אלגברה ב' - פתרון גליון 6

♠ תרגיל 1 - זהות הקיטוב:

להוכחת זהות הקיטוב נשתמש בנוסחה -

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle\right) + \|v\|^2.$$

עלינו להוכיח כי -

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right],$$

ואנו נעשה זאת על-ידי חישוב כל המחוברים של אגף ימין בנפרד:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle\right) + \|v\|^2;\\
\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle\right) + \|v\|^2;\\
i\|u+iv\|^2 &= i\|u\|^2 + 2i\mathrm{Re}\left(\langle u, iv\rangle\right) + i\|iv\|^2\\
&= i\|u\|^2 + 2i\mathrm{Re}\left(-i\langle u, v\rangle\right) + i\cdot|i|^2\|v\|^2\\
&= i\|u\|^2 + 2i\mathrm{Im}\left(\langle u, v\rangle\right) + i\|v\|;\\
i\|u-iv\|^2 &= i\|u\|^2 - 2i\mathrm{Re}\left(\langle u, iv\rangle\right) + i\|iv\|^2\\
&= i\|u\|^2 - 2i\mathrm{Re}\left(-i\langle u, v\rangle\right) + i\cdot|i|^2\|v\|^2\\
&= i\|u\|^2 - 2i\mathrm{Im}\left(\langle u, v\rangle\right) + i\|v\|.
\end{aligned}$$

כעת, אם נחבר את כל ארבע המשוואות בצורה הדרושה נקבל -

$$\begin{aligned}
&= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\\
&= 2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle\right) - \left(-2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle\right)\right) + 2i\mathrm{Im}\left(\langle u, v\rangle\right) - \left(-2i\mathrm{Im}\left(\langle u, v\rangle\right)\right)\\
&= 4\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle\right) + 4i\mathrm{Im}\left(\langle u, v\rangle\right)\\
&= 4\langle u, v\rangle. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

♠ תרגיל 2:

V, W הם מרחבי-מכפלה פנימית, ונתונה העתקה ליניארית $T: V \to W$.
נניח תחילה ש-T שומרת מ"פ, כלומר $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ לכל $u, v \in V$. אז גם -

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2$$

לכל $u \in V$, והוכחנו ש-T שומרת נורמה.
להיפך, אם T שומרת נורמה, נוכל לרשום -

$$\begin{aligned}
\langle Tu, Tv\rangle &= \frac{1}{4}\left[\|Tu+Tv\|^2 - \|Tu-Tv\|^2 + i\|Tu+iTv\|^2 - i\|Tu-iTv\|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\|T(u+v)\|^2 - \|T(u-v)\|^2 + i\|T(u+iv)\|^2 - i\|T(u-iv)\|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right] \\
&= \langle u, v\rangle,
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

♠ תרגיל 3 - [HK] 8.4.6 (שיקוף ליניארי):

נתון $W < V$, ואז כל $v \in V$ מתפרק באופן יחיד כסכום $v = w + w_0$, כאשר $w \in W$ וגם $w_0 \in W^\perp$.
מגדירים: $R_W(v) = w - w_0$.
ננסה לרשום את האופרטור R_W באמצעות אופרטורים ליניאריים מוכרים יותר:

$$R_W(v) = w - w_0 = 2w - (w + w_0) = 2P_W(v) - v = (2P_W - I)(v),$$

כלומר, $R_W = 2P_W - I$, וכעת ננצל את התכונות המאפיינות את P_W - $P_W^2 = P_W$ וכן $P_W^* = P_W$ - על-מנת להוכיח ש-R_W צמוד לעצמו ואוניטרי:

$$\begin{aligned}
R_W^* &= (2P_W - I)^* = (2P_W)^* - I = 2P_W^* - I = 2P_W - I = R_W \\
R_W^* R_W &= R_W^2 = (2P_W - I)^2 = 4P_W^2 - 2 \cdot I \cdot 2P_W + I^2 = I.
\end{aligned}$$

כעת, עבור $V = \mathbb{R}^3$ ו-$W = Sp\{(1,0,1)^t\}$, נחשב את המטריצה המייצגת $[R_W]_\epsilon$, כאשר ϵ הוא הבסיס הסטנדרטי של V. לשם-כך, נחשב תחילה את המטריצה של P_W:

$$P_W \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\langle (x,y,z)^t, (1,0,1)^t \rangle}{\|(1,0,1)^t\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+z}{2} \\ 0 \\ \frac{x+z}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

מכאן נובע כי -

$$[R_W]_\epsilon = 2[P_W]_\epsilon - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

♠ תרגיל 4 - אפיון שיקוף ליניארי:

כעת להיפך, נתון $T \in L(V)$, המקיים $T = T^*$, $T^*T = I$, ורוצים למצוא תת-מרחב $W < V$ כך ש-$T = R_W$. כעת, אילו זה היה המצב, הינו מקבלים (לפי תרגיל 3), את השוויון $T = 2P_W - I$, השקול לשוויון $P_W = \frac{1}{2}(T + I)$.

לפיכך, רעיון ההוכחה שלנו יהיה להגדיר אופרטור $P \triangleq \frac{1}{2}(T+I)$, ולהוכיח שהוא מהווה אופרטור היטל אורתוגונלי. תת-המרחב W הוא אז $W = \mathrm{Im}P$.
ובכן, עלינו להוכיח שתי תכונות של P: $P^2 = P,\ P^* = P$.

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{1}{2}(T+I)^* = \frac{1}{2}(T^*+I) = \frac{1}{2}(T+I) = P; \\ P^2 &= \frac{1}{4}(T+I)^2 = \frac{1}{4}(T^2+2T+I) \\ &= \frac{1}{4}(T^*T+2T+I) = \frac{1}{4}(2T+2I) = P. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♠ תרגיל 5:

תהא $G < H$ תת-חבורה של G, המקיימת שמכפלת כל שני קוסטים ימניים של H היא שוב קוסט ימני. נוכיח תחילה כי $HaHb = H(ab)$ לכל $a, b \in G$: אכן, $HaHb$ הוא קוסט המכיל את ab, ולכן הוא שווה לקוסט $H(ab)$, שכן אוסף הקוסטים מהווה חלוקה של G.
כעת, ניקח $n \in H,\ g \in G$ ונראה שהאיבר $gng^{\perp 1}$ שייך ל-H:

$$\begin{aligned} Hgng^{\perp 1} &= Hg \cdot Hn \cdot Hg^{\perp 1} = Hg \cdot (H \cdot Hg^{\perp 1}) \\ &= HgHg^{\perp 1} = H(gg^{\perp 1}) = H, \end{aligned}$$

קיבלנו $Hgng^{\perp 1} = H$, וזה קורה אם ורק אם $gng^{\perp 1} \in H$, ואנו רואים ש-H נורמלית ב-G. ■

♠ תרגיל 6:

על-מנת להוכיח ש-$HK < G$ עלינו להראות שמתקיים $HK = KH$. לשם-כך נזכור שהנורמליות של K - משמעותה בפרט ש-$Kh = hK$ לכל $h \in H$. נחשב:

$$KH = \bigcup_{h \in H} Kh = \bigcup_{h \in H} hK = HK,$$

וזהו סוף ההוכחה. ■

♠ תרגיל 7:

ניקח $g \in G$ כלשהו, ונזכור שהנורמליות של H, K שקולה לכך ש-

$$gKg^{\perp 1} = K,\ gHg^{\perp 1} = H$$

וזאת לכל בחירה אפשרית של g. לפיכך -

$$g(HK)g^{\perp 1} = (gHg^{\perp 1})(gKg^{\perp 1}) = HK,$$

והוכחנו ש-$HK \triangleleft G$. ■

♠ תרגיל 8:

נשים לב שלכל $m, n \in G$ מתקיים $mn = nm$ אם ורק אם $mnm^{\perp 1}n^{\perp 1} = e$.
כעת, ניקח $m \in M, n \in N$ ונתבונן באיבר $mnm^{\perp 1}n^{\perp 1}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{mnm^{\perp 1}}_{\in N} \cdot n^{\perp 1} &\in N; \\ m \cdot \underbrace{nm^{\perp 1}n^{\perp 1}}_{\in M} &\in M. \end{aligned}$$

אנו רואים ש-$mnm^{\perp 1}n^{\perp 1}$ שייך ל-$M \cap N = \{e\}$, ולכן $mn = nm$, כנדרש. ■