<u>אינטרגל כפול</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

- הגדרה - **אינטגרביליות רימן במלבן**: תהי $f:D\to\mathbb{R}$ חסומה במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$. אם $\inf_P U(f,P)=\sup_P U(f,P)$ נאמר ש- f אינטגרבילית רימן ב- D. את הערך המשותף נסמן ב-

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

הגדרה שקולה: תהי $f:D\to\mathbb{R}$ חסומה במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$. נאמר ש- f אינטגרבילית רימן ב- D אם קיים $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P של D עם $\lambda(P)<\delta$ מתקיים

$$\left|\sum_{i,j} f(s_i,t_j)\triangle x_i\triangle y_j - I\right|<\epsilon$$

לכל בחירה של $(s_i,t_j)\in R_{i,j}$. ובמקרה זה נסמן

$$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

- הגדרה - **קבוצה בעלת שטח**: תהי D קבוצה חסומה. תהי P חלוקה. נסמן ב- $S_1(D,P)$ את סכום שטחי המלבינים המוכלים ב- D וב- $S_2(D,P)$ את סכום שטחי המלבינים המכסים את D.

  נאמר ש- D תחום בעל שטח אם מתקיים

$$\sup_P S_1(D,P)=\inf_P S_2(D,P)$$

- הגדרה - **קבוצה משטח אפס**: קבוצה D בעלת שטח אפס אם לכל $\epsilon>0$ קיים כיסוי של מלבנים של D שסכום שטחיהם קטן ב- ϵ.
- משפט: D בעל שטח $\Longleftrightarrow$ השפה של D בעלת שטח אפס $\Longleftrightarrow$ לכל ϵ קיימת חלוקה P כך ש- $S_2(D,P)-S_1(D,P)<\epsilon$.
- הגדרה - **אינטגרביליות רימן בקבוצות בעלות שטח**: יהי $D\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה חסומה בעלת שטח. תהי $f=f(x,y)$ חסומה ב- D. יהי A מלבן מכיל את D.

  אם $\iint_A f\chi_D dxdy$ קיים, מגדירים את האינטגרל הכפול של f ב- D על ידי

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_A f\chi_D dxdy$$

- תכונות:
  - f רציפה ב־ D חסום בעל שטח וחסומה. אזי f אינטגרבילית רימן ב־ D.
  - f חסומה. אזי f אינטגרבילית רימן $\Longleftrightarrow$נקודות אי־הרציפות היא קבוצה בעלת שטח אפס.
  - אם f,g אינטגרביליות ב־ D אזי

$$\iint af+bg=a\iint f+b\iint g$$

  - אם $f\leq g$ ב־ D ואינטגרביליות רימן, אזי

$$\iint f\leq\iint g$$

  - אם f,g אינטגרביליות רימן ב־ D אזי גם fg.
  - אם f אינטגרבילית רימן ב־ D אזי גם $|f|$ ו־

$$\left|\iint f\right|\leq\iint|f|$$

  - אם f אינטגרבילית רימן ב־ D אזי

$$S\left(D\right)\inf_{D}f\leq\iint f\leq S\left(D\right)\sup_{D}f$$

  - אם f אינטגרבילית רימן בקבוצה קשירה D אזי קיימת $P\in D$ כך ש־

$$\frac{\iint f}{S\left(D\right)}=f\left(P\right)$$

  - אם D_1,D_2 בעלי שטח כך ש־ $D_1\cap D_2$ בעל שטח אפס, אזי:

$$\iint_{D_1\cup D_2}=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}$$

- משפט: אם $D=[a,b]\times[c,d]$ אזי לכל f רציף ב־ D מתקיים:

$$\iint_D f=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

- משפט: תהי $f=f(x,y)$ אינטגרבילית במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$, ונניח כי הפונקציה $y\mapsto f(x,y)$ אינטגרבילית ב־ $[c,d]$ לכל $x\in[a,b]$.

  אזי הפונקציה $x\mapsto\int_c^d f(x,y)\,dy$ אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ ו־

$$\iint_D f\,dS=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

- משפט: תהי $f=f(x,y)$ אינטגרבילית בקבוצה נורמלית $D=\{x\in[a,b],\varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$ ואם לכל $x\in[a,b]$ קיים

$$I(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

  אזי

$$\iint_D f\,dS=\int_a^b I(x)\,dx$$

תרגילים:

1. חשבו את $\iint_D \left(x^2+y\right) dS$ כאשר $D == \{y \geq x^2 \ , \ y^2 \leq x\}$.

<u>פתרון:</u>

מה זה קבוצה נורמלית?

בבירור $f(x,y) = x^2+y$ רציפה, D קבוצה נורמלית, לכן

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2+y\right) dS =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right) x^2 + \frac{y^2}{2} |_{y=x^2}^{\sqrt{x}} \ dx =$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^4 + \frac{x}{2} dx = \frac{33}{140}$$

2. חשבו את האינטגרל הכפול הבא:

$$\iint_R x \max(x,y) \, dydx$$

כאשר $R = [0,1] \times [0,1]$.

<u>פתרון:</u>

איך מוכיחים שרציף?

האינטגרנד רציף, לכן נחשב בעזרת אינטגרלים נשנים.

נחשב את $\int_0^1 x \max(x,y) \, dy$:

$$\int_0^1 x \max(x,y) \, dy = x \left(\int_0^x x dy + \int_x^1 y dy\right) = x\left(x^2 + \frac{1-x^2}{2}\right)$$

ומכאן:

$$\int_0^1 \int_0^1 x \max(x,y) \, dydx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{3}{8}$$

3. חשבו את $\int \int_D \cos\left(x^2\right) dx$ כאשר $D = \{y \in [0,1], y \leq x \leq 1\}$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי לא ניתן לחשב $\int_0^1 dy \int_y^1 \cos\left(x^2\right) dx$ לכן נחשב $\int_0^1 dx \int_0^x \cos\left(x^2\right) dx$, שניהם שווים לאינטגרל הכפול משיקולי רציפות $\cos\left(x^2\right)$ ב־ D.

חישוב:

$$\int_0^1 dx \int_0^x \cos\left(x^2\right) dx = \int_0^1 x \cos x^2 dx = \frac{\sin 1}{2}$$

הערה: צריך לבחור עם איזה אינטגרל נשנה כדאי לחשב את האינטגרל הכפול.

4. חשבו את $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dS$ על הריבוע $D = [0,1] \times [0,1]$.

<u>פתרון:</u>

נחשב לצורך העניין את $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2} dx$. נשים לב ש־

$$I(y) = \int_0^1 \frac{xy}{x^2+y^2} dx = y \cdot \frac{\ln(1+y^2) - \ln y^2}{2}$$

כעת,

$$\int_0^1 I(y)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \ln\left(1+y^2\right) dy - \int_0^1 y \ln y dy = \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

לכן,

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} dS = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

הצדקה: הפונקציה $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ רציפה ב־ D פרט (אולי) לראשית, אבל היא חסומה, לכן אינטגרבילית רימן ב־ D.

בנוסף, $I(y)$ קיים ב־ $[0,1]$, שימו לב ש־ $y \ln y$ רציפה ב־ $y = 0$.

5. חשבו את:

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy$$

כאשר D היא הקבוצה החסומה בין הקווים $y = 1, x = 0, x = y^2$.

<u>פתרון:</u>

ראשית נשים לב ש־ $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ יש לה בעיה ב־ D בגלל הנקודה $(0,0)$, אבל ב־ D מתקיים

$$f(x,y) \leq e^y \leq 1$$

לכן f חסומה ורציפה פרט אולי לראשית (האם היא רציפה שם?). לכן אינטגרבילית ב־ D.

נחשב את האינטגרל הכפול בעזרת הנוסחא:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx$$

מכיוון ש־ $I(y) = \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = ye^y - y$ קיים, לכן

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int_0^1 ye^y - ydy = \frac{1}{2}$$

הערות:

- לא לשכוח לבדוק שהאינטגרד אינטגרבילי.
- האם אתם יכולים לחשב את $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy$?

6. א. החלף סדר אינטגרציה באינטגרל הכפול

$$\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{3-\sqrt{y}} f\left(x,y\right)dx$$

ב. הפכו סדר אינטגרציה

$$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)dy$$

<u>פתרון:</u>

א. הקבוצה עליה מבצעים את האינטגרציה היא

$$D=\left\{0\leq y\leq 1\,,\,\frac{y^2}{2}\leq x\leq 3-\sqrt{y}\right\}$$

וברישום אחר

$$D^{'}=\left\{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],0\leq y\leq\sqrt{2x}\right\}\cup\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,1\right]\cup\left\{x\in\left[2,3\right],0\leq y\leq\left(3-x\right)^2\right\}$$

ומכאן קל לרשום את האינטגרל כסכום של 3 אינטגרלים מהצורה $\int\left(\int dy\right)dx$

ב. הקבוצה עליה מבצעים את האינטגרציה היא הכלואה מתחת ל- $y=\sqrt{2x}$ ומעל המעגל $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+$ $.y^2=\frac{1}{4}$

לכן, ביחס לציר y, הקבוצה מתחלקת ל- 3 אזורים פשוטים:

$$D_1=\left\{y\in\left[0,\frac{1}{2}\right],x\in\left[x_1\left(y\right),x_2\left(y\right)\right]\right\}$$

$$D_2=\left\{y\in\left[0,\frac{1}{2}\right],x\in\left[x_3\left(y\right),1\right]\right\}$$

$$D_3=\left\{y\in\left[\frac{1}{2},\sqrt{2}\right],x\in\left[x_1\left(y\right),1\right]\right\}$$

כאשר $x_2\left(y\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}$, $x_1\left(y\right)=\frac{y^2}{2}$, $.x_3\left(y\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}$

כעת קל לרשום את האינטגרל כסכום של 3 אינטגרלים מהצורה $.\int\left(\int dx\right)dy$

7. רשום את גבולות האינטגרציה של $\iint_D f\left(x,y\right)dxdy$ כאשר

$$D=\left\{x^2+y^2\leq 9,y^2-x^2\leq 1\right\}$$

<u>פתרון:</u>

דרך פשוטה היא לשים לב ש- D הוא האזור הנמצא בתוך המעגל $x^2+y^2=9$ ומקיים

$$\left|y\right|\leq\sqrt{1+x^2}$$

לכן

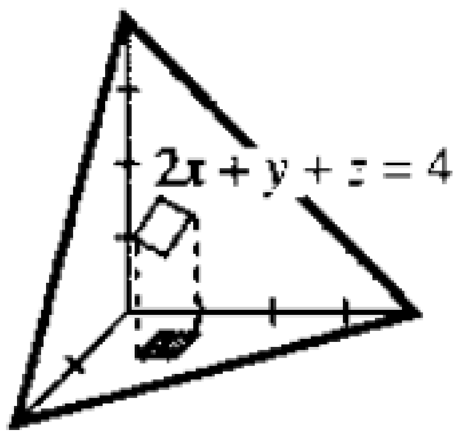
$$\iint_D dxdy=\int_{-3}^{-2}dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dy+\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}dy+\int_{2}^{3}dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dy$$

דרך אחרת היא לחלק לפי ציר y בעזרת 5 תת־אזורים.

8. חשבו את נפח הקבוצה ב־ $\mathbb{R}^3$ החסומה ע"י $x=0, y=0, z=0, 2x+y+z=4$.

פתרון:

הנפח הדרוש הוא החסום על ידי ה־ tetrahedron $2x+y+z=4$ ברביע הראשון.



איור 1:

לכן נבצע אינטגרציה עבור $z=f(x,y)=-2x-y+4$ על היטל ה־ tetrahedron על מישור x,y ברביע הראשון.

ההיטל הוא המשולש החסום של ידי $x=0, y=0, 2x+y=4$.

ומכאן, נבצע אינטגרל כפול של $z=f(x,y)=-2x-y+4$ על הקבוצה $D\subseteq\mathbb{R}^2$ החסומה על ידי

$$x=0, y=0, 2x+y=4$$

לכן צריך לחשב

$$\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}4-2x-ydy$$

וזה אינטגרל מידי:

$$A(x)=\int_0^{4-2x}4-2x-ydy=\frac{1}{2}(4-2x)^2$$

$$\int_0^2 A(x)\,dx=\frac{16}{3}$$

הערה: $A(x)$ זה שטח החתכים, שקל לראות שהם משולשים עם גובה ובסיס השווים ל־ $4-2x$.

9. חשבו את נפח הקבוצה ב־ $\mathbb{R}^3$ החסומה בין מישור $z=0$ והפרבולואיד האליפטי

$$z=4-x^2-\frac{1}{4}y^2$$

<u>פתרון:</u>

ז.א. צריך לחשב את

$$\iint_D 4-x^2-\frac{y^2}{4}dS$$

כאשר D היא הקבוצה:

$$D=\left\{x\in[-2,2]\,,-2\sqrt{4-x^2}\le y\le 2\sqrt{4-x^2}\right\}$$

מרציפות האינטגרנד, נחשב את האינטגרל הנשנה התמאים:

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{-2\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{4-x^2}}4-x^2-\frac{y^2}{4}dy=2\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx \tag{1}$$

נבצע את ההצבה $x=2\sin t$ ונקבל ב־ 1 ש־

$$2\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=42\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=16\pi$$

השלב האחרון נובע למשל מאינטגרציה בחלקים: $u=\cos^3 t, v=\cos t$.

10. חשבו את המסה של חצי העיגול $D=\left\{0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$ עם צפיפות $\rho(x,y)=y$.

<u>פתרון:</u>

ע"פ הגדרה, צריך לחשב

$$\iint_D ydS$$

חישוב:

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{2}{3}$$

11. לכל $a>0$, חשבו את

$$\int_0^{a^2}\sin\sqrt{x}dx$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי

$$\sin\sqrt{x}=\int_0^{\sqrt{x}}\cos ydy$$

לכן

$$\int_0^{a^2}\sin\sqrt{x}dx=\int_0^{a^2}dx\int_0^{\sqrt{x}}\cos ydy$$

משיקולי רציפות, מותר להחליף סדר אינטגרציה

$$\int_0^{a^2}dx\int_0^{\sqrt{x}}\cos ydy=\int_0^{a}dy\int_{y^2}^{a^2}\cos ydy$$

ואת אגף ימין קל לחשב:

$$\int_0^{a}dy\int_{y^2}^{a^2}\cos ydy=\int_0^{a}\left(a^2-y^2\right)\cos ydy$$

ועל ידי אינטגרציה בחלקים מקבלים:

$$\int_0^{a^2}\sin\sqrt{x}dx=2\left(\sin a-a\cos a\right)$$

הערה: על ידי החלפת משתנה, ברור כי $\int_0^{a^2}\sin\sqrt{x}dx=\int_0^{a}2x\sin xdx$, וזה אינטגרל כמעט מידי.

12. עקום רציף $\gamma=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ הוא בעל שטח אפס.

<u>פתרון:</u>

יהי $\epsilon>0$. מרציפות במ"ש ב־ $[a,b]$, קיימת $\delta>0$ כך שאם $|t-s|<\delta$ אזי $|f(t)-f(s)|<\epsilon$. ניקח חלוקה $\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ של $[a,b]$ בעלת פרמטר חלוקה קטן מ־ δ. נכסה את γ על ידי מלבנים בעזרת המקסימום והמינימום של f בהתאם לחלוקה של הקטע. ואז סכום שטחי המלבנים S מקיים

$$S=\sum_i\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(\max_{[x_{i-1},x_i]}f-\min_{[x_{i-1},x_i]}f\right)<\epsilon\left(b-a\right)$$

13. תהי $f=f(x,y)$ פונקציה רציפה ב־ $(0,0)$ ואינטגרבילית בסביבה של הראשית. חשבו את

$$\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\{|(x,y)|\le r\}}f(x,y)\,dS$$

<u>פתרון:</u>

מוטיבציה:

תהי $f=f(x)$ רציפה ב־ $[a,b]$. אנחנו ראינו כי הפונקציה

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

גזירה ו־ $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$. בפרט:

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}\to f(x)$$

כאשר $h \to 0$ ו־ $x \in (a,b)$. דרך אחרת לרשום את הגבול הנ"ל היא

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2r}\left(\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\right) = f(x)$$

וההכללה של גבול זה בפונקציה של שני משתנים הוא בדיוק הגבול שאנחנו מתבקשים להוכיח.

לפי המוטיבציה ננחש כי הגבול הוא $f(0,0)$. נוכיח ע"פ ההגדרה.

נעריך

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r((0,0))} f(x,y)\,dS - f(0,0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\{|(x,y)|\le r\}} f(x,y) - f(0,0)\,dS$$

לכן

$$\left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\{|(x,y)|\le r\}} f(x,y)\,dS - f(0,0)\right| \le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\{|(x,y)|\le r\}} |f(x,y) - f(0,0)|\,dS$$

יהי $\epsilon > 0$. מרציפות f בראשית, קיים $r_0 > 0$ כי שאם $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \le r_0$ אזי

$$||f(x,y) - f(0,0)|| \le \epsilon$$

.

לכן, לכל $r < r_0$ מתקיים ממונוטוניות האינטגרל כי

$$\iint_{\{|(x,y)|\le r\}} |f(x,y) - f(0,0)|\,dS \le \epsilon \iint_{\{|(x,y)|\le r\}} dS = \pi r^2 \epsilon$$

ולסיכום, לכל $r < r_0$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{\{|(x,y)|\le r\}} f(x,y)\,dS - f(0,0)\right| \le \epsilon$$

14. הוכיחו כי

$$1 < \iint_D \frac{dS}{20 + \sin^2 y + \cos^2(x-y)} < 2$$

כאשר $D = \{|x| + |y| \le 4\}$

<u>הוכחה:</u>

$20 + \sin^2 y + \cos^2(x-y) \in [20,22]$ לכל x,y, ו־ $\mathrm{Vol}(D) = 32$, לכן ממונוטוניות האינטגרל

$$1 < \frac{1}{22}\cdot 32 < \iint_D \frac{dS}{20 + \sin^2 y + \cos^2(x-y)} \le \frac{1}{20}\cdot 32 < 2$$

הערה: לפי פרופ. בשותי, אנליזה היא לא שיוויונות אלא אי־שיוויונות, ואי־השוויון "היחיד" שאנחנו מכירים הוא אי־שיוויון המשולש.

15. לכל n טבעי נסמן $D_n = [0,n] \times [0,n]$. חשבו את

$$\iint_{D_n} e^{-x-y} dS$$

<u>פתרון:</u>

מרציפות e^{-x-y} ב־ D_n:

$$\iint_{D_n} e^{-x-y} dS = \int_0^n dx \int_0^n e^{-x-y} dy = \left(1 - e^{-n}\right)^2$$

הערות:

- מפתה לקחת $n \to \infty$ ולאמר ש־

$$\iint_{\{x,y \geq 0\}} e^{-x-y} dS = 1$$

אכן זה המצב. (בדקו את זה לקראת סוף הקורס).

- האינטגרנד הוא מהצורה $f(x,y) = g(x)\, h(y)$ לכן קיבלנו שהינטרגל על המלבן D_n הפך להיות

$$\iint_{D_n} f dS = \int_0^n g(x)\, dx \cdot \int_0^n h(y)\, dy$$

זו תופעה כללית עבור פונקציות "פרידות", וקוראים לתכונה זה: **פרידות**.