פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 7

1. א. דוגמה: $W^M = \{ 0, 1 \}$, $\varphi = (x = y)$

$s(x) = s(y) = 0$, אזי $M \models_s \varphi$

אבל עבור $s'(x) = 1, s'(y) = 0$, $M \not\models_{s'} \varphi$ ולכן $M \not\models_s \forall x\varphi$

ב. $M \models_s \forall x\varphi$ לכן לכל s' שמתלכדת עם s פרט אולי על x $M \models_{s'} \varphi$

בפרט עבור $s'=s$ $M \models_s \varphi$

ג. כיוון אחד: $M \models \forall x\varphi$, לכן לכל s $M \models_s \forall x\varphi$, לכן לפי (ב) לכל s $M \models_s \varphi$ ולכן $M \models \varphi$

כיוון שני: $M \models \varphi$ לכן לכל s ובפרט לכל s' שמתלכדת עם s פרט אולי על x מתקיים $M \models_{s'} \varphi$, לכן $M \models_s \forall x\varphi$ ולכן $M \models \forall x\varphi$.

2. א. נכון. $M \not\models_s \varphi$, ז"א ש-φ שקרי במבנה M והשמה s, לכן לפי הגדרה $\neg\varphi$ אמיתי באותו המבנה וההשמה, ז"א $M \models_s \neg\varphi$.

ב. לא נכון. דוגמה: $W^M = \{ 0, 1 \}$, $\varphi = (x = y)$. אם $s(x) = 0, s(y) = 1$, אזי $M \not\models_s \varphi$ ולכן $M \not\models \varphi$, אבל אם $s(x) = s(y) = 1$, אזי $M \not\models_s \neg\varphi$ ולכן $M \not\models \neg\varphi$.

ג. נכון. מכיוון ש $M \not\models \varphi$ אזי קיימת השמה s כך ש $M \not\models_s \varphi$. מכיוון ש φ פסוק אז לכל השמה s $M \not\models_s \varphi$ ולכן לכל השמה $M \models_s \neg\varphi$, ז"א $M \models \neg\varphi$.

ד. לא נכון. דוגמה: ניקח מבנה ונוסחה מדוגמה בסעיף ב) ונסיק $\not\models \varphi$ וגם $\not\models \neg\varphi$.

ה. לא נכון. דוגמה: $W^{M1} = \{ 1 \}$, $W^{M2} = \{ 1, 2 \}$, $\varphi = \forall x\forall y(x = y)$, אזי $M2 \not\models \varphi$ ולכן $\not\models \varphi$. אבל גם $M1 \not\models \neg\varphi$ ולכן $\not\models \neg\varphi$.

3. א. לא אמיתית. דוגמה: $W^M = \{ 1, 2 \}$, $R^M = \{ 1 \}$, $Q^M = \emptyset$, אזי: $M \not\models \forall xR(x)$, $M \not\models \forall xQ(x)$, $M \models \forall xR(x) \to \forall xQ(x)$, אבל בהשמה $s(x) = 1$ $M \not\models_s R(x) \to Q(x)$ ולכן $M \not\models \forall x(R(x) \to Q(x))$.

ב. אמיתית לוגית. מכיוון שבכל מבנה $| W^M | > 0$ אזי אם לכל השמה עבור x φ אמיתית אזי קיימת השמה s(x) ב W^M בה φ אמיתית.

ג. אמיתית לוגית. ברור ש-φ אמיתית לכל s(x) ו s(y) (במבנה כלשהו) אמ"מ φ אמיתית לכל s(x) ו s(y) (באותו המבנה).

ד. לא אמיתית לוגית. דוגמה: $W^M = \{ 1, 2 \}$, $\varphi = (x = y)$, אזי $M \vDash \forall x \exists y \varphi$ אבל $M \nvDash \exists y \forall x \varphi$.

ה. אמיתית לוגית. אם קיימת השמה $s(y)$ כך שלכל $s(x)$ φ אמיתית (במבנה כלשהו) אזי באותו מבנה אם ניקח $s(y)$ הנ"ל לכל $s(x)$ אזי φ אמיתית.

4. $\varphi = \exists y(f(y,y) = x \wedge \neg(x = y))$