טיוטא

קומבינטוריקה (104286)

סיכום הרצאות ותרגולים

מרצה: פרופ׳ רון הולצמן

מתרגל: אלן לאו

נכתב ע״י רועי לופטה – תיקונים והערות ניתן לשלוח לכתובת roee.lopata@campus.technion.ac.il

מעודכן נכון לתאריך 24.5.18

תוכן עניינים

שיעור 22.3.18 – בעיות מניה בסיסיות

עקרון החיבור

אם קבוצה מתחלקת לשני חלקים **שאין ביניהם חפיפה**, אז מספר האיברים בקבוצה הוא סכום מספרי האיברים בשני החלקים.

- <u>שאלה</u>: בכיתה יש 10 בנות, ו-8 בנים. כמה לומדים בכיתה? 18=10+8
- <u>שאלה נוספת</u>: בכיתה יש 4 תלמידים ששמם הפרטי מתחיל באות ד׳, ו-5 תלמידים ששם המשפחה שלהם מתחיל באות ד׳. לכמה תלמידים בכיתה יש שם המתחיל בד׳? אי אפשר לדעת, כי תיתכן חפיפה.

עקרון הכפל

אם בחירה נקבעת ע״י שתי החלטות, ומספר האפשרויות להחלטה השניה **אינו תלוי בהחלטה הראשונה**, אז מספר הדרכים לבחירה הוא מכפלת מספרי האפשרויות בשתי ההחלטות.

- <u>שאלה</u>: בארון הבגדים שלי יש שני זוגות מכנסיים (בצבעים כחול ושחור) וחמש חולצות (בצבעים לבן, כחול, ירוק, צהוב ואדום). בכמה דרכים אני יכול להתלבש?

$$2 \cdot 5 = 10$$

- <u>שאלה נוספת</u>: בכמה דרכים אני יכול להתלבש, אם אסור ללבוש מכנסיים וחולצה באותו צבע?

$$\overbrace{(4+5)}^{\text{עקרון החיבור}} = 9$$

$$2 \cdot 5 - 1 = 9$$

תמורה – בחירה סדורה של איברים

- <u>שאלה</u>: בכיתה יש 20 תלמידים. רוצים להרכיב נבחרת שחמט ובה 4 תלמידים בעלי תפקידים של לוח ראשון, שני, שלישי ורביעי. בכמה דרכים אפשר לעשות זאת?

לבחירת לוח ראשון – יש 20 אפשרויות. לאחר מכן, יהיו 19 אפשרויות לבחירת לוח שני, 18 ללוח שלישי ו-17 ללוח רביעי. כלומר:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$$

באופן כללי, עבור מספרים שלמים $0 \le k \le n$ (בדוגמא שלנו – n הוא 20, k הוא 4), בחירה סדורה (יש חשיבות לסדר) של k איברים <u>שונים</u> מתוך n איברים נתונים נקראת **k-תמורה של n איברים.**

מספר ה-k-תמורות של n איברים מסומן ע״י $P(n,k)$ (באנגלית – תמורה היא Permutation).

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \ \cdots \ (n-k+1)$$

במקרה הפרטי שבו $k = n$, סידור של כל n האיברים נקרא **תמורה של n איברים.**

$$P(n,n) = n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$$

מתוך ההגדרה הנ״ל, ניתן לכתוב מחדש:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (0! = 1)$$

בהינתן שתי קבוצות A,B, כאשר: $|B| = n$, $|A| = k$ – אפשר לחשוב על k-תמורה בתור פונקציה חח״ע מ-A ל-B.

במקרה הפרטי שבו $n = k$, אפשר לקחת $A = B$, ואז נוכל לחשוב על תמורה של n איברים בתור פונקציה חח״ע ועל מהקבוצה לעצמה.

צירוף – בחירה לא סדורה של איברים

- <u>שאלה</u>: בכיתה יש 20 תלמידים. רוצים לבחור נבחרת כדורסל ובה 5 תלמידים ללא תפקידים (כלומר, אין חשיבות לסדר). בכמה דרכים אפשר לעשות זאת?

  לשחקן הראשון, יש 20 אפשרויות. לשחקן השני יש 19 אפשרויות, לשלישי 18, לרביעי 17, ולחמישי 16. יש פה ספירת יתר, שכן יש פה קבוצות עם אותם איברים, פשוט בסדר שונה. אז במונה נתייחס לספירה כאילו יש משמעות לסדר, ואז במכנה נכניס את מספר האפשרויות שיש לי בעת "הכנסה" של כל איבר ל"מקום" (לדוג' – אם יש לי 5 מקומות, את האיבר הראשון אני יכול "להכניס" לכל אחד מ-5 המקומות).

$$\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

באופן כללי, עבור מספרים שלמים $0\leq k\leq n$, <u>בחירה לא סדורה (אין משמעות לסדר)</u> של k איברים שונים מתוך n איברים נתונים נקראת **k-צירוף של n איברים.**

מספר ה-k-צירופים של n איברים מסומן ע"י $\binom{n}{k}$, הנקרא n בחר k.

$$\binom{n}{k}=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

בהינתן קבוצה A , כאשר $|A|=n$, אפשר לחשוב על k-צירוף של n איברים בתור תת-קבוצה של A בעלת k איברים. מספר תת-הקבוצות המקיימות את הנ"ל הוא בדיוק $\binom{n}{k}$.

סידור איברים עם כפילויות

- <u>שאלה</u>: בכמה דרכים אפשר לסדר את אותיות המילה "קומבינטוריקה"?

  "מניחים לרגע" כי האותיות שונות זו מזו. באופן זה, יש (!12) דרכים לסדר אותן. את המספר הזה מחלקים במספר הפעמים שספרנו כפילויות. בגלל שיש 3 אותיות שמופיעות פעמיים, ומכיוון שיש 2 דרכים להחליף בין 2 איברים, נקבל סה"כ:

$$\frac{12!}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{12!}{8}$$

נניח שנתונים n איברים שהם מ-r סוגים שונים (בדוגמא שלנו – r אותיות שונות).

עבור $i=1,\dots r$, יהי k_i מספר האיברים מסוג i, כאשר כמובן מתקיים $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$.

אזי מספר הדרכים לסדר את n האיברים, כאשר לא מבחינים בין איברים שונים מאותו סוג, הוא:

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_r!}$$

במקרה הפרטי $r=2$ נקבל $\binom{n}{k_1}\left[=\binom{n}{k_2}\right]$.

- <u>דוגמא</u>: נניח שיש לי כדור אחד כחול, 2 כדורים אדומים, ו-3 כדורים ירוקים. יש לי סה"כ 6 כדורים, מ-3 סוגים שונים. כלומר: $k_3=3$, $k_2=2$, $k_1=1$, $r=3$, $n=6$.

  יש סה"כ (!6) דרכים לסדר את האיברים, אך צריך לחלק במספר ההחלפות בתוך כל קבוצת צבע.

בעיות מניה עבור איברים המקבלים מספר זהויות/שיוכים

- <u>שאלה</u>: הפקולטה רוצה להזמין 10 מחשבים היכולים להיות מיוצרים ע״י 4 יצרנים.
  בכמה דרכים אפשר לעשות זאת, אם למחשבים אין זהות (אין משמעות לאיזה מחשב מגיע לאן), אבל ליצרנים יש?

  למשל, אחת הדרכים היא להזמין 2 מחשבי *IBM*, 3 מחשבי *HP*, 0 מחשבי *LG*, 4 מחשבי *DELL*.

  פתרון כזה ניתן לייצג ע״י סדרה של 1 ו-0 באופן הבא:

$$\overset{IBM(2)}{11}\ \ 0\ \overset{HP(3)}{111}\ 0\ \underbrace{\ }_{LG(0)}\ 0\ \overset{DELL(5)}{11111}$$

  בצורה כזו נקבל סדרה שיש בה 10 אחדים ו-3 אפסים.
  מצד שני, כל סדרה כנ״ל מייצגת פתרון אחד ויחיד לבעיה. לכן, מספר הפתרונות שווה למספר הסדרות שבהן יש 10 אחדים ו-3 אפסים, שהוא בדיוק:

$$\binom{13}{3} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1} = 286$$

באופן כללי, מספר הפתרונות במספרים שלמים אי-שליליים של המשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = k$ הוא:

$$\binom{k+r-1}{r-1}$$

תרגול 22.3.18 – בעיות מניה בסיסיות

<u>תרגיל 1</u>

א. כמה מספרים 4-ספרתיים יש?

לספרה הראשונה יש 9 אפשרויות (כל ספרה חוץ מ-0), ולכל ספרה אחרת יש 10 אפשרויות. לכן סה"כ:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3$$

ב. כמה מספרים 4-ספרתיים יש, כאשר כל הספרות שלהם שונות?

גם כאן יש 9 אפשרויות לספרה הראשונה. לספרה השנייה יש 9 אפשרויות (כל אחת מהספרות, חוץ מהספרה הראשונה בה השתמשנו), לספרה השלישית 8 אפשרויות ולרביעית 7. וסה"כ נקבל:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

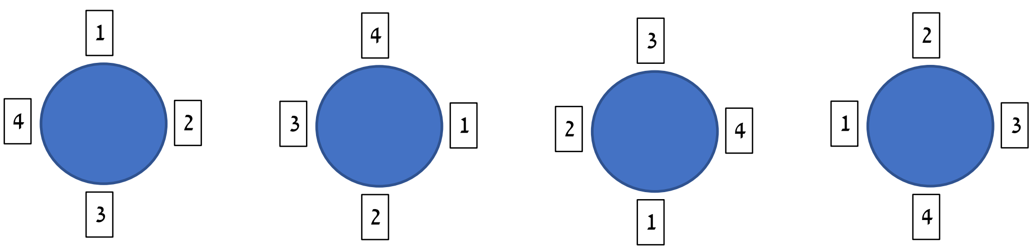
ג. כמה מספרים 4-ספרתיים יש, שכל הספרות שלהם שונות, והן מסודרות בסדר עולה? (למשל 1347,5678).

נשים לב קודם כל, כי המספר יכיל רק את הספרות 1-9. במקרה הזה, מספיק לבחור 4 מתוך 9 ספרות, <u>בלי חשיבות סדר</u>.
הסבר: נניח שבחרנו 4 ספרות – $\{7,3,5,9\}$. יש מספר יחיד שניתן לבנות כך שהספרות יהיו בסדר עולה – 3579.
כלומר, עבור כל 4 ספרות שאני בוחר, יש בדיוק דרך אחד לבנות את המספר בהתאם לדרישה.
לכן, התשובה היא $\binom{9}{4}$.

<u>תרגיל 2</u>

א. כמה דרכים יש לסדר n אנשים סביב שולחן מעגלי? שני סידורים יחשבו זהים אם אחד מתקבל מהשני ע"י סיבוב השולחן.

<u>דרך א':</u> אם נתעלם מסיבוב השולחן, אז יש n! דרכים לסדר את האנשים. אבל הסידורים הבאים, לדוג', כולם זהים:



באופן כללי, כל סידור ספרנו n פעמים <u>בדיוק</u>. לכן, יש $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ סידורים שונים.

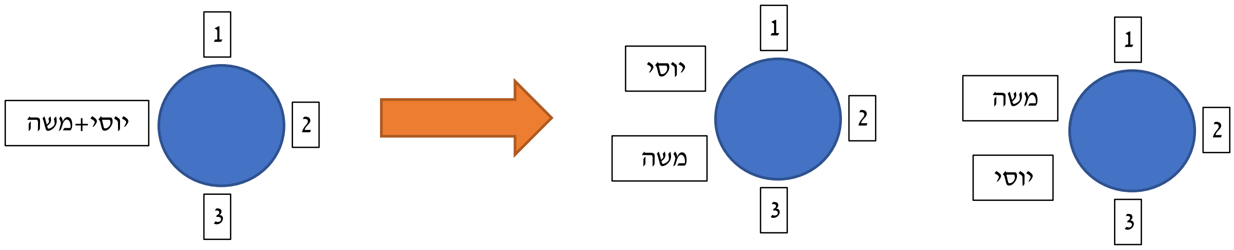
<u>דרך ב':</u> נבחר נציג יחיד מכל סידור אפשרי. נקבע מקום מסוים בשולחן להיות "ראש השולחן" ונחליט ש"איש מספר 1" יושב תמיד במקום הזה. נותר לסדר את n-1 האנשים הנותרים ב-n-1 המקומות הנותרים, כלומר ישנן $(n-1)!$ דרכים.

<u>נוודא שספרנו בצורה נכונה:</u>

- לא ספרנו אף סידור פעמיים, כי סיבוב השולחן לא ישאיר את 1 בראש השולחן.
- ספרנו את כל הסידורים – כל סידור ניתן לסובב כך ש-1 ישב בראש השולחן.

ב. בכמה דרכים ניתן לסדר $n \geq 3$ אנשים בשולחן מעגלי, כאשר שניים מתוכם – יוסי ומשה – חייבים לשבת אחד ליד השני?

נתייחס ל-(משה+יוסי) כאל באדם אחד. אז צריך לסדר n-1 "אנשים" ב-(n-1) מקומות בשולחן. לכן, לפי סעיף א', יש $(n-2)!$ דרכים. לכל סידור שכזה יש לנו 2 אפשרויות.



לכן, יש סה"כ $2 \cdot (n-2)!$ דרכים לסידור.

<u>תרגיל 3</u>

כמה זוגות סדורים (A,B) יש של קבוצות $A \subseteq B \subseteq [n]$, כאשר $[n] = \{1,2,\dots,n\}$?

לדוגמא: $(\{1,2\}\ ,\ \{1,2,3,5\})$, $(\emptyset\ ,\{1,5\})$

נסתכל על המספרים $1,2,\dots,n$. לכל אחד יש 3 אפשרויות:

- הוא שייך ל-A (0)
- הוא שייך ל-B אבל לא ל-A (1)
- הוא לא שייך ל-B (2)

לכן, יש לנו סה"כ 3^n אפשרויות (קשר של "או" בין האפשרויות).

דרך אחרת לחשוב על הפתרון – "נקודד" כל זוג A,B ע"י סדרה טרינארית (0,1,2) באורך n.

לדוגמא: $B = \{1,2,4,5\}$, $A = \{1,2,5\}$, $n = 5$
נתרגם ל: $0\ 0\ 2\ 1\ 0$ (משמעות הספרות 0,1,2 היא בהתאמה לסדר המופיע לעיל).

יש 3^n סדרות כאלה, ולכן יש 3^n זוגות (A,B) כאלה.

תרגיל 4

בכמה דרכים ניתן להרכיב ועדה של 2 גברים ו-3 נשים, מתוך קבוצה של 4 גברים ו-6 נשים, כאשר יש זוג אחד – משה ואורנה – שלא מוכנים להיות יחד בועדה?

אם שוכחים מהתנאי הנוסף, צריך לבחור 2 גברים מתוך 4 - $\binom{4}{2}$, וכן 3 נשים מתוך 6 - $\binom{6}{3}$.

סה"כ ישנן : $\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}=120$ אפשרויות.

נחסיר מתוכן את מס' הוועדות שבהן יושבים גם משה וגם אורנה (כלומר – בחרתי את שניהם, ונותר לי להשלים את הוועדה למספר הגברים והנשים הנדרש). נותר לבחור גבר נוסף מתוך 3 הנותרים : $\binom{3}{1}$, ולבחור 2 נשים מתוך ה-5 הנותרות : $\binom{5}{2}$. סה"כ : $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}=30$ ועדות "רעות".

לכן, מספר הוועדות ה"תקינות" הוא $120-30=90$.

שיעור 29.3.18 – המקדמים הבינומיים ותכונותיהם, הוכחות קומבינטוריות

הבינום של ניוטון

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

ובאופן כללי, לכל n טבעי מתקיים:

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n \text{ פעמים}}$$
$$= x^n + n \cdot \overbrace{x^{n-1}y}^{n\ choices\ after\ we've\ picked\ a\ specific\ place\ for\ y} + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

וקיבלנו את **נוסחת הבינום** של ניוטון. המספרים $\binom{n}{k}$ נקראים גם **המקדמים הבינומיים.**

נציב בנוסחה $x = y = 1$ ונקבל:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

כלומר, קיבלנו כי סכום המקדמים הבינומיים מ-0 עד n שווה ל-2^n. זוהי דוגמה לזהות קומבינטורית.

זהות קומבינטורית ניתנת להוכחה בשתי גישות: האחת היא הגישה האלגברית (כפי שראינו לעיל – הצבה בנוסחה), והשנייה היא הגישה הקומבינטורית – הוכחה מדוע הנ"ל צריך להתקיים מתוך הסברים ועקרונות קומבינטוריים.

לדוגמא, הוכחה של הזהות לעיל באמצעות הוכחה קומבינטורית:

מתבוננים על שני צדדי המשוואה, ומנסים להבין מה כל צד במשוואה סופר. אם נגלה שיש העתקה חח"ע ועל בין שתי הספירות – הן יהיו זהות אחת לשנייה.

אגף שמאל (2^n) סופר את מספר האפשרויות לקבל n החלטות, כאשר בכל החלטה יש בחירה בין 2 אפשרויות. לחלופין, ניתן להתייחס לכך כספירה של תת-הקבוצות של קבוצה בת n איברים (כדי לקבוע וליצור תת-קבוצה, יש לקבוע עבור כל איבר בקבוצה אם הוא נמצא או לא נמצא בתת-הקבוצה – וניתן לתרגם זאת לסדרה בינארית של n איברים – כאשר יש 2^n סדרות כאלה).

אגף ימין סופר לכל k את תת-הקבוצות בגודל k של קבוצה בת n איברים, וסוכם את התוצאות עבור כל ה-k-ים. ומכאן (עפ"י עקרון החיבור) שספרנו את כל תת-הקבוצות של קבוצה בת n איברים.

כעת, נציב בנוסחה, עבור $n \geq 1$ - $x = 1\ ,\ y = -1$ - ונקבל:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

אחרי העברת אגפים נקבל:

$$\forall n \geq 1 : \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

כלומר, יהי $n \geq 1$ ותהי X קבוצה בת n איברים.
אזי, מספר תת-הקבוצות של X, שגודלן זוגי, שווה למספר תת-הקבוצות של X, שגודלן אי-זוגי.

נוכיח עתה את הזהות הנ"ל באופן קומבינטורי – כלומר, נרצה למצוא העתקה חח"ע ועל בין שתי הקבוצות.

יהי x איבר מסוים של הקבוצה X. נתבונן בפונקציה הבאה, מאוסף התת-קבוצות של X לעצמו (S היא תת-קבוצה של X):

$$f(S) = \begin{cases} S \backslash \{x\} \quad , & x \in S \\ S \cup \{x\} \ , & x \notin S \end{cases}$$

הפונקציה הזו היא חח"ע ועל – היא ההופכית של עצמה. הפונקציה מעתיקה את תת-הקבוצות בגודל זוגי, לתת-קבוצות בגודל אי-זוגי, ולהיפך. לכן, מספרי תת-הקבוצות משני הסוגים שווים זה לזה.

נוסחת פסקל ומשולש פסקל

זהות קומבינטורית נוספת (זהות/נוסחת פסקל):

$$\forall 1 \leq k \leq n-1 : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

שוב, עלינו להבין מדוע שני הצדדים סופרים את אותו הדבר, או האם קיימת העתקה חח"ע ועל בין שני הצדדים.

תהי X קבוצה בעלת n איברים, ויהי x איבר מסוים של X.

אגף שמאל סופר את תת-הקבוצות בגודל k של X.

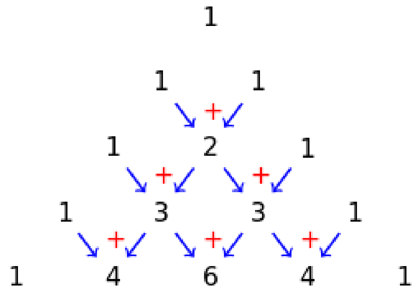
באגף ימין ישנם שני מחוברים – הראשון סופר את תת-הקבוצות של X, בגודל k, המכילות את x (עבור קבוצות בעלות k איברים, כבר בחרתי איבר אחד – את x – ועתה נותרו לי k-1 איברים לבחור מתוך X). המחובר השני סופר את תת-הקבוצות של X, בגודל k, אשר אינן מכילות את x.

משולש פסקל הוא מערך משולשי של מספרים מהצורה $\binom{n}{k}$, הנראה כך:

השורה ה-0	$\binom{0}{0}$
השורה ה-1	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
השורה ה-2	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
השורה ה-3	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

וכן הלאה (כאשר מספור השורות מ-0 ועד n).

מתוך נוסחת פסקל, נוכל להסיק כי משולש פסקל נראה כך :



בהתבוננות במשולש פסקל, רואים את הסימטריה הקיימת בכל שורה - כל שורה היא פלינדרום (סימטרית ביחד למרכז – מספר אחד כאשר *n* זוגי, ושני מספרים כאשר *n* אי-זוגי) :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית של עובדה זו -</u> פונקציית המשלים מעתיקה, באופן חח״ע ועל, את תת-הקבוצות בגודל *k* של קבוצה בגודל *n* – אל תת-הקבוצות בגודל *n-k* שלה.

<u>טענה :</u>

- אם *n* זוגי : $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\frac{n}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$
- אם *n* אי-זוגי : $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$

<u>הוכחה :</u> (ההוכחה הקומבינטורית לא מידית, ועל כן נוכיח בדרך אלגברית)

נחשב את היחס בין $\binom{n}{k}$ לבין $\binom{n}{k-1}$:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{n!\,(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}$$

כעת :

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} \iff \frac{n-k+1}{k} > 1 \iff n-k+1 > k \iff k < \frac{n+1}{2}$$

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} \iff k = \frac{n+1}{2}$$

$$\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k} \iff k > \frac{n+1}{2}$$

וזה מתאים בדיוק למה שרצינו להוכיח.

נשים לב כי ממוצע המספרים בשורה ה-n של משולש פסקל הוא $\frac{2^n}{n+1}$.
לכן, מהטענה שהוכחנו, ברור שהמספר/ים האמצעי/ים גדול/ים מהממוצע הזה.

עתה, ננסה להבין כמה המספרים האמצעיים רחוקים מהממוצע, או במילים אחרות – כמה הם משפיעים על הממוצע. שאלה זאת מעניינת, כיוון שהיא נותנת, למשל, את היכולת להעריך מה הסבירות שעבור קבוצה בעלת n איברים, נקבל את תת-הקבוצה בעלת בדיוק חצי n איברים.

לשם פתרון הסוגיה, נשתמש <u>בנוסחת סטירלינג</u>:

$$\boxed{n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}$$

- הסימון $\approx$ פירושו שהיחס בין שני האגפים שואף ל-1 כאשר $n \to \infty$.

לא נוכיח כאן את הנוסחה (שכן ההוכחה היא אינפית ולא קומבית), אבל ניתן את רעיון ההוכחה:

כזכור, עפ"י הגדרה - $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. נרצה לעבור לביטוי נוח יותר לעבודה – נעשה זאת באמצעות המרת המכפלות לסכומים באמצעות לוגריתם. ניקח לוגריתם לפי בסיס e של שני האגפים:

$$\ln(n!) = \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n)$$

ונוכל לבטא את הנ"ל באמצעות אינטגרל:

$$\ln(n!) \cong \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x \, dx$$

ניתן לחשוב על האינטגרל כחלוקה של הפונקציה $\ln x$ למקטעים באורך 1, בין כל שתי נקודות $\left[\frac{k}{2}, \left(\frac{k}{2}+1\right)\right]$ – החל מהנקודה $\frac{1}{2}$ ועד לנקודה $n + \frac{1}{2}$. מתחילים בחצי כי אין משמעות ל-$\ln(0)$.

בעזרת נוסחת סטירלינג, נוכל לחשב בקירוב את גודלו של המקדם הבינומי האמצעי $\binom{2n}{n}$ עבור n גדול:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi} \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi \cdot n}}$$

מסקנה: כאשר n גדול, המקדם הבינומי האמצעי מהווה חלק ששואף ל-0 מסכום השורה, אבל הוא עדיין משמעותי ($\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$) בהשוואה לממוצע באותה שורה ($\frac{1}{2n+1}$).

תרגול 29.3.18

תזכורת - בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך n – עם חזרות ובלי חשיבות סדר?

1. חלוקת k כדורים זהים ל-n תאים שונים
2. כמה פתרונות, שלמים ואי-שליליים, יש למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$

הפתרון של הבעיות הנ"ל הוא: $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$

תרגיל 1

נתונה קופסא מלאה בכדורים בצבעים אדום, כחול וירוק (ישנם הרבה כדורים מכל סוג).
בוחרים 10 כדורים ומכניסים לקופסא אחרת.

א. כמה אפשרויות שונות יש לבחירת הכדורים לקופסא החדשה? (כל אפשרות נבדלת מאחרת במספר הכדורים מכל סוג)

נסמן את מספר הכדורים האדומים שנבחרו ב-x_1 , את מספר הכדורים הכחולים שנבחרו ב-x_2 ואת מספר הכדורים הירוקים שנבחרו ב-x_3.
מספר הדרכים לבחירה שווה למספר הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ (כמובן ש-$x_i \geq 0$ שלמים לכל i). לכן, מספר האפשרויות הוא סה"כ:

$$\binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$

ב. בכמה אפשרויות יש לפחות 5 כדורים כחולים?

כמו מקודם – מספר האפשרויות שווה למספר הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 10$. הפעם, נדרוש $x_1, x_3 \geq 0$ וכן $x_2 \geq 5$. נבצע החלפת משתנה: $x_2 = y_2 + 5$, כאשר $y_2 \geq 0$.

מכאן, שנרצה עתה לפתור את המשוואה $x_1 + y_2 + 5 + x_3 = 10$, כלומר $x_1 + y_2 + x_3 = 5$, כאשר $x_1, y_2, x_3 \geq 0$ שלמים. לכן, מספר הפתרונות:

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

תרגיל 2

כמה פתרונות יש למשוואה: $3x_1 + x_2 + x_3 = 11$ כאשר x_1, x_2, x_3 שלמים ואי-שליליים.

נחלק למקרים כלפי הערך של x_1:

1. $\underline{x_1 = 0}$:

$x_2 + x_3 = 11 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 0 + x_2 + x_3 = 11$ ולכן מספר הפתרונות הוא $\binom{11+2-1}{2-1} = \binom{12}{1} = 12$.

2. $\underline{x_1 = 1}$:

$x_2 + x_3 = 8 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 1 + x_2 + x_3 = 11$ ולכן מספר הפתרונות הוא $\binom{8+2-1}{2-1} = \binom{9}{1} = 9$

3. $x_1 = 2$:

$x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow 3 \cdot 2 + x_2 + x_3 = 11$ ולכן מספר הפתרונות הוא $6 = \binom{6}{1} = \binom{5+2-1}{2-1}$

4. $x_1 = 3$:

$x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow 3 \cdot 3 + x_2 + x_3 = 11$ ולכן מספר הפתרונות הוא $3 = \binom{3}{1} = \binom{2+2-1}{2-1}$

עבור $x_1 \geq 4$ אין פתרונות (שכן כלל האיקסים הם אי-שליליים).

לכן, מספר הפתרונות הכולל הוא $12 + 9 + 6 + 3 = 30$. ובאופן כללי:

$$\sum_t \binom{n-1+k-3t}{n-1}$$

תרגיל 3

מצאו את מספר הפתרונות לאי-השיווין $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq k$, כאשר $x_i \geq 0$ שלמים לכל $i = 1, \dots, n$.

דרך א':

מספר הפתרונות לאי-השיוויון הוא סכום של מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + \cdots + x_n = r$ לכל $0 \leq r \leq k$. לכן:

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{r+n-1}{n-1}$$

דרך ב':

מספר הפתרונות לאי-השוויון שווה למספר הפתרונות למשוואה הבאה: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + y = k$ כאשר כל המחוברים הם שלמים וחיוביים. לכן, מספר הפתרונות הוא: $\binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1-1}{k}$.

נשים לב כי קיבלנו כאן שקילות:

$$\binom{k+n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{r+n-1}{n-1}$$

וזוהי למעשה הוכחה קומבינטורית של הזהות לעיל.

המקדמים הבינומיים וזהויות קומבינטוריות

<u>תרגיל – הוכיחו את הזהויות הבאות</u>

א. $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

נראה ששני האגפים סופרים את אותו דבר.

אגף שמאל – מתוך כיתה של n בנים ו-n בנות, נבחר שני נציגים.

אגף ימין – נחלק למקרים:

שתי הנציגות בנות - $\binom{n}{2}$

שני הנציגים בנים - $\binom{n}{2}$

נציג אחד בן, אחת בת - $\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n^2$

וסה"כ נקבל: $2\binom{n}{2} + n^2$

ב. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

<u>דרך א' -</u> להציב $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

<u>דרך ב' –</u>

אגף שמאל – לבחור ממשלה בגודל k מתוך n ח"כים, ואז לבחור אחד מחברי הממשלה להיות ראש ממשלה (יש k אפשרויות כאלו).

אגף ימין – נבחר מתוך n חברי הכנסת ראש ממשלה (יש n אפשרויות כאלו), ומשאר n-1 הח"כים נבחר k-1 חברי ממשלה שאינם ראש ממשלה.

ג. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

<u>דרך א' –</u> אלגברית, לפי נוסחת הבינום:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

נגזור את שני האגפים:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot x^{k-1}$$

נציב $x = 1$:

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$$

דרך ב' – באופן קומבינטורי

אגף ימין – מתוך קבוצה של n סטודנטים, נבחר אחד שמקבל 100 (יש n אפשרויות כאלו), ומתוך השאר נבחר תת-קבוצה שמקבלת 60 (יש לי 2^{n-1} אפשרויות לקבוצות כאלה), וכל השאר נכשלים (מקבלים 40).

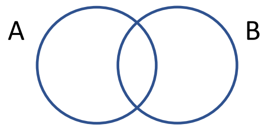
אגף שמאל – נחלק למקרים לפי מספר האנשים שעברו: לכל $1 \leq k \leq n$ נבחר k אנשים מתוך n שיעברו, ומתוכם נבחר אחד שמקבל 100 (וכל השאר 60).

לכך יש $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$ דרכים – אני בוחר קבוצה של k אנשים שכוללים גם את מקבלי ה-60 וגם את ה-100 - $\binom{n}{k}$.
את זה אני מכפיל ב-k כי בכל קבוצה יש לי k אפשרויות למי שקיבל 100.

הרצאה 12.4.18 – עקרון ההכלה-הפרדה

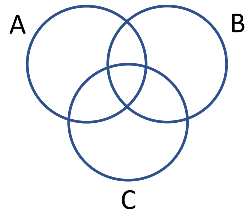
עקרון ההכלה-הפרדה - מניית איברים, בקבוצות סופיות, ובעלות חפיפה

בהינתן שתי קבוצות סופיות A,B – כאשר יש ביניהן חפיפה –



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

בהינתן שלוש קבוצות סופיות A,B,C – כאשר יש ביניהן חפיפה –



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

<u>**באופן כללי, עבור *n* קבוצות, מתקיים המשפט הבא ("נוסחת ההכלה-הפרדה עבור *n* קבוצות") –**</u>

תהיינה $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות סופיות. אזי מתקיים:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

הסכום ה-m-י הוא כל האפשרויות לחיתוך של m קבוצות, כאשר לפני כל סכום במקום אי-זוגי יהיה עם סימן חיובי, וכל סכום במקום הזוגי יהיה עם סימן שלילי.

<u>הוכחה</u>

יהי $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. עלינו להראות שבאגף ימין של הנוסחה, x נספר נטו בדיוק פעם אחת (עבור האגף השמאלי – הדבר טריוויאלי).

נניח ש-x נמצא ב-m מבין הקבוצות $A_1, A_2, \dots, A_n$, כאשר $1 \le m \le n$.

נניח עתה, בה"כ, כי $x \in A_i \Leftrightarrow 1 \le i \le m$. כעת, נבדוק כמה פעמים x נספר בכל אחד מהסכומים באגף ימין.

- **בסכום הראשון:** נספר m פעמים, עם סימן חיובי.
- **בסכום השני:** נספר $\binom{m}{2}$ פעמים (כי עלינו לבחור 2 קבוצות שונות מתוך m הקבוצות המכילות את x), עם סימן שלילי.
- **בסכום השלישי:** נספר $\binom{m}{3}$ פעמים, עם סימן חיובי.
- **בסכום ה-m-י:** נספר פעם אחת $\left[\binom{m}{m} = 1\right]$, עם סימן $(-1)^{m+1}$.

מכאן, x נספר נטו באגף ימין :

$$m-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\cdots+(-1)^{m+1}\binom{m}{m}$$

ונשים לב כי אנו מקבלים סכום של מקדמים בינומיים בשורה ה-m-ית במשולש פסקל, עם סימנים מתחלפים, מלבד האיבר הבודד $\binom{m}{0}$. נכתוב מחדש את הביטוי לעיל, ונזכור כי הסכום הנ״ל שווה לאפס :

$$1-\binom{m}{0}+\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+(-1)^{m+1}\binom{m}{m}=1-0=1$$

כלומר, אכן קיבלנו כי כל איבר נספר בדיוק פעם אחת – כנדרש.

<u>הערה :</u> למרות שהנוסחה מדויקת, היא לא קלה לחישוב – ועל כן לא תמיד פרקטית. אך נשים לב כי פעמים רבות נוכל לפשט את הבעיה מטעמי סימטריה של הבעיה, או לחלופין לאור חיתוך מועט בין קבוצות (לדוג׳ – כאשר יש לי n קבוצות, אך כל איבר נמצא לכל היותר ב-3 קבוצות שונות).

דוגמאות לשימוש בעקרון ההכלה-הפרדה

<u>שאלה – בעיית המזכירה המפוזרת</u>

מזכירה מכינה מכתבים ל-n נמענים שונים, ומכינה מעטפות עם הכתובות שלהם. כעת, היא מכניסה לכל מעטפה מכתב אחד שנבחר באופן אקראי. מה ההסתברות שאף אחד מן הנמענים לא יקבל את המכתב שלו?

נתחיל בלבדוק עבור מספרים קטנים – על מנת לקבל תחושה.

<u>עבור *n=1*</u> – ההסתברות לכך היא 0.

<u>עבור *n=2*</u> – ההסתברות היא $\frac{1}{2}$ (שני מכתבים ושתי מעטפות – יש רק שתי אפשרויות : או שהשיבוץ מתאים בדיוק, או שהוא לא מתאים בכלל)

<u>עבור *n=3*</u> – ההסתברות היא $\frac{1}{3}$. נמספר את המעטפות והמכתבים 1,2,3 בהתאם לנמען המיועד. נבדוק את כלל האפשרויות לסידור, ונסמן באדום את המקרה המבוקש (אף אחד מהנמענים לא קיבל את המכתב שלו) :

מעטפה 3	מעטפה 2	מעטפה 1
3	2	1
2	3	1
3	1	2
1	3	2
2	1	3
1	2	3

נקרא לתמורה של האיברים $1,2,\ldots,n$ <u>אי-סדר</u> (*Derangement*) אם אף איבר i לא נמצא במקום ה-i.

נסמן ב-D_n את מספר אי-הסדרים של $1,2,\ldots,n$. ההסתברות המבוקשת בשאלה היא, אם כן, מספר אי-הסדרים חלקי כלל האפשרויות לסידור המכתבים במעטפות ($n!$), כלומר – $\frac{D_n}{n!}$.

עבור $i=1,\ldots,n$ נסמן ב-A_i את קבוצת התמורות של $1,2,\ldots,n$ שבהן i נמצא במקום ה-i. בסימונים אלה, D_n הוא הקבוצה המשלימה לקבוצת האיחוד של כל ה-A_i , כלומר :

$$D_n=n!-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|$$

לכל i מתקיים: $|A_i| = (n-1)!$ (שכן, לאחר שבחרתי איבר אחד – יש לי n-1 איברים אחרים לשבץ ב-n-1 מקומות.

לכל $i < j$ מתקיים: $\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!$

לכל $i < j < k$ מתקיים: $\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = (n-3)!$

וכך הלאה...

על כן, לפי נוסחת ההכלה-הפרדה נקבל:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i (n-1)! - \sum_{i<j} (n-2)! + \sum_{i<j<k} (n-3)! - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot 0!$$

$$= n \cdot (n-1)! - \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + \binom{n}{3} \cdot (n-3)! - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{n!} = n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right)$$

ומכאן נקבל:

$$D_n = n! - n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\right) = n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right)$$

ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{i!}$$

נשים לב כי זהו סכום $n+1$ המחוברים הראשונים בנוסחה עבור e^x כאשר $x = -1$.

כלומר, כאשר n גדול – התשובה היא בקירוב e^x כאשר $x = -1$, כלומר: $\frac{1}{e}$.

<u>דוגמא נוספת – מתוך תורת המספרים</u>

<u>תזכורת</u>

כל מספר טבעי $n > 1$ ניתן לכתיבה כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים, כלומר:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$$

שני מספרים טבעיים m, n נקראים **זרים** אם אף מספר ראשוני לא מחלק את שניהם, או במילים אחרות – אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1.

פונקציית אוילר $\varphi(n)$ מוגדרת לכל מספר טבעי n כך שהיא שווה למספר המספרים מבין $1,2,\ldots,n$ שהם זרים ל-n.

כך, למשל: $\varphi(1) = 1 \quad , \quad \varphi(2) = 1 \quad , \quad \varphi(3) = 2 \quad , \quad \varphi(4) = 2$

עבור p ראשוני מתקיים $\varphi(p) = p - 1$ (כל המספרים זרים לו מלבד הוא עצמו).

כעת, נרצה לחשב באופן כללי את $\varphi(n)$ עבור $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$.

עבור $i = 1, \ldots, t$ נסמן ב-A_i את קבוצת המספרים מבין $1,2,\ldots,n$ המתחלקים ב-p_i. אזי מתקיים:

$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t|$$

לכל i מתקיים: $|A_i| = \frac{n}{p_i}$ (עבור מספר ראשוני p_i – רק המספרים שהם כפולות שלו מתחלקים בו עצמו – אפשר "לחלק" את כלל המספרים עד n לקבוצות בעלות p_i מספרים עוקבים – וכך בכל קבוצה יש בדיוק מספר אחד שמתחלק ב-p_i).

לכל $i < j$ מתקיים: $\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{n}{p_i p_j}$

וכך הלאה...

לכן, לפי נוסחת ההכלה-הפרדה מתקיים:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t| = \sum_i \frac{n}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^{t+1} \cdot \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}$$

לכן:

$$\varphi(n) = n - n\left[\sum_i \frac{1}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^{t+1} \cdot \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}\right]$$

$$= n\left[1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^{t} \cdot \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}\right]$$

$$\boxed{\varphi(n) \overset{*}{=} n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right)}$$

* כפי שכבר ראינו בפתיחת הסוגריים בחישוב הבינום של ניוטון.

<u>דוגמא:</u>

$$\varphi(80) = \varphi(2^4 \cdot 5) = 80\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 32$$

תרגול 12.4.18 – הכלה והפרדה

תרגיל 1

במועדון ספורט יש 54 חברים, המחולקים באופן הבא:

- 34 משחקים טניס, 22 משחקים גולף, 11 משחקים כדורסל
- 10 משחקים גם טניס וגם גולף
- 6 משחקים טניס כדורסל
- 4 משחקים כדורסל וגולף
- 2 משחקים הכל

א. כמה מחברי המועדון משחקים טניס או גולף?

$$|\text{טניס} \cup \text{גולף}| = |\text{גולף}| + |\text{טניס}| - |\text{טניס} \cap \text{גולף}| = 34 + 22 - 10 = 46$$

ב. כמה מחברי המועדון באים רק בשביל לשתות קפה (כלומר, לא משחקים באף ספורט)?

נספור כמה חברים משחקים כל סוג שהוא של ספורט (סוג אחד לפחות):

$$|\text{כדורסל} \cup \text{גולף} \cup \text{טניס}| =$$
$$= |\text{גולף}| + |\text{טניס}| + |\text{כדורסל}| - |\text{טניס} \cap \text{גולף}| - |\text{טניס} \cap \text{כדורסל}| - |\text{כדורסל} \cap \text{גולף}|$$
$$+ |\text{כדורסל} \cap \text{טניס} \cap \text{גולף}|$$
$$= 34 + 22 + 11 - 10 - 6 - 4 + 2 = 49$$

תרגיל 2

כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ כאשר: $0 \le x_1, x_2, x_3 \le 8$ שלמים.

כמה פתרונות יש בהם $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ שלמים? $\binom{20+3-1}{3-1} = \binom{22}{2} = \frac{21\cdot 22}{2} = 231$.

נחסיר ממספר זה את כמות הפתרונות ה"לא חוקיים", כלומר פתרונות בהם אחד מה-x_i-ים מקיים $x_i \ge 9$.

עבור $i = 1,2,3$ נגדיר את A_i להיות אוסף הפתרונות בהם $x_i \ge 9$.

$|A_1|$ הוא מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ כאשר $x_1 \ge 9$ וכן $x_2, x_3 \ge 0$ שלמים.

נבצע החלפת משתנים: $x_1 = y_1 + 9\ (y_1 \ge 0)$. מכאן נקבל $y_1 + 9 + x_2 + x_3 = 20$, כלומר $y_1 + x_2 + x_3 = 11$, ולכך יש $\binom{11+3-1}{3-1} = \binom{13}{2} = 78$ פתרונות. באותו אופן - $|A_2| = |A_3| = 78$.

עבור $i \ne j$ – $|A_i \cap A_j|$ הוא מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ כאשר $x_i, x_j \ge 9$ וכן $x_k \ge 0$ (המספר הנותר) שלם.

נבצע החלפת משתנים בהתאמה: $x_{i/j} = y_{i/j} + 9\ (y_i, y_j \ge 0)$.

לכן, מספר הפתרונות שווה למספר הפתרונות של המשוואה: $y_i + 9 + y_j + 9 + x_k = 20$, כלומר $y_i + y_j + x_k = 2$ כאשר כולם שלמים ואי-שליליים. לכן: $|A_i \cap A_j| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$.

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ ולכן, מספר הפתרונות ה"לא חוקיים":

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 3 \cdot 78 - 3 \cdot 6 + 0 = 216$$

ולבסוף, מספר הפתרונות ה"חוקיים" הוא $231 - 216 = 15$.

<u>תרגיל 3</u>

הוכיחו באופן קומבינטורי את הזהות :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k = 1$$

<u>ראשית, נוכיח אלגברית (באמצעות נוסחת הבינום של ניוטון) :</u>

$$1 = (-1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k}$$

<u>הוכחה קומבינטורית :</u>

נספור את מספר הסדרות הבינאריות באורך n שכל הספרות בהן הן 0.

צד ימין – רק הסדרה $(0,0,\dots,0)$ מקיימת את התנאי, לכן התשובה היא 1.

צד שמאל – נספור בדרך אחרת, בעזרת הכלה-הפרדה. נסמן ב-Ω את כל הסדרות הבינאריות באורך n. מכאן, $|\Omega| = 2^n$. נחסר את הסדרות ה"רעות", כלומר – אלו שבהן אחת מהספרות היא 1.

לכל $i = 1, \dots, n$ נסמן ב-A_i את הסדרות בהן הספרה במקום ה-i היא 1.

לכל i מתקיים $|A_i| = 2^{n-1}$ (שכן, באחד המקומות אני מקבע את הספרה 1, ובשאר ה-$(n-1)$ מקומות יש לי 2 אפשרויות לכל מקום – 0/1).

יהיו $1 \le i < j \le n$ ואז מתקיים $|A_i \cap A_j| = 2^{n-2}$.

יהי $1 \le k \le n$ ויהיו $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$, אזי מתקיים $|A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{i_k}| = 2^{n-k}$.

לכן, מספר הסדרות בהן לא כל הספרות הן 0 :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{i_k}|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

ולכן הסדרות שהן <u>כולן 0</u> :

$$|\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = 2^n - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 2^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}$$
$$= (-1)^0 \binom{n}{0} 2^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

תרגיל 4

מהו מספר הסדרות באורך 5 של ספרות (0-9), כך שבאף שלושה מקומות עוקבים סכום הספרות איננו 9?

כמה סדרות כאלה יש, בלי התנאי? 10^5.

מתוך המספר הזה, נחסיר את מספר הסדרות בהן יש שלושה מקומות עוקבים שסכום הספרות בהן 9.

נסמן ב-A_1 את אוסף כל הסדרות בהן 3 הספרות הראשונות סכומן 9 , A_2 את אוסף כל הסדרות בהן 3 הספרות החל מהשניה סכומן 9 , A_3 את אוסף כל הסדרות בהן 3 הספרות החל מהשלישית סכומן 9.

עבור A_1 – עבור שתי הספרות האחרונות (x_4, x_5) אין הגבלה, ולכן לכל אחת מהן יש 10 אפשרויות. עבור 3 הספרות הראשונות – צריך למצוא כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=9$, כלומר $\binom{9+3-1}{3-1}$. ובסה״כ נקבל $\binom{11}{2}\cdot 10\cdot 10=5500$. באופן דומה: $|A_2|=|A_3|=5500$.

עבור $|A_1\cap A_2|$ - צריך לפתור את צמד המשוואות $x_1+x_2+x_3=9$, $x_4+x_2+x_3=9$ - ומכאן ש-$x_1=x_4$. מכאן, לאחר שבחרתי x_1,x_2,x_3 ספציפיים עבור המשוואה הראשונה, x_4 נבחר באופן מיידי (כלומר – יש רק אפשרות אחת), ועד עבור x_5 יש לי 10 אפשרויות. ובסה״כ: $|A_1\cap A_2|=|A_2\cap A_3|=\binom{11}{2}\cdot 1\cdot 10=550$.

עבור $|A_1\cap A_3|$ - צריך לפתור את צמד המשוואות $x_1+x_2+x_3=9$, $x_3+x_4+x_5=9$.

אם $x_3=i$ נקבל: $x_1+x_2=9-i$, $x_4+x_5=9-i$, ולכך מספר הפתרונות הוא $\binom{9-i+1}{1}^2$. כלומר:

$$|A_1\cap A_3|=\sum_{i=0}^{9}(10-i)^2 \overset{(j=10-i)}{=} \sum_{j=1}^{10} j^2=385$$

עבור $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ צריך לפתור את מערכת המשוואות:

$x_1+x_2+x_3=9$, $x_3+x_4+x_5=9$, $x_4+x_2+x_3=9$ - ומכאן ש- $x_5=x_2$, $x_4=x_1$ ולכן:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\binom{11}{2}\cdot 1\cdot 1=55$$

ומכאן נקבל:

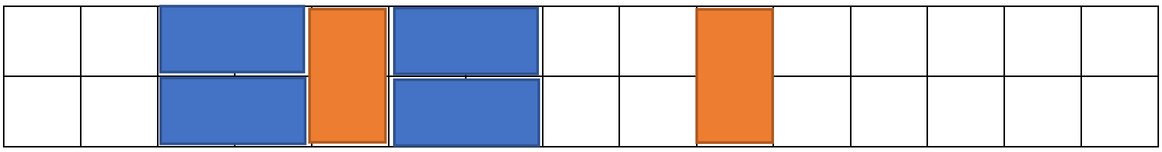
$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=3\cdot 5500-550-550-385+55=15070$$

ולבסוף, מספר הסדרות ה״טובות״ הוא: $10^5-15070=84930$

הרצאה 17.4.18 – נוסחאות נסיגה ופתרונן

<u>שאלה</u>

נתון לוח משבצות בגודל $2 \times n$.

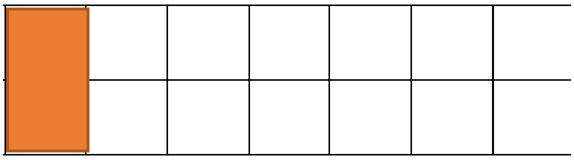


רוצים לכסות את כולו, ללא חפיפה וללא חריגה מן הלוח, ע״י כלי דומינו שגודלם 1×2.
בכמה דרכים אפשר לעשות זאת?

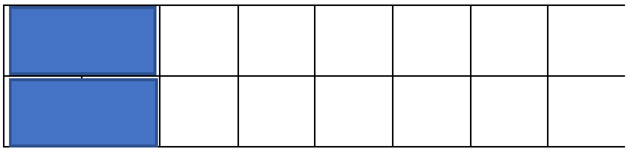
נסמן : F_n – מספר הדרכים לכסות לוח $2 \times n$.

ראשית, עלינו להחליט איך יכוסה הטור השמאלי ביותר בלוח.

<u>מקרה ראשון</u> : כיסוי ע״י כלי מאונך (כלי כתום). במקרה זה, נשאר לכסות לוח בגודל $2 \times (n-1)$, ואפשר לעשות זאת ב-F_{n-1} דרכים.



<u>מקרה שני</u> : כיסוי ע״י שני כלים מאוזנים (כלים כחולים). במקרה זה, נשאר לכסות לוח בגודל $2 \times (n-2)$, ואפשר לעשות זאת ב-F_{n-2} דרכים.



מכיוון ששני המקרים זרים ומכסים את כל האפשרויות :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

וזה נכון לכל $n \geq 2$. נוסחה כזו נקראת **נוסחת נסיגה.**

כמו כן, מתקיים : $F_1 = 1$, $F_0 = 1$. אלו נקראים **תנאי התחלה** (כלומר – מה קורה עבור האיברים במקומות שלא מוגדרים ע״י נוסחת הנסיגה – $n < 2$ במקרה שלנו).

כעת, ניתן לחשב בזה אחר זה :

$$F_0 = 1\,, F_1 = 1 \;\rightarrow\; F_2 = 2 \;\rightarrow\; F_3 = 3 \;\rightarrow\; F_4 = 5 \;\rightarrow \cdots$$

המספרים בסדרה זו נקראים **מספרי פיבונאצ׳י (Fibonacci)**.

החישוב לעיל נוח עבור אינדקסים קטנים, אך הופך ונהיה מורכב ככל שעולים באינדקסים (למשל – חישוב F_{1000}).
על כן, כעת נרצה ״לפתור״ את נוסחת הנסיגה – כלומר, להגיע לנוסחה מפורשת עבור F_n (״**הפתרון של נוסחת הנסיגה**״).

בשלב ראשון, נתעלם מתנאי ההתחלה, וננחש שסדרה גיאומטרית מהצורה: $q \neq 0$, $\{q^n\}_{n=0,1,\dots}$ מקיימת את נוסחת הנסיגה.

אז צריך להתקיים: $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$

נצמצם ב-q^{n-2} ונקבל: $q^2 = q + 1$. כלומר: $q^2 - q - 1 = 0$. נפתור ונקבל:

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

כלומר, קיבלנו שתי סדרות מהצורה שרצינו, המקיימות את נוסחת הנסיגה:

$$A_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad , \quad B_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

לכן, גם כל צירוף לינארי (חיבור וכפל בקבוע) שלהן ייתכן סדרה המקיימת את נוסחת הנסיגה.
כלומר נקבל פתרון כללי (כלומר, הצורה הכללית ביותר) לנוסחת הנסיגה, שצורתו:

$$C_n = a \cdot A_n + b \cdot B_n \ \ (a, b \in \mathbb{R})$$

- נשים לב כי, למעשה, אוסף כל הסדרות המקיימות את נוסחת הנסיגה הוא מרחב ווקטורי. המימד שלו הוא 2 (ניתן לבחור 2 תנאי התחלה באופן שרירותי – 2 דרגות חופש) – וכיוון שמצאנו 2 סדרות בלתי תלויות לינארית – הן בסיס של המרחב.

כעת, נותר לבחור את המספרים הממשיים a, b כך שיתקיימו גם תנאי ההתחלה. הדרישות הן:

$$\boldsymbol{n=0}: \quad a \cdot 1 + b \cdot 1 = F_0 = 1 \quad , \quad \boldsymbol{n=1}: \ a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

כלומר, קיבלנו מערכת של שתי משוואות לינאריות ב-*a,b*. פותרים ומקבלים: $a = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

לכן, הפתרון שמקבל **גם את נוסחת הנסיגה וגם את תנאי ההתחלה** הוא:

$$F_n = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

זהו הפתרון המפורש של נוסחת הנסיגה עם תנאי ההתחלה (כלומר, **ישנה רק סדרה אחת המקיימת גם את נוסחת הנסיגה וגם את תנאי ההתחלה)**.

נשים לב כי האיבר $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ קטן מאחד (בערכו המוחלט), וכאשר $n \to \infty$ הוא הולך ונהיה משמעותי פחות ופחות.
על כן, הביטוי לעיל נותן סדרה שאמנם אינה גיאומטריה, אך גדלה בקצב שהוא בקירוב:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$$

ומספר זה נקרא **יחס הזהב.**

תרגול 17.4.18 – המשך הכלה-הפרדה ונוסחאות נסיגה

תרגיל 1

כמה מספרים טבעיים יש בין 1 ל-119, שאינם מתחלקים ב-3,5,7?

<u>תזכורת :</u> יהיו $x, n \in \mathbb{N}$. מספר הטבעיים הקטנים או שווים ל-n המתחלקים ב-x הוא $\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor$ (ערך שלם תחתון).
כלומר, המספרים שמתחלקים ב-x הם : $\{x, 2x, \dots, k \cdot x\}$ – וכדי שכל המספרים יהיו לכל היותר n, נדרוש $kx \leq n$,
ומכאן $k \leq \frac{n}{x}$. אבל k הוא שלם, לכן : $k = \left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor$.

נסמן : A_1 – המספרים בין 1 ל-119 שמתחלקים ב-3 , A_2 – המספרים שמתחלקים ב-5 , A_3 – המספרים שמתחלקים ב-7. אז מתקיים :

$$|A_1| = \left\lfloor\frac{119}{3}\right\rfloor = 39 \;\;,\;\; |A_2| = \left\lfloor\frac{119}{5}\right\rfloor = 23 \;\;,\;\; |A_3| = \left\lfloor\frac{119}{5}\right\rfloor = 17$$

נחשב $|A_1 \cap A_2|$: מספר n מתחלק ב-3 וגם ב-5 אם ורק אם בפירוק שלו לגורמים ראשוניים, מופיעים הגורמים 3 וגם 5. כלומר : $n = 3 \cdot 5 \cdot y = 15 \cdot y$. כלומר, n מתחלק ב-3 וגם ב-5 אמ״מ n מתחלק ב-15.

- דוגמא עבור גורמים לא ראשוניים : n מתחלק ב-4 וגם ב-6 אמ״מ : $n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y$ (ה-2 האמצעי משותף גם ל-4 וגם ל-6).

לכן : $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor\frac{119}{15}\right\rfloor = 7$.
באופן דומה : $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{119}{3 \cdot 7}\right\rfloor = 5 \;,\; |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{119}{5 \cdot 7}\right\rfloor = 3 \;,\; |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{119}{3 \cdot 5 \cdot 7}\right\rfloor = 1$.

לכן, המספרים שמתחלקים בלפחות אחד מבין המספרים 3,5,7 :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 39 + 23 + 17 - 7 - 5 - 3 + 1 = 65$$

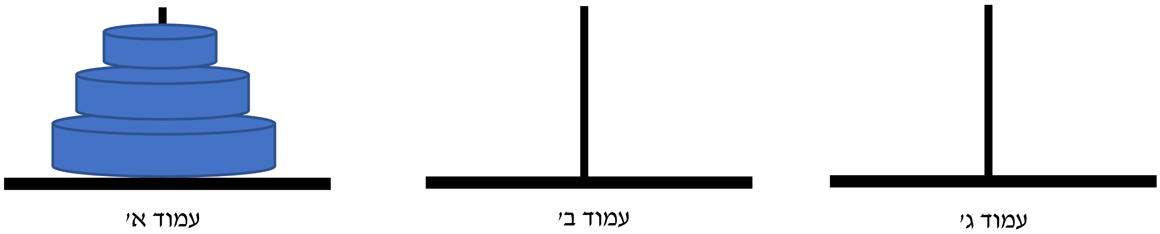
ולכן אלו שאינו מתחלקים במספרים 3,5 או 7 :

$$119 - 65 = 54$$

נוסחאות נסיגה

תרגיל 2 (מגדלי הנוי)

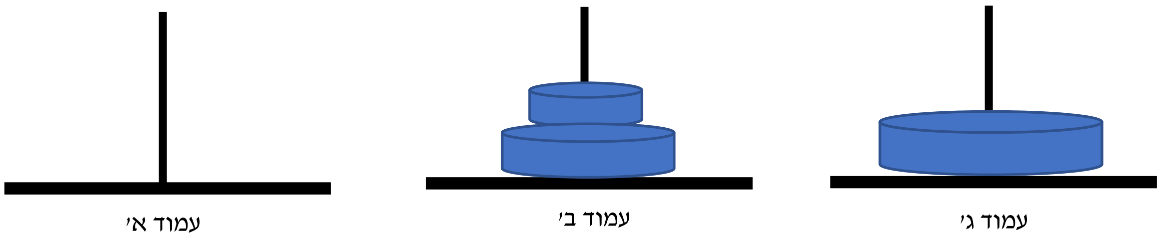
נזירים בסין רוצים להעביר n טבעות בגודל עולה מעמוד א׳ לעמוד ג׳, כאשר אסור לשים טבעת גדולה על טבעת קטנה. כמה מהלכים הם צריכים לעשות כדי לסיים?



נסמן את מספר המהלכים ב-a_n. נשים לב כי $a_0 = 0$ (כי ״אין צורך״ במהלכים) , $a_1 = 1$, $a_2 = 3$.

נמצא נוסחת נסיגה ל-a_n.

כדי להעביר את הטבעת הכי גדולה לעמוד ג׳ – חייבים קודם להעביר את $n-1$ הטבעות שמעליה לעמוד ב׳. לכך דרושים a_{n-1} מהלכים.



כעת, נעביר את הטבעת הגדולה לג׳. לאחר מכן, נעביר את $n-1$ הטבעות הנותרות מב׳ לג׳ (שוב ב-a_{n-1} צעדים).
לכן סה״כ דרושים:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

הנוסחה הנ״ל נכונה עבור $n \geq 1$, כאשר $a_0 = 0$. נפתור את נוסחת הנסיגה ע״י הצבה חוזרת:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2(2(2a_{n-3} + 1) + 1) + 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \cdot a_{n-3}$$

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k \cdot a_{n-k} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \cdot a_0 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

נוכיח באינדוקציה: $a_n = 2^n - 1$.

בסיס $(n = 0)$: $0 = a_0 = 2^0 - 1 = 0$

צעד האינדוקציה: $a_n = 2a_{n-1} + 1 \overset{\text{הנחת אינדוקציה}}{=} 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

תרגיל 3

נתבונן ב-n ישרים במצב כללי במישור, כלומר – אף שני ישרים אינם מקבילים (כולם נחתכים), ואף שלושה ישרים אינם עוברים דרך אותה נקודה. לכמה תחומים הישרים מחלקים את המישור?

נסמן את מספר התחומים ב-R_n.

נחשב את המקרים הראשונים: $R_0 = 1 \ , \ R_1 = 2 \ , \ R_2 = 4 \ , \ R_3 = 7 \ , \ R_4 = 11$ **(לצייר את זה)**.

ננסה להביע את R_n ע״י נוסחת נסיגה. נניח שכבר יש לנו $n-1$ ישרים. נוסיף את הישר האחרון. חלק מהתחומים מתחלקים ע״י הישר האחרון ל-2 תחומים. מספר התחומים הנחלקים הוא כמספר הקטעים שנוצרים על הישר הנוסף מנקודות החיתוך שלו עם שאר הישרים.

יש *n-1* נקודות חיתוך, ולכן *n* קטעים נוצרים. כלומר, מספר התחומים הנחלקים הוא *n*. כלומר, מספר התחומים שנוספו הוא *n*. לכן: $R_n = R_{n-1} + n$

הנ״ל מתקיים עבור $n \geq 1$, עם תנאי ההתחלה $R_0 = 1$. נפתור ע״י הצבה חוזרת:

$$R_n = R_{n-1} + n = R_{n-2} + (n-1) + n = R_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = R_{n-k} + (n-k+1) + \cdots + n$$

$$R_n = R_0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

נוכיח באינדוקציה:

צעד הבסיס *(n=0)*: $1 = R_0 = 1 + \frac{0 \cdot 1}{2} = 1$.

צעד האינדוקציה: $R_n = R_{n-1} + n = 1 + \frac{(n-1)n}{2} + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

הרצאה 26.4.18 – המשך נוסחאות נסיגה ופתרונן, עקרון שובך היונים

נוסחאות נסיגה לינאריות, הומוגניות, עם מקדמים קבועים, מסדר k

נתבונן בנוסחאות נסיגה מהצורה:

$$H_n = a_1H_{n-1} + a_2H_{n-2} + \cdots + a_kH_{n-k}$$

הנוסחה הנ"ל תקפה לכל $n \geq k$, כאשר $a_1, \ldots, a_k$ מספרים ממשיים, וכן $a_k \neq 0$.

עם תנאי התחלה:

$$H_i = b_i \in \mathbb{R} \quad , \quad i = 0,1, \ldots, k-1$$

נוסחאות נסיגה מסוג זה נקראות **נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות,** (הומוגניות – באופן שקול למערכת משוואות הומוגנית באלגברה לינארית – המקדמים החופשיים שווים לאפס, כלומר אין איברים חופשיים במשוואה) **עם מקדמים קבועים, מסדר k.**

נתאר באופן כללי את שיטת הפתרון לנוסחאות כאלו.

ראשית, מתעלמים מתנאי ההתחלה – ומניחים שסדרה גיאומטרית מהצורה $\{q^n\}_{n=0,1,\ldots}$, $q \neq 0$ מקיימת את נוסחת הנסיגה. אז צריך להתקיים:

$$q^n = a_1q^{n-1} + a_2q^{n-2} + \cdots + a_kq^{n-k}$$

נצמצם ב-q^{n-k} ונקבל:

$$q^k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \cdots + a_k$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$

וקיבלנו פולינום ממעלה k המכונה **"הפולינום האופייני"**. נמצא את השורשים של הפולינום האופייני:
לשם פשטות החישוב, נניח תחילה כי לפולינום יש k שורשים ממשיים שונים זה מזה – נסמנם $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

מכיוון שכבר ראינו כי כל צירוף לינארי של פתרונות משוואה מהווה פתרון גם כן, אנו מקבלים מכאן את הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה (זהו אכן הפתרון הכללי, שכן ישנן k דרגות חופש, עבור סדרה הנקבעת עפ"י k האיברים הראשונים בה):

$$c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$$

כדי לקיים גם את תנאי ההתחלה, אנו דורשים:

$$c_1q_1^{0} + c_2q_2^{0} + \cdots c_kq_k^{0} = b_{0} \quad , \quad c_1q_1^{1} + c_2q_2^{1} + \cdots c_kq_k^{1} = b_{1} \quad , \quad \ldots \quad , \quad c_1q_1^{k-1} + c_2q_2^{k-1} + \cdots c_kq_k^{k-1} = b_{k-1}$$

זוהי מערכת של k משוואות לינאריות, ב-k הנעלמים $c_1, \ldots, c_k$. מטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא:

$$\begin{pmatrix} q_1^0 & q_2^0 & \cdots & q_k^0 \\ q_1^1 & q_2^1 & \cdots & q_k^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \cdots & q_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

מטריצה כזו נקראת מטריצת $Vandermonde$, וידוע שהיא הפיכה.
לכן, למערכת המשוואות שלנו יש פתרון יחיד $c_1, \ldots, c_k$. מציבים ערכים אלה בפתרון הכללי, ובכך מקבלים את הפתרון של נוסחת הנסיגה עם תנאי ההתחלה.

נחזור ונתייחס עתה לשתי העובדות שהזנחנו קודם לכן – כי יש לנו k שורשים ממשיים (ללא מרוכבים), וכי אין לנו ריבוי של שורשי הפולינום.

אם חלק מהשורשים הם מרוכבים (ולא ממשיים), עובדים באותה צורה מעל המספרים המרוכבים – כלומר, הנ"ל לא מהווה בעיה/שינוי בפתרון (כפי שכבר ראינו עבור סדרת פיבונאצ'י – המכילה רק מספרים טבעיים, בעוד שפתרון נוסחת הנסיגה שלה מכילה מספרים ממשיים שאינם טבעיים – שורש).

כעת, נטפל במקרה שבו חלק מהשורשים הם מרובים. נניח ש-q הוא שורש כפול של הפולינום האופייני.
אז מתקיים:

$$q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \cdots - a_k q^{n-k} = 0$$

ומכיוון ש-q שורש כפול, גם הצבתו בנגזרת תיתן 0, כלומר:

$$nq^{n-1} - a_1(n-1)q^{n-2} - a_2(n-2)q^{n-3} - \cdots - a_k(n-k)q^{n-k-1} = 0$$

נכפול ב-q ונקבל:

$$nq^n - a_1(n-1)q^{n-1} - a_2(n-2)q^{n-2} - \cdots - a_k(n-k)q^{n-k} = 0$$

כלומר, קיבלנו שגם הסדרה $\{n \cdot q^n\}_{n=0,1,\ldots}$ מקיימת את נוסחת הנסיגה. כלומר – מהיות q שורש כפול, הוא "מספק" לנו שתי סדרות שונות המקיימות את נוסחת הנסיגה.

באופן כללי, אפשר להראות בצורה דומה שאם q הוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי r, אז r הסדרות הבאות כולן מקיימות את נוסחת הנסיגה:

$$\{q^n\}_{n=0,1,\ldots} \;,\; \{n \cdot q^n\}_{n=0,1,\ldots} \;,\; \{n^2 \cdot q^n\}_{n=0,1,\ldots} \;,\; \ldots \;,\; \{n^{r-1} \cdot q^n\}_{n=0,1,\ldots}$$

בסה"כ, השורשים של הפולינום האופייני מספקים לנו k סדרות המקיימות את נוסחת הנסיגה, בעזרתן אפשר לכתוב את הפתרון הכללי (צירוף לינארי שלהן), ולהמשיך כמו קודם.

<u>דוגמה</u>

נפתור את נוסחת הנסיגה: $H_n = 6H_{n-1} - 9H_{n-2} \;\; (n \geq 2)$, עם תנאי ההתחלה $H_0 = 1 \;,\; H_1 = 2$.

הפולינום האופייני הוא: $q^2 - 6q + 9$. נמצא את השורשים שלו:

$$q^2 - 6q + 9 = (q-3)^2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; q = 3$$

כאשר $q = 3$ הוא שורש כפול. לכן, גם הסדרה $\{3^n\}_{n=0,1,\ldots}$ וגם הסדרה $\{n \cdot 3^n\}_{n=0,1,\ldots}$ מקיימות את נוסחת הנסיגה. הפתרון הכללי הוא:

$$a \cdot 3^n + b \cdot n3^n$$

כדי לקיים גם את תנאי ההתחלה, נדרוש:

$$\boldsymbol{n=0}: \;\; a \cdot 1 + b \cdot 0 = 1$$

$$\boldsymbol{n=1}: \;\; a \cdot 3 + b \cdot 3 = 2$$

נפתור את המערכת ונקבל: $a = 1 \;,\; b = -\frac{1}{3}$.

נציב בפתרון הכללי ונקבל:

$$H_n = 1 \cdot 3^n - \frac{1}{3} \cdot n3^n = 3^{n-1}(3-n)$$

עקרון שובך היונים

נניח שנתונים n תאים.

אם בתאים האלה שוכנות בסה"כ לפחות $n+1$ יונים, אז יש תא ובו לפחות 2 יונים.
אם בתאים האלו שוכנות בסה"כ לפחות $2n+1$ יונים, אז יש תא ובו לפחות 3 יונים, וכן הלאה...

אמנם נראה כי מדובר בעקרון טריוויאלי ופשוט להוכחה (כי הוא אכן כזה), אך בעזרתו ניתן להוכיח עקרונות יותר מורכבים. ניתן דוגמאות לשימוש בעקרון זה:

<u>דוגמה 1</u>

טענה: מכל 3 בני אדם, יש שניים מאותו מין.

הוכחה: <u>ה"תאים":</u> זכר, נקבה

<u>ה"יונים":</u> שלושה בני אדם

<u>דוגמה 2</u>

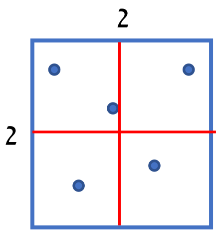
טענה: בכיתה שיש בה 25 בני אדם, יש 3 שיום הולדתם חל באותו החודש.

הוכחה: <u>ה"תאים":</u> 12 חודשי השנה

<u>ה"יונים":</u> 25 בני אדם

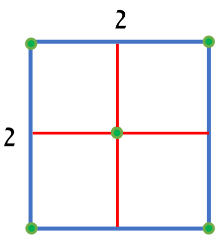
<u>דוגמה 3</u>

טענה: אם נתונות נקודות $A_1, A_2, \ldots, A_5$ הנמצאות כולן בתוך ריבוע שאורך צלעו הוא 2, אז קיימים $i \neq j$ כך שהמרחק מ-A_i ל-A_j הוא לכל היותר $\sqrt{2}$.



הוכחה: נחלק את הריבוע הנתון ל-4 ריבועים תתי-ריבועים, עם אורך צלע 1 כל אחד. הם יהיו ה"תאים". לפי עקרון שובך היונים, קיימים $i \neq j$ כך ש-A_i, A_j שתיהן באותו תת-ריבוע עם אורך צלע 1. לכן, המרחק ביניהן הוא לכל היותר $\sqrt{2}$ (אלכסון הריבוע).

<u>הערה:</u> בטענה אכן דרושות 5 נקודות, שכן אילו היו רק 4 – היה אפשר למקמן למשל בקודקודים, ואז המרחק בין 2 הנקודות הכי קרובות מתוך ה-4 היה שווה ל-2 (שכמובן גדול מ-$\sqrt{2}$).



כמו כן, עבור 5 נקודות – החסם במסקנת הטענה לא יכול להיות קטן מ-$\sqrt{2}$, כי אפשר למקם 5 נקודות כמו בציור משמאל (עם הנקודות הירוקות).

<u>דוגמה 4</u>

טענה: יהיו נתונים מספרים טבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_{101} \in \{1,2,\ldots,200\}$. אזי קיימים ביניהם a_i, a_j $(i \neq j)$ שאחד מהם מחלק את השני.

הוכחה: כל a_i ניתן לכתיבה בצורה: $a_i = b_i \cdot 2^{k_i}$, כאשר k_i שלם אי-שלילי, ו-b_i שלם אי-זוגי. הערכים ש-b_i יכול לקבל, יהיו ה"תאים" – כאשר יש 100 כאלו. לפי עקרון שובך היונים, קיימים $i \neq j$ כך שלשניהם אותו ערך של b, כלומר: $a_i = b \cdot 2^{k_i}$, $a_j = b \cdot 2^{k_j}$. נניח בה"כ - $k_i \leq k_j$, ואז a_i מחלק את a_j.

<u>הערה:</u> הטענה אינה נכונה עבור 100 מספרים. למשל המספרים $100,101,\ldots,200$ אינם מקיימים את מסקנת הטענה.

תרגול 26.4.18 – המשך נוסחאות נסיגה

תרגיל 1

מצאו נוסחת נסיגה למספר המילים באורך n המשתמשות רק באותיות $\{x,y,z\}$, בהן לא מופיע הצירוף xyz.

נסמן ב-a_n את מספר המילים החוקיות עם n אותיות, ונתבונן באיבר האחרון בסדרה.

<u>מקרה 1:</u> האיבר האחרון הוא *x* או *y*, אז לפניו כל סדרה חוקית באורך *n-1* תהיה "טובה", ויש a_{n-1} כאלו.

<u>מקרה 2:</u> האיבר האחרון הוא *z*, ולפניו יש סדרה חוקית שלא מסתיימת ב-*xy*. לכך יש $a_{n-1}-a_{n-3}$ אפשרויות.

<u>ובסה"כ:</u> $a_n=2a_{n-1}+(a_{n-1}-a_{n-3})=3a_{n-1}-a_{n-3}$

נבדוק עתה תנאי התחלה: $a_0=1\ ,\ a_1=3\ ,\ a_2=3^2=9$.

תרגיל 2

מהו מספר הסדרות $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{-1,1\}^n$, כך שלכל $k\le n$ מתקיים:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|\le 1$$

נסמן את מספר הסדרות הנ"ל ב-H_n. נחשב את האיברים הראשונים בסדרה:

$$H_0=1\ (\text{הסדרה הריקה})\ ,\ H_1=2$$

$$H_2=3\ \{(1,-1),(-1,1)\}\ ,\ H_3=4\ \{(-1,1,\pm1),(1,-1,\pm1)\}$$

נבנה נוסחת נסיגה:

<u>מקרה 1:</u> אם $x_1=1$, אז אחריו יהיה x_2 שווה ל-(-1), ואז תהיה סדרה חוקית באורך H_{n-1}.

<u>מקרה 2:</u> אם $x_1=-1$, אז אחריו יהיה $x_2=1$, ואז תהיה סדרה חוקית באורך H_{n-1}.

<u>ובסה"כ:</u> $H_n=2\cdot H_{n-2}$.

נמצא את פתרון נוסחת הנסיגה. פולינום אופייני: מנחשים שהפתרון הוא מהצורה $H_n=q^n$. אז:

$$q^n=2\cdot q^{n-2}\ \Rightarrow\ q^2=2\ \Rightarrow\ q=\pm\sqrt{2}$$

שני הפתרונות הם מריבוי 1, ולכן ניקח צירוף ליניארי שלהם:

$$H_n=A\cdot\sqrt{2}^n+B\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\boldsymbol{n=0}:\ H_0=A+b=1\ ,\ \boldsymbol{n=1}:\ H_1=A\sqrt{2}-B\sqrt{2}=2$$

ומכאן נקבל: $B=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\ ,\ A=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. כלומר:

$$H_n=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^n$$

אם *n* זוגי נקבל: $H_n=\left(\sqrt{2}\right)^n$

אם *n* אי-זוגי נקבל: $H_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}$

<u>תרגיל 3</u>

מצאו נוסחה מפורשת לנוסחת הנסיגה הבאה: $H_n = 8H_{n-1} - 21H_{n-2} + 18H_{n-3}$

כאשר: $H_0 = 0\ ,\ H_1 = 1\ ,\ H_2 = 2$.

ננחש כי $H_n = q^n$. ואז מתקיים: $q^n = 8q^{n-1} - 21q^{n-2} + 18q^{n-3}$. ולכן: $P(q) = q^3 - 8q^2 + 21q - 18$.

<u>תזכורת:</u> אם לפולינום $P(x)$ בעל מקדמים שלמים יש שורש רציונלי $\frac{a}{b}$, אז a מחלק את המקדם החופשי, ו-b מחלק את המקדם המוביל.

$$\frac{a}{b} \in \{\pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \pm 6 , \pm 9 , \pm 18\}$$

נמצא כי 2 מאפס את הפולינום. נחלק את הפולינום ב-$(q-2)$, ונקבל: $q^2 - 6q + 9 = (q-3)^2$.

לכן, הסדרות 2^n , 3^n , $n \cdot 3^n$ הן פתרונות, ומכאן:

$$H_n = A \cdot 2^n + (B + Cn) \cdot 3^n$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = H_0 = A + B\ ,\ 1 = H_1 = 2A + 3B + 3C\ \ ,\ 2 = H_2 = 4A + 9B + 18C$$

ומקבלים כי: $A = -4\ ,\ B = 4\ ,\ C = -1$. מכאן:

$$H_n = -4 \cdot 2^n + (4 - n) \cdot 3^n$$

<u>תרגיל 4</u>

אי-סדרים – תמורות ללא נקודת שבת.

הוכיחו כי אם D_n מספר התמורות ללא נקודת שבת על $[n] \coloneqq \{1, \dots, n\}$, אז מתקיים:

$$D_1 = 0\ ,\ D_2 = 1\ ,\ D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2})$$

<u>תזכורת:</u> תמורה של 5 היא פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ ממנה לעצמה. נקודת שבת היא כל מקרה בו איבר מותאם לעצמו בפונקציה.

נתבונן ראשית בתנאי ההתחלה. עבור $n = 1$ – האיבר חייב להישלח לעצמו, ולכן $D_1 = 0$. עבור $n = 2$, קיים אי-סדר אחד בלבד (שכן, 1 חייב להישלח ל-2, ו-2 חייב להישלח ל-1), כלומר: $D_2 = 1$.

באופן כללי: תהי f תמורה ללא נקודת שבת. אז: $i \in \{2,3, \dots, n\}\ ,\ f(1) = i$. נשים לב כי יש n-1 אפשרויות לבחירת i.

<u>מקרה 1:</u> אם $f(i) = 1$, אז נשארו n-2 מספרים לסדר ללא נקודת שבת, כלומר D_{n-2} אפשרויות.

<u>מקרה 2:</u> אם $f(i) \neq 1$. עתה, לכל אחד מהמספרים (חוץ מ-1) יש n-1 אפשרויות לסידור (כל מספר יכול להישלח לכל מספר מלבד לעצמו). במילים אחרות, זה כמו להסתכל על *n-1* מספרים, עבורם יש לבנות התאמה מהקבוצה לעצמה, ויש D_{n-1} תמורות כנ"ל.

<u>בסה"כ:</u> $D_n = (n-1) \cdot (D_{n-2} + D_{n-1})$

שיעור 3.5.18 – תורת הגרפים – מושגי יסוד

גרפים – מושגי יסוד

גרף מתואר ע״י:

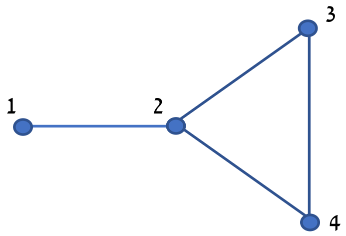
- קבוצה סופית לא-ריקה V של **קודקודים**
- קבוצה E של זוגות לא-סדורים של קודקודים, הנקראים **צלעות**

במילים אחרות – זאת דרך לייצג אינפורמציה, על האם יש קשר בין גורמים שונים (לדוג׳ – קודקודים יכולים להיות מרחבים ווקטוריים, כאשר קיום צלע ביניהן מייצג פונקציה חח״ע ועל).

אנחנו רושמים את העובדה ש-G הוא גרף שקבוצת הקודקודים שלו היא V, וקבוצת הצלעות שלו היא E בצורה:

$$G = (V, E)$$

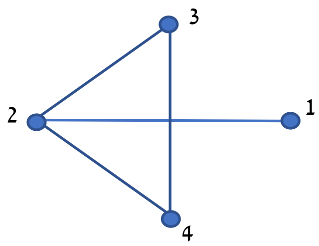
<u>דוגמא</u>



הגרף שבציור לעיל מתואר ע״י $G = (V, E)$ כאשר:

$$V = \{1,2,3,4\} \quad , \quad E = \{\, \{1,2\} , \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \,\}$$

יכולים להיות ציורים שונים של אותו הגרף. למשל, יכולנו לצייר כך:



ולכן, הגרף נקבע ע״י הקבוצות V,E ולא ע״י הציור (הציור הוא אילוסטרציה של הגרפים - כלי עזר להבנת הבעיה).

בגרף עם n קודקודים יש <u>לכל היותר</u> $\binom{n}{2}$ צלעות.

גרף עם n קודקודים, <u>ובדיוק</u> $\binom{n}{2}$ נקרא **גרף שלם**, ומסומן ע״י $\boldsymbol{K_n}$.

<u>מושגים נוספים להעשרה (לא יהיו מקרים כאלו בקורס שלנו)</u>

- כאשר יש משמעות לכיווניות הצלעות (כלומר – יש חשיבות לסדר האיברים בזוגות הסדורים), קוראים לגרף **גרף מכוון**.
- **לולאה** היא צלע המחברת קודקוד לעצמו.
- אם יש שתי צלעות שונות המחברות בין אותן שתי נקודות – הן מכונות **צלעות מקבילות**.

ערכיות של קודקוד

בהינתן גרף $G = (V, E)$ וקודקוד $x \in V$ נסמן ב-$N(x)$ את **קבוצת השכנים** של הקודקוד x :

$$N(x) = \{y \in V | \{x, y\} \in E\}$$

כמו כן, נגדיר ונסמן ב-$d(x)$ את ה**ערכיות** של הקודקוד x באופן הבא : $d(x) = |N(x)|$

- קודקוד בעל ערכיות 0 נקרא **מבודד**.

<u>טענה:</u> בכל גרף $G = (V, E)$ מתקיים (כאשר $|E|$ הוא מספר הצלעות של הגרף) :

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2 \cdot |E|$$

<u>הוכחה:</u> כל צלע תורמת 1 לערכיות של שני הקודקודים שלה, ולכן 2 לסכום ערכי הערכיות.

<u>מסקנות ("למת לחיצת הידיים")</u>

<u>מסקנה 1 :</u> בכל גרף, סכום ערכי הערכיות של הקודקודים הוא זוגי.

<u>מסקנה 2 :</u> בכל גרף, מספר הקודקודים בעלי ערכיות אי-זוגית הוא זוגי.

מסלולים וגרפים קשירים

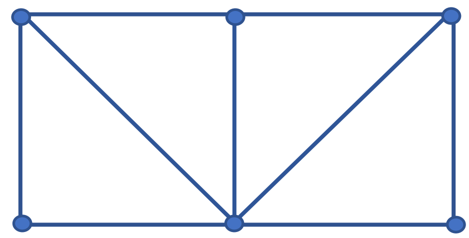
בהינתן גרף $G = (V, E)$, **מסלול** באורך k הוא סדרה מהצורה :

$$x_0 e_1 x_1 e_2 x_2 \cdots x_{k-1} e_k x_k$$

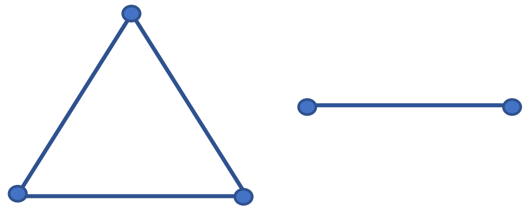
כאשר $x_0, x_1, \dots, x_k$ הם קודקודים שלאו דווקא שונים זה מזה, וכן $e_1, e_2, \dots, e_k$ הן צלעות שונות זו מזו, כאשר לכל $i = 1, \dots, k$ מתקיים $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$. כלומר, כל מסלול מייצג דרך "לטייל" על הגרף.

גרף $G = (V, E)$ נקרא **קשיר** אם לכל שני קודקודים x, y קיים מסלול ב-G המתחיל ב-x ונגמר ב-y. כלומר, גרף יקרא קשיר אם ניתן "להגיע" מכל מקום לכל מקום (מכל קודקוד לכל קודקוד אחר).

<u>דוגמא לגרף קשיר</u>



<u>דוגמא לגרף שאיננו קשיר</u>



__הערה__

בכל גרף $G=(V,E)$ אפשר להגדיר יחס בינארי (כל זוג של קודקודים יכול לקיים/לא לקיים אותו) על קבוצת הקודקודים V : $x\sim y$ אם קיים מסלול ב-G מ-x ל-y.

אפשר לבדוק שזה יחס שקילות, ולכן היחס ~ מחלק את V למחלקות שקילות, נקרא להן $V_1,\dots,V_r$.

לכל $i=1,\dots,r$ נסמן :

$$E_i=\{\,\{x,y\}\in E\mid x,y\in V_i\,\}$$

וקיבלנו פירוק של הגרף $G=(V,E)$ ל-r חלקים, המכונים **המרכיבים הקשירים של G** :

$$(V_1,E_1)\,,(V_2,E_2)\,,\dots\,,(V_r,E_r)$$

שכל אחד מהם בפני עצמו הוא גרף קשיר, ובין כל שניים שונים זה מזה אין בכלל צלעות.

מכאן, גרף G הוא קשיר אם ורק אם יש לו מרכיב קשיר יחיד.

מסלול $x_0e_1x_1e_2x_2\cdots x_{k-1}e_kx_k$ נקרא **סגור** אם $x_0=x_k$ (כלומר, קודקוד הסיום הוא גם קודקוד ההתחלה). המסלול יקרא **מעגל** אם הוא סגור, $k\geq 3$, ופרט לשוויון $x_0=x_k$ – הקודקודים בו שונים זה מזה.

- עפ״י ההגדרה הנ״ל, מסלול באורך 0 (מהקודקוד לעצמו, ללא צלעות) הוא מסלול סגור אך לא מעגל.

__הערה__

קיימים מסלולים סגורים מאורך $k>0$ אשר אינם מעגלים בגלל חזרה על קודקוד/ים.

בכל מסלול כזה, קבוצת הצלעות שלו ניתנת לפירוק לקבוצות של צלעות (מסלולים) המהוות מעגלים.

עצים

גרף $G=(V,E)$ נקרא **עץ** אם הוא קשיר, ואין בו מעגלים.

המשמעות העיקרית של היות גרף עץ, היא שיש דרך אחת להגיע בין כל שני קודקודים (כלומר – מסלול יחיד).

__הערה__

גרף $G=(V,E)$ שהוא חסר מעגלים, אבל לאו דווקא קשיר, נקרא **יער** (שכן, ניתן לפרקו למרכיביו הקשירים שלו, ואז כל אחד מהם הוא עץ).

__טענה:__ בכל עץ $G=(V,E)$ מתקיים $|E|=|V|-1$.

__הוכחה:__ באינדוקציה על מספר הצלעות.

__בסיס :__ $|E|=0$. בגלל הקשירות, בהכרח $|V|=1$, ולכן הטענה מתקיימת.

__צעד האינדוקציה :__ יהי $G=(V,E)$ גרף עם $|E|\geq 1$, ונניח שהטענה מתקיימת לכל עץ עם פחות מ-$|E|$ צלעות.

ניקח צלע כלשהי $e\in E$ ונוריד אותה מהעץ. כתוצאה מכך, נקבל שני מרכיבים קשירים, שנקרא להם $(V_1,E_1),(V_2,E_2)$ שכל אחד מהם בפני עצמו הוא עץ עם פחות מ-$|E|$ צלעות. מכאן, לפי הנחת האינדוקציה :

$$|E_1|=|V_1|-1\ ,\ \ |E_2|=|V_2|-1$$

ומכאן :

$$|E|=|E_1|+|E_2|+1=|V_1|-1+|V_2|-1+1=|V_1|+|V_2|-1=|V|-1$$

כנדרש.

קודקוד x של עץ בעל ערכיות 1 נקרא **עלה**.

<u>טענה:</u> בכל עץ $G = (V, E)$ עם $|V| \geq 2$, קיימים לפחות 2 עלים.

<u>הוכחה:</u> נניח שבעץ יש k עלים. לכל קודקוד שאיננו עלה, יש ערכיות של לפחות 2. לכן :

$$2|V| - 2 = 2(|V| - 1) = 2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} d(x) \geq k + 2 \cdot (|V| - k) = 2|V| - k$$

$$\Rightarrow \quad k \geq 2$$

תרגול 3.5.18 – עקרון שובך היונים

תזכורת

- אם מחלקים n+1 יונים לתוך n תאים, אז קיימות שתי יונים שנמצאות באותו התא.
- אם מחלקים $r \cdot n + 1$ יונים לתוך n תאים, אז יש r+1 יונים באותו התא.
- אם מחלקים $r \cdot n$ יונים לתוך n תאים, אז או ש**בכל** תא יש **בדיוק** r יונים, או שיש תא עם לפחות r+1 יונים.

תרגיל 1

תהא $A \subseteq \{1,2,\dots,2n-1\}$ קבוצה בגודל *n+1*. הראו שישנם שני מספרים שונים ב-*A* שסכומם *2n*.

יונים: המספרים ב-*A*.

התאים: קבוצות (זוגות) מהצורה $\{i, 2n-i\}$ עבור $i = 1, \dots, n-1$, ועוד תא נוסף $\{n\}$.

כלומר, נשים כל אחד מהמספרים $(2n-i)$, i (נשים לב כי לא בהכרח שניהם נמצאים ב-*A*) בתא $\{i, 2n-i\}$ (עבור $i \neq n$), ואת n נשים בתא $\{n\}$.

לדוג' עבור $n = 3$: המספרים הם 1,2,3,4,5.

יונים: $A = \{1,4,3,2\}$

תאים: $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3\}$

יש לנו *n* תאים, ו-*(n+1)* תאים, ולכן קיים תא עם לפחות 2 יונים.

אם התא מהצורה $\{i, 2n-i\}$ – סיימנו. אחרת, התא הוא $\{n\}$, אך זוהי סתירה שכן תא זה יכיל לכל היותר יונה אחת (המספר *n* עצמו).

תרגיל 2

נתונות $n^2 + 1$ נקודות במשולש שווה צלעות, שאורך הצלעות שלו הוא *n*. הוכיחו שיש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר 1.

יונים: הנקודות

תאים: ניצור בתוך המשולש הגדול תתי משולשים שווי צלעות, שאורך כל צלע בהם הוא 1. כל משולש קטן שכזה הוא תא.

בשורה ה-*k* יש *2k-1* משולשים, ולכן סה"כ מספר המשולשים הוא:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = \frac{n \cdot 2n}{2} = n^2$$

אז יש לנו $n^2 + 1$ יונים, בתוך n^2 תאים, לכן יש לפחות 2 יונים באותו התא.

כלומר, יש שתי נקודות שנמצאות באותו משולש קטן, ולכן המרחק ביניהן לכל היותר 1.

תזכורת

תהי $a_1,\dots a_n$ סדרת מספרים. יהי $a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ הממוצע החשבוני שלהם.

אז קיים $i\in[n]$ כך ש- $a_i\geq a$, וקיים $j\in[n]$ כך ש- $a_j\leq a$.

תרגילון - הוכחה תוך שימוש בשובך היונים (נניח שהמספרים טבעיים):

היונים: $n\cdot a$ שקלים.

התאים: $1,\dots,n$.

בכל תא i , נשים a_i מטבעות. מכאן, לפי שובך היונים, יש תא עם לפחות a שקלים.

תרגיל 3

עשרה אנשים יושבים במעגל. סכום הגילאים של כולם הוא 250. הוכיחו שקיימים 3 מתוכם שיושבים ברצף, שסכום הגילאים שלהם הוא לפחות 75.

נסמן את הגילאים בתור $a_1,\dots,a_{10}$. ישנן סה״כ 10 שלשות של אנשים שיושבים ברצף.

נסמן ב-S_i ($i=1,\dots,10$) את סכום הגילאים בשלשה ה-i.

כל אחד מהאנשים מופיע בדיוק ב-3 שלשות שונות. ואז:

$$S_1+S_2+\cdots+S_{10}=3(a_1+a_2+\cdots a_{10})=3\cdot 250=750$$

לכן, הממוצע של כל שלשה הוא 75, ולכן – עפ״י העיקרון לעיל – חייב להיות $1\leq i\leq 10$ כך ש- $S_i\geq 75$.

תרגיל 4

במשך 30 ימים אספו תלמידי כיתה ג׳ קרשים לל״ג בעומר. כל יום מצאו לפחות קרש 1, ובסה״כ אספו 45 קרשים.

הוכיחו שיש רצף של ימים שבו אספו בדיוק 14 קרשים.

נסמן ב-x_i את מספר הקרשים שמצאו ביום ה-i ($i=1,\dots,30$). מהנתון: $\forall i\,;\, x_i\geq 1$ וכן $\sum_{i=1}^{30}x_i=45$.

צריך להוכיח שקיימים $1\leq k\leq l\leq 30$ כך ש- $\sum_{i=k}^{l}x_i=14$. נשתמש בעקרון שובך היונים:

היונים יהיו המספרים בין $1,\dots,30$ (מתאימים לימים) – כלומר רצף הימים מהיום הראשון עד היום ה-i.

התאים יהיו המספרים $0,1,\dots,13$.

נשים את יונה k בתא j אם השארית של $\sum_{i=1}^{k}x_i$ בחלוקה ב-14 היא j.

יש לנו $30=2\cdot 14+2$ יונים בתוך 14 תאים, ולכן יש תא כלשהו עם לפחות 3 יונים. כלומר, יש $1\leq k_1<k_2<k_3\leq 30$ כך של-

$$\sum_{i=1}^{k_1}x_i\quad,\quad\sum_{i=1}^{k_2}x_i\quad,\quad\sum_{i=1}^{k_3}x_i$$

יש אותה שארית מודולו 14.

לכן, ההפרשים :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k_2} x_i - \sum_{i=1}^{k_1} x_i = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} x_i \quad , \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k_3} x_i - \sum_{i=1}^{k_2} x_i = \sum_{i=k_2+1}^{k_3} x_i$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{k_3} x_i - \sum_{i=1}^{k_1} x_i = \sum_{i=k_1+1}^{k_3} x_i = S_1 + S_2$$

מתחלקים ב-14 ללא שארית.

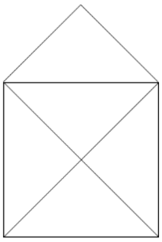
- אם S_1 הוא 14 – סיימנו. אחרת, $S_1 \geq 28$ (לא יכול להיות 0, שכן כל יום אספו לפחות קרש 1).
- אם S_2 הוא 14 – סיימנו. אחרת, $S_2 \geq 28$, אבל אז $S_3 = S_1 + S_2 \geq 28 + 28 > 45$ בסתירה לכך שאספו סה״כ 45 קרשים.

<u>סעיף ב׳:</u> האם התשובה תשאר זהה אם התלמידים אספו קרשים במשך 28 ימים?

הרצאה 10.5.18 – תורת הגרפים – גרפים אוילריאניים ומשפט החתונה

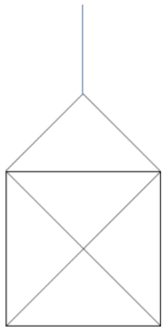
מוטיבציה

האם אפשר לצייר את הציור 1 (בית) מבלי לחזור על אף קטע פעמיים, ומבלי להרים את העיפרון מהנייר?



ציור 1 - בית

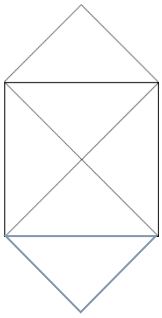
התשובה היא שאפשר.



ציור 2 – בית עם אנטנה

ומה בדבר ציור 2 (בית עם אנטנה)?

התשובה היא שאי אפשר.



ציור 3 – בית עם יסודות

ומה אם מוסיפים את הדרישה שהציור יתחיל ויסתיים באותה נקודה?

עבור ציור 1 (של הבית) – אי אפשר.

עבור ציור 3 (בית עם יסודות) – אפשר.

הגרפים האוילריאניים יתנו לנו דרך שיטתית לקבוע האם הדברים הנ״ל אפשריים, לכל ציור/גרף שהוא.

הגדרות

יהי $G = (V, E)$ גרף.

מסלול ב-G נקרא **אוילריאני** אם הוא מכיל את כל הצלעות ב-E.

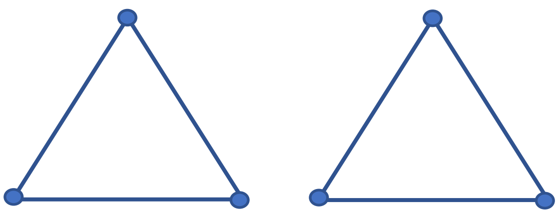
- נשים לב כי הדרישות של לא לחזור על אף קטע פעמיים, ושרטוט הציור מבלי להרים את העיפרון מהנייר כבר מוכלים בתוך ההגדרה הבסיסית של מסלול.

הגרף G נקרא **אוילריאני** אם קיים בו מסלול אוילריאני סגור.

משפט אוילר (Euler)

יהי G גרף קשיר. אזי G הוא אוילריאני **אם ורק אם** כל ערכי הערכיות ב-G הם ערכים זוגיים.

- במילים אחרות – בכל נקודת מפגש (קודקוד/צומת) צריכות להיפגש מספר זוגי של צלעות.
- חשוב מאד להקפיד על היות הגרף G קשיר – אחרת המשפט לא נכון. לדוג׳:



בגרף זה כל ערכי הערכיות הן זוגיות, אבל הגרף לא קשיר, וגם לא אוילריאני.

הוכחה

כיוון ראשון (הכיוון הקל):

אם G גרף אוילריאני, אזי כל ערכי הערכיות הם ערכים זוגיים.

ואכן, יהי $x_0e_1x_1e_2x_2 \cdots x_{k-1}e_kx_k$ מסלול אוילריאני ב-G עם $x_0 = x_k$ (קיום המסלול מובטח מהיות G גרף אוילריאני).

בכל פעם שהמסלול עובר דרך קודקוד, הוא תורם 2 לערכיות שלו (למשל עבור קודקוד x_1 – מגיעים אליו דרך e_1 ויוצאים ממנו דרך e_2).
בנוסף, כאשר יוצאים בהתחלה מ-x_0 – תורמים 1 לערכיות המסלול, וכאשר נכנסים אליו בסיום – תורמים גם כן 1 לערכיות המסלול – ולכן גם כאן התרומה הכוללת למסלול היא 2.

לכן, כל ערכי הערכיות הם ערכים זוגיים.

כיוון שני (הכיוון הקשה):

אם G הוא קשיר, וכל ערכי הערכיות בו הם ערכים זוגיים, אזי G הוא גרף אוילריאני.

נוכיח כיוון זה באינדוקציה על מספר הצלעות.

בסיס ($|E| = 0$): במקרה זה, מכיוון שהגרף הוא גרף קשיר, יש בו קודקוד אחד – כלומר $|V| = 1$. אז, הדרישה למסלול אוילריאני סגור מתקיים באופן טריוויאלי – המסלול באורך 0 שמתחיל ומסתיים בקודקוד היחיד.

צעד האינדוקציה: עבור $G = (V, E)$ המקיים $|E| > 0$, הנחת האינדוקציה היא שלכל גרף קשיר עם פחות מ-$|E|$ צלעות, שבו כל ערכי הערכיות הם ערכים זוגיים, הוא גרף אוילריאני.

נשים לב ש- $|V| \geq 2$ (שכן קיימת צלע אחת לפחות), ולכן G לא יכול להיות עץ, כי אז היו בו לפחות שני עלים (בעלי ערכיות 1) – בסתירה לזוגיות ערכי הערכיות.

לכן, מכיוון ש-G קשיר, קיים בו מעגל – נסמנו ב-C. נתבונן עתה בגרף G_0 המתקבל מ-G ע"י הורדת על הצלעות של המעגל C. גם ב-G_0 כל ערכי הערכיות הם זוגיים, שכן כל ערכיות (של כל קודקוד) ירדה ב-2 או נשארה כשהייתה.

אבל, G_0 לא בהכרח קשיר, ובאופן כללי אפשר לפרק אותו למרכיביו הקשירים $G_i = (V_i, E_i)$ עבור $i = 1, \dots, r$.
נשים לב שלכל מרכיב קשיר יש לפחות קודקוד אחד שנמצא על המעגל C.

- מדוע? שכן אם $r = 1$ אז $V_1 = V$ ולכן כל קודקוד של C הוא גם ב-V_1. אם $r \geq 2$ אז כל מרכיב קשיר נותק משאר המרכיבים ע"י הורדת צלעות המעגל C, ולכן בהכרח קיים קודקוד של C השייך לאותו מרכיב קשיר.

לכל מרכיב קשיר G_i – נבחר קודקוד x_i הנמצא בו וגם נמצא על המעגל C.

לפי הנחת האינדוקציה, בכל G_i קיים מסלול אוילריאני סגור, ונבחר בכל G_i מסלול אוילריאני שמתחיל ומסתיים ב-x_i (קודקוד ההתחלה והסיום ניתן לבחירה באופן שרירותי עבור מסלול אוילריאני). כמו כן, נבחר קודקוד התחלתי כלשהו x_0 על המעגל C, ונבחר כיוון תנועה על המעגל C (לכל מעגל יש שני כיווני תנועה – הבחירה ביניהם היא שרירותית).

כעת, נבנה מסלול אוילריאני סגור בגרף המקורי G באופן הבא:

נתחיל ב-x_0. בכל פעם שאנחנו מגיעים לקודקוד x_i $(1 \leq i \leq r)$ – נלך במסלול האוילריאני שבחרנו ב-G_i המתחיל ומסתיים ב-x_i, ואז נמשיך על המעגל C בכיוון התנועה שנבחר. לבסוף, נחזור ל-x_0.

בדרך זו – קיבלנו מסלול אוילריאני סגור בגרף G, כנדרש.

משפט החתונה

נתונות קבוצה A של m בחורים, וקבוצה B של n בחורות. לכל בחור $x \in A$ נתונה הקבוצה $N(x) \subseteq B$ של הבנות שאותן x מכיר.

המטרה היא להתאים לכל בחור $x \in A$ בחורה $f(x) \in N(x)$ שהוא מכיר, כך ש-$f(x)$ חח״ע, כלומר:

$$x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x')$$

התאמה כזו נקראת **זיווג של הבחורים.**

- נשים לב כי אין פה דרישה שלכל בחורה יותאם בחור. במקרה הפרטי $n = m$, $f(x)$ תהא גם על, ולכל בחורה יותאם בחור.

<u>השאלה היא אילו תנאים צריכים להתקיים כדי שיהיה קיים זיווג של הבחורים?</u>

תנאי 1: כל בחור חייב להכיר לפחות בחורה אחת. כלומר: $\forall x\,;\; N(x) \neq \emptyset$.

תנאי 2: כל שני בחורים חייבים להכיר ביחד (כלומר, בחורות שמוכרות לפחות לאחד מהם) לפחות שתי בחורות.
כלומר: $\forall x \neq x'\;;\;\; |N(x) \cup N(x')| \geq 2$.

⋮

תנאי k: כל k בחורים חייבים להכיר ביחד לפחות k בחורות. כלומר, עבור $S \subseteq A$ קבוצה של בנים מתקיים:

$$N(S) = \bigcup_{x \in S} N(x)$$

תנאי k אומר בנוסף: $|S| = k \;\Rightarrow\; |N(S)| \geq k$.

סיכום כל התנאים שמצאנו: $\forall S \subseteq A\;;\;\; |N(S)| \geq |S|$.

אלו הם תנאים הכרחיים, והמשפט הבא אומר שהם גם מספיקים.

<u>משפט החתונה (משפט Hall)</u>

תהיינה נתונות קבוצה A של m בחורים וקבוצה B של n בחורות, ולכל בחור $x \in A$ תהי נתונה הקבוצה $N(x) \subseteq B$ של הבחורות שאותן x מכיר.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום זיווג של הבחורים הוא שלכל תת קבוצה $S \subseteq A$ של בחורים יתקיים: $|N(S)| \geq |S|$.

תרגול 10.5.18 – גרפים

גרף משלים

יהי $G=(V,E)$ גרף. אזי, **הגרף המשלים** של G הוא הגרף $\bar{G}$, כאשר $\{x,y\}\in\bar{E}$ אמ"מ $\{x,y\}\notin E$.

במילים אחרות – עבור אותם קודקודים של הגרף G, הגרף $\bar{G}$ מורכב מהצלעות שלא נמצאות בגרף G.

<u>תרגיל 1 -</u> הוכיחו שלכל $G=(V,E)$ אז G קשיר או $\bar{G}$ קשיר (או שניהם).

אם G קשיר, סיימנו. אחרת, G לא קשיר. נראה ש-$\bar{G}$ קשיר.

ניקח $x,y\in V$. צריך להראות שקיים מסלול ב-$\bar{G}$ מ-x ל-y. אם $\{x,y\}\in\bar{E}$, סיימנו. אחרת, $\{x,y\}\in E$ – ובפרט x,y שניהם באותו מרכיב קשיר. מכיוון ש-G לא קשיר, ישנם לפחות שני מרכיבים קשירים.

כלומר, יש קודקוד $z\in V$ אשר שייך למרכיב קשיר אחר, ולכן $\{x,z\}\notin E$ ו- $\{y,z\}\notin E$ – כלומר, שתי הקבוצות שייכות ל-$\bar{E}$. ואז, מצאנו מסלול xe_1ze_2y בין x ל-y ב-$\bar{G}$.

- למעשה הוכחנו משהו חזק יותר – אילו G לא קשיר, אזי כל שני קודקודים ב-$\bar{G}$ הם במרחק של לכל היותר 2 צלעות אחד מהשני.

<u>טענה:</u> יהי $G=(V,E)$ גרף. הראו שהטענות הבאות שקולות:

1. G הוא עץ (G קשיר וחסר מעגלים)
2. ב-G יש מסלול יחיד בין כל שני קודקודים
3. G גרף קשיר מינימלי (כלומר, אם נוריד צלע כלשהי [ונשאיר את הקודקודים], נקבל גרף לא קשיר).

<u>הוכחה:</u>

<u>$1\Rightarrow 2$:</u> יהיו $x,y\in V$ קודקודים שונים. G עץ, ולכן קשיר, ולכן קיים מסלול בין x ל-y.

נניח שישנם שני מסלולים כאלה. נסמן את המסלולים (כאשר $v_0=u_0=x\ ,\ v_n=u_m=y$):

$$v_0e_1v_1e_2\cdots v_{n-1}e_nv_n \quad , \quad u_0e_1'u_1e_2'\cdots u_{m-1}e_m'u_m$$

יהי i האינדקס המינימלי שבו $u_i\neq v_i$. אז $u_{i-1}=v_{i-1}$ (וזאת תהיה נקודת תחילת המעגל).

קיימים $j,k>i$ מינימליים כך ש- $v_j=u_k$. במקרה הכי "גרוע" נקבל $k=m\,,j=n$ כי $v_n=u_m$.

אז יש לנו מעגל: $v_{i-1}e_iv_ie_{i+1}\cdots e_jv_je_k'u_{k-1}e_{k-1}'\cdots e_i'u_{i-1}$ (כאשר $u_{i-1}=v_{i-1}\,,v_j=u_k$). וזאת סתירה לכך ש-$G$ הוא עץ.

<u>$2\Rightarrow 3$:</u> צריך להוכיח ש-G קשיר מינימלי.

G קשיר כי נתון שיש מסלול בין כל שני קודקודים. נניח $\{x,y\}\in E$. נסתכל על הגרף G' שמתקבל מ-G ע"י מחיקת הצלע $\{x,y\}$. נראה ש-G' לא קשיר.

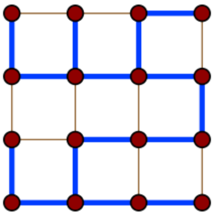
הצלע $\{x,y\}$ היא מסלול באורך 1 בין x ל-y, ולפי הנתון זה המסלול היחיד. לכן, לאחר הורדת הצלע אין מסלול מ-x ל-y, ולכן G לא קשיר.

<u>$1 \Rightarrow 3$:</u> צ״ל כי G קשיר (מיידי מ-3) וכן G חסר מעגלים.

נניח שהיה מעגל ב-G, נסמנו ב-C. תהי $\{x, y\}$ צלע במעגל. נמחק את הצלע $\{x, y\}$ מ-G. נראה שהגרף המתקבע עדיין קשיר – בסתירה לנתון.

ניקח $u, v \in V$. נסתכל על המסלול ביניהם ב-G. אם המסלול לא מכיל את $\{x, y\}$, אז זה עדיין מסלול בגרף החדש. אחרת, נחליף את הצלע בחלק מהמעגל C, ונקבל מסלול בין u ל-v בגרף החדש *(כמעט מדויק)*.

עץ פורש



יהי G גרף קשיר. **עץ פורש** של G הינו עץ שקודקודיו הם קודקודי G, וצלעותיו מוכלות בצלעות G.

לדוגמא: העץ המסומן בכחול הוא עץ פורש.

<u>**טענה:**</u> לכל גרף קשיר יש עץ פורש.

<u>**מסקנה:**</u> יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר. אזי $|E| \geq |V| - 1$.

<u>**הוכחת הטענה:**</u> נוכיח באינדוקציה על מספר המעגלים C.

<u>צעד הבסיס :</u> אם C=0 אז C הוא עץ, ולכן הוא עץ פורש של עצמו.

<u>צעד האינדוקציה :</u> נניח שב-G יש $C > 0$ מעגלים, ונניח באינדוקציה שלכל גרף קשיר עם פחות מ-C מעגלים יש עץ פורש.

נבחר מעגל ב-G, ונוריד מ-G את אחת מצלעות המעגל. ראינו בתרגיל הקודם שהגרף המתקבל עדיין קשיר, כאשר מספר המעגלים כעת – בגרף החדש – הוא קטן מ-C. לכן, מהנחת האינדוקציה יש לגרף החדש עץ פורש. עץ זה הוא גם עץ פורש של G (שכן הקודקודים הם עדיין אותם קודקודים).

תרגול 21.5.18 – גרפים ומסלולים אוילריאניים

<u>תרגיל 1</u>

יהי $T = (V, E)$ עץ בעל k עלים, כאשר ערכי הערכיות של שאר הקודקודים הם 4,4,5,7. מהו הערך של k?

<u>תזכורת</u>: ערכיות של קודקוד מסומן ב-$d(v)$ או ב-$\deg(v)$. לכל גרף מתקיים:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

במקרה שלנו:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = 4 + 4 + 5 + 7 + \mathrm{k}$$

מצד שני, T עץ ולכן: $|E| = |V| - 1 = k + 4 - 1 = k + 3$ (נתון שיש k עלים ועוד 4 קודקודים).

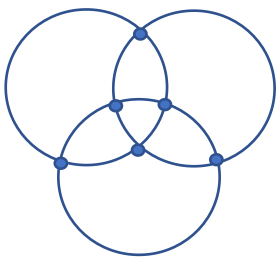
לכן נקבל:

$$2k + 6 = 2|E| = 20 + k \quad \Rightarrow \quad k = 14$$

גרפים ומסלולים אוילריאניים

<u>תזכורת</u>: **מסלול אוילריאני** בגרף G הוא מסלול שעובר דרך כל הצלעות בגרף בדיוק פעם אחת. גרף נקרא **אוילריאני** אם יש בו מסלול אוילריאני **סגור**.

<u>משפט:</u> יהי G גרף **קשיר**, אז G אוילריאני אמ"מ כל ערכי הערכיות בגרף הן זוגיות.



<u>דוגמא 1</u> – האם ניתן לצייר את הצורה הבאה ללא הרמת עט וללא חזרה על קווים?

נסמן את נקודות החיתוך של המעגלים להיות קודקודי גרף.
באופן זה, הגרף קשיר, וכל ערכי הערכיות הן זוגיות, ועל כן ניתן לעשות זאת.

<u>דוגמא 2</u> – האם ניתן לצייר את הצורה הבאה ללא הרמת עט וללא חזרה על קווים?

לא, כיוון שיש 2 קודקודים עם ערכיות שאינה זוגית.

<u>משפט:</u> גרף G **קשיר** מכיל מסלול אוילריאני **לא סגור** אמ"מ יש **בדיוק** שני קודקודים עם ערכיות אי זוגית.

<u>הוכחה:</u>

<u>כיוון ראשון</u>: נניח שיש ב-G מסלול אוילריאני לא סגור: $v_0 e_1 v_1 \cdots c_{n-1} v_{n-1} e_n v_n$ כאשר $v_0 = x \neq y = v_n$.

כל פעם שהמסלול עובר דרך קודקוד v_i, הוא תורם 2 לערכיות של הקודקוד. לכן, סכום התרומות לערכיות של קודקוד נתון הוא זוגי, פרט לקודקודים x, y – אשר להם יש תוספת של +1 לערכיות מתחילתו/סופו של המסלול.

נשים לב, כי מכיוון שהמסלול אוילריאני – באמת ספרנו את התרומה של כל הצלעות בגרף לערכי הערכיות של הקודקודים.

כיוון שני: נניח $x,y \in V$ קודקודים בעלי ערכיות אי-זוגית, ונניח שכל קודקוד אחר הוא בעל ערכיות זוגית.

נוסיף קודקוד חדש z ושתי צלעות: $\{y,z\}$, $\{x,z\}$. נקרא לגרף החדש G' ונראה ש-G' הוא גרף אוילריאני. לפי המשפט שהוכחנו, צריך להראות:

- **G' קשיר** – יהיו $a,b \in V$. אזי קיים מסלול ביניהם כי קיים מסלול כזה בגרף G. אם $a \in V$, אזי קיים מסלול מ-a לקודקוד x ב-G, ולכן קיים מסלול כזה גם ב-G'. ואז, יחד עם הצלע $\{x,z\}$ זה מסלול בין a ל-z בגרף G'.
- **כל ערכי הערכיות ב-G' הן זוגיות** – כל הקודקודים פרט ל-x,y,z הם בעלי אותה ערכיות כמו בגרף G, כלומר זוגיות. הערכיות של x ושל y עלתה ב-1 ביחס לערכיותם ב-G, לכן שתיהן זוגיות. הערכיות של z היא 2, ובפרט זוגית.

לכן, קיים מסלול אוילראיני סגור $v_0 e_1 v_1 \cdots c_n v_n e_{n+1} v_{n+1}$, כאשר $v_0 = v_{n+1} = z$, $e_1 = \{x,z\}$, $v_1 = x$, $v_n = y$, $e_{n+1} = \{z,y\}$.

לכן, המסלול $v_1 e_2 v_2 \cdots e_{n-1} v_n$ כאשר $v_1 = x$, $v_n = y$ הוא מסלול אוילריאני פתוח (לא סגור) ב-G.

<u>לסיכום שני המשפטים – משפט אוילר:</u>

יהי G גרף קשיר, אזי ב-G יש מסלול אוילריאני (סגור/פתוח) אמ״מ מספר הקודקודים עם ערכי ערכיות אי-זוגיים קטן או שווה ל-2.

- אם מספר הקודקודים עם ערכיות אי-זוגית הוא 0, אזי המסלול סגור.
- אם מספר הקודקודים עם ערכיות אי-זוגית הוא 2, אזי המסלול פתוח.
- לא יכול להיות ככל גרף בו מספר הקודקודים עם ערכיות אי-זוגית הוא 1 (שכן, לכל גרף שהוא, סכום ערכי הערכיות הוא זוגי).

<u>תרגיל 2</u>

יהי $G = (V,E)$ גרף d-רגולרי (גרף שהערכיות של כל קודקוד היא d). בנוסף, נתון: $|V| = 2d+1$. הראו ש-G גרף אוילריאני.

נראה תחילה ש-G קשיר:

- אם $d = 0$ אז G הוא נקודה, ובפרט קשיר.
- אם $d > 0$, ניקח $u,v \in V$ ונראה שיש מסלול ביניהם. אם $\{u,v\} \in E$ סיימנו. אחרת, נראה שיש מסלול באורך 2 ביניהם, כלומר נראה שקיים קודקוד z שהוא שכן משותף של שניהם.

  נניח בשלילה שאין כזה. נסמן $N(v)$ את השכנים של v, וכן $N(u)$ את השכנים של u. אז, לפי ההנחה שלנו מתקיים $N(v) \cup N(u) = \emptyset$.

  כך, קיבלנו כי $2d+1 = |V| \geq |N(v)| + |N(u)| + \overset{(u,v)}{2} = 2d+2$, וזוהי סתירה.

  לכן, קיים $z \in N(v) \cup N(u)$ ומצאנו מסלול בין u,v באורך 2.

נותר להראות שכל הקודקודים ב-G הם בעלי ערכיות זוגית. כלומר, צריך להראות ש-d הוא מספר זוגי. מתקיים:

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = |V| \cdot d = (2d+1)d$$

ומכיוון שהמכפלה בין שני הגורמים בצד ימין היא זוגית, אחד מהאיברים חייב להיות זוגי.
מכיוון שהביטוי $2d+1$ לעולם לא יהיה זוגי, בהכרח d זוגי. מכאן, לפי המשפט, G הוא גרף אוילריאני.

הרצאה 24.5.18 – המשך משפט החתונה, והקשר לתורת הגרפים

<u>תזכורת – משפט החתונה (משפט Hall)</u>

תהיינה נתונות קבוצה A של m בחורים וקבוצה B של n בחורות, ולכל בחור $x \in A$ תהי נתונה הקבוצה $N(x) \subseteq B$ של הבחורות שאותן x מכיר.

תנאי **הכרחי ומספיק** לקיום "[זיווג של הבחורים](#)" הוא שלכל תת קבוצה $S \subseteq A$ של בחורים יתקיים: $|N(S)| \geq |S|$.

<u>הוכחה</u>

<u>הוכחת הכיוון הקל – הוכחה כי התנאי הכרחי:</u> כלומר, אילו קיים זיווג של הבחורים, אזי $|N(S)| \geq |S|$.

נניח שהפונקציה f מתאימה לכל בחור x בחורה $f(x)$ שהוא מכיר, כך ש: $x \neq x' \Rightarrow \ f(x) \neq f(x')$ (זו המשמעות של זיווג של הבחורים).

תהי $S \subseteq A$, ואז:

$$\{f(x)|x \in S\} \subseteq N(S) \quad , \quad |\{f(x)|x \in S\}| = |S|$$

ולכן: $N(S) \geq S$.

<u>הוכחת הכיוון הקשה – הוכחה כי התנאי מספיק:</u> כלומר, בהינתן כי $|N(S)| \geq |S|$, מתקיים זיווג של הבחורים.

"כמו שרומא לא נבנתה ביום אחד, גם זיווג של הבחורים לא יבנה בצעד אחד" – ר.ה

נוכיח כיוון זה באינדוקציה על מספר הבחורים m.

בסיס האינדוקציה ($m = 1$): לפי תנאי המשפט, הבחור היחיד מכיר לפחות בחורה אחת. נחתן אותם זה עם זו, וסיימנו.

צעד האינדוקציה ($m \geq 2$): תהי נתונה בעיית חתונה (כמתואר בניסוח המשפט) עם m בחורים, המקיימת את תנאי המשפט. לפי הנחת האינדוקציה, לכל בעיית חתונה עם פחות מ-m בחורים, המקיימת את תנאי המשפט, קיים זיווג של הבחורים.

נפריד לשני מקרים:

<u>מקרה ראשון:</u> לכל $\emptyset \neq S \subset A$ מתקיים $|N(S)| > |S|$. במקרה זה, נבחר בחור כלשהו $x_1 \in A$, ונתאים לו בחורה כלשהי $y_1 \in B$ שהוא מכיר (יש כזו לפי תנאי המשפט).

נתבונן כעת על בעיית החתונה הנותרת:

$$A' = A \backslash \{x_1\} \quad , \quad B' = B \backslash \{y_1\}$$

ואז לכל $x \in A'$ מתקיים $N'(x) = N(x) \backslash \{y_1\}$.

לפי הנחת המקרה הראשון, לכל $S \subseteq A'$ מתקיים $|N'(S)| \geq |S|$. כלומר, הבעיה הנותרת מקיימת את תנאי המשפט, ולכן – לפי הנחת האינדוקציה, קיים זיווג של הבחורים ב-A'. יחד עם הזוג $x_1 y_1$ נקבל זיווג של הבחורים ב-A.

__מקרה שני:__ קיימת $\emptyset \neq S \subset A$ עבורה $|N(S)| = |S|$ (השלילה הלוגית אומרת שצריך להיות סימן $\leq$ ולא $=$, אך תנאי המשפט הוא ש- $|N(S)| \geq |S|$).

תהי S תת-קבוצה כנ"ל. מכיוון שמתקיים $|S| < m$, לפי הנחת האינדוקציה קיים זיווג של הבחורים ב-S אל הבחורות ב-$N(S)$. נזווג אותם ונתבונן בבעיית החתונה הנותרת:

$$A' = A \backslash S \quad , \quad B' = B \backslash N(S)$$

ולכל $x \in A'$ מתקיים $N'(x) = N(x) \backslash N(S)$ (כלומר, הבחורות שהכיר קודם לכן, מלבד אלו התפוסות).

כדי לסיים, מספיק להראות שבעיית החתונה הנותרת מקיימת את תנאי המשפט (שכן אז - לפי הנחת האינדוקציה- קיים זיווג של הבחורים ב-A', ויחד עם הזיווג בין S ל-$N(S)$, נקבל זיווג של הבחורים ב-A).

כלומר, נשאר להראות שלכל $T \subseteq A'$ מתקיים $|N'(T)| \geq |T|$.

נניח בדרך השלילה שקיימת $T \subseteq A'$ כך ש- $|N'(T)| < |T|$ (כלומר, קיימת קבוצה T של n בחורים, המכירים יחדיו פחות מ-n בחורות). נשים לב כי:

$$N(S \cup T) = N(S) \cup N'(T)$$

לכן:

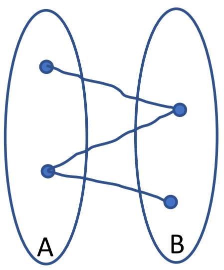
$$|N(S \cup T)| = |N(S)| + |N'(T)| < |S| + |T| = |S \cup T|$$

בסתירה לקיום תנאי המשפט בבעיה המקורית עבור $S \cup T$.

הקשר של משפט החתונה לתורת הגרפים

__**הגדרה:**__ גרף $G = (V, E)$ נקרא **דו-צדדי** אם קיימת חלוקה של V: $V = A \underset{זר}{\cup} B$, כך שכל צלע ב-$E$ מכילה קודקוד אחד מ-A וקודקוד אחד מ-B (כלומר, צלעות מחברות רק קודקודים שנמצאים בצדדים שונים).

גרף זה נכתב גם בצורה $G = (A, B, E)$.

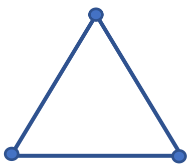


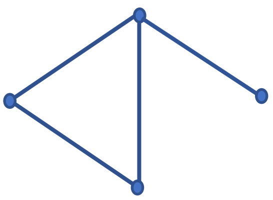
כל בעיית חתונה ניתנת לתיאור ע"י גרף דו-צדדי, שבו:

- A = קבוצת הבחורים
- B = קבוצת הבחורות
- צלע ב-E מציינת היכרות
- $N(x)$ מסמן, כרגיל, את השכנים של x

__**הגדרה:**__ בהינתן גרף כלשהו $G = (V, E)$, קבוצה M של צלעות נקראת **זיווג** (Matching) אם כל שתי צלעות ב-M הן זרות.

מספר הזיווג של G, המסומן ע"י $\nu(G)$, הוא הגודל המקסימלי של זיווג ב-G.





__דוגמאות:__

1. עבור הגרף השמאלי - $\nu(G) = 1$
2. עבור גרף הימני - $\nu(G) = 2$

__הערה:__ אם $G = (A, B, E)$ הוא גרף דו-צדדי, אז בהכרח $\nu(G) \leq \min\{|A|, |B|\}$.

במונחים אלו, משפט החתונה שקול לניסוח הבא :

<u>משפט החתונה (*Hall*) – ניסוח של תורת הגרפים</u>

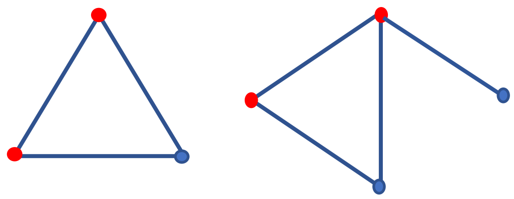
יהי $G=(A,B,E)$ גרף דו-צדדי. אזי $\nu(G)=A \Leftrightarrow \forall S\subseteq A\,;|N(S)|\geq|S|$.

<u>הגדרה:</u> בהינתן גרף כלשהו $G=(V,E)$, קבוצה C של קודקודים נקראת **כיסוי** (Cover) אם כל צלע ב-E מכילה לפחות קודקוד אחד ב-C. במילים אחרות – כיסוי הוא בחירה של הקודקודים ככה שאנו מצליחים "לתפוס" את כל הצלעות.

מספר הכיסוי של G, המסומן ע"י $\tau(G)$, הוא הגודל המינימלי של כיסוי ב-G.

<u>דוגמאות :</u>

1. עבור הגרף השמאלי - $\tau(G)=2$
2. עבור גרף הימני - $\tau(G)=2$



<u>טענה:</u> בכל גרף $G=(V,E)$ מתקיים $\boldsymbol{\nu(G)\leq\tau(G)}$.

<u>הוכחה:</u> יהי M זיווג בגודל $\nu(G)$, ויהי C כיסוי בגודל $\tau(G)$. C חייב בפרט להכיל לפחות קודקוד אחד מכל צלע ב-M, ומכיוון שאלה צלעות זרות, C חייב להכיל קודקודים לפחות כגודל M, כלומר :

$$|M|\leq|C| \;\;\Rightarrow\;\; \nu(G)\leq\tau(G)$$

<u>משפט *König*:</u> בכל גרף דו-צדדי $G=(A,B,E)$ מתקיים $\nu(G)=\tau(G)$.

<u>הוכחה:</u> מכיוון שתמיד מתקיים $\nu(G)\leq\tau(G)$, די להראות שבגרף דו-צדדי מתקיים $\nu(G)\geq\tau(G)$. לשם כך, נגדיר פרמטר h באופן הבא :

$$h=\max\{|S|-|N(S)|\,\big|\,S\subseteq A\}$$

זוהי המגרעת לגבי תנאי משפט החתונה, כלומר – כמה אנחנו "רחוקים" מקיום תנאי משפט החתונה, לפיו $|N(S)|\geq|S|$.

נוכיח עתה את שתי הטענות הבאות : <u>טענה א' :</u> $\nu(G)\geq|A|-h$ <u>טענה ב' :</u> $\tau(G)\leq A-h$. ביחד, שתי הטענות יתנו $\tau(G)\leq\nu(G)$ כנדרש.

<u>הוכחת טענה א' :</u> נבנה בעיית חתונה חדשה $G'=(A,B',E')$, שבה B' מתקבלת מ-B ע"י הוספת h בחורות חדשות, ו-E' מתקבלת מ-E ע"י הוספת היכרויות בין כל הבחורים לבין כל הבחורות החדשות.

בבעיה החדשה, מתקיים תנאי משפט החתונה. לכן, לפי משפט החתונה, קיים זיווג ב-G' בגודל $|A|$. לכל היותר h מהזוגות בזיווג הזה מכילים בחורה חדשה, ולאחר הורדתם יישאר זיווג ב-G שגודלו לפחות $|A|-h$.

<u>הוכחת טענה ב' :</u> תהי $S\subseteq A$ קבוצה שעבורה $|S|-|N(S)|=h$ (h הוגדר כמקסימום של ההפרשים האלו, ולכן בהכרח קיימת קבוצת S כזו). אזי, קבוצת הקודקודים הבאה היא כיסוי ב-G :

$$C=(A\backslash S)\cup N(S) \;\;\Rightarrow\;\; |C|=|A|-|S|+|N(S)|=|A|-h$$

כנדרש.