<u>אלגברה ב – צורת ג'ורדן תרגול תגבור</u>

<u>תרגילים</u>

1. יהי T אופרטור על F^6 המיוצג (עבור הבסיס הסטנדרטי) ע"י המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

. מצא את צורת ג'ורדן של A, את הפולינום המינימלי והבסיס בו האופרטור T מיוצג ע"י צורת ג'ורדן.

פתרון:

השלב הראשון במציאת צורת ג'ורדן הוא מציאת הפולינום האופייני (ווידוא כי אכן מתפרק לגורמים ליניאריים). במקרה זה, המטריצה $A-\lambda\cdot I$ משולשית עליונה, לכן הדטרמיננטה היא מכפלת האלכסון הראשי, ז"א הפולינום האופייני הוא $p_T(x)=(x-3)^4(x+1)^2$.

פירוק ג'ורדן ייתן פירוק של F^6 לתתי מרחבים T-ציקליים, כאשר כל תת מרחב T-ציקלי מתאים לערך עצמי אחד (אבל יש כמה מרחבים המתאימים לאותו ערך עצמי). הבסיס בו T ייוצג ע"י צורת ג'ורדן הוא איחוד הבסיסים של כל אחד מהרכיבים ה – T-ציקליים.

לכל אחד מהרכיבים ה – T-ציקליים של V, הבסיס נתון ע"י $v, T(v), \dots T^k(v)$, כאשר $T^k(v)$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי המיוחס לאותו תת מרחב T-ציקלי.

במקרה שלנו, נחפש וקטורים עצמיים של 3 ו – (-1).

וקטורים עצמיים של 3 – נפתור את המערכת $(A-3I)x=0$:

$$(A-3I)x=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x=0$$

. נחלק את שורה 5 ב – 8 ונאפס את הרכיב האחרון בכל שורה. נחלק שורה 2 ב –5. נחבר את שורה $4R_2$ לשורה 4 ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} 5b+c+e&=0 \\ -4c+6d+e&=0 \\ d-2e&=0 \\ f&=0 \end{aligned}$$

. הפתרון של המערכת הוא $b=-\frac{17}{20}e,\ c=\frac{13}{4}e,\ d=2e,\ f=0,$, ז"א 3 הוא ערך עצמי עם ריבוי גיאומטרי 2. שני וקטורים עצמיים הפורשים את המרחב העצמי של 3 הם מהצורה

$v_1=(x_1,0,0,0,0,0),\ v_2=(0,-\frac{17}{20}x_2,\frac{13}{4}x_2,2x_2,x_2,0)$. *כאשר* $x_1,x_2\neq 0$

עבור ערך עצמי 1- נקבל:

$(A+I)=\begin{pmatrix}4&5&1&0&1&-2\\0&4&0&5&-10&-15\\0&0&0&6&1&0\\0&0&0&0&8&12\\0&0&0&0&4&8\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}$. נחלק את שורה 6 ב – 4 ונאפס את עמודה 6 בשאר המקומות. אותו דבר נעשה אח"כ עם שורה 5 (נאפס את עמודה 5) ואחר כך עם שורה 3 את עמודה 4. בסוף נעשה זאת שוב עם שורה 2 ועמודה 2. נקבל את המטריצה

$\begin{pmatrix}4&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. נקבל מערכת משוואות $\begin{matrix}4a+c=0\\b=d=e=f=0\end{matrix}$, לכן המרחב העצמי של

-1 הוא ממימד 1, ז"א מהצורה $v_3=(x_3,0,-4x_3,0,0,0)$. בשלב זה אנו יודעים ש – V מתפרק לסכום ישר של שלושה מרחבים T-ציקליים. שני מרחבים T-ציקליים מתאימים לערך עצמי 3 ו – 1 מתאים לערך עצמי -1. כמו כן אנו יודעים להגיד כבר שבפולינום המינימלי יופיע $(x+1)^2$ (כי יש רק רכיב T-ציקלי אחד לערך עצמי -1), ובצורת ג'ורדן יופיע הבלוק $\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ עבור $\lambda=-1$.

נותר למצוא את צורת הבלוקים עבור ערך עצמי 3 ואת הוקטור השני הפורש את המרחב ה – T-ציקלי המתאים לערך עצמי -1.

הוקטור השני הפורש את המרחב ה – T-ציקלי של -1 הוא הוקטור עבורו מתקיים: $(A+I)x=v_3$. נפתור את מערכת המשוואות הזו:

$\begin{pmatrix}4&5&1&0&1&-2\\0&4&0&5&-10&-15\\0&0&0&6&1&0\\0&0&0&0&8&12\\0&0&0&0&4&8\\0&0&0&0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\0\\-4x_3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. נחלק את שורה 6 ב – 4, נאפס את עמודה 6,

אח"כ נחלק את שורה 5 ב – 4, נאפס את עמודה 5, ונקבל: $\left(\begin{array}{cccccc|c}4&5&1&0&0&0&x_3\\0&4&0&5&0&0&0\\0&0&0&6&0&0&-4x_3\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$.

קיבלנו מערכת משוואות $\begin{matrix}4a+5b+c=x_3\\4b+5d=0\\6d=-4x_3\\e=f=0\end{matrix}$. נבחר x_3 = 1, נקבל את הוקטורים

$v_3=(1,0,-4,0,0,0),\ \ v_4=(-1,\frac{5}{6},\frac{5}{6},-\frac{2}{3},0,0)$.

עכשיו אנו יודעים שבפירוק של V יש רכיב $Z(v_4;T)$ כאשר $\begin{matrix}T(v_4)=+v_3-v_4\\T(v_3)=-v_3\end{matrix}$.

כעת נפתור את המערכת $(A-3I)x=v_2$. נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & -2 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -15 & |-\frac{17}{20}x_2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 1 & 0 & |\frac{13}{4}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 12 & |2\mathrm{x}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & |x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$. למערכת הזו אין פתרונות, כי שורה 2 ושורה 4

פרופורציונליות למעט הערכים אחרי הקו, לכן אין וקטור הנותן $(A-3\mathrm{I})x=v_2$, ז"א v_2 יוצר תת מרחב T-ציקלי ממימד 1. נבחר למשל x_2 = 20 ונקבל $v_2=(0,-17,65,40,20,0)$.
בשלב זה אנו כבר יודעים את הפולינום המינימלי וצורת ג'ורדן – כיוון שיש 2 רכיבים המתאימים לערך עצמי 3, סכום המימדים שלהם הוא 4 ואחד הרכיבים בגודל 1, הרכיב השני בגודל 3, מה שאומר שהפולינום המינימלי הוא $m_T(x)=(x-3)^3(x+1)^2$, צורת ג'ורדן

היא $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$. הבסיס שנותן את הצורה מורכב מהוקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 .

עכשיו נותר למצוא את 2 וקטורים נוספים שיתנו את המרחב ה-T-ציקלי המכיל את v_1 .

נפתור את $(A-3\mathrm{I})x=v_1$. המערכת היא $$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & -2 & |x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -15 & |0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 12 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$, נסדר את

המשוואות ונקבל $$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & |x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 1 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$. נקבל מערכת משוואות $$\begin{gathered} 5\mathrm{b}+c+e=x_1 \\ d-2e=0 \\ -4\mathrm{c}+6\mathrm{d}+e=0 \\ f=0 \end{gathered}$$.

פתרון של המערכת למשל הוא $v_5=(0,-\frac{17}{20}x_5+\frac{1}{5}x_1,\frac{13}{4}x_5,2\mathrm{x}_5,x_5,0)$. עכשיו נפתור את $(A-3\mathrm{I})x=v_5$.

נקבל $$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & -2 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -15 & |-\frac{17}{20}x_5+\frac{1}{5}x_1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 1 & 0 & |\frac{13}{4}x_5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 12 & |2\mathrm{x}_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & |x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$. למערכת יהיה פתרון רק אם

$-\frac{17}{20}x_5+\frac{1}{5}x_1=-2.5x_5$ (כי שורות 2 ו – 4 צריכות להיות פרופורציונליות אחת לשנייה), את זה עבור $x_1=-\frac{33}{4}x_5$. ז"א נבחר $x_5=4$ ואז הוקטורים הם $v_1=(-33,0,0,0,0,0)$, $v_5=(0,-10,13,8,4,0)$. הפתרון של המערכת ל - v_5 במקרה זה הוא $v_6=(0,-\frac{12}{5},9,7.5,4,0.5)$. סה"כ קיבלנו שהבסיס הוא:

$v_6=(0,-\frac{12}{5},9,7.5,4,0.5)$,, $v_1=(-33,0,0,0,0,0)$, $v_5=(0,-10,13,8,4,0)$,

$v_2=(0,-17,65,40,20,0)$, $v_4=(-1,\frac{5}{6},\frac{5}{6},-\frac{2}{3},0,0)$, $v_3=(1,0,-4,0,0,0)$

2. הוכח כי ל – N נילפוטנטית מסדר nxn למטריצה $I+N$ יש שורש ריבועי.

פתרון:
אנו מחפשים מטריצה A שתקיים $A^2=I+N$, או במילים אחרות, $A=\sqrt{I+N}$. כמובן שאנו לא יודעים להוציא שורש של מטריצה. אנו כן יודעים להציב מטריצה בפולינום כלשהו ולקבל מטריצה אחרת, לכן נרצה למצוא קירוב פולינומיאלי למטריצה $\sqrt{I+N}$ - את זה נעשה כמובן בעזרת טור טיילור.

באופן כללי, טור טיילור של פונקציה f בסביבת x_0 נתון ע"י $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

. נניח שפיתחנו את הפונקציה בסביבת המטריצה A והצבנו B, נקבל $f(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(A)}{n!}(B-A)^n$. אם נדע ש - $B-A$ נילפוטנטית, נדע כי הטור הוא למעשה סופי. במקרה שלנו נרצה $B-A=N$ ומצד שני מחפשים את $f(I+N)$ וש - $f(x)$ תהיה גזירה אינסוף פעמים, לכן במקרה זה אנו מפתחים את $f(x)=\sqrt{1+x}$ בסביבת $x_0=0$, ז"א $B=N, A=0$, ונקבל $\sqrt{I+N}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}N^n$ (כאשר $N^0=I$ כמוסכמה באופן דומה למספרים רגילים). הטור כמובן סופי ולכן יש נוסחה (שניתן למצוא מפורשות) לשורש של $I+N$ לכל דרגת נילפוטנטיות של N.