קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 5

תאריך הגשה: יום ראשון, 8/12/2013, עד שעה 22:00 (אחרי חופשת חנוכה)

<u>שאלה 1:</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה שאין לה איבר גדול ביותר ואין לה איבר קטן ביותר. הוכיחו כי a_n אינה מתכנסת. (רמז: תרגיל בית 4)

אם $\{a_n\}$ חסומה, אז מאקסיומת השלמות יש לה סופרמום ואינפימום. מכיון שלסדרה אין איבר גדול ביותר, הסופרמום אינו איבר בקבוצה. בתרגיל בית 4 הוכח כי אם $\sup a_n \notin \{a_n\}$, אז $\sup a_n$ הוא ג״ח שלה. לכן, עבור הסדרה הנתונה, הסופרמום הוא ג״ח, ובאופן דומה (ע״י הסתכלות על $\{-a_n\}$) נקבל כי האינפימום של הסדרה אינו איבר בסדרה, ולכן הוא ג״ח. אם נראה כי $\sup a_n \neq \inf a_n$ אז מצאנו שני ג״ח שונים, ולכן הסדרה אינה מתכנסת. אבל אם $\sup a_n = \inf a_n$ אז הסדרה היא למעשה קבועה, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\inf a_n \le a_n \le \sup a_n = \inf a_n$, ואם הסדרה היא קבועה, אז בפרט יש לה איבר גדול ביותר וקטן ביותר – סתירה לנתון.

<u>שאלה 2:</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת: $\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = 0$. הראו כי מתקיים אחד מהבאים:

$\lim a_n = 0$ או $\limsup a_n > 0$.

אם $a_n \to 0$ סיימנו. נניח אם כן כי הסדרה לא מתכנסת ל- 0, ולכן בפרט קיים ג״ח $L \neq 0$ של הסדרה. יהי L כנ״ל. אם $L > 0$, אז $\limsup a_n > 0$, וסיימנו. אם $L < 0$, אז קיימת ת״ס $a_{n_k} \to L$. נסתכל על a_{n_k+1}: מאריתמטיקה של גבולות, $a_{n_k+1} = (a_{n_k} + a_{n_k+1}) - a_{n_k} \to -L > 0$, כלומר מצאנו ג״ח חיובי של הסדרה, ולכן $\limsup a_n > 0$.

<u>הערה:</u> לא התייחסנו לשאלה האם L סופי, מכיוון שאם $L = \pm\infty$ אותו טיעון מראה כי $\limsup a_n > 0$.

<u>שאלה 3:</u>

נסמן ב- A' את אוסף נקודות ההצטברות של קבוצה $A \subset \mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי $(A')' \subset A'$.

יהי $\varepsilon > 0$. אם $x \in (A')'$, אז בכל סביבת - $\frac{\varepsilon}{2}$ מנוקבת של x יש אינסוף נקודות של A', ובכל סביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ של הנקודות האלו יש אינסוף נקודות של A, ולכן בסביבת ε של x יש אינסוף נקודות של A, כלומר $x \in A'$.

a. תנו דוגמא לקבוצה A כך ש: (א) $A' = \emptyset$.

$A = \mathbb{N}$.

ב) $A' \neq \emptyset$ וגם $A \cap A' = \emptyset$.

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

ג) $A' \neq \emptyset$ וגם $(A')' = \emptyset$.

כמו סעיף ב. ($A' = \{0\}$) .

ד) A קבוצה אינסופית שכל נקודותיה הן מבודדות.

$A = \mathbb{N}$.

ב. הוכיחו / הפריכו : קיימת קבוצה A כך שקבוצת הנקודות הפנימיות שלה אינה ריקה, וכל הנקודות הפנימיות שלה הן רציונליות.

לא תיתכן קבוצה כזו, כי אם $x \in \mathbb{Q}$ נקודה פנימית, אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$, לכן גם $\left(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$, אבל בקטע זה קיימת נקודה $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (מצפיפות) המקיימת גם היא $\left(y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$, לכן גם y נקודה פנימית, בסתירה לכך שכל הנקודות הפנימיות הן רציונליות.

<u>שאלה 4</u>:

הוכיחו כי כל קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}$ היא איחוד בן-מניה של קטעים פתוחים זרים.

<u>הדרכה:</u> תהי A פתוחה, הגדירו לכל $x \in A$:

$a_x = \sup\{ (\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, x] \}$, $b_x = \inf\{ (\mathbb{R}\backslash A) \cap [x, \infty) \}$.

הוכיחו שלכל $x, y \in A$ מתקיים אחד מהבאים : $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$ או $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$.

הסיקו את הטענה.

יהי $x \in A$, ונגדיר a_x, b_x כפי שמתואר בהדרכה. נעיר כי אם $(\mathbb{R}\backslash A) \cap [x, \infty) = \emptyset$, אז b_x לא מוגדר, ולכן במצב כזה נגדיר $b_x = \infty$. באופן דומה, אם $(\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, x] = \emptyset$, נגדיר $a_x = -\infty$.

מהגדרת a_x נובע כי $a_x \leq x$. A פתוחה, לכן $\mathbb{R}\backslash A$ סגורה, לכן $(\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, x]$ סגורה בחיתוך סגורות, ולכן מכילה את הסופרמום שלה, ולכן $a_x \in (\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, x]$, ובפרט $a_x \in \mathbb{R}\backslash A$, כלומר $a_x \notin A$, לכן $a_x \neq x$, ולכן $a_x < x$. באופן דומה $x < b_x$, ולכן $x \in (a_x, b_x)$. מתקיים כי $(a_x, b_x) \subset A$, כי אם קיים $t \in (a_x, b_x)\backslash A$, ונניח כי $t > x$, אז $t \in \mathbb{R}\backslash A$ וגם $t \in [x, \infty)$, ולכן מהגדרת b_x נובע כי $t \geq b_x$, בסתירה לכך ש- $t \in (a_x, b_x)$. בנוסף, לכל $t \in (a_x, b_x)$ מתקיים $a_t = a_x$: נניח בה״כ כי $t > x$, ואז $(-\infty, t] = (-\infty, x] \cup (x, t]$, ומכיוון ש- (a_x, b_x) הוא קטע המכיל את x, t, מתקיים $(x, t] \subset (a_x, b_x)$ ולכן בפרט $(x, t] \subset A$, ולכן $(\mathbb{R}\backslash A) \cap (x, t] = \emptyset$, ולכן $(\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, t] = (\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, x]$, ולכן $a_x = a_t$. באופן דומה מתקיים כי אם $t \in (a_x, b_x)$, אז $b_t = b_x$.

מצד שני, אם $t \in A$ מקיים כי $t \notin (a_x, b_x)$, ונניח בה״כ כי $t < a_x$, אז בהכרח $(t, x) \cap (\mathbb{R}\backslash A) \neq \emptyset$, כי אחרת בהגדרת a_x נקבל שוב $a_t = a_x$, סתירה. לכן, נובע כי $\inf\big((t, x) \cap (\mathbb{R}\backslash A)\big) < \sup\big((t, x) \cap (\mathbb{R}\backslash A)\big)$. מכיוון ש- $x, t \in A$, מתקיים כי $(\mathbb{R}\backslash A) \cap [t, x] = (\mathbb{R}\backslash A) \cap (t, x)$. בנוסף, $[t, x] \subset [t, \infty)$, לכן $\big((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t, x]\big) \subset \big((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t, \infty)\big)$, ושתי אלו קבוצות לא ריקות, לכן : $\inf\big((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t, \infty)\big) \leq \inf\big((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t, x]\big)$, ובאופן דומה, מתקיים גם כי :

$\sup\big((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t, x]\big) \leq \sup\big((\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty, x]\big)$.

בסה״כ קיבלנו : $\inf((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t,\infty)) \le \inf((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t,x]) < \sup((\mathbb{R}\backslash A) \cap [t,x]) \le \sup((\mathbb{R}\backslash A) \cap (-\infty,x])$,

כלומר קיבלנו : $b_t < a_x$, ולכן : $(a_x , b_x) \cap (a_t , b_t) = \emptyset$.

כעת, נסתכל על y : אם $y \in (a_x, b_x)$, נובע ממה שהראינו כי $a_y = a_x , b_y = b_x$, ואם $y \notin (a_x , b_x)$, נובע כי $(a_x , b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$. מכיוון שאלו שתי האפשרויות היחידות עבור y, אלו שתי האפשרויות היחידות ליחס בין הקטעים (a_y, b_y) , (a_x , b_x) , והוכחנו את טענת העזר.

כעת נוכיח את הטענה כולה : תהי A קבוצה פתוחה, ולכל $x \in A$ יהי (a_x , b_x) הקטע הפתוח המתאים מטענת העזר. ברור כי לכל $x \in A$, $x \in \cup_{x\in A} (a_x , b_x)$, לכן $A \subset \cup_{x\in A} (a_x , b_x)$, ובטענת העזר הראינו כי כל קטע פתוח כזה מוכל ב- A, ולכן $\cup_{x\in A} (a_x , b_x) \subset A$, ולכן מהכלה כפולה נקבל כי $A = \cup_{x\in A} (a_x , b_x)$. מטענת העזר מתקיים כי האיחוד הנ״ל הוא איחוד של קטעים פתוחים זרים. בכל קטע כזה קיים מספר רציונלי, וע״י בחירה שרירותית של מספר רציונלי בכל קטע נקבל קבוצת מספרים רציונליים כמספר הקטעים השונים, ומכיוון שיש מספר בן-מניה של רציונליים, נקבל כי יש לכל היותר מספר בן-מניה של קטעים זרים כאלו.

שאלה 5 :

בתרגיל זה יש להוכיח את הטענות הבאות, שהן הכללות למשפטים שראיתם בכיתה.

א. **בולצאנו-ויירשטראס : תהי $E \subset \mathbb{R}$. אם E אינסופית וחסומה, אז יש לה נקודת הצטברות.**

אם E חסומה, אז קיימים a , b כך ש- $E \subset [a,b]$. נבחר $a_1 \in E\backslash\{a,b\}$. נסתכל על הקטעים $[a,a_1], [a_1,b]$. (שניהם קטעים מכיוון שבחרנו נקודה שהיא לא a או b). לפחות באחד מהקטעים האלו יש אינסוף נקודות של E, נניח ב- $[a , a_1]$. נבחר נקודה מקטע זה שהיא לא אחת מהקצוות, a_2, ושוב נסתכל על שני הקטעים , $[a , a_2]$ $[a_2 , a_1]$, שבאחד מהם יש אינסוף נקודות של E, ונבחר נקודה מתוך קטע כזה שהיא לא אחת מנקודות הקצה, וכן הלאה. נקבל סדרה $\{a_n\}$ של נקודות שונות ב- E, ומכיוון ש- E חסומה אז גם הסדרה חסומה. מ- BW עבור סדרות נקבל כי לסדרה זו קיימת ת״ס מתכנסת, והגבול של ת״ס זו הוא בהכרח נק׳ הצטברות של E מכיוון שהסדרה נבנתה מנקודות שונות של E.

ב. **הלמה של היינה-בורל : אם $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה סגורה וחסומה, אז לכל כיסוי שלה ע״י תת-קבוצות פתוחות יש תת-כיסוי סופי.**

E חסומה, לכן קיים קטע $[a,b]$ כך ש- $E \subset [a,b]$. יהי $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ כיסוי פתוח של E, ונגדיר $U_0 = \mathbb{R}\backslash E$. E סגורה, לכן U_0 פתוחה, ומכיוון ש- $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ כיסוי של E, מתקיים ש- $\{U_k\}_{k=0}^{\infty}$ כיסוי פתוח של $[a,b]$, ולכן (מהיינה-בורל הרגיל) קיים תת-כיסוי סופי $\left\{U_{k_j}\right\}_{j=1}^{N}$ של $[a,b]$. אם U_0 לא נמצא באוסף הסופי, אז הכיסוי הנ״ל הוא תת-כיסוי סופי של E מתוך האוסף המקורי, וסיימנו. אם U_0 שייך לאוסף, נסתכל על האוסף ללא U_0. מכיוון ש- $U_0 \cap E = \emptyset$, נובע כי הכיסוי הזה (ללא U_0) הוא עדיין כיסוי של E, וזהו תת-כיסוי סופי של האוסף המקורי.

ג. (סעיף זה לא להגשה)

הלמה של קנטור : אם $E_i \subset \mathbb{R}$ קבוצות סגורות וחסומות כך ש- $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$,

אז $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \emptyset$.

נניח בשלילה כי החיתוך ריק. נסתכל על הקבוצות הפתוחות $U_n = \mathbb{R}\setminus E_n$. מההכלה של ה- E_i, מתקיים כי $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$, ואלו קבוצות פתוחות, המהוות כיסוי של $\mathbb{R}$, כי $\cup\, U_n = \mathbb{R}\setminus(\cap\, E_n) = \mathbb{R}$, ולכן בפרט מהוות כיסוי פתוח של E_1, שהיא סגורה וחסומה, ולכן מסעיף קודם, קיים תת-כיסוי סופי של E_1, $\{U_{n_k}\}_{k=1}^{N}$. כלומר: $E_1 \subset U_{n_1} \cup \cdots \cup U_{n_N} = \mathbb{R}\setminus(\cap\, E_{n_k})$, ולכן: $E_1 \cap \left(E_{n_1} \cap \cdots \cap E_{n_N}\right) = \emptyset$. אבל ממונוטוניות ההכלה של הקבוצות E_i, מתקיים כי: $E_1 \cap \left(E_{n_1} \cap \cdots \cap E_{n_N}\right) = E_{n_N}$, כלומר $E_{n_N} = \emptyset$ - סתירה.

<u>שאלה 6:</u>

א. הוכיחו כי התכונות הבאות הן שקולות:

1. A סגורה.
2. $A = \bar{A}$.
3. אם $a_n \in A$ לכל $n \in \mathbb{N}$, וגם $a_n \to a$, אז $a \in A$.

$1 \Leftarrow 2$: אם A סגורה אז $A' \subset A$, ולכן $\bar{A} = A \cup A' \subset A$, ויחד עם ההכלה שמתיד מתקיימת, $A \subset A'$, נקבל כי $A = \bar{A}$.

$2 \Leftarrow 3$: נניח בשלילה כי $a \notin A$. מהגדרת הגבול, בכל סביבה של a יש אינסוף מאיברי $\{a_n\}$, שכולם ב-A, ומכיון ש- $a_n \neq a$ לכל n נובע כי בכל סביבה מנוקבת של a קיים לפחות איבר אחד של A, ולכן a נקודת הצטברות של A, ומכיוון ש- $A = \bar{A} = A \cup A'$, נובע כי $a \in A$ - סתירה.

$3 \Leftarrow 1$: לכל נקודת הצטברות של A נוכל לבנות סדרה של נקודות ב- A המתכנסת אליה, ולפי (3), גבול זה שייך ל- A, כלומר כל נקודת הצטברות של A שייכת ל- A, ולכן A סגורה.

ב. הוכיחו כי $x \in \bar{A}$ אם ורק אם בכל סביבת ε של x יש לפחות נקודה אחת של A.

אם $x \in A$ אז בכל סביבת ε של x הוא עצמו קיים, כלומר קיימת נקודה של A. אם $x \notin A$, אז $x \in A'$, ולכן בכל סביבת ε שלו יש אינסוף נקודות של A, ובפרט יש לפחות אחת.

ג. הוכיחו כי x נקודת הצטברות של A אם ורק אם $x \in \overline{A\setminus\{x\}}$.

x נקודת הצטברות, לכן בכל סביבת ε מנוקבת שלו יש אינסוף נקודות של A, כלומר בכל סביבה שלו יש אינסוף נקודות של $A\setminus\{x\}$, ולכן מסעיף (ב) זה אומר כי $x \in \overline{A\setminus\{x\}}$.

ד. הוכיחו כי אם x נקודה מבודדת של A, אז x אינה נקודת הצטברות של A.

אם x מבודדת אז קיימת סביבה מנוקבת של x שאין בה בכלל נקודות של A, ולכן x אינה נקודת הצטברות של A.

<u>שאלה 7: לא להגשה</u>

תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית. נגדיר באמצעותה סדרה חדשה באופן הבא: $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

הוכיחו כי אם b_n מתכנסת לגבול סופי, אז גם הסדרה $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ מתכנסת לגבול סופי.

רמז: שימו לב כי יש להוכיח רק התכנסות של הסדרה c_n ולא לחשב את הגבול.