קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 4

תאריך הגשה: יום רביעי, 27/11/2013, עד שעה 22:00

שאלה 1:

יהי $0<\beta\le 1$, ותהי $\{a_n\}$ הסדרה המוגדרת ע״י: $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\beta a_n^2+\frac{1}{\beta}\right)$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת (לגבול סופי או במובן הרחב) ומצאו את גבולה.

נראה מונוטוניות עולה באינדוקציה: $(\beta-1)^2\ge 0 \Leftarrow \beta^2-2\beta+1\ge 0 \Leftarrow \beta^2+1\ge 2\beta$. $\beta>0$, לכן: $\frac{\beta^2+1}{2\beta}\ge 1$,

והצבה פשוטה מראה כי זה אומר $a_2\ge a_1$. ל- n כללי, נניח $a_n\ge a_{n-1}$, אז:

$a_n=\frac{1}{2}\left(\beta a_{n-1}^2+\frac{1}{\beta}\right)\le\frac{1}{2}\left(\beta a_n^2+\frac{1}{\beta}\right)=a_{n+1}$, והוכחנו מונוטוניות עולה. באינדוקציה פשוטה ניתן להראות גם כי

$a_n\le\frac{1}{\beta}$, ולכן נקבל כי זו סדרה מתכנסת, ונסמן את הגבול ב- L. מיחידות הגבול והעובדה כי $a_n\to L \Leftarrow a_{n+1}\to L$ נקבל כי

L מקיים: $L=\frac{1}{2}\left(\beta L^2+\frac{1}{\beta}\right)$. פתרון המשוואה הזו נותן $L=\frac{1}{\beta}$.

שאלה 2:

יהי $\beta>0$, ותהי $\{a_n\}$ הסדרה המוגדרת ע״י: $a_1=\beta$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת (לגבול סופי או במובן הרחב) ומצאו את גבולה.

ראשית נשים לב כי מכיוון ש- $\beta>0$, מתקיים כי $a_n>0$ לכל n. לכן, מההגדרה ברור כי $a_{n+1}>a_n$. לכן הסדרה מונוטונית עולה ולכן מתכנסת במובן הרחב. נניח כי מתכנסת לגבול סופי L, אז מיחידות הגבול נקבל כי הוא מקיים $L=L+\frac{1}{2L}$, כלומר $\frac{1}{2L}=0$. L בהכרח מקיים $L\ge a_1=\beta>0$ לכן זו סתירה, ולכן $a_n\to\infty$.

שאלה 3:

יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n\}$ המוגדרת ע״י: $a_1=\alpha$,

$$a_{2n+1}=\frac{1}{2}+a_{2n}\ ,\ a_{2n}=\frac{a_{2n-1}}{2}\ .$$

ניתן להוכיח באינדוקציה פשוטה כי הסדרה מקיימת למעשה: $a_{2n+1}=\frac{\alpha+2^n-1}{2^n}$, $a_{2n}=\frac{\alpha+2^{n-1}-1}{2^n}$ (אחרי שמציבים את האיברים הראשונים בסדרה ומעלים את ההשערה הזו), ולכן מאריתמטיקה של גבולות נקבל כי $a_{2n}\to\frac{1}{2}$, $a_{2n+1}\to 1$.

מכיוון ששתי סדרות אלו ממצות את כל איברי a_n, אלו שני הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה.

שאלה 4 :

מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $\frac{(n^3+n^{\sin(n)}+1)(1+(-3)^{-n})^{3^n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{4n^3+3ncos(n)}$.

נסמן $c_n=\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, $b_n=(1+(-3)^{-n})^{3^n}$, $a_n=\frac{n^3+n^{\sin(n)}+1}{4n^3+3ncos(n)}$, אז הסדרה המקורית היא מכפלת הסדרות הנ״ל.

נשים לב כי $a_n\to\frac{1}{4}$, ל- b_n מחזור באורך 2 עם גבולות חלקיים $e,\frac{1}{e}$, ול- c_n מחזור באורך 6 עם ג״ח $0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}$. לכן לסדרה המקורית יש מחזור באורך 6 עם ג״ח $0,\frac{\sqrt{3}e}{8},-\frac{\sqrt{3}}{8e},-\frac{\sqrt{3}e}{8},\frac{\sqrt{3}}{8e}$. 6 הסדרות המייצרות ג״ח אלו ממצות את כל איברי a_n ולכן אלו הג״ח היחידים.

שאלה 5 :

הוכיחו / הפריכו :

א. אם $\{a_n\},\{b_n\}$ שתי סדרות חסומות, אז : $\limsup a_nb_n=\limsup a_n\cdot\limsup b_n$.

לא נכון. ד״נ : $a_n=1+(-1)^n, b_n=1+(-1)^{n+1}$.

ב. אם $\{a_n\}$ חסומה ו- $\{b_n\}$ אי-שלילית ומתכנסת, אז :

$$\limsup a_nb_n=\limsup a_n\cdot\limsup b_n .$$

נכון : ראשית נעיר כי $\limsup b_n=\lim b_n$, ונסמן גבול זה ב- b, ונזכור כי מכיוון ש- b_n מתכנסת אז היא חסומה, ולכן גם a_nb_n חסומה. כמו כן $b_n\geq 0$ ולכן $b\geq 0$. נסמן $\limsup a_n=a$. תהי $\{a_{n_k}b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ת״ס של a_nb_n המתכנסת ל- $\limsup a_nb_n$. a_{n_k} חסומה ולכן קיימת לה ת״ס מתכנסת $a_{n_{k_j}}$, נאמר לגבול a'. b_n מתכנסת, לכן כל ת״ס שלה מתכנסת לאותו הגבול, לכן $b_{n_{k_j}}\to b$, ולכן $a_{n_{k_j}}b_{n_{k_j}}\to a'b$. מהגדרת a מתקיים $a'\leq a$, ובתוספת לכך ש- $b\geq 0$ נקבל $a'b\leq ab$. מכיוון ש- $a_{n_k}b_{n_k}$ בעצמה היתה סדרה מתכנסת ל- $\limsup a_nb_n$, נקבל כי $\limsup a_nb_n=a'b$, כלומר קיבלנו $\limsup a_nb_n\leq ab$. עבור אי השוויון ההפוך, תהי a_{n_k} ת״ס של a_n המתכנסת ל- a. אז $a_{n_k}b_{n_k}\to ab$, כלומר ab בעצמו הוא ג״ח של a_nb_n, ולכן מקיים $ab\leq\limsup a_nb_n$. משני אי-השוויונים ההפוכים נקבל את הדרוש.

שאלה 6 :

הראו שאם $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות כך ש- $\limsup a_n<\liminf b_n$, אז מתקיים $a_n<b_n$ החל ממקום מסוים.

נסתכל על $\varepsilon=\frac{\liminf b_n-\limsup a_n}{2}>0$. החל ממקום מסוים, כל איברי b_n מקיימים :

$b_n>\liminf b_n-\varepsilon=\frac{\liminf b_n+\limsup a_n}{2}$. החל ממקום מסוים, כל איברי a_n מקיימים :

$\frac{\liminf b_n+\limsup a_n}{2}=a_n+\varepsilon>a_n$. לכן, החל ממקום מסוים , מתקיים $a_n<b_n$.

<u>שאלה 7:</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה מלעיל. הראו כי אם $\sup a_n$ אינו אחד מאיברי הסדרה, אז הוא גבול חלקי שלה.

נסמן $M = \sup a_n$, ונבנה תת-סדרה המתכנסת ל- M. נבנה את הסדרה באינדוקציה: עבור $n = 1$, נבחר n_1 כך ש- $a_1 > M - 1$. קיים n_1 כזה מהגדרת סופרמום. כעת, נסמן $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, M - a_1, M - a_2, \dots, M - a_{n_1}\right\}$. מכיוון ש- $a_n \neq M$ לכל n, נקבל כי $\varepsilon_1 > 0$, ולכן קיים n_2 כך ש- $a_{n_2} > M - \varepsilon_1 \geq M - \frac{1}{2}$. מהגדרת n_2, בהכרח $n_2 > n_1$, כי לכל $1 \leq k \leq n_1$, $M - \varepsilon_1 \geq M - (M - a_k) = a_k$. באופן דומה, לאחר שבחרנו את האינדקסים $n_1, n_2, \dots, n_k$ כך שלכל $1 \leq j \leq k$ מתקיים $M - \frac{1}{j} < a_{n_j} \leq M$, נסמן $\varepsilon_k = \min\left\{\frac{1}{k+1}, M - a_1, M - a_2, \dots, M - a_{n_k}\right\}$, ונבחר n_{k+1} כך ש- $M - \frac{1}{k+1} \leq M - \varepsilon_k < a_{n_{k+1}}$, וכמו מקודם מתקיים בהכרח $n_{k+1} > n_k$. בסה״כ בנינו ת״ס $\{a_{n_k}\}$ כך שלכל k, $M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M$, לכן $a_{n_k} \to M$.