תורת הקבוצות - תרגול מספר 12
סודרים

תזכורת

סודרים הם הכללה של הספירה ה"רגילה" של מספרים טבעיים, כך שתמשיך "עד אינסוף ומעבר לו".
את הסודרים ניתן לאפיין על ידי שלוש תכונות:

1. 0 הוא סודר.
2. אם α הוא סודר, קיים סודר שמסומן $\alpha+1$ והוא העוקב ל־α - אין סודר שנמצא ביניהם.
3. לכל קבוצה A של סודרים קיים סודר $\alpha=\sup A$.

קיימים סודרים שאינם עוקבים של אף סודר - סודרים כאלו מכונים **גבוליים**. הדרך שבה הם מתקבלים היא כסופרמום של קבוצת סודרים קיימת.
לדוגמה, $\omega=\sup\{0,1,2,\ldots\}$ הוא סודר כזה.

בניית הסודרים על פי פון־נוימן

נאמר שקבוצה A היא **טרנזיטיבית** אם $B\in A$ גורר ש־$B\subseteq A$. באופן שקול, אם $C\in B\in A$ אז $C\in A$.
נאמר שקבוצה A היא **סודר** אם היא טרנזיטיבית והיחס $\in$ הוא יחס סדר טוב על A, כך שבנוסף לא מתקיים $B\in B$ לאף $B\in A$ (נסמן יחס סדר זה ב־$\leq$ כרגיל).
נוכיח מספר טענות בסיסיות על סודרים:

1. $\emptyset\triangleq 0$ הוא סודר.
2. אם α סודר ו־$\beta\in\alpha$ אז β סודר ומתקיים $\beta=\{\gamma\in\alpha\mid\gamma<\beta\}$.
3. אם $\alpha\neq\beta$ הם סודרים ו־$\beta\subsetneq\alpha$ אז $\beta\in\alpha$.
4. אם α,β סודרים אז $\beta\subseteq\alpha$ או $\alpha\subseteq\beta$.

הוכחה:
עבור 1, הטענה טריוויאלית ומתקיימת באופן ריק.
עבור 2, ראשית יש להוכיח ש־β טרנזיטיבית.
נניח כי $C\in\beta$ ו־$D\in C$. אנו רוצים להראות כי $D\in\beta$.
מכיוון ש־αטרנזיטיבית ומתקיים $C\in\beta\in\alpha$ אז $C\in\alpha$. לכן מתקיים $D\in C\in\alpha$ ולכן $D\in\alpha$.
קיבלנו כי β,C,D כולם איברים של α וכמו כן מתקיים $D\in C$ ו־$C\in\beta$, כלומר $D\leq C$ ו־$C\leq\beta$ ביחס הסדר $\leq$ שמוגדר על α. מטרנזיטיביות נקבל ש־$D\leq\beta$, כלומר $D\in\beta$, כנדרש.
שנית, אנו רוצים להראות שהיחס $\in$ הוא יחס סדר טוב על β. הדבר נובע מכך שאם $A,B\in\beta$ אז $A,B\in\alpha$ והיחס $\in$ הוא יחס סדר טוב על α.
כדי לראות שמתקיים $\beta=\{\gamma\in\alpha\mid\gamma<\beta\}$ נשים לב לכך שכיוון אחד טריוויאלי: אם $\gamma\in\alpha$ כך ש־$\gamma<\beta$ אז על פי הגדרת היחס $<$ מתקיים $\gamma\in\beta$. בכיוון השני, אם $\gamma\in\beta$ אז מטרנזיטיביות, $\gamma\in\alpha$ ומכיוון ש־$\gamma\in\beta$ אז גם $\gamma<\beta$.
עבור 3, נסמן $\gamma=\min\left(\alpha\backslash\beta\right)$ (קיים כזה כי $\alpha\backslash\beta$ היא תת־קבוצה לא ריקה של α ו־αסדור בסדר טוב). אם נוכיח ש־$\gamma=\beta$ סיימנו, כי $\gamma\in\alpha$.
מכיוון ש־$\gamma=\{A\in\alpha\mid A<\gamma\}$, די להוכיח כי $\beta=\{A\in\alpha\mid A<\gamma\}$.
בכיוון אחד, יהא $A\in\beta$. מכיוון ש־$\beta\subseteq\alpha$ נקבל ש־$A\in\alpha$. נניח בשלילה ש־$A\geq\gamma$, כלומר $\gamma\in A$ ומטרנזיטיביות נקבל $\gamma\in\beta$, בסתירה לכך ש־γ הוא איבר ב־$\alpha\backslash\beta$. על כן $A<\gamma$.
בכיוון השני, יהא $A\in\alpha$ כך ש־$A<\gamma$. מכיוון ש־$\gamma=\min\left(\alpha\backslash\beta\right)$ ו־$A<\gamma$ אז בהכרח $A\in\beta$ אחרת הגענו לסתירה. זה מסיים את הוכחת 3.
עבור 4, נגדיר $\gamma=\alpha\cap\beta$. קל להוכיח על פי הגדרה ש־γ הוא סודר. אם $\gamma=\alpha$ אז סיימנו וקיבלנו ש־$\alpha\subseteq\beta$. בדומה אם $\gamma=\beta$.
אם $\gamma\neq\alpha$ וגם $\gamma\neq\beta$ אז $\gamma\subsetneq\alpha$ ולכן על פי 3 $\gamma\in\alpha$, ובדומה גם $\gamma\in\beta$. לכן $\gamma\in\alpha\cap\beta$, כלומר $\gamma\in\gamma$, בסתירה לכך ש־$\gamma\notin\gamma$ לכל $\gamma\in\alpha$ (דרשנו זאת במפורש בהגדרת סודר).
כמה מסקנות שניתן להסיק מהמשפטים:

- קיים סדר מלא על אוסף כל הסודרים (כל שני סודרים ניתנים להשוואה).
- כל סודר הוא קבוצת כל הסודרים הקטנים ממנו.
- חיתוך של אוסף לא ריק של סודרים הוא סודר, ואיחוד של אוסף לא ריק של סודרים הוא סודר.
- לכל סודר α, גם $\alpha\cup\{\alpha\}$ הוא סודר ומתקיים $\alpha\cup\{\alpha\}=\min\{\beta\mid\alpha<\beta\}$ (במילים אחרות, לכל סודר קיים סודר עוקב שבא "מייד אחריו").

ממסקנות אלו ניתן להסיק את התכונות המאפיינות של הסודרים שראינו קודם: בהינתן סודר α ניתן **להגדיר** את $\alpha+1$ בתור $\alpha\cup\{\alpha\}$. כמו כן בהינתן קבוצת סודרים A, ניתן **להגדיר** את $\sup A=\bigcup A$.

נשים לב לכך ש**אוסף כל הסודרים Ord אינו קבוצה**, שכן אם Ord היה קבוצה, אז $\bigcup\mathrm{Ord}+1$ היה סודר גדול מ־Ord ולכן לא היה שייך ל־Ord.

אוסף של אובייקטים מתמטיים שאינו קבוצה נקרא **מחלקה**; לא ניכנס כעת להסבר מה הדרך הנכונה מתמטית להגדיר אותו.

אינדוקציה ורקורסיה על־סופיות

אינדוקציה מתמטית רגילה ניתנת לניסוח באופן הבא:

תהא C קבוצת מספרים טבעיים. אם $0\in C$ וכמו כן אם $n\in C$ אז $n+1\in C$, אז C כוללת את כל המספרים הטבעיים.

לרוב משתמשים באינדוקציה רגילה באופן הבא: קיימת טענה כלשהי שתלויה בפרמטר n (למשל: $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$). מגדירים במובלע את C להיות קבוצת כל הפרמטרים שעבורם הטענה נכונה. מוכיחים שהטענה נכונה עבור 0 (כלומר $0\in C$) ומוכיחים שאם הטענה נכונה עבור n אז היא נכונה עבור $n+1$ (אם $n\in C$ אז $n+1\in C$) ומסיקים שהטענה נכונה תמיד (C כוללת את כל הטבעיים).

אינדוקציה על־סופית מוגדרת בצורה דומה, אך עבור כל הסודרים:

אם C היא אוסף כלשהו של סודרים בעל התכונות הבאות:

1. $0\in C$.
2. אם $\alpha\in C$ אז $\alpha+1\in C$
3. אם α הוא סודר גבולי ו־$\beta\in C$ לכל $\beta<\alpha$ אז $\alpha\in C$.

אז ניתן להסיק ש־$C=\mathrm{Ord}$ (הוכחה: נניח ש־$C\neq\mathrm{Ord}$ ויהא $\alpha\in\mathrm{Ord}$ הקטן ביותר כך ש־$\alpha\notin C$ ־ קיים כזה כי $C\neq\emptyset$ לפי 1. אם α הוא סודר עוקב הגענו לסתירה על פי 2, ואם אינו סודר עוקב הגענו לסתירה על פי 3).

הגדרה רקורסיבית רגילה ניתנת לתיאור באופן הבא: נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to A$ בעזרת שתי הגדרות ביניים:

1. הגדרה מפורשת של $f(0)$.
2. הגדרה של $f(n+1)$ שמשתמשת בערך $f(n)$ (או באופן כללי יותר, בכל הערכים $f(0),\ldots,f(n)$).

הגדרה ב**רקורסיה על־סופית** היא דומה. לא נציג את הניסוח המדויק של משפט הרקורסיה העל סופית ונסתפק בהסבר הרעיון: ניתן להגדיר פונקציה $f:\mathrm{Ord}\to A$ אם מגדירים באופן מפורש:

1. את $f(0)$.
2. את $f(\alpha+1)$ בהינתן $f(\alpha)$ (או באופן כללי, בהינתן $f(\beta)$ לכל $\beta\le\alpha$.
3. את $f(\alpha)$ לכל סודר גבולי α בהינתן $f(\beta)$ עבור כל $\beta<\alpha$.

דוגמה לרקורסיה על־סופית: חשבון סודרים

נזכיר פה את כללי האריתמטיקה של סודרים. **שימו לב:** הכללים הללו שונים מכללי האריתמטיקה של עוצמות! למשל, הם אינם קומוטטיביים.

במקום להציג הגדרות בצורה מפורשת, נציג את האופן שבו ניתן להגדיר את פעולות החשבון רקורסיבית; הגדרה זו זהה באופיה להגדרת פעולות החשבון על המספרים הטבעיים.

בכל ההגדרות הללו α,β הם סודרים, אנו "מקבעים" את α ומגדירים את הפעולה של α עם β לכל $\beta\in\mathrm{Ord}$.

חיבור:

1. $\alpha+0\triangleq\alpha$
2. $\alpha+(\beta+1)\triangleq(\alpha+\beta)+1$
3. $\alpha+\beta\triangleq\sup\{\alpha+\gamma\mid\gamma<\beta\}$ לכל סודר גבולי β.

כפל:

1. $\alpha\cdot0\triangleq0$
2. $\alpha\cdot(\beta+1)=(\alpha\cdot\beta)+\alpha$
3. $\alpha\cdot\beta\triangleq\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma<\beta\}$ לכל סודר גבולי β.

חזקה:

1. $\alpha^0 \triangleq 1$
2. $\alpha^{\beta+1} \triangleq \alpha^\beta \cdot \alpha$
3. $\alpha^\beta \triangleq \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\}$ לכל סודר גבולי β.

לדוגמה:

- עם הגדרות אלו קל לראות כי $1+\omega \neq \omega+1$. מכיון ש־ω הוא סודר גבולי, אז $1+\omega \triangleq \sup\{1+n \mid n \in \omega\} = \sup\{2,3,4,\ldots\} = \omega$.
- כמו כן קל לראות כי $2 \cdot \omega = \omega$ ־ שוב, על פי הגדרה $2 \cdot \omega = \sup\{0,2,4,6,\ldots\} = \omega$.
- לעומת זאת, $\omega \cdot 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega \cdot 0 + \omega + \omega = 0 + \omega + \omega = \omega + \omega$.

דוגמה לאינדוקציה: משחקים

נציג דוגמה לשימוש בסודרים על מנת לאפיין אובייקטים שהם לכאורה נטולי כל קשר לסודרים ־ מחלקות מסויימות של משחקים לשני שחקנים.

יהא $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$ ותהא $A \subseteq X$, כלומר A היא קבוצה של סדרות **סופיות** של מספרים טבעיים. נגדיר את המשחק הבא לשני שחקנים בין אליס ובוב: בתורה הראשון אליס אומרת מספר טבעי כלשהו a_0 ובוב אומר מספר טבעי כלשהו b_0; בתור השני (ועל בסיס המספרים שנאמרו עד כה) אליס אומרת את a_1 ובוב את b_1 וכן הלאה. בצורה זו לאחר n סיבובים מתקבלת סדרה סופית $a_0, b_0 a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$. אליס מנצחת בסיבוב ה־$n$ במשחק אם הסדרה שנבנתה עד כה שייכת ל־A.

ההגדרה המתמטית של המשחק נראית מוזרה למדי, אבל היא למעשה כללית וחזקה; את משחק השחמט, למשל, ניתן לתאר בתור מקרה פרטי של משחק זה (עבור קבוצה A ספציפית שמקודדת את כללי משחק השחמט ומתארת את כל המשחקים הזוכים האפשריים של אליס).

מספר דוגמאות למשחקים אפשריים:

1. המשחק שבו A_1 כולל רק את הסדרה הריקה: את המשחק הזה אליס מנצחת עוד לפני שהתחיל, כלומר אחרי 0 צעדים.
2. המשחק שבו A_2 כולל את כל הסדרות שמכילות את המספר 42: אליס יכולה לנצח משחק זה במהלך הראשון, אם תגיד "42".
3. המשחק שבו A_3 כולל את כל הסדרות שמקיימות $a_{10} = 42$: אליס תנצח משחק זה רק אם בסיבוב 10 תגיד "42"; היא אינה יכולה לנצח מוקדם יותר.
4. המשחק שבו A_4 כוללת את כל הסדרות שמכילות את המספר 42 במקום ה־b_{10}: כאן אליס עדיין יכולה לנצח תמיד (שימו לב שעליה להגיד "42" בכל צעד עד לצעד 10 לפחות אחרת בוב יוכל לכפות נצחון) אולם איננו יודעים מראש תוך כמה צעדים; עלינו לחכות לצעד ה־10 במשחק כדי לדעת כמה נחכה עוד עד אשר אליס תנצח.

נגדיר כעת ברקורסיה על־סופית קבוצות של משחקים שמנסות להבדיל בין "רמות הקושי" השונות של המשחקים שברורות מהדוגמאות. לשם כך אנו נזקקים לרעיון של "אחרי צעד אחד במשחק מתחיל משחק חדש עם כללים שונים" (פורמלית, אנו מסירים מ־A את כל הסדרות שלא מתאימות לסדרה שנבנתה עד כה, וקוצצים את a_0, b_0 מהסדרות שכן מתאימות).

1. P_0 היא קבוצת כל המשחקים שניתן לנצח ב־0 צעדים.
2. $P_{\alpha+1}$ היא קבוצת כל המשחקים שאליס מסוגלת לבצע בהם צעד ראשון כך שלא משנה מה בוב יעשה, יתקבל משחק ב־P_α.
3. P_β עבור סודר גבולי β היא קבוצת כל המשחקים שאליס מסוגלת לבצע בהם צעד ראשון כך שלא משנה מה בוב יעשה, יתקבל משחק ב־P_γ עבור $\gamma < \beta$ כלשהו.

כך למשל $A_1 \in P_0$, $A_2 \in P_1$, $A_3 \in P_{10}$ ואילו $A_4 \in P_{\omega+9}$.

כעת קל להוכיח באינדוקציה על־סופית כי אליס מנצחת בכל משחק השייך לאחת מהקבוצות P_β עבור $\beta \in \mathrm{Ord}$:

- עבור כל משחק ב־P_0 אליס בוודאי מנצחת (ב־0 צעדים).
- אם אליס מנצחת ב־P_α אז עבור משחק ב־$P_{\alpha+1}$ היא תנצח כעת: תבצע מהלך ראשון שיכניס את המשחק ל־P_α, ואנו כבר יודעים שעבור P_α היא יכולה לנצח.
- אם אליס מנצחת ב־P_γ לכל $\gamma < \beta$ עבור סודר גבולי β, אז אליס תבצע מהלך ראשון שיעביר את המשחק אל P_γ ואנו כבר יודעים שעבור P_γ אליס יכולה לנצח.