

$q: V \rightarrow K$       הצגה      רעבוע  
 quadratic form      הצגה רעבוע

$$q(v) = f(v, v) \quad \text{אלמנט}$$

הצגה      הצגה רעבוע      הצגה רעבוע

$$f: V \times V \rightarrow K$$

(2 איננו  $K$  של  $\text{char } K \neq 2$ )

$q$        $f$        $f(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$

הצגה רעבוע

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$

$A = (a_{ij})$        $a_{ij} = f(e_i, e_j)$

$f$        $f(x, x) = q(x)$

$$\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$$

$\bar{x} \in V$        $x \in V$

$$q(x) = f(x, x) = x^t A x$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 +$$

$$2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

מסתבר כי  $A$  סימטרית

הפונקציה  $q(x) = x^T A x$  נקראת פורמ

$$q(x) = x^T A x = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

כאשר  $A$  סימטרית

אם  $\text{char } K \neq 2$  אז  $A$  היא

מטריצה סימטרית

$$a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2$$

- 94 -

3.12: נתון  $q(x, y) = 2x^2 - 12xy + 5y^2$

תחשב את האינטגרל  $\int_{\gamma} q(x, y) dx$  לאורך הדרך

המגדלת  $\gamma(t) = (s+3t, t)$  עבור  $t \in [0, 1]$

התחלנו ב  $x = s+3t$

$$q(\gamma(t)) = 2(s+3t)^2 - 12(s+3t)(t) + 5t^2 =$$

$$2s^2 - 13t^2.$$

משפט: תהי  $f$  פונקציה סקלרית

ממשק  $V$  וקטורי  $\mathbb{R}$  אד'  $\gamma$

כאשר  $V$  הוא חלל וקטורי

ממס'  $n$  וקטורי.  $\gamma$  היא פונקציה

ממס'  $n$  וקטורי  $P$  שמתארת חלל

וקטורי ממס'  $N$  שמתארת חלל

המשפט:  $P-N$  תהיה סקלרית

-95-

המרחב  $V$  קבוצת הקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  קבוצת  
 המרחב  $V$  קבוצת הקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  קבוצת  
 המרחב  $V$  קבוצת הקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  קבוצת

המרחב  $V$  קבוצת הקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  קבוצת  
 המרחב  $V$  קבוצת הקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  קבוצת  
 המרחב  $V$  קבוצת הקטורים  $\{u_1, \dots, u_n\}$  קבוצת

$$P + N = P' + N' = \text{rank}(A) = n$$

$$P = P' \quad \text{קבוצת הקטורים}$$

$$W = \text{Span}\{w_1, \dots, w_{p'}\} \quad ; \quad U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_p\}$$

$$\forall v \in U \quad f(v, v) > 0$$

$$0 \neq v \in W \quad f(v, v) \leq 0$$

$$U \cap W = 0$$

$$\dim W = n - p'$$

$$\dim U = p$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) =$$

$$p + n - p' - 0 = p - p' + n$$

$$\dim(U+W) \leq \dim V = n$$

$$P \leq P' \quad \text{אם} \quad P - P' + n \leq n \quad \text{אז}$$

$W, U$  הם תת-חלליות של  $V$  ו- $f$  היא פונקציה

$$P = P' \quad \text{אז} \quad P' \leq P \quad \text{אם}$$

הוכחה: נניח  $P \leq P'$  ונראה כי  $P' \leq P$

$f$  היא פונקציה רגולרית

$$q(v) = f(v, v) \geq 0$$

$$\forall v \in V \quad q(v) = f(v, v) > 0$$

נראה כי  $q$  היא פונקציה רגולרית

$f$  היא פונקציה רגולרית

$$S = P + N = \text{rank}(f)$$

$f$  היא פונקציה רגולרית

$$P - N = \dim V$$

אם  $f$  היא פונקציה רגולרית

-98-

$\mathbb{R}^n$  על פונקציה  $f$  המשקל  
 הממוצע של  $f$  על  $\mathbb{R}^n$

$$g(v) = f(v, v) \quad \text{כאן}$$

הפונקציה

הפונקציה  $f$

$$f(u, u) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

למשל הפונקציה  $f$  המשקל  
 הממוצע של  $f$  על  $\mathbb{R}^n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 + x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2$$

$K = \mathbb{C}$  או  $K = \mathbb{R}$  או  $K = \mathbb{H}$

הפונקציה  $f$  על  $V \times V$  המשקל  
 הממוצע של  $f$  על  $V \times V$

$$f(av_1 + bv_2, u) = a f(v_1, u) + b f(v_2, u) \quad (1)$$

-98-

$$f(u, v) = \overline{f(v, u)} \quad (e_2')$$

אם  $f$  תמיד תפוסה וההיפוכה  $V$  של

בהיפוכה  $(i)$  ;  $(ii)$  "אין כן"

השני  $f$  פנימי,  $\bar{f}$  זוגי,  $\bar{f}$  קשיחה

ההפוכה  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  בהמשכה  $g$

$$g(v) = f(v, v)$$

תקנה בתפוסה  $\wedge$  ההיפוכה  
בהיפוכה

נניח  $f$  קשיחה  $f$  נניח  $g$  קשיחה

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(g(u+v) - g(u-v)) + \frac{i}{4}(g(u+iv) - g(u-iv))$$

$V$  בסיס  $e_1, \dots, e_n$  של

ההיפוכה  $A = (a_{ij})$  ההיפוכה  $a_{ij}$

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) \quad f$$

ה'תש"ב 23' 24' 25' 26' 27' 28' 29' 30' 31' 32' 33' 34' 35' 36' 37' 38' 39' 40' 41' 42' 43' 44' 45' 46' 47' 48' 49' 50' 51' 52' 53' 54' 55' 56' 57' 58' 59' 60' 61' 62' 63' 64' 65' 66' 67' 68' 69' 70' 71' 72' 73' 74' 75' 76' 77' 78' 79' 80' 81' 82' 83' 84' 85' 86' 87' 88' 89' 90' 91' 92' 93' 94' 95' 96' 97' 98' 99' 100' 101' 102' 103' 104' 105' 106' 107' 108' 109' 110' 111' 112' 113' 114' 115' 116' 117' 118' 119' 120' 121' 122' 123' 124' 125' 126' 127' 128' 129' 130' 131' 132' 133' 134' 135' 136' 137' 138' 139' 140' 141' 142' 143' 144' 145' 146' 147' 148' 149' 150' 151' 152' 153' 154' 155' 156' 157' 158' 159' 160' 161' 162' 163' 164' 165' 166' 167' 168' 169' 170' 171' 172' 173' 174' 175' 176' 177' 178' 179' 180' 181' 182' 183' 184' 185' 186' 187' 188' 189' 190' 191' 192' 193' 194' 195' 196' 197' 198' 199' 200' 201' 202' 203' 204' 205' 206' 207' 208' 209' 210' 211' 212' 213' 214' 215' 216' 217' 218' 219' 220' 221' 222' 223' 224' 225' 226' 227' 228' 229' 230' 231' 232' 233' 234' 235' 236' 237' 238' 239' 240' 241' 242' 243' 244' 245' 246' 247' 248' 249' 250' 251' 252' 253' 254' 255' 256' 257' 258' 259' 260' 261' 262' 263' 264' 265' 266' 267' 268' 269' 270' 271' 272' 273' 274' 275' 276' 277' 278' 279' 280' 281' 282' 283' 284' 285' 286' 287' 288' 289' 290' 291' 292' 293' 294' 295' 296' 297' 298' 299' 300' 301' 302' 303' 304' 305' 306' 307' 308' 309' 310' 311' 312' 313' 314' 315' 316' 317' 318' 319' 320' 321' 322' 323' 324' 325' 326' 327' 328' 329' 330' 331' 332' 333' 334' 335' 336' 337' 338' 339' 340' 341' 342' 343' 344' 345' 346' 347' 348' 349' 350' 351' 352' 353' 354' 355' 356' 357' 358' 359' 360' 361' 362' 363' 364' 365' 366' 367' 368' 369' 370' 371' 372' 373' 374' 375' 376' 377' 378' 379' 380' 381' 382' 383' 384' 385' 386' 387' 388' 389' 390' 391' 392' 393' 394' 395' 396' 397' 398' 399' 400' 401' 402' 403' 404' 405' 406' 407' 408' 409' 410' 411' 412' 413' 414' 415' 416' 417' 418' 419' 420' 421' 422' 423' 424' 425' 426' 427' 428' 429' 430' 431' 432' 433' 434' 435' 436' 437' 438' 439' 440' 441' 442' 443' 444' 445' 446' 447' 448' 449' 450' 451' 452' 453' 454' 455' 456' 457' 458' 459' 460' 461' 462' 463' 464' 465' 466' 467' 468' 469' 470' 471' 472' 473' 474' 475' 476' 477' 478' 479' 480' 481' 482' 483' 484' 485' 486' 487' 488' 489' 490' 491' 492' 493' 494' 495' 496' 497' 498' 499' 500' 501' 502' 503' 504' 505' 506' 507' 508' 509' 510' 511' 512' 513' 514' 515' 516' 517' 518' 519' 520' 521' 522' 523' 524' 525' 526' 527' 528' 529' 530' 531' 532' 533' 534' 535' 536' 537' 538' 539' 540' 541' 542' 543' 544' 545' 546' 547' 548' 549' 550' 551' 552' 553' 554' 555' 556' 557' 558' 559' 560' 561' 562' 563' 564' 565' 566' 567' 568' 569' 570' 571' 572' 573' 574' 575' 576' 577' 578' 579' 580' 581' 582' 583' 584' 585' 586' 587' 588' 589' 590' 591' 592' 593' 594' 595' 596' 597' 598' 599' 600' 601' 602' 603' 604' 605' 606' 607' 608' 609' 610' 611' 612' 613' 614' 615' 616' 617' 618' 619' 620' 621' 622' 623' 624' 625' 626' 627' 628' 629' 630' 631' 632' 633' 634' 635' 636' 637' 638' 639' 640' 641' 642' 643' 644' 645' 646' 647' 648' 649' 650' 651' 652' 653' 654' 655' 656' 657' 658' 659' 660' 661' 662' 663' 664' 665' 666' 667' 668' 669' 670' 671' 672' 673' 674' 675' 676' 677' 678' 679' 680' 681' 682' 683' 684' 685' 686' 687' 688' 689' 690' 691' 692' 693' 694' 695' 696' 697' 698' 699' 700' 701' 702' 703' 704' 705' 706' 707' 708' 709' 710' 711' 712' 713' 714' 715' 716' 717' 718' 719' 720' 721' 722' 723' 724' 725' 726' 727' 728' 729' 730' 731' 732' 733' 734' 735' 736' 737' 738' 739' 740' 741' 742' 743' 744' 745' 746' 747' 748' 749' 750' 751' 752' 753' 754' 755' 756' 757' 758' 759' 760' 761' 762' 763' 764' 765' 766' 767' 768' 769' 770' 771' 772' 773' 774' 775' 776' 777' 778' 779' 780' 781' 782' 783' 784' 785' 786' 787' 788' 789' 790' 791' 792' 793' 794' 795' 796' 797' 798' 799' 800' 801' 802' 803' 804' 805' 806' 807' 808' 809' 810' 811' 812' 813' 814' 815' 816' 817' 818' 819' 820' 821' 822' 823' 824' 825' 826' 827' 828' 829' 830' 831' 832' 833' 834' 835' 836' 837' 838' 839' 840' 841' 842' 843' 844' 845' 846' 847' 848' 849' 850' 851' 852' 853' 854' 855'

[illegible]

V für S'chneide f m B n

$$f(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \text{wobei}$$

የሚገኝበት ስፋት  $P-N$  ነው።

שם פרטי      שם משפחה

$$\forall v \in V \quad g(v) = f(v, v) > 0$$



ס'כ"א: מרחב פנימי מובנה פנימי

ה' פנימי

מרחב פנימי הוא פונקציה ממשותף

מרחב פנימי וקטוריים  $V$  מרחב  $K$

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  ושל

המרחב הפנימי הפנימי מרחב פנימי  $u, v, w \in V$  פונקציה

$(,): V \times V \rightarrow K$   $a, b \in K$  :

$$(u, v) = \overline{(v, u)} \quad (1)$$

$$(au + bv, w) = a(u, w) + b(v, w) \quad (2)$$

$$(u, u) = 0 \quad ; \quad (u, u) \geq 0 \quad (3)$$

אם  $u = 0$  .

מרחב פנימי מרחב פנימי

פנימי פנימי פנימי פנימי :

מרחב  $(u, u) \geq 0$  פנימי .

מרחב פנימי פנימי פנימי פנימי

המרחב פנימי .

שני כמ"צ א"א הנ"ל "מ"א  
 מ"א" ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ  
 ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

ה"ה ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ  
 ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ  
 ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

(1) ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

$$f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$$

$$f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$$

① ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ  
 ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

② ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ  
 ג"כ ג"כ ג"כ ג"כ

ד'תשנ"ח      ק"ע      ד'תשנ"ח      ו'      ד'תשנ"ח

הגדל חבניות ב' למיליון f ו.ל. 3' 3 חביות

ה'תשס"ח      ה'תשס"ט       $\{e_1, \dots, e_n\}$       ה'תשס"ט

$$A = (a_{ij}) = (f(e_i, e_j))$$

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right) A$

$$f(u, v) = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\text{ann } \text{ann } B \quad f \rightarrow A \quad \underline{\text{ann}}$

אחרי מלחמת העולם השני  
היה זה חלק מהמחשבה

אלק, קמר קס'ם אלמר

b) für  $\mathcal{B}_k$  sei  $\{e'_1, \dots, e'_k\}$

מס' 3' — סלע דבר מה קטנים  $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\{e'_1, \dots, e'_r\} \quad 0 \leq r \leq d$$

$$V_e = P V_{e'}$$

ש"ל

$$B_{e'} = P^t A_e P$$

ש"ל

זה יקרא יחס חופף

נשים P? כי זה שונה ממשקל קטנים  $\otimes$

$T: V \rightarrow V$  כל תכונותיו לא יתקיימו על

$$A_{e'} = P^{-1} A_e P$$

כל נתיב חקירה בו לא ~~פועל~~ פועל

נתיב קדמי דברים  $V$  ו  $\Gamma$   $f$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

בבסיס

ש"ל  $F = \mathbb{C}$  ו  $F = \mathbb{R}$  ש"ל

- 104 -

$$V_e = P V_{e'}$$

ואז

$$B_{e'} = P^t A_e P$$

אז

עם משתנים חדשים  $B : A$  נקרא  
משתנים חדשים הופכיים.

⊗ נשים לב כי תנאי זה שונה מאשר בהקשר

כאשר  $T: V \rightarrow V$  פונקציה ליניארית

$$A_{e'} = P^{-1} A_e P$$

באז

נסתכל בהקשר זה הפונקציה  $f: V \times V \rightarrow F$

היא סימטרית כלומר  $f(u, v) = f(v, u)$

אז  $f$  נקראת פונקציה סימטרית

המשפט!!! אם  $\text{char } F \neq 2$

נשים לב כי לא מדובר בליניאריות

כיחם ההופכיים הפונקציה

$$P^t A P = \underline{\text{המטריצה}}$$

הם  $F = \mathbb{R}$  או  $F = \mathbb{C}$  (אם  $F = \mathbb{R}$  אז  $P$  הוא הפולינום  $P(x) = x^2 + 1$ )

$$P^{-1} = P^t$$

נסתכל ב-  $P$  כחומר

$$F = \mathbb{C} \quad \text{כחומר}$$

$$F = \mathbb{R}$$

$$F = \mathbb{C} \quad \overline{F}$$

אם  $f$  היא פונקציה ממרחב  $V$  אל  $\mathbb{C}$  אז  $f$  היא פונקציה ממרחב  $V$  אל  $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$i \neq j \quad f(e_i, e_j) = 0$$

$$f(e_i, e_i) = c_i$$

$$e'_i = \begin{cases} \frac{e_i}{\sqrt{c_i}} & c_i \neq 0 \\ e_i & c_i = 0 \end{cases}$$

- (106) -

אם  $\mathcal{F}$  הוא פילטר על  $\mathcal{C}$  אז

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$  ויש שוויון אם  $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ .

II אם  $F = IR$  ו  $f$  מקיים  $f(x) = x$

סוגיות  $V$  ו  $R$  אז  $f$

הכלל  $f(x) = x$  מוגדר על  $R$  ו  $f(x) = x$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

המרחב  $\mathcal{C}$  הוא פילטר על  $\mathcal{C}'$  ו  $f(x) = x$

לפיכך  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$  ו  $f(x) = x$

$$e_i' = \begin{cases} \frac{e_i}{\sqrt{c_i}} & c_i > 0 \\ \frac{e_i}{\sqrt{-c_i}} & c_i < 0 \\ e_i & c_i = 0 \end{cases}$$

$$f(e_i, e_i) = c_i$$

$F = \mathbb{C}$      $P =$     מספרים  
 פולינומים     $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$     הופכי  
 ממוצעים

$F = \mathbb{R}$      $P =$      $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$   
 פולינומים     $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$     הופכי  
 ממוצעים

ההפרש בין מספר זה למספרים המצויים  
 הוא פונקציה של המספרים  
 והוא הפונקציה של המספרים והוא  
 הפונקציה של המספרים.

למשל אם  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$   
 ו  $f$  פונקציה ממרחב זה ל  $V$  זהו  $A$   
 מספרים מ"צגת את  $f$  כמטריצה  
 אנו  $f$  הוא חילוקי (או אוליפיות) של  
 ורק אם כל המספרים המצויים של  $A$   
 הם חילוקיים (או אוליפיות).



ה'תתק"א      א      מנחם      ש'תתק"א      ה'תתק"א

$$e \quad \gamma \quad (p^1 = p^2) \quad \rightarrow \quad p_{12} \quad p$$

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$$

•  $\rightarrow$   $\frac{1}{2} \log 2$

500     213     A

ਮਾਧਿਅਮਿਕ ਤੌਰ 'ਤੇ

A שם המלך  
המלך המשיח  
המלך המשיח

המלך המשיח  
המלך המשיח  
המלך המשיח

$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{matrix} 1 & i \\ -1 & 1 \end{matrix} \right)$

$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi}) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \frac{\partial}{\partial \theta}) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi})$