אלגברה ב־גליון 6

1 ביולי 2018

.1

$$A=\begin{pmatrix}5&4&-4\\4&5&4\\-4&4&5\end{pmatrix}$$

נתון $\lambda=-3$. נחשב

$$Ker\left(\begin{pmatrix}5&4&-4\\4&5&4\\-4&4&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\right)=Ker\begin{pmatrix}8&4&-4\\4&8&4\\-4&4&8\end{pmatrix}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$trA=15$ אז $\lambda_2+\lambda_3=18$.
נבדוק:
עבור $\lambda=9$,

$$Ker\left(A-\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}\right)=Ker\begin{pmatrix}-4&4&-4\\4&-4&4\\-4&4&-4\end{pmatrix}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

יש לנו שני ערכים עצמיים, אחד מריבוי גיאומטרי 2 והשני מריבוי גיאומטרי 1 . $A\in M_n(\mathbb{R})$ אז סיימנו.
לפי משפט, וקטורים במרחבים עצמיים של ערכים עצמיים שונים הם אורתוגונלים.
כמו כן יש לנו מרחב עצמי שבו הוקטורים הם אורתוגונליים אז נותר רק לנרמל אותם ליצור מרחב אורתוגונלי.

$$B=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אז

$$D=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

.2

$$q\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_4-6x_2x_3$$

1. השלמה לריבוע:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

לאחר הצבה נקבל

$$q\left(\vec{y}\right)=3y_1^2-3y_2^2+y_3^2-y_4^2$$

$$[q]_E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ע"ע הם $\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=1,\lambda_4=-1$.
ו"ע הם בהתאמה (בסיס סדור):

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

אזי

$$[q]_B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.3
$\dim U=2$ כי יש שני ע"ע חיוביים. U נפרש על ידי הו"ע המתאימים לע"ע אלו

$$U=sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

3.

א.

$$[q]_E=\begin{pmatrix}5&2&-2\\2&1&-1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$$

נקבל

$$P^t\,[q]_E\,p=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

עבור $P=\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{5}\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$. עמודות P הם הבסיס שבו qאלכסונית.

ב. נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

הע"ע שלה הם 1 מר"ג 2 ו־4 מר"ג 1 (כי $trA=6$). כלומר הם חיוביים.
לפי משפט ההתמדה של סילבסטר הסיגנטורה של שני מטריצות חופפות היא זהה.
אך $sgn\left(q\right)=\left(2,1\right)$ ו־$sgn\left(A\right)=\left(3,0\right)$. אז הן אינן חופפות, כלומר לא קיים בסיס של R^3שבו המטריצה המייצגת של q היא A.

4.

1.<u>הוכחה</u>
תהי $A\in M_n\left(R\right)$ סימטרית.
$\Leftarrow$
נניח A חופפת ל־A^2.
A סימטרית ממשית לכן לכסינה אז לפי משפט הפירוק הספקטרלי $A\ =\sum\limits_{i=1}^{n}\ \lambda_iP_i$ ו־$A^2\ =\sum\limits_{i=1}^{n}\ \lambda_i^2P_i$.
A חופפת ל־A^2 אז $sgn\left(A\right)=sgn\left(A^2\right)$. נשים לב ־ $sgn\left(A^2\right)=\left(k,0\right)$ כל הע"ע אי שליליים.
אזי $sgn\left(A\right)=\left(k,0\right)$, כלומר כל הע"ע של A הם אי־שליליים, בלומר A היא אי־שלילית.
$\Rightarrow$
נניח ש־A היא אי שלילית. אז $sgn\left(A\right)=\left(\underbrace{k}_{rank\underline{\mathrm{A}}},0\right)$. כפי שראינו לעיל ־ $A^2\ =\sum\limits_{i=1}^{n}\ \lambda_i^2P_i$. אזי
$rank\left(A^2\right)=rank\left(A\right)\Rightarrow sgn\left(A^2\right)=sgn\left(A\right)$. אם ל־$A$ יש ע"ע ם אז גם ל־A^2 ואם הוא חיובי הוא נשאר חיובי.
לפי משפט ההתמדה של סילוסטר, הן חופפות.
מ.ש.ל.
2. <u>פתרון</u>

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

לפי משפט הפירוק הפולרי לכל מטריצה קיים פירוק $A=QR$ כאשר Q אורתו ו־R אי־שלילית.
אזי

$$A^{*}A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

כל הע"ע של מטריצה מהצורה $A=B^{*}B$ הם אי־שליליים.
<u>הוכחה</u>
לפי משפט שור, כל מטריצה דומה אוניטארית למטריצה משולשת עליונה.
תהי A מטריצה הרמטית.
אז $A*A=AA*=A^{2}$.
אז $[A]_{B}=U$ ו־$[A]_{B}*=U*$ כי B בסיס אוניטרי.
מאחר ו־Aהרמטית $A=A*$ אז $U=U*$ כלומר הן אלכסוניות עם ערכים על האלכסון הראשי מהצורה $|\lambda_{i}|^{2}$.
אז היא אי־שלילית.
מ.ש.ל.
הע"ע של A הם

$$\left|\begin{pmatrix} 1-x & i \\ -i & 2-x \end{pmatrix}\right|=(2-x)(1-x)-1=x^{2}-3x+1$$

$$x_{1}=$$

הפירוק הספקטרלי של $AA*$ הוא

$$A^{*}A=\sum$$

1. <u>הוכחה</u>
תהי $A\in M_{2}(\mathbb{R})$ אורתוגונלית.
אזי $A*A=I$. נקח את העמודות של A בתור בסיס B ל־$\mathbb{R}^{2}$. העמודות אורתונורמליות אזי הן בת"ל, לפי משפט.
אז $[A]_{B}=\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$ כי הע"ע הם ±1.
לכן $det([A]_{B})=\pm1 \underbrace{=}_{determinent\,of\,similar\,\mathrm{matrices}} det(A)$.
מ.ש.ל.
2.