1 חשבון אינטגרלי

1.1 אינטגרל לא מסוים

נסמן ב- $\int f(x)dx$ פונקציה קדומה לפונקציה f, כלומר פונקציה שנגזרתה היא הפונ-קציה הנתונה f, ונקרא לה גם האינטגרל הלא מסוים של f. (לפעמים נקצר את הסימון ונכתוב $\int f(x)$, או אפילו $\int f$). בשלב זה יש להתייחס לסימון כאל סימון בלבד. הוא אמנם נראה משונה, אך ההסבר יבוא מאוחר יותר.

עלינו לטפל בשלוש שאלות:

<u>קיום</u>: שאלה זו תטופל בפרק על האינטגרל המסויים.

<u>יחידות</u>: אנו כבר יודעים את התשובה לשאלה זו. פונקציה קדומה נקבעת עד כדי קבוע: אם $F' = G'$, אז יש קבוע C כך ש- $F(x) = G(x) + C$ לכל x, כי מהנתון נובע שמתקיים $(F - G)' = 0$, ולכן $F - G$ פונקציה קבועה.

באופן פורמלי $\int f(x)dx$ הוא, לכן, סימון <u>למשפחה</u> של פונקציות הנבדלות זו מזו בקבועים בלבד. אנחנו נציין את הקבועים רק כשנטפל בפונקציות מפורשות, כמו למשל $\int \cos x dx = \sin x + C$.

<u>חישוב</u>: זהו הנושא העיקרי בסעיף זה. אנחנו נתאר מספר שיטות, שכולן מבוססות על כך שאינטגרציה היא "הפעולה ההפוכה" לפעולת הגזירה.

<u>לינאריות</u>

אם ל- f ול- g יש פונקציות קדומות, אז גם ל- $af + bg$ יש, ומתקיים השוויון

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

כי גוזרים את שני אגפי המשוואה עפ"י כלל הגזירה $(aF + bG)' = aF' + bG'$ ומקבלים שלשניהם אותה נגזרת.

<u>אינטגרלים מיידיים</u>

כשלמדנו לחשב נגזרות פיתחנו לעצמנו "טבלת נגזרות" של אותן פונקציות שאנו פוגשים לעתים קרובות, למשל $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ או $\sin' x = \cos x$. כשנקרא את הטבלה "בכיוון ההפוך" נקבל נוסחאות לפונקציות קדומות רבות, למשל

$\int \cos x = \sin x + C$.

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$\int x^{-1} = \ln|x| + C$.

$\int x^\beta = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C$ כאשר $\beta \neq -1$.

$\int e^x dx = e^x + C$.

$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$.

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$ (בידקו כי $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, וכך שתי התשובות שנראות שונות זו מזו אכן נבדלות, למעשה, רק בקבוע).

לפונקציות קדומות שאנחנו מקבלים ע"י "הסתכלות בטבלה" נקרא אינטגרלים מידיים. זה איננו מושג מתמטי מדוייק - ואנשים שונים "זוכרים" טבלאות שונות של אינטגרלים מיידיים.

אינטגרציה בחלקים

"נהפוך" כעת את הנוסחה לנגזרת של המכפלה $(uv)' = uv' + u'v$. כשנבודד את המחובר uv' ונבצע אינטגרציה, נקבל את הנוסחה הבאה שנקראת "נוסחת האינטגרציה בחלקים"

$$\int uv' = uv - \int u'v \ .$$

דוגמאות.

(i) לחישוב $\int x \ln x dx$ נשתמש ב- $u(x) = \ln x$ ו- $v'(x) = x$ ונקבל

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \ .$$

(ii) $\int \ln x dx = \int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$. (כאן השתמשנו ב- $u(x) = \ln x$ ו- $v'(x) = 1$).

(iii) $\int e^x \sin x dx$. נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = e^x$ ו- $v' = \sin x$ ונקבל את $-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$. את האינטרגל נחשב ע"י אינטגרציה נוספת בחלקים עם $u = e^x$ ו- $v' = \cos x$ ונקבל שהוא שווה ל- $e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$. וכשנאסוף את כל המחוברים נקבל $2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$.

(iv) $\int \cos^n x dx$. נסמן את האינטגרל ב- $F_n(x)$. נבצע אינטגרציה בחלקים עם $u = \cos^{n-1} x$ ו- $v' = \cos x$ ונשתמש בזהות $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ונקבל

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \Big(F_{n-2}(x) - F_n(x) \Big) \end{aligned}$$

או, אחרי העברה באגפים

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \ .$$

שימוש בנוסחה זו פעם אחרי פעם נותן לבסוף, עפ"י הזוגיות של n, תוצאה שבה יש לחשב או את האינטגרל $\int 1 dx = x$ או את $\int \cos x dx = \sin x$.

אינטגרציה ע"י הצבה

כאן "הופכים" את כלל השרשרת, $(F(g(x)))' = F'(g(x)) g'(x)$. אם נסמן $F' = f$ ונבצע אינטגרציה נקבל כי

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

דוגמאות.

$(i)\quad \int 2xe^{x^2}dx$. כאן נשתמש ב- $f(t)=e^t$ (כלומר $F(t)=e^t$) וב- $g(x)=x^2$ (ואז $g'(x)=2x$), ונקבל שהאינטגרל הוא $F(g(x))+C=e^{x^2}+C$.

באופן מעשי איטגרציה ע"י הצבה מתבצעת כך: אנחנו מציבים $y=x^2$ וכותבים את הנגזרת של y בצורה $\frac{dy}{dx}=2x$. כאן אנחנו "מרמים" ומתייחסים לביטוי הפורמלי $\frac{dy}{dx}$ כאילו היה מנה של מספרים וכותבים $dy=2xdx$. כעת כותבים את האינטגרנד ואת dx בעזרת המשתנה y ומקבלים $\int e^y dy=e^y+C$ - שאותו "מתרגמים" חזרה לשפת המשתנה x כ- $e^{x^2}+C$.

$(ii)\quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int\frac{dy}{y^2+1}=\arctan y+C=\arctan e^x+C$. (הצבנו $y=e^x$ ולכן $dy=e^x dx$).

$(iii)\quad \int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-dy}{y}=-\ln|\cos x|+C$. (הצבנו $y=\cos x$ ולכן $dy=-\sin x dx$).

$(iv)\quad$ באופן כללי יותר מקבלים את הנוסחה $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$, כי מציבים $y=f(x)$ ואז $dy=f'(x)dx$ והאינטגרל הופך להיות

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C=\ln|f(x)|+C\ .$$

$(v)\quad$ לעתים יש לצרף שיטות אינטגרציה שונות. למשל, לחישוב האינטגרל $\int e^{\sqrt{x}}dx$ נציב $t=\sqrt{x}$ (כלומר $x=t^2$) ואז $dx=2tdt$ ומקבלים $\int e^t 2tdt$, שאותו מחשבים ע"י אינטגרציה בחלקים.

הערה. חישוב נגזרות הוא מאוד שיטתי, וכשנתונה פונקציה מסובכת יש בידנו כל-לי גזירה המאפשרים לחשב את נגזרתה ע"י רדוקציה לנגזרות של רכיביה הפשוטים. חישוב הפונקציה הקדומה, לעומת זאת, איננו "מובנה" ודורש נסיון ודמיון. יתר על כן, יש פונקציות שנראות פשוטות מאד, כמו למשל e^{x^2} או $\frac{\sin x}{x}$, שאפשר להוכיח שאי אפשר בכלל להציג את הפונקציה הקדומה שלהן כפונקציה אלמנטרית!

מצד שני הבדיקה אם חישוב של פונקציה קדומה הוא נכון היא מאד פשוטה: גוזרים ובודקים שוויון לפונקציה הנתונה (כך שאין כל תרוץ לתשובה לא נכונה בבחינה...).

אינטגרציה של פונקציות רציונליות.

נשתמש בשתי עובדות אלגבריות: חלוקת פולינומים עם שארית ופירוק פולינומים לגורמים אי פריקים (שהם כידוע מדרגה 1 או 2).

חילוק המונה של פונקציה רציונלית במכנה שלה מאפשר את הצגתה כסכום של פולינום ושל שבר שבו דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה. אין בעיה לחשב את האינט-גרל של הפולינום, ולכן נוכל להניח מעתה שהשבר הוא אכן כזה.

הפירוק לגורמים אי-פריקים הוא, לעתים קרובות, לא מעשי (כי אין נוסחאות לחישובו), אבל לעתים הוא כן מעשי - ואפילו אולי נתון מראש.

דוגמא.

השבר $\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$ כבר נתון כשדרגת המונה קטנה מדרגת המכנה וכשהמכנה מוצג כמכפלת גורמיו האי פריקים. נציג $\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ כאשר $C=2, D=1, A=-2, B=1$ (הצגה זו נקראת ההצגה כסכום של שברים חלקיים). לכן

$$\begin{aligned} & \int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx \\ = \quad & \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx \\ = \quad & -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \arctan x + C. \end{aligned}$$

אנחנו נסתפק בדוגמא האפיינית הזו ולא ניתן כאן את הנוסחאות הכלליות להצגה כסכום של שברים חלקיים ולא נוכיח כי השיטה אכן תקפה באופן כללי.

משהצגנו את השבר בעזרת שברים חלקיים, עלינו לדעת איך לחשב את האינט-גרלים שלהם. אחרי שינויי משתנה לינאריים הם יהיו בעלי אחת מהצורות הבאות:

(i) $\int \frac{1}{(x-a)^j}dx = \frac{(x-a)^{-j+1}}{-j+1} + C$ (או $\ln|x-a| + C$ כאשר $j=1$).

(ii) $\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^j}dx = \frac{(x^2+a^2)^{-j+1}}{-j+1} + C$.

(iii) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^j}dx = a^{-2j+1}\int \cos^{2j-2} tdt$ (בעזרת ההצבה $x = a\tan t$).

<u>ביטויים עם שרשים</u>

בביטויים כאלה אפשר בדר"כ להעזר בזהויות טריגונומטריות, למשל:

(i) $\int \sqrt{1-x^2}dx$. הציבו $x=\sin u$, ואז $dx = \cos u\, du$ ומקבלים $\int \cos^2 udu$. כעת נשתמש בזהות $\cos^2 u = (1+\cos 2u)/2$ והאיטגרל הוא

$$\frac{1}{2}\int (1+\cos 2u)du = (u + \frac{1}{2}\sin 2u)/2 + C = (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})/2 + C\ .$$

(ii) אם נציב $x = \cos u$ ב- (i) נקבל $(-\arccos x + x\sqrt{1-x^2})/2$ שהיא, לכאורה, תשובה שונה, אך למעשה הן נבדלות רק בקבוע כי $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

(iii) אם יש ביטוי רציונלי המכיל $\sqrt{a^2-x^2}$ מתבקש לנסות את ההצבה $x = a\sin u$ או $x = a\cos u$.

לדוגמא, לחישוב $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ נשלים לריבוע ונציב $u = x-1$ ואח"כ $y = \cos u$.

(iv) בביטויים רציונליים המכילים $\sqrt{a^2+x^2}$ כדאי לנסות את ההצבה $x = a\tan u$ ולהשתמש בזהות $1+\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$.

(iv) בביטויים רציונליים המכילים $\sqrt{x^2-a^2}$ כדאי לנסות את ההצבה $x = \frac{a}{\sin t}$.

1.2 אינטגרל מסוים

נתונה קבוצה במישור. מהו שטחה? לשאלה זו שני פנים: השאלה האחת היא עקרונית, האם אפשר, ואם כן אז איך, להגדיר שטח של קבוצה מישורית כללית או, לפחות, של קבוצות מסויימות? השאלה השניה היא איך מחשבים את השטח.

נקודת המוצא היא הגדרת שטח המלבן: אורך הבסיס כפול הגובה. מכאן נקבל גם תשובה פשוטה למשולש: ע"י חיתוך והרכבה השטח זהה לחצי שטח מלבן עם אותו בסיס ואותו גובה. אך מה עם עיגול? כבר ארכימדס נתן שיטה לחישוב מקורב של שטח העיגול: נחסום בעיגול מצולע משוכלל עם n צלעות. את שטחו קל לחשב, כי הוא מורכב ממשולשים שאת שטחם אנו יודעים לחשב. כאשר n גדול המצולע מכסה כמעט את כל העיגול, ולכן שטח העיגול הוא הגבול, כאשר $n \to \infty$, של שטחים אלה.

אנחנו נשתמש באותו רעיון כדי להגדיר את מושג השטח, ונעשה זאת בשלב זה רק לקבוצות המוגבלות בין הגרף של פונקציה לבין ציר ה- x-ים. (כמובן שאח"כ נוכל לטפל גם בקבוצות הניתנות לפירוק והרכבה מקבוצות כאלה, ואפילו צורות כלליות יותר).

השטח המוגבל בין הגרף של f לקטע $[a,b]$ נקרא האינטגרל של f בקטע, ונסמנו ב- $\int_a^b f$ (ולפעמים ב- $\int_a^b f(x)dx$).

הערות. (i) בשלב זה, זהו רק סימון. הקשר שלו עם הפונקציה הקדומה (שהוא אחד מההשגים הגדולים של המתמטיקה) יתברר רק בהמשך.

(ii) ה- x בסימון $\int_a^b f(x)dx$ הוא רק שם למשתנה (כמו j בסכום מהצורה $\sum_{j=M}^N a_j$) ואפשר להחליף את x בכל סימן אחר, כגון y, t, s וכדומה.

האינטגרל הוא מספר ואינו תלוי ב- x!

(iii) השטח שנגדיר יהיה שטח עם סימן: שטח מעל ציר ה- x-ים יקבל סימן חיובי, ושטח מתחת לציר יקבל סימן שלילי.

הצורה הבסיסית שאנו יודעים את שטחה היא המלבן, ולכן אבני הבנין היסודיות בתורה שנפתח תהיינה פונקציות המגבילות צורה מלבנית: פונקציות שהן קבועות בקטע. המקרה הכללי יטופל בשלושה צעדים עפ"י ה"מורכבות" של f.

צעד 1: יהי I קטע חסום (שיכול להיות סגור, פתוח או חצי פתוח) עם קצוות a ו- b, ונניח ש- f מקבלת את הערך הקבוע c בקטע. אז השטח ש- f מגבילה הוא $c(b-a)$ (שהוא שלילי אם c שלילי), ולכן $\int_a^b f = c(b-a)$.

צעד 2: נניח ש- f היא "פונקצית מדרגה", כלומר, הקטע $[a,b]$ מחולק ל- n קטעים חלקיים הנקבעים ע"י נקודות החלוקה $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, כך ש- f מקבלת ערך קבוע c_i בקטע שבין a_{i-1} ו- a_i (אין זה חשוב אם $f(a_i) = c_i$ או c_{i-1}). הגרף של f מגביל איחוד זר של מלבנים, עם בסיסים באורך $a_i - a_{i-1}$ וגבהים c_i בהתאמה, ולכן $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1})$.

צעד 3: בשלב הסופי והעיקרי, שלפיתוחו יוקדש סעיף זה, נשתמש בתהליך גבולי. כמו ארכימדס נקרב את השטח המבוקש ע"י צורות "פשוטות", ודרך טבעית לעשות זאת היא ע"י קירוב של השטח ע"י פונקציות מדרגה עם חלוקה מאוד עדינה של $[a,b]$ וכאשר ערכה בקטע ה- i הוא, למשל, $c_i = f(a_i)$.

מסיבות מתמטיות יש צורך ביותר גמישות בבחירת הגבהים c_i, ונבחר אותם כערכים $c_i = f(t_i)$ של f כשמרשים בחירה שרירותית של הנקודות $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$. נפנה כעת להגדרות פורמליות.

סימונים.

חלוקה P של הקטע $[a,b]$ היא קבוצה סופית $P=\{a_i\}$ של נקודות בקטע כך ש- $a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$.

נסמן ב- $\Delta_i=a_i-a_{i-1}$ את אורך הקטע החלקי ה- i-י, כלומר את האורך של $[a_{i-1},a_i]$.

הקוטר של החלוקה P הוא $\lambda(P)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta_i$.

הגדרה. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$. יהיו $P=\{a_i\}$ חלוקה של הקטע ו- $t_i\in[a_{i-1},a_i]$. סכום רימן של הפונקציה f ביחס לחלוקה P ולבחירה t_i הוא

$$R(P,f,t_i)=\sum f(t_i)\Delta_i$$

הגדרה. נאמר שהפונקציה f המוגדרת בקטע $[a,b]$ היא פונקציה אינטגרבילית רימן בקטע, ושהאינטגרל שלה הוא המספר I, אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ עם התכונה הבאה: לכל חלוקה $P=\{a_i\}$ של הקטע עם קוטר $\lambda(P)<\delta$ ולכל בחירה של נקודות $t_i\in[a_{i-1},a_i]$, סכום רימן המתאים יקיים

$$\left|I-\sum f(t_i)\Delta_i\right|<\varepsilon\ .$$

את האינטגרל של f נסמן ב- $\int_a^b f$.

טענה. אם f אינטגרבילית בקטע, אז היא חסומה בו.

הוכחה. נניח כי f אינה חסומה, ואז לכל חלוקה P יש קטע חלקי $[a_{j-1},a_j]$ שגם בו f אינה חסומה. נבחר את ה- t_i-ים עבור $i\ne j$ באופן כלשהו ונסמן $A=\left|\sum\limits_{i\ne j}f(t_i)\Delta_i\right|$.

נבחר נקודה t_j בקטע החלוקה ה- j-י כך ש- $|f(t_j)\Delta_j|>A+\frac{1}{\lambda(P)}$ (יש כזו כי f אינה חסומה בקטע זה), ואז

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i\right|\ge|f(t_j)\Delta_j|-A>\frac{1}{\lambda(P)}\to\infty$$

כאשר $\lambda(P)\to 0$. $\square$

דוגמאות.

(i) לא כל פונקציה חסומה היא אינטגרבילית. פונקצית דיריכלה

$$D(x)=\begin{cases}0 & \text{כאשר } x \text{ רציונלי}\\ 1 & \text{כאשר } x \text{ אירציונלי}\end{cases}$$

איננה אינטגרבילית, כי לכל חלוקה נוכל לבחור את ה- t_i-ים כרציונלים (ואז סכום רימן המתאים הוא 0), או לבחור אותם אי-רציונלים (ואז הסכום הוא 1) - והקוטר של החלוקה איננו רלבנטי כלל.

הדוגמא הזו אומרת, בפרט, שיש קבוצות במישור שאי אפשר כלל להגדיר להן שטח בשיטה זו! (בקורסים מתקדמים יותר תראו אינטגרל כללי יותר, אינטגרל לבג, ופונקצית דיריכלה כן תהיה אינטגרבילית עפ"י לבג. אך אפילו אז, אם דורשים שהמושג "שטח" יקיים מספר דרישות טבעיות מאוד, עדיין יש קבוצות שאי אפשר להגדיר עבורן שטח.).

(ii) קשה מאוד להשתמש באופן ישיר בהגדרה של אינטגרביליות רימן, כי זה מצריך התייחסות לכל החלוקות ולכל הבחירות האפשריות של נקודות t_i בקטעי החלוקה, ומטרתנו הבאה תהיה מציאת שיטות יעילות יותר. אך לפני שנעשה זאת נביא דוגמא פשוטה שבה בבחירה <u>מסוימת</u> של החלוקות ושל הנקודות אכן ניתן לחשב את הגבול.

$\int_0^1 xdx = 1/2$ מכיון שזה שטח של משולש, ונבנה סכומי רימן שנותנים תוצאה זו. לכל n נסתכל בסכום רימן של $f(x) = x$ המתאים לחלוקה האחידה, שנסמנה ב- P_n

$$0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \dots \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

ולבחירה $t_i = \frac{i}{n}$ (כלומר לקצוות הימניים של הקטעים החלקיים). ואז

$$. \ R(P, f, t_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to 1/2$$

נשים לב כי בדוגמא האחרונה $\lambda(P_n) \to 0$, ולכן אילו <u>ידענו</u> שהפונקציה $f(x) = x$ אינטגרבילית, אז החישוב שעשינו היה אכן מראה ש- $\int_0^1 xdx = 1/2$. הנושא הבא שלנו יהיה, לכן, מציאת תנאים שיבטיחו אינטגרביליות של פונקציה.

<u>הגדרה.</u> תהי f חסומה בקטע ותהי $P = \{a_i\}$ חלוקה שלו. נסמן

$$M_i = \sup_{a_{i-1} \le x \le a_i} f(x) \qquad ; \qquad m_i = \inf_{a_{i-1} \le x \le a_i} f(x)$$

(i) **סכום דרבו העליון של f ביחס לחלוקה P הוא**

$$. \ U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i$$

באופן דומה סכום דרבו התחתון הוא $L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$.

(ii) **האינטגרל העליון של f על $[a, b]$ הוא**

$$. \ \overline{\int_a^b} f = \inf_P U(P, f)$$

בדומה לזה האינטגרל התחתון של f על $[a, b]$ הוא $\underline{\int_a^b} f = \sup_P L(P, f)$.

נשים לב שאם $M \le f(x) \le m$ ב- $[a,b]$ אז

$$m(b-a)=\sum_{i=1}^{n} m\Delta_i \le L(P,f) \le U(P,f) \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta_i = M(b-a)$$

לכל חלוקה P, ולכן האינטגרל העליון והתחתון סופיים.

<u>סימונים.</u>

(i) נאמר שחלוקה $Q=\{b_i\}$ היא עידון של החלוקה $P=\{a_i\}$ אם $Q \supset P$. העידון המשותף של החלוקות P ו- P' הוא החלוקה $Q=P\cup P'$.

(ii) התנודה של הפונקציה f בקטע I היא $\omega(f,I)=\sup\limits_{x\in I} f-\inf\limits_{x\in I} f$.

<u>למה.</u> תהי f חסומה בקטע I, ונסמן ב- Ω את התנודה של f בקטע. תהיינה P,Q חלוקות של I כך ש- Q עידון של P.

(i) $L(P,f)\le L(Q,f)$ ו- $U(Q,f)\le U(P,f)$.

(ii) אם Q מתקבלת מ- P ע"י הוספת m נקודות חלוקה, אז

$$L(Q,f)\le L(P,f)+m\lambda(P)\Omega \quad \text{ו-} \quad U(Q,f)\ge U(P,f)-m\lambda(P)\Omega$$

הוכחה. נוכיח רק את הטענות על סכומי דרבו התחתונים. ההוכחה לסכומים העליונים דומה.

Q מתקבלת מ- P ע"י סדרה של עידונים כשבכל אחד מהם מוסיפים בדיוק נקודה אחת, לכן די להוכיח את שני חלקי הלמה כאשר Q מתקבל מ- P ע"י הוספת נקודה אחת c הנמצאת, למשל, בקטע ה- j-י. (נשים לב שבאגף ימין של (ii) מופיעות, בשלבים השונים, חלוקות שונות. אך כולן מעדנות את P, ולכן הקוטר שלהן אינו עולה על $\lambda(P)$).

כל המחוברים ב- $L(P,f)$ ו- $L(Q,f)$ פרט לאלה המתאימים לקטע ה- j-י זהים. המחובר ה- j-י ב- $L(P,f)$ הוא $m_j(a_j-a_{j-1})$, ואם נסמן

$$k_1=\inf_{a_{j-1}\le x\le c} f(x) \;\; ; \;\; k_2=\inf_{c\le x\le a_j} f(x)$$

אז ב- $L(Q,f)$ מופיעים במקומו שני המחוברים $k_1(c-a_{j-1})+k_2(a_j-c)$. עפ"י ההגדרות $m_j\le \min(k_1,k_2)$ ו- $\max(k_1,k_2)\le m_j+\Omega$, ולכן

$$\begin{aligned} m_j(a_j-a_{j-1}) &\le k_1(c-a_{j-1})+k_2(a_j-c)\le (m_j+\Omega)(a_j-a_{j-1}) \\ &\le m_j(a_j-a_{j-1})+\Omega\lambda(P) \end{aligned}$$

כמבוקש. $\square$

<u>מסקנה.</u> תהי f חסומה בקטע I. אז לכל שתי חלוקות P ו- P' של I מתקיים

$$L(P,f) \le U(P',f)$$

הוכחה. תהי Q עידון משותף של P ושל P'. עפ"י חלק (i) של הלמה נקבל כי

$$L(P,f) \le L(Q,f) \le U(Q,f) \le U(P',f)$$

□

<u>משפט.</u> תהי f חסומה בקטע $[a,b]$, אז התנאים הבאים שקולים:

(i) f אינגרבילית רימן בקטע.

(ii) האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של f שווים:

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

(iii) לכל ε יש חלוקה Q של הקטע כך ש-

$$0 \le U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon$$

הוכחה. מהמסקנה נובע מיד כי $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$, ונראה תחילה את השקילות של התנאים (ii) ו- (iii).

אם (ii) מתקיים, אז עפ"י הגדרת האינטגרל העליון והתחתון יש, לכל $\varepsilon > 0$, חלוקות P ו- P' כך ש- $U(P,f) \le \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ וכך ש- $L(P',f) \ge \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$, ולכן $U(P,f) \le L(P',f) + \varepsilon$. עפ"י (i) בלמה נקבל שאם Q עידון משותף שלהן אז גם $U(Q,f) \le L(Q,f) + \varepsilon$, ו- (iii) מתקיים.

אם (ii) אינו מתקיים, אז לכל חלוקה Q יתקיים

$$U(Q,f) - L(Q,f) \ge \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \varepsilon_0 > 0$$

להוכחת השקילות של (i) לתנאים האחרים, נשים תחילה לב כי בהנתן חלוקה P אז כל סכום רימן עבור חלוקה זו מקיים $L(P,f) \le R(P,f,t_i) \le U(P,f)$ (כי לכל בחירה של t_i בקטע החלוקה ה- i-י מתקיים $m_i \le f(t_i) \le M_i$).יתר על כן, אם כל ה- m_i-ים וה- M_i-ים מתקבלים, אפשר לבחור את ה- t_i-ים כנקודות בהן הם מתקבלים ולקבל את $L(P,f)$ ו- $U(P,f)$ כסכומי רימן. גם אם מישהו מהם אינו מתקבל אז

עדיין אפשר, בבחירות מתאימות של ה- t_i-ים, לקרב כרצוננו את $L(P,f)$ ו- $U(P,f)$ ע"י סכומי רימן המתאימים.

כעת נניח ש- f אינטגרבילית רימן, ואז בהנתן ε נוכל לבחור חלוקה עדינה מספיק P כך ש- $\left|R(P,f)-\int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל סכום רימן המתאים ל- P. ע"ס ההערה לעיל נקבל שגם $\left|L(P,f)-\int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $\left|U(P,f)-\int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, ותנאי (iii) מתקיים.

להפך, ונניח ש- (ii) מתקיים ונסמן $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$.

נבחר חלוקה P^* כך ש- $U(P^*,f) < I + \frac{\varepsilon}{2}$ ונניח שיש בה m נקודות. נסמן ב- Ω את התנודה של f בקטע ונבחר $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2m\Omega}$. תהי P חלוקה המקיימת $\lambda(P) < \delta_1$, ונסמן ב- Q את העידון המשותף של P ו- P^* ונשים לב כי ב- Q יש לכל היותר m נקודות יותר מאשר ב- P. עפ"י הלמה (חלק (ii) לאי השוויון השני ו- (i) לרביעי) ועפ"י בחירת δ_1 נקבל כי כל סכום רימן המתאים ל- P יקיים

$$\begin{aligned} R(P,f) &\leq U(P,f) \leq U(Q,f) + m\lambda(P)\Omega \\ &< U(Q,f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq U(P^*,f) + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon \end{aligned}$$

באופן דומה נמצא δ_2 כך שלכל חלוקה P המקיימת $\lambda(P) < \delta_2$ ולכל סכום רימן המתאים לה יתקיים $R(P,f) > I - \varepsilon$. אם P תקיים $\lambda(P) < \min(\delta_1,\delta_2)$ יתקיימו שני התנאים ביחד, ולכן $|R(P,f) - I| < \varepsilon$. □

<u>הערות.</u> (i) נשים לב שקבלנו מההוכחה שאם f אינטגרבילית רימן אז $\int_a^b f$ מתלכד עם האינטגרל העליון והתחתון.

(ii) את השקילות של אינטגרביליות רימן לתנאי (iii) ניתן לנסח בצורה הנוחה הבאה, שבה נשתמש בפועל:

f אינטגבילית רימן בקטע I אםם לכל $\varepsilon > 0$ יש חלוקה Q כך ש- $\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon$, כאשר $\omega_i = \omega(I_i, f)$ הוא התנודה של f בקטע החלוקה ה- i-י, I_i, של Q.

במשפטים הבאים נשתמש בקריטריון שמצאנו כדי להראות שפונקציות חסומות מטיפוסים מסויימים הן אינטגרביליות.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה בקטע סגור $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

הוכחה. נזכור מאינפי 1 כי פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במידה שווה, כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\varepsilon)$ כך שלכל שתי נקודות x,y בקטע המקיימות $|x-y| < \delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

בפרט נקבל כי אם P חלוקה המקיימת $\lambda(P) < \delta$, אז $\omega_i < \varepsilon$ לכל i, ולכן

$$\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon \sum \Delta_i = \varepsilon(b-a)$$

והביטוי $\varepsilon(b-a)$ קטן כרצוננו. □

מהמשפט נובע שהפונקציה $f(x) = x$, שראינו בדוגמא, היא אכן אינטגרבילית, ולכן החישוב שעשינו אכן מראה שהאינטגרל שלה הוא $\frac{1}{2}$.

<u>משפט.</u> תהי f מונוטונית בקטע סגור $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

הוכחה. נניח למשל ש- f לא יורדת. נסתכל בחלוקה האחידה P_n של הקטע ל- n קטעים חלקיים שווים, ואז $\Delta_i = \frac{b-a}{n}$ לכל i, ובקטע החלוקה ה- i-י $[a_{i-1}, a_i]$ מתקיים ש- $m_i = f(a_{i-1})$ ו- $M_i = f(a_i)$. ולכן

$$\begin{aligned}\sum \omega_i \Delta_i &= \sum \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big)\Delta_i = \frac{b-a}{n} \sum \big(f(a_i) - f(a_{i-1})\big) \\ &= \frac{(b-a)}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0\end{aligned}$$

□

<u>משפט.</u> אם f חסומה ויש לה רק מספר סופי של נקודות אי-רציפות ב- $[a,b]$, אז f אינטגרבילית בקטע.

הוכחה. כדי לפשט את הסימונים נניח שיש ל- f רק נקודת אי רציפות אחת, ונסמנה ב- c. נניח גם כי c נקודה פנימית (ההוכחה דומה כשהיא נקודת קצה).

נקבע $\varepsilon > 0$. היות ו- f חסומה, יש לה תנודה סופית Ω, ונבחר $\eta > 0$ כך ש- $2\eta\Omega < \frac{\varepsilon}{3}$. בקטע $[a, c-\eta]$ הפונקציה f רציפה, ולכן אינטגרבילית. לכן יש חלוקה P של $[a, c-\eta]$ המקיימות $\sum_P \omega_i \Delta_i < \frac{\varepsilon}{3}$ (כאשר אנחנו מסמנים ב- $\sum_P$ את הסכום על קטעי החלוקה P).

באופן דומה יש חלוקה S של $[c+\eta, b]$ המקיימת $\sum_S \omega_i \Delta_i < \frac{\varepsilon}{3}$.

נסתכל כעת בחלוקה Q המתקבלת מצרוף שתי החלוקות P ו- S, כשגם הקטע $I_c = [c-\eta, c+\eta]$ הוא קטע בחלוקה Q. ואז עפ"י בחירת η נקבל

$$\begin{aligned}\sum_Q \omega_i \Delta_i &= \sum_P \omega_i \Delta_i + \omega_{I_c} 2\eta + \sum_Q \omega_i \Delta_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\eta\Omega + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

□

נעבור כעת לדון בתכונות הבסיסיות של האינטגרל.

<u>משפט.</u> תהיינה f ו- g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז

(i) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ גם הפונקציה $\alpha f + \beta g$ אינטגרבילית בקטע, ומתקיים

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

(ii) אם $f \le g$ בקטע אז
$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$
בפרט, אם $f \ge 0$ אז $\int_a^b f \ge 0$, ואם $m \le f(x) \le M$ לכל x בקטע, אז
$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

(iii) אם $a < c < b$ אז f אינטגרבילית בכל אחד מהקטעים החלקיים $[a,c]$ ו- $[c,b]$ ומתקיים
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

הוכחה. נקבע חלוקה P ונקודות t_i בקטעי החלוקה, ואז סכומי רימן של f, g ו- $\alpha f+\beta g$ מקיימים
$$R(P,\alpha f+\beta g,t_i) = \alpha R(P,f,t_i) + \beta R(P,g,t_i)$$
ואם $f \le g$ אז
$$R(P,f,t_i) \le R(P,g,t_i)$$
וכעת (i) ו- (ii) נובעים ע"י מעבר לגבול כאשר $\lambda(P) \to 0$.

להוכחת (iii) נוכיח תחילה ש- f אינגרבילית בקטעים החלקיים $[a,c]$ ו- $[c,b]$: היות ו- f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ יש לכל $\varepsilon > 0$ חלוקה P של $[a,b]$ כך ש-
$$\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon \qquad (*)$$
ע"י הוספת הנקודה c ל- P הביטוי הזה רק יקטן, ולכן בה"כ $c \in P$ והחלוקה P משרה חלוקות P_1 ו- P_2 של $[a,c]$ ו- $[c,b]$ בהתאמה. f אינטגרבילית בקטעים החלקיים כי גם חלוקות אלה תקיימנה את $(*)$ (כסכומים חלקיים מתאימים של הסכום באגף שמאל).

משהוכחנו שאגף ימין מוגדר היטב, השוויון נובע ע"י מעבר לגבול בסכומי רימן, כמו בהוכחת (i) ו- (ii), כשמשתמשים רק בחלוקות המכילות את הנקודה c. $\square$

<u>הערות.</u> (i) ראינו במשפט כי אם $f \ge 0$ אז $\int_a^b f \ge 0$. בד"כ העובדה שיש נקודה x_0 שבה $f(x_0) > 0$ אינה מספיקה כדי לקבל אי שוויון חריף $\int_a^b f > 0$, למשל, אם f זהותית 0 פרט לערך חיובי בנקודה הבודדת x_0. אך אם f רציפה אכן מתקבל אי שוויון חריף: אם $f(x_0) = c > 0$ אז מרציפות f נובע שיש סביבה $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ שבה מתקיים $f(x) \ge \frac{c}{2} > 0$, ולכן
$$\int_a^b f = \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^b f \ge 2\delta\frac{c}{2} > 0$$
כי כל המחוברים אי-שליליים, והמחובר האמצעי גדול מ- $2\delta\frac{c}{2}$.

(ii) האינטגרל $\int_a^b f$ הוגדר עבור $a<b$. באופן פורמלי נגדיר כעת

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

הגדרה זו משחררת מהצורך להשגיח על סדר הגבולות, וכל כללי האינטגרל נשמרים. בפרט הנוסחה ב- (iii) נשארת בתוקף, ואם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל $\alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$ מתקיים

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f$$

בלי תלות בסדר של α,β,γ. (הוכיחו זאת כתרגיל!).

את הוכחת המשפט הבא נשאיר כתרגיל

<u>משפט.</u> אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, ואם $g=f$ פרט למספר סופי של נקודות, אז גם g אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש- $\int_a^b g = \int_a^b f$.

נסיים את הפרק על אינגרל רימן בעוד כמה תוצאות על אינטגרביליות.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$, ותהי φ רציפה בקטע סגור I המכיל את הטווח של f, אז גם ההרכבה $\varphi\circ f$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$.

הוכחה. נקבע $\varepsilon>0$. הפונקציה φ רציפה בקטע סגור, לכן היא חסומה בו, ויש לה תנודה סופית בקטע שנסמנה ב- Ω. היא גם רציפה ב- I במ"ש, ולכן יש $\delta>0$ כך שלכל $s,t\in I$ כך ש- $|s-t|<\delta$ מתקיים $|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon$. בה"כ נוכל להניח כי $\delta<\varepsilon$.

נבחר כעת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש- $\sum \omega_i^f \Delta_i < \delta^2$, כאשר ω_i^f היא התנודה של f בקטע החלוקה ה- i-י, ונסמן ב- $\omega_i^{\varphi\circ f}$ את התנודה של $\varphi\circ f$ בקטע החלוקה ה- i-י.
המשפט יוכח כשנראה כי

$$\sum \omega_i^{\varphi\circ f}\Delta_i < \varepsilon(b-a+\Omega) \qquad (*)$$

לשם כך נסמן

$$I_1=\{i:\omega_i^f<\delta\} \quad ; \quad I_2=\{i:\omega_i^f\geq\delta\}$$

ונפרק את הסכום באגף שמאל של $(*)$ לשני סכומים חלקיים: $\sum_1+\sum_2$ כאשר $\sum_1$ הוא הסכום על $i\in I_1$, ו- $\sum_2$ הוא הסכום על $i\in I_2$, ונעריך כל אחד מהסכומים האלה לחוד.

אם $i\in I_1$, אז עפ"י בחירת δ נקבל כי $\omega_i^{\varphi\circ f}<\varepsilon$, ולכן

$$\sum_1 = \sum_{i\in I_1}\omega_i^{\varphi\circ f}\Delta_i < \varepsilon\sum_{i\in I_1}\Delta_i \leq \varepsilon(b-a)$$

להערכת $\sum_2$ נשתמש בכך ש- $\omega_i^f \geq \delta$ לכל $i \in I_2$ ולכן

$$\delta^2 > \sum \omega_i^f \Delta_i \geq \sum_{i\in I_2} \omega_i^f \Delta_i \geq \sum_{i \in I_2} \delta \Delta_i$$

וע"י חלוקה ב- δ נקבל כי $\sum_{i\in I_2} \Delta_i < \delta$, והיות ש- $\omega_i^{\varphi\circ f} \leq \Omega$ לכל i נקבל

$$\sum_2 = \sum_{i\in I_2} \omega_i^{\varphi\circ f}\Delta_i \leq \Omega \sum_{i\in I_2}\Delta_i < \delta\Omega < \varepsilon\Omega$$

$\square$

הדוגמאות (ii) ו- (iii) הבאות חשובות מאוד ומשתמשים בהן לעתים קרובות.

<u>דוגמאות.</u>

(i) אם נקח $\varphi(t) = t^2$, נקבל כי f^2 אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית. (ובאופן דומה גם f^n אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית).

(ii) אם f ו- g אינטגרביליות כך גם fg, כי נציג $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$, וכל הפונקציות באגף ימין אינטגרביליות ע"ס (i).

(iii) אם נקח $\varphi(t) = |t|$, נקבל כי $|f|$ אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית. הפעלת אי שוויון המשולש על סכומי רימן תיתן גם כי $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

(iv) אם נקח $\varphi(t) = 1/t$, נקבל כי $1/f$ אינטגרבילית לכל f אינטגרבילית כך שיש $c > 0$ באופן ש- $|f(x)| \geq c$ לכל x.

(v) הדוגמאות הקודמות מראות שביצוע פעולות "אלגבריות" על f שומר על תכונת האינטגרביליות. אך, כפי שהדוגמא הבאה מראה תהליכי גבול אינם שומרים בהכרח על האינטגרביליות, ויש לטפל בהם בזהירות רבה. (אנחנו נטפל בתהליכי גבול כאלה בהמשך).

נסדר את הרציונלים בקטע $[0,1]$ בסדרה $\{s_n\}$, ונגדיר

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{s_1, \dots, s_n\} \text{ כאשר} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז ה- f_n-ים אינטגרביליות (כי יש להן רק מספר סופי של נקודות אי רציפות), אך לכל $x \in [0,1]$ מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = D(x)$, כאשר D היא פונקציית דיריכלה, וכפי שראינו היא אינה אינטגרבילית.

<u>הגדרה.</u> קבוצה $E \subset \mathbb{R}$ נקראת "בעלת מידה 0" אם לכל ε יש כיסוי של E ע"י סדרת קטעים (סופית או אינסופית) $\{I_n\}$ שסכום ארכיהם קטן מ- ε.

<u>דוגמאות.</u>

(i) כל קבוצה בת מניה היא בעלת מידה 0, כי נסמן את אבריה ב- $\{a_n\}$, ובהנתן ε

נגדיר $I_n = (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$, ואז סכום ארכיהם הוא $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$.

(ii) יש גם קבוצות לא בנות מניה שהן בעלת מידה 0. בתרגיל תבנו קבוצה כזו: קבוצת קנטור.

(iii) הוכיחו כתרגיל שקטע לא מנוון $[a, b]$ אינו בעל מידה 0. (רמז: הוכיחו תחילה שאם הקטע מכוסה ע"י מספר סופי של קטעים, אז סכום ארכיהם הוא לפחות $b - a$. אח"כ הראו כי בה"כ אפשר להניח כי קטעי הכיסוי פתוחים, והשתמשו בלמה של היינה-בורל כדי לעבור לתת כיסוי סופי).

נסיים במשפט המאפיין באופן מלא מתי פונקציה היא אינטגרבילית.

<u>משפט.</u>[לבג] פונקציה חסומה f המוגדרת בקטע I היא אינטגרבילית שם אםם קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא בעלת מידה 0.

הוכחה. נביא רק את ההוכחה של צד אחד של המשפט: אם קבוצת נקודות אי הרציפות של f (שנסמנה ב- E) היא בעלת מידה 0, אז היא אינטגרבילית.

נסמן את התנודה של f ב- Ω. לכל קטע J נסמן את ארכו ב- $|J|$.

נקבע $\varepsilon > 0$ ונמצא חלוקה P כך ש- $\sum w_i \Delta_i < \varepsilon$. לשם כך נגדיר כיסוי פתוח של I באופן הבא: לכל נקודת רציפות $x \in I$ של f נמצא קטע פתוח I_x המכיל אותה כך ש- $\omega(f, I_x) < \frac{\varepsilon}{2|I|}$. האיחוד $\cup I_x$ בוודאי מכסה את $I \setminus E$, וכדי לקבל כיסוי של כל I נוסיף לכיסוי עוד סדרת קטעים פתוחים I_n המכסה את E וכך ש- $\sum |I_n| < \frac{\varepsilon}{2\Omega}$.

ע"ס הלמה של היינה-בורל יש לכיסוי הזה תת כיסוי סופי, ונסמן ב- P את החלוקה הנקבעת ע"י קצוות הקטעים בתת הכיסוי הסופי הזה.

להערכת $\sum w_i \Delta_i$ נבחין בשני סוגים של קטעי חלוקה. הסוג הראשון הוא קטעים המוכלים בקטע מהטיפוס I_x. בכל קטע כזה התנודה ω_i של f בקטע קטנה מ- $\frac{\varepsilon}{2|I|}$ ותרומתם הכוללת לסכום היא

$$\sum\nolimits_1 w_i \Delta_i \leq \frac{\varepsilon}{2|I|} \sum\nolimits_1 \Delta_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

כי סכום ארכיהם בודאי אינו עולה על אורך הקטע I כולו.

הסוג השני הוא קטעים המוכלים בקטע מהטיפוס I_n, ותרומתם הכוללת לסכום היא

$$\sum\nolimits_2 w_i \Delta_i \leq \Omega \sum\nolimits_2 \Delta_i \leq \Omega \sum |I_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

כי $\sum |I_n| \leq \frac{\varepsilon}{2\Omega}$.

יש אולי קטעי חלוקה שהם גם מסוג הראשון וגם מסוג השני, ואלה נספרים פעמיים, ולכן

$$\sum w_i \Delta_i \leq \sum\nolimits_1 w_i \Delta_i + \sum\nolimits_2 w_i \Delta_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

הצד שהוכחנו של המשפט מכיל, כמובן, את המשפט שפונקציה חסומה עם מספר סופי של נקודות אי-רציפות היא אינטגרבילית. כפי שהטענה הבאה מראה, הוא מכיל גם את המשפט שפונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית.

<u>טענה.</u> לפונקציה מונוטונית בקטע סגור יש לכל היותר מספר בן מניה של נקודות אי-רציפות

הוכחה. כזכור, נקודות אי הרציפות של פונקציה מונוטונית הן נקודות קפיצה. לכל n נסמן ב- C_n את קבוצת הנקודות שבהן יש ל- f קפיצה גדולה מ- $1/n$ ונראה כי כל C_n היא סופית. לכן קבוצת כל נקודות אי-הרציפות, $\cup C_n$, בת מניה.

נניח כי f אינה יורדת והקטע הוא $[a,b]$, ונסמן ב- J_x את הקפיצה של f בנקודה x, ואז

$$f(b)-f(a) \geq \sum_{x \in C_n} J_x \geq \frac{1}{n}|C_n|$$

ולכן $|C_n| \leq n(f(b)-f(a)) < \infty$. $\square$

1.3 הקשר בין האינטגרל המסויים לפונקציה הקדומה.

תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ונגדיר פונקציה חדשה $F(x)=\int_a^x f$. הפונקציה F מוגדרת היטב בקטע, ונחקור את תכונותיה.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז הפונקציה $F(x)=\int_a^x f$ רציפה בו.

הוכחה. אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ אז היא חסומה בו ונניח כי $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in [a,b]$. נראה כי F רציפה במ"ש. נקבע $\varepsilon > 0$ ונבחר $\delta = \varepsilon/M$. אם $x<y$ מקיימות $y-x<\delta$, אז

$$F(y)-F(x)=\int_a^y f-\int_a^x f=\int_x^y f$$

ולכן

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| \leq M|y-x| < \delta M=\varepsilon \ .$$

$\square$

<u>משפט.</u>[המשפט היסודי של החדו"א] תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ורציפה בנקודה $x_0 \in [a,b]$, אז $F(x)=\int_a^x f$ גזירה ב- x_0 ומתקיים

$$F'(x_0)=f(x_0) \ .$$

(אם x_0 נקודת קצה של הקטע אז הנגזרת היא חד-צדדית).

הוכחה. נבדוק נגזרת מימין. נבחר $x>x_0$ ונציג

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f-\int_a^{x_0} f=\int_{x_0}^x f \ .$$

נסמן $M_x=\sup_{x_0 \leq t \leq x} f(t)$ ו- $m_x=\inf_{x_0 \leq t \leq x} f(t)$, ואז אי השוויונים

$$m_x(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f \leq M_x(x-x_0)$$

נותנים כי

$$m_x \le \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \le M_x$$

אך רציפות f ב- x_0 נותנת כי $\lim\limits_{x\to x_0^+} m_x = \lim\limits_{x\to x_0^+} M_x = f(x_0)$, ולכן

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0) \ .$$

באופן דומה מראים כי $F'_-(x_0)=f(x_0)$. $\square$

<u>הערה.</u> הנחת הרציפות של f ב- x_0 חיונית. למשל, הפונקציה $f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}$ אינה רציפה בנקודה $x_0=0$, וחישוב ישיר מראה כי $F(x)=|x|$, שאינה גזירה בנקודה.

<u>מסקנה.</u> אם f רציפה ב- $[a,b]$ אז יש לה פונקציה קדומה בקטע. פונקציה קדומה כזו ניתנת ע"י הנוסחה $F(x)=\int_a^x f$.

<u>הערות.</u> (i) אין חשיבות לקביעת הגבול התחתון בהגדרת F דוקא כקצה הקטע a. אם נבחר איזושהי נקודה c בקטע ונגדיר $F_1(x)=\int_c^x f$ אז F_1-F היא הקבוע $\int_a^c f$ ולכן יש להן אותה נגזרת.

(ii) אפשר להסתכל על האינטגרל גם כפונקציה של הגבול התחתון. אם $G(x)=\int_x^b f$ אז נוכל גם להציג $G(x)=-\int_b^x f$ ולכן $G'(x)=-f(x)$.

(iii) אם $b(x)$ פונקציה גזירה ואם $H(x)=\int_a^{b(x)} f$ אז $H(x)=F(b(x))$ וכשגוזרים עפ"י כלל השרשרת מקבלים $H'(x)=f(b(x))b'(x)$.

(iv) באופן כללי יותר, אם $\phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f$ אז $\phi(x)=F(b(x))-F(a(x))$ ולכן $\phi'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$.

למשל, $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{7x^2} \sin t dt = 14x\sin(7x^2)-(-\sin x)\sin(\cos x)$.

המשפט הבא (והמשפט שלאחריו) הם תרגום של המשפט היסודי של החדוא לנוסחה מעשית לחישוב האינטגרל המסויים

<u>משפט.</u>[נוסחת ניוטון-לייבניץ] תהי f רציפה ב- $[a,b]$ ותהי G פונקציה קדומה שלה, אז

$$\int_a^b f = G(b)-G(a) \ .$$

הוכחה. הפונקציה $F(x)=\int_a^x f$ גם היא פונקציה קדומה של f, ולכן יש קבוע C כך ש- $G=F+C$. נציב $x=a$, ואז $F(a)=0$ נותן כי $C=G(a)-F(a)=G(a)$, ולכן

$$\int_a^b f=F(b)=G(b)-C=G(b)-G(a) \ .$$

$\square$

נוסחת ניוטון לייבניץ מאפשרת לחשב את $\int_a^b f$ בלי חלוקות ובלי קירובים - פשוט מוצאים פונקציה הקדומה ל- f ומשתמשים בנוסחה. למשל

$$\int_0^\pi \sin x dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-\cos\pi-(-\cos 0)=2 \ .$$

למעשה ניתן להשתמש בנוסחה דומה גם בתנאים יותר כלליים, ולהחליש את הדרישה שהאינטגרנד הוא פונקציה רציפה.

<u>משפט.</u> תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ונניח שיש פונקציה רציפה G כך ש- G גזירה ומקיימת $G'(x)=f(x)$ לכל x בקטע פרט לקבוצה סופית $C=\{c_i\}$ של נקודות. אז

$$\int_a^b f=G(b)-G(a) \ .$$

הוכחה. נתבונן בחלוקה $P=\{a_i\}$ המעדנת את החלוקה הנקבעת ע"י C, ואז בכל קטע חלוקה G מקיימת את תנאי משפט לגרנז', ולכן יש נקודה $t_i\in[a_{i-1},a_i]$ כך ש-

$$G(a_i)-G(a_{i-1})=G'(t_i)\Delta_i=f(t_i)\Delta_i$$

ולכן

$$G(b)-G(a)=\sum\big(G(a_i)-G(a_{i-1})\big)=\sum f(t_i)\Delta_i$$

אך אגף ימין הוא סכום רימן של f ולכן שואף, כשהחלוקה P מתעדנת, ל- $\int_a^b f$. $\square$

למשל, $G(x)=|x|$ רציפה, גזירה פרט לנקודה הבודדת $x_0=0$, ונגזרתה שם היא

$$G'(x)=f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

ואכן $\int_a^b f=|x|\Big|_a^b$ לכל a,b.

1.4 שימושים של האינטגרל המסוים

(i) אפשר לחשב בעזרת אינטגרלים גם שטחים של קבוצות יותר כלליות. למשל, השטח שבין שני גרפים ניתן לחישוב כהפרש השטחים שהם מגבילים. לדוגמא, השטח (הגיאומטרי) שבין הגרפים של x^2 ושל x^3 מעל הקטע $[0,2]$ הוא

$$\int_0^2 |x^2 - x^3| dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx$$

(ii) גוף נע לאורך הציר הממשי כשמהירותו בזמן t היא $v(t)$ ס"מ/לשניה. בזמן $t=0$ הוא נמצא בנקודה a. איפה הוא ימצא בזמן $t=T$?

נסמן את מיקומו בזמן t ב- $S(t)$. כידוע $S'(t) = v(t)$ ולכן (בהנחה ש- v פונקציה רציפה, כך שנוסחת ניוטון לייבניץ תקפה) $S(T) = a + \int_0^T v(t)dt$.

<u>הערה.</u> (a) הגדרת האינטגרל כשלילי כשהפונקציה שלילית נראתה "מלאכותית" כשעסקנו בחישובי שטחים. כשאנחנו מסתכלים על הנוסחאות לאינטגרל כמבטאות את מיקומו של הגוף זה מובן מאליו: הגוף נע ימינה כשהמהירות חיובית ושמאלה כשהיא שלילית!

אם רוצים לחשב את הדרך הכוללת שהגוף עובר עד לזמן T (ולא את מיקומו) אז הנוסחה היא $\int_0^T |v(t)|dt$. לדוגמא, נניח כי $v(t) = \sin t$ ו- $a=0$. אז $S(T) = -\cos T$, שיכול להיות (עפ"י הערך של T) חיובי, שלילי או אפס. המרחק הכולל שהגוף יעבור עד לזמן T הוא $\int_0^T |\sin t| dt$.

(b) חשוב מאוד להבין את הנוסחה $S(T) = a + \int_0^T v(t)dt$ גם עפ"י ההגדרה של האינטגרל כגבול של סכומי רימן: נקח חלוקה עדינה $0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ של הקטע $[0,T]$, ואז הגוף מועתק בקטע החלוקה ה- i-י בערך ב- $v(t_i)(t_i - t_{i-1})$, ולכן סכום רימן $\sum_{i=1}^N v(t_i)(t_i - t_{i-1})$ הוא <u>קירוב</u> של ההעתק הכללי <u>האמיתי</u> בפרק הזמן שבין $t=0$ לבין $t=T$.

אבל מבחינה מתמטית סכום זה גם מקרב (עפ"י הגדרת האינטגרל) את האינטגרל $\int_0^T v(t)dt$. ולכן כשעוברים לגבול מקבלים כי האינטגרל מתלכד עם ההעתק.

(c) זה גם המקום להסביר את הסימון לאינטגרל המסוים. דרך טובה לחשוב על האינטגרל המסוים היא כעל "סכום רציף". נסתכל בסכום רימן $\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i$ של f בקטע $[a,b]$ ביחס לחלוקה מסוימת $P = \{a_i\}$. כשהחלוקה הולכת ומתעדנת המחוברים הולכים וקטנים ומספרם גדל. בגבול מחליפים את האורך (הקטן) Δ_i ב"אורך האיפיניטיסימלי" dx, את המחוברים $f(t_i)\Delta_i$ ב"מחובר האיפיניטיסימלי" $f(x)dx$ ואת המספור שלהם, שהוא i בין 1 ל- n, ב"מספור רציף" שהוא x בין a לבין b. (ובאופן קליגרפי $\sum_{i=1}^n$ מוחלף בסימן האינטגרל $\int_a^b$ ו- Δ_i מוחלף ב- dx). האנלוגיה הזו הביאה להכללת ה- dx בסימון.

יתר על כן, לכל גורם בתוך האינטגרל יש יחידות: ל- $f(x)$ יש היחידות של f ול- dx היחידות של Δ_i, כלומר של x. באופן כזה ל"סכום הרציף", האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$, יש אותן יחידות כמו לסכומי רימן $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta_i$.

בחישובי השטחים הן ל- x והן ל- f יש יחידות אורך, ולכן לאינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ יש יחידות שטח. בדוגמא עם המהירות ל- t יש יחידות זמן ול- v יש יחידות מהירות, כלומר אורך/זמן, ולכן לאינטגרל $\int_a^b v(t)dt$ יש יחידות אורך.

ההסתכלות על האינטגרל כסכום רציף היא מאוד אינטואיטיבית ויעילה, ומהנד-סים ופיסיקאים משתמשים בה לעתים קרובות. אנחנו נדגים זאת גם בחלק מהדוג-מאות הבאות.

(iii) תיל (המזוהה מתמטית עם הקטע $[a,b]$) הוא בעל צפיפות משתנה. נסמן ב- $m(x)$ את המסה של הקטע $[a,x]$, ואז צפיפות המסה בנקודה x ניתנת ע"י הקשר $\rho(x)=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)-m(x)}{h}$, כלומר $\rho(x)=m'(x)$.
אם נתונה הצפיפות, $\rho(x)$, אז עפ"י המשפט היסודי של החדו"א אפשר לשחזר את המסה ע"י הנוסחה $m(x)=\int_a^x \rho(t)dt$. היחידות של ρ הן מסה/אורך, היחידות של x הן אורך, ושל m מסה.
בהסתכלות על האינטגרל כסכום רציף אנחנו מסכמים את המסה האיפיניטיסימ-לית, $\rho(x)dx$, של הקטע האיפיניטיסימלי $[x,x+dx]$ עבור כל ערכי x בין a בין b.

<u>הערה.</u> המכנה המשותף לדוגמאות בהן יופיע אינטגרל הוא שלגודל הפיסיקלי שאותו מנסים לחשב (שטח, העתק, מסה וכו') יש שתי תכונות:
אדיטיביות - כשמפרקים קטע של המשתנה החפשי x לקטעים חלקיים, הגודל הכולל המבוקש (שטח, העתק, מסה) הוא סכום הגדלים בקטעים החלקיים.
מכפלה - כאשר הפונקציה הנתונה קבועה בקטע (גובה, מהירות, צפיפות) אז הגודל המבוקש הוא מכפלת הקבוע באורך הקטע.
כשתכונות אלה מתקיימות הסכומים $\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i$ נותנים קירוב של התוצאה המבוקשת, כי הם מקרבים את f ע"י פונקצית המדרגות המקבלת את הערך הקבוע $f(t_i)$ בקטע החלוקה ה- i-י. אך הסכומים הם בדיוק סכומי רימן המקרבים את $\int_a^b f$.

(iv) דוגמא נוספת מאותו סוג: העבודה הנעשית כשגוף בעל מסת יחידה נע לאורך הקטע $[a,b]$ כאשר הכח הפועל עליו בנקודה x הוא $f(x)$. אם הכח $f(x)$ הוא קבוע, F_1, אז העבודה היא המכפלה $(b-a)F_1$ (בנירמול מתאים של היחידות), כמו כן הסכום של העבודות בקטעים זרים נותן את העבודה הכוללת. לכן כאשר f אינה קבועה העבודה הכוללת היא "הסכום הרציף" $\int_a^b f(x)dx$.

(v) הערך הממוצע של f בקטע $[a,b]$ הוא $\int_a^b f(x)dx/(b-a)$ והממוצע המשוקלל הוא $\int_a^b f(x)w(x)dx$, כאשר פונקצית השקלול היא $w(x)\geq 0$ ו- $\int_a^b w(x)dx=1$.

(vi) תהי f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$, אז האורך של הגרף שלה ניתן ע"י הנוסחה $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. נראה זאת בשתי דרכים, אך נתחיל בהגדרת האורך של הגרף. נזכור כי אורך הקטע המחבר את הנקודות (a_1,a_2) ו- (b_1,b_2) במישור הוא $\left((a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

<u>הגדרה.</u> **תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$. לכל חלוקה סופית $P=\{a_i\}$ של הקטע נסתכל באורך $\sum\left((a_i-a_{i-1})^2+(f(a_i)-f(a_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}}$ של המצולע המקשר בין הנקודות $(a_i,f(a_i))$. אם הגבול**

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum\left((a_i-a_{i-1})^2+(f(a_i)-f(a_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

קיים וערכו L, נאמר שלגרף של f יש אורך, ושהאורך הוא L.

נראה כעת את הדרך המתמטית המדוייקת להוכחת הנוסחה. נשים לב שבסימונים המקובלים שלנו $\Delta_i = a_i - a_{i-1}$, וכי ע"ס משפט לגרנז', יש $a_{i-1} < t_i < a_i$ כך ש- $f(a_i) - f(a_{i-1}) = f'(t_i)\Delta_i$. עפ"י ההנחות הפונקציה $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ רציפה, ולכן אינטגרבילית. לכן נוכל להציג

$$\sum \left((a_i - a_{i-1})^2 + (f(a_i) - f(a_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum \sqrt{1 + f'(t_i)^2}\,\Delta_i$$

שהוא סכום רימן המתכנס לאינטגרל $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

הדרך האינטואיטיבית להוכחת הנוסחה היא להסתכל במשולש האיפיניטיסימלי ישר הזווית שבסיסו הוא הקטע $[(x, f(x)), (x + dx, f(x))]$ (אורך הקטע הזה הוא dx) וגבהו $f'(x)dx$. ולכן אורך היתר הוא $\sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, ואורך הגרף הוא "הסכום" של כל ארכי היתרים האלה "כשמסכמים" על כל ה- x-ים, כלומר $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

<u>דוגמא.</u>

נחשב את ההיקף של מעגל היחידה. לשם כך נחשב את אורך הגרף של הפונקציה $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ב- $[-1, 1]$, שהוא חצי ההיקף. בדוגמא זו $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ולכן $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{1-x^2}$ ואורך הגרף הוא

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

ולכן הקף המעגל כולו הוא 2π.

בהמשך הקורס נדון בעקומים כלליים (שאינם בהכרח גרפים של פונקציות) ונקבל נוסחה לחישוב ארכם.

1.5 חישוב האינטגרל המסוים

בחישוב של האינטגרל המסויים נשתמש בשיטות שפיתחנו למציאת הפונקציה הקדומה (אינטגרציה בחלקים והצבה), אך נעשה זאת תוך התייחסות לגבולות האינטגרל. (מבחינה מעשית זה לפעמים אפילו מפשט את החישוב).

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$. נסמן את האינטגרל ב- I ונבצע שתי אינטגרציות בחלקים

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx = -\int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= -\left\{e^x \cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx\right\} = -\{-e^\pi - 1 + I\} \end{aligned}$$

ולכן $I = (e^\pi + 1)/2$.

(ii) $\quad I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ (זה השטח של רבע מעיגול היחידה). נציב $x = \sin t$ ואז $dx = \cos t dt$, ולכן $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$.

ניתן שלוש שיטות לחישוב האינטגרל I.

א. נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t dt = \cos t \sin t \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin t \sin t dt \\
&= 0 + \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) dt = \frac{\pi}{2} - I
\end{aligned}
$$

ולכן $I = \frac{\pi}{4}$.

ב. נשתמש בזהות $\cos^2 t = (1 + \cos 2t)/2$ ונקבל

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)/2 dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/4 \ .
$$

ג. במקום $x = \sin t$ נציב $x = \cos t$ ונקבל $I = -\int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$. עפ"י הזהות $\sin^2 + \cos^2 = 1$ נקבל

$$
2I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2
$$

ו- $I = \pi/4$. (שכנעו עצמכם כי $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt$ גם ע"י הסתכלות בגר-פים).

1.6 חישובים מקורבים

כפי שהערנו כבר אין דרך שיטתית למציאת הפונקציה הקדומה. יתר על כן, אפילו אם מוצאים פונקציה מפורשת, כגון $\sin x$, כשמציבים את הגבולות התוצאה, בדר"כ, איננה מספר "פשוט" ויש להשתמש בשיטות קירוב לחישובו.

שיקולים אלה אומרים שעבודתנו לא הסתיימה עם המשפט היסודי של החדו"א ועלינו ללמוד איך מחשבים את האינטגרל באופן מקורב.

דרך מתבקשת אחת היא לקרב את האינטגרנד בעזרת משפט טיילור, ונראה כי זה אכן מכשיר יעיל מאד.

<u>דוגמא.</u>

לחישוב $\int_0^1 \sin x^2 dx$ נשתמש בנוסחת טיילור עבור $\sin t$

$$
\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \ldots \pm \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(t)
$$

עם שארית המקיימת $|R_n(t)| \le \frac{|t|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.
נציב $t = x^2$, נבצע אינטגרציה ונקבל

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \left\{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \ldots \pm \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + R_n(x^2)\right\} dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{11\cdot 120!} \ldots \pm \frac{1}{(4n+3)\cdot(2n+1)!} + E_n\end{aligned}$$

כאשר $|E_n| \le \int_0^1 \frac{x^{4n+6}dt}{(2n+3)!} = \frac{1}{(4n+7)(2n+3)!}$.

<u>משפט.</u>[כלל המלבן] תהי f בעלת שתי נגזרות רציפות בקטע $[a,b]$, ונסמן את אמצע הקטע ב- $c = \frac{a+b}{2}$. אז $\int_a^b f = f(c)(b-a) + R$ כאשר השגיאה R מקיימת

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \; .$$

הוכחה. נשתמש בפיתוח טיילור מסדר 1 סביב c ונקבל כי

$$f(t) = f(c) + f'(c)(t-c) + \frac{1}{2}f''(\gamma_t)(t-c)^2$$

כאשר γ_t נקודת ביניים בין c לבין t. כעת נבצע אינטגרציה בין a ל- b ונשים לב כי המחובר השני באגף ימין יתאפס, ואילו השלישי חסום ע"י

$$\int_a^b \frac{1}{2}f''(\gamma_t)(t-c)^2 dt \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \int_a^b \frac{1}{2}(t-c)^2 dt = \frac{(b-a)^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \; .$$

$\square$

בעזרת כלל המלבן אפשר, למשל, להעריך את השגיאה בקירוב האינטגרל על ידי סכומי רימן: כשנשתמש בו עם החלוקה האחידה אז האורך של כל קטע חלקי הוא $a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ ונקבל כי

$$\int_a^b f = \sum_{i\le n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f = \sum_{i\le n} \Big(f(c_i)(a_i - a_{i-1}) + R_i\Big)$$

ולכן ההפרש $E = \int_a^b f - \sum \Big(f(c_i)(a_i - a_{i-1})\Big) = -\sum R_i$ מקיים

$$|E| \le n\frac{(\frac{b-a}{n})^3}{24} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \; .$$

נציג כעת שימוש אחר של כלל המלבן שידגים איך אינטגרלים מופיעים במקומות לא צפויים מראש.

<u>משפט.</u>[נוסחת סטירלינג] $n! \approx \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$, כלומר, $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}} \to 1$.

הוכחה. אנחנו לא נוכיח כי הגבול הוא 1, אלא רק שיש קבועים $\alpha, \beta > 0$ כך ש- $\alpha \le \frac{n!}{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}} \le \beta$, וזה ינבע כשנראה שיש סדרה חסומה E_n כך ש- $n! = e^{E_n}$.
נקבע $j \ge 2$, ונציג עפ"י כלל המלבן

$$\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \ln t dt = \ln j + R_j$$

כאשר $24|R_j| \le \max_{x \in [j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}]} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(j-\frac{1}{2})^2}$. הסדרה $A_n = \sum_{j=2}^{n} R_j$ חסומה, כי

$$24|A_n| \le \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-\frac{1}{2})^2} < \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

וכעת נציג

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= \sum_{j=2}^{n} \ln j = \sum_{j=2}^{n} \left(\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \ln t dt - R_j \right) \\
&= \int_{1+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx - A_n = (x \ln x - x)\Big|_{1+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - A_n \\
&= (n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2}) - B_n = (n+\frac{1}{2}) \ln n - n + E_n
\end{aligned}$$

כאשר הסדרה $B_n = A_n + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{2}$ היא סדרה חסומה. נשים לב שגם הסדרה $E_n = (n+\frac{1}{2}) \ln \frac{n+\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{2} - B_n$ חסומה, כי

$$(n+\frac{1}{2}) \ln \frac{n+\frac{1}{2}}{n} = \ln(1+\frac{1}{2n})^{n+\frac{1}{2}} \to \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$n! = e^{(n+\frac{1}{2})\ln n - n + E_n} = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} C_n .$$

$\square$

1.7 אינטגרלים מוכללים

עד עתה טיפלנו באינטגרלים של פונקציות חסומות בקטע חסום. כעת נרצה להכליל את האינטגרל למקרים בהם תנאים אלה אינם מתקיימים.

<u>הגדרה.</u> (i) תהי f פונקציה המוגדרת בקרן $[a, \infty)$ ואינטגרבילית בכל קטע חלקי $[a, c]$.
אם הגבול $\lim_{c \to \infty} \int_a^c f$ קיים נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקרן קיים (ובקיצור נאמר פשוט ש- f אינטגרבילית בקרן), ונסמן

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f .$$

(ii) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b)$ ואנטגרבילית בכל קטע חלקי $[a,c]$. אם קיים הגבול משמאל $\lim_{c\to b^-}\int_a^c f$ נאמר שהאינטגרל המוכלל של f בקטע $[a,b]$ קיים (ובקיצור נאמר פשוט ש- f אינטגרבילית בקטע), ונסמן

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f \ .$$

באופן דומה מגדירים אינטגרל מוכלל בקרן שמאלית, או בקטע סופי כשהסינגולריות היא בקצה השמאלי.
אם הגבול קיים רק במובן הרחב והוא $+\infty$ (או $-\infty$), נאמר לפעמים כי האינטגרל מתבדר ל- ∞ (או $-\infty$).

<u>הערה.</u> קיומו או אי קיומו של האינטגרל $\int_a^\infty f$ תלוי רק בהתנהגות של f באינסוף ולא בבחירת הנקודה a (אולם ערכו של האינטגרל, אם הוא קיים, כן תלוי, כמובן, ב- a), כי אם $a<c$ אז

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f \ .$$

לפעמים נאמר לכן כי $\int^\infty f$ קיים בלי לציין כלל גבול תחתון. הערה דומה תקפה ביחס לאינטגרל של פונקציה לא חסומה בקטע סופי.

<u>דוגמאות.</u>

(i) האינטגרל $\int_0^\infty \sin x$ לא קיים, כי ל- $\int_0^c \sin x = \cos c - 1$ אין גבול כאשר $c\to\infty$.

(ii) האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x}$ מתכנס כי $\int_0^c e^{-x} = 1-e^{-c}\to 1$ כאשר $c\to\infty$.

(iii) נבדוק את $\int_1^\infty x^{-p}$.
אם $p=1$ אז $\int_1^c x^{-1} = \ln c\to\infty$ והאינטגרל מתבדר.
אם $p\neq 1$ אז $\int_1^c x^{-p} = \frac{1}{-p+1}(c^{-p+1}-1)$ והגבול כאשר $c\to\infty$ לא קיים אם $p<1$, והוא $\frac{1}{p-1}$ אם $p>1$.

(iv) נבדוק את $\int_0^1 x^{-p}$. כאן הבעיה היא ב- 0, ועפ"י חישוב דומה ל- (iii) האינטגרל ל- $p\geq 1$ מתבדר, ועבור $p<1$ מקבלים $\int_c^1 x^{-p} = \frac{1}{-p+1}(1-c^{-p+1}) \to \frac{1}{1-p}$ כאשר $c\to 0$.

אם יש ל- f מספר סינגולריות (ב- $\pm\infty$ או מימין או משמאל בנקודות סופיות) יש לבדוק כל אחת מהן בנפרד, והאינטגרל המוכלל קיים רק כאשר הוא קיים בכל אחת מהן.

<u>דוגמאות.</u>

(i) האינטגרל $\int_0^\infty x^{-p}dx$ לא קיים לאף p, כי אם $p \geq 1$ אז $\int_0^1 x^{-p}dx$ לא מתכנס, ואם $p \leq 1$ אז $\int_1^\infty x^{-p}dx$ לא מתכנס.

(ii) הפונקציה $\frac{2x}{x^2+1}$ איזוגית, ולכן ניתן היה לחשוב כי $\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$. יתר על כן, אם לא נזהרים, מחשבים כי $\int_{-R}^R \frac{2xdx}{x^2+1} = 0$ לכל R, ואז ועוברים לגבול כאשר $R \to \infty$ אכן מקבלים 0.

אבל $\int_{-\infty}^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ לא קיים, כי שני האינטגרלים המוכללים $\int_0^\infty \frac{2xdx}{x^2+1}$ ו- $\int_{-\infty}^0 \frac{2xdx}{x^2+1}$ לא קיימים.

לאינטגרל המוכלל יש התכונות הרגילות של האינטגרל:

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f \quad ; \quad \int (f_1+f_2) = \int f_1 + \int f_2 \quad ; \quad \int cf = c\int f$$

וכמו כן אם $f \leq g$ אז $\int f \leq \int g$.

הוכחת המשפט הבא מיידית.

<u>משפט.</u>[קריטריון קושי] תהי f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ לכל $a < b < \infty$. אזי $\int_a^\infty f$ קיים אםם מתקיים תנאי קושי: לכל $\varepsilon > 0$ יש $B > a$ כך ש $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| < \varepsilon$ לכל $b_2 > b_1 > B$.

1.7.1 אינטגרלים מוכללים של פונקציות אי-שליליות.

<u>משפט.</u> תהי f אי-שלילית בקרן $[a,\infty)$, ונסמן $F(x) = \int_a^x f$. אז $\int_a^\infty$ קיים אםם F חסומה.

הוכחה. אי השליליות של f גוררת כי F מונוטונית עולה, וידוע כי לפונקציה מונוטונית יש גבול אםם היא חסומה. □

משפט פשוט זה (והאנלוג שלו לאינטגרל מוכלל בקטע סופי) הם המפתח לכך שה-טיפול באינטגרלים מוכללים של פונקציות בעלות סימן קבוע פשוט יותר מזה של פונ-קציות כלליות: במקום לבדוק קיום גבול יש רק לבדוק חסימות! זה מודגם היטב במשפט הבא:

<u>משפט.</u> [קריטריון ההשוואה]. תהיינה f ו- g אי-שליליות בקרן $[a,\infty)$ ואינטגרביליות ב- $[a,b]$ לכל $a < b < \infty$. אם קיים קבוע חיובי $K > 0$ כך ש- $0 \leq f(x) \leq Kg(x)$ לכל x בקרן, ואם האינטגרל $\int_a^\infty g$ קיים , אז גם $\int_a^\infty f$ קיים ו-

$$\int_a^\infty f \leq K \int_a^\infty g \ .$$

הוכחה. נסמן $F(x) = \int_a^x f$ ו- $G(x) = \int_a^x g$. עפ"י הנתון G חסומה ו- $0 \leq F \leq KG$, לכן גם F חסומה. □

__הערה.__ כדי שהאינטגרל $\int_a^\infty f$ יתכנס אין צורך ש- $0 \le f(x) \le Kg(x)$ יתקיים לכל $x \ge a$, ומספיק שזה יתקיים על איזשהי קרן חלקית $[c,\infty)$, כלומר עבור ערכי x שהם גדולים מספיק.

__מסקנה.__ **תהיינה $f,g \ge 0$ בקרן $[a,\infty)$, אינטגרביליות בכל קטע סופי חלקי, כך ש-** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ **. אם $0 < L < \infty$ אז $\int^\infty f$ קיים אמם $\int^\infty g$ קיים.**

הוכחה. לפי הגדרת הגבול נמצא $c > a$ כך ש- $\frac{3L}{2} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L}{2} > 0$ לכל $x \ge c$, והמסקנה נובעת מהמשפט. $\square$

הוכחה דומה מראה שאם $L = 0$ ו- $\int^\infty g$ קיים, אז גם $\int^\infty f$ קיים.

__דוגמאות.__

(i) האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$ מתכנס. ואמנם האיטגרנד הוא פונקציה זוגית, ולכן די לבדוק כי האינטגרל מתכנס בקרן ימנית, אך $e^{-x} \ge e^{-x^2} > 0$ עבור $1 \le x < \infty$, וראינו כבר כי $\int_1^\infty e^{-x}dx$ מתכנס.

(ii) $\int_0^1 \frac{\sin x dx}{x^q}$ מתכנס אמם $q < 2$. כי

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^q} \Big/ \frac{1}{x^{q-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ועפ"י המסקנה האינטגרל מתכנס אמם $\int \frac{dx}{x^{q-1}}$ מתכנס, וזה קורה אמם $q - 1 < 1$, כלומר כאשר $q < 2$.

(iii) הפונקציה Γ מוגדרת עבור $x > 0$ ע"י $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. זהו אינטגרל של פונקציה חיובית על תחום אינסופי, ויש לבדוק את ההתכנסות של $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. כאשר $x < 1$ הפונקציה גם אינה חסומה ב- 0, לכן עלינו לבדוק בנפרד גם את ההתכנסות של $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

היות ש- $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0$ והיות שהאינטגרל $\int_1^\infty e^{-t/2}dt$ מתכנס, מקבלים שגם $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ מתכנס.

עבור $0 \le t \le 1$ מתקיים כי $t^{x-1} \ge t^{x-1}e^{-t} \ge \frac{1}{3}t^{x-1}$ ולכן $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ ו- $\int_0^1 t^{x-1}dt$ מתכנסים או מתבדרים ביחד - והאינטגרל השני מתכנס לכל $x > 0$, ובפרט לכל $0 < x < 1$.

פונקצית Γ מופיעה בענפים רבים של המתמטיקה כמו תורת המספרים, הסתברות, ועוד. נראה תכונה פשוטה שלה: לכל $x > 0$ מתקיים

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

כי אינטגרציה בחלקים נותנת

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -e^{-t}t^x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

נשתמש כעת בכך ש- $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$, ונקבל באינדוקציה כי לכל k טבעי

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1) = \ldots = (k-1)! \ .$$

בהמשך נחשב גם את $\Gamma(1/2)$.

1.7.2 אינטגרלים מתכנסים בהחלט ובתנאי

ההתכנסות של אינטגרל מוכלל של פונקציות אי שלילית תלויה ב"קצב הדעיכה" של f באינסוף, או ב"קצב הגידול" שלה בקטע סופי. כאשר f מקבלת גם ערכים חיוביים וגם שליליים האינטגרל יכול להתכנס מסיבה נוספת: התרומות החיוביות והשליליות של f יכולות לבטל חלקית אלה את אלה.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int f$ (על קרן אינסופית או על קטע סופי) מתכנס בהחלט אם $\int |f|$ מתכנס. אם $\int f$ מתכנס אך $\int |f|$ לא מתכנס נאמר שההתכנסות היא בתנאי.

<u>משפט.</u> אם אינטגרל מוכלל מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס. כלומר, אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז גם $\int_a^\infty f$ מתכנס, ובאופן דומה לאינטגרל המוכלל על קטע סופי.

הוכחה. ההוכחה מיידית בעזרת קריטריון קושי. היות ו- $\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f|$ לכל $b_2 > b_1$, הרי שאם בחירת $b_1, b_2 > B$ מבטיחה כי אגף ימין קטן כרצוננו, אז בודאי שגם אגף שמאל קטן כרצוננו.

ניתן גם הוכחה נוספת שתבהיר יותר טוב מה באמת קורה. נסמן

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & f(x) > 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases} \ .$$

שתי הפונקציות האלה אי-שליליות ו- $f = f^+ - f^-$ ואילו $|f| = f^+ + f^-$. אם $\int_a^\infty |f| < \infty$ אז ממשפט ההשוואה גם $\int_a^\infty f^+$ וגם $\int_a^\infty f^-$ מתכנסים, ואז מתכנס גם

$$\int_a^\infty f = \int_a^\infty f^+ - \int_a^\infty f^- \ .$$

$\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ מתכנס בהחלט כי $\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ו- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$.

(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס, אך לא בהחלט. לבדיקת ההתכנסות נבצע אינטגרציה בחלקים

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

והאינטגרל האחרון מתכנס עפ"י (i). (השתמשנו כאן בכתיבה פורמלית של נוסחת האינטגרציה בחלקים כשהגבול העליון הוא ∞. משמעות הנוסחה - והוכחתה! - היא שלוקחים גבול כאשר $b \to \infty$ בביטויים המתקבלים כשהגבול העליון הוא b).

האינטגרל אינו מתכנס בהחלט כי $|\sin x| \geq \sin^2 x$ ונראה כי $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר: נשתמש בזהות $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, ואז $\int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \infty$ ואילו $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$ מתכנס, כפי שרואים ע"י אינטגרציה בחלקים כמו בהוכחה ש- $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

המשפט הבא יכליל את השיטה שבה הראנו כי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

<u>משפט.</u>[דיריכלה] תהי f רציפה בקרן $[a,\infty)$ כך שהפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ חסומה בקרן. תהי g גזירה בקרן כך שהאינטגרל $\int_a^\infty |g'|$ קיים, וכך ש- $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. אז האינטגרל המוכלל $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

בפרט התנאי מתקיים כאשר g מונוטונית בקרן חלקית $[c,\infty)$, כי אז יש ל- g' סימן קבוע, ולכן $\int_b^\infty |g'| = \pm\int_b^\infty g' = \mp g(b)$.

הוכחה. אינטגרציה בחלקים נותנת

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = F(t)g(t)\Big|_a^x - \int_a^x F(t)g'(t)dt$$

המחובר הראשון סופי כי $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ ו- F חסומה. המחובר השני מתכנס בהחלט, כי $|F(x)| \leq C$ לכל x ולכן $\int_a^\infty |F(t)g'(t)|dt \leq C\int_a^\infty |g'(t)|dt < \infty$. $\square$

דוגמא (ii) התקבלה עבור $f(x) = \sin x$ ו- $g(x) = x^{-1}$.

1 האינטגרל הכפול

נתונה פונקציה של שני משתנים המוגדרת בתחום D. מהו הנפח המוגבל בין הגרף שלה לבין מישור ה- x,y? כשחישבנו שטחים אבן הבנין היסודית היתה המלבן ששטחו הוא מכפלת אורכי הצלעות. בחישוב נפחים הצורה הבסיסית היא תיבה, ונפחה הוא מכפלת אורכי הצלעות.

1.1 הגדרת האינטגרל הכפול

נניח תחילה כי הפונקציה מוגדרת במלבן R. ניצור חלוקה P של $R = \cup R_{ij}$ למלבנים חלקיים ע"י חלוקות של הצלעות ונסמן ב- Δ_{x_i} וב- Δ_{y_j} בהתאמה את האורכים של קטעי החלוקות האלה. שטח המלבן R_{ij} יסומן ב- $|R_{ij}| = \Delta_{x_i}\Delta_{y_j}$. הקוטר של החלוקה הוא $\lambda(P) = \max\limits_{i;j}\{\Delta_{x_i}, \Delta_{y_j}\}$.

<u>הגדרה.</u> תהי f מוגדרת במלבן R ויהיו $P = \{R_{ij}\}$ חלוקה של R ו- $t_{ij} \in R_{ij}$. סכום רימן של הפונקציה f ביחס לחלוקה P ולבחירה t_{ij} הוא

$$R(P, f, t_{ij}) = \sum f(t_{ij})|R_{ij}| = \sum f(t_{ij})\Delta_{x_i}\Delta_{y_j} \ .$$

<u>הגדרה.</u> נאמר שהפונקציה f המוגדרת במלבן R היא פונקציה אינטגרבילית רימן ב- R, ושהאינטגרל שלה הוא המספר I, אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ עם התכונה הבאה: לכל חלוקה $P = \{R_{ij}\}$ של R עם קוטר $\lambda(P) < \delta$ ולכל בחירה של נקודות $t_{ij} \in R_{ij}$, סכום רימן המתאים יקיים

$$\left|I - \sum f(t_{ij})|R_{ij}|\right| < \varepsilon \ .$$

את האינטגרל של f נסמן ב- $\iint_R f$.

הוכחת הטענה הבאה דומה למקרה החד ממדי, ולא ניתן אותה.

<u>טענה.</u> אם f אינטגרבילית במלבן, אז היא חסומה בו.

תהי f חסומה במלבן R ותהי $P = \{R_{ij}\}$ חלוקה שלו. נסמן

$$M_{ij} = \sup_{x \in R_{ij}} f(x) \qquad ; \qquad m_{ij} = \inf_{x \in R_{ij}} f(x) \ .$$

הסכום העליון והסכום התחתון של f המתאימים לחלוקה P הם

$$U(P, f) = \sum_{i,j} M_{ij}|R_{ij}| \qquad ; \qquad L(P, f) = \sum_{i,j} m_{ij}|R_{ij}|$$

וכמו במקרה החד ממדי f אינטגבילית רימן במלבן R אםם לכל $\varepsilon > 0$ יש חלוקה Q כך ש- $U(Q, f) - L(Q, f) < \varepsilon$, או במילים אחרות, $\sum \omega_{ij}|R_{ij}| < \varepsilon$, כאשר ω_{ij} הוא התנודה $\omega_{ij} = \omega(R_{ij}, f) = M_{ij} - m_{ij}$ של f במלבן R_{ij}.

המשפט הבא נובע מקריטריון זה באופן דומה למקרה החד ממדי, ולא ניתן את ההוכחה.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה במלבן סגור, אז היא אינטגרבילית שם.

כדי להגדיר את האינטגרל בתחומים כלליים יותר, וכדי להוכיח את האינטגרביליות בתנאים רחבים יותר מרציפות, נצטרך להגדיר קבוצות בעלות שטח אפס.

<u>הגדרה.</u> **נאמר שקבוצה F במישור היא בעלת שטח אפס אם לכל ε יש כיסוי של F ע"י מלבנים R_k כך ש- $\sum |R_k| < \varepsilon$.**

לדוגמא, קבוצות בנות מניה, קטעים, איחוד בן מניה של קבוצות עם שטח אפס, גרף של פונקציה רציפה של משתנה אחד (כי די לבדוק עבור פונקציה רציפה בקטע סגור, ואז משתמשים ברציפות במ"ש - השלימו את ההוכחה!).

<u>הערה.</u> שימו לב כי בהגדרה אפשר לדרוש שהמלבנים יהיו סגורים, או פתוחים, או כלשהם. כמו כן אם F קבוצה בעלת שטח אפס שהיא סגורה וחסומה, אז ניתן לכסותה ע"י מספר סופי של מלבנים ששטחם הכולל קטן כרצוננו.

<u>משפט.</u> [לבג] **תהי f חסומה במלבן R, אז היא אינטגרבילית במלבן אםם קבוצת נקודות אי הרציפות שלה היא בעלת שטח אפס.**

<u>הגדרה.</u> **תהי f פונקציה חסומה בקבוצה חסומה D במישור. יהי R מלבן המכיל את D ונרחיב את f לכל R ע"י הגדרתה כאפס ב- $R \setminus D$. נאמר ש- f אינטגרבילית ב- D אם הרחבתה ל- R אינטגרבילית שם. (ברור שההגדרה אינה תלויה בבחירה של R).**

<u>הגדרה.</u> **נאמר שקבוצה חסומה D במישור היא קבוצה בעלת שטח אם הפונקציה שהיא זהותית 1 על D ואפס אחרת היא אינטגרבילית. השטח של D, שיסומן ב- $A(D)$, הוא $\iint_D 1$.**

נזכיר כי השפה, ∂D, של קבוצה D היא אוסף הנקודות x במישור כך שכל סביבה של x מכילה נקודות הן מהקבוצה D והן ממשלימתה. נשים לב כי ∂D היא תמיד קבוצה סגורה.

נשים לב כי קבוצת נקודות אי הרציפות של הפונקציה שהיא זהותית 1 על D ואפס אחרת היא בדיוק ∂D. ולכן מקבלים

<u>מסקנה.</u> **קבוצה חסומה D היא בעלת שטח אםם שפתה, ∂D, היא בעלת שטח אפס.**

הוכחה. נקבע מלבן $R \supset D$ ויש לבדוק מתי הפונקציה שהיא זהותית 1 על D ואפס על המשלים היא אינטגרבילית. אך זו בדיוק השפה של D ולכן ע"ס משפט לבג היא אינטגרבילית אםם יש ל- ∂D שטח אפס. $\square$

המשפט הבא מרכז את התכונות הבסיסיות של האינטגרל הכפול. ההנחה במשפט היא שכל הקבוצות בעלות שטח. ההוכחות ישירות, ולא ניתן אותן.

משפט. (i) אם f ו- g אינטגרביליות ב- D, כך גם $af+bg$, ומתקיים

$$\iint_D (af+bg) = a\iint_D f \ + \ b\iint_D g \ .$$

(ii) אם $0 \geq f$ אינטגרבלית ב- D אז $\iint_D f \geq 0$. באופן כללי יותר, אם $f \geq g$ אינטגרביליות ב- D אז $\iint_D f \geq \iint_D g$, ובפרט, אם $m \leq f \leq M$ ב- D אז

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f \leq M \cdot A(D) \ .$$

(iii) אם f אינטגרבלית ב- D, כך גם $|f|$, ומתקיים $\left|\iint_D f\right| \leq \iint_D |f|$.

(iv) אם f חסומה ב- D ואם $A(D)=0$, אז f אינטגרבילית ב- D, ו- $\iint_D f = 0$.

(v) אם f אינטגרבלית ב- D_1 וב- D_2 אז היא אינטגרבלית ב- $D_1 \cup D_2$, ואם $A(D_1 \cap D_2)=0$, אז $\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f \ + \ \iint_{D_2} f$.

1.2 האינטגרל הכפול והאינטגרל הנשנה

נעבור כעת לחישוב האינטגרל הכפול. מתברר שבתנאים מאוד רחבים הוא מתלכד עם האינטגרל הנשנה, וכך נוכל להשתמש לחישובו בשיטות שפיתחנו לחישוב של אינט-גרלים חד-ממדיים.

משפט. תהי f פונקציה אינטגרבילית במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$, ונניח שלכל x האינטגרל $I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ קיים. אז הפונקציה $I(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ וקיים השוויון

$$\iint_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \ .$$

הוכחה. נקבע חלוקות $\{x_i\}$ ו- $\{y_k\}$ של הקטעים $[a,b]$ ו- $[c,d]$ בהתאמה. נסמן ב- R_{ik} את המלבנים החלקיים שהן יוצרות, וב- M_{ik} ו- m_{ik} את הסופרמום והאינפימום של f ב- R_{ik}.

לכל i נבחר $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. היות ש- $m_{ik} \leq f(\xi_i,y) \leq M_{ik}$ לכל $y_{k-1} \leq y \leq y_k$, נקבל כי האינטגרל $I(\xi_i)=\int_c^d f(\xi_i,y)dy = \sum_{k=1}^m \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i,y)dy$ מקיים

$$\sum_{k=1}^m m_{ik}\Delta y_k \leq I(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{ik}\Delta y_k \ .$$

נכפיל ב- Δx_i ונסכם על i, ונקבל כי

$$\begin{aligned}\sum_{i,k} m_{ik}A(R_{ik}) &= \sum_i\sum_k m_{ik}\Delta y_k\Delta x_i \le \sum_i I(\xi_i)\Delta x_i\\ &\le \sum_i\sum_k M_{ik}\Delta y_k\Delta x_i = \sum_{i,k} M_{ik}A(R_{ik})\end{aligned}$$

אבל לפי הגדרת $\iint_R f$, גם $\sum_{i,k} m_{ik}A(R_{ik}) \le \iint_R f \le \sum_{i,k} M_{ik}A(R_{ik})$, ולכן

$$\left|\iint_R f - \sum_{i=1}^n I(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i,k}(M_{ik}-m_{ik})A(R_{ik}) \ .$$

נקבע כעת $\varepsilon > 0$. אגף ימין קטן מ- ε אם רק $\max(\Delta_{x_i},\Delta_{y_k})$ קטן מספיק (כי f אינטגרבילית), אך אגף שמאל לא תלוי כלל בחלוקה של $[c,d]$. קבלנו לכן כי סכומי רימן של $I(x)$ מתכנסים, כפי שטוען המשפט, ל- $\iint_R f$. $\square$

משפט אנלוגי נכון, כמובן גם לאינטגרל הנשנה $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$, והמשפט נכון גם לאינטגרציה על קבוצה כללית בעלת שטח, כי ממילא האינטגרל מוגדר ע"י הרחבת הפונקציה כאפס למלבן. הרחבה זו פשוטה במיוחד כאשר D הוא תחום המוגבל ע"י שני גרפים של פונקציות רציפות: $D=\{(x,y); x\in[a,b] \ : \ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$. לתחום כזה נקרא תחום נורמלי (ביחס לציר ה- x). תחום כזה הוא בעל שטח, כי לשפתו, המורכבת מהגרפים של הפונקציות ומשני קטעים אנכיים, יש שטח אפס. והנוסחה המתקבלת היא

$$\iint_D f = \int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right)dx \ .$$

<u>דוגמאות.</u>

(i) אם D הוא המשולש שקודקודיו הם $(1,0)$, $(0,1)$ והראשית, אז

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+xy)dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x^2+xy)dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right)_{y=0}^{1-x}dx = \int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2}\right)dx\end{aligned}$$

(ii) כאשר התחום נורמלי בשני הכיוונים, יש לעתים חשיבות ל"סדר האינטגרציה". נניח, למשל, ש- D הוא רבע מעגל היחידה ברביע החיובי, ונחשב את $\iint_D\sqrt{1-y^2}$. אם כתוב אותו בצורה $\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}dy\right)dx$, אך החישוב יוצא מסובך. לעומת זאת אם נבצע האינטגרציה בסדר ההפוך נקבל

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-y^2}dx\right)dy = \int_0^1(1-y^2)dy \ .$$

(iii) כדוגמא נוספת מאותו סוג נחשב את $\iint_D e^{x/y}$ כאשר D הוא המשולש שקודקו-דיו הם $(1,1)$, $(0,1)$ והראשית. נציג אותו כ- $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{x/y}dx\right) dy$, ונקבל

$$\int_0^1 \left(ye^{x/y}\right)_{x=0}^y dy = \int_0^1 (ey-1)dy \quad .$$

אך בסדר ההפוך, $\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{x/y}dy\right) dx$, אין בכלל פונקציה אלמנטרית שתתאר את האינטגרל הפנימי!

1.3 הנוסחה להחלפת משתנים

נסתכל על הנוסחה להחלפת משתנה (הצבה) במשתנה אחד. אם $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ פונקציה עולה אז $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$, ואם הפונקציה φ יורדת סדר הגבולות מתהפך ומקבלים $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_b^a f(\varphi(s))\varphi'(s)ds$. כתיבה אחידה לשני המקרים היא

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(s))|\varphi'(s)|ds \quad .$$

מהי המשמעות הגיאומטרית של הגורם $|\varphi'(s)| = |\frac{dt}{ds}|$? זהו היחס המקומי שבו φ משנה אורכים: ה"מכנה" $|ds|$ הוא האורך של "קטע אינפיניטיסימלי" בסביבת הנקודה s, ואילו "המונה" $|dt|$ הוא האורך האינפיניטיסימלי של תמונתו של אותו קטע אינפיני-טיסימלי. באופן יותר פורמלי, נוסחת לגרנז' אומרת ש- $\left|\frac{\varphi(s+\Delta s)-\varphi(s)}{\Delta s}\right| = |\varphi'(c)|$. אגף שמאל הוא יחס האורכים בין קטע ותמונתו, וכעת עוברים לגבול.

נעבור לשני משתנים. נניח כי D ו- R תחומים ב- $\mathbb{R}^2$ וכי $\varphi : D \to R$ העתקה חח"ע, ונציג $\varphi(s,t) = (x,y)$. באנלוגיה למקרה החד ממדי צריכה להתקבל נוסחה מהצורה הבאה

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_D f(\varphi(s,t))[\ ?\ ]dtds$$

כאשר במקום [?] צריך לעמוד ביטוי שייצג את היחס המקומי שבו φ משנה שטחים, ונראה מה צריך להיות ביטוי זה. הטיפול שלנו בנושא זה יהיה יותר אינטואיטיבי. באינפי 3 תחזרו לנושא זה, ותוכיחו באופן מדוייק את כל הנוסחאות ב- $\mathbb{R}^n$ ל- n כללי.

<u>הגדרה.</u> יהיו D ו- R שני תחומים ב- $\mathbb{R}^2$, ותהי $\varphi : D \to R$ העתקה חח"ע ועל. נציג $\varphi(s,t) = (x,y)$ ונניח שהפונקציות $x(s,t)$ ו- $y(s,t)$ הן פונקציות בעלות נגזרות חלקיות בתחום D. אז הדיטרמיננטה

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

נקראת היעקוביאן של φ ותסומן ב- $\frac{\partial xy}{\partial st}$ או J_φ (או פשוט J כאשר φ ידוע). נשים

לב שהיעקוביאן הוא בעצמו פונקציה של שני המשתנים s ו- t, ולענייננו הוא ישמש כתחליף לנגזרת במקרה החד ממדי.

הדוגמא הבאה תהיה הבסיס להבנה של משמעות היעקוביאן.

<u>דוגמא.</u>

נניח כי φ היא פונקציה לינארית הניתנת ע"י המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, כלומר $x(s,t) = as+bt$ ו- $y(s,t) = cs+dt$. אז המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ היא פשוט המטריצה הנתונה A, והיעקוביאן הוא פשוט $\det(A)$.

להעתקה כללית φ המטריצה $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ היא "הקירוב הלינארי" הטוב ביותר של ההעתקה φ בסביבת הנקודה (s,t). כדי לעמוד על המשמעות הגיאומטרית של היעקוביאן נבדוק מה המשמעות הגיאומטרית של הדיטרמיננטה כשההעתקה היא בדיוק לינארית (ולא רק בקירוב).

<u>טענה.</u> **אם A מטריצה הפיכה, אז $|\det(A)|$ הוא שטח המקבילית הנוצר, ע"י העמודות שלה, כלומר, השטח של תמונת ריבוע היחידה תחת הטרנספורמציה $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.**

הוכחה. נניח כי $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. הפעלת סיבוב (כלומר, הכפלה במטריצה אורתוגונולית), אינה משנה את שטח המקבילית, ואינה משנה את הערך המוחלט של הדיטרמיננטה. ולכן נוכל להניח, בה"כ, כי $b = 0$, ואז הדיטרמיננט הוא ad, וזה גם שטח המקבילית, כי בסיסה באורך $|a|$, וגובהה $|d|$. $\square$

כעת מתברר לנו מה צריך להיות מקדם שינוי השטחים: נחלק את התחום D לריבועים קטנים מאוד. אם φ דיפרנציאבילית, אז היא ניתנת לקירוב בכל ריבוע כזה ע"י טרנספורמציה לינארית שהמטריצה שלה היא הערך של $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ באחד מקודקודי הריבוע, שנסמנו ב- P. לכן הריבוע עובר לתחום שהוא כמעט מקבילית ששטחה $|J_\varphi(P)|$. וכשעוברים לגבול (כשקוטר הריבועים שואף לאפס), נקבל כי היחס המקומי שבו φ משנה שטחים הוא הפונקציה $|J_\varphi|$.

כך "הוכחנו" את הנוסחה לשינוי משתנה באינטגרל:

<u>משפט.</u> **יהיו D ו- R שני תחומים ב- $\mathbb{R}^2$, ותהי $\varphi : D \to R$ העתקה חח"ע ועל. אם נסמן $\varphi(s,t) = (x,y)$, ואם הפונקציות $x(s,t)$ ו- $y(s,t)$ דיפרנציאביליות ב- D, אז**

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_D f(\varphi(s,t)) \left| \frac{\partial xy}{\partial st} \right| dtds \ .$$

<u>דוגמא.</u>

נחשב את $\iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$ כאשר T הוא המשולש $\{x,y\geq 0; x+y\leq 1\}$. לשם כך נציב $y-x=s$ ו- $y+x=t$, ואז $x=\frac{t-s}{2}$ ו- $y=\frac{t+s}{2}$, ולכן

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| = \det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\ .$$

התמונה של D תחת ההעתקה היא המשולש $D=\{|s|\leq t\leq 1\}$, ולכן

$$\begin{aligned}\iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy &= \iint_D e^{\frac{s}{t}}\frac{1}{2}dsdt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_{-t}^t e^{\frac{s}{t}}ds\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(te^{\frac{s}{t}}\Big|_{s=-t}^t\right)dt = \frac{1}{4}(e-\frac{1}{e})\end{aligned}$$

באינפי 3 תלמדו שאם גם φ^{-1} דיפרנציאבילית, אז $J_\varphi\neq 0$ ומתקיים כי $J_{\varphi^{-1}}=\frac{1}{J_\varphi}$. לפעמים קל יותר להשתמש בנוסחה זו ולחשב בפועל את $J_{\varphi^{-1}}$ במקום את J_φ.

<u>דוגמא.</u>

נחשב את שטח התחום המוגבל ע"י ארבע ההיפרבולות

$$D=\{s,t>0; 1\leq st\leq 2;\ 3\leq s^2-t^2\leq 4\}\ .$$

נציב $x=st$ ו- $y=s^2-t^2$. התמונה של D ע"י ההעתקה היא

$$D'=\{\ (x,y)\ :\ 1\leq x\leq 2,\ 3\leq y\leq 4\}\ .$$

החד חד ערכיות נובעת נובעת מכך שהעקומות $st=const.$ הן היפרבולות שאינן חותכות זו את זו, וכל היפרבולה כזו חותכת היפרבולה מהטיפוס $s^2-t^2=const.$ בדיוק בנקודה אחת.
השטח המבוקש הוא

$$A(D)=\iint_D 1\cdot dsdt = \iint_{D'} 1\cdot\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right|dxdy\ .$$

את היעקוביאן $\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}$ קשה לחשב, כי לשם כך צריך לחלץ באופן מפורש את s,t כפונקציות של x,y. אבל $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{pmatrix}t & s\\ 2s & -2t\end{pmatrix}=-2(s^2+t^2)$ ולכן

$$\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}\right| = \frac{1}{2(s^2+t^2)} = \frac{1}{2\sqrt{y^2+4x^2}}$$

כי $(s^2+t^2)^2=(s^2-t^2)^2+4s^2t^2=y^2+4x^2$. ולסיכום

$$A(D)=\iint_D dsdt = \int_3^4\left(\int_1^2\frac{dx}{2\sqrt{y^2+4x^2}}\right)dy\ .$$

קואורדינטות קטביות: הצבה חשובה מאוד היא העתקת המעבר לקואורדינטות קטביות $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ המעתיקה את $\{r\geq 0\ ;\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ באופן "כמעט" חח"ע על כל מישור ה- x,y: הנקודות "הרעות" מרוכזות בקרניים $\{r\geq 0\ ;\theta=0\}$ ו- $\{r\geq 0\ ;\theta=2\pi\}$ המועתקות על הקרן $\{x\geq 0\}$. קרניים אלה הן קבוצות בעלות שטח אפס, ואינן משנות את ערכי האינטגרלים, ולכן נוכל להשתמש בהצבה זו באופן חפשי.
היעקוביאן של ההעתקה הוא

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

ולכן נקבל כי לכל תחום D במישור

$$.\quad \iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

דוגמא.

אם D הוא העיגול ברדיוס R שמרכזו בראשית, אז שטחו הוא

$$.\quad \iint_D dxdy=\iint_{D'} rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R rdr\right)d\theta=2\pi\frac{R^2}{2}=\pi R^2$$

1.4 אינטגרלים מוכללים

הטיפול באינטגרלים מוכללים אנלוגי למקרה החד-ממדי. נטפל לדוגמא במקרה ש- D תחום מישורי לא חסום ונסמן $D_R=\{P\in D:\|P\|\leq R\}$.

הגדרה. תהי f מוגדרת בתחום לא חסום D במישור ואינטגרבילית בכל תחום חסום בעל שטח $E\subset D$. נאמר שהאינטגרל המוכלל $\iint_D f$ קיים וערכו I אם לכל $\varepsilon>0$ יש R כך שלכל קבוצה בעלת שטח E המקיימת $D_R\subset E\subset D$ מתקיים כי $\left|I-\iint_E f\right|<\varepsilon$.

אם $f\geq 0$ די לבדוק כי $I \underset{n\to\infty}{\to} \iint_{E_n} f$ עבור איזושהי סדרה עולה של קבוצות חסומות E_n כך ש- $\cup E_n=D$.

דוגמא.

נראה כי $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. לשם כך נציג

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}dx\right)dy\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty}e^{-r^2}rdr\right)d\theta=2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty}=\pi\end{aligned}$$

1 אינטגרלים קוויים

בפרק זה נרחיב תחילה בנושא של מסילות, ואח"כ נעבור לאינטגרלים של פונקציות ושל שדות וקטוריים עליהן. לשם פשטות הכתיבה נצטמצם ל- $n=2$. הטיפול ברוב הנושאים ל- n כללי אנלוגי לגמרי.

1.1 אורך קשת

נזכור כי מסילה היא פונקציה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ כאשר $I \subset \mathbb{R}^1$ קטע. אם $I=[a,b]$ קטע סגור, אז לנקודות $\gamma(a)$ ו- $\gamma(b)$ נקרא נקודת ההתחלה ונקודת הסיום (בהתאמה) של γ. המסילה נקראת סגורה אם $\gamma(a)=\gamma(b)$. היא נקראת פשוטה אם γ חח"ע, והיא נקראת מסילה סגורה פשוטה אם $\gamma(s)=\gamma(t)$ מתקיים עבור $s \neq t$ רק בקצוות.

כפי שאמרנו, אנו מבחינים בין המסילה, שהיא הפונקציה γ, לבין תמונתה, שנקרא לה העקום המתואר ע"י γ. אותו עקום יכול, כמובן, להיות מתואר ע"י פונקציות שונות. לצרכינו, לא נרצה לעתים להבחין בין מסילות המתקבלות זו מזו ע"י שינוי משתנה מונוטוני ממש.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהמסילות $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ו- $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ הן שקולות אם יש פונקציה רציפה ומונוטונית ממש φ מ- I על J כך ש- $\gamma(t)=\beta(\varphi(t))$.

נשים לב שלמסילה יש "מגמה" (או כיוון). המסילה מתחילה ב- $t=a$, ומסתיימת ב- $t=b$. למסילות שקולות יכולה להיות אותה מגמה (כאשר φ עולה ממש), או מגמות הפוכות (כאשר φ יורדת ממש).

<u>הגדרה.</u> תהיינה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ו- $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ שתי מסילות כך שמתקיים $\gamma(b)=\beta(c)$. הצרוף שלהן הוא המסילה $\gamma * \beta : [a,b+d-c] \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י

$$\gamma * \beta = \begin{cases} \gamma(t) & a \le t \le b \\ \beta(t-b+c) & b \le t \le b+d-c \end{cases}.$$

באופן גיאמטרי, עוברים לאורך המסילה γ, וכשבסיומה מגיעים לנקודת ההתחלה של β -- עוברים עליה.

אם γ מסילה סגורה, אז היא מפרידה את המישור לשני חלקים, החלק "הפנימי" של תמונתה, שהוא חסום, והחלק "החיצוני" שאיננו חסום. זה מובן מאליו לעקומים שאנחנו מציירים בדר"כ ואנו נשתמש בעובדה זו באופן חפשי, אבל ההוכחה הכללית היא לגמרי לא פשוטה, והמשפט שמבטיח זאת, משפט ג'ורדן, הוא מאבני הדרך בהתפתחות הטופולוגיה. משפט זה מאפשר לנו לדבר על תחומים עם או בלי "חורים".

<u>הגדרה.</u> תחום $D \subset \mathbb{R}^2$ נקרא פשוט קשר אם לכל מסילה סגורה ופשוטה γ ב- D (כלומר, שתמונתה מוכלת ב- D), גם הפנים של γ מוכל כולו ב- D.

באופן אינטואיטיבי, זה אומר שאפשר "לכווץ" את התמונה של γ לנקודה מבלי לצאת מהתחום D. לדוגמא, כל קבוצה קמורה היא פשוטת קשר, ולעומת זאת אם מוציאים ממנה נקודה פנימית, היא כבר איננה פשוטת קשר: אי אפשר לכווץ ב- D מעגל קטן המקיף את הנקב. גם זו טענה מאוד אינטואיטיבית, אך הוכחתה נעשית למעשה בעזרת איטגרלים קוויים!

נפנה כעת להגדרת האורך של מסילה. תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה. לכל חלוקה $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = b\}$ נסתכל באורך של המסילה הפוליגונלית העוברת דרך הנקודות $\gamma(t_k)$, כלומר ב- $\sum \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$.

<u>הגדרה.</u> האורך, $l(\gamma)$, של γ הוא $\sup \sum \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$, כאשר הסופרמום נלקח על כל החלוקות האפשריות של הקטע. נאמר שהמסילה היא בעלת אורך אם יש לה אורך סופי.

ההוכחות של הטענות הבאות נובעות ישירות מההגדרות ולא ניתן אותן. (השלימו כתרגיל!)

<u>טענה.</u> (i) למסילות שקולות יש אותו האורך.

(ii) אם $\gamma * \beta$ מוגדר, אז $l(\gamma * \beta) = l(\gamma) + l(\beta)$.

(iii) תהי γ מסילה המוגדרת בקטע $[a,b]$, ונסמן ב- γ_t את הצמצום של γ לקטע החלקי $[a,t]$. נסמן ב- $s(t) = l(\gamma_t)$ את האורך של הצמצום הזה. אז הפונקציה s רציפה ומונוטונית עולה, והיא איננה עולה ממש רק אם יש קטע חלקי שבו γ קבועה.

ניתן כעת נוסחה מפורשת לחישוב האורך. ניזכר תחילה בנוסחה לאורך של הגרף של פונקציה גזירה $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$ (ראו בפרק על אינטגרלים). גרף של פונקציה f הוא, כמובן, מסילה: $\gamma(t) = (t, f(t))$. הביטוי $\sqrt{1 + (f'(t))^2}$ הוא בדיוק $\|\gamma'(t)\|$, וזו גם הנוסחה למסילות גזירות כלליות.

<u>משפט.</u> תהי $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ מסילה גזירה ברציפות. אז האורך שלה ניתן ע"י הנוסחה $l(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|dt$.

הוכחה. נקבע חלוקה t_k ונשתמש בסימון $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$, $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$ ו- $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$. עפ"י משפט לגרנז' יש נקודות c_k ו- d_k בקטע החלוקה ה-i-י כך ש- $\Delta x_k = x'(c_k)\Delta t_k$ וכך ש- $\Delta y_k = y'(d_k)\Delta t_k$. לכן

$$\begin{aligned}\sum \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})\| &= \sum \left((\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum \left((x'(c_k))^2 + (y'(d_k))^2\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_k\end{aligned}$$

ונציג ביטוי זה כסכום של שני מחוברים. הראשון הוא

$$\sum \left((x'(c_k))^2 + (y'(c_k))^2\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t_k$$

שמתכנס לאינטגרל $\int_I \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_I \|\gamma'(t)\|$ כמבוקש. המחובר השני הוא

$$\sum \left\{ \left((x'(c_k))^2 + (y'(d_k))^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left((x'(c_k))^2 + (y'(c_k))^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \Delta t_k$$

ולהערכת הביטוי שבתוך הסוגריים המשולבות (ל- k קבוע) נשתמש באי השוויון האל-מנטרי $\left|a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right| \leq |a - b|^{\frac{1}{2}}$ (הוכיחו אותו!), ונקבל שהמחובר ה-k-י חסום ע"י $|(y')^2(d_k) - (y')^2(c_k)|^{\frac{1}{2}}$.

מרציפות במ"ש של הפונקציה $(y')^2$ על I נוכל, בהנתן $\varepsilon > 0$, לבחור חלוקה עדינה מספיק כך שכל מחובר כזה קטן מ- ε, ואז המחובר השני קטן מ- $\varepsilon \sum \Delta t_k = \varepsilon |I|$. $\square$

<u>הערה.</u> הנוסחה תקפה גם בתנאים יותר כלליים, ובפרט כאשר γ גזירה ברציפות פרט למספר סופי של נקודות.

ראינו שאם אין קטעים שעליהם γ קבועה, אז פונקצית האורך $s(t) = l(\gamma(t))$ היא רציפה ומונוטונית ממש, ולכן יכולה לשמש בהצגה פרמטרית שקולה. אם חושבים על המסילה כמתארת מיקום של חלקיק בזמן t, אז כשההצגה היא בעזרת פרמטר האורך זה אומר שמהירות התנועה היא 1: בפרק זמן t החלקיק עובר מרחק t.

הנגזרת $\gamma'(t)$ של מסילה γ בזמן t היא וקטור בכיוון המשיק לעקום בנקודה. הוא מתאר את המהירות של החלקיק הנע במסילה בזמן t. אם הפרמטריזציה היא עפ"י האורך, אז $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$. זה ברור משיקולים פיסיקליים, ונובע מתמטית מכך שבמקרה זה הפרמטר נע בקטע $[0, L]$, ומתקיים ש- $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = t$, וכשניגזור את המשוואה נקבל $s'(t) = \|\gamma'(t)\| = 1$.

1.2 אינטגרל קווי

הנושא העיקרי שבו נטפל יהיה אינטגרלים קוויים של שדות ווקטוריים, אך נתחיל מהמקרה הפשוט של אינטגרל קווי של פונקציה סקלרית.

תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה, ותהי f פונקציה ממשית המוגדרת על תמונת המסילה. (בדר"כ f מוגדרת באיזשהו תחום D, ו- γ היא מסילה ב- D). מהו "שטח הוילון" התלוי על הגרף של f מעל γ? אנחנו כבר יודעים איך לגשת לבעיה מסוג זה: נחלק את הקטע $[a, b]$ בחלוקה עדינה ונבחר נקודה t_i בקטע החלוקה ה- i-י. נסמן ב- l_i את אורך קטע המסילה ה- i-י, ונקרב את השטח ע"י $\sum f(\gamma(t_i))l_i$. וכעת נעבור לגבול כאשר הפרמטר של החלוקה שואף לאפס.

אם נניח גם ש- γ מסילה גזירה ברציפות, אז האורך של קטע המסילה ה- i-י הוא בקירוב $\|\gamma'(t_i)\|l_i$, ולכן השטח הכולל הוא בקירוב $\sum f(\gamma(t_i))\|\gamma'(t_i)\|l_i$, ובגבול נקבל את הנוסחה לשטח שהיא $\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$. לאינטגרל הזה נקרא האינטגרל הקווי של f על המסילה γ, ונסמנו $\int_\gamma f$. ברור מהבניה שהאינטגרל הזה איננו תלוי בפרמטריזציה של המסילה (ונוכיח זאת מייד גם ע"י כלל השרשרת).

כמקרה פרטי מקבלים שהאורך של מסילה מתקבל, כמובן, כאינטגרל של הפונ- קציה שהיא זהותית 1.

<u>דוגמא.</u>

נחשב את האינטגרל של $f(x, y) = 1 + \frac{x}{3}$ על המסילה $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ כאשר $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. (לצייר את המסילה ואת ה"וילון"!).

כאן $\gamma'(t) = 3(-\cos^2 t\, \sin t, \sin^2 t\, \cos t)$, ולכן

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 9(\cos^4 t\, \sin^2 t + \sin^4 t\, \cos^2 t) = 9 \sin^2 t\, \cos^2 t$$

כלומר $\|\gamma'(t)\| = 3 \sin t\, \cos t$, והאינטגרל הוא

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{\cos^3 t}{3}) 3 \sin t\, \cos t dt \; .$$

<u>טענה.</u> **אם $\gamma(t) = \delta(\varphi(t))$ הן פרמטריזציות שונות של המסילה ו- $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ גזירה ברציפות (וכמובן על ומונוטונית ממש) אז $\int_\gamma f = \int_\delta f$.**

הוכחה. נניח בה"כ ש- φ עולה. עפ"י כלל השרשת $\gamma'(t) = \delta'(\varphi(t))\varphi'(t)$, וההצבה $s = \varphi(t)$ תתן לכן

$$\begin{aligned}\int_\delta f &= \int_a^b f(\delta(s))\|\delta'(s)\|ds = \int_\alpha^\beta f(\delta(\varphi(t)))\|\delta'(\varphi(t))\|\varphi'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_\gamma f\end{aligned}$$

□

בפרט יהיה נוח להשתמש בפרמטר האורך, ואם $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ נתונה ע"י פרמטר האורך הנוסחה המתקבלת היא

$$\int_\gamma f = \int_0^L f(\gamma(s))ds \; .$$

<u>הערות.</u> (i) הנוסחה לאינטגרל והטענה נכונות גם בתנאים כלליים יותר, למשל, אם המסילות רק גזירות פרט למספר סופי של נקודות.

(ii) נוח לעתים להשתמש במשפט הקירוב הבא, שאותו לא נוכיח. אם D תחום פתוח, ואם f רציפה בו, אז לכל מסילה γ בתחום יש סדרת מסילה גזירות מכל סדר γ_n, כך ש- $\gamma_n \to \gamma$ במ"ש וכך ש- $\int_{\gamma_n} f \to \int_\gamma f$.

(iii) כאשר רוצים להדגיש בסימון שהאינטגרציה היא על מסילה סגורה γ, מסמנים אותו ע"י $\oint_\gamma f$.

נעבור כעת לאינטרלים קוויים של <u>שדות וקטוריים</u>, כלומר של פונקציות של n משתנים שערכיהם הם ווקטורים n ממדיים. אנחנו נטפל בשדות דו ממדיים, וכל שדה כזה ניתן לכתיבה בצורה $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ והוא נקרא רציף, או גזיר, אם שתי הפונקציות f_1 ו- f_2 הן כאלה.

שדות וקטוריים מופיעים הרבה "בטבע", למשל זרימה מתוארת ע"י שדה כזה, כאשר $F(x, y)$ הוא מהירות הנוזל בנקודה (x, y). (המהירות היא וקטור, ואנו מתי-יחסים הן לכיוונו והן לגדלו). באופן דומה נוכל לדבר על שדה כוח, או על שדה חשמלי.

נניח שחלקיק עם מסת יחידה נע במסילה γ בשדה כוח F. מהי העבודה הנעשית? נתחיל במקרה הפשוט שבו γ היא קטע, והשדה F הוא קבוע. אם הכוח הוא בכיוון הקטע, אז העבודה (שהיא סקלר) היא המכפלה של גודל הכוח באורך הקטע. אם הכוח הוא בכיוון אחר, אז נפרק אותו כסכום $F = G + H$ של ווקטור G מקביל לקטע ווקטור H הניצב לו, והעבודה נעשית רק מרכיב הכוח G ול- H אין כל תרומה.

נזכור שאם V_1 ו- V_2 וקטורי יחידה ניצבים, אז ההצגה של W בעזרתם ניתנת ע"י הנוסחה

$$W = \langle V_1, W\rangle V_1 + \langle V_2, W\rangle V_2$$

ואותנו יעניין רק הרכיב בכיוון המסילה, כי בכל נקודה על המסילה לרכיב בכיוון הניצב למסילה אין תרומה לעבודה.

למסילה חלקה כללית γ כיוון המסילה בנקודה t הוא כיוון המשיק $\gamma'(t)$, ואורכה האינפיניטיסימלי שם הוא $\|\gamma'(t)\|dt$. לכן אם F שדה ווקטורי כללי, העבודה שנעשית במעבר על פני קטע המסילה האיפיניטיסימלי יהיה

$$\langle F, \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\rangle \times \|\gamma'(t)\|dt = \langle F, \gamma'(t)\rangle dt$$

והעבודה הכוללת היא $\int_a^b \langle F, \gamma'(t)\rangle dt$. וזו תהיה ההגדרה הכללית לאינטגרל הקווי של שדה ווקטורי.

<u>הגדרה.</u> יהי D תחום ותהי γ מסילה חלקה (פרט למספר סופי של נקודות) בתחום. יהי F שדה וקטורי רציף בתחום D. אז האינטגרל הקווי של F על המסילה מוגדר להיות $\int_a^b \langle F, \gamma'(t)\rangle dt$. לעתים קרובות נשתמש בסימון $\int_\gamma F$.

כתיבה מפורשת של המכפלה הפנימית מציגה את האינטגרל כסכום של שני אינטגרלים סקלריים: אם $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ כאשר $t \in [a, b]$ ואם $F = (f_1, f_2)$, אז

$$\int_\gamma F = \int_a^b f_1(\gamma(t))x'(t)dt + \int_a^b f_2(\gamma(t))y'(t)dt \ .$$

בפרט, עפ"י כלל השרשרת, האינטגרל איננו תלוי בפרמטריזציה של γ בתנאי שהמגמה נשמרת (ורק הסימן משתנה כאשר המגמה מתהפכת). אם נסמן $x'(t)dt = dx$ ו- $y'(t)dt = dy$, נכתוב את האינטגרל גם בצורה $\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$.

ברור כי $\int_\gamma *\beta F = \int_\gamma F + \int_\beta F$.

<u>דוגמאות.</u>

(i) נסתכל במסילה $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \le t \le 2\pi$, ובשדה $F(x, y) = (x, y)$. באפן גיאומטרי השדה ניצב למסילה בכל נקודה, ולכן צריך להתקבל כי $\int_\gamma F = 0$. ובאמת

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} (\cos t\,(-\sin t) + \sin t\ \cos t)dt = 0 \ .$$

(ii) עם אותה מסילה נבחר כעת $F(x, y) = (-y, x)$. כעת השדה באותו כיוון כמו המסילה ויש לצפות כי $\int_\gamma F \neq 0$, ובאמת

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi \ .$$

התוצאה גם ברורה באופן גיאומטרי: בנקודות על המסילה ערך הפונקציה וערך המשיק למסילה הם אותו ווקטור - וזהו ווקטור יחידה, ולכן $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1$ לכל t.

(iii) האינטגרל באמת אינו תלוי בפרמטריזציה של המסילה. חשבו את האינטגרל של F מדוגמא (ii) על $\gamma(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$ עבור $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$.

<u>הגדרה.</u> שדה וקטורי F המוגדר בתחום D נקרא שדה משמר אם $\oint_\gamma F = 0$ לכל מסילה סגורה ב- D.

למשל בשדה הכובד של כדור הארץ, העבודה הנעשית כשהולכים לאורך מסלול סגור כלשהו בחיפה, היא אפס.
אנחנו נרצה לאפיין שדות משמרים, ונתחיל בלמה פשוטה שהיא, למעשה, רק ניסוח אחר לכך ששדה הוא משמר.

<u>למה.</u> יהי F שדה וקטורי המוגדר בתחום D. אז F שדה משמר ב- D אמם האינטגרלים הקוויים $\int_\gamma F$ אינם תלויים בבחירת המסילה γ אלא רק בנקודות הקצה שלה.

הוכחה. נניח שהשדה משמר וכי γ_1 ו- γ_2 שתי מסילות עם אותן נקודות קצה. נסמן ב- $-\gamma_2$ את המסילה γ_2 כשהולכים בה בכיוון ההפוך, ואז הצירוף $\gamma = \gamma_1 * (-\gamma_2)$ הוא מסילה סגורה, ולכן

$$0 = \oint_\gamma F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F \,.$$

להפך, אם האינטגרלים $\int_\gamma F$ אינם תלויים בבחירת המסילה ואם $\gamma : [a,b] \to D$ מסילה סגורה, נבחר נקודה $a < c < b$ ונציג $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ כאשר γ_1 ו- γ_2 הן הצמצומים של γ לקטעים החלקיים. ואז γ_1 ו- $-\gamma_2$ מתחילות ונגמרות באותן נקודות, ולכן $\int_{\gamma_1} F = -\int_{\gamma_2} F$ ו- $\oint_\gamma F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F = 0$. □

<u>הגדרה.</u> יהי F שדה וקטורי המוגדר בתחום D. נאמר שפונקציה ממשית f היא פוט-נציאל לשדה F אם $f = \nabla F$.

לדוגמא, הפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ היא פוטנציאל לשדה $F(x,y) = \frac{-(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
מתי יש ל- F פונקצית פוטנציאל? המשפט הפשוט הבא נותן תנאים הכרחיים.

<u>משפט.</u> יהי $F = (f_1, f_2)$ שדה רציף בתחום D, ותהי f פונקצית פוטנציאל ל- F.

(i) אם יש ל- f_i-ים נגזרות חלקיות רציפות אז $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

(ii) לכל מסילה $\gamma : [a,b] \to D$ מתקיים כי $\int_\gamma F = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))$. בפרט האינטגרל הקווי $\int_\gamma F$ אינו תלוי במסילה אלא רק בנקודות הקצה שלה והשדה משמר.

הוכחה. (i) עפ"י המשפט על נגזרות מעורבות $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

(ii) עפ"י כלל השרשרת

$$\int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \,.$$

□

דוגמא.

נחשב את $\int_\gamma ydx+xdy$ כאשר $\gamma(t)=(\frac{t^4}{4},\sin^3\frac{t\pi}{2})$ עבור $0\leq t\leq 1$. עפ"י ההגדרה מקבלים

$$\int_0^1\left(t^3\sin^3\frac{t\pi}{2}+\frac{t^4}{4}\,3\sin^2\frac{t\pi}{2}\,\cos\frac{t\pi}{2}\,\frac{\pi}{2}\right)dt\ .$$

זה אולי לא נורא, אבל בטח לא נעים. למזלנו יש לשדה הנתון $F(x,y)=(y,x)$ פוטנציאל: $f(x,y)=xy$. ולכן $\int_\gamma ydx+xdy=f(\frac14,1)-f(0,0)=\frac14$.

__משפט.__ יהי $F=(f_1,f_2)$ שדה רציף בתחום קשיר מסילתית D. אז השדה F משמר ב- D אםם יש ל- F פוטנציאל ב- D.

הוכחה. כיוון אחד כבר ראינו. נניח כעת שהשדה משמר ונקבע נקודה P. לכל נקודה $Q=(x,y)$ נבחר מסילה γ המתחילה ב- P ומסתיימת ב- Q, ונגדיר $f(Q)=\int_\gamma F$. זו הגדרה טובה, כי האינטגרל ב"ת בבחירת המסילה. נראה כי $f_1=\frac{\partial f}{\partial x}$.

נסתכל בנקודה $Q_1=(x+\Delta x,y)$ ובמסילה $\delta(t)=(x+t\Delta x,y)$ כאשר $0\leq t\leq 1$. תמונת המסילה δ היא הקטע הישר בין Q ל- Q_1, והצירוף $\gamma*\delta$ הוא מסילה בין P ל- Q_1, ולכן

$$\begin{aligned}
f(Q_1)-f(Q) &= \int_{\gamma*\delta}F-\int_\gamma F=\int_\delta F=\int_0^1\langle F(\delta(t)),\delta'(t)\rangle dt\\
&= \int_0^1\Big(f_1(x+t\Delta x,y)\cdot\Delta x+f_2(x+t\Delta x,y)\cdot 0\Big)dt\\
&= \Delta x\int_0^1 f_1(x+t\Delta x,y)dt
\end{aligned}$$

נחלק ב- Δx ונשאיף אותו לאפס, ונקבל (מרציפות f_1) כי

$$\frac{f(Q_1)-f(Q)}{\Delta x}=\int_0^1 f_1(x+t\Delta x,y)dt\to\int_0^1 f_1(x,y)dt=f_1(x,y)$$

מכיון ש- $f_1(x,y)$ לא תלוי כלל ב- t. $\square$

אם יש לשדה F פוטנציאל, אז ההוכחה נותנת למעשה דרך לחישובו: ערכו ב- Q מתקבל ע"י אינטגרציה של השדה לאורך איזשהי מסילה מהנקודה הקבועה P אל Q. באופן מעשי עושים זאת אחרת. נתאר זאת ע"י דוגמא, וכדי להדגים יותר טוב את השיטה, נמצא פוטנציאל לשדה תלת ממדי.

דוגמא.

נמצא פוטנציאל לשדה $F=(y\cos xy-z\sin xz,x\cos xy,-x\sin xz)$. ונשים לב תחילה שהתנאים ההכרחיים $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ אכן מתקיימים.

הפוטנציאל f צריך לקיים כי $\frac{\partial f}{\partial z}=-x\sin xz$, ולכן לכל x,y קבועים יש קבוע $c(x,y)$ כך ש- $f(x,y,z)=\cos xz+c(x,y)$.

באופן דומה $x\cos xy = \frac{\partial f}{\partial y} = c'_y(x,y)$, ולכן יש קבוע התלוי ב- x כך שמתקיים $c(x,y) = \sin xy + c(x)$, כלומר, $f(x,y,z) = \cos xz + \sin xy + c(x)$. "למזלנו" זה פתרון לשאלה ואפשר לקחת $c(x)$ כקבוע.

ההצלחה בדוגמא לא היתה מובטחת, כי התנאי על הנגזרות איננו מספיק. ואילו לא היה לשדה פוטנציאל, לא היינו יכולים למצוא פונקציה $c(x)$ כך שהנגזרת של $f(x,y,z) = \cos xz + \sin xy + c(x)$ עפ"י x היתה f_1. נסתכל בשתי דוגמאות:

<u>דוגמאות.</u>

(i) עפ"י חוקי ניוטון כח הכובד של כדור הארץ פרפורציונלי הפוך למרחק ממרכזו, כלומר הוא ניתן, עד כדי קבוע, ע"י השדה $F(x,y,z) = \frac{-(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. לשדה זה יש פוטנציאל $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ולכן השדה משמר בתחום בו הוא מוגדר, כלומר במרחב המנוקב בראשית.

(ii) לעומת זאת, השדה $F(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$ מוגדר במישור המנוקב בראשית, ומקיים שם $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ (בדקו!) אך איננו משמר בתחום זה, כי נבחר $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \le t \le 2\pi$, ואז $\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$.

אבל השדה כן משמר בתחומים חלקיים מתאימים. למשל, בחצי המישור הימני $\{x > 0\}$ פונקצית פוטנציאל ניתנת ע"י $\arctan\frac{y}{x}$.

למעשה השדה בדוגמא (ii) משמר בכל תחום שאיננו מכיל את הראשית. כשהתחום D הוא פשוט קשר, התנאי על הנגזרות הוא גם תנאי מספיק לכך שהשדה ישמר, ולכן בתחום כזה קיים פוטנציאל ויש לנו שיטה "מובטחת" לחישובו.

<u>משפט.</u> יהי D תחום פשוט קשר ויהי $F = (f_1, f_2)$ שדה רציף ב- D כך שיש ל- F נגזרות חלקיות. אז השדה F משמר אםם $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

המשפט נובע מיידית ממשפט גרין שלו מוקדש הסעיף הבא.

נאמר שהשדה F משמר מקומית בתחום D אם לכל נקודה P ב- D יש סביבה המוכלת ב- D שבה F משמר. מהמשפט נובע שהתנאי $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ הוא הכרחי ומספיק לכך שהשדה משמר מקומית, כי לכל P נוכל לקחת כסביבה המתאימה עיגול קטן שמרכזו ב- P והמוכל כולו ב- D. עיגול כזה הוא פשוט קשר, ולכן השדה משמר בו.

1.3 משפט גרין

<u>משפט.</u>[משפט גרין] תהי γ מסילה גזירה סגורה ופשוטה המכוונת בכיוון המתמטי החיובי, ויהי D הפנים של העקום המוגדר ע"י γ. יהי $F = (f_1, f_2)$ שדה רציף בסביבה של D ושפתו כך שיש ל- f_1, f_2 נגזרות חלקיות רציפות. אז

$$\oint_\gamma F = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy \quad .$$

הוכחה. לא נוכיח את המשפט למסילות כלליות, אך מה שנוכיח מספיק לשימושים במתמטיקה ובפיסיקה.

נטפל תחילה בתחום D נורמלי ביחס לשני הצירים. היות ו- D נורמלי ביחס לציר ה- x-ים יש פונקציות $\psi < \varphi$ המגדירות אותו בקטע $[a,b]$, ואפשר להציג את γ כצרוף של ארבע מסילות. עבור $1 \leq j \leq 4$ נסמן

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} (t, \varphi(t)) & a \leq t \leq b \\ (b, (1-t)\varphi(b) + t\psi(b)) & 0 \leq t \leq 1 \\ (t, \psi(t)) & a \leq t \leq b \\ (a, (1-t)\varphi(a) + t\psi(a)) & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ואז $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * (-\gamma_3) * (-\gamma_4)$. נחשב "חצי" מהנוסחה במשפט גרין. נשים לב כי $dx = 0$ על γ_2 ועל γ_4 וכי $dx = dt$ על γ_1 ועל γ_3. לכן

$$\begin{aligned} \int_\gamma f_1 dx &= \int_{\gamma_1} f_1 dx - \int_{\gamma_3} f_1 dx = \int_a^b \Big(f_1(t, (\varphi(t)) - f_1(t, (\psi(t)) \Big) dt \\ &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(t,s) ds \right) dt = -\iint_D \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{aligned}$$

באופן דומה, מהנורמליות ביחס לציר ה- y-ים נקבל כי $\int_\gamma f_2 dy = \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x}$, והנוסחה במשפט מקבלת כסכום של שתי הנוסחאות האלה.

ההכללה לתחומים כלליים יותר תהיה פורמלית לגמרי. נניח כי D הוא איחוד של מספר תחומים נורמליים הנחתכים רק בשפתם. למשל $D = D_1 \cup D_2$, כאשר ה- D_i-ים הם שני עיגולים קטומים המחוברים לאורך הקטימה. משפט גרין ידוע לנו על כל אחד מהתחומים בנפרד, ונסכם את הנוסחאות. באגף אחד נקבל את הביטוי $\iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$, ובשני נקבל את $\int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F$. אך נשים לב כי קטעי המסילות המשותפים ל γ_1 ו- γ_2 הם <u>בכיוונים מנוגדים</u> ולכן מתבטלים, ולכן הסכום הוא בדיוק $\int_\gamma F$.

באופן דומה נוכל לטפל בתחום עם "חורים" (וכיווני המסילות בחורים נקבעים תמיד כך שהתחום נמצא משמאל למסילה), למשל כאשר D טבעת, ואז שפתה מורכבת משתי מסילות. במקרה זה נוסיף קטע המקשר בינהן, וקטע זה, ביחד עם שני המעגלים שהם שפת הטבעת, יגדירו מסילה המקיפה את D כשיש בו "חריץ". הקטע הנוסף נספר פעמיים - ועם כיוונים מנוגדים, ולכן האינטגרלים לאורכו מצמצמים זה את זה, ומתקבלת הנוסחה. $\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) יהי D המשולש שקודקודיו הם $(0,0), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 1)$ ותהי שפתו γ. אז

$$\int_\gamma (y - \sin x) dx + \cos x dy = \iint_D (-\sin x - 1) dxdy = \ldots \;.$$

(ii) נזכור את השדה $F(x,y)=(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$. הוא משמר באופן מקומי (למשל, הפוטנציאל בחצי המישור הימני הוא $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$). אבל השדה אינו משמר, כי ראינו שאם γ היא מעגל היחידה (כשעוברים עליו פעם אחת בכיוון המתמטי החיובי), אז $\int_\gamma F=2\pi$. זו גם התוצאה לכל מסילה אחרת γ המקיפה את הראשית פעם אחת, כי השדה משמר בתחום המוגבל ע"י γ וע"י מעגל קטן סביב הראשית.

אם עוברים על המעגל (או על המסילה האחרת) k פעמים האינטגרל הוא $2k\pi$. זה מאפשר לנו לתת נוסחה המחשבת את ה"אינדכס" של מסילה γ במישור, כלומר את מספר הפעמים שהיא מקיפה את הראשית:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}\ .$$

משפט גרין נותן נוסחה חשובה לחישוב השטח של תחום

<u>משפט.</u> יהי D תחום שבו תקף משפט גרין, ותהי γ שפתו. אז השטח של D ניתן ע"י כל אחד מהאינטגרלים הבאים

$$|D|=\int_\gamma xdy=-\int_\gamma ydx=\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx+xdy\ .$$

הוכחה. משתמשים במשפט גרין עם השדות $F(x,y)=(0,x)$, או $(-y,0)$ או $\frac{1}{2}(-y,x)$ בהתאמה, ושלושתם מקיימים ש- $\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\equiv 1$ בתחום D. $\square$

לנוסחה הזו יש חשיבות מעשית רבה במדידות. היא מאפשרת לדעת את השטח של D רק עפ"י שפתו!

<u>דוגמאות.</u>

(i) נחשב את שטח עיגול היחידה. כאן $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ עבור $0\le t\le 2\pi$, ולכן השטח הוא

$$\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx+xdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\pi\ .$$

(ii) נחשב את השטח המוגבל ע"י $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ ברביע החיובי. השפה מורכבת מהמסילה $\gamma(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t)$ עבור $0\le t\le\pi/2$, ומהקטעים γ_1 ו- γ_2 המקשרים את הראשית עם $(1,0)$ ו- $(0,1)$ בהתאמה. אבל $y=dy=0$ על γ_1, ו- $x=dx=0$ על γ_2, ולכן השטח הוא

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx+xdy &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(3\sin^4 t\,\cos^2 t+3\cos^4 t\,\sin^2 t)dt\\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\sin^2 t dt=\frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt=\dots\end{aligned}$$

1 טורי מספרים

1.1 מושגים כלליים

נתונה סדרת מספרים $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots$, ונרצה לסכם את כל אבריה ולדבר על הסכום האינסופי

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ונעשה זאת ע"י תהליך גבולי. נסמן ב- $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ את הסכום החלקי של n האברים הראשונים בסדרה.

<u>הגדרה.</u> נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס כאשר סדרת הסכומים החלקיים שלו, $\{S_n\}$, מתכנסת. אם גבולה הוא $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ נאמר שסכום הטור הוא S ונסמן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

אם $\lim_{n\to\infty} S_n$ לא קיים נאמר שהטור מתבדר.

המינוח האנגלי הוא sequence (סדרה) ו- series (טור).

<u>דוגמאות.</u>

(i) טור גיאומטרי אינסופי $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$.

כאשר $q \neq 1$ הסכומים החלקיים הם

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

אם $|q| < 1$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ קיים, ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q} \ .$$

אם $|q| \geq 1$ הגבול לא קיים, והטור מתבדר. בפרט עבור $q = \pm 1$ מתקבלים הטורים המתבדרים $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \ldots$.

(ii) הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ מתכנס וסכומו 1, כי נציג את האבר הכללי בצורה

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \end{aligned}$$

(סכום שבו ניתן להציג $a_k = b_k - b_{k-1}$, ולכן $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0$, נקרא "סכום טלסקופי").

(iii) הטור $\sum \frac{1}{\sqrt{j}}$ מתבדר כי

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty \ .$$

התכונות היסודיות של טורים מתקבלות ע"י תרגום של התוצאות האנלוגיות לסדר-ות. לא ניתן את ההוכחה המידית למשפט הבא.

משפט. (i) אם הטור $\sum a_k$ מתכנס אז לכל מספר ממשי c גם הטור $\sum ca_k$ מתכנס, וסכומו הוא $c\sum a_k$.

(ii) אם הטורים $\sum a_k$ ו- $\sum b_k$ מתכנסים, אז גם $\sum(a_k + b_k)$ מתכנס וסכומו הוא $\sum a_k + \sum b_k$. (הכיוון ההפוך אינו נכון כמובן. תנו דוגמא נגדית!)

(iii) (קריטריון קושי). הטור $\sum a_k$ מתכנס אםם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $m > n > N$ מתקיים

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| = |S_m - S_n| < \varepsilon \ .$$

דוגמאות.

(i) הטור $\sum \frac{1}{j^2}$ מתכנס, כי

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{m} a_j &= \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=n+1}^{m} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

בתנאי ש- $n + 1 > 1/\varepsilon$.

(ii) הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{k}$ מתבדר כי אינו מקיים את תנאי קושי: בהנתן n נבחר $m = 2n$, ואז

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0 \ .$$

משפט. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז $\lim a_k = 0$.

הוכחה. **נציג** $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$ $\square$

חשוב להדגיש שהמשפט נותן רק תנאי הכרחי שאיננו מספיק. ראינו למשל שהטור $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ והטור ההרמוני מתבדרים, למרות שסדרת אבריהם שואפת לאפס.

הערה. שינוי של מספר סופי מאברי הטור אינו משפיע על התכנסותו או התבדרותו. (כאשר הטור מתכנס השינוי יכול, כמובן, להשפיע על ערך הסכום).
לטור מהצורה $r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ נקרא "זנב של הטור" (או "שארית הטור") $\sum a_k$.
ע"ס ההערה מקבלים שהטור המקורי מתכנס אםם הזנבות שלו הם טורים מתכנסים, ובמקרה זה $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$.

1.2 טורים עם אברים חיוביים

הטיפול בטורים אינסופיים דומה מאד לטיפול באינטגרלים מוכללים בקרן אינסופית. למעשה, ניתן להציג כל טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ כאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ עבור הפונקציה f המוגדרת ע"י

$$f(x) = a_k \quad \text{כאשר} \quad x \quad \text{בקטע} \quad [k, k+1) \; .$$

כמו שעשינו באינטגרלים מוכללים, גם כאן נטפל תחילה בטורים עם אברים בעלי סימן קבוע, ובה"כ נניח שהם חיוביים. המפתח לכך שהטיפול בטורים עם אברים בעלי סימן קבוע פשוט יותר מהטיפול בטורים כלליים הוא המשפט הבא

משפט. **אם** $a_n \geq 0$ **לכל** n, **אז** $\sum a_n$ **מתכנס אםם סדרת הסכומים החלקיים** S_n **היא סדרה חסומה.**

הוכחה. מאי השליליות של ה- a_n-ים נובע שהסדרה S_n מונוטונית עולה, וידוע כי לסדרה מונוטונית יש גבול אםם היא חסומה. $\square$

המשפט מאפשר בדיקת ההתכנסות של טור חיובי ע"י בדיקה פשוטה יותר - עלינו רק לבדוק חסימות. אנחנו גם נשתמש (לטורים עם אברים חיוביים בלבד!) בסימון $\sum a_n < \infty$ לטור מתכנס וב- $\sum a_n = \infty$ לטור מתבדר.

משפט. [קריטריון ההשוואה]. **יהיו** $\sum a_n$ **ו-** $\sum b_n$ **טורים עם אברים אי-שליליים. אם קיים קבוע חיובי** $K > 0$ **כך שלכל** n

$$0 \leq a_n \leq K b_n$$

ואם הטור $\sum b_n$ **מתכנס, אז גם** $\sum a_n$ **מתכנס ו-** $\sum a_n \leq K \sum b_n$.

הוכחה. **נסמן ב-** $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ **ו-** $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ **את הסכומים החלקיים של** הטורים. עפ"י הנתון B_N סדרה חסומה ו- $0 \leq A_N \leq K B_N$ לכל N, לכן גם A_N חסומה ולכן מתכנסת. אי השוויון בין סכומי הטורים נובע ממעבר לגבול. $\square$

<u>הערה.</u> להתכנסות הטור $\sum a_n$ אין צורך לדרוש כי $0 \le a_n \le Kb_n$ לכל n ומספיק שיש N כך שזה יתקיים רק לכל $n > N$, כלומר עבור n גדולים מספיק - אך ברור שאז אי השוויון בין הסכומים אינו חייב להתקיים. הערה דומה תהיה נכונה גם למשפטים רבים בהמשך ובדר"כ לא נציין אותה במפורש.

המסקנה המיידית הבאה נוחה מאד לשימוש.

<u>מסקנה.</u> נניח כי a_n, b_n חיוביים וכי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. אם $0 < L < \infty$ אז $\sum a_n$ מתכנס אםם $\sum b_n$ מתכנס.

הוכחה. לפי הגדרת הגבול נמצא N כך ש- $0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ לכל $n \ge N$, והמסקנה נובעת מהמשפט. $\square$

הוכחה דומה מראה שאם $L = 0$ ו- $\sum b_n$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הטור $\sum \frac{n}{n^3-1}$ מתכנס, כי לכל $n > 1$ מתקיים ש- $0 < \frac{n}{n^3-1} < \frac{2}{n^2}$ והטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לחילופין, נשתמש במסקנה ובכך ש- $\lim \left(\frac{n}{n^3-1} \Big/ \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

(ii) לכל $x > 0$ קטן מתקיים $x/2 < \sin x < x$, ולכן הטורים החיוביים $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ו- $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתנהגים כמו הטורים $\sum \frac{1}{n}$ ו- $\sum \frac{1}{n^2}$ בהתאמה, וראינו כי הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר, ואילו $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס.
לחילופין, אפשר להשתמש במסקנה כי $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

מבחני ההתכנסות הבאים הם מאוד שימושיים. שניהם נובעים בקלות ממשפט ההשוואה כאשר משווים עם טור גיאומטרי מתכנס.

<u>משפט.</u> יהיו a_n חיוביים.

(i) [מבחן השורש (קושי)] אם קיימים $0 < q < 1$ ו- N כך ש- $\sqrt[n]{a_n} \le q$ לכל $n \ge N$, אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.

(ii) [מבחן המנה (ד'אלמבר)] אם קיימים $0 < q < 1$ ו- N כך ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ לכל $n \ge N$, אז הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה. בלי הגבלת הכלליות $N = 1$.

(i) נעלה את אי השוויון בחזקת n ונקבל כי $a_n \le q^n$, ואגף ימין הוא האבר הכללי של טור גיאומטרי מתכנס.

(ii) רואים באידוקציה כי $a_n \le a_1 q^{n-1}$, ושוב אגף ימין הוא האבר הכללי של טור גיאומטרי מתכנס. $\square$

<u>הערה.</u> תנאי המשפט שקולים לכך ש- $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ או, בהתאמה, לכך ש- $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. במקרים שהגבולות קיימים (ואין צורך לעבור לגבולות חלקיים), פשוט מחשבים את הגבול.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $\sum \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ מתכנס כי מאי השוויונים $2^n+4^n < 2\cdot 4^n$ ו- $3^n+5^n > 5^n$ נובע כי

$$\sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}} < \sqrt[n]{\frac{2\cdot 4^n}{5^n}} \to \frac{4}{5} < 1.$$

(ii) $\sum \frac{A^n}{n!}$ מתכנס לכל $A > 0$, כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{A}{n+1} \to 0 < 1$.

<u>הערות.</u> (i) אי השוויון החריף $q < 1$ חשוב, והתנאי החלש יותר $\sqrt[n]{a_n} < 1$ לכל n (או $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$) אינו מספיק ואינו נותן שום אינפורמציה. לדוגמא, אם $a_n = \frac{1}{n^2}$ ו- $b_n = \frac{1}{n}$ אז $\sqrt[n]{a_n} < 1$ וגם $\sqrt[n]{b_n} < 1$ לכל n, אך $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר! (ובאופן דומה גם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ו- $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$ לכל n).

(ii) אפשר לנסח "משפטים הפוכים", למשל, אם $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, או אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$ אז הטור $\sum a_n$ מתבדר. אין טעם לנסות ולזכור אותם בע"פ - בכולם הסיבה להתבדרות היא "טריביאלית" - האבר הכללי אינו שואף לאפס - ובדוגמאות קונקרטיות קל לראות זאת ישירות.

(iii) השימוש במבחן המנה מוגבל כי אפשר להשתמש בו רק כאשר כל ה- a_n-ים (החל ממקום מסוים) חיוביים ממש. מבחינה זו וודאי שמבחן השורש כללי יותר, אך למעשה הוא חזק ממבחן המנה במובן בסיסי יותר: אם מתקיימים תנאי מבחן המנה, כלומר, אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ לכל n, אז גם לכל k

$$a_k = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \le a_1 q^{k-1}$$

ולכן $\sqrt[k]{a_k} \le \sqrt[k]{a_1 q^{k-1}} \le q_1 < 1$ אם רק k גדול מספיק, ומתקיימים גם תנאי מבחן השורש.

כלומר, אם כי מבחן המנה הוא לעתים נוח יותר לשימוש, הרי שבאופן עקרוני כל פעם שאפשר להשתמש בו אז ההתכנסות היתה נובעת גם משימוש במבחן בשורש.

<u>טורים חיוביים ומונוטוניים</u>

כאשר מוסיפים להנחת החיוביות של ה- a_n-ים גם את ההנחה שהסדרה a_n מונוטונית יורדת, מקבלים מבחני התכנסות (או התבדרות) חזקים בהרבה.

נתחיל בדוגמא פשוטה הנותנת תנאי הכרחי חזק יותר מאשר $a_n \to 0$ להתכנסות טורים כאלה.

<u>משפט.</u> **תהי $\{a_n\}$ סדרה אי שלילית ויורדת. אם הטור $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.**

הוכחה. המונוטוניות וקריטריון קושי עבור $m=2n$ נותנים כי

$$na_{2n} \le \sum_{j=n+1}^{2n} a_j \to 0$$

ולכן גם $2na_{2n} \to 0$, ומהמונוטוניות נובע כי למעשה $na_n \to 0$. □

<u>הערות.</u> (i) המשפט נותן רק תנאי הכרחי שאינו מספיק. נראה בהמשך כי $\sum \frac{1}{n\ln n}$ מתבדר למרות ש- $n\frac{1}{n\ln n} = \frac{1}{\ln n} \to 0$.

(ii) המשפט נותן הוכחה נוספת שהטור ההרמוני מתבדר: הסדרה n^{-1} יורדת אך $n \cdot n^{-1} \not\to 0$.

המשפט הבא נותן קשר פורמלי בין התכנסות של טור להתכנסות אינטגרל מוכלל.

<u>משפט.</u> [מבחן האינטגרל] תהי f פונקציה חיובית לא עולה בקרן $x \ge 0$, ואינטגרבילית בכל קטע חלקי $[0,b]$. אז האינטגרל המוכלל $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס אםם הטור $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ מתכנס.

אם הטור והאינטגרל מתכנסים אז

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \le \int_0^\infty f(x)dx \le \sum_{k=0}^\infty f(k) \ .$$

הוכחה. נסמן $S_n = \sum\limits_{k=1}^n f(k)$. הפונקציה f יורדת, ולכן $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ כאשר $x \in [k,k+1]$. אינטגרציה בקטע נותנת כי $f(k+1) \le \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$, וכשנסכם את אי השוויונות האלה עבור $0 \le k < n$ נקבל

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

או

$$S_n \le \int_0^n f(x)dx \le f(0) + S_{n-1}$$

כלומר, הסדרה S_n חסומה (ולכן הטור מתכנס) אםם סדרת האינטרלים $\int_0^n f$ חסומה (ולכן האינטגרל מתכנס).

מעבר לגבול נותן כי $\sum\limits_{k=1}^\infty f(k) \le \int\limits_0^\infty f \le \sum\limits_{k=0}^\infty f(k)$. □

דוגמאות.

המשפט, בצירוף השיטות שפיתחנו לחישוב והערכת אינטגרלים, מאפשר בדיקה פשוטה לטורים רבים.

(i) ראינו שהאינטגרל $\int^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p\le 1$. לכן גם הטור $\sum\frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p>1$ ומתבדר עבור $p\le 1$.

(ii) נבדוק לאילו ערכים של q הטור $\sum\frac{1}{k(\ln k)^q}$ מתכנס. נציב באינטגרל $\int^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^q}$ את $y=\ln x$, ואז $dy=\frac{dx}{x}$ ונקבל את $\int^{\infty}\frac{dy}{y^q}$ המתכנס אםם $q>1$.

(iii) בדקו כתרגיל עבור אלו ערכי q הטור $\sum\frac{1}{k\ln k(\ln\ln k)^q}$ מתכנס.

משפט. [מבחן הכיווץ] תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית יורדת. אז הטורים $\sum a_n$ ו- $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

הוכחה. נסמן ב- $S_n=\sum_{j=1}^n a_j$ וב- $T_k=\sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j}$ את הסכומים החלקיים של שני הטורים.

נניח תחילה כי הטור המכווץ מתכנס, כלומר ש- T_k-ים סדרה חסומה, ונסמן ב- T את סכום הטור. היות ש- S_n-ים סדרה עולה, הרי שכדי לראות שזו סדרה חסומה די להראות שיש לה תת סדרה חסומה. ואמנם, מהמונוטוניות של ה- a_n-ים נובע כי

$$\begin{aligned}
S_{2^k} &= a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}\\
&= a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\ldots+a_7)+\cdots+(a_{2^{k-1}}+\ldots+a_{2^k-1})+a_{2^k}\\
&\le a_1+2a_2+4a_4+\ldots+2^{k-1}a_{2^{k-1}}+a_{2^k}\le a_1+T_{k-1}+a_{2^k}\le T+2a_1
\end{aligned}$$

בכיוון ההפוך נעריך באופן דומה

$$\begin{aligned}
S_{2^k} &= a_1+a_2+\ldots+a_{2^k}\\
&= a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+\ldots a_8)+\ldots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots a_{2^k})\\
&\ge a_1+a_2+2a_4+4a_8+\ldots+2^{k-1}a_{2^k}=a_1+\frac{T_k}{2}
\end{aligned}$$

ומחסימות S_n נקבל שגם הסדרה T_k חסומה. □

דוגמאות.

(i) לכל $p>0$ הסדרה n^{-p} יורדת, ולכן הטור $\sum n^{-p}$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum 2^n\cdot 2^{-np}=\sum(2^{1-p})^n$ מתכנס. אבל זהו טור גיאומטרי עם $q=2^{1-p}$, והוא מתכנס אםם $2^{1-p}=q<1$, כלומר אםם $p>1$.

(ii) לכל $p>0$ הסדרה $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ יורדת, ולכן הטור $\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}$ מתכנס אםם הטור $\sum 2^n\cdot\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p}=\frac{1}{(\ln 2)^p}\sum\frac{1}{n^p}$ מתכנס. ע"ס (i) זה קורה אםם $p>1$.

(iii) לכל $p>0$ הסדרה $\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ יורדת, ולכן הטור $\sum\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ מתכנס אסם הטור $\sum\frac{1}{\ln 2\cdot n\cdot(\ln 2+\ln n)^p} = \sum 2^n\cdot\frac{1}{2^n(\ln 2^n)(\ln\ln 2^n)^p}$ מתכנס. ע"ס (ii) הטור הזה מתכנס אסם $p>1$.

באותה שיטה אפשר להמשיך ולטפל בביטויים מתאימים עם איטרציות מכל סדר של $\ln$.

1.3 טורים עם סימנים מתחלפים לסירוגין.

<u>משפט.</u>[לייבניץ] אם $a_n>0$ סדרה מונוטונית יורדת לאפס אז הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס וסכומו S מקיים $0<S<a_1$.

זנב הטור $r_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מקיים $|r_m|<a_{m+1}$ וסימנו $(-1)^m$.

הוכחה. להוכחת ההתכנסות נציג

$$S_{2n-1}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})\ .$$

כל הפרש a_k-a_{k+1} הוא חיובי, ולכן $S_{2n-1}<a_1$ והסדרה $\{S_{2n-1}\}$ יורדת. חישוב דומה נותן כי

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})>0$$

וכי S_{2n} עולה. כמו כן $S_{2n}=S_{2n-1}+a_{2n}>S_{2n-1}$ ו- $a_{2n}\to 0$, ולכן מתקיימים תנאי הלמה של קנטור ויש לשתי הסדרות גבול משותף שנסמנו ב- S, כלומר הטור מתכנס וסכומו S. ההערכה $0<S<a_1$ נובעת ממעבר לגבול.

ההערכה לזנב נובעת ממה שכבר הוכחנו, כי גם $r_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ הוא טור עם סימנים מתחלפים לסירוגין. $\square$

<u>דוגמא.</u>

הטור $\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p>0$ (ולא, כמו הטור בלי השמת הסימנים, רק ל- $p>1$). זו הקדמה טובה לנושא הבא שבו נטפל: השמת סימנים יכולה הביא לצמצומים שיגרמו להתכנסות הטור.

<u>הערות.</u> (i) בחישובים מעשיים מחליפים טורים אינסופיים בסכומים חלקיים מספיק רחוקים. כדי לדעת את שגיאת החישוב יש להעריך את $|r_m|$, ומשפט לייבניץ אכן נותן הערכה כזו.

(ii) הנחת המונוטוניות חשובה. לדוגמא נגדיר

$$a_j=\begin{cases}1/k & \text{כאשר } j=2k-1 \text{ איזוגי}\\ 1/k^2 & \text{כאשר } j=2k \text{ זוגי}\end{cases}$$

ואז

$$S_{2n}=\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}a_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\to\infty\ .$$

1.4 טורים עם אברים כלשהם

<u>הגדרה.</u> נאמר שהטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס. אם הטור $\sum a_n$ מתכנס - אך לא בהחלט - נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

<u>משפט.</u> טור מתכנס בהחלט הוא טור מתכנס. (הכיוון ההפוך אינו נכון כמובן: הטור $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט).

הוכחה. נסמן

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \quad ; \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}.$$

שני הטורים האלה אי-שליליים ו- $a_n = a_n^+ - a_n^-$ ואילו $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. אם $\sum |a_n| < \infty$ אז ממשפט ההשוואה גם $\sum a_n^+$ וגם $\sum a_n^-$ מתכנסים, ואז מתכנס גם

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- .$$

$\square$

<u>דוגמא.</u>

נבדוק עבור אילו x-ים הטור הטור $\sum \frac{x^n}{n}$ מתכנס ומתי הוא מתכנס בהחלט.
עבור $|x| > 1$ האבר הכללי לא שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר ועבור $|x| < 1$ הטור מתכנס בהחלט.
עבור $x = 1$ זה הטור ההרמוני המתבדר, ואילו עבור $x = -1$ הטור מתכנס (טור לייבניץ), אך לא בהחלט.

<u>הערה.</u> מבחני ההתכנסות לטורים חיוביים נותנים, ע"י מעבר מ- a_n ל- $|a_n|$, מבחנים דומים להתכנסות בהחלט, ואנחנו נשתמש בהם באופן חפשי.

אינטגרציה בחלקים היתה מכשיר חשוב בטיפול באינטגרלים מוכללים המתכנסים בתנאי. הלמה הבאה היא אנלוג דיסקרטי לנוסחה זו.

<u>למה.</u> [נוסחת הסכימה בחלקים] תהיינה $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ סדרות כלשהן, ונסמן $B_0 = 0$ ו- $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. אז

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i)$$

(נשים לב שע"י החלפת a_n ב- f, b_n ב- g, $a_{i+1} - a_i$ ב- f', B_n ב- $G(x) = \int_a^x g$ וסכומים באינטגרלים אכן מתקבלת הנוסחה $\int_a^b fg = f(b)G(b) - \int_a^b Gf'$).

הוכחה.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i\end{aligned}$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו ב- $B_0 = 0$. $\square$

נאמר שהטור $\sum b_n$ הוא טור חסום אם קיים קבוע M כך שלכל $n \geq 1$ מתקיים ש- $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq M$.

<u>משפט.</u> [משפט דיריכלה] יהי $\sum b_n$ טור חסום ונניח כי $a_n \to 0$ ושהטור $\sum |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס. אז גם הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

נשים לב שהתנאי $\sum |a_{n+1} - a_n| < \infty$ בוודאי מתקיים אם הסדרה a_n מונוטונית, כי אז $\sum |a_{n+1} - a_n| = |\sum (a_{n+1} - a_n)| = |a_1|$ כסכום טלסקופי.

הוכחה. נסמן $B_i = \sum_{i=1}^{i=1} b_i$ (ו- $B_0 = 0$), ונניח כי $|B_i| \leq M$ לכל i. עפ"י סכימה בחלקים

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_{i+1} - a_i)$$

אבל $a_n B_n \to 0$ (כי $a_n \to 0$ ו- B_n חסומה), ואילו הטור $\sum B_i (a_{i+1} - a_i)$ מתכנס בהחלט כי

$$\sum |B_i (a_{i+1} - a_i)| \leq M \sum |a_{i+1} - a_i| < \infty \ .$$

$\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) משפט לייבניץ הוא מקרה פרטי של המשפט כאשר $a_n = \frac{1}{n}$ ו- $b_n = (-1)^n$ (ואז הטור $\sum (-1)^n$ חסום).

(ii) הטור $\sum \frac{\sin n\theta}{n}$ מתכנס לכל מספר קבוע θ. עבור $\theta = 0$ אין מה להוכיח, ולכן נניח כי $\theta \neq 0$.

הסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת לאפס, לכן ע"ס משפט דיריכלה יש רק לבדוק שהטור $\sum \sin n\theta$ חסום, ונחשב ביטוי זה בעזרת מספרים מרוכבים:

נזכור את הנוסחה $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$, ובפרט $\sin\alpha = Im(e^{i\alpha})$. נוסיף גם מחובר (שהוא ממילא אפס) המתאים ל- $n = 0$ ונקבל

$$\sum_{n=0}^{N} \sin n\theta = Im\left(\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta}\right) = Im\left(\frac{e^{i(N+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

כסכום של טור גיאומטרי. נזכור כעת כי $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ ונקבל כי

$$e^{i(N+1)\theta} - 1 = 2ie^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} \frac{e^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{-(N+1)\theta}{2}}}{2i} = 2ie^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} \sin\frac{(N+1)\theta}{2}$$

ובאותו אופן $e^{i\theta}-1=2ie^{i\theta/2}\sin\frac{\theta}{2}$. מנת הסינוסים $\frac{\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ ממשית, ואילו החלק המדומה של המקדם הוא

$$Im\left(e^{i\frac{(N+1)\theta-\theta}{2}}\right)=\sin\frac{N\theta}{2}$$

ומכאן נקבל כי לכל N

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\sin n\theta\right|=\left|\frac{\sin\frac{N\theta}{2}\,\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|\le\left|\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| .$$

(iii) אם $|c_n|<\sqrt{n}$ אז הטור $\sum\frac{\sin n\theta}{n+c_n}$ מתכנס לכל θ קבוע. כאן הסדרה $\frac{1}{n+c_n}$ איננה בהכרח מונוטונית, אך נראה שהיא מקיימת $\sum|a_{n+1}-a_n|<\infty$. לשם כך נראה כי לכל $n>3$ מתקיים

$$|a_{n+1}-a_n|=\left|\frac{1}{n+1+c_{n+1}}-\frac{1}{n+c_n}\right|\le\frac{|c_n-c_{n+1}-1|}{|n+1+c_{n+1}|\cdot|n+c_n|}\le\frac{12}{n^{3/2}}$$

וההתכנסות תנבע מהתכנסות הטור $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$.
ואמנם, $|c_n-c_{n+1}-1|<2\sqrt{n}+1<3\sqrt{n}$ ואילו אי השוויונים $|n+c_n|\ge\frac{n}{2}$ ו- $|n+1+c_{n+1}|\ge\frac{n}{2}$ נותנים כי $|n+1+c_{n+1}|\cdot|n+c_n|\ge\frac{n^2}{4}$.

פעולות מותרות על טורים

פעולת החיבור היא פעולה אסוציאטיבית וקומוטטיבית, והיא דיסטריבוטיבית ביחס לכפל. הפעלת חוקים אלה על סכומים סופיים נותנת את הכללים הבאים:

א. אפשר לשים בסכום סוגריים כרצוננו:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=(a_1+\ldots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})+\ldots+(a_{n_k+1}+\ldots+a_n)$$

לכל $1\le n_1<n_2<\ldots<n_k<n$.

ב. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{\pi(k)}$ לכל פרמוטציה π של $\{1,\ldots,n\}$.

ג. $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)=\sum_{i=1}^{nm}w_i$, כאשר ה- w_i-ים הם כל המכפלות האפשריות a_kb_j (מסודרות בסדר כלשהו).

האם כללים אלה נשמרים גם לסכומים אינסופיים?

<u>משפט.</u> אם הטור $\sum a_n$ מתכנס, אז בכל השמת סוגריים מתקבל טור מתכנס - ולאותו הסכום.

הוכחה. נסמן ב- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ את הסכום החלקי ה- n-י של הטור ללא הסוגרים, וב- S את סכום הטור.

נקבע $0 = n_0 < n_1 < n_2 \ldots$ ונסמן $A_k = a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}$, ואז הטור המתקבל בהצבת סוגריים הוא $\sum A_k$. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים שלו ב- $T_m = \sum_{k=0}^m A_k$. הסדרה $\{T_m\}$ היא תת-סדרה של סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי S_n (כי $T_0 = S_{n_1}; T_1 = S_{n_2}; \ldots; T_{k-1} = S_{n_k}$) ומאחר שהסדרה $\{S_n\}$ מתכנסת ל- S, כך גם $\{T_k\}$. □

הפעולה ההפוכה - הסרת סוגריים, היא בדר"כ אסורה. למשל, אם $a_n = (-1)^n$ אז הטור $\sum a_n$ אינו מתכנס, אך אם נשים בסוגריים כל זוג מהטיפוס $a_{2n} - a_{2n-1}$ נקבל טור של אפסים.

הסיבה היא שבלי הסוגריים מתקבלים גם סכומים חלקיים (שלא היו בטור עם סוגריים) שבהם אין צמצומים. לכן המשפט הבא איננו מפתיע.

<u>משפט.</u> אם מוסיפים סוגריים לטור $\sum a_n$ כך שבכל סוגריים מופיעים אברים בעלי אותו סימן, ואם הטור עם הסוגריים מתכנס, אז גם הטור המקורי, $\sum a_n$, מתכנס - ולאותו הסכום.

הוכחה. נסמן ב- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ את הסכום החלקי ה- n-י של הטור ללא הסוגרים. נסמן את הטור עם הסוגריים ב- $\sum A_k$, כאשר $A_k = a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}$ ואת סדרת הסכומים החלקיים שלו ב- $T_m = \sum_{k=0}^m A_k$. עפ"י ההנחה הטור $\sum A_k$ מתכנס, ונסמן את סכומו ב- A. נשים לב שמהתכנסות הטור נובע כי $A_k \to 0$.

בהנתן n, נקבע m כך ש- $n_m + 1 \le n \le n_{m+1}$, ונציג

$$S_n = \sum_{k=1}^{m-1} A_k + \sum_{j=n_m+1}^{n} a_j = T_{m-1} + \beta_n$$

כאשר $\beta_n = \sum_{j=n_m+1}^n a_j$. ואז

$$|S_n - A| \le |T_{m-1} - A| + |\beta_n| \le |T_{m-1} - A| + |A_m| \to 0$$

□

לפני שנעבור למשפטים הבאים נזכיר שהגדרנו

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n \ge 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases} \quad ; \quad a_n^- = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ -a_n & a_n \le 0 \end{cases}$$

ואז $a_n^\pm \ge 0$, והטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אםם שני הטורים החיוביים $\sum a_n^+$ ו- $\sum a_n^-$ מתכנסים. אם הטור מתכנס בתנאי אך לא בהחלט אז $\sum a_n^+ = \sum a_n^- = \infty$.

נעבור לדון בשינוי סדר המחוברים בטור אינסופי.

<u>משפט.</u> אם משנים את סדר המחוברים בטור מתכנס בהחלט, אז הטור החדש מתכנס - ולאותו הסכום.

הוכחה. נניח כי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט ונסמן את סכומו ב- S. תהי π פרמוטציה (כלומר, העתקה חח"ע ועל) של $\mathbb{N}$, וצריך להוכיח שגם $\sum a_{\pi(n)}$ מתכנס ושסכומו הוא S.

נראה תחילה כי נוכל להניח שהטור חיובי. ואמנם נציג $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$, ואז $\sum a_{\pi(n)} = \sum a_{\pi(n)}^+ - \sum a_{\pi(n)}^-$, ולכן די באמת להראות ששני הטורים באגף ימין מתכנסים (ולאותם סכומים).

נסמן ב- $T_n = \sum_{i=1}^n a_{\pi(i)}$ וב- $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ את הסכומים החלקיים של שני הטורים.

נקבע n ונסמן $k = \max\{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$. מהחיוביות של ה- a_n-ים נובע כי

$$T_n = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \ldots + a_{\pi(n)} \le a_1 + a_2 + \ldots a_k \le S$$

ולכן הסדרה המונוטונית $\{T_n\}$ חסומה, וגבולה T מקיים $T \le S$.

שיקול דומה, כשמסתכלים על $\sum a_n$ כטור המתקבל משינוי סדר המחוברים של הטור $\sum a_{\pi(n)}$, מראה כי $S \le T$, ולכן $T = S$. $\square$

<u>משפט.</u>[רימן] יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי (כלומר, הוא מתכנס - אך לא בהחלט). אז לכל מספר ממשי S אפשר לסדר מחדש את אברי הטור כך שיתקבל טור מתכנס שסכומו הוא S. יתר על כן, אפשר גם לסדר את אברי הטור באופן שהטור שמתקבל מתכנס ל- ∞ או ל- $-\infty$ או שאיננו מתכנס כלל.

הוכחה. כדי לפשט את הכתיבה נסמן $p_n = a_n^+$ ו- $q_n = a_n^-$, ואז $\sum p_n = \sum q_n = \infty$, ובודאי ש- $p_n, q_n \to 0$.

יהי $n_1 \ge 1$ הקטן ביותר כך ש- $S < A_1 = p_1 + \ldots + p_{n_1}$ (יש כזה כי $\sum p_n = \infty$). ואז $p_1 + \ldots + p_{n_1 - 1} \le S$ ולכן $S < A_1 = (p_1 + \ldots + p_{n_1-1}) + p_{n_1} \le S + p_{n_1}$, ובפרט

$$|S - A_1| \le p_{n_1}$$

יהי כעת $m_1 \ge 1$ הקטן ביותר כך ש- $A_1 - (q_1 + \ldots + q_{m_1}) < S$ (יש כזה כי $\sum q_n = \infty$), ונסמן $A_2 = q_1 + \ldots q_{m_1}$. ואז $A_1 - A_2 < S \le A_1 - A_2 + q_{m_1}$, ו-

$$|S - (A_1 - A_2)| \le q_{m_1}$$

נמשיך באינדוקציה ונגדיר $\ldots < n_2 < n_1 < n_0 = 0$ ו- $\ldots < m_2 < m_1 < m_0 = 0$ כך שאם נסמן

$$A_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} p_n & \text{כאשר } k = 2j+1 \text{ איזוגי} \\[2ex] \displaystyle\sum_{n=m_j+1}^{m_{j+1}} q_n & \text{כאשר } k = 2(j+1) \text{ זוגי} \end{cases}$$

אז

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k A_k \right| < \alpha_n$$

כאשר $\alpha_n = p_{n_i}$ או q_{m_i} בהתאם לזוגיות של n. היות ו- $0 \underset{n\to\infty}{\to} p_{n_i}, q_{m_i}$, נקבל כי הטור $\sum(-1)^k A_k$ מתכנס וסכומו הוא S.

הטור הזה מתקבל מהטור $\sum a_n$ ע"י שינוי סדר המחוברים והשמת סוגריים, אבל בכל סוגר יש אברים בעלי אותו סימן (חיובי אם n איזוגי ושלילי אם הוא זוגי), ולכן מהתכנסות הטור המסודר מחדש עם הסוגריים נובעת גם התכנסותו ללא הסוגריים.

את הסיפא של המשפט מוכיחים בשיטה דומה (הוכיחו זאת כתרגיל!). $\square$

<u>מכפלת טורים</u>

<u>משפט.</u> אם הטורים $A = \sum a_i$ ו- $B = \sum b_j$ מתכנסים בהחלט אז גם הטור $\sum w_k$ שאבריו הם כל המכפלות האפשריות $\{a_i b_j\}_{i,j\geq 1}$, כשהן מסודרות בסדר כלשהו, מתכנס - וסכומו הוא $W = AB$.

הוכחה. ע"י הסתכלות בנפרד בסכומי האברים החיוביים ובסכומי האברים השליליים של שני הטורים (באופן דומה למה שעשינו בהוכחת המשפט על שינוי סדר המחוברים) נוכל, בה"כ, להניח שכל הטורים הם בעלי אברים חיוביים.

נסמן את הסכומים החלקיים של הטורים ב- $A_m = \sum_{i=1}^m a_i$, $B_m = \sum_{j=1}^m b_j$ ו- $W_n = \sum_{k=1}^n w_k$ בהתאמה, ונסמן ב- $k(i,j)$ את האינדכס k כך ש- $a_i b_j = w_k$.

נקבע כעת n ונסמן $m = \max\{\max(i,j) : k(i,j) \leq n\}$, כלומר m הוא האינדכס הגדול ביותר (i או j) שמופיע באחת המכפלות המגדירות את האברים $\{w_k\}_{k\leq n}$. מחיוביות האברים מקבלים לכן כי

$$w_1 + \ldots + w_n \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = A_m B_m \leq AB$$

כלומר, הטור החיובי $\sum w_n$ חסום ולכן מתכנס, וסכומו מקיים $W \leq AB$.

נפנה להוכחת אי השוויון ההפוך. בהנתן m נגדיר $n = \max\{k(i,j) : i,j \leq m\}$. כלומר, n הוא האינדכס הקטן ביותר כך שכל המכפלות $\{a_i b_j\}_{i,j\leq m}$ מופיעות בין ה- w_k-ים הראשונים.

מחיוביות האברים ועפ"י הגדרת n מקבלים כי $A_m B_m \leq W_n \leq W$ ולכן גם בגבול $AB \leq W$. $\square$

<u>הערות.</u> (i) ללא ההנחה שהטורים מתכנסים בהחלט למשפט אין משמעות כי אז הטור $\sum w_n$ בודאי שאיננו מתכנס בהחלט (ולכן יש חשיבות לסדר הסכימה): הטור $\sum a_i$ אינו מתכנס בהחלט, ולכן $\sum a_i^+ = \infty$. נקבע j_0 כך ש- $b_{j_0} > 0$ (יש כזה כי $\sum b_j^+ = \infty$), ואז $\sum w_n^+ \geq \sum_i a_i^+ b_{j_0} = \infty$.

יתר על כן, לא נוכיח זאת אך גם אין סידור אחד "קנוני" שבו טור המכפלה תמיד יתכנס לכל זוג טורים $\sum a_i$ ו- $\sum b_j$.

(ii) דרך נוחה, לפעמים, לסכם את מכפלת הטור היא ע"י השמת סוגריים "לאורך אלכסונים", כלומר על הטור $\sum d_n$ כאשר

$$d_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_i a_i b_{n-i} = \sum_i a_{n-i} b_i$$

דוגמא.

נראה בהמשך כי לכל x ממשי סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (שאנו יודעים שהוא מתכנס בהחלט) הוא e^x. נראה כי $e^x e^y = e^{x+y}$ ע"י הכפלת טורים.

נסכם, כפי שמוצע בהערה, עפ"י האלכסונים ונקבל

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!}\right)$$

אבל עפ"י נוסחת הבינום

$$\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}x^i y^{n-i}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}=\frac{(x+y)^n}{n!}$$

ומקבלים כי

$$e^x e^y=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e^{x+y}$$

1 פונקציות של כמה משתנים ממשיים

עד עכשיו טיפלנו בפונקציות של משתנה אחד, אך תופעות בטבע תלויות בדר"כ בכמה משתנים. למשל, התפלגות הטמפרטורה של גוף מרחבי תלויה במיקום (שהוא בעצמו נתון ע"י שלושה משתנים) ובזמן, כלומר ע"י פונקציה $T(x,y,z,t)$, כאשר x,y,z הן הקואורדינטות של הנקודה ו- t הוא הזמן.

בפרק זה נעסוק בפונקציות של כמה משתנים ממשיים, נכליל את מה שלמדנו על פונקציות של משתנה אחד ונטפל בתופעות חדשות המיוחדות לפונקציות כאלה.

1.1 המרחב האוקלידי ה- n-ממדי

דרך נוחה מאוד להסתכל על פונקציות של כמה משתנים היא להסתכל עליהן כפונקציות של משתנה אחד, שהוא וקטור n- ממדי. נתחיל, לכן, בהבנת המבנה של המרחב האוקלידי ה- n-ממדי, $\mathbb{R}^n$.

המרחק בין שתי נקודות $P=(p_1,\ldots,p_n)$ ו- $Q=(q_1,\ldots,q_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$ יסומן ע"י

$$d(P,Q)=\left(\sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

את המרחק של P מהראשית, $\left(\sum_{i=1}^{n}p_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, נסמן ב- $\|P\|$, ונקרא לו הנורמה של P. נשים לב כי $d(P,Q)=\|P-Q\|$.

למרחק יש התכונות הבאות:

(i) סימטריות: $d(P,Q)=d(Q,P)$.

(ii) חיוביות: $d(P,Q)\geq 0$ ו- $d(P,Q)=0$ אםם $P=Q$.

(iii) אי שוויון המשולש: $d(P,R)\leq d(P,Q)+d(Q,R)$.

שני החלקים הראשונים טריביאליים, ולהוכחת השלישי נצטרך הכנות נוספות.

המכפלה הפנימית של שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ ניתנת ע"י הנוסחה

$$\langle P,Q\rangle=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i .$$

לפעמים מסמנים את המכפלה הפנימית גם ב- (P,Q) או ב- $P\cdot Q$. נשים לב כי $\langle P,P\rangle=\|P\|^2$.

למכפלה הפנימית יש התכונות הבאות, ששלוש הראשונות מיידיות:

(i) סימטריות: $\langle P,Q\rangle=\langle Q,P\rangle$.

(ii) חיוביות: $\langle P,P\rangle\geq 0$ ו- $\langle P,P\rangle=0$ אםם $P=0$.

(iii) לינאריות: $\langle\alpha_1P_1+\alpha_2P_2,Q\rangle=\alpha_1\langle P_1,Q\rangle+\alpha_2\langle P_2,Q\rangle$ (ובאופן דומה בקואורדינטה השניה). בפרט מקבלים, ע"י כתיבה מפורשת של הנוסחאות ופתיחת הסוגריים, כי

$$\|P+Q\|^2=\|P\|^2+\|Q\|^2+2\langle P,Q\rangle .$$

(iv) אי שוויון קושי-שוורץ: $|\langle P,Q\rangle| \le \|P\|\,\|Q\|$, ויש שוויון אםם יש מספר λ כך ש- $Q=\lambda P$ או ש- $P=0$.

<u>הוכחת אי שוויון קושי-שוורץ:</u> נניח כי $P,Q\neq 0$. לכל t מתקיים

$$0\le \|tP+Q\|^2 = t^2\|P\|^2+2t\langle P,Q\rangle+\|Q\|^2$$

ואגף ימין הוא פולינום ריבועי במשתנה הממשי t שנסמנו ב- $f(t)$. פולינום כזה יכול להיות בעל סימן קבוע רק כאשר הדיסקרימיננטה שלו אי-חיובית, כלומר כאשר

$$(2\langle P,Q\rangle)^2-4\|P\|\,\|Q\|\le 0$$

ואחרי העברה באגפים והוצאת שורש זהו אי השוויון המבוקש.

אם יש שוויון, אז הדיסקרימיננטה היא 0 ולמשוואה הריבועית יש שורש יחיד, $f(t_0)=0$. כשנציב אותו נקבל כי $\|t_0P+Q\|^2=0$, ולכן $t_0P+Q=0$, כלומר $Q=-t_0P$.

<u>הוכחת אי שוויון המשולש.</u> לכל שני וקטורים A ו- B מתקיים, ע"ס אי שוויון קושי שוורץ, כי

$$\|A+B\|^2=\|A\|^2+2\langle A,B\rangle+\|B\|^2\le\|A\|^2+2\|A\|\,\|B\|+\|B\|^2=(\|A\|+\|B\|)^2$$

כלומר, $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$, ולכן

$$\begin{aligned} d(P,R) &= \|P-R\|=\|(P-Q)+(Q-R)\| \\ &\le \|P-Q\|+\|Q-R\|=d(P,Q)+d(Q,R)\end{aligned}$$

בעזרת המרחק נוכל להכליל מושגים רבים מהישר הממשי למרחב האוקלידי. נסמן ב- $B(P,r)=\{Q\in\mathbb{R}^n : d(P,Q)<r\}$ את הכדור הפתוח ברדיוס r עם מרכז P. כדורים כאלה ישמשו כהכללה הטבעית של קטע פתוח, או של סביבה של נקודה על הישר.

אפשר גם להסתכל על סביבות מסוגים אחרים, כגון קוביה פתוחה שמרכזה ב- P ושאורך צלעה הוא $2r$

$$C=\{Q=(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{R}^n : |q_i-p_i|<r \quad;\quad 1\le i\le n\}$$

או, באופן כללי יותר, על תיבה שאורך צלעותיה הוא $2r_i$ בהתאמה, כלומר על הקבוצה המוגדרת ע"י אי השוויונות $|q_i-p_i|<r_i$.

<u>הערה.</u> מבחינות רבות זה לא ישנה לנו איזה מין סביבה ניקח כי אי השוויון

$$\max|q_i-p_i|\le\left(\sum(q_i-p_i)^2\right)^{\frac12}\le\sqrt{n}\max|q_i-p_i|$$

מראה שכל כדור סביב P מכיל ומוכל בתיבות בגדלים מתאימים.

המושג הבסיסי בפיתוח החשבון האינפיניטיסימלי במשתנה אחד היה מושג הגבול. אחרי שהגדרנו את מושג המרחק במרחב האוקלידי ההכללה ברורה

<u>הגדרה.</u> **נאמר שסדרת נקודות** $P_k \in \mathbb{R}^n$ **מתכנסת לנקודה** P **אם** $d(P_n, P) \to 0$, **ובלשון** ε, N**: אם לכל** $\varepsilon > 0$ **יש** N **כך ש-** $d(P_n, P) < \varepsilon$ **לכל** $n > N$.

הטענה הבאה תיתן לנו דרך נוחה מאד לבדוק אם סדרת נקודות מתכנסת. כדי לפשט את הסימונים ננסח ונוכיח אותה רק ל- $n = 2$.

<u>טענה.</u> **הסדרה** $P_k = (x_k, y_k)$ **מתכנסת לנקודה** $P = (x, y)$ **אמם** $x_k \to x$ **ו-** $y_k \to y$**.**

הוכחה. ההוכחה נובעת מיידית מאי השוויונות

$$\max\{|x_k - x|, |y_k - y|\} \leq \left((x_k - x)^2 + (y_k - y)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\max\{|x_k - x|, |y_k - y|\}$$

$\square$

נאמר שקבוצה $A \subset \mathbb{R}^n$ היא חסומה אם היא מוכלת באיזשהו כדור. (בדקו שכל סדרה מתכנסת היא חסומה).

<u>משפט.</u>[משפט בולצ׳נו-ויירשטראס] לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה. כדי לפשט את הסימונים נוכיח את המשפט רק ל- $n = 2$, ונסמן את אברי הסדרה ב- $P_k = (x_k, y_k)$.

מחסימות הסדרה נובע שגם סדרת המספרים x_k היא סדרה חסומה, ולכן ע"ס המקרה החד ממדי של המשפט יש לה תת סדרה מתכנסת x_{k_j}.

נסתכל כעת על הסדרה y_{k_j}. גם זו סדרה חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $y_{k_{j_m}}$. תת הסדרה המבוקשת היא $P_{k_{j_m}}$, כי הסדרה $x_{k_{j_m}}$ מתכנסת (כתת סדרה של סדרה מתכנסת) ועפ"י הבחירה גם $y_{k_{j_m}}$ מתכנסת. $\square$

באופן אנלוגי למקרה החד-ממדי מגדירים סדרת קושי ומוכיחים שסדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

<u>הגדרה.</u> (i) נאמר שהנקודה P היא נקודה פנימית של הקבוצה C אם יש סביבה של P (כדור או תיבה) המוכלת כולה ב- C. לדוגמא, הנקודות ה"פנימיות" של כדור (או קטע במקרה החד ממדי).

(ii) קבוצה תקרא פתוחה אם כל נקודותיה פנימיות. למשל כדור או תיבה פתוחים.

(iii) נאמר שהנקודה P היא נקודה מבודדת של הקבוצה C אם יש סביבה של P שאיננה מכילה אף נקודה של C פרט ל- P. למשל הנקודה 1 בסדרה $\{\frac{1}{n}\}$.

(iv) נאמר שהנקודה P היא נקודת הצטברות של הקבוצה C אם כל סביבה של P מכילה נקודה של C שונה מ- P. למשל 0 היא נקודת הצטברות של הסדרה $\{\frac{1}{n}\}$ (ושימו לב ש- P אינה חייבת להשתייך לקבוצה C), או של הקטע $[0, 1]$.

(v) קבוצה תקרא סגורה אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה. למשל כדור או תיבה סגורים.

(vi) נאמר שהנקודה P היא נקודת שפה של הקבוצה C אם אינה נקודה פנימית של C וגם אינה נקודה פנימית של המשלים של C.

הערות. (i) אם P נקודת הצטברות של C אז למעשה כל סביבה שלה מכילה אינסוף נקודות של C. כי אילו היה כדור פתוח $B(P,r)$ המכיל רק מספר סופי $P_1,\dots,P_n$ של נקודות מ- C השונות מ- P, היינו מגדירים $\varepsilon = \min\{r, \min_{1\le i\le n} \|P-P_i\|\}$, ואז הכדור הפתוח $B(P,\varepsilon)$ לא היה יכול להכיל אף נקודה של C פרט לנקודה היחידה P עצמה - אם היא בכלל שייכת לקבוצה. (ציירו את ההוכחה!).

(ii) קבוצה C היא פתוחה אסם משלימתה סגורה. כי אם C פתוחה ו- $P \in C$ אז יש סביבה של P המוכלת כולה ב- C, ולכן P אינה יכולה להיות נקודת הצטברות של המשלים של C, כלומר המשלים מכיל את כל נקודות ההצטברות שלו - ולכן הוא קבוצה סגורה. הוכחת הכיוון ההפוך דומה.

הקוטר של קבוצה C הוא $diam(C) = sup\{d(P,Q) : P,Q \in C\}$.
שני החלקים של המשפט הבא הם הכללות פשוטות של המקרה החד-ממדי.

משפט. (i) [הלמה של קנטור] **אם C_k סדרת קבוצות סגורות וחסומות ב- $\mathbb{R}^n$ כך ש- $C_{k+1} \subset C_k$ אז $\cap C_k \neq \emptyset$. אם גם $diam(C_k) \to 0$ אז החיתוך $\cap C_k$ מכיל בדיוק נקודה אחת.**

(ii) [משפט היינה-בורל] **תהי C תיבה סגורה, אז לכל כיסוי פתוח של C יש תת-כיסוי סופי.**

הוכחה. (i) לכל k נבחר נקודה $P_k \in C_k$. הקבוצה C_1 חסומה, וכל הקבוצות האחרות מוכלות בה, לכן הסדרה P_k חסומה. עפ"י משפט בולצ'אנו וירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת. נניח כי $P_{k_j} \to P$ ונוכיח שהנקודה P נמצאת בחיתוך. ואמנם, אם נקבע k, אז כל ה- P_{k_j}-ים, פרט למספר סופי מהן, נמצאות ב- C_k - אבל C_k סגורה, ולכן גם הגבול P נמצא ב- C_k.

אם גם $diam(C_k) \to 0$ לא ייתכן שהחיתוך יכיל שתי נקודות $Q \neq P$, כי אז היינו מקבלים שלכל k מתקיים $diam(C_k) \geq \|P-Q\| > 0$, בסתירה להנחה.

(ii) לא ניתן את ההוכחה, שהיא אנלוגית להוכחה במקרה החד ממדי (בשיטת "אריה במדבר"). נעיר רק שהמשפט נכון לכל קבוצה סגורה וחסומה C, ולא רק לתיבה סגורה: נבחר תיבה סגורה $T \supset C$ ונוסיף לכיסוי הנתון $\{U_\alpha\}$ את הקבוצה הפתוחה $\mathbb{R} \setminus C$. מקבלים כיסוי פתוח של התיבה T, ולכן ע"ס המקרה הפרטי של תיבה יש תת כיסוי סופי של T - והוא מכסה את C גם אם נשמיט ממנו את $\mathbb{R} \setminus C$. $\square$

יש לנו כעת את "השפה המתמטית" הדרושה להגדרת הרציפות של פונקציות בין קבוצות חלקיות של מרחבים אוקלידיים.

הגדרה. תהי D קבוצה חלקית כלשהי ב- $\mathbb{R}^n$, ותהי $f : D \to \mathbb{R}^m$. **נאמר ש- f רציפה בנקודה $P \in D$ אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $Q \in D$ מקיימת $\|Q-P\| < \delta$, אז $\|f(P) - f(Q)\| < \varepsilon$.**

הערות. (i) כמו ביחס לפונקציות של משתנה אחד, הגדרה זו שקולה להגדרה בעזרת סדרות: f רציפה בנקודה $P \in D$ אסם לכל סדרה של נקודות $P_k \in D$ המתכנסת לנקודה P מתקיים שהסדרה $f(P_k)$ מתכנסת ל- $f(P)$.

(ii) הסימונים שהכנסנו מאוד יעילים. שימו לב שהמרחקים וההתכנסויות במקור ובתמונה הם במרחבים שונים (כי בדר"כ $m \neq n$), אך הכתיבה היא "כללית" ודומה מאוד לכתיבה במקרה החד-ממדי. למרות האנלוגיה המלאה הזו בכתיבה, הרי, כפי שנראה בהמשך, במרחב ממימד גדול מ- 1 יש "יותר כיוונים" להתקרב לנקודה P והגיאומטריה של התכנסות ושל גבולות יותר מסובכת מאשר בישר.

(iii) מההגדרה נובע באופן ישיר (כמו במקרה החד ממדי) שאם ההרכבה $G \circ F$ מוגדרת היטב, ואם F רציפה בנקודה P ו- G רציפה בנקודה $F(P)$, אז $G \circ F$ רציפה בנקודה P.

עיקר העיסוק שלנו בקורס זה יהיה בפונקציות ממשיות של כמה משתנים, כלומר בפונקציות $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subset \mathbb{R}^n$. אך בהגדרות הבאות נתעניין דוקא בפונקציות מקטע $I \subset \mathbb{R}^1$ לתוך $\mathbb{R}^n$.

<u>הגדרה.</u> **יהי $I \subset \mathbb{R}^1$ קטע. פונקציה רציפה $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ נקראת מסילה לתוך $\mathbb{R}^n$. אם $I = [a, b]$ קטע סגור, אז לנקודות $\gamma(a)$ ו- $\gamma(b)$ נקרא נקודת ההתחלה ונקודת הסיום (בהתאמה) של γ.**

אם $\gamma(a) = \gamma(b)$ אז המסילה נקראת סגורה.

התמונה של γ היא עקום מסויים ב- $\mathbb{R}^n$, ודרך טובה לחשוב על המסילה היא שחלקיק נע על פני העקום הזה כך שבזמן t הוא נמצא בנקודה $\gamma(t)$. שימו לב שאנחנו מתייחסים כאן לפונקציה γ ולא, כפי שהיה טבעי אולי לחשוב, רק לעקום שהוא תמונתו. באופן כזה אותו עקום מתואר ע"י הרבה מסילות.

לדוגמא, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \leq t \leq 2\pi$ היא מסילה במישור שהעקום שהיא מתארת הוא מעגל היחידה. גם $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ עבור $0 \leq t \leq \pi$ מתאר את אותו עקום, וגם $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ עבור $0 \leq t \leq 5\pi$ מתאר אותו, אך שתי המסילות הראשונות עוברות על המעגל פעם אחת (והמסילה השניה מתארת תנועה במהירות כפולה מהראשונה), והשלישית מתארת הקפה של המעגל פעמיים וחצי.

<u>הגדרה.</u> קבוצה חלקית $D \subset \mathbb{R}^n$ **נקראת קשירה מסילתית אם לכל שתי נקודות P, Q ב- D יש מסילה $\gamma : [a, b] \to D$ כך ש- $\gamma(a) = P$ ו- $\gamma(b) = Q$. (ונאמר ש- γ מקשרת בין P ו- Q).**

קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית נקראת תחום.

הקבוצות הקשירות מסילתית בישר הן רק קטעים. במימד גבוה יש קבוצות רבות כאלה, והנחת הקשירות המסילתית תהיה התחליף הטבעי כשנרצה להכליל משפטים על פונקציות רציפות או גזירות בקטע לפונקציות רציפות או גזירות בקבוצות חלקיות של $\mathbb{R}^n$.

1.2 פונקציות ממשיות בכמה משתנים

לשם פשטות נצטמצם מעתה לפונקציות של שני משתנים ונכתוב $z = f(x, y)$.

הגרף של פונקציה כזו $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ הוא "משטח" דו ממדי במרחב התלת ממדי. הקבוצות $\{(x, y) : f(x, y) \equiv c\}$ נקראות קווי הגובה של f. (חישבו על מפה טופוגרפית).

<u>דוגמאות.</u>

$(i)\quad f(x,y)=x+y$. זוהי פונקציה לינארית שהגרף שלה הוא מישור. קו הגובה שלה המתאים לערך c הוא הישר $x+y=c$. ("שרטטו" את הגרף של f).

$(ii)\quad f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ עבור $(x,y)\neq(0,0)$. כדי לחשב את קו הגובה שלה המתאים לערך c צריך לפתור את המשוואה $c=\frac{xy}{x^2+y^2}$. במקום לעשות זאת נשים פשוט לב שהפונקציה קבועה על כל ישר (מנוקב בראשית) מהצורה $y=\lambda x$, וערכה עליו הוא $c=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ (ו- $c=0$ על ציר ה- y המנוקב בראשית).

זו דוגמא טובה כדי להראות שמושג הגבול בכמה משתנים אכן יותר מורכב מה-מקרה החד ממדי. על הישרים השונים דרך הראשית מתקבלים ערכים שונים, והגבול בראשית לא קיים! (איך נראה הגרף של הפונקציה?)

$(iii)\quad f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ עבור $(x,y)\neq(0,0)$. כאן $\lim_{x,y\to 0}f(x,y)=0$, כי $\frac{|xy|}{x^2+y^2}<1$ לכל x,y, ולכן אפילו רק $x\to 0$ מספיק כדי ש- $x\frac{xy}{x^2+y^2}\to 0$.

אחד המכשירים שנשתמש בהם כדי להבין ולנתח את המבנה של פונקציה $f(x,y)$ הוא לקבוע את הערך של אחד המשתנים (למשל לקבוע x_0) ולהסתכל על $f(x_0,y)$ כפונקציה של המשנה האחר, y, בלבד.

באופן גיאומטרי הפעולה שאנחנו עושים היא צמצום של הפונקציה לאיזשהו ישר המקביל לצירים הראשיים. הבנה של כל הצמצומים האלה נותן כלי להבנה של המבנה של הפונקציה כולה. אך הבנה זו היא בדר"כ חלקית בלבד. למשל, בדוגמא (ii), לכל הפונקציות $f(x_0,y)$ ו- $f(x,y_0)$ יש אי רציפות סליקה ב- 0, ואם נגדיר $f(0,0)=0$, הן תהיינה כולן רציפות - אך לפונקציה המקורית אין כלל גבול בראשית.

סכום, מכפלה, מנה (כשהמכנה שונה מאפס) והרכבה $\mathbb{R}^2\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה. גם המשפטים הבאים על פונקציות רציפות תקפים בכמה משתנים.

<u>משפט.</u> [משפט ערך הביניים] תהי f רציפה בקבוצה קשירה מסילתית D. אם $P_0,P_1\in D$ מקיימות ש- $f(P_0)<\alpha<f(P_1)$ עבור איזשהו מספר α, אז יש נקודה Q ב- D כך ש- $f(Q)=\alpha$.

הוכחה. הקבוצה D קשירה מסילתית, ולכן יש מסילה $\gamma(t)$ בקטע $[0,1]$ כך ש- $\gamma(t)\in D$ לכל t וכך ש- $\gamma(0)=P_0$ ו- $\gamma(1)=P_1$. ההרכבה $g(t)=f(\gamma(t))$ היא פונקציה רציפה בקטע ומקיימת $g(0)<\alpha<g(1)$ ולכן, עפ"י משפט ערך הביניים במשתנה אחד, יש t_0 בקטע כך ש- $g(t_0)=\alpha$ ונבחר $Q=\gamma(t_0)$. $\square$

לא ניתן את ההוכחות של שני שמשפטים הבאים. ההוכחות חזרות על ההוכחות במקרה החד-ממדי תוך שימוש במשפט בולצ'אנו ווירשטראס (או היינה בורל) עבור קבוצות ב- $\mathbb{R}^n$.

<u>משפט.</u> [משפט ווירשטראס] תהי f רציפה בקבוצה סגורה וחסומה D. אז f חסומה ומקבלת ב- D מכסימום ומינימום.

נאמר ש- f רציפה במידה שווה בקבוצה D אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ (התלוי רק ב- ε) כך ש- $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$ לכל $P,Q\in D$ המקיימות $\|P-Q\|<\delta$.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה בקבוצה סגורה וחסומה D. אז f רציפה שם במדה שווה.

1.3 חשבון דיפרנציאלי בכמה משתנים

<u>הגדרה.</u> הנגזרת החלקית של f לפי x בנקודה (x_0, y_0) היא

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

ונסמן גם $f_x(x_0, y_0)$ או $f'_x(x_0, y_0)$ או $D_1 f(x_0, y_0)$. הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial y}$ לפי המשתנה y, מוגדרת באופן דומה.

לדוגמא, אם $f(x, y) = x^y$ (עבור $x > 0$) אז $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$.

קיום הנגזרות החלקיות אינו חזק כמו קיום נגזרת במשתנה אחד (ונסביר זאת בפירוט מיד). הוא נותן אינפורמציה על קצב הגידול של הפונקציה רק בכיוונים הראשיים, וזה לא מספיק אפילו להבטחת הרציפות שלה. ראינו למשל שהפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

רציפה בראשית, אך $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ כי f זהותית אפס על הצירים הראשיים.

במשתנה אחד קיום נגזרת בנקודה x_0 אומר שהפונקציה משתנה באופן רגולרי בסביבת הנקודה: יש לגרף משיק (ששיפועו $f'(x_0)$), והפונקציה ניתנת לקירוב טוב ע"י פונקציה לינארית - ראינו באינפי 1 שפונקציה של משתנה אחד היא גזירה בנקודה x_0 אםם יש קבוע A ופונקציה $\varepsilon(t)$ כך ש- $\lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon(t)}{t} = 0$ כך שמתקיים

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \qquad (1)$$

ובמקרה זה $A = f'(x_0)$.

קיום נגזרות חלקיות בנקודה P אומר רק שהפונקציה משתנה באופן מאד רגולרי <u>בכיוונים הראשיים</u> בסביבת הנקודה, ושלגרפים של הצמצומים שלה לישרים דרך הנקודה המקבילים לצירים יש משיקים (ששיפועיהם הם $f'_x(P)$ ו- $f'_y(P)$). אך זה לא מספיק כדי לתאר את התנהגות הפונקציה בכיוונים אחרים, ובפרט זה לא אומר שהיא ניתנת לקירוב טוב ע"י פונקציה לינארית. האנלוג הדו-ממדי המלא לגזירות הוא קיום <u>מישור משיק</u> לגרף בנקודה P, וההגדרה הבאה היא הניסוח האנליטי לכך.

<u>הגדרה.</u> פונקציה $f(x, y)$ היא דיפרנציאבילית בנקודה $P = (x_0, y_0)$ אם יש קבועים A ו- B ופונקציה $\varepsilon(s, t)$ כך ש- $\lim_{s,t \to 0} \frac{\varepsilon(s,t)}{\sqrt{s^2 + t^2}} = 0$ באופן שמתקיים

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(P) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \qquad (2)$$

<u>הערות.</u> (i) שימו לב כי $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ הוא המרחק בין הנקודה $P = (x_0, y_0)$ לבין הנקודה $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, והגדרת הדיפרנציאביליות (2) אנלוגית לגמרי לנוסחה (1) במקרה החד-מימדי.

(ii) המישור המשיק לגרף של f בנקודה P הוא המישור

$$z = f(P) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) \ .$$

יהיה לנו נוח, לעתים, לכתוב את תנאי הדיפרנציאביליות בצורה קצת שונה

<u>למה.</u> הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $P = (x_0, y_0)$ אםם יש קבועים A ו- B ופונקציות $\alpha(s,t)$ ו- $\beta(s,t)$ כך ש- $\lim_{s,t\to 0} \alpha(s,t) = \lim_{s,t\to 0} \beta(s,t) = 0$, וכך שמתקיים

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(P) + A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \ .$$

הוכחה. נוכיח רק שתנאי הלמה גוררים דיפרנציאביליות (וזה גם הכיוון שבו נשתמש בהמשך). השלימו כתרגיל את הכיוון השני.

נגדיר $\varepsilon(s,t) = \alpha(s,t)s + \beta(s,t)t$, ויש רק לבדוק כי $\frac{\alpha(s,t)s + \beta(s,t)t}{\sqrt{s^2+t^2}} \to 0$, ובאמת, עפ"י אי שוויון קושי שוורץ $|\alpha(s,t)s + \beta(s,t)t| \le \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{s^2+t^2}$, הגורם הראשון שואף לאפס, והשני מצטמצם עם המכנה. $\square$

<u>הערה.</u> חישוב ישיר אומר כי לפונקציה דיפרנציאבילית יש נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A\Delta x + \varepsilon(|\Delta x|, 0)}{\Delta x} = A$$

ובאופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = B$.

הכיוון ההפוך לא נכון. בדקו למשל עפ"י ההגדרה שהפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

איננה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. (בהמשך נראה שפונקציה דיפרנציאבילית היא רציפה, וראינו שהפונקציה הזו איננה רציפה בראשית).

בהגדרת הנגזרות החלקיות בדקנו את קצב השתנות הפונקציה בשני כיוונים מסוימים שנקבעו בבחירה שרירותית של מערכת הצירים. נגדיר כעת נגזרות בכיוון כללי.

<u>הגדרה.</u> יהי $V \ne 0$ וקטור ב- $\mathbb{R}^n$. הנגזרת המכוונת של f בנקודה P בכיוון V היא

$$\frac{\partial f}{\partial V}(P) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(P + tV) - f(P)}{t}$$

ונשתמש גם בסימון $D_V f(P)$.

באופן גיאומטרי רואים שקיום מישור משיק מבטיח קיום ישרים משיקים לפונקציה בכל הכיוונים. המשפט הבא אומר זאת באופן אנליטי, ואף נותן את הנוסחה לחישוב הנגזרות המכוונות.

<u>משפט.</u> **אם f דיפרנציאבילית בנקודה $P=(x_0,y_0)$ אז קיימות לה הנגזרות המכוונות ב- P, והנגזרת המכוונת שלה בכיוון $V=(v,w)$ ניתנת ע"י הנוסחה**

$$\frac{\partial f}{\partial V}(P)=vf_x(P)+wf_y(P)\ .$$

הווקטור $(f_x(P),f_y(P))$ נקרא הגרדיאנט של f ב- P, והוא מסומן ע"י $\nabla f(P)$. בסימון זה הנוסחה היא $\frac{\partial f}{\partial V}(P)=\langle\nabla f(P),V\rangle$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}\frac{f(P+tV)-f(P)}{t} &= \frac{f_x(P)\cdot tv+f_y(P)\cdot tw+\varepsilon(tV)}{t}\\ &= \langle\nabla f(P),V\rangle+\frac{\varepsilon(tV)}{t}\underset{t\to0}{\longrightarrow}\langle\nabla f(P),V\rangle\end{aligned}$$

□

<u>הערה.</u> **ל- $\nabla f(P)$ יש משמעות גיאומטרית חשובה. זהו הכיוון שבו יש ל- f קצב גידול מכסימלי בנקודה P. ואמנם, לכל ווקטור יחידה V מתקיים, עפ"י אי שוויון קושי שוורץ, אי השוויון**

$$D_Vf(P)=\langle\nabla f(P),V\rangle\le\|\nabla f(P)\|\,\|V\|$$

ויש בו שוויון אמם V ו- $\nabla f(P)$ הם באותו כיוון.

<u>טענה.</u> **אם f דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אז היא רציפה שם.**

הוכחה.

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\underset{\Delta x,\Delta y\to0}{\longrightarrow}0$$

□

ראינו שקיום נגזרות חלקיות אינו גורר רציפות, ולכן בודאי שאינו גורר דיפרנציאביליות. מתברר שאם הנגזרות החלקיות קיימות לא רק בנקודה, אלה גם בסביבה שלה, ואם הן <u>רציפות</u> בנקודה, אז f אכן דיפרנציאבילית שם.

<u>משפט.</u> **אם יש ל- f נגזרות חלקיות בסביבה של הנקודה (x_0,y_0) ואם הן רציפות ב- (x_0,y_0), אז f דיפרנציאבילית שם.**

הוכחה. נציג

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\=\quad&\left\{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right\}+\left\{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right\}\end{aligned}$$

ונטפל בכל מחובר בנפרד.

עפ"י משפט לגרנז' יש $0<\theta_1<1$, התלוי ב- x_0, y_0, Δx ו- Δy, כך ש-

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\cdot\Delta x$$

ולכן נוכל להציג את המחובר הראשון בצורה $f_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x$ כאשר

$$\alpha(\Delta x,\Delta y)=f_x(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)\to 0$$

מכיוון ש- f_x רציפה ב- (x_0,y_0).

באופן דומה

$$\begin{aligned}f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)&=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y\\&=f_y(x_0,y_0)\Delta y+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y\end{aligned}$$

כאשר $\beta(\Delta x,\Delta y)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)-f_y(x_0,y_0)\to 0$. □

<u>הערה.</u> התנאי במשפט מספיק בלבד, ונגזרות חלקיות של פונקציה דיפרנציאבילית אינן צריכות להיות רציפות. למשל, הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$ (ניקח $A=B=0$), אך $\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ לא קיים ולכן f_x בוודאי לא רציפה.

אם יש ל- f נגזרות חלקיות רציפות בתחום D, נאמר לפעמים ש- f גזירה ברציפות ב- D.

המשפט שהוכחנו מפתיע מאוד. האינפורמציה הנתונה דנה לכאורה רק בהשתנות של הפונקציה בכיווני הצירים הראשיים, אך המסקנה היא על מבנה הפונקציה כולה - המישור המשיק מקרב את הפונקציה היטב בכל הכיוונים! ההסבר הוא שתנאי הרציפות של הנגזרות החלקיות "מכריח" את הפונקציה להתנהג באופן רגולרי, אך קשה לראות באופן גיאומטרי איך זה קורה, וההוכחה היא מתמטית טכנית (שימוש במשפט לגרנז') ואיננה תורמת להבנה אינטואיטיבית של התופעה.

<u>משפט.</u> [כלל השרשרת] תהי f דיפרנציאבילית בתחום קשיר מסילתית D, ונניח שהפונקציות $x(t),y(t)$ הן פונקציות גזירות (לפי t) ומקיימות ש- $(x(t),y(t))\in D$ לכל t. אז הפונקציה $F(t)=f\big(x(t),y(t)\big)$ גזירה, ונגזרתה היא

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

או, בכתיבה אחרת, $F'=f_x\cdot x'+f_y\cdot y'$.

הוכחה. מהרציפות והגזירות של $x(t)$ ו- $y(t)$ נובע כי אם

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) \quad ; \quad \Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$$

אז כאשר $\Delta t \to 0$ גם $\Delta x, \Delta y \to 0$, וכן $\frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'(t)$ ו- $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t)$. היות ש- f דיפרנציאבילית ב- D, נציג

$$\begin{aligned} & F(t+\Delta t) - F(t) = f\big(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)\big) - f\big(x(t), y(t)\big) \\ = \quad & \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \end{aligned}$$

כאשר ע"ס האמור בפתיחה $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$. ולכן

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = f_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} f_x \cdot x' + f_y \cdot y' \ .$$

$\square$

<u>הערה.</u> תהי $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ מסילה. נאמר שהמסילה גזירה אם הפונקציות $x(t)$ ו- $y(t)$ גזירות. במקרה זה נסמן $\gamma(t)' = (x(t)', y(t)')$. במונחים אלה כלל השרשת הוא

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \ .$$

לפני המסקנה הבאה נציין (ללא הוכחה) שאם D תחום פתוח וקשיר מסילתית, אז לכל שתי נקודות P, Q בתחום יש מסילה <u>גזירה</u> $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ המוכלת כולה ב- D כך ש- $\gamma(0) = P$ ו- $\gamma(1) = Q$.

<u>מסקנה.</u> אם f גזירה ברציפות בתחום קשיר מסילתית D כך ש- $f_x \equiv f_y \equiv 0$ בתחום, אז f קבועה ב- D.

הוכחה. אם $P, Q \in D$ אז יש מסילה גזירה $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ המוכלת כולה ב- D כך ש- $\gamma(0) = P$ ו- $\gamma(1) = Q$, ונסמן $F(t) = f\big(\gamma(t)\big)$. עפ"י הנתון

$$\frac{dF}{dt} = f_x \cdot x' + f_y \cdot y' \equiv 0$$

ולכן F קבועה ומתקיים $F(0) = F(1)$, כלומר $f(P) = f(Q)$. $\square$

1.4 נגזרות מסדר גבוה

הנגזרת חלקית f_x של f, יכולה גם היא להיות בעלת נגזרות חלקיות $(f_x)_x$ או- $(f_x)_y$, ונסמן אותן ב- f_{xx} ו- f_{xy} בהתאמה. באופן דומה נסמן f_{yx} ו- f_{yy}.

לנגזרות f_{xy} ו- f_{yx} קוראים הנגזרות המעורבות מסדר שני.

<u>דוגמא.</u>

בדר"כ $f_{xy} \neq f_{yx}$. למשל, אם $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ אז כאשר $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים $f_x(x,y) = \frac{\left[y(x^2-y^2)+xy(2x)\right](x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, ובפרט

$$f_x(0,\Delta y) = -\frac{(\Delta y)^3\cdot(\Delta y)^2}{(\Delta y)^4} = -\Delta y \ .$$

והיות ש-

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

מקבלים

$$(f_x)_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} = \frac{-\Delta y-0}{\Delta y} = -1 \ .$$

חישוב דומה (או שימוש בזהות $f(x,y)=-f(y,x)$) מראה ש- $(f_y)_x(0,0)=1$. כלומר $(f_x)_y(0,0)\neq(f_y)_x(0,0)$.

אך מתברר שהשוויון $f_{xy}=f_{yx}$ דוקא כן מתקיים בתנאים מאוד רחבים.

<u>משפט.</u> אם שתי הנגזרות החלקיות המעורבות f_{xy}, f_{yx} קיימות בתחום ורציפות בו, אז הן שוות.

הוכחה. אפשר להוכיח את המשפט, ואפילו משפט כללי יותר, באופן ישיר (ראו בספר של מייזלר). אנחנו נדחה את ההוכחה, וניתן אותה בסעיף הבא בעזרת אינטגרלים התלויים בפרמטר. $\square$

1.5 אינטגרל התלוי בפרמטר

הנגזרות החלקיות של פונקציה של שני משתנים מתקבלות כאשר "מקפיאים" את הערך של משתנה אחד וגוזרים אותה עפ"י המשתנה האחר. באופן דומה נוכל גם לבצע אינטגרציה עפ"י משתנה אחד ולקבל פונקציה חדשה $F(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ התלויה רק במשתנה האחר. למשתנה u מתייחסים לפעמים כאל פרמטר, ומכאן השם אינטגרל התלוי בפרמטר.

<u>משפט.</u> תהי f רציפה במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$. אז הפונקציה $F(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ היא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha,\beta]$.

הוכחה. נקבע $\varepsilon > 0$. הפונקציה f רציפה בקבוצה סגורה וחסומה (מלבן סגור), ולכן היא רציפה שם במ"ש ויש $\delta = \delta(\varepsilon)$ כך ש- $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ לכל P, Q במלבן המקיימות $d(P, Q) < \delta$.

תהיינה כעת $u_1, u_2 \in [\alpha, \beta]$ כך ש- $|u_1 - u_2| < \delta$. אז גם $d((x, u_1), (x, u_2)) < \delta$ ולכן

$$|F(u_1) - F(u_2)| \leq \int_a^b |f(x, u_1) - f(x, u_2)|dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a) \; .$$

□

למעשה נכון משפט כללי יותר

<u>משפט.</u> תהי f מוגדרת במלבן $[a, b] \times [\alpha, \beta]$. אם f רציפה במלבן אז הפונקציה $F(s, t, u) = \int_s^t f(x, u)dx$ רציפה בתיבה $[a, b] \times [a, b] \times [\alpha, \beta]$.

בפרט, אם $A, B : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ הן שתי פונקציות רציפות, אז גם הפונקציה $\varphi(u) = \int_{A(u)}^{B(u)} f(x, u)dx$ היא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha, \beta]$.

הוכחה. לשם פשטות נניח שהגבול התחתון קבוע, ונסתכל בפונקציה של שני משתנים $F(t, u) = \int_a^t f(x, u)dx$.

נקבע $\varepsilon > 0$, ונציג את $F(t + \Delta t, u + \Delta u) - F(t, u)$ כסכום

$$\int_a^t \big(f(x, u + \Delta u) - f(x, u)\big)dx + \int_t^{t+\Delta t} f(x, u + \Delta u)dx$$

ונעריך כעת כל מחובר בנפרד.

את המחובר הראשון נעריך כמו במשפט הקודם. מרציפות במ"ש נמצא δ כך ש- $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ לכל P, Q במלבן המקיימות $d(P, Q) < \delta$. ואז אם $|u_1 - u_2| < \delta$ אז

$$\int_a^t |f(x, u_1) - f(x, u_2)|dx < \varepsilon(t - a) \leq \varepsilon(b - a) \; .$$

להערכת המחובר השני נשתמש בכך שפונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה היא פונקציה חסומה, ונמצא M כך ש- $|f(x, y)| \leq M$ לכל (x, y) במלבן. ואז

$$\left| \int_t^{t+\Delta t} f(x, u + \Delta u)dx \right| \leq M|\Delta t| \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0 \; .$$

הרציפות של φ נובעת מהחלק הראשון ומהרציפות של הרכבת פונקציות רציפות.

□

נעבור כעת לגזירה של האינטגרל עפ"י הפרמטר.

משפט. [כלל הגזירה מתחת לסימן האינטגרל] תהי f מוגדרת במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ כך ש- f גזירה עפ"י y, וכך ש- f ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות. אז הפונקציה $F(u)=\int_a^b f(x,u)dx$ גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$, ונגזרתה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\frac{dF}{du}(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx \; .$$

הוכחה. על פי משפט לגרנז' יש $\theta=\theta(u,x,\Delta u)$ עם $0<\theta<1$ כך ש

$$\Delta F=\int_a^b \big[f(x,u+\Delta u)-f(x,u)\big]dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,u+\theta\Delta u)\cdot\Delta u\,dx \; .$$

עפ"י המשפט הקודם $G(y)=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ היא פונקציה רציפה, ולכן

$$\frac{\Delta F}{\Delta u}=\int_a^b \frac{\partial f(x,u+\theta\Delta u)}{\partial y}dx=G(u+\theta\Delta u)\underset{\Delta u\to 0}{\longrightarrow} G(u)=\int_a^b \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx \; .$$

$\square$

כמו ביחס לרציפות, גם כאן יש משפט כללי יותר.

משפט. תהי f מוגדרת במלבן $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ כך ש- f גזירה עפ"י y, וכך ש- f ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן. אז הפונקציה $F(s,t,u)=\int_s^t f(x,u)dx$ דיפרנציאבילית בתיבה $[a,b]\times[a,b]\times[\alpha,\beta]$.

בפרט, אם הפונקציות $A,B:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ הן שתי פונקציות גזירות, אז גם הפונקציה $\varphi(u)=\int_{A(u)}^{B(u)} f(x,u)dx$ גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$ ונגזרתה ניתנת ע"י הנוסחה

$$\frac{dF}{du}(u)=B'(u)f(B(u),u)-A'(u)f(A(u),u)+\int_{A(u)}^{B(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx \; .$$

הוכחה. נוכיח את הדיפרנציאביליות של F ע"י כך שנראה שהיא גזירה עפ"י שלושת המשתנים, וכי נגזרותיה החלקיות רציפות בתיבה.

ואמנם, עפ"י המשפט הקודם $\frac{\partial F}{\partial u}(s,t,u)=\int_s^t \frac{\partial f(x,u)}{\partial y}dx$, וזו פונקציה רציפה בתי-בה עפ"י הנחת הרציפות של $\frac{\partial f}{\partial y}$ ועפ"י המשפט על רציפות.

בחישוב שתי הנגזרות החלקיות האחרות ערך הפרמטר קבוע, ולכן נשתמש במשפט היסודי של החדו"א ונקבל כי

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s,t,u)=f(t,u) \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial s}(s,t,u)=-f(s,u)$$

ועפ"י הנתון אלה פונקציות רציפות.

הגזירות של φ, והנוסחה לנגזרתה נובעות מכלל השרשרת. $\square$

__הגדרה.__ אם הפונקציה $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ אינטגרבילית בקטע $[\alpha,\beta]$, אז לאינטגרל שלה $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ נקרא אינטגרל נשנה של f. באופן דומה אפשר גם לבצע את האינטגרציות בסדר הפוך, ולקבל את האינטגרל הנשנה $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy \right) dx$.

מתברר שבתנאים די כלליים שני האינטגרלים הנשנים שווים. (איפורמציה נוספת עליהם נקבל בפרק על האינטגרל הכפול). אנחנו נוכיח רק מקרה מאוד פשוט.

__משפט.__ אם f רציפה במלבן $[a,b] \times [\alpha,\beta]$, אז

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy \right) dx \ .$$

הוכחה. נגדיר שתי פונקציות של המשתנה t

$$\varphi(t) = \int_\alpha^t \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad ; \quad \psi(t) = \int_a^b \left(\int_\alpha^t f(x,y)dy \right) dx$$

ונראה שהן שוות, ובפרט $\varphi(\beta) = \psi(\beta)$ כמבוקש. היות ש- $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$, די שנראה ש- $\varphi' = \psi'$, ולשם כך נשתמש במשפטים שלמדנו.

הפונקציה $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ רציפה, ולכן עפ"י המשפט היסודי של החדו"א

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \int_\alpha^t F(y)dy = F(t) = \int_a^b f(x,t)dx \ .$$

שוב עפ"י המשפט היסודי של החדו"א, הפונקציה $G(x,t) = \int_\alpha^t f(x,y)dy$ גזירה עפ"י t ונגזרתה $\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = f(x,t)$ רציפה, ולכן גזירה מתחת לסימן האינטגרל נותנת כי גם

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^b G(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(x,t)dx = \int_a^b f(x,t)$$

כמבוקש. $\square$

__דוגמא.__

נקבע $0 < a < b$ ונחשב את $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}dx$. לשם כך נשים לב כי $\frac{x^b - x^a}{\log x} = \int_a^b x^y dy$, וע"י החלפת סדר האינטגרציה נקבל כי

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}dx &= \int_0^1 \Big(\int_a^b x^y dy \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y dx \Big) dy \\ &= \int_a^b \Big(\frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} \Big) dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log \frac{b+1}{a+1} \end{aligned}$$

נחזיר כעת חוב מהסעיף הקודם ונוכיח את המשפט הבא

משפט. אם שתי הנגזרות החלקיות המעורבות f_{xy}, f_{yx} קיימות בתחום D ורציפות בו, אז הן שוות.

הוכחה. נחשב תחילה את האינטגרל הנשנה $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right)dy$ כאשר המדבן $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ מוכל ב- D.

הפונקציה $\varphi(y) = \int_a^b f_x(x,y)dx = f(b,y)-f(a,y)$ גזירה, וחישוב ע"י גזירה מתחת לסימן האינטגרל מראה שנגזרתה היא $\varphi'(y)=\int_a^b f_{x,y}(x,y)dx$, ולכן

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right)dy &= \int_\alpha^\beta \varphi'(y)dy = \varphi(\beta)-\varphi(\alpha)\\ &= f(b,\beta)-f(a,\beta)-f(b,\alpha)+f(a,\alpha)\end{aligned}$$

חישוב דומה מראה שגם

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f_{xy}(x,y)dy\right)dx = f(b,\beta)-f(a,\beta)-f(b,\alpha)+f(a,\alpha)$$

כלומר האינטגרלים $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f_{xy}(x,y)dy\right)dx$ שווים.

נניח כעת שיש נקודה P ו- $\delta>0$ כך ש- $f_{xy}(P) > f_{yx}(P)+2\delta$ ואז, מרציפות הנגזרות העורבות, נקבל שיש מלבן קטן $R=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ שמרכזו ב- P ויש קבוע K כך שלכל Q במלבן מתקיימים אי השוויונים $f_{xy}(Q)\geq K$ ו- $f_{yx}(Q)\leq K-\delta$. לכן

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f_{yx}(x,y)dx\right)dy \leq (K-\delta)|R| < K|R| \leq \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f_{xy}(x,y)dy\right)dx$$

בסתירה לכך ששני האינטגרלים שווים. $\square$

1 סדרות וטורים של פונקציות

1.1 התכנסות במידה שווה של סדרות של פונקציות

נתונה סדרת פונקציות $\{f_n\}$. בכל נקודה x שבה כולן מוגדרות נרצה לבדוק אם סדרת המספרים $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או תבדרת.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הפונקציות $f_n(x)=\frac{x}{x^2+n^2}$ מוגדרות בכל הישר ו- $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ לכל x.

(ii) הפונקציות $f_n(x)=x^n$ מוגדרות בכל הישר ומקיימות $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ אם $x\in(-1,1)$ וכן $\lim_{n\to\infty} f_n(1)=1$.
עבור כל ה-x-ים האחרים הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}$ אינה מתכנסת.

<u>הגדרה.</u> תהי f_n סדרת פונקציות המוגדרות בקטע I. נאמר שהסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציה f בקטע אם לכל נקודה $x\in I$ הסדרה המספרית $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, כלומר, לכל x בקטע ולכל $\varepsilon>0$ קיים $N=N(x,\varepsilon)$ כך ש- $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ לכל $n>N$.

בהגדרת ההתכנסות הנקודתית התאמנו לכל ε מספר $N=N(x,\varepsilon)$, ובדר"כ הוא תלוי ב- x. כלומר סדרת המספרים $f_n(x)$ מתקרבת למספר $f(x)$ בקצב שונה בנקודות שונות. חשיבות רבה יש למקרה המיוחד שבו אפשר לבחור את N כך שלא יהיה תלוי ב- x אלא רק ב- ε. במקרה זה קצב ההתקרבות של f_n ל- f הוא <u>אחיד בכל הקטע</u>.

<u>הגדרה.</u> תהי f_n סדרת פונקציות המוגדרות בקטע I. נאמר שהסדרה מתכנסת לפונקציה f במידה שווה (במ"ש) בקטע אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=N(\varepsilon)$ (התלוי רק ב- ε) כך ש- $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ לכל $n>N$ ולכל $x\in I$.

מבחינה גיאומטרית $f_n\to f$ במ"ש אם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים שאם n גדול מספיק אז כל הגרף של f_n מוכל ברצועה ברוחב 2ε שמרכזה הוא הגרף של f. כפי שנראה בהמשך, העובדה <u>שכל</u> הגרף של f_n "קרוב" לכל הגרף של f תאפשר לנו להסיק שכאשר ל- f_n-ים יש תכונות מסוימות (כגון רציפות או אינטגרביליות) אז גם ל- f יש אותן תכונות.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הסדרה $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)=0$ על כל הישר. כי בהנתן $\varepsilon>0$ נבחר $N=1/\varepsilon$ ואז לכל $n>N$ מתקיים

$$0<\frac{1}{x^2+n}\le\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon\ .$$

(ii) סדרת הפונקציות $f_n(x)=x^n$ אמנם מתכנסת נקודתית ב- $(-1,1)$ ל- 0, אך ההתכנסות איננה במידה שווה. כדי לראות זאת נבחר $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ ונראה שלכל n יש x_n כך ש- $f_n(x_n)>\frac{1}{4}$. ובאמת, נבחר למשל $x_n=\sqrt[n]{1/2}$, ואז $f_n(x_n)=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$.

הלמה הפשוטה הבאה היא למעשה ניסוח אחר להגדרה.

<u>למה.</u> **תהיינה f_n מוגדרות בקטע I. אז התנאים הבאים שקולים:**

(i) **הסדרה f_n מתכנסת במ"ש לפונקציה f בקטע I.**

(ii) $.b_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

(iii) **יש קבועים $a_n \geq 0$ כך ש- $a_n \to 0$ וכך ש- $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ לכל x בקטע.**

הוכחה. ברור שהתנאים (ii) ו- (iii) שקולים וגוררים התכנסות במ"ש. להפך, אם $f_n \to f$ במ"ש אז ההגדרה אומרת ש- $b_n \to 0$. $\square$

הבדיקה אם סדרה נתונה f_n מתכנסת במ"ש בקטע I תעשה בשני שלבים:

שלב 1: בדיקה שהסדרה מתכנסת נקודתית - וזהוי הפונקציה הגבולית f.

שלב 2: שימוש בלמה כדי לבדוק אם f_n אכן מתכנסת במ"ש לפונקציה f שמצאנו.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הסדרה $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} + x$ מתכנסת במ"ש על כל הישר. הגבול הנקודתי של הסדרה הוא $f(x) = x$, ועלינו לבדוק את ההתנהגות של $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$. נקבע n, ואז הנגזרת של $(f_n - f)(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ מתאפסת רק ב- $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{n}}$. כמו כן לכל n קבוע $\lim_{x\to\pm\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, ולכן $|f_n - f|$ אכן מקבלת מכסימום בנקודות אלה, ומתקיים

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \left|(f_n - f)\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ .$$

(ii) הסדרה $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ מתכנסת נקודתית בקטע $[0,1]$ ל- 0 ונראה שה-התכנסות איננה במ"ש. ובאמת

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} x^n(1-x^n) = \frac{1}{4} \not\to 0$$

כי המכסימום של $t(1-t)$ בקטע $[0,1]$ הוא $\frac{1}{4}$ (ומתקבל ב- $t = \frac{1}{2}$), ונציב $t = x^n$.

(iii) הדוגמא הטיפוסית המדגימה באופן ברור את ההבדל בין התכנסות נקודתית להתכנסות במ"ש היא סדרה מהטיפוס

$$f_n(x) = \begin{cases} n\alpha_n x & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2\alpha_n - n\alpha_n x & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

המתכנסת נקודתית ל- 0 לכל בחירה של המספרים α_n, אך מתכנסת במ"ש אסם $\max f_n(x) = \alpha_n \to 0$.

נשאיר כתרגיל את הוכחת המשפט החשוב הבא

משפט. [תנאי קושי] הסדרה f_n מתכנסת במ"ש ל- f בקטע I אםם לכל ε יש N (התלוי ב- ε בלבד) כך שלכל $N > n, m$ מתקיים $|f_n(x) - fm(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in I$.

הערה. בענפים רבים של מתמטיקה, מדע וטכנולוגיה אנחנו זקוקים ל"מדד של קירבה" בין שתי פונקציות. התכנסות במ"ש קשורה לדרך טבעית מאוד למדידת הקירבה: שתי פונקציות f ו- g תחשבנה ל"קרובות זו לזו" בקטע I אם הגרפים שלהן "קרובים" זה לזה, או, באופן יותר מתמטי, אם $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$ "קטן".

כדי להדגים זאת נתאר שתי בעיות פשוטות של "בקרה":

(i) במשך תהליך ייצור הטמפרטורה האידאלית הרצויה בזמן t צריכה להיות $h(t)$ - אבל סטיות עד לגודל ε מהטמפרטורה האידיאלית עדיין מותרות ואינן פוגמות במוצר. תפקידו של המהנדס הוא לתכנן מנגנון בקרה שיבטיח שהטמפרטורה בפועל, $f(t)$, תהיה ε-קרובה, בכל זמן t במשך הייצור, לערך ב- t של הפונקציה האידאלית h.

(ii) תקציב המדינה בשנה מסויימת קובע את הוצאות הממשלה $h(t)$ בחודש t, אך החלטת הממשלה גם מתירה סטיות עד לגודל מסויים. תפקידו של הממונה על התקציבים הוא לדאוג שההוצאה בפועל, $f(t)$, תקיים שהסטיה המירבית מההוצאה המתוכננת, כלומר $\sup\{|f(t) - g(t)| : 1 \leq t \leq 12\}$, עומדת בדרישות שהוצבו ע"י הממשלה.

בשתי הדוגמאות המדד להצלחה הוא ה"קירבה" של הגרפים, והתכנסות במ"ש פרושה שע"י בחירת n גדול מספיק אפשר לשלוט בקירבה הזו, ולהקטין אותה כרצוננו.

הדוגמאות הבאות מראות שתכונות חשובות של פונקציות, כגון רציפות או אינט-גרביליות, אינן נשמרות בהתכנסות נקודתית לגבול.

דוגמאות.

(i) הפונקציות הרציפות $f_n(x) = x^n$ מתכנסות נקודתית בקטע $[0,1]$ לפונקציה הלא רציפה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} .$$

(ii) נסתכל בסדרת הפונקציות הבאות בקטע $[0,1]$

$$D_n(x) = \begin{cases} 0 & x = \frac{p}{q} \text{ כך ש- } q \leq n \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases} .$$

לכל n קבוע זוהי פונקציה חסומה, והיא רציפה פרט למספר סופי של נקודות, ולכן אינטגרבילית. אך הגבול הנקודתי של הסדרה הוא פונקציית דיריכלה שאינה אינטגר-בילית.

(iii) גם כשהגבול הנקודתי הוא פונקציה אינטגרבילית בקטע I לא נובע מכך כי $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$. למשל, בדוגמא (iii) למעלה מתקיים כי $f_n \to 0$ נקודתית בקטע $I = [0,1]$ לכל בחירה של α_n, ולכן $\int_I f = 0$. אך $\int_I f_n = \alpha_n$ ובבחירות

מתאימות של α_n נקבל סדרה α_n שאינה מתכנסת, או שהיא מתכנסת לגבול שונה מאפס.

לעומת זאת, התכנסות במ"ש כן מבטיחה רציפות (או אינטגרביליות) של פונקצית הגבול. שימו לב איך משתמשים בהוכחות בכך שבהתכנסות במ"ש כל הגרף של f_n קרוב באופן אחיד לגרף של f.

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש ל- f בקטע I. אם כל ה- f_n רציפות בנקודה x_0 אז גם f רציפה ב- x_0. בפרט, אם f_n רציפות בכל הקטע אז גם f רציפה בו.

הוכחה. נקבע $\varepsilon > 0$ ועלינו למצוא $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. נעשה זאת בשני שלבים:

בשלב הראשון נבחר N, ע"ס ההתכנסות במ"ש, כך ש- $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ לכל x בקטע.

בשלב השני ננצל את הרציפות של f_N בנקודה x_0 ונמצא $\delta > 0$ כך שלכל x בקטע המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$.

זהו ה- $\delta > 0$ המבוקש, כי כשנצרף את אי השוויונים נקבל שאם $|x - x_0| < \delta$ אז

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ המתכנסת במ"ש ל- f בקטע. אז גם f אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש- $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$. יתר על כן, אם נגדיר $F_n(x) = \int_a^x f_n$ ו- $F(x) = \int_a^x f$, אז $F_n \to F$ במ"ש בקטע.

הוכחה. נניח לשם פשטות הסימון כי הקטע הוא $[0, 1]$, ונראה תחילה ש- f אינטגר- בילית. לשם כך נקבע ε ונמצא חלוקה עבורה $\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon$, ושוב נעשה זאת באותם שני שלבים כמו בהוכחת המשפט הקודם.

בשלב הראשון נבחר N, ע"ס ההתכנסות במ"ש, כך ש- $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ לכל x בקטע.

בשלב השני ננצל את האינטגרביליות של f_N ונמצא חלוקה P עבורה מתקיים כי $\sum \omega_i^N \Delta_i^N < \varepsilon/3$ (כאשר ω_i^N הם התנודות של f_N בקטעי החלוקה P).

חישוב דומה לזה שנעשה במשפט הקודם מראה ש- $\omega_i^N \leq \omega_i + \varepsilon$ לכל i, ולכן מקבלים כי $\sum \omega_i \Delta_i < \varepsilon$. (בדקו את הפרטים!)

כעת נראה כי $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$. נקבע $\varepsilon > 0$ ונמצא $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ לכל t. לכן

$$\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt < \varepsilon \;.$$

הטענה האחרונה נובעת מחישוב דומה: לכל $n > N$ ולכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \int_0^x |f_n(t) - f(t)|dt < \varepsilon x \leq \varepsilon \ .$$

$\square$

ראינו שהתכנסות במ"ש של סדרת פונקציות רציפות גוררת שהגבול אף הוא רציף. ההיפך כמובן אינו נכון (בדקו שאתם מכירים דוגמא!). מתברר שכאשר ההתכנסות היא מונוטונית (כלומר או שהסדרה $f_n(x)$ עולה לכל x, או שהיא יורדת לכל x), אז ההתכנסות כן חייבת להיות במ"ש:

<u>משפט.</u> [דיני] נניח שסדרת פונקציות רציפות f_n מתכנסת באופן מונוטוני לפונקציה רציפה f בקטע סגור $[a,b]$, אז ההתכנסות היא במ"ש.

הוכחה. נניח בה"כ שהסדרה יורדת, וע"י החלפתה ב- $f_n - f$ נוכל גם להניח כי $f \equiv 0$. נניח בשלילה ש- f_n אינה מתכנסת במ"ש ל- 0 בקטע $[a,b]$, ונמצא $\varepsilon_0 > 0$, אינדכסים $n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ ונקודות x_{n_k} בקטע $[a,b]$ כך ש-

$$f_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$$

(יש כאלה כי $\max |f_n(x)| \not\to 0$).
נקבע m כלשהו, ואז בגלל המונוטוניות, מתקיים לכל $n_k > m$ כי

$$f_m(x_{n_k}) \geq f_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0 \ .$$

הסדרה האינסופית $\{x_{n_k}\}$ חסומה, ולכן ע"ס בולצ'אנו ווירשטראס יש לה תת-סדרה מתכנסת $x_{n_{k_l}} \to x_0 \in [a,b]$. מרציפות f_m נובע לכן כי

$$f_m(x_0) = \lim f_m(x_{n_{k_l}}) \geq \varepsilon_0$$

בסתירה להנחה ש- $\lim_{m\to\infty} f_m(x_0) = 0$. $\square$

<u>תרגיל:</u> הוכיחו את המשפט בעזרת הלמה של היינה בורל. רמז: לכל x בקטע מיצאו n_x כך ש- $f_{n_x}(x) < \varepsilon/2$, וקטע פתוח I_x סביב x שבו $f_{n_x} < \varepsilon$. אח"כ השתמשו בהיינה בורל.

ראינו שגבול במ"ש של פונקציות רציפות או אינטגרביליות הוא רציף או אינטגרבילי בהתאמה. האם גם גזירות נשמרת? התשובה היא שלילית כי אפשר לעשות שינויים גדולים מאוד בשיפועים של הגרף של פונקציה בלי לשנות בהרבה את ערכיה.

<u>דוגמאות.</u>

(i) הפונקציות

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} & |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

מתכנסות במ"ש על כל הישר לפונקציה $f(x)=|x|$. הן גזירות בכל נקודה, אך הגבול אינו גזיר בנקודה $x=0$. (יש פונקציות רציפות שאינן גזירות באף נקודה, והבניות הסטנדרטיות שלהן הן כגבולות במ"ש של פונקציות שהן גזירות בכל מקום. ראו גם בדוגמאות אחרי משפט ווירשטראס על התכנסות במ"ש של טורים).

(ii) גם כשהגבול f גזיר סדרת הנגזרות אינה חייבת להתכנס לנגזרת f'. למשל, נקח $f_n(x)=\frac{\sin n^2x}{n}$, ואז הן מתכנסות במ"ש ל- $f\equiv 0$, אך $f_n'(x)=2n\cos n^2x$, וסדרה זו אינה מתכנסת במ"ש כלל (ואפילו לא נקודתית).

המשפט הבא מטיל תנאים נוספים על הסדרה המספיקים כדי להבטיח שהנוסחה $(\lim f_n)'=\lim(f_n')$ תהיה תקפה, אך למעשה התנאים הם כאלה שהמשפט הוא מסקנה מיידית מהמשפט על אינטגרציה.

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות בעלות נגזרות רציפות בקטע I כך ש-

(i) יש נקודה x_0 שבה הסדרה המספרית $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת.

(ii) הסדרה f_n' מתכנסת במידה שווה על I.

אז הסדרה f_n מתכנסת במידה שווה על I, גבולה שיסומן ב- f גזיר, ומתקיימת הנוסחה $f'=\lim f_n'$.

הוכחה. נסמן את הגבול של ה- f_n'-ים ב- φ. כגבול במ"ש של פונקציות רציפות גם φ רציפה, וע"ס המשפט על אינטגרציה $\lim\int_{x_0}^x f_n'(t)dt=\int_{x_0}^x\varphi(t)dt$ וההתכנסות היא במ"ש.

מצד שני $f_n(x)=\int_{x_0}^x f_n'(t)dt+f_n(x_0)$, ולכן גם הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש וגבולה הוא

$$f(x)=\int_{x_0}^x\varphi(t)dt+C$$

כאשר $C=\lim f_n(x_0)$. ע"ס המשפט היסודי של החדו"א $f'=\varphi$. $\square$

1.2 טורי פונקציות

נאמר שטור הפונקציות $\sum f_n$ מתכנס נקודתית (או במ"ש) בקטע I אם סדרת הסכומים החלקיים שלו, כלומר הסדרה, $S_N(x)=\sum_{n=1}^N f_n(x)$, היא סדרה מתכנסת נקודתית (או במ"ש).

ההגדרה נעשתה בעזרת התכנסות של סדרות של פונקציות, ולכן לכל המשפטים שהוכחנו על סדרות מתכנסות של פונקציות יש משפטים מקבילים על טורי פונקציות, הנובעים מהם באופן פורמלי ואין צורך להוכיחם מחדש.

<u>משפט.</u> [תנאי קושי] הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ל- S בקטע I אםם לכל ε יש N (התלוי ב- ε בלבד) כך שלכל $N<k<m$ מתקיים $|\sum_{n=k}^m f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in I$.

<u>משפט.</u> יהי $\sum f_n$ טור פונקציות המתכנס במ"ש לפונקציה S בקטע I. אם כל ה- f_n-ים רציפות בנקודה x_0 אז גם S רציפה ב- x_0. בפרט, אם f_n רציפות בכל הקטע אז גם S רציפה בו.

<u>משפט.</u> תהיינה f_n פונקציות אינטגרביליות בקטע I כך שהטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש בקטע. אז גם $S = \sum f_n$ אינטגרבילית בקטע ומתקיים ש- $\int_I \sum f_n = \sum \int_I f_n$.

<u>משפט.</u> [דיני] תהיינה f_n פונקציות רציפות אי-שליליות כך שהטור $\sum f_n$ מתכנס נקודתית בקטע סגור I לפונקציה רציפה S. אז ההתכנסות היא במ"ש.

<u>משפט.</u> תהי f_n סדרת פונקציות בעלות נגזרות רציפות בקטע I כך ש-

(i) יש נקודה x_0 שבה הטור $\sum f_n(x_0)$ מתכנס.

(ii) הטור $\sum f_n'$ מתכנס במידה שווה על I.

אז גם הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש על I, סכומו פונקציה גזירה, ומתקיימת הנוסחה $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

המשפט הבא הוא המשפט היחיד שנביא שהוא מיוחד לטורים.

<u>משפט.</u> [ויירשטראס] נניח שהפונקציות f_n מוגדרות בקטע I ושיש קבועים M_k כך ש- $|f_k(x)| \le M_k$ לכל $x \in I$. אם טור המספרים $\sum M_k$ מתכנס אז גם טור הפונקציות $\sum f_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע.

הוכחה. לכל x קבוע הטור המספרי $\sum f_n(x)$ מתכנס בהחלט ע"ס מבחן ההשוואה, ולכן מתכנס. נסמן את הסכום ב-$S(x)$ ועלינו להוכיח כי $S_N \to S$ במ"ש. ובאמת

$$|S(x) - S_N(x)| = \Big| \sum_{n>N} f_n(x) \Big| \le \sum_{n>N} |f_n(x)| \le \sum_{n>N} M_n \to 0$$

כי הטור $\sum M_n$ מתכנס. $\square$

<u>דוגמאות.</u>

(i) הטור $\sum 2^{-n} \sin 3^n x$ מתכנס במ"ש (ניקח במשפט $M_n = 2^{-n}$). שימו לב שאין לנו נוסחה מפורשת לפונקצית הסכום, אך ידוע לנו שהיא רציפה (כסכום במ"ש של טור פונקציות רציפות). זוהי למעשה דוגמא ידועה מאד: ויירשטראס הראה שפונקציה רציפה זו אינה גזירה באף נקודה!

(ii) הטור $\sum x^n$ מתכנס במ"ש בכל קטע מהצורה $[-r, r]$ כאשר $0 < r < 1$ (כאן ניקח $M_n = r^n$) ולכן סכומו פונקציה רציפה ב- $(-1, 1)$. למעשה זהו טור גיאומטרי אינסופי וסכומו ידוע לנו: $\frac{1}{1-x}$. כשנבצע איטגרציה אבר אבר נקבל כי לכל $0 < t < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum \int_0^t x^n dx = \int_0^t \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)\Big|_0^t = -\ln(1-t)$$

וכשנציב $t = 1/2$ ונקבל את הנוסחה המעניינת $\ln 2 = -\ln \frac{1}{2} = \sum \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(iii) משפט וירשטראס נותן תוצאה חזקה של התכנסות בהחלט ובמ"ש, ויש כמובן טורים מתכנסים במ"ש שאינם מתכנסים בהחלט. למשל הטור $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ מתכנס במ"ש על $[0,1]$ כי לכל x קבוע זהו טור לייבניץ, ולכן השארית ה- m-ית מקיימת

$$|r_m(x)| \le |f_{m+1}(x)| = \frac{1}{x+m+1} \le \frac{1}{m+1} < \varepsilon$$

אם רק $m > 2/\varepsilon$. הערכה זו נכונה לכל $x \in [0,1]$ ולכן ההתכנסות היא במ"ש. אבל הטור הזה אינו מתכנס בהחלט לאף x.

1.3 טורי חזקות

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. טורי חזקות הם הכללה של פולינומים לסכומים אינסופיים, ויש להם תכונות מאד מיוחדות.

לשם פשטות הסימונים נבצע הזזה ב- x_0, וכך נרשום בד"כ את הטענות למקרה המיוחד שבו $x_0 = 0$, כלומר, נסתכל בטורים מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

כל טור חזקות $\sum a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = 0$. מה עוד אפשר לאמר על תחום ההתכנסות?

דוגמאות.

(i) הטור $\sum \frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל x - וההתכנסות היא במ"ש בכל קטע סופי $[-r,r]$. כי $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \left|\frac{r^n}{n!}\right|$ לכל x בקטע והטור $\sum \frac{r^n}{n!}$ מתכנס לכל r עפ"י מבחן המנה. הטענה נובעת כעת ממשפט וירשטראס.

(ii) ראינו שהטור $\sum x^n$ מתכנס בקטע $(-1,1)$ ומתבדר עבור $|x| \ge 1$.

(iii) תחום ההתכנסות של הטור $\frac{x^n}{n}$ הוא הקטע $[-1,1)$.

(iv) הטור $\sum n^n x^n$ מתבדר לכל $x \neq 0$, כי אם $n \ge \frac{1}{|x|}$ אז $|n^n x^n| \ge 1$, ולכן האיבר הכללי בטור אינו שואף לאפס.

בכל הדוגמאות תחום ההתכנסות הוא קטע סימטרי סביב אפס (שיכול גם להיות כל הישר, או קטע מנוון ל- 0 בלבד), פרט אולי לאי סימטריה בהתכנסות בנקודות הקצה. הלמה והמשפט הבאים אומרים שזה המצב הכללי.

למה. אם הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס בנקודה $x = \alpha$, אז לכל $0 \le r < |\alpha|$ הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r,r]$.

הוכחה. הטור $\sum a_n \alpha^n$ מתכנס, ולכן האבר הכללי שלו שואף לאפס. בפרט זו סדרה חסומה ויש M כך ש- $|a_n \alpha|^n \le M$ לכל n. אם $|x| \le r < |\alpha|$ אז

$$|a_n x^n| = |a_n \alpha^n| \left|\frac{x}{\alpha}\right|^n \le M \left|\frac{r}{\alpha}\right|^n$$

שהוא איבר כללי של טור גיאומטרי אינסופי עם $q = \left|\frac{r}{\alpha}\right| < 1$, ולכן הטור מתכנס והלמה נובעת ממשפט וירשטראס. $\square$

משפט. לכל טור חזקות $\sum a_n x^n$ יש מספר $0 \le R \le \infty$, הנקרא רדיוס התכנסות של הטור, כך שהטור מתכנס בקטע $(-R,R)$ ומתבדר עבור $|x| > R$ (כאשר $R=\infty$ הפירוש הוא שהטור מתכנס לכל x ו- $R=0$ פירושו שהטור איננו מתכנס לאף $x \neq 0$). בנקודות $x = \pm R$ עצמן הטור יכול או להתכנס או להתבדר.
יתר על כן, אם $0 \le r < R$ אז הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r,r]$.

הוכחה. ההוכחה נובעת בקלות מהלמה: נסמן ב- E את קבוצת כל הנקודות x עבורן הטור מתכנס. ע"ס הלמה ל- E יש התכונה הגיאומטרית שאם $\alpha \in E$ ואם $0 \le r < |\alpha|$ אז הקטע $[-r,r]$ מוכל כולו ב- E ולכן E היא איחוד של קטעים סימטריים סביב אפס, ואיחוד כזה הוא קטע כמבוקש.
למעשה קל לבדוק ש- R ניתן ע"י הנוסחה $R=\sup\{|x| : x \in E\}$. $\square$

המשפט הבא ייתן לנו נוסחאות מפורשות לחישוב רדיוס ההתכנסות.

משפט. יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות ונסמן

$$\lambda = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad ; \quad \mu = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

אז

(i) $R = \frac{1}{\lambda}$.

(ii) אם $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים אז $R = \frac{1}{\mu}$.

הערה. חלק (ii) נובע למעשה מחלק (i), כי ראינו כבר (בזמן הדיון במבחני השורש והמנה להתכנסות טורים) שאם $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ קיים אז גם $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ קיים ושווה לו.
חלק (ii) גם חלש יותר כי הוא דורש קיום של גבול ואינו מסתפק בגבול עליון או בגבול תחתון. יחד עם זאת הוא מאד נוח לשימוש כאשר הוא ישים.

הוכחת המשפט. (i) נקבע x_0, ואז $\limsup \sqrt[n]{|a_n x_0^n|} = \lambda |x_0|$.
עפ"י מבחן השורש הטור $\sum a_n x_0^n$ מתכנס כאשר $\lambda|x_0| < 1$ והוא מתבדר כאשר $\lambda|x_0| > 1$.
ההוכחה של (ii) נעשית באופן דומה ע"י שימוש במבחן המנה.

דוגמאות.

(i) רדיוס ההתכנסות של $\sum \frac{x^n}{n!}$ הוא $R=\infty$. נוכיח זאת בעזרת שתי הנוסחאות.
$\mu = 0$ כי $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \to 0$. כדי לראות ש- $\lambda = 0$ נשתמש בהערכה

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \le \sqrt[n]{\frac{1}{(n/2)^{n/2}}} = (n/2)^{-1/2} \to 0.$$

(ii) רדיוסי ההתכנסות של $\sum x^n$ ושל $\frac{x^n}{n}$ הם 1 עפ"י שתי הנוסחאות.

(iii) רדיוס ההתכנסות של $\sum n^n x^n$ הוא 0 עפ"י נוסחת השורש.

(iv) אם

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{כאשר } n \text{ זוגי} \\ \frac{2}{n} & \text{כאשר } n \text{ איזוגי} \end{cases}$$

אז $2 = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ ו- $\frac{1}{2} = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, ולמספרים אלה אין כל קשר לרדיוס ההתכנסות האמיתי שהוא $R = 1$ (כפי שנובע ממבחן השורש).

(v) רדיוס ההתכנסות של $\sum x^{2n}$, או באופן כללי יותר של $\sum_{j=1}^{\infty} x^{n_j}$ הוא $R = 1$, ובדוגמאות אלה יש אכן להשתמש בנוסחת השורש עם הגבול העליון כי $\lim \sqrt[n]{a_n}$ לא קיים.

כפי שראינו טור החזקות אינו חייב להתכנס בנקודות הקצה $\pm R$. ראינו גם כי לכל $0 \le r < R$ הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-r, r]$, אך אינו חייב להתכנס במ"ש בקטע $(-R, R)$. המשפט הבא מקשר בין ההתכנסות בנקודות קצה לבין ההתכנסות במ"ש בכל תחום ההתכנסות.

<u>משפט.</u> יהי $\sum a_n x^n$ טור עם רדיוס התכנסות $0 < R < \infty$. אז הטור מתכנס בנקודה $x = R$ אםם הוא מתכנס במ"ש בקטע $[0, R)$, ובמקרה זה ההתכנסות היא, למעשה, במ"ש בכל הקטע $[0, R]$.

טענה דומה תקפה ביחס לנקודה $x = -R$ ולקטע $(-R, 0]$.

הוכחה. נטפל רק בנקודה $x = R$ ובקטע $[0, R)$. נניח תחילה שהטור $\sum a_i R^i$ מתכנס ונקבע $0 \le x \le R$. נשתמש בנוסחה של סכימה בחלקים

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k \beta_k = \alpha_m B_m - \sum_{k=n}^{m-1} B_k (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$$

כאשר $\alpha_k = \left(\frac{x}{R}\right)^k \quad , \quad \beta_i = a_i R^i$ ו- $B_k = \sum_{i=n}^{k} \beta_i$.

הטור $\sum a_i R^i$ מתכנס, ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ כך שלכל $k > n > N$ מתקיים ש- $|B_k| = \left|\sum_{i=n}^{k} a_i R^i\right| < \varepsilon$. נקבע $0 \le x \le R$ ונקבל כי

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \quad &= \quad \left|\sum_{k=n}^{m} (a_k R^k) \left(\tfrac{x}{R}\right)^k\right| = \left|\left(\tfrac{x}{R}\right)^m B_m - \sum_{k=n}^{m-1} B_k \left(\left(\tfrac{x}{R}\right)^{k+1} - \left(\tfrac{x}{R}\right)^k\right)\right| \\ &\le \quad \varepsilon \left(\tfrac{x}{R}\right)^m + \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon \left(\left(\tfrac{x}{R}\right)^k - \left(\tfrac{x}{R}\right)^{k+1}\right) = \varepsilon \left(\tfrac{x}{R}\right)^n \le \varepsilon \end{aligned}$$

הערכה זו נכונה לכל $0 \le x \le R$ ולכן ע"ס קריטריון קושי הטור $\sum a_n x^n$ מתכנס במ"ש בקטע $[0, R]$.

להפך, אם הטור מתכנס במ"ש בקטע $[0,R)$, אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=N(\varepsilon)$ כך ש- $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right|<\varepsilon$ לכל $0\le x<R$ ולכל $m>n>N$. נקבע את m ו- n ואז

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k R^k\right| = \lim_{x\to R^-}\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| \le \varepsilon$$

כלומר הטור $\sum a_n R^n$ מקיים את תנאי קושי, ולכן מתכנס. $\square$

כפי שכבר אמרנו, פונקציות המתוארות ע"י טור חזקות מתכנס הן בעלות תכונות מיוחדות (וכדי לעמוד עליהן באופן יסודי יש לעבור למישור המרוכב ולהסתכל על טורי חזקות מרוכבים, כפי שתעשו בקורס בפונקציות מרוכבות). המשפט הבא מראה שביחס לרציפות, גזירות ואינטגרביליות אפשר להתייחס אליהן כאל סכומים סופיים, כלומר, כאילו היו פולינומים.

<u>משפט.</u> נתון טור $\sum a_n x^n$ בעל רדיוס התכנסות R ונסמן את סכומו ב- $f(x)$. אז

(i) הפונקציה f רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.

(ii) רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ הוא R, ולכל $0\le r<R$ הפונקציה f אינטגרבילית בקטע $[-r,r]$ ומתקיים

$$\int_0^x f(t)dt = \sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \qquad (*)$$

אם הטור הנתון מתכנס ב- $x=R$ (או $x=-R$), אז הנוסחה $(*)$ תקפה גם בנקודה זו.

(iii) רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ הוא R, הפונקציה f גזירה בקטע $(-R,R)$ ומתקיים

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1} \qquad (**)$$

אם טור הנגזרות מתכנס ב- $x=R$ (או $x=-R$), אז גם הטור המקורי מתכנס בנקודה זו ו- $(**)$ תקפה שם (לנגזרת החד צדדית).

(iv) הפונקציה f גזירה מכל סדר בקטע $(-R,R)$ ולכל p טבעי מתקיים

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+p)(m+p-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)a_{m+p}x^m \end{aligned}$$

ולכל הטורים האלה יש אותו רדיוס התכנסות R.

הוכחה. (i) אם $|x_0|<r$ נבחר r כך ש- $|x_0|<r<R$. הטור מתכנס במ"ש ב- $[-r,r]$ ולכן f רציפה שם, ובפרט ב- x_0.
אם הטור מתכנס גם בנקודה $x=R$ (או $x=-R$) אז ההתכנסות היא במ"ש ב- $[0,R]$ (או $[-R,0]$), ולכן f רציפה גם ב- $\pm R$ בהתאמה.

(ii) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ ולכן

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n+1]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} &= \frac{\limsup \sqrt[n+1]{|a_n|}}{\lim \sqrt[n+1]{n+1}} = \limsup \sqrt[n+1]{|a_n|} \\ &= \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{R}\end{aligned}$$

הטענות האחרות נובעות מכך ש- $\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ומאינטגרציה איבר-איבר.

(iii) חישוב רדיוס ההתכנסות דומה ל- (ii):

$$\limsup \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim \sqrt[n]{n+1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R}$$

גם שאר הטענות נובעות באופן דומה ל- (ii).

(iv) חלק (iv) נובע מחלק (iii).

$\square$

נניח כי $f(x) = \sum a_n x^n$ בקטע $(-R,R)$, ונציב $x=0$ בנוסחה שבחלק (iv) של המשפט, ואז נקבל כי $f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 \cdot a_n$ או

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

כלומר

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad -R < x < R \ .$$

נוסחה זו קשורה באופן הדוק לנוסחת טיילור עם שארית האומרת שאם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x=0$ אז $f = T_n + R_n$ בסביבה, כאשר T_n פולינום טיילור ממעלה n ו- R_n השארית, והם ניתנים ע"י

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad ; \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)}$$

עבור איזשהו $c = c_x$ בין 0 ל- x.

קשר זה נותן לנו את המפתח לדיון בשאלה החשובה הבאה: נתונה פונקציה f המוגדרת בסביבת $x=0$. באיזה תנאים אפשר להציג אותה שם כסכום של טור חזקות? אם יש הצגה כזו אז הסכום החלקי ה- n-י הוא בדיוק פולינום טיילור T_n שלה, ולכן ניסוח שקול לשאלה הוא מתי $R_n(x) \to 0$.

תנאי מוקדם לקיום הצגה כזו הוא ש- f צריכה להיות גזירה אינסוף פעמים, אך תנאי הכרחי זה אינו מספיק.

<u>דוגמא.</u>

הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה איסוף פעמים וכפי שנראה מיד $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n. לכן $T_n \equiv 0$ לכל n ו- $R_n = f$ לכל n, ובוודאי ש- $R_n(x) \not\to 0$.

נראה כעת באינדוקציה כי $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n. עבור $n = 1$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{e^{s^2}} = 0 \end{aligned}$$

בשלב האינדוקציה מראים תחילה (באינדוקציה!) שלכל n יש פולינומים P_n, Q_n כך ש- $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x^2}}$ לכל $x \neq 0$. ואז, באופן דומה למקרה $n = 1$ מראים כי

$$. \ f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = 0$$

<u>משפט.</u> תהי f גזירה מכל סדר ב- $(-r, r)$ כך שיש קבוע M באופן שלכל n ולכל $|x| < r$ מתקיים $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M^n$. אז רדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ מקיים $R \ge r$. (התנאי בוודאי מתקיים אם יש קבוע $C = C_r$ כך ש- $\left|f^{(n)}(x)\right| \le C$ לכל $|x| < r$ ולכל n).

הוכחה. נקבע $|x| < r$, ואז עפ"י נוסחת השארית בפיתוח טיילור יש נקודה c בין 0 ל- x כך ש-

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{M^{n+1} r^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

כי לכל קבוע A מתקיים $\lim A^m/m! = 0$. □

אם יש ל- f הצגה כטור חזקות, $f(x) = \sum a_n x^n$, אנחנו קוראים לטור "טור טיילור של f". באופן כללי יותר, אם יש ל- f הצגה כטור חזקות, $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$, אנחנו קוראים לטור "טור טיילור של f סביב הנקודה x_0".

שימו לב שלעתים קרובות תחום ההתכנסות של הטור חלקי ממש לתחום שבו f מוגדרת.

<u>דוגמאות.</u>

(i) $f(x) = e^x$.

כאן $f^{(n)}(x) = e^x$ לכל n. ולכן לכל $r > 0$ מתקיים ש- $|f^{(n)}(x)| \le e^r$ לכל $|x| \le r$, כלומר $R = \infty$. כמו כן $f^{(n)}(0) = 1$ לכל n, ולכן לכל x מתקיים

$$. \ e^x = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$(ii)\quad f(x) = \sin x$.

כאן $f^{(n)}(x)$ הוא $\pm\sin x$ או $\pm\cos x$, ובפרט $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ לכל x ולכל n ולכן $R = \infty$. כמו כן $f^{(2m)}(0) = \pm\sin 0 = 0$ ואילו $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m \cos 0 = (-1)^m$ ולכן לכל x מתקיים

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\ .$$

<u>תרגיל:</u> הראו כי $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$.

(iii) הטור $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ הוא טור גיאומטרי שמתכנס עבור $|x| < 1$ לפונקציה $\frac{1}{1-x}$. ע"י גזירה איבר איבר נקבל נוסחאות חדשות:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m\ .$$

גזירה נוספת נותנת

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1-x)^3} &= \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m\right)' \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) m x^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n \end{aligned}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו את טורי טיילור של $\frac{1}{(1-x)^p}$ לכל p טבעי.

(iv) אפשר גם לקבל נוסחאות מעניינות ע"י אינטגרציה איבר איבר. למשל

$$-\log(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\ .$$

כאן יש גם תוספת: הטור מתכנס גם עבור $x = -1$ כי זהו טור לייבניץ $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. כשימוש לנוסחה נשים לב שהיא תקפה גם עבור $x = -1$ ולכן

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2\ .$$

יתר על כן, ע"ס משפט לייבניץ מקבלים כי $\left|\log 2 - \sum_{k \leq N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| < \frac{1}{N+1}$. (זהו קצב התכנסות איטי. כדי לקבל טעות קטנה מ- $\frac{1}{1000}$ צריך אלף אברים!).

חישוב דומה (או ההצבה $t = -x$) נותנים כי $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$.

שימו לב כי הטורים של $\log(1 \pm x)$ אינם מתכנסים עבור $|x| > 1$, ולכן מאפשרים חישוב של $\log s$ רק עבור $0 < s \leq 2$. עבור s גדול יותר נפתור את המשוואה $s = \frac{1+x}{1-x}$,

ונקבל כי $x=\frac{s-1}{s+1}$ וכי $0<x<1$, ולכן

$$\begin{aligned}\log s &= \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}\end{aligned}$$

למשל, אם $s=7$ אז $x=\frac{3}{4}$ ו- $\log 7=2\sum\left(\frac{3}{4}\right)^{2j-1}/(2j-1)$.

הנוסחה הזו גם מאפשרת חישוב מהיר ויעיל יותר של $\log s$ עבור $s\le 2$. למשל עבור $s=2$ נקבל $x=\frac{1}{3}$, ולכן $\log 2=2\sum\left(\frac{1}{3}\right)^{2j-1}/(2j-1)$. טור זה מתכנס הרבה יותר מהר מ- $\sum\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(v) נציב $x=-t^2$ בטור עבור $\frac{1}{1-x}$ ונקבל $\frac{1}{1+t^2}=\sum(-1)^n t^{2n}$ עבור $|t|<1$. אינטגרציה איבר איבר נותנת

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

עבור $|x|<1$. הטור מתכנס גם עבור $x=\pm 1$, ולכן מתכנס במ"ש על $[-1,1]$. בפרט, עבור $x=1$ נקבל

$$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\ .$$