תורת החבורות – תרגיל בית 10

שאלה 1:

תהא G חבורה, H תת חבורה של G ו N תת חבורה נורמלית של G. הוכיחו כי

א) HN היא תת חבורה.

ב) $H \cap N$ היא תת חבורה נורמלית של H.

ג) תהי $f: G \to G/N$ ההומומורפיזם הטבעי. הראו כי התמונה $f(H)$ של H שווה ל- HN/N.

ד) הוכיחו כי $HN/N \cong H/H \cap N$. (משפט האיזומורפיזם השני)

שאלה 2:

הוכיחו כי

א) חיתוך ומכפלה של תת חבורות נורמליות היא תת חבורה נורמלית.

ב) תת חבורה של חבורה אבלית, היא נורמלית.

שאלה 3:

תהיינה X ו Y חבורות, $A \triangleleft X$ ו $B \triangleleft Y$. הוכיחו כי $A \times B \triangleleft X \times Y$.

שאלה 4:

תהא G חבורה ו H תת חבורה. לכל $g \in G$ מגדירים $g^{-1}Hg = \left\{g^{-1}hg \mid h \in H\right\}$. הוכיחו כי

א) $g^{-1}Hg$ היא תת חבורה.

ב) הוכיחו כי $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ התת-חבורה הנורמלית הכי גדולה (במובן הכלה) ב G המוכלת ב H.

שאלה 5:

תהא H תת חבורה יחידה מסדר m של חבורה G. הוכיחו ש H נורמלית ב G.

שאלה 6:

יהא $\phi : X \to Y$ הומומורפיזם בין חבורות ו H תת חבורה של X.

א) הוכיחו כי $\phi(H)$ היא תת חבורה של $\text{Im}(\phi)$, ואם $H \lhd X$ אז $\phi(H) \lhd \text{Im}(\phi)$.

ב) הוכיחו כי אם X אבלית אז גם $\text{Im}(\phi)$ אבלית, ואם X צקלית הנוצרת על ידי x אז $\text{Im}(\phi)$ צקלית הנוצרת על ידי $\phi(x)$.

ג) האם בהכרח $|H| = |\phi(H)|$?

שאלה 7:

א. תהא G חבורת כל המספרים הקומפלכסים השונים מאפס ביחס לכפל ($G = \mathbb{C}^*$). ותהא N תת הקבוצה של G המכילה את כל המספרים שערכם המוחלט שווה ל 1. הראו כי $N \lhd G$ וכי G/N איזומורפית לחבורת כל המספרים הממשיים החיובים ביחס לכפל.

ב. תהא μ תת-החבורה של $\mathbb{C}^*$ המורכבת מכל שרשי היחידה (דהיינו כל האיברים מסדר סופי). הוכיחו כי μ איזומורפי לחבורה החיבורית $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

שאלה 8:

תהיינה X ו Y חבורות ו $G = X \times Y$. נגדיר $N_1 = \{(x,1) \in G \mid x \in X\}$ ו $N_2 = \{(1,y) \in G \mid y \in Y\}$. הוכיחו כי:

א) N_1 ו N_2 הן תת חבורות נורמליות של G.

ב) $N_1 \cong X$ ו $N_2 \cong Y$.

ג) $G = N_1 \cdot N_2$.

ד) $N_1 \cap N_2 = \{1\}$.

ה) $G/N_1 \cong N_2$ ו- $G/N_2 \cong N_1$.

שאלה 9:

תהי G חבורה, M, N תת-חבורות נורמליות של G כך ש- $MN = G$. הוכיחו כי $G/(M \cap N) \cong (G/M) \times (G/N)$.