written by Dani Movso

סיכום באינפי:

1. נוסחאות [illegible]

- הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$
- זהות פסקל: $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- **טענה:** לא קיים מספר רציונלי המקיים $x^2=2$.
  הוכחה: נניח בשלילה כי קיים מספר רציונלי המקיים $x^2=2$.
  נסמן $x=m/n$. נעלה בריבוע ונקבל: $2=x^2=m^2/n^2 \Leftarrow 2n^2=m^2$
  שני המספרים זוגיים ולכן יש להם מחלק משותף. סתירה להנחה
- **הכללת הטענה:** אם n טבעי, אינו ריבוע שלם, אז לא קיים $x\in\mathbb{Q}$ המקיים $x^2=n$. כלומר $\sqrt{n}$ מספר אי רציונלי.
- אי שיוויון ברנולי: לכל $x>-1$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.
- אי שיוויון הממוצעים: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$
- חוקי הערך המוחלט: אי שיוויון המשולש: – $|x+y|\leq|x|+|y|$
  – $||x|-|y||\leq|x-y|$

2. קבוצות חסומות:

הגדרה: – E חסומה מלעיל, אם קיים M כך שלכל $x\in E$ מתקיים: $x\leq M$
– E חסומה מלרע, אם קיים M כך שלכל $x\in E$ מתקיים: $x\geq M$
– קבוצה חסומה מלעיל ומלרע תקרא חסומה.
– E קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. M יקרא סופרמום של E
אם: M הוא החסם המלעיל הקטן ביותר של E.
– M הוא אינפימום של E אם הוא החסם מלרע הקטן ביותר של E.

- **אקסיומת השלמות:** לכל קבוצה E שאינה ריקה וחסומה מלעיל - קיים סופרימום
  $S=\sup A \Leftrightarrow$ (1) $\forall x\in E, x\leq S$. (2) לכל $\varepsilon>0$ קיים $x_0\in E$ כך ש: $S-\varepsilon<x_0$.
- **טענה:** $\mathbb{N}$ לא חסומה מלעיל.
  הוכחה: נניח בשלילה חסומה $\Leftarrow \alpha=\sup\mathbb{N} \Leftarrow n\leq\alpha \Leftarrow n+1\leq\alpha \Leftarrow \alpha-1$ חס
  מלעיל עבור $\mathbb{N}$. סתירה!
- **משפט:** לכל מספר חיובי a ולכל מספר טבעי $n\geq2$ יש מס' חיובי יחיד $x\in\mathbb{R}$ המקיים $x^n=a$.
- **משפט:** צפיפות הרציונליים והאי-רציונליים במישור הממשי.
  הוכחה: (א) a,b מס' ממשיים $\Leftarrow a<b$. קיים n טבעי המקיים: $n>\frac{1}{b-a} \Leftarrow$
  $n(b-a)>1 \Leftarrow nb-na>1 \Leftarrow$ קיים $k\in\mathbb{N}$ המקיים: $na<k<nb \Leftarrow$
  $a<\frac{k}{n}<b$ ו- $\frac{k}{n}\in\mathbb{Q} \Leftarrow$ קיים מס' רציונלי.
  (ב) עבור מס' אי רציונלי נשתמש ב: $\frac{a}{\sqrt{2}}<\frac{k}{n}<\frac{b}{\sqrt{2}}$.

3. סדרות של מספרים ממשיים: גבולות סופיים:

- **הגדרה:** $a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$ ⇐ לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי, כך שלכל $N<n$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$.

הערה: $|a_n-L|<\varepsilon \Leftrightarrow a_n\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ ולכן, כל איברי הסדרה החל ממקום מסוים ימצאו בקטע $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$.

- **משפט:** יחידות הגבול - אם קיים גבול אז הוא יחיד.

הוכחה: נניח בשלילה קיים $L_1\neq L_2$. נבחר $\varepsilon_0=\frac{L_2-L_1}{4}$.

$(L_1-\varepsilon_0,L_1+\varepsilon_0)\cap(L_2-\varepsilon_0,L_2+\varepsilon_0)=\emptyset$ הוכחה ע"י שלילת הקיום של x בחיתוך:

$|L_1-L_2|=|(L_1-x)+(x-L_2)|\le|L_1-x|+|L_2-x|<2\varepsilon_0 \Rightarrow \frac{|L_1-L_2|}{2}<\varepsilon_0 \Rightarrow$ סתירה להגדרת ε_0

- לפי הגדרת הגבול: $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L_1$ וגם $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L_2$. בוחרים $N=\max\{N_1,N_2\}$
ואז לכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L_1|<\varepsilon_0$ וגם $|a_n-L_2|<\varepsilon_0$ וזה שווה
$a_n\in(L_1-\varepsilon_0,L_1+\varepsilon_0)\cap(L_2-\varepsilon_0,L_2+\varepsilon_0)$ וזו סתירה לכך שהחיתוך ריק.

- **סתירת גבול של סדרה:** 1. $a_n\not\to L$ אם קיים $\varepsilon_0>0$ עבורו קיים $N<n$ כך ש- $|a_n-L|\ge\varepsilon_0$.

2. להראות שלסדרה יש שתי תתי סדרות שמתכנסות לגבולות שונים.

הערה: שינוי מספר סופי של איברים לא משפיע על קיום הגבול.

- **הגדרה:** a_n חסומה ⇐ קיים M כך שלכל $n\ge1$ מתקיים $|a_n|\le M$.

- **משפט:** סדרה מתכנסת ⇐ חסומה.

הוכחה: $a_n\xrightarrow{n\to\infty}L$. נבחר $\varepsilon=1$, קיים N כך שלכל $N<n$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon=1$.
$\Leftarrow a_n\in(L-1,L+1)$.
נסמן: $M=\max\{a_1,\dots,a_N\}$. לכל $n\le N$ מתקיים $a_n\le M$, לכל $N<n$ מתקיים $a_n<L+1$ ⇐ $a_n\le\max\{M,L+1\}$ ⇐ a_n חסומה מלעיל. ⇐ a_n חסומה.
באותו האופן מראים ש-a_n חסומה מלרע.

- **אריתמטיקה של גבולות:** $a_n\to A$, $b_n\to B$:

1. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha a_n\to\alpha A$

הוכחה: לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $|\alpha a_n-\alpha A|=|\alpha||a_n-A|<|\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon$
המשוואה הנ"ל מתקיימת כי $a_n\to L$ ולכן זה מתקיים עבור כל ε ובפרט $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$

2. $a_n+b_n\to A+B$

הוכחה: $a_n\to A$. עבור $\frac{\varepsilon}{2}>0$ קיים N_1 עבורו לכל $n>N_1$ מתקיים: $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$
$b_n\to B$. עבור $\frac{\varepsilon}{2}>0$ קיים N_2 עבורו לכל $n>N_2$ מתקיים: $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}$
נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$.
⇐ לכל $\varepsilon>0$, קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים:
$$|a_n+b_n-(A+B)|\le|a_n-A|+|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

3. $a_nb_n\to AB$

הוכחה: לכל $\varepsilon>0$, קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים:
$$|a_nb_n-AB|=|a_nb_n-Ab_n+Ab_n-AB|\le\underbrace{|b_n||a_n-A|}+\underbrace{|A||b_n-B|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$
b_n מתכנסת. קיים חסומה ⇐ $|b_n|\le M$
N_1 כך ש: $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2|M|}$
$A=0$ טריוויאלי
$A\neq0$ קיים N_2 עבורו $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2|A|}$

נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$ ואז זה מתקיים.

.4 $a_n\to A$, $b_n\to B$ $(B\neq 0)$ ⇐ $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{A}{B}$.

טענת עזר: $b_n\to B$, $B\neq 0$ אז קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ מתקיים: $|b_n|>\frac{|B|}{2}>0$

הוכחת המשפט: $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right| = \left|\frac{Ba_n-Ab_n}{Bb_n}\right| = \frac{|Ba_n+BA-BA-Ab_n|}{|B||b_n|} \le \frac{|B||a_n-A|+|A||b_n-B|}{|B||b_n|} <$

$$\underset{\text{טענת עזר}}{<} \frac{|B||a_n-A|+|A||b_n-B|}{\frac{|B|^2}{2}} < \frac{2}{|B|}\varepsilon+\frac{2A}{|B|^2}\varepsilon = 2\underbrace{\left(\frac{1}{|B|}+\frac{A}{|B|^2}\right)}_{\text{קבוע}}\varepsilon$$

נבחר $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$ ← N_2,N_3 נובעים מהגדרת הגבול עבור a_n , b_n .

• משפט: $a_n\to 0$ ו- b_n חסומה ⇐ $a_nb_n\to 0$

הוכחה: $\underbrace{|b_n|\le M}_{\text{נתון } b_n \text{ חסומה}}$, $\underbrace{|a_n-0|=|a_n|<\frac{\varepsilon}{M}}_{\text{קיים } N \text{ עבורו זה מתקיים}}$ ⇐ $|a_nb_n-0|=|a_nb_n|=|a_n||b_n|\le|a_n|M<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$

4. גבולות מוכללים (התכנסות במובן הרחב):

- הגדרה: $a_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ ⇐ לכל $M>0$, קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $a_n>M$.
- $a_n\xrightarrow{n\to\infty}-\infty$ ⇐ לכל $M>0$, קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $a_n<-M$.

• משפט: (i) אם $|a_n|\to\infty$ אז $\frac{1}{|a_n|}\to 0$

הוכחה: נבחר $M=\frac{1}{\varepsilon}$, נקח N המתאים להגדרת $|a_n|\to\infty$ ואז:
יהי $\varepsilon>0$, קיים N כך שלכל $n>N$: $\left|\frac{1}{|a_n|}-0\right|<\varepsilon$ ⇐ $|a_n|>\frac{1}{\varepsilon}$.

• משפט: (ii) אם $a_n>0$ לכל n , או החל ממקום מסויים ו- $a_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ אז: $\frac{1}{a_n}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$.

הוכחה: נתון $M>0$ צ"ל: N כך ש: $\frac{1}{a_n}>M$ ⟺ $a_n<\frac{1}{M}$. עבור $\varepsilon=\frac{1}{M}$ ומהגדרת הגבול עבור a_n זה מתקיים.

- הערה: 1. לכל $q>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$ (הוכחה: נסמן: $q=1+h$ ונשתמש באי שיוויון ברנולי).

סוג של מבחן המנה 2. עבור $|q|<1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ (הוכחה: בעזרת הערה (1) ומשפט (i)).

5. משפטים הקשורים לסדר של גבולות:

• משפט: אם $a_n\to A$, $b_n\to B$ ולכל n מתקיים (או החל ממקום מסויים) $a_n\ge b_n$, אז $A\ge B$.

- הערה: אי אפשר להניח ש: $a_n>b_n$ גורר $A>B$

הוכחה: מגדירים סדרה חדשה $c_n=a_n-b_n \xrightarrow{n\to\infty} C=A-B$ (לפי אריתמטיקה) ⇐ נניח בשלילה $C<0$ ונקבל סתירה.

• משפט: אם $a_n\to A$, $b_n\to B$ ומתקיים $A>B$ אז קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n>b_n$.

הוכחה: שוב מגדירים סדרה $c_n=a_n-b_n$.

• משפט הסנדוויץ': יהיו: $a_n\ge b_n\ge c_n$ לכל n (או החל ממקום מסויים) ומתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=L$

הוכחה: בעזרת הגדרת הגבול עבור הסדרות a_n,c_n ובחירת $N=\max\{N_1,N_2\}$.
בסוף מתקבל: $L-\varepsilon<c_n\le b_n\le a_n<L+\varepsilon$ ⇐ $|b_n-L|<\varepsilon$.

• משפט "הפיצה": אם $a_n\le b_n$ לכל n ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, אז $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

הוכחה: ממש ממש טריוויאלי!

• טענות שנובעות ישירות מהמשפטים הנ"ל:
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ הוכחה: $\sqrt[n]{n}=1+t_n$ ⇐ $t_n\to 0$ ⇐ בינום ⇐ סנדוויץ'.
- $\lim|a_n|=0$ ⟺ $\lim a_n=0$ הוכחה: ⇐: $-|a_n|\le a_n\le|a_n|$ ⇐ סנדוויץ'.
⟹: הגדרת הגבול: $|a_n-0|<\varepsilon$ שקול: $||a_n|-0|<\varepsilon$
- לכל $a>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ הוכחה: $a>1$: $\sqrt[n]{a}=1+t_n$ (t_n היא השאריות) נוכיח $t_n\to 0$ בעזרת $a=(1+t_n)^n$ והבינום של ניוטון ⇐ סנדוויץ'.
$a<1$: מתקיים $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ ואז נעזרים במקרה הקודם ובאריתמטיקה. $a=1$: יוצא סדרה קבועה.

* משפטי התכנסות שימושיים:

- התכנסות הממוצעים: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$:

א. סדרת הממוצעים החשבוניים של a_n, $b_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ מתכנסת לאותו הגבול.

הוכחה: מתלקים ל-2 מקרים: 1. $L=0$ $\Leftarrow$ משתמשים בהגדרה: $|b_n| = \underbrace{\frac{|a_1+\dots+a_N|}{n}}_{\text{שואף לאפס כי המונה קבוע והמכנה שואף לאינסוף}} + \underbrace{\frac{|a_{N+1}|+\dots+|a_n|}{n}}_{< \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}}$

2. $L\neq 0$ $\Leftarrow$ מגדירים $\alpha_n = a_n - L$ וזו אריתמטיקה $\alpha_n \to 0$ וזו סדרת הממוצעים החשבוניים של α_n מקיימת $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ב. $a_n>0$ לכל n $\Leftarrow$ $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \xrightarrow{n\to\infty} L$

הוכחה: מחלקים למקרים:

1. $L\neq 0$, אז $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{L}$ $\Leftarrow$ בעזרת הממוצע החשבוני
2. $L=0$, משתמשים בסנדוויץ' בין 0 והממוצע החשבוני של אותם מס'.

ג. $a_n>0$ לכל n $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \xrightarrow{n\to\infty} L$

הוכחה: מסקנה ישירה ע"י סנדוויץ' של שתי הטענות הקודמות.

- a_n סדרה חיובית ונניח $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} L$ $\Leftarrow$ $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} L$

הוכחה: מגדירים $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, b_n סדרה מתכנסת $\Leftarrow$ הממוצע ההנדסי שלה מתכנס לאותו ה-L.

- מבחן המנה: a_n סדרה חיובית כך ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} q$ אז:
  - $0\le q\le 1$: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
  - $q>1$: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

- מבחן השורש: a_n סדרה אי שלילית כך ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$ אז:
  - $q>1$: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$
  - $0\le q\le 1$: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

6. סדרות מונוטוניות:

- הגדרה: - a_n עולה ⇐ $a_{n+1} \ge a_n$ לכל n.
  - a_n יורדת ⇐ $a_{n+1} \le a_n$ לכל n.
  - סדרה עולה תמיד חסומה מלרע אך לא בהכרח מלעיל.

• משפט: כל סדרה מונוטונית וחסומה, מתכנסת: 1- עולה + חסומה מלעיל → מתכנסת
2- יורדת + חסומה מלרע → מתכנסת

הוכחה: מספיק להראות את 1. כי אם a_n יורדת אז $-a_n$ עולה.
a_n חסומה ⇐ קיים סופרימום - M. צ"ל: $\lim a_n = M$.
יהי $\varepsilon>0$. $M-\varepsilon$ אינו חסם מלעיל ולכן קיים אינדקס N כך ש: $a_N > M-\varepsilon$.
עבור $n>N$ מתקיים: $M-\varepsilon < a_N \le a_n \le M < M+\varepsilon$ ⇐ $|a_n - M| < \varepsilon$.
הסדרה עולה

• משפט: - סדרה עולה שאינה חסומה מתכנסת לאינסוף
- סדרה יורדת שאינה חסומה מתכנסת למינוס אינסוף.

הוכחה: יהי $M>0$. M אינו חסם מלעיל אז קיים N כך ש: $a_N > M$, עבור $n>N$ מתקיים: $a_n \ge a_N > M$.

• משפט: לכל $n \ge 1$ נגדיר: $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ⇐ $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.
הוכחה: מונוטונית עולה ⇐ חסומה ⇐ מתכנסת

• תכונות ממשיות:

- יהי $a>0$. $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$ ($x=\lim_{n\to\infty} r_n$, r_n סדרת רציונליים עולה).
- למה: אם t_n סדרה של רציונליים כך ש: $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ אז: $\lim a^{t_n} = 1$.
- הלמה של קנטור: תהי $I_n=[a_n,b_n]$ $n \ge 1$ סדרה של קטעים סגורים, כך ש: $I_{n+1} \subseteq I_n$.
אז, החיתוך: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \emptyset$, כלומר יש קטע המשותף לכולם.
בנוסף, אם מניחים שאורכי הקטעים $\lim|I_n| = \lim(b_n-a_n)=0$, אז: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ הוא נקודה בודדת.

הוכחה: נגדיר שתי סדרות: - a_n עולה וחסומה (הקצה השמאלי של הקטעים)
- b_n יורדת וחסומה (הקצה הימני של הקטעים)
$a_1 \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le b_1$ ⇐ $a_n \le b_n$ לכל n ולכן $A \le B$.
אחרי זה מראים $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [A,B]$ ע"י הכלה דו כיוונית: בוחרים x ששייך או לקטע או לאיחוד ומראים שהוא שייך גם לשני.
אם אורכי הקטעים שואפים לאפס מתקבל מאריתמטיקה $A=B$ ואז החיתוך הוא נקודה בודדת.

7. תתי סדרות:

- משפט: אם $\lim a_n = L$ קיים, אז כל ת"ס של a_n מתכנסת לגבול L.
הוכחה: מהנתון, לכל $\varepsilon>0$, $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ מכילה את כל איברי הסדרה פרט אולי למס' סופי. רק חלק ממס' סופי זה (אולי כולם) שייכים לתת הסדרה ולכן $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ מכילה את כל איברי ת"ס אולי פרט למס' סופי.

- הגדרה: אם $a_{n_j} \to L$, ת"ס של a_n אז L נקרא ג"ח של a_n.

- משפט: L ג"ח של a_n ⇔ לכל $\varepsilon>0$, $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ מכיל אינסוף מאיברי הסדרה.
הוכחה: דו כיוונית: ⇐: כמעט מיידי מההגדרה של ת"ס.
⇒: בונים ת"ס שמתכנסת ל- L באינדוקציה. כל פעם בוחרים $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

- משפט: כל מס' ממשי הוא גבול של סדרה של רציונליים.
הסבר: עבור L כנ"ל לפי המשפט על הצפיפות: $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ מכיל אינסוף רציונליים ולכן הוא ג"ח.

- **משפט:** $\mathbb{R}$ אינה קבוצה בת מנייה

הוכחה: בונים סדרה של כל המספרים בקטע $(0,1)$ לפי הפיתוח העשרוני שלהם
ואז מראים שקיים מס' ששייך לקטע אבל לא שייך לסדרה ולכן הסדרה
לא ממצה את כל איברי הסדרה. (בונים בעזרת קנטור - כמו בתקב"ז).

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה, יש לפחות ת"ס אחת מתכנסת
(אם לא חסומה, יש ת"ס ששואפת ל-∞ או ל-$-\infty$).
הוכחה: תהי a_n סדרה חסומה: $-M \le a_n \le M$.
בונים באינדוקציה סדרה של קטעים שכל פעם מכילים אינסוף מאיברי הסדרה.
סדרת הקטעים היא סדרה יורדת שאורכיה שואפים לאפס. לפי הלמה של
קנטור קיימת A נק' בודדה.
כדי להוכיח ש-A הינו ג"ח: בונים ת"ס שמתכנסת ל-A, (בנייה באינדוקציה).

- **משפט:** תהי a_n סדרה חסומה: a_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ יש לה ג"ח יחיד.

הוכחה: $\Rightarrow$: כל ת"ס שלה מתכנסת לאותו הגבול, ולכן הגבול יחיד.
$\Leftarrow$: נניח בשלילה כי a_n לא מתכנסת ל-L הג"ח היחיד. $\Leftarrow$ קיימים
אינסוף מאיברי הסדרה המקיימים $\varepsilon_0 \le |a_n - L|$(*) את כל איברי הסדרה (*)
נסמן בתור ת"ס: a_{n_k} $\Leftarrow$ ת"ס אינסופית $\Leftarrow$ לפי BW יש לה ת"ס מתכנסת
שבהכרח מתכנסת ל-L, אבל הנחנו ש $a_{n_{k_j}} \notin (L-\varepsilon_0, L+\varepsilon_0)$ וזה יוצר סתירה ולכן
a_n בהכרח מתכנסת.

גבול עליון וגבול תחתון:

- a_n סדרה חסומה. הגבול העליון יסומן: $\text{Lim}\,\text{Sup}\, a_n = \text{Sup}\{a : a_n$ ג"ח $a\}$
- a_n סדרה חסומה. הגבול התחתון יסומן: $\text{Lim}\,\text{Inf}\, a_n = \text{Inf}\{a : a_n$ ג"ח $a\}$

- **משפט:** תהי a_n סדרה חסומה. $L = \text{Lim}\,\text{Sup}\, a_n$ אז יש ת"ס של a_n המתכנסת ל-L.

הוכחה: מספיק להראות שבסביבת ε של L קיים ג"ח של הסדרה.
קיים ג"ח a כזה המקיים $L-\varepsilon < a \le L$ לפי האופיון של הסופרימום.

- **טענה:** a_n סדרה חסומה. אז, a_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\text{Lim}\,\text{Inf}\, a_n = \text{Lim}\,\text{Sup}\, a_n$.

הוכחה: $\Rightarrow$: קבוצת הג"ח מכילה רק איבר אחד.
$\Leftarrow$: הסופרימום והאינפימום שווים $\Leftarrow$ a ג"ח: $a \le L$ וגם $a \ge L$.

- **משפט:** עבור a_n חסומה: $\lim_{n\to\infty} \text{Sup}\, a_n = \lim_{n\to\infty} (\text{Sup}_{m\ge n}\, a_n)$

הוכחה: בונים סדרה h_n שכל איבר שלה מורכב מהסופרימום של איברי a_n
המקיימים $m \ge n$. h_n סדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן מתכנסת
לאינפימום של h_n.
$$\Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty} \text{Sup}\, a_n = \lim_{n\to\infty} (\text{Sup}_{m\ge n}\, a_n) = \text{Inf}_{n\ge 1} (\text{Sup}_{m\ge n}\, a_m)$$

- **הערה:** אריתמטיקה של גבולות לא בהכרח מתקיימת עבור $\text{Lim}\,\text{Sup}$.

- **טענה:** עבור סדרות חסומות a_n, b_n מתקיים: $\text{Lim}\,\text{Sup}(a_n+b_n) \le \text{Lim}\,\text{Sup}\, a_n + \text{Lim}\,\text{Sup}\, b_n$

הוכחה: לכל n קבוע ו- $m>n$ מתקיים: $\text{Sup}(a_m+b_m) \le \text{Sup}\, a_m + \text{Sup}\, b_m$.
אם זה נכון עבור כל n, נשאיף $n\to\infty$ ואז בעזרת המשפט הקודם ואריתמטיקה
מתקבל: $\lim_{n\to\infty}(\text{Sup}_{m\ge n}(a_m+b_m)) \le \lim_{n\to\infty}(\text{Sup}_{m\ge n}\, a_m + \text{Sup}_{m\ge n}\, b_m)$
$$= \lim_{n\to\infty} \text{Sup}_{m\ge n}\, a_m + \lim_{n\to\infty} \text{Sup}_{m\ge n}\, b_m$$

סדרות קושי: a_n תקרא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל
$m,n>N$ מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

- **משפט:** סדרה מתכנסת (לגבול סופי) $\Leftrightarrow$ היא סדרת קושי.

הוכחה: $\Rightarrow$: מניחים a_n מתכנסת ואז בהגדרת קושי, מוסיפים ומחסירים
את הגבול: $|a_m - L + L - a_n| \le |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\Leftarrow$: תנאי קושי גורר סדרה חסומה $\Leftarrow$ (1) מקבעים $m=N+1$, $\varepsilon=1$.
מחלקים את הסדרה לשניים: עד N+1 והחל מ-N+1. הסדרה חסומה.
(2) יש ת"ס המתכנסת ל-L. (3) כל הסדרה מתכנסת ל-L, משתמשים בקושי ובת"ס.

הלמה של היינה בורל:

- תהי A קבוצה ב-$\mathbb{R}$ ויהי Σ אוסף של קטעים. נאמר ש-Σ הוא כיסוי של A אם $A\subseteq\bigcup I$.
- אם $\Sigma^*\subset\Sigma$ הוא תת משפחה של Σ, שהוא גם כיסוי של A. נאמר ש-Σ^* תת כיסוי. אם Σ^* סופי, נאמר שזה תת כיסוי סופי.
- אם כל הקטעים ב-Σ הם פתוחים, נאמר שזהו כיסוי פתוח.

- משפט: הלמה של היינה בורל: יהי Σ כיסוי פתוח של קטע חסום וסגור $[a,b]$ אז יש לו תת כיסוי סופי.

הוכחה: נניח בשלילה שלא קיים תת כיסוי סופי.
⇐ נבנה באינדוקציה סדרה יורדת ואינסופית של קטעים מהסדרה: כל פעם חוצים את הקטע $[a,b]$ ובוחרים את הקטע שאין לו תת כיסוי סופי.
לפי הלמה של קנטור קיימת נקודה בודדת c השייכת לכל הקטעים.
קיים δ כך ש: $(c-\delta,c+\delta)\in I$. נקבע n כך ש: $\delta>\frac{b-a}{2^n}=|[a_n,b_n]|$
⇐ קיים תת כיסוי סופי $\Sigma^*=\{I\}$ של $[a_n,b_n]$.
⇐ סתירה להנחה שלא קיים תת כיסוי סופי.

8. קבוצות סגורות ופתוחות:

- הגדרה: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$. נק' $a\in\mathbb{R}$ נקראת נק' הצטברות של E אם כל סביבה של a מכילה לפחות נק' אחת של E השונה מ-a.
נסמן: E' - אוסף נקודות ההצטברות של E.

טענה: אם a נק' הצטברות של E, אז כל סביבה של a מכילה ∞ נק' של E.
הוכחה: בונים באינדוקציה סדרה של נק' שונות כך ש: $x_n\to a$.

- הגדרה: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$. נק' $a\in E$ תקרא נק' מבודדת של E אם יש סביבה של a שאינה מכילה אף נק' מ-E פרט ל-a.

- משפט: (בולצאנו ויירשטראס) אם E קבוצה אינסופית וחסומה, אז יש לה נק' הצטברות.
הוכחה: משתמשים בשיטת החצייה ובוחרים את החצי שלנק' בו אין נקודת הצטברות ולפי הלמה של קנטור, נגיע לנקודה משותפת שתהיה נק' הצטברות.

- הגדרה: 1. קבוצה $E\subseteq\mathbb{R}$ תקרא סגורה אם היא מכילה את כל נק' ההצטברות שלה. כלומר: $E'\subseteq E$.

2. נק' $a\in V$ תקרא נק' פנימית אם יש סביבת ε של a המוכלת ב-V. כלומר: $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq V$.

3. $E\subseteq\mathbb{R}$ תקרא קבוצה פתוחה אם כל נקודה $a\in\bar{E}$, הן נק' פנימיות.

הערה: E סגורה $\Leftrightarrow$ לכל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ כך ש: $a_n\to L$ אינה סגורה.

- הגדרה: הסגור של הקבוצה E הוא: $\bar{E}=E\cup E'$.

- טענה: $\bar{E}$ היא הקבוצה המינימלית המכילה את E.
הוכחה: מראים ש-$\bar{E}$ מכילה את כל נק' ההצטברות של E וגם את כל נק' ההצטברות של E'.
לכל $a\in(E')'$ קיימת סביבה שמכילה גם ∞ איברים של E המקוריות.

- תכונות של קבוצות פתוחות וסגורות:
1. אם $\{V_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות, אז האיחוד הוא קבוצה פתוחה.
2. אם $\{V_i\}_{i\in I}$ הוא אוסף סופי של קבוצות פתוחות, אז החיתוך הוא קבוצה פתוחה.
3. אם $\{E_i\}_{i\in I}$ קבוצות סגורות, אז החיתוך הוא קבוצה סגורה.
4. אם $\{E_i\}_{i\in I}$ קבוצות סגורות, אז האיחוד הוא קבוצה סגורה.

- משפט: E סגורה $\Leftrightarrow$ $U=\mathbb{R}\setminus E$ הקבוצה פתוחה. הוכחה: 3 טריוויאלית לפי הגדרות