פונקציות ממשיות, סמסטר אביב תשס"א.

<u>פתרון חלקי לשאלות ש"ב, קובץ 1</u>

1. $g(x)$ רציפה למחצה מלמטה $\Leftrightarrow$ $\{y : g(y) > \lambda\}$ פתוחה, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.
הוכחה: $\Leftarrow$ נקבע $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall\epsilon > 0$, נגדיר $U_\epsilon = \{y : g(y) > \lambda + \epsilon\}$. מהגדרת רציפות מלמטה (ראו גם liminf בתרגול הראשון), לכל $x_0 \in U_\epsilon$, יש סביבה $B_{x_0}(\delta)$, כך שלכל $y \in B_{x_0}(\delta)$ מתקיים כי $g(y) > \lambda + \epsilon$ (זיכרו כי $g(x_0) \leq \liminf_{y\to x_0} g(y)$). לכן $B_{x_0}(\delta) \subseteq U_\epsilon$, כלומר U_ϵ פתוחה ו- $\{y : g(y) > \lambda\} = \bigcup\limits_{\epsilon>0} U_\epsilon$ פתוחה.
$\Rightarrow$ נקבע $x \in \mathbb{R}$. לכל $\epsilon > 0$, $A = \{y : g(y) > g(x) - \epsilon\}$ קבוצה פתוחה, המכילה את x. לכן יש סביבה $B_x(\delta) \subseteq A$. בפרט, $inf_{y\in B_x(\delta)} g(y) \geq g(x) - \epsilon$. מאחר ש-$\epsilon$ שרירותי, בזה מסתיימת ההוכחה.
כמובן פונקציה $h(x)$ רציפה למחצה מלמעלה $\Leftrightarrow$ $-h(x)$ רציפה למחצה מלמטה $\Leftrightarrow$ $\{y : h(y) < \lambda\} = \{y : -h(y) > -\lambda\}$ פתוחה $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

□

2. קבוצת נק' אי-רציפות של פונקציה $f(x)$ היא G_δ.
הוכחה: אפשר להוכיח את הטענה הזאת באופן ישיר, דרך ההגדרה של נקודות רציפות (כדאי לדעת), אבל אנחנו נעשה את זה בעזרת שימוש במושגים המופיעים בשאלות שיעורי בית. ובכן, תהינה $g(x), h(x)$ מעטפת עליונה ותחתונה של $f(x)$ בהתאמה. הראתם קודם כי $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ וכן כי $g(x)$ ו-$h(x)$ רציפות למחצה מלמטה ומלמעלה בהתאמה. עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$A_n = \{x : h(x) - g(x) < \frac{1}{n}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{R}} \{x : h(x) < k\} \bigcap \{x : g(x) > k - \frac{1}{n}\}$$

לפי השאלה הקודמת, A_n קבוצה פתוחה. בנוסף הראתם ש-x_0 נק' רציפות של $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $g(x_0) = h(x_0)$. אבל $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x : g(x) = h(x)\}$, לכן קב' נק' רציפות של $f(x)$ היא G_δ.

□