טכניון - מכון טכנולוגי לישראל   הפקולטה למתמטיקה

חשבון אינפי' 2   104281

גליון תרגילים מספר 15 - תרגילים בנושא משפט גרין

עורכת: ד"ר לידיה פרס הרי   סמסטר אביב תשנ"ט

1. חשב את האינטגרלים הקוויים הבאים באמצעות משפט גרין

(א) $$\int_C (x+2y)dx, \quad C=\{(x,y)\ :\ y=x^2,\ (0,0)\to(1,1)\}$$

(ב) $$\int_C (x+2y)dy, \quad C=\{(x,y)\ :\ y=x^2,\ (0,0)\to(1,1)\}$$

(ג) $$\int_C (e^y+y)dx, \quad C=\{(x,y)\ :\ 2x+3y=6,\ (0,2)\to(3,0)\}$$

(ד) $$\int_C xdy, \quad C=\left\{x=\frac{6t}{t^3+1},\ y=\frac{6t^2}{t^3+1},\ (0,0)\to(3,3)\right\}$$

2. חשב את האינטגרלים הקוויים הבאים כאשר C שפת האיזור D הנתון:

(א) $$\int_C (2x+3y)dy, \quad D=\{x>0,\ y>0,\ 2x+3y<6\}$$

(ב) $$\int_C (x^2+y)dx, \quad D=\{0<y<4-x^2\}$$

(ג) $$\int_C x^2ydx+(2x+1)y^2dy, \quad D=\{|x|<1,\ |y|<1\}$$

(ד) $$\int_C y^ndx+x^ndy,\ n=0,1,2,\dots, \quad D=\{x^2+y^2<a^2,\ (a>0)\}$$

(ה) $$\int_C y|y|dx-x|x|dy, \quad D=\{|x|+|y|<1\}$$

3. חשב את

$$\int_C (x^3-xy^2)dx+(y^3-x^2y)dy$$

כאשר C נתון ע"י

$$C=\{(x,y)\mid x(t)=t\cos t,\ y(t)=t\sin t,\quad 0\le t\le 5\pi\}$$

צייר סקיצה של המסלול.

4. חשב את השטחים הבאים

(א) פנים ה-Hypocycloid:

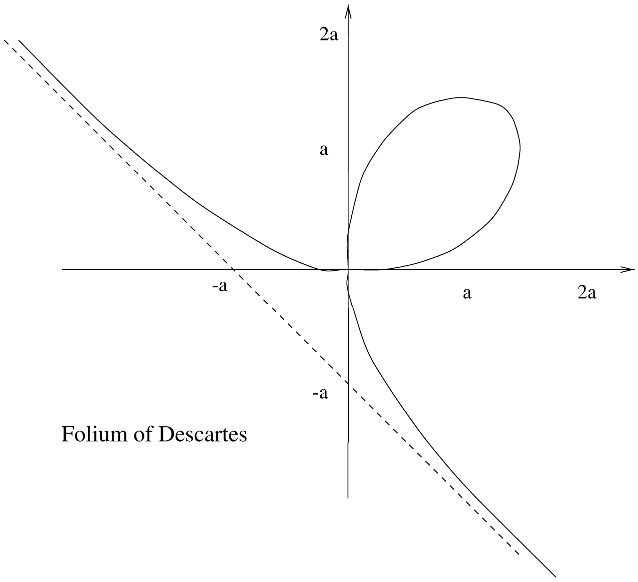
$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\quad (a>0)$$

(ב) פנים הלולאה שב-Folium of Descartes (ראה ציור) :

$$x=\frac{3at}{t^3+1},\quad y=\frac{3at^2}{t^3+1}\quad (a>0)$$

(ג) פנים ה-Strophoid :

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\quad y=\frac{at(1-t^2)}{1+t^2}\quad (a>0)$$



Folium of Descartes

5. מומנט מסדר (m,n) של תחום במישור מוגדר ע"י

$$M_{(m,n)} \triangleq \iint_D x^m y^n dxdy$$

הוכח כי המומנטים הראשונים מקיימים

$$M_x \triangleq M_{(1,0)} = -\oint_C xydx = \frac{1}{2}\oint_C x^2dy = \frac{1}{4}\oint_C -2xydx + x^2dy$$

$$M_y \triangleq M_{(0,1)} = -\frac{1}{2}\oint_C y^2dx = \oint_C xydy = \frac{1}{4}\oint_C -y^2dx + 2xydy$$

פתח נוסחאות דומות עבור המומנטים מסדר שני $M_{(2,0)},\ M_{(1,1)},\ M_{(0,2)}$. מהו $M_{(0,0)}$?

6. יהי $\hat{R} \triangleq R\backslash\{(0,0)\}$, ונניח שמתקיים $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ בכל $\hat{R}$. הוכח כי $Pdx+Qdy$ הוא דיפרנציאל מדויק ב-$\hat{R}$ אם ורק אם $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ כאשר C מעגל היחידה $x^2+y^2=1$.

7. בסעיפים הבאים התחום הוא $R\backslash\{(0,0)\}$, והמסלול הוא מעגל היחידה. הראה שהדיפרנציאלים הנתונים $Pdx+Qdy$ מקיימים $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, וחשב את $\oint Pdx + Qdy$ על מעגל היחידה. אם הדיפרנציאל מדויק, מצא את פונקצית הפוטנציאל שלו

(א) $\frac{-y^5}{(x^2+y^2)^3}dx + \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^3}dy$

(ב) $\frac{x}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy$

(ג) $\frac{-x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}dx + \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^3}dy$

(ד) $\frac{-x^2y}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy$

(ה) $\frac{-x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}dx + \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}dy$

(ו) $\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}dy$

8. נתון מצולע (פוליגון) שקדקדיו בנקודות (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$. נניח שמיספור הקדקדים נתון באופן רץ לאורך היקף המצולע בכיוון החיובי. הוכח כי שטח המצולע נתון ע"י

$$A = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{2}$$

כאשר הגדרנו $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (x_1, y_1)$. האם השיטה של מיספור הקדקדים הכרחית? אם לא - הוכח, אם כן - תן דוגמא נגדית.