תורת הקבוצות – תרגיל בית מס' 13 **להגשה עד 30.01.2003**

<u>הערה</u>: כשמדובר בקבוצה $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{Q}$ ללא ציון סדר – הכוונה לסדר הרגיל. הסדרים בקבוצות $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ וכו' – לפי ההגדרה של "סכום" ו"מכפלה" של קבוצות סדורות לינארית, כמו שהוגדר בהרצאה ובתרגול.

1. <u>תזכורת</u>: קבוצה סדורה X נקראת <u>צפופה</u> אם לכל $x, y \in X$ כך ש- $x<y$, קיים z כך ש- $x<z<y$.
   א) נתון: X ו- Y – קבוצות סדורות איזומורפיות, ו- X צפופה. <u>הוכח</u>: גם Y צפופה.
   ב) האם ניתן להגדיר סדר בקבוצה $\mathbb{Z}$ כך שביחס אליו היא תהיה צפופה?
   ג) האם קבוצה צפופה יכולה להיות סדורה היטב?

2. הוכח או הפרך ע"י ציון של תכונת סדר שמתקיימת בקבוצה אחת בלבד מבין השתיים:
   א) $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ איזומורפית ל- $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.
   ב) $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ איזומורפית ל- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
   ג) $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ איזומורפית ל- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
   ד) $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ איזומורפית ל- $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.

3. <u>נתון</u>: מבין שתי הקבוצות $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ ו- $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$, רק אחת איזומורפית ל- $\mathbb{Q}$. איזו?

4.
   א) אם X קבוצה ו- R יחס סדר טוב בה כך שגם R^{-1} סדר טוב, אז X קבוצה סופית.
   ב) אם X קבוצה סופית ו- R יחס סדר טוב בה, אז גם R^{-1} סדר טוב.

5. קבע האם הטענות הבאות נכונות.
   א) ב- $\mathbb{Z}$ יש תת-קבוצה בעלת טיפוס סדר ω .
   ב) ב- $\mathbb{Z}$ יש תת-קבוצה בעלת טיפוס סדר $\omega+1$.
   ג) ב- $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ יש תת-קבוצה בעלת טיפוס סדר $\omega+1$.
   ד) ב- $\mathbb{Q}$ יש תת-קבוצה בעלת טיפוס סדר $\omega\cdot\omega$.
   ה) ניתן להגדיר ב- $\mathbb{N}$ סדר מטיפוס $\omega\cdot\omega$.
   ו) ניתן להגדיר ב- $\mathbb{Z}$ סדר מטיפוס $\omega\cdot\omega$.
   ז) אם X קבוצה סדורה לינארית ללא איבר ראשון ואחרון, אז יש לה תת-קבוצה איזומורפית ל- $\mathbb{Z}$ (עם הסדר הרגיל) .

6. השווה את האורדינלים הבאים:
   א) $2\cdot(3+\omega), 2\cdot(\omega+3), 2\cdot\omega+3, 3+2\cdot\omega, 3+\omega\cdot 2$
   ב) $\omega\cdot\omega, \omega\cdot(\omega+1), (\omega+1)\cdot\omega, (\omega+1)\cdot(\omega+1)$