אינפי 1 - גיליון תרגילים מספר 4

1. תהיינה a_n, b_n סדרות המוגדרות באופן הבא:

$$a_1 = 4, \qquad b_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

הוכח ששתי הסדרות מתכנסות, ושגבולן שווה.

(רמז: הוכח כי a_n סדרה יורדת וחסומה מלרע ו - b_n סדרה עולה).

2. הוכח כי הסדרה הבאה מתכנסת: $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$.

3. מצא את הגבולות החלקיים של הסדרה: $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2} + (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. מהם $\limsup(a_n), \liminf(a_n)$?

4. הוכח את הטענות הבאות:

א. $\liminf(-a_n) = -\limsup(a_n)$

ב. $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf(a_n) + \liminf(b_n)$

ג. $\liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n) + \liminf(b_n)$

5. תהא a_n סדרה שעבורה $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. הוכח כי כל נקודות הקטע הסגור $[\liminf a_n, \limsup a_n]$ הן נקודות הצטברות של הסדרה.

6. תהא A קבוצה. נניח שלכל $n \geq 1$, x_n היא נקודת הצטברות של A, ושקיים הגבול (וסופי) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. הוכח כי x היא נקודת הצטברות של A.

7. הנח כי פעולות בחזקות של מספרים רציונליים מוגדרות היטב, והוכח כי לכל שלשת מספרים ממשיים $\alpha > 0$ ו - $a > b > 0$ מתקיים: $a^\alpha > b^\alpha$.