

## פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - גליון תרגילים מס' 7

להגשה: עד יום א', 4.2.01. שאלה עם \* היא שאלת רשות.

בכל השאלות להלן "מדידה" היא מדידה לבג,  $m$  היא מידת לבג על  $\mathbb{R}^n$ ,  $m_e$  היא מידה חיצונית.

1. א. הוכיחו שכל קטע  $I \subset \mathbb{R}$  מכיל תת-קבוצה לא מדידה (הדרכה: הוכיחו תחילה עבור קטעים מהצורה  $[n, n+1]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).

ב. הוכיחו שלכל  $A \subset \mathbb{R}$  עם  $m_e(A) > 0$  יש תת-קבוצה לא מדידה.

ג\*. הוכיחו שלכל  $A \subset \mathbb{R}$  מדידה יש תת-קבוצה  $B$  עם  $m_e(B) = m_e(A \setminus B) = m_e(A)$  (ר' ע"מ 166 – 167 בלינדנשטראוס).

2. תהי  $A \subset \mathbb{R}$  מדידה. נקודה  $x \in \mathbb{R}$  תקרא "נקודת צפיפות של  $A$ " אם

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(A \cap (x-h, x+h))}{2h} = 1$$

א. הוכיחו ש- $x$  היא נקודת צפיפות של  $A$  אם ורק אם

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(A \cap (x-h, x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(A \cap (x, x+h))}{h} = 1$$

ב. הוכיחו שכמעט כל  $a \in A$  היא נקודת צפיפות של  $A$  (הדרכה: עיינו ב-

$$F(x) = \int_{[a,x]} \chi_A(t) dm(t)$$

ג. הוכיחו שלכמעט כל  $x \in A^c$  מתקיים  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(A \cap (x-h, x+h))}{2h} = 0$

3. חשבו את הוריאציות:  $V_{-1}^1(x - x^3)$ ,  $V_{-3\pi}^{5\pi}(\cos x)$ ,  $V_1^3(\ln x)$ ,  $V_0^{100}(e^x)$

4. נתונה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת  $f \in AC[a, d]$  לכל  $a < d < b$ .

א. האם בהכרח  $f \in AC[a, b]$ ?

ב. הוכיחו שאם  $f$  גם רציפה ב- $[a, b]$  אז  $f \in AC[a, b]$ .

5. נתונה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ונסמן  $V(x) = V_a^x f$

א. הוכיחו שאם  $f \in BV[a, b]$  אז  $|f'(x)| = V'(x)$  כב"מ.

ב. הוכיחו ש- $f \in AC[a, b]$  אם ורק אם  $V_a^b f = \int_{[a,b]} |f'(t)| dm(t)$ .

6. נתונה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה קיים  $\alpha > 0$  כך ש- $|f(x)| \geq \alpha$  לכל  $x \in [a, b]$ . הוכיחו ש- $1/f \in BV[a, b]$ .

7. א. תנו דוגמא לפונקציה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה (כולל נגזרות חד-צדדיות בקצוות) כך ש- $f' \notin L^1[0, 1]$ .

ב\*. תנו דוגמא לפונקציה מדידה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל  $[a, b] \subset [0, 1]$  מתקיים  $f|_{[a,b]} \notin L^1[a, b]$ .

בהצלחה.

אריאל.