אלגברה ב־גליון 5

שניר הורדן 205689581

13 ביוני 2018

.3

נוכיח שזו אכן מכפלה פנימית, אנחנו מעל $\mathbb{R}$ לכן נבדוק רק את המרכיבים כדלהלן:
נסמן

$$p = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$q = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$z = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

1. לינאריות ברכיב הראשון־

$$(\alpha p + q, z) = (\alpha a_0 + b_0) c_0 + (\alpha (a_2 + a_1 + a_0) + b_0 + b_1 + b_2) (c_2 + c_1 + c_0) + $$

$$... + (\alpha (4a_2 + 2a_1 + a_0) + 4b_0 + 2b_1 + b_2) (4c_2 + 2c_1 + c_0) = \alpha a_0 c_0 + b_0 c_0 + ...$$

$$...+\alpha (a_2 + a_1 + a_0) (c_2 + c_1 + c_0)+(b_0 + b_1 + b_2) (c_2 + c_1 + c_0) ... = \alpha (p, z)+(q, z)$$

2.סימטריות־ צ.ל. $(p, q) = (q, p)$לפי קומטטיביות בכפל זה מתקיים
3. חיוביות לחלוטין־ צ.ל. $(p, p) > 0$ לכל $p \neq 0$.

$$(p, p) = a_0^2 + (a_0 + a_1 + a_2)^2 + (4a_0 + 2a_1 + a_2)^2$$

זה סכום של ריבועים אזי אם קיים מקדם כלשהו שאינו 0 הביטוי יהיה חיובי.
א.
נתבונן בטרנספורמציה $L(p(x)) = p(t)$ עבור $t \in \mathbb{R}$. נזכור כי מתקיים $\langle p, q\rangle = p(0) q(0) + p(1) q(1) + p(2) q(2)$וזו מ"פ על V. לפי משפט כל $q_0 \in \mathbb{R}_2[x]$ מגדיר פונקציונל $f_{q_0}(p) = \langle p, q_0\rangle$.
נמצא בסיס $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ עבורו מתקיים
$\langle q_i, p_j\rangle = \delta_{ij}$ $(p_i, q_i \in \mathbb{R}_2[x])$ או $p_i(t_j) = \delta_{ij}$.$(t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq 3)(*)$

נגדיר $W=\{p(x)\in V \quad | \quad p(1)=p(2)=0\}$. אזי נמצא תת־בסיס המקיים $(*)$ $W=span\left\{\frac{x(x-1)}{0+1},\frac{x(x-2)}{0+2}\right\}$. אזי $B_1=\left\{\frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)},\frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)}\right\}$.
נשלים לבסיס <u>א"נ</u> B של V כולו: $B=\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\right\}\cup B_1$.
הפולינומים הם בהכרח אורתוגונלים מהדרישה $(*)$ ופורשים את V כי הם שלושה וקטורים בת"ל ($\dim(V)=\dim(B)$).
ב.
נשים לב שמתקיים

$$p(x)=\sum_{i=1}^{3}\langle p(x),p_i(x)\rangle p_i(x)=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{part.\quad case} p(x)=p(0)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+p(1)\frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)}+p(2)\frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

<u>נימוק:</u> כאשר מבצעים את המ"פ $\langle p(x),p_i(x)\rangle$ כל הגורמים פרט ל־$p_i(i-1)$ מתאפסים והוא נהיה 1. ואז כופלים באיבר בבסיס.
<u>למה:</u> יהא V מרחב וקטורי ותהא T העתקה לינארית. אז אם B הוא בסיס אורתונורמלי של V אז מתקיים $([T]_B)_{ij}=$
כאשר

$$[P_W(p(x))]_B=\left[\begin{pmatrix}0\\p(1)\\p(2)\end{pmatrix}\right]_B\Rightarrow[P_W]_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&&\\0&&\end{pmatrix}$$

P_w הטלה לכן צורת גורדן היא $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Q^{-1}[P_W]_BQ$ עבור Q המורכבת מעמודות $\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}$(העמודה ה־$i$־ית, $p(i-1)\neq 0$).
ג. נזכור כי מתקיים $\mathbb{I}=P_{W_\perp}\oplus P_W$. אזי $p(x)=P_W(p(x))+P_{W_\perp}\Rightarrow||p(x)-P_{W_\perp}(p(x))||=||P_W(p(x))||$.
$[p(x)]_E=\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$ $P_w(p(x))=[P_W]_B[p(x)]_B$. $[p(x)]_B=P_{B\to E}[(p(x))]_E$. נחשב:
נקבל

$$P_w(p(x))=\left[\begin{pmatrix}0\\p(1)\\p(2)\end{pmatrix}\right]_B=p(1)\frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)}+p(2)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\Rightarrow P_W\left(x^2-3x+7\right)$$

$$=5\frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)}+5\frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)}=$$

נזכור $\sqrt{\langle x,x\rangle} = ||x||$. אזי

$$||P_W\left(p\left(x\right)\right)|| = \sqrt{\langle p\left(x\right), p\left(x\right)\rangle} = \sqrt{p\left(0\right)^2 + p\left(1\right)^2 + p\left(2\right)^2} = \sqrt{0^2+5^2+5^2} = \sqrt{50}$$

.4