פתרון
לוגיקה מתמטית - תרגיל 3

1. א. $A_1 = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_4) \vee (p_2 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_4) \vee (p_3 \wedge p_4)$

ב.
$$\begin{aligned} A_2 = \ & (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4) \ \vee \ (p_1 \wedge p_3 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_4) \ \vee \\ & (p_1 \wedge p_4 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \ \vee \ (p_2 \wedge p_3 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_4) \ \vee \\ & (p_2 \wedge p_4 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3) \ \vee \ (p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \end{aligned}$$

ג. $A_3 = (p_1 \equiv p_2) \equiv (p_3 \equiv p_4)$

2. ע"י שימוש כפול במשפט הדדוקציה רואים שדי להראות כי $\{\neg p \to \neg q, q\} \vdash p$.
הנה הוכחה של p מתוך $\{\neg p \to \neg q, q\}$:

(1)	$(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$	$(A3)$
(2)	$\neg p \to \neg q$	הנחה
(3)	$(\neg p \to q) \to p$	ניתוק רישא $(1),(2)$
(4)	$q \to (\neg p \to q)$	$(A1)$
(5)	q	הנחה
(6)	$\neg p \to q$	ניתוק רישא $(4),(5)$
(7)	p	ניתוק רישא $(3),(6)$

3.

א. תהי $B_1, B_2, \ldots, B_m = A$ הוכחה של A במערכת $\mathcal{L}_{-3}$. נוכיח באינדוקציה על i כי עבור $i = 1, \ldots, m$, B_i^+ הוא טאוטולוגיה, ובכך נסיים כי $B_m = A$. נתבונן ב־ B_i כלשהו. קיימות שתי אפשרויות:

i. B_i אקסיומה

ii. B_i נובע מפסוקים קודמים ע"י כלל היסק.

במקרה i, גם B_i^+ אקסיומה (כי אם B_i מתקבל מהצבת פסוקים כלשהם באחת הסכמות $(A1),(A2)$, אז B_i^+ מתקבל מהצבת ה־+־ים של אותם פסוקים באותה סכמה). ראינו שכל אקסיומה היא טאוטולוגיה, לכן B_i^+ טאוטולוגיה.

במקרה ii, קיימים $j,k < i$ כך ש־ $B_j = B_k \to B_i$. אז $B_j^+ = B_k^+ \to B_i^+$. לפי הנחת האינדוקציה B_j^+, B_k^+ טאוטולוגיות, ולכן, לפי תרגיל קודם, B_i^+ טאוטולוגיה.

ב. די להצביע על פסוק A שהוא טאוטולוגיה, כך ש־ A^+ איננו טאוטולוגיה (כי אז ינבע מחלק א' כי A איננו יכיח במערכת $\mathcal{L}_{-3}$).
דוגמה לפסוק כזה: $(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$.

4.

(1)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	$(A2)$
(2)	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	$(A1)$
(3)	$B \to C$	הנחה
(4)	$A \to (B \to C)$	ניתוק רישא $(2), (3)$
(5)	$(A \to B) \to (A \to C)$	ניתוק רישא $(1), (4)$
(6)	$A \to B$	הנחה
(7)	$A \to C$	ניתוק רישא $(5), (6)$