# האינטגרל הכפול

## שטח של קבוצה

שטח של מצולע קמור מוגדר ע"י חלוקתו למשולשים (טריאנגולריזציה). בפרק זה מצולע היא הקבוצה הדו-ממדית, לא השפה.

תחום = קבוצה פתוחה וקשירה.

תחום סגור = תחום + השפה שלו.

מעתה ואילך, עד שנאמר אחרת, $D$ הוא תחום סגור וחסום. (אבל הגדרת השטח תופסת גם במקרים אחרים.)

$A$ = מצולע המוכל ב $D$

$B$ = מצולע המכיל את $D$

(הכוונה לקבוצה הדו-ממדית, לא לקווים הישרים.)

השטח של $A$ = $S(A)$

השטח של $B$ = $S(B)$

מכיוון ש $A \subset B$ ברור של $S(A) \le S(B)$.

השטח הפנימי של $D$:

$$\underline{S}(D) = \sup S(A),$$

השטח החיצוני של $D$:

$$\overline{S}(D) = \inf S(B).$$

ברור ש: $\underline{S}(D) \le \overline{S}(D)$.

**הגדרה.** $D$ נקראת קבוצה בעל שטח אם

$$\underline{S}(D) = \overline{S}(D).$$

במקרה זה הערך המשותף מוגדר להיות השטח של $D$, והוא מסומן $S(D)$.

<u>הערה 1</u>: אותה הגדרה אפשרית גם לקבוצות שאינן בהכרח תחום סגור.

<u>הערה 2</u>: זה אנלוגי להגדרת $\overline{S}(P,f)$, $\underline{S}(P,f)$ ואינטגרביליות $f$.

כזכור, $f(x)$ אינטגרבילית אם לכל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש $\overline{S}(P,f) - \underline{S}(P,f) < \epsilon$.

האנלוג כאן:

<u>משפט.</u> תחום סגור וחסום $D$ הינו בעל שטח <u>אם ורק אם</u> לכל $\epsilon > 0$ קיימים פוליגון חיצוני $B$ ופוליגון פנימי $A$ כך ש $0 \leq S(B) - S(A) < \epsilon$.

**<u>הוכחה:</u>** <u>התנאי הכרחי</u>. נניח ש $D$ בעל שטח, דהיינו

$$\begin{aligned} S(D) &= \overline{S}(D) = \underline{S}(D) = \\ &= \inf_{B \supset D} S(B) = \sup_{A \subset D} S(A) \end{aligned}$$

אז קיימת קבוצה $A$ המוכלת ב: $D$ כך ש

$$0 \leq S(D) - S(A) < \frac{1}{2}\epsilon$$

וקיימת $B$ המכילה את $D$ כך ש

$$.0 \leq S(B) - S(D) < \frac{1}{2}\epsilon$$

נחבר ונקבל:

$$.0 \leq S(B) - S(A) < \epsilon$$

התנאי מספיק. נתון שלכל $\epsilon < 0$ קיימים $A \subset D \subset B$ כך ש $0 \le S(B) - S(A) < \epsilon$.
ניקח $\inf\limits_{B}$, $\sup\limits_{A}$ ונקבל ש:

$$0 \le \overline{S}(D) - \underline{S}(D) \le \epsilon.$$

זה נכון לכל $\epsilon > 0$, כאשר $\underline{S}(D)$, $\overline{S}(D)$ שני מספרים קבועים, לכן $\overline{S}(D) - \underline{S}(D) = 0$.

**מסקנה:** $D$ בעל שטח אם קיימות סדרות מצול-
עים $A_n \subset D \subset B_n$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty} S(A_n) = \lim_{n\to\infty} S(B_n).$$

גישה אחרת: אפשר לבחור מצולעים מיוחדים בהם הצלעות מקבילות לצירים. זה ע״י בניה

כדלקמן. במקום פוליגונים מכילים ומוכלים כלש-
הם נשרטט מערכת קווים אופקיים ואנכיים, $P$,
שפורסים את הקבוצה שלנו למלבנים. יש
(א) מלבנים פנימיים ל- $D$.
(ב) מלבני שפה, שמכילים נקודות פנימיות
וחיצוניות של $D$.
(ג) מלבנים חיצוניים הזרים ל $D$.

אחוד המלבנים מהסוג (א) נותן פוליגון פנימי,
מוכל ב: $D$, שנסמנו ב: $A(P)$;
אחוד המלבנים מהסוג (א) או (ב) נותן פוליגון
חיצוני המכיל את $D$, ונסמנו ב: $B(P)$.
נסמן גם את קוטר החלוקה כגודל הבא:

$$d(P) = \max\{\text{ קוטרי מלבני (א)+(ב) }\}$$

משפט. התחום הסגור $D$ הוא בעל שטח אם ורק אם

$$\lim_{d(P)\to 0} S(A(P)) = \lim_{d(P)\to 0} S(B(P))$$

הוכחה: (א) התנאי מספיק כי אז קיימות סדר-ות פוליגונים $A_n, B_n$ כך ש

$$\lim_{n\to\infty} S(A_n) = \lim_{n\to\infty} S(B_n).$$

(ב) להפך, נניח שיש ל: $D$ שטח. אז קיימים מצול-עים $A \subset D \subset B$ כך ש

$$S(B) - S(D) < \epsilon$$
$$S(D) - S(A) < \epsilon$$

אפשר להניח שהשפות של $A$ ושל $B$ זרות זו לזו, ושתיהן זרות לשפת $D$. יהיו $\delta_A$ המרחק בין שפת

$A$ ושפת $D$ ו: $\delta_B$ המרחק בין שפת $B$ ושפת $D$,
ויהי

$$.\delta = \text{min}\{\delta_A, \delta_B\}$$

נבנה חלוקה למלבנים כך ש $d(P) < \frac{1}{2}\delta$.
אז בודאי מתקיים ש:

$$.A \subset A(P) \subset D \subset B(P) \subset B$$

לכן

$$0 \leq S(D) - S(A(P)) \leq S(D) - S(A) < \epsilon$$

$$0 \leq S(B(P)) - S(D) \leq S(B) - S(D) < \epsilon$$

יוצא מזה שלכל $\epsilon$ מצאנו חלוקה $P$ למלבנים כך
ש: $S(A(P))$ ו: $S(B(P))$ קרובים ל $S(D)$,

עבור $d(P)$ קטן מספיק, ולכן אכן מתקיים

$$\lim_{d(P)\to 0} S(A(P)) = \lim_{d(P)\to 0} S(B(P)) \, .$$

<u>הגדרה.</u> תהי $F$ קבוצה, לאו דוקא תחום סגור. אומרים ש: $F$ בעלת שטח אפס אם לכל $\epsilon > 0$ ניתן לכסות את $F$ ע"י איחוד סופי של מלבנים שסכום שטחיהם קטן מ: $\epsilon$.

<u>מסקנה:</u> ל-$D$ יש שטח <u>אם ורק אם</u> לשפה שלו יש שטח 0.

<u>הוכחה:</u> נסמן $C(P) = B(P) \setminus A(P)$, ואז

$C(P)$ אוסף מלבנים המכסה את השפה. אז מתקיים

$$S(C(P)) = S(B(P)) - S(A(P)),$$

ונובע מכך ש:

$$\lim_{d(P)\to 0} S(C(P)) = 0$$

אמ"ם

$$\lim_{d(P)\to 0} S(B(P)) = \lim_{d(P)\to 0} S(A(P))$$

# הגדרת האינטגרל הכפול.

נתונה פונקציה $f$ חסומה על מלבן $\mathsf{R} \subset R^2$.
נחלק את המלבנים ע"י קווים אפקיים ואנכיים למלבנים $\mathsf{R}_{ij}$, ונסמן את החלוקה ב: $P$. נגדיר על כל תת-מלבן

$$M_{ij} = \sup_{\mathsf{R}_{ij}} f, \qquad m_{ij} = \inf_{\mathsf{R}_{ij}} f,$$

ובאנלוגיה לסכומי דרבו עבור האינטגרל במשתנה יחיד מגדירים את

סכום דרבו העליון $\overline{S}(P) = \sum_{ij} M_{ij} A(\mathsf{R}_{ij})$

וסכום דרבו התחתון $\underline{S}(P) = \sum_{ij} m_{ij} A(\mathsf{R}_{ij})$.

החלוקה $P^*$ היא עידון של החלוקה $P$ אם היא מכילה את כל קווי החלוקה של $P$.

למה. אם $P^*$ עידון של $P$ אז

$$\underline{S}(P) \leq \underline{S}(P^*) \leq \overline{S}(P^*) \leq \overline{S}(P)$$

מסקנה: אם $P^*$ עידון משותף של $P_1, P_2$ אז

$$\underline{S}(P_2) \leq \underline{S}(P^*) \leq \overline{S}(P^*) \leq \overline{S}(P_1)$$

ובפרט $\underline{S}(P_2) \leq \overline{S}(P_1)$ לכל $P_1, P_2$.

מסקנה: $\sup \underline{S}(P) \leq \inf \overline{S}(P)$.

<u>הגדרה:</u> $f$ אינטגרבילית לפי רימן על מלבן R אם

$$\sup_P \underline{S}(P) = \inf_P \overline{S}(P).$$

הערך המשותף מסומן

$$\int\int_R f$$

ונקרא האינטגרל הכפול של $f$ על $R$.

<u>משפט.</u> $f$ אינטגרבילית <u>אם ורק אם</u> לכל $\epsilon > 0$ קיימת חלוקה $P$ כך ש $0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$.

<u>הוכחה:</u> (א) נתון: לכל $\epsilon > 0$ יש $P_0$ כך ש:

$$0 \leq \overline{S}(P_0) - \underline{S}(P_0) < \epsilon.$$

אז

$$\underline{S}(P_0) \leq \sup_P \underline{S}(P) \leq \inf_P \overline{S}(P) \leq \overline{S}(P_0)$$

לכן $0 \leq \inf_P \overline{S}(P) - \sup_P \underline{S}(P) < \epsilon$

לכל $\epsilon > 0$, ולכן

$$\inf \overline{S}(P) = \sup \underline{S}(P)$$

ו: $f$ אינטגרבילית.

ב) להפך, נניח ש: $f$ אינטגרבילית על R, ז"א

$$\int\int_R f = \sup_P \underline{S}(P) = \inf \overline{S}(P).$$

אז קיימת חלוקה $P_1$ כך ש:

$$\overline{S}(P_1) - \int\int_R f < \frac{1}{2}\epsilon,$$

וקיימת חלוקה $P_2$ כך ש:

$$\iint\limits_R f - \underline{S}(P_2) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

אם $P^*$ היא העדון המשותף של $P_1, P_2$, אז

$$\overline{S}(P^*) < \overline{S}(P_1) < \iint\limits_R f + \frac{1}{2}\epsilon$$

$$\underline{S}(P^*) > \underline{S}(P_2) > \iint\limits_R f - \frac{1}{2}\epsilon,$$

נחסר ונקבל:

$$0 \leq \overline{S}(P^*) - \underline{S}(P^*) < \epsilon$$

וזוהי הטענה.

<u>משפט.</u> אם $f$ רציפה על המלבן $\mathsf{R} \subset R^2$ אז היא אינטגרבילית עליו.

<u>הוכחה:</u> $f$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה, לכן רציפה במ"ש על הקבוצה הזו, כלומר לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta(\epsilon)$ כך ש $|f(p) - f(q)| < \epsilon$ כאשר

$$\text{dist}(p,q) < \delta(\epsilon), \qquad p, q \in R.$$

ניקח חלוקה $P$ כך שקוטר כל מלבן (האלכסון) מקיים $\text{diag}(R_{ij}) < \delta$, אזי

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{S}(P) - \underline{S}(P) \\ &= \sum_P M_{ij} A(R_{ij}) - \sum_P m_{ij} A(R_{ij}) \end{aligned}$$

אבל כזכור

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \sup_{R_{ij}} f = \max_{R_{ij}} f = f(p_{ij}) \\ m_{ij} &= \inf_{R_{ij}} f = \min_{R_{ij}} f = f(q_{ij}) \end{aligned}$$

עבור נקודות כלשהן $p_{ij}$ ו: $q_{ij}$ במלבן $R_{ij}$, ולכן

$$= \sum \underbrace{f(p_{ij}) - f(q_{ij})}_{<\epsilon} A(R_{ij})$$

כי

$$\mathsf{dist}(p_{ij}, q_{ij}) < \mathsf{diag}(R_{ij}) < \delta$$

ולכן הסכום האחרון קטן מ:

$$.\epsilon \sum_{ij} A(R_{ij}) = \epsilon A(R)$$

<u>משפט.</u> אם $f$ חסומה במלבן סגור $R$ ורציפה פרט לקבוצה $E$ בעלת שטח אפס, אז $\int\int_R f$ קי-ים.

<u>הוכחה:</u> כזכור $E$ בעלת שטח אפס $\Longleftrightarrow$ לכל $0 < \epsilon$ אפשר לכסות אותו ע"י מלבנים שסכום

שטחיהם קטן מ: $\epsilon$. נכסה את $E$ ע"י מלבנים שסכום שטחיהם קטן מ: $\epsilon$ ואח"כ נמשיך את המלבנים לחלוקה של כל $R$.

נסמן את אחוד המלבנים המכסים את $E$ ב: $R_0$ ונסמן את אחוד שאר המלבנים ב: $R_1$. $R_1$ היא קבוצה סגורה וחסומה, ו: $f$ רציפה עליה במ"ש, ולכן

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon$$

לכל $p, q \in R_1$ כך ש: $\text{dist}(p, q) < \delta$.

$$\begin{aligned} \overline{S} - \underline{S} &= \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) A(R_{ij}) \\ &= \sum_{R_0} + \sum_{R_1} \end{aligned}$$

על $R_0$:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{R_0} &= \sum_{R_0}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij}) \\
&\leq \sum_{R}(|M_{ij}|+|m_{ij}|)A(R_{ij}) \\
&\leq 2K\sum_{R}A(R_{ij}) < 2K\epsilon
\end{aligned}$$

כאשר $K=\sup_R|f|$.

על $R_1$:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{R_1} &= \sum_{R_0}(M_{ij}-m_{ij})A(R_{ij}) \\
&= \sum_{R}(f(p_{ij})-f(q_{ij}))A(R_{ij}) \\
&< \sum_{R_1}\epsilon\cdot A(R_{ij}) \\
&= \epsilon\cdot A(R_1) < \epsilon\cdot A(R)
\end{aligned}$$

לסיכום, לכל $\epsilon$ מצאנו חלוקה עבורה מתקיים

$$0 \leq \overline{S} - \underline{S} < \epsilon[2K + A(R)] \,,$$

ולכן קיים האינטגרל הכפול $\iint_R f$.

<u>הגדרה.</u> אם $f$ מוגדרת ב: $D$, ו:$D$ היא תת-קבוצה של מלבן $R$, נגדיר על $R$ את הפונקציה

$$F(p) = \begin{cases} f(p) & p \in D \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}.$$

זוהי הרחבה של $f$ מ: $D$ ל: $R$.

<u>משפט.</u> אם $D$ קבוצה חסומה ובעלת שטח, $f$ רציפה וחסומה ב: $D$, (ייתכן כי $D$ לא סגורה,

ולכן $f$ אינה חסומה אוטומטית), אז אפשר להג-
דיר

$$\int\int_D f = \int\int_R F ,$$

והגדרה זו בלתי תלויה בבחירת המלבן $R$.

<u>הוכחה.</u> נקודות אי-הרציפות של $F$ הן נקודות השפה של $D$. $D$ בעלת שטח, ולכן השפה שלה בעלת שטח אפס. לכן, לפי המשפט הקודם $\int\int_R F$ קיים.

ערך זה הינו בלתי תלוי בבחירת $R$, כפי שאפשר להשתכנע משירטוט של הרחבות שונות $R_1$ ו: $R_2$ של $D$.

# תכונות של האינטגרל הכפול.

נניח ש $f,g$ הן פונקציות רציפות וחסומות ב: $D$
(הנחה חזקה), אז

1. $\displaystyle\iint_D (f+g) = \iint_D f + \iint_D g$

2. $\displaystyle\iint_D cf = c\iint_D f$

3. $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\iint_D f \geq 0$

4. $f \leq g \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\iint_D f \leq \iint_D g$

5. $\displaystyle\iint_D |f| \geq \left|\iint_D f\right|$

6. נניח ש: $D_1$ ו: $D_2$ הן קבוצות בעלות שטח.
אם $S(D_1 \cap D_2) = 0$ אז

$$\int\int_{D_1 \cup D_2} f = \int\int_{D_1} f + \int\int_{D_2} f$$

מכסים את $D_1 \cap D_2$ ע"י מלבנים בעלי שטח כולל קטן. נסמן את איחודם ב: $R_0$, ונרחיב את צלעותיהם לקווי חלוקה של כל $D_1 \cup D_2$. מבין המלבנים הנוספים נסמן ב: $R_1$ את איחוד המלבנים שיש להם חיתוך לא ריק עם $D_1$, וב: $R_2$ את איחוד המלבנים שיש להם חיתוך לא ריק עם $D_2$. אז סכומי רימן על $R_0 \cup R_1 \cup R_2$, $R_0 \cup R_1$ ו: $R_0 \cup R_2$ מקרבים את האינטגרלים על $D_1 \cup D_2$, $D_1$ ו: $D_2$ בהתאמה.

7. אם $M \leq f(x,y) \leq m$ לכל $(x,y) \in D$
אז

$$m \cdot A(D) \leq \int\int_D f \leq M \cdot A(D)$$

8. קיימת נקודה $P \in D$ כך שמתקיים השיויון

$$\int\int_D f dxdy = f(P) \cdot A(D)$$

<u>הערה.</u> ל: $\int_a^b f$ יש מגמה ו: $\int_a^b f = -\int_a^b f$ כי $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ בעל סימן, בהתאם לכיוון המעבר. ב: $\int\int_D$ אין מגמה' כי $A(R_{ij}) \geq 0$ ולא ייחסנו לו כיוון.