קומבינטוריקה – הרצאה #6 – 05/05/16

משפט ERDŐS-SZEKERES

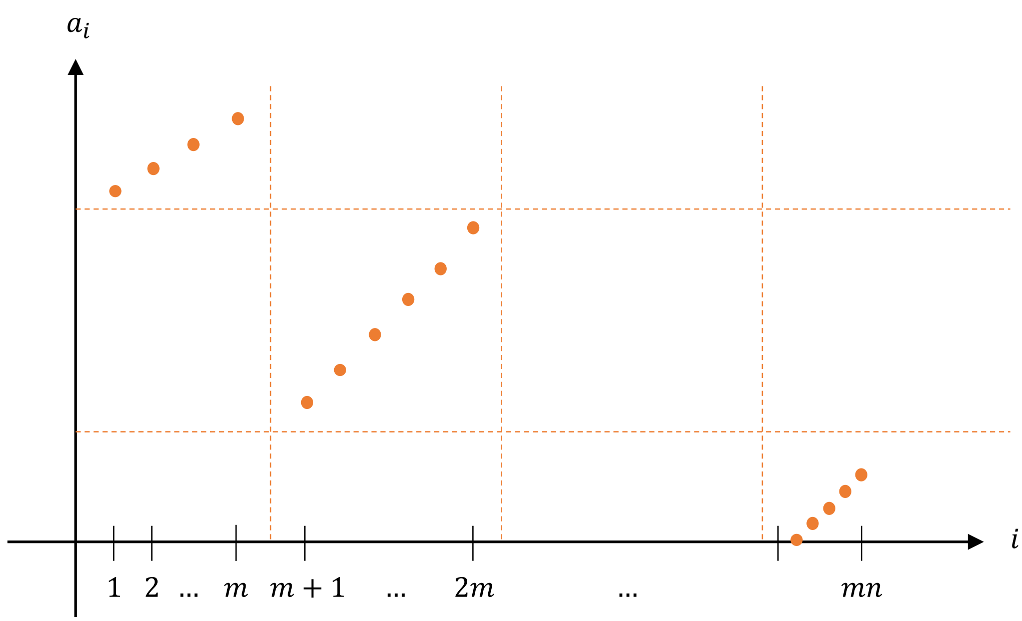
משפט (Erdős-Szekeres): יהיו m, n מספרים טבעיים. תהי נתונה סדרה $a_1, a_2, \dots, a_{n\times m+1}$ של מס' ממשיים, אזי, לפחות 1 משני הדברים הבאים נכון:

(1) יש לסדרה תת סדרה עולה בת $m+1$ איברים.
(2) יש לסדרה תת סדרה לא-עולה בת $n+1$ איברים.

דוגמא: ניקח $m=2, n=3$, אז $mn+1=7$. נתבונן בסדרה 8,2,9,4,0,3,0. אין תת סדרה עולה בת 3 איברים, אבל יש תת סדרה לא עולה בת 4 איברים – למשל, 9,4,0,0.

הוכחה: תהי נתונה הסדרה $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$. עבור $i=1,2,\dots,mn+1$, נגדיר את $f(i)$ בתור מס' האיברים בתת-סדרה לא עולה ארוכה ביותר המתחילה ב-a_i. נשים לב שאם קיים i שעבורו $f(i)\geq n+1$, אז סיימנו, כי מתקיים התנאי השני במשפט. אחרת, נוכל להניח שלכל i, $f(i)\in\{1,2,\dots,n\}$. כלומר, יש לנו $mn+1$ יונים (ה-i-ים) בתוך m תאים (ערכים אפשריים של $f(i)$), ולכן קיים תא (נגיד תא מס' k) שיש בו לפחות $m+1$ יונים. לפיכך קיימים אינדקסים $i_1<i_2<\dots<i_{m+1}$ שעבורם $f(i_1)=f(i_2)=\dots=f(i_{m+1})=k$. כעת נראה שמתקיים $a_{i_1}<a_{i_2}<\dots<a_{i_{m+1}}$. זה נכון, כי אילו היה מתקיים $a_{i_j}\geq a_{i_{j+1}}$ עבור j מסוים, אז היינו מקבלים תת סדרה לא עולה בת $k+1$ איברים המתחילה ב-a_{i_j}, עוברת ל-$a_{i_{j+1}}$, וממשיכה עם התת-סדרה הלא-עולה בת k איברים המתחילה ב-$a_{i_{j+1}}$. זו סתירה לכך ש-$f(i_1)=k$. לפיכך, התת סדרה $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{m+1}}$ היא עולה, ועונה על התנאי הראשון במשפט.

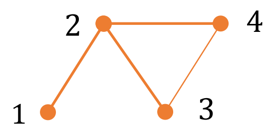
הערה: המשפט הוא **חד** במובן הבא: קיימת סדרה $a_1, a_2, \dots, a_{mn}$ שעבורה אף אחד מההתנאים של המשפט לא מתקיים. נראה זאת בציור:



הגדרה: גרף $G = (V, E)$ מתואר ע"י:

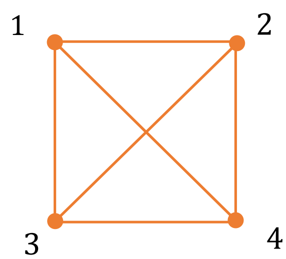
- קבוצה סופית לא ריקה V שאיבריה נקראים **קדקודים**.
- קבוצה E של זוגות לא סדורים של קדקודים הנקראים **צלעות**.

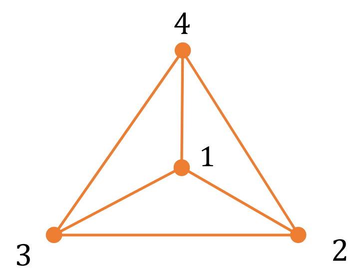
דוגמא:



$$V = \{1,2,3,4\}, \qquad E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

הערה: מה שקובע את הגרף הוא התיאור $G = (V, E)$ ולא הציור. למשל אלה שני ציורים שונים של אותו הגרף:





זהו גרף שלם על 4 קדקדים.

הגדרה: גרף **שלם** על n קדקודים הוא גרף שבו כל זוג קדקודים מהווה צלע, כלומר זהו גרף $G = (V, E)$ כך שבו:

$$|V| = n, \qquad |E| = \binom{n}{2}$$

הסימון המקובל לגרף כזה הוא K_n.

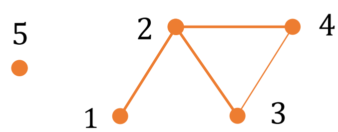
הגדרה: בהינתן קדקוד x בגרף $G = (V, E)$, נסמן:

$$N(x) = \{y \in V | \{x, y\} \in E\}$$

זו **קב' השכנים** של x בגרף. **הערכיות** של x היא מס' השכנים של x בגרף:

$$d(x) = |N(x)|$$

דוגמא: בגרף הבא:



$$d(1) = 1, \qquad d(2) = 3, \qquad d(3) = 2, \qquad d(4) = 2, \qquad d(5) = 0$$

הגדרה: קדקוד x ללא שכנים ($d(x) = 0$) נקרא **מבודד**.

טענה: בכל גרף $G = (V, E)$ מתקיים:

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$$

הוכחה: כל צלע תורמת 1 לערכיות של כל אחד משני הקדקודים שבה. לכן, סך כל התרומות לערכיויות של הקדקודים הוא $2|E|$.

מסקנה 1: בכל גרף, סכום הערכיויות של הקדקודים הוא זוגית.

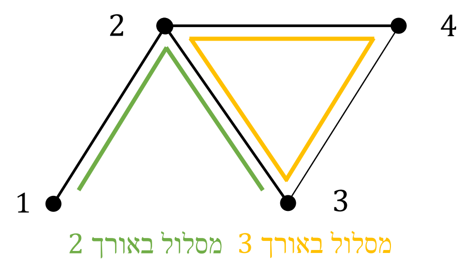
מסקנה 2: בכל גרף, מס' הקדקודים בעלי ערכיות אי-זוגית הוא זוגי.

הגדרה: **מסלול** בגרף $G = (V, E)$ מקדקוד x לקדקוד y הוא סדרה מהצורה

$$x = v_0, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_k = y$$

כאשר $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ קדקודים בגרף (לאו דווקא שונים זה מזה), ו-$e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ הן צלעות *שונות* זו מזו בגרף כאשר $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ לכל $i = 1, \dots, k$. המספר k נקרא **אורך המסלול**.

דוגמא:

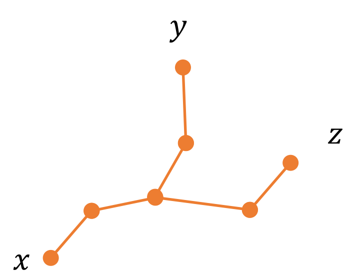


הגדרה: גרף $G = (V, E)$ נקרא **קשיר** אם לכל שני קדקודים שלו x, y קיים בגרף מסלול מ-x ל-y.

דוגמא: הגרף האחרון שציירנו הוא קשיר.

הערה: בהנתן גרף כלשהו $G = (V, E)$, אפשר להגדיר יחס בינארי $x \sim y$ על קב' הקדקודים באופן הבא:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{קיים בגרף מסלול מ-}x\text{ ל-}y$$

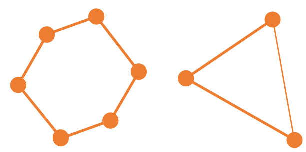


אז היחס $\sim$ הוא יחס שקילות, והוא מחלק את הקב' V למחלקות שקילות כך שהגרף על כל אחת מהם הוא קשיר ואין צלעות המחברות בין מחלקות שקילות שונות. כלומר, התמונה נראית באופן כללי כך:

בצורה זו, מתקבל פירוק של הגרף $G = (V, E)$ **למרכיביו הקשירים.**

הגדרה: הגרף G נקרא **קשיר** אם קיים לו מרכיב קשיר יחיד.

הגדרה: מסלול מהצורה פרט$v_0, e_1, v_1, \dots, v_k$ נקרא **סגור** אם $v_k = v_0$. מסלול כזה נקרא **מעגל** אם הוא סגור, $k \geq 3$, ופרט להתלכדות של v_0, v_k הקדקודים לאורך המסלול שונים זה מזה.



הערה: מסלול סגור שחותך את עצמו לא נקרא מעגל, אבל כל מסלול כזה ניתן לפירוק למס' מעגלים.