**תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 12 – פתרון חלקי**

.1

א. לא, כי בקבוצה $[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]$ אין סופרמום לתת-קבוצה $[0,\frac{1}{2})$ , וב- $[0,1]$ יש סופרמום לכל תת-קבוצה.

ב. יש לקחת פונקציה $f$ חח"ע ועל מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (למשל הפונקציה שמתקבלת בהוכחה של שקילות העצמה של הקבוצות האלה ב"שיטת השבלול") ולהגדיר שרשרת $A=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כאשר $A_n=\{f[\{1,2,\ldots,n\}]\}$ .

ג. הפתרון דומה מאוד לפתרון של שאלה 6 סעיף ה' בתרגיל בית 9: בהינתן קבוצה $A$ חסומה מלעיל, מגדירים $B$ כקבוצה של כל החסמים מלעיל של $A$; יש בה איבר ראשון $b$ כי $X$ סדורה היטב; מוכיחים ש- $b$ הוא חסם מלעיל של $A$ ואח"כ שהוא גם סופרמום של $A$.

ד. הטענה נכונה: אם ב- $A$ אין איבר מקסימלי אז לכל איבר של $A$ יש איבר שגדול ממנו $\Leftarrow$ לכל איבר של $A$ יש עוקב מיידי. נגדיר: $a_1$ איבר ראשון של $A$; $a_{n+1}$ עוקב מיידי של $a_n$. אז הסדרה $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ תהיה אינסופית עולה.

.2 נתון: $f:R\to R$ פונקציה מונוטונית חח"ע ועל, יש להוכיח שהיא רציפה בכל נקודה של $\mathbb{R}$.

יהי $a\in\mathbb{R}$.
יש להוכיח:
לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x$ המקיים $0<|x-a|<\delta$ יהיה $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ .

יהי $\varepsilon>0$ כלשהו.
הפונקציה $f$ היא על,
לכן קיימים $a_1$ ו- $a_2$ כך ש- $f(a_1)=f(a)-\varepsilon$ ו- $f(a_2)=f(a)+\varepsilon$ .
הפונקציה $f$ היא שומרת סדר וחח"ע, לכן $a_1<a$ ו- $a_2>a$ .
נבחר $\delta=\min\{a-a_1, a_2-a\}$ .

יהי x מספר כלשהו שמקיים $0<|x-a|<\delta$ .
זה אומר: $a-\delta<x<a$ או $a<x<a+\delta$ .

- אם $a-\delta<x<a$ , אז, מאחר ש- $\delta\le a-a_1$ , מתקיים $a_1<x<a$ ולכן $f(a_1)<f(x)<f(a) \Rightarrow f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a) \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ .
- אם $a<x<a+\delta$ , אז, מאחר ש- $\delta\le a_2-a$ , מתקיים $a<x<a_2$ ולכן $f(a)<f(x)<f(a_2) \Rightarrow f(a)<f(x)<f(a)+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ .

3. $(X,\leq)$ לא סדורה היטב: נסתכל בקבוצה $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ כאשר

$a_1=(2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$
$a_2=(1, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots)$
$a_3=(1, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots)$
$a_4=(1, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots)$
$a_5=(1, 1, 1, 1, 2, 2, \ldots)$
$a_6=(1, 1, 1, 1, 1, 2, \ldots)$
.........

לקבוצה זאת אין איבר ראשון. (או: הסדרה הזאת היא אינסופית יורדת.)

4. נא לראות הדרכה בספר של שמרון (תרגיל 8 אחרי פרק 7; עמוד 211 במהדורה שניה משנת תשמ"ט).

5. לא: $1+\omega+1$ הוא רישא של $1+\omega+1+\omega+1$ (בצורה יותר מדויקת: בקבוצה מטיפוס סדר $1+\omega+1+\omega+1$ יש איבר שלרישא המוגדרת על ידיו טיפוס סדר $1+\omega+1$).

לכן $1+\omega+1<1+\omega+1+\omega+1$ .