שאלה 1:

א. כאמור, מתקיים על פי הגדרה:

$$F_X(a)=P(X\le a)=P(\omega\in\Omega|X(\omega)\le a)=\begin{cases}P\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup[1-a,1]\right) & 0\le a\le\frac{1}{2}\\ 0 & a<0\\ 1 & a>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{F_X(a)=\begin{cases}\frac{1}{2}+a & -\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}\\ 0 & a<-\frac{1}{2}\\ 1 & a>\frac{1}{2}\end{cases}}$$

ב. נחשב על פי הגדרה:

$$F_X(a)=P(X\le a)=P(\omega\in\Omega|\mathrm{X}(\omega)\le \mathrm{a})=\begin{cases}P([e^{-a},1]) & a>0\\ 0 & a\le 0\end{cases}$$

$$\boxed{F_X(a)=\begin{cases}1-e^{-a} & a>0\\ 0 & a\le 0\end{cases}}$$

ג. נחשב על פי הגדרה:

$$F_X(a)=P(X\le a)=P(\omega\in\Omega|X(\omega)\le a)=\begin{cases}1 & a\ge\frac{1}{2}\\ P([0,a]) & 0\le a<\frac{1}{2}\\ 0 & a<0\end{cases}$$

$$\boxed{F_X(a)=\begin{cases}1 & a\ge\frac{1}{2}\\ a & 0\le a<\frac{1}{2}\\ 0 & a<0\end{cases}}$$

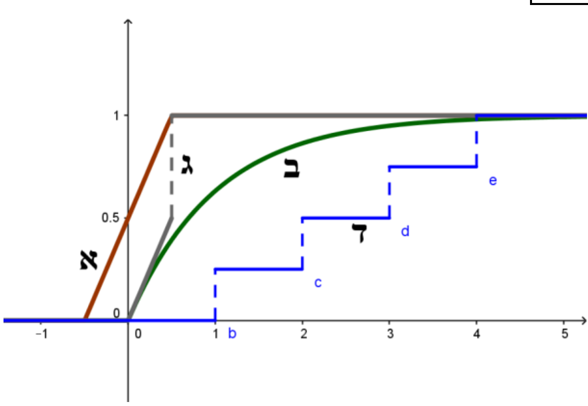
ד. נחשב על פי הגדרה:

$$F_X(a)=P(X\le a)=P(\omega\in\Omega|X(\omega)\le a)$$

$$=P(\lceil N\omega\rceil\le a)=P\left(\omega<\frac{\lfloor a\rfloor}{N}\right)$$

$$F_X(a)=\begin{cases}1 & a>N\\ P\left(\left[0,\frac{\lfloor a\rfloor}{N}\right]\right) & n\le a\le n+1, n+1\le N\\ 0 & a<0\end{cases}$$

$$\boxed{F_X(a)=\begin{cases}1 & a>N\\ \frac{\lfloor a\rfloor}{N} & n\le a\le n+1, n+1\le N\\ 0 & a<0\end{cases}}$$



■

שאלה 2:

א. נרצה למצוא ערכים של a ו-k עבורם הפונקציה הבאה יכולה להיות פונקציית צפיפות:

$$f(x)=\begin{cases}kxe^{-ax} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

לשם כך נזכור כי ניתן לחשב את פונקציית ההתפלגות על ידי:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

ונותר לבדוק את הדרישות לכך ש-$F(x)$ תהיה פונקציית התפלגות:

- מונוטוניות – לשם המונוטוניות עלינו לדרוש כי $k>0$. כך ש-$F(x)$, שהינה פונקציה צוברת שטח של פונקציה חיובית, תהיה מונוטונית עולה, כנדרש. אין בדרישה זו שום הצבת תנאי על ערכו של a.
- גבולות באינסוף – אכן מתקיים:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) \underset{x<0}{=} \lim \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

וכמו כן:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \overset{x<0\to f(x)=0}{=} \lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} kxe^{-ax}dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{k}{a}e^{-ax}\left[x+\frac{1}{a}\right]\Big|_{0}^{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{k}{a}e^{-ax}[x+1]+\frac{k}{a^2}\right] \overset{\text{נדרוש}}{=} 1$$

ודרישה זו תתקיים אם ורק אם $a>0$ (כדי שהאיבר התלוי ב-x יתאפס עבור $x\to\infty$.

כמובן ש-$a\neq 0$ אחרת נקבל פונקציית צפיפות שמתבדרת וכן נדרוש $k=a^2$ על מנת שהערך יהיה 1 כנדרש.

- רציפה מימין – הפונקציה $F(x)$ רציפה משמאל ומימין כהרכבה של פונקציות אלמנטריות תחת התנאים שכבר חישבנו.

כלומר, פונקציית התפלגות תתאים עבור $\boxed{k=a^2>0}$.

■

ב. אם $f(x)$ פונקציית צפיפות "תקינה" אזי היא מגדירה פונקציית התפלגות על ידי:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad f(x)=\begin{cases} kx^a & x\geq 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$$

באותו האופן, נבדוק מתי מתקיימים התנאים הדרושים:

- מונוטוניות – לשם המונוטוניות של F נדרוש כי $k>0$. במקרה זה בלי קשר לערכו של a נקבל כי F תהא מונוטונית עולה כדרוש.
- גבולות באינסוף – נבדוק את הגבול ב-$x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \underset{x<0\to f(x)=0}{=} \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

וכן עבור $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \overset{x<0\to f(x)=0}{=} \lim_{x\to\infty}\int_{0}^{x} kx^a dx \overset{\substack{\text{נניח}\\ a\neq -1}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{k}{a+1}x^{a+1}\Big|_{0}^{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{k}{a+1}x^{a+1}$$

ונשים לב כי הגבול אינו 1 עבור אף ערך של a. בפרט עבור $a=-1$ נקבל מהאינטגרציה את הגבול של $\ln x$ אשר מתבדר לאינסוף וגם עבור מקרה זה הנ"ל לא יתאים.

נוכל לעצור את התהליך כאן שכן מצאנו כי $f(x)$ כפי שהוגדרה לא יכולה להיות פונקציית צפיפות.

■

שאלה 3:

א. נרצה להראות, כי משתנה מקרי מהצורה $X\sim Geo(P)$, מקיים את תכונת חוסר הזיכרון. קרי, שמתקיים לכל $1\leq m\leq n$:

$$P(X>n|X>m)=P(X>n-m)$$

נשים לב כי:

$$P(X>n)=1-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P(n)}=1-\sum_{k=1}^{n}p(1-p)^k=1-p\sum_{k=1}^{n}(1-p)^k \overset{\substack{\text{סכום}\\ \text{הנדסי}}}{=} 1-\frac{p[1-(1-p)^n]}{p}$$
$$=1-[1-(1-p)^n]=(1-p)^n$$

כמו כן, נשים לב, כי מתקיים:

$$P\big((X>n)\cap(X>m)\big)=P(X>n)(\star)$$

שכן ישנה הכלה בין המאורעות. לכן, נקבל כי:

$$P(X>n|X>m)=\frac{P\big((X>n)\cap(X>m)\big)}{P(X>m)}=\frac{(1-p)^n}{(1-p)^m}=(1-p)^{n-m}=P(X>n-m)$$

■

ב. נרצה להראות, כי משתנה מקרי מהצורה $X\sim Exp(\lambda)$, מקיים את תכונת חוסר הזיכרון. קרי, שמתקיים עבור כל $0\le s\le t$:

$$P(X\ge t|X\ge s)=P(X\ge t-s)$$

ולשם כך נשים לב כי הראינו שעבור התפלגות אקספוננציאלית מתקיים:

$$F_X(a)=\begin{cases}0 & a<0\\ 1-e^{-\lambda a} & a\ge 0\end{cases}$$

כלומר:

$$P(X\ge t)=1-P(X<t)=1-F_X(t)=1-1-e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$$

וכאמור עבור $s\le t$ מתקיים $P\big((X\ge s)\cap(X\ge t)\big)=P(X\ge t)$ ולכן:

$$P(X\ge t|X\ge s)=\frac{P\big((X\ge t)\cap(X\ge s)\big)}{P(X\ge s)}=\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda(t-s)}=P(X\ge t-s)$$

■

ג. נניח כי X משתנה מקרי רציף המקיים את תכונת חוסר הזיכרון. כלומר, לכל $0\le s\le t$ מתקיים:

$$P(X\ge t|X\ge s)=P(X\ge t-s)$$

אך כפי שראינו, מתקיים:

$$P(X\ge t|X\ge s)=\frac{P(X\ge t\cap X\ge s)}{P(X\ge s)}=\frac{P(X\ge t)}{P(X\ge s)}=P(X\ge(t-s)$$

אם נסמן כפונקציה חדשה:

$$f(s)=P(X\ge s)$$

אזי נקבל מהשוויון שהגענו אליו כי מתקיים:

$$\frac{f(t)}{f(s)}=f(t-s)\Longrightarrow f(s+h)=f(s)f(h)$$

זוהי משוואה פונקציונלית[1] אשר פתרונה נתון על ידי $f(s)=e^{-\lambda s}$ כלומר אכן $X\sim Exp(\lambda)$ כנדרש.

■

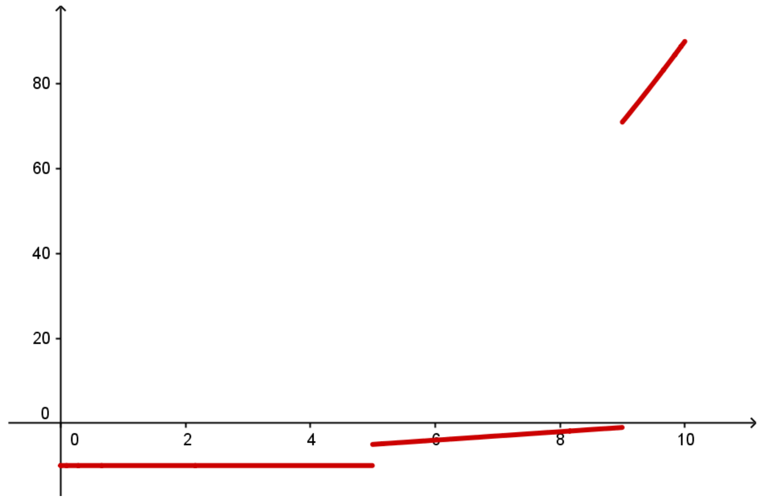
ד. הראינו כי עבור המקרה בסעיף ג' אכן קיימת λ כך ש-$P(X\ge t)=e^{-\lambda t}$. נשים לב כי עבור המספרים הטבעיים ניתן להגדיר $(1-p)^n=e^{-\lambda n}=\left(e^{-\lambda}\right)^n$ ולאחר שנסמן $e^{-\lambda}=(1-p)$ נקבל את הדרוש. אך נשים לב כי אם $\lambda>0$ בהכרח $e^{-\lambda}<1$ ולכן ההגדרה שלנו אכן מתאימה, ונוכל לסמן $X\sim Gep\left(1-e^{-\lambda}\right)$ ולקבל את הדרוש.

■

[1]נשים לב כי מתכונות הפונקציה הנ"ל ניתן לקבל כי $f(x)\equiv 0$ אך זוהי אינה פונקציית הסתברות. לכן נסיק כי קיימת נקודה x עבורה $f(x)\neq 0$, ולכן $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$ ומכאן שבפרט $f(0)=1$. לכן נוכל להסיק, למשל, כי $f(x-x)=1$ $f(x)f(-x)=1$ כלומר $f(-x)=f(x)^{-1}$. קל להראות באינדוקציה כי $f(nx)=x^n$ ובאותה דרך $f(-nx)=f(x)^{-n}$. היות ומתקיים $f\left(\left(\frac{x}{n}\right)n\right)=f\left(\frac{1}{n}x\right)^n$ נקבל כי $f\left(\frac{1}{n}x\right)=x^{\frac{1}{n}}$ ובאופן כללי כי $f\left(\left(\frac{m}{n}\right)x\right)=x^{\frac{m}{n}}$. היות ונתון כי הפונקציה רציפה נוכל לקבל את התוצאה עבור סדרות המתכנסות לכל הערכים האי רציונליים כך ש-$f(\alpha x)=f(x)^{\alpha}$. כך, לאחר שנסמן $f(1)=e^{-\lambda}$ עבור $\lambda>0$ כלשהו, נוכל לקבל את הפתרון $f(x)=f(x\cdot 1)=f(1)^x=e^{-\lambda x}$ כנדרש.

שאלה 4:

נתונים חוקי משחק ההימורים כדלהלן – משלמים 1 שקלים להשתתפות במשחק. נבחרת נקודה באופן אחיד, כלומר $X\sim U[0,10]$, ובהתאם לערכי X מוגדר כי:



- $0<X<5$ – מפסידים.
- $5<x\le 9$ – מקבלים X שקלים.
- $9<x\le 10$ – מרוויחים X^2 שקלים.

נסמן ב-Y את הרווח מהמשחק. אזי מתקיים:

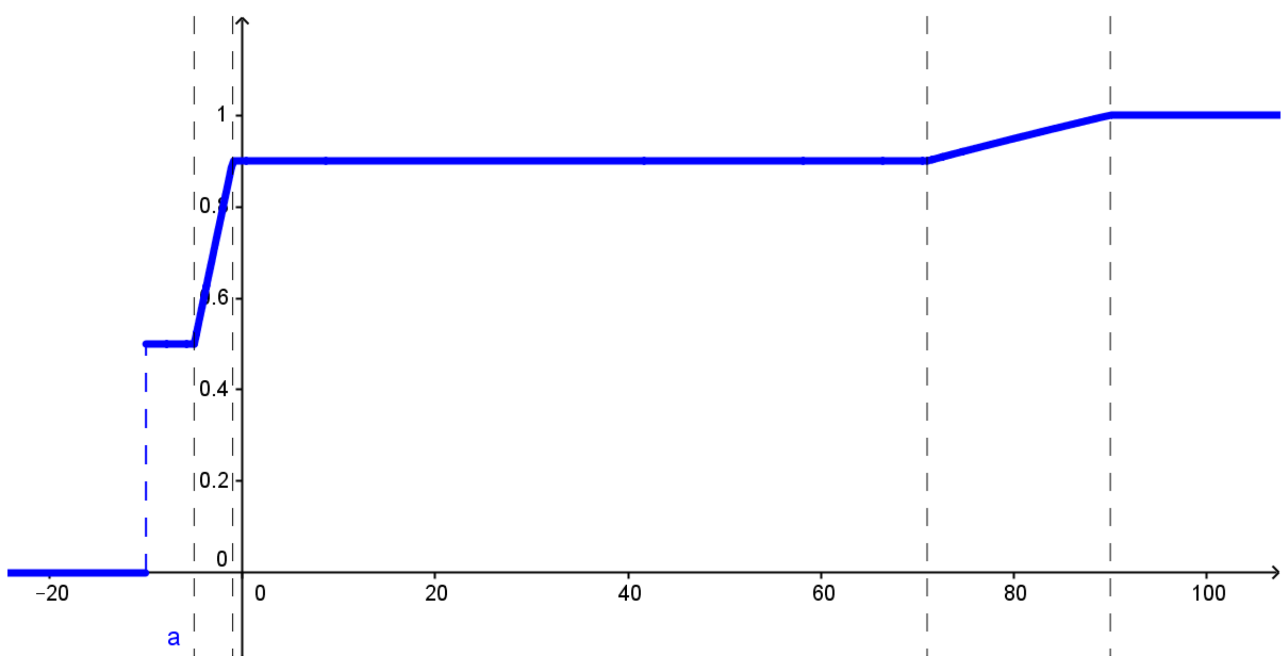
$$Y(X)=\begin{cases}-10 & 0<x\le 5\\ X-10 & 5<x\le 9\\ X^2-10 & 9<x\le 10\end{cases}$$

ב. נחשב על פי הגדרה:

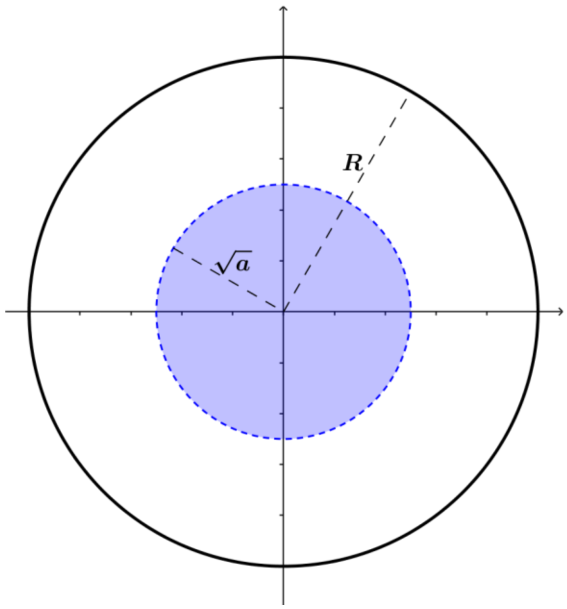
$$F_Y(a)=P(Y\le a)$$

ונשים לב כי:

$$P(Y\le a)=\begin{cases}1 & a\ge 90\\ P\left(\left[0,\sqrt{a+10}\right]\right) & 71<a\le 90\\ P([0,9]) & -1<a\le 71\\ P([0,a+10]) & -5<a\le -1\\ P([0,5]) & -10<a\le -5\\ 0 & a\le -10\end{cases}=\begin{cases}1 & a\ge 90\\ \sqrt{\dfrac{a}{100}+\dfrac{1}{10}} & 71<a\le 90\\ \dfrac{9}{10} & -1<a\le 71\\ \dfrac{a}{10}+1 & -5<a\le -1\\ \dfrac{1}{2} & -10<a\le -5\\ 0 & a\le -10\end{cases}$$



שאלה 5:



א. בהנתן עיגול שרדיוסו R, כמתואר באיור שלהלן, נתון כי בחירת נקודה מתבצעת באופן אחיד על המעגל, קרי:

$$P(A) = \frac{S(A)}{\pi R^2}$$

כאשר A תת קבוצה של העיגול.
נסמן ב-X את המרחק בין הנקודה שנבחרת לבין מרכז העיגול, ונרצה לבנות את פונקציית ההתפלגות והצפיפות של X.
לשם כך נזכור כי על פי הגדרה מתקיים:

$$F_X(a) = P(X \le a)$$

במקרה זה, אנו דורשים שהיות ו-$\sqrt{X}$ הינו המרחק בין הנקודה לבין מרכז העיגול, מתחייב כי:

$$X \le a \Leftrightarrow \sqrt{X} \le \sqrt{a}$$

כלומר, על מנת של $X \le a$ על הנקודה להיות בתוך העיגול שמרכזו במרכז העיגול המקורי ורדיוסו $\sqrt{a}$. שטח עיגול זה הינו $\pi\sqrt{a}^2 = \pi a$. לכן נקבל כי עבור $0 \le a \le R^2$ מתקיים:

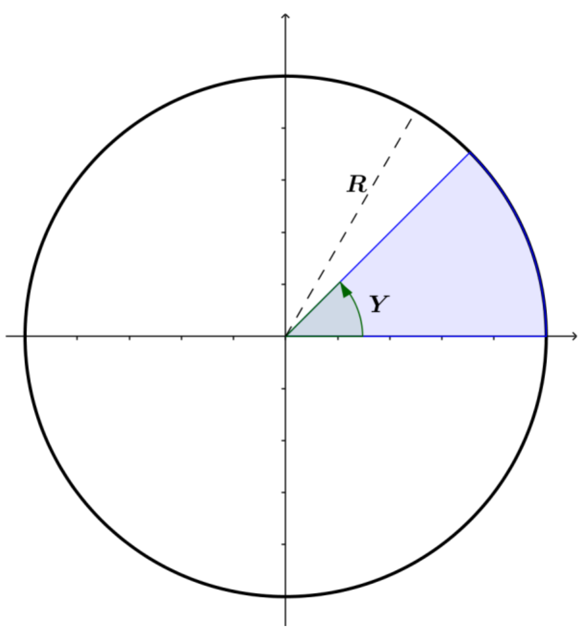
$$F_X(a) = P(X \le a) = P\left(\sqrt{X} \le \sqrt{a}\right) = \frac{\pi a}{\pi R^2} = \frac{a}{R^2}$$

עבור $a > R^2$ ודאי שכל נקודה שתבחר תתאים ולכן $F_X(a > R^2) = 1$ ומשיקול דומה נקבל כי לא קיימות נקודות עבורן $F_X(a < 0) = 0$. ולכן נקבל כי:

$$\boxed{F_X(a) = \begin{cases} 1 & a \ge R^2 \\ \dfrac{a}{R^2} & 0 < a < R^2 \\ 0 & a \le 0 \end{cases}}$$

פונקציה זו רציפה בהחלט ואף ניתן לקבלה מפונקציית הצפיפות:

$$\boxed{f_X(a) = \begin{cases} 0 & a \ge R^2 \\ \dfrac{1}{R^2} & 0 < a < R^2 \\ 0 & a \le 0 \end{cases}}$$



ב. עתה מוגדר משתנה חדש, Y המסמן את הזווית בין הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה יחסית לציר ה-x. כפי שניתן לראות מהאיור שלהלן, בהנתן זווית $0 \le a \le \pi$, ההסתברות של הזוויות להיות קטנה מ-a, היא בעצם הסיכוי של הנקודה שתבחר להיות בתוך שטח החתך כמתואר באיור, או בכל המחצית התחתונה של העיגול, בה נתון שהזוויות שליליות ולכן ממילא תתאמנה לדרישות. נקבל כי:

$$P(Y \le a) = \frac{\left(\frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{aR^2}{2}\right)}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{2}(\pi + a)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2\pi}$$

במקרה שבו $-\pi < a \le 0$ נקבל כי המקרה היחיד המתאים הוא אם הנקודה נבחרת בחתך המעגל שכולל את כל הזויות בין π – לבין a. לכן, שטח החתך יהיה נתון על ידי:

$$\frac{(\pi + a)R^2}{2}$$

ולכן ההסתברות לכך תהיה:

$$P(Y \le a) = \frac{(\pi + a)R^2}{2\pi R^2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2\pi}$$

סה"כ נקבל כי ההתפלגות נתונה על ידי:

$$\boxed{F_X(a)=\begin{cases}1 & a\ge\pi\\ \frac{1}{2}+\frac{a}{2\pi} & -\pi<a<\pi\\ 0 & a\le-\pi\end{cases}}$$

ניתן לקבל את הצפיפות של פונקציית התפלגות זו באמצעות הצפיפות:

$$\boxed{f_X(a)=\begin{cases}0 & a\ge\pi\\ \frac{1}{2\pi} & -\pi<a<\pi\\ 0 & a\le-\pi\end{cases}}$$

<u>שאלה 6:</u>

א. נתון $X\sim Exp(1)$, וכן נתון כי מטילים מטבע הוגן בלתי תלוי ב-X. במידה ויוצא עץ, קרי, בהסתברות $\frac{1}{2}$, $Y\coloneqq X$ וכן בהסתברות $\frac{1}{2}$, במידה ויוצא פלי, מגדירים $Y\coloneqq -X$.
כאמור X מוגדר להיות משתנה מקרי אי שלילי, נשים לב כי $Y<0$ אם ורק אם ההטלה יצאה פלי, כלומר בהסתברות $\frac{1}{2}$. נוכל להגדיר:

$$\boxed{F_Y(a)=\begin{cases}P\begin{pmatrix}\text{יצא}\\ \text{עץ}\end{pmatrix}F_X(a) & a>0\\ P\begin{pmatrix}\text{יצא}\\ \text{פלי}\end{pmatrix}F_X(-a) & a\le 0\end{cases}}$$

ב.