אינפי 104195

תאריך: 25/12/2014

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

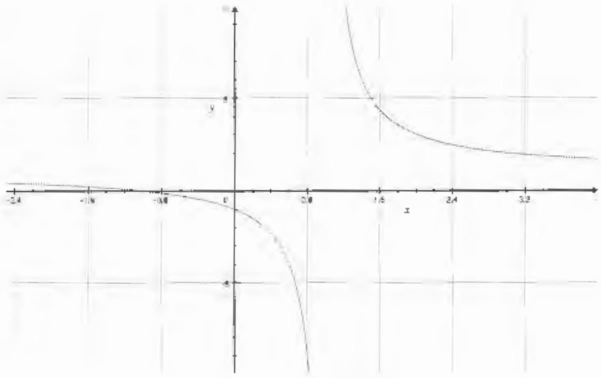
נושא: גיליון 8

שם המתרגל: יוחאי מעיין

תרגיל בית 8

תאריך הגשה: יום חמישי, 25.12.2014.

1 נתון הגרף של הפונקציה $f(x)$:



שרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $f^{-1}(x-3)$ (כאשר f^{-1} מתקבלת מהסתכלות על $f(x)$ כפונקציה שהטווח שלה הוא התמונה שלה).

ב. $f(|x|)$.

ג. $-f(-x)$. האם התקבל אותו הגרף המקורי? מתי זה יקרה?

2 תהי $f : A \longrightarrow B$ פונקציה (כאשר $A, B \subset \mathbb{R}$), תהי $x_0 \in A$. אומרים ש-f חסומה מקומית ב-x_0 אם קיימת $\delta > 0$ כך ש-f חסומה ב-$A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
הראו כי אם $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ חסומה מקומית בכל נקודה של $[a,b]$, אזי f חסומה ב-$[a,b]$.

3 תהיינה $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ו-$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ שתי פונקציות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f ו-g פונקציות עולות אז $f \circ g$ היא פונקציה עולה.

ב. אם f ו-g פונקציות יורדות אז $f \circ g$ היא פונקציה עולה.

ג. אם f ו-g פונקציות אי-זוגיות אז $f \circ g$ היא פונקציה אי-זוגית.

ד. אם f פונקציה זוגית ו-g פונקציה כלשהיא אז $f \circ g$ היא פונקציה זוגית.

ה. אם f כלשהיא ו-g פונקציה זוגית אז $f \circ g$ היא פונקציה זוגית.

4 הראו על פי הגדרת הגבול כי:

א. $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2-8}=-\frac{5}{4}$.

ב. $\lim_{x\to 27}\sqrt[3]{x}=3$.

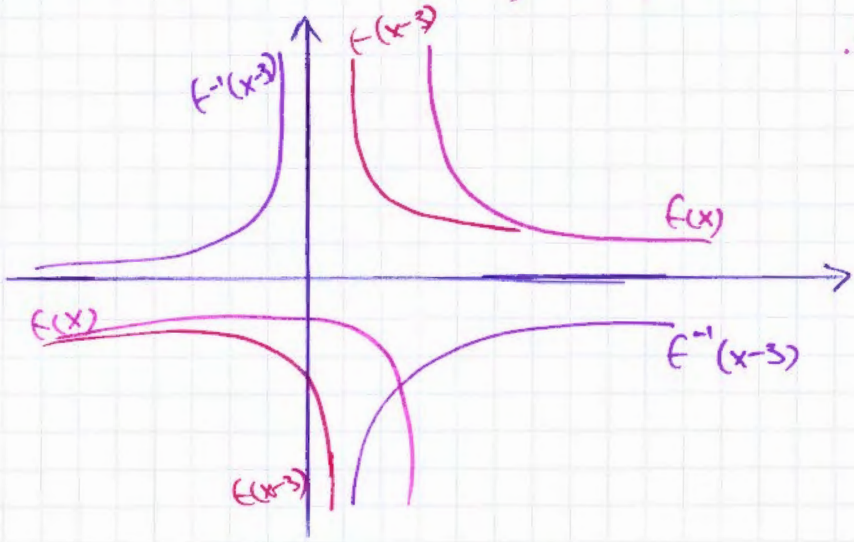
$\boxed{5}$ חשבו את הגבולות הבאים:

א. עבור $a\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$.

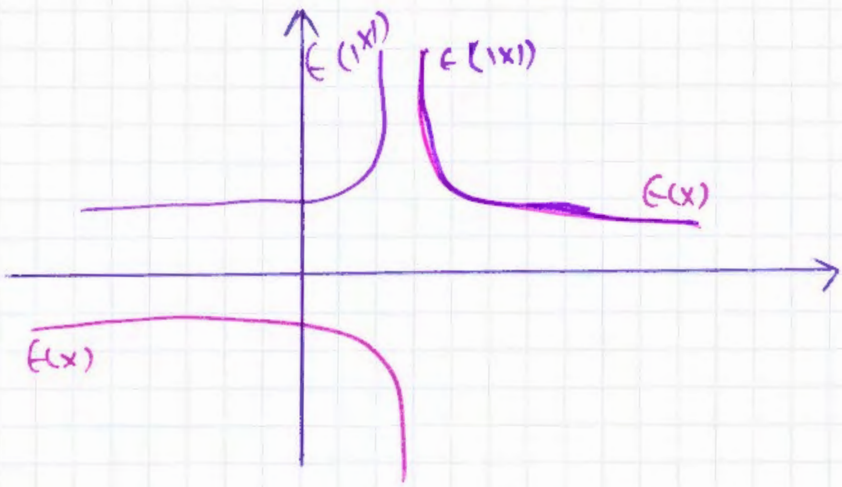
ב. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+8}-4}{x-2}$.

1) נתון גרף של פונקציה, שרטט את הפונקציות הבאות:

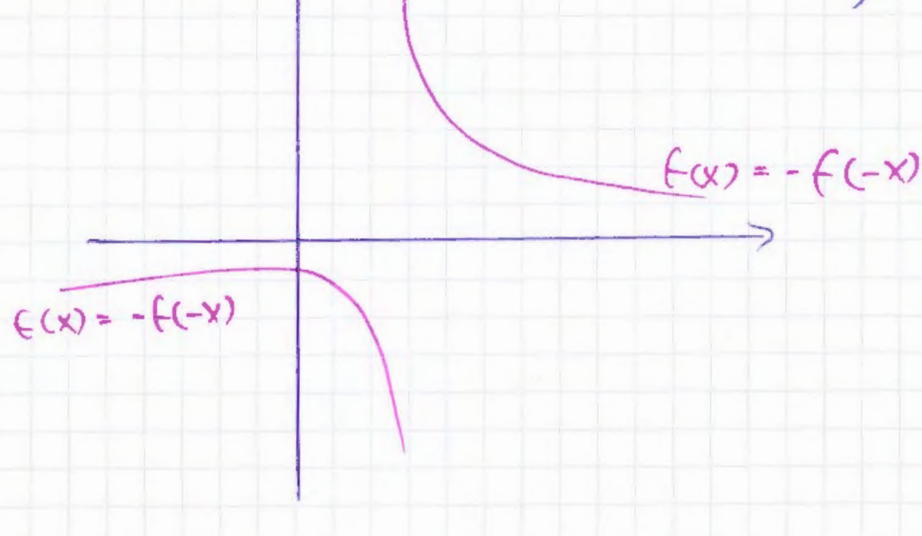
א) $f^{-1}(x-3)$ כאשר f^{-1} מתקבלת מהסתכלות על $f(x)$ כפונקציה שהטווח שלה הוא התמונה של f).



ב) $f(|x|)$



ג) $-f(-x)$. האם התקבל אותו הגרף המקורי? כן. מתי זה יקרה?
כשהפונקציה היא אי-זוגית.



2. תהי $f: A\to B$ פונקציה (כאשר $A,B\subset\mathbb{R}$). תהי $x_0\in A$. אומרים ש-f חסומה מקומית ב-x_0 אם קיימת δ כך ש-f חסומה ב-$(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A$. הוכח כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה מקומית בכל נקודה של $[a,b]$ אזי f חסומה ב-$[a,b]$.

מהנתון, לכל $x\in[a,b]$ קיימים δ, M כך שלכל $t\in[a,b]\cap(x-\delta, x+\delta)$ מתקיים $f(t)\le M_x$. האוסף $(x-\delta, x+\delta)$, $x\in[a,b]$ מהווה כסוי פתוח של הקטע הסגור $[a,b]$, ולכן מהיינה בורל קיים יש תת כיסוי סופי, כלומר קיימות נקודות $x_1,\dots,x_N$ כך ש- $[a,b]\subset\bigcup_{j=1}^N (x_j-\delta_{x_j}, x_j+\delta_{x_j})$. הקבוצה $\{M_{x_j}\}_{j=1}^N$ היא סופית, ולכן קיים לה מקסימום M. M הנ"ל הוא $(x_j-\delta_{x_j}, x_j+\delta_{x_j})\cap[a,b]$, ואיחוד הקבוצות האלו הוא בדיוק $[a,b]$, ולכן M הוא חסם של $|f(x)|$ לכל $x\in[a,b]$. מכאן f חסומה.

3. תהיינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. הוכח/הפרך:

(א) אם f ו-g עולות $f\circ g$ היא פונקציה עולה.

נתון: f עולה: יהי $f(x_2)>f(x_1) \Leftarrow x_2>x_1$

g עולה: יהי $g(x_2)>g(x_1) \Leftarrow x_2>x_1$

נוכיח ש- $f\circ g$ עולה, כלומר:

אם $(f\circ g)(x_2)>(f\circ g)(x_1) \Leftarrow x_2>x_1$

$$\left.\begin{aligned}(f\circ g)(x_1)&=f(\overbrace{g(x_1)}^{a})\\(f\circ g)(x_2)&=f(\overbrace{g(x_2)}^{b})\end{aligned}\right\}\xRightarrow{g\text{ עולה}} a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$$

כלומר סה"כ $(f\circ g)(x_2)>(f\circ g)(x_1) \Leftarrow x_2>x_1$

(ב) אם f ו-g פונקציות יורדות אז $f\circ g$ היא פונקציה עולה.

נתון: f יורדת: יהי $f(x_2)<f(x_1) \Leftrightarrow x_1<x_2$

g יורדת: יהי $g(x_2)<g(x_1) \Leftrightarrow x_1<x_2$

נוכיח ש- $f\circ g$ עולה, כלומר:

אם $(f\circ g)(x_2)>(f\circ g)(x_1) \Leftarrow x_2>x_1$

$$\left.\begin{aligned}(f\circ g)(x_1)&=f(\overbrace{g(x_1)}^{a})\\(f\circ g)(x_2)&=f(\overbrace{g(x_2)}^{b})\end{aligned}\right\}\xRightarrow{g\text{ יורדת}} a>b \xRightarrow[f\text{ יורדת}]{} f(a)<f(b)$$

(ג) אם f ו-g פונקציות אי-זוגיות אז $f\circ g$ היא פונקציה אי-זוגית

נתון: $-f(-x)=f(x)$

$-g(-x)=g(x)$

נוכיח ש- $f\circ g$ היא אי-זוגית, כלומר: $(f\circ g)(x_1)=-(f\circ g)(-x_1)$

$$(f\circ g)(x)\underset{\text{הגדרת הרכבה}}{=}f(g(x))\underset{g\text{ אי זוגית}}{=}f(-g(-x))\underset{f\text{ אי זוגית}}{=}-f(g(-x))\underset{\text{הגדרת הרכבה}}{=}-(f\circ g)(-x)$$

3 ד. אם f פונקציה זוגית, ו-g כלשהי אז $f\circ g$ הוא זוגית.

לא נכון, דוגמא נגדית:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \arccos(x)$$

$$(f\circ g)(x) = \cos(\arccos(x)) = x \rightarrow \text{לא זוגית!}$$

ה. אם f כלשהי ו-g פונקציה זוגית אז $f\circ g$ היא פונקציה זוגית.

נתון: g זוגית $\rightarrow$ $g(x) = g(-x)$

$$(f\circ g)(x) \underset{\text{הגדרת הרכבה}}{=} f(g(x)) \underset{\text{זוגית } g}{=} f(g(-x)) \underset{\text{הגדרת הרכבה}}{=} (f\circ g)(-x)$$

4. הוכח לפי הגדרת הגבול:

(א) $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-8} = -\frac{5}{4}$

לפי הגדרת הגבול: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall\, 0<|x-2|<\delta : \left|\frac{x+3}{x^2-8}+\frac{5}{4}\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{4(x+3)+5(x^2-8)}{(x^2-8)\cdot 4}\right| = \left|\frac{5x^2+4x-28}{4x^2-32}\right| = \left|\frac{(x-2)\cdot(x+2.8)}{4(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})}\right|$$

$$\le |x-2|\cdot\frac{|x+2.8|}{|x-\sqrt{8}||x+\sqrt{8}|} \quad *$$

$* \quad 0<|x-2|<\delta \longrightarrow -0.1 = 2-\delta < x < \delta+2 = 4.1$

$-2.9 = 2-2.8-\delta < x+2.8 < \delta+0.8 = 1.3$

$-0.1+\sqrt{8} = -\delta+2+\sqrt{8} < x-\sqrt{8} < \delta+2+\sqrt{8} = 4.1+\sqrt{8}$

$-0.1-\sqrt{8} = -\sqrt{8}-\delta+2 < x+\sqrt{8} < \delta+2-\sqrt{8} = 4.1-\sqrt{8}$

נבחר $\delta = 2.1$ ונגיע למגבלה **.

נחזור לאי השוויון המקורי:

$$\left|\frac{x+3}{x^2-8}+\frac{5}{4}\right| \le |x-2|\cdot\frac{|x+2.8|}{|x-\sqrt{8}||x+\sqrt{8}|} \le \delta\cdot\frac{1.2}{\sqrt{8}\cdot-\sqrt{8}} = -\frac{1.2}{8}\cdot\delta = -0.15\delta < \varepsilon$$

עבור δ שנבחר אי השוויון יתקיים כי $\varepsilon>0$ ולכן לפי הגדרת הגבול $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2-8} = \left(-\frac{5}{4}\right)$ (נבחר $\delta=\min\{2.1, \frac{-\varepsilon}{0.15}\}$)

(ב) $\lim_{x\to 27}\sqrt[3]{x} = 3$

לפי הגדרת הגבול: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall\, 0<|x-27|<\delta : |\sqrt[3]{x}-3|<\varepsilon$

נשתמש בזהות $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = (a-b)$

$$|\sqrt[3]{x}-3| = \frac{|x-27|}{|x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}+9|} < \frac{|x-27|}{9} \overset{?}{<} \varepsilon$$

לכן, נבחר $\delta=\min(9\varepsilon, 27)$ ועל כל x המקיים $0<|x-27|<\delta$

מתקיים $|\sqrt[3]{x}-3|<\varepsilon$.

5. חשבו את הגבולות הבאים:

א) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{\cancel{(x-a)}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\dots+a^{n-2}\cdot x+a^{n-1})}{\cancel{(x-a)}}$$

$$\xrightarrow{x\to a} (a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\dots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}) = n\cdot a^{n-1}$$

ב) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x^2+8}-4}{(x-2)}$

$$\frac{\sqrt{2x^2+8}-4}{x-2} = \frac{2x^2+8-4}{(x-2)(\sqrt{2x^2+8}+4)} = \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x^2+8}+4)}$$

$$= \frac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2+8}+4} \xrightarrow{x\to 2} \frac{2\cdot(2+2)}{\sqrt{16}+4} = \frac{8}{8} = \underline{1}$$