שניר הורקן

1. מבחן אבל ← הוכחה

תהיינה f רציפה ב- $[a,\infty)$ ו- $\int_a^\infty f$ מתכנס, ו-g שגזירה ברציפות, מונוטונית וחסומה ב- $[a,\infty)$

קיים $M\in\mathbb{R}$ כך ש- $|g(x)|\le M$ לכל $x\in[a,\infty)$.

נשים לב כי: (לפי אינטגרציה בחלקים), עבור $F(x)=\int_a^x f$,

$$\int_a^\infty fg = Fg\Big|_a^\infty - \int_a^\infty Fg'$$

נפריד כל ביטוי ונטפל בו,

1. ע"פ $N-L$ מתקיים,

$$Fg\Big|_a^\infty = \lim_{M\to\infty} F(M)\cdot g(M) - \underbrace{F(a)g(a)}_{0}$$

$F(a)=\int_a^a f = 0$ אז מתאפס.

$$= \lim_{M\to\infty} F(M)g(M) = \lim_{M\to\infty} F(M)\cdot \lim_{M\to\infty} g(M)$$

(1)

(2)

(1) לפי משפט מונוטוניות I g מונו' וחסומה ולכן קיים הגבול.

(2) הגבול $\lim_{M\to\infty} F(M)$ קיים כי $\int_a^\infty f$ מתכנס.

לפי אריתמטיקה של הגבולות הביטוי $Fg|_a^\infty$ סופי.

2. g' רציפה מהנתון וכמו כן F כפונ' צוברת רציפה, אז:

$$\int_a^\infty Fg' \le M\cdot\int_a^\infty F \Rightarrow$$ מתכנס לפי הנתון

מאחר ו- $|F(x)g'(x)|\le M\cdot|F(x)|$ לכל $x\in[a,\infty)$ ומונוטוניות האינטגרל.

לפי מבחן ההשוואה לאינטגרלים חיוביים הטינ'

$\int_a^\infty Fg'$ מתכנס.

מאחר ו- $\int_a^\infty Fg'$ ו- $Fg|_a^\infty$ מתכנסים אז נוכל להסיק כי $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

מה שצריך להוכיח.

$\square$

2.א. <u>הטענה נכונה</u>

<u>הוכחה</u>

נניח כי a_n מתכנס בהחלט.
אז $\sum|a_n|$ מתכנס.
נשים לב כי זה גורר $|a_n| \xrightarrow[\text{שואפת}]{} 0$.
יהי $\varepsilon>0$.
אז קיים N כך שעבור $n>N$ מתקיים

$$|a_n|<\varepsilon$$

במקרה פרטי עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$, קיים N_2 כך שעבור $n>N_2$ מתקיים

ערך מוחלט אז חיובי

$$0<|a_n|<\frac{1}{2}$$

לכל $n>N_2$ מתקיים

$$0<a_n^2=|a_n^2|<|a_n|<\frac{1}{2}$$

לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים הטור $\sum a_n^2$ מתכנס. מאחר ומתקיים $\sum|a_n^2|=\sum a_n^2$ הוא גם מתכנס בהחלט.

$\square$

2.ב. הטענה אינה נכונה.
<u>נסביר באמצעות דוגמה נגדית:</u>

כאשר f היא פונקציית "האוהלים" מתקיים $\int_a^\infty f$ מתכנס.

נגדיר את f כך:
נבחר סדרת קטעים I_n כך ש- $I_n=[n-\frac{1}{2n^3}, n+\frac{1}{2n^3}]$.
נגדיר את f להיות 0 כש-x לא שייך לאף אחד מן הקטעים I_n, ובקטע I_n נגדיר אותו להיות משולש בגובה $f(n)=n$ במרכזו ו-0 בקצותיו.
עבור $\int$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ סופי עבור $\int^{\infty} f^2$ נקבל $\sum\frac{1}{2n}$.
ידוע כי זהו טור מתבדר.

$\square$

2.ג. הטענה נכונה.
<u>הוכחה</u>
נתבונן בגבול:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x}=0$$

לפי היינה נקבל,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=0$$

נשים לב כי $0<\ln(1+\frac{1}{n})$ לכל $n\in\mathbb{N}$

אז לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים נקבל כי $\sum\ln(1+\frac{1}{n})$ מתכנס. (ידוע כי $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס.)

$\square$

Scanned by CamScanner

ב.3. הטענה נכונה.

הוכחה

נעזר במשפט לייבניץ בהוכחה זו.

נגדיר $a_n=\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$

נעיין ~~[illegible]~~ בתתי-סדרות:

$$a_{2n}=\ln\left(1+\frac{(-1)^{2n}}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

$$a_{2n-1}=\ln\left(1+\frac{(-1)^{2n-1}}{n}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$$

לכל $n\in\mathbb{N}$.

זה עונה על הסדרה טור לייבניץ.

נותר להוכיח כי $|a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$$|a_n|=\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right|$$

נראה כי $|a_n|$ מונוטונית יורדת.

נזכור כי:

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)=-\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

נתבונן בתתי-סדרות $|a_{2n}|$ ו-$|a_{2n-1}|$.

מתקיים כי:

$$|a_{2(n+1)}|=\left|\ln\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)\right|<\left|\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right|=a_{2n}$$

לכל n ממונוטוניות פונקציית ה-ln.

באופן דומה,

$$|a_{2(n+1)-1}|=\left|\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right|=\left|-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right|<$$

$$\left|-\ln\left(1+\frac{1}{2n-2}\right)\right|=\left|\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\right|=|a_{2n-1}|$$

אלו שני תתי-סדרות "מכסות" את $|a_n|$.
שתיהן מונ' יורדות וחסומות מלרע ע"י 0
כי $\ln(1)=0$. לכן שתיהן מתכנסות ל-0.
לכן:
$\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ (לפי משפט מהרצאה I).

אזי עונים על תנאי טור לייבניץ אזי הטור מתכנס.

$\square$

2.ה. התשובה נכונה

נפריד לתתי-סדרות נשפיר ... $a_n = q^2+q+q^4+q^3 \dots$

$$a_{2n} = q^{n+1} \Longrightarrow S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} q^{k+1}$$

$$a_{2n-1} = q^{n-1} \Longrightarrow S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} q^{k-1}$$

~~[illegible]~~ מאוחר ו- $q\in(0,1)$ אלו סכומים של סדרה הנדסית אשר מתכנסת בין 0 ל-1.

אז,

$$S_{2n} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = q\cdot \frac{q^{2n}-1}{q^2-1} \xrightarrow{n\to\infty} q\cdot \frac{-1}{q^2-1}$$

$$S_{2n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = q^2\cdot \frac{q^{2n-1}-1}{q^2-1} \xrightarrow{n\to\infty} q^2\cdot \frac{-1}{q^2-1}$$

מאוחר ותתי-הסדרות מכסים את הסדרה, אז:

$$S_n = S_{2n} + S_{2n-1}$$

לכן $\lim_{n\to\infty} S_n$ קיים וסופי, כלומר $\sum a_n$ מתכנס.

3.ב. הוכחה

נניח בה"כ כי $0<f'(0)$.

מהנתון ש-f גזירה ב-0, נסיק:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} > 0$$

יהי $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(-\delta,\delta)$ מתקיים

$$\left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) < x(\varepsilon + f'(0))$$

לפי היינה עבור $0<a_n\xrightarrow{n\to\infty}0$

$$\Longrightarrow 0<\sum f(a_n) < \sum a_n\cdot(\varepsilon + f'(0))$$

כמו כן, מתקיים,

$$\left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(x)}{x} - f'(0)$$

$$\Longrightarrow 0 < x\cdot \underbrace{(f'(0)-\varepsilon)}_{\text{חיובי עבור } \varepsilon \text{ קטן די}} < f(x) \Longrightarrow 0<\sum a_n(f'(0)-\varepsilon) < \sum f(a_n)$$

בשני המקרים, נשתמש במבחן ההשוואה לטורים חיוביים ונסיק

$$\underbrace{\sum a_n}_{\text{מתכנס}} \Longleftrightarrow \underbrace{\sum f(a_n)}_{\text{מתכנס}}$$

3.ב. הוכחה

ראשית, נניח כי $\sum a_n$ מתכנס.

אזי $0 < a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

יהי $\varepsilon > 0$, קיים N כך שלכל $N < n$

$$0 < a_n < \varepsilon \Longrightarrow 0 < a_n < \varepsilon \cdot \underbrace{(1+a_n)}_{\text{מספר גדול מ-1}}$$

לכל n מתקיים:

$$\Longrightarrow 0 < \underbrace{\frac{a_n}{1+a_n}}_{\text{מחלקים את } a_n \text{ במספר הגדול מ-1}} < a_n < \varepsilon$$

לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

~~שנית, נניח בשלילה כי $\sum a_n$ מתבדר.~~
~~נוכיח כי $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.~~
~~כלומר $\sum a_n = \infty$. $a_n > 0$ לכל n.~~

שנית, נניח כי $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

לכן $\frac{a_n}{1+a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. כמו כן $0 < a_n$ לכל n.

לכל $\varepsilon > 0$ ובמקרה הפרטי עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים

$$\frac{a_n}{1+a_n} < \varepsilon = \frac{1}{2} \Longrightarrow a_n < (1+a_n)\frac{1}{2} \Longrightarrow 2a_n < 1 + a_n$$

$$\Longrightarrow a_n < 1$$

נשים לב כי:

$$2\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right) \ge 2\left(\frac{a_n}{1+1}\right) = a_n > 0$$

לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים נסיק כי $\sum a_n$ מתכנס.

$\square$

$a_1>0$, [illegible] . $a_n=\dfrac{\ln(e+a_{n-1})}{\ln(1+\frac{1}{n})}$ .4

$$\ln\left(e-1-\tfrac{1}{n}+a_{n-1}\right)=a_n$$

$$e^{a_n}=\underbrace{e-1-\tfrac{1}{n}}+a_{n-1} \qquad \sum$$

$$a_n\to 0$$

נגדיר $b_n=\ln(e+b_{n-1})$.

$$e^{a_n}\le 2e\cdot a_{n-1} \Rightarrow a_n\le a_{n-1}$$

מונוטונית יורדת

הוכחה

נוכיח באינדוקציה כי $\dfrac{\ln(e+a_{n-1})}{\ln(1+\frac{1}{n})}\ge\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$. לכל $n\in\mathbb{N}$.

בדיקת האינדוקציה עבור $n=1$:

$$a_2=\frac{\ln(e+a_1)}{\ln(1+1)}\ge\frac{1}{\ln(2)}$$

כי $a_1>0$.

נניח נכונות הטענה עבור n. נוכיח עבור $n+1$.

$$a_{n+1}=\frac{\ln(e+a_n)}{\ln(1+\frac{1}{n+1})}\underset{(1)}{\ge}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right)}{\ln(1+\frac{1}{n+1})}\ge\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n+1})}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$

$$(1)\ a_n=\frac{\ln(e+a_{n-1})}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}\ge\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$$ ממונוטוניות $\ln(x)$ ושם

בכך הסת"מ האינדוקציה.

כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n=\dfrac{\ln(e+a_{n-1})}{\ln(1+\frac{1}{n})}\ge\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$

נבדוק את התבדרות/התכנסות הסדרה $\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\text{"}\frac{1}{0}\text{"}=\infty$$

הסדרה מתבדרת. לכן לפי מבחן ההשוואה לסדרות, יש ש a_n מתבדרת.

נזכור כי אם $a_n\underset{n\to\infty}{\not\to}0$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

לכן $\sum a_n$ מתבדר.

$\square$