מבוא

משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה שהנעלם בה הוא פונקציה $y(x)$ וכך שהמשוואה מערבת את הפונקציה ואת הנגזרות של הפונקציה ואת המשתנה x. למשל

$$y'' + y \cdot y' = \sin(xy)$$
$$e^{xyy'} \sin y = 1$$

בחלק הראשון של הקורס נעסוק במד"ר מסדר ראשון, כלומר משוואות שבהן מופיעים רק ביטויים שתלויים ב־x, y, y'. מד"ר מסדר ראשון באופן כללי היא מהצורה

$$F(x, y, y') = 0$$

כאשר F היא פונקציה של 3 משתנים. תנאי התחלה הוא $y(x_0) = y_0$.
פתרון של המד"ר הוא פונקציה $y(x)$ ותחום הגדרה I של הפונקציה, שחייב להיות קטע, כך שלכל $x \in I$ מתקיים

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.$$

אם אנו מחפשים פתרון של המד"ר ביחד עם תנאי התחלה אז אנו מחפשים פתרון של המד"ר אשר מקיים בנוסף $y(x_0) = y_0$. בפרט, $x_0 \in I$.
צורה של מד"ר מסדר ראשון שהיא לעיתים יותר שימושית היא

$$y' = f(x, y)$$

כאשר $f(x, y)$ היא פונקציה נתונה בשני משתנים. תנאי התחלה הוא $y(x_0) = y_0$.
פתרון של המד"ר הוא פונקציה $y(x)$ ותחום הגדרה I של הפונקציה, שחייב להיות קטע, כך שלכל $x \in I$ מתקיים

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

אם אנו מחפשים פתרון של המד"ר ביחד עם תנאי התחלה אז אנו מחפשים פתרון של המד"ר אשר מקיים בנוסף $y(x_0) = y_0$. בפרט, $x_0 \in I$.
שימו לב כי פתרון של מד"ר חייב להיות גזיר ולכן חייב להיות רציף. בקורס זה אנו דורשים כי פתרון יהיה גזיר ברציפות, כלומר שהנגזרת היא פונקציה רציפה.

תרגיל: ודאו כי $y = e^x$ הוא פתרון של $y' = y$ אשר מקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$.
פתרון: קודם כל, פונקציה $y(x)$ היא פתרון של המשוואה $y' = y$ אם

$$y'(x) = y(x)$$

לכל x רלוונטי. כלומר אנו צריכים למצוא את תחום זה. אנו יודעים כי $y = e^x$ ולכן
$y' = e^x$
ולכן $y'(x) = e^x = y(x)$
וכיוון שזהות זאת נכונה לכל $x \in \mathbb{R}$ אזי תחום ההגדרה של הפתרון הוא כל הישר.

<u>תרגיל:</u> ודאו כי $y = e^{\sin x}$ הוא פתרון של $y' - \cos x \cdot y = 0$ וש־$y = e^x$ אינו פתרון.
<u>פתרון:</u> כמו קודם, פונקציה $y(x)$ היא פתרון של המשוואה $y' - \cos x \cdot y = 0$ אם

$$y'(x) - (\cos x)y(x) = 0$$

לכל x רלוונטי. אנו יודעים כי $y = e^{\sin x}$
ולכן $y' = e^{\sin x} \cos x$
ולכן $y'(x) - (\cos x)y(x) = (\cos x)e^{\sin x} - (\cos x)e^{\sin x} = 0$
וכיוון שזהות זאת נכונה לכל $x \in \mathbb{R}$ אזי תחום ההגדרה של הפתרון הוא כל הישר.
כעת נראה כי $y = e^x$ אינו פתרון:
אנו מחפשים x־ים כך ש $y'(x) - (\cos x)y(x) = e^x - (\cos x)e^x = 0$
כלומר $\cos x = 1$
וזה קורה כאשר $x = 2\pi k$ אבל זה איננו קטע ולכן זהו אינו פתרון.

<u>תרגיל:</u> ודאו כי $y = \frac{1}{x}$ הוא פתרון של $xy' + y = 0$ וש־$y = e^x$ אינו פתרון.
<u>פתרון:</u> כמו קודם, פונקציה $y(x)$ היא פתרון של המשוואה $xy' + y = 0$ אם

$$x \cdot y'(x) + y(x) = 0$$

לכל x רלוונטי. אנו יודעים כי $y = \frac{1}{x}$
ולכן $y' = -\frac{1}{x^2}$
ולכן $xy'(x) + y(x) = -x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$
וכיוון שזהות זאת נכונה לכל $x \neq 0$ אזי תחום ההגדרה של הפתרון הוא $x > 0$ או שתחום ההגדרה של הפתרון הוא $x < 0$.
כעת נראה כי $y = e^x$ אינו פתרון:
אנו מחפשים x־ים כך ש $xy'(x) + y(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1) = 0$
כלומר $x = -1$
אבל זה איננו קטע ולכן זהו אינו פתרון. נדגיש כי הזהות $x \cdot y'(x) - y(x) = 0$ חייבת להתקיים על <u>קטע</u> בשביל ש־$y(x)$ יהיה פתרון.