# אינטגרל לא מסויים

**<u>הגדרה:</u>** תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת על קטע. פונקציה $F(x)$ המקיימת $F'(x) = f(x)$ בקטע נקראת פונקציה קדומה של $f(x)$.
האינטגרל הלא מסויים של פונקציה $f(x)$ הוא כל הפונקציות $F(x)$ המקיימות $F'(x) = f(x)$, כלומר אוסף כל הפונקציות הקדומות של $f$. נסמן את האינטגרל הלא מסויים ע"י $\int f(x)dx + c$.

אם יש לנו שתי פונקציות $F(x), G(x)$ המקיימות $F'(x) = G'(x) = f(x)$ אזי

$$\big(F(x) - G(x)\big)' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ולכן $F(x) - G(x) = c$. כלומר כל שתי פונקציות קדומות של $f$ נבדלות ע"י קבוע ולכן הסימון הוא

$$\int f(x)dx + c$$

כי ברגע שמצאנו אחת, מצאנו את כולן ע"י הוספת קבוע.

יש שיטות רבות למציאת האינטגרל הלא מסויים. אבל, בניגוד לפעולת הגזירה, מציאת פונקציה קדומה אינה טכנית, במובן שלמשל לא לכל פונקציה אלמנטרית יש נוסחא לאינטגרל הלא מסויים שלה, בעוד שלכל פונקציה אלמנטרית יש נוסחאות סגורות לגזירה שלה. למשל לפונקציה $e^{-x^2}$ אין פונקציה קדומה שאפשר לבטא אותה כנוסחא (כלומר כביטוי של הפונקציות "המוכרות").
מציאת האינטגרל הלא מסויים של פונקציה היא אומנות.
ובכל זאת, יש אוסף רב של שיטות שעובדות במקרים מסויימים ואנו נעבור על השיטות הרלבנטיות לקורס שלנו.

## אינטגרלים מידיים

אינטגרלים מיידים הם אינטגרלים שאפשר לראות "מייד", שזה לא מונח ברור כי תלוי מי מסתכל. ובכל זאת, ניתן רשימה של נגזרות ידועות ומהן נובעים מייד אינטגרלים "מידיים".

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1} \qquad \int x^a dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + c & a \neq -1 \\ \ln|x| + c & a = -1 \end{cases}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$$

$$\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

ע"י שימוש בכלל השרשרת נוכל לקבל עוד אינטגרלים מיידיים מאילו שיש לנו:

$$\left(f(x)^a\right)' = af(x)^{a-1}f'(x) \qquad \int f(x)^a f'(x) dx = \begin{cases} \frac{f(x)^{a+1}}{a+1} + c & a \neq -1 \\ \ln|f(x)| + c & a = -1 \end{cases}$$

$$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln a f'(x) \qquad \int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$\left(\log_a f(x)\right)' = \frac{1}{f(x) \ln a} f'(x) \qquad \int \frac{1}{f(x)} f'(x) dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\left(\sin f(x)\right)' = \cos f(x) f'(x) \qquad \int \cos f(x) f'(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\left(\cos f(x)\right)' = -\sin f(x) f'(x) \qquad \int \sin f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\left(\tan f(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x) \qquad \int \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x) dx = \tan f(x) + c$$

$$\left(\cot f(x)\right)' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(f(x)) \qquad \int \frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x) dx = -\cot f(x) + c$$

$$\left(\arcsin f(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) dx = \arcsin f(x) + c$$

$$\left(\arccos f(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x) dx = -\arccos f(x) + c$$

$$\left(\arctan f(x)\right)' = \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x) \qquad \int \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x) dx = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

בנוסף, יש לנו כללים עבור האינטגרל הלא מסויים:

1. כיוון ש־ $\left(aF(x) + b(G(x)\right)' = aF'(x) + bG'(x)$ אזי

$$\int af(x) + bg(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

2. אם $F'(x) = f(x)$ אזי

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

## אינטגרציה בחלקים

כלל המכפלה עבור נגזרות הוא $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ וע"י אינטגרציה והוא נותן לנו

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

נעביר את המחובר השני בצד ימין לצד שמאל ונקבל את נוסחת אינטגרציה בחלקים

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

**תרגיל:**

$$\int x\sin x dx = -x\cos x - \int 1(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & g(x) = x \\ f(x) = -\cos x & g'(x) = 1 \end{array}$$

הערה: נסו לראות מה קורה אם במקום הבחירה שעשינו עבור אינטגרציה בחלקים, בוחרים ב־ $f'(x) = x, g(x) = \sin x$.

**הערה:** אנו רואים פה כי אחד השימושים של אינטגרציה בחלקים הוא כאשר יש לנו מכפלה של $x$ בפונקציה שאת האינטגרל שלה אנו יודעים.

**תרגיל:**

$$\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x - \int 2x(-\cos x)dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x dx =$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & g(x) = x^2 \\ f(x) = -\cos x & g'(x) = 2x \end{array}$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = \cos x & g(x) = x \\ f(x) = \sin x & g'(x) = 1 \end{array}$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x + \cos x + c\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

**הערה:** אנו רואים פה כי אחד השימושים של אינטגרציה בחלקים הוא כאשר יש לנו מכפלה של חזקה של $x$ בפונקציה שאת האינטגרל שלה אנו יודעים. אפשר לעשות זאת כמה פעמים מתוך התקווה שלבסוף "נפטר" מהחזקה של $x$.

**תרגיל:**

$$\int \arcsin x dx = \int 1\cdot\arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = 1 & g(x) = \arcsin x \\ f(x) = x & g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

**הערה:** אנו רואים פה כי עוד שימוש של אינטגרציה בחלקים הוא כאשר יש לנו אינטגרל של פונקציה אחת אותו איננו יודעים, כאשר אנו מקווים כי אחרי אינטגרציה בחלקים נקבל אינטגרל חדש אותו אנו כן יודעים.

**תרגיל:**

$$\int \ln^2 x dx = \int 1 \cdot \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x\frac{2\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - \int \ln x dx =$$

$$\begin{array}{ll} f'(x)=1 & g(x)=\ln^2 x \\ f(x)=x & g'(x)=2\frac{\ln x}{x} \end{array}$$

$$= x\ln^2 x - 2\int 1\cdot \ln x dx = x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$

$$\begin{array}{ll} f'(x)=1 & g(x)=\ln x \\ f(x)=x & g'(x)=\frac{1}{x} \end{array}$$

**תרגיל:**

$$\int e^{2x}\cos 3x dx$$

**פתרון:** נסמן $I=\int e^{2x}\cos 3x dx$. אז נקבל כי

$$I = \int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx =$$

$$\begin{array}{llll} f'(x)=e^{2x} & g(x)=\cos 3x & f'(x)=e^{2x} & g(x)=\sin 3x \\ f(x)=\frac{1}{2}e^{2x} & g'(x)=-3\sin 3x & f(x)=\frac{1}{2}e^{2x} & g'(x)=3\cos 3x \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I$$

**הערה:** השתמשנו באינטגרציה בחלקים פעמיים. במקרה זה היינו חייבים בשני המקרים לשמור את הבחירה של מיהו $f'$ ומיהו $g$. אנו בחרנו $f'=e^{2x}$. היינו חייבים לשמור בחירה זו בשימוש השני אחרת היינו חוזרים לאינטגרל המקורי ולא היה יוצא מזה דבר. נסו בעצמכם לראות מה קורה.
כעת נבודד את $I$ כאשר נזכור שהוא בעצם אינטגרל ולכן בא עם קבוע:

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x + c$$

$$\frac{13}{4}I = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x + c$$

$$I = \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + c$$

נעשה את התרגיל שוב עם הבחירה השנייה של $f', g$:

$$
\begin{aligned}
I = \int e^{2x} \cos 3x dx &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\
&\begin{array}{llll} f'(x) = \cos 3x & g(x) = e^{2x} & f'(x) = \sin 3x & g(x) = e^{2x} \\ f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x & g'(x) = 2e^{2x} & f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x & g'(x) = 2e^{2x} \end{array} \\
= \; & \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left( -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right) = \\
= \; & \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} I \\
& \frac{13}{9} I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x + c \\
& I = \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + c
\end{aligned}
$$

**<u>תרגיל:</u>**

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

**<u>פתרון:</u>**

$$
\begin{aligned}
& \int \cos^n x dx = \int \cos x \cos^{n-1} x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx = \\
& f'(x) = \cos x \quad g(x) = \cos^{n-1} x \quad f(x) = \sin x \quad g'(x) = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \\
= \; & \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx = \\
= \; & \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx =
\end{aligned}
$$

כלומר

$$\int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx$$

ולכן

$$n \int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx$$

ולבסוף

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

למשל

$$
\begin{aligned}
& \int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int 1 dx \right) = \\
= \; & \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right) + C = \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C
\end{aligned}
$$

## אינטגרציה של פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית היא פונקציה שהיא מנה של פולינומים. כלומר, אם $p(x), q(x)$ פולינומים, אז $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ היא פונקציה רציונלית. בשביל למצוא את האינטגרל של פונקציה רציונלית

$$\int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} dx$$

נצטרף לעשות כמה צעדים כדי לפשט את הביטוי לסכום של ביטויים שנוכל למצוא את האינטגרל של כל אחד מהם.

1. אם מעלת המונה גדולה או שווה למעלת המכנה, בצעו חלוקת פולינומים עם שארית.

התוצאה של החלוקה תהיה פולינום ועוד מנה של פולינומים, כאשר המונה הוא השארית של החלוקה, והמכנה אינו משתנה. מה שכן משתנה הוא שמעלת המונה קטנה ממעלת המכנה. האינטגרל של הפולינום אינה בעיה. אנו נמשיך לפשט את מנת הפולינומים שנשארה.

2. נעשה פירוק לשברים חלקיים (לפעמים נקרא פירוק הביסייד). תיאור מלא של פירוק לשברים חלקיים הוא ארוך מדי. נסביר בעיקר ע"י דוגמאות.

דבר אחד שהכרחי הוא פירוק המכנה למכפלה של גורמים אי פריקים (כולל חזקות). עבור פולינומים ממשיים, גורם אי פריק הוא פולינום לינארי $ax + b$ (המופיע באופן יותר שכיח כ-$(x - x_0)$), או פולינום ריבועי ללא שורשים ממשיים, כלומר עם דיסקרימיננטה שלילית, שאומר כי הפולינום הריבועי האי פריק הוא מהצורה $ax^2 + bx + c$ כאשר $b^2 - 4ac < 0$.

כל פולינום ממשי אפשר לרשום כמכפלה של פולינומים אי פריקים, כלומר כמכפלה של גורמים לינאריים וגורמים ריבועיים ללא שורשים ממשיים.

בשביל לרשום את הצורה של פירוק לשברים חלקיים, אנו חייבים לרשום את המכנה כמכפלה של גורמים אי פריקים. נסביר את הפירוק ע"י דוגמאות:

קודם כל, נתחיל עם הדברים הבסיסיים של פירוק לשברים חלקיים, כלומר הביטויים אותם אי אפשר לפשט:

קודם כל יש לנו את המספרים חלקי חזקות של ביטויים לינאריים

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}$$

אחרי זה יש לנו את הביטויים הלינאריים חלקי חזקה פולינום ריבועי אי פריק

$$\frac{Ax + b}{(x^2 + px + q)^n}$$

כאשר $p^2 - 4q < 0$.

אלה הביטויים שאנו נראה בהמשך איך לעשות להם אינטגרלים ולכן הם נחשבים פשוטים יותר.

כעת ניתן דוגמאות של הפירוק עצמו:

$$\frac{4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$\frac{5x}{(x-1)(x-2)} = \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2}$$
$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{E}{x-1} + \frac{F}{x-2}$$
$$\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{E}{x-1} + \frac{F}{x-2}$$

שימו לב כי כל עוד המכנה הוא אותו הדבר ומעלת המונה קטנה ממעלת המכנה, הצורה של הפירוק היא אותה הצורה. מה שמשתנה ממקרה למקרה (כלומר כאשר אנו משנים את המונה) הם הקבועים.

נראה זאת ע"י מציאת הקבועים עבור חלק מהמקרים: נעשה מכנה משותף ואז נשווה את המונים

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \\
&\frac{4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
&4 = A(x-2)+B(x-1) \\
&4 = (A+B)x - 2A - B \\
&A+B=0 \;\; 2A-B=4 \longrightarrow A=-4 \; B=4 \\
&\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \\
&\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
&3x-4 = A(x-2)+B(x-1) \\
&3x-4 = (A+B)x - 2A - B \\
&A+B=3 \;\; 2A-B=-4 \longrightarrow A=1 \; B=2
\end{aligned}$$

נמשיך במקרים: כאשר הגורמים הלינאריים מופיעים עם חזקה צריך להוסיף מחוברים:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(x-1)^2(x-2)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3} \\
\frac{5x+8}{(x-1)^2(x-2)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3} \\
\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^2(x-2)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3} \\
\frac{3x^4-6x+1}{(x-1)^2(x-2)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}
\end{aligned}$$

כלומר, לכל גורם לינארי מחזקה $k$, מתאימים $k$ מחוברים אשר במונה שלהם יש קבוע, ובמכנה את הגורם הלינארי בחזקה בין 1 ל־$k$.
שימו לב כי שוב, צורת הפירוק אינה משתנה אם המכנה אינו משתנה ומעלת המונה קטנה ממעלת המכנה.
נמשיך:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(x-1)^2(x^2+4x+7)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} \\
\frac{5x+7}{(x-1)^2(x^2+4x+7)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} \\
\frac{6x^2-7x+6}{(x-1)^2(x^2+4x+7)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} \\
\frac{x^4-8x^3+7x}{(x-1)^2(x^2+4x+7)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7}
\end{aligned}$$

שימו לב כי יש טעות בפירוק האחרון. הטעות היא כי מעלת המונה והמכנה שוות ואז אי אפשר לרשום את הפירוק (כלומר הוא אינו נכון בהכרח). עבור שאר המקרים הפירוק הוא נכון אבל תמיד מומלץ לוודא כי הגורם הריבועי אכן אי פריק, במקרה שלנו $\Delta = 4^2 - 4\cdot 7 = 16 - 28 < 0$.
נאמר כי בפירוק לשברים חלקיים, גורמים ריבועיים אי פריקים במכנה (אפילו בחזקה גדולה מאחד)

באים עם גורם לינארי במונה.
בשביל למצוא את הקבועים עושים מכנה משותף ומשווים בין המונים ומקבלים מערכת משוואות לינארית פתירה, עם פתרון יחיד.
המקרה האחרון הוא כאשר גם הגורם הריבועי האי פריק בא בחזקה.

$$\frac{4}{(x-1)^2(x^2+4x+7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} + \frac{Ex+F}{(x^2+4x+7)^2}$$
$$\frac{5x+7}{(x-1)^2(x^2+4x+7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} + \frac{Ex+F}{(x^2+4x+7)^2}$$
$$\frac{6x^2-7x+6}{(x-1)^2(x^2+4x+7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} + \frac{Ex+F}{(x^2+4x+7)^2}$$
$$\frac{x^4-8x^3+7x}{(x-1)^2(x^2+4x+7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} + \frac{Ex+F}{(x^2+4x+7)^2}$$

זה מסיים את שלב 2 שמסביר את הפירוק.
3. פתירות האינטגרלים.
כעת עלינו להראות איך פותרים את האינטגרלים החדשים, כלומר את

$$\int \frac{A}{x-x_0}dx, \quad \int \frac{A}{(x-x_0)^n}dx, \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx, \quad \int \frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^n}dx$$

שני האינטגרלים הראשונים הם מיידיים

$$\int \frac{A}{x-x_0}dx = A\ln|x-x_0| + c, \qquad n \geq 2: \quad \int \frac{A}{(x-x_0)^n}dx = A\frac{(x-x_0)^{-n+1}}{-n+1} + c$$

את האינטגרל

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$$

נעשה בשני צעדים: הצעד הראשון נקרא באופן לא רשמי "השלמה לנגזרת" והוא נעשה רק במקרה ו־$A \neq 0$ (כלומר יש $x$ במונה). נשים לב כי אם המונה היה הנגזרת של המכנה $(x^2+px+q)' = 2x+p$ אזי האינטגרל היה מיידי כי הוא מהצורה $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$. זה בדר"כ לא המצב אבל עדיין אפשר לעבוד עם הרעיון, כלומר, נכפיל ונחלק את הביטוי ב־$\frac{2}{A}$ ונשלים את המונה ל־$p$, כלומר

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p+\left(\frac{2B}{A}-p\right)}{x^2+px+q}dx = \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{2B-pA}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \\ &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-pA}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}dx\end{aligned}$$

ואנו רואים כי קיבלנו אינטגרל חדש לפתור

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

נפתור אינטגרל זה ע"י מה שנקרא "השלמה לריבוע". שימו לב כי בשלב זה אנו משתמשים בעובדה כי המכנה הוא ללא שורשים ממשיים, כלומר כי הדיסקרימיננטה שלו שלילית.

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש־ $q-\frac{p^2}{4}=\frac{4q-p^2}{4}>0$ שנובעת מזה ש־ $\Delta=p^2-4q<0$.

לסיכום, כדי לפתור את האינטגרל

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$$

עושים השלמה לנגזרת ואז השלמה לריבוע.

את המקרה

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$$

נעשה באופן הבא:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}dx$$

וכיוון ש־ $q-\frac{p^2}{4}>0$ אז אחרי ההצבה $t=x+\frac{p}{2}$ נקבל את האינטגרל

$$\int\frac{Ct+D}{(t^2+E^2)^n}dx=\frac{C}{2}\int\frac{2t}{(t^2+E^2)^n}dx+D\int\frac{1}{(t^2+E^2)^n}dx$$

ואז

$$\int\frac{2t}{(t^2+E^2)^n}dx=\frac{(t^2+E^2)^{-n+1}}{-n+1}+F$$

ו־

$$\int\frac{1}{(t^2+E^2)^n}dx=E^{-2n+1}\int\cos^{2n-2}wdw$$

$$t=E\tan w\quad dt=\frac{E}{\cos^2 w}dw$$

שזה אינטגרל שיש לנו נוסחת נסיגה עבורו באופן הבא:

**תרגיל:**

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx = \ln|x^2+4x+7| + c$$

שימו לב כי למרות שלמכנה אין שורשים ממשיים, כיוון שהמונה הוא הנגזרת של המכנה אין זה משנה. זהו פשוט מקרה של $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$. גם אם למכנה היו שורשים ממשיים, היינו עושים אותו הדבר למרות שהיה אפשר לטפל בזה באמצעות שברים חלקיים, כי בשברים חלקיים זה היה יוצא הרבה יותר ארוך.

**תרגיל:**

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}dx$$

**פתרון:** נוודא כי מעלת המונה קטנה מזו של המכנה שזה ברור, ואז נבדוק האם המכנה אי פריק: $6^2 - 4\cdot 10 = 36 - 40 < 0$. כיוון שבמונה יש מספר ולא $Ax+B$, נדלג על השלמה לנגזרת ונמשיך עם השלמה לריבוע:

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+1}dx = \arctan\big(x+3\big) + c$$

**תרגיל:**

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+7}dx$$

**פתרון:** נוודא כי מעלת המונה קטנה מזו של המכנה למכנה אין שורשים, שזה ברור, ואז נוודא כי למכנה אין שורשים: $4^2 - 4\cdot 7 = 16 - 28 < 0$. כיוון שבמונה יש $Ax+B$ וביטוי זה אינו הנגזרת של המכנה, נעשה השלמה לנגזרת:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{x^2+4x+7}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4+6}{x^2+4x+7}dx = \\
= \ & \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| + 3\int \frac{1}{x^2+4x+7}dx =
\end{aligned}$$

כעת נעשה השלמה לריבוע

$$\begin{aligned}
= \ & \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| + 3\int \frac{1}{(x+2)^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| + 3\int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx \\
= \ & \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| + \frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + c
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באינטגרל המיידי $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

**תרגיל:**

$$\int \frac{2x^3+9x^2+19x+12}{x^2+4x+7}dx$$

**פתרון:** נבדוק אם מעלת מונה קטנה ממעלת מכנה. כיוון שלא, נעשה חילוק פולינומים

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 2x^3 + 9x^2 + 19x + 12\big) : \big(x^2+4x+7\big) = 2x + 1 + \dfrac{x+5}{x^2+4x+7} \\
\underline{-\,2x^3 - 8x^2 - 14x} \\
\qquad\qquad x^2 \ + 5x + 12 \\
\qquad\quad \underline{-\,x^2 \ - 4x \ - 7} \\
\qquad\qquad\qquad x \ + 5
\end{array}$$

כלומר

$$\frac{2x^3+9x^2+19x+12}{x^2+4x+7}=2x+1+\frac{x+5}{x^2+4x+7}$$

ולכן

$$\int\frac{2x^3+9x^2+19x+12}{x^2+4x+7}dx=\int 2x+1+\frac{x+5}{x^2+4x+7}dx=x^2+x+\int\frac{x+5}{x^2+4x+7}dx$$

ואינטגרל זה חישבנו בתרגיל הקודם ולכן נקבל

$$\int\frac{2x^3+9x^2+19x+12}{x^2+4x+7}dx=x^2+x+\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7|+\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

**<u>תרגיל:</u>**

$$\int\frac{12}{x^3-8}dx$$

**<u>פתרון:</u>** לאחר שווידאנו כי מעלת המונה קטנה ממעלת המונה, נשים לב כי מעלת המכנה היא שלוש ולכן אנו צריכים לפרק את המכנה לגורמים אי פריקים. במקרה זה נשתמש בנוסחת הכפל המקוצר $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\int\frac{12}{x^3-8}dx=\int\frac{12}{x^3-2^3}dx=\int\frac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx$$

כיוון שלגורם הריבועי $x^2+2x+4$ יש דיסקרימיננטה שלילית $\Delta=2^2-4\cdot4=4-16<0$, אנו יכולים להמשיך לפירוק לשברים חלקיים.

$$\frac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

ולכן

$$12=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)=(A+B)x^2+(2A+C-2B)x+4A-2C$$

ומערכת המשוואות שנקבל היא

$$A+B=0,\qquad 2A+C-2B=0\qquad 4A-2C=12\longrightarrow A=1,\ B=-1,\ C=-4$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}
&\int\frac{12}{x^3-8}dx=\int\frac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx=\int\frac{1}{x-2}+\frac{-x-4}{x^2+2x+4}dx=\\
=\;&\ln|x-2|-\int\frac{x+4}{x^2+2x+4}dx=_{\text{השלמה לנגזרת}}=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\int\frac{2x+8}{x^2+2x+4}dx=\\
=\;&\ln|x-2|-\frac{1}{2}\int\frac{2x+2+6}{x^2+2x+4}dx=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx-\frac{1}{2}\int\frac{6}{x^2+2x+4}dx=\\
=\;&_{\text{השלמה לריבוע}}=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|-3\int\frac{1}{(x+1)^2+3}dx=\\
=\;&\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|-3\int\frac{1}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx=\\
=\;&\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|-\frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+c=\\
=\;&\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+c
\end{aligned}$$

## שיטת ההצבה

שיטת ההצבה משתמשת בכלל השרשרת

$$\Big(F\big(g(t)\big)\Big)' = F'\big(g(t)\big)g'(t)$$

שאומר כי

$$F\big(g(t)\big) = \int F'\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

בהנתן $f(x)$ אנו רוצים למצוא פונקציה קדומה $F(x)$, כלומר פונקציה $F(x)$ עבורה $F'(x) = f(x)$.
נניח כי האינטגרל $\int f(x)dx$ קשה לפתרון אבל עבור פונקציה נתונה וידועה $g(t)$ האינטגרל

$$\int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

כן פתיר, כלומר אנו יודעים למצוא פונקציה $H(t)$ המקיימת $H'(t) = f\big(g(t)\big)g'(t)$.
אבל גם

$$\Big(F\big(g(t)\big)\Big)' = F'\big(g(t)\big)g'(t) = f\big(g(t)\big)g'(t)$$

ולכן, כיוון שלשתי הפונקציות $H(t), F\big(g(t)\big)$ יש את אותה הנגזרת, אזי

$$F\big(g(t)\big) = H(t) + c$$

ולכן אם נסמן $x = g(t)$ אז $t = g^{-1}(x)$ ונקבל

$$F\big(x\big) = H(g^{-1}(x)) + c$$

נהוג לסמן את התהליך שתיארנו בצורה הבאה: נציב $x = g(t)$ ואז $dx = g'(t)dt$. אז ע"י הצבה פשוטה נקבל

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

ואחרי שפותרים את צד ימין, יש להציב חזרה את ההצבה.
לעיתים, האינטגרל נתון בצורה הימנית ויותר קל לפתור את האינטגרל השמאלי. גם זה עובד.
לעתים רחוקות, ההצבה היא מהצורה $h(x) = g(t)$ ואז $h'(x)dx = g'(t)dt$.

נדגיש כי שיטת ההצבה דורשת הרבה נסיונות עד שמצליחים. הרבה ניחושים. ככל שמנסים יותר, הניחושים נהיים יותר טובים.

**תרגיל:**

$$\int \frac{\cos\left(3+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$$

**פתרון:** ננסה את ההצבה $t=\sqrt{x}$ אז $dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. לכן

$$\int \frac{\cos\left(3+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\left(3+\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \cos(3+t)dt =$$
$$= \quad 2\sin(3+t)+c = 2\sin\left(3+\sqrt{x}\right)+c$$

**תרגיל:**

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

**פתרון:** ננסה את ההצבה $t=\frac{1}{x}$ אז $dt=-\frac{1}{x^2}dx$. לכן

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx =$$
$$= \quad -\int \sin t\cos t dt =$$

ננסה את ההצבה $w=\sin t$ ואז $dw=\cos t dt$ ונקבל

$$= \quad -\int \sin t\cos t dt = -\int w dw = -\frac{w^2}{2}+c = -\frac{\sin^2 t}{2}+c = -\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{2}+c$$

**תרגיל:**

$$\int \frac{\ln^p x}{x}dx$$

**פתרון:** ננסה את ההצבה $t=\ln x$ אז $dt=\frac{1}{x}dx$. לכן

$$\int \frac{\ln^p x}{x}dx = \int (\ln x)^p\frac{1}{x}dx = \int t^p dt = \begin{cases} \frac{t^{p+1}}{p+1}+c & p\neq -1 \\ \ln|t|+c & p=-1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\ln^{p+1}x}{p+1}+c & p\neq -1 \\ \ln|\ln x|+c & p=-1 \end{cases}$$

האינטגרל

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$$

כאשר לפחות אחד מ־$m,n$ (ואולי שניהם) הוא מספר שלם (אולי שלילי) איזוגי.
אם החזקה של $\sin(x)$ איזוגית, כלומר אם $m$ איזוגי, אזי ההצבה היא $t=\cos(x)$.
אם החזקה של $\cos(x)$ איזוגית, כלומר אם $n$ איזוגי, אזי ההצבה היא $t=\sin(x)$.
נראה למה זה עובד במקרה ש־$m$ איזוגי: $t=\cos x,\quad dt=-\sin x dx$. שימו לב כי $m-1$ זוגי ולכן

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx = \int \sin^{m-1}(x)\cos^n(x)\sin x dx = \int \left(\sin^2(x)\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos^n(x)\sin x dx =$$
$$= \int \left(1-\cos^2(x)\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos^n(x)\sin x dx = -\int \left(1-t^2\right)^{\frac{m-1}{2}} t^n dt$$

וזה אינטגרל של פונקציה רציונלית שאנו יודעים לפתור.

**תרגיל:**

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$$

**פתרון:**

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \sin^2 x(\cos x)^{-1}dx =$$

כיוון שהחזקה של $\cos x$ היא איזוגית אז נציב

$$t=\sin x \quad dt=\cos x dx$$

ונקבל

$$\int \sin^2 x(\cos x)^{-1}dx = \int \sin^2 x(\cos x)^{-2}\cos x dx = \int \sin^2 x(\cos^2 x)^{-1}\cos x dx =$$
$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^{-1}\cos x dx = \int t^2(1-t^2)^{-1}dt = \int \frac{t^2}{1-t^2}dt =$$

קיבלנו אינטגרל של פונקציה רציונלית. כיוון שמעלת מונה שווה למעלת מכנה נעשה חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{l} \left(\quad t^2\right) : \left(t^2-1\right) = 1 + \dfrac{1}{t^2-1} \\ \underline{\;-t^2+1\;} \\ \qquad 1 \end{array}$$

נרשום מחדש ונוסיף פירוק לשברים חלקיים (ללא חישוב)

$$\frac{t^2}{1-t^2} = 1+\frac{1}{t^2-1} = 1+\frac{1}{(t-1)(t+1)} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)$$

ולכן

$$\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = \int 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = t+\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)+c =$$
$$= \sin x+\frac{1}{2}\left(\ln|\sin(x)-1|-\ln|\sin(x)+1|\right)+c = \sin x+\frac{1}{2}\ln\frac{|\sin(x)-1|}{|\sin(x)+1|}+c$$

**תרגיל:**

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$$

**פתרון:** למרות לזה לא מתאים למקרה בו יש לנו $\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$, ננסה ללמוד מהרעיון: יש לנו את $\cos x$ בחזקה איזוגית וכל שאר הביטויים תלויים ב־$\sin x$. ננסה את ההצבה

$$t=\sin x \quad dt=\cos x dx$$

ונקבל

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx=\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\cos x dx=\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}\cos x dx=$$
$$=\int \frac{1-t^2}{1+t}dt=\int \frac{(1-t)(1+t)}{1+t}dt=\int 1-tdt=t-\frac{t^2}{2}+c=\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$$

**הערה:** באופן כללי רעיון זה עובד, כלומר אם יש לנו מצב בו $m$ איזוגי ונתון לנו אינטגרל מהצורה

$$\int f(\sin x)\cos^m x dx$$

נציב

$$t=\sin x \quad dt=\cos x dx$$

ונקבל

$$\int f(\sin x)\cos^m x dx=\int f(\sin x)\cos^{m-1}x\cos x dx=\int f(\sin x)\left(\cos^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos x dx=$$
$$=\int f(\sin x)\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos x dx=\int f(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{m-1}{2}}dt$$

ואם $f(t)$ למשל, פונקציה רציונלית, אז זהו אינטגרל של פונקציה רציונלית.
אותו השיקול תקף עבור

$$\int f(\cos x)\sin^m x dx$$

**הערה:** זהו מקום טוב להזכיר את הזהויות השימושיות

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

זהויות אלו שימושיות כאשר מנסים לפתור אינטגרלים מהצורה

$$\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$$

כאשר $m,n$ שניהם זוגיים.

**תרגיל:**

$$\int \cos^4 x dx$$

**פתרון:** נשתמש בזהויות לעיל

$$\int \cos^4 x dx=\int \left(\cos^2 x\right)^2 dx=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\int \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x dx=$$
$$=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

## ההצבה $t=\tan\frac{x}{2}$

ההצבה $t=\tan\frac{x}{2}$, שלפעמים נקראת ההצבה האוניברסלית, נותנת את הזהויות הבאות:

$$\begin{aligned}
&t=\tan\frac{x}{2}, \qquad x=2\arctan t\\
&dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\
&\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}$$

אחד השימושים הנפוצים בהצבה זו הוא כאשר האינטגרל הוא של ביטוי שתלוי רק ב־$\sin x,\cos x$. ע"י הצבה זו אפשר לעבור לביטוי שתלוי רק ב־$t$ שיכול להיות פשוט יותר, וכאשר הביטוי שתלוי ב־$\sin x,\cos x$ הוא חיבור חיסור כפל וחילוק שלהם, אז אחרי ההצבה נקבל פונקציה רציונלית ב־$t$, וזה אינטגרל אותו אנו יודעים לפתור.

**תרגיל:**

$$\int\frac{2+\cos x}{\sin x}dx$$

**פתרון:** נשתמש בהצבה

$$\begin{aligned}
&t=\tan\frac{x}{2}, \qquad x=2\arctan t\\
&dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\
&\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}$$

ונקבל

$$\int\frac{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2+2t^2+1-t^2}{t(1+t^2)}dt=\int\frac{t^2+3}{t(1+t^2)}dt=$$

וזה אינטגרל של פונקציה רציונלית. מעלת המונה קטנה ממעלת המכנה והמכנה הוא מכפלה של גורמים אי פריקים ולכן נרשום את הפירוק לשברים חלקיים (ללא החישוב)

$$\begin{aligned}
&= \int\frac{t^2+3}{t(1+t^2)}dt=\int\frac{3}{t}-\frac{2t}{1+t^2}dt=3\ln|t|-\ln|1+t^2|+c=\\
&= 3\ln|\tan\frac{x}{2}|-\ln|1+\tan^2\frac{x}{2}|+c
\end{aligned}$$

**פולינום ריבועי מתחת לשורש**

כעת נטפל במצב בו יש לנו אינטגרל של ביטוי שיש בו פולינום ריבועי מתחחת לשורש. כלומר $\sqrt{ax^2+bx+c}$. כלומר יש לנו אינטגרל מהצורה

$$\int f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$$

במצב כזה אפשר להשלים את הפולינום הריבועי לריבוע, כלומר

$$a>0: \quad ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$a<0: \quad ax^2+bx+c = -a\left(-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}\right) = -a\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

ואז נציב $t=x+\frac{b}{2a}$ ונקבל $dt=dx$

$$a>0: \quad \int f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx = \int f(x)\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}\ dt =$$
$$= \quad \sqrt{a}\int f\left(t-\frac{b}{2a}\right)\sqrt{\left(t^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}\ dt$$
$$a<0: \quad \int f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx = \int f(x)\sqrt{-a\left(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right)}\ dt =$$
$$= \quad \sqrt{-a}\int f\left(t-\frac{b}{2a}\right)\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\frac{c}{a}-t^2\right)}\ dt$$

ופה סיימנו את הרדוקציה הראשונה למקרים בהם מתחת לשורש יש לנו ביטויים מהצורה

$$\sqrt{t^2+a^2}$$
$$\sqrt{t^2-a^2}$$
$$\sqrt{a^2-t^2}$$

הערה: לא אותו $a$ של הפולינום הריבועי.
נשאר לנו לרשום את ההצבות בכל אחד מהמקרים:

$$\sqrt{t^2+a^2} \qquad t=a\tan s \quad dt=\frac{a}{\cos^2 s}ds \qquad s=\arctan\frac{t}{a}$$
$$\sqrt{t^2-a^2} \qquad t=\frac{a}{\sin s} \quad dt=-\frac{a\cos s}{\sin^2 s}ds \qquad s=\arcsin\frac{a}{t}$$
$$\sqrt{a^2-t^2} \qquad t=a\sin s \quad dt=a\cos s ds \qquad s=\arcsin\frac{t}{a}$$

כאשר הצבות אלו עוזרות לנו להפטר מהשורש כיוון ש-

$$\sqrt{t^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 s+a^2}=\sqrt{a^2(\tan^2 s+1)}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 s}}=a\frac{1}{\sqrt{\cos^2 s}}=\frac{a}{\cos s}$$
$$\sqrt{t^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 s}-a^2}=\sqrt{\frac{a^2-a^2\sin^2 s}{\sin^2 s}}=\sqrt{a^2\frac{1-\sin^2 s}{\sin^2 s}}=a\sqrt{\frac{\cos^2 s}{\sin^2 s}}=\frac{a\cos s}{\sin s}$$
$$\sqrt{a^2-t^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 s}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 s)}=a\sqrt{1-\sin^2 s}=a\sqrt{\cos^2 s}=a\cos x$$

נשאלת השאלה, למה עבור המקרה הראשון, $\sqrt{t^2+a^2}$, ההצבה $t = a\tan s$ מובילה למצב בו

$$a\frac{1}{\sqrt{\cos^2 s}} = \frac{a}{\cos s}$$

הרי $\sqrt{\cos^2 s} = |\cos s|$ ולא $\sqrt{\cos^2 s} = \cos s$.
הסיבה היא בהצבה: במקרה זה $t$ הוא מספר ממשי כלשהו וההצבה $t = a\tan s$, או יותר נכון ההצבה $s = \arctan\frac{t}{a}$, נותנת ל־$s$ את התחום $-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$ ובתחום זה של $s$ מתקיים כי $\cos s > 0$ ולכן באמת $\sqrt{\cos^2 s} = \cos s$.
כתרגיל בית, הבינו למה גם בהצבה

$$\sqrt{a^2-t^2} \qquad t = a\sin s \quad dt = a\cos s ds \qquad s = \arcsin\frac{t}{a}$$
$$\sqrt{a^2-t^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 s} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 s)} = a\sqrt{1-\sin^2 s} = a\sqrt{\cos^2 s} = a\cos x$$

קורה דבר דומה.
לעומת זאת, בהצבה

$$\sqrt{t^2-a^2} \qquad t = \frac{a}{\sin s} \quad dt = -\frac{a\cos s}{\sin^2 s}ds \qquad s = \arcsin\frac{a}{t}$$
$$\sqrt{t^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 s}-a^2} = \sqrt{\frac{a^2-a^2\sin^2 s}{\sin^2 s}} = \sqrt{a^2\frac{1-\sin^2 s}{\sin^2 s}} = a\sqrt{\frac{\cos^2 s}{\sin^2 s}} = \frac{a\cos s}{\sin s}$$

יש לנו בעיה בשוויון האחרון כיוון שיכול להיות כי $\frac{\cos s}{\sin s}$ שלילי. במקרה זה, נשים לב כי תחום ההגדרה של $t$ הוא $|t| \ge a$, כלומר

$$t \le -a \quad or \quad a \le t$$

וזהו אינו קטע. כאשר $a \le t$ אז $0 < s \le \frac{\pi}{2}$ ואז $\frac{\cos s}{\sin s} > 0$ ואז זה בסדר. אבל כאשר $t \le -a$ אז $-\frac{\pi}{2} \le s < 0$ ואז $\frac{\cos s}{\sin s} < 0$ כלומר

$$\sqrt{t^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 s}-a^2} = \sqrt{\frac{a^2-a^2\sin^2 s}{\sin^2 s}} = \sqrt{a^2\frac{1-\sin^2 s}{\sin^2 s}} = a\sqrt{\frac{\cos^2 s}{\sin^2 s}} = -\frac{a\cos s}{\sin s}.$$

זה בא לידי ביטוי באינטגרל המסויים, אליו עוד לא הגענו.

**תרגיל:**

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$$

**פתרון:** נשתמש בהצבה

$$x=\tan t \quad dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt \quad t=\arctan x$$

ונקבל

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\tan^2 t\sqrt{\tan^2 t+1}}dt=\int \frac{dt}{\cos^2 t\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}=\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int (\sin t)^{-2}\cos t dt=$$

נשתמש בהצבה $w=\sin t \quad dw=\cos t dt$

$$=\int w^{-2}dw=-w^{-1}+c=-\frac{1}{\sin t}+c=-\frac{1}{\sin(\arctan x)}+c$$

נשתמש בהצבה נוספת:

$$x=\sinh t \quad dx=\cosh t dt$$

ונקבל

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=\int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t\sqrt{\sinh^2 t+1}}dt=\int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t\sqrt{\cosh^2 t}}dt=$$

$$=\int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t\cosh t}dt=\int \frac{1}{\sinh^2 t}dt=-\coth t+c=-\coth\left(arsinh(x)\right)+c$$

זהויות של פונקציות היפרבוליות

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \qquad 1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \coth^2 x-1=\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\big(\sinh x\big)'=\cosh x \qquad \big(\cosh x\big)'=\sinh x$$

$$\big(\tanh x\big)'=1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x} \qquad \big(\coth x\big)'=1-\coth^2 x=-\frac{1}{\sinh^2 x}$$

**תרגיל:**

$$\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

**פתרון:** נשלים לריבוע

$$\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{(x+2)^2-1}}dx=$$

נשתמש בהצבה

$$x+2=\frac{1}{\sin t}\quad dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt\quad t=\arcsin\frac{1}{x+2}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}
&= -\int\frac{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sin t}\right)^2-1}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\frac{\cos tdt}{\sin^4 t\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}}=-\int\frac{\cos tdt}{\sin^4 t\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}}=\\
&= -\int\frac{dt}{\sin^3 t}=-\int\frac{\sin tdt}{\sin^4 t}=-\int\frac{\sin tdt}{\left(\sin^2 t\right)^2}=-\int\frac{\sin tdt}{\left(1-\cos^2 t\right)^2}=
\end{aligned}$$

נשתמש בהצבה $w=\cos t\quad dw=-\sin tdt$

$$=\int\frac{dw}{(1-w^2)^2}dw=\int\frac{1}{(1-w)^2(1+w)^2}dw=\int\frac{1}{(w-1)^2(1+w)^2}dw$$

נשתמש בפירוק לשברים חלקיים (ללא חישוב)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\int\frac{1}{w+1}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{(w-1)^2}dw=\\
&= \frac{1}{4}\left(\ln|w+1|-\frac{1}{w+1}-\ln|w-1|-\frac{1}{w-1}\right)+c\\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\ln\left|\cos\left(\arcsin\frac{1}{x+2}\right)+1\right|-\frac{1}{\cos\left(\arcsin\frac{1}{x+2}\right)+1}-\ln\left|\cos\left(\arcsin\frac{1}{x+2}\right)-1\right|-\\
&- \frac{1}{\cos\left(\arcsin\frac{1}{x+2}\right)-1}\Bigg)+c
\end{aligned}$$

תרגיל בית: פתרו את התרגיל בעזרת ההצבה $t=(x+2)^2-1$.

**<u>תרגיל:</u>**

$$\int\sqrt{x^2+4x+3}dx$$

**<u>פתרון:</u>** נשלים לריבוע

$$\int\sqrt{-x^2-4x-3}dx=\int\sqrt{-(x^2+4x+3)}dx=\int\sqrt{-\left((x+2)^2-1\right)}dx=\int\sqrt{1-(x+2)^2}dx=$$

נציב $x+2=\sin t\quad dx=\cos tdt\quad t=\arcsin(x+2)$ ונקבל

$$=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt=\int\cos^2 tdt=$$

נשתמש בזהות $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ ונקבל

$$=\int\frac{\cos(2t)+1}{2}dt=\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{t}{2}+c=\frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin(x+2)\right)+\frac{\arcsin(x+2)}{2}+c$$

## הצבת אוילר

כאשר יש לנו ביטוי מהצורה $\sqrt{x^2+1}$ אפשר להשתמש בהצבה מהצורה

$$t = x + \sqrt{x^2+1} \qquad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt \qquad x = \frac{t^2-1}{2t}$$

כי אז

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

וביחד עם $x = \frac{t^2-1}{2t}$ אנו יכולים להמיר הרבה אינטגרלים שמערבים $\sqrt{x^2+1}$ לאינטגרלים של פונקציות רציונליות.

**<u>תרגיל:</u>**

$$\int \sqrt{x^2+1}dx$$

**<u>פתרון:</u>** נשתמש בהצבת אוילר. נקבל

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+1}dx = \int \left(\frac{t^2+1}{2t}\right)\left(\frac{t^2+1}{2t^2}dt\right) = \int \frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}dt = \\ = \quad \int \frac{t}{4} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3}dt = \frac{1}{8}t + \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8t^2} + c = \\ = \quad \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{1}{8(x+\sqrt{x^2+1})^2} + c \end{aligned}$$