תורת ההסתברות 104222 ־ תרגיל 3

6 בדצמבר 2016

יש להגיש את התרגיל עד יום שלישי ה־ 13 לדצמבר.

1. יהי $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \sigma(\{[a,b] \,:\, 0 \le a \le b \le 1\})$ ו־ $\mathbf{P}$ פונקציית ההסתברות היחידה על הקטע $[0,1]$ כך ש־ $\mathbf{P}([a,b]) = b-a$ לכל קטע $[a,b] \subset [0,1]$. מצאו את פונקציית ההתפלגות של המשתנים המקריים הבאים:

   (א) $X(\omega) = \begin{cases} -\omega & 0 \le \omega \le 1/2 \\ 1-\omega & 1/2 \le \omega \le 1 \end{cases}$.

   (ב) $X(\omega) = -\ln(\omega)$.

   (ג) $X(\omega) = \min\{1/2, \omega\}$.

   (ד) $X(\omega) = \lceil N\omega \rceil$ עבור $N \in \mathbb{N}$ קבוע.

2. עבור אילו ערכים של a ו־ k הפונקציות הבאות יכולות לתאר פונקציות צפיפות התפלגות?

   (א) $f(x) = \begin{cases} kxe^{-ax} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

   (ב) $f(x) = \begin{cases} kx^a & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

3. חוסר הזיכרון של משתנים מקריים.

   (א) יהי $p \in (0,1)$. הראו כי משתנה מקרי גאומטרי $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ מקיים את תכונת חוסר הזיכרון הבאה: לכל $1 \le m \le n$ מספרים טבעיים

   $$\mathbf{P}(X > n | X > m) = \mathbf{P}(X > n-m). \qquad (1)$$

   (ב) יהי $\lambda > 0$. הראו כי משתנה מקרי אקספוננציאלי $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ מקיים את תכונת חוסר הזיכרון הבאה: לכל $0 \le s \le t$ מספרים ממשיים

   $$\mathbf{P}(X \ge t | X \ge s) = \mathbf{P}(X \ge t-s).$$

(ג) הראו כי אם X משתנה מקרי רציף, המקיים את תכונת חוסר הזיכרון, אז קיים $\lambda > 0$ כך ש־ $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(ד) (*) יהי X משתנה מקרי המקבל ערכים במספרים הטבעיים. נניח כי X מקיים את תכונת חוסר הזיכרון (1) האם בהכרח קיים $p \in (0,1)$ כך ש־ $X \sim \mathrm{Geo}(p)$?

4. חוקי המשחק במשחק הימורים הם כדלקמן: משלמים 10 שקלים להשתתף במשחק. אז, בוחרים נקודה באופן אחיד (שנסמנה ב־ X) בקטע $[0,10]$. אם $0 \leq X \leq 5$ אנחנו מפסידים. אם $5 < X \leq 9$ אנו מקבלים X שקלים. אם $9 < X \leq 10$ אנו מקבלים X^2 שקלים. נסמן ב־ Y את הרווח מהמשחק (הרווח הוא שלילי אם אנו מפסידים כסף).

(א) בטאו את Y כפונקציה של X (שרטטו את הגרף).

(ב) מצאו את ההתפלגות של Y ושרטטו את הגרף.

5. בוחרים נקודה בדיסק ברדיוס R בהתפלגות אחידה, כלומר ההסתברות שהנקודה נמצאת בתוך כל תת קבוצה סגורה של הדיסק פרופורציונית לשטח של הקבוצה.

(א) נסמן ב־ X את המרחק בין הנקודה שנבחרה למרכז הכדור בריבוע. מצאו את פונקציית ההתפלגות של X ואת פונקציית הצפיפות של X.

(ב) נסמן ב־ Y את הזווית בין הקו המחבר את מרכז המעגל והנקודה לבין ציר ה־x (הזווית תסומן במספר בקטע $[-\pi,\pi)$). מצאו את פונקציית ההתפלגות של Y ואת הצפיפות אם היא קיימת.

6. יהי $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. מטילים מטבע הוגן בלתי תלוי ב־ X ומגדירים משתנה מקרי חדש Y באופן הבא: $Y = X$ אם יצא עץ ו־ $Y = -X$ אם יצא פלי.

(א) האם Y משתנה מקרי בדיד, רציף, רציף בהחלט, מעורב? חשבו את פונקציית ההתפלגות של Yואם הוא רציף בהחלט חשבו את פונקציית הצפיפות שלו.

(ב) נגדיר משתנה מקרי Z באופן הבא:

$$Z = \begin{cases} 0 & Y \leq 0 \\ Y & 0 < Y < 5 \\ 5 & Y \geq 5 \end{cases}.$$

הראו כי Z הוא משתנה מקרי מעורב, כלומר כי Z אינו משתנה רציף או בדיד וכי ניתן לכתוב את פונקציית ההתפלגות שלו בצורה

$$F_Z = \alpha F_Z^d + (1-\alpha) F_Z^{ac}$$

כאשר $\alpha \in (0,1)$, F_Z^d פונקציית התפלגות של משתנה מקרי בדיד ו־ F_Z^{ac} פונקציית התפלגות של משתנה מקרי רציף בהחלט. מצאו את α, F_Z^d ו־ F_Z^{ac} וחשבו את פונקציית הצפיפות המתאימה ל־ F_Z^{ac}.

נקודות למחשבה - לא להגשה

1. נסדר את המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ בסדר כלשהו $a_1, a_2, \ldots$ ונגדיר משתנה מקרי X המקבל ערכים רציונליים לפי ההתפלגות

$$\mathbf{P}_X(a_i) = 2^{-i}, \qquad i \geq 1.$$

מהי פונקציית ההתפלגות של X? שימו לב כי היא לא קבועה באף קטע וכי נקודות הרציפות היחידות שלה הם המספרים האי רציונליים. אם זאת, זהו עדיין משתנה מקרי בדיד.

2. יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ מרחב הסתברות ו־ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כך ש־ $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ לכל $a \in \mathbb{R}$. הראו כי לכל קבוצת בורל $A \in \mathcal{B} = \sigma(\{(a,b) \,:\, a < b\})$ מתקיים $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. רמז: הראו כי $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{R} \,:\, X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ היא σ־אלגברה.

3. יהי X משתנה מקרי עם פונקציית התפלגות F_X. נגדיר את המשתנה המקרי $Y = F_X(X)$. הוכיחו כי $Y \sim U([0,1])$.

4. כל ההתפלגויות הנורמליות הן פונקציה לינארית של התפלגות נורמלית סטנדרטית. בנוסף, את שני הפרמטרים ניתן לקבוע על ידי ההסתברות של שני מאורעות.

(א) יהי $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. מצאו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $aX + b \sim N(0,1)$.

(ב) בכיוון ההפוך, יהי $X \sim N(0,1)$ ויהיו $\mu \in \mathbb{R}$ ו־ $\sigma > 0$. הראו כי $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

(ג) ידוע כי X הוא משתנה מקרי נורמלי. בנוסף, ידוע כי $\mathbf{P}(X \leq 160) = 1/2$ ו־ $\mathbf{P}(X \leq 140) = 1/4$. מצאו את μ, σ^2 וחשבו את $\mathbf{P}(X \geq 200)$.