משפט קיום ויחידות למד"ר לא לינאריות (גרסא לוקלית): תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת במלבן R שהוא $|x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$. נניח כי f רציפה במלבן וכי היא ליפשיצית לפי y במלבן, כלומר קיים $L>0$ עבורו

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$$

כאשר $|x-x_0| \le a, \quad |y_1-y_0| \le b, \ |y_2-y_0| \le b$.
נגדיר $M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$ ואז נגדיר $h=\min(a,\frac{b}{M})$.
אז בקטע $[x_0-h,x_0+h]$ קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר $y'=f(x,y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

הערה: גרסא זו נקראת לוקלית כי תחום ההגדרה של הפתרון הוא מקומי, כלומר יש סביבה של x_0 בה מוגדר הפתרון.

משפט קיום ויחידות למד"ר לא לינאריות (גרסא גלובלית): תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת ברצועה אינסופית R שהיא $a \le x \le b, \ -\infty < y < \infty$. נניח כי f רציפה ברצועה וכי היא ליפשיצית לפי y ברצועה, כלומר קיים $L>0$ עבורו

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$$

כאשר $a \le x \le b, \ -\infty < y_1,y_2 < \infty$.
אז בקטע $[a,b]$ קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר $y'=f(x,y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

הערה: 1. גרסא זו נקראת גלובלית כי תחום ההגדרה של הפתרון הוא המקסימום לו היינו יכולים לצפות, כלומר תחום ההגדרה הוא $[a,b]$.
2. יש מצב בו אפשר לקבל גרסא גלובלית מהגרסא הלוקלית: נזכר כי $M_{a,b}=\max_{|x-x_0|\le a, \ |y-y_0|\le b}|f(x,y)|$ וכי $h=\min(a,\frac{b}{M_{a,b}})$. אם מתקיים כי $\lim_{b\to\infty}\frac{b}{M_{a,b}}>a$ וגם שלכל $b>0$ הפונקציה $f(x,y)$ ליפשיצית במלבן $|x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$, אז קיים פתרון יחיד המוגדר ב־$[x_0-a,x_0+a]$ (כי ניקח $b>0$ מספיק גדול עבורו $\frac{b}{M_{a,b}}>a$ ואז $h=a$ בגרסא הלוקלית).

משפט קיום למד"ר לא לינאריות (פיאנו): תהי $f(x,y)$ פונקציה רציפה במלבן R שהוא $|x-x_0| \le a, \quad |y-y_0| \le b$.
נגדיר $M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$ ואז נגדיר $h=\min(a,\frac{b}{M})$.
אזי בקטע $[x_0-h,x_0+h]$ יש פתרון למד"ר $y'=f(x,y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$.

הערה: בגרסא של פיאנו מובטח רק קיום. אין הבטחה של יחידות.

תרגיל: הוכיחו כי כל פתרון של

$$y' = x + x^2 \sin y$$

מוגדר על כל הישר.
פתרון: יהי $y(x)$ פתרון המוגדר בקטע מקסימלי I. יהי $x_0 \in I$. נסמן $y(x_0) = y_0$.
נסתכל כעת על בעיית תנאי ההתחלה

$$y' = x + x^2 \sin y \qquad y(x_0) = y_0.$$

נסתכל על $f(x,y) = x + x^2 \sin y$. אז

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2) = |x + x^2 \sin y_1 - (x + x^2 \sin y_2)| = x^2 |\sin y_1 - \sin y_2| \le x^2 |y_1 - y_2|$$

ולכן על כל קטע מהצורה $[x_0 - n, x_0 + n]$ יש לנו ליפשיציות לפי y כי

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2) \le x^2 |y_1 - y_2| \le (n + |x_0|)^2 |y_1 - y_2|.$$

שימו לב כי n שרירותי אבל קבוע. לכן לכל n טבעי יש לנו ליפשיציות על הרצועה $[x_0 - n, x_0 + n] \times (-\infty, \infty)$. לכן, לפי המשפט על ליפשיציות על רצועות אינסופיות, נקבל שיש פתרון יחיד $\tilde{y}_n(x)$ הפותר את המד"ר ביחד עם תנאי ההתחלה בקטע $[x_0 - n, x_0 + n]$. מיחידות נובע כי על הקטע $[x_0 - n, x_0 + n]$ מתקיים כי $\tilde{y}_{n+k}(x) = \tilde{y}_n(x)$ לכל k טבעי. נגדיר $\tilde{y}(x)$ להיות $\tilde{y}_n(x)$ עבור n מספיק גדול. אז $\tilde{y}$ הוא פתרון המוגדר על כל הישר. שוב מיחידות, נובע כי $y(x) = \tilde{y}(x)$ על I אבל ממקסימליות של I נובע כי I חייב להיות כל הישר.

הערה: שימו לב כי מה שהוכחנו בתרגיל הוא בעצם מקרה פרטי של הדבר הבא: תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת את התנאי הבא: לכל $a < b$, ברצועה אינסופית R שהיא $a \le x \le b, \ -\infty < y < \infty$, f רציפה וליפשיצית לפי y ברצועה, כלומר קיים $L_{a,b} > 0$ עבורו

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L_{a,b} |y_1 - y_2|$$

כאשר $a \le x \le b, \ -\infty < y_1, y_2 < \infty$.
אז על כל הישר קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר $y' = f(x,y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.
ההוכחה דומה.

תרגיל: הוכיחו כי כל פתרון של

$$y' = \tan(x) \cdot \sin(xy)$$

המוגדר ב־0, מוגדר על $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
פתרון: יהי $y(x)$ פתרון המוגדר בקטע מקסימלי I המכיל את 0. נסמן $y(0) = y_0$.
נסתכל כעת על בעיית תנאי ההתחלה

$$y' = \tan(x) \cdot \sin(xy) \qquad y(0) = y_0.$$

נסתכל על $f(x,y) = \tan(x) \cdot \sin(xy)$. אז

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2) &= |\tan(x)\sin(xy_1) - \tan(x)\sin(xy_2)| = \\ = \quad & |\tan x||\sin(xy_1) - \sin(xy_2)| \le |\tan x||xy_1 - xy_2| = |x||\tan x||y_1 - y_2| \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באי השוויון $|\sin t - \sin s| \le |t - s|$. ולכן, כיוון שעל כל קטע מהצורה $[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}]$ הפונקציה $x \tan x$ חסומה, יש לנו ליפשיציות לפי y כי

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2) \le |x||\tan x||y_1 - y_2| \le \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)|y_1 - y_2|.$$

מפה ההמשך כמו בתרגיל הקודם. נגדיר את $\tilde{y}_n(x)$ להיות הפתרון היחיד המוגדר על $[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}]$. נגדיר $\tilde{y}(x)$ באופן דומה רק שעכשיו נקבל פתרון המוגדר על $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. מיחידות הוא שווה ל־$y(x)$.

הערה: שימו לב כי, כמו בתרגיל הקודם, מה שהוכחנו בתרגיל הוא בעצם מקרה פרטי של הדבר הבא: תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת את התנאי הבא: קיימים $\alpha < \beta$ כך לכל $\alpha < a < b < \beta$, ברצועה אינסופית R שהיא
$a \le x \le b, \ -\infty < y < \infty$, f רציפה וליפשיצית לפי y ברצועה, כלומר קיים $L_{a,b} > 0$ עבורו

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L_{a,b}|y_1 - y_2|$$

כאשר $a \le x \le b, \ -\infty < y_1, y_2 < \infty$.
אז על (α, β) קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר $y' = f(x,y)$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.
ההוכחה דומה.

תרגיל: הראו הפתרון לבעיית תנאי ההתחלה

$$y' = \frac{x+3y}{2x+6y-5} \quad y(0)=1$$

יש פתרון יחיד שמוגדר לכל $0 \le x$.

פתרון: נשים לב כי $y'(0)=3$. עבור $y=1$

$$f(x,y) = \frac{x+3y}{2x+6y-5} = \frac{x+3}{2x+1} > 0$$

כלומר, באפס הפונקציה עולה מ־$y=1$ והיא אף פעם לא יורדת מ־$y=1$ כי כאשר $y=1$ אז השיפוע $y' = \frac{x+3y}{2x+6y-5} = \frac{x+3}{2x+1} > 0$ מה שזורק את הפתרון חזרה מעל $y=1$. לכן הפתרון מקיים $y(x) \ge 1$ לכל $0 \le x$ הנמצא בתחום ההגדרה של $y(x)$.

בנוסף

$$f'_y(x,y) = \frac{3(2x+6y-5) - 6(x+3y)}{(2x+6y-5)^2} = \frac{-15}{(2x+6y-5)^2}$$

ועבור $0 \le x,\ 1 \le y$ מתקיים

$$|f'_y(x,y)| = \frac{15}{(2x+6y-5)^2} \le 15.$$

לכן f ליפשיצית לפי y בתחום $0 \le x,\ 1 \le y$.

נקבע $a > 0$. יהי $b > 1$. נסתכל על המלבן $0 \le x \le a,\ 1 \le y \le b$. אזי f ליפשיצית שם לפי y. בנוסף

$$M_{a,b} = \max_{0\le x\le a,\ 1\le y\le b} |f(x,y)| = \max_{0\le x\le a,\ 1\le y\le b} \left|\frac{x+3y}{2x+6y-5}\right| =$$
$$= \max_{0\le x\le a,\ 1\le y\le b} \left|\frac{x+3y}{2(x+3y)-5}\right| \le \max_{3\le u\le a+3b} \frac{u}{2u-5} = 3$$

ולכן עבור $h = \min\left(a, \frac{b-1}{M_{a,b}}\right) \ge \min\left(a, \frac{b-1}{3}\right)$ נקבל פתרון המוגדר על $[0,h]$. אבל עבור b מספיק גדול, למשל $b = 3a+1$, נקבל כי $h = a$. כעת נזכר כי a היה שרירותי ולכן הפתרון מוגדר על $[0,a]$ לכל $a > 0$ ולכן אפשר להגדיר אותו על $[0,\infty)$.

תרגיל: הראו כי למד"ר הבאה אין פתרון יחיד

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad y(0) = 0$$

והראו כי הפונקציה $\sqrt{|y|}$ אינה ליפשיצית בכל מלבן המכיל את $y = 0$. הראו זאת ישירות ולא כמסקנה ממשפט הקיום והיחידות.
לבסוף, הראו כי לבעיית תנאי ההתחלה $y(2) = 1$ אין פתרון יחיד המוגדר על כל הישר למרות שתנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים עבור תנאי ההתחלה.
פתרון: המד"ר היא מד"ר פרידה ולכן לפי שיטת הפתרון, $y \equiv 0$ הוא פתרון סינגולרי ויוצא שהוא מקיים את תנאי ההתחלה באופן טריביאלי. נחפש פתרון נוסף.

$$y > 0: \ \int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}$$
$$y < 0: \ \int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \int \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -2\sqrt{-y}$$

ולכן נקבל פתרון בצורה סתומה

$$y > 0: \ 2\sqrt{y} = x + c \to y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \qquad x > -c$$
$$y < 0: \ -2\sqrt{-y} = x + c \to y = -\left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \qquad x < -c$$

עבור תנאי ההתחלה נקבל $c = 0$, כלומר

$$y > 0: \ y = \frac{x^2}{4}$$
$$y < 0: \ y = -\frac{x^2}{4}$$

הפונקציות נחתכות באפס ולכן אפשר להדביק אותן

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & x < 0 \end{cases}$$

תרגיל: וודאו כי זהו פתרון.
קיבלנו שני פתרונות שונים. לכן אין סביבה של $(0,0)$ שבה $\sqrt{|y|}$ ליפשיצית. אכן,

$$\left|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}\right| = \frac{\left||y_1| - |y_2|\right|}{\sqrt{|y_1|} + \sqrt{|y_2|}}$$

ואם נקח $y_1, y_2 > 0$ נקבל

$$\left|\sqrt{|y_1|}-\sqrt{|y_2|}\right| = \frac{|y_1-y_2|}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}} = \frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}|y_1-y_2|$$

וכאשר y_1, y_2 קרובים לאפס אני רואים כי הביטוי $\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}$ גדול שרירותית.

הערה: שימו לב כי משפט פיאנו מבטיח קיום פתרון כיוון שהפונקציה $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ רציפה בכל המישור. אבל יחידות, במקרה זה, אין.
תרגיל בית: הראו כי יש אינסוף פתרונות.

כעת נסתכל על בעיית תנאי ההתחלה $y(2)=1$. נשתמש בפתרונות שמצאנו ונקבל כי פתרון המוגדר על האי שליליים הוא $y=\frac{x^2}{4}$. כעת אנו יכולים להדביק אותו עם $y\equiv 0$ על השליליים, או עם $-\frac{x^2}{4}$ על השליליים, ונקבל כי יש יותר מפתרון אחד המוגדר על כל הישר.
זו אינה בעיה כיוון שמשפט קיום ויחידות מבטיח יחידות לוקלית ולא גלובלית. שני פתרונות שונים אינם יכולים להיחתך בנקודה בה מתקיימים תנאי משפט קיום ויחידות, אבל הם יכולים להיחתך בנקודה בה תנאי המשפט אינם מתקיימים. כמו שקורה במקרה הזה.
תרגיל בית: הראו כי יש אינסוף פתרונות המוגדרים על כל הישר ומקיימים את תנאי ההתחלה $y(2)=1$.

<u>**תרגיל:**</u> נתונה המד"ר $y(0)=0 \quad y'=+\sqrt{1-y^2}$. מצאו פתרון המוגדר על כל הישר. האם פתרון זה יחיד?
<u>**פתרון:**</u> קודם כל, נשים לב כי תנאי משפט קיום ויחידות מתקיימים רק בנקודות (x_0,y_0) עבורן $-1 < y_0 < 1$. בנוסף, נשים לב כי מהמד"ר נובע כי לכל פתרון יש נגזרת אי שלילית ולכן הוא מונוטוני עולה (לא מונוטוני עולה ממש בהכרח).
זוהי מד"ר פרידה עם פתרונות סינגולריים $y=\pm 1$. הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned}&\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int 1dx+c\\&\arcsin y = x+c\\&y=\sin(x+c)\end{aligned}$$

שימו לב כי בגלל היחס $\arcsin y = x+c$ אז תחום ההגדרה של כל פתרון שכזה הוא $-\frac{\pi}{2}\le x+c\le\frac{\pi}{2}$.

נשתמש בתנאי ההתחלה ונקבל $\arcsin 0 = 0 + c$ ולכן $c = 0$. תחום ההגדרה של פתרון זה הוא $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. נרחיב את ההגדרה של הפתרון ע"י הפתרונות הסינגולריים

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \le -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \le x \end{cases}$$

זהו פתרון המוגדר על כל הישר (הראו זאת).
יחידות: קיום ויחידות מבטיח כי $y(x)$ הוא הפתרון היחיד בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. מרציפות זה מורחב לקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. לפי המד"ר, פתרון חייב להיות מונוטוני עולה, אבל לא יכול להיות קטן מ־-1 או גדול מ־1. לכן כל פתרון חייב להיות שווה ל־1 כאשר $x \ge \frac{\pi}{2}$ והוא חייב להיות שווה ל־ -1 כאשר $x \le -\frac{\pi}{2}$.

<u>תרגיל:</u> נתונה המד"ר $y(x_0) = y_0 \quad y' = f(x,y)$ כאשר נתון כי $f \in C^1$, כלומר f גזירה ברציפות. הראו כי כל פתרון גזיר פעמיים ברציפות, וכי האיטרציות של פיקרד מתכנסות לפתרון, הנגזרות שלהן מתכנסות לנגזרת של הפתרון והנגזרות השניות שלהן מתכנסות לנגזרת השניה של הפתרון.
<u>פתרון:</u> תזכורות:
.1

$$y_0(x) \equiv y_0 \qquad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$$

ובקטע $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ הסדרה מתכנסת במידה שווה לפתרון היחיד $y(x)$. בנוסף, הגרפים של כל הפונקציות y_n, y נמצאות במלבן $R = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - b, y_0 + b]$.
שימו לב כי y_{n+1} גזירה כי $y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$ גזירה ולכן

$$y'_{n+1}(x) = f\big(x, y_n(x)\big)$$

ושוב, y'_{n+1} גזירה כיוון ש־$f\big(x, y_n(x)\big)$ גזירה ו־

$$y''_{n+1}(x) = f'_x\big(x, y_n(x)\big) + f'_y\big(x, y_n(x)\big)y'_n(x).$$

2. התכנסות במידה שווה: נאמר כי סדרת פונקציות $\{y_n\}$ מתכנסת במידה שווה (או במ"ש) בקטע I לפונקציה y אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\forall x \in I : \quad |y(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

או, באופן שקול, אם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I} |y(x) - y_n(x)| = 0$$

3. נאמר כי פונקציה רציפה במידה שווה (או במ"ש) בתחום R במישור אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||_2 < \delta$ אז $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$

4. f, f'_x, f'_y רציפות במלבן R ולכן חסומות בערך מוחלט, ע"י קבוע חיובי שנסמנו L. בפרט הן רציפות במ"ש וגם f ליפשיצית לפי y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq L|y_1 - y_2|$$

נתחיל את הפתרון: נראה קודם כי $\{y'_n\}$ מתכנסת במ"ש ל-y':

$$|y'(x) - y'_{n+1}(x)| = |f\big(x, y(x)\big) - f\big(x, y_n(x)\big)| \leq L|y(x) - y_n(x)|$$

וכיוון ש-$\{y_n\}$ מתכנסות במ"ש ל-y אזי סיימנו חלק זה.
נראה כעת כי y''_n מתכנסות במ"ש ל-y'':

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x\big(x, y(x)\big) + f'_y\big(x, y(x)\big)y'(x) \\ y''_{n+1}(x) &= f'_x\big(x, y_n(x)\big) + f'_y\big(x, y_n(x)\big)y'_n(x). \end{aligned}$$

נראה כי $f'_x\big(x, y_n(x)\big)$ מתכנס במ"ש ל-$f'_x\big(x, y(x)\big)$: יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך שאם $||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||_2 < \delta$ אז $|f'_x(x_1, y_1) - f'_x(x_2, y_2)| < \varepsilon$. יהי N טבעי עבורו אם $n > N$ אזי

$$\forall x \in I : \quad |y(x) - y_n(x)| < \varepsilon.$$

עבור $n > N$, לכל $x \in I$

$$||\big(x, y(x)\big) - \big(x, y_n(x)\big)||_2 = |y(x) - y_n(x)| < \delta$$

ולכן

$$|f'_x\big(x, y(x)\big) - f'_x\big(x, y_n(x)\big)| < \varepsilon.$$

באותו האופן מראים כי $\{f'_y\big(x, y_n(x)\big)y'_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ל-$f'_y\big(x, y(x)\big)y'(x)$.
ולכן $\{y''_{n+1}\}$ מתכנסת במ"ש ל-y''.

<u>תרגיל:</u> תהי $y' = f(x,y)$ מד"ר כאשר נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.
1. הראו כי אם $y(x)$ פתרון המוגדר בקטע (a,b) כאשר b סופי, ואם $\lim_{x\to b^-} y(x)$ קיים (בפרט, סופי) אז אפשר להרחיב את תחום ההגדרה לקטע פתוח שקצהו הימני מימין ל־b. באופן דומה, אם a סופי ו־ $\lim_{x\to a^+} y(x)$ קיים (בפרט, סופי) אז אפשר להרחיב את תחום ההגדרה לקטע פתוח שקצהו השמאלי משמאל ל־a. עובדה זו נקראת לפעמים עקרון ההמשכה, כיוון שאנו ממשיכים את הפתרון מעבר לתחום ההגדרה הידוע.
2. הראו כי אם $y(x)$ פתרון המוגדר בקטע **מקסימלי** (a,b) כאשר b סופי, אז $\lim_{x\to b^-} y(x)$ קיים במובן הרחב והוא אינסוף או מינוס אינסוף.
3. הראו כי אם $y(x)$ פתרון המוגדר בקטע **מקסימלי** (a,b) כאשר a סופי, אז $\lim_{x\to a^+} y(x)$ קיים במובן הרחב והוא אינסוף או מינוס אינסוף.

<u>פתרון:</u> 1. נסמן ע"י L את $\lim_{x\to b^-} y(x)$. נרחיב את ההגדרה של $y(x)$ ע"י $y(b) = L$. ברור כי $y(x)$ עדיין רציפה. נסתכל על בעיית תנאי ההתחלה

$$y' = f(x,y) \quad y(b) = L.$$

לפי משפט הקיום של פיאנו, קיים פתרון $\tilde{y}(x)$ לבעייה, כלומר $\tilde{y}(x)$ מוגדר בסביבה של b ומקיים

$$\tilde{y}'(x) = f\big(x, \tilde{y}(x)\big) \quad \tilde{y}(b) = L.$$

נגדיר

$$z(x) = \begin{cases} y(x) & x < b \\ \tilde{y}(x) & b \le x \end{cases}$$

קל להראות כי $z(x)$ פונקציה רציפה בתחום הגדרתה. ברור כי היא גזירה חוץ מבנקודה b ושחוץ מנקודה זו הצבה למד"ר נותנת זהות. נבדוק מה קורה בנקודה b:

$$z'_+(b) = \lim_{x\to b^+} \frac{z(x) - z(b)}{x-b} = \lim_{x\to b^+} \frac{\tilde{y}(x) - \tilde{y}(b)}{x-b} = \tilde{y}'_+(b) = \tilde{y}'(b) = f\big(b, \tilde{y}(b)\big) = f\big(b, z(b)\big)$$

וגם, ע"י שימוש במשפט לגרנג'

$$\begin{aligned} z'_-(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{z(x) - z(b)}{x-b} &= \lim_{x\to b^+} \frac{y(x) - y(b)}{x-b} = \lim_{x\to b^-} \frac{y'(c_x)(x-b)}{x-b} = \\ = \lim_{x\to b^-} y'(c_x) &= \lim_{x\to b^-} f\big(c_x, y(c_x)\big) = f\big(b, y(b)\big) = f\big(b, z(b)\big) \end{aligned}$$

כאשר נשים לב כי $x < c_x < b$ ולכן $\lim_{x\to b^+} c_x = b$. כלומר הנגזרות החד צדדיות שוות ולכן הנגזרת קיימת ומתקיים

$$z'(b) = f\big(b, z(b)\big).$$

לכן $z(x)$ פתרון שמרחיב את $y(x)$.
המקרה השני מטופל באותו האופן.

הערה: השתמשנו ברציפות של $f(x,y)$ רק בנקודה (b,L).
2. נראה קודם כי הפתרון לא יכול להיות חסום בסביבה שמאלית של b: נניח בשלילה כי הפתרון חסום בסביבה שמאלית של b, כלומר קיימים $m<M, a<a_0<b$ עבורם מתקיים כי $m \le y(x) < M$ כאשר $a_0 \le x < b$.
במלבן $[a_0,b]\times[m,M]$, הפונקציה $f(x,y)$ רציפה ולכן חסומה. נניח כי $|f(x,y)| \le N$ במלבן. נזכר כי $y(x)=y(a_0)+\int_{a_0}^{x} f\big(t,y(t)\big)dt$. אז לכל $a_0<x_1,x_2<b$

$$|y(x_1)-y(x_2)| = \left|\int_{a_0}^{x_1} f\big(t,y(t)\big)dt - \int_{a_0}^{x_2} f\big(t,y(t)\big)dt\right| = \left|\int_{x_2}^{x_1} f\big(t,y(t)\big)dt\right| \le$$
$$\le \quad \left|\int_{x_2}^{x_1} |f\big(t,y(t)\big)|dt\right| \le \left|\int_{x_2}^{x_1} N dt\right| = N|x_2-x_1|.$$

לפי קריטריון קושי לקיום גבול נובע כי קיים הגבול $\lim_{x\to b^-} y(x)$. לפי סעיף קודם אפשר להרחיב את תחום ההגדרה. סתירה למקסימליות תחום ההגדרה. לכן הפתרון אינו חסום בסביבה שמאלית של b.
נניח כעת כי הפתרון אינו חסום מלמעלה בסביבה שמאלית של b. נראה כי הגבול הוא אינסוף:
בשלילה נניח כי הגבול אינו אינסוף. כלומר $y(x)$ אינה חסומה מלמעלה וגם הגבול שלה משמאל ל־b אינו אינסוף.
אזי קיים M_0 ויש סדרה מונוטונית עולה ממש של נקודות c_n המתכנסת ל־b עבורן $y(c_n) \le M_0$, ובנוסף קיימת סדרה מונוטונית עולה ממש של נקודות d_n המתכנסת ל־b עבורן $y(d_n) \ge M_0+1$.
מזה נובע קיום של זוג סדרות α_n, β_n עם התכונות הבאות:
1. $\alpha_n < \beta_n \le \alpha_{n+1} < b$ לכל n והגבול של הסדרות הוא b.
2. $y(\alpha_n)=M_0,\ y(\beta_n)=M_0+1$ או ש־$y(\alpha_n)=M_0+1,\ y(\beta_n)=M_0$ או ש־.
3. לכל $\alpha_n \le x \le \beta_n$ מתקיים כי $y(x)$ נמצא בין $M_0, M_0{+}1$, כלומר בין $y(\alpha_n), y(\beta_n)$.
במילים אחרות, הגרף של $y(x)$ מעל הקטע $[\alpha_n,\beta_n]$ נמצא במלבן $[\alpha_n,\beta_n]\times[M_0,M_0+1]$.
אזי לפי לגרנג' יש $\alpha_< \gamma_n < \beta_n$ עבורו

$$y'(\gamma_n) = \frac{y(\beta_n)-y(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = \frac{\pm 1}{\beta_n-\alpha_n}$$

וכיוון ש־ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = lim_{n\to\infty}\beta_n = b$ אז נקבל כי $\lim_{n\to\infty}|y'(\gamma_n)|=\infty$, בפרט, הסדרה $y'(\gamma_n)$ אינה חסומה.
מצד שני, הפונקציה $f(x,y)$ רציפה במלבן $[\alpha_1,b]\times[M_0,M_0+1]$ ולכן חסומה שם. כלומר קיים $N>0$ עבורו $|f(x,y)| \le N$ לכל $(x,y)\in[\alpha_1,b]\times[M_0,M_0+1]$.
נשים לב כי כיוון ש־$\alpha_n < \gamma_n < \beta_n$ אזי לפי תכונה 3 מתקיים כי $y(\gamma_n)$ נמצא בין

M_0, M_0+1 ולכן $[M_0, M_0+1] \times [\alpha_1, b] \in \big(\gamma_n, y(\gamma_n)\big)$ ולכן

$$|y'(\gamma_n)| = |f\big(\gamma_n, y(\gamma_n)\big)| \le N.$$

קיבלנו סתירה. ולכן

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = \infty.$$

באופן דומה, אם $y(x)$ אינה חסומה למלמטה אזי

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = -\infty.$$

3. כמו 2.

תרגיל: נניח כי $f(x,y)$ רציפה במישור. יהיו $y_n(x)$ פתרונות של $y'=f(x,y)$ המוגדרים בקטע I והמתכנסים במידה שווה בקטע I לפונקציה $y(x)$. אזי $y(x)$ פתרון.
פתרון: כיוון ש־$y(x)$ גבול במידה שווה של פונקציות רציפות אז גם היא רציפה. נראה כי הפונקציה $y(x)$ גזירה וכי היא פותרת את המד"ר.
יהיו $x_0 \neq x \in I$. נשתמש במשפט לגרנג' ונקבל

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n(x)-y_n(x_0)}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} y_n'(c_n) = \lim_{n\to\infty} f\big(c_n, y_n(c_n)\big)$$

כאשר c_n בין x, x_0. לפי בולצאנו וויארשטראס, יש תת סדרה של c_n שנסמנה c_{n_k}, המתכנסת לאיזשהו d הנמצא בין x, x_0 (ואולי שווה לאחד מהם). מכיוון ש־$y_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל־$y(x)$ בסביבה של x_0 ומכיוון ש־$y(x)$ רציפה אזי

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k}(c_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \Big(\big(y_{n_k}(c_{n_k}) - y(c_{n_k})\big) + \big(y(c_{n_k}) - y(d)\big) + y(d) \Big) = y(d).$$

(תרגיל: הראו זאת ביתר פירוט) לכן מרציפות f

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} f\big(c_n, y_n(c_n)\big) = \lim_{k\to\infty} f\big(c_{n_k}, y_{n_k}(c_{n_k})\big) = f\big(d, y(d)\big).$$

כלומר הראינו כי לכל $x \neq x_0 \in I$ קיים d הנמצא בין x, x_0 (ואולי שווה לאחד מהם) עבורו

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = f\big(d, y(d)\big).$$

כאשר x שואף ל־x_0 אז d שואף ל־x_0 גם הוא ולכן

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f\big(d, y(d)\big) = f\big(x_0, y(x_0)\big).$$

כיוון ש־$x_0 \in I$ שרירותי אזי לכל $x \in I$

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big).$$

הערות: 1. איננו צריכים כי $y_n(x)$ יתכנסו במידה שווה ל־$y(x)$ על כל I. מספיק כי לכל $x_0 \in I$ תהיה סביבה בה יש התכנסות במידה שווה. באופן שקול, מספיק כי תהיה התכנסות במידה שווה על כל תת קבוצה קומפקטית של I.
2. אין צורך כי f תהיה רציפה בכל המישור. מספיק כי היא מוגדרת ורציפה בקבוצה סגורה במישור כי זה מבטיח שהגרף של $y(x)$ יהיה בתחום ההגדרה של f וזה בעצם מה שאנו משתמשים בו. אפשר להחליף הנחה זו בהנחה ש־f רציפה בתחום מסויים (לא בהכרח סגור) וכי הגרף של $y(x)$ נמצא בתחום ההגדרה של f. זה יותר שימושי אם $y(x)$ ידוע ואז אפשר לבדוק ישירות אם הגרף מוכל בתחום הרציפות של f. מצד שני, אם יש לנו את $y(x)$, נוכל אולי לבדוק ישירות כי הוא פתרון.

הוכחה אחרת: $y(x)$ רציפה כי היא גבול במידה שווה של y_n שהן פונקציות רציפות.
בנוסף, אנו יודעים כי $y_n(x) = y_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$
אם נראה כי $y_n(x_0)$ מתכנס ל־$y(x_0)$ וגם ש־$\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$ מתכנס ל־$\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$
אזי סיימנו כי אז $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$ וזה אומר ש־y פתרון.
ברור כי $y_n(x_0)$ מתכנס ל־$y(x_0)$ כי יש התכנסות במידה שווה, בפרט נקודתית.
נראה כי $\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$ מתכנס ל־$\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$: יהי $\varepsilon > 0$. שימו לב כי n שואף לאינסוף ו־x_0, x קבועים. נסמן ע"י J את הקטע החסום וסגור שקצוותיו x_0, x.
נגדיר את הקבוצה $D = \{(t, y) | t \in J, y(x) - 1 \leq y \leq y(x) + 1\}$
D קבוצה סגורה וחסומה (הראו זאת) ולכן f רציפה במידה שווה עליה. לכן קיים $\delta > 0$ עבורו כאשר $|(t_1, y_1) - (t_2, y_2)| < \delta$ אז $|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{|x-x_0|}$.
יהי N_0 טבעי המקיים שכאשר $n > N_0$ אזי $\sup_{t\in J} |y(t) - y_n(t)| < \max(\delta, 1)$. אז עבור $n > N_0$ ו־$t \in J$ מתקיים כי $(t, y(t), (t, y_n(t)) \in D$ וגם

$$\|(t, y(t)) - (t, y_n(t))\|_2 = |y(t) - y_n(t)| < \delta$$

ולכן

$$\left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, y_n(t)\big)dt\right| \leq$$
$$\leq \quad \left|\int_{x_0}^{x} |f\big(t, y(t)\big) - f\big(t, y_n(t)\big)|dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}dt\right| = \varepsilon.$$

כלומר הראינו כי $\int_{x_0}^{x} f\big(t, y_n(t)\big)dt$ מתכנס ל־$\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$. בזאת סיימנו.