קומבי גליון 4

ליעד סלומון - שניר הורדן

29 באפריל 2018

$205689581 - 326991890$

1.א. תהא $f(x)$ פונקציה רקורסיבית המוגדרת כך:

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2) & n \geq 3 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases}$$

הצדקה: נגדיר רצף בינארי כמסודר אם הוא מקיים את התנאי שאין בו רצף של 11. בצעד הראשון עלינו לבחור אחת משתי אפשרויות : 1 או 0 . אם זה 1 והמילה מסודרת אז בהכרח מגיע 0 לאחר מכן ונקבל רצף מסודר באורך $n-2$. אם זה 0 אז יש רצף בינארי מסודר של $n-1$ איברים אחריו. לפי עקרון החיבור נקבל כי ערך הפונקציה שווה לערך הפונקציה במקום אחד אחורה ועוד הערך של הפונקציה שתי מקומות אחורה.
בזו סיימנו.

1.ב. תהא $f(x)$ פונקציה רקורסיבית המוגדרת כך:

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 1 & n \geq 4 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 7 \end{cases}$$

הצדקה: נגדיר רצף בינארי כמסודר אם הוא מקיים את התנאי שאין בו רצף של 001. אם מילה כלשהי מתחילה ב־1 והמילה מסודרת אז ה־$n-1$ איברים אחריה היא מילה מסודרת. אם היא מתחילה ב־0 אז יש שני אפשרויות: אם השנייה היא 1 אז יש לנו מילה מסודרת באורך $n-2$ אחריו. אם הספרה השנייה היא 0 אז לא יכול להגיע 1 עד סוף המילה. לכן, זו מילה אחת נוספת (שכולה 0).
בזו סיימנו.

1.ג. תהא $f(x)$ פונקציה רקורסיבית המוגדרת כך:

$$\begin{cases} f(n) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(i) & n \geq 5 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 4 \\ f(3) = 8 \\ f(4) = 15 \end{cases}$$

הצדקה: נגדיר רצף בינארי כמסודר אם הוא מקיים את התנאי שאין בו רצף של 0011. אם מילה כלשהי מתחילה ב־1 והמילה מסודרת אז ה־$n-1$ איברים אחריו היא מילה מסודרת. אם המילה מתחילה ב־0 אז יש שני אפשרויות: אם הספרה השנייה היא 1 אז יש לנו מילה מסודרת באורך $n-2$ אחריה. אם הספרה השנייה היא 0 אז קיימות שתי אפשרויות: אם הספרה השלישית היא 1 אז בהכרח מגיע 0 אחריו (הספרה הרביעית) ואז בהנחה שהמילה מסודרת יש מילה מסודרת באורך $n-4$. אם הספרה השלישית היא 0 אז יש שני אפשרויות: 1. הספרה הרביעית היא 1 ואז אם המילה מסודרת אז נקבל מילה מסודרת באורך $n-4$. 2. הספרה הרביעית היא 0, ואז לספרה הבאה קיימות שתי אפשרויות. תהליך זה חוזר על עצמו חלילה (רקורסיבית) עד שנגיע לאיבר האחרון. כלומר שאם הגענו לשלב זה אז מוכל להמשיך עד סוף המילה עד שנקבל 1 . לכן עלינו להתחשב בכל האפשרויות האלו. כלומר לסכום עד לסוף המילה.

בזו סיימנו.

.2

המצולע הקמור מקובע לכן נוכל לבחור צלע כלשהי ללא התייחסות לסיבוב. נבחר צלע כלשהי. יש שתי אפשרויות: 1. ירוק 2. אדום. אם היא ירוקה אז שני הצלעות לידה (הסמוכות לה) הן בהכרח אדומות. אילו לא, (אחת מהן לפחות ירוקה) אז היינו מקבלים רצף של שתי צלעות ירוקות. סתירה.

אם היא אדומה אז הצלעות הסמוכות לה יכולות להיות בכל צבע.

תהי $j(x)$ פונקציית כל האפשרויות של בחירה של צבעים.

נגדיר $g(x)$ כפונקציה המתאימה לאפשרות 1 ו־$h(x)$ כפונקציה המתאימה לאפשרות 2. אזי, לפי עקרון החיבור,

$$j(x) = g(x) + h(x)$$

נשים לב כי עבור g נקבל כי יש לנו $n-1$אפשרויות לבחירת רצף של צלעות כנדרש מבלי להתייחס לעובדה שזה מצולע כלל אלא כפונקציה בינארית. נימוק: האיבר הראשון והאחרון אינם משפיעים אחד על משנהו לכן אם נתאים $1 - Green, 0 - Red$, אז נקבל הגדרה רקורסיבית בדומה לסעיף א בשאלה 1.

עקרון זה מתקיים באופן זהה עבור h אך עבור $n-2$ איברים.

אז נקבל,

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + f(n-2) & n \geq 3 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 3 \end{cases}$$

כהפונקציה הרקורסיבית. במהלך הראשון יש לנו שני אפשרויות אז לפי עקרון החיבור, אזי,

$$j(x) = f(x-1) + f(x-3)$$

לכן

$$j(10) = f(9) + f(7) = F_{11} + F_9 = 34 + 89 = 123$$

כאשר F_iהוא המספר ה־i בסדרת פיבונאצ'י.

3. הוכחה: נוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: כאשר $n = 2$ (אם $n = 1$ יהיה חילוק ב־0 כי האיבר ה־0 בסדרת פיבונאצ'י הוא 0). נקבל ע"פ הנוסחא:

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^{n+1}$$

שמתקיים $F_{n+1} = \frac{F_n^2+(-1)^{n+1}}{F_{n-1}} \Rightarrow F_3 = \frac{1+1}{1} = 2$. זו תוצאה זהה לנוסחאת פיבונצ'י הקלאסית ־ $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

נניח נכונות עבור$1 < n$. נוכיח עבור $n+1$. נעזר ב"נוסחאת פיבונאצי הקלאסית", כדלהלן,

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n &= (F_{n+1} + F_n)\,F_n = F_{n+1}F_n + F_n^2 = F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - (-1)^{n+1} \\ &= F_{n+1}\,(F_n + F_{n-1}) - (-1)^{n+1} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

בזו הסתיימה האינדוקציה.

.. ■

4.

(א) נתבונן ב$n \geq 1$ מעגלים במישור כך שכל שניים מהם נחתכים (בשתי נקודות שונות לא משיקות אחת לשנייה) ואף שלשה מעגלים אינם נחתכים בנקודה אחת.

נשים לב כי כל פעם שמוסיפים מעגל אנחנו מעבירים קו החותך כל מעגל הקיים במישור כפי שמתואר לעיל. כל נקודת חיתוך כזו מצביעה על קטע כלשהו שהקו מפצל שטח לשני שטחים. אז מתווספים $2 \circ n$ שטחים חדשים רקורסיבית כאשר מוסיפים מעגל נוסף.

אזי פונקציית הרקורסיה הינה:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + 2n \quad n \geq 1 \\ R_1 = 2 \\ R_2 = 4 \end{cases}$$

(ב) נבצע הצבה חוזרת:

$$R_{n+1} = R_n + 2n = R_{n-1} + 2(n-1) + 2n = R_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) + 2n$$

$$= R_1+2\circ 1+...+2(n-2)+2(n-1)+2n = 2+\sum_{i=1}^{n} 2i = 2+2\sum_{i=1}^{n} i = 2+2\frac{n(n+1)}{2} = 2+n(n+1)$$

הוכחה: נוכיח את נוסחאת הנסיגה האינדוקציה:
בסיס האינדוקציה: עבור $n=0$, נקבל

$$R_1 = 2+0(1+0) = 2$$

עבור $n=1$ נקבל

$$R_2 = 2+1(1+1) = 4$$

זה אכן מתקיים.
נניח נכונות עבור $n \geq 3$. נוכיח עבור $n+1$:

$$R_{n+2} = R_{n+1}+2(n+1) \underbrace{=}_{By-assumption} 2+n(n+1)+2(n+1) \underbrace{=}_{Distribution} 2+(n+2)(n+1)$$

כנדרש. $\blacksquare$

.5

יהיו $n \geq 3$ נקודות על מעגל כך שהמרחק בין כל שתי נקודות סמוכות זהה. נחשב את כמות המצולעים המשוכללים על n הנקודות הנ"ל.

$$f(n) = \lfloor \frac{n}{2}(1-\frac{1}{p_1})...(1-\frac{1}{p_k}) \rfloor$$

<u>נימוק:</u> צריך לבנות מצולע שכל צלעותיו שוות אורך. נמספר את הנקודות $(0,1,2...n)$. לא משנה מהיכן נתחיל כי נוכל לסובב את המצולע. התחלנו מאפס בה"כ, ועשינו קפיצה באורך j אז כל שאר הקפיצות חייבות להיות באותו אורך j כדי שזה יהיה מצולע כדרוש. אילו j אינו זר ל־n אז נחזור לנקודת המוצא ללא מעבר על כל הנקודות במצולע. אם מספר כלשהו מחלק את nאז נדרש רק המנה הזו כדאי לחזור חזרה לנקודת המוצא. מספר זה בהכרח קטן מ־nלכן לא עברנו על כל הנקודות במצולע. מאחר והמספר זר הוא לא יחזור חזרה לנקודת המוצא לאחר פחות מ־n קפיצות, <u>אילו </u>הוא כן אז הוא לא היה זר ל־n. נקביל זו לחשבון מודולו n. נתחיל מ־0 ונוסיף j בכל איטרציה. כאשר נגיע ל־n, הגענו חזרה לנקודה 0 במצולע (נקודצ המוצא), וכל סכימה כזו אינה מניבה את אותו המספר פעמיים. כלומר ישנה דרך יחידה לעשות זו. אך נוכל גם לשלים את אותו ה־j ל־n ונקבל איבר זר אחר ל־n שהוא אותו המצולע רק בכיוון ההפוך. אז יש הצגה יחידה לזוג מספרים זרים ל־n השונים זה מזה. אזי עלינו לחלק את תוצאת פונקציית אויילר ב־2.