אלגברה ב־גליון 3

שניר הורדן־20568981

20 במאי 2018

.1

א.נמצא את המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה בבסיס הסטנדרטי

$$T=\left[\begin{array}{ccc}2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{array}\right]_{E}$$

נחשב את הפולינום האופייני

$$det\left(\lambda I-T\right)=\left|\left[\begin{array}{ccc}-2+\lambda & -2 & -1\\ 0 & -2+\lambda & 1\\ 0 & 0 & -3+\lambda\end{array}\right]\right|=\left(\lambda-2\right)^{2}\left(\lambda-3\right)$$

נשים לב כי המטריצה משולשת עליונה, אז לפי משפט היא לכסינה. כמו כן, לפי משפט, עבור T אופרטור לינארי כלשהו, Tלכסין אם"ם הפולינום המינימלי שלו הוא $m_{T}(\lambda)=$ $.\left(\lambda-\lambda_{1}\right)...\left(\lambda-\lambda_{n}\right)$

$$m_{T}(\lambda)=\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-3\right)$$

ב. לפי משפט הפירוק הספקטרלי, המ"ע של הע"ע הם סכום ישר של המרחב, ובמקרה זה $\mathbb{R}^{3}$.

$$U=ker\left(2\mathbb{I}-T\right)^{2}=ker\left(\left[\begin{array}{ccc}2-2 & 2 & 1\\ 0 & 2-2 & -1\\ 0 & 0 & 3-2\end{array}\right]^{2}\right)=ker\left(\left[\begin{array}{ccc}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]^{2}\right)=$$

$$=ker\left(\left[\begin{array}{ccc}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\right)=span\left\{ \left(\begin{array}{c}1\\ 0\\ 0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\ 1\\ 0\end{array}\right)\right\}$$

$$W=ker\left(3\mathbb{I}-T\right)=ker\left(\left[\begin{array}{ccc}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\right)=span\left\{ \left(\begin{array}{c}1\\ 1\\ -1\end{array}\right)\right\}$$

מתקיים $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ לפי משפט הפירוק הספקטרלי. המ"ע בוודאי T–איווריאנטים.
לפי משפט המוכיח כי $m_{T|_W} | m_T$ וגם אם W הוא תת־מרחב T־שמור אז אם T לכסין גם $T|_W$ לכסין. הצמצום של T לכל אחד מתתי המרחבים לעיל הוא

$$m_{T|_U}(\lambda) = (\lambda-2)^2$$

$$m_{T|_W}(\lambda) = (\lambda-3)$$

2. נתייחס למטריצה בתור A או T ללא חשיבות.

א. נמצא את הפולינום האופייני מעל $\mathbb{R}$,

$$p_A(\lambda) = det\left(\lambda I - A\right) = \left|\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right| = (\lambda-1)\left|\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right| =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-1) = (\lambda-2)(\lambda-1)^3$$

מעל $\mathbb{C}$ נקבל

$$p_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^3$$

אז נמצא מתי דרגת הגרעין של הגורם הלינארי ממעלה 3 היא 1, נמצא את המעלה שבה אם נציב את המטריצה ב־p נקבל את מטריצת האפס,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathbb{I}\right)^2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_{4\times 4}$$

לכן המטריצה אינה לכסינה וספולינום האופייני הוא:

$$m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

מתקיים $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ לפי משפט הפירוק הספקטרלי.

ב. לפי משפט הפירוק הפרימרי עבור $W_i = ker\left(\lambda_i \mathbb{I} - T\right)^{\beta_i}$, מתקיים W_i T־ אינווריאנטים $V = \oplus W_i$.

לכן

$$W_1 = ker\left(\lambda_1\mathbb{I}-T\right) = ker\left(2\mathbb{I}-T\right) = ker\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} =$$

$$= ker\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2 = ker\left(\lambda_2\mathbb{I}-T\right) = ker\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} =$$

$$= ker\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = ker\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נשים לב כי הריבוי האלגברי גדול (ממש) מהריבוי הגיאומטרי, לכן A אינה לכסינה. ז"א, ישנם פחות ו"ע מערכים עצמיים. נשלים את הבסיס של W_2באמצעות ערך עצמי מוכלל, כלומר מתקיימים

$$\begin{cases} \left(T-\lambda\mathbb{I}\right)^m x_m & = 0 \\ \left(T-\lambda\mathbb{I}\right)^{m-1} x_m & \neq 0 \end{cases}$$

נחשב $rank\left(T\right)-\mu_1 = 1$ כאשר μ_1 הוא הריבוי האלגברי של הע"ע 1.
נעלה בדרגה את הפולינומים עד שנגיע למטריצה מדרגה 1.

$$\left(I-A\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, rank = 2$$

$$\left(I-A\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, rank = 1$$

לכן יהיה ע"ע עצמי מוכלל יחיד, כי השרשרת גורדן היא מאורך 1 וההפרש בין דרגות המטריצות הוא 1.

מצאנו שני ו"ע בת"ל של הגרעין במעלה 1 . על מנת להשלים את הבסיס שיפרוש את המרחב העצמי עלינו לפתור את השרשרת גורדן.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

לכן

$$U = span \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \underbrace{=}_{equal-dimensions} Ker\left(\mathbb{I} - A\right)^3$$

$$W \underbrace{=}_{equal-dimensions} Ker\left(2\mathbb{I} - A\right)^1$$

לפי משפט הפירוק הפרימרי: $\mathbb{C}^4 = W \oplus U$.
ג.המטריצה חייבת להיות בצורת בלוקים כי התתי־מרחבים הם סכום־ישר .
המטריצה P מוגדרת כהבסיס שמצאנו בסעיף ב בעמודותיה ,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ד.הצורת גורדן המתאימה (לא היחידה) היא:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

נפרק למטריצה נילפוטנטית ולכסינה (אף אלכסונית במקרה זה) המתחלפות בכפל:

$$N=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

.3

א. **הוכחה:** יהא $v\in V$. נניח כי לכל $v\in V$ קיים $n\left(v\right)$ כך שמתקיים $T^{n(v)}\left(v\right)=0$.
עלינו להוכיח כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$T^{n}\left(v\right)=0$.
נגדיר $n=max\left\{ n\left(v\right)\right\} +1$. כל vמתאפס עם $n_{0}\in\mathbb{N}$ כלשהו המקיים $n_{0}<n$ אזי

$$T^{n}\left(v\right)=T^{n-n_{0}}\circ T^{n_{0}}\left(v\right)=T^{n-n_{0}}\left(0\right)=0$$

נשים לב כי $n-n_{0}>0$ אז לא נטפל במקרה $n=n\left(v\right)$ אך אילו כן בכל מקרה היה מתקיים $T^{0}\left(0\right)=0$ כי זו טרנספורמציית הזהות.
מ.ש.ל. ■

ב. **הוכחה:** נניח כי $dimImT=1$. יהא $v\in V$.
אזי $T\left(v\right)=\lambda\left(v\right)v_{1}\subseteq span\left\{ v_{1}\right\} =ImT$ כאשר $\lambda\left(v\right)$ הוא משתנה התלוי ב־v.
לפי משפט גורדן, כל מטריצה דומה למטריצה ללכסינה חיבור עם נילפוטנטית(צורת גורדן).

<u>מקרה I</u>

המטריצה לכסינה עם ע"ע λ וו"ע $\lambda\left(v_{1}\right)$ מריבוי גיאומטרי=אלגברי של 1 וע"ע 0 מריבוי אלגברי=גיאומטרי של $rankT-1$. אז קיים בסיס שבו היא אלכסונית, אזי אינה נילפוטנית.(כי אם T אלכסונית אז לכל $n\in\mathbb{N}$, $T^{n}\neq0_{m\times m}$.)

הסבר נוסף: הצורת גורדן שלה היא בלוק של 1 והשאר אפסים (כלומר אלכסונית חיבור עם מטריצת האפס עבור הנילפוטנטית במשפט).

<u>מקרה II</u>

T אינה לכסינה. אז לא קיים $v_{0}\in V$ המקיים $T\left(v_{0}\right)=\lambda v_{0}$ אך אכן מתקיים $dimImT=1$ כלומר $T\neq0_{n\times n}$.

קיים בסיס כך שכל המטריצה אפסים פרט לערך יחיד <u>שאינו</u> על האלכסון הראשי. אז הפולינום האופייני של הטרנספורמציה הוא $p\left(x\right)=x^{n}$. אזי T נילפוטנטית.

כעת, נניח בשלילה כי היא לכסינה ונילפוטנטית סימולטנית.

אם היא לכסינה אז קיים בסיס כך שמטריצה מייצגת לפי בסיס זה היא אלכסונית. אך מטריצה אלכסונית בכל חזקה מעל $\mathbb{N}$היא אלכסונית. סתירה לנילפוטנטיות. (בכללי לאלכסוניות לא מתייחס לנתון לגבי התמונה). ■

.4

.1

יהא $v\in V$,

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון קיים איזומורפיזם עבור $T:V\rightarrow U$ אופרטור לינארי,

$$\phi:\underbrace{V/K\mathrm{erT}}_{V/W}\rightarrow\underbrace{ImT}_{U}$$

$V=M_n\left(\mathbb{R}\right)$. $W=\left\{Upper-diagonal-matrices\right\}$. $U=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ . & b & . & . \\ c & d & . & 0 \end{bmatrix} | letters\in\mathbb{R}\right\}$

$$T\left(\begin{bmatrix} s & f & . & k \\ a & g & h & l \\ . & b & . & . \\ c & d & . & r \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ . & b & . & . \\ c & d & . & 0 \end{bmatrix}$$

זו בוודאי העתקה לינארית,חח"ע ועל (כי זו אותה מטריצה ללא האיברים "מעל" וכולל האלכסון הראשי) והגרעין הן כל המטריצות המשולשות עליונות.
באמצעות קוסטים:

$$\phi\left([v]\right)=v+W$$

$$dim\left(V/W\right)=dimV-dimW=(n^2-n)/2$$

.2

$$T\left(p(x)\right)=p\left(\ominus\pm\sqrt{5}\right)$$

$$U=\left\{p\left(x\right)\in Q\left[x\right]|(x+\sqrt{5})\left(x-\sqrt{5}\right)\notin p\left(x\right)\right\}=\left\{p\left(x\right)\in Q\left[x\right]|p\left(\pm\sqrt{5}\right)\neq 0\right\}$$

המימד הוא אינסופי. נותר אינסופי למרות שהוא קבוצת מנה כי צמצמנו את כל הפולינומים עם פתרונות ספציפיים אז עדיין נותרנו עם כמות אינסופית של פולינומים ב־$\mathbb{Q}\left[x\right]/W$.

.3

<u>מקרה 1</u>

$u\neq\alpha v$ לכל $\alpha\in\mathbb{F}$.

קיים $w\in\mathbb{R}^3$ כך ש־$B=\left\{u,v,w\right\}$. נסמן $v=u^{'}+v^{'}+w^{'}$. כאשר $v'\in span\left\{v\right\}$ וכדומה עבור שאר הוקטורים בבסיס B.

$$T\left(v\right)=w^{'}$$

זו העתקה לינארית,חח"ע ועל. הגרעין שלה הוא כל הוקטורים בvללא רכיב של w.

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, קיים איזומורפיזם $\phi:V/W\to ImT$ מאחר והמימדים סופיים מתקיימים:

$$dim\left(V\backslash W\right)=dim\left(V\right)-dim\left(W\right)=1$$

<u>מקרה 2</u>

קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש־$u = \alpha v$.

על מנת להשלים לבסיס נבחר שני וקטורים $w, \psi \in V$ המקיימים $w \neq \alpha\psi$ וגם $w \neq \beta u$ לכל $\beta, \alpha \in \mathbb{F}$. $B = \{u, w, \psi\}$. נסמן $v = w^{'} + \psi^{'} + u^{'}$.

$$T(v) = w^{'} + \psi^{'}$$

זו העתקה לינארית חח"ע ועל. הגרעין שלה הוא כל הוקטורים ב־$span\{u\}$.

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, V/W ו־ImT איזומורפיות. הקבוצות ממימד סופי לכן,

$$dim(V \backslash W) = dim(V) - dim(W) = 2$$