

הטכניון - הפקולטה למתמטיקה

תורת הקבוצות (104290) - גליון תרגילים מס' 6;

1. תהינה A, B , ו- C קבוצות כך ש- $A \cap B = \emptyset$. הוכיחו כי $C^{A \cup B}$ שקולה בעוצמתה לקבוצה $C^A \times C^B$.
2. תוך שימוש בפונקציה \tan הראו כי כל קטע פתוח שקול בעוצמתו ל- \mathbb{R} .
3. D קבוצה אינסופית של קבוצות סופיות. נתון כי לכל $A, B \in D$ מתקיים כי $A \subseteq B$ או $B \subseteq A$. הוכיחו כי D שקולה בעוצמתה ל- \mathbb{N} .
4. הוכיחו כי קיימת פונקציה $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ שהיא על ומקבלת כל ערך בדיוק פעמיים. (נסו לבנות במפורש פונקציה כזו).
5. $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ונגדיר $B = \{f \in A : f(k+1) > f(k) \ \forall k \in \mathbb{N}\}$ (כלומר B היא קבוצת הפונקציות העולות). הוכיחו כי A שקולת עוצמה ל- B ע"י בניית פונקציה מפורשת מ- A ל- B שהיא חד-חד ערכית ועל.
6. $A = [0, 1]$. נגדיר $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ וכן $B = A \setminus C$. הוכיחו כי A ו- B שקולות ע"י בנייה מפורשת של פונקציה חח"ע ועל מ- A ל- B .
7. \mathbb{N}_0 קבוצת השלמים האי-שליליים. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ ע"י $f(n) = (-1)^{n+1} \lfloor \frac{1}{2}(n+1) \rfloor$ היא פונקציית הערך השלם.
- א. הוכיחו כי f היא חד-חד ערכית ועל.
- ב. יהי $n \in \mathbb{N}, n > 0$. נוכל לכתוב את n כמכפלה של גורמים ראשוניים כלומר $n = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{r_k}$ כאשר p_k הוא ראשוני וכן $r_k \neq 0$ רק עבור מספר סופי של ערכי k וכן ההצגה הנ"ל יחידה (קיום ויחידות הפרוק לראשוניים). נגדיר פונקציה $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ (\mathbb{Q}^+ היא קבוצת הרציונליים החיוביים) ע"י $F(n) = \prod_{k=1}^{\infty} p_k^{f(r_k)}$. הוכיחו כי F חד-חד ערכית ועל.

בהצלחה