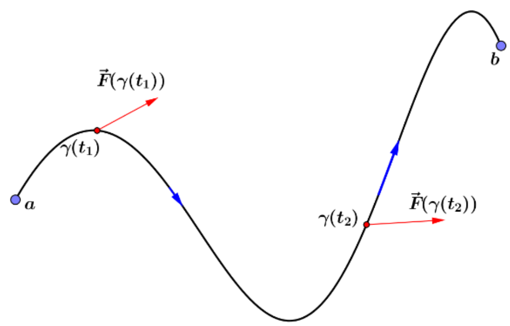
14/12/16

תרגול 8

אינטגרל קווי מסדר 2:



נניח $\vec{F}:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ פונקציה וקטורית על עקום חלק $\gamma\subset\mathbb{R}^n$. אזי:

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{l}$$

הוא העבודה שמבצע כח $\vec{F}$ לאורך העקום γ כאשר "הולכים" מ-a ל-b.

פתרון לבעיה מסוג זו יתבצע באמצעות פרמטריזציה של העקום.

$$\int_\gamma \vec{F}d\vec{l}=\int_a^b F\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$$

כפי שאנחנו יודעים, ערך האינטגרל אינו תלוי בפרמטריזציה. אך הערך כן תלוי בכיוון ההתקדמות לאורך העקום. נהוג לרשום:

$$\gamma(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\quad t\colon a\underset{(\star)}{\rightarrow}b$$

כאשר $(\star)$ מייצג את כיוון ההתקדמות ולאו דווקא את האיבר הגדול מביניהם.

עבור $\vec{F}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ מסמנים:

$$\vec{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$$
$$d\vec{l}=(dx,dy,dz)$$
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

<u>הערה</u> – נגדיש כי אלו הם רק סימונים בשלב זה.

<u>תרגיל:</u>

חשבו את $I=\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ כאשר γ הוא הקו הישר המחבר את $A(1,1)$ אל $B\big(1,\sqrt{3}\big)$.

<u>פתרון:</u>

נסמן:

$$I=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}\quad \vec{F}=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

כלומר זהו אינטגרל קווי מסוג שני. נבחר פרמטריזציה לעקום מהצורה:

$$t\colon 1\to\sqrt{3}\quad \begin{cases}x(t)=1\\ y(t)=t\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)\\ \gamma'(t)=(0,1)\end{matrix}$$

(כיוון הפרמטריזציה הוכתב מניסוח השאלה). נקבל כי:

14/12/16

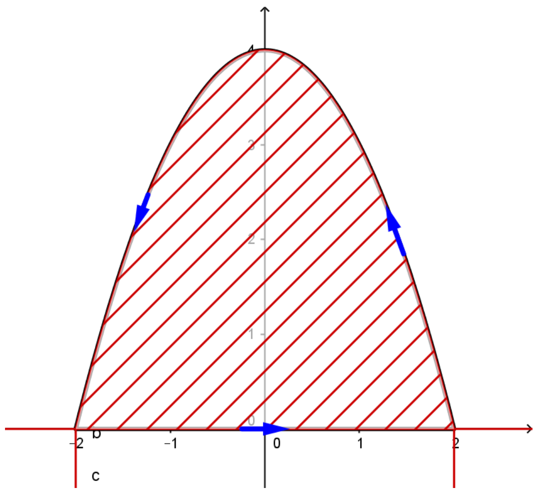
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_1^{\sqrt{3}} \overbrace{\left(\frac{t}{1^2+t^2},\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right)}^{=F(\gamma(t))}\cdot \overbrace{(0,1)}^{=\gamma'(t)}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

<u>הערה</u> – נשים לב כי ל-γ אין שינוי ב-x. לכן $dx=0$ ו-$x\equiv 1$. ולכן גם מהצגת הבעיה על ידי:

$$I=\int_\gamma = P\overbrace{dx}^{=0}+Qdy=\int_\gamma \frac{1}{1+y^2}dy=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2}$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את $\int_{\partial D}(x^2+y)dx$ כאשר $D=\{(x,y)|0<y<4-x^2\}$.



נשים לב כי התחום הוא ∂D, ולכן, למרות ש-D הינו תחום בעל שטח, אנו מעוניין ב"קו" התוחם אותו (כפי שמתואר באיור משמאל).

האינטגרל $\int_{\partial D}(x^2+y)dx$ אינו אינטגרל מסוג ראשון, מפני שרשום dx ולא $d\vec{l}$ או כל דבר אחר אשר תלוי באורך ולא ב-x,y.

לכן, אם נתבונן על האינטגרל על ידי כתיבתו באופן הבא:

$$\int_{\partial D}(x^2+y)dx+0dy$$

אזי נסיק כי אמנם לא מתואר באופן מפורש כיוון האינטגרציה, שהוא נתון הכרחי על מנת שנוכל לחשב את האינטגרל הנ"ל, אך הקונבנציה בתחום היא שכאשר לא נתון כיוון אינטגרציה – כיוון ברירת המחדל הוא הכיוון החיובי / נגד כיוון השעון.

לכן נוכל לכתוב $\vec{F}=(x^2+y,0)$, ונרצה למצוא כיצד לבטא באמצעות פרמטריזציה את כיוון ההתקדמות לאורך העקום (החיצים הכחולים באיור שמשמאל).

בהנתן תחום $D\subset\mathbb{R}^2$, נבחר את האוריינטציה על השפה כך שאם נלך לאורך השפה, נראה את התחום "משמאלנו" – נגד כיוון השעון. העקום שלנו הוא לא עקום חלק ולכן נחלק אותו ל-2 עקומים γ_1,γ_2.

<u>עבור γ_1:</u>

זהו העקום שמתאר את התנועה על ציר ה-x, כלומר לאורך הקטע $[-2,2]\times\{0\}$. ולכן, היות ו-$y=0$ לכל אורך התנועה נקבל כי $dy=0$. כלומר:

$$\int_{\gamma_1}Pdx+Q\overbrace{dy}^{=0}=\int_{-2}^{2}x^2dx=\cdots=\frac{16}{3}$$

<u>עבור γ_2:</u>

זהו העקום שמתאר את גרף הפונקציה $y=4-x^2$ בתחום $[-2,2]$. לכן נסמן:

$$\begin{matrix}\gamma_2(t)=(t,4-t^2)\\ \gamma_2'(t)=(1,-2t)\end{matrix}\quad t:2\to -2$$

נציב ונחשב:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_2^{-2}(t^2+4-t^2,0)\cdot(1,-2t)dt = \int_2^{-2} 4dt = -16$$

ולכן נקבל סה"כ כי מתקיים:

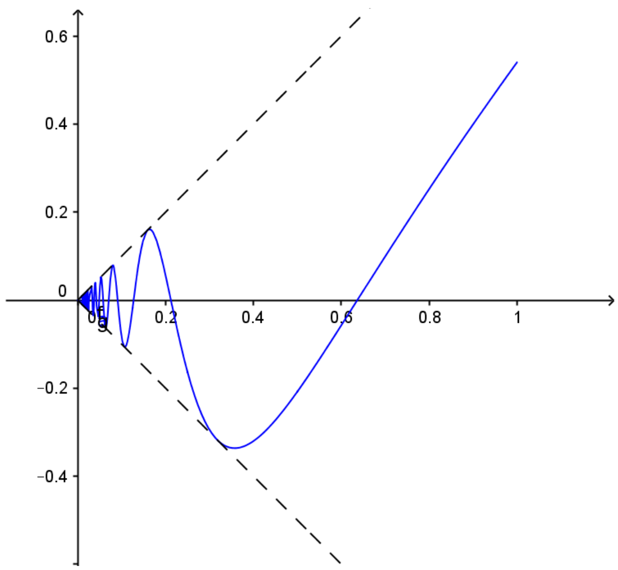
$$\int_{\partial D}(x^2+y)dx + 0dy = \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{16}{3} - 16$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את אורך העקום:

$$\gamma(t) = \left(t, t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad t\in(0,1]$$

$$\gamma(0) = (0,0)$$



איור 1 - $\gamma(t) = \left(t, t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ עבור $0\le t\le 1$

<u>פתרון:</u>

במקרה זה γ אינו גזיר ברציפות. נחשב את אורך העקום על פי הגדרה:

$$l(\gamma) = \sup_P l(\gamma, P)$$

כאשר P חלוקה של הקטע $[0,1]$.

עבור חלוקה זו מתקיים:

$$l(\gamma,P) = \sum_{i=1}^{n}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$$

במקרה של הפרמטריזציה שלנו:

$$\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\| = \left\|\left(t_i - t_{i-1}, t_i\cos\left(\frac{1}{t_i}\right) - t_{i-1}\cos\left(\frac{1}{t_{i-1}}\right)\right)\right\|$$

מספיק שנראה כי לא קיים חסם על קבוצת החלוקות של הקטע עבור סכום זה. נבחר $t_i = \frac{1}{\pi i}$ ונקבל כי:

$$= \left\|\left(t_i - t_{i-1}, \pm(t_i + t_{i-1})\right)\right\| \geq |t_i + t_{i-1}| = \frac{1}{\pi i} + \frac{1}{\pi(i-1)} = \frac{2i-1}{\pi i(i-1)}$$

ונשים לב כי עבור אם נתבונן בסדרת חלוקות P_n כאלו כך ש-t_i נבחרות בהן באותו האופן, אזי:

$$\lim_{n\to\infty} l(\gamma, P_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i-1}{\pi i(i-1)}$$

ניתן לראות, על ידי שימוש בקריטריון ההשוואה עם הטור ההרמוני $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$, כי טור זה מתבדר. אך מכאן נסיק כי לא קיים חסם $l(\gamma)$ כלומר עקום זה אינו בעל אורך סופי / בעל אורך אינסופי.

14/12/16

<u>אינטגרל משולש:</u>

יהא $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ תחום בעל נפח. יהא $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$. נעסוק בחישוב ביטויים מהצורה:

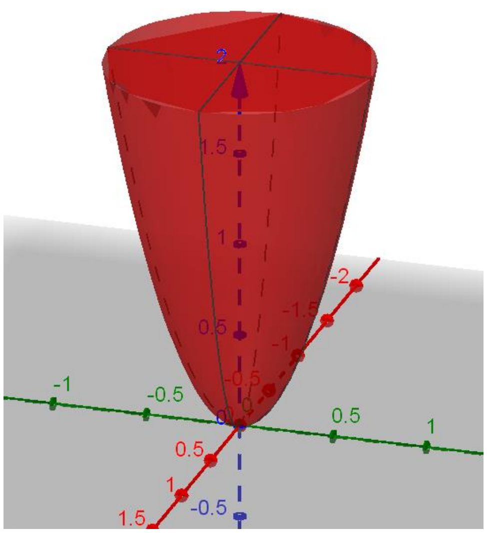
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

<u>סימון</u> – ניתן לכתוב גם:

$$\int dx\int dy\int f(x,y,z)dz=\int\left(\int\left(\int f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את הנפח של התחום החסום על ידי $z=4(x^2+y^2)$ (פרבולואיד). והמישורים $z=0,z=2$.



<u>דרך א'</u> – נקבע z כלשהו. לכל z קבוע, נקבל "פרוסה" (כמתואר באיור התחתון). נחשב שטח כל "פרוסה" ונסכום את כולן באינטגרציה. כלומר:

$$V=\underbrace{\int dz}_{\text{סוכמים את כולן}}\underbrace{\iint_{Dz}1dxdy}_{\text{שטח פרוסה}}$$

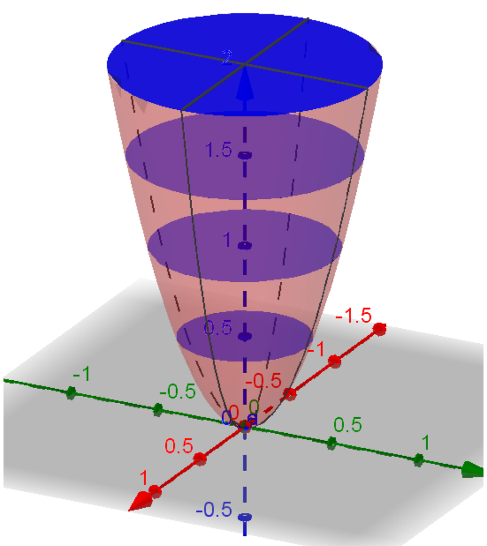
במקרה שלנו, אם כן, לכל $0\le z\le 2$ נקבל פרוסה:

$$D_z=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le\frac{z}{4}\right\}\leftarrow$$

זהו עיגול במישור שרדיוסו $\frac{\sqrt{z}}{2}$

ולכן:

$$V=\int_0^2dz\iint_{Dz}1dxdy=\int_0^2\frac{\pi z}{4}dz=\dots=\frac{\pi}{2}$$



<u>דרך ב'</u> – "שיטת הפסים" – נקבע את x,y, לכל $x,y\in D$ כאשר D הוא ההיטל של Ω על מישור xy, נקבל פס על Ω. נחשב את אורך כל פס כזה ונסכום את כולם. כלומר:

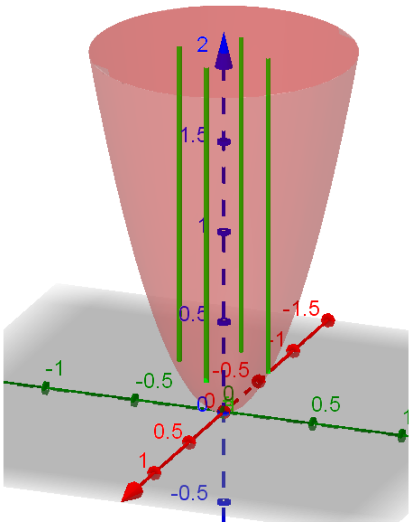
$$V=\iint_D dxdy\int_{l_{x,y}}1dz$$

במקרה שלנו, ההיטל D על המישור נתון על ידי:

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le\frac{1}{2}\right\}$$

לכל x,y בתחום זה מתקיים $4x^2+4y^2\le z\le 2$ ולכן:

$$V=\iint_D\int_{4x^2+4y^2}^2 1dz=\iint_D(2-4x^2-4y^2)dxdy$$



קיבלנו אינטגרל כפול. נפתור אותו כבאם היה תרגיל נפרד. נגדיר החלפת משתנים מהצורה:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

<u>הערה</u> ניתן להשתמש בקואורדינטות פולריות גם במידה ואין חד-חד ערכיות במספר סופי של נקודות (כי הן בעלות שטח אפס).

היעקוביאן שלנו יהיה:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{vmatrix} = \cdots = r \neq 0$$

למעט בראשית אבל הראשית ממילא קבוצה בעלת שטח אפס ולכן לא תיווצר בעיתיות מכך.

התחום החדש נקבע על ידי הצבת המשתנים החדשים ב-D. נקבל כי:

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \Longrightarrow r^2 \leq \frac{1}{2}$$

ולכן התחום שלנו יהיה:

$$\widetilde{D} = \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

ומכאן שנוכל לחשב את האינטגרל:

$$\iint_D (2 - 4x^2 - 4y^2)dxdy = \iint_{\widetilde{D}} (2 - 4r^2)|r|drd\theta \overset{\text{משפט פוביני}}{=} \int_0^{2\pi} 1d\theta \cdot \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2 - 4r^2)rdr = \cdots$$