תורת החבורות – תרגיל בית 5

שאלה 1

בכל אחד מהסעיפים רשום את התמורה הנתונה כמכפלת מעגלים זרים, חשב את סדר התמורה :

א) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

ב) $(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 6\ 7\ 8\ 9)(1\ 5)$

ג) $(1\ 5)(1\ 2\ 3)(1\ 5)$

שאלה 2

תהי $\sigma \in S_9$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 3 & 2 & 8 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

א) מצא את סדר התמורה.

ב) חשב $\sigma^{101},\ \sigma^{1357}(9),\ \sigma^{2488}(5)$.

ג) מצא תמורה $\psi \in S_9$ (אם קיימת) כך ש $\sigma\psi = (4\ 5)$.

ד) מצא תמורות $\mu_2, \mu_3 \in S_9$ כך ש $\sigma = \mu_k^k$ עבור $k = 2,3$.

שאלה 3

תהי σ m-מעגל.

א) הוכח כי σ^i m-מעגל אם ורק אם $(m, i) = 1$.

ב) הוכח כי אם $i|m$, אז σ^i היא מכפלה של i-מעגלים זרים באורך $\frac{m}{i}$ כל אחד.

שאלה 4

תהי $G = S_n,\ n \geq 3$.

הוכח כי לכל איבר $\sigma \neq id$ קיימת $\mu \in G$ כך ש- $\sigma\mu \neq \mu\sigma$.

שאלה 5

א) רשום את כל המבנים המעגלים האפשריים של האיברים ב- S_4 מסדר 4 ו-2.

ב) מצא את כל הסדרים האפשריים של אברים ב- S_5 וב- S_7.

ג) הוכח לכל n טבעי ו- p ראשוני כי הסדר של $\sigma \in S_n$ הוא p אם ורק אם σ מכפלת p-מעגלים זרים.

ד) הסבר מדוע הטענה הקודמת אינה נכונה אם נוותר על תנאי הראשוניות של p.

שאלה 6

תהי G חבורת הסימטריות של טטראדר רגולרי (שווה צלעות) ב- $\mathbb{R}^3$. הוכח כי $|G|=12$.

(רמז: לחכות את ההוכחה עבור ה- n-גון ולמצוא מספר המקומות אליהם ניתן להעתיק זוג קודקודים סמוכים)

שאלה 7

תהי $G=D_{2n},\ n\geq 3$.

א) הוכח כי אם n זוגי, אז קיים $z\in G$ מסדר 2 שהינו מתחלף (בכפל) אם כל אברי G.
כמו כן הראה כי $z\in G$ הינו האיבר היחיד ב- G השונה מיחידה שמתחלף עם כל אברי החבורה.

ב) הוכח כי אם n אי-זוגי, אז אין ב- G איבר השונה מיחידה שמתחלף עם כל אברי החבורה.