אלגברה ב׳ - פתרון תרגילים מן המבחן האחרון

♠ ליניארית ג׳

ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח ש-B נמצאת בפינה השמאלית העליונה של A, ולכן $B = XX^*$, כאשר A היא מן הצורה

$$A = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \; [X^* \, Y^*] \; .$$

נכפול בלוקים ונ(י)ראה, שעלינו להוכיח שמתקיים השוויון

$$rank(XX^*) = rank\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \; X^* \right).$$

לשם-כך נראה שהגרעינים של המטריצות הנ"ל זהים (והכלה אחת ברורה):

$$\begin{aligned} XX^*z = 0 \quad &\Rightarrow \quad z^*XX^*z = 0 \Leftrightarrow \|X^*z\| = 0 \\ &\Rightarrow \quad X^*z = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \; X^*z \; = 0. \end{aligned}$$

♠ חבורות ג׳

עלינו להוכיח שחבורה G מסדר 15 היא חבורה ציקלית.
על-פי משפט קושי, קיימות ב-G תת-חבורה H מסדר 5, ותת-חבורה K מסדר 3.
נשים לב ש-$H \cap K = \{1\}$, מכיוון שסדריהן זרים. מטרתנו תהיה להוכיח שמתקיים השוויון $hk = kh$ לכל $h \in H, k \in K$, ואז בהיבחר יוצרים (תת-החבורות הנ"ל ציקליות, כיוון שסדריהן ראשוניים) a, b של H, K - בהתאמה, המכפלה ab תהיה איבר מסדר 15 בחבורה.
בשלב הראשון, נוכיח ש-$H \triangleleft G$: נבנה את ההומומורפיזם של פרובניוס $\psi : G \to S_{G/H}$, המוגדר ע"י $\psi(g)(xH) = gxH$. הוכחתם בהרצאה שהגרעין של ψ מוכל ב-H. בגלל משפט האיזומורפיזם הראשון, $[G : \ker(\psi)] | [G : H]! = 6$, ולכן $\ker(\psi) \neq \{1\}$ - הרי 15 אינו מחלק את 6 - ואנו מסיקים ש-$H = \ker(\psi)$, שכן H מסדר ראשוני וכל תת-החבורות שלה טריוואיליות. גרעין של הומומורפיזם הוא ת"ח נורמלית, ולכן H נורמלית.
כעת עלינו להוכיח שאיברי החבורה K מתחלפים בכפל עם האיברים של H. בהיות H נורמלית ב-G, נוכל להגדיר את ההומומורפיזם $Ad : K \to Aut(H)$, ע"י $Ad(k)(h) = khk^{-1}$. כעת, $H \cong \mathbb{Z}_5$, ולכן $|Aut(H)| = \varphi(5) = 4$, ובהיות $|K| = 3$ אנו מסיקים שההומומורפיזם Ad הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי, כלומר: $Ad(k)(h) = h$ לכל $h \in H, k \in K$, והראינו כי H ו-K מתחלפות נקודתית בכפל.