1 חורף תשנ"ו מועד ב' - 14 במרץ 1996.

<u>שאלה מספר 1:</u> נתונה $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת ע"י:

$$T\left(p(x)\right)=\begin{bmatrix} p(0) & p(1)-p(0) \\ p(1) & p(0)\end{bmatrix}$$

א. נחשב את הגרעין של T:

$$\begin{aligned} p(x)\in Ker(T) &\Leftrightarrow p(0)=0,\, p(1)=0,\, p(0)=p(1) \\ &\Leftrightarrow p(0)=p(1)=0 \\ &\Leftrightarrow p(x)=x(x-1)(ax+b);\quad (a,b\in\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

מכאן אנו מקבלים בסיס לגרעין של T: $\{x^3-x^2, x^2-x\}$.

ב. כעת נחשב את התמונה של T: התמונה נפרשת על-ידי תמונות איברי הבסיס הסטנדרטי ולכן נחשב:

$$T(1)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\quad T(x)=T(x^2)=T(x^3)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

קיבלנו בסיס לתמונה של T: $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$

ג. ברור שהמטריצות $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ בלתי-תלויות ב-$\mathbb{R}^{2\times 2}$, ואינן שייכות לתמונה של T, מכיוון שמקדמי-האלכסון של מטריצה בתמונה חייבים להיות שווים ביניהם.

ד. $rank(T)=dim\left(Im(T)\right)=2$

ה. U - אוסף כל המטריצות הסימטריות 2×2. $U\cap Im(T)\subseteq Im(T)$, ולכן במעבר למימדים נקבל $dim\left(U\cap Im(T)\right)\le 2$. מצד שני, לא כל מטריצה בתמונה היא מטריצה סימטרית, למשל $T(1)\notin U$, ולכן $U\cap Im(T)\subsetneq Im(T)$ ואז $dim\left(U\cap Im(T)\right)\le 1$. נדגיש כי מימדו של חיתוך זה איננו אפס, מכיוון שהמטריצה $T(x)$ שייכת אליו, ולכן היא גם מהווה בסיס לחיתוך (שמימדו, לפיכך, שווה ל-1).

<u>שאלה מספר 2:</u> נתונה $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ -

$$T\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{bmatrix}\right)=(a+b+c+d+e)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

א,ב,ג. מימד התמונה של T הוא 1, כיוון שכל וקטור בתמונה הוא כפולה סקלרית של $(1,1,1,1,1)^t$.
מכאן נובע שמימד הגרעין - שהוא המרחב העצמי של T המתאים לערך-העצמי 0 - הוא ממימד 4, דהיינו: הריבוי הגאומטרי של $\lambda=0$ הוא 4, ולכן ריבויו האלגברי הוא 4 או 5.
בנוסף, אנו רואים ש-$T(1,1,1,1,1)^t=5\cdot(1,1,1,1,1)^t$, ולכן $\lambda=5$ הוא ערך עצמי, שריבויו הגאומטרי הוא 1. סכום הריבויים הגאומטריים עד עתה הוא 5 - כמימד המרחב - ובכך הראינו ש-T לכסין, והפולינום האפייני שלו הוא $\Delta_T(x)=x^4(x-1)$.

$$E_0(T)=Sp\left\{(1,-1,0,0,0)^t,(1,0,-1,0,0)^t,(1,0,0,-1,0)^t,(1,0,0,0,-1)^t\right\}$$
$$E_5(T)=Sp\left\{(1,1,1,1,1)^t\right\}$$

מכאן אנו מקבלים בסיס של וקטורים עצמיים עבור $\mathbb{R}^5$:

$$B=\{(1,-1,0,0,0)^t,(1,0,-1,0,0)^t,(1,0,0,-1,0)^t,(1,0,0,0,-1)^t,(1,1,1,1,1)^t\}$$

ד. נעבוד בהצגה לפי הבסיס B:

$$\begin{aligned}&[T]_B=diag(0,0,0,0,5)\\ \Rightarrow\ &[T+3I]_B=[T]_B+3[I]_B=[T]_B+3I=diag(3,3,3,3,8)\\ \Rightarrow\ &det\,(T+3I)=3^4\cdot 8.\end{aligned}$$

ה. נסמן $S=(T+I)(T+2I)=T^2+3T+2I$. אזי:

$$\begin{aligned}&[S]_B=[T^2]_B+3[T]_B+2I=[T]_B^2+3[T]_B+2I\\ =\ &diag(0,0,0,0,25)+diag(0,0,0,0,15)+2I=diag(2,2,2,2,42)\\ \Rightarrow\ &\Delta_S(x)=(x-2)^4(x-42).\end{aligned}$$

פתרון אחר לסעיף זה מתקבל אם נזכור כי $Tv=\lambda\cdot v$ גורר $p(T)v=p(\lambda)\cdot v$ לכל פולינום $p(x)$: לאופרטור $p(T)=S$ יש ערך עצמי $p(0)=2$ מריבוי גאומטרי 4, וערך עצמי $p(5)=42$ מריבוי 1, ואז מקבלים את אותו פולינום אפייני.

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. נתון תת-המרחב הבא של $\mathbb{R}^{2\times 3}$ -

$$U=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times3}\ \middle|\ \begin{bmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{bmatrix}\cdot A=0\right\}$$

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\x&y&z\end{bmatrix}\in U\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}b+y&=&0\\a+x&=&0\\c+z&=&0\end{array}\right.\ \Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}a&b&c\\-a&-b&-c\end{bmatrix}$$

מן החישוב שלהלן מתקבל בסיס ל-U: $\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\right\}$,

מכיוון שזוהי קבוצה פורשת ובת"ל עבור U.

ב. עלינו לרשום את כל המטריצות מדרגה 1 ב-$(\mathbb{Z}_2)^{2\times2}$. או שהשורה הראשונה היא שורת-אפסים ואז השורה השניה נבחרת שרירותית ובאופן שתהיה שונה מאפס, או שהשורה הראשונה איננה מתאפסת, ואז השורה השניה היא כפולה סקלארית שלה, דהיינו: שווה לשורה הראשונה, או שווה לאפס, מכיוון שהסקלרים בשדה הם 0 ו-1 בלבד. מכאן שהמטריצות הדרושות הן:

$$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

<u>שאלה מספר 4:</u> א. נתון כי $A^5=A^3BA^4B$. אז - $|A^3BA^4B|=|A^5|\Rightarrow|A|^7|B|^2=|A|^5.$

היות ש-$|A|\neq 0$, גם $|B|=\frac{1}{|A|}\neq 0$, ולכן B הפיכה גם היא.

ב. הטענה נכונה במרחב ממימד סופי: TQS על, ולכן $r(TQS)=dimV$ -

$$\begin{aligned}&dimV=r(TQS)=r((TQ)S)\le r(TQ),r(S)\le r(T),r(Q),r(S)\\ &\Rightarrow r(T)=r(Q)=r(s)=dimV,\end{aligned}$$

ולכן כל הטרנספורמציות הן על.

ג. הטענה איננה נכונה, לדוגמה, אם $T,Q,S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ תוגדרנה באופן הבא, אז אף אחת מהן היא לא על, אבל $T+Q+S=I$:

$$T(x,y,z)=(x,0,0),\ Q(x,y,z)=(0,y,0),\ S(x,y,z)=(0,0,z)$$
$$\Rightarrow (T+Q+S)(x,y,z)=T(x,y,z)+Q(x,y,z)+S(x,y,z)=(x,y,z)=I(x,y,z).$$

<u>שאלה מספר 5:</u> בשאלה זו נשים לב לכך ש-$T^2=I$, ולכן -

$$Tv=\lambda v\ \Rightarrow\ v=Iv=T^2v=\lambda^2 v$$
$$v\neq 0\ \Rightarrow\ \lambda^2=1\ \Rightarrow\ \lambda=\pm 1$$

א. אם-כן, הרי שהערכים העצמיים של T הנתונה הם ± 1, וניתן לראות כי המרחב העצמי $E_1(T)$ הוא אוסף כל המטריצות עם שתי שורות ראשונות זהות, ואילו $E_{-1}(T)$ הוא אוסף כל המטריצות $(n\times n)$ עם שתי שורות ראשונות מנוגדות (אם לחבר אותן - נקבל את וקטור האפס), ושאר השורות הן שורות-אפסים.

ב. במקרה $n=3$ נקבל:

$$E_1(T)=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$$
$$E_{-1}(T)=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c\\ -a & -b & -c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

אנו רואים כי $dimE_1(T)+dimE_{-1}(T)=9=dim\mathbb{R}^{3\times 3}$, ולכן T הוא אופרטור לכסין עם ערכים עצמיים $1,-1$ מריבויים $6,3$ בהתאמה, ולכן הדטרמיננט של T הוא מכפלתם -

$$det(T)=1^6\cdot(-1)^3=-1.$$

2 חורף תשנ"ו - 15 בפברואר 1996.

<u>שאלה מספר 1:</u> נסמן $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$; העתקה $T:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ מוגדרת ע"י:

$$T\left(p(x)\right)=\begin{bmatrix} a-2b & a-2b \\ a-2c & d \end{bmatrix}.$$

א. נחשב את הגרעין:

$$p(x)\in KerT \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2c \\ a &= 2b \\ d &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2b \\ b &= c \\ d &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p(x)=2b+bx+bx^2+ex^4=b\left(2+x+x^2\right)+ex^4$$

וקיבלנו כי $KerT=Sp\left\{2+x+x^2,x^4\right\}$.

ב. נחשב את הערכים של T על הבסיס הסטנדרטי:

$$T(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ T(x)=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ T(x^2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\ T(x^3)=T(x^4)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

מכאן מתקבל בסיס לתמונה: $ImT=Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

ג. המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ איננה שייכת לתמונה של T, כיוון שבכל איבר של התמונה איברי השורה הראשונה חייבים להיות זהים.

ד. $r(T)=dim\left(ImT\right)=3$

ה. לא כל מטריצה בתמונה היא מטריצה סימטרית, למשל, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\notin U$. היות ש-$U\cap ImT\subseteq ImT$, אנו מסיקים כי $dim\left(U\cap ImT\right)<dim(ImT)=3$. מצד שני, ברור שיש שתי מטריצות בלתי-תלויות וסימטריות $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in ImT$, ושתיהן ביחד מהוות בסיס לחיתוך הנ"ל.

<u>שאלה מספר 2:</u> אנו רואים כי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\ T(x,y,z,w)=(z+w)(1,2,3,4)$, ולכן:

א,ב,ג. $\lambda=0$ הוא ע"ע מריבוי גאומטרי 3, ואילו $\lambda=7$ הוא ע"ע מריבוי גאומטרי 1.

$E_0(T)=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$

$E_7(T)=\{(1,2,3,4)\}$

$\Delta_T(\lambda)=\lambda^3(\lambda-7)$

קיבלנו בסיס $B=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1),(1,2,3,4)\}$ של ו"ע למרחב, וניתן לרשום $[T]_B=diag(0,0,0,7)$ (T לכסין, כיוון שסכום הריבויים הגאומטריים שווה למימד המרחב).

ד. נשתמש בהצגה האלכסונית של T ביחס ל-B:

$$[T+3I]_B=diag(3,3,3,10)\ \Rightarrow\ trace(T+3I)=19,det(T+3I)=9^3\cdot 10$$

ד. באותה הצורה -

$$[T]_B^8=diag(0,0,0,7^8)=\beta[T]_B^2=diag(0,0,0,7^2)\ \Rightarrow\ \beta=7^6.$$

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. איבר כללי של המרחב U ניתן על-ידי -

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

ב. בשורה הראשונה של מטריצה הפיכה יכול להיות כל וקטור-שורה פרט לוקטור-האפס. לפיכך, האפשרויות הקיימות עבור השורה הראשונה הן $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. ברור שבשורה השניה ניתן לרשום כל וקטור שאיננו כפולה של השורה הראשונה, ולכן המטריצות הדרושות הן:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. הנתונים הם $A = A^{-1}BA,\ detA \neq 0$; נעבור לדטרמיננטים -

$$|A| = |A^{-1}BA| = |A^{-1}| \cdot |B| \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot |A| = |B|$$

והמטריצה B הפיכה.

ב. הטענה נכונה במרחבים ממימד סופי: אם $dimV = r(TS) \leq r(T), r(S)$ אזי ברור כי $dimV = r(T) = r(S)$.

ג. כאן מביאים דוגמה נגדית, למשל:

$$S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ S(x,y) = (0,y),\ T(x,y) = (x,0)$$

$$(S+T)(x,y) = S(x,y) + T(x,y) = (0,y) + (x,0) = (x,y) \Rightarrow S + T = I$$

רואים ש-S, T שתיהן לא על, בעוד סכומן בוודאי על.

<u>שאלה מספר 5:</u> כאן מוגדרת $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ על-ידי השוויון $T(A) = 2A^t$

א. אם $T(A) = \lambda A,\ A \neq 0$ אזי $\lambda^2 A = T^2(A) = 2\left(2A^t\right)^t = 4A$ ומכאן נקבל כי $\lambda = \pm 2$, כאשר $E_2(T)$ הוא אוסף המטריצות הסימטריותת ואילו $E_{-2}(T)$ הוא אוסף כל המטריצות האנטיסימ-טריות מאותו סדר. ידוע כי $\mathbb{R}^{n\times n} = E_2(T) \oplus E_{-2}(T)$, ולכן T הוא אופרטור לכסין (המרחב מתפרק לסכום ישר של מרחבים עצמיים).

ב. הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 2$ הוא 6, ואילו הרובוי הגאומטרי של $\lambda = -2$ הוא 3. הדטרמיננטט של T שווה למכפלת הערכים העצמיים שלו (כולל ריבויים), ולכן $detT = 1^6 \cdot (-1)^3 = -1$.

3 מועד ב' - אביב תשנ"ה, 19 בספטמבר 1995.

<u>שאלה מספר 1:</u> נתונה $T:\mathbb{R}^3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ - $T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix} a-b & 2d-c \\ 2b-2a & c-2d \end{bmatrix}$

א. תמונות הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3[x]$ פורשות את ImT:
$T(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, T(x)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, T(x^2)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T(x^3)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. מתוך קבוצה זו נבחר קבוצה בת"ל, אשר גם היא פורשת את התמונה. אנו רואים שהתמונה של T היא ממימד 2, עם בסיס $\{T(1),T(x^2)\}$.

ב. נחשב את הגרעין:
$$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in KerT \Leftrightarrow a=b,\ c=2d \ \Leftrightarrow\ p(x)=a(1+x)+d(2x^2+x^3)$$
וכך $KerT=Sp\{1+x,2x^2+x^3\}$, ומימד הגרעין שווה 2.

ג. עמודותיה של $[T]_e^f$ הן $[T(e_1)]_f,\ [T(e_2)]_f,\ [T(e_3)]_f,\ [T(e_4)]_f$:
$$\left\{\begin{array}{lcl} T(e_1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & = & -f_1+2f_3 \\ T(e_2)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & = & f_1-2f_3 \\ T(e_3)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & = & -f_1-f_2+f_4 \\ T(e_4)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} & = & 2f_1+2f_2-2f_4 \end{array}\right. \iff [T]_e^f=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

ד. אחת האפשרויות היא $W=Sp\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

<u>שאלה מספר 2:</u> נרשום $T(a,b,c,d)=(a+b)(2,2,3,4)$ ומכאן רואים שכל וקטור בתמונה של T הוא כפולה של $(2,2,3,4)$, ולכן מימד התמונה הוא 1, ואילו מימד הגרעין הוא 3.

א,ב,ג. הוקטור $(2,2,3,4)$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצי $\lambda=4$, ונוכל לרשום:
$E_4(T)=Sp\{(2,2,3,4)\}$,
$E_0(T)=Sp\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.
מכאן שלערך העצמי $\lambda=4$ ריבוי גאומטרי 1, ולערך העצמי $\lambda=0$ ריבוי גאומטרי 3, ולכן האופרטור T לכסין, וריבויים אלו הם גם הריבויים האלגבריים של הע"ע הנ"ל. לפיכך הפולינום האפייני של T הוא $\Delta_T(x)=x^3(x-4)$.

ד. כאמור האופרטור לכסין, וביחס לבסיס $B=\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(2,2,3,4)\}$, נקבל ש-$[T]_B=diag(0,0,0,4)$, כנדרש.

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. L איננו תת-מרחב, מכיוון שאיננו מכיל את מטריצת האפס. נספור את האיברים ב-L:

- תחילה נספור את המטריצות מדרגה 1 ששורתן הראשונה לא מתאפסת. מספר המועמדות לשורה ראשונה הוא $5^2 - 1 = 25$; בשורה השניה צריכה להימצא כפולה של השורה הראשונה, כלומר 5 אפשרויות - סה"כ $24 \cdot 5$ מטריצות מדרגה 1 עם שורה ראשונה השונה מאפס.
- אם השורה הראשונה מתאפסת, הרי שהשורה השניה לא יכולה להתאפס, וכך נקבל 24 מטריצות נוספות.

בסך-הכל, נקבל כי ישנן $24 \cdot 6$ מטריצות ב-L.

ב. תהיינה A, B מסדר 31×31. A הפיכה, ולכן הדטרמיננט שלה שונה מאפס:

$$AB = -BA \Rightarrow |A| \cdot |B| = (-1)^3 1 |B| \cdot |A| \Rightarrow |B| = -|B| \Rightarrow |B| = 0$$

ואנו רואים שהשורות של B חייבות להיות תלויות מכיוון שהיא איננה הפיכה.

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. התנאי היחיד על וקטור $a = (a_1, \cdots, a_n)^t \in W$ הוא $a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_2 - a_3$, ושאר המשתנים חופשיים. לפיכך מתקבל בקלות הבסיס הבא עבור W:

$$W = Sp\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{w_3}, \cdots, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \\ \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{w_{n-1}} \right\} \Rightarrow dim W = n - 1$$

ב. רוצים למצוא מטריצה A המקיימת $Aw = 0$ לכל $w \in W$. על-מנת שהדבר יתקיים, הכרחי ומספיק לדרוש $Aw_i = 0$ לכל $i = 1, \ldots, n-1$. נסכם את המסקנות מן המשוואות הנ"ל:

- כל עמודה j של A היא אפס, לכל $j \geq 4$;
- $Aw_1 = 0 \Leftrightarrow$ העמודה הראשונה של A שווה לעמודתה השנייה;
- $Aw_2 = 0 \Leftrightarrow$ העמודה הראשונה של A שווה לעמודה השלישית.

בסך-הכל, שלוש העמודות הראשונות של A שוות, ושאר העמודות - אפסים. למשל, עבור וקטור טיפוסי $w = (-a_2 - a_3, a_2, a_3, \ldots, a_n)^t$ ב-W נקבל:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Aw = \begin{bmatrix} -a_2 - a_3 + a_2 + a_3 \\ -2a_2 - 2a_3 + 2a_2 + 2a_3 \\ \vdots \\ -na_2 - na_3 + na_2 + na_3 \end{bmatrix} = 0.$$

<u>שאלה מספר 5:</u>

א. לא נכון, לדוגמה: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ T(x,y)=(x,y,0)$

ב. $T:V\to V$ חד-חד-ערכית; אם $dimV\neq\infty$ אז הטענה נכונה:
$$dim(KerT)=0\Rightarrow dimV=dim(ImT)+dim(KerT)=dim(ImT)\Rightarrow V=ImT,$$
כנדרש.

ג. $A-\lambda I$ לא הפיכה אס"ם λ הוא ע"ע של A, ויש לה רק מספר סופי של ע"ע (לכל-היותר הסדר של A). מכאן נובע שמספר הסקלרים הממשיים λ, שעבורם $A-\lambda I$ הפיכה, הוא אינסופי.

4 חורף תשנ"ה, 21 בפברואר 1995.

<u>שאלה מספר 1:</u> תחילה נחשב: $T(a,b,c,d)=(a-b)+(a-b)x^2=(a-b)(1+x^2)$.

א. נחשב את הגרעין של T:

$$(a,b,c,d)\in KerT \Leftrightarrow a=b$$
$$\Rightarrow KerT=\{(a,a,c,d)|a,c,d\in\mathbb{R}\}=Sp\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\},$$

ומימדן של הגרעין במקרה זה הוא 3.

ב. כל וקטור בתמונה הוא כפולה של $1+x^2$, ולכן הקבוצה $\{1+x^2\}$ מהווה בסיס לתמונה של T, והתמונה היא מימד 1.

ג. כל וקטור שאיננו כפולה של $1+x^2$ איננו שיך לתמונה, למשל x.

ד. $r(T)=dim(ImT)=1$

ה. היות שמימד הגרעין הוא 3, כל מרחב U המשלים אותו חייב להיות ממימד 1, ולכן מספיק לבחור $U=Sp\{v\}$ כאשר $v\notin KerT$. למשל, $v=(0,1,0,0)$ יתאים לצורך העניין.

<u>שאלה מספר 2:</u> A היא מטריצת בלוקים אלכסונית: . $A=\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&3\\1&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

א,ב,ג. הדרגה של B איננה מלאה, ולכן יש לה ע"ע 0 (וקטור עצמי $(1,-1)^t$); היות שעקבתה 4, יש לה גם ע"ע 4 (וקטור עצמי $(3,1)^t$), וברור ששניהם מתקבלים בריבוי 1.
הדרגה של C גם היא 1, ולכן גם לה ע"ע 0 (וקטור עצמי $(1,-1)^t$); בנוסף, יש ל-C ערך עצמי 4 (סכום השורות שלה קבוע ושווה לערך זה, וקטור עצמי $(1,1)^t$). מכאן אנו מקבלים:

$$E_0(A)=Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\},\ E_4(A)=\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

סכום הריבויים הגאומטריים שווה למימד המרחב, ולכן A לכסינה. הפולינום האפייני שלה מתקבל מן הערכים העצמיים וריבוייהם - $\Delta_A(x)=x^2(x-4)^2$.

ד. הצורה האלכסונית $D=[A]_B$ המבוקשת מתקבלת מהצגתה של A בבסיס של וקטורים עצמיים. למשל, נוכל לבחור:

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\3&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ D=P^{-1}AP=diag(0,0,4,4).$$

ה. $A-I$ הפיכה, מכיוון ש-$\lambda=1$ איננו ערך עצמי של A. $A-4I$ איננה הפיכה, היות ש-4 הוא ע"ע של A.

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. נתון כי $ABA = BAB, |A|, |B| \neq 0$:

$$|ABA| = |BAB| \Leftrightarrow |A|^2|B| = |A||B|^2 \Rightarrow |A| = |B| \Rightarrow |AB^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 1.$$

ב. A מטריצה ממשית, $A^t = 2A$. אזי $A = (A^t)^t = (2A)^t = 4A$ ומכאן מקבלים כי $3A = 0 \Rightarrow A = 0$ (A ממשית, ולכן $3 \neq 0$, ולכן ניתן לצמצם).

ג. השימוש היחיד לממשיותה של המטריצה בסעיף הקודם היה בכך ש-$3 \neq 0$. לפיכך נחפש דוגמה מעל השדה $\mathbb{Z}_3$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A^t$$

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. A היא מטריצה קבועה נתונה. $U = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | XA = AX\}$, ואנו מוכיחים ש-$U$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^{n \times n}$: מטריצת-האפס שייכת ל-U, מכיוון ש-$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$; אם $X, Y \in U$ וגם $\alpha \in \mathbb{R}$, אזי - $(\alpha X + Y)A = \alpha XA + YA = \alpha AX + AY = A(\alpha X + Y)$

והוכחנו ש-U הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^{n \times n}$.

על-מנת להראות ש-$dimU \geq 2$, עלינו למצוא שני וקטורים בת"ל ב-U. נשים לב כי גם $I \in U$ וגם $A \in U$. ישנן שתי אפשרויות:

<u>A סקלרית:</u> במקרה זה $U = \mathbb{R}^{n \times n}$ אם $n > 1$, סיימנו, ואם $n = 1$ - התרגיל איננו נכון.

<u>A איננה סקלרית:</u> אזי הקבוצה $I, A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ היא קבוצה בת"ל המוכלת ב-U, כנדרש.

ב. אנו מביאים דוגמה לטרנספורמציות $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, המקיימות $S^2 = T^2$, ואינן מקיימות $S = \pm T$ או $S, T = 0, I$:

$$S(x, y) = (2x, 2y),\ T(x, y) = (2x, -2y),\ \Rightarrow\ S^2(x, y) = T^2(x, y) = 4(x, y).$$

<u>שאלה מספר 5:</u>

א. מטריצה סימטרית ממשית 2×2 היא מן הצורה $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, והפולינום האפייני שלה הוא:

$$\Delta_A(x) = x^2 - (a + c)x + (ac - b^2).$$

הדיסקרימיננט של הפולינום האפייני (הביטוי מתחת לשורש בנוסחאת השורשים) הוא

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + b^2,$$

ואנו רואים שהוא תמיד אי-שלילי, בהיותו סכום ריבועים.

אם הוא חיובי, הרי של-A שני ערכים עצמיים ממשיים שונים, ואז היא בוודאי לכסינה; אם הדיסקרימיננט מתאפס, אזי $b = 0, a = c$ - כלומר: המטריצה סקלרית והיא כבר אלכסונית.

ב. התנאי $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $|A| = 0$ גורר שהפולינום האפייני של A הוא מן הצורה -

$$\Delta_A(x) = x^3 + bx^2 + cx \quad (\Delta_A(0) = \pm det(A) = 0).$$

ממשפט $Cayley - Hamilton$ נקבל:

$$A^3 + bA^2 + cA = 0\ \Rightarrow\ A^3 = -bA^2 - cA,$$

וזה מה שהיה להוכיח.

5 אביב תשנ"ד, 10 ביולי 1994.

<u>שאלה מספר 1:</u> נוכל לרשום את T הנתונה כך:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = (x+y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

א. אנו רואים שהתמונה נפרשת על-ידי שני וקטורים לא-פרופורציוניים, ומכאן נובע שהם מהווים בסיס לתמונה:

$$ImT = Sp\{(1,1,5,1)^t, (1,2,7,0)^t\}$$

ב. נחשב איבר כללי בגרעין:

$$(x,y,z,w,) \in KerT \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ w & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \quad KerT = \{(-y-z, y, z, 0) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$\Rightarrow \quad KerT = Sp\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0)\}$$

ג. הדרגה של T שווה למימד התמונה שלה, ולכן $r(T) = 2$.

ד. $dim(KerT) = 2$, ולכן נחפש תת-מרחב U של $\mathbb{R}^4$ ממימד 2, המקיים $U \cap KerT = \{0\}$. למשל, $U = Sp\{(0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

ה. $dim(ImT) = 2$ וגם $dim(KerT) = 2$, ולכן אם $ImT \cap KerT = \{0\}$, אז $ImT + KerT = \mathbb{R}^4$.
ניקח וקטור כללי בתמונה, ונבדוק מתי הוא שייך לגרעין:

$$T\left(\begin{bmatrix} a+b \\ a+2v \\ 5a+7b \\ a \end{bmatrix}\right) = (7a+10b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ 7a+40b & = & 0 \end{array} \right. ,$$

ומשמעות הדבר היא ש-$b = a = 0$. מכאן שחיתוך הגרעין של T עם תמונתה הוא טריוויאלי.
אפשרות אחרת להגיע לאותה תוצאה - נדרג את המטריצה המתקבלת מאיחוד הבסיסים שמצאנו עבור הגרעין והתמונה, ולוודא שדרגתה היא 4; אז נדע כי $ImT + KerT = \mathbb{R}^4$, ונוכל להסיק גם כי $ImT \cap KerT = \{0\}$.

<u>שאלה מספר 2:</u> נסמן $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, ונרשום: $T(p(x)) = 4a + (b+c+d)(x + x^2 + x^3)$

א. המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי היא מטריצת בלוקים:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}; \; A = [4], \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ב,ג,ד. לפי בלוקים:

- ל-A יש ע"ע יחיד $\lambda = 4$ עם ו"ע 1;
- ל-C דרגה 1, ולכן $\lambda = 0$ ע"ע מר"ג 2; $tr(C) = 3$, ולכן 3 גם הוא ע"ע.

נסכם:

$$E_0\left([T]_B\right)=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\},\ E_3\left([T]_B\right)=\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\ E_4\left([T]_B\right)=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$E_0(T)=\{x-x^2,x-x^3\},\ E_3(T)=\{x+x^2+x^3\},\ E_4(T)=\{1\}.$$

ה. T לכסין, היות שסכום הריבויים הגאומטריים שווה למימד של המרחב. אם נגדיר בסיס $\beta=\{x-x^2,x-x^3,x+x^2+x^3,1\}$, הרי שנקבל עבור T את ההצגה האלכסונית:

$[T]_\beta=diag(0,0,3,4)$

ו. על-מנת לקבל את הדטרמיננט של T^2-3I מספיק לחשב את הדטרמיננט של אחת מן המטריצות המייצגות אותו. לפיכך:

$det(T^2-3I)=det\left([T]_\beta-3I\right)=det\left(diag(-3,-3,3^2-3,4^2-3)\right)=(-3)^2\cdot 6\cdot 13=702$

שאלה מספר 3:

א. למשל: $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$

ב. איברי הקבוצה $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ בלתי-תלויים ליניארית אם"ם קיימים קבועים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ שעבורם $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i=0$. נראה שכל הקבועים אינם אפס: אילו היה אחד מהם מתאפס - נניח $\alpha_i=0$ - אז היה מתקבל צירוף $\sum_{j\neq i}\alpha_j v_j=0$, וזה היה מחייב גם את כל שאר הקבועים להתאפס, בהיות הקבוצה $\{v_j\}_{j\neq i}$ קבוצה בלתי-תלויה, מן הסיבה שיש בה $n-1$ איברים.

שאלה מספר 4:

א. במרחב $(\mathbb{Z}_5)^2$ כל בסיס מורכב מזוג וקטורים בת"ל - $x=(a,b),y=(c,d)$. את x ניתן לבחור ב-$5^2-1=24$ אופנים שונים (הרי $x\neq 0$), ואילו את הוקטור y יש לבחור כך שלא יהווה כפולה סקלארית של x, ולכן אותו ניתן לבחור ב-$5^2-5=20$ אופנים שונים. בסך-הכל, ישנן $20\cdot 24=480$ אפשרויות לבחור בסיס סדור, ולפיכך ישנם $480/2!=240$ בסיסים לא סדורים.

ב. למשל: $U_1=Sp\left\{(1,0,0)\right\},U_2=Sp\left\{(0,1,0)\right\},U_3=Sp\left\{(1,1,0)\right\}$

שאלה מספר 5:

א. דוגמה נגדית: $S,T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ S(x,y)=(0,x),T(x,y)=(x,0)$

ב. $A,B\in\mathbb{R}^{10\times 10}$, ושתי המטריצות A,B הן מדרגה 2. לפיכך לשתיהן ע"ע $\lambda=0$ מריבוי גאומטרי 8, ומכיוון שיש להן עוד שני ערכים עצמיים $\lambda=3,4$, שני הע"ע הנ"ל הם מריבוי 1. לפיכך שתי המטריצות לכסינות (סכום הריבויים הגאומטריים שווה למימד המרחב עליו הן פועלות), ויש להן אותן צורות אלכסוניות, ומכאן נובע שהן דומות.

6 חורף תשנ"ד.

<u>שאלה מספר 1:</u> נרשום $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, ואת $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$T(p(x))=(a+b)\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\2&0\\-1&0\end{bmatrix}}_{\triangleq A}+(c-2d)\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&3\\0&-1\end{bmatrix}}_{\triangleq B}.$$

א. כעת נחשב:
$$p(x)\in KerT\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}a&=&-b\\c&=&2d\end{cases}\ \Leftrightarrow\ p(x)=b(x-1)+d(2x^2+x^3),$$
ואנו מקבלים - $KerT=Sp\{x-1,2x^2+x^3\}$.

ב. ברור שזוג המטריצות A,B אשר סומנו לעיל מהווה בסיס לתמונה. גם הזוג $\{A+B,A-B\}$ הוא בסיס לתמונה, מכיוון שכל אחת מן המטריצות הנ"ל היא צירוף ליניארי של איברים מן התמונה, ובנוסף:
$$\alpha(A+B)+\beta(A-B)=0$$
$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)A+(\alpha-\beta)B=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta&=&0\\\alpha-\beta&=&0\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=0.$$
לפיכך, הבסיס $\{A+B,A-B\}$ הוא הבסיס הדרוש:
$$A+B=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\-1&-1\end{bmatrix},A-B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-3\\-1&1\end{bmatrix}.$$

ג. נחשב את הוקטורים $[T(e_i)]_f$, ונרשום אותם כעמודות במטריצה:
$$\begin{cases}T(e_1)&=&A&=&f_1-f_5\\T(e_2)&=&A&=&f_1-f_5\\T(e_3)&=&B&=&f_2+3f_4\\T(e_4)&=&-2B&=&-2f_2-6f_4\end{cases}\Leftrightarrow[T]_e^f=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&3&-6\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

ד. $rank(T)=dim\,(ImT)=2$

ה. $dim(KerT)=2$, ולכן יש למצוא U ממימד 2, המקיים $U\cap KerT=\{0\}$ - למשל, נוכל לבחור $U=Sp\{1,x^2\}$. נוודא שחיתוכו של U עם הגרעין של T הוא טריוויאלי:
$$\alpha+\beta x^2\in KerT\Leftrightarrow T(\alpha+\beta x^2)=0\Leftrightarrow\alpha A+\beta B=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0.$$

<u>שאלה מספר 2:</u> A נתונה כמטריצת בלוקים אלכסונית. נסמן: $C=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$. שתי המטריצות הן מדרגה 1, ואנו רואים כי:
$$E_0(B)=Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\},E_2(B)=Sp\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\};$$

$$E_0(C) = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}, E_4(C) = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

כתוצאה מכך אנו מקבלים את המרחבים העצמיים של המטריצה A:

$$E_0(A) = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}, E_2(A) = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, E_4(A) = Sp\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

סכום הריבויים הגאומטריים (מימדי המרחבים העצמיים) של A שווה לסדר של A, ולכן A לכסינה עם מטריצה מלכסנת P המקיימת:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P^{-1}AP = diag(0,0,2,4).$$

מן השוויון האחרון אנו גם רואים כי: $P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = diag(0,0,4,16),$

ומכאן שהפולינום האפייני של A^2 הוא - $\Delta_{A^2}(x) = x^2(x-4)(x-16).$

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. נבחר את U_1 להיות אוסף המטריצות הסקלריות (כלומר: מטריצות מן הצורה αI כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$).
ברור שאם $\alpha \neq 0$, אזי המטריצה αI הפיכה.

ב. נבחר לדוגמה את $U_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$

בכל מקרה בו $(a,b) \neq (0,0)$ ברור שלפנינו מטריצה מדורגת מדרגה 2, כנדרש.

ג. למשל: $U_3 = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}; \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U_3$

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. $Sp\{(1,1,0,0),(1,2,0,0)\} = Sp\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$, ולכן עלינו לבנות טרנספורמציה T שתקיים את הדרישה $KerT = ImT = Sp\{e_1,e_2\}$.
לפיכך גם נגדיר את T על איברי הבסיס הסטנדרטי $(e_1,\ldots,e_4)$ של $\mathbb{R}^4$ להיות:

$$T(e_1) = 0, \ T(e_2) = 0, \ T(e_3) = e_1, \ T(e_4) = e_2$$
$$\Leftrightarrow T(x,y,z,w) = (z,w,0,0).$$

ב. נזכור שחיבור עמודות $C_i^{(new)} = C_i + \alpha C_j$ לא משפיע על הדטרמיננט, ולכן כאן נתחיל את החישוב בפעולות העמודה $C_4 := C_4 - C_3, C_3 := C_3 - C_2, C_2 := C_2 - C_1$, לפי סדר רישומן משמאל לימין:

$$det\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & b \\ a & a & c & c \\ a & d & d & d \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \\ a & 0 & c-a & 0 \\ a & d-a & 0 & 0 \end{bmatrix} = a\cdot det\begin{bmatrix} 0 & 0 & b-a \\ 0 & c-a & 0 \\ d-a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

והתשובה הסופית היא $a(a-b)(a-c)(a-d)$.

ג. אם $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_2$ אז $a^2=a$ לכל $a\in\mathbb{Z}_2$, ולכן T היא טרנספורמצית הזהות.

<u>שאלה מספר 5:</u>

א. נתון $(AB)^t=A^tB^t$, ומצד שני - נחשב:

$(AB)^t=B^tA^t \Leftrightarrow A^tB^t=B^tA^t \Leftrightarrow (BA)^t=(AB)^t \Leftrightarrow BA=AB.$

ב. משמעות הנתונים היא $T^4(v)=0, T^3(v)\neq 0$. נראה כי הקבוצה $\{v,T(v),T^2(v),T^3(v)\}$ היא קבוצה בלתי-תלויה:

$$\begin{aligned} & \alpha(v)+\beta T(v)+\gamma T^2(v)+\delta T^3(v)=0 \\ \Rightarrow\ & T^3\left(\alpha(v)+\beta T(v)+\gamma T^2(v)+\delta T^3(v)\right)=0. \\ \Rightarrow\ & \alpha T^3(v)=0\Rightarrow \alpha=0; \end{aligned}$$

כעת נפעיל את T^2 על הביטוי המקורי, שהתקצר:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & \beta T(v)+\gamma T^2(v)+\delta T^3(v)=0 \\ \Rightarrow\ & T^2\left(\beta T(v)+\gamma T^2(v)+\delta T^3(v)\right)=0. \\ \Rightarrow\ & \beta T^3(v)=0\Rightarrow \beta=0, \end{aligned}$$

ונותר לנו רק להפעיל את T על $\gamma T^2(v)+\delta T^3(v)$ על-מנת לוודא שהמקדמים γ,δ מתאפסים גם הם.

7 מועד שני, ספטמבר 1994.

<u>שאלה מספר 1:</u> נתון $T(a,b,c,d)=(a+b+c)(1+x+5x^2+x^3)+d(1+2x+7x^2)$

א. כל וקטור בתמונה הוא צירוף ליניארי של הפולינומים -
$p_1(x)=1+2x+7x^2, p_2(x)=1+x+5x^2+x^3,$
והם בלתי-תלויים בהיות מעלותיהם שונות. לפיכך $\{p_1,p_2\}$ מהווה בסיס לתמונה של T.

ב. $rank(T)=dim(ImT)=2$

ג. ניתן לבדוק בקלות שהוספת הוקטורים $\{x^2,x^3\}$ תשלים את הקבוצה $\{p_1,p_2\}$ לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

ד. המקדם החופשי של פולינום $p(x)$ הוא $p(0)$, ולכן עלינו למצוא בסיס לתמונה, בו לכל איבר מקדם חופשי הגדול מ-1994, למשל:
$\{1995\cdot(1+2x+7x^2), 1995\cdot(1+x+5x^2+x^3)\}$

<u>שאלה מספר 2:</u> נשים לב כי

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}\right)=(x+y+z+w)\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},$$

א-ד. ואז רואים שהגרעין $KerT=E_0(T)$ הוא ממימד 3:
$E_0(T)=Sp\left\{(1,-1,0,0)^t,(1,0,-1,0)^t,(1,0,0,-1)^t\right\},$
וכל וקטור בתמונה הוא כפולה סקלרית של $(1,2,3,4)^t$, ובפרט -
$T\left((1,2,3,4)^t\right)=10\cdot(1,2,3,4)^t,$
כלומר: מתקבל וקטור עצמי המתאים לערך העצמי $\lambda=10$. היות שכבר מצאנו שלושה וקטורים עצמיים בת"ל המתאימים לע"ע $\lambda=0$, הרי ש-T הוא אופרטור לכסין, עם הצגה אלכסונית $diag(0,0,0,10)$ ביחס לבסיס הסדור -

$$\beta=\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\right).$$

ה. נחשב ישירות:

$$\begin{aligned}T^7(1,0,0,1) &= T^6\left(T(1,0,0,1)\right)\\ &= T^6(2(1,2,3,4))\\ &= 2\cdot T^6(1,2,3,4)\\ &= 2\cdot 10^6\cdot(1,2,3,4).\end{aligned}$$

נעיר כי השתמשנו בעובדה כי $T(v)=\lambda\cdot v$ גורר $T^k(v)=\lambda^k\cdot v$, עבור $\lambda=10$ ו-$v=(1,2,3,4)$.

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. W הוא מרחב ממימד $n-1$ ועם בסיס

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

ב. היות ש-W הוא ממימד $n-1$, עלינו למצוא תת-מרחב ממימד 1 שחיתוכו עם W טריוויאלי. תת-מרחב כזה נפרש בהכרח על-ידי וקטור שאינו שייך ל-W, למשל - נוכל לבחור
$U = Sp\{(1, 0, \dots, 0)^t\}$.

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. כל $T : \mathbb{Z}_7^2 \to \mathbb{Z}_7^2$ מיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי מטריצה 2×2 מעל $\mathbb{Z}_7$, ויש התאמה חד-ערכית ועל בין אוסף כל הטרנספורמציות הליניאריות כנ"ל לבין המטריצות המייצגות שלהן בבסיס הסטנדרטי. לפיכך, מספר הטרנספורמציות הנ"ל שווה למספר המטריצות ב-$\mathbb{Z}_7^{2\times 2}$, ויש בדיוק 7^4 כאלה.

ב. נתבונן, לדוגמה, במרחבים הבאים:

$$\begin{cases} V = Sp\{(0,1,0), (0,0,1)\} \\ U = Sp\{(1,0,0)\} \\ W = Sp\{(1,1,1)\} \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = V \oplus U = V \oplus W,$$

ושלושת המרחבים הנ"ל שונים זה מזה, וכן מתקיים:
$U + W = Sp\{(1,0,0), (1,1,1)\} \subsetneq \mathbb{R}^3$,
כלומר: $dim(U + W) = 2$.

<u>שאלה מספר 5:</u>

א. דוגמה ל-$T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, המקיימות $ImS = KerT$ ואינן מקיימות $KerS = ImT$:
$T(x, y) = (x, 0),\ S(x, y) = (0, x + y);$
$KerT = Sp\{(0, 1)\} = ImS,\ KerS = Sp\{(1, -1)\} \neq ImT = Sp\{(1, 0)\}.$

ב. למרות הדרישה להוכיח ש-A דומה לכפולה סקלארית של B, הטענה איננה נכונה: חסרה ההנחה הנוספת ששתי המטריצות לכסינות.

- תחילה נבין את הנתונים. נניח ש-$M \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ היא מטריצה מדרגה 2, ואז הריבוי הגאומטרי של הע"ע $\lambda = 0$ הוא 8. נסמן את הערכים העצמיים של M ב-$\lambda_1, \dots, \lambda_{10} \in \mathbb{C}$, ונרשום $\lambda_1, \dots, \lambda_8 = 0$. נוסיף כעת את ההנחה שעקבת המטריצה היא אפס, ונקבל:
$tr(M) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{10} = \lambda_9 + \lambda_{10}$,
ומכאן אנו יודעים ששני הערכים העצמיים הנותרים מנוגדים, ונוכל לרשום שלמטריצה M שמונה ע"ע אפסים, ועוד שני ע"ע $\pm\alpha$. אם $\alpha = 0$, אזי M איננה לכסינה, ואם $\alpha \neq 0$ אזי לכל אחד מן הע"ע $\pm\alpha$ ריבוי גאומטרי 1, והמטריצה לכסינה ודומה למטריצה האלכסונית $diag(\alpha, -\alpha, 0, \dots, 0)$.

- כעת תהיינה A, B המטריצות הנתונות. אם שתיהן לכסינות, הרי ש-
$A \sim diag(\alpha, -\alpha, 0, \ldots, 0),\ B \sim diag(\beta, -\beta, 0, \ldots, 0) \Rightarrow A \sim \frac{\beta}{\alpha} \cdot B,$
כנדרש. אבל, בנתוני הבעיה, אפשרי גם המקרה בו A לכסינה, בעוד B איננה לכסינה, ואז הטענה איננה נכונה, לדוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{8\times 8} & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{2\times 8} & I_2 \\ 0_{8\times 8} & 0_{8\times 2} \end{bmatrix}$$

8 13 ביולי 1993.

<u>שאלה מספר 1</u>: נתון:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2d)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

א,ב. ברור שהוקטור $(1,2,-1)^t$ פורש את התמונה, ולכן $\{(1,2,-1)^t\}$ הוא בסיס לתמונה. בנוסף אנו רואים כי

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in KerT \Leftrightarrow a = -2d,$$

$$KerT = \left\{\begin{bmatrix} -2d & b \\ c & d \end{bmatrix} | \, b,c,d \in \mathbb{R}\right\} = Sp\left\{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

ג. נחשב את $T(e_i)$, ונציג אותם לפי הבסיס f:

$T(e_1) = (1,2,-1)^t, T(e_2) = T(e_3) = 0, T(e_4) = 2 \cdot T(e_1)$.

על-מנת להציג את $(1,2,-1)^t$ לפי f, עלינו לפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 0 \end{cases}$$

ומכאן נוכל לחשב את עמודותיה של $[T]_e^f$:

$$[T]_e^f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ד. $rank(T) = dim(ImT) = 1$

ה. $dim(KerT) = 3$ ולכן אנו צריכים למצוא תת-מרחב $U \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ שמימדו 1 וחיתוכו עם ImT טריוויאלי. מכאן נובע ש-U חייב להיפרש על-ידי וקטור אחד, אשר בהכרח אינו שייך לגרעין של T. לפיכך נוכל לבחור, למשל, $U = Sp\{I_2\}$, וברור שהמטריצה I_2 הפיכה.

<u>שאלה מספר 2</u>: שוב, נרשום את T בצורה נוחה -

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = (x+z) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

א-ד. התמונה של T נפרשת על-ידי שני וקטורים בת"ל, ולכן $rank(T) = 2$, ובפרט יש ע"ע $\lambda = 0$ מריבוי גאומטרי 2 (הרי $KerT = E_0(T)$). בנוסף, אנו רואים כי -

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

לפיכך, ל-T יש שני ערכים עצמיים $\lambda = 1,2$ בריבויים גאומטריים 1 לכל-הפחות. סכום הריבויים הגאומטריים של כל הערכים העצמיים איננו עולה על מימד המרחב (ואצלנו $dim\mathbb{R}^4 = 4$), ולכן

מצאנו את כל הערכים העצמיים, וריבוייהם הגאומטריים של $\lambda = 0,1,2$ הם $2,1,1$, בהתאמה, והאופרטור T לכסין. מחישוב ישיר ומהרשום לעיל רשום כי:
$E_0(T) = Sp\{(1,0,-1,0)^t,(0,0,1,0)^t\},\ E_1(T) = Sp\{(0,0,0,1)^t\},\ E_2(T) = Sp\{(1,1,1,0)^t\}$.
נאחד את הבסיסים שמצאנו עבור המרחבים העצמיים, ואז נקבל -

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow [T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

ה. $[T^2]_\beta = [T]_\beta^2 = diag(0,0,1,4)$, ולכן $\Delta_{T^2}(x) = x^2(x-1)(x-4)$.

ו. $[T^3]_\beta = diag(0,0,1,8)$, ואנו רואים ש-$\lambda = -1$ אינו ערך עצמי של T^3, ולכן $T^3 + I = T^3 - (-1)I$ אופרטור הפיך.

ז. נשתמש בצורה האלכסונית (דטרמיננט=מכפלת הערכים העצמיים):
$det(T^3+I) = det[T^3+I]_\beta = det\left(diag(1,1,2,9)\right) = 18$

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. נבחר:
$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$$
לכל מטריצה שונה מאפס במרחב זה דטרמיננט חיובי:
$$det \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2 > 0 \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0).$$

ב,ג.
$$U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. הכוונה בתרגיל זה היא להוכיח את הטענה ללא שימוש בתכונה $|A^t| = |A|$. ובכן, $|A| = 0$ אם"ם A איננה הפיכה, אם"ם $r(A) < n$, כלומר: מימד מרחב-השורה קטן מ-n, ולכן מימד מרחב-העמודה (השווה לו) - גם הוא קטן מ-n, ואז A^t איננה הפיכה, והדטרמיננט שלה הוא אפס.

ב. המטריצה A הפיכה, ולכן למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד. כעת, אם נבחר $x = e_1 = (1,0,\ldots,0)^t$, אזי Ax היא העמודה הראשונה של המטריצה, ונקבל $Ax = b$, כנדרש. מיחידות נובע כי $x = e_1$ הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

<u>שאלה מספר 5:</u>

א. נציג את האופרטור T בבסיס $\beta = (v_1,\ldots,v_n)$:
$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow r(T) = r([T]_\beta) = 1$$
מכאן נובע שהריבוי הגאומטרי של $\lambda = 0$ הוא $n-1$ (נרשום $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$), ולכן יש ל-$T$ ערך עצמי $\lambda_n = tr(T) = tr([T]_\beta) = a_1 + \ldots + a_n$. נחלק לשני מקרים:

- אם $\lambda_n = 0$, אז הריבוי האלגברי של $\lambda = 0$ גדול ממש מריבויו הגאומטרי, ו-T איננו לכסין.
- לעומת זאת, אם $\lambda_n \neq 0$, אזי $\lambda = 0$ מריבוי אלגברי $n-1$ ו-$\lambda = tr(T)$ הוא מריבוי 1, והאופרטור T לכסין.

ב. $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ בעלות אותו פולינום אפייני $x^2 + \alpha x + \beta$. לפי משפט $Cayley - Hamilton$ נקבל כי:

$$A^2 + \alpha A + \beta I = B^2 + \alpha B + \beta I = 0$$
$$\Rightarrow A^2 + \alpha A = B^2 + \alpha B$$
$$\Rightarrow A^2 - B^2 = \alpha(B - A) = -\alpha(A - B)$$

9 מועד ב' - 12 במרץ 1993.

שאלה מספר 1: נסמן $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ ונביא את T לצורה נוחה יותר:
$T(p(x)) = a(1 + x^2) + bx + (c + d - e)x^3$

א. בסיס לתמונה: $\{1 + x^2, x, x^3\}$

ב. נחשב איבר כללי בגרעין:

$$p(x) \in KerT \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ e = c + d \end{cases} \Leftrightarrow p(x) = c(x^2 + x^4) + d(x^3 + x^4).$$

מכאן נובע שהקבוצה $\{x^2 + x^4, x^3 + x^4\}$ היא בסיס לגרעין.

ג. תחילה נחשב את $T(e_i)$:

$$\begin{cases} T(1) &= & 1 + x^2 &= & f_3 \\ T(x) &= & x &= & -f_1 + f_2 \\ T(x^2) = T(x^3) &= & x^3 &= & -f_1 + f_4 \\ T(x^4) = -T(x^2) &= & -x^3 &= & f_1 - f_4 \end{cases} \Leftrightarrow [T]_e^f = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ד. $rank(T) = dim(ImT) = 3$

ה. השלמה אפשרית היא: $\{1, x, x^4\}$.

שאלה מספר 2: $T(x, y, z, w) = (x + 2y)(1, 1, 0, 0) + (2z + w)(0, 0, 1, 1)$

א,ב,ג. ImT נפרשת על-ידי שני וקטורים בלתי-תלויים, ולכן:
$dimE_0(T) = dim(KerT) = 4 - rank(T) = 2$

נמצא שני ערכים עצמיים נוספים ע"י כך שנשים לב לכך ש-

$T(1, 1, 0, 0) = 3(1, 1, 0, 0),\ T(0, 0, 1, 1) = 3(0, 0, 1, 1)$
$\Rightarrow E_3(T) \supseteq Sp\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

אנו רואים שהערך העצמי $\lambda = 0$ הוא מריבוי גאומטרי 2, בעוד הערך העצמי $\lambda = 3$ הוא מריבוי גאומטרי לפחות 2; מימד המרחב הוא 4, ולכן אלו כל הערכים העצמיים, והאופרטור T לכסין.
לאור האמור לעיל, ולאחר חישוב ישיר של הגרעין אנו מקבלים:

$E_0(T) = Sp\{(-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2)\},\ E_3(T) = Sp\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

ד. נגדיר $\beta = \{(-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$, ואז $[T]_\beta = diag(0, 0, 3, 3)$.

ה. $[T^{1993}]_\beta = [T]_\beta^{1993} = diag(0, 0, 3^{1993}, 3^{1993})$, ורואים שהדרגה של T^1993 היא 2.

ו. מימד הגרעין של אופרטור הוא הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 0$. היות ש-$[T^2]_\beta = diag(0, 0, 9, 9)$, הרי שמימד הגרעין שלו הוא 2 - כמספר האפסים באלכסון של $[T^2]_\beta$.

ז. נזכור שניתן לחשב את העקבה של אופרטור מכל ייצוג מטריצי שלו, ולכן:
$tr(T^2 + 2I) = tr\left(diag(2, 2, 11, 11)\right) = 26$

<u>שאלה מספר 3:</u>

א. נתון $A = \{(a+b\sqrt{2},c)|a,b,c \in \mathbb{Q}\}$; נוכיח כי הקבוצה $\beta = \{(1,0),(\sqrt{2},0),(0,1)\}$ היא בסיס ל-A מעל $\mathbb{Q}$:

- <u>פרישה:</u> $(a+b\sqrt{2},c) = a(1,0)+b(\sqrt{2},0)+c(0,1) \in Sp(\beta)$.
- <u>אי-תלות:</u> נניח $a(1,0)+b(\sqrt{2},0)+c(0,1) = 0$ - אזי $c=0, a+b\sqrt{2}=0$, וכיוון ש-$\sqrt{2}$ אינו רציונלי, נקבל גם $a=b=0$ כנדרש.

ב. $B = \{(z,\bar{z})|z \in \mathbb{C}\}$ איננו תת-מרחב של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$, מכיוון שאינו סגור לכפל בסקלר:
$i \in \mathbb{C}, (1,1) \in B \Rightarrow i(1,1) = (i,i) \notin B.$
לעומת זאת, הוא מהווה תת-מרחב ממשי של $\mathbb{C}^2$: ניקח $z,w \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$, ונבדוק סגירות -
$(z,\bar{z})+\alpha(w,\bar{w}) = (z+\alpha w, \bar{z}+\alpha\bar{w}) = (z+\alpha w, \overline{z+\alpha w}) \in B$

<u>שאלה מספר 4:</u>

א. הטענה איננה נכונה. ניקח $B = diag(2,1), A = diag(1,1)$: אלו הן מטריצות הפיכות, ולכן למערכות ההומוגניות המתאימות פתרון משותף יחיד - הפתרון הטריוויאלי; מצד שני, המטריצה $A-B$ איננה הפיכה, ולכן תנאי הטענה מתקיימים ומסקנותיה - לא.

ב. מן הנוסחה $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I$ נובע, שאם A הפיכה, אזי $adj(A)$ הפיכה:
$det(A)^{-1}A \cdot adj(A) = I \Rightarrow (adj(A)^{-1} = det(A)^{-1} \cdot A)$
- בסתירה לכך ששורותיה תלויות ליניארית. מכאן ש-A לא יכולה להיות הפיכה.

<u>שאלה מספר 5:</u>

א. T לעולם איננה הפיכה (אלא אם כן $n=1, a_1 \neq 0$), מכיוון שעבור $n > 1$ מתקיים $T(v_1) = T(v_2)$, ולכן T איננה חד-חד-ערכית.

ב. A מאפסת את הפולינום האפייני שלה, ולכן $A^2 - A - I = 0$. כעת:
$A^4 = (A^2)^2 = (A+I)^2 = A^2+2A+I = (A+I)+2A+I = 3A+2I.$