1

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \le |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

$$\sum_{i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \le (n-i_2)|A_{i_1} \cap A_{i_2}| \le (n-2)|A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < n} \sum_{i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \le \sum_{1 \le i_1 < i_2 < n} (n-2)|A_{i_1} \cap A_{i_2}| \le (n-2)\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$

2 א.

$F_0 = F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

.ג $F_1 + \dots + F_n + 2 = F_{n+2}$

נראה באינדוקציה עבור $n=1$: $1+2=3$

נניח נכונות עבור n ונראה שגם אז נכונות עבור $n+1$ ונקבל

הנחה: $F_1 + \dots + F_n + 2 = F_{n+2}$

$$F_{(n+1)+2} = F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} \overset{\text{עפ"י הנחה}}{=} \underbrace{F_1 + \dots + F_n + 2}_{F_{n+2}} + F_{n+1}$$

מש"ל

ב. .ג $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} + 1 = F_{2n}$

נראה באינדוקציה עבור $n=1$: $1+1=2$

נניח נכונות עבור n ונראה שאז נכונות עבור $n+1$

$$F_{2(n+1)} = F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1} \overset{\text{הנחה}}{=} \underbrace{F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}}_{F_{2n}} + F_{2n+1}$$

3 נבנה את סדרה באורך n

נבחין ב-2 מקרים

אם האיבר האחרון הוא 1 - האיבר שלפני אחרון יכול להיות 0 או 1 והסדרה $n-1 \dots 1$ היא תקינה ולכן יש a_{n-1} מקרים

אם האיבר האחרון הוא 0 - האיבר לפניו הוא בהכרח 1 ואיבר שלפניו יכול להיות 1 או 0 ולכן האיברים $n-2 \dots 1$ היא תקינה. והספירה

ולכן $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ סדרת פיבונצ'י.

(4) $a_n = a_{n-3} - 3a_{n-2} + 3a_{n-1}$ עבור $n \geq 3$ $\quad a_0 = a_1 = 0 \quad a_2 = 1$

נגדיר $|x|<1$ $\quad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

שלב א נמצא את a_n

$$a_n x^n = a_{n-3}x^n - 3a_{n-2}x^n + 3a_{n-1}x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 3} a_n x^n = \sum_{n\geq 3} a_{n-3}x^n - \sum_{n\geq 3} 3a_{n-2}x^n + \sum_{n\geq 3} 3a_{n-1}x^n$$

$$f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 = x^3 f(x) - 3x^2\left(f(x) - a_0\right) + 3x\left(f(x) - a_0 - a_1 x\right) =$$

$$f(x) - x^2 = x^3 f(x) - 3x^2 f(x) + 3x f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{1 - x^3 + 3x^2 - 3x}$$

שלב ב נפתור את המשוואה האופיינית $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 1$ כי זהו $(t-1)^3$

משמע כי $(1-x)^3 = (1-1x)(1-1x)(1-1x) = 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$

ולכן $f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$

שלב ג

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{(1-x)^3} = \frac{c + (1-x)^2 a + (1-x)b}{(1-x)^3} = \frac{c + b - bx + a - 2ax + x^2 a}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \frac{x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sum n x^{n-1}\right)' = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$$

$x \neq 1$

ולכן $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n - 2\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$

נקבל שהמקדם של x^n הוא a_n

$$a_n = 1 - 2(n+1) + \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$$

$$= 1 - 2n - 2 + \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1 = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$(t-1)(at+3)$

4ג. ~~פתרון~~

$a_0 = a_1 = 1 \quad n \geq 2 \qquad a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-1}$

נגדיר $|x|<1$ $\quad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

באותו אופן כמו בסעיף א נקבל כי:

$$\sum_{n\geq 2} a_n x^n = \sum_{n\geq 2}(3a_{n-2} - 2a_{n-1})x^n = 3x^2(f(x)) - 2x(f(x) - a_0)$$

$$f(x) - a_1x - a_0 = 3x^2 f(x) - 2xf(x) + 2x$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{1+2x-3x^2}$$

אז

שלב א נפרק

$t^2 + 2t - 3 = 0$

$\Rightarrow t_1 = 1$

$t_2 = -3 \qquad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{3x+1}{(1-x)(1+3x)} = \frac{1}{1-x}$

שלב ב

$f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n \quad \Rightarrow \quad a_n = 1$

בדומה לכך אילו היו 1 ..

4ד.

$a_0 = 2 \quad a_1 = 3 \quad n \geq 2 \qquad a_n = 4a_{n-2} - 4a_{n-1}$

שלב א $\quad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad |x|<1$

$$\underset{-3x-2}{f(x) - a_1x - a_0} = \sum_{n\geq 2} a_n x^n = \sum_{n\geq 2}(4a_{n-2} - 4a_{n-1})x^n = 4x^2 f(x) - 4x(f(x) - \underset{2}{a_0})$$

$$f(x) = \frac{11x+2}{1+4x-4x^2}$$

שלב ב

$t^2 + 4t - 4 = 0$

$t_1 = -2 + 2\sqrt{2}$

$t_2 = -2 - 2\sqrt{2} \qquad f(x) = \frac{11x+2}{(1-t_1x)(1-t_2x)}$

שלב ג

$$f(x) = \frac{11x+2}{(1-t_1x)(1-t_2x)} = \frac{a}{(1-t_1x)} + \frac{b}{(1-t_2x)} = a - t_2ax + b - t_1bx$$

$a + b = 2 \Rightarrow b = 2 - a$

$= 2(a+b) + 2\sqrt{2}(a-b) \quad 2a + 2\sqrt{2}a + 2b - 2\sqrt{2}b = -t_2a - t_1b = 11$

$\Rightarrow \frac{7 - 4\sqrt{2}}{2} = a \qquad b = 2 - a$

ולכן:

$$f(x) = a\sum_{n\geq 0}((-2+2\sqrt{2})x)^n + b\sum_{n\geq 0}((-2-2\sqrt{2})x)^n$$

$$\Rightarrow a_n = (-2+2\sqrt{2})^n \cdot a + b(-2-2\sqrt{2})^n$$

ש-

(5) $g(n)$ מספר הסדרות באורך n שאינן מכילות שני אפסים עוקבים.

נתבונן על סדרה תקינה באורך n

האיבר ה n שלה יכול להיות

1 או 2 ומשלים הסדרה באורך $n-1$ היא <u>סדרה תקינה</u> (יכולה להיות כל) ולכן יש $g(n-1)$ סדרות באורך $n-1$ וסך כל האפשרויות הינו $2(g(n-1))$

0 ומשלים האיבר ה $n-1$ הוא בהכרח 1,2 ולכן הסדרה באורך $n-2$ יכולה להיות כל סדרה תקינה. אין עליה הגבלה נוספת ולכן יש $g(n-2)$ סדרות כאלו

וסה"כ יש $2g(n-2)$

ובסה"כ $g(n)=2g(n-1)+2g(n-2)$

(6) <u>א</u> נראה באינדוקציה: עבור $n=1$ מתקיים $F_0=1$ $F_1=1$ $F_2=2$ $2\cdot 1-1=(-1)^2=1$

נניח נכונות עבור n ונראה שזה נכון עבור $n+1$

$$F_{n+2}\cdot F_n-(F_{n+1})^2=(F_{n+1}+F_n)F_n-(F_n+F_{n-1})F_{n+1}=F_{n+1}F_n+F_n^2-F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_{n+1}$$

$$=F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}\underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}-1(-1)^{n+1}=(-1)^{n+2}$$

<u>ב</u> F_n זוגי אמ"ם $n+1$ מתחלק ב3 $F_1=1$ $F_2=2$

$\Rightarrow$ נראה באינדוקציה עבור $k=1$ F_{3k-1} מתחלק ב3 $F_2=2$

נניח ש F_{3k-1} מתחלק ב3 ונראה שזה נכון F_{3k-1+3} מתחלק ב3

$$F_{3k+2}=F_{3k+1}+F_{3k}=F_{3k}+F_{3k-1}+F_{3k}=\underbrace{2F_{3k}}_{\text{זוגי}}+\underbrace{F_{3k-1}}_{\text{זוגי עפ"י הנחה}}\Rightarrow \text{מספר זוגי}$$

$\Leftarrow$ נראה שאם n מתחלק ב3 אז F_n אי זוגי

עבור $k=1,0$ $F_0=1$

נניח עבור F_{3k} אי זוגי ונראה שזה נכון F_{3k+3} אי זוגי

$$F_{3k+3}=F_{3k+2}+F_{3k+1}=F_{3k+1}+F_{3k}+F_{3k+1}=\underbrace{2F_{3k+1}}_{\text{זוגי}}+\underbrace{F_{3k}}_{\text{אי זוגי עפ"י ההנחה}}\Rightarrow F_{3k+3}\ \text{אי זוגי}$$

באותו אופן:

באותו אופן עבור $n+1$ מתחלק ב3 F_n אי זוגי ולכן הראנו שתנאי זה הוא הכרחי ומספיק.