<u>מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מסדר n</u>

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\
&y(x_0) = y_0 \\
&y'(x_0) = y_1 \\
&\vdots \\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}$$

המשפט הבא בא להביע את האינטואיציה שהפתרון הכללי של מד"ר מסדר n היא משפחת פונקציות עם n פרמטרים חופשיים.

<u>משפט:</u> נניח כי הפונקציות $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ רציפות בקטע I. תהי

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

מד"ר לינארית מנורמלת הומוגנית מסדר n. אזי קבוצת כל הפתרונות של המד"ר היא מרחב וקטורי ממימד n, כלומר קיימים n פתרונות בלתי תלויים לינארית $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ כך שהפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \cdots + c_nu_n(x).$$

הוכחה בסוף הקובץ.

נרצה כעת לפתח כלי שיעזור לנו לדעת מתי n פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מהווה בסיס למרחב הפתרונות. לפי משפט באלגברה זה אומר שמספיק שהפתרונות פורשים.

יהיו $u_1, \ldots, u_n$ פתרונות של

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

כאשר המקדמים רציפים בקטע I. ניקח $x_0 \in I$ כלשהו. יהי

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0 \\
&y'(x_0) = y_1 \\
&\vdots \\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}$$

תנאי התחלה כלשהו. אם הפתרונות שלנו הם בסיס אז קיימים $c_1, \ldots, c_n$ (יחידים) עבורם הפתרון

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \cdots + c_nu_n(x)$$

פותר את המד"ר ומקיים את תנאי ההתחלה. כלומר

$$\begin{aligned}
&c_1u_1(x_0)+c_2u_2(x_0)+\cdots+c_nu_n(x_0)=y_0\\
&c_1u_1'(x_0)+c_2u_2'(x_0)+\cdots+c_nu_n'(x_0)=y_1\\
&\vdots\\
&c_1u_1^{(n-1)}(x_0)+c_2u_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+c_nu_n^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}
\end{aligned}$$

או, ברישום מטריצי

$$\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0)\\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

ואנו רוצים שיהיה פתרון לכל בחירה של $y_0,\ldots,y_{n-1}$. זה כמובן שקול לעובדה שהמטריצה אינה סינגולרית, כלומר

$$\det\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0)\\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}\neq 0$$

וזה מוביל אותנו להגדרה הבאה:

<u>הגדרה:</u> הורונסקיאן של n פונקציות $u_1(x),\ldots,u_n(x)$ הוא

$$W(u_1,\ldots,u_n)(x)=\det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו ורונסקיאן של x,x^2,x^3.

<u>פתרון:</u>

$$W(t,t^2,t^3)(x)=\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{pmatrix}=x(12x^2-6x^2)-1(6x^3-2x^3)=6x^3-4x^3=2x^3$$

המשפט הבא מקשר בין הוורונסקיאן ותלות או אי תלות לינארית של פונקציות:

משפט: יהיו $u_1(x),\dots,u_n(x)$ פונקציות המוגדרות בקטע I.

1. אם הפונקציות הן תלויות לינארית בקטע I אז הורונסקיאן שלהם הוא אפס זהותית ב־I. באופן שקול, אם קיימת נקודה בקטע בה הוורונסקיאן שונה מאפס אזי הפונקציות בת"ל בקטע.
2. אם הורונסקיאן של n פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מסדר n שווה לאפס בנקודה אחת אזי הפתרונות תלויים לינארית.

הוכחה בסוף הקובץ.

משפט [נוסחת אבל]: עבור פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת $y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ מתקיים

$$\big(W(u_1,\dots,u_n)(x)\big)'=-a_{n-1}(x)W(u_1,\dots,u_n)(x)$$

כלומר

$$W(u_1,\dots,u_n)(x)=c\cdot\exp\left(-\int a_{n-1}(x)dx\right)$$

או

$$W(u_1,\dots,u_n)(x)=W(u_1,\dots,u_n)(x_0)\cdot\exp\left(-\int_{x_0}^{x}a_{n-1}(t)dt\right)\ .$$

הוכחה בסוף הקובץ.

תרגיל: נניח כי $u_1,\dots u_n$ פתרונות של המד"ר

$$y^{(n)}+\frac{1}{x}y^{(n-1)}+\frac{1}{x^2}y^{(n-2)}+\cdots+\frac{1}{x^{n-1}}y'+\frac{1}{x^n}y=0\ .$$

נתון כי $W(y_1,\dots y_n)(1)=8$. מהו $W(y_1,\dots y_n)(2)$?

פתרון: נשתמש בנוסחת אבל:

$$W(y_1,\dots y_n)(x)=c\exp\left(-\int\frac{1}{x}dx\right)=ce^{(-\ln|x|)}=\frac{c}{|x|}=\frac{c}{x}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו כי $x>0$ כי אנו מחפשים את הוורונסקיאן בנקודות $1,2$ שאומר שהפתרונות מוגדרית על $x>0$ כי אין פתרונות של המד"ר המוגדרים באפס ואנו צריכים שהם יהיו מוגדרים בנקודות $1,2$. נציב את הנתון

$$8=W(y_1,\dots y_n)(1)=\frac{c}{1}=c$$

ולכן $W(y_1,\dots y_n)(x)=\frac{8}{x}$ ולכן $W(y_1,\dots y_n)(2)=\frac{8}{2}=4$.

<u>תרגיל:</u> האם הפתרונות $e^x\cos x, e^x\sin x$ של המד"ר $y''+2y'+2y=0$ בלתי תלויים ב־$(-\infty,\infty)$?

<u>פתרון:</u> כיוון שנתון כי אלה פתרונות של מד"ר הומוגנית מסדר שני אנו יכולים להשתמש בורונסקיאן בשביל לבדוק האם הם בלתי תלויים:

$$W(e^t\cos t, e^t\sin t)(x)=\det\begin{pmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x\\ e^x\cos x-e^x\sin x & e^x\sin x+e^x\cos x\end{pmatrix}=$$
$$e^x\cos x(e^x\sin x+e^x\cos x)-e^x\sin x(e^x\cos x-e^x\sin x)=$$
$$e^{2x}\cos^2 x+e^{2x}\cos x\sin x-e^{2x}\cos x\sin x+e^{2x}sin^2x=e^{2x}.$$

הורונסקיאן שונה מאפס ולכן הם בלתי תלויים.

נפתור את התרגיל בדרך אחרת: ישירות מהגדרה של אי תלות: אנו מחפשים סקלרים c_1,c_2 כל שלכל $x\in\mathbb{R}$

$$c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x=0$$
$$e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)=0$$
$$c_1\cos x+c_2\sin x=0\longrightarrow c_1=c_2=0$$

<u>תרגיל:</u> האם הפונקציות $x^2, |x|x$ בת"ל על $\mathbb{R}$? על $[0,\infty)$? על $(-\infty,0]$?

<u>פתרון:</u> נבדוק עבור $\mathbb{R}$: נחפש c_1,c_2 כל שלכל $x\in\mathbb{R}$

$$c_1x^2+c_2|x|x=0$$
$$x=1\longrightarrow c_1+c_2=0$$
$$x=-1\longrightarrow c_1-c_2=0\longrightarrow c_1=c_2=0$$

ולכן ב.ת.ל. מעל $\mathbb{R}$.

נבדוק עבור $[0,\infty)$: נחפש c_1,c_2 כל שלכל $x\geq 0$

$$c_1x^2+c_2|x|x=0$$
$$c_1x^2+c_2x^2=0\longrightarrow c_1=-c_2$$

ולכן עבור $c_1=1$ ו־$c_2=-1$ נקבל זהות שאומר שהן תלויות לינארית מעל $[0,\infty)$.

נבדוק עבור $(-\infty,0]$: נחפש c_1,c_2 כל שלכל $x\leq 0$

$$c_1x^2+c_2|x|x=0$$
$$c_1x^2-c_2x^2=0\longrightarrow c_1=c_2$$

ולכן עבור $c_1 = c_2 = 1$ נקבל זהות שאומר שהן תלויות לינארית מעל $[0,\infty)$.
נחשב את הורונסקיאן שלהם:

$$W(t^2,|t|t)(x) = \det\begin{pmatrix} x^2 & |x|x \\ 2x & sign(x)x+|x| \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x^2 & |x|x \\ 2x & 2|x| \end{pmatrix} =$$
$$= \ 2x^2|x| - 2|x|x^2 = 0$$

כאשר השתמשנו בנוסחא $(|x|x)' = sign(x)x + |x|$ אשר נשאיר לכם לוודא שנכונה לכל x ולא רק ל־$x \neq 0$.

שימו לב כי מצאנו דוגמא של שתי פונקציות שהורונסקיאן שלהן אפס זהותית אבל הן לא תלויות לינארית. פונקציות אלו לא יכולות להיות פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מסדר שני כי ורונסקיאן של פתרונות ב.ת.ל. של מד"ר כנ"ל הוא שונה מאפס תמיד.

__תרגיל:__ מצאו מד"ר הומוגנית מנורמלת מסדר שני שיש לה פתרונות x, x^2. אותו הדבר עבור e^x, e^{2x}.

__פתרון:__ נציב את הפתרונות לתוך המד"ר כדי לקבל תנאים על המקדמים של המד"ר:

$$\begin{aligned}
&y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\\
&x \longrightarrow 0 + p(x)\cdot 1 + q(x)x = 0\\
&x^2 \longrightarrow 2 + 2p(x)x + q(x)x^2 = 0\\
&p(x) = -xq(x)\\
&2 - 2x^2q(x) + x^2q(x) = 0 \longrightarrow q(x) = \frac{2}{x^2} \longrightarrow p(x) = -\frac{2}{x}\\
&y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0
\end{aligned}$$

נעשה אותו דבר עם e^x, e^{2x}:

$$\begin{aligned}
&y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\\
&e^x \longrightarrow e^x + p(x)e^x + q(x)e^x = 0 \longrightarrow 1 + p(x) + q(x) = 0\\
&e^{2x} \longrightarrow 4e^{2x} + 2p(x)e^{2x} + q(x)e^{2x} = 0 \longrightarrow 4 + 2p(x) + q(x) = 0\\
&3 + p(x) = 0 \longrightarrow p(x) = -3 \longrightarrow q(x) = 2\\
&y'' - 3y' + 2y = 0
\end{aligned}$$

תרגיל: יהיו $u_1(x), u_2(x)$ פתרונות בלתי תלויים של מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מסדר שני $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. האם יש עוד מד"ר כנ"ל שאלו פתרונות שלה?
פתרון: נניח שיש שני מד"ר שאלו פתרונות שלה.

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y'' + r(x)y' + s(x)y = 0 \end{aligned}$$

נציב את u_1 לתוך שתיהן ונחסר ביניהן

$$\begin{aligned} &u_1''(x) + p(x)u_1'(x) + q(x)u_1(x) = 0 \\ &u_1''(x) + r(x)u_1'(x) + s(x)u_1(x) = 0 \\ &(p(x) - r(x))u_1'(x) + (q(x) - s(x))u_1(x) = 0 \end{aligned}$$

באותו האופן נקבל עבור u_2 ש-

$$(p(x) - r(x))u_2'(x) + (q(x) - s(x))u_2(x) = 0$$

ולכן נרשום את שתי הזהויות כמערכת משוואות

$$\begin{aligned} &(p(x) - r(x))u_1'(x) + (q(x) - s(x))u_1(x) = 0 \\ &(p(x) - r(x))u_2'(x) + (q(x) - s(x))u_2(x) = 0 \\ &\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x) - r(x) \\ q(x) - s(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אבל הדטרמיננט של המטריצה הוא הורונסקיאן ששונה מאפס כי u_1, u_2 ב.ת.ל. ולכן הפתרון היחיד הוא פתרון האפס, כלומר

$$\begin{aligned} &W(u_1, u_2)(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0 \\ &p(x) - r(x) = 0 \\ &q(x) - s(x) = 0 \end{aligned}$$

ולכן המד"ר יחידה.

דרך נוספת: נניח שקיים x_0 כך ש-$p(x_0) \neq r(x_0)$. נזכר כי

$$\begin{aligned} &(p(x) - r(x))u_1'(x) + (q(x) - s(x))u_1(x) = 0 \\ &(p(x) - r(x))u_2'(x) + (q(x) - s(x))u_2(x) = 0 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} u_1'(x) + \frac{q(x)-s(x)}{p(x)-r(x)} u_1(x) = 0 \\ u_2'(x) + \frac{q(x)-s(x)}{p(x)-r(x)} u_2(x) = 0. \end{aligned}$$

נסתכל על המד"ר

$$y' + \frac{q(x)-s(x)}{p(x)-r(x)} y = 0 \longrightarrow y(x) = c \cdot f(x).$$

אזי u_1, u_2 פתרונות של מד"ר זו ולכן

$$u_1(x) = c_1 f(x),\ \ u_2(x) = c_2 f(x)$$

ולכן תלויות לינארית. סתירה.

תרגיל: נתונה מד"ר $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ כאשר $p(x)$ איזוגית ורציפה בקטע $(-a,a)$ ו־$q(x)$ זוגית ורציפה בקטע.

1. הראו כי פתרון המקיים $y'(0) = 0$ הוא פונקציה זוגית.
2. הראו כי כל פתרון המקיים $y(0) = 0$ הוא פונקציה איזוגית.

פתרון: 1. אנו רוצים להוכיח כי פתרון $y(x)$ המקיים $y'(0) = 0$ הוא פונקציה זוגית, כלומר $y(x) = y(-x)$. נגדיר $z(x) = y(-x)$. אזי $z'(x) = -y'(-x)$ וגם $z''(x) = y''(-x)$. כיוון ש־$y(x)$ פתרון אזי $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ לכל $-a < x < a$. ולכן

$$\begin{aligned} z''(x) + p(x)z'(x) + q(x)z(x) &= y''(-x) + p(x)(-y'(-x)) + q(x)y(-x) = \\ = \ \ & y''(-x) - p(x)y'(-x) + q(x)y(-x) = y''(-x) + p(-x)(-y'(-x)) + q(-x)y(-x) = 0 \end{aligned}$$

ולכן $z(x)$ פתרון. בנוסף $z(0) = y(-0) = y(0)$ וגם $z'(0) = -y'(-0) = -y(0) = 0$. לפי קיום ויחידות הפתרונות שווים ולכן $y(x)$ זוגית.

2. אנו רוצים להוכיח כי פתרון $y(x)$ המקיים $y(0) = 0$ הוא פונקציה איזוגית, כלומר $y(-x) = -y(x)$. נגדיר $z(x) = -y(-x)$. אזי $z'(x) = y'(-x)$ וגם $z''(x) = -y''(-x)$. כיוון ש־$y(x)$ פתרון אזי $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ לכל $-a < x < a$. ולכן

$$\begin{aligned} z''(x) + p(x)z'(x) + q(x)z(x) &= -y''(-x) + p(x)y'(-x) - q(x)y(-x) = \\ = \ \ & -y''(-x) - p(-x)y'(-x) - q(x)y(-x) = \\ = \ \ & -\big(y''(-x) + p(-x)y'(-x) + q(-x)y(-x)\big) = 0 \end{aligned}$$

ולכן $z(x)$ פתרון. בנוסף $z(0)=-y(-0)=0$ וגם
$y(0)=y'(-0)=z'(0)$. לפי קיום ויחידות הפתרונות שווים ולכן $y(x)$ איזוגית.

<u>תרגיל:</u> נסתכל על המשוואה $y''-\frac{6}{x^2}y=0$. הראו כי x^3, x^{-2} פתרונות שלה וחשבו את הוורונסקיאן והסבירו את התוצאה.

<u>פתרון:</u>

$$(x^3)'-\frac{6}{x^2}x^3=6x-6x=0$$
$$(x^{-2})'-\frac{6}{x^2}x^{-2}=6x^{-4}-6x^{-4}=0$$

נחשב את הוורונסקיאן

$$W(x^3,x^{-2})(x)=\det\begin{pmatrix} x^3 & x^{-2} \\ 3x^2 & -2x^{-3}\end{pmatrix}=-2-3=5$$

האם הורונסקיאן מוגדר באפס?

<u>הוכחות</u>

<u>משפט:</u> תהי

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

מד"ר לינארית מנורמלת הומוגנית מסדר n עבורה המקדמים רציפים בקטע I. אזי קבוצת כל הפתרונות של המד"ר היא מרחב ווקטורי ממימד n, כלומר קיימים n פתרונות בלתי תלויים לינארית $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ כך שהפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \cdots + c_nu_n(x).$$

<u>הוכחה:</u> קודם כל נראה כי קבוצת הפתרונות היא מרחב ווקטורי. דבר ראשון, פונקציית האפס היא פתרון כי המד"ר היא הומוגנית ולכן קבוצת הפתרונות אינה ריקה. בנוסף, אם y_1, y_2 פתרונות של

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

אזי $ay_1 + by_2$ פתרון של

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = a0 + b0 = 0.$$

ולכן אוסף הפתרונות הוא מרחב ווקטורי.
נראה כעת כי מימד מרחב ווקטורי זה הוא n: נבחר $x_0 \in I$ שרירותי. לכל $1 \le i \le n$ נגדיר את הפונקציה $u_i(x)$ להיות הפתרון היחיד של המד"ר ביחד עם תנאי ההתחלה הבאים:

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\\
&y(x_0) = 0\\
&\vdots\\
&y^{(i)}(x_0) = 1\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = 0
\end{aligned}$$

כלומר תנאי ההתחלה הוא אפס לכל הנגזרות חוץ מהגזרת מסדר i שערכה 1 ב־x_0.
נראה כי $u_1, \ldots, u_n$ בסיס למרחב הפתרונות. צריך להראות כי הקבוצה פורשת ובלתי

תלויה לינארית:

נראה קודם כי פורשת: יהי $u(x)$ פתרון של המד"ר. נגדיר

$$\begin{aligned}
&u(x_0) = y_0\\
&u'(x_0) = y_1\\
&\vdots\\
&u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.
\end{aligned}$$

אזי $u(x)$ הוא הפתרון היחיד של המד"ר ביחד עם תנאי התחלה זה. נראה כי גם

$$y(x) = y_0 u_1(x) + y_1 u_2(x) + \cdots + y_{n-1} u_n(x)$$

גם הוא פתרון המקיים את תנאי ההתחלה. ברור כי הוא פתרון כיוון שהוא קומבינציה לינארית של פתרונות. בנוסף

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0 u_1(x_0) + y_1 u_2(x_0) + \cdots + y_{n-1} u_n(x_0) = y_0\\
&y'(x_0) = y_0 u_1'(x_0) + y_1 u_2'(x_0) + \cdots + y_{n-1} u_n'(x_0) = y_1\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_0 u_1^{(n-1)}(x_0) + y_1 u_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + y_{n-1} u_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.
\end{aligned}$$

מיחידות נובע כי

$$u(x) = y_0 u_1(x) + y_1 u_2(x) + \cdots + y_{n-1} u_n(x)$$

ולכן $u(x)$ הוא קומבינציה לינארית של $u_1(x), \ldots, u_n(x)$.

נראה אי תלות: נניח כי

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$$

לכל $x \in I$. צריך להראות כי $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. נציב x_0 לזהות ונקבל

$$0 = c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) + \cdots + c_n u_n(x_0) = c_1.$$

נגזור את הזהות ונציב x_0 ונקבל

$$\begin{aligned}
&c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \cdots + c_n u_n'(x) = 0\\
&0 = c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) + \cdots + c_n u_n'(x_0) = c_2
\end{aligned}$$

וכם הלאה נמשיך לגזור ולהציב x_0 ונקבל $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, כלומר $u_1, \ldots, u_n$ הן בלתי תלויות לינארית (כפונקציות המוגדרות על I).
כלומר $u_1 \ldots, u_n$ פורשות ובלתי תלויות ולכל בסיס. בפרט, הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x).$$

■

משפט: יהיו $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ פונקציות המוגדרות בקטע I.
1. אם הפונקציות הן תלויות לינארית בקטע I אז הורונסקיאן שלהם הוא אפס זהותית ב־I. באופן שקול, אם קיימת נקודה בקטע בה הוורונסקיאן שונה מאפס אזי הפונקציות בת"ל בקטע.
2. אם הורונסקיאן של n פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת מסדר n שווה לאפס בנקודה אחת אזי הפתרונות תלויים לינארית.

הוכחה: 1. נניח כי הפונקציות תלויות לינארית בקטע I. נניח בשביל נוחות סימון כי $n = 3$.
אז יש פונקציה אחת שהיא קומבינציה לינארית של האחרות, למשל u_3 היא קומבינציה לינארית של u_1, u_2:

$$u_3(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

אז

$$W(u_1, u_2, u_3)(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_3''(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & c_1 u_1''(x) + c_2 u_2''(x) \end{pmatrix} = \\
&= \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & c_1 u_1(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & c_1 u_1'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & c_1 u_1''(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & c_2 u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & c_2 u_2'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & c_2 u_2''(x) \end{pmatrix} = \\
&= c_1 \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_1(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_1'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_1''(x) \end{pmatrix} c_2 \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_2'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_2''(x) \end{pmatrix} = c_1 0 + c_2 0 = 0
\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מזה שיש שתי עמודות זהות במטריצה ולכן הדטרמיננט הוא אפס.

2. נניח כי x_0 היא הנקודה בה הורונסקיאן מתאפס, כלומר

$$W(u_1, \ldots, u_n)(x_0) = 0.$$

זה אומר שלמערכת המשוואות ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} u_1(x_0) & u_2(x_0) & \cdots & u_n(x_0) \\ u_1'(x_0) & u_2'(x_0) & \cdots & u_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x_0) & u_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

יש פתרון לא טריביאלי, כלומר יש קבועים $c_1, \ldots, c_n$ אשר לא כולם אפס, עבורם מתקבלת הזהות לעיל.
נגדיר $u(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x)$. אז

$$\begin{aligned} & u(x_0) = c_1 u_1(x_0) + c_2 u_2(x_0) + \cdots + c_n u_n(x_0) = 0 \\ & u'(x_0) = c_1 u_1'(x_0) + c_2 u_2'(x_0) + \cdots + c_n u_n'(x_0) = 0 \\ & \vdots \\ & u^{(n-1)}(x_0) = c_1 u_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 u_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n u_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

אבל זה אומר ש־$u(x)$ ופתרון האפס מקיימים את אותו תנאי התחלה. לפי קיום ויחידות זה אומר שהם שווים, כלומר $u(x) \equiv 0$. שאומר

$$u(x) = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$$

ולכן הפונקציות תלויות לינארית מעל הקטע I. ■

<u>**משפט [נוסחת אבל]:**</u> עבור פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית <u>מנורמלת</u> $y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ מתקיים

$$\big(W(u_1, \ldots, u_n)(x)\big)' = -a_{n-1}(x) W(u_1, \ldots, u_n)(x)$$

כלומר

$$W(u_1, \ldots, u_n)(x) = c \cdot \exp\left(-\int a_{n-1}(x)dx\right)$$

או

$$W(u_1, \ldots, u_n)(x) = W(u_1, \ldots, u_n)(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt\right) .$$

<u>**הוכחה:**</u> נוכיח עבור $n = 3$ בשביל נוחות רישום.

נשתמש בזהות

$$\left(\det\begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & a_3(x)\\ b_1(x) & b_2(x) & b_3(x)\\ c_1(x) & c_2(x) & c_3(x)\end{pmatrix}\right)' =$$

$$\begin{aligned} =\ & \det\begin{pmatrix} a_1'(x) & a_2'(x) & a_3'(x)\\ b_1(x) & b_2(x) & b_3(x)\\ c_1(x) & c_2(x) & c_3(x)\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & a_3(x)\\ b_1'(x) & b_2'(x) & b_3'(x)\\ c_1(x) & c_2(x) & c_3(x)\end{pmatrix} + \\ +\ & \det\begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & a_3(x)\\ b_1(x) & b_2(x) & b_3(x)\\ c_1'(x) & c_2'(x) & c_3'(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

אזי

$$\big(W(u_1,u_2,u_3)(x)\big)' = \left(\det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x)\\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_3''(x)\end{pmatrix}\right)' =$$

$$\begin{aligned} =\ & \det\begin{pmatrix} u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x)\\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_3''(x)\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x)\\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_3''(x)\\ u_1''(x) & u_2''(x) & u_3''(x)\end{pmatrix} + \\ +\ & \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x)\\ u_1'''(x) & u_2'''(x) & u_3'''(x)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & u_3'(x)\\ u_1'''(x) & u_2'''(x) & u_3'''(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כאשר שני המחוברים הראשונים הם אפס כי יש למטריצה שתי שורות שוות. כעת נזכר כי u_1, y_2, u_3 הם פתרונות כלומר

$$\begin{aligned} u_1'''(x) + a_2(x)u_1''(x) + a_1(x)u_1'(x) + a_0(x)u_1(x) = 0\\ u_2'''(x) + a_2(x)u_2''(x) + a_1(x)u_2'(x) + a_0(x)u_2(x) = 0\\ u_3'''(x) + a_2(x)u_3''(x) + a_1(x)u_3'(x) + a_0(x)u_3(x) = 0 \end{aligned}$$

או

$$\begin{aligned} u_1''' &= -a_2u_1'' - a_1u_1' - a_0u_1\\ u_2''' &= -a_2u_2'' - a_1u_2' - a_0u_2\\ u_3''' &= -a_2u_3'' - a_1u_3' - a_0u_3 \end{aligned}$$

נציב זאת ונקבל

$$\big(W(u_1,u_2,u_3)(x)\big)' = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
= \ & \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ -a_2u_1''-a_1u_1'-a_0u_1 & -a_2u_2''-a_1u_2'-a_0u_2 & -a_2u_3''-a_1u_3'-a_0u_3 \end{pmatrix} = \\
= \ & \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ -a_2u_1'' & -a_2u_2'' & -a_2u_3'' \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ -a_1u_1' & -a_1u_2' & -a_1u_3' \end{pmatrix} + \\
+ \ & \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ -a_0u_1 & -a_0u_2 & -a_0u_3 \end{pmatrix} = \\
= \ & -a_2\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} - a_1\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1' & u_2' & u_3' \end{pmatrix} - \\
- \ & a_0\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = -a_2\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \end{pmatrix} = -a_2(x)W(u_1,u_2,u_3)(x)
\end{aligned}$$

כלומר

$$\big(W(u_1,u_2,u_3)(x)\big)' = -a_2(x)W(u_1,u_2,u_3)(x)$$

וזו מד"ר לינארית מסדר ראשון שהפתרון שלה הוא

$$W(u_1,u_2,u_3)(x) = c\cdot\exp\left(-\int a_2(x)dx\right).$$

שימו לב כי עבור $n=3$ מתקבל כי $n-1=2$. כלומר במקרה הכללי

$$W(u_1,\ldots,u_n)(x) = c\cdot\exp\left(-\int a_{n-1}(x)dx\right).$$

■