

## אינפי 2 - דף עזר בנושא התכנסות במ"ש של אינטגרלים פרמטריים.

הגדרה: נאמר ש-  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$  מתכנס במ"ש עבור  $y \in E$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $x_\varepsilon$  כך

$$\text{ש- } \varepsilon \quad \left| \int_x^\infty f(x, y)dx \right| = \left| \int_a^\infty f(x, y)dx - \int_a^x f(x, y)dx \right| < \varepsilon \quad \text{לכל } x > x_\varepsilon \text{ ולכל } y \in E.$$

### משפטים:

#### 1. משפט וירשטראס:

תהא  $f(x, y)$  מוגדרת לכל  $x \in [a, \infty)$  ולכל  $y \in E$ , ותהא  $M(x)$  מוגדרת לכל  $x \in [a, \infty)$ .  
נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

א.  $M(x)$  ו-  $f(x, y)$  אינטגרליות לפי  $x$  בכל קטע מהצורה  $[a, b]$ .

ב.  $|f(x, y)| \leq M(x)$  לכל  $y \in E$ .

ג.  $\int_a^\infty M(x)dx$  מתכנס.

אזי  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$  מתכנס במ"ש ב-  $E$ .

2. תהא  $f(x, y)$  רציפה ב-  $[a, \infty) \times [c, d]$ , ונניח ש-  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$  מתכנס במ"ש ב-

$[c, d]$ . אזי  $F : [c, d] \rightarrow R$  רציפה.

#### 3. משפט לייבניץ:

תהיינה  $f(x, y)$  ו-  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  רציפות ברצועה  $[a, \infty) \times [c, d]$ , ונניח שמתקיימים התנאים

הבאים:

א.  $\int_a^\infty f(x, y)dx$  מתכנס לכל  $y \in [c, d]$ .

ב.  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$  מתכנס במ"ש ב-  $[c, d]$ .

אזי:

א.  $\int_a^\infty f(x, y)dx$  מתכנס במ"ש ב-  $[c, d]$ .

ב.  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$  גזירה, ומתקיים:  $F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ .

#### 4. משפט פוביני:

בהנחות משפט 2 לעיל:  $\int_c^d \left[ \int_a^\infty f(x, y)dx \right] dy = \int_a^\infty \left[ \int_c^d f(x, y)dy \right] dx$