תרגיל 8 באלגברה לינארית ב'

לאורך כל התרגיל V הינו מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי.

1. יהי T אופרטור לינארי על V. הראה כי תמונת T^* הינה המשלים האורתוגנלי של $KerT$.
2. יהי V מרחב המטריצות nxn מעל המרוכבים עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr(AB^*)$.
נקבע P מטריצה הפיכה בV ונגדיר אופרטור על V ע"י $T_P(A) = P^{-1}AP$. מצא את האופרטור הצמוד לT_p.
3. יהי E אופרטור על V שהינו הטלה. הוכח כי E הרמיטי אמ"ם $E^*E = EE^*$.
4. יהי W תת מרחב של V. נרשום $V = W + W'$ (זהו סכום ישר) כאשר W' המרחב הניצב לW. נגדיר אופרטור U על V הפועל על $w + w' = v \in V$ כאשר $w \in W, w' \in W'$ ע"י $Uv = w - w'$.
   a. הוכח כי U אוניטרי והרמיטי.
   b. עבור $V = R^3$ ו W תת המרחב הנפרש ע"י $(1,0,1)$. מצא את המטריצה U עפ"י המטריצה הסטנדרטית.
5. יהיו V, W זוג ממ"פ מאותו מימד. יהי U איזומורפיזם מV ל W. יהי $L(V)$ מרחב האופרטורים הלינאריים מV לV. הראה כי:
   a. הראה כי ההעתקה $T \to UTU^{-1}$ הינה איזומורפיזם מ$L(V)$ ל$L(W)$.
   b. הראה כי $trace(UTU^{-1}) = trace(T)$ לכל $T \in L(V)$.
   c. $(UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$.
   d. נצייד את $L(V)$ במכפלה הפנימית $\langle T_1, T_2\rangle = trace(T_1 T_2^*)$ ובאופן דומה את $L(W)$, אז ההעתקה $T \to UTU^{-1}$ הינה איזומורפיזם של מרחבי מכפלה פנימית (אופרטור אוניטרי).