מבוא למרחבים מטרים וטופולוגיים – ת"ב 3

רן

שם פרטי

קירי

שם משפחה

311532238

תעודת זהות

23/11/2016

תאריך הגשה

11

קבוצת תרגול

שאלה 1:

נתון (X,τ) מרחב טופולוגי, ונרצה להוכיח לכל $A,B\subseteq X$ מתקיים – אם $A\subseteq B$ אז $\operatorname{int}A\subseteq\operatorname{int}B$.

תהא, אם כן, נקודה $x\in\operatorname{int}A$. על פי הגדרת $\operatorname{int}A$, נובע כי קיימת סביבה $x\in U\subseteq A$. אך כאמור מתקיים, מיחסי ההכלה $U\subseteq B$ ולכן U היא סביבה מתאימה של x גם ביחס ל-B, ולכן מתקיים $x\in\operatorname{int}B$. זה נכון לכל $x\in\operatorname{int}A$ ולכן, כאמור:

$$\boxed{\operatorname{int}A\subseteq\operatorname{int}B}$$

שאלה 2:

נתון (X,τ) מרחב טופולוגי, וכן נתונות $A,B\subseteq X$ תתי קבוצות של X.

א. נראה כי $\boxed{\overline{\operatorname{int}A}\not\subseteq\operatorname{int}\bar{A}}$. נתבונן במרחב $(\mathbb{R}^2,\tau)$ עבור הטופולוגיה האוקלידית הסטנדרטית, ונתבונן בכדור $B(0,R)$ עבור $R>0$ כלשהו. נשים לב כי $\overline{B(0,R)}=B[0,R]$. מצד שני:

$$\operatorname{int}\bar{A}=B(0,R)$$

ולעומת זאת מתקיים:

$$\overline{\operatorname{int}A}=\overline{B(0,R)}=B[0,R]$$

נראה עתה, כי $\boxed{\operatorname{int}\bar{A}\not\subseteq\overline{\operatorname{int}A}}$. נתבונן במרחב $(\mathbb{R},\tau)$ עבור הטופולוגיה האוקלידית הרגילה ובתת הקבוצה $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. נשים לב כי:

$$\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$$

וזאת משום שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים שבכל סביבה שמכילה אותו, קיים מספר רציונלי (כתכונה של המספרים הממשיים). ולכן מתקיים:

$$\operatorname{int}\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$$

שכן לכל $x\in\mathbb{R}$ בפרט קיימת סביבה (נניח, קטע פתוח) המכילה אותו והמוכלת כולה ב-$\bar{\mathbb{Q}}$.
אך לעומת זאת, מתקיים:

$$\overline{\operatorname{int}\mathbb{Q}}=\emptyset$$

וזאת משום שבכל סביבה של כל מספר רציונלי קיים מספר אי רציונלי, ולכן $\operatorname{int}\mathbb{Q}=\emptyset$ אך מכאן שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים שבאף סביבה שלו אין איבר של $\operatorname{int}\mathbb{Q}$ ולכן זאת הקבוצה הריקה. כלומר ההכלה הנ"ל אכן אינה מתקיימת.

ב. $x\in\overline{X\setminus A}\iff$ לכל סביבה $x\in U\in\tau$ מתקיים $U\cap X\setminus A\neq\emptyset\iff$ לכל סביבה $x\in U\in\tau$ מתקיים $U\not\subseteq\operatorname{int}A\iff x\notin\operatorname{int}A$ (על פי הגדרה, אם $x\in\operatorname{int}A$ אזי קיימת סביבה כלשהי, אך הנ"ל לא ייתכן), וזאת אם ורק אם $x\in X\setminus\operatorname{int}A$. כלומר, מתקיים:

$$\boxed{X\setminus\operatorname{int}A=\overline{X\setminus A}}$$

ג. $x\in X\setminus\bar{A}\iff x\notin\bar{A}\iff$ קיימת סביבה $x\in U\in\tau$ כך שמתקיים $U\cap A=\emptyset\iff$ קיימת סביבה $x\in U\in\tau$ כך שמתקיים $U\subseteq X\setminus A\iff x\in\operatorname{int}(X\setminus A)$. לכן מתקיים:

$$\boxed{X\setminus\bar{A}=\operatorname{int}(X\setminus A)}$$

ד. $x\in\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B\Longleftarrow x\in\operatorname{int}A$ או $x\in\operatorname{int}B\Longleftarrow$ קיימת סביבה $x\in U\subseteq A$ או $x\in V\subseteq B\Longleftarrow$ מתקיים $U\subseteq A\cup B$ או $V\subseteq A\cup B\Longleftarrow x\in\operatorname{int}(A\cup B)\Longleftarrow\boxed{\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B\subseteq\operatorname{int}(A\cup B)}$

נראה כי $\boxed{\operatorname{int}(A\cup B)\not\subseteq\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B}$. יהא המרחב המטרי $(\mathbb{R},\tau)$ עם הטופולוגיה האוקלידית הרגילה.
נתבונן בקבוצות $A=(0,1),B=[1,2)$ ונשים לב כי:

$$\operatorname{int}A=(0,1)\quad\operatorname{int}B=(1,2)$$

אך:

$$\operatorname{int}(A\cup B)=\operatorname{int}(0,2)=(0,2)\not\subseteq(0,1)\cup(1,2)$$

ה. $x\in\operatorname{int}(A\cap B)$ $\Leftrightarrow$ קיימת סביבה $x\in U\subseteq A\cap B$ $\Leftrightarrow$ קיימת סביבה $x\in U$ כך ש-$U\subseteq A$ וגם $U\subseteq B$ $\Leftrightarrow$ $x\in\operatorname{int}A\cap\operatorname{int}B$. לכן מתקיים:

$$\boxed{\operatorname{int}A\cap\operatorname{int}B=\operatorname{int}(A\cap B)}$$

ו. $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$ $\Leftrightarrow$ לכל סביבה $x\in U\in\tau$ מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$ או לכל סביבה $x\in V\in\tau$ מתקיים $V\cap B\neq\emptyset$ $\Leftrightarrow$ לכל סביבה $x\in U\in\tau$ מתקיים $(U\cap A)\cup(U\cap B)=U\cap(A\cup B)\neq\emptyset$ $\Leftrightarrow$ $x\in\overline{A\cup B}$.
כלומר:

$$\boxed{\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cup B}}$$

ז. $x\in\overline{A\cap B}$ $\Leftarrow$ לכל סביבה $x\in U\in\tau$ מתקיים $U\cap(A\cap B)\neq\emptyset$ $\Leftrightarrow$ לכל סביבה $x\in U\in\tau$ מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$ וגם $U\cap B\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ $x\in\bar{A}$ וגם $x\in\bar{B}$ כלומר $x\in\bar{A}\cap\bar{B}$. לכן נסיק: $\boxed{\bar{A}\cap\bar{B}\supseteq\overline{A\cap B}}$
נראה כי ההיפך אינו נכון. נתבונן באותו המרחב שעסקנו בו עד עתה, ונתבונן בתתי הקבוצות בו:

$$A=(0,1)\quad B=(1,2)$$

ונשים לב כי:

$$\bar{A}=[0,1]\quad\bar{B}=[1,2]$$

כלומר:

$$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1\}\nsubseteq\emptyset=\overline{A\cap B}$$

כלומר אכן $\boxed{\bar{A}\cap\bar{B}\nsubseteq\overline{A\cap B}}$

<u>שאלה 3:</u>

נרצה להראות כי המרחבים המטריים l_1,l_2 הם מרחבים ספרביליים.

לשם כך, נרצה למצוא תת קבוצה בת מניה של l_1,l_2 שהיא צפופה במרחבים אלה. כלומר, תת קבוצה A עבורה לכל סביבה פתוחה U נקבל כי $U\cap A\neq\emptyset$.

נתבונן לשם כך בתת הקבוצה:

$$A=\left\{(a_1,a_2,\cdots)\middle|\begin{matrix}\forall i\in\mathbb{N} & & a_i\in\mathbb{Q}\\ \exists N\in\mathbb{N} & \forall n\geq N & a_n=0\end{matrix}\right\}$$

כלומר, קבוצת כל הסדרות שמורכבות מאיברים רציונליים, והן סופיות, במובן זה שהחל מנקודה סופית מסוימת הן אפס זהותית. קבוצה זו, היא בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. נראה כי קבוצה זו צפופה ב-l_1.

תהא $b\in l_1$ סדרה כלשהי ו-$r>0$ כלשהו. אנו יודעים כי היות ו-$b\in l_1$, מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|=L<\infty$$

אך מכאן שמתקיים תנאי קושי להתכנסות, כלומר שניתן לבחור $N\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$\sum_{n=N}^{\infty}|b_n|\leq\frac{r}{2}$$

עתה, לכל $1\leq i\leq N$, נוכל להתבונן בסביבה $\left(b_i-\frac{r}{2N},b_i+\frac{r}{2N}\right)$ ולהסיק כי ניתן לבחור $a_i\neq b_i$ רציונלי בסביבה זו (נובע מצפיפות הרציונליים ב-$\mathbb{R}$). כך נבנה סדרה חדשה $a=(a_1,a_2,\cdots)$ המורכבת ממספרים רציונליים שכל אחד מהם נמצא בסביבת $\frac{r}{2N}$ מ-b_i המתאים לו. החל מהאיבר ה-N נגדיר את כולם להיות 0. לכן נקבל כי $a\in A$ מחד, ומאידך:

$$\|a-b\|_{l_1}=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|=\sum_{i=1}^{N}|a_i-b_i|+\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|\overset{=0}{a_i}-b_i\right|$$

$$<\sum_{i=1}^{N}\frac{r}{2N}+\sum_{i=N+1}^{\infty}|b_i|\leq N\frac{r}{2N}+\frac{r}{2}=r$$

כלומר $a\in B(b,r)$ וכך ניתן להראות את הנ"ל לכל סביבה פתוחה ב-l_1. כלומר, נוכל להסיק כי A צפופה ב-l_1 ולכן, מפאת היות A בת מניה, נסיק כי l_1 הינו מרחב ספרבילי.

באותו אופן, ניתן להתבונן ב-l_2 באמצעות אותה תת קבוצה A. הפעם, בהנתן $b\in l_2$ ו-$r>0$, נבנה את הסדרה על ידי כך שנבחר N (מובטח כמובן שיש כזה), עבורו:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}b_i^2<\frac{r^2}{2}$$

ולכל $1\leq i\leq N$ נתבונן בסביבה $\left(b_i-r\sqrt{\frac{1}{2N}},b_i+r\sqrt{\frac{1}{2N}}\right)$ וגם עתה מובטח לנו כי ניתן לבחור a_i רציונלי בסביבה זו. וגם הפעם נקבל כי בהגדרת הסדרה $l_2\ni a=(a_1,a_2,\cdots)$ כך שהחל מהאיבר ה-$N+1$ כל האיברים מתאפסים, נקבל כי:

$$\|a-b\|_{l_2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|a_i-b_i|^2+\sum_{i=N+1}^{\infty}\left|\overset{=0}{a_i}-b_i\right|^2}$$

$$<\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{r^2}{2N}+\sum_{i=N+1}^{\infty}|b_i|}\leq\sqrt{N\frac{r^2}{2N}+\frac{r^2}{2}}=r$$

כלומר $a\in B(b,r)$ וניתן לבנות סדרה כזו כמובן לכל $b\in l_2$ ולכל $r>0$, ולכן נסיק כי בכל סביבה פתוחה ב-l_2 קיים איבר מ-A כפי שהגדרנו אותה – ולכן A צפופה גם ב-l_2, ומהיותה בת מניה נובע כי l_2 ספרבילית.

שאלה 4:

נתון, אם כן, (X,d) מרחב מטרי ספרבילי ונתונה $A\subseteq X$ כלשהי. נרצה להראות כי גם המרחב $(A,d|_A)$ הוא מרחב ספרבילי. נפתח בכך שמהנתון נובע כי קיימת תת קבוצה בת מניה של X, נסמנה S, שהינה צפופה ב-(X,d).

נתבונן עתה, בקבוצת כל הכדורים הפתוחים בעלי מרכז שהוא איבר ב-S ורדיוס $\frac{1}{n}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אשר חותכים את A, שנסמנה S'. נשים לב כי קבוצה זאת בת מניה שכן ניתן לבנות את הפונקציה:

$$f:S\times\mathbb{N}\mapsto S'\quad f\left(\overset{\in S}{s},n\right)=B\left(s,\frac{1}{n}\right)\cap A$$

נרצה להראות עתה כי קבוצה זו צפופה ב-$(A,d|_A)$. לשם כך, יהא $a\in A$ שרירותי כלשהו. אזי $a\in X$ בפרט ולכן מצפיפות S, נובע כי בבחירת $B(a,r)$, לכל $r>0$, קיים $s\in S$ כך ש-$s\in B(a,r)$.

אם כך, נבחר $r > 0$ קטן מספיק, כך שקיים כדור המקיים $s \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. אך מכאן שמתקיים, כמובן $a \in B\left(s, \frac{1}{n}\right)$ ולכן מתקיים:

$$a \in B\left(s, \frac{1}{n}\right) \cap A \in S'$$

כלומר, לכל a, ניתן למצוא $s \in S$ כך שהכדור $B\left(s, \frac{1}{n}\right) \cap A \in S'$ מכיל את a כלומר יתקיים:

$$s \in B\left(s, \frac{1}{n}\right) \cap A \subseteq B(a, r)$$

כלומר, S' צפופה ב-A ביחס ל-$d|_A$, והראינו קודם כי מדובר בקבוצה בת מניה, ועל כן $(A, d|_A)$ ספרבילי כנדרש.