

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right]$$

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

הבסיס של U

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הבסיס של W

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

הבסיס של U

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

הבסיס של W

1. נניח כי $U \cap W$ היא תת-רשת של U ו- W .
 $Sp(U)$ ו- $Sp(W)$ הם המרחב הספירלי של U ו- W בהתאמה.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הקשר בין α, β, γ ל- a, b, c

$$\alpha = a = c = b = \beta = \gamma$$

$$\beta = b$$

$$\gamma = a$$

$$\alpha + \beta = b + c \Rightarrow \alpha + \beta = \beta + c \Rightarrow \alpha = c$$

$$\alpha + \gamma = a + b \Rightarrow b = a$$

$$\alpha + \beta + \gamma = b + a + c \Rightarrow$$

הקשר בין α, β, γ ל- a, b, c

3.10. הוכחה 'היא B_1, B_2 בסיסים של U, W בהתאמה.

נחתון $V = U \oplus W$ נסיק כי לכל $v \in V$ קיימת קבוצת סקלרים $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1+j_1}\}$ כך שצבוע

$$B_2 = [b_{12} \dots b_{k_2}], B_1 = [b_{11} \dots b_{j_1}]$$

$$v = \alpha_1 b_{12} + \dots + \alpha_{k_1+j_1} b_{j_1}$$

~~נראה שיש סתירה כי $B_1 \cap B_2 \neq \{0\}$ לא נ' קיימ $b \in B_1$ ויש $b \in B_2$ אף~~

נזכיר כי הקבוצה $B_1 \cup B_2$ היא בסיס. נניח שיש $b_1, b_2 \in B_1 \cup B_2$ כך ש- $b_1 = \alpha b_2$ עבור $\alpha \neq 0$.

אז עבור הקבוצה $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{k_1+j_1}\}$ נובע שכתבה

$$v = \alpha_1 b_{12} + \dots + \alpha_i \alpha_i b_{ij_1} + \dots + \alpha_{k_1+j_1} b_{j_1}$$

זוהי טענה שבה סכום יש. נניח שכתבו בצורה אחת ונראה שהיא.

עכ, $B_1 \cup B_2$ היא בסיס.

נעזר במשפט האינדיקס עליון כי צריך להקנות הפורמליזם האינדיקס.

נניח שיש $u \in U \cap W$. אז קיימ $u \in U \cap W$. אז שיש $u \in U \cap W$ היא בסיס של $U \cap W$ כי $u \in U \cap W$ ויש $u \in U \cap W$.

$$\dim(U \cup W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cup W) = \dim(B_1) + \dim(B_2)$$

אז יש הקדמה הפורמליזם האינדיקס $(B_1 \cup B_2)$.



∴ ५¹³ ८¹³ 10¹³

$$n=3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\star \text{ra}(A) = \text{ra}(B) - 2 \leq n$$

$p \mid x-1 \quad A, B \in V$

3.2. $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ הוכח

$$b_j b_k = b_k b_j \quad b_i, b_j \in B \quad \beta \geq 8 \quad 10'' S$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$\{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$ $v \in V$ $V = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$

$$v_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) \cdot v_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \cdot v_j \in B$$

$\text{Se d}^{13} \rightarrow 103 \text{ אפ"ק}$

$(E^{n+1})^{Lij} \in R^{n+1}$ מרחב וקטורי. $(E^{n+1})^{Lij} \in R^{n+1}$ מרחב וקטורי.

פאקטן 105 (1) 7 N/82

७५७७

108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926,

□

2.3.11

$$\dim(U) = n-1$$

$$\dim(W) = n-1$$

$$\dim(U \cap W)$$

נניח $U \neq W$, קיים $u \in U$ ו- $w \in W$ כזו ש- $u \neq w$.
 נגדיר $V = \{u, w\}$. אז $\dim(V) = 2$.
 מאידך, $V \subseteq U \cap W$ ולכן $\dim(U \cap W) \geq 2$.
 אבל $\dim(U) = \dim(W) = n-1$ ולכן $\dim(U \cap W) = n-2$.
 סתירה. $U = W$.

נניח כי קיים $v_2 \in W$ ו- $v_2 \in U$ כזו ש- $v_2 \neq u$.
 אז $\dim(U \cap W) \geq 3$.
 אבל $\dim(U \cap W) = n-2$.
 סתירה. $U = W$.

□

5. הוכחה

נניח $A, B \in F^{n \times n}$. נניח $AB = A$. נוכיח כי $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$.

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & \dots & A_1 B_n \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & \dots & A_2 B_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n B_1 & A_n B_2 & \dots & A_n B_n \end{pmatrix}$$

$$AB = (I) \subseteq \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} = A$$

$$A B_i \subseteq \text{row}(A) \quad \text{כל } 1 \leq i \leq n$$

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) \iff \dim(\text{Col}(AB)) \leq \dim(\text{Col}(A))$$

נניח $A, B \in F^{n \times n}$. נניח $AB = B$. נוכיח כי $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$.

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 A_1 & B_1 A_2 & \dots & B_1 A_n \\ B_2 A_1 & B_2 A_2 & \dots & B_2 A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n A_1 & B_n A_2 & \dots & B_n A_n \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix} = B$$

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B) \iff \dim(\text{Row}(AB)) \leq \dim(\text{Row}(B))$$

$$\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

□

5.5.5 תוכחה

אנחנו רוצים להוכיח את הטענה (או להפך) $\dim \text{Row}(A+B) \leq \dim \text{Row}(A) + \dim \text{Row}(B)$

הוכחה: נניח $\dim \text{Row}(A) = r$ ו- $\dim \text{Row}(B) = s$. נראה ש- $\dim \text{Row}(A+B) \leq r+s$.

$$\text{Row}(A+B) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \\ \vdots \\ A_n + B_n \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Row}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Row}(B) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \right\}$$

כל וקטור v ב- $\text{Row}(A+B)$ הוא צירוף ליניארי של וקטורים מהצורה $A_i + B_i$. כל וקטור $A_i + B_i$ נמצא במרחב L המיוצר על ידי $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s$.

כל וקטור v ב- $\text{Row}(A+B)$ הוא צירוף ליניארי של וקטורים מהצורה $A_i + B_i$. כל וקטור $A_i + B_i$ נמצא במרחב L המיוצר על ידי $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s$. לכן $\dim \text{Row}(A+B) \leq \dim L = r+s$.

$$\dim(A+B) \leq \dim(A) + \dim(B) \quad \leftarrow \quad \text{Row}(A+B) \subseteq \text{Row}(A) + \text{Row}(B)$$

□