מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים --- תרגול 9

1 מרחבים מטריים קומפקטיים

טענה 1.1 יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי, ותהי $f:X\to X$ העתקה שומרת מרח-קים. אזי f היא על.

הוכחה: נניח בשלילה ש-$f(X)\subsetneqq X$.
f רציפה ו-X קומפקטי לכן $f(X)$ קומפקטית, (מרחב מטרי הוא האוסדורף) לכן בפרט $f(X)$ סגורה.
נקח $y_0\notin f(X)$, קיים $r>0$ כך ש- $d(y,f(X))=r$. נסתכל על הסדרה

$$y_n=f^n(y_0)$$

לכל $p\geq 1$ מתקיים $d(y_0,y_p)=d(y_0,f^p(y_0))\geq r$ (כי $d(y,f(X))=r$ ו-$y_p\in f(X)$).
ולכן לכל $n,p\geq 1$ מתקיים $d(y_n,y_{n+p})=d(f^n(y_0),f^{n+p}(y_0))\geq 1$.
לכן לא ייתכן שיש ל-$\{y_n\}$ תת סדרה מתכנסת (כי אין לה תת סדרות שהן קושי).
סתירה לכך ש-X קומפקטי. ∎

הערה 1.2 הטענה לא נכונה אם X אינו קומפקטי. לדוגמה $X=[1,\infty)$ עם $f:X\to X$ המוגדרת על ידי $f(x)=x+1$.

2 מרחבים קומפקטיים

טענה 2.1 אם X הוא האוסדורף, $A\subset X$ תת מרחב קומפקטי, אז A סגור.

הוכחה: יהי $x\in X\setminus A$. צריך להראות שקיימת סביבה של x שלא חותכת את A.
לכל נקודה $y\in A$ קיימות סביבות U_y,V_y זרות ל-x,y בהתאמה.
נשים לב ש-$\{V_y\}_{y\in A}$ הוא כיסוי פתוח של A לכן קיים לו תת כיסוי סופי. כלומר קיימים $y_1,...,y_n\in A$ כך ש-

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$$

נסתכל על הקבוצה הפתוחה

$$U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$$

זאת סביבה פתוחה של x. ו-$U \cap A = \emptyset$, אחרת היינו מקבלים סתירה לכך ש-$U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$ (לכל $1 \leq i \leq n$). ■

3 תכונת החיתוך הסופי

תזכורת: אוסף של תתי קבוצות $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ מקיים את תכונת החיתוך הסופי (FIP) אם כל חיתוךשל מספר סופי של קבוצות מהאוסף אינו ריק. כלומר לכל $J \subset I$, J סופית, מתקיים

$$\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$$

(X,τ) מרחב קומפטי אם ורק אם לכל אוסף של קבוצות סגורות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיים FIP מתקיים

$$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$$

הערה 3.1 סדרה מונוטונית יורדת של קבוצות לא ריקות תמיד מקיימת FIP.

טענה 3.2 אם X האוסדורף קומפקטי, בלי יחידונים פתוחים. אזי X אינו בן מנייה.

הוכחה: נוכיח תחילה את הלמה הבאה:

למה 3.3 אם U קבוצה פתוחה לא ריקה ב-X (כנ"ל), ו-$x \in X$, אז קיימת תת קבוצה פתוחה לא ריקה V של U, כך ש-$x \notin \overline{V}$:

הוכחה: קיימת $x \neq y \in U$ (כי U לא ריקה, ואינה יחידון). X האוסדורף, קיימות U', V' סביבות פתוחות זרות של x, y. נבחר $V = U \cap V'$ (ואכן $x \notin \overline{V}$). ■

נחזור להוכחת הטענה:

נניח בשלילה ש-X בן מנייה. נכתוב $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

נגדיר אוסף קבוצות U_n באינדוקציה על n באופן הבא:

עבור $n = 1$: נשתמש שטענת העזר עבור $U_1 = X$, x_1, נקבל $\emptyset \neq U_1 \subset X$ כך ש-$x_1 \notin \overline{U_1}$.

כעת נניח שהגדרנו U_n כך ש-$U_n \neq \emptyset$ ו-$x_n \notin \overline{U_n}$. נגדיר את U_{n+1} לפי הלמה עבור U_n, x_{n+1}.

נסתכל על האוסף הבא של קבוצות $\{\overline{U_1}, \overline{U_2}, \ldots\}$. עבורו מתקיים

$$\bigcap_n \overline{U_n} = \emptyset$$

כי לכל n מתקיים $x_n \notin \overline{U_n}$.

אך מצד שני האוסף הוא סדרה מונוטונית יורדת של קבוצות לא ריקות, לכן בוודאי מקיים FIP. סתירה לכך ש-X קומפקטי. ■

טענה 3.4 יהי (X,τ) מרחב האוסדורף קומפקטי, $f_n \in C(X,\mathbb{R})$, סדרה מונוטונית עולה (כלומר $\forall x,\ f_n(x) \le f_{n+1}(x)$) אשר מתכנסת נקודתית לפונקציה $f \in C(X,\mathbb{R})$.
אזי $f_n \to f$ במ"ש.

הוכחה: מהנתון נובע $f(x) \ge f_n(x)$ לכל $x \in X$. יהי $\epsilon > 0$
צריך להוכיח שקיים N כך שלכל $n > m$ ולכל $x \in X$ מתקיים $f(x) - f_n(x) < \epsilon$.
נגדיר את הקבוצות

$$F_n = \{x \in X \mid f(x) - f_n(x) \ge \epsilon\}$$

נשים לב ש-F_n קבוצות סגורות (כי f_n, f רציפות, לכן גם החיסור שלהן, ומכיוון ש- $F_n = (f - f_n)^{-1}([\epsilon,\infty))$ כלומר תמונה הפוכה של קבוצה סגורה).
בנוסף מתקיים $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ (כי אם $x \in F_{n+1}$ אז ממונוטוניות f_n נקבל

$$\epsilon \le f(x) - f_{n+1}(x) \le f(x) - f_n(x)$$

לכן $x \in F_n$)
צריך להראות שקיים N שעבורו $F_N = 0$ (כי אז גם לכל $n > N$ מתקיים $F_n = 0$, או במילים אחרות $\forall x,\ f(x) - f_n(x) < \epsilon$)
נראה ש-

$$\bigcap_n F_n = \emptyset$$

יהי $x \in X$, נתון ש-$f_n(x) \to f(x)$, לכן קיים n כך ש-$f(x) - f_n(x) < \epsilon$, כלומר $x \notin F_n$.
X קומפקטי, F_n סגורות בעלות חיתוך ריק, לכן אינן מקיימות FIP. כלומר קיימים $n_1 < \ldots < n_r$ כך ש-

$$\bigcap_{i=1}^{r} F_{n_i} = \emptyset$$

ממונוטוניות F_n נקבל

$$F_{n_r} = \bigcap_{i=1}^{r} F_{n_i} = \emptyset$$

לכן נבחר $N = n_r$. ■