מבוא למרחבים מטריים וטופולוגיים - תרגול 7

1 בסיס לטופולוגיה

הגדרה 1.1 בסיס לטופולוגיה היא קבוצה $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת:

1. לכל $x \in X$ קיים $B \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in B$

2. לכל $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ולכל $x \in B_1 \cap B_2$ קיים $B \in \mathcal{B}$ כך ש-$x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

אם $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ מקיים את האקסיומות הנ"ל אז האוסף הבא הוא הטופולוגיה ש-$\mathcal{B}$ מגדיר:

$$\tau = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \mid \{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

תהי $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, אז הטופולוגיה שנוצרת ע"י תת הבסיס S היא הטופולוגיה הנוצרת ע"י הבסיס הבא:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid \forall n \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n,\ A_i \in S \right\}$$

(החיתוכים הסופיים של S)
את הטופולוגיה הנוצרת באופן הזה נסמן $\tau(S)$.

2 ההוכחה של פורסטנברג (Fürstenberg) לאינסופיות הראשוניים

משפט 2.1 ב-$\mathbb{Z}$ יש אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: לכל $a \in \mathbb{Z}$ ו-$d \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_{a,d} = \{a + dn \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = a\,(mod\,d)\}$$

1. $\mathcal{B} = \{A_{a,d} \mid a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N}\}$ מהווה בסיס לטופולוגיה:

(א) הקבוצה $\mathbb{Z} \in \mathcal{B}$

(ב) אם $A_{a,d}, A_{b,e} \in \mathcal{B}$ ו-$x \in A_{a,d} \cap A_{b,e}$ אז מתקיים $x \in A_{x,d\cdot e} \subset A_{a,d} \cap A_{b,e}$ (כי כל האיברים שמקיימים $= x(\operatorname{mod} d \cdot e)$ מקיימים גם $= a(\operatorname{mod} d)$ וגם $(= b(\operatorname{mod} e)$

נסמן ב-τ את הטופולוגיה הנוצרת ע"י $\mathcal{B}$

2. כל קבוצה ב-$\mathcal{B}$היא גם סגורה:
נקח $A_{a,d} \in \mathcal{B}$, נשים לב ש-

$$\begin{aligned} A_{a,d} &= \{x \,|\, x = a \,(\operatorname{mod} d)\} \\ &= \{x \,|\, x \neq a \,(\operatorname{mod} d)\}^c \\ &= \left(\bigcup_{b \neq a \,(\operatorname{mod} d)} A_{b,d} \right)^c \end{aligned}$$

3. נניח בשלילה שקיימים רק מספר סופי של ראשוניים $p_1, ..., p_n$. כל מספר פרט ל-$\{\pm 1\}$ מתחלק באחד מ-$p_1, ..., p_n$ ולכן נמצא בקבוצה:

$$\{\pm 1\}^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_{0,p_i}$$

כל אחת מ-A_{0,p_i} היא סגורה, ואיחוד סופי של סגורות הוא סגור, לכן $\{\pm 1\}^c$ היא סגורה. ולכן $\{\pm 1\}$ היא פתוחה, לכן ניתנת לייצוג כאיחוד סופי של איברי בסיס, סתירה (כי הקבוצה $\{\pm 1\}$ סופית וכל אחד מאיברי הבסיס הוא קבוצה בעלת אינסוף איברים)

■

3 טופולוגיית המכפלה וטופולוגיית הקופסה

מטרה: בהינתן אוסף של מרחבים טופולוגיים $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, נרצה להגדיר טופולוגיה על המכפלה הקרטזית $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

3.1 טופולוגיית המכפלה למספר סופי של מרחבים

ראינו שאם $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ מרחבים מטריים, ניתן להגדיר מטריקה (ולכן טופולוגיה) על המכפלה $(X_1 \times X_2, d)$ על ידי

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

הכדורים במטריקה הזאת הם מהצורה:

$$B_d((x_1, x_2), \epsilon) = B_{d_1}(x_1, \epsilon) \times B_{d_2}(x_2, \epsilon)$$

מהעובדה הזאת נקבל שהאוסף

$$\{U_1 \times U_2 \,|\, U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה τ, כאשר τ_1, τ_2, τ הן הטופולוגיות המושרות מהמטריקות על X_1, X_2, X בהתאמה.

לכן באופן טבעי עבור מספר סופי של מרחבים טופולוגיים נגדיר:

הגדרה 3.1 יהיו $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ מרחבים טופולוגיים. טופולוגיית המכפלה על $X_1 \times \ldots \times X_n$ היא הטופולוגיה הנוצרת על ידי הבסיס

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \ldots \times U_n \,|\, U_i \in \tau_i\}$$

תרגיל: $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה.

3.2 טופולוגיית הקופסה

אם ננסה להכליל באופן נאיבי את ההגדרה הזאת לאוסף כלשהו (לא בהכרח סופי) של מרחבים $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, נוכל להגדיר

$$\mathcal{B}_{\mathrm{box}} = \left\{ \prod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \,|\, U_\alpha \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda \right\}$$

הטופולוגיה שנוצרת על ידי הבסיס הזה נקראת טופולוגיית הקופסה τ_{box} על $\prod_\alpha X_\alpha$.

זאת לא הטופולוגיה שנרצה לעבוד איתה, כי למשל ההעתקה

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathrm{Eucl}}) &\to \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}, \tau_{\mathrm{box}} \right) \\ x &\mapsto (x, x, \ldots) \end{aligned}$$

(העתקת האלכסון מ-$\mathbb{R}$ למכפלה בת מנייה אינסופית של עותקים של $\mathbb{R}$ עם טופ-ולוגיית הקופסה) אינה רציפה. כדי להוכיח זאת נסתכל על הקבוצה $U = \prod_n \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. U היא קבוצת בסיס, ולכן בפרט פתוחה. אך התמונה ההפוכה שלה $f^{-1}(U) = \{0\}$ אינה פתוחה ב-$\mathbb{R}$.

3.3 טופולוגיית המכפלה

עבור $\beta \in \Lambda$ נסמן ב-π_β את העתקת ההטלה $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta$. טופולוגיית המכפלה על $\prod_\alpha X_\alpha$ היא הטופולוגיה המוגדרת על ידי תת הבסיס

$$S = \left\{ \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \,|\, \beta \in \Lambda, U_\beta \in \tau_\beta \right\}$$

נשים לב שעבור $A_\alpha \subset X_\alpha$ מתקיים:

$$\prod_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(A_\alpha)$$

לכן עבור מכפלה סופית $X_1 \times \ldots \times X_n$ הבסיס שמוגדר על ידי S (חיתוכים סופיים של איברי S) הוא בדיוק הבסיס שהגדרנו לטופולוגיית המכפלה. בעוד שאם נחזור לדוגמה של $\prod_n \mathbb{R}$ הבסיס שנקבל מ-S הוא אוסף כל הקבוצות מהצורה

$$U = U_1 \times \ldots \times U_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

לכל n ולכל $U_i \subseteq \mathbb{R}$ פתוחות $i = 1, \ldots, n$.
תרגיל: בדקו שהפונקציה f שהגדרנו היא רציפה במקרה הזה.