תורת ההסתברות

עבודת בית מס׳ 8
פתרונות

<u>תרגיל 1</u>. בעיה 6.6 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. ננגדיר

$$X^k = \text{התוצאה שהתקבלה בזרקיה ה- } k \text{ ית},$$
$$k = 1, 2, 3;\ \ X^k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

אזי

$$\begin{aligned}
p_X(3) &= P(X^2 \neq X^1, X^3 \notin \{X^1, X^2\}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{20}{36}, \\
p_X(2) &= P(X^2 \neq X^1, X^3 \in \{X^1, X^2\}) + P(X^2 = X^1, X^3 \notin \{X^1, X^2\}) = \\
&= \frac{6 \cdot 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{15}{36}, \\
P_X(1) &= P(X^2 = X^1, X^3 = X^1) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
EX &= 3 \cdot \frac{20}{36} + 2 \cdot \frac{15}{36} + 1 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36}, \\
EX^2 &= 3^2 \cdot \frac{20}{36} + 2^2 \cdot \frac{15}{36} + 1^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{241}{36}, \\
VAR(X) &= EX^2 - (EX)^2 = \frac{241 \cdot 36 - 91^2}{36^2} = \frac{395}{1296}.
\end{aligned}$$

<u>תרגיל 2</u>. בעיה 12.6 מהחוברת.

<u>פתרון</u>. יהיו

$$\begin{aligned}
p &= \text{ההסתברות לקבל אזהרה בסוף חודש}, \\
X_k &= \text{החודש בו התקבלה האזהרה ה- } k \text{ ית}.
\end{aligned}$$

אזי

$$
\begin{aligned}
&p = 1 - e^{-\ln 2} \sum_{n=0}^{3} \frac{(\ln 2)^n}{n!} = 0.00556,\\
&X_1 \sim Geom(p),\\
&X_2 - X_1 \text{ and } X_1 \text{ are independent },\\
&X_2 - X_1 \sim Geom(p),\\
&P(X_2 = 5) = \sum_{j=1}^{4} P(X_1 = j)P(X_2 - X_1 = 5 - j) = 4p^2q^3.
\end{aligned}
$$

ובסוף (אחד משני הקטעים המרתקים בתרגיל):

$$P(X_2 = 5) = 4p^2q^3 = 0.00012160.$$

תרגיל 3. בעיה 12.9 מהחוברת.

פתרון.

$$
\begin{aligned}
c\int_0^1 xdx = 1 \Rightarrow &\qquad c = 2,\\
p_Y(k) = P([5x] = k) &= P\left(\frac{k}{5} \le x < \frac{k+1}{5}\right) =\\
&= \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} 2xdx = \frac{2k+1}{25}\ , k = 0, 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}
$$

לכן

$$
F_Y(y) = \begin{cases}
0 & \text{if} \quad y < 0,\\
\frac{1}{25} & \text{if} \quad 0 \le y < 1,\\
\frac{4}{25} & \text{if} \quad 1 \le y < 2,\\
\frac{9}{25} & \text{if} \quad 2 \le y < 3,\\
\frac{16}{25} & \text{if} \quad 3 \le y < 4,\\
1 & \text{if} \quad 4 \le y.
\end{cases}
$$

משתנה Y הוא מ"א בדידת פונקצית ההתפלגות שלו עושה קפיצות בנקודות $0, 2, 3, 4$.

תרגיל 4. בעיה 12.28 מהחוברת.

פתרון. נסמן $Y = e^{F(X)}$. אזי

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} e^{F(X)} F'(x) dx = e^{F(X)}\Big|_{-\infty}^{\infty} = e - 1,$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2F(X)} F'(x) dx = \frac{1}{2} e^{2F(X)}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{e^2 - 1}{2},$$

$$VAR(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{e^2 - 1}{2} - (e - 1)^2 = \frac{4e - e^2 - 3}{2}.$$