

תורת ההסתברות

תרגיל בית מס' 1

פתרונות יתפרסמו באתר הקורס ב- 18.11.01.

תרגיל 1.

הוכיחו בשיטה הסתברותית (קומבינטורית) כי

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

רמז. יהי $N = \{1, 2, \dots, 2n\}$. נניח כי n מספרים נבחרים באקראי מתוך N . נגדיר מאורעות $A_k = \{\text{בדיוק } k \text{ מספרים נבחרו מתוך קטע } [1, n]\}$. אזי $\Omega = \bigcup_0^n A_k$.

תרגיל 2.

בכיתה יושבים n סטודנטים. מהי ההסתברות שלפחות לשניים מהם יש יום הולדת באותו יום של השנה? תניחו כי ישנם 365 ימים בכל שנה, כולם שווים ההסתברות.

תרגיל 3.

(א) תהי $\{A_n\}$ סדרה כלשהי של מאורעות. הוכיחו כי לכל $n > 0$ מתקיים:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n P(A_k) - (n-1).$$

רמז. תגדירו $B_n = A_n^c$ ותשתמשו בחוקי דה-מורגן והאי שוויון

$$\sum_n P(B_n) \geq P\left(\bigcup_n B_n\right).$$

(ב) יהיו A, B, C מאורעות. האם ייתכן ש- $P(A) = P(B) = P(C) = 0.8$ ו- $P(A \cap B \cap C) = 0.3$?

תרגיל 4.

(א) תהי $\{A_n\}$ סדרה עולה של המאורעות (דהיינו $A_n \subseteq A_{n+1}$ לכל $n \geq 1$). נגדיר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$ רמז. ניתן להשתמש בחלוקה $\lim A_n = \bigcup_n X_n$ כאשר X_n הן קבוצות זרות, המוגדרות על ידי

$$X_1 := A_1, \quad X_k := A_{k-1}^c \cap A_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

(ב) תהי סדרה יורדת של מאורעות (דהיינו $B_{n+1} \subseteq B_n$ לכל $n \geq 1$). נגדיר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n)$ רמז. תהי סדרה יורדת. נגדיר $A_n := B_n^c$. אזי $\{A_n\}$ היא סדרה עולה.

תרגיל 5.

יהיו X ו- Y שני מ"מ גאומטריים בלתי תלויים, בעלי הצפיפות

$$P(X = k) = P(Y = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

עבור פרמטר $0 < p < 1$.

- (א) חישבו את ההסתברות $P(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k, Y = n - k)$, $n = 2, 3, \dots$
 (ב) חישבו את $P(X = k | X + Y = n)$.

תרגיל 6.

לתחנת שרות מסויימת בה עובדים N שרתים, מגיעים במשך היום $3N$ אנשים. כל לקוח פונה לשרת אחד אותו הוא בוחר באופן אקראי ובלתי תלוי באחרים. מהי בקירוב ההסתברות ששרת מסויים יטפל במשך היום ב-2 לקוחות בדיוק? בל-קוח אחד בלבד? כדי לענות על השאלה תניחו כי N הוא "מספר גדול" ותשתמשו בקירוב פואסוני.

תרגיל 7.

- בקופסה נמצאים n כדורים זהים ממוספרים מ-1 עד n . מוציאים את הכדורים אחד אחרי השני באופן אקראי בלי החזרה.
 (א) מהי ההסתברות שכדור בו מספר 932 הופיע בדיוק בהוצאה מספר 932 (נניח כי $n > 932$)?
 (ב) מהי ההסתברות שכל n המספרים יופיעו בסדר עולה?

תרגיל 8.

שני אנשים, A ו- B , מטילים פעם אחרי פעם שתי מטבעות מזויפות. ההסתברות להופעת "עץ" במטבע של A היא $P_A = \frac{2}{3}$ ואילו ההסתברות להופעת "עץ" במטבע של B היא $P_B = \frac{2}{5}$. המשחק נמשך עד אשר בהטלה מסויימת לא יתקבלו תוצאות שונות על גבי שתי המטבעות. שחקן שמטבע שלו מראה "עץ" בהטלה אחרונה יוכרז כמנצח. מהי ההסתברות ש- A ינצח את המשחק?

תרגיל 9.

כד מכיל n כדורים ממוספרים מ-1 עד n . מוציאים k כדורים אחד אחרי השני עם החזרה. מהו הסיכוי שהמספר המכסימלי שהתקבל ב- k ההוצאות הראשונות קטן או שווה מ- m ? בדיוק שווה ל- m ?

תרגיל 10.

כל אחד מ- n כדים מכיל w כדורים שחורים ו- b כדורים לבנים. מעבירים כדור מהכד הראשון לשני, משני לשלישי וכו', כאשר בכל שלב הכדור שמועבר נבחר באקראי. מהי ההסתברות שהכדור שבסוף מוצא מהכד ה- n יהיה לבן, עבור
(א) $n = 2, 3$?
(ב) n כללי?