תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 3 – פתרון חלקי

.1

א) יחס זה תת-קבוצה כלשהי של $A\times A$. ב- $A\times A$ יש 16 איברים. כאשר בונים יחס מסויים, לגבי כל אחד מבין 16 אברי $A\times A$ יש להחליט האם הוא שייך ליחס או לא. לכן יש 2^{16} יחסים.

ב) אם R – יחס רפלקסיבי, אז לכל $x\in A$, הזוג (x,x) שייך ל- R. יש 4 זוגות כאלה. לגבי כל אחד מבין שאר 12 אברי $A\times A$ יש להחליט האם הזוג שייך ל- R או לא – כמו בסעיף הקודם. לכן יש 2^{12} יחסים רפלקסיביים.

ג) נניח ש- R יחס סימטרי. אם x ו- y – שני איברים שונים של A, ברגע שמחליטים האם הזוג (x,y) שייך ל- R – בזה נקבע גם האם הזוג (y,x) שייך לו (או ששניהם שייכים ל- R, או ששניהם לא). זה אומר שלמעשה מחליטים האם זוג שייך ל- R, עבור חצי מהזוגות מהצורה (x,y), כאשר $x\neq y$ – כלומר עבור 6 זוגות. בנוסף, לגבי כל אחד מבין 4 אברי $A\times A$ מהצורה (x,x) יש להחליט האם הוא שייך ל- R. בסה"כ יש צורך ב- 10 החלטות כאלה, לכן יש 2^{10} יחסים סימטריים.

ד) נניח ש- R יחס אנטיסימטרי. אם x ו- y – שני איברים שונים של A, יש עבורם 3 אפשרויות: או $(x,y)\in R$ ו- $(y,x)\notin R$, או $(x,y)\notin R$ ו- $(y,x)\in R$, או $(x,y)\notin R$ ו- $(y,x)\notin R$. יש שש אפשרויות לבחור שני איברים שונים x ו- y מתוך ארבעת אברי A, וכפי שאמרנו, לכל אפשרות כזאת יש 3 החלטות אפשריות: או לקחת ליחס אחד מבין שני הזוגות הסדורים, או לא לקחת אף אחד מהם. בנוסף, לגבי כל אחד מבין 4 אברי $A\times A$ מהצורה (x,x) יש להחליט האם הוא שייך ל- R. בסה"כ 6 פעמים בוחרים אפשרות אחת מתוך שלוש ו- 4 פעמים בוחרים אפשרות אחת מתוך שתיים, לכן יש $3^6\cdot 2^4$ יחסים אנטיסימטריים.

ה) ידוע שכל יחס שקילות ב- A משרה חלוקה של A למחלקות שקילות, ויחסים שונים נותנים חלוקות שונות. לכן מספר יחסי השקילות שווה למספר החלוקות של קבוצה A. לצורך זה ניתן להניח ש- $A=\{1, 2, 3, 4\}$. קל לראות שכל החלוקות שלה לתת-קבוצות הן:

- חלוקה אחת שבה כל מחלקה בת איבר אחד:

  $\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \}$;

- שש חלוקות שבהן מחלקה אחת בת שני איברים ושתי מחלקות בנות איבר אחד:

  $\{ \{1,2\}, \{3\}, \{4\} \}$,
  $\{ \{1,3\}, \{2\}, \{4\} \}$,
  $\{ \{1,4\}, \{2\}, \{3\} \}$,
  $\{ \{2,3\}, \{1\}, \{4\} \}$,
  $\{ \{2,4\}, \{1\}, \{3\} \}$,

;{ {3,4}, {1}, {2} }

- שלוש חלוקות שבהן שתי מחלקות בנות שני איברים:

,{ {1,2}, {3,4} }
,{ {1,3}, {2,4} }
;{ {1,4}, {2,3} }

- ארבע חלוקות שבהן מחלקה אחת בת שלושה איברים ומחלקה אחת בת איבר אחד:

,{ {1,2,3}, {4} }
,{ {1,2,4}, {3} }
,{ {1,3,4}, {2} }
;{ {2,3,4}, {1} }

- חלוקה אחת שבה מחלקה אחת בת ארבעה איברים:

.{ {1,2,3,4} }

בסה"כ יש 15 חלוקות, ולכן יש 15 יחסי שקילות ב- A.

2. נניח שהיחסים הם בקבוצה X.

א) <u>רפלקסיביות</u>: לכל $x \in X$ מתקיים $\begin{cases}(x,x) \in R \\ (x,x) \in S\end{cases}$ (כי R ו- S יחסי שקילות), ולכן $(x,x) \in R \cap S$.

<u>סימטריות</u>: $(x,y) \in R \cap S \Leftarrow \begin{cases}(x,y) \in R \\ (x,y) \in S\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}(y,x) \in R \\ (y,x) \in S\end{cases}$ (כי R ו- S יחסי שקילות) $\Leftarrow (y,x) \in R \cap S$.

<u>טרנזיטיביות</u>: $\begin{cases}(x,y) \in R \cap S \\ (y,z) \in R \cap S\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}(x,y) \in R \\ (y,z) \in R \\ (x,y) \in S \\ (y,z) \in S\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}(x,z) \in R \\ (x,z) \in S\end{cases}$ (כי R ו- S יחסי שקילות) $\Leftarrow (x,z) \in R \cap S$.

ב) נוכיח קודם ש- R^{-1} הוא גם יחס שקילות:

<u>רפלקסיביות</u>: לכל $x \in X$ מתקיים $(x,x) \in R \Leftarrow (x,x) \in R^{-1}$.

<u>סימטריות</u>: $(x,y) \in R^{-1} \Leftarrow (y,x) \in R \Leftarrow (x,y) \in R$ (כי R יחס שקילות) $\Leftarrow (y,x) \in R^{-1}$.

<u>טרנזיטיביות</u>: $\begin{cases}(x,y) \in R^{-1} \\ (y,z) \in R^{-1}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}(z,y) \in R \\ (y,x) \in R\end{cases} \Leftarrow (z,x) \in R$ (כי R יחס שקילות) $\Leftarrow (x,z) \in R^{-1}$.

לפי כך, R^{-1} הוא יחס שקילות, ולכן הטענה נובעת מהסעיף הקודם.

ג) <u>דוגמא 1</u>:

$X=\{1, 2, 3\}$

$R=\{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \}$

$S=\{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3) \}$

$R\cup S=\{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3) \}$

היחסים R ו- S הם יחסי שקילות, אבל $R\cup S$ לא (הוא לא טרנזיטיבי: $(1,2)\in R\cup S$ ו- $(2,3)\in R\cup S$ אבל $(1,3)\notin R\cup S$).

<u>דוגמא 2</u>:

$X=\mathbb{N}$.

$R=R_2=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: 2|x-y\}$

$S=R_3=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: 3|x-y\}$

R_2 ו- R_3 הם יחסי שקילות ידועים, אבל $R_2\cup R_3$ לא (הוא לא טרנזיטיבי: $(0,2)\in R_2\cup R_3$ ו- $(2,5)\in R_2\cup R_3$ אבל $(0,5)\notin R_2\cup R_3$ – כי $(5-0)$ לא מתחלק ב-2 ולא מתחלק ב- 3).

<u>הערה</u>: קל להוכיח שאם R ו- S יחסי שקילות, אז $R\cup S$ בהכרח רפלקסיבי וסימטרי, לכן בכל דוגמא שנוכל להביא כאן, $R\cup S$ יהיה לא טרנזיטיבי.

ד) **דוגמא:**

$X=\{1, 2, 3, 4\}$

$R=\{ (1,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4) \}$

$S=\{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$

$R\cup S=\{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4) \}$

היחסים R ו- S, וגם $R\cup S$ הם יחסי שקילות.

3.

א) **נתון שיש מחלקת אחת בדיוק. זה אומר כל אברי X נמצאים באותה מחלקת השקילות, כלומר – לכל $x,y\in X$ מתקיים xRy, כלומר – R הוא "היחס המלא": $R=X\times X$.**

ב) **נתון שמספר מחלקות השקילות שווה למספר אברי X. זה אומר שכל $x\in X$ הוא האיבר היחיד במחלקה שלו: $[x]=\{x\}$. כלומר, כל x ביחס רק עם עצמו. לכן R הוא "יחס הזהות": $R=\{(x,x): x\in X\}$ או במילים אחרות $xRy \Leftrightarrow x=y$.**

ג) **יחס הזהות הוא גם יחס שקילות, גם יחס סדר חלקי (לפי ההגדרות). נוכיח שאין יחס אחר כזה: אם R יחס שהוא גם יחס שקילות וגם יחס סדר חלקי אבל אינו יחס הזהות, אז קיימים $x, y\in X$ <u>שונים</u> כך ש- xRy. לפי הסימטריות של R, גם yRx. ואז לפי האנטיסימטריות של R, מתקיים $x=y$**

בסתירה למה שהנחנו. לכן יחס הזהות הוא היחס היחיד ב- X שהוא גם יחס שקילות וגם יחס סדר חלקי.

.4

א) היחס הוא $S_4=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: 5|x+4y\}$, כלומר $xS_4y \Leftrightarrow 5|x+4y$.

<u>רפלקסיביות</u>: לכל $x\in\mathbb{Z}$, $x+4x=5x \Rightarrow 5|x+4x \Rightarrow xS_4x$.

<u>סימטריות</u>: $xS_4y \Rightarrow 5|x+4y \Rightarrow x+4y=5k$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow y+4x=(5x+5y)-(x+4y)=(5x+5y)-5k=5(x+y-k) \Rightarrow 5|y+4x \Rightarrow yS_4x$.

<u>טרנזיטיביות</u>: $\begin{cases} xS_4y \\ yS_4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4y=5k \\ y+4z=5m \\ k,m\in\mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow x+5y+4z=5(k+m) \Rightarrow$

$\Rightarrow x+4z=5(k+m)-5y \Rightarrow 5|x+4z \Rightarrow xS_4z$.

ב) $xS_4y \Rightarrow x+4y=5k$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y=(x+4y)-5y=5k-5y=5(k-y) \Rightarrow xR_5y$.

$xR_5y \Rightarrow x-y=5k$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x+4y=(x-y)+5y=5k+5y=5(k+y) \Rightarrow xS_4y$.

לכן $S_4=R_5$. ידוע ש- R_5 הוא יחס שקילות ב- $\mathbb{Z}$, לכן גם S_4 כזה.

ג) S_3 אינו יחס שקילות כי הוא לא רפלקסיבי: לדוגמא, $(1,1)\notin S_4$ כי $1+4\cdot1=4$ לא מתחלק ב- 5. (הערה: הוא גם לא סימטרי ולא טרנזיטיבי.)

ד) התנאי הוא: השארית מחילוק של α ב- 5 היא 4, כלומר: $\alpha=5n+4$, $n\in\mathbb{Z}$.

(אפשרות אחרת לכתוב את זה: $\alpha=5n-1$, $n\in\mathbb{Z}$.)

נוכיח שהתנאי מספיק, כלומר:

אם $\alpha=5n+4$, $n\in\mathbb{Z}$, אז $S_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: 5|x+\alpha y\}$ הוא יחס שקילות.

<u>רפלקסיביות</u>: לכל $x\in\mathbb{Z}$, $x+\alpha x=(\alpha+1)x=(5n+5)x \Rightarrow xS_\alpha x$.

<u>סימטריות</u>: $xS_\alpha y \Rightarrow x+\alpha y=5k$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow y+\alpha x=(\alpha+1)(x+y)-(x+\alpha y)=(5n+5)(x+y)-5k \Rightarrow yS_\alpha x$.

<u>טרנזיטיביות</u>: $\begin{cases} xS_\alpha y \\ yS_\alpha z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\alpha y=5k \\ y+\alpha z=5m \\ k,m\in\mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+\alpha z=5(k+m)-(\alpha+1)y=5(k+m)-(5n+5)y \Rightarrow xS_\alpha z$.

נוכיח שהתנאי הכרחי, כלומר:

אם α לא מהצורה $5n+4$, $n\in\mathbb{Z}$, אז $S_\alpha=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: 5|x+\alpha y\}$ אינו יחס שקילות.

ידוע שכל מספר שלם ניתן לכתיבה בצורה $5n+r$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$ ו- $r\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

לכן אם α אינו מהצורה $5n+4$, אז $\alpha=5n+r$ כאשר $r\in\{0, 1, 2, 3\}$.

לכל α כזה S_α לא יהיה רפלקסיבי:

$1+\alpha\cdot 1=1+(5n+r)\cdot 1=5n+r,\ r\in\{0, 1, 2, 3\}$ – לא מתחלק ב- 5,
לכן $(1,1)\notin S_\alpha$.

5.

א) <u>רפלקסיביות</u>: לכל $x\in[0, \pi]$ מתקיים $\sin(x)=\sin(x) \Leftarrow xSx$.
<u>סימטריות</u>: $xSy \Rightarrow \sin(x)=\sin(y) \Rightarrow \sin(y)=\sin(x) \Rightarrow ySx$.
<u>טרנזיטיביות</u>: $\begin{cases} xSy \\ ySz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x)=\sin(y) \\ \sin(y)=\sin(z) \end{cases} \Rightarrow \sin(x)=\sin(z) \Rightarrow xSz$.
לכן S – יחס שקילות ב- $[0, \pi]$.

$$[0]=\{x\in[0, \pi]: xS0\}=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=\sin(0)\}=$$
$$=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=0\}=\{0, \pi\}$$

$$[\pi/2]=\{x\in[0, \pi]: xS(\pi/2)\}=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=\sin(\pi/2)\}=$$
$$=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=1\}=\{\pi/2\}$$

$$[1]=\{x\in[0, \pi]: xS1\}=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=\sin(1)\}=\{1, \pi-1\}$$

מחלקת שקילות כלשהי:
$$[a]=\{x\in[0, \pi]: xSa\}=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=\sin(a)\}=\{a, \pi-a\}$$

כלומר, כל מחלקת שקילות היא קבוצה של כל אברי $[0, \pi]$ בעלי אותו ערך מסויים של sinus. בקטע $[0, \pi]$ פונקצית ה-sinus מקבלת כל הערכים בין 0 לבין 1. כל אחד מהם מתקבל פעם אחת בדיוק כאשר x נע בין 0 לבין $\pi/2$.
לכן קבוצת המנה היא:
$[0, \pi]/S = \{[a]: a\in[0, \pi/2]\}$ כאשר $[a]=\{x\in[0, \pi]: \sin(x)=\sin(a)\}=\{a, \pi-a\}$

ב) S יחס במישור $\mathbb{R}^2$: $((a,b),(c,d))\in S \Leftrightarrow a+b=c+d$.
מצא $[(1,3)]$.
<u>רפלקסיביות</u>: לכל $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מתקיים $a+b=a+b \Leftarrow (a,b)S(a,b)$.
<u>סימטריות</u>: $(a,b)R(c,d) \Rightarrow a+b=c+d \Rightarrow c+d=a+b \Rightarrow (c,d)S(a,b)$.
<u>טרנזיטיביות</u>: $\begin{cases} (a,b)S(c,d) \\ (c,d)S(e,f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=c+d \\ c+d=e+f \end{cases} \Rightarrow a+b=e+f \Rightarrow (a,b)R(e,f)$.
לכן S – יחס שקילות ב- $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$[(1,3)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: (x,y)R(1,3)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y=1+3\}=$$
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y=4\}$$

מחלקת שקילות כלשהי:

$[(a,b)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: (x,y)R(a,b)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y=a+b\}$

כלומר, כל מחלקת שקילות היא קבוצה של כל אברי $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ בעלי אותו סכום של רכיבים. הסכום הזה מקבל כל הערכים הממשיים. כל אחד מהם מתקבל פעם אחת בדיוק כאשר (a,b) נמצא על ציר ה-X, כלומר בכל מחלקת שקילות יש איבר אחד בדיוק מהצורה $(a,0)$.
לכן קבוצת המנה היא:

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}/S = \{[(a,0)]: a\in\mathbb{R}\}$ כאשר $[(a,0)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x+y=a\}$.

ג) כל מחלקת שקילות – קבוצה של כל המספרים הטבעיים בעלי אותו מספר מסויים של ספרות.

$[8]=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$[123]=\{100, 101, 102, \ldots, 998, 999\}$

בכל מחלקת שקילות יש מספר יחיד מהצורה 10^k.
לכן קבוצת המנה היא:

$\mathbb{N}/S = \{[10^k]: k\in\mathbb{N}\}$ כאשר

$[10^k]=\{$כל הטבעיים בעלי k ספרות$\}=\{10^k, 10^k+1, \ldots, 10^{k+1}-1\}$

ד) המשמעות של היחס הזה:

$xSy \Leftrightarrow x$ ו- y מתחלקים באותן החזקות של 2.

מאחר ש- $2^k|x \Leftarrow 2^i|x$ לכל $i=1, 2, \ldots, k$, רק החזקה הגבוהה קובעת, כלומר: $xSy \Leftrightarrow$ החזקה הגבוהה של 2 שמחלקת את x שווה להחזקה הגבוהה של 2 שמחלקת את y.
לכן מחלקות השקילות הן:

$[1]=\{$מספרים טבעיים שלא מתחלקים ב- 2$\}=\{1, 3, 5, \ldots\}$

$[2]=\{$מספרים טבעיים שמתחלקים ב- 2 אבל לא ב- 4$\}=\{2, 6, 10, \ldots\}$

$[4]=\{$מספרים טבעיים שמתחלקים ב- 4 אבל לא ב- 8$\}=\{4, 12, 20, \ldots\}$

$[8]=\{$מספרים טבעיים שמתחלקים ב- 8 אבל לא ב- 16$\}=\{8, 24, 40, \ldots\}$

...

קבוצת המנה:

$\mathbb{N}/S = \{[2^k]: k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ כאשר $[2^k]=\{1\cdot2^k, 3\cdot2^k, 5\cdot2^k, 7\cdot2^k, \ldots\}$.