קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 1

שאלה 1:

א. הוכיחו כי לכל p,q ראשוניים שונים, $\sqrt{pq}$ אי-רציונלי.

יהיו p,q ראשוניים, נסמן $r=\sqrt{pq}$ ונניח בשלילה כי $r\in\mathbb{Q}$, ונסמן $r=\frac{m}{n}$, שבר מצומצם (m,n שלמים, $n\neq 0$).

אז מתקיים: $\frac{m^2}{n^2}=pq=r^2$, או $m^2=n^2pq$, כלומר $p|m^2$ וגם $q|m^2$. p,q ראשוניים, לכן זה גורר כי $p|m,q|m$, כלומר נוכל לרשום $m=apq$ עבור $a\in\mathbb{N}$ כלשהו, ולכן מ- $m^2=n^2pq$ נקבל $a^2p^2q^2=n^2pq$, לכן $a^2pq=n^2$, וכמו מקודם נקבל $p,q|n$, או $n=bpq$ ל- $b\in\mathbb{N}$ כלשהו, בסתירה לכך ש- $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם.

ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ אי-רציונלי.

נסמן $q=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2}(1+\sqrt[3]{2})$, ונניח בשלילה כי מספר זה רציונלי. על ידי הכפלה ב- $(\sqrt[3]{2}-1)$ והעברת אגפים נקבל: $\sqrt[3]{2}=\frac{q+2}{q+1}$. באופן דומה להוכחת $\sqrt{2}$ לא רציונלי ניתן לקבל גם כי $\sqrt[3]{2}$ אינו רציונלי, אבל אם q רציונלי אז גם $\frac{q+2}{q+1}$ רציונלי (מסגירות לחיבור, כפל וחילוק בשדה, ונשים לב כי $q+1\neq 0$), ולכן $\sqrt[3]{2}$ רציונלי – סתירה.

ג. יהיו $r_1,r_2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $q\in\mathbb{Q}$. האם המספרים הבאים הם רציונליים, אי-רציונליים או שלא ניתן לקבוע? הוכיחו טענותיכם.

1) r_1+q 2) r_1+r_2

3) r_1r_2 4) r_1q

1) אי-רציונלי: אחרת $r_1=(r_1+q)-q$ רציונלי (מסגירות הרציונליים לחיבור)
2) לא ניתן לקבוע. למשל: $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ אי-רציונלי, כפי שהוכח בסעיף קודם, אך $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0\in\mathbb{Q}$
3) לא ניתן לקבוע, למשל: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\in\mathbb{Q}$, אך $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ (סעיף א).
4) לא ניתן לקבוע – עבור $q=0$ נקבל $r_1q=0\in\mathbb{Q}$, לכל $q\neq 0$ נקבל $r_1q\notin\mathbb{Q}$ מסגירות רציונלים לכפל, כמו ב- (1).

שאלה 2:

א. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, כאשר $a\neq 0$. הוכיחו שאם $b^2-4ac>0$ אז למשוואה $ax^2+bx+c=0$ יש שני פתרונות ממשיים שונים.

ראשית נוכל להניח $a>0$, אחרת נעביר את כל המחוברים אגף. נשתמש בהשלמה לריבוע, נקבל:

$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$, לכן $ax^2+bx+c=0$ נותן לנו: $\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\frac{b^2-4ac}{4a}$. אם

$b^2-4ac>0$ זה נותן 2 פתרונות שונים עבור x.

ב. נסמן ב- $p(x)$ את הפולינום הריבועי $p(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2$, כאשר $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ לכל $i=1,\dots,n$. הראו שאם $a_1,\dots,a_n\,,b_1\,,\dots,b_n$ אינם כולם אפס, אז ל- $p(x)=0$ יש לכל היותר פתרון ממשי אחד.

$p(x)$ הוא סכום של ביטויים אי-שליליים, ולכן יכול להיות שווה ל- 0 אם ורק אם כל אחד מהביטויים בנפרד שווה ל-0, כלומר $a_ix+b_i=0$ לכל i. נניח בה״כ כי $a_1\neq 0$, ואז $x=-\frac{b_1}{a_1}$ הוא הפיתרון היחיד של $a_1x+b_1=0$, ולכן הוא המועמד היחיד להיות פיתרון של $p(x)=0$, לכן ל- $p(x)=0$ יש לכל היותר פתרון אחד.

ג. יהיו $a_1,\dots,a_n\,,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$. הוכיחו את אי השוויון הבא, הנקרא אי שוויון קושי-שוורץ:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

ניעזר בסעיפים קודמים: עבור $p(x)=\sum(a_ix+b_i)^2=\left(\sum a_i^2\right)x^2+2\left(\sum a_ib_i\right)x+\sum b_i^2$ מסעיף ב׳ חייב להתקיים $b^2-4ac\leq 0$ (כאשר a,b,c כפי שהוגדרו בסעיף א), אחרת ל- $p(x)$ היו שני פתרונות ממשיים שונים.

(נשים לב כי נוכל להניח שלא כל ה- $a_i=0$, אחרת אי השוויון טריוויאלי מכיוון שאגף ימין אי-שלילי).

לכן צריך להתקיים: $4\left(\sum a_ib_i\right)^2\leq 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$, וסיימנו.

ד. יהיו $y_1\,,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $\sum_{i=1}^{n}y_i=1$. הוכיחו כי: $\frac{1}{n}\leq\sum_{i=1}^{n}y_i^2$.

נשתמש באי-שוויון קושי שוורץ עבור $a_i=y_i$ ו- $b_i=\frac{1}{\sqrt{n}}$, ונקבל את הדרוש.

<u>שאלה 3:</u>

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת את הנוסחאות הבאות:

א. אם $a_1\,,d\in\mathbb{R}$ ונגדיר $a_{n+1}=a_n+d$, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ (זהו סכום סדרה חשבונית).

עבור $n=1$ נקבל $a_1=a_1$. נניח כי מתקיים עבור n, ואז: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i+a_{n+1}=\frac{(a_1+a_n)n}{2}+$ $a_{n+1}=\frac{na_1+(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}-nd}{2}$. ניתן להראות (באינדוקציה פשוטה) כי $a_1+nd=a_{n+1}$, ולכן קיבלנו כי $\sum_{i=1}^{n+1} a_i=\frac{(a_1+a_{n+1})(n+1)}{2}$, כנדרש.

ב. אם $a_1,q\in\mathbb{R}$ ובנוסף $q\neq 1$, ונגדיר $a_{n+1}=a_1q^n$, אז מתקיים: $\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$

(זהו סכום סדרה הנדסית).

עבור $n=1$ נקבל $a_1=a_1$. נניח כי מתקיים עבור n, ואז: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i+a_{n+1}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}+$ $a_1q^n=\frac{a_1(q^n-1)+(q-1)a_1q^n}{q-1}=\frac{a_1(q^{n+1}-1)}{q-1}$, כנדרש.

שאלה 4:

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$1+8+27+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2 .$$

עבור $n=1$ נקבל 1=1. נניח שמתקיים עבור n, נשתמש בהנחת, בבינום עבור שני איברים ובסכום סדרה הנדסית משאלה קודמת, ונקבל: $\left(1+2+\cdots+n+(n+1)\right)^2=\left((1+\cdots+n)+(n+1)\right)^2=$

$$(1+\cdots+n)^2+2(1+\cdots+n)(n+1)+(n+1)^2=(1+8+\cdots+\mathrm{n}^3)+2\cdot\frac{(1+\mathrm{n})\mathrm{n}}{2}(\mathrm{n}+1)+(\mathrm{n}+1)^2$$

$$=1+\cdots+n^3+(n+1)^2(n+1)=1+\cdots+n^3+(n+1)^3$$

שאלה 5:

את סדרת פיבונצ׳י מגדירים על ידי קביעת $a_1=a_2=1$, ו- $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ לכל $n\geq 1$.

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי למעשה מתקיים: $a_n=\frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{\sqrt{5}}$.

עבור $n=1$ נקבל 1=1. נניח שמתקיים עד n, ונשתמש בהגדרת סדרת פיבונצ׳י ובהנחת האינדוקציה נקבל:

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}=$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+1\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

לסיום, נשים לב כי: $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

שאלה 6:

לכל אחת מהטענות הבאות, רשמו את הטענה ההפוכה לה (כלומר, את שלילת הטענה). a_n מייצג איבר כללי של סדרה נתונה כלשהי.

א. לכל מספר ממשי M קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n < M$.

ב. לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל מספר טבעי n המקיים $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

ג. לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל שני מספרים טבעיים m, n המקיימים $m, n > N$,
מתקיים: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

א. קיים מספר ממשי M כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq M$.

ב. קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N קיים טבעי n המקיים $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

ג. קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל N כך שקיימים שני טבעיים $n, m > N$ המקיימים $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$.

שאלה 7:

עבור כל אחד משני הביטויים הבאים, מצאו ביטוי שווה התלוי ב- n ובכל אחת מארבע פעולות החשבון האלמנטריות פעם אחת לכל היותר. הוכיחו את טענותיכם.

א. $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

ב. $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$

א. $\frac{n-1}{n}$

ב. $\frac{n+1}{2n}$

ניתן להוכיח ישירות דרך סכום / מכפלה טלסקופיים או באינדוקציה.