מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים
104142

רשימות אלה לקורס מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים 104142 נכתבו במהלך סמסטר חורף תשע"ז בטכניון, והן מבוססות על הרצאותיו של פרופ' מיכאל אנטוב. יש להניח כי הן מכילות טעויות, שגיאות דפוס וחוסרים למכביר. אין בין רשימות אלה ובין הטכניון, או למי מסגלו, שום שיוך רשמי.

עדכון אחרון: 25 בינואר 2017.

תוכן העניינים

1 מבוא למרחבים מטריים

2015-10-25

1.1 מרחבים מטריים - הגדרות בסיסיות

1.1.1 הגדרה. תהי X קבוצה (לא ריקה). מטריקה על X היא פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ המתאימה לכל זוג איברים מ־X מספר ממשי, כך אשר:

I. הפונקציה d מקבלת ערכים אי שליליים, כלומר לכל זוג איברים $x, y \in X$

$$d(x, y) \geqslant 0 .$$

הפונקציה d מקיימת $d(x, y) = 0$ אם ורק אם $x = y$.

II. הפונקציה d סימטרית; לכל שני איברים $x, y \in X$ מתקיים $d(x, y) = d(y, x)$.

III. לכל שלושה איברים $x, y, z \in X$ מתקיים $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (אי־שוויון המשולש).

מרחב מטרי היא קבוצה עם מטריקה שמוגדרת עליה.

הדוגמאות המוכרות ביותר לנו של מרחבים מטריים הם $\mathbb{R}^1$,$\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$ עם פונקציות המרחק הרגילות. סוג נוסף של מרחבים מטריים הוא מרחבי נורמה:

1.1.2 הגדרה. יהי V מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$). נורמה על V זוהי פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המתאימה לכל וקטור $v \in V$ מספר ממשי $\|v\|$ כך אשר:

1. מתקיים $\|v\| \geqslant 0$.
2. מתקיים $\|v\| = 0$ אם ורק אם $v = 0$.
3. לכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
4. מתקיים אי־שוויון המשולש: $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ לכל וקטור נוסף $w \in V$.

מרחב נורמה הוא מרחב וקטורי עם נורמה שמוגדרת עליו.

1.1.3 טענה. יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה. אזי הפונקציה $d : V \times V \to \mathbb{R}$ המוגדרת לפי:

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

היא מטריקה על V.

הוכחה. אי־שליליות נובעת ישירות מהגדרת הנורמה. אם לזוג וקטורים $v, w \in V$ מתקיים $d(v, w) = 0$ הרי $\|v - w\| = 0$. קל להווכח כי $v = w$. לכל זוג וקטורים $v, w \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
d(v, w) &= \|v - w\| \\
&= \|(-1)(w - v)\| \\
&= |-1| \|w - v\| \\
&= d(w, v) \quad ,
\end{aligned}$$

לכן d היא סימטרית. מתקיים גם כי

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \|u-v\| \\ &= \|u-v+v-w\| \\ &\leqslant \|u-v\| + \|v-w\| \\ &= d(u,v) + d(v,u) \end{aligned}$$

ולכן d מקיימת את אי־שוויון המשולש. $\square$

סוג חשוב של מרחבי נורמה הם מרחבי מכפלה פנימית. לכל מרחב מכפלה פנימית $(V, \langle\cdot\rangle)$, אפשר להגדיר על V נורמה לפי

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

לכל וקטור $v \in V$. קל לבדוק כי הגדרה זו אכן משרה על V נורמה. כך המכפלה הפנימית מגדירה על V מטריקה:

$$d(v,w) = \|v-w\| = \sqrt{\langle v-w, v-w\rangle}$$

לכל זוג וקטורים $v, w \in V$.

1.1.4 דוגמה. עבור $V = \mathbb{R}^n$ אפשר להגדיר את הנורמות הבאות:

$$\begin{cases} \|(v_1,\ldots,v_n)\|_1 := |v_1| + \cdots + |v_n| & \\ \|v_1,\ldots,v_n\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} & \text{(הנורמה האוקלידית)} \\ \|v_1,\ldots,v_n\|_\infty := \max_i \{|v_i|\} & \text{(נורמת האינסוף)} \end{cases}.$$

נורמות אלו מגדירות מטריקות על V, לפי

$$\begin{cases} d_1(v,w) = |v_1 - w_1| + \cdots + |v_n - w_n| & \\ d_2(v,w) = \sqrt{(v_1-w_1)^2 + \cdots + (v_n-w_n)^2} & \text{(המטריקה האוקלידית)} \\ d_\infty(v,w) = \max_i |v_i - w_i| & \text{(מטריקת האינסוף)} \end{cases}$$

2016-10-31

לכל זוג וקטורים $v, w \in V$ עם קואורדינטות $\{v_i\}, \{w_i\}$ בהתאמה.

1.1.5 דוגמה. דוגמאות נוספות למרחבים מטריים:

1. נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^\infty$ (קבוצת הסדרות האינסופיות מעל הממשיים). נגדיר תתי־מרחבים $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ על־ידי:

בדקו כי שלוש הקבוצות הם אכן תתי־מרחבים, וכי כל ההגדרות להלן מתקיימות כנדרש!!

$$\begin{cases} \ell_1 = \{(a_1,a_2,\ldots) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{i=1}^\infty |a_i| < \infty\} \\ \ell_2 = \left\{(a_1,a_2,\ldots) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{i=1}^\infty a_i^2 < \infty\right\} \\ \ell_\infty = \{(a_1,a_2,\ldots) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sup_i |a_i| < \infty\} \end{cases}$$

(א) נגדיר נורמה $\|\cdot\|_{\ell_1}$ על ℓ_1 על־ידי:

$$\|(a_1,a_2,\ldots)\| = \sum_{i=1}^\infty |a_i| .$$

נורמה זו משרה באופן טבעי מטריקה d_{ℓ_1} על־ידי

$$d_{\ell_1}((a_1,a_2,\ldots),(b_1,b_2,\ldots)) = \sum_{i=1}^\infty |a_i - b_i| .$$

(ב) באופן דומה נגדיר נורמה $\|\cdot\|_{\ell_2}$ על ℓ_2 לפי המכפלה הפנימית הבאה:

$$\langle (a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \ .$$

המכפלה הפנימית משרה את הנורמה:

$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_{\ell_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2} \ .$$

כך אנו מגדירים את המטריקה d_{ℓ_2} לפי

$$d_{\ell_2}\left((a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2} \ .$$

(ג) עבור ℓ_∞ נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_\infty$ לפי

$$\|(a_1, a_2, \ldots)\|_\infty = \sup_i |a_i| \ .$$

והמטריקה המושרית:

$$d_\infty\left((a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)\right) = \sup_i |a_i - b_i| \ .$$

הנורמות שהגדרנו על ℓ_1 ועל ℓ_∞ אינן מושרות מאף מכפלה פנימית עליהן.

2. נניח $[a, b] \subset \mathbb{R}$. נסמן ב־$C[a, b]$ את מרחב הפונקציות הרציפות $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. קל לבדוק כי זהו מרחב וקטורי ממימד אינסופי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר עליו נורמות שונות:

(א) הנורמה $\|\cdot\|_{L^1}$ לפי

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| \ dx \ .$$

המטריקה המושרית[1]:

$$d_{L^1}(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \ dx \ .$$

(ב) נגדיר את הנורמה $\|\cdot\|_{L^2}$ המושרית ממכפלה פנימית על $C[a, b]$. נגדיר:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \ dx \ .$$

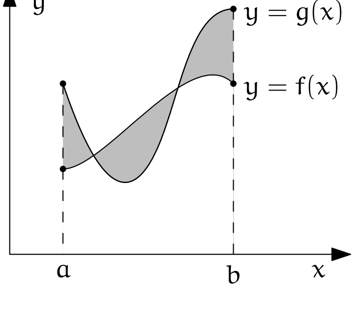
הנורמה המושרית היא

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \ dx} \ .$$

מקבלים מטריקה מושרית

$$d_{L^2}(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \ dx} \ .$$

[1] מטריקת L^1 מתארת את השטח הכלוא בין גרפים של שתי הפונקציות



(ג) הנורמה $\|\cdot\|_{L^\infty}$ (הנקראת גם הנורמה האוניפורמית ומסומנת גם $\|\cdot\|_{C^0}$) על $C[a,b]$ מוגדרת לפי

$$\|f\|_{L^\infty} = \max_{[a,b]} |f(x)| \,.$$

המטריקה שנורמה זו משרה (המטריקה האוניפורמית) נתונה לפי

$$d_{L^\infty}(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)| \,.$$

3. תהי X קבוצה. נגדיר פונקציה מטריקה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ לפי

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לכל שני איברים $x, y \in X$. קל לבדוק כי זו אכן מטריקה.

1.2 מכפלה ישרה של מרחבים מטריים

בדקו כי אלו אכן מטריקות!

נניח שני מרחבים מטריים (X_1, d_2) ו־(X_2, d_2). נגדיר שתי מטריקות על $X_1 \times X_2$:

$$\begin{cases} \max(d_1, d_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2)\} \\ (d_1 + d_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d(y_1,y_2) \end{cases}$$

1.2.1 דוגמה. נניח $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, וכי d_1 ו־d_2 הן המטריקות האוקלידיות הרגילות על $\mathbb{R}$. כך מקבלים את המטריקות הבאות על $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \max(d_1, d_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \underbrace{\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}}_{\mathbb{R}^2 \text{ על } d_\infty \text{ מטריקת}} \\ (d_1 + d_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \underbrace{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}_{\mathbb{R}^2 \text{ על } d_\infty \text{ מטריקת}} \end{cases}$$

1.3 תתי־מרחבים מטריים

1.3.1 הגדרה. נניח מרחב מטרי (X, d) ותת־קבוצה לא ריקה $Y \subset X$. נוכל לצמצם את המטריקה $d : X \times X \to X$ לקבוצה $Y \times Y$. צמצום זה מגדיר מטריקה על Y, המסומנת $D\mid_Y$, ונקראת המטריקה המושרית על Y על־ידי d. תת־מרחב מטרי של (X, d) הוא תת־קבוצה לא ריקה של X עם המטריקה המושרית עליה על־ידי d.

1.3.2 דוגמה. תהי $X = \mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית $d = d_2$. נתבונן בקבוצה $Y = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^2$, כאשר a, b ו־c הן קודקודיו של משולש בעל צלעות שאורכן 3, 4, ו־5. אזי

$$d\mid_Y(a,b) = 3, \quad d\mid_Y(b,c) = 4, \quad \mid d\mid_Y(a,c) = 5 \,.$$

1.3.3 הערה. ללהלן כמה הגדרות כלליות:

1. נניח (X, d) מרחב מטרי. אזי עבור n נקודות $x_1, \ldots, x_n \in X$. אפשר לכתוב את אי־שיוויון המשולש המשוכלל:

ההוכחה באינדוקציה פשוטה.

$$d(x_1, x_n) \leqslant d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \,.$$

1.3.4 תרגיל. נניח (X, d) מרחב מטרי, ויהיו $x, y, z \in X$. הוכיחו כי:

(א) $|d(x,y)-d(x,z)| \leqslant d(y,z)$;

(ב) $|d(x,y)-d(z,w)| \leqslant d(x,z)+d(y,w)$.

2. נניח (X,d) מרחב מטרי, $Y \subset X$ תת־קבוצה לא ריקה. הקוטר של Y מוגדר להיות

$$\operatorname{diam} Y = \sup_{a,b \in Y} d(a,b) \in [0,\infty) .$$

אם $\operatorname{diam} Y < \infty$ אומרים שהקבוצה Y חסומה. אם שתי תת־קבוצות $Y_1 \subset Y_2$ אז $\operatorname{diam} Y_1 \leqslant \operatorname{diam} Y_2$. בפרט, אם Y_2 חסומה אז גם Y_1 חסומה.

1.4 כדורים במרחבים מטריים

1.4.1 הגדרה. נניח (X,d) מרחב מטרי, $a \in X$. כדור פתוח ב־X מרדיוס $R > 0$ (עבור פרמטר חיובי R) עם מרכז ב־a מוגדר להיות הקבוצה

$$B(a,R) = \{x \in X \mid d(a,x) < R\} .$$

כדור סגור מרדיוס $R \geqslant 0$ עם מרכז ב־a מוגדר להיות הקבוצה

$$B[a,R] = \{x \in X \mid d(a,x) \leqslant R\} .$$

ספירה מרדיוס $R \geqslant 0$ עם מרכז ב־a מוגדרת להיות הקבוצה

$$S(a,R) = \{x \in X \mid d(a,x) = R\} .$$

1.4.2 דוגמה. דוגמאות:

1. נניח $X = \mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית d_2:

(א) עבור $X = \mathbb{R}^1$ הכדור הפתוח $B(a,R)$ הוא הקטע הפתוח $(a-R, a+R)$. כדור סגור $B[a,R]$ יהיה הקטע הפתוח $[a-R, a+R]$. הספירה היא זוג הנקודות $\{a-R, a+R\}$.

(ב) עבור $X = \mathbb{R}^2$, הכדור הפתוח $B(a,R)$ הוא הדיסקית בפתוחה (ללא שפה) שמרכזה ב־a. כדור סגור $B[a,R]$ יהיה אותה דיסקית עם השפה. הספירה $S(a,R)$ היא המעגל ברדיוס R שמרכזו ב־a.

(ג) עבור $X = \mathbb{R}^3$ הכדור הפתוח הוא הכדור שמרכזו a ללא שפה, הכדור הסגור הוא הכדור שמרכזו a עם השפה, והספירה היא השפה בלבד.

2. נניח $X = \mathbb{R}^2$.

(א) עבור מטריקת d_1, מהו הכדור הסגור הכדור הסגור נתון לפי

$$B[(0,0),1] = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leqslant 1\right\} .$$

(ב) עבור מטריקת d_∞, הכדור הסגור נתון לפי

$$B[(0,0),1] = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1|,|x_2|\} \leqslant 1\right\} .$$

3. נניח $X = C[a,b]$ עם מטריקת d_{L^∞}. מהו הכדור הסגור $B[f,R]$?

4. נניח $X\{a,b,c\}$ עם המטריקה

$$\begin{cases} d(a,b) = 3 \\ d(b,c) = 4 \\ d(a,c) = 5 \end{cases}$$

אמנם נראה כי למשל $B(b,4.1) = B[b,4.1] = X$. לעומת זאת, $B(c,4.8) = \{b,c\}$. קיבלנו כי $B(c,4.8) \subsetneq B(b,4.1)$.

2016-11-1

1.4.3 הערה. כמה הערות כלליות על כדורים במרחבים מטריים:

1. לכל נקודה a במרחב מטרי (X, d), ולכל $R > 0$, מתקיים

$$a \in B(a, R) \subset B[a, R] = B(a, R) \cup S(a, R) .$$

2. לכל $0 < R_1 \leqslant R_2$ מתקיים

$$B(a, R_1) \subset B(a, R_2)$$

וכנ"ל לגבי כדורים סגורים.

3. לכל כדור

$$\operatorname{diam} B(a, R) \leqslant \operatorname{diam} B(a, R) \leqslant 2R .$$

הא"ש האחרון נובע בא"ש המשולש: לכל שתי נקודות $x, y \in B[a, R]$ אפשר לייצר חסם:

$$d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(y, a) \leqslant 2R .$$

4. קבוצה Y במרחב מטרי (X, d) היא חסומה אמ"מ קימים $R > 0$ ונקודה $x \in X$ עבורם $Y \subset B(a, R)$.

הסבר. אם $Y \subset B(a, R)$, כיוון ש־$B(a, R)$ היא חסומה, גם Y חסומה. מנגד, אם Y חסומה, נבחר $y \in Y$ וכן $r = \operatorname{diam} Y + 1$. קל לוודא כי $B(y, r)$ מכיל את Y. □

5. נניח (X, d) מרחב מטרי, $a_1, a_2 \in X$ וכן $R_1, R_2 > 0$. אם $R_1 + R_2 < d(a_1, a_2)$ אזי $B[a_1, R_1] \cap B[a_2, R_2] = \varnothing$.

הסבר. נניח בשלילה כי החיתוך לא ירק, כלומר קיים $x \in B[a_1, R_1] \cap B[a_2, R_2]$. אזי

$$\begin{aligned} d(a_1, a_2) &\leqslant \underbrace{d(a_1, x)}_{\leqslant R_1} + \underbrace{d(a_2, x)}_{\leqslant R_2} \\ &\leqslant R_1 + R_1 < d(a_1, a_2) \end{aligned}$$

סתירה! □

לכן, בכל מרחב מטרי ניתן לשים כל שתי נקודות $a_1 \neq a_2$ בתוך שני כדורים זרים (שמרכז כל אחד הוא באחת הנקודות בהתאמה).

6. נניח (X, d) מרחב מטרי, $a \in X$ וכן $R > 0$. יהי $b \in B(a, R)$. אם $0 < r < R - d(a, b)$ אזי $B(b, r) \subset B(a, R)$.

הסבר. תהי $x \in B(b, r)$, נרצה להראות כי $x \in B(a, R)$. אזי

$$\begin{aligned} d(a, x) &\leqslant d(a, x) + \underbrace{d(b, x)}_{<r} \\ &< d(a, x) + r < R \end{aligned}$$

ולכן $x \in B(a, R)$. □

1.4.4 מסקנה. לכל כדור פתוח $B(a, R)$ במרחב מטרי (X, d), וכל נקודה $b \in B(a, R)$, ניתן למצוא כדור פתוח סביב b שמוכל בכדור $B(a, R)$.

נתבונן, למשל, במרחב במטרי $X = \{a, b, c\}$ ופונקצית המטריקה הנתונה לפי

$$\begin{cases} d(a, b) = 3 \\ d(b, c) = 4 \\ d(a, c) = 5 \end{cases}$$

אזי:

$$\begin{cases} B[a, 2] = \{a\} \\ \operatorname{diam} B[a, 2] = 0 \end{cases}$$

1.5 מרחבים טופולוגיים - הגדרות בסיסיות

1.5.1 הגדרה. תהי X קבוצה לא ריקה. טופולוגיה על X היא אוסף τ של תתי־קבוצות של X המקיים את התנאים הבאים:

(א) מוכרח להיות כי $\varnothing, X \in \tau$.

(ב) לכל $U_\alpha \in \tau$ (עבור קבוצת אינדקסים כלשהי $\alpha \in I$) מתקיים $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$.

(ג) עבור אוסף סופי $U_1, \ldots, U_k \in \tau$ מתקיים $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \tau$.

מרחב טופולוגי הוא קבוצה עם טופולוגיה שמוגדרת עליה. סימון: (X, τ). הקבוצות השייכות לטופולוגיה τ נקראות הקבוצות הפתוחות ב־τ.

סביבה של נקודה $x \in (X, \tau)$ היא קבוצה פתוחה כלשהי ב־τ המכילה את x.

1.5.2 דוגמה. נניח מרחב מטרי (X, d). נגדיר אוסף τ_d של תתי־קבוצות של X, המכיל את הקבוצות הבאות:

במקרה זה, τ_d נקראת הטופולוגיה המוגדרת על־ידי d, או הטופולוגיה המטרית על (X, d). טופולוגיה שמוגדרת על־ידי מטריקה כלשהי נקראת מטריזבילית.

- נדרוש $\varnothing \in \tau_d$.
- כל קבוצה $\varnothing \neq U \subset X$ המקיימת כי יחד עם כל נקודה שלה, U מכילה כדור פתוח כלשהו סביבה (למשל, זה כולל את כל הכדורים הפתוחים ב־(X, d)).

נבדוק כי τ_d היא אכן טופולוגיה:

(א) לפי הגדרה $\varnothing \in \tau_d$. כמו־כן X מקיימת את התנאי השני.

(ב) נניח משפחת קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau_d$. ניקח $a \in \bigcup_{\alpha\in I} U_d$. מכאן שקיים $\alpha \in I$ עבורו $a \in U_\alpha$. כיוון ש־$U_\alpha \in \tau_d$, קיים כדור פתוח $B(a, R)$ אשר מוכל ב־U_α, ובפרט באיחוד לכל $\alpha \in I$.

(ג) נניח $U_1, \ldots, U_k \in \tau$. יש להראות כי גם חיתוכן נמצא ב־τ_d. ניקח $a \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$. לכל $i = 1, \ldots, k$, מתקיים $a \in U_i$, ולכן לכל i קיים R_i עבור $B(a, R_i) \subset U_i$. נבחר $R = \min_i \{R_i\}$. אזי מתקיים כי $B(a, R) \subset B(a, R_i) \subset U_i$ לכל i, ובפרט $B(a, R) \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$.

2016-11-17

1.5.3 טענה. נניח (X, d) מרחב מטרי, תת־קבוצה לא־ריקה $U \subset X$. אזי U קבוצה פתוחה ב־(X, d) אמ"מ U היא איחוד של אוסף כלשהו של כדורים פתוחים ב־(X, d).

הוכחה. ראשית, נניח כי U היא איחוד של כדורים פתוחים ב־(X, d). כל כדור פתוח ב־(X, d) הוא קבוצה פתוחה. איחוד קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה), ולכן U פתוחה ב־(X, d).

מנגד, נניח U קבוצה פתוחה ב־(X, d). אזי, לכל נקודה $x \in U$ אפשר למצוא $R_x > 0$ עבורו הכדור $B(x, R_x) \subset U$. אזי,

$$U = \bigcup_{x\in U} x \subset \bigcup_{x\in U} B(x, R_x) \subset U,$$

ולכן $U = \bigcup_{x\in U} B(x, R_x)$ כנדרש. $\square$

1.5.4 דוגמה. נתבונן ב־$(\mathbb{R}, d)$ הממשיים עם המטריקה האוקלידית. אזי כל קטע פתוח ב־$\mathbb{R}$ (חסום או לא) הוא קבוצה פתוחה ב־$(\mathbb{R}, d)$: נניח קטע פתוח חסום $(a, b) \subset \mathbb{R}$. זהו הכדור הפתוח $B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$, ובפרט קבוצה פתוחה. לעומת זאת, אם הקטע לא חסום, למשל הקרן $(-\infty, b)$, אזי היא מתקבלת מאיחוד של קטעים פתוחים וחסומים (קבוצות פתוחות), ולכן גם היא פתוחה. כנ"ל עבור $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ לפי הגדרת הטופולוגיה.

1.5.5 תרגיל. נניח את הממשיים עם המטריקה האוקלידית $(\mathbb{R}, d)$, ותת־קבוצה $U \subset \mathbb{R}$. אזי U פתוחה אמ"מ U איחוד בן־מנייה של קטעים פתוחים זרים.

1.5.6 הגדרה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, $A \subset X$ תת־קבוצה (לא ריקה). הטופולוגיה על A המושרית על־ידי τ היא האוסף $\tau\mid_A$ של תת־קבוצות של A אשר מתקבלות מהחיתוך

$$\tau\mid_A = \{V \subset A \mid \exists U \in \tau : U \cap A = V\}.$$

1.5.7 טענה. 1. הצמצום $\tau\mid_A$ היא טופולוגיה על A.

2. אם d מטריקה על X, אזי $(\tau_d)\mid_A = \tau_{(d\mid_A)}$.

הוכחה. 1. ראשית נעיר כי $A = X \cap A$, וכי $X \in \tau$ נקבל כי $A \in \tau\mid_A$. באופן דומה $A \cap \varnothing = \varnothing$ ולכן גם $\varnothing \in \tau\mid_A$. נניח אוסף $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ מתוך $\tau\mid_A$. לכל $\alpha \in I$ קיימת קבוצה $U_\alpha \in \tau$ עבורה $V_\alpha = U_\alpha \cap A$. לכן

$$\begin{aligned}\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I}(U_\alpha \cap A)\\ &= \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right)}_{\in\tau} \cap A\end{aligned}$$

ולכן גם האיחוד של V_α־ות הוא ב־$\tau\mid_A$. נניח אוסף סופי $V_1, \dots, V_k \in \tau\mid_A$. לכל $i = 1, 2, \dots, k$ קיימת $U_i \in \tau$ עבורה $V_i = U_i \cap A$ ואז

$$\begin{aligned}\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k} V_i &= \bigcap_{1\leqslant i\leqslant k}(U_i \cap A)\\ &= \underbrace{\left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k} U_i\right)}_{\in\tau} \cap A\end{aligned}$$

ולכן גם חיתוך ה־V_i־ים הוא ב־$\tau\mid_A$ (וכך היא טופולוגיה.

2. ראשית נשים לב שכדורים פתוחים ב־$(A, d\mid_A)$ הם בדיוק החיתוכים עם A של כדורים פתוחים ב־(X, d) עם מרכזים ב־A. אכן, $x \in B^A(a, R)$ אם $d\mid_A(x, a) < R$ אמ"מ $d(x, a) < R$ וגם $x \in A$, כלומר $x \in B^X(a, R) \cap A$. לכן $B^A(a, R) = B^X(a, R) \cap A$.
יהי $V \in \tau_{(d\mid_A)}$. הקבוצה V פתוחה ב־$(A, d\mid_A)$, ולכן היא איחוד של כדורים כלומר $V = \bigcup_{\alpha\in I} B^a(a_\alpha, R_\alpha)$

$$\begin{aligned}V &= \bigcup_{\alpha\in I} B^x(a_\alpha, R_\alpha) \cap A\\ &= \underbrace{\left(\bigcup_{\alpha\in I} B^x(a_\alpha, R_\alpha)\right)}_{\in\tau_d} \cap A\end{aligned}$$

וכך $V \in (\tau_d)\mid_A$. מנגד, עבור $V \in \tau_d\mid_A$, ניתן להציגו $V = U \cap A$ עבור קבוצה $U \in \tau$, כלומר U פתוחה ב־(X, d). מכאן שכל $a \in V$ שייך ל־U. לכן לכל $a \in V$ קיים R_a עבורו הכדור $B^x(a, R_a) \subset U$. אזי נתבונן באיחוד

$$V = \bigcup_{a\in V} a \subset \bigcup_{a \in V} B^x(a, R_a) \subset U$$

לכן $V\subset\bigcup_{a\in V}B^{x}\left(a,R_{a}\right)$ אך מנגד גם $V\subset A$. לכן

$$V\subset\left(\bigcup_{a\in V}B^{x}\left(a,R_{a}\right)\right)\cap A\subset U\cap A=V$$

ומכאן ש־

$$\begin{aligned}V&=\left(\bigcup_{a\in V}B^{x}\left(a,R_{a}\right)\right)\cap A\\&=\bigcup_{a\in V}\left(B^{x}\left(a,R_{a}\right)\cap A\right)\\&=\bigcup_{a\in V}B^{A}\left(a,R_{a}\right)\end{aligned}$$

ולכן V פתוחה ב־$(A,d\mid_{A})$, כלומר $V\in\tau_{(d|_A)}$.

□

למעשה הגדרנו היטב את המושג תת־מרחב טופולוגי של (X,τ): זוהי תת־קבוצה לא ריקה של X עם הטופולוגיה המושרית עליה.

1.6 התכנסות סדרות

1.6.1 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, ו־$\{x_k\}$ סדרה של איברים מ־X. אומרים שהסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת לנקודה $a\in X$ (ב־(X,τ), או לפי τ) אם עבור כל סביבה U של a ב־(X,τ) אפשר למצוא אינדקס טבעי N, כך שכל $k\geqslant N$ מקיים כי $x_k\in U$. מסמנים

$$\{x_k\}\xrightarrow{k\to\infty}a \text{ או } \{x_k\}\to a \text{ או } \lim_{k\to\infty}x_k\,.$$

הנקודה a נקראת הגבול של $\{x_k\}$ (לפי τ).

1.6.2 דוגמה. נניח שיש לנו סדרה מתייצבת, כלומר סדרה שהיא קבועה החל ממקום מסוים: $x_k=a$ לכל $k>N$ עבור N כלשהו. אזי $\lim x_k=a$.

1.6.3 טענה. נניח (X,d) מרחב מטרי, וסדרה $\{x_k\}$ מתוך X, ואיבר $a\in X$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) הסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת ל־a ב־(X,τ_d).

(ב) לכל ε קיים N כך שכל $k\geqslant N$ מקיים כי $x_k\in B\left(a,\varepsilon\right)$.

(ג) הסדרה $\{d\left(x_k,a\right)\}$ ב־$\mathbb{R}$ מתכנסת ל־0 (לפי אינפי).

הוכחה.

(א)⇐(ב). ניקח $\varepsilon>0$ ונמצא N. אם $\{x_k\}\to a$, קיים N עבורו כל $k>N$ מקיים $x_k\in U$, עבור סביבה של a. בפרט, עובדה זו נכונה עבור $U=B\left(a,\varepsilon\right)$. לכן, אפשר למצוא N עבורו כל $k>N$ מקיים $x_k\in B\left(a,\varepsilon\right)$ אמ"מ $d\left(a,x\right)<\varepsilon$.

(ב)⇔(ג). לפי (ג), לכל $\varepsilon>0$ קיים מקום בסדרה החל ממנו $d\left(x_k,a\right)<\varepsilon$ שקול ל־(ב).

(ב)⇐(א). ניקח סביבה $U\in\tau_d$ של a, ונמצא N מתאים. קיים R עבורו $B\left(a,R\right)\subset U$. לפי (ב) אפשר למצוא N כך שכל $k>N$ מקיים $x_k\in B\left(a,R\right)$ משמע $x_k\in U$.

□

2016-11-8

1.6.4 טענה. במרחב מטרי, לכל סדרה מתכנסת יש גבול יחיד.

במרחב טופולוגי כללי, טענה זו לאו דווקא נכונה.

הוכחה. נניח בשלילה כי סדרה $\{x_k\}$ מתכנסת לשני גבולות $a \neq b$ במרחב מטרי. נבחר כדורים פתוחים זרים, $B(a, R_1)$ ו־$B(a, R_2)$ (ראינו כי זה אפשרי). יהי N_1 עבורו כל $k > N_1$ מקיים כי $x_k \in B(a, R_1)$, וכן N_2 עבורו כל $k > N_2$ מקיים $x_k \in B(b, R_2)$. כעת, כל $k > \max\{N_1, N_2\}$ מקיים

$$x_k \in B(a, R_1) \cap B(a, R_2) = \varnothing$$

סתירה! □

1.6.5 דוגמה. 1. ניקח את $(\mathbb{R}, d)$ עם המטריקה האוקלידית d. אזי סדרה $\{x_k\}$ מתכנסת לגבול a ב־$(\mathbb{R}, d)$ (לפי הגדרותינו) אמ"מ היא מתכנסת לפי ההגדרות המוכרות מאינפי.

2. ניקח $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. אזי הסדרה $\left\{\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)\right\}$ מתכנסת לגבול $(a_1, \ldots, a_n)$ ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ אמ"מ הסדרה $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ מתכנסת ב־$(\mathbb{R}, d)$ ל־a_i, לכל $i = 1, \ldots, n$.

הוכחה. הסדרה $\{x_k\}$ מתכנסת ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ לנקודה a אמ"מ קיים אינדקס N עבורו כל $k > N$ מקיים $d_\infty(x_k, a) < \varepsilon$, כלומר

$$\max_{i=1,\ldots,n} \left|x_i^{(k)} - a_I\right| < \varepsilon,$$

אך אם זה מתקיים ומקסימום, זה בפרט מתקיים לכל לקואורדינטה בנפרד:

$$\left|x_i^{(k)} - a_i\right| < \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

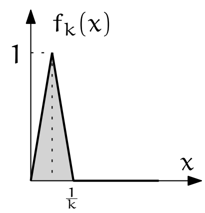
טענה זו תקפה לכל מטריקה על $\mathbb{R}^n$, ולא רק עבור d_∞; כלומר נראה בהמשך כי מטריקות שונות מגדירות על $\mathbb{R}^n$ אותה טופולוגיה.

לכן, לפי הגדרה, כל סדרה $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ מתכנסת ל־a_i. הכיוון השני יישאר כתרגיל מפעים (!) לקורא. □

3. נתבונן במרחב $X = C[0,1]$, אם מטריקת d_{L^1} ועם מטריקה d_{L^∞}. נראה כי כל סדרה המתכנסת לפי d_{L^∞} מתכנסת לפי d_{L^1}, אך לא להיפך.
נשים לב שעבור כל שתי פונקציות $f, g \in C[0,1]$, נוכל לומר כי

$$\begin{aligned} d_{L^1} &= \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \\ &\leqslant 1 \cdot \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \\ &= d_{L^\infty}(f, g) \end{aligned}$$

כדי למצוא דוגמה נגדית להופכי, נוכל להתבונן בסדרה של פונקציות אוהלים.



נוכל להראות כי הן מתכנסות לפי d_{L^1}, אך לא לפי d_{L^∞}. מכך אנו יכולים להסיק כי הטופולוגיות שהן מגדירות, $\tau_{d_{L^1}}$ ו־$\tau_{d_{L^\infty}}$, שונות זו מזו.

כלומר מטריקת d_{L^∞} חוסמת מלמעלה את מטריקת d_{L^1}. נניח סדרה $\{f_k\}$ המכתנסת ל־f במרחב $(C[0,1], d_{L^\infty})$. לכן, הסדרה $d_{L^\infty}(f, f_k)$ שואפת ל־0 (ב־$\mathbb{R}$). לכן, לפי האמור לעיל:

$$0 \leqslant d_{L^1}(f, f_k) \leqslant d_{L^\infty}(f, f_k) \to 0$$

גם הסדרה $d_{L^1}(f, f_k)$ שואפת ל־0; פירושו כי הסדרה $\{f_k\}$ שואפת ל־f גם לפי d_{L^1}.

1.6.6 טענה. נניח כי סדרה $\{x_k\}$ מתכנסת ל־a במרחב טופולוגי (X, τ), אזי כל תת־סדרה $\{x_{k_i}\}$ מתכנסת גם היא ל־a.

הוכחה. אם $\{x_k\} \to a$, אז לכל סביבה U של a קיים N כך שלכל $k \geqslant N$ מתקיים כי $x_k \in U$. בפרט זה מתקיים גם עבור כל x_{k_i} עם $k_i \geqslant N$. נבחר N_1 כך שעבור כל $i \geqslant N_1$ מתקיים $k_i \geqslant N$, ואז נקבל כי לכל i כזה מתקיים $x_{k_i} \in U$ כנדרש. □

1.7 סוגי נקודות ביחס לקבוצה במרחבים שונים

1.7.1 הגדרה. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ו־A תת־קבוצה (לא ריקה). נקודה $a\in A$ נקראת נקודה פנימית של A, אם יש ל־a סביבה U המוכלת ב־A. קבוצת כל הנקודות הפנימיות של A נקראת הפנים של A (באנגלית *interior*) ומסומנת $\operatorname{Int} A$.
נקודה $a\in A$ נקראת נקודה מבודדת של A, אם אפשר למצוא סביבה U של a כך שהחיתוך $U\cap A=\{a\}$.
נקודה $x\in X$ נקראת נקודת סְגור של A אם בכל סביבה של x יש נקודות מ־A (בפרט כל נקודה של A היא נקודת סגור שלה). קבוצת כל נקודות הסגור של A נקראת הסגור של A ומסומנת $\overline{A}$.
נקודה $x\in X$ נקראת נקודת הצטברות של A, אם כל סביבה של x מכילה אינסוף נקודות מ־A (בפרט, כל נקודת הצטברות של A היא נקודת סגור).

1.7.2 דוגמה. נניח $X=\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה τ_d שמושרה על־ידי המטריקה האוקלידית d.

1. נניח $A=[0,)\cup\{2\}$. אזי $\operatorname{Int} A=(0,1)$ וכן $\overline{A}=[0,1]\cup\{2\}$. מתקיים כי

נקודה\סוג	נקודה פנימית	נקודה מבודדת	נקודת סגור	נקודת הצטברות
0	–	–	✓	✓
$0<a<1$	✓	–	✓	✓
1			✓	✓
2	–	✓	✓	–
$1\neq x\in\mathbb{R}\setminus(A\cup\{1\})$			–	–

2. עבור $A=\mathbb{R}$ אין נקודות מבודדות, וכל נקודה ב־$A=\mathbb{R}$ היא נקודת פנים, נקודת הצטברות ונקודת סגור.

3. עבור $A=\{1,1/2,1/3,\ldots\}$. אזי $\operatorname{Int} A=\varnothing$, וכן נקודות הסגור $\overline{A}=A\cup 0$, וכן כל נקודה של A היא נקודה מבודדת, ויש ל־A נקודת הצטברות יחידה: 0.

2016-11-14

נוכל כעת להחיל מושגים אלה למרחבים מטריים: הנקודה $a\in A$ נקראת נקודת פנים של A אם קיימת סביבה U של a אשר חלקית ל־A. כלומר, a נקודה פנימית אם קיים כדור $B(a,R)$ המקיים $B(a,R)\subset A$. הנקודה $a\in A$ נקראת נקודה מבודדת אם יש סביבה שלה U עבורה $U\cap A=\{a\}$, אמ"מ קיים כדור $B(a,R)$ המקיים $B(a,R)\cap A=\{a\}$. הנקודה $x\in X$ נקראת נקודת סגור של A אם לכל כדור $B(x,R)$ מתקיים $B(x,R)\cap A\neq\varnothing$. הנקודה $x\in X$ היא נקודת הצטברות אם כל כדור $B(x,R)$ מכיל אינסוף נקודות מ־A.

1.7.3 טענה. נניח (X,d) מרחב מטרי, ותת־קבוצה לא־ריקה $A\subset X$. נניח נקודה $x\in X$. אזי:

(א) הנקודה x היא נקודת סגור של A אמ"מ קיימת סדרה $\{a_n\}$ של איברים ב־A שגבולה x.

(ב) אם x נקודת סגור של A וגם $x\notin A$, אזי x נקודת הצטברות של A.

במרחבים טופולוגיים כלליים, טענה זו לא בהכרח נכונה.

הוכחה.(א) נניח x נקודת סגור של A. ניקח את הכדורים $B(x,1/n)$. מהנחתנו, לכל n קיימת נקודה a_n המקיימת $a_n\in B(x,1/n)\cap A$, כלומר

$$0\leqslant d(a_n,x)\leqslant\frac{1}{n}\to 0$$

לכן הסדרה $d(a_n,x)$ מתכנסת ל־0, וכך הסדרה a_n גבולה x.
נניח, מנגד, כי קיימת סדרה $\{a_n\}$ של איברים מ־A שגבולה x. נראה כי x נקודת סגור של A. ואכן, כל סביבה של x מכילה את כמעט־כל האיברים בסדרה, לפי הגדרת ההתכנסות, ובפרט בכל סביבה של x קיימות נקודות מ־A.

(ג) נניח בשלילה כי x (נקודת סגור של A עם $x \notin A$) אינה נקודת הצטברות. כלומר, קיימת סביבה U של x המכילה מספר סופי של נקודות מ־A:

$$U \cap A = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

(נעיר כי $U \cap A \neq \varnothing$ כי x נקודת סגור). נשים לב כי $x \notin U \cap A$. ניקח כדור סביב $B(x,r)$ שמוכל ב־U. נגדיר

$$R = \min\{d(x,a_1), \dots, d(x,a_k), r\} > 0.$$

אזי הכדור $B(x,R) \subset B(x,r) \subset U$. לכן גם $B(x,R) \cap A \subset U \cap A = \{a_1,\dots,a_k\}$, אך לכל i מתקיים $d(x,a_i) \geqslant R$, לכן $B(x,R) \cap A = \varnothing$ – סתירה!

□

1.8 קבוצת הפְּנִים, וקבוצות סגורות

1.8.1 טענה. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ותת־קבוצה $A \subset X$. אזי ניתן להציג את $\operatorname{Int} A$ כאיחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב־A:

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{\text{פתוחה } U \subset A} U.$$

הוכחה. ניקח $x \in \bigcup U$. קיימת U_x פתוחה עבורה $x \in U_x \subset A$, ולכן $x \in \operatorname{Int} A$.
מנגד, יהי $x \in \operatorname{Int} A$. לכן קיימת סביבה U_x של x עבורה $x \in U_x \subset A$. לכן, בפרט, x נמצאת באיחוד כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב־U. □

1.8.2 מסקנה. 1. לכל $A \subset X$ מתקיים כי $\operatorname{Int} A$ היא קבוצה פתוחה.

2. קבוצה A פתוחה אמ"מ $A = \operatorname{Int} A$.

3. מתקיים $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

1.8.3 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, $A \subset X$ תת־קבוצה. הקבוצה A נקראת סגורה אם $X \backslash A \in \tau$.

1.8.4 טענה. הקבוצה A סגורה אמ"מ היא מכילה את כל נקודות הסגור שלה ($\overline{A} = A$).

הוכחה. נניח A סגורה. נניח $x \notin A$, כלומר $x \in X\backslash A$. הקבוצה $X\backslash A$ פתוחה וכן $(X\backslash A) \cap A = \varnothing$. לכן x לא נקודת סגור, כי קיימת סביבה שלה $X\backslash A$ שלא מכילה נקודות מ־A. מכאן שכל נקודות הסגור של A שייכות ל־A.
מנגד, נניח כי $A = \overline{A}$. לכן, כל נקודה $x \in X\backslash A$ מקיימת $x \notin \overline{A}$, ולכן קיימת סביבה של x שלא מכילה אף נקודה מ־A, כלומר קיימת סביבה של x שמוכלת כולה ב־$X\backslash A$. כך x נקודת־פנים של $X\backslash A$ לכל $x \in X\backslash A$, ולכן $X\backslash A$ פתוחה. □

1.8.5 דוגמה. 1. לגל מרחב טופולוגי כללי, (X,τ), הקבוצה X פתוחה ב־(X,τ), ולכן $\varnothing$ סגורה ב־(X,τ). אך באופן דומה, X גם סגורה, ולכן $\varnothing$ גם פתוחה.

2. נניח (X, d) מרחב מטרי. אזי כל כדור סגור $B[a, R]$ הוא קבוצה סגורה. נבדוק שכל נקודה $x \in X \backslash B[a, R]$ היא נקודה פנימית של $X \backslash B[a, R]$. ניקח $0 < r < d(a, b) - R$. אזי $r + R < d(x, a)$, ולכן כפי שראינו $B[a, R] \cap B[x, r] = \varnothing$. מצאנו סביבה $B[x, r] \subset X \backslash B[a, R]$, ולכן $X \backslash B[a, R]$ פתוחה. בפרט, עבור $R = 0$, נקבל כי הקבוצה $\{a\}$ היא סגורה.

1.8.6 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי.

1. בהינתן אוסף של קבוצות סגורות $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אזי $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ היא קבוצה סגורה.
2. בהינתן מספר סופי של קבוצות סגורות $A_1, \ldots, A_k$, גם איחודן סגור.

הוכחה. 1. הקבוצות A_α סגורות, פירושו רייםת U_α פתוחה עבור $A_\alpha = X \backslash U_\alpha$. לכן

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \backslash U_\alpha)$$
$$= X \backslash \underbrace{\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha}_{\text{פתוחה}}$$

מכאן שהחיתוך הוא קבוצה סגורה (כי משלימו פתוח).

2. לכל קבצה $A_{i=1,\ldots,k}$ היא משלים של קבוצה פתוחה: $A_i = X \backslash U_i$. ובאופן דומה

$$\bigcup A_i = \bigcup (X \backslash U_i)$$
$$= X \backslash \underbrace{\bigcap U_\alpha}_{\text{פתוחה}}$$

ומכאן שהאיחוד סגור, כמשלים של קבוצה פתוחה.

□

1.8.7 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, ונניח תת־קבוצות $A_1 \subset A_2 \subset X$. אזי $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

הוכחה. נניח x נקודת סגור של A_1. כל סביבה של x מכילה נקודה מ־A_1, ובפרט מכילה נקודה מ־A_2. לכן גם $x \in \overline{A_2}$. □

1.8.8 טענה. נניח (X, τ) מרח טופולוגי ותת־קבוצה $A \subset X$. אזי

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset C \text{ סגורה}} C.$$

הוכחה. מהטענה הקודמת לכל קבוצה סגורה C שמכילה את A מתקיים

$$\overline{A} \subset \overline{C} = C.$$

נניח, לכן, $x \in \bigcap C$ כלעיל. נניח בשלילה כי $x \notin \overline{A}$. קיימת סביבה U של x עבורה $U \cap A = \varnothing$, כלומר $A \subset X \backslash U$. הקבוצה $X \backslash U$ סגורה ומכילה את A, אך $x \notin X \backslash U$, סתירה. □

1.8.9 מסקנה. 1. $\overline{A}$ קבוצה סגורה.

2. $A = \overline{A}$ אמ"מ A סגורה.

3. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

1.8.10 תרגיל. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, ותת־קבוצה לא ריקה A. אזי $D \subset (A, \tau|_A)$ סגורה אמ"מ קיימת C סגורה ב־(X, τ) עבורה $D = C \cap A$.

1.9 קבוצות צפופות וקבוצות דלות

1.9.1 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. קבוצה $A \subset X$ נקראת צפופה ב־(X,τ) אם $\overline{A} = X$.

מרחב מטרי (X,τ) נקרא ספרבילי אם יש לו תת־קבוצה צפופה בת־מניה.

1.9.2 דוגמה. 1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי $\overline{X} = X$, ומכאן ש־X קבוצה צפופה בעצמה. לכן אם X קבוצה בת־מנייה, אזי (X,τ) הוא מרחב ספרבילי (לכל טופולוגיה τ על X).

2. ניקח את $\mathbb{Q}$ כתת־קבוצה של $\mathbb{R}$ אם הטופולוגיה האוקלידית. בפרט $\mathbb{R}$ ספרבילית.

1.9.3 טענה. מרחב ℓ_∞ אינו ספרבילי.

הוכחה. נתבונן בקבוצת הסדרות הבינאריות $A = \{\{0,1\}^\infty\}$. לכל שני איברים a_1 ו־a_2 מתוך A, מתקיים $\|a_2 - a_1\| \in \{0,1\}$, ולכן אם $a_1 \neq a_2$ מתקיים $B(a_1, 1/3) \cap B(a_2, 1/3) = \varnothing$. כמו־כן, ידוע כי עצמתה של A היא $\mathfrak{c}$. נניח C קבוצה צפופה ב־ℓ_∞. לכל איבר $a \in A$, קיים איבר של C בתוך הכדור $B(a, 1/3)$. כך מצאנו $\mathfrak{c}$ איברים מתוך C, ובפרט ℓ_∞ אינה ספרבילית. □

2016-11-15

הקבוצה A דלה אמ"מ אין קבוצות פתוחות המוכלות ב־$\overline{A}$, אמ"מ בכל קבוצה פתוחה יש נקודה שאינה שייכת ל־$\overline{A}$, אמ"מ בכל קבוצה פתוחה יש נקודה שאינה נקודת סגור של A, אמ"מ כל קבוצה פתוחה U יש נקודה שיש לה סביבה $V \subset U$ עבורה $V \cap A = \varnothing$, אמ"מ בכל קבוצה פתוחה U אפשר למצוא תת־קבוצה פתוחה V (לא ריקה) עבורה $V \cap A = \varnothing$.

1.9.4 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. קבוצה $A \subset (X,\tau)$ נקראת דלה (*nowhere dense*) אם $\operatorname{Int}\overline{A} = \varnothing$.

1.9.5 טענה. נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי $A \subset (X,d)$ גלה אמ"מ בכל כדור פתוח $B(x,R)$ אפשר למצוא כדור נוסף $B(y,r) \subset B(x,R)$ עבורו $B(y,r) \cap A = \varnothing$.

הוכחה. נניח A דלה, ויהי $B(x,R)$ כדור פתוח. אזי אפשר למצוא $V \subset B(x,R)$ פתוחה (לא־ריקה) כך ש־$V \cap A = \varnothing$. כיוון ש־V פתוחה, כאיחוד של כדורים, היא מכילה כדור $B(y,R) \subset V \subset B(x,R)$ אשר חיתוכו עם A ריק.

מנגד, ניקח קבוצה פתוחה U. לכן U מכילה כדור, אשר מכיל בעצמו כדור נוסף שחיתוכו עם A ריק. ניקח V להיות הכדור השני, ואזי $V \subset U$ ומקיים שחיתוכו עם A ריק (וכך A דלה). □

1.9.6 דוגמה. ניקח $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית, ואת $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. אזי $\mathbb{Z}$ דלה (בדקו!).

1.9.7 טענה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, וקבוצה $A \subset (X,\tau)$. אזי:

(א) אם A דלה אזי $X \backslash A$ צפופה.

(ב) אם A סגורה מתקיימת גם הגרירה ההפוכה.

הוכחה.

(א) אם A דלה, בכל קבוצה פתוחה ב־(X,τ) יש נקודות שאינן שייכות ל־$\overline{A}$, ובפרט נקודות אלו לא שייכות ל־A. כלומר, בכל קבוצה פתוחה ב־(X,τ) יש נקודות מתוך $X \backslash A$, וכך $X \backslash A$ צפופה.

(ב) נניח כי A גם סגורה. אזי $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int}\overline{A}$. אם $X \backslash A$ צפופה, אזי $\operatorname{Int} A = \varnothing$ (כי אחרת יש קבוצה פתוחה שמוכלת כולה ב־A). לכן $\operatorname{Int}\overline{A} = \varnothing$ כנדרש.

□

סוג חשוב של קבוצות דלות הוא קבוצות דיסקרטיות:

1.9.8 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. קבוצה $A\subset(X,\tau)$ נקראת דיסקרטית אם כל הנקודות של A מבודדות.

למשל, קבוצת השלמים $\mathbb{Z}$ דיסקרטית ב־$\mathbb{R}$ ביחס לטופולוגיה האוקלידית. באופן דומה, הקבוצה
$$\{1/n \mid n\in\mathbb{N}\}$$
דיסקרטית ב־$\mathbb{R}$, אפע"פ שאינה סגורה.

1.9.9 טענה. נניח (X,d) מרחב מטרי, ללא נקודות מבודדות. אזי כל קבוצה דיסקרטית ב־(X,d) דלה.

הוכחה. נניח $A\subset(X,d)$ דיסקרטית. נניח כדור כלשהו $B\subset(X,d)$, ונרצה למצוא כדור $B(y,R)\subset B$ שזר ל־A. אם B עצמו זר ל־A, סיימנו; אחרת אפשר למצוא נקודה $a\in A\cap B$. בפרט a מבודדת, לכן קיים כדור $B(a,r_1)$ כך שחיתוכו עם A ריק, וכיוון ש־B פתוחה, קיים כדור $B(a,r_2)$ המוכל ב־B. ניקח

$$\rho=\min\{r_1,r_2\}.$$

כיוון ש־a אינה נקודה מבודדת של X, קיימת $y\in B(a,\rho)$ כך ש־$a\neq y$. כיוון ש־$B(a,\rho)$ פתוחה, אפשר למצוא כדור $B(y,\rho')$ המוכל ב־$B(a,\rho)$. ניקח

$$R=\min\{\rho',d(a,y)\},$$

וכך

$$B(y,R)\subset B(a,\rho)\subset B$$

וגם

$$B(y,R)\cap A\subset B(a,\rho)\cap A=\{a\}$$

אך $a\notin B(y,R)$, לכן $B(y,R)\cap A=\varnothing$. □

1.10 רציפות

2016-11-21

1.10.1 הגדרה. נניח (X,τ) ו־(Y,σ) מרחבים טופולוגיים. העתקה $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ נקראת רציפה אם עבור כל $V\in\sigma$ מתקיים

$$F^{-1}(V)\in\tau,$$

כלומר, המקור של כל קבוצה פתוחה ב־(Y,σ) (לפי F) הוא קבוצה פתוחה ב־(X,τ).

ההעתקה F נקראת רציפה בנקודה $a\in X$ אם עבור כל סביבה $V\in\sigma$ של $F(a)$ אפשר למצוא סביבה $U\in\tau$ כך ש־$F(U)\subset V$, כלומר a נקודה פנימית של $F^{-1}(V)$.

1.10.2 טענה. נניח (X,τ) ו־(Y,σ) מרחבים טופולוגיים, והעתקה $F:X\to Y$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) ההעתקה F רציפה.
(ב) ההעתקה F רציפה בכל נקודה ב־X.
(ג) עבור כל קבוצה סגורה $A\subset(Y,\sigma)$, המקור של A הוא קבוצה סגורה ב־(X,τ).

הוכחה.

(א)⇐(ב) נניח סביבה V של $F(a)$ ב־(Y,σ). לפי הגדרה $F^{-1}(V)$ פתוחה ב־(X,τ). לכן כל נקודה של $F^{-1}(V)$, ובפרט a, נקודה פנימית.

(ב)⇐(א) תהי $V\subset(Y,\sigma)$ קבוצה פתוחה, ניקח $a\in F^{-1}(V)$ (בה"כ המקור של V לא ריק). לפי הנחה, הנקודה a היא נקודה פנימית של $F^{-1}(V)$. כל נקודה של $F^{-1}(V)$ היא פנימית, ולכן $F^{-1}(V)$ פתוחה.

(א)⇐(ג) נניח A קבוצה סגורה ב־(Y,σ), כלומר $Y\backslash A$ קבוצה פתוחה. לפי הנחה, גם $F^{-1}(Y\backslash A)$ גם פתוחה ב־(X,τ). לכן $X\backslash F^{-1}(Y\backslash A)$ פתוחה, אך קל לראות כי זו למעשה $F^{-1}(A)$.

(ג)⇐(א) נניח V פתוחה ב־(Y,σ), לכן $Y\backslash V$ סגורה. לפי הנחה גם $F^{-1}(Y\backslash V)$ סגורה ב־(X,τ), כלומר $X\backslash F^{-1}(Y\backslash V)$ פתוחה, אך באופן דומה אנו רואים כי זו למעשה $F^{-1}(V)$.

□

1.10.3 טענה. נניח $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ העתקה בין מרחבים טופולוגיים, רציפה בנקודה $a\in X$. נניח סדרה $\{x_n\}\subset X$ שמתכנסת ל־a. אזי הסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,σ).

הוכחה. נניח V סביבה של $F(a)$ ב־(Y,σ). אזי, כיוון ש־F רציפה, אפשר למצוא סביבה U של a ב־(X,τ) כך ש־$F(U)\subset V$. כיוון שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל־a, אפשר למצוא N כך שלכל $n\geqslant N$ מתקיים $x_n\in U$. לכן, לכל $n\geqslant N$ יתקיים $F(x_n)\in F(U)\subset V$. ומכאן שהסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$. □

1.10.4 מסקנה. אם ההעתקה $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ בין מרחבים טופולוגיים רציפה, כל סדרה $\{x_n\}$ המתכנסת לנקודה כלשהי $a\in X$, אזי הסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,σ).

1.10.5 טענה. נניח $F:(X,d)\to(Y,\rho)$ העתקה בין מרחבים מטריים, ונקודה $a\in X$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) ההעתקה F רציפה ב־a.

(ב) לכל $\varepsilon>0$ אפשר למצוא $\delta>0$ כך שיתקיים

$$F(B(a,\delta))\subset B(F(a),\varepsilon),$$

או באופן שקול

$$B(a,\delta)\subset F^{-1}(B(F(a),\varepsilon)).$$

(ג) אם הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל־a ב־(X,d), אזי הסדרה $\{F(a)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,ρ).

הוכחה.

(א)⇐(ג) כבר הוכחנו.

(ג)⇐(ב) נניח בשלילה כי מתקיים (ג) אך לא מתקיים (ב), כלומר קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ מתקיים

$$B(a,\delta)\not\subset F^{-1}(B(F(a),\varepsilon)).$$

בפרט, לכל n טבעי מתקיים

$$B\left(a,\frac{1}{n}\right)\not\subset F^{-1}(B(F(a),\varepsilon)),$$

כלומר קיימת נקודה $x_n\in B(a,1/n)$ עבורה $F(x_n)\notin B(F(a),\varepsilon)$. אולם

$$0\leqslant d(x_n,a)\leqslant\frac{1}{n},$$

לכן הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל־a, אך $F(x_n)$ לא יכולה להתכנס ל־$F(a)$ – סתירה!

(ב)⇐(א) ניקח סביבה $V\subset(Y,\rho)$ של $F(a)$, אזי אפשר למצוא כדור $B(F(a),\varepsilon)\subset V$. לפי הנחה, אפשר למצוא כדור $B(a,\delta)\subset F^{-1}(B(F(a),\varepsilon))$.

□

1.10.6 מסקנה. נניח (X,d)ו־(Y,ρ) מרחבים מטריים, אזי ההעתקה $F:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה אמ"מ לכל סדרה $\{x_n\}$ המתכנסת ל־a ב־(X,d) מתקיים כי הסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,ρ).

1.10.7 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. קוראים לפונקציה $F:(X,\tau)\to\mathbb{R}$ רציפה אם היא רציפה בהעתקה מ־(X,τ) אל מרחב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית.

1.10.8 דוגמה. פונקציה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה כהעתקה על המרחב הטופולוגי $\mathbb{R}$ (עם הטופולוגיה האוקלידית) אמ"מ היא רציפה במובן של אינפי.

1.10.9 דוגמה. נניח $(R^n,d_{\max})$. נזהה כל איבר $x\in\mathbb{R}^n$ לפי קואורדינטות $x_1,\ldots,x_n$. נתבונן בפונקציה $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שמעתיקה כל איבר ב־$\mathbb{R}^n$ לקואורדינטה ה־i שלו:

$$x_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_i.$$

אזי זו העתקה רציפה (בדקו!). כנ"ל לגבי פונקציות הטלה דומות המוגדרות על $\ell_1,\ell_2,\ell_\infty$.

1.10.10 דוגמה. נניח (X,d) מרחב מטרי, ונניח פונקציות רציפות $F,G:(X,d)\to\mathbb{R}$. אזי פונקציות מהצורה $F+G$, $F-G$, $F\cdot G$, F/G — כולן רציפות (אם הן מוגדרות). עובדה זו נובעת ישירות מעובדות ידועות על התכנסות של סדרות ב־$\mathbb{R}$ (בדקו!).

1.10.11 דוגמה. נניח (X,τ) ו־(Y,σ) מרחבים טופולוגיים, והעתקה קבועה $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, כלומר

$$F(x)=b$$

עבור b כלשהו קבוע ב־Y, ולכל $x\in X$. אזי F רציפה. אמנם, לכל קבוצה פתוחה $V\subset Y$ יתקיים

$$F^{-1}(V)=\begin{cases}X & b\in V\\ \varnothing & b\notin V\end{cases}.$$

1.10.12 דוגמה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, ונניח $(A,\tau|_A)$ תת־מרחב. נתבונן בהעתקת השיכון $\iota:(A,\tau|_A)\to(X,\tau)$ (הנתונה לפי $\iota(x)=x$). אמנם, לכל קבוצה פתוחה $V\subset X$ יתקיים

$$\iota^{-1}(V)=V\cap A\in\tau|_A$$

כנדרש.

1.10.13 דוגמה. נניח (X,τ), (Y,σ) ו־$(Z.\theta)$ מרחבים טופולוגיים. נניח העתקות רציפות $F:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ו־$G:(Y,\sigma)\to(Z,\theta)$. אזי ההעתקה $G\circ F:(X,\tau)\to(Z,\theta)$ גם היא רציפה. אמנם לכל $V\in\theta$ יתקיים

למשל, בהינתן העתקה $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, ותת קבוצה $A\subset X$ לא־ריקה, אזי הצמצום $f|_A:(A,\tau|_A)\to(Y,\sigma)$ גם הוא רציפה, כהרכבה של f עם השיכון ι.

$$(G\circ F)^{-1}(V)=\underbrace{F^{-1}\Bigg(\underbrace{G^{-1}(V)}_{\in\sigma}\Bigg)}_{\in\tau}$$

והרי זו קבוצה פתוחה, כי V פתוחה, וכן F ו־G רציפות.

סוג חשוב של העתקות רציפות בין מרחבים מטריים, הוא העתקות ליפשיץ:

1.10.14 הגדרה. העתקה $F:(X,d)\to(Y,\rho)$ נקראת c־ליפשיץ אם לכל $a,b\in X$ מתקיים

$$\rho\left(F(a,)\,F(b)\right)\leqslant c\cdot d(a,b).$$

במקרה כזה אומרים ש־c הוא קבוע ליפשיץ של F.

אין כוונה ש־c הוא הקבוע המינימלי המתקיים את התנאי.

1.10.15 טענה. נניח $F:(X,d)\to(Y,\rho)$ העתקת ליפשיץ בין מרחבים מטריים. אזי F רציפה.

הוכחה. נניח סדרה $\{x_n\}$ שמתכנסת ל־a ב־(X,d), כלומר הסדרה $\{d(a,x_n)\}$ מתכנסת ל־0 ב־$\mathbb{R}$. נשים לב כי אז

$$0 \leqslant \rho(F(x_n),a) \leqslant c \cdot d(x_n,a)$$

עבור $c>0$ כלשהו. אזי גם $\{\rho(F(x_n),a)\}$ מתכנסת ל־0, ולכן הסדרה $\{F(x_n)\}$ מתכנסת ל־$F(a)$ ב־(Y,ρ), וכך F רציפה. □

1.10.16 דוגמה. נניח (X,d) מרחב מטרי, וכן $a \in X$. נגדיר פונקציה $d_a : (X,d) \to \mathbb{R}$ לפי

$$d_a(x) = d(a,x)$$

לכל $x \in X$. אזי d_a היא 1־ליפשיץ (כפונקציה לתוך מרחב מטרי $\mathbb{R}$ עם המטריקה האוקלידית). אמנם:

$$\begin{aligned} d_{\text{Eucl}}(d_a(x), d_a(y)) &= |d_a(x) - d_a(y)| \\ &= |d(x,a) - d(y,a)| \\ &\leqslant d(x,y) \end{aligned}.$$

1.10.17 דוגמה. נגדיר פונקציה $\varphi : (C[a,b], L^\infty) \to \mathbb{R}$ לפי

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

אזי φ היא $(b-a)$־ליפשיץ. אמנם:

$$\begin{aligned} d_{\text{Eucl}}(\varphi(f), \varphi(g)) &= |\varphi(f) - \varphi(g)| \\ &= \left|\int_a^b f(x) - g(x)\ dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx \\ &\leqslant (b-1) \max_{[a,b]} |f-g| \\ &= (b-1) L^\infty(f,g) \end{aligned}.$$

2016-11-22

1.10.18 הגדרה. העתקה בין מרחבים טופולוגיים נקראת הומאומורפיזם *(homeomorphism)* אם היא רציפה והפיכה, וגם ההופכית שלה רציפה. מרחבים טופולוגיים (X,τ) ו־(Y,σ) נקראים הומאומורפיים אם קיים בינהם הומאומורפיזם. סימון: $(X,\tau) \simeq (Y,\sigma)$.

1.10.19 דוגמה. העתקת הזהות על כל מרחב טופולוגי היא רציפה, וכן היא הופכית לעצמה. מכאן שהעתקת הזהות היא הומאומורפיזם.

1.10.20 דוגמה. נתבונן בהעתקה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הנתונה לפי $f(x) = 2x$. זו העתקה רציפה, וההופכית שלה נתונה לפי $f^{-1}(x) = {}^{1}\!/_{2x}$, שגם היא רציפה; לכן f היא הומאומורפיזם.

מכאן ואילך, $\mathbb{R}$ ייתיחס למרחב הממשי תחת הטופולוגיה האוקלידית.

1.10.22 דוגמה. נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ הנתונה לפי $f(x) = e^x$. זו העתקה רציפה, וכן מתקיים $f^{-1}(x) = \ln(x)$, כלומר f הומאומורפיזם. בפרט, $\mathbb{R} \simeq (0,\infty)$.

1.10.21 תרגיל. הראו כי כל קטע/קרן פתוח/ה ב־$\mathbb{R}$ איזומורפי לכל קטע/קרן פתוח/ה אחר/ת. הוכיחו זאת גם עבור קטעים סגור.

1.10.23 דוגמה. הפונקציה $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, הנתונה לפי $f(x) = \arctan(x)$. זו העתקה רציפה ומתקיים $f^{-1}(x) = \tan(x)$, ולכן הומאומורפיזם. בפרט $\mathbb{R} \simeq (-\pi/2, \pi/2)$.

1.10.24 דוגמה. העתקת הזהות $\mathrm{Id}:\left(C\left[a,b\right],d_{L^{\infty}}\right)\to\left(C\left[a,b\right],d_{L^{1}}\right)$. זו העתקה רציפה (ראינו כי התכנסות סדרות לפי $d_{L^{\infty}}$ גוררת התכנסות לפי $d_{L^{1}}$), והיא הופכית לעצמה. עם־זאת, ההעתקה ההפוכה $\mathrm{Id}:\left(C\left[a,b\right],d_{L^{1}}\right)\to\left(C\left[a,b\right],d_{L^{\infty}}\right)$ אינה רציפה (כי הגרירה ההפוכה להתכנסות סדרות לא מתקיימת). כך, העתקת הזהות אינה הומאומורפיזם, אף שהיא רציפה והפיכה.

1.10.25 תרגיל.

1. אם העתקה היא הומאומורפיזם, גם ההופכית שלה הומאומורפיזם.
2. הרכבה של הומאומורפיזמים היא הומאומורפיזם.
3. קבוצת ההומאומורפיזמים ממרחב טופולוגי אל עצמו מהווה חבורה. סימון: $\mathrm{Homeo}\left(X,\tau\right)$.
4. הומאומורפיזם הוא יחס שקילות על מרחבים טופולוגיים.
5. במרחב נורמי, כל שני כדורים פתוחים (עם הטופולוגיות המושרות עליהם) הומאומורפים. כנ"ל לגבי כדורים סגורים (עם רדיוס חיובי) וכן לגבי ספירות.
6. ב־$\mathbb{R}^{2}$, תחום מלבני סגור הומאומורפי לדיסקית סגורה.
7. הומאומורפיזם $F:\left(X,\tau\right)\to\left(Y,\sigma\right)$ מעביר קבוצות פתוחות ב־$\left(X,\tau\right)$ לקבוצות פתוחות ב־$\left(Y,\sigma\right)$, קבוצות סגורות לקבוצות סגורות, קבוצות צפופות לקבוצות צפופות (בפרט אם X ספרבילי אזי גם Y ספרבילי), קבוצות דלות לקבוצות דלות, נקודות פנים של תת־קבוצה לנקודת פנים של תמונתה (וכנ"ל עבור נקודות סגור).

1.10.26 הגדרה. העתקה $F:\left(X,\tau\right)\to\left(Y,\sigma\right)$ בין מרחבים טופולוגיים נקראת שיכון טופולוגי *(topological embedding)* אם ההעתקה $F:\left(X,\tau\right)\to\left(F\left(X\right),\sigma\left|_{F\left(x\right)}\right.\right)$ היא הומאומורפיזם.

1.10.27 דוגמה. ראינו כי העתקת השיכון $\iota:\left(A,\tau\left|_{A}\right.\right)\to\left(X,\tau\right)$ עבור מרחב טופולוגי ותת־מרחב שלו רציפה, ולמעשה ההעתקה $\iota:\left(A,\tau\left|_{A}\right.\right)\to\left(\iota\left(A\right),\tau a\left|_{A}\right.\right)$ היא העתקת הזהות. לכן השיכון הוא שיכון טופולוגי.

1.10.28 דוגמה. ההעתקה $F:\mathbb{R}^{1}\to\mathbb{R}^{2}$ הנתונה לפי $x\mapsto\left(x,x\right)$ היא שיכון טופולוגי של $\mathbb{R}$ על תת־מרחב האלכסון $x=y$ ב־$\mathbb{R}^{2}$.

1.10.29 דוגמה. ההעתקה $F:[0,2\pi)\to\mathbb{R}^{2}$ הנתונה לפי $x\mapsto\left(\cos\left(x\right),\sin\left(x\right)\right)$ אמנם רציפה, אך ההופכית $F^{-1}:F[0,2\pi)\to\mathbb{R}$ לא רציפה (כי קיימת סדרה ב־S^{1} שתמונתה מתכנסת ל־$x=2\pi$). למעשה ספירת היחידה ב־$\mathbb{R}^{2}$ אינה הומאומורפית לאף קטע פתוח/סגור ב־$\mathbb{R}$.

2016-11-28

נדון כעת בהעתקות רציפות מיוחדות בין מרחבים מטריים.

1.10.30 הגדרה. נניח $f:\left(X,d\right)\to\left(Y,\rho\right)$ העתקה בין שני מרחבים מטריים. אומרים ש־f היא איזומטריה אם היא חח"ע ועל, ואם לכל שתי נקודות $a,b\in X$ מתקיים

$$d\left(a,b\right)=\rho\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right).$$

נשים לב שאם f שומרת על המטריקות, או אם f בי־לפשיץ, אז היא בהכרח חח"ע.

אם הפונקציה f אינה בהכרח על Y, אומרים ש־f היא שיכון איזומטרי. הפונקציה f נקראת בי־ליפשיץ אם קיימים קבועים $\alpha,\beta>0$ המקיימים

$$\alpha d\left(a,b\right)\leqslant\rho\left(f(a,f\left(b\right)\right)\leqslant\beta d\left(a,b\right)$$

לכל שתי נקודות $a,b\in X$.

1.10.31 הערה. כאמור, אם f בי־ליפשיץ, אזי היא חח"ע. בפרט היא ליפשיץ, וגם ההעתקה $f^{-1}:\left(f\left(X\right),\rho|_{f\left(x\right)}\right)\to\left(X,d\right)$ היא ליפשיץ, ושתיהן רציפות. לכן f שיכון טופולוגי. כך, אם f בי־ליפשיץ ועל, אז היא בפרט הומאומורפיזם (על המרחבים הטופולוגיים שמהטריקות משרות).

1.10.32 דוגמה. במרחבים אולדיים $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, הזזות מקבילות, סיבובים, שיקופים - כולם איזומטריות מכל מרחב לעצמו.

1.10.33 דוגמה. נניח כי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה, ו־d המטריקה המוגדרת על־ידי הנורמה; אזי ההעתקה
$$F(x) = x + v$$
מ־V לעצמו ,עבור v, כלשהו ב־V היא איזומטריה (בדקו!).

1.10.34 דוגמה. ההעתקה $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ עם המטריקות האוקלדיות הנתונה לפי $F(x) = (x, 0)$ שומרת על המטריקה, אך היא אינה על. לכן F שיכון איזומטרי. לעומת זאת ההעתקה $G(x) = (x, x)$ בין אותם מרחבים, "תמתח" את המרחקים פי $\sqrt{2}$:
$$.d(G(x), G(y)) = \sqrt{2}|x - y|$$
לכן G בי־ליפשיץ, עם פרמטרים $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.

1.10.35 הגדרה. מרחבים מטריים (X, d) ו־(Y, ρ) נקראים איזומטריים אם אפשר למצוא ביניהם איזומטריה. נסמן $(X, d) \underset{\text{isom}}{\simeq} (Y, \rho)$. אם שני מרחבים מטריים הם איזומטריים, הם בפרט גם הומאומורפיים.

1.10.36 דוגמה. נתבונן במרחב $(0, 1)$ עם המטריקה האוקלידית, והמרחב $(0, 2)$ עם אותה מטריקה. שניהם הומאומורפיים (מדוע?), אך לא ניתן למצוא ביניהם איזומטריה, כי הקוטר של שניהם שונה.

1.10.37 תרגיל. לטובתכם, הראו את העובדות הפשוטות הבאות:
1. ההופכית של איזומטריה היא איזומטריה.
2. הרכבה של איזומטריות היא איזומטריה.
3. העתקה הזהות היא איזומטריה.

1.10.38 מסקנה. קבוצת האיזומטריות של מרחב מהווה חבורה, בפרט תת־חבורה של חבורת ההומאומורפיזמים ממרחב לעצמו.

1.10.39 תרגיל. הקורא יהנה מלהראות כי איזומטריה בין מרחבים מטריים היא יחס שקילות.

1.10.40 תרגיל. הראו כי אם F ההעתקה ממרחב מטרי $\mathbb{R}$ אל עצמו היא איזמוטריה א־מ־מ היא מהצורה $F(x) = \pm x + c$ (עבור קבוע $c \in \mathbb{R}$ כלשהו). באופן דומה, העתקה F מ־$\mathbb{R}$ לעצמו היא הומאומורפיזם א־מ־מ היא רציפה[2], מונוטונית ממש ועל.

[2] למעשה הדרישה לרציפות מיותרת.

1.10.41 תרגיל. הוכיחו כי
$$(C[a, b], d_{L^\infty}) \underset{\text{isom}}{\simeq} (C[a', b'], d_{L^\infty})$$
לכל $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ מתאימים.

1.10.42 הגדרה. נניח קבוצה לא־ריקה X, ונניח שתי מטריקות d_1 ו־d_2 על X. אומרים ש־d_1 ו־d_2 שקולות אם אפשר למצוא $\alpha, \beta > 0$ כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים
$$.\alpha d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \beta d_1(x, y)$$
אזי d_1 ו־d_2 א־מ־מ העתקת הזהות על X עם המטריקות השונות היא בי־ליפשיץ. לכן העתקת הזהות היא הומאומורפיזם, וכך אם d_1 ו־d_2 שקולות, אזי הן מגדירות אותה טופולוגיה על X.

1.10.43 דוגמה. נניח V מרחב וקטורי עם שתי נורמות עליו, $\|\cdot\|_1$ ו־$\|\cdot\|_2$. אומרים ששתי הנורמות שקולות, אם אפשר למצוא קבועים $\alpha, \beta > 0$ כך שלכל $v \in V$

$$\alpha \|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant \beta \|v\|_2.$$

אם שתי נורמות שקולות, אזי המטריקות ששתיהן מגדירות בהתאמה, גם הן שקולות.

1.10.44 טענה. נורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ על $\mathbb{R}^n$ כולן שקולות. בפרט הן מגדירות על $\mathbb{R}^n$ אותה טופולוגיה (הנקראת הטופולוגיה האוקלידית).

1.10.45 דוגמה. נניח $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ מרחסים מטריים. ניזכר בשתי מטריקות על $X_1 \times \cdots \times X_k$:

$$\begin{cases} d_\Sigma ((x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k)) = \sum_i d_i(x_i, y_i) \\ d_{\max} ((x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k)) = \max_i \{d_i(x_i, y_i)\} \end{cases}$$

אזי d_Σ ו־$d_{\max}$ שקולות. אמנם:

$$\begin{aligned} d_{\max} ((x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k)) &\leqslant d_\Sigma ((x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k)) \\ &= \sum_i d_i(x_i, y_i) \\ &\leqslant k \max_i \{d_i(x_i, y_i)\} \\ &= k d_{\max} ((x_1, \ldots, x_k)(y_1, \ldots, y_k)) \end{aligned}$$

לכן הן מגדירות אותה טופולוגיה על $X_1 \times \cdots \times X_k$.

2 ...וטופולוגיים

2.1 דוגמאות ותכונות נוספות

נניח קבוצה X לא־ריקה. ראינו כי כל מטריקה על X מגדירה טופולוגיה על X. ראינו כי ההתאמה קבוצת המטריקות על X לקבוצת הטופולוגיות על X אינה חח"ע (כלומר, קיימות מטריקות שונות שמגדירות על X אותה טופולוגיה). כעת נראה כי היא גם לא על (כלומר, יש טופולוגיות שלא מוגדרות על־ידי אף מטריקה).

2.1.1 דוגמה. נניח X לא־ריקה כלשהי. נגדיר $\tau = \{X, \varnothing\}$. טריויאלית, τ היא טופולוגיה על X. אם יש לפחות שני איברים ב־X, אזי τ לא מושרית מאף מטריקה, כי אי־אפשר לשים שתי נקודות שונות של X בסביבות זרות.

2.1.2 הגדרה. נניח X קבוצה לא־ריקה, ו־τ_1 ו־τ_2 טופולוגיות על X. אם $\tau_1 \subset \tau_2$ אומרים ש־τ_1 יותר דלה מ־τ_2 (או ש־τ_2 יותר עשירה מ־τ_1).

2.1.3 דוגמה. נניח d_1, d_2 שתי מטריקות על X. עם קיים קבוע חיובי c עבורו

$$d_1 \leqslant c d_2$$

אזי העתקת הזהות $\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$ ליפשיצית, ולכן רציפה. לכן כל קבוצה פתוחה ב־d_1 היא פתוחה ב־d_2, ולכן

$$\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2},$$

כלומר τ_{d_1} דלה יותר מ־τ_{d_2}.

2.1.4 דוגמה. נניח X קבוצה לא־ריקה. אז הטופולוגיה $\tau = \{X, \varnothing\}$ היא הטופולוגיה הדלה מכולן. לעומת זאת, הטופולוגיה $\sigma = 2^X$, כאשר 2^X מייצג את קבוצת החזקה של X, היא הטופולוגיה העשירה מכולן.

הטופולוגיה σ מוגדרת, למשל, על־ידי המטריקה הבינארית על X, כי לפי מטריקה זו כל נקודה היא כדור פתוח ברדיוס $1/2$ סביב עצמה (ולכן כל קבוצה ב־σ היא איחוד כדורים פתוחים).

2.1.5 טענה. נניח $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ הוא אוסף טופולוגיות על קבוצה לא־ריקה X. אזי גם τ המוגדר לפי

$$\tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$$

הוא טופולוגיה.

הוכחה. לפי הגדרה, $X, \varnothing$ הם איברים ב־τ (כי הם איברים בכל טופולוגיה τ_α). אם $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ הוא אוסף קבוצות ב־τ, אזי $U_\beta \in \tau_\alpha$ לכל $\alpha \in I$, ולכן

$$\bigcup_{\beta \in J} U_\beta \in \tau_\alpha$$

לכל $\alpha \in I$, וכך גם

$$\bigcup_{\beta \in J} U_\beta \in \tau .$$

את תכונת החיתוך מראים באופן דומה. $\square$

2.1.6 מסקנה. נניח X קבוצה לא־ריקה, וכי Θ אוסף כלשהו של תת־קבוצות של X. אזי

$$\tau(\Theta) = \bigcap_{\tau \text{ טופולוגיה על } X \text{ עם } \Theta \subset \tau} \tau$$

היא הטופולוגיה הכי דלה המכילה את Θ (היא נקראת הטופולוגיה הנוצרת על־ידי Θ).

2.2 בחירת טופולוגיה לפי דרישה לרציפות

נניח העתקה F מקבוצה X לקבוצה Y. כיצד נוכל להגדיר טופולוגיה τ על X וטופולוגיה σ על Y כך שנוכל להבטיח כי $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ תהיה העתקה רציפה. ככל ש־τ יותר עשירה, וככל ש־σ יותר דלה כך המשימה יותר קלה, כלומר עם F כזו רציפה, אז לכל $\sigma' \subset \sigma$ ולכל $\tau \subset \tau'$ מובטח כי ההעתקה $F : (X, \tau') \to (Y, \sigma')$ גם היא רציפה.

נניח כי (Y, σ) מרחב טופולוגי נתון, והעתקה $F : X \to (Y, \sigma)$ נתונה. מה הטופולוגיה הדלה ביותר τ שניתן להגדיר כל X כך ש־F תהיה רציפה ביחס אליה? נגדיר

$$\Theta_F = \left\{F^{-1}(V) \middle| V \in \sigma\right\}.$$

במונחים אלה, F רציפה א־מ־מ $\Theta_F \subset \tau$. אנו מחפשים את הטופולוגיה הדלה ביותר המכילה את Θ_F. אזי ראינו כי τ היא חיתוך כל הטופולוגיות על X המכילות את Θ_F. אך למעשה, Θ_F היא בעצמה טופולוגיה: אמנם $X = F^{-1}(Y) \in \Theta_F$, וכן $\varnothing = F^{-1}(\varnothing) \in \Theta_F$. נניח אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \Theta_F$. לכל α הקבוצה $U_\alpha = F^{-1}(V_\alpha)$ עבור $V_\alpha \in \sigma$ כלשהי. אזי

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} F^{-1}(V_\alpha) = F^{-1}\underbrace{\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right)}_{\in \sigma},$$

ולכן גם האיחוד של כל ה־U_α־ות הוא ב־Θ_F. נניח אוסף סופי $U_1, \ldots, U_k \in \Theta_F$. לכל $i \leqslant k$ קיימת $V_\alpha \in \sigma$ עבור $U_\alpha = F^{-1}(V_\alpha)$. אזי

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i = \bigcap_{i=1}^{k} F^{-1}(V_i) = F^{-1}\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right)}_{\in \sigma},$$

וכך גם החיתוך ב־Θ_F. הראנו כי Θ_F היא עצמה הטופולוגיה הדלה ביותר שניתן להגדיר על X, עבורה $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ היא העתקה רציפה.

2.2.1 דוגמה. נניח (Y, σ) ו־A תת־קבוצה לא ריקה של Y. נתבונן בהעתקת השיכון

$$\iota : A \to (Y, \sigma).$$

כך

$$\begin{aligned} \Theta_\iota &= \left\{U \subset A \middle| U = \iota^{-1}(V), \, V \in \sigma\right\} \\ &= \{V \cap A | V \in \sigma\} = \sigma_A \end{aligned}$$

קיבלנו כי Θ_ι היא הטופולוגיה המושרית על A (על־ידי σ).

נניח כעת אוסף של העתקות

$$F_\gamma : X \to (Y_\gamma, \sigma_\gamma)$$

עבור K $\gamma \in K$ קבוצת אינדקסים. אם אנו רוצים למצוא טופולוגיה τ על X כך ש־F_γ תהיה רציפה לכל $\gamma \in K$, נרצה כי $\Theta_{F_\gamma} \subset \tau$, כלומר

הקורא ישמח להדגים כי איחוד של טופולוגיות אינו בהכרח טופולוגיה.

$$\bigcup_{\gamma\in K} \Theta_{F_\gamma} \subset \tau .$$

לכל γ,לכן הטופולוגיה הדלה ביותר ביחס אליה F רציפה היא הטופולוגיה הנוצרת על־ידי $\bigcup_{\gamma\in K} \Theta_{F_\gamma}$, אותה סימנו $\tau\left(\bigcup_{\gamma\in K} \Theta_{F_\gamma}\right)$.

כעת נניח (X,τ) מרחב טופולוגי נתון, ושנתונה העתקה $F : (X,\tau) \to Y$. אנו מחפשים את הטופולוגיה העשירה ביותר על Y, לפיה F רציפה. נגדיר אוסף תתי־קבוצות של Y לפי

$$\Delta_F = \left\{V \subset Y \middle| F^{-1}(V) \in \tau\right\}.$$

קל לבדוק כי כל טופולוגיה על Y מקיימת כי F רציפה לפיה, א־מ־מ היא מוכלת ב־Δ_F. נראה כי Δ_F עצמה היא טופולוגיה על Y: אמנם

$$F^{-1}(Y) = X \in \tau,$$

ולכן $Y \in \Delta_F$, ובאופן דומה $F^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$, ולכן $\varnothing \in \Delta_F$. נניח אוסף $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \Delta_F$, כלומר לכל α יתקיים $F^{-1}(V_\alpha) \in \tau$, לכן

$$F^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} \overbrace{F^{-1}(V_\alpha)}^{\in\tau}$$

ומכאן שגם האיחוד $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$ הוא ב־Δ_F. החיתוך מתקיים גם הוא בצורה דומה (בדקו!).

נניח כעת כי נתון אוסף העתקות

$$F_\gamma : (X_\gamma, \tau_\gamma) \to Y$$

עבור קבוצת אינדקסים $\gamma \in K$. אזי F_γ תהי רציפה ביחס לטופולוגיה כלשהי על Y א־מ־מ אותה טופולוגיה מוכלת ב־Δ_{F_γ}. לכן הטופולוגיה σ העשירה ביותר על Y, עבורה F_γ רציפה לכל $\gamma \in K$ היא החיתוך

הקורא ישמח להראות כי חיתוך של טופולוגיות תמיד מגדיר טופולוגיה.

$$\sigma = \bigcap_{\gamma\in K} F_\gamma .$$

2.2.2 דוגמה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, ו־"$\sim$" יחס שקילות על X (כלומר, חלוקה של X לתתי־קבוצות זרות). נסמן ב־$X/\sim$ את קבוצת המנה, ונסמן ב־$\pi : X \to X/\sim$ את ההטלה הטבעית. לכן Δ_π היא טופולוגיה כל קבוצת המנה (הטופולוגיה העשירה ביותר על $X/\sim$ עבורה π רציפה). הטופולוגיה Δ_π נקראת טופולוגית המנה על $X/\sim$.

2.2.3 הגדרה. למשל, נניח A תת־קבוצה (לא ריקה) של מרחב טופולוגי (X,τ), ונגדיר יחס שקילות "$\sim$" על X, שמחלקות השקילות שלו הן A, וכל נקודה שאינה ב־A

$$X/\sim = \{A\} \cup \{X \setminus A\}.$$

מסמנים $X/\sim = X/A$. המרחב הטופולוגי $(X/A.\Delta_\pi)$ (כאשר π היא ההטלה הטבעית על X/A).

2.3 מרבי מנה טופולוגיים

2016-05-12

ניזכר בהגדרה מהחלק הקודם:

2.3.1 הגדרה. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, ונניח כי מוגדר עליו יחס שקילות $\sim$. עבור ההטלה הטבעית $\pi : X \to {}^{X}/_{\sim}$, מגדירים את טופולוגית המנה על ${}^{X}/_{\sim}$ להיות

$$\Delta_\pi = \left\{V \subset {}^{A}/_{\sim} \middle| \pi^{-1}(V) \in \tau\right\}.$$

2.3.2 תרגיל. העתקה $F\left({}^{X}/_{\sim}, \Delta_\pi\right) \to (\sigma, \tau)$ היא רציפה א־מ־מ ההעתקה

$$F \circ \pi : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$$

רציפה.

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "F\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & (Y,\sigma) \\
\left({}^{X}/_{\sim}, \Delta_\pi\right) \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

2.3.3 דוגמה. עבור $X = \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ נסמן ב־τ את הטופולוגיה האוקלידית, ונגדיר יחס שקילות: נאמר ששני וקטורים $v, w \in X$ שקולים אם אחד כפולה סקלרית של השני. מחלקות השקילות הן בדיוק הישרים ב־$\mathbb{R}^{n+1}$ שעוברים דרך הראשית (להוציא הראשית עצמה). טופולוגית המנה על ${}^{X}/_{\sim}$ נקראת המרחב (הטופולוגי) הפרויקטיבי ממימד n, ומסומן $\mathbb{R}P^n$.

ניתן באופן שקול לזהות את $\mathbb{R}P^n$ עם זוגות של נקודות מנוגדות על ספירת היחידה S^n:

$$\mathbb{R}P^n \simeq {}^{S^n}/_{\sim}$$

כאשר לכל $v \sim w$ א־מ־מ $v = \pm w$ לכל $v, w \in S^n$.

2.3.4 דוגמה. תהי $X = [0, 2\pi]$ עם הטופולוגיה האוקלידית, ותהי $A = \{0, 2\pi\}$. אזי

$$(S_1, \tau_{\mathrm{Eucl}}) \simeq {}^{X}/_{A}$$

כאשר לוקחים את ${}^{X}/_{A}$ ביחס לטופולוגית המנה. אפשר להכליל את דוגמה זו: באופן כללי

$${}^{D^{n+1}}/_{S^n} \simeq S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

באופן בלתי פורמלי, נוכל לזהות את ההומאומורפיזם עם "חיבור של הקצוות" (של השפה) אל עצמם.

2.4 בסיס לטופולוגיה

2.4.1 הגדרה. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. בסיס של τ הוא תת־אוסף $\Psi \subset \tau$, כך שכל קבוצה מ־τ ניתן לייצג כאיחוד כלשהו של קבוצות מ־ψ. בסיס של τ בנקודה a (עבור $a \in X$ כלשהי) Φ_a המקיים כי כל סביבה של a קיימת קבוצה מ־Ψ שחלקית לה.

2.4.2 דוגמה. כל טופולוגיה היא בסיס לעצמה. אוסף כל הסביבות שמכילות את a יהיו בסיס לטופולוגיה ב־a.

2.4.3 דוגמה. נניח (X,d) מרחב מטרי, τ_d הטופולוגיה המושרית. אזי אוסף כל הכדורים הפתוחים ב־(X,τ_d) יהוו בסיס ל־τ_d. אוסף כל הכדורים סביב $a \in X$ יהיו בסיס ל־τ_d ב־a.

אם Ψ בסיס לטופולוגיה τ, אז כל $\Psi \subset \Psi' \subset \tau$ עם Ψ' גם תהיה בסיס של τ. עובדה דומה נכונה לבסיס בנקודה.

2.4.4 דוגמה. נניח X קבוצה כלשהי ו־d, d' שתי מטריקות שקולות עליה. אוסף כל הכדורים הפתוחים לפי d, ואוסף כל הכדורים הפתוחים לפי d' שניהם יהיו בסיס לטופולוגיה שמגדירות המטריקת (אף כי הם עשויים להיות שונים). עובדה דומה נכונה לגבי בסיסים בנקודה.

2.4.5 תרגיל. נניח כי (X,d) מרחב מטרי. אזי אוסף כל הכדורים הפתוחים לפי d שרדיוסם ${}^{1}/_{n}$ (עבור n טבעי) מהווים בסיס לטופולוגיה שמגדירה d. אותו דבר נכון לגבי בסיס בנקודה.

2.4.6 תרגיל. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, a נקודה ב־X ו־Ψ בסיס ל־τ. אזי Ψ_a המוגדר לפי

$$\Psi_a = \{U \in \Psi | a \in U\}$$

מהווה בסיס ל־τ ב־a.

2.4.7 תרגיל. יהיה (x,τ) מרחב טופולוגי, Φ_a בסיס ל־τ בכל נקודה $a \in X$. אזי

$$\Psi = \bigcup_{a \in X} \Phi_a$$

הוא בסיס ל־τ.

2.4.8 תרגיל. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, A תת־קבוצה לא ריקה של X, ו־Ψ בסיס של τ. אזי

$$\Psi|_A = \{U \cap A | U \in \Psi\}$$

יהיה בסיס ל־$\tau|_A$.

2.4.9 שאלה. נניח ש־X קבוצה לא ריקה כלשהי, ו־ψ אוסף כלשהו של תת־קבוצות של X. מתי ψ בסיס של טופולוגיה כלשהי על X?

2.4.10 תרגיל. נניח $(X\tau)$ מרחב טופולוגי, a נקודה ב־X, ו־Φ בסיס ל־τ ב־a. אזי הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל־a ב־(X,τ), אם ורק אם לכל סביבה $U \in \Phi_a$ קיים N טבעי, כך שכל $n \geqslant N$ מקיים $x_n \in U$.

2.4.11 תרגיל. נניח $F : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ העתקה כלשהי בין מרחבים טופולוגיים, Ψ בסיס ל־σ. אזי F רציפה אם ורק אם המקור תחת F של קבוצה ב־Ψ הוא קבוצה פתוחה ב־(X,τ). באופן דומה, אם Φ_a בסיס ל־τ ו־Ψ_a בסיס ל־σ ב־$F(a)$, אזי F רציפה ב־a אם ורק אם המקור של כל קבוצה ב־Ψ_a מכיל קבוצה מ־Φ_a.

2.4.12 שאלה. נניח X קבוצה לא־ריקה כלשהי, ו־Ψ אוסף של תת־קבוצות שלה. מתי Ψ בסיס של טופולוגיה כלשהי על X?

2.4.13 טענה. האוסף ψ הוא בסיס של איזשהי טופלוגיה τ על X אם ורק אם איחוד כל הקבוצות ב־ψ שווה ל־X, וגם כל חיתוך סופי של קבוצות מ־ψ הוא או ריק או איחוד כלשהו של קבוצות מ־ψ.[1]

הוכחה. אם ψ בסיס של טופולוגיה כלשהי τ, בפרט X פתוחה לפי τ, ולכן X עצמה היא איחוד כלשהו של קבוצות מ־ψ. לכן בפרט X הוא איחוד של כל הקבוצות מ־ψ. כמו־כן $\tau \subset \psi$, לכן חיתוך של מספר סופי של קבוצות מ־ψ הוא בעצמו קבוצה ב־τ, ולכן ניתן להציגו כאיחוד של קבוצות מ־ψ.

מנגד, אם מתקיים התנאי, נגדיר את τ להיות אוסף כל האיחודים של קבוצות מ־ψ, יחד עם הקבוצה הריקה.[2] נרצה להראות כי τ היא טופולוגיה על X. אמנם, באופן טריויאלי $\varnothing, X \in \tau$. כמו־כן, כל איחוד של קבוצות מ־τ הוא בפרט איחוד (של איחודים) של קבוצות מ־ψ, ולכן בעצמו נמצא ב־τ. נניח אוסף סופי $V_1,\dots,V_k$ של קבוצות ב־τ. אזי עבור כל i רלוונטי

$$V_i = \bigcup_{\alpha_i \in I_1} U_{\alpha_i}$$

עבור משפחות $\{U_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in I_i} \subset \psi$ כלשהן. אזי

$$\begin{aligned} V_1 \cap \dots \cap V_k &= \bigcap_{i=1}^{k} \bigcup_{\alpha_i \in I_i} U_{\alpha_i} \\ &= \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k) \in I_1 \times \dots \times I_k} \underbrace{(U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k})}_{\in \psi \cup \{\varnothing\}} \\ &\in \tau \end{aligned}$$

וזאת לפי הנחותינו והגדרת τ. □

[1] תנאי זה שקול לתנאי הבא: לכל אוסף סופי $U_1,\dots,U_k$ של קבוצות מ־ψ, לכל נקודה a בחיתוכן קיימת U ב־ψ עבורה

$$a \in U \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i.$$

[2] זו בדיוק הטופולוגיה הנוצרת על־ידי ψ.

2.4.14 הערה. נניח ψ אוסף כלשהו של תתי־קבוצות של X המקיים כי איחוד כל הקבוצות ב־ψ שווה ל־X. אם "נוסיף" ל־ψ את כל החיתוכים הסופיים של קבוצות ממנו, נקבל אוסף שיכול להיות בסיס לטופולוגיה כלשהי על X.

2.5 מכפלות ישרות של מרחבים טופולוגיים

2016-12-06

ניזכר בהגדרה של מכפלה ישרה: אם $X_1,\ldots,X_k$ קבוצות, אז מגדירים את מכפלתם לפי

$$\prod_{i=1}^{k} X_i = X_1\times\cdots\times X_k = \{(x_!,\ldots,x_k)|x_i\in X_i,\ i=1,\ldots,k\}$$
$$\equiv\left\{f\{1,\ldots,k\}\to\bigcup_{i=1}^{k}X_k\middle|f(i)\in X_i\right\}.$$

אם $X_1=\cdots=X_k=X$ נסמן $X_1\times\cdots\times X_k=X^k$,

ובאופן שקול, אם $X_\alpha=X$ לכל $\alpha\in I$ עבור קבוצת אינדקסים I כלשהי, נוכל לסמן

$$.\prod_{\alpha\in I}X_\alpha=X^I$$

למשל, אם $X=\mathbb{R}$ ו־$I=[a,b]$ אז

$$.\prod_{\alpha\in I}\mathbb{R}=\mathbb{R}^I=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\}$$

באופן שקול, אם $X_1,X_2,\ldots$ אוסף בר מנייה של קבוצות, מגדירים את מכפלתם להיות

$$X_1\times X_2\times\cdots=\{(x_1,x_2\ldots)|x_i\in X_i,\ i\in\mathbb{N}\}$$
$$\equiv\left\{f:\mathbb{N}\to\bigcup_{i\in\mathbb{N}}X_i\middle|f(i)\in X_i,\ i\in\mathbb{N}\right\}.$$

נוכל להמשיך ולהכליל: אם $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות (עבור קבוצת אינדקסים I מאינדקס כלשהו), מגדירים את מכפלתן להיות

$$.\prod_{\alpha\in I}X_\alpha=\left\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\middle|f(\alpha)\in X_\alpha,\ \alpha\in I\right\}$$

נניח $A_\alpha\subset X_\alpha$ לכל α מקבוצת אינדקסים I, נשים לב כי

$$.\prod_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$$

2.5.1 הגדרה. נניח $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. נגדיר אוסף Ψ_{box} של תתי קבוצות של $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ כאוסף כל תתי הקבוצות $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$, כאשר $U_\alpha\in\tau_\alpha$ לכל $\alpha\in I$. נגדיר אוסף נוסף $\Psi_{\text{prod}}\subset\Psi_{\text{box}}$ להיות אוסף כל תתי הקבוצות של $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ שצורתן $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$ כאשר $U_\alpha\in\tau_\alpha$ לכל $\alpha\in I$, וגם $U_\alpha\neq X_\alpha$ רק עבור מספר סופי של α־ות.

אם I סופית, אין כמובן הבדל בין Ψ_{prod} לבין Ψ_{prod} או בין הטופולוגיות שנוצרות על־ידן, אך באופן כללי τ_{prod} דלה מ־τ_{box} (ו־τ_{prod} עצמה אינה טופולוגיה!).

2.5.2 תרגיל. הראו כי

1. Ψ_{box} הוא בסיס של הטופולוגיה הנוצרת על־ידו $\tau(\Psi_{\text{box}})$, המוגדרת על המכפלה $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ (טופולוגיה זו נקראת טופולוגית הקופסאות על המכפלה, נסמנה τ_{box}).
2. באופן דומה, Ψ_{prod} הוא בסיס של הטופולוגיה הנוצרת על־ידו $\tau(\Psi_{\text{prod}})$ על $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ (טופולוגיה זו נקראת טופולוגית המכפלה, נסמנה τ_{prod} או $\prod_{\alpha\in I}\tau_\alpha$).

2.5.3 תרגיל. נניח $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ אוסף מרחבים טופולוגיים, וכי Ψ_α הוא בסיס ל־τ_α לכל $\alpha\in I$. אזי הקבוצה

$$\left\{\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\middle|U_\alpha\in\Psi_\alpha,\ \alpha\in I\right\}$$

היא בסיס ל־τ_{box}. נניח בנוסף כי $X_\alpha\in\Psi_\alpha$ לכל α, אזי הקבוצה

$$\left\{\prod_{\alpha\in I}U_\alpha\middle|U_\alpha\in X_\alpha,\ \alpha\in I,\ \text{למעט מספר סופי}\ U_\alpha=X_\alpha\right\}$$

היא בסיס ל־τ_{prod}.

2.5.4 דוגמה. נניח $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ אוסף של מרחבים מטריים. לכל $i\leqslant n$ ניקח את Ψ_i להיות אוסף הכדורים הפתוחים ב־(X_i,d_i) (כזכור, זהו בסיס

לטופולוגיה τ_{d_i}). יש מטריקה d_{max} על $X_1 \times \cdots \times X_n$ (נסמן את המכפלה ב־X) המוגדרת לפי

$$d_{max}\left(\left(x_1,\ldots,x_n\right),\left(y_1,\ldots,y_n\right)\right)=\max_{i\leqslant n} d_i\left(x_i,y_i\right).$$

איך נראה כדור ב־(X, d_{max})? אם $a=(a_1,\ldots,a_n)\in X$ אזי עבור R חיובי כלשהו

$$\begin{aligned} B\left(a,R\right) &= \left\{x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in X | d_{max}\left(a,x\right)<R\right\} \\ &= \left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in X | d_i\left(x_i,a_i\right)<R,\ i\leqslant n\right\} \\ &= B\left(a_1,R\right)\times\cdots\times B\left(a_n,R\right). \end{aligned}$$

לכן נגדיר Ψ להיות אוסף כל הכדורים הפתוחים ב־(X, d_{max}) (הרי הוא בסיס לטופולוגיה שם), אזי

$$\Psi=\Psi_1\times\cdots\times\Psi_n.$$

לפי תרגיל 2.5.3, הרי זהו בסיס של $\tau_{box}=\tau_{prod}$. כיוון שזהו גם בסיס של $\tau_{d_{max}}$, הרי נקבל כי $\tau_{box}=\tau_{prod}=\tau_{d_{max}}$ (וכפי שראינו, גם $\tau_{d_{max}}=\tau_{d_\Sigma}$, כאשר d_Σ היא מטריקת הסכום על X).

2.5.5 דוגמה. יהיו $(X_i,d_i)=(\mathbb{R},d_{Eucl})$ לכל $i=1,\ldots,k$, ונסמן ב־τ את הטופולוגיה האוקלידית. במקרה זה $\tau\times\cdots\times\tau$ היא הטופולוגיה על $\mathbb{R}^k$ המוגדרת על־ידי מטריקת d_{max}. אך מטריקת d_{max} על $\mathbb{R}^k$ היא בדיוק מטריקת d_∞. כלומר

$$\tau\times\cdots\times\tau=\tau_{d_\infty}=\tau_{d_2}=\tau_{d_1},$$

לכן המכפלה של τ בעצמה מגדירה את הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}^k$. 2016-12-12

2.5.6 תרגיל. עבור כל i טבעי ההעתקה $\pi_i : (X_1\times X_2\times\cdots,\tau_{prod})\to(X_i,\tau_i)$ המוגדרת כהטלה הטבעית על X_i, היא רציפה.

הקורא יהנה להכליל את התרגילים להלן עבור מכפלה ישרה כלשהי (לא בהכרח בת־מנייה) של מרחבים טופולוגיים.

2.5.7 תרגיל. נניח סדרת העתקות $f_i:(X,\tau)\to(Y_i,\sigma_i)$. אזי ההעתקה

$$(f_1,f_2,\ldots):(X,\tau)\to(Y_1\times Y_2\times\cdots,\sigma_{prod})$$

רציפה אם ורק אם f_i רציפה לכל i.עובדה זו לא בהכרח נכונה עבור $(Y_1\times\cdots,\sigma_{box})$.

2.5.8 תרגיל. נניח אוסף של העתקות בין מרחבים טופולוגיים, שצורתן $f_i:(X_i,\tau_i)\to(Y_i,\sigma_i)$. אזי ההעתקה

$$f_1\times f_2\times\cdots:(X_1\times X_2\times\cdots,\tau_{prod})\to(Y_1\times Y_2\times\cdots,\sigma_{prod})$$

רציפה אם ורק אם f_i רציפה לכל i. עובדה זו נכונה גם עבור τ_{box} ו־σ_{box}.

2.5.9 תרגיל. נניח $\{x_n\}$ סדרה ב־$\left(\prod_{i\in\mathbb{N}}X_i,\tau_{prod}\right)$. אזי $\{x_n\}$ מתכנסת לנקודה a אם ורק אם לכל i הסדרה $\{\pi_i(x_n)\}$ מתכנסת ל־$\pi_i(a)$ ב־X_i (לכל i). עובדה זו לא בהכרח נכונה עבור $\prod X_i$ עם טופולוגית קופסאות.

2.5.10 דוגמה. ניקח את $\mathbb{R}^k$ עם הטופולוגיה האוקלידית. אזי סדרה ב־$\mathbb{R}^n$ מתכנסת אם ורק אם היא מתכנסת לפי קואורדינטות.

2.5.11 דוגמה. נסמן ב־τ את הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$, ויהי I קטע ממשי $[a,b]$. נתבונן במרחב $\mathbb{R}^I$ (כלומר המכפלה $\prod_{\alpha\in I}\mathbb{R}$) עם טופולוגית המכפלה. אזי הסדרה $\{f_n:I\to\mathbb{R}^n\}$ מתכנסת ל־$f:I\to\mathbb{R}$ ב־$\mathbb{R}^I$ אם ורק אם הסדרה $\{f_n(\alpha)\}$ מתכנסת ב־$\mathbb{R}$ ל־$f(\alpha)$ לכל $\alpha\in I$ (כלומר סדרת הפונקציה f_n מתכנסת נקודתית).

2.5.12 תרגיל. לכל שלושה מרחבים טופולוגיים X_1, X_2, X_3 עם טופולוגיות τ_1, τ_2, τ_3 בהתאמה

$$((X_1 \times X_2) \times X_3, (\tau_1 \times \tau_2) \times \tau_3) \simeq (X_1 \times (X_2 \times X_3), \tau_1 \times (\tau_2 \times \tau_3)).$$

2.5.13 דוגמה. נסמן ב־τ את הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$. אזי ההעתקות

$$+, -, \cdot, \div : (\mathbb{R}^2, \tau \times \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$$

המוגדרות באופן טבעי, הן העתקות רציפות. נניח כי F ו־G הן העתקות רציפות ממרחב טופולוגי כלשהו (X, σ) אל $(\mathbb{R}, \tau)$. נגדיר את העתקת האלכסון

$$\mathrm{diag} : (X, \sigma) \to (X \times X, \sigma \times \sigma)$$

לפי $x \mapsto (x, x)$. אזי נוכל לתאר העתקה רציפה שתתקבל מההרכבה

$$(X, \sigma) \xrightarrow{\mathrm{diag}} (X \times X, \sigma \times \sigma) \xrightarrow{F \times G} (\mathbb{R}^2, \tau \times \tau) \xrightarrow{+,-,\cdot,\div} (\mathbb{R}, \tau)$$

כלומר $x \mapsto F(x) \square G(x)$ כאשר $\square$ פעולת חשבון כלשהי. לכן סכום/הפרש/כפל/מנה של פונקציות רציפות על מרחב טופולוגי גם הוא העתקה רציפה.

2.5.14 תרגיל. נניח (X, d) מרחב מטרי. אזי

$$d : (X \times X, \tau_d \times \tau_d) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{Eucl}})$$

היא פונקציה רציפה.

2.6 אקסיומות מנייה

2.6.1 הגדרה. נניח X_τ מרחב טופולוגי. אומרים ש־(X, τ) מקיים את האקסיומה הראשונה של מנייה (first countable, C_I) אם לכל $x \in X$ ל־τ יש בסיס בר־מנייה ב־x. אומרים ש־(X, τ) מקיים את האקסיומה השנייה של המניה (second countable, C_{II}) אם ל־τ יש בסיס בר־מנייה.

2.6.2 תרגיל. אם $\{U_1, U_2, \ldots\}$ בסיס של τ ב־a, אזי גם

$$\{U_1, U_1 \cap U_2, U_1 \cap U_2 \cap U_3, \ldots\}$$

גם הוא בסיס ל־τ ב־a.

2.6.3 תרגיל. כל מרחב מטרי הוא C_I.

2.6.4 תרגיל. נניח כי (X, τ) הוא C_I. אזי עבור כל תת־קבוצה $A \subset X$ וכל נקודת סגור a של A, אפשר למצוא סדרה $\{x_n\}$ ב־A שמתכנסת ל־a ב־(X, τ). פונקציה f מ־(X, τ) ל־(Y, σ) תהיה רציפה אם עבור כל סדרה $\{x_n\}$ שמתכנסת ל־a ב־(X, τ), הסדרה $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל־$f(a)$ ב־(Y, σ).

כאן נמצא דוגמה למרחב טופולוגי שאינו C_I.

2.6.5 תרגיל. נגדיר אוסף τ_{cf} של תתי־קבוצות של $\mathbb{R}$ כאוסף

$$\tau_{cf} \{U \subset \mathbb{R} | \text{קבוצה סופית } \mathbb{R} \backslash U\}.$$

(א) הראו כי τ_{cf} היא טופולוגיה (הנקראת הטופולוגיה הקוסופית על $\mathbb{R}$).
(ב) הסדרות המתכנסות ב־$(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ הן בדיוק הסדרות המתייצבות.
(ג) הנקודה 0 היא נקודת סגור של $(0, 1]$, אך אין סדרה ב־$(0, 1]$ שמתכנסת ל־0.
(ד) נתבונן בהעתקת הזהות בין מ־$(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ אל $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{Eucl}})$. העתקה זו מעתיקה כל סדרה מתכנסת לסדרה מתכנסת (וגבול לגבול), אך היא אינה רציפה.

2.6.6 טענה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי
(א) אם (X,τ) הוא C_{II}, אזי הוא ספרבילי.
(ב) אם (X,τ) מטריזבילי, אזי גם הגרירה ההפוכה נכונה.

הוכחה.
(א) נניח כי (X,τ) הוא C_{II}, לכן יש ל־τ בסיס בר מנייה $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. נבחר מכל U_i נקודה a_i. אזי $\{a_1,a_2,\ldots\}$ צפופה ב־(X,τ).
(ב) צריך להוכיח את הכיוון הנגדי: נניח $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ צפופה בת־מנייה. נגדיר אוסף בר־מנייה Ψ של תתי־קבוצות להיות

$$\Psi=\left\{B\left(a_i,\frac{1}{2^j}\right)\middle|\, i,j\in\mathbb{N}\right\}.$$

נראה כי הוא בסיס. תהי U פתוחה כלשהי ב־(X,d), ונראה כי U איחוד של כדורים מ־Ψ. מספיק לקחת $x\in U$ כלשהי, ולמצוא כדור B_x מ־Ψ כך ש־B_x מכיל את x ומוכל ב־U. אזי נקבל

$$U=\bigcup_{x\in U}B_x.$$

ואכן, יהי $B(x,r)$ כדור סביב x המוכל ב־U. ניקח j כך ש־$\frac{r}{2}<\frac{1}{2^j}$. כיוון ש־$A$ צפופה אפשר למצוא a_i הנמצאת בכדור $B\left(x,2^{-j}\right)$. אזי

$$x\in B\left(a_i,2^{-j}\right)\subset B(x,r).$$

ראשית כל, $x\in B(a_i,2^{-j})$ כי לפי הגדרה המרחק בין x ל־a_i קטן מ־2^{-j}. ואמנם

$$d\left(x,a_i\right)+\frac{1}{2^j}<\frac{1}{2^j}+\frac{1}{2^j}<r,$$

לכן $B\left(a_i,2^{-j}\right)\subset B\left(x,r\right)$.

□

2.6.7 דוגמה. מרחב ℓ_∞ הוא C_I. עם־זאת הוא אינו ספרבילי, ולכן לא C_{II}.

2016-12-13

2.6.8 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. כיסוי של (X,τ) זה אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ב־(X,τ) המקיים

$$\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha=X.$$

תת־כיסוי הוא תת־אוסף של $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שגם הוא כיסוי של (X,τ). אומרים שכיסוי הוא סופי או בר־מנייה אם I סופית או בת מנייה, בהתאמה.

2.6.9 משפט (*Lindelöf*). נניח (X,τ) מרחב טופולוגי C_{II}. אזי כל כיסוי של (X,τ) אפשר לבחור תת־כיסוי בר־מנייה.

הוכחה. נניח כי $\Psi=\{V_1,V_2,\ldots\}$ בסיס בר־מנייה של τ. נניח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של (X,τ). נגיד ש־V_i חברה של U_α אם $V_i\subset U_\alpha$. נגיד ש־V_i טובה אם היא חברה עם לפחות U_α אחת. נרשום תחת כל V_i טובה אחת מחברותיה, שתסומן U_{α_i}. יש מספר בן־מנייה של קבוצות U_{α_i}. נראה כי $\{U_{\alpha_i}\}_{i\in J}$ (עבור $J\subset\mathbb{N}$ מתאימה) הוא תת־כיסוי של $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נרצה להראות כי אם x היא נקודה כלשהי ב־X, קיימת i טבעי כך ש־$x\in U_{\alpha_i}$. אכן, U_α הוא כיסוי של x, לכן אפשר למצוא $\alpha\in I$ כך ש־$x\in U_\alpha$. אמנם U_α פתוחה, לכן היא איחוד של קבוצות מ־Ψ. אם־כן, לפחות אחת, מקבוצות אלו מ־Ψ נניח V_k, מכילה את x. אם־כן

$$x\in V_k\subset U_\alpha,$$

כלומר V_k טובה, ולכן יש לה חברה U_{α_k}, שאמנם יכולה להיות שונה מ־U_α. לכן

$$x \in V_k \subset U_{\alpha_k}.$$

□

2.7 אקסיומות ההפרדה

יהי (X,τ) אומרים ש־(X,τ) הוא T_1 אם עבור כל $x,y \in X$ שונה, אפשר למצוא סביבה של x שלא מכילה את y.

2.7.1 תרגיל. מרחב טופולוגי (X,τ) הוא T_1 אם ורק אם כל יחידון ב־X הוא קבוצה סגורה.

אומרים ש־(X,τ) הוא T_2 (או האוסדורף), אם עבור כל $x,y \in X$ שונות, אפשר למצוא סביבה של x וסביבה של y אשר זרות זו לזו.

ברור ש־T_2 בפרט גורר T_1, וראינו כי כל מרחב מטרי הוא, בפרט, האוסדורף.

2.7.2 תרגיל. אם (X,τ) האוסדורף, אזי כל סדרה מתכנסת ב־(X,τ) מתכנסת לגבול יחיד.

2.7.3 דוגמה. מרחב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הקוסופית הוא T_1 אך אינו T_2.

אומרים ש־(X,τ) הוא T_3 אם או הוא T_1, וגם לכל נקודה $x \in X$ ולכל קבוצה סגורה A שלא מכילה את x, סביבה U של x, וקיימת סביבה V המכילה את A, כך ש־U ו־V זרות.
אומרים ש־(X,τ) הוא T_4 (או נורמלי) אם הוא T_1 וגם לכל שתי קבוצות סגורות A_1 ו־A_2 ב־(X,τ), אפשר למצוא סביבות זרות U ו־V כך ש־$A_1 \subset U$ וגם $A_2 \subset V$.

ברור ש־$T_4 \Leftarrow T_3 \Leftarrow T_2 \Leftarrow T_1$.

2.7.4 טענה. כל מרחב מטרי הוא נורמלי.

2.7.5 לֵמָה (הלמה של *Urysohn*). נניח (X,d) מרחב מטרי, ונניח A_0, A_1 קבוצות סגורות זרות ב־(X,d), אזי אפשר למצוא f רציפה מ־(X,d) אל $\mathbb{R}$ כך ש־

$$A_0 = f^{-1}(0), \quad A_1 = f^{-1}(1).$$

הוכחת טענה 2.7.4. בהינתן f כבלמה 2.7.5 נקבל

$$A_0 \subset f^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \quad A_1 \subset f^{-1}\left(\frac{2}{3}, \infty\right).$$

שתי אלו קבוצות פתוחות וזרות, כי f רציפה. □

הוכחת לםה 2.7.5. נגדיר את f לפי

$$f(x) = \frac{d(x,A_0)}{d(x,A_0) + d(x,A_1)}.$$

אמנם $d(x,A_0)$ ו־$d(x,A_1)$ מייצגות פונקציות רציפות, ובנוסף המכנה לעולם לא מתאפס, כי A_1 ו־A_0 זרות (ולכן אין נקודה שמרחקה משתיהן הוא 0). □

3 מרחבים מטריים – שלמות

3.1 סדרות קוֹשִׁי

3.1.1 הגדרה. נניח (X,d) מרחב מטרי. סדרה $\{x_n\}$ ב־(X,d) נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ אפשר למצוא N טבעי כך שעבור כל $m,n>N$ מתקיים

$$.d\left(x_n,x_m\right)\leqslant\varepsilon$$

3.1.2 דוגמה. כל סדרה מתכנסת במרחב מטרי היא בפרט סדרת קושי (מדוע?).

3.1.3 טענה. נניח $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא העתקת ליפשיץ בין (מרחבים מטריים), אזי f מעתיקה כל דרת קושי ב־(X,d) לסדרת קושי ב־(Y,ρ).

הוכחה. נניח כי f היא c־ליפשיץ, ונניח $\{x_n\}$ סדרת קושי ב־(X,d). רוצים להראות כי $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי ב־(Y,ρ). יהי $\varepsilon>0$. קיים N טבעי כל שעבור כל $m,n\geqslant N$

$$.d\left(x_m,x_n\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{c}$$

כעת, לכל $m,n\geqslant N$

$$d\left(f\left(x_n\right),f\left(x_m\right)\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{f היא c־ליפשיץ}}}{\leqslant} cd\left(x_n,x_m\right)\leqslant\varepsilon$$

כנדרש. □

3.1.4 תרגיל. תת־סדרה של סדרת קושי, היא בעצמה סדרת קושי.

3.1.5 תרגיל. אם לסדרת קושי יש תת־סדרה מתכנסת, אז הסדרה המקורית מתכנסת גם היא, ולאותו גבול כמו התת־סדרה.

3.1.6 תרגיל. נניח כי $\{x_n\}$ ו־$\{y_n\}$ סדרות במרחב מטרי, וכי $\{x_n\}$ סדרת קושי. אם הסדרה $\{d(x_n,y_n)\}$ שואפת ל־0, אזי גם $\{y_n\}$ סדרת קושי.

3.1.7 הגדרה. מרחב מטרי נקרא שלם (*complete*) כל סדרת קושי במרחב מתכנסת.

3.1.8 דוגמה. המרחב הממשי עם המטריקה האוקלידית הוא מרחב שלם.

3.1.9 טענה. נניח $(X_1,d_1),\ldots,(X_k,d_k)$ מרחבים מטריים שלמים, נסמן את מכפלתם $X=\prod_{i\leqslant k}X_i$. אזי המרחב $(X,d_{\max})$ גם הוא מרחב שלם.

הוכחה. נניח $\left\{x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},\ldots,x_k^{(n)}\right)\right\}$ סדרת קושי ב־X. כפי שראינו, $\left\{x^{(n)}\right\}$ מתכנסת ב־$(X,d_{\max})$ אם ורק אם הסדרה $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ב־(X_i,d_i). כיוון שלפי הנחה, של המרחבים המטריים (X_i,d_i) שלמים, די להראות כי לכל i

הסדרה $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרת קושי. נסמן על־ידי π_i את ההטלה הטבעית של $(X, d_{\max})$ על (X_i, d_i). אזי π_i היא 1־ליפשיץ. אמנם

$$\begin{aligned} d_i\left(\pi_i\left(x_1,\ldots,x_k\right),\pi_i\left(y_1,\ldots,y_k\right)\right) &= d_i\left(x_i, y_I\right) \\ &\leqslant d_{\max}\left(\left(x_1,\ldots,x_k\right)\left(y_1,\ldots,y_k\right)\right) \end{aligned}.$$

לכן לפי טענה 3.1.3 π_i מעתיקה סדרת קושי $\left\{x^{(n)}\right\}$ ב־$(X, d_{\max})$ אל סדרת קושי $\left\{\pi_i\left(x^{(n)}\right) = x_i^{(n)}\right\}$ ב־(X_i, d_i). □

3.1.10 דוגמה. מרחב $\left(\mathbb{R}^k, d_\infty\right)$ הוא מרחב שלם.

3.1.11 טענה. נניח d, d' מטריקות שקולות על X. אזי (X, d) שלם אם ורק אם (X, d') שלם.

הוכחה. נניח כי (X, d) שלם. אזי העתקת הזהות בין (X, d') ל־(X, d) היא בי־ליפשיץ, ובפרט הומאומורפיזם. ניקח סדרת קושי כלשהו $\{x_n\}$ כ־(X, d'). בפרט $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב־(X, d). לפי הנחתנו $\{x_n\}$ מתכנסת ב־(X, d), כי הוא שלם.כיוון ש־d ו־d' שקולות, זה אומר ש־$\{x_n\}$ מתכנסת גם ב־(X, d'). □

3.1.12 דוגמה. כיוון שמטרית d_1, d_2 ו־d_∞ על $\mathbb{R}^k$ שקולות, זה אומר ש־$\left(\mathbb{R}^k, d_1\right)$ ו־$\left(\mathbb{R}^k, d_2\right)$ גם הם מרחבים שלמים.

3.1.13 תרגיל. נניח $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ בי־ליפשיץ ועל (הומאומורפיזם בי־ליפשיץ), אזי (X, d) שלם אם ורק אם (Y, ρ) שלם. בפרט, איזומטריה משמרת שלמות.

מצאו דוגמה של מרחבים מטריים הומאומורפיים, כאשר אחד שלם אך השני לא.

3.1.14 תרגיל. הוכיחו כי $(C[a, b], d_{L^\infty})$, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞ כולם שלמים. אם־זאת, $C[a, b]$ אינו שלם ביחס ל־d_{L^2} ו־d_{L^1}.

מרחב נורמה שלם, נקרא מרחב Banach.

3.1.15 טענה. נניח (X, d) מרחב מטרי, A תת־קבוצה לא ריקה של X.

(א) אם $(A, d|_A)$ שלם, אזי A סגורה ב־(X, d).

(ב) אם (X, d) שלם ו־A סגורה, אזי $(A, d|_A)$ שלם.

הוכחה.(א) נניח כי $\{a_n\}$ סדרה ב־A אשר מתכנסת ל־x ב־(X, d), ונוכיח כי $x \in A$ (אזי A סגורה). בפרט, $\{a_n\}$ היא סדרת קושי ב־(X, d), אך קל לראות כי פירושו של דבר כי $\{a_n\}$ סדרת קושי ב־$(A, d|_A)$. אם A שלם, הרי ש־$\{a_n\}$ מתכנסת ב־$(A, d|_A)$. במרחב מטרי הגבול של סדרה הוא יחיד, לכן $x \in A$.

(ב) נניח $\{a_k\}$ סדרת קושי ב־$(A, d|_A)$. השיכון הטבעי של A בתוך X הוא איזומטריה, ובפרט ליפשיץ, לכן $\{a_k\}$ היא סדרת קושי (X, d). לפי הנחתנו (X, d) שלם, לכן $\{a_k\}$ מתכנסת ב־(X, d). אם A סגורה, הרי שהגבול של $\{a_k\}$ שייך ל־A. לכן $\{a_k\}$ מתכנסת בפרט ב־$(A, d|_A)$.

□

3.1.16 דוגמה. נתבונן במרחב הממשי עם המטריקה האוקלידית. מכאן שכל קטע סגור $[a, b]$, כתת־מרחב עם המטריקה המושרית הוא מרחב שלם. לעומת הקטע הפתוח (a, b) אינו שלם ביחס למטריקה המושרית. למשל, עבור הקטע $(0, 2)$ הסדרה $\{1/n\}$ היא סדרת קושי ב־$(0, 2)$ עם המטריקה האוקלידית, אך אינה מתכנסת שם. ברם, היא אכן מתכנסת ב־$\mathbb{R}$.

3.1.17 משפט (הלמה של *Cantor*). נניח (X, d) מרחב מטרי. אזי התנאים הבאים שקולים:

החיתוך $\bigcap_n B\left[x_n, R_n\right]$ לא יכול להכיל יותר מנקודה אחת, כי המרחק בין כל הנקודות בחיתוך שואף לאפס. התנאי $\{R_n\} \to 0$ הוא הכרחי, כמו־גם התנאי ש־(X, d) שלם.

(א) (X,d) שלם.
(ב) לכל סדרה יורדת אינסופית של כדורים סגורים

$$B\left[x_1,R_1\right]\supset B\left[x_2,R_2\right]\supset\cdots$$

ב־(X,d) עם רדיוסים השואפים לאפס, יש נקודה משותפת

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}B\left[x_n,R_n\right]=\{a\}$$

עבור $a\in X$ כלשהי.

הוכחה. $\boxed{\Downarrow}$ נתבונן בסדרה $\{x_n\}$ של המרכזים של הכדורים, ונראה כי היא סדרת קושי. יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך שלכל $n\geqslant N$

$$R_n\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

ובפרט $R_n\leqslant{}^{\varepsilon}/_{2}$. נשים לב כי לכל $m,n>N$

$$x_n,x_m\in B\left[x_N,R_n\right],$$

וכך לכל m ו־n כאלה

$$d\left(x_m,x_n\right)\leqslant\operatorname{diam}B\left[x_N,R_N\right]\leqslant\varepsilon.$$

לכן סדרת המרכזים היא סדרת קושי. כיוון ש־(X,d) שלם, נוכל להניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת לנקודה a. נשים לב כי לכל n טבעי

$$\{x_n,x_{n+1},\ldots\}\subset B\left[x_n,R_n\right],$$

וגם זו סדרה המתכנסת ל־a. כיוון ש־$B\left[x_n,R_n\right]$ סגורה, נקבל כי $a\in B\left[x_n,R_n\right]$ (לכל n). כאמור, החיתוך לא יכול להכיל יותר מנקודה אחת, לכן החיתוך עצמו $\{a\}$.

$\boxed{\Uparrow}$ נניח $\{x_n\}$ סדרת קושי ב־(X,d). יהי $\varepsilon={}^{1}/_{2}$. אפשר למצוא N_1 כך שלכל $m,n\geqslant N_1$

$$d\left(x_m,x_n\right)\leqslant\frac{1}{2},$$

ובפרט לכל $n\geqslant N_1$

$$x_n\in B\left[x_{N_1},1\right].$$

כעת ניקח $\varepsilon={}^{1}/_{4}$. הסדרה $\{x_{N_1+1},x_{N_1+2},\ldots\}$ גם היא סדרת קושי, לכן אפשר למצוא $N_2>N_1$ כך שעבור כל $n,m\geqslant N_2$

$$d\left(x_m,x_n\right)\leqslant\frac{1}{4},$$

ומכאן שעבור כל $n\geqslant N_2$

$$x_n\in B\left[x_{N_2},\frac{1}{4}\right].$$

ממשיכים באופן דומה (בוחרים $\varepsilon={}^{1}/_{8}$ וכו') ובכך מקבלים כדורים סגורים $B\left[x_{N_k}x,2^{-k+1}\right]$ כאשר $N_1<N_2<\cdots$, ולכל k טבעי

$$d\left(x_{N_k},x_{N_{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

נראה כי סדרת הכדורים שקיבלנו היא אמנם סדרה יורדת: לכל שני כדורים סגורים, $B[x,R]\subset B[y,r]$ אם ורק אם $d(x,y)+r\leqslant R$, ולכן יש לנו את

המבוקש. לכן מקבלים כי יש נקודה a בחיתוך בין הכדורים. נותר להראות כי a היא גבול הסדרה $\{x_n\}$.

אמנם לכל k,

$$0 \leqslant d\left(x_{N_k}, a\right) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}},$$

ולכן $\{x_{N_k}\}$ מתכנסת ל־a. לכן לפי תרגיל 3.1.5 גם $\{x_n\}$ מתכנסת.

□

3.1.18 תרגיל. מרחב מטרי הוא שלם אם ורק אם לכל סדרה יורדת של קבוצות סגורות, שסדרת הקטרים שלהן שואפת לאפס, יש חיתוך לא ריק.

3.1.19 דוגמה. נראה שהתנאי לשלמות בלמה של קנטרו הוא הכרחי: נתבונן ב־$(0,\infty]$ עם המטריקה האוקלידית, ונגדיר את הסדרה

$$B_n = B\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \left(0, \frac{2}{n}\right].$$

ודאו כי זו סדרה יורדת של כדורים סגורים, אך שאין לאיבריה חיתוך ב־$(0,\infty]$.

3.2 משפט Baire

3.2.1 משפט (*Baire*). אי־אפשר לכסות כדור סגור (מרדיוס חיובי) במרחב מטרי שלם, על־ידי מספר בן־מניה של קבוצות דלות.

הוכחה. נניח בשלילה שעבור מרחב שלם (X,d) וקבוצות דלות $A_1, A_2, \dots$ ב־X, ויהי $B\left[x_0, R_0\right]$ כדור כך ש־

$$\bigcup_i A_i = B\left[x_0, R_0\right].$$

נבנה סדרת כדורים סגורים יורדת

$$B\left[x_0, R_0\right] \supset B\left[x_1, R_1\right] \supset \cdots$$

כך שעבור כל k טבעי:

(א) $0 < R_k \leqslant 2^{-k}$.

(ב) $B\left[x_k, R_k\right] \cap A_i = \varnothing$ לכל $i = 1, \dots, k$.

נתון הכדור ההתחלתי $B\left[x_0, R_0\right]$. נניח שכבר בנינו את הכדורים

$$B\left[x_0, R_0\right], \dots, B\left[x_{k-1}, R_k\right].$$

נרצה כעת לבנות את $B\left[x_k, R_k\right]$. הקבוצה A_k דלה, וכיוון ש־R_{k-1} חיובי, אפשר למצוא כדור פתוח $B\left(x_k, r\right)$ בעל רדיו חיובי המוכל ב־$B\left(x_k, R_{k-1}\right)$, והוא זר ל־$A_k$. נגדיר

$$R_k = \min\left\{\frac{1}{2^k}, \frac{r}{2}\right\}.$$

אזי

$$B\left[x_k, R_k\right] \subset B\left[x_k, r/2\right] \subset B\left(x, r\right) \subset B\left(x_{k-1}, R_{k-1}\right) \subset B\left[x_k, R_k\right].$$

לכן

(א) $B\left[x_k, R_k\right] \subset B\left[x_{k-1}, R_k\right]$.

(ב) $0 < R_k \leqslant 2^{-k}$.

(ג) $B\left[x_k, R_k\right] \cap A_k = \varnothing$ (כי $B\left(x_k, r\right) \cap A_k = \varnothing$). אמנם $B\left[x_k, R_k\right]$ זר גם ל־A_i לכל $i < k$, כי זה מתקיים עבור $B\left[x_{k-1}, R_{k-1}\right]$.

כעת לפי משפט 3.1.17 אפשר למצוא $a \in X$

$$\{a\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} B[x_k, R_k].$$

מצד אחד, לפי הגדרה,

$$a \in B[x_o, R_o] \subset \bigcup_i A_i.$$

מנגד, עבור כל $k > 0$ טבעי

$$a \in B[x_k, R_k]$$

ולכן לכל $i \leqslant k$

$$a \notin A_i,$$

כלומר $a \notin A_k$ לכל k — סתירה! □

3.2.2 הערה. נניח (X, d) מרחב מטרי, ו־C תת־קבוצה לא ריקה של X. אומרים ש־C מהקטגוריה הראשונה (של *Baire*) אם ניתן לכסות את C על ידי אוסף בן־מנייה של קבוצות דלות. אחרת אומרים ש־C מהקטגוריה השנייה (של *Baire*). לפי מינוח זה משפט Baire אומר שכדור סגור במרחב מטרי שלם הוא מהקטגוריה השנייה. אם $X = C$, אז אומרים שהמרחב המטרי (X, d) הוא מהקטגוריה הראשונה/השנייה.

תת־קבוצה של קבוצה מהקטגוריה הראשונה, בעצמה גם מהקטגוריה הראשונה. אם קבוצה מכילה תת־קבוצה מהקטגוריה השנייה, אז הקבוצה המכילה בעצמה מהקטגוריה השנייה. בפרט, לפי המשפט, כל מרחב מטרי שלם הוא מהקטגוריה השנייה.

3.2.3 דוגמה. מרחב האי־רציונליים עם המטריקה האוקלידית אינו שלם, אבל הינו מהקטגוריה השנייה.

3.2.4 מסקנה. נניח שקבוצה מקטגוריה שנייה מכוסה על־ידי אוסף בר־מנייה של קבוצות סגורות A_i. אזי לא יכול להיות שכל ה־A_i דלות. לכן אפשר למצוא לפחות A_n עבורה

$$\operatorname{Int} A_n = \operatorname{Int} \overline{A_n} \neq \varnothing,$$

כלומר יש ל־A_n נקודת פנים.

נניח (X, d) מרחב מטרי שלם, ו־$A_1, A_2, \ldots$ קבוצות דלות ב־(X, d). לפי משפט Baire, האיחוד $\bigcup_i A_i$ לא מכסה אף כדור סגור ב־(X, d), כלומר בכל כדור סגור (ולכן גם בכל כדור פתוח) יש נקודה שלא שייכת לאיחוד. כלומר, הקבוצה $X \backslash \bigcup_i A_i$ צפופה ב־(X, d).

3.2.5 מסקנה. נניח כעת אוסף קבוצות פתוחות וצפופות $U_1, U_2, \ldots$ ב־(X, d). לכן האוסף $\{A_i = X \backslash U_i\}$ הוא אוסף של קבוצות דלילות. כך

$$X \backslash \bigcup_i A_i = \bigcap_i X \backslash A_i = \bigcap_i U_i$$

היא קבוצה צפופה ב־(X, d). כלומר, במרחב מטרי שלם חיתוך בר־מנייה של קבוצות פתוחות וצפופות הוא בעצמו צפוף.

3.2.6 דוגמה. נסמן על־ידי $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ את קבוצת הפולינומים במשתנים $x_1, \ldots, x_n$ עם מקדמים רציונליים. זוהי קבוצה מת־מנייה. נקרא לוקטור $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ אלגברי אם אפשר למצוא פולינום $p \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ (שאינו אפס) עבורו $p(v_1, \ldots, v_n) = 0$. נגדיר את הקבוצה S להיות

$$S = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]} \{(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^n | P(v_1, \ldots, v_n) = 0\}.$$

הקבוצה S היא איחוד בר־מנייה של קבוצות דלילות ב־$\mathbb{R}^n$ (עם מטריקת d_∞, למשל). כיוון ש־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ הוא מרחב שלם, הרי ש־$X\setminus S$ היא קבוצה צפופה, אך הרי זו בדיוק קבוצות הוקטורים הלא־אלגבריים ב־$\mathbb{R}^n$. אף־על־פי שלקבוע האם וקטור נתון הוא אלגברי או לא, הראנו כי קבוצת הוקטורים הלא־אלגבריים אי ה רק לא־ריקה, אלא צפופה.

3.3 משפט נקודות השבת של Banach

נניח קבוצה לא ריקה X, והעתקה $f : X \to X$. אפשר להרכיב את F עם עצמה, כל מספר סופי של פעמים:

$$.f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ פעמים}} : X \to X$$

אנו נקרא ל־$f^{(n)}$ איטרצית n של f, כאשר מגדירים את $f^{(0)}$ להיות העתקת הזהות. באופן מיידי, אנו רואים כי מתקיימות התכונות הבאות, לכל m ו־n טבעיים (או 0):

$$\begin{cases} f^{(m+n)} = f^{(m)} \circ f^{(n)} \\ \left(f^{(m)}\right)^{(n)} = f^{(mn)} \end{cases}$$

נקודת שבת (*fixed point*) של $f : X \to X$ היא נקודה $a \in X$ המקיימת $f(a) = a$.

3.3.1 טענה. נניח $f : (X, d) \to (X, d)$ היא העתקה c-ליפשיץ ממרחב מטרי לעצמו. אזי

$$f^{(n)} : (X, d) \to (X, d)$$

היא העתקה c^n־ליפשיץ (לכל n טבעי).

הוכחה. באינדוקציה על n: עבור $n = 1$, אמנם $f^{(1)} = f$ היא c^1־ליפשיץ. נניח כי $f^{(n)}$ היא c^n־ליפשיץ, ונראה עבור $n + 1$. אכן

$$\begin{aligned} d\left(f^{(n+1)}(a), f^{(n+1)}(b)\right) &= d\left(f\left(f^{(n)}(a)\right), f\left(f^{(n)}(b)\right)\right) \\ &\leqslant cd\left(f^{(n)}(a), f^{(n)}(b)\right) \\ &\leqslant c \cdot c^n d(a, b) \end{aligned}$$

□

3.3.2 הגדרה. העתקה ממרחב מטרי אל עצמו נקראת העתקה מכווצת (*contraction*) אם היא c־ליפשיץ עבור $0 < c < 1$ כלשהו.

3.3.3 משפט (*Banach*). נניח (X, d) מרחב מטרי שלם, $f : (X, d) \to (X, d)$ העתקה מכווצת. אזי יש ל־f בדיוק נקודת שבת אחת.

הוכחה. כיוון ש־f מכווצת, יהי $0 < c < 1$ כל ש־f היא c־ליפשיץ.

יחידות. נניח כי a ו־b הן נקודות שבת של f. אזי

$$0 \leqslant d(a, b) \leqslant cd(f(a), f(b)) < d(a, b)$$

לכן $d(a, b) = 0$ ומכאן $a = b$, וכל נקודת שבת של f יחידה.

קיום. ניקח נקודה כלשהי $x \in X$. נתבונן בסדרה $\left\{f^{(n)}(x)\right\}_{x\in\mathbb{N}}$. נראה כי זו סדרת קושי. נניח $n > m$ מספרים טבעיים.

$$\begin{aligned} d\left(f^{(m)}(x), f^{(n)}(x)\right) &= d\left(f^{(m)}(x), f^{(n)}\left(f^{(n-m)}(x)\right)\right) \\ &\underset{\text{ליפשיץ}}{\leqslant} c^m d\left(x, f^{(n-m)}(x)\right) \\ &\underset{\text{משולש}}{\leqslant} c^m \left(d\left(x, f(x)\right) + \ldots + d\left(f^{(n-m-1)}(x), f^{(n-m)}(x)\right)\right) \\ &= c^m \sum_{k=0}^{n-m-1} d\left(f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x)\right) \\ &\underset{\text{ליפשיץ}}{\leqslant} c^m \left(\sum_{k=0}^{n-m-1} c^k d\left(x, f(x)\right)\right) \\ &= c^m d\left(x, f(x)\right) \sum_{k=0}^{n-m-1} c^k \\ &\underset{\text{טור חזקות}}{\leqslant} d\left(x, f(x)\right) \frac{c^m}{1-c} \end{aligned}$$

לסיכום

$$.d\left(f^{(m)}(x), f^{(n)}(x)\right) \leqslant \frac{c^m}{1-c} d\left(x, f(x)\right)$$

ניקח $\varepsilon > 0$ כלשהו, ונמצא N כך שלכל $m \geqslant N$

$$,\frac{c^m}{1-c} d\left(x, f(x)\right) \leqslant \varepsilon,$$

אזי לכל $n, m \geqslant N$ טבעיים בה"כ $n > m$ נקבל

$$.d\left(f^{(m)}(x), f^{(n)}(x)\right) \leqslant \varepsilon$$

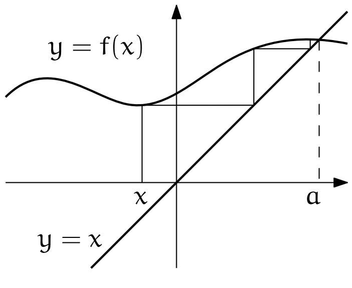
כיוון ש־(X, d) שלם, הסדרה $\left\{f^{(n)}(x)\right\}$ מתכנסת ב־(X, d) לנקודה כלשהי $a \in X$. כיוון ש־f ליפשיץ היא בפרט רציפה, לכן

$$\left\{f\left(f(x)\right), f\left(f^{(2)}(x)\right), \ldots, f\left(f^{(n)}(x)\right), \ldots\right\} \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$$

אך זו תת־סדרה של הסדרה המקורית $\left\{f^{(n)}(x)\right\}$, ולכן מתכנסת לאותו גבול a. מכאן

$$.f(a) = a$$

$\square$



איור 3.1: כאן a היא נקודת השבת של f, והזיג־זאג מייצג הפעלות איטרטיביות של f על נקודה כלשהי x. אנו רואים כי פעולה זו אמנם מתכנסת ל־a.

3.3.4 תרגיל. מצאו דוגמאות המראות שבלי התנאי על שלמות של (X, d) או התנאי ש־f ־c־ליפשיץ עבור $c < 1$, ייתכן כי אין ל־f נקודות שבת.

3.3.5 דוגמה. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (איור (3.1)) עם המטריקה האוקלידית, גזירה כך ש־

$$.\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = c < 1$$

קל לראות (לפי משפט לגרנז') כי f היא c־ליפשיץ, כלומר מכווצת. לפי המשפט, יש ל־f בדיוק נקודת שבת אחת.

3.3.6 דוגמה. נניח $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה k־ליפשיץ (בפרט רציפה). ניקח $u \in \mathbb{R}$ נגדיר פונקציה

$$F : C[a,b] \to C[a,b]$$

על־ידי

$$.\left(F(f)\right)(x) = u + \int_a^x \varphi\left(f(t)\right)\, dt$$

אמנם $F(f)$ רציפה לכל $x \in [a,b]$. נקודת שבת של F פירושה פונקציה f המקיימת

$$.f = u + \int_a^x \varphi\left(f(t)\right)\, dt$$

אזי בפרט f גזירה ומקיימת

$$\begin{cases} f'(x) = \varphi\left(f(x)\right) \\ f(a) = u \end{cases}$$

לכן קיום נקודת שבת של F שקול לפתרון של מד"ר זו (וכנ"ל עבור יחידות). אמנם, אם $k < 1/(b-a)$ (שזה אפשרי עבור b קרוב מספיק ל־a) אזי F מכווצת. ולכן יש ל־F נקודת שבת, כלומר יש למד"ר פתרון יחיד.

3.4 השלמה של מרחבים מטריים

3.4.1 הגדרה. יהי (X,d) מרחב מטרי. השלמה (*completion*) של (X,d) הוא מרחב מטרי שלם (X^*,d^*) כך שאפשר למצוא שיכון איזומטרי $\imath : (X,d) \to (X^*,d^*)$ כך שהתמונה של X צפופה ב־X^*,

$$.\overline{\imath(X)} = X^*$$

3.4.2 דוגמה. נניח (X^*,d^*) מרחב מטרי שלם, ו־$X \subset X^*$ תת־קבוצה צפופה. אזי (X^*,d^*) הוא השלמה של $(X, d|_X)$.

3.4.3 דוגמה. ביחס למטריקות האוקלידיות, $\mathbb{R}$ הוא השלמה של $\mathbb{Q}$.

3.4.4 משפט. נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי

(א) יש ל־(X,d) השלמה.

(ב) נניח (X^*,d^*) ו־(X^{**},d^{**}) השלמות של (X,d), כך ש־(X,d) תת־מרחב שלהם. אזי אפשר למצוא איזומטריה $F : (X^*,d^*) \to (X^{**},d^{**})$ כך ש־

$$.F\big|_X = \mathrm{Id}$$

הוכחה.

(ב) (יחידות). נניח $x^* \in X^*$. אמנם X צפופה ב־(X^*,d^*), לכן אפשר למצוא סדרה $\{x_n\} \subset X$ שמתכנסת ל־x^* ב־(X^*,d^*). בפרט $\{x_n\}$ סדרת קושי ב־(X^*,d^*), ולכן בפרט סדרת קושי ב־(X,d). לכן $\{x_n\}$ היא גם סדרת קושי ב־$(X^{**}, d**)$, וכיוון שזה מרחב שלם, נקבל כי היא מתכנסת ל־x^{**} ב־(X^{**},d^{**}). נגדיר

$$.F\left(x^*\right) = x^{**}$$

אמנם F מוגדרת היטב, כי אם $\{y_n\} \subset X$ גם מתכנסת ל־x^* ב־$(X^*, d*)$, הרי ש־

$$d^*\left(x_n,y_n\right) = d^{**}\left(x_n,y_n\right) = d\left(x_n,y_n\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן $\{y_n\}$ ו־$\{x_n\}$ מתכנסות לאותו גבול. אם $x \in X$, הרי שהסדרה הקבועה $\{x\}$ מתכנסת ל־x, ולכן $F(x) = x$.

עתה F בייקטבית (בדקו!). נראה כי היא שומרת על מרחקים. נניח $x^*, y^* \in X^*$, ונניח סדרות $\{x_n\}$ ו־$\{y_n\}$ ב־X המתכנסות ל־x^* ו־y^* בהתאמה. כפי שראינו

$$\begin{aligned}\{x_n\} &\to F(x^*)\\ \{y_n\} &\to F(y^*)\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}d^{**}\left(F(x^*), F(y^*)\right) &= \lim d^{**}(x_n, y_n)\\ &= \lim d(x_n, y_n)\\ &= d^*(x^*, y^*)\end{aligned}$$

(א) (קיום). נבנה את (X^*, d^*) בשלבים:

שלב 1 (הגדרת X^*). נסן כל־ידי C את קבוצת כל סדרות קושי ב־X. נגדיר יחס $\sim$ על X: נגיד כי $\{y_n\} \sim \{x_n\}$ אם

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

אמנם זהו יחס שקילות (בדקו!). אזי נגדיר $X^* = {}^{C}\!/_{\sim}$.

שלב 2 (בניית d^*). נניח $x^*, y^* \in X^*$ כך ש־$x^* = [\{x_n\}]$ ו־$y^* = [\{y_n\}]$. נגדיר

$$d^*(x^*, y^*) = \lim_{\infty} d(x_n, y_n) .$$

אמנם d^* מטריקה מוגדרת היטב.

שלב 3 (שיכון). עבור כל $x \in X$, נגדיר

$$\imath(x) = [\{x, x, x, \ldots\}] \in X^* .$$

כעת $\imath$ היא שיכון איזומטרי של X ב־X^* (בדקו!).

שלב 4 ($\overline{\imath(X)}$ צפופה). נניח $x^* = [\{x_n\}] \in X^*$. נוכיח כי הסדרה $\{\imath(x_n)\}$ מתכנסת ל־x^* ב־(X^*, d^*), או באופן שקול

$$\lim d^*(\imath(x_n), x^*) = 0 .$$

הסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת קושי, לכן אפשר למצוא N כך שלכל $m, n \geqslant N$

$$d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon .$$

עתה

$$\begin{aligned}\imath(x_n) &= [(x_n, x_n, \ldots)]\\ x^* &= [(x_1, x_2, x_3, \ldots)] = [(x_m, x_{m+1}, x_{m+1}, \ldots)]\end{aligned}$$

(בדקו!). לכן

$$d^*(x_n, x^*) = \lim_{n\to\infty} d^*(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

עבור כל $n \geqslant N$. לכן

$$\lim_{n\to\infty} d^*(\imath(x_n), x^*) = 0 .$$

שלב 5 (שלמות). נניח $\{x_n^*\}$ סדרת קושי ב־(X^*, d^*). אם זו סדרה מהצורה $\{\iota(x_n)\}$ עבור סדרה $\{x_n\}$ מ־X, הרי ראינו כבר כי

$$\{\iota(x_n)\} \to [\{x_n\}].$$

נניח $\{x_n^*\}$ סדרת קושי כלשהי ב־(X^*, d^*). כיוון ש־$\iota(X)$ צפופה ב־(X^*, d^*), לכל n טבעי קיים x_n כך ש־

$$d^*(\iota(x_n), x_n^*) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

כפי שראינו, $\{\iota(x_n)\}$ מתכנסת, ולכן גם $\{x_n^*\}$.

□

4 קשירות

4.1 הגדרות בסיסיות

2016-01-02

4.1.1 הגדרה. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הפרדה (*separation*) של (X,τ) זוהי הצגה של X כאיחוד של שתי קבוצות פתוחות זרות.

4.1.2 דוגמה. הפרדה טריויאלית של (X,τ) היא מהצורה $X = X \cup \varnothing$. אחרת הפרדה נקראת לא־טריויאלית, כלומר הצגה $X = A \cup B$ כך ש־A ו־B אינן ריקות.

4.1.3 הערה. אם $X = A \cup B$ הפרדה של מרחב טופולוגי (X,τ), אזי $A = X \backslash B$, וכיוון ש־B פתוחה נקבל כי A גם פתוחה וגם סגורה (ובאופן דומה עבור B). אם $A \subset (X,\tau)$ פתוחה וסגורה, אזי גם $X \backslash A$ פתוחה וסגורה, ולכן $A \cup (X \backslash A)$ היא הפרדה של (X,τ).

4.1.4 הערה. נניח $Z \subset (X,\tau)$ לא־ריקה. הפרדה של $(Z, \tau|_Z)$ זוהי הצגה של Zכאיחוד של שתי קבוצות A, B זרות ופתוחות ב־$\tau|_Z$. כלומר, יש קבוצות U ו־V פתוחות ב־(X,τ) כך ש־$A = U \cap Z$ ו־$B = V \cap Z$. למשל, אם $X = U \cup V$ היא הפרדה של X, אזי $(U \cap Z) \cup (V \cap Z)$ היא הפרדה של $(Z, \tau|_Z)$. כלומר, כל הפרדה של (X,τ) משרה הפרדה של $(Z, \tau|_Z)$.

4.1.5 תרגיל. נתבונן ב־τ_{cc} טופולוגיית הקו־מנייה על $\mathbb{R}$

$$\tau_{cc} = \{U \subset \mathbb{R} \mid |\mathbb{R} \backslash U| \leqslant \aleph_0\}.$$

מצאו דוגמה של $Z \subset \mathbb{R}$ כך של־$\left(Z, \tau_{cc}\big|_Z\right)$ יש הפרדה שלא באה משום הפרדה של $(\mathbb{R}, \tau_{cc})$.

4.1.6 הגדרה. מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא קשיר (*connected*) אם אין לו הפרדות לא־טריויאליות (כלומר, אם כל ההפרדות שלו טריויאליות).

נשים לב כי (X,τ) קשיר אם ורק אם אין ב־(X,τ) קבוצות פתוחות וסגורות, למעט X ו־$\varnothing$.

4.1.7 הגדרה. תת־קבוצה Z של מרחב טופולוגי (X,τ) נקראת קשירה, אם $(Z, \tau|_Z)$ הוא מרחב טופולוגי קשיר.

כפי שראינו, ייתכן כי במרחב טופולוגי קשיר יש קבוצות שאינן קשירות (כלומר, שאף הפרדה לא־טריויאלית של Z לא באה מהפרדה של (X,τ)).

4.1.8 הערה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי, ותת־קבוצות $Z \subset W \subset X$. אזי Z היא קבוצה קשירה ב־(X,τ) אם ורק אם Z קשירה ב־$(W, \tau|_W)$, וזאת כי $\tau|_Z = (\tau|_W)\big|_Z$.

4.1.9 דוגמה. נניח X לא ריקה, ונתבונן בטופולוגיה $\tau = \{X, \varnothing\}$ על X. אזי (X,τ) מרחב קשיר. בפרט, אם (X,τ) מרחב טופולוגי כלשהו (עבור טופולוגיה כללית τ), לכל נקודה $z \in X$ היחידון $\{z\}$ הוא קבוצה קשירה, שכן

$$\tau\big|_{\{z\}} = \{\{z\}, \varnothing\}.$$

4.1.10 טענה. נניח $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגיים, ונניח Z קבוצה קשירה ב־(X,τ). אזי $f(Z)$ היא קבוצה קשירה ב־(Y,σ).

הוכחה. נניח $f(Z) = A \cup B$ הפרדה כלשהי של $f(Z)$, כלומר אפשר למצוא U ו־V פתוחות ב־(Y, σ), כך ש־

$$.f(Z) = (U \cap f(Z)) \cup (V \cap f(Z))$$

נוכיח כי

$$Z = \left(f^{-1}(A) \cap Z\right) \cup \left(f^{-1}(B) \cap Z\right) \tag{4.1}$$

היא הפרדה של Z. ראשית כל נשים לב כי

$$.f^{-1}(A) \cap Z = f^{-1}(U) \cap Z, \ \ f^{-1}(B) \cap Z = f^{-1}(v) \cap Z$$

כיוון ש־f רציפה, $f^{-1}(U)$ ו־$f^{-1}(V)$ הן קבוצות פתוחות ב־(X, τ). לכן $f^{-1}(U) \cap Z$ ו־$f^{-1}(V) \cap Z$ הן קבוצה פתוחה ב־$(Z, \tau|_Z)$.

כל נקודה ב־Z מועתקת תחת f ל־A או ל־B, לכן $Z \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ וכך מתקיים השוויון ב־(4.1) (ההכלה ההפוכה טריויאלית). נרצה להראות כי קבוצות אלו זרות, ואכן אין ב־Z נקודות שמועתקות תחת f גם ל־A וגם ל־B כי אלו קבוצות זרות. לכן משוואה (4.1) היא הפרדה של Z. הנחנו ש־Z קשירה, לכן זו הפרדה טריויאלית, כלומר, ללא הגבלת הכלליות

$$.f^{-1}(A) \cap Z = Z, \quad f^{-1}(B) \cap Z = \varnothing$$

אזי $f(Z) \subset A$ ולכן $B = \varnothing$ (כי A ו־B זרות), ומכאן ש־$A \cup B$ היא הפרדה טריויאלית של $f(Z)$, וזו קשירה. □

4.1.11 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, Z קשירה, ונניח $X = A \cup B$ הפרדה של X. אזי $Z \subset A$ או $Z \subset V$.

הוכחה. כפי שראינו קודם, $(Z \cap A) \cup (Z \cap B)$ היא הפרדה של $(Z, \tau|_Z)$. לכן, כיוון ש־Z קשירה, זו הפרדה טריויאלית, ומכאן $Z \cap A = Z$ או $Z \cap B = Z$. □

4.1.12 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, Z קבוצה קשירה. נניח W כלשהי כך ש־$Z \subset W \subset \overline{Z}$. אזי גם W קשירה.

בפרט, אם Z קשירה, אזי $\overline{Z}$ קשירה. הגרירה ההפוכה לא בהכרח מתקיימת (בדקו!).

4.1.13 לֶמָּה. נניח $A \subset W$ קבוצות במרחב טופולוגי (X, τ). נניח $x \in W$. אזי x נקודת סגור של A ב־(X, τ) אם ורק אם x נקודת סגור של A ב־$(W, \tau|_W)$.

הוכחת הלמה.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח x נקודת סגור של A ב־(X, τ). ניקח סביבה כלשהי U של x ב־$(W, \tau|_W)$. אזי $U = W \cap V$ עבור V כלשהי פתוחה ב־(X, τ). לכן בפרט $x \in V$, כלומר V סביבה של x ב־(X, τ), לכן $V \cap A \neq \varnothing$. אך $A \subset W$, לכן $A \cap W \cap V \neq \varnothing$ ומכאן U חותכת את W, וכך x נקודת סגור של A ב־$(W, \tau|_W)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח עתה כי x נקודת סגור של A ב־$(W, \tau|_W)$. ניקח סביבה כלשהי U של x ב־(X, τ). אזי $U \cap W$ היא סביבה של x ב־$(W, \tau|_W)$. מכאן

$$A \cap U = A \cap (U \cap W) \neq \varnothing$$

כנדרש.

□

הוכחת הטענה. נניח $W = A \cup B$ הפרדה של $(W, \tau|_W)$. כאמור, Z קשירה ב־(X, τ) ולכן גם ב־$(W, \tau|_W)$, לכן לפי טענה 4.1.11 נוכל ללא הגבלת הכלליות להניח כי $Z \subset A$. אזי במרחב (X, τ)

$$\overline{Z} \subset \overline{A} \subset \overline{W} \subset \overline{\overline{Z}} = \overline{Z}$$

ומכאן $\overline{W} = \overline{A} = \overline{Z}$. אך A פתוחה וסגורה ב־$(W, \tau|_W)$ ולכן

$$A = \underset{\substack{\text{סגור} \\ \text{ב־}(W,\tau|_W)}}{\overset{\uparrow}{\overline{A}}} = \underset{\substack{\text{סגור} \\ \text{ב־}(X,\tau)}}{\overset{\uparrow}{\overline{A}}} \cap W = \overline{Z} \cap W = W$$

והפירוק של W טריויאלי. $\square$

4.1.14 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ קבוצות קשירות ב־(X, τ), כך שלכל $\alpha, \beta \in I$ $Z_\alpha \cap Z_\beta \neq \varnothing$. אזי $\bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha$ קשירה.

הוכחה. נניח $A \cup B$ הפרדה של $\bigcup_{\alpha \in I} Z_\alpha$. לכל α, הקבוצה Z_α קשירה ב־(X, τ) ולכן גם קשירה ב־$\bigcup_{\beta \in I} Z_\beta$. לפי טענה 4.1.11, $Z_\alpha \subset A$ או $Z_\alpha \subset B$ לכל $\alpha \in I$. כיוון שלכל $\alpha, \beta \in I$ הקבוצות Z_α ו־Z_β נחתכות, מקבלים $Z_\alpha \subset A$ לכל $\alpha \in I$ או $Z_\alpha \subset B$ לכל $\alpha \in I$, ומכאן שהפירוק טריויאלי. $\square$

4.1.15 משפט. הקבוצות הקשירות של המרחב הממשי עם הטופולוגיה האוקלידית $(\mathbb{R}, \tau)$ הן בדיוק הקטעים פתוחים, הקטעים הסגורים, והקטעים החצי־פתוחים חצי־סגורים על הישר.

הוכחה. נניח Z קבוצה קשירה ב־$(\mathbb{R}, \tau)$. אזי יחד עם כל $\alpha, \beta \in Z$ (כל ש־$\alpha \leqslant \beta$), Z מכילה את $[\alpha, \beta]$, אחרת יש $\alpha < \gamma < \beta$ עם $\gamma \notin Z$, ואז

$$((-\infty, \gamma) \cap Z) \cup ((\gamma, \infty) \cap Z) = Z$$

הוא פירוק לא טריויאלי של Z (סתירה). לכן Z היא בהכרח מהצורה אינטרוול (חסום או לא חסום; פתוח, סגור, או חצי־פתוח־חצי־סגור) שגבולותיו $\inf Z$ ו־$\sup Z$ (בדקו!), כנדרש.

נראה את הכיוון ההפוך. נניח כי Z היא קבוצה כמו בניסוח המשפט, ונראה כי Z קשירה. מספיק להראות עבור $Z = (a, b)$, כי שאר הקבוצות נמצאות כולן בין קטע פתוח לסגור שלו (ולכן לפי טענה 4.1.12 גם הן יהיו קשירות). נניח $(a, b) = A \cup B$ הפרדה. בפרט A ו־B פתוחות ב־$(Z, \tau|_Z)$, ולכן פתוחות ב־$(\mathbb{R}, \tau)$ (כי Z עצמה פתוחה). עתה נוכל לרשום

$$A = \bigcup_\alpha I_\alpha$$
$$B = \bigcup_\beta J_\beta$$

עבור משפחות $\{I_\alpha\}, \{J_\beta\}$ של קטעים פתוחים ב־$\mathbb{R}$ זרים בזוגות. אף אחד מהקצוות של I_α ו־J_β לא שייך לקטע (a, b), כי אחרת, אם למשל הקצה של I_α שייך ל־(a, b), הוא חייב להיות שייך גם ל־J_β כלשהו, אך אז $I_\alpha \cap J_\beta \neq \varnothing$ בסתירה להנחה ש־A ו־B זרים (והקצה של I_α לא יכול להיות ב־I_γ כלשהו, שוב כי I_α ו־I_γ זרים). לכן הפירוק $A \cup B$ טריויאלי. $\square$

2017-01-03

4.1.16 משפט (ערך הביניים). נניח (X, τ) מרחב טופולוגי, Z קשירה. נניח $F : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ רציפה, ונניח $a, b \in Z$. אזי אם

$$F(a) = \alpha < \beta = F(b),$$

לכל $\gamma \in (\alpha, \beta)$ אפשר למצוא $c \in Z$ כך ש־$F(c) = \gamma$.

4.1.17 מסקנה (הניסוח הקלאסי). נניח $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה, $F(a) = \alpha < \beta = F(b)$. אזי, כיוון ש־$[a, b]$ קשירה, המשפט על ערך הביניים (עבור מרחבים טופולוגיים) גורר שעבור כל $\gamma \in (\alpha, \beta)$ אפשר למצוא $c \in (a, b)$ עבורו $F(c) = \gamma$.

הוכחת משפט ערך הביניים. Z קשירה ו־F רציפה, ולכן כפי שראינו $F(Z)$ היא קבוצה קשירה ב־$\mathbb{R}$. לכן, יחד עם $\alpha, \beta \in F(Z)$, הקבוצה $F(Z)$ מכילה את כל הקטע $[\alpha, \beta]$, כלומר לכל $\gamma \in (\alpha, \beta)$ מתקיים $\gamma \in F(Z)$. $\square$

4.1.18 טענה. נניח (X_1, τ_1) ו־(X_2, τ_2) מרחבים טופולוגיים, ו־Z_1 ו־Z_2 קבוצות קשירות ב־X_1 ו־X_2 בהתאמה. אזי גם $Z_1 \times Z_2$ קשירה ב־$(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$.

באופן אינדוקטיבי, אפשר להרחיב את הטענה עבור מכפלה ישרה של מספר סופי כלשהו של קבוצות קשירות.

הוכחה. לכל $a_1 \in Z_1$ נתבונן בהעתקה $f : (X_2, \tau_2) \to (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ הנתונה לפי
$$f(b) = (a_1, b)$$
לכל $b \in X_2$. אמנם f רציפה, כי היא רציפה בכל רכיב בנפרד. נשים לב כי
$$f(Z_2) = \{a_1\} \times Z_2,$$
ולכן, כיוון ש־f רציפה, $\{a_1\} \times Z_2$ היא קבוצה קשירה (לכל $a_1 \in Z_1$). כמובן, באופן דומה יכולנו להראות כי $Z_1 \times \{a_2\}$ היא קבוצה קשירה לכל $a_2 \in Z_2$.
עתה
$$(\{a_1\} \times Z_2) \cap (Z_1 \times \{a_2\}) = \{(a_1, a_2)\} \neq \varnothing,$$
ולכן
$$T_{a_1,a_2} = (\{a_1\} \times Z_2) \cup (Z_1 \times \{a_2\})$$
גם היא קבוצה קשירה. נשים לב כי־
$$Z_1 \times Z_2 = \bigcup_{(a_1,a_2)\in Z_1 \times Z_2} T_{a_1,a_2}.$$
לכן, אם נראה שכל שתי קבוצות באיחוד לעיל נחתכות, נקבל כי איחודן $Z_1 \times Z_2$ הוא קבוצה קשירה.
אמנם, לכל $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in Z_1 \times Z_2$
$$T_{a_1,a_2} \cap T_{b_1,b_2} = \{(a_1, b_2), (b_1, a_2)\} \neq \varnothing.$$
$\square$

4.1.19 תרגיל. הכלילו את טענה 4.1.18 עבור מכפלה ישרה של אוסף כלשהו של קבוצות קשירות, כאשר הטופולוגיה על המכפלה של המרחבים הטופולוגיים היא טופולוגיית המכפלה (והראו כי בטופולוגית התיבות זה לא בהכרח נכון).

4.2 רכיבי קשירות

4.2.1 משפט. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי. אזי, ניתן להציג את X כאיחוד
$$X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha,$$
כך שלכל $\alpha, \beta \in I$

- $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$
- X_α קבוצה קשירה וסגורה
- כל קבוצה קשירה ב־(X, τ) מוכלת ב־X_α כלשהי (והיא יחידה, כי הקבוצות X_α השונות זרות).

הקבוצות X_α השונות נקראות רכיבי הקשירות (*connected components*) של (X, τ). אם Z קבוצה קשירה במרחב טופולוגי (X, τ), אז רכיבי הקשירות של המרחב הטופולוגי $(Z, \tau|_Z)$.

אם יש הצגה אחרת ל־X
$$X = \bigcup_{\beta\in J} X_\beta$$
עם אותן התכונות, אזי יש העתקה חד־חד־ערכית ועל $\varphi : I \to J$ כך שלכל $\alpha \in I$ קיים $X_\alpha = X_{\varphi(\alpha)}$.

הוכחה. נגדיר יחס $\sim$ על X: נאמר ש־$a \sim b$ אם קיימת קבוצה קשירה Z ב־(X,τ) כך ש־$a, b \in Z$. נראה כי זה יחס שקילות:

- ✓ $a \sim a$ כי $a \in \{a\}$.
- ✓ סימטריות היחס טריויאלית.
- ✓ אם $a \sim b$ ו־$b \sim c$ אזי יש Z_1 ו־Z_2 קשירות, כך ש־$a, b \in Z_1$ ו־$b, c \in Z_2$. אזי $a, c \in Z_1 \cup Z_2$, והרי זו קבוצה קשירה כי $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ (כי הוא מכיל את b).

תהי

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$$

הצגה של X כיאחוד של מחלקות השקילות X_α של $\sim$.

- מיידית, אנו יודעים זה איחוד זר.

- אמנם כל X_α קשירה, כי אם נבחר $a \in X_\alpha$, ניתן להציג את X_α באיחוד של כל הקבוצות הקשירות המכילות את a, כי נקודה נמצאת ב־X_α אממ קיימת קבוצה קשירה המכילה אותה ואת a. אזי X_α ניתנת להצגה כאיחוד של קבוצות קשירות, שכולן נחתכות ב־a, ולכן X_α קשירה.

- בפרט זה אומר שכל קבוצה קשירה Z שמכילה את a מוכלת ב־X_α. זה אומר שכל קבוצה קשירה ב־(X,τ) מוכלת כולה במחלקת השקילות של אחת הנקודות בה.

- אם $a \in X_\alpha$, ראינו כי $\overline{X_\alpha}$ גם היא קבוצה קשירה המכילה את a, ולכן $\overline{X_\alpha} \subset X_\alpha$, וכך X_α קשירה.

נראה את היחידות. נניח שני ייצוגים

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} X_\beta$$

עם התכונות לעיל. לכל $\alpha \in I$ X_α קשירה, ולכן מוכלת ב־X_β עבור $\beta \in J$ כלשהי, והיא יחידה. נגדיר $\varphi(\alpha) = \beta$. כך $\varphi : I \to J$ מוגדרת היטב. מצד שני, X_β היא קשירה, ולכן מוכלת ב־$X_{\alpha'}$ עבור $\alpha' \in I$ כלשהי, ואזי $\alpha = \alpha'$, כי אחרת $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = \varnothing$. כלומר קיבלנו $X_\alpha = X_{\varphi(\alpha)}$. לכן מקבלים גם כי φ חד חד ערכית. אמנם φ על, כי לכל $\beta \in J$, X_β מוכל (ולכן שווה) ל־X_α עבור $\alpha \in I$ כלשהי, ולכן

$$X_\beta = X_{\varphi(\alpha)}.$$

□

2107-01-09

4.2.2 דוגמה. (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר. יש רק רכיב קשירות אחד: X עצמו.

4.2.3 דוגמה. נתבונן במרחב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה האוקלידית τ, ונתבונן ב־$Z = (0,1) \cup (1,3)$. ל־Z יש שני רכיבי קשירות: $(0,1)$ ו־$(1,3)$ (סגורים ב־Z).

4.2.4 דוגמה. נתבונן כעת ב־$\mathbb{Q}$ כתת־מרחב של $(\mathbb{R},\tau)$. נניח $Z \subset \mathbb{Q}$ קשירה. אזי Z יחידון, כי אחרת הוא יכיל נקודות ממשיות מחוץ למרחב. כך מקבלים כי רכיבי הקשירות של $\mathbb{Q}$ הם כל היחידונים המרחב

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \{a\}.$$

4.3 קשירות מסילתית

4.3.1 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. מסילה ב־(X,τ) בין נקודה $x \in X$ לנקודה $y \in X$ זוהי תמונה של איזשהי העתקה רציפה $\gamma : [a,b] \to (X,\tau)$ (עבור $a,b \in \mathbb{R}$ כלשהם) כך ש־$\gamma(a) = x$ ו־$\gamma(b) = y$. אם $Z \subset X$, אז מסילה ב־Z זוהי תמונה של העתקה רציפה $\gamma : [a,b] \to (Z,\tau|_Z)$.

לעתים בספרות נוקטים במונח "מסילה" לתאר את ההעתקה γ עצמה.

4.3.2 דוגמה. מסילה קבועה: עבור $\gamma : [a,b] \to (X,\tau))$ כאשר $t \mapsto x$ לכל $t \in [a,b]$ (עבור $x \in X$ כלשהו) מתארת את המסילה $\{x\}$ (מ־x אל עצמה).

4.3.3 דוגמה. ב־$\mathbb{R}^2$ עם הטופולוגיה האוקלידית, יכולה באופן אינטואטיבי עקומים רציפים שמתארים "מהלכים" במישור. אם זאת, ישנן דוגמאות למסילות שמכסות קבוצות פתוחות במישור.

4.3.4 הערה. כל מסילה בתור תמונה של קבוצה קשירה (קטע סגור) תחת העתקה רציפה היא קבוצה קשירה.

4.3.5 הגדרה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. אומרים ש־(X,τ) קשיר מסילתית (*path connected*) אם בין כל שתי נקודות של X יש מסילה. קבוצה $Z \subset (X,\tau)$ נקראת קשירה מסילתית, אם $(X,\tau|_Z)$ מרחב טופולוגי קשיר מסילתית (כלומר, בין כל שתי נקודות של Z יש מסילה ב־Z).

4.3.6 טענה. אם (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר מסילתית, אז (X,τ) קשיר.

הגרירה ההפוכה לא בהכרח נכונה.

הוכחה. ניקח $x \in X$. כל $y \in X$ נסמן על־ידי $P_{x,y}$ מסילה בין x ל־y (זו קיימת כי X קשיר מסילתית). אזי
$$X = \bigcup_{y \in X} P_{x,y},$$
והרי לפי טענה 4.1.14, X כאיחוד קשירות עם נקודה משותפת x. $\square$

4.3.7 דוגמה. כל יחידון הוא קבוצה קשירה מסילתית, כי הוא מחובר לעצמו על־ידי המסילה הקבועה.

4.3.8 דוגמה. נניח $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמה. אזי לכל $w,z \in V$ ההעתקה $\mathbb{R} \to V$ הנתונה לפי $t \mapsto w + tz$ רציפה (בדקו!). הישר בין w ו־z זו המסילה שהעתקה זו מתארת (כשהיא מצומצמת ל־$[0,1]$). קבוצה $A \subset V$ נקראת קמורה (*convex*) אם ניתן לחבר כל שתי נקודות ב־A על־ידי קטע ישר כזה שמוכל ב־A. בפרט, קבוצה קמורה היא קשירה מסילתית.

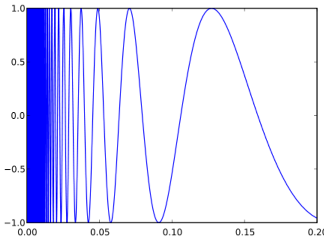
4.3.9 תרגיל. בכל מרחב נורמה, כל כדור פתוח או סגור הוא קבוצה קמורה, ולכן קשירה מסילתית וכך קשירה.

נניח מרחב טופולוגי (X,τ). נגדיר יחס "$\sim$" על X. נאמר ש־$x_1 \sim x_2$ אם יש ב־(X,τ) מסילה מ־x_1 ל־x_2. נבדוק כי זה יחס שקילו:

- $x \sim x$: המסילה הקבועה מחברת את x ל־x.
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$: כי אם $\gamma : [a,b] \to X$ רציפה שתמונתה מסיל מ־x ל־y, נוכל למצוא φ כך שההעתקה $\gamma \circ \varphi : [a,b] \to X$ גם תהיה רציפה, ותמונתה מסילה מ־y ל־x (הקורא ישמח לספק את הפרטים באשר להגדרה של φ).
- $\substack{x \sim y \\ y \sim x} \Rightarrow x \sim z$: תרגיל לקורא.

לכן ניתן להציג את X כאיחוד של מחלקות השקילות הזרות של "$\sim$". מחלקות אלה נקראות רכיבי קשירות מסילתית של X. כל אחת ממחלקות השקילות של X תחת $\sim$ היא קבוצה קשירה (כאיחוד של מסילות קשירות אשר נחתכות). לכן כל מחלקת שקילות מוכלת ברכיב קשירות כלשהו של (X,τ). כיוון שמחלקות השקילות של

"$\sim$" זרות, זה גורר שכל רכיב קשירות של (X,τ) הוא איחוד של רכיבי הקישרות המסילתית שמוכלים בו. אם $Z\subset(X,\tau)$, אכיבי הקישרות המסילתית של Z מוגדרים להיות רכיבי הקשירות המסילתית של $(Z,\tau|_Z)$.



איור ‎4.1: גרף הפונקציה $x\mapsto\sin(1/x)$. התמונה לקוחה מתוך Wikimedia.

4.3.10 דוגמה. נניח (X,τ) קשיר מסילתית. אזי יש לו רכיב קשירות מסילתית אחד, וכן רכיב קישרות אחד (X עצמו). באותה מידה, אם $Z\subset(X,\tau)$ קשירה מסילתית, אז היא רכיב הקשירות שלה עצמה, וכן רכיב הקשירות המסילתית.

4.3.11 דוגמה. מגדירים $Z\subset(\mathbb{R}^2,\tau_{\mathrm{Eucl}})$ להיות $Z=A\cup B$ כאשר

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|y=\sin\frac{1}{x},\ x>0\right\}$$
$$B=\left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\middle|y\in[-1,1]\right\}$$

(איור 4.1) אמנם A קשירה מסילתית, ולמעשה $Z=\overline{A}$ (ולכן זו קשירה), וגם B קשירה מסילתית, אך Z אינה קשירה מסילתית (ורכיבי הקשירות המסילתית שלה הם A ו־B).

5 קומפקטיות

5.1 קומפקטיות במרחבים טופולוגיים כלליים

5.1.1 תזכורת. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי. כיסוי של (X,τ) הוא אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות ב־(X,τ) שאיחודן שווה ל־X. כיסוי של $Z\subset(X,\tau)$ הוא אוסף של קבוצות פתוחות ב־(X,τ) שאיחודן מכיל את Z. תת־כיסוי, הוא תת־אוסף של כיסוי שבעצמו גם כיסוי.

5.1.2 הערה. נניח $Z\subset(X,\tau)$ ונניח $\{U_\alpha\}$ כיסוי של X. בפרט זהו כיסוי של Z. הכיסוי גם משרה כיסוי של $(Z,\tau|_Z)$ מהצורה $\{Z\cap U_\alpha\}$. להיפך, כל כיסוי של $(Z,\tau|_Z)$ מתקבל בצורה כזאת, מכיסוי של (X,τ) כלשהו (כי כל קבוצה פתוחה ב־$\tau|_Z$ מתקבלת כחיתוך של קבוצה פתוחה ב־τ עם Z). אם $B\subset A\subset(X,\tau)$ אז כל כיסוי של A הוא בפרט כיסוי של B.

5.1.3 הגדרה. אומרים שמרחב טופולוגי הוא קומפקטי אם לכל כיסוי שלו קיים תת־כיסוי סופי. קבוצה במרחב טופולוגי תקרא קומפקטית אם התת־מרחב הטופולוגי שמוגדר עליה קומפקטי, או באופן שקול, אם לכל כיסוי שלה קיים תת־כיסוי סופי.

5.1.4 הערה. נניח $A\subset B\subset(X,\tau)$. אז A $\iff$ $(A,\tau|_A)$ מרחב טופולוגי קומפקטי $\iff$ $\left(A,(\tau|_B)\big|_A\right)$ מרחב טופולוגי $\iff$ A קומפקטית ב־$(B,\tau|_B)$.

2017-01-10

5.1.5 טענה. נניח (X,τ) מרחב טופולוגית ונניח $\Psi=\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ בסיס של τ. נניח $A\subset(X,\tau)$. אזי A קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של A על־ידי קבוצות מ־Ψ, קיים תת־כיסוי סופי.

הוכחה. הכיוון $\boxed{\Leftarrow}$ טריויאלי. נוכיח את $\boxed{\Rightarrow}$. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של A על־ידי קבוצות פתוחות ב־(X,τ). כל U_α היא איחוד של קבוצות מ־Ψ (כי הוא בסיס של τ), ולכן האיחוד $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ הוא בפרט איחוד של קבוצות מ־Ψ, שמכיל את A, כלומר קיבלנו כיסוי של A על־ידי קבוצות מ־Ψ, שכל אחת אחת מהקבוצות הללו מוכלת ב־U_α כלשהי. לפי הנחה, לכיסוי כזה ניתן למצוא תת־כיסוי סופי: קיימים $\beta_1,\dots,\beta_k\in J$ כך ש־

$$A\subset V_{\beta_1}\cup\cdots\cup V_{\beta_k},$$

כאשר קיימים גם $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in I$ כך ש־$V_{\beta_i}\subset U_{\alpha_i}$ לכל i. עתה

$$A\subset V_{\beta_1}\cup\cdots\cup V_{\beta_k}\subset U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_k}$$

וכך מצאנו תת־כיסוי סופי של A מ־$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, וזו קומפקטית. $\square$

5.1.6 דוגמה. כל יחידון בכל מרחב טופולוגי הוא קבוצה קומפקטית.

5.1.7 דוגמה. $[a,b]\subset(\mathbb{R},\tau_{\mathrm{Eucl}})$. לפי Heine-Borel, לכל כיסוי של הקטע על־ידי קטעים פתוחים ב־$\mathbb{R}$ אפשר לבחור תת־כיסוי סופי. קטעים פתוחים ב־$\mathbb{R}$ הם בסיס לטופולוגיה האוקלידית, לכן לפי הטענה $[a,b]$ קומפקטי.

5.1.8 דוגמה. $(\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{Eucl}})$ אינו קומפקטי. למשל

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n),$$

ואין לכיסוי זה תת־כיסוי סופי (כי כל תת־כיסוי סופי שלו חסום).

5.1.9 תרגיל. איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות (בכל מרחב טופולוגי) הוא קבוצה קומפקטית. בפרט, כל קבוצה סופית במרחב טופולוגי היא קבוצה קומפקטית.

5.1.10 טענה. נניח $F : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ העתקה רציפה בין מרחבים טופולוגיים, ונניח $A \subset (X, \tau)$ קומפקטית. אזי $F(A)$ קומפקטית ב־(Y, σ).

הוכחה. נניח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי כלשהו של $F(A)$ ב־(Y, σ)

$$F(A) \subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

לכן

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in I} F^{-1}(U_\alpha).$$

בפרט, $\left\{F^{-1}(U_\alpha)\right\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי של A, כי F רציפה ולכן כל $F^{-1}(U_\alpha)$ פתוחה. לכן, כי A קומפקטי, אפשר למצוא $\alpha_1, \dots \alpha_k \in I$ כך ש־

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} F^{-1}(U_\alpha).$$

לכן

$$F(A) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F\left(F^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcup_{i=1}^{k} U_\alpha.$$

מכאן ש־$\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{k}$ הוא תת־כיסוי סופי של $F(A)$ וזו קומפקטית. ☐

5.1.11 דוגמה. מסילות במרחב טופולוגי, כתמונות של קטע ממשי קומפקטי תחת העתקה רציפה, הן קבוצות קומפקטיות.

5.1.12 טענה. נניח (X, τ) קומפקטי, $A \subset (X, \tau)$ סגורה. אזי A קומפקטית.

הוכחה. נניח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של A. מכאן ש־

$$X = A \cup (X\backslash A) = \left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cup (X\backslash A).$$

A סגורה, ולכן $X\backslash A$ פתוחה, ומכאן שמצאנו כיסוי של X. כיוון ש־(X, τ) אפשר למצוא תת־כיסוי סופי, אשר בפרט יהי כיסוי סופי של A, כלומר אפשר למצוא $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in I$ עם

$$A \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k},$$

ו־A קומפקטית. ☐

5.1.13 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי האוסדורף, ו־$A \subset (X, \tau)$ קומפקטית. אזי A סגורה.

הוכחה. צריך להוכיח כי כל $x \in X\backslash A$ היא נקודת פנים של $X\backslash A$. לכל $a \in A$ (שבהכרח $a \neq x$) אפשר למצוא סביבות זרות U_a ו־V_a של a ו־x בהתאמה (כי (X, τ) האוסדורף). עתה

$$A \subset \bigcup_{a\in A} U_\alpha$$

ולכן כיוון ש־A קומפקטית, אפשר למצוא $a_1, \ldots, a_k \in A$ כך ש־

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i} \overset{\text{נסמן}}{=} U_x.$$

עתה

$$x \in V_x \overset{\text{נסמן}}{=} \bigcap_{i=1}^{k} V_{a_i},$$

כאשר כחיתוך סופי, V_x פתוחה. עתה

$$\begin{aligned} V_x &\subset \bigcap_{i=1}^{k} X \backslash U_{a_i} \\ &= X \Big\backslash \bigcap_{i=1}^{k} U_{a_i} \\ &\subset X \backslash U_x \\ &\subset X \backslash A \end{aligned}$$

לכן V_x היא סביבה של x ב־$X \backslash A$, כלומר x נקודת פנים של $X \backslash A$. □

5.1.14 דוגמה. הדרישה להאוסדורף בטענה 5.1.13 הכרחית: ניקח $X \neq \varnothing$ כלשהי, וניקח את הטופולוגיה הדלה $\{\varnothing, X\}$ על X. אזי כל תת־קבוצה של X היא קבוצה קומפקטית, אך כל תת־קבוצה נאותה לא־ריקה של X אינה סגורה.

5.1.15 טענה. נניח (X, τ) מרחב טופולוגי קומפקטי האוסדורף. אזי הוא נורמלי (T_4).

הוכחה. נניח $A, B \subset (X, \tau)$ קבוצות סגורות וזרות, ובפרט, לפי טענה 5.1.13, קומפקטיות. לכל $a \in A$ ו־$x \in B$ נבנה כמו בהוכחה של טענה 5.1.13 סביבה U_x שמכילה את A, וסביבה V_x של x, כך ש־U_x ו־V_x זרות. נשים לב כי

$$B \subset \bigcup_{x \in B} V_x$$

וכיוון ש־B קומפקטית אפשר למצוא $x_1, \ldots, x_k \in B$ כך ש־

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \overset{\text{נסמן}}{=} V$$

כאשר V פתוחה. עתה

$$A \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_{x_k} \overset{\text{נסמן}}{=} U$$

כאשר גם U פתוחה. נקבל כי U ו־V סביבות זרות של A ו־B בהתאמה. □

2017-01-16

5.1.16 משפט. נניח (X_1, τ_1) ו־(X_2, τ_2) מרחבים טופולוגיים, וקבוצות קמפקטיות $A_1 \subset X_1$ ו־$A_2 \subset X_2$. אזי $A_1 \times A_2$ קומפקטית ב־$(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ (בפרט, עבור $A_i = X_i$ מקבלים כי המרחב כולו קומפקטי) .

למעשה הטענה נכונה עבור מכפלה ישרה של אוסף כלשהו של קבוצות קומפקטיות (זהו משפט Tychonoff), אך אנו לא נוכיח זאת.

5.1.17 מסקנה. מכפלה סופית של קבוצות קומפקטיותת היא קומפקטית (לפי טופולוגית המכפלה).

הוכחה. מספיק להוכיח שכל כיסוי של $A_1 \times A_2$ על־ידי קבוצות מהבסיס $\Psi = \left\{U \times V \middle| {}^{U \in \tau_1}_{V \in \tau_2}\right\}$. ניקח כיסוי כלשהו $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של $A_1 \times A_2$ על־ידי קבוצות מ־Ψ. ניקח $a \in A_1$ כלשהו, ונתבונן בהעתקה

$$\begin{aligned} f : (X_2, \tau_2) &\to (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2) \\ f(b) &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

זו העתקה רציפה, כי היא רציפה לפי רכיבים, ולכן $\{a\} \times A_2$, כתמונה של A_2 קומפקטית תחת העתקה רציפה, היא בעצמה קומפקטית המכפלה הישרה. לכן אפשר לבחור תת־כיסוי סופי $\left\{U_{\alpha_i(a)} \times V_{\alpha_i(a)}\right\}_{i=1,\ldots,k(a)}$ של $a \times A_2$. עתה $U_{\alpha_1(a)}, \ldots, U_{\alpha_{k(a)}(a)}$ כולן סביבות של a ב־(X_1, τ_1), ולכן

$$U_a \coloneqq \bigcap_{i=1}^{k(a)} U_{\alpha_i(a)}$$

היא גם פתוחה ב־(X_1, τ_1), ומכילה את a (כחיתוך סופי של פתוחות). עתה, נשים לב כי $\left\{V_{\alpha_i(a)}\right\}_{i=1}^{k(a)}$ הוא כיסוי של A_2

$$A_2 \subset V_a \coloneqq \bigcup_{i=1}^{k(a)} V_{\alpha_i(a)}$$

כאשר V_a פתוחה ב־(X_2, τ_2) (כאיחוד פתוחות). אזי

$$U_a \times A_2 \subset U_a \times V_a = \bigcup_{i=1}^{k(a)} U_{\alpha_i(a)} \times V_{\alpha_i(a)}.$$

עתה $\{U_a\}_{a \in A_1}$ הוא כיסוי של A_1 (כי $a \in U_a$ לכל $a \in A_1$). לכן, כיוון ש־A_1 קומפקטית אפשר למצוא $a_1, \ldots, a_m \in A_1$ כך ש־

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}.$$

כעת לכל $j = 1, \ldots, m$ כפי שראינו

$$U_{a_j} \times A_2 \subset U_{a_j} \times V_{a_j} \subset \bigcup_{i=1}^{k(a_j)} U_{\alpha_i(a_j)} \times V_{\alpha_i(a_j)},$$

ואז

$$A_1 \times A_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_j} \times A_2 \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{k(a_j)} U_{\alpha_i(a_j)} \times V_{\alpha_i(a_j)} \right),$$

והנה מצאנו תת־כיסוי סופי של $A_1 \times A_2$. □

5.2 קומפקטיות במרחבים מטריים

5.2.1 הגדרה. נניח (X, d) מרחב מטרי, $A \subset (X, d)$, ונניח $\varepsilon > 0$. ε־רשת עבור A ב־(X, d) זוהי קבוצת נקודות $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של X כך ש־

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} B(x_\alpha, \varepsilon),$$

כלומר קבוצת מרכזים של כדורים פתוחים ברדיוס ε אשר מכסים את A.

אם $A \subset (X, d)$ אז ε־רשת של A המוכלת ב־A כמוה כ־ε־רשת של $(A, d|_A)$.

באופן שקול, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ היא ε־רשת אם ורק אם לכל $a \in A$ אפשר למצוא $\alpha \in I$ כך ש־$d(a, x_\alpha) < \varepsilon$. אם $A = X$ מדברים על ε־רשת עבור מרחב מטרי (X, d).

5.2.2 הערה. ε־רשת עבור A היא בפרט גם ε־רשת עבור כל תת־קבוצה של A.

5.2.3 טענה. נניח A תת־קבוצה של מרחב מטרי (X, d), ונניח של־A יש ε־רשת סופית. אזי ל־A יש 2ε־רשת סופית מנקודות של A.

הוכחה. נניח $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ היא ε רשת עבור A. לכל $i = 1, \dots, k$ נבחר a_i מתוך $A \cap B(x_i, \varepsilon)$ (ללא הגבלת הכלליות, אפשר להניח כי חיתוך זה לא ריק). אזי לכל i רלוונטי

$$B(x_i, \varepsilon) \subset B(a_i, 2\varepsilon),$$

כי $\operatorname{diam} B(x_i, \varepsilon) \leqslant 2\varepsilon$. לכן אפשר לראות כי $\{a_1, \dots, a_k\}$ היא 2ε־רשת של A. $\square$

5.2.4 הגדרה. נניח (X, d) מרחב מטרי. אומרים ש־(X, d) חסום לחלוטין (*totally bounded*) אם לכל $\varepsilon > 0$ יש ל־(X, d) ε־רשת סופית; כלומר, לכל ε אפשר לכסות את X על־ידי מספר סופי של כדורים פתוחים ברדיוס ε מ־(X, d).

קבוצה $A \subset (X, d)$ נקראת חסומה לחלוטין אם $\left(A, d|_A\right)$ חסום לחלוטין, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ אפשר למצוא ε־רשת סופית של A ב־X (כפי שאפשר להסיק מהטענה הקודמת ראינו).

5.2.5 הערה. אם A חסומה לחלוטין, אזי גם כל תת־קבוצה של A לחלוטין.

5.2.6 תרגיל. A חסומה לחלוטין אם ורק אם $\overline{A}$ חסומה לחלוטין.

5.2.7 טענה. קבוצה A במרחב מטרי (X, d) היא חסומה לחלוטין רק אם היא חסומה (אך לא להיפך).

הוכחה. נניח $N = \{x_1, \dots, x_k\}$ היא 1־רשת סופית עבור A. נגדיר

$$C := \max_{i,j=1,\dots,k} d(x_i, x_j).$$

C הוא מספר אי־שלילי סופי. כיוון ש־N היא 1־רשת, לכל $a, b \in A$ אפשר למצוא $x_i, x_j \in N$ כך ש־

$$\begin{cases} d(a, x_i) < 1 \\ d(b, x_j) < 1 \end{cases}$$

ולכן

$$d(a, b) \leqslant d(a, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, b) < C + 2$$

לכל $a, b \in A$. $\square$

5.2.8 דוגמה. יהי $A = B\left[\overline{0}, 1\right]$ כדור היחידה ב־ℓ_∞. כמובן A חסומה, אבל A אינה חסומה לחלוטין: נראה כי עבור $0 < \varepsilon < 1/2$ אין ε־רשת סופית עבור A.

נניח בשלילה $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \ell_\infty$ שהיא ε־רשת עבור A (עבור $\varepsilon < 1/2$). נתבונן בוקטורי היחידה הסטנדרטיים

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{המקום ה־}i}}{1}, 0, \dots)$$

לכל i טבעי. אמנם לכל i קיים $e_i \in A$. לכל i אפשר למצוא $m(i) \in \{1, \dots, k\}$ עם

$$d\left(e_i, x_{m(i)}\right) < \varepsilon.$$

עתה מצאנו העתקה $m:\mathbb{N}\to\{1,\ldots,k\}$. זו לא יכולה להיות 1־1 ערכית, לכן אפשר למצוא i ו־j טבעיים (שונים) כלשהם עם $m(i)=m(j)$ וכך

$$\begin{cases} d\left(e_i, x_{m(i)}\right) < \varepsilon \\ d\left(e_j, x_{m(i)}\right) < \varepsilon \end{cases}$$

ולכן כעת

$$1 = d\left(e_i, e_j\right) \leqslant d\left(e_i, x_{m(i)}\right) + d\left(e_j, x_{m(i)}\right) < 2\varepsilon$$

סתירה!

5.2.9 טענה. נניח (X,d) מרחב מטרי חסום לחלוטין. אזי (X,d) ספרבילי (כלומר C_{II}).

הוכחה. לכל n טבעי נבחר $\left\{a_1^{(n)},\ldots,a_{k(n)}^{(n)}\right\}$ שהיא $1/n$־רשת סופית של X. נגדיר

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{a_1^{(n)},\ldots,a_{k(n)}^{(n)}\right\}.$$

A בת־מנייה, ונראה כי היא צפופה.

אבן, נניח $\varepsilon > 0$ ונקודה $x \in X$ (כלשהן). אפשר למצוא n טבעי כך ש־$1/n \leqslant \varepsilon$, ואז יש נקודה $a_i^{(n)}$ של ה־$1/n$־רשת של X מ־A עם

$$d\left(a_i^{(n)}, x\right) < \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon,$$

וכך A צפופה. □

5.2.10 משפט. נניח (X,d) מרחב מטרי. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) (X,d) הוא מרחב מטרי קומפקטי (כלומר המרחב הטופולוגי (X,τ_d) קומפקטי).

(ב) מכל כיסוי בן־מנייה של (X,d) ניתן לבחור תת־כיסוי סופי.

(ג) כל סדרה עולה $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ של קבוצות פתוחות ב־(X,d) שמכסה את X היא בהכרח מתייצבת (כלומר, קיים מקום שהחל ממנו היא קבועה).

(ד) כל סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא־ריקות $\cdots \supset A_1 \supset A_2$ ב־(X,d) מתקיים $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \varnothing$.

(ה) מכל סדרה ב־(X,d) ניתן לבחור תת־סדרה מתכנסת.

(ו) (X,d) הוא
1. חסום לחלוטין
2. ושלם.

5.2.11 תרגיל. גם התנאים הבאים שקולים לקומפקטיות של מרחב מטרי (X,d):

(ז) מכל כיסוי של (X,d) על־ידי כדורים פתוחים אפשר לבחור תת־כיסוי סופי.

(ח) מכל כיסוי בן־מנייה של (X,d) על(ידי כדורים פתוחים קיים תת־כיסוי סופי.

(ט) או ש־X קבוצה סופית, או שלכל תת־קבוצה אינסופית של X יש נקודת הצטברות ב־(X,d).

כמו־כן, אם (X,d) קומפקטית אזי לכל סדרה יורדת של כדורים סגורים ב־(X,d) יש נקודה משותפת (אבל לא להיפך).

5.2.12 מסקנה. נניח A קבוצה במרחב מטרי (X, d) אזי תנאים הבאים שקולים:

(1) A קומפקטית.

(2) מכל סדרה ב־A אפשר לבחור תת־סדרה מתכנסת ב־$\left(A, d|_A\right)$.

(3) A חסומה לחלוטין, והמרחב המטרי $\left(A, d|_A\right)$ שלם (אממ A סגורה ו־X שלם).

2017-01-17

הוכחת משפט 5.2.10.

(א)⇐(ב) בחינם!

(ב)⇐(ג) נניח $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ סדרה עולה של קבוצות פתוחות שמכסה את X. בפרט $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ כיסוי בן־מנייה של X. לפי הנחה, אפשר לבחור ממנו תת־כיסוי סופי

$$X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \cdots.$$

אך זו סדרה מונוטונית, לכן

$$X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} = U_{i_k},$$

ולכן $U_n = x$ גם לכל $n > i_k$.

(ג)⇐(ב) נניח $\{V_1, V_2, \ldots\}$ כיסוי בן מנייה של X. לכל n טבעי נגדיר

$$U_n = V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

עתה $\{U_n\}$ היא סדרה עולה של קבוצות פתוחות ב־(X, d), עם

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X.$$

לכן לפי הנחה, אפשר למצוא k טבעי כך ש־$U_n = X$ לכל $n \geqslant k$. אך

$$X = U_k = V_1 \cup \ldots \cup V_k,$$

ולכן $\{V_1, \ldots, V_k\}$ הוא תת־כיסוי סופי של X.

(ג)⇐(ד) נניח $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא־ריקות. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \varnothing$. אזי $\left\{X \backslash A_n\right\}$ היא סדרה עולה של קבוצות פתוחות ב־(X, d). עתה

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X \backslash A_i = X \Big\backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X,$$

לכן לפי הנחה אפשר למצוא k כך שלכל $i \geqslant k$ קיים $X \backslash A_i = X$, והנה קיבלנו סתירה כי אז $A_i = \varnothing$ לכל $i \geqslant k$.

(ד)⇐(ג) נניח $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ סדרה עולה של קבוצות פתוחות ב־(X, d) שאיחודן מכסה את X. נניח בשלילה כי סדרה זו לא מתייצבת. אזי $U_i \neq X$ לכל i טבעי. לכן לכל i טבעי, $X \backslash U_i$ היא קבוצה סגורה לא־ריקה ב־(X, d). עתה $\left\{X \backslash U_i\right\}$ היא סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא ריקות ב־(X, d), ולכן לפי הנחה קיים

$$\varnothing = X \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} X \backslash U_i \neq \varnothing,$$

סתירה!

(ד)⇐(ו־1) נניח בשלילה ש־(X,d) לא חסום לחלוטין, כלומר יש $\varepsilon>0$ כך שאי־אפשר לכסות את X על־ידי מספר סופי של כדורים מרדיוס ε. נבנה קבוצה של נקודות $X\supset\{a_1,a_2,\dots\}$ כך ש־$d(a_i,a_j)\geqslant\varepsilon$ לכל i,j טבעיים (שונים). נבנה אותה בצורה רקורסיבית: ניקח $a_1\in X$ כלשהו. נניח עתה כי בחרנו את $a_1,\dots,a_k$ האיברים הראשונים. כעת נבחר a_{k+1} כלשהי כך שתתקיים

$$a_{k+1}\notin B(a_1,\varepsilon)\cup\cdots\cup B(a_k,\varepsilon),$$

זה אפשרי כי איחוד הכדורים הזה, לפי הנחה, לא מכסה את X. כעת $d(a_{k+1},a_i)\geqslant\varepsilon$ לכל $i\leqslant k$, ולכן $a_1,\dots,a_{k+1}$ מקיימות את התנאי. עתה יש לנו סדרה אינסופית $\{a_1,a_2,\dots\}$ כך שהמרחק בין כל שתי נקודות בה הוא לפחות ε. לכל k טבעי נגדיר

$$A_k=\{a_k,a_{k+1},\dots\}.$$

עתה $A_1\supset A_2\supset\cdots$ היא סדרה יורדת של קבוצות לא־ריקות ב־(X,d) שחיתוכן ריק, לכן לפי הנחה אפשר למצוא k טבעי כך ש־A_k אינה קבוצה סגורה, כלומר יש ל־A_k נקודת סגור x (ב־(X,d)) שלא שייכת ל־A_k. כיוון ש־(X,d) מרחב מטרי, אפשר למצוא סדרה של נקודות (שונות) מ־A_k שמתכנסת ל־x. אך זו בפרט תת־סדרה של $\{a_i\}$, לכן כל שני איברים בסדרה מרוחקים אחד מהשני במרחק לפחות ε, ולכן זו לא יכולה להיות סדרה מתכנסת (כי אינה קושי) – סתירה!

(ד)⇐(ו־2) כל סדרה יורדת של כדורים סגורים ב־(X,d) (עם רדיוסים שואפים ל־0) היא סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא־ריקות, ולכן לפי הנחה יש נקודה משותפת לכל הכדורים. לכן, לפי משפט 3.1.17 (עקרון Cantor), (X,d) שלם.

(ג)⇐(א) נניח (X,d) מקיים את (ג). כבר הוכחנו כי (ג)⇐(ו־1)⇐(X,d) הוא C_{II}. אזי, מכל כיסוי של (X,d), לפי משפט 2.6.9 (Lindelöf) אפשר לבחור תת־כיסוי בן מנייה, וממנו, לפי הנחה, אפשר לבחור תת־כיסוי סופי. כלומר, מכל כיסוי של X אפשר לבחור תת־כיסוי סופי, אזי (X,d) קומפקטי.

2017-01-23

(ו)⇐(ה) נניח $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה ב־(X,d). נבנה תת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ מתכנסת שלה. ניקח כיסוי של (X,d) על־ידי מספר סופי של כדורים פתוחים מרדיוס 1 (לפי הנחה, (X,d) חסום לחלוטין). כיוון שהכיסוי סופי, קיים כדור בכיסוי, $B(a_1,1)$, כך ש־$\{x_n\}$ "נכנסת" בו איסוף פעמים, כלומר

$$\#\{n\in\mathbb{N}|x_n\in B(a_1,1)\}=\infty.$$

נבחר x_{n_1} איבר כלשהו של $\{x_n\}$ השייך ל־$B(a_1,1)$. נכסה את $B(a_1,1)$ על־ידי מספר סופי של כדורים מרדיוס $1/2$ עם מרכזים ב־$B(a_1,1)$ (זה אפשרי, כי $B(a_1,1)\subset(X,d)$ ולכן חסום לחלוטין). כיוון ש־x_n נכנסת אינסוף פעמים ב־$B(a_1,1)$, ו־$B(a_1,1)$ מכוסה על־ידי מספר סופי של כדורים מרדיוס $1/2$, הסדרה $\{x_n\}$ נכנסת אינסוף פעמים בלפחות אחד מהכדורים מרדיוס $1/2$, נסמנו $B(a_2,1/2)$ (כאשר, כזכור, $a_2\in B(a_1,1)$). עתה אפשר לבחור $x_{n_2}\in B(a_1,1/2)$ עם $n_2>n_1$ (כי יש אינסוף איברים של $\{x_n\}$ ב־$B(a_2,1/2)$. נמשיך בצורה זו, ונמצא סדרה של כדורים מהצורה $B(a_k,1/k)$ (כאשר $a_i\in B(a_i,1/i)$ לכל $i\leqslant k$), ותת־סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{K}}$ של $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך שלכל k טבעי

$$x_{n_k}\in B(a_k,1/k).$$

נטען כי $\{a_n\}$ היא סדרת קושי. אכן, לכל $\varepsilon>0$ נמצא N עם $2/N<\varepsilon$, ואז לכל $k,\ell>N$ מתקיים כי a_k ו־ℓ הם איברים של $B(a_N,1/N)$ ולכן

$$d(a_k,a_\ell)\leqslant\operatorname{diam}B(a_N,1/N)<\varepsilon.$$

לכן $\{a_k\}$ מתכנסת (כי (X,d) שלם), ומכאן שגם $\{x_{n_k}\}$ מתכנסת (בדקו!).

(ה)⇐(ד) נניח $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ סדרה יורדת של קבוצות סגורות לא־ריקות. נבחר מכל A_n נקודה כלשהי x_n (כי $A_n \neq \varnothing$). לפי הנחה, לסדרה $\{x_n\}$ יש תת־סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}$, נניח אם־כן שהיא מתכנסת לנקודה a. לכל k טבעי, הסדרה $\{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \ldots\}$ היא תת־סדרה של $\{x_{n_k}\}$, ולכן מתכנסת גם־היא ל־a. הנה מצאנו סדרה מתכנסת של איברים מ־A_{n_k}, אך זו קבוצה סגורה ולכן $a \in A_{n_k}$. כיוון שהסדרה A_n היא סדרה יורדת עלינו לקבל כי למעשה $a \in A_n$ לכל n.

□

5.2.13 טענה. נתבונן במרחב $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, ותהי $A \subset \mathbb{R}^n$. אזי A קומפקטית אם ורק אם A סגורה וחסומה.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ אם A קומפקטית אזי A חסומה (לחלוטין); כיוון שאנחנו במרחב מטרי, בפרט האוסדורף, כל קבוצה קומפקטית היא סגורה.

$\boxed{\Rightarrow}$ ניזכר כי $\tau_{d_\infty} = \overbrace{\tau \times \ldots \times \tau}^{n \text{ פעמים}}$, כאשר τ היא הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$. לכן מכפלה ישרה של n קבוצות קומפקטיות כלשהן ב־$(\mathbb{R},\tau)$ היא קבוצה קומפקטית ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. בפרט, כל כדור סגור ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ הוא מכפלה של קטעים סגורים ב־$\mathbb{R}$, ולכן בעצמו קבוצה קומפקטית. כל קבוצה חסומה וסגורה A ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ היא תת־קבוצה של כדור סגור B כלשהו, ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. עתה A סגורה בתת־מרחב $\left(B, d_\infty\big|_B\right)$. כיוון ש־$\left(B, d_\infty\big|_B\right)$ הוא תת־מרחב קומפקטי, הרי ש־A, כתת־קבוצה סגורה במרחב קומפקטי B, היא קומפקטית ב־$\left(X, d_\infty\big|_B\right)$, ולכן גם ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. □

5.2.14 מסקנה. נניח d מטריקה על $\mathbb{R}^n$, ששקולה ל־d_∞. אזי קבוצה A קומפקטית ב־$(\mathbb{R}^n, d)$ אם ורק אם A סגורה וחסומה ב־$(\mathbb{R}^n, d)$.

הוכחה. $d \sim d_\infty$, ולכן הן מגדירות אותה טופולוגיה על $\mathbb{R}^n$. לכן A סגורה ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ אם ורק אם A סגורה ב־$(\mathbb{R}^n, d)$, וכנ"ל לגבי קומפקטיות. נותר לוודא כי חסימות ב־$(\mathbb{R}^n, d)$ וחסימות ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ גם הן שקולות; הקורא החרוץ יהנה להשלים את הפרטים. □

5.2.15 דוגמה. נתבונן בספירה $S(0,R)$ ב־$(\mathbb{R}^n, d_2)$.

5.2.16 משפט. נניח (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $A \subset (X,\tau)$ קומפקטית. נניח $F : (X,\tau) \to \mathbb{R}$ רציפה (עם הטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$). אזי קיימות $a, b \in A$ עם

$$F(a) = \inf_{x \in A} F(x) > -\infty$$

וכן

$$F(b) = \sup_{x \in A} F(x) < +\infty$$

(כלומר F משיגה את החסמים שלה על A).

הוכחה. F רציפה ו־A קומפקטית, ולכן $F(A)$ היא קומפקטית ב־$\mathbb{R}$. לכן כפי שראינו $F(A)$ סגורה וחסומה. לכן $\inf F(A)$ ו־$\sup F(A)$ שניהם סופיים. עתה $\inf F(A)$ ו־$\sup F(A)$ הן נקודות סגור של A (כי בכל סביבה שלהם אפשר למצוא נקודות מ־A). כיוון ש־$F(A)$ סגורה, הרי ש־$\inf F(A), \sup F(A) \in F(A)$ כנדרש.
□

5.2.17 משפט. כל נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^n$ שקולה ל־$\|\cdot\|_\infty$ (בפרט כל שתי נורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות, ולכן המטריקות שהן משרות מגדירות אותה טופולוגיה – הטופולוגיה האוקלידית).

הוכחה. נסמן על־ידי d את המטריקה המוגדרת על־ידי $\|\cdot\|$, ונסמן על־ידי $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ את הבסיס הסטנדרטי ל־$\mathbb{R}^n$. אזי לכל וקטור $\bar{v} = \sum v_i \bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$ נקבל

$$\begin{aligned}\|\bar{v}\| &= \|v_1\bar{e}_1 + \ldots v_n\bar{e}_n\| \\ &\leqslant |v_1|\,\|\bar{e}_1\| + \ldots + |v_n|\,\|\bar{e}_n\| \\ &\leqslant \underbrace{\max_{i=1,\ldots,n} |v_i|}_{\|\bar{v}\|_\infty} \underbrace{(\|\bar{e}_1\| + \ldots + \|\bar{e}_n\|)}_{=:K>0}\end{aligned}$$

והנה מצאנו K עם $\|\bar{v}\| \leqslant K\,\|\bar{v}\|_\infty$ לכל $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

נגדיר $f : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ להיות $f(\bar{v}) = \|v\|$. אזי לכל $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$

$$|f(\bar{v}) - f(\bar{w})| = |\|\bar{v}\| - \|\bar{w}\|| \overset{\text{בדקו!}}{\leqslant} \|\bar{v} - \bar{w}\| \leqslant K d(\bar{v}, \bar{w})$$

כך f ליפשיצית ולכן רציפה. עתה ספירת היחידה $S(\bar{0}, 1)$ ב־$(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ היא קומפקטית (מדוע?). ולכן f חסומה על $B(\bar{0}, 1)$ (ומשיגה עליו מקסימום ומינימום). לכן נסמן ב־C וב־C' את המקסימום והמינימום (בהתאמה) של f על הספירה. נווכח כי C ו־C' חיוביים. לכן עבור כל $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ (שאינו אפס) הרי ש־

$$\frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|_\infty} \in S(\bar{0}, 1) \Longrightarrow C' \leqslant \frac{\|v\|}{\|\bar{v}\|_\infty} \leqslant C$$

(כמובן שעבור $\bar{v} = 0$ גם מתקיים הדרוש). □

5.2.18 מסקנה. לכל נורמה על $\mathbb{R}^n$ והמטריקה המושרית, קבוצה היא קומפקטית במרחב המטרי אם ורק אם היא סגורה וחסומה.

5.3 רציפות במידה שווה

5.3.1 הגדרה. נניח $F : (X, d) \to (Y, \rho)$ העצקה בין מרחבים מטריים. אומרים ש־F רציפה במידה שווה (*uniformly continuous*) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$, כך שלכל $x, y \in X$ עם $d(x, y) \leqslant \delta$ קיים

$$.\rho(F(x), F(y)) < \varepsilon$$

5.3.2 תרגיל. רציפות במידה שווה גוררת רציפות (אבל לא הפוך)

5.3.3 משפט. נניח (X, d) מרחב מטרי קומפקטי, $F : (X, d) \to (Y, \rho)$ רציפה. אזי F רציפה במידה שווה.

הוכחה. נניח בשלילה כי F לא רציפה במידה שווה; כלומר שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$, ובפרט כל $\delta = 1/n$ עם n טבעי נוכל למצוא נקודות $a_n, b_n \in X$ עם $d(a_n, b_n) \leqslant \delta$ כך ש־

$$.\rho(F(a_n), F(b_n)) > \varepsilon$$

כיוון ש־(X, d) קומפקטי, אפשר לבחור תת־סדרה $\{a_{n_k}\}$ של $\{a_n\}$ שמתכנסת לנקודה a. נתבונן בסדרה $\{b_{n_k}\}$. שוב נוכל לבחור תת־סדרה $\left\{b_{n_{k_\ell}}\right\}$ של $\{b_{n_k}\}$ שמתכנסת לנקודה כלשהי b. עתה $\left\{a_{n_{k_\ell}}\right\}$ היא תת־סדרה של $\{a_{n_k}\}$, ולכן מתכנסת גם היא ל־a. אזי

$$d\left(a_{n_{k_\ell}}, b_{n_{k_\ell}}\right) \leqslant \frac{1}{n_{k_\ell}} \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$$

ולכן
$$\lim_{\ell} a_{n_{k_\ell}} = \lim_{\ell} b_{n_{k_\ell}}$$
וכך $a = b$. אך F רציפה, לכן אפשר למצוא δ עם
$$\rho\left(F(a), F(z)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
לכל z שמקיימת $d\left(a, z\right) \leqslant \delta$. עתה אפשר למצוא L טבעי כך שלכל $\ell > L$ קיים
$$\begin{cases} d\left(a_{n_{k_\ell}}, a\right) \leqslant \delta \\ d\left(b_{n_{k_\ell}}, b = a\right) \leqslant \delta \end{cases}$$
וכעת
$$\rho\left(F\left(a_{n_{k_\ell}}\right), F\left(a_{n_{k_\ell}}\right)\right) \leqslant \varepsilon$$
סתירה! $\square$

5.4 קומפקטיות במרחבי הפונקציות

2017-01-24

נניח (Z, d) מרחב מטרי שלם. אזי קבוצה A קומפקטית ב־(Z, d) אם ורק אם $(A, d|_A)$ שלם ו־A חסומה לחלוטין, מה ששקול לִהְיוֹת A סגורה וחסומה לחלוטין. נשים לב שעבור כל $A \subset (Z, d)$ הסגור $\overline{A}$ הוא קבוצה סגורה, ובנוסף, לפי תרגיל בית, A חסומה לחלוטין אם ורק אם $\overline{A}$ חסומה לחלוטין. לכן אם A היא קבוצה במרחב מטרי שלם, הסגור $\overline{A}$ קומפקטי אם ורק אם A חסומה לחלוטין. נפעיל את העקרון הזה במקרה של מרחב מטרי שלם במקרה ש־Z הוא מרחב הפונקציות הרציפות $C(X)$ ממרחב מטרי קומפקטי (X, ρ) ל־$\mathbb{R}$, כאשר המטריקה על Z היא d_∞, המוגדרת לפי הנורמה
$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)| \,.$$
כפי שראינו $(C(X), d_\infty)$ מרחב מטרי שלם.

5.4.1 מסקנה. עבור $A \subset (C(X), d_\infty)$ קיים כי $\overline{A}$ קומפקטית אם ורק אם A חסומה לחלוטין. בפרט, אם A חסומה לחלוטין אזי $\overline{A}$ קומפקטית, ואז מכל סדרה של פונקציות ב־A אפשר לבחור תת־סדרה המתכנסת תחת d_∞ לאיזשהי פונקציה ב־$\overline{A}$.

מעתה נניח כי $C(X)$ פירושו המרחב המטרי $(C(X), d_\infty)$.

5.4.2 הגדרה. אומרים שקבוצה A ב־$C(X)$ היא רציפה במידה אחידה *(equicontinuous)* אם לכל $\varepsilon > 0$ אפשר לבחור δ כך שלכל $f \in A$ ולכל זוג $x, y \in X$ עם $\rho(x, y) \leqslant \delta$ קיים
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \,.$$

5.4.3 משפט (*Arzelà-Ascoli*). נניח (X, ρ) מרחב מטרי קומפקטי, A קבוצה ב־$C(X)$. אזי A חסומה לחלוטין אם ורק אם A חסומה ורציפה במידה אחידה.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח A חסומה לחלוטין. כבר הוכחנו שבמקרה כזה A חסומה; נוכיח כי A רציפה במידה אחידה. יהי $\varepsilon > 0$. A חסומה לחלוטין, לכן אפשר לבחור $\varepsilon/3$־רשת סופית $\{f_1, \dots, f_k\}$. כל f_i היא רציפה במידה שווה על X (כי f_i רציפה ו־X וקומפקטי). לכן עבור $\varepsilon/3$ אפשר למצוא $\delta_i > 0$ כך שלכל $x, y \in X$ עם $\rho(x, y) \leqslant \delta_i$ קיים
$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{$*$}$$

נגדיר את $\delta := \min_{i\leqslant k}\delta_i$ (ונשים לב כי $\delta > 0$). נוכיח ש־δ מתאים ל־ε בהגדרה של רציפות במידה אחידה עבור A. ניקח $f \in A$ כלשהי. אפשר למצוא f_i מה־$\varepsilon/3$־רשת על A שתקיים

$$d_\infty(f, f_i) = \max_{x\in X}|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (**)$$

ניקח $x, y \in X$ כלשהם עם $\rho(x, y) \leqslant \delta$. לפי הגדרה של δ יוצא כי

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_i(x)|}_{\leqslant \varepsilon/3 \text{ לפי } (**)} + \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{\leqslant \varepsilon/3 \text{ לפי } (*)} + \underbrace{|f_i(y) - f(y)|}_{\leqslant \varepsilon/3 \text{ לפי } (**)} \leqslant \varepsilon .$$

$\boxed{\Rightarrow}$ ניקח $\varepsilon > 0$ כלשהו ונבנה ε־רשת סופית עבור A. A חסומה, ולכן $A \subset B(0, R)$ עבור R חיובי כלשהו, ולכן לכל $f \in A$

$$d_\infty(f, 0) = \|f\|_\infty \leqslant R$$

כלומר לכל $x \in X$ ולכל $f \in A$

$$-R \leqslant f(x) \leqslant R.$$

נחלק את הקטע $[-R, R]$ לקטעים זרים מאורך $\varepsilon/4$, ונמספר אותם מ־1 עד N:

$$\begin{aligned} I_1 &= [-R, R_1) \\ I_2 &= [R_1, R_2) \\ &\vdots \\ I_N &= [R_{N-1}, R] \end{aligned}$$

כאשר $R_i - R_{i-1} \leqslant \varepsilon/4$ לכל i רלוונטי. A חסומה במידה אחידה, ולכן עבור $\varepsilon/4$ אפשר למצוא δ כך שלכל $f \in A$ ולכל $x, y \in X$ עם $\rho(x, y) \leqslant \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (*)$$

X קומפקטי ובפרט חסום לחלוטין, לכן אפשר למצוא δ־רשת סופית $\{a_1, \ldots, a_k\}$ עבור X. עתה עבור כל $f \in A$ וכל $i = 1, \ldots, k$ קיים $\sigma(i)$ יחיד בין 1 ל־N שמקיים

$$f(a_i) \in I_{\sigma(i)}.$$

נקרא להעתקה $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, N\}$ הקוד של f. יהיו $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ כל הקודים של הפונקציות מ־A (יש מספר סופי של קודים אפשריים). עבור כל קוד σ_j נבחר איזשהי $f_j \in A$ ש־σ_j הוא הקוד שלה. נראה כי $f_1, \ldots, f_n$ היא ε־רשת עבור A.

ניקח $f \in A$ כלשהי. אזי ל־f יש קוד σ_j כלשהו מ־$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. נראה כי $d_\infty(f, f_j) < \varepsilon$, אזי $\{f_1, \ldots, f_n\}$ היא ε רשת עבור A. ניקח $x \in X$ כלשהו. אפשר למצוא a_m (מה־δ־רשת עבור X) שתקיים

$$\rho(x, a_m) \leqslant \delta. \qquad (**)$$

אזי

$$\begin{aligned} |f(x) - f_j(x)| &\leqslant \overbrace{|f(x) - f(a_m)|}^{\varepsilon/4 \geqslant, \text{ לפי } (*)+(**)} + \overbrace{|f(a_m) - f_j(a_m)|}^{\varepsilon/4, \star} + \overbrace{|f_j(a_m) - f_j(x)|}^{\varepsilon/4 \geqslant, \text{ לפי } (**)} \\ &\leqslant \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר $\star$ נכון כי $f(a_m)$ ו־$f_j(a_m)$ נמצאים באותו קטע $I_{\sigma_j(m)}$, שאורכו לכל היותר $\varepsilon/4$ (כי ל־f ו־f_j אותו קוד). $\square$

5.4.4 דוגמה. נניח $X = [a, b]$ ב־$\mathbb{R}$ (עם המטריקה האוקלידית). כאן $C(X) =$ $C[a, b]$ ו־d_∞ היא d_{L^∞} המוכרת לנו. נניח $A \subset C[a, b]$ היא קבוצה של פונקציות גזירות. נניח שקיימים $K_1, K_2, > 0$ כך שלכל $f \in A$ ולכל $x \in [a, b]$

$$|f(x)| \leqslant K_1,\ |f'(x)| \leqslant K_2 .$$

אזי A חסומה (כי כל $f \in A$ חסומה על־ידי K_1, כלומר על־ידי הכדור ברדיוס K_1 סביב פונקציית האפס). A גם רציפה במידה אחידה: לכל $x, y \in [a, b]$ עם $|x - y| \leqslant \varepsilon/K_2$ קיים c בין x ל־y עם

$$|f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(c)|}_{\leqslant K_2} |y - x| \leqslant \varepsilon .$$

לכן A חסומה לחלוטין, ולכל סדרה של פונקציות מ־A אפשר לבחור תת־סדרה המתכנסת לפי d_{L^∞} (כלומר מתכנסת במידה שווה, לפי אינפי).