אינטגרל כפול

אם $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$ אז

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx$$

אינטגרציה על תחום מהצורה

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\quad y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

אינטגרציה על תחום מהצורה

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d,\quad x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

הערה: אם התחום D אינו מהצורות הנ"ל, יש לחלק את התחום D לתתי תחומים שהם כן מהסוגים הנ"ל, לחשב את כל אחד מהאינטגרלים על תתי התחומים, ולסכם.

החלפת משתנים

$$\begin{aligned}
&x=x(u,v)\\
&y=y(u,v)\\
&T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\\
&T(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v)\big),\quad (u,v)\in\Delta\\
&T(\Delta)=D\\
&J_T(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)=\det\begin{pmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v)\\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v)\end{pmatrix}\\
&\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\Delta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|dudv
\end{aligned}$$

אם

$$\begin{aligned}
u&=u(x,y)\\
v&=v(x,y)
\end{aligned}$$

היא ההעתקה ההפוכה, אז

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}.$$

ליתר דיוק, אם עבור $(x_0,y_0),(u_0,v_0)$ מתקיים כי

$$x_0=x(u_0,v_0)\quad y_0=y(u_0,v_0)\iff T(u_0,v_0)=(x_0,y_0)$$

וגם $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\neq 0$, אז

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)\right)^{-1},\quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right)^{-1}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו

$$\iint\limits_{[2,3]\times[0,1]} \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$$

<u>פתרון:</u>

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[2,3]\times[0,1]} \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} &= \int_2^3 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x+y)^3} = \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}(1+x+y)^{-2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \\
&= \int_2^3 -\frac{1}{2}(1+x+1)^{-2} + \frac{1}{2}(1+x)^{-2} dx = \frac{1}{2}(2+x)^{-1} - \frac{1}{2}(1+x)^{-1}\Big|_{x=2}^{x=3} = \\
&= \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 4} - \left(\frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) = \frac{1}{60}
\end{aligned}$$

<u>תרגיל בית:</u> חשבו את האינטגרל לפי הסדר השני.

<u>תרגיל:</u> חשבו את

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

<u>פתרון:</u> נרשום את שתי הנוסחאות עבור חישוב האינטגרל:

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{xdy}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

אנו רואים כי הנוסחא הראשונה ניתנת לחישוב אז נתחיל איתה.

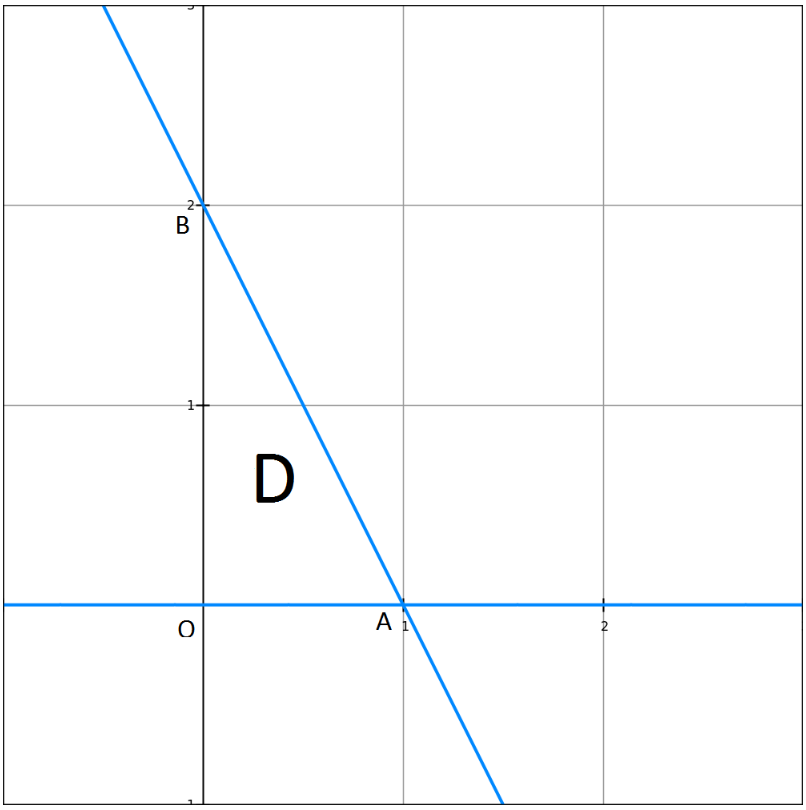
$$\begin{aligned}
\iint\limits_{[0,1]\times[\frac{1}{\sqrt{2}},1]} \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^1 \left(-(1+x^2-y^2)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big|_{x=0}^{x=1}\right) dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -(2-y^2)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + (1-y^2)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dy = \\
&= -\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \arcsin y\Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

<u>תרגיל:</u> חשבו את

$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$$

כאשר D היא המשולש שקודקודיו הם $O(0,0), A(1,0), B(0,2)$.

פתרון:



משוואת הישר המחבר את הנקודות הוא

$$y = 2 - 2x, \qquad x = 1 - \frac{y}{2}$$

ולכן אפשר לרשום אץ התחום D בצורות הבאות:

$$D = \{(x,y)\big|\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2 - 2x\}$$
$$D = \{(x,y)\big|\ 0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le 1 - \frac{y}{2}\}$$

מה שנותן לנו שתי נוסחאות לחישוב האינטגרל

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} = \int\limits_0^1 dx \int_0^{2-2x} \frac{dy}{(1+x+y)^3}$$
$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} = \int\limits_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} \frac{dx}{(1+x+y)^3}.$$

שתי הנוסחאות קלות לחישוב. נשתמש בראשונה:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3} = \int\limits_0^1 dx \int_0^{2-2x} \frac{dy}{(1+x+y)^3} = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2}(1+x+y)^{-2}\Big|_{y=0}^{y=2-2x}\right) dx =$$
$$= \int\limits_0^1 -\frac{1}{2}(1+x+2-2x)^{-2} + \frac{1}{2}(1+x)^{-2}dx = \int\limits_0^1 -\frac{1}{2}(3-x)^{-2} + \frac{1}{2}(1+x)^{-2}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}(3-x)^{-1} - \frac{1}{2}(1+x)^{-1}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2} - \left(-\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 1}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{6}$$

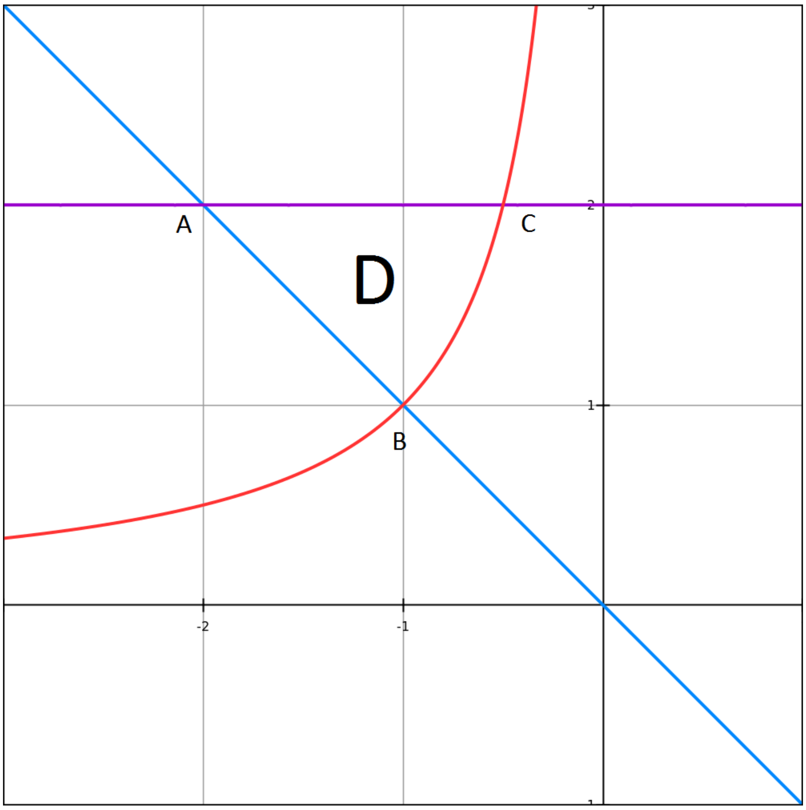
תרגיל בית: חשבון את האינטגרל לפי הסדר השני.

תרגיל: חשבון את

$$\iint\limits_D x^2ydxdy$$

כאשר D היא התחום החסום, החסום ע"י העקומות $.y=-x,\ \ y=2,\ \ xy=-1$

פתרון:



נמצא את הנקודות A,B,C:

A היא נקודת החיתוך בין $y=-x,\ \ y=2$ מה שנותן לנו $.A(-2,2)$

B היא נקודת החיתוך בין $y=-\frac{1}{x},\ \ y=-x$ מה שנותן לנו $.B(-1,1)$

C היא נקודת החיתוך בין $y=-\frac{1}{x},\ \ y=2$ מה שנותן לנו $.C(-\frac{1}{2},2)$

נשים לב כי העקום $y=-x$ הוא גם העקום $x=-y$ וכי העקום $y=-\frac{1}{x}$ הוא גם העקום $.x=-\frac{1}{y}$

כעת אפשר לרשום את התחומים באופנים הבאים:

$$D=\{(x,y)\big|\ -2\le x\le -1,\quad -x\le y\le 2\}\cup\{(x,y)\big|\ -1\le x\le -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{x}\le y\le 2\}$$

$$D=\{(x,y)\big|\ 1\le y\le 2,\quad -y\le x\le -\frac{1}{y}\}.$$

מכאן אנו מקבלים את הנוסחאות הבאות:

$$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int\limits_{-2}^{-1}dx\int_{-x}^{2}x^2ydy+\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}}dx\int\limits_{-\frac{1}{x}}^{2}x^2ydy$$

$$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int\limits_{1}^{2}dy\int_{-y}^{-\frac{1}{y}}x^2ydx.$$

שני האינטגרלים פשוטים לחישוב. השני אולי יותר קצר. נחשב אותו.

$$\iint\limits_D x^2ydxdy = \int\limits_1^2 dy\int_{-y}^{-\frac{1}{y}} x^2ydx = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3y}{3}\Big|_{x=-y}^{x=-\frac{1}{y}}\right)dy =$$

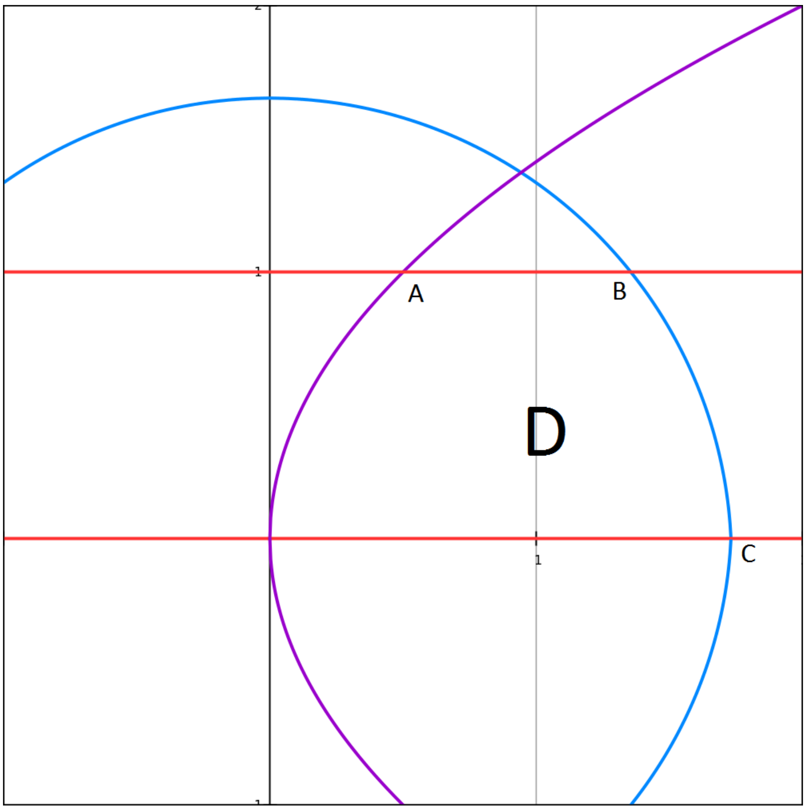
$$= \int\limits_1^2 \left(-\frac{1}{3y^2}+\frac{y^4}{3}\right)dy = \frac{1}{3y}+\frac{y^5}{15}\Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{6}+\frac{32}{15}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right) = \frac{57}{30}.$$

<u>תרגיל בית:</u> חשבו את האינטגרל לפי הסדר השני.

<u>תרגיל:</u> החליפו את סדר האינטגרציה:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$$

<u>פתרון:</u> התחום D הוא



נמצא את הנקודות A,B:

הנקודה A היא נקודת החיתוך בין $y=1$, $x=\frac{1}{2}y^2$ ולכן הנקודה היא $A(\frac{1}{2},2)$.

הנקודה B היא נקודת החיתוך בין $y=1$, $x=\sqrt{3-y^2}$ ולכן הנקודה היא $B=(\sqrt{2},1)$.

בנוסף, $C(\sqrt{3},0)$.

לכן אפשר לרשום את D באופן הבא:

$$D=\{(x,y)\big|\ 0\le y\le 1,\quad \frac{1}{2}y^2\le x\le\sqrt{3-y^2}\}.$$

אבל אנו רוצים את הצורה השנייה. בשביל זה נשים לב כי $x=\frac{1}{2}y^2$ הוא גם $y=\sqrt{2x}$, ובנוסף $x=\sqrt{3-y^2}$ הוא גם $y=\sqrt{3-x^2}$. לכן

$$D=\{(x,y)\big|\ 0\le x\le\frac{1}{2},\quad 0\le y\le\sqrt{2x}\}\cup\{(x,y)\big|\ \frac{1}{2}\le x\le\sqrt{2},\quad 0\le y\le 1\}\cup$$
$$\cup\quad\{(x,y)\big|\ \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3},\quad 0\le y\le\sqrt{3-x^2}\}$$

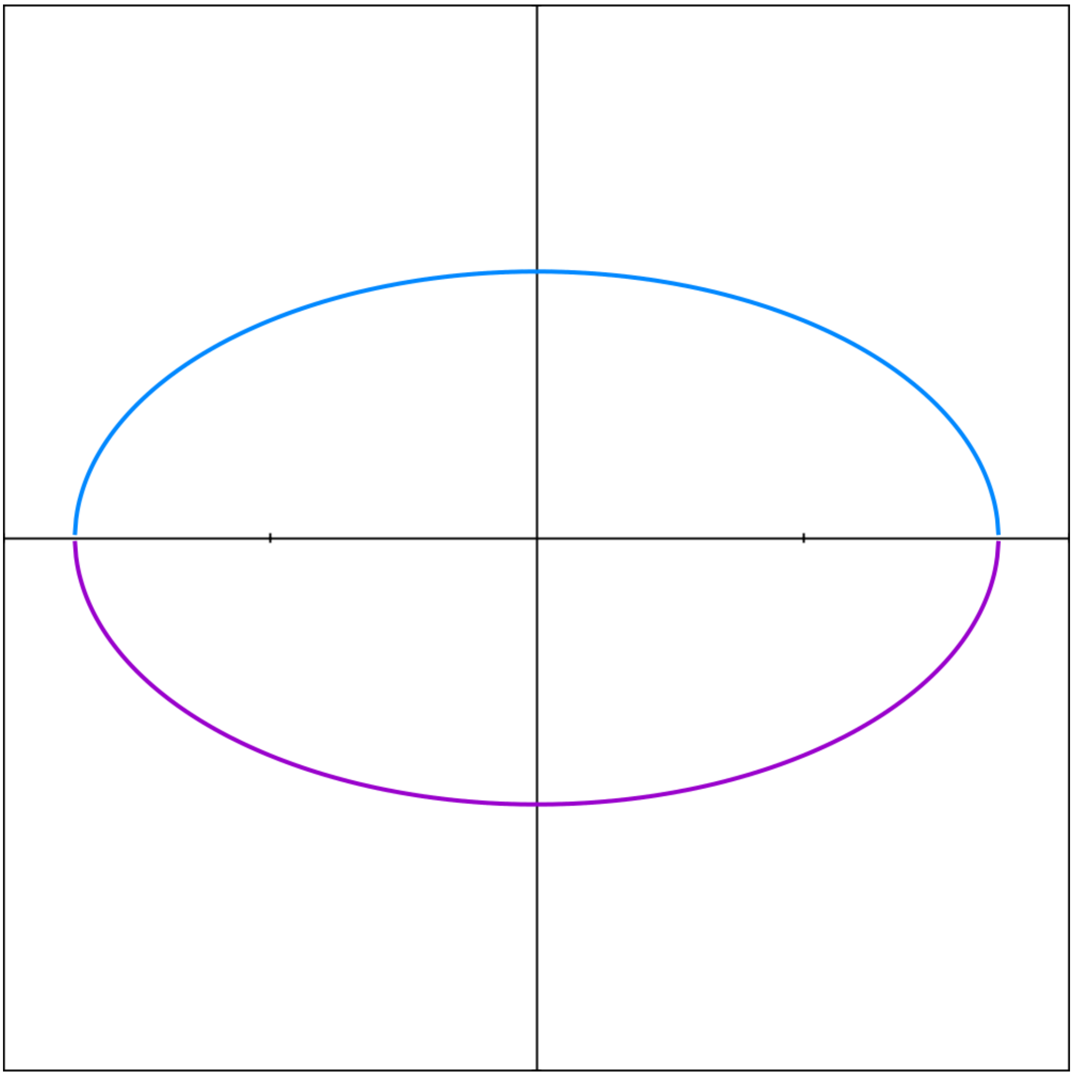
ולכן

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy$$

תרגיל: חשבו את שטח אליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

פתרון:



כיוון שאפשר לרשום את האליפסה בצורה הבאה

$$D = \{(x,y) \big| \ -a \leq x \leq a, \quad -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\}$$

אז

$$area(D) = \iint_D 1dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy$$

ואינטגרל זה פתיר ע"י הצבות טריגונומטריות.

אנו נשתמש בהצבה

$$x = ar\cos\theta$$
$$y = br\sin\theta$$

אשר עבורה

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}(r,\theta) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta \\ -ar\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr.$$

בנוסף, הקבוצה Δ במישור $r\theta$ העוברת לאליפסה היא הקבוצה

$$\Delta = \{(r,\theta) \big| \ 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1\}$$

כיוון ש־

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = r^2.$$

לכן

$$\iint\limits_D 1dxdy = \iint\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 1\cdot abrdr = 2\pi\cdot ab\cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = ab\pi$$

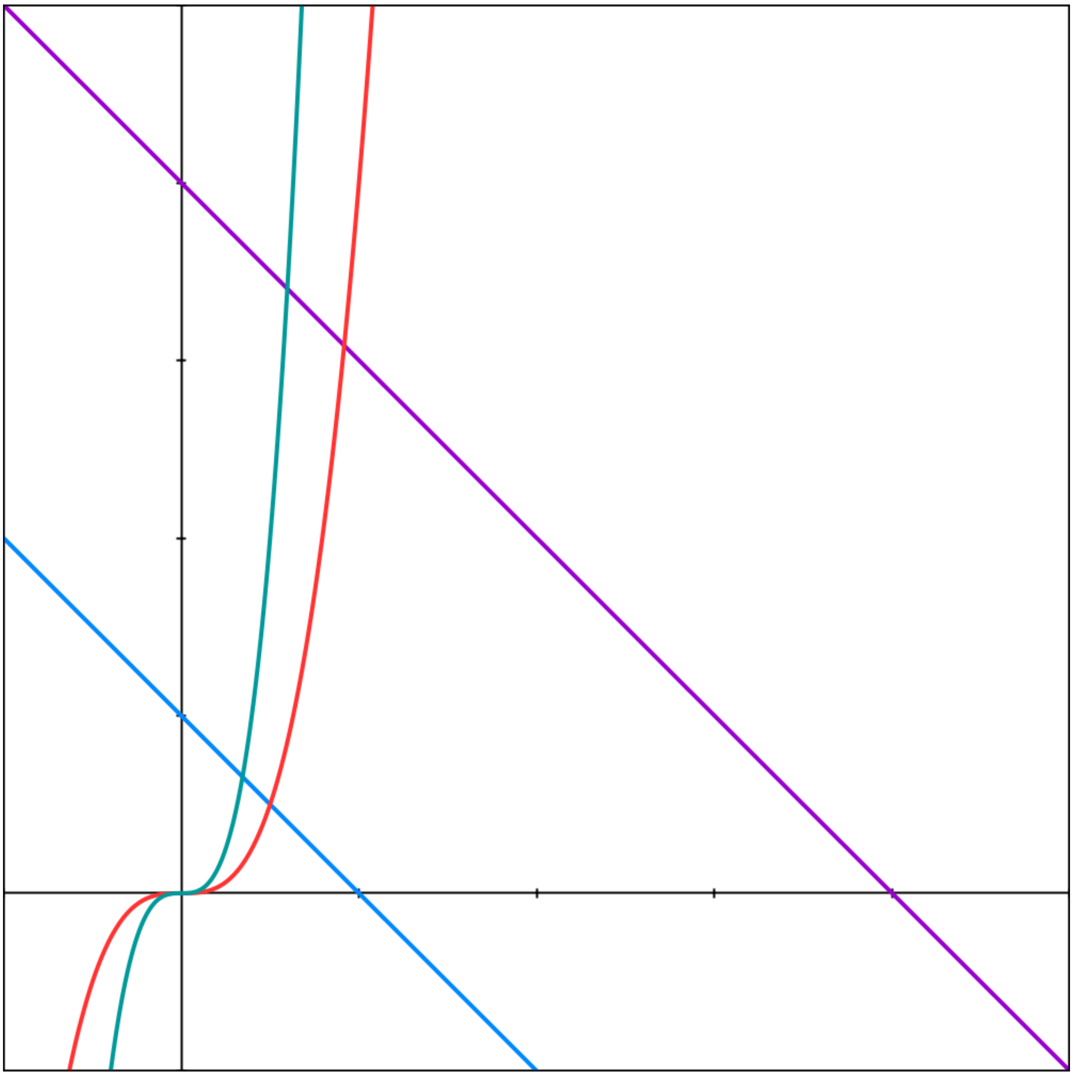
<u>תרגיל:</u> חשבו את האינטגרל

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4}e^{\frac{y}{x^3}}dxdy$$

כאשר

$$D = \{(x,y) \big| \ 1-x \le y \le 4-x, \quad 4x^3 \le y \le 16x^3\}.$$

<u>פתרון:</u>



למרות שיש לנו ציור של D, אנו נשתמש בהצבה ולא בחישוב ישיר. נרשום את D בצורה אחרת:

$$D = \{(x,y)\big|\ 1 \le x+y \le 4, \quad 4 \le \frac{y}{x^3} \le 16\}.$$

אנו רואים שתחת ההצבה

$$u = x+y$$
$$v = \frac{y}{x^3}$$

נקבל כי

$$\Delta = \{(u,v)\big|\ 1 \le u \le 4, \quad 4 \le v \le 16\}.$$

בשביל ההצבה אנו צריכים גם את היעקוביאן:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -3yx^{-4} \\ 1 & \frac{1}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3} + \frac{3y}{x^4} = \frac{x+3y}{x^4}.$$

לכן,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{x^4}{x+3y}.$$

נציב בנוסחת ההצבה ונקבל

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} dxdy = \iint\limits_\Delta \frac{x+3y}{x^4} e^v \left|\frac{x^4}{x+3y}\right| dudv = \iint\limits_\Delta \frac{x+3y}{x^4} e^v \frac{x^4}{x+3y} dudv =$$

$$= \iint\limits_\Delta e^v dudv = \int\limits_1^4 du \int\limits_4^{16} e^v dv = 3e^v\Big|_{v=4}^{v=16} = 3e^{16} - 3e^4.$$

נשים לב כי היעקוביאן חיובי כיוון שמהציור, $x, y > 0$. לכן אפשר להוריד את הערך המוחלט.
נשאר לנו לוודא עוד דבר אחד: שההעתקה היא חח"ע:

$$\begin{aligned}
&u = x + y \\
&v = \frac{y}{x^3} \implies y = x^3 v \implies u = x + x^3 v \implies vx^3 + x - u = 0
\end{aligned}$$

ולמשוואה $vx^3 + x - u = 0$ כאשר x הוא נעלם, יש פתרון יחיד, כי $v > 0$. זה אומר כי $x = x(u, v)$.
ואז $y = x^3 \cdot v = x(u, v) \cdot v = y(u, v)$.

תרגיל בית: הראו כי ההעתקה חח"ע מבחינה גיאומטרית.

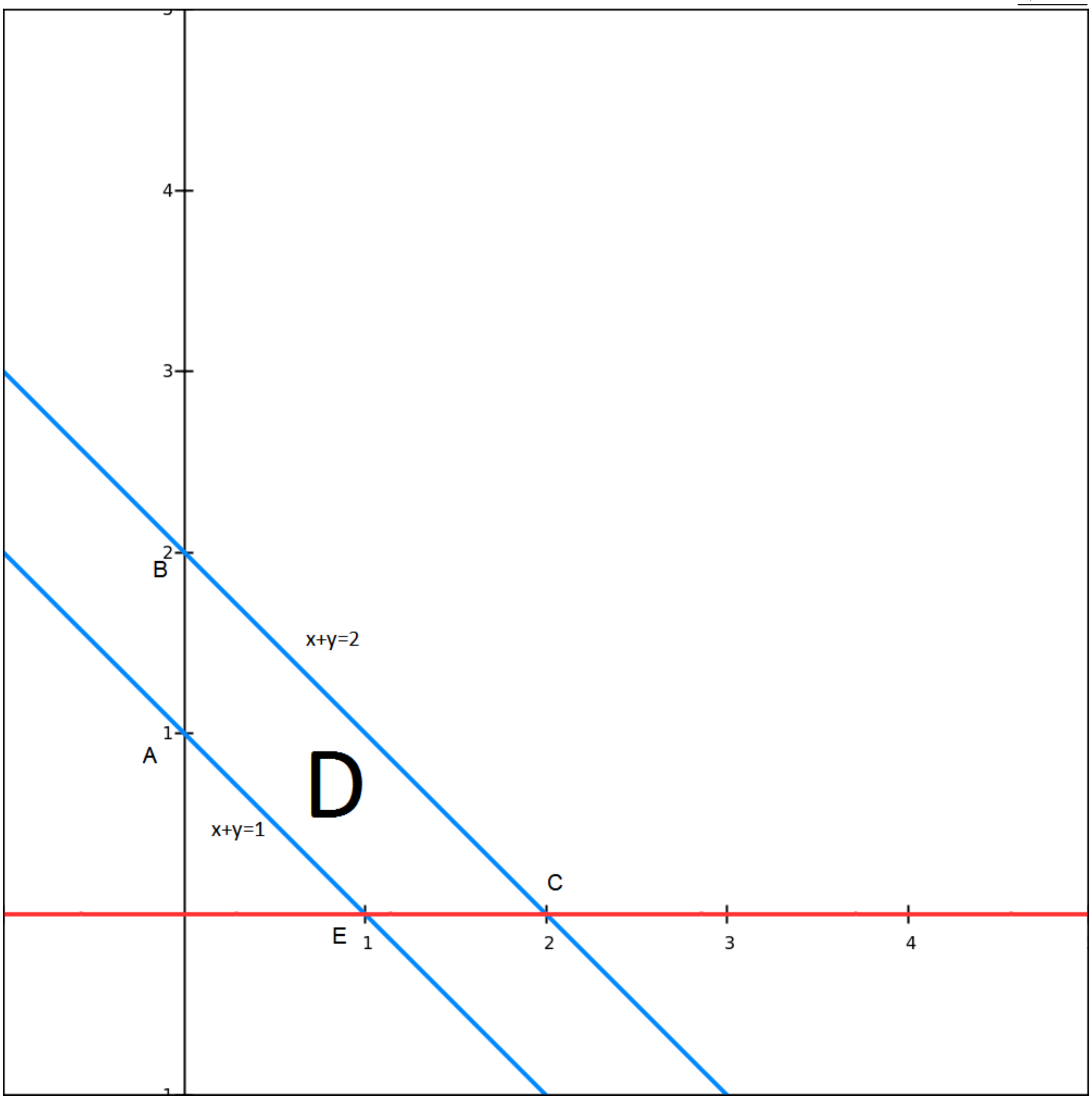
תרגיל: חשבו את האינטגרל

$$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$$

כאשר

$$D = \{(x, y) \big| \ 1 \leq x + y \leq 2 \quad x, y \geq 0\}.$$

פתרון:



נשתמש בהצבה

$$u = x + y$$
$$v = x - y$$

אז

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

ולכן

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) = -\frac{1}{2}.$$

כעת עלינו למצוא את Δ במישור uv המתאימה ל־D.
כיוון ש־D עובר ל־Δ באופן חח"ע וגזיר (למה?) אז הפנים של D עובר לפנים של Δ והשפה של D עוברת לשפה של Δ. לכן אם נדע לאיפה השפה של D עוברת, נדע את התחום Δ.
השפה של D מורכבת מארבע קווים. נרשום אותם אחד אחד ונראה לאן הן עוברות במישור uv:

1. אפשר להציג את הקטע AB בצורה הבאה:

$$y = t$$
$$x = 0 \quad 1 \leq t \leq 2.$$

אז

$$u = x + y = t$$
$$v = x - y = -t \quad 1 \leq t \leq 2.$$

או

$$v = -u \quad 1 \leq u \leq 2.$$

2. אפשר להציג את הקטע BC בצורה הבאה:

$$y = 2 - t$$
$$x = t \quad 0 \leq t \leq 2.$$

אז

$$u = x + y = 2$$
$$v = x - y = 2t - 2 \quad 0 \leq t \leq 2.$$

או

$$u = 2, \ -2 \leq v \leq 2.$$

3. אפשר להציג את הקטע CE בצורה הבאה:

$$y = 0$$
$$x = t \quad 1 \leq t \leq 2.$$

אז

$$u = x + y = t$$
$$v = x - y = t \quad 1 \leq t \leq 2.$$

או

$$v = u \quad 1 \leq u \leq 2.$$

4. אפשר להציג את הקטע EA בצורה הבאה:

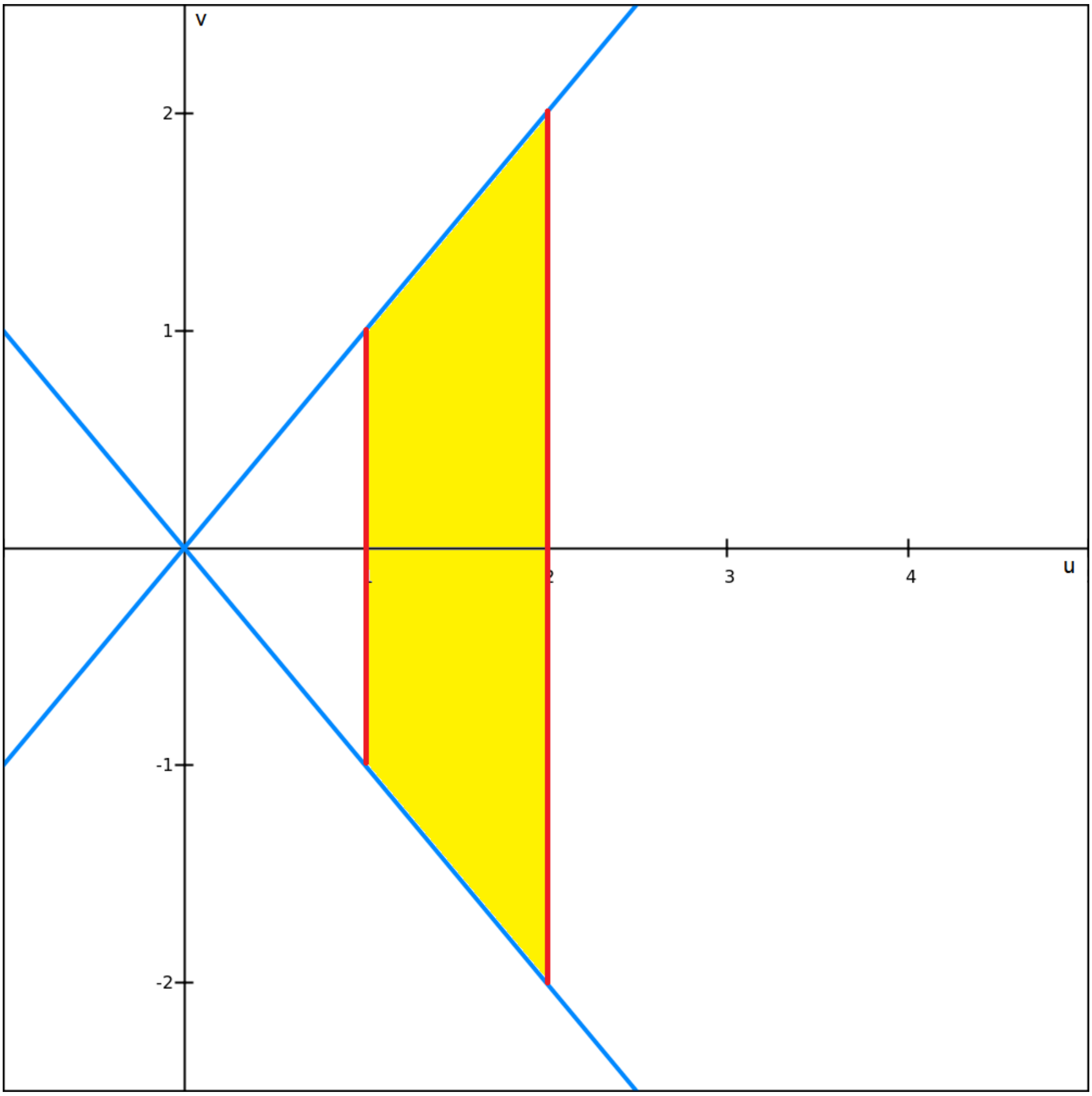
$$\begin{aligned} y &= 1 - t \\ x &= t \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} u &= x + y = 1 \\ v &= x - y = 2t - 1 \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

או

$$u = 1, \ -1 \leq v \leq 1.$$



כעת אנו במצב בו אנו יכולים ישתמש בנוסחת החלפת המשתנים:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \iint_\Delta e^{\frac{v}{u}}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\iint_\Delta e^{\frac{v}{u}}dudv = \int_1^2 du \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}dv =$$

$$= \int_1^2 \left(ue^{\frac{v}{u}}\Big|_{v=-u}^{v=u} \right) du = \int_1^2 ue^{\frac{u}{u}} - ue^{\frac{-u}{u}}du = \int_1^2 u(e-e^{-1})du = (e-e^{-1})\frac{u^2}{2}\Big|_{u=1}^{u=2} =$$

$$= (e-e^{-1})(2-\frac{1}{2})$$