אינפי 2 - תרגיל בית 5

הגשה: 4/12/2017

1. הוכיחו את מבחן אבל: תהי f רציפה ב- $[a,\infty)$ ו- $\int_a^\infty f$ מתכנס, g גזירה ברציפות, מונוטונית וחסומה ב- $[a,\infty)$. הוכיחו כי $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

2. הוכח או הפרך:
   א. אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אזי גם $\sum a_n^2$.
   ב. אם $\int_1^\infty f$ מתכנס בהחלט אזי גם $\int_1^\infty f^2$.
   ג. הטור $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ מתכנס.
   ד. הטור $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ מתכנס.
   ה. הטור $q^2+q+q^4+q^3+\ldots$ מתכנס לכל $q\in(0,1)$.

3. א. תהי f פונקציה גזירה באפס כך ש- $f(0)=0$ ו- $f'(0)\neq 0$. תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית שואפת ל-0. הראו ש- $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\sum f(a_n)$ מתכנס.
   ב. תהי $\{a_n\}$ חיובית. הראו ש- $\sum a_n<\infty \Longleftrightarrow \sum \frac{a_n}{1+a_n}<\infty$.

4. נגדיר a_n ע"י $a_n=\frac{\ln(e+a_{n-1})}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ כש- $a_1>0$ נתון. האם $\sum a_n$ מתכנס?

5. רשות. נגדיר לכל $x,y\in\mathbb{R}$

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}}dt$$

   א. הוכיחו כי $B(x,y)<\infty$ אם ורק אם $x,y>0$.
   ב. הוכיחו כי $B(x,y)=B(y,x)$.
   ג. הוכיחו כי

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)\,d\theta$$

   ד. חשבו את $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

6. רשות. ראינו בתרגול שהאינטגרל $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ סופי אם ורק אם $x>0$.
   נגדיר $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.
   א. הוכיחו כי לכל $x,s>0$ מתקיים

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{x-1}dt=\frac{\Gamma(x)}{s^x}$$

   ב. חשבו את $\int_0^\infty e^{-st}\left(2-3t+5t^2\right)dt$.
   ג. חשבו את $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ במונחים של Γ.