תורת החבורות – תרגיל בית 10 – פתרון

שאלה 1:

א) $e \in N$ וגם $e \in H$ $\Leftarrow$ $e = e \cdot e \in HN$.

כמו כן יהיו $hn, \tilde{h}\tilde{n} \in HN$, אז $hn\left(\tilde{h}\tilde{n}\right)^{-1} = h\left(n\tilde{n}^{-1}\right)\tilde{h}^{-1} = \left(h\tilde{h}^{-1}\right)n'$ עבור איזשהו $n' \in N$, לכן $hn\left(\tilde{h}\tilde{n}\right)^{-1} = \left(h\tilde{h}^{-1}\right)n' \in HN$.

ב) יהיו $h \in H, n \in H \bigcap N$. אז היות ו-$N$ תח״נ ב-G, מתקיים כי $hnh^{-1} \in N$. כמו כן $H \bigcap N \subseteq H$ $\Leftarrow$ $h, n \in H$ $\Leftarrow$ $hnh^{-1} \in H$ ולכן שייך לחיתוך.

בנוסף לכך, $H \bigcap N \subseteq H$ ושתיהן ת״ח של G, לכן $H \bigcap N \le H$ $\Leftarrow$ $H \bigcap N \lhd H$.

ג) $f\left(H\right) = \left\{hN \mid h \in H\right\} \subseteq HN/N$.

להפך: לכל $hnN \in HN/N$ $\quad hnN = hN = f\left(h\right) \in f\left(H\right)$.

ד) יהי $\varphi = f|_H$ הצמצום של הומומורפיזם f לת״ח H.

אז $\varphi = f|_H$ הינו הומומורפיזם מ-H על $f\left(H\right) = HN/N$ בעל הגרעין $H \bigcap N$, ולפי המשפט הראשון של הומומורפיזם מקבלים כי $\boxed{H/H \bigcap N \cong HN/N}$.

שאלה 4:

א) $e \in H$ $\Leftarrow$ $e = g^{-1}eg \in g^{-1}Hg$. כמו כן יהיו $g^{-1}hg, g^{-1}\tilde{h}g \in g^{-1}Hg$, אז

$\left(g^{-1}hg\right)\left(g^{-1}\tilde{h}g\right)^{-1} = g^{-1}\left(h\tilde{h}^{-1}\right)g \in g^{-1}Hg$.

ב) הראנו בכיתה כי $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ תח״נ, כעת נוכיח את המכסימליות.

תהי $K \subseteq H$ תח״נ. עלינו להראות כי $K \subseteq N$. $K \lhd G$, לכן לכל $g \in G$

$K = g^{-1}Kg \overset{K \subseteq H}{\subseteq} g^{-1}Hg$ $\Leftarrow$ $K \subseteq \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg = N$.

שאלה 5:

לכל $g \in G$ $\quad g^{-1}Hg \leq G$ ת״ח מסדר $|H| = m$.

ומיחידות מקבלים כי לכל $g \in G$ $\quad g^{-1}Hg = H$, לכן H תח״נ.

שאלה 7:

א) נגדיר העתקה $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^+$ כך ש לכל $z \in \mathbb{C}^*$ $\quad \varphi(z) = |z|$.

φ הינו הומומורפיזם כי לכל $z, w \in \mathbb{C}^*$ $\quad \varphi(zw) = |zw| = |z| \cdot |w| = \varphi(z) \cdot \varphi(w)$.

כמו כן $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^+$ ו- $\operatorname{Ker}\varphi = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \varphi(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} = N$.

לכן לפי המשפט הראשון של הומומורפיזם מקבלים כי $\mathbb{C}^*/N \cong \mathbb{R}^+$ ו- N תח״נ כגרעין של הומומורפיזם.

ב) $\operatorname{cis}\theta \in \mu \iff (\operatorname{cis}\theta)^n = 1$ עבור $n \in \mathbb{N}$. כלומר, אם ורק אם קיימים $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$

עבורם $\operatorname{cis}(n\theta) = 1 = \operatorname{cis}(2\pi k)$ אם ורק אם קיימים $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ עבורם

$n\theta = 2\pi k$ אם ורק אם קיימים $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ עבורם $\theta = 2\pi \frac{k}{n}$.

בכך קיבלנו כי $\mu = \{\operatorname{cis}(2\pi q) \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

כעת נגדיר העתקה $\varphi : \mathbb{Q} \to \mu$ כך שלכל $q \in \mathbb{Q}$ $\quad \varphi(q) = \operatorname{cis}(2\pi q)$.

φ הינו הומומורפיזם כי לכל $q, \tilde{q} \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי

$\varphi(q + \tilde{q}) = \operatorname{cis}(2\pi(q + \tilde{q})) = \operatorname{cis}(2\pi q)\operatorname{cis}(2\pi\tilde{q}) = \varphi(\tilde{q})\varphi(q)$.

כמו כן $\operatorname{Im}\varphi = \mu$ וגרעין של ההומומורפיזם הינו:

$\operatorname{Ker}\varphi = \{q \in \mathbb{Q} \mid \varphi(q) = 1\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid \operatorname{cis}(2\pi q) = 1\} = \mathbb{Z}$.

לכן לפי המשפט הראשון של הומומורפיזם מקבלים כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mu$.