פתרון דף תרגילים 2 – אלגברה לינארית ב'

1. תחילה נשים לב כי A בעלת פולינום אופייני x^3 שהינו מכפלת גורמים לינאריים מעל הממשיים ועל כן A ניתנת לשילוש. נעקוב אחר הלמה שראינו בכיתה על מנת למצוא בסיס בו ל- A מטריצה מייצגת שהיא משולשת עליונה. הערך העצמי היחיד של A הינו 0. נמצא וקטור עצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. נמצא וקטור v_2 ב$F^3 \setminus span_F\{v_1\}$. נשים לב כי $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2a-2b+2c \\ 2a-3b+2c \end{pmatrix} \in span_F\{v_1\}$ אמ"ם $2a-2b+2c = 0, -b = 2a-3b+2c$ או $b = a+c$. נבחר $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. באופן דומה נמצא v_3 עבורו $Av_3 \in F^3 \setminus span_F\{v_1, v_2\}$. לדוגמא: $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2v_1 + 2v_2$. קיבלנו:

$Av_1 = 0, Av_2 = v_1, Av_3 = -2v_1 + 2v_2$ ולכן עבור המטריצה P אשר עמודותיה הן v_1, v_2, v_3 נקבל $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. A מאפסת את הפולינום $x^2 - x$ ולכן $m_A | x^2 - x$. מכאן האפשרויות הינן $m_A = x, x-1, x^2 - x$. m_A הינו בהכרח מכפלת גורמים לינאריים זרים ועל כן A לכסינה.

3. הפולינום האופייני Δ_A הינו ממעלה 3 (אי זוגית) ולכן בעל שורש α מעל הממשים. כיוון שA אינה ניתנת לשילוש מעל הממשים נקבל $\Delta_A = (x-\alpha)q(x)$ כאשר q פולינום ריבועי עם מקדמים ממשים אשר אי פריק מעל הממשיים. מכאן כי לq שני שורשים צמודים שאינם ממשים ולכן שונים. קיבלנו כי לΔ_A שלושה שורשים שונים בשדה המרוכבים ולכן A לכסינה מעל המרוכבים.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ הינה מטריצה משולשת שאינה אלכסונית. ל A שני ערכים עצמיין 1,2 ולכן A לכסינה.

5. א. בדף תרגילים קודם ראינו כי הפולינום המינימלי של האופרטור T הינו הפולינום המינימלי של המטריצה A. כיוון שA לכסינה הפולינום המינימלי של A הינו מכפלת גורמים לינאריים זרים ועל כן כזה גם הפולינום המינימלי של האופרטור T, כלומר T לכסין.

ב. נגדיר את האופרטור $S: V \to V$ ע"י $S(B) = BA$. באופן דומה לסעיף א' האופרטור S גם הוא לכסין. האופרטורים T, S מתחלפים שכן: $ST(B) = ABA = TS(B)$ ועל כן לכסינים במשותף. תהיינה M_S, M_T המטריצות המייצגות של S, T בהתאמה עפ"י הבסיס הסטנדרטי של V. תהי P מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}TP, P^{-1}SP$ אלכסוניות. מכאן $P^{-1}(T-S)P = P^{-1}TP - P^{-1}SP$ גם היא אלכסונית. מכאן האופרטור $U = T - S$ לכסין.

6. נעזר בזהות: $\Delta_M(t) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+n}p_{n-i}(M)t^i$ כאשר M היא מטריצת $n \times n$ ו $p_i(M)$ הינו סכום המינורים $i \times i$ הראשיים של המטריצה M. מהתרגיל הקודם נובע $\Delta_{BA}(t) = t^{n-m}\Delta_{AB}(t)$ ולכן:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+n}p_{n-i}(BA)t^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+m}p_{m-i}(AB)t^{i+n-m}$$

בפרט נקבל כי המקדמים של t^{n-m} שווים, כלומר:
$(-1)^{m+n-m}p_{n-(n-m)}(BA) = (-1)^m p_m(AB)$ או $p_m(AB) = p_m(BA)$. AB הינה מטריצה $m \times m$ ולכן בעלת מינור יחיד $m \times m$ שהוא $det(AB)$.

קיבלנו $\det(AB) = p_m(BA)$. נבחר תת קבוצה α של m אינדקסים מתוך $\{1, \dots, n\}$ ונשים לב כי המטריצה המרכיבה את המינור המתאים לα בתוך BA הינה המטריצה $B_\alpha A^\alpha$ ומכאן:

$$\det(AB) = p_m(BA) = \sum_\alpha \det(B_\alpha A^\alpha) = \sum_\alpha \det(A^\alpha)\det(B_\alpha)$$

כנדרש.