<u>מבוא לחבורות   תרגיל בית מס' 9</u>

1. הוכיחו כי תת-החבורה $\langle (1\,2),(1\,2)(3\,4) \rangle$ של S_4 הנוצרת ע"י $(1\,2)$ ו-$(1\,2)(3\,4)$ איזומורפית לחבורה $C_2 \times C_2$.
2. הוכיחו כי תת-החבורה $\langle (1\,2),(1\,3)(2\,4) \rangle$ של S_4 איזומורפית לחבורה הדיהדרית D_8.
3. הוכיחו כי $S_4 = \langle (1\,2\,3\,4),(1\,2\,4\,3) \rangle$.
4. הוכיחו כי תת-החבורה של $GL_2(\mathbb{C})$ הנוצרת ע"י שתי המטריצות $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$ איזומורפית לחבורת הקווטרניונים Q_8.
5. הוכיחו כי כל חבורה מסדר 4 איזומורפית ל-C_4 או ל-$C_2 \times C_2$.
6. הראו כי חבורת המספרים הרציונליים החיוביים נוצרת ע"י קבוצת המספרים הראשוניים (החיוביים).
7. ציירו את סריג תת-החבורות של D_{10}.
8. תהי G חבורה, $H \le G$, ו-$g \in G$. הוכיחו כי אם הקוסט הימני Hg שווה <u>לאיזשהו</u> קוסט שמאלי של H ב-G, אז $Hg = gH$.
9. תהי G חבורה, $H \le G$. הוכיחו כי ההעתקה $x \mapsto x^{-1}$ שולחת כל קוסט שמאלי של H ב-G לקוסט ימני של H ב-G ונותנת התאמה חח"ע בין קוסטים שמאליים וקוסטים ימניים של H ב-G, ולכן מספר הקוסטים השמאליים שווה למספר הקוסטים הימניים (של H ב-G).
10. תהי G חבורה, $H \le K \le G$. הוכיחו כי $[G:H]=[G:K][K:H]$, כאשר $[G:H]$ שווה למספר הקוסטים הימניים של H ב-G (או מספר הקוסטים השמאליים של H ב-G לפי התרגיל הקודם).