תורת הקבוצות ־ תרגול מספר 3
פעולות נוספות על קבוצות

איחודים וחיתוכים כלליים

הגדרה

איחוד וחיתוך הוגדרו עבור שתי קבוצות. ניתן להכליל את ההגדרה למספר **סופי** כלשהו של קבוצות על ידי שימוש בהגדרה אינדוקטיבית:

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \triangleq (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$

עם זאת, ניתן גם לתת הגדרה כללית אף יותר, למספר כלשהו (לאו דווקא סופי) של קבוצות. לצורך כך, צריך לדבר על הקבוצה שכוללת את כל הקבוצות שמאחדים/חותכים. לקבוצה של קבוצות קוראים לרוב **משפחה** כדי לשפר את הקריאות של הטקסט.

דוגמאות למשפחות של קבוצות:

- $X_1 = \{\{1,2,3\}, \{1,a\}, \emptyset\}$ ־ משפחה שכוללת שלוש קבוצות: $\{1,2,3\}$, $\emptyset$ ו־$\{1,a\}$.
- $X_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ־ משפחה שכוללת את כל הקבוצות של מספרים טבעיים.
- $X_3 = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ כך ש־$A_n = \{2n\}$ ־ משפחה שכוללת את כל הסינגלטונים של מספרים זוגיים.
- $X_4 = \left\{\left[0, \frac{1}{n}\right] \mid n \geq 1\right\}$ ־ משפחת כל הקטעים הסגורים בישר הממשי מ־0 (כולל) ועד $\frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי חיובי n.
- $X_5 = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ־ משפחת כל הקטעים הפתוחים בישר הממשי מ־n ועד $n+1$, לכל n טבעי.

תהא X משפחה של קבוצות, אז נגדיר את הקבוצות הבאות:

- $\bigcup X \triangleq \{x \mid \exists A \in X : x \in A\}$
- $\bigcap X \triangleq \{x \mid \forall A \in X : x \in A\}$ כאשר $X \neq \emptyset$.

אם $X = \emptyset$ אז $\bigcap X$ **לא מוגדר** כי התנאי שבתוך ההגדרה מתקיים באופן ריק, מה שיגרור ש־$\bigcap X$ היא הקבוצה האוניברסלית, שאינה קיימת על פי הפרדוקס של ראסל.

לפעמים נוח לתת **אינדקסים** לקבוצות של X בפרט, אם $X = \{A_1, A_2 \ldots\}$ אז משתמשים בסימונים $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ו־$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

עבור הדוגמאות שהצגנו למשפחות:

- $\bigcup X_1 = \{1,2,3\} \cup \{1,a\} \cup \emptyset = \{1,2,3,a\}$
- $\bigcup X_2 = \bigcup \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ ובאופן כללי $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$ לכל קבוצה A.
- $\bigcup X_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2,4,6,\ldots\}$ ־ קבוצת כל הזוגיים.
- $\bigcap X_4 = \{0\}$.
- $\bigcap X_5 = \emptyset$. ו־$\bigcup X_5 = (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$.

לפעמים קבוצת האינדקסים גדולה מאוד ואיננו רוצים או יכולים למספר אותה. במקרה זה מסמנים אותה במפורש באות, למשל Λ, וכותבים $\bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ וכדומה.

נקודת המבט האקסיומטית

מבחינה אקסיומטית, יש הבדל מהותי בין איחוד ובין חיתוך. אחת מהאקסיומות של ZF היא אקסיומת האיחוד, שגורסת שאם X היא קבוצה של קבוצות, אז הקבוצה $\bigcup X$ קיימת:

$$\forall X\exists U\forall A\forall a\left(A\in X\wedge a\in A\to a\in U\right)$$

לעומת זאת, קיום הקבוצה $\bigcap X$, כאשר X אינה ריקה, נובע ישירות מאקסיומת הכלילה החדשה: אם $X\ne\emptyset$ אז יש $A\in X$, ולכן ניתן להגדיר

$$\bigcap X\quad\triangleq\quad\left\{x\in A\mid\forall B\in X:x\in B\right\}$$

הגדרה זו מתאימה לניסוח של אקסיומת הכלילה החלשה (מדוע עבור איחוד לא ניתן לבצע את אותו הדבר?)

שימו לב כי בהינתן שתי קבוצות A,B, אקסיומת האיחוד **אינה** אומרת ישירות $A\cup B$ קיימת, אלא כי $\bigcup\left\{A,B\right\}$. דהיינו, על מנת להוכיח את קיום $A\cup B$ אנו נזקקים קודם כל לאקסיומה שמבטיחה את קיום הקבוצה $\left\{A,B\right\}$ - **אקסיומת הזיווג**.

פונקציות מציינות של קבוצות

תהא X קבוצת "העולם" שלנו ותהא $A\subseteq X$. נהוג להגדיר את **הפונקציה המציינת** של A ב-X באופן הבא:

$$\chi_{A}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\0 & x\notin A\end{cases}$$

הגדרה זו מאפשרת, בין היתר, לתאר פעולות בין קבוצות בתור מניפולציה חשבונית של הפונקציות המציינות שלהן. ניתן מספר דוגמאות:

- $\chi_{A\cap B}=\chi_{A}\cdot\chi_{B}$, שכן $\chi_{A\cap B}\left(x\right)=1\leftrightarrow x\in A\cap B\leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\leftrightarrow\chi_{A}\left(x\right)=1\wedge\chi_{B}\left(x\right)=1$.
- $\chi_{A^{c}}=1-\chi_{A}$, שכן $\chi_{A^{c}}\left(x\right)=1\leftrightarrow x\in A^{c}\leftrightarrow x\notin A\leftrightarrow\chi_{A}\left(x\right)=0$.
- $\chi_{A\cup B}=1-\left(1-\chi_{A}\right)\left(1-\chi_{B}\right)=\chi_{A}+\chi_{B}-\chi_{A}\chi_{B}$ (נראה מסורבל, אבל נובע מכללי דה-מורגן).
- $\chi_{A\Delta B}=\left(\chi_{A}+\chi_{B}\right)\mod 2$ (חיבור מודולו 2 פירושו ש-$1+1=0$).

צורת הצגה זו מקלה עלינו להבין תכונות של הפעולות הרלוונטיות. כך למשל מכיוון שכפל בשלמים וחיבור מודולו 2 הן פעולות אסוציאטיביות, אנו מקבלים מייד שחיתוך והפרש סימטרי הן פעולות אסוציאטיביות. כמו כן, קל להראות באינדוקציה שלכל סדרת קבוצות $A_{1},\dots,A_{n}$ מתקיים $\chi_{A_{1}\Delta\dots\Delta A_{n}}=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_{i}}\mod 2$ ולכן קל לראות ש-$x\in A_{1}\Delta\dots\Delta A_{n}$ אם ורק אם x מופיע בדיוק במספר אי זוגי של קבוצות.