קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 11

--- לא להגשה ---

<u>שאלה 1:</u>

א. רשמו את פיתוח מקלורן עד סדר רביעי של הפונקציות הבאות:

1. $\arccos x^2$.

חישוב מפורש של הנגזרות והצבת 0 נותנים את הפיתוח: $\frac{\pi}{2} - x^2$.

2. $\ln(\cos x)$.

חישוב מפורש נותן: $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$.

ב. נתון כי $f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + o(x^3)$, וכי $g(x) = 3 + x + 3x^2 + x^3 + o(x^3)$. חשבו את $(f \cdot g)^{(3)}(0)$.

ע״י הכפלת הביטויים הנתונים, נקבל כי המקדם של x^3 הוא: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 14$ (מתקבלים ממכפלות של מחוברים שסכום החזקות שלהם הוא 3), לכן: $\frac{(f \cdot g)^{(3)}(0)}{3!} = 14$, ומכאן:

$(f \cdot g)^{(3)}(0) = 14 \cdot 6 = 84$.

<u>שאלה 2:</u>

חשבו את $1.08^{\frac{3}{2}}$ בדיוק של 10^{-4}.

נפתח את $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ מסביב ל- 1. מתקיים: $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}},\ f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}},\ f'''(x) = -\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}}$.

בדיקת השארית מסדר 1 לא מבטיחה בצורה חד משמעית דיוק טוב כנדרש. עבור השארית מסדר 2 נקבל:

$|R_2(1.08)| = \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{c^{\frac{3}{2}}} \cdot (1.08 - 1)^3 \le \frac{32}{10^6} < \frac{100}{10^6} = 10^{-4}$, כאשר אי השוויון נובע מכך שנקודת הביניים מקיימת $1 < c < 1.08$. לכן פיתוח מסדר 2 נותן את הקירוב המבוקש. הפיתוח הזה הוא $1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2$, והצבת 1.08 נותנת $1.08^{\frac{3}{2}} \approx 1 + \frac{3}{2} \cdot 0.08 + \frac{3}{8} \cdot 0.08^2 = 1 + 0.12 + 0.0024 = 1.1224$.

<u>שאלה 3:</u>

א. נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות וכי $f(0) = f'(0) = 0$. הוכיחו כי קיים A כך ש- $|f(x)| \le Ax^2$ לכל $x \in [-1,1]$.

נשתמש בנתונים ונפתח את f מסביב ל- 0 עד סדר ראשון עם שארית ע״פ לגרנז׳: $f(x)=\frac{f''(c)}{2}x^2$, כאשר c בין 0 ל- x. לכל $x\in[-1,1]$, גם $c\in[-1,1]$. f'' רציפה בקטע הסגור הנ״ל, לכן חסומה שם, לכן קיים M כך ש- $f''(t)\le M$ לכל $t\in[-1,1]$, בפרט עבור c. לכן $|f(x)|\le\frac{M}{2}x^2$ בקטע הנ״ל. נסמן $A=\frac{M}{2}$ וסיימנו.

ב. נתון כי f גזירה פעמיים ברציפות בסביבת 2, וכן כי $f'(2)=-1\,, f''(2)=1$. תהי $2\ne a_n\to 2$, ותהי $b_n=\frac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2}$. חשבו את $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+1}{a_n-2}$.

נפתח את f עד סדר 1 עם שארית מסביב ל- 2, נקבל: $f(x)=f(2)-(x-2)+\frac{1}{2}f''(c)(x-2)^2$ (כאשר c בין x ל- 2). לכן: $b_n=\frac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2}=\frac{f(2)-(a_n-2)+\frac{1}{2}f''(c_n)(a_n-2)^2-f(2)}{a_n-2}=-1+\frac{\frac{1}{2}f''(c_n)(a_n-2)^2}{a_n-2}$, כאשר c_n בין a_n ל- 2. לכן: $\frac{b_n+1}{a_n-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(c_n)(a_n-2)^2}{(a_n-2)^2}=\frac{1}{2}\cdot f''(c_n)$. כאשר $n\to\infty$, $a_n\to 2$, ולכן מסנדוויץ׳ גם $c_n\to 2$, ומרציפות f'' נקבל כי $f''(c_n)\to f''(2)=1$, לכן $\frac{b_n+1}{a_n-2}\to\frac{1}{2}$.

ג. נתון כי f גזירה פעמיים, וכן כי $f''(0)=3\,,\ f'(0)=2\,, f(0)=0$. מצאו ממשיים $L\,,\beta\,,\alpha$ כך שיתקיים: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\alpha\sin x-\beta\cos x}{x^2}=L$.

אם $\beta\ne 0$, הגבול הנ״ל אינו סופי אלא $\pm\infty$ בהתאם לסימן של β, לכן בהכרח $\beta=0$. לכן הביטוי $\frac{f(x)-\alpha\sin x}{x^2}$ הוא מהצורה ״$\frac{0}{0}$״, לכן נשתמש בלופיטל ונקבל $\frac{f'(x)-\alpha\cos x}{2x}$. כמו מקודם, נדרוש שהמונה ישאף ל- 0 אחרת נקבל גבול אינסופי, ומכיוון ש- f' גזירה, ובפרט רציפה, מתקיים $\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$, ולכן נדרוש $\alpha=f'(0)=2$. כדי למצוא את L נחשב אם כן את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2\sin x}{x^2}$. נשים לב כי לא ידוע ש- f'' רציפה, ולכן לופיטל לא יעזור מכיוון שלא ידוע מהו הגבול של $f''(x)+2\sin x$. נשתמש בפיתוח מקלורן של f מסדר 2:

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=2x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$, ולכן:

$\frac{f(x)-2\sin x}{x^2}=\frac{2x+\frac{3}{2}x^2-2\sin x+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}+\frac{2(x-\sin x)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}$. ניתן להשתמש בלופיטל כדי לראות שהמחובר האמצעי שואף ל- 0, ובנוסף $\frac{o(x^2)}{x^2}\to 0$, לכן הביטוי כולו שואף ל- $\frac{3}{2}$, וזה ה- L הדרוש.

בסה״כ: $L=\frac{3}{2}\,,\beta=0\,,\alpha=2$.

שאלה 4:

היעזרו בפיתוחים המתאימים לחישוב הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{x^4}$.

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$, לכן:

$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$, ולכן: $\sin\left(\cos x - e^{-\frac{x^2}{x}}\right) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$. מכאן

נקבל: $\lim_{x\to0} \frac{\sin\left(\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to0} -\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$.

ב. $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin\left(e^{\sin(x^2)}-1\right)}{\cos(x^2)-1+x^2}$.

כמו מקודם, נרשום: $\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$, לכן $e^{\sin(x^2)} = 1 + x^2 + o(x^2)$, ולכן: $e^{\sin x^2} - 1 = x^2 + o(x^2)$, ומכאן: $\arcsin\left(e^{\sin(x^2)} - 1\right) = x^2 + o(x^2)$. עבור המכנה, מכיוון שאין חזקות אי-זוגיות בפיתוח של $\cos x$, מתקיים: $\cos x = 1 + o(x)$, ולכן: $\cos x^2 = 1 + o(x^2)$, ולכן: $\cos x^2 - 1 + x^2 = x^2 + o(x^2)$. לכן יש לחשב $\lim_{x\to0} \frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$. (שימו לב! לא מדובר ב- 1 זהותית, מכיוון שאין סיבה להניח שהשאריות במונה ובמכנה שואפות באותו קצב ל- 0). נחלק מונה ומכנה ב- x^2, ונקבל:

$\lim_{x\to0} \frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$, ומאריתמטיקה של גבולות נקבל כי הגבול הוא 1.

שאלה 5:

מטרת תרגיל זה היא להדגים שלא בהכרח נקבל שארית קטנה יותר (כלומר, קירוב טוב יותר) כאשר נפתח פונקציה לפולינום טיילור מסדר גבוה יותר.

תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

א. הראו כי f גזירה אינסוף פעמים ב- 0 וחשבו את $f^{(n)}(0)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

חישוב על פי הגדרה (שימו לב כי זו הדרך היחידה לחשב גזירות ב- 0) נותן כי $f'(0) = 0$ (ניתן להשתמש בלופיטל אחרי היפוך מונה ומכנה, כלומר במקום לחשב $\lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$, לחשב $\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$). מכאן על ידי אינדוקציה ניתן לקבל כי כל הנגזרות ב- 0 הן 0.

ב. חשבו את פולינום מקלורן מסדר n של f.

מסעיף א׳ נובע כי לכל n, $T_n(x) = 0$.

ג. הסיקו כי לכל $x \in \mathbb{R}$, $R_n(x) \nrightarrow 0$, כאשר $R_n(x)$ היא שארית מקלורן מסדר n.

<u>הערה:</u> הטענה כמובן מתקיימת רק עבור $x \neq 0$.

לכל $x \neq 0$, ולכל n, מסעיף ב׳ נקבל כי $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, וזה אינו תלוי ב- n, ולכן $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$.

<u>שאלה 6</u>:

א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 < e^x$. הסיקו כי לכל $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

נשתמש בפיתוח מקלורן עבור e^x עד סדר 1 עם שארית: $e^x = 1 + x + \frac{e^c}{2} \cdot x^2$, כאשר c נקודת הביניים. לכל $x \in \mathbb{R}$, נקבל כי $R_2(x) > 0$, ולכן $e^x > 1 + x$. נפעיל על אי-שוויון זה את $\ln x$, שהיא פונקציה עולה ממש ולכן הפעלתה תשמור על אי השוויון החזק, ונקבל: $\ln(1+x) < \ln e^x = x$.

ב. יהי $m \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי לכל $x \geq 0$, $e^x > \frac{x^m}{m!}$, והסיקו כי $e^m > \frac{m^m}{m!}$.

בפיתוח מקלורן עד סדר m של e^x כולל שארית נקבל כי כל המחוברים אי-שליליים לכל $x \geq 0$, והמחובר הראשון (1) חיובי ממש, ולכן אם נבודד את האחרון נקבל מטיעון דומה לסעיף א׳ כי $e^x > \frac{x^m}{m!}$ לכל $x \geq 0$. בפרט, עבור $x = m > 0$ נקבל $e^m > \frac{m^m}{m!}$.