

תרגיל מספר 2, אינפי 2 2015

1. חשבו $\int \sqrt{4x^2 + 12x + 13} dx$

2. "פונקציית הפופקורן" מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 1$ כך: $f(x) = 0$ לכל x אירציונלי ו- $f(x) = \frac{1}{q}$ אם $x = \frac{p}{q}$ שבר מצומצם. הוכיחו שקבוצת נקודות הרציפות של f היא בדיוק קבוצת המספרים האירציונליים. הסיקו מכך ש- $f(x)$ אינטגרבילית. מהו $\int_0^1 f(t) dt$ בקטע $[0, 1]$?

3. הוכיחו שסכום של שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע סגור הוא פונקציה אינטגרבילית.

4. השתמשו בהגדרת אינטגרביליות כדי להוכיח שאם $f(x)$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a, b]$ ו- $g(x)$ רציפה שם אז $f(x)g(x)$ אינטגרבילית שם (אפשר בעזרת סכומי דרבו).

5. תנו דוגמה לשתי פונקציות לא אינטגרביליות שמכפלתן אינטגרבילית.

6. אילו מן הפונקציות הבאות הן אינטגרביליות רימן בקטע $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{אם } x \neq 0 \\ 0 & \text{אם } x = 0. \end{cases} \bullet$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\lceil \frac{1}{x} \rceil) & \text{אם } x \neq 0 \\ 0 & \text{אם } x = 0. \end{cases} \bullet$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{אם } x \neq 0 \\ 0 & \text{אם } x = 0. \end{cases} \bullet$$