תורת ההסתברות

תרגיל מס' 3

פתרונות

<u>תרגיל 1</u>.
נשתמש בהגדרה הכללית הבאה:

$$\limsup A_n = \lim_{n\to\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n = \{\omega \text{ that are in infinitely many } A_n \},$$
$$\liminf A_n = \lim_{n\to\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n = \{\omega \text{ that are in all but finitely many } A_n \},$$

(א)
במקרה הפרטי הזה נקבל:

$$P(\limsup A_n) = P(\lim_{m\to\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}) = 1,$$
$$P(\liminf A_n) = P(\lim_{m\to\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0.$$

(ב)
במקרה הפרטי הזה נקבל:

$$P(\limsup A_n) = P(\lim_{m\to\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n) = P\big((0,1/2]\big) = 1/2,$$
$$P(\liminf A_n) = P(\lim_{m\to\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n) = P\big(\lim_{m\to\infty} (1/2m,1/2]\big) = 1/2.$$

<u>תרגיל 2</u>.
באופן כללי, יהא X מ"מ בדיד שיכול לקבל ערכים רק מתוך קבוצה

$$\Omega_L = \{0,1,\ldots,L\}.$$

נסמן:

$$p_n := P(X=n), \quad n \in \Omega_L.$$

במונחים האלה, לכל $x \in [0, L)$,

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{[x]} p_n = P(X \le [x]), \quad 1 - F_X(x) = \sum_{n=[x]+1}^{L} p_n = P(X > [x]),$$

כאשר $[x]$ הוא סימון בשביל הערך השלם של x. וכמובן

$$F_X(-x) = F_X(L+x) = 0 \qquad \forall \ x > 0.$$

לפיכך:

$$\int_0^\infty (1 - F_X(x))dx = \sum_{n=0}^{L_1 - 1} P(X > n) = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{i=n+1}^{L} p_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{L} \sum_{n=0}^{i-1} p_i = \sum_{i=1}^{L} i p_i.$$

(א)

במקרה הפרטי הזה $p_n = \binom{L}{n} p^n q^{L-n}$ עבור פרמטרים $p \in (0,1)$ ו- $q = 1 - p$. לכן נקבל:

$$\sum_{n=1}^{L} n p_n = \sum_{n=1}^{L} \frac{L!}{(n-1)!(L-n)!} p^n q^{L-n} =$$
$$= Lp \sum_{n=1}^{L} \frac{(L-1)!}{(n-1)!(L-n)!} p^{n-1} q^{L-n} \ (m = n-1 \text{ is a new index }) \ =$$
$$= Lp \sum_{m=0}^{L-1} \frac{(L-1)!}{m!(L-1-m)!} p^m q^{L-1-m} = Lp(p+q)^{L-1} = Lp.$$

(ב)

במקרה הפרטי הזה נקבל:

$$\sum_{n=1}^{L} n p_n = \frac{1}{L+1} \sum_{n=1}^{L} n = \frac{1}{L+1} \frac{L(L+1)}{2} = \frac{L}{2}.$$

<u>תרגיל 3.</u>
התשובה היא "כן" והיא נובעת מיידית מההגדרות של- $\limsup$ ו- $\liminf$ שניתנו בתרגיל 1 בגליון הזה:

$$\lim_{n\to\infty}(B\cap A_n) = B\cap \lim_{n\to\infty} A_n.$$

<u>תרגיל 4.</u>
נשתמש בנוסחת הנסיגה הבא:

$$p_{n+1} = p_n(1-p) + (1-p_n)p, \qquad n \geq 0.$$

נגדיר $x_n := p_n - 1/2$ ונציב x_n לתוך נוסחת הנסיגה. נקבל:

$$x_{n+1} = x_n(1-2p),$$

כלומר, $x_n = x_0(1-2p)^n$ ו-

$$p_n = 1/2 + (p_0 - 1/2)(1-2p)^n, \qquad n \geq 0.$$

(א)
אם $p_0 = 0$, אז

$$p_n = 1/2[1-(1-2p)^n], \qquad n \geq 0.$$

(ב,ג)
הגבול שווה ל- $1/2$ ללא תלות ב- p_0 כל עוד $p \neq 1$.

<u>תרגיל 5.</u>
(א)
יהא X_n מיקום של החלקיק כעבור זמן n. אזי

$$P = P(X_{2n}=0, X_{2n-1}=1) = qP(X_{2n-1}=1) = \binom{2n-1}{n} p^n q^n.$$

(ב) אם $L-1 \le 2n$, אז

$$P(X_{2n}=0)=\sum_{i=0}^{L-1} P(X_{2n}=0|X_0=i)P(X_0=i)=$$
$$=\frac{1}{L}\sum_{0\le j\le (L-1)/2} P(X_{2n}=0|X_0=2j)=$$
$$=\frac{1}{L}\sum_{0\le j\le (L-1)/2} \binom{2n}{n+j} p^{n-j}q^{n+j}=\frac{1}{2^{2n}L}\sum_{0\le j\le (L-1)/2}\binom{2n}{n+j}.$$

אם $L-1 > 2n$, אז

$$P(X_{2n}=0)=\sum_{i=0}^{L-1} P(X_{2n}=0|X_0=i)P(X_0=i)=$$
$$=\frac{1}{L}\sum_{0\le j\le n} P(X_{2n}=0|X_0=2j)=$$
$$=\frac{1}{L}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{n+j}p^{n-j}q^{n+j}=\frac{1}{2^{2n}L}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{n+j}=$$
$$=\frac{1}{2^{2n+1}L}\left(1+\binom{2n}{n}\right).$$