# קומבינטוריקה - תרגיל מס' 8

פתרון

## תרגיל מס' 1

בודקים את ידיעת השפות עברית, ערבית, רוסית ואנגלית בקבוצה מסוימת של 100 אנשים. מתברר, שאיש אינו יודע את כל ארבע השפות, וכל יודעי העברית יודעים גם אנגלית. הוכח שיש 10 אנשים היודעים אותן שפות בדיוק.

## פתרון

נשתמש בעקרון שובך יונים להוכחת הטענה. לפי ניסוח השאלה, יש להוכיח כי תנאי כלשהו מתקיים עבור 10 אנשים, ולכן נגדיר את האנשים כיונים ונדאג שהגדרת התאים תתאים לדרישת התנאי בשאלה. התנאי מדבר על כך ש - 10 אנשים יודעים בדיוק את אותן שפות, ולכן נגדיר את התאים להיות קבוצת השפות אותן יכול אדם לדעת.

כמה קבוצות שפות יכולים האנשים מן השאלה לדעת? סך כל הקבוצות האפשריות של שפות הוא: $2^4 = 16$. אבל, נתון כי איש אינו יודע את כל השפות - ז"א צריך להוריד קבוצה אחת - וכמו כן, כל יודעי העברית יודעים גם אנגלית, ולכן נוריד את הקבוצות בהן יש עברית ואין אנגלית. יש בדיוק: $2^2$ קבוצות כאלה, ולכן סה"כ נותרנו עם 11 קבוצות אפשריות.

נגדיר את האנשים להיות היונים, את קבוצות השפות להיות התאים ו"נכניס" אדם לתא, לפי קבוצת השפות אותן הוא יודע. ברור, כי כל אדם ייכנס לתא אחד בלבד, וכי כל האנשים ייכנסו לתאים. כיוון שמתקיים:

$$100 = 9 \cdot 11 + 1$$

נובע מעקרון שובך היונים, כי יש תא עם 10 אנשים לפחות, ז"א: יש 10 אנשים (לפחות) אשר יודעים אותן שפות בדיוק.

מ.ש.ל

## תרגיל מס' 2

א. ברבוע שאורך צלעותיו 1, נתונות $n^2 + 1$ נקודות ($n$ - מספר טבעי כלשהו). הוכח, שקיימות שתי נקודות ביניהן, המרוחקות זו מזו מרחק של $\frac{\sqrt{2}}{n}$ לכל היותר.

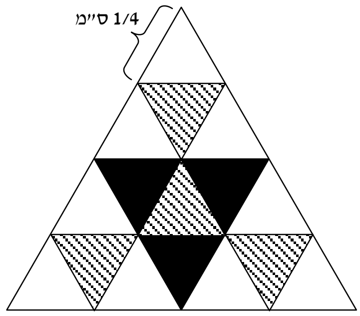
ב. במשולש שווה-צלעות שאורך צלעותיו 1, נתונות $n^2+1$ נקודות ($n$ - מספר טבעי כלשהו). הוכח, שקיימות שתי נקודות ביניהן, המרוחקות זו מזו מרחק של $\frac{1}{n}$ לכל היותר.

## פתרון

א. נחלק את הריבוע הנתון ל-$n^2$ משבצות ריבועיות בגודל $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$ כל אחת. נתונות לנו $n^2 + 1$ נקודות ולכן, לפי עקרון שובך היונים, יש ביניהן שתי נקודות באותה משבצת. במקרה כזה המרחק בין נקודות אלה הוא לכל היותר כאורך אלכסון המשבצת, שהוא $\frac{\sqrt{2}}{n} = \sqrt{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2}$, כנדרש.

מ.ש.ל

ב. נחלק את המשולש ל"משבצות" משולשות על ידי העברת $n - 1$ קוים מקבילים במרחקים שוים, במקביל לכל אחת משלוש הצלעות. למשל, עבור $n = 4$ החלוקה תראה כך:




קל להוכיח על ידי תכונות של ישרים מקבילים שבצורה זו אנו מקבלים חלוקה של המשולש למשולשים שוי צלעות שאורך צלעותיהם $\frac{1}{n}$ (בדקו!). מכאן ששטח כל אחד מהמשולשים קטן פי $n^2$ משטח המשולש הגדול, ולכן יש $n^2$ משולשים בחלוקה. נתונות לנו $n^2+1$ נקודות ולכן יש שתיים שנמצאות באותו משולש קטן. המרחק בין שתי נקודות אלה הוא לכל היותר אורך הצלע של המשולשים הקטנים שהוא $\frac{1}{n}$, כנדרש.

מ.ש.ל

## תרגיל מס' 3

הוכח: בכל קבוצה של 50 בני אדם, יש שמונה שהפרש הגילים בין כל שניים מהם (בשנים שלמות) מתחלק בשבע.

### פתרון

בשאלה זו, קשה לזהות במבט ראשון אילו יונים ואילו תאים להגדיר, כיוון שאין מדובר בתכונה שנדרשת ממספר מסוים של בני אדם, אלא מתכונה שנדרשת מזוגות של בני אדם.

אבל, אפשר להסתכל על תכונה שקולה לזו הדרושה בשאלה.

**טענה:**

בין המספרים $a_1, \ldots, a_n$ - ההפרש בין כל שניים מתחלק בשבע אם"ם לכל המספרים אותה שארית בחלוקה בשבע.

**הוכחת הטענה:**

כיוון ראשון: אם לכל המספרים אותה שארית חלוקה בשבע, אזי ההפרש בין כל שניים מהם מתחלק בשבע.
נסמן את המספרים בצורה הבאה:

$$\begin{gathered} a_1 = 7 \cdot k_1 + r; \\ a_2 = 7 \cdot k_2 + r; \\ \vdots \\ a_n = 7 \cdot k_n + r \end{gathered}$$

ואז ההפרש בין כל שניים מהם הוא מן הצורה:

$$a_i - a_j = (7 \cdot k_i + r) - (7 \cdot k_j + r) = 7 \cdot (k_i - k_j)$$

וזוהי אכן תוצאה אשר מתחלקת בשבע.

כיוון שני: אם הפרש כל שניים מבין המספרים מתחלק בשבע, אז לכל המספרים אותה שארית בחלוקה בשבע.
נניח, בשלילה, כי בין המספרים קיימים שניים אשר להם שארית שונה בחלוקה בשבע. למשל:

$$\begin{gathered} a_i = 7 \cdot k_i + r_1, \quad 0 \le r_1 \le 6; \\ a_j = 7 \cdot k_k + r_2, \quad 0 \le r_2 \le 6 \\ r_1 \ne r_2 \end{gathered}$$

נתבונן בהפרש של שני מספרים אלו:

$$a_i - a_j = (7 \cdot k_i + r_1) - (7 \cdot k_j + r_2) = 7 \cdot (k_i - k_j) + (r_1 - r_2)$$

וכיוון ש: $r_1 \neq r_2$, ברור כי: $r_1 - r_2 \neq 0$, ז"א ההפרש בין שני מספרים אלו אינו מתחלק ב - $7$, בסתירה לנתון.
לכן, ההנחה אינה נכונה.
הטענה הוכחה.

מן הטענה אנו למדים, כי אפשר לנסח את הבעיה באופן הבא:

הוכח: בכל קבוצה של $50$ בני אדם, יש שמונה ששארית החלוקה של גיליהם ב - $7$ זהה.

כעת, השאלה מובילה אותנו לשימוש ישיר בעקרון שובך היונים: התאים הם שאריות החלוקה ב - $7$ האפשריות, היונים הם בני האדם ו"נכניס" אדם לתא לפי שארית החלוקה של גילו ב - $7$. באופן זה, מכניסים כל יונה לתא אחד בלבד וכל היונים נכנסות לתאים, וכיוון ש:

$$50 = 7 \cdot 7 + 1$$

לפי עקרון שובך היונים, אנו יודעים כי יש תא עם $8$ יונים לפחות, ז"א $8$ בני אדם (לפחות) עם אותה שארית חלוקה של גיליהם ב - $7$, ולפי הטענה: הפרש הגילאים בין כל שניים מהם מתחלק ב - $7$.

מ.ש.ל

<u>תרגיל מס' 4</u>

ילד מקבל בתחילת החודש $50$ ש"ח דמי-כיס. בכל אחד מבין $30$ הימים, הוא מוציא מספר שלם וחיובי של שקלים, מתוך דמי הכיס שקיבל. הוכח שיש תקופה רצופה של מספר כלשהו של ימים במשך החודש, שבמהלכה הוא מוציא בסך הכל $9$ ש"ח בדיוק.

<u>פתרון:</u>

נסמן:

$a_1$ - כמות הכסף שהילד בזבז ביום הראשון.

$a_2$ - כמות הכסף שהילד בזבז ביום הראשון והשני.

$\vdots$

$a_{30}$ - כמות הכסף שהילד בזבז בימים ראשון עד ה-$30$.

נשים לב כי

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{30} \leq 50$$

נתבונן עתה במספרים

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 9, a_2 + 9, \ldots, a_{30} + 9$$

אלה הם $60$ מספרים בין $1$ ל-$59$ (למה?), לכן יש ביניהם שניים שווים. לכל $i, j$, $a_i \neq a_j, \ a_i + 9 \neq a_j + 9$ ולכן השווים הם מהצורה $a_j = a_i + 9$. מכאן שבין הימים $i+1$ עד $j$ הילד בזבז בדיוק $9$ ש"ח, כנדרש.

מ.ש.ל

__תרגיל מס' 5__

עשרה אנשים רוקדים במעגל. סכום הגילים שלהם הוא $250$. הוכח שיש שלושה אנשים סמוכים במעגל שסכום גיליהם לכל היותר $75$.

__פתרון:__

נסמן את גילאי האנשים $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. מתקיים

$$(x_1+x_2+x_3)+(x_2+x_3+x_4)+\ldots+(x_9+x_{10}+x_1)+(x_{10}+x_1+x_2)=3\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_{10})=750$$

בסכום יש $10$ שלשות, לכן יש שלשה שסכומה הוא לכל היותר $75 = 750/10$. כל שלשה מייצגת סכום גלאים של שלושה אנשים עוקבים במעגל, ולכן קיבלנו שיש שלושה אנשים כנדרש.

מ.ש.ל

__תרגיל מס' $6^{**}$__

הוכח כי לכל טבעי $n$ קיים מספר פיבונאצ'י $f_m$ המתחלק ב-$n$.

__פתרון:__

נתבונן בשאריות הזוגות הבאים: $(f_0,f_1),(f_1,f_2),\ldots,(f_{n^2},f_{n^2+1})$ בחלוקה ב-$n$. נשים לב כי זוג מספרים $(a,b)$ יכול לתת $n^2$ שאריות שונות בחלוקה ב-$n$, (זוגות $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ נקראים שונים אם $a_1 \neq a_2$ או $b_1 \neq b_2$). כתבנו $n^2+1$ זוגות של מספרי פיבונאצ'י עוקבים ומהאמור נובע, לפי עקרון שובך היונים, כי יש ביניהם שני זוגות $(f_k,f_{k+1})$ ו-$(f_l,f_{l+1})$ עם $k<l$, כך ש-

$$f_k \equiv f_l\ (mod\ n),\ \ f_{k+1} \equiv f_{l+1}\ (mod\ n)$$

מבין כל הזוגות האפשריים המקיימים את התנאי נקח את שני הזוגות עם ה-$k$ המינימלי.

__טענה:__ עבור שני זוגות כאלה $k=0$.

__הוכחה:__ נניח בשלילה כי $k>0$. הנתון

$$f_k \equiv f_l\ (mod\ n),\ \ f_{k+1} \equiv f_{l+1}\ (mod\ n)$$

ולכן

$$f_{k-1} \equiv f_{k+1}-f_k \equiv f_{l+1}-f_l \equiv f_{l-1}\ (mod\ n)$$

והזוג $(f_{k-1},f_k),(f_{l-1},f_l)$ מקיים את התנאי, בסתירה למינימליות של $k$. ומכאן שהטענה נכונה, כלומר $f_0 \equiv f_l\ (mod\ n),\ \ f_1 \equiv f_{l+1}\ (mod\ n)$ ובפרט

$$f_l \equiv f_0 \equiv 0\ (mod\ n)$$

מ.ש.ל