תורת ההסתברות 104222 ־ תרגיל 5

9 בינואר 2017

יש להגיש את התרגיל עד יום שלישי ה־ 15 לינואר.

.1

(א) יהיו $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ שני משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות עם פונקציות התפלגות F_X ו־ F_Y בהתאמה. הראו כי אם $\mathbf{P}(X \geq Y) = 1$, אז $F_X(t) \leq F_Y(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$. האם הטענה ההפוכה נכונה?

(ב) יהי $X \sim U([0,1])$ ו־ $Y = X$. חשבו את $F_{(X,Y)}$. האם היא רציפה? האם $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$? האם X ו־ Y בלתי תלויים?

(ג) הראו כי אם X בלתי תלוי בעצמו, אז קיים קבוע c כך ש־ $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

(ד) נניח כי (X,Y) וקטור מקרי רציף בהחלט עם פונקציית צפיפות

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-3y} & -1 < x < 1,\, y \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

האם X ו־ Y בלתי תלויים?

2. תהי $f_{(X,Y)}$ פונקציית הצפיפות של וקטור מקרי דו מימדי (X,Y). נניח כי

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} ce^{-\lambda x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר $\lambda > 0$ פרמטר נתון.

(א) מצאו את c.

(ב) מצאו את פונקציות הצפיפות של X ו־ Y.

(ג) חשבו את $\mathbf{P}(Y < X/2)$.

(ד) חשבו את $\mathbf{E}[XY]$ ואת $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

3. יהיו X ו־ Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי פונקציית התפלגות

$$F(z) = \begin{cases} \frac{z-1}{z} & z \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

חשבו את $f_{(X/Y,XY)}(u,v)$.

4. נבחר מספר באופן אחיד מהמספרים $[N] := \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ ונסמנה ב־ X_1. נבחר כעת נקודה באופן אחיד מהמספרים $\{1, 2, \ldots, X_1\}$ ונסמנה ב־ X_2. מצאו את ההתפלגות של הוקטור (X_1, X_2).

5. חישוב תוחלת באמצעות שיטת האינדיקטורים

(א) בקבוצה של n זוגות (סך הכל $2n$ אנשים) מחלקים פרס ל־ m אנשים. נסמן ב־ N את מספר הזוגות בהם אף אחד מבני הזוג לא זכה בפרס. חשבו את $\mathbf{E}[N]$.

(ב) מטילים מטבע עם סיכוי p לעץ n פעמים. נגדיר מקבץ להיות רצף הטלות בו מתקבלת אותה התוצאה. לדוגמה הסדרה HHTHHTTH מכילה 5 רצפים בעוד הסדרה HHHHHHTTTTHHT מכילה 4 רצפים. השתמשו בלינאריות של התוחלת על מנת לחשב את התוחלת של מספר הרצפים.

(ג) תהי $f : [n] \to [n]$ פונקציה מקרית חד חד ערכית ועל המפולגת באופן אחיד. נסמן ב־ T_n את מספר נקודות השבת של f. חשבו את $\mathbf{E}[T_n]$.

6. במוסף סוף השבוע של עיתון מופיע קופון לסופר. יש בסך הכל n קופונים שונים ולכל אחד הסתברות שווה להופיע. אדם מתחיל לאסוף את הקופונים, בכל שבוע את הקופון שמופיע בעיתון, במטרה להשיג את כל n הקופונים. נסמן ב־ T_k את מספר השבוע בו האדם השיג לראשונה k קופונים שונים.

(א) חשבו את התוחלת של $T_{k+1} - T_k$.

(ב) חשבו את התוחלת של מספר הימים הדרושים לקבלת כל הקופונים.

(ג) הראו כי התשובה לסעיף ב' היא בקירוב $n \log n$.

7. (אין חובה להגיש תרגיל זה) מקל באורך 1 נשבר בשתי נקודות אקראיות בלתי תלויות לשלושה קטעים.

(א) מהי ההסתברות שהקטע הקצר ביותר הוא האמצעי?

(ב) מהי תוחלת אורכו של הקטע הקצר ביותר?

(ג) נחלק כעת את המקל בדרך אחרת: שוברים אותו בנקודה אקראית, ולאחר מכן בוחרים באקראי את אחד הקטעים שנוצרו ושוברים אותו בנקודה אקראית. מצאו את פונקציית הצפיפות של מיקום נקודת השבירה השנייה בתוך הקטע המקורי.

(ד) מהו הממוצע של אורכו של הקטע הקצר ביותר בחלוקה החדשה?

0.1 נקודות למחשבה ־ לא להגשה

1. פונקציית Γ וההתפלגות האחידה בכדור.

(א) פונקציית Γ היא הכללה של פונקציית העצרת עבור $z > 0$ (למעשה עבור מספרים מרוכבים z כך ש־ $\mathrm{Re}(z) > 0$) המוגדרת על ידי

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \,.$$

i. הראו כי $\Gamma(1) = 1$ ו־ $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ והסיקו כי $\Gamma(n) = (n-1)!$.
ii. הראו כי $\Gamma(n+1/2) = 4^{-n}(2n)!\sqrt{\pi}/n!$.

(ב) (*) הוכיחו כי הנפח של כדור n־ממדי ברדיוס R, כלומר $\{(x_1,\dots,x_n)\,:\,x_1^2+\ldots+x_n^2\leq 1\}$ הוא

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n.$$

(ג) נסמן ב־ $X^{n,r}$ משתנה מקרי המתפלג אחיד בכדור n־ממדי ברדיוס r סביב הראשית. כלומר, ל־ $X^{n,r}$ פונקציית צפיפות

$$f_{X^{n,r}}(x)=\begin{cases}\frac{n\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}r^n} & |x|\leq r\\ 0 & |x|>r\end{cases}$$

הראו כי

$$f_{X^{n,\sqrt{n}}}(x)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

2. יהיו $X_1,\dots,X_N$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם פונקציית התפלגות F. עבור $1\leq k\leq N$ נסמן ב־ $X_{(k)}$ את הערך ה־ k קטן ביותר. למשל $X_{(1)}$ הוא הערך הקטן ביותר, $X_{(2)}$ הוא הערך השני הקטן ביותר וכו'. בפרט $X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\ldots\leq X_{(N)}$.

(א) מצאו את פונקציית ההתפלגות של $X_{(k)}$ במונחי F עבור $1\leq k\leq N$.

(ב) נניח כעת כי F היא פונקציית ההתפלגות של משתנה מקרי המתפלג אחיד על הקטע $[0,1]$. מצאו את התוחלת של $X_{(k)}$. רמז: השתמשו בעובדה כי

$$\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx=\frac{(s-1)!(t-1)!}{(s+t-1)!}.$$