אינפי 3 - תרגיל בית 1

שאלה 1:

הראו עבור שתי נורמות כלליות ב- $\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|^{(1)}$ ו-$\|\cdot\|^{(2)}$, כי:

א. כל כדור פתוח בנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$ ($B(p,r)=\{q\in\mathbb{R}^n \mid \|p-q\|<r\}$) מכיל איזשהו כדור פתוח בנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$, ומוכל באיזשהו כדור פתוח בנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$.

ב. סדרה נתונה $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ ב-$\mathbb{R}^d$ מתכנסת לגבול p ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$ אם ורק אם היא מתכנסת ל-p ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$.

ג. קבוצה נתונה $U\subset\mathbb{R}^d$ היא פתוחה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$ אם ורק אם היא פתוחה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$.

ד. קבוצה נתונה $U\subset\mathbb{R}^d$ היא סגורה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(1)}$ אם ורק אם היא סגורה ביחס לנורמה $\|\cdot\|^{(2)}$.

שאלה 2:

ב-$\mathbb{R}^2$, כדור היחידה (הווקטורים בעלי נורמה קטנה מ-1) בנורמה $\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ הוא הקבוצה

$$B_2(0,1)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\right\}$$

כתבו באופן דומה את כדורי היחידה בשתי הנורמות הבאות:

$$\|x\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

וציירו אותם.

שאלה 3:

הוכיחו כי לכל $x\in\mathbb{R}^d$ מתקיים

$$||x||_2\le||x||_1\le\sqrt{d}\cdot||x||_2$$

שאלה 4:

א. הוכיחו כי פונקציה בין שתי קבוצות פתוחות היא רציפה אם ורק אם המקור של כל תת-קבוצה פתוחה הוא פתוח.

ב. הראו בעזרת האפיון מסעיף א' כי ההטלה $\pi:\mathbb{R}^{m+d}\to\mathbb{R}^{m}$ המוגדרת על ידי $\pi\left(x\right)=\left(x_{1},\ldots,x_{m}\right)$ היא פונקציה רציפה.

שאלה 5:

א. פונקציה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{k}$ נקראת רציפה במידה שווה (במ"ש) על $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x,y\in D$ מקיימים $||x-y||<\delta$ אז $||f(x)-f(y)||<\epsilon$.
הוכיחו כי אם f רציפה על D קומפקטית, אזי f רציפה במידה שווה על D.

ב. קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ נקראת קשירה אם לכל $U,V\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות, זרות ולא ריקות המקיימות $D\subseteq U\cup V$ מתקיים $D\subseteq U$ או $D\subseteq V$.
הוכיחו כי אם f רציפה על D קשירה, אזי גם $f(D)$ קשירה.

ג. קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^{n}$ נקראת קשירה מסילתית אם לכל $x,y\in D$ קיימת פונקציה רציפה $f:[0,1]\to D$ כך ש- $f(0)=x$, $f(1)=y$. f כזו נקראת מסילה רציפה בין x,y.
הוכיחו כי אם D פתוחה, אז D קשירה אם ורק אם D קשירה מסילתית.

שאלה 6:

תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

א. הראו כי אם f חסומה אזי f רציפה אם ורק אם הגרף שלה $\left\{ \left(x,f\left(x\right)\right)\mid x\in[0,1]\right\}$ מהווה קבוצה סגורה ב-$\mathbb{R}^{2}$.

ב. האם סעיף (א) נכון ללא ההנחה על חסימות f? ענו עבור כל כיוון בנפרד.

שאלה 7:

הוכיחו שאיחוד של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה, ושחיתוך סופי של קבוצות פתוחות הינו קבוצה פתוחה.

שאלה 8:

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$.

א. הקבוצה הסגורה קטנה ביותר המכילה את A, נקראת הסגור של A, ומסומנת $\overline{A}$. הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב-A, נקראת הפנים של A, ומסומנת $\mathrm{int}(A)$.
הוכיחו ש $\overline{A}$ שווה לחיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A, וכי $\mathrm{int}(A)$ שווה לאיחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב- A.

ב. נקודת הצטברות של A הינה נקודה x (לאו דווקא שייכת ל-A) המקיימת, שלכל $r>0$, קיימת נקודה $x\neq y\in B_{r}(x)\cap A$. אוסף נקודות ההצטברות של A יסומן A'.
הוכיחו כי $\overline{A}=A'\cup A$

שאלה 9:

השפה של A היא אוסף כל הנקודות x המקיימות שלכל $r > 0$, הכדור $B_r(x)$ מכיל לפחות נקודה אחת מ-A ולפחות נקודה אחת מהמשלים של A . השפה של A תסומן ∂A.

א. מצאו את השפה של הדוגמאות הבאות: כדור פתוח, כדור סגור, הרציונליים במישור (כלומר, $\mathbb{Q}^2$), גרף של פונקציה רציפה במישור.

ב. הוכיחו או הפריכו:

1. הסגור שווה לאיחוד הקבוצה ושפתה.
2. קבוצה הינה פתוחה אם ורק אם היא לא חותכת את שפתה.
3. פונקציה רציפה לוקחת שפות לשפות (כלומר, $\partial f(A) \supseteq f(\partial A)$).
4. המקור של שפה של קבוצה על-ידי פונקציה רציפה, מוכלת בשפה של המקור של אותה קבוצה (כלומר, $\partial f^{-1}(A) \supseteq f^{-1}(\partial A)$).