

חדו"א 1' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא אינטגרלים מסוימים

מושגים: * סכומי דרבו, סכומי רימן, פרמטר חלוקה, עידון

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{כללים: (א)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{(ב)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{(אדיטיביות) (ג)}$$

$$f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{(ד)}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{(ה)}$$

$$g \leq f \implies \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \quad \text{(ו)}$$

$$m \leq f(x) \leq M \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{(ז)}$$

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f, \quad \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{(לינאריות) (ח)}$$

משפטים:

1. f מונוטונית $\iff f$ אינטגרבילית.

2. f רציפה $\iff f$ אינטגרבילית.

3. f רציפה פרט למספר נקודות סופי (ו- f חסומה) $\iff f$ אינטגרבילית.

4* f אינטגרבילית \iff קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא ממידה 0.

5. שינוי f במספר סופי של נקודות אינו משנה את האינטגרביליות (ואת ערך האינטגרל).

6. f אינטגרבילית על $[a, b]$ $\iff f$ אינטגרבילית על כל $[c, d] \subseteq [a, b]$.

7. f, g אינטגרביליות $\iff fg$ אינטגרבילית.

8. f אינטגרבילית $\iff |f|$ אינטגרבילית.

9. (ערך הביניים) f רציפה \iff קיימת $c \in [a, b]$ כך ש-

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

10. f אינטגרבילית $\iff F(x) = \int_a^x f(t) dt$ רציפה.

11. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ גזירה ו- $F'(x) = f(x)$ (המשפט היסודי) f רציפה \iff

12. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ אזי F פונקציה קדומה של f , (נוסחת ניוטון) אם

13. u, v גזירות עם נגזרות אינטגרביליות, אזי: (אינטגרציה בחלקים)

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

14. $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, φ על, גזירה, f רציפה ב- $[a, b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, אזי: (שיטת ההצבה) אם

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

15. אינטגרל של פונקציה אינטגרבילית אי זוגית בתחום סימטרי הוא 0.

16. f, g אינטגרביליות, אזי: (אי שוויון קושי-שוורץ) אם

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

17. אם f רציפה ו- $g \geq 0$ אינטגרבילית, אזי קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$

18. אם f מונוטונית וגזירה, f' אינטגרבילית, ו- g אינטגרבילית, אזי קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g$

נוסחאות:

אורך קשת: $L = \int_a^b (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2} dt$

$$L = \int_a^b (1 + y'(x)^2)^{1/2} dx$$

נפח גוף סיבוב: $v = \pi \int_a^b f^2(x) dx$