אינפי 1- 104195

תאריך: 6/11/14

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

נושא: תרגיל בית 2

שם המתרגל: יוחאי מעיין

תרגיל בית 2

תאריך הגשה: יום חמישי, 06.11.2014.

1 א. הוכיחו ש-$\sqrt[3]{3}$ אינו מספר רציונלי.

ב. הוכיחו ש-$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.

2 בחרו איזה מהבאים תמיד שווה ל-$\sup A\cup B$ עבור זוג קבוצות חסומות נתונות A, B (האיחוד של A ו-B הוא $A\cup B=\{x : x\in A \text{ או } x\in B\}$, הנקודות הנמצאות בלפחות אחת משתי הקבוצות A ו-B):

א. $\sup A+\sup B$.

ב. $\sup A\sup B$.

ג. $\max\{\sup A, \sup B\}$.

הוכיחו את בחירתכם, וספקו דוגמה נגדית לשניים שלא בחרתם.

3 א. הראו כי אם $A\subset B$ (כלומר, A מוכלת ב-B, ובמפורש, כל x השייך ל-A שייך גם ל-B) אזי

$$\inf B\le\inf A, \qquad \sup A\le\sup B$$

ב. אם ידוע שקיים $x\in B$ אשר אינו שייך ל-A, האם ניתן לומר שאחד מאי-השוויונים הנ"ל הוא אי-שוויון חריף? אם כן, הוכיחו זאת ואם לא, כתבו דוגמה נגדית מפורטת.

4 עבור זוג קבוצות חסומות A, B מתוארים שני תרחישים. בכל תרחיש יש לקבוע אם בהכרח $\sup A<\sup B$; אם התשובה חיובית, יש להוכיח זאת ואם התשובה שלילית, יש לכתוב דוגמה נגדית מפורטת.

א. קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $a\in A$ ישנו $b\in B$ המקיים $b>a+\epsilon$.

ב. לכל $a\in A$ קיים $\epsilon>0$ וכן קיים $b\in B$ כך ש-$b>a+\epsilon$.

5 נתונות שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים חיוביים, A ו- B. הראו שהקבוצה

$$AB=\{ab:\ a\in A,\ b\in B\}$$

גם חסומה, ושהחסם העליון שלה הוא $\sup A\sup B$.

1 סע' א. להוכיח ש- $\sqrt[3]{3}$ אינו מספר רציונלי.

נניח בשלילה כי $\sqrt[3]{3}$ הוא מספר רציונלי ולכן מתקיים:

$\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$ $/()^3$ — $\frac{m}{n}$ - מספר מצומצם, $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$
m, n זרים זה לזה

$3 = \frac{m^3}{n^3} \longrightarrow 3n^3 = m^3$

* אגף שמאל מתחלק ב-3 ולכן גם אגף ימין מתחלק ב-3, כלומר m^3 מתחלק ב-3 (m שלם ו-3 ראשוני). ניתן לכתוב כך:
$m=3k,\ k\in\mathbb{Z}$

$3n^3=(3k)^3 \longrightarrow 3n^3=27k^3 \longrightarrow n^3=9k^3$

* אגף ימין מתחלק ב-3 ולכן גם אגף שמאל מתחלק ב-3, כלומר n^3 מתחלק ב-3 (n שלם, 3 ראשוני). ניתן לכתוב כך:
$n=3a,\ a\in\mathbb{Z}$

שכאן קיבלנו סתירה להגדרתנו את $\frac{m}{n}$ כמספר מצומצם:

$\frac{m}{n}=\frac{3k}{3a}=\frac{k}{a}$

כלומר, ישנה סתירה להנחה כי $\sqrt[3]{3}$ הוא מספר רציונלי.

$\sqrt[3]{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

* הוכחת עזר לשאלה 1, לשני הסעיפים:

אם m^3 מתחלק במספר ראשוני, גם m מתחלק במספר זה

כל מספר מורכב ממכפלה של כל הגורמים הראשוניים שלו, כשמעלים מספר בחזקה מסוימת מקבלים את אותה מכפלה של אותם גורמים רק בחזקה שבה העלנו את המספר.

דוגמא:

$36 = 9\cdot 4 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 3^2\cdot 2^2$

$6 = 3^1\cdot 2 = 3^1\cdot 2^1$

העלאת 6 בריבוע לא גרמה לגורמים הראשוניים שלו להשתנות.

1 א. הוכיחו ש- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ אינו רציונלי:

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר רציונלי, כלומר:

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{m}{n} \quad /(\ )^2$ $\frac{m}{n}$ שבר מצומצם, $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$

m, n זרים זה לזה.

$$2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3=\frac{m^2}{n^2}$$

$$2\sqrt{6}=\frac{m^2}{n^2}-5 \rightarrow 2\sqrt{6}=\frac{m^2-5n^2}{n^2} \rightarrow \sqrt{6}=\frac{m^2-5n^2}{2n^2}$$

n, m שלמים ולכן פעולות חזקה, כפל, חיסור ועוד משאירות את המספרים בקבוצת השלמים. לכן, ניתן להציב:

$m^2-5n^2=a$ $2n^2=b$. $a,b\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0 \Leftarrow b\neq 0$

$\sqrt{6}=\frac{m^2-5n^2}{2n^2}=\frac{a}{b} \quad (\ )^2$ $\frac{a}{b}$ שבר מצומצם, a, b זרים זה לזה.

$$6=\frac{a^2}{b^2} \rightarrow 6b^2=a^2$$

אגף שמאל מתחלק ב-6 ולכן גם אגף ימין מתחלק ב-6 (מכפלה של 2,3 שני מספרים ראשוניים), לכן a^2 מתחלק ב-6, כלומר a מתחלק ב-6 (a שלם ו-2,3 ראשוניים) ולכן ניתן לכתוב $a=6c$ c שלם

$$6b^2=(6c)^2 \rightarrow 6b^2=36c^2 \rightarrow b^2=6c^2$$

אגף ימין מתחלק ב-6 ולכן גם b מתחלק ב-6 (b שלם ו-2,3 מחלקים ראשוניים של 6) ולכן ניתן לכתוב $b=6d$ (d שלם)

מכאן יוצא כי: $\frac{a}{b}=\frac{6c}{6d}=\frac{c}{d}$

כלומר a, b אינם זרים בניגוד להנחתנו.

מכאן, הוכחנו על דרך השלילה כי הסכום של $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ אינו רציונלי.

2. מתברר איזה מהביטויים תמיד שווה ל- $\sup A\cup B$ עבור זוג קבוצות חסומות נתונות A, B:

ראשית נניח כי קבוצת $A\cup B$ חסומה.

לפי הנתונים, קבוצת A ו-B חסומה. לפי תכונת השלמות (אותו צבר אשר מסמן מספר), כלומר קיים a_0 כלשהו (לאו דווקא שייך ל-A מגודל הקבוצה בהנחה) ו-b_0 (...) אשר מהווים חסם מלעיל לקבוצות A ו-B בהתאמה (סופרמום).

מאחר ששתי הקבוצות מקבלים את כל הערכים מקבוצה A ומקבוצה B ובגלל שלא קיים $x\in A$ או $x\in B$ שגדולים מ-a_0 או מ-b_0 בהתאמה, אפשר להגיד שהקבוצה חסומה מלעיל, כלומר (אפילו רק המקסימלי בין $\sup A$ ו-$\sup B$).

א. $\sup A\cup B \overset{?}{=} \sup A+\sup B$ לא נכון! דוגמא נגדית:

$A=[-2,2],\ B=[1,3]$ $\qquad$ $\sup A=2,\ \sup B=3$

$\sup A\cup B=\sup[-2,3]=3 \neq \sup A+\sup B=2+3=5$

ב. $\sup A\cup B \overset{?}{=} \sup A\cdot\sup B$ לא נכון! דוגמא נגדית.

$A=[-2,2],\ B=[1,3]$ $\qquad$ $\sup A=2,\ \sup B=3$

$\sup A\cup B=\sup[-2,3]=3 \neq \sup A\cdot\sup B=2\cdot3=6$

3א. הוכח כי אם $A\subset B$ אזי $\sup A \le \sup B$, $\inf B \le \inf A$

אוכיח בנפרד את שני המקרים:

- $\sup A \le \sup B$.

נניח בשלילה כי: $\sup A > \sup B$ כלומר, $\forall_{b\in B}\ b \le \sup B < \sup A$

$\forall_{a\in A}\ a \le \sup A$

עפ"י $a_0+\varepsilon_0=\sup A$, מכאן: $\exists a\in A: \exists_{b\in B}: a_0+\varepsilon_0 > b_0$

$$b \le \sup B < \sup A = a_0+\varepsilon_0$$

$$\forall b\in B: b < a_0+\varepsilon_0$$

וזאת בניגוד לנתון כי $A\subset B$ (שכל איבר ב-A שייך גם ל-B)

- $\inf B \le \inf A$.

נניח בשלילה כי: $\inf B > \inf A$, כלומר: $\forall b\in B\ b\ge \inf B > \inf A$

$\forall a\in A\ a \ge \inf A$

כלומר, קיים לפחות איבר אחד $a\in A$, $b\in B$ עבורם קיים

$\varepsilon>0$ מינימלי כך ש $a+\varepsilon < b$ וזאת בניגוד לנתון כי $A\subset B$

$\varepsilon>0$ מינימלי

(שכל איבר של A שייך גם ל-B)

ב. $B(2,5]$, $A(2,5)$

מכאן, קיים $x\in B$ $(x=5)$ שלא שייך ל-A ועדיין

$\sup A=\sup B=5$, $\inf A=\inf B=2$

3ג. $\sup A\cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ נכון. הוכחה:

מתחילת התרגיל הראינו ש- $A\cup B$ חסומה מלעיל ע"י

הערך המקסימלי בין $\sup A$ ל- $\sup B$. נותר להוכיח שזהו

החסם העליון הקטן ביותר.

בה"כ מבחינת הגדלים, נניח ש- $\sup A > \sup B$, ולכן מ- (*) (הוכחת

הקבוצה החסומה מסעיף הקודם), לכן $\sup A$ חסם מלעיל ל $A\cup B$.

קבוצת האיחוד $A\cup B$ חסומה מלמעלה ולכן יש לה סופרמום,

נסמנו כ- $\sup A\cup B$

מכוון, $\sup A \geq \sup A\cup B$ (אם קיים $\sup A \neq \sup A\cup B$ הוא מוכרח קטן מ-$\sup A$)

(ננסה להוכיח ש $\sup A = \sup A\cup B$)

נניח בשלילה שקיים סופרמום קטן יותר מ- $\sup A$ ל- $A\cup B$ כך ש

קיים $\varepsilon > 0$ ושמקיים: $\sup A = \sup A\cup B + \varepsilon \Rightarrow \sup A\cup B = \sup A - \varepsilon$

מהגדרה של $\sup A$ קיים לפחות a_1 שעבורו מתקיים

$a_1 > \sup A - \varepsilon \qquad (a_1 \leq \sup A)$

מכיוון ש $a_1 \in A$ הוא גם שייך לקבוצת האיחוד $a_1 \in (A\cup B)$ ולכן

נובע מהגדרת הסופרמום של האיחוד: $a_1 \leq \sup A\cup B = \sup A - \varepsilon$

$a_1 \leq \sup A - \varepsilon$

סתירה

הגענו לסתירה ולכן ההנחה שקיים סופרמום קטן יותר מ- $\sup A$ ל$A\cup B$

שגויה. מכוון $\sup A = \sup A\cup B$.

(הנחנו בה"כ הגדלות הגלויות את $\sup A = \max\{\sup A, \sup B\}$ ולכן, באופן

בה"כ נקבל $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A\cup B$

מ.ש.ל.

4

א. נתונות קבוצות A,B חסומות. קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $a\in A$ ישנו $b\in B$ המקיים $b>a+\varepsilon$. צריך להוכיח האם $\sup B>\sup A$

- מקרה א': קבוצה A מכילה איבר יחיד, כלומר מתקיים:
קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $a\in A$, כלומר ל-a היחיד ישנו $b\in B$ המקיים $b>a+\varepsilon$, מכיוון שנתון ש-A ו-B חסומות, הרי ברור ש- $\sup B>\sup A$.

- מקרה ב':
ה-ε הוא קבוע עבור כל a שנבחר. נגדיר $\varepsilon>0$ כך שלכל $a\in A$ ישנו $b\in B$ המקיים $b>a+\varepsilon$.
נבחר מתוך קבוצה A את $\sup A$ אך מכיוון שאיננו יודעים בוודאות שהוא שייך לקבוצה A נבחר את $\sup A-\varepsilon_0$ (כאשר $\varepsilon>\varepsilon_0>0$), לפי הנתונים עבור כל a מתקיים $b>a+\varepsilon$, כלומר גם עבור ה-a- $\sup A-\varepsilon_0$ מתקיים $b>\sup A-\varepsilon_0+\varepsilon \Leftarrow b>\sup A+\underbrace{\varepsilon-\varepsilon_0}_{\text{מספר חיובי ע"פ הגדרה}}$

מכאן מתקיים, שאפילו עבור הסופרמום של A קיים b אשר גדול ממנו ומכיוון ש-b חסומה וקיים לה סופרמום, מתקיים בהכרח ש- $\sup B>\sup A$.

ב. לכל $a\in A$ קיים $\varepsilon>0$ וכן קיים $b\in B$ כך ש- $b>a+\varepsilon$

<u>לא נכון.</u>

דוגמא נגדית- $A=(2,5)$, $B(2,5]$

הנתון מתקיים - קבוצות A ו-B חסומות (5 חסם עליון, 2 חסם תחתון). לכל $a\in A$ קיים $\varepsilon>0$ (גם אם הוא קטן מאוד) כך ש $b\in B$ יהיה גדול ממנו ($b=5$)

מכאן - ההכרחיות לא נכון- $\sup A=\sup B=5$ ולא אי שוויון.

5. נתונות שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים חיוביים, A ו-B. הראו שהקבוצה $AB=\{ab: a\in A, b\in B\}$ גם חסומה, ושהחסם העליון שלה הינו $\sup A \sup B$.

- AB חסומה מלרע מכיוון שהיא מכילה את מכפלת האיברים ששייכים ל-A ו-B (שנתון עליהן שהן מכילות מספרים חיוביים), כלומר כל איבריה חיוביים ולכן היא חסומה מלרע ע"י כל האי-חיוביים, (0 חסם מלרע לדוגמה).

- AB חסומה מלמעלה:

אם ניקח מקבוצה A $a\neq \sup A$ אז בהכרח $a<\sup A$
אם ניקח מקבוצה B $b\neq \sup B$ אז בהכרח $b<\sup B$
הגדרת סופרמום (הוא החסם העליון הקטן ביותר לקבוצה).

אנו עוסקים במספרים חיוביים ולכן ניתן לכפול את אי-השוויונים זה בזה

$$a\cdot b<\sup A\cdot \sup B$$

כלומר, לא קיימת מכפלת איבר מ-A ואיבר מ-B שגדולה מ- $\sup A\sup B$,
ולכן, AB חסומה מלמעלה, ואחד החסמים שלה הוא $\sup A\sup B$.

- נחפש את החסם העליון הקטן ביותר לקבוצה AB.

מכיוון שהוכחתי שקבוצה AB חסומה, קיים לה סופרמום (חסם עליון הקטן ביותר), נסמן אותו ב- $\sup AB$.

לפי הגדרה, הסופרמום גדול מכל איברי הקבוצה, כלומר: $\forall a\in A, b\in B \quad \sup AB\ge ab$

$$\frac{\sup AB}{a}\ge b \longrightarrow \frac{\sup AB}{a}\ge \sup B \longrightarrow \frac{\sup AB}{\sup B}\ge \sup A$$

$$\sup AB\ge \sup A\cdot \sup B$$

המקרה ש- $\sup AB > \sup A\cdot \sup B$ לא יכול לקרות כי הוכחתי ש- $\sup A\sup B$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה, והסופרמום של AB ($\sup AB$) חייב להיות החסם הקטן ביותר של הקבוצה לפי ההגדרה

לכן, מתקיים: $\sup AB=\sup A\cdot \sup B$ מש"ל.