תורת הקבוצות ־ תרגול מספר 4
יחסים

תזכורת ־ הגדרות

יהיו A,B קבוצות.

- **המכפלה הקרטזית** של A,B היא אוסף הזוגות הסדורים של איבר מ־A ואיבר מ־B: $A\times B \triangleq \{(a,b) \mid a\in A\wedge b\in B\}$.
- **יחס בינארי** R בין הקבוצות A,B הוא תת־קבוצה כלשהי של המכפלה הקרטזית שלהן: $R\subseteq A\times B$.
  - זוהי הגדרה **יותר כללית** מאשר תיאור של יחס בצורה מילולית ולכן המתמטיקאים מעדיפים אותה; היא מאפשרת לדבר גם על יחסים שקשה לתאר במפורש בצורה מילולית.
  - אם $A=B$ לרוב אומרים ש־R הוא יחס **מעל** A.
- דוגמאות:
  - $a\leq b$ ("a קטן־שווה מ־b") מעל $\mathbb{N}$ ־ $\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),\dots\}$.
  - $a|b$ ("a מחלק את b") מעל $\mathbb{Z}$: $\{(a,b) \mid \exists c\in\mathbb{Z}\,(ac=b)\}$.
  - $a\equiv b \,(\mathrm{mod\ n})$ ("a שקול ל־b מודולו n") מעל $\mathbb{Z}$: $\{(a,b) \mid n|a-b\}$.
- תכונות של יחסים בינאריים מעל קבוצה A, $R\subseteq A\times A$:
  - R **רפלקסיבי** אם $(a,a)\in R$ לכל $a\in A$.
  - R **סימטרי** אם $(a,b)\in R\to(b,a)\in R$.
  - R **טרנזיטיבי** אם $((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\to(a,c)\in R$.
  - R **אנטיסימטרי** אם $((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R)\to a=b$.
- **יחס שקילות** E מעל A הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
- אם E יחס שקילות מעל A ו־$a\in A$ אז מגדירים את **מחלקת השקילות** של a: $[a]_E \triangleq= \{b\in A \mid (a,b)\in E\}$.
- אוסף מחלקות השקילות של E הוא **חלוקה** של A לתת־קבוצות זרות ולא ריקות שאיחודן הוא כל A.
- אוסף מחלקות השקילות מסומן ב־A/E ונקרא **קבוצת המנה** של היחס E: $A/E\triangleq\{[a]_E \mid a\in A\}$.

יחס שקילות על נוסחאות לוגיות

תהא A קבוצת הנוסחאות הלוגיות שבנויות ממשתנים ומהקשרים $\sim,\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow$.
נסמן ב־z השמה כלשהי למשתנים. אם ψ נוסחה, נסמן $z(\psi)=1$ אם ההשמה מספקת את הנוסחה, ואחרת $z(\psi)=0$
נגדיר יחס על A: $\varphi\equiv\psi$ אם לכל השמה z מתקיים $z(\psi)=z(\varphi)$.
במילים אחרות, שתי נוסחאות הן ביחס אם הן מסתפקות על ידי אותן השמות.

נוכיח כי $\equiv$ הוא יחס שקילות:

רפלקסיביות: לכל $\psi \in A$ ולכל z, בוודאי $z(\psi) = z(\psi)$ כי כל ערך הוא שווה לעצמו.

סימטריה: נניח כי $z(\psi) = z(\varphi)$. אז מכיוון ששוויון הוא סימטרי, נקבל $z(\varphi) = z(\psi)$.

טרנזיטיביות: נניח כי $z(\psi_1) = z(\psi_2)$ וגם $z(\psi_2) = z(\psi_3)$ עבור z כלשהי, אז בוודאי ש־$z(\psi_1) = z(\psi_3)$ מטרנזיטיביות השוויון.

נראה שההוכחה שלנו הסתמכה בצורה חזקה על כך ש$\equiv$ הוגדר בתור "הפעלת פונקציה מסויימת על ψ ועל φ נותנת תוצאות **שוות**" (ואז שימוש בתכונות השוויון הזה). התופעה הזו אינה מקרית ולמעשה כל פונקציה משרה יחס שקילות על התחום שלה בצורה דומה.

דוגמאות למחלקות שקילות:

- כל הפסוקים שאינם ספיקים, למשל $a \wedge \sim a$, או $a \wedge b \wedge (a \rightarrow \sim b)$.
- כל הפסוקים שמסתפקים בדיוק על ידי ההשמות שנותנות 1 ל־a (ולא משנה מה נותנות ליתר המשתנים): למשל a, או $(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b)$.

יחס שקילות על סדרות

נתבונן על פונקציות מהשלמים לשלמים: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. על כל פונקציה כזו ניתן לחשוב בתור סדרה אינסופית "לשני הכיוונים".

נגדיר יחס $\equiv$ על ידי $\{(f,g) \mid \exists k \in \mathbb{Z} \forall x (f(x) = g(x+k))\}$.

רעיונית, שתי סדרות הן שקולות אם אפשר להזיז אחת מהן ולקבל את השניה.

נוכיח כי $\equiv$ יחס שקילות:

רפלקסיביות: תהא f סדרה כלשהי. אז לכל x, $f(x) = f(x+k)$ עבור $k = 0$.

סימטריה: נניח כי עבור f, g קיים k כך ש־$f(x) = g(x+k)$. נגדיר $k' = -k$ ונקבל $f(x+k') = f(x-k) = g((x-k)+k) = g(x)$, כלומר $g(x) = f(x+k')$ כנדרש.

טרנזיטיביות: נניח כי עבור f, g קיים k_1 כך ש־$f(x) = g(x+k_1)$ ועבור g, h קיים k_2 כך ש־$g(x) = h(x+k_2)$. אז עבור $k' = k_1 + k_2$ נקבל ש־

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x+k_1) = h((x+k_1)+k_2) \\
&= h(x+(k_1+k_2)) = h(x+k')
\end{aligned}
$$

כנדרש.

נשים לב לכך שאנחנו מסוגלים למצוא מחלקות שקילות מכל גודל סופי שהוא, וגם מחלקת שקילות אינסופית.

מחלקת שקילות מגודל 1: המחלקה של $f(x) = 0$.

מחלקת שקילות מגודל 2: המחלקה של $f(x) = \begin{cases} 0 & 2|x \\ 1 & \text{else} \end{cases}$.

מחלקת שקילות מגודל n: המחלקה של $f(x) = \begin{cases} 0 & n|x \\ 1 & \text{else} \end{cases}$.

מחלקת שקילות אינסופית: המחלקה של $f(x) = x$.