<u>תורת החבורות – תרגיל בית 11 – פתרון</u>

<u>שאלה 3:</u>

<u>תשובה</u>: לא

<u>דוגמא</u>:

$$C=S_4,\quad B=\{id,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(4\,2),(1\,4)(3\,2)\},\quad A=\{id,(1\,2)(3\,4)\}$$

$C \triangleleft B$ כי הינה תת-חבורה ומכילה כל התמורות בנות מבנה מעגלי 2.2 ורק אותן (חוץ מיחידה).

$B \triangleleft A$ כי הינה תת-חבורה מאינדקס 2 או כיוון ש- B אבלית.

אך A אינה תת-חבורה נורמלית ב- C כי $xAx^{-1}\neq A$ עבור $x=(1\,3)$.

<u>שאלה 4:</u>

מחלקת צמידות של S_5 הינה תת-קבוצה שמכילה את כל התמורות מאותו מבנה מעגלי ורק אותן.

לכן עלינו למצוא את כל המבני המעגלי האפשריים ב- S_5.

$$\begin{aligned}&cl(id)=\{id\},\ cl(1\,2),\ cl(1\,2\,3),\ cl(1\,2\,3\,4),\ cl(1\,2\,3\,4\,5),\\ &cl((1\,2)(4\,5\,3)),\ cl((1\,2)(4\,3))\end{aligned}$$

<u>שאלה 6:</u>

אם $A\in G$ לכסינה בעלת ערכים עצמים α,β, אז קיימת P הפיכה כך ש

$P^{-1}AP=diag(\alpha,\beta)\in H$. אחרת $A\in G$ אינה לכסינה בעלת ערך עצמי α מר"א שווה ל-2

ור"ג שווה ל-1, ואז קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\in H$.

מכאן $G=\left(\bigcup_{\alpha\in\mathbb{C}} cl\left(\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{C}} cl\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right)\right)$.

שאלה 7:

קיים מונומורפיזם $\varphi: G \to S_G$ המוגדר ע"י $\varphi(x) = \rho_x$ לכל $x \in G$, כאשר $\rho_x(a) = xa$ לכל $a \in X = G$.

נניח בשלילה כי קיים $x \in G$ הצמוד לעצמו, אז התמורות $\varphi(x^{-1}) = \rho_{x^{-1}}$, $\varphi(x) = \rho_x$ בנות אותו מבנה מעגלי. $x \in G$, לכן הינו איבר מסדר אי-זוגי $\Leftarrow$ ρ_x מכפלה של מעגלים מאורך אי-זוגי: $\rho_x = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \cdots, \alpha_{1,2n_1+1}) \cdots (\alpha_{t,1}, \alpha_{t,2}, \cdots, \alpha_{t,2n_t+1})$, אז $\rho_{x^{-1}} = (\alpha_{1,2n_1}, \alpha_{1,2n_1-1}, \cdots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2n_1+1}) \cdots (\alpha_{t,2n_t}, \alpha_{t,2n_t-1}, \cdots, \alpha_{t,1}, \alpha_{t,2n_t+1})$.

תהי ψ תמורה המצמידה, אז

$$\psi = (\alpha_{1,1}\ \alpha_{1,2n_1})(\alpha_{1,2}\ \alpha_{1,2n_1-1}) \cdots (\alpha_{1,n_1}\ \alpha_{1,n_1+1}) \cdots (\alpha_{t,1}\ \alpha_{t,2n_t})(\alpha_{t,2}\ \alpha_{t,2n_t-1}) \cdots (\alpha_{t,n_t}\ \alpha_{t,n_t+1})$$

ובכך מצאנו $\psi \in G$ איבר מסדר $2 \quad \Leftarrow \quad |G|$ מסדר זוגי.

שאלה 8:

לכל $x \in G$ נגדיר העתקה $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(G)$ ע"י $\varphi(x) = \varphi_x$, כאשר φ_x הומומורפיזם (אזימורפיזם) פנימי המקיים $\varphi_x(a) = x^{-1}ax$ לכל $a \in G$.

φ הינו הומומורפיזם, כי לכל $x, y \in G$ מתקיים כי לכל $a \in G$

$$\begin{aligned}(\varphi(x)\varphi(y))(a) &= (\varphi_x\varphi_y)(a) = \varphi_x(\varphi_y(a)) = \varphi_x(ya) = x(ya) = \\ &= (xy)a = \varphi_{xy}(a) = \varphi(xy)(a)\end{aligned}$$

בכך קיבלנו כי לכל $a \in G$ $\quad (\varphi(x)\varphi(y))(a) = \varphi(xy)(a) \quad \Leftarrow \quad \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$.

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi_x \mid x \in G\} = \mathrm{Inn}(G)$, ונישאר לחשב גרעין:

$$\begin{aligned}&x \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = id \Leftrightarrow \varphi_x = id \Leftrightarrow (\forall a)(\varphi_x(a) = a) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall a)(x^{-1}ax = a) \Leftrightarrow (\forall a)(ax = ax) \Leftrightarrow x \in Z(G)\end{aligned}$$

ואז, לפי המשפט הראשון של ההומומורפיזם מתקיים:

$$G/Z(G) = G/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Imm}\,\varphi = \mathrm{Inn}(G)$$

שאלה 9:

לכל $x \in G$ נגדיר העתקה $\varphi : G \to S_N$ ע״י $\varphi(x) = \varphi_x$, כאשר φ_x מקיים $\varphi_x(a) = x^{-1}ax$

לכל $a \in N$. φ הינה פונקציה מ- N לתוך N כי לכל $x \in G, a \in N$ $\varphi_x(a) = x^{-1}ax \in N$.

יותר מכך, φ הינו הומומורפיזם, כי לכל $x, y \in G$ מתקיים כי לכל $a \in N$

$$\left(\varphi(x)\varphi(y)\right)(a) = \left(\varphi_x\varphi_y\right)(a) = \varphi_x\left(\varphi_y(a)\right) = \varphi_x(ya) = x(ya) =$$
$$= (xy)a = \varphi_{xy}(a) = \varphi(xy)(a)$$

בכך קיבלנו כי לכל $a \in N$ $\left(\varphi(x)\varphi(y)\right)(a) = \varphi(xy)(a) \quad \Leftarrow \quad \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$.

בנוסף לכך $\operatorname{Im}\varphi = \left\{\varphi_x \middle| x \in G\right\} \subseteq \operatorname{Aut}(N)$, כי לכל $x \in G$ φ_x איזומורפיזם של N (בפרט, תמורה על N):

1) הינו הומומורפיזם כצמצום של $\varphi_x \in \operatorname{Inn}(G)$

2) הינו חח״ע כצמצום של $\varphi_x \in \operatorname{Inn}(G)$ -- פונקציה חח״ע

3) הינו על, כי $\varphi_x(N) = x^{-1}Nx = N$.