1 חשבון אינטגרלי

1.1 אינטגרל לא מסוים

נסמן ב- $\int f(x)dx$ פונקציה קדומה לפונקציה f, כלומר פונקציה שנגזרתה היא הפונקציה הנתונה f, ונקרא לה גם האינטגרל הלא מסוים של f. (לפעמים נקצר את הסימון ונכתוב $\int f(x)$, או אפילו $\int f$). בשלב זה יש להתייחס לסימון כאל סימון בלבד. הוא אמנם נראה משונה, אך ההסבר יבוא מאוחר יותר.

עלינו לטפל בשלוש שאלות:

<u>קיום</u>: שאלה זו תטופל בפרק על האינטגרל המסויים.

<u>יחידות</u>: אנו כבר יודעים את התשובה לשאלה זו. פונקציה קדומה נקבעת עד כדי קבוע: אם $F' = G'$, אז יש קבוע C כך ש- $F(x) = G(x) + C$ לכל x, כי מהנתון נובע שמתקיים $(F-G)' = 0$, ולכן $F - G$ פונקציה קבועה.
באופן פורמלי $\int f(x)dx$ הוא, לכן, סימון <u>למשפחה</u> של פונקציות הנבדלות זו מזו בקבועים בלבד. אנחנו נציין את הקבועים רק כשנטפל בפונקציות מפורשות, כמו למשל $\int \cos x dx = \sin x + C$.

<u>חישוב</u>: זהו הנושא העיקרי בסעיף זה. אנחנו נתאר מספר שיטות, שכולן מבוססות על כך שאינטגרציה היא "הפעולה ההפוכה" לפעולת הגזירה.

<u>לינאריות</u>
אם ל- f ול- g יש פונקציות קדומות, אז גם ל- $af + bg$ יש, ומתקיים השוויון

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

כי גוזרים את שני אגפי המשוואה עפ"י כלל הגזירה $(aF+bG)' = aF' + bG'$ ומקבלים שלשניהם אותה נגזרת.

<u>אינטגרלים מיידיים</u>

כשלמדנו לחשב נגזרות פיתחנו לעצמנו "טבלת נגזרות" של אותן פונקציות שאנו פוגשים לעתים קרובות, למשל $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ או $\sin' x = \cos x$. כשנקרא את הטבלה "בכיוון ההפוך" נקבל נוסחאות לפונקציות קדומות רבות, למשל

$\int \cos x = \sin x + C$.

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$\int x^{-1} = \ln|x| + C$.

$\int x^\beta = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C$ כאשר $\beta \neq -1$.

$\int e^x dx = e^x + C$.

$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$.

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ (בידקו כי $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, וכך שתי התשובות שנראות שונות זו מזו אכן נבדלות, למעשה, רק בקבוע).

לפונקציות קדומות שאנחנו מקבלים ע"י "הסתכלות בטבלה" נקרא אינטגרלים מידיים. זה איננו מושג מתמטי מדוייק - ואנשים שונים "זוכרים" טבלאות שונות של אינטגרלים מיידיים.

<u>אינטגרציה בחלקים</u>

"נהפוך" כעת את הנוסחה לנגזרת של המכפלה $(uv)' = uv' + u'v$. כשנבודד את המחובר uv' ונבצע אינטגרציה, נקבל את הנוסחה הבאה שנקראת "נוסחת האינטגרציה בחלקים"

$$\int uv' = uv - \int u'v \ .$$

<u>דוגמאות.</u>

(i) לחישוב $\int x\ln x dx$ נשתמש ב- $u(x) = \ln x$ ו- $v'(x) = x$ ונקבל

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C \ .$$

(ii) $\int \ln x dx = \int 1\ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$. (כאן השתמשנו ב- $u(x) = \ln x$ ו- $v'(x) = 1$).

(iii) $\int e^x \sin x dx$. נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = e^x$ ו- $v' = \sin x$ ונקבל את $-e^x\cos x + \int e^x \cos x dx$. את האינטרגל נחשב ע"י אינטגרציה נוספת בחלקים עם $u = e^x$ ו- $v' = \cos x$ ונקבל שהוא שווה ל- $e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$. וכשנאסוף את כל המחוברים נקבל $2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$.

(iv) $\int \cos^n x dx$. נסמן את האינטגרל ב- $F_n(x)$. נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = \cos^{n-1} x$ ו- $v' = \cos x$ ונשתמש בזהות $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ונקבל

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\Big(F_{n-2}(x) - F_n(x)\Big) \end{aligned}$$

או, אחרי העברה באגפים

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx \ .$$

שימוש בנוסחה זו פעם אחרי פעם נותן לבסוף, עפ"י הזוגיות של n, תוצאה שבה יש לחשב או את האינטגרל $\int 1dx = x$ או את $\int \cos x dx = \sin x$.

<u>אינטגרציה ע"י הצבה</u>

כאן "הופכים" את כלל השרשרת, $(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x)$. אם נסמן $F' = f$ ונבצע אינטגרציה נקבל כי

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

דוגמאות.

$(i)\quad \int 2xe^{x^2}dx$. כאן נשתמש ב- $f(t)=e^t$ (כלומר $F(t)=e^t$) וב- $g(x)=x^2$ (ואז $g'(x)=2x$), ונקבל שהאינטגרל הוא $F(g(x))+C=e^{x^2}+C$.

באופן מעשי איטגרציה ע"י הצבה מתבצעת כך: אנחנו מציבים $y=x^2$ וכותבים את הנגזרת של y בצורה $\frac{dy}{dx}=2x$. כאן אנחנו "מרמים" ומתייחסים לביטוי הפורמלי $\frac{dy}{dx}$ כאילו היה מנה של מספרים וכותבים $dy=2xdx$. כעת כותבים את האינטגרנד ואת dx בעזרת המשתנה y ומקבלים $\int e^y dy=e^y+C$ - שאותו "מתרגמים" חזרה לשפת המשתנה x כ- $e^{x^2}+C$.

$(ii)\quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int \frac{dy}{y^2+1}=\arctan y+C=\arctan e^x+C$. (הצבנו $y=e^x$ ולכן $dy=e^xdx$).

$(iii)\quad \int \tan xdx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{-dy}{y}=-\ln|\cos x|+C$. (הצבנו $y=\cos x$ ולכן $dy=-\sin xdx$).

(iv) באופן כללי יותר מקבלים את הנוסחה $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$, כי מציבים $y=f(x)$ ואז $dy=f'(x)dx$ והאינטגרל הופך להיות

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{dy}{y}=\ln|y|+C=\ln|f(x)|+C\ .$$

(v) לעתים יש לצרף שיטות אינטגרציה שונות. למשל, לחישוב האינטגרל $\int e^{\sqrt{x}}dx$ נציב $t=\sqrt{x}$ (כלומר $x=t^2$) ואז $dx=2tdt$ ומקבלים $\int e^t 2tdt$, שאותו מחשבים ע"י אינטגרציה בחלקים.

הערה. חישוב נגזרות הוא מאוד שיטתי, וכשנתונה פונקציה מסובכת יש בידנו כל-לי גזירה המאפשרים לחשב את נגזרתה ע"י רדוקציה לנגזרות של רכיביה הפשוטים. חישוב הפונקציה הקדומה, לעומת זאת, איננו "מובנה" ודורש נסיון ודמיון. יתר על כן, יש פונקציות שנראות פשוטות מאד, כמו למשל e^{x^2} או $\frac{\sin x}{x}$, שאפשר להוכיח שאי אפשר בכלל להציג את הפונקציה הקדומה שלהן כפונקציה אלמנטרית!

מצד שני הבדיקה אם חישוב של פונקציה קדומה הוא נכון היא מאד פשוטה: גוזרים ובודקים שוויון לפונקציה הנתונה (כך שאין כל תרוץ לתשובה לא נכונה בבחינה...).

אינטגרציה של פונקציות רציונליות.

נשתמש בשתי עובדות אלגבריות: חלוקת פולינומים עם שארית ופירוק פולינומים לגורמים אי פריקים (שהם כידוע מדרגה 1 או 2).

חילוק המונה של פונקציה רציונלית במכנה שלה מאפשר את הצגתה כסכום של פולינום ושל שבר שבו דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה. אין בעיה לחשב את האינט-גרל של הפולינום, ולכן נוכל להניח מעתה שהשבר הוא אכן כזה.

הפירוק לגורמים אי-פריקים הוא, לעתים קרובות, לא מעשי (כי אין נוסחאות לחישובו), אבל לעתים הוא כן מעשי - ואפילו אולי נתון מראש.

<u>דוגמא.</u>

השבר $\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$ כבר נתון כשדרגת המונה קטנה מדרגת המכנה וכשהמכנה מוצג כמכפלת גורמיו האי פריקים. נציג $\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ כאשר $C=2, D=1, A=-2, B=1$ (הצגה זו נקראת ההצגה כסכום של שברים חלקיים). לכן

$$\begin{aligned} & \int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx \\ = & \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx \\ = & -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \arctan x + C. \end{aligned}$$

אנחנו נסתפק בדוגמא האפיינית הזו ולא ניתן כאן את הנוסחאות הכלליות להצגה כסכום של שברים חלקיים ולא נוכיח כי השיטה אכן תקפה באופן כללי.

משהצגנו את השבר בעזרת שברים חלקיים, עלינו לדעת איך לחשב את האינט- גרלים שלהם. אחרי שינויי משתנה לינאריים הם יהיו בעלי אחת מהצורות הבאות:

(i) $\int \frac{1}{(x-a)^j}dx = \frac{(x-a)^{-j+1}}{-j+1} + C$ (או $\ln|x-a| + C$ כאשר $j=1$).

(ii) $\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^j}dx = \frac{(x^2+a^2)^{-j+1}}{-j+1} + C$.

(iii) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^j}dx = a^{-2j+1}\int \cos^{2j-2} t dt$ (בעזרת ההצבה $x = a\tan t$).

<u>ביטויים עם שרשים</u>

בביטויים כאלה אפשר בדר"כ להעזר בזהויות טריגונומטריות, למשל:

(i) $\int \sqrt{1-x^2}dx$. הציבו $x = \sin u$, ואז $dx = \cos u\, du$ ומקבלים $\int \cos^2 u du$. כעת נשתמש בזהות $\cos^2 u = (1+\cos 2u)/2$ והאיטגרל הוא

$$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2u)du = (u + \frac{1}{2}\sin 2u)/2 + C = (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})/2 + C .$$

(ii) אם נציב $x = \cos u$ ב- (i) נקבל $(-\arccos x + x\sqrt{1-x^2})/2$ שהיא, לכאורה, תשובה שונה, אך למעשה הן נבדלות רק בקבוע כי $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

(iii) אם יש ביטוי רציונלי המכיל $\sqrt{a^2-x^2}$ מתבקש לנסות את ההצבה $x = a\sin u$ או $x = a\cos u$.

לדוגמא, לחישוב $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ נשלים לריבוע ונציב $u = x-1$ ואח"כ $y = \cos u$.

(iv) בביטויים רציונליים המכילים $\sqrt{a^2+x^2}$ כדאי לנסות את ההצבה $x = a\tan u$ ולהשתמש בזהות $1+\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$.

(iv) בביטויים רציונליים המכילים $\sqrt{x^2-a^2}$ כדאי לנסות את ההצבה $x = \frac{a}{\sin t}$.

1.2 אינטגרל מסוים

נתונה קבוצה במישור. מהו שטחה? לשאלה זו שני פנים: השאלה האחת היא עקרונית, האם אפשר, ואם כן אז איך, להגדיר שטח של קבוצה מישורית כללית או, לפחות, של קבוצות מסויימות? השאלה השניה היא איך מחשבים את השטח.

נקודת המוצא היא הגדרת שטח המלבן: אורך הבסיס כפול הגובה. מכאן נקבל גם תשובה פשוטה למשולש: ע"י חיתוך והרכבה השטח זהה לחצי שטח מלבן עם אותו בסיס ואותו גובה. אך מה עם עיגול? כבר ארכימדס נתן שיטה לחישוב מקורב של שטח העיגול: נחסום בעיגול מצולע משוכלל עם n צלעות. את שטחו קל לחשב, כי הוא מורכב ממשולשים שאת שטחם אנו יודעים לחשב. כאשר n גדול המצולע מכסה כמעט את כל העיגול, ולכן שטח העיגול הוא הגבול, כאשר $n \to \infty$, של שטחים אלה.

אנחנו נשתמש באותו רעיון כדי <u>להגדיר</u> את מושג השטח, ונעשה זאת בשלב זה רק לקבוצות המוגבלות בין הגרף של פונקציה לבין ציר ה- x-ים. (כמובן שאח"כ נוכל לטפל גם בקבוצות הניתנות לפירוק והרכבה מקבוצות כאלה, ואפילו צורות כלליות יותר).

השטח המוגבל בין הגרף של f לקטע $[a,b]$ נקרא האינטגרל של f בקטע, ונסמנו ב- $\int_a^b f$ (ולפעמים ב- $\int_a^b f(x)dx$).

<u>הערות.</u> (i) בשלב זה, זהו רק סימון. הקשר שלו עם הפונקציה הקדומה (שהוא אחד מההשגים הגדולים של המתמטיקה) יתברר רק בהמשך.

(ii) ה- x בסימון $\int_a^b f(x)dx$ הוא רק שם למשתנה (כמו j בסכום מהצורה $\sum_{j=M}^N a_j$) ואפשר להחליף את x בכל סימן אחר, כגון y, t, s וכדומה.

האינטגרל הוא <u>מספר</u> ואינו תלוי ב- x!

(iii) השטח שנגדיר יהיה <u>שטח עם סימן</u>: שטח מעל ציר ה- x-ים יקבל סימן חיובי, ושטח מתחת לציר יקבל סימן שלילי.

הצורה הבסיסית שאנו יודעים את שטחה היא המלבן, ולכן אבני הבנין היסו-דיות בתורה שנפתח תהיינה פונקציות המגבילות צורה מלבנית: פונקציות שהן קבועות בקטע. המקרה הכללי יטופל בשלושה צעדים עפ"י ה"מורכבות" של f.

צעד 1: יהי I קטע חסום (שיכול להיות סגור, פתוח או חצי פתוח) עם קצוות a ו- b, ונניח ש- f מקבלת את הערך הקבוע c בקטע. אז השטח ש- f מגבילה הוא $c(b-a)$ (שהוא שלילי אם c שלילי), ולכן $\int_a^b f = c(b-a)$.

צעד 2: נניח ש- f היא "פונקצית מדרגה", כלומר, הקטע $[a,b]$ מחולק ל- n קטעים חלקיים הנקבעים ע"י נקודות החלוקה $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, כך ש- f מקבלת ערך קבוע c_i בקטע שבין a_{i-1} ו- a_i (אין זה חשוב אם $f(a_i) = c_i$ או c_{i-1}). הגרף של f מגביל איחוד זר של מלבנים, עם בסיסים באורך $a_i - a_{i-1}$ וגבהים c_i בהתאמה, ולכן $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1})$.

צעד 3: בשלב הסופי והעיקרי, שלפיתוחו יוקדש סעיף זה, נשתמש בתהליך גבולי. כמו ארכימדס נקרב את השטח המבוקש ע"י צורות "פשוטות", ודרך טבעית לעשות זאת היא ע"י קירוב של השטח ע"י פונקציות מדרגה עם חלוקה מאוד עדינה של $[a,b]$ וכאשר ערכה בקטע ה- i הוא, למשל, $c_i = f(a_i)$.

מסיבות מתמטיות יש צורך ביותר גמישות בבחירת הגבהים c_i, ונבחר אותם כערכים $c_i = f(t_i)$ של f כשמרשים בחירה שרירותית של הנקודות $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$. נפנה כעת להגדרות פורמליות.

סימונים.

חלוקה P של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה סופית $P=\{a_i\}$ של נקודות בקטע כך ש- $a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$.

נסמן ב- $\Delta_i=a_i-a_{i-1}$ את אורך הקטע החלקי ה- i-י, כלומר את האורך של $[a_{i-1},a_i]$.

הקוטר של החלוקה P הוא $\lambda(P)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta_i$.

הגדרה. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$. יהיו $P=\{a_i\}$ חלוקה של הקטע ו- $t_i\in[a_{i-1},a_i]$. סכום רימן של הפונקציה f ביחס לחלוקה P ולבחירה t_i הוא

$$R(P,f,t_i)=\sum f(t_i)\Delta_i$$

הגדרה. נאמר שהפונקציה f המוגדרת בקטע $[a,b]$ היא פונקציה אינטגרבילית רימן בקטע, ושהאינטגרל שלה הוא המספר I, אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ עם התכונה הבאה: לכל חלוקה $P=\{a_i\}$ של הקטע עם קוטר $\lambda(P)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות $t_i\in[a_{i-1},a_i]$, סכום רימן המתאים יקיים

$$\left|I-\sum f(t_i)\Delta_i\right|<\varepsilon\ .$$

את האינטגרל של f נסמן ב- $\int_a^b f$.

טענה. אם f אינטגרבילית בקטע, אז היא חסומה בו.

הוכחה. נניח כי f אינה חסומה, ואז לכל חלוקה P יש קטע חלקי $[a_{j-1},a_j]$ שגם בו f אינה חסומה. נבחר את ה- t_i-ים עבור $i\neq j$ באופן כלשהו ונסמן $A=\Big|\sum\limits_{i\neq j}f(t_i)\Delta_i\Big|$.

נבחר נקודה t_j בקטע החלוקה ה- j-י כך ש- $|f(t_j)\Delta_j|>A+\frac{1}{\lambda(P)}$ (יש כזו כי f אינה חסומה בקטע זה), ואז

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i\right|\ge|f(t_j)\Delta_j|-A>\frac{1}{\lambda(P)}\to\infty$$

כאשר $\lambda(P)\to 0$. $\square$

דוגמאות.

(i) לא כל פונקציה חסומה היא אינטגרבילית. פונקצית דיריכלה

$$D(x)=\begin{cases}0 & \text{כאשר } x \text{ רציונלי}\\ 1 & \text{כאשר } x \text{ אירציונלי}\end{cases}$$

איננה אינטגרבילית, כי לכל חלוקה נוכל לבחור את ה- t_i-ים כרציונלים (ואז סכום רימן המתאים הוא 0), או לבחור אותם אי-רציונלים (ואז הסכום הוא 1) - והקוטר של החלוקה איננו רלבנטי כלל.

הדוגמא הזו אומרת, בפרט, שיש קבוצות במישור שאי אפשר כלל להגדיר להן שטח בשיטה זו! (בקורסים מתקדמים יותר תראו אינטגרל כללי יותר, אינטגרל לבג, ופונקצית דיריכלה כן תהיה אינטגרבילית עפ"י לבג. אך אפילו אז, אם דורשים שהמושג "שטח" יקיים מספר דרישות טבעיות מאוד, עדיין יש קבוצות שאי אפשר להגדיר עבורן שטח.).

(ii) קשה מאוד להשתמש באופן ישיר בהגדרה של אינטגרביליות רימן, כי זה מצריך התייחסות לכל החלוקות ולכל הבחירות האפשריות של נקודות t_i בקטעי החלוקה, ומטרתנו הבאה תהיה מציאת שיטות יעילות יותר. אך לפני שנעשה זאת נביא דוגמא פשוטה שבה בבחירה <u>מסוימת</u> של החלוקות ושל הנקודות אכן ניתן לחשב את הגבול.

$\int_0^1 xdx = 1/2$ מכיון שזה שטח של משולש, ונבנה סכומי רימן שנותנים תוצאה זו. לכל n נסתכל בסכום רימן של $f(x) = x$ המתאים לחלוקה האחידה, שנסמנה ב- P_n

$$0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \dots \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

ולבחירה $t_i = \frac{i}{n}$ (כלומר לקצוות הימניים של הקטעים החלקיים). ואז

$$. \ R(P, f, t_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to 1/2$$

נשים לב כי בדוגמא האחרונה $\lambda(P_n) \to 0$, ולכן אילו <u>ידענו</u> שהפונקציה $f(x) = x$ אינטגרבילית, אז החישוב שעשינו היה אכן מראה ש- $\int_0^1 xdx = 1/2$. הנושא הבא שלנו יהיה, לכן, מציאת תנאים שיבטיחו אינטגרביליות של פונקציה.

<u>הגדרה.</u> תהי f חסומה בקטע ותהי $P = \{a_i\}$ חלוקה שלו. נסמן

$$M_i = \sup_{a_{i-1} \le x \le a_i} f(x) \qquad ; \qquad m_i = \inf_{a_{i-1} \le x \le a_i} f(x)$$

(i) סכום דרבו העליון של f ביחס לחלוקה P הוא

$$. \ U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

באופן דומה סכום דרבו התחתון הוא $L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$.

(ii) האינטגרל העליון של f על $[a, b]$ הוא

$$. \ \overline{\int_a^b} f = \inf_P U(P, f)$$

בדומה לזה האינטגרל התחתון של f על $[a, b]$ הוא $\underline{\int_a^b} f = \sup_P L(P, f)$.

נשים לב שאם $M \leq f(x) \leq m$ ב- $[a,b]$ אז

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i = M(b-a)$$

לכל חלוקה P, ולכן האינטגרל העליון והתחתון סופיים.

<u>סימונים.</u>

(i) נאמר שחלוקה $Q=\{b_i\}$ היא עידון של החלוקה $P=\{a_i\}$ אם $Q \supset P$. העידון המשותף של החלוקות P ו- P' הוא החלוקה $Q = P \cup P'$.

(ii) התנודה של הפונקציה f בקטע I היא $\omega(f,I) = \sup_{x\in I} f - \inf_{x \in I} f$.

<u>למה.</u> תהי f חסומה בקטע I, ונסמן ב- Ω את התנודה של f בקטע. תהיינה P,Q חלוקות של I כך ש- Q עידון של P.

(i) $L(P,f) \leq L(Q,f)$ ו- $U(Q,f) \leq U(P,f)$.

(ii) אם Q מתקבלת מ- P ע"י הוספת m נקודות חלוקה, אז

$$L(Q,f) \leq L(P,f) + m\lambda(P)\Omega \quad \text{ו-} \quad U(Q,f) \geq U(P,f) - m\lambda(P)\Omega$$

הוכחה. נוכיח רק את הטענות על סכומי דרבו התחתונים. ההוכחה לסכומים העליונים דומה.

Q מתקבלת מ- P ע"י סדרה של עידונים כשבכל אחד מהם מוסיפים בדיוק נקודה אחת, לכן די להוכיח את שני חלקי הלמה כאשר Q מתקבל מ- P ע"י הוספת נקודה אחת c הנמצאת, למשל, בקטע ה- j-י. (נשים לב שבאגף ימין של (ii) מופיעות, בשלבים השונים, חלוקות שונות. אך כולן מעדנות את P, ולכן הקוטר שלהן אינו עולה על $\lambda(P)$).

כל המחוברים ב- $L(P,f)$ ו- $L(Q,f)$ פרט לאלה המתאימים לקטע ה- j-י זהים. המחובר ה- j-י ב- $L(P,f)$ הוא $m_j(a_j - a_{j-1})$, ואם נסמן

$$k_1 = \inf_{a_{j-1} \leq x \leq c} f(x) \;\; ; \;\; k_2 = \inf_{c \leq x \leq a_j} f(x)$$

אז ב- $L(Q,f)$ מופיעים במקומו שני המחוברים $k_1(c-a_{j-1}) + k_2(a_j - c)$. עפ"י ההגדרות $m_j \leq \min(k_1,k_2)$ ו- $\max(k_1,k_2) \leq m_j + \Omega$, ולכן

$$\begin{aligned} m_j(a_j - a_{j-1}) &\leq k_1(c-a_{j-1}) + k_2(a_j - c) \leq (m_j + \Omega)(a_j - a_{j-1}) \\ &\leq m_j(a_j - a_{j-1}) + \Omega\lambda(P) \end{aligned}$$

כמבוקש. $\square$

מסקנה. תהי f חסומה בקטע I. אז לכל שתי חלוקות P ו- P' של I מתקיים

$$L(P,f) \leq U(P',f)$$

הוכחה. תהי Q עידון משותף של P ושל P'. עפ"י חלק (i) של הלמה נקבל כי

$$L(P,f) \leq L(Q,f) \leq U(Q,f) \leq U(P',f)$$

$\square$

משפט. תהי f חסומה בקטע $[a,b]$, אז התנאים הבאים שקולים:

(i) f אינגרבילית רימן בקטע.

(ii) האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של f שווים:

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

(iii) לכל ε יש חלוקה Q של הקטע כך ש-

$$0 \leq U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

הוכחה. מהמסקנה נובע מיד כי $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$, ונראה תחילה את השקילות של התנאים (ii) ו- (iii).

אם (ii) מתקיים, אז עפ"י הגדרת האינטגרל העליון והתחתון יש, לכל $\varepsilon > 0$, חלוקות P ו- P' כך ש- $U(P,f) \leq \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ וכך ש- $L(P',f) \geq \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן $U(P,f) \leq L(P',f) + \varepsilon$. עפ"י (i) בלמה נקבל שאם Q עידון משותף שלהן אז גם $U(Q,f) \leq L(Q,f) + \varepsilon$, ו- (iii) מתקיים.

אם (ii) אינו מתקיים, אז לכל חלוקה Q יתקיים

$$U(Q,f) - L(Q,f) \geq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \varepsilon_0 > 0$$

להוכחת השקילות של (i) לתנאים האחרים, נשים תחילה לב כי בהנתן חלוקה P אז כל סכום רימן עבור חלוקה זו מקיים $L(P,f) \leq R(P,f,t_i) \leq U(P,f)$ (כי לכל בחירה של t_i בקטע החלוקה ה- i-י מתקיים $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$).יתר על כן, אם כל ה- m_i-ים וה- M_i-ים מתקבלים, אפשר לבחור את ה- t_i-ים כנקודות בהן הם מתקבלים ולקבל את $L(P,f)$ ו- $U(P,f)$ כסכומי רימן. גם אם מישהו מהם אינו מתקבל אז

עדיין אפשר, בבחירות מתאימות של ה- t_i-ים, לקרב כרצוננו את $L(P,f)$ ו- $U(P,f)$ ע"י סכומי רימן המתאימים.

כעת נניח ש- f אינטגרבילית רימן, ואז בהנתן ε נוכל לבחור חלוקה עדינה מספיק P כך ש- $\left|R(P,f)-\int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל סכום רימן המתאים ל- P. ע"ס ההערה לעיל נקבל שגם $\left|L(P,f)-\int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $\left|U(P,f)-\int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, ותנאי (iii) מתקיים.

להפך, ונניח ש- (ii) מתקיים ונסמן $I=\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$.

נבחר חלוקה P^* כך ש- $U(P^*,f) < I+\frac{\varepsilon}{2}$ ונניח שיש בה m נקודות. נסמן ב- Ω את התנודה של f בקטע ונבחר $\delta_1=\frac{\varepsilon}{2m\Omega}$. תהי P חלוקה המקיימת $\lambda(P)<\delta_1$, ונסמן ב- Q את העידון המשותף של P ו- P^* ונשים לב כי ב- Q יש לכל היותר m נקודות יותר מאשר ב- P. עפ"י הלמה (חלק (ii) לאי השוויון השני ו- (i) לרביעי) ועפ"י בחירת δ_1 נקבל כי כל סכום רימן המתאים ל- P יקיים

$$\begin{aligned} R(P,f) &\leq U(P,f) \leq U(Q,f)+m\lambda(P)\Omega \\ &< U(Q,f)+\frac{\varepsilon}{2} \leq U(P^*,f)+\frac{\varepsilon}{2} < I+\varepsilon \end{aligned}$$

באופן דומה נמצא δ_2 כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P)<\delta_2$ ולכל סכום רימן המתאים לה יתקיים $R(P,f) > I-\varepsilon$. אם P תקיים $\lambda(P)<\min(\delta_1,\delta_2)$ יתקיימו שני התנאים ביחד, ולכן $|R(P,f)-I|<\varepsilon$. □

<u>הערות.</u> (i) נשים לב שקבלנו מההוכחה שאם f אינטגרבילית רימן אז $\int_a^b f$ מתלכד עם האינטגרל העליון והתחתון.

(ii) את השקילות של אינטגרביליות רימן לתנאי (iii) ניתן לנסח בצורה הנוחה הבאה, שבה נשתמש בפועל:

f אינטגבילית רימן בקטע I אםם לכל $\varepsilon>0$ יש חלוקה Q כך ש- $\sum\omega_i\Delta_i<\varepsilon$, כאשר $\omega_i=\omega(I_i,f)$ הוא התנודה של f בקטע החלוקה ה- i-י, I_i, של Q.

במשפטים הבאים נשתמש בקריטריון שמצאנו כדי להראות שפונקציות חסומות מטיפוסים מסויימים הן אינטגרביליות.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

הוכחה. נזכור מאינפי 1 כי פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה, כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta=\delta(\varepsilon)$ כך שלכל שתי נקודות x,y בקטע המקיימות $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

בפרט נקבל כי אם P חלוקה המקיימת $\lambda(P)<\delta$, אז $\omega_i<\varepsilon$ לכל i, ולכן

$$\sum\omega_i\Delta_i<\varepsilon\sum\Delta_i=\varepsilon(b-a)$$

והביטוי $\varepsilon(b-a)$ קטן כרצוננו. □

מהמשפט נובע שהפונקציה $f(x) = x$, שראינו בדוגמא, היא אכן אינטגרבילית, ולכן החישוב שעשינו אכן מראה שהאינטגרל שלה הוא $\frac{1}{2}$.

<u>משפט.</u> תהי f מונוטונית בקטע סגור $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

הוכחה. נניח למשל ש- f לא יורדת. נסתכל בחלוקה האחידה P_n של הקטע ל- n קטעים חלקיים שווים, ואז $\Delta_i = \frac{b-a}{n}$ לכל i, ובקטע החלוקה ה- i-י $[a_{i-1}, a_i]$ מתקיים ש- $m_i = f(a_{i-1})$ ו- $M_i = f(a_i)$. ולכן

$$\begin{aligned}\sum \omega_i \Delta_i &= \sum \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big)\Delta_i = \frac{b-a}{n} \sum \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big) \\ &= \frac{(b-a)}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \underset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

□

<u>משפט.</u> אם f חסומה ויש לה רק מספר סופי של נקודות אי-רציפות ב- $[a,b]$, אז f אינטגרבילית בקטע.

הוכחה. כדי לפשט את הסימונים נניח שיש ל- f רק נקודת אי רציפות אחת, ונסמנה ב- c. נניח גם כי c נקודה פנימית (ההוכחה דומה כשהיא נקודת קצה).

נקבע $\varepsilon > 0$. היות ו- f חסומה, יש לה תנודה סופית Ω, ונבחר $\eta > 0$ כך ש- $2\eta\Omega < \frac{\varepsilon}{3}$. בקטע $[a, c-\eta]$ הפונקציה f רציפה, ולכן אינטגרבילית. לכן יש חלוקה P של $[a, c-\eta]$ המקיימות $\sum_P \omega_i\Delta_i < \frac{\varepsilon}{3}$ (כאשר אנחנו מסמנים ב- $\sum_P$ את הסכום על קטעי החלוקה P).

באופן דומה יש חלוקה S של $[c+\eta, b]$ המקיימת $\sum_S \omega_i\Delta_i < \frac{\varepsilon}{3}$.

נסתכל כעת בחלוקה Q המתקבלת מצרוף שתי החלוקות P ו- S, כשגם הקטע $I_c = [c-\eta, c+\eta]$ הוא קטע בחלוקה Q. ואז עפ"י בחירת η נקבל

$$\begin{aligned}\sum_Q \omega_i\Delta_i &= \sum_P \omega_i\Delta_i + \omega_{I_c} 2\eta + \sum_Q \omega_i\Delta_i \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + 2\eta\Omega + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

□

נעבור כעת לדון בתכונות הבסיסיות של האינטגרל.

<u>משפט.</u> תהיינה f ו- g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז

(i) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ גם הפונקציה $\alpha f + \beta g$ אינטגרבילית בקטע, ומתקיים

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

(ii) אם $f \le g$ בקטע אז
$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$
בפרט, אם $f \ge 0$ אז $\int_a^b f \ge 0$, ואם $m \le f(x) \le M$ לכל x בקטע, אז
$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

(iii) אם $a < c < b$ אז f אינטגרבילית בכל אחד מהקטעים החלקיים $[a,c]$ ו- $[c,b]$ ומתקיים
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

הוכחה. נקבע חלוקה P ונקודות t_i בקטעי החלוקה, ואז סכומי רימן של f, g ו- $\alpha f+\beta g$ מקיימים
$$R(P,\alpha f+\beta g,t_i) = \alpha R(P,f,t_i) + \beta R(P,g,t_i)$$
ואם $f \le g$ אז
$$R(P,f,t_i) \le R(P,g,t_i)$$
וכעת (i) ו- (ii) נובעים ע"י מעבר לגבול כאשר $\lambda(P) \to 0$.

להוכחת (iii) נוכיח תחילה ש- f אינגרבילית בקטעים החלקיים $[a,c]$ ו- $[c,b]$: היות ו- f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ יש לכל $\varepsilon > 0$ חלוקה P של $[a,b]$ כך ש-
$$\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon \qquad (*)$$
ע"י הוספת הנקודה c ל- P הביטוי הזה רק יקטן, ולכן בה"כ $c \in P$ והחלוקה P משרה חלוקות P_1 ו- P_2 של $[a,c]$ ו- $[c,b]$ בהתאמה. f אינטגרבילית בקטעים החלקיים כי גם חלוקות אלה תקיימנה את $(*)$ (כסכומים חלקיים מתאימים של הסכום באגף שמאל).

משהוכחנו שאגף ימין מוגדר היטב, השוויון נובע ע"י מעבר לגבול בסכומי רימן, כמו בהוכחת (i) ו- (ii), כששמתמשים רק בחלוקות המכילות את הנקודה c. $\square$

<u>הערות.</u> (i) ראינו במשפט כי אם $f \ge 0$ אז $\int_a^b f \ge 0$. בד"כ העובדה שיש נקודה x_0 שבה $f(x_0) > 0$ אינה מספיקה כדי לקבל אי שוויון חריף $\int_a^b f > 0$, למשל, אם f זהותית 0 פרט לערך חיובי בנקודה הבודדת x_0. אך אם f רציפה אכן מתקבל אי שוויון חריף: אם $f(x_0) = c > 0$ אז מרציפות f נובע שיש סביבה $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ שבה מתקיים $f(x) \ge \frac{c}{2} > 0$, ולכן
$$\int_a^b f = \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^b f \ge 2\delta\frac{c}{2} > 0$$
כי כל המחוברים אי-שליליים, והמחובר האמצעי גדול מ- $2\delta\frac{c}{2}$.

(ii) האינטגרל $\int_a^b f$ הוגדר עבור $a<b$. באופן פורמלי נגדיר כעת

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

הגדרה זו משחררת מהצורך להשגיח על סדר הגבולות, וכל כללי האינטגרל נשמרים. בפרט הנוסחה ב- (iii) נשארת בתוקף, ואם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ מתקיים

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f$$

בלי תלות בסדר של α,β,γ. (הוכיחו זאת כתרגיל!).

את הוכחת המשפט הבא נשאיר כתרגיל

<u>משפט.</u> אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ואם $g=f$ פרט למספר סופי של נקודות, אז גם g אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש- $\int_a^b g = \int_a^b f$.

נסיים את הפרק על אינגרל רימן בעוד כמה תוצאות על אינטגרביליות.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, ותהי φ רציפה בקטע סגור I המכיל את הטווח של f, אז גם ההרכבה $\varphi\circ f$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

הוכחה. נקבע $\varepsilon>0$. הפונקציה φ רציפה בקטע סגור, לכן היא חסומה בו, ויש לה תנודה סופית בקטע שנסמנה ב- Ω. היא גם רציפה ב- I במ"ש, ולכן יש $\delta>0$ כך שלכל $s,t\in I$ כך ש- $|s-t|<\delta$ מתקיים $|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon$. בה"כ נוכל להניח כי $\delta<\varepsilon$.

נבחר כעת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- $\sum\omega_i^f\Delta_i<\delta^2$, כאשר ω_i^f היא התנודה של f בקטע החלוקה ה- i-י, ונסמן ב- $\omega_i^{\varphi\circ f}$ את התנודה של $\varphi\circ f$ בקטע החלוקה ה- i-י.
המשפט יוכח כשנראה כי

$$\sum\omega_i^{\varphi\circ f}\Delta_i<\varepsilon(b-a+\Omega) \qquad (*)$$

לשם כך נסמן

$$I_1=\{i:\omega_i^f<\delta\}\quad ; \quad I_2=\{i:\omega_i^f\ge\delta\}$$

ונפרק את הסכום באגף שמאל של $(*)$ לשני סכומים חלקיים: $\sum_1+\sum_2$ כאשר $\sum_1$ הוא הסכום על $i\in I_1$, ו- $\sum_2$ הוא הסכום על $i\in I_2$, ונעריך כל אחד מהסכומים האלה לחוד.

אם $i\in I_1$, אז עפ"י בחירת δ נקבל כי $\omega_i^{\varphi\circ f}<\varepsilon$, ולכן

$$\sum_1 = \sum_{i\in I_1}\omega_i^{\varphi\circ f}\Delta_i < \varepsilon\sum_{i\in I_1}\Delta_i \le \varepsilon(b-a)$$

להערכת $\sum_2$ נשתמש בכך ש- $\omega_i^f \geq \delta$ לכל $i \in I_2$ ולכן

$$\delta^2 > \sum \omega_i^f \Delta_i \geq \sum_{i \in I_2} \omega_i^f \Delta_i \geq \sum_{i \in I_2} \delta \Delta_i$$

וע"י חלוקה ב- δ נקבל כי $\sum_{i \in I_2} \Delta_i < \delta$, והיות ש- $\omega_i^{\varphi \circ f} \leq \Omega$ לכל i נקבל

$$\sum_2 = \sum_{i \in I_2} \omega_i^{\varphi \circ f} \Delta_i \leq \Omega \sum_{i \in I_2} \Delta_i < \delta\Omega < \varepsilon\Omega$$

$\square$

הדוגמאות (ii) ו- (iii) הבאות חשובות מאוד ומשתמשים בהן לעתים קרובות.

<u>דוגמאות.</u>

(i) אם נקח $\varphi(t) = t^2$, נקבל כי f^2 אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית. (ובאופן דומה גם f^n אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית).

(ii) אם f ו- g אינטגרביליות כך גם fg, כי נציג $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$, וכל הפונקציות באגף ימין אינטגרביליות ע"ס (i).

(iii) אם נקח $\varphi(t) = |t|$, נקבל כי $|f|$ אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית. הפעלת אי שוויון המשולש על סכומי רימן תיתן גם כי $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

(iv) אם נקח $\varphi(t) = 1/t$, נקבל כי $1/f$ אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית כך שיש $c > 0$ באופן ש- $|f(x)| \geq c$ לכל x.

(v) הדוגמאות הקודמות מראות שביצוע פעולות "אלגבריות" על f שומר על תכונת האינטגרביליות. אך, כפי שהדוגמא הבאה מראה תהליכי גבול אינם שומרים בהכרח על האינטגרביליות, ויש לטפל בהם בזהירות רבה. (אנחנו נטפל בתהליכי גבול כאלה בהמשך).

נסדר את הרציונלים בקטע $[0,1]$ בסדרה $\{s_n\}$, ונגדיר

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{s_1, \ldots, s_n\} \text{ כאשר} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז ה- f_n-ים אינטגרביליות (כי יש להן רק מספר סופי של נקודות אי רציפות), אך לכל $x \in [0,1]$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = D(x)$, כאשר D היא פונקצית דיריכלה, וכפי שראינו היא אינה אינטגרבילית.

<u>הגדרה.</u> קבוצה $E \subset \mathbb{R}$ נקראת "בעלת מידה 0" אם לכל ε יש כיסוי של E ע"י סדרת קטעים (סופית או אינסופית) $\{I_n\}$ שסכום ארכיהם קטן מ- ε.

<u>דוגמאות.</u>

(i) כל קבוצה בת מניה היא בעלת מידה 0, כי נסמן את אבריה ב- $\{a_n\}$, ובהנתן ε

נגדיר $I_n=(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},a_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$, ואז סכום ארכיהם הוא $\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$.

(ii) יש גם קבוצות לא בנות מניה שהן בעלת מידה 0. בתרגיל תבנו קבוצה כזו: קבוצת קנטור.

(iii) הוכיחו כתרגיל שקטע לא מנוון $[a,b]$ אינו בעל מידה 0. (רמז: הוכיחו תחילה שאם הקטע מכוסה ע"י מספר סופי של קטעים, אז סכום ארכיהם הוא לפחות $b-a$. אח"כ הראו כי בה"כ אפשר להניח כי קטעי הכיסוי פתוחים, והשתמשו בלמה של היינה-בורל כדי לעבור לתת כיסוי סופי).

נסיים במשפט המאפיין באופן מלא מתי פונקציה היא אינטגרבילית.

<u>משפט.</u>[לבג] פונקציה חסומה f המוגדרת בקטע I היא אינטגרבילית שם אםם קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא בעלת מידה 0.

הוכחה. נביא רק את ההוכחה של צד אחד של המשפט: אם קבוצת נקודות אי הרציפות של f (שנסמנה ב- E) היא בעלת מידה 0, אז היא אינטגרבילית.

נסמן את התנודה של f ב- Ω. לכל קטע J נסמן את ארכו ב- $|J|$.

נקבע $\varepsilon>0$ ונמצא חלוקה P כך ש- $\sum w_i\Delta_i<\varepsilon$. לשם כך נגדיר כיסוי פתוח של I באופן הבא: לכל נקודת רציפות $x\in I$ של f נמצא קטע פתוח I_x המכיל אותה כך ש- $\omega(f,I_x)<\frac{\varepsilon}{2|I|}$. האיחוד $\cup I_x$ בוודאי מכסה את $I\setminus E$, וכדי לקבל כיסוי של כל I נוסיף לכיסוי עוד סדרת קטעים פתוחים I_n המכסה את E וכך ש- $\sum|I_n|<\frac{\varepsilon}{2\Omega}$.

ע"ס הלמה של היינה-בורל יש לכיסוי הזה תת כיסוי סופי, ונסמן ב- P את החלוקה הנקבעת ע"י קצוות הקטעים בתת הכיסוי הסופי הזה.

להערכת $\sum w_i\Delta_i$ נבחין בשני סוגים של קטעי חלוקה. הסוג הראשון הוא קטעים המוכלים בקטע מהטיפוס I_x. בכל קטע כזה התנודה ω_i של f בקטע קטנה מ- $\frac{\varepsilon}{2|I|}$ ותרומתם הכוללת לסכום היא

$$\sum\nolimits_1 w_i\Delta_i\leq\frac{\varepsilon}{2|I|}\sum\nolimits_1\Delta_i\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

כי סכום ארכיהם בודאי אינו עולה על אורך הקטע I כולו.

הסוג השני הוא קטעים המוכלים בקטע מהטיפוס I_n, ותרומתם הכוללת לסכום היא

$$\sum\nolimits_2 w_i\Delta_i\leq\Omega\sum\nolimits_2\Delta_i\leq\Omega\sum|I_n|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

כי $\sum|I_n|\leq\frac{\varepsilon}{2\Omega}$.

יש אולי קטעי חלוקה שהם גם מסוג הראשון וגם מסוג השני, ואלה נספרים פעמי-ים, ולכן

$$\sum w_i\Delta_i\leq\sum\nolimits_1 w_i\Delta_i+\sum\nolimits_2 w_i\Delta_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

□

הצד שהוכחנו של המשפט מכיל, כמובן, את המשפט שפונקציה חסומה עם מספר סופי של נקודות אי-רציפות היא אינטגרבילית. כפי שהטענה הבאה מראה, הוא מכיל גם את המשפט שפונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית.

<u>טענה.</u> לפונקציה מונוטונית בקטע סגור יש לכל היותר מספר בן מניה של נקודות אי-רציפות

הוכחה. כזכור, נקודות אי הרציפות של פונקציה מונוטונית הן נקודות קפיצה. לכל n נסמן ב- C_n את קבוצת הנקודות שבהן יש ל- f קפיצה גדולה מ- $1/n$ ונראה כי כל C_n היא סופית. לכן קבוצת כל נקודות אי-הרציפות, $\cup C_n$, בת מניה.

נניח כי f אינה יורדת והקטע הוא $[a,b]$, ונסמן ב- J_x את הקפיצה של f בנקודה x, ואז

$$f(b)-f(a) \geq \sum_{x\in C_n} J_x \geq \frac{1}{n}|C_n|$$

ולכן $|C_n| \leq n(f(b)-f(a)) < \infty$. $\square$

1.3 הקשר בין האינטגרל המסויים לפונקציה הקדומה.

תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ונגדיר פונקציה חדשה $F(x)=\int_a^x f$. הפונקציה F מוגדרת היטב בקטע, ונחקור את תכונותיה.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז הפונקציה $F(x)=\int_a^x f$ רציפה בו.

הוכחה. אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אז היא חסומה בו ונניח כי $|f(x)| \leq M$ לכל $x\in[a,b]$. נראה כי F רציפה במ"ש. נקבע $\varepsilon>0$ ונבחר $\delta=\varepsilon/M$. אם $x<y$ מקיימות $y-x<\delta$, אז

$$F(y)-F(x)=\int_a^y f-\int_a^x f=\int_x^y f$$

ולכן

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| \leq M|y-x| < \delta M=\varepsilon \ .$$

$\square$

<u>משפט.</u>[המשפט היסודי של החדו"א] תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ורציפה בנקודה $x_0\in[a,b]$, אז $F(x)=\int_a^x f$ גזירה ב- x_0 ומתקיים

$$F'(x_0)=f(x_0) \ .$$

(אם x_0 נקודת קצה של הקטע אז הנגזרת היא חד-צדדית).

הוכחה. נבדוק נגזרת מימין. נבחר $x>x_0$ ונציג

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f-\int_a^{x_0} f=\int_{x_0}^x f \ .$$

נסמן $M_x=\sup_{x_0\leq t\leq x} f(t)$ ו- $m_x=\inf_{x_0\leq t\leq x} f(t)$, ואז אי השוויונים

$$m_x(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f \leq M_x(x-x_0)$$

נותנים כי
$$m_x \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq M_x$$
אך רציפות f ב- x_0 נותנת כי $\lim_{x\to x_0^+} m_x = \lim_{x\to x_0^+} M_x = f(x_0)$, ולכן
$$\lim_{x\to x_0+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) .$$
באופן דומה מראים כי $F'_-(x_0) = f(x_0)$. $\square$

<u>הערה.</u> הנחת הרציפות של f ב- x_0 חיונית. למשל, הפונקציה $f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{cases}$ אינה רציפה בנקודה $x_0=0$, וחישוב ישיר מראה כי $F(x)=|x|$, שאינה גזירה בנקודה.

<u>מסקנה.</u> אם f רציפה ב- $[a,b]$ אז יש לה פונקציה קדומה בקטע. פונקציה קדומה כזו ניתנת ע"י הנוסחה $F(x)=\int_a^x f$.

<u>הערות.</u> (i) אין חשיבות לקביעת הגבול התחתון בהגדרת F דוקא כקצה הקטע a. אם נבחר איזושהי נקודה c בקטע ונגדיר $F_1(x)=\int_c^x f$ אז F_1-F היא הקבוע $\int_a^c f$ ולכן יש להן אותה נגזרת.

(ii) אפשר להסתכל על האינטגרל גם כפונקציה של הגבול התחתון. אם $G(x)=\int_x^b f$ אז נוכל גם להציג $G(x)=-\int_b^x f$ ולכן $G'(x)=-f(x)$.

(iii) אם $b(x)$ פונקציה גזירה ואם $H(x)=\int_a^{b(x)} f$ אז $H(x)=F(b(x))$ וכשגוזרים עפ"י כלל השרשרת מקבלים $H'(x)=f(b(x))b'(x)$.

(iv) באופן כללי יותר, אם $\phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f$ אז $\phi(x)=F(b(x))-F(a(x))$ ולכן $\phi'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$.

למשל, $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{7x^2} \sin t dt = 14x\sin(7x^2)-(-\sin x)\sin(\cos x)$.

המשפט הבא (והמשפט שלאחריו) הם תרגום של המשפט היסודי של החדוא לנוסחה מעשית לחישוב האינטגרל המסויים

<u>משפט.</u>[נוסחת ניוטון-לייבניץ] תהי f רציפה ב- $[a,b]$ ותהי G פונקציה קדומה שלה, אז
$$\int_a^b f = G(b)-G(a) .$$

הוכחה. הפונקציה $F(x) = \int_a^x f$ גם היא פונקציה קדומה של f, ולכן יש קבוע C כך ש- $G = F + C$. נציב $x = a$, ואז $F(a) = 0$ נותן כי $C = G(a) - F(a) = G(a)$, ולכן

$$\int_a^b f = F(b) = G(b) - C = G(b) - G(a) .$$

□

נוסחת ניוטון לייבניץ מאפשרת לחשב את $\int_a^b f$ בלי חלוקות ובלי קירובים - פשוט מוצאים פונקציה הקדומה ל- f ומשתמשים בנוסחה. למשל

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2 .$$

למעשה ניתן להשתמש בנוסחה דומה גם בתנאים יותר כלליים, ולהחליש את הדרישה שהאינטגרנד הוא פונקציה רציפה.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ונניח שיש פונקציה רציפה G כך ש- G גזירה ומקיימת $G'(x) = f(x)$ לכל x בקטע פרט לקבוצה סופית $C = \{c_i\}$ של נקודות. אז

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) .$$

הוכחה. נתבונן בחלוקה $P = \{a_i\}$ המעדנת את החלוקה הנקבעת ע"י C, ואז בכל קטע חלוקה G מקיימת את תנאי משפט לגרנז', ולכן יש נקודה $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ כך ש-

$$G(a_i) - G(a_{i-1}) = G'(t_i)\Delta_i = f(t_i)\Delta_i$$

ולכן

$$G(b) - G(a) = \sum \big(G(a_i) - G(a_{i-1})\big) = \sum f(t_i)\Delta_i$$

אך אגף ימין הוא סכום רימן של f ולכן שואף, כשהחלוקה P מתעדנת, ל- $\int_a^b f$. □

למשל, $G(x) = |x|$ רציפה, גזירה פרט לנקודה הבודדת $x_0 = 0$, ונגזרתה שם היא

$$G'(x) = f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ואכן $\int_a^b f = |x|\Big|_a^b$ לכל a, b.

1.4 שימושים של האינטגרל המסוים

(i) אפשר לחשב בעזרת אינטגרלים גם שטחים של קבוצות יותר כלליות. למשל, השטח שבין שני גרפים ניתן לחישוב כהפרש השטחים שהם מגבילים. לדוגמא, השטח (הגיאומטרי) שבין הגרפים של x^2 ושל x^3 מעל הקטע $[0,2]$ הוא

$$\int_0^2 |x^2 - x^3| dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx$$

(ii) גוף נע לאורך הציר הממשי כשמהירותו בזמן t היא $v(t)$ ס"מ/לשניה. בזמן $t = 0$ הוא נמצא בנקודה a. איפה הוא ימצא בזמן $t = T$?

נסמן את מיקומו בזמן t ב- $S(t)$. כידוע $S'(t) = v(t)$ ולכן (בהנחה ש- v פונקציה רציפה, כך שנוסחת ניוטון לייבניץ תקפה) $S(T) = a + \int_0^T v(t)dt$.

<u>הערה.</u> (a) הגדרת האינטגרל כשלילי כשהפונקציה שלילית נראתה "מלאכותית" כשעסקנו בחישובי שטחים. כשאנחנו מסתכלים על הנוסחאות לאינטגרל כמבטאות את מיקומו של הגוף זה מובן מאליו: הגוף נע ימינה כשהמהירות חיובית ושמאלה כשהיא שלילית!

אם רוצים לחשב את הדרך הכוללת שהגוף עובר עד לזמן T (ולא את מיקומו) אז הנוסחה היא $\int_0^T |v(t)| dt$. לדוגמא, נניח כי $v(t) = \sin t$ ו- $a = 0$. אז $S(T) = -\cos T$, שיכול להיות (עפ"י הערך של T) חיובי, שלילי או אפס. המרחק הכולל שהגוף יעבור עד לזמן T הוא $\int_0^T |\sin t| dt$.

(b) חשוב מאוד להבין את הנוסחה $S(T) = a + \int_0^T v(t)dt$ גם עפ"י ההגדרה של האינטגרל כגבול של סכומי רימן: נקח חלוקה עדינה $0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ של הקטע $[0,T]$, ואז הגוף מועתק בקטע החלוקה ה- i-י בערך ב- $v(t_i)(t_i - t_{i-1})$, ולכן סכום רימן $\sum_{i=1}^N v(t_i)(t_i - t_{i-1})$ הוא <u>קירוב</u> של ההעתק הכללי <u>האמיתי</u> בפרק הזמן שבין $t = 0$ לבין $t = T$.

אבל מבחינה מתמטית סכום זה גם מקרב (עפ"י הגדרת האינטגרל) את האינטגרל $\int_0^T v(t)dt$. ולכן כשעוברים לגבול מקבלים כי האינטגרל מתלכד עם ההעתק.

(c) זה גם המקום להסביר את הסימון לאינטגרל המסוים. דרך טובה לחשוב על האינטגרל המסוים היא כעל "סכום רציף". נסתכל בסכום רימן $\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i$ של f בקטע $[a,b]$ ביחס לחלוקה מסוימת $P = \{a_i\}$. כשהחלוקה הולכת ומתעדנת המחוברים הולכים וקטנים ומספרם גדל. בגבול מחליפים את האורך (הקטן) Δ_i ב"אורך האיפיניטיסימלי" dx, את המחוברים $f(t_i)\Delta_i$ ב"מחובר האיפיניטיסימלי" $f(x)dx$ ואת המספור שלהם, שהוא i בין 1 ל- n, ב"מספור רציף" שהוא x בין a לבין b. (ובאופן קליגרפי $\sum_{i=1}^n$ מוחלף בסימן האינטגרל $\int_a^b$ ו- Δ_i מוחלף ב- dx). האנלוגיה הזו הביאה להכללת ה- dx בסימון.

יתר על כן, לכל גורם בתוך האינטגרל יש יחידות: ל- $f(x)$ יש היחידות של f ול- dx היחידות של Δ_i, כלומר של x. באופן כזה ל"סכום הרציף", האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$, יש אותן יחידות כמו לסכומי רימן $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta_i$.

בחישובי השטחים הן ל- x והן ל- f יש יחידות אורך, ולכן לאינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ יש יחידות שטח. בדוגמא עם המהירות ל- t יש יחידות זמן ול- v יש יחידות מהירות, כלומר אורך/זמן, ולכן לאינטגרל $\int_a^b v(t)dt$ יש יחידות אורך.

ההסתכלות על האינטגרל כסכום רציף היא מאוד אינטואיטיבית ויעילה, ומהנד-סים ופיסיקאים משתמשים בה לעתים קרובות. אנחנו נדגים זאת גם בחלק מהדוג-מאות הבאות.

(iii) תיל (המזוהה מתמטית עם הקטע $[a,b]$) הוא בעל צפיפות משתנה. נסמן ב- $m(x)$ את המסה של הקטע $[a,x]$, ואז צפיפות המסה בנקודה x ניתנת ע"י הקשר $\rho(x)=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)-m(x)}{h}$, כלומר $\rho(x)=m'(x)$.
אם נתונה הצפיפות, $\rho(x)$, אז עפ"י המשפט היסודי של החדו"א אפשר לשחזר את המסה ע"י הנוסחה $m(x)=\int_a^x \rho(t)dt$. היחידות של ρ הן מסה/אורך, היחידות של x הן אורך, ושל m מסה.
בהסתכלות על האינטגרל כסכום רציף אנחנו מסכמים את המסה האיפיניטיסימ-לית, $\rho(x)dx$, של הקטע האיפיניטיסימלי $[x,x+dx]$ עבור כל ערכי x בין a בין b.

<u>הערה.</u> המכנה המשותף לדוגמאות בהן יופיע אינטגרל הוא שלגודל הפיסיקלי שאותו מנסים לחשב (שטח, העתק, מסה וכו') יש שתי תכונות:
אדיטיביות - כשמפרקים קטע של המשתנה החפשי x לקטעים חלקיים, הגודל הכולל המבוקש (שטח, העתק, מסה) הוא סכום הגדלים בקטעים החלקיים.
מכפלה - כאשר הפונקציה הנתונה קבועה בקטע (גובה, מהירות, צפיפות) אז הגודל המבוקש הוא מכפלת הקבוע באורך הקטע.
כשתכונות אלה מתקיימות הסכומים $\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i$ נותנים קירוב של התוצאה המבוקשת, כי הם מקרבים את f ע"י פונקצית המדרגות המקבלת את הערך הקבוע $f(t_i)$ בקטע החלוקה ה- i-י. אך הסכומים הם בדיוק סכומי רימן המקרבים את $\int_a^b f$.

(iv) דוגמא נוספת מאותו סוג: העבודה הנעשית כשגוף בעל מסת יחידה נע לאורך הקטע $[a,b]$ כאשר הכח הפועל עליו בנקודה x הוא $f(x)$. אם הכח $f(x)$ הוא קבוע, F_1, אז העבודה היא המכפלה $(b-a)F_1$ (בנירמול מתאים של היחידות), כמו כן הסכום של העבודות בקטעים זרים נותן את העבודה הכוללת. לכן כאשר f אינה קבועה העבודה הכוללת היא "הסכום הרציף" $\int_a^b f(x)dx$.

(v) הערך הממוצע של f בקטע $[a,b]$ הוא $\int_a^b f(x)dx/(b-a)$ והממוצע המשוקלל הוא $\int_a^b f(x)w(x)dx$, כאשר פונקצית השקלול היא $w(x)\geq 0$ ו- $\int_a^b w(x)dx=1$.

(vi) תהי f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$, אז האורך של הגרף שלה ניתן ע"י הנוסחה $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. נראה זאת בשתי דרכים, אך נתחיל בהגדרת האורך של הגרף. נזכור כי אורך הקטע המחבר את הנקודות (a_1,a_2) ו- (b_1,b_2) במישור הוא $\left((a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

<u>הגדרה.</u> **תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$. לכל חלוקה סופית $P=\{a_i\}$ של הקטע נסתכל באורך $\sum\left((a_i-a_{i-1})^2+(f(a_i)-f(a_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}}$ של המצולע המקשר בין הנקודות $(a_i,f(a_i))$. אם הגבול**

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum\left((a_i-a_{i-1})^2+(f(a_i)-f(a_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

קיים וערכו L, נאמר שלגרף של f יש אורך, ושהאורך הוא L.

נראה כעת את הדרך המתמטית המדוייקת להוכחת הנוסחה. נשים לב שבסימונים המקובלים שלנו $\Delta_i = a_i - a_{i-1}$, וכי ע"ס משפט לגרנז', יש $a_{i-1} < t_i < a_i$ כך ש- $f(a_i) - f(a_{i-1}) = f'(t_i)\Delta_i$. עפ"י ההנחות הפונקציה $g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ רציפה, ולכן אינטגרבילית. לכן נוכל להציג

$$\sum \left((a_i - a_{i-1})^2 + (f(a_i) - f(a_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum \sqrt{1+f'(t_i)^2}\,\Delta_i$$

שהוא סכום רימן המתכנס לאינטגרל $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

הדרך האינטואיטיבית להוכחת הנוסחה היא להסתכל במשולש האיפיניטיסימלי ישר הזווית שבסיסו הוא הקטע $[(x,f(x)),(x+dx,f(x))]$ (אורך הקטע הזה הוא dx) וגבהו $f'(x)dx$. ולכן אורך היתר הוא $\sqrt{(dx)^2+(f'(x)dx)^2} = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, ואורך הגרף הוא "הסכום" של כל ארכי היתרים האלה "כשמסכמים" על כל ה- x-ים, כלומר $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

<u>דוגמא.</u>

נחשב את ההיקף של מעגל היחידה. לשם כך נחשב את אורך הגרף של הפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ב- $[-1,1]$, שהוא חצי ההיקף. בדוגמא זו $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ולכן $1+(f'(x))^2 = \frac{1}{1-x^2}$ ואורך הגרף הוא

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

ולכן הקף המעגל כולו הוא 2π.

בהמשך הקורס נדון בעקומים כלליים (שאינם בהכרח גרפים של פונקציות) ונקבל נוסחה לחישוב ארכם.

1.5 חישוב האינטגרל המסוים

בחישוב של האינטגרל המסויים נשתמש בשיטות שפיתחנו למציאת הפונקציה הקדומה (אינטגרציה בחלקים והצבה), אך נעשה זאת תוך התייחסות לגבולות האינטגרל. (מבחינה מעשית זה לפעמים אפילו מפשט את החישוב).

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$. נסמן את האינטגרל ב- I ונבצע שתי אינטגרציות בחלקים

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = -\int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= -\left\{ e^x \cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx \right\} = -\{-e^\pi - 1 + I\} \end{aligned}$$

ולכן $I = (e^\pi + 1)/2$.

(ii) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (זה השטח של רבע מעיגול היחידה). נציב $x = \sin t$ ואז $dx = \cos t dt$, ולכן $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$.

ניתן שלוש שיטות לחישוב האינטגרל I.

א. נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t dt = \cos t \sin t \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin t \sin t dt \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) dt = \frac{\pi}{2} - I \end{aligned}$$

ולכן $I = \frac{\pi}{4}$.

ב. נשתמש בזהות $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$ ונקבל

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)/2 dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4 \ .$$

ג. במקום $x = \sin t$ נציב $x = \cos t$ ונקבל $I = -\int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$. עפ"י הזהות $\sin^2 + \cos^2 = 1$ נקבל

$$2I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2$$

ו- $I = \pi/4$. (שכנעו עצמכם כי $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$ גם ע"י הסתכלות בגר-פים).

1.6 חישובים מקורבים

כפי שהערנו כבר אין דרך שיטתית למציאת הפונקציה הקדומה. יתר על כן, אפילו אם מוצאים פונקציה מפורשת, כגון $\sin x$, כשמציבים את הגבולות התוצאה, בדר"כ, איננה מספר "פשוט" ויש להשתמש בשיטות קירוב לחישובו.

שיקולים אלה אומרים שעבודתנו לא הסתיימה עם המשפט היסודי של החדו"א ועלינו ללמוד איך מחשבים את האינטגרל באופן מקורב.

דרך מתבקשת אחת היא לקרב את האינטגרנד בעזרת משפט טיילור, ונראה כי זה אכן מכשיר יעיל מאד.

<u>דוגמא.</u>

לחישוב $\int_0^1 \sin x^2 dx$ נשתמש בנוסחת טיילור עבור $\sin t$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \ldots \pm \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(t)$$

עם שארית המקיימת $|R_n(t)| \le \frac{|t|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.
נציב $t = x^2$, נבצע אינטגרציה ונקבל

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \left\{ x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \ldots \pm \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + R_n(x^2) \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 120!} \ldots \pm \frac{1}{(4n+3)\cdot(2n+1)!} + E_n \end{aligned}$$

כאשר $|E_n| \le \int_0^1 \frac{x^{4n+6}dt}{(2n+3)!} = \frac{1}{(4n+7)(2n+3)!}$.

<u>משפט.</u>[כלל המלבן] תהי f בעלת שתי נגזרות רציפות בקטע $[a,b]$, ונסמן את אמצע הקטע ב- $c = \frac{a+b}{2}$. אז $\int_a^b f = f(c)(b-a) + R$ כאשר השגיאה R מקיימת

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \ .$$

הוכחה. נשתמש בפיתוח טיילור מסדר 1 סביב c ונקבל כי

$$f(t) = f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{1}{2} f''(\gamma_t)(t-c)^2$$

כאשר γ_t נקודת ביניים בין c לבין t. כעת נבצע אינטגרציה בין a ל- b ונשים לב כי המחובר השני באגף ימין יתאפס, ואילו השלישי חסום ע"י

$$\int_a^b \frac{1}{2} f''(\gamma_t)(t-c)^2 dt \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \int_a^b \frac{1}{2}(t-c)^2 dt = \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \ .$$

□

בעזרת כלל המלבן אפשר, למשל, להעריך את השגיאה בקירוב האינטגרל על ידי סכומי רימן: כשנשתמש בו עם החלוקה האחידה אז האורך של כל קטע חלקי הוא $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ ונקבל כי

$$\int_a^b f = \sum_{i\le n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f = \sum_{i \le n} \Big(f(c_i)(a_i - a_{i-1}) + R_i \Big)$$

ולכן ההפרש $E = \int_a^b f - \sum \Big(f(c_i)(a_i - a_{i-1}) \Big) = -\sum R_i$ מקיים

$$|E| \le n \frac{(\frac{b-a}{n})^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \ .$$

נציג כעת שימוש אחר של כלל המלבן שידגים איך אינטגרלים מופיעים במקומות לא צפויים מראש.

<u>משפט.</u>[נוסחת סטירלינג] $n! \approx \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$, כלומר, $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}} \to 1$.

הוכחה. אנחנו לא נוכיח כי הגבול הוא 1, אלא רק שיש קבועים $\alpha,\beta>0$ כך ש- $\alpha\le\frac{n!}{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}}\le\beta$, וזה ינבע כשנראה שיש סדרה חסומה E_n כך ש- $n!=e^{E_n}$.
נקבע $j\ge 2$, ונציג עפ"י כלל המלבן

$$\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\ln t dt=\ln j+R_j$$

כאשר $24|R_j|\le\max_{x\in[j-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}]}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(j-\frac{1}{2})^2}$. הסדרה $A_n=\sum_{j=2}^n R_j$ חסומה, כי

$$24|A_n|\le\sum_{j=2}^n\frac{1}{(j-\frac{1}{2})^2}<\sum_{j=2}^n\frac{1}{j(j-1)}=\sum_{j=2}^n\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

וכעת נציג

$$\begin{aligned}\ln(n!)&=\sum_{j=2}^n\ln j=\sum_{j=2}^n\left(\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}\ln t dt-\ R_j\right)\\&=\int_{1+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln x dx\ -A_n=(x\ln x\ -x)\Big|_{1+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-A_n\\&=(n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2})-(n+\frac{1}{2})-B_n=(n+\frac{1}{2})\ln n-n+E_n\end{aligned}$$

כאשר הסדרה $B_n=A_n+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{3}{2}$ היא סדרה חסומה. נשים לב שגם הסדרה $E_n=(n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{2}-B_n$ חסומה, כי

$$(n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+\frac{1}{2}}{n}=\ln(1+\frac{1}{2n})^{n+\frac{1}{2}}\to\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$n!=e^{(n+\frac{1}{2})\ln n-n+E_n}=n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}C_n\ .$$

$\square$

1.7 אינטגרלים מוכללים

עד עתה טיפלנו באינטגרלים של פונקציות חסומות בקטע חסום. כעת נרצה להכליל את האינטגרל למקרים בהם תנאים אלה אינם מתקיימים.

<u>הגדרה.</u> (i) תהי f פונקציה המוגדרת בקרן $[a,\infty)$ ואינטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$.
אם הגבול $\lim_{c\to\infty}\int_a^c f$ קיים נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקרן קיים (ובקיצור נאמר פשוט ש- f אינטגרבילית בקרן), ונסמן

$$\int_a^\infty f=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f\ .$$

(ii) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b)$ ואנטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$. אם קיים הגבול משמאל $\lim\limits_{c\to b^-}\displaystyle\int_a^c f$ נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ קיים (ובקיצור נאמר פשוט ש- f אינטגרבילית בקטע), ונסמן

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f \ .$$

באופן דומה מגדירים אינטגרל מוכלל בקרן שמאלית, או בקטע סופי כשהסינגולריות היא בקצה השמאלי.

אם הגבול קיים רק במובן הרחב והוא $+\infty$ (או $-\infty$), נאמר לפעמים כי האינטגרל מתבדר ל- ∞ (או $-\infty$).

<u>הערה.</u> קיומו או אי קיומו של האינטגרל $\int_a^\infty f$ תלוי רק בהתנהגות של f באינסוף ולא בבחירת הנקודה a (אולם ערכו של האינטגרל, אם הוא קיים, כן תלוי, כמובן, ב- a), כי אם $a<c$ אז

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f \ .$$

לפעמים נאמר לכן כי $\int^\infty f$ קיים בלי לציין כלל גבול תחתון. הערה דומה תקפה ביחס לאינטגרל של פונקציה לא חסומה בקטע סופי.

<u>דוגמאות.</u>

(i) האינטגרל $\int_0^\infty \sin x$ לא קיים, כי ל- $\int_0^c \sin x = \cos c - 1$ אין גבול כאשר $c\to\infty$.

(ii) האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x}$ מתכנס כי $\int_0^c e^{-x} = 1-e^{-c}\to 1$ כאשר $c\to\infty$.

(iii) נבדוק את $\int_1^\infty x^{-p}$.

אם $p=1$ אז $\int_1^c x^{-1} = \ln c\to\infty$ והאינטגרל מתבדר.

אם $p\neq 1$ אז $\int_1^c x^{-p} = \frac{1}{-p+1}(c^{-p+1}-1)$ והגבול כאשר $c\to\infty$ לא קיים אם $p<1$, והוא $\frac{1}{p-1}$ אם $p>1$.

(iv) נבדוק את $\int_0^1 x^{-p}$. כאן הבעיה היא ב- 0, ועפ"י חישוב דומה ל- (iii) האינטגרל ל- $p\geq 1$ מתבדר, ועבור $p<1$ מקבלים $\int_c^1 x^{-p} = \frac{1}{-p+1}(1-c^{-p+1})\to\frac{1}{1-p}$ כאשר $c\to 0$.

אם יש ל- f מספר סינגולריות (ב- $\pm\infty$ או מימין או משמאל בנקודות סופיות) יש לבדוק כל אחת מהן בנפרד, והאינטגרל המוכלל קיים רק כאשר הוא קיים בכל אחת מהן.

<u>דוגמאות.</u>

(i) האינטגרל $\int_0^\infty x^{-p}dx$ לא קיים לאף p, כי אם $p \geq 1$ אז $\int_0^1 x^{-p}dx$ לא מתכנס, ואם $p \leq 1$ אז $\int_1^\infty x^{-p}dx$ לא מתכנס.

(ii) הפונקציה $\frac{2x}{x^2+1}$ איזוגית, ולכן ניתן היה לחשוב כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$. יותר על כן, אם לא נזהרים, מחשבים כי $\int_{-R}^{R} \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$ לכל R, ואז ועוברים לגבול כאשר $R \to \infty$ אכן מקבלים 0.

אבל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$ לא קיים, כי שני האינטגרלים המוכללים $\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ ו- $\int_{-\infty}^{0} \frac{2xdx}{x^2+1}$ לא קיימים.

לאינטגרל המוכלל יש התכונות הרגילות של האינטגרל:

$$\int cf = c\int f \quad ; \quad \int (f_1+f_2) = \int f_1 + \int f_2 \quad ; \quad \int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$$

וכמו כן אם $f \leq g$ אז $\int f \leq \int g$.

הוכחת המשפט הבא מיידית.

<u>משפט.</u>[קריטריון קושי] תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ לכל $a < b < \infty$. אזי $\int_a^\infty f$ קיים אםם מתקיים תנאי קושי: לכל $\varepsilon > 0$ יש $B > a$ כך ש $\left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \varepsilon$ לכל $b_2 > b_1 > B$.

1.7.1 אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי-שליליות.

<u>משפט.</u> תהי f אי-שלילית בקרן $[a,\infty)$, ונסמן $F(x) = \int_a^x f$. אז $\int_a^\infty$ קיים אםם F חסומה.

הוכחה. אי השליליות של f גוררת כי F מונוטונית עולה, וידוע כי לפונקציה מונוטונית יש גבול אםם היא חסומה. $\square$

משפט פשוט זה (והאנלוג שלו לאינטגרל מוכלל בקטע סופי) הם המפתח לכך שה-טיפול באינטגרלים מוכללים של פונקציות בעלות סימן קבוע פשוט יותר מזה של פונ-קציות כלליות: במקום לבדוק קיום גבול יש רק לבדוק חסימות! זה מודגם היטב במשפט הבא:

<u>משפט.</u> [קריטריון ההשוואה]. תהיינה f ו- g אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$ ואינטגרביליות ב- $[a,b]$ לכל $a < b < \infty$. אם קיים קבוע חיובי $K > 0$ כך ש- $0 \leq f(x) \leq Kg(x)$ לכל x בקרן, ואם האינטגרל $\int_a^\infty g$ קיים , אז גם $\int_a^\infty f$ קיים ו-

$$\int_a^\infty f \leq K\int_a^\infty g \ .$$

הוכחה. נסמן $F(x) = \int_a^x f$ ו- $G(x) = \int_a^x g$. עפ"י הנתון G חסומה ו- $0 \leq F \leq KG$, לכן גם F חסומה. $\square$

הערה. כדי שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ יתכנס אין צורך ש- $0 \le f(x) \le Kg(x)$ יתקיים לכל $x \ge a$, ומספיק שזה יתקיים על איזשהי קרן חלקית $[c, \infty)$, כלומר עבור ערכי x שהם גדולים מספיק.

מסקנה. תהיינה $f, g \ge 0$ בקרן $[a, \infty)$, אינטגרביליות בכל קטע סופי חלקי, כך ש- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$. אם $0 < L < \infty$ אז $\int^\infty f$ קיים אםם $\int^\infty g$ קיים.

הוכחה. לפי הגדרת הגבול נמצא $c > a$ כך ש- $0 < \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$ לכל $x \ge c$, והמסקנה נובעת מהמשפט. $\square$

הוכחה דומה מראה שאם $L = 0$ ו- $\int^\infty g$ קיים, אז גם $\int^\infty f$ קיים.

דוגמאות.

(i) האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ מתכנס. ואמנם האיטגרנד הוא פונקציה זוגית, ולכן די לבדוק כי האינטגרל מתכנס בקרן ימנית, אך $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$ עבור $1 \le x < \infty$, וראינו כבר כי $\int_1^\infty e^{-x}dx$ מתכנס.

(ii) $\int_0^1 \frac{\sin x dx}{x^q}$ מתכנס אםם $q < 2$. כי

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^q} \Big/ \frac{1}{x^{q-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ועפ"י המסקנה האינטגרל מתכנס אםם $\int \frac{dx}{x^{q-1}}$ מתכנס, וזה קורה אםם $q - 1 < 1$, כלומר כאשר $q < 2$.

(iii) הפונקציה Γ מוגדרת עבור $x > 0$ ע"י $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. זהו אינטגרל של פונקציה חיובית על תחום אינסופי, ויש לבדוק את ההתכנסות של $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. כאשר $x < 1$ הפונקציה גם אינה חסומה ב- 0, לכן עלינו לבדוק בנפרד גם את ההתכנסות של $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

היות ש- $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0$ והיות שהאינטגרל $\int_1^\infty e^{-t/2}dt$ מתכנס, מקבלים שגם $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ מתכנס.

עבור $0 \le t \le 1$ מתקיים כי $\frac{1}{3}t^{x-1} \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$ ולכן $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ ו- $\int_0^1 t^{x-1}dt$ מתכנסים או מתבדרים ביחד - והאינטגרל השני מתכנס לכל $x > 0$, ובפרט לכל $0 < x < 1$.

פונקצית Γ מופיעה בענפים רבים של המתמטיקה כמו תורת המספרים, הסתברות, ועוד. נראה תכונה פשוטה שלה: לכל $x > 0$ מתקיים

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

כי אינטגרציה בחלקים נותנת

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -e^{-t}t^x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

נשתמש כעת בכך ש- $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$, ונקבל באינדוקציה כי לכל k טבעי

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1) = \ldots = (k-1)! \ .$$

בהמשך נחשב גם את $\Gamma(1/2)$.

1.7.2 אינטגרלים מתכנסים בהחלט ובתנאי

ההתכנסות של אינטגרל מוכלל של פונקציות אי שלילית תלויה ב"קצב הדעיכה" של f באינסוף, או ב"קצב הגידול" שלה בקטע סופי. כאשר f מקבלת גם ערכים חיוביים וגם שליליים האינטגרל יכול להתכנס מסיבה נוספת: התרומות החיוביות והשליליות של f יכולות לבטל חלקית אלה את אלה.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int f$ (על קרן אינסופית או על קטע סופי) מתכנס בהחלט אם $\int |f|$ מתכנס. אם $\int f$ מתכנס אך $\int |f|$ לא מתכנס נאמר שההתכנסות היא בתנאי.

<u>משפט.</u> אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז גם $\int_a^\infty f$ מתכנס, ובאופן דומה לאינטגרל המוכלל על קטע סופי.

הוכחה. ההוכחה מיידית בעזרת קריטריון קושי. היות ו- $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |f|$ לכל $b_2 > b_1$, הרי שאם בחירת $b_1, b_2 > B$ מבטיחה כי אגף ימין קטן כרצוננו, אז בודאי שגם אגף שמאל קטן כרצוננו.

ניתן גם הוכחה נוספת שתבהיר יותר טוב מה באמת קורה. נסמן

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) \le 0 \end{cases} \ .$$

שתי הפונקציות האלה אי-שליליות ו- $f = f^+ - f^-$ ואילו $|f| = f^+ + f^-$. אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז ממשפט ההשוואה גם $\int_a^\infty f^+$ וגם $\int_a^\infty f^-$ מתכנסים, ואז מתכנס גם

$$\int_a^\infty f = \int_a^\infty f^+ - \int_a^\infty f^- \ .$$

$\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ מתכנס בהחלט כי $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ ו- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$.

(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס, אך לא בהחלט. לבדיקת ההתכנסות נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

והאינטגרל האחרון מתכנס עפ"י (i). (השתמשנו כאן בכתיבה פורמלית של נוסחת האינטגרציה בחלקים כשהגבול העליון הוא ∞. משמעות הנוסחה - והוכחתה! - היא שלוקחים גבול כאשר $b \to \infty$ בביטויים המתקבלים כשהגבול העליון הוא b).

האינטגרל אינו מתכנס בהחלט כי $|\sin x| \geq \sin^2 x$ ונראה כי $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר: נשתמש בזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, ואז $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \infty$ ואילו $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$ מתכנס, כפי שרואים ע"י אינטגרציה בחלקים כמו בהוכחה ש- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

המשפט הבא יכליל את השיטה שבה הראנו כי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

<u>משפט.</u>[דיריכלה] תהי f רציפה בקרן $[a,\infty)$ כך שהפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ חסומה בקרן. תהי g גזירה בקרן כך שהאינטגרל $\int_a^\infty |g'|$ קיים, וכך ש- $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. אז האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

בפרט התנאי מתקיים כאשר g מונוטונית בקרן חלקית $[c,\infty)$, כי אז יש ל- g' סימן קבוע, ולכן $\int_b^\infty |g'| = \pm \int_b^\infty g' = \mp g(b)$.

הוכחה. אינטגרציה בחלקים נותנת

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = F(t)g(t)\Big|_a^x - \int_a^x F(t)g'(t)dt$$

המחובר הראשון סופי כי $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ ו- F חסומה. המחובר השני מתכנס בהחלט, כי $|F(x)| \leq C$ לכל x ולכן $\int_a^\infty |F(t)g'(t)|dt \leq C\int_a^\infty |g'(t)|dt < \infty$. $\square$

דוגמא (ii) התקבלה עבור $f(x) = \sin x$ ו- $g(x) = x^{-1}$.