פתרון לגיליון תרגילים מספר 5

1 נתונה $A \subset \Re$ קבוצה סגורה. צ"ל : לכל $x \in \Re$ קיימת $a_x \in A$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים : $|a_x - x| \le |a - x|$.

הוכחה:

תהי $b \in \Re$ כלשהי. נבנה פונקציה : $f_b(x) = |x - b|$. נסתכל על קבוצת המספרים $f(A) = \{f_b(a) | a \in A\} \subset \Re$. זוהי קבוצה חסומה מלרע (כי לכל $x \in \Re$ $f_b(x) \ge 0$) , לכן יש לה אינפימום.נסמן : $d = \inf f(A)$. ע"פ הגדרת האינפימום , לכל $\varepsilon = \frac{1}{n}$ קיים $a_n \in A$ כך ש- $d + \frac{1}{n} > f(a_n)$, כלומר $d + \frac{1}{n} > |a_n - b|$. יש תת-סדרה של a_n נסמנה a_{n_k} שכל איבריה גדולים מ-b או קטנים מ-b. נניח כי לכל $k \in N$ $a_{n_k} \ge b$ אז $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = d + b$ (ע"פ סנדביץ').

אם קיים $k = l$ כך ש- $a_{n_l} = d + b$ אז סיימנו - כי זוהי הנקודה ב-A הקרובה ביותר לb.

אחרת הנקודה $d + b$ היא נקודת הצטברות של הקבוצה הסגורה A , ולכן שייכת לA. זוהי הנקודה הקרובה ביותר לb בקבוצה A .

2 תהי $\phi \ne A \subseteq R$ קבוצה גם פתוחה וגם סגורה.

A סגורה ולכן לכל $x \in R$ יש נקודה $\bar{a} \in A$ הקרובה ביותר ל-x .

טענה : $\bar{a} = x$ (כלומר $x \in A$ לכל $x \in \Re$).

נניח כי $x \ne \bar{a}$ בלי הגבלת הכלליות : $x > \bar{a}$. A פתוחה ולכן $\bar{a}$ היא נקודה פנימית ב-A. כלומר, קיים $\delta > 0$ כך ש- $(\bar{a} + \delta, \bar{a} - \delta) \subset A$. נקבל ש- $A \ni \bar{a} + \frac{\delta}{2}$ נקודה קרובה יותר ל x מאשר $\bar{a}$.

לכן קיבלנו שאם $\phi \ne A \subseteq R$ פתוחה וסגורה אז $A = \Re$.

3 **א.** קבוצות צפופות ב-$\Re$ שאינן $\Re$ עצמו:

$A = Q$, $A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n,n+1)$.

ב. צ"ל : A צפופה ב B $\Leftrightarrow$ לכל $b \in B$ ולכל $\delta > 0$ קיים $a \in A$ כך ש-$a \in (b-\delta, b+\delta)$.

הוכחה: התנאי שמצד שמאל אומר ש $b \in B$ אז : $b \in A$ או $b \in A'$ מכאן $B = A' \bigcup A$.

4 $A' = \phi$: לדוגמא היחידון $\{8\}$.

$A' = A$: הקטע $[0,1]$.

$A' \neq A, \ \ A' \subset A$: $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\} \cup \{0\}$.

$A' \neq \phi$, $A \cap A' = \phi$: $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$.

$A' \neq \phi$, $A'' = \phi$: $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\} \cup \{0\}$.

5 **א.** f חח"ע $\Leftrightarrow$ לכל $y \neq x$ מתקיים $f(x) \neq f(y)$. נגדיר פונקציה g על התחום $f(\Re)$: $g : f(\Re) \to \Re$ ע"י : $g(f(x)) = x$. אז ע"פ ההגדרה $g \circ f(x) = id(x)$.

ב. f על $\Leftrightarrow$ לכל $y \in \Re$ קיים $x \in \Re$ כך ש- $y = f(x)$.

לכן, לכל $y \in \Re$ נבחר x כלשהו שמקיים $y = f(x)$ (יכולים להיות הרבה x-ים כאלו, אבל נבחר אחד) ונגדיר $g(y) = x$. נקבל :

$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = id(y)$ כנדרש.

ג. תהי $f(x) = \arctan(x)$ ותהי $g(y) = \tan(y)$ אז :

$g \circ f(x) = g(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$ אבל, $f \circ g \neq id$ מכיוון שאם ניקח $a > \frac{\pi}{2}$ נקבל $\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\tan(a)) \leq \frac{\pi}{2}$ ולכן $\arctan(\tan(a)) \neq a$.

ד. $h = id \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ id = g$.

6 א. נחפש f שתקיים $|f(x)-f(y)| \le |x-y| \quad \forall x,y$ כלומר נדרוש:

$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le 1$. כלומר נדרוש שערכו המוחלט של שיפוע המיתר בין x ל y יהיה קטן או שווה ל1. לדוגמא: $\sin(x)$.

ב.נתון כי f מקיימת לכל x,y : $|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2$. אז

$$|f(x)-f(y)| = \left|f(x)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(y)\right|$$

$$\le \left|f(x)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(y)\right| \le \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2$$

ובאופן כללי נקבל :

$$|f(x)-f(y)| \le \sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(x+\frac{x-y}{n}k\right)-f\left(x+\frac{x-y}{n}(k+1)\right)\right| = n\cdot\left(\frac{x-y}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}(x-y)^2$$

כלומר עבור x,y נתונים $|f(x)-f(y)|$ קטן כרצוננו. אבל זה יתכן רק כאשר $|f(x)-f(y)|=0$. כלומר, f קבועה.