תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 11 – פתרון חלקי

1. נסמן ב- F את הקבוצה של כל התת-קבוצות הבלתי תלויות של X. F לא ריקה כי לכל $x\in X$ הקבוצה $\{x\}$ בלתי תלויה.
F סדורה חלקית לפי ההכלה: $A\le B \Leftrightarrow A\subseteq B$.

נוכיח שעבור F מתקיים התנאי של הלמה של צורן.
תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ שרשרת ב- F.
נסתכל ב- $\bigcup_{i\in I}A_i$.
ברור ש- $A_j\le\bigcup_{i\in I}A_i$ לכל $j\in I$, כלומר $\bigcup_{i\in I}A_i$ היא חסם מלעיל של $\{A_i\}_{i\in I}$, וצריך להוכיח ש- $\bigcup_{i\in I}A_i\in F$, כלומר ש- $\bigcup_{i\in I}A_i$ קבוצה בלתי תלויה.

יהיו $x,y\in\bigcup_{i\in I}A_i$.
זה אומר: קיימים $j,k\in I$ כך ש- $x\in A_j$ ו- $y\in A_k$.
אבל $\{A_i\}_{i\in I}$ – שרשרת, לכן או $A_j\subseteq A_k$ או $A_k\subseteq A_j$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $A_j\subseteq A_k$. אז $x,y\in A_k$. A_k היא איבר של F, כלומר היא קבוצה בלתי תלויה. לכן x ו- y לא ניתנים להשוואה, ולכן $\bigcup_{i\in I}A_i$ קבוצה בלתי תלויה.

הוכחנו שעבור F מתקיים התנאי של הלמה של צורן. לכן ל- F יש איבר מקסימלי – כלומר, ב- X יש קבוצה בלתי תלויה מקסימלית. נסמן אותה ב- B.

נוכיח ש- B מקיימת את התנאי שכל איבר של $X\setminus B$ ניתן להשוואה עם איבר אחד לפחות של B.

יהי $x\in X\setminus B$. אם x אינו ניתן להשוואה עם אף איבר של B, אז גם $B\cup\{x\}$ תהיה קבוצה בלתי תלויה, וזאת סתירה לכך ש- B קבוצה בלתי תלויה מקסימליות.

2.

א) נוכיח שעבור F מתקיים התנאי של הלמה של צורן.
תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ שרשרת ב- F.
נסתכל ב- $\bigcup_{i\in I}A_i$.
ברור ש- $A_j\le\bigcup_{i\in I}A_i$ לכל $j\in I$, כלומר $\bigcup_{i\in I}A_i$ היא חסם מלעיל של $\{A_i\}_{i\in I}$, וצריך להוכיח ש- $\bigcup_{i\in I}A_i\in F$, כלומר שאם $x,y\in\bigcup_{i\in I}A_i$ אז $x+y\notin\bigcup_{i\in I}A_i$.

יהיו $x,y\in\bigcup_{i\in I}A_i$. נסמן: $z=x+y$. נניח (בדרך השלילה) ש- $z\in\bigcup_{i\in I}A_i$.
זה אומר: קיימים $j,k,m\in I$ כך ש- $x\in A_j$, $y\in A_k$ ו- $z\in A_m$.

אבל $\{A_i\}_{i\in I}$ – שרשרת, לכן: $A_j\subseteq A_k$ או $A_k\subseteq A_j$ ו- $A_j\subseteq A_m$ או $A_m\subseteq A_j$ ו- $A_k\subseteq A_m$ או $A_m\subseteq A_k$. יש 8 מקרים:

- $A_j\subseteq A_k$ ו- $A_j\subseteq A_m$ ו- $A_k\subseteq A_m$. נובע: $A_j\subseteq A_k\subseteq A_m$.
- $A_j\subseteq A_k$ ו- $A_j\subseteq A_m$ ו- $A_m\subseteq A_k$. נובע: $A_j\subseteq A_m\subseteq A_k$.
- $A_j\subseteq A_k$ ו- $A_m\subseteq A_j$ ו- $A_k\subseteq A_m$. נובע: $A_j=A_k=A_m$.
- $A_j\subseteq A_k$ ו- $A_m\subseteq A_j$ ו- $A_m\subseteq A_k$. נובע: $A_m\subseteq A_j\subseteq A_k$.
- $A_k\subseteq A_j$ ו- $A_j\subseteq A_m$ ו- $A_k\subseteq A_m$. נובע: $A_k\subseteq A_j\subseteq A_m$.
- $A_k\subseteq A_j$ ו- $A_j\subseteq A_m$ ו- $A_m\subseteq A_k$. נובע: $A_j=A_k=A_m$.
- $A_k\subseteq A_j$ ו- $A_m\subseteq A_j$ ו- $A_k\subseteq A_m$. נובע: $A_k\subseteq A_m\subseteq A_j$.
- $A_k\subseteq A_j$ ו- $A_m\subseteq A_j$ ו- $A_m\subseteq A_k$. נובע: $A_m\subseteq A_k\subseteq A_j$.

בכל מקרה $\{A_j, A_k, A_m\}$ שרשרת, כלומר $x,y,z\in A_n$ כאשר $n\in\{j,k,m\}\subseteq I$.
אבל $A_n\in F$ ולכן לא ייתכן ש- $z=x+y$.

לכן $\bigcup_{i\in I}A_i\in F$ ובכך הוכחנו שעבור F מתקיים התנאי של הלמה של צורן. לכן ל- F יש איבר מקסימלי.

ב) נניח $|T|=\aleph_0$. מגדיר T' להיות קבוצה שמכילה כל אברי T , כל הסכומים של שני אברי T וכל ההפרשים של שני אברי T . אז גם $|T'|=\aleph_0$ (זה נובע מ- $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$). לכן קיים $z\in\mathbb{R}\setminus T'$. אז גם $T\cup\{z\}\in F$ בסתירה לכך ש- T מקסימלית ב- F .

ג) הפתרון דומה לפתרון של הסעיף הקודם: בהנחה ש- $|T|=\alpha<\aleph$ מקבלים $|T'|=\alpha$ (תוך שימוש ב- $\alpha\cdot\alpha=\alpha$) עם אותה המסקנה.

ד) נניח שהטענה לא נכונה: T איבר מקסימלי של F , $z\in\mathbb{R}\setminus T$, ולכל $x,y\in T$ מתקיים $x+y\neq z$ ו- $x-y\neq z$. נוכיח שב- $T\cup\{z\}$ אין שלושה איברים a,b,c כך ש- $a\neq b$ ו- $c=a+b$ – וזאת תהיה סתירה למקסימליות של T.

נניח שב- $T\cup\{z\}$ יש שלושה איברים a,b,c כך ש- $a\neq b$ ו- $c=a+b$. ייתכנו המקרים הבאים:

- $a,b,c\in T$:
  זה לא ייתכן כי $T\in F$.
- $a,b\in T$ ו- $c=z$:
  זה לא ייתכן כי הנחנו שלכל $x,y\in T$ מתקיים $x+y\neq z$ (וכאן $a+b=z$).
- $a,c\in T$ ו- $b=z$:
  זה לא ייתכן כי הנחנו שלכל $x,y\in T$ מתקיים $x-y\neq z$ (וכאן $c-a=z$).

- $b,c\in T$ ו- $a=z$:
  זה לא ייתכן בדומה למקרה הקודם.
- $a\in T$ ו- $b=c=z$:
  זה לא ייתכן: אז $a=0$ ולכן שוב $z=c-a$.
- $b\in T$ ו- $a=c=z$:
  זה לא ייתכן בדומה למקרה הקודם.

מכאן: ב- $T\cup\{z\}$ אין שלושה איברים a,b,c כך ש- $a\neq b$ ו- $c=a+b$ $\Leftarrow$ $T\cup\{z\}\in F$ $\Leftarrow$ סתירה לכך ש- T מקסימלית ב- F .

3. נא לראות פתרון של המבחן מהסמסטר הקודם (אביב 2001/02).

4. כיוון 1:
נתון: פונקציה $f\colon A\to B$ היא על.
נוכיח: קיימת פונקציה $g\colon B\to A$ כך ש- $f\circ g=\mathrm{Id}_B$.

לכל $b\in B$ נגדיר: $A_b=\{a\in A\colon f(a)=b\}$ (במילים אחרות: $A_b=f^{-1}[\{b\}]$).
נשים לב: לכל $b\in B$, $A_b\neq\varnothing$ (כי f על) ו- $\bigcup_{b\in B}A_b=A$ (כי f פונקציה).

נסמן: $\mathcal{A}=\{A_b\}_{b\in B}$. $\mathcal{A}$ היא משפחה לא ריקה של קבוצות לא ריקות. לכן לפי אקסיומת הבחירה קיימת בה פונקצית בחירה, כלומר $\varphi\colon \mathcal{A}\to\bigcup_{b\in B}A_b=A$ כך שלכל $A_b\in\mathcal{A}$ מתקיים $\varphi(A_b)\in A_b$.

נגדיר $g\colon B\to A$ באופן הבא: לכל $b\in B$ נגדיר $g(b)=\varphi(A_b)$.
g היא פונקציה כי בהגדרה כזאת $g(b)$ מוגדר באופן יחיד לכל $b\in B$.

נוכיח ש- $f\circ g=\mathrm{Id}_B$: יש להוכיח שלכל $b\in B$ מתקיים $f(g(b))=b$.

לפי הגדרת g , $g(b)=\varphi(A_b)$.
לפי הגדרת φ זה אומר $g(b)\in A_b$.
לפי הגדרת A_b זה אומר $f(g(b))=b$.

כיוון 2:
נתון: קיימת פונקציה $g\colon B\to A$ כך ש- $f\circ g=\mathrm{Id}_B$.
נוכיח: פונקציה $f\colon A\to B$ היא על.

נניח ש- f איננה על: קיים $b\in B$ כך שלא קיים $a\in A$ שעבורו $f(a)=b$.

אז לא ייתכן $f(g(b))=b$ בסתירה לכך ש- $f\circ g=\mathrm{Id}_B$.

5. תהיינה $f\colon B\to C$ ו- $g\colon A\to C$ שתי פונקציות כך ש- $\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathrm{Im}(g)$.
הוכח בעזרת אקסיומת הבחירה: קיימת פונקציה $h\colon B\to A$ כך ש- $g\circ h=f$.

לכל $b\in B$ נגדיר: $A_b=\{a\in A\colon g(a)=f(b)\}$ (במילים אחרות: $A_b=f^{-1}[\{f(b)\}]$).
נשים לב: לכל $b\in B$, $A_b\neq\varnothing$ (כי $\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathrm{Im}(g)$) ו- $\bigcup_{b\in B}A_b=A$ (כי f פונקציה).

נסמן: $\mathcal{A}=\{A_b\}_{b\in B}$. $\mathcal{A}$ היא משפחה לא ריקה של קבוצות לא ריקות. לכן לפי אקסיומת הבחירה קיימת בה פונקצית בחירה, כלומר $\varphi\colon \mathcal{A}\to\bigcup_{b\in B}A_b=A$ כך שלכל $A_b\in\mathcal{A}$ מתקיים $\varphi(A_b)\in A_b$.

נגדיר $h\colon B\to A$ באופן הבא: לכל $b\in B$ נגדיר $h(b)=\varphi(A_b)$.
h היא פונקציה כי בהגדרה כזאת $h(b)$ מוגדר באופן יחיד לכל $b\in B$.

נוכיח ש- $g\circ h=f$: יש להוכיח שלכל $b\in B$ מתקיים $g(h(b))=f(b)$.

לפי הגדרת h , $h(b)=\varphi(A_b)$.
לפי הגדרת φ זה אומר $h(b)\in A_b$.
לפי הגדרת A_b זה אומר $g(h(b))=f(b)$.

6. א)+ב) : ניתן לבחור את האמצע של הקטע.
ג) תהי $A\in P(\mathbb{Q})\setminus\{\varnothing\}$.
ב- A נבחר קבוצת המספרים עם מכנה מינימלי.
אם בקבוצה הזאת איבר אחד – הוא יהיה הנציג של A.
אם בקבוצה הזאת יותר מאיבר אחד – נבחר בה קבוצת המספרים עם מונה מינימלי בערך מוחלט.
אם בקבוצה הזאת איבר אחד – הוא יהיה הנציג של A.
אם לא – זה אומר שיש בה שני איברים נגדיים. אז נבחר את החיובי להיות הנציג של A.