תורת הקבוצות - 104290 - תירגולים - חורף תשע"ח

גל ברקאי

27 בינואר 2018

תקציר

התירגולים במסמך זה תומללו בזמן אמת בעזרת מעבד התמלילים LyX מבוסס על שפת הסימון LaTeX לפי התירגולים שהועברו ע"י ד"ר ניר בן דוד בסמסטר חורף תשע"ח. נכון לעכשיו, קובץ זה לא עבר עריכה ותיקון לא על ידי ולא על ידי מי מסגל הקורס לכן מכיל טעויות הקלדה ו\או טעויות מהותיות בהסתברות 1. תשתמשו במסמך באופן חופשי, ואנא עדכנו אותי על טעויות.

1 תרגול 1

1.1 הקדמה וסימונים

- בד"כ נסמן קבוצות באותיות לטניות גדולות, ואיברים בקבוצות באותיות לטניות קטנות.
- נסמן שייכות בעזרת הסימן $\in$:
  - $a \in A$ - האיבר a שייך לקבוצה A
  - $a \notin A$ האיבר a לא שייך לקבוצה A
- ישנן מספר דרכים לרשום קבוצה:

$$A = \{2, -17, \text{Nir}, ☺\}$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$A = \{x \in \mathbb{N} : x < 8\}$$

שימו לב שהדוגמא הראשונה מראה כי איברי קבוצה הם לא בהכרח מספרים, הדוגמא השנייה מציגה את קבוצת **המספרים הטבעיים**, והדוגמא השלישית מדגימה רישום קומפקטי של קבוצה בעזרת כלל.

הגדרה 1.1 תהא A קבוצה, B נקראת **תת־קבוצה** של A אם כל איבר של B הוא איבר של A. נאמר כי B מוכלת ב A או לחילופין כי A מכילה את B ונסמן:

$$B \subset A$$

נאמר כי B מוכלת ממש ב A אם $B \subset A$ וגם $B \neq A$, נסמן זאת:

$$B \subsetneq A$$

1.2 שאלה

- תהא A קבוצה סופית, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, כמה תתי קבוצות יש לה? התשובה לכך היא 2^n, נוכיח זאת באינדוקציה.

הוכחה: עבור $n = 1$ נקבל את הקבוצה $\{a_1\}$ בת איבר אחד בלבד, לכן יש לה שתי תתי קבוצות: $\{a_1\}$ והקבוצה הריקה $\emptyset$, כלומר 2^1. נניח כי הטענה נכונה עבור $n = k$ כלשהו, ונראה כי היא נכונה עבור $n = k + 1$. מכאן רואים מיידית כי לקבוצה: $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ יש $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$ תתי קבוצות. ■

2 תרגול 2

2.1 תרגיל 1

- מלאו את הטבלה:

הקבוצה	מס' האיברים	רשימת האיברים	מס' תתי הקבוצות	רשימת תתי הקבוצות
$\emptyset$	0	-	1	$\emptyset$
$\{\emptyset\}$	1	$\emptyset$	2	$\emptyset, \{\emptyset\}$
$\{\{\emptyset\}\}$	1	$\{\emptyset\}$	2	$\emptyset, \{\{\emptyset\}\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$\emptyset, \{\emptyset\}$	4	$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	2	$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	4	$\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

טבלה 1: הטבלה

- חשוב לשים לב שהקבוצה הריקה היא תת קבוצה של כל קבוצה.
- שימו לב להבדלים בין איברים ותתי קבוצות, בדוגמא הרביעית לדוגמא $\{\emptyset\}$ הוא קבוצה (הקבוצה המכילה רק את הקבוצה הריקה) היא **איבר** בקבוצה, אבל היות וגם $\emptyset$ הוא איבר בקבוצה, אזי $\{\emptyset\}$ היא גם **תת קבוצה** של הקבוצה "הגדולה".

2.2 תרגיל 2

- הוכיחו כי $A \cap \bar{B} = A$ אמ"מ $A \cap B = \emptyset$.

הוכחה: $\Longleftarrow$(כיוון ראשון) נניח כי $A \cap \bar{B} = A$ ונוכיח כי $A \cap B = \emptyset$. נניח על דרך השלילה כי קיים $x \in A \cap B$, אזי מהגדרת חיתוך נובע כי:

$$x \in A \wedge x \in B$$

היות ו $x \in A$, ונתון כי $A \cap \bar{B} = A$ אזי בהכרח $x \in A \cap \bar{B}$, ומהגדרת החיתוך $x \in \bar{B}$. קיבלנו כי $x \in B$ וגם $x \in \bar{B}$, וזו סתירה להגדרת המשלים $\Longleftarrow$ לכן הנחת השלילה אינה נכונה, ומתקיים כי:

$$\forall x\,,\, x \notin A \cap B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$\Longrightarrow$ (כיוון שני) נניח כי $A \cap B = \emptyset$ ונוכיח כי $A \cap \bar{B} = A$. יהי $x \in A \cap \bar{B}$ אזי מהגדרת החיתוך נובע בפרט כי $x \in A$. להפך, יהי $x \in A$, נניח על דרך השלילה כי $x \in B$, אזי $x \in A \cap B$ וזו סתירה לנתון $\Longleftarrow$ $x \notin B$, לכן לפי הגדרת המשלים בהכרח $x \in \bar{B}$, ומהגדרת החיתוך $x \in A \cap \bar{B}$. לכן $A \subseteq A \cap \bar{B}$. ■

- נוכיח בצורה נוספת.

הוכחה: כיוון ראשון:

$$A \cap B = \left(A \cap \bar{B}\right) \cap B = A \cap \left(\bar{B} \cap B\right) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

כאשר השוויון הראשון הוא מהנתון, השוויון השני מאסוציאטיביות החיתוך, והשוויון השלישי מהגדרת המשלים. כיוון שני - תהא קבוצת דיון כלשהי Ω, אזי:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(B \cup \bar{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$$

כאשר השוויון הראשון נכון מהגדרת קבוצת דיון, השני מהגדרת המשלים, השלישי מחוק הפילוג, והרביעי מהנתון. ■

3 תרגול 3

3.1 תרגיל 1

- הוכיחו:

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

הוכחה: יהי:

$$\begin{aligned}(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D)&\Longrightarrow\\(x,y)\in C\times D\vee(x,y)\in A\times B&\Longrightarrow\\(x\in C\wedge y\in D)\vee(x\in A\wedge y\in B)&\end{aligned}$$

אם:

$$x\in A\wedge y\in B$$

אזי נקבל בפרט כי:

$$x\in A\cup C\wedge y\in B\cup D\Longrightarrow(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$$

אם $x\notin A$ אזי:

$$x\in C\wedge y\in D$$

ונקבל בפרט כי:

$$x\in A\cup C\wedge y\in B\cup D\Longrightarrow(x,y)\in(A\cup C)\times(B\cup D)$$

■

- באופן כללי אין שיוויון, לדוגמא:

$$\begin{cases}A=D=\emptyset\\B=C=\{1\}\end{cases}$$

3.2 תרגיל 2

- דיון: תהיינה A,B קבוצות ו $C\subseteq A$ וגם $D\subseteq B$ תת קבוצות, אזי:

$$C\times D\subseteq A\times B$$

והמכפלה הקרטזית $C\times D$ נקראת **מלבן מוכלל** ב־ $A\times B$.

  - דוגמא: ניקח את: $A=B=\mathbb{R}$ אזי $A\times B=\mathbb{R}^2$. בנוסף ניקח את $I=[2,5]$ וגם $J=[3,4]$ אזי $I\times J$ הוא מלבן במישור. מלבן מוכלל לא חייב להיות מלבן מהצורה הזו (קטעים סגורים), המלבן יכול להכיל לדוגמא את כל הרציונלים, או כל הרציונלים בקטע.

- נגדיר:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leq 1\right\}$$

(עיגול היחידה), הוכיחו כי D **אינו** מלבן מוכלל ב $\mathbb{R}^2$, כלומר לא קיימות תתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש $D=A\times B$.

הוכחה: נניח על דרך השלילה כי $D=A\times B$ עבור קבוצות A ו־ B כנ"ל. הנקודה $(1,0)\in D$ והנקודה $(0,0.9)\in D$, אבל $D=A\times B$ אזי בהכרח:

$$1\in A\wedge 0\in B\wedge 0\in A\wedge 0.9\in B$$

מכאן בהכרח גם $(1,0.9)\in A\times B$ כלומר $(1,0,9)\in D$ וזו סתירה שכן:

$$1^2+0.9^2=1.81>1$$

■

3.3 תרגיל 3 (תרגילון)

- תהא A קבוצה וכן $|A| \geq 2$, אזי האלכסון ב $A \times A$ זו הקבוצה:

$$\Delta = \{(a,a) \,:\, a \in A\}$$

הוכיחו כי Δ אינו מלבן מוכלל.

- כל איבר של A מופיע ברכיב הימני וכל איבר של A מופיע ברכיב השמאלי, לכן לא יתכנו תתי קבוצות C, D שהמכפלה הקרטזית שלהן היא מלבן מוכלל.

3.4 תרגיל 4

- נגדיר תתי קבוצות של $\mathbb{N}$ באופן הבא: לכל $n \geq 2$ נגדיר:

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x > n \wedge n|x\}$$

(הסימון הוא n מחלק את x, לדוגמא $4|12$ אבל 8 לא מחלק את 12). מצאו את:

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$$

  - בתרגילים מהסוג הזה הרבה פעמים לא רואים ישירות מה האיחוד או החיתוך, מומלץ לבחון מקרים קטנים כדי לקבל תחושה כלשהי:

$$\begin{cases} A_2 = \{4, 6, 8, \ldots\} \\ A_3 = \{6, 9, 12, 15, \ldots\} \\ A_4 = \{8, 12, 16, 20, \ldots\} \end{cases}$$

נוכיח כי:

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,:\, x > 1 \wedge x \, \text{is not prime}\}$$

הוכחה: יהי:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \implies \\ \exists n \geq 2 \in \mathbb{N} \,:\, x \in A_n \implies \\ \exists n \geq 2 \in \mathbb{N} \,:\, n|x \implies \\ x > 1 \wedge x \, \text{is not prime} \end{aligned}$$

להפך, יהי $x \in \mathbb{N}$ כך ש $x > 1$ וכן x אינו ראשוני. היות ו x אינו ראשוני, אזי קיימים טבעיים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש $n > 1, m > 1$ ומתקיים:

$$x = m \cdot n$$

לכן בפרט נובע כי $x \in A_n$ כאשר $n \geq 2$, לכן בפרט נובע כי:

$$x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$$

■

3.5 דוגמא

- לכל $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \begin{cases} [0,1], & \text{if n is odd} \\ [-1,0], & \text{if n is even} \end{cases}$$

אזי הגבול העליון (נמצא באינסוף קבוצות בסדרה, לאו דווקא בכולן):

$$\limsup A_n = \overline{\lim} A_n = [-1,1]$$

שכן כל צד של הקטע נמצא או בכל הזוגיים (אינסוף) או בכל האי זוגיים (גם אינסוף). מצד שני הגבול התחתון (נמצא בכל הקבוצות החל ממקום מסויים):

$$\liminf A_n = \underline{\lim} A_n = \{0\}$$

שכן רק $\{0\}$ נמצא גם בקבוצות הזוגיות וגם באי זוגיות והן מתחלפות כל אינדקס, לכן רק הוא נמצא בכל הקבוצות החל ממקום מסויים.

4 תרגול 4

להשלים

5 תרגול 5

5.1 תרגילון

- יהו R, S יחסים אנטי סימטריים על קבוצה X:

1. האם RS הוא אנטי סימטרי?
   (א) לא

$$\begin{cases} X = \{1,2,3\} \\ R = \{(3,2), (3,1), (2,2)\} \\ S = \{1,2\}, 2, 3 \\ RS = \{(2,2), (2,1), (1,2)\} \end{cases}$$

2. האם R^{-1} הוא אנטי סימטרי?
   (א) כן, נוכיח: נניח כי קיימים $a, b \in X$ כך ש $(a,b) \in R^{-1}$ וגם $(b,a) \in R^{-1}$אזי:

$$\begin{cases} (a,b) \in R^{-1} \implies & (b,a) \in R \\ (b,a) \in R^{-1} \implies & (a,b) \in R \end{cases} \implies a = b$$

3. האם $(R \circ R) = R^2$ הוא אנטי סימטרי?
   (א) לא, דוגמא נגדית:

$$\begin{cases} X = \{1,2,3,4\} \\ R = \{(1,2), (3,1), (2,3), (4,3)\} \end{cases} \implies R^2 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

5.2 תרגיל 2

- $X=\mathbb{R}$, נגדיר יחס על X ע"י:

$$a\sim b\iff b-a\in\mathbb{Z}$$

כאשר $\sim$ לרוב משמש לסימון יחס שקילות.

– הערה: אינטואיטיבית ברגע שיחס מוגדר על שני אובייקטים כך שהם מקיימים את אותה התכונה (אנשים בעלי אותו משקל, בעלי אותו פיתוח עשרוני, אותה שארית וכו') ככל הנראה מדובר ביחס שקילות.

– נניח בדוגמא הנ"ל נבחן מספר מחלקות שקילות:

$$\begin{cases}[28]=\mathbb{Z}\\ [0.7]=\{0.7+k\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\\ \left[\sqrt{2}\right]=\left\{\sqrt{2}+k\,:\,k\in\mathbb{Z}\right\}\end{cases}$$

נניח נתבונן במחלקת השקילות של $\sqrt{2}$, מדוע היא נכונה? שכן:

$$\sqrt{2}\sim\sqrt{2}+k\iff\sqrt{2}+k-\sqrt{2}=k\in\mathbb{Z}$$

– נציע את קבוצת המנה הבאה:

$$X\diagup\sim=\{[r]\,:\,r\in[0,1)\}$$

1. בדקו כי $\sim$ אכן יחס שקילות.

(א) רפלקסיביות: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים כי:

$$a-a=0\in\mathbb{Z}\Longrightarrow a\sim a$$

(ב) סימטריות: נניח כי $a\sim b$ אזי:

$$\begin{aligned}b-a\in\mathbb{Z}\Longrightarrow\\ a-b=-(b-a)\in\mathbb{Z}\Longrightarrow\\ b\sim a\end{aligned}$$

(ג) טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$a\sim b\wedge b\sim c\Longrightarrow\begin{cases}a\sim b\Longrightarrow & b-a\in\mathbb{Z}\\ b\sim c\Longrightarrow & c-b\in\mathbb{Z}\end{cases}\Longrightarrow(b-a)+(c-a)=c-a\in\mathbb{Z}\Longrightarrow a\sim c$$

5.3 תרגיל 3

- תהי קבוצה $X=\mathbb{R}^2$. נגדיר יחס $\sim$ על X ע"י:

$$(a,b)\sim(c,d)\iff a^2+b^2=c^2+d^2$$

– זה למעשה ריבוע המרחק מהראשית, בבירור זהו יחס שקילות.

- נבחן מחלקות שקילות:

$$[(0,0)] = \{(0,0)\}$$

מה לגבי $(3,4)$?

$$[(3,4)] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x,y) \sim (3,4)\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 25\right\}$$

באופן כללי מחלקות השקילות הן מעגלים שמרכזם בראשית, מלבד מחלקת השקילות של הראשית שהיא נקודה.

- כל קרן שנוציא תהווה חתך, הקרן הפשוטה ביותר היא ציר x החיובי:

$$\mathbb{R}^2 / \sim = \{[(a,0)] \,:\, a \geq 0 \in \mathbb{R}\}$$

כאשר למעשה a הוא הרדיוס.

6 תרגול 6

6.1 תרגיל 1

- נגדיר פונקציה:

$$f \,:\, \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

ע"י:

$$f(m,n) = (2m-1) \cdot 2^{n-1}$$

- לדוגמא:

$$f(2,3) = (2 \cdot 2 - 1) \cdot 2^{3-1} = 12$$

- נוכיח חח"ע.

הוכחה: נניח כי $(m_1,n_1), (m_2,n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך ש:

$$f(m_1,n_1) = f(m_2,n_2) \Longrightarrow (2m_1 - 1) \cdot 2^{n_1-1} = (2m_2 - 1) \cdot 2^{n_2-1}$$

מיחידות הפירוק לגורמים ראשוניים (המשפט היסודי של האריתמטיקה):

$$n_1 - 1 = n_2 - 1 \Longrightarrow n_1 = n_2$$

וגם:

$$2m_1 - 1 = 2m_2 - 1 \Longrightarrow m_1 = m_2$$

$(m_1,n_1), (m_2,n_2)$ כלליים, לכן הפונקציה חח"ע. ■

- נוכיח כי הפונקציה על.

הוכחה: יהי $\ell \in \mathbb{N}$ צריך להוכיח כי קיים $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך ש:

$$f(m,n) = \ell$$

אם $\ell = 1$ נקבל כי $f(1,1) = 1$. אם $\ell > 1$, אזי לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה קיימים $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ו־ $k \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$\ell = k \cdot 2^r$$

כאשר k אי זוגי. נסמן:

$$\begin{cases} n = r + 1 \\ m = (k+1) \cdot \frac{1}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ואז:

$$f(m,n) = \left[2\left((k+1) \cdot \frac{1}{2}\right) - 1\right] \cdot 2^{(r+1)-1} = (k+1-1) \cdot 2^{r+1-1} = k \cdot 2^r = \ell$$

ℓ הוא מספר כללי, לכן הפונקציה על. ■

6.2 תרגיל 2

- נתונה פונקציה:

$$f\ :\ X\longrightarrow Y$$

ותהיינה $A_1,A_2\subseteq X$. הוכיחו כי:

$$f\left(A_1\cap A_2\right)\subseteq f\left(A_1\right)\cap f\left(A_2\right)$$

הוכחה: יהי $y\in f\left(A_1\cap A_2\right)$ אזי:

$$\begin{aligned}
y\in f\left(A_1\cap A_2\right)&\Longrightarrow\\
\exists x\in A_1\cap A_2\ :\ f\left(x\right)=y&\Longrightarrow\\
x\in A_1\ \wedge\ x\in A_2&\Longrightarrow\\
y\in f\left(A_1\right)\ \wedge\ y\in f\left(A_2\right)&\Longrightarrow\\
y\in f\left(A_1\right)\cap f\left(A_2\right)&
\end{aligned}$$

לכן מתקיימת ההכלה. ■

- <u>תרגיל בית:</u> ההכלה ההפוכה לא נכונה, תנאי הכרחי (אך לא מספיק) הוא ש f לא חח"ע, מצאו דוגמא נגדית להכלה ההפוכה.

6.3 תרגיל 3

- תהיינה :

$$\begin{aligned}
f\ &:X\longrightarrow Y\\
g\ &:Y\longrightarrow Z
\end{aligned}$$

נתון כי $g\circ f$ (g מורכב על f) היא חד חד ערכית. הוכיחו כי f חד חד ערכית.

הוכחה: נניח על דרך השלילה כי קיימים $x_1,x_2\in X$ כך ש $x_1\neq x_2$ וגם $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$. נפעיל את g:

$$g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)\Longrightarrow\left(g\circ f\right)\left(x_1\right)=\left(g\circ f\right)\left(x_2\right)$$

ומפני ש $g\circ f$ חד חד ערכית, בהכרח $x_1=x_2$ וזו סתירה לכך ש $x_1\neq x_2$. ■

- כאשר נותנים לנו פונקציה, חשוב לבדוק שהיא מוגדרת היטב (כלומר באמת פונקציה). לדוגמא, עבור פונקציה מהרציונאלים לשלמים בצורה הבאה:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=m+n$$

נקבל:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=2+3=5\neq f\left(\frac{4}{6}\right)=4+6=10$$

למרות ש

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$$

כלומר מה שהוגדר לעיל אינו פונקציה.

  - ככלל את הרציונאלים מגדירים כמחלקות שקילות של $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ המקיימות:

$$(m,n)\sim(k,\ell)\iff m\cdot\ell=n\cdot k$$

7 תרגול 7

- <u>תזכורת:</u>

$$f,g\,:\,X\longrightarrow Y$$

אז $f=g$ אם ורק אם $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ לכל x.

7.1 תרגיל 1

- בהינתן:

$$\begin{aligned}f\, & :X\longrightarrow Y\\ g\, & :Y\longrightarrow Z\\ h\, & :Y\longrightarrow Z\end{aligned}$$

ונתון כי $g\circ f=h\circ f$. הוכיחו כי אם f היא על אזי $g=h$

הוכחה: $g=h$ אם ורק אם לכל $y\in Y$ מתקיים כי $g\left(y\right)=h\left(y\right)$. יהי $y\in Y$, קיים $x\in X$ כך ש $f\left(x\right)=y$. לפי הנתון:

$$g\circ f=h\circ f$$

ובפרט

$$g\circ f\left(x\right)=h\circ f\left(x\right)\Longrightarrow g\left(f\left(x\right)\right)=h\left(f\left(x\right)\right)\Longrightarrow g\left(y\right)=h\left(y\right)$$

■

- שימו לב כי עבור $f\left(x\right)=0$, $g\left(x\right)=x^{2}$, $h\left(x\right)=\sin\left(x\right)$ מתקיים כי $h\neq g$ אבל $g\circ f=h\circ f$.

7.2 תרגיל 2

- <u>תזכורת:</u> תהא $f\,:\,X\longrightarrow Y$ פונקציה.
  - לכל $A\subseteq X$ מגדירים את התמונה של A תחת f בתור:

$$f\left(A\right)\coloneqq\left\{ f\left(x\right)\,:\,x\in A\right\}$$

  - לכל $B\subseteq Y$ מגדירים את המקור של B תחת f בתור:

$$f^{-1}\left(B\right)\coloneqq\left\{ x\in X\,:\,f\left(x\right)\in B\right\}$$

שימו לב שזו **לא** הפונקציה ההפוכה, תמיד ניתן להגדיר מקור, גם אם הפונקציה לא הפיכה.

- תהא $f\,:\,X\longrightarrow Y$ פונקציה, ותהי $A\subseteq X$ תת קבוצה.

1. הוכיחו כי $A\subseteq f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$.
2. הוכיחו כי אם f חד חד ערכית, אזי יש שוויון בסעיף הקודם.

הוכחה: נוכיח את הסעיף הראשון: יהי $x\in A$, מכאן לפי הגדרת התמונה $f\left(x\right)\in f\left(A\right)$ ולפי הגדרת המקור $x\in f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$. נראה את ההכלה ההפוכה כאשר f חד חד ערכית (סעיף 2):

$$x\in f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)\Longrightarrow f\left(x\right)\in f\left(A\right)\Longrightarrow\exists a\in A\,:\,f\left(x\right)=f\left(a\right)$$

מהנתון על כך ש f חד חד ערכית בהכרח $x=a$ ומכאן $x\in A$. ■

- נראה דוגמא נגדית למקרה שהפונקציה לא חח"ע בעזרת $f\left(x\right)=x^{2}$ ו $A=\left[-2,4\right]$ אזי $f\left(A\right)=\left[0,16\right]$. מצד שני, התמונה ההפוכה (כל המקורות) היא:

$$f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)=f^{-1}\left(\left[0,16\right]\right)=\left[-4,4\right]$$

ואכן $A\subseteq f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)$ אבל אין שוויון כי f לא חד חד ערכית.

7.3 תרגיל 3

- תזכורת: בהינתן פונקציה $f : X \longrightarrow Y$ אזי:

$$f_* : P(X) \longrightarrow P(Y)$$
$$A \longmapsto f(A)$$

וגם:

$$f^* : P(Y) \longrightarrow P(X)$$
$$B \longmapsto f^{-1}(B)$$

1. f_* ו f^* שומרות יחס הכלה (יחס סדר).
   - כלומר לכל $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$ מתקיים כי $f_*(A_1) \subseteq f_*(A_2)$

הוכחה: אם $y \in f_*(A_1)$ אזי בהכרח $y = f(x)$ עבור $x \in A_1$, ובפרט $y = f(x)$ עבור $x \in A_2$, כלומר $y \in f_*(A_2)$. באופן דומה, אם $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ אזי אם $x \in f^*(B_1)$ בהכרח $f(x) \in B_1$, ובפרט $f(x) \in B_2$ ולכן $x \in f^*(B_2)$ ■

2. אם f חד חד ערכית אזי f_* חד חד ערכית ו f^* על. **הוכחה:** תהיינה $A_1, A_2 \in P(X)$ כך ש $f_*(A_1) = f_*(A_2)$. יהי $x \in A_2$ אזי בהכרח $f(x) \in f_*(A_2)$, ולפי ההנחה $f(x) \in f_*(A_1)$ כלומר:

$$\exists a \in A_1 \ : \ f(x) = f(a)$$

מחד חד ערכיות f נקבל כי $x = a$ ובפרט $x \in A_1$. באופן זהה לגמרי מראים את ההכלה ההפוכה, כלומר $A_2 = A_1$. תהי $A \in P(X)$, כעת עלינו למצוא $B \in P(Y)$ כך ש $f^*(B) = f^{-1}(B) = A$. נגדיר $B = f(A) \in P(Y)$, היות ש f חד חד ערכית, ראינו כי מתקיים:

$$f^{-1}(f(A)) = A \Longrightarrow f^{-1}(B) = A$$

■

8 תרגול 8

8.1 תרגיל 1

- נראה כי $\mathbb{N}$ ו־ $\mathbb{Z}$ שקולות עוצמה בעזרת:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{x is even} \\ \frac{1-x}{2}, & \text{x is odd} \end{cases}$$

– לדוגמא:

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow 0 \\ 2 &\longrightarrow 1 \\ 3 &\longrightarrow -1 \\ 4 &\longrightarrow 2 \\ 5 &\longrightarrow -2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

8.2 תרגיל 2

- נראה כי $\mathbb{Q}^{+}$ (רציונליים חיוביים) ו־ $\mathbb{N}$ שקולות בעוצמתן.
- נגדיר פונקציה:

$$f\,:\,\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}^{+}$$

לפי האלכסון של קנטור:

$$\begin{array}{ccccc}
\cancel{\frac{1}{1}} & \cancel{\frac{2}{1}} & \cancel{\frac{3}{1}} & \frac{4}{1} & \frac{5}{2}\\
\cancel{\frac{1}{2}} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2}\\
\cancel{\frac{1}{3}} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3}\\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4}\\
\frac{1}{5}
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{l}
1\longrightarrow\frac{1}{1}\\
2\longrightarrow\frac{2}{1}\\
3\longrightarrow\frac{1}{2}\\
4\longrightarrow\frac{3}{1}\\
5\longrightarrow\frac{1}{3}\\
6\longrightarrow\frac{4}{1}\\
7\longrightarrow\frac{3}{2}
\end{array}$$

כלומר הפונקציה "זזה" על האלכסונים.

8.3 תרגיל 3

- נראה כי $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ ו $\mathbb{Z}$ אינן שקולות עוצמה.

הוכחה: נניח על דרך השלילה כי קיימת פונקציה חח"ע ועל:

$$\Phi\,:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$$
$$k\longmapsto\phi\left(k\right)\,:\,\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}$$

כלומר לכל $k\in\mathbb{Z}$ הפונקציה Φ מתאימה את הערך של הפונקציה $\phi\left(k\right)$ לערך k. נגדיר פונקציה:

$$g\,:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}$$
$$g\left(k\right)=\Phi\left(k\right)\left(k\right)+77$$

אזי לא קיים $m\in\mathbb{Z}$ כך ש $g=\Phi\left(m\right)$, כי לפי הגדרה בנקודה m מתקיים:

$$\Phi\left(m\right)\left(m\right)\neq g\left(m\right)=\Phi\left(m\right)\left(m\right)+77$$

כלומר קיימת לפחות נקודה אחת בה הפונקציות הללו מקבלות ערך שונה, ולכן לפי הגדרת שוויון פונקציות הפונקציות אינן שוות $\Longleftarrow$ סתירה. ■

8.4 תרגיל 4

- הראו כי הקטע $[0,1]$ והקטע $[0,1)$ שקולים בעוצמתם.
  - נגדיר פונקציה באופן הבא:

$$f\,:\,[0,1]\longrightarrow[0,1)$$

למעשה אנחנו רוצים למצוא קטע בן מנייה, על קטעים בני מנייה אנו יודעים להראות את השקילות הנ"ל (פשוט "זזים" אחד קדימה). נגדיר בצורה הבאה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}
x, & x\neq\frac{1}{n}\,\forall n\in\mathbb{N}\\
\frac{1}{n+1}, & x=\frac{1}{n}
\end{cases}$$

כלומר כל מספר אי רציונלי בקטע עובר לעצמו, ורציונלי מוזז באחד ־ קיבלנו את כל המספרים בקטע מלבד 1, אבל זו פונקציה חד חד ערכית ועל, לכן הקטעים שקולים בעוצמתם.

  - הוכחה שזה אחד חח"ע ועל:
    * יהיו $x_1,x_2\in[0,1]$, אזי אם $x_1\in\left\{\frac{1}{n}\,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ וגם $x_2\notin\left\{\frac{1}{n}\,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ (או להפך) אזי בוודאי $f\left(x_1\right)\neq f\left(x_2\right)$.
    * אם $x_1,x_2\notin\left\{\frac{1}{n}\,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ אזי $f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)$ ובהכרח $x_1=x_2$
    * אם $x_1,x_2\in\left\{\frac{1}{n}\,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$ אזי $x_1=\frac{1}{k}$ ו־ $x_2=\frac{1}{\ell}$ אזי נקבל כי:

$$f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)\Longrightarrow\frac{1}{k+1}=\frac{1}{\ell+1}\Longrightarrow x_1=\frac{1}{k}=x_2=\frac{1}{\ell}$$

8.5 תרגילון - לא ממש סויים

- נבנה פונקציה חח"ע ועל בין שני קטעים:

$$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

נעשה זאת בשני שלבים בעזרת הרכבה:

$$[a,b] \longrightarrow [c,b+c-a] \longrightarrow [c,d]$$

שלב ראשון:

$$x \longmapsto x+(c-a)$$

- באופן כללי:

$$\Phi : \mathbb{R}^{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[c,d]}$$

- דוגמא:
  - טרנסלציה:

$$\begin{aligned}[3,5] &\longrightarrow [11,13]\\ x &\longmapsto x+8\end{aligned}$$

ו"ניפוח":

$$\begin{aligned}[2,5] &\longrightarrow [2,13]\\ x &\longmapsto 2+\frac{11}{3}(x-2)\end{aligned}$$

9 תרגול 9

9.1 תרגיל 1

- נגדיר שתי קבוצות:

$$\begin{aligned}A &= \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(2n+1) = f(2n)+1 \, \forall n \in \mathbb{N}\right\}\\ B &= \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(2n+1) = f(n+2)+2f(n) \, \forall n \in \mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

חשבו את עוצמת הקבוצות הנ"ל. ***לא בטוח שההגדרה של B נכונה***

- פתרון :
  - נחשב את $|A|$ בעזרת קש"ב (קנטור-שרדר-ברנשטיין). נשים לב כי:

$$A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Longrightarrow |A| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$$

נגדיר פונקציה:

$$F : \mathbb{N}^{2\mathbb{N}\cup\{1\}} \longrightarrow A$$

$$g \longmapsto F(g)$$

כאשר:

$$F(g)(n)=\begin{cases} g(n), & n\in 2\mathbb{N}\cup\{1\} \\ g(n-1)+1 & \text{else (if n is odd)} \end{cases}$$

בבירור $F(g)\in A$. F חח"ע שהרי אם $F(g_1)=F(g_2)$ בפרט לכל $n\in 2\mathbb{N}\cup\{1\}$ מתקיים כי $F(g_1)(n)=F(g_2)(n)$, כלומר לכל $n\in 2\mathbb{N}\cup\{1\}$ מתקיים כי:

$$g_1(n)=g_2(n)\Longrightarrow g_1=g_2$$

לכן $|A|\leq\left|\mathbb{N}^{2\mathbb{N}\cup\{1\}}\right|$. היות ש $\mathbb{N}\sim 2\mathbb{N}\cup\{1\}$ בהכרח גם $\mathbb{N}^{2\mathbb{N}\cup\{1\}}\sim\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $|A|\leq\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$, ובהכרח

$$|A|=\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|=|\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}|}=\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$$

– נחשב את $|B|$. הסדרה היא רקורסיבית בעומק שניים, לכן צריך לדעת את $f(1),f(2)$ בכדי לקבוע אותה - לכן נגדיר פונקציה ששולחת כל ערך לזוג סדור של שני הראשונים. נגדיר ע"י:

$$F\,:\,B\longrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

$$f\longmapsto(f(1),f(2))$$

נראה כי Fחד חד ערכית:

$$F(f)=F(g)\Longrightarrow(f(1),f(2))=(g(1),g(2))\Longrightarrow\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f(2)=g(2) \end{cases}$$

מפה נוכיח (באינדוקציה) כי $\forall m\in\mathbb{N}$ $f(m)=g(m)$, עבור $1,2$ ידוע. נניח כי $f(k)=g(k)$ לכל $k<n$ כאשר $n\geq 2$, נבחן את הביטוי ישירות:

$$f(n)=f(n-1)+2\cdot f(n-2)=g(n-1)+2g(n-2)=g(n)$$

כאשר השוויון הראשון לפי הגדרה, השני לפי הנחת האינדוקציה והשלישי מכך ש $g\in B$. כעת נראה כי F על. יהי זוג סדור $(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, נגדיר $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י:

$$f(1)=k\,,\;f(2)=\ell$$

ולכל $n>2$ נגדיר:

$$f(n)=f(n-1)+2f(n-2)$$

אזי $f\in B$ וכן $F(f)=(k,\ell)$. מכאן:

$$|B|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$$

9.2 תרגיל 2

- נגדיר קבוצה V ע"י:

$$V=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,:\,\text{f is injective}\right\}$$

האם V שקולה בעוצמתה ל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?

– אינטואיטיבית - פונקציה חד חד ערכית זו אומנם הגבלה, אבל לא הגבלה מספקת להורדת עוצמה.

- נגדיר פונקציה:

$$\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow V$$

$$\phi(f)(k) = f(1) + f(2) + \ldots + f(k) + k$$

הפונקציה ϕ חד חד ערכית שכן אם $\phi(f) = \phi(g)$, אזי בפרט:

$$\phi(f)(1) = \phi(g)(1) \Longrightarrow f(1) = g(1)$$

נניח כי $f(k) = g(k)$ לכל $k < n$, מתקיים כי:

$$\phi(f)(n) = \phi(g)(n) \Longrightarrow f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + n = g(1) + g(2) + \ldots + g(n) + n$$

ה n מצטמצם, ושאר הערכים שווים לפי הנחת האינדוקציה ו ϕ חד חד ערכית, לכן $\left|V\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$. הכיוון ההפוך, $\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|V\right|$, ברור מיחס הכלה ולכן $\left|V\right| = \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$.

  - רצינו ליצור פונקציה ϕ שמאפשרת לשחזר את הסדרה, ותוספת ה $+k$ בסוף נועדה לטפל במקרה שמופיע 0 בסדרה, התוספת הזו מבטיחה חד חד ערכיות (וגם מונוטוניות).

9.3 תרגיל 3

- נגדיר:

$$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \text{f is continious}\}$$

האם היא שקולה בעוצמתה ל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

  - אינטואיטיבית: אם $a_n \longrightarrow a$ אזי $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ (תנאי לרציפות) - כלומר פונקציה ממשית רציפה **נקבעת** לפי ערכיה על המספר הראציונלים, והראציונלים הם בני מניה (שימו לב כי תנאי הרציפות הוא הכרחי) - כלומר יהיה שוויון עוצמה ל $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, וזו עוצמה קטנה יותר.

10 תרגול 10

להוסיף

11 תרגול 11

- סדרים - $(X, \preceq)$

11.1 תרגיל

- קבוצה:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 10, 12, 18, 20, 36, 50, 72\}$$

נגדיר על A את יחס הסדר הבא: $a \preceq b$ אם $a|b$ (a מחלק את b).

- להוסיף דיאגרמת הסה
  - איבר קטן ביותר (ראשון): 1
  - איבר גדול ביותר (אחרון): אין
  - איברים מינימאליים: 1
  - איברים מקסימליים $20, 50, 72$
- נבחן שלוש תתי קבוצות של A:
  1. $\{12, 18\}$:
  - חסמים מלעיל $36, 72$ (גדולים או שווים משניהם וחוסמים אותם).

- חסים מלרע $1, 2, 3$
- סופרמום 36
- אינפימום - אין. אינפימום הוא חסם מלרע וגדול או שווה מכל חסם מלרע אחר, במקרה הזה תחת היחס הנתון שלושת החסמים מלרע שקולים.

2. $\{20, 50\}$
- חסמים מלעיל - אין
- חסים מלרע $1, 2, 5, 10$
- סופרמום - אין כי אין חסמים מלעיל
- אינפימום - יש 10

3. $\{2, 18\}$
- חסמים מלעיל - $18, 36, 72$
- חסים מלרע $1, 2$
- סופרמום 18
- אינפימום - 2

11.2 תרגיל 2

- תהא $(A, \preceq)$ קס"ח (קבוצה סדורה חלקית) סופית שאינה ריקה, הוכיחו כי יש ב A איבר מינימאלי ויש ב A איבר מקסימאלי.

הוכחה: נוכיח זאת באינדוקציה על $|A|$. אם $|A| = 1$ הטענה ברורה. נניח כי הטענה נכונה עבור קבוצה בעלת n איברים, ונניח כי $|A| = n + 1$. יהי $a \in A$ כלשהו, אזי $A \setminus \{a\}$ היא מגודל n, ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש בה איבר מינימאלי (נסמנו ב m) ומקסימאלי (נסמנו ב M). עתה, אם $a < m$ אזי נקבל כי a הוא המינימאלי ב A, אם $a \not< m$ אזי m הוא איבר מינימאלי ב A. מקסימאלי באופן דומה. ■

11.3 תרגיל 3 - סריג

הגדרה 11.1 תהא $(X, \preceq)$ קס"ח. X נקראת **<u>סריג</u>** אם לכל $x, y \in X$ קיימים ב X $\sup\{x, y\}$ וכן $\inf\{x, y\}$. X נקראת **<u>סריג שלם</u>** אם <u>לכל</u> $\emptyset \neq A \subseteq X$ קיימים ב X $\sup A$ ו- $\inf A$.

- <u>דוגמא:</u> אם ניקח קבוצה כלשהי A, אזי $X = P(A)$ ויחס ההכלה $\subseteq$ - לכל אוסף של תתי קבוצות שניקח החיתוך שלהן הוא האינפימום והאיחוד הוא הסופרמום.
- <u>תרגיל:</u> תהי $(X, \preceq)$ קבוצה סדורה חלקית. הוכיחו כי אם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$ קיים ב X $\sup A$, וגם ל X יש איבר ראשון, אזי X היא <u>סריג שלם</u>.

הוכחה: נותר להראות כי לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$ קיים ב X $\inf A$. תהא $A \subseteq X$. נסמן ב U_A את קבוצת החסמים מלרע של A, U_A אינה ריקה שכן ל X יש איבר ראשון. ל U_A קיים על פי הנתון $\sup U_A$, נסמן $u = \sup U_A$ - מספיק להוכיח כי $u \in U_A$, שכן אז נקבל כי u הוא החסם מלרע הגדול ביותר לפי הגדרה. לכל $w \in U_A$ מתקיים כי $w \leq a$ לכל $a \in A$ לכן כל איבר ב A הוא חסם מלעיל עבור U_A. u הוא חסם מלעל קטן ביותר עבור U_A ולכן $u \leq a$ לכל $a \in A$ ולכן $u \in U_A$ כנדרש. ■

12 תרגול 12

הגדרה 12.1 יהו $(X, \leq)$ ו- $(Y, \leq)$ קבוצות סדורות. פונקציה:

$$f ; X \longrightarrow Y$$

נקראת <u>שומרת סדר</u> אם לכל $x_1, x_2 \in X$ כך ש $x_1 \leq x_2$ מתקיים $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- פונקציה חד חד ערכית ועל שומרת סדר בין שתי קבוצות נקראת גם איזומורפיזם.

12.1 תרגיל 1

- יהו $(X,\leq)$ ו־ $(Y,\leq)$ שני סריגים (לכל זוג איברים יש סופרמום ואינפימום:

$$x_1 \wedge x_2 = \inf\{x_1,x_2\}$$
$$x_1 \vee x_2 = \sup\{x_1,x_2\}$$

) הוכיחו כי אם:

$$f\,;\,X \longrightarrow Y$$

שומרת סדר אזי:

$$f(x_1 \wedge x_2) \leq f(x_1) \wedge f(x_2)$$

הוכחה: יהיו $x_1,x_2 \in X$ אזי $x_1 \wedge x_2 \leq x_1$ וגם $x_1 \wedge x_2 \leq x_2$. f שומרת סדר ולכן:

$$f(x_1 \wedge x_2) \leq x_1 \text{ AND}$$
$$f(x_1 \wedge x_2) \leq x_2$$

לכן לפי הגדרה:

$$f(x_1 \wedge x_2) \leq f(x_1) \wedge f(x_2)$$

■

12.2 תרגיל 2

- הוכיחו או הפריכו: הקבוצות $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}$ ו־ $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ איזומורפיות.
  - מנסים למצוא תכונה שיש בסדר אחד ואין בשני ואז שוללים באמצעות פונקציה.
- ניקח איזה b "בחלק" של $\mathbb{Z}$ של $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ ונניח שיש איזומורפיזם f שומר סדר. אם $f(b)$ נמצא "בחלק" של $\mathbb{Q}$ ב־ $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}$, נבחן את $b-1$. ידוע כי $b-1 \leq b$, לכן היות ו f שומרת סדר בהכרח

$$f(b-1) \leq f(b)$$

אבל היות ו $\mathbb{Q}$ צפופה זה לא יתכן, שכן אז אין מקור ל:

$$\frac{f(b-1)+f(b)}{2}$$

לכן לכל $b \in \mathbb{Z}$ (בקבוצה $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$) מתקיים כי $f(b) \in \mathbb{Z}$ בקבוצה $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}$. היות שלכל $x \in \mathbb{Q}$ בקבוצה $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$ מתקיים כי $x \leq b$ לכל $b \in \mathbb{Z}$ נקבל כי גם עבור $x \in \mathbb{Q}$ (בקבוצה $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}$) מתקיים כי $f(x) \in \mathbb{Z}$ (בקבוצה $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Q}$) ולכן f לא על ־ וזו סתירה.

12.3 תרגיל 3

- הוכיחו או הפריכו כי הקבוצות $\mathbb{N}\times\{1,2\}$ ו־ $\{1,2\}\times\mathbb{N}$ תחת הסדר המילוני השמאלי איזומורפיות.
  - תזכורת: בהינתן $(A,\leq_A)$ ו־ $(B,\leq_B)$ אזי:

$$A\times B \Longrightarrow (a_1,b_1)\leq(a_2,b_2) \iff (a_1 <_A a_2 \,\text{OR}\, a_1 = a_2) \,\text{and}\, b_1 \leq_B b_2$$

- <u>פתרון אינטואיטיבי:</u> בקבוצה $\mathbb{N}\times\{1,2\}$ הסדר:

$$(1,1)\leq(1,2)\leq(2,1)\leq(2,2)\leq(3,1)\ldots$$

למעשה זה שקול ל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ לעומת זאת בקבוצה $\{1,2\}\times\mathbb{N}$

$$(1,1)\leq(1,2)\leq(1,3)\leq\ldots\leq(2,1)\leq(2,2)\leq(2,3)\leq\ldots$$

נשים לב כי לאיבר $(2,1)$ אין קודם מיידי ־ זו תכונה שלא מתקיימת בסדר הראשון לכן הקבוצות לא איזומורפיות.

- פתרון פורמלי: נניח על דרך השלילה כי קיים איזומורפיזם:

$$f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \{1,2\}$$

נסמן:

$$f(2,1) = (n,\ell)\ n \in \mathbb{N}\,\ell \in \{1,2\}$$

ברור כי $f(2,1) \neq (1,1)$ כי $(1,1)$ ראשון ב $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ אבל $(2,1)$ אינו ראשון ב $\mathbb{N} \times \{1,2\}$. אם $\ell = 2$ אז נתבונן ב $(n,1)$, ואם $\ell = 1$ נתבונן ב $(n-1,2)$ - כלומר תמיד בקודם המיידי. אם יש איזומורפיזם בין שתי הקבוצות, אז בהכרח לאיבר זה יש מקור, נסמן את מקור זה ב $(1,k)$ (המקור הוא איבר קטן מ $(2,1)$), אבל $(1,k)$ לא יכול להיות קודם מיידי כי קיים $(1,k+1)$ - כלומר נקבל כי אין איבר ב $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ היכול לשמש כ $f(1,k+1)$, שכן

$$f(1,k) = (n,1) \text{ or } f(1,k) - (n-1,2)$$

לפי המקרים, ***לסיים***

- נשים לב כי $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ איזומורפי ל $\mathbb{N}$, תרגיל בית - להוכיח.

$$f(1,k) = (n,1) \text{ or } f(1,k) - (n-1,2)$$

13 תרגול 13 - איזומורפיזם וסדרים

- להוסיף את שני התרגילים הראשונים
- יום ראשון מ 12 חזרה עם ניר

13.1 תרגיל 1

- מצאו תת קבוצה של $\mathbb{R}$ שאיזומורפית ל $\mathbb{N} \oplus \{*\}$ (מסומן גם כ $\omega + 1$)
  - **<u>הערה:</u>** שימו לב כי $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, שכן $1 + \omega = \omega$ כי כאשר מוסיפים לטבעיים עוד איבר בהתחלה אין שינוי, אבל ב $\omega + 1$ הוספנו אחרון לטבעיים, וזה מצב שונה.
- נתבונן בשתי הקבוצות הבאות:

$$\left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{0\}$$

$$\left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{1\}$$

האיחוד של שתי הקבוצות הוא תת קבוצה של $\mathbb{R}$ אשר איזומורפית ל $\omega + 1$. שימו לב כי האיחוד של שתי הקבוצות בלי 0 למעלה ואחד למטה איזומורפי ל $\omega + \omega$.

13.2 תרגיל 2

- תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה היטב, ותהי:

$$f : X \longrightarrow X$$

פונקציה חד חד ערכית ושומרת סדר. הוכיחו כי לכל $x \in X$ מתקיים כי $x \leq f(x)$.

  - שימו לב שבקבוצה סדורה היטב אין שרשרת אינסופית! כמו גם נשים לב כי:

$$x \hookrightarrow f(x) \hookrightarrow f(f(x)) \hookrightarrow \ldots$$

הוכחה: נניח על דרך השלילה כי קיים $y \in X$ כך ש $f(y) < y$, ונגדיר תת קבוצה של X ע"י:

$$A \coloneqq \{x \in X \,:\, f(x) < x\}$$

בהכרח A אינה ריקה כי $y \in A$. X קבוצה סדורה היטב לכן יש ל A איבר ראשון, נסמנו ב x_0, לפי הגדרת A בהכרח $f(x_0) < x_0$, והיות ו f שומרת סדר:

$$f(f(x_0)) \leq f(x_0)$$

כמו כן f חד חד ערכית, לכן מתקיים:

$$f(f(x_0)) < f(x_0) \Longrightarrow f(x_0) \in A \Longrightarrow f(x_0) < x_0$$

אבל זו סתירה לכך ש x_0 הוא איבר ראשון ב A. ■

13.3 תרגיל 3

- תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה היטב, ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה חסומה מלעיל, אזי ל A יש סופרמום.

הוכחה: נתבונן בקבוצה:

$$B \coloneqq \{y \in X \,:\, x \leq y \,\forall x \in A\}$$

היות ו A חסומה מלעיל, B אינה ריקה, לכן היות ו X קבוצה סדורה היטב ו $B \subseteq X$ יש ל B איבר ראשון, נסמנו $y_0 \in B$ - מכאן לפי הגדרת הסופרמום:

$$y_0 = \sup A$$

כמבוקש. ■

13.4 תרגיל 4

- כזכור מתרגיל הבית, $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא חסרת סכום אם:

$$x, y \in A \Longrightarrow x + y \notin A$$

- תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש $|A^c| \geq |A|$ אזי $|A| = \aleph$, נרצה להראות כי עוצמת הקבוצה חסרת הסכום המקסימלית היא גם $\aleph$.
- אם A חסרת סכום מקסימלית אזי $x_0 \in A^c$, $A \cup \{x_0\}$ מכילה שני איברים שסכומם גם ב $A \cup \{x_0\}$, כלומר בהינתן $a, b \in A$ יש שתי אפשרויות:

$$a + b = x_0 \text{ or } a + x_0 = b$$

כי A עצמה חסרת סכום. כלומר קיבלנו שכל $x_0 \in A^c$ ניתן לבטא כסכום או הפרש (פעולה בינארית) של שני איברים ב A, כלומר למעשה הגדרנו פונקציה:

$$f \,:\, A \times A \longrightarrow A^c$$

$$(a, b) \longmapsto a + b$$

או לחילופין:

$$g \,:\, A \times A \longrightarrow A^c$$

$$(a, b) \longmapsto b - a$$

איחוד תמונת שתי הפונקציות הללו בוודאות מכסה את כל A^c, כי אלו האופציות האפשריות היחידות - כלומר אם נגדיר:

$$\begin{cases} \mathrm{Im} f = B \\ \mathrm{Im} g = C \end{cases}$$

אזי בהכרח:

$$B \cup C = A^c$$

ומכאן:

$$\begin{cases} |B| \leq |A| \\ |C| \leq |A| \end{cases} \implies |B \cup C| = |A^c| \leq |A| + |A| = |A| \implies |A| = \aleph$$

- נשים לב כי יכול להיות כי B או C ריקות, אבל זה לא משנה כי השנייה אינסופית (כי לדוגמא $[2,3]$ חסרת סכום והיא אינסופית).