קומבינטוריקה – תרגול 5# – 21/04/16

עקרון שובך היונים

הגדרה: **עקרון שובך היונים** גורס שאם מחלקים $m+1$ עצמים ל-m תאים, יש לפחות תא אחד המכיל שני עצמים. **הרחבה של עקרון שובך היונים** היא שאם מחלקים $km+1$ עצמים ל-m תאים, אז יש לפחות תא אחד המכיל לפחות $k+1$ עצמים.

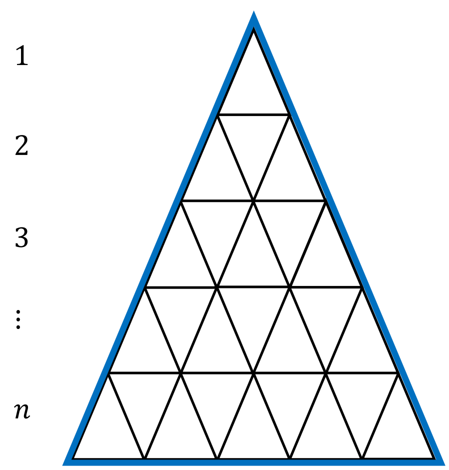
תרגיל: תהי S קב' של $n+1$ מס' $S=\{a_1,\dots,a_{n+1}\}$ כאשר $a_i \in [2n]=\{1,2,\dots,2n\}$. הוכיחו כי קיימים שני מספרים זרים ב-S.
פתרון: היונים הן S. התאים הם $\{1,2\},\{3,4\}\dots\{2n-1,2n\}$ לפי עקרון שובך היונים, קיים תא בו יש לפחות שני מס' מ-S, וכיוון שכל שני מס' עוקבים הם זרים, נקבל את הדרוש.

תרגיל: תהא $A\subseteq\{1,2,\dots,2n-1\}$ כך ש-$|A|=n+1$. הוכיחו שקיימים שני מס' שונים ב-A שסכומם הוא $2n$.
פתרון: היונים הן A. התאים הם $\{1,2n-1\},\{2,2n-2\},\dots,\{n-1,n+1\},\{n\}$. לכל היותר איבר אחד מ-$A$ שייך לקב' $\{n\}$ ולכן יש עוד לפחות n מס' ב-A שמתחלקים ל-$n-1$ קבוצות, ולכן יש קב' שמכילה שני איברים מ-A וסכומם הוא $2n$.

תרגיל: 10 אנשים יושבים במעגל. סכום גיליהם הוא 250. הוכיחו שקיימים שלושה אנשים מתוכם היושבים ברצף שסכום גיליהם הוא לפחות 75.
פתרון: נסכום את הגילאים בשלשות. יש 10 שלשות אפשריות, וכל אחד מהאנשים מופיע ב-3 שלשות. לכן, סכום הגילאים של 10 השלשות הוא $750 = 3 \times 250$. לכן, הממוצע של סכום הגילאים בכל שלשה הוא 75. לכן, קיימת שלשה בה סכום הגילאים הוא לפחות 75.

הגדרה: בתרגיל הקודם השתמשנו ב**עקרון הממוצע** – אם הממוצע של קב' מס' הוא m קיים מס' בקב' הזו הגדול מ-m ומס' הקטן מ-m. עקרון זה נובע מעקרון שובך היונים.

תרגיל: נתונות n^2+1 נק' במשולש שווה צלעות שאורך צלעותיו הוא n. הוכיחו שיש שתי נק' שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר 1.
פתרון:



מחלקים את המשולש שווה השוקיים למשולשים שאורך שוקיהם הוא 1. מס' המשולשים בכל שורה גדל ב-2, ולכן לפי סכום על סדרה חשבונית, מקבלים $n^2 = n\cdot\frac{1+2n-1}{2} = 1+3+\dots+2n-1$. יש n^2 משולשים ו-n^2 נק', ולכן יש מושלש שמכיל לפחות שתי נק', והמרחק בין כל שתי נק' במשולש ≤ 1.

תרגיל: במשך 30 ימים אספו תלמידי כיתה ז' קרשים לל"ג בעומר. בכל יום מצאו לפחות קרש אחד, ובסה"כ אספו 45 קרשים.

(1) הוכיחו שיש רצף של ימים בו אספו בדיוק 14 קרשים.

(2) האם התשובה תישאר זהה אם התלמידים אספו קרשים במהלך 28 ימים ולא 30?

פתרון:

(1) x_i – מס' הקרשים שאספו ביום ה-i. $S_k=\sum_{i=1}^{k} x_i$, $S_0=0$. S_k יהיו היונים ($k\le 30$). התאים יהיו השארית בחלוקה ב-14. כלומר, $0,1,\dots,13$. היונה S_k נכנס לתא j אם S_k משאיר j בחלוקה ב-14. לפי עקרון שובך היונים קיים תא כי יהיו 3 יונים S_k,S_l,S_m $\ k<l<m$. שלושתם משאירים את אותה השארית בחלוקה ב-14:

$$0<S_l-S_k=\sum_{j=1}^{l} x_j-\sum_{i=1}^{l} x_i=\sum_{i=k+1}^{l} x_i$$

מתחלק ב-14. אם שווה ל-14, אז סיימנו. אחרת, הסכום ≤ 28. באותו האופן, $0<S_m-S_l$ מתחלק ב-14. אם שווה ל-14, סיימנו. אחרת ≤ 28, אבל אז

$$45\ge S_m-S_k=\underbrace{S_m-S_l}_{\ge 28}+\underbrace{S_l-S_k}_{\ge 28}$$

וקיבלנו סתירה.

(2) התשובה תישאר זהה. אם קיים תא בו יש לפחות 3 יונים, אז עובדים בדיוק כמו בסעיף הקודם. אחרת, בכל תא יש בדיוק 2 יונים, ובפרט זה נכון לגבי התא ה-0. S_k,S_l $\ k<l$ נמצאים בתא 0. אם $S_k=14$ אז סיימנו. אחרת, $S_k\le 28$, $14|S_l-S_k$. אם הפרש זה שווה 14 אז סיימנו. אחרת, הוא ≤ 28, אבל אז נקבל סתירה בדומה למקודם:

$$S_l=S_l-S_k+S_k\ge 28+28$$

תרגיל:

(1) הוכיחו שלכל $A\subset\{S\subset\{1,2,\dots,9\}\,|\,|S|\le 3\}$ בגודל $|A|=26$ קיימות $S,T\in A$ כך ש-$S\ne T$ אבל:

$$\sum_{s\in S} s=\sum_{t\in T} t$$

(2) האם קיימת קב' $A\subset\{S\subset\{1,2,\dots,9\}\,|\,|S|\le 3\}$ בגודל $|A|=25$ כך שלכל $S,T\in A$ כך ש-$S\ne T$ וגם $\sum_{s\in S} s\ne\sum_{t\in T} t$?

פתרון:

(1) A – אוסף של 26 קב'. כל קב' היא בגודל לכל היותר 3. הקב' עם הסכום הכי קטן זו הקב' הריקה $\emptyset$, וסכום איבריה הוא 0. הסכום הכי גדול שמתקבל הוא $9+8+7=24$. השובכים הם הסכומים האפשריים $0,\dots,24$ (כלומר 25 שובכים), והיונים הן הקב' ב-A. אם כן, יש שתי קב' שסכומן שווה.

(2) $A=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\dots\{9\},\{9,1\},\{9,2\}\dots\{9,8\},\{9,8,1\},\{9,8,7\}\}$. אזי $|A|=25$ אך אין שתי קב' עם אותו סכום האיברים.