13/06/2016

קומבינטוריקה – הרצאה 13#

משפט ששת הצבעים: כל גרף מישורי הוא 6-צביע.

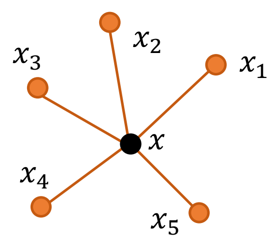
הוכחה: יהי $G = (V, E)$ גרף מישורי. לפי משפט שהוכחנו, די להראות שכל תת גרף מושרה G' של G מכיל קדקוד x בעל ערכיות $d_{G'}(x) <= 5$. זה נכון כי תת גרף מושרה של גרף מישורי הוא בעצמו מישורי, ולכן לפי מסקנה שהוכחנו הוא מכיל קדקוד בעל ערכיות לכל היותר 5.

משפט חמשת הצבעים: כל גרף מישורי הוא 5-צביע.

הוכחה: באינדוקציה על מס' הקדקודים n. בסיס: $n \leq 5$, אז כרף כזה ניתן לצביעה ב-5 צבעים. צעד: $n \geq 6$. הנחת האינדוקציה אומרת שכל גרף מישורי על פחות מ-n קדקודים הוא 5-צביע. נתון גרף מישורי $G = (V, E)$ על n קדקודים. יהי D ציור מישורי של G. יהי x קדקוד כך ש-$d(x) \leq 5$. לפי הנחת האינדוקציה, התת גרף המושרה $G[V \setminus \{x\}]$ הוא 5 צביע. תהי

$$f: V \setminus \{x\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

צביעה שלו ב-5 צבעים. אם $d(x) \leq 4$, או אם $d(x) = 5$ וחמשת השכנים של x אינם צבועים ע"י f בחמישה צבעים שונים, אז קיים צבע חוקי שבו אפשר לצבוע את x ובכך סיימנו. לכן, נניח מעתה ש-$d(x) = 5$ וחמשת השכנים של x צבועים ע"י f בצבעים שונים זה מזה. נתבונן ב-x ובשכנים שלו בציור במישורי D.



נסמן את השכנים של x בסדר הופעתם מסביב ל-x ע"י $x_1, \ldots, x_5$. בלי הגבלת הכלליות, נניח כי $f(x_i) = i$ ($i = 1,2,3,4,5$). נסמן:

$V_{1,3} =$ קב' הקדקודים ב-$V \setminus \{x\}$ הצבועים ע"י f בצבעים 1 או 3.

$G[V_{1,3}] =$ התת גרף המושרה על $V_{1,3}$.

$C =$ המרכיב הקשיר של $G[V_{1,3}]$ המכיל את x_1.

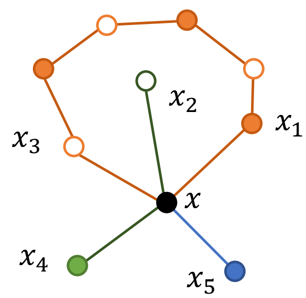
כעת נגדיר:

$$f': V \setminus \{x\} \to \{1,2,3,4,5\}$$

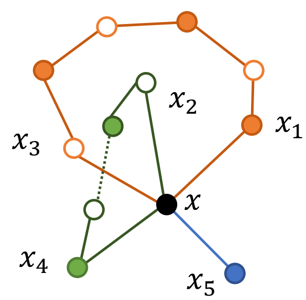
באופן הבא: לכל קדקוד $y \in C$:

$$f'(y)=\begin{cases}1, & f(y)=3\\ 3, & f(y)=1\\ c, & f(y)=c\notin\{1,3\}\end{cases}$$

קל לבדוק כי גם f' היא צביעה חוקית של $G[V\setminus\{x\}]$. לכן, אם $x_3\notin C$, אז בצביעה f' אף שכן של x אינו צבוע בצבע 1, ונוכל לצבוע את x בצבע 1 ולסיים. לכן נוכל להניח כי $x_3\in C$, ולפיכך קיים מסלול ב-$G[V\setminus\{x\}]$ המחבר את x_1 ל-x_3 וכל קדקודיו צבועים בצבעים 1 או 3.



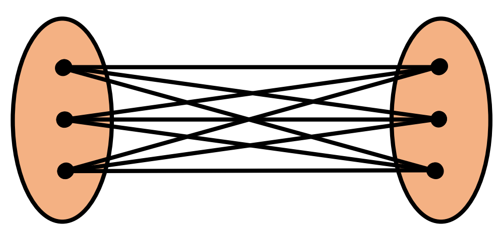
באותו אופן אפשר לעבוד עם הצבעים 2,4, ולהסיק שנוכל להניח שקיים מסלול ב-$G[V\setminus\{x\}]$ המחבר את x_2 ל-x_4 וכל קדקודיו צבועים בצבעים 2 או 4. אבל, לא ייתכן שקיימים שני המסלולים שדיברנו עליהם כי x_2 נמצא בתוך התחום החסום ע"י המסלול מ-x_1 ל-x_3, x_4 נמצא מחוץ (או להיפך), ומכיוון שהגרף שלנו הוא מישורי, אפשר לחצות את מסגרת התחום רק דרך קדקוד, אבל קדקוד שצבוע 1 או 3 אינו צבוע 2 או 4.



משפט ארבעת הצבעים (Appel-Haken-Computer): כל גרף מישורי הוא 4-צביע.

טענה: הגרף השלם K_5 איננו מישורי.

הוכחה: כזכור, בכל גרף מישורי $G=(V,E)$ עם $|V|\geq 3$ מתקיים $|E|\leq 3|V|-6$. עבור K_5, $|V|=5, |E|=10$, והאי"ש הנ"ל לא מתקיים. נתבונן בגרף הדו"צ השלם $K_{3,3}$:



בגרף הזה $|E|=9, |V|=6$.

טענה: יהי $G=(V,E)$ גרף מישורי עם $|V|=n\geq 3$. נניח שב-G אין משולשים, אז $|E|\leq 2n-4$.

הוכחה: נחזור על הוכחת המשפט שנתן את החסם של $3n-6$. שם השתמשנו בעובדה שכל פאה היא בעלת ערכיות 3 לפחות. מכיוון שבגרף שלנו אין משולשים, כאן כל פאה היא בעלת ערכיות 4 לפחות. לכן:

$$4f \leq \sum_{i=1}^{f} d(F_i) = 2|E| = 2m$$

לפיכך:

$$f \leq \frac{m}{2}$$

ולכן:

$$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{m}{2} = n - \frac{m}{2}$$

ומכאן:

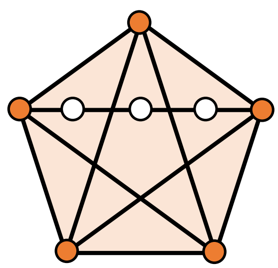
$$m \leq 2n - 4$$

כנדרש.

מסקנה: הגרף הדו"צ השלם $K_{3,3}$ אינו מישורי.

הוכחה: בתור גרף דו"צ, אין ב-$K_{3,3}$ משולשים. לכן, אילו היה מישורי היה צריך להתקיים האי"ש $|E| \leq 2|V| - 4$, והוא אינו מתקיים.

נתבונן למשל בגרף הבא המתקבל מ-K_5 (הוספנו את הנק' הלבנות):



הוא אינו מכיל את K_5 כתת-גרף, אבל גם הוא אינו מישורי מהסיבה ש-K_5 אינו מישורי.

הגדרה: יהיה $G=(V,E)$ גרף ותהי $\{x,y\}$ צלע שלו, אז **פיצול** של הצלע $\{x,y\}$ הוא החלפתה במסלול

$$x, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, y$$

שבו כל הקדקודים $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ הם חדשים ושונים זה מזה.

הגדרה: הגרף $G' = (V', E')$ הוא **עידון** של $G = (V,E)$ אם הוא מתקבל ממנו ע"י פיצול חלק מלעוציו, כאשר המסלולים המשמשים עבור פיצול של צלעות שונות הם זרים.

משפט קורטובסקי: יהא $G=(V,E)$ גרף, אז G איננו מישורי אם ורק אם הוא מכיל גרף שהוא עידון של K_5 או של $K_{3,3}$.