פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - גליון תרגילים מס' 6

להגשה: עד יום ד', 17.1.01. שאלה עם $*$ היא שאלת רשות.

בכל השאלות להלן $(X, \mathcal{M}, \mu)$ הוא מרחב מידה; μ חיובית, אלא אם כן צויין אחרת. m היא מידת לבג על $\mathbb{R}^n$, m_e היא מידה חיצונית. רמז לכל השאלות: קבוצת קנטור.

1. חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{n^2+3x}{n^2}\right)^{-n^2} dx$.
2. הוכיחו שמידת לבג היא רגולרית - כלומר שלכל $A \in \mathbb{R}^n$ מדידה לבג מתקיים: $m(A) = \sup\{m(K) :$ קומפקטית $K \subset A\}$.
3. מצאו קבוצה $N \subset \mathbb{R}$ בעלת מידה אפס כך ש- $N + N = \mathbb{R}$.
4. הוכיחו שעצמת אוסף הקבוצות שאינן מדידות לבג ב- $\mathbb{R}^n$ היא $2^{\mathcal{C}}$.
5. תהי $f : X \to \mathbb{R}$ המקיימת $f(x) > 0$ כב"מ, ו-μ מידה סופית.
   א. הוכיחו שלכל $A \in \mathcal{M}$ עם $\mu(A) > 0$ מתקיים $\int_A f\, d\mu > 0$.
   ב. הוכיחו שאם הסדרה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ מקיימת $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f\, d\mu = 0$ אז מתקיים $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.
6. הוכיחו שכל אחת מהקבוצות הבאות מדידה לבג וחשבו את מידת לבג שלה.
   א. אוסף הנקודות ב- $[0,1]$ שהספרה 6 לא מופיעה בפיתוח העשרוני שלהן.
   ב. אוסף הנקודות ב- $[0,1]$ שהספרה 6 מופיעה בפיתוח העשרוני שלהן מספר סופי של פעמים.
   ג. אוסף הנקודות ב- $[0,1]$ שבהצגתן העשרונית ההופעה הראשונה של הספרה 6 באה לפני ההופעה הראשונה של הספרה 3.
7. תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג.
   א. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = m\big(A \cap [-\infty, x]\big)$ היא רציפה.
   ב. הוכיחו שעבור כל $0 \le \alpha \le m(A)$ יש $B \subset A$ מדידה לבג עם $m(B) = \alpha$.
8. לאילו ערכי $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ הפונקציה $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^{\alpha} \sin(x^{\beta})$ היא:
   א. אינטגרבילית לבג?
   ב. אינטגרבילית רימן במובן הרחב?

$*$9. מצאו דוגמא לפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $f(x+y) = f(x) + f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$ שאיננה רציפה (ולכן, כפי שראינו - איננה מדידה). הדרכה: $\mathbb{R}$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbb{Q}$ וככזה יש לו בסיס אלגברי (= בסיס Hamel); הגדירו את f על בסיס זה.

בהצלחה.

אריאל.