אינפי 104195

גיליון 7

תאריך: 21/12/2014

שם הסטודנט: אביטל שחר

מספר הסטודנט: 311178610

שם המתרגל: יוחאי מעיין

תרגיל בית 7

תאריך הגשה: <u>נדחה</u> ליום ראשון, 21.12.2014.

$\boxed{1}$ נסמן ב-A את קבוצת כל המספרים הרציונליים בקטע $[0,1]$.

א. הראו שאם $I_1, I_2, \ldots$ הנו כיסוי של A על ידי קטעים פתוחים כך שאורכו של I_i קטן מ-$\frac{1}{2^i}$, אז אין לו תת-כיסוי סופי.

ב. מצאו כיסוי אינסופי של A על ידי קטעים פתוחים שאין לו תת-כיסוי סופי.

$\boxed{2}$ תהי $A \subset \mathbb{R}$. הראו שהפנים של A:

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A \mid \exists \epsilon > 0 : (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A\}$$

היא קבוצה פתוחה.

$\boxed{3}$ תהי $A \subset \mathbb{R}$. השפה של A מוגדרת על ידי $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. (המשלים A^c של A היא קבוצת כל המספרים שאינם ב-A).

א. הראו כי $x \in \partial A$ אם ורק אם בכל קטע פתוח סביב x יש נקודות (אחת או יותר) גם מתוך A וגם מחוץ ל-A. האם מכך נובע שיש אינסוף נקודות משני הסוגים? אם כן, הוכיחו זאת, ואם לא, מצאו דוגמה נגדית.

ב. הראו כי $\partial(A^c) = \partial A$.

ג. הראו כי A פתוחה אם ורק אם $\partial A \cap A = \emptyset$.

ד. הראו כי A סגורה אם ורק אם $\partial A \subset A$.

ה. הראו כי $\partial A = \emptyset$ אם ורק אם A היא גם פתוחה וגם סגורה.

ו. מצאו את השפות של הקבוצות הבאות: $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ו-$\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ הוכיחו או הפריכו על ידי מתן דוגמה נגדית:

א. אם U פתוחה ו-A סגורה, אז $A \backslash U$ סגורה.

ב. אם U פתוחה ו-A סגורה, אז $U \backslash A$ פתוחה.

ג. לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים $A \backslash \operatorname{int}(A) = \partial A$.

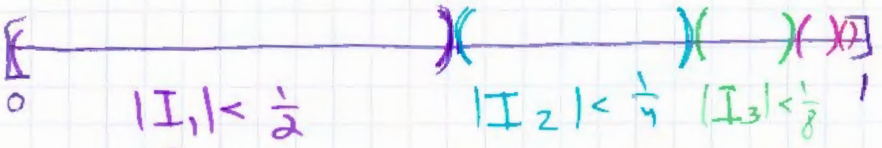
ד. לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים $\overline{A} \backslash \operatorname{int}(A) = \partial A$.

$\boxed{5}$ תהי $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ קבוצה שהיא גם פתוחה וגם סגורה. הראו כי $A = \mathbb{R}$. מיהן אם כך הקבוצות שאין להן אף נקודת שפה?

1. נסמן ב-A את קבוצת המספרים הרציונליים בקטע [0,1]:

א. הראו שאם $I_1, I_2, \ldots$ הינו כיסוי של A ע"י קטעים פתוחים כך שאורכו של I_j קטן מ-$\frac{1}{2^j}$, אז אין לו תת-כיסוי סופי.

נתון ש- $I_1, I_2 \ldots I_j$ הם כיסויים פתוחים, כלומר במקרה הקיצוני נקבל:



כלומר, תמיד נשאר $\frac{1}{2^j}$ מכל I_j שלא מכוסה ולכן ל-A אין תת כיסוי סופי.

ב. מצאו כיסוי אינסופי של A ע"י קטעים פתוחים שאין לו תת כיסוי סופי:

בגלל שמדובר במספרים רציונליים בין 0 ל-1 ניתן לרשום אותם כסדרה $q_1, q_2, q_3, q_4 \ldots$

לפי סעיף א' מצאנו כיסוי אינסופי של A שאורכו קטן מ-$\frac{1}{2^j}$.

נגדיר כיסוי אינסופי של A בצורה הבאה:

$$q_i \in \underbrace{\left(q_i - \frac{1}{2\cdot 3^i}, q_i + \frac{1}{2\cdot 3^i}\right)}_{I_i}$$

כלומר עבור q_1 (הרציונלי הראשון - $\frac{1}{2^1}$) נקבל כי $I_1 < \frac{1}{2}$ $q_1 \in (q_1 - \frac{1}{6}, q_1 + \frac{1}{6})$ כלומר הסביבה של q_1 היא $\frac{1}{3}$ והיא קטנה מ-$\frac{1}{2}$. וכך נמשיך עד אינסוף.

ולכן נמצא תמיד איבר שאין לו תת כיסוי סופי מכיוון שאורכו הקטעים יהיה קטן מהקטע $(0,1)$

2. יהי $A \subset \mathbb{R}$. הוכח שהפנים של A: הוא קבוצה פתוחה.

$$int(A) = \{x \in A \mid \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A\}$$

קבוצה פתוחה - שכל הנקודות בה הן פנימיות,

נקודה פנימית - קיים ε כך שכל הקטע $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ כאשר $a \in A$ הוא בA.

צ"ל - $int(A)$ - קבוצה פתוחה (כל הנקודות פנימיות).

אם איבר הוא בפנים של A אז לפי הגדרת הפנים:

יהי $x \in int(A)$ $\longleftarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ כך ש- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ $\longleftarrow$ כל איבר שייך ל$int(A)$

הוא נקודה פנימית של $A \longleftarrow A$ קבוצה פתוחה לפי ההגדרות

שרשמתי למעלה.

מ.ש.ל.

3. תהי $A\subset\mathbb{R}$. השפה של A מוגדרת על ידי $\partial A=\bar{A}\cap\overline{A^c}$

(A^c המשלים של A – כל האיברים שאינם ב-A).

א. הראו כי $x\in\partial A$ אם ורק אם בכל קטע פתוח סביב x יש נקודות (אחת או יותר) גם מתוך A וגם מחוץ ל-A. האם נכון לומר שיש אינסוף נקודות משני הסוגים? אם כן הוכיחו זאת, ואם לא מצאו דוגמא!

יהי $x\in\partial A \iff x\in(\bar{A}\cap\overline{A^c}) \iff x\in\overline{A^c}$ וגם $x\in\bar{A} \iff$

$x\in A^{c\prime}$ או $x\in A^c$ וגם $x\in A'$ או $x\in A \iff$ (($x\in A^c$ או ($x\in A^{c\prime}$ וגם $x\in A'$))

אזי ($x\in A^{c\prime}$ וגם ($x\in A'$ או $x\in A$)) x צריכה להיות שייך ל-A ולמשלים שלו $\iff$ מהגדרת נקודת הצטברות בסביבה שלה יש איבר נוסף מהקבוצה, כלומר בסביבה שלה יש איבר נוסף מהקבוצה, כלומר בסביבת ε שנבחר תהיה נקודה נוספת מ-A או מחוץ ל-A.

לא נכון לומר שיש אינסוף נקודות משני הסוגים - לדוגמא קבוצה המכילה איבר אחד, למשל 2, הקבוצת נקודות ההצטברות שלה ריקה ואין אינסוף נקודות משני הסוגים אלא רק אחת.

ב. הראו כי $\partial(A^c)=\partial A$

$$\partial(A^c)=(A^c\cup A^{c\prime})\cap(A\cup A')$$
$$\partial(A)=(A\cup A')\cap(A^c\cup A^{c\prime})$$

= חיתוך הוא קומוטטבי.

ג. הראו כי A פתוחה $\iff (\partial A)\cap A=\emptyset$

כיוון אחד ברור: אם A פתוחה כל הנקודות שלה הן פנימיות, השפה של A היא החיתוך בין הסגור של A לסגור של A^c, כלומר הנקודות הצטברות שהן לא פנימיות של A, ב-A כל הנקודות הן פנימיות ולכן החיתוך ריק.

כיוון שני: נתון ש- $(\partial A)\cap A=\emptyset$ כלומר החיתוך בין $\bar{A}$ ל-$\overline{A^c}$ בתוך הקבוצה ריקה, השפה של A היא אוסף נקודות ההצטברות של A שאינן פנימיות, ואם החיתוך הזה ריק נובע שהקבוצה A פתוחה כי ההגדרה של קבוצה פתוחה היא קבוצה שמכילה רק נקודות פנימיות. (כל הנקודות בה הן פנימיות)

3(ד). הראו כי A סגורה אם ורק אם $\partial A \subset A$

<u>כיוון אחד ברור</u>: אם A סגורה $\Leftarrow$ $\partial A \subset A$, (השפה של A מוגדרת כחיתוך בין A' ל-$A^{c\prime}$, החיתוך לא יהיה ריק אם ורק אם ל-A ו-A^c יהיו את אותן נקודות הצטברות וזה יקרה רק אם A היא קבוצה סגורה.

<u>כיוון שני</u>: $\partial A \subset A \Leftarrow (A \cup A') \cap (\underline{A^c} \cup A^{c\prime}) \subset A$

לפי כל הגדרת מוכל ב-A ולכן

$(A \cup A') \cap \underline{A^{c\prime}} \subset A$

נקודות הצטברות של A^c מוכלות ב-A

וזו בדיוק ההגדרה לקבוצה סגורה - שהיא מכילה את נקודות ההצטברות שלה, לכן A סגורה.

(ה). הראו כי $\partial A = \emptyset$ אם"ם A היא גם פתוחה וגם סגורה.

מהסתמכות על תרגיל 5, הוכחתי ש A היא פתוחה וגם סגורה אם"ם היא $\emptyset$ או $\mathbb{R}$.

(ו) מצאו את השפות:

$\partial [0,1] = \{0,1\}$

$\partial [0,1) = \{0,1\}$

$\partial (\mathbb{N}) = \{\mathbb{N}\}$ אין ל-N נקודות הצטברות

$\partial (\mathbb{Q}) = \{\mathbb{R}\}$

$\partial \mathbb{R} = \emptyset$ אין ל-$\mathbb{R}$ "קצוות"

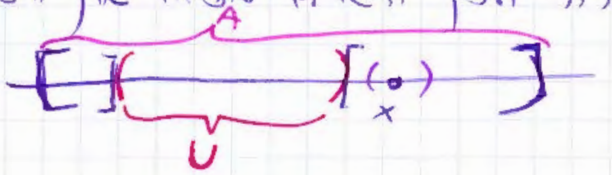
4 הוכיחו/הפריכו ע"י מתן דוגמא נגדית:

(א) אם U פתוחה ו-A סגורה אז $A\setminus U$ סגורה.

ניקח איבר מ- $A\setminus U$: $x\in(A\setminus U)$

אם $A\subseteq U$ זוהי קבוצה ריקה, שהוכחנו כבר שהיא גם פתוחה וגם סגורה ולכן היא מקיימת את הטענה

אם $U\not\subseteq A$

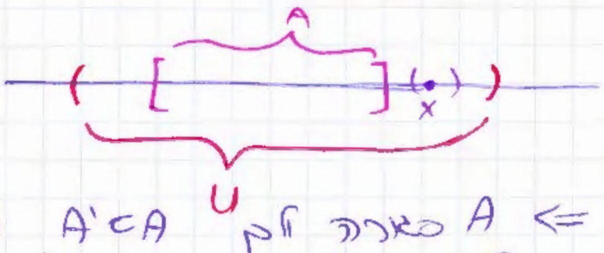


אם $x\in A\setminus U \iff x\in A$ וגם $x\notin U \iff$ נבחר $\varepsilon>0$ כך ש:
$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\in A\setminus U \iff$ בגלל ש-U קבוצה פתוחה נוכל למצוא כזאת לכל $x\in A\setminus U$ כלומר כל $x\in A\setminus U$ היא נקודת הצטברות של A ולכן $A\setminus U$ מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה כלומר $A\setminus U$ היא קבוצה סגורה.

(ב) אם V פתוחה ו-A סגורה אז $U\setminus A$ פתוחה.

$x\in U\setminus A$. אם $U\subseteq A$ זוהי קבוצה ריקה שהוכחנו כבר שהיא גם פתוחה וגם סגורה ולכן היא לכן מקיימת את הטענה

אם $A\not\subseteq U$



יהי $x\in U\setminus A \Leftarrow$
$x\in U$ וגם $x\notin A \Leftarrow A$ סגורה ולכן $A'\subseteq A$ כלומר
$x\notin A' \Leftarrow$ ב-U ~~מכילה את כל הנקודות~~ כל הנקודות הן פנימיות ונקודות ההצטברות של A לא שייכות ל-$U\setminus A$, כלומר לכל $x\in U\setminus A$ יש סביבת ε שלו $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ש אינם נקודות מ- $U\setminus A$ ולכן U קבוצה פתוחה.

4ב. לכל $A\subset\mathbb{R}$ מתקיים $A\setminus int(A)=\partial A$

$A=(0,1)$

$int(A)=(0,1)$

$\partial A=\{0,1\}$

$A\setminus int(A)\neq\partial A$

$(0,1)\setminus(0,1)\neq\{0,1\}$

$\emptyset\neq\{0,1\}$

3. לכל $A\subset\mathbb{R}$ מתקיים $\bar{A}\setminus int(A)=\partial A$

קיימים ארבעה סוגים של נקודות הקבוצה-

(א) נקודה מבודדת

(ב)- נקודות הצטברות שאינן פנימיות

(ג)- נקודות פנימיות

(ד)- נקודות שלא מA ולו הצטברות של A'

$\bar{A}$ מכיל את קבוצות (א),(ב)(ג)

$int(A)$ מכיל את קבוצה (ג)

$\{(א),(ב)\}=\partial A=\bar{A}/int(A)=\{(א),(ב),(ג)\}\setminus\{(ג)\}=\{א,ב\}$

2. תהי $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ קבוצה שהיא גם פתוחה וגם סגורה. הראו
כי $A=\mathbb{R}$. מיהן אם כך הקבוצות שאין להן אף נקודת שפה?

נניח בשלילה ש-A חסומה (בה"כ נניח שהיא חסומה מלעיל)
כלומר קיים לה סופרמום או מקסימום.

במקרה בו קיים לה ~~מקס~~מקסימום אז היא לא קבוצה פתוחה כי המקסימום
הוא לא נקודה פנימית של A וקבוצה פתוחה מכילה את כל נקודות
הפנימיות.

במקרה בו קיים לה סופרמום אז היא לא קבוצה סגורה כי הסופרמום
הוא נקודת הצטברות של A שלא מוכלת בה וקבוצה סגורה מכילה את
כל נקודות ההצטברות שלה.

לכן מצאנו סתירה להנחה שלנו ש-A חסומה מלעיל, כלומר ההנחה
שגויה ו-A לא חסומה מלעיל.

הנחנו ש-A חסומה מלעיל בה"כ, באותה מידה יכלנו להניח ש-A
חסומה מלרע ולהראות שהתנאים לא מתקיימים אם קיים לקבוצה
מינימום או אינפימום. לכן, A לא חסומה.

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אינה חסומה.

A חייבת להיות קטע רציף ולא קבוצה של נקודות מבודדות כי נתון
שהיא קבוצה פתוחה.

כלומר $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, חסומה וקטע רציף, לכן: $A=\mathbb{R}$!

מ.ש.ל.