תורת המשחקים, גיליון 7

מגישות:

[redacted]

9/10

1. נראה באינדוקציה לאחור שלכל קדקד u בעץ המשחק, לתת משחק G_u יש נקודת שווי-משקל.
מזה ינבע בפרט שב- $G = G_r$ יש נקודת שווי-משקל.

• <u>בסיס האינדוקציה</u>

אם $depth(u)=0$ אז u קדקד קצה, אז קבוצות התכסיסים של שני השחקנים ב- G_u ריקות ולכן אין להם לאן לסטות (התשלום המתקבל ב- u הוא היחידי ולכן המקסימלי עבור שני השחקנים) ולכן קיימת נקודת שווי-משקל עם התשלומים המתקבלים ב- u.

• <u>צעד האינדוקציה.</u>

נניח $depth(u)>0$ ותהי $U=\{u_1,\dots,u_k\}$ קבוצת הקדקדים העוקבים ל- u.
מכיוון ש- $depth(u_i) < depth(u)$ לכל $i=1,\dots,k$, ניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה על כל אחד מתתי-משחקים G_{u_i}. לפיכך לכל $i=1,\dots,k$ קיימת נקודת שווי-משקל ב- G_{u_i}, או במילים אחרות לכל $i=1,\dots,k$ קיימים זוג תכסיסים σ_i לשחקן 1, τ_i לשחקן 2 שלשני השחקנים לא משתלם לסטות מהם ב- G_{u_i}.

יש כאן n שחקנים

נפריד למקרים לפי מהותו של הקדקד u:

• <u>$u\in V_1$</u> (קדקד החלטה של 1)

אז בקדקד u שחקן 1 יבחר ~~לקדקד~~ "להתקדם" לקדקד u_n בו התשלום בנקודת שווי-המשקל ב- G_{u_n} מקסימלי עבור שחקן 1.

מהי נק' ש"מ? מהם תכסיסי השחקנים

ומתקיים ש~~לא~~ משתלם לו לבחור בקדקד אחר, שכן שם התשלום עבורו קטן (או שווה) לתשלום המתקבל ב- G_{u_n}.
לשחקן 2 ~~עדיין~~ עדיין לא משתלם לסטות מ- τ_n
לכן נקודת שווי-המשקל של G_{u_n} היא נק' שווי-המשקל של G_u בצירוף הבחירה המתאימה של שחקן 1 בקדקד u.

- $u \in V_2$ (קדקד החלטה של 2)

אזי: בקדקד u שחקן 2 יבחר בקשת המובילה ל- u_m

מן התשלום בנקודת שיווי המשקל ב- G_{u_m} מקסימלי עבור שחקן 2.

ומתקיים שלא משתלם לו לבחור בקדקד אחר, שכן שם התשלום

עבורו קטן (או שווה) לתשלום המתקבל ב- G_{u_m}.

לשחקן 1 עדיין לא משתלם לסטות מ- σ_m

ולכן נקודת שיווי-המשקל של G_{u_m} היא נק' שיווי המשקל של G_u

בצירוף ~~התכסיס~~ הבחירה המתאימה של שחקן 2 בקדקד u.

- $u \in V_0$ (קדקד גורל)

אזי: אם הקשת המחברת את u ל- u_i

תיפול בגורל, עדיין לא משתלם לשני השחקנים לסטות מתכסיסיהם

σ_i , τ_i ולכן איחוד כל התכסיסים:

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_k \qquad \tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots \cup \tau_k$$

תוביל לנקודת שיווי משקל שהתשלומים בה הם

הממוצעים המשוקללים של התשלומים בנקודות שיווי-המשקל

של G_{u_i} בהתאם לסיכויים של קדקד הגורל u.

- השאלה דרשה הוכחה ל-n שחקנים.

-1

2) נקודות שיווי המשקל בתכסיסים טהורים הן כל הנקודות בהן בדיוק 1000 שחקנים קנו כרטיס או בדיוק 999 שחקנים קנו כרטיס. כלומר מספר נקודות שיווי המשקל הינו:

$$\binom{1700}{1000}+\binom{1700}{999}=\frac{1700!}{1000!\,700!}+\frac{1700!}{999!\,701!}$$

<u>הוכחה:</u>

נסמן ב- x את מספר האנשים שקנו כרטיס. התשלום לקוני הכרטיס הוא: $\frac{1000}{x}-1$, והתשלום לשחקנים שלא קנו כרטיס הוא אפס.

אם $x>1000$ אז התשלום של קוני הכרטיס קטן ממש מאפס. לכן עדיף להם לשנות את בחירתם ולא לקנות כרטיס, וכך להגדיל את התשלום שלהם מתשלום שלילי ממש לאפס.

לכן $x>1000$ אינה נקודת שיווי משקל.

אם $x<999$ אז התשלום של קוני הכרטיס גדול ממש מאפס, ולכן לא כדאי להם לשנות את בחירתם. אולם, אם שחקן שלא קנה כרטיס ישנה את בחירתו ויקנה כרטיס, אז תשלומו יגדל מ- 0 ל- $\frac{1000}{x+1}-1$. אנו יודעים כי $x+1<1000$, ולכן התשלום שלו יהיה חיובי ממש, כלומר יגדל. לכן לשחקן שלא קנה כרטיס כדאי לשנות את בחירתו, ומכאן ש- $x<999$ אינה נקודת שיווי-משקל.

אם $x=1000$ אז התשלום של קוני הכרטיס הוא אפס, ולכן אין להם אינטרס לשנות את בחירתם (התשלום ישאר אפס). אם מי שלא קנה כרטיס ישנה את בחירתו אז תשלומו יהפוך מאפס ל- $\frac{1000}{1001}-1<0$, כלומר תשלומו קטן. לכן לשחקנים שלא קנו כרטיס עדיף להישאר בהחלטתם. מכאן ש- $x=1000$ נקודת שיווי-משקל.

אם $x=999$ אז התשלום של קוני הכרטיס חיובי ממש, ולכן עדיף להם לא לוותר על קניית כרטיס (תשלום אפס). אם שחקן שלא קנה כרטיס ישנה את החלטתו, תשלומו יהיה: $\frac{1000}{999+1}-1=0$, ולכן אין לו אינטרס לשנות את החלטתו.

לכן $x=999$ נקודת שיווי-משקל.

מש"ל

3) ג-

	q_1	q_2	q_3	q_4
p	0,-10	4,-4	1,-3	6,-1
$1-p$	2,6	-2,0	4,-2	0,-8

ישנן שתי נקודות שיווי-משקל בתכסיסים טהורים, כמסומן בטבלה.
מתנאי האדישות נובע כי לא קיימות נקודות שיווי משקל בהן אחד השחקנים משתמש בתכסיס טהור והשני בתכסיס מעורב. לכן נקודות שיווי המשקל הנוספות, אם קיימות, הן כאלו שבהן שני השחקנים משתמשים בתכסיסים מעורבים.
נבדוק עבור אילו צירופים של עמודות מתקיים תנאי האדישות עבור שחקן 2:

$$\underset{①}{-16p+6} \overset{?}{=} \underset{②}{-4p} \overset{?}{=} \underset{③}{-p-2} \overset{?}{=} \underset{④}{7p-8}$$

אנו מקבלים כי לא קיימת נקודת שיווי משקל בה שחקן 2 מערב יותר משתי עמודות. נבדוק את האפשרויות שנותרו:

* שחקן 2 מערב את עמודות 1 ו-2: מתנאי האדישות $p=0.5$.
נבדוק אם לשחקן 2 כדאי לשחק בעמודות 3/4:

$$-2 = -16\cdot 0.5+6 > -0.5-2 = -2.5$$

$$-2 = -16\cdot 0.5+6 > 7\cdot 0.5-8 = -4.5$$

✓

נותר לבדוק את תנאי האדישות עבור שחקן 1:

$$4q_2 = 2q_1 - 2q_2 = 2-4q_2 \Longrightarrow q_2=\frac{1}{4},\ q_1=\frac{3}{4}$$

לכן: $\boxed{\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0,0\right)\right)}$ היא נקודת שיווי משקל עם תשלומים: $\boxed{(1,-2)}$

* שחקן 2 מערב את עמודות 1 ו-3: מתנאי האדישות: $p=\frac{8}{15}$.
אבל:

$$-2\frac{8}{15} = -16\cdot\frac{8}{15}+6 < -4\cdot\frac{8}{15} = -2\frac{2}{15}$$

ולכן אין נקודת שיווי משקל.

* שחקן 2 מערב את עמודות 1 ו-4: מתנאי האדישות: $p=\frac{14}{23}$.
אבל:

$$-3\frac{17}{23} = -16\cdot\frac{14}{23}+6 < -4\cdot\frac{14}{23} = -2\frac{10}{23}$$

ולכן אין נקודת שיווי-משקל.

* שחקן 2 מערב את אסטרטגיות 2 ו-3: מתנאי האדישות: $p=\frac{2}{3}$

מתקיים: $-2\frac{2}{3} = -4\cdot\frac{2}{3} > -16\cdot\frac{2}{3}+6 = -4\frac{2}{3}$ ✓

$-2\frac{2}{3} = -4\cdot\frac{2}{3} > 7\cdot\frac{2}{3}-8 = -3\frac{1}{3}$

נותר לבדוק את תנאי האדישות עבור שחקן 1:

$$4q_2+q_3 = -2q_2+4q_3 = -2+6q_3 = 4-3q_3 \Rightarrow q_3=\frac{2}{3} \quad q_2=\frac{1}{3}$$

לכן: $\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right)\right)$ הינו נקודת שיווי משקל עם תשלומים:

$\left(2, -2\frac{2}{3}\right)$

* שחקן 2 מערב את אסטרטגיות 2 ו-4: מתנאי האדישות: $p=\frac{8}{11}$

אבל: $-2\frac{10}{11} = -4\cdot\frac{8}{11} < -\frac{8}{11}-2 = -2\frac{8}{11}$

לכן אין נקודת שיווי משקל.

* שחקן 2 מערב את אסטרטגיות 3 ו-4: מתנאי האדישות: $p=\frac{3}{4}$

מתקיים: $-2.75 = -\frac{3}{4}-2 > -4\cdot\frac{3}{4} = -3$ ✓

$-2.75 = -\frac{3}{4}-2 > -16\cdot\frac{3}{4}+6 = -6$

נותר לבדוק את תנאי האדישות עבור שחקן 1:

$$q_3+6q_4 = 4q_3 = 6-5q_3 \Rightarrow q_3=\frac{2}{3} \quad q_4=\frac{1}{3}$$

לכן: $\left(\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),\left(0,0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$ הינו נקודת שיווי-משקל עם תשלומים:

$\left(2\frac{2}{3}, -2\frac{3}{4}\right)$

ואלו 3 נקודות שיווי המשקל באסטרטגיות מעורבות.

ב -

	q_1	q_2	q_3
P_1	0,0	5,4	4,5
P_2	5,4	4,5	0,0
P_3	4,5	0,0	5,4

במשחק זה אין נקודות שיווי משקל בתכסיסים טהורים.

נבדוק את המקרה בו שני השחקנים מערבים את שלושת התכסיסים הטהורים:

תנאי האדישות:

$$\left.\begin{array}{l} 4P_2+5P_3=4P_1+5P_2=5P_1+4P_3 \\ 5=9P_1+6P_2 \\ 4=3P_1+9P_2 \end{array}\right\} P_1=P_2=P_3=\frac{1}{3}$$

מהסימטריה של המשחק ברור: $q_1=q_2=q_3=\frac{1}{3}$

לכן $\left((\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})\right)$ הוא נקודת שיווי-משקל עם התשלומים: $(3,3)$.

מתנאי האדישות רואים כי לא קיימת נקודת שיווי משקל בה אחד השחקנים משחק תכסיס טהור והשני תכסיס מעורב. נראה כי גם המקרה בו שחקן 1 מערב 3 שורות ושחקן 2 מערב 2 עמודות (או להפך) אינו יתכן:

נניח בלי הגבלת הכלליות ששחקן 1 מערב את 3 השורות ושחקן 2 מערב את שורות 1 ו-2 (מסימטריות המשחק, אין הבדל במקרים האחרים). אז מתנאי האדישות:

$$\left.\begin{array}{l} 5q_2=5q_1+4q_2=4q_1 \\ 5q_2=4-4q_2 \\ 5q_2=5-q_2 \end{array}\right\} \text{אין פתרון!}$$

לכן לא קיימת נקודת שיווי משקל.

נותרו המקרים בהם שני השחקנים מערבים 2 שורות/עמודות. מסימטריות המשחק בין שני השחקנים ובין השורות השונות והעמודות השונות יש לבדוק את קיום נקודות שיווי-משקל בשני המשחקים הבאים:

	q	$1-q$
p	5,4	4,5
$1-p$	4,5	0,0

1

	q	$1-q$
p	0,0	4,5
$1-p$	5,4	0,0

2

מקרה 1: מתנאי השוויון:

$5q + 4 - 4q = 4q$

$q = \frac{4}{3} \longrightarrow$ גדול מ-1!

לכן אין נקודות שיווי-משקל.

מקרה 2: מתנאי השוויון:

$4 - 4q = 5q \Longrightarrow q = \frac{4}{9}$

$4 - 4p = 5p \Longrightarrow p = \frac{4}{9}$

אבל מתקיים:

$2\frac{2}{9} = 4 - 4\cdot\frac{4}{9} < 4\cdot\frac{4}{9} + 5\cdot\frac{5}{9} = 4\frac{5}{9}$

ולכן לא כל התנאים מתקיימים, ואין נקודות שיווי משקל.

לסיכום, נקודת שיווי-המשקל היחידה היא $\boxed{\left(\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right)}$ עם תשלומים:

$\boxed{(3,3)}$.

ג.

	q_1	q_2	q_3
p_1	$\boxed{1,1}$	0,0	0,0
p_2	0,0	$\boxed{1,1}$	0,0
p_3	0,0	0,0	$\boxed{1,1}$

ישנן 3 נקודות שיווי-משקל בתכסיסים טהורים - מסומנות בטבלה.

כעת נחפש נקודות שיווי-משקל בתכסיסים מעורבים.

נניח כי $(\vec{p},\vec{q}) \in S^* \times T^*$ נקודת שיווי-משקל.

- אם $|supp(\vec{p})| = 1$

אז בהכרח גם $|supp(\vec{q})| = 1$ כדי שיתקיים

תנאי האדישות עבור שחקן 2. ($\vec{q} \cdot \vec{p}$)

והגענו לנקודת שיווי-משקל בתכסיסים טהורים, אותן כבר מצאנו.

- אם $|supp(\vec{p})| = 2$ נניח $supp(\vec{p}) = \{i_1, i_2\}$

$i_1, i_2 \in \{1,2,3\}$.

אז: $\pi_2(\vec{p}, t_{i_1}) = p_{i_1} > 0$ $\quad \pi_2(\vec{p}, t_{i_2}) = p_{i_2} > 0$

ו- $\pi_2(\vec{p}, t_{i_3}) = 0$

לכן $i_3 \notin supp(\vec{q})$.

בנוסף לא ייתכן ש- $|supp(\vec{q})| = 1$ כי אז עדיף

לשחקן 1 לשחק תכסיס טהור גם כן בסתירה לכך ש- $|supp(\vec{p})| = 2$

⇐ $supp(\vec{q}) = supp(\vec{p})$

ולכן מתכונת האדישות:

$$\pi_1(s_{i_1}, \vec{q}) = q_{i_1} = \pi_1(s_{i_2}, \vec{q}) = q_{i_2}$$

ומתקיים $q_{i_1} + q_{i_2} = 1$

⇐ $q_{i_1} = q_{i_2} = \frac{1}{2}$

$$\pi_2(\vec{p}, t_{i_1}) = p_{i_1} = \pi_2(\vec{p}, t_{i_2}) = p_{i_2}$$

ומתקיים $p_{i_1} + p_{i_2} = 1$

⇐ $p_{i_1} = p_{i_2} = \frac{1}{2}$

ולכן מצאנו את נקודות שיווי-המשקל הבאות:

- $\left((\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\right)$ עם התשלומים $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
- $\left((\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})\right)$ עם התשלומים $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
- $\left((0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)$ עם התשלומים $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

• אם $|supp(\vec{p})| = 3$

אז מתנאי האדישות עבור שחקן 1:

$$\pi_1(s_1,\vec{q}) = \pi_1(s_2,\vec{q}) = \pi_1(s_3,\vec{q})$$

$$\Leftarrow \quad q_1 = q_2 = q_3$$

ידוע $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

לכן $q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3}$

מתנאי האדישות עבור שחקן 2: $(|supp(\vec{q})| = 3)$

$$\pi_2(\vec{p},t_1) = \pi_2(\vec{p},t_2) = \pi_2(\vec{p},t_3)$$

$$p_1 = p_2 = p_3$$

ידוע $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$\Leftarrow \quad p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

ומצאנו נקודת שיווי משקל נוספת:

$\left((\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})\right)$ עם התשלומים $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

ובסה"כ נקודות שיווי המשקל:

תכסיסים טהורים:
- $\left((1,0,0),(1,0,0)\right)$
- $\left((0,1,0),(0,1,0)\right)$
- $\left((0,0,1),(0,0,1)\right)$

תשלומים $(1,1)$

- $\left((\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\right)$
- $\left((\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})\right)$
- $\left((0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)$

תשלומים $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

- $\left((\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})\right)$ תשלומים $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$