אלגברה ב־גליון 5

שניר הורדן 205689581

19 ביוני 2018

.3

נוכיח שזו אכן מכפלה פנימית, אנחנו מעל $\mathbb{R}$ לכן נבדוק רק את המרכיבים כדלהלן:
נסמן

$$p = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$q = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$z = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

1. לינאריות ברכיב הראשון־

$$(\alpha p + q, z) = (\alpha a_0 + b_0) c_0 + (\alpha (a_2 + a_1 + a_0) + b_0 + b_1 + b_2) (c_2 + c_1 + c_0) +$$

$$... + (\alpha (4a_2 + 2a_1 + a_0) + 4b_0 + 2b_1 + b_2) (4c_2 + 2c_1 + c_0) = \alpha a_0 c_0 + b_0 c_0 + ...$$

$$... + \alpha (a_2 + a_1 + a_0) (c_2 + c_1 + c_0) + (b_0 + b_1 + b_2) (c_2 + c_1 + c_0) ... = \alpha (p, z) + (q, z)$$

2.סימטריות־ צ.ל. $(p, q) = (q, p)$לפי קומטטיביות בכפל זה מתקיים
3. חיוביות לחלוטין־ צ.ל. $(p, p) > 0$ לכל $p \neq 0$.

$$(p, p) = a_0^2 + (a_0 + a_1 + a_2)^2 + (4a_0 + 2a_1 + a_2)^2$$

זה סכום של ריבועים אזי אם קיים מקדם כלשהו שאינו 0 הביטוי יהיה חיובי.
א.
נתבונן בטרנספורמציה $L(p(x)) = p(t)$ עבור $t \in \mathbb{R}$. נזכור כי מתקיים $\langle p, q \rangle = p(0) q(0) + p(1) q(1) + p(2) q(2)$וזו מ"פ על V. לפי משפט כל $q_0 \in \mathbb{R}_2[x]$ מגדיר פונקציונל $f_{q_0}(p) = \langle p, q_0 \rangle$.
נמצא בסיס $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ עבורו מתקיים
$\langle q_i, p_j \rangle = \delta_{ij}$ $(p_i, q_i \in \mathbb{R}_2[x])$ או $p_i(t_j) = \delta_{ij}$.$(t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq 3)(*)$

נגדיר $W=\{p(x)\in V \quad | \quad p(1)=p(2)=0\}$. אזי נמצא תת־בסיס המקיים $(*)$ אזי $W=span\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\right\}$. אזי $B_1=\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\right\}$.
נשלים לבסיס א"נ B של V כולו: $B=\left\{\frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)},\frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)}\right\}\cup B_1$.
הפולינומים הם בהכרח אורתוגונלים מהדרישה $(*)$ אזי בת"ל לפי משפט ופורשים את V כי הם שלושה וקטורים בת"ל ($\dim(V)=\dim(span\{B\})$).
ב.
נשים לב שמתקיים

$$p(x)=\sum_{i=1}^{3}\langle p(x),p_i(x)\rangle p_i(x)=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{part.\quad case} p(x)=p(0)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+p(1)\frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)}+p(2)\frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

נימוק: כאשר מבצעים את המ"פ $\langle p(x),p_i(x)\rangle$ כפי שהוגדר כל הגורמים פרט ל־$p_i(i-1)$ מתאפסים והוא נהיה 1. ואז כופלים באיבר בבסיס.
למה: יהא V מרחב וקטורי ותהא T העתקה לינארית. אז אם B הוא בסיס אורתונורמלי של V אז מתקיים $([T]_B)_{ij}=\langle Te_j,e_i\rangle$
כאשר

$$[P_W]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

זו גם הצורת גורדן שלה.
ג. נזכור כי מתקיים $\mathbb{I}=P_{W_\perp}\oplus P_W$ מאחר ומתקיים $V=W\oplus W_\perp$. אזי

$$\mathbb{I}p(x)=P_W(p(x))+P_{W_\perp}\Rightarrow p(x)-P_{W_\perp}(p(x))=P_W(p(x))\Rightarrow ||p(x)-P_{W_\perp}(p(x))||=||P_W(p(x))||$$

.
$[p(x)]_E=\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$. אך אנו עובדים לפי הבסיס B אז $P_w(p(x))=[P_W]_B[p(x)]_B$.
$[p(x)]_B=P_{B\to E}[(p(x))]_E$. נחשב:
נקבל

$$P_W\left(x^2-3x+7\right)=P_W(p(x))=p(0)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=7\frac{(0-1)(0-2)}{(0-1)(0-2)}=7$$

נזכור $||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. אזי

$$||P_W(p(x))||=\sqrt{\langle P_W(x^2-3x+7),P_W(x^2-3x+7)\rangle}=\sqrt{7^2+7^2+7^2}=\sqrt{3\times 49}=\sqrt{147}$$

4.

א.

<u>הוכחה</u>

יהא V ממ"פ סוף מימדי ויהיו $N,M\subseteq V$ תת־מרחבים. נניח ש־P ו־Q הן הטלות על N ו־M, בהתאמה.

נניח ש־$\forall x\neq 0,||Px-Qx||<||x||$. צ.ל. $\dim\,N=\dim\,M$.

נתבונן בהטלות $P|_M$ ו־$Q|_N$.

צ.ל. $Ker\,Q|_N=Ker\,P|_M=\{0\}$.

יהי $0\neq n\in N$.

$$||Pn-Qn||=||n-Qn||<||n||\Rightarrow Qn\neq 0$$

יהי $0\neq m\in M$.

$$||Pm-Qm||=||Pm-m||<||m||\Rightarrow Pm\neq 0$$

סיימנו. אז יש לנו פונקצייה חח"ע מ־N ל־M ולהפך. לפי קנטור־שרדר־ברנשטיין העצמות של N ו־M זהות. כלומר $\dim N=\dim\,M$.

מ.ש.ל.

ב. יהי $V=M_n(\mathbb{C})$ עם המ"פ הסטנדרטית $\langle A,B\rangle=tr\,(B^*A)$ ותהי P מטריצה הפיכה.

נגדיר $T_p:V\to V$ ע"י $T_P(A)=P^{-1}AP$.

אזי $T_p^*(A)=\left(P^{-1}AP\right)^*=P^*A^*P^{-1^*}$

$$tr\left(\left(P^{-1}AP\right)^*\right)\underbrace{=}_{transpose\,keeps\,same\,trace}tr\,(A)\underbrace{=}_{trace\,of\,similar\,matrices}tr\left(P^{-1}AP\right)$$

ג. עבור $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$$T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3d&2c\\-b&4a\end{pmatrix}\underbrace{\Rightarrow}_{coordinate\,vectors\,for\,basis\,B}T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3d\\2c\\-b\\4a\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T=\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&0&2&0\\0&-1&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}\underbrace{\Rightarrow}_{column\,vectors\,orthogonal}T^*=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-1&0\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

6.

יהא V ממ"פ סוף מימדי מעל $\mathbb{C}$ ויהא T אופרטור צמוד לעצמו $T^*=T$.

1. <u>הוכחה</u>

צ.ל. $\forall v\in V\ :\ ||v+iT(v)||=||v-iT(v)||$

$$||v+iT(v)||^2=\langle v+iT(v),v+iT(v)\rangle$$

$$=\langle v,v+iT(v)\rangle+\langle iT(v),v+iT(v)\rangle=\langle v,v\rangle+\langle v,iT(v)\rangle+\langle iT(v),v\rangle+\langle iT(v),iT(v)\rangle$$

$$=\langle v,v\rangle+-i\langle v,T(v)\rangle+i\langle T(v),v\rangle+i^2\langle T(v),T(v)\rangle\underbrace{=}_{\langle v,T(v)\rangle=\langle T^*(v),v\rangle\underbrace{=}_{T^*=T}\langle T(v),v\rangle}\langle v,v\rangle-\langle T(v),T(v)\rangle$$

$$||v-iT(v)||^2=\langle v-iT(v),v-iT(v)\rangle=\langle v,v-iT(v)\rangle+\langle -iT(v),v-iT(v)\rangle$$

$$=\langle v,v\rangle+\langle v,-iT(v)\rangle+\langle -iT(v),v\rangle+\langle -iT(v),-iT(v)\rangle=\langle v,v\rangle-\langle T(v),T(v)\rangle$$

2. <u>הוכחה</u>

$\Leftarrow$

נניח $v=0$. אזי בוודאי $v+iT(v)=0+i0=0$. כי לכל אופרטור $T(0)=0$.

$\Rightarrow$

נניח $v+iT(v)=0$.

$$0\underbrace{=}_{||x||=0\iff x=0}||v+iT(v)||=||v-iT(v)||$$

אזי $v-iT(v)=v+iT(v)=0$. כלומר $v=-iT(v)\wedge v=iT(v)$. אזי $v=0$.

3. <u>הוכחה</u>

צ.ל. :

1. $\exists D\in V\ :\ D(I+iT)=I$,$\exists C\in V\ :\ C(I-iT)=I$
2. U ,$UU^{-1}=\mathbb{I}$,$\left((I-iT)(I+iT)^{-1}\right)^*=\left((I-iT)(I+iT)^{-1}\right)^{-1}$

<u>1.</u> לפי סעיף 2 מתקיים $v+iT(v)=0$ אם"ם $v=0$. כלומר $Ker(I+iT)=\{0\}$.

אזי $Ker(I-iT)=\{0\}$ כי לפי סעיף 1 $||v+iT(v)||=||v-iT(v)||$ כלומר

$$v+iT(v)=0\underbrace{\iff}_{inner\,product\,definitely\,positive}||v+iT(v)||=0\iff||v-iT(v)||\iff v-iT(v)=0$$

אז יש להן אותו גרעין.

<u>2.</u> $\left((I-iT)(I+iT)^{-1}\right)^{-1}=(I+iT)(I-iT)^{-1}$

$$\left((I-iT)(I+iT)^{-1}\right)^*\underbrace{=}_{transpose\ laws}(I+iT)^{-1^*}(I-iT)^*=(I+iT)^{*^{-1}}(I-iT)^*$$

$$= \left(I^* + (iT)^*\right)^{-1} \left(I^* + (-iT)^*\right) \underbrace{\overbrace{=}^{T=T^*}}_{transpose\, laws} (I - iT)^{-1} (I + iT)$$

.7

הוכחה
תהא $A \in GL_n(\mathbb{C})$.
A הפיכה אז קיימות לה n שורות בת"ל שהם בסיס למ"ו $\mathbb{C}^n$. לפי משפט גרם־שמידט נוכל לבצע את תהליך גרם־שמידט על עמודות אלה ונקבל בסיס אורתונורמלי של מרחב העמודה של A.
נגדיר $B = \{b_1, ..., b_n\}$.
נתבונן באלגוריתם גרם־שמידט

$$v_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{j-1} \langle b_i, v_j \rangle v_j}{||b_i - \sum_{j=1}^{j-1} \langle b_i, v_j \rangle v_j||}$$

המחשה:
יהא $B = \{b_1, b_2\}$. אזי

$$v_1 = \frac{b_1}{||b_1||} \Rightarrow b_1 = v_1 ||b_1||$$

$$v_2' = b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{v_2'}{||v_2'||} \Rightarrow b_2 = v_2 ||v_2|| + \langle b_2, v_1 \rangle v_1$$

נייצג זו במטריצה

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||b_1|| & \langle b_2, v_1 \rangle \\ 0 & ||v_2|| \end{pmatrix}$$

אזי באופן כללי נקבל

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ b_1 & . & . & . & b_n \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \\ v_1 & . & . & . & v_n \\ | & | & | & | & | \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||b_1|| & \langle b_2, v_1 \rangle & . & . & \langle b_n, v_1 \rangle \\ 0 & ||b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1|| & . & . & \langle b_n, v_2 \rangle \\ 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ||b_i - \sum_{j=1}^{j-1} \langle b_i, v_j \rangle v_j|| \end{pmatrix}$$

נסמן $A = QR$ בהתאמה לאיור לעיל, וקיבלנו מטריצה עם עמודות אורתונורמליות, אזי לפי משפט מההרצאה מתקיים $Q^*Q = QQ^* = \mathbb{I}$ כלומר היא אוניטארית. R היא משולשת עליונה הפיכה, כי הנורמות חיוביות ממש כי $\forall i, b_i \neq 0$.
מ.ש.ל.

.1

לפי משפט כל מ"פ ניתנת לייצוג על ידי מטריצה מייצגת כך שמתקיים $([A])_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$.
אזי במקרה זה $f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ax_2y_3 + ax_3y_2$.
לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

נבדוק תכונת חיוביות לחלוטין. יהא $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + ax_3 \\ ax_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 2ax_2x_3 + x_3^2 \underbrace{\geq}_{if\,|a|\leq 1} x_1^2 + (x_2 + ax_3)^2 \underbrace{>}_{\exists x_i > 0} 0$$

נבדוק מתי A הפיכה:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \underbrace{\neq}_{iff\ a \neq 1} 0$$

אם Aאינה הפיכה אז בוודאי שאינה חיובית לחלוטין כי אז קיים $x \neq \vec{0}$ המקיים $Ax = 0$
אז בוודאי $x^tAx = 0$. סתירה להגדרה.
אז התנאי הוא $|a| < 1$.
ב. יהא V ממ"פ סוף מימדי מעל $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. (מרחב אוקלידי או אוניטארי).
יהיו $v_1, ..., v_m \in V$ וקטורים.
נתבונן בביטוי

$$||v_1 + ... + v_m||^2 = \langle v_1 + ... + v_m, v_1 + ... + v_m \rangle \underbrace{=}_{linearity} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle v_i, v_j \rangle \underbrace{\overbrace{=}^{orthogonality}}_{\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} ||v_i||^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}} \sum_{i=1}^{m} ||v_i||^2$$

מ.ש.ל.
ג.<u>הוכחה</u>
יהא $v \in V$ ויהיו $v_1, ..., v_m \in V$ וקטורים א"נ. לפי גרם-שמידט נוכל להשלים לבסיס אורתונורמלי, $B = \{v_1, ..., v_m, u_1, ..., u_{n-m}\}$
נסמן $\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$. יהיו $\{\beta_1, ..., \beta_n\} \subset F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
צ.ל. $||v - \sum_{i=1}^{m} \alpha v_i|| \leq ||v - \sum_{i=1}^{m} \beta v_i||$.

$$(*)\,||\sum_{i=m+1}^{n}\beta_i u_i|| \iff ||\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i u_i|| \le |||| \iff ||\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i u_i||^2 \le ||\sum_{i=m+1}^{n}\beta_i u_i||^2$$

$$||v-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i|| \underbrace{=}_{v=\sum\langle v,v_i\rangle v_i} ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i-\sum_{j=1}^{m}\beta_j u_j|| = ||\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i u_i||^2 \underbrace{=}_{Pythogaras's\,theorem} \sum_{i=m+1}^{n}||\alpha_i u_i||^2$$

$$\underbrace{=}_{norm\,properties} \sum_{i=m+1}^{n}|\alpha_i|^2\,||u_i||^2 = \sum_{i=m+1}^{n}|\langle v,u_i\rangle|^2\,||u_i||^2 \underbrace{=}_{ortho.\,basis} \sum_{i=m+1}^{n}|\langle v,u_i\rangle|^2$$

$$||v-\sum_{j=1}^{m}\beta_j v_j|| = ||\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i-\sum_{j=1}^{m}\beta_j u_j|| = ||\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\beta_i)\,v_i+\sum_{j=m+1}^{n}\alpha_j u_j||$$

$$\underbrace{=}_{Pythogaras's\,theorem} \sum_{i=1}^{m}||(\alpha_i-\beta_i)\,v_i||+\sum_{j=m+1}^{n}||\alpha_j u_j|| \underbrace{=}_{ortho.\,basis} \sum_{i=1}^{m}|(\alpha_i-\beta_i)|^2+\sum_{i=m+1}^{n}|\langle v,u_i\rangle|^2$$

אזי

$$||v-\sum_{i=1}^{m}\alpha v_i|| \le ||v-\sum_{i=1}^{m}\beta v_i||$$

מ.ש.ל.

.2

יהא V מ"ו מעל $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ו־ $W\subseteq V$ תת־קבוצה.

נגדיר $A(W)=\{f\in V^*|\forall w\in W\ :\ f(w)=0\}$.

א.

1. עבור איבר ה־0 של $V*$(פונקציונל ה־0). $\forall W\subseteq V\,|\,o\in A(W)$ כי $\forall w\in V\ :$ $0(w)=0$.
2. סגירות לחיבור־ יהיו $f_i,f_j\in A(W)$. אזי מתקיים $f_i(w)+f_j(w)=0+0=0$ לכן $f_i+f_j\in A(W)$.
3. סגירות לכפל בסקלר־ יהא $\alpha\in F$, $f_i\in A(W)$. אזי $\forall w\in W\ :\ \alpha f_i(w)=\alpha 0=$ 0 .

ב. נניח $W'\subseteq W$.
יהא $a\in A(W)$. אזי $\forall w\in W\ :\ a(w)=0$. אזי $\forall w'\in W'\ :\ a(w')=0$. אזי $a\in A(W')$.
לכן $A(W)\subseteq A(W')$.
ג.הוכחה
יהיו $U,V\subseteq V$.

יהא $a \in A(U+W)$.
אזי $\forall x \in U+W \,:\, a(x)=0$.
אזי $\forall u \in U \,:\, a(u)=0$ וגם $\forall w \in W \,:\, a(w)=0$.
לכן $a \in A(W) \cap A(U)$.
אזי $A(U+W) \subseteq A(U) \cap A(W)$
יהא $b \in A(W) \cap A(U)$.
אזי $\forall w \in W \,:\, b(w)=0$ וגם $\forall u \in U \,:\, b(u)=0$.
אזי $\forall x \in U+W \,:\, b(x)=0 \Rightarrow b \in A(U+W)$.
לסיכום, $A(U+W) = A(U) \cap A(W)$.
מעתה נניח ש־V הוא סוף מימדי.
יהא $B_V = \{v_1,...,v_n\}$ $B_{V^*} = \{f_1,...,f_n\}$ עבור $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.
ד. $\dim V^* \underbrace{=}_{|B_{V^*}|=|B_V|} \dim V$.
$W = span\{v_i,...,v_j\}$
וכן $A(W) = span\{B_{V^*} \setminus \{f_i,...,f_j\}\}$. (שים לב לאינדקסים)
לכן $\dim A(W) = \dim\{B_{V^*} \setminus \{f_i,...,f_j\}\} = |B_{V^*}| - |\{f_i,...,f_j\}| = \dim V^* -$
$\dim W = \dim V - \dim W$
ה. נוכיח שוויון מימדים,
נעזר בבסיסים שהגדרנו לעיל,

$$A(U\cap W) = span\{B_{V^*} \setminus \{f_i,...,f_j\}\} = span\{B_{V^*} \setminus \{f_i,...,f_j,f_{u_1}...,f_{u_l}\}\} \cup span\left\{B_{V^*} \setminus \left\{f_i,...,f_j,f_{w_1}...,f_{w_g}\right\}\right.$$

מ.ש.ל.
ו. נניח $V = U \oplus W$.
נבחר בסיס $B = \{u_1,...,u_k,v_1,...,v_{n-k}\}$ כך ש־ $u_i \in U, w_i \in W$. נגדיר $B_{V^*} =$ $\{f_1,...,f_n\}$ כך ש־ $c_j \in B, f_i(c_j) = \delta_{ij}$.

$$A(U) = \{f \in V^* \,|\, \forall u \in U \quad f(u)=0\} = span\{B_{V^*} \setminus \{f_1,....,f_k\}\}$$

$$A(W) = \{f \in V^* \,|\, \forall u \in W \quad f(u)=0\} = span\{B_{V^*} \setminus \{f_{k+1},...,f_n\}\}$$

אז ש

$$A(W) \oplus A(U) = span\{B_{V^*}\} = V^*$$

ז.<u>הוכחה</u>
$X \subseteq V^*$. נגדיר $a(X) = \{v \in V \,|\, f \in X \,:\, f(v)=0\}$.
נראה שזהו תת־מרחב וקטורי של V:

1. איבר ה־0 של V הוא איבר של $a(X)$. $\forall f \in X \,:\, f(0)=0$. אז $0 \in a(X)$.
2. סגירות לחיבור וכפל בסקלר־ $(f+g)(\alpha v) = \alpha f(v) + \alpha g(v) = 0 \Rightarrow v \in a(X)$

תהי $W \subseteq V$.
נתבונן במ"ו $a\left(A\left(W\right)\right)$.

$$a\left(A\left(W\right)\right) = a\left(\left\{f \in V^* \,|\, \forall w \in W \,:\, f\left(w\right) = 0\right\}\right) = \left\{v \in V \,|\, \forall f \in \left\{f \in V^* \,|\, \forall w \in W \,:\, f\left(w\right) = 0\right\} \,:\, f\left(v\right) = 0\right\} =$$

<u>נימוק:</u> נתהונן בקבוצת כל הפונקציונלים שכל איברי W מאפסים אותם. אז אם נתבונן בקבוצת כל איברי W שמתאפסים באמצעות פונקציונל כלשהו מ־V^* נקבל את המ"ו הנפרש על ידי W כי אם נחבר או נכפול בסקלר את איברים אלו נשאר ב־W ואיבר ה־0 בוודאי נמצא שם.