קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 2

תאריך הגשה: יום ראשון, 10/11/2013, עד שעה $22:00$

<u>שאלה 1:</u>

בשאלה זו תוכיחו את אי-שוויון הממוצעים בדרך שונה מזו שהוכחנו בתרגול. נסתכל על $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ חיוביים.

א. הראו כי אם $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ אז מתקיים שוויון בין כל הממוצעים.

חישוב ישיר מראה כי כל אחד הממוצעים נותן בדיוק את האיבר a_1.

ב. כעת, ולהמשך התרגיל, נניח כי לא כל המספרים שווים. הוכיחו כי אם

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1 \quad \text{אז} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n.$$

הוכחה באינדוקציה: עבור $n = 2$, מכיוון ש- $a_1 \neq a_2$ אז $(a_1 - a_2)^2 \neq 0$. פתיחת סוגריים ושימוש בכך ש- $a_1 \cdot a_2 = 1$ נותנת $a_1 + a_2 > 2$, כנדרש. בשלב האינדוקציה, מכיוון שהמכפלה שווה 1 נובע שקיימים איבר גדול מ-1 ואחד קטן מ-1, בה״כ $a_1 > 1, a_2 < 1$. לכן $(1 - a_1)(1 - a_2) < 0$, ומכאן (ע״י פתיחת סוגריים): $a_1 \cdot a_2 < a_1 + a_2 - 1$ (*). הפעלת הנחת האינדוקציה על n המספרים $a_1 \cdot a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ (המקיימים שמכפלתם 1) תיתן שסכומם גדול מ- n, וע״י הצבת (*) נקבל את הדרוש.

ג. הוכיחו כי הממוצע החשבוני של המספרים הנתונים גדול ממש מהממוצע ההנדסי שלהם (רמז: היעזרו בסעיף ב׳).

נשתמש בסעיף ב׳: נסמן ב- b את הממוצע ההנדסי של n המספרים $a_1, \dots, a_n$, ואז המספרים $\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_n}{b}$ מקיימים את התנאי ב- ב׳ ולכן סכומם גדול מ-n. ע״י כפל ב- b וחילוק ב- n נקבל את הדרוש.

ד. הוכיחו כי הממוצע ההנדסי של המספרים הנתונים גדול ממש מהממוצע ההרמוני שלהם (כאן תוכלו להיעזר בסעיף ב׳ או ג׳).

נגדיר שוב את b להיות הממוצע ההנדסי של המספרים הנתונים, וכמו ב- ג׳ נסתכל על n המספרים $\frac{b}{a_1}, \dots, \frac{b}{a_n}$, שמכפלתם 1, לכן סכומם גדול מ- n, וע״י חילוק ב- $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ נקבל את הדרוש.

<u>שאלה 2:</u>

הוכיחו כי לכל קבוצה לא ריקה וסופית של ממשיים קיים מקסימום.

באינדוקציה: עבור קבוצה בת שני איברים זה ברור, כי מבין a_1, a_2, בהכרח מתקיים $a_1 \geq a_2$ או $a_2 \geq a_1$, כלומר לקבוצה קיים חסם מלעיל שהוא איבר בקבוצה, ולכן קיים מקסימום.
לקבוצה בת $n + 1$ איברים, נסתכל על n איברים מתוכה, להם יש מקסימום מהנחת האינדוקציה. לקבוצה בת שני האיברים שהיא המקסימום הנ״ל והאיבר האחרון בקבוצה המקורית יש מקסימום, מהנחת האינדוקציה עבור $n = 2$, ומקסימום זה הוא בהכרח חסם מלעיל של כל $n + 1$ האיברים, והוא גם איבר בקבוצה, ולכן הוא המקסימום של כל $n + 1$ האיברים.

שאלה 3 :

יהיו A, B קבוצות לא ריקות של ממשיים החסומות מלמעלה.

א. נניח שקיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש- $a + \varepsilon < b$. הוכיחו כי $supA < supB$.

לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq supA$, לכל $b \in B$ מתקיים $b \leq supB$. מהגדרת סופרמום, עבור ה- ε הנתון קיים $a \in A$ כך ש- $a + \varepsilon > supA$, ומהנתון עבור ה- ε הנתון נקבל $supA < a + \varepsilon < b \leq supB$.

ב. נניח כעת שלכל $a \in A$ קיימים $\varepsilon > 0$ ו- $b \in B$ כך ש- $a + \varepsilon < b$. הוכיחו או הפריכו : $supA < supB$.

הטענה לא נכונה, דוגמא נגדית : $A = (0,1), B = (0,1]$. (לכל $a \in A$ נבחר $\varepsilon = \frac{1-a}{2}$ ו- $b = 1$).

שאלה 4:

תהי A קבוצה המכילה מספר אינסופי של ממשיים וחסומה. תהי B קבוצת המספרים הממשיים x כך שהחיתוך $A \cap [x, \infty)$ ריק או מכיל מספר סופי של איברים.

א. הוכיחו כי קיים $\inf B$.

נראה כי B לא ריקה וחסומה מלמטה : לא ריקה כי, למשל, $supA + 1$ נמצא בה ($supA$ קיים כי A חסומה ולא ריקה). חסומה מלמטה, כי למשל $infA$ הוא חסם מילרע שלה (נובע מהגדרת B).

ב. הוכיחו או הפריכו : $\inf B = \min B$.

הטענה לא נכונה, למשל נסתכל על $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, אז B היא $(0, \infty)$, ובפרט אין לה מינימום.

ג. הוכיחו או הפריכו את קיומו של $\inf B$ אם לא דורשים את חסימות A.

במקרה כזה לא הכרחי קיום אינפימום, למשל אם $A = \mathbb{R}$ אז נקבל $B = \emptyset$ ובפרט אין אינפימום.

שאלה 5 :

יהיו $A_1 , A_2 , \ldots$ קבוצות לא ריקות וחסומות של ממשיים, ותהי A האיחוד של הקבוצות הנ״ל.
נתון ש- A חסומה, ונתונים גם הערכים $\sup A_n$, $\inf A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. בטאו את $\inf A$ ואת $\sup A$ בעזרת ערכים אלו. הוכיחו את טענותיכם.

$infA = \inf\{infA_n\}$, $supA = \sup\{\sup a_n\}$. הוכחה לדוגמא עבור הסופרמום : ראשית נשים לב כי הקבוצה $\{supA_n\}$ בהכרח חסומה, כי אם לא אז הקבוצה A לא חסומה, ולכן $\sup\{supA_n\}$ קיים. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת סופרמום, קיים $N \in \mathbb{N}$

כך ש- $\sup\{supA_n\} < supA_N + \frac{\varepsilon}{2}$, ושוב מההגדרה קיים $a \in A_N$ כך ש- $supA_N < a + \frac{\varepsilon}{2}$, לכן מתקיים:

$\sup\{supA_n\} < a + \varepsilon$, כנדרש. באופן דומה ניתן להוכיח עבור האינפימום.

<u>שאלה 6:</u>

תהי A קבוצה לא ריקה וחסומה מלמעלה של ממשיים. הראו כי קיימת סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתוך A (כלומר, $a_n \in A$ לכל $n \in \mathbb{N}$) כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

יהי $\varepsilon > 0$. A לא ריקה וחסומה ולכן קיים $supA$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_n = \left\{a \in A : a + \frac{1}{n} > supA\right\}$. נשים לב כי $A_n \neq \emptyset$ לכל n, מהגדרת סופרמום. נשתמש באקסיומת הבחירה, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $a_n \in A_n$. קיים N כך ש- $\frac{1}{N} < \varepsilon$, ואז לכל $n > N$ נקבל מהגדרת A_n: $supA - \varepsilon < a \leq supA < supA + \varepsilon$, כלומר $|a_n - supA| < \varepsilon$, כלומר $a_n \to supA$.

<u>שאלה 7:</u>

א. הוכיחו ע״פ הגדרה: $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+7}{2n-4} = 2$.

ל- $n \geq 4$ מתקיים: $\left|\frac{4n+7}{2n-4} - 2\right| = \left|\frac{15}{2n-4}\right| = \frac{15}{2n-4} < \frac{15}{2n-n} = \frac{15}{n}$, לכן בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר:

$N = \max\{\left[\frac{15}{\varepsilon}\right] + 1{,}4\}$.

ב. הוכיחו ע״פ הגדרה: $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+9n-17}{4n^2-5n+6} = \frac{7}{4}$.

ל- $n \geq 5$ מתקיים: $\left|\frac{7n^2+9n-17}{4n^2-5n+6} - \frac{7}{4}\right| = \frac{\frac{n}{4}+28.5}{4n^2-5n+6} < \frac{30n}{4n^2-n^2} = \frac{10}{n}$, לכן בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר:

$N = \max\left\{5, \left[\frac{10}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$.

<u>שאלת אתגר – לא להגשה:</u>

ניזכר כי קבוצת מספרים A נקראת בת-מניה אם ניתן להציג את איבריה בסדרה, כלומר ניתן להציג $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. הוכיחו כי קבוצת המספרים הממשיים בקטע $[0,1]$ אינה בת מניה (כלומר, שלא ניתן להציג את כל איבריה בסדרה).