אינפי 1

פרופ׳ י. בנימיני

אביב תש״ע

ברשימות ראשוניות אלה יש בוודאי שגיאות רבות: טעויות דפוס, אי־בהירויות ואפילו טעויות מתמטיות. תודתי נתונה מראש לכל מי שיעביר אלי הערות ותיקונים מכל סוג.

בכתיבת הרשימות נעזרתי ברשימות קודמות של פרופ׳ אריה לייזרוביץ.

תוכן עניינים

פרק 1

מבוא

1.1 סימונים ומושגי יסוד

בקורס זה נעסוק רק בקבוצות של מספרים ממשיים. אנו מסמנים קבוצה ע"י סוגריים משולבים $\{\ \}$. לפעמים ניתן לכתוב באופן מפורש מיהם איברי הקבוצה, למשל $\{0,-3,10\}$, אך בד"כ נציין את אבריה ע"י ציון תכונה המאפיינת אותם. למשל, הקבוצה $\{x : x>0\}$ הינה קבוצת כל המספרים החיוביים. אם a שייך לקבוצה A נסמן זאת ע"י $a\in A$ (ואם איננו שייך ל־ A נסמן זאת ב־ $a\notin A$).

נשתמש בסימונים הבאים לקבוצות של מספרים שבהן נפגוש לעתים קרובות:

$\mathbb{R}$ ־ קבוצת כל המספרים הממשיים.

(a,b) ־ קטע פתוח (ללא הקצוות), כלומר $\{x : a<x<b\}$.

$[a,b]$ ־ קטע סגור (עם הקצוות), כלומר $\{x : a\le x\le b\}$.

$(a,b]$ או $[a,b)$ ־ קטע חצי סגור (או חצי פתוח), למשל $(a,b]=\{x : a<x\le b\}$.

(a,∞) או $(-\infty,a)$ ־ קרן פתוחה, למשל $(a,\infty)=\{x : a<x<\infty\}$.

$[a,\infty)$ או $(-\infty,a]$ ־ קרן סגורה, למשל $[a,\infty)=\{x : a\le x<\infty\}$.

$\mathbb{N}$ ־ קבוצת המספרים הטבעיים, כלומר $\{1,2,3...\}$.

$\mathbb{Z}$ ־ קבוצת המספרים השלמים, כלומר $\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.

$\mathbb{Q}$ ־ קבוצת המספרים הרציונליים, כלומר $\{\frac{a}{b}\ :\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0\}$.

יש גם מספרים אי־רציונליים, כלומר כאלה שאי אפשר להציגם כשבר שבו המונה והמכנה שלמים. אפשר להוכיח כי π ו־ e אינם רציונליים. בסעיף 1.3 נראה ש־ $\sqrt{2}$ הוא אי־רציונלי.

הערך המוחלט של מספר x מוגדר ע"י $|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x\le 0\end{cases}$.

המשמעות הגיאומטרית של $|x|$ היא המרחק של x מ־ 0. באופן כללי יותר $|x-a|$ הוא המרחק בין x ל־ a. למשל, אי השוויון $|x-a|<\delta$ אומר שהמרחק של x מ־ a קטן מ־ δ, כלומר, $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

טענה.[אי־שוויון המשולש] לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיימים אי השוויונות $|x+y|\le|x|+|y|$ ו־ $|x-y|\ge|x|-|y|$.

הוכחה. אי השוויון הראשון ברור כאשר ל־ x ו־ y יש אותו סימן (ולמעשה יש אז שוויון). אם יש להם סימנים הפוכים אז באגף שמאל יש צמצום, ואילו באגף ימין אין, ולכן מתקיים אי שוויון חריף.

אי השוויון השני מתקבל מהראשון כי

$$|x|=|(x-y)+y|\le|x-y|+|y|$$

עפ"י אי השוויון הראשון, וכעת נעביר אגפים.

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ הוא סימון לסכום $a_1+\ldots+a_n$. לדוגמא, הסכום של סדרה גיאמטרית סופית עם $q\ne1$ ניתן ע"י $\sum\limits_{i=0}^{n}aq^i=a\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

1.2 אינדוקציה

למספרים הטבעיים יש התכונה החשובה שאם $A\subset\mathbb{N}$ מקיימת ש־ $1\in A$ ואם לכל $n\in A$ גם $n+1\in A$, אז $A=\mathbb{N}$. מכאן מתקבל

עקרון האינדוקציה: אם טענה מסויימת נכונה עבור $n=1$ ומקיימת שמתוך נכונות הטענה ל־ n נובעת נכונותה גם ל־ $n+1$, אז הטענה נכונה לכל מספר טבעי.

ואמנם, מהתנאי נובע שהקבוצה A של כל ה־ n־ים עבורם הטענה נכונה חייבת להיות $\mathbb{N}$ כולה.

כדוגמא להוכחה באינדוקציה נוכיח את נוסחת הבינום של ניוטון, ונתחיל בסימונים:

נסמן ב־ $j!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot j$ את מכפלת j הטבעיים הראשונים (ונסמן גם $0!=1$).

נסמן $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. (זה מספר תת הקבוצות בנות k אברים מתוך קבוצה בת n אברים).

משפט.[נוסחת הבינום]

$$(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jb^{n-j}\ .$$

הוכחה. הטענה בוודאי נכונה ל־ $n=1$. נניח נכונותה ל־ n ונוכיח ל־ $n+1$. נציג

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^jb^{n-j}\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{j+1}b^{n-j}+\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}a^tb^{n+1-t}\end{aligned}$$

במחובר הראשון נציב $t = j+1$, ונקבל כי

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n}{t-1} a^t b^{n+1-t} + \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} a^t b^{n+1-t} \qquad (*)$$

ונראה שסכום זה הוא $\sum_{t=0}^{n+1} \binom{n+1}{t} a^t b^{n+1-t}$ כמבוקש.

עבור $t=0$ מקבלים ב־ $(*)$ $\binom{n}{0}=1$ ועבור $t=n+1$ את $\binom{n}{n}=1$ וזה מתאים למבוקש.

עבור $0<t<n+1$ מקבלים ב־ $(*)$ כמקדם של $a^t b^{n+1-t}$ את

$$\begin{aligned}\binom{n}{t} + \binom{n}{t-1} &= \frac{n!}{t!(n-t)!} + \frac{n!}{(t-1)!(n-t+1)!} \\ &= \frac{n![n+1-t+t]}{t!(n+1-t)!} = \frac{n!(n+1)}{t!(n+1-t)!} = \binom{n+1}{t}\end{aligned}$$

****
סוף שעה 2
****

1.3 מספרים רציונליים ואי רציונליים

<u>טענה.</u> $\sqrt{2}$ הוא מספר אי־רציונלי.

<u>הוכחה.</u> נוכיח "בדרך השלילה". בשיטה זו אנו מניחים כי הטענה איננה נכונה ומגיעים לסתירה לאחד הנתונים או לאחת המסקנות שהסקנו מהנתונים במהלך ההוכחה. משהגענו לסתירה, המסקנה היא כי הנחת השלילה לא יכולה להיות נכונה ־ ולכן הטענה עצמה היא אכן נכונה.

נניח אם כן בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי ונרשום אותו כשבר $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ כאשר a,b שלמים.

נעביר אגפים ונעלה בריבוע ונקבל כי $a^2=2b^2$. אך בפירוק לגורמים של אגף שמאל הגורם 2 יופיע מספר פעמים <u>זוגי</u> (כפול ממספר הפעמים שיופיע כגורם של a), ואילו באגף ימין הוא יופיע מספר פעמים איזוגי! כך הגענו לסתירה, והמסקנה היא שהנחת השלילה איננה נכונה ו־ $\sqrt{2}$ אי־רציונלי.

<u>משפט.</u> הן המספרים הרציונלים והן האי־רציונלים הם "צפופים" ב־ $\mathbb{R}$, כלומר בין כל שני מספרים ממשיים יש גם מספרים רציונליים וגם אי־רציונליים.

<u>הוכחה.</u> נראה תחילה שבין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר רציונלי. נקבע שני מספרים ממשיים שונים כלשהם $a<b$. אז המספר $b-a$ הוא מספר חיובי ונבחר n טבעי כך ש־ $n>\frac{1}{b-a}$. ע"י הכפלה במכנה נקבל כי $nb-na>1$, כלומר

המרחק בין nb ו־ na גדול מ־ 1, ולכן קיים מספר שלם m המקיים $na < m < nb$.
כשנחלק כעת את שני אגפי אי־השוויון ב־ n נקבל כי $a < \frac{m}{n} < b$, כלומר, מצאנו מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ בין a ל־ b כמבוקש.

ההוכחה עבור מספר אי־רציונלי נובעת מהמקרה של מספר רציונלי: נמצא מספר רציונלי $\frac{m}{n}$ כך ש־ $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}}$ ואז $a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b$. אך $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ אינו רציונלי, כי אילו היה $\frac{m\sqrt{2}}{n} = \frac{k}{l}$ היינו מקבלים ש־ $\sqrt{2} = \frac{nk}{lm}$, כלומר ש־ $\sqrt{2}$ רציונלי, אך אנחנו כבר יודעים שהוא אינו רציונלי!

1.4 קבוצות חסומות

__הגדרה.__ (i) קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ נקראת חסומה מלמעלה (או חסומה מלעיל) אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \leq M$. כל מספר M כזה נקרא חסם מלעיל של A. באופן אנלוגי מגדירים קבוצה חסומה מלמטה (מלרע) וחסם מלרע.

(ii) קבוצה A נקראת חסומה אם היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה, כלומר כשיש מספרים M ו־ m כך ש־ $m \leq x \leq M$ לכל $x \in A$ (או, באופן שקול, אם קיים מספר $M > 0$ כך ש־ $|x| \leq M$ לכל $x \in A$).

(iii) חסם המלעיל הקטן ביותר של קבוצה A נקרא הסופרמום (או החסם העליון) של A, ויסומן ע"י $\sup A$, או $\sup_{x\in A} x$. אם הסופרמום שייך לקבוצה A הוא נקרא גם המקסימום של A, ויסומן ע"י $\max A$ או $\max_{x\in A} x$. באופן דומה האינפימום (או החסם התחתון) של A הוא חסם המלרע הגדול ביותר של A, ואם האינפימום שייך לקבוצה A הוא נקרא גם המינימום של A. הסימונים הם $\inf A$, $\min_{x\in A} x$ וכדומה.

__דוגמאות.__ (i) קטע חצי סגור $I = (a, b]$ הינו קבוצה חסומה. כל מספר $M \geq b$ הוא חסם מלעיל של I וכל מספר $m \leq a$ הוא חסם מלרע. החסם העליון הוא b והתחתון הוא a. המכסימום מתקבל, $\max\{x : x \in I\} = b$, אך אין ל־ I מינימום.

(ii) קבוצת המספרים הטבעיים חסומה מלמטה, אך אינה חסומה מלמעלה: $\min \mathbb{N} = 1$, אולם לא קיים ל־ $\mathbb{N}$ סופרמום.

הלמה הבאה היא תרגום ישיר להגדרת החסם העליון

__למה.__ $M = \sup A$ אםם מתקיימים שני התנאים הבאים:

(i) $x \leq M$ לכל $x \in A$.

(ii) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש־ $x_0 > M - \varepsilon$.

באופן דומה, $m = \inf A$ אםם $y \geq m$ לכל $y \in A$ וגם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $y_0 \in A$ כך ש־ $y_0 < m + \varepsilon$.

__הוכחה.__ נוכיח רק שהסופרמום מקיים את שני התנאים (והוכיחו כתרגיל שאם M מקיים (i) ו־ (ii) אז הוא אכן החסם העליון של A).

אם M חסם עליון, הוא בוודאי חסם מלעיל, ולכן $x \leq M$ לכל $x \in A$.

נקבע כעת $\varepsilon > 0$. עפ"י הגדרת החסם העליון M כחסם מלעיל הקטן ביותר, נקבל ש־ $M - \varepsilon$, הקטן ממש ממנו, איננו יכול להיות חסם מלעיל. כלומר, יש $x_0 \in A$ כך ש־ $x_0 > M - \varepsilon$.

כאשר הגדרנו חסם עליון ותחתון הנחנו באופן סמוי כי לכל קבוצה חסומה מלמעלה אכן קיים חסם מלעיל שהינו הקטן ביותר (ובאופן אנלוגי עבור החסם התחתון). עובדה זו אכן נכונה, אך כדי להוכיח אותה צריך להגדיר תחילה את המספרים הממשיים באופן מתמטי מדוייק, ואנו לא נעשה זאת כעת (אולי נעשה זאת בסוף הסימסטר). לכן נתייחס לעובדה זו כ"אקסיומה".

אקסיומת השלמות: לקבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים שהיא חסומה מלמעלה (מלמטה) קיים סופרמום (אינפימום).

כדי להסביר את הטרמינולוגיה הזו, נתבונן במספרים הרציונליים כאוסף של נקודות על הישר הממשי שמשאירות "חורים" רבים (שהינם המספרים האי־רציונליים). האקסיומה אומרת שהמספרים הממשיים הם מערכת "שלמה" - אין בה "חורים" כאלה.

כדוגמא נסתכל בקבוצה $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ החלקית לקבוצת המספרים הרציונליים. החסם העליון שלה הוא $\sqrt{2}$, שהוא אי־רציונלי, ולכן אין ל־ B סופרמום במסגרת המספרים הרציונליים. ה"חור" הזה "נסתם" כשמסתכלים במספרים הממשיים כולם.

נביא כעת דוגמא לשימוש באקסיומת השלמות. בסעיף 1.3 הראנו ש־ $\sqrt{2}$ אירציונלי. אך מנין אנחנו יודעים שיש בכלל שורש ל־ 2? כלומר, מדוע קיים מספר $x > 0$ כך ש־ $x^2 = 2$? למעשה, כפי שנראה במשפט הבא, זו בדיוק אקסיומת השלמות שמבטיחה שאכן $\sqrt{2}$ קיים!

__משפט.__ לכל מספר חיובי $a > 0$ ולכל מספר טבעי $n > 0$ יש מספר חיובי אחד ויחיד $b > 0$ כך שמתקיים $b^n = a$ (ונסמן אותו ב־ $b = \sqrt[n]{a}$).

__הוכחה.__ ברור שאין יותר מ־ b אחד כזה כי אם גם $b \neq c > 0$ מקיים $c^n = a$, ונניח למשל ש־ $b < c$, אז נקבל שגם־ $a = b^n < c^n = a$ וזה לא ייתכן.

נסמן כעת $A = \{t > 0 : t^n < a\}$ ונראה ש־ A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. עפ"י אכסיומת השלמות נקבל אז שיש ל־ A חסם עליון. נסמן $b = \sup A$ ונראה שזהו ה־ b המבוקש ע"י כך שנראה ש־ $b^n \geq a$ וכן $b^n \leq a$.

<u>$A \neq \emptyset$</u>: נבחר $t = \frac{1}{2}\min(1, a)$ ואז $0 < t < 1$ גורר כי $t^n < t$ ולכן

$$0 < t^n < t \leq \frac{1}{2}a < a$$

כלומר, $t \in A$.

<u>A חסומה מלעיל:</u> נסמן $M = \max(1, a)$ ונראה ש־ M הוא חסם מלעיל של A. ובאמת, אם $t \leq 1$ אז בוודאי ש־ $t \leq M$, ואם $t \in A$ מקיים $t > 1$ אז $t < t^2 < a \leq M$.

****

סוף שעה 4

****

$b^n \geq a$: נניח בשלילה כי $b^n < a$ ונמצא $\varepsilon > 0$ כך שגם $(b+\varepsilon)^n < a$. זה יאמר ש־ $b+\varepsilon \in A$, ואז $b+\varepsilon > b$ יביא לסתירה להנחה ש־ b הוא בכלל חסם מלעיל של A.

ניתן כעת את ההוכחה עבור $n=2$. המקרה הכללי מופיע באותיות קטנות בהמשך.

נבחר $0 < \varepsilon < \min\left(1, \frac{a-b^2}{2b+1}\right)$. ואז $\varepsilon < 1$ גורר כי $\varepsilon^2 < \varepsilon$, ולכן

$$\begin{aligned}(b+\varepsilon)^2 &= b^2+2b\varepsilon+\varepsilon^2 = b^2+\varepsilon(2b+\varepsilon)\\ &< b^2+\varepsilon(2b+1) < b^2+\frac{a-b^2}{2b+1}(2b+1) = a\end{aligned}$$

ההוכחה ל־ n כללי: נבחר $0 < \varepsilon < \min\left(1, \frac{a-b^n}{nb^{n-1}+\ldots+1}\right)$, ואז $\varepsilon < 1$ גורר כי $\varepsilon^j < \varepsilon$ לכל $j > 1$. וכעת נחשב בעזרת נוסחת הבינום

$$\begin{aligned}(b+\varepsilon)^n &= b^n+nb^{n-1}\varepsilon+\binom{n}{2}b^{n-2}\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^n\\ &= b^n+\varepsilon(nb^{n-1}+\ldots+\varepsilon^{n-1}) \leq b^n+\varepsilon(nb^{n-1}+\ldots+1)\\ &< b^n+(nb^{n-1}+\ldots+1)\frac{a-b^n}{nb^{n-1}+\ldots+1} = a\end{aligned}$$

$b^n \leq a$: נניח בשלילה כי $b^n > a$ ומצא חסם מלעיל M קטן מ־ b, בסתירה לכך ש־ b הוא החסם העליון של A.

הפעם ניתן ההוכחה רק עבור $n=2$, ונשאיר כתרגיל את ההוכחה ל־ n כללי.

נקבע $t \in A$, ואז $t \leq b$ ונציג

$$b-t = \frac{b^2-t^2}{b+t} > \frac{b^2-a}{2b}$$

ולכן $t < b-\frac{b^2-a}{2b} = M < b$ כמבוקש.

לסיום נזכיר את חוקי החזקות עם מעריכים רציונליים.

אם $x > 0$ נסמן ב־ $x^{\frac{1}{n}}$ את $\sqrt[n]{x}$. אם $q = \frac{m}{n}$ רציונלי כך ש־ $m, n > 0$, נגדיר

$$x^q = \sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

ואם q שלילי, נגדיר $x^q = \frac{1}{x^{-q}}$. בהגדרות אלה יתקיימו חוקי החזקה הרגילים, כלומר $x^py^p = (xy)^p \;\; ; \;\; x^{p+q} = x^px^q \;\; ; \;\; (x^p)^q = x^{pq}$, וכו'.

בהמשך נגדיר גם את x^α עבור α־ים ממשיים באופן שחוקי החזקה ימשיכו להתקיים.

פרק 2

גבולות של סדרות של מספרים ממשיים

סדרה הינה אוסף אינסופי מסודר של מספרים: יש איבר ראשון, איבר שני, איבר שלישי וכולי. (באופן פורמלי ניתן להתבונן על סדרה כעל פונקציה מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים).

אנו נסמן סדרה ע"י $\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$, או $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$, או $(c_j)_{j=1}^{\infty}$, או (α_k). ייתכן שתפגשו גם סימונים נוספים.

איברי הסדרה יכולים להינתן באמצעים שונים. הדרך הישירה היא באמצעות נוסחה מפורשת, כגון: $x_j = 1$ לכל j, או $a_n = n^2$ לכל n, או $b_m = [\sqrt{m}]$ לכל m. דרך אחרת היא לתת כלל שלפיו הסדרה מוגדרת. למשל, a_n הינו הספרה ה־ n־ית אחרי הנקודה בפיתוח העשרוני של π. אפשרות אחרת היא להציג את הסדרה בעזרת "נוסחת נסיגה". למשל, "סדרת פיבונאצ'י" מוגדרת ע"י

$a_1 = a_2 = 1$ ו־ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ לכל $n \geq 3$.

לחישוב a_n עפ"י נוסחה זו, עלינו לחשב תחילה את האברים הקודמים לו, ורק אז ניתן לבצע את הצעד הנוסף.

תרגיל: הראו באינדוקציה שאברי הסדרה ניתנים גם ע"י הנוסחה המפורשת

$$a_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \Big/ \sqrt{5}.$$

2.1 גבולות

הגדרה. נאמר ש־ a הוא הגבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ או $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

אם לסדרה אין גבול נאמר שהיא מתבדרת.

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ נאמר גם שהסדרה שואפת, או מתכנסת, ל־ a. ולפעמים לא נציין בכתיבה כי $n \to \infty$ ונכתוב פשוט $\lim a_n = a$ או $a_n \to a$.

****
סוף שעה 6
****

הערות. (i) שימו לב כי שינוי של מספר <u>סופי</u> מאברי הסדרה לא משפיע על התכנסות הסדרה, או על ערך הגבול שלה. ובאופן מדוייק: אם $a_n \to a$ ואם הסדרה b_n מקיימת שיש M כך ש־ $b_n = a_n$ לכל $n > M$, אז גם $b_n \to a$.

(ii) הדרישה ש־ N טבעי אינה חיונית, ולפעמים לא נקפיד על כך. (אם למשל $|a_n - a| < \varepsilon$ לכל $n > 222.4$, אז זה בוודאי מתקיים גם לכל $n > 348$).

דוגמאות. (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. כדי להוכיח זאת נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. אי־השוויון הזה שקול לאי השוויון $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ולכן, אם נבחר $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (או כל N אחר המקיים ש־ $N > \frac{1}{\varepsilon}$), אז אי השוויון הדרוש מתקיים לכל $n > N$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. כי נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, ואז התנאי $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = 1/n < \varepsilon$ מתקיים אםם $n > \frac{1}{\varepsilon}$, ולכן שוב נבחר $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

(iii) אם $|q| < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. כי נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$. אם $\varepsilon \geq 1$ אז אי־שוויון זה נכון לכל n ולכן נוכל לבחור $N = 1$. נטפל אם כך במקרה $\varepsilon < 1$, ונתבונן ב"שרשרת השקילויות"

$$|q|^n < \varepsilon \iff \ln|q|^n < \ln\varepsilon \iff n\ln|q| < \ln\varepsilon \iff n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$$

(הכיוון של אי השוויון האחרון התחלף מכיון ש־ $|q| < 1$ ולכן $\ln|q| < 0$). ולכן אם נבחר $N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}] + 1$ (או כל N הגדול מהביטוי $\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$), אז לכל $n > N$ מתקיים אי־השוויון הרצוי.

(iv) $a_n = \frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-1} \to \frac{1}{2}$. ואמנם, נעריך

$$\begin{aligned} |a_n - \frac{1}{2}| &= \left|\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n^2-2n+2-2n^2-3n+1}{4n^2+6n-2}\right| \\ &= \frac{5n-3}{4n^2+6n-2} < \frac{5n}{4n^2} = \frac{5}{4n} \end{aligned}$$

ואם ניקח $N = \left[\frac{4}{5\varepsilon}\right] + 1$ אז $N > \frac{4}{5\varepsilon}$, ולכן לכל $n > N$ מתקיים ש־ $\frac{5}{4n} < \varepsilon$.

(v) לסדרה $a_n = (-1)^n$ אין גבול.

ננסח תחילה במדויק את הטענה שלסדרה (a_n) אין גבול, ונתחיל מהניסוח של "הסדרה a_n אינה מתכנסת למספר a". בלשון ε, N זה אומר שקיים איזשהו ε_0 כך שלכל N טבעי יש $n > N$ באופן ש־ $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$.

אם לסדרה a_n אין גבול, אז לכל מספר a הסדרה (a_n) אינה מתכנסת ל־ a, ולכן נוכל כעת לנסח במדויק: לסדרה a_n אין גבול אם לכל מספר a יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל N יש $n > N$ באופן ש־ $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$.

ניישם זאת כעת לדוגמא. נקבע a ונקח, למשל, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. (בדוגמא פשוטה זו ε_0 אינו תלוי כלל בערך של a, אך בדר"כ יש להתחשב בבחירת a). נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $a \leq 0$, ואז בהנתן איזשהו N נבחר $n > N$ <u>זוגי</u>, ואז $a_n = 1$ ובוודאי שיתקיים $\frac{1}{2} < 1 \geq 1 - a = |a_n - a|$.

<u>הגדרה.</u> יהי $\varepsilon > 0$. לקטע $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ נקרא סביבת ε של הנקודה a. סביבה של a היא סביבת ε שלה עבור איזשהו $\varepsilon > 0$, ובאופן כללי יותר, כל קטע פתוח המכיל את a.

בלשון סביבות ההגדרה של התכנסות היא:
$a_n \to a$ אם לכל $\varepsilon > 0$ כל איברי הסדרה, פרט אולי למספר סופי מהם, נמצאים בסביבת ε של a. או, באופן שקול, כל סביבה של a מכילה את כל אברי הסדרה פרט אולי למספר סופי מהם.

<u>משפט.</u> לסדרה מתכנסת יש גבול יחיד.

<u>הוכחה.</u> נניח כי $a_n \to A$ וגם $a_n \to B$, ונראה כי $A = B$. נקבע איזשהו $\varepsilon > 0$. עפ"י הגדרת הגבול יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - A| < \varepsilon$, ויש N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|a_n - B| < \varepsilon$. ולכן לכל $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ מתקיימים שני אי השוויונים

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad ; \quad B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon \ .$$

בפרט $A - \varepsilon < B + \varepsilon$ ו־ $B - \varepsilon < A + \varepsilon$, ולכן $-2\varepsilon < A - B < 2\varepsilon$, או $|A - B| < 2\varepsilon$. אך ε היה מספר חיובי כלשהו, לכן בהכרח $A = B$. (אם $A \neq B$, היינו יכולים לקחת, למשל, $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2}$ ולקבל סתירה).

ננסח את ההוכחה גם בלשון סביבות. נניח כי $a_n \to A$ ויהי $B \neq A$. תהיינה I, J סביבות זרות של A, B בהתאמה. היות ש־ $a_n \to A$ הרי שכל אברי הסדרה, פרט אולי למספר סופי מהם, נמצאים ב־ I. היות ש־ J זר ל־ I יכולים להיות בה לכל היותר מספר סופי של אברי הסדרה. לכן $a_n \not\to B$.

****
סוף שעה 8
****

<u>הגדרה.</u> נאמר שהסדרה a_n חסומה מלעיל אם יש M כך ש־ $a_n \leq M$ לכל n. באופן דומה מגדירים סדרה חסומה מלרע. סדרה היא חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע או, באופן שקול, אם יש M כך ש־ $|a_n| \leq M$ לכל n.

<u>משפט.</u> כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

<u>הוכחה.</u> נניח כי $a_n \to A$, ואז עפ"י הגדרת הגבול יש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $A - 1 < a_n < A + 1$. ולכן לכל n מתקיים

$$\min\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_N\} \leq a_n \leq \max\{A+1, a_1, a_2, \ldots, a_N\} \ .$$

איך מחשבים גבול של סדרה? אין, כמובן, "שיטה כללית", אך לפעמים זה אפשרי. המקרה הפשוט ביותר הוא כאשר הסדרה מתקבלת מסדרות אחרות, שגבולותיהן ידועים, ע"י פעולות אריתמטיות. במקרה כזה מחשבים את הגבול ע"י ביצוע אותן פעולות אריתמטיות על הגבולות:

משפט. [אריתמטיקה של גבולות] אם $\{a_n\}$ ו־ $\{b_n\}$ שתי סדרות המקיימות $\lim a_n = a$ ו־ $\lim b_n = b$. אז הגבולות הבאים קיימים וניתנים ע"י הנוסחאות המתאימות:

(i) $\lim \alpha a_n = \alpha a$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

(iii) $\lim a_n b_n = ab$.

(iv) אם $b \neq 0$ אז $b_n \neq 0$ פרט למספר סופי של n־ים, ו־ $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

דוגמא.

$$\frac{n^2+3n-4}{5n^2+2n+7} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{5+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}} \to \frac{1}{5} \ .$$

הוכחה. נפנה להוכחת המשפט.

(i) יהי $\varepsilon > 0$, וצריך למצוא N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|\alpha a_n - \alpha a| < \varepsilon$.

אם $\alpha = 0$ אז $\alpha a_n = \alpha a = 0$.

אם $\alpha \neq 0$ נשתמש בכך ש־ $a_n \to a$, ונמצא N כך ש־ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ לכל $n > N$. ולכל n כזה יתקיים

$$|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha|\,|a_n - a| < |\alpha|\,\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon \ .$$

(ii) יהי $\varepsilon > 0$, ונמצא N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon$.

$a_n \to a$ ולכן יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon/2$.

$b_n \to b$ ולכן יש N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|b_n - b| < \varepsilon/2$.

נגדיר כעת $N = \max(N_1, N_2)$, ואז לכל $n > N$ יתקיימו <u>שני</u> אי השיוויונות בבת אחת, ולכן

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

(iii) נקבע $\varepsilon > 0$ והפעם נכתוב את ההוכחה כפי שבאמת חושבים כשניגשים לבעיה כזו.

נקבע $\eta > 0$ (שייבחר מאוחר יותר), ואז

$a_n \to a$ ולכן יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - a| < \eta$.

$b_n \to b$ ולכן יש N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|b_n - b| < \eta$.

וכעת נציג

$$a_nb_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a$$

ונשים לשב שנוכל "לשלוט" בגודל של $|a_n - a|$ ושל $|b_n - b|$, כי שניהם שואפים לאפס, ובגודל של b_n, כי ע"ס משפט 2.1 הסדרה b_n חסומה, כלומר יש M כך ש־ $|b_n| < M$ לכל n.

ובאופן פורמלי, אם ניקח כעת $n > N = \max(N_1, N_2)$ נוכל להשתמש בכל אי השוויונות ונקבל

$$|a_nb_n - ab| \leq |a_n - a|\,|b_n| + |b_n - b|\,|a| \leq \eta M + \eta|a| = \eta(M + |a|) \quad .$$

וזה הזמן לקשר את ההערכה שקבלנו עם ה־ ε הנתון: את η נבחר כך ש־ $\eta < \frac{\varepsilon}{M+|a|}$, ואז לכל $n > N$ יתקיים $|a_nb_n - ab| \leq \eta(M + |a|) < \varepsilon$ כמבוקש.

(iv) המספר $\frac{a_n}{b_n}$ מוגדר רק כאשר $b_n \neq 0$, וההנחות של המשפט אינן מבטיחות שזה אכן קורה <u>לכל</u> n. אך כשמדברים על גבול מספר סופי של אברי הסדרה איננו משנה, ולכן כשלב ראשון נראה כי $b_n \neq 0$ פרט אולי למספר סופי של n־ים.

ואמנם $b_n \to b$, ולכן יש N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$, כלומר, $0 < \frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3|b|}{2}$, ובפרט $b_n \neq 0$.

נעבור כעת להוכחה ש־ $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

נקבע $\varepsilon > 0$ ונראה שיש N כך שאם $n > N$ אז

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon(|b| + |a|) \cdot 2}{|b|^2} \quad .$$

היות ו־ ε הוא מספר חיובי שרירותי, אז גם $\frac{\varepsilon(|b|+|a|)\cdot 2}{|b|^2}$ הוא מספר חיובי שרירותי, ולכן זה יוכיח את הדרוש. (באופן פורמלי, אפשר בהוכחה הבאה להחליף בכל מקום את ε ב־ $\frac{|b|^2\varepsilon}{(|b|+|a|)\cdot 2}$, ואז היינו מסיימים עם ε כפי שאנחנו רגילים).

ובאמת, נבחר N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|a_n - a| < \varepsilon$, ונבחר N_3 כך שלכל $n > N_3$ מתקיים $|b_n - b| < \varepsilon$, ונציג

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_nb - ab_n}{b_nb} = \frac{(a_n - a)b + a(b - b_n)}{b_nb} \quad .$$

נגדיר $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, ואז אם $n > N$ אז יתקיימו כל אי השיוויונים, ולכן

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{|a_n - a|\,|b| + |a|\,|b - b_n|}{|b_n|\,|b|} < \frac{\varepsilon|b| + |a|\varepsilon}{\frac{|b|}{2}|b|} = \frac{\varepsilon(|b| + |a|) \cdot 2}{|b|^2} \quad .$$

<u>**הערה.**</u> נשים לב שהמשפטים ההפוכים אינם נכונים. למשל, אם $a_n + b_n \to L$, אין זה אומר ש־ $a_n \to a$ ו־ $b_n \to b$ כאשר $a + b = L$.

כדוגמא נגדית אפשר לקחת איזשהי סדרה a_n שאינה מתכנסת ו־ $b_n = -a_n$, ואז $a_n + b_n = 0$ לכל n בלי שהסדרות a_n ו־ b_n מתכנסות בכלל.

משפט. אם a_n סדרה חסומה ו־ $b_n \to 0$ אז $a_n b_n \to 0$.

הוכחה. נניח ש־ $|a_n| \leq M$ לכל n, ויהי נתון $\varepsilon > 0$. נבחר N כך ש־ $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ לכל $n > N$, ולכל n כזה יתקיים $|a_n b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

לדוגמא, $\frac{\sin n}{n} \to 0$ כי $|\sin x| \leq 1$ לכל x.

הגדרה. נאמר שהסדרה a_n שואפת לאינסוף (ונסמן $a_n \to \infty$ או $\lim_{n\to\infty} a_n = a$) אם לכל מספר M יש N כך שאם $n > N$ אז $a_n > M$. באופן דומה נגדיר $a_n \to -\infty$.

אם $a_n \to \infty$ או $a_n \to -\infty$ נאמר לפעמים שהסדרה מתכנסת במובן הרחב.

לדוגמא, $a_n = n \to \infty$, או $a_n = \frac{1-n^2}{n+1} \to -\infty$. אך $(-1)^n n$ אינה מתכנסת אפילו במובן הרחב.

משפט. (i) אם $|a_n| \to \infty$ אז $\frac{1}{a_n} \to 0$.

(ii) אם $a_n \to 0$ וכן $a_n > 0$ לכל n (פרט אולי למספר סופי של n־ים) אז $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

אם $a_n < 0$ לכל n אז $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

הוכחה. (i) יהי $\varepsilon > 0$. על סמך הנתון, יש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, ולכל n כזה $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$.

את הוכחת (ii) נשאיר כתרגיל. נשים רק לב שחשוב שהחל ממקום מסוים יש ל־ a_n־ים סימן קבוע. אם ניקח למשל $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ אז $a_n \to 0$, אך $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ איננה סדרה מתכנסת אפילו במובן הרחב.

חוקי הארימטיקה בדר"כ אינם תקפים כשהגבולות אינסופיים, ויש לחשב את הגבול בצורה אחרת **דוגמא.**

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \to 0$$

כי המכנה שואף לאינסוף.

****

סוף שעה 10

****

2.2 תכונות סדר של גבולות

משפט. תהיינה a_n ו־ b_n שתי סדרות המקיימות $a_n \to a$, $b_n \to b$. אם $a < b$ (אי שוויון חריף) אז קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n < b_n$.

באופן שקול, אם $a_n \to a$, $b_n \to b$ ואם קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $b_n \leq a_n$, אז $b \leq a$.

הוכחה.

הערות. (i) שימו לב כי אם יש רק אי שוויון חלש $a \leq b$ הטענה אינה נכונה. כי אם $a = b$ אז אין שום מגבלה על היחסים בין a_n ל־ b_n. ניקח למשל $a_n = 0$ לכל n ו־ $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(ii) מהמשפט נובע שהגבול של סדרה נקבע באופן יחיד, כי אם $a_n \to a$ וגם $a_n \to b$ אז ניקח $b_n = a_n$ ונקבל כי $a \leq b$ וגם $b \leq a$, ולכן $a = b$.

משפט. [משפט הסנדוויץ'] תהיינה a_n, b_n ו־ c_n סדרות המקיימות $a_n \leq b_n \leq c_n$ החל ממקום מסויים, כך ש־ $\lim a_n = \lim c_n = L$. אז גם הגבול $\lim b_n$ קיים וערכו L. אם $a_n \leq b_n$ ו־ $\lim a_n = \infty$ אז גם $\lim b_n = \infty$.

הוכחה. נוכל להניח כי אי השוויונים מתקיימים לכל n, ונקבע $\varepsilon > 0$. היות ש־ $a_n, c_n \to L$ נמצא N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$ ונמצא N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $|c_n - L| < \varepsilon$. אם $n > N = \max(N_1, N_2)$ נקבל כי b_n מקיים

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

כמבוקש.

דוגמאות. (i) $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$ כי

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n} \to 1\ .$$

(ii) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1$ כי

$$1 \leftarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$$

(iii) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. **כי** $\sqrt[n]{n} > 1$ **לכל** n, **ואם נציג** $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ **כאשר** $h_n > 0$, **עלינו להוכיח כי** $h_n \to 0$. **ובאמת, נעלה את שני האגפים של השוויון שרשמנו בחזקת** n **ונקבל (עפ"י נוסחת הבינום) כי**

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \ldots + h_n^n > \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)h_n^2}{2}.$$

ולכן $h_n^2 < \frac{2}{n-1}$, **או** $0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. **אך אגף ימין שואף ל־ 0 ולכן עפ"י משפט הסנדוויץ' גם** $h_n \to 0$.

(iv) $\sqrt[n]{a} \to 1$ **לכל** $a > 0$. **כי אם** $a \geq 1$ **אז** $1 \leq \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ **לכל** $n > a$ **ומשתמשים ב־** (iii) **ובמשפט הסנדוויץ'.**

אם $0 < a < 1$, **נרשום** $b = \frac{1}{a}$, **ואז** $b > 1$. **עפ"י מה שכבר הוכחנו** $\sqrt[n]{b} \to 1$, **ולכן גם** $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to 1$.

2.3 סדרות מונוטוניות

הגדרה. נאמר שהסדרה a_n מונוטונית לא יורדת (או מונוטונית עולה) אם $a_n \leq a_{n+1}$ לכל n, ושהיא מונוטונית עולה ממש אם $a_n < a_{n+1}$ לכל n.

באופן דומה מגדירים סדרה לא עולה וסדרה יורדת. נקרא לסדרה מונוטונית אם היא מקיימת אחד מכל התנאים האלה.

סדרה מונוטונית לא יורדת היא בוודאי חסומה מלרע כי $a_1 \leq a_n$ לכל n. באופן דומה סדרה לא עולה היא חסומה מלעיל. סדרה מונוטונית אינה בהכרח חסומה מהכיוון השני, למשל, $a_n = n$ עולה ואינה חסומה מלעיל.

המשפט החשוב הבא שונה באופן מהותי ממשפטים על גבולות שראינו עד עתה. במשפטים קודמים כל טענה על קיום גבול היתה מלווה בנוסחה לחישובו. למשל, אחד מחוקי האריתמטיקה של גבולות אמר שאם $a_n \to a$ ו־ $b_n \to b$ אז $\lim(a_n + b_n)$ קיים וערכו הוא $a + b$. המשפט הבא הוא הראשון המבטיח שגבול מסויים קיים (בתנאים מתאימים) בלי לתת נוסחה, או דרך מעשית כלשהי, לחישובו.

משפט. סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת (וסדרה מונוטונית שאינה חסומה מתכנסת במובן הרחב: ל־ $+\infty$ אם היא עולה, ול־ $-\infty$ אם היא יורדת).

הוכחה. **נניח, בה"כ, כי הסדרה** a_n **לא יורדת, נסמן ב־** M **את החסם העליון שלה, ונראה כי** $a_n \to M$.

יהי $\varepsilon > 0$. **על פי הגדרת החסם העליון המספר** $M - \varepsilon$, **שהוא קטן מ־** M, **איננו חסם מלעיל של הסדרה. לכן יש** N **כך ש־** $a_N > M - \varepsilon$, **ובגלל המונוטוניות נקבל לכן כי לכל** $n > N$ **יתקיים** $a_n \geq a_N > M - \varepsilon$.

מצד שני, בוודאי ש־ $a_n \leq M \leq M + \varepsilon$ **לכל** n, **ולכן קבלנו כי** $|a_n - M| < \varepsilon$ **לכל** $n > N$.

דוגמאות. (i) נקבע $c>0$ ונגדיר $a_1=1$ ובאופן רקורסיבי $a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$. נראה שהסדרה מונוטונית וחסומה, ולכן מתכנסת. לאחר מכן, נחשב את הגבול עפ"י חוקי האריתמטיקה.

<u>חסימות</u>: הסדרה חסומה מלרע, שכן $a_n\geq 0$ לכל n (זכרו שלוקחים תמיד שורש אי־שלילי). נראה באינדוקציה ש־ $a_n\leq 1+c$ ועל כן היא גם חסומה מלעיל. זה ודאי נכון עבור $n=1$. נניח נכונות הטענה עבור n ואז גם

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}\leq\sqrt{1+c+c}=\sqrt{1+2c}<1+c$$

כי אי־השוויון הראשון נובע מהנחת האינדוקציה ואי־השוויון האחרון מהוצאת שורש באי־השוויון $1+2c<1+2c+c^2=(1+c)^2$.

<u>מונוטוניות</u>: נראה באינדוקציה כי $a_n\leq a_{n+1}$ לכל n. זה נכון עבור $n=1$, ואם נניח $a_n\leq a_{n+1}$ נקבל כי:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}\leq\sqrt{a_{n+1}+c}=a_{n+2}\ .$$

.

עפ"י המשפט נקבל כי הסדרה מתכנסת לגבול, שנסמנו A, ומכיוון ש־ $a_n\geq 0$ לכל n נובע שגם $A\geq 0$. לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל ש־ $A^2=A+c$, והשורש <u>החיובי</u> של המשוואה הריבועית הזו הוא $A=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(ii) אין להשתמש באריתמטיקה של גבולות על מנת לחשב את הגבול מבלי לוודא תחילה באופן אחר כי הסדרה אכן מתכנסת. לדוגמא, אם $a_1=1$ ו־ $a_n=1-a_{n-1}$, אז $a_n=1$ ל־ n איזוגי ו־ $a_n=0$ ל־ n זוגי, ולכן הסדרה אינה מתכנסת. אולם אם נניח קיום הגבול ונבצע חישובים אריתמטיים כדי לחשב אותו נקבל כי $A=1-A$, כלומר, $A=\frac{1}{2}$, שזו כמובן שטות.

****
סוף שעה 12
****

(iii) נראה שהסדרה $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ מתכנסת ע"י כך שנראה שהיא עולה וחסומה. נסמן את הגבול ב־ e, ונשים לב שזו <u>ההגדרה</u> של e. אין לנו דרך להגדירו באופן מפורש ע"י גדלים אחרים שאנו מכירים, הוא אינו רציונלי ואפילו איננו מספר אלגברי, כלומר, הוא איננו שורש של פולינום עם מקדמים שלמים.

<u>חסימות</u>:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-j+1}{n}\\ &\leq \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\\ &\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}<3\end{aligned}$$

(באי השוויון הראשון השתמשנו בכך ש־ $\frac{n-k}{n}\leq 1$ לכל $0\leq k\leq n$, ובשני השתמשנו בהערכה $j!\geq 2^{j-1}$ (הוכיחו אותה!). השוויון האחרון הוא הנוסחה לסכום סדרה גיאומטרית עם $q=\frac{1}{2}$).

מונוטוניות:
כדי להראות שהסדרה מונוטונית עולה נשתמש ב"אי־שוויון הממוצעים" האומר שאם $b_j \geq 0$ אז

$$\left(\prod_{j=1}^m b_j\right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m b_j.$$

נציב באי־השוויון $m = n+1$ ואת הערכים $b_j = 1 + \frac{1}{n}$ עבור $2 \leq j \leq n+1$ ו־ $b_1 = 1$, ונקבל

$$\left(1 \cdot (1+\tfrac{1}{n})^n\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1 + n(1+\frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

וכשנעלה את שני האגפים בחזקת $n+1$ נקבל

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

(iv) $a_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$. זו בוודאי סדרה מונוטונית עולה כי במעבר מ־ a_n ל־ a_{n+1} מוסיפים מחובר חיובי. היא גם חסומה, שכן

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} = 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j^2} \leq 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j(j-1)} = 1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right)$$

שהוא "סכום טלסקופי" שערכו $1 + (1 - \frac{1}{n}) < 2$, ועפ"י המשפט הסדרה מתכנסת. למעשה, הגבול הינו $\frac{\pi^2}{6}$, אך ההוכחה דורשת ידע מעבר לחומר של הקורס הזה.

חזקות ממשיות. כעת נוכל להסביר כיצד אנו מגדירים a^x עבור חזקה ממשית x כלשהי (וכאשר $1 \neq a > 0$). בדיון נניח כי $a > 1$ וכי $x > 0$. (ואז, אם $a < 1$ מגדירים $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$, ואם $x < 0$ מגדירים $a^x = \frac{1}{a^x}$). אם $x = \frac{p}{q}$ רציונלי הגדרנו כבר $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, ונראה איך לעבור לחזקות ממשיות כלליות.
בהמשך נשתמש באופן חופשי בכך שהיות ו־ $a > 1$ אז לכל $r < s$ רציונלים מתקיים $a^r < a^s$.
תהי r_n סדרה לא יורדת של מספרים רציונליים כך ש־ $r_n \to x$. למשל, אם $x = m.a_1a_2a_3\ldots$ הוא הפיתוח העשרוני של x, כאשר מספר m שלם ו־ $0 \leq a_i \leq 9$, נוכל לקחת $r_n = m.a_1a_2\ldots a_n$.
נשים לב שגם הסדרה a^{r_n} מונוטונית לא יורדת, והיא גם חסומה: כחסם מלעיל נוכל לקחת כל מספר מהצורה a^r כאשר $r > x$ רציונלי. ע"פי משפט 2.3 יש לסדרה a^{r_n} גבול, ונגדיר

$$a^x = \lim a^{r_n}.$$

כדי שההגדרה הזו תהיה טובה יש להראות שהיא אכן תלויה רק ב־ a וב־ x ולא בבחירה (השרירותית) של הסדרה r_n. כלומר, צריך להראות שאם $s_n \uparrow x$ סדרת רציונליים אחרת אז מתקיים $\lim a^{r_n} = \lim a^{s_n}$ או, במלים אחרות, כי $\lim \frac{a^{r_n}}{a^{s_n}} = \lim a^{r_n - s_n} = 1$.

לשם כך נציג $t_n = r_n - s_n \to 0$ ונשתמש בלמה הבאה:

למה. אם t_n סדרת מספרים רציונליים המקיימת $t_n \to 0$ אז $a^{t_n} \to 1$.

הוכחה. נקבע $\varepsilon > 0$. ראינו ש־ $\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim a^{-\frac{1}{n}} = 1$ ולכן קיים k כך ש־ $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$. כעת נבחר N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|t_n| < \frac{1}{k}$, ואז נקבל כי

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{k}} < a^{t_n} < a^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$$

כמבוקש.

מסקנה חשובה מהדרך שבה הגדרנו את החזקה היא שאם $a > 1$ ואם $x < y$ מספרים ממשיים כלשהם אז $a^x < a^y$. ואמנם, נבחר $r_n \uparrow y$ כך ש־ $r_1 > x$ ואז יתקיים כי $a^y = \lim a^{r_n} > a^{r_1} > a^x$.

המונוטוניות הזו מבטיחה שהלמה נשארת נכונה גם אם t_n אינם רציונליים, ולכן נקבל שלכל סדרת ממשיים x_n המקיימת $x_n \to x$ מתקיים

$$a^{x_n} = a^x a^{x_n - x} \to a^x \ .$$

כמו כן מתקיימים חוקי החזקה הרגילים: $a^x b^x = (ab)^x$; $a^x a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$, וגם תכונות הסדר: אם $a > b > 0$ ו־ $x > 0$ אז $a^x > b^x$, ואם $a > 1$ ו־ $x > y$ אז $a^x > a^y$.

נוכיח לדוגמא ש־ $a^x a^y = a^{x+y}$. נבחר $r_n \uparrow x$ ו־ $s_n \uparrow y$, ואז $r_n + s_n \uparrow x + y$ ולכן

$$a^x a^y = \lim a^{r_n} \lim a^{s_n} = \lim a^{r_n} a^{s_n} = \lim a^{r_n + s_n} = a^{x+y} \ .$$

משפט. [הלמה של קנטור] יהיו $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$ קטעים סגורים כך ש־ $I_{j+1} \subset I_j$ לכל j, אז $\cap_{j=1}^{\infty} I_j \neq \emptyset$. אם גם ארכי הקטעים שואפים לאפס, אז החיתוך מכיל נקודה יחידה.

הוכחה. תנאי ההכלה אומר כי לכל $j < k$ מתקיים $\alpha_j \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_j$ ולכן הסדרה $\{\alpha_j\}$ מונוטונית עולה ו־ $\{\beta_j\}$ יורדת. הסדרות גם חסומות, כי הן מוכלות בקטע I_1, ולכן הן מתכנסות, ונסמן $\alpha = \lim \alpha_j$ ו־ $\beta = \lim \beta_j$.

נקבע j, ואז לכל $k > j$ מתקיים ש־ $\alpha_k \in I_j$. אבל הקטע I_j סגור, ולכן גם גבול הסדרה, $\alpha = \lim \alpha_j$, נמצא בקטע. (אילו הקטע לא היה סגור, הגבול יכול היה להיות אחד הקצוות שאולי אינו שייך לקטע!). היות וזה נכון לכל j, קבלנו כי $\alpha \in I_j$ לכל j, כלומר $\alpha \in \cap_{j=1}^{\infty} I_j$ והחיתוך לא ריק. (הוכחה דומה מראה כי גם $\beta \in \cap_{j=1}^{\infty} I_j$ ולכן כל הקטע $[\alpha, \beta]$ מוכל בחיתוך. הראו כתרגיל כי למעשה החיתוך הוא בדיוק הקטע הזה).

אם אורכי הקטעים שואפים לאפס, כלומר, אם $\beta_j - \alpha_j \to 0$, אז $\alpha = \beta$ וזוהי הנקודה היחידה בחיתוך. (באופן גיאומטרי לא ייתכן שיש שתי נקודות שונות $a < b$ בחיתוך, כי אז האורך של I_j היה לפחות $b - a > 0$ לכל j, בניגוד להנחה שהאורכים שואפים לאפס).

****
סוף שעה 14
****

2.4 תת־סדרות

<u>הגדרה.</u> תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. תת־סדרה של $\{a_n\}$ היא סדרה שאיבריה הם חלק מאיברי $\{a_n\}$ כשהם מופיעים <u>באותו הסדר</u> כמו בסדרה המקורית. נסמן זאת ע"י $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, כאשר $n_1 < n_2 < \ldots$ מייצגים את המיקומים בסדרה המקורית של האיבר הראשון, השני, וכו' בתת הסדרה.

שימו לב שלכל j מתקיים ש־ $n_j \geq j$.

<u>דוגמאות.</u> (i) $n_j = 2j$. **כאן ניקח את האיברים המופיעים במקומות הזוגיים בסדרה $\{a_n\}$, כלומר, $a_2, a_4, a_6, \ldots$.**

(ii) $n_j = j^2$. **כאן ניקח את האיברים שמופיעים במקומות שהם "ריבועים", כלומר, $a_1, a_4, a_9, \ldots$.**

<u>הגדרה.</u> גבול חלקי של הסדרה (a_n) הוא גבול של איזשהי תת־סדרה שלה.

<u>דוגמא.</u> **הסדרה $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ אינה מתכנסת, אך יש לה תת סדרות מתכנסות ושני גבולות חלקיים שונים $\lim_{j\to\infty} a_{2j} = 1$ ו־ $\lim_{j\to\infty} a_{2j+1} = -1$.**

<u>טענה.</u> אם הסדרה (a_n) מתכנסת לגבול L (סופי או אינסופי), אז גם כל תת־סדרה שלה מתכנסת ל־ L. בפרט, אם יש לסדרה שתי תת־סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז היא איננה מתכנסת.

<u>הוכחה.</u> **נסמן את תת הסדרה ב־ (a_{n_j}), וצריך להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ יש J כך שלכל $j > J$ מתקיים $|a_{n_j} - L| < \varepsilon$.**

עפ"י ההנחה יש N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. נבחר $J = N$, ואז אם $j > J$ אז גם $n_j \geq j > J = N$, ולכן בוודאי ש־ $|a_{n_j} - L| < \varepsilon$ כמבוקש.

השלימו כתרגיל את ההוכחה למקרה $L = \infty$.

<u>הערה.</u> **אפשר לנסח את ההוכחה בעזרת סביבות: הגבול הוא L אםם לכל סביבה של L יש רק מספר סופי של אברי הסביבה הנמצאים מחוץ לסביבה. אך אברי תת הסדרה הם רק חלק מאברי הסדרה המקורית, ולכן בוודאי שיש רק מספר סופי מהם מחוץ לסביבה.**

הסדרה a_n מתכנסת ל־ L אםם לכל $\varepsilon > 0$, הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ מכיל את כל אברי הסדרה פרט אולי למספר סופי מהם. המשפט הבא נותן איפיון דומה ושימושי לגבולות חלקיים.

<u>משפט.</u> L הינו גבול חלקי של הסדרה (a_n) אםם לכל $\varepsilon > 0$, הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ מכיל אינסוף מאיברי (a_n).

הוכחה. כיוון אחד ברור: אם $a_{n_j} \to L$ אז כל אברי התת סדרה, פרט אולי למספר סופי מהם נמצאים בקטע, ובפרט יש בו אינסוף a_n־ים.

נניח כעת שהתנאי מתקיים, ונבנה תת סדרה המתכנסת ל־ L. נבחר n_1 כך ש־ $a_{n_1} \in (L-1, L+1)$ ונמשיך באינדוקציה: אם בחרנו כבר $n_1 < \ldots < n_{j-1}$, נמצא $n_j > n_{j-1}$ כך ש־ $a_{n_j} \in (L-\frac{1}{j}, L+\frac{1}{j})$, וזה אכן אפשרי כי יש אינסוף מאברי הסדרה בקטע $(L-\frac{1}{j}, L+\frac{1}{j})$.

קבלנו כי $L-\frac{1}{j} < a_{n_j} < L+\frac{1}{j}$ לכל j, אך שני הביטויים הקיצוניים שואפים ל־ L, ולכן גם $a_{n_j} \to L$.

דוגמא. תתי סדרות וגבולותיהם יכולים להיות בעלי מבנה מורכב מאוד. נראה, למשל, שיש סדרה a_n כך שכל מספר ממשי הוא גבול חלקי שלה. לשם כך נסדר את כל המספרים הרציונליים כסדרה שתסומן ב־ r_j (ראו בהמשך איך), ונבדוק שכל מספר ממשי L הוא גבול חלקי של סדרה זו: לכל $\varepsilon > 0$ הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ מכיל אינסוף מספרים רציונליים, כלומר אינסוף מאיברי הסדרה, ולכן ע"ס משפט 2.4 L הוא אכן גבול חלקי של הסדרה.

סידור הרציונליים כסדרה: לכל מספר רציונלי שונה מאפס יש הצגה כשבר, $\frac{m}{n}$, (לאו דוקא מצומצם), ונזהה את השבר הזה עם הנקודה (m,n) במישור. את נקודות המישור נסדר עפ"י סדר כלשהו (למשל, $(0,0)$, אח"כ הנקודות השלמות על שפת הריבוע שמרכזו בראשית וצלעו באורך 2. אח"כ הנקודות בריבוע עם צלע באורך 4, וכו'). באופן כזה קבלנו, למעשה, סידור של כל במספרים הרציונליים, כאשר כל אחד חוזר אינסוף פעמים (וכאשר יש גם נקודות שלמות במישור שאינן מתאימות למספרים, אלה הנקודות שעבורן $m=0$, שאליהן אפשר להתאים, למשל, את המספר הרציונלי 1). נסמן סדרה זו ב־ a_n.

הסדרה r_j תהיה תת הסדרה $r_j = a_{n_j}$ של a_n המתקבלת כאשר מוחקים את המספרים הרציונליים בכל המקומות פרט למופע הראשון שלהם בסדרה.

סדרה חסומה אינה חייבת, כמובן, להתכנס, אך תמיד יש לה תת סדרה מתכנסת:

משפט. [בולצאנו־ויירשטראס] לכל סדרה חסומה (a_n) יש תת־סדרה מתכנסת. אם הסדרה איננה חסומה יש לה תת־סדרה המתכנסת במובן הרחב: ל־ $+\infty$ אם אינה חסומה מלמעלה, ול־ $-\infty$ אם אינה חסומה מלמטה.

הוכחה. ניתן שתי הוכחות.

הוכחה ראשונה: נניח תחילה שהסדרה (a_n) חסומה, ולכן יש קטע $I = [\alpha_0, \beta_0]$ כך ש־ $a_n \in I_0$ לכל n.

נחלק את הקטע I_0 לשני חלקים שווים, $[\alpha_0, \frac{\alpha_0+\beta_0}{2}]$ ו־ $[\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}, \beta_0]$. מכיוון שכל איברי הסדרה נמצאים ב־ I_0, הרי שלפחות באחד משני החצאים של הקטע חייבים להימצא אינסוף מהם. נסמן קטע כזה ב־ $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$.

כעת נחצה את I_1 לשני חלקים שווים. לפחות אחד מהם יכיל שוב אינסוף מאיברי הסדרה, ונסמן קטע זה ב־ $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$.

נמשיך באותו האופן ונקבל סדרת קטעים $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$ שכל אחד מהם מכיל אינסוף מאברי הסדרה, וכך ש־ $I_j \subset I_{j-1}$ לכל j. עפ"י הלמה של קנטור $\cap_{j=1}^{\infty} I_j$ אינו ריק, והיות ש־ $\beta_j - \alpha_j = \frac{\beta_0-\alpha_0}{2^j} \to 0$, הרי שהחיתוך מכיל נקודה יחידה L.

L הוא גבול חלקי של הסדרה עפ"י המשפט הקודם: לכל $\varepsilon > 0$, אם j מספיק גדול כך ש־ $\beta_j - \alpha_j < \varepsilon$ אז $I_j = [\alpha_j, \beta_j] \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, ועפ"י הבחירה הוא מכיל אינסוף מאברי הסדרה!

נניח כעת ש־ (a_n) אינה חסומה מלמעלה. היות שיש אינסוף מאיברי מהסדרה הגדולים מ־ 1 נוכל לבחור אחד מהם. אם האינדכס שלו הוא n_1 אז קבלנו ש־ $a_{n_1} > 1$. באותו אופן, יש אינסוף מאיברי הסדרה הגדולים מ־ 2, ונבחר אחד מהם (עם אינדכס $n_2 > n_1$) להיות האיבר השני, ואז $a_{n_2} > 2$. כך נמשיך ונקבל תת־הסדרה המקיימת $a_{n_j} > j$ לכל j, ולכן $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \infty$.

<u>הוכחה שניה:</u> ההוכחה תנבע מטענה מעניינת בפני עצמה:

לכל סדרה אינסופית $\{a_n\}$ יש תת סדרה מונוטונית.

משפט בולצאנו־ויירשטראס נובע, כמובן, מטענה זו וממשפט 2.3.

<u>הוכחה הטענה:</u> נסמן

$$S = \{n : \quad a_m \ge a_n \text{ לכל } m > n\}$$

ונבחין בשתי אפשרויות.

אם S <u>אינסופית</u>, נסמן את אבריה ב־ a_{n_j} ואז עפ"י הגדרת S תת הסדרה (a_{n_j}) מונוטונית עולה.

אם S <u>סופית</u>, נגדיר באינדוקציה תת סדרה (a_{n_j}) שהיא מונוטונית יורדת ממש. את n_1 נבחר כך ש־ $n_1 > n$ לכל $n \in S$ (יש כזה כי S סופית). נניח שבחרנו כבר את $n_1 < \ldots < n_k$ כך ש־ $a_{n_j} < a_{n_{j-1}}$ לכל $j \le k$, ונבחר כעת את n_{k+1}: היות ש $n_k > n_1$ הרי שבוודאי $n_k \notin S$, ולכן יש $m > n_k$ כך ש־ $a_m < a_{n_k}$. נבחר את n_{k+1} כאחד מה־ m־ים האלה.

<u>משפט.</u> תהי (a_n) סדרה חסומה שיש לה גבול חלקי יחיד. אז הסדרה כולה מתכנסת.

<u>הוכחה.</u> נסמן את הגבול החלקי היחיד של הסדרה ב־ a, וצריך להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ יש רק מספר סופי מאיברי הסדרה מחוץ לקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

ואכן, אילו היו אינסוף אברים כאלה, אז לתת הסדרה החסומה (a_{n_j}) של כל ה־ a_n־ים האלה היתה, ע"ס משפט בולצאנו־וירשטראס תת סדרה מתכנסת, $a_{n_{j_k}} \to b$. אבל $\left|a_{n_{j_k}} - a\right| \ge \varepsilon$ לכל k, ולכן גם בגבול $|b-a| \ge \varepsilon$, בניגוד להנחת המשפט ש־ a הגבול החלקי היחיד.

****
סוף שעה 16
****

<u>הגדרה.</u> תהי a_n סדרה חסומה ונסמן

$$\mathcal{L} = \Big\{ l : \text{הוא גבול חלקי של הסדרה } l \Big\} \ .$$

הקבוצה $\mathcal{L}$ חסומה וע"ס משפט בולצאנו־ויירשטראס היא אינה ריקה, לכן יש לה חסם עליון. לחסם העליון הזה נקרא הגבול העליון של הסדרה a_n, ונסמנו ב־ $\limsup a_n$ או $\overline{\lim}\, a_n$. הגבול התחתון מוגדר באופן דומה ויסומן ב־ $\liminf a_n$ או $\underline{\lim}\, a_n$.

דוגמאות. (i) ראינו שלסדרה $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ יש שני גבולות חלקיים. הגבול העליון שלה הוא 1 והתחתון -1.

(ii) נסמן ב־ s_n את סדרת המספרים הרציונלים ב־ $(0,1)$. (זוהי תת הסדרה של הסדרה r_j של כל המספרים הרציונלים). אז כל מספר $0 \leq L \leq 1$ הוא גבול חלקי של הסדרה s_n, והגבול העליון שלה הוא 1.

משפט. גם הגבול העליון של סדרה a_n הוא בעצמו גבול חלקי שלה. כלומר

$$\limsup a_n = \max \left\{ l : \text{הוא גבול חלקי של הסדרה } l \right\} .$$

הוכחה. נסמן את הגבול העליון ב־ L ונראה שלכל $\varepsilon > 0$ יש אינסוף מאברי הסדרה בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. ואמנם, נשתמש בהגדרת הסופרמום ונמצא גבול חלקי l כך ש־ $L - \frac{\varepsilon}{2} \leq l \leq L$, ואז יש איסוף מאברי הסדרה בקטע $(l - \frac{\varepsilon}{2}, l + \frac{\varepsilon}{2})$ המוכל בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

הערות. (i) יש להיזהר: הגבול העליון והגבול התחתון אינם מקיימים את חוקי האריתמטיקה של גבולות. למשל, $\limsup{(-1)^n} = \limsup{(-1)^{n+1}} = 1$ אבל $\limsup[(-1)^n + (-1)^{n+1}] = 0 \neq 2$.

כללי הסדר כן נשמרים. הוכיחו כתרגיל שאם $a_n \leq b_n$ לכל n פרט אולי למספר סופי מהם, אז $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ וגם $\liminf a_n \leq \liminf b_n$.

(ii) סדרה החסומה (a_n) מתכנסת אםם $\liminf a_n = \limsup a_n$. ואמנם, התנאי מתקיים אםם יש לסדרה גבול חלקי יחיד, וזה גם התנאי להתכנסות.

ניתן כעת "נוסחה מפורשת" לגבול העליון של הסדרה a_n.

משפט. בהנתן m נסמן $b_m = \sup\{a_n : n > m\}$. אז הגבול העליון של הסדרה ניתן ע"י

$$b = \limsup a_n = \inf\{b_m\} .$$

הוכחה. נראה תחילה ש־ b הוא באמת גבול חלקי.

הסדרה b_m מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן היא מתכנסת וגבולה הוא $\inf b_m$, כלומר b. נקבע ε ונראה שיש אינסוף a_n־ים בקטע $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

ואכן, עפ"י הגדרת b כאינפימום יש M כך ש־ $b_M < b + \varepsilon$. היות ש־ b_M מוגדר כ־ $\sup\{a_n : n > m\}$, נקבל כי $a_n \leq b_M < b + \varepsilon$ לכל $n > M$.

מצד שני, נראה שיש אינסוף a_n־ים עם $n > M$ כך ש־ $a_n > b - \varepsilon$. ואמנם, אילו היה רק מספר סופי מהם, אז היינו יכולים למצוא N כך ש־ $a_n \leq b - \varepsilon$ לכל $n > N$, כלומר $b - \varepsilon$ היה חסם מלעיל לקבוצה $\{a_n : n > N\}$. אבל b_N הוא החסם העליון של קבוצה זו והיינו מקבלים כי $b_N \leq b - \varepsilon$, בסתירה לכך ש־ $b_m \geq b$ לכל m.

כדי להראות כי $L \leq b$ לכל גבול חלקי L נקבע $\varepsilon > 0$. הראינו לעיל שיש M כך ש־ $a_n \leq b_M < b + \varepsilon$ לכל $n > M$. לכן גם כל גבול חלקי יקיים כי $L \leq b + \varepsilon$, והיות ש־ ε שרירותי הרי שבהכרח $L \leq b$.

הערות. (i) כתבו כתרגיל את הנוסחה המפורשת עבור $\liminf a_n$.

(ii) המשפט נותן הוכחה חדשה למשפט בולצאנו־וירשטראס: קיום הנוסחה המפורשת לגבול העליון מבטיח שלכל סדרה חסומה יש גבולות חלקיים, כלומר שלכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

2.5 סדרות קושי

האם הסדרה $a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ מתכנסת? אין לנו הכלים הדרושים על מנת לענות על שאלה זו: הסדרה איננה מונוטונית, ואנו לא מסוגלים לנחש מהו הגבול המיועד (בהנחה שבכלל קיים גבול). ההגדרה הבאה והמשפט שאחריה ייתנו אפיון לסדרות מתכנסות ללא כל התייחסות לגבול שלהן.

הגדרה. סדרה (a_n) נקראת סדרת קושי (או סדרה המקיימת את תנאי קושי) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n, m \geq N$ מתקיים ש־ $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

חשוב להדגיש שתנאי קושי מתייחס לכל $m, n > N$ ואי אפשר להסתפק בכך ש־ $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, כלומר שהמרחק בין אברים עוקבים שואף לאפס. למשל, נגדיר סדרה ב"בלוקים": בבלוק ה־ k־י יהיו המספרים $k, k+\frac{1}{k}, k+\frac{2}{k}, \ldots, k+1$. ואז $a_{n+1} - a_n$ הוא מהצורה $\frac{1}{k}$ (או אפס) כאשר $n \to \infty$ גורר ש־ $k \to \infty$, ולכן $a_{n+1} - a_n \to 0$. אבל אם a_n בבלוק ה־ k־י אז $a_n \geq k \to \infty$. (ציירו!).

משפט. כל סדרת קושי היא חסומה.

הוכחה. נקבע N כך שמתקיים $|a_n - a_m| < 1$ לכל $n, m \geq N$. בפרט, לכל $n \geq N$ יתקיים כי $a_N - 1 \leq a_n \leq a_N + 1$, ולכן גם

$$\min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1\} \ .$$

משפט. סדרה (a_n) מתכנסת אםם היא סדרת קושי.

הוכחה. נניח ש־ $a_n \to a$ ונראה שזו סדרת קושי.
יהי $\varepsilon > 0$ ונקבע N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. אם $n, m \geq N$ נקבל כי

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

להיפך, נניח שהסדרה מקיימת את תנאי קושי. על סמך המשפט הקודם היא חסומה, ולכן על סמך משפט בולצאנו־וירשטראס, יש לה תת־סדרה מתכנסת. נניח ש־ $a_{n_k} \to a$ ונראה שלמעשה הסדרה כולה מתכנסת ל־ a.
יהי $\varepsilon > 0$ ונקבע N כך ש־ $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n, m \geq N$. נקבע K כך ש־ $n_K \geq N$ וכך ש־ $|a_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, ואז

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_K}| + |a_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

****
סוף שעה 18
****

דוגמא. נחזור לדוגמא $a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ ונראה כי זוהי סדרת קושי (ולכן היא מתכנסת).

נקבע $\varepsilon > 0$ כלשהו ו־ $m > n$. נשתמש באי־השוויון הפשוט $j! \geq 2^{j-1}$ ובנוסחה לטור גיאומטרי סופי עם $q = \frac{1}{2}$ ונקבל שאם $2^N > \frac{2}{\varepsilon}$, ואם $m > n \geq N$ אז

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{j=n+1}^{m} \frac{(-1)^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j!} \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{2^{j-1}} \\ &= 2^{-n} \frac{1-(1/2)^{m-n}}{1-(1/2)} < 2^{-n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

הערות. (i) זוהי דוגמא טיפוסית לשימוש בתנאי קושי: הוכחנו שהגבול קיים מבלי שהיינו צריכים לפתח במקביל שום שיטה לחישוב ערכו. (בהמשך הקורס נראה כי הגבול הוא $1/e$).

(ii) העובדה שסדרה מתכנסת היא סדרת קושי היא מאוד אינטואיטיבית, כי אם אברי הסדרה קרובים למספר קבוע L, אז הם בהכרח קרובים זה לזה.

הכיוון ההפוך יותר עדין (ואכן השתמשנו בבולצאנו־וירשטראס) למרות שגם הוא אינטואיטיבי: הוא אומר שלא ייתכן שאברי הסדרה יהיו קרובים זה לזה בלי שהדבר ינבע מזה שהם כולם קרובים לאיזשהו מספר קבוע.

2.6 הלמה של היינה־בורל

הגדרה. תהי A קבוצה חלקית של $\mathbb{R}$ ותהי Σ משפחה של קטעים. נאמר ש־ Σ מכסה את A (או שהיא כיסוי של A) אם $A \subset \bigcup_{I \in \Sigma} I$, כלומר, אם לכל $a \in A$ יש $I \in \Sigma$ כך ש־ $a \in I$.

אם כל איברי Σ הם קטעים פתוחים נאמר ש־ Σ הוא כיסוי פתוח של A.

אם תת־משפחה $\Sigma^* \subset \Sigma$ מכסה אף היא את A נאמר ש־ Σ^* היא תת־כיסוי. אם גם Σ^* סופית, נאמר שהיא תת־כיסוי סופי.

למשל, $\Sigma = \{(\frac{1}{n}, 2); (-1, \frac{1}{m})\}_{n,m>0}$ **היא כיסוי פתוח של הקטע הסגור** $[0,1]$ **ו־** $\Sigma^* = \{(-1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{8}, 2)\}$ **תת־כיסוי סופי שלו.**

לעומת זאת $\Sigma = \{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ **היא כיסוי פתוח של כל** $\mathbb{R}$ **שאין לו תת־כיסוי סופי.**

משפט.[הלמה של היינה בורל] יהי Σ כיסוי פתוח של קטע סגור, אז יש לו תת־כיסוי סופי.

נשים לב שהנחות המשפט חיוניות. $\Sigma = \{(\frac{1}{n}, 2)\}_{n>0}$ היא כיסוי פתוח של הקטע החצי פתוח $(0,1]$ ו־ $\Sigma = \{[-1,0], [\frac{1}{n}, 1]\}$ היא כיסוי שאיננו פתוח של $[0,1]$ ובשני המקרים אין תת כיסוי סופי.

הוכחה. נניח בשלילה שאין זה כך, ונשתמש בלמה של קנטור.

נסמן ב־ $\Delta_0 = [a_0, b_0]$ את הקטע הסגור הנתון. נחצה את Δ_0 לשני חצאים, ואז Σ מכסה את כל אחד משני החצאים. על פי הנחת השלילה, לפחות אחד מהם אינו ניתן לכסוי ע"י תת־משפחה סופית של Σ, ונסמן חצי כזה ב־$\Delta_1 = [a_1, b_1]$.

נמשיך ונחלק לשניים, ובאופן כזה נקבל באינדוקציה סדרה של קטעים סגורים $\Delta_n = [a_n, b_n]$ שאין להם תת כיסוי סופי מתוך Σ וכך ש־ $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$. האורך של Δ_n הוא $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$.

על סמך הלמה של קנטור, יש נקודה c כך ש־ $c \in \Delta_n$ לכל n, והיות ש־ Σ כיסוי של Δ_0, יש $I \in \Sigma$ כך ש־ $c \in I$.

הקטע I פתוח, ולכן יש $\delta > 0$ כך שהקטע $(c-\delta, c+\delta)$ מוכל כולו ב־I, ונבחר n כך ש־ $\frac{b_0 - a_0}{2^n} < \delta$. מאחר ש־ $c \in \Delta_n$ נקבל שמתקיים

$$\Delta_n \subset (c-\delta, c+\delta) \subset I \ .$$

כלומר, מצאנו ל־ Δ_n תת כיסוי סופי (המכיל, למעשה, איבר יחיד, הקטע I), וזו סתירה לאופן הבחירה של Δ_n.

הערה. שלושת המשפטים: הלמה של קנטור, משפט בולצאנו־וירשטראס והלמה של היינה־בורל הם "קרובי משפחה", ובדר"כ אפשר להשתמש באחד במקום באחר. נראה, למשל, איך משפט בולצאנו־וירשטראס עצמו נובע בקלות מהלמה היינה־בורל.

<u>הוכחה נוספת למשפט בולצאנו־ויירשטראס.</u> תהי (a_n) סדרה חסומה, כך ש־ $a \le a_n \le b$ לכל n ונניח בשלילה שאין לה תת־סדרה מתכנסת. בפרט אין לה גבולות חלקיים, ולכן לכל $x \in [a,b]$ יש סביבה I_x המכילה רק מספר סופי של איברי a_n. כל I_x כזה הוא קטע פתוח, והמשפחה $\Sigma = \{I_x : a \le x \le b\}$ מהווה כיסוי פתוח של $[a,b]$. על סמך הלמה של היינה־בורל יש לכיסוי זה תת כיסוי סופי

$$\Sigma^* = \{I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}\} \ .$$

אבל כל I_{x_j} כזה מכיל רק מספר סופי של אברים מהסדרה (a_n), ויש מספר סופי של I_{x_j}–ים, ולכן האיחוד $\bigcup_{j=1}^{N} I_{x_j}$ מכיל מספר סופי של אברים מהסדרה. אך, האיחוד מכיל את כל $[a,b]$, ולכן גם את <u>כל</u> אינסוף אברי הסדרה!

דוגמא. לסיום הסעיף נשתמש בלמה של היינה־בורל כדי להוכיח את קיומו של מספר אי רציונלי.

יהי $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ סידור של הרציונלים בקטע $[0,1]$. לכל n נסמן ב־ I_n את הקטע הפתוח שמרכזו ב־ r_n וארכו $1/2^n$, ונסמן $\Sigma = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

זהו אוסף של קטעים פתוחים המכיל את כל המספרים הרציונלים בקטע $[0,1]$, ונראה שהוא איננו כיסוי של הקטע. זה יראה שיש מספר ב־ $[0,1]$ שאיננו נמצא ב־ $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, ולכן מספר זה חייב להיות אי־רציונלי!

נניח אם כן ש־ Σ כן כיסוי. עפ"י הלמה של היינה בורל היה אז תת כיסוי סופי $\{I_{n_1}, \ldots, I_{n_k}\}$, אבל האורך הכולל של k הקטעים האלה הוא

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n_j}} < 1$$

ולכן אינם יכולים לכסות קטע שארכו 1.

****
סוף שעה 20
****

2.7 קבוצות פתוחות וסגורות

<u>הגדרה.</u> תהי $E \subset \mathbb{R}$. נקודה $a \in \mathbb{R}$ נקראת נקודת הצטברות של E אם כל סביבה של a מכילה לפחות נקודה אחת $b \in E$ כך ש־ $a \neq b$.

למשל, קבוצת נקודות ההצטברות של $(0,1)$ היא הקטע הסגור $[0,1]$.

<u>טענה.</u> אם a נקודת הצטברות של E אז יש סדרת נקודות $a_n \in E$ כך ש־ $a \neq a_n$ לכל n וכך ש־ $a_n \to a$. בפרט כל סביבה של a מכילה אינסוף נקודות של E.

<u>הוכחה.</u> נגדיר את a_n באינדוקציה. נבחר a_1 באופן שרירותי, ואם כבר בחרנו את $a_1, \ldots, a_{n-1}$ נסמן

$$\varepsilon_n = \min\{\tfrac{1}{n}, |a_1 - a|, \ldots, |a_{n-1} - a|\} \ .$$

היות ש־ a נקודת הצטברות של E אז הקטע $(a - \varepsilon_n, a + \varepsilon_n)$ מכיל נקודה $a \neq a_n \in E$. ואז $a_n \to a$ כי $|a_n - a| \leq \frac{1}{n} \to 0$.

<u>הגדרה.</u> תהי $E \subset \mathbb{R}$. נקודה $a \in E$ נקראת נקודה מבודדת של E אם יש סביבה של a שאינה מכילה אף נקודה מ־ E השונה ממנה.

לדוגמא, כל נקודות הקבוצה $E = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$ מבודדות ונקודת ההצטברות היחידה של E היא 0.

הוכחת המשפט הבא דומה להוכחה של המשפט על סדרות חסומות ולא ניתן אותה.

<u>משפט.</u>[בולצאנו־ווירשטראס] אם E אינסופית וחסומה, אז יש לה נקודת הצטברות.

הגדרה. (i) קבוצה $E \subset \mathbb{R}$ נקראת סגורה אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

(ii) נקודה $a \in U$ נקראת נקודה פנימית של U אם יש סביבה של a המוכלת כולה ב־ U. כלומר, יש $\varepsilon > 0$ כך ש־ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$.

(iii) קבוצה $U \subset \mathbb{R}$ נקראת פתוחה אם לכל $a \in U$ יש סביבה המוכלת כולה ב־ U. כלומר, כל $a \in U$ היא נקודה פנימית של U.

דוגמאות. (i) קטע סגור הוא קבוצה סגורה, קטע פתוח הוא קבוצה פתוחה וקטע חצי פתוח אינו קבוצה פתוחה ואינו קבוצה סגורה.

(ii) כל קבוצה סופית היא סגורה.

(iii) סדרה מתכנסת ביחד עם גבולה היא קבוצה סגורה.

המשפט הבא מכליל את דוגמא (iii).

משפט. אם E' היא קבוצת נקודות ההצטברות של E, אז $E \cup E'$ סגורה. ל־ $E \cup E'$ נקרא הסגור של E, ונסמן אותו ב־ $\overline{E}$.

הוכחה. ברור ש־ $\overline{E}$ מכילה את נקודות ההצטברות E' של E, ונראה שגם נקודות ההצטברות של E' מוכלות ב־ E'. תהי a נקודת הצטברות של E' ונקבע $\varepsilon > 0$ ואז הקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ מכיל נקודה $a \neq b \in E'$. זה קטע פתוח, ולכן יש $\delta > 0$ כך ש־ $(b-\delta, b+\delta)$ מוכל כולו ב־ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. נבחר את δ כך שגם $\delta < |a-b|$. היות ש־ $b \in E'$, אז יש בקטע זה נקודה $c \in E$, ועפ"י הבחירה ברור ש־ $c \neq a$.

טענה. אם $(U_i)_{i \in I}$ אוסף של קבוצות פתוחות גם אז $\bigcup_{i \in I} U_i$ פתוחה. אם I סופית, אז גם $\bigcap_{i \in I} U_i$ פתוחה.

הוכחה. נוכיח רק את החלק השני (ובדקו שהוא בדר"כ אינו נכון אם I אינסופית).
אם a בחיתוך, נמצא $\varepsilon_i > 0$ כך ש־ $(a-\varepsilon_i, a+\varepsilon_i) \subset U_i$, ונבחר $\varepsilon = \min \varepsilon_i$. אז $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{N} U_i$.

משפט. E סגורה אםם $U = \mathbb{R} \backslash E$ פתוחה.

הוכחה. נניח ש־ E סגורה, ותהי $a \in U$, כלומר, $a \notin E$. היות ש־ E סגורה, a איננה נקודת הצטברות שלה, ולכן יש סביבה $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ של a שאינה מכילה אף נקודה של E (נזכור ש־ a עצמה אינה נקודה של E). כלומר, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$ ומצאנו סביבה של a המוכלת כולה ב־ U.

להפך, נניח ש־ U פתוחה, ותהי a נקודת הצטברות של E. צריך להוכיח ש־ $a \in E$.

ואמנם, אחרת $a \in U$ והיות ש־ U פתוחה יש סביבה $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ של a המוכלת כולה ב־ U. זוהי סביבה של a שאינה מכילה אף נקודה של E, בסתירה להנחה ש־ a היא נקודת הצטברות של E.

טענה. אם $(E_i)_{i\in I}$ קבוצות סגורות אז גם $\bigcap_{i\in I} E_i$ קבוצה סגורה. אם I קבוצה סופית אז גם האיחוד סגור.

הוכחה. הוכיחו כתרגיל בשתי דרכים. האחת עפ"י ההגדרה של קבוצה סגורה, והשניה כמסקנה מטענה 2.7 ומכללי דה־מורגן: האיחוד של המשלימים הוא המשלים של החיתוך והחיתוך של המשלימים הוא המשלים של האיחוד.

חלק מהמשפטים שהוכחנו לקטעים סגורים ופתוחים ניתן להכללה לקבוצות פתוחות או סגורות כלשהן. ראינו, למשל, את משפט בולצאנו־ווירשטראס, ואפשר גם להכליל את הלמה של קנטור ואת הלמה של היינה־בורל. בדקו כתרגיל שההוכחות שנתנו (בשינויים קלים מתחייבים) מוכיחות גם את הגרסאות הכלליות האלה.

משפט. (i) [הלמה של קנטור] אם E_i קבוצות סגורות וחסומות כך ש־ $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, אז $\bigcap E_i \neq \emptyset$.

(ii) [הלמה של היינה־בורל] אם E קבוצה סגורה וחסומה, אז לכל כיסוי שלה ע"י קבוצות פתוחות יש תת־כיסוי סופי.

פרק 3

גבולות של פונקציות

3.1 פונקציות

בהנתן שתי קבוצות A ו־ B אז פונקציה f מ־ A ל־ B היא התאמה המתאימה לכל איבר ב־ A איבר יחיד ב־ B.

נסמן פונקציה f מ־ A ל־ B ע"י $f : A \to B$. לקבוצה A נקרא תחום ההגדרה (או פשוט התחום) של f, ול־ B נקרא הטווח שלה.

נשתמש בסימון $f(x) = y$ כדי לציין שהפונקציה f מתאימה לאיבר $x \in A$ את האיבר $y \in B$. נאמר שהנקודה y היא <u>התמונה</u> של הנקודה x, והנקודה x נקראת <u>המקור</u> של y.

<u>דוגמאות.</u> (i) פונקציה יכולה להנתן ע"י נוסחה מפורשת פשוטה כמו, למשל, $f(x) = 3x + 4$ או $h(x) = \tan x$ (שתחום הגדרתה הוא כל הישר הממשי פרט לכפולות האי־זוגיות של $\frac{\pi}{2}$).

(ii) פונקציה יכולה להיות מוגדרת גם ע"י "הסבר" מילולי, למשל פונקצית "הערך השלם" $G(x) = [x]$ מתאימה לכל מספר x את המספר השלם הגדול ביותר שאינו עולה על x. למשל $[\pi] = 3$ או $[-2.5] = -3$.

אפשר לתאר זאת גם ע"י נוסחה: לכל מספר שלם n הערך השלם של כל הנקודות x בקטע $[n, n+1)$ הוא n.

(iii) הפונקציה ב־ (ii) היא דוגמא לפונקציה המוגדרת ע"י נוסחאות שונות בקטעים שונים. דוגמאות אחרות:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \qquad ; \qquad F(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$$

נשתמש באופן שוטף במונחים הבאים:

<u>תמונה:</u> כשנתונה $f : A \to B$ אז לא בהכרח כל נקודה $y \in B$ מתקבלת כערך של הפונקציה f. לדוגמא, הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ מקבלת רק ערכים אי שליליים.

התמונה של f היא תת הקבוצה של הטווח B המכילה רק את האברים שהותאמו בפועל לאיברים ב־ A, כלומר זוהי הקבוצה

$$\{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : x \in A \text{ לאיזשהו } y = f(x)\}$$

על: נאמר שפונקציה $f : A \to B$ היא על אם התמונה של f היא כל הטווח B. כלומר, אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש־ $f(x) = y$.

גרף: הגרף של הפונקציה f הוא קבוצת הנקודות (x, y) במישור כך ש־ $y = f(x)$.

חד־חד־ערכית: נאמר ש־ $f : A \to B$ היא חד־חד־ערכית (ובקיצור חח"ע) אם לכל איבר בתמונה יש מקור יחיד, כלומר, אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב־ A מתקיים שגם $f(x_1) \neq f(x_2)$.

מונוטוניות: נאמר שפונקציה f היא עולה אם לכל $a > b$ ב־ A מתקיים ש־ $f(a) \geq f(b)$. הפונקציה f עולה ממש אם לכל $a > b$ מתקיים ש־ $f(a) > f(b)$. באופן דומה מגדירים פונקציה יורדת ופונקציה יורדת ממש. נאמר ש־ f מונוטונית אם היא מקיימת איזשהו תנאי מהתנאים האלה. כל פונקציה מונוטונית ממש היא, כמובן חח"ע.

חסימות וחסמים של פונקציות מוגדרים כמו עבור קבוצות: משתמשים בתמונה $f(A)$ של f כקבוצה בהגדרה.

הגדרה. פונקציה $f : A \to B$ נקראת חסומה מלמעלה (או חסומה מלעיל) ב־ A אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \leq M$. כל M כזה נקרא חסם מלעיל של הפונקציה ב־ A.

החסם המלעילי הקטן ביותר נקרא החסם העליון (או הסופרמום) של f ב־ A, ואם הוא מתקבל, כלומר אם יש x_0 כך שהסופרמום הוא $f(x_0)$, אז נקרא לו המכסימום של הפונקציה f ב־ A.

באופן דומה, מגדירים פונקציה חסומה מלמטה (מלרע), חסם תחתון (אינפימום) ומינימום ב־ A. נשתמש בסימונים כגון $\sup_A f$, $\inf\{f(x) : x \in A\}$ או $\max_{x \in A} f(x)$.

נאמר f חסומה ב־ A אם היא חסומה גם מלמעלה וגם מלמטה, כלומר כשיש מספרים M ו־m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $m \leq f(x) \leq M$ (או, באופן שקול, אם קיים מספר M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $|f(x)| \leq M$).

לדוגמא, הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה חסומה, והפונקציה $g(x) = \sin x$ כן חסומה, מכיוון שלכל x מתקיים $|g(x)| \leq 1$.

הערה. מושג הפונקציה שהגדרנו הוא מאוד כללי, ויש פונקציות שאיננו יכולים לדמיין את הגרף שלהן. הפונקציה הבאה, למשל, איננה חסומה באף קטע!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{כאשר } x \text{ אי רציונלי} \\ m & \text{כאשר } x = \frac{m}{n} \text{ רציונלי והשבר מצומצם עם } m \geq 0 \end{cases}$$

לצידן של פונקציות "פתולוגיות" כאלה יש גם פונקציות מאוד רגילות ומוכרות שנקרא להן הפונקציות האלמנטריות ושאותן נתאר כעת.

****

סוף שעה 22

****

הפונקציות האלמנטריות.

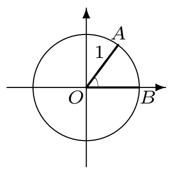
(a) פולינום הוא פונקציה מהצורה $f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$.
אם $a_n \neq 0$ נאמר שהפולינום הוא ממעלה (או דרגה) n ונסמן $deg(f) = n$. תחום ההגדרה של פולינום הוא כל הישר $\mathbb{R}$. כאשר $n = 0, 1, 2$ מקבלים, בהתאמה, קבועים, פונקציות לינאריות ופונקציות ריבועיות. התמונה של פולינום היא כל הישר (כאשר n אי־זוגי) או חצי ישר (כאשר n זוגי).

(b) פונקציה רציונלית היא מנה $f(x) = p(x)/q(x)$ כאשר p, q פולינומים. תחום ההגדרה הוא כל $\mathbb{R}$ פרט לנקודות בהן q מתאפס (ואם $deg(q) = n$ אז יש לכל היותר n נקודות כאלה).

(c) עבור $a > 0$ קבוע $(a \neq 1)$, הפונקציה המעריכית עם בסיס a היא $f(x) = a^x$. הפונקצות המעריכיות מוגדרות לכל x ומקיימות את הזהויות $a^{x+y} = a^xa^y$ ו־ $(a^x)^y = a^{xy}$. הן עולות כאשר $a > 1$ ויורדות כאשר $0 < a < 1$. תחום ההגדרה הוא כל הישר $\mathbb{R}$ והתמונה היא הקרן $\mathbb{R}_+$. כאשר $a = e$ נשתמש לפעמים במינוח "הפונקציה המעריכית" (או הפונקציה האכספוננציאלית) ונכתוב אותה לפעמים בצורה $exp(x)$.

(d) הפונקציות הטריגונומטריות $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.
בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי משתמשים <u>ברדיאנים</u> כיחידות של המשתנה בפונקציות הטריגונומטריות (ולא במעלות), ונזכיר תחילה מהם.

<u>הגדרה.</u> זווית היא בת α רדיאנים אם אורך הקשת שהיא חוסמת במעגל ברדיוס 1 היא α.



$\overset{\frown}{AB} = \alpha$

$\sphericalangle\ AOB = \alpha$

גודל הזווית ברדיאנים הוא כמובן פרופורציונלי לגדלה במעלות $\alpha_{rad} = C \cdot \alpha^\circ$.
כדי לקבוע את המקדם C נשתמש בכך שהיקף מעגל ברדיוס 1 הוא 2π והוא מתאים לזווית בת 360°, כלומר, $2\pi = C \cdot 360$. ולכן $C = \frac{2\pi}{360}$ ומקבלים את הנוסחה

$$\alpha_{rad} = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha^\circ\ .$$

להגדרות ופרטים על הפונקציות הטריגונומטריות ראו ב"הכנה טובה לטכניון".
כאן נזכיר רק מספר נוסחאות שימושיות:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} \\
\tan(\frac{\pi}{2} - x) &= \frac{1}{\tan x}
\end{aligned}$$

לפני שנוכל להגדיל את רשימת הפונקציות האלמנטריות נצטרך מספר מושגים נוספים על פונקציות.

פעולות על פונקציות

פעולות אריתמטיות: נגדיר פעולות אריתמטיות (חיבור חיסור וכו') על פונקציות בעזרת הפעולות האלה על מספרים ממשיים.

בהנתן שתי פונקציות f ו־ g שיש להן תחום הגדרה משותף, נגדיר פונקציה חדשה $f+g$, המוגדרת אף היא באותו התחום, ע"י הנוסחה

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

לכל x בתחום. לדוגמא, $x^2 + \sin x$ היא הסכום של שתי הפונקציות x^2 ו־ $\sin x$.
באופן דומה מגדירים הפרש, מכפלה ומנה של שתי פונקציות ע"י

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad ; \quad (fg)(x) = f(x)g(x) \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

כאשר תחום ההגדרה של פונקצית המנה מכיל רק את ה־ x־ים בהם $g(x) \neq 0$.

הרכבה: זוהי פעולה מיוחדת לפונקציות. תהיינה $g : A \to B$ ו־ $f : B \to C$ (כלומר התמונה של g מוכלת בתחום ההגדרה של f). אז ההרכבה שלהן מסומנת ב־ $f \circ g$, והיא מוגדרת ע"י הנוסחה

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

כלומר $f \circ g : A \to C$. לדוגמא, אם $f(x) = \sin x$ ו־ $g(x) = x^2$, אז

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

בדרך כלל $f \circ g \neq g \circ f$, למשל בדוגמא שנתנו $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2)$.

הפונקציה ההפוכה: אם $f : A \to B$ היא חח"ע ועל, אז לכל $y \in B$ יש $x \in A$ יחיד כך ש־ $f(x) = y$. הפונקציה ההפוכה ל־ f, שתסומן ב־ f^{-1}, היא הפונקציה מ־ B ל־ A המתאימה לכל $y \in B$ את אותו $x \in A$ יחיד.

לדוגמא, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$ היא חח"ע על. לכל $y \in \mathbb{R}$ יש $x \in \mathbb{R}$ יחיד ($x = \sqrt[3]{y}$) כך ש־ $x^3 = y$, ולכן הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

הערות. (i) אין לבלבל בין הסימון f^{-1} לבין הסימון $\frac{1}{f}$ למנה שהמכנה שלה הוא f. אנחנו תמיד נשתמש בו רק לפונקציה ההפכית.

(ii) הסימון של המשתנה ב־ y אינו מהותי, זה רק שם למשתנה ואפשר להשתמש בכל סימון אחר. בדר"כ נסמן, כרגיל, את המשתנה החפשי ב־ x והפונקציה ההפוכה ל־ $f(x) = x^3$ היא $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

(iii) עפ"י הגדרת הפונקציה ההפוכה, אם $f : A \to B$ ואם קיימת לה פונקציה הפוכה, f^{-1}, אז מתקיימות הזהויות

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a \qquad \text{לכל } a \in A$$
$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = b \qquad \text{לכל } b \in B$$

(iv) באופן גיאומטרי הגרף של f^{-1} והגרף של f הם אותו עקום במישור ־ בהחלפת התפקידים של x ושל y: ציר ה־ y ישמש כציר המשתנה החפשי וציר ה־ x ישמש כציר המשתנה התלוי. (הנקודה (x,y) היא בגרף של f אם $y = f(x)$, והיא בגרף של f^{-1} אם $x = f^{-1}(y)$ ־ וזה אותו התנאי).

אם רוצים לצייר את הגרפים על אותה מערכת צירים, כאשר ציר ה־ x ישמש כציר המשתנה החפשי בשניהם, עלינו להחליף בגרף של f^{-1} את התפקידים של x ו־ y. ואז הגרף של f^{-1} מתקבל מהגרף של f ע"י שיקוף ב־ $45°$, כלומר ע"י שיקוף ביחס לישר $y = x$.

(v) כאשר $f : A \to B$ איננה חח"ע או איננה על אין לה פונקציה הפוכה, אך ניתן לעיתים "לצמצם" את התחום A והטווח B לתתי־קבוצות שבהן הפונקציה כן תהיה חח"ע ועל. נדגים זאת בהרחבת הרשימה של הפונקציות האלמנטריות:

תוספת לרשימת הפונקציות האלמנטריות.

(e) הפונקציות ההפוכות לפולינומים כאשר הן מוגדרות. למשל אם נסתכל על הפונקציה $f(x) = x^2$ כפונקציה מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$, אז היא איננה חח"ע ואיננה על. אך אם נצמצם את התחום והטווח שלה ל־ $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, ונסתכל עליה כעל פונקציה מ־ $\mathbb{R}_+$ ל־ $\mathbb{R}_+$ (ושימו לב כי צמצמנו את הטווח בדיוק לתמונה של f), אז היא כן חח"ע ועל, ויש לה פונקציה הפכית: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. (זוהי הדרך המתמטית ־ פורמלית לאמר שלכל x אי־שלילי יש שורש ו"תמיד נקח את השורש החיובי").

(f) הפונקציות הלוגריתמיות הן ההפכיות של הפונקציות המעריכיות: עבור $0 < a \neq 1$ נגדיר $y = \log_a x$ אםם $x = a^y$. התמונה של a^x היא $\mathbb{R}_+$, ולכן הפונקציות הלוגריתמיות מוגדרות לכל $x > 0$, ותמונתן היא כל הישר.

כשניקח $x_j = a^{y_j}$, הכלל $a^{y_1+y_2} = a^{y_1}a^{y_2}$ ייתן $\log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$.
באופן דומה $(a^x)^y = a^{xy}$ גורר כי $\log_a x^y = y \log_a x$.

הפונקציה $\log_a x$ עולה כאשר $a > 1$ ויורדת אם $a < 1$.

אם $a = e$ נכתוב לפעמים $\ln x$ (ולפעמים נכתוב פשוט $\log x$. לא נשתמש אף פעם בלוגריתם עם בסיס 10!!), ונקרא לו "הלוגריתם הטבעי".

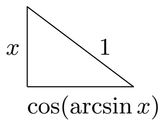
(g) כדי להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות נצטרך להגביל את הפונקציות הטריגונומטריות לקטעים מתאימים שבהם הן חד־חד־ערכיות. את

sin נגביל בדר"כ לקטע $[-\pi/2,\pi/2]$ ולפונקציה ההפוכה לה נקרא $arcsin$, כלומר $y=\arcsin x$ פרושו ש־ y הוא המספר היחיד $y\in[-\pi/2,\pi/2]$ המקיים $\sin y = x$. באופן דומה מגדירים $y=\arccos x$ כמספר היחיד $y\in[0,\pi]$ המקיים $\cos y = x$.

הפונקציה $y=\arctan x$ מוגדרת בדר"כ ע"י הדרישה $y\in(-\pi/2,\pi/2)$.

לפרטים נוספים ראו "הכנה טובה לטכניון". כאן נביא רק דוגמא פשוטה אחת

דוגמא. נוכיח כי $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. ואמנם, נציג



ואז $\arcsin x$ הוא הזווית הנגדית לצלע x ו־ $\arccos x$ היא הזווית הסמוכה, וסכומן הוא $90^\circ = \pi/2$.

(h) "הפונקציות האלמנטריות" הן כל הפונקציות מהסוגים $(a)-(g)$ וכן כל הפונקציות המתקבלות מהן ע"י סכומים, מכפלות, מנות והרכבות.

3.2 גבולות של פונקציות

הגדרה. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של הנקודה a, פרט אולי לנקודה a עצמה. נאמר שיש ל־ f גבול בנקודה a וערכו L אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{x\to a} f(x) = L$ או $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$.

בלשון סביבות ההגדרה היא: $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x השייך ל־ δ־סביבה המנוקבת של a מתקיים ש־ $f(x)$ שייך ל־ ε־סביבה של L. או, בלי לנקוב במפורש ב־ ε ו־ δ: לכל סביבה J של L יש סביבה מנוקבת I של a כך ש־ $f(x)\in J$ לכל $x\in I$.

במקום לאמר שיש ל־ f גבול בנקודה a וערכו L נאמר לפעמים ש־ L הוא הגבול של f בנקודה a, או ש־ f שואפת ל־ L כאשר x שואף ל־ a.

הערה. בהגדרת הגבול לא דרשנו ש־ f תהיה מוגדרת בנקודה a עצמה. למעשה, אפילו אם f מוגדרת בנקודה a ומקבלת שם ערך מסויים, אין לערך זה לא חשיבות עקרונית ולא מעשית.

החשיבות העקרונית של העובדה שלערך של f בנקודה a אין משמעות היא שמושג הגבול מתאר תופעה "דינמית": ההתנהגות של הפונקציה f כאשר ערכי x מתקרבים לנקודה a. אנו לא מתעניינים בערך של f בנקודה a, אלא רק בשאלה אם כאשר מתקרבים לנקודה a ערכיה מתקרבים למספר L.

מבחינה מעשית, ישנם מקרים חשובים רבים בהם ערך הפונקציה ב־ a באמת לא יהיה מוגדר. לדוגמא, כאשר נטפל בנגזרת של פונקציה נתונה $g(x)$ בנקודה

b, אנו נתבונן בגבול $\lim_{t\to 0}\frac{g(b+t)-g(b)}{t}$. אם נסמן $f(t)=\frac{g(b+t)-g(b)}{t}$, אז למעשה אנחנו בודקים את הגבול $\lim_{t\to 0} f(t)$ של הפונקציה f בנקודה $t=0$, והפונקציה f באמת לא מוגדרת עבור $t=0$!

<u>דוגמאות.</u> (i) $\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$. נקבע $\varepsilon>0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים $\delta>0$ כך שאם $|x-1|<\delta$ אז $|x^2+x-2|<\varepsilon$. נציג $|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$, וניקח $\delta<\min(1,\varepsilon/4)$. אז $x+2<4$ ולכן $|(x+2)(x-1)|<4\delta<\varepsilon$.

(ii) אם $a>0$ אז $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$.

נקבע $\varepsilon>0$ כלשהו ונוכיח שקיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $|x-a|<\delta$ מתקיים $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$.

בקביעת δ נצטרך תחילה להבטיח כי $|x-a|<\delta$ יגרור ש־ $x\ge 0$ (כי אחרת $\sqrt{x}$ אינו מוגדר כלל!), ודבר זה אכן מובטח אם נבחר $\delta<a$. נציג כעת

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

ולכן, אם נבחר את δ כך שיקיים $\delta<\varepsilon\sqrt{a}$, ואם $|x-a|<\delta$, אז

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\le\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\delta}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$

ולסיכום, עלינו לבחור $\delta<\min\{a,\varepsilon\sqrt{a}\}$.

(iii) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-1}=2$.

נקבע $\varepsilon>0$ כלשהו, וצריך להוכיח שקיים $\delta>0$ כך שאם $|x-2|<\delta$ אז $|\frac{x}{x-1}-2|<\varepsilon$. נציג

$$\left|\frac{x}{x-1}-2\right|=\left|\frac{x-2x+2}{x-1}\right|=\frac{|2-x|}{|x-1|}.$$

כדי להבטיח שהמנה "קטנה", עלינו להבטיח כי המונה יהיה קטן ושהמכנה יהיה "רחוק" מאפס.

נטפל תחילה במכנה ונרצה להבטיח, למשל, שהמכנה יהיה גדול מ־ $\frac{1}{4}$ (למספר הספציפי $\frac{1}{4}$ אין חשיבות ויכולנו לקחת במקומו כל מספר חיובי אחר קטן מ־ 1, שהוא המרחק בין המספרים 1 ו־ 2). התנאי $|x-2|<\delta$ פרושו ש־ $2-\delta<x<2+\delta$. מאי השוויון השמאלי רואים שאם $\delta=\frac{3}{4}$ אז $x>\frac{5}{4}$, ולכן באמת $|x-1|=x-1>\frac{1}{4}$.

כעת, אחרי שמצאנו איך לשלוט בגודל של המכנה, נחזור להערכה של השבר. כשנניח ש־ $|x-2|<\frac{3}{4}$ נקבל כי

$$\frac{|x-2|}{|x-1|}<\frac{|x-2|}{\frac{1}{4}}=4|x-2|$$

וביטוי זה קטן מ־ ε כאשר $|x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$. לסיכום, כדי להבטיח ש־ $|\frac{x}{x-1}-2|<\varepsilon$ עלינו לדרוש ש־ $|x-2|<\frac{3}{4}$ <u>וגם</u> $|x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$. לכן, נבחר איזשהו $\delta<\min\{\frac{3}{4},\frac{\varepsilon}{4}\}$.

(iv) נשים לב שגם אילו ל־ f היה ערך שונה מ־ 2 בנקודה $x=2$, למשל

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x-1} & , x\neq 2 \\ 7 & , x=2 \end{cases}$$

או ש־ f אפילו לא היתה מוגדרת שם, עדיין היה $\lim_{x\to 2} f(x)=2$.

(v) $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$.
נקבע $\varepsilon>0$ כלשהו, ונשתמש בכך שלכל t מתקיימים אי־השוויונים $|\sin t|\le |t|$ ו־ $|\cos t|\le |1|$. נציג

$$|\sin x-\sin a|=|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}|\le 2|\sin\frac{x-a}{2}|\le 2|\frac{x-a}{2}|=|x-a|$$

לכן, אם נבחר $\delta=\varepsilon$ אז $|x-a|<\delta$ יבטיח כי

$$|\sin x-\sin a|\le |x-a|<\delta=\varepsilon$$

(vi) באופן דומה: $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$.

(vii) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$.
בדוגמא זו הפונקציה אמנם אינה מוגדרת בנקודה $x=2$ עצמה, אך הגבול בנקודה זו קיים: לכל $x\neq 2$ מתקיים כי $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$, ולכן

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

טענה. נניח כי $\lim_{x\to a} f(x)=L$, אז
(i) יש סביבה מנוקבת של a שבה f חסומה.

(ii) לכל $K<L$ קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f>K$ (ולכל $M>L$ יש סביבה מנוקבת של a שבה $f<M$ לכל x באותה סביבה).

הוכחה. (i) נקבע איזשהם מספרים K ו־ M כך ש־ $K<L<M$. עפ"י הגדרת הגבול יש סביבה מנוקבת I של a כך ש־ $K<f(x)<M$ לכל $x\in I$.
בפרט f חסומה ב־ I מלמעלה ע"י M ומלמטה ע"י L.

(ii) ההוכחה של (i) נותנת סביבה מנוקבת שבה $f>K$.

המשפט הבא נותן איפיון מאוד נוח של גבול של פונקציה בנקודה בעזרת גבולות של סדרות של ערכי הפונקציה.

****
סוף שעה 24
****

משפט. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת I של הנקודה a. אז $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אמם $f(x_n)\to L$ לכל סדרה $x_n\to a$ של נקודות ב־ I.

הוכחה. נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$ וכי $I \ni x_n \to a$, ונראה כי $f(x_n) \to L$.
ואמנם, נקבע $\varepsilon > 0$, ואז יש $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x) - L| < \varepsilon$ לכל $x \in I$ המקיים $0 < |x - a| < \delta$. אם $x_n \to a$ אז יש N כך ש־ $|x_n - a| < \delta$ לכל $n > N$. מכאן נובע , על סמך בחירת δ, שלכל $n > N$ באמת מתקיים ש־ $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

נניח כעת כי $f(x) \not\to L$ ונבנה סדרה $x_n \to a$ ב־ I כך ש־ $f(x_n) \not\to L$.
היות ש־ $f(x) \not\to L$ אז יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ אפשר למצוא x המתקיים $0 < |x - a| < \delta$ אבל $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.
בפרט נוכל, בהנתן n, לקחת $\delta = \frac{1}{n}$ ולמצוא $x_n \in I$ כך ש־ $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ וכך ש־ $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. אבל אז $x_n \to a$ ואילו $f(x_n) \not\to L$ כמבוקש.

נביא שני שימושים למשפט 3.2. השימוש הראשון הוא שחוקי האריתמטיקה של גבולות מתקיימים גם לגבולות של פונקציות. (קל להוכיח זאת באופן ישיר ־ אבל השימוש במשפט חוסך אפילו את זה). כך נקבל

משפט. תהיינה f ו־ g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מסויימת של a (פרט אולי לנקודה a עצמה) והמקיימות $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ו־ $\lim_{x\to a} g(x) = M$. אזי הגבולות הבאים קיימים וניתנים ע"י הנוסחאות המתאימות:

(i) לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha L$.

(ii) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L + M$.

(iii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = LM$.

(iv) אם $M \neq 0$ אז גם $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (ובפרט קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $g(x) \neq 0$).

דוגמא. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x-4}{5x^2+2x+7} = -6/10$.

השימוש השני הוא למתן הוכחות פשוטות של אי קיום של גבול בנקודה.

דוגמאות. (i) אם a מספר שלם אז $\lim_{x\to a}[x]$ לא קיים.
ואמנם, אם $x_n \to a$ כאשר $x_n > a$ אז $[x_n] \to a$, ואילו אם $x_n < a$ אז $[x_n] \to a - 1$.

(ii) הגבול $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ אינו קיים.
ואמנם אם ניקח $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ו־ $y_n = \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ אז $\lim \sin \frac{1}{x_n} = 0$ ואילו $\lim \sin \frac{1}{y_n} = 1$, למרות ששתי הסדרות שואפות לאפס.

(iii) לפונקציה של דיריכלה

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ רציונלי} \\ 0 & x \text{ אירציונלי} \end{cases}$$

אין גבול באף נקודה, a, כי אפשר לבחור סדרת רציונלים $x_n \to a$ וגם סדרת אירציונלים $y_n \to a$, ואז

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} D(y_n)$$

3.3 וריאציות על הנושא

לעיתים נרצה לבחון את התנהגות של פונקציה בנקודה מסויימת a כאשר x מתקרב אליה רק מצד אחד. למשל, עבור הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$, x יכול "להתקרב" ל־ 0 רק מצד ימין. לשם כך נגדיר גבולות חד צדדיים.

הגדרה. תהי f מוגדרת בסביבה ימנית של a. נאמר כי L הוא גבול מימין של f בנקודה a אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $a < x < a + \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ או $f(x) \underset{x \to a^+}{\to} L$.

באופן דומה, נאמר כי L הוא גבול משמאל של f בנקודה a אם f מוגדרת בסביבה שמאלית של a, ואם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $a - \delta < x < a$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$. נסמן זאת ע"י $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ או $f(x) \underset{x \to a^-}{\to} L$.

דוגמא. לפונקציה $f(x) = [x]$ יש גבולות חד צדדיים גם בנקודות השלמות, והם שונים זה מזה: אם a מספר שלם אז $\lim_{x \to a^+} [x] = a$ ואילו $\lim_{x \to a^-} [x] = a - 1$.

את הטענה הבאה הוכיחו כתרגיל.

טענה. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I ותהי a נקודה פנימית של הקטע. אז יש ל־ f גבול בנקודה a אםם הגבולות החד־צדדיים של f ב־ a קיימים ושווים.

הגדרה. תהי f מוגדרת בקרן (a, ∞). נאמר כי $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > a$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

אם f מוגדרת בקרן שמאלית $(-\infty, b)$ נגדיר $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ באופן אנלוגי.

דוגמאות. (i) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, כי אם נתון $\varepsilon > 0$ אז נבחר $M = 1/\varepsilon$, ואז $x > M$ גורר כי $0 < \frac{1}{x} < 1/M = \varepsilon$.

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 1$.

הערה. חוקי האריתמטיקה של גבולות תקפים גם עבור גבולות חד־צדדיים ועבור גבולות באינסוף.

הגדרה. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a. נאמר כי $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ אם לכל מספר M קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים כי $f(x) > M$.

באופן דומה, נאמר כי נאמר כי $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ אם לכל M קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - a| < \delta$ מתקיים כי $f(x) < M$.

גבולות חד־צדדים, כגון $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ יוגדרו באופן דומה.

דוגמאות. (i) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

(ii) $\lim_{x\to(-\pi/2)^+}\tan x=-\infty$

הערות. (i) כאשר פונקציה שואפת לגבול שיכול להיות או סופי, או ∞ או $-\infty$ נוהגים לפעמים לומר שהגבול "קיים במובן הרחב". גם אנחנו נשתמש לפעמים בטרמינולוגיה זו. מכל מקום, כשנאמר שגבול מסויים קיים מבלי להתייחס במפורש לאפשרות שהוא אינסופי הכוונה תהיה תמיד לכך שהגבול <u>סופי</u>.

(ii) כמו במקרה של סדרות יש להתייחס בזהירות רבה לכללי האריתמטיקה של גבולות כאשר אחד או יותר מהגבולות הוא גבול אינסופי. למשל, הכלל ש־ $\lim(f+g)(x)=\lim f(x)+\lim g(x)$ תקף אם אחד משני הגבולות $\lim f(x)$ או $\lim g(x)$ הוא סופי, או אם שני הגבולות אינסופיים עם אותו סימן. אך אם $\lim f(x)=+\infty$ ו־ $\lim g(x)=-\infty$ אז לביטוי $\lim f(x)+\lim g(x)$ אין בכלל משמעות!

לביטויים מהצורה $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ וכדומה אין משמעות ובגבולות מצורה זו יש לטפל באמצעים אחרים ולא ע"י כללי אריתמטיקה.

כמו כן, שימו לב שכאשר $f(x)\to 0$, לא בהכרח מתקיים ש־ $1/f(x)\to\infty$. זה קורה רק אם מניחים תנאי נוסף: ש־ $f(x)>0$ בסביבה מנוקבת מסויימת של a.

(iii) אנו משאירים לקורא להגדיר מהם $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ או $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ וכו'.

3.4 תכונות סדר של גבולות

משפט. תהיינה f ו־ g מוגדרות בסביבה מנוקבת של a כך ש־ $\lim_{x\to a}f(x)=L$ ו־ $\lim_{x\to a}g(x)=M$. אם $L<M$ אז יש סביבה מנוקבת I של a כך ש־ $f(x)<g(x)$ לכל $x\in I$.

באופן שקול: אם $f(x)\geq g(x)$ לכל x בסביבה מנוקבת של a אז $L\geq M$.

נשאיר את ההוכחה כתרגיל.

הערות. (i) אי שוויון חריף $f(x)>g(x)$ אינו גורר אי שוויון חריף $L>M$, אלא עדיין רק $L\geq M$. לדוגמא ניקח $f(x)=2x^2$ ו־ $g(x)=x^2$, ואז $f(x)>g(x)$ לכל $x\neq 0$, אולם $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0$.

(ii) כתרגיל, נסחו והוכיחו את המשפטים המתאימים לגבולות חד צדדיים, לגבולות אינסופיים ולגבולות באינסוף.

משפט. תהי f מונוטונית וחסומה בקטע (a,b), אז $\lim_{x\to a^+}f(x)$ קיים. בפרט אם f מונוטונית בקטע I אז יש לה גבולות חד צדדיים בכל נקודה פנימית בקטע.

הוכחה. נניח למשל ש־ f עולה, ונסמן $L=\inf\{f(x):x\in(a,b)\}$ (שהוא סופי כי f חסומה), ונראה כי L הוא הגבול המבוקש.
נקבע $\varepsilon>0$, ואז $L+\varepsilon$ איננו חסם מלרע, ולכן יש x_0 כך ש־ $f(x_0)<L+\varepsilon$.
בגלל המונוטוניות של f נקבל כי $f(x)<L+\varepsilon$ לכל $a<x<x_0$, וברור כי גם $f(x)\geq L>L-\varepsilon$.

משפט. [סנדוויץ'] אם שלוש הפונקציות f,g,h מוגדרות בקטע (a,b) ומקיימות שם כי $f\leq g\leq h$, ואם $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}h(x)=L$, אז גם הגבול $\lim_{x\to a^+}g(x)$ קיים, וגם ערכו הוא L. (המשפט נכון גם עבור גבולות משמאל ועבור גבולות דו־צדדיים. כמו כן אם $f\leq g$ ואם $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$ אז גם $\lim_{x\to a^+}g(x)=\infty$).

הוכחה. נקבע $\varepsilon>0$ ונקבע $\delta>0$ כך שגם $|f(x)-L|<\varepsilon$ וגם $|h(x)-L|<\varepsilon$ לכל $a<x<a+\delta$. ואז לכל x כזה יתקיים גם $|g(x)-L|<\varepsilon$ כי

$$L-\varepsilon<f(x)\leq g(x)\leq h(x)<L+\varepsilon\ .$$

דוגמאות. (i) נראה כי $\lim_{x\to0^+}\sin x=0$ (למרות שזה מקרה פרטי של $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$, שראינו כבר, כשמציבים $a=0$). ואמנם לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\sin x<x$, ולכן אם נשאיף $x\to0^+$ נקבל את הרצוי. מאחר ו־ $\sin$ פונקציה אי־זוגית, כלומר, $\sin(-x)=-\sin x$, גם הגבול משמאל ב־ 0 שווה ל־ 0, ולכן $\lim_{x\to0}\sin x=0$.

לשרטט

כמסקנה נקבל כי $\cos x=1-2\sin^2(\frac{x}{2})\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$.

(ii) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.
נקבע זווית $0<x<\frac{\pi}{2}$ במעגל ברדיוס 1. שטח הגזרה שנוצר על ידה הינו ביחס $\frac{x}{2\pi}$ לשטח המעגל כולו (שהוא π), כלומר השטח הוא $\frac{x}{2\pi}\cdot\pi=\frac{x}{2}$. שטח זה קטן יותר משטח המשולש ישר הזווית החיצוני (שהוא $\frac{\tan x}{2}$), ולכן $\frac{x}{2}<\frac{\tan x}{2}$ או

$$0<\sin x<x<\tan x\ .$$

כל הביטויים באי השוויון הם חיוביים, ולכן $\frac{1}{\tan x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$, וע"י הכפלה ב־ $\sin x$ נקבל כי $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$, ועל סמך משפט הסנדוויץ' $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.
היות ו־ $\frac{\sin x}{x}$ הינה פונקציה זוגית, נקבל שגם הגבול משמאל ב־ 0 שווה ל־ 1, ולכן $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(iii) נראה שאם $\lim_{x\to a}f(x)=0$ ואם g פונקציה חסומה בסביבה מנוקבת של a, אז $\lim_{x\to a}(fg)(x)=0$. ובאמת, נניח כי $|g(x)|\leq T$ בסביבה, ואז

$$-T|f(x)|\leq|f(x)g(x)|\leq T|f(x)|\ .$$

ושני האברים הקיצוניים שואפים לאפס, ולכן גם האמצעי.

(iv) לפעמים נוח לשלב את משפט הסנדוויץ' בסדרות ובפונקציות. נראה למשל כי לכל מספר λ מתקיים כי $\lim_{x\to 0}(1+\lambda x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lambda}$. נבדוק זאת, למשל, עבור גבול מימין.

לכל $0 < x < 1$ נמצא n כך ש־ $\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n-1}$, ואז

$$(1+\frac{\lambda}{n})^{n-1} \le (1+\lambda x)^{\frac{1}{x}} \le (1+\frac{\lambda}{n-1})^{n}$$

ושני הביטויים הקיצוניים שואפים ל־ e^{λ} כאשר $n \to \infty$ ־ וזה שקול ל־ $x \to 0$.

****
סוף שעה 26
****

3.5 תנאי קושי

הגדרה. תהי f מוגדרת בסביב מנוקבת של הנקודה a. נאמר שהיא מקיימת ב־ a את תנאי קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל x,y המקיימים $0 < |x-a|, |y-a| < \delta$ מתקיים ש־ $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

משפט. $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים אםם f מקיימת את תנאי קושי ב־ a.

הוכחה. אם הגבול קיים אז בוודאי שמתקיים תנאי קושי. להפך, נניח שמתקיים תנאי קושי ונקבע איזשהי סדרה ותהי x_n כך ש־ $a \neq x_n \to a$.

נקבע $\varepsilon > 0$ ונמצא $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ לכל x,y המקיימים $0 < |x-a|, |y-a| < \delta$.

בפרט נקבל שהסדרה $(f(x_n))$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות סדרות, כי מתוך $x_n \to a$ נובע שיש N כך ש־ $|x_n - a| < \delta$ לכל $n > N$. ובפרט, אם $n,m > N$ אז $|x_n-a|, |x_m-a| < \delta$ ולכן $|f(x_m)-f(x_n)| < \varepsilon$.

היות ש־ $f(x_n)$ סדרת קושי היא מתכנסת. נסמן $f(x_n) \to L$ ונראה ש־ L הוא גבול הפונקציה ב־ a. ואמנם, נקבע $n > N$, ואז לכל x המקיים $0 < |x-a| < \delta$ יתקיים

$$|f(x)-L| \le |f(x)-f(x_n)| + |f(x_n)-L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \ .$$

הערה. יש כמובן הגדרות לתנאי קושי חד צדדי או באינסוף, ומתקיימים המשפטים האנלוגיים.

פרק 4

פונקציות רציפות

4.1 הגדרה ותכונות יסודיות

<u>הגדרה.</u> תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסויימת של a (כולל בנקודה a עצמה!).
נאמר ש־ f רציפה בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$ קיים ושווה ל־ $f(a)$.

כאשר כותבים במפורש את תנאי קיום הגבול בלשון ε־δ הניסוח הוא:
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ לכל x המקיים $|x-a| < \delta$.

כאשר כותבים במפורש את תנאי קיום הגבול בלשון סדרות הניסוח הוא:
לכל סדרה x_n כך ש־ $x_n \to a$ מתקיים ש־ $f(x_n) \to f(a)$.

<u>דוגמאות.</u> (i) הפונקציה $f \equiv 1$ **רציפה בכל נקודה, מכיון ש־** $\lim_{x\to a} f(x) = 1 = f(a)$ **לכל נקודה** a.

(ii) **הפונקציה** $f(x) = x$ **רציפה בכל נקודה, מכיון ש־** $\lim_{x\to a} f(x) = a = f(a)$ **לכל נקודה** a.

(iii) **הפונקציה** $f(x) = \sin x$ **רציפה בכל נקודה, כי מאי השוויונים** $|\cos t| \le 1$ **ו־** $|\sin t| \le |t|$ **נובע כי**

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \\ &\le 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a| \underset{x\to a}{\to} 0 \end{aligned}$$

(iv) **הפונקציה** $f = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$ **איננה רציפה ב־** $x=0$**, מכיוון שהגבול** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **לא קיים (הגבולות החד־צדדיים ב־ 0 אינם שווים זה לזה). נעיר כי פונקציות כאלה מופיעות לעיתים קרובות בשימושים לתחומים אחרים. למשל, הזרם במעגל חשמלי לפני הפעלת המפסק ולאחריו מתואר ע"י פונקציה כזו.**

הגדרה. (i) נאמר שהפונקציה f רציפה מימין בנקודה a אם $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. באופן דומה מגדירים רציפות משמאל.

(ii) נאמר שפונקציה f רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה פנימית בו, ורציפה מימין או משמאל בנקודות הקצה שלו (אם הן שייכות לקטע).

דוגמא. הפונקציה $f(x) = [x]$ רציפה בכל נקודה a שאיננה מספר שלם, והיא איננה רציפה אם a שלם. באופן מפורט יותר, אם a מספר שלם אז $\lim_{x\to a^+}[x] = a$ ו־ $\lim_{x\to a^-}[x] = a - 1$, לכן f רציפה מימין בנקודה זו, אך איננה רציפה משמאל שם.

הערה. באופן אינטואיטיבי (למרות שזה לא מדוייק!), ניתן לחשוב על פונקציה רציפה בקטע כעל פונקציה שניתן לשרטט את הגרף שלה בקטע מבלי "להרים את העפרון מהדף". אנו נחזור לרעיון זה בהמשך.

משפט. (i) אם הפונקציות f ו־ g רציפות בנקודה a, אז גם הפונקציות αf, $f+g$, fg ו־ $\frac{f}{g}$ (כאשר $g(a) \neq 0$) רציפות ב־ a.

(ii) תהי $f \circ g$ ההרכבה של הפונקציות f ו־ g. אם g רציפה בנקודה a, ואם f רציפה בנקודה $b = g(a)$, אז $f \circ g$ רציפה בנקודה a.

הוכחה. (i) ההוכחה נובעת ישירות מאריתמטיקה של גבולות. (הוכיחו זאת!).

(ii) נשתמש בהגדרת הרציפות בעזרת סדרות: נניח כי הסדרה x_n מקיימת $x_n \to a$ ונוכיח כי $(f \circ g)(x_n) \to (f \circ g)(a)$. נתון כי g רציפה ב־ a, ולכן $y_n = g(x_n) \to g(a) = b$. אך ידוע גם ש־ f רציפה ב־ $g(a) = b$ ולכן

$$(f \circ g)(x_n) = f(y_n) \to f(b) = (f \circ g)(a)$$

.

דוגמאות. פולינומים, פונקציות רציונליות ופונקציות טריגונומטריות הן רציפות בתחום הגדרתן. למשל הפונקציה $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ רציפה כהרכבה של הפונקציות הרציפות $f(x) = \sin x$ ו־ $g(x) = x + \pi/2$.

כשהגדרנו את a^x ראינו גם שאם $x_n \to x$ אז $a^{x_n} \to a^x$, כלומר שהיא רציפה. בהמשך נראה שגם הפונקציות ההפוכות הן רציפות.

למה. תהי f פונקציה רציפה בנקודה a כך ש־ $f(a) > 0$. אז יש ל־ a סביבה שבה $f(x) > 0$ לכל x. טענה אנלוגית נכונה עבור $f(a) < 0$, וכמו כן ניתן, כמובן, להחליף את 0 בכל מספר אחר M.

הוכחה. f רציפה בנקודה a ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ לכל x בסביבת־δ של a. בפרט זה נכון עבור $\varepsilon = f(a) > 0$. כלומר, קיים $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x) - f(a)| < f(a)$ בסביבת־δ של a, ולכן $f(x) > 0$ בסביבה זו.

4.2 מיון נקודות אי־רציפות

הגדרה. (i) נאמר שלפונקציה f יש אי־רציפות סליקה בנקודה a אם קיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x)$, אך או שהוא אינו שווה ל־ $f(a)$ או ש־ f אינה מוגדרת כלל בנקודה a. (לדוגמא: לפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ יש אי־רציפות סליקה בנקודה $x = 0$ בין אם אנו מגדירים את $f(0)$ כמספר השונה מ־ 1, ובין אם איננו מגדירים כלל את הפונקציה ב־ 0).

(ii) נאמר שלפונקציה f יש אי־רציפות מסוג קפיצה בנקודה a אם שני הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ו־ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ קיימים, אך שונים זה מזה. (לדוגמא: הפונקציה $f(x) = [x]$ בנקודות השלמות). נקודות קפיצה נקראות לעיתים נקודות אי־רציפות מהסוג הראשון.

(iii) נאמר שלפונקציה f יש אי־רציפות עיקרית בנקודה a אם לפחות אחד משני הגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim_{x\to a^-} f(x)$ אינו קיים. (לדוגמא: $\sin(1/x)$ או $1/x$ ב־ $x = 0$). נקודות אי־רציפות עיקריות נקראות לעיתים נקודות אי־רציפות מהסוג השני.

מכיוון שלפונקציה מונוטונית בקטע יש גבולות חד־צדדיים בכל נקודה בו נקבל

משפט. תהי f פונקציה מוגדרת ומונוטונית בקטע. אז נקודות אי־הרציפות שיכולות להיות לה הן רק מסוג קפיצה.

****
סוף שעה 28
****

דוגמא. תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \text{ שבר מצומצם עם } n > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x \text{ אי רציונלי} \end{cases}$ ונראה שהיא רציפה בנקודה x אסם x אי רציונלי.

למעשה נראה כי $\lim_{y\to x} f(y) = 0$ לכל x ואז נקבל בפרט כי תנאי הרציפות $f(x) = \lim_{y\to x} f(y)$ מתקיים בנקודה x אסם $f(x) = 0$, כלומר, x אירציונלי.

ואמנם, בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר N כך ש־ $\frac{1}{N} < \varepsilon$, ואז יש $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - \frac{m}{n}| < \delta$ אז בהכרח $n > N$.

יהי כעת y כך ש־ $0 < |y - x| < \delta$ ונבחין בשני מקרים: אם y אי רציונלי אז פשוט $f(y) = 0$. ואם $y = \frac{m}{n}$ שבר רציונלי מצומצם אז $f(y) = \frac{1}{n}$ ועפ"י בחירת δ מתקיים $n > N$. לכן $f(y) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

4.3 פונקציות רציפות בקטע סגור

עד עתה עסקנו בחלק "הטכני" של מושג הרציפות: הגדרות, פעולות אריתמטיות על פונקציות רציפות וכו'. כעת נעבור לעסוק בתכונות עמוקות יותר של פונקציות רציפות בקטע.

המשפט הראשון ממחיש את האינטואיציה שהגרף של פונקציה רציפה הוא כזה שניתן לשרטט אותו "מבלי להרים את העפרון מהדף", ולכן אינו יכול לעבור מערך אחד לערך אחר מבלי לעבור את כל ערכי הביניים.

משפט. [משפט ערך הביניים] תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, ויהי α מספר כלשהו בין $f(a)$ ל־ $f(b)$. אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש־ $f(c)=\alpha$.

הוכחה. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי $f(a)<f(b)$ ונגדיר באינדוקציה סדרת קטעים סגורים באופן הבא. הקטע הראשון יהיה $[a_0,b_0]$ כאשר $a_0=a$ ו־ $b_0=b$. כדי להגדיר את $[a_1,b_1]$ נחלק את הקטע $[a_0,b_0]$ לשני חלקים שווים $[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}]$ ו־ $[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$ ונבחין בשלוש אפשרויות:

(i) אם $f(\frac{a_0+b_0}{2})=\alpha$ סיימנו את ההוכחה (כי ניקח $c=\frac{a_0+b_0}{2}$).

(ii) אם $f(\frac{a_0+b_0}{2})<\alpha$ נסמן $[a_1,b_1]=[\frac{a_0+b_0}{2},b_0]$.

(iii) אם $f(\frac{a_0+b_0}{2})>\alpha$ נסמן $[a_1,b_1]=[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}]$.

נשים לב כי בשני המקרים (ii) ו־ (iii) מתקיים כי $f(a_1)<\alpha<f(b_1)$.
נמשיך באופן אינדוקטיבי ונבנה את סדרת הקטעים $[a_n,b_n]$ כך ש־

- (1) הקטע $[a_n,b_n]$ מוכל ב־ $[a_{n-1},b_{n-1}]$.
- (2) $f(a_n)<\alpha<f(b_n)$.
- (3) $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$.

עפ"י הלמה של קנטור חיתוך הקטעים הוא נקודה יחידה, שנסמנה ב־ c, ומתקיים $\lim a_n=\lim b_n=c$. נראה שזוהי הנקודה המבוקשת.
מאחר ו־ $a_n\to c$ ו־ f רציפה נקבל כי $f(a_n)\to f(c)$. אך $f(a_n)<\alpha$ לכל n, ולכן גם הגבול יקיים $f(c)\le\alpha$.
באופן דומה נסיק מ־ $f(b_n)>\alpha$ ש־ $f(c)\ge\alpha$, ולכן $\alpha\le f(c)\le\alpha$, כלומר, $f(c)=\alpha$ כמבוקש.

הערה. הוכחת המשפט נותנת למעשה "שיטת חישוב" למציאת פתרון מקורב למשוואה $f(x)=\alpha$. לשיטה כזו צריכים להיות שני רכיבים:

(i) אלגוריתם מפורש לחישוב קירוב לפתרון לאחר n שלבים. (אצלנו נשתמש באלגוריתם של חציית הקטע ונקח כקירוב את a_n).

(ii) הערכה לשגיאה בין הערך המקורב שמצאנו לפתרון האמיתי. (אצלנו ההערכות $a_n<c<b_n$ ו־ $|b_n-a_n|=\frac{|b-a|}{2^n}$ נותנות כי $|c-a_n|<\frac{|b-a|}{2^n}$).

תהליך השימוש בשיטת החישוב פשוט: נניח, למשל, כי $[a,b]=[0,1]$ וכי רוצים לחשב את c עם טעות קטנה מ־ $\frac{1}{1000}$.
בשלב הראשון נמצא (ע"ס (ii)) n כך ש־ $\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$ ($n=10$ מקיים זאת). אח"כ מחשבים, עפ"י האלגוריתם המתואר בהוכחת המשפט את a_{10}, ואז

$$|c-a_{10}|<\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}.$$

דוגמאות. (i) לכל פולינום ממעלה אי־זוגית קיים לפחות שורש אחד.

נסמן $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ כאשר n אי־זוגי ו־ $a_n \neq 0$, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $a_n > 0$. עבור $x \neq 0$ נציג

$$.p(x) = x^n(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n)$$

כאשר $x \to \pm\infty$ הביטוי שבסוגריים שואף ל־ a_n בעוד ש־ $x^n \to \pm\infty$ בהתאמה, ולכן $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ ו־ $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. בפרט קיים a כך ש־ $p(a) < 0$ וקיים $b > a$ כך ש־ $p(b) > 0$. היות ופולינום הוא פונקציה רציפה אפשר להשתמש במשפט ערך הביניים עבור $\alpha = 0$ ונקבל שקיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־ $p(c) = 0$.

(ii) המרחק בין חיפה לת"א הוא 100 ק"מ. ביום ראשון, סטודנט יוצא מת"א בזמן כלשהו לאחר 10 בבוקר ומגיע לחיפה לפני 10 בלילה. ביום חמישי הוא עוזב את חיפה אחרי 10 בבוקר ומגיע לת"א לפני 10 בלילה. האם קיים זמן t_0 כך שהוא נמצא באותה נקודה בדרך בזמן t_0 בשני הימים?

נסמן את מרחק הסטודנט מת"א בזמן t ביום ראשון ע"י $f_1(t)$ ואת מרחקו מת"א בזמן t ביום חמישי ע"י $f_2(t)$, ונגדיר $f = f_1 - f_2$. הפיזיקה אומרת לנו שהפונקציות f_1, f_2 רציפות. המתמטיקה אומרת ש־ f רציפה (כהפרש של שתי פונקציות רציפות). אם נסמן את השעה עשר בבוקר ע"י $t = 10$ ואת השעה עשר בלילה ע"י $t = 22$ יתקיים כי

$$\begin{aligned} f(10) &= f_1(10) - f_2(10) = 0 - 100 = -100 < 0 \\ f(22) &= f_1(22) - f_2(22) = 100 - 0 = 100 > 0 \end{aligned}$$

ולפי משפט ערך הביניים יש $10 < t_0 < 22$ כך ש־ $f(t_0) = 0$, כלומר $f_1(t_0) = f_2(t_0)$.

<u>תרגיל.</u> תנו פתרון לא מתמטי שכל ילד יכול להבין.

חלק (iii) במשפט הבא הוא שימושי ביותר.

משפט. (i) התמונה של קטע ע"י פונקציה רציפה היא קטע.

(ii) אם f מונוטונית אז גם ההפך נכון: אם התמונה היא קטע אז f רציפה.

(iii) אם f רציפה ומונוטונית ממש בקטע, אז קיימת לה שם פונקציה הפוכה f^{-1} שגם היא רציפה ומונוטונית ממש.

הוכחה. (i) נובע ישירות ממשפט ערך הביניים.

(ii) תהי a נקודת אי רציפות של f. היות ש־ f מונוטונית a היא בהכרח נקודות קפיצה, ואז "חסר" בתמונה כל הקטע שבין $f_+(a)$ לבין $f_-(a)$ (פרט לנקודה הבודדת $f(a)$) ־ ולכן איננה קטע.

(iii) בוודאי ש־ f חח"ע, ועפ"י (i) התמונה שלה היא קטע ולכן f^{-1} מוגדרת היטב בקטע זה. כמו כן f^{-1} מונוטונית ממש שם, כי אם נניח למשל שהיא עולה ממש אז $x_1 < x_2$ אמם $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$.

כלומר, f^{-1} מונוטונית ממש ותמונתה (שהיא הקטע שבו f מוגדרת) היא קטע. עפ"י (ii) היא רציפה.

הערה. באופן אינטואיטיבי פונקציה היא רציפה אם ניתן לשרטט את הגרף שלה "מבלי להרים את העפרון מהדף". אך הגרף של f^{-1} הינו שיקוף סביב $y = x$ של הגרף של f, ולכן אם ניתן לשרטט את הגרף של הפונקציה f "מבלי להרים את העפרון מהדף", אז ניתן לעשות זאת גם לגרף של f^{-1}, כלומר, f^{-1} רציפה גם היא.

מסקנה. כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן.

משפט. אם הפונקציה f חח"ע ורציפה בקטע $[a, b]$, אז היא מונוטונית בו ממש.

לדלג בכתה על ההוכחה

הוכחה. היות ש־ f חח"ע, הרי ש־ $f(a) \neq f(b)$. נניח, למשל, ש־ $f(a) < f(b)$ ונראה ש־ f מונוטונית עולה ממש.
נניח בשלילה שיש x ו־ y כך ש־ $a < x < y < b$, אולם $f(x) > f(y)$ (לא ייתכן ש־ $f(x) = f(y)$ מכיוון ש־ f חח"ע), ונבחין בשני מקרים.

(i) אם $f(x) > f(a)$ אז עפ"י הנחת השלילה $f(x) > \max\{f(a), f(y)\}$, ונבחר α כך ש־ $f(x) > \alpha > \max\{f(a), f(y)\}$. על פי משפט ערך הביניים יש $a < c < x$ ו־ $x < d < y$ כך ש־ $f(c) = f(d) = \alpha$, בסתירה לכך ש־f חח"ע.

(ii) אם $f(x) < f(a)$ אז בהכרח $f(y) < f(b)$ (מכיוון שאחרת היינו מקבלים $f(x) < f(a) < f(b) \leq f(y)$ בסתירה להנחה ש־ $f(x) > f(y)$). לכן נוכל לבחור β כך ש־ $f(y) < \beta < \min\{f(b), f(x)\}$.

על פי משפט ערך הביניים קיימים c ו־ d כך ש־ $x < c < y < d < b$ וכך ש־ $f(c) = f(d) = \beta$, שוב בסתירה לכך ש־ f חח"ע.

המשפט הבא הינו משפט עקרוני חשוב מאד. למדתם בתיכון (ונראה גם בהמשך) למצוא נקודות קיצון ע"י נגזרות, אך לא שאלתם שם אם לפונקציה יש בכלל נקודות כאלה. אולי נשקיע עבודה רבה, נגזור, נשווה לאפס, נגזור פעם נוספת ובסוף כל המאמץ לא נמצא כלום? המשפט מבטיח שעבור פונקציה רציפה בקטע סגור נדע מראש שאכן יש נקודות כאלה ושתהליך החיפוש אינו מבוצע לשווא.

משפט. [ויירשטראס] תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$. אז

(i) הפונקציה חסומה ב־ $[a, b]$.

(ii) הפונקציה מקבלת ב־ $[a, b]$ מקסימום ומינימום.

הוכחה. (i) נניח בשלילה ש־ f אינה חסומה, ונניח, בלי הגבלת בכלליות, שהיא אינה חסומה מלמעלה. לכן, לכל n קיים $x_n \in [a, b]$ כך ש־ $f(x_n) > n$. הסדרה x_n חסומה (כי $a \leq x_n \leq b$) ולכן, עפ"י משפט בולצאנו־ויירשטראס, קיימת לה תת־סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x_0$.

היות ש־ $a \le x_{n_k} \le b$ לכל k, נקבל אותם אי־שוויונים גם עבור הגבול, כלומר $x_0 \in [a,b]$. מרציפות f נובע ש־ $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, כלומר $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) < \infty$, אולם זו סתירה לבחירת ה־ x_n־ים הנותנת כי $f(x_{n_k}) > n_k \to \infty$!

(ii) אם הסופרמום M אינו מתקבל, אז הפונקציה $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ מוגדרת היטב ורציפה בקטע. אך היא איננה חסומה, וזו סתירה ל־ (i).

<u>הערה.</u> תנאי המשפט היו ש־ f רציפה ושהקטע סגור. בלי תנאים אלה המשפט אינו נכון. למשל, הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה בקטע החצי פתוח $(0,1]$ ואיננה חסומה בו מלמעלה. הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ מוגדרת בקטע הסגור $[0,1]$ ואינה רציפה בו. אמנם, "במקרה", הפונקציה חסומה, אך היא אינה מקבלת מינימום בקטע.

4.4 רציפות במידה שווה

נזכיר את הגדרת הרציפות: הפונקציה f רציפה בנקודה a אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ לכל x המקיים $|x - a| < \delta$.

כשהפונקציה f נתונה ערכו של δ תלוי בשני דברים: בערך של ε ובנקודה a. עד עכשיו התרכזנו בתלות של δ ב־ ε, ובפרק זה נדון בתלות ב־ a, או ליתר דיוק, במקרה שבו אין תלות ב־ a. ונתחיל בדוגמא:

<u>דוגמא.</u> נסתכל בפונקציה $f(x) = x^2$ ונראה איך בחירת δ באמת תלויה הן ב־ ε והן ב־ a.

נקבע $\delta > 0$ ונניח ש־ $a > 0$ וכי $x = a + \delta/2$. ברור כי $|x - a| < \delta$, אבל

$$x^2 - a^2 = (a + \delta/2)^2 - a^2 > a\delta\ .$$

ו־ $a\delta$ יכול להיות גדול כרצוננו אם ניקח a גדול.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהפונקציה f רציפה במידה שווה (ובקיצור, במ"ש) בקטע I אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ <u>התלוי רק ב־ ε</u> כך ש־ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ לכל $x, y \in I$ המקיימים $|x - y| < \delta$.

<u>דוגמאות.</u> (i) $\sin x$ רציפה במידה שווה בכל הישר כי

$$|\sin x - \sin y| = |2\sin(x-y)/2\cos(x+y)/2| \le |x - y|$$

ואפשר לקחת $\delta = \varepsilon$.

(ii) x^2 רציפה במידה שווה ב־ $[0,8]$ כי $|x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \le 16|x-y|$, ואפשר לבחור $\delta = \varepsilon/16$.

הוכחה דומה תקפה בכל קטע חסום, וראינו שהפונקציה איננה רציפה במידה שווה על כל הישר (או בקרן).

(iii) הוכיחו כתרגיל שלכל $t > 0$ הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ רציפה במ"ש בקרן (t, ∞), אך היא איננה רציפה במ"ש בקרן $(0, \infty)$.

<u>משפט.</u>[ווירשטראס] פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה.

<u>הוכחה.</u> נניח שלא, ואז יש $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ יש x, y בקטע באופן ש־ $|x - y| < \delta$ אך $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

לכל n נוכל לכן לבחור $|x_n - y_n| < 1/n$ בקטע כך ש־ $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. עפ"י משפט בולצאנו ווירשטראס נוכל לבחור תת סדרה כך ש־ $x_{n_k} \to x$. אבל אז גם $y_{n_k} \to x$, ובגלל רציפות f היינו מקבלים כי $f(x_{n_k}), f(y_{n_k}) \to f(x)$ ־ אבל לא ייתכן שיהיה לשתי סדרות אלה אותו גבול!

פרק 5

גזירות

5.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה. נאמר שפונקציה f, המוגדרת בסביבה של הנקודה a, היא גזירה בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים וסופי. נסמן גבול זה ע"י $f'(a)$ ונקרא לו הנגזרת של f בנקודה a.

סימונים נוספים. לפעמים נרשום את הנגזרת כגבול $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
מנת ההפרשים $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ מסומנת לעיתים ע"י $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ או $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. באופן אנלוגי נסמן לעתים את הנגזרת ע"י $\frac{df}{dx}(a)$ או $\frac{dy}{dx}(a)$, או פשוט ע"י $\frac{df}{dx}$ או $\frac{dy}{dx}$. (אך שימו לב שזהו סימון בלבד ואין כאן פעולת חילוק!)

בפיסיקה נהוג לסמן את הנגזרת של פונקציה $x(t)$, כשהמשתנה t מתאר זמן, ע"י $\dot{x}(t)$ או פשוט ע"י $\dot{x}$.

באופן גיאומטרי הנגזרת בנקודה a, כגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ של שיפועי מיתרים בגרף של f, היא השיפוע של המשיק לגרף בנקודה a. דרך אחרת להבין את הנגזרת של f בנקודה a היא כ"קצב השינוי" של f בנקודה: ל־ h קבוע המנה $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ היא השינוי הממוצע של f ליחידה של x בקטע $[a,a+h]$, ובגבול מקבלים את קצב השינוי של f בנקודה a.

נגזרות מופיעות באופן טבעי בכל ענפי המדע הכמותיים. חוקי הטבע (או הכלכלה, או כל ענף כמותי אחר) מטפלים בשינויים שעוברים גדלים מסויימים ־ ובקצב השינוי שלהם. הנה כמה דוגמאות בסיסיות כאלה, מפיסיקה, כלכלה ומתמטיקה שבהן הנגזרת מופיעה באופן טבעי כזה.

****
סוף שעה 32
****

מהירות רגעית
חלקיק נע בקו ישר על ציר המספרים הממשי, כאשר מהירותו איננה קבועה. נסמן ב־$S(t)$ את המיקום של החלקיק בזמן t (כלומר $S(t)$ חיובי אם החלקיק נמצא ימינה מהראשית, ושלילי אם הוא שמאלה ממנה). ההפרש $S(t)-S(a)$ הוא

ההעתק (כלומר המרחק, עם הסימן המתאים) שעבר החלקיק בין זמן a לזמן t. המנה $\frac{S(t)-S(a)}{t-a}$ היא המהירות הממוצעת של החלקיק בפרק זמן זה. אם נקח פרק זמן קצר מאוד (כלומר, t "קרוב" ל־ a), המהירות הממוצעת תהיה קרובה למהירות בה נע החלקיק בזמן a עצמו, ומידת הקירוב תהיה טובה יותר ככל ש־ t מתקרב ל־ a. באופן מתמטי אנו מקבלים כי הנגזרת של הפונקציה $S(t)$, כלומר הגבול $\lim_{t\to a} \frac{S(t)-S(a)}{t-a}$, מתאר את ה"מהירות הרגעית" של החלקיק בזמן a.

נשים לב כי לכל הגדלים יש "יחידות". להעתק S יש יחידות אורך, ל־ t יש יחידות זמן, והמהירות נמדדת ביחידות שהן $\frac{\text{אורך}}{\text{זמן}}$.

<u>צפיפות המסה של תייל</u>

נתון תייל לא הומוגני, ונניח שהוא מונח על ציר המספרים כשקצהו השמאלי בראשית. ונסמן ב־ $f(x)$ את המסה של הקטע $[0,x]$. אז $f(x)-f(a)$ מתאר את המסה של הקטע $[a,x]$. הביטוי $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ מייצג, לכן, את המסה הממוצעת ליחידת אורך בקטע זה, או במילים אחרות, את הצפיפות הממוצעת בקטע. כשנשאיף $x \to a$ נקבל כי $f'(a)$ מתאר את צפיפות המסה <u>בנקודה a</u>. היחידות של הצפיפות הן, כמובן, $\frac{\text{מסה}}{\text{אורך}}$.

<u>עלות שולית</u>

בכלכלה נהוג להשתמש במונח "שולי" במקום במונח "נגזרת". לדוגמא, נניח ש־ $f(x)$ מתארת את עלות הייצור של x יחידות של מוצר מסויים. ההפרש $f(a+h)-f(a)$ הוא העלות של ייצור h היחידות הנוספות, כאשר מעלים את רמת הייצור מ־ a ל־ $a+h$. המנה $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ מתארת את העלות הממוצעת של ייצור יחידה אחת כשמעלים את רמת הייצור מ־ a ל־ $a+h$. הגבול $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ הוא ה"עלות השולית", כלומר העלות של יחידת מוצר, כשנמצאים ברמת ייצור של a יחידות.

<u>חקירת פונקציה</u>

מבחינה גיאומטרית הנגזרת של הפונקציה f בנקודה a מתארת את השיפוע של המשיק לגרף של f בנקודה a. האינטואיציה אומרת שכאשר הנגזרת חיובית בקטע מסויים הפונקציה עולה בו, וכשהיא שלילית הפונקציה יורדת. בנקודות שבהן הפונקציה מקבלת מינימום או מקסימום המשיק צריך להיות מקביל לציר ה־ x־ים, כלומר הנגזרת שם שווה לאפס. זיהוי תחומי עלייה וירידה של פונקציה, או מציאת נקודות המקסימום ומינימום של פונקציה ־ בהקשר מתמטי או מעשי, הינם, כמובן חשובים ביותר: חשוב, למשל, לדעת לתכנן מתי מגיעים ל"מיצוי מכסימלי" של פוטנציאל הרווח בתהליך כלכלי שבו אנחנו משתתפים.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $f \equiv c$ קבועה. לכל נקודה a מתקיים ש־ $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = 0$ ולכן $f' \equiv 0$.

(ii) $f(x) = x$. לכל נקודה a מתקיים ש־ $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$ ולכן $f' \equiv 1$.

(iii) אם $f(x) = x^n$ כאשר n מספר טבעי, אז $f'(x) = nx^{n-1}$. כדי לראות זאת נשתמש בנוסחה

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

ונקבל

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+x^{n-1}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}nx^{n-1}\ .$$

(בהמשך נראה שנוסחה דומה $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$ נכונה לכל μ ממשי.)

(iv) הפונקציה $f(x)=|x|$ איננה גזירה ב־ $x=0$ מכיוון שהגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

לא קיים: הגבול מימין הוא 1 והגבול משמאל הוא -1.

באופן אינטואיטיבי, אם פונקציה גזירה בנקודה מסויימת אז הגרף שלה "חלק" שם ואין לו "חוד" בנקודה (כמו ה"חוד" של $|x|$ בנקודה $x=0$).

(v) הפונקציה $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ (ו־ $f(0)=0$) איננה גזירה ב־ $x=0$ מכיוון שהגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$$

לא קיים (לשרטט).

<u>הערה חשובה.</u> מושג "המשיק" הוא יותר מורכב מהאינטואיציה הראשונית שלנו, והמשיק המתמטי אינו חייב להיות כולו מצד אחד של הגרף. לדוגמא $f(x)=x^3$ מקיימת $f'(x)=3x^2$ ו־ $f'(0)=0$, כלומר למשיק בנקודה 0 יש שיפוע 0 והוא מתלכד עם ציר ה־ x־ים, ומשיק זה <u>חוצה</u> את הגרף של הפונקציה (אך הוא עושה זאת "באופן משיקי")!

(vi) אם $f(x)=\sin x$ אז $f'(x)=\cos x$, מכיוון שלכל נקודה a מתקיים ש

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\frac{2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\cos a\ .$$

(השתמשנו כאן בכך ש־ $\cos\frac{2a+h}{2}\to\cos a$ ו־ $\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\to 1$).

(vii) באופן דומה $(\cos x)'=-\sin x$.

$(viii)$ אם $f(x)=\ln x$, אז $f'(x)=1/x$. כי $\lim_{h\to 0}(1+\lambda h)^{1/h}=e^\lambda$, ואם ניקח $\lambda=\frac{1}{x}$ נקבל

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\cdot h\right)^{1/h}\longrightarrow\ln e^{1/x}=\frac{1}{x}\ .$$

<u>**טענה.**</u> אם פונקציה f גזירה בנקודה a אז היא רציפה שם, אולם הטענה ההפוכה איננה נכונה.

<u>**הוכחה.**</u> צריך להוכיח כי $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, או $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$. ואמנם

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0$$

מכיוון שמנת ההפרשים שואפת ל־ $f'(a)$ ו־ $x-a$ ל־ 0.
כדי להראות שהכיוון ההפוך אינו נכון, נתבונן בפונקציה $f(x)=|x|$. זו פונקציה רציפה בכל נקודה, אך היא איננה גזירה בנקודה $x=0$.

הגדרה. (i) נאמר ש־ f גזירה בקטע פתוח (a,b) אם היא גזירה בכל נקודה בקטע.

(ii) נאמר שלפונקציה f יש נגזרת מימין בנקודה a אם הגבול $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים. נסמן את הנגזרת מימין ע"י $f'_+(a)$.
באופן דומה נגדיר נגזרת משמאל ונסמנה ב־ $f'_-(a)$. (כמובן ש־ f גזירה ב־ a אמם שתי הנגזרות החד־צדדיות $f'_+(a)$ ו־ $f'_-(a)$ קיימות והן שוות זו לזו).

משפט. [כללי הגזירה] תהיינה f ו־ g פונקציות גזירות בנקודה a. אז גם הפונקציות הבאות גזירות ב־ a, ונגזרותיהם שם מקיימות את הנוסחאות

(i) $(af)'=af'$

(ii) $(f+g)'=f'+g'$.

(iii) $(fg)'=fg'+f'g$.

(iv) $(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ בתנאי ש־ $g(a)\neq 0$.

הוכחה. $(i)+(ii)$ נובעים מיידית מאריתמטיקה של גבולות (הוכיחו כתרגיל).

(iii)

$$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

(iv)

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(x)g(a)}\Big(g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\Big) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{g^2(a)}\Big(f'(a)g(a)-g'(a)f(a)\Big).$$

דוגמאות. (i) $(\log_a x)'=(\frac{\ln x}{\ln a})'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

(ii) $(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

5.1.1 גזירה של פונקציה מורכבת

משפט. [כלל השרשרת] תהי f פונקציה גזירה בנקודה a ותהי g פונקציה גזירה בנקודה $b = f(a)$. אז $g \circ f$ גזירה ב־ a ונגזרתה נתונה ע"י הנוסחה

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(b)f'(a) \; .$$

לביטוי $f'(a)$ במכפלה קוראים "הנגזרת הפנימית".

למשל: $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$.

הוכחה. נראה שלכל סדרה $a \neq x_n \to a$ מתקיים כי $\frac{g(f(x_n))-g(f(a))}{x_n-a} \to g'(b)f'(a)$.
נשים לב כי מרציפות f מתקיים $t_n = f(x_n) \to f(a) = b$ ונבחין בשני מקרים:

א. אם $f'(a) \neq 0$ אז בהכרח יש N כך שאם $n > N$ אז $t_n = f(x_n) \neq f(a)$, ולכן

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} &= \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \\ &= \frac{g(t_n) - g(b)}{t_n - b} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g'(b)f'(a) \end{aligned}$$

ב. אם $f'(a) = 0$ נפרק את הסדרה לשתי תת סדרות x_{n_j} ו־ x_{m_j} כך ש־ $t_{n_j} = f(x_{n_j}) \neq f(a)$ לכל j וכך ש־ $t_{m_j} = f(x_{m_j}) = f(a)$ לכל j.
הטיפול בסדרה הראשונה הוא כמו במקרה א. ואילו לסדרה השניה מתקיים $f'(a) = 0 = \frac{g(f(x_{m_j}))-g(f(a))}{x_{m_j}-a}$ לכל j.

****
סוף שעה 34
****

הערות. (i) אם נרשום $t = f(x)$ ו־ $y = g(t)$ נקבל את הנוסחה

$$\frac{dy}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(t)f'(x) = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

שבה כאילו שפשוט "הרחבנו" את השבר ב־ dt! כמובן שמדובר בסימון בלבד ואין באמת "צמצומים", אולם דוגמא זו ממחישה את החוכמה שבסימון $\frac{dy}{dx}$. נראה זאת גם בהמשך, כאשר נדבר על אינטגרלים.

(ii) לפעמים יש להשתמש בכלל מספר פעמים. למשל .

$$\ln(\sin(x^2))' = \frac{(\sin(x^2))'}{\sin(x^2)} = \frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{\sin(x^2)}$$

שימושים לכלל השרשרת

(i) גזירה לוגריתמיות. נתבונן בשתי דוגמאות:

1. כדי לגזור את $f(x) = x^{\mu}$ נציג $\ln f(x) = \mu \ln x$, וכשנגזור את שני האגפים (את השמאלי לפי כלל השרשרת) נקבל $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mu}{x}$. ולכן $f'(x) = \frac{\mu f(x)}{x} = \mu x^{\mu-1}$.

2. כדי לגזור את $y = x^x$ נציג $\ln y = x \ln x$, וכשנגזור את שני אגפי המשוואה נקבל $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x} + \ln x = 1 + \ln x$. לכן $y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$.

(ii) גזירה פרמטרית: לעיתים הקשר בין x ל־ y אינו נתון בצורה ישירה, אלא באמצעות קשר למשתנה שלישי ("פרמטר") t. כלל השרשרת מהווה כלי לחישוב הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ מבלי שנצטרך למצוא תחילה נוסחה מפורשת של y במונחים של המשתנה x.

לדוגמא נסתכל ב־ $x(t) = \cos t\ ,\ y(t) = \sin t\ ;\ \ 0 \le t \le 2\pi$. בדוגמא זו אפשר לחלץ $y = \sqrt{1-x^2}$, אבל בדר"כ זה לא דרוש ולפעמים אפילו בלתי אפשרי לתת הצגה ישירה של y כפונקציה של x. לחישוב $y'(x)$ נשתמש בכלל השרשרת ונציג

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dy} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

למורה: לשרטט

והנגזרות $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ ידועות. בדוגמא שלנו נקבל $y'(x) = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x}{y}$, שאומר שהמשיק למעגל ניצב לרדיוס וקטור בנקודת ההשקה.

5.1.2 הנגזרת של הפונקציה ההפוכה

הפונקציה e^x היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה $\ln x$, ואנחנו מכירים את נגזרתה שהיא $(\ln x)' = 1/x$. נראה איך להשתמש בנוסחה זו כדי לחשב את הנגזרת של $(e^x)'$.

מהגדרת הפונקציה ההפוכה נקבל כי $\ln(e^x) = x$. נגזור את שני האגפים ונקבל ש־ $\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$. ומכאן נחלץ $(e^x)' = e^x$.

<u>**הערה.**</u> בעזרת כלל השרשרת נקבל מכאן שלכל $1 \neq a > 0$ מתקיים ש

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a\ .$$

המשפט הבא נותן נוסחה כללית לנגזרת של הפונקציה ההפוכה

<u>**משפט.**</u> תהי f מונוטונית ממש, גזירה בנקודה t ורציפה בסביבת t, ונסמן $f(t) = x$. אם $f'(t) \neq 0$ אז f^{-1} גזירה ב־ x ומתקיים

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\ .$$

<u>**הוכחה.**</u> היות ש־ f מונוטונית ממש ורציפה בסביבת t, אז היא חח"ע ו־ f^{-1} מוגדרת היטב ורציפה בסיבת x. לכן

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(x)}{y - x} = 1\Big/\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(x)} \to \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

כי $f^{-1}(x) \to f^{-1}(y) \neq f^{-1}(x)$ כאשר $y \to x$.

הערות. (i) הנה הסבר גיאומטרי לנוסחה. הגרף של f^{-1} הינו השיקוף של הגרף של f סביב הישר $y = x$, ולכן גם המשיקים ל־ f בנקודה $(x, f(x))$ ול־ f^{-1} בנקודה $(f(x), x)$ בהתאמה מתקבלים זה מזה ע"י שיקוף כזה. גיאומטריה אלמנטרית מראה כי הזוויות α ו־ β שיוצרים המשיקים האלה עם ציר ה־x־ים מקיימות $\alpha + \beta = \pi/2$, ואז הנוסחה מתקבלת מהנוסחה הטריגונומטרית $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$.

(ii) אם $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$ אז $(f^{-1})'(x_0)$ לא קיים. ניתן לקבל זאת באופן פורמלי מהנוסחה, כי מחלקים באפס, אולם ניתן להשתכנע בזאת גם משיקולים גיאומטריים: המשיק האופקי של f עובר תחת השיקוף למשיק <u>אנכי</u> ל־ f^{-1}.

(iii) דרך טובה לזכור את הנוסחה היא לרשום $\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$. כמובן שהחישובים בשני אגפי השוויון צריכים להעשות בנקודות מתאימות.

****
סוף שעה 36
****

דוגמא. אם $f(x) = \sin x$ אז $f^{-1}(x) = \arcsin x$, ונקבל כי

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(בדקו שאתם יודעים מדוע $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$).

ניתן לקבל אותה נוסחה גם בדרך אחרת: נרשום $y = \arcsin x$, ואז $x = \sin y$ ומקבלים

$$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

5.1.3 נגזרות מסדר גבוה

אם f גזירה בקטע, אז f' הינה פונקציה חדשה באותו הקטע. גם פונקציה חדשה זו יכולה להיות גזירה בנקודות מסויימות של הקטע, או אפילו בכל הקטע. נסמן את הנגזרת שלה ע"י $f'' = (f')'$ ונקרא לה הנגזרת השנייה של f. באופן אינדוקטיבי ניתן להגדיר את הנגזרת ה־ n־ית ע"י $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

חוקי הגזירה של נגזרות מסדר גבוה נובעים באופן ישיר מהנוסחאות עבור נגזרת מסדר ראשון. כך $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, ולמכפלה מקבלים נוסחה יותר מסובכת, עם מבנה דומה לנוסחת הבינום של ניוטון (הוכיחו אותה באינדוקציה)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}$$

כאשר אנו מסמנים $f^{(0)}(x)=f(x)$. אין נוסחה פשוטה לנגזרות מסדר גבוה של מנה.

<u>דוגמא.</u>

$$\left(x^2e^x\right)^{(9)}=\binom{9}{0}x^2\left(e^x\right)^{(9)}+\binom{9}{1}2x\left(e^x\right)^{(8)}+\binom{9}{2}2\left(e^x\right)^{(7)}=(x^2+2x+2)e^x \ .$$

5.2 תכונות של פונקציות גזירות

5.2.1 נקודות קיצון מקומי

נזכור שאם f מוגדרת בקטע I אז $x_0\in I$ היא נקודת מינימום (גלובלי) אם לכל $x\in I$ מתקיים $f(x)\geq f(x_0)$. באופן דומה מגדירים נקודת מקסימום (גלובלי).

<u>הגדרה.</u> נאמר כי לפונקציה f המוגדרת בקטע I יש <u>מינימום מקומי</u> ב־ x_0 אם קיימת סביבה $J\subset I$ של x_0 כך שלכל $x\in J$ מתקיים ש־ $f(x)\geq f(x_0)$.

באופן דומה נגדיר מקסימום מקומי, ונאמר ש־ x_0 נקודת קיצון מקומי אם f מקבלת בה מינימום מקומי או מקסימום מקומי.

<u>משפט.</u> [פרמה] תהי f מוגדרת בקטע I וגזירה בנקודה <u>פנימית</u> x_0. אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f אז $f'(x_0)=0$.

<u>הוכחה.</u> נניח בלי הגבלת הכלליות כי x_0 הינה נקודת מינימום מקומי של f, כלומר, יש סביבה J של x_0 כך שלכל $x\in J$ מתקיים ש־ $f(x)\geq f(x_0)$. לכל $x\in J$ נסתכל במנת ההפרשים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ונבחין בשתי אפשרויות.

אם $x>x_0$ אז המונה אי־שלילי והמכנה חיובי, ולכן $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. אי־שוויון זה נשמר בגבול כאשר $x\to x_0$ ולכן $f'_+(x_0)\geq 0$.

אם $x<x_0$ אז המונה אי־שלילי והמכנה שלילי, ולכן $f'_-(x_0)\leq 0$. אך f גזירה ב־x_0, ולכן $0\leq f'_+(x_0)=f'(x_0)=f'_-(x_0)\leq 0$, כלומר $f'(x_0)=0$.

<u>הערות.</u> (i) התנאי $f'(x_0)=0$ הינו תנאי הכרחי עבור נקודת קיצון מקומי של פונקציה גזירה אך אינו תנאי מספיק. הנגזרת של פונקציה יכולה להתאפס בנקודה מבלי שתהיה נקודת קיצון מקומי, כמו למשל $f(x)=x^3$ שהיא מונוטונית עולה ממש אך $f'(0)=0$.

(ii) משפט פרמה מאוד יעיל גם במציאת נקודות קיצון <u>גלובליות</u>. במקום לחפש נקודה כזו בין אינסוף נקודות הקטע, המשפט נותן רשימה (קצרה בד"כ) של נקודות "חשודות" כנקודות קיצון גלובליות: נקודות הקצה של הקטע (בהנחה שהפונקציה מוגדרת בקטע סגור), נקודות בהן f איננה גזירה ונקודות פנימיות שבהן הנגזרת מתאפסת. בד"כ נוכל למצוא את נקודות הקיצון הגלובליות ע"י השוואה פשוטה בין ערכי הפונקציה המתקבלים בנקודות אלה.

(ii) לפני שמפעילים את החיפוש השיטתי המתואר ב־ (ii) יש תחילה לבדוק האם יש בכלל נקודת קיצון (דוגמא (ii) להלן מדגימה זאת!). הקיום נובע בד"כ ממשפט ווירשטראס, באופן ישיר או בעזרת נימוקים נוספים.

דוגמאות. (i) הפונקציה $f(x)=\sqrt{|x|(1-x)}$ רציפה בקטע הסגור $[-1,1]$ ולכן, לפי משפט ויירשטראס, היא מקבלת שם מינימום ומקסימום (גלובליים). כדי למצוא אותם נחפש את כל ה"נקודות החשודות" ונשווה בין ערכי הפונקציה שמתקבלים שם.

כאשר $0<x<1$ מתקיים ש־ $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ ולכן $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$. הנגזרת מתאפסת עבור $x=1/2$ ולכן נקבל את ה"נקודה החשודה" $x=1/2$.

כאשר $-1<x<0$ מתקיים ש־ $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ולכן $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ שאיננה מתאפסת בתחום ערכים זה.

כאשר $x=0$ ייתכן והפונקציה כלל אינה גזירה, ולכן נוסיף לרשימת "הנקודות החשודות" את הנקודה $x=0$, וכמובן גם את קצות הקטע $x=\pm1$.

השוואת הערכים $f(0)=f(1)=0$, $f(-1)=\sqrt{2}$ ו־ $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ נותנת כי נקודות המינימום של הפונקציה בקטע $[-1,1]$ הן $x=0$ ו־ $x=1$ ונקודת המקסימום היא $x=-1$.

(ii) נפעיל את שיטת החיפוש על הפונקציה $f(x)=x^3-3x$. הנגזרת מתאפסת בנקודות $x=\pm1$, והשוואת הערכים בנקודות אלה תתן, לכאורה, שהמכסימום מתקבל בנקודה $x=-1$ והמינימום ב־ $x=1$, אך אלה אינם מינימום ומקסימום גלובליים (בדקו למשל את הערכים ב־ $x=\pm9$)! האמת היא שאין לפונקציה זו בכלל נקודות מינימום ומכסימום גלובליים. (שרטטו!)

5.2.2 משפט רול ומשפט לגרנז'

משפט. [רול] תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, גזירה בקטע הפתוח (a,b) ומקיימת ש־ $f(a)=f(b)$. אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש־ $f'(c)=0$.

הוכחה. f רציפה ב־ $[a,b]$ ולכן, לפי משפט ויירשטראס, היא מקבלת שם מינימום m ומקסימום M. אם $m=M$ אז הפונקציה קבועה בכל הקטע ומקיימת $f'\equiv0$. אחרת, מתקיים ש־ $M>m$ ומכיוון ש־ $f(a)=f(b)$ נובע שלפחות אחד מהערכים m או M חייב להתקבל בנקודה פנימית. כלומר, קיימת נקודה $a<c<b$ שהיא נקודת קיצון גלובלית (ובפרט מקומית) של f. לפי משפט פרמה, מתקיים $f'(c)=0$.

הערה. באפן גיאומטרי המשפט אומר שיש נקודה $a<c<b$ שבה המשיק לגרף הוא אופקי.

דוגמא. אם $p>0$ אז למשוואה $x^3+px+q=0$ יש בדיוק שורש אחד.

נסמן $f(x) = x^3 + px + q$. זה פולינום ממעלה אי־זוגית, ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לו לפחות שורש אחד (בדקו שאתם זוכרים את פרטי ההוכחה).

נניח כעת בשלילה כי למשוואה יש יותר מפתרון אחד, כלומר, קיימים $a < b$ כך ש־ $f(a) = f(b) = 0$. הפונקציה f מקיימת את כל תנאי משפט רול בקטע $[a, b]$ ולכן קיימת נקודה c המקיימת ש־ $f'(c) = 0$. אבל אין נקודה c כזו כי $f'(x) = 3x^2 + p > 0$ לכל x (מכיוון ש־ $p > 0$ ו־ $x^2 \geq 0$ כריבוע).

המשפט הבא מכליל את משפט רול.

משפט. [לגרנז'] תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a, b]$, גזירה בקטע הפתוח (a, b). אז קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש־

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

או, באופן שקול, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

הוכחה. משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(a, f(a))$ ו־ $(b, f(b))$ היא

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \ .$$

נגדיר פונקצית עזר

$$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\Big) \ .$$

הפונקציה הזו רציפה ב־ $[a, b]$, גזירה ב־ (a, b) (כהפרש של פונקציות גזירות או רציפות בהתאמה) ומקיימת ש־ $F(a) = F(b)$. עפ"י משפט רול קיימת $a < c < b$ כך ש־ $0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הערות. (i) משפט רול הוא המקרה הפרטי של משפט לגרנז' כאשר $f(a) = f(b)$.

(ii) באפן גיאמטרי משפט לגרנז' אומר שיש נקודה $a < c < b$ שבה המשיק לגרף מקביל למיתר המחבר את הנקודות $(a, f(a))$ ו־ $(b, f(b))$ (ומשפט רול היה המקרה הפרטי שהמיתר הזה היה אופקי).

(iii) הדוגמא ה"מעשית" הבאה מדגימה את האופי של השימושים הפיסיקליים של המשפט: נהג נצפה ע"י מצלמות המשטרה עוזב את ת"א בשעה 10 בבוקר ומגיע לחיפה $1/2$ שעה מאוחר יותר. האם אפשר להרשיעו בנסיעה במהירות מופרזת? הרי מהירותו לא נמדדה אף פעם! נראה איך משפט לגרנז' יעזור לבית המשפט.

נסמן ב־ $f(t)$ את המרחק של הנהג מת"א בזמן t. נתון כי $f(10:00) = 0$ וכי $f(10:30) = 100$, ומהירותו הממוצעת של הנהג היא

$$\frac{f(10:30) - f(10:00)}{\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

קמ"ש. משפט לגרנז' אומר שיש נקודת זמן $10:00 < c < 10:30$ שבה המהירות היא $f'(c) = 200$. שימו לב שאיננו יודעים מתי הנהג נסע מהר ומתי לאט, כל מה שיודעים הוא שקיימת לפחות נקודת זמן אחת שבה הנהג אכן נסע במהירותו מופרזת ביותר.

משפט לגרנז' הוא בעל חשיבות רבה ביותר מכיון שהוא מקשר, כפי שיראה המשפט הבא, בין תכונות מקומיות של פונקציה (תכונות של הנגזרת) לבין תכונות גלובליות שלה (כגון תחומי עלייה/ירידה וכו'). כפי שנראה בהמשך יש לו גם שימושים מתמטיים רבים אחרים.

משפט. תהי f פונקציה רציפה בקטע סגור וגזירה בנקודות הפנימיות שלו. אזי:

(i) אם $f' \equiv 0$ אז f פונקציה קבועה.

****
סוף שעה 38
****

(ii) אם $f' \geq 0$ אז f מונוטונית עולה. (ואם $f' \leq 0$ היא יורדת).

(iii) אם $f' > 0$ אז f מונוטונית עולה ממש. (ואם $f' < 0$ היא יורדת ממש).

הוכחה. לכל $a < b$ בקטע הסגור קיימת, עפ"י משפט לגרנז', נקודה $a < c < b$ כך ש־ $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

(i) היות ש־ $f'(x) = 0$ בכל נקודה פנימית בקטע, אז גם $f'(c) = 0$, ולכן $f(b) = f(a)$. ומכיוון ש־ a ו־ b היו שרירותיים נובע שהפונקציה קבועה.

(ii) היות ש־ $f'(x) \geq 0$ בכל נקודה פנימית בקטע, אז $f'(c) \geq 0$, ולכן $f(b) \geq f(a)$. ומכיוון ש־ a ו־ b היו שרירותיים נובע שהפונקציה מונוטונית עולה.

(iii) היות ש־ $f'(x) > 0$ בכל נקודה פנימית בקטע, אז $f'(c) > 0$, ולכן $f(b) > f(a)$. ומכיוון ש־ a ו־ b היו שרירותיים נובע שהפונקציה מונוטונית עולה ממש.

הערות. (i) בחלקים (i) ו־ (ii) נכונים גם המשפטים ההפוכים. (הוכיחו, למשל שאם f מונוטונית עולה אז $f' \geq 0$).

(ii) בחלקים (ii) ו־ (iii) של המשפט אפשר להחליש קצת את תנאי המשפט ולהניח רק ש־ f רציפה ומקיימת ש־ $f'(x) \geq 0$ (או $f'(x) > 0$) בהתאמה) פרט למספר סופי של נקודות (שבהן f אולי איננה גזירה אפילו):
נניח שהנקודות הן $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, ואז עפ"י המשפט f מונוטונית עולה (או מונוטונית עולה ממש) בכל קטע חלקי $[a_{i-1}, a_i]$. ואם $x < a_i < y$ נקבל לכן ב־ (ii) כי $f(x) \leq f(a_i) \leq f(y)$ (ואי שוויונים חריפים ב־ (iii)).

דוגמאות. (i) אם $f(x) = \arctan(x)$ אז $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ ולכן f מונוטונית עולה ממש.

(ii) אם $f(x) = 1/x$ אז $f'(x) = -1/x^2 < 0$, אך $f(-1) < f(1)$, כלומר f איננה יורדת. זה אינו סותר את המשפט כי f אינה רציפה ב־ $x = 0$ ולכן לא מקיימת את תנאי המשפט.

(iii) המשפט מאוד שימושי בהוכחת אי שוויונים. נוכיח למשל כי

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x} \qquad \text{לכל} \qquad x > -1\ .$$

נגדיר $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ ונשים לב כי $f(0) = 0$. אי השוויון ינבע מייד כשנראה ש־ f יורדת בקטע $(-1, 0]$ ועולה ב־ $[0, \infty)$. ובאמת

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

ומנה זו חיובית עבור $x > 0$ ושלילית עבור $x < 0$.

(iv) אם f גזירה בקטע I ואם f' חסומה שם, אז f רציפה במ"ש ב־ I. כי נניח ש־ $|f'(x)| \leq M$ לכל $x \in I$, ואז בהנתן ε נבחר $\delta = \varepsilon/M$. אם $x, y \in I$ מקיימים $|x-y| < \delta$ ואם $x < c < y$ מקיים $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ (כמובטח ממשפט לגרנז') אז עפ"י בחירת δ

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leq M\delta = \varepsilon\ .$$

נסיים את הפרק בהכללה של משפט לגרנז'

משפט.[קושי] תהיינה f, g רציפות בקטע הסגור $[a, b]$ וגזירות בקטע בפתוח (a, b) כך ש־ $g'(x) \neq 0$ לכל x בקטע הפתוח. אז יש נקודה $a < c < b$ כך ש־

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

הוכחה. נשים תחילה לב כי $g(b) \neq g(a)$, כי אחרת עפ"י משפט לגרנז' היתה נקודה x בקטע שבה היה $f'(x) = 0$. פונקצית העזר

$$F(x) = \big(g(x) - g(a)\big)\big(f(b) - f(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big)$$

רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח, וחישוב ישיר מראה כי $F(b) = F(a) = 0$. עפ"י משפט רול יש נקודה c שבה $F'(c) = 0$ ־ והעברה באגפים נותנת את התוצאה.

ניתן כעת פירוש גיאומטרי למשפט:

עקום במישור הוא $P = \{(g(x), f(x)) : x \in I\}$ כאשר f, g שתי פונקציות המוגדרות בקטע I. למשל, הגרף של הפונקציה f מתקבל כשלוקחים $g(x) = x$, והמעגל מתקבל כשלוקחים

$$g(x) = \cos x\ ;\ \ f(x) = \sin x\ ;\quad x \in [0, 2\pi]\ .$$

נסמן ב־ $P_x = (g(x), f(x))$ את הנקודה על העקום המתאימה לערך x.

השיפוע של המשיק לעקום בנקודה P_x הוא הגבול $\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{g(x+t)-g(x)}$, כלומר גבול שיפועי המיתרים המחברים את P_x ואת P_{x+t}.

אם f ו־ g גזירות אז שיפוע המשיק הוא

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{g(x+t)-g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot\frac{t}{g(x+t)-g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

משפט קושי אומר שיש נקודה $a<c<b$ כך ששיפוע המשיק ב־ P_c שווה לשיפוע המיתר המחבר את P_a עם P_b. (משפט לגרנז' הוא המקרה הפרטי שבו העקום הוא הגרף של הפונקציה f, כלומר $g(x)=x$ והעקום הוא $\{(x,f(x))\}$).

5.2.3 תנאי מספיק לנקודת קיצון

משפט פרמה אומר שאם x_0 היא נקודת קיצון מקומית של פונקציה גזירה, אז בהכרח $f'(x_0)=0$, וראינו שתנאי זה אינו מספיק (למשל $f(x)=x^3$ בנקודה $x_0=0$). נחפש כעת תנאים מספיקים לכך ש־ x_0 היא נקודת קיצון מקומית (אך נשים לב שתנאים מספיקים אלה לא יהיו הכרחיים).

<u>**משפט.**</u> תהי f מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 כך ש־ f עולה מימין ל־ x_0 ויורדת משמאל לה. אז יש ל־ f מינימום מקומי ב־ x_0. בפרט הדבר נכון אם f גזירה בסביבה (פרט אולי לנקודה x_0 עצמה שבה מספיק שתהיה רציפה) כך ש־ $f'\geq 0$ בסביבה ימנית של x_0 ו־ $f'\leq 0$ בסביבה שמאלית שלה. (וטענה אנלוגית נכונה למכסימום מקומי).

<u>**הוכחה.**</u> החלק הראשון ברור, והשני נובע ממנו כי $f'\geq 0$ ו־ $f'\leq 0$ מבטיחים בהתאמה עליה או ירידה של f.

<u>**דוגמא.**</u> אם $f(x)=(x-1)(x+1)^2$ אז $f'(x)=(x+1)(3x-1)$ והנגזרת מתאפסת עבור $x=-1;\ 1/3$. הסימנים של הנגזרת הם $(+,-,+)$ ולכן $x=-1$ היא נקודת מקסימום מקומי ו־ $x=\frac{1}{3}$ נקודת מינימום מקומי.

אם f גזירה פעמיים בסביבת x_0 ומקיימת $f'(x_0)=0$ ו־ $f''(x_0)\neq 0$, אז f' בהכרח משנה סימן ב־ x_0. כי נניח, למשל, ש־ $f''(x_0)>0$. אז מהגדרת הנגזרת השניה נובע ש־ $\frac{f'(x_0+t)-f'(x_0)}{t}>0$ עבור $|t|>0$ מספיק קטן, אבל $f'(x_0)=0$ ולכן מקבלים כי $f'(x_0+t)>0$ עבור $t>0$ קטן מספיק ו־ $f'(x_0+t)<0$ עבור $t<0$ קטן מספיק בערכו המוחלט. כך קבלנו את המסקנה הבאה

<u>**מסקנה.**</u> תהי f גזירה פעמיים ב־ x_0 ומקיימת $f'(x_0)=0$ ו־ $f''(x_0)\neq 0$. אז x_0 היא נקודת קיצון מקומי של f. מקסימום מקומי אם $f''(x_0)<0$ ומינימום מקומי אם $f''(x_0)>0$.

<u>**הערה.**</u> x_0 יכולה להיות נקודת קיצון מקומי גם אם $f''(x_0)=0$. לדוגמא, ל־ $f(x)=x^4$ יש נקודת מינימום מקומי (וגלובלי) ב־ $x=0$, אך $f''(0)=0$.

5.2.4 בעיות מינימום־מקסימום ואי־שוויונים

נביא כעת דוגמאות לשימושים של המשפטים שהוכחנו.

(i) מיצאו נקודה על הקרן האי־שלילית של ציר y שממנה רואים את הקטע $[1,2]$ שעל ציר x בזווית ראייה מקסימלית. הזווית היא

$$f(y)=\begin{cases}\arctan(2/y)-\arctan(1/y) & y>0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

(נשים לב כי פונקציה זו רציפה ב־ $y=0$).

לכן נחשב

$$f'(y)=\frac{1}{1+(2/y)^2}\cdot\frac{-2}{y^2}-\frac{1}{1+(1/y)^2}\cdot\frac{-1}{y^2}$$

ונפתור את המשוואה $f'(y)=0$. נקבל $2y^2+2=y^2+4$, ולכן $y=\sqrt{2}$ (מכיוון שדרשנו $y\geq 0$). נשאלת השאלה האם זו אכן נקודת מקסימום, ונשים לב שהתשובה לשאלה תהיה חיובית אם נצליח להראות שבכלל יש ל־ f מכסימום: הפונקציה f חיובית לכל $y>0$ ו־ $f(0)=0$, ולכן נקודת המכסימום y_0 חייבת להיות חיובית ממש. ע"ס משפט פרמה צריך להתקיים בה $f'(y_0)=0$, אולם $y_0=\sqrt{2}$ היתה הנקודה היחידה בה f' התאפסה ולכן זוהי נקודת המקסימום של f!

קיום המכסימום נובע מיידית מהטענה הכללית הבאה

****

סוף שעה 40

****

טענה. תהי f רציפה בקרן $[0,\infty)$ כך ש־ $f(0)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. אז f מקבלת מכסימום גלובלי בקרן.

הוכחה. אם $f(x)\leq 0$ לכל $x\geq 0$ אז ערך המקסימום הגלובלי הינו $f(0)=0$ וסיימנו את ההוכחה. לכן נוכל להניח שיש x_1 כך ש־ $f(x_1)>0$ ונסמן $f(x_1)=\varepsilon$. עפ"י הגדרת גבול באינסוף יש $K>0$ כך ש־ $f(x)<\varepsilon$ לכל $x>K$, וע"ס הבחירה $f(x_1)=\varepsilon$ בוודאי ש־ $x_1\leq K$.

הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[0,K]$, ולכן עפ"י משפט ויירשטראס היא מקבלת שם מכסימום, שנסמנו ב־ M, ונראה ש־ M הוא למעשה מכסימום בכל הקרן $[0,\infty)$. ובאמת, אם $x\leq K$ אז בוודאי ש־ $f(x)\leq M$ עפ"י הגדרת M. ואם $x>K$ אז $f(x)<\varepsilon=f(x_1)\leq M$ (כי $x_1\leq K$).

לעשות בכיתה רק אם יש זמן - אך מומלץ לקרוא!

(ii) נשתמש בכלים מתמטיים על מנת להוכיח את עקרון החזרת האור: קרן אור הפוגעת במראה מוחזרת בזווית β השווה לזווית α של הפגיעה במראה.

נבחר קואורדינטות כך שהמראה נמצאת על ציר x ומקור האור נמצא בחלקו החיובי של ציר y (בנקודה $A=(0,h)$). נבחר נקודה B שנמצאת על הקרן המוחזרת מהמראה, ולשם פשטות נניח שצורתה $B=(b,h)$, כלומר, שהיא נמצאת באותו הגובה h כמו הנקודה A. נעזר כעת בעקרון פיזיקלי בסיסי: קרן האור "בוחרת" לנוע במסלול הקצר ביותר היוצא מ־ A פוגע במראה, ומגיע ל־ B. לכן בנקודת הפגיעה במראה, שנסמנה ב־ $(x_0,0)$, יתקיים שהפונקציה $f(x)=\sqrt{h^2+x^2}+\sqrt{h^2+(x-b)^2}$ מקבלת מינימום. נחשב

$$0=f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{2(b-x)}{2\sqrt{h^2+(x-b)^2}}$$

או

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{b-x}{\sqrt{h^2+(x-b)^2}}=\cos\beta$$

כלומר, $\alpha = \beta$.

כמו בכל בעית מינימום/מכסימום, עלינו לוודא שזו אכן נקודת מינימום. ואכן, חישובים פשוטים נוספים (שלא נבצע אותם) מראים שהפתרון למשוואה הרשומה למעלה הינו $x = b/2$, ושהפונקציה יורדת כאשר $x < b/2$ ועולה כאשר $x > b/2$.

ניתן גם לנמק שזו אכן נקודת מינימום ע"י שיקולים דומים לתרגיל הקודם: יש ל־ f מינימום בקטע $[0,b]$ כי היא רציפה והקטע סגור. ומכיוון שיש רק "נקודה קריטית" אחת, המינימום חייב להתקבל בה.

הערה. ניתן להוכיח את חוק החזרת האור גם ללא חשבון דיפרנציאלי. נשקף את B ל־ B' מצדו האחר של ציר ה־x, ואז האורך של כל מסלול היוצא מ־ A פוגע במראה, ומגיע ל־ B הוא כמו האורך של המסלול מ־ A ל־ B' המתקבל ממנו ע"י שיקוף במראה של החלק שאחרי נקודת הפגיעה. אך המסלול הקצר ביותר בין A ל־ B' הוא הקטע הישר בינהן.

(iii) **מיצאו נקודה B על הישר $y = x + 2$ שהיא הקרובה ביותר לנקודה $A = (-1, 0)$.**

נסמן ב־ $d(x) = \sqrt{(x+1)^2 + (x+2)^2}$ את המרחק של הנקודה הכללית $(x, x+2)$ על הישר מהראשית, ונחפש את המינימום של הפונקציה

$$f(x) = d^2(x) = (x+1)^2 + (x+2)^2 \ .$$

נפתור את המשוואה $0 = f'(x) = 4x + 6$ ונקבל $x = -\frac{3}{2}$, ולכן $B = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. (הוכיחו שזה אכן מינימום!).

שימו לב שהוקטור $B - A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ניצב לישר L. זו, כמובן, תופעה כללית ולכל ישר L ונקודה $A \notin L$, הנקודה $B \in L$ שהינה הקרובה ביותר ל־ A מקיימת שהוקטור $B - A$ ניצב ל־ L (הוכיחו תרגיל).

(iv) **הוכיחו כי $x \arctan x > \ln \sqrt{1 + x^2}$ לכל $x \neq 0$.**

נגדיר $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$ ונגזור כדי "לחקור" את הפונקציה ולהסיק ש־ $f(x) > 0$ לכל $x \neq 0$. חישוב ישיר מראה ש־ $f'(x) = \arctan x$ ולכן הנגזרת שלילית עבור $x < 0$ וחיובית עבור $x > 0$, ויש ל־ f מינימום ממש בנקודה $x = 0$. אך $f(0) = 0$ ולכן $f(x) > 0$ לכל $x \neq 0$.

(v) **הוכיחו כי $\sin x > x - x^3/6$ לכל $x > 0$.**

נגדיר $f(x) = \sin x - x + x^3/6$ ונחקור את התנהגותה. $f(0) = 0$ ולכן אם נראה ש־ $f'(x) > 0$ לכל $x > 0$ נקבל שהפונקציה מונוטונית עולה ממש עבור $x > 0$ ומכאן שהיא חיובית. כלומר, די אם נראה שלכל $x > 0$

$$f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2 > 0 \ .$$

קיבלנו פונקציה f' שמקיימת $f'(0) = 0$, ולכן די אם נראה שנגזרתה מקיימת $(f')'(x) = f''(x) > 0$ לכל $x > 0$. כלומר, עלינו לבדוק אם

$$f''(x) = -\sin x + x > 0$$

לכל $x > 0$. וזה אכן נכון כי ידוע ש־ $\sin x < x$ לכל $x > 0$.

5.3 כלל לופיטל

5.3.1 כלל לופיטל

כלל לופיטל הינו כלי חשוב לחישוב גבולות שכללי האריתמטיקה הרגילים אינם מספיקים לחישובם, כמו גבולות מהצורה "$\frac{0}{0}$" ו־ "$\frac{\infty}{\infty}$".

משפט.[לופיטל ל־ $\frac{0}{0}$ בנקודה סופית] תהיינה f ו־ g פונקציות מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות את התנאים הבאים

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

(ii) $g'(x) \neq 0$ בסביבה.

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה ל־ L.

אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל־ L.

הוכחה. נגדיר $f(a) = g(a) = 0$ **ואז** f, g **תהיינה רציפות גם ב־** a **עפ"י** (i).
לכל x **בסביבה (ובלי הגבלת הכלליות נניח כי** $x > a$**) הפונקציות מקיימות את תנאי משפט קושי בקטע** $[a, x]$**, ולכן יש נקודה** $a < c_x < x$ **כך שמתקיים**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x\to a]{} L$$

כי $\lim_{x\to a} c_x = a$.

דוגמא. $\lim_{x\to 0}(1 - \cos^3 x) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$**, ולכן שימוש בלופיטל יתן**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{\cos x} = 0 \,.$$

משפט.[לופיטל ל־ $\frac{\infty}{\infty}$ בנקודה סופית] תהיינה f ו־ g פונקציות מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של a ומקיימות את התנאים הבאים

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

(ii) $g'(x) \neq 0$ בסביבה.

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים ושווה ל־ L.

אז גם הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל־ L.

הוכחה. **נבדוק גבול מימין. נקבע** $\varepsilon > 0$ **ונמצא** $b > a$ **כך ש־** $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon$ **לכל** $a < c < b$**. נקבע כעת** $a < x < b$**, ואז**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} \cdot \frac{g(x) - g(b)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(b)}.$$

שני הגורמים האחרונים שואפים ל־ 1 **כאשר** $x \to a$**. להערכת הגורם הראשון נשתמש במשפט קושי ונציג אותו בצורה** $f'(c_x)/g'(c_x)$ **עבור** $x < c_x < b$ **מתאים, וביטוי זה קרוב ל־** L **עד כדי** ε **עפ"י בחירת** b.

טענה. שני המשפטים נכונים גם לגבולות באינסוף, כלומר לחישוב $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

הוכחה. נגדיר $F(t)=f(\frac{1}{t})$, $G(t)=g(\frac{1}{t})$ ואז גם $f(t)=F(\frac{1}{t})$, $g(t)=G(\frac{1}{t})$. כמו כן $f'(t)=-\frac{1}{t^2}F'(\frac{1}{t})$ ו־ $g'(t)=-\frac{1}{t^2}G'(\frac{1}{t})$. לכן $\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{F(\frac{1}{t})}{G(\frac{1}{t})}$ וכן $\frac{f'(t)}{g'(t)}=\frac{F'(\frac{1}{t})}{G'(\frac{1}{t})}$.
וכעת נשתמש בלופיטל לגבול מימין ב־ 0 לפונקציות F ו־ G.

הערות. (i) המשפטים תקפים גם כאשר הגבול L הוא אינסופי, פשוט מסתכלים על $\frac{g}{f}$ במקום על $\frac{f}{g}$.

(ii) המשפטים בנקודה סופית נכונים גם לגבולות חד־צדדיים.

(iii) כלל לופיטל נכון רק כאשר הוא נחוץ באמת: כלומר, כאשר הגבול של f/g הוא מהצורה $0/0$ או ∞/∞. בכל שאר המקרים נחשב את הגבול באופן ישיר בלי להשתמש בכלל לופיטל. שימוש במשפט במקרים כאלה יכול אפילו לתת תוצאות לא נכונות! לדוגמא, ברור ש־ $\lim_{x\to0}\frac{1+x}{1+2x}=1$, אולם שימוש (שגוי ואסור!) בלופיטל היה נותן $1/2$.

(iv) אם גזרנו וקיבלנו ש־ $f'(a)=g'(a)=0$, אנו יכולים להשתמש בלופיטל שוב ולחשב את $f''(a)$ ו־ $g''(a)$. אם גם $f''(a)=g''(a)=0$, נמשיך לגזור עד המספר הטבעי n הקטן ביותר כך ש־ $g^{(n)}(a)\neq0$ ואז $\lim_{x\to a}f(x)/g(x)=f^{(n)}(a)/g^{(n)}(a)$. (הערה דומה תקפה גם עבור שאר ה"וריאציות" של כלל לופיטל). לדוגמא

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2\,.$$

(v) המשפט אומר שכאשר הגבול של f'/g' קיים אז גם הגבול של f/g קיים ושניהם שווים. הטענה ההפוכה אינה נכונה. למשל, עבור $f(x)=x^2\sin(1/x)$ ו־ $g(x)=\sin x$ נקבל ש־ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=0$ (כי $x\sin(1/x)\to0$ ו־ $\frac{x}{\sin x}\to1$). אך למנת הנגזרות $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}$ אין בכלל גבול בנקודה $x=0$.
גם כאן, כמו שכבר ראינו בהערה (ii), הכלל הוא נוח מאוד: מותר להשתמש במשפט לופיטל רק כשצריך אותו.

(vi) לפעמים יש צורך להשתמש בכלל לופיטל בשילוב עם עוד שיטות. למשל

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2x\sin x}{e^x-1}\,.$$

אם נשתמש בלופיטל שוב ונמשיך לגזור נקבל ביטויים מסובכים וארוכים יותר. אך נשים לב כי $3\cos^2x\to3$, ולכן נחשב עפ"י לופיטל רק את

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^x}=1$$

ונסיק מאריתמטיקה של גבולות כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}3\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=3\cdot 1=3 .$$

דוגמאות. (i) לפעמים ניתן להשתמש בכלל לופיטל עבור ביטויים מהצורה של "$\infty-\infty$". למשל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\Big) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\end{aligned}$$

(ii) ע"י שימוש בלוגריתמים אפשר גם לחשב גבולות של ביטויים בעייתיים עם חזקות. למשל, על מנת לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0^+}x^x$ (שהינו מהצורה "0^0") נחשב במקום זאת את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x^x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

וכעת נשתמש ב־ $x^x=e^{\ln(x^x)}$ ונקבל $\lim_{x\to 0^+}x^x=e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(x^x)}=e^0=1$.

****
סוף שעה 42
****

(iii) נחשב את $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\sin x}$. זו דוגמא נוספת לשימוש בלופיטל על מנת לחשב גבולות של ביטויים עם חזקות (כאשר כאן הגבול מימין הוא מהצורה "1^∞" והגבול משמאל מהצורה "$1^{-\infty}$"). ניקח לוגריתם של הביטוי ונקבל

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{\cos x}=1 .$$

אך $(1+x)^{1/\sin x}=e^{\ln(1+x)^{1/\sin x}}$ ולכן $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\sin x}=e^1=e$.

(iv) כאשר מנסים לחשב גבול באמצעות לופיטל, יש למצוא מהי הדרך ה"טובה ביותר" להציג את הביטוי הנתון כשבר מהצורה f/g. לדוגמא, אם ננסה להשתמש בכלל לופיטל על $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}$ בצורתו המקורית נקבל $\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$, וזה ביטוי אפילו יותר מסובך מהביטוי המקורי! אולם, אם נרשום את הביטוי של הגבול המבוקש באופן אחר, הפתרון יהיה פשוט

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1/x^2}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{1/x^2}}=0 .$$

החישוב הזה מראה שהפונקציה $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=0$ וכי $f'(0)=0$.

באופן דומה ניתן להראות כי $\lim_{x\to 0}\frac{q(x)e^{-1/x^2}}{p(x)}=0$ לכל זוג פולינומים p,q ולקבל מכאן כי f גזירה מכל סדר ב־ $x=0$ וכי $f^{(n)}(0)=0$ לכל n.

5.3.2 סדרי גודל וקצב התכנסות של פונקציות

לעתים צריך להשוות שתי פונקציות ששואפות ל־ 0 או ל־ ∞, ורוצים לקבוע מי שואפת "יותר מהר". כך למשל העובדה ש־ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^5+8x+1} = 0$ אומרת שהביטוי x^5+8x+1 שואף לאינסוף "יותר מהר" מאשר x^2+3.

לעומת זאת $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ אומר ש־ x ו־ $\sin x$ שואפים בנקודה 0 לאפס "באותה מהירות".

אנחנו נאמר לפעמים כי x^2+3 היא באינסוף מסדר גודל קטן יותר מאשר x^5+8x+1.

נוח להשתמש ב"סקלות" של פונקציות מוכרות ולבדוק את מהירות השאיפה לאפס או לאינסוף ביחס לאברי הסקלה. לעתים קרובות עושים השוואה עם המשפחה $\{(\log x)^\alpha : \alpha > 0\}$ (הסקלה הלוגריתמית), או עם $\{x^\alpha : \alpha > 0\}$ (הסקלה הפולינומיאלית) או עם $\{e^{\alpha x} : \alpha > 0\}$ (הסקלה המעריכית).

כך למשל x^2+3 באינסוף הוא מאותו סדר גודל כמו x^2 ואילו x^5+8x+1 כמו x^5.

שלוש הסקלות האלה בודקות מהירויות שאיפה שונות. כך, כשבודקים את מהירות השאיפה לאינסוף באינסוף, אז כל אברי הסקלה הלוגריתמית "איטיים יותר" מאברי הסקלה הפולינומיאלית, ואלה "איטיים" מאברי הסקלה המעריכית: לכל $\alpha > \beta > 0$ מתקיים (הוכיחו בעזרת לופיטל)

$$\frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ; \quad \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

לפעמים משתמשים בסימונים הבאים:

אם $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, כלומר f מ"סדר גודל" קטן יותר מאשר g בנקודה a, נסמן זאת ע"י $f(x) = o(g(x))$ כאשר $x \to a$ ("או קטן").

אם יש קבוע K כך ש־ $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le K$ בסביבת a (כלומר, סדר הגודל של f הוא לכל היותר כמו של g), נאמר כי $f(x) = O(g(x))$ כאשר $x \to a$ ("או גדול ").

נשתמש באותם סימונים גם כאשר במקום $x \to a$ לוקחים $x \to \infty$.

****
סוף שעה 43
****

5.4 קמירות

5.4.1 פונקציות קמורות

<u>הגדרה.</u> (הגדרה גיאומטרית לקמירות) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר ש־ f קמורה ב־ I אם כל מיתר המחבר איזשהן שתי נקודות על הגרף שלה נמצא כולו מעל הגרף. לדוגמא, הפונקציה $f(x) = x^2$ קמורה ב־ $(-\infty,\infty)$ ו־ $g(x) = x^3$ קמורה ב־ $[0,\infty)$.

f תקרא קעורה בקטע I אם המיתרים לגרף שלה נמצאים מתחת לגרף.

זו הגדרה גיאומטרית ו"תיאורית". כדי לתרגם אותה לשפה מתמטית מדוייקת נעזר בגיאומטריה אנליטית.

תהיינה $A=(a_1,a_2)$ ו־ $B=(b_1,b_2)$ שתי נקודות במישור. הסכום וההפרש שלהן מוגדר ע"י $A\pm B=(a_1,a_2)\pm(b_1,b_2)=(a_1\pm a_2,b_1\pm b_2)$. אם t מספר ממשי נגדיר $tA=t(a_1,a_2)=(ta_1,ta_2)$. (בדקו שאתם שולטים בנוסחאות ומבינים את המשמעות הגיאומטרית שלהן).

את הישר העובר דרך הנקודות A ו־ B נוכל לתאר ע"י הנוסחה

$$B+t(A-B)=tA+(1-t)B \quad \text{כאשר} \quad t\in\mathbb{R}\ .$$

הצגה זו נקראת ההצגה הפרמטרית של הישר (מכיון שהנקודות השונות בישר מתאימות לבחירות השונות של ערך הפרמטר t). נשים לב שעבור $t=0$ מקבלים את הנקודה B ועבור $t=1$ את A. אם $0\le t\le 1$ מקבלים את הנקודות בקטע המחבר את B ו־ A.

אם נבחר $A=(x,f(x))$ ו־ $B=(y,f(y))$, נקבל כי הקטע המחבר בינהן, שהוא המיתר לגרף של f הנקבע על ידן, מתואר ע"י הנוסחה

$$(tx+(1-t)y,tf(x)+(1-t)f(y)) \quad \text{כאשר} \quad 0\le t\le 1\ .$$

קאורדינטת y של הנקודה על המיתר המתאימה לנקודה $x_t=tx+(1-t)y$ היא לכן $tf(x)+(1-t)f(y)$, ואילו קואורדינטת y של הנקודה על הגרף של f המתאימה ל־ x_t הוא $f(x_t)$. ולכן התנאי שהמיתר בנקודה יהיה מעל הגרף מתואר ע"י אי השוויון $f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$, ופונקציה היא קמורה כאשר אי שוויון זה נכון לכל x,y ולכל $0\le t\le 1$. כך קבלנו הגדרה שקולה לקמירות:

__הגדרה.__ (הגדרה אנליטית לקמירות) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. נאמר ש־ f קמורה ב־ I אם

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

לכל $x,y\in I$ ולכל $0\le t\le 1$.

אם יש אי־שוויון חריף לכל $x,y\in I$ ולכל $0<t<1$ נאמר ש־ f קמורה ממש ב־ I.

הפונקציה f תקרא קעורה (או קעורה ממש) בקטע אם מתקיימים אי־השוויונים ההפוכים.

__למה.__[שיפועי מיתרים] שיפועי המשיקים של פונקציה קמורה עולים. וביתר פירוט: אם f קמורה ב־ I ואם $x_1<x_2<x_3$ הן שלוש נקודות בקטע, אז

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

__הוכחה.__ הטענה "ברורה" בשרטוט, ונוכיח במדויק רק את אי השוויון הראשון.

נציג $x_2=tx_1+(1-t)x_3$, ואז $x_2-x_1=(1-t)(x_3-x_1)$. תנאי הקמירות אומר כי $f(x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_3)$, או $f(x_2)-f(x_1)\le(1-t)(f(x_3)-f(x_1))$. וכעת נחלק.

משפט. אם פונקציה f קמורה בקטע, אז היא רציפה בפנים שלו (כלומר, פרט אולי לנקודות הקצה).

הוכחה. נבחר $a, b \in I$ ונקודה $a < c < b$, ונראה ש־ f רציפה מימין ב־ c. שימוש בלמת השיפועים עבור $c < y < b$ נותן

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

וכשנכפיל ב־ $y - c$ ונשאיף $y \to c^+$ תתקבל התוצאה.

שימו לב כי f אינה חייבת להיות רציפה בנקודות הקצה. למשל, $f \equiv 0$ על $(0, 1)$ ו־ $f(1) = 6$.

משפט. תהי f גזירה בקטע I. אז f קמורה ב־ I אםם לכל $a \in I$ המשיק לפונקציה בנקודה a נמצא כולו <u>מתחת</u> לגרף שלה, כלומר $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ לכל $x \in I$.

הוכחה. נוכיח רק שהמשיקים לפונקציה קמורה נמצאים מתחת לגרף (והוכיחו כתרגיל את הכיוון השני). נניח, למשל, כי $x > a$ ונקבע $a < y < x$. עפ"י למת השיפועים $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$, וכשנשאיף $y \to a$ תתקבל התוצאה.

משפט. תהי f גזירה בקטע I. אז f קמורה ב־ I אםם f' היא פונקציה מונוטונית עולה ב־ I. אם f' מונוטונית עולה ממש ב־ I אז f קמורה ממש.

הוכחה. תהי f קמורה ותהיינה $a < b$ שתי נקודות בקטע. למת השיפועים נותנת לכל $a < x < y < b$ כי

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(y)}{b - y}$$

וכאשר $x \to a$ (או $y \to b$) אגף שמאל (ימין) מתכנס ל־ $f'(a)$ (או ל־ $f'(b)$).

להפך, נניח כי f' לא יורדת, ונקבע $x, y \in I$ ו־ $z = tx + (1 - t)y$ עבור $0 < t < 1$. עפ"י משפט לגרנז' יש $x < b < z < c < y$ כך ש־

$$f(z) - f(x) = f'(b)(z - x) = f'(b)(1 - t)(y - x)$$

וכך ש

$$f(y) - f(z) = f'(c)(y - z) = f'(c)t(y - x) \; .$$

כשנכפול את המשוואה הראשונה ב־ t ואת השניה ב־ $1 - t$ ונשתמש בנתון ש־ $f'(b) \leq f'(c)$ נקבל

$$t\{f(z) - f(x)\} \leq (1 - t)\{f(y) - f(z)\}$$

וכעת נבודד את $f(z)$.

מסקנה. תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע I. אזי f קמורה ב־ I אםם $f'' \geq 0$ ב־ I.
אם $f''(x) > 0$ בכל נקודה פנימית $x \in I$ אז f קמורה ממש ב־ I.

הוכחה. f קמורה אםם f' לא יורדת, אםם $f'' = (f')' \geq 0$.

הערה. המסקנה נותנת קריטריון קל מאוד לבדיקה. למשל $(e^x)'' = e^x \geq 0$ אומר ש־ e^x קמורה. אך חשוב לזכור שפונקציה קמורה אינה חייבת להיות גזירה. למשל $f(x) = |x|$ קמורה, אך אי אפשר לקבל זאת ע"י הסתכלות בנגזרות (והפונקציה $-|x|$ קעורה ונגזרותיה, במקומות בהן הן קיימות מתלכדות עם אלה של f).

דוגמאות. (i) $(e^x)'' = e^x > 0$ לכל x, ולכן e^x היא פונקציה קמורה ממש ב־ $(-\infty, \infty)$.

(ii) ניקח מספר ממשי $p > 1$. אז מתקיים ש־ $(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$ לכל $x > 0$ ולכן $f(x) = x^p$ קמורה ממש בקרן $[0, \infty)$. אם p שלם אז f מוגדרת גם בקרן $(-\infty, 0]$, והיא קמורה שם כאשר p זוגי וקעורה כשהוא איזוגי.

(iii) זכרו שפונקציה קמורה איננה חייבת להיות גזירה, וכמובן שכאשר f אינה גזירה לא נוכל להשתמש בקריטריונים הנעזרים בנגזרות. למשל, הפונקציה $f(x) = -|x|$ היא קעורה למרות שבכל נקודה x שבה f גזירה פעמיים מתקיים ש־ $f'' = 0 \geq 0$!

(iv) פונקציות קמורות וקעורות מופיעות באופן טבעי במודלים שונים בתחומי המדע וההנדסה. הנה דוגמא כזו מתחום הכלכלה.
נסמן ב־ $f(x)$ את עלות הייצור של x יחידות ממוצר כלשהו. עקרון בסיסי בכלכלה, "עקרון העלות השולית הפוחתת", אומר שבתנאים מאוד כלליים ורחבים יש "יתרון לגודל" והעלות של ייצור יחידה אחת נוספת של המוצר הולכת וקטנה ככל שרמת הייצור גדלה (כלומר כאשר x גדל) . בשפה מתמטית זה אומר שהעלות השולית, כלומר $f'(x)$, היא פונקציה מונוטונית יורדת. ולפי המשפט f חייבת להיות קעורה!
כך קבלנו תופעה מעניינת: עקרונות כלליים של תורת הכלכלה מכתיבים שפונקציות המופיעות במודלים כלכליים מסויימים חייבות להיות קמורות או קעורות.

5.4.2 שרטוט גרפים

השימוש בנגזרות נותן לנו אינפורמציה רבה על צורת הגרף של פונקציה ־ תחומי עלייה וירידה, נקודות מינימום ומקסימום מקומיים וגלובאליים ותחומי קמירות וקעירות. נדון כעת בשני מושגים נוספים.

הגדרה. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של נקודה a. נאמר ש־ a היא נקודת התפתלות של f אם יש בנקודה מעבר בין תחום קמירות של הפונקציה לתחום קעירות שלה. כלומר, f קמורה בסביבה שמאלית של a וקעורה בסביבה ימנית שלה ־ או להפך.

ברור שאם f גזירה פעמיים ו־ f'' משנה סימן ב־ a אז a נקודות פיתול ־ ובהכרח $f''(a)=0$. אך ההגדרה היא גיאומטרית, ואין צורך בכלל ש־ f תהיה מוגדרת, או רציפה, או גזירה בנקודה.

דוגמאות. (i) $f(x)=x^3$. כאן $f''(x)=6x$ חיובית בקרן $(0,\infty)$ (ולכן f קמורה שם) ושלילית ב־ $(-\infty,0)$ (ולכן f קעורה שם), ולכן $a=0$ נקודת פיתול.

(ii) $f(x)=1/x$ עבור $x\neq 0$. גם כאן $f''(x)=2/x^3$ חיובית בקרן $(0,\infty)$ ושלילית ב־ $(-\infty,0)$, ולכן $a=0$ נקודת פיתול למרות ש־ f אינה מוגדרת בה כלל.

(iii) יש להזהר מבלבול בהגדרות. ההגדרה איננה ש־ $f''(a)=0$! כבר ראינו נקודת פיתול שבה f אינה מוגדרת כלל, והפונקציה $f(x)=x^4$ היא קמורה, ולכן אין לה נקודות פיתול ־ ובכל זאת $f''(0)=0$.

הגדרה. אם $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$ אז הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה של f ב־ ∞. (לדוגמא, ציר ה־ x מהווה אסימפטוטה ל־ $f(x)=1/x$ ב־ ∞). באופן דומה מגדירים אסימפטוטה של f ב־ $-\infty$.
אם $\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\infty$ נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה $(a,0)$ אסימפטוטה מימין של f ב־ a. באופן דומה מגדירים אסימפטוטה משמאל. (לדוגמא, ציר ה־ y מהווה אסימפטוטה של $f(x)=1/x$ ב־ 0).

אם $y=ax+b$ הוא אסימפטוטה של f ב־ ∞ אז $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$ ומכאן נקבל נוסחאות ל־ a ו־ b:

(a) חלוקה של $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$ ב־ x תתן כי גם $\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\to 0$. אך $\frac{b}{x}\to 0$ ולכן $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(b) ברור כי $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.
חישוב קל מראה שאם הגבולות ב־ (a) ו־ (b) קיימים אז הישר $y=ax+b$ הוא אסימפטוטה של f ב־ ∞.

דוגמא. נחקור את הפונקציה $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ (ונשרטט את הגרף שלה).

- f מוגדרת ורציפה לכל x כמנה של פונקציות רציפות, כאשר הפונקציה שבמכנה איננה מתאפסת.
- f אי־זוגית מכיוון ש־ $f(-x)=\frac{-x}{1+x^2}=-f(x)$ לכל x.
- נקודת החיתוך היחידה של f עם הצירים היא הנקודה $(0,0)$.
- $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ולכן f מונוטונית עולה כאשר $x\in(-1,1)$ ומונוטונית יורדת כאשר $x<-1$ או $x>1$. הנקודות $(-1,-1/2)$ ו־ $(1,1/2)$ הן נקודות מינימום מקומי ומקסימום מקומי בהתאמה.
- $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$, ולכן הנקודות $(-1,-1/2)$ ו־ $(1,1/2)$ הן, למעשה, נקודות המינימום והמקסימום הגלובאליים בהתאמה.
- $f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ ולכן f'' משנה סימן ב־ $x=\pm\sqrt{3}$ וב־ $x=0$. אלה נקודות הפיתול של f, והיא קעורה ב־ $(-\infty,-\sqrt{3}]$ ו־ $[0,\sqrt{3}]$, וקמורה ב־ $[-\sqrt{3},0]$ ו־ $[\sqrt{3},\infty)$.

- כדי למצוא אסימפטוטות ב־ $\pm\infty$ נחשב

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

לכן יש אסימפטוטה ב־ $\pm\infty$, והיא הישר $L(x) \equiv 0$.

השתמשו כעת באינפורמציה שקבלנו ושרטטו את הגרף של f.

****
סוף שעה 45
****

5.4.3 הוכחת אי־שוויונים באמצעות קמירות

נכתוב את תנאי הקמירות בצורה קצת יותר נוחה לשימוש: הפונקציה f קמורה בקטע I אםם לכל $x_1, x_2 \in I$ ולכל $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ כך ש־ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ מתקיים

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (*)$$

כי פשוט החלפנו x, y ב־ x_1, x_2, ואת t ו־ $1-t$ ב־ λ_1, λ_2.
כדי להבין מה ניסוח זה אומר נסתכל תחילה באי השוויון המתקבל כאשר בוחרים $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, כלומר באי השוויון $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. במילים הוא אומר כי "ממוצע ערכי f גדול או שווה לערכה בנקודת הממוצע". אי השוויון $(*)$ הוא הכללה של אותו עקרון כאשר מרשים לא רק ממוצעים רגילים אלא גם <u>ממוצעים משוקללים</u> עם משקלות λ_1, λ_2 כלשהם.
הכתיבה $(*)$ גם אומרת לנו איך להכליל לממוצעים (משוקללים!) של מספר סופי כלשהו של נקודות

<u>טענה.</u> אם f קמורה בקטע I, אז לכל מספר סופי של נקודות $x_1, \ldots, x_n \in I$ ולכל $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ כך ש־ $\sum \lambda_j = 1$ מתקיים

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \qquad (**)$$

<u>הוכחה.</u> ההוכחה פשוטה באינדוקציה ולא ניתן אותה.

<u>דוגמאות.</u> (i) אי־שוויון הממוצעים: אם $a_1, \ldots, a_n > 0$ אז

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \, .$$

נעזר ב־ $(**)$ עם הפונקציה הקמורה $f(x) = e^x$ ועם $x_j = \ln a_j$ ונקבל

$$
\begin{aligned}
(***) \qquad \prod_{j=1}^{n} a_j^{\frac{1}{n}} &= \prod_{j=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln a_j} = e^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln a_j} = f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \\
&\le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{\ln a_j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j
\end{aligned}
$$

הערה. באותו אופן אפשר גם להוכיח הכללה של אי השוויון לממוצעים משוקללים: לכל $a_1, \ldots, a_n > 0$ ומשקלות $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ כך ש־ $\sum \lambda_j = 1$ מתקיים

$$
\prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j} \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \ .
$$

(אי השוויון הקודם מתקבל כשלוקחים $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$). אי השוויון $(***)$ מקבל אז את הצורה

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} a_j^{\lambda_j} &= \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j \ln a_j} = e^{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \ln a_j} = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \\
&\le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{\ln a_j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j
\end{aligned}
$$

(ii) אי־שוויון קושי־שוורץ: אם $a_j, b_j > 0$, אז

$$
\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2} \ .
$$

שימו לב שזהו אי שוויון הומוגני, ולכן די להראות שיש $s, t > 0$ כך שאי השוויון נכון עבור $\alpha_j = s a_j$ ועבור $\beta_j = t b_j$. כי אז נוכל, פשוט, להוציא את s ו־ t מתוך הסכומים ולצמצם אותם.
ע"י לקיחת $s = \frac{1}{\left(\sum a_j^2\right)^{1/2}}$ ו־ $t = \frac{1}{\left(\sum b_j^2\right)^{1/2}}$, נקבל כי מספיק להוכיח את אי השוויון במקרה המיוחד ש־ $\sum a_j^2 = \sum b_j^2 = 1$, ועלינו להוכיח כי אז

$$
\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le 1 \ .
$$

נשתמש ב־ $(**)$ עם הפונקציה הקמורה $f(x) = x^2$, עם הנקודות $x_j = \frac{a_j}{b_j}$ ועם ה"משקלות" $\lambda_j = b_j^2$ (ושימו לב כי הנרמול שבחרנו, $\sum b_j^2 = 1$, אומר שאכן $\sum \lambda_j = 1$), ונקבל

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \cdot \frac{a_j}{b_j}\right)^2 = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \left(\frac{a_j}{b_j}\right)^2 = \sum a_j^2 = 1
\end{aligned}
$$

ולכן גם $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le 1$.

5.5 משפט טיילור

5.5.1 קירוב לינארי

לאמר ש־ f רציפה בנקודה a פירושו שערכי f מאוד "קרובים" לפונקציה הקבועה $f(a)$ כאשר x "קרוב" ל־ a. באופן מתמטי רציפות ב־ a פירושה שאם מציגים

$$f(x) = f(a) + e(x)$$

כאשר $e(x)$ הוא השגיאה בהערכת $f(x)$ ע"י הקבוע $f(a)$, אז שגיאה זו מקיימת $\lim_{x\to a} e(x) = 0$ או, בסימון שהכנסנו $e(x) = o(1)$ כאשר $x \to a$.

הגרף של פונקציה קבועה הוא קו ישר אופקי, ומתקבל על הדעת שאם נרשה קווים ישרים שאינם בהכרח אופקיים נוכל לקבל קירובים טובים יותר. כאשר מנסים לשרטט קירוב כזה (שרטטו!) מגלים מהר כי הקו הישר "הטוב ביותר" הוא הישר המשיק לפונקציה בנקודה. נראה כעת מה זה אומר באופן מתמטי.

משוואת הישר עם שיפוע m העובר דרך נקודה (a,b) היא $y = b + m(x-a)$. אם f גזירה ב־ a, אז השיפוע של הישר המשיק לגרף בנקודה $(a, f(a))$ הוא $f'(a)$ ומשוואת הישר המשיק היא $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. נציג לכן

$$f(x) = \Big(f(a) + f'(a)(x-a)\Big) + \alpha(x)$$

כאשר $\alpha(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ הינו "השגיאה" בקירוב f ע"י הישר המשיק. ואז נשים לב כי לא רק שמתקיים $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, אלא שהשאיפה לאפס היא מהירה יותר, מהגדרת הנגזרת נקבל כי אפילו

$$\frac{\alpha(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

כלומר, השגיאה היא ממש מסדר גודל קטן יותר מאשר הקירבה של x ל־ a, $\alpha(x) = o(x-a)$ כאשר $x \to a$.

המשיק לפונקציה הינו הישר <u>היחיד</u> שנותן קירוב ל־ f עם שגיאה $\alpha(x)$ המקיימת $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{x-a} = 0$. ליתר דיוק

<u>**משפט.**</u> הפונקציה f גזירה בנקודה a אםם יש קבועים A, B ופונקציה $\alpha(x)$ המקיימת $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{x-a} = 0$ כך ש

$$. \ f(x) = A + B(x-a) + \alpha(x)$$

במקרה זה $A = f(a)$ ו־ $B = f'(a)$.

<u>**הוכחה.**</u> ראינו כבר שאם f גזירה ב־ a התנאים מתקיימים. להפך, מעבר לגבול בנוסחה כאשר $x \to a$ מראה כי $A = f(a)$ (כי בוודאי ש־ $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$), והנוסחה ל־ B נובעת מ־

$$. \ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-A}{x-a} = B + \frac{\alpha(x)}{x-a} \longrightarrow B$$

דוגמא. נשתמש במשפט כדי לתת הוכחה נוספת לכלל השרשרת. נניח כי $b = f(a)$ ועלינו להוכיח כי $(g\circ f)'(a) = g'(b)f'(a)$. ע"י שינויי משתנה והוספת קבועים נוכל להניח כי $a = b = f(a) = g(b) = 0$, ואז עפ"י הנתון $f(x) = Ax + \alpha(x)$ עם $\alpha(x) = o(x)$ כאשר $x \to 0$, ו־ $g(y) = By + \beta(y)$ עם $\beta(y) = o(y)$ כאשר $y \to 0$. נציב $y = f(x) = Ax + \alpha(x)$ ונקבל כי

$$g(f(x)) = B(Ax + \alpha(x)) + \beta(Ax + \alpha(x)) = ABx + \gamma(x)$$

כאשר $\gamma(x) = B\alpha(x) + \beta(Ax + \alpha(x)) = o(x)$ כי $Ax + \alpha(x) = O(x)$.

5.5.2 נוסחת טיילור

ראינו שרציפות של פונקציה f בנקודה a פירושה ש־ f ניתנת לקירוב בסביבת הנקודה a ע"י פונקציה קבועה. ליתר דיוק, $f(x) = f(a) + e(x)$ עם $e(x) \to 0$ כאשר $x \to 0$. זהו תיאור "איכותי" בלבד: תיאור כמותי צריך גם לתת הערכה על שגיאת הקירוב $e(x)$.

אם f גזירה בסביבת הנקודה a נוכל לקבל הערכה כזו בעזרת משפט לגרנז': יש נקודה c בין a לבין x כך ש־ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, וכך אפשר לקבל, למשל, כי $|e(x)| \le M|x-a|$ עבור $M = \sup|f'(x)|$.

ראינו כבר שאם f גזירה ב־ a נוכל לקבל קירוב טוב יותר אם נרשה ישרים כלליים (ולאו דוקא אופקיים): הישר המקרב ה"טוב ביותר" הוא הישר המשיק $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, המתייחס לא רק לערך הפונקציה ב־ a, אלא גם ל"כיוון" של הגרף. (אך נשים לב ששוב אין לנו עדיין הערכה לשגיאה).

אם נרשה משפחה גדולה יותר של פונקציות מקרבות אפשריות, יש לצפות שנוכל לקבל גם קירובים טובים יותר. נוסחת טיילור נותנת, בהנחה ש־ f גזירה n פעמים ב־ a, את הקירוב הטוב ביותר של f בסביבת a בעזרת פולינום ממעלה n.

הגדרה. תהי f פונקציה גזירה n פעמים ב־ a. פולינום טיילור ממעלה n של f המתאים לנקודה a הוא הפולינום

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j. \end{aligned}$$

עבור $n = 0$ מתקבל הקירוב של f ע"י הפונקציה הקבועה $T_0(x) \equiv f(a)$, ועבור $n = 1$ מתקבל הקירוב הלינארי $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, שהינו המשיק לגרף הפונקציה בנקודה a.

שימו לב כי לכל n מתקיים $T_n(a) = f(a)$ ו־ $T_n'(a) = f'(a)$. ובאופן כללי

למה. תהי f גזירה n פעמים ב־ a ויהי T_n פולינום טיילור שלה. אז ערכי T_n ו־ f וכן ערכי נגזרותיהם עד סדר n מתלכדים בנקודה a, כלומר, $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ לכל $k \le n$.

הוכחה. באופן כללי, בהנתן פולינום $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j(x-a)^j$ ממעלה n, אז לכל k הנגזרת ה־k־ית בנקודה a נתונה ע"י $p^{(k)}(a)=k!a_k$. ואמנם, עבור $j<k$ הנגזרת ה־k־ית של $(x-a)^j$ היא זהותית אפס, עבור $j>k$ הביטוי $(x-a)$ נשאר עם חזקה חיובית ולכן מתאפס בנקודה $x=a$, והביטוי היחידי שנשאר הוא $\left(a_k(x-a)^k\right)^{(k)}=k!a_k$. בפרט

$$T_n^{(k)}(a)=k!\cdot\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=f^{(k)}(a)\ .$$

דוגמאות. (i) כדי למצוא את פולינום טיילור של $f(x)=e^x$ בסביבת $a=0$, נשים לב כי $f^{(n)}(x)=e^x$ לכל n, ולכן $f^{(n)}(0)=1$ לכל n ופולינום טיילור הוא

$$T_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\ .$$

(ii) כדי למצוא את פולינום טיילור של $f(x)=\sin x$ בסביבת $a=0$, נחשב את הנגזרות של הפונקציה ב־ $a=0$. נשתמש ב

$$f'(x)=\cos x\quad;\quad f''(x)=-\sin x\quad;\quad f^{(3)}(x)=-\cos x\quad;\quad f^{(4)}(x)=f(x)$$

ונקבל שהנגזרות ב־ 0 הן $1,0,-1,0,\ldots$ (עם מחזור של 4). ופולינום טיילור של $\sin x$ הוא לכן

$$T_{2m+1}(x)=T_{2m+2}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^m\,\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

כאשר $m=0,1,2,3\ldots$.

****
סוף שעה 47
****

כאשר מחשבים את $T_n(x)$ מקבלים, כמובן, רק קירוב לערך $f(x)$ "האמיתי". נסמן ב־ $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ את השגיאה (או השארית) בחישוב מקורב זה, ואנחנו כבר יודעים שבשביל לבצע בפועל חישובים מקורבים יש צורך בנוסחה שתאפשר הערכת השגיאה R_n. המשפט הבא נותן נוסחה כזו.

משפט.[טיילור] תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה a. אז לכל נקודה x בסביבת a קיימת נקודה c בין x ל־ a כך ש

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ .$$

הערה. נעיר כי עבור $n=0$ זה בדיוק משפט לגרנז', כי משפט לגרנז' מבטיח קיום c כך ש־ $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ או, ע"י העברה באגפים, $f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$, אך $T_0(x)\equiv f(a)$ ולכן $R_0(x)=f'(c)(x-a)$.

הוכחה. נניח למשל כי $a<x$ ונגדיר פונקצית עזר $\varphi(t)$ במשתנה t ב־ $[a,x]$ ע"י

$$\varphi(t)=f(t)-T_n(t)-\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(t-a)^{n+1}\ .$$

ברור כי $\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi^{(n)}(a)=0$, וכמו כן $\varphi(x)=0$. עפ"י משפט רול יש נקודה $a<c_1<x$ כך ש־ $\varphi'(c_1)=0$. שימוש נוסף במשפט רול, עם הפונקציה φ' בקטע $[a,c_1]$, נותן $a<c_2<c_1$ כך ש־ $\varphi''(c_2)=0$. וכשנמשיך נקבל באינדוקציה $a<c_n<\ldots<c_1<x$ כך ש־ $\varphi^{(j)}(c_j)=0$. שימוש אחרון במשפט רול, עם $\varphi^{(n)}$ בקטע $[a,c_n]$, ושימוש ב־ $\varphi^{(n)}(a)=\varphi^{(n)}(c_n)=0$ ייתן נקודה $a<c<c_n<x$ כך ש־ $\varphi^{(n+1)}(c)=0$, כלומר

$$0=\varphi^{(n+1)}(c)=f^{(n+1)}(c)-0-\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)!$$

ולכן $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}=\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$ או

$$\varphi(t)=f(t)-T_n(t)-\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}$$

וכעת נציב $x=t$, נשתמש ב־ $\varphi(x)=0$ ונעביר אגפים.

דוגמאות. (i) חשבו את e עם שגיאה הקטנה מ־ $1/1000$.
פולינום טיילור של $f(x)=e^x$ בסביבת $a=0$ הוא $T_n(x)=\sum_{j=0}^n x^j/j!$, והשארית היא $R_n(x)=e^c x^{n+1}/(n+1)!$ כאשר הנקודה $c=c(x,n)$ (התלויה הן ב־ x והן ב־ n) נמצאת בין 0 ל־ x.
אנו מתעניינים במקרה בו $x=1$ ולכן $0<c<1$ לכל n, וכשנשתמש בהערכה $e^c<e<3$ נקבל כי $|R_n|<3/(n+1)!$.
אנחנו מחפשים n שיבטיח כי $|R_n|<1/1000$, ואי השוויון שקבלנו אומר שאם n יקיים $3/(n+1)!<1/1000$, אז השגיאה ודאי תהיה קטנה גם היא מ־ $1/1000$. חישוב ישיר מראה כי זה אכן מתקיים עבור $n=6$, כלומר, קירוב של e עד כדי שגיאה הקטנה מאלפית ניתן ע"י $1+1+1/2!+1/3!+1/4!+1/5!+1/6!$.

(ii) חשבו את $\sin 1$ עם שגיאה הקטנה מ־ $1/1000$.
פולינום טיילור של $f(x)=\sin x$ בסביבת $a=0$ הוא

$$T_n(x)=x-x^3/3!+x^5/5!-\ldots\mp\ldots\ .$$

כדי להעריך את השארית, נשים לב שמכיוון שהנגזרות הן תמיד $\pm\sin$ או $\pm\cos$, נקבל ש־ $|f^{(n+1)}(c)|\le 1$ לכל n ולכל c. אצלנו $x=1$ ולכן $|R_n(x)|\le 1/(n+1)!$, ועבור $n=6$ נקבל כי $1/(6+1)!<1/1000$. כלומר $1-1/3!+1/5!$ מקרב את

$\sin 1$ עד כדי שגיאה הקטנה מאלפית. (זכרו כי אנו מודדים זוויות ברדיאנים, וכי רדיאן אחד איננו זווית קטנה, הוא קרוב ל־ $60°$!).

נוסחת טיילור נותנת "שיטה נומרית" לחישוב מקורב. כמו לכל שיטה כזו יש לה שני רכיבים:

(a) פולינום טיילור נותן נוסחה לחישוב הקירוב הנומרי.

(b) הנוסחה לשארית מאפשרת לקבוע n (מעלת פולינום טיילור המקרב) שיבטיח שהשגיאה (בערכה המוחלט) תהיה קטנה מכל רמת דיוק נדרשת.

הערות. (i) כשרוצים לקרב את $f(x)$ לפונקציה נתונה f בנקודה מסויימת x, מוטל עלינו לבחור את הנקודה a שסביבה נבצע את פיתוח טיילור. השיקול הראשון בבחירת a הוא שניתן לחשב בקלות את ערכי הפונקציה ונגזרותיה בנקודה a. כך בדוגמא (i) היינו חייבים לבחור $a = 0$, כי אנו מכירים את $e^0 = 1$ אך איננו מכירים את e^a עבור $a \neq 0$. בדוגמא (ii) אנו יודעים לחשב את הערכים של $\sin x$ ונגזרותיה בנקודות מיוחדות (כמו 0, $\pi/2$, π וכו'), ולכן a תבחר להיות אחת מנקודות אלה.

מבין כל הנקודות האפשריות האלה נשתדל בדר"כ לבחור נקודה קרובה ככל האפשר ל־ a כי אז הגורם $(x-a)^{(n+1)}$ יתרום גם הוא להקטנת השגיאה.

(ii) המקרה הפרטי של נוסחת טיילור בו $a = 0$ נקרא גם "נוסחת מקלורן" או "נוסחת טיילור־מקלורן".

דוגמא. הרעיון בשימוש בנוסחת טיילור הוא שבד"כ הגדלה של n מקטינה את השגיאה, וכך אפשר לשלוט בטיב הקירוב ע"י בחירה של n מספיק גדול. המשפט הבא ייתן תנאים על f שזה באמת יקרה.

להערכת המשפט חשוב לציין שיש גם פונקציות "רעות" שבשבילן זה לא קורה, והנה דוגמא קיצונית כזו. שימוש בכלל לופיטל (ואינדוקציה) מראה שהפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה אינסוף פעמים ומקיימת $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n. בפרט, פולינום טיילור שלה ב־ $a = 0$ מתאפס זהותית, $T_n(x) \equiv 0$, לכל n, ולכן $R_n(x) = f(x)$ לכל x ואיננו שואף לאפס!

משפט. תהי f פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבה של הנקודה a. נניח שיש קבוע K כך ש־ $|f^{(n)}(x)| \leq K^n$ לכל x בסביבה זו ולכל n, אז $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ לכל x בסביבה.

הוכחה.

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{(K|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

כי $A^n/n! \to 0$ לכל מספר A כפי שרואים, למשל, באמצעות מבחן המנה.

תנאי המשפט מתקיימים לכל הפונקציות האלמנטריות פרט לנקודות שבהן ברור שיש בעיה (כגון אפסים במכנה של פונקציה או נגזרותיה), ולכן משפט טיילור הוא באמת שימושי ביותר.

דוגמא. ראינו שפולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x$ סביב הנקודה $a = 0$ הוא $T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j/j!$, והשארית היא $R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$ כאשר $c = c(x,n)$ נמצא בין 0 ל־ x. לכן $|c| = |c(x,n)| \leq |x|$ ו־ $e^c < e^{|x|}$, ומקבלים שלכל x קבוע

$$|R_n(x)| = e^c |x|^{n+1}/(n+1)! < e^{|x|}|x|^{n+1}/(n+1)! \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

בפרט, כשנקח $x = 1$ נקבל ש־ $\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \to e$, כפי שהבטחנו בשלבים מוקדמים יותר של הקורס.

5.6 שיטת ניוטון־רפסון

נניח כי f גזירה בקטע I ותהיינה $a, b \in I$ כך ש־ $f(a) < 0 < f(b)$. משפט ערך הביניים מבטיח שקיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = 0$. שיטת ניוטון־רפסון נותנת (בתנאים מסויימים) קירוב יעיל לפתרון.

נגדיר באופן אינדוקטיבי נקודות x_n באופן הבא: נבחר נקודה שרירותית x_0 בקטע. אם במקרה $f(x_0) = 0$ מצאנו פתרון. אחרת, נעביר משיק לפונקציה בנקודה x_0 ונסמן את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה־ x־ים (בהנחה שיש כזו) ע"י x_1.

נמשיך באותה צורה. אם $f(x_1) = 0$ סיימנו, ואחרת נעביר משיק לפונקציה ב־ x_1 ונסמן ב־ x_2 את נקודת החיתוך שלו עם ציר ה־ x־ים. באינדוקציה נגדיר את x_{n+1} כנקודת החיתוך של ציר ה־ x־ים עם המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_n.

נכתוב כעת נוסחאות מפורשות לסדרה. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_n נתון ע"י הנוסחה $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$, ותנאי החיתוך הוא שכשנציב $x = x_{n+1}$ נקבל $y = 0$. העברת אגפים תתן כי

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} . \qquad (*)$$

מתברר שאם בכלל יש לסדרה x_n גבול, שנסמנו ב־ γ, ואם נניח גם כי f' רציפה, אז γ הוא בהכרח פתרון למשוואה $f(x) = 0$. כי נשאיף $n \to \infty$ בנוסחה $(*)$ ונשתמש ברציפות של f ושל f' ונקבל ש־ $\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$, ולכן $f(\gamma) = 0$.

המשפט הבא יראה שתחת הנחות מתאימות על f, הסדרה x_n באמת תתכנס. יתר על כן, המשפט ייתן גם הערכות על קצב ההתכנסות, כלומר, על טיב הקירוב של γ ע"י אברי הסדרה.

אך תחילה כמה דוגמאות.

דוגמאות. (i) כאשר הסדרה x_n מתכנסת, היא בד"כ מתכנסת מהר מאוד. נדגים זאת בחישוב מקורב של $\sqrt{2}$, שהינו הפתרון של המשוואה $x^2 - 2 = 0$. נגדיר $f(x) = x^2 - 2$ ונקבל כי

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} .$$

נתחיל עם $x_0 = 2$. (הוכיחו, כתרגיל טוב בגבולות של סדרות, שזו אכן סדרה מתכנסת). נחשב כמה אברים ראשונים בסדרה

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ x_2 &= \frac{3/2}{2} + \frac{1}{3/2} = \frac{17}{12} = 1.41666\ldots \\ x_3 &= \frac{17/12}{2} + \frac{1}{17/12} = \frac{577}{408} = 1.4142156\ldots \end{aligned}$$

וחישוב "אמיתי" של $\sqrt{2}$ (שמונה ספרות דיוק במחשבון) הוא 1.4142135.

(ii) כדי שהסדרה x_n תהיה בכלל מוגדרת היטב, צריך קודם כל שאיברי הסדרה יהיו בתוך הקטע I, וזה לא יקרה, כמובן, לכל פונקציה. נסתכל, למשל, על $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ בקרן $I = [0, \infty)$, ונתחיל עם $x_0 = 2$. אז

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2\sqrt{2} - 1}{1/\sqrt{2}} < 0$$

כלומר, $x_1 \notin I$ והוא איננו נמצא כלל בתחום ההגדרה של הפונקציה.

(iii) אפילו אם $x_n \in I$ לכל n, אין זה מבטיח התכנסות. נסו לשרטט דוגמא קיצונית שבה אברי הסדרה חוזרים על עצמם לסירוגין, כלומר הם מקיימים $x_{n+2} = x_n$. ברור שסדרה כזו אינה יכולה להתכנס.

****
סוף שעה 49
****

<u>משפט.</u> תהי f גזירה פעמיים בקטע I, ותהיינה $a, b \in I$ כך ש־ $f(a) < 0 < f(b)$. נניח גם כי $f'(x), f''(x) > 0$ בקטע ונסמן את הפתרון (היחיד!) של המשוואה $f(x) = 0$ ע"י γ. נבחר $x_0 = b$ ונגדיר את הסדרה x_n באופן אינדוקטיבי ע"י $(*)$, אז

(i) $x_n \to \gamma$.

(ii) נסמן $M = \max_{a \le x \le b} f''(x)$ ו־ $m = \min_{a \le x \le b} f'(x)$, ואז

$$|x_{n+1} - \gamma| \le \frac{M}{2m} |x_n - \gamma|^2 .$$

(iii) נסמן $K = \frac{M}{2m}$, ואז

$$|x_n - \gamma| \le (K|b-a|)^{2^{n+1}}/K .$$

<u>הוכחה.</u> (i) נרשום את פיתוח טיילור של f סביב x_n, נציב $x = \gamma$ ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= f(\gamma) = f(x_n) + f'(x_n)(\gamma - x_n) + f''(c)(\gamma - x_n)^2/2 \\ &= f'(x_n)\big(\gamma - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\big) + f''(c)(\gamma - x_n)^2/2 \\ &= f'(x_n)(\gamma - x_{n+1}) + f''(c)(\gamma - x_n)^2/2. \end{aligned}$$

המסקנה הראשונה מחישוב זה היא ש־ $\gamma < x_n$ לכל n, כי המחובר השני בסכום הסופי הוא חיובי (כי $f''(x_n) > 0$), וכך גם $f'(x_n)$, ולכן בהכרח $\gamma - x_{n+1}$ שלילי.

נשים כעת לב ש־ $f(x_n) > 0$ לכל n, כי f מונוטונית עולה, ו־ $\gamma < x_n$, ולכן $f(x_n) > f(\gamma) = 0$. כשנציב זאת ב־ $(*)$ נקבל ש־ x_n סדרה מונוטונית יורדת, והיא כמובן חסומה מלרע ע"י γ, ולכן מתכנסת. כפי שכבר ראינו גבולה הוא בהכרח הפתרון היחיד של המשוואה $f(x) = 0$, כלומר γ.

(ii) מפיתוח טיילור שרשמנו קודם נובע כי

$$|\gamma - x_{n+1}| = \left|\frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(\gamma - x_n)^2\right| \le \frac{M}{2m}|x_n - \gamma|^2 \ .$$

(iii) אם נסמן $|x_n - \gamma| = \delta_n$, אז לפי (ii) נקבל

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &\le K\delta_n^2 \le K[K\delta_{n-1}^2]^2 = \Big(K\delta_{n-1}\Big)^{2^2}/K \\ &\le \ldots \le (K\delta_0)^{2^{n+1}}/K = (K|b-a|)^{2^{n+1}}/K. \end{aligned}$$

<u>הערה.</u> גם ההוכחה שנתנו למשפט ערך הביניים נותנת שיטה לקירוב γ. אם נסמן את הקטעים שבונים בהוכחה (והמכילים כולם את γ) ב־ $[a_n, b_n]$, אז $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, ולכן $|a_n - \gamma| < \frac{b-a}{2^n}$. זוהי אמנם שאיפה מהירה לאפס, אך אם נניח ש־ $K(b-a) < \frac{1}{2}$ נקבל מ־ (iii) כי $|x_n - \gamma| < \frac{K^{-1}}{2^{2^{n+1}}}$, שזו שאיפה מהירה בהרבה.

נעיר עוד שקל למצוא a, b כך ש־ $K(b-a) < \frac{1}{2}$. נקבע $\alpha, \beta \in I$ כלשהם כך ש־ $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ (זוהי גם נקודת ההתחלה לקירוב בעזרת משפט ערך הביניים), נחצה את $[\alpha, \beta]$ מספר פעמים (כמו במשפט ערך הביניים) עד שנגיע לקטע באורך קטן מ־ $\frac{1}{2K}$.

5.7 מספרים רציונליים, אלגבריים וטרנסצנדנטיים

<u>משפט.</u> המספר e אינו רציונלי.

<u>הוכחה.</u> ניקח $x = 1$ בנוסחת טיילור של e^x בנקודה $x = 0$, ונשתמש בעובדה שהסדרה $b_n = \sum_{j \le n} \frac{1}{j!}$ עולה ממש (ל־ e). נניח בשלילה כי e רציונלי מהצורה $e = \frac{p}{q}$, ונקבל שלכל n מתקיים כי

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{j \le n} \frac{1}{j!} = R_n(1) < \frac{e}{(n+1)!} \ .$$

נכפיל את אי השוויון ב־ $n!$ ונקבל

$$0 < \frac{n!p}{q} - \sum_{j\le n}\frac{n}{j!} < \frac{n!e}{(n+1)!} = \frac{e}{n+1}\ .$$

נקבע $n > \max\{2,q\}$, ואז הביטוי האמצעי באי שוויון זה הוא שלם ואגף ימין קטן מ־ 1. אבל אין מספר שלם בין 0 ל־ 1!

מספר הוא רציונלי אסם הוא שורש של פולינום ממעלה ראשונה עם מקדמים קבועים. המספר $\sqrt{2}$ אמנם אינו רציונלי, אבל די "קרוב" להיות כזה: הוא שורש של פולינום ממעלה שניה עם מקדמים שלמים, $x^2-2=0$.

<u>הגדרה.</u> מספר α נקרא מספר אלגברי אם הוא שורש של פולינום עם מקדמים שלמים. אם הדרגה המינימלית של פולינום כזה היא n נאמר ש־ α אלגברי ממעלה n. מספר שאינו אלגברי נקרא טרנסצנדנטי.

השאלה המתבקשת היא האם יש בכלל מספרים טרנסצנדנטיים? הנה כמה מההשגים החשובים של המתמטיקה של המאה ה־ 19 הקשורות לשאלה זו.

Liouville (1851) נתן את הדוגמא הראשונה למספר טרנסצנדנטי (ולה יוקדש סעיף זה).

Cantor (1871) הראה שמספרים טרנסצנדנטיים <u>קיימים</u>. הוא הראה שיש רק מספר בן מניה של מספרים אלגבריים.

Hermite (1873) הראה ש־ e טרנסצנדנטי.

Lindemann (1882) הראה ש־ π טרנסצנדנטי. בכך פתר בעיה שהוצגה כבר ע"י היוונים שניסוחה הפופולרי הוא שאי אפשר "לרבע את המעגל". כלומר, אי אפשר לבנות, בעזרת סרגל ומחוגה בלבד, ריבוע ששטחו הוא כשטחו של עיגול היחידה, π. ואמנם זה לא קשה להראות שאם α הוא אורך של קטע הניתן לבניה מקטע היחידה בעזרת סרגל ומחוגה, אז α הוא אלגברי. "ריבוע המעגל" פירושו לכן ש־ $\sqrt{\pi}$ אלגברי, וקל לראות שאילו זה היה נכון אז גם π היה אלגברי.

לפני שנפנה לבניה של ליוביל נכליל את ההוכחה של אי־הרציונליות של e.

<u>טענה.</u> לכל מספר רציונלי α יש קבוע C כך שלכל מספר רציונלי אחר $\alpha \neq \frac{p}{q}$ מתקיים

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \ge \frac{C}{q}\ .$$

<u>הערה.</u> נראה מה קורה עבור $\alpha = e$. אם $q_n = n!$ אז $\frac{p_n}{q_n} = \sum_{j\le n}\frac{1}{j!}$ ומתקיים $|e-\frac{p_n}{q_n}| < \frac{e}{(n+1)!}$. אילו e היה רציונלי היינו מקבלים שיש C כך ש־

$$\frac{e}{(n+1)!} > \left|e - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{C}{n!}$$

או $0 \to \frac{e}{n+1} > C$, וזה לא ייתכן.

הוכחה. נסמן $\alpha = \frac{k}{m}$ ונניח בשלילה שאין C כזה. אז יש $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$ ומספרים $c_n \to 0$ כך ש־

$$0 < |\frac{k}{m} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{c_n}{q_n} \ .$$

נכפיל את אי השוויון ב־ mq_n ונקבל כי

$$0 < |kq_n - mp_n| < mc_n$$

אבל האיבר האמצעי הוא מספר שלם ואגף ימין שואף לאפס, סתירה.

ההבחנה של ליוביל היא שיש גם מגבלה על מידת הקירוב האפשרית של מספרים אלגבריים ע"י מספרים רציונליים.

משפט.[ליוביל] יהי α מספר אלגברי ממעלה $n > 1$. אז יש קבוע K כך ש

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{K}{q^n}$$

לכל מספר רציונלי $\frac{p}{q}$.

הוכחה. יהי $f(x) = \sum_{j \leq n} a_j x^j$ פולינום ממעלה $n > 1$ עם מקדמים שלמים (בפרט $a_n \neq 0$) כך ש־ $f(\alpha) = 0$. היות שיש ל־ f מספר סופי של שורשים, הרי שיש $\delta > 0$ כך ש־ $f(x) \neq 0$ לכל x המקיים $0 < |\alpha - x| < \delta$. נבחין בשני מקרים:

(i) $|\frac{p}{q} - \alpha| > \delta$. במקרה זה בוודאי שיתקיים $|\frac{p}{q} - \alpha| > \delta \geq \delta/q^n$.

(ii) $|\frac{p}{q} - \alpha| \leq \delta$. היות ש־ f' רציפה בקטע הסגור $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, הרי שהיא חסומה שם ויש M כך ש־ $|f'(x)| \leq M$ לכל x בקטע. עפ"י משפט לגרנז' יש c בין $\frac{p}{q}$ לבין α כך ש־

$$|f\big(\frac{p}{q}\big) - f(\alpha)| = |f'(c)|\,|\frac{p}{q} - \alpha| \leq M|\frac{p}{q} - \alpha|.$$

נשים כעת לב כי $f(\alpha) = 0$ וכי $f\big(\frac{p}{q}\big) \neq 0$ הוא מספר רציונלי עם מכנה q^n, לכן אגף שמאל גדול או שווה ל־ $1/q^n$, ולכן $|\frac{p}{q} - \alpha| \geq \frac{1}{Mq^n}$.

משני המקרים ביחד נקבל כי המשפט מתקיים עם $K = \min(\delta, 1/M)$.

****

סוף שעה 51

****

<u>בניה של מספר ליוביל</u>. נגדיר

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{-j!}} = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \ldots + 10^{-n!} + \ldots$$

כלומר $\alpha = 0.11000100\ldots01000\ldots$, כאשר ה־ 1־ים מופיעים במיקומים $n!$ עבור $n = 1,2,3\ldots$.

נסמן $\alpha_n = \sum_{j<n} 10^{-j!}$. אז α_n הוא מספר רציונלי עם מכנה $q_n = 10^{(n-1)!}$, ונעריך את מידת הקרוב של α על ידי α_n

$$\begin{aligned} |\alpha - \alpha_n| &= 10^{-n!} + 10^{-(n+1)!}\ldots < 10^{-n!}(1 + 1/2 + 1/4 + \ldots) \\ &= 2 \cdot 10^{-n!} = 2\Big(10^{-(n-1)!}\Big)^n = \frac{2}{q_n^n}. \end{aligned}$$

באופן כזה מצאנו קירוב $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$ כך ש־ $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{2}{q_n^n}$. אילו α היה אלגברי, אז ע"ס משפט ליוביל היה מספר K והיה N (מעלת α) כך שהיה מתקיים

$$\frac{K}{q_n^N} \le |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \le \frac{2}{q_n^n}.$$

כלומר $K \le \frac{2}{q_n^{n-N}}$ לכל n.

אבל $q_n \to \infty$ ולכן אגף ימין שואף לאפס, ולכן α אינו יכול להיות אלגברי.