אלגברה לינארית ב'
תרגול מספר 2

16 באפריל 2018

תזכורת

1. אומרים ש־ $P : V \to V$ היא הטלה על W במקביל ל־U אם $W = \mathrm{Im}\,(P)$ ו־$U = \ker\,(P)$. לא קשה לבדוק שמתקיים תמיד $V = W \oplus U$.
2. עבור טרנספורמציה לינארית $T : V \to V$, $W \subseteq V$ נקרא **תת מרחב אינווריאנטי של T** אם $T\,(W) \subseteq W$.

דוגמא:

1. $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מוגדר $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ (ציור בכיתה).
2. $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ מוגדר $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ (ציור בכיתה).

תרגיל - תכונות של הטלות

תהיה $P : V \to V$ הטלה.

1. $P\Big|_{Im(P)} = Id\Big|_{Im(P)}$

   פתרון: עבור $w \in Im\,(P)$ מתקיים מהגדרה שקיים לו מקור - $y \in V$ כך ש $P\,(y) = w$ ולכן

   $$P\,(w) = P\,(P\,(y)) = P^2 y = P\,(y) = w$$

2. $Q = I - P$ גם הטלה.

   פתרון:

   $$Q^2 = (I - P)^2 = I - IP - PI + P^2 = I - P = Q$$

3. $ImP = \ker Q$

   פתרון:

   $\supseteq$:

   $$v \in \ker Q \Longrightarrow 0 = Qv = (I - P)\,v = v - Pv \Longrightarrow v = Pv \Longrightarrow v \in ImP$$

   $\subseteq$:

   $$QP = (I - P)\,P = P - P^2 = 0$$
   $$\Downarrow$$
   $$ImP \subseteq \ker Q$$

*ברור שמהתכונה הזאת נובע גם ש$ImQ = \ker P$ כי $P = I - Q$.

תרגיל

הראו כי עבור P הטלה על W במקביל ל-U מתקיים $PT=TP \iff W,U$ תתי מרחבים אינווריאנטיים של T.

פתרון

$\Longleftarrow$:

$$T\left(W\right)=TP\left(W\right)=PT\left(W\right)\subseteq ImP=W$$

ועבור U זה נובע עם מחליפים את P ב-Q (ברור ש-$TQ=QT \iff TP=PT$).

$\Longrightarrow$: יהי $v\in V$ אזי $v=w+u$ עבור $w\in W$ ו-$u\in U$ ואז

$$TPv=TP\left(w+u\right)=TP\left(w\right)+TP\left(u\right)=Tw$$
$$PTv=PT\left(w+u\right)=PT\left(w\right)+PT\left(u\right)\underset{Tw=w'\in W,\ Tu=u'\in U}{=}P\left(w'\right)+P\left(u'\right)=w'=Tw$$

תזכורת - משפט הפירוק הספקטרלי (בע"פ)

תרגיל

יהי $T:\mathbb{R}_2\left[x\right]\to\mathbb{R}_2\left[x\right]$ האופרטור הליניארי הלכסין המוגדר באופן הבא: $T\left(1\right)=1,\ T\left(x\right)=2x+5,\ T\left(x^2\right)=x^2-30-6x$. מצאו את הפירוק הספקטרלי של T.

פיתרון

הכוונה בפירוק הספקטרלי של T היא לכתוב את T כסכום של הטלות על המרחבים העצמיים כפול הערך העצמי המתאים. לשם כך כמובן נרצה לדעת מהם הערכים העצמיים.

נציג את T כמטריצה

$$\left[T\right]_{\{1,x,x^2\}}=\begin{pmatrix}1&5&-30\\0&2&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$$

מכאן קל לראות שהערכים העצמיים הם $1,2$ (חישוב פולינום אופייני).

- דרך 1:

  נחשב את המרחבים העצמיים

$$V_1=\ker\left(T-I\right)=span\left\{1,6x+x^2\right\}$$
$$V_2=\ker\left(T-2I\right)=span\left\{5+x\right\}$$

הגענו לכך מחישוב הגרעין של המטריצה - קיבלנו שני וקטורים פורשים שהם וקטורי המקדמים של הבסיס שבחרנו.

כעת נרצה לחשב את ההטלות P על V_1 לאורך V_2 ו-Q על V_2 לאורך V_1. נשים לב ש-$Q=I-P$ (מתכונה 3 של הטלות) ולכן מספיק לחשב את P.

  - דרך א: נדרוש

$$P\left(1\right)=1$$
$$P\left(6x+x^2\right)=6x+x^2$$
$$P\left(5+x\right)=0$$

ונבין איך P פועלת על $1,x,x^2$.

$$P\left(1\right)=1$$
$$P\left(x\right)=P\left(\left(\left(5+x\right)-5\cdot1\right)\right)=\left(P\left(5+x\right)-5P\left(1\right)\right)=-5$$
$$P\left(x^2\right)=P\left(\left(6x+x^2\right)-6\left(\left(5+x\right)-5\cdot1\right)\right)=P\left(6x+x^2\right)-6\left(\cancel{P\left(5+x\right)}-5P\left(1\right)\right)=6x+x^2+30$$

ולכן

$$\left[P\right]_{\{1,x,x^2\}}=\begin{pmatrix}1&-5&30\\0&0&6\\0&0&1\end{pmatrix}$$

– דרך ב: לחשב את מטריצת המעבר בין הבסיסים - הבסיס הסטנדרטי והבסיס של הוקטורים העצמיים ולהצמיד את $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ איתה.

- דרך 2:

נשתמש באינטפורלייצת לגראנז'.

הוכחתם בכיתה שההטלה P_i על V_{λ_i} מקיימת $P_i = \varphi_i(T)$ כאשר $\varphi_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}$.

במקרה שלנו - $\varphi_1(x) = \frac{x-2}{1-2} = 2 - x$ ולכן $P_1 = 2I - T$ ו $\varphi_2(x) = \frac{x-1}{2-1} = x - 1$ לכן $P_2 = T - I$.

שימו לב ש $P_2 = I - P_1$.