תרגיל מס' 2 בתורת המשחקים

1. יהי $G_{m,n}$ המשחק של Gale שנידון בהרצאה. עבור המקרה $m = n \geq 2$ הוכח: בכל תכסיס נצחון של לבן, הוא בוחר במסע הראשון את המשבצת הסמוכה אלכסונית למשבצת החסרה.

2. לבן ושחור משחקים את המשחק $S_{n,k}$, עם פרמטרים שלמים n, k המקיימים $0 \leq k \leq n$. לוח המשחק הוא אוסף כל התת־קבוצות $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ כך ש־ $1 \leq |A| \leq k$. כל שחקן בתורו (לבן ראשון) בוחר קבוצה A בלוח המשחק שטרם נמחקה, ומוחק אותה ואת כל הקבוצות המכילות אותה. (למשל במשחק $S_{3,2}$ בחירת $A = \{1\}$ תגרור את מחיקת כל הקבוצות הבאות: $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}$) השחקן שבהגיע תורו לשחק הלוח ריק מפסיד, ויריבו מנצח. נתבונן בטענה הבאה:

   לשחור יש תכסיס נצחון ב־$S_{n,k}$ אם ורק אם $k+1$ מחלק את n.

   הוכח שהטענה נכונה בכל אחד מן המקרים הפרטיים הבאים:

   א. $k = 0$

   ב. $k = 1$

   ג. $k = n$

   ד. $n = 3$

   ה. $n = 4$

3. במשחק "אבן, נייר ומספריים" כל אחד משני השחקנים בוחר בו־זמנית אחד מבין שלושת העצמים שבשם המשחק. הנייר מנצח את האבן, המספריים את הנייר, והאבן את המספריים. אם שני השחקנים בחרו אותו עצם, התוצאה היא תיקו.

   א. תאר משחק זה ע"י עץ משחק.

   ב. הסבר היכן נכשלת הוכחת משפט פון־נוימן כאשר מנסים לבצעה על עץ כזה.