תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 1 - פתרון חלקי

.1

א) $A_1\in A_2$, $A_1\in A_4$, $A_3\in A_4$.

ב) $A_i\subseteq A_i$ לכל i, $A_1\subseteq A_j$ לכל i, $A_2\subseteq A_4$.

ג) $A_2\cap A_2=A_2\cap A_4=A_2$.

ד) $A_1\cup A_4=A_2\cup A_4=A_4\cup A_4=A_4$.

ה) $A_1\cap A_2\in A_1\cup A_2$, $A_1\cap A_4\in A_1\cup A_4$, $A_2\cap A_3\in A_2\cup A_3$, $A_3\cap A_4\in A_3\cup A_4$.

ו) התנאי מתקיים לכל שתי קבוצות.

הערה: בסעיפים ג', ד', ה' יש להוסיף ביטויים סימטריים.

.2

א) $A\setminus B=A\cap B^c$ – נובע ישר מההגדרות.

$A\setminus(A\cap B)=A\cap(A\cap B)^c=A\cap(A^c\cup B^c)=(A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)=\varnothing\cup(A\cap B^c)=A\cap B^c$.

$(A\cup B)\setminus B=(A\cup B)\cap B^c=(A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)=(A\cap B^c)\cup\varnothing=A\cap B^c$.

ב) נניח $x\in A\cap C$.

$x\in A \Leftarrow x\in A\cup C \Leftarrow x\in B$.

$x\in A$ ו- $x\in B \Leftarrow x\in A\cap B \Leftarrow x\in C^c$.

$x\in C$ (נובע מ- $x\in A\cap C$) ו- $x\in C^c$ – סתירה.

ג) יהי $x\in A\triangle C$. כלומר $x\in A$ ו- $x\notin C$ או $x\notin A$ ו- $x\in C$. בנוסף $x\in B$ או $x\notin B$.

אם $x\in A$, $x\notin C$ ו- $x\in B$ אז $x\in B\triangle C$ ומכאן $x\in(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

אם $x\in A$, $x\notin C$ ו- $x\notin B$ אז $x\in A\triangle B$ ומכאן $x\in(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$.

שני המקרים הנותרים – בדומה.

.3

א) לא נכון. דוגמא נגדית: $A=\{1, 2\}, B=\{1\}, C=\{2\}$.

ב) נכון.

ג) נכון.

ד) נכון. פתרון אפשרי:

$B=\ldots=(A\cup B)\setminus(A\setminus(A\cap B))=(A\cup C)\setminus(A\setminus(A\cap C))=\ldots=C$

ה) נכון. פתרון: נניח $B\neq C$. אז, בלי הגבלת הכלליות, קיים $x\in B\setminus C$. אם $x\in A$, אז $x\in A\triangle C$ אבל $x\notin A\triangle B$; אם $x\notin A$, אז $x\in A\triangle B$ אבל $x\notin A\triangle C$ – בכל מקרה יש סתירה.

.4

א) הטענה לא נכונה.

דוגמא לאי שוויון: $A=B=\{1\}, C=\varnothing$.

דוגמא לשוויון: $A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{3\}$.

ב) הטענה נכונה. הוכחה:

$A\setminus(B\cap C)=A\cap(B\cap C)^c=A\cap(B^c\cup C^c)=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

ג) הטענה נכונה. הוכחה:

$$(A\cap B)\triangle(A\cap C)=((A\cap B)\cap(A\cap C)^c)\cup((A\cap B)^c\cap(A\cap C))=$$
$$=((A\cap B)\cap(A^c\cup C^c))\cup((A^c\cup B^c)\cap(A\cap C))=$$
$$=(A\cap B\cap A^c)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap A\cap C)\cup(B^c\cap A\cap C)=$$
$$=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)=A\cap((B\cap C^c)\cup(B^c\cap C))=A\cap(B\triangle C)$$

ד) $A\cup(B\triangle C)=(A\cup B)\triangle(A\cup C)$. הטענה לא נכונה.

דוגמא לאי שוויון: $A=\{1\}, B=C=\emptyset$.

דוגמא לשוויון: $A=\emptyset, B=\{2\}, C=\{3\}$.

לא קיימת דוגמא לשוויון עם A לא ריקה כי אם $x\in A$, אז $x\in A\cup(B\triangle C)$ אבל מצד שני $x\in A\cup B$ וגם $x\in A\cup C$ ולכן $x\notin(A\cup B)\triangle(A\cup C)$.

ה) הטענה נכונה. שני הביטויים שווים ל- $(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$.

5.

א) $Y=Z$, ואילו $X=Y\cup(A^c\cap B\cap C^c\cap D)$.

ב) לדוגמא, $A=B=C=D=\{1\}$.

ג) $A=C=\emptyset, B=D=\{1\}$.