

תרגיל בית מספר 10 – 9, אינפי 2 30.12.2015

1. תנו דוגמה לפונקציה $f(x, y)$ רציפה בכל נקודה, גזירה לפי x ולפי y ב- $(0, 0)$, אבל לא דיפרנציאבילית שם.
2. תנו דוגמה לפונקציה $f(x, y)$ רציפה בכל נקודה, גזירה ב- $(0, 0)$ בכיוון $(1, 1)$ (שפירושו גם ש- $\frac{\partial f}{\partial(1,1)} = -\frac{\partial f}{\partial(-1,1)}$), אבל לא דיפרנציאבילית שם.
3. חשבו את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2y}$ בכיוון $(1, 2)$ ב- $(0, 0)$.
4. הוכיחו לפי ההגדרה של "שטח 0" ושל האינטגרל הכפול שאם פונקציה $f(x, y)$ היא חסומה בתחום D בעל שטח 0, אז $\int_D f(x, y) = 0$.
5. הוכיחו שלכל תחום D במישור $\int_D 1$ הוא השטח של D (אם האינטגרל הזה קיים). השתמשו בהגדרת האינטגרל כנפת. השתמשו בעובדה הזאת כדי לחשב את שטח האליפסה $\{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 25\}$. לשם כך החליפו קואורדינטות: $2x = r \cos \theta$, $3y = r \sin \theta$.
6. חשבו את שטח התחום המוגדר על ידי $\{(x, y, z) \mid |x| + |y| \leq 1, z = 2x + 3y\}$. האם זה יותר או פחות מן השטח של הריבוע $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$? פי כמה?
7. חשבו את שטח התחום המוגדר על ידי $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2, z = \frac{x}{2} + 4\}$ (זהו חלק של מישור, שמוגבל על ידי החרוט $x^2 + y^2 = z^2$. מהי הצורה שלו?).
8. חשבו את שטח התחום $\{(x, y) \mid 2 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 3x\}$ בעזרת החלפת קואורדינטות.
9. לנקודה (x, y) במישור נסמן (כמקובל) ב- \vec{r} את הוקטור (x, y) (כמובן, הוקטור תלוי בנקודה, תלות שלא מופיעה בסימון הזה).
כאשר עושים החלפת קואורדינטות $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ מסמנים ב- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ את הוקטור $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u})$, וב- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ את הוקטור $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v})$.
א. הסבירו כמיטב יכולתכם את המשמעות הגיאומטרית של שני הוקטורים האלה.
ב. כתבו את $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ ואת $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ במקרה של קואורדינטות קטביות.
ג. החלפת משתנים $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ נקראת "אורתוגונלית" אם $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ ו- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ניצבים לכל (u, v) . הוכיחו שההחלפה בקואורדינטות קטביות היא אורתוגונלית.
ד. הוכיחו שאם החלפה $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ היא אורתוגונלית אז $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\| \times \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$. הראו שהדבר אכן נכון בקואורדינטות קטביות.
ה. תנו דוגמה להחלפת קואורדינטות ליניארית שהיא אורתוגונלית, ואינה זהות או מינוס זהות. תנו גם דוגמה להחלפה ליניארית שאינה אורתוגונלית. איך נקראת החלפת קואורדינטות ליניארית עם דטרמיננט ± 1 ?

10.