

## הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

מבחן סוף סמסטר באלגברה לינארית ב - 104171 - מועד א

סמסטר חורף תשע"ב 13.2.2012

משך המבחן: שלוש שעות. שימוש בחומר עזר כלשהו אסור בהחלט.  
יש לנמק היטב את התשובות ולצטט תוצאות שאתם מסתמכים עליהן.

שאלה מס. 1 24 נקודות.

א. הוכיחו: מטריצה  $N$  היא נילפוטנטית (כלומר, קיים  $k$  כך ש  $N^k = 0$ ) אם ורק אם הערך העצמי היחיד שלה הוא 0.

ב. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

הראו ש  $A$  היא נילפוטנטית ומיצאו את צורת ג'ורדן  $J$  שלה.

ג. מיצאו מטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $P^{-1}AP = J$ .

שאלה מס. 2 24 נקודות.

הוכיחו (משפט): מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{C})$  היא נורמלית אם ורק אם היא ניתנת ללכסון אוניטרי. (תוכלו להסתמך, ללא הוכחה, על תכונות מטריצה או טרנספורמציה נורמלית שהוכחו בכיתה: ו"ע ששיכים לע"ע שונים הם ניצבים ואם  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אז  $\bar{\lambda}$  ע"ע של  $T^*$  עם אותו ו"ע).

שאלה מס. 3 28 נקודות.

יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$ . לכל שני וקטורים  $x, y \in V$  נגדיר טרנספורמציה לינארית על  $V$ , שנסמנה  $x \otimes y^*$ , על ידי

$$(x \otimes y^*)v = \langle v, y \rangle x.$$

א. מצאו את הטרנספורמציה הצמודה  $(x \otimes y^*)^*$ .

ב. מתי  $x \otimes y^*$  צמודה לעצמה? מתי היא מוגדרת אי שלילית? מתי היא מוגדרת חיובית?

ג. תהי  $T: V \rightarrow V$  טרנספורמציה לינארית עם  $\text{rank}(T) = k$ . הראו שניתן לכתוב את  $T$  כסכום של  $k$  טרנספורמציות מצורה זו. כלומר  $T = \sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i^*$ .

ד. השתמשו בסעיפים ג. ו א. כדי להוכיח שהדרגה של  $T$  שווה לדרגה של  $T^*$ .

שאלה מס. 4 24 נקודות.

תהי  $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  תבנית ריבועית המוגדרת על ידי  $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ .

א. מיצאו תבנית בילינארית סימטרית  $f$  כך שיתקיים  $q(v) = f(v, v)$  לכל  $v \in \mathbb{R}^3$ .

ב. מיצאו את המטריצה המייצגת  $A$  של  $f$  לפי הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^3$  ומטריצה אלכסונית  $D$  שחופפת לה כך שהאיברים על האלכסון של  $D$  הם מתוך  $\{0, 1, -1\}$ . (הראו את הפעולות הדרושות כדי לקבל את  $D$  מ  $A$ .)

**בהצלחה!**