קומבי 10

ליעד סלומון־שניר הורדן

18 ביוני 2018

.1

<u>הוכחה</u>

נתון גרף $G=(V,E)$ עם 9 קודקודים ו־33 צלעות. צ.ל. בכל צביעה בכחול ואדום קיים K_3 אדום או כחול בגרף.

נתבונן בגרף השלם K_9. קיימות לו $36=\frac{9\times8}{2}$ צלעות

<u>במקרה הגרוע ביותר</u> קיימות 3 צלעות זרות שמחוברות לקודקודים הנ"ל ש<u>אינם</u> ב־G.

אלו מחוברים ל־6 קודקודים בסה"כ־ נסמנם B.

נתבונן ב־3 הקודקודים שנותרו־נסמנם R. נוכל להתבונן ב־R וב־3 מתוך הקודקודים ב־B כך שאף שתיים מהם אינם מחוברים אחד לשני עם צלע שהסרנו בשלב הראשון.

איחוד זה מקיים K_6 כי כל אחד מהקודקודים בו מחובר לכל השאר בוודאות לפי הבנייה לעיל. (התבוננו ב־K_9 ולא התייחסנו לקודקודים שאיתם אין אנו מקיימים את הנתונים של G, אז נותרנו עם צליות המחוברות אחת לשנייה).

נזכור $r(3,3)=6$.

אזי מצאנו גרף שלם בגודל של מספר רמזי הנדרש. סיימנו.

<u>הערה:</u> אם הצלעות היו מחוברות לפחות קודקודים אז עדייןהיינו מקיימים את תכונת רמזי, אך בבחירה של הקודקודים מתוך B היו לנו פחות אפשרויות בחירה.

מ.ש.ל.

.2

צ.ל. $r(6,3)\leq 19$.

<u>הוכחה</u>

נתבונן בגרף $G=K_{19}$ (הגרף השלם של 19 קודקודים).

יהא $x\in V$. נשים לב ש־$deg(x)=18$.

נסמן V_B־הקודקודים הכחולים היוצאים מ־x ו־V_Rהקודקודים האדומים היוצאים מ־x.

אזי מתקיים אחד מן השתיים:

1. $|V_B|\geq \underbrace{r(4,3)}_{proven}+r(5,2)=9+5=14\geq r(5,3)$

2. $|V_R|\geq R(6,2)=6$

אילו שניהם לא מתקיימים אז $|V_R|=13$ ו־$|V_B|=5$.

נתבונן בגרף הנוצר כל ידי הצלעות האדומות בלבד, נסמנו $G_2=(V_2,E_2)$. אז לפי נוסחא מההרצאה נקבל $2|E_2|=\sum_{i=1}^{19} deg(v_i)=13\times19=247$. סתירה.

אז 1 או 2 מתקיימים. כלומר בגרף לכל קודקוד מחוברים לפחות 14 קודקודים עם צלעות כחולות או שלכל קודקוד מחוברים לפחות 5 קודקודים עם צלעות אדומות.

אם 1 מתקיים אז יש גרף עם $R\left(5,3\right)$ קודקודים אז נוכל למצוא K_5 הצבוע בכחול או K_3 הצבוע באדום. אז עם הקודקוד x נקבל K_6 הצבוע בכחול. באופן אנאלוגי עבור הצביעה באדום.

מ.ש.ל.

3.

<u>הוכחה</u>

נמצא את הn המדובר.

נקביל את קיום ארבעת הנקודות במישור כך שהמרחק ביניהם הוא לכל היותר 4 לקליקה בעלת 4 איברים ואת הנקודות שהמרחק בין כל שתיים מהן גדול מ־1 לקליקה בעלת 5 איברים.

אזי עלינו למצוא את מספר רמזי הנ"ל $R\left(4,5\right)$.

לפי משפט $Ramsey$ קיים חסם עליון על מספרי רמזי והוא נתון על ידי $R\left(4,5\right)\le\binom{4+5-2}{4-1}=\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\times6\times5}{6}=35$.

אזי נגדיר $n=35$.

סיימנו.

מ.ש.ל.

4.

א. <u>הוכחה</u>

נוכיח באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n=1$ נקבל $K_{3n-1}=K_2$ אזי כאן קיימים שני קודקודים אז קיים זיווג בגודל אחד שהוא בהכרח באותו צבע (כי קיימת צלע אחת כזאת).

נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$.

נקח קודקוד ונחבר אליו שני צלעות־אחת אדומה ואחת כחולה ונוסיף קוקדים בקצוות הפנויים של הצלעות. עלינו לעשות זאת כי אנו צובעים בשני צבעים אז קיים קודקוד עבורו נאלץ לחבר אליו צלעות מצבעים שונים.

כעת נשתמש בהנחת האינדוקציה ונקבל שקיים גרף K_{3n-1} בעל זיווג בגודל n של צלעות זרות העלות אותו צבע. ניקח את שלושת הנקודות שתיארנו מקודם, נרחיב אותם ונצרף אותם לגרף זה. קיבלנו גרף $K_{3(n+1)-1}$ שקיים לו זיווג של $n+1$ צלעות זרות הצבועות באותו צבע.

כנדרש.

מ.ש.ל.

ב. <u>דוגמא המפריכה את קיום המסקנה עבור K_{3n-1}</u>

נבנה רקורסיבית את הדוגמא.

עבור $n=1$ אין מה להוכיח כי קיים קודקוד יחיד ללא צלעות.

כעת נקח קודקוד נחבר אליו צלע אדומה וכחולה (מאותם נימוקים במו סעיף א) ואז נרחיב את מה שיצרנו ונחבר אותו לצעד הבנייה הקודם.

נקבל זיווג בגודל $n-1$. סתירה.

5.

לפי משפט $Erdos-Szekres$ מההרצאה דרוש $\left(n-1\right)\left(k-1\right)+1$ קודקודים לקיום n קודקודים בסדר מונוטוני יורד או k קודקודים בסדר מונוטוני עולה.

בהרצאה הקבלנו זאת לקליקה בעלת n צלעות ו־k קודקודים המחוברים בסדר כלשהו מונוטוני, כלומר ניתן לסדר אותם על "קו ישר" שכולו באותו צבע.

עבור $n+1$ קודקודים המסמלות קטעים סגורים זרים אחת לשנייה(A) ו־$n+1$ קודקודים המסמלים שקיימת נקודה משותפת ביניהם (B) נקבל שדרוש n^2+1 קודקודים.

נשים לב כי תכונת הטרנזיטיביות מתקיימת עבור קטעים החולקים נקודה משותפת, אזי כולם חולקים את אותה הנקודה.

נתון כי קיימים n^2+1 קודקודים, כנדרש לפי $Erdos-Szekres$.