קומבינטוריקה – הרצאה #5 – 21/04/16

עקרון שובך היונים

אם נתונים n תאים, וידוע שנמצאות בהם בסה"כ $n+1$ יונים, אז בהכרח יש תא ובו לפחות 2 יונים. באופן דומה, אם יש בסה"כ $2n+1$ יונים, אז בהכרח יש תא ובו לפחות 3 יונים. וכן הלאה: באופן כללי, אם יש בסה"כ $rn+1$ יונים ב-n תאים, אז בהכרח יש תא ובו לפחות $r+1$ יונים.

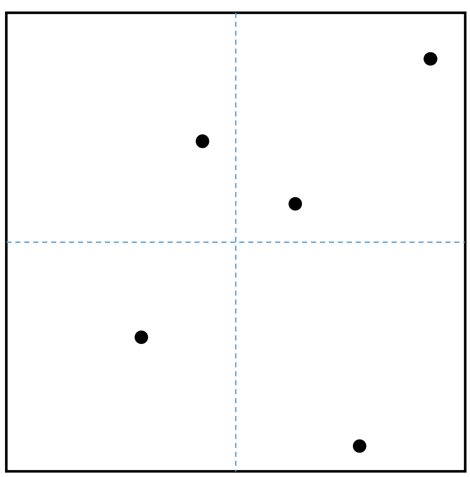
דוגמאות לשימושים

1. מתוך כל 3 בני אדם, יש שניים מאותו המין.
הסבר: התאים הם המינים (זכר/נקבה). היונים הן בני האדם.

2. מתוך כל 13 בני אדם, יש שניים שיום הולדתם חל באותו החודש.
הסבר: התאים הם 12 חודשי השנה. היונים הן בני האדם.

3. קיימים שני תושבי חיפה בעלי אותו מספר שערות על ראשם.
הסבר: התאים הם מספר השערות על הראש. היונים הן כל תושבי חיפה. מעיינים בוויקיפדיה בערכים "חיפה" ו-"שיער". שם רואים שלאדם יש לכל היותר 150,000 שערות על הראש. לכן, מספר התאים הוא 150,001. כמו כן, רואים "שם", נניח, שבחיפה יש 250,000 תושבים. זה מס' היונים. מכיוון ש-$1+150{,}001 \leq 250{,}000$, המסקנה נובעת.

4. **טענה:** יהיו נתונות 5 נק' $\{A_1, \ldots, A_5\}$ הנמצאות בתוך ריבוע שאורך צלעו 2. אזי קיימים $i \neq j$ כך $d(A_i, A_j) \leq \sqrt{2}$ ($d(A_i, A_j)$ הוא המרחק האוקלידי בין A_i ל-A_j).



הוכחה: נחלק את הריבוע לארבעה תת-ריבועים בעלי אורך צלע 1. נחשוב על כל תת ריבוע כזה כתא, ועל כל אחת מ-5 הנק' כיונה. אז לפי עקרון שובך היונים, יש שתי נק' באותו הריבוע 1×1. המרחק המקס' האפשרי בין שתי נק' כאלה הוא המרחק בין קדקודים מנוגדים של הריבוע, שהוא $\sqrt{2}$.
הערה: הטענה אינה ניתנת לשיפור בשני המצבים הבאים:
אם נתונות רק 4 נק', היא אינה נכונה. אם נדרש מרחק קטן מ-$\sqrt{2}$ (ולא קטן או שווה), היא אינה נכונה.

5. טענה: יהיו נתונים 101 מס' טבעיים $a_1, \dots, a_{101} \in \{1, \dots, 200\}$, אז קיימים $i \neq j$ כך ש-$a_i | a_j$

הוכחה: נכתוב כל a_i בצורה:

$$a_i = m_i \cdot 2^{k_i}$$

כאשר m_i אי זוגי, k_i שלם אי-שלילי. האפשרויות עבור m_i הן $1,3,5, \dots, 199$. נחשוב עליהן בתור תאים. יש 100 תאים. נשים כל a_i בתא המתאים ל-m_i שלו. לפי עקרון שובך היוני, יש a_i, a_j, $i \neq j$ הנמצאים באותו התא, אותו נסמן ב-m. כלומר:

$$a_i = m \cdot 2^{k_i}, \qquad a_j = m \cdot 2^{k_j}$$

בהג"כ, נניח $k_i \leq k_j$, ואז $a_i | a_j$.

הערה: הטענה אינה ניתנת לשיפור במובן הבא:

אם נתונים רק 100 מס' טבעיים מתוך $\{1,2, \dots, 200\}$ אז המסקנה אינה בהכרח נכונה. למשל, 100 המס' $\{101, \dots, 200\}$.

6. טענה: יהיו נתונים m מס' שליים $a_1, \dots, a_m$. אזי קיימים $0 \leq k < l \leq m$ כך ש-$m | a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$.

דוגמא: $m = 3$, והסדרה a_1, a_2, a_3 היא $5,8,10$. מתקיים $3 | 8 + 10$.

הוכחה: עבור $i = 0,1, \dots, m$, נסמן ב-S_i את סכום ה-i מס' הראשונים בסדרה. כלומר:

$$S_0 = 0, \qquad S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad \dots$$

נחשוב על S_i בתור יונים, ועל השאריות מודולו-m בתור התאים.

לפי עקרון שובך היונים, קיימים S_i, S_j, $i \neq j$, הנמצאים באותו התא. כלומר – בעלי אותה השארית מודולו-m.

בהג"כ, נניח $i > j$, ואז $S_i - S_j$ הוא רצף מהסוג הנדרש בטענה שסכומו מתחלק ב-m.

הערה: הטענה אינה ניתנת לשיפור במובן הבא:

אם נתונים רק $m - 1$ מספרים שלמים, אז הטענה אינה בהכרח נכונה. למשל, נתבונן בסדרה $\forall \leq 1 \leq m - 1$, $a_i = 1$ אשר סכומה הוא $m - 1$.

7. טענה: יהיו נתונים מספר ממשי α ומספר טבעי q. אזי, קיימים מס' שלמים a, b כך ש-$1 \leq b \leq q$ ומתקיים:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b \cdot q}$$

הערה: בפרט נובע מהטענה שכל מס' ממשי α ניתן לקירוב ע"י מס' רציונלי $\frac{a}{b}$ כך ש-$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$.

הוכחה: נזכיר שכל מס' ממשי x ניתן להצגה יחידה כ-$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ (סכום ערך השלם $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ ושארית/החלק השבור $\{x\} \in [0,1)$). כעת, עבור α ו-q, נתבונן במספרים $\{i \cdot \alpha\}$ כאשר $i = \{0,1, \dots, q\}$. כמו כן, נחלק את הקטע $[0,1)$ לתאים, כאשר כל תא יהיה מהצורה $\left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}\right)$ כאשר $k = 0, \dots, q - 1$. יש לנו $q + 1$ יונים (המס') ב-q תאים (הקטעים), ולכן, לפי עקרון שובך היונים, קיימים $i \neq j$ כך ש-$\{i \cdot \alpha\}, \{j \cdot \alpha\}$ הם באותו התא. כלומר, קיים $0 \leq k \leq k - 1$ כך ש- $\{i \cdot \alpha\}, \{j \cdot \alpha\} < \left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{a}\right)$. בהג"כ, נניח כי $i > j$. ניקח את $b = i - j$. כעת.

$$b\alpha = (i - j)\alpha = i\alpha - j\alpha = \lfloor i\alpha \rfloor + \{i\alpha\} - \lfloor j\alpha \rfloor - \{j\alpha\} = \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor + \{i\alpha\} - \{j\alpha\}$$
$$= \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor + \{i\alpha\} - \{j\alpha\}$$

ניקח $a = \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$, אז:

$$b\alpha - a = \{i\alpha\} - \{j\alpha\}$$

ומתקיים $\{i\alpha\}, \{j\alpha\} \in \left[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{a}\right)$, ולכן $|b\alpha - a| < \frac{1}{q}$. כעת נחלק ב-$b$ את שני האגפים ונקבל:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{bq}$$

כמו שרצינו.