תירגול מס. 13

# סדרות וטורים של פונקציות

## א התכנסות נקודתית והתכנסות במ״ש של סדרת פונקציות

יהיו:

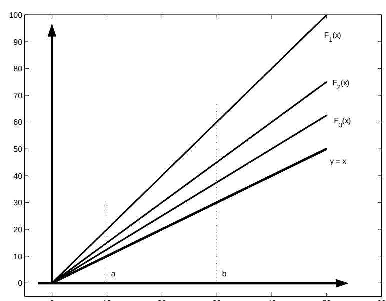
- $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות המוגדרות בקטע $I$
- $f(x)$ פונקציה שמוגדרת ב- $I$.

**הגדרה 1** נאמר שסדרת הפונקציות $f_n(x)$ **מתכנסת נקודתית בקטע $I$** לפונקציה $f(x)$, אם **לכל נקודה** $x_0 \in I$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

<u>דוגמא</u> סדרת הפונקציות $f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot x$ מתכנסת נקודתית ב- $\mathbb{R}$ ל- $f(x)=x$ כי

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x_0) \;=\; \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot x_0 \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad x_0 \;=\; f(x_0)$$

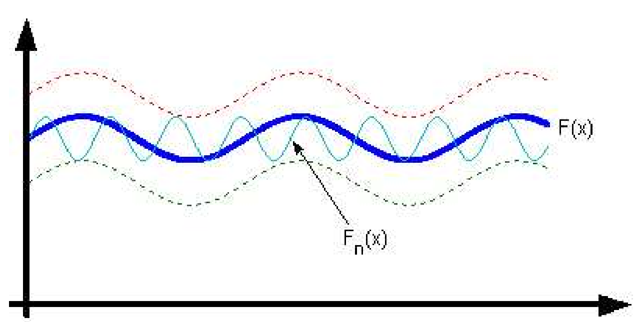
ברור שגם בכל קטע סופי - $[a,b]$ תהיה התכנסות נקודתית.
אבל יש הבדל מהותי בין ההתכנסות בקטע - $[a,b]$ להתכנסות ב - $(-\infty,\infty)$.




בקטע - $[a,b]$ הגרף של הפונקציה $f_n(x)$ יהיה קרוב כרצוננו לגרף של $f(x)$ עבור $n$ מספיק גדול. לעומת זאת, בקטע $(-\infty,\infty)$ הגרף של $f_n(x)$ ישאר ״רחוק״ מהגרף של $f(x)$ (עבור $x$-ים מספיק גדולים) לכל $n$.

**הגדרה 2** נאמר שסדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)$ **במידה שווה** בקטע $I$, אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $N$ כך שלכל $N<n$ מתקיים: $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ **לכל** $x$ בקטע $I$.

כלומר, לכל $N<n$ הגרף של $f_n(x)$ מוכל בפס ברוחב $2\varepsilon$ סביב הגרף של $f(x)$.




<u>ניסוח שקול</u> לכל $n$ טבעי נגדיר:[1] $a_n \;=\; \sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x)-f(x)\right|$

אז $f_n(x)$ מתכנסת ל - $f(x)$ במ״ש ב - $I$ א.מ.ם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \;=\; 0$

[1] $a_n$ יכול להיות $\infty$

<u>הערה:</u> התכנסות נקודתית $\begin{matrix}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{matrix}$ התכנסות במ"ש

<u>תרגיל 1</u> למצוא תחום מקסימלי בו סדרת הפונקציות: $f_n(x) = nx^n$ מתכנסת נקודתית, ולבדוק התכנסות במ"ש.

<u>פתרון</u> בשלב ראשון עלינו למצוא תחום מקסימלי $I$ כך שלכל $x_0 \in I$ קיים הגבול הסופי:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} nx_0^n$$

הגבול האחרון קיים א.מ.ם $|x_0| < 1$, ואז:[2] $\lim\limits_{n\to\infty} nx_0^n = 0$ $(-1 < x_0 < 1)$ ומכאן שהתחום המקסימלי שבו יש התכנסות נקודתית הוא הקטע $(-1,1)$, ובו מתכנסת הסדרה $f_n(x)$ נקודתית ל - $f(x) \equiv 0$.

נעבור לבדיקת התכנסות במ"ש : ראשית, אם יש התכנסות במ"ש אז היא לאותה פונקציית גבול $f(x) = 0$, וכדי לבדוק האם $f_n(x)$ מתכנסות במ"ש ב - $(-1,1)$ ל - $f(x)$, נתבונן ב -

$$(\text{קבוע } n) \qquad a_n \;=\; \sup_{-1<x<1} \Big| f_n(x) - f(x) \Big| \;=\; \sup_{-1<x<1} n\cdot|x|^n \;=\; n$$

מכיוון ש - $a_n \not\to 0$ אז אין התכנסות במ"ש ב - $(-1,1)$. לעומת זאת, בכל תת-קטע: $\tilde{I} = \Big[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon\Big] \subset (-1,1)$ תהייה התכנסות במ"ש כי $\tilde{a}_n = \sup\limits_{x\in\tilde{I}} \Big| f_n(x) - f(x) \Big| = \sup\limits_{x\in\tilde{I}} n\cdot|x|^n \;=\; n\cdot(1-\varepsilon)^n$ $(\text{קבוע } n)$
ובעזרת מבחן השורש מקבלים ש - $\tilde{a}_n \to 0$.

<u>תרגיל 2</u> יהיו: $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx^2}}$ ו- $f(x) = 0$ לבדוק התכנסות נקודתית ובמ"ש בקטע $I = [0,1]$.

<u>פתרון:</u> נתחיל בבדיקת התכנסות נקודתית : צריך לבדוק האם לכל $x_0 \in [0,1]$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$
וזה באמת מתקיים כי אם $x_0 = 0$ אז $f_n(0) = 0$ לכל $n$. ואם $x_0 \in (0,1]$ אז

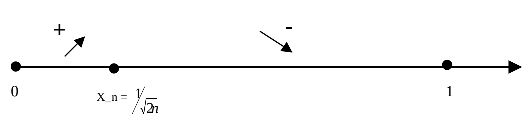
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot x_0}{e^{nx_0^2}} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \overset{\text{לופיטל ביחס ל-}n}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{x_0^2\cdot e^{nx_0^2}} = 0$$

כלומר, יש התכנסות נקודתית.

נבדוק התכנסות במ"ש : עבור $n$ קבוע נחשב: $a_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} \Big| f_n(x) - f(x) \Big| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{nx}{e^{n\cdot x^2}}$
לשם כך נחקור את $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx^2}}$ $(n$ קבוע$)$ בקטע - $[0,1]$ :

$$f_n'(x) \quad = \quad \underbrace{n\cdot e^{-nx^2}}_{\text{חיובי}}\cdot\left(1 - 2nx^2\right)$$

הנגזרת $f_n'(x)$ מתאפסת בקטע $[0,1]$ בנקודה יחידה: $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
כמו כן, סימן הנגזרת בקטע, ותחומי עליה וירידה של הפונקציה הם בהתאם לשרטוט הבא:

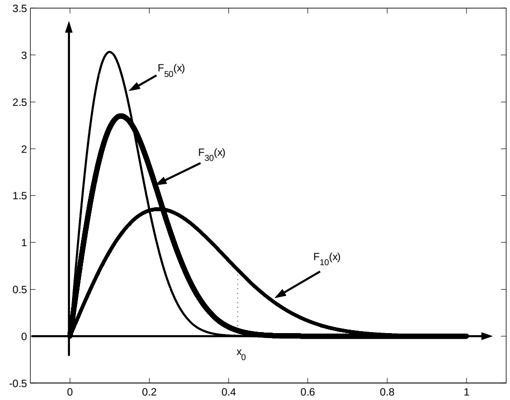



והמסקנה היא שבנקודה $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ מקבלת $f_n(x)$ את המקסימום שלה בקטע - $[0,1]$. ומכאן שלכל $n$ טבעי:

$$a_n \quad = \quad \sup_{x\in[0,1]} \Big| f_n(x) - 0 \Big| \quad = \quad f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) \quad = \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\cdot e}} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \infty$$

ומכיוון ש - $a_n \not\to 0$ אז אין התכנסות במ"ש בקטע $[0,1]$. (ראו שרטוט).

[2] למשל לפי מבחן השורש המופעל על הסדרה: $a_n = n\cdot|x_0|^n$.




למרות שלכל $x_0$ קבוע בקטע מתקיים: $f_n(x_0) \to 0$, הגרפים אינם שואפים במ"ש לפונקציית האפס[3].

## ב התכנסות במ"ש ורציפות פונקציית הגבול

**משפט 1** תהא $f_n(x)$ סדרת פונקציות שמתכנסת **במ"ש** בקטע $I$ (סופי או אין סופי) לפונקציה $f(x)$.
אם הפונקציות $f_n(x)$ כולן רציפות ב - $I$ אז גם הפונקציה $f(x)$ רציפה ב - $I$.

תרגיל 3 להראות שסדרת הפונקציות הבאה מתכנסת נקודתית ב - $[-1,1]$, אבל ההתכנסות אינה במ"ש.

$$u_n(x) \;=\; \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$$

פתרון התכנסות נקודתית: יהי $x_0 \in [-1,1]$ כלשהו, צריך לבדוק האם קיים הגבול: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0)$
אם $x_0 = 0$ אז $u_n(0) = 0$ לכל $n$. כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(0) = 0$ ואם $x_0 \neq 0$ אז:

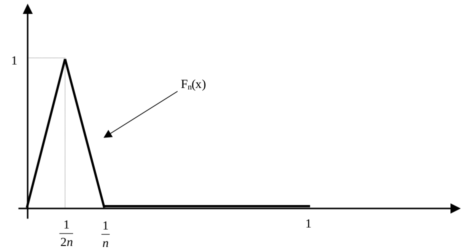
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x_0^2}{1+n^2x_0^2} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{x_0^2}{\frac{1}{n^2}+x_0^2} \;=\; \frac{x_0^2}{x_0^2} \;=\; 1$$

ומכאן שהסדרה $u_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב - $[-1,1]$ לפונקציה: $u(x) \;=\; \begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ 1 & , \quad x \neq 0 \end{cases}$

ומה לגבי התכנסות במ"ש? - מכיוון שהפונקציות $u_n(x)$ כולן רציפות ב - $[-1,1]$, אבל $u(x)$ אינה רציפה שם, אז לא ייתכן שסדרת הפונקציות $u_n(x)$ תתכנס ל - $u(x)$ במ"ש ב- $[-1,1]$. כלומר, אין התכנסות במ"ש ב בקטע[4].

שאלה: האם הטענה ההפוכה נכונה? - כלומר, בהנתן סדרה של פונקציות רציפות - $f_n(x)$ שמתכנסות נקודתית בקטע $I$ לפונקציה רציפה $f(x)$, האם ההתכנסות היא בהכרח במ"ש?

תשובה - לא! דוגמא לכך היא סדרת הפונקציות הרציפות בתרגיל 2 שמתכנסת נקודתית ב - $[0,1]$ לפונקציה הרציפה $f(x) \equiv 0$ אבל ההתכנסות אינה במ"ש[5]. דוגמא נוספת (שגם מבהירה מה קורה בדוגמא של תרגיל 2) היא סדרת הפונקציות הרציפות $f_n(x)$ שמוגדרות ב $[0,1]$ ע"י השרטוט הבא:




[3] נחזור לדוגמא זו בהמשך.
[4] אילו הייתה התכנסות במ"ש, היא הייתה לאותה פונקציית גבול $u(x)$.
[5] הדוגמא של תרגיל 1 אף היא דוגמא נגדית, אולם מכיוון ששם מדובר בקטע פתוח $(-1,1)$, היה ניתן לחשוב שאולי בקטע סגור הטענה ההפוכה נכונה.

נראה שסדרת הפונקציות $f_n(x)$ המוגדרות בשרטוט מתכנסת נקודתית ב $[0,1]$ לפונקציה הרציפה $f(x)\equiv 0$, אבל ההתכנסות אינה במ"ש.

- **יש התכנסות נקודתית - כי לכל $x_0\in[0,1]$ מתקיים:** $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$
  **הסבר:** אם $x_0=0$ זה ברור, ואם $x_0>0$ אז לכל $n$ מספיק גדול יתקיים: $\frac{1}{n}<x_0$ ואז $f_n(x_0)=0$.
- **אין התכנסות במ"ש - כי לכל $n$ מתקיים:** $a_n=\sup\limits_{0\le x\le 1}\Big|f_n(x)-0\Big|=1\not\to 0$

## ג טורי פונקציות

**הגדרה 3** יהיו: $u_n(x)$ סדרת פונקציות שמוגדרת בקטע $I$, ו- $S(x)$ פונקציה שמוגדרת ב - $I$.
טור הפונקציות $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ מתכנס **נקודתית** (**במ"ש**) לפונקציה $S(x)$ ב- $I$, אם סדרת הסכומים החלקיים[6]:
$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ מתכנסת נקודתית (במ"ש) ל $S(x)$ ב- $I$.

<u>דוגמא:</u> נתבונן בטור הפונקציות: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ נראה שהוא מתכנס במ"ש בכל קטע מהצורה $[-R,R]$.
הטור הוא טור מקלורן של $\cos x$, וסדרת הסכומים החלקיים שלו היא סדרת פולינומי מקלורן של $f(x)=\cos x$

$$S_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\;\equiv\;P_{2n}(x)$$

**נראה שהסדרה $P_{2n}(x)$ מתכנסת ל $f(x)=\cos x$ במ"ש ב - $[-R,R]$, בעזרת הצגת לגרנז' של השארית:**

$$\Big|R_{2n}(x)\Big| \;\equiv\; \Big|f(x)-P_{2n}(x)\Big| \;=\; \Big|\tfrac{f^{(2n+1)(c)}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}\Big| \;=\; \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**ומכאן ש -**

$$\sup_{-R\le x\le R}\Big|P_{2n}(x)-f(x)\Big| \;=\; \frac{R^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

**בעזרת מבחן המנה קל לוודא שהסדרה האחרונה שואפת לאפס ולכן יש התכנסות במ"ש.**

**כדי להוכיח התכנסות נקודתית של טור פונקציות $\sum u_k(x)$ בקטע $I$ צריך להראות שלכל $x_0\in I$, הטור המספרי המתקבל מהצבת $x_0$ מתכנס - ולשם כך אפשר להעזר במבחני ההתכנסות השונים עבור טורים מספריים.**
**אנו מעוניינים במבחני התכנסות לבדיקת התכנסות במ"ש של טורי פונקציות[7].**

## ד כלים לבדיקת התכנסות במ"ש של טור פונקציות

<u>**הערות**</u>

1. **ברור שהתכנסות נקודתית היא תנאי הכרחי להתכנסות במ"ש.**
2. **תנאי הכרחי נוסף מתקבל מהעובדה שאם $u_k(x)$ היא סדרת פונקציות רציפות, אז גם סדרת הסכומים החלקיים $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ היא סדרה של פונקציות רציפות (למה?) ולכן אם יש התכנסות במ"ש אז פונקציית הסכום $S(x)$ בהכרח רציפה[8].**
3. **קיים תנאי (שלא נזכיר) שהוא הכרחי ומספיק להתכנסות במ"ש של טור פונקציות - "קריטריון קושי להתכנסות במ"ש". שתי הטענות שבהמשך הן מקרים פרטיים שלו.**

**טענה 1** (**תנאי הכרחי להתכנסות במ"ש של טור פונקציות**[9]) אם טור הפונקציות $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $I$,
אז סדרת הפונקציות $u_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב - $I$ לפונקציית האפס: $u(x)\equiv 0$.

---
[6] שהיא סדרת פונקציות.
[7] בד"כ קשה לבדוק התכנסות במ"ש ישירות ע"פ ההגדרה כי קשה למצוא ביטוי מפורש לפונקציית הסכום $S(x)$.
[8] אבל כאמור קשה למצוא לה ביטוי מפורש.
[9] זה מעין אנלוג לעובדה שאם טור מספרי מתכנס אז סדרת האיברים שלו שואפת לאפס.

## תרגיל 4

א. הוכיחו את הטענה.

ב. יהיו $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרות ע"י $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & , \quad 0\le x\le \frac{1}{n}\\ 0 & , \quad \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$

לבדוק התכנסות נקודתית והתכנסות במ"ש של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ב - $(0,1)$.

## פתרון:

א. נניח שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $I$. אז קיימת פונקציה $S(x)$ כך שסדרת הסכומים החלקיים $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ מתכנסת במ"ש ל - $S(x)$ בקטע $I$. לכן ע"פ ההגדרה, לכל $0<\varepsilon$ קיים $N$ כך שלכל $N<n$ מתקיים:

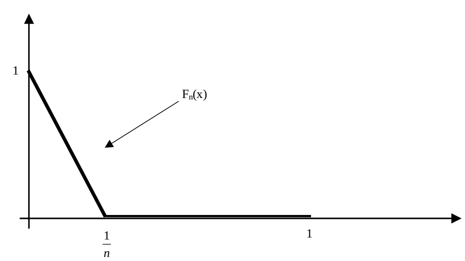
$$\forall\, x\in I\,, \qquad \Big|S_n(x)-S(x)\Big| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

ומכאן שעבור $N<n$ יתקיים לכל $x\in I$:

$$\Big|u_{n+1}(x)\Big| \;=\; \Big|S_{n+1}(x)-S_n(x)\Big| \;\overset{\text{א"ש המשולש}}{\le}\; \Big|S_{n+1}(x)-S(x)\Big| \;+\; \Big|S(x)-S_n(x)\Big| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon$$

כלומר: $\Big|u_{n+1}(x)-0\Big| \;<\; \varepsilon \quad \forall\, x\in I\,,$ מה שמראה שהסדרה $u_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב $I$ לפונק' האפס.

ב. נתבונן בגרף של הפונקציה $f_n(x)$:




לכל $x_0\in(0,1)$ יש רק מספר סופי של $n$-ים שעבורם $f_n(x_0)\neq 0$ ומכאן שהטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ הוא טור סופי שכמובן מתכנס. זה מראה שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית ב - $(0,1)$.
(בנקודה אפס הוא מתבדר, אבל היא לא בתחום).
האם ההתכנסות ב - $(0,1)$ היא התכנסות במ"ש? - ברור (מהגרף) שסדרת הפונקציות $f_n(x)$ אינה מתכנסת במ"ש ב - $(0,1)$ לפונקציית האפס[10], ולכן הטור אינו מתכנס במ"ש.

הטענה הבאה מספקת תנאי מספיק להתכנסות במ"ש של טור פונקציות:

**טענה 2** (מבחן ה – $M$ של ווירשטרס)
יהיו: $u_k(x)$ סדרה של פונקציות המוגדרות בקטע $I$, ו- $a_k$ סדרה חיובית כך ש $|u_k(x)|\le a_k$ לכל $k$ טבעי ו- $x\in I$.
אם הטור המספרי $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ הוא טור מתכנס. אז טור הפונקציות – $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש ב $I$.
(נאמר שהטור החיובי $\sum a_k$ הוא **טור מז'ורנטי** של טור הפונקציות $\sum u_k(x)$ ).

## תרגיל 5 להראות שטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $I$ כאשר

(א) $\begin{cases} f_n(x)=e^{-nx}\\ I=[0.1,\infty)\end{cases}$ (ב) $\begin{cases} f_n(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n\\ I=[1,\infty)\end{cases}$ (ג) $\begin{cases} f_n(x)=\frac{x}{n(1+nx^2)}\\ I=\mathbb{R}\end{cases}$

---

[10] כי $\sup_{0<x<1}\Big|f_n(x)-0\Big|=1\not\to 0$

<u>פתרון</u>

א. לכל $n$ טבעי הפונקציה $f_n(x)=e^{-nx}=\dfrac{1}{e^{nx}}$ מונוטונית יורדת ב $[0.1,\infty)$ ולכן לכל $x$ בקטע מתקיים

$$0 \quad < \quad f_n(x) \quad \leq \quad f_n(0.1) \quad = \quad \left(\tfrac{1}{e^{0.1}}\right)^n$$

ומכאן ש $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{e^{0.1}}\right)^n$ הוא טור מז'ורנטי של טור הפונקציות הנתון בקטע $[0.1,\infty)$, והוא מתכנס כי הוא טור גאומטרי עם מנה $q=\frac{1}{e^{0.1}}<1$. ומכאן שטור הפונק' הנתון מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע.

ב. כדי למצוא טור מזורנטי נחקור את הפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ בקטע $[1,\infty)$.

$$f'(x)\ :\ \begin{cases} >\ 0 & ,\quad 1\leq x<e \\ =\ 0 & ,\quad x=e \\ <\ 0 & ,\quad e<x \end{cases} \qquad \Leftarrow \qquad f'(x)\ =\ \frac{1-\ln x}{x^2}$$

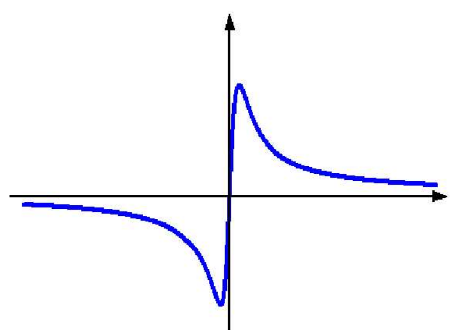
נובע שהפונקציה $f(x)$ מקבלת מקסימום בקטע $[1,\infty)$ בנקודה $x=e$. כלומר:

$$\forall\, x\in[1,\infty)\ , \qquad 0\ <\ \frac{\ln x}{x}\ \leq\ f(e)\ =\ \frac{1}{e}$$

הטור הגאומטרי המתכנס $\sum\frac{1}{e^n}$ הוא טור מזורנטי של טור הפונק' הנתון ב $[1,\infty)$, ולכן יש שם התכנסות במ"ש.

ג. כדי למצוא טור מז'ורנטי נחקור את הפונקציה: $f_n(x)$ (עבור $n$ קבוע):

הנגזרת היא: $f_n'(x)\ =\ \frac{1}{n}\cdot\dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ וקל לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f_n(x)$:



כאשר המינימום והמקסימום מתקבלים עבור $x=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ ובפרט

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\ , \qquad \Big|f_n(x)\Big| \quad \leq \quad f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad = \quad \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2n} \quad = \quad \frac{2}{n^{3/2}}$$

ונובע שהטור המתכנס $\sum\frac{2}{n^{3/2}}$ הוא טור מז'ורנטי ולכן יש התכנסות במ"ש.

מבחן ה - $M$ של וירשטרס הוא כלי יעיל ונוח להוכחת התכנסות במ"ש של טור פונקציות, אבל הוא אינו תנאי הכרחי להתכנסות במ"ש כפי שמדגים התרגיל הבא:

<u>תרגיל 6</u> לבחור באפשרות הנכונה: הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n} \tag{1}$$

א. מתכנס בהחלט ב - $[0,\infty)$.

ב. מתכנס בהחלט ובמ"ש ב - $[0,\infty)$.

ג. מתכנס נקודתית אך לא במ"ש ב - $[0,\infty)$.

ד. מתכנס בהחלט ב - $(0,\infty)$.

ה. מתכנס במ"ש ב - $[0,\infty)$.

פתרון נתחיל בבדיקת התכנסות נקודתית: יהי $0 \le x_0$ כלשהו, נציב אותו בטור הפונק' (1) ונקבל טור מספרי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x_0+2n} \qquad (2)$$

הטור המספרי (2) הוא טור לייבניץ ולכן מתכנס, אבל אינו מתכנס בהחלט[11] (וזאת לכל $0 \le x_0$).
בזאת פסלנו את האפשרויות א', ב' ו- ד', ועלינו להכריע בשאלה האם טור הפונקציות (1) מתכנס במ"ש ב - $[0,\infty)$.
מבחן ה - $M$ של ויירשטרס לא מועיל במקרה זה כי הטור המזורנטי שנקבל עבור טור הפונק' (1) ב - $[0,\infty)$
הוא הטור המתבדר[12] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. נבדוק האם מתקיים התנאי ההכרחי להתכנסות במ"ש של טור פונקציות[13]:

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-0| \;=\; \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}\right| \;=\; \frac{1}{2n} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

ולכן התנאי ההכרחי להתכנסות במ"ש מתקיים, וצריך לבדוק התכנסות במ"ש ע"פ ההגדרה:

יהיו: $S(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x+2k}$ סכום הטור ו- $S_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{x+2k}$ סכום חלקי $n$-י

השאלה היא האם סדרת הפונקציות $S_n(x)$ מתכנסת לפונקציה $S(x)$ במ"ש ב - $[0,\infty)$.

צריך לבדוק האם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ כאשר: $a_n = \sup_{x\in[0,\infty)} \left|S_n(x)-S(x)\right|$

כדי לקבל הערכה לגודל $a_n$ נעזר בחלק השני של המשפט על טורי לייבניץ[14]: לכל $x_0\in[0,\infty)$ הסכום

$$S_n(x_0) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{x_0+2n}$$

הוא סכום חלקי של הטור (2) שהוא טור לייבניץ שסכומו הוא $S(x_0)$ ולכן לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\forall\, x_0\in[0,\infty)\;, \qquad \left|S_n(x_0)-S(x_0)\right| \;\le\; \left|\frac{(-1)^{n+2}}{x_0+2(n+1)}\right| \;\le\; \frac{1}{2(n+1)}$$

ומכאן ש -

$$a_n \;=\; \sup_{x\in[0,\infty)} \left|S_n(x)-S(x)\right| \;\le\; \frac{1}{2(n+1)} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

מה שמוכיח שההתכנסות בקטע $[0,\infty)$ היא במ"ש, ולכן התשובה הנכונה היא ה'. אפשר לנסח זאת כמסקנה:

מסקנה יהי $\sum u_n(x)$ טור פונק' בקטע $I$, כך שלכל $x_0\in I$ הטור המספרי: $\sum u_n(x_0)$ הוא טור לייבניץ[15]
אז טור הפונק' $\sum u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב $I$ א.מ.ם סדרת הפונק' $u_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב $I$ לפונק' האפס.
כלומר במקרה זה כדי לבדוק התכנסות במ"ש של טור הפונקציות מספיק לבדוק האם

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |u_n(x)| \;=\; 0 \qquad (3)$$

כי לכל $x\in I$ מתקיים לפי משפט לייבניץ: $|S(x)-S_n(x)|\le|u_{n+1}(x)|$.

הערה: שימו לב שהתנאי (3) הוא תמיד תנאי הכרחי להתכנסות במ"ש של טור פונק' (לפי טענה 1)
במקרה המיוחד שטור הפונק' הוא טור לייבניץ לכל $x_0$, זה גם תנאי מספיק.

בתור תרגיל הראו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ מתכנס במ"ש ב - $(-\infty,\infty)$.

[11] כי טור הערכים המוחלטים הוא הטור החיובי $\sum \frac{1}{x_0+2n}$ שמתבדר לפי השוואה עם הטור ההרמוני.
[12] אילו היה קיים טור מזורנטי מתכנס, אז ממבחן ה- $M$ הייתה נובעת מלבד התכנסות במ"ש גם התכנסות בהחלט (וכאמור אין התכנסות בהחלט).
[13] אם $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב - $I$, אז הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב - $I$ לאפס.
[14] אם $\sum(-1)^n b_n$ הוא טור לייבניץ, אז לכל $n$ טבעי: $|S-S_n|\le|b_{n+1}|$.
[15] כלומר, $u_n(x_0)$ היא סדרה עם סימנים מתחלפים ו- $|u_n(x_0)|$ מונוטונית יורדת לאפס.