<u>מבוא לחבורות   תרגיל בית מס׳ 8</u>

1. (דומה לתרגיל מס׳ 5 בדף הקודם)

החבורה הסימטרית S_n פועלת על הקבוצה A המורכבת מכל הזוגות הסדורים (i,j), $i,j\in\{1,2,...,n\}$, ע״י $\sigma(i,j)=(\sigma i,\sigma j)$, כאשר $\sigma\in S_n$.

א) וודא כי זו אכן פעולה של S_n על הקבוצה A (בעלת n^2 איברים).

ב) חשב את הפעולה של התמורה $(1\ 2)$ על A כאשר $n=4$.

ג) חשב את הפעולה של התמורה $(1\ 2\ 3)$ על A כאשר $n=4$.

2. יהי n זוגי. הראו כי D_{2n} פועלת על קבוצת הזוגות של קודקודים מנוגדים של n-גון רגולרי. מצאו את הגרעין של פעולה זו.

3. תהי G חבורה.

א. וודא כי G פועלת על עצמה ע״י $g\bullet x=gxg^{-1}$. (פעולה זו נקראת <u>הצמדה</u>.)

ב. הראו כי עבור g קבוע, התמורה של איברי G המושרת ע״י g בפעולה זו היא איזומורפיזם מ- G ל- G, כלומר,
$g\bullet(xy)=(g\bullet x)(g\bullet y)$, לכל $x,y\in G$.

(הגדרה: איזומורפיזם מ- G ל- G נקרא <u>אוטומורפיזם של</u> G.)

ג. הסיקו כי לכל תת-חבורה H של G ולכל $g\in G$,
$gHg^{-1}=\{ghg^{-1}\mid h\in H\}$ הינה תת-חבורה של G שהיא איזומורפית ל- H.

4. הראו כי חבורת הסימטריות של הטטראדר הרגולרי איזומרופית לתת-חבורה של S_4.

5. תהא C_{45} חבורה ציקלית (כפלית) מסדר 45, נוצרת ע״י x. מצא את כל התת-חבורות של C_{45} באמצעות יוצר לכל תת-חבורה. תארו את כל ההכלות בין תת-חבורות אלו.

6. תהא G חבורה, $x,y\in G$. הראו כי אם $xy=yx$, אז $|xy|$ מחלק את הכפולה המשותפת המינימלית של $|x|,|y|$. האם זה נכון בלי הנחת החילופיות? תנו דוגמא של $x,y\in G$, $xy=yx$ ו-$|xy|$ אינו שווה ל כפולה המשותפת המינימלית של $|x|,|y|$.

7. א. יהי p מספר ראשוני אי-זוגי, n שלם חיובי. בשימוש משפט הבינום הוכיחו כי $(1+p)^{p^{n-1}}\equiv 1 \pmod{p^n}$ אבל $(1+p)^{p^{n-2}}\not\equiv 1 \pmod{p^n}$. הסיקו ש-$1+p$ הוא איבר מסדר p^{n-1} בחבורה (הכפלית) $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$.

ב. יהי $n\geq 3$ שלם. בשימוש משפט הבינום הוכיחו כי $(1+2^2)^{2^{n-2}}\equiv 1 \pmod{2^n}$ אבל $(1+2^2)^{2^{n-3}}\not\equiv 1 \pmod{2^n}$. הסיקו ש-5 הוא איבר מסדר 2^{n-2} בחבורה (הכפלית) $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$.

ג. הראו כי $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ איננה ציקלית עבור $n\geq 3$.