

קומבינטוריקה - תרגיל מס' 2

פתרון

תרגיל מס' 1

האם קיימת חברה בת 2 בחורים ו- 2 בחורות עם העדפות כאלו ששני הנישואים (כלומר, שתי האפשרויות להשיא את הבחורים לבחורות) הם יציבים?

תשובה: כן.

פתרון:

כיצד לקבל רמז לבניית חברה כזו? נתבונן על תרגיל 2 (גם אם לא פתרנו אותו עדיין). לפי תרגיל זה, אם ישנם בחור ובחורה המדרגים זה את זה בעדיפות ראשונה - אזי בכל נישואים יציבים, הם יינשאו זה לזה. לכן, כדי לדאוג שכל נישואים יהיו יציבים, אל לנו למלא אף משבצת בדירוג: 1, 1. נתבונן בטבלת ההעדפות הבאה:

m_1	w_1	w_2
m_2	w_2	w_1
w_1	m_2	m_1
w_2	m_1	m_2

הנישואים האפשריים בחברה זו הם:

1	2
$w_1 \longleftrightarrow m_1$	$w_1 \longleftrightarrow m_2$
$w_2 \longleftrightarrow m_2$	$w_2 \longleftrightarrow m_1$

בנישואים מס' 1 - כל אחד מן הגברים קיבל את העדפתו הראשונה, ולכן אף אחד מהם לא ירצה "לברוח".
בנישואים מס' 2 - כל אישה קיבלה את הגבר שבעדיפות הראשונה אצלה, ולכן אף אחת מהן לא תרצה "לברוח".
לכן, שני הנישואים הנ"ל - שהם כל הנישואים האפשריים בחברה זו - יציבים.
הערה: ניתן לבדוק את יציבות הנישואים ע"י הפעלת אלגוריתם $G - S$ בשני האופנים וקבלת שני הנישואים הנ"ל.

משל

שאלה למחשבה:

כמה נישואים שונים (לאו דווקא יציבים) אפשריים בחברה בת n בחורים ו- n בחורות?

תרגיל מס' 2

נתונה חברה בת n בחורים ו- n בחורות, ובה בחור b המדרג את הבחורה g ראשונה, כך שגם g מדרגת את b ראשון. הוכח, שבכל נישואים יציבים, b ו- g נשואים זה לזה.

הוכחה א':

נניח כי קיימים נישואים יציבים, בהם b ו- g אינם נשואים זה לזה. נניח, לכן, כי b נשוי לבחורה $g_1 \neq g$ וכי g נשואה לבחור $b_1 \neq b$.
הבחור b מעדיף את הבחורה g בעדיפות ראשונה, ז"א על פני כל שאר הבחורות - ובפרט הוא מעדיף אותה על פני g_1 , לה שודך.
הבחורה g מעדיפה את הבחור b בעדיפות ראשונה, ז"א על פני כל שאר הבחורים, ובפרט היא מעדיפה אותו על פני b_1 , לו שודכה.
ז"א, b ו- g ישאפו לברוח ביחד, ובכך לפרק את כל הנישואים. זאת, בסתירה להנחה כי נישואים אלו יציבים.
לכן, בכל נישואים יציבים b ו- g נשואים זה לזה.

משל

הוכחה ב':

נפעיל את אלגוריתם $G - S$ בשני אופנים. כאשר הבחורים מחזרים - הבחור b יילך בערב הראשון לבחורה g ויישאר שם עד לסוף התהליך, כיוון שהיא מעדיפה אותו על פני כל שאר הבחורים. בסופו של התהליך, לכן,

$b - 1$ ו- g יינשאו זה לזו. כאשר הבחורות מחזרות, תלך הבחורה g בערב הראשון לבחור b ותישאר שם עד הסוף - כיוון שהוא מעדיף אותה על פני כל שאר הבחורות. גם כאן, ישודכו $b - 1$ ו- g .
 כעת, ניזכר בתכונה הבאה של הנישואים המתקבלים מאלגוריתם $G - S$, כפי שנלמדה בכיתה: בהפעלת $G - S$, כאשר הבחורים מחזרים, כל בחור מקבל את הבחורה הטובה לו ביותר מבין כל הבחורות שיקבל בנישואים יציבים כלשהם. כמו כן, כאשר הבחורות מחזרות - כל בחורה מקבלת את הבחור העדיף לה ביותר מבין כל הבחורים שתקבל בנישואים יציבים כלשהם, וגם - כל בחור מקבל את הבחורה העדיפה לו פחות מבין כל הבחורות שיקבל בנישואים יציבים כלשהם. (משפט מורכב מעט, עיצרו לרגע להבין אותו עד הסוף).
 כיוון שבשתי הפעלות האלגוריתם - הבחור b שודך לבחורה g , הרי שהיא בו זמנית העדיפה לו ביותר וגם העדיפה לו פחות, בהשוואה לכל הבחורות שיקבל בנישואים יציבים כלשהם. מכאן, המסקנה היא שבכל נישואים יציבים, b משודך ל- g . (נסו לנסח זאת באופן פורמלי).

משל

טעות נפוצה בפתרון שאלה זו:

רבים הראו שבשתי הפעולות של אלגוריתם $G - S$, הבחור b משודך ל- g (כפי שנכתב כאן בהוכחה ב') - אך סיימו בזאת. בעצם, מה שהראו הוא, ש- b משודך ל- g בכל הנישואים היציבים המתקבלים באלגוריתם $G - S$. ומה עם יתר הנישואים היציבים, אם יש כאלה? בחברה עם העדפות, ייתכנו יותר משני נישואים יציבים שונים, ובמקרה שיש יותר משניים - אלגוריתם $G - S$ נותן לנו רק שניים כאלה.

תרגיל מס' 3

נתונה חברה בת 4 בחורים 1, 2, 3, 4 ו- 4 בחורות A, B, C, D עם ההעדפות הבאות:
 העדפות של הבחורות:

A	4	2	1	3
B	2	1	3	4
C	3	4	2	1
D	2	3	4	1

העדפות של הבחורים:

1	D	B	C	A
2	B	D	C	A
3	B	A	C	D
4	A	B	D	C

א. בצע את האלגוריתם של $Gale - Shapley$ בו הבחורים מחזרים אחרי הבחורות ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

ב. בצע את האלגוריתם האנלוגי, שבו הבחורות הן המחזרות אחרי הבחורים, ומצא לאילו נישואים הוא מוביל.

פתרון:

א. הרצת האלגוריתם נותנת:

	1st night	1st night	2nd night	2nd night	3rd night
A	4	4	4, 3	4	4
B	2, 3	2	2	2	2
C					3
D	1	1	1	1	1
out		3		3	

לכן הנישואים היציבים המתקבלים הם $A - 4, B - 2, C - 3, D - 1$.

ב. הרצת האלגוריתם נותנת:

	1st night	1st night	2nd night	2nd night	3rd night	3rd night	4th night
1							D
2	B, D	B	B	B	B	B	B
3	C	C	C, D	C	C	C	C
4	A	A	A	A	A, D	A	A
out		D		D		D	

לכן הנישואים היציבים המתקבלים הם $A - 4, B - 2, C - 3, D - 1$.