<u>משפט:</u> יהי $T:V\to V$ אופרטור סמטרי על מרחב מכפלה פנימית V. אזי קיים בסיס אורתונורמלי של V המורכב מוקטורים עצמיים של T. כלומר T ניתן ללכסון או להצגה ע"י מטריצה אלכסונית בבסיס אורתונורמלי.

<u>הוכחה:</u> ההוכחה היא באינדוקציה על מימד V

עבור $n=1$ המשפט טריוויאלי.

נניח כי $\dim V = n > 1$

מהמשפט הקודם קיים $0 \neq v_1 \in V$ וקטור עצמי של T. יהי $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

יהי W תת המרחב הנפרש ע"י u_1. $W^\perp$: תת המרחב הניצב ל W.

$W^\perp$ הוא אינווריאנטי תחת T^* כי אם $w \in W^\perp$ אזי $\langle u, T^*(w)\rangle = \langle Tu, w\rangle =$

$= \lambda\langle u, w\rangle = 0$

אולם $T^* = T$ לכן $W^\perp$ אינווריאנטי תחת T

לכן $\hat{T} = T|_{W^\perp}$ הוא אופרטור סמטרי

וכן $V = W \oplus W^\perp$ ו- $\dim W^\perp = n-1$

לפי הנחת האינדוקציה קיים בסיס אורתונורמלי

$\{u_2,\dots,u_n\}$ של $W^\perp$ המורכב מווקטורים

עצמיים של $\hat{T}$ ולכן של T. אבל

$\langle u_i, u_1\rangle = 0$ כי $u_i \in W^\perp$ ו- $u_1 \in W$

ולכן $\{u_1,\dots,u_n\}$ מערכת

אורתונורמלית ולכן בסיס של V

המורכבת מווקטורים עצמיים של T.

$\square$

כעת אנו מתכוננים להוכיח את הטענה

האחרונה במשפט הקודם:

אם $T^* = T$ ו- $\langle T(u), u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$

אזי $T = P^2$

<u>הוכחה:</u>

נסתכל V בסיס אורתונורמלי $u_1,\dots,u_n$ של T

ניתן להציג כמטריצה אלכסונית

אז
$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ערכים עצמיים של T.

מאחר ש- $\langle T(u), u \rangle \geq 0$ נובע

כי $\langle \lambda u, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle \geq 0$

ולכן $\lambda \geq 0$.

לכן אפשר להוציא שורש מ λ

ולהגדיר

$$P(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i$$

ומכאן
$$T(u_i) = \lambda u_i = P^2(u_i)$$

<u>משפט:</u> יהי $T: V \to V$ אופרטור אורתוגונלי

על מרחב מכפלה פנימית <u>ממשי</u> V

אזי קיים בסיס אורתונורמלי אשר בו

ל T הצגה הבאה:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \begin{bmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix} & \\ & 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \begin{bmatrix}\cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

<u>הגדרה:</u> נגדיר אופרטור $S: V \longrightarrow V$

באופן $S = T + T^{-1} = T + T^*$

אזי $S^* = (T+T^*)^* = T + T^* = S$

לכן S אופרטור <u>סימטרי</u>. מהמשפט

הקודם נובע כי קיים ל-V בסיס אורתונורמלי

המורכב מווקטורים עצמיים $\{v_1, \dots, v_n\}$ של S

ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים השונים

של S. לכן ניתן לפרק את V

לסכום ישר של

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$$

כש V_i מורכבים מהוקטורים העצמיים המתאימים

לערך העצמי λ_i

יהי $v \in V_i$ אזי

$$S(v) = \lambda_i v$$

וכן
$$ST(v) = (T+T^{-1})(T(v)) =$$
$$T(T+T^{-1})(v) = T(\lambda_i (v)) =$$
$$\lambda_i T(v)$$

לכן גם $T(v)$ הוא וקטור עצמי של

S המתאים לערך העצמי λ_i

כלומר V_i אינווריאנטי תחת T

מאחר ו: כל V_i אורתוגונלי ל V_j ניתן

לבנות בסיס הבנוי ל V_i ספציפי.

לכן כי אם $v \in V_i$ ק"ים

$$(T+T^{-1})(v) = S(v) = \lambda_i v$$

נכפול ב T ונקבל

$$(T^2+I)(v) = \lambda_i T(v)$$

כלומר

$$(T^2 - \lambda_i T + I)(v) = 0$$

אם $v \in V_i$

אם $\lambda_i = \pm 2$ אזי $(T \pm I)^2(v) = 0$

ולכן $(T \pm I)(v) = 0$ או $T = \pm v$

ולכן $T|_{V_i} = \pm I_d$

אם $\lambda \neq \pm 2$ אזי ל T אין ווקטורים עצמיים

ב V_i כי אחרת ; $T^* = T^{-1}$ ולכן

כי $\lambda_i \in \mathbb{R}$; $\lambda_i = \pm 1$

ולכן v ; $T(v)$ הם בלת"י

תלויים לינארית

כי אם $aT(v) + bv = 0$ ולכן $T(v) = -\frac{b}{a} v$

יהי W תת מרחב של V הנפרש ע"י

v ו- $T(v)$ אזי W הוא T אינווריאנטי,

כי $v \to Tv$:

$$T(T(v)) = T^2(v) = \lambda_i T(v) - v \in W$$

ולכן $V_i = W \oplus W^{\perp}$; גם $W^{\perp}$ הוא

T אינווריאנטי,

לכן נפרק את V_i לסכום מרחבים דו ממדיים

W_j המושר W_i ניצבים ל W_j כאשר

$i \neq j$ וכל W_i הוא T אינווריאנטי,

ונחשב כעת על W_i הפולינום האופייני

על W_i : מתקיים $T^2 - \lambda_i T + I = 0$

כלומר $\Delta(t) = t^2 - \lambda_i t + 1$

לכן $\det A_1 = 1$ כאשר המטריצה של T

אולם A מטריצה המייצגת את T

בבסיס אורתונורמלי אזי מתקיים

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

הגדרה: אופרטור $T: V \to V$ על מרחב מכפלה פנימית V (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) יקרא **נורמלי** אם הוא מקיים $TT^* = T^*T$.

טענה: אם $T: V \to V$ אופרטור נורמלי על V אזי:

(1) $T(w) = 0$ אם ורק אם $T^*(w) = 0$

(2) $T - \lambda I$ נורמלי

(3) $T(v) = \lambda v$ אז $T^*(v) = \bar{\lambda} v$

(4) אם $T(v) = \lambda_1 v$; $T(w) = \lambda_2 w$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אזי $\langle v, w \rangle = 0$.

הוכחה:

(1)
$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = \langle v, TT^*v \rangle =$$
$$= \langle T^*v, T^*v \rangle$$
לכן $T(v) = 0 \iff T^*(v) = 0$.

(2)
$$(T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) = TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \lambda\bar{\lambda} I =$$
$$= T^*T - \bar{\lambda} T - \lambda T^* + \bar{\lambda}\lambda I = (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I) =$$
$$= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I).$$

(3) אם $Tv = \lambda v$ אזי $(T-\lambda I)v = 0$

ולכן $(T^*-\bar{\lambda} I)v = 0$ ולכן $T^*v = \bar{\lambda} v$

(4) $\lambda_1 \langle v,w\rangle = \langle \lambda_1 v, w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$

$= \langle v, \bar{\lambda}_2 w\rangle = \lambda_2 \langle v,w\rangle$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftarrow \langle v,w\rangle = 0$.

<u>משפט:</u> יהי T אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית <u>מרוכב</u> V כך ש- $\dim V < \infty$. אזי ל- V יש בסיס אורתונורמלי המורכב מווקטורים עצמיים של T.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על מימד V.

אם $\dim V = 1$ אזי הטענה ברורה.

נניח באינדוקציה כי הטענה נכונה עבור מרחבים וקטוריים ממימד $n-1$ ויהי $\dim V = n$.

V מרחב מרוכב ולכן ל- T לפחות ערך עצמי אחד ולכן לפחות וקטור עצמי אחד $v \neq 0$.

נסמן $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$ ו $W = \text{span}\{u_1\}$

המרחב W אינווריאנטי תחת T כי u_1 וקטור עצמי.

u_1 הוא גם וקטור עצמי של T^* (לפי המשפט הקודם) ולכן W אינווריאנטי תחת T^*.

<u>הערה!</u> המרחב $W^\perp$ אינווריאנטי תחת T

כי אם $w \in W^\perp$: $\langle u_1, w \rangle = 0$

אזי

$$\langle u_1, Tw \rangle = \langle T^* u_1, w \rangle$$

אבל u הוא וקטור עצמי גם של T^* ולכן

$$\langle T^* u, w \rangle = 0.$$

לכן $V = W \oplus W^\perp$ אבל $\dim W^\perp = n-1$

ושם הנחת האינדוקציה מתקיימת כלומר קיים לו בסיס אורתונורמלי $\{u_2, \dots, u_n\}$

ולכן $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של V.

□

כלומר ניתן לקבל את T כמטריצה אלכסונית.

נשים לב כי אם T הוא * יוניטרית

כלומר $T^* = T^{-1}$ אזי הוא בפרט נורמלית

כי $TT^* = TT^{-1} = I = T^{-1} \cdot T = T^* \cdot T$.

כמובן ניתן גם T - אלכסונית (מעל $\mathbb{R}$)

כלומר אם V הוא תמיד מרוכב אזי כל טרנספורמציה נורמלית וכפרט יוניטרית ניתנת ללכסון.

מה קורה כאשר V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
אזי הולכים להשתמש בתוצאות עבור $\mathbb{C}$ בכדי לטפל במקרה הממשי:

<u>מירכוב של מרחב ממשי.</u>

נתון V מעל $\mathbb{R}$ נגדיר על $\bar{V} = V \oplus V$

$$\bar{V} = \{ (v,w) \mid v,w \in V \}$$

$\bar{V}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

נגדיר כפל בסקלר מ $\mathbb{C}$ אם $a+ib \in \mathbb{C}$

אזי $(a+ib)(v,w) = \langle av-bw, bv+aw \rangle$

בהגדרה זו $\bar{V}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ (לבדוק!)

וקיים

$$\langle v,w \rangle = \langle v,0 \rangle + \langle 0,w \rangle =$$

$$\langle v,0 \rangle + i\langle w,0 \rangle = v+iw$$

ולכן כל וקטור ב $\bar{V}$ ניתן להצגה כ

$$v+iw$$

את המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב $\bar{V}$
נגדיר

$$\langle u+iv, s+it\rangle = \langle u,s\rangle + \langle u,it\rangle +$$

$$\langle iv, s\rangle + \langle iv, it\rangle =$$

$$\langle u,s\rangle - i\langle v,t\rangle + i\langle v,s\rangle + \langle v,t\rangle =$$

$$\left[\langle u,s\rangle + \langle v,t\rangle\right] + i\left[\langle v,s\rangle - \langle v,t\rangle\right]$$

כאשר $\langle\cdot,\cdot\rangle$ המכפלה ב V.

V אינו תת-מרחב של $\bar{V}$ מעל $\mathbb{C}$ כי עבור
$u\in V$ $iv\notin V$ ולכן אין סגירות.

הגדרה: נסמן ב $\hat{V}$ את המרוכב של V מעל $\mathbb{C}$
כך כל וקטור $z\in\hat{V}$ ניתן להצגה
כ $u+iV$ u - החלק הממשי של z
ו V החלק המדומה. הצמוד של z והוא $\bar{z}$
: $z=u-iV$.

הוקטורים הממשיים של V יקראו וקטורים ממשיים.

למה: $\alpha, \beta \in \hat{V}$; $z \in \mathbb{C}$ אזי

(1) $\overline{\alpha+\beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

(2) $\overline{z\alpha} = \bar{z}\,\bar{\alpha}$

(3) $\alpha + \bar{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$

(4) $\alpha - \bar{\alpha} = 2i\,\mathrm{im}\,\alpha$

(5) $\overline{\langle \alpha, \beta \rangle} = \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$

(6) α ממשי אם ורק אם $\alpha = \bar{\alpha}$

הוכחה: (1)-(4), (6) תרגיל

(5) $\alpha = (u+iv)$, $\beta = (s+it)$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle u+iv, s+it \rangle =$$

$$\left[\langle \alpha, s\rangle + \langle v, t\rangle\right] + i\left[\langle v, s\rangle - \langle u, t\rangle\right]$$

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle = \langle u-iv, s-it \rangle =$$

$$\left[\langle \alpha, s\rangle + \langle v, t\rangle\right] - i\left[\langle v, s\rangle - \langle u, t\rangle\right] = \overline{\langle \alpha, \beta \rangle}$$

למה: יהי מרחב וקטורי <u>ממשי</u> V ; $T: V \to V$

אזי קיימת טרנספורמציה לינארית יחידה $\hat{T}: \hat{V} \to \hat{V}$ המקיימת $\hat{T}\alpha = T\alpha$ לכל $\alpha \in V$.

הוכחה: נגדיר $\hat{T}(u+iv) = T(u) + i(T(v))$

אם $T' : \hat{V} \to \hat{V}$ גם היא מקיימת זאת אזי

$$T'(u+iv) = T'(u) + i\,T'(v) = T(u) + i\,T(v) = \hat{T}(u+iv)$$

למה: אם $T, S : V \to V$ אזי

(1) $\widehat{T+S} = \hat{T} + \hat{S}$

(2) $\widehat{TS} = \hat{T} \circ \hat{S}$

(3) $\widehat{T^*} = \hat{T}^*$

הוכחה: (1) תרגיל

(2)

$$\widehat{TS}(u+iv) = TS(u) + iTS(v) =$$

$$T(S(u)) + i\,T(S(v)) = \hat{T}(S(u) + iS(v)) =$$

$$\hat{T}(\hat{S}(u+iv)) = (\hat{T} \circ \hat{S})\,u+iv$$

(3) צריך להראות כי לכל $w, z \in \hat{V}$

קיים

$$\langle \hat{T}w, z \rangle = \langle w, \widehat{T^*}z \rangle$$

ולכן זה קורה כי לכל $u,v \in V$ $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$

<u>מסקנה:</u> $T: V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ אזי T נורמלית (סימטרית אורתוגונלית) אם ורק אם $\hat{T}$ נורמלית (הרמיטית יוניטרית)

<u>הוכחה:</u> עבור נורמליות (סימטריות ואורתוגונליות תרגיל)

נניח T נורמלית $TT^* = T^*T$.

$$\hat{T}\hat{T}^* = \hat{T}\widehat{T^*} = \widehat{TT^*} = \widehat{T^*T} = \hat{T}^*\hat{T}$$

כלומר $\hat{T}$ נורמלית. אם $\hat{T}$ נורמלית

אזי $\hat{T}\hat{T}^* = \hat{T}^*\hat{T}$ ולכן

$$\widehat{TT^*} = \hat{T}\widehat{T^*} = \hat{T}\hat{T}^* = \hat{T}^*\hat{T} = \widehat{T^*}\hat{T} = \widehat{T^*T}$$

לכל $v \in V$ וכן

$$(TT^*)v = (\widehat{TT^*})v = (\widehat{T^*T})v = T^*Tv$$

<u>כעת</u> <u>נעבור</u> <u>ערכים</u> <u>אופייניים</u>

שלא נורמלית מצב (1)

<u>משפט:</u> $T: V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$; $\hat{T}: \hat{V} \to \hat{V}$ המורכב שלה

(1) אם λ ערך אופייני <u>ממשי</u> של $\hat{T}$ אזי λ ערך אופייני של T

ולמרחב הוקטורים העצמיים של λ קיים בסיס אורתונורמלי מוקטורים של V.

2) אם μ ערך עצמי **לא** ממשי של $\hat{T}$

ו-$\{z_1,\dots,z_m\}$ בסיס למרחב הוקטורים העצמיים

של μ ב-$\hat{V}$ אזי גם $\bar{\mu}$ הוא ערך עצמי

של $\hat{T}$ ו-$\{\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m\}$ בסיס אורתונורמלי ל

מרחב הוקטורים העצמיים של $\bar{\mu}$.

__הוכחה:__ נניח $\lambda\in\mathbb{R}$ ערך עצמי של $\hat{T}$ אזי קיים

$z\neq 0\in\hat{V}$, $z=u+iv$ כך ש- $\hat{T}z=\lambda z$

אז $\hat{T}(u+iv) = Tu + iTv = \lambda u + \lambda i v$

נשווה חלקים ממשיים ומדומים ונקבל

$$Tu=\lambda u\ ,\ Tv=\lambda v$$

אז u או $v\neq 0$ ולכן λ ערך עצמי של T.

אם $S: V\to V$ אופרטור אזי

$$\ker\hat{S} = \{z\in\hat{V} \mid \hat{S}z=0\}$$

$$\ker S = \{v\in V \mid Sv=0\}$$

: $\mathrm{Span}\ker S$ הוא תת-מרחב של $\hat{V}$ הנפרש

על ידי וקטורי $\ker S$.

<u>טענה</u>: $\operatorname{Span}\ker S = \ker \hat{S}$

ברור כי $\operatorname{Span}\ker S \subset \ker \hat{S}$

יהי $z = u+iv \in \ker\hat{S}$ אזי

$$\hat{S}(u+iv) = Su + iSv = 0$$

ולכן $Su = Sv = 0$ כלומר $u, v \in \ker S$

ולכן $z \in \operatorname{Span}(\ker S)$

נגדיר $S = T - \lambda I$. נקבל כי בסיס אורתונורמלי

נסמן $V_\lambda = \ker T - \lambda I$ מרחבי V . קיים

$$\hat{V}_\lambda = \ker(\hat{T} - \lambda I) = \ker(\widehat{T - \lambda I}) =$$

$$\operatorname{span}(\ker(T - \lambda I)) = \operatorname{Span} V_\lambda$$

ולכן בסיס V_λ בסיס מעל $\mathbb{C}$ ל $\hat{V}_\lambda$

(2) אם $1 \le i \le m$ קיים $\hat{T} z_i = \mu z_i$

ולכן $\overline{\hat{T} z_i} = \overline{\mu \cdot z_i}$

והראנו $\overline{\hat{T}(u+iv)} = \overline{Tu + iTv} = \overline{\mu(u+iv)} =$

$$\bar{\mu}(u - iv) = \hat{T}(\overline{u+iv})$$

כלומר

$$\hat{T}\bar{z}_i = \bar{\mu}\bar{z}_i$$

ולכן $\bar{z}_i$ הוא וקטור עצמי השייך לערך העצמי $\bar{\mu}$

עבור הלקס $\hat{T}$

נסתכל על $\{\bar{z}_1, \dots \bar{z}_m\}$ ואמנם

$$\langle \bar{z}_i, \bar{z}_j \rangle = \overline{\langle z_i, z_j \rangle} = \bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij}$$

לכן זהו בסיס אורתונורמלי כי אם $z \in \hat{V}_{\bar{\mu}}$

אזי $\bar{z} \in \hat{V}_{\mu}$ ולכן $\bar{z} = \sum \eta_i z_i$

ולכן $z = \overline{\sum \eta_i z_i} = \sum \bar{\eta}_i \bar{z}_i$ כלומר

$$\hat{V}_{\bar{\mu}} = \mathrm{Span}\{\bar{z}_1, \dots \bar{z}_n\}$$

<u>משפט:</u> V מרחב וקטורי <u>מעל $\mathbb{R}$</u> $T: V \to V$

העתקה לינארית <u>נורמלית</u> אזי קיים ל V בסיס אורתונורמלי

אשר בו המטריצה של T מיוצגת ע"י מטריצה

מהצורה

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_\ell \end{pmatrix}$$

λ_i - ערכים עצמיים ממשיים של T

$$B_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \neq 0$$

<u>הערה:</u> נרכבן V מרוכבות ונקבל את $\hat V$ מעל $\mathbb{C}$ וכן את $\hat T:\hat V\to\hat V$. מאחר ו- T מעל $\mathbb{R}$ נורמלית אזי $\hat T$ מעל $\mathbb{C}$ נורמלית גם כן.

לכן ל $\hat V$ בסיס אורתונורמלי המתקבל מאיחוד הבסיסים האורתונורמליים של $\hat V_\lambda$ המרחבים המתאימים לוקטורים העצמיים השייכים לערך העצמי (ואופיני) λ.

איחוד הבסיסים ניתן בסיס אורתונורמלי ל $\hat V$ אשר בו $\hat T$ אלכסונית.

$\{w_1,\dots,w_n\}$ ✓

אם $\lambda \in \mathbb{R}$ אזי ל $\hat V_\lambda$ בסיס אורתונורמלי מוקטורים ב V (ממשיים). אם $\mu \notin \mathbb{R}$ ערך אופיני של $\hat T$ אזי גם $\bar\mu$ ערך אופיני של $\hat T$ ואז נבחר בסיסים

$$\{z_1,\dots,z_\ell\} \text{ ל } \hat V_\mu \quad ; \quad \{\bar z_1,\dots,\bar z_\ell\} \text{ ל } \hat V_{\bar\mu}$$

ואז ל $\hat V$ בסיס אורתונורמלי מהצורה

$$\{w_1,\dots,w_s,\ z_1,\bar z_1,\dots\ z_n,\bar z_n\}$$

נעבור מבסיס זה לבסיס <u>ממשי</u> (מוקטורים ב V) באופן הבא:

$$z_j = u_j + i v_j \quad ; \quad \bar z_j = u_j - i v_j$$

כאשר $u_j, v_j \in V$ וקטורים ממשיים.

ומכיון $\mathrm{Span}\{z_j,\bar z_j\} = \mathrm{Span}\{u_j, v_j\}$ מעל $\mathbb{C}$

כמו כן $\langle z_j, z_j\rangle = 1$; $\langle z_j, \bar z_j\rangle = \langle \bar z_j, z_j\rangle = 0$

ולכן ומכאן ש

$$u_j = \frac{z_j + \bar z_j}{2}$$

$$v_j = \frac{1}{2i}(z_j - \bar z_j)$$

$$\langle u_i, v_i \rangle = 0 \qquad (1)$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \langle u_i, v_j \rangle = 0 \qquad (2)$$

$$\| u_i \| = \| v_i \| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

ננרמל את u_i ו v_i ע״י כפל ב $\sqrt{2}$

ונקבל

$$\{ w_1, \dots, w_m, u_1, v_1, \dots, u_h v_h \}$$

בסיס אורתונורמלי ל $\hat{V}$ מעל $\mathbb{C}$.

והוקטורים אלו מוכלים ב V והם אורתונורמליים

ולכן הם בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{R}$ מאחר והם

בסיס ל $\hat{V}$ וב $\hat{V}$ ניתן להציג את V אם

הוקטורים $u_j = u_j + 0 \cdot i v_j$ נמצאים כי הם פורשים גם את V.

נבדוק מה מטריצה T על איברי הבסיס הנ״ל

ברור כי $T w_i = \lambda_i w_i$

כמו כן $\hat{T} z_j = \mu_j z_j$

אם נניח כי $\mu_j = a_j + i b_j \quad b_j \neq 0$

אז

$$\hat{T}(u_j + i v_j) = (a_j - i b_j)(u_j + i v_j) =$$

$$a_j u_j + b_j v_j + i(-b_j u_j + a_j v_j) \Rightarrow$$

ע״י השוואת מקדמים ממשיים ומדומים נקבל :

וכמו כן כפל ב $\sqrt{2}$

$$\bar{T} u_j = a_j u_j + b_j v_j$$

$$\bar{T} v_j = -b_j u_j + a_j v_j$$

ולכן אם
$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$$

אזי המטריצה ואת צלילי ההתחלה הן
המטריצה המייצגת את $\bar{T}$

□

<u>מסקנה</u>: אם V מרחב ולקשורי ממשי ! $T: V \to V$
שנ' נורמלית אזי קיימות θ_j ספציפיות
מתחלפות S סימטרית ! O - אורתוגונלית
כך ש $T = SO$.

<u>הגדרה</u>: אם $\mu_j \in \mathbb{C}$ ערך אופייני של $\bar{T}$
נרשום $r_j = |\mu_j|$! $\theta_j = \arg \mu_j$
אזי $\mu_j = r_j(\cos\theta_j - i\sin\theta_j)$

ולכן
$$B_j = \begin{pmatrix} r_j\cos\theta_j & r_j\sin\theta_j \\ -r_j\sin\theta_j & r_j\cos\theta_j \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} r_j & 0 \\ 0 & r_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \sin\theta_j \end{pmatrix}$$

70^*

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_l \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_1 \end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{bmatrix} r_l & 0 \\ 0 & r_l \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{= S} \cdot$$ ואז

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \begin{matrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix} & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & \begin{matrix} \cos\theta_l & \sin\theta_l \\ -\sin\theta_l & \cos\theta_l \end{matrix} \end{pmatrix}}_{= O}$$

<u>מסקנה:</u> אם T אופרטור אורתוגונלי $T: V \to V$

אזי קיים בסיס אורתונורמלי ב V אשר ביחס

אליו T נראית כמו ,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix} & & 0 \\ & & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \begin{matrix} \cos\theta_l & \sin\theta_l \\ -\sin\theta_l & \cos\theta_l \end{matrix} \end{pmatrix}$$

כי $\lambda_i = \pm 1$

תבניות בי לינאריות

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי

כך ש $\dim V < \infty$

תבנית **בילינארית** היא פונקציה

$$\varphi : V \times V \longrightarrow K$$

המקיימת

1) $$\varphi(au_1 + bu_2, v) = a\varphi(u_1, v) + b\varphi(u_2, v)$$

2) $$\varphi(u, av_1 + bv_2) = a\varphi(u, v_1) + b\varphi(u, v_2)$$

לכל $a, b \in K$; $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$

דוגמאות: אם φ, F פונקציונלים לינאריים

על V כלומר $\varphi : V \to K$

; $F : V \to K$ אזי הפונקציה

המוגדרת

$$\Phi(u, v) = \varphi(u) \cdot F(v) \in K$$

אלו תבניות בי לינאריות

תבניות כאלו נקראות **המכפלה** **הטנזורית**

של φ ו F ומסומנים $\varphi \otimes F$

דוגמא: מכפלה פנימית של $\mathbb{R}^n$ הינה

תבנית בי לינארית

דוגמא: אם $A=(a_{ij})$ מטריצה ריבועית

מעל K אם $u, v \in V$ וקטורים

$u = u_1, \dots, u_n$; $v = v_1, \dots, v_n$

אזי

$$\varphi(u,v) = (u_1, \dots, u_n)\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

כלומר $\varphi(u,v) = u^t A v$

אלו תבניות בי לינאריות

טענה: אוסף התבניות הבי-לינאריות על V המסומן ב $B(V)$ הוא מרחב וקטורי.

הוכחה:

נגדיר חיבור: אם $\varphi, \xi \in B(V)$

אז $(\varphi+\xi)(u,v) = \varphi(u,v)+\xi(u,v)$

כפל בסקלר:

$$(k\cdot\varphi)(u,v) = k\varphi(u,v)$$

קל לבדוק שאר התכונות אכן מתקיימות

<u>משפט:</u> יהי V מרחב וקטורי כך ש- $\dim V = n$

מעל שדה K. יהי $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

בסיס של המרחב הדואלי V^*. אזי

$\{ f_{ij},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n \}$ הוא בסיס של $B(V)$

כאשר

$$f_{ij}(u,v) = \varphi_i(u)\, \varphi_j(v)$$

<u>מסקנה:</u> $\dim B(V) = n^2$

<u>הוכחה:</u> נניח כי $\{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס

של V שהוא דואלי ל- V^* לבסיס $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

<u>צריך:</u> $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ פורשים את $B(V)$.

יהי $f \in B(V)$: $f(e_i, e_j) = a_{ij}$

נגדיר את $f' = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}$

ונוכיח כי $f = \sum a_{ij} f_{ij}$

מספיק להוכיח

$$f(e_s, e_j) \overset{?}{=} \left(\sum a_{ij} f_{ij}\right)(e_s, e_t)$$

ולכן

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}\right)(e_s,e_t) = \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij}(e_s,e_t) =$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, \varphi_i(e_s)\cdot \varphi_j(e_t) =$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, \delta_{is}\,\delta_{jt} = a_{st} = f(e_s,e_t)$$

לכן $\quad \mathrm{Span}\{f_{ij}\} = B(V)$

נניח: f_{ij} בלתי תלויים לינארית ב $B(V)$

אם $\quad \sum_{i,j} a_{ij} f_{ij} \equiv 0$

אזי $\quad 0 = 0(e_s,e_t) = \left(\sum a_{ij} f_{ij}\right)(e_s,e_t) =$

$$= a_{st}$$

ולכן $a_{s,t} = 0$ לכל $1 \le s,t \le n$.

יהי $f \in B(V)$ כלומר תבנית בי-לינארית
על V. ויהי $\{e_1,\dots,e_n\}$ בסיס V
אם $u,v \in V$ אזי

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n, \quad v = b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_ne_n$$

$$f(u,v) = f(a_1e_1 + \dots + a_ne_n,\ b_1e_1 + \dots + b_ne_n) = \quad !$$

$$a_1b_1 f(e_1,e_1) + a_1b_2 f(e_1,e_2) + \dots + a_nb_n f(e_n,e_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j f(e_i,e_j)$$

לכן מה שקובע את f הן n^2
הערכים $f(e_i,e_j)$.

נגדיר את המטריצה $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = f(e_i,e_j)$$

המטריצה A נקראת המטריצה המייצגת
של f לפי הבסיס $\{e_1,\dots,e_n\}$

נשים לב כי

$$f(u,v) = \sum a_i b_j f(e_i,e_j) =$$

$$(a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$u_e^t A v_e$$

נזכור לעולם כי כאשר נתון בסיס $\{e_1,\dots,e_n\}$ ואנו עוברים לבסיס אחר $\{e_1',\dots,e_n'\}$ אזי מטריצת המעבר מהבסיס e לבסיס e' נסמנה P ומקיימת $u_e = P u_{e'}$

<u>משפט:</u> תהי P מטריצת המעבר מבסיס e לבסיס e'. אם A המטריצה המייצגת את f בבסיס e אזי המטריצה $B = P^t A P$ היא המטריצה המייצגת בבסיס e'.

<u>הוכחה:</u> יהיו $u,v \in V$ אזי

$$u_e = P u_{e'} \quad , \quad v_e = P v_{e'}$$

ומכאן

$$u_e^t = u_{e'}^t \cdot P^t$$

ולכן

$$f(u,v) = u_e^t A v_e =$$

$$u_{e'}^t P^t A P v_{e'}$$

ולכן המטריצה המייצגת את f לפי הבסיס e' היא $B = P^t A P$.

<u>הגדרה:</u> שתי מטריצות A,B מעל שדה K יקראו חופפיות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש

$$B = P^t A P$$

<u>הגדרה:</u> הדרגה של תבנית בי-לינארית f על מרחב וקטורי V מעל שדה K המסומנת ב $\mathrm{rank}(f)$ היא $\mathrm{rank}(A)$ כאשר A היא מטריצה המייצגת את f בבסיס כלשהו.

<u>הערה:</u> אם במקרה נבחר בסיס אחר אזי המטריצה המייצגת את f היא B וקיים $B = P^t A P$ כאשר P <u>הפיכה</u>. לכן P משמרת דרגה:

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}\, A$$

לכן הדרגה מוגדרת היטב ואינה תלויה בבחירת הבסיס.

<u>הגדרה:</u> אם $\mathrm{rank}\, A < \dim V$ נאמר כי f תבנית מנוונת degenerate ואם $\mathrm{rank}\, A = \dim V$ אזי f נקראת nondegenerate

<u>הגדרה:</u> תבנית בילינארית f על

מרחב וקטורי V מעל שדה K נקראת

תבנית מתחלפת אם מתקיים

$$\forall v \in V \qquad f(v,v) = 0$$

נשים לב כי אם f תבנית מתחלפת

אזי

$$0 = f(u+v,\ u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$$

ולכן

$$f(v,u) = -f(u,v)$$

<u>הגדרה:</u> תבנית f על V מעל K

המקיימת לכל $u,v \in V$

$$f(u,v) = -f(v,u)$$

נקראת תבנית <u>אנטי</u> <u>סימטרית</u>

<u>הערה:</u> אם בשדה K מתקיים

התנאי ש $1+1 \neq 0$ אזי

מכאן ש $f(u,v) = -f(v,u)$

לכל $u,v\in V$ נקבל כי

(*) $f(v,v) = -f(v,v)$

ולכן f אנטי סימטרית גוררת
f מתחלפת כאשר $1+1 \neq 0$.

אם כאשר $1+1=0$ אזי נקבל

מ (*) כי $f(v,v)+f(v,v)=0$

כלומר $2(f(v,v))=0$

אבל $2=0$ ולכן לא נוכל

להסיק כי $f(v,v)=0$ לכל $v\in V$.

המספר $\underline{n}$ הקטן כלומר $\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n}$

כאשר המקיים $n\cdot 1 = 0$

נקרא גם המציין של השדה.

הנחנו $1+1\neq 0$ כלומר שהמציין של K אינו 2.

בשדות שאנו מכירים $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ המציין הוא 0 כלומר אין $n\in\mathbb{Z}$ כך ש $n\cdot 1=0$.

<u>משפט</u>: תהי f תבנית <u>מתחלפת</u> במרחב מקטורי V מעל שדה K. אזי קיים בסיס $\{e_1,\dots,e_n\}$ של V בו f נראית לגביו ע"י מטריצה מהצורה:

$$
\left(\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & & & & & & \\
 & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & & & & 0 & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} & & & \\
 & 0 & & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 0
\end{array}\right)_{n\times n}
$$

<u>הוכחה:</u> אם $f=0$ אז הטענה נכונה

אם $\dim V = 1$ אז

$$f(k_1u, k_2u) = k_1k_2\, f(u,u) = 0$$

ולכן $f=0$

לכן נניח מעתה כי $\dim V>1$; $f\neq 0$.

מאחר ו: $f\neq 0$ קיימים $u_1,u_2\in V$ כך ש

$$f(u_1,u_2)\neq 0$$

ולכן ע"י מכפלה בסקלר ניתן להניח כי

$$f(u_1,u_2)=1$$

ומכאן

$$f(u_2,u_1)=-1$$

u_1,u_2 בלתי תלויים לינארית כי אם $u_2=ku_1$ ונקבל

$$f(u_1,u_2)=f(u_1,ku_1)=kf(u_1,u_1)=0$$

יהי $U=\mathrm{span}(u_1,u_2)$

נסתכל על הצמצום של f ל U

הרי לנו המטריצה של f על U

בבסיס $\{u_1, u_2\}$ היא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

כי $f(u_1, u_2) = 1$, $f(u_2, u_1) = -1$, ו $f(u_i, u_i) = 0$

וכן אם $u \in U$

$$u = a u_1 + b u_2$$

אזי $f(u, u_1) = f(a u_1 + b u_2, u_1) = -b$

$$f(u, u_2) = f(a u_1 + b u_2, u_2) = a$$

יהי $W \subset V$ תת מרחב

$$W = \{ w \in V \mid f(w, u_1) = f(w, u_2) = 0 \}$$

קל לראות תת מרחב.

$W \neq \emptyset$ ונניח w_1 ו w_2 ב W

אזי $w_1 + w_2 \in W$

וכמו כן אם $w \in W$ אזי $kw \in W$

פתרון:

$$V = U \oplus W$$

ברור כי $U \cap W = 0$

יהי $v \in V$ אזי נגדיר

$$u = f(v,u_2)u_1 - f(v,u_1)u_2$$

$$w = v - u$$

u – קומבינציה לינארית של u_1 ו- u_2

אזי $u \in U$. נותר להראות כי $w \in W$

מתקיים $f(u,u_1) =$

$$f(v,u_2)\underset{0}{f(u_1,u_1)} - f(v,u_1)\underset{-1}{f(u_2,u_1)} =$$

$$f(v,u_1)$$

ולכן $f(w,u_1) = f(v-u,u_1) =$

$$f(v,u_1) - f(u,u_1) = 0$$

ובאותו האופן $f(u,u_2) = f(v,u_2)$

ולכן $f(w,u_2) = f(v-u,u_2) =$

$$f(v,u_2) - f(v,u_2) = 0$$

כלומר $V = U \oplus W$

$f|_W$ - היא תקינה כי בילינארית מתחלפת על W שמימדו קטן ב 2 ממימד V. ולכן לפי הנחת האינדוקציה קיים בסיס $\{u_3,\dots,u_n\}$ של W כך ש f בצורה הקנונית ולכן $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ הוא הבסיס המבוקש של V

ומכאן נובע שמאחר וכל בלוק הוא דו מימדי מספר הבלוקים הוא $\frac{1}{2}\operatorname{rank} f$.

[illegible]

<u>הגדרה:</u> תבנית בילינארית f על מרחב וקטורי V מעל שדה K תיקרא סימטרית אם קיים

$$f(u,v) = f(v,u)$$

לכל $u,v \in V$.

הערה המשמעויות מקיים ש

$$f(x,y) = x^tAy = (x^tAy)^t = y^tA^tx$$

כי $x^tAy \in K$ ולכן זהה לטרנספוז שלו.

ולכן אם f סימטרית קיים

$$y^tA^tx = f(x,y) = f(y,x) = y^tAx$$

זה נכון לכל $x,y \in V$ ולכן

$$A^t = A$$

כלומר המטריצה המייצגת הינה

<u>סימטרית</u>

כמו כן נובע כי, אם A מטריצה סימטרית
אזי התבנית f המתאימה ל A היא
תבנית סימטרית.

<u>משפט:</u> אם f תבנית בי לינארית סימטרית
של V מעל שדה K כאשר המציין של
K <u>שונה</u> מ 2 $(\operatorname{char} K \neq 2)$ אזי ל V
בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ שבו ל f הצגה
באמצעות מטריצה אלכסונית
או במילים אחרות $f(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$.

<u>הוכחה:</u> אם $f \equiv 0$ או $\dim V = 1$
אזי גמרנו
לכן נניח להיפך: $f \neq 0$; $\dim V > 1$
נסמן ה $q(v) = f(v,v)$
ואם היום $q(v) = f(v,v) = 0$ אזי

אם $\mathrm{char}\, K \neq 2$

ק"ם

$$q(u+v) - q(u) - q(v) =$$

$$f(u+v, u+v) - f(u,u) - f(v,v) =$$

$$f(u,u) + f(v,v) + f(v,u) + f(u,v) - f(u,u) - f(v,v) =$$

$$2 f(v,u)$$

לכן אם $q(v) \equiv 0$ לכל V [illegible]

כי $f \equiv 0$ לכל $u,v \in V$.

לכן ניתן להניח כי קיים $v_1 \in V$ כך ש

$$f(v_1,v_1) \neq 0$$

יהי $U = \mathrm{span}\{v_1\}$

נגדיר $W = \{ v \in V \mid f(v_1, v) = 0 \}$

ברור כי $W \subset V$ תת מרחב

טענה: $V = U \oplus W$

הוכחה:

יהי $u \in U \cap W$.

אזי $u = kv_1$; $u \in W$ אזי

$$0 = f(u,u) = f(kv_1, kv_1) = k^2 f(v_1,v_1) \neq 0$$

מכאן,

אם $k=0$ ולכן $u=0$.

נגדיר $w = v - \frac{f(v_1,v)}{f(v_1,v_1)} v_1$

אזי $f(v_1,w) = f(v_1,v) - \frac{f(v_1,v)}{f(v_1,v_1)} f(v_1,v_1) = 0$

אזי $w \in W$ ולכן $v = u + w$

ומכאן $V = U \oplus W$.

$f|_W$ תבנית בילינארית סימטרית על W

: $\dim W = n-1$ ולכן בסיס אורתוגונלי קיים

קיים $\{v_2, \dots, v_n\}$ של W כך ש $f(v_i,v_j)=0$, $i\neq j$.

: $f(v_1,v_j)=0$ לכל $j=2,\dots,n$

אזי $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ בסיס ל V

מקיים $f(v_i, v_j) = 0$ $i \neq j$

$1 \le i,j \le n$.

$\square$