קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 4

תאריך הגשה: יום חמישי, 1/5/2014, עד שעה $22:00$

שאלה 1:

א. יהי $1 \leq \alpha \in \mathbb{R}$. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n\}$ המוגדרת ע״י:

$$a_1 = \alpha \ , \ a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \ , \ a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} \ .$$

נראה תחילה כי שתי תתי-הסדרות במקומות הזוגיים והאי-זוגיים מתכנסות שתיהן, ע״י שנראה מונוטוניות וחסימות. ארבעת האיברים הראשונים בסדרה הם: $a_1 = \alpha \, , a_2 = \frac{\alpha}{2} \, , a_3 = \frac{\alpha+1}{2} \, , a_4 = \frac{\alpha+1}{4}$. מכיוון ש- $1 \leq \alpha$ מתקיים ש- $a_2 \geq a_4 \ , \ a_1 \geq a_3$. כעת, נניח כי $a_{2n-1} \geq a_{2n+1}$, $a_{2n-2} \geq a_{2n}$, ונקבל כי $a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} \geq \frac{a_{2n+1}}{2} = a_{2n+2}$, וגם $a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \geq \frac{1}{2} + a_{2n+2} = a_{2n+3}$, ולכן שתי תתי הסדרות האלו מונוטוניות יורדות. בנוסף ברור כי שתי הסדרות חיוביות, לכן בפרט חסומות מלמטה, ולכן שתי תתי-הסדרות מתכנסות. נסמן $\lim a_{2n+1} = K$, $\lim a_{2n} = L$, ונקבל מיחידות הגבול ונוסחת הרקורסיה כי $L = \frac{K}{2}$ וגם $K = \frac{1}{2} + L$, ולכן $L = 1$, $K = \frac{1}{2}$. מכיוון ששתי תתי הסדרות האלו ממצות את כל איברי a_n, אלו הם הג״ח היחידים.

ב. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה $\frac{\left(n^3+n^{\sin(n)}+1\right)\left(1+(-3)^{-n}\right)^{3^n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{4n^3+3n\cos(n)}$.

נסמן $c_n = \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, $b_n = \left(1+(-3)^{-n}\right)^{3^n}$, $a_n = \frac{n^3+n^{\sin(n)}+1}{4n^3+3n\cos(n)}$, אז הסדרה המקורית היא מכפלת הסדרות הנ״ל. נשים לב כי $a_n \to \frac{1}{4}$, ל- b_n מחזור באורך 2 עם גבולות חלקיים $e, \frac{1}{e}$, ול- c_n מחזור באורך 6 עם ג״ח $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$. לכן לסדרה המקורית יש מחזור באורך 6 עם ג״ח $0, -\frac{\sqrt{3}e}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8e}, \frac{\sqrt{3}e}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8e}$. 6 הסדרות המייצרות ג״ח אלו ממצות את כל איברי a_n ולכן אלו הג״ח היחידים.

שאלה 2:

הוכיחו / הפריכו:

א. אם $\{a_n\},\{b_n\}$ שתי סדרות חסומות, אז: $\limsup a_n b_n = \limsup a_n \cdot \limsup b_n$.

לא נכון. ד״נ: $a_n = 1+(-1)^n, b_n = 1+(-1)^{n+1}$.

ב. אם $\{a_n\}$ חסומה ו- $\{b_n\}$ אי-שלילית ומתכנסת, אז:

$$\limsup a_n b_n = \limsup a_n \cdot \limsup b_n \ .$$

נכון: ראשית נעיר כי $\limsup b_n = \lim b_n$, ונסמן גבול זה ב- b, ונזכור כי מכיוון ש- b_n מתכנסת אז היא חסומה, ולכן גם $a_n b_n$ חסומה. כמו כן $b_n \geq 0$ ולכן $b \geq 0$. נסמן $\limsup a_n = a$. תהי $\left\{a_{n_k} b_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ תת״ס של $a_n b_n$

המתכנסת ל- $\limsup a_nb_n$. a_{n_k} חסומה ולכן קיימת לה ת״ס מתכנסת $a_{n_{k_j}}$, נאמר לגבול a'. b_n מתכנסת, לכן כל ת״ס שלה מתכנסת לאותו הגבול, לכן $b_{n_{k_j}} \to b$, ולכן $a_{n_{k_j}}b_{n_{k_j}} \to a'b$. מהגדרת a מתקיים $a' \le a$, ובתוספת לכך ש- $b \ge 0$ נקבל $a'b \le ab$. מכיוון ש- $a_{n_k}b_{n_k}$ בעצמה היתה סדרה מתכנסת ל- $\limsup a_nb_n$, נקבל כי $\limsup a_nb_n = a'b$, כלומר קיבלנו $\limsup a_nb_n \le ab$. עבור אי השוויון ההפוך, תהי a_{n_k} ת״ס של a_n המתכנסת ל- a. אז $a_{n_k}b_{n_k} \to ab$, כלומר ab בעצמו הוא ג״ח של a_nb_n, ולכן מקיים $ab \le \limsup a_nb_n$. משני אי-השוויונים ההפוכים נקבל את הדרוש.

ג. אם $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות כך ש- $\limsup a_n < \liminf b_n$, אז מתקיים $a_n < b_n$ החל ממקום מסוים.

נסתכל על $0 < \frac{\liminf b_n - \limsup a_n}{2} = \varepsilon$. החל ממקום מסוים, כל איברי b_n מקיימים:
$\frac{\liminf b_n + \limsup a_n}{2} = \liminf b_n - \varepsilon < b_n$. החל ממקום מסוים, כל איברי a_n מקיימים:
$\frac{\liminf b_n + \limsup a_n}{2} = a_n + \varepsilon > a_n$. לכן, החל ממקום מסוים , מתקיים $a_n < b_n$.

<u>שאלה 3:</u>

א. תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה מלעיל. הראו כי אם $\sup a_n$ אינו אחד מאיברי הסדרה, אז הוא גבול חלקי שלה.

נסמן $M = \sup a_n$, ונבנה תת-סדרה המתכנסת ל- M. נבנה את הסדרה באינדוקציה: עבור $n = 1$, נבחר n_1 כך ש- $a_1 > M - 1$. קיים n_1 כזה מהגדרת סופרמום. כעת, נסמן $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, M - a_1, M - a_2, \dots, M - a_{n_1}\right\}$.
מכיוון ש- $a_n \neq M$ לכל n, נקבל כי $\varepsilon_1 > 0$, ולכן קיים n_2 כך ש- $a_{n_2} > M - \varepsilon_1 \ge M - \frac{1}{2}$. מהגדרת n_2, בהכרח $n_2 > n_1$, כי לכל $1 \le k \le n_1$, $M - \varepsilon_1 \ge M - (M - a_k) = a_k$. באופן דומה, לאחר שבחרנו את האינדקסים $n_1, n_2, \dots, n_k$ כך שלכל $1 \le j \le k$ מתקיים $M - \frac{1}{j} < a_{n_j} \le M$, נסמן $\varepsilon_k = \min\left\{\frac{1}{k+1}, M - a_1, M -\right.$ *$a2,\dots,M-ank$*, ונבחר *$nk+1$* כך ש- *$M-1k+1\le M-\varepsilon k<ank+1$*, וכמו מקודם מתקיים בהכרח *$nk+1>nk$*.
בסה״כ בנינו ת״ס $\{a_{n_k}\}$ כך שלכל k, $M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \le M$, לכן $a_{n_k} \to M$.

ב. תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה שאין לה איבר גדול ביותר ואין לה איבר קטן ביותר. הוכיחו כי a_n אינה מתכנסת.

אם $\{a_n\}$ חסומה, אז מאקסיומת השלמות יש לה סופרמום ואינפימום. מכיון שלסדרה אין איבר גדול ביותר, הסופרמום אינו איבר בקבוצה. מסעיף א׳, נקבל כי $\sup a_n$ הוא ג״ח שלה. לכן, עבור הסדרה הנתונה, הסופרמום הוא ג״ח, ובאופן דומה (ע״י הסתכלות על $\{-a_n\}$) נקבל כי האינפימום של הסדרה אינו איבר בסדרה, ולכן הוא ג״ח. אם נראה כי $\sup a_n \neq \inf a_n$ אז מצאנו שני ג״ח שונים, ולכן הסדרה אינה מתכנסת. אבל אם $\sup a_n = \inf a_n$ אז הסדרה היא למעשה קבועה, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\inf a_n \le a_n \le \sup a_n = \inf a_n$, ואם הסדרה היא קבועה, אז בפרט יש לה איבר גדול ביותר וקטן ביותר – סתירה לנתון.

<u>שאלה 4</u>:

תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת: $\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{2n}) = 1$. הראו כי מתקיים אחד מהבאים:

$\lim a_n = \frac{1}{2}$ או $\liminf a_n < \frac{1}{2}$.

אם $a_n \to \frac{1}{2}$ סיימנו. נניח אם כן כי הסדרה לא מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$, ולכן בפרט קיים ג״ח $L \neq \frac{1}{2}$ של הסדרה. יהי L כנ״ל. אם $L < \frac{1}{2}$, אז $\liminf a_n < \frac{1}{2}$, וסיימנו. אם $L > \frac{1}{2}$, אז קיימת ת״ס $a_{n_k} \to L$. נסתכל על a_{2n_k}: מאריתמטיקה של גבולות, $a_{2n_k} = (a_{n_k} + a_{2n_k}) - a_{n_k} \to 1 - L < \frac{1}{2}$, כלומר מצאנו ג״ח קטן מ- $\frac{1}{2}$ של הסדרה, ולכן $\liminf a_n > \frac{1}{2}$.

<u>הערה:</u> לא התייחסנו לשאלה האם L סופי, מכיוון שאם $L = \pm\infty$ אותו טיעון מראה כי $\liminf a_n < \frac{1}{2}$.

<u>שאלה 5</u>:

נסמן ב- A' את אוסף נקודות ההצטברות של קבוצה $A \subset \mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי $(A')' \subset A'$.

יהי $\varepsilon > 0$. אם $x \in (A')'$, אז בכל סביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ - מנוקבת של x יש אינסוף נקודות של A', ובכל סביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ של הנקודות האלו יש אינסוף נקודות של A, ולכן בסביבת ε של x יש אינסוף נקודות של A, כלומר $x \in A'$.

ב. תנו דוגמא לקבוצה A כך ש: (א) $A' = \emptyset$.

$A = \mathbb{N}$.

(ב) $A' \neq \emptyset$ וגם $A \cap A' = \emptyset$.

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ג) $A' \neq \emptyset$ וגם $(A')' = \emptyset$.

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(ד) A קבוצה אינסופית שכל נקודותיה הן מבודדות.

$A = \mathbb{N}$.

ג. הוכיחו / הפריכו: קיימת קבוצה שכל הנקודות הפנימיות שלה הן אי-רציונליות.

לא תיתכן קבוצה כזו, כי אם $x \in \mathbb{Q}$ נקודה פנימית, אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$, לכן גם $\left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$, אבל בקטע זה קיימת נקודה $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (מצפיפות) המקיימת גם היא $\left(y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$, לכן גם y נקודה פנימית, בסתירה לכך שכל הנקודות הפנימיות הן רציונליות.

שאלה 6:

א. תהי $\mathbb{R} \supset A$ קבוצה המקיימת: קיים $c > 0$ כך שלכל $x, y \in A$, $|x - y| \geq c$.

הראו כי A סגורה.

תהי $\{a_n\} \subset A$ סדרה מתכנסת, $a_n \to a$. נראה כי $a \in A$ ע״י שנראה כי הסדרה קבועה החל ממקום מסוים: הסדרה מתכנסת ולכן היא בפרט סדרת קושי, לכן עבור $\varepsilon = \frac{c}{2}$ נקבל כי החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה מרוחקים לא יותר מאשר $\frac{c}{2}$ אחד מהשני, אבל זה בהכרח אומר כי הסדרה קבועה החל מהמקום הזה, כי אם קיימים שני איברים שונים אז מהנתון המרחק ביניהם גדול מ- c, בסתירה לתנאי קושי. אם הסדרה קבועה החל ממקום מסוים אז הגבול הוא אותו איבר הקבוע החל מאותו המקום, ובפרט הינו איבר ב- A.

ב. הראו כי הקבוצה $\left\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ סגורה.

נראה כי הקבוצה מקיימת את התנאי מסעיף א׳, ולכן היא סגורה. נשים לב כי המרחק הקטן ביותר בין שני איברים בקבוצה מתקבל בין שני איברים סמוכים (כלומר המתאימים לשני טבעיים עוקבים), ולכן מספיק שנראה כי המרחק בין שני איברים סמוכים בקבוצה חסום מלמטה. אכן, לכל $n \in \mathbb{N}$,

$\left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n(n+1)} \geq 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, כלומר המרחק בין שני איברים סמוכים הוא לפחות $\frac{1}{2}$, לכן זהו המרחק המינימלי בין שני איברים כלשהם בקבוצה ולכן היא מקיימת את התנאי מסעיף א׳ ולכן סגורה.