אינטגרל התלוי בפרמטר

משפט: אם $F(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$ אז הפונקציה

$$\varphi(y)=\int\limits_a^b F(x,y)dx$$

רציפה בקטע $[c,d]$ והפונקציה

$$\psi(x)=\int\limits_c^d F(x,y)dy$$

רציפה בקטע $[a,b]$.

משפט: אם $F(x,y), F'_y(x,y)$ רציפות במלבן $[a,b]\times[c,d]$ אז הפונקציה

$$\varphi(y)=\int\limits_a^b F(x,y)dx$$

רציפה וגזירה בקטע $[c,d]$ ומתקיים

$$\varphi'(y)=\int\limits_a^b F'_y(x,y)dx.$$

אם $F(x,y), F'_x(x,y)$ רציפות במלבן $[a,b]\times[c,d]$ אז הפונקציה

$$\psi(x)=\int\limits_c^d F(x,y)dy$$

רציפה וגזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיים

$$\psi'(x)=\int\limits_c^d F'_x(x,y)dx.$$

נוסחת גזירה של אינטגרל התלוי בפרמטר כאשר הפרמטר נמצא בגבולות האינטגרציה:

$$\left(\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right)'=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)dx+f\big(b(y),y\big)b'(y)-f\big(a(y),y\big)a'(y)$$

$$\left(\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy\right)'=\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f'_x(x,y)dy+f\big(x,b(x)\big)b'(x)-f\big(x,a(x)\big)a'(x)$$

תרגיל:

$$\int_0^1 e^{xy^2}dx = \frac{1}{y^2}e^{xy^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y^2}e^{y^2} - \frac{1}{y^2}$$

תרגיל בית: מה קורה כאשר $y = 0$? האם

$$f(y) = \int_0^1 e^{xy^2}dx$$

היא פונקציה רציפה לפי y?

תרגיל:

$$\int_0^1 e^{xy^2}dy = \frac{1}{x}e^{xy^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x}e^{x} - \frac{1}{x}$$

תרגיל בית: מה קורה כאשר $x = 0$? האם

$$g(x) = \int_0^1 e^{xy^2}dy$$

היא פונקציה רציפה לפי x?

תרגיל: חשבו את

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+2x)^2}$$

בעזרת האינטגרל התלוי בפרמטר

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+yx}$$

פתרון:

$$f(y) = \int_0^1 \frac{dx}{1+yx} = \frac{1}{y}\ln|1+xy|\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y}\ln|1+y|.$$

לכן, מצד אחד, ע"י גזירה מתחת לסימן האינטגרל נקבל כי

$$f'(y) = -\int_0^1 \frac{xdx}{(1+yx)^2}$$

ומצד שני ע"י גזירה נקבל כי

$$f'(y) = \left(\frac{1}{y}\ln|1+y|\right)' = -\frac{1}{y^2}\ln|1+y| + \frac{1}{y(1+y)}$$

ולכן

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+yx)^2} = \frac{1}{y^2}\ln|1+y| - \frac{1}{y(1+y)}$$

ולבסוף, ע"י הצבת $y=2$ נקבל כי

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+2x)^2} = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{6}$$

<u>הערות:</u> 1. שימו לב כי בעצם קיבלנו כי

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+yx)^2} = \frac{1}{y^2}\ln|1+y| - \frac{1}{y(1+y)}.$$

נסתכל על האינטגרנד של האינגרל התלוי בפרמטר ועל הנגזרת החלקית שלו לפי y:

$$\frac{1}{1+yx}, \quad -\frac{x}{(1+yx)^2}.$$

פונקציות אלו רציפות בכל מלבן מהצורה $[0,1]\times[c,d]$ כאשר $-1<c<d$. לכן האינטגרל התלוי בפרמטר

$$f(y) = \int_0^1 \frac{dx}{1+yx}$$

גזיר לכל $y>-1$ ו־

$$f'(y) = -\int_0^1 \frac{xdx}{(1+yx)^2}.$$

2. אפשר לפתור את האינטגרל המקורי ע"י אינטגרציה של פונקציה רציונלית. עשו זאת כתרגיל.

<u>תרגיל:</u> חשבו את

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2}$$

בעזרת האינטגרל התלוי בפרמטר

$$f(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)dx}{1+x^2}$$

<u>פתרון:</u> נגזור את $f(y)$

$$f'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \int_0^y \frac{xdx}{(1+xy)(1+x^2)}.$$

נפתור את האינטגרל ע"י פירוק לשברים חלקיים.

$$\frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} = \frac{A}{(1+xy} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{(A+By)x^2+(B+Cy)x+A+C}{(1+xy)(1+x^2)}$$

ונקבל

$$A+By=0 \quad B+Cy=1 \quad A+C=0 \implies A=-\frac{y}{1+y^2} \quad B=\frac{1}{1+y^2} \quad C=\frac{y}{1+y^2}.$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
f'(y) &= \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \int_0^y \frac{xdx}{(1+xy)(1+x^2)} = \\
&= \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \int_0^y -\frac{y}{1+y^2}\frac{1}{(1+xy)} + \frac{\frac{1}{1+y^2}x + \frac{y}{1+y^2}}{1+x^2}dx = \\
&= \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \left(-\frac{1}{1+y^2}\ln(1+xy) + \frac{1}{2(1+y^2)}\ln(1+x^2) + \frac{y}{1+y^2}\arctan x\right)\Big|_{x=0}^{x=y} = \\
&= \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2(1+y^2)}\ln(1+y^2) + \frac{y}{1+y^2}\arctan y = \\
&= \frac{1}{2(1+y^2)}\ln(1+y^2) + \frac{y}{1+y^2}\arctan y = \left(\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\arctan y\right)'
\end{aligned}
$$

ולכן

$$f(y) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\arctan y + c$$

אבל

$$f(0) = \int_0^0 \frac{\ln(1+x\cdot 0)dx}{1+x^2} = 0$$

ולכן

$$f(y) = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\arctan y.$$

לבסוף

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2} = f(1) = \frac{1}{2}\ln 2\arctan 1 = \frac{\pi\ln 2}{8}$$

<u>תרגיל בית:</u> פתרו את האינטגרל

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{1+x^2}$$

בעזרת האינטגרל התלוי בפרמטר

$$f(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xy)dx}{1+x^2}$$