<u>אינטגרל כפול ואינטגרל נשנה</u>

איך מחשבים אינטגרל כפול באופן מעשי?

<u>משפט.</u> אם f רציפה במלבן

$$.R = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

אז

$$\begin{aligned}\int\int_{R} f \;&=\; \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x,y)\mathsf{d}y\right]}_{I(x)} \mathsf{d}x \\ &=\; \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x,y)\mathsf{d}x\right]}_{J(y)} \mathsf{d}y\end{aligned}$$

<u>הוכחה:</u> כל האינטגרלים קיימים כי f רציפה.

נסמן $I = \int\int_{R} f$, ונסמן

כאשר $m_{ij} = \min_{R_{ij}} f \quad , M_{ij} = \max_{R_{ij}} f$

$.R_{ij} = \left\{x_{i-1} \le x \le x_i \ , y_{j-1} \le y \le y_j\right\}$

שטח המלבן R_{ij} הוא

$$A(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$$

ואז

$$. \sum_{ij} m_{ij} A(R_{ij}) \le I \le \sum_{ij} M_{ij} A(R_{ij})$$

<u>נסמן</u>

$$\begin{aligned} I' &= \int_a^b \left[\int_c^d f dy\right] \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right] \\
&\leq \sum_{i,j} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j
\end{aligned}
$$

לכן גם

$$\sum_{i,j} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leq I' \leq \sum_{i,j} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j$$

סה"כ

$$\sum_{i,j} m_{ij}A(R_{ij}) \leq I, I' \leq \sum_{i,j} M_{ij}A(R_{ij})$$
$$|I-I'| \leq \sum_{i,j}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij})$$

מאחר ו: f רציפה, נובע שהיא רציפה במידה שווה, ולכן עבור R_{ij} קטנים מספיק, ונקבל

$$|I-I'| < \epsilon A(R)$$

לכל 0 $\epsilon >$. לכן $I = I'$.

גירסה רחבה יותר, בלי הנחת רציפות, היא:

<u>משפט.</u> נניח ש: f מוגדרת על המלבן

$.R = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

נניח שקיים האינטגרל הכפול

$$\int\int_R f dx dy,$$

ולכל x קיים האינטגרל

$$I(x) = \int_c^d f(x,y) dy.$$

אז $I(x)$ היא פונקציה אינטגרבילית ב:

$a \leq x \leq b$ ו:

$$\int\int_R f dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx.$$

<u>הוכחה:</u> ניקח חלוקות

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

ויהיו

$$M_{ik} = \sup f(x,y)$$

$$m_{ik} = \inf f(x,y)$$

כאשר האינפימום והסופרימום הם על המלבן

$$\{(x,y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{k-1} \leq y \leq y_k\}$$

לפי הנתון קיים

$$.I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{m}\int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x,y)\mathrm{d}y$$

נבחר $x_i \leq \xi_i \leq x_{i-1}$. עבורו, כמו עבור כל $x_i \leq x \leq x_{i-1}$, קיים

$$m_{ik}\leq f(\xi_i,y)\leq M_{ik}$$

לכל $y_k \leq y \leq y_{k-1}$, ולכן

$$.\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\cdot\Delta y_k \leq I(\xi_i)\leq \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\cdot\Delta y_k$$

נכפיל ב: Δx_i ונסכם:

$$\begin{aligned}\sum_i\sum_k m_{ik}\underbrace{\Delta y_k\Delta x_i}_{A(R_{ik})} \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i\\ &\leq\; \sum_i\sum_k M_{ik}\underbrace{\Delta y_k\Delta x_i}_{A(R_{ik})}\end{aligned}$$

ולכן

$$\sum_{i,k} m_{ik}A(R_{ik}) \leq \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i,k} M_{ik}A(R_{ik})$$

וזה, כזכור, לכל $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

מצד שני, לפי הגדרת $\int\int_R f$, גם

$$\sum_{i,k} m_{ik}A(R_{ik}) \leq \int\int_R f \leq \sum_{i,k} M_{ik}A(R_{ik})$$

משתי ההערכות מקבלים

$$\left| \int\int_R f - \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \right| \leq \sum_{i,k}(M_{ik}-m_{ik})A(R_{ik})$$

אגף ימין קטן מ: ϵ לכל חלוקה מספיק עדינה

R_{ik}, כי f אינטגרבילית ב: R, וזה אומר ש:

$$\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \to \iint\limits_R f$$

כאשר 0 $\to$ $\max|\Delta x_i|$. אבל זה נכון לכל ξ_i ב: $[x_{i-1}, x_i]$, כלומר סכום רימן של $I(x)$ שואף לגבול. לכן הפונקציה $I(x)$ אינטגרבילית ו: $\int_a^b I(x)\mathrm{d}x$ שווה ל: $\iint\limits_R f$, וזו בדיוק הטענה.

עתה שאנו יודעים לחשב את $\iint_R f$ על מלבן R כאינטגרל נשנה, אנו יכולים לתרגם זאת גם לתחום D שמוכל ב: R.

נתחיל עם תחומים פשוטים במיוחד, תחומים שכל קו אנכי (או כל קו אופקי) חותך אותם בקטע.

<u>תחום נורמלי.</u>

$$D_1 = \{(x,y) | y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}$$

כאשר $y_2(x), y_1(x)$ רציפות, או

$$D_2 = \{(x,y) | x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\}$$

כאשר $x_2(y), x_1(y)$ רציפות.

<u>משפט.</u> אם f רציפה בתחום נורמלי וסגור D_1 כנ"ל, אז

$$\iint_{D_1} f = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \, .$$

<u>הוכחה:</u> נחסום את D_1 במלבן $R = [a,b] \times [c,d]$, ונרחיב את f מ: D_1 ל: F ב: R ע"י ערכי

אפס. F רציפה ב R, פרט לשתי העקומות $y =$ $y_i(x)$, $i = 1, 2$, שהגרפים שלהן הם בעלי שטח אפס, ולכן $\int\int_R F$ קיים, ולפי המשפט הקודם

$$\int\int_R F = \int_a^b \left[\int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x .$$

מצד שני

$$\int\int_R F = \int\int_{D_1} F + \int\int_{R\setminus D_1} F = \int\int_{D_1} f + 0 ,$$

ויש גם את השיויון

$$\int_c^d F(x,y)\mathrm{d}y = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y ,$$

ומכאן המסקנה נובעת.

דוגמאות לשימוש באינטגרציה כפולה.

- נפח $f \iint\limits_D = V$;
- מטען חשמלי $\rho \mathrm{d}A \iint\limits_D = Q$; מסה;
- שטח קבוצה D, $A = A(D) = \iint\limits_D 1 \cdot \mathrm{d}A$

החלפת משתנים והתפקיד הגיאומטרי של היעקוביאן

שטח מקבילית ששתי צלעות לא מקבילות שלה הן $\vec{p}$ ו: $\vec{q}$ במרחב R^3 הוא

$$.A = ||\vec{p} \times \vec{q}|| = ||\vec{p}|| \cdot ||\vec{q}|| |\sin\theta|$$

אצלנו $\vec{p}, \vec{q}$ וקטורים במישור, לכן

$$\vec{p} = (p_1, p_2, 0),\ \ \vec{q} = (q_1, q_2, 0)$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p_1 & p_2 & 0 \\ q_1 & q_2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}$$

$$A = ||\vec{p} \times \vec{q}|| = \left| \det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \right|$$

<u>החלפת משתנים:</u>

נתיחס לטרנספורמציה $(x,y) \to (u,v)$

המוגדרת ע"י

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{array} \right. .$$

הנקודות

$$P(a,b),\ Q(a+h,b),\ R(a,b+k),\ S(a+h,b+k)$$

הן קודקודי מלבן אשר עוברות מתחת לטרנס-
פורמציה לארבעת קודקודי "מקבילית"

$$P'\left(u(a,b), v(a,b)\right),$$

$Q'\left(u(a+h,b),v(a+h,b)\right),$
$R'\left(u(a,b+k),v(a,b+k)\right),$
$S'\left(u(a+h,b+k),v(a+h,b+k)\right).$

צלע אחת של ה"מקבילית" מיוצגת ע"י הוקטור

$$\begin{aligned}(u(a+h,b),v(a+h,b))-(u(a,b),v(a,b))\\ =(u_x(a+\theta_1 h,b),v_x(a+\theta_2 h,b))\cdot h\\ =(u_x,v_x)_{(a,b)}\cdot h+(o(h),o(h))\end{aligned}$$

וצלע שנייה שלה מיוצגת ע"י

$$.\,(u_y,v_y)_{(a,b)}\cdot k+(o(k),o(k))$$

לכן מלבן ששטחו $h\cdot k$ יעבור ל"מקבילית" שש-
טחה

$$.hk\left[\left|\det\begin{pmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{pmatrix}\right|+o(1)\right]$$

<u>מסקנה:</u> יחס השטחים הוא

$$J = \left|\det\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}\right| + o(hk)$$

ראינו שהטרנספורמציה $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ מעבירה מלבן קטן ל"מקבילית". אנו קוראים לתמונה של המלבן "מקבילית" כי הוקטורים המחברים:

$$\begin{aligned} \vec{P'Q'} &= (u(a+h,b), v(a+h,b)) - \\ &\quad - (u(a,b), v(a,b)) \\ &= (u_x(a+\theta_1 h, b), v_x(a+\theta_2 h, b)) \cdot h \\ \vec{R'S'} &= (u(a+h,b+k), v(a+h,b+k)) - \\ &\quad - (u(a,b+k), v(a,b+k)) \\ &= (u_x(a+\theta_3 h, b+k), v_x(a+\theta_4 h, b+k)) \cdot h \end{aligned}$$

כלומר, שניהם כמעט שווים ל:

$$h\left(u_x(a,b), v_x(a,b)\right).$$

ראינו שיחס השטחים של התמונה והמקור הוא בקירוב

$$\left|\det\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}\right|$$

והדטרמיננט נקרא יעקוביאן ומסומן ב:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

ליתר דיוק הוכחנו ששטח התמונה של המלבן מתחת לטרנספורמציה הוא מהצורה

$A_{ij}[|J| + \epsilon]$, כאשר

$$J = \det\begin{pmatrix} u_x(a,b) & v_x(a,b) \\ u_y(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix}$$

ומתקיים ש: $\epsilon \to 0$ כאשר $(h,k) \to (0,0)$.

נשתמש בזה לחישוב אינטגרל

$$\int\int_D f(x,y) \approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j) A_{ij}$$

אחרי החלפת משתנים.

נתונה טרנספורמציה חד-חד-ערכית:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

ומניחים שכל הפונקציות המופיעות בחישוב הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר 1.

נציב את x ו: y כפונקציות של u ו:v:

$$\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array} \begin{cases} u = u(x(u,v), y(u,v)) \\ v = v(x(u,v), y(u,v)) \end{cases}$$

נגזור לפי u, v:

$$
\begin{array}{lll}
\frac{\partial}{\partial u}: & 1 = u_x \cdot x_u + u_y \cdot y_u & .1 \\
\frac{\partial}{\partial v}: & 0 = u_x \cdot x_v + u_y \cdot y_v & \\
\frac{\partial}{\partial u}: & 0 = v_x \cdot x_u + v_y \cdot y_u & .2 \\
\frac{\partial}{\partial v}: & 1 = v_x \cdot x_v + v_y \cdot y_v &
\end{array}
$$

ארבעת המשוואות הללו נכתבות בכתיב מטריצי כך:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

כלומר המטריצות של הנגזרות החלקיות הן הפוכות זו לזו. נחשב את הדטרמיננט בשני האגפים, כאשר מסמנים

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\ |J| = |\text{det } J|,$$

ו: J נקרא היעקוביאן של הטרנספורמציה.
מקבלים מלמעלה

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1 \,.$$

מסקנה: אם הטרנספורמציה היא חד-חד-ערכית, אז $J \neq 0$, והיעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה הוא J^{-1}.

לרוע המזל הכוון ההפוך לא נכון. אם $J \neq 0$ בתחום, זה בכלל לא מבטיח שהטרנספורמציה היא חד-חד-ערכית בכל התחום. זה מבטיח שה-העתקה היא חד-חד-ערכית בסביבה של הנקודה אבל לא באופן גלובלי. למשל ההעתקה מהקטע $[0,1]$ על המעגל המתקבל מהדבקת 0 ו: 1, או

טוב יותר, כיפוף הקטע והדבקת (זיהוי) 1/3 ו: 2/3 היא חח"ע בסביבה של כל נקודה, אך לא באופן גלובלי.

תהי

$$(x, y) \mapsto (u, v), \ u = u(x, y), v = v(x, y)$$

טרנספורמציה חד-חד-ערכית בין D ל D'. נעביר ב: D רשת של קווים אופקיים ואנכיים. תמונתם ב D' היא רשת של קווים עקומים. מלבן קטן ב: D מועתק ל"מקבילית", ושטחי המלבן וה"מקבילית" קשורים ע"י

$$A'_{ij} = \left(\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| + \epsilon \right) A_{ij}.$$

נוסחא דומה נכונה גם לכיוון ההפוך:

$$A_{ij} = \left(\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| + \epsilon' \right) A'_{ij}.$$

צריך היה להוכיח באופן מדויק ש: $\epsilon \to 0$ במ"ש כאשר קוטר החלוקה שואף לאפס.

מקרבים את האינטגרל של $f(x,y)$ על הקבוצה D ע"י סכום רימן:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} f(x_i, y_j) A_{ij} \\ = & \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \left[\left(\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| + \epsilon' \right) A'_{ij} \right] \end{aligned}$$

ובגבול בו גודל החלוקה שואף לאפס מקבלים את

השיויון בין אינטגרלים:

$$\begin{aligned}&\int\int_D f(x,y)\,\underbrace{\mathrm{d}S(x,y)}_{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\\ =\;&\int\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\underbrace{\mathrm{d}S'(u,v)}_{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}\end{aligned}$$

ונוסחה אנלוגית מתקבלת עבור הטרנספורמציה בכוון ההפוך. הוכחה מסודרת תינתן עבור טרנס-פורמציות ב: R^n באינפי' 3.

השוואה למימד $n=1$ במקרה הזה יש את נו-
סחת שינוי המשתנה

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x(u)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} \cdot \mathrm{d}u\, ,$$

וכאן $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ בלי הערך המוחלט, כי לתנועה לאורך
הקטעים $[a,b]$ ו: $[\alpha,\beta]$ יש מגמה ואנו עוברים
עליהם בכיוון מסוים, אבל ל: $D \subset R^2$ אין.

מקרה פרטי מיוחד. עבור $f \equiv 1$ נקבל את
שטח התחום:

$$S(D) = \int\int_D 1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{D'} 1 \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

דוגמא. מצא את שטח התחום בין 4 ההיפר-
בולות:

$$D = \left\{x, y > 0; 1 \le xy \le 2;\ 3 \le x^2 - y^2 \le 4\right\}$$

נציב $u = xy,\ v = x^2 - y^2$.

מהתבוננות בגיאומטריה של העקומים ברור שה-העתקה היא חח"ע, כי דרך כל נקודה (u_0, v_0) עובר צמד היפרבולות אחד, וכל שתי היפרבולות נחתכות פעם ב: $x, y > 0$. כמובן

$$D' = \{\ (u, v) \mid 1 \le u \le 2,\ 3 \le v \le 4\ \}$$

$$S(D) = \int\int_D 1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{D'} 1 \cdot \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

קשה לחשב את $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ אבל קל לחשב את

$$\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

<u>הערה.</u> ברור שהבחירה u,v טובה כמו v,u כי רק $|J|$ משנה.

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| &= \frac{1}{2(x^2+y^2)}\\ &= \frac{1}{2\left(x^2(u,v)+y^2(u,v)\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&v = x^2 - y^2 \;\Rightarrow\; v^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2\\ &u = xy \qquad\;\; \Rightarrow\; u^2 = x^2y^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^2 + 4u^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2$$

ומקבלים

$$|J| = \frac{1}{2\sqrt{v^2+4u^2}}$$

לכן

$$\begin{aligned} S(D) &= \iint\limits_D 1 \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{v=3}^{4} \int\limits_{u=1}^{2} 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{v^2+4u^2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int\limits_3^4 \left(\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{v^2+4u^2}} \right) \mathrm{d}v \end{aligned}$$

<u>קורדינטות פולריות</u>. נסתכל בטרנספורמציה

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

בתחום בו ההעתקה הזו

$$(r,\theta) \mapsto (x,y)$$

היא חד-חד-ערכית. אנו מצפים שבתנאים מסוימ-
ים יתקיים השיוין

$$\begin{aligned}
&\int\int_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\int_{D'_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

מתי זה מוצדק?

ההעתקה $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

היא חח"ע כאשר $0 \neq r$ ו θ אינו מבצע סיבוב
שלם, למשל אם $0 \leq \theta < 2\pi$.

בקבוצה כזו מוצדק השיויון

$$\int\int_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$\int\int_{D'_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

איך ניתן להשתמש בקורדינטות הפולריות לשם חישוב אינטגרלים על העיגול:

$$? \; x^2+y^2 \le a^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

נקיף את $(0,0)$ במעגל קטן

$$0 \le r \le \epsilon \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 \le \epsilon^2$$

ונוציא זווית קטנה סביב $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$

(כלומר נתיחס לתחום בו מתקיים

$0 \leq \theta \leq 2\pi - \epsilon$). אנו מוציאים מ: D' שטח שהוא קטן מ: $\epsilon a^2 + \pi \cdot \epsilon^2$, ועל השארית הנוסחה מוצדקת. עכשיו ניקח $\epsilon \to 0$ ונקבל שהנוסחה מוצדקת גם עבור $r = 0, \ \theta = 2\pi, \ \theta = 0$.

מקבלים עבור שטח העיגול ברדיוס a את הביטוי

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} r dr d\theta = 2\pi \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a = \pi a^2 .$$