ערכים עצמיים, לכסון

רשימת התרגילים הפתורים: 5-10, 15-18, 22-26, 28, 31-34, 36-37, 41, 43, 44, 46, 48, 50, 52-54, 57.

עובדות וסימונים:

- V מ"ו ממימד n מעל השדה F, ונתון אופרטור $T:V\to V$. סקלר $\lambda\in F$ נקרא ערך עצמי (ע"ע) של T, אם קיים וקטור $0\neq v\in V$ שעבורו מתקיים $Tv=\lambda\cdot v$. הוקטור v נקרא אז וקטור עצמי (ו"ע), המתאים לערך העצמי λ.
- לכל $\lambda\in F$, מגדירים את *המרחב העצמי של T, המתאים ל-* λ להיות - $E_\lambda=E_\lambda(T)=\{v\in V\,|\,Tv=\lambda\cdot v\}=Ker(T-\lambda\cdot I)$ (נזניח את האות T בסימון במקרים בהם ברור מהו T).

מכאן נובע כי λ הוא ע"ע של T אם"ם $E_\lambda(T)\neq 0$, כלומר - אם"ם למשוואה $(\lambda I-T)v=0$ קיים פתרון לא טריוויאלי, אם"ם לכל בסיס סדור B של V מתקיים: $\left|\lambda I-[T]_B\right|=0$.

- לפיכך מגדירים את *הפולינום האפייני* של T להיות: $\Delta_T(x)=\left|xI-[T]_B\right|$, וזה אינו תלוי בבחירת הבסיס B. מכאן ש- $\lambda\in F$ הוא ע"ע של T אם"ם הוא שורש של הפולינום האפייני, ואנו מסיקים, כי ל-T יש לכל-היותר n ערכים עצמיים.
- ***כל-אחד מן המרחבים העצמיים זר אלגברית לסכום של שאר המרחבים העצמיים*** - כלומר: אם $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הם כל הע"ע של T, אז מתקיים: $E_{\lambda_i}\cap\sum_{j\neq i}E_{\lambda_j}=0$, לכל $i=1,\dots,k$.
- *הריבוי הגיאומטרי* של ע"ע $\lambda\in F$ באופרטור T הוא: $m_g(\lambda)=m_g(T,\lambda)=\dim E_\lambda(T)$.
- אם $\lambda\in F$ הוא ע"ע של T, אז אפשר לרשום $\Delta_T(x)=(x-\lambda)^{n_\lambda}\cdot q(x),\ q(\lambda)\neq 0$, כלומר: n_λ הוא הריבוי של השורש $\lambda\in F$ בפולינום האפייני. מסמנים: $m_a(\lambda)=m_a(T,\lambda)=n_\lambda$ - זהו *הריבוי האלגברי של λ ב-T*.
- ידוע כי אם $\lambda\in F$ הוא ע"ע של T, אז $1\leq m_g(\lambda)\leq m_a(\lambda)$.
- עבור אופרטור $T:V\to V$, התנאים הבאים שקולים:
  קיימת מטריצה מייצגת אלכסונית ל-T,
  קיים ל-V בסיס של וקטורים עצמיים של T,
  הערכים העצמיים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ של T מקיימים $V=E_{\lambda_1}+\dots+E_{\lambda_k}=E_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus E_{\lambda_k}$,
  לכל ע"ע λ של T מתקיים $m_a(\lambda)=m_g(\lambda)$.

אם אחד מן התנאים הנ"ל (ואז גם כולם) מתקיים, אז אומרים שהאופרטור T *ניתן לליכסון (לכסין)*.

• אם $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{F}^n \to \boldsymbol{F}^n$ לכסין עם בסיס $\boldsymbol{B}$ של וקטורים עצמיים, אז המטריצה $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{B}}^{\varepsilon}$ (כאשר ε הוא הבסיס הסטנדרטי של $\boldsymbol{F}^n$), המורכבת מן הוקטורים של $\boldsymbol{B}$ כוקטורי-עמודה, נקראת *מטריצה מלכסנת עבור* $\boldsymbol{T}$, ומתקיים: $[\boldsymbol{T}]_{\varepsilon}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$, כאשר $\boldsymbol{D}$ מטריצה אלכסונית מתאימה.

<u>תרגיל 5א:</u> נבנה את הפולינום האפייני -

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)-2=(\lambda-1)(\lambda-4)$$

המרחב העצמי של $\boldsymbol{A}$, השייך לע"ע λ הוא מרחב-הפתרונות של $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0$.

$$\lambda=1:\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1=-2\boldsymbol{x}_2 \Rightarrow \boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{Sp}\{(-2,1)\};$$

$$\lambda=4:\quad \begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2 \Rightarrow \boldsymbol{E}_4=\boldsymbol{Sp}\{(1,1)\};$$

(בפרק זה בד"כ נרשום וקטורים הן כוקטורי-שורה והן כוקטורי-עמודה, משיקולי נוחות בלבד).

$\boldsymbol{A}$ לכסינה, כי קיים בסיס של וקטורים עצמיים של $\boldsymbol{A}$ עבור $\boldsymbol{R}^2$: $\boldsymbol{B}=\{(-2,1),(1,1)\}$. בסדר זה של האיברים בבסיס נקבל צורה אלכסונית $\boldsymbol{D}$ של $\boldsymbol{A}$, ומטריצה מלכסנת $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

<u>תרגיל 5ג:</u> כאן -

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{xI}-\boldsymbol{A}|=(\boldsymbol{x}-5)^3,$$

חישוב המרחב העצמי היחיד $\boldsymbol{E}_5$:

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I})\vec{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=0 \Rightarrow \boldsymbol{E}_5=\boldsymbol{Sp}\{(0,0,1)\}.$$

מכאן נובע ש-$\boldsymbol{A}$ איננה לכסינה, מכיוון שעבור הע"ע $\boldsymbol{x}=5$, מתקיים $1=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{g}}(5)<\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}}(5)=3$.

<u>תרגיל 5ד:</u>

$$\Delta_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)-(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda=1:\quad (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \boldsymbol{x}_3\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_3 \Rightarrow \boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{Sp}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$$

$$\lambda=-1: \quad (A+I)x=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases} \Rightarrow E_{-1}=Sp\{(1,0,-1)\}.$$

מכאן המסקנה ש-A לכסינה, כיוון שמצאנו בסיס של ו"ע של A עבור R^3 , ונוכל לבנות:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}.$$

<u>תרגיל 6:</u>

$$\Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\-1&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-4)+1=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2$$

$$A-3I=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow m_g(3)=n(A-3I)=1<m_a(3)=2,$$

ולכן A איננה לכסינה לא מעל R ולא מעל C.

$$\Delta_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&1\\-13&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2-9+13=\lambda^2+4=(\lambda-2i)(\lambda+2i)$$

מכאן נובע ש-B איננה לכסינה מעל R, כי יש לה ע"ע קומפלקסיים, אולם היא לכסינה מעל C:

$$1\le m_g(2i)\le m_a(2i)=1\Rightarrow m_g(2i)=m_a(2i),$$

ואותו הדבר מתקיים עבור הע"ע השני של B. בכלל -

אם כל הע"ע של מטריצה (אופרטור) הם מריבוי אלגברי=1, אזי המטריצה לכסינה.

אפשר ללכסן כעת את B:

$$B-2i\cdot I=\begin{bmatrix}3-2i&-1\\13&-3-2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3-2i&-1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow E_{2i}=Sp\{(1,3-2i)\}$$

$$B+2i\cdot I=\begin{bmatrix}3+2i&-1\\13&-3+2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3+2i&-1\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow E_{-2i}=Sp\{(1,3+2i)\}$$

לפיכך, עבור הבחירה הבאה של המטריצה המלכסנת נקבל:

$$P=\begin{bmatrix}1&1\\3-2i&3+2i\end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix}2i&\\&-2i\end{bmatrix}.$$

<u>תרגיל 7ה:</u> נתון: $T:M_2(R)\to M_2(R), T(A)=A^t$. תחילה נמצא מטריצה מייצגת ל-T ביחס לבסיס הסטנדרטי:

$$\left.\begin{matrix}T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\\ T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}\Rightarrow [T]_\varepsilon=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\equiv A;$$

$$\Delta_T(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+1).$$

בסיס למרחב-הפתרונות של $(A-I)x=0$ הוא $\{(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, ואילו בסיס למרחב-הפתרונות של $(A+I)x=0$ ניתן ע"י: $\{(0,1,-1,0)\}$. זאת מכיוון ש-

$$\lambda=1:\quad A-I=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_2=x_3,$$

$$\lambda=-1:\quad A+I=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow x_1=x_4=0, x_2=-x_3.$$

אנו מסיקים שהאופרטור T לכסין, מכיוון שמצאנו בסיס של וקטורים עצמיים למרחב.

<u>פתרון קצר יותר:</u> אפשר לשים לב מייד כי:

$$A=A^t\Leftrightarrow T(A)=A^t=A\Leftrightarrow A\in E_1$$
$$A=-A^t\Leftrightarrow T(A)=A^t=-A\Leftrightarrow A\in E_{-1}$$

לפיכך המרחב E_1 הוא אוסף המטריצות הסימטריות, בעוד E_{-1} הוא אוסף כל המטריצות האנטי-סימטריות. אבל כל מטריצה ניתנת לכתיבה יחידה כסכום של מטר' סימטרית עם מטר' אנטי-סימטרית, ולכן הראינו כי $M_2(R)=E_1+E_{-1}$, כלומר - המרחב הוא סכום של מרחבים עצמיים של T, ולכן T לכסין. בנוסף, נובע מכך שאין ל-T ע"ע אחרים, כי כל מרחב עצמי חייב להיות זר אלגברית לסכום של השאר - אז אם ניקח $\lambda\neq\pm1$ אנו יודעים כי $E_\lambda=E_\lambda\cap M_2(R)=E_\lambda\cap\left(E_1+E_{-1}\right)=0$, וזה אומר שערך כזה איננו ע"ע של T.

<u>תרגיל 8:</u> 0 הוא ע"ע של T אם"ם:

קיים וקטור $v\neq0$ כך ש- $Tv=0\cdot v=0$, אם"ם:

$Ker\,T\neq0$, אם"ם:

T אינו הפיך (נזכור שאופרטור ליניארי במ"ו ממימד סופי הוא הפיך אם"ם הוא חח"ע).

<u>תרגיל 9:</u> יהא $T:V\to V$ אופרטור במ"ו ממימד סופי. לפי תרגיל 8, $\lambda=0$ הוא ע"ע של T אם"ם T אינו הפיך, ולכן א', ב', ו' שקולים.

מצד שני, $\lambda=0$ הוא ע"ע של T אם"ם הוא שורש של הפולינום האפייני של T, אם"ם האיבר

החפשי של הפ"א הוא אפס (לבדוק ע"י הצבה). מכיוון ש-$\det(T)$ הוא (עד-כדי סימן) האיבר החופשי של הפולינום האפייני, הטענה האחרונה שקולה לכך ש- $\det(T)=0$, ולכן א', ג', ד' שקולים.

<u>תרגיל 10א:</u> נתון $A\in M_n(F),\ Av=\lambda v$ (לכל אורך התרגיל). נוכיח את הטענה באינדוקציה על החזקה k:

בסיס-האינדוקציה: $k=1\Rightarrow A^1v=\lambda^1 v;$

הנחת-האינדוקציה: $k<n\Rightarrow A^kv=\lambda^k v$

מעבר: $A^nv=A(A^{n-1}v)=A(\lambda^{n-1}v)=\lambda^{n-1}Av=\lambda^{n-1}(\lambda v)=\lambda^n v.$

<u>תרגיל 10ב:</u> $\forall c\in F\colon (A+cI)v=Av+cIv=\lambda v+cv=(\lambda+c)v.$

<u>תרגיל 10ג:</u> $A+cI$ הפיכה אס"ם $(-c)$ אינו ע"ע של A, כיוון ש-

$$|A+cI|=|A-(-c)I|=\Delta_A(c)\ .$$

נזכור כעת, כי ל-A יש לכל-היותר n ע"ע שונים, ולכן אם F הוא שדה אינסופי, אז יש אינסוף סקלרים שאינם ע"ע של A, כלומר: אינסוף סקלרים c שעבורם $A+cI$ הפיכה. אם מספר האיברים ב-F גדול מ-n, אז עדיין קיימים סקלרים כאלה (אך במספר סופי!), ואם ב-F יש n איברים או פחות, אז אפשרי שלא יהיו סקלרים כאלה, לדוגמה:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\in M_2(Z_2).$$

<u>תרגיל 15א:</u>

$$\Delta_A(x)=|xI-A|=\left|(xI-A)^t\right|=\left|xI-A^t\right|=\Delta_{A^t}(x)$$

<u>תרגיל 15ב:</u> A לכסינה אס"ם קיימות P הפיכה ו-D אלכסונית כך ש- $A=PDP^{-1}$ אז:

$$A^t=(PDP^{-1})^t=(P^{-1})^tD^tP^t=(P^t)^{-1}D(P^t),$$

אז A^t לכסינה.

<u>תרגיל 15ג:</u> מהסעיף הקודם רואים, כי אם A לכסינה, אז ל- A, A^t אותה צורה אלכסונית D, ולכן הן דומות, בגלל טרנזיטיביות של דמיון.

<u>תרגיל 16:</u>

$$a,b,c,d\in R,\ A=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix}x-a&-b\\-c&x-d\end{vmatrix}=x^2-(a+d)x+(ad-bc)=x^2-trA\cdot A+\det A\cdot I$$

שורשי-הפולינום האפייני הם:

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$

תרגיל 16א: אם $(a-d)^2+4bc>0$, אז לפולינום האפייני של A יש שני שורשים שונים, ולכן A לכסינה.

תרגיל 16ב: אם $(a-d)^2+4bc<0$, אז לפולינום האפייני שני שורשים קומפלקסיים שונים - כלומר: A לכסינה מעל C, אך לא מעל R.

תרגיל 16ג: אם $(a-d)^2+4bc=0$ אז ל-A יש ע"ע ממשי יחיד. אם A לכסינה, אזי יש לה צורה אלכסונית סקלרית, כלומר: A דומה למטריצה סקלרית. אנו יודעים, שמטריצה, הדומה למטריצה סקלרית היא בעצמה סקלרית. לפיכך, A לכסינה אם"ם היא סקלרית.

תרגיל 17: נתונה מטריצה סימטרית מסדר 2:

$$a,b,d\in R,\ A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

לפי התרגיל הקודם:

$$\Delta_A(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-b^2);$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2},\quad a,b,d\in R\Rightarrow(a-d)^2+4b^2\geq 0.$$

לפי התרגיל האחרון, המקרה הבעייתי היחיד עבור A מתאים ל-

$$(a-d)^2+4b^2=0\Rightarrow a=d\,,\ b=0\Rightarrow A=aI.$$

ואנו רואים ש-A לכסינה, מכיוון שהיא כבר סקלרית. מכיוון שבכל מקרה אחר הדיסקרימיננט של הפ"א של A הוא מספר חיובי, A לכסינה מעל R לכל ערך של a,b,d.

תרגיל 18: נתון - $A\in M_2(R),\ \det A<0$. יהיו α,β הערכים העצמיים של A, אז:

$$\det A=\alpha\beta<0\Rightarrow \mathrm{sgn}(\alpha)\neq\mathrm{sgn}(\beta)\Rightarrow\alpha\neq\beta$$

אנו רואים של-A שני ע"ע שונים, ולכן A לכסינה מעל R.

תרגיל 22: נראה כי לכל מטריצת-בלוקים ריבועית מן הצורה:

$$(*)\quad M=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, A\in M_p(F), B\in M_q(F), B\in F^{p\times q}\ ,$$

מתקיים - $\det M=\det A\cdot\det D$. אם נוכיח זאת, הרי שאז:

$$\Delta_M(x)=\left|xI-M\right|=\begin{vmatrix} xI_p-A & -B \\ 0 & xI_q-D \end{vmatrix}=\left|xI_p-A\right|\cdot\left|xI_q-D\right|=\Delta_A(x)\cdot\Delta_D(x).$$

נוכיח את $(*)$ באינדוקציה על הסדר p של המטריצה A על-ידי פיתוח לפי העמודה הראשונה. בסיס-האינדוקציה ברור (אפשר לקחת $p=0$ או $p=1$). נראה כיצד לבצע את שלב-המעבר:

$$\det M=\sum_{k=1}^{n}M_{k,1}\cdot\det M(k|1)=\sum_{k=1}^{p}A_{k,1}\cdot\det\begin{bmatrix} A(k|1) & B(k|-) \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

כאשר $M(i|j)$ היא המטריצה המתקבלת מ-M ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j, בעוד $M(i|-)$ היא המטריצה המתקבלת מ- M ע"י מחיקת השורה ה-i בלבד.

הצלחנו לבטא את $\det(M)$ באמצעות דטרמיננטים מאותו הטיפוס, אבל מסדר נמוך יותר, ולכן ניתן להפעיל אינדוקציה (כלומר להניח שעד סדר p של A, הטענה שלנו נכונה), ולכתוב:

$$\det M = \sum_{k=1}^{p} A_{k,1}\cdot \det\begin{bmatrix} A(k|1) & B(k|-) \\ 0 & D \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{p} A_{k,1}\cdot \det A(k|1)\cdot \det D$$
$$= \det D\cdot\left[\sum_{k=1}^{p} A_{k,1}\cdot \det A(k|1)\right] = \det D\cdot \det A.$$

וזהו סוף ההוכחה.

<u>תרגיל 23א:</u> ל-A יש ע"ע: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \gamma$. אם $\gamma = 1$, אז ל-A ע"ע יחיד, והיא לא לכסינה, כי אינה סקלרית. מכאן שהתנאי $\gamma \neq 1$ הוא תנאי הכרחי ללכסינות של A.

במקרה זה, הריבוי האלגברי של γ שווה 1, ולכן:

$$1 \le m_g(\gamma) \le m_a(\gamma) = 1 \Rightarrow m_g(\gamma) = m_a(\gamma) = 1$$

מכאן נובע כי A לכסינה אמ"ם $m_g(1) = 2$:

$$m_g(1) = \dim Ker(A-I) = 3 - r(A-I) \Rightarrow r(A-I) = 1.$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(r(A-I) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0\right).$$

מכאן מסיקים את התשובה הסופית - Aלכסינה אמ"ם $\alpha = 0 \wedge \gamma \neq 1$.

<u>תרגיל 23ב:</u> ל-B ערכים עצמיים $2,3,\beta$.

<u>מקרה ראשון:</u> אם $\beta = 2$, אז B לכסינה אמ"ם $m_g(3) = 2, m_g(2) = 3$, וזה קורה אמ"ם:

$$r(B-3I) = 3,\ r(B-2I) = 2.$$

$$B - 3I = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \gamma & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B - 2I = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \gamma & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r(B-3I) = 3, \\ r(B-2I) = 2 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0 \end{cases}$$

<u>מקרה שני:</u> $\beta = 3$. B לכסינה אמ"ם $m_g(3) = 3, m_g(2) = 2$ אמ"ם

$$r(B-2I) = 3,\ r(B-3I) = 2.$$

$$B-3I=\begin{bmatrix}-1&\alpha&0&1&2\\0&-1&\gamma&2&1\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}, B-2I=\begin{bmatrix}0&\alpha&0&1&2\\0&0&\gamma&2&1\\0&0&1&1&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}r(B-3I)=3,\\r(B-2I)=3\Leftrightarrow\alpha=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow m_g(3)=5-r(B-3I)=2<m_a(3),$$

ולכן במקרה זה, B איננה לכסינה לכל ערך של הפרמטרים α,γ.

<u>מקרה שלישי:</u> $\beta\neq 2,3$, ואז אוטומטית: $m_g(\beta)=m_a(\beta)=1$, ובנוסף, על-מנת ש-B תהיה לכסינה, צריך להתקיים $m_g(3)=2, m_g(2)=2$, כלומר: $r(B-2I)=3, r(B-3I)=3$.

$$B-3I=\begin{bmatrix}-1&\alpha&0&1&2\\0&-1&\gamma&2&1\\0&0&\beta-3&1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}, B-2I=\begin{bmatrix}0&\alpha&0&1&2\\0&0&\gamma&2&1\\0&0&\beta-2&1&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}r(B-3I)=3,\\r(B-2I)=3\Leftrightarrow\alpha=0\end{cases}$$

מכאן מקבלים את התשובה הסופית: B לכסינה אמ"ם: $\left[\begin{array}{l}\alpha=\gamma=0,\beta=2\ or\\ \alpha=0,\beta\neq 2,3\end{array}\right.$

<u>תרגיל 24:</u> נסמן ב-$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ את הערכים העצמיים של A. נתון:

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\det A=24,\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=trA=10\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2\cdot\lambda_3=12\\\lambda_2+\lambda_3=8\end{cases}$$

מכאן, לפי משפט $Vieta$, המספרים λ_2,λ_3 הם השורשים של המשוואה הריבועית:

$$\lambda^2-8\lambda+12=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot12}}{2}=4\pm2=2,6.$$

אנו מסיקים שמתקיים $m_a(2)=2\quad m_a(6)=1\Rightarrow m_g(6)=1;$. לפיכך Aלכסינה אמ"ם:

$$m_g(2)=2\Leftrightarrow r(A-2I)=3-m_g(2)=3-2=1.$$

$$r(A-2I)=rank\begin{bmatrix}1&a&1\\b&2&2\\1&1&1\end{bmatrix}=1\Leftrightarrow a=1,b=2.$$

כלומר, הוכחנו כי A לכסינה אמ"ם $a=1,b=2$.

<u>תרגיל 25:</u> נתון כי $A\in M_n(F), r(A)=1$. מתקיים:

$$\left.\begin{array}{l}m_g(0)=\dim Ker(A-0\cdot I)=\dim Ker(A)=n(A)=n-r(A)=n-1\\m_g(0)\leq m_a(0)\end{array}\right\}\Rightarrow m_a(0)=n-1,n$$

כעת נזכור כי trA הוא סכום הע"ע של A (כולל ריבויים), ולכן, אם נרשום $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$:

$$trA = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \underbrace{0 + \ldots + 0}_{n-1} + \lambda_n = \lambda_n \Rightarrow \lambda_n = trA.$$

כעת, אם $\lambda_n = 0$, אז A איננה לכסינה, כי $n - 1 = m_g(0) < n = m_a(0)$.

להפך - אם $\lambda_n \neq 0$, אז מתקיים $m_a(0) = m_g(0) = n - 1, m_a(\lambda_n) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda_n) = 1$, כלומר:

לכל ע"ע של A, הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי, ולכן A לכסינה.

נזכור כי $\lambda_n = trA$, ומכאן שהוכחנו כי: A לכסינה אם"ם $trA \neq 0$, ובמקרה ש-A אכן לכסינה, יש לה צורה אלכסונית:

$$D = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ \underbrace{ \quad}_{n-1} & & 0 & \\ \hline & & & trA \end{array}\right].$$

<u>תרגיל 26:</u> נתון: $A \in M_n(F), r(A) = 1 < n$.

אם $trA = 0$, אז לפי התרגיל הקודם, כל הע"ע של A הם אפסים, ולכן ממשפט *Cayley-Hamilton* (שבעתיד נקרא לו "משפט CH") נובע כי: $\Delta_A(x) = x^n \Rightarrow A^n = 0$

לעומת-זאת אם $trA \neq 0$, אז A לכסינה.

<u>תרגיל 28:</u> מייד רואים כי: $r(M) = 2 \Rightarrow m_g(0) = n(M) = 5 - 2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$E_0 = Sp\{(1,0,-1,0,0),(0,1,0,-1,0),(1,0,0,0,-1)\}.$$

הרמז לחשב את M^2 נועד להפנות את תשומת-לבכם לכך ש-

$$M\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}, M\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_3 \supseteq Sp\{(1,0,1,0,1)\} \\ E_2 \supseteq Sp\{(0,1,0,1,0)\} \end{cases}$$

אבל אז אנו מקבלים כי $m_g(0) + m_g(2) + m_g(3) \geq 3 + 1 + 1 = 5$ וזה יכול לקרות אם"ם למעשה מתקיים שוויון, כלומר: $m_g(0) = 3, m_g(2) = m_g(3) = 1$, וזהו אחד התנאים ללכסינות, ומכאן ש-M לכסינה עם לכסון:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

תרגיל 31: A לא לכסינה משום שיש לה ע"ע יחיד $\lambda = 1$, והיא איננה סקלרית.

B לכסינה, כיוון שדרגתה שווה 1, והעקבה שלה שונה מאפס (לפי תרגיל 25).

C משולשת, ולכן הע"ע שלה רשומים כולם באלכסון. מכאן של-C יש 4 ע"ע שונים, ובהיותה מטריצה מסדר 4, היא חייבת להיות לכסינה.

D איננה לכסינה, לפי תרגיל 25: העקבה שלה אפס ודרגתה שווה ל-1.

F היא מטריצת-בלוקים. כל-אחד מן הבלוקים של F הוא מטריצה משולשת, שהע"ע שלה רשומים באלכסון. מכאן של-F 4 ע"ע שונים, ושוב - מכיוון ש-F היא מטריצה מסדר 4, היא חייבת להיות לכסינה.

E כבר אלכסונית, ולכן, בפרט, לכסינה.

תרגיל 32: כאן -

$$A \in M_2(R) \Rightarrow |-I - A|, |I - A| \in R;$$
$$|-I - A|^2 + |I - A|^2 = 0 \Rightarrow |-I - A| = |I - A| = 0$$

מכאן נובע של-A שני ע"ע שונים, ולכן היא לכסינה עם צורה אלכסונית:
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

לפיכך התשובות הנכונות הן: ד', ה', ו', ז'.

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1 \underset{(CH)}{\Rightarrow} A^2 - I = 0 \Leftrightarrow A^2 = I.$$

תרגיל 33: נרשום -
$$ABv = \lambda v \Rightarrow BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda \cdot (Bv) \Rightarrow Bv \in E_\lambda(BA)$$

כלומר, אם λ הוא ע"ע של AB עם ו"ע v, אז הוא גם ע"ע של BA עם ו"ע Bv. שיקול זה עובד בכל מצב פרט למצב $Bv = 0$, אבל אז $Bv = 0 \Rightarrow 0 = ABv = \lambda v \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} \lambda = 0$, כלומר 0 הוא ע"ע של AB, וברור שאז הוא גם ע"ע של BA, כי עבור מטריצות ריבועיות אנו יודעים כי AB לא-הפיכה אם"ם BA לא הפיכה.

באופן סימטרי מקבלים את הטענה ההפוכה: אם λ הוא ע"ע של BA, אז הוא גם ע"ע של AB, ולכן למטריצות AB ו-BA אותם ערכים עצמיים.

תרגיל 34: אם אחת המטריצות הפיכה, אז הפתרון פשוט: נניח, למשל, כי A הפיכה, ואז:
$$\begin{aligned}\Delta_{AB}(x) &= |AB - xI| = |A^{-1}| \cdot |AB - xI| \cdot |A| = |A^{-1}(AB - xI)A| = |A^{-1}ABA - xA^{-1}A| \\ &= |BA - xI| = \Delta_{BA}(x).\end{aligned}$$

אם אף-אחת מן המטריצות איננה הפיכה, ההוכחה מתבססת על משפט שאינו שייך לקורס.

תרגיל 36א:
$$Av = \lambda v,\ Bv = \mu v \Rightarrow \begin{cases} ABv = A(\mu v) = \mu(Av) = (\lambda\mu)v \\ BAv = B(\lambda v) = \lambda(Bv) = (\lambda\mu)v. \end{cases}$$

<u>תרגיל 36ב:</u> אם ל-A,B יש n ו"ע בת"ל משותפים, אז שתיהן לכסינות, ויש להן אותה מטריצה מלכסנת P (גם ההפך נכון - אם יש מטריצה מלכסנת משותפת, הרי שהעמודות שלה מהוות בסיס משותף של ו"ע). לפיכך, אם נשתמש בעובדה שמטריצות אלכסוניות מתחלפות בכפל, נקבל:

$$\left.\begin{array}{l} A = PD_AP^{-1} \\ B = PD_BP^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB = PD_AP^{-1}\cdot PD_BP^{-1} = P\left(D_A\cdot D_B\right)P^{-1} = P\left(D_B\cdot D_A\right)P^{-1} \\ \qquad = PD_BP^{-1}\cdot PD_AP^{-1} = BA. \end{array}\right. .$$

<u>תרגיל 36ד:</u> ל-A יש n ע"ע שונים, ולכן A לכסינה, ולכל ע"ע שלה:

$$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \dim E_\lambda(A) = 1.$$

מכאן אפשר להסיק כי:

$$v \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow Av = \lambda v \Rightarrow A(Bv) = (AB)v = (BA)v = B(Av) = \lambda(Bv) \Rightarrow Bv \in E_\lambda(A);$$
$$\Rightarrow B\left(E_\lambda(A)\right) \subseteq E_\lambda(A).$$

או, במילים אחרות, אם נזכור כי $E_\lambda(A)$ הוא ממימד 1, אז בהילקח $0 \ne v \in E_\lambda(A)$, גם $Bv \in E_\lambda(A)$, ולכן קיים סקלר μ, שעבורו נכון $Bv = \mu v$ (מכיוון שבתוך מ"ו ממימד=1 כל שני וקטורים הם וקטורים פרופורציוניים); לפיכך אם v הוא וקטור-עצמי של A, אז הוא גם ו"ע של B. מכאן נובע שכל בסיס המורכב מו"ע של A הוא גם בסיס המורכב מו"ע של B, כלומר - למטריצות B,A קיים לכסון משותף.

<u>תרגיל 36ד:</u> נוכיח טענה שקולה: אם $T,S:V \to V$ אופרטורים לכסינים ומתחלפים במ"ו V ממימד $\dim V = n$, אז יש להם לכסון משותף.

יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ הע"ע השונים של האופרטור T, עם ריבויים $m_1,\dots,m_k$. נסמן $W_i = E_{\lambda_i}(T)$, לכל $1 \le i \le k$. מכיוון ש-T לכסין, אנו יודעים כי: $V = W_1 \oplus\cdots\oplus W_k$.

רעיון ההוכחה מתפרק לשלבים:

(i) להוכיח כי לכל $1 \le i \le k$ מתקיים $S\left(W_i\right) \subseteq W_i$;

(ii) להוכיח שלכל $1 \le i \le k$, הצמצום של S ל-W_i הוא אופרטור לכסין;

(iii) ללכסן את S בכל W_i בנפרד, ולהראות ש-T עדיין אלכסוני בהצגה החדשה.

תחילה נוכיח את **(i)**: לשם-כך יש לקחת $v \in W_i$ ולהראות כי $Sv \in W_i$ -

$$v \in W_i \Leftrightarrow Tv = \lambda_i v \Rightarrow T(Sv) = (TS)v = (ST)v = S(Tv) = S(\lambda_i v) = \lambda_i(Sv) \Rightarrow Sv \in W_i.$$

כעת, על-מנת להראות את **(ii)**, מספיק להוכיח את הלמה:

<u>למה:</u> יהא $S:V \to V$ אופרטור לכסין, ונניח כי W הוא תמ"ו אינווריאנטי של S. אז גם הצמצום של S ל-W הוא אופרטור לכסין.

לפני שנוכיח את הלמה, נסיים את הוכחת הטענה של התרגיל:

לפי שלב **(ii)**, לכל $1 \le i \le k$ קיימים בסיסים B_i של W_i, המורכבים מוקטורים עצמיים של S. נסמן ב-B את איחוד כל ה-B_i. בבירור, זהו בסיס של כל V, ויתר-על-כן: זהו בסיס של V, המורכב מו"ע

של $\boldsymbol{S}$, ולכן הוא נותן לכסון של $\boldsymbol{S}$. נותר להוכיח שכל איבר של $\boldsymbol{B}$ הוא גם ו"ע של $\boldsymbol{T}$, אבל כאן אין מה להוכיח, כי כל איבר של $\boldsymbol{B}$ שייך לאחד מה- $\boldsymbol{W_i}$, שהם המרחבים העצמיים של $\boldsymbol{T}$. ■

<u>הוכחת הלמה:</u> יהא $\boldsymbol{S}$ כבתנאי הלמה, ויהיו $\boldsymbol{E_j = E_{\mu_j}(S),\ j = 1,\dots,m}$ המרחבים העצמיים של $\boldsymbol{S}$.

בהיות $\boldsymbol{S}$ לכסין, אנו יודעים כי - $\boldsymbol{V = E_1 \oplus \dots \oplus E_m}$. כעת, לכל $\boldsymbol{j}$ בנפרד, נתבונן במרחב:

$$\boldsymbol{W_j^0 = W \cap E_j},$$

ויהי $\boldsymbol{W_j^1}$ תת-מרחב כלשהו של $\boldsymbol{E_j}$ כך ש- $\boldsymbol{E_j = W_j^0 \oplus W_j^1}$. נסמן:

$$\boldsymbol{x_j = \dim W_j^0,\ y_j = \dim W_j^1 \Rightarrow x_j + y_j = \dim E_j = m_g(S, \mu_j).}$$

$$\boldsymbol{W^1 \overset{def.}{=} W_1^1 \oplus \dots \oplus W_m^1.}$$

מכאן נקבל כי:

$$\boldsymbol{W \supseteq W_1^0 \oplus \dots \oplus W_j^0 \Rightarrow \dim W \geq x_1 + \dots + x_m; \quad \dim W^1 = y_1 + \dots + y_m; \quad W \cap W^1 = 0.}$$

$$\boldsymbol{V = E_1 \oplus \dots \oplus E_m \Rightarrow \dim V = \sum_{j=1}^{m} (x_j + y_j),}$$

$$\boldsymbol{\dim V = \sum_{j=1}^{m} x_j + \sum_{j=1}^{m} y_j \leq \dim W + \dim W^1 = \dim(W \oplus W^1) \Rightarrow W \oplus W^1 = V}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \dim W = \dim V - \dim W^1,}$$

ולכן אנו מסיקים כי:

$$\boldsymbol{\dim W = x_1 + \dots + x_m \Rightarrow W = W_1^0 \oplus \dots \oplus W_m^0}$$

אבל כעת אנו רואים כי לכל $\boldsymbol{1 \leq j \leq m}$ מתקיים כי $\boldsymbol{v \in W_j^0 \Rightarrow Sv = \mu_j v}$, כלומר: הראינו שהמרחב $\boldsymbol{W}$ הוא סכום ישר של מרחבים-עצמיים של האופרטור $\boldsymbol{S|_W}$, ולכן אופרטור זה לכסין. ■

<u>מסקנה:</u> מטריצת-בלוקים אלכסונית (= מטריצה מן הצורה: $\boldsymbol{\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix},\ A_i \in M_{n_i}(F)}$) היא מטריצה לכסינה אם"ם כל בלוק שלה לכסין.

<u>תרגיל 37א:</u> הטענה איננה נכונה, לדוגמה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

אפשר להכליל את הדוגמה לכל סדר $\boldsymbol{(n \times n)}$ ע"י בניית מטריצות מן הצורה:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

<u>תרגיל 37ד:</u> תזכורת - "לא-סינגולרית = הפיכה".

$$A^2-2A+I=0\Rightarrow 2A-A^2=I\Rightarrow A\cdot(2I-A)=I\Rightarrow A^{-1}=2I-A.$$

כלומר, A הפיכה, עם הפוך השווה ל- $2I-A$.

<u>תרגיל 37ה:</u> A לכסינה, ולכן אפשר לרשום $A=PDP^{-1}$, כאשר D אלכסונית.

$$PD^2P^{-1}=A^2=A^3=PD^3P^{-1}\Rightarrow D^2=D^3,$$

(ע"י הכפלה ב-P ובהפכית שלה משני האגפים). כעת נרשום $D=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

ואז נקבל:

$$\begin{aligned}&diag(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)=diag(\lambda_1^3,\dots,\lambda_n^3)\\ &\Rightarrow \forall i{:}\ \lambda_i^2=\lambda_i^3\Rightarrow \forall i{:}\ \lambda_i\in\{0,1\}\Rightarrow \forall i{:}\ \lambda_i^2=\lambda_i\Rightarrow D^2=D.\\ &\Rightarrow A^2=A.\end{aligned}$$

<u>תרגיל 37 ו':</u> הטענה איננה נכונה באופן כללי: $Av=\lambda v,\ Aw=\lambda w.$

$$A(v+w)=Av+Aw=\lambda v+\mu w$$

אילו הטענה הייתה נכונה, היינו מקבלים: $A(v+w)=(\lambda+\mu)(v+w)=(\lambda v+\mu w)+\mu v+\lambda w$

$$\Rightarrow \mu v+\lambda w=0$$

ומכאן היה נובע כי v,w פרופורציוניים, וזה אפשרי (בהיותם ו"ע של A) רק אם $\lambda=\mu$, וזה לא נתון.

<u>תרגיל 41א:</u> נרשום את הפולינום האפייני של A:

$$\Delta_A(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n,\ a_0=(-1)^n\det A\neq 0;$$

$$\begin{aligned}(CH)&\Rightarrow A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=0\Leftrightarrow A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A=(-a_0)I\\ &\Leftrightarrow A\cdot\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I\right)=(-a_0)I\Leftrightarrow A\cdot\left(-\frac{1}{a_0}\right)\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I\right)=I\\ &\Leftrightarrow A^{-1}=\left(-\frac{1}{a_0}\right)\left(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1I\right).\end{aligned}$$

<u>תרגיל 41ב:</u> לאחר חישוב, מקבלים את הפולינום האפייני של A: $\Delta_A(x)=x^3-4x^2+5x-2$

ומכאן, לפי חלק א', שהפולינום המבוקש הוא: $p(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}.$

<u>תרגיל 43:</u> חלק א' מסתכם לכך שנשים לב כי המטריצות $I,A,\dots,A^n$ תלויות לינארית אם"ם קיים פולינום $p(x)\neq 0(x)$ ממעלה קטנה או שווה ל-n, המאפס את המטריצה A. משפט CH בדיוק נותן פולינום ממעלה n, המאפס את A, והוא שונה מאפס, כיוון שיש לו מקדם מוביל=1.

כעת נעבור לחלק ב' (ויש לציין שהוא לא קל כפי שהוא נראה). יהא $m(x)$ פולינום מאפס של A, השונה מפולינום האפס ומדרגה מינימלית בין כל הפולינומים כנ"ל, כלומר: אם $p(A)=0$, וגם $p\neq 0$, אז בהכרח $\deg m\leq \deg p$.

טענה: $\dim U = \deg m, U = Sp\left\{I, A, \dots, A^{\deg m - 1}\right\}$ (ברור שזה מסיים את התרגיל).

הוכחה: לכל פולינום מאפס $p(x)$, נוכל לרשום:
(חילוק של פולינומים עם שארית)

$$\begin{cases} p(x) = m(x)q(x) + r(x), \\ \deg r < \deg m \vee r = 0 \end{cases}$$

אם כך, אז:

$$r(x) = p(x) - m(x)q(x) \Rightarrow r(A) = p(A) - m(A)q(A) = 0 - 0 \cdot q(A) = 0$$

מכאן נובע שהפולינום r הוא פולינום המאפס את A, ולכן דרגתו איננה קטנה מ- $\deg m$. לפיכך חייב להתקיים (לפי התנאים של חילוק עם שארית) כי $r = 0$, ולכן הוכחנו ש-

כל פולינום מאפס של A מתחלק בפולינום $m(x)$, בפרט בפולינום האפייני של A מתחלק ב-$m(x)$.

מסקנה: כל פולינום $p(x)$ ניתן לרישום כסכום של פולינום מאפס של A + פולינום ממעלה, הקטנה מ- $\deg m$ (שוב, מחלקים עם שארית ב-m). אם לסמן ב-$N(A)$ את מרחב כל הפולינומים המאפסים את A, אז את המסקנה אפשר לרשום כך: $F[x] = F_{\deg m - 1}[x] \oplus N(A)$.

כעת, אנו יודעים כי -

$$U = Sp\left\{I, A, \dots, A^k, \dots\right\} = F[A] \overset{def.}{=} \left\{p(A) \middle| \, p(x) \in F[x]\right\}$$

$$\Rightarrow \dim U \le \dim\left(F_{\deg m - 1}[x]\right) = \deg m.$$

להשלמת ההוכחה נותר להראות שהחזקות $I, A, \dots, A^{\deg m - 1}$ הן בת"ל.

- אם לא, אז קיים פולינום ממעלה $\deg m - 1$ לכל-היותר, המאפס את A, אבל זה סותר את המינימליות של $m(x)$. לפיכך המטריצות הנ"ל מהוות קבוצה בת"ל, והוכחנו את הטענה. ■

תרגיל 44: בשלילה, אם לכל k טבעי יתקיים $\left(A^k\right)_{1,1} = 0$, אז גם לכל פולינום $p(x)$:

$$p(0) = 0 \Rightarrow \left(p(A)\right)_{1,1} = 0,$$

וזאת מכיוון שפולינום כזה הוא צירוף לינארי של חזקות חיוביות של x, ולכן $p(A)$ הוא צירוף ליניארי של חזקות חיוביות של A, והנחת-השלילה אומרת שלכל חזקה כזאת מתקיים $\left(A^k\right)_{1,1} = 0$.

כעת, נרשום את הפולינום האפייני של A בצורה הבאה:

$$\Delta_A(x) = p(x) + (-1)^n \det A$$

אפשר מיד להסיק כי $p(0) = 0$, כי הגורם השני בפירוק הינו בדיוק המקדם החפשי של הפולינום האפייני. לפיכך מתקיים, לפי CH:

$$\left.\begin{aligned} & p(A) + (-1)^n \det A \cdot I = 0 \\ & \left(p(A)\right)_{1,1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = (-1)^n \det A \cdot I_{1,1} \Rightarrow \det A = 0,$$

בסתירה לנתון ש-A הפיכה.

תרגיל 46: $A \in M_n(F)$ היא מטריצה לא לכסינה מדרגה 1, ולכן (תרגיל 25) כל הערכים העצמיים שלה שווים לאפס. מכאן נובע שהפולינום האפייני שלה הוא $\Delta_A(x) = x^n$, ולפי CH אנו מקבלים כי: $A^n = \Delta_A(A) = 0$.

תרגיל 48:

א' - דומות. אותם ערכים עצמיים, וכולם בריבוי אלגברי=1. לפיכך שתיהן לכסינות עם אם אותה צורה אלכסונית.

ב' - דומות - מטריצות מדרגה 1 עם אותה עקבה (תרגיל 25).

ג' - אינן דומות - שתיהן נתונות בצורה אלכסונית, ורואים שאין להן את אותם הערכים העצמיים.

ד' - באופן כללי, אינן דומות: חילוף אחד בין השורות גורם לשינוי הסימן של הדטרמיננט. לפיכך הן אינן דומות אם הן (אחת מהן) הפיכות. אם אינן הפיכות - זה תלוי בפרמטרים.

ה' - אינן דומות: לאחת ע"ע 1 בריבוי גיאומטרי 2, ולשניה ע"ע 1 בריבוי גיאומטרי 1.

תרגיל 50: ניתן כאן את התשובות הסופיות (ברור כיצד להגיע אליהן - המטריצות משולשות כולן), ולא נלכסן את המטריצות הלכסינות. תחילה -

$$\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

וזה גורר שלמטריצות A,B,C ריבויים אלגבריים זהים לכל ע"ע:

$$m_a(A,1) = m_a(B,1) = m_a(C,1) = 1 \quad \Rightarrow \quad m_g(A,1) = m_g(B,1) = m_g(C,1) = 1;$$
$$m_a(A,2) = m_a(B,2) = m_a(C,2) = 2.$$

בכדי לבדוק לכסינות, יש לחשב רק את הריבויים הגיאומטריים של הערך העצמי $\lambda = 2$:

$$m_g(A,2) = m_g(C,2) = 2,\ m_g(B,2) = 1.$$

מכאן נובע כי C,A לכסינות (C כבר אלכסונית), ואילו B איננה לכסינה. ל-A ול-C אותה צורה אלכסונית, ולכן הן דומות (טרנזיטיביות של דמיון).

תרגיל 52:

א) זה לא נכון - כל מטריצה משולשת עם אפסים באלכסון היא דוגמה נגדית.

ב) לא נכון - המטריצה הראשונה היא מדרגה 1, ואילו השניה - מדרגה 2.

ג) בוודאי -

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow \Delta_A(x) = |xI - A| = \left|xI - PBP^{-1}\right| = \left|P(xI)P^{-1} - PBP^{-1}\right|$$
$$= \left|P(xI - B)P^{-1}\right| = |P| \cdot |xI - B| \cdot \frac{1}{|P|} = \Delta_B(x).$$

ד) לא נכון - למטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ יש ו"ע $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ואילו למטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ אין ו"ע כזה.

תרגיל 52 ה+1: למעשה כאן נפתור את תרגיל 57. הטענה כאן איננה נכונה, ויש להתבונן, למשל, בדוגמאות:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&&\\&1&&\\\hline&&1&1\\&&&1\end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&&\\&1&1&\\&&1&\\\hline&&&1\end{array}\right].$$

נניח בשלילה, שהמטריצות A,B דומות; אז כל פולינום שמאפס את A חייב לאפס גם את B, ולהיפך (לפי תרגיל 3 בפרק על מטריצה הפיכה). מצד שני, אפשר לבדוק כי:

$$(A-I)^2=0,\ (B-I)^2\neq 0,$$

כלומר, הפולינום $p(x)=x^2-2x+1$ מאפס את A, אבל לא את B.

למעשה, השתמשנו בכלל הבא:

אם A דומה ל-B, ו- f היא אינווריאנטה של דמיון (למשל: דטרמיננט, עקבה, דרגה, פ"א, וכו'), אז לכל פולינום $p(x)\in F[x]$ חייב להתקיים $f\left(p(A)\right)=f\left(p(B)\right)$.

במקרה שלנו הראינו ש-A איננה דומה ל-B, ע"י-כך שהצבנו $f(M)=rank(M)$: עבור הפולינום $p(x)=x^2-2x+1$, קיבלנו כי $rank\left(p(A)\right)=0\neq rank\left(p(B)\right)$.

<u>תרגיל 52 ז':</u> זה לא נכון - אמנם אם יש למטריצות אותו פ"א, אז יש להן את אותם הערכים העצמיים באותם ריבויים אלגבריים, אבל כלל זה לא חל על ריבויים גיאומטריים:

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

בדוגמה זאת, ברור כי למטריצות A,B אותו פ"א, אבל A לכסינה (אלכסונית) בעוד ש-B איננה לכסינה, ובפרט - הריבויים הגיאומטריים המתאימים אינם שווים.

<u>תרגיל 52ח:</u> הניסוח לקוי במקצת - הכוונה לכך שאם בפולינום האפייני של מטריצה קיים שורש מרובה, אז המטריצה איננה לכסינה. אנו יודעים שזה לא נכון: $A=I_n$ היא דוגמה נגדית.

<u>תרגיל 52ט:</u> זה נכון - ראה תרגיל 34 בפרק זה.

<u>תרגיל 52 י':</u> אכן, למטריצה ממשית 5×5 פולינום אפייני (ממשי) ממעלה 5. אנו יודעים שלפולינום ממשי ממעלה אי-זוגית תמיד יש שורש ממשי, ולכן יש למטריצה הנתונה ע"ע ממשי אחד לפחות.

<u>תרגיל 53:</u> ראה תרגיל 21 מן הפרק על הצגת אופרטורים באמצעות מטריצה.

<u>תרגיל 54:</u> התרגיל אינו נכון: אם ניקח $F=R$, אז המטריצה $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ איננה לכסינה, ואיננה דומה לאף מטריצה משולשת, מכיוון שאין לה ע"ע ממשיים. מכאן גם רואים מה חסר בתרגיל - <u>יש להניח כי השדה F הוא C</u>. בהנחה זאת, לכל מטריצה $A\in M_2(C)$ יש שני ערכים עצמיים (אולי שווים) - נסמן אותם ב-a,b.

$$a \neq b \Rightarrow A \approx \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

וזאת מכיוון ש-A לכסינה (ריבויים אלגבריים כולם שווים ל-1). במקרה השני, לעומת-זאת, אם A לכסינה, אז היא חייבת להיות סקלרית, כי אז יש לה ע"ע יחיד. לפיכך נניח לרגע ש-A איננה לכסינה. בכל מקרה, מתקיים:

$$A^2 - trA \cdot A + \det A \cdot I = 0$$

$$A^2 - 2aA + a^2 I = 0$$

$$(A - aI)^2 = 0 \underset{(53)}{\Rightarrow} A - aI \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A \approx \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

<u>הערה:</u> כאן השתמשנו בעובדה ש- $A + xI \approx B + xI \Leftrightarrow A \approx B : \forall x \in F$. נוכיח זאת -

$$A = PBP^{-1} \Leftrightarrow A + xI = PBP^{-1} + xI = PBP^{-1} + P(xI)P^{-1} = P(B + xI)P^{-1}.$$

<u>תרגיל 57:</u> ראה תרגיל 52 ה+ו, בפרק זה.