1 אינטגרלים קוויים

בפרק זה נרחיב תחילה בנושא של מסילות, ואח"כ נעבור לאינטגרלים של פונקציות ושל שדות וקטוריים עליהן. לשם פשטות הכתיבה נצטמצם ל- $n=2$. הטיפול ברוב הנושאים ל- n כללי אנלוגי לגמרי.

1.1 אורך קשת

נזכור כי מסילה היא פונקציה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ כאשר $I \subset \mathbb{R}^1$ קטע. אם $I=[a,b]$ קטע סגור, אז לנקודות $\gamma(a)$ ו- $\gamma(b)$ נקרא נקודת ההתחלה ונקודת הסיום (בהתאמה) של γ. המסילה נקראת סגורה אם $\gamma(a)=\gamma(b)$. היא נקראת פשוטה אם γ חח"ע, והיא נקראת מסילה סגורה פשוטה אם $\gamma(s)=\gamma(t)$ מתקיים עבור $s\neq t$ רק בקצוות.

כפי שאמרנו, אנו מבחינים בין המסילה, שהיא הפונקציה γ, לבין תמונתה, שנקרא לה העקום המתואר ע"י γ. אותו עקום יכול, כמובן, להיות מתואר ע"י פונקציות שונות. לצרכינו, לא נרצה לעתים להבחין בין מסילות המתקבלות זו מזו ע"י שינוי משתנה מונוטוני ממש.

<u>הגדרה.</u> **נאמר שהמסילות $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ו- $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ הן שקולות אם יש פונקציה רציפה ומונוטונית ממש φ מ- I על J כך ש- $\gamma(t)=\beta(\varphi(t))$.**

נשים לב שלמסילה יש "מגמה" (או כיוון). המסילה מתחילה ב- $t=a$, ומסתיימת ב- $t=b$. למסילות שקולות יכולה להיות אותה מגמה (כאשר φ עולה ממש), או מגמות הפוכות (כאשר φ יורדת ממש).

<u>הגדרה.</u> **תהיינה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ו- $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ שתי מסילות כך שמתקיים $\gamma(b)=\beta(c)$. הצרוף שלהן הוא המסילה $\gamma * \beta : [a,b+d-c] \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י**

$$\gamma * \beta = \begin{cases} \gamma(t) & a \le t \le b \\ \beta(t-b+c) & b \le t \le b+d-c \end{cases}.$$

באופן גיאמטרי, עוברים לאורך המסילה γ, וכשבסיומה מגיעים לנקודת ההתחלה של β -- עוברים עליה.

אם γ מסילה סגורה, אז היא מפרידה את המישור לשני חלקים, החלק "הפנימי" של תמונתה, שהוא חסום, והחלק "החיצוני" שאיננו חסום. זה מובן מאליו לעקומים שאנחנו מציירים בדר"כ ואנו נשתמש בעובדה זו באופן חפשי, אבל ההוכחה הכללית היא לגמרי לא פשוטה, והמשפט שמבטיח זאת, משפט ג'ורדן, הוא מאבני הדרך בהתפתחות הטופולוגיה. משפט זה מאפשר לנו לדבר על תחומים עם או בלי "חורים".

<u>הגדרה.</u> **תחום $D \subset \mathbb{R}^2$ נקרא פשוט קשר אם לכל מסילה סגורה ופשוטה γ ב- D (כלומר, שתמונתה מוכלת ב- D), גם הפנים של γ מוכל כולו ב- D.**

באופן אינטואיטיבי, זה אומר שאפשר "לכווץ" את התמונה של γ לנקודה מבלי לצאת מהתחום D. לדוגמא, כל קבוצה קמורה היא פשוטת קשר, ולעומת זאת אם מוציאים ממנה נקודה פנימית, היא כבר איננה פשוטת קשר: אי אפשר לכווץ ב- D מעגל קטן המקיף את הנקב. גם זו טענה מאוד אינטואיטיבית, אך הוכחתה נעשית למעשה בעזרת איטגרלים קוויים!

נפנה כעת להגדרת האורך של מסילה. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה. לכל חלוקה $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_q=b\}$ נסתכל באורך של המסילה הפוליגונלית העוברת דרך הנקודות $\gamma(t_k)$, כלומר ב- $\sum\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|$.

<u>הגדרה.</u> האורך, $l(\gamma)$, של γ הוא $\sup\sum\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\|$, כאשר הסופרמום נלקח על כל החלוקות האפשריות של הקטע. נאמר שהמסילה היא בעלת אורך אם יש לה אורך סופי.

ההוכחות של הטענות הבאות נובעות ישירות מההגדרות ולא ניתן אותן. (השלימו כתרגיל!)

<u>טענה.</u> (i) למסילות שקולות יש אותו האורך.

(ii) אם $\gamma*\beta$ מוגדר, אז $l(\gamma*\beta)=l(\gamma)+l(\beta)$.

(iii) תהי γ מסילה המוגדרת בקטע $[a,b]$, ונסמן ב- γ_t את הצמצום של γ לקטע החלקי $[a,t]$. נסמן ב- $s(t)=l(\gamma_t)$ את האורך של הצמצום הזה. אז הפונקציה s רציפה ומונוטונית עולה, והיא איננה עולה ממש רק אם יש קטע חלקי שבו γ קבועה.

ניתן כעת נוסחה מפורשת לחישוב האורך. ניזכר תחילה בנוסחה לאורך של הגרף של פונקציה גזירה $\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}dt$ (ראו בפרק על אינטגרלים). גרף של פונקציה f הוא, כמובן, מסילה: $\gamma(t)=(t,f(t))$. הביטוי $\sqrt{1+(f'(t))^2}$ הוא בדיוק $\|\gamma'(t)\|$, וזו גם הנוסחה למסילות גזירות כלליות.

<u>משפט.</u> תהי $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ מסילה גזירה ברציפות. אז האורך שלה ניתן ע"י הנוסחה $l(\gamma)=\int_I\|\gamma'(t)\|dt$.

הוכחה. נקבע חלוקה t_k ונשתמש בסימון $\Delta_k=t_k-t_{k-1}$, $\Delta x_k=x(t_k)-x(t_{k-1})$ ו- $\Delta y_k=y(t_k)-y(t_{k-1})$. עפ"י משפט לגרנז' יש נקודות c_k ו- d_k בקטע החלוקה ה-i-י כך ש- $\Delta x_k=x'(c_k)\Delta t_k$ וכך ש- $\Delta y_k=y'(d_k)\Delta t_k$. לכן

$$\begin{aligned}\sum\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k+1})\| &= \sum\left((\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2\right)^{\frac12}\\ &= \sum\left((x'(c_k))^2+(y'(d_k))^2\right)^{\frac12}\Delta t_k\end{aligned}$$

ונציג ביטוי זה כסכום של שני מחוברים. הראשון הוא

$$\sum\left((x'(c_k))^2+(y'(c_k))^2\right)^{\frac12}\Delta t_k$$

שמתכנס לאינטגרל $\int_I\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt=\int_I\|\gamma'(t)\|$ כמבוקש. המחובר השני הוא

$$\sum\left\{\left((x'(c_k))^2+(y'(d_k))^2\right)^{\frac12}-\left((x'(c_k))^2+(y'(c_k))^2\right)^{\frac12}\right\}\Delta t_k$$

ולהערכת הביטוי שבתוך הסוגריים המשולבות (ל- k קבוע) נשתמש באי השוויון האל-מנטרי $\left|a^{\frac12}-b^{\frac12}\right|\le|a-b|^{\frac12}$ (הוכיחו אותו!), ונקבל שהמחובר ה-k-י חסום ע"י $|(y')^2(d_k)-(y')^2(c_k)|^{\frac12}$.

מרציפות במ"ש של הפונקציה $(y')^2$ על I נוכל, בהנתן $\varepsilon>0$, לבחור חלוקה עדינה מספיק כך שכל מחובר כזה קטן מ- ε, ואז המחובר השני קטן מ- $\varepsilon\sum\Delta t_k=\varepsilon|I|$. $\square$

הערה. הנוסחה תקפה גם בתנאים יותר כלליים, ובפרט כאשר γ גזירה ברציפות פרט למספר סופי של נקודות.

ראינו שאם אין קטעים שעליהם γ קבועה, אז פונקצית האורך $s(t)=l(\gamma(t))$ היא רציפה ומונוטונית ממש, ולכן יכולה לשמש בהצגה פרמטרית שקולה. אם חושבים על המסילה כמתארת מיקום של חלקיק בזמן t, אז כשההצגה היא בעזרת פרמטר האורך זה אומר שמהירות התנועה היא 1: בפרק זמן t החלקיק עובר מרחק t.

הנגזרת $\gamma'(t)$ של מסילה γ בזמן t היא וקטור בכיוון המשיק לעקום בנקודה. הוא מתאר את המהירות של החלקיק הנע במסילה בזמן t. אם הפרמטריזציה היא עפ"י האורך, אז $\|\gamma'(t)\|\equiv 1$. זה ברור משיקולים פיסיקליים, ונובע מתמטית מכך שבמקרה זה הפרמטר נע בקטע $[0,L]$, ומתקיים ש- $s(t)=\int_0^t\|\gamma'(\tau)\|d\tau=t$, וכשניגזור את המשוואה נקבל $s'(t)=\|\gamma'(t)\|=1$.

1.2 אינטגרל קווי

הנושא העיקרי שבו נטפל יהיה אינטגרלים קוויים של שדות ווקטוריים, אך נתחיל מהמקרה הפשוט של אינטגרל קווי של פונקציה סקלרית.

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה, ותהי f פונקציה ממשית המוגדרת על תמונת המסילה. (בדר"כ f מוגדרת באיזשהו תחום D, ו- γ היא מסילה ב- D). מהו "שטח הוילון" התלוי על הגרף של f מעל γ? אנחנו כבר יודעים איך לגשת לבעיה מסוג זה: נחלק את הקטע $[a,b]$ בחלוקה עדינה ונבחר נקודה t_i בקטע החלוקה ה- i-י. נסמן ב- l_i את אורך קטע המסילה ה- i-י, ונקרב את השטח ע"י $\sum f(\gamma(t_i))l_i$. וכעת נעבור לגבול כאשר הפרמטר של החלוקה שואף לאפס.

אם נניח גם ש- γ מסילה גזירה ברציפות, אז האורך של קטע המסילה ה- i-י הוא בקירוב $\|\gamma'(t_i)\|l_i$, ולכן השטח הכולל הוא בקירוב $\sum f(\gamma(t_i))\|\gamma'(t_i)\|l_i$, ובגבול נקבל את הנוסחה לשטח שהיא $\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$. לאינטגרל הזה נקרא האינטגרל הקווי של f על המסילה γ, ונסמנו $\int_\gamma f$. ברור מהבניה שהאינטגרל הזה איננו תלוי בפרמטריזציה של המסילה (ונוכיח זאת מייד גם ע"י כלל השרשרת).

כמקרה פרטי מקבלים שהאורך של מסילה מתקבל, כמובן, כאינטגרל של הפונ-קציה שהיא זהותית 1.

<u>דוגמא.</u>

נחשב את האינטגרל של $f(x,y)=1+\frac{x}{3}$ על המסילה $\gamma(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t)$ כאשר $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. (לצייר את המסילה ואת ה"וילון"!).

כאן $\gamma'(t)=3(-\cos^2 t\,\sin t,\sin^2 t\,\cos t)$, ולכן

$$\|\gamma'(t)\|^2=9(\cos^4 t\,\sin^2 t+\sin^4 t\,\cos^2 t)=9\sin^2 t\,\cos^2 t$$

כלומר $\|\gamma'(t)\|=3\sin t\,\cos t$, והאינטגרל הוא

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{\cos^3 t}{3})3\sin t\,\cos t dt\ .$$

<u>טענה.</u> אם $\gamma(t)=\delta(\varphi(t))$ הן פרמטריזציות שונות של המסילה ו- $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ גזירה ברציפות (וכמובן על ומונוטונית ממש) אז $\int_\gamma f=\int_\delta f$.

הוכחה. נניח בה"כ ש- φ עולה. עפ"י כלל השרשת $\gamma'(t) = \delta'(\varphi(t))\varphi'(t)$, וההצבה $s = \varphi(t)$ תתן לכן

$$\begin{aligned}\int_\delta f &= \int_a^b f(\delta(s))\|\delta'(s)\|ds = \int_\alpha^\beta f(\delta(\varphi(t)))\|\delta'(\varphi(t))\|\varphi'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_\gamma f\end{aligned}$$

□

בפרט יהיה נוח להשתמש בפרמטר האורך, ואם $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ נתונה ע"י פרמטר האורך הנוסחה המתקבלת היא

$$. \int_\gamma f = \int_0^L f(\gamma(s))ds$$

<u>הערות.</u> (i) הנוסחה לאינטגרל והטענה נכונות גם בתנאים כלליים יותר, למשל, אם המסילות רק גזירות פרט למספר סופי של נקודות.

(ii) נוח לעתים להשתמש במשפט הקירוב הבא, שאותו לא נוכיח. אם D תחום פתוח, ואם f רציפה בו, אז לכל מסילה γ בתחום יש סדרת מסילה גזירות מכל סדר γ_n, כך ש- $\gamma_n \to \gamma$ במ"ש וכך ש- $\int_{\gamma_n} f \to \int_\gamma f$.

(iii) כאשר רוצים להדגיש בסימון שהאינטגרציה היא על מסילה סגורה γ, מסמנים אותו ע"י $\oint_\gamma f$.

נעבור כעת לאינטרלים קוויים של <u>שדות וקטוריים</u>, כלומר של פונקציות של n משתנים שערכיהם הם ווקטורים n ממדיים. אנחנו נטפל בשדות דו ממדיים, וכל שדה כזה ניתן לכתיבה בצורה $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ והוא נקרא רציף, או גזיר, אם שתי הפונקציות f_1 ו- f_2 הן כאלה.

שדות וקטוריים מופיעים הרבה "בטבע", למשל זרימה מתוארת ע"י שדה כזה, כאשר $F(x, y)$ הוא מהירות הנוזל בנקודה (x, y). (המהירות היא וקטור, ואנו מתי-יחסים הן לכיוונו והן לגדלו). באופן דומה נוכל לדבר על שדה כוח, או על שדה חשמלי.

נניח שחלקיק עם מסת יחידה נע במסילה γ בשדה כוח F. מהי העבודה הנעשית? נתחיל במקרה הפשוט שבו γ היא קטע, והשדה F הוא קבוע. אם הכוח הוא בכיוון הקטע, אז העבודה (שהיא סקלר) היא המכפלה של גודל הכוח באורך הקטע. אם הכוח הוא בכיוון אחר, אז נפרק אותו כסכום $F = G + H$ של ווקטור G מקביל לקטע ווקטור H הניצב לו, והעבודה נעשית רק מרכיב הכוח G ול- H אין כל תרומה.

נזכור שאם V_1 ו- V_2 וקטורי יחידה ניצבים, אז ההצגה של W בעזרתם ניתנת ע"י הנוסחה

$$W = \langle V_1, W\rangle V_1 + \langle V_2, W\rangle V_2$$

ואותנו יעניין רק הרכיב בכיוון המסילה, כי בכל נקודה על המסילה לרכיב בכיוון הניצב למסילה אין תרומה לעבודה.

למסילה חלקה כללית γ כיוון המסילה בנקודה t הוא כיוון המשיק $\gamma'(t)$, ואורכה האינפיניטיסימלי שם הוא $\|\gamma'(t)\|dt$. לכן אם F שדה ווקטורי כללי, העבודה שנעשית במעבר על פני קטע המסילה האיפיניטיסימלי יהיה

$$\langle F, \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\rangle \times \|\gamma'(t)\|dt = \langle F, \gamma'(t)\rangle dt$$

והעבודה הכוללת היא $\int_a^b \langle F, \gamma'(t)\rangle dt$. וזו תהיה ההגדרה הכללית לאינטגרל הקווי של שדה ווקטורי.

<u>הגדרה.</u> יהי D תחום ותהי γ מסילה חלקה (פרט למספר סופי של נקודות) בתחום. יהי F שדה וקטורי רציף בתחום D. אז האינטגרל הקווי של F על המסילה מוגדר להיות $\int_a^b \langle F, \gamma'(t)\rangle dt$. לעתים קרובות נשתמש בסימון $\int_\gamma F$.

כתיבה מפורשת של המכפלה הפנימית מציגה את האינטגרל כסכום של שני אינטגרלים סקלריים: אם $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ כאשר $t \in [a,b]$ ואם $F = (f_1, f_2)$, אז

$$\int_\gamma F = \int_a^b f_1(\gamma(t))x'(t)dt + \int_a^b f_2(\gamma(t))y'(t)dt \ .$$

בפרט, עפ"י כלל השרשרת, האינטגרל איננו תלוי בפרמטריזציה של γ בתנאי שהמגמה נשמרת (ורק הסימן משתנה כאשר המגמה מתהפכת). אם נסמן $x'(t)dt = dx$ ו- $y'(t)dt = dy$, נכתוב את האינטגרל גם בצורה $\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$.

ברור כי $\int_\gamma * \beta F = \int_\gamma F + \int_\beta F$.

<u>דוגמאות.</u>

(i) נסתכל במסילה $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \le t \le 2\pi$, ובשדה $F(x,y) = (x,y)$. באפן גיאומטרי השדה ניצב למסילה בכל נקודה, ולכן צריך להתקבל כי $\int_\gamma F = 0$. ובאמת

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} (\cos t\,(-\sin t) + \sin t\, \cos t)dt = 0 \ .$$

(ii) עם אותה מסילה נבחר כעת $F(x,y) = (-y, x)$. כעת השדה באותו כיוון כמו המסילה ויש לצפות כי $\int_\gamma F \neq 0$, ובאמת

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi \ .$$

התוצאה גם ברורה באופן גיאומטרי: בנקודות על המסילה ערך הפונקציה וערך המשיק למסילה הם אותו ווקטור - וזהו ווקטור יחידה, ולכן $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1$ לכל t.

(iii) האינטגרל באמת אינו תלוי בפרמטריזציה של המסילה. חשבו את האינטגרל של F מדוגמא (ii) על $\gamma(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ עבור $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$.

הגדרה. שדה וקטורי F המוגדר בתחום D נקרא שדה משמר אם $\oint_\gamma F = 0$ לכל מסילה סגורה ב- D.

למשל בשדה הכובד של כדור הארץ, העבודה הנעשית כשהולכים לאורך מסלול סגור כלשהו בחיפה, היא אפס.
אנחנו נרצה לאפיין שדות משמרים, ונתחיל בלמה פשוטה שהיא, למעשה, רק ניסוח אחר לכך ששדה הוא משמר.

למה. יהי F שדה וקטורי המוגדר בתחום D. אז F שדה משמר ב- D אםם האינטגרלים הקוויים $\int_\gamma F$ אינם תלויים בבחירת המסילה γ אלא רק בנקודות הקצה שלה.

הוכחה. נניח שהשדה משמר וכי γ_1 ו- γ_2 שתי מסילות עם אותן נקודות קצה. נסמן ב- $-\gamma_2$ את המסילה γ_2 כשהולכים בה בכיוון ההפוך, ואז הצירוף $\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_2)$ הוא מסילה סגורה, ולכן

$$0 = \oint_\gamma F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F \ .$$

להפך, אם האינטגרלים $\int_\gamma F$ אינם תלויים בבחירת המסילה ואם $\gamma : [a,b] \to D$ מסילה סגורה, נבחר נקודה $a < c < b$ ונציג $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ כאשר γ_1 ו- γ_2 הן הצמצומים של γ לקטעים החלקיים. ואז γ_1 ו- $-\gamma_2$ מתחילות ונגמרות באותן נקודות, ולכן $\int_{\gamma_1} F = -\int_{\gamma_2} F$ ו- $\oint_\gamma F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F = 0$. □

הגדרה. יהי F שדה וקטורי המוגדר בתחום D. נאמר שפונקציה ממשית f היא פוטנציאל לשדה F אם $f = \nabla F$.

לדוגמא, הפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ היא פוטנציאל לשדה $F(x,y) = \frac{-(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
מתי יש ל- F פונקצית פוטנציאל? המשפט הפשוט הבא נותן תנאים הכרחיים.

משפט. יהי $F = (f_1, f_2)$ שדה רציף בתחום D, ותהי f פונקצית פוטנציאל ל- F.

(i) אם יש ל- f_i-ים נגזרות חלקיות רציפות אז $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

(ii) לכל מסילה $\gamma : [a,b] \to D$ מתקיים כי $\int_\gamma F = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))$. בפרט האינטגרל הקווי $\int_\gamma F$ אינו תלוי במסילה אלא רק בנקודות הקצה שלה והשדה משמר.

הוכחה. (i) עפ"י המשפט על נגזרות מעורבות $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

(ii) עפ"י כלל השרשרת

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \ .$$

□

דוגמא.

נחשב את $\int_\gamma ydx+xdy$ כאשר $\gamma(t)=(\frac{t^4}{4},\sin^3\frac{t\pi}{2})$ עבור $0\le t\le 1$. עפ"י ההגדרה מקבלים

$$\int_0^1 \big(t^3\sin^3\frac{t\pi}{2}+\frac{t^4}{4}3\sin^2\frac{t\pi}{2}\,\cos\frac{t\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}\big)dt\ .$$

זה אולי לא נורא, אבל בטח לא נעים. למזלנו יש לשדה הנתון $F(x,y)=(y,x)$ פוטנציאל: $f(x,y)=xy$. ולכן $\int_\gamma ydx+xdy=f(\frac{1}{4},1)-f(0,0)=\frac{1}{4}$.

משפט. יהי $F=(f_1,f_2)$ שדה רציף בתחום קשיר מסילתית D. אז השדה F משמר ב- D אםם יש ל- F פוטנציאל ב- D.

הוכחה. כיוון אחד כבר ראינו. נניח כעת שהשדה משמר ונקבע נקודה P. לכל נקודה $Q=(x,y)$ נבחר מסילה γ המתחילה ב- P ומסתיימת ב- Q, ונגדיר $f(Q)=\int_\gamma F$. זו הגדרה טובה, כי האינטגרל ב"ת בבחירת המסילה. נראה כי $f_1=\frac{\partial f}{\partial x}$.

נסתכל בנקודה $Q_1=(x+\Delta x,y)$ ובמסילה $\delta(t)=(x+t\Delta x,y)$ כאשר $0\le t\le 1$. תמונת המסילה δ היא הקטע הישר בין Q ל- Q_1, והצירוף $\gamma*\delta$ הוא מסילה בין P ל- Q_1, ולכן

$$\begin{aligned}
f(Q_1)-f(Q) &= \int_{\gamma*\delta}F-\int_\gamma F=\int_\delta F=\int_0^1\langle F(\delta(t)),\delta'(t)\rangle dt\\
&= \int_0^1\Big(f_1(x+t\Delta x,y)\cdot\Delta x+f_2(x+t\Delta x,y)\cdot 0\Big)dt\\
&= \Delta x\int_0^1 f_1(x+t\Delta x,y)dt
\end{aligned}$$

נחלק ב- Δx ונשאיף אותו לאפס, ונקבל (מרציפות f_1) כי

$$\frac{f(Q_1)-f(Q)}{\Delta x}=\int_0^1 f_1(x+t\Delta x,y)dt\to\int_0^1 f_1(x,y)dt=f_1(x,y)$$

מכיון ש- $f_1(x,y)$ לא תלוי כלל ב- t. $\square$

אם יש לשדה F פוטנציאל, אז ההוכחה נותנת למעשה דרך לחישובו: ערכו ב- Q מתקבל ע"י אינטגרציה של השדה לאורך איזשהי מסילה מהנקודה הקבועה P אל Q. באופן מעשי עושים זאת אחרת. נתאר זאת ע"י דוגמא, וכדי להדגים יותר טוב את השיטה, נמצא פוטנציאל לשדה תלת ממדי.

דוגמא.

נמצא פוטנציאל לשדה $F=(y\cos xy-z\sin xz,x\cos xy,-x\sin xz)$. ונשים לב תחילה שהתנאים ההכרחיים $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ אכן מתקיימים.

הפוטנציאל f צריך לקיים כי $\frac{\partial f}{\partial z}=-x\sin xz$, ולכן לכל x,y קבועים יש קבוע $c(x,y)$ כך ש- $f(x,y,z)=\cos xz+c(x,y)$.

באופן דומה $x\cos xy = \frac{\partial f}{\partial y} = c'_y(x,y)$, ולכן יש קבוע התלוי ב- x כך שמתקיים $c(x,y) = \sin xy + c(x)$, כלומר, $f(x,y,z) = \cos xz + \sin xy + c(x)$. "למזלנו" זה פתרון לשאלה ואפשר לקחת $c(x)$ כקבוע.

ההצלחה בדוגמא לא היתה מובטחת, כי התנאי על הנגזרות איננו מספיק. ואילו לא היה לשדה פוטנציאל, לא היינו יכולים למצוא פונקציה $c(x)$ כך שהנגזרת של $f(x,y,z) = \cos xz + \sin xy + c(x)$ עפ"י x היתה f_1. נסתכל בשתי דוגמאות:

<u>דוגמאות.</u>

(i) עפ"י חוקי ניוטון כח הכובד של כדור הארץ פרפורציונלי הפוך למרחק ממרכזו, כלומר הוא ניתן, עד כדי קבוע, ע"י השדה $F(x,y,z) = \frac{-(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. לשדה זה יש פוטנציאל $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ולכן השדה משמר בתחום בו הוא מוגדר, כלומר במרחב המנוקב בראשית.

(ii) לעומת זאת, השדה $F(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ מוגדר במישור המנוקב בראשית, ומקיים שם $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ (בדקו!) אך איננו משמר בתחום זה, כי נבחר $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \le t \le 2\pi$, ואז $\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$.

אבל השדה כן משמר בתחומים חלקיים מתאימים. למשל, בחצי המישור הימני $\{x > 0\}$ פונקצית פוטנציאל ניתנת ע"י $\arctan\frac{y}{x}$.

למעשה השדה בדוגמא (ii) משמר בכל תחום שאיננו מכיל את הראשית. כשהתחום D הוא פשוט קשר, התנאי על הנגזרות הוא גם תנאי מספיק לכך שהשדה ישמר, ולכן בתחום כזה קיים פוטנציאל ויש לנו שיטה "מובטחת" לחישובו.

<u>משפט.</u> יהי D תחום פשוט קשר ויהי $F = (f_1, f_2)$ שדה רציף ב- D כך שיש ל- F נגזרות חלקיות. אז השדה F משמר אםם $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$.

המשפט נובע מיידית ממשפט גרין שלו מוקדש הסעיף הבא.

נאמר שהשדה F משמר מקומית בתחום D אם לכל נקודה P ב- D יש סביבה המוכלת ב- D שבה F משמר. מהמשפט נובע שהתנאי $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$ הוא הכרחי ומספיק לכך שהשדה משמר מקומית, כי לכל P נוכל לקחת כסביבה המתאימה עיגול קטן שמרכזו ב- P והמוכל כולו ב- D. עיגול כזה הוא פשוט קשר, ולכן השדה משמר בו.

1.3 משפט גרין

<u>משפט.</u>[משפט גרין] תהי γ מסילה גזירה סגורה ופשוטה המכוונת בכיוון המתמטי החיובי, ויהי D הפנים של העקום המוגדר ע"י γ. יהי $F = (f_1, f_2)$ שדה רציף בסביבה של D ושפתו כך שיש ל- f_1, f_2 נגזרות חלקיות רציפות. אז

$$\oint_\gamma F = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy \ .$$

הוכחה. לא נוכיח את המשפט למסילות כלליות, אך מה שנוכיח מספיק לשימושים במתמטיקה ובפיסיקה.

נטפל תחילה בתחום D נורמלי ביחס לשני הצירים. היות ו- D נורמלי ביחס לציר ה- x-ים יש פונקציות $\psi < \varphi$ המגדירות אותו בקטע $[a,b]$, ואפשר להציג את γ כצרוף של ארבע מסילות. עבור $1 \leq j \leq 4$ נסמן

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} (t, \varphi(t)) & a \leq t \leq b \\ (b, (1-t)\varphi(b) + t\psi(b)) & 0 \leq t \leq 1 \\ (t, \psi(t)) & a \leq t \leq b \\ (a, (1-t)\varphi(a) + t\psi(a)) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ואז $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * (-\gamma_3) * (-\gamma_4)$. נחשב "חצי" מהנוסחה במשפט גרין. נשים לב כי $dx = 0$ על γ_2 ועל γ_4 וכי $dx = dt$ על γ_1 ועל γ_3. לכן

$$\begin{aligned} \int_\gamma f_1 dx &= \int_{\gamma_1} f_1 dx - \int_{\gamma_3} f_1 dx = \int_a^b \Big(f_1(t, (\varphi(t)) - f_1(t, (\psi(t)) \Big) dt \\ &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(t,s) ds \right) dt = -\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{aligned}$$

באופן דומה, מהנורמליות ביחס לציר ה- y-ים נקבל כי $\int_\gamma f_2 dy = \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}$, והנוסחה במשפט מקבלת כסכום של שתי הנוסחאות האלה.

ההכללה לתחומים כלליים יותר תהיה פורמלית לגמרי. נניח כי D הוא איחוד של מספר תחומים נורמליים הנחתכים רק בשפתם. למשל $D = D_1 \cup D_2$, כאשר ה- D_i-ים הם שני עיגולים קטומים המחוברים לאורך הקטימה. משפט גרין ידוע לנו על כל אחד מהתחומים בנפרד, ונסכם את הנוסחאות. באגף אחד נקבל את הביטוי $\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$, ובשני נקבל את $\int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F$. אך נשים לב כי קטעי המסילות המשותפים ל γ_1 ו- γ_2 הם <u>בכיוונים מנוגדים</u> ולכן מתבטלים, ולכן הסכום הוא בדיוק $\int_\gamma F$.

באופן דומה נוכל לטפל בתחום עם "חורים" (וכיווני המסילות בחורים נקבעים תמיד כך שהתחום נמצא משמאל למסילה), למשל כאשר D טבעת, ואז שפתה מורכבת משתי מסילות. במקרה זה נוסיף קטע המקשר בינהן, וקטע זה, ביחד עם שני המעגלים שהם שפת הטבעת, יגדירו מסילה המקיפה את D כשיש בו "חריץ". הקטע הנוסף נספר פעמיים - ועם כיוונים מנוגדים, ולכן האינטגרלים לאורכו מצמצמים זה את זה, ומתקבלת הנוסחה. $\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) יהי D המשולש שקודקודיו הם $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 1)$ ותהי שפתו γ. אז

$$. \int_\gamma (y - \sin x)dx + \cos x dy = \iint_D (-\sin x - 1) dxdy = \dots$$

(ii) נזכור את השדה $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$. הוא משמר באופן מקומי (למשל, הפוטנציאל בחצי המישור הימני הוא $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$). אבל השדה אינו משמר, כי ראינו שאם γ היא מעגל היחידה (כשעוברים עליו פעם אחת בכיוון המתמטי החיובי), אז $\int_\gamma F = 2\pi$. זו גם התוצאה לכל מסילה אחרת γ המקיפה את הראשית פעם אחת, כי השדה משמר בתחום המוגבל ע"י γ וע"י מעגל קטן סביב הראשית.

אם עוברים על המעגל (או על המסילה האחרת) k פעמים האינטגרל הוא $2k\pi$. זה מאפשר לנו לתת נוסחה המחשבת את ה"אינדכס" של מסילה γ במישור, כלומר את מספר הפעמים שהיא מקיפה את הראשית:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2} \; .$$

משפט גרין נותן נוסחה חשובה לחישוב השטח של תחום

<u>משפט.</u> **יהי D תחום שבו תקף משפט גרין, ותהי γ שפתו. אז השטח של D ניתן ע"י כל אחד מהאינטגרלים הבאים**

$$|D| = \int_\gamma xdy = -\int_\gamma ydx = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy \; .$$

הוכחה. משתמשים במשפט גרין עם השדות $F(x,y) = (0,x)$, או $(-y,0)$ או $\frac{1}{2}(-y,x)$ בהתאמה, ושלושתם מקיימים ש- $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv 1$ בתחום D. $\square$

לנוסחה הזו יש חשיבות מעשית רבה במדידות. היא מאפשרת לדעת את השטח של D רק עפ"י שפתו!

<u>דוגמאות.</u>

(i) נחשב את שטח עיגול היחידה. כאן $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \le t \le 2\pi$, ולכן השטח הוא

$$\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \pi \; .$$

(ii) נחשב את השטח המוגבל ע"י $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ ברביע החיובי. השפה מורכבת מהמסילה $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ עבור $0 \le t \le \pi/2$, ומהקטעים γ_1 ו- γ_2 המקשרים את הראשית עם $(1,0)$ ו- $(0,1)$ בהתאמה. אבל $y = dy = 0$ על γ_1, ו- $x = dx = 0$ על γ_2, ולכן השטח הוא

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(3\sin^4 t\, \cos^2 t + 3\cos^4 t\, \sin^2 t)dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\, \sin^2 t dt = \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \dots\end{aligned}$$