אינפי 2 - דף עזר בנושא גזירות של פונקציות של שני משתנים

הגדרה: יהא $u=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה: $u_1^2+u_2^2=1$. נגזרת מכוונת בכיוון u היא:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

(בתנאי שהגבול קיים).

נגזרת חלקית היא מקרה פרטי עבור $u=(0,1)$ או $u=(1,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

הגדרה: $f(x,y)$ תיקרא גזירה (דיפרנציאבילית) בנקודה (x_0,y_0) אם קיימים קבועים A,B כך שלכל h,k:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+Ah+Bk+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $\alpha(h,k)\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$.

משפטים:

1. אם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) אז היא רציפה בה.
2. אם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) אז יש לה בה נגזרות חלקיות, ומתקיים:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

3. אם ל - $f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות בסביבת (x_0,y_0) ונגזרות אלה רציפות בנקודה (x_0,y_0), אז $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0).
4. אם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0), אז הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$ בכיוון $u=(u_1,u_2)$ בנקודה (x_0,y_0) קיימת, ונתונה ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=u_1\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)+u_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

סימון: הווקטור $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ נקרא הגרדיאנט של f ומסומן ב - ∇f.

בסימון זה, משפט 4 ינוסח: f גזירה $\Leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}=\nabla f\cdot\vec{u}$ (מכפלה סקלרית).

5. אם $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0), $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות בסביבה, וקיימות $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ בסביבת הנקודה (x_0,y_0), והן רציפות, אז הן שוות.
6. כלל השרשרת: תהא $f(x,y)$ גזירה. נסמן: $F(t)=f(x(t),y(t))$, כאשר $x(t),y(t)$ גזירות.

אזי F גזירה ו - $F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$.

הכללה: תהיינה $g(x,y),x(u,v),y(u,v)$ פונקציות גזירות.

נסמן: $G(u,v)=g(x(u,v),y(u,v))$. אזי G גזירה ו -

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$