קומבינטוריקה - סמסטר חורף תשס"ג - תרגיל מס' 3

להגשה עד ה *-* 13.11.02

D(0)=1 את מספר התמורות על [n] ללא נקודות שבת. נסמן D(n) -נסמן

א. הוכיתו

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D(n-k)$$

ב. הוכיחו על סמך שיקולים קומבינטוריים כי

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

L(n) אקיבלנו בכיתה D(n) ג. השתמשו ב- ב' על מנת להוכיח באינדוקציה את הנוסחה ל-

בכיתה 25 תלמידים דוברי שלוש שפות זרות: 14 דוברי ספרדית, 2 דוברי צרפתית, 6 דוברי ספרדית וצרפתית, 5 דוברי גרמנית וספרדית, 2 דוברי כל השפות. כל ששת התלמידים שהם דוברי גרמנית מדברים גם שפה אחרת. כמה תלמידים בכיתה אינם דוברי שפה זרה!

 $\frac{\underline{\alpha}'}{\alpha}$ מס' $\frac{3}{\alpha}$ בתנאים הבאים: $x_1+x_2+x_3=30$ יש למשוואה: חיוביים חיוביים הבאים: בתנאים שלמים הבאים:

$$4 \le x_1 < 10, \quad 7 \le x_2 < 15, \quad 10 \le x_3 < 25$$

4 'תרגיל מס

א. כמה מספרים שלמים וחיוביים הקטנים מ-1,000,000 אינם ריבועים שלמים או חזקות שלישיות שלמות או חזקות רביעיות שלמות!

$$(\{x < 10^6: x \neq y^2, z^3, w^4\}$$
 : (כלומר מצאו את גודל הקבוצה:

- $^{\circ}$ ב. בכמה מספרים בני $^{\circ}$ ספרות יש לפחות ספרה אחת $^{\circ}$ ו, ספרה אחת $^{\circ}$ ו וספרה אחת
 - 5 -ב 1 ל- 1 ל- 1 ל- 1 ל- 1 לא ב- 1 ולא ב- 1
 - ד. כמה מספרים שלמים וחיוביים הקטנים מ- 30 זרים ל- 30!

 $\frac{5}{n}$ תרגיל מס' $q \leq p$ יהא $q \leq p$. חשבו:

$$\sum_{j=q}^{p} (-1)^{j+q} \binom{j}{q} \binom{p}{j}$$

6 'תרגיל מס'

א. מהו מספר השלשות הסדורות (A,B,C) של קבוצות המוכלות ב-[n] שמקיימות: $A \cup B \cup C = [n]$ (כלומר, איחודן הוא כל

פתרו בשתי דרכים: האחת - חישוב ישיר, השניה - בעזרת עקרון ההכלה וההדחה, והראו כי:

$$7^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i} \cdot 2^{3(n-i)}$$

ב. מהו מספר ה-k-יות הסדורות (A_1,\ldots,A_k) של קבוצות המוכלות ב-k $A_1 \cup \ldots \cup A_k = [n]$

פתרו בשתי דרכים: האחת - חישוב ישיר, השניה - בעזרת עקרון ההכלה וההדחה, והראו כי:

$$\left(2^{2^{k}-1}\right)^{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i} \cdot 2^{k(n-i)}$$

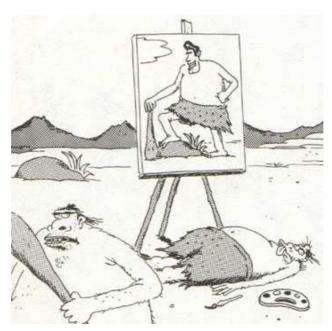
 $\frac{\pi$ תרגיל מס' $\frac{7}{m}$ מספר הפונקציות מ[m] ל[m] ל[m] שהן על. הוכיחו כי f(m,n) מתחלק ב[m]

8 'תרגיל מס'

- א. בכמה אופנים ניתן לסדר את המספרים $1,2,\ldots,9$ בשורה, כך שאף מספר זוגי לא יהיה במקומו הטבעיי
- $23,\ 45,\ 678$ בימה אופנים ניתן לסדר את המספרים $1,2,\ldots,9$ בשורה, כך שאף אחד מהבלוקים אינו מופיע (אבל, אפשר שיהיה הרצף: 786, למשל)!
- $34,\ 45,\ 678$ ג. בכמה אופנים ניתן לסדר את המספרים $1,2,\ldots,9$ בשורה, כך שאף אחד מהבלוקים אינו מופיעי

9 'תרגיל מס'

כל אחד מ $\,n\,$ המבקרים בתיאטרון מפקיד את כובעו ואת מטריתו במלתחה. בצאתם, מחזיר המלתחן לכל אחד מהם כובע ומטריה. בכמה אופנים יכול המלתחן להחזיר את הציוד כך ששום אדם לא יקבל גם את כובעו וגם את מטריתו בחזרה!



בהצלחה!