חשבון אינפיניטסימלי 1 (104195) - תרגולים

אביב התש"ע

תוכן עניינים

פרק 1

מבוא

1.1 קבוצות מספרים

המספרים המוכרים ביותר (וגם הטבעיים ביותר, ומכאן אולי שמם) הם המספרים הטבעיים: $1, 2, 3, \ldots$. קבוצה זו של מספרים מסומנת $\mathbb{N}$. החיסרון העיקרי של קבוצת המספרים הטבעיים הוא שלא תמיד מתקבל מספר טבעי אם מחסירים שני מספרים טבעיים: לדוגמה, $2 - 3 = -1$, ו־-1 אינו מספר טבעי. אנו אומרים שקבוצת המספרים הטבעיים "אינה סגורה תחת פעולת החיסור" (לא חסרות סיבות לכך שפעולת החיסור, אפילו בחיים היומיומיים, מהווה פעולה חשובה מספיק לכך שנרצה לאפשר חיסור בין כל זוג מספרים).

הפיתרון עתיק היומין הנו להרחיב את קבוצת המספרים כך שתהיה סגורה לפעולת החיסור. התוצאה הנה קבוצת המספרים השלמים (כלומר, מוסיפים את אפס ואת המספרים השליליים): $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. קבוצת מספרים זו מסומנת $\mathbb{Z}$ (מקורו מן המילה הגרמנית "מספרים"). אך גם לקבוצת מספרים זו יש חיסרון ברור: אם קבוצת המספרים הטבעיים לא הייתה סגורה לפעולה ההפוכה לפעולת החיבור, הרי שקבוצת המספרים השלמים אינה סגורה לפעולה ההפוכה לפעולת הכפל: פעולת החילוק. במילים אחרות, אם p ו־q הם שני מספרים שלמים, המספר $\frac{p}{q}$ איננו שלם בדרך כלל (במקרים שבהם הוא שלם, אומרים ש־q מחלק את p).

הפיתרון כאן דומה: מרחיבים את קבוצת המספרים כך שתהיה סגורה לפעולת החילוק. התוצאה היא קבוצת המספרים מהצורה $\frac{p}{q}$ כאשר p, q שלמים: קבוצה זו היא קבוצת המספרים הרציונליים ומסומנת $\mathbb{Q}$ (מן המילה האנגלית "מנה"). דוגמות למספרים רציונליים: $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{9}$. יש לשים לב שכעת כבר לא ניתן לסדר את המספרים "אחד אחרי השני" כפי שהוצגו קבוצות המספרים השלמים והטבעיים. את המובן המדוייק של הערה זו יבארו בקורס "תורת הקבוצות".

<u>הערה:</u> יש לשים לב שתמיד ניתן להניח ש־p ו־q הם שני מספרים זרים: כלומר, שאין אף מספר שלם מלבד 1 (ו־-1) אשר מחלק גם את p וגם את q. בכך נפסל הייצוג $\frac{2}{4}$ (מפני שאז 2 מחלק הן את המונה והן את המכנה, ואפשר היה לצמצם את השבר). מצב זה ־ בו המונה והמכנה הם מספרים זרים ־ נקרא "ייצוג מצומצם", או, בקצרה, אומרים ש־$\frac{p}{q}$ הוא "שבר מצומצם".

בנקודה זו מגיעים למצב שיכול להיות מספק: קבוצת המספרים הרציונליים, $\mathbb{Q}$, סגורה תחת פעולות החיבור, החיסור, הכפל והחילוק. קבוצה כזו, שעליה מוגדרות פעולות חיבור וכפל, ואשר סגורה לחיסור ולחילוק המתאימים, מכונה "שדה". את ההגדרה המדוייקת ואת הדיון במונח "שדה" יתנו בקורס "אלגברה א'". .
בהרצאה תראו שהמספר $\sqrt{2}$, שהוא, לדוגמה, אורכו של האלכסון בריבוע שאורך צלעו 1, איננו מספר רציונלי. להלן דוגמה להוכחת עובדה זו (את ההוכחה המדוייקת, כאמור, תראו בהרצאה): לו היה, הרי שהיו זוג מספרים טבעיים p ו־q כך ש־ $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ - או, במילים אחרות, $p^2=2q^2$. זה אומר שישנו ריבוע בעל אורך צלע שהוא מספר שלם, ששטחו שווה לפעמיים שטח ריבוע אחר בעל אורך צלע שלם גם הוא. נבחר, אם כן, ריבוע כזה בעל אורך צלע קטן ביותר אפשרי ("מינימלי"). על ידי הצבת שני הריבועים הקטנים בשתי פינות מנוגדות של הריבוע הגדול, מוצאים ריבוע קטן יותר בעל אותה תכונה - מה שלא יתכן, אם לקחנו ריבוע מינימלי.

1.2 אינדוקציה

עיקרון האינדוקציה מהווה שיטת הוכחה חשובה ויעילה. הוא מבוסס על תכונה של המספרים הטבעיים: אם קבוצה A של מספרים טבעיים מכילה את המספר 1, ובנוסף מתוך כך שהיא מכילה את המספר n נובע שהיא בהכרח מכילה את המספר העוקב $n+1$, אז בהכרח $A=\mathbb{N}$ (A פשוט מכילה את כל המספרים הטבעיים). מתוך תכונה זו נובע עיקרון האינדוקציה, שגם נותן הנחיה לשיטת ההוכחה באינדוקציה:
עיקרון האינדוקציה: נניח שנתונה סדרה של טענות (כלומר, טענה מס' 1, טענה מס' 2, טענה מס' 3 וכן הלאה) כך שטענה מספר 1 נכונה, וכן מתוך נכונות טענה n נובעת נכונות טענה $n+1$. אז כל הטענות שבסדרה הן טענות נכונות.

$\boxed{1.1}$ הראו כי לכל n טבעי מתקיים

$$1+4+9+16+\cdots+n^2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}.$$

פיתרון:
נשים לב שיש להוכיח, בעצם, "אינסוף שוויונים". הראשון אומר ש־

$$1=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$$

(וזה אכן נכון), השני אומר ש־

$$1+4=\frac{2\cdot(2+1)\cdot(2\cdot 2+1)}{6}$$

(גם זה, ניתן לראות, נכון) וכן הלאה. כלומר, יש לנו למעשה סדרה של שוויונים להוכיח: שוויון מס' 1, שוויון מס' 2 (את שני אלה בדקנו ישירות - אך כמובן לא ניתן לבדוק ישירות

את כולם, הרי יש אינסוף מהם!) וכו'. נוכיח אם כך את הטענה בעזרת עיקרון האינדוקציה: הוא אומר לנו לפעול בשני שלבים;
בסיס האינקודציה: נבדוק ששוויון מס' 1 (או, באופן כללי, טענה מס' 1) נכון.
ואכן, בדקנו זאת לעיל.
צעד האינדוקציה: נוכיח שמתוך נכונות שוויון מס' n נובעת נכונות שוויון מס' $n+1$ (או, באופן כללי, מתוך נכונות טענה מס' n נובעת נכונות טענה מס' $n+1$).
ובכן, נניח שידוע שוויון מס' n, כלומר, שידוע כי אכן

$$1+4+9+16+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

מתוך הנחה זו (אשר מכונה "הנחת האינדוקציה") יש כעת להוכיח את שוויון מס' $n+1$ - כלומר, יש להוכיח כי

$$1+4+9+16+\cdots+(n+1)^2=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

נבצע אם כן את החשבון;

$$\begin{aligned}1+4+9+16+\cdots+(n+1)^2&=\underbrace{1+4+9+16+\cdots+n^2}_{\text{ידוע מהנחת האינדוקציה}}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\&=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6n+6]}{6}=\frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}.\end{aligned}$$

על מנת לסיים את הוכחת שוויון מס' $n+1$, יש אם כן לבדוק ש-

$$2n^2+7n+6=[(n+1)+1][2(n+1)+1].$$

סוף שעה 1

פתיחת סוגריים פשוטה מראה שזה אכן המצב.

1.2 הוכיחו את אי-שוויון ברנולי: לכל $x>-1$ מתקיים

$$(1+x)^n\ge 1+nx$$

לכל מספר טבעי n.

פיתרון:
יש לנו כעת סדרה של אי-שוויונים. נבדוק שאי-השוויון הראשון מתקיים (בסיס האינדוקציה): אכן, אם מציבים $n=1$, מקבלים באגף שמאל של אי-השוויון את המספר $1+x$ ובאגף ימין גם כן את המספר $1+x$. לכן יש למעשה שוויון ואי-השוויון אכן מתקיים. כעת נעבור לצעד האינדוקציה; נניח שאי-שוויון מס' n הוא אכן נכון, כלומר, ש-$(1+x)^n\ge 1+nx$, ונעבור להוכחת אי-שוויון מס' $n+1$.

לצורך כך נבצע את ההערכה

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \underbrace{\geq}_{\text{הנחת האינדוקציה ו־ } 1+x>0} (1+x)(1+nx)$$
$$= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \underbrace{\geq}_{nx^2\geq 0} 1+(n+1)x.$$

הערות:

1. אין באמת חשיבות לכך שמספור הטענות מתחיל מ־1. כלומר, עיקרון האינדוקציה פועל גם אם סדרה מסויימת של טענות מתחילה בטענה מס' 137 (ואז כל הטענות נכונות החל מטענה מס' 137).
2. לפעמים יש צורך לשפר את הנחת האינדוקציה, ובמקום להניח רק את טענה מס' n, כדאי להניח את כל הטענות מהראשונה ועד ל־n. זה מותר והרבה פעמים הכרחי כדי להוכיח את טענה מס' $n+1$.

1.2.1 אי־שוויון הממוצעים

נניח כי $a_1,\ldots,a_n>0$. ישנן מספר דרכים להגדיר את הממוצע שלהם. הדרך המוכרת ביותר היא הממוצע החשבוני,

$$A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

ישנו גם ממוצע אחר, המכונה הממוצע ההנדסי, והמוגדר על ידי

$$G = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

כדאי בהקשר הנוכחי לציין עוד סוג של ממוצע, המכונה הממוצע ההרמוני (הוא יהיה פחות שימושי אך לא מיותר לחלוטין) והמוגדר על ידי

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

די מובן שממוצעים אלה אינם זהים (ניתן לבדוק על ידי דוגמות). מתברר, לעומת זאת, שיש בכל זאת קשר קבוע בין שלושת הממוצעים הנ"ל: תמיד מתקיים $H\leq G\leq A$.

<u>אי שוויון הממוצעים:</u> לכל $a_1,\ldots,a_n>0$ מתקיים

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

במילים, הממוצעים של מספרים חיוביים מקיימים

הרמוני $\leq$ הנדסי $\leq$ חשבוני.

1.3 הוכיחו את אי השוויון בין הממוצע החשבוני להנדסי: לכל $a_1,\dots,a_n > 0$ מתקיים

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

פיתרון:

שיטת ההוכחה כאן מכונה "אינדוקציה לאחור". היא מתבססת בחלקה על אינדוקציה רגילה, ולמעשה הרעיון הוא לחלוטין רעיון של אינדוקציה, אלא שהגישה מעט שונה: במקום להוכיח את נכונות הטענה עבור $n=1$, ואז לעבור מ־n ל־$n+1$, מתברר שכאן דווקא יותר קל (ללא קשר למקרה $n=1$) לבצע את ההיסק ההפוך: קל יותר להוכיח את נכונות הטענה ה־$n-1$ על סמך נכונות הטענה ה־n. יש לשים לב, עם זאת, שגם אם נוכיח את העובדה הנ"ל, עוד לא סיימנו בהוכחת הטענה הכללית: אפשר לומר שחסר "בסיס" (כי כעת המקרה $n=1$ אינו מהווה בסיס מוצלח, היות וההתקדמות היא לאחור). למעשה אף ערך של n לא יכול להוות בסיס: לדוגמה, אם נוכיח את צעד האינדוקציה לאחור, וכן נוכיח בתור בסיס את המקרה $n=5$, הרי שנקבל את נכונות הטענה עבור $n=1,2,3,4,5$ בלבד. לכן בסיס האינדוקציה לאחור מצריך בדיקה של אינסוף מקרים (אך כמובן, לא כולם, שכן אחרת הטענה הכללית עצמה כבר תוכח בשלב הבסיס). לדוגמה, יתכן ונוכל להוכיח כי לכל n זוגי, הטענה נכונה, ויחד עם צעד האינדוקציה לאחור זה כבר יסיים את ההוכחה. אין זה משנה מיהם ערכי n שנבחר לשמש כבסיס, העיקר שיש אינסוף מהם (מפני שאז לכל מספר סידורי יש n אחריו שעבורו הטענה נכונה בזכות בסיס האינדוקציה לאחור, ויחד עם צעד האינדוקציה לאחור הטענה נכונה גם עבור אותו מספר סידורי). נסכם:

<u>בסיס האינדוקציה לאחור:</u> נוכיח כי הטענה נכונה עבור אינסוף ערכים של n - אצלנו, עבור כל החזקות של 2 (בדרך כלל את בסיס האינדוקציה לאחור מוכיחים בעזרת אינקוציה רגילה - ואכן, כך יהיה המקרה גם כאן).

<u>צעד האינקודציה לאחור:</u> נוכיח שאם הטענה נכונה עבור n, אז היא נכונה עבור $n-1$.

נתחיל אם כן בבסיס האינדוקציה לאחור, אותו נוכיח בעזרת אינדוקציה רגילה. נבדוק שכאשר $n=2^k$ (כלומר, כאשר מדובר בממוצעים של 2^k איברים עבור איזשהו k), אי־השוויון אכן מתקיים. נתחיל בבסיס האינדוקציה - כאן, אינדוקציה רגילה על k, ולכן פשוט נבדוק את המקרה $k=1$ (או $n=2$). כלומר, יש לבדוק שאם $a_1,a_2>0$ אזי

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

זאת נבדוק באמצעות ביצוע פעולות הפיכות על אי השוויון אותו יש להוכיח, והגעה לאי שוויון ידוע:

$$2\sqrt{ab} \le a+b \iff 4ab \le (a+b)^2 \iff 4ab \le a^2+2ab+b^2$$
$$\iff 0 \le a^2-2ab+b^2 \iff 0 \le (a-b)^2\,,$$

וזה כמובן נכון. יש לשים לב שכל הפעולות הן אכן הפיכות מפני שמדובר במספרים חיוביים. נעבור כעת לצעד האינדוקציה (הרגילה!). נניח שהטענה נכונה עבור k - כלומר, שלכל בחירה של 2^k מספרים חיוביים מתקיים אי־השוויון -

ונוכיח שהיא נכונה עבור $k+1$. אכן, נבחר 2^{k+1} מספרים חיוביים - שלצורך פשטות הסימון נסמן $a_1, \ldots, a_{2n}$ (כאשר $n = 2^k$ - ואז $2^{k+1} = 2n$), ונעזר בהנחת האינדוקציה ובבסיס האינדוקציה (כאן נעזרים בנכונות בסיס האינדוקציה על מנת להוכיח את צעד האינדוקציה - לפעמים זה נוח):

$$\begin{aligned}\sqrt[2n]{a_1 \cdots a_{2n}} &= \sqrt[2n]{a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \cdots a_{2n}} = \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}\,\sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}}} \\ &\leq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}}}{2} \leq \frac{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}}{2} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}.\end{aligned}$$

סוף שעה 2

כלומר, הטענה נכונה עבור $k+1$.

נעבור כעת לצעד האינדוקציה לאחור. לצורך כך נניח את נכונות אי־השוויון עבור n מספרים, ונוכיח אותו עבור $n-1$. כלומר, נניח כעת שנתונים $a_1, \ldots, a_{n-1} > 0$, ונרצה להוכיח כי

$$\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.$$

לצורך כך נתבונן ב־n המספרים החיוביים $a_1, \ldots, a_{n-1}, A$, כאשר A הנו הממוצע החשבוני של $a_1, \ldots, a_{n-1}$ (כלומר, משלימים את $n-1$ המספרים המקוריים ל־n מספרים על ידי הוספת הממוצע החשבוני שלהם. מובן היה שנצטרך לבצע השלמה כלשהי ל־n מספרים, הרי ברצוננו להשתמש בנכונות אי־השוויון עבור n, והממוצע החשבוני של $n-1$ המספרים נראה בחירה נבונה במצב הנוכחי). כעת, על סמך הנחת האינדוקציה לאחור, ידוע כי

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1} \cdot A} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + A}{n}.$$

אך החשבון הפשוט

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + A}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = A$$

מוכיח שניתן כעת להסיק (על ידי חלוקת שני אגפי אי־השוויון ב־$\sqrt[n]{A}$) כי

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leq A^{1-\frac{1}{n}}$$

או, אם נעלה בחזקת n, כי

$$a_1 \cdots a_{n-1} \leq A^{n-1}.$$

אך כעת הוצאת שורש מסדר $n-1$ מאי־השוויון מסיימת את ההוכחה!

<u>הערות:</u>

1. בניסוח אי־השוויון נדרש שכל המספרים $a_1, \ldots, a_n$ יהיו חיוביים. אין זה באמת הכרחי שהם לא יהיו אפס - כלומר, די לדרוש שכל המספרים הם אי־שליליים. די שאחד מהם יהיה אפס על מנת שהממוצע ההנדסי יהיה אפס, ובכך אי־השוויון מתקיים בבירור.

2. הממוצע החשבוני וההנדסי שווים אם ורק אם כל המספרים להם עושים ממוצע הם בעצם אותו מספר - כלומר, $a_1 = \cdots = a_n$. אחרת, אי־השוויון הוא אי־שוויון "אמיתי" (או "חריף").

$\boxed{1.4}$ הוכיחו את אי־השוויון בין הממוצע ההנדסי להרמוני: לכל $a_1, \ldots, a_n > 0$ מתקיים

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

זה ישלים את הוכחת אי־שוויון הממוצעים.

פיתרון:
נסמן $b_i = \frac{1}{a_i}$. נקבל מספרים חיוביים $b_1, \ldots, b_n$, שלכן מתקיים עבורם (על סמך התרגיל הקודם) אי־השוויון

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}.$$

נציב חזרה $b_i = \frac{1}{a_i}$ ונקבל

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

מכך נובע בדיוק אי־השוויון הרצוי.

הערה: ניתן היה אולי "לחשוש" שתידרש עוד הוכחה ארוכה כמו עבור הוכחת אי־השוויון בין הממוצע החשבוני להנדסי, אבל למעשה השתמשנו בידע הקודם על אי־השוויון הזה כדי להסיק בקצרה את אי־השוויון המבוקש.

1.3 הערך המוחלט

הגדרת הערך המוחלט (אשר הנו מושג מוכר - לדוגמה, $|-2| = 2$ וכן הלאה) היא

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

$\boxed{1.5}$ הראו כי עבור $a > 0$, $|x| < a$ אם ורק אם $-a < x < a$.

הערה: השקילות שבתרגיל נכונה גם אם מחליפים בכל מקום את "$<$" ב־"$\leq$".

פיתרון:

בהוכחת שקילות ("אם ורק אם") יש למעשה שני דברים להוכיח; מתייחסים אל שני הדברים האלה בדרך כלל בתור "כיוונים". ה"כיוון" הראשון הוא: אם $|x| < a$ אזי $-a < x < a$. הכיוון השני (שהוא הכיוון ה"הפוך") הוא: אם $-a < x < a$ אזי $|x| < a$ (לפעמים ניתן יהיה להוכיח את שני הכיוונים "בבת אחת", בעזרת סדרת שקילויות ידועות - $A \iff B \iff C$ מוכיח כי $A \iff C$, אך בדרך כלל יהיה צורך ממש להפריד בין הוכחות שני הכיוונים).

$\boxed{\text{כיוון ראשון}}$

נניח כי $|x| < a$. ישנן תמיד שתי אפשרויות: הגדרת הערך המוחלט מרמזת על כך שכדאי להפריד את הדיון כתלות בסימנו של x. ואכן, אם $x \geq 0$ הרי ש־$|x| = x$, ואז ההנחה אומרת $0 \leq x < a$. היות וממילא $-a < 0$, מובן כי $-a < x < a$. במקרה השני, בו $x < 0$, נובע מהגדרת הערך המוחלט כי $-x < a$. במילים אחרות, ידוע כי $-a < x < 0$. היות וממילא $0 < a$, מובן כי $-a < x < a$.

$\boxed{\text{כיוון שני}}$

בכיוון ההפוך, נניח כי ידוע ש־$-a < x < a$. כדאי אם כך להפריד שוב לאותם שני מקרים; אם $x \geq 0$, הרי ש־$|x| = x < a$ כרצוי. אם $x < 0$, הרי ש־$|x| = -x < a$, שכן $-a < x$. בשני המקרים, אם כך, בהכרח $|x| < a$.

הערה: פעמים רבות "יעמוד" במקום x איזשהו ביטוי מסובך יותר, ויהיה צורך להשתמש בשקילות הנ"ל במקרה כזה. לדוגמה, $|x-4| < 1$ אם ורק אם $-1 < x - 4 < 1$ (את התרגיל הוכחנו לכל x, ולכן הוא נכון בהצבת כל ביטוי שהוא במקום x - שכן בסך הכל מדובר במספרים).

$\boxed{\text{סוף שעה 3}}$

$\boxed{1.6}$ הראו שאם $|x-3| < 1$ אזי $\left|\frac{x^2-10x+21}{x+4}\right| < \frac{5}{6}$.

פיתרון:

ראשית נעיר שהנקודה $x = -4$ (אשר מאפסת את המכנה של הביטוי השני) אינה מקיימת את אי־השוויון $|x-3| < 1$. כלומר, אם $|x-3| < 1$, ממילא $x \neq -4$ ובכך הביטוי השני אכן מוגדר (אילולא היה מוגדר צריך היה אולי לציין בניסוח השאלה ש־$x \neq -4$, אך בדרך כלל מניחים שזה מובן שנמנעים מערכים אסורים של x). נפרק כעת את המונה

$$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)\,,$$

ונסיק שיש להוכיח את אי־השוויון

$$\left|\frac{(x-3)(x-7)}{x+4}\right| < \frac{5}{6}$$

מתוך כך שידוע כי $|x-3| < 1$. הביטוי $\frac{|x-7|}{|x+4|}$ אי־שלילי, ולכן הכפלתו במספר קטן מ־1 לא תוכל להגדיל אותו. כלומר,

$$|x-3|\,\frac{|x-7|}{|x+4|} \leq \frac{|x-7|}{|x+4|}.$$

לשם הערכת הביטוי האחרון, ניעזר בתרגיל הקודם ומתוך $|x-3|<1$ נסיק כי $-1<x-3<1$ ־ או $2<x<4$. אך זה אומר ש־$-5<x-7<-1$, ולכן $|x-7|<5$, וכן ש־$6<x+4<8$, ולכן $|x+4|>6$. בסך הכל המונה של $\frac{|x-7|}{|x+4|}$ תמיד קטן מ־5, בעוד המכנה תמיד גדול מ־6. לכן

$$\left|\frac{(x-3)(x-7)}{x+4}\right| \leq \frac{|x-7|}{|x+4|} < \frac{5}{6}.$$

1.4 קבוצות חסומות

$\boxed{1.7}$ עבור קבוצה A, נסמן $|A|=\{|x| \mid x\in A\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $|A|$ חסומה מלעיל אזי A חסומה מלעיל.

ב. אם A חסומה מלעיל אזי $|A|$ חסומה מלעיל.

ג. הקבוצה $|A|$ חסומה אם ורק אם הקבוצה A חסומה.

פיתרון:

א. אם $|A|$ חסומה מלעיל, הרי שקיים חסם מלעיל M ־ כלומר, כזה שעבור כל $y\in|A|$ מקיים $y\leq M$. נראה כי M משמש כחסם מלעיל גם עבור A.
יהי $x\in A$. אזי מהגדרת הקבוצה $|A|$ נובע כי $|x|\in|A|$, ומכך $|x|\leq M$.
אך היות ותמיד מתקיים $x\leq|x|$, נקבל בסך הכל כי $x\leq M$. כלומר, לכל $x\in A$, מתקיים $x\leq M$. לכן M הוא חסם מלעיל של A.

ב. טענה זו שגויה: ניקח כדוגמה את הקבוצה $A=(-\infty,2)$. קבוצה זו אכן חסומה מלעיל (למשל, על ידי 2), אך כאן $|A|=[0,\infty)$ ־ וזו אינה קבוצה חסומה מלעיל.

ג. ראשית כדאי לשים לב ש־$|A|$ חסומה מלרע על ידי 0, ללא חשיבות ל"זהותה" של הקבוצה A. אכן, כל מספר ב־$|A|$ הוא אי־שלילי. נוכיח כעת את השקילות שבסעיף.
בכיוון הראשון, נניח כי $|A|$ חסומה. אם כך היא חסומה מלעיל, ולכן קיים M שעבורו $y\leq M$ לכל $y\in|A|$. נשים לב כי היות וממילא $0\leq y$ לכל $y\in|A|$, נובע מכך כי $0\leq M$. לכן לכל $x\in A$ (היות ו־$|x|\in|A|$) מתקיים $|x|\leq M$. במילים אחרות, לכל $x\in A$ מתקיים $-M\leq x\leq M$. כלומר, M הנו חסם מלעיל ו־$-M$ הנו חסם מלרע, ועל כן A חסומה.
בכיוון ההפוך, נניח כי A חסומה ־ כלומר, היא חסומה הן מלעיל והן מלרע. לכן ישנם M_1 ו־M_2 כך שלכל $x\in A$ מתקיים $M_1\leq x\leq M_2$. נסמן כעת $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$; נשים לב כי אם $x\in A$ אזי

$$-M\leq M_1\leq x\leq M_2\leq M$$

ועל כן $|x| \le M$. במילים אחרות, לכל $y \in |A|$ מתקיים $y \le M$ (הרי כל איבר ב־$|A|$ הוא $|x|$ עבור איזשהו $x \in A$). היות וממילא $|A|$ חסומה מלרע על ידי 0, נקבל כי היא חסומה.

הערה: ברוב המקרים, כאשר מנסים להוכיח שקבוצה A חסומה, מוכיחים ש־$|x| \le M$ לכל $x \in A$ עבור איזשהו $M \ge 0$.

1.8 מצאו את החסם העליון ואת החסם התחתון של הקטע $[2,7)$.

פיתרון:
ראשית נשים לב ש־$2 = \min\,[2,7)$. אכן, מעצם הגדרת הקטע הנתון כ־

$$[2,7) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 7\}$$

נובע כי לכל $x \in [2,7)$ מתקיים $x \ge 2$. היות ו־2 אכן שייך לקטע, נובע מכך שהוא המינימום שלו (יש לשים לב: המינימום של קבוצה A חייב להיות אחד האיברים ב־A!). ידוע כי אם בקבוצה מסויימת יש מינימום, הרי שאותו מינימום הוא בהכרח החסם התחתון - ולכן $\inf\,[2,7) = 2$.
נעבור כעת לחסם העליון. מובן שהמועמד הראוי הוא המספר 7 - אך יש לשים לב כי כעת 7 אינו המקסימום, מפני שהוא אינו שייך לקטע הנתון (אפשר לומר שהחסם העליון מאתר את מי שהיה "אמור" להיות המקסימום)! לכן אין ברירה אלא להשתמש באפיון הישיר של החסם העליון בתור חסם מלעיל קטן ביותר: מובן (שוב, לדוגמה, מהגדרת הקטע לעיל) כי 7 הוא חסם מלעיל - שכן לכל $x \in [2,7)$ מתקיים $x < 7$, ולכן נותר להראות שהוא הקטן ביותר. לצורך כך ניעזר בלמה האומרת כי כל מה שנותר להראות הוא שלכל $\epsilon > 0$ קיים $x_0 \in [2,7)$ המקיים $x_0 > 7 - \epsilon$ (בכך נראה ש־$7 - \epsilon$ אינו חסם מלעיל לאף $\epsilon > 0$, כלומר, אין אף מספר קטן מ־7 שהוא חסם מלעיל. זה באופן ישיר מוכיח ש־7 הוא החסם העליון).
אכן, יהי $\epsilon > 0$. נתבונן במספר $7 - \epsilon/2$; מובן שהמספר הזה גדול מ־$7 - \epsilon$, וכן מובן שאם $\epsilon/2$ אינו גדול מדי, אזי $7 - \epsilon/2 \in [2,7)$. הבעיה מתעוררת כאשר ϵ הנו כה גדול ש־$7 - \epsilon/2 < 2$ - אך אז, כמובן, $7 - \epsilon$ בעצמו גם קטן מ־2, ולכן המספר 2 (שאכן שייך לקטע הנתון) יעבוד בתור x_0. לכן בסך הכל הבחירה $x_0 = \max\{7 - \epsilon/2, 2\}$ תעשה את העבודה. כלומר, $\sup\,[2,7) = 7$.

1.9 מצאו את $\inf_{n \ge 2} \sqrt[n]{n}$.

הערה: צורת הכתיבה שבשאלה אולי נראית לא "חוקית", אך לפעמים מקצרים מעט וכותבים בצורה זו. הכוונה היא, עבור הקבוצה $A = \{\sqrt[n]{n} \mid 2 \le n \in \mathbb{N}\}$, למצוא את $\inf A$ (בבחירת האות n מניחים שמובן שמדובר במספרים שלמים בלבד).

<u>פיתרון:</u>
נתחיל בכך שנעיר ש־1 הנו בוודאי חסם מלרע של A (אכן, $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$ היות ו־$n \geq 1$). לכן נותר להוכיח שלכל $\epsilon > 0$ יש איזשהו איבר בקבוצה A, דהיינו, איזשהו $\sqrt[n]{n}$, כך ש־$\sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$ (לו המספר $n = 1$ היה מותר, הרי ש־1 היה שייך לקבוצה A ובכך היה המינימום שלה. אך היות ונשלל המקרה $n = 1$ בהגדרת A, יש לעבוד מעט יותר קשה).
במילים אחרות, יש למצוא מספר טבעי $n \geq 2$ כך ש־$n < (1+\epsilon)^n$. לצורך כך ניעזר בבינום של ניוטון, שאומר במקרה זה

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \epsilon^j 1^{n-j} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} 1 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\frac{n!}{1!(n-1)!}} \epsilon + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n!}{2!(n-2)!}} \epsilon^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} \epsilon^n.$$

כלומר, $(1+\epsilon)^n$ שווה ל־$\frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$ (האיבר השלישי בבינום הנ"ל) ועוד סכום של איברים חיוביים. מכאן ש־

$$(1+\epsilon)^n > \frac{n\,(n-1)}{2}\epsilon^2.$$

ניעזר באי־שוויון זה (שהוכחנו בעזרת הבינום של ניוטון) כדי למצוא n מתאים; אם רק נמצא $n \geq 2$ כך ש־$n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$, הרי שבוודאי יתקיים אי־השוויון המבוקש, ותסתיים הוכחת העובדה ש־$\inf A = 1$. אך אם "נפתור עבור n" את אי־השוויון האחרון, נקבל

$$n > 1 + \frac{2}{\epsilon^2}.$$

זה אומר שאי־השוויון $\frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 > n$ מתקיים אם ורק אם $n > 1 + \frac{2}{\epsilon^2}$, כלומר, אם רק נבחר כל n טבעי הגדול מ־2 ומ־$1 + \frac{2}{\epsilon^2}$, נקבל n כדרוש. בנקודה זו ההוכחה הושלמה, אך ניתן לייצג כנוסחה איזשהו n כנ"ל על ידי

$$n_0 = \max\left\{2, \left\lceil 1 + \frac{2}{\epsilon^2} \right\rceil\right\} + 1.$$

סוף שעה 5

<u>הערה:</u> שני הסימונים $\lfloor x \rfloor$ ו־$\lceil x \rceil$ מסמנים את ה"ערך השלם התחתון" ואת ה"ערך השלם העליון" בהתאמה של המספר x. זהו בסך הכל סימון ומינוח שנועד לקצר את האמרה "נעגל את x כלפי מטה" או "נעגל את x כלפי מעלה" בהתאמה. לדוגמה,

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \qquad \lceil \pi \rceil = 4.$$

מובן שתמיד מתקיים $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, ולכן לפעמים אפילו לא טורחים לתת סימון לערך השלם העליון, ומסמנים את הערך השלם התחתון ב־$[x]$ (במקום ב־$\lfloor x \rfloor$). ההגדרה המדוייקת, אם כן, של הערך השלם התחתון היא

$$[x] = \max\left\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\right\}.$$

אך בהגדרה זו יש הנחה סמויה! מובן שהקבוצה הנ"ל, של המספרים השלמים הקטנים או שווים ל־x, חסומה מלעיל: הרי x מהווה חסם מלעיל, מעצם הגדרתה.

לכן, על סמך אקסיומת השלמות, קיים לקבוצה זו כמובן חסם עליון. אך בכתיב לעיל נכתב במפורש שהערך השלם התחתון הוא המקסימום ־ מדוע, אם כך, קיים המקסימום?

1.10 תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים שלמים. הראו כי ב־A יש איבר מקסימלי.

<u>פיתרון:</u>

נניח בדרך השלילה שזה אינו המצב. כלומר, $\sup A \notin A$ (לקבוצה A חסומה מלעיל יש מקסימום אם ורק אם $\sup A \in A$ ־ ואז, $\max A = \sup A$). נסמן את החסם העליון ב־M, נשתמש באפיון החסם העליון ונגיע למסקנה שלכל $\epsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$a > M - \epsilon$.

נשתמש בעובדה זו פעמיים: ראשית נבחר $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$, ונסמן ב־a_1 את האיבר המתאים ־ כלומר, $a_1 \in A$ מקיים $a_1 > M - \frac{1}{2}$. כעת ניעזר בעובדה ש־$a_1 \neq M$ (הרי האחד שייך ל־A והשני לא), ונסמן את המרחק בינהם ב־$\epsilon_2 = |M - a_1|$. זה, כמובן, מספר קטן מ־$1/2$ (אכן, ידוע כי $0 < M - a_1 < \frac{1}{2}$, כאשר כל אי־שוויון נובע מהנ"ל). כאמור, $\epsilon_2 > 0$ ולכן קיים $a_2 \in A$ כך ש־$a_2 > M - \epsilon_2$. אך נשים לב כעת, כי מעצם בחירת ϵ_2, נובע כי $a_1 = M - \epsilon_2$; לכן $a_1 \neq a_2$, שניהם ב־A, ושניהם נמצאים בין $M - \frac{1}{2}$ לבין M. על כן המרחק בין a_1 לבין a_2 קטן מ־$1/2$, דבר שלא יתכן עבור שני מספרים שלמים שונים (שכן המרחק בין כל שני מספרים שלמים שונים הוא לכל הפחות 1). זו סתירה, ועל כן $\sup A \in A$ ול־A אכן יש מקסימום.

פרק 2

סדרות של מספרים ממשיים

2.1 גבול סופי

2.1.1 הגדרת הגבול

$\boxed{2.1}$ הראו על פי הגדרה כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n-7}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

פיתרון:

יש להראות שלכל $\epsilon > 0$ נתון קיים מספר טבעי N (התלוי בדרך כלל בערכו של ϵ!) כזה שכל איברי הסדרה שממוקמים אחרי האיבר ה־N מרוחקים מהגבול המוצע פחות מ־ϵ. כלומר, יש למצוא N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\left|\frac{n-7}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

ובכן, נניח שנתון $\epsilon > 0$. נסמן $N = \max\left\{1, \left[\frac{17-6\epsilon}{4\epsilon}\right]\right\} + 1$. נראה ש־$N$ מתאים (כאן רואים תלות מפורשת של N ב־ϵ! כצפוי, ככל ש־ϵ קטן, ה־N המתאים לו גדל). לצורך כך ניקח איזשהו $n > N$, ונעריך

$$\left|\frac{n-7}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-14-2n-3}{2\left(2n+3\right)}\right| = \frac{17}{2\left(2n+3\right)} < \frac{17}{2\left(2N+3\right)}.$$

אי־השוויון נכון מפני שעל ידי הקטנת המכנה (הרי $n > N$) מגדילים את ערכו של השבר כולו. כעת ניזכר בהגדרתו המדוייקת של N; יתקיים ש־$N = 2$ אם $\left[\frac{17-6\epsilon}{4\epsilon}\right] < 1$. זה קורה כאשר $\frac{17-6\epsilon}{4\epsilon} < 1$, או (על ידי פתירת אי־שוויון זה "עבור ϵ") אם $\epsilon > \frac{17}{10}$. במקרה זה נקבל

$$\left|\frac{n-7}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \frac{17}{2\left(2N+3\right)} = \frac{17}{14} < \frac{17}{10} < \epsilon.$$

במקרה השני, בו $\epsilon < \frac{17}{10}$, נקבל $N = \left[\frac{17-6\epsilon}{4\epsilon}\right] + 1 > \frac{17-6\epsilon}{4\epsilon}$, ואז

$$\left|\frac{n-7}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \frac{17}{2\left(2N+3\right)} < \frac{17}{2\left(\frac{17-6\epsilon}{2\epsilon} + 3\right)} = \epsilon.$$

כלומר, בכל מקרה, מתקיים

$$\left|\frac{n-7}{2n+3}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon$$

בכל פעם ש־$n>N$.

הערות:

1. השאלה הברורה שנשארה ללא מענה היא "כיצד מוצאים N מתאים". כאן ניתן N, שהתברר כמתאים, כב"דרך קסם", אך עלינו ללמוד את הסוד שמאחורי ה"פעלול" (ואכן, התרגילים הבאים מיועדים בדיוק לכך).

2. להוציא הדוגמות הפשוטות ביותר, לעולם לא נגיע (ולא ננסה להגיע) ל־N "טוב ביותר". כלומר, יתכן שאפשר היה למצוא N "טוב יותר" (קטן יותר) שכבר ממנו איברי הסדרה קרובים לגבול. אין לכך חשיבות מבחינת הגדרת הגבול, והעיקר שמצאנו איזשהו N, גדול ככל שיהיה.

סוף שעה 6

$\boxed{2.2}$ הראו על פי הגדרה שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}=2$.

פיתרון:
בהנתן $\epsilon>0$, יש למצוא N מתאים (כלומר, שממנו והלאה כל איברי הסדרה קרובים לגבול "עד כדי" מרחק ϵ). ובכן, יהי $\epsilon>0$. נעריך את המרחק בין האיבר במקום ה־n (כרגע, n הוא סתם איזשהו מספר טבעי, בלי מגבלות כמו "גדול מ־20") של הסדרה לבין הגבול המשוער:

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right|=\left|\frac{2n^2-7n+8-2n^2-6n-18}{n^2+3n+9}\right|=\left|\frac{-13n-10}{n^2+3n+9}\right|.$$

כעת, מובן שהמכנה תמיד חיובי ושהמונה תמיד שלילי, ולכן הערך המוחלט הוא בדיוק

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right|=\frac{13n+10}{n^2+3n+9}.$$

מובן שביטוי זה לא יהיה בהכרח קטן מ־ϵ; זה תלוי בערכם של ϵ ושל n. המטרה היא למצוא N, התלוי עקרונית בערכו של ϵ, שמהווה "רף" בכך שממנו והלאה (כלומר, לכל $n>N$), הביטוי הנ"ל כן יהיה קטן מ־ϵ. במילים אחרות, יש לוודא שאי־השוויון

$$\frac{13n+10}{n^2+3n+9}<\epsilon$$

אכן מתקיים החל מערך מסויים של n. הדרך ההגיונית ביותר להמשיך מכאן היא פשוט לפתור את אי־השוויון האחרון "עבור n", כלומר, למצוא בדיוק את הערכים של n שעבורם אי־השוויון מתקיים, ולהיווכח ש, מלבד אולי קצת "בלגן" בהתחלה, זה מתקיים לכל n החל ממקום מסויים.
הבעייה מתעוררת ברוב המקרים (כמו כאן) פשוט מכיוון שאי־השוויון קשה

לפיתרון. לכן יש לבצע הערכות בצורה שנגיע לאי־שוויון אשר קל יותר לפיתרון, ועדיין מתקיים החל ממקום מסויים. הדרך הטובה ביותר להבין היא פשוט לעשות; נבצע הערכה (ש, יש לקוות, לא תהיה גסה מדי)על ידי

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right| = \frac{13n+10}{n^2+3n+9} < \frac{23n}{n^2} = \frac{23}{n}.$$

אכן, היות ו־$n > 1$ הרי ש־$10n > 10$, ובנוסף על ידי הקטנת המכנה ("וויתור" על נסכמים חיוביים) מגדילים את ערכו של השבר כולו. אך זה אומר שאנו כעת יודעים שאם $\frac{23}{n} < \epsilon$ הרי שבוודאי

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right| < \epsilon.$$

כלומר, די לוודא שמתקיים $\frac{23}{n} < \epsilon$ החל ממקום מסויים, ובכך נהיה בטוחים שלפחות החל מאותו מקום, גם מתקיים

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right| < \epsilon.$$

יתכן, כמובן, שאי־השוויון האחרון גם מתקיים לפני המקום שנמצא עבור אי־השוויון $\frac{23}{n} < \epsilon$, אך לכך אין חשיבות.
ובכן, אי־השוויון $\frac{23}{n} < \epsilon$ מתקיים אם ורק אם $n > \frac{23}{\epsilon}$. כלומר, אם נסמן $N = \left[\frac{23}{\epsilon}\right]$, נקבל שאם $n > N$ אזי $\frac{23}{n} < \epsilon$ ולכן

$$\left|\frac{2n^2-7n+8}{n^2+3n+9}-2\right| < \epsilon.$$

לכן אכן מצאנו, לכל $\epsilon > 0$ נתון, איזשהו מקום ־ $N = \left[\frac{23}{\epsilon}\right]$ ־ שממנו והלאה איברי הסדרה קרובים ל־2 עד כדי מרחק ϵ.

<u>הערות:</u>

1. הרעיון הוא לבצע הערכות (ולמעשה, סוג מאוד מסויים של הערכות: תמיד "מגדילים" את הביטוי עוד ועוד) עד שמגיעים בסופו של דבר לביטוי ש"קל לבדוק" מתי הוא קטן מ־ϵ. כלומר, עד שמגיעים לאי־שוויון שניתן לפתור.

2. הפיתרון של התרגיל, שלא כמו בדוגמה הראשונה, יוצר אולי רושם של בלגן קל. הסיבה היא שבדוגמה הראשונה, כל תהליך מציאת ה־N נעשה "ברקע" (כלומר, בטיוטה) ונכתב פיתרון "אלגנטי" יותר ללא הצגת שלבי המחשבה בדרך. שתי דרכי הפיתרון מקובלים, אך כמובן שבשביל לרשום פיתרון מסודר יש להשתמש בטיוטה כדי למצוא את ה־N המתאים.

3. לפעמים דוגמה עוזרת להבין: נתבונן במקרה $\epsilon = 0.001$. במקרה זה, $N = 23,000$. כלומר, כל איברי הסדרה החל מהמקום ה־$23,000$ נמצאים במרחק של לכל היותר אלפית מ־2.

$\boxed{2.3}$ הראו על פי הגדרה שמתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+4} = \frac{2}{3}$.

פיתרון:
יהי $\epsilon > 0$. נעריך את המרחק

$$\left|\frac{2n-1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{6n-3-6n-4}{9n+12}\right| = \frac{7}{9n+12} < \frac{7}{9n}.$$

לכן אם נבחר $N = \left[\frac{7}{9\epsilon}\right] + 1$, הרי שאם $n > N$ מתקיים

$$\left|\frac{2n-1}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \frac{7}{9n} < \frac{7}{9N} \leq \epsilon.$$

הערות:

1. הפיתרון הקצר של התרגיל האחרון מכיל בדיוק את רמת הפירוט המינימלית.
2. אין באמת חשיבות לכך ש־N טבעי, מלבד העובדה שהוא מסמל מספר סידורי שממנו והלאה מתקיים תנאי מסויים. למעשה, אם מוצאים מספר ממשי שכל מספר טבעי גדול ממנו מתאים בהגדרת הגבול, הרי שזה מספיק. בדרך כלל לא נקפיד על כך ש־N טבעי.

$\boxed{2.4}$ הראו בעזרת ההגדרה כי לא מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+4} = 2$.

פיתרון:
יש לפרש נכון את ניסוח השאלה: לא ניתנה הגדרה ל־"הגבול של סדרה אינו 2". ישנה הגדרה לכך שהגבול הוא כן 2, ויש להוכיח כעת שתנאי ההגדרה אינם מתקיימים. זה יוכיח שהגבול אינו 2.
על מנת שהגבול יהיה 2, עבור כל $\epsilon > 0$ חייב להיות קיים איזשהו מספר טבעי N, כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\frac{2n-1}{3n+4} - 2\right| < \epsilon$. לכן הגבול אינו 2 אם נוכל למצוא איזשהו $\epsilon > 0$ כך שלכל N טבעי יש איזשהו $n > N$ המקיים $\left|\frac{2n-1}{3n+4} - 2\right| \geq \epsilon$ (שכן בכך נראה שעבור אותו ϵ אף N אינו מתאים, כלומר, לא קיים N כנדרש).
נעריך את המרחק

$$\left|\frac{2n-1}{3n+4} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-6n-8}{3n+4}\right| = \frac{4n+9}{3n+4} \geq \frac{4n}{4n+4n} = \frac{1}{2}.$$

כלומר, לכל n טבעי מתקיים כי $\left|\frac{2n-1}{3n+4} - 2\right| > \frac{1}{2}$! בכך הוכחנו שעבור $\epsilon = \frac{1}{2}$, אף ערך של N לא יכול להתאים, שכן תמיד יהיה מספר טבעי גדול מ־N (למעשה - כולם!) שעבורו המרחק של איבר הסדרה המתאים מ־2 גדול מ־$\epsilon = \frac{1}{2}$.

הערות:

1. בתרגיל הקודם ראינו שהגבול הוא למעשה $\frac{2}{3}$. היות ולאותה סדרה לא יכולים להיות שני גבולות שונים, נובע ש־2 אינו יכול להיות הגבול. זהו טיעון קצר יותר אך אינו עונה להנחיה: "על פי ההגדרה".

2. הפסוק "קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל N טבעי קיים $n > N$ עבורו $|a_n - L| \geq \epsilon$" הנו הפסוק ההפוך להגדרת הגבול. כדאי להבין את הלוגיקה שמאחורי פעולה זו, של "שלילת" פסוק או טענה.

3. בפיתרון התרגיל הראינו משהו הרבה יותר "חזק" מאשר סתם שלילת הגדרת הגבול: הראינו שכל n טבעי מקיים את התנאי $|a_n - L| \geq \epsilon$, בעוד נדרשנו רק להוכיח שיש n־ים גדולים כרצוננו ("לכל N יש $n > N$") המקיימים זאת. מצב זה, בו כל ה־n־ים, או כולם החל ממקום מסויים, מקיימים את התנאי $|a_n - L| \geq \epsilon$, אופייני למצב בו הסדרה בעצם כן מתכנסת, אך לגבול אחר (כאן אכן ידוע שהסדרה מתכנסת ל־$\frac{2}{3}$). זה כמובן יכול לקרות גם כאשר הסדרה אינה מתכנסת לגבול אחר, אך לא תמיד.

$\boxed{2.5}$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת את התנאי הבא: קיים N טבעי כך שלכל $\epsilon > 0$ מתקיים, לכל $n > N$, אי־השוויון $|a_n - L| < \epsilon$. הראו שהסדרה a_n למעשה קבועה החל מהמקום ה־$N+1$.

כלומר, אלא אם הסדרה קבועה החל ממקום מסויים, ה־N שנמצא חייב להיות תלוי איכשהו ב־ϵ; אין N "אוניברסלי" לכל ה־ϵ־ים.

<u>פיתרון:</u>
נניח בשלילה שזה אינו המצב. אם כך קיים $n > N+1$ כך ש־$a_{N+1} \neq a_n$. נסמן $\epsilon = \frac{|a_n - a_{N+1}|}{2}$; נקבל, היות ו־$n > N$, $N+1$, כי

$$2\epsilon = |a_n - a_{N+1}| \leq |a_n - L| + |a_{N+1} - L| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon,$$

כלומר, $\epsilon < \epsilon$, שזו כמובן סתירה!

<u>הערה:</u> ניתן היה לגשת לפיתרון באופן מעט שונה: לכל $\epsilon > 0$ וזוג מספרים $n, k > N$ מתקיים (שוב על פי אי־שוויון המשולש) $|a_n - a_k| < 2\epsilon$. היות וזה נכון לכל $\epsilon > 0$ (כאשר n ו־k כעת קבועים!), בהכרח $|a_n - a_k| = 0$ (הרי המספר האי־שלילי היחיד שקטן מכל מספר חיובי שהוא הוא 0), ומכך $a_k = a_n$.

2.1.2 אריתמטיקה של גבולות

$\boxed{2.6}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 7n + 9}{4n^3 + 10n - 3}$.

<u>פיתרון:</u>
היות ולא נתבקשנו להשתמש בהגדרה בלבד (כמו בתרגילים הקודמים), נוכל

להשתמש בכלים אחרים, המתבססים כמובן על ההגדרה, אשר יעילים יותר לרוב לחישוב גבולות. בתור שלב ראשון נרשום

$$\frac{3n^3-5n^2+7n+9}{4n^3+10n-3}=\frac{\frac{3n^3-5n^2+7n+9}{n^3}}{\frac{4n^3+10n-3}{n^3}}=\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{9}{n^3}}{4+\frac{10}{n^2}-\frac{3}{n^3}}.$$

כעת נעיר שכל הביטויים $\frac{5}{n}$, $\frac{7}{n^2}$, $\frac{9}{n^3}$, $\frac{10}{n^2}$ ו־$\frac{3}{n^3}$ מתכנסים ל־0 כאשר $n\to\infty$ (כל אחד מאלו מהווה תרגיל קל בחישוב גבול לפי הגדרה, והמקרה הכללי יופיע בתרגילי הבית). לכן על סמך המשפט על אריתמטיקה של גבולות, המונה בביטוי הנ"ל מתכנס ל־$3=3-0+0+0$, בעוד המכנה מתכנס ל־$4=4+0-0$. כעת, שוב לפי אריתמטיקה של גבולות (כעת לגבי מנה של שתי סדרות, כאשר הגבול של המכנה אינו אפס), היות והגבול של המכנה הוא $4\neq 0$, הרי שהגבול של השבר הוא מנת הגבולות, כלומר, $\frac{3}{4}$.
את כל ההסבר הנ"ל בדרך כלל נכתוב בקצרה כך: לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\frac{3n^3-5n^2+7n+9}{4n^3+10n-3}=\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{9}{n^3}}{4+\frac{10}{n^2}-\frac{3}{n^3}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3-0+0+0}{4+0-0}$$

היות והגבול של המכנה אינו אפס.

סוף שעה 8

2.7 נניח ששני הגבולות $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ ו־$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)$ קיימים. הראו שהגבול $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ גם קיים.

פיתרון:
כדאי לשים לב שמעצם טבעה של הגדרת הגבול, בדרך כלל כדאי לנחש ראשית מהו הגבול אם רוצים להוכיח שהוא קיים. כאן אין ניחוש מובן מאליו, וניתן לצפות שגם אם היה, ההתעסקות עם ההגדרה אינה נוחה.
אך לעזרתנו באה אריתמטיקה של גבולות, מכיוון ש־

$$(a_n+b_n)^2=a_n^2+2a_nb_n+b_n^2,$$

ולכן

$$a_nb_n=\frac{1}{2}\left[(a_n+b_n)^2-\left(a_n^2+b_n^2\right)\right].$$

כלומר, הצגנו את הסדרה המבוקשת כמתקבלת בעזרת פעולות אריתמטיות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) מהסדרות המתכנסות הנתונות. לכן על סמך המשפט על אריתמטיקה של גבולות, הסדרה אכן מתכנסת, וגבולה אף נתון על ידי הפעלת אותן פעולות אריתמטיות על הגבולות של שתי הסדרות (להם לא הקננו סימון).

הערה: יש לשים לב כי בשום אופן אין להסיק ש־a_n ו־b_n מהוות סדרות מתכנסות. ה"היפוך" הזה של משפט האריתמטיקה של גבולות אינו נכון. הדוגמה הקלאסית $a_n=(-1)^n$ ו־$b_n=(-1)^{n+1}$ מראה זאת.

נעבור כעת למספר תרגילים אשר "נשענים פילוסופית" על אריתמטיקה של גבולות; נסכם בסוף את הידוע לנו על פעולות על סדרות אשר "מכבדות" את הגבול.

2.8 הראו שאם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$. האם ההפך נכון?

פיתרון:
מטרת התרגיל היא להוכיח מין הרחבה של המשפט על אריתמטיקה של גבולות; הפעלת ערך מוחלט אינה פעולה אריתמטית, ולכן לא מכוסה על ידי המשפט, אך גם עבורה אותו עיקרון תקף. על מנת להוכיח זאת פשוט ניעזר בהגדרה, ובכך שאי־שוויון המשולש להפרש מבטיח את אי־השוויון

$$||a_n| - |L|| \le |a_n - L|\,;$$

עבור $\epsilon > 0$ נתון, ידוע שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$. אך אי־השוויון הנ"ל מראה שמכך נובע בהכרח שגם $||a_n| - |L|| \le \epsilon$. כלומר, לכל $\epsilon > 0$ אכן קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $||a_n| - |L|| \le \epsilon$, ולכן על פי הגדרה $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.
נעבור כעת לשאלת ה"הפך". האם מכך ש־$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$ נובע בהכרח ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$? נדמה שאין סיכוי, מפני ש, לדוגמה, שתי הסדרות $a_n = 1$ ו־$a_n = -1$ מתכנסות לשני גבולות שונים אך בעלי אותו ערך מוחלט. אם כך, אולי הבעיה היא שצריך לשנות מעט את ניסוח הכיוון ההפוך, ולנסות להוכיח שהסדרה a_n מתכנסת לאחד מבין L ו־$-L$?
קל להוכיח שאם a_n אכן מתכנסת, אז היא בהכרח מתכנסת לאחד מבין L ו־$-L$.
אך למעשה אין כלל הכרח ש־a_n תתכנס; לדוגמה, עבור $a_n = (-1)^n$ מתקיים $1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a_n| = 1$, אך a_n אינה מתכנסת.

2.9 תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים אי־שליליים המתכנסת לגבול L. הראו ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

פיתרון:
זו עוד הרחבה של אריתמטיקה של גבולות, הפעם עם פעולת הוצאת שורש ריבועי.
ניעזר בהגדרת הגבול; יהי $\epsilon > 0$. יש למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \epsilon$. כדאי לזכור שידוע לנו, על פי הנתון ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = L$, איך להתמודד עם הביטוי $|a_n - L|$. לכן כדאי "לתמרן" מעט את הביטוי הרצוי, $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right|$, כך שיכיל את הביטוי הנוח $|a_n - L|$.
זו אם כך ההזדמנות להתוודע ל"טריק" קבוע אותו מיישמים כאשר יש להתעסק עם הפרש של שני שורשים; כופלים ומחלקים ב"ביטוי החכם" המורכב מסכום אותם שני שורשים. התוצאה היא

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| = \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}.$$

כעת, הביטוי במונה נוח, והביטוי במכנה גדול מ־$\sqrt{L}$, שאינו תלוי ב־n (ולכן ככל הנראה יקל את החשבון). בנקודה זו כדאי להזהר, היות ויתכן ש־$L = 0$, ולכן

לא ניתן לרשום $\sqrt{L}$ במכנה. במקרה זה נטפל בסוף, כלומר, נניח כרגע כי $L \neq 0$ (ולכן L חיובי), ונשלים את ההערכה על ידי

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}}.$$

מכך ניתן לראות שאם ידוע ש-$|a_n - L| < \sqrt{L}\epsilon$, אזי בהכרח $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \epsilon$; לכן, אם נבחר בתור N את המספר המתאים להגדרת הגבול של הסדרה a_n עם $\tilde{\epsilon} = \sqrt{L}\epsilon$, נקבל שאם $n > N$ אזי $|a_n - L| < \tilde{\epsilon}$ (כך נבחר N) ולכן $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \epsilon$. כלומר, מצאנו שלכל ϵ אכן קיים N מתאים, ומכך ניתן להסיק ש-$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.
נשלים את ההוכחה של ידי בדיקת המקרה $L = 0$; מקרה זה למעשה פשוט יותר, מפני שאז $\left|\sqrt{a_n} - 0\right| = \sqrt{|a_n| - 0}$, כלומר, בהנתן $\epsilon > 0$, המספר N המתאים לסדרה a_n עבור ϵ^2 יתאים.

<u>הערה:</u> לעיתים, על מנת לקצר, נשתמש בניסוח הנ"ל; "נסמן ב-N את המספר המתאים להגדרת הגבול עבור הסדרה a_n ו-ϵ" (ואם מובן שמדובר בגבול אולי אף לא נציין זאת). הכוונה היא, היות וידוע שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$, ניתן לבחור כזה N ולהשתמש בו. זה לא מקצר את הכתיבה במיוחד אך לעיתים מדגיש יותר את הדברים החשובים בהוכחה.

$\boxed{2.10}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+7n-6} - \sqrt{n^2+5n-9}\right]$.

<u>פיתרון:</u>
הסדרה כולה הנה הפרש של שני ביטויים אשר, ניתן לבדוק, אינם מתכנסים. כפי שנראה, מצד שני, ההפרש שלהם דווקא כן מהווה סדרה מתכנסת, ובכך בפנינו דוגמה נוספת לכך שההיסק ההפוך למשפט האריתמטיקה של גבולות אינו נכון. נזכיר את ה"טריק" המועיל בהתמודדות נגד הפרש של שני שורשים; נכתוב את הסדרה הנתונה כ-

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n^2+7n-6} - \sqrt{n^2+5n-9} = \\
&\quad = \frac{\left(\sqrt{n^2+7n-6} - \sqrt{n^2+5n-9}\right)\left(\sqrt{n^2+7n-6} + \sqrt{n^2+5n-9}\right)}{\sqrt{n^2+7n-6} + \sqrt{n^2+5n-9}} \\
&\quad = \frac{n^2+7n-6 - \left(n^2+5n-9\right)}{\sqrt{n^2+7n-6} + \sqrt{n^2+5n-9}} = \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+7n-6} + \sqrt{n^2+5n-9}}.
\end{aligned}$$

כעת יש לנו מצב דומה, אם כי לא זהה, למצב הקודם, שבו במונה ובמכנה היו חזקות - וחילקנו בחזקה הגבוהה ביותר. כאן ה"חזקה הגבוהה ביותר" מבין כל החזקות המופיעות היא n (אמנם נראה כאילו במכנה כתוב n^2 - אך זה נמצא תחת שורש ריבועי,

המבטל את הריבוע ו"משאיר" n), ונקבל

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+7n-6}-\sqrt{n^2+5n-9} &= \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+7n-6}+\sqrt{n^2+5n-9}}\\ &= \frac{2+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+7n-6}}{n}+\frac{\sqrt{n^2+5n-9}}{n}} = \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+7n-6}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+5n-9}{n^2}}}\\ &= \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{7}{n}-\frac{6}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}-\frac{9}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2+0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1+0-0}} = 1,\end{aligned}$$

לפי אריתמטיקה של גבולות יחד עם התרגיל שהרחיב את נכונות ה"אריתמטיקה" גם בשביל שורשים.

סוף שעה 9

2.11 תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ותהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שאינה מתכנסת.

א. הראו שהסדרה a_n+b_n אינה מתכנסת.
ב. האם יתכן שהסדרה a_nb_n תהיה סדרה מתכנסת?
ג. הראו שאם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אזי a_nb_n אינה מתכנסת.

פיתרון:

א. נשים לב כי $b_n=(a_n+b_n)-a_n$. לכן, אם ידוע ש־a_n+b_n מתכנסת, אזי - היות וממילא נתון ש־a_n מתכנסת - נקבל כי b_n גם מתכנסת, בתור סדרה המתקבלת מפעולות אריתמטיות על סדרות מתכנסות. זה עומד בסתירה להנחה ש־b_n אינה סדרה מתכנסת.

ב. כן - לדוגמה, אם a_n מתכנסת לאפס ו־b_n חסומה. במקרה זה, על פי משפט, a_nb_n מתכנסת לאפס.
ניתן לבחור $a_n=\frac{1}{n}$ ו־$b_n=(-1)^n$, ואז $a_nb_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

ג. במקרה זה, היות ו־$b_n=\frac{a_nb_n}{a_n}$, הרי שאם היה ידוע ש־a_nb_n מתכנסת, הסדרה b_n הייתה מתקבלת כמנה של שתי סדרות מתכנסות, כאשר המכנה מתכנס לגבול אשר אינו אפס. אלו פעולות אריתמטיות, ולכן b_n הייתה מתכנסת בניגוד לנתון.

2.12 קבעו אילו מבין הסדרות הבאות מתכנסות, וחשבו את גבולן של אלו שאכן מתכנסות:

$$\frac{\sin(n)}{n},\quad \frac{\sin(n)}{n}+(-1)^n,\quad \frac{(-1)^n n^3}{4n^3-2n^2+4},$$
$$\sin^2(n),\quad \cos^2(n),\quad \sin^2(n)+\cos^2(n).$$

פיתרון:
נתחיל בסדרה $\frac{\sin(n)}{n}$; סדרה זו מתכנסת לאפס. אכן, $|\sin(n)| \leq 1$ (כלומר, הסדרה $\sin(n)$ חסומה) ו-$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ולכן, היות ומכפלה של סדרה חסומה בסדרה השואפת לאפס נותנת סדרה השואפת לאפס, הרי ש-

$$\frac{\sin(n)}{n} = \sin(n) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

נעבור כעת לסדרה $\frac{\sin(n)}{n} + (-1)^n$. סדרה זו הנה סכום של סדרה מתכנסת (הרגע בדקנו זאת) וסדרה שאינה מתכנסת. לכן היא אינה מתכנסת.
הסדרה האחרונה בשורה הראשונה היא מכפלה של סדרה לא מתכנסת - $(-1)^n$ - וסדרה המתכנסת לגבול שאינו אפס - $\frac{n^3}{4n^3-2n^2+4}$ - ולכן אינה מתכנסת.
כעת נתבונן בסדרה $\sin^2(n)$. זו סדרה חסומה - אך זה עדיין לא אומר שהיא מתכנסת. למעשה, בעתיד נוכיח שהיא לא, אך בשלב זה רק נקבל זאת כעובדה. מכך נובע שגם $\cos^2(n)$ אינה מתכנסת, שכן $\cos^2(n) = 1 - \sin^2(n)$. לבסוף הסדרה האחרונה היא פשוט הסדרה הקבועה "1" במסווה, ולכן מתכנסת.

הערות:

א. בתרגיל פגשנו עוד סדרה שפשוט אינה מתכנסת - כמו $(-1)^n$. סדרה זו היא $\sin^2(n)$, ולמעשה מכך נובע שגם $\sin(n)$. אלו סדרות חסומות, אשר אינן מתכנסות (אינן "מתייצבות" ליד אף מספר).
נציין שלא הוכחנו את העובדה שאלו אינן מתכנסות, אך זאת נעשה לאחר שנדע שהפעולה "הפעלת סינוס" מכבדת את הגבול כפי שכבר ראינו שאכן מתקיים עבור פעולות אריתמטיות, עבור ערך מוחלט ועבור שורש ריבועי.

ב. ניתן לראות בתרגיל דוגמה מעניינת לכך שסכום של סדרות לא מתכנסות עלול בהחלט ליצור סדרה מתכנסת.

$\boxed{2.13}$ תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים המתכנסת ל-L. נגדיר סדרה חדשה על ידי

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

כלומר, A_n הנו הממוצע החשבוני של $a_1, \ldots, a_n$. הראו כי $\lim_{n\to\infty} A_n = L$.

הערה: תרגיל זה מראה שה"פעולה" - לקיחת ממוצע חשבוני, שומרת גם היא על ערכו של הגבול.

פיתרון:
ראשית נסביר מדוע בלי הגבלת הכלליות (בה"כ), נוכל להניח כי $L = 0$. כלומר, נסביר מדוע אם ידוע שזה נכון עבור $L = 0$, אז זה בוודאי נכון גם לכל L אחר (הכוונה היא שמוכיחים מקרה פרטי - $L = 0$ - המקום במקרה הכללי, וההסבר שיבוא כעת מטרתו לשכנע שלמעשה אכן מספיק להוכיח את אותו מקרה פרטי, ומשם כבר ינבע המקרה הכללי יותר. כלומר, הכלליות לא

הוגבלה למקרה פרטי אחד אותו נוכיח).
ואכן, אם זה ידוע עבור $L = 0$ ־ כלומר, אם ידוע שבכל פעם שסדרה נתונה $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־0, אז גם סדרת הממוצעים החשבוניים שלה מתכנסת לאפס, ואם כעת נתונה סדרה כללית $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־L (שאינו בהכרח אפס), אז נוכל להגדיר

$$\alpha_n = a_n - L,$$

ובכך קיבלנו סדרה המתכנסת לאפס. לכן עבורה ידוע (או יהיה ידוע, כאשר נשלים את הוכחת המקרה $L = 0$ אליה תכף ניגש)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} = 0,$$

או, אם נציב חזרה,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} = 0.$$

אך

$$\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n - na}{n} = A_n - a,$$

ולכן בעצם ידוע כי $\lim_{n\to\infty} [A_n - a] = 0$, שזה אומר $\lim_{n\to\infty} A_n = a$.
נעבור כעת להוכחת המקרה $L = 0$. כלומר, ידוע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ויש להוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0.$$

ובכן, יהי $\epsilon > 0$, ונסמן ב־N_1 מקום שממנו והלאה (כלומר, אם $n > N_1$) מתקיים $|a_n| < \epsilon$ (קיים כזה, הרי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). נתבונן, כאשר $n > N_1$, בביטוי

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}.$$

הנסכם השני בביטוי לעיל מקיים, על סמך אי־שוויון המשולש,

$$\left|\frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \leq \frac{\epsilon + \cdots + \epsilon}{n} = \frac{n - N_1}{n}\epsilon < \epsilon,$$

ללא קשר לערכו של n וכל עוד הוא גדול מ־N_1. הנסכם השני, מצדו, הוא פשוט $\frac{M}{n}$, כאשר $M = a_1 + \cdots + a_{N_1}$ (קבוע ואינו משתנה עם n!). נוכל כמובן למצוא $N \geq N_1$ כך ש־$\frac{|M|}{n} < \epsilon$ בכל פעם ש־$n > N$ (אכן, לדוגמה, אפשר לבחור $N = \max\left\{N_2, \left[\frac{|M|}{\epsilon}\right]\right\}$), ואז אם $n > N$ הרי ש־

$$|A_n| \leq \frac{|M|}{n} + \epsilon < 2\epsilon,$$

ובכך סיימנו.

הערות:

1. במקום להגיע ל־$|A_n| < \epsilon$, הגענו ל־$|A_n| < 2\epsilon$. זה כביכול לא מתאים להגדרת הגבול בדיוק, אך מצד שני ברור שיכולנו לשנות מעט בדרך את בחירותיהם של N_1 ושל N כך שכל אחד יתן $\epsilon/2$ במקום ϵ (הכל הרי היה נתון לבחירתנו, ואם היה לנו מעט יותר "חזון" כך גם היינו בוחרים). מצב זה (בו נגיע לא בדיוק ל־ϵ, אלא, לדוגמה, לכפולה שלו, כך שמובן לנו שאפשר לתקן ולהגיע אליו בדיוק) הוא מצב ממנו עדיף להתחמק על ידי תיקון כמתואר, אך לפעמים בכיתה רק נציין שאפשר לתקן ונעבור הלאה.

2. במהלך ההסבר על כך שלא הוגבלה הכלליות על ידי ההנחה $L = 0$, השתמשנו בכך שאם $\lim_{n\to\infty} [A_n - L] = 0$ אז $\lim_{n\to\infty} A_n = L$. היסק זה אמנם נכון, אך יהיה שגוי להסביר אותו באופן הבא:

$$0 = \lim_{n\to\infty} [A_n - L] = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} L = \lim_{n\to\infty} A_n - L,$$

שכן עוד לא היה ידוע בשלב זה שהגבול $\lim_{n\to\infty} A_n$ בכלל קיים, וכדי להשתמש באריתמטיקה של גבולות חייבים לדעת מראש שהסדרות מתכנסות! במקום זאת, קל לבדוק ישירות לפי הגדרת הגבול שההיסק נכון, או לחילופין להשתמש באריתמטיקה של גבולות עבור $A_n = [A_n - L] + L$.

2.1.3 כלל הסנדוויץ'

$\boxed{2.14}$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית (כלומר, $a_n > 0$ לכל n). הראו כי אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = L.$$

הערה: יחד עם התרגיל הקודם, זה יוכיח בסך הכל שאם סדרה חיובית מתכנסת, אז סדרות הממוצעים שלה (החשבוניים, ההנדסיים וההרמונים) מתכנסות גם הן ולאותו גבול.

פיתרון:
נתחיל בממוצע ההרמוני: נגדיר $b_n = \frac{1}{a_n}$. אם $L \neq 0$, אז $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{L}$, ולכן על סמך התרגיל הקודם,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = \frac{1}{L},$$

ולכן (היות ו־$b_i = \frac{1}{a_i}$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = L.$$

מצד שני, אם $L = 0$, הרי שלפי אי־שוויון הממוצעים ידוע כי

$$0 < \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

היות ולפי התרגיל הקודם, אגף ימין באי־שוויון זה מתכנס לאפס, ומובן שגם אגף שמאל (הוא הרי קבוע אפס), הרי שלפי כלל הסנדוויץ', הסדרה באמצע אי־השוויון, הלא היא הסדרה המבוקשת, מתכנסת לאותו הגבול ־ אפס. זה מסיים את הוכחת העובדה שבכל מקרה, סדרת הממוצעים ההרמוניים מתכנסת לאפס. כעת, עבור סדרת הממוצעים ההנדסיים, פשוט נזכיר את אי־שוויון הממוצעים במלואו:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

שוב על סמך כלל הסנדוויץ', היות ושני קצותיו של אי־שוויון זה מתכנסים ל־L, הרי שגם הסדרה באמצע, הלא היא סדרת הממוצעים ההנדסיים, מתכנסת ל־L.

הערה: ניתן לראות מתוכן ההוכחה שגם אילולא היה ידוע שהסדרה חיובית, אלא רק היה ידוע ש־$a_n \neq 0$ לכל n ובנוסף ש־$L \neq 0$, אז סדרת הממוצעים ההרמוניים עדיין מתכנסת ל־L. עקרונית יש להוסיף את ההנחה שסדרת הממוצעים ההרמוניים אכן מוגדרת היטב, כלומר, שהמכנה של השבר המגדיר אותה אינו מתאפס, אך ניתן לבדוק שבמקרה זה, זה אכן חייב להיות המצב החל ממקום מסויים.

$\boxed{2.15}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+8^n}$.

פיתרון:
נשים לב כי

$$8^n < 3^n+8^n < 2\cdot 8^n,$$

ולכן

$$8 < \sqrt[n]{3^n+8^n} < \sqrt[n]{2}\cdot 8.$$

היות ושני הקצוות של אי־שוויון זה, לפי אריתמטיקה של גבולות והעובדה שידוע כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ לכל $a>0$, שואפים ל־8, הרי שמכלל הסנדוויץ' נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+8^n}=8.$$

$\boxed{2.16}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2\cdot 8^n}$.

פיתרון:
נשים לב כי

$$2\cdot 8^n < 3^n+2\cdot 8^n < 3\cdot 8^n,$$

ולכן

$$\sqrt[n]{2}\cdot 8 < \sqrt[n]{3^n+8^n} < \sqrt[n]{3}\cdot 8.$$

היות ושני הקצוות של אי־שוויון זה, לפי אריתמטיקה של גבולות והעובדה שידוע כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ לכל $a > 0$, שואפים ל־8, הרי שמכלל הסנדוויץ' נובע כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2\cdot 8^n} = 8.$$

$\boxed{2.17}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}$.

פיתרון:
זו סדרה חיובית, ולכן אם נצליח לחסום אותה מלמעלה על ידי סדרה המתכנסת לאפס, נקבל על פי כלל הסנדוויץ' שהיא חייבת להתכנס לאפס. ואכן, היות ו־$n! \geq n$, הרי ש־

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n},$$

ולכן הסדרה שואפת לאפס.

$\boxed{2.18}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!}$.

פיתרון:
כעת כבר אפילו לא מובן מה תהיה התשובה. אולי הסדרה אפילו לא מתכנסת? מתברר שכן, וזאת ניתן לראות באופן הבא:

$$\begin{aligned}\frac{5^n}{n!} &= \frac{5\cdot 5\cdots 5\cdot 5}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{5}{n}\cdot\frac{5}{n-1}\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{1} \leq \frac{5}{n}\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{5}{1}\\ &= \frac{5^4}{4!}\cdot\frac{5}{n}\end{aligned}$$

אם $n > 5$. לכן קיבלנו

$$0 < \frac{5^n}{n!} \leq \frac{5^4}{4!}\cdot\frac{5}{n},$$

והיות והסדרה הימנית שואפת לאפס, כך נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0.$$

$\boxed{2.19}$ חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+\sqrt{1}} + \frac{1}{n^2+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n^2+\sqrt{n^2}}\right].$$

פיתרון:
ניתן גם לרשום את הסדרה באופן הבא:

$$\frac{1}{n^2+\sqrt{1}}+\frac{1}{n^2+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n^2+\sqrt{n^2}}=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n^2+\sqrt{k}}.$$

נשים לב, אם כן, שלכל $k=1,\ldots,n^2$ מתקיים

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n^2+\sqrt{n^2}}\leq\frac{1}{n^2+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n^2+\sqrt{1}}=\frac{1}{n^2+1}.$$

לכן, אם סוכמים את כל n^2 הביטויים, מקבלים

$$\frac{n^2}{n^2+n}\leq\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n^2+\sqrt{k}}\leq\frac{n^2}{n^2+1}.$$

כעת, שני אגפי אי־שוויון זה שואפים ל־1, ולכן על פי כלל הסנדוויץ',

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+\sqrt{1}}+\frac{1}{n^2+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n^2+\sqrt{n^2}}\right]=1.$$

סוף שעה 11

2.1.4 מבחני התכנסות

2.20 יהי q מספר ממשי המקיים $|q|<1$. הראו כי $\lim_{n\to\infty}q^n=0$.

פיתרון:
ראשית נניח ללא הגבלת הכלליות ש־$q>0$. אכן, עבור $q=0$ זה ברור, ואם $q<0$, הרי שמתוך $0=\lim_{n\to\infty}|q|^n=\lim_{n\to\infty}|q^n|$ (אשר יהיה ידוע שכן $|q|>0$) נובע כי $\lim_{n\to\infty}q^n=0$.
דרך א': ובכן, יהי $\epsilon>0$. יש למצוא N כך שלכל $n>N$ מתקיים $q^n<\epsilon$, כלומר, $q<\sqrt[n]{\epsilon}$. אך נזכיר כי ידוע כבר ש־$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\epsilon}=1$ ולכן, היות ו־$q<1$, בוודאי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $\sqrt[n]{\epsilon}>q$.
דרך ב': המספר $\frac{1}{q}$ גדול מ־1, ולכן ניתן לרשום אותו בתור $\frac{1}{q}=1+h$ כאשר $h>0$. כעת בעזרת הבינום של ניוטון נקבל

$$\frac{1}{q^n}=(1+h)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h^i>\binom{n}{1}h=nh,$$

כלומר,

$$0<q^n<\frac{1}{nh}.$$

על פי כלל הסנדוויץ', סיימנו.

הערות:

1. בסוף דרך א' צויין שהיות וידוע כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\epsilon} = 1$, והיות ו־$q < 1$, הרי שיש מקום מסויים ממנו והלאה כל איברי הסדרה גדולים מ־q. זו תכונה כללית המתקיימת לכל סדרה מתכנסת לגבול L: לכל בחירה של מספר אשר קטן מ־L, כל איברי הסדרה החל ממקום מסויים יהיו גדולים ממספר זה. באופן דומה, לכל בחירה של מספר מסויים אשר גדול מ־L, כל איברי הסדרה החל ממקום מסויים יהיו קטנים ממספר זה. כדאי לנסות להוכיח זאת לבד.
2. דרך ב' טובה כי היא מאפשרת להכליל את התרגיל ולהוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$$

לכל מספר טבעי k במצב זה.

$\boxed{2.21}$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי־שלילית המקיימת

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

ו־$q < 1$. הראו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

פיתרון:
אם $q < 1$, ניתן לבחור $\epsilon > 0$ כך ש־$q + \epsilon < 1$ (לדוגמה, $\epsilon = {}^{1-q}/_{2}$). עבור $\epsilon > 0$ נסמן ב־N מקום שממנו והלאה, כלומר, לכל $n > N$, מתקיים $\left| \sqrt[n]{a_n} - q \right| < \epsilon$. ידוע אם כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$-\epsilon < \sqrt[n]{a_n} - q < \epsilon,$$

או

$$q - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \epsilon.$$

אך זה אומר ש־

$$0 < a_n < (q+\epsilon)^n\,,$$

והיות ו־$q + \epsilon < 1$, הרי שעל פי התרגיל הקודם אגף ימין של אי־שוויון זה שואף לאפס. כעת, על פי כלל הסנדוויץ', היות ואי־השוויון הנ"ל נכון לכל n החל ממקום מסויים (N), נקבל כי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הערה: התרגיל הזה מכונה בדרך כלל "מבחן השורש", והוא מהווה דרך שימושית להוכיח שסדרות מסויימות שואפות לאפס.

$\boxed{2.22}$ הראו כי $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ כאשר $|a| < 1$ ו־k מספר טבעי.

הערה: זהו גבול אשר באופן עקרוני היה צורך לחשב בעזרת הבינום של ניוטון וכלל הסנדוויץ', כמו התרגיל הראשון בחלק זה.

פיתרון:
באותו אופן כמו קודם ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות ש־$a > 0$. נזכיר ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. אם כך, לפי אריתמטיקה של גבולות,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k a^n} = \lim_{n\to\infty} a\left(\sqrt[n]{n}\right)^k = a\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^k = a < 1$$

ולכן על פי מבחן השורה מתקיים $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$.

הערה: היה צורך ממשי בהנחה $a > 0$ שנעשתה בתחילת התרגיל, מפני שמבחן השורש תקף רק עבור סדרות אי־שליליות!

2.23 תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית כך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים. הראו כי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ גם קיים וכי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

פיתרון:
נסמן $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (ו־$b_1 = a_1$ שכן אין a_0). נתון כי $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים (אין כמובן הבדל בין $\lim_{n\to\infty} b_n$ לבין $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}$). על פי תרגיל עבר, היות ומדובר בסדרה חיובית, מכך נובע שסדרת הממוצעים ההנדסיים מתכנסים גם הם - ולאותו גבול. כלומר,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

אבל

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n},$$

ולכן אכן

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2.24 חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}$.

פיתרון:
הגבול המבוקש הוא $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ אם נסמן $a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$. על פי התרגיל הקודם, אם הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים, הרי זה יוכיח שהגבול המבוקש קיים, והם יהיו שווים. ואכן,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n+2)}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}}=\frac{2n+1}{2n+2}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

$\boxed{2.25}$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המקיימת

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

ו־$q<1$. הראו כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

פיתרון:
על פי תרגיל קודם, מההנחה נובע כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q<1$, ולכן על פי מבחן השורש, סיימנו.

הערה: שיטה מועילה זו לחישוב גבולות מסויימים מכונה לעיתים "מבחן המנה".

$\boxed{2.26}$ חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}$.

פיתרון:
נשים לב כי

$$\frac{\frac{7^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{7^n}{n!}}=\frac{7}{n+1}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0<1,$$

ולכן נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!}=0.$$

2.2 גבול אינסופי

2.2.1 הגדרת הגבול

$\boxed{2.27}$ הוכיחו על פי ההגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n}=\infty$.

פיתרון:
יהי M מספר ממשי. יש להוכיח שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$. ובכן, נעריך

$$\frac{(n+1)^2}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n} = n+2+\frac{1}{n} > n,$$

ולכן אם $n > M$ אזי נובע כי $\frac{(n+1)^2}{n} > M$. בכך סיימנו את ההוכחה.

2.2.2 אריתמטיקה של גבולות

2.28 הוכיחו את כללי האריתמטיקה של גבולות ביחס להתכנסות במובן הרחב:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מהוות שתי סדרות, אזי

א. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה אזי $\lim_{n\to\infty}[a_n+b_n] = \pm\infty$.

ב. אם קיימים $\epsilon > 0$ ו־N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $b_n \geq \epsilon$ (או $b_n \leq -\epsilon$), ואם $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, אזי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$ (או $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \mp\infty$).

ג. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

ד. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ו־$a_n > 0$ החל ממקום מסויים (או $a_n < 0$ החל ממקום מסויים), אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ (או $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$).

הערות:

1. שני הסעיפים האחרונים הוכחו בהרצאה.
2. המצב המתואר בסעיף ב', בו קיימים ϵ ו־N וכו', מכונה לעיתים "הסדרה חיובית וחסומה מן האפס".
3. נוכיח את המקרה של $+\infty$ בסעיף א' ואת המקרה של $b_n \geq \epsilon$ ו־$+\infty$ בסעיף ב'. כל המקרים האחרים דומים.

פיתרון:

א. מהנתון קיים K כך ש־$-K \leq b_n \leq K$ לכל n. יהי כעת M ממשי. יש למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n + b_n > M$. אך נשים לב כי $a_n + b_n \geq a_n - K$, ולכן אם $a_n > M + K$ הרי ש־$a_n + b_n > M$. נותר אם כן לבדוק שקיים N אשר ממנו והלאה הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ גדולה מ־$M + K$. אך זה כמובן ידוע, שכן נתון כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

ב. נעיר כי אם $n > N$ אזי $a_n b_n \geq \epsilon a_n$. יהי כעת M ממשי. יש למצוא $\tilde{N}$ כך שלכל $n > \tilde{N}$ מתקיים $a_n b_n > M$. נבחר אם כך N_1 כך שיתקיים $a_n > \frac{M}{\epsilon}$ לכל $n > N_1$, ונקבל שאם $n > \max\{N, N_1\}$ אזי

$$a_n b_n \geq \epsilon a_n > M$$

כרצוי.

<u>הערה:</u> כדאי לזכור, לשם שימוש יעיל בכללים אלו, שכל סדרה מתכנסת היא חסומה, ושכל סדרה אשר מתכנסת לגבול חיובי או לאינסוף הנה חסומה מן האפס החל ממקום מסויים.

$\boxed{2.29}$ הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left[n - n^2\right] = -\infty$.

<u>פיתרון:</u>
נשים לב כי $n - n^2 = n(1-n)$. כעת, $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ ו־$\lim_{n\to\infty}[1-n] = -\infty$, ולכן נקבל כי n חיובית וחסומה מן האפס (זה מובן, הרי $\epsilon = 1$ יעבוד, אך זה גם כאמור נובע מכך שהיא שואפת לאינסוף) ועל פי סעיף ב',

$$\lim_{n\to\infty} n(1-n) = -\infty.$$

<u>הערה:</u> כדאי לשים לב שנסיון להשתמש באריתמטיקה של גבולות ישירות להפרש לא יפעל, שכן אמנם שתי הסדרות n ו־n^2 מתכנסות במובן הרחב, אך אין לנו דרך להתעסק עם "$\infty - \infty$".

2.2.3 כלל הסנדוויץ'

$\boxed{2.30}$ תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (או $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$) ו־$b_n \geq a_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ (או $a_n \geq b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$). הראו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (או $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

<u>הערה:</u> זו הגרסה של כלל הסנדוויץ' עבור גבול אינסופי (היא לפעמים מכונה "כלל הפיצה"). הוכחת הלמעשה קלה יותר, ונטפל במקרה שבו $a_n \geq b_n$ ו־$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

<u>פיתרון:</u>

יהי M מספר ממשי. יש למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$; אך ידוע שקיים מקום, N, אשר ממנו והלאה מתקיים $b_n > M$, והיות ו־$a_n \geq b_n$, כמובן שגם $a_n > M$.

הערה: כמו תמיד, די שאי־השוויון יתקיים רק החל ממקום מסויים.

2.31 הראו כי $\lim_{n\to\infty} [n^3 + n] = \infty$.

פיתרון:
מתקיים

$$n^3 + n \geq n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

2.2.4 מבחני התכנסות

ננסח כעת באופן מלא, לפחות לצרכי הקורס הזה, את מבחני השורש והמנה:

מבחן השורש. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אי־שלילית כך ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ קיים במובן הרחב. אם $q < 1$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ואם $q > 1$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הערה: על פי הניסות, q עלול להיות ∞. במקרה זה, כמובן, $1 < q$. כך המצב גם במבחן המנה;

מבחן המנה. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית כך ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ קיים במובן הרחב. אם $q < 1$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ואם $q > 1$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.32 הוכיחו את מבחני השורש והמנה.

פיתרון:
מובן כי נכונות מבחן השורש גוררת את נכונות מבחן המנה, שכן אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ קיים במובן הרחב, אזי $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ גם קיים במובן הרחב ושווה לו (זה הוכח במקרה הצר, ובתרגילי הבית תראו את המקרה שבו הגבולות הם אינסוף).

מבחן השורש הוכח במלואו במקרה שבו $q < 1$. אם $q > 1$, נסמן $b_n = \frac{1}{a_n}$. נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{q} < 1$$

לפי אריתמטיקה של גבולות (במקרה בו $q = \infty$ מתקבל 0 אשר קטן מ־1, כאמור, לפי אריתמטיקה של גבולות), ולכן $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ לפי החלק שכבר הוכח. אך כעת, לפי אריתמטיקה של גבולות, היות ו־$b_n > 0$ לכל n, נקבל $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2.3 סדרות מונוטוניות

2.3.1 סדרות המוגדרות באופן רקורסיבי

2.33 תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת על ידי

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n} \end{cases}$$

כאשר $\alpha > 1$. האם הסדרה מתכנסת? אם כן, חשבו את גבולה.

פיתרון:
נראה שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, ולאחר מכן נמצא את גבולה. למעשה, זו תהיה האסטרטגיה בכמעט כל דוגמה שבה נתונה סדרה המוגדרת באופן רקורסיבי (פרט לכך שלפעמים נחליף את "מונוטונית עולה" ב־"מונוטונית יורדת" ואת "חסומה מלעיל" ב־"חסומה מלרע"). למעשה, נציין את שלושת השלבים ואת הדרך ביצועם:

1. מוכיחים שהסדרה מונוטונית עולה (או יורדת), בדרך כלל באינדוקציה אך לפעמים אפילו אין צורך וניתן לראות זאת "ישירות".
2. מוכיחים שהסדרה חסומה מלעיל (מלרע), בדרך כלל באינדוקציה אך לפעמים אפילו אין צורך וניתן לראות זאת "ישירות".
3. מוצאים את הגבול באופן הבא: הסדרה מוגדרת על ידי כך ש־a_{n+1} נתון על ידי ביטוי שעלול להיות תלוי ב־a_n, a_{n-1} וכן הלאה. בהנחה שהביטוי הוא כזה ש"מתמודד יפה עם הגבול" (כלומר, מורכב מפעולות אריתמטיות, מערכים מוחלטים, שורשים או כל דבר אחר שאנו כבר יודעים ש"מכבד" את הגבול), מותר להשאיף את n לאינסוף בנוסחת הרקורסיה ולקבל משוואה עבור L.

נתחיל בכך שנראה שהסדרה מונוטונית עולה: אכן, כדי להוכיח באינדוקציה ש־$a_{n+1} \geq a_n$, נבדוק ראשית את בסיס האינדוקציה;

$$a_2 = \sqrt{\alpha} \geq 1 = a_1,$$

ונבצע את שלב המעבר:

$$a_{n+2} = \sqrt{\alpha a_{n+1}} \stackrel{*}{\geq} \sqrt{\alpha a_n} = a_{n+1},$$

כאשר $*$ נכון על פי הנחת האינדוקציה.
כעת נבדוק שהסדרה חסומה: במקרה הזה קשה לעשות זאת מבלי לנחש חסם אפשרי. כאשר זה קורה, כדאי לבצע את השלב האחרון קודם, ובדרך כלל הגבול המיועד ישמש כחסם. כלומר, נציין שאם כבר הוכחה החסימות מלעיל אז הסדרה מתכנסת (נניח ־ ל־L), ואז מתוך

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n}$$

נובע (על ידי השאפת $n \to \infty$) כי

$$L = \sqrt{\alpha L},$$

כלומר, $L = \alpha$. ננחש אם כן ש־α הוא חסם מלעיל; זה אכן נכון עבור $n = 1$ (כי נתון ש־$\alpha > 1$), ובאינדוקציה נקבל כי אם $a_n \leq \alpha$ אזי

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha a_n} \leq \sqrt{\alpha \cdot \alpha} = \alpha.$$

כלומר, הסדרה חסומה על ידי α, ולכן מתכנסת, ועל פי החשבון הנ"ל גבולה חייב להיות α.

הערות:

1. בעת ביצוע החשבון למציאת $L = \alpha$ עוד לא היה בכלל ידוע שהסדרה מתכנסת. לכן בשלב זה לא הוכחנו שהגבול הוא α אלא רק נוכחנו לדעת שרק ל־α יש סיכוי להוות גבול לסדרה (במידה והיא מתכנסת). לאחר מכן הוכחנו שהיא מתכנסת, ולכן α הוא הגבול.
2. מותר לשנות את סדר הסעיפים במהלך ההוכחה אם זה נוח, אך צריך לזכור את הסדר הנכון: כל עוד לא ידוע שקיים גבול, הרי שביצוע הסעיף השלישי הוא חסר משמעות, פרט לאפשרות לנחש חסם.
3. יש לשים לב שאפשר היה לבצע את אותו שלב מעבר באינדוקציה הפוך, וכביכול להוכיח שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע (מה שכמובן לא נכון). הפרט השגוי בהוכחה כזו יהיה בבסיס האינדוקציה (אם, לדוגמה, היה נתון ש־$0 < \alpha < 1$ אז זה כבר היה נכון והסדרה אכן הייתה מונוטונית יורדת).

2.34 עבור $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ נגדיר

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \alpha + a_n^2. \end{cases}$$

הראו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פיתרון:

נראה ראשית שהסדרה מונוטונית עולה (ננחש עולה ולא יורדת כי $a_2 = \alpha + \alpha^2 > \alpha = a_1$, אם כי לפעמים דרך ניחוש זו יכולה להטעות, כי הסדרה עלולה להיות בהתחלה קצת מונוטונית עולה ואחר כך מונוטונית יורדת. במקרה כזה, כמובן, ההוכחה לא תעבוד ונבין שמשהו חשוד). בסיס האינדוקציה ברור, ועבור שלב המעבר נשים לב כי

$$a_{n+2} = \alpha + a_{n+1}^2 \overset{*}{\geq} \alpha + a_n^2 = a_{n+1},$$

כאשר $*$ נכון על פי הנחת האינדוקציה.
נראה כעת שהסדרה חסומה. כאן הגבול המיועד יהיה פחות מוצלח בתור חסם (הוא אכן חסם מלעיל, אך עדיף לבחור ערך קצת גדול ממנו כדי להקל על הוכחת העובדה שמדובר בחסם מלעיל). היות ו־$\alpha < \frac{1}{4}$ נוכל לנחש ש־$\frac{1}{2}$ יהווה

חסם טוב (שכן $a_2 = \alpha + \alpha^2$, שאינו בהכרח קטן מ-$\frac{1}{4}$ אך בבירור קטן מ-$\frac{1}{2}$).
ואכן, $a_1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ ואם $a_n < \frac{1}{2}$ אזי

$$a_{n+1} = \alpha + a_n^2 \leq \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

מכאן שהסדרה מכנסת, ומתוך לקיחת גבול לנוסחת הרקורסיה

$$a_{n+1} = \alpha + a_n^2$$

נקבל כי

$$L = \alpha + L^2.$$

הפיתרון של המשוואה הזו היא

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

אך איך נדע איזהו הגבול הנכון מבין שניהם? נזכיר שכבר ידוע ש-$\frac{1}{2}$ הוא חסם מלעיל, והיות והסדרה מתכנסת לחסם העליון שלה, הרי שהגבול חייב להיות קטן מ-$\frac{1}{2}$. כלומר,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

$\boxed{2.35}$ עבור $\alpha > 0$, תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת על ידי

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right). \end{cases}$$

הראו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

<u>פיתרון:</u>
נסיון ישיר להראות מונוטוניות כאן ייכשל. ניתן לבדוק מספר איברים ראשונים ולהיווכח ש, לפחות בהתחלה, הסדרה מונוטונית יורדת, אך הוכחה מלאה חסרה בשלב זה.
נתחיל אם כן בהוכחה שהסדרה חסומה מלרע. זה למעשה קל, באמצעות אי-שוויון הממוצעים, שכן

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{1}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1.$$

לכן הסדרה חסומה מלרע על ידי 1.
כעת נטפל במונוטוניות. לעיתים קשה לראות ישירות איך להוכיח מונוטוניות, אך

קל יותר לבדוק ש־$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ (זה אותו דבר כמו $a_{n+1} \le a_n$, כלומר, זה אכן יוכיח שהסדרה מונוטונית יורדת). ואכן,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n + \frac{1}{a_n}}{2}}{a_n} = \frac{1 + \frac{1}{a_n^2}}{2},$$

והביטוי הזה קטן (או שווה) מ־1 אם $a_n^2 \ge 1$. ואכן ־ זה כבר הוכח! לכן הסדרה מונוטונית יורדת, והיות והיא חסומה מלרע, היא מתכנסת!
לבסוף נמצא את הגבול ־ כרגיל, נשאיף n לאינסוף בנוסחת הרקורסיה (ונעיר שהגבול חייב להיות גדול או שווה ל־1, שכן 1 הוא חסם מלרע, ולכן מותר להשתמש באריתמטיקה של גבולות) ונקבל

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right),$$

או $L = \pm 1$. מתוך שני אלה רק $L = 1$ אפשרי, ולכן זהו הגבול.

2.36 תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת על ידי

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{3}}. \end{cases}$$

הראו ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

<u>פיתרון:</u>
הדבר הראשון הבולט לעין הוא ש־$a_{n+1} \ge a_n$ לכל n ־ כלומר, הסדרה מונוטונית עולה. אכן,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{3}} \ge \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n$$

שכן מובן על פי הגדרתה ש־$a_n \ge 0$ לכל n. מתוך כך נובע מיד שהסדרה מתכנסת במובן הרחב; היא עלולה לשאוף לאינסוף (אם היא אינה חסומה), אך אם היא חסומה, הרי שעל פי משפט, היא מתכנסת. לכן לשאלת ההתכנסות (במובן ה"צר") נותר לבדוק חסימות. אך לו הסדרה הייתה חסומה, הרי שגבולה היה חייב לקיים

$$L = \sqrt{L^2 + \frac{1}{3}}.$$

אך למשוואה זו אין פיתרון! לכן לא יתכן שהסדרה מתכנסת, ומכך בהכרח $\lim_{n\to\infty} = \infty$.

2.37 תהי

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

הראו שהסדרה מתכנסת.

פיתרון:
לא נתבקשנו לחשב את הגבול, ומסיבה טובה - בשלב זה איננו יכולים. כאשר אין בידינו גבול, הכלי היחיד אשר בידינו כדי להוכיח שהסדרה מתכנסת הוא להוכיח שהיא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל (או יורדת ומלרע). כאן מובן שהיא מונוטונית עולה, שכן

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n.$$

נותר אם כן להראות חסימות מלעיל. לצורך כך נשים לב שלכל $k > 1$ מתקיים

$$k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1 \geq 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 1 = 2^{k-1},$$

ולכן

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2.$$

2.3.2 המספר e

2.38 חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

פיתרון:
נסמן $a_n = \frac{n!}{n^n}$, ואז יש לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. היות ו-$a_n > 0$, הרי שאם קיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, הוא חייב להיות שווה לגבול המבוקש. נחשב:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}.$$

2.39 הראו ש-$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

פיתרון:
זה נובע מיידת ממבחן השורש והתרגיל הקודם.

2.4 תתי-סדרות

2.40 מצאו את $\limsup \sin \frac{n\pi}{4}$ ואת $\liminf \sin \frac{n\pi}{4}$. האם הגבול $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{n\pi}{4}$ קיים?

פיתרון:
אמנם מתקיים כי

$$\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k,$$

אך שוויון זה אינו בהכרח הטובה ביותר לחשב גבול עליון של סדרה. למעשה, לרוב יהיה עדיף לעבוד לפי ההגדרה: הגבול העליון הוא הגדול מבין כל הגבולות החלקיים.
נתחיל, אם כן, בלרשום מספר מאיברי הסדרה הראשונים:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots.$$

למעשה, הסדרה חוזרת על עצמה מכיוון שתמיד מתקיים $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
כלומר, שמונה האיברים הראשונים פשוט משוכפלים אינסוף פעמים ובכך יוצרים את הסדרה. אך זה אומר שהגבולות החלקיים הם

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1,$$

ולכן

$$\liminf \sin\frac{n\pi}{4} = -1, \limsup \sin\frac{n\pi}{4} = 1.$$

היות וסדרה מתכנסת אם ורק אם יש שוויון בין הגבול העליון לתחתון, הרי שהסדרה הנתונה אינה מתכנסת.

הערה: בפיתרון הסקנו מיד מיהם הגבולות החלקיים, היות והצלחנו "לפרק" את הסדרה לשמונה תתי־סדרות מתכנסות בצורה שהסדרה כולה הייתה מכוסה על ידי תתי־סדרות אלו. בתרגילי הבית יוכח שאכן, במקרה זה, הגבולות החלקיים המתאימים לתתי־סדרות אלו הנם כל הגבולות החלקיים של הסדרה.

2.41 **מצאו את** $\liminf\left[\frac{(-1)^n+1}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}\right]$ **ואת** $\limsup\left[\frac{(-1)^n+1}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}\right]$. **האם** $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n+1}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}\right]$ **קיים?**

פיתרון:
בדומה לתרגיל הקודן, נמצא את כל הגבולות החלקיים זה הסדרה, ומשם זה כבר קל. הסדרה כעת מורכבת משני ביטויים: קל להבין שהביטוי הראשון חוזר על עצמו בכל קפיצה של שני אינדקסים, בעוד הביטוי השני חוזר על עצמו בכל קפיצה של ארבעה אינדקסים. לכן נכסה הכל אם נבין את ארבע האיברים הראשונים, הלא הם

$$0, 0, 0, 2.$$

כדאי לרשום את זה באופן מדוייק ומלא יותר באופן הבא:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 4k+1 \\ 0 & n = 4k+2 \\ 0 & n = 4k+3 \\ 2 & n = 4k+4. \end{cases}$$

בסך הכל נקבל כי

$$\liminf \left[\frac{(-1)^n + 1}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right] = 0, \limsup \left[\frac{(-1)^n + 1}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right] = 2.$$

2.42 תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה מלעיל, ונסמן $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. הראו כי אם M אינו אחד מבין איברי הסדרה, אז הוא גבול חלקי שלה.

פיתרון:

כלומר, יש להוכיח שאם M אינו אחד מה-a_n-ים אז יש תת-סדרה שמתכנסת אליו. אכן, נבחר תחילה אינדקס n_1 כך ש-

$$a_{n_1} > M - 1.$$

כעת נסמן $\epsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, M - a_1, \ldots, M - a_{n_1}\right\}$, ונעיר כי $\epsilon_1 > 0$ שכן לעולם לא יתקיים $M - a_n = 0$. מכאן שנוכל למצוא n_2 כך ש-

$$a_{n_2} > M - \epsilon_1.$$

בשלב זה חשוב לשים לב ש-$n_2 > n_1$ (לו זה לא היה מתקיים, לא היינו מקבלים תת-סדרה חוקית). אכן, לא יתכן ש-$n_2 \leq n_1$, מפני שמעצם הגדרת ϵ_1 נקבל שלכל $1 \leq k \leq n_1$, $M - \epsilon_1 \geq M - (M - a_k) = a_k$, בעוד שעבור n_2 מתקיים אי-השוויון ההפוך.

נמשיך כך ונסביר כיצד לבחור את n_{k+1} בהנחה שכבר נבחרו $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ אשר מקיימים כולם $a_{n_i} > M - \frac{1}{i}$; נסמן $\epsilon_k = \min\left\{\frac{1}{k}, M - a_1, \ldots, M - a_{n_k}\right\}$, ששוב מקיים $\epsilon_k > 0$ מאותה הסיבה, ונמצא n_{k+1} כך שיתקיים $a_{n_{k+1}} > M - \epsilon_k$. מאותה הסיבה כמו קודם, חייב להתקיים $n_{k+1} > n_k$, וכן מובן ש-$a_{n_{k+1}} > M - \frac{1}{k+1}$. לכן בסך הכל בנינו תת-סדרה המקיימת

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} < M,$$

ועל פי כלל הסנדוויץ' הרי ש-

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = M.$$

2.43 תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות חסומות. הראו כי

$$\limsup\left[a_n+b_n\right]\le\limsup a_n+\limsup b_n$$

וכי

$$\liminf a_n+\liminf b_n\le\liminf\left[a_n+b_n\right].$$

הערה: זו הגרסה לגבול עליון ותחתון של "אריתמטיקה של גבולות". נוכיח רק את אי־השוויון הראשון.

פיתרון:
נזכיר שהגבול העליון הנו גבול חלקי בעצמו, ולכן קיימת תת־סדרה של a_n+b_n כך ש־

$$\lim_{k\to\infty}\left[a_{n_k}+b_{n_k}\right]=\limsup\left[a_n+b_n\right].$$

כעת ניעזר במשפט בולצאנו ויירשטראס, ומכיוון ששתי הסדרות חסומות נוכל למצוא תת־תת־סדרה, כלומר, תת־סדרה של $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, אשר מתכנסת, נניח, ל־a. אך כעת המצב הוא

$$\lim_{j\to\infty}\left[a_{n_{k_j}}+b_{n_{k_j}}\right]=\limsup\left[a_n+b_n\right],\quad \lim_{j\to\infty}a_{n_{k_j}}=a.$$

לכן, על פי אריתמטיקה של גבולות, הרי שגם תת־תת־הסדרה $\left(b_{n_{k_j}}\right)_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת, וגבולה, b, מקיים $a+b=\limsup\left[a_n+b_n\right]$. אך היות ו־$a$ הנו גבול חלקי של הסדרה הראשונה ו־b הנו גבול חלקי של הסדרה השניה, הרי ש־

$$\limsup\left[a_n+b_n\right]=a+b\le\limsup a_n+\limsup b_n.$$

2.44 הראו כי אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי

$$\liminf\left[a_n+b_n\right]=\lim_{n\to\infty}a_n+\liminf b_n,\quad \limsup\left[a_n+b_n\right]=\lim_{n\to\infty}a_n+\limsup b_n.$$

פיתרון:
נוכיח רק את המקרה השני. תהי $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת־סדרה המתכנסת ל־$\limsup b_n$. אזי

$$\lim_{k\to\infty}\left[a_{n_k}+b_{n_k}\right]=\lim_{n\to\infty}a_n+\limsup b_n,$$

שכן כל תת־סדרה של סדרה מתכנסת מתכנסת גם היא ולאותו גבול. אך מכך נובע ש־$\lim_{n\to\infty} a_n + \limsup b_n$ הוא גבול חלקי של $a_n + b_n$, ומכאן ש־

$$\limsup\left[a_n + b_n\right] \geq \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup b_n.$$

היות ואי־השוויון ההפוך כבר ידוע (הרי עבור סדרה מתכנסת, הגבול העליון שווה לגבול), הרי שיש שוויון, כנדרש.

$\boxed{2.45}$ הראו שאם $\limsup a_n < \liminf b_n$ אז מתקיים $a_n < b_n$ החל ממקום מסויים.

<u>פיתרון:</u>
נניח בשלילה שזה אינו המצב. כלומר, לכל N קיים $n > N$ כך ש־$a_n \geq b_n$. מכך נובע שלמעשה קיימת תת־סדרה כך ש־$a_{n_k} \leq b_{n_k}$ לכל k. על סמך משפט בולצאנו ויירשטראס, ל־a_{n_k} יש תת־סדרה מתכנסת, נניח, $a_{n_{k_j}}$, וכעת שוב לפי אותו משפט, ל־$b_{n_{k_j}}$ יש תת־סדרה מתכנסת, נניח, $b_{n_{k_{j_m}}}$. מובן שאותה תת־סדרה של הסדרה הראשונה גם מתכנסת, היות ומדובר בתת־סדרה של סדרה מתכנסת. אך כעת, אם נסמן את שני הגבולות ב־a ו־b, הרי שהיות ומתקיים אי־השוויון

$$a_{n_{k_{j_m}}} \geq b_{n_{k_{j_m}}},$$

נקבל כי $a \geq b$, ומכך על פי הגדרת הגבול העליון והתחתון,

$$\limsup a_n \geq \liminf b_n,$$

בסתירה להנחה.

$\boxed{2.46}$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה המקיימת $\lim_{n\to\infty}\left[a_{n+1} - a_n\right] = 0$. הראו כי הגבולות החלקיים של הסדרה הם בדיוק כל הנקודות בקטע $[\liminf a_n, \limsup a_n]$.

<u>הערה:</u> כאן אנו עדים למצב שבו יש אינסוף גבולות חלקיים לסדרה נתונה אחת ־ ולמעשה, אינסוף שאינו ניתן להמנות.

<u>פיתרון:</u>
ראשית מובן מן ההגדרה של הגבול העליון והתחתון שקבוצת הגבולות החלקיים הנה חלקית לקטע הנתון. יש אם כך להראות שכל נקודה בקטע הנתון הנה גבול חלקי. נסמן $N = \liminf a_n$ ו־$M = \limsup a_n$, ונניח בשלילה שזה אינו המצב. כלומר, שקיים $a \in [N, M]$ שאינו גבול חלקי של הסדרה. אם כך הרי שקיימת סביבה של a, אותה נסמן $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, שבה יש רק מספר סופי מאיברי הסדרה. כלומר, קיים N כה גדול שעבור כל $n > N$ מתקיים $a_n \notin (a - \epsilon, a + \epsilon)$.
כעת ניעזר בנתון ונמצא $\tilde{N} > N$ כך שלכל $n > \tilde{N}$ מתקיים $|a_{n+1} - a_n| < \epsilon$.

ראשית נציין ש־$a_{\tilde{N}+1} \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)$, ולכן הוא נמצא או מימין ל־$a+\epsilon$ או משמאל ל־$a-\epsilon$. נניח, לדוגמה, שהוא משמאל ל־$a-\epsilon$. אם כך הרי שבהכרח כל a_n עבור $n > \tilde{N}$ נמצא גם הוא משמאל ל־$a-\epsilon$; אכן, לו היה קיים n כך ש־$a_n \geq a+\epsilon$, הרי שהיה מתקבל

$$\left|a_n - a_{\tilde{N}+1}\right| \geq a + \epsilon - (a - \epsilon) = 2\epsilon,$$

בסתירה לכך שידוע שמרחק זה קטן מ־ϵ. אך אם כל איברי הסדרה החל ממקום מסויים קטנים מ־$a-\epsilon$, הרי ש־$\limsup a_n < a - \epsilon$, בסתירה.

2.5 סדרות קושי

2.47 תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים שלמים. הראו כי אם היא מתכנסת אז היא למעשה קבועה החל ממקום מסויים.

<u>פיתרון:</u>
בשאלות מסוג זה נוח להשתמש בתנאי קושי להתכנסות, היות ואין לנו גבול נתון ביד אלא רק את המידע ש"הסדרה מתכנסת". בנוסף, היות ושני מספרים שלמים שונים מרוחקים האחד מן השני בלפחות 1, ישנו הגיון ביישום תנאי קושי עם $\epsilon = \frac{1}{2}$: היות והסדרה מתכנסת היא גם סדרת קושי ולכן קיים N כך שלכל $n, m > N$ מתקיים

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{2}.$$

אך היות ושני המספרים הללו שלמים, הרי ש־$a_n = a_m$. זה מסיים את ההוכחה (הרי זה נכון לכל $n, m > N$).

2.48 הראו כי $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ קיים.

<u>הערה:</u> כלומר, יש להוכיח שהסדרה

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

מתכנסת. זה מאפשר להגדיר את הסכום האינסופי (בניגוד לסכום סופי, של שניים, שלושה או מיליון ואחד איברים).

<u>פיתרון:</u>
במקרה זה אין לנו סיכוי למצוא את המיועד בשלב זה (ערכו הוא $\frac{\pi^2}{6}$). לכן תנאי קושי הנו טבעי כאן; נראה שהסדרה הנתונה הנה סדרת קושי.

לצורך כך נשתמש בכך ש־

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

הערכה זו שימושית, מפני שאם $n,m \in \mathbb{N}$ אזי

$$|a_m - a_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1},$$

כאשר הנחנו ללא הגבלת הכלליות ש־$m > n$. אך ביטוי זה אכן קטן כאשר n ו־m גדולים, כלומר, בהנתן $\epsilon > 0$, ניתן למצוא N כך שלכל $n,m > N$ מתקיים גם $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2}$ וגם $\frac{1}{n+1} < \frac{\epsilon}{2}$, ואז

$$|a_m - a_n| < \epsilon.$$

לכן הסדרה הנתונה היא סדרת קושי, ועל פי משפט, היא מתכנסת.

$\boxed{2.49}$ הראו כי $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.

<u>הערה:</u> כלומר, בניגוד למקרה הקודם, הסדרה

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

על אף שבכל פעם מוסיפים מספר שהולך וקטן לאפס, בכל זאת אינה מתכנסת לגבול סופי אלא שואפת לאינסוף.

<u>פיתרון:</u>

שוב נשתמש בתנאי קושי להתכנסות, אלא שהפעם נראה שהוא אינו מתקיים. היות והסדרה הנתונה היא מונוטונית עולה, זה יראה שהיא שואפת לאינסוף. ואכן, נשים לב שלכל n מתקיים

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

כלומר, תנאי קושי איננו מתקיים עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$, מפני שעבור כל N, אם נסמן $n = N+1$ ו־$m = 2n = 2N+2$, הרי ש־$m,n > N$ אך $|a_m - a_n| \geq \epsilon$.

פרק 3

גבולות של פונקציות

3.1 הגדרות בסיסיות ופונקציות אלמנטריות

3.1 תנו דוגמה לפונקציה $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ שהנה:

א. חד־חד־ערכית אך לא על.
ב. על אך לא חד־חד־ערכית.
ג. חד־חד־ערכית ועל.
ד. מונוטונית עולה ממש.
ה. מונוטונית עולה, אך לא ממש.
ו. מונוטונית יורדת ממש.
ז. הפיכה.

פיתרון:

א. $f(x)=\frac{x}{2}$.
ב. $f(x)=\sin(\pi x)$.
ג. $f(x)=x$, $f(x)=\sin(x)$.
ד. $f(x)=x$, $f(x)=2x$, $f(x)=x^2$.
ה. $f(x)=0$.
ו. $f(x)=-x$.
ז. פונקציה $f:A\longrightarrow B$ היא הפיכה אם ורק אם היא חד־חד־ערכית ועל, כך שסעיף זה זהה לסעיף ג'.

לפני שנעבור לכל סוגי הפונקציות האלמנטריות, נציין שכל עוד לא נתונים תחום הגדרה A וטווח B, תמיד נניח שהטווח B הוא $\mathbb{R}$ ושתחום ההגדרה הוא הרחב ביותר האפשרי (כלומר, שהוא כולל את כל הנקודות שבהן הפונקציות מוגדרות "באופן טבעי").

3.1.1 פולינומים

פולינום הוא פונקציה מהצורה

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

אם $a_n \neq 0$, אזי a_n נקרא המקדם המוביל של הפולינום $f(x)$ וכן אומרים שדרגת הפולינום $f(x)$ היא n. בדרך כלל מסמנים

$$\deg(f(x)) = n.$$

$\boxed{3.2}$ קבעו את המקדמים המובילים ואת הדרגות של הפולינומים הבאים:

א. $x^2 - 4$.

ב. 7.

ג. $x^5 - 4x^4 + 8x^2 - 1$.

ד. $(4-x)^3 + 7x^2 + x^3$.

ה. 0.

<u>פיתרון:</u>

א. המקדם המוביל הוא 1, ו־

$$\deg\left(x^2 - 4\right) = 2.$$

ב. המקדם המוביל הוא 7, ו־

$$\deg(7) = 0.$$

ג. המקדם המוביל הוא 2, ו־

$$\deg\left(2x^5 - 4x^4 + 8x^2 - 1\right) = 5.$$

ד. כדאי לשים לב ש־

$$(4-x)^3+7x^2+x^3=19x^2-48x+64,$$

ולכן המקדם המוביל הוא 19 ו־

$$\deg\left((4-x)^3+7x^2+x^3\right)=2.$$

ה. זהו מקרה מיוחד: בדרך כלל נהוג לומר שמעלת פולינום האפס היא $-\infty$ (על אף שכביכול מדובר בקבוע שמעלתו כפולינום היא אפס, שכן כזכור לפי ההגדרה המקדם המוביל לא יכול להיות אפס).

כל פונקציה קבועה היא פולינום ממעלה אפס (מלבד פונקציית האפס, $f(x)=0$, הלא היא פולינום ממעלה $-\infty$). גם כל פונקציה שהגרף שלה הוא קו ישר, $f(x)=mx+n$, הוא פולינום, שמעלתו 1 (אלא אם $m=0$, ואז חזרנו לקבועים). הפולינומים ממעלה 2 הם הפרבולות, $f(x)=ax^2+bx+c$. כל המעלות הגבוהות יותר קשות יותר לציור בדרך כלל, אם כי לדוגמה את $f(x)=x^3$, פולינום ממעלה 3, אנו יודעים לצייר.

<u>תכונות של פולינומים:</u>

1. תחום ההגדרה של כל פולינום הוא כל הישר הממשי, $\mathbb{R}$.
כדאי להעיר שבאופן עקרוני מותר תמיד לצמצם את תחום ההגדרה לתחום הגדרה קטן יותר (לדוגמה, מותר אם רוצים להגדיר פונקציה $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=x^2$, ובכך לקבל כביכול "פולינום" אשר תחום הגדרתו אינו כל $\mathbb{R}$). אך כאמור, כאשר לא נתון תחום הגדרה עבור פונקציה אלמנטרית מסויימת, תמיד נניח שתחום ההגדרה הוא הרחב ביותר האפשרי.

2. לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ממשיים, כלומר, לכל היותר n פתרונות עבור המשוואה $f(x)=0$. עבור פולינומים ממעלה 0, 1 ו־2 יש לנו היכולת לחשב את השורשים, אך עבור מעלות גבוהות יותר המצב מסתבך. יש לשים לב שישנם פולינומים ללא אף שורש ממשי ־ כלומר, פולינומים $f(x)$ כך ש־$f(x)\neq 0$ לכל x! במילים אחרות, הערך $y=0$ אינו חייב להיות בתמונה של פולינום נתון.

3. לכל פולינום ממעלה אי־זוגית יש לפחות שורש ממשי אחד (כלומר, 0 כן שייך לתמונה של כל פולינום ממעלה אי־זוגית). זה יוכח בהמשך הקורס.

4. התמונה של פולינום ממעלה אי־זוגית היא כל הישר הממשי. התמונה של פולינום ממעלה זוגית היא "חצי ישר", כלומר, קרן מהצורה $[a,\infty)$ או $(-\infty,a]$. המקרה היוצא מהכלל כאן הוא מעלה 0, כאשר במקרה זה הפולינום הוא קבוע ובתמונה יש ערך אחד בלבד.

באופן כללי, פולינום אינו חייב להיות פונקציה חד־חד־ערכית או פונקציה מונוטונית.

3.1.2 פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית היא פונקציה מהצורה $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, כאשר $p(x)$ ו־$q(x)$ שניהם פולינומים. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כל $\mathbb{R}$ פרט לנקודות בהן $q(x)=0$ - ויש לכל היותר $\deg(q(x))$ נקודות כאלה.

$\boxed{3.3}$ מבין הפונקציות הבאות, קבעו אילו מהן פונקציות רציונליות ועבור אלו שכן, מצאו את תחום ההגדרה שלהן.

א. $f(x)=\frac{x-2}{x+7}$.

ב. $f(x)=\frac{x}{2}$.

ג. $f(x)=x$.

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}}{x^5+4}$.

ה. $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}$.

פיתרון:

א. זו אכן פונקציה אלמנטרית, אשר תחום הגדרתה הוא $\mathbb{R}\setminus\{-7\}$ (לעיתים פשוט כותבים $x\neq -7$).

ב. גם זו פונקציה רציונלית (כאן $q(x)=2$), אשר תחום הגדרתה הוא כל הישר הממשי.

ג. גם זו פונקציה רציונלית (כאן $q(x)=1$), אשר תחום הגדרתה הוא כל הישר הממשי.

ד. המונה כאן אינו פולינום; זו אינה פונקציה רציונלית.

ה. זו פונקציה רציונלית, כאשר תחום הגדרתה הוא כל $\mathbb{R}$ פרט לנקודות שבהן $x^2-6x+8=0$. הנקודות האלו הן $x=2,4$.

הערה: נתבונן בדוגמה האחרונה; מתקיים כי $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ וכי $x^2-4=(x+2)(x-2)$. לכן אולי היה אפשר לחשוב, היות ו־

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\frac{x+2}{x-4},$$

שהפונקציה הנתונה שווה לפונקציה $\frac{x+2}{x-4}$. אך צריך להזהר! תחום ההגדרה והטווח הם חלק בלתי־נפרד מהפונקציה, ולכן הפונקציה $\frac{x+2}{x-4}$, שתחום הגדרתה אינו זהה לזה של $f(x)$ (הוא רחב יותר בכך שהוא כולל בנוסף את הנקודה $x=2$), אינה שווה לפונקציה $f(x)$! מצד שני, נכון יהיה לומר ש־$f(x)=\frac{x+2}{x-4}$ בכל הנקודות שבהן שתי הפונקציות מוגדרות, וכן יהיה נכון לומר ש־$f(x)$ שווה לצמצום של $\frac{x+2}{x-4}$ לתחום ההגדרה הקטן יותר $x\neq 2,4$.

3.1.3 פונקציות מעריכיות

יהי $a > 0$ כך ש־$a \neq 1$. הפונקציה המעריכית עם בסיס a היא $f(x) = a^x$.

תכונות:

1. תחום ההגדרה הוא כל הישר הממשי.
2. אם $a > 1$ הפונקציה היא מונוטונית עולה ממש, ואם $0 < a < 1$ אז הפונקציה מונוטונית יורדת ממש.
3. התמונה היא הקרן החיובית, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.
4. מתקיים
$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

הערה: המקרה $a = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ יהיה הכי נפוץ, והרבה פעמים נקרא ל־$f(x) = e^x$ פשוט "הפונקציה המעריכית".

3.1.4 הפונקציות הטריגונומטריות

הפונקציות הטריגונומטריות הן

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x), \quad \cot(x).$$

לפני שנזכיר כיצד הן מוגדרות, נציין כי את הזוויות x לא נמדוד במעלות אלא ברדיאנים: זווית היא בעלת α רדיאנים אם כאשר מתבוננים בקשת היוצרת זווית α במעגל יחידה, מתקבל אורך קשת α (כלומר, רדיאנים הם פשוט אורך הקשת המתאימה). לדוגמה, 360 מעלות הם 2π רדיאנים, היות וההיקף של מעגל יחידה הוא 2π. באופן כללי,

$$\alpha_{\text{רדיאנים}} = \frac{2\pi}{360}\alpha_{\text{מעלות}}.$$

כעת נזכיר את הגדרותיהן של הפונקציות הטריגונומטריות: במעגל היחידה, מסתכלים על נקודה על פני המעגל היוצרת, יחד עם הנקודה הקבועה $(1,0)$ זווית של x רדיאנים.

- רכיב ה־y של הנקודה הוא $\cos(x)$.
- רכיב ה־x של הנקודה הוא $\sin(x)$.
- מגדירים
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

הנ"ל ברור עבור $x \in [0, 2\pi]$, אך למעשה פועל לכל ערך ממשי x: כדאי להדגים על המעגל.

<u>תכונות:</u>

1. תחום ההגדרה של $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$ הוא כל הישר הממשי. תחום ההגדרה של $\tan(x)$ הוא $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ כאשר k שלם. תחום ההגדרה של $\cot(x)$ הוא $x \neq k\pi$ כאשר k שלם.
2. התמונה של $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$ היא $[-1, 1]$, והתמונה של $\tan(x)$ ו־$\cot(x)$ היא כל $\mathbb{R}$.
3. שתי הפונקציות $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$ הן מחזוריות 2π, ושתי הפונקציות $\tan(x)$ ו־$\cot(x)$ הן מחזוריות π (לפונקציה f יש מחזור T אם לכל x בתחום ההגדרה של f ממתקיים כי $x + T$ גם בתחום ההגדרה של f, ו־ $f(x + T) = f(x)$).
4. הפונקציה $\cos(x)$ היא פונקציה זוגית, והפונקציות $\sin(x)$, $\tan(x)$ ו־$\cot(x)$ הן פונקציות אי־זוגיות (פונקציה f היא זוגית אם לכל x בתחום ההגדרה של f מתקיים כי $-x$ בתחום ההגדרה של f וכי $f(-x) = f(x)$. פונקציה אי־זוגית היא כנ"ל אך עם $f(-x) = -f(x)$).
5. ישנן זהויות טריגונומטריות רבות אותן כדאי להכיר, לדוגמה, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (זהו למעשה משפט פיתגורס). כדאי להשלים פרטים בסדרת ההרצאות המקוונות "הכנה טובה לטכניון".

3.1.5 הרכבה והפונקציות ההפוכות

ראו את הרשימות של ההרצאות לסקירת פעולת ההרכבה והפונקציות ההפוכות.

3.1.6 סיכום

הפונקציות האלמנטריות הן כל הפונקציות שתוארו עד כה, וכן סכומים,הפרשים ומכפלות שלהם, וכמו כן הרכבות של כל אלו (וכן הלאה).

3.2 הגדרת הגבול

$\boxed{3.4}$ הראו על פי ההגדרה כי $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$.

<u>פיתרון:</u>

נשים לב כי הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x = -1$ (אין לכך שום חשיבות על ערך או קיום הגבול, גם אם הייתה מוגדרת, ולא משנה מה הערך שלה שם). יהי $\epsilon > 0$. יש להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \neq -1$ המקיים $|x + 1| < \delta$ מתקיים

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} + 2 \right| < \epsilon.$$

ובכן, עבור $x \neq -1$, נעריך:

$$\left|\frac{x^2-1}{x+1}+2\right| = |x-1+2| = |x+1|.$$

כעת ברור שניתן לבחור $\delta > 0$ כך שלכל $x \neq -1$ המקיים $|x+1| < \delta$ מתקיים $\left|\frac{x^2-1}{x+1}+2\right| < \epsilon$: נבחר $\delta = \epsilon$!

$\boxed{3.5}$ הראו על פי ההגדרה כי $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-8}{x-8} = 1$.

פיתרון:

יהי $\epsilon > 0$. יש להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \neq 0$ המקיים $|x| < \delta$ מתקיים

$$\left|\frac{x^2-8}{x-8}-1\right| < \epsilon.$$

ובכן, יהי $x \neq 0$, ונעריך:

$$\left|\frac{x^2-8}{x-8}-1\right| = \left|\frac{x^2-8-(x-8)}{x-8}\right| = \frac{|x|\,|x-1|}{|x-8|}.$$

הרעיון כעת הוא שבעוד $|x|$ "קטן" (אכן, הוא בדיוק הערך שעל גודלו אנו שולטים באמצעות δ), הרי שהיתר "לא מפריע" לכך שהביטוי כולו קטן, מכיוון ש-$\frac{|x-1|}{|x-8|}$ חסום בסביבת הנקודה $x = 0$. כל זה הופך להיות מדוייק ברגע שמתרגמים הכל לבחירה נבונה של הערך δ: אם נבחר את δ כך שיהיה קטן מ-$\frac{1}{2}$, הרי ש-$|x| < \delta < \frac{1}{2}$ יבטיח ש-$|x-1| > \frac{1}{2}$, ולכן

$$\frac{|x-8|}{|x-1|} < \frac{\frac{1}{2}+8}{\frac{1}{2}} = 17,$$

כלומר,

$$\left|\frac{x^2-8}{x-8}-1\right| = \frac{|x|\,|x-1|}{|x-8|} < 17\,|x|.$$

לכן אם בנוסף $\delta < \frac{\epsilon}{17}$, נסיים בהצלחה. לכן רק נותר לבחור $\delta = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{17}\right\}$.

$\boxed{3.6}$ הראו על פי ההגדרה כי $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3-x^2} = -\infty$.

פיתרון:

יהי $M \in \mathbb{R}$. יש להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \neq 0$ המקיים $|x| < \delta$ מתקיים $\frac{1}{x^3-x^2} < M$. ואכן, נעריך

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}.$$

נשים לב כי אם $\delta<\frac{1}{2}$ אזי $-\frac{3}{2}<x-1<-\frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{x-1}<-\frac{2}{3}$. מכך כעת נובע כי

$$\frac{1}{x^3-x^2}<-\frac{2}{3x^2}.$$

ביטוי זה אכן יהיה קטן מ־M אם $x^2M>-\frac{2}{3}$. אם M חיובי, זה בוודאי מתקיים לכל M, ואז התנאי היחיד הוא $\delta<\frac{1}{2}$, ולכן נוכל לבחור $\delta=\frac{1}{4}$. אם $M<0$, נקבל בסך הכל שאי־השוויון הרצוי מתקיים כאשר

$$x^2<-\frac{2}{3M},$$

או במילים אחרות, אם $|x|<\sqrt{-\frac{2}{3M}}$. כלומר, במקרה זה, נוכל לבחור $\delta=\frac{1}{2}\min\left\{\frac{1}{2},\sqrt{-\frac{2}{3M}}\right\}$.

3.3 אריתמטיקה של גבולות וקריטריוני התכנסות

3.7 חשבו את הגבול $\lim_{x\to1}\frac{1+\sin^2(x)}{x^2-2\cos(x)}$.

פיתרון:
על פי אריתמטיקה של גבולות וכן גבולות שחושבו בהרצאה, מתקיים

$$\lim_{x\to1}\frac{1+\sin^2(x)}{x^2-2\cos(x)}=\frac{1+\sin^2(1)}{1-2\cos(1)}.$$

3.8 הראו כי $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n^4}{n^4+7}\right)=\sin(1)$.

פיתרון:
ניעזר בקריטריון היינה: נסמן $f(x)=\sin(x)$ ו־$x_n=\frac{n^4}{n^4+7}$. ידוע כי $\lim_{x\to1}f(x)=\sin(1)$ ומובן כי $\lim_{n\to\infty}x_n=1$. היות ומדובר בסדרה אשר מוכלת בסביבה מנוקבת של 1 שבה f מוגדרת, הרי שעל פי קריטריון היינה, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\sin(1)$. זה בדיוק מה שיש להוכיח.

3.9 הראו שהגבול $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$ אינו קיים.

פיתרון:
ניעזר בקריטריון היינה לגבולות של פונקציות, ונמצא שתי סדרות השואפות

לאינסוף אך המניבות גבולות שונים כאשר מפעילים עליהן את הפונקציה $\sin(\cdot)$.
ואכן, אם נגדיר

$$x_n = n\pi, \qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin(y_n) = 1.$$

3.10 נניח כי f מוגדרת בקטע (a,b) ומונוטונית עולה בו. הראו כי $\lim_{x\to b^-} f(x)$ קיים במובן הרחב, וכי הוא ∞ אם f לא חסומה ו־$\sup_{(a,b)} f$ אם f חסומה.

פיתרון:
נטפל במקרה שבו f חסומה. נסמן אם כך $M = \sup_{(a,b)} f$, ותהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אשר עולה ל־b (על פי תרגיל בית, מספיק להראות את תנאי היינה עבור סדרות עולות). אם כך נקבל ש־$(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ גם היא סדרה עולה, ולכן מתכנסת; כדי לראות שגבולה הוא M, נשים לב שהוא בוודאי קטן מ־M, ומצד שני לכל $\epsilon > 0$ קיים $x \in (a,b)$ המקיים $f(x) > M - \epsilon$. כעת נמצא N כך ש־$x_N > x$, ואז לכל $n > N$ מתקיים $x_n \geq x_N > x$ ולכן $f(x_n) \geq f(x) > M - \epsilon$. כלומר, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq M - \epsilon$, אך היות וזה נכון לכל $\epsilon > 0$, הרי שסיימנו.

3.11 הראו שמתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם ורק אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ בסביבה מנוקבת של x_0 המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ והמורכבת ממספרים רציונלים בלבד, וכן לכל סדרה כנ"ל המורכבת ממספרים אי־רציונליים בלבד, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

הערה: כלומר, בקריטריון היינה לגבול של פונקציה באמצעות סדרות, ניתן להסתפק בסדרות שאינן מערבות מספרים רציונלים ואי־רציונלים.

פיתרון:
כיוון אחד מובן, היות ואם הגבול של הפונקציה קיים ב־x_0, הרי שעל סמך קריטריון היינה לכל בחירה של סדרה מתקיים הנ"ל.

נניח אם כך שהמצב המתואר מתקיים, ויש להוכיח ש־$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
על פי קריטריון היינה, די להוכיח שאם $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ היא סדרה בסביבה המנוקבת של x_0, אזי $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. ובכן, ניקח סדרה כזו. אם יש בה רק מספר סופי של איברים אי־רציונלים, הרי שהיא למעשה לחלוטין רציונלית החל ממקום מסויים, ועל פי הנתון, בהכרח $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$. כנ"ל אם יש בה רק מספר סופי של איברים רציונלים.
אם יש בה גם מספר אינסופי של רציונלים וגם מספר אינסופי של אי־רציונלים, הרי שהסדרה מתפרקת לשתי סדרות, האחת של אותם מספרים בסדרה המקורית שהם רציונלים, והשניה -- של האי־רציונלים. אך מובן ששתי תתי הסדרות

הללו מקיימות את כל התנאים גם הן, ולכן $f(x_n)$ מתפקרת לשתי תת־סדרות המתכנסות שתיהן ל־L. כלומר, היא עצמה מתכנסת ל־L.

3.12 תהי $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \mathbb{Q}\ni x=\frac{p}{q} \text{ שבר מצומצם} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

הראו כי $\lim_{x\to x_0}=0$ לכל $x_0\in\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו מכונה "פונקציית רימן".

פיתרון:
יהי $x_0\in\mathbb{R}$. נבחר סדרה $x_0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_n$. מובן כי אם הסדרה מורכבת כולה ממספרים אי־רציונלים, אזי $f(x_n)=0$ לכל n ולכן בוודאי $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$. מצד שני, אם הסדרה מורכבת כולה ממספרים רציונלים, הרי שהיא אינה יכולה להיות קבועה החל ממקום מסויים (שכן היא שואפת ל־x_0, ואף אחד מאיבריה אינו יכול להיות x_0), ולכן אם $x_n=\frac{p_n}{q_n}$ שבר מצומצם אזי $\lim_{n\to\infty} q_n=\infty$ (זה יופיע כתרגיל בית). כלומר, שוב

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}=0.$$

הערה: כאשר אומרים "שבר מצומצם", תמיד נניח שהמכנה חיובי ושהסימן בא לידי ביטוי במונה.

3.13 בדקו אם הגבול $\frac{1}{x}$ קיים.

פיתרון:
מובן שהגבול מימין הוא ∞ בעוד הגבול משמאל הוא $-\infty$. לכן הגבול אינו קיים.

3.4 כלל הסנדוויץ' ותכונות סדר של גבולות

3.14 מצאו את הגבולות הבאים, אם הם קיימים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$.

ב. $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

<u>פיתרון:</u>

א. היות ו־$[x]$ מוגדר בצורה שונה מימין ומשמאל לאפס, כדאי לחשב גבולות חד־צדדיים ולבדוק שוויון:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0}{x}=0,$$

בעוד

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=\infty.$$

כלומר, הגבול אינו קיים.

ב. במקרה הזה, הביטוי שבתוך ה"ערך השלם" דווקא שואף לאינסוף או למינוס אינסוף (תלוי באיזה צד), ולכן ערכו השלם אינו שואף לשום דבר מסויים (באף צד). לכן כדאי לנסות אחרת; נשים לב כי

$$\frac{1}{x}-1\le\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x};$$

לכן, אם $x>0$, נקבל

$$1-x\le x\left[\frac{1}{X}\right]\le 1,$$

בעוד שעבור $x<0$ נקבל

$$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1-x.$$

בשני המקרים כלל הסנדוויץ' ישים ונקבל

$$\lim_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1,$$

ולכן הגבול קיים ושווה ל־1.

פרק 4

פונקציות רציפות

4.1 הגדרת הרציפות ומיון נקודות אי־רציפות

4.1 מצאו עבור אילו ערכים של a, b הפונקציה הבאה רציפה בכל נקודה $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}} & |x| < 2 \\ \frac{ax^2+b}{ax+1} & x \geq 2 \end{cases}$$

פיתרון:

ראשית נעיר שהביטוי המגדיר את הפונקציה בתחום $|x| < 2$ הוא פונקציה אלמנטרית, ולכן הוא רציף בכל נקודה שבה הוא מוגדר. נוודא אם כך שהוא מוגדר לכל $|x| < 2$; אכן, המונה מוגדר כל עוד $4 - x^2 \geq -$, אשר מתרחש בדיוק כאשר $|x| \leq 2$. המכנה, לעומתו, מוגדר כאשר

$$(x-3)(x-2) = 6 - 5x + x^2 \geq 0,$$

אשר מתרחש כאשר $x > 3$ וכן כאשר $x < 2$. לבסוף, השבר כולו מוגדר כאשר

$$\sqrt{6-5x+x^2} \neq 0,$$

אשר מתרחש כאשר $x > 3$ או $x < 2$. לכן, בתחום $-2 < x < 2$, הביטוי מוגדר.

נעבור כעת לביטוי עבור $x > 2$. גם זו סונקציה אלמנטרית, ולכן רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת. זה קורה כאשר המכנה אינו מתאפס, כלומר, כאשר $ax + 1 \neq 0$. הביטוי הזה מתאפס בנקודה $x = -\frac{1}{a}$, אשר נמצאת בתחום $x \geq 2$ אם ורק אם $0 < a \leq -\frac{1}{2}$. לכן על מנת ש־f תהיה רציפה, בהכרח $a \notin \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

לבסוף, עבור הנקודה היחידה שבסביבתה הפונצקיה אינה אלמנטרית, כלומר, עבור $x = 2$, נבדוק רציפות על ידי חישוב גבול מימין וגבול משמאל. על מנת

שהפונקציה תהיה רציפה, שני הגבולות הללו חייבים להזדהות ולהיות שווים ל־ $f(2)$. כלומר, חייב להתקיים

$$\begin{aligned}\frac{4a+b}{2a+1} &= f(2) = \lim_{x\to 2}\frac{ax^2+b}{ax+1} = \lim_{x\to 2^+}\frac{ax^2+b}{ax+1} \\ &= \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{\sqrt{(x-2)(x-3)}} = \lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 2.\end{aligned}$$

הפיתרון הוא $b=2$, ו־$a\notin\left[-\frac{1}{2},0\right)$.

$\boxed{4.2}$ תהי $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ המקיימת, לכל $x,y\in\mathbb{R}$, כי

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$$

עבור קבוע $K>0$ כלשהו. הראו כי f רציפה.

<u>פיתרון:</u>
נראה כי $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, לכל $x_0\in\mathbb{R}$. ואכן, יהיו $x_0\in\mathbb{R}$ ו־$\epsilon>0$. נשים לב כי לכל x מתקיים

$$|f(x)-f(x_0)|\le K|x-x_0|,$$

ולכן $\delta={}^{\epsilon}/_{K}$ בוודאי יעבוד.

<u>הערה:</u> פונקציה כזו נקראת "רציפה ליפשיץ", והיא דוגמה לפונקציה בעלת רציפות מסוג מיוחד: בהנתן $\epsilon>0$, קיים $\delta>0$ אוניברסלי לכל ה־x־ים.

$\boxed{4.3}$ תהי $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ המקיימת, לכל $x,y\in\mathbb{R}$, כי

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2.$$

הראו כי f קבועה.

<u>פיתרון:</u>
יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. נראה כי $f(x)=f(y)$. לצורך כך נסמן $z=\frac{x+y}{2}$, ואז

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\le|x-z|^2+|z-y|^2=\frac{(x-y)^2}{2}.$$

אכן,

$$|x-z|^2+|z-y|^2=\left|\frac{x-y}{2}\right|^2+\left|\frac{y-x}{2}\right|^2=\frac{(x-y)^2}{2}.$$

כלומר, מכך ש־$|f(x)-f(y)| \le |x-y|^2$ קיבלנו כי $|f(x)-f(y)| \le \frac{|x-y|^2}{2}$. מובן כי באינדוקציה, לכל n בעצם מתקיים

$$|f(x)-f(y)|^2 \le \frac{|x-y|^2}{2^n},$$

ולכן $f(x)=f(y)$.

הערה: אפשר אולי היה לחשוב שנקבל רציפות "עוד יותר טובה" מרציפות ליפשיץ, אך מתברר שהתנאי "מוגזם" ומקבלים רק פונקציות קבועות.

4.4 מיינו את נקודות אי־הרציפות של הפונקציה

$$f(x)=\frac{[x]}{x-1}.$$

פיתרון:
בשלב הראשון תמיד כדאי לאתר את הנקודות הבעייתיות. הראשונה שקופצת לעין היא $x=1$, שכן היות והפקונציה אינה מוגדרת בה, חייבת להיות נקודת אי־רציפות (המקרה ה"טוב ביותר" הוא שהיא תהיה נקודת אי־רציפות סליקה, וזאת במקרה והגבול קיים).
בנוסף, הפונקציה $[x]$ עלולה ליצור בעיות סביב מספרים שלמים. בכל מספר אחר, לעומת זאת, המונה רציף (כי הוא קבוע בכל קטע פתוח בין שני שלמים עוקבים) והמכנה רציף ואינו מתאפס, ולכן הפונקציה רציפה. כלומר, בסך הכל, הנקודות החשודות הן $x\in\mathbb{Z}$.

נתחיל ב־$x=1$. נחשב גבול מימין וגבול משמאל;

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{[x]}{x-1}=0, \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{[x]}{x-1}=\infty.$$

היות ולא מתקיים ששני הגבולות החד־צדדיים קיימים (הגבול מימין קיים רק במובן הרחב),מ הרי ש־$x=1$ היא אי־רציפות עיקרית.

נבדוק כעת את יתר הנקודות $1\neq x\in\mathbb{Z}$. נחשב גבול מימין וגבול משמאל, כאשר $x=k$;

$$\lim_{x\to k^-}\frac{[x]}{x-1}=1, \qquad \lim_{x\to k^+}\frac{[x]}{x-1}=\frac{k}{k-1}.$$

כלומר, שני הגבולות החד־צדדיים קיימים אך אינם שווים. לכן כל הנקודות הללו מהוות נקודות אי־רציפות מסוג קפיצה.

הערה: אם הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{[x]}{x-1}$ היה קיים, אז $x=1$ עדיין לא הייתה נקודת רציפות אלא נקודת אי־רציפות סליקה!

4.2 פונקציות רציפות בקטע סגור וחסום

4.5 הראו כי למשוואות הבאות קיים פיתרון:

א. $\sin(x) = x + 4$.

ב. $e^x = 3x$.

ג. $\tan(x) = x + 1$.

פיתרון:

הראו כי למשוואות הבאות קיים פיתרון:

א. נסמן $f(x) = \sin(x) - x - 4$. מובן כי f רציפה, ויש להוכיח שקיים x ממשי המקיים $f(x) = 0$. אך נשים לב כי $f(0) = -4 < 0$ ו־$f(-2\pi) = 2\pi - 4 > 0$. לכן, על סמך משפט ערך הביניים עבור f בקטע $[-2\pi, 0]$, בהכרח קיימת $c \in (-2\pi, 0)$ כך ש־$f(c) = 0$.

ב. נסמן $f(x) = e^x - 3x$. כנ"ל, f רציפה, ובנוסף, $f(0) = 1 > 0$ ו־$f(1) = e - 3 < 0$. לכן על סמך משפט ערך הביניים עבור f בקטע $[0,1]$, קיימת $c \in (0,1)$ כך ש־$f(c) = 0$.

ג. נסמן $f(x) = \tan(x) - x - 1$. הפונקציה f רציפה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ומקיימת

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} = \infty.$$

לכן קיים $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ כך ש־$f(x_1) < 0$, וקיים $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ כך ש־$f(x_2) > 0$. כעת על סמך משפט ערך הביניים עבור f בקטע $[x_1, x_2]$, קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ כך ש־$f(c) = 0$.

4.6 הוכיחו או הפריכו, עבור $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

א. אם f רציפה אזי f חסומה.

ב. אם $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ו־$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ קיימים ו־f רציפה אזי f חסומה.

ג. אם $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ו־$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ קיימים ו־f רציפה אזי f מקבלת מינימום ומקסימום.

פיתרון:

א. לא נכון. לדוגמה, $f(x) = x$ רציפה אך אינה חסומה.

ב. נכון. אם $\lim_{x\to\infty}=L_1$, הרי שקיים M כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-L_1|<1$. מכך נובע כי

$$|f(x)|\le|L_1|+1.$$

כנ"ל אם $\lim_{x\to-\infty}=L_2$ אזי קיים N כך שלכל $x<N$ מתקיים

$$|f(x)|\le|L_2|+1.$$

אם $N>M$ הרי שסיימנו, שכן $L=\max\{|L_1|,|L_2|\}+1$ מהווה חסם ל-f. אחרת, בזכות משפט וירשטראס, f חסומה על $[N,M]$, נניח, על ידי K, ואז f חסומה על ידי $\max\{K,L\}$.

ג. לא נכון. לדוגמה, $f(x)=\arctan(x)$.

4.3 רציפות במידה שווה

$\boxed{4.7}$ הראו כי $f(x)=\sqrt{x}$ איננה רציפה ליפשיץ בקטע $[0,1]$.

<u>פיתרון:</u>
נראה שלא קיים אף $K>0$ המקיים, לכל $x,y\in[0,1]$, את אי-השוויון

$$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|.$$

אכן, יהי $K>0$. נמצא $x,y\in[0,1]$ כך ש-

$$|f(x)-f(y)|>K|x-y|,$$

כלומר, כך ש-

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>K.$$

נשים לב כי, כל עוד $x\neq y$,

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\right|=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

נמצא כעת מספר שלם n אשר גדול מ-$3K$, ונסמן $x=\frac{1}{n^2}$ ו-$y=\frac{4}{n^2}$. נקבל כי

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}=\frac{n}{3}>K.$$

<u>הערה:</u> ראינו בעבר כי אם f רציפה ליפשיץ ב-I, אזי f רציפה במידה שווה ב-I.

4.8 קבעו (והוכיחו את קביעתכם!) אם הפונקציות הבאות רציפות במידה שווה:

א. $f(x) = \frac{1}{x}$ ב־$[a,\infty)$ כאשר $a > 0$.

ב. $f(x) = \frac{1}{x}$ ב־$(0,\infty)$.

ג. $f(x) = \sin\left(e^{x^2}\right)$ ב־$[2,7]$.

ד. $f(x) = \sqrt{x}$ ב־$[0,\infty)$.

פיתרון:

א. רציפה במידה שווה. אכן, לכל $x, y \geq a$ מתקיים

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| \leq \frac{1}{a^2}\left|x-y\right|.$$

כלומר, f היא ליפשיץ ב־$[a,\infty)$.

ב. לא רציפה במידה שווה. אכן, עבור $x = \frac{1}{n}$ ו־$y = \frac{2}{n}$, מתקיים

$$\left|f(x) - f(y)\right| = n, \qquad \left|x-y\right| = \frac{1}{n}.$$

לכן עבור $\epsilon = 1$, לא יתכן שקיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in (0,1)$ המקיימים $|x-y| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < 1$, שכן עבור כל $\delta > 0$ ניתן למצוא n כך ש־$\frac{1}{n} < \delta$, ואז x ו־y המתוארים לעיל מקיימים $|x-y| < \delta$ ו־ $|f(x) - f(y)| > 1$.

ג. רציפה במידה שווה. אכן, מדובר בפונקציה רציפה בקטע סגור וחסום.

ד. רציפה במידה שווה. ראשית נשים לב כי היא רציפה במידה שווה ב־$[1,\infty)$, היות ואם $x, y \geq 1$ אזי

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x-y\right|.$$

כלומר, f היא ליפשיץ, ולכן רציפה במידה שווה, על $[1,\infty)$. היא בוודאי רציפה במידה שווה על $[0,1]$, שכן היא רציפה שם ומודבר בקטע סגור וחסום. לכן היא רציפה במידה שווה בכל $[0,\infty)$.

הערות:

1. מקבלים את התחושה שבקטע פתוח וחסום (a,b), רציפות במידה שווה היא דרך לשאול אם הפונקציה ניתנת להרחבה רציפה לקטע הסגור המתאים $[a,b]$. למעשה, זהו משפט שיוכח כתרגיל בית.

2. ראינו כי $\sqrt{x}$ אינה רציפה ליפשיץ ב־$[0,1]$, אך כפי שהוסבר כעת, היא כמובן רציפה במידה שווה שם. כלומר, שני המושגים הללו אינם זהים (ורק מתקיים שכל פונקציה רציפה ליפשיץ היא גם רציפה במידה שווה - לא להפך).

3. השתמשנו כאן בעובדה אותה לא הוכחנו: ניתן "לתפור". כלומר, אם f רציפה במידה שווה ב־$[0,1]$ וכן ב־$[1,\infty)$, אז היא גם רציפה במידה שווה ב־$[0,\infty)$. זו עובדה שאפילו לא הוכחנו עבור רציפות רגילה! אך למעשה לא קשה להוכיח אותה, והיא תופיע כתרגיל בית.

4.9 תהי f פונקציה רציפה ב־$\mathbb{R}$ בעלת גבולות סופיים ב־$\pm\infty$. הראו כי f רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$.

הערה: הכיוון ההפוך אינו נכון! לדוגמה, $f(x)=x$ היא רציפה במידה שווה, אך הגבולות שלה ב־$\pm\infty$ אינם קיימים.

פיתרון:
יהי $\epsilon>0$. על פי תנאי קושי, קיים $M>0$ כך שלכל $x,y>M$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. כנ"ל קיים $N<0$ כך שלכל $x,y<N$ מתקיים אותו אי־שוויון. כעת, f רציפה ב־$[N-1,M+1]$, ולכן היא רציפה במידה שווה שם. כלומר, קיימת $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[N-1,M+1]$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. נראה ש־$\tilde{\delta}=\min\{1,\delta\}$ מתקים ל־ϵ בהגדרת רציפות במידה שווה של f בכל $\mathbb{R}$. אכן, אם $|x-y|<\tilde{\delta}$, אז ישנן מספר אפשרויות:

- אם $x,y\in[N-1,M+1]$, ברור שסיימנו, שכן $|x-y|<\delta$.
- אם, בלי הגבלת הכלליות, $x<N-1$, אזי $y<N$ שכן $|x-y|<1$, ולכן

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

- כנ"ל אם, בלי הגבלת הכלליות, $y>M+1$.

פרק 5

הנגזרת

5.1 הגדרה וכללי גזירה בסיסיים

5.1 תהי $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. חשבו על פי ההגדרה את הנגזרת שלה $f'(a)$ בנקודות $a\in\mathbb{R}$ שבהן הנגזרת קיימת.

פיתרון:
נשים לב כי f אינה מוגדרת ב־1 ולכן היא לא יכולה להיות גזירה שם. מצד שני, אם $a\neq 1$, מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{a+1}{a-1}}{x-a}=\frac{(x+1)(a-1)-(a+1)(x-1)}{(x-a)(x-1)(a-1)}\\&=\frac{xa+a-x-1-ax-x+a+1}{(x-a)(x-1)(a-1)}\\&=-\frac{2}{(x-1)(a-1)}\xrightarrow{x\to a}-\frac{2}{(a-1)^2}.\end{aligned}$$

5.2 נניח כי f גזירה בנקודה a וכי $f'(a)=2$. חשבו את $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$.

פיתרון:
הגבול דומה לגבול המגדיר את הנגזרת, והרעיון הוא

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=2f'(a)=4.$$

יש לשים לב, עם זאת, שהמעבר הנכון, על אף היותו נכון, אינו מיידי כפי שנכתב. על מנת להוכיח אותו, ניעזר בקריטריון היינה ונבחר סדרה $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ השואפת

לאפס. אז יתקיים

$$\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+2h_n)-f(a)}{h_n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+2h_n)-f(a)}{2h_n}=2f'(a)=4,$$

כאשר המעבר האחרון כעת נכון בזכות קריטריון היינה עבור הגבול המגדיר את הנגזרת, שכן $2h_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

$\boxed{5.3}$ חשבו את הנגזרת, בנקודות שבהן היא קיימת, של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin\left(x^2\right)$.

ב. $f(x)=\sin^2(x)$.

ג. $f(x)=\frac{e^{\sin(x)}}{\sqrt{x}}$.

ד. $f(x)=x^{x^x}$.

ה. $f(x)=[x]+[-x]$.

פיתרון:

א. נסמן $g(x)=x^2$ ו־$h(x)=\sin(x)$. אז מתקיים $f=h\circ g$. היות ושתי הפונקציות g,h גזירות בכל נקודה (כל מה שנדרש, למעשה, הוא ש־h תהיה גזירה בכל נקודה שבתמונה של g), נקבל על פי כלל השרשרת כי f גזירה בכל נקודה וכי

$$f'(x)=h'(g(x))\,g'(x)=2x\cos\left(x^2\right).$$

ב. שוב, על פי כלל השרשרת,

$$f'(x)=2\sin(x)\cos(x).$$

ג. לפי כלל השרשרת וכלל גזירה של מנה, הנגזרת קיימת בכל נקודה שבה המכנה אינו מתאפס. כלומר, עבור $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{\left(e^{\sin(x)}\right)'\sqrt{x}-e^{\sin(x)}\left(\sqrt{x}\right)'}{x}&=\frac{e^{\sin(x)}\cos(x)\sqrt{x}-\frac{e^{\sin(x)}}{2\sqrt{x}}}{x}\\&=\frac{2x\cos(x)-1}{2x^{3/2}}e^{\sin(x)}.\end{aligned}$$

ד. כאן לא נראה שיש כלל שיכול לעזור באופן ישיר, מפני שזו אינה הרכבה של שתי פונקציות אשר הנגזרות שלהן ידועות לנו. אך נשים לב כי

$$\ln f(x) = x^x \ln x,$$

ולכן, אם נגזור את המשוואה,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x^x)' \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x},$$

כאשר באופן דומה ראיתם בהרצאה ש־$(x^x)' = x^x(1+\ln x)$, ולכן

$$f'(x) = x^{x^x}\left((x^x(1+\ln x))\ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right).$$

ה. נתחיל בכך שבסביבה של נקודה x אשר אינה מספר שלם, מתקיים כי גם $-x$ אינו שלם ולכן f קבועה. כלומר, בכל נקודה כזו, $f'(x)=0$. מצד שני, אם $x=k\in\mathbb{Z}$, כדאי להפריד לנגזרות חד צדדיות:

$$f'_+(k) = \lim_{h\to 0^+}\frac{([k+h]+[-k-h])-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{k+(-k-1)}{h} = -\infty.$$

לכן $f'(k)$ אינה קיימת.

$\boxed{5.4}$ הוכיחו או הפריכו, עבור פונקציה גזירה f:

א. אם f זוגית אזי f' אי־זוגית.
ב. אם f אי־זוגית אזי f זוגית.
ג. אם f' זוגית אזי f אי־זוגית.
ד. אם f' אי־זוגית אזי f זוגית.

פיתרון:

א. נכון: מתקיים כי

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x).$$

ב. נכון: מתקיים כי

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = -\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x).$$

ג. לא נכון: לדוגמה, $f(x) = x+1$ אינה אי־זוגית, אך $f'(x) = 1$ היא פונקציה זוגית.

ד. זה דווקא נכון, וישנה הוכחה פשוטה בעזרת תורת האינטגרציה, שתראו בעתיד.

$\boxed{5.5}$ מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \arctan(x)$.

פיתרון:

נזכיר ש־f היא הפונקציה ההפוכה של $\tan(x)$ בתחום ההגדרה $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. היות וזו האחרונה הנה גזירה, והיות ונגזרתה, $\frac{1}{\cos^2(x)}$, אינה מתאפסת, נקבל (על פי כלל הגזירה לפונקציה הפוכה) כי

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\boxed{5.6}$ עקום במישור מתואר על ידי

$$x(t) = t\ln t, \qquad y(t) = e^t,$$

עבור t בסביבה של הנקודה 1. הראו כי קיימת כזו סביבה שבה העקום הזה הוא גרף של פונקציה $f(x)$ אשר גזירה בנקודה $x = 0$, ומצאו את הנגזרת $f'(0)$.

פיתרון:

נשים לב ש־$x = 0$ מתאים ל־$t = 1$. לכן יש להוכיח שבסביבת הנקודה $t = 1$, ניתן לחלץ באופן יחיד מתוך זוג המשוואות את y כפונקציה של x. לצורך כך נשים לב כי

$$x'(t) = \ln t + 1,$$

כלומר, $x'(1) = 1$. היות וזה חיובי והנגזרת רציפה סביב $t = 1$, קיימת סביבה שבה $x'(t) > 0$. על סמך מסקנה ממשפט לגרנז', זה אומר ש־$x(t)$ מונוטונית עולה ממש בסביבה זו, ולכן הפיכה. כלומר, קיימת לה פונקציה הפוכה $t(x)$. אם כך מתקיים $y(x) = y(t(x))$, ו־

$$y'(x) = y'(t(x))\,t'(x) = e^{t(x)}\frac{1}{x'(t)},$$

על סמך כלל השרשרת וכלל הגזירה לפונקציה הפוכה. אם כעת נציב $x = 0$, נקבל $t = 1$ ו־

$$y'(0) = e.$$

5.2 משפטי גזירות

5.7 יהיו $a_1, \ldots, a_n > 0$ מספרים המקיימים, לכל $-1 < x < 1$, את אי השוויון

$$a_1^x + \cdots a_n^x \geq n.$$

הראו כי

$$a_1 \cdots a_n = 1.$$

פיתרון:
נסמן

$$f(x) = a_1^x + \cdots a_n^x.$$

זו פונקציה גזירה (בכל נקודה), אשר על פי הנתון מקיימת $f(x) \geq n$ לכל $-1 < x < 1$. היות ו־$f(0) = n$, נקבל ש־0 היא נקודת מינימום מקומי, ולכן על פי משפט פרמה (היות והיא נקודה פנימית שבה f גזירה), $f'(0) = 0$. אך

$$f'(x) = a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n,$$

ולכן

$$0 = \ln a_1 + \cdots + \ln a_n.$$

כלומר,

$$0 = \ln a_1 \cdots a_n,$$

ולכן

$$a_1 \cdots a_n = 1.$$

5.8 תהי $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 2 + x - \frac{4}{3}\arctan(x) & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

מצאו את $\inf_{[-1,1]} f$.

פיתרון:
ראשית נציין כי, היות ו־f רציפה בקטע $[-1,1]$ (זה ברור בכל נקודה פרט ל־0, ושם בעצם גם ברורה רציפות מימין ומשמאל), על סמך משפט ויירשטראס יש ל־f מינימום בקטע זה. כלומר,

$$\inf_{[-1,1]} f = \min_{[-1,1]} f.$$

על מנת למצוא את ערכו של המינימום, נציין כי עבור נקודה $x_0 \in (-1,1)$, אם x_0 היא מינימום, הרי שהיא גם מינימום מקומי. לכן, אם f גזירה ב־x_0, מתקיים $f'(x_0) = 0$ על סמך משפט פרמה. כלומר, הנקודות x_0 שבהן יתכן שהמינימום מתקבל הן: נקודות פנימיות בהן הנגזרת מתאפסת, נקודות פנימיות שבהן הנגזרת לא קיימת, וקצוות הקטע. הסוג הראשון של נקודות "חשודות" אלו הן

$$2x = 0, \qquad x \in (-1,0)\,,$$

המהווה משוואה לה אין פיתרון, ו־

$$\frac{4}{3} = 1 + x^2, \qquad x \in (0,1)\,,$$

אשר מתקיים עבור $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. הנקודות מהסוג השני הן אולי הנקודה 0 (בכל נקודה אחרת הפונקציה בוודאי גזירה, ושם יש לבדוק, אך למעשה אין טעם לטרוח ולבדוק, ו"חינם" להוסיף אותה גם כנקודה חשודה), ולבסוף יש להוסיף את הקצוות $-1,1$. כלומר, קיבלנו את רשימת הנקודות החשודות

$$-1, \quad 0, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 1.$$

נציב בפונקציה ונקבל את הערכים

$$3, \quad 2, \quad \frac{5}{2} - \frac{4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{3}, \quad 3 - \frac{4}{3}\arctan(1)$$

או, אם נבצע את החשבון,

$$3, \quad 2, \quad \frac{5}{2} - \frac{2\pi}{9}, \quad 3 - \frac{\pi}{3}.$$

היות ואחד מהם חייב להיות המינימום, הרי שזה השלישי (כי הוא הקטן מבינהם).

$\boxed{5.9}$ עבור $1 < n \in \mathbb{N}$ ו־$r \in \mathbb{R}$, הראו שלמשוואה

$$x^n - x + r = 0$$

יש לכל היותר פיתרון אחד בקטע $[1,2]$.

<u>פיתרון:</u>
הפונקציה $f(x) = x^n - x + r$ רציפה ב־$[1,2]$ וגזירה ב־$(1,2)$. לכן, אם יש לה שני אפסים $x_1, x_2 \in [1,2]$, הרי שעל סמך משפט רול, היות ו־

$$f(x_1) = f(x_2)\,,$$

נקבל שקיימת נקודה $x_0 \in (x_1,x_2)$ שבה $f'(x_0) = 0$. אך אם נחשב,

$$f'(x) = nx^{n-1} - 1 \neq 0$$

לכל $x \in (1,2)$.

5.10 מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x^2 + \sin(x) = 0$.

פיתרון:
את המשוואה הזו לא ניתן לפתור, אך משפט רול יכול לעזור כדי לדעת כמה פתרונות יש לכל היותר. אכן, אם נסמן $f(x) = x^2 + \sin(x)$, נקבל

$$f'(x) = 2x + \cos(x),$$

שאמנם גם לא ידוע לנו היכן מתאפס, אך אשר מקיימת כי נגזרתה

$$f''(x) = 2 - \cos(x)$$

לעולם אינה מתאפסת. היות וכל הפונקציות הללו גזירות בכל הישר, הרי של־f' לא יכולה להיות יותר מנקודה אחת שבה היא מתאפסת (אם $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ אזי קיימת נקודה $x_0 \in (x_1, x_2)$ שבה הנגזרת של f', הלא היא f'', מתאפסת, וזו סתירה), ולכן ל־f יש לכל היותר שתי נקודות שבהן היא מתאפסת (מפני שאם f מתאפסת בשלוש נקודות $x_1 < x_2 < x_3$ אזי קיימת $y_1 \in (x_1, x_2)$ שבה f' מתאפסת ו־$y_2 \in (x_2, x_3)$ שבה f' מתאפסת, כלומר, f' מתאפסת בשתי נקודות שונות, בסתירה למסקנה הקודמת).

נראה כעת ש־f אכן מתאפסת בשתי נקודות שונות. כבר ידוע שהיא אינה מתאפסת ביותר, ולכן בכך ניווכח של־f יש בדיוק שני אפסים. לצורך כך ניעזר במשפט ערך הביניים, ונשים לב כי $f(0) = 0$ בעוד ש־

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{36} - \frac{1}{2} < 0$$

ו־

$$f(-1) = 1 - \sin(1) > 0.$$

לכן, היות ו־f רציפה, קיימת $x \in \left(-1, -\frac{\pi}{6}\right)$ שבה $f(c) = 0$. יחד עם הנקודה 0, מצאנו שני שורשים.

5.11 יהיו $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$. הראו כי

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2(\alpha)} < \tan(\beta) - \tan(\alpha) < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2(\beta)}.$$

פיתרון:
על סמך משפט לגרנז' עבור הפונקציה $f(x) = \tan(x)$ בקטע $[\alpha, \beta]$ (מובן שהיא רציפה בו וגזירה בפנים שלו), קיימת $c \in (\alpha, \beta)$ כך ש־

$$\frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(c) = \frac{1}{\cos^2(c)}.$$

אך היות ו־$\alpha < c < \beta$ ו־$\cos$ היא פונקציה יורדת בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, נקבל כי

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} < \frac{1}{\cos^2(c)} < \frac{1}{\cos^2(\beta)},$$

וזה בדיוק נותן את אי־השוויון המובטח.

5.12 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת, לכל $x,y\in[a,b]$, את אי־השוויון

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq M\left|x-y\right|^{\alpha},$$

כאשר $\alpha>1$ ו־$M>0$ נתון. הראו כי f היא פונקציה קבועה.

הערה: כלומר, כל פונקציה שהיא α־הולדר עם $\alpha>1$ היא בעצם קבועה. עשינו זאת בעבר עם $\alpha=2$.

פיתרון:
נראה כי f גזירה ב־(a,b) וכי $f'=0$ בקטע זה. זה יספיק, על פי מסקנה ממשפט לגרנז'.
ואכן, אם נקבע $x_0\in(a,b)$, הרי ש־

$$\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right|\leq M\left|x-x_0\right|^{\alpha-1}\overset{x\to x_0}{\longrightarrow}0,$$

שכן $\alpha-1>0$. לכן $f'\left(x_0\right)=0$.

5.13 תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), ונניח כי f' חסומה ב־(a,b). הראו כי f הנה רציפה ליפשיץ בקטע $[a,b]$.

הערה: אין שום חשיבות לכך שמדובר בקטע ולא בקרן. לדוגמה, אם לפונקציה $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ יש נגזרת חסומה, אז היא רציפה ליפשיץ, כאשר אותה הוכחה תעבוד ואותן הערות תהיינה תקפות. בפרט, פונקציה בעלת נגזרת חסומה היא תמיד רציפה במידה שווה.

פיתרון:
נסמן $M=\sup_{(a,b)}\left|f'\right|$. אם כעת $x<y\in[a,b]$, הרי שעל סמך משפט לגרנז' קיימת $c\in(x,y)\subset(a,b)$ כך ש־

$$\frac{f\left(y\right)-f\left(x\right)}{y-x}=f'\left(c\right).$$

לכן

$$\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|=\left|f'\left(c\right)\right|\left|y-x\right|\leq M\left|y-x\right|.$$

כלומר, M הוא קבוע ליפשיץ עבור f.

<u>הערה:</u> מתוכן ההוכחה רואים ש־$\sup_{(a,b)} |f'|$ הוא קבוע ליפשיץ עבור f.

$\boxed{5.14}$ **עבור $a \in \mathbb{R}$, מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $x - \sin(x) = a$.**

<u>פיתרון:</u>
נסמן $f(x) = x - \sin(x)$. נשים לב כי

$$f'(x) = 1 - \cos(x),$$

אשר מתאפסת רק במספר סופי של נקודות בכל קטע חסום נתון. לכן, על פי תרגיל בית, f היא פונקציה עולה ממש בכל קטע, ואם כך כמובן היא פונקציה עולה בכל $\mathbb{R}$. נוכל, אם כך, להסיק ש־f הנה חח"ע.
בנוסף, מדובר בפונקציה רציפה המקיימת

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

לכן, על סמך הכללה של משפט ערך הביניים, f היא בעצם על (כי לכל $a \in \mathbb{R}$ קיים $M > 0$ כך ש־$f(M) > a$ וכן $N < 0$ כך ש־$f(N) < a$, ואז על סמך משפט עה"ב בקטע $[N, M]$ קיימת $c \in (N, M)$ כך ש־$f(c) = a$).
לכן, בסך הכל, f היא חח"ע ועל, כלומר, לכל $a \in \mathbb{R}$ קיים פיתרון יחיד למשוואה $f(x) = a$.

<u>הערה:</u> למעשה ניתן היה גם לגשת לבעיה באופן המסורתי של "העברת הכל לאותו אגף", ואז להגדיר $g(x) = x - \sin(x) - a$ וחקירת מספר האפסים של g. משפט ערך הביניים היה מספק קיום של לפחות אפס אחד, אך משפט רול לבדו לא יכל היה לקבוע שאין יותר מאפס אחד, מכיוון ש־$g'(x)$ כן מתאפסת מדי פעם. לכן היה צורך בתכונה מעט חזקה יותר, לפיה כל עוד $f' \geq 0$ כל הזמן ומתאפס רק "לעתים בודדות", f היא עדיין עולה ממש.

$\boxed{5.15}$ **תהי f רציפה ב־$[a, b]$ וגזירה ב־(a, b). הראו כי אם $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ קיים אזי $f'_+(a)$ קיים והם שווים.**

<u>פיתרון:</u>
יש להראות שמתקיים

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x).$$

לצורך כך ניעזר במשפט לגרנז', ונציין שעבור $x \in (a, b)$ קבוע קיימת נקודת ביניים $c_x \in (a, x)$ כך ש־

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

נציין רק היות ו־x יסמל ערך השואף ל־a, כלומר, ערך משתנה, יש לזכור כי נקודת הביניים תלויה בערכו של x, ולכן זה נראה בסימון c_x. כעת, אי־השוויונים

$$a < c_x < x$$

מראים, בעזרת כלל הסנדוויץ', כי $\lim_{x\to a^+} c_x = a$ ו־$c_x > a$, ולכן

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^+} f'(c_x) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

הערות:

1. התלות של נקודות הביניים c_x ב־x פשוט נתונה על ידי פונקציה, $x \mapsto c_x$. ככזו, ניתן לדבר על הגבול שלה מימין בנקודה a, ולכך הכוונה.
2. נעשה כאן שימוש באנלוג בעזרת פונקציות של קריטריון היינה. כלומר, החלפנו את $x \to a^+$ בפונקציה השואפת ל־a מימין. ניתן להוכיח שזה אכן מותר ־ בעזרת קריטריון היינה הרגיל.
3. אותו התרגיל כמובן גם נכון עבור גבול משמאל בנקודה b, עם ההנחות המתאימות.

5.16 נניח כי f גזירה ב־(a,b) פרט, אולי, לנקודה x_0, וכי הגבול $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ קיים. הראו כי f בעצם גזירה ב־x_0 ומתקיים

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

פיתרון:
על סמך שני התרגיל הקודם, שתי הנגזרות החד־צדדיות ב־x_0 קיימות ושוות לגבול הנ"ל.

5.17 תהי f גזירה בקטע (a,b). הראו כי אם f' אי־רציפה בנקודה x_0 אזי מדובר באי־רציפות עיקרית.

הערה: כלומר, לפונקציית הנגזרת של פונקציה גזירה אין נקודות אי־רציפות סליקות או מסוג קפיצה!

פיתרון:
התרגיל הקודם מראה שאין אי־רציפות סליקה. בנוסף, לא יתכן בנקודה x_0 יש אי־רציפות מסוג קפיצה, מפני שאם שני הגבולות החד־צדדיים של f' קיימים

ב־x_0, הרי שעל פי התרגיל שלפניו ערכם שווה לערך הנגזרת $f'(x_0)$, שאנו כעת יודעים שהיא קיימת. כלומר, הם בפרט שווים.

הערה: לדוגמה, אין פונקציה גזירה שהנגזרת שלה היא $[x]$!

5.3 כלל לופיטל

5.18 עבור פולינום $p(x)$, הראו כי

$$\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = 0.$$

פיתרון:
נסמן $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. יש אם כך לחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(a_n \frac{x^n}{e^x} + \cdots + a_0 \frac{1}{e^x}\right).$$

כי אם כך להראות שלכל k טבעי מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$. ואכן, מדובר בגבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$, ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^k}{e^x} \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} \overset{\mathrm{L}}{=} \ldots \overset{\mathrm{L}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0.$$

הערה: נשתמש בסימון $\overset{\mathrm{L}}{=}$ אם אנו רוצים לציין שמשתמשים במשפט לופיטל, ואז הכוונה תהיה "בצד שמאל של השוויון יש גבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$ או $\frac{0}{0}$, ולכן הוא יהיה שווה לגבול מצד ימין של השוויון, בהנחה והוא אכן קיים. אחרת ־ אם הוא לא קיים ־ אין משמעות לשוויון הזה, ויש לנסות בדרך אחרת".
בנוסף, כדאי לציין ששימוש חוזר בכלל לופיטל הוא כשר, כל עוד כמובן מגיעים בסופו של דבר לגבול שאכן קיים (כי אז זה שלפניו קיים על סמך כלל לופיטל, וכן זה שלפניו וכן הלאה).

5.19 חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}$.

פיתרון:

יש לנו כאן גבול מהצורה "1^∞". דרך טובה להשתמש בכלל לופיטל לחישוב גבולות כאלו היא לרשום

$$(1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}} = e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}\right)},$$

ואז לחשב את הגבול של המעריך. אם הוא אכן קיים, היות ו-e^x היא פונקציה רציפה, הרי שהגבול המקורי יהיה שווה ל-e^L, כאשר L הוא הגבול של המעריך. ובכן,

$$\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan(x)}\ln(1+x) \overset{\text{L}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = 1.$$

לכן הגבול המקורי הוא

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\tan(x)}} = e.$$

5.20 מצאו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

פיתרון:

יש לנו כאן $\frac{\infty}{\infty}$ ולכן על פי כלל לופיטל,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}},$$

בתנאי שהגבול הימני קיים. נשים לב שללא מידע חיצוני על קיום הגבול הזה, לא נוכל כלל להסיק שהוא קיים, ולכן בוודאי שלא נוכל להגיד שהוא 1 (וזה מובן שאם הוא אכן קיים, אז הוא 1 לפי השוויון הנ"ל)! ואכן, ללא כלל לופיטל, נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1.$$

5.21 חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)$.

פיתרון:

מדובר בגבול מן הצורה "$\infty-\infty$". אין כלי ישיר לטיפול בגבולות כאלה, ויש לטפל בכל מקרה לגופו. כאן נשים לב כי

$$\frac{1}{x}+\ln(x) = \frac{1+x\ln(x)}{x}.$$

לכן
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x\ln(x)}{x}\right),$$
ונותר לחשב את $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$. לצורך כך נשים לב כי
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$
כלומר,
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)=\infty.$$

5.22 חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(e^{n+\frac{1}{n}}-e^{n}\right)$.

פיתרון:
מדובר בגבול מהצורה "$\infty-\infty$". עם זאת, יש לשים לב שמדובר בסדרה - עבור סדרות אין כלל לופיטל (אי־אפשר "לגזור" סדרה!)! מצד שני, על סמך קריטריון היינה, אם הגבול $\lim_{x\to\infty}\left(e^{x+\frac{1}{x}}-e^{x}\right)$ קיים, אז הגבול המבוקש קיים ושווה לו. ובכן,
$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{x+\frac{1}{x}}-e^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}e^{x}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)}{e^{-x}}\overset{\text{L}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-e^{-x}}=\infty,$$
שכן $\lim_{x\to\infty}e^{1/x}=1$ ו־$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$ (מתרגיל קודם, שם ראינו שהביטוי ההופכי שואף לאפס).

5.4 פונקציות קמורות

5.23 הוכיחו או הפריכו, עבור פונקציה f המוגדרת בקטע סגור $I=[a,b]$:

א. אם f מונוטונית עולה ב־I אז f קמורה ב־I.
ב. אם f מונוטונית יורדת ב־I אז f קמורה ב־I.
ג. אם f קמורה ב־I אז f מונוטונית ב־I.
ד. אם f קמורה ב־I ו־a היא נקודת מינימום של f ב־I אז f מונוטונית עולה ב־I.
ה. אם f קמורה ב־I ו־b היא נקודת מינימום של f ב־I אז f מונוטונית יורדת ב־I.

ו. אם f קמורה ב־I ו־a (לחילופין, b) היא נקודת מקסימום של f ב־I אז f מונוטונית יורדת (לחילופין, עולה) ב־I.

פיתרון:

א. לא נכון: לדוגמה, $f(x)=x^3$ בקטע $[-1,1]$ היא לא קמורה ולא קעורה (היא למעשה קעורה בקטע $[-1,0]$, שכן נגזרתה השניה שם היא שלילית, וקמורה בקטע $[0,1]$).

ב. לא נכון: לדוגמה, $-x^3$ באותו קטע או לחילופין $-x^2$ בקטע $[-1,0]$.

ג. לא נכון: לדוגמה, x^2 בקטע $[-1,1]$.

ד. נכון: בהנתן $x<y$ ב־I, ניעזר בלמת השיפועים ונקבל

$$0 \le \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

לכן $f(x)\le f(y)$.

ה. נכון: ההוכחה זהה לסעיף הקודם.

ו. לא נכון: לדוגמה, הדוגמה בסעיף (ג).

$\boxed{5.24}$ תהי f פונקציה קמורה בקטע I, ותהי c נקודה פנימית ב־I המהווה נקודת מינימום מקומי של f. הראו ש־c היא למעשה נקודת מינימום גלובלי של f.

פיתרון:
נניח בשלילה שזה אינו המצב, כלומר, שקיימת נקודה $x\in I$ כך ש־$f(x)<f(c)$. על פי ההנחה, קיימת $x<y<c$ כך ש־$f(y)\ge f(c)$. לפי למת השיפועים,

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \le \frac{f(c)-f(y)}{c-y}.$$

אך אגף ימין של אי־שוויון זה הוא אי־חיובי בעוד שאגף שמאל הוא חיובי, וזה מהווה סתירה.

$\boxed{5.25}$ תהי f קמורה ב־I, ונניח כי x,y הן שתי נקודות מינימום של f ב־I. הראו כי f קבועה בין x לבין y.
הסיקו שלפונקציה קמורה ממש יש נקודת מינימום יחידה.

פיתרון:
נניח בה"כ ש־$x < y$. נשים לב כעת ש־f קמורה בתת־הקטע $[x, y]$, ושני קצוותיו הם נקודות מינימום של f בו. על סמך תרגיל קודם, f היא גם מונוטונית עולה וגם מונוטונית יורדת בקטע. כלומר, היא קבועה.
בנוגע למסקנה ־ אכן, פונקציה אשר קבועה בקטע היא קמורה אך לא קמורה ממש, מפני שעבורה יש פשוט שוויון באי־השוויון המגדיר את הקמירות.

$\boxed{5.26}$ תהי f פונקציה קמורה ב־I, ונניח כי $c \in I$ היא נקודת מקסימום פנימית של f ב־I. הראו כי f קבועה ב־I.

פיתרון:
תהיינה $x < c < y$ ב־I. לפי למת השיפועים,

$$0 \leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c} \leq 0.$$

לכן למעשה $f(x) = f(c) = f(y)$.

הערה: בסך הכל קיבלנו תמונה מעניינת של פונקציות קמורות (כאשר בשלב זה, לא הנחנו כלום מלבד קמירות):

א. רציפה בפנים של I.

ב. אלא אם היא קבועה, נקודת המקסימום מתקבלת בשפה.

ג. אלא אם היא מונוטונית, נקודת המינימום מתקבלת בפנים.

ד. אלא אם היא קבועה בתת־קטע, נקודת מינימום יחידה (לדוגמה, אם היא קמורה ממש, נקודת מינימום יחידה).

$\boxed{5.27}$ תהי f פונקציה קמורה קרן $[a, \infty)$ ונניח כי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. הראו כי f היא פונקציה מונוטונית יורדת בקרן.

פיתרון:
נניח בשלילה שזה אינו המצב, כלומר, שקיימים $a \leq \alpha < \beta$ כך ש־$f(\beta) > f(\alpha)$.
לפי למת השיפועים, לכל $x > \beta$ מתקיים

$$\underbrace{\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}}_{\equiv \gamma > 0} \leq \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta},$$

ומכאן ש-

$$(x-\beta)\gamma \le f(x) - f(\beta).$$

אך כעת נובע ש-

$$\frac{\gamma(x-\beta)+f(\beta)}{x} \le \frac{f(x)}{x}.$$

היות ואגף שמאל של אי-שוויון זה שואף ל-$\gamma > 0$, הרי שאגף ימין לא יכול לשאוף לאפס - וזו סתירה.

הערה: לדוגמה, אם הגבול באינסוף קיים, אז הפונקציה היא מונוטונית יורדת.

$\boxed{5.28}$ תהי f פונקציה קמורה ב-$\mathbb{R}$. הראו כי אם f זוגית ואינה קבועה אזי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

פיתרון:
ראשית נראה שהפונקציה מונוטונית עולה ב-$[0,\infty)$. אכן, אם $0 < x < y$ אזי

$$-y < -x < 0 < x < y$$

ולכן על פי למת השיפועים

$$\frac{f(-x)-f(-y)}{-x-(-y)} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

אך מהזוגיות כעת נובע כי

$$-\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

לכן בהכרח $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge 0$, כלומר, $f(x) \le f(y)$.
כעת ניעזר בכך ש-f אינה קבועה. מכך נובע שיש $c > 0$ כך ש-$f(c) \ne f(0)$, והיות וממילא יש אי-שוויון, מתקבל $f(c) > f(0)$. בנוסף, לכל $x > c$ מתקיים, על סמך למת השיפועים,

$$\frac{f(c)-f(0)}{c} \le \frac{f(x)-f(0)}{x},$$

ומכאן ש-

$$(f(c)-f(0))x + f(0) \le f(x).$$

היות ואגף שמאל של אי-שוויון זה שואף לאינסוף (הרי המקדם של x חיובי), כך גם אגף ימין שלו.

הערה: כמעט כל תכונה של פונקציות קמורות אשר ניתן לנסח אותה ללא מושג

הנגזרת (או הנגזרת השניה), אם היא נכונה תחת הנחות גזירות, תהיה נכונה גם ללא הנחה זו. על אף העובדה שלעיתים קרובות ההוכחות פשוטות יותר בעזרת הכלים הנוספים שמוסיפה הנגזרת, הרי שלמת השיפועים אמורה להספיק במקרים אלה.

מצד שני, בדיקת אי־שליליות הנגזרת השניה היא כלי מאוד יעיל וקצר לצורך קביעת קמירות (ואפילו אם אין נגזרת שניה בכל הקטע, הרי שבדיקת מונוטוניות הנגזרת הראשונה גם עלולה להיות מועילה מאוד).

$\boxed{5.29}$ תהי f פונקציה קמורה וגזירה ב־I, ונניח כי c היא נקודה פנימית ב־I כך ש־ $f'(c)=0$. הראו כי c היא נקודת מינימום גלובלי של f ב־I.

פיתרון:

נזכיר כי עבור פונקציה גזירה f, מתקיים כי f קמורה ב־I אם ורק אם f' היא מונוטונית עולה. היות ו־$f'(c)=0$, הרי ש־$f'(x)\leq 0$ אם $x<c$ ו־$f'(x)\geq 0$ אם $x>c$. לכן f עצמה יורדת משמאל ל־c ועולה מימין ל־c. במילים אחרות, לכל $x<c<y$ ב־I מתקיים $f(y)\leq f(c)\leq f(x)$.

$\boxed{5.30}$ שרטטו את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

פיתרון:

יש לציין שזו אינה שלה המנוסחת בצורה מתמטית מדוייקת, אך הכוונה היא לחקור את הפונקציה (נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון מקומיות וגלובליות אם יש, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, אסימפטוטות אנכיות ומשופעות), וזה כבר מהווה מושג מדוייק.

ובכן, ראשית נשים לב שהפונקציה מתאפסת אך ורק בנקודה $x=0$. לכן המפגש היחיד עם הצירים הוא $x=0$ (ואז $f(0)=0$). בנוסף, $x=0$ היא בבירור נקודת מינימום גלובלית. נגזור ונקבל

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

הפונקציה הזו מתאפסת אך ורק ב־0, ולכן אין אף נקודת קיצון מקומי פרט ל־$x=0$. בנוסף, ברור כי הנגזרת חיובית מימין ל־0 ושלילית משמאל ל־0. לכן הפונקציה יורדת עד 0 ועולה אחרי 0. נגזור שוב, ונקבל

$$f''(x)=\begin{cases} \left(\frac{2}{x^3}\cdot\frac{2}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

פונקציה זו חיובית אם ורק אם

$$0 < \frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4},$$

כלומר, אם

$$x^2 < \frac{2}{3}.$$

התחום הזה הוא

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

כלומר, הפונקציה קמורה בתחום זה וקעורה מחוץ לתחום זה. לכן שתי הנקודות $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ הן נקודות הפיתול היחידות של הפונקציה. לבסוף, נציין שלפונקציה אין אסימפטוטות אנכיות היות והיא רציפה בכל נקודה, ונותר לבדוק אם יש אסימפטוטות משופעות ב־$\pm\infty$. נבדוק ראשית באינסוף; נזכיר שיש אסימפטוטה משופעת $ax+b$ אם ורק אם

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b.$$

אצלנו נקבל כמובן $a = 0$ ו־$b = 1$, ולכן $y = 1$ היא אסימפטוטה אנכית באינסוף ־ וקל לבדוק שגם במינוס אינסוף.

5.5 פולינום טיילור

$\boxed{5.31}$ חשבו את פולינום טיילור מסדר n של הפונקציות הבאות המתאימים לנקודה 0:

א. $\frac{1}{1-x}$.

ב. $\ln(1+x)$.

ג. $\cos(x)$.

ד. הפונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

<u>פיתרון:</u>

א. נעקוב אחר הגדרת פולינום טיילור: כל שיש לעשות הוא לחשב את הנגזרות ("עד סדר n", אך ערכו של n הוא כמובן שרירותי ולכן יש לחשב את כל הנגזרות) של הפונקציה. ובכן,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^n}.$$

ולכן

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \ldots \quad f^{(n)}(0) = n!.$$

ונקבל בסך הכל כי

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

דרך קצרה יותר לרשום זאת היא

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

כאשר אצלנו $a=0$ והמקדם ה־k־י הוא $\frac{k!}{k!}=1$, כלומר, מתקבל

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

ב. ניתן לחשב, כמו בסעיף הקודם, את כל הנגזרות של הפונקציה בנקודה המבוקשת $a=0$, או, לחילופין, אפשר לשים לב שמתקיים $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$. כלומר, אם נסמן $h(x) = \ln(1+x)$, הרי ש־

$$h'(x) = f(-x).$$

מכאן, על פי כלל השרשרת,

$$h''(x) = -f'(-x),$$

וכך באינדוקציה רואים ש־

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} f^{(n-1)}(-x).$$

נציב את הנקודה $a=0$ ונעזר בסעיף הקודם, ונקבל

$$h^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!.$$

לכן המקדם, בפולינום טיילור, של x^k כאשר $k\geq 1$ הוא $\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}=\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (ושל x^0 הוא $h(0)=\ln 1=0$), ונקבל את פולינום טיילור

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k=x-\frac{x}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x}{n}.$$

ג. הנגזרות ב־0 הן

$$1,\quad 0\quad -1,\quad 0,\ldots$$

באופן כללי, מובן שכל הנגזרות מסדר אי־זוגי מתאפסות, בעוד הנגזרות מסדר זוגי הן ± 1 לחילופין. דרך נוחה לכתוב את זה היא: עבור המספר הזוגי $2k$, הנגזרת היא 1 אם k זוגי (כלומר, אם $2k$ מתחלק ב־4) ו־-1 אחרת. בסך הכל, הנגזרת ה־$2k$ היא $(-1)^k$. בסך הכל נקבל את פולינום טיילור

$$T_{2k+1}(x)=T_{2k}(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{(2i)!}x^{2i},$$

או

$$T_{2k+1}(x)=T_{2k}(x)=1-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

ד. בתרגילי בית הוכח כי $f^{(n)}(0)=0$, ולכן $T_n(x)=0$ לכל n.

הערה: פולינום טיילור בנקודה 0 (או, כפי שלפעמים אומרים, "סביב הנקודה 0") נקרא לעיתים ב"קיצור": "פולינום מקלורן".

$\boxed{5.32}$ הוכיחו, אם F ו־G מסמנים את פולינום טיילור מסדר n של f ו־g בהתאמה המתאימים לנקודה a:

א. פולינום טיילור של $f+g$ מסדר n המתאים לנקודה a הוא $F+G$.

ב. פולינום טיילור של fg מסדר n המתאים לנקודה a מתקבל מ־FG על ידי השמטת כל החזקות של x הגדולות מ־n.

פיתרון:

א. נובע מכך ש־
$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)\,.$$

ב. יהי $k \le n$. מצד אחד, המקדם של $(x-a)^k$ ב־FG הוא
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot \frac{g^{(k-i)}(a)}{(k-i)!}\,.$$

מצד שני, המקדם של $(x-a)^k$ בפולינום טיילור של fg מסדר n המתאים לנקודה a הוא
$$\frac{(fg)^{(k)}(a)}{k!} = \frac{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} f^{(i)}(a)\, g^{(n-k)}(a)}{k!}\,.$$

5.33 תהי f גזירה n פעמים ב־a. נסמן ב־T_n את פולינום טיילור מסדר n של f המתאים לנקודה a. הראו כי פולינום טיילור מסדר $n+m$ של $(x-a)^m f(x)$ המתאים לנקודה a הוא $(x-a)^m T_n(x)$, בעוד שפולינום טיילור מסדר קטן מ־m של $(x-a)^m f(x)$ הוא פולינום האפס.

<u>פיתרון:</u>
ראשית, אם $k < m$, אזי
$$\left((x-a)^m f(x)\right)^{(k)}(a) = 0$$

על פי נוסחת לייבניץ לחישוב נגזרת מסדר גבוה של מכפלה, בעוד שלפי אותה נוסחה, הנגזרת מסדר $k+m$ היא
$$\sum_{i=0}^{k+m} \binom{k+m}{i} \left((x-a)^m\right)^{(i)}(a)\, f^{k+m-i}(a) = \frac{(k+m)!}{k!} f^{(k)}(a)\,.$$

5.34 נסמן $f(x) = e^x \sin(x)$. מצאו את $f^{(5)}(0)$.

<u>פיתרון:</u>
ניתן כמובן לגזור חמש פעמים, אך במקום זאת נמצא את פולינום טיילור מסדר

5 של f המתאים לנקודה 0; על סמך תרגיל קודם, הוא מתקבל על ידי המשטת כל החזקות הגדולות מ־5 בפולינום

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right).$$

לכן המקדם של x^5 בפולינום זה הוא $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$, ומכאן ש־

$$f^{(5)}(0)=120\cdot\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=-4.$$

$\boxed{5.35}$ חשבו עד 3 ספרות אחרי הנקודה:

א. את e.

ב. את π.

פיתרון:

א. למעשה נחשב עד דיוק של 10^{-4}. זה כמעט אותו הדבר (ובדרך כלל השגיאה הרצויה תהיה נתונה, ולא מספר הספרות אחרי הנקודה). נעמוד על ההבדל בהמשך.

נסמן $f(x)=e^x$. נרצה להעריך את $f(1)$. לצורך כך נמצא n כך ש־

$$|f(1)-T_n(1)|<10^{-4},$$

ואז $T_n(1)$ (אותו קל לחשב בעזרת פעולות כפל, חילוק וחיבור של מספרים שלמים) יהווה הערכה טובה (כלומר, עם שגיאה קטנה יותר מהרצוי) של $f(1)=e$.

לצורך כך נשתמש במשפט טיילור. על פי קיימת נקודה c בין 0 לבין 1 (אשר תלויה בערכו של n, וכמובן גם ב־0 ו־1, כלומר, היא אינה אוניברסלית) כך ש־

$$f(1)-T_n(1)=R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^n,$$

כלומר,

$$|f(1)-T_n(1)|=|R_n(1)|=\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

כעת רק נותר למצוא n כך שאגף ימין באי־שוויון זה קטן מ־10^{-4}; ה־n הראשון המקיים זאת הוא $n=7$. לכן $T_7(1)$ קרוב ל־e בפחות מ־$10^{(-4)}$.

כעת רק נותר להציב:

$$T_7(1)=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}=2.71825...$$

ב. כעת נשתמש ב־$f(x)=4\arctan(x)$. ראשית נמצא n כך ש־$|R_n(1)|<10^{-4}$. כאן קצת מסורבל למצוא ביטוי כללי לנגזרת מסדר n, ולכן פשוט נתחיל לבדוק את ערכי n מהתחלה; נזכיר כי על סמך משפט טיילור, לכל n קיימת c בין 0 לבין 1 כך ש־

$$R_n(1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

ולכן אם נסמן ב־M_n את $\sup_{[0,1]}\left|f^{(n+1)}\right|$, הרי ש־

$$|R_n(1)|\le\frac{M_n}{(n+1)!}.$$

ההמשך מהווה חישוב טכני וארוך של נגזרות, ויושאר לעבודה עצמית.

5.36 הוכיחו או הפריכו עבור פונקציה f המוגדרת בסביבת a ו־$n\in\mathbb{N}$:

א. אם f גזירה n פעמים בסביבת a והנגזרת ה־n־ית רציפה ב־a אזי

$$f(x)=T_n(x)+o\left((x-a)^n\right).$$

ב. אם f גזירה n פעמים בסביבת a והנגזרת ה־n־ית רציפה ב־a, אזי אם

$$f(x)=p(x)+o\left((x-a)^n\right),$$

כאשר $p(x)$ הוא פולינום, נובע כי לכל $k\le n$ מתקיים $f^{(k)}(a)=k!a_k$, כאשר a_k הוא המקדם של $(x-a)^k$ בפולינום $p(x)$.

ג. אם מתקיים

$$f(x)=p(x)+o\left((x-a)^n\right)$$

כאשר $p(x)$ הוא פולינום, אזי f גזירה n פעמים ב־a ומתקיים כי לכל $k\le n$, $f^{(k)}(a)=k!a_k$, כאשר a_k הוא המקדם של x^k בפולינום $p(x)$.

<u>הערות:</u>

1. התנאי "לכל $k\le n$" הוא מפני שלדוגמה $x=x+x^2+o(x)$, בעוד שהנגזרת השנייה של אגף שמאל אינה שווה לנגזרת השניה של הפולינום באגף ימין. הסיבה היא שכאשר מחלקים ב־x^n, לא "רואים" את כל החזקות הגבוהות יותר בפולינום $p(x)$, הרי $\frac{(x-a)^m}{(x-a)^n}$ שואף ל־0 כאשר $x\to a$ אם $m>n$ (במילים אחרות, החלק ב־$p(x)$ שבו מופיעות חזקות גדולות מ־n אינו משפיע על התנאי הנ"ל, והוא יכול להיות שרירותי בלי לשנות כלום).

2. כל פולינום

$$p(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$$

ניתן לכתיבה כ"פולינום בחזקות של $x-a$, כאשר ניתן למצוא את המקדמים על ידי $a_k=p^{(k)}(a)$.

פיתרון:

א. נכון: ניעזר במשפט טיילור, על פיו לכל x בסביבת קיימת c_x בין a לבין x כך ש-

$$f(x) - T_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-a)^n,$$

נחסיר $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ משני האגפים ונקבל

$$f(x) - T_n(x) = \frac{\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)}{n!}(x-a)^n.$$

כלומר,

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)}{n!},$$

וכאשר נשאיף $x \to a$, נקבל על סמך הרציפות של $f^{(n)}$ כי

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

ב. נכון: על סמך הסעיף הקודם נקבל כי $T_n(x) = p(x) + o((x-a)^n)$, ועל סמך תרגיל בית זה אומר שהמקדמים של כל החזקות של שני פולינומים אלו הקטנות מ-n מזדהים.

ג. לא נכון: לדוגמה, ניקח כל פונקציה חסומה $g(x)$ שאינה גזירה באף נקודה ונגדיר $f(x) = (x-a)^{n+1} g(x)$. התנאי בוודאי מתקיים אך המסקנה לא, מפני ש-f אינה גזירה באף נקודה פרט ל-a.

$\boxed{5.37}$ חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}}{x^4}.$$

פיתרון:
ניתן לנסות להשתמש בכלל לופיטל, אך הוא מעט מסתבך כאן ועדיף להיעזר בפולינום טיילור: הרעיון הוא "להחליף" (במחיר של שגיאה) את המונה ואת המכנה בפולינום טיילור הראשון שלהם שאינו אפס. במכנה הוא כבר כזה, בעוד שבמונה, היות ופולינום טיילור של $\sin(x)$ מתחיל כך:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

הרי שלפי כל הכללים שכבר אספנו לגבי "אריתמטיקה" של פולינומי טיילור, מתקבל שפולינום טיילור מסדר 5 של המונה הוא $\frac{x^5}{5!}$. כלומר,

$$\frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}}{x^4} = \frac{\frac{x^5}{5!} + R_5(x)}{x^4} \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

$\boxed{5.38}$ חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{(e^x - 1)^3}.$$

פיתרון:

ניתן לחשב ולראות כי פולינומי טיילור של $\tan(x)$ מתחילים כך:

$$x + \frac{x}{3} + \cdots,$$

ולכן פולינום טיילור מסדר 3 של המונה הוא $-\frac{1}{2}x^3$. מצד שני, פולינום טיילור מסדר 3 של $e^x - 1$ הוא $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, ולכן פולינום טיילור מסדר 3 של $(e^x - 1)^3$ הוא x^3. בכך הכל,

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{(e^x - 1)^3} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + R_3(x)}{x^3 + \tilde{R}_3(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{R_3(x)}{x^3}}{1 + \frac{\tilde{R}_3(x)}{x^3}} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2}$$

$\boxed{5.39}$ חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\cos(x) - 1)}{\ln(1 + x^2)(e^x - 1)^2}.$$

פיתרון:

פולינומי טיילור של $\cos(x) - 1$ מתחילים כך:

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots.$$

פולינומי טיילור של $\sin$ מתחילים כך:

$$x - \frac{x^3}{6} + \cdots.$$

לכן פולינום טיילור של המונה מסדר 4 הוא $-\frac{x^4}{4}$. מצד שני, במכנה, פולינומי טיילור של $\ln\left(1+x^2\right)$ מתחילים כך:

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \cdots$$

(זה מתקבל מהצבת x^2 בפולינומי טיילור של $\ln(1+x)$, אשר מתחילים ב-$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$), בעוד שפולינומי טיילור של $e^x - 1$ מתחילים כך:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots .$$

לכן פולינומי טיילור של המכנה כולו מתחילים כך:

$$x^4 + \cdots .$$

בסך הכל,

$$\frac{\sin^2(\cos(x)-1)}{\ln(1+x^2)\left(e^x-1\right)^2} = \frac{-\frac{x^4}{4} + R_4(x)}{x^4 + \tilde{R}_4(x)} \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{4}.$$