

הגשה: 11/01/2018

1. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n (\ln n)^2}$

ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

ג. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{(2x+1)^n}{n}$

2. חשבו את $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 3^{3n}}{n!}$

3. נסתכל על טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות R ותחום ההתכנסות של הטור.

ב. הוכיחו שב- $(-R, R)$ הפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 1}$ היא מונוטונית עולה.

4. רשמו את $\frac{1}{(1-x)^2}$ כטור חזקות סביב אפס $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ומצאו את תחום ההתכנסות.

השוו את התוצאה עם תגרי 4 גליון 6.

5. רשום. עבור $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ו- $I_n = \ln n$, נגדיר

$$u_n = S_n - I_n$$

ראיתם בהרצאה כי u_n מתכנסת לקבוע אוילר γ .

א. הוכיחו ש- $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \dots$ מתכנס.

רמז: התבוננו ב- T_{3n} , כש- T_n היא סדרת הסכומים החלקיים. הוראו ש- T_{3n} מגדירה סכום חלקי של טור (חיובי) מתכנס.

ב. הוכיחו ש-

$$T_{3n} = S_{4n-1} - \frac{1}{2}S_{2n-1} - \frac{1}{2}S_n$$

ג. חשבו את $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \dots$

6. רשום. תהי נתונה הסדרה $a_n, n \geq 0$ המוגדרת ע"י

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות R של $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

ב. נסמן $\phi = \frac{1}{R}$. הוכיחו כי $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

ג. הוכיחו כי $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\phi x} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-x(1-\phi)}$

ד. מצאו את a_n בעזרת ϕ .