מערכת משוואות לינארית מסדר ראשון

מערכת משוואות לינארית מסדר ראשון היא מערכת משוואות דיפרנציאליות מהצורה

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\
&\vdots \\
&\frac{dx_n}{dt} = a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t)
\end{aligned}$$

ותנאי התחלה עבור מערכת משוואות מסדר ראשון הוא מהצורה

$$\begin{aligned}
&x_1(t_0) = v_1 \\
&x_2(t_0) = v_2 \\
&\vdots \\
&x_n(t_0) = v_n
\end{aligned}$$

נהוג לרשום זאת הצורה המטריציונית הנפוצה יותר

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ותנאי התחלה עבור מערכת משוואות נראה כך

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

כאשר פתרון הוא בעצם וקטור שרכיביו פונקציות, או וקטור פונקציות

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

הפותר את מערכת המשוואות, כלומר

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ומקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

אפשר לרשום בקצרה $\overline{x}(t_0) = \overline{v} \quad \overline{x}' = A(t)\overline{x} + \overline{b}(t)$

תרגיל: הראו כי

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

פתרונות של

$$\overline{x}'=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-2\end{pmatrix}\overline{x}$$

פתרון: נציב לתוך שני צדי המערכת ונראה שוויון

$$\left(e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)'=\left(\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}\right)'=\begin{pmatrix}\left(e^{-t}\right)'\\\left(2e^{-t}\right)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}=-e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&-2\\2&-2\end{pmatrix}\left(e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=e^{-t}\begin{pmatrix}3&-2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=-e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

ולכן $e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ פתרון של המערכת. באופן דומה

$$\left(e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)'=\left(\begin{pmatrix}2e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}\right)'=\begin{pmatrix}\left(2e^{2t}\right)'\\\left(e^{2t}\right)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4e^{2t}\\2e^{2t}\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&-2\\2&-2\end{pmatrix}\left(e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}3&-2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

ולכן $e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ פתרון של המערכת.

שימו לב כי באופן כללי

$$\left(f(t)\begin{pmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\\\vdots\\p_n(t)\end{pmatrix}\right)'=f'(t)\begin{pmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\\\vdots\\p_n(t)\end{pmatrix}+f(t)\begin{pmatrix}p_1'(t)\\p_2'(t)\\\vdots\\p_n'(t)\end{pmatrix}$$

כלומר, יש לנו נוסחא של גזירה של מכפלה של פונקציה בוקטור פונקציות. כתרגיל, הוכיחו זאת עבור $n=2$.

משפט קיום ויחידות עבור מערכת משוואות לינארית מנורמלת מסדר $n \times n$:

נניח כי הפונקציות $a_{i,j}(t), b_i(t)$ רציפות בקטע I ויהי $t_0 \in I$.
אזי למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ביחד עם תנאי ההתחלה

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

יש פתרון יחיד המוגדר על כל I.

הפתרון הכללי של מערכת משוואות לינארית הוא מהצורה

$$\overline{x}(t) = \overline{x}_H(t) + \overline{x}_p(t)$$

ולכן, כמו במד"ר לינאריות מסדר n, נחפש דרכים למצוא פתרון כללי של ההומוגנית המתאימה, ואז נחפש פתרון פרטי.

מערכת משוואות לינארית הומוגנית

משפט: נניח כי הפונקציות $a_{i,j}(t), b_i(t)$ רציפות בקטע I.
אזי הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

הוא מרחב וקטורי ממימד n.
הוכחה: נקח $t_0 \in I$ שרירותי. יהיו $\overline{u^i}(t)$, כאשר $1 \leq i \leq n$ פתרונות, כאשר $\overline{u^i}(t)$ הוא פתרון של המערכת המקיים את תנאי ההתחלה

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_{i-1}(t_0) \\ x_i(t_0) \\ x_{i+1}(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר $\overline{u^i}(t)$ מקיים תנאי התחלה שבנקודה t_0 הוא אפס בכל הרכיבים חוץ מהרכיב ה־i שהוא אחד. נראה כי פתרונות אלו הם בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הנ"ל:
פרישה: יהי $\overline{w}(t)$ פתרון כלשהו של המערכת. נגדיר

$$\overline{u}(t) = w_1(t_0)\overline{u^1}(t) + w_2(t_0)\overline{u^2}(t) + \cdots + w_n(t_0)\overline{u^n}(t).$$

אזי

$$\begin{aligned} u_1(t_0) &= w_1(t_0)u_1^1(t_0) + w_2(t_0)u_1^2(t_0) + \cdots + w_n(t_0)u_1^n(t_0) = w_1(t_0) \\ u_2(t_0) &= w_1(t_0)u_2^1(t_0) + w_2(t_0)u_2^2(t_0) + \cdots + w_n(t_0)u_2^n(t_0) = w_2(t_0) \\ &\vdots \\ u_n(t_0) &= w_1(t_0)u_n^1(t_0) + w_2(t_0)u_n^2(t_0) + \cdots + w_n(t_0)u_n^n(t_0) = w_n(t_0) \end{aligned}$$

ולכן לפי משפט קיום ויחידות נובע כי $\overline{u}(t)=\overline{w}(t)$ וכיוון ש־$\overline{u}(t)$ קומבינציה לינארית של $\overline{u^i}(t)$ אז הוכחנו פרישה.
אי תלות: נניח כי

$$c_1\overline{u^1}(t)+c_1\overline{u^2}(t)+\cdots+c_n\overline{u^n}(t)=0$$

לכל $t\in I$. נציב t_0 ונקבל, ברכיבים

$$\begin{aligned}
0&=c_1u_1^1(t_0)+c_2u_1^2(t_0)+\cdots+c_nu_1^n(t_0)=c_1\\
0&=c_1u_2^1(t_0)+c_2u_2^2(t_0)+\cdots+c_nu_2^n(t_0)=c_2\\
&\vdots\\
0&=c_1u_n^1(t_0)+c_2u_n^2(t_0)+\cdots+c_nu_n^n(t_0)=c_n
\end{aligned}$$

ולכן בלתי תלויים. ■

כמסקנה נקבל כי מספיק למצוא n פתרונות בלתי תלויים כדי לדעת את הפתרון הכללי של המערכת משוואות ההומוגנית. באופן דומה למד"ר לינאריות מסדר n, נגדיר את הורונסקיאן של n פתרונות של מערכת משוואות מסדר n

$$W(\overline{u^1},\cdots,\overline{u^n})(t)=\det\begin{pmatrix}u_1^1(t)&u_1^2(t)&\dots&u_1^n(t)\\u_2^1(t)&u_2^2(t)&\dots&u_2^n(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\u_n^1(t)&u_n^2(t)&\dots&u_n^n(t)\end{pmatrix}$$

והורונסקיאן יהיה כלי לברר מתי פתרונות הם בלתי תלויים.
משפט: יהיו $\overline{u^1}(t),\dots,\overline{u^n}(t)$ פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית אשר המקדמים שלה רציפים בקטע I. אזי הטענות הבאות שקולות:
1. הפתרונות בלתי תלויים בקטע I.
2. הורונסקיאן שונה מאפס באיזושהי נקודה בקטע I.
3. הורונסקיאן שונה מאפס בכל הקטע I.

משפט [נוסחת אבל]: יהיו $\overline{u}^1(t),\dots,\overline{u}^n(t)$ פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית עם מקדמים רציפים בקטע I

$$\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\\frac{dx_2}{dt}\\\vdots\\\frac{dx_n}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1}(t)&a_{1,2}(t)&\dots&a_{1,n}(t)\\a_{2,1}(t)&a_{2,2}(t)&\dots&a_{2,n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}(t)&a_{n,2}(t)&\dots&a_{n,n}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

אז

$$W(\overline{u^1},\cdots,\overline{u^n})(t)=c\cdot\exp\left(\int\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}(t)\right)dt\right)$$

נראה כעת איך ניתן לעבור ממד"ר לינארית מסדר n למערכת של n משוואות מסדר ראשון. נניח כי נתונה לנו מד"ר לינארית מנורמלת אי־הומוגנית מסדר n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t).$$

עם תנאי התחלה

$$\begin{aligned} &y(t_0) = y_0 \\ &y'(t_0) = y_1 \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{aligned}$$

נגדיר

$$\begin{aligned} &x_1(t) = y(t) \\ &x_2(t) = y'(t) \\ &\vdots \\ &x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

כיוון ש־

$$y^{(n)} = -a_{n-1}(t)y^{(n-1)} - \cdots - a_1(t)y' - a_0(t)y + f(t) = -a_{n-1}(t)x_{n-2} - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 + f(t)$$

אז

$$\begin{aligned} &x_1'(t) = y'(t) = x_2(t) \\ &x_2'(t) = y''(t) = x_3(t) \\ &\vdots \\ &x_n'(t) = y^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t)x_n - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 + f(t) \end{aligned}$$

נקבל מערכת משוואות מהצורה הבאה

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

עם תנאי התחלה

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= y_0 \\ x_2(t_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ x_n(t_0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

שימו לב כי בפתרון שנקבל עבור המערכת, רק הרכיב הראשון מעניין אותנו שכן הוא $x_1 = y$. בנוסף, שימו לב כי העקבה של המטריצה היא

$$trace\big(A(t)\big) = -a_{n-1}(t)$$

ולכן משפט אבל נותן

$$W(\overline{u^1}, \cdots, \overline{u^n})(t) = c \cdot \exp\left(-\int a_{n-1}(t)dt\right)$$

שזה מזכיר לנו את נוסחת אבל עבור מד"ר לינארית הומוגנית מסדר n. ואכן, אם $u_1(t), \dots, u_n(t)$ פתרונות של המד"ר ההומוגנית המתאימה של

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t).$$

אז

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_n(t) \\ u_n'(t) \\ \vdots \\ u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

פתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה שקיבלנו ולכן

$$W\left(\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \\ \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_n(t) \\ u_n'(t) \\ \vdots \\ u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right)(t) = \det\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} =$$
$$= W(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))(t)$$

ואנחנו מקבלים תאימות של נוסחת אבל עבור מד"ר מסדר n לנוסחת אבל של המערכת המתאימה.