פונקציות ממשיות - חורף תשס"א - גליון תרגילים מס' 5

להגשה: עד יום א', 7.1.01. שאלה עם $*$ היא שאלת רשות.

בכל השאלות להלן $(X,\mathcal{M},\mu)$ הוא מרחב מידה; μ חיובית, אלא אם כן צויין אחרת. m היא מידת לבג על $\mathbb{R}^n$, m_e היא מידה חיצונית.

1. נסמן ב- $\mathcal{M}^*$ את אוסף הקבוצות $A\subset X$ עבורן קיימים $C,B\in\mathcal{M}$ כך ש- $C\subset A\subset B$ ו- $\mu(B\backslash C)=0$. במקרה זה נגדיר $\mu^*(A)=\mu(C)$. $\mathcal{M}^*$ נקראת ההשלמה של $\mathcal{M}$ ביחס ל- μ.
   א. הוכיחו ש- $\mathcal{M}^*$ היא $\sigma-$אלגברה.
   ב. הוכיחו ש- $\mathcal{M}^*$ היא ה $\sigma-$אלגברה הנוצרת ע"י $\mathcal{M}$ והמשפחה $\{A\subset X \mid \exists B\in\mathcal{M} \ : \ A\subset B\,,\, \mu(B)=0\}$.
   ב. בדקו ש- μ^* מוגדרת היטב על $\mathcal{M}^*$ וש- $\mu^*|_{\mathcal{M}}=\mu$.
   ד. הוכיחו ש- $(X,\mathcal{M}^*,\mu^*)$ הוא מרחב מידה.
2. אנו אומרים שמרחב המידה (החיובית) $(X,\mathcal{M},\mu)$ הוא <u>שלם</u> אם עבור כל $B\subset A$ אם $\mu(A)=0$ אז B <u>מדידה</u> (ואז בודאי $\mu(B)=0$).
   א. הוכיחו ש- $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ ($\mathcal{L}=$ ה σ-אלגברה של לבג ב- $\mathbb{R}^n$) הוא מרחב מידה שלם.
   ב. בעזרת שיקולי ספירה הוכיחו ש- $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B},m)$ ($\mathcal{B}=$ ה σ-אלגברה של בורל ב- $\mathbb{R}^n$) אינו מרחב מידה שלם. (רמז: תת-קבוצות של קבוצת קנטור).
   ג. הסיקו שיש קבוצות ב-$\mathbb{R}^n$ שהן מדידות לבג שאינן מדידות בורל.
   ד. הוכיחו ש- $\mathcal{L}$ היא ההשלמה של $\mathcal{B}$ ביחס ל- m.
3. יהיו μ מידה סופית, $f\in L^1(\mu)$, $D\subset\mathbb{C}$ קבוצה במישור המרוכב ו- $A\in\mathcal{M}$ עם $\mu(A)>0$. נגדיר את הממוצע $M_A(f)=\frac{1}{\mu(A)}\int_A f\,d\mu$.
   א. הוכיחו שאם $f(x)\in\bar{B}(z,r)$ ($\bar{B}(z,r)=$ הכדור הסגור ברדיוס $r>0$ סביב $z\in\mathbb{C}$) עבור כל $x\in A$, אז $|M_A(f)-z|\le r$, כלומר $M_A(f)\in\bar{B}(z,r)$.
   ב. הוכיחו שעבור D סגורה אם $M_A(f)\in D$ לכל A מדידה שמידתה חיובית אז $f(x)\in D$ עבור כמעט כל $x\in X$.
4. קטע דיאדי חצי פתוח הוא קטע מהצורה $[\frac{a}{2^n},\frac{b}{2^n})$ כש- $n\in\mathbb{N}$ ו- $a<b$ שלמים. קוביה דיאדית חצי פתוחה ב- R^n היא קבוצה מהצורה $\prod_{i=1}^n I_i$ כאשר $I_1,\ldots,I_n$ הם קטעים דיאדיים חצי פתוחים. הוכיחו שכל קבוצה פתוחה ב- R^n היא איחוד בן-מנייה של קוביות דיאדיות חצי פתוחות זרות.
5. נתונות תיבה B וקבוצה $A\subset B$ ב- $\mathbb{R}^n$. נגדיר את המידה הפנימית m_i של A (ביחס ל-B) ע"י: $m_i(A)=v(B)-m_e(B\backslash A)$. הוכיחו ש- A מדידה לבג אם"ם $m_i(A)=m_e(A)$.
6. הוכיחו את קריטריון Caratheodory למדידות: קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ היא מדידה לבג אם"ם לכל $B\subset\mathbb{R}^n$ חסומה מתקיים $m_e(B)=m_e(B\cap A)+m_e(B\backslash A)$.
7. $*$ בהנתן $0<\alpha<1$ בנו קבוצה $A\subset[0,1]$ הומיומורפית לקבוצת קנטור כך ש- $m(A)=\alpha$. (הדרכה: זרקו בשלב ה-n-י 2^n קטעים זרים באורך $\frac{1-\alpha}{3^{n+1}}$).

בהצלחה.

אריאל.