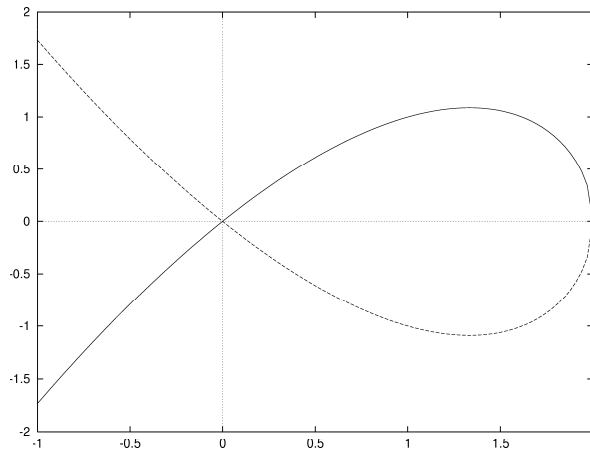


1. עיין בפונקציה $y^2 = x^2(2-x)$ (ראה הציור). חשב את נפח גוף הסיבוב שלה (סביב ציר x) בתחומים

$$[-1, 0], [0, 2]$$



2. חזור על השאלה 1 עבור העקום $y = x^2(2-x)$ התוכל לצייר פונקציה זו?
3. מצא את גבול הסדרה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$$

4. נתונה פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0, 2\pi]$. הוכח כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

רמז: הוכח זאת ראשית עבור פונקציות מדרגה.

5. חשב את אורכי הקשת עבור הפונקציות הבאות:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} x(t) = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y(t) = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{ב})$$

6. מצא את הנגזרת של הפונקציות הבאות:

$$F(x) = \int_x^6 \cos(t^2) dt \quad (\text{א})$$

$$F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^3} dt \quad (\text{ב})$$

$$F(x) = \int_{\tan^2(x^2)}^{\tan^2(2x)} e^{\arctan \sqrt{t}} dt \quad (א)$$

7. חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan t dt}{\int_0^{\sin x} t^2 dt} \quad (א)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan t dt}{\int_0^x t^2 \sin t dt} \quad (ב)$$

8. הוכח כי $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx \leq 0.47$ (מבלי לחשב את האינטגרל).

9. תהי $g(x)$ פונקציה אינטגרבילית ב- $[a, b]$. יהי $c > 0$. מצא פונקציה אינטגרבילית $f(x)$ כך ש-
 $\int_a^b f^2(x) dx = c$, וכך שהביטוי $\int_a^b f(x)g(x) dx$ יהיה מכסימלי.

10. תהי $g(x)$ רציפה ב- $[0, 1]$ המקיימת $g(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לכל $0 < x \leq 1$. הוכח כי למשוואה

$$x = \int_0^{x^2} g(t) dt$$

11. תהי $f(x)$ רציפה על $[a, b]$ ונתון $f(x) \geq 0$ לכל $a \leq x \leq b$ וכן $\max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} > 0$. הוכח כי

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

12. מצא נוסחת נסיגה ותן ערך התחלתי לביטוי

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

13. חשב את האינטגרלים הבאים לכל n : (בדוק עבור n זוגי ואי-זוגי)

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nt}{\sin t} dt \quad (א)$$

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt \quad (ב)$$

הדרכה לסעיף ב': העזר בנוסחה הבאה (הוכח אותה !)

$$\sin^2(k+1)t - \sin^2 kt = \frac{1}{2} [\cos 2kt - \cos 2(k+1)t] = \sin t \sin(2k+1)t$$

14. הוכח את השוויון

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}$$

15. תהי $f(x)$ אינטגרבילית לפי רימן בתחום $[0, 1]$. מצא מהו הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ כאשר

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx$$

16. (*) התבקשת לפתור את שאלה 4 ע"י שימוש בפונקצית מדרגות.
 התוכל להוכיח את הטענה באופן ישיר (כלומר ע"י סכומים) ?

17. הוכח:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n} = \frac{4}{e}$$

הדרכה: חשב את $\ln L$ באמצעות אינטגרל.

18. חשב את שטח האסטרואידה $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.