חשבון אינפיניטסימלי חורף 2016-2017

תרגיל בית מס' 6

הערה - בתרגיל להלן נשתמש בסימונים הבאים:
$\bar{n}$ ייצג הנורמל הטבעי למשטח (המושרה מהפרמטריזציה)
$\nabla\times = curl$
$\nabla\cdot = div$
$\oint$ אינטגרל מסלולי באוריינטציה חיובית.
$\iint_S$ אינטגרל משטחי על S.
$\iiint_M$ אינטגרל נפחי על M.

חובת ההגשה היא על 4 שאלות מתוך התרגיל: שאלות 3,4,5 + אחת נוספת לבחירתכם.

שאלה 1

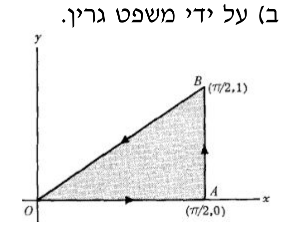
מצאו שטח התחום החסום על ידי העקום $x^3+y^3=3xy$
הדרכה: נקבע $y=tx$, אז נוכל להגדיר פרמטריזציה לעקום:
$0<t<\infty \quad y(t)=\frac{3t^2}{1+t^3} \quad x(t)=\frac{3t}{1+t^3},$
כדי לחשב השטח השתמשו בתבנית $\omega=\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}x^2(y/x)'dt$.
במקרה הנוכחי $y/x=t$, והתבנית שווה $\frac{1}{2}x^2dt$.

שאלה 2

נניח ϕ ו-A,B פונקציה ושדות וקטורים חלקים בהתאמה. הוכיחו הזהויות:
א) $\nabla\cdot(\phi A)=(\nabla\phi)\cdot A+\phi(\nabla\cdot A)$
ב) $\nabla\times(\phi A)=(\nabla\phi)\times A+\phi(\nabla\times A)$
ג) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$
ד) $\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$
ה) $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)$

שאלה 3

חשבו $\oint_C (y-\sin(x))dx+\cos(x)dy$ כאשר C הינו המשולש בשרטוט להלן
א) בחישוב ישיר.
ב) על ידי משפט גרין.



שאלה 4

נסמן ב-S את החצי העליון של הספירה $x^2+y^2+z^2=1$ (זהו משטח)
וב-C את עקום השפה שלו. על פי משפט סטוקס $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{x}=\iint_S(\nabla\times\bar{F})\cdot\bar{n}dA$.
וודאו כי השוויון הנ"ל אכן מתקיים בחישוב ישיר עבור השדה:
$\bar{F}=(2x-y,-yz^2,-y^2z)$.

שאלה 5

יהא M התחום הכלוא בין המשטחים $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=3$ (צילינדר).
יהא $\bar{F}=(4x,-2y^2,z^2)$ שדה וקטורי. וודאו באופן ישיר את משפט הדיברגנץ:

$\iiint_M \nabla \cdot \bar{F} dV = \iint_{\partial M} (F \cdot \bar{n}) dA$

שאלה 6

תהא ϕ פונקציה סקלרית חלקה על ־3 יריעה M.
א) הוכיחו הזהות $\iiint_M (\nabla\phi) dV = \iint_{\partial M} \phi \bar{n} dA$
רמז : השתמשו במשפט הדיברגנץ עם שדה $\bar{F} = \phi\bar{C}$ כאשר $\bar{C}$ וקטור קבוע,
יחד עם זהות (א) בשאלה 2.
ב) הוכיחו הזהות $\iiint_M (\nabla \times \bar{A}) dV = \iint_{\partial M} (\bar{n} \times \bar{A}) ds$
רמז : השתמשו במשפט הדיברגנץ עם שדה $\bar{F} = A \times \bar{C}$ כאשר $\bar{C}$ וקטור קבוע,
יחד עם זהות (ה) בשאלה 2.

שאלה 7

הוכיחו משפט הדיברגנץ במישור:
$\int_D (M_x + N_y) dx dy = \int_{\partial M} (M, N) \cdot n ds$