אלגוריתמים קומבינטוריים
סיכומים של תרגילי כיתה מסמסטרים קודמים בנושאי
סימונים ונוסחאות נסיגה

1. סימוני $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $o(g(n))$, $\omega(g(n))$.

(א) הגדרות:

- $f(x) = O(g(x))$ אם קיימים קבועים $c > 0, N > 0$ כך ש- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ לכל $n \geq N$. (רעיונית $g(n)$ הוא חסם עליון החל מ-N לאחר תיקון של $g(n)$ על ידי הכפלה בקבוע c.)
- $f(x) = \Omega(g(x))$ אם קיימים קבועים $c > 0, N > 0$ כך ש- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ לכל $n \geq N$. (רעיונית $g(n)$ הוא חסם תחתון החל מ-N לאחר תיקון של $g(n)$ על ידי הכפלה בקבוע c.)
- $f(x) = \Theta(g(x))$ אם קיימים קבועים $c > 0, C > 0, N > 0$ כך ש- $0 \leq cg(n) \leq f(n) \leq Cg(n)$ לכל $n \geq N$. (רעיונית היחס בין הפונקתיות, $\frac{f(n)}{g(n)}$ נמ-צאת בקטע קבוע החל מ-N.)
- $f(x) = o(g(x))$ אם לכל קבוע $c > 0$ קיים קבוע $N > 0$ כך ש- $0 \leq f(n) < cg(n)$ לכל $n \geq N$. (רעיונית $g(n)$ הוא חסם עליון לכל c החל מ-N מתאים. הגדרה אלטרנטיבית הוא ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.)
- $f(x) = \omega(g(x))$ אם לכל קבוע $c > 0$ קיים קבוע $N > 0$ כך ש- $0 \leq cg(n) < f(n)$ לכל $n \geq N$. (רעיונית $g(n)$ הוא חסם תחתון לכל c החל מ-N מתאים. אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ אם הגבול קיים.)

(ב) תרגיל: הוכח עבור $k \geq 0$ ש- $\sum_{t=1}^{n} t^k = \Theta(n^{k+1})$.

(ג) דוגמאות חשובות:

- $n^\alpha = O(n^\beta)$ אם"ם $\alpha \leq \beta$ (בהנחה ש- $\alpha, \beta > 0$).
- $n^\alpha = o(n^\beta)$ אם"ם $\alpha < \beta$ (בהנחה ש- $\alpha, \beta > 0$).
- $n^\alpha = o(c^n)$ לכל $\alpha > 0, c > 1$.
- $\log_b n = o(n^\alpha)$ לכל $\alpha > 0, b > 1$.
- $\log_a n = O(\log_b n)$ לכל $a, b > 1$.
- $c^n = O(d^n)$ עבור $c, d > 0; d \geq c$.
- $c^n = o(d^n)$ עבור $c, d > 0; d > c$.

(ד) סולם הסיבוכיות:

- n^n.
- $n!$.
- c^n ($c > 1$).
- $2^{(\log n)^k}$.
- n^k ($k > 1$).
- $n \log n$.
- n^k ($0 < k \leq 1$).
- $(\log n)^k$ ($k > 0$).
- $\log \log n$.
- 1.

(ה) כללים שימושיים:

- $o(f) \subseteq O(f)$.
- אם $f = o(g)$ אז $O(f) \subseteq o(g)$.
- אם $f = O(g)$ אז $o(f) \subseteq o(g)$.
- אם $f = O(g)$ אז $f + g = O(g)$.
- אם $f = O(f'), g = O(g')$ אז $f \cdot g = O(f' \cdot g')$.
- אם $f(n) \geq d > 0 \forall n \geq N$ עבור d, N קבועים אזי $kf(n) + c = O(f)$ לכל קבועים k, c.
- מתקיים טרנסיטיביות עבור כל חמשת הסימונים.
(למשל, אם $f(n) = O(g(n))$ ו- $g(n) = O(h(n))$ אז $f(n) = O(h(n))$.)
- $f(n) = \Theta(g(n))$ אם"ם $g(n) = \Theta(f(n))$.
- $f(n) = O(g(n))$ אם"ם $g(n) = \Omega(f(n))$.
- $f(n) = o(g(n))$ אם"ם $g(n) = \omega(f(n))$.

2. נוסחאות נסיגה.

(א) דוגמאות פשוטות:

- $$f(n) = \begin{cases} nf(n-1), & n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$
- $$f(n) = \begin{cases} 2f(n-1), & n > 1 \\ 2, & n = 1 \end{cases}$$
- $$f(n) = \begin{cases} n + f(n-1), & n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

(ב) משפט שימושי: יהיו $a, b \geq 1$ קבועים,ו- $f(n)$ פונקציה. יהי $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ מוגדר על המספרים הטבעיים. אזי:

- אם $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ עבור $\epsilon > 0$ קבוע אזי $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$.
- אם $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ אזי $T(n) = \Theta(n^{log_b a} \log n)$.
- אם $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ עבור $\epsilon > 0$ קבוע ואם $af(n/b) \leq \gamma f(n)$ עבור קבוע $\gamma < 1$ ו- n מספיק גדול אזי $T(n) = \Theta(f(n))$.
- יש פונציות $f(n)$ שאינן שייכות לאחד מהמקרים הנ"ל - ועבורם המשפט אינו נותן תוצאה!

(ג) תרגיל: פתור את נוסחת הנסיגה: $T(n) = \begin{cases} n + cT(n/2), & n \geq 2 \\ 1, & n < 2 \end{cases}$.

הערה: בסימוני המשפט השימושי $a = c$, $b = 2$, $f(n) = n$.

(ד) תמצית הפתרון: נניח כי $2^k \leq n < 2^{k+1}$ כלומר $k = \lfloor \log_2 n \rfloor \leq \log_2 n < k + 1$ כאשר $k \geq 1$ שלם. זה מאפשר הפעלת נוסחת הנסיגה בדיוק k פעמים עד שמגיעים לתנאי השפה כי $\frac{2^k}{2^{k-1}} = 2 \geq \frac{n}{2^{k-1}}$ אך $2 = \frac{2^{k+1}}{2^k} < \frac{n}{2^k}$. אזי:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + cT(\frac{n}{2}) = \left(\frac{c}{2}\right)^0 n + c^1 T(\frac{n}{2}) \\
&= n + c(\frac{n}{2} + cT(\frac{n}{2})) = \left(\frac{c}{2}\right)^0 n + \left(\frac{c}{2}\right)^1 n + c^2 T(\frac{n}{4}) \\
&= \left(\frac{c}{2}\right)^0 n + \left(\frac{c}{2}\right)^1 n + \left(\frac{c}{2}\right)^2 n + c^3 T(\frac{n}{2^3}) \\
&\vdots \\
&= \left[\sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{c}{2}\right)^t n\right] + c^k T(\frac{n}{2^k}) \\
&= \left[n \sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{c}{2}\right)^t\right] + c^k
\end{aligned}
$$

- עבור $c = 2$ נקבל

$$.T(n) = kn + 2^k = n\lfloor \log_2 n \rfloor + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} = \Theta(n \log n)$$

- המקרה $c = 2$ מתאים למקרה השני במשפט כי $f(n) = n = \Theta(n^{\log_2 2}) = \Theta(n)$. (וקיבלנו את התוצאה הצפויה.)
- כאשר $c \neq 2$ ניתן להעזר בשיוון $(1 + x + \cdots + x^{k-1})(x-1) = x^k - 1$ עבור $x = c/2$ ולחלק ב- $x - 1$ לקבל

$$.T(n) = \frac{(c/2)^k - 1}{(c/2) - 1}\, n + c^k$$

- במקרה ש- $c < 2$ הסדרה $\left\{\sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{c}{2}\right)^t\right\}_{k=1}^{\infty}$ עולה ומתכנסת למספר סופית $c' = \frac{1}{1-(c/2)}$ ו-

$$c^k = c^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leq c^{\log_2 n} = n^{\log_2 c} < n \qquad (n \geq 2)$$

ולכן לכל $n \geq 2$ מתקיים $T(n) \leq c'n + n = (c'+1)n$ כלומר $T(n) = O(n)$. כבר מהביטוי הראשון בנסיגה הראשונה ברור כי $T(n) \geq n$ מכיון שכל הגורמים בסכום אי-שליליים. לסיכום $T(n) = \Theta(n)$ במקרה הזאת.

- המקרה $c < 2$ מתאים למקרה השלישי במשפט כי במקרה זה $\log_2 c < 1$ ולכן קיים $\epsilon > 0$ שעבורו $\epsilon + \log_2 c < 1$ וממילא $f(n) = n = \Omega(n^{(\log_2 c)+\epsilon})$. נבדוק כאן את התנאי הנוסף כאשר ניקח $\gamma = c/2$:

$$\gamma f(n) = (c/2)n = c(n/2) = af(n/b)$$

ולכן התנאי הנוסף מתקיים לכל n. המשפט אומרת כאן ש- $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n)$.

- המקרה $c > 2$ מתאים למקרה הראשון במשפט כי במקרה זה $\log_2 c > 1$ ולכן קיים $\epsilon > 0$ שעבורו $-\epsilon + \log_2 c > 1$ וממילא $f(n) = n = O(n^{(\log_2 c)-\epsilon})$. לכן המשפט אומרת שבמקרה זאת $T(n) = \Theta(n^{\log_2 c})$.

נשים לכ ש- $c^k = \Theta(n^{\log_2 c})$ כי:

$$\begin{aligned} c^k &= c^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \le c^{\log_2 n} = n^{\log_2 c}, \\ c^k &= c^{\lfloor \log_2 n \rfloor} > c^{(\log_2 n)-1} = \frac{1}{c}c^{\log_2 n} = \frac{1}{c}n^{\log_2 c}. \end{aligned}$$

בנוסף אם נגדיר $\alpha = \dfrac{1}{(c/2)-1}$ נראה

$$\begin{aligned} \frac{(c/2)^k - 1}{(c/2)-1} &\le \frac{(c/2)^k}{(c/2)-1} \le \alpha\left(\frac{c}{2}\right)^k = \alpha\left(\frac{c}{2}\right)^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \\ &\le \alpha\left(\frac{c}{2}\right)^{\log_2 n} = \alpha n^{\log_2 (c/2)} = \alpha n^{(\log_2 c)-1} \end{aligned}$$

ולכן

$$\frac{(c/2)^k - 1}{(c/2)-1} n = O(n^{\log_2 c}).$$

ביחד נקבל ש- $T(n) = \Theta(n^{\log_2 c})$ כמו שהמשפט אומרת.