פונקציות בכמה משתנים

שאלות על תרגילים 14 ו18

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- הגדרה: $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ נקראת פונקציה סקלרית. $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^d$ נקרא שדה וקטורי.
- **מכפלה פנימית** ב־ $\mathbb{R}^k$: $<x,y>=\sum x_jy_j$:
  - חיוביות: $<x,x>\geq 0$ ושיוויון אם ורק אם $x=y$.
  - סימטריות: $<x,y>=<y,x>$.
  - לניאריות: $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$.
    - סימון מקובל: $x\cdot y$
- **נורמה** אוקלידית ב־ $\mathbb{R}^k$: $\|x\|=\sqrt{\sum_{j=1}^k x_j^2}$:
  - חיוביות: $\|x\|\geq 0$ ושיוויון אם ורק אם $x=0$.
  - הומוגניות חיובית: לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$.
  - אי־שיוויון המשולש: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

  הערה: נהוג לסמן גם $|x|$ במקום $\|x\|$.
- **מטריקה** אוקלידית ב־ $\mathbb{R}^k$: $d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^k|x_j-y_j|^2}$:
  - חיוביות: $d(x,y)\geq 0$ ושוויון אם ורק אם $x=y$.
  - סימטריות: $d(x,y)=d(y,x)$.
  - אי־שיוויון המשולש: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.
- סביבה:
  - r סביבה כדורית של x: $B(x,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^k\ :\ d(x,y)=|x-y|<r\right\}$.
  - r סביבה תיבתית של x: $R(x,r)=\left\{y\in\mathbb{R}^k\ :\ |x_j-y_j|<r\ j=1,2,\ldots,n\right\}$.
- משלים של קבוצה:

  עבור קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^k$ נסמן: $A^c=\left\{y\in\mathbb{R}^k\ :\ y\notin A\right\}$ ונקראת המשלים של A.
- נקודה פנימית:

  נאמר ש־ x היא נקודה פנימית של $A\subseteq\mathbb{R}^k$ אם קיימת סביבה של x המוכלת ב־ A. אוסף הנקודות הפנימיות של A נקרא הפנים של A ומסומן ב־ $\operatorname{int}(A)$ או A°
- נקודת שפה:

  נאמר ש־ x נקודת שפה של $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אם כל סביבה של x חותכת את A ואת A^c. אוסף נקודות השפה מסומן ב־ $\operatorname{bd}(A)$ או $\partial(A)$.

- סגור של קבוצה:
  עבור $A \subseteq \mathbb{R}^k$, הסגור של A מוגדר להיות $A \cup \partial A$ ומסומן ב־ $\overline{A}$.
- קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ נקראת קבוצה פתוחה אם $A = A^\circ$.
- קבוצה סגורה: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ נקראת קבוצה סגורה אם $\partial(A) \subseteq A$.
- קבוצה חסומה: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ נקראת חסומה אם קיים $r > 0$ כך ש־ $A \subseteq B(0, r)$.
- קבוצה קומפקטית: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ נקראת קומפקטית אם היא סגורה וחסומה.
- קבוצה קשירה: $A \subseteq \mathbb{R}^k$ נקראת קשירה אם לכל $x, y \in A$ קיים מסלול רציף ב־ A המחבר בין x ו־ y.
- סדרה מתכנסת: $x^{(n)} \to x$ ב־ $\mathbb{R}^k$ אם $\left|x^{(n)} - x\right| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.
- משפט: $x^{(n)} \to x$ אם ורק אם $x_i^{(n)} \to x_i$ כאשר $n \to \infty$ לכל $i = 1, 2, \ldots, k$.
- משפט: לכל סדרה חסומה של תת־סדרה מתכנסת.
- הגדרה: עקום l המישור x, y נקרא קו גובה של הפונקציה $f(x, y)$ אם f קבועה על כל (x, y) הנמצא על l.
- הגדרה: תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של (a, b). אזי נרשום $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $(a, b) \neq (x, y) \in B((a, b), \delta)$ מתקיים $|f(x, y) - L| < \epsilon$.
  באופן שקול, אם לכל $(a, b) \neq (x_n, y_n) \to (a, b)$ מתקיים $f(x_n, y_n) \to L$.
- משפט: אם קיים $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ אזי ערכי הפונקציה שואפים ל־ L לאורך כל מסלול ששואף ל־ (a, b).
- הגדרה: $\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x, y)\right)$ ו־ $\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x, y)\right)$ נקראים גבולות נשנים.
- משפט: אם $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ קיים ואחד מהגבולות הנשנים קיים, אז הם שווים.
- משפט: תהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, כאשר $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r)\,G(\theta)$ ו־ G חסומה, $\lim_{r\to 0^+} F(r) = 0$. אזי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.
- הגדרה: f רציפה ב־ (a, b) אם $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.
- משפט ויירשטראס: תהי $f : K \to \mathbb{R}$ רציפה בקומפקטית K. אזי f חסומה והיא מקבלת מקסימום ומנימום שם.
- משפט ערה"ב: אם f רציפה בקבוצה קשירה אז היא מקיימת את ערה"ב.

תרגילים:

1. בדוק ש־ $< x,y >= \sum x_j y_j$ מקיימת את אקסיומות המכפלה הפנימית.

<u>פתרון:</u>

ע"י בדיקה ישירה פשוטה מאוד.

2. אי־שיוויון קושי־שוורץ:

לכל $x,y \in \mathbb{R}^k$ מתקיים:

$$|< x,y >| \leq |x|\,|y|$$

<u>הוכחה:</u>

צריך להוכיח ש־

$$\left|\sum x_j y_j\right| \leq \sqrt{\sum x_j^2} \cdot \sqrt{\sum y_j^2}$$

עבור t ממשי, נתבונן ב־ $p(t) = |xt + y|^2$. ברור ש־ $p(t) \geq 0$ וגם

$$p(t) = t^2 |x|^2 + 2 < x,y > t + |y|^2$$

מכאן, הדיסקרימיננטה של p אי־חיובית.

3. אי־שיוויון המשולש:

לכל $x,y \in \mathbb{R}^k$ מתקיים:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

<u>הוכחה:</u>

נבחין ש־ $\sqrt{< z,z >} = d(z,0) = |z|$. לכן $|x+y|^2 =< x+y, x+y >$ ומכאן

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2 < x,y > + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

4. הראו ש־ $\|x\| = \sqrt{\sum x_j^2}$ מקיימת את אקסיומות הנורמה.

<u>פתרון:</u>

החלק הקשה נובע מתרגיל 3.

5. מה הקרש בין : $<,>$, $\|\cdot\|$ ו־ d?

<u>פתרון:</u>

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>}$$

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

6. הראו ש־ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2}$ מקיימת את אקסיומות המטריקה.

<u>פתרון:</u>

החלק הקשה, שזה אי שיוויון המשולש,נובע מתרגל 3 ותרגיל 4, אכן

$$\|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\|$$

7. יהי $r>0$. הוכיחו:

א. קיים $\rho > 0$ כך ש־ $E(x,\rho) \subseteq B(x,r)$.

ב. קיים $\rho > 0$ כך ש־ $B(x,\rho) \subseteq E(x,r)$.

<u>הוכחה:</u>

נובע ישירות מהעובדה ש־ $E\left(x,\frac{r}{\sqrt{k}}\right) \subseteq B(x,r)$ ו־ $B(x,r) \subseteq E(x,r)$.

8. א. הוכיחו כי אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{x_n\} \subseteq A$ כך ש־ x_n מתכנסת ל־ x, אזי $x \in \overline{A}$.

ב. הוכיחו ש־ $x \in \overline{A}$ אם ורק אם קיימת סדרה ב־ A המתכנסת ל־ x.

ג. A סגורה אם ורק אם לכל סדרה ב־ A המתכנסת, אזי גבולה נמצא ב־ A.

<u>הוכחה:</u>

א. נניח בשלילה $x \notin \overline{A}$ אזי קיים $r>0$ כך ש־ $B(x,r) \cap A = \emptyset$ אבל קיים n גדול כך ש־ $x_n \in B(x,r)$. סתירה.

ב. כיוון אחד נובע מהסעיף הקודם. כיוון שני, נניח $x \in \overline{A}$, אם $x \in A$ סיימנו, אחרת $x \in \partial A$ ולכן לכל $n \in N$ קיים $x_n \in B\left(x,\frac{1}{n}\right) \cap A$.

ג. A סגורה אם ורק אם $\partial A \subseteq A$ אם ורק אם $A = \overline{A}$.

9. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית. הוכיחו שלכל סדרה ב־ A יש תת־סדרה מתכנסת ב־ A.

<u>הוכחה:</u>

תהי $a_n \in A$ אזי a_n חסומה לכן יש לה תת־סדרה מתכנסת, $a_{n_k} \to a$, A סגורה לכן $a \in A$.

הערה: קבוצה A שמקיימת את התכונה: "לכל סדרה ב־ A יש תת־סדרה מתכנסת ב־ A" נקראת קומפקטית סדרתית. מתברר שזה שקול לקומפטקיות ב־ $\mathbb{R}^n$.

10. הוכיחו ש־ $\overline{\mathbb{Q}^k} = \mathbb{R}^k$.

<u>פתרון:</u>

יהי $x \in \mathbb{R}^k$. נוכיח ש־ $x \in \overline{\mathbb{Q}^k}$. יהי $r>0$. לכל $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ קיים $q_j \in \mathbb{Q}$ כך ש־ $r > |x_j - q_j|$. לכן ניקח $q = (q_1,q_2,\ldots,q_k)$ ואז $q \in R(x,r)$. ז.א., לכל x ולכל סביבה שלו, יש נקודה משותפת עם $\mathbb{Q}^k$. לכן ברור שיש סדרה ב־ $\mathbb{Q}^k$ המתכנסת ל־ x.

11. תהי $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ולכל $t>0$ מתקיים $f(tx)=f(x)$. הראו שקיים $\lim_{x\to0}f(x)$ אם ורק אם f קבועה.

הוכחה:

מי זה s?

כיוון אחד ברור. כיוון שני, ניקח $x\in S^{n-1}$ ואז $f(tx)=f(x)$ לכל $t>0$. מכיוון שהגבול קיים, אז מפרט עבור מהסלול $\{tx\}_{t>0}$ קיים $\lim_{t\to0^+}f(tx)$ קיים ולא תלוי ב־ x. מכאן $f(x)$ לא תלוי ב־ x, זאת אומרת f קבועה.

12. תהי נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

האם f רציפה בראשית?

פתרון:

נשים לב כי לכל $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים

$$|f(x,y)|\leq|x|+|y|$$

זה לא נכון, רק קרוב לראשית..

לכן, לכל $\epsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{\epsilon}{2}$, ואז אם $|x|<\delta$ אם $|y|<\delta$, זאת אומרת, $(x,y)\in R(0,\delta)$, מתקיים $|f(x,y)|<\epsilon$. לכן f רציף ב־ 0.

הערה: בהמשך אנחנו פשוט נגיד שלי כלל סנדוויץ' מתקיים ש־ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

13. תהי נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^6+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

האם f רציפה בראשית?

פתרון:

נשים לב ש־

$$f\left(x,x^3\right)=\frac{1}{3x}$$

לכן על המסלול (x,x^3) אין גבול ל־ f כאשר $x\to0$ ומכאן ברור שלא קיים הגבול של $f(x,y)$ כאשר $(x,y)\to(0,0)$.

14. חשבו את

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{\tan(y-1)\sin^2(x-2y)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

האם אפשר להגיד שtan(x) קטן מx ליד 0, ואז להצדיק את זה עם סנדוויץ'?
לחזור על התרגול של טיילור!

פתרון:

$\tan(y-1)\sim y-1$ כש־ $y\to1$, $\sin(x-2y)\sim(x-2y)$ כש־ $x-2y\to0$. ומכאן נשחב את

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{(y-1)(x-2y)^2}{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

ומכאן נעבור למישור (r,θ) ונקבל

$$\frac{(y-1)(x-2y)^2}{(x-2)^2+(y-1)^2}=r\cdot\sin\theta\left(\cos\theta-2\sin\theta\right)^2$$

לכן הגבול הוא 0.

15. האם הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3+xy\sin(2015x+2016y)}{(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

רציפה ב־ $(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

ע"פ אי שיוויון Hölder עם $p=q=2$: $|xy|\leq\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$, לכן

$$|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(y^2+\sin\left(2015x+2016y\right)\right)}{e^{x^2-y^2}}\to0$$

לכן f רציף ב־ $(0,0)$.

16. חשבו את הגבולות $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)$ ואת $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)$: יהי $x\neq0$, אזי $\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{x}{x}=1$. לכן $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)=1$.

נחשב את $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)$: יהי $y\neq0$, אזי $\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}=\frac{-y}{y}=-1$. לכן $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right)=-1$.

17. תהי נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^2}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

עבור α מספר ממשי. קבעו עבור איזה ערכים של α הפונקציה f רציפה ב־ $(0,0)$.

<u>פתרון:</u>

נעבור למישור (r,θ).

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^{3-2\alpha}\sin\theta\cos^2\theta$$

לכן $f=FG$ כאשר $F(r)=r^{3-2\alpha}$ ו־ $G(\theta)=\sin\theta\cos^2\theta$. לכן הגבול קיים ושווה 0 אם ואק אם $3-2\alpha>0$:

- אם $3-2\alpha>0$: נובע מהמשפט המוכר לנו מההרצאה.

- אם $3-2\alpha=0$: f קבועה של הקרנות היוצאות מהראשית, כי עכשיו $f=G$, נבחר למשל $\theta=0$ ו־ $\theta=1$ ואז

$$f\left(r,0\right)=0$$

$$f\left(r\cos1,r\sin1\right)=\sin1\cos^{2}1$$

לכן אין גבול ל־ 0 ב־ $(0,0)$. שים לב שהמסלול השני כבר עונה על השאלה כי ביקשו לבדוק רציפות.

- אם $3-2\alpha<0$: נבחר $\theta=1$ ואז $f\left(r\cos1,r\sin1\right)=\frac{1}{r^{2\alpha-3}}\sin1\cos^{2}1$ וברור שזה לא קיים אם $r\to0^{+}$.

לא הבנתי את החלק הזה

הערה: מפתה עכשיו להכליל את המשפט שהוכחת בהרצאה.

18. תהי נתונה הפונקציה

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{\sin(xy)}{xy} & x,y\neq0\\ \frac{\sin x}{x} & x\neq0,\,y=0\\ \frac{\sin y}{y} & y\neq0,\,x=0\\ 1 & x=y=0\end{cases}$$

האם f רציפה ב־ $\mathbb{R}^{2}$?

<u>פתרון:</u>

תהי $P=(a,b)\in\mathbb{R}^{2}$. אם $a,b\neq0$ ברור ש־ f רציפה ב־ P. נניח $a=0,b\neq0$. תהי (a_{n},b_{n}) סדרה המתכנסת ל־ (a,b). נפרק את (a_{n},b_{n}) ל־2 תתי סדרות לפי ההבחנה בין אם $a_{n}=0$ או $a_{n}\neq0$. שים לב ש־ $b\neq0$ לכן בה"כ $b_{n}\neq0$ לכל n.

לצורך פשטות בכתיבה נמשיך לקרוא להן a_{n},b_{n}: (באמדו אוהבים לאמר: עד כדי תת־סדרה).

תת־סדרה א: $a_{n}=0$, אזי

$$f\left(a_{n},b_{n}\right)=\frac{\sin b_{n}}{b_{n}}$$

לכן $f\left(a_{n},b_{n}\right)\to1$.

תת־סדרה ב: $a_{n}\neq0$, אזי

$$f\left(a_{n},b_{n}\right)=\frac{\sin\left(a_{n}b_{n}\right)}{a_{n}b_{n}}$$

לכן שוב $f\left(a_{n},b_{n}\right)\to1$.

לכן $f\left(a_{n},b_{n}\right)\to1$.

כנ"ל לגבי שאר המקרים.