

(1)

עוצמות הרעש X ו- Y הנמדדות בשתי נקודות A ו- B בהתאמה מהוות וקטור אקראי בעל צפיפות אחידה במשולש אשר קודקודיו הם $(0,0)$, $(2,0)$ ו- $(1,2)$.

א. מצאו את f_X ו- f_Y

ב. מהי ההסתברות שעוצמת הרעש ב- A קטנה מזו שב- B ?

ג. מהי ההסתברות שסכום עוצמות הרעש גדול מיחידה אחת?

ד. מהי ההסתברות המותנת $f_{X|Y}$?

(2)

X משתנה אקראי $N(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, משתנה אקראי $Y = |X|$ ומשתנה אקראי

$$Z = \text{sign}(X) = \begin{cases} 1, & X > 0 \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0 \end{cases}$$

האם Y ו- Z בלתי תלויים? נמקו!

(3)

המיקום של חלקיק הוא נקודה אקראית $(X_1, X_2, X_3) \in R_3$, כך ש- X_1, X_2 מ.א. בלתי תלויים המפולגים לפי אותה התפלגות מעריכית עם פרמטר 2, וההתפלגות של X_3 בהנתן $X_1 = x_1, X_2 = x_2, x_1, x_2 > 0$ היא מעריכית עם הפרמטר $x_1 + x_2$. מה הן פונקציות הצפיפות וההתפלגות של X_3 ? חשבו EX_3^2 .

(4)

יהי X_j משתנה אקראי המוגדר כמספר חלקיקים בתא מספר j מתוך $m > 3$ תאים. חשבו

$$(i)p_{(X_1, X_2, X_3)} \quad (ii)p_{X_1|X_2, X_3} \quad (iii)EX_j$$

עבור שני מקרים הבאים:

א. n חלקיקים מפולגים באופן אקראי בין m תאים.
ב. כל אחד מ- n חלקיקים אשר נפלטים ממקור קרינה נלכד באחד מ- m תאים, באותה הסתברות $1/m$ ובאופן בלתי תלוי זה בזה.

(5)

יהי $X_0 \sim U[0, 1]$. ניצור סידרה אינדוקטיבית יורדת של מספרים ע"י הגרלת X_n (באחידות) מתוך הקטע $[0, X_{n-1}]$ לכל $n = 1, 2, \dots$.

א. מהי הצפיפות המשותפת של (X_0, X_1) , ומהן הצפיפויות של X_1 , של X_2 ושל X_3 ?

ב. נחש, מתוך סעיף (א), את הנוסחה של $f_{X_n}(x)$ עבור n כללי.

ג. חשב את EX_n (ניתן לחשב אותו מתוך סעיף (ב) או בלעדיו; השווה).

ד. מצא את הצפיפות המותנית $f_{X_{n-1}|X_n}(x|y)$.

(6)

עבור זוג פרמטרים אקראיים (X, Y) נתון ש- $f_Y(y) = 2y$ עבור $0 < y < 1$, וגם ש- $f_{X|Y}$, כפונקציה של x היא צפיפות אחידה בקטע $[0, y]$, לכל $y \in (0, 1)$.

א. מצא את $f_{X,Y}(x, y)$ ואת $f_X(x)$.

ב. מצא את $E(X|Y)$ ואת $E(Y|X)$.

בהצלחה!!