תורת הקבוצות־104290 גליון 4

שניר הורדן 205689581

7 ביוני 2018

```
1. הוכ<u>חה</u>
                                                                        x,y,z\in\mathbb{N} יהיו
              x < x מתקיים x = x^1 מתקיים k = 1 \in \mathbb{N} מתקיים. 1.
וגם y=x^{k_1}כך ש־ k_1,k_2\in\mathbb{N} גיימים y\leq x וגם וגם x\leq y וגם .2
מאחר ושניהם טבעיים מתקיים k_1 	imes k_2 = 1 אזי y = y^{k_2^{k_1}} = y^{k_1 	imes k_2} אז x = y^{k_2}
                                                           .x = y אאי .k_1 = k_2 = 1
k_1,k_2\in\mathbb{N} עבור ,z=y^{k_2} וגם y=x^{k_1} אזי y\leq z וגם אוני x\leq y עבור .3
      z=x^k מתקיים k=k_1	imes k_2\in\mathbb{N} אזי עבור .z=x^{k_1	imes k_2} אזי אי
                                                                                       מ.ש.ל.
עם כל ניתן ניתן ניתן ניתן איברים מקסימליים ביותר ביותר ביותר איברים מקסימליים ביותר ביותר 2.
                                               ומקיים n \leq 1. אז הוא הגדול ביותר n \in \mathbb{N}
                                                                                   הוכחה
n\in\mathbb{N} לכל לכל .1,0 
eq m\in\mathbb{N} 1 נניח בשלילה שקיים איבר מקסימלי שאינו
                                                                            n \leq m מתקיים
                                               . אך m \leq m^2 ומתקיים m^2 \in \mathbb{N} אך
                          \{n\in\mathbb{N}|n
eq 1, orall k\in\mathbb{N}\,ig({}^k\sqrt{n}\in\mathbb{R}ackslash\mathbb{N}ig)\}איברים מינימליים
איבר קטן ביותר־לא קיים כי קיימים מספר איברים מינימליים כך שאין איבר הקטן
                                                                                  ממש מהם.
                                             .1 תהא (A, \leq) קבוצה סדורה בסדר מלא.
נניח שלכל B \subset A חסומה מלעיל קיים חסם עליון, כלומר קיים איבר מינימלי
                                                       . \{a \in A | \forall b \in B \ (b \leq a)\} בקבוצה
                                                          תהיA \subseteq B \subseteq Aחסומה מלרע.
                             \emptyset \in C = \{a \in A | \forall b \in B \ (a \leq b)\} \subseteq A נתבונן בקבוצה
       . סדורה A סדורה שקיים ב־B איבר הראשון על אידי מלעיל על סדורה מלעיל
                                        c \in C לפי חסם עליון קיים או לקבוצה לפיון
                                                           B הוא החסם התחתון של c
                                                                                   מ.ש.ל.
                          עליון. כל תת־קבוצה חסומה ולא ריקה קיים חסם עליון. [0,1]
                                          A יחס סדר חלקי מעל תהי A קבוצה ויהי ויהי
```

```
R את משפחה א המרחיבים את מעל R משפחה של יחסי סדר מעל R
                                          ריק. מרחיב את עצמו באופן ריק. F \neq \emptyset.1
                                     2.עלינו להראות שלכל שרשרת קיים חסם מלעיל.
יהא R את המרחיבים את סדר חלקיים הארשרת של היא שרשרת ליחסי הארשרת ארשרת T=\bigcup C_i יהא
                                                                                ההכלה.
                                                           T \in F נראה שמתקיים.3
                                              נתבונן בתכונות של T\subseteq A ומקיים
C_i כי x \leq x ומתקיים שם x \in C_i כך דיj \in I כיי מיים x \in T ומתקיים שם.1
                              Tב ב־ אז מתקיימת מת תכונה או תכונה C_j \subseteq T הוא קס"ח. בפרט,
i,j,k\in I אזי קיימים. x\leq y\wedge y\leq z טרנזיטיביות־יהיו..., עניח שמתקיים. 2
      y,z\in C_k\Rightarrow y\leq z ,x,y\in C_j\Rightarrow x\leq yכך ש־ט. C_k\subseteq C_k\subseteq C_i ושרשראות בה"כ.
      .Tאז זה מתקיים גם ב- אז אי קיים C_i\subseteq T . x\leq z המקיים גם המרחיב את אזי קיים
x \leq x שם אם x,y \in C_j כך ש־ ומתקיים שם אקיים שם x,y \in T ומתקיים שם 3.
                                Tמאחר ו־ C_j \subseteq T מאחר ויים y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y
       Fאנו עונים על תכונות קס"ח אז T היא קס"ח המרחיב את אנו עונים על תכונות אייך ל-
                              4.לפי הלמה של צורן קיים איבר מקסימלי ביחס להכלה.
                                             .איבר מקסימלי זה הוא יחס סדר מלא.
                                                                             הוכחה
ניתנים ב־T אז הוא שכל שני להוכיח לחלקי. נותר הוא יחס דר אז הוא T \in F
                                  y \leq x או x \leq y מתקיים \forall x,y \in T עלינו להוכיח
יהא y \leq y שי ארזשהו אם חלקי מעל A המרחיב את x \leq y שי x,y \in T יהא
                      .C_{lpha}\subset T הוא בהכרח ההכלה אז ביחס מקסימלי ביחס הוא T
                              לכן x ו־y ניתנים להשוואה. אזי T הוא יחס סדר מלא.
                                                                              מ.ש.ל.
                                                                           1. הוכחה
                                  תהי X קבוצה ו־A=2^X עם יחס הסדר הרגיל.
                                                                      x,y \in A יהיו
                                                             \{x,y\} נתבונן בקבוצה
                                                             x \subseteq y בה"כ בה"כ
                        \{x,y\} אז מתקיים x \leq x וגם x \leq y וגם x \leq x
                                          באופן דומה y חסם עליון של \{x,y\}נגדיר.
                 . כך שבה"כ t \notin y אך אך t \in x כך שבה"כ t_i \in X או\וגם להפך מקרה ב
                       . x \setminus \{t_1,...,t_n\} \subseteq y מתקיים x \setminus \{t_1...t_n\} נתבונן בקבוצה
                                 y\setminus\{t_1,...,t_n\} באופן בקבונן להתבונן אפשר להתבונן
                                                אז קיבלנו קבוצה שהיא חסם תחתון.
        y \cup \{t_1,...,t_2\} נתבונן בקבוצה y \cup \{t_1,...,t_2\} זהו החסם העליון המבוקש.
                                   כל מקרה 2 הוא פירוט על פעולות האיחוד וחיתוך.
כעת, נניח בשלילה שהוא לא החסם מלעיל הקטן ביותר. אזי קיימת קבוצה מגודל קטן
ממנו המקיימת זו. אך אם נוריד איבר נקבל שאחת הקבוצות x או y אינה מוכלת בו.
                                                                                סתירה.
                                                   פעולת Meetיחיתוך בין הקבוצות
                                                    פעולת Join־איחוד בין הקבוצות
                                                                            2.הוכחה
```

```
עבור A=\mathbb{N} ופעולת | המוגדר על ידי חלוקה.
                                                                              x,y \in A יהיו
                                                                                        :נגדיר
                                                             \mathbf{x}יו \mathbf{x} של \mathbf{LCD}-\mathbf{Meet} פעולת
                                                                        בעולת בעולת LCM-Join
                                           \{x,y\} אז קיימים חסם עליון ותחתון עבור כל
                                                                                        מ.ש.ל.
                                                                                            .5
                                                                                            .1
                                                                                    1. הוכחה
                                                                            x,y,z\in\mathbb{N} יהיו
               x \leq x מתקיים x = x^1 מתקיים k = 1 \in \mathbb{N} בור עבור.
וגם y=x^{k_1} כך ש־k_1,k_2\in\mathbb{N} וגם y\leq x וגם x\leq y וגם גייסימטריות־ נניח (גיח אנטי־סימטריות־ ואם או
מאחר ושניהם טבעיים מתקיים k_1 	imes k_2 = 1 אזי y = y^{k_2^{k_1}} = y^{k_1 	imes k_2} אז x = y^{k_2}
                                                              .x = y אזי .k_1 = k_2 = 1
x \in \mathbb{N} געבור y = x^{k_1} וגם y = x^{k_2} עבור x \in y עבור x \in y אזי x \in y אזי געבור .3
      z=x^k מתקיים k=k_1	imes k_2\in\mathbb{N} כלומר z=x^{k_1	imes k_2} אזיz=x^{k_1	imes k_2}
                                                                                            מ.ש.ל.
עם כל ניתן להשוואה ניתן ניתן איברים מקסימליים ביותר ביותר ביותר איברים מקסימליים ביותר 2.
                                                  ומקיים n < 1. אז הוא הגדול ביותר. n \in \mathbb{N}
                                                                                       הוכחה
n\in\mathbb{N} כלומר, כלומר, איבר מקסימלי שאינו 10
eq m\in\mathbb{N} נניח בשלילה שקיים איבר מקסימלי
                                                                                 n \leq m מתקיים
                                                 . אך m \leq m^2 ומתקיים m^2 \in \mathbb{N} אך
                            \{n\in\mathbb{N}|n\neq1, \forall k\in\mathbb{N}\ (^k\sqrt{n}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})\}איברים מינימליים
איבר קטן ביותר־לא קיים כי קיימים מספר איברים מינימליים כך שאין איבר הקטן
                                                                                       ממש מהם.
                                                                                            .2
                                               .1 מלא. בסדר סדורה קבוצה (A, \leq)
נניח שלכל \emptyset 
eq B \subseteq A חסומה מלעיל קיים חסם עליון, כלומר קיים איבר מינימלי
                                                          . \{a \in A | \forall b \in B \ (b \leq a)\} בקבוצה
                                                            תהיA \subseteq B \subseteq Aחסומה מלרע.
                              \emptyset \neq C = \{a \in A | \forall b \in B \ (a \leq b)\} \subseteq A נתבונן בקבוצה
        . סדורה A סדורה שקיים ב־B סדורה היטב או קבוצה מלעיל על על ידי האיבר הראשון ב
                                          c \in C לפי חסם עליון קיים או לפבוצה לקבוצה לפי
                                                               .B הוא החסם התחתון של c
                                                                                        מ.ש.ל.
2. [0,1]. לכל תת־קבוצה חסומה ולא ריקה קיים חסם עליון. הקבוצה סופית לכן כל
                                 תת־קבוצה שלה היא חסומה וקיים לה סופרמום (מאינפי 1).
                                                                                            .3
```

A יחס סדר חלקי מעל A יחס סדר חלקי מעל

.כי R מרחיב את עצמו באופן ריק. $F
eq \emptyset.1$

R את משפחה א המרחיבים את מעל R משפחה של יחסי סדר מעל R

```
T \in F נראה שמתקיים.3
                                                נתבונן בתכונות של T\subseteq A ומקיים
C_i כך ער x \leq x ומתקיים שם x \in C_j כך ער j \in I קיים x \in T ומתקיים שם.1
                               Tב ב- אז מתקיימת מו תכונה או רביט, בפרט, בפרט, בפרט, הוא הוא ל
i,j,k\in I אזי קיימים. x\leq y\wedge y\leq z טרנזיטיביות־יהיו... עניח שמתקיים. 2.
      y,z\in C_k\Rightarrow y\leq z ,x,y\in C_j\Rightarrow x\leq yכך ש־. C_k\subseteq C_k\subseteq C_i ושרשראות בה"כ.
      C_i אז זה מתקיים גם ב־C_i אז אז המקיים גם ב־C_i אז המרחיב את
x \leq x ומתקיים שם x,y \in C_j כך ש־j \in I אנטי־סימטריות־ יהיו יהיו אנטי־סימטריות־ יהיו 3.3
                                 Tמאחר ו־ C_j \subseteq T מאחר ויים y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y
       .Fל שייך אז הוא אז תכונות אז קס"ח המרחיב את דה אז הוא שייך ל-T אז הוא אייך על עונים אנו אנו
                              4.לפי הלמה של צורן קיים איבר מקסימלי ביחס להכלה.
                                              .איבר מקסימלי זה הוא יחס סדר מלא.
                                                                                הוכחה
הוכחנו ש־T \in \mathcal{F} אז הוא יחס סדר חלקי. נותר להוכיח שכל שני איברים ב־T ניתנים
                                                                                 להשוואה.
                                   y \leq x או x \leq y מתקיים \forall x,y \in T עלינו להוכיח
יהא y \leq y שיx \leq y יהא המרחיב את x \leq y היים איזשהו יחס סדר חלקי מעל x \in Y יהא יהא x \in Y
                       C_{lpha}\subset T הוא מקסימלי ביחס ההכלה אז בהכרח ד הוא נסמנו T
                               לכן x ו־y ניתנים להשוואה. אזי T הוא יחס סדר מלא.
                                                                                מ.ש.ל.
                                                                             1. הוכחה
                                   תהי X קבוצה ו־A=2^X עם יחס הסדר הרגיל.
                                                                        x,y \in A יהיו
                                                               \{x,y\} נתבונן בקבוצה
                                                               \underline{x \subseteq y}בה"כ בה"כ
                         \{x,y\} אז מתקיים x \leq x וגם x \leq y לכן x \leq x אז מתקיים
                                            נגדיר\{x,y\} באופן דומה y חסם עליון של
                  אך\וגם להפך. t \notin y אך אך t \in x כך שבה"כ t_i \in X או\וגם להפך.
                        x\setminus\{t_1,...,t_n\}\subseteq y נתבונן בקבוצה x\setminus\{t_1...t_n\} אז מתקיים
                                  y \setminus \{t_1,...,t_n\} באופן בקבונו להתבונן להתבונן אפשר
                                                  אז קיבלנו קבוצה שהיא חסם תחתון.
        .(x עם או החסם. (או להפך עם y \cup \{t_1,...,t_2\} נתבונן בקבוצה y \cup \{t_1,...,t_2\}
                                     כל מקרה 2 הוא פירוט על פעולות האיחוד וחיתוך.
כעת, נניח בשלילה שהוא לא החסם מלעיל הקטן ביותר. אזי קיימת קבוצה מגודל קטן
ממנו המקיימת זו. אך אם נוריד איבר נקבל שאחת הקבוצות x או y אינה מוכלת בו.
                                                                                   סתירה.
                                                     פעולת Meetרחיתוך בין הקבוצות
                                                     פעולת Join־איחוד בין הקבוצות
                                                                              2.הוכחה
                                        עבור A=\mathbb{N} ופעולת \mid המוגדר על ידי חלוקה.
                                                                        x,y \in A יהיו
```

יהא את המרחיבים חלקיים סדר יחסי שרשרת של היא ריא ביחס המרחיבים את $T = \bigcup C_i$ יהא יהא

2.עלינו להראות שלכל שרשרת קיים חסם מלעיל.

ההכלה.

```
\mathbf{x}ביר \mathbf{x} של \mathbf{y} ו־\mathbf{y}נגדיר \mathbf{x} בעולת בעולת
                                                                               LCM-Join פעולת
                                               \{x,y\} אז קיימים חסם עליון ותחתון עבור כל
                                                                                                מ.ש.ל.
                                                                                                     .5
                                                                                             א.הוכחה
                                                                                    תהא X קבוצה.
                     יהא יחס בינארי מעל X שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי (קדם סדר).
                                                      \forall x \in X \, (x \leq x \land x \geq x) רפלקסיביות
                                                      \forall x.y \in X \, (x \leq y \land x \geq y) סימטריות־
orall x,y,z\in X\ (x\leq z\wedge x\geq z|\ (x\leq y\wedge y\leq z)\wedge (x\geq y\wedge y\geq z)\iff x\equiv y,y\equiv z) טרנאיטיביות־
                                                                                 אז זה יחס שקילות
                                                                                                מ.ש.ל.
                                                                                             ב.הוכחה
                                                                                  A \triangleq X/\equivנסמן
                                                                                    (*)מוגדר היטב-
                                                c = c אז c \leq b \land c \geq b מתקיים c \in [b] לכל
                               . להפך לכן אם \forall d \in [a] \,, c \in [b] \, (d \leq c) אז גם [a] \leq_A [b] ולהפך
                                                                                               סיימנו.
                                                                                    יחס סדר חלקי־
              רפלקסיביות וטרנזיטיביות מכך ש־[a] \leq_A [a] אםם אם וזהו קדם סדר.
                                              [x] \leq_A [y] \wedge [x] \geq_A [y] אנטי־סימטריות־ נניח
       x \equiv y אזי (*) אזי המתאימות הנ"ל המתאימות לפי לכל האיברים לכל אזי x \leq y \land x \geq y
מאחר וזו תכונה מוגדרת היטב, אזי x,y הם נציגים שונים לאותה מחלקת שקילות,
                                                                                        [x] = [y] כלומר
                                                                                                מ.ש.ל.
\mathbb Q או פונקציה חח"ע השומרת סדר (הרגיל על f\left(x
ight)=x המוגדרת כך המוגדרת פונקציה חח"ע השומרת סדר f:\mathbb Z	o\mathbb Q .1
                                                                                                      رت\mathbb{Z}).
                                           \mathbb{Z}לא קיימת פונקציה חח"ע שומרת סדר בין \mathbb{Q} לי
                                                                         נניח בשלילה שקיימת כזו.
                f\left(q_{2}
ight)=x+1ו־ל f\left(q_{1}
ight)=x מתקיים q_{1},q_{2}\in\mathbb{Q} ו־ל x\in\mathbb{Z}האא
q\in\mathbb{Q} אלה קיימים כי העצמות של \mathbb{Z} ו\mathbb{Q} זהות אז אם מאחר וf מוגדרת לכל
                                              . f\left(q_{0}
ight)=z כך ש־ q_{0}\in\mathbb{Q} קיים בz\in\mathbb{Z} חח"ע לכל
\exists z \, (x < z < x+1) אזי מאחר ו־f שומרת סדר \exists q \, (q_1 < q < q_2) , \mathbb{Q} לפי תכונת הצפיפות של
                                                 אך המספרים השלמים אינם צפופים. סתירה.
                                                    :כך: רת כך: f:\left(2^{\mathbb{N}},\subseteq\right) 
ightarrow ([0,1],\leq).2
                                                                                  x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}} יהא
x_n = x_n כך: בסדרה האינסופית האינסופית כל קואורדינטה כסדרה בסדרה עבור כל קואורדינטה נגדיר
           . זה מגדיר פונקציה חח"ע ושומרת סדר כנדרש. זה מגדיר f\left(x\right) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_i נתבונן בביטוי
                                                                                                הוכחה
                                                                                     x,y\in 2^{\overline{\mathbb{N}}}יהיו
                                                                                                 חח"ע
```

אם שונה אחת אותם לצורה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ואז קיימת לפחות אחת את מפה אתם לצורה ביניהם . $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_i\neq\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}y_i$ כלומר

מ.ש.ל.

שומרת סדר

אם איבר איבר אס איבר שהן אוות. אם איבר נוסף ביyשאינו איבר אס איבר אס איבר אס איבר אס איבר אס הסכום אדל אם הן שוות הוא יהיה זהה.

 $f\left(x
ight)\leq f\left(y
ight)$, לכך,

מ.ש.ל.

. סדר. ושומרות פור חח"ע חח"ע ושומרות קg:[0,1] o (0,1) , f:(0,1) o [0,1] הסדר.

$$f\left(x\right) =x$$

$$g\left(x\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

חיע, על ושומרת היא פונקציית g . חח"ע. שומרת אז בוודאי שומרת אז בוודאי היא fסדר על [$\frac14,\frac34]\subseteq(0,1)$ אז בוודאי שחח"ע ושומרת דע בוודאי שחח"ע ושומרת לו $\left[\frac14,\frac34\right]$

4. [0,1] ל- \mathbb{Z} . הסדר הרגיל על \mathbb{R} שונה מהסדר הרגיל על \mathbb{Z} . אילו הייתה קיימת פונקציה אונה הסדר הרגיל על \mathbb{R} אז היינו מקבלים לפי משפט קנטור [0,1]ל- \mathbb{Z} אז היינו מקבלים לפי משפט קנטור סדר מ־[0,1]ל- \mathbb{Z} אז היינו מקבלים לפי משפט קנטור

. סתירה $|\mathbb{Z}| \Rightarrow \aleph \leq \aleph_0$

 $z\in\mathbb{Z}$ הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר מ־ \mathbb{Z} ל־[0,1]אז עבור היה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר ב־ z_0 קיים קודם מיידי לכן קיים z_0 כך שמתקיים ב z_0 לכל איבר ב־ \mathbb{Z} קיים קודם מיידי לכן קיים z_0 כך שמתקיים ב z_0 לכל איבר סדר, $z_0\leq z$

אך הפונקציה חח"ע, אז r < 0, סתירה.

אז אז א ניתנת פונקציה אז הח"ע ושומרת אז ל
ד[0,1]לי לי \mathbb{Z} לא הח"ע ושומרת חח"ע שומרת א. הוכחה

תהא X קבוצה.

. (קדם סדר) יהא יחס בינארי מעל X שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי (קדם סדר).

 $\forall x \in X \, (x \leq x \wedge x \geq x)$ רפלקסיביות־

 $\forall x.y \in X \, (x \leq y \land x \geq y)$ סימטריות־

$\forall x,y,z \in X \ (x \leq z \land x \geq z | \ (x \leq y \land y \leq z) \land (x \geq y \land y \geq z) \iff x \equiv y,y \equiv z)$ טרנזיטיביות־

אז זה יחס שקילות

מ.ש.ל.

ב.<u>הוכחה</u>

 $A \triangleq X/\equiv$ נסמן

(*)מוגדר היטב־

b=c אז $c\leq b \wedge c\geq b$ מתקיים $c\in [b]$

. ולהפך אז אז $\forall d \in [a] \,, c \in [b] \, (d \leq c)$ אז אז אז ולהפך ולהפך ולכן אם

סיימנו.

יחס סדר חלקי־

 $[x] \leq_A [y] \wedge [x] \geq_A [y]$ אנטי־סימטריות־ נניח

 $x\equiv y$ אזי אזי $x\leq y\wedge x\geq y$ אזי א

מאחר וזו תכונה מוגדרת היטב, אזי x,y הם נציגים שונים לאותה מחלקת שקילות, [x] = [y] כלומר

מ.ש.ל.

 $\mathbb Q$ או פונקציה חח"ע השומרת כך $f\left(x
ight)=x$ או פונקציה חר"ל המוגדרת כך המוגדרת ל $f:\mathbb Z o\mathbb Q$.1 رت \mathbb{Z}).

 \mathbb{Z} לי \mathbb{Q} ליבת סדר בין שומרת חח"ע שומרת לא קיימת פונקציה חח"ע

נניח בשלילה שקיימת כזו.

 $f\left(q_{2}
ight)=x+1$ ים $f\left(q_{1}
ight)=x$ מתקיים $q_{1},q_{2}\in\mathbb{Q}$ יהא $x\in\mathbb{Z}$ היא

אלה קיימים כי העצמות של \mathbb{Q} ור \mathbb{Q} זהות אז אם מאחר וf מוגדרת לכל $f\left(q_{0}
ight)=z$ כך ש־ $q_{0}\in\mathbb{Q}$ קיים $z\in\mathbb{Z}$ חח"ע לכל

 $\exists z \, (x < z < x+1)$ אזי שומרת סדר f שומרת אזי מאחר ו $\exists q \, (q_1 < q < q_2)$, \mathbb{Q} לפי תכונת הצפיפות של אך המספרים השלמים אינם צפופים. סתירה.

:כך: $f:\left(2^{\mathbb{N}},\subseteq\right)
ightarrow ([0,1],\leq)$.2

 $.x \in \left\{0,1
ight\}^{\mathbb{N}}$ יהא

 $x_n=x_n$ כך: בסדרה הבינארית כל קואורדינטה כל קואורדינטה כל כלשהו נגדיר משקל

. זה מגדיר פונקציה אח"ע ושומרת מגדיר פונקציה ל $f\left(x
ight)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_{i}$ נתבונן בביטוי

 $.x,y\in 2^{\overline{\mathbb{N}}}$ יהיו יהיו

אם $x \neq y$ נמפה אותם לצורה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ואז קיימת לפחות קואורדינטה אחת שונה ביניהם . $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_i \neq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} y_i$ כלומר

מ.ש.ל.

שומרת סדר

אט איבר אים איבר אס שוות. או שהן ב־yשאינו ב־y אז קיים איבר נוסף אז איבר אס איבר איבר אז איז איז אינו ב הסכום יגדל אם הן שוות הוא יהיה זהה.

 $f\left(x\right)\leq f\left(y\right)$ לכן,

. סדר. שומרות סדר g:[0,1] o (0,1) , f:(0,1) o [0,1] חח"ע ושומרות סדר.

$$f\left(x\right) =x$$

$$g\left(x\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

חח"ע, על ושומרת היא פונקציית חח"ע, על ושומרת חדר שומרת אז בוודאי שומרת היא פונקציית הזהות אז בוודאי שומרת f

סדר על $\left[\frac14,\frac34\right]\subseteq(0,1)$ אז בוודאי שחח"ע ושומרת סדר על שומרת $\left[\frac14,\frac34\right]$. אז בוודאי שחח"ע ושומרת מהסדר הרגיל על $\mathbb R$ שונה מהסדר הרגיל על $\mathbb Z$. אילו הייתה קיימת פונקציה [0,1] . $|\mathbb{R}| \underbrace{=}_{axiom} |[0,1]| \leq 1$ אז היינו מקבלים לפי משפט קנטור \mathbb{Z} ל־[0,1]ל־[0,1]

.סתירה $|\mathbb{Z}| \Rightarrow orall \leq lpha_0$

 $z\in\mathbb{Z}$ אילו הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר מ־ \mathbb{Z} ל־[0,1]אז עבור היה קיים אילו הייתה קיימת פונקציה חח"ע ושומרת סדר ב־ \mathbb{Z} קיים קודם מיידי לכן קיים z_0 כך שמתקיים z_0 אז מכך שהפונקציה שומרת סדר, $\exists r\in[0,1]\,(f(z_0)=r\land r\leq 0)$, סתירה.

אך הפונקציה חח״ע, אז r < 0 , r < 0 , סתירה. אז לא קיימת פונקציה חח״ע ושומרת סדר בין $\mathbb Z$ ל־[0,1] אז $\mathbb Z$ לא ניתנת לשיכון בו.