גליון רביעי:

תרגיל 1:

1. התכנסות במ"ש נובעת מכך ש $\sqrt[n]{\sin(x)} \le \sqrt[n]{\sin(\alpha)} \to 0$ עבור $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. אין התכנסות במ"ש ב $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ כי גבול במ"ש של פונקציות רציפות הוא רציף בעוד שהגבול פה הוא הפונקציה f כך ש $f(x) = 0$ לכל $x > 0$ ו $f(0) = 1$.

2. בקטע (α, ∞) הפונקציה קטנה בערך מוחלט מ $\frac{1}{1+n\alpha} \to 0$. אין התכנסות במ"ש ב $[0, \infty)$ למשל כי הצבה של $x = \frac{1}{n}$ מראה ש $\sup_x |f_n(x)| \ge f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}\sin(1) > 0$.

תרגיל 2:

1. טור טלסקופי - שקול לבדיקת התכנסות של הסדרה $f_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

2. לכל $x > a > 1$ מקבלים $\frac{\ln(n)}{n^x} < \frac{\ln(n)}{n^a}$ והטור $\sum \frac{1}{n^a \ln^{-1}(n)}$ מתכנס ולכן לפי ויירשטראס יש התכנסות במ"ש ב $[a, \infty)$. בקטע $(1, \infty)$ הפונקציות $\frac{\ln(n)}{n^x}$ הן חסומות ולכן אם הן מתכנסות במ"ש אז גם הפונקציות גבול היא חסומה. אבל כאשר $x \to 1^+$ הפונקציה $\sum \frac{\ln(n)}{n^x}$ שואפת לאינסוף ולכן אין התכנסות במ"ש.

תרגיל 3:

כדי להראות שהתכנסות במ"ש של $m_n(x) = f(nx)f(\frac{x}{n})$ בקטע $[0, \infty)$, תנאי מספיק והכרחי לכך הוא שיש התכנסות במ"ש בקטע $[0, 1]$ ובקטע $[1, \infty)$. בקטע $[0, 1]$ יש התכנסות במ"ש כי $f\left(\frac{x}{n}\right)$ מתכנסת במ"ש לאפס (משתמשים ברציפות של f באפס ובכך ש $f(0) = 0$) ו $f(nx)$ חסומה. בצורה דומה מוכיחים עבור $[1, \infty)$.

תרגיל 5:

משפט ויירשטראס מראה התכנסות במ"ש עבור $p < 2$ (מתכנסת לאפס). הצבה של $x = \frac{1}{n}$ מראה שאין התכנסות במ"ש עבור $p \ge 2$.

עבור $p = 2, 4$ ניתן ממש לחשב את האינטגרלים של $f_n(x)$ ולראות שעבור $p = 2$ האינטגרלים שואפים ל 0 (שזה האינטגרל של הפונקצית גבול שהיא זהותית אפס) בעוד שעבור $p = 4$ הם לא מתכנסים לאפס. ממולץ לשרטט את $f_n(x)$ עבור $p = 2$ ומספר בחירות של n ולראות שהפונקציה שואפת לאפס נקודתית ויש לה "גבעה" שנדחפת לכיוון ציר ה y, אך הגובה שלה נשאר קבוע ולכן השטח הולך וקטן. דבר דומה קורה עבור $p = 4$ רק שהגובה של הגבעה הולך וגדל ובגלל זה השטח לא הולך לאפס.

גליון חמישי:

תרגיל 1:

1. הרדיוס מתקבל מהגבול $\sqrt[n]{7^n + (-5)^n} \to 7$. בדיקת הקצוות נותנת $\sum_1^\infty \frac{1}{(\pm 7)^n} \frac{(-5)^n + 7^n}{n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\pm\frac{5}{7}\right)^n +$ $\sum_1^\infty \frac{(\pm 1)^n}{n}$: המחובר הראשון תמיד מתכנס בעוד שהשני מתכנס רק עבור -1.

3. המקדמים הם $0, \pm 1$ (וכל אחד מופיע אינסוף פעמים) ולכן $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{1} = 1$ ולכן הרדיוס הוא 1. אין התכנסות בקצוות כי האיבר הכללי לא שואף לאפס.

תרגיל 2:

2. מציבים במקום $\ln(1+t^2)$ את הטור טיילור שלו (הטור טיילור של $\ln(1+s)$ ואז הצבה $s = t^2$). לאחר מכן עושים אינטגרציה איבר איבר.

3. לפי הגדרה $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ואנחנו יודעים את הפיתוח של e^x, e^{-x}.

תרגיל 3:

3. $\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

תרגיל 4:

1. עבור x,y מספיק קטנים ולא שניהם אפס מקבלים ש $0<|x|+|y|<1$. לכן, אם $a<b<c$ אז $(|x|+|y|)^c<(|x|+|y|)^b<(|x|+|y|)^a$. בפרט מתקיים ש $-(|x|+|y|)^2\le-(x+y)^2\le 0$ ולכן

$$1=(|x|+|y|)^0\le(|x|+|y|)^{-(x+y)^2}\le(|x|+|y|)^{-(|x|+|y|)^2}$$

הפונקציה האחרונה היא הרכבה של $(x,y)\mapsto|x|+|y|$ ושל $t\mapsto t^{-t^2}$. לפונקציה השנייה יש גבול בראשית שהוא 1 ומהרכבת פונקציות רציפות מקבלים שהגבול של $(|x|+|y|)^{-(|x|+|y|)^2}$ בראשית הוא גם אחד, ולכן מסנדויץ' גם הפונקציה באמצע שואפת לאחד.

גליון שישי:

תרגיל 1:

1. הנגזרת היא אפס - הצמצום של f לציר ה X (או ציר ה Y) זו פונקציה זוגית ולכן הנגזרות החלקיות הן אפס.
2. נובע מכך ש $f(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2},0)$.

תרגיל 2:

השתמשו בכך ש $f(0,0)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r}f(0,0)\mathrm{dxdy}$ והוכיחו ש $\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r}(f(x,y)-f(0,0))\,\mathrm{dxdy}\to 0$ (באופן כללי, בדרך כלל כדאי לבדוק שגבולות הם אפס, כי אז למשל ניתן לשים ערך מוחלט על הביטוי ולהתעסק רק עם דברים חיוביים).

תרגיל 3:

גוזרים את הפונקציה F לפי y ומשתמשים בכלל הנגזרת מתחת לסימן האינטגרל וצריך לצאת $F'(y)=\frac{\pi}{y+b}$. מכאן ש $F(y)=\pi\ln(y+b)+C$ ואת הקבוע מוצאים למשל ע"י חישוב של $F(b)$.

תרגיל 4:

1. $F(0)$ סופי ממשפט דיריכלה. עבור $b>0$ האינטגרל מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.
2. מחשבים את $F(b)$ עבור $b>0$ כמו בתרגיל הקודם (גזירה מתחת לסימן האינטגרל לפי b).