תרגיל בית 2 ־ חשבון אינפיניטיסמלי II
אינטגרלים מסוימים והמשפט היסודי
הגשה עד יום חמישי 10.4.14, בשעה 23:57

תרגיל 1:

תהא $f : I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות $n+1$ פעמים בקטע I המכיל את הנקודות a ו־x. הראו כי

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

והסיקו מכאן את שארית לגרנז'.

תרגיל 2:

תהא $f(x) = \arctan(e^x)$.

1. שרטטו את הפונקציה $f(x)$ בתחום $[-\pi, \pi]$ (אתם רשאים להיעזר במחשב).
2. חשבו את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (רמז ־ היעזרו בסימטריה של הפונקציה).

תרגיל 3:

1. הראו שלכל $-1 \le y \le 1$ מתקיים ש $\arcsin(y) + \arccos(y) = \frac{\pi}{2}$.
2. הראו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים השוויון הבא

$$\int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})dt = \frac{\pi}{4} .$$

תרגיל 4:

תהא $f(x)$ פונקציה גזירה ונסמן $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

1. הוכיחו שאם f היא פולינום מדרגה אי זוגית אז קיים x_0 עבורו $F(x_0) = 0$.
2. הראו שאם קיימים $x_2 < x_1$ כך ש $F(x_1) = F(x_2)$, אז קיימת נקודה $x_1 < c < x_2 + 1$ כך ש $f'(c) = 0$.

.

תרגיל 5:

בדקו התכנסות עבור כל אחד מהאינטגרלים הבאים.

1. $\int_1^{\infty} \frac{x^2-2}{x\sqrt{x^5-x^4+x^2-1}}dx$.
2. $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx$.
3. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^4|}}$.

תרגיל 6:

מצאו עבור אלו קבועים p,q יש התכנסות.

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cos^p(x)}dx$.
2. $\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x\ln^p(x)\ln^q(\ln(x))}dx$.
3. $\int_{0}^{1} \frac{x^p}{\int_0^x \ln(1+\sin(t)+t)dt}dx$.
4. $\int_{1}^{\infty} \frac{x^p}{\int_0^x \ln(1+arctg(t)+t)dt}dx$.

תרגיל 7:

1. יהיו $f,g,h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ כך ש $\int_0^\infty f(t)dt$ ו־$\int_0^\infty h(t)dt$ קיימים וסופיים ו g אינטגרבילית ב $[0,t]$ לכל $t\geq 0$. הראו שאם $f\leq g\leq h$ אז $\int_0^\infty g(t)dt$ קיים וסופי.