<u>אוילר</u>

הצורה הקנונית של משוואת אוילר היא

$$Ly = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = b(x)$$

שימו לב כי הצורה הקנונית של משוואות אוילר אינה מנורמלת.
ננסה לעשות החלפת משתנים. נניח קודם כי $x > 0$. נציב $x = e^t$ ונגדיר $Y(t) = y(e^t)$.
באופן שקול, $t = \ln x$ ולכן $y(x) = Y(\ln x)$.
נמצא את המד"ר של $Y(t)$: נגזור:

$$\begin{aligned}
y(x) &= Y(\ln x) = Y(t) \\
y'(x) &= Y'(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}Y'(\ln x) \\
xy'(x) &= Y'(\ln x) = Y'(t) = \frac{d}{dt}Y(t) \\
y''(x) &= Y''(\ln x)\frac{1}{x}\frac{1}{x} - Y'(\ln x)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}Y''(\ln x) - \frac{1}{x^2}Y'(\ln x) \\
x^2y''(x) &= Y''(\ln x) - Y'(\ln x) = Y''(t) - Y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)Y(t) \\
y'''(x) &= -\frac{2}{x^3}Y''(\ln x) + \frac{1}{x^3}Y'''(\ln x) + \frac{2}{x^3}Y'(\ln x) - \frac{1}{x^3}Y''(\ln x) = \\
= \ & \frac{1}{x^3}Y'''(\ln x) - \frac{3}{x^3}Y''(\ln x) + \frac{2}{x^3}Y'(\ln x) \\
& x^3y'''(x) = Y'''(\ln x) - 3Y''(\ln x) + 2Y'(\ln x) = Y'''(t) - 3Y''(t) + 2Y'(t) = \\
= \ & \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)Y(t)
\end{aligned}$$

וכן הלאה אפשר להוכיח באינדוקציה כי

$$x^k y^{(k)}(x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} - k + 1\right)Y(t)$$

ולכן, אחרי ההצבה נקבל מד"ר עבור $Y(t)$ שבצד שמאל שלה מקבלים מקדמים קבועים בלבד, והפולינום האופייני של צד שמאל הוא

$$\ell(r) = a_n r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_{n-1} r(r-1)\cdots(r-n+2) + \ldots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0.$$

אותו החישוב יעבוד עבור $x < 0$ וההצבה $x = -e^t$ או $t = \ln|x|$. נציב $Y(t) = y(-e^t)$ או $y(x) = Y(\ln|x|)$ ונעשה את אותם החישובים. שימו לב כי $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

סיכום קצר:

$$
\begin{aligned}
&LY = a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = b(x)\\
&x = \pm e^t \quad |x| = e^t \quad t = \ln|x| \quad Y(t) = y(\pm e^t) \quad y(x) = Y(\ln|x|)\\
&\ell(r) = a_n r(r-1)\cdots(r-n+1) + a_{n-1} r(r-1)\cdots(r-n+2) + \dots\\
&+a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0
\end{aligned}
$$

עבור $n = 2$

$$
\begin{aligned}
&a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = b(x)\\
&x = \pm e^t \quad |x| = e^t \quad t = \ln|x| \qquad Y(t) = y(\pm e^t) \quad y(x) = Y(\ln|x|)\\
&\ell(r) = a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = a_2 r^2 + (a_1 - 1) r + a_0\\
&a_2 Y'' + (a_1 - 1) Y' + a_0 Y = b(e^t) \qquad x > 0\\
&a_2 Y'' + (a_1 - 1) Y' + a_0 Y = b(-e^t) \qquad x < 0
\end{aligned}
$$

עבור $n = 3$

$$
\begin{aligned}
&a_3 x^3 y''' + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = b(x)\\
&x = \pm e^t \quad |x| = e^t \quad t = \ln|x| \qquad Y(t) = y(\pm e^t) \quad y(x) = Y(\ln|x|)\\
&\ell(r) = a_3 r(r-1)(r-2) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 =\\
= \quad &a_3 r^3 + (-3a_3 + a_2) r^2 + (2a_3 - a_2 + a_1) r + a_0\\
&a_3 Y''' + (-3a_3 + a_2) Y'' + (2a_3 - a_2 + a_1) Y' + a_0 Y = b(e^t) \qquad x > 0\\
&a_3 Y''' + (-3a_3 + a_2) Y'' + (2a_3 - a_2 + a_1) Y' + a_0 Y = b(-e^t) \qquad x < 0
\end{aligned}
$$

<u>תרגיל:</u> $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \qquad x > 0$

<u>פתרון:</u> זוהי הצורה הקנונית של משוואת אוילר. נשתמש בהצבה $x = e^t$ ונקבל
שהפולינום האופייני הוא $\ell(r) = r(r-1) - 3r + 3 = r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$
ולכן המד"ר החדשה היא $Y''(t) - 4Y'(t) + 3Y(t) = 0$
ופתרונותיה הם $e^t,\ e^{3t}$
וכאשר נחזור ל־$y(x)$ נקבל $|x|,\ |x|^3$
וכיוון ש־$x > 0$ אז $x,\ x^3$
כלומר הפתרון הכללי של המד"ר המקורית הוא $y(x) = c_1 x + c_2 x^3$

שימו לב כי אם היינו מבקשים לדעת מה קורה כאשר $x < 0$, השיקולים זהים עד לנקודה בה אנו מקבלים ש־ $|x|,\ |x|^3$
פתרונות. פה x שלילי ולכן נקבל כי $-x,\ -x^3$
פתרונות אבל כיוון שאלו פתרונות של מד"ר הומוגנית אפשר להכפיל אותם בסקלר והם עדיין יהיו פתרונות של ההומוגנית ולכן $x,\ x^3$
פתרונות גם עבור x שלילי. למעשה, אלה פתרונות המוגדרים על כל הישר. בדקו זאת.

<u>תרגיל:</u> $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^2}$

<u>פתרון:</u> נרשום את המשוואה בצורה הקנונית $x^2y'' + xy' + y = \ln x$

כיוון שיש לנו $\ln x$ בצד ימין אזי תחום ההגדרה הוא $x > 0$ ולכן נשתמש בהצבה $x = e^t$ ו־$Y(t) = y(e^t)$. נפתור קודם את ההומוגנית. ונקבל

$$\begin{aligned}
&\ell(r) = r(r-1) + r + 1 = r^2 + 1\\
&Y''(t) + Y(t) = 0\\
&\cos t,\ \sin t\\
&\cos(\ln|x|),\ \sin(\ln|x|)\\
&y_H(x) = c_1\cos(\ln|x|) + c_2\sin(\ln|x|)
\end{aligned}$$

נשתמש בוריאציית פרמטרים כדי למצוא פתרון פרטי עבור המד"ר האי־הומוגנית החדשה

$$Y''(t) + Y(t) = \ln e^t = t$$

כיוון שאנו יודעים את הפתרונות של ההומוגנית המתאימה שהם $\cos t,\ \sin t$.

$$\begin{aligned}
&Y_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t\\
&c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0\\
&-c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = t
\end{aligned}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל $c_2'(t) = -\frac{\cos t}{\sin t}c_1'(t)$

נציב למשוואה השניה $-c_1'(t)\sin t - \frac{\cos^2 t}{\sin t}c_1'(t) = t$

נמשיך לפתור ונקבל

$$\begin{aligned}
&-c_1'(t)\sin^2 t-\cos^2 t c_1'(t)=t\sin t\\
&c_1'(t)=-t\sin t\\
&c_2'(t)=t\cos t\\
&c_1(t)=\int -t\sin t dt=t\cos t-\sin t+c_1\\
&c_2(t)=\int t\cos t dt=t\sin t+\cos t+c_2\\
&Y_p(t)=(t\cos t-\sin t)\cos t+(t\sin t+\cos t)\sin t=t
\end{aligned}$$

ובהשוואת מקדמים

$$\begin{aligned}
&Y''(t)+Y(t)=t\\
&Y_p(t)=R_1(t)=a+bt\\
&Y_p'(t)=b\\
&Y_p''(t)=0\\
&a+bt=t\longrightarrow \quad a=0\ b=1\\
&Y_p(t)=t
\end{aligned}$$

בכל אופן

$$\begin{aligned}
&Y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+t\\
&y(x)=c_1\cos\ln|x|+c_2\sin\ln|x|+\ln|x|=c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x+\ln x
\end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון מתקיים כי $x>0$.

<u>תרגיל:</u> $y''+\frac{y}{x^2}=\ln x$

<u>פתרון:</u> נרשום את המשוואה בצורה הקנונית $x^2y''+y=x^2\ln x$

כיוון שיש לנו $\ln x$ בצד ימין אזי תחום ההגדרה הוא $x>0$ ולכן נשתמש בהצבה $x=e^t$ ו־$Y(t)=y(e^t)$. נפתור קודם את ההומוגנית. ונקבל

$$\begin{aligned}
&x^2y''+y=0\\
&p(r)=r(r-1)+1=r^2-r+1\\
&Y''-Y'+Y=0\\
&\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\longrightarrow\ e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t
\end{aligned}$$

נשתמש בהשוואות מקדמים על המד"ר האי־הומוגנית $Y''-Y'+Y=(e^t)^2\ln e^t=te^{2t}$

$$
\begin{aligned}
&Y_p(t)=R_1(t)e^{2t}=(c_0+c_1t)e^{2t}\\
&Y_p'(t)=(2c_0+c_1+2c_1t)e^{2t}\\
&Y_p''(t)=(2c_1+4c_0+2c_1+4c_1t)e^{2t}=(4c_0+4c_1+4c_1t)e^{2t}\\
&\big(4c_0+4c_1+4c_1t-2c_0-c_1-2c_1t+c_0+c_1t\big)e^{2t}=te^{2t}\\
&3c_0+3c_1+3c_1t=t\\
&c_1=\frac{1}{3},\ c_0=-\frac{1}{3}\\
&Y_p(t)=\frac{1}{3}\big(-1+t\big)e^{2t}\\
&Y(t)=c_1e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{3}\big(-1+t\big)e^{2t}\\
&y(x)=c_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+c_2\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)+\frac{1}{3}\big(-1+\ln x\big)x^2
\end{aligned}
$$

<u>תרגיל:</u> $x^3y'''+x^2y''+xy'-y=\frac{1}{x}$ עבור $x<0$

<u>פתרון:</u>

$$x=-e^t \quad t=\ln(-x) \quad Y(t)=y(-e^t) \quad y(x)=Y(\ln(-x))$$
$$\ell(r)=r(r-1)(r-2)+r(r-1)+r-1=r^3-2r^2+2r-1=(r-1)(r^2-r+1)$$
$$r_1=1 \quad r_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$e^t, e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t, e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$
$$Y'''-2Y''+2Y'-Y=-e^{-t}$$
$$Y_p(t)=ae^{-t}$$
$$Y_p'(t)=-ae^{-t}$$
$$Y_p''(t)=ae^{-t}$$
$$Y_p'''(t)=-ae^{-t}$$
$$\big(-a-2a-2a+a\big)e^{-t}=-e^{-t}\longrightarrow a=\frac{1}{4}$$
$$Y_p(t)=\frac{1}{4}e^{-t}$$
$$Y(t)=c_1e^t+c_2e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{4}e^{-t}$$
$$y(x)=c_1(-x)+c_2\sqrt{-x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(-x)\right)+c_3\sqrt{-x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(-x)\right)-\frac{1}{4x}$$

מה קורה עבור $x>0$?