תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 2

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.

(א)

נגדיר מאורעות:

$$A = \{\text{האות הראשון נקלט}\}$$

ועבור $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

$$B_i = \{\text{בסך הכל נקלטו } i \text{ אותות}\}.$$

אז

$$P = P(A) + P(A^c \cap B_1) + P(A^c \cap B_2) + P(A^c \cap B_3) = 1 - p + pq^{n-1} + \\ + p^2(n-1)q^{n-2} + p^3\binom{n-1}{2}q^{n-3}.$$

<u>תרגיל 2</u>.

נגדיר מאורעות:

$$U = \{\text{האוניה התגלתה}\},$$

ועבור $X \in \{A, B, C, D, E\}$,

$$U_X = \{\text{האוניה התגלתה באיזור } X\},\ W_X = \{\text{האוניה נמצאת באיזור } X\}.$$

(א)

$$P(U) = \sum_{X \in \{A,B,C,D,E\}} P(U|W_X)P(W_X) = 0.8 \times 0.1 + \\ +0.6 \times 0.1 + 0.6 \times 0.1 + 0.8 \times 0.4 + 0.9 \times 0.3 = 0.79.$$

ב)

$$P(W_E|U_D^c) = \frac{P(W_E \cap U_D^c)}{P(U_D^c)} = \frac{P(W_E)}{1-P(U_D)} = \frac{P(W_E)}{1-P(U|W_D)P(W_D)} =$$
$$= \frac{0.3}{1-0.8\times 0.4} = \frac{8}{17}.$$

ג)

$$P(W_X|U^c) = \frac{P(W_X \cap U^c)}{P(U^c)} = \frac{P(U_X^c|W_X)P(W_X)}{1-P(U)}.$$

לכן

$$\max_{X\in\{A,B,C,D,E\}} P(W_X|U^c) = P(W_D|U^c) = \frac{0.4\times 0.2}{0.21} = \frac{8}{21}.$$

<u>**תרגיל 3.**</u>

א)

מטעמי סימטריה: $P = 1/9$.

פתרון אחר, לפוריטנים שבתחום. יהא $X = 0.a_1a_2, a_3\ldots$ הפתוח העשרוני של המספר הנבחר, ויהא

$$\tau = \inf\{n : a_n \neq 0\}.$$

אז (לא לפני שבדקנו כי $P(\tau<\infty)=1$),

$$P(a_\tau = 5) = \sum_{n=1}^{\infty} P(a_\tau = 5, \tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(5\cdot 10^{-n} \le X < 6\cdot 10^{-n}) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 1/9.$$

ב)

יהא $X = 0.b_1b_2\ldots$ הפתוח הבינרי של המספר הנבחר. לכל $n\in\mathbb{N}$, לכל סדרה של מספרים טבעיים $\{j_i\}_{i=1}^n$, ולכל סדרה של מספרים $s_{j_i}\in\{0,1\}$, נקבל:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{b_{j_i} = s_{j_i}\}\right) = \text{(תבדקו זאת !)} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

בפרט, לכל $n \in \mathbb{N}$ ו- $s_n \in \{0,1\}$ נקבל:

$$P\left(\{b_n = s_n\}\right) = \frac{1}{2}.$$

לכן (למה ?) המאורעות A_i בלתי תלוים במשותף.

<u>תרגיל 4</u>.
באופן כללי, אף אחת מההעתקות האילו היא לא הסתברות:

$$Q_1(\Omega) = 0,\ \ Q_2(\Omega) = P(B),$$
$$Q_3 \text{ is not necessarily additive },\ \ Q_4(\emptyset) = P(B) > 0.$$

אבל, Q_2 היא הסתברות בתנאי ש- $P(B) = 1$, ואילו- Q_3 היא הסתברות אם $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, \bar{B}, \Omega\}$.

<u>תרגיל 5</u>.
(א)
התשובה: A ו- $\bar{A}$ תמיד תלוים כל עוד $A \notin \{0,1\}$ (כי הם זרים !). לעומת זאת, $\bar{A}$ ו- B אכן בלתי תלוים. לפיכך גם $\bar{A}$ ו- $\bar{B}$ הם בלתי תלויים.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(\bar{A})P(B).$$

(ב)
בעזרת אינדוקציה פשוטה ניתן להכליל את התוצאה של הסעיף הקודם למספר טבעי כלשהוא של מאורעות. לכן:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$