תורת ההסתברות

עבודת בית מס׳ 4
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. בעיה 3.18 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

a = ההסתברות ששחקן A מנצח במשחק =
= ההסתברות ששחקן B מנצח במשחק,
c = ההסתברות ששחקן C מנצח במשחק,
x = ההסתברות ששחקן שניצח במשחק הראשון מנצח את המשחק,
y = ההסתברות ששחקן שהפסיד במשחק הראשון מנצח את המשחק.

המפסיד במשחק הראשון יכול לנצח בתחרות אם המנצח במשחק הראשון יפסיד אחר כך ל- C ואז יהיה המפסיד בדיוק באותו מצב בו התחיל C לשחק. לכן:

$$y = \frac{c}{2}.$$

כמו כן, אם המנצח במשחק הראשון יפסיד ל- C במשחק השני הוא יהיה בדיוק במצבו של המפסיד במשחק הראשון. לכן:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} + \frac{c}{4}.$$

מכאן

$$a = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{4} + \frac{3c}{8}.$$

לכן

$$a = \frac{1}{2}(1-c) = \frac{1}{4} + \frac{3c}{8}.$$

מכאן $a = \frac{5}{14}$, $c = \frac{2}{7}$.

<u>תרגיל 2</u>. בעיה 3.19 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א)

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - e^{-\lambda}, \\ P(X = 1) &= \lambda e^{-\lambda}, \\ P(X \leq 1) &= (1+\lambda)e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

(ב) מספר האלקטרונים שפוגעים מפולג פואסונית עם פרמטר $p\lambda$ (ראה פתרון של שאלה 1 מתוך תרגיל כיתה מס' 4). לכן התשובה היא $1 - e^{-0.7\lambda}$.

<u>תרגיל 3</u>. בעיה 3.20 מהחוברת.

<u>פתרון</u>.

(א)

$$P(X \geq 3) \;=\; 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}).$$

(ב)

$$P(X > 3 | X > 0) \;=\; \frac{1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6})}{1 - e^{-\lambda}}.$$

להתפלגות הזו אין תכונת חוסר הזכרון כי

$$P(X > a + b | X > a) \neq P(X > b).$$

בתור דוגמא קכו $b = 0, a = 3$.

<u>תרגיל 4</u>. בעיה 3.22 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. נגדיר: מספר הלקוחות המרוצים $= Y$. אזי

(א) עבור $k \geq 1$ נקבל

$$P(X = k | X \geq 1) = \frac{P(X = k)}{P(X \geq 1)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!(1 - e^{-\lambda})} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(ב) אם $2 \le X$ אזי הלקוח בטוח נכנס ויוצא מרוצה בהסתברות $2/3$. אם $3 \ge X$ אזי יש לספק $\binom{X}{2}$ אפשרויות לבחור זוג. מספר הזוגות שכוללות הלקוח הנתון שווה ל- $X-1$ ולכן לפי נוסחת ההסתברות הכוללת

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3}\left\{P(X \le 2|X \ge 1) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k-1}{\binom{k}{2}} P(X=k|X \ge 1)\right\} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^{\lambda}-1} \cdot \left\{\lambda + \frac{\lambda^2}{2} + 2\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k \cdot k!}\right\}. \end{aligned}$$

לא ניתן לסכם את הטור ולכן אפשר להשאיר את התשובה כמו שהיא.

(ג)

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \frac{2}{3} \cdot P(X=1) + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} P(X \ge 2) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left\{e^{-\lambda}\lambda + \frac{2}{3}(1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda)\right\} = \frac{2}{9}\left(2 + \frac{\lambda-2}{e^{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

<u>תרגיל 5</u>. בעיה 12.21 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. (א) עבור $n=2$ אי-שוויון של בול נובע מהשוויון ידוע:

$$P\left(A \bigcup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \bigcap B\right). \tag{1}$$

נניח אתע כי הוכנו אי שוויון של בול עבור $n-1$. אזי לפי (1):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(ב) לפי (1)

$$\begin{aligned} &P\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcap A_3^c\right) = P\left(\left(A_1 \bigcap A_3^c\right) \bigcup \left(A_2 \bigcap A_3^c\right)\right) = \\ &= P\left(A_1 \bigcap A_3^c\right) + P\left(A_2 \bigcap A_3^c\right) - P\left(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3^c\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3^c\right) &= P\left(A_1 \bigcap A_2 | A_3^c\right) P(A_3^c) = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}, \\ P\left(A_i \bigcap A_3^c\right) = P(A_i) - P\left(A_i \bigcap A_3\right) &= P(A_i) - P\left(A_i | A_3\right) P(A_3) = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3-i}{9}. \end{aligned}$$

לכן

$$P\left(A_1\bigcup A_2\bigcap A_3^c\right)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=\frac{7}{27}.$$

<u>תרגיל 6</u>.

בעיה מס' 12.22 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. באופן כללי:

$$\begin{aligned}P\left(X\bigcap Y\right) &= P(X)P(Y)\Rightarrow\\ P\left(X\bigcap Y^c\right) &= P(X)-P\left(X\bigcap Y\right)=P(X)P(Y^c).\end{aligned}$$

(א) התשובה היא כן והיא נובעת מהשקול לעיל. כדי להשתכנע בכך נציב במשוואה הקודמת $Y=C$ ו- $X=A,B,A\bigcap B$.

(ב) התשובה היא כן. מצד אחד:

$$\begin{aligned}&P\left(A^c\right)P(B^c)P(C)=(1-P(A))(1-P(B))P(C)=\\&=P(C)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C).\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}&P\left(A^c\bigcap B^c\bigcap C\right)=P\left(A^c\bigcap C\right)-P\left(A^c\bigcap B\bigcap C\right)=\\&=P(C)-P\left(A\bigcap C\right)-P\left(B\bigcap C\right)+P\left(A\bigcap B\bigcap C\right)=\\&=P(C)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C).\end{aligned}$$

כמו כן ראינו כי

$$P(A^cC)=P(A^c)P(C)\ \text{ and } P(B^cC)=P(B^c)P(C).$$