קומבינטוריקה - תרגיל מס' 5

פתרון

תרגיל מס' 1

הוכח: המכפלה של כל k מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת ב - $k!$.

פתרון:

נתבונן במכפלה כלשהי של k מספרים טבעיים עוקבים: $(n+1)\cdot(n+2)\cdots(n+k-1)\cdot(n+k)$. אנו נוכיח, כי מכפלה זו בחלוקה ב - $k!$ נותנת כתוצאה מספר שלם. נתבונן, אם כן, בביטוי הדרוש:

$$\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{k!}=\frac{1\cdots n}{1\cdots n}\cdot\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{k!}=\frac{(n+k)!}{n!\cdot k!}=\binom{n+k}{n}$$

קיבלנו, כי תוצאת החלוקה הינה הביטוי: $\binom{n+k}{n}$, שהינו מספר שלם לכל בחירת n,k טבעיים, כיוון שהוא מבטא מספר אפשרויות בחירה. לכן, הטענה נכונה.

טעות נפוצה בפתרון שאלה זו:

רבים התחילו את הפתרון על ידי התבוננות בביטוי: $\binom{n}{k}$, והבחינו כי הוא מכפלה של k טבעיים עוקבים מחולקת ב - $k!$, ועל ידי ציון העובדה כי זהו מספר שלם, הוכיחו את הטענה. שימו לב לעובדה שע"י כך, הוכחתם בעצם את הטענה: "הביטוי $\binom{n}{k}$ הינו מכפלה של k מספרים טבעיים עוקבים אשר מתחלקת ב - $k!$", אבל לא את הטענה הדרושה, כי: "מכפלת כל k מספרים טבעיים עוקבים מתחלקת ב - $k!$"!

תרגיל מס' 2

הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n+1}{a+b+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$

נתבונן בבעיה הבאה:

מהו מספר הקבוצות $A=\{x_1<x_2<\ldots<x_{a+b+1}\}$ בגודל $a+b+1$ מתוך $\{1,2,\ldots,n+1\}$?

ספירה ראשונה:

נפריד את הבעיה למקרים זרים לפי הערך של x_{a+1}, שנסמנו $k+1$. מספר האפשרויות לבחור תת קבוצה כנ"ל עם $x_{a+1}=k+1$ הוא

$$\binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$$

כי יש $\binom{k}{a}$ אפשרויות לבחור את a האברים הראשונים ו-$\binom{n-k}{b}$ אפשרויות לבחור את $n-k$ האברים האחרונים. שימו לב שמפני שהגדרנו $\binom{n}{k}=0$ עבור $n<k$, החישוב נשאר נכון גם אם $a<k$, למשל, ומקבלים במקרה כזה 0 אפשרויות, כצפוי.

נסכם כי בספירה זו קיבלנו

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$$

אפשרויות.

ספירה שנייה:

ספירה ישירה של מפר תתי-הקבוצות בגודל $a+b+1$ של קבוצה בגודל $n+1$ נותנת, כידוע, את התשובה

$$\binom{n+1}{a+b+1}$$

מהשוויון בין התשובות שהתקבלו בשתי הדרכים לאותה הבעייה, מקבלים את הזהות המבוקשת.

ב. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$

נתבונן בבעיה הבאה:רוצים לבחור ועד מתוך n בנים ו-n בנות. לועד חייב להיות יו"ר, וזו חייבת להיות בת. כעת, נספור שוב בשתי הדרכים.

<u>ספירה ראשונה:</u>

עבור ועד בן n אנשים, אשר מכיל בדיוק k בנות, יש: $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ דרכים לבחור אותו (בחירת הבנים ובחירת הבנות אינן תלויות זו בזו), ולכל בחירה כזו יש k אפשרויות לבחור את היו"ר מקרב הבנות. ז"א, סה"כ: $k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ אפשרויות. כיוון שמספר הבנות אינו מוגבל, k יכול להיות כל מספר בין: $0,\ldots,n$ (שימו לב, כי ניתן להכניס לכאן את המקרה בו $k=0$, כלומר - אין בנות בועד - ואז ההכפלה ב - k תאפס את הביטוי. אכן, אי אפשר לבחור ועד עם 0 בנות ו - n בנים, כשהיו"ר חייבת להיות בת!). לכן, סך כל האפשרויות לבחור את הועד הוא:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$$

<u>ספירה שנייה:</u>

כעת, נבחר ראשית את היו"ר מקרב הבנות - ניתן לעשות זאת ב - n דרכים. נשלים את הועד בעזרת עוד $n-1$ אנשים מקרב $2n-1$ הנותרים. מספר האפשרויות לעשות זאת:

$$n\binom{2n-1}{n-1}$$

כיוון שספרנו את הדרכים לפתרון אותה הבעיה, חייב להתקיים שויון, ולכן:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$$

<u>טעות נפוצה בפתרון שאלה זו:</u>

חלקכם השתמשו ב"סיפורים" הדרושים ואף הגיעו לתשובות הנכונות, אבל לא הקפידו על כך שהצגת הבעיה תהיה <u>זהה לחלוטין</u> בשתי ספירותיה. לדוגמא, בסעיף ב' - את הספירה הפשוטה יותר, עשו ללא ציון העובדה כי היו"ר חייב להיות ממין מסוים בלבד. בדרך זו, כמובן, יש טעות בספירה של אחת מן הדרכים, ואם אין טעות - לא בהכרח יתקיים שוויון, כיוון שאין מדובר באותה הבעיה!

<u>תרגיל מס' 3</u>

א. כמה פעמים מופיע המספר 10 במשולש פסקל?

פתרון:

המספר 10 מופיע בפעם הראשונה בשורה ה - 5-ית, כיוון ש: $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$, ולכן הוא מופיע בה פעמיים. מזהות פסקל, אנו יודעים כי: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, ולכן כל האיברים אשר יופיעו "מתחת" להופעות אלו של 10 יהיו גדולים ממנו. "מתחת" - מתייחס כאן לאלכסונים היורדים מ - $\binom{5}{2}$ שמאלה ומ - $\binom{5}{3}$ ימינה ולמספרים אשר ביניהם.

בנוסף, יופיע 10 גם בשורה העשירית, כיוון ש: $10 = \binom{10}{9} = \binom{10}{1}$, ולא יופיע אחרי שורה זו, כפי שיוסבר בסעיף ב'.

לכן, המספר 10 מופיע במשולש פסקל 4 פעמים בסך הכל.

ב. הוכח, שכל מספר טבעי $m > 1$ מופיע במשולש פסקל רק מספר סופי של פעמים.

אם נכנה את השורה הראשונה במשולש פסקל: שורה מס' 0, אזי בשורה ה - n-ית, האיבר הראשון הוא: $\binom{n}{0}$. לפי מה שנלמד בכיתה, איברי כל שורה במשולש פסקל, מהווים סדרה מונוטונית עולה עד לאמצע, ומשם מהווים סדרה מונוטונית יורדת, עד לאיבר האחרון בכל שורה: $\binom{n}{n}$. כיוון ש: $1 = \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$ בכל שורה, נתעלם מכל הופעות המספר 1 במשולש, ונתייחס לאיבר הראשון בשורה, כאילו הוא האיבר: $\binom{n}{1}$ ולאיבר האחרון, כאילו הוא: $\binom{n}{n-1}$. הטענה לגבי המונוטוניות תקפה גם כאן, ולכן בכל שורה n-ית, האיבר הראשון והאיבר האחרון הם: $n = \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$ והם קטנים מכל איברי אותה שורה.

מכאן, מספר טבעי כלשהו: $m > 1$ לא יופיע מעבר לשורה ה - m-ית, וברור שעד מקום זה הוא יופיע מספר סופי של פעמים.

תרגיל מס' 4

תהינה A, B, C קבוצות. הוכח

$$3|A \cup B \cup C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| \geq 2(|A| + |B| + |C|)$$

פתרון:

קודם כל, נשים לב כי הביטוי הוא סימטרי ביחס להחלפות בין A,B, ו-C. לכן מספיק לבדוק כמה פעמים בכל צד נספר איבר המופיע ב-0 מן הקבוצות, ב-$3,2,1$ מן הקבוצות ולהשוות את התוצאות - בצורה דומה להוכחת נוסחת ההכלה-הפרדה.

איבר המופיע ב-0 מן הקבוצות נספר בשני הצדדים 0 פעמים.

איבר המופיע ב-1 מן הקבוצות נספר 3 פעמים בצד שמאל ופעמיים מצד ימין. (בדקו!)

איבר המופיע ב-2 מן הקבוצות נספר בשני הצדדים 4 פעמים. (בדקו!)

איבר המופיע ב-3 מן הקבוצות נספר בשני הצדדים 6 פעמים. (בדקו!)

לכן קיבלנו שכל איבר נספר מימין לפחות אותו מספר פעמים כמו בצד שמאל ומכאן אי השוויון המבוקש.

הערה חשובה לגבי התרגיל

חלק מכם ניסו להוכיח את התרגיל תוך שמוש בטיעונים מסוג "במקרה הגרוע כל איבר מופיע בקבוצה אחת

בדיוק". טענה זו נכונה במובן מסויים ואף נובעת מן ההוכחה. אך היא לא יכולה להוות תחליף להוכחה פורמלית של התרגיל.

תרגיל מס' 5^*, (בונוס)

נקרא חלוקה סדורה של n, לחלוקה של n למחוברים טבעיים עם חשיבות לסדר המחוברים. למשל, ל-3 יש 4 חלוקות סדורות:

$$3 = 1 + 1 + 1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 3 = 2 + 1, \quad 3 = 3$$

א. כמה חלוקות סדורות יש ל-n?

ב. בכמה מן החלוקות הסדורות של n יש מספר זוגי של מחוברים זוגיים?

פתרון:

א. נתאים לכל חלוקה סדורה של n חלוקה של n כדורים מסודרים בשורה על ידי מחיצות. המחובר ה-i בחלוקה יהיה מספר הכדורים בין המחיצה ה-$i-1$ למחיצה ה-i.

למשל, עבור $n = 3$ ההתאמה היא:

$3 = 1 + 1 + 1$ מתאים ל-$O \mid O \mid O$

$3 = 1 + 2$ מתאים ל-$O \mid O\ O$

$3 = 2 + 1$ מתאים ל-$O\ O \mid O$

$3 = 3$ מתאים ל-$O\ O\ O$

קל לראות שהתאמה זו היא חד חד ערכית ועל, ולכן מספר החלוקות הסדורות הוא כמספר האפשרויות להציב את המחיצות, שהוא 2^{n-1} (בכל אחד מ-$n-1$ המקומות אנו יכולים להחליט האם לשים את המחיצה או לא). לכן התשובה היא 2^{n-1}.

ב. נמשיך בסעיף זה להשתמש בהתאמה בין חלוקות להצבות מחיצות שבנינו בסעיף הקודם. אנו צריכים להציב מחיצות כך שיווצר מספר זוגי של תאים עם מספר זוגי של כדורים.

בשלב הראשון נציב את כל המחיצות, למעט השמאלית ביותר. יש לנו 2^{n-2} אפשרויות לעשות זאת (חשבו למה?). הצבה של המחיצה השמאלית ביותר בכל מקרה תשנה את זוגיות מספר התאים עם מספר זוגי של כדורים. לכן יש בדיוק אפשרות אחת להציב או לא להציב את המחיצה השמאלית ביותר כך שהתנאי יתקיים. לכן התשובה היא 2^{n-2}.

למשל, עבור $n = 3$:

עבור ההצבה $O \mid O\ O$, מספר התאים עם מספר זוגי של כדורים הוא אי זוגי (1) , ולכן צריך להוסיף את המחיצה השמאלית ולקבל $O \mid O \mid O$, או $3 = 1 + 1 + 1$.

עבור ההצבה $O\ O\ O$, מספר התאים עם מספר זוגי של כדורים הוא זוגי (0), ולכן אין צורך להוסיף את המחיצה השמאלית, ונקבל $O\ O\ O$, או $3 = 3$.

קיבלנו את $2^{3-2} = 2$ האפשרויות המתאימות.