אלגברה ב – צורת ג'ורדן 1 – תרגול המשך

נושאים:
1. פירוק פרימרי (הוכחת המשפט)
2. תרגילים

פירוק פרימרי (הוכחת המשפט)

<u>הגדרה:</u> יהי V מ"ו מעל F, יהי T אופרטור. W<V נקרא T-אינווריאנטי אם T(W) < W.

<u>משפט הפירוק הפרימרי:</u> יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי, יהי T אופרטור. נניח כי הפולינום המינימלי של T הוא $p=p_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{r_k}$ כאשר p_i פולינומים אי פריקים מתוקנים ללא גורמים משותפים. עבור $W_i=ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$ מתקיים:
1. $V=W_1\oplus\ldots\oplus W_k$.
2. W_i הוא T-אינווריאנטי.
3. עבור $T_i=T|_{W_i}$ הפולינום המינימלי של T_i הוא $p_i^{r_i}$.

<u>הוכחה:</u> נסמן $f_i=\frac{p}{p_i^{r_i}}$, אזי הפולינומים f_i שונים מאפס והמחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1, לכן קיימים g_i כך ש – $\sum_{i=1}^k g_i f_i=1$. נגדיר $h_i=f_i g_i$ ו – $E_i=h_i(T)$.
מתקיים $E_1+\ldots+E_k=(h_1+\ldots+h_k)(T)=1$ (הצבת T בפולינום הקבוע 1 נותן 1). עבור $i\neq j$ מתקיים $E_i E_j=h_i\cdot h_j(T)=q\cdot f_i\cdot f_j(T)=0$ (כי $f_i\cdot f_j$ מתחלק ב – p), לכן E_i נותנים פירוק של $V=E_1(V)\oplus\ldots\oplus E_k(V)$ (E_i היטלים). נוכיח כי $E_i(V)=W_i$.
נניח $v\in Image(E_i)$ אז $E_i(v)=v$ לכן $p_i^{r_i}(T)v=p_i^{r_i}(T)h_i(T)v=0$ כי $p_i^{r_i}f_i=p$ הפולינום המינימלי של T. נניח $v\in Ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$. $v=E_1(v)+\ldots+E_k(v)$, אבל עבור $j\neq i$ מתקיים ש – $f_j g_j$ מתחלק ב - $p_i^{r_i}$, לכן $E_j(v)=h_j(T)(v)=0$ לכן $v=E_i(v)$ (לכן (1) נכון).
W_i אינווריאנטי תחת T – עבור $v\in W_i=ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$ מתקיים
$p_i^{r_i}(T)(Tv)=T\,p_i^{r_i}(T)(v)=0$ לכן $T(v)\in W_i$. (לכן (2) נכון).
ברור כי $p_i^{r_i}$ מאפס את T_i מההגדרה של W_i. נניח $g\in F[x]$ מקיים $g(T_i)=0$, אז $g(T)\cdot f_i(T)=0$ (כי f_i מאפס את T על כל W_j ל - $j\neq i$ ו – g מאפס על W_i), לכן $g\cdot f_i$ מתחלק ב – p, ז"א $p_i^{r_i}f_i$ מחלק את $g\cdot f_i$, לכן $p_i^{r_i}$ מחלק את g.

תרגילים

1. יהי $T:V\rightarrow V$ ליניארי. נניח שעבור $v\in V$ מתקיים $T^k(v)=0$ אבל $T^{k-1}(v)\neq 0$.
הוכח כי:
   1.1. הקבוצה $S=\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ בלתי תלויה ליניארית.
   1.2. $W=span(S)$ הוא תת מרחב T-אינווריאנטי.
   1.3. הצמצום $\hat{T}=T|_W$ הוא נילפוטנטי מדרגה k.
   1.4. מהי המטריצה המייצגת את $\hat{T}$ בבסיס S?

<u>פתרון:</u>
1. נסתכל על הצירוף הליניארי $0=a_0 v+\ldots+a_{k-1}T^{k-1}(v)$. נפעיל את T^{k-1} על הצירוף הליניארי הנ"ל, ונקבל $0=a_0 T^{k-1}(v)+a_1 T^k(v)+\ldots=a_0 T^{k-1}(v)$. מהנתון כי $T^{k-1}(v)\neq 0$ נובע ש – $a_0=0$. כעת הפעלת T^{k-2} על הצירוף לעיל (והעובדה כי $a_0=0$) תראה באותו אופן ש – $a_1=0$ ונמשיך כך לכל המקדמים.
2. מספיק להראות לכל איבר בבסיס של W כי תמונתו ב -W. הבסיס של W הוא כמובן S (לפי סעיף 1). ל - $j<k-1$ נקבל $T\left(T^j(v)\right)=T^{j+1}(v)\in S<W$. ל – $j=k-1$

נקבל $T^{k-1}(v)=0\in W$ לכן W הוא מרחב T-אינווריאנטי.

3. שוב, מספיק להראות על הבסיס. נסמן את דרגת הנילפוטנטיות של $\hat{T}$ ב – m. נשים לב כי $\hat{T}^k(u)=0$ לכל $u\in S$ לכן $m\le k$. מצד שני, ל – $n<k$ נקבל כי $\hat{T}(u)=T^n(u)\neq 0$ לכן $\hat{T}^n\neq 0$, בפרט $m\ge k$ ולכן $m=k$.
4. אם נסמן $v_i=T^{i-1}(u)$ ל- $1\le i\le n$ נקבל כי $\hat{T}(v_i)=v_{i+1}$ ומשם הצורה הקנונית...

<u>הערה:</u> למעשה התרגיל הזה משקף את המבנה של אופרטור נילפוטנטי. נזכור כי אם V מ"ו ממימד n ו – T אופרטור, אז יש פירוק של V לסכום ישר של מרחבים T-ציקליים. אם T נילפוטנטית, הבסיס של כל מרחב כזה הוא בדיוק כמו הקבוצה S, ו – T מתפרקת לסכום ישר של אופרטורים נילפוטנטיים על המרחבים ה – T-ציקליים.

2. יהי V מ"ו ממימד n מעל F, יהי T אופרטור נילפוטנטי מדרגה m. הוכח כי מספר הרכיבים בפירוק הציקלי של V ביחס ל – T הוא בדיוק המימד של המרחב העצמי של הערך העצמי 0.

<u>פתרון:</u> נרשום $V=Z(u_1;T)\oplus...\oplus Z(u_r;T)$. נראה כי ל – V יש בדיוק r וקטורים עצמיים בת"ל עם ערך עצמי 0.
לכל $1\le i\le r$, הבסיס של $Z(u_i;T)$ הוא $u_i, T(u_i), ..., T^{k_i}(u_i)$ כאשר $k_i<m$. נראה ש – $T^{k_i+1}(u_i)=0$. אנו יודעים כי $T^{k_i+1}(u_i)=a_0u_i+...+a_{k_i}T^{k_i}(u)$. נניח כי יש $0\le j\le k_i$ כך ש- $a_j\neq 0$. נבחר את j המינימלי הנ"ל, אז $T^{k_i+1}(u_i)=a_jT^j(u_i)+...+a_{k_i}T^{k_i}(u)$. נפעיל את T^{m-j-1} על השיוויון לעיל ונקבל

$0=T^{k_i+m-j}(u_i)=a_jT^{m-1}(u_i)+...+a_{k_1}T^{k_i+m-j-1}(u)=a_jT^{m-1}(u)$ לכן $a_j=0$ - סתירה.

קיבלנו אם כן, שבכל $Z(u_i;T)$ האבר $T^{k_i}(u_i)$ הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי 0. כמובן ל - $i\neq j$ האברים $T^{k_j}(u_j), T^{k_i}(u_i)$ בת"ל (כי הם ברכיבים שונים בסכום ישר) לכן מימד המרחב העצמי של 0 הוא לפחות r.
נניח כעת כי w הוא וקטור עצמי של T, עם ערך עצמי 0, אז
$w=a_{0,1}u_1+a_{1,1}T(u_1)+...+a_{k_1-1,1}T^{k_1}(u_1)+a_{2,0}u_2+a_{2,1}T(u_2)+...+a_{k_r,r}T^{k_r}(u_r)$ (כי זה הבסיס של V). נפעיל את T על השיוויון ונקבל
$0=a_{0,1}T(u_1)+...+a_{k_1-1,1}T^{k_1}(u_1)+...+a_{0,r}T(u_r)+...+a_{k_r-1,r}T^{k_r}(u_r)$. זה צירוף ליניארי מתאפס של קבוצה בת"ל (חלק מבסיס), לכן כל המקדמים בצירוף הליניארי הם אפס, ז"א $w=a_{k_{1,1}}T^{k_1}(u_1)+...+a_{k_r,r}T^{k_r}(u_r)$, ז"א $\{T^{k_1}(u_1), ..., T^{k_r}(u_r)\}$ פורשים את המרחב העצמי של 0, לכן מימד המרחב העצמי של 0 עבור T הוא בדיוק r.

3. הראה כי שתי מטריצות נילפוטנטיות מסדר 3x3 הן דומות אם ורק אם יש להן אותה דרגת נילפוטנטיות. הראה ע"י דוגמה כי הטענה לא נכונה עבור מטריצות נילפוטנטיות מסדר 4x4.

<u>פתרון:</u> נניח תחילה ש – $A\in M_{3x3}(F)$ נילפוטנטית. A מגדירה אופרטור נילפוטנטי על $V=F^3$. הפירוקים הציקליים האפשריים של V הם:
א. $V=Z(u;A)$ (ז"א V הוא מרחב A-ציקלי). במקרה הזה, A נילפוטנטית מדרגה 3.
ב. $V=Z(u_1;A)\oplus Z(u_2;A)$, אז אחד מהרכיבים הציקליים הוא ממימד 2, ולכן A נילפוטנטית מדרגה 2.
ג. $V=Z(u_1;A)\oplus Z(u_2;A)\oplus Z(u_3;A)$ - במקרה זה A היא מטריצת האפס.
לכל אחת מהקבוצות מתאימה צורה קנונית אחרת של מטריצה נילפוטנטית. A, B נילפוטנטיות מאותו סדר אם ורק אם שתיהן מאותו סוג ולכן דומות (עם אותה צורה קנונית).

מה קורה עבור $A\in M_{4x4}(F)$ נילפוטנטית? הפירוקים הציקליים האפשריים הם:

א. $V=Z(u;A)$ - שוב, V הוא A-ציקלי ו – A מדרגה 4.
ב. $V=Z(u_1;A)\oplus Z(u_2;A)$ כאשר $dim(Z(u_i;A))=3$ ל – $i\in\{1,2\}$ - A מדרגה 3.
ג. $V=Z(u_1;A)\oplus Z(u_2;A)$ כאשר $Z(u_1;A),Z(u_2;A)$ שניהם ממימד 2. במקרה זה A נילפוטנטית מדרגה 2.
ד. $V=Z(u_1;A)\oplus Z(u_2;A)\oplus Z(u_3;A)$ כאשר $dim(Z(u_j;A))=2$ ל – $j\in\{1,2,3\}$ כלשהו ו – 1 לשני האינדקסים האחרים – במקרה זה A נילפוטנטית מדרגה 2.
ה. $V=Z(u_1;A)\oplus...\oplus Z\vee(u_4;A)$ - במקרה זה A מטריצת האפס.

לכן ברור כי יש שתי מטריצות נילפוטנטיות שונות מאותה דרגה (דרגה 2 במקרה זה) שאינן דומות (אינן בעלות אותה צורה קנונית).
איך בונים דוגמה: נניח $V=span\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, אז נגדיר T_A,T_B ע"י
$T_A(v_1)=0,\ T_A(v_2)=v_1,\ T_A(v_3)=0,\ T_A(v_4)=v_3$
$T_B(v_1)=T_B(v_2)=T_B(v_3)=0,\ T_B(v_4)=v_3$
. ברור כי T_A,T_B נילפוטנטיות מדרגה 2 אבל המטריצות המייצגות בבסיס שבחרנו אינן דומות.