אינטגרל כפול מוכלל

תרגיל: חשבו
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|-|y|}dxdy$$

פתרון: ניקח את הכיסוי של $\mathbb{R}^2$ שהוא $D_n = \{(x,y)| \ -n \leq x,y \leq n\}$. נקבל כי

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|-|y|}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{-n\leq x,y\leq n} e^{-|x|-|y|}dxdy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-|x|}e^{-|y|}dy =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} e^{-|x|}dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-|y|}dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx\right)^2 = 2^2 = 4$$

לפעמים אפשר גם כך:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|-|y|}dxdy = \iint\limits_{-\infty\leq x,y\leq \infty} e^{-|x|-|y|}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-|y|}dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx\right)^2 = 2^2 = 4$$

תרגיל: חשבו
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

פתרון: נחשב את
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

בשתי דרכים: כאשר ניקח את הכיסוי של $\mathbb{R}^2$ ע"י התחומים $D_n = \{(x,y)| \ -n \leq x,y \leq n\}$ אז נקבל כי

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}dy =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}e^{-y^2}dy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy =$$
$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

ומצד שני אם ניקח את הכיסוי $D_n = \{(x,y)| \ x^2+y^2 \leq n^2\}$ נקבל כי

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le n^2} e^{-x^2-y^2}dxdy =$$

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{0\le r\le n,\ 0\le\theta\le 2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^n re^{-r^2}dr = \lim_{n\to\infty}2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-n^2}+\frac{1}{2}e^0\right) = \pi$$

ולכן

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi$$

כלומר

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

לפעמים אפשר גם כך:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-y^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{0\le r<\infty, 0\le\theta\le 2\pi}e^{-r^2}rdrd\theta = \int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\infty}re^{-r^2}dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

ולכן

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi \longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

<u>תרגיל:</u> חשבו

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

<u>פתרון:</u> ניקח את הכיסוי $D_n = \{(x,y)|\ \frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le R^2\}$. אז

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} =$$

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

$$= \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\frac{1}{n}\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi}\frac{rdrd\theta}{(r^2)^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_{\frac{1}{n}}^{R}\frac{dr}{r^{2\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty}2\pi\int\limits_{\frac{1}{n}}^{R}\frac{dr}{r^{2\alpha-1}} =$$

$$= 2\pi\int_0^R\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}$$

והאינטגרל האחרון מתכנס בדיוק כאשר $2\alpha-1<1$ כלומר כאשר $\alpha<1$, ובמקרה זה נקבל

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=2\pi\int_0^R\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}=2\pi\frac{R^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}$$

אפשר גם כך:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\iint\limits_{0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi}\frac{rdrd\theta}{(r^2)^\alpha}=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R\frac{rdr}{(r^2)^\alpha}=2\pi\int\limits_0^R r^{-2\alpha+1}dr=$$

$$x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$$

$$=\ 2\pi\frac{r^{-2\alpha+2}}{-2\alpha+2}\Big|_{r=0}^{r=R}$$

וזה קיים בדיוק כאשר $-2\alpha+2>0$, כלומר $\alpha<1$.

<u>**תרגיל:**</u> חשבו

$$\iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

<u>**פתרון:**</u> ניקח את הכיסוי $D_n=\{(x,y)|\ R^2\le x^2+y^2\le n^2\}$. אז

$$\iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{R^2\le x^2+y^2\le n^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=$$

$$x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$$

$$=\ \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{R\le r\le n,\ 0\le\theta\le 2\pi}\frac{rdrd\theta}{(r^2)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_R^n\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}=\lim_{n\to\infty}2\pi\int\limits_R^n\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}=$$

$$=\ 2\pi\int_R^\infty\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}$$

והאינטגרל האחרון מתכנס בדיוק כאשר $2\alpha-1>1$ כלומר כאשר $\alpha>1$, ובמקרה זה נקבל

$$\iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=2\pi\int_R^\infty\frac{dr}{r^{2\alpha-1}}=2\pi\frac{R^{2-2\alpha}}{2\alpha-2}.$$

אפשר גם כך

$$\iint\limits_{x^2+y^2\ge R^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}=\iint\limits_{R\le r<\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi}\frac{rdrd\theta}{(r^2)^\alpha}=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_R^\infty r^{-2\alpha+1}dr=2\pi\frac{r^{-2\alpha+2}}{-2\alpha+2}\Big|_R^\infty=$$

$$x=r\cos\theta\quad y=r\sin\theta$$

וזה קיים בדיוק כאשר $-2\alpha+2<0$, כלומר $\alpha>1$.

<u>**מסקנה:**</u> האינטגרל הכפול המוכלל

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

אינו מתכנס לכל α.

<u>תרגיל:</u> חשבו

$$\iint\limits_{x\geq 1, y\geq x^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2}$$

<u>פתרון:</u> ניקח את הכיסוי $D_n=\{(x,y)|\ 1\leq x\leq n,\ \ x^2\leq y\leq n^2\}$. אז

$$\iint\limits_{x\geq 1, y\geq x^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{1\leq x\leq n,\ \ x^2\leq y\leq n^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n dx \int\limits_{x^2}^{n^2} \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \left(\frac{1}{x^2} \arctan \frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y=n^2} \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\arctan\frac{x^2}{x^2}\right) dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{n^2}{x^2} - \frac{\pi}{4x^2}\right) dx = \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n^2}{x^2}dx \right) - \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n^2}{x^2}dx \right) - \frac{\pi}{4}.$$

נחשב את

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n^2}{x^2}dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{x}\arctan\frac{n^2}{x^2}\Big|_1^{n^2} - \int\limits_1^n -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{n^4}{x^4}}\cdot\left(-\frac{2n^2}{x^3}\right)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2}\arctan\frac{n^2}{n^4} + arctan(n^2) - 2n^2\int\limits_1^n \frac{1}{x^4+n^4}dx = \frac{\pi}{2} - \lim_{n\to\infty} 2n^2 \int\limits_1^n \frac{1}{x^4+n^4}dx.$$

נחשב בנפרד

$$\lim_{n\to\infty} 2n^2 \int\limits_1^n \frac{1}{x^4+n^4}dx = \lim_{n\to\infty} 2n^3 \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{n^4t^4+n^4}dt = \lim_{n\to\infty} 2n^{-1}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t^4+1}dt = 0$$

$$x=nt \quad dx=ndt$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך ש־

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t^4+1}dt = \int_0^1\frac{dt}{t^4+1}$$

והביטוי השני שואף לאפס. לכן

$$\iint\limits_{x\geq 1, y\geq x^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n^2}{x^2}dx \right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

ננסה את החישוב בעזרת כיסוי אחר: $D_n=\{(x,y)|\ 1\leq x\leq n,\ \ x^2\leq y\leq nx\}$.
שימו לב! זהו באמת כיסוי. בנקודה $x=n$ אנו מקבלים כי $nx=n^2$, $x^2=n^2$ וכאשר $1\leq x\leq n$

מתקיים כי $x^2 \le nx$. ציירו זאת.

$$\iint\limits_{x\ge 1, y\ge x^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{1\le x\le n,\ x^2\le y\le nx} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n dx \int\limits_{x^2}^{nx} \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y=nx}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{nx}{x^2} - \frac{1}{x^2}\arctan\frac{x^2}{x^2}\right)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{n}{x} - \frac{\pi}{4x^2}\right)dx = \left(\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n}{x}dx\right) - \frac{\pi}{4}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

נחשב

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n}{x}dx = \lim_{n\to\infty} -\int\limits_1^{\frac{1}{n}} \arctan(nt)dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \arctan(nt)dt =$$

$$t=\frac{1}{x}\ \ dt = -\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^1 1\cdot\arctan(nt)dt = \lim_{n\to\infty} t\arctan(nt)\Big|_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{nt}{1+n^2t^2}dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\arctan(n) - \frac{1}{n}\arctan(1) - \left(\frac{1}{2n}\ln(1+n^2t^2)\Big|_{\frac{1}{n}}^1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\arctan n - \frac{1}{n}\arctan(1) - \frac{1}{2n}\ln(1+n^2) + \frac{1}{2n}\ln 2 = \frac{\pi}{2}$$

ובנוסף

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$$

ולכן

$$\iint\limits_{x\ge 1, y\ge x^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \left(\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \frac{1}{x^2}\arctan\frac{n}{x}dx\right) - \frac{\pi}{4}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

אפשר גם כך:

$$\iint\limits_{x\ge 1, y\ge x^2} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \iint\limits_{1\le x<\infty,\ x^2\le y\le\infty} \frac{dxdy}{x^4+y^2} = \int\limits_1^\infty dx \int\limits_{x^2}^\infty \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y=\infty}\right)dx = \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x^2}\arctan\frac{x^2}{x^2}\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\pi}{4}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

תרגיל: חשבו את

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

פתרון: יש לנו "בעיה" בנקודה $(0,1)$.
ניקח את הכיסוי

$$D_n = \{(x,y)|\ \frac{1}{n} \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y)|\ 0 \le x \le \frac{1}{n}, \quad 0 \le y \le 1-\frac{1}{n}\}$$

אז אפשר לרשום את האינטגרל בשתי הצורות הבאות:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}} dx \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{xdy}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 dx \int\limits_0^1 \frac{xdy}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

אנו רואים כי הנוסחא הראשונה ניתנת לחישוב אז נתחיל איתה.

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_0^1 \left(-(1+x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=\frac{1}{n}}^{x=1}\right) dy + \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} \left(-(1+x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{n}}\right) dy\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\int\limits_0^1 \left(-(1+1-y^2)^{-\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{n^2}-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) dy +$$

$$+ \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} \left(-(1+\frac{1}{n^2}-y^2)^{-\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) dy\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\int\limits_0^1 \left(-(2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{n^2}-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) dy + \int\limits_0^{1-\frac{1}{n}} \left(-(1+\frac{1}{n^2}-y^2)^{-\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) dy\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(-\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} +$$

$$+ \left(-\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) + \arcsin(y)\Big|_{y=0}^{y=1-\frac{1}{n}}\right)\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) - \arcsin\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) + \arcsin\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\right) =$$

$$= -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin(1) - \arcsin(1) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

אפשר גם כך:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \left(-(1+x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy = \int\limits_0^1 -(2-y^2)^{-\frac{1}{2}} + (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= -\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin y \Big|_{y=0}^{y=1} = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$