קומבינטוריקה – תרגיל #6 – 05/05/16

תרגיל:

(1) יהיו $a_1, \dots, a_{10}$ מס' שלמים. הוכיחו כי קיימים $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{10} \in \{-1,0,1\}$ שאינם כולם 0 כך שהסכום $\sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i a_i$ מתחלק ב-1023.

(2) מצאו שלמים $a_1, \dots, a_{10}$ כך שלכל $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{10} \in \{-1,0,1\}$ שאינם כולם 0, הסכום $\sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i a_i$ אינו מתחלק ב-1024.

פתרון:

(1) נסתכל על כל הצירופים של $a_1, \dots, a_{10}$ (יש 2^{10} תתי קב') כאשר המקדמים $\alpha_i \in \{0,1\}$. יש, אם כן, 2^{10} צירופים כאלה. ניקח אותם מודולו 1023, אז יש תא עם שתי יונים. אם שתי יונים נמצאות בתא 0, אז רק אחד מהם מקיים שכל ה-α_i הם 0. השני מתחלק ב-1023 ולא כל מקדמיו הם 0. אחרת, יש תא שאינו 0 שבו יש שתי יונים. ההפרש ביניהן מתחלק ב-1023, ונקבל:

$$\sum \alpha_i a_i - \alpha'_i a_i = \sum (\alpha_i - \alpha'_i) a_i \equiv \sum \varepsilon_i a_i$$

כאשר $\varepsilon_i \in \{-1,0,1\}$.

(2) נסתכל על $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^9$, אז לכל $\alpha_i \in \{0,1\}$, נקבל $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i a_i$. זהו ייצוג בינארי של כל המס' מ-1 עד 1023. כלומר, כל אחת מהיונים תהיה בתא שונה, וגם ההפרשים ביניהם לא יתחלקו ב-1024.

משפט ארדש-סקרש

משפט: יהיו $m.n$ טבעיים (לאו דווקא שונים). כל סדרה של מס' ממשיים באורך $mn+1$ מכילה תת סדרה מונוטונית עולה ממש באורך $m+1$, או מונוטונית לא עולה באורך $n+1$.

תרגיל: יהי $n > klr$. הוכיחו שכל סדרה באורך n מכילה סדרה עולה באורך $k+1$ או סדרה יורדת באורך $l+1$ או סדרה קבועה באורך r.

פתרון: אם יש סדרה קבועה באורך r, אז סיימנו. אחרת, יש תת סדרה באורך $kl+1$ שבה כל המספרים שונים.
הסבר: נניח בשלילה שיש לכל היותר kl מס' שונים. נתייחס אליהם כתאים. היונים יהיו n המספרים. אם מחלקים $n > klr$ ל-kl תאים, יש תא עם לפחות r יונים. יש לבחור r מס' זהים בסדרה כיוון שכל המס' שונים בתת הסדרה, על פי ארדש סקרש יש סדרה עולה באורך $k+1$ או סדרה יורדת באורך $l+1$.

תורת הגרפים

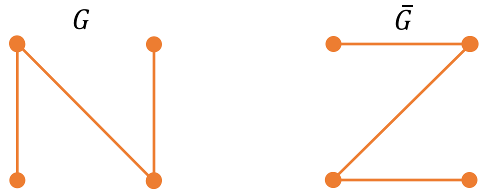
תרגיל: כמה גרפים יש על 10 קדקודים $v_1, \dots, v_{10}$ שבהם מכל קדקוד יוצאת לפחות צלע אחת? (שימו לב: לקדקודים יש שמות. כלומר, הגרף $v_1 \leftrightarrow v_2$ שונה מ-$v_3 \leftrightarrow v_4$.

פתרון: כמה גרפים יש על 10 קדקודים? בדיוק $2^{\binom{10}{2}}$ (כי אנחנו בוחרים תתי קב' של קב' כל החיבורים האפשריים). נסמן ב-A_i את כל הגרפים בהם הקדקוד i מבודד. אזי $|A_i| = 2^{\binom{9}{2}}$. כמו כן: $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = 2^{\binom{10-k}{2}}$. לכן, מנוסחאת ההכלה-הפרדה:

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k \, 2^{\binom{10-k}{2}}$$

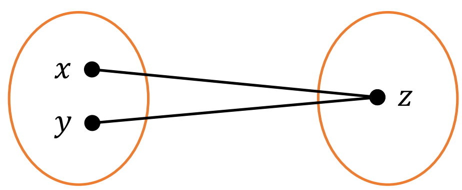
הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף. **הגרף המשלים** של G מסומן ב-$\bar{G}$ הוא הגרף $\bar{G}=(V,\bar{E})$ כאשר $\{x,y\}\in E \Leftrightarrow \{x,y\}\notin \bar{E}$.

דוגמא:



תרגיל: הוכיחו שאם $G=(V,E)$ גרף, אז לפחות אחד מ-$\bar{G},G$ הוא גרף קשיר.

פתרון: אם G קשיר, אז סיימנו. אחרת, G לא קשיר וצירך להוכיח ש-$\bar{G}$ קשיר. יהיו $x,y\in V$. צריך להוכיח שיש מסלול ביניהם. אם $\{x,y\}\notin E$, אז $\{x,y\}\in \bar{\bar{E}}$. אם $\{x,y\}\in E$ אז בפרט x,y נמצאים באותו רכיב קשירות. קיים עוד רכיב קשירות אחד לפחות ויש קדקוד שנמצא ברכיב קשירות אחר.



לכן, $y\ \{z,y\}\ z\ \{x,z\}\ x$ הוא מסלול מ-x ל-y. הראינו שלכל שני קדקודים ב-V יש מסלול ביניהם ב-$\bar{G}$, ולכן $\bar{G}$ קשיר.