<u>כלל השרשרת וכלל לייבניץ</u>

נערך ע"י אמיר קסיס

תזכורת:

- אם $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר 2 רציפות בתחום D אזי הן שוות ב־ D.
- משפט: תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בתחום D ותהי $x(t), y(t)$ שתי פונקציות גזירות בקטע I כך ש־ $(x(t), y(t)) \subseteq D$ לכל $t \in I$. אזי $f(x(t), y(t))$ גזיר ב־ I ו־

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t))$$

לכל $t \in I$.

- משפט: אם $f(x,y)$, $x(u,v)$ ו־ $y(u,v)$ גזירות ברציפות וההרכבה $f(x(u,v), y(u,v))$ מוגדרת, אזי היא גזירה ו־

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = f_x x_u + f_y y_u$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x(u,v), y(u,v)) = f_x x_v + f_y y_v$$

- משפט רציפות 1: תהי $f = f(x,y)$ רציפה במלבן $R = [a,b] \times [c,d]$. אזי

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$$

רציפה ב־ $[c,d]$.

- משפט גזירות ־ כלל לייבניץ': נתונה $f = f(x,y)$ כך ש־ $x \mapsto f(x,y)$ אנטגרבילית ב־ $[a,b]$ לכל $y \in [c,d]$, f_y רציפה במלבן $R = [a,b] \times [c,d]$. אזי

$$\frac{d}{dy} F(y) = \int_a^b f_y(x,y)\, dx$$

- משפט רציפות 2: תהי $f = f(x,y)$ רציפה במלבן $R = [a,b] \times [c,d]$, אזי

$$\phi(x,t) = \int_c^t f(x,y)\, dy$$

רציפה ב־ R.

- משפט פוביני: תהי $f = f(x,y)$ רציפה במלבן $R = [a,b] \times [c,d]$. אזי

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx dy$$

- **משפט גזירות כללי:** אם $f=f\left(x,y\right)$, f_{y} רציפות ב־ $R=\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$, ואם $\alpha=\alpha\left(y\right)$, $\beta=\beta\left(y\right)$ גזירות ב־ $\left[c,d\right]$ אזי

$$F\left(y\right)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f\left(x,y\right)dx$$

גזירה ב־ $\left[c,d\right]$ וגם

$$F^{'}\left(y\right)=\beta^{'}\left(y\right)f\left(B\left(y\right),y\right)-\alpha^{'}\left(y\right)f\left(A\left(y\right),y\right)+\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f_{y}\left(x,y\right)dx$$

- הגדרה: תהי $f=f\left(x,y\right)$ מוגדרת ב־ $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ כך ש־ $x\mapsto f\left(x,y\right)$ אינטגרבילית רימן ב־ $\left[a,b\right]$ לכל y, בנוסף נניח כי

$$F\left(y\right)=\int_{a}^{b}f\left(x,y\right)dx$$

אינטגרבילית.

האינטגרל $\int_{c}^{d}F\left(y\right)dy$ נקרא אינטגרל נשנה.

- **משפט פוביני:** אם $f=f\left(x,y\right)$ רציפה ב־ $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$ אזי

$$\int_{a}^{b}dx\int_{c}^{d}f\left(x,y\right)dy=\int_{c}^{d}dy\int_{a}^{b}f\left(x,y\right)dx$$

תרגילים:

1. תהי

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy\left(x^{2}-y^{2}\right)}{x^{2}+y^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$$

א. חשבו את $f_{xy}\left(0,0\right)$ ואת $f_{yx}\left(0,0\right)$, אם קיימות.

ב. האם f_{xy} רציפה ב־ $\left(0,0\right)$?

<u>פתרון:</u>

א. נחשב $f_{x}\left(x,y\right)$ לכל $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}$. ברור ש־ $f_{x}\left(0,0\right)=0$ כי f_{x} קבועה על ציר x, ולכן

$$f_{x}\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{x^{4}y+4x^{2}y^{3}-y^{5}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\0 & x=y=0\end{cases}$$

כעת, נחשב $f_{xy}\left(0,0\right)$ ע"פ הגדרה:

$$f_{xy}\left(0,0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f_{x}\left(0,0+h\right)-f_{x}\left(0,0\right)}{h}=-1$$

באופן דומה, נחשב $f_y\left(x,y\right)$ ונקבל

$$f_y\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{-y^4x-4y^2x^3+x^5}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & x=y=0\end{cases}$$

כעת, נחשב $f_{yx}\left(0,0\right)$ ע"פ הגדרה:

$$f_{yx}\left(0,0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f_y\left(0+h,0\right)-f_y\left(0,0\right)}{h}=1$$

ב. f_{xy} היא פונקציה הומוגנית מסדר $k=0$ לא קבועה, לכן לא רציפה ב־ $(0,0)$.

2. תהי $f=f\left(x,y\right)$ חלקה. נניח כי $f\left(3x^2+y,-6x+y^3\right)=e^{x-y}$ לכל x,y.

א. מצאו את המישור המשיק של f בנקודה $P=(4,-5)$.

ב. חשבו את הנגזרת המכוונת בכיוון $u=(3,-4)$.

<u>פתרון:</u>

א. ע"י כלל שרשרת רואים ש־

$$f_x\left(3x^2+y,-6x+y^3\right)\cdot6x+f_y\left(3x^2+y,-6x+y^3\right)\cdot(-6)=e^{x-y}$$

$$f_x\left(3x^2+y,-6x+y^3\right)\cdot1+f_y\left(3x^2+y,-6x+y^3\right)\cdot3y^2=-e^{x-y}$$

נציב $x=y=1$ ונקבל

$$6f_x\left(P\right)-6f_y\left(P\right)=1$$

$$f_x\left(P\right)+3f_y\left(P\right)=-1$$

$f_x\left(P\right)=\frac{-3}{8}$ ו־ $f_y\left(P\right)=\frac{-1}{8}$.

יצא לי 5/40-... מוזר

ב.

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(P\right)=\nabla f\left(P\right)\cdot\hat{u}=\frac{9}{40}$$

3. א. נתונות פונקציה חלקיות $f=f\left(u,v\right)$, $u=u\left(x,y\right)$ ו־ $v=v\left(x,y\right)$. נניח $g=f\left(u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right)$ מוגדרת. חשבו את $\nabla g\left(x,y\right)$.

ב. מצאו את משוואת המישור המשיק של g בנקודה (a,b).

<u>פתרון:</u>

מכלל השרשרת נקבל כי

$$g_x=f_uu_x+f_vv_x=\nabla f\cdot\left(u_x,v_x\right)$$

$$g_y = f_u u_y + f_v v_y = \nabla f \cdot (u_y, v_y)$$

שימו לב שכשרושמים ∇f הכוונה היא $\nabla f\left(u\left(a,b\right),v\left(a,b\right)\right)$, וכשרושמים (u_x, v_x) הכוונה היא $\left(u_x\left(a,b\right),v_x\left(a,b\right)\right)$, כנ"ל לגבי (u_y, v_y).

ב. הקירוב הלינארי הטוב ביותר של g נתון על ידי

$$z = g\left(a,b\right) + g_x\left(a,b\right)\left(x-a\right) + g_y\left(a,b\right)\left(y-b\right)$$

לאור החישוב הקודם נקבל כי

$$z = g\left(a,b\right) - \nabla f \cdot \left[\left(u_x, v_x\right)a + \left(u_y, v_y\right)b\right] + \nabla f \cdot \left[\left(u_x, v_x\right)x + \left(u_y, v_y\right)y\right]$$

4. תהי $f = f\left(x,y\right)$ חלקה. בטאו את $xf_x + yf_y$ בקואורדינטות פולריות r,θ.

<u>פתרון:</u>

נסמן $F\left(r,\theta\right) = f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)$ ואז מכלל השרשרת נקבל

$$F_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta$$

$$F_\theta = f_x\left(-r\sin\theta\right) + f_y\left(r\cos\theta\right)$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix}$$

נציב ב־ $xf_x + yf_y$ ונקבל

$$xf_x + yf_y = rF_r$$

5. תהיינה $f = f\left(s\right), g = g\left(s\right)$ חלקות ויהי $c > 0$. נגדיר

$$u\left(x,t\right) = \frac{f\left(x-ct\right) + f\left(x+ct\right)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g\left(s\right)ds$$

הוכיחו ש־

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

<u>הוכחה:</u>

מחשבים לפי כלל השרשרת ומקבלים

$$u_t = \frac{-cf'\left(x-ct\right) + cf'\left(x+ct\right)}{2} + \frac{1}{2c}\left(cg\left(x+ct\right) + cg\left(x-ct\right)\right)$$

$$u_{tt}=\frac{c^2f^{''}(x-ct)+c^2f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\left(c^2g^{'}(x+ct)-c^2g^{'}(x-ct)\right)$$

$$u_x=\frac{f^{'}(x-ct)+f^{'}(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}(g(x+ct)-g(x-ct))$$

$$u_{xx=}\frac{f^{''}(x-ct)+f^{''}(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\left(g^{'}(x+ct)-g^{'}(x-ct)\right)$$

הערה: הבעיה הדיפרנציאלית

$$\begin{array}{ll} u_{tt}=c^2u_{xx} & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=f(x) & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x) & x\in\mathbb{R} \end{array}$$

נקראת בעיית קושי - משוואת הגלים. הפתרון

$$u(x,t)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$$

נקרא נוסחאת דלמבר.

6. א. תהי $g=g(t)$ גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}$. נגדיר:

לא הבנתי את התרגיל :(

$$z(x,y)=yg\left(\frac{y}{x}\right)-8x^{-2}y^2$$

תהי (x,y) נקודה על העקום $x^2+y^2=1$ כך ש- $x\neq 0$. חשבו מה היא נגזרת המכוונת של $z(x,y)$ בנדוקה (x,y) בכיוון הוקטור הפונה מ- (x,y) אל מרכז העקום. הביעו את התשובה כפונקציה של (x,y,z).

ב. נניח בנוסף ש- $g\left(\frac{1}{2}\right)=-3$ ונגדיר

$$F(y)=\int_{2y}^{y^2}z(x,y)\,dx$$

חשבו את $F^{'}(2)$.

<u>פתרון:</u>

א. וקטור הכיוון כאן הוא $u=(-x,-y)$. לכן מדיפרנציאביליות z נקבל:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\nabla z(x,y)\cdot u$$

נחשב את z_x ואת z_y ונקבל מכלל השרשרת ש-

$$z_x(x,y)=-\frac{y^2}{x^2}g^{'}\left(\frac{y}{x}\right)+16x^{-3}y^2$$

$$z_y(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) - 16x^{-2}y$$

לכן

$$\frac{\partial z}{\partial u}(x,y) = -yg\left(\frac{y}{x}\right) = -z - 8x^{-2}y^2$$

ב. תנאי כלל L מתקיימים, לכן

$$F'(y) = \int_{2y}^{y^2} z_y(x,y)\,dx + 2yz\left(y^2,y\right) - 2z(2y,y)$$

נציב $y=2$ ונקבל

$$F'(2) = 2z(4,2) = -16$$

7. חשבו בעזרת האינטגרל $F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{1+yx}$ את

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{xdx}{(1+x)^2}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^3}dx$$

<u>פתרון:</u>

הפונקציה $f(x,y) = \frac{1}{1+yx}$ רציפה ב־ $[0,1]\times[0,2]$ וגם

$$f_y(x,y) = \frac{-x}{(1+yx)^2}$$

לכן לפי כלל L נקבל

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{-x}{(1+yx)^2}dx$$

אבל

$$F(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$$

ומכאן:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1+xy)^2} = \frac{\ln(1+y)}{y^2} - \frac{1}{y(1+y)}$$

נציב $y=1$ ונקבל

$$\mathrm{I}_1=\ln 2-\frac{1}{2}$$

כדי לקבל את I_2 נשתמש פעם נוספת בכלל L עבור $F^{'}(y)=\int_0^1\frac{-x}{(1+yx)^2}dx$:

$$F^{''}(y)=\int_0^1\frac{2x^2}{(1+yx)^3}dx=-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(1+y)^2}-\frac{1}{y^2(1+y)}+\frac{2\ln(1+y)}{y^3}$$

נציב $y=1$ ונקבל

$$\mathrm{I}_2=\ln 2-\frac{5}{8}$$

8. חשבו את $\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx$ לכל m,n טבעיים.

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב־ $F(y)=\int_0^1 x^y dx=\frac{1}{y+1}$ עבור $y\approx n$. הפונקציה $f(x,y)=x^y$ רציפה ב־ $I\times[0,1]$ כש־ I סביבה של n. בנוסף:

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}f(x,y)=x^y(\ln x)^m$$

רציפה גם היא במלבן. ומכאן רואים שתנאי כלל לייבניץ' מתקיימים. לכן:

$$F^{(m)}(y)=\int_0^1 x^y(\ln x)^m dx=\frac{(-1)^n n!}{(y+1)^{n+1}}$$

נציב $y=n$ נקבל

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^m dx=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

9. חשבו את $\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}dx$. (משתמשו ב־ $\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x^y-1}{\ln x}dx=0$)

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב־ $F(y)=\int_0^1\frac{x^y-1}{\ln x}dx$. היא מוגדרת עבור $y\approx 1$. כמו כן, $\left(\frac{x^y-1}{\ln x}\right)_y=x^y$ רציפה (במלבן מתאים), ומכאן

$$F^{'}(y)=\int_0^1 x^y dx=\frac{1}{y+1}$$

לכן

$$F(y)=\ln(y+1)$$

נציב $y=1$, נקבל $\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}d=\ln 2$.

10. חשבו את $\int_0^\pi \frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}dx$ לכל $|y|<1$.

<u>פתרון:</u>

הפונקציה $F(y)=\int_0^\pi \frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}dx$ מוגדרת. בנוסף, $\frac{1}{1+y\cos x}=\left(\frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}\right)_y$ רציפה ב־ $x\in[0,\pi]$, $y\in(-1,1)$. ומכאן

$$F'(y)=\int_0^1 \frac{dx}{1+y\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

ע"י שימוש בכלל L במלבן $[0,\pi]\times[-\alpha,\alpha]$ כך ש־ $|y|<\alpha<1$. ומכאן נקבל ש־

$$F(y)=\pi\arcsin y$$

11. חשבו את $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב־ $F(y)=\int_0^1 \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}dx$, $y\approx 1$. לפי לייבניץ':

$$F'(y)=\int_0^1 \frac{x}{(1+yx)(1+x^2)}dx$$

על ידי חישוב פשוט מקבלים

$$F'(y)=\frac{1}{1+y^2}\left(y\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}-\ln(1+y)\right)$$

לכן

$$F(1)-F(0)=\frac{\pi}{4}\frac{\ln 2}{2}\cdot 2-F(1)$$

$F(0)=0$, נעביר אגפים ונקבל

$$F(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

12. חשבו את הוכיחו **פורמאלית** כי

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(yx)}{x}dx=\arctan\frac{y}{t},\ t>0$$

והסיקו ש־

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב־

$$F\left(y\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-tx}\frac{\sin\left(yx\right)}{x}dx$$

לכן

$$F^{'}\left(y\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-tx}\cos\left(yx\right)dx$$

ע"י אינטגרציה בחלקים

$$F^{'}\left(y\right)=\frac{t}{t^{2}+y^{2}}$$

לכן

$$F\left(y\right)-F\left(0\right)=\arctan\left(\frac{y}{t}\right)$$

אבל $F\left(0\right)=0$ לכן

$$\int_{0}^{\infty}e^{-tx}\frac{\sin\left(xy\right)}{x}dx=\arctan\frac{y}{t}$$

ניקח $t\to0^{+}$ ו־ $y=1$ ונקבל

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

הערה: בקורס פונקציות מרוכבות (תלוי מרצה) לומדים דרכים מאוד (מאוד!) פשוטות לחשב אינטגרלים מוכללים ממשיים, ואחד המפורסמים הוא האינטגרל הנ"ל.

13. תהי $f=f\left(x,y\right)$ רציפה במלבן $R=\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$. הוכיחו כי

$$\phi\left(x,t\right)=\int_{c}^{t}f\left(x,y\right)dy$$

רציפה ב־ R.

<u>הוכחה:</u>

תהי $\left(x_{0},t_{0}\right)\in R$. נעריך

$$\left|\phi\left(x,t\right)-\phi\left(x_{0},t_{0}\right)\right|\leq\left|\phi\left(x,t\right)-\phi\left(x,t_{0}\right)\right|+\left|\phi\left(x,t_{0}\right)-\phi\left(x_{0},t_{0}\right)\right|$$

טיפול במחובר ראשון: נשים לב שלכל x מתקיים $\phi_{t}\left(x,t\right)=f\left(x,t\right)$ לפי המשפט היסודי, ומכאן קיים M כך ש־ $\left|\phi_{t}\left(x,t\right)\right|\leq M$ ב־ R. ולכן לפי לגרנג' מקיים

$$\left|\phi\left(x,t\right)-\phi\left(x,t_{0}\right)\right|\leq M\left|t-t_{0}\right|$$

לכל x ולכל t.

טיפול במחובר שני: נשים לב, ש־ $\phi(x,t_0)=\int_c^{t_0} f(x,y)\,dy$ רציפה $[a,b]$ לפי משפט רציפות 1.
יהי $\epsilon>0$, קיימת $\delta>0$ כך שאם $(x,t)\in B((x_0,t_0),\delta)$ אזי $|\phi(x,t)-\phi(x,t_0)|<\epsilon$ ו־ $|\phi(x,t_0)-\phi(x_0,t_0)|<\epsilon$ לכן

$$|\phi(x,t)-\phi(x_0,t_0)|<2\epsilon$$

הערה: כשמוכיחים לבד, אפשר לקבל עוד הערכה של $|\phi(x,t)-\phi(x_0,t_0)|$:

$$|\phi(x,t)-\phi(x_0,t_0)|\leq|\phi(x,t)-\phi(x_0,t)|+|\phi(x_0,t)-\phi(x_0,t_0)|$$

מה הבעייה בהערכה זו?

14. תהי נתונה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & 0<y<x<1\\ -\frac{1}{y^2} & 0<x<y<1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

ב־ $[0,1]^2$. חשבו את $\int_0^1\int_0^1 f\,dxdy$ ואת $\int_0^1\int_0^1 f\,dydx$

<u>פתרון:</u>

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^y -\frac{dx}{y^2}+\int_y^1\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\,\Big|_{x=y}^{x=1}=-1$$

לכן $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy=-1$, ובאופן דומה $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy=1$.

הערה: זה לא סותר את משפט פוביני. שימו לב ש־ f אינה רציפה ב־ $[0,1]^2$, היא אפילו לא חסומה שם.