תורת החבורות – תרגיל בית 9 -- פתרון

שאלה 1

יהי $x, y \in G$ שני איברים מסדר 2 המתחלפים בכפל. אז כל אברי $\langle x, y\rangle$ הם $\{1, x, y, xy\}$ ומתקיים כי $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$, לכן $\langle x, y\rangle$ איזומורפית ל- $C_2 \times C_2$.

שאלה 2

$$D_8 = \langle a, b:\ a^4 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$$

כמו כן נסמן $\beta = (1\,2),\ \alpha = (1\,3)(2\,4)$, $G = \langle \alpha, \beta\rangle$.

נגדיר העתקה: $\varphi:\ G \to D_8$ ע"י $\beta = (1, 2) \mapsto b$, $\beta\alpha = (1, 3, 2, 4) \mapsto a$.

נשים לב, $(\beta\alpha)^4 = \beta^2 = 1$. כמו כן $\beta^{-1}(\beta\alpha)\beta = (2, 3, 1, 4) = (\beta\alpha)^{-1}$, לכן φ הומומורפיזם. ברור כי הינו על, כי לכל איבר $a^i b^j \in D_8$ ישנו מקור $(\beta\alpha)^i \beta^j \in G$.

יותר מכך, היות ו- $(\beta\alpha)^4 = \beta^2 = 1$, $(\beta\alpha)\beta = \beta(\beta\alpha)^{-1}$, אנו מקבלים כי $G \subseteq \left\{(\beta\alpha)^i \beta^j\right\}_{\substack{i=0,1,2,3\\ j=0,1}}$, לכן $|G| \le 8$. אך היות וישנה פונקצית על מ- G <u>על</u> D_8, יוצא כי

$|G| \ge |D_8| \Rightarrow |G| = 8 = |D_8| \Rightarrow$ φ היא גם חח"ע, ולכן איזומורפיזם.

שאלה 3

$$\begin{aligned}
&\langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 2, 4, 3)\rangle = \langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 2, 4, 3),\ (1, 2, 4, 3)^2\rangle = \\
&\langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 2, 4, 3),\ (1, 4)(2, 3)\rangle = \\
&\langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 2, 4, 3),\ (1, 2, 3, 4)(1, 4)(2, 3)\rangle = \\
&\langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 2, 4, 3),\ (2, 4)\rangle \supseteq \langle (1, 2, 3, 4),\ (2, 4)\rangle = S_4
\end{aligned}$$

הוכחנו כי $S_4 \subseteq \langle (1, 2, 3, 4),\ (1, 2, 4, 3)\rangle$ ולכן השוויון מתקיים.

<u>שאלה 5</u>

תהי G חבורה מסדר 4 ואת המשך הדיון נחלק ל-2 מקרים.

מקרה 1: קיים $x \in G$ מסדר 4, אז $G = \langle x \rangle \cong C_4$.

מקרה 2: לא קיים $x \in G$ מסדר 4, אז לכל $x \in G$ מתקיים כי $x^2 = 1$, בפרט G אבלית. יהי $1 \neq x \in G$, אז $\left|\langle x \rangle\right| = 2 \quad \Leftarrow \quad \langle x \rangle \neq G$, לכן קיים $y \notin \langle x \rangle$, ואז כמו בשאלה 1 $G = \langle x, y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \cong C_2 \times C_2$.

<u>שאלה 8</u>

לפי הנתון קיים $x \in G$ עבורו $Hg = xH$. לכן קיבלנו כי $g \in Hg \quad \Leftarrow \quad g \in xH$. מכאן $g \in xH \bigcap gH$, בפרט $xH \bigcap gH \neq \varnothing \quad \Leftarrow \quad xH = gH \quad \overset{Hg=xH}{\Leftarrow} \quad Hg = gH$.

<u>שאלה 9</u>

נסמן ב- φ את ההעתקה הנתונה בשאלה, ב- L את הקבוצת הקוסטים השמאליים, וב- R את הקבומה הקוסטים הימניים.

אז לכל $gH \in L$ מתקיים

$$\varphi(gH) = \left\{(gh)^{-1} \middle| h \in H\right\} = \left\{h^{-1}g^{-1} \middle| h \in H\right\} = \left\{hg^{-1} \middle| h \in H\right\} = Hg^{-1}$$

כלומר, φ הינה פונקציה מ- L ל- R.

כמו כן ההעתקה היא חח״ע (לפי התרגיל הקודם) ועל (כי לכל $Hx \in R$ ישנו מקור $x^{-1}H \in L$), לכן φ ביז׳קטיבית ו- $\text{card}(R) = \text{card}(L)$.