קומבינטוריקה – תרגיל 5

הודעה: תרגול הכנה למבחן יהיה ב-20.7.2000 בשעה 10:00 בחדר 619 באמאדו.

1. א. <u>תת-גרפים מושרים:</u> ברגע שבחרנו את קבוצת הקודקודים בתת-גרף מושרה, קבוצת הצלעות כבר מוכתבת. צלע בין שני קודקודים בתת-גרף תופיע אם ורק אם היא מופיעה בגרף המקורי. (למעשה זה מקור השם גרף מושרה. הוא מושרה ע"י קבוצת קודקודיו.) לכן מספר התת-גרפים המושרים שווה למספר התת-קבוצות של קבוצת הצלעות, שהוא

$$2^4 = 16$$

שימו לב שבספירה זו ספרנו גם את הגרף הריק, שקבוצת קודקודיו וקבוצת צלעותיו שתיהן $\emptyset$. אם לא סופרים גרף זה התשובה היא 15.

<u>תת-גרפים בכלל:</u>

4 קודקודים: $\binom{4}{4}2^{\binom{4}{2}} = 64$ תת-גרפים,

3 קודקודים: $\binom{4}{3}2^{\binom{3}{2}} = 32$ תת-גרפים,

2 קודקודים: $\binom{4}{2}2^{\binom{2}{2}} = 12$ תת-גרפים,

קודקוד אחד: 4 תת-גרפים,

סה"כ 112 תת-גרפים, ואם כוללים גם את התת-גרף הריק התשובה היא 113.

ב. הוכיחה שבעץ כל תת-גרף קשיר הוא מושרה:

יהי T עץ ויהי T' תת-גרף קשיר. יהיו u,v קודקודים ב-T' המחוברים ב-T. צ"ל ש-u ו-v מחוברים ב-T'.

הצלע המחברת בין u ל-v ב-T מהווה מסלול מ-u ל-v ב-T, וכיוון ש-T עץ, זהו מסלול יחיד. T' קשיר, לכן יש מסלול מ-u ל-v ב-T', אבל בשל היחידות, מסלול זה מורכב מהצלע בין u ל-v. מכאן ש-u ו-v מחוברים ב-T'. מש"ל

2. כמומלץ, נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n<3$ הטענה לא אומרת הרבה. עבור $n=3$ הטענה הוכחה בתירגול. עבור $n>3$ נוכיח בהסתמך על הנחת האינדוקציה באופן הבא:

נגדיר

$$t_0 = t_n \cap t_{n-1}$$

מהנתון t_0 אינו ריק, והראינו בכיתה ש-t_0 עץ. כמו כן, בשל נכונות הטענה ל-$n=3$, מתקיים לכל $i=1,2,\dots,n-2$

$$t_i \cap t_0 = t_i \cap t_n \cap t_{n-1} \neq \phi$$

לכן העצים $t_0, t_1, \dots, t_{n-2}$ נחתכים בזוגות ולפי הנחת האינדוקציה יש להם קודקוד משותף, ולפי הגדרת t_0, קודקוד זה משותף ל-$t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$. מש"ל

3. הרעיון הוא להתאים ילד לכל קודקוד, כך שיתקיימו תנאי הלמה של שפרנר וכן כל שני קודקודים המחוברים בצלע יותאמו לאותו ילד או לשני ילדים <u>שלא</u> מכירים זה את זה.

בוחרים שלושה ילדים כלשהם $a \in X_1, b \in X_2, c \in X_3$ ומתאימים אותם לשלושת הקודקודים בפינות המשולש. בוחרים שני ילדים רחוקים $d, e \in X_1 \cup X_2$, ומתאימים אותם לשני הקודקודים על שפת המשולש שבין a ל-b באופן הבא: אם d אינו מכיר את a נתאים אותו לקודקוד ליד זה שהותאם ל-a. אחרת לא יתכן ש-e מכיר את a, ונתאים את e לקודקוד ליד זה שהותאם ל-a. באופן דומה מתאימים את e או את d לקודקוד ליד זה שהותאם ל-b, אין בעיה אם זהו אותו ילד שנבחר קודם. באופן דומה בוחרים שני ילדים רחוקים $f, g \in X_1 \cup X_3$, ומתאימים אותם לשני הקודקודים על שפת המשולש שבין a ל-c ובוחרים שני ילדים רחוקים $h, i \in X_3 \cup X_2$, ומתאימים אותם לשני הקודקודים על שפת המשולש שבין c ל-b.

עד כה התאמנו ילדים לקודקודים על שפת המשולש. נבחר $j, k, l \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$ רחוקים בזוגות ונתאים אותם לקודקודים בפנים המשולש באופן הבא:

לכל קודקוד v בפנים המשולש, נשים לב שהוא מחובר לשני קודקודים בדיוק על שפת המשולש (נקרא להם u ו-w). מכיוון ש-k,j,i רחוקים, יש אחד מביניהם שלא מכיר את הילד המותאם ל-u ולא את הילד המותאם ל-w. נתאים ילד זה ל-v.

בזאת גמרנו להתאים ילדים לכל קודקודי הגרף. לכל קודקוד נתאים מספר 2,1, או 3 עפ"י הקבוצה ממנה בא הילד המותאם לקודקוד ולפי הלמה של שפרנר, קיים משולש בגרף שקודקודיו מותאמים לשלושת המספרים 1,2,3. שלושת הילדים המתאימים לקודקודים אלה באים מקבוצות שונות (ולכן ילדים שונים) ולא מכירים זה את זה (כי הם מותאמים לקודקודים המחוברים בגרף) ואלה הילדים המבוקשים.