כלל לייבניץ - נגזרת מתחת לסימן האינטגרל

משפט: תהא $f(x,t):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$ ונגדיר $F(x)=\int_c^d f(x,t)\mathrm{dt}$ לכל $x\in[a,b]$.

1. אם f רציפה במלבן (כפונקציה של שני משתנים) אז $F(x)$ רציפה ב $[a,b]$.
2. אם בנוסף גם $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת ו $f,\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפות במלבן אז

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x)=\frac{\partial}{\partial x}\int_c^d f(x,t)\mathrm{dt}=\int_c^d\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right]\mathrm{dt}$$

כלומר, מותר להחליף סדר גזירה ואינטגרציה.

3. נניח בנוסף שנתונות $c(x),d(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירות ונתון קטע I כך שהערכים ש $c(x),d(x)$ מקבלות על I נמצאים בתוך $[a,b]$, או במילים אחרות $c(I),d(I)\subseteq[a,b]$. אם מסמנים $G(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,t)\mathrm{dt}$ אז $G(x)$ רציפה ב I, גזירה בפנים של I ונגזרתה היא

$$G'(x)=\overbrace{f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x)}^{fundamental\ theorem}+\overbrace{\int_{c(x)}^{d(x)}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]\mathrm{dt}}^{part\ 2}$$

תרגיל 1:

תהא $F(y)=\int_1^2\sin(ye^x)\mathrm{dx}$. חשבו את $F'(y)$.

פתרון:

נסמן $f(x,y)=\sin(ye^x)$ ואז $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(ye^x)e^x$. הפונקציות $f,\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן ניתן להשתמש בכלל ליבניץ.

$$F'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_1^2\sin(ye^x)\mathrm{dx}\right)=\int_1^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin(ye^x)\right)\mathrm{dx}=\int_1^2\cos(ye^x)e^x\mathrm{dx}$$

אם $y=0$ אז מקבלים ש $F'(0)=\int_1^2 e^x=e^2-e^1$. אם $y\neq 0$, אז נסמן $t=ye^x$ ואז $\frac{dt}{dx}=ye^x$ ונקבל ש

$$\int_1^2\cos(ye^x)e^x\mathrm{dx}=\frac{1}{y}\int_1^2\cos(ye^x)ye^x\mathrm{dx}=\frac{1}{y}\int_{ye^1}^{ye^2}\cos(t)\mathrm{dt}=\frac{\sin(ye^2)-\sin(ye^1)}{y}.$$

הערה: הפונקציה $F'(y)$ רציפה. זה ברור עבור $y\neq 0$ ואפשר לבדוק ישירות עבור $y=0$. בנוסף אנחנו יודעים שהיא רציפה כי היא מהצורה $F'(y)=\int_1^2\cos(ye^x)e^x\mathrm{dx}$ והפונקציה $\cos(ye^x)e^x$ היא רציפה במלבן המתאים.

תרגיל 2:

1. חשבו את $\int_0^1 x^y \mathrm{dx}$ כאשר $y > 0$.

2. חשבו את $\int_0^1 x^m \ln^n(x)\mathrm{dx}$ כאשר $m \geq 1, n \geq 0$ מספרים טבעיים.

פתרון:

1. $\int_0^1 x^y \mathrm{dx} = \frac{x^{y+1}}{y+1} |_{x=0}^1 = \frac{1}{y+1}$.

2. בשביל החלק השני, ננסה להשתמש בכלל לייבניץ. נשים לב תחילה ש $x^y = e^{\ln(x)y}$ היא פונקציה רציפה במלבן $[0,1] \times [a,b]$ לכל $b > a > 0$ (הוכיחו!). הנגזרת $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = \ln(x)x^y$ היא גם רציפה במלבן הזה. מכלל ליבניץ נקבל שאם $F(y) = \int_0^1 x^y \mathrm{dx}$ אז

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(x^y)\mathrm{dx} = \int_0^1 \ln(x)x^y \mathrm{dx} \\ .F'(y) &= \left(\frac{1}{1+y}\right)' = -\frac{1}{(1+y)^2} \end{aligned}$$

נמשיך לגזור את שני הצדדים באינדוקציה (הוכיחו שהתנאי של כלל ליבניץ ממשיך להתקיים) ונקבל ש

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(m)}}{\partial y^{(m)}}(x^y) &= \ln^m(x)x^y \quad ; \quad \left(\frac{1}{1+y}\right)^{(m)} = (-1)^m \frac{m!}{(1+y)^{m+1}} \\ (-1)^m \frac{m!}{(1+y)^{m+1}} &= F^{(m)}(y) = \int_0^1 \frac{\partial^{(m)}}{\partial y^{(m)}}(x^y)\mathrm{dx} = \int_0^1 \ln^m(x)x^y \mathrm{dx} \end{aligned}$$

בפרט, ע"י הצבה $y = n$ נקבל ש $\int_0^1 \ln^m(x)x^n \mathrm{dx} = (-1)^m \frac{m!}{(1+n)^{m+1}}$.

תרגיל 3:

חשבו את $\int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}$.

רמז: מצאו פונקציה אלמנטרית ששווה ל $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}$ לכל $x > 0$.

פתרון:

הרעיון: נגזור תחילה את $F(x)$ לפי x ונקווה לקבל פונקציה שקל למצוא את הפונקציה הקדומה שלה.

נשים לב תחילה שאף על פי ש $\frac{t^x-1}{\ln(t)}$ אינה מוגדרת ב $t = 0, 1$, כן יש לה גבולות שם ולכן נגדיר

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \frac{t^x-1}{\ln(t)} = \frac{e^{\ln(t)x}-e^0}{\ln(t)x-0}x & 0 < t < 1 \\ x & t = 1 \end{cases}$$

אם הכל עובד כמו שצריך אז לכל $x > 0$ נקבל ש

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt} = \int_0^1 t^x \mathrm{dt} = \frac{t^{x+1}}{x+1} |_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

ולכן מקבלים ש $F(x) = \ln(1+x) + C$. אם היה מותר לנו להציב $x = 0$ אז נקבל ש $0 = F(0) = \ln(1+0) + C$ כלומר $C = 0$ (לשים לב שכדי להשתמש בכלל לייבניץ ב $x = 0$ צריך רציפות במלבן ש $x = 0$ מוכל בפנים שלו, אבל הפונקציה f לא רציפה שם כי לכל x שלילי נקבל ש $\lim_{t\to 0} f(x,t) = -\infty$).

נבדוק את התנאים למשפט. יהיו $0 < a < b$ ונסתכל על המלבן $[a,b] \times [0,1]$. הפונקציה $\frac{t^x-1}{\ln(t)}$ רציפה במלבן, פרט אולי לכאשר $t = 0, 1$.

1. $t=0$: מאחר ו t^x רציפה במלבן (כמו תרגיל קודם) ול $\frac{1}{\ln(t)}$ יש נקודת אי רציפות סליקה באפס, אז $(t^x-1)\cdot\frac{1}{\ln(t)}$ רציפה ב $(x_0,0)$ לכל $x_0\in[a,b]$ כמכפלה של רציפות.

2. $t=1$: במקרה הזה יש לנו גבול של $\frac{0}{0}$. אי אפשר להשתמש ישירות בכלל לופיטל, ולכן נשתמש במקומו בפיתוח טיילור כאשר המטרה היא להגיד שהשגיאה היא "קטנה" כאשר קרובים ל $t=1$ ללא תלות ב x. נקבע x ונסתכל על הפיתוח של $g(t)=t^x$

$$\begin{aligned} g(t) &= g(1)+g'(1)(t-1)+\frac{g'(c_{t,x})}{2!}(t-1)^2 \\ &= 1+x(t-1)+\frac{x(x-1)c_{t,x}^{x-2}}{2!}(t-1)^2 \qquad c_t\in[t,1] \end{aligned}$$

נשים לב שקיים קבוע M כך ש $\left|\frac{x(x-1)c_{t,x}^{x-2}}{2!}\right|<M$ לכל $(x,t)\in[a,b]\times\left[\frac{1}{2},1\right]$ מאחר ו $\frac{1}{2}<c_{t,x}<1$ ללא תלות ב x.

במילים אחרות, $t^x-1=x(t-1)+\eta_1(t,x)(t-1)^2$ כך ש $|\eta_1(t,x)|<M$. באותה צורה, הפיתוח של $\ln(t)$ (עכשיו x כלל לא מופיע) הוא $\ln(t)=\ln(1+(t-1))=(t-1)+\eta_2(x,t)(t-1)^2$ כאשר $|\eta_2(x,t)|<M$ אם נבחר M גדול מספיק. סה"כ מקבלים

$$\frac{t^x-1}{\ln(t)}=\frac{x\,(t-1)+\eta_1(t,x)\cdot(t-1)^2}{(t-1)+\eta_2(t,x)\cdot(t-1)^2}=\frac{x+\eta_1(t,x)\cdot(t-1)}{1+\eta_2(t,x)\cdot(t-1)}$$

ומאחר ו η_1,η_2 חסומות ללא תלות ב x, אז קל לראות שהגבול הוא x_0 כאשר $(x,t)\to(x_0,1)$.

קיבלנו שהתנאים של המשפט נכונים ולכן $F(x)=\ln(1+x)+C$ ב $[a,b]$ עבור $0<a<b$. נשים לב שאם ניקח $0<a'<b'$ אז נקבל ש $F(x)=\ln(1+x)+C'$ ב $[a',b']$ כאשר C' לא בהכרח שווה ל C. אבל אם קיימת נקודה $x_0\in[a,b]\cap[a',b']$ אז נקבל ש $\ln(1+x_0)+C=\ln(1+x_0)+C'$ ולכן $C'=C$. מכאן נקבל ש $F(x)=\ln(1+x)+C$ ב $(0,\infty)$.
נותרה הבעיה של הצבה $x=0$. נפתור את זה בשתי שיטות:

1. לפי הגדרה $F(x)=\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{dt}$ כאשר $f(x,t)$ רציפה במלבן $[0,1]\times[0,1]$ שכולל את $(0,0)$. הסיבה היא שבעוד שלפונקציה t^x-1 יש אי רציפות ב $(0,0)$, היא כן חסומה שם ולכן $\frac{t^x-1}{\ln(t)}\to 0$ כאשר $(x,t)\to(0,0)$. לכן הפונקציה $F(x)$ רציפה ב $[0,1]$ ונקבל ש

$$\begin{aligned} F(0) &= \lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\left(\ln(1+x)+C\right)=\ln(1)+C=C \\ F(0) &= \int_0^1\frac{t^0-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}=\int_0^1 0\mathrm{dt}=0 \end{aligned}$$

ולכן נקבל שבאמת $C=0$.

2. נרצה להראות את $\lim_{x\to0}F(x)=0$ בצורה שונה.

(א) מספיק להראות ש $|F(x)|\to0$.

(ב) מספיק להראות ש $\left|\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln(t)}\mathrm{dt}\right|\le\int_0^1\left|\frac{t^x-1}{\ln(t)}\right|\mathrm{dt}\to0$.

(ג) היינו רוצים להפוך את t^x-1 לפונקציה יותר פשוטה כדי שנקבל חסם טוב. אנחנו כבר יודעים ש $t^x-1\sim x(t-1)$ ו $\ln(t)\sim(t-1)$ ולכן נצפה ש $\left|\frac{t^x-1}{\ln(t)}\right|\sim|x|$, אבל כל זה נכון רק עבור $t\sim1$ ואנחנו צריכים חסם טוב עבור $t\in[0,1]$. מאחר ו $t^x-1=e^{\ln(t)x}-1$ ננסה להבין את e^s-1. זו כבר פונקציה במשתנה אחד וקל לבדוק ש $e^s-1\ge s$ לכל s ובנוסף $0\ge e^s-1$ לכל $s\le0$. סה"כ $s\le e^s-1\le 0$ עבור s שלילי ולכן $|e^s-1|\le|s|$. נחזור לתרגיל שלנו שם $\ln(t)x\le0$ (כי $x\ge0$ ואילו $0<t\le1$ גורר ש $\ln(t)\le0$).

$$\int_0^1\left|\frac{t^x-1}{\ln(t)}\right|\mathrm{dt}=\int_0^1\frac{\left|e^{\ln(t)x}-1\right|}{|\ln(t)|}\mathrm{dt}\le\int_0^1\frac{|\ln(t)x|}{|\ln(t)|}\mathrm{dt}=\int_0^1 x\mathrm{dt}=x$$

סה"כ קיבלנו ש $|F(x)|\le x$ ולכן בפרט נקבל ש $\lim_{x\to0}F(x)=0$.