חשבון אינפיניטסימלי 3 – ת"ב 2

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

28/11/2016

תאריך הגשה

12

קבוצת תרגול

שאלה 1:

א. נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

ונרצה להראות כי פונקציה זו אינה גזירה ב-$(0,0)$.
לשם כך, נניח בשלילה כי פונקציה זו אכן גזירה.
כלומר, קיים קירוב ליניארי מהצורה:

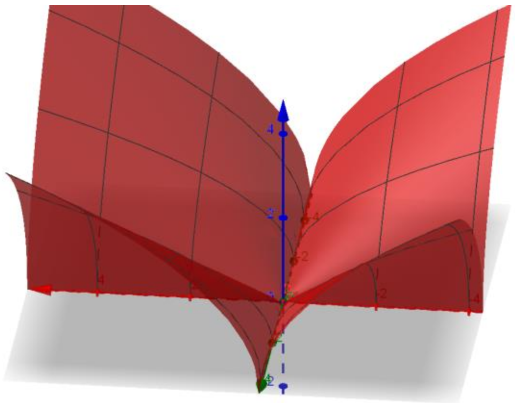
$$f\big((x,y)\big)=\underbrace{f(0,0)}_{=0}+Ax+By+\varepsilon\big((x,y)\big)$$

כך שמתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$$

נסיק, אם כן, כי מתקיים:

$$f\big((x,y)\big)-(Ax+By)=\varepsilon\big((x,y)\big)$$



איור 1 – תיאור גרף הפונקציה $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

עבור $(x,y)\neq(0,0)$, נוכל לחלק ב-(x,y) ולקבל כי:

$$\frac{f(x,y)-(Ax+By)}{\|(x,y)\|}=\frac{\varepsilon\big((x,y)\big)}{\|(x,y)\|}$$

וכאמור, לכאורה, תחת הנחת השלילה, לכל סדרה $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\xrightarrow{n\to\infty}0$ צריך להתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon\big((x_n,y_n)\big)}{\|(x_n,y_n)\|}=0(\star)$$

וזאת על פי הגדרת פונקציית השגיאה.
ונבחר עתה שני מסלולים מהצורה $\big(x(t),y(t)\big)$ באופן הבא:

א. $y(t)=At$ וכן $x(t)=At$. נקבל כי:

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{|A^2t^2|}-At-BAt}{\sqrt{A^2t^2+A^2t^2}}=\lim_{t\to0}\frac{At-At-BAt}{\sqrt{2}At}=\lim_{t\to0}-\frac{BAt}{\sqrt{2}At}=-\frac{B}{\sqrt{2}}$$

אך מ-$(\star)$ נסיק כי $\frac{B}{\sqrt{2}}=0$ כלומר $B=0$.

ב. $y(t)=Bt$ וכן $x(t)=Bt$, ונקבל כי:

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{B^2t^2}-ABt-Bt}{\sqrt{B^2t+B^2t}}=\lim_{t\to0}\frac{Bt-ABt-Bt}{\sqrt{2}Bt}=\lim_{t\to0}\frac{-ABt}{\sqrt{2}Bt}=-\frac{A}{\sqrt{2}}$$

ומאותו שיקול, נסיק כי בהכרח $\frac{A}{\sqrt{2}}=0$, כלומר $A=0$.

ג. נציב $A=B=0$ ונבחר פרמטריזציה למסלול מהצורה $x(t)=y(t)=t$ ונקבל כי:

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t^2}-\overbrace{At-Bt}^{=0}}{\sqrt{2t^2}}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sqrt{2}t}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

אך מ-$(\star)$ נקבל סתירה שכן $\frac{1}{\sqrt{2}}\neq0$.

הראינו כי לא ייתכן כי קיימים קבועים A,B כנ"ל ולכן הפונקציה אינה גזירה ב-$(0,0)$, כלומר, לא ניתן למצוא מישור המשיק לפונקציה בנקודה זו.

ב. תהא פונקציה $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ המקיימת $|f(x)|\leq\|x\|^2$ בכל התחום. נרצה להראות כי היא גזירה ב-0.
לשם כך נראה כי ישנו קירוב ליניארי מהצורה:

$$f(x)=\overbrace{f(0)}^{=0}+\sum_{i=1}^{n}A_ix_i+\varepsilon(x)\quad\varepsilon(x)=o(\|x\|)$$

ראשית, נשים לב כי $|f(0)|\leq\|0\|^2=0$ כלומר אכן $f(0)=0$ כנדרש.

עתה נראה כי עבור $A_i = 0$ לכל i מתקבל קירוב ליניארי. כלומר, עלינו להראות כי $f(x) = o(\|x\|)$ ואכן מתקיים:

$$0 \leq \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \lim_{x\to 0} \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \|x\| = 0$$

כלומר $f(x) = o(\|x\|)$ ובפרט נקבל כי הקירוב הליניארי שבחרנו אכן מתאים והיא דיפרנציאבילית כדרוש.

שאלה 2:

נתון כי פונקציה $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ נקראת ביליניארית אם לכל $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ וכל $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ וכן $a \in \mathbb{R}$, מתקיימים התנאים הבאים:

i. $f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay)$

ii. $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

iii. $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$

א. נרצה להראות כי בהנתן f כנ"ל שהינה ביליניארית, מתקיים $\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} = 0$.

לשם כך נשים לב, כי אם נעבוד בנורמת 1 (אין זה משנה, נורמה זו נבחרה לצרכי נוחיות בלבד), נקבל:

$$|(h, k)| = \|h\|_1 + \|k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |h_i| + \sum_{i=1}^{m} |k_i|$$

ומתכונות הביליניארית של f, נוכל לקבל כי:

$$|f(h, k)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i \, , \sum_{i=1}^{m} k_i e_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(h_i e_i, \sum_{j=1}^{m} k_j e_j) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} h_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{m} k_j e_j \right) \right|$$

$$\overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} |h_i| \left| f(e_i, \sum_{j=1}^{m} k_j e_j \right| \leq \|h\|_1 \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(e_i, k_j e_j) \right| = \|h\|_1 \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} k_j f(e_i, e_j) \right|$$

$$\overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} \|h\|_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |k_j| |f(e_i, e_j)| \leq \|h\|_1 \|k\|_1 \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |f(e_i, e_j)|}^{Constant}$$

נסמן $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} |f(e_i, e_j)| = C$ ונקבל כי:

$$|f(h, k)| \leq \|h\|_1 \|k\|_1 C$$

כלומר, מתקיים:

$$0 \leq \lim_{(h,k)\to 0} \frac{|f(h, k)|}{|(h, k)|} \leq \lim_{(h,k)\to 0} C \frac{\|h\|_1 \|k\|_1}{\|h\|_1 + \|k\|_1}$$

וכן ניתן לכתוב:

$$\frac{\|h\|_1 \|k\|_1}{\|h\|_1 + \|k\|_1} = \frac{\|h\|_1 \|k\|_1 + \|k\|_1^2}{\|h\|_1 + \|k\|_1} - \frac{\|k\|_1^2}{\|h\|_1 + \|k\|_1} = \frac{\|k\|_1 (\|h\|_1 + \|k\|_1)}{\|h\|_1 + \|k\|_1} - \frac{\|k\|_1^2}{\|h\|_1 + \|k\|_1}$$

$$= \|k\|_1 - \frac{\|k\|_1^2}{\|h\|_1 + \|k\|_1} = \|k\|_1 - \frac{\|k\|_1^2}{\underbrace{\|h\|_1 + \|k\|_1}_{\star}}$$

נשים לב, עתה, כי מתקיים:

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{\|k\|_1^2}{\|h\|_1+\|k\|_1}\le\lim_{(h,k)\to 0}\frac{\max\{\|k\|_1^2,\|h\|_1^2\}}{\|h\|_1+\|k\|_1}\le\lim_{(h,k)\to 0}\frac{\max\{\|k\|_1^2,\|h\|_1^2\}}{\max\{\|k\|_1,\|h\|_1\}}$$
$$=\lim_{(h,k)\to 0}\max\{\|h\|_1,\|k\|_1\}=0$$

ולכן נקבל, כי $0 \to \star$ עבור $(h,k)\to 0$. ולכן:

$$\boxed{0\le\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|}\le\lim_{(h,k)\to 0}C\left[\|k\|_1-\frac{\|k\|_1^2}{\|h\|_1+\|k\|_1}\right]=0}$$

ב. נשים לב כי מהגדרת הנגזרת, היא חייבת לקיים את הקירוב הליניארי:

$$f\big((a,b)+(x,y)\big)=f(a,b)+Df(a,b)(x,y)+\varepsilon(x,y)$$

כך שמתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{|\varepsilon(x,y)|}{|(x,y)|}=0$$

וכמובן שבמידה וקיים $Df(a,b)$ המקיים את הנדרש אזי הוא יחיד. נציב אפוא:

$$Df(a,b)(x,y)=f(a,y)+f(x,b)$$

ונקבל כי:

$$f(a+x,b+y)-f(a,b)-Df(a,b)(x,y)=\varepsilon(x,y)$$

ומבילינאריות f נובע כי:

$$f(a+x,b+y)-f(a,b)=f(a+x,b)+f(a+x,y)-f(a,b)=$$
$$=f(a,b)+f(x,b)+f(a,y)+f(x,y)-f(a,b)=f(x,b)+f(a,y)+f(x,y)$$

נציב, בנוסף, $Df(a,b)(x,y)=f(a,y)+f(x,b)$ ונקבל כי:

$$f(a+x,b+y)-f(a,b)-Df(a,b)(x,y)=f(x,b)+f(a,y)+f(x,y)-f(a,y)-f(x,b)$$
$$f(x,y)$$

כלומר, במידה וזוהי אכן הנגזרת של f בנקודה (a,b), חייב להתקיים:

$$f(x,y)=\varepsilon(x,y)$$

כלומר, הנ"ל אכן מתאים אם ורק אם $f(x,y)=o(|(x,y)|)$. אך קיבלנו מסעיף א', כי מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{|f(x,y)|}{|(x,y)|}=0\Longrightarrow\boxed{Df(a,b)(x,y)=f(a,y)+f(x,b)}$$

שאלה 3:

נתונות $g:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ וכן $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^3$ המוגדרות על ידי:

$$g(x,y)=(2ye^{2x},xe^y)\quad f(x,y)=(3x-y^2,2x+y,xy+y^3)$$

א. נרצה להראות כי בסביבה של $(0,1)$ g מעתיקה באופן חד-חד ערכי ועל סביבה של $(2,0)$.
לשם כך, נשים לב כי $(0,1)\in\mathbb{R}^2$ וכן $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ (שכן כל הנגזרות החלקיות שלה הן הרכבות של פונקציות אלמנטריות רציפות בכל התחומים). נחשב את g':

$$g'(2,0)=\begin{pmatrix}\partial_x(2ye^{2x}) & \partial_y(2ye^{2x})\\ \partial_x(xe^y) & \partial_y(xe^y)\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)}=\begin{pmatrix}4ye^{2x} & 2e^{2x}\\ e^y & xe^y\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ e & 0\end{pmatrix}$$

כאמור, $g'(2,0)$ הפיכה ומתקיים $|g'(0,1)|=2e\neq 0$. לכן, משפט הפונקציה ההפוכה מבטיח כי קיימת סביבה פתוחה $(0,1)\in V\subset\mathbb{R}^2$ וסביבה פתוחה $g(0,1)=(2,0)\in W\subset\mathbb{R}^2$ כך שמתקיים $g:V\mapsto W$ היא פונקציה חד-חד ערכית ועל, כנדרש.

ב. ראשית ראינו כי מתקיים:
בפרט בנקודה $(2,0)$ נקבל כי:

$$(g^{-1})'(2,0)=\left[g'\left(g^{-1}(2,0)\right)\right]^{-1}=[g'(0,1)]^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ e & 0\end{pmatrix}^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{e}\\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{e}\end{pmatrix}=(g^{-1})'(2,0)}$$

כמו כן, ידוע לנו כי מתקיים:

$$D(f\circ g^{-1})(p)=Df\left(g^{-1}(p)\right)(g^{-1})'(p)$$

כאשר:

$$Df=\begin{pmatrix}3 & -2y\\ 2 & 1\\ y & x+3y^2\end{pmatrix}\quad g^{-1}(p)=g^{-1}\left((2,0)\right)=(0,1)$$

ולכן:

$$Df\left(g^{-1}(p)\right)(g^{-1})'(2,0)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{e}\\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{e}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1 & \frac{7}{e}\\ \frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{e}\end{pmatrix}=D(f\circ g^{-1})(2,0)}$$

<u>שאלה 4:</u>

נתונה פונקציה $f\colon A\mapsto\mathbb{R}^n$ כך ש-$f\in C^r(A)$. נרצה להראות כי אם f רגולרית ב-A, אזי $f^{-1}\in C^r(A)$.

תהא, אם כן, פונקציה $f\in C^r(A)$ העונה על תנאי השאלה. אנו יודעים ממשפט הפונקציה ההפוכה כי מתקיים:

$$Df^{-1}(a)=\left[Df\left(f^{-1}(b)\right)\right]^{-1}$$

עתה נשים לב, כי $Df\in C^{r-1}(A)$ משום ש-$f\in C^r(A)$, וכן הפונקציה $A\mapsto A^{-1}$ גזירה ברציפות אינסוף פעמים[1], ובנוסף, מהנחת האינדוקציה, נובע כי מכך ש-$f\in C^r(A)$ אזי בפרט היא גזירה ברציפות $r-1$ פעמים, ומהנחת האינדוקציה נקבל כי $f^{-1}\in C^{r-1}(A)$. סה"כ, נקבל כי זו הרכבה של 3 פונקציות גזירות ברציפות $r-1$ פעמים ולכן גם היא גזירה ברציפות $r-1$ פעמים, שכן נגזרת מסדר n כלשהו מכילה לכל היותר נגזרות מסדר n של הפונקציות שמורכבות בה. אך מכאן נובע כי $f^{-1}\in C^r(A)$, כדרוש.

<u>שאלה 5:</u>

א. נתונה פונקציה $f\colon\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ אשר נגזרתה מוגדרת וחיובית ממש בכל נקודה. נניח בשלילה, אם כן, כי הפונקציה אינה חח"ע, כלומר שקיימים $x,y\in\mathbb{R}$, עבורם $f(x)=f(y)$. ממשפט לגראנז' נובע כי קיימת נקודה $c\in(x,y)$ עבורה מתקיים $f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0$. אך זאת בסתירה לכך שנתון כי $f'(x)>0$ בכל התחום. לכן נסיק כי בהכרח הפונקציה חד-חד ערכית.

ב. נתבונן בפונקציה המוגדרת באופן הבא:

$$f(x,y)=x+y$$

בתחום $[0,\infty)\times[0,\infty)$. לכל נקודה בתחום זה מתקיים:

$$J_f(x,y)=(1+y,1+y)$$

כאשר בתחום זה כמובן שלכל נקודה איברי המטריצה חיוביים ממש. למרות זאת, מתקיים:

---

[1] כאמור ידוע כי $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$. נשים לב כי זה פונקציה $M_{n\times n}\mapsto M_{n\times n}$ עבורה כל רכיב $(A^{-1})_{i,j}$ הוא פונקציה רציונלית של איברי A (שכן $\left(adj(A)\right)_{i,j}$ היא דטרמיננטה של מטריצה שאיבריה הם מקדמים ב-A, וזהו פולינום, כאמור וכן $|A|$ היא כמובן פולינום באיברי A). לכן מדובר בפונקציה רציונלית, ולכן היא גזירה אינסוף פעמים בתחום הגדרתה.

$$f(2,0) = f(0,2) = 2$$

כלומר f אינה חד-חד ערכית.

שאלה 6:

נתונה, אם כן, קבוצה פתוחה $A \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$. תהא $0 \neq f: A \mapsto \mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה.

בהנתן כתיבה של f בצורה $f(x,y)$ כך ש-$x \in \mathbb{R}^k$ וכן $y \in \mathbb{R}^n$, $Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$, נניח כי ישנה פונקציה $g: B \mapsto \mathbb{R}^n$ המוגדרת על קבוצה פתוחה $B \subseteq \mathbb{R}^k$ ומהמחלקה $C^1(B)$, כך שמתקיים $f\big(x, g(x)\big) = 0$. בנוסף נניח כי מתקיים - $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)\right]$ הפיכה לכל $x \in B$.

נרצה להראות, כי לכל $x \in B$ מתקיים:

$$Dg(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)$$

לשם כך נשים לב, כי מהנתון ניתן להסיק את הקיום של תנאי משפט הפונקציה הסתומה, וכי בסביבה זו מתקיים:

$$f\big(x, g(x)\big) = 0 \Leftrightarrow g(x) = y(x)$$

נשים לב, אם כן, כי מתקיים בסביבה זו $f\big(x, g(x)\big) = 0$ זהותית, ולכן $Df\big(x, g(x)\big) = 0$, כלומר:

$$Df\big(x, g(x)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big) + \frac{\partial f}{\underset{=y}{\partial g(x)}}\big(x, g(x)\big) Dg(x) = 0$$

לאחר העברת אגפים נקבל כי:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big) \cdot Dg(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)$$

והיות ונתון כי $\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)$ הפיכה בכל נקודה בסביבה, נוכל לכפול בהופכי שלה ולקבל כי:

$$\boxed{Dg(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, g(x)\big)\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x, g(x)\big)}$$

שאלה 7:

תהא נתונה $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ממחלקה C^1, וכן נתון, כי $f(2,-1) = -1$.

מוגדרות הפונקציות הבאות:

$$G(x,y,u) = f(x,y) + u^2 \quad H(x,y,u) = ux + 3y^3 + u^3$$

ונתון כי למשוואות $G(x,y,u) = 0, H(x,y,u) = 0$ ישנו פתרון $(x,y,u) = (2,-1,1)$.

א. נרצה לדרוש את קיומן של פונקציות גזירות ברציפות המקיימות:
$u = h(y) \quad x = g(y)$
ובפרט, פונקציות עבורן $g(-1) = 2$ וכן $h(-1) = 1$.

היות ואנו יודעים כי $(2,-1,1)$ הינו פתרון עבור שתי המשוואות, נסיק כי בהגדרת:

$$F:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 \quad F(x,y,u) = \big(G(x,y,u), H(x,y,u)\big)$$

נדרוש, עבור חילוץ מהצורה $y = g(x)$, נדרוש כי בנקודה זו:

$$\det\frac{\partial(G,H)}{\partial(x,u)} \neq 0 \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial u} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 2u \\ u & x+3u^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)} & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= 5\frac{\partial f}{\partial x} - 2 \neq 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{2}{5}}$$

במקרה זה, מובטח ממשפט הפונקציה הסתומה, כי קיימות $g,h \in C^1(\mathbb{R})$ בסביבה הפתוחה של $(2,-1,1)$ כך שמתקיים:

$$(G(x,y,u), H(x,y,u)) = 0 \Leftrightarrow (x,u) = \big(g(y), h(y)\big)$$

כלומר קיבלנו כנדרש פונקציות עבורן:

$$g(y) = x \quad h(y) = u$$

ובפרט, היות ותוצאת המשפט היא תנאי מספיק והכרחי, נסיק כי היות ו-$(2,-1,1)$ הינו פתרון, שוודאי מתקיים, כנדרש, $\big(g(-1), h(-1)\big) = (2,1)$.

ב. הראינו בתרגול כי מתקיים:

$$\begin{pmatrix} g_y \\ h_y \end{pmatrix}_{y=-1} = -\begin{pmatrix} G_x & G_u \\ H_x & H_u \end{pmatrix}^{-1}_{(2,-1,1)} \begin{pmatrix} G_y \\ H_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 2u \\ u & x+3u^2 \end{pmatrix}^{-1}_{(2,-1,1)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ 9y^2 \end{pmatrix}_{(2,-1,1)}$$
$$= -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -33 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

כלומר נסיק כי:

$$\boxed{g'(-1) = 11 \quad h'(-1) = -4}$$

שאלה 8:

נתונות, עבור $n \geq 1$ שלם כלשהו, הפונקציה $b_i, a_{ij}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ כאשר $i,j = 1, \cdots n$. נתון כי פונקציות אלו גזירות וכי ניתן להניח שמתקיים $\det\big(a_{ij}(t)\big) \neq 0$ לכל $t \in \mathbb{R}$.

בנוסף, נתונות $s_1, \cdots, s_n: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ פונקציה הפותרות את המשוואות:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}(t) s_j(t) = b_i(t)$$

ולכן אם נסמן $\big(A(t)\big)_{i,j} = a_{i,j}(t)$ נקבל כי $A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ וכן:

$$s(t) \cdot A(t) = b(t)$$

כאשר נתון כי לכל $t \in \mathbb{R}$ $A(t)$ הפיכה (נתון כי הדטרמיננט אינו מתאפס), ולכן נוכל לכפול ולקבל:

$$s(t) = b(t) A^{-1}(t)$$

עתה נשים לב, כי היות ו-$A(t)$ גזירה, וכי ההעתקה שלוקחת מטריצה להופכית שלה גזירה ברציפות (הראינו בשאלה 4), נסיק כי $A^{-1}(t)$ גזירה, ולכן, היות ונתון כי גם $b(t)$ גזירה – נסיק כי $s(t)$ גזירה כמכפלה של גזירות.

על מנת לחשב את הנגזרת $s'(t)$, נשים לב כי מתקיים:

$$s_i(t) = \left(b(t)A^{-1}(t)\right)_i$$

נבטא את האיבר שבאגף הימני מפורשות על ידי:

$$\left(b(t)A^{-1}(t)\right)_i = \sum_{j=1}^{n} b_j(t)\left(A^{-1}(t)\right)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j(t) \left|M_{i,j}^{A(t)}\right|$$

ועל ידי כך נוכל לכתוב:

$$\boxed{s_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \left(b_j'(t)\left|M_{i,j}^{A(t)}\right| + b_j(t)\left|M_{i,j}^{A(t)}\right|'\right)}$$

כמובן שאיבר זה מוגדר היטב שכן $\left|M_{i,j}^{A(t)}\right|$ הינו פולינום עם מקדמים מ-$A(t)$ ולכן גזיר.

<u>שאלה 9:</u>

נתונה $f: \mathbb{R}^{k+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ ממחלקת C^1. נתון כי $f(a) = 0$ וכן $Df(a)$ מדרגה n. מכאן שב-$Df(a)$ ישנן n עמודות בלתי תלויות ולכן נניח בלי הגבלת הכלליות כי מדובר ב-n העמודות האחרונות. נסמן:

$$g: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \quad g(a,b) = f\big((a,b)\big)$$

ונניח כי $g(a_1,a_2) = f(a) = 0$. היות ו-n העמודות המתאימות ל-a_2 בלתי תלויות נסיק כי מתקיים:

$$\det \frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots y_n)} \neq 0$$

ולכן, ראינו כי בהגדרת פונקציה חדשה על ידי:

$$F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \quad F(x,y) = \big(x, g(x,y)\big)$$

נקבל כי:

$$J_f(a_1,a_2) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \dfrac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_k)} & \dfrac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)} \end{bmatrix}_{(a_1,a_2)}$$

ומובטח כי הדטרמיננט של מטריצה זו שונה מאפס, כלומר מתקיים משפט הפונקציה ההפוכה – קרי, קיימת סביבה $(a_1,a_2) \in V \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ וכן סביבה $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ כך ש-$F: V \mapsto U$ הינה חד-חד ערכית ועל.

לכן, בבחירת $c \in \mathbb{R}^n$ קטן מספיק כך ש-$(0_k, c) \in U$, מובטח כי קיימת נקודה $(x_c,y_c) \in V$ עבורה מתקיים:

$$F(x_c,y_c) = (0_k, c) = \big(x_c, g(x_c,y_c)\big)$$

כלומר נקודה עבורה מתקיים:

$$g(x_c,y_c) = \boxed{f\big((x_c,y_c)\big) = c}$$

ולכן קיים פתרון כנדרש.

שאלה 10:

א. נניח, אם כן, כי $b^2-4ac>0$, ונסמן ב-x_1,x_2 את פתרונות המשוואה $ax^2+bx+c=0$, הנתונים, כידוע, על ידי הנוסחה:

$$x_1x_2=\frac{1}{2a}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)$$

עתה, נתון $\varepsilon>0$ ונרצה למצוא $\delta(a,b,c,\varepsilon)>0$ כך שלכל a',b',c', מתקיים:

$$\begin{matrix}|a-a'|\\|b-b'|\\|c-c'|\end{matrix}<\delta\Leftrightarrow\begin{matrix}|x_1-x_1'|\\|x_2-x_2'|\end{matrix}<\varepsilon$$

נגדיר, אם כן, את הפונקציה הבאה:

$$F(a,b,c,x)=ax_1^2+bx_1+c$$

כאשר נתונים השורשים (a,b,c,x_1), וכן (a,b,c,x_2). כמו כן, נשים לב כי:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c,x_1)=2ax_1+b=2a\left(\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\right)+b=\sqrt{b^2-4ac}>0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c,x_2)=2ax_2+b=2a\left(\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\right)+b=-\sqrt{b^2-4ac}<0$$

כלומר, מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה, ונסיק כי $g_1,g_2\in C^1$ בסביבה של (a,b,c) (ישנה סביבה נפרדת לכל פונקציה אך שתיהן סביבות של (a,b,c), ולכן בבחירת הסביבה המינימלית ביחס להכלה, שנסמנה V נקבל כי שתי הפונקציות יקיימו בסביבה זו את הדרוש), כך שמתקיים:

$$F\left(a,b,c,g_1(x)\right)=0\Leftrightarrow g_1(a,b,c)=x_1$$

$$F\left(a,b,c,g_2(x)\right)=0\Leftrightarrow g_2(a,b,c)=x_2$$

פונקציות אלה רציפות בסביבת a,b,c ולכן נסיק כי בפרט מתקיים:

$$\lim_{(a',b',c')\to(a,b,c)}g_1(a',b',c')=x_1\qquad\lim_{(a',b',c')\to(a,b,c)}g_2(a',b',c')=x_2$$

ולכן על פי הגדרה, עבור אותו $\varepsilon>0$ קיים $\delta_i>0$ כך שלכל $(a',b',c')\in V$ מתקיים (נבחר בנורמת אינסוף לשם נוחות):

$$\|(a',b',c')-(a,b,c)\|_\infty<\delta_i\Longrightarrow|g_i(a',b',c')-g_i(a,b,c)|<\varepsilon$$

אך מהגדרת נורמת אינסוף משמעות הדבר היא כי לכל מקדמים a',b',c' המקיימים:

$$\begin{matrix}|a-a'|\\|b-b'|\\|c-c'|\end{matrix}<\delta_i\overset{g_i(a,b,c)=x_i}{\Longleftrightarrow}|g_i(a',b',c')-x_1'|<\varepsilon$$

ועתה נזכור, כי הוכחנו כי אם קיים חילוץ g_i כנ"ל אזי הוא יחיד. היות ואנו יודעים כי החילוץ הוא:

$$g_1(a,b,c)=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)=x_1\quad g_2(a,b,c)=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)=x_2$$

אזי נסיק כי כאמור, הוא היחיד, וכן מתקיים:

$$g_1(a',b',c')=x_1{}'\quad g_2(a',b',c')=x_2'$$

ולכן בבחירת $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ נוכל להציב זאת עבור a',b',c' המקיימים את התנאים שדרשנו קודם, ונקבל, כדרוש:

$$|x_1'-x_1|<\varepsilon\quad|x_2'-x_2|<\varepsilon$$

ב. בהנתן פולינום:

$$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$$

אשר נתונים לה פתרונות פשוטים $(x_1,\cdots,x_k)$ עבור $k\le n$ כלשהו. נגדיר פונקציה חדשה על ידי:

$$F:\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}\quad F(\bar{a},x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i$$

כאשר, כאמור, נתונים לנו הפתרונות $\{(\bar{a},x_i\}_{i=1}^{k}$ לפונקציה זו. כמו כן, נשים לב כי:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{a},x_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i x^{i-1}$$

היות ולכל $1\le i\le k$ מתקיים $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{a},x_i)\neq 0$ (שכן אחרת היה מדובר בפתרון מריבוי גדול מ-1 כלומר שאינו פשוט בסתירה להנחתנו), ולכן נסיק, כי ממשפט הפונקציה הסתומה נובע קיומה של פונקציה מהצורה $g_i\in C^1$ בסביבה של $\bar{a}\in\mathbb{R}^{n+1}$ לכל $1\le i\le k$, כך שמתקיים:

$$\forall 1\le i\le k\quad F(\bar{a}',x')=0\Leftrightarrow g_i(\bar{a}')=x_i'$$

נבחר את הסביבה המינימלית (ביחס להכלה) מבין כל ה-g_i של $\bar{a}$, ועבור $\varepsilon>0$, מרציפות g_i, נובע כי לכל i קיימת $\delta_i>0$ כך שלכל $\|\bar{a}'-\bar{a}\|_\infty<\delta_i$ מתקיים $|g_i(\bar{a}')-g_i(\bar{a})|<\varepsilon$.
נבחר $\delta=\min_i\delta_i$ ונקבל כי לכל $\bar{a}'$ כך שמתקיים:

$$\forall 0\le i\le n\quad |a_i'-a_i|<\delta\Longrightarrow\forall 1\le j\le k\quad \left|g_j(\bar{a}')-g_j(\bar{a})\right|<\varepsilon$$

אך $g_j(\bar{a})$ הוא פתרון המשוואה בעבור המקדמים $\bar{a}$ ו-$g_j(\bar{a}')$, היות ו-$\bar{a}'$ בסביבה של $\bar{a}$ בה מוגדרות g_j לכל $1\le j\le k$, גם היא מקיימת $F\left(\bar{a}',g_j(\bar{a}')\right)=F\left(\bar{a}',x_j'\right)=0$, כלומר x_j' הוא פתרון של הפולינום במקדמים $\bar{a}'$ ולכן נקבל כי עבור מקדמים אלו מתקיים:

$$\left|x_j'-x_j\right|<\varepsilon$$

כדרוש.

ג. המשמעות של האפסים המרובים, קרי, שורשים לפולינום בהם הן הפולינום מתאפס והן הנגזרת של הפולינום מתאפסת – היא שלא מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה.
במידה והנקודה תהיה נקודת מינימום או מקסימום, נסיק כי לא קיימת סביבה שבה הפונקציה חד-חד ערכית, כך שאינו מתקיים תנאי הכרחי לכך שיהיה חילוץ של השורש כפונקציה של המקדמים.
אמנם ייתכנו מקרים בהם מדובר יהיה בנקודת פיתול של הפולינום, ואז כן ישנה סביבה שבה הפונקציה חד-חד ערכית, אך קירוב זה לא יוכל להתקבל כחילוץ מהצורה שמאפשרת משפט הפונקציה הסתומה.
<u>הערה:</u> במקרה של נקודת פיתול, קרי נקודה שבה הן הנגזרת הראשונה והן הנגזרת השניה מתאפסת – נסיק כי קיום סביבה שבה הפונקציה חד-חד ערכית ועל, תלוי בחזקה הגדולה ביותר של הסדר הנמוך ביותר של גזירה שבה השורש אינו מאפס את הנגזרת. לכן נסיק כי אין חל, במקרה זה, משפט הפונקציה הסתומה, וייתכן וקיים חילוץ אך הוא אינו נובע ממשפט זה.