

### קומבינטוריקה - סמסטר חורף תשס"ג - תרגיל מס' 3

להגשה עד ה - 13.11.02

#### תרגיל מס' 1

נסמן ב-  $D(n)$  את מספר התמורות על  $[n]$  ללא נקודות שבת. נסמן  $D(0) = 1$ .

א. הוכיחו

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D(n-k)$$

ב. הוכיחו על סמך שיקולים קומבינטוריים כי

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

ג. השתמשו ב- ב' על מנת להוכיח באינדוקציה את הנוסחה ל-  $D(n)$  שקיבלנו בכיתה.

#### תרגיל מס' 2

בכיתה 25 תלמידים דוברי שלוש שפות זרות: 14 דוברי ספרדית, 12 דוברי צרפתית, 6 דוברי ספרדית וצרפתית, 5 דוברי גרמנית וספרדית, 2 דוברי כל השפות. כל ששת התלמידים שהם דוברי גרמנית מדברים גם שפה אחרת. כמה תלמידים בכיתה אינם דוברי שפה זרה?

#### תרגיל מס' 3

כמה פתרונות שלמים חיוביים יש למשוואה:  $x_1 + x_2 + x_3 = 30$  בתנאים הבאים:

$$4 \leq x_1 < 10, \quad 7 \leq x_2 < 15, \quad 10 \leq x_3 < 25$$

#### תרגיל מס' 4

א. כמה מספרים שלמים וחיוביים הקטנים מ- 1,000,000 אינם ריבועים שלמים או חזקות שלישיות שלמות או חזקות רביעיות שלמות?

(כלומר מצאו את גודל הקבוצה:  $\{x < 10^6 : x \neq y^2, z^3, w^4\}$ ).

ב. בכמה מספרים בני 4 ספרות יש לפחות ספרה אחת 1, ספרה אחת 2, וספרה אחת 3?

ג. כמה מספרים בין 1 ל- 6000 אינם מתחלקים לא ב- 3 ולא ב- 5?

ד. כמה מספרים שלמים וחיוביים הקטנים מ- 30 זרים ל- 30?

#### תרגיל מס' 5

יהא  $q \leq p$ . חשבו:

$$\sum_{j=q}^p (-1)^{j+q} \binom{j}{q} \binom{p}{j}$$

## תרגיל מס' 6

א. מהו מספר השלשות הסדורות  $(A, B, C)$  של קבוצות המוכלות ב- $[n]$  שמקיימות:  
 $A \cup B \cup C = [n]$  (כלומר, איחודן הוא כל  $[n]$ )?

פתרו בשתי דרכים: האחת - חישוב ישיר, השניה - בעזרת עקרון ההכלה וההדחה, והראו כי:

$$7^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \cdot 2^{3(n-i)}$$

ב. מהו מספר ה- $k$ -יות הסדורות  $(A_1, \dots, A_k)$  של קבוצות המוכלות ב- $[n]$  שמקיימות:  
 $A_1 \cup \dots \cup A_k = [n]$ ?

פתרו בשתי דרכים: האחת - חישוב ישיר, השניה - בעזרת עקרון ההכלה וההדחה, והראו כי:

$$\left(2^{2^k-1}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \cdot 2^{k(n-i)}$$

## תרגיל מס' 7

הא  $f(m, n)$  מספר הפונקציות מ- $[m]$  ל- $[n]$  שהן על. הוכיחו כי  $f(m, n)$  מתחלק ב- $n!$ .

## תרגיל מס' 8

א. בכמה אופנים ניתן לסדר את המספרים  $1, 2, \dots, 9$  בשורה, כך שאף מספר זוגי לא יהיה במקומו הטבעי?

ב. בכמה אופנים ניתן לסדר את המספרים  $1, 2, \dots, 9$  בשורה, כך שאף אחד מהבלוקים 23, 45, 678 אינו מופיע (אבל, אפשר שיהיה הרצף: 786, למשל)?

ג. בכמה אופנים ניתן לסדר את המספרים  $1, 2, \dots, 9$  בשורה, כך שאף אחד מהבלוקים 34, 45, 678 אינו מופיע?

## תרגיל מס' 9

כל אחד מ- $n$  המבקרים בתיאטרון מפקיד את כובעו ואת מטרתו במלתחה. בצאתם, מחזיר המלתחן לכל אחד מהם כובע ומטריה. בכמה אופנים יכול המלתחן להחזיר את הצידוד כך ששום אדם לא יקבל גם את כובעו וגם את מטרתו בחזרה?



בהצלחה!