<u>תרגול חזרה 1 – מרחבי מכפלה פנימית</u>

<u>נושאים:</u>

1. אופרטורים על ממ"פ
2. תרגילים

<u>אופרטורים על ממ"פ</u>

הטבלה להלן מסכמת את האפיון של אופרטורים על ממ"פ

מאפיין/סוג אופרטור	נורמלי	אוניטרי/אורתוגונלי	הרמיטי/סימטרי
הגדרה	$T^*T=TT^*$	$T^*T=TT^*=Id$	$T=T^*$
ערכים עצמיים	יכולים להיות כל מספר, ולא תמיד קיימים	מעל C - $\|\lambda\|=1$ מעל R – אם קיימים, אז ± 1	$\lambda\in R$ (ז"א תמיד ממשיים)
מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית בבסיס א"נ של וקטורים עצמיים?	מעל C	מעל C	מעל R ומעל C
כיצד ניתנת לייצוג פשוט במרחב מכפלה פנימית ממשי	מטריצת בלוקים כאשר כל בלוק הוא 1x1 (ומתאים לערך עצמי ממשי) או בלוק 2x2 מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ המתאים לערך עצמי מעל מרוכב מהצורה $a+ib$	כמו נורמלית, אבל כל הערכים העצמיים בגודל 1 וכל בלוק 2x2 עם דטרמיננטה 1.	אלכסונית בבסיס א"נ של וקטורים עצמיים

<u>תרגילים</u>

1. תהא $A\in M_{2x2}(R)$ ונגדיר פונקציה $\langle , \rangle : R^2\times R^2\to R$ על ידי $\langle v,u\rangle = v^t Au$. הוכח כי פונקציה זו היא מכפלה פנימית אם ורק אם A סימטרית עם ערכים עצמיים חיוביים.

פתרון: ליניאריות מימין ומשמאל מתקיימת בלי אף תנאי על A, פשוט מהתכונות של כפל וקטורים במטריצות ותכונות ה – transpose. התנאי $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$ יתקיים לכל $v,u\in R^2$ אם ורק אם יתקיים $v^tAu=u^tAv$ לכל $v,u\in R^2$. נסמן $v=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix} w\\ z\end{pmatrix}$, אז צריך להתקיים $axw+bxz+cwy+dyz=axw+byw+cxz+dyz$ לכל $x,y,z,w\in R$, בפרט צריך להתקיים $b=c$ וזה אם ורק אם A סימטרית.

A סימטרית לכן אנו יודעים שהיא ניתנת ללכסון מעל R, ז"א יש וקטורים עצמיים לא פרופורציונליים v,u המתאימים לערכים עצמיים λ_v,λ_u . עבור v יתקיים תנאי החיוביות של המכפלה הפנימית אם ורק אם $v^tAv>0$. נסמן $v=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, אז החיוביות תתקיים אם ורק אם $0<v^tAv=v^t\lambda_v v=\lambda_v\cdot(x^2+y^2)=\|v\|^2$. כיוון ש - $v\neq 0$, תנאי זה יתקיים אם ורק אם $\lambda_v>0$. באופן דומה תתקיים החיוביות ל – u אם ורק אם $\lambda_u>0$.

לוקטור כללי ב – $w\in R^2$, ניתן לרשום $w=rv+su$ ואז תתקיים חיוביות ל – w אם ורק אם

יתקיים $0<w^t Aw=(rv^t+su^t)A(rv+su)=r^2\|v\|^2+s\|u\|^2+rs((\lambda_v+\lambda_u)\cdot(x_u x_v+y_u y_v))$ כאשר x_v, y_v הקואורדינטות של v, ו- x_u, y_u הקואורדינטות של u. הביטוי $x_u x_v+y_u y_v$ הוא הערך של המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב - R^2 של v, u, ואנו יודעים שהיא אפס כי אלו וקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים שונים, לכן נקבל חיוביות לוקטור כללי ב - R^2 אם ורק אם יש חיוביות לוקטורים העצמיים של A, וזה אם ורק אם $\lambda_v, \lambda_u>0$.

2. יהי $V=M_{nxn}(C)$ עם מ"פ סטנדרטית. ל- $A,B\in M_{nxn}(C)$ נגדיר $T(X)=AX+XB$. הוכח כי לכל $X\in V$ $T^*(X)=A^*X+XB^*$. מתי T אופרטור נורמלי/הרמיטי?

פתרון: נזכור כי הצמוד מקיים $\langle TX, Y\rangle=\langle X, T^*Y\rangle$ לכל $X, Y\in V$. נפתח ונקבל $\langle TX, Y\rangle=tr(Y^*TX)=tr(Y^*(AX+XB))=tr(Y^*AX)+tr(Y^*XB)=$ $=tr(Y^*AX)+tr(BY^*X)=tr((A^*Y+YB^*)^*X)=\langle X, A^*Y+YB^*\rangle$, לכן מיחידות הצמוד נקבל את הנוסחה הנדרשת. T הרמיטי אם מתקיים $T^*=T$, וזה יקרה למשל אם A, B הרמיטיות. T נורמלי אם ורק אם $T^*T=TT^*$. נפתח את שני הצדדים ונקבל $A^*AX+AXB^*+A^*XB+XBB^*=AA^*X+A^*XB+AXB^*+XB^*B$ וזה יתקיים למשל אם A, B נורמליות.

3. יהי V ממ"פ. לזוג וקטורים $x, y\in V$ נגדיר אופרטור $T_{x,y}(v)=\langle v, y\rangle x$.
1. הוכח שלכל $x, y, z\in V$ מתקיים $T_{x,y}T_{y,z}=\|y\|^2 T_{x,z}$
2. חשב את $T^*_{x,y}$
3. עבור אילו $x, y\in V$ האופרטור $T_{x,y}$ הרמיטי?

פתרון: סעיף 1: $T_{x,y}T_{y,z}(v)=T_{x,y}\langle v, z\rangle y=\langle v, z\rangle\langle y, y\rangle x=\|y\|^2\langle v, z\rangle x=\|y\|^2 T_{x,z}(v)$.
סעיף 2: $T^*_{x,y}$ מקיים $\langle T_{x,y}(v), u\rangle=\langle v, T^*_{x,y}(u)\rangle$ לכל $v, u\in V$. נחשב: $\langle T_{x,y}(v), u\rangle=\langle v, y\rangle\langle x, u\rangle=\langle v, \overline{\langle x, u\rangle} y\rangle$ לכן בהכרח $T^*_{x,y}(v)=\overline{\langle x, v\rangle} y$.
סעיף 3: $T_{x,y}$ הרמיטי אם ורק אם $T^*_{x,y}=T_{x,y}$, ז"א לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v, y\rangle x=\overline{\langle x, v\rangle} y=\langle v, x\rangle y$ ולכן בהכרח x ו- y פרופורציונליים. כיוון שהשוויון צריך להתקיים לכל $v\in V$, בפרט עבור $v=y$ נקבל $x=\frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}y$. מצד שני ל - $v=x$ נקבל $\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x=y$ לכן מתקיים $\frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, y\rangle}=\frac{\|y\|^2}{\|x\|^2}$. נניח כי $rx=y$ ל - $r\in F$ אז השוויון האחרון נותן לנו $\frac{r}{\bar{r}}=|r|^2\Rightarrow r=\pm|r|^2$. לכן $r\in R$ ובפרט $r=\pm1$.

4. יהי V ממ"פ ממימד סופי, יהיו $W, U<V$ תתי מרחבים. הוכח כי $(W\cap U)^\perp=W^\perp+U^\perp$.

פתרון: עבור $v\in W^\perp+U^\perp$ נכתוב $v=w+u$. ל - $x\in W\cap U$ נקבל $\langle v, x\rangle=\langle w, x\rangle+\langle u, x\rangle=0+0$ לכן $v\in(W\cap U)^\perp$. כדי להראות הכלה הפוכה, מספיק להראות ש - $(W^\perp+U^\perp)^\perp\subseteq((W\cap U)^\perp)^\perp=(W\cap U)$. ל - $x\in(W^\perp+U^\perp)^\perp$, לכל $v\in W^\perp$ מתקיים $\langle x, v\rangle=0$ (כי $W^\perp\subseteq(W^\perp+U^\perp)$) לכן $x\in W$. באופן דומה ל - $v\in U^\perp$ נקבל $\langle x, v\rangle=0$ לכן $x\in U$ וסה"כ נקבל $x\in W\cap U$ כנדרש.