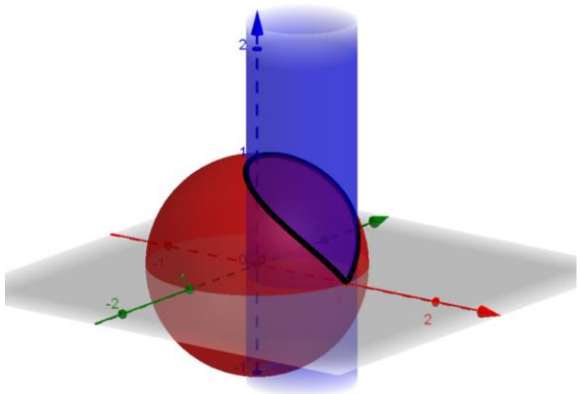
11/01/2017

תרגול 11

תרגיל:

חשבו את שטח הפנים של המשטח S המוגדר על ידי:

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1 | x^2 + y^2 \leq x | z \geq 0\}$$



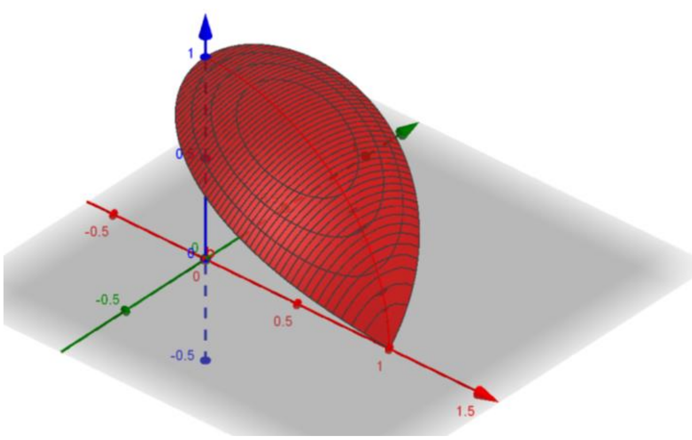
פתרון:

ראשית, נשים לב כי התחום בו אנו עוסקים הוא:

- ספירה סביב הראשית ברדיוס 1 הנתונה על ידי המשוואה הראשונה.
- צילינדר (גליל) מוזז ברדיוס $\frac{1}{2}$ הנתון על ידי אי השוויון השני שניתנת לכתיבה בצורה הבאה:
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$$
- חצי המרחב העליון הנתון על ידי אי השוויון האחרון.

על מנת להבין מהו השטח אותו אנו מחשבים, נשים לב כי המשוואה הראשונה שנתונה לנו באילוצים של נקודות S היא משוואת ספירה, כלומר מעטפת בלבד. לכן, נסיק כי המשטח בו נעסוק הוא בהכרח משטח ממימד 2 בתוך $\mathbb{R}^3$. אינטגרל משטחי כנ"ל אנו פותרים על ידי מציאת פרמטריזציה (u, v) עבורה נקבל את האינטגרל:

$$\iint_S 1 d\sigma = \iint_D |S_u \times S_v| dudv$$



כאשר $S_u \times S_v$ הוא וקטור הנורמל למשטח הנתון על ידי הפרמטריזציה שלנו.

ניתן לעבוד בשימוש בקואורדינטות פולריות, אך במקרה זה נעבוד דווקא עם הקואורדינטות המקוריות:

נשים לב כי פרמטריזציה למשטח נתונה על ידי:

$$S(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

כאשר התחום של $(x, y) \in D$ הוא התחום:

$$D = \left\{(x, y) \middle| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}$$

נחשב את הנורמל בתחום זה:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -\hat{\imath} z_x - \hat{\jmath} z_y + \hat{k} = (-z_x, -z_y, 1)$$

ומתקיים:

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2 + 1} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

אם כך, האינטגרל שעלינו לחשב הוא האינטגרל:

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

נבצע החלפת משתנים על ידי סימון:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow J = r$$

בתחום החדש האילוצים על הקואורדינטות יהיו:

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 < x \Rightarrow r^2 < r\cos\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix} \Rightarrow \widetilde{D} = \left\{-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \middle| 0 \le r \le \cos\theta\right\}$$

$\widetilde{D}$ תחום פשוט ביחס לראשית ועבורו מתקיים:

$$I = \iint_{\widetilde{D}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - |\sin\theta| d\theta$$

זוהי פונקציה זוגית כאשר תחום האינטגרציה סימטרי ביחס לראשית ולכן נוכל לרשום:

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin\theta \, d\theta = 2\pi - 2$$

<u>תרגיל:</u> חשבו את השטף של השדה:

$$\vec{F} = (x^2, 1, z)$$

דרך המשטח הנתון על ידי:

$$S = \{(x, y, z) | x + 2y + z = 1 | x, y, z, \ge 0\}$$

כאשר הנורמל למשטח בעל רכיב z חיובי.

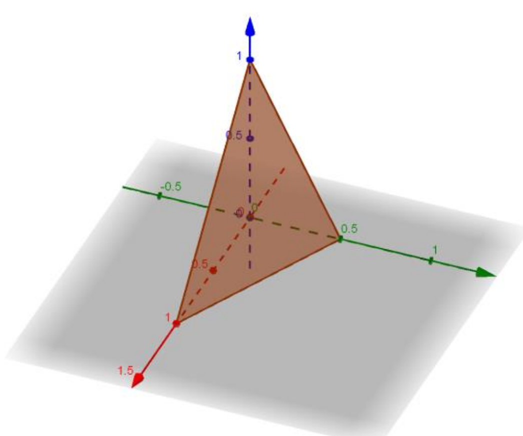
<u>פתרון:</u>

האינטגרל אותו נרצה לחשב הוא האינטגרל:

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\sigma$$

וזהו אינטגרל מסוג שני.

השטף של F דרך S נתון על ידי:



$$\iint_S \vec{F}\cdot d\sigma = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iint_S F_{\perp}d\sigma$$

כאשר $\hat{n}$ הינו וקטור הנורמל למשטח.

פרמטריזציה למשטח תהיה:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{2}(1-x-z) \\ z = z \end{cases}$$

כאשר $(x,z)\in D$ עבור D היטל על מישור xz. כלומר:

$$D = \{(x,z)|x,z\geq 0|x+z\leq 1\}$$

עלינו לבחור נורמל בהתאם לפרמטריזציה. כלומר:

$$\vec{N} = S_x \times S_z$$

ונשים לב כי זה אינו בהכרח נורמל היחידה.

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$$

נרצה לקבל רכיב z חיובי (נתון), ולכן:

$$\vec{N} = S_z \times S_x = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

סה"כ נקבל כי:

$$I = \underbrace{\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma}_{\text{משטחי סוג שני}} = \underbrace{\iint_D \vec{F}\big(S(x,z)\big)\cdot\vec{N}dxdz}_{\text{כפול}}$$

$$= \iint_D (x^2,1,z)\cdot\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)dxdz = \iint_D \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z+1\right)dxdz$$

D תחום פשוט ביחס לציר z שכן הוא נתון על ידי:

$$D = \{0\leq x\leq 1|0\leq z\leq 1-x\}$$

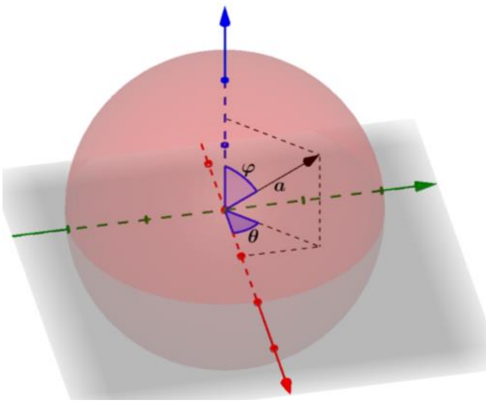
ולכן:

$$I = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z+1\right)dz$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את השטף של $\vec{F} = (x,y,z)$ דרך המשטח $x^2+y^2+z^2=a^2$ עם נורמל חיצוני.

<u>פתרון:</u>



הפרמטריזציה תהא:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad (\theta,\varphi)\in D = \{0\le\theta\le 2\pi | 0\le\varphi\le\pi\}$$

הנורמל יהיה:

$$\vec{N} = S_\theta \times S_\varphi$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= (-a^2\cos\theta\sin^2\theta\,, -a^2\sin\theta\sin^2\varphi\,, -a^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

נרצה לשאול אם זהו אכן נורמל חיצוני למשטח? בנקודה $(a,0,0)$:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \theta = 0 \Longrightarrow \vec{N} = (-a^2,0,0)$$

זהו נורמל פנימי, ולכן נסיק כי עלינו לקחת את הנורמל בסדר ההפוך:

$$\vec{N} = S_\varphi \times S_\theta = (a^2\cos\theta\sin^2\varphi\,, a^2\sin\theta\sin^2\varphi\,, a^2 sin\varphi\cos\varphi)$$

כלומר:

$$\vec{F}\big(S(\theta,\varphi)\big)\cdot\vec{N} = (a\cos\theta\sin\varphi\,, a\sin\theta\sin\varphi\,, a\cos\varphi)\cdot\vec{N}$$

$$= a^3(\cos^2\theta\sin^3\varphi + \sin^2\theta\sin^3\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi) = \cdots = a^3\sin\varphi$$

ולכן האינטגרל שלנו יהיה:

$$I = \iint_D a^3\sin\varphi\, d\theta d\varphi = a^3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 4\pi a^3$$