תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 5
פתרונות

תרגיל 1.

יהיא Z מ"א נורמלי תקין: $Z \sim N(0,1)$. מצאו את הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{P(Z\geq x+a/x)}{P(Z\geq x)}$ עבור קבוע $a \in \mathbb{R}$.

פתרון.

לפי כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P\left(Z\geq x+\frac{a}{x}\right)}{P(Z\geq x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-F_Z\left(x+\frac{a}{x}\right)}{1-F_Z(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{a}{x^2}\right) f_Z\left(x+\frac{a}{x}\right)}{f_Z(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{(x+a/x)^2}{2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}} = e^{-a}.$$

תרגיל 2.

(א) יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלוים בעלי צפיפויות $f_X(x)$ ו- $f_Y(y)$ בהתאמה. הוכיחו כי $P(X\geq Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)P(X\geq y)dy$.

(ב) יהיו X ו- Y משתנים מקריים שעבורם $P(X\leq x, Y\leq y) = y(b+ce^{-x})$ לכל $0\leq y\leq 1,\ 0\leq x<\infty$. חשבו את הערכים b ו- c.

פתרון.

(א)

$$P(X\geq Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{y}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\int\limits_{y}^{\infty} f_X(x)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)P(X\geq y)dy.$$

(ב)

$$1 = \lim_{x\to\infty} P(x \le x, Y \le 1) = b \;\Rightarrow\; b = 1.$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{d^2 F_{X,Y}(x,y)}{dxdy} = -ce^{-x}, \quad x \ge 0.$$

לכן

$$1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^\infty ce^{-x}dxdy = -c \;\Rightarrow\; c = -1.$$

<u>תרגיל 3</u>.
יהי (X,Y) וקטור אקראי בעל צפיפות

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy) & \text{if } \; |x| \le 1, |y| \le 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי המשתנים המקריים X ו- Y אינם בלתי תלוים.

(ב) הוכיחו כי המשתנים המקריים X^2 ו- Y^2 בלתי תלוים.

(ג) חשבו את $COV(X^2, X^2+Y^2)$.

<u>פתרון</u>.

(א) נזכיר שבאופן כללי התנאי לאי תלות הוא:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

במקרה הנדון:

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1+xy)\,dy = \frac{1}{2}, \quad -1 \le x \le 1.$$

כמו כן

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}, \quad -1 \le y \le 1.$$

לכן

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_y(y).$$

(ב) עבור $s \le 1$ נקבל

$$P(X^2 \le s) = P\left(-\sqrt{s} \le x \le \sqrt{s}\right) = \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} f_X(x) = \sqrt{s}, \quad 0 \le s \le 1.$$

בדומה לכך עבור $s \le 1$ נקבל

$$P(X^2 \le t) = \sqrt{t}, \quad 0 \le t \le 1.$$

מאידך

$$P(X^2 \le s, Y^2 \le t) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \int_{-\sqrt{s}}^{\sqrt{s}} \frac{1}{4} (1 + xy)\, dxdy = \sqrt{s}\sqrt{t}.$$

(ג)

$$\begin{aligned} COV(X^2, X^2+Y^2) &= COV(X^2, X^2) + COV(X^2, Y^2) = \\ &= VAR(X^2) = E(X^4) - \left(E(X^2)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}. \end{aligned}$$

<u>תרגיל 4</u>.
יהי X משתנה מקרי חיובי בעל צפיפות נתונה $f_X(x)$ ויהי $Y = \frac{1}{X}$.

(א) מצאו תנאי על $f_X(x)$ המבטיח כי X ו- Y מפולגים באופן זהה ב- $(0,\infty)$.

(ב) יהי X משתנה מקרי בעל צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{if} \quad 0 < x < 1 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^3 & \text{if} \quad 1 \le x < \infty. \end{cases}$$

הוכיחו כי $f_X(x)$ מקיימת את התנאי של סעיף (א), וחשבו את $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

(ג) אם $f_X(x) = 1/2$ לכל $0 \le x \le 1$, והצפיפות $f_X(x)$ מקיימת את תנאי (א) לגבי המשתנה $Y = \frac{1}{X}$, חשבו את $f_X(x)$ לכל $1 \le x < \infty$.

פתרון.

(א) לפי נוסחת העברת המשתנים:

$$f_Y\left(\frac{1}{x}\right) = f_Y(y) = \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} f_X(x) = x^2 f_X(x)$$

לפי הנתון

$$f_Y(y) = f_X(y) = f_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

מכאן עולה התנאי:

$$x^2 f_X(x) = f_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

(ב) קל לראות כי $f_X(x)$ אכן מקיימת התנאי.

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = E(X) = 4/3.$$

(ג) לפי התנאי נקבל עבור $x > 1$

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2} f_X\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x^2}.$$

תרגיל 5.
יהי X משתנה מקרי מפולג באופן אחיד בקטע $[0;1)$ ויהי Y משתנה מקרי מפולג באופן אחיד בקטע $[0;\frac{1}{X^2})$.

(א) מצאו את $f_Y(y)$.

(ב) חשבו את $E(\sqrt{Y})$ ו- $E\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)$.

פתרון.

(א)

$$f_{X,Y}=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=x^2,\quad 0\le y\le\left(\frac{1}{x}\right)^2.$$

לכן

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\,dx = \int_0^{\min\{1,\frac{1}{\sqrt{y}}\}} x^2dx = \\ &= \begin{cases} \int_0^1 x^2dx = 1/3 & \text{אם} \quad y\le 1, \\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{y}}} x^2dx = \frac{1}{3y\sqrt{y}} & \text{אם} \quad y\ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(ב)

$$E\left(\sqrt{Y}\right)=\int_0^\infty \sqrt{y}f_Y(y)dy=\infty.$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}f_Y(y)dy=1.$$

תרגיל 6.
יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים, כאשר X מפולג באופן אחיד על $(0,1)$ ו- Y מפולג באופן אחיד על $(0,2)$. נגדיר: $S=X+Y,\ V=X-Y$.

(א) מצאו את הצפיפות $f_S(s)$.

(ב) מצאו את פונקצית ההתפלגות של $Z = \max\{X,Y\}$.

(ג) מצאו את $f_{S,V}(s,v)$ ואת $f_V(v)$.

<u>**פתרון.**</u>

(א,ג)

$$f_{S,V}(s,v) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,v)}\right| f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} \text{ if } \ 0 \le S+V \le 2,\ 0 \le S-V \le 4.$$

לכן

$$f_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad s \ge 3 \\ \frac{1}{4}(2-s-s+4) = \frac{3-s}{2} & \text{if} \quad 2 \le s \le 3 \\ \frac{1}{4}(2-s+s) = \frac{1}{2} & \text{if} \quad 1 \le s \le 2 \\ \frac{1}{4}(s+s) = \frac{s}{2} & \text{if} \quad 0 \le s \le 1 \\ 0 & \text{if} \quad s < 0 \end{cases}$$

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad v \ge 1 \\ \frac{1}{4}(2-v-v) = \frac{1-v}{2} & \text{if} \quad 0 \le s \le 1 \\ \frac{1}{4}(2-v+v) = \frac{1}{2} & \text{if} \quad -1 \le s \le 0 \\ \frac{1}{4}(v+4+v) = \frac{v+2}{2} & \text{if} \quad -2 \le v \le -1 \\ 0 & \text{if} \quad v < 0 \end{cases}$$

(ב)

$$F_Z(z) = P(X \le z)P(Y \le z) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad z \ge 2 \\ \frac{z}{2} & \text{if} \quad 1 \le z \le 2 \\ \frac{z^2}{2} & \text{if} \quad 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{if} \quad z \le 0. \end{cases}$$