גזירה ואינטגרציה

בפרק זה נצמצם את הדיון לפונקציות שאינן רק אינטגרביליות, אלא אפילו רציפות.

משפט. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב: $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ ו: f איננה זהותית אפס. אזי

$$\int_a^b f > 0 . \qquad (1)$$

הוכחה: מ: $f \geq 0$ נובע

$$0 = \int_a^b 0 \leq \int_a^b f$$

לפי משפט קודם, אך אנו רוצים להראות אי שיויון חד כמו ב: (1). נתון ש: f אינה זהותית

אפס ולכן יש נקודה x_0 כך ש: $f(x_0) \neq 0$, ואז למעשה $f(x_0) > 0$. מאחר ו: f רציפה נובע שיש סביבה $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ בה מתקיים $f(x) > 0$. נסמן ב: m את המינימום

$$\min\{f(x) : x_0-\delta \leq x \leq x_0+\delta\}$$

ואז מקבלים ש: $m > 0$ ו:

$$\begin{aligned}\int_a^b f = \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^{b} f \\ \geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} m + 0 = 2m\delta > 0,\end{aligned}$$

מה שמוכיח את (1).

<u>משפט.</u> תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, $g(x)$ אינטגרבילית ואינה משנה סימן ב:

$[a,b]$. אז קיימת נקודת ביניים c ב: $[a,b]$ כך ש:

$$. \int_a^b f(x)g(x) = f(c)\int_a^b g(x) \qquad (2)$$

<u>הוכחה:</u> המכפלה fg אינטגרבילית ולכן הגודל $\int_a^b fg$ קיים. יהיו

$$m = \min_{[a,b]} f(x),\ M = \max_{[a,b]} f(x)$$

כך שמתקיים

$$m \le f(x) \le M \qquad (3)$$

לכל $a \le x \le b$. g אינה משנה סימן בקטע, ונניח למשל ש: $g(x) \ge 0$ לכל x בקטע. נכפול את כל הביטויים ב: (3) במספר האי-שלילי $g(x)$ ונקבל

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

ולכן

$$.m \int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M \int_a^b g(x)$$

(4)

ברור ש: $\int_a^b g \geq 0$. אם האינטגרל מתאפס אז סיימנו, כי אז שני אגפי (2) מתאפסים. אם האינטגרל חיובי מחלקים בו את הביטויים ב: (4) ומקבלים

$$.\min f = m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M = \max f$$

f רציפה ולכן מקבלת כל ערך בין m ו: M, ובפרט את הערך האמצעי בנוסחא האחרונה. כלומר יש נקודה $c \in [a,b]$ עבורה מתקיים

$$,f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$$

מה שמסיים את ההוכחה.

<u>מקרה פרטי.</u> $g(x) \equiv 1$. במקרה זה מקבלים

$$.f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

הגודל בצד ימין נקרא הערך הממוצע של f ב: $[a,b]$, ואפשר להתיחס אליו כהרחבה של מושג הממוצע החשבוני $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. הביטוי במשפט הוא ממוצע משוקלל עם פונקצית משקל $g(x)$.

הקשר בין גזירה ואינטגרציה

<u>משפט.</u> אם f אינטגרבילי ב: $[a,b]$ אז

$$F(x)=\int_a^x f$$

היא פונקציה מוגדרת ורציפה ב: $[a,b]$.

<u>הוכחה:</u> אם f אינטגרבילית ב: $[a,b]$ אז היא אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]\subset[a,x]$, ולכן $F(x)$ מוגדרת היטב. f חסומה ב: $[a,b]$, נגיד $|f(x)|\le M$ לכל $x\in[a,b]$. תהיינה x,y שתי נקודות בקטע, למשל $a\le x<y\le b$. אז

$$F(y)-F(x)=\int_a^y f-\int_a^x f=\left(\int_a^x f+\int_x^y f\right)-\int_a^x f=\int_x^y f$$

לכן

$$0 \le |F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f\right| \le \int_x^y |f| \le M(y-x)$$

כאשר $x < y$ מקבלים $M(x-y)$ ולכן תמיד

$$|F(y) - F(x)| \le M|y-x|.$$

בהינתן $\epsilon > 0$ יהי $\delta = \epsilon/M$, ואז מתקיים $|F(y) - F(x)| \le \epsilon$ אם $|y-x| < \delta$. כלומר הוכחנו ש: F היא רציפה במידה שווה ב: $[a,b]$.

<u>משפט.</u> תהי $f(x)$ אינטגרבילית ב: $[a,b]$ ו: $F(x) = \int_a^x f$. אם f רציפה בנקודה x_0 אז $F(x)$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

אם x_0 נקודת קצה של הקטע אז מדובר בנגזרת חד-צדדית של f.

<u>הוכחה:</u> f רציפה ב: x_0, ז"א לכל $0 < \epsilon$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ כך ש: $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$ לכל $t \in [a,b]$, $|t - x_0| < \delta$. אם x_0 נקודה ב: $[a,b)$, ניקח מימינה נקודה t,

$$a \leq x_0 < t < x_0 + \delta \leq b$$

$$F(t) - F(x_0) = \int_a^t f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^t f$$

$$\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = \frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t f \qquad (1)$$

מאידך,

$$f(x_0) = \frac{1}{t - x_0} \cdot (t - x_0) f(x_0)$$

$$(2) \qquad f(x_0) = \frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^{t} f(x_0)$$

כי $f(x_0)$ מספר קבוע, ו: $\int_a^b c = c(b-a)$.

נפחית את (2) מ: (1) ונקבל

$$\frac{F(t)-F(x_0)}{t-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{t-x_0}\left[\int_{x_0}^{t} f(x) - \int_{x_0}^{t} f(x_0)\right]$$

ולכן

$$\left|\frac{F(t)-F(x_0)}{t-x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{t-x_0}\left|\int_{x_0}^{t}[f(x) - f(x_0)]\right| \leq \frac{1}{t-x_0}\int_{x_0}^{t}|f(x) - f(x_0)|$$

אבל מאופן בחירת t נובע ש:

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ באינטגרל האחרון, ועל כן

$$\left|\frac{F(t)-F(x_0)}{t-x_0} - f(x_0)\right|$$
$$\leq \frac{1}{t-x_0}(t - x_0)\epsilon = \epsilon$$

קיבלנו שאם $|t - x_0| < \delta$, $t > x_0$ אז

$$\left|\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0)\right| < \epsilon$$

וזוהי הגדרת הנגזרת מימין: קיום הגבול

$$\lim_{t\to x_0+} \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = f(x_0).$$

עכשיו חוזרים על אותו נימוק עבור

$$a \leq x_0 - \delta < t < x_0 \leq b$$

ומקבלים שהנגזרת משמאל קיימת ושווה $f(x_0)$. במקרה הזה יופיעו אינטגרלים מהצורה $\int_t^{x_0} f$ עם $t < x_0$, ולכן פיצלנו את הדיון.

__הגדרה.__ $F(x)$ נקראת פונקציה קדומה של $f(x)$ בקטע $[a,b]$, (או פונקציה פרימיטיבית של f, או antiderivative), אם $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in [a,b]$.

__משפט.__ אם $f(x)$ רציפה ב: $[a,b]$ אז $F(x) = \int_a^x f$ היא פונקציה קדומה של f.

זהו למעשה משפט שהוכחנו כבר: $F'(x) = f(x)$. מושג הפונקציה הקדומה הוא

מושג עדין ומסובך. בהגדרה שלנו צריך שיתקיים $F'(x) = f(x)$ לכל $a \le x \le b$, וזוהי מגבלה רצינית. לכן אם f אינטגרבילית (ולאו דוקא רציפה בכל נקודה) אז $F(x) = \int_a^x f$ מוגדרת היטב אך איננה בהכרח פונקציה קדומה, מאחר ויודעים בודאות ש: $F(x)$ היא רציפה, אך אין ביטחון שהיא גזירה.

כזכור מחשבון דיפרנציאלי יתכן שפונקציה תהיה גזירה בכל נקודה, אך בנקודות מסוימות נגזרתה אינה רציפה. למשל $g(x) = x^2 \sin 1/x$ עבור $x > 0$ ו: $g(0) = 0$ היא גזירה בכל x, כולל $x = 0$, אולם

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ אם} \\ 0 & x = 0 \text{ אם} \end{cases}$$

ו: $g'(x)$ אינה רציפה ב: $x = 0$.

מוכיחים בחשבון דיפרנציאלי שאם יש ל: $g(x)$ נגזרת בכל נקודה של קטע, אז $g'(x)$ מקבלת כל ערך ביניים, אפילו אם g' איננה רציפה. נובע מזה שלא תיתכן עבור g' אי-רציפות מסוג של קפיצה, אבל תיתכן אי-רציפות מסוג של חוסר קיום גבול. לכן, אם $f(x)$ בלתי רציפה עם קפיצה, נובע שבהכרח אין לה פונקציה קדומה F, כי ל: $F' = f$ לא תיתכן אי-רציפות קפיצה כאשר F גזיר בכל נקודה. למשל לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

על $[-5,5]$ אין פונקציה קדומה, למרות שקיים $\int_{-5}^{x} f(x)$. נשים לב שאנו יכולים לכתוב את ערכו של $F(x) = \int_{-5}^{x} f$ עם ביטוי שונה בהתאם ל: $x < 0$ או $x > 0$, אבל $F(x)$ איננה פונקציה קדומה. כמו כן לפונקציה $f(x) = [x]$ (החלק השלם של x) אין פונקציה קדומה.

<u>משפט.</u> נתון ש: $F(x)$ פונקציה קדומה של f ב: $[a,b]$. אז $G(x)$ היא פונקציה קדומה של f בקטע הזה אם ורק אם $G(x) = F(x) + C$ עבור איזשהו קבוע C.

<u>הוכחה:</u> בכיוון אחד, אם $G(x) = F(x) + C$, אז $G'(x) = F'(x) = f(x)$. בכיוון השני, אם

F ו: G שתיהן פונקציות קדומות אז
$G'(x) = F'(x) = f$, ועל כן

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

נובע מזה ש: $F - G$ היא פונקציה קבועה על $[a,b]$.

<u>הגדרה.</u> אוסף כל הפונקציות הקדומות של f נקרא האינטגרל הבלתי-מסוים של f, והוא מסומן ב: $\int f(x)dx$.

זהו אוסף של פונקציות $F(x)$ אשר נבדלות זו מזו בקבוע. למשל

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

אנו שמים לב להבדל בין האינטגרל הבלתי מסוים (אוסף פונקציות בעלות אותה נגזרת) לבין אינטגרל רימן של f, $\int_a^b f$, שהוא מספר ממשי כלשהו. אנו איננו מציינים את המשתנה באינטגרל הזה כי אין כל השפעה על סכומי דרבו איזה שם מיחסים לציר הממשי האופקי.

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

המשפט הבא מקשר בין שני המושגים:

1. אינטגרל רימן $\int_a^b f$,
2. הפונקציה הקדומה של $f(x)$, $F(x)$.

<u>משפט.</u> אם $f(x)$ פונקציה רציפה ב: $[a,b]$ ו: $F(x)$ פונקציה קדומה שלה, אז

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

(אנו שמים שלהפרש באגף ימין יש את אותו הערך לכל הפונקציות הקדומות של f).

<u>הוכחה.</u> נסמן

$$G(x) = \int_a^x f,$$

אז $G(x)$ הוא פונקציה קדומה של f, וכל פונקציה קדומה אחרת נבדלת ממנה בקבוע חיבורי. לכן F הנתונה במשפט מקיימת

$$F(x) = G(x) + C$$

עבור קבוע C כלשהו. בפרט

$$F(a) = G(a) + C = 0 + C = C,$$

ולכן

$$\int_a^x f = G(x) = F(x) - C = F(x) - F(a).$$

טענת המשפט מתקבלת בהצבת $x = b$.

ניתן להרחיב טענה זו לפונקציות f נוספות, כאלו שאינן רציפות.

משפט. תהי $f(x)$ אינטגרבילית ב: $[a,b]$ ונתונה פונקציה $F(x)$ רציפה בכל $[a,b]$. נתון ש $F(x)$ גזירה ומקיימת $F'(x)=f(x)$ בכל נקודה ב: $[a,b]$ פרט למספר סופי של נקודות ב: $[a,b]$. אז

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \,.$$

הערה. אנו שמים לב ש: $F(x)$ איננה פונקציה קדומה לפי הגדרתנו.

דוגמא. הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

אינטגרבילית ב: $[-7,7]$ ו: $F'(x)=f(x)$ בכל x פרט ל: $x=0$.

<u>הוכחת המשפט:</u> ניקח חלוקה כלשהי P של $[a,b]$ שכוללת, בין היתר, את כל הנקודות שבהן F או אינה גזירה, או $f(x) \neq F'(x)$,

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

בכל (x_{i-1}, x_i), F גזירה, ובנוסף על כך, F רציפה ב: $[x_{i-1}, x_i]$, ולכן לפי משפט לגרנז'

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(\xi_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

נסכם על תתי-הקטעים ונקבל

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

עתה אנו חוזרים על החישוב עבור סדרה תקינה של חלוקות $P_1, P_2, P_3, ...$, שכולן מכילות את נקודות אי-הרציפות. בדומה לביטוי האחרון מקבלים עבור P_n את השיויון

$$.F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)\Delta x_i^n \qquad (1)$$

כאשר $n \to \infty$ אגף שמאל נשאר קבוע $F(b) - F(a)$, בעוד אגף ימין שואף ל: $\int_a^b f$. זה מסיים את הוכחת המשפט.

<u>הערה.</u> ההנחה ש: F היא רציפה מהותית ואינה ניתנת להחלשה. האינטגרל בקטע (x_{i-1}, x_i) הוא $F(x_i^-) - F(x_{i-1}^+)$ ובדומה לזה האינטגרל על הקטע (x_i, x_{i+1}) הוא $F(x_{i+1}^- - F(x_i^+))$,

וכאשר מסכמים על כל הקטעים, אם F איננה רציפה ב: x_i, אזי המחוברים $F(x_i^-)$ ו: $F(x_i^+)$ אינם מצטמצמים.

משפט ערך הביניים השני. תהי $f(x)$ מונוטונית על $[a,b]$ ו: $g(x)$ אינטגרבילית ואינה מחליפה סימן על $[a,b]$. אז קיים c ב: $[a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g + f(b)\int_c^b g .$$

הוכחה: נניח ש: f מונוטונית לא יורדת, ו:g אי-שלילית. המקרים האחרים מוכחים בצורה דומה. אז מתקיים

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

לכל $a \le x \le b$, ומאי-שליליות g

$$f(a)g(x) \le f(x)g(x) \le f(b)g(x)$$

לכל $a \le x \le b$. אינטגרציה של הביטויים השונים על הקטע $[a,b]$ נותנת

$$.f(a)\int_a^b g \le \int_a^b fg \le f(b)\int_a^b g \qquad (2)$$

לכל $a \le c \le b$ אנו מגדירים

$$,H(c) = f(a)\int_a^c g + f(b)\int_c^b g$$

ואז מקבלים ש:

$$,H(a) = f(b)\int_a^b g,\ H(b) = f(a)\int_a^b g$$

ונובע מזה ומ: (2) ש:

$$.H(b) \le \int_a^b fg \le H(a)$$

מאחר ו: H רציפה, קיימת נקודה $a \leq c \leq b$ כך ש:

$$\int_a^b fg = H(c)$$

ומהגדרת $H(c)$ מתקבלת טענת המשפט

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g.$$