<u>סדרות של פונקציות והתכנסות במ"ש</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- הגדרה: תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציה בקבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$.
  - יהי $x \in E$. נאמר ש־ f_n מתכנסות נקודתית לפונקציה f בנקודה $x \in E$ אם $\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = f\left(x\right)$, ז.א.
    לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $x \in E$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \epsilon$.
  - נאמר ש־ f_n מתכנסות נקודתית ל־ f ב־ E אם $f_n\left(x\right) \longrightarrow f\left(x\right)$ לכל $x \in E$. ז.א.
    לכל $x \in E$, לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי $N = N\left(x, \epsilon\right)$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \epsilon$.
  - נאמר ש־ f_n מתכנסות במידה שווה ל־ f ב־ E אם:
    לכל $\epsilon > 0$ קיים מספר טבעי N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $x \in E$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \epsilon$.
    נחדד: כאן ה־ N הוא אחיד לכל ה־x־ים, אנחנו לא מסתכלים על f_n בכל נקודה בנפרד, אלה מסתכלים על f_n כסדרה של פונקציות שמתכנסות באופן אחיד לפונקציה f ב־ E.
    במקרה זה נסמן: $f_n \twoheadrightarrow f$ ב־ E.
- קריטריון קושי: f_n מתכנסת במ"ש ב־ E אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n, m \geq N$ ולכל $x \in E$: $\left|f_n\left(x\right) - f_m\left(x\right)\right| < \epsilon$.
- משפט: תהי $\{f_n\}$סדרת פונקציות ב־ E ותהי f. אזי $f_n \twoheadrightarrow f$ ב־ E אם ורק אם $\sup_E \left|f_n - f\right| \to 0$.
- משפט: אם f_n רציפות בתחום D ו־ $f_n \twoheadrightarrow f$ ב־ D, אזי f רציפה ב־ D.
- משפט: אם f_n אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ ו־ $f_n \twoheadrightarrow f$ שם, אזי f אינטגבילית שם ו־ $\int_a^x f_n \to \int_a^x f$ במ"ש ב־$[a, b]$.
- משפט: אם f_n גזירות ברציפות בקטע I כך ש־

  1. הסדרה f_n f’ מתכנסת במ"ש ב־ I לפונקציה ϕ

  2. קיים $x_0 \in I$ שבו $f_n\left(x_0\right)$ מתכנסת

  אזי f_n מתכנסות במ"ש ב־I לפונקציה f גזירה ו־ $f^{'} = \phi$ ב־ I.
- עבור טורי פונקציות $\sum f_n\left(x\right)$, מפעילים את המשפטים הקודמים עם סדרת הסכומים החלקיים.
- משפט ויירשטראס: אם לכל n קיים a_n כך ש־ $\left|f_n\right| \leq a_n$ ב־ E ו־ $\sum a_n < \infty$ אזי $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב־ E.

תרגילים:

1. תהי $f_n(x)=\frac{nx}{1+nx}$. הוכיחו כי $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה (במ"ש) בקטע $[\alpha,\infty)$ עבור $\alpha>0$. האם יש התכנסות במ"ש ב- $[0,\infty)$?

<u>פתרון:</u>

ברור ש- $f_n(x)=\frac{nx}{1+nx}\to 1$ לכל $x>0$. נעריך את $|f_n-1|$ עבור $x\geq\alpha$:

$$|f_n(x)-1|=\frac{1}{1+nx}\leq\frac{1}{1+n\alpha}$$

יהי $\epsilon>0$. נבחר N כך ש- $\frac{1}{1+N\alpha}<\epsilon$ ואז לכל $n\geq N$ ולכל $x\geq\alpha$ מתקיים

$$|f_n(x)-1|\leq\frac{1}{1+n\alpha}\leq\frac{1}{1+N\alpha}<\epsilon$$

אבל נשים לב ש- $f_n(0)=0$. f_n רציפות ב- $[0,\infty)$ ופונקצית הגבול לא רציפה שם לכן ההתכנסות היא לא במ"ש ב- $[0,\infty)$.

הערה: אין התכנסות במ"ש ב- $(0,\infty)$ כי $f_n\left(\frac{1}{n}\right)\equiv\frac{1}{2}$ אבל $f_n(x)\to 0$ לכל $x>0$. (מלאו את הפרטים).

2. תהי $f_n(x)=nx(1-x)^n$, $x\in[0,1]$. האם $\{f_n\}$ מתכנסות במ"ש ב- $[0,1]$?

<u>פתרון:</u>

קל לראות ע"י מבחן השורש ש- $f_n\to 0$ נקדותית.

על מנת לבדוק האם יש התכנסות במ"ש ב- $[0,1]$, נעריך את הערך הכי גדול של $|f_n-0|=f_n$.

ע"י חישוב פשוט, רואים ש- $x_n=\frac{1}{n+1}$ מקסימיזר של f_n לכן

$$\max f_n=f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

וזה שואף ל- $e^{-1}\neq 0$ לכן אין התכנסות במ"ש ב- $[0,1]$.

3. תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה לא זיהותית אפס ומקיימת: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(0)=0$.

מגדירים $g_n(x)=f(nx)$ ו- $h_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right)$. הראו ש-

- h_n, g_n מתכנסות נקודתית ולא במ"ש לאפס ב- $[0,\infty)$.
- $h_n\cdot g_n$ מתכנסת במ"ש לאפס ב- $[0,\infty)$. לא הבנתי את ההוכחה של החלק הזה

<u>פתרון:</u>

ברור כי לכל $x\geq 0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0$. אבל יש $x_0>0$ שבה $f(x_0)\neq 0$, ולכן $h_n(x_0n)=g_n\left(\frac{x_0}{n}\right)=f(x_0)$ לכן אין התכנסות במ"ש שם.

מצד שני, יהי $\epsilon>0$, קיים $M>0$ כך שאם $x\geq M$ או $x<\frac{1}{M}$ אז $|f(x)|<\epsilon$. בנוסף, משיקולי רציפות f וקיום הגבול ב-∞, f חסומה ב- $[0,\infty)$ בה"כ על ידי 1. לכן, לכל $n>M$ מתקיים:

אם $x\geq 1$ אזי $nx\geq n>M$ לכן $|f(nx)|<\epsilon$, ואם $x<1$ אזי $\frac{x}{n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{M}$ לכן $\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|<\epsilon$.

4. עבור α מספר ממשי נגדיר:

$$f_n\left(x\right)=n^{\alpha}xe^{-\frac{1}{2}nx^2}$$

עבור x קבוע אפשר למצוא
את הגבול עם מבחן המנה

- עבור אילו ערכי α הסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה ב־ $[0,1]$?
- עבור אילו ערכי α הסדרה $\left\{\int_0^1 f_n\left(x\right)dx\right\}$ מתכנסת?

<u>פתרון:</u>

ברור שלכל $x\in I=[0,1]$ מתקיים $f_n\left(x\right)\to 0$. יתר על כן $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ מקסימיזר של f_n ב־ I. $f_n\left(x_n\right)\to 0$ אם ורק אם $\alpha<\frac{1}{2}$ לכן $f_n\twoheadrightarrow 0$ ב־ I אם ורק אם $\alpha<\frac{1}{2}$.

מתקיים $\int_0^1 f_n=n^{\alpha-1}\left(1-e^{-\frac{n}{2}}\right)$ לכן הגבול קיים אם ורק אם $\alpha\le 1$.

5. נתונה סדרת פונקציות רציפות ואי־שליליות $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ המתכנסות במ"ש ל־ f שם. כמו כן נתון שלכל n קיים $\int_0^\infty f_n$ ו־ $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n=0$. הוכיחו שלכל $b>0$ מתקיים $\int_0^b f=0$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש־ $\int_0^\infty f_n=\int_0^b f_n+\int_b^\infty f_n$ וכמו כן $0\le\int_b^\infty f_n\le\int_0^\infty f_n$ לכן $\int_b^\infty f_n\to 0$. ומכאן $\int_0^b f_n\to 0$. אבל $f_n\twoheadrightarrow f$ ב־ $[0,b]$ לכן $\int_0^b f_n\to\int_0^b f$ ומיחידות הגבול $\int_0^b f=0$. ומזה גם נובע ש־ $\int_0^\infty f=0$.

מי זו חי?

6. א. תהי $f_n\left(x\right)=\frac{1}{n}\chi_{[n,n+1]}$ עבור $n>0$. הראו ש־ $f_n\twoheadrightarrow 0$ ב־ $\mathbb{R}$. וחשבו את $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n$.

ב. תהי $f_n\left(x\right)=n\cdot\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$. חשבו את $\lim_{n\to\infty}f_n$ בכל נקודה בה הגבול קיים. חשבו את $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n$.

ג. תהי $g_n\left(x\right)=x$ ו־ $f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. הראו ש־ f_n,g_n מתכנסות במ"ש ב־ $[0,\infty]$ אבל f_ng_n לא.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\epsilon>0$. נבחר N כך ש־ $\frac{1}{N}<\epsilon$. אזי לכל $n\ge N$ ולכל $x\in\mathbb{R}$:

$$\left|f_n\left(x\right)-0\right|=f_n\left(x\right)\le\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\epsilon$$

כמו כן, $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n=\lim_{n\to\infty}1=1$.

שימו לב: $f_n\twoheadrightarrow 0$ ב־ $\mathbb{R}$. אבל $\int_{\mathbb{R}}f_n\not\twoheadrightarrow\int_{\mathbb{R}}0$. זה לא סותר את המשפט מההרצאה, כי שם הכל מתרחש בקטע סגור וחסום.

ב. קל מאוד לראות ש־ $f_n\left(x\right)\to 0$. לכן $\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=0$. כמו כן, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n=1$.

שימו לב: $f_n\to f\equiv 0$ ב־ $[0,1]$ אבל $\int_0^1 f_n\not\twoheadrightarrow\int_0^1 f$. זה לא סותר את המשפט מההרצאה כי אין התכנסות במ"ש בקטע.

ג. ברור ש־ $g_n\twoheadrightarrow id_{\mathbb{R}}$. כמו כן $0\le f_n\le\frac{1}{n}$ ב־ $\mathbb{R}$ לכן $f_n\twoheadrightarrow 0$. אבל $f_n\left(x\right)g_n\left(x\right)\to 0$ נקודתית, ו־ $f_n\left(n\right)g_n\left(n\right)=1$ לכל n לכן אין התכנסות במ"ש ב־ $\mathbb{R}$.

שימו לב: בתרגיל בית אתם תוכיחו שבהנחות מתאימות f_ng_n מתכנסות במ"ש בתחום. הבעיה היא ש־ g_n לא חסומה ב־ $\mathbb{R}$. (ראו תרגיל בית).

7. יהיו נתונים הקטעים $[c,d]$, $[a,b]$ וסדרת הפונקציות $f_n : [a,b] \to [c,d]$ שהיא מתכנסת במידה שווה ב־ $[a,b]$.

תהי $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכח שסדרת הפונקציות $\phi \circ f_n$ מתכנסת במידה שווה ב־ $[a,b]$.

<u>פתרון:</u>

נניח $f_n \twoheadrightarrow f$. ברור שהגבול הפוטציאלי של $\phi \circ f_n$ הוא $\phi \circ f$.

אנחנו רוצים להעריך את $|\phi \circ f_n (x) - \phi \circ f (x)|$.

אנחנו יודעים ש־ ϕ רציף. לכן אם $t \approx s$ אזי $\phi(t) \approx \phi(s)$. מצד שני, $f_n \twoheadrightarrow f$ לכן החל ממקום מסוים, $f_n \approx f$ באופן אחיד על $[a,b]$. ומכאן:

יהי $\epsilon > 0$. מרציפות ϕ (במ"ש), קיימת $\delta > 0$ כך שאם $|s-t| < \delta$, $s,t \in [c,d]$ אזי $|\phi(t) - \phi(s)| < \epsilon$. מ־ $f_n \twoheadrightarrow f$, קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים: $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ לכל $x \in [a,b]$, ע"פ בחירת δ זה מחייב ש־ $|\phi(f_n(x)) - \phi(f(x))| < \epsilon$ לכל x לכל $n \geq N$.

8. נתונה סדרת פולינומים ריבועיים $p_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$, $n \geq 1$, המקיימת: $p_n \to f$ נקודתית ב־ $[-1,1]$.

- יש להוכיח ש־ f היא פולינום שמעלתו 2 לכל היותר.
- יש להוכיח שההתכנסות היא במ"ש ב־ $[-1,1]$.

<u>פתרון:</u>

$c_n = p_n(0)$ מתכנסת לכן c_n מתכנסת: $c_n \to c$.

כמו כן מתקיים: $p_n(1) + p_n(-1) = 2a_n$ מתכנסת: $a_n \to a$. $p_n(1) - p(-1) = 2b_n$ מתכנסת: $b_n \to b$. מכאן $p_n(x) \to ax^2 + bx + c$ לפי אריתמטיקה של גבולות. לכן $f(x) = ax^2 + bx + c$.

למעשה, $f \twoheadleftarrow p_n$ ב־ $[-1,1]$. נעריך לכל $x \in [-1,1]$

$$|p_n(x) - f(x)| \leq x^2 |a_n - a| + |x| |b_n - b| + |c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| + |c_n - c|$$

לכן

$$M_n = \sup_{[-1,1]} |p_n(x) - f(x)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| + |c_n - c| \to 0$$

לכן $f \twoheadleftarrow p_n$ ב־ $[-1,1]$.

9. נניח f_n סדרה של פונקציות חסומות ב־ E ו־ $f \twoheadleftarrow f_n$ אזי f חסומה.

<u>פתרון:</u>

מהנתון, לכל n קיים M_n כך ש־ $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל $x \in E$. מההתכנסות במ"ש קיים N כך שלכל $n \geq N$ ולכל $x \in E$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$. לכן לכל $x \in E$:

$$|f(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M_N$$

10. חקור את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>

בתרגול הקודם ראינו כי הטור מתכנס בלכל $x \in [-1,1]$. נראה שההתכנסות היא במ"ש שם. נשים לב ש־

$$\frac{|x|^n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1},\ x \in [-1,1]$$

הטור $\sum \frac{1}{n^2+1}$ מתכנס, לכן ע"פ מבחן וירשטרשס, הטור מתכנס במ"ש ב־ $[-1,1]$.

11. נגדיר $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \sin\left(\frac{x}{n}\right),\ x \in \mathbb{R}$$

א. הראו ש־ f מוגדרת היטב.

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)}{x}$.

אני התמשתי בגבול sinx/x=1 כשx=0. ואז בסכום סדרה הנדסית.
האם זה בסדר?

<u>פתרון:</u>

א. קל לראות ש־ $\left|\frac{n}{3^n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq \frac{n}{3^3}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ההתכנסות של $\sum \frac{n}{3^n}$ מחייבת את התכנסות הטור הנתון במ"ש ב־ $\mathbb{R}$.

ב. $f(0) = 0$. בנוסף, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$ מתכנס במ"ש באופן דומה, לכן מותר לבצע גזירה איבר־איבר ולקבל $f'(0) = \frac{1}{2}$ לכן

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3f'(3x) = \frac{3}{2}$$

12. א. תהי f_n סדרה של פונקציות המוגדרת בקבוצה E ויורדת שם לאפס. נניח שקיים $a \in E$ כך ש־ $f_n(x) \leq f_n(a)$ לכל n לכל $x \in E$.

הוכיחו ש־ $\sum (-1)^n f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב־ E.

ב. חקור את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+4n}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

<u>פתרון:</u>

א. ע"פ לייבניץ הטור מתכנס ל־ $S(x)$ ב־ E ו־

$$|S(x) - S_n(x)| \leq f_{n+1}(a) \to 0$$

ב־ E.

ב. לפי הסעיף הקודם, או ישירות:

ע"פ לייבניץ הטור מתכנס לכל x נגיד לפונקציה $f(x)$ ו־

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{|x| + 4(n+1)}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ לכן $|f - S_n| \leq \frac{1}{4(n+1)}$ ב־ $\mathbb{R}$ לכן $\sup_{\mathbb{R}} |f - S_n| \to 0$ כאשר $n \to \infty$, ז.א. $S_n \rightrightarrows f$ ב־ $\mathbb{R}$.

13. חשבו $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{e^n}$.

<u>פתרון:</u>

ידוע ש־ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ ולפי ויירשטראס יש התכנסות במ"ש ב־ $[-q,q]$ לכל $q\in(0,1)$. בדומה עבור $\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$. לכן

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$$

לכל $x\in(-1,1)$. נציב $x=e^{-1}$.

14. הוכח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{n^2x^2+1}$

א. מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$

ב. מתכנס במ"ש ב־ $[a,\infty)$ לכל $a>0$.

ג. ההתכנסות ב־ $[0,\infty)$ אינה במ"ש.

<u>פתרון:</u>

א. ע"י חישוב פשוט רואים ש־ $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|}{n^2x^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{|x|}$ אם $x\neq 0$ ואם $x=0$ זה טור של אפסים. בכל מקרה, ההתכנסות של $\sum\frac{1}{n^2}$ מחייבת את ההתכנסות של הטור הנתון.

ב. נשים לב שאם $a>0$ אז

$$\frac{|x|}{n^2x^2+1}=\frac{n^2x^2}{n^2x^2+1}\cdot\frac{1}{n^2x}\leq 1\cdot\frac{1}{n^2a},\ x\in[a,\infty)$$

מכיוון ש־ $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$ אז יש התכנסות במ"ש ב־ $[a,\infty)$.

ג. קל לראות שעבור $x\geq 0$ מתקיים $\sum_{n=k+1}^{2k}\frac{x}{n^2x^2+1}\geq\frac{xk}{4k^2x^2+1}$. ניקח $x_k=\frac{1}{k}\in[0,\infty)$ ואז

$$|S_{2k}(x_k)-S_k(x_k)|\geq\frac{1}{5}$$

לכן אין התכנסות במ"ש לפי קריטריון קושי.