<u>חבורות</u> <u>חופשיות</u>

יהי X קבוצה. אנו נגדיר חבורה F (Free) של הקבוצה X.

אם $X=\phi$ נאמר כי F היא החבורה הטריוויאלית $\langle e \rangle$.

אם $X \neq \phi$ נבחר קבוצה המסומנת ב X^{-1} (באופן אבסטרקטי) רק ש $X^{-1} \cap X = \phi$ ו $|X^{-1}| = |X|$. לכן קיימת לנו פונקציה חח"ע ועל מ X על X^{-1}. לכל איבר $x \in X$ נסמן ב x^{-1} את תמונתו ב X^{-1}.

כעת יש לנו איברים $x_1, \dots x_n \dots$ ו $x_1^{-1}, \dots x_n^{-1} \dots$. כעת נבחר קבוצה S זרה ל $X \cup X^{-1}$ בת איבר אחד המסומן ב 1.

לאיברים $x_1, \dots x_n$, $x_1^{-1} \dots x_n^{-1}$, 1, נקרא <u>השפה</u>

<u>הגדרה:</u> מילה (word) על X

היא סדרה $(a_1, a_2, \ldots\ldots)$

כך ש $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ וכך שעבור

מקום כלשהו $n_0 \in \mathbb{N}$ בסדרה כל האיברים אחריו

הם 1 כלומר $a_k = 1$ עבור $k > n_0$.

הסדרה. $(1, \ldots 1, \ldots)$ נקראת <u>המילה</u>

<u>הריקה</u>. ונסמן ב 1.

<u>הגדרה:</u> נאמר כי מילה $(a_1, \ldots a_n \ldots)$

ב $X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ היא מצומצמת אם:

(1) לכל $x \in X$ לא קיים מצב ש x ; x^{-1}

מופיעים אחד אחרי השני בסדרה.

(2) אין מופעים לא טריוויאליים של 1. כלומר

אם $a_k = 1$ אזי $a_i = 1$

עבור כל $i > k$.

לכן כל מילה לא ריקה היא מהצורה

$$(x_1^{\lambda_1}, x_2^{\lambda_2}, \dots, x_n^{\lambda_n}, 1, 1, \dots, 1, \dots)$$

כאשר $x_i \in X$ $\lambda_i \in \{1,-1\}$

בקיצור נסמן מילה זו כ

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$$

ונמחק את סדרת ה $\{1, \dots\}$

נאמר כי שתי מילים

$$x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$$

ו

$$y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$$

שוות זו לזו אם:

$x_i = y_i$ (1)

$\lambda_i = \delta_i$ (2)

$n = m$ (3)

נסתכל על אוסף המילים המצומצמות על X ונסמן

אוסף זה ב $F(X)$

על $F(X)$ נגדיר פעולה בינרית

אם $w \in F(X)$ מילה אזי

$$1 \cdot w = w = w \cdot 1$$

ואם
$$w_1 = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$
$$w_2 = y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$$

אזי
$$w_1 \cdot w_2 = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$$

אבל ביטוי זה יכול להיות לא מילה מצומצמת

כי יתכן צמצום בין $x_n^{\lambda_n}$ ו $y_1^{\delta_1}$

כי אם $x_n^{\lambda_n} = x$ ו $y_1^{\delta_1} = x^{-1}$

אזי נקבל $x \cdot x^{-1}$ וזה אסור.

לכן נצמצם עד כמה שאפשר.

דוגמא:

$$w_1 = x_1 x_2^{-1} x_3$$

$$w_2 = x_3^{-1} x_2 x_4$$

אזי $$w_1 \cdot w_2 = x_1 x_2^{-1} x_3 x_3^{-1} x_2 \cdot x_4 = x_1 x_4$$

וההגדרה המדויקת היא: אם $m \leq n$

ויהי k המספר הגדול ביותר כך ש

$$x_{m-j}^{\lambda_{m-j}} = y_{j+1}^{-\delta_{j+1}} \qquad 0 \leq k \leq m$$

עבור $j = 0, 1, \dots, k-1$ אזי

$$\left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m}\right)\left(y_1^{\delta_1} \cdots y_n^{\delta_n}\right) = \begin{cases} x_1^{\lambda_1} \cdots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}} \cdot y_{k+1}^{\delta_{k+1}} \cdots y_n^{\delta_n} & k < m \\ y_{m+1}^{\delta_{m+1}} \cdots y_n^{\delta_n} & k = m \\ 1 & k = m = n \end{cases}$$

משפט: $F(X)$ היא חבורה. החבורה נקראת החבורה החופשית על X.

(1) הוכחת קיום יחידה

(2) הוכחת קיום הפכי: אם $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \in F(X)$ מילה מצומצמת אזי

$$x_n^{-\lambda_n} \cdots x_1^{-\lambda_1}$$

היא ההפכית

(3) נותר להראות כי הכפל אסוציאטיבי.

הנסיון הפשוט הוא לעשות חשבון
ולכן בגלל הצמצומים החשבון מסובך
לכן כדאי להפעיל את הראש!!!

ולכן נגדיר פונקציה מ F אל עצמו
באופן הבא $X \ni x \in F$; $\delta = \pm 1$

נגדיר $\tau_{x^\delta} : F \longrightarrow F$

באופן

$$\tau_{x^\delta}(x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}) = \begin{cases} x^\delta x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} & x^\delta \neq x_1^{-\delta_1} \\ x_2^{\delta_2} \cdots x_n^{\delta_n} & x^\delta = x_1^{-\delta_1} \\ = 1, \ n = 1 & \text{אם} \end{cases}$$

לכן τ_{x^δ} היא פרמוטציה של $F(X)$

כשההפכית של τ_{x^δ} היא $\tau_{x^{-\delta}}$.

תהי S_F חבורת הפרמוטציות של F

שהיא חבורה ; $S_F \supset F_0$ הוא
תת החבורה הנוצרת רק על ידי τ_{x^δ}.

העתקה $\varphi: F(X) \longrightarrow F_0$

הניתנת ע"י $1 \xrightarrow{F} 1_F$

$$x_1^{\delta_1}\dots x_n^{\delta_n} \longrightarrow \sigma_{x_1^{\delta_1}}\cdots\sigma_{x_n^{\delta_n}}$$

אז העתקה <u>על</u> והיא <u>הומומורפיזם</u>.

מקיימת

$$\varphi(w_1 w_2) = \varphi(w_1)\cdot\varphi(w_2)$$

φ היא חח"ע כי אם $w \longrightarrow \sigma_1$

כלומר σ_1 אינו מזיז שום דבר הרי

$w=1$ כי אחרת אם $w = x_1^{\delta_1}\dots x_n^{\delta_n}$

אזי $\sigma_w = \sigma_{x_1^{\delta_1}}\cdots\sigma_{x_n^{\delta_n}}\cdot(1) = x_1^{\delta_1}\dots x_n^{\delta_n}$

<u>לכן</u> קיימת לפי העתקה חח"ע ועל φ

מ $F(X)$ על $S_F \supset F_0$

ששומרת על הכפלה $\varphi(w_1 w_2) = \varphi(w_1)\cdot\varphi(w_2)$

<u>אבל</u> הכפל ב F_0 הוא <u>אסוציאטיבי</u>

כלומר $F_{w_1}\circ(F_{w_2}\circ F_{w_3}) =$

$$(F_{w_1}\circ F_{w_2})\circ F_{w_3}$$

ולכן המילה ב $F(X)$ המתאימה ל

$$F_{w_1}\circ(F_{w_2}\circ F_{w_3})$$

זהה למילה המתאימה ל

$$(F_{w_1}\circ F_{w_2})\circ F_{w_3}$$

כי הפונקציה φ היא חח"ע **ועל**

ואין מילה אחרת המתאימה להם.

כלומר $F(X)$ חבורה.

הערות:

(1) אם $|X|\geq 2$ אזי $F(X)$ **אינה** אבלית

כי אם $x,y\in X$ $x\neq y$ אזי

$$x^{-1}y^{-1}xy$$

היא מילה מצומצמת ולכן **אינה** 1

כלומר $xy \neq yx$.

(2) לכל אלמנט ב $F(X)$ יש <u>סדר</u>

אין סופי (חוץ מאשר מ 1)

כי $(w \cdot w \cdot w \dots)$

אבל מאוד מסובכת

(3) אם $X = \{a\}$ אז $F(X)$

הוא החבורה הציקלית האין סופית $\langle a \rangle$.

(4) <u>משפט</u> (קשה) כל תת חבורה של חבורה

חופשית היא חופשית!

לא נוכיח.

(5) אם $|X| = n$ אז נאמר כי $F(X)$

נוצרת סופית.

<u>הגדרה:</u> תהי G חבורה ! $a_1, \dots a_n \in G$

נאמר כי $\{a_1, \dots, a_n\}$ יוצרים של G

אם $G = \{$ סגור של $a_1 \dots a_n$ תחת פעולת החבורה והפכי $\}$.

(6) החבורה $F(X)$ נוצרת ע"י X.

<u>משפט:</u> תהי $F(X)$ החבורה החופשית על X.
ותהי $i: X \longrightarrow F(X)$ העתקת ההכלה.
אם G חבורה <u>כלשהי</u>!!

$$f: X \longrightarrow G$$

העתקה של קבוצות. אזי קיים <u>הומומורפיזם</u>
<u>יחיד</u> φ $\varphi : F(X) \longrightarrow G$
כך ש $\varphi \circ i = f$

<u>הוכחה:</u> נגדיר את φ

כך $\varphi(1) = e \in G$

ואם $x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n} \in F(X)$ מילה מצומצמת

אזי $\varphi\left(x_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\delta_n}\right) = (f(x_1))^{\delta_1} * \cdots * (f(x_n))^{\delta_n} \in G$

כל כזה אלמנט מוגדר היטב ב G
כאשר $*$ הכפל ב G.

$w_1 = x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n}$
$w_2 = y_1^{\lambda_1} \dots y_m^{\lambda_m}$ כי אם הומומורפיזם הוא φ

$$\varphi(w_1 \cdot w_2) =$$

$$\varphi\left(x_1^{\delta_1} \dots x_n^{\delta_n} y_1^{\lambda_1} \dots y_m^{\lambda_m}\right) =$$

מדומזם

$$(f(x_1))^{\delta_1} \cdot (f(x_n))^{\delta_n} (f(y_1))^{\lambda_1} \dots (f(y_m))^{\lambda_m} =$$

מדומזם

$$= \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2)$$

וברור כי אם $x_i \in X$ אזי $\varphi \circ i(x_i) =$

$$= f(x_i) \in G$$

ולכן $\varphi \circ i = f$

אם קיים עוד הומומורפיזם $\eta : F(X) \to G$

המקיים $\eta \circ i = f$

אזי קיים!

$$\eta(x_1^{\delta_1}\ldots x_n^{\delta_n}) = \eta(x_1^{\delta_1})\ldots\eta(x_n^{\delta_n}) =$$

$$(\eta(x_1))^{\delta_1}\ldots\eta(x_n)^{\delta_n} =$$

$$\eta\circ i(x_1)^{\delta_1}\ldots\eta\circ i(x_n)^{\delta_n} =$$

$$f(x_1)^{\delta_1}\ldots f(x_n)^{\delta_n} =$$

$$\varphi(x_1^{\delta_1}\ldots x_n^{\delta_n})$$

$\eta \equiv \varphi$ [illegible]!

<u>מסקנה</u>: <u>כל</u> חבורה G היא תמונה הומומורפית של חבורה חופשית

כלומר קיים X, φ כך ש φ הומומורפיזם X קבוצה:

$$\varphi: \quad \longrightarrow\!\!> G$$

$$G = \operatorname{Im} \varphi$$

<u>הוכחה</u>: תהי X קבוצת יוצרים של G (תמיד קיימת כזאת כי G עצמה היא קבוצת יוצרים ולכן ניתן לקחת קבוצות יותר קטנות אם צריך ואפשר).

תהי $F(X)$ החבורה החופשית של X

ואז ההעתקה השיכון $i: X \to G$

משרה הומומורפיזם $\varphi: F(x) \to G$

כך ש $x \to x \in G$

וברור כי φ הומומורפיזם על.

מסקנה מידית מהמסקנה וממשפט ההומומורפיזם
ה I הנ"ל

$$G \cong F(X)/N$$

כאשר N הוא הגרעין של ההומומורפיזם

$$\varphi: F(X) \longrightarrow G$$

כלומר קיימת לנו סדרה

$$N \xhookrightarrow{\text{מונו}} F(X) \xrightarrow{\text{אפי}} G$$

סדרה כזאת נקראת <u>רזולוציה</u>

של חבורה G.

לכן כדי לקבוע את G מספיק
לקבוע את X ; N שהוא תת חבורה
נורמלית ב $F(X)$.

מאחר ו- $N \triangleleft F$ היא תת חבורה אזי
היא חבורה ולכן גם לה קיימים <u>יוצרים</u>
כלומר <u>מילים</u> (כי הם ב $F(X)$ רק ש

$$N = \langle w_1, \dots \rangle$$

כאשר $\langle \quad \rangle$ מציין כאן את

החבורה <u>הנורמלית</u> הקטנה ביותר

המכילה את כל האיברים $w_i \; i \in I$

הגדרנו את N.

חבורה זאת נקראת <u>הסגור</u> <u>הנורמלי</u>

<u>normal</u> <u>closure</u> של הקבוצה

$$\{ w_i \; i \in I \}$$

ברור כי כל מילה $w \in N$ עוברת

ע"י φ ל e כמובן

$$\varphi(w) = e$$

האיברים $w \in N$ נקראים <u>יחסים</u>

<u>relations</u>

ולכן כדי לקבוע חבורה G מספיק

לקבוע את X ואת $\{ w_i \; i \in I \}$

או במילים אחרות

<u>יוצרים</u> <u>ויחסים</u>

<u>generators</u> + <u>relations</u>

כי אז נסתכל על $F(X)$

החבורה החופשית על X ; נסתכל

על N - הסגור הנורמלי של $\{w_i ; i\in I\}$

ואז ממשפט האיזומורפיזם נקבל

$$G = F(X)/N$$

לסיכום:

<u>הגדרה</u>: תהי X קבוצה ; Y קבוצה

של מילים מצומצמות ב X

החבורה G מוגדרת ע"י היוצרים

X והיחסים $w \in Y$ אם

$$G = F(X)/N$$

אשר N היא הסגור הנורמלי של Y ב $F(X)$.

ואז נכתוב

$$G \doteq \{x \in X \mid \omega, \omega \in Y\}$$

כתיבה כזאת נקראת <u>ייצוג</u>

או presentation ל G.

כדי להראות כי הדיון הנ"ל אינו גיבוב שטויות צריך את המשפט הבא:

<u>משפט</u>: תהי X קבוצה, Y קבוצה של מילים מהאותיות ב X. $(y \in F(X))$

תהי G החבורה הנוצרת ע"י היוצרים X והיחסים Y. אם H היא חבורה <u>כלשהו</u> הנוצרת ע"י X ומקיימת את היחסים $\omega \in Y$ כלומר $\omega = e_H$ אזי קיים אפימורפיזם

$$\varphi : G \to H.$$

<u>הערה</u>

אם לא קיים $\omega \in F(X)$ $\omega \notin N$

רק ש $\omega = e_H$ אזי האפימורפיזם

הנ"ל הוא איזומורפיזם ולכן

$$G \cong H$$

<u>הוכחת המשפט</u>: תהי $F(X)$ החבורה

החופשית על X ותהי העתקת ההצבה

$$i: X \to H$$

מגדירה אפימורפיזם $\varphi: F(X) \to H$;

מלמה: $\varphi(\omega) = e_H$ ב- H לכל

$\omega \in \{$סגור נורמלי של $Y\}$ ולכן $Y \subset \operatorname{Ker}\varphi$

ולכן הסגור הנורמלי של $Y = N$ מוכל

ב- $\operatorname{Ker}\varphi$ כי $\operatorname{Ker}\varphi$ נורמלית.

לכן φ <u>משרה</u> אפימורפיזם

$$\bar{\varphi}\ F/N \longrightarrow H/\langle e\rangle$$

באופן הבא:

אם $w_1 \in F(X)$ אזי

$$\bar{\varphi}(w_1 N) = \varphi(w_1)\ker\varphi$$

ברור כי $\bar{\varphi}$ הוא הומומורפיזם והינו גם אפי-
מורפיזם כי אם $a \in H$ אזי

$$a = w\ker\varphi$$

כאשר $w \in F(X)$ ולכן

$$\bar{\varphi}(w\cdot N) = a$$

דוגמאות:

(1) $X = \{a\}$ $Y = \{a^m\}$

אזי $G = \mathbb{Z}_m$

(2) $X = \{a, b\}$, $Y = \{aba^{-1}b^{-1}\}$

$$G = \frac{F(a,b)}{N} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

כלומר $N = C = F(a,b)'$

<u>דוגמא:</u> $G = \langle a, b \mid a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$

מהיחס $aba^{-1}b^{-1}$ אנו יודעים כי

G חבורה אבלית ו- $a^2 = 1$

גורר כי $a = a^{-1}$ ו- $b^3 = 1$

גורר כי $b^{-1} = b^2$ ולכן איברי G

הם $\langle 1, a, b, b^2, ab, ab^2 \rangle$

כלומר G היא חבורה אבלית בת 6

איברים ולכן (אנו זוכרים משפט פשוט

זה שנראה בהמשך) $G = \mathbb{Z}_6$.

<u>דוגמא:</u> $G = \langle x, y \mid y^2xy^{-1}, yx^2yx^{-1} \rangle$

$$y^2xy^{-1} = y(yx)y^{-1} = 1 \Longrightarrow$$

$$yx = 1 \Longrightarrow y = x^{-1}$$

ולכן מהיחס השני

$$yx^2yx^{-1} = x^{-1}\cdot x^2 \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} = 1 \Longrightarrow$$

$$x^{-1} = 1 \Longrightarrow x = y = 1.$$