אלגברה 104167

תאריך: 24/12/2014

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: גיליון תלות לינארית

שם המתרגל: גלית מזרחי

פרישה ותלות לינארית:

פרק 4 שאלה 7:

7. קבע עבור איזה ערך של הפרמטר α הוקטורים הבאים תלויים לינארית, ועבור ה- α שמצאת כתוב את הוקטור הראשון כצרוף לינארי של השאר או הוכח שזה בלתי אפשרי.

א) $\{v_1=(1,3,\alpha), v_2=(1,2,2), v_3=(1,1,1)\}$;

ב) $\{v_1=(1,3,-1,\alpha), v_2=(7,3,4,4), v_3=(5,1,2,2), v_4=(1,1,1,1)\}$;

ג) $\{v_1=(1,\alpha,-1,0), v_2=(1,1,0,1), v_3=(1,1,1,1)\}$;

פרק 4 שאלה 11:

11. נתון ש- $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ הם בלתי תלויים לינארית. הוכח או הפרך: $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ הם בלתי תלויים לינארית.

פרק 4 תרגיל 17:

17. הוכח שאם w , v , u הם בלתי תלויים לינארית אז גם $\{u+v+w\ ,\ v-w\ ,\ 2w\}$ בלתי תלויים לינארית.

פרק 13 עמוד 14 תרגיל 5א:

<u>שאלה מספר 5.</u>

לפניך שתי טענות. עבור כל אחת מהן עליך לקבוע אם הטענה נכונה או לא. אם לדעתך הטענה נכונה, עליך להוכיח אותה. אם לדעתך הטענה אינה נכונה, עליך להביא דוגמא נגדית.

א. תהי $N=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ קבוצה תלויה במרחב וקטורי V. נתון כי כל תת קבוצה של N השונה מ- N היא בלתי תלויים לינארית. אז, קיימים סקלרים כולם שונים מאפס, כך ש- $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_mv_m=0$.

פרק 13 עמוד 4 תרגיל 5ב

ב. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה אינסופי שאינו ניתן לפרישה ע"י איבר בודד, אזי יש ל- V אינסוף תתי מרחב.

פרק 14 עמוד 18 תרגיל 4א

א. תהא A קבוצה סופית תלויה לינארית במרחב וקטורי כך ש- $0\notin A$. הוכח (מתוך הגדרת תלות לינארית בלבד) כי קיימים לפחות שני איברים ב- A שהם צירוף לינארי של האחרים.

פרק 4 שאלה 7 :

קבע עבור איזה ערך של הפרמטר a הווקטורים הבאים תלויים לינארית, ועבור ה a שמצאת כתוב את הווקטור הראשון כצירוף לינארי של השאר או הוכח שזה בלתי אפשרי.

א) $\{v_1=(1,3,a),\ v_2=(1,2,2),\ v_3=(1,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix}1&3&a\\1&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&3&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-R_1]{R_2=R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&2&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&a-3\end{pmatrix}$$

אם $a=3$ למטריצה יש שורה מתאפסת ולכן הם ת״ל

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\3&2&1\\3&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&b&c\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$a+b+c=0 \quad\quad -b-c=0$

$\downarrow \quad\quad\quad\quad \downarrow$

$a=0 \quad\quad\quad b=-c$

$$(1,3,3)=\alpha(1,2,2)+\beta(1,1,1)=2(1,2,2)-1(1,1,1)$$

$1=\alpha+\beta$

$3=2\alpha+\beta$

$3=2\alpha+\beta$

ב) $\{v_1=(1,3,-1,a),\ v_2=(7,3,4,4),\ v_3=(5,1,2,2),\ v_4=(1,1,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\5&1&2&2\\7&3&4&4\\1&3&-1&a\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3=R_3-7R_1]{R_2=R_2-5R_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-4&-3&-3\\0&-4&-3&-3\\1&3&-1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&-4&-3&-3\\1&3&-1&a\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים ללא קשר ל-a ולכן אין ל-a השפעה על התלות הלינארית של הווקטורים.

פרק 4 שאלה 7 - המשך:

(ז) $\{v_1=(1,a,-1,0),\ v_2=(1,1,0,1),\ v_3=(1,1,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_3=R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור אף ערך של a המטריצה לא תהיה שורת אפסים ולכן,
מכיוון שהוקטורים בלתי תלויים לינארית לא ניתן לבטא אחד מהם
באמצעות השאר ובפרט לא ניתן לבטא את הראשון בעזרת השאר.

פרק 4 שאלה 11:

נתון ש- $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ הם בת"ל. הוכח/הפרך: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ הם בת"ל.

נתון:
$$\begin{pmatrix} x_1 & \cancel{x_2} \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

בת"ל ולכן $0=\beta=\alpha$.

נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ הם ת"ל. כלומר קיימים
סקלריים לא כולם אפס כך ש:

$$a\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} ax_2+bx_1=0 \\ ay_2+by_1=0 \\ az_2+bz_1=0 \end{cases}$$

אבל זו סתירה לנתון $0=\beta=\alpha$, לשתי המשוואות הראשונות והוכחה
גם עבור המשוואות השלישית ולכן ההנחה שגויה ו- $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
הם בת"ל.

פרק 4 שאלה 7:

אם w,v,u הם בת"ל אז גם $\{u+v+w,\ v-w,\ 2w\}$ בת"ל.

נרשום את הוקטורים כצ"ל לינארי: $x(u+v+w)+y(v-w)+z(2w)=0$

נרשום אותה כביטויים של w,v,u:

$$w(x-y+2z)+v(x+y)+u\cdot x=0$$

ידוע לנו ש- w,v,u הם בת"ל, כלומר המקדמים שלהם בהכרח שווים לאפס ולכן:

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=0\\ x+y&=0\\ x&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x&=0\\ y&=0\\ z&=0 \end{aligned}$$

ולכן גם $x=y=z=0$ הם בת"ל, כי הראינו שצירוף לינארי שלהם נותן אפס אז בהכרח כל המקדמים הם אפס.

פרק 13 עמוד 14 תרגיל 5 א'

הוכחת הפרק:

(א) תהי $N=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ קבוצה תלויה לינארית במרחב וקטורי V. נתון כי כל תת קבוצה של N השונה מ-N היא בלתי תלויה לינארית. אזי, קיימים סקלארים כולם שונים מאפס, כך ש: $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_mv_m=0$.

N תלויה לינארית ולכן קיימים סקלארים לא כולם אפס כך ש: $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_mv_m=0$.

כל הסקלארים של מ.ל.מ: $a_1v_1+\dots+a_mv_m=0$ שווים לאפס.

נניח בשלילה שקיים לפחות סקלר אחד שווה לאפס, נסמן את איבר זה $a_\ell=0$ $1\le\ell\le m$. כלומר: $a_1v_1+\dots+\underbrace{\cancel{a_\ell v_\ell}}_{0}+\dots+a_mv_m=0$ כאשר $\alpha_1,\dots,\alpha_m\neq0$ (חוץ מ- ℓ זה).

לפי התנון קיבלנו תת קבוצה של N השונה מ-N ולכן היא בת"ל כלומר כל הסקלארים שווים לאפס, וזה בניגוד להנחה ש- a_ℓ הוא הסקלר היחיד ששווה לאפס.

בחרנו את a_ℓ הנ"ל, בצורה אופן אפשר לקחת כל a_i שנרצה כאשר $1\le i\le m$.

מכאן שההנחה שגויה ולכן נובע שהנתונים שקיימים סקלארים כולם שונים מאפס כך ש- $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_mv_m=0$, v_i.

פרק 13 עמוד 4 תרגיל 5 ס':

הוכח/הפרך:

(ב) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה אינסופי, שאינו ניתן לפרישה ע"י איבר בודד, אזי יש לו אינסוף תתי מרחב.

נסמן $\{v_1,v_2\}$ הבסיס של V, או חלק ממנו.

נסתכל על תת המרחב: $W_2=\{w\in V \mid w=\alpha u_1+2\alpha u_2 \mid \alpha\in R\}$. זהו

ת"מ כי ע"פ הגדרת הבסיס $0=0u_1+0\cdot 2\cdot u_2$

כמו כן, $w_1+\gamma w_2=(\alpha u_1+2\alpha u_2)+\gamma(\beta u_1+2\beta u_2)=$

$=(\alpha+\gamma\cdot\beta)u_1+2(\alpha+\gamma\cdot\beta)u_2\in W$

כלומר W סגורה לחיבור וכפל בסקלר ומכילה את וקטור האפס ולכן היא ת"מ.

נסמן $W_n=\{w\in V \mid w=\alpha u_1+n\alpha u_n\}$ לכל $n\in N$. היות ו-N קבוצה אינסופית, קיימים אינסוף תתי מרחבים כאלה.

פרק 4 עמוד 18 תרגיל 4א':

תהי A קבוצה סופית תלויה לינארית במרחב וקטורי כך ש- $0\notin A$. הוכח (מתוך הגדרת תלות לינארית בלבד) כי קיימים לפחות שני איברים ב-A שהם צירוף לינארי של האחרים.

0 לא שייך ל-A כלומר $A=\{v_1,\dots,v_n\}$ כאשר $v_1,\dots,v_n\neq 0$

מהגדרה של תלות לינארית- קיימים סקלרים לא כולם אפס כך ש- $\sum_{i=1}^{n} a_iv_i = a_1v_1+\dots+a_nv_n=0$. A תלויה לינארית.

נניח בשלילה ובלי הגבלת הכלליות כי $\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ אזי נקבל $\alpha_1v_1+0+\dots+0=0$. כיוון ש- $v_i\neq 0$ (לפי הנתון) נובע מההנחה $\alpha_1=0$, אבל במקרה זה נקבל סתירה שכן A תלויה וקיבלנו שהיא בת"ל $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, כלומר קיימים לפחות שני סקלרים שונים מאפס. במצב זה נבחר בלי הגבלת הכלליות $\alpha_m,\alpha_e\neq 0$

כלומר: $\underbrace{\alpha_1v_1}_{0}+\underbrace{\dots}_{0}+\alpha_ev_e+\underbrace{\dots}_{0}+\alpha_mv_m+\underbrace{\dots}_{0}+\underbrace{\alpha_nv_n}_{0}=0$

$\alpha_mv_m+\alpha_ev_e=0$

A תלויה ולכן ניתן לכתוב כצירופים לינאריים את v_e ו- v_m.

$v_m=-\frac{\alpha_ev_e}{\alpha_m}$ $\qquad$ $v_e=-\frac{\alpha_mv_m}{\alpha_e}$

כלומר לפחות שני סקלרים חייבים להיות שונים מאפס על מנת שנוכל לרשום שני איברים מ-A כצירוף לינארי של האחרים.