציפה אז היא לא גזירה.

הגדרה- נגזרת חד צדדית

נגזרת מימין של f ב- x_0 היא: $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (באופן דומה $f_-'(x_0)$).

משפט *(הנגזרת היא העתקה ליניארית)*

נניח כי f,g גזירות ב- x_0. אזי:

1. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
2. $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$
3. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

הוכחה 3 :

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

$$\frac{1}{h}\cdot\left[f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_o)\right]=$$

$$\underbrace{g(x_0+h)}_{\substack{\downarrow h\longrightarrow 0\\ g(x_0)}}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow h\longrightarrow 0\\ f'(x_0)}}+\underbrace{f(x_0)}_{\substack{\downarrow h\longrightarrow 0\\ f(x_0)}}\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow h\longrightarrow 0\\ g'(x_0)}}\xrightarrow[h\to 0]{}g\cdot f'+f\cdot g'$$

הערה : $g(x_0+h)\xrightarrow[h\to 0]{}g(x_0)$ כי g רציפה ב- x_0 (כי היא רציפה בנקודה)

דוגמא

$$f(x)=\tan x$$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(x\neq\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

משפט- ניסוח שונה לנגזרת

f גזירה ב- x_0 <==> קיים $A\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+h)-f(x_0)=A\cdot h+\alpha(h)h$ כאשר $\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$

הוכחה ==> :

אם $f(x_0+h)-f(x_0)=A\cdot h+\alpha(h)h$ מתקיים אז :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{Ah-\alpha(h)h}{h}=A+\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}A=f'(x)$$

(גילינו ש-A הוא למעשה $f'(x_0)$)

הוכחה <== :

נסמן $A=f'(x_0)$. אזי :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}A$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-A}_{\text{mark it }\alpha(h)}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0 \qquad \text{and} \qquad \alpha(h)h=f(x_0+h)-f(x_0)-Ah$$

משפט (כלל השרשרת)

אם f גזירה ב- x_0 ו- g גזירה ב-$f\left(x_0\right)$, אזי $g\circ f$ גזירה ב- x_0 ומתקיים:

$$\left(g\circ f\right)'\left(x_0\right)=g'\left(f\left(x_0\right)\right)\cdot\underbrace{f'\left(x_0\right)}_{\text{internal derivative}}$$

דוגמה

$$f\left(x\right)=\cos x$$

$$\left(\cos x\right)'=\left(\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot 1=-\sin x$$

הרצאה 19

כלל השרשרת (תזכורת)

אם f גזירה ב- x_0 ו- g גזירה ב- $f(x_0)$, אזי $g\circ f$ גזירה ב- x_0 ומתקיים:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot\underbrace{f'(x_0)}_{\text{internal derivative}}$$

סימון נוסף ל- $f'(x)$ הוא $\frac{df}{dx}(x_0)$.

ניסוח כלל השרשרת בסימוני לייבניץ:

אם $z=g(y)$ גזירה ב- y ו- $y=f(x)$ גזירה ב- x אז $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

הוכחת כלל השרשרת (בעיקר עושה סימונים מבלבלים):

נסמן:

$$\Delta x=h \qquad \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_o) \qquad \Delta z=g(y_o+\Delta y)-g(y_0)$$

נסתכל על הביטוי:

$$g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))=$$
$$g(f(x_0)+f(x_0+\Delta x)-f(x_0))-g(f(x_0))=$$
$$g(f(x_0)+\Delta y)-g(y_0)=\Delta z$$

$g(y)$ גזירה ב- y_0 ולכן:

$$\Delta z=g'(y_0)\cdot\Delta y+\alpha(\Delta y)\Delta y \text{ כאשר } \alpha(\Delta y)\xrightarrow[\Delta y\to 0]{}0$$

$f(x_0)$ גזירה ב- x_0 ולכן:

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x)\cdot\Delta x \text{ כאשר } \beta(\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$$

לכן (מנסה להגיע להגדרת הנגזרת או משהו כזה):

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=g'(y_0)\left(f'(x_0)+\beta(\Delta x)\right)+\alpha(\Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

כאשר $\Delta x\longrightarrow 0$: f גזירה ב- x_0 ולכן f רציפה ב- x_0 ומתקיים $\beta(\Delta x)\longrightarrow 0$

$$\Delta x\longrightarrow 0 \Longleftarrow \Delta y\longrightarrow 0 \Longleftarrow \alpha(\Delta y)\longrightarrow 0$$

כך ש: $\frac{\Delta y}{\Delta x}\longrightarrow f'(x_0)$

מתקבל:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))}{\Delta x}=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$$

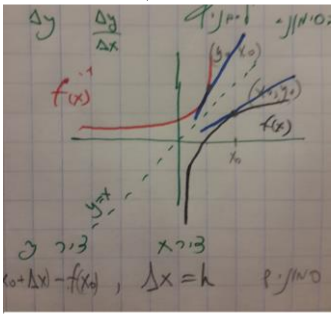
משפט (נגזרת של פונקציה הפיכה)

תהיי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת x_0. נניח כי f גזירה ב- x_0 וכי $f'(x_0)\neq 0$, אזי:

גם הפונקציה ההפוכה $x=f^{-1}(y)$ גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ומתקיים $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

הערות:

1. בסימוני לייבניץ: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$
2. תמונת ראי של פונקציות ושל נגזרות. אינטואיציה גיאומטרית שאפשר לפרמל.



3. אם יודעים ש- f^{-1} גזירה ב- y_0 אז קל להוכיח את הנוסחה:

$$1=x'=\left(f^{-1}(f(x))\right)' \underset{\text{klal sharsheret}}{=} \left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

דוגמאות

1. $f(x)=\ln(x)$ הפיכה, גזירה ורציפה בסביבה של כל $x_0>0$ ומתקיים $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$.

הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(y)=e^y$ (לזכור ש- $y=f(x)$ ו- $x=f^{-1}(y)$)

$$\left(e^y\right)'=\frac{1}{(\ln x)'}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=e^y$$

2. $f(x)=\sin x$ מקיימת תנאי המשפט בכל x_0 בתחום $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{-1}(y)=\arcsin y$$

$$(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin x)'}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$ נגזרת חשובה

3. $f(x)=x^\alpha$ כאשר $\alpha\in\mathbb{R}, x>0$ וזה שקול ל- $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$

$$\left(x^\alpha\right)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

הוכחה (משפט נגזרת ההפוכה):

ראשית, היה משפט שאם f רציפה והפיכה (מספיק חח"ע) בקטע (ובפרט בסביבה) אז יש f^{-1} וגם היא רציפה (ושתיהן מונוטוניות ממש).

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}=\frac{1}{\frac{f\left(f^{-1}(y)\right)-f\left(f^{-1}(y_0)\right)}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}$$

כאשר $y\longrightarrow y_0$ מתקיים $\underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0}\xleftarrow[y\to y_0]{}\underbrace{f^{-1}(y)}_{=x}$ לכן:

$$\frac{1}{\frac{f\left(f^{-1}(y)\right)-f\left(f^{-1}(y_0)\right)}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}\xrightarrow[y\to y_0]{}\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

סימון נגזרות

אם $f(x)$ גזירה בקטע (כלומר בכל נקודה בקטע) אז מסמנים ב- $f'(x)$ את הפונקציה הנגזרת.

אם $f'(x)$ גזירה בקטע(כלומר בכל נקודה בקטע) אז מסמנים ב- $f''(x)$ את הפונקציה הגזרת.

אם $f''(x)$ גזירה בקטע(כלומר בכל נקודה בקטע) אז מסמנים ב- $f'''(x)$ את הפונקציה הגזרת.

... אם $f^{(n-1)}(x)$ גזירה בקטע(כלומר בכל נקודה בקטע) אז מסמנים ב- $f^{(n)}(x)$ את הפונקציה הגזרת.

הערה:

אם $f(x)$ גזירה בקטע (כלומר בכל נקודה בקטע) זה לא אומר בוודאות ש- $f'(x)$ רציפה בקטע (למרות ש $f(x)$ רציפה בקטע).

משפט- גזירה כמה פעמים

אם g,f גזירות n פעמים, אז:

1. $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$
2. $(\alpha f)^{(n)}=\alpha f^{(n)}$
3. $(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ (נוסחת לייבניץ)

דוגמא 1

$\left(x^2e^x\right)^{(9)}$

$$\left(x^2e^x\right)^{(9)}=\binom{9}{0}x^2e^{(9)}+\binom{9}{1}2xe^{(8)}+\binom{9}{2}\cdot 2\cdot e^{(7)}+\binom{9}{3}\cdot 0\cdot e^{(6)}+\ldots+0=$$
$$\left(x^2+18x+72\right)e^x$$

דוגמא 2

$\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{(n)}$ לבד. לבדוק האם יצא לנו אותו דבר כמו $\left((1-x)^{-1}\right)^{(n)}$ (לא אמור לצאת)

דוגמא 3

$f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ האם הפונקציה גזירה ב- $x=0$?

הפונקציה אלמנטרית ב- $x\neq 0$ ולכן רציפה בכל תחום זה ולכן גזירה בכל תחום זה.

ב- $x=0$ צריך לחשב את f' לפי ההגדרה:

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}}{x}\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{(-x)^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}}{-x}=\lim_{x\to 0^-}-(-x)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}=0$$

מסקנה: $f'(0)=0$.

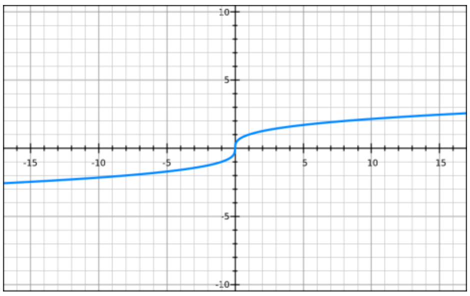
דוגמא 4

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}+x^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x>0\\ 0 & x=0\\ -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}+(-x)^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x<0\end{cases}$$

$f'(x)$ מוגדרת בכל $\mathbb{R}$ אבל $f'(x)$ לא רציפה ב-0! ואפילו לא חסומה ליד 0!

הערה:

אין משפט שאלמנטרית גזירה בתחום הגדרתה, דוגמא: $\sqrt[3]{x}$ אלמנטרית לכל $\mathbb{R}$ אבל לא גזירה ב- $x=0$.



הרצאה 20

הגדרת גזירות

f גזירה ב- x_0 אם קיים הגבול:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ או $$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

משפט (Cauchy)

יהיו f,g רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b), ונניח כי $g'(x_0)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$, אזי:

1. $g(a)\neq g(b)$
2. קיימת $a<c<b$ כך ש- $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

משפט (Fermat)

תהיה f מוגדרת בקטע (a,b) ותהיי $x_0\in(a,b)$ נקודת קיצון שבה f גזירה. אזי $f'(x_0)=0$.

משפט (Rolle)

תהיה f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) כך ש- $f(a)=f(b)$ אזי קיימת $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=0$.

משפט (Lagrange)

תהיה f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b). אזי קיימת $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הגדרת מינימום מקסימום

x_0 נקראת מינימום מקומי של $f(x)$ אם $f(x)\geq f(x_0)$ לכל x בסביבה של x_0.

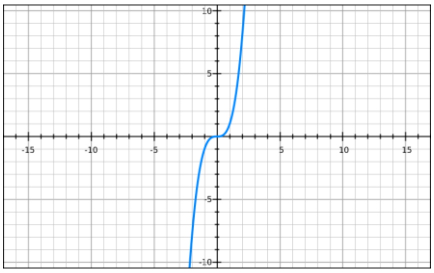
x_0 נקראת מקסימום מקומי של $f(x)$ אם $f(x)\leq f(x_0)$ לכל x בסביבה של x_0.

x_0 נקראת קיצון מקומי (אקסטרמום) של $f(x)$ אם היא מינימום מקומי או מקסימום מקומי.

<u>דוגמא 1</u>

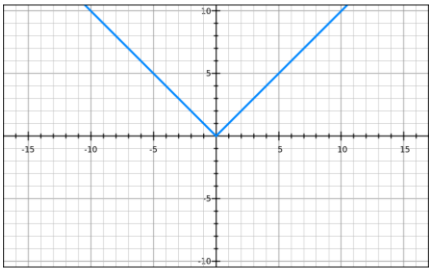
$f'(x)=3x^2$ <== $f(x)=x^3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, אבל 0 אינה קיצון מקומי.



<u>דוגמא 2</u>

$f(x)=|x|$



0 היא מינימום מקומי אבל $f'(0)$ לא קיימת.

מסקנות:

- ייתכנו נקודות קיצון מקומי בהם $f'(x_0)\neq 0$. למשל אם f לא גזירה ב- x_0 , או שאם x_0 לא נקודה פנימית.
- ייתכנו נקודות בהן $f'(x_0)=0$ אך אינן נקודות קיצון.

<u>הגדרת נקודה קריטית</u>

x_0 נקראת נקודה קריטית (חשודה כקיצון) אם $f'(x_0)=0$ או ש- f לא גזירה ב- x_0 .

הוכחת פרמה:

נניח ש- x_0 מינימום מקומי.

f גזירה ב- x_0 : $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

עבור $x_0<x$: $x-x_0>0$

$f(x)-f(x_0)\geq 0$ בסביבה ימנית של x_0.

<== $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ ולכן $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

עבור $x_0>x$: $x-x_0<0$

$f(x)-f(x_0)\geq 0$ בסביבה שמאלית של x_0.

<== $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ ולכן $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$.

אך $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ ולכן כולם כולם שווים ל-0 ו- $f'(x_0)=0$.

הוכחת משפט רול:

f רציפה ב- $[a,b]$ לפי ויירשטראס יש לה מינימום (שנסמנו m) ומקסימום (שנסמנו M). (לא רק מקומיים)

אם $m=M$ אז f קבועה <== $f'=0$ לכל x בקטע.

אם $m<M$ אז לפחות חד מהם מתקבל בנקודה פנימית $a<c<b$.

לכן לפי פרמה $f'(c)=0$.

<u>הוכחת לגרנז':</u>

נגדיר ישר כללי חדש ופונקציה חדשה מהישר:

$$y = mx + n = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + n$$
$$f(a) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)a + n$$
$$n = f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)a$$

<==

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$
$$F(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$

$F(x)$ מקיימת את תנאי משפט רול: $F(a) = 0 = F(b)$.

F רציפה וגזירה כהפרש של $f(x)$ והישר.

לכן קיימת נקודה c כך ש- $F'(c) = 0$. ולכן מתקיים:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Downarrow$$
$$F'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

<u>הוכחת קושי:</u> (חיקוי הוכחת לגרנז' על סמך רול בעזרת פונקציית עזר)

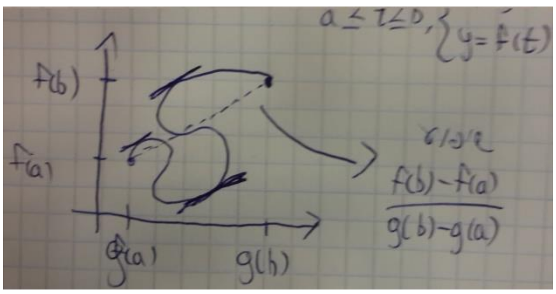
$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

(היה פה חלק על עקומים מחדוא 2, דברים עם t ובשורה התחתונה $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = f'(t)\cdot\frac{1}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$)

<u>אינטואיציה למשפט קושי:</u>

נסתכל על העקום $a \le t \le b, \begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$

משפט קושי אומר שיש נקודה על העקום בה השיפוע שווה לשיפוע הקו המחבר את הקצוות.



משפט- פונקציה קבועה

תהיי f גזירה ב- (a,b), אזי:

f קבועה <== > $f'=0$ לכל x בקטע.

הוכחה <== :

הראינו.

הוכחה ==> :

אם $f'=0$ לכל x ב- (a,b), ניקח $a<x<y<b$ ונראה $f(x)=f(y)$.

לפי לגרנז' יש $x<c<y$ כך ש- $0=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)$, לקחנו $x\neq y$ ולכן $f(x)=f(y)$.

משפט- גזירות גוררת מונוטוניות

תהיי f גזירה ב- (a,b)

1. אם $f'>0$ לכל x בקטע, אז f עולה ממש.
2. אם $f'<0$ לכל x בקטע, אז f יורדת ממש.

הוכחה 1:

ניקח $a<x<y<b$. לפי לגרנז' ב- $[x,y]$ יש $x<c<y$ כך ש-

$$f(y)>f(x)\Leftarrow 0<f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

הוכחה 2:

ניקח $a<x<y<b$. לפי לגרנז' ב- $[x,y]$ יש $x<c<y$ כך ש-

$$f(y)<f(x)\Leftarrow 0>f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

הערות:

1. ההפך לא נכון. דוגמא נגדית: $f(x)=x^3$.
2. $\leq$ <== לא ממש (רק עולה או יורדת)
3. ההפך עם $\leq$ כן נכון.

דוגמא 1

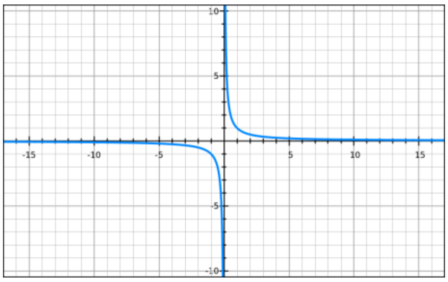
$$f(x)=\arctan x$$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ <== f עולה ממש.

דוגמא 2

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$$

$\forall x\neq 0$ $\qquad$ $f'\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}>0$

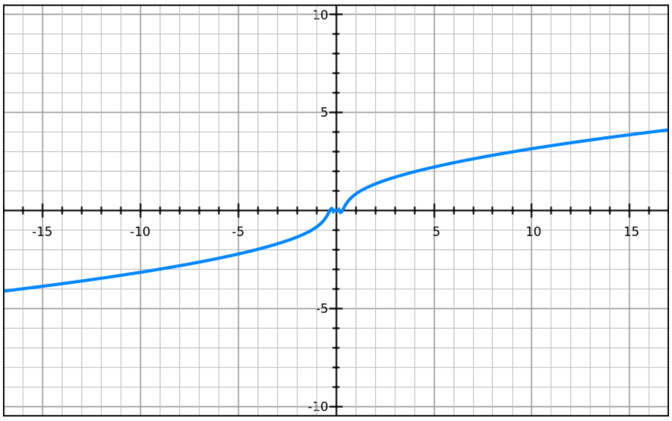


המשפט לא תופס בכל תחום הגדרתה בגלל שהיא לא יורדת ממש בתחום הגדרה.

כן נכון שהפונקציה יורדת ממש ב- $\left(0,\infty\right)$ וב- $\left(-\infty,0\right)$.

הרצאה 21

תזכורת לדוגמא



$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

- f' מוגדרת בכל $\mathbb{R}$
- f' לא רציפה ב-0.
- f' לא חסומה בסביבת 0.

משפט דרבו

תהיי f גזירה ב-$[a,b]$ ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ בין $f'_+(a)$ ל-$f'_-(b)$ אזי קיימת $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\lambda$.

הערות:

1. f' מקיימת תכונת ערך הביניים למרות שהיא לא בהכרח רציפה.
2. אם $f'_-(b)=f'_+(a)$ אז λ שווה לערך המשותף, ומתקבל בקצוות.

הוכחת דרבו:

נגדיר $F(x)=f(x)-\lambda x$.

נניח בה"כ $f'_+(a)<\lambda<f'_-(b)$.

F רציפה ב-$[a,b]$ ולכן מקבלת מינימום ומקסימום (ויירשטראס).

תהיי $a\le c\le b$ הנקודה בה F מקבלת ערך מינימלי. אזי:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-\lambda(a+h)-f(a)+\lambda a}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\lambda\right)=f'_+(a)-\lambda\underset{f'_+(a)<\lambda}{<}0$$

לכן יש $\delta>0$ כך שאם $0<h<\delta$ אז $F(a+h)-F(a)<0$, כלומר $F(a+h)<F(a)$.

לכן $c\neq a$.

באופן דומה מראים (להראות באמת) ש- $c\neq b$.

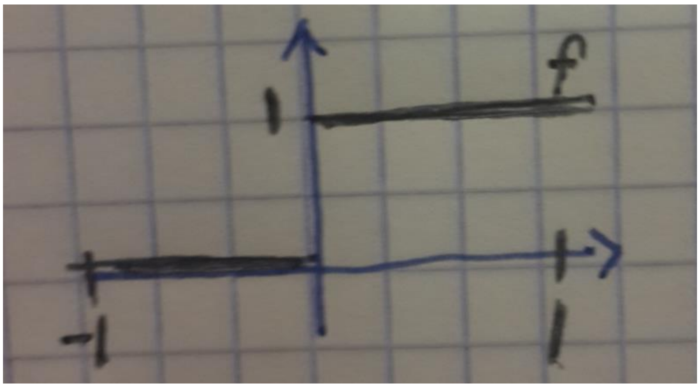
לכן $a<c<b$. F גזירה ולכן לפי פרמה $F'(c)=0$ <== $f'(c)-\lambda=0$ <== $f'(c)=\lambda$.

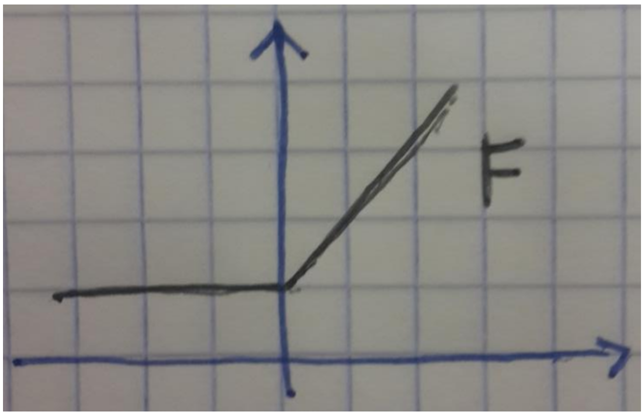
הערה:

ראינו בדוגמה מתחילת ההרצאה ש-f' לא בהכרח חסומה.

לכן אין משפט שאומר ש-f' חסומה/מקבלת מינימום/מקבלת מקסימום.

דוגמא 1:





$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0\le x<1\end{cases}$$

f אינה נגזרת של אף פונקציה בקטע $[-1,1]$ כי לא מקיימת את דרבו! היא בפרט לא נגזרת של F.

משפט- רציפה בסביבה אז גזירה

תהיי f רציפה בסביבה של x_0 וגזירה שם פרט אולי ל- x_0 עצמה.

אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=L$ אז f גזירה ב- x_0 ו- $f'(x_0)=L$.

הערה:

1. בדוגמא בתחילת ההרצאה הגבול $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ לא קיים.
2. למעשה נוכיח שאם $f'(x)\xrightarrow[x\to x_0^+]{}L$ אז $f'_+(x_0)=L$ (כנ״ל משמאל)

מסקנה- גזירה בקטע אי רציפות עיקרי

אם f גזירה ב- $[a,b]$ אז ל- f' ייתכנו רק אי-רציפויות מסוג עיקרי.

הוכחת המסקנה:

אם ב- $a<x_0<b$ קיימים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$, אז לפי ההערה הם שווים ל- $f'_+(x_0)$ ול- $f'_-(x_0)$ בהתאמה.

אבל f גזירה ב- $[a,b]$ ובפרט f גזירה ב- x_0 ולכן $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

<== כלומר f' רציפה ב- x_0.

הוכחת המשפט:

תהיי $\delta>0$ כך שבקטע $(x_0,x_0+\delta)$ f רציפה וגזירה. יהי $0<h<\delta$. נפעיל את משפט לגרנז' בקטע $[x_0,x_0+h]$. לכן קיים $0<\theta<1$ כך ש-

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h)$$

כאשר $h\longrightarrow 0^+$ גם $\theta h\longrightarrow 0^+$ ולכן $x_0+\theta h\longrightarrow x_0$.

לכן מהנחת המשפט $f'(x_0+\theta h)\xrightarrow[h\to 0^+]{} L$ ולכן לפי $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h)$

$f'_+(x_0)=L$.

באופן דומה מראים עבור $f'_-(x_0)$

גזירה ונגזרת חסומה אז רציפה במ"ש (אחלה משפט למבחן)

אם f גזירה בקטע I ו-f' חסומה אז f רציפה במידה שווה.

(זו האינטואיציה של תלילות חסומה שהזכרנו בעבר)

הוכחה:

f' חסומה <== קיים M כך ש- $|f'(x)|<M$ לכל $x\in I$.

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. ואז אם $|x-y|<\delta$ אז:

$$|f(x)-f(y)|\underset{\text{lagrang'}}{=}|f'(c)\cdot(x-y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|<M\cdot\delta\Rightarrow\delta=\frac{\varepsilon}{M}$$

<== f רציפה במ"ש לפי ההגדרה.

הערה:

ההפך אינו נכון, כלומר רציפות במידה שווה לא גורר f' חסומה.

דוגמא נגדית: $f(x)=\sqrt{x}$ ב- $(0,1]$. הפונקציה רציפה במידה שווה כי היא רציפה בקטע $[0,1]$. אבל $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ אינה חסומה ב- $(0,1]$.

הגדרת ליפשיצית:

f נקראת ליפשיצית אם קיים $K>0$ כך ש- $|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$ לכל x,y

נשים לב:

f' חסומה <== f ליפשיצית <== f רציפה במידה שווה <== f רציפה.

הכיוון ההפוך אינו נכון בשום שלב.

אם f גזירה וליפשיצית אז f' חסומה.

הרצאה 22

כלל לופיטל

15 משפטים דומים שמאפשרים לטפל בגבלות מהצורה $\frac{0}{0}$ ו- $\frac{\infty}{\infty}$ כאשר $x\longrightarrow a$ או $x\longrightarrow \pm a$ או $x\longrightarrow \pm\infty$.

בתנאים מסוימים $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{f(x)}{g(x)}$

דוגמאות

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\underset{\text{lopital }\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\underset{\text{lopital }\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

3. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{\tan x-x}\underset{\text{lopital }\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos x-1)\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cos x-1)\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\cancel{(\cos x-1)}}^{-}\cos^2 x}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

משפט לופיטל

יהיו f ו- g גזירות בסביבת $x=a$ (פרט אולי לנקודה a עצמה). נניח כי :

1. $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0$ בסביבה מנוקבת של a.
3. קיים הגבול (קיים אומר סופי) $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אזי: $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

שימו לב:

גרסאות שונות הן (עבור 1) $x\longrightarrow \pm a$ או $x\longrightarrow \pm\infty$ או $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ או קיים הגבול (עבור 3) במובן הרחב.

עוד דוגמאות ללופיטל:

.4
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\underset{\text{lopital }\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

$\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ לא קיים ולכן הגבול המקורי לא קיים.

לופיטל לא עובד, אבל: $\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{x}{\sin x}}\cdot\underset{\underset{0}{\downarrow}\ \text{blocked}}{x\sin\frac{1}{x}}=0$

.5
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\underset{\text{lopital }\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\underbrace{=}_{\text{lopital }\frac{\infty}{\infty}}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

נכנסנו ללופ ולכן לופיטל לא עובד.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\underset{\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$$

.6
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}\underset{\text{lopital }\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{3x^2}\underbrace{\cancel{=}}_{\text{not valid lopital}}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

ביצענו לופיטל לא חוקי, הגבול אמור להיות חיובי בכלל כך ש- $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}=\infty$

הוכחת לופיטל (גרסה ראשונה)

תהיי $[a,a+h]$ סביבה ימנית של a שבה תנאי המשפט מתקיימים.

"נתקן" את f ו- g ונגדיר $f(a)=g(a)=0$ (נתייחס מעכשיו ל- f ו- g כ"מתוקנות")

מ-1* של לופיטל נובע כי f ו- g רציפות מימין ב-a.

לכן:

א. g, f רציפות ב-$[a,a+h]$ וגזירות ב-$(a,a+h)$.

ב. $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,a+h)$

נפעיל משפט קושי על f ו- g בקטע $[a,x]$ כאשר $a<x\leq a+h$.

נקבל:

א. $g(x)\neq g(a)$

ב. קיים $a<c_x<x$ כך ש- $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ <== $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\underset{f(a),g(a)=0}{=}\frac{f(x)}{g(x)}$

תהיי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a^+$ אזי $y_n=c_{x_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} a^+$.

מ-ב' נובע כי $\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}=\frac{f'(c_{x_n})}{g'(c_{x_n})}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$

כאשר $n\to\infty$ לפי היינה אגף ימין שואף ל-L (לפי 3). אגף ימין שווה לאגף שמאל ולכן גם שואף ל-L.

ולכן שוב לפי היינה $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a^+]{} L$

באופן דומה מוכיחים $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a^-]{} L$.

לכן על פי הגבולות החד צדדיים ב-a מתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ וזה נכון גם עבור g, f המקוריות.

גרסה נוספת ללופיטל:

יהיו f ו- g גזירות בקרן (M,∞), $M>0$.

נניח כי:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0$ בקרן.
3. קיים הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הוכחה:

כיוון ש- $g'(x)\neq 0$, לא ייתכנו 2 נקודות בקרן שבהן $g(x)=0$, לפי רול. לכן נוכל להניח ש- $\forall x>k: g(x)\neq 0$, ולכן $\frac{f}{g}$ מוגדרת עבור $x>k$.

נגדיר $t=\frac{1}{x}$ ונסמן $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right),\ F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ עבור $0<t<\frac{1}{k}$.

F,G רציפות וגזירות בסביבה ימנית של 0. יתר על כן:

$$F'(t)=f'\left(\tfrac{1}{t}\right)\left(-\tfrac{1}{t^2}\right)\neq 0 \qquad ,G'(t)=g'\left(\tfrac{1}{t}\right)\left(-\tfrac{1}{t^2}\right)\neq 0$$

$$,\lim_{t\to 0^+}F(t)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0 \qquad ,\lim_{t\to 0^+}G(t)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x)}{G(x)}\underset{Lopital}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(הפעלנו פה את לופיטל בגרסתו שהוכחה קודם לכן)

דוגמאות נוספות ללופיטל:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0 \quad ,\ (\alpha>0)$$

מסקנה: חזקה שואפת לאינסוף יותר מהר מלוגריתם

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \ldots \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

מסקנה: מעריכית שואפת לאינסוף יותר מהר מפולינום

3. $$\lim_{x\to 0^+}\overbrace{x\ln x}^{\simeq 0(-\infty)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

4. $$\lim_{x\to 0^+}\overbrace{x^x}^{\simeq 0^0} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} \underbrace{\xrightarrow{x\to 0^+}}_{refer\ \ former} e^0 = 1$$ (לפי הסעיף הקודם)

5. $$\lim_{x\to 0^+}\overbrace{(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}}^{\simeq 1^{\infty}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{\sin x}} \underbrace{\xrightarrow{x\to 0^+}}_{refer\ below} e^1 = e$$

טענת עזר: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x} = 1$$

6. $$\lim_{x\to 0^+}\overbrace{\left(\tfrac{1}{x}+\ln x\right)}^{\simeq\infty-\infty}$$ - לפתור לבד ע"י $\ln\left(e^{\square}\right)$

7. $$\lim_{x\to 0^+}\overbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}}^{\simeq\frac{0}{0}}$$ - לא-עובד. אבל $$\lim_{x\to 0^+}\overbrace{\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}}}^{\simeq\frac{\infty}{\infty}}$$ דווקא עובד

איתן לוין

הרצאה 23

טיילור (הולך לעשות שעתיים הרצאה רקע כללי חשוב להבנה לטיילור ורק בסוף להגיע ממש לטיילור)

תהיי f גזירה ב- $x=0$.

(ציור של סתם פונקציה עולה ומשיק בנקודה $x=0$ עליה רואים ש"הרבה" נקודות של שניהם קרובים אחד לשני).

משוואת המשיק ב- $x=0$:

$y=f'(0)\cdot x+f(0)$.

המשיק "מקרב" את f ליד $x=0$ במובן הבא:

$$f(x)-y(x)=f(x)-f'(0)\cdot x-f(0)\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

יתר על כן (המונה שואף יותר מהר מהמכנה):

$$\frac{f(x)-y(x)}{x}=\frac{f(x)-f'(0)\cdot x-f(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f'(0)\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

לכן למשיק קוראים "קירוב ליניארי".

משוואת המשיק **בנקודה** x_0:

$$y(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

לכן לפי ***קירוב ליניארי***

$$\underbrace{f(x)-y(x)}_{\alpha(x)}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

ושוב יתר על כן:

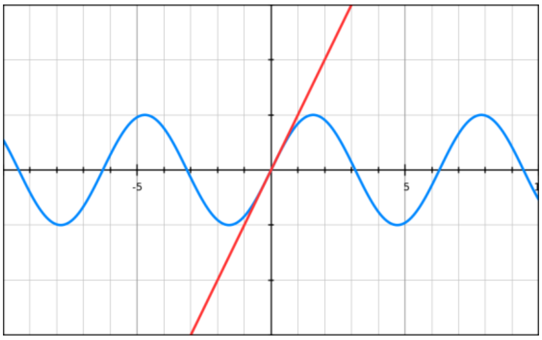
$$\frac{\alpha(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

נוכל לכתוב:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)$ כאשר $\alpha(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ ואפילו $\frac{\alpha(x)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$

דוגמא- למה זה טוב?

$f(x)=\sin x$ בסביבת הנקודה $x_0=0$

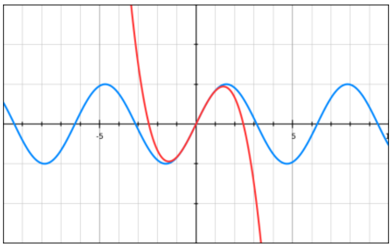


$f'(x)=\cos x$ <== $f'(0)=1$.

המשיק ב- $x_0=0$ הוא $y=x$.

$\frac{\pi}{4}=0.785...$ זה הקירוב הליניארי

$\sin\frac{\pi}{4}=0.707...$



$y=x-\frac{x^3}{6}$

זה קירוב ממעלה 3, עבור $x=\frac{\pi}{4}$:

$\frac{\pi}{4}-\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6}=0.705...$

$\sin\frac{\pi}{4}=0.707...$

קצת יותר פורמלי:

בתנאים מסוימים על $f(x)$ בסביבת $x=a$ נוכל לכל $\varepsilon>0$ למצוא פולינום $P(x)$ כך שיתקיים $f(x)=P(x)+R(x)$ ויתקיים $|R(x)|<\varepsilon$ בסביבת $x=a$.

טענת עזר- פולינום לטיילור

יהי $P_n(x)$ פולינום ממעלה n: $P_n(x)=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_n x^n$. אזי:

לכל $0\le k\le n$ מתקיים $P_n^{(k)}(0)=\beta_k\cdot k!$.

הוכחה:

נגזור את P_n K פעמים. כל האיברים ממעלה קטנה מ-K יתאפסו.

הנגזרת ה-K-ית של $\beta_k x^k$ היא בדיוק $\beta_k\cdot k!$.

עבור $m>k$ הנגזרת ה-K-ית של $\beta_m x^m$ היא $\beta_m\cdot m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)x^{m-k}$ ולכן בנקודה $x=0$ היא תתאפס.

$$P_n^{(k)}(0)=\beta_k\cdot k! \Longleftarrow \beta_k=\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}$$

רעיון הקירוב ע"י פולינום

התכונה של המשיק היא $f(x_0)=y(x_0)$ מתלכדים בנקודה x_0 ו- $f'(x_0)=y'(x_0)$ עם אותו שיפוע.

המשיק הוא פולינום ממעלה 1. אם נרצה לקרב ע"י פולינום ממעלה n, שנקרא לו $P_n(x)$ אז נדרוש:

$$\begin{aligned}
f(0)&=P_n(0)\\
f'(0)&=P_n'(0)\\
f''(0)&=P_n''(0)\\
&\vdots\\
f^{(n)}(0)&=P_n^{(n)}(0)
\end{aligned}$$

מסקנה:

הפולינום (היחיד) שמקיים את $n+1$ הדרישות האלו הוא (פולינום לקירוב):

$$P_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

נכתוב מחדש את $P_n(0)$ ככה שיתאים לכל x:

$$P_n(x)=\gamma_0+\gamma_1(x-a)+\gamma_2(x-a)^2+\ldots+\gamma_n(x-a)^n$$

$$P_n^{(k)}(a)=\gamma_k\cdot k!$$

אם $n+1$ הדרישות מתייחסות לנקודה $x=a$ (ולא $x=0$):

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

לכל $0\le k\le n$: $P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a)$

זהו פולינום ממעלה n שהוא וכל נגזרותיו עד סדר n מתלכדים עם f וכל נגזרותיה עד סדר n בנקודה a.

פולינום זה נקרא <u>פולינום טיילור</u> ממעלה n של f סביב a. כאשר $a=0$ קוראים לו גם *<u>פולינום מקלורן</u>*.

דוגמא 1

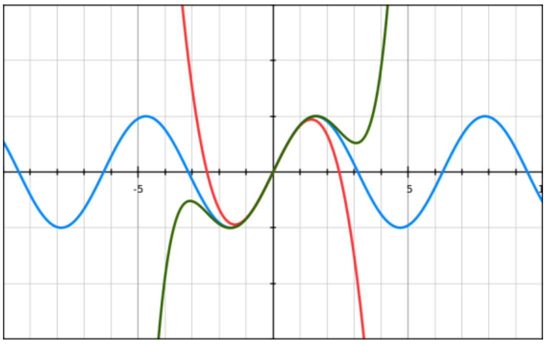
$f(x)=e^x, a=0$ לכל K: $f^{(k)}(0)=\left(e^x\right)^{(k)}(0)=e^0=1$

לכן לכל n : $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ **(מקלורן)**

דוגמא 2

: $f(x)=\sin x, \quad a=0$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x\\ f'(x)&=\cos x\\ f''(x)&=-\sin x\\ f'''(x)&=-\cos x\\ f^{(4)}(x)&=\sin x\\ &\vdots \end{aligned} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} f(0)&=0\\ f'(0)&=1\\ f''(0)&=0\\ f^{(3)}&=-1\\ f^{(4)}&=0\\ &\vdots \end{aligned} \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} P_1(x)&=x\\ P_2(x)&=x\\ P_3(x)&=x-\tfrac{1}{6}\cdot x^3\\ P_4(x)&=x-\tfrac{1}{6}\cdot x^3\\ P_5(x)&=x-\tfrac{1}{6}\cdot x^3+\tfrac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$



$\sin\frac{\pi}{4}=0.70710\dots$ $\quad$ $P_5\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.70714\dots$

דוגמא 3

$f(x)=x^3-4x+5, \qquad a=2, \quad n=3$

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2-4\\ f''(x)&=6x\\ f'''(x)&=6 \end{aligned} \quad \Leftarrow \quad P_3(x)=\underbrace{5}_{f(2)}+\underbrace{8}_{\frac{f'(2)}{1!}}(x-2)+\underbrace{6}_{\frac{f''(2)}{2!}}(x-2)^2+\underbrace{}_{\frac{f'''(2)}{3!}}(x-2)^3$$

קיבלנו את $f(x)$ על ידי הגעה לפולינום הקירוב. (כדאי לוודא בעצמנו בשביל התרגול שזה $f(x)$ בעצמו)

דוגמא 4

$$f(x)=\ln(1+x), \qquad a=0$$

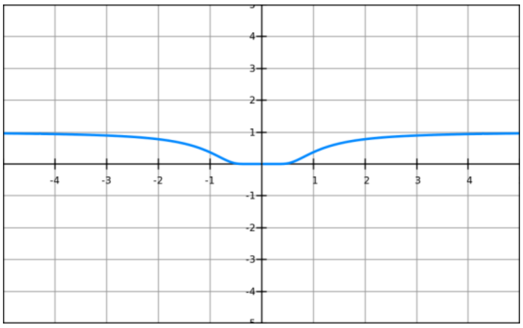
הראו $P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

(עושים לבד, לגזור ולראות שהעצרת מצתמצמת)

דוגמא 5 (לעשות לבד, תרגיל חשוב)

$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, $a=0$. הראו: $f^{(k)}(0)=0$ לכל K!

מסקנה: $P_n(x)=0$ לכל n !



משפט טיילור

תהיי $f(x)$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה a. תהיי x נקודה כלשהי בסביבה הזו. אזי קיימת c בין x ל- a כך ש:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

P_n הוא פולינום טיילור.

R_n נתון ע״י: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ **(נקרא השארית בצורת לגרנז׳)**

הערות:

1. השארית $R_n(x)$ מקיימת $\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$

אם $f^{(n+1)}(x)$ רציפה או חסומה אז זה מיידי מנוסחת השארית בצורת לגרנז׳ כי:

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}_{\text{blocked or finite lim}}\underbrace{(x-a)^{n+1}}_{\substack{\downarrow x\to a\\ 0}}\xrightarrow[x\to a]{}0$$

2. אם ניקח במשפט טיילור $n=0$, נקבל $f(x)=f(a)+\dfrac{f'(c)}{1}(x-a)$

הרצאה 24

דוגמא- חישוב e

נשתמש בפולינום טיילור $P_n\left(x\right)$ עבור e^x ונציב $x=1$, $a=0$

נדרוש שגיאה קטנה מ- $\frac{1}{100}$

$$\left|R_n\left(1\right)\right| \underset{0<c<1}{=} \frac{e^c}{\left(n+1\right)!} \underset{\substack{c<1\\ e^c<e<3}}{<} \frac{3}{\left(n+1\right)!} \underset{\text{searching for this n}}{<} \frac{1}{100}$$

$$n=0 \qquad 3 \not< \frac{1}{100}$$

$$n=1 \qquad \frac{3}{2} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{2} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=3 \qquad \frac{1}{8} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=4 \qquad \frac{1}{40} \not< \frac{1}{100}$$

$$n=5 \qquad \frac{1}{240} < \frac{1}{100}$$

מסקנה:

$e=e^1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+R_5\left(1\right)$ כאשר $\left|R_5\left(1\right)\right|<\frac{1}{240}$

ע"י מכנה משותף:

$$e\approx\frac{120+120+60+20+5+1}{120}=\frac{326}{120}$$

אחרי חילוק ארוך: $2.71666...$ לעומת e במחשבון $2.718281...$

תרגיל- נראה ש-e אינו רציונלי

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$$

$$e<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{3}{(n+1)!}$$

נניח בשלילה ש- $e=\frac{p}{q}$ כאשר $p,q\neq 0\in\mathbb{Z}$. אזי:

$$\backslash\cdot n! \qquad 0\underset{\text{sheerit}>0}{<}\frac{p}{q}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)<\frac{3}{(n+1)!}$$

$$0<n!\frac{p}{q}-\left(n!+!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}\right)<\frac{3}{n+1}$$

ביטוי זה נכון לכל n.

ניקח $n>\max\{2,q\}$, ואז:

$$0<\left[n!\frac{p}{q}-\left(n!+!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\ldots+\frac{n!}{n!}\right)\right]<1\in\mathbb{Z}$$ (האיברים בסוגריים מספר שלם)

זו סתירה! מש"ל.

דוגמא

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+R_3(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{R_3(x)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

<u>הערה- חסמים כמו מדמ"ח:</u>

נהוג לסמן ב- $\Theta(x^n)$ ביטוי $\alpha(x)$ שמקיים $\frac{\alpha(x)}{x^n}\xrightarrow[x\to 0]{}0$

ובאופן יותר כללי מסמנים $\Theta\left((x-a)^n\right)$ ביטוי שמקיים $\frac{\alpha(x)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$

"אריתמטיקה של $\Theta(x^n)$": $\Theta(x^n)+\Theta(x^n)=\Theta(x^n)$.

דוגמא:

x^3 הוא $\Theta(x^2)$. $R_n(x)$ הוא $\Theta\left((x-a)^n\right)$

הוכחת משפט טיילור

בה"כ תהי $a<x<a+\delta$ בסביבה בה תנאי המשפט מתקיימים.

נסתכל על הקטע $[a,x]$. נגדיר עליו פונקציה φ :

$$\varphi(z)=f(x)-\underbrace{f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n}_{P_n(x)\text{ of } f \text{ around z calculated in x}}$$

מתקיים: $\varphi(x)=0$ ו- $\varphi(a)=f(x)-\underbrace{P_n(x)}_{\text{polynom Taylor of } f \text{ around } a}=R_n(x)$

φ רציפה (כי f גזירה $n+1$ פעמים)

φ גזירה ב- (a,x):

$$\varphi'(z)=$$

$$0-\cancel{f'(z)}-\left[\cancel{\frac{f''(z)}{1!}(x-z)}+\cancel{\frac{f'(z)}{1!}(-1)}\right]-\left[\cancel{\frac{f^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2}+\cancel{\frac{f''(z)}{2!}2(x-z)(-1)}\right]-\ldots$$

$$\ldots-\left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+\cancel{\frac{f^{(n)}(z)}{n!}n(x-z)^{n-1}(-1)}\right]=$$

$$\varphi'(z)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

נגדיר על הקטע עוד פונקציה $\psi(z)$: $\psi(z)=\frac{(x-z)^{n+1}}{(n+1)!}$.

מתקיים: $\psi(x)=0$ ו- $\psi(a)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

ψ רציפה וגזירה, ו- $\psi'(z)=-\frac{(x-z)^n}{n!}$ ו- $\psi'\neq 0$ בקטע (a,x).

לפי משפט קושי יש $a<c<x$ כך ש-

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\dfrac{-R_n(x)}{-\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}=\dfrac{R_n(x)}{\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}\\[3em] \dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}=\dfrac{-\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}}{-\dfrac{(x-c)^n}{n!}}=f^{(n+1)}(c)\end{array}\right\}\Rightarrow f^{(n+1)}(c)=\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

יודעים ש- $R_n(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$

שאלה- האם $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$? **לא**

נראה תנאים על f שמתקיימים עבור fים רבים ומבטיחים $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

משפט- שארית שואפת ל-0 עבור n שואף לאינסוף

תהיי $f(x)$ גזירה ∞ פעמים בסביבת a.

נניח שיש קבוע K כך ש- $\left|f^{(n)}(x)\right|<K$ לכל x בסביבה ולכל n.

(אומרים ש"הנגזרות חסומות במשותף")

אזי $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

הוכחה:

יהי x קבוע בסביבה.

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le\left|\frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|=K\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

זה נכון כי לכל $\alpha\ge 0$: $\frac{\alpha^n}{n!}$ שואפת ל-0, למשל לפי מבחן המנה $\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha^n}=\frac{\alpha}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0<1$

דוגמא

$\sin x$ מקיימת שלכל x ולכל n מתקיים $\left|\sin^{(n)}(x)\right|\le 1$

דוגמא 2

e^x בקטע $[\alpha,\beta]$ מקיימת $\left|\left(e^x\right)^{(n)}(x)\right|\le e^{\beta}$ לכל n ולכל $\alpha\le x\le\beta$.

דוגמא 3- התרגיל החשוב

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

לא מתקיים $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ כי $R_n(x)=f(x)-P_n(x)=f(x)$ למעט ב- $x=0$

הרצאה 25

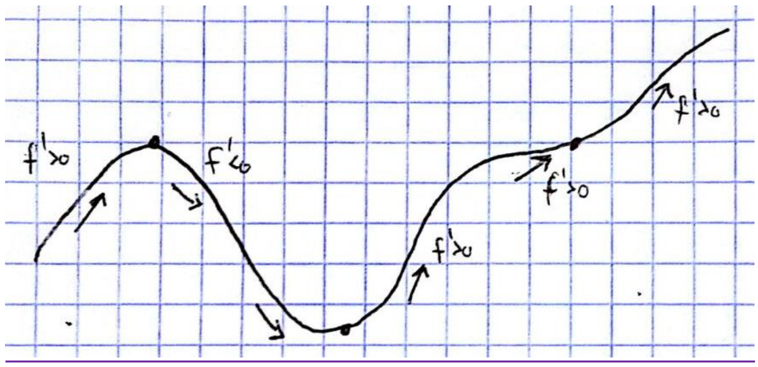
חקירת פונקציות

משפט- מבחן הנגזרת הראשונה

תהיי x_0 נקודה קריטית של f , ונניח ש- f רציפה ב- x_0 .

כמו כן נניח ש- f גזירה בסביבה של x_0 (פרט אולי ל- x_0 עצמה) אזי:

- אם f' מחליפה סימן משלילי לחיובי ב- x_0 אז x_0 מינימום מקומי.
- אם f' מחליפה סימן מחיובי לשלילי ב- x_0 אז x_0 מקסימום מקומי.
- אם f' אינה מחליפה סימן (שלילית או חיובית משני הצדדים) ב- x_0 אז x_0 אינה קיצון מקומי.



הוכחה:

מיידי ממשפט לפיו $f'>0$ <== f עולה.

משפט- מבחן הנגזרת השנייה

תהיי x_0 נקודה קריטית של f , ונניח ש- f גזירה פעמיים ב- x_0 (בפרט $f'(x_0)=0$), אזי:

- אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי.
- אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי.
- אם $f''(x_0)=0$ לא יודעים.

הוכחה:

אם $f''(x_0)>0$ אז $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ ולכן בסביבה של x_0 מתקיים $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$. לכן עבור $x>x_0$ בסביבה מתקיים ש- $f'(x)>0$ ועבור $x<x_0$ בסביבה מתקיים $f'(x)<0$. לפי מבחן הנגזרת ה-I, x_0 היא מינימום מקומי (באופן דומה עבור $f''(x_0)<0$).

דוגמאות

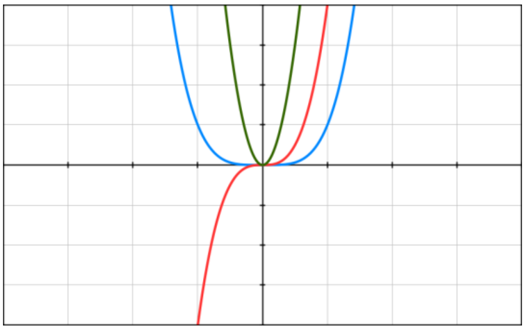
1.

$$f(x)=x^4$$

$$f'(x)=4x^3$$

$$f''(x)=12x^2$$

$$f''(0)=0$$



ו- $x_0=0$ הוא מינימום מקומי.

2. $f(x)=-x^4$ כנ"ל, אבל $x_0=0$ הוא מקסימום מקומי.

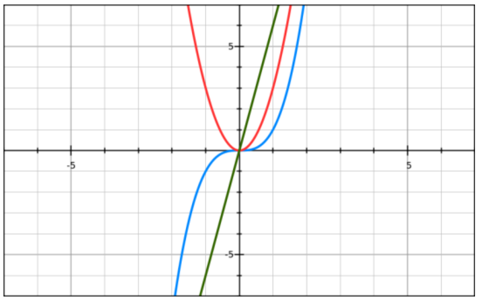
3.

$$f(x)=x^3$$

$$f'(x)=3x^2$$

$$f''(x)=6x$$

$$f''(0)=0$$



אבל $x_0=0$ אינה קיצון.

משפט- גזירות מרובה

תהיי f גזירה n פעמים ב- x_0 כך ש- $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ אבל $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ אזי:

- אם n אי זוגי אז אין קיצון מקומי ב- x_0
- אם n זוגי אז x_0 קיצון ו:

אם $f^{(n)}(x_0)>0$ <== מינימום, אם $f^{(n)}(x_0)<0$ <== מקסימום.

הוכחה:

f גזירה n פעמים, לכן נוכל לכתוב $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$.

$$f(x)=f(x_0)+0+0+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

כאשר $\alpha_n(x)=\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ (חוץ מהאדום זו הערה שנאמרה בהרצאות קודמות אבל לא הוכחה).

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha_n(x)(x-x_0)^n$$

<== $\Downarrow$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha_n(x)\right)$$

נניח $f^{(n)}(x_0)>0$. כיוון ש- $\alpha_n(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ יש סביבה של x_0 שבה הביטוי $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha_n(x)$ חיובי. בסביבה זו:

עבור $x>x_0$ <== $f(x)>f(x_0)$

עבור $x<x_0$ <== אם n זוגי אז $f(x)>f(x_0)$, אם n אי זוגי אז $f(x)<f(x_0)$.

לכן אם n זוגי אז x_0 מינימום מקומי.

אם n אי זוגי אז x_0 אינו קיצון.

באופן דומה עבור $f^{(n)}(x_0)<0$.

קמירות וקעירות

טרום הגדרת קמורה

קבוצה קמורה אם הישר שמחבר כל 2 נקודות מוכל בה.

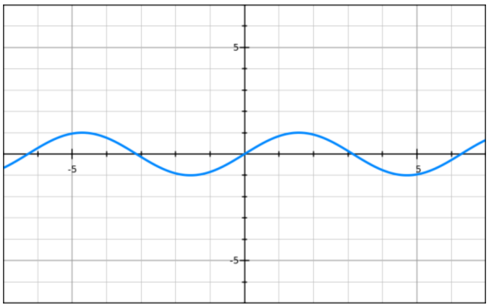
פונקציה קמורה אם הקבוצה שמעל הגרף היא קמורה.

הגדרת קמורה וקעורה

f תיקרא קמורה (או קעורה) בקטע I אם לכל $x, y \in I$ מתקיים שהמיתר שמחבר את $(x, f(x))$ ל- $(y, f(y))$ נמצא מעל (או מתחת) הגרף *(לא בהכרח ממש)*.

דוגמא:

$f(x) = \sin x$



הפונקציה קמורה ב- $[\pi, 2\pi]$ וקעורה ב- $[0, \pi]$.

משפטים עבור קמירות קעירות

1. f קמורה ב- (a,b) <== f רציפה ב- (a,b).
2. תהיי f גזירה ב- (a,b), אזי f קמורה <==> לכל $x \in (a,b)$ המשיק לגרף נמצא מתחת לגרף.
3. תהיי f גזירה ב- (a,b), אזי f קמורה <==> f' עולה.
4. תהיי f גזירה פעמיים ב- (a,b), אזי f קמורה <==> $f'' \geq 0$ (אי שלילית)
5. אם f קמורה וגזירה ב- (a,b), ו- x_0 נקודה קריטית אז x_0 היא מינימום מקומי.

הוכחת 4 (בעזרת 3):

f קמורה <==> f' עולה <==> $f'' \geq 0$

הגדרה- נקודת פיתול

x_0 נקראת נקודת פיתול של f אם f רציפה ב- x_0, קמורה מצד אחד של x_0 וקעורה מהצד השני של x_0.

הערה:

- ההגדרה היא לא $f''(x_0)=0$!
- כמו כן נקודת פיתול היא לא בהכרח נקודה קריטית.
- אם f'' מוגדרת בסביבת x_0 ומשנה סימן ב- x_0 אז x_0 פיתול (מיידי ממשפט 4*)
- אפשר לקרוא לנקודות בהן $f''(x_0)=0$ נקודות חשודות כפיתול.

דוגמאות

1. $f(x)=x^4$

מקיימת $f''(0)=0$ אבל 0 אינה פיתול, כי f קמורה בכל $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\sin x$

$x=\pi$ היא פיתול (ולא מינימום או מקסימום או קיצון)

הגדרת אסימפטוטה אנכית

$x=x_0$ ייקרא אסימפטוטה אנכית אם $\lim\limits_{x\to x_0^+}|f(x)|=\infty$ או $\lim\limits_{x\to x_0^-}|f(x)|=\infty$

הגדרת אסימפטוטה משופעת

$y=ax+b$ ייקרא אסימפטוטה משופעת של f ב- ∞ או ב- $-\infty$ אם $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)-(ax+b)|=0$

הערה:

מקרה פרטי הוא אסימפטוטה אופקית כאשר $a=0$ (יכול לחצות את האסימפטוטה ורק בסביבה מסוימת לשאוף לה).

דוגמא- חקירת פונקציה

$$f(x)=\left(x^2(3-x)\right)^{\frac{1}{3}}$$

שלב א'- מציאת תחום הגדרה

$\mathbb{R}$ (מוגדרת לכל x)

שלב ב'- רציפות

$\mathbb{R}$ (הרכבה של רציפות, אלמנטרית)

שלב ג'- חיתוך עם הצירים

$$f(0)=\left(0\cdot(3-0)\right)^{\frac{1}{3}}=0 \quad\Downarrow\quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad\Downarrow\quad (3,0) \text{ or } (0,0)$$

שלב ד'- נגזרת

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x)=\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}$$

קיבלנו כי הביטוי לא מוגדר ב- $x=0$ וב- $x=3$.

ואמנם (בודקים לפי הגדרה) f' לא קיימת ב- $x=0,3$.

שלב ה'- ט'- מדלגים כרגע

שלב י'- אסימפטוטות

אין אסימפטוטות אנכיות כי f רציפה (לכל $\mathbb{R}$ מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$)

מציאת אסימפטוטות משופעות:

אם $f(x)-(ax+b)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ אזי $\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$.

לכן חייב להתקיים $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ ו- $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$.

אצלנו יוצא $y=-x+1$ אסימפטוטה משופעת גם ב- ∞ וגם ב- $-\infty$