

7710

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

מבחן סוף סמסטר באלגברה לינארית ב - 104171 - מועד ב

סמסטר חורף תשע"ב 18.3.2012

משך המבחן : שלוש שעות. שימוש בחומר עזר כלשהו אסור בהחלט.
יש לנמק היטב את התשובות ולצטט תוצאות שאתם מסתמכים עליהן.

שאלה מס. 1 25 נקודות.

א. הוכיחו: כל מטריצה ב $M_n(\mathbb{C})$ ניתנת לכתיבה כסכום של מטריצה נילפוטנטית ומטריצה שניתנת ללכסון.
ב. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

מיצאו את צורת ג'ורדן J שלה.

ג. מיצאו מטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}JP = A$.

שאלה מס. 2 25 נקודות.

תהי T טרנספורמציה לינארית צמודה לעצמה על מרחב מכפלה פנימית V מממד סופי מעל \mathbb{C} .
הוכיחו:

א. לכל $v \in V$ מתקיים $\|v + iTv\| = \|v - iTv\|$.

ב. הטרנספורמציה $I + iT$ היא טרנספורמציה הפיכה.

ג. הטרנספורמציה $U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$ היא טרנספורמציה אוניטרית.

ד. נניח $T = E$ היא הטלה אורתוגונלית, כיתבו את הפרוק הספקטרלי של U (בעזרת E).

שאלה מס. 3 25 נקודות.

תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

א. האם קיימת מטריצה אורתוגונלית P ב $M_3(\mathbb{R})$ כך ש P^tAP היא אלכסונית (הסבירו) ? אם יש כן, מצאו אותה.

ב. האם קיימת מטריצה אוניטרית U ב $M_3(\mathbb{C})$ כך ש U^*AU היא אלכסונית (הסבירו) ? אם יש כן, מצאו אותה.

ג. האם קיימת מטריצה הפיכה S ב $M_3(\mathbb{C})$ כך ש S^tAS היא אלכסונית (הסבירו) ? אם יש כן, מצאו אותה.