קווים כלליים לפתרון תרגיל בית 6

תאריך הגשה: יום רביעי, 18/12/2013, עד שעה 22:00

<u>שאלה 1:</u>

הוכיחו:

א. אם g , f פונקציות מונוטוניות בעלות אותה מגמה, אז $f\circ g$ מונוטונית עולה.

נניח g , f מונוטוניות עולות, ויהיו $x_1 < x_2$. אז:

$(f\circ g)(x_1) = f(g(x_1)) \overset{g(x_1)\le g(x_2)}{\leqq} f(g(x_2)) = (f\circ g)(x_2)$. באופן דומה אם שתיהן מונוטוניות יורדות.

ב. אם f, g פונקציות מונוטוניות בעלות מגמה הפוכה, אז $f\circ g$ מונוטונית יורדת.

נניח f מונוטונית עולה, g מונוטונית יורדת, ויהיו $x_1 < x_2$. אז:

$(f\circ g)(x_1) = (f(g(x_1)) \overset{g(x_1)\ge g(x_2)}{\geqq} (f(g(x_2)) = (f\circ g)(x_2)$. באופן דומה עבור f יורדת, g עולה.

ג. אם $f\circ g$ הפיכה, אז f על ו- g חח"ע.

אם $f\circ g$ הפיכה, אז היא חח"ע ועל. נסמן את התחום והטווח של $f\circ g$ ב- A. התמונה של $f\circ g$ מוכלת בתמונה של f, כי $(f\circ g)(x) = f(g(x))$, לכן התמונה של f מכילה את A, ולכן f על. אם g לא חח"ע, אז קיימים $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $g(x_1) = g(x_2)$, אבל אז $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, בסתירה לכך ש- $f\circ g$ חח"ע.

ד. אם $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי ו-$g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה זוגית, אז $f\circ g$ פונקציה זוגית.

יהי $x\in\mathbb{R}$, אז: $(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$.

<u>שאלה 2:</u>

תהי $f : A\to B$ פונקציה (כאשר $A , B \subset \mathbb{R}$), ותהי $x_0\in A$. נאמר ש- f חסומה מקומית ב- x_0 אם קיים $\delta > 0$ כך ש- f חסומה ב- $(x_o-\delta , x_0+\delta)\cap A$.

תהי $g : [a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו כי אם g חסומה מקומית בכל נקודה ב- $[a,b]$ אז g חסומה ב- $[a,b]$.

מהנתון, לכל $x\in[a,b]$ קיימים M_x , δ_x (קבועים התלויים רק ב- x) כך שלכל $t\in[a,b]\cap(x-\delta_x , x+\delta_x)$ מתקיים $|f(t| \le M_x$. האוסף $\{(x-\delta_x , x+\delta_x)\}_{x\in[a,b]}$ מהווה כיסוי פתוח של הקטע הסגור $[a,b]$, ולכן מהיינה-בורל קיים לו תת-כיסוי סופי, כלומר קיימות נקודות $x_1 , \dots , x_N$ כך ש- $[a,b]\subset \bigcup_{j=1}^{N}\left(x_j-\delta_{x_j} ,\ x_j+\delta_{x_j}\right)$. הקבוצה $\left\{M_{x_j}\right\}_{j=1}^{N}$ היא סופית, ולכן קיים לה מקסימום M. M הנ"ל הוא חסם על $|f(x)|$ לכל נקודה הנמצאת באחת מהקבוצות

$\left(x_j-\delta_{x_j}\,,x_j+\delta_{x_j}\right)\cap[a,b]$, ואיחוד הקבוצות האלו הוא בדיוק $[a,b]$, ולכן M הוא חסם על $|f(x)|$ לכל $x\in[a,b]$,
כלומר f חסומה.

שאלה 3:

הוכיחו בלשון $\varepsilon\,,\delta$ (ולא ע"י סדרות):

א. $\lim_{x\to 27}\sqrt[3]{x}=3$.

יהי $\varepsilon>0$. נשתמש בזהות $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, ונחשב:

$\left|\sqrt[3]{x}-3\right|=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3^3}\right|=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{27}\right|\cdot\frac{\left|x^{\frac{2}{3}}+(3x)^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right|}{\left|x^{\frac{2}{3}}+(3x)^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right|}=\frac{|x-27|}{\left|x^{\frac{2}{3}}+(3x)^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right|}$. אם נדאג ש- δ יהיה קטן מ- 1,
למשל, אז אם $|x-27|<\delta$, זה בפרט אומר כי $x>26$, ולכן המכנה מקיים:

$\left|x^{\frac{2}{3}}+(3x)^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right|>26^{\frac{2}{3}}+78^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}>8^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}=6$, ולכן $\frac{|x-27|}{\left|x^{\frac{2}{3}}+(3x)^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right|}<\frac{|x-27|}{6}$. לכן, נבחר
$\delta=\min\{1,6\varepsilon\}$, ואז לכל x המקיים $|x-27|<\delta$, מתקיים $\left|\sqrt[3]{x}-3\right|<\varepsilon$.

ב. $\lim_{x\to-\infty}\frac{9x-7x^2}{4x^2+8}=-\frac{7}{4}$.

יהי $\varepsilon>0$. נחשב: $\left|\frac{9x-7x^2}{4x^2+8}+\frac{7}{4}\right|=\left|\frac{9x-7x^2+7x^2+14}{4x^2+8}\right|=\left|\frac{9x+14}{4x^2+8}\right|$. אם נדאג ש- M יהיה קטן מ- $-\frac{14}{9}$, אז לכל
$x<M$, $|9x+14|<|-9x|=|9x|$, וגם: $4x^2+8>4x^2$, ולכן $\left|\frac{9x+14}{4x^2+8}\right|<\left|\frac{9x}{4x^2}\right|=\left|\frac{9}{x}\right|$. לכל $x<M$,
(כאשר $x\,,M<0$) מתקיים $|x|>|M|$, ולכן $\frac{9}{|x|}<\frac{9}{|M|}=-\frac{9}{M}$. לכן, נבחר $M=\min\left\{-\frac{14}{9}\,,-\frac{9}{\varepsilon}\right\}$, ואז לכל
$x<M$, $\left|\frac{9x-7x^2}{4x^2+8}+\frac{7}{4}\right|<\varepsilon$.

ג. לא קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\sin\left(\sqrt{x}\right)$.

נראה כי לכל $L\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty}\sin\sqrt{x}\neq L$. נסתכל על $\varepsilon=0.5$. נניח בשלילה כי קיים M כך שלכל $x>M$,
$\left|\sin\sqrt{x}-L\right|<0.5$. נסתכל על $x_1=(M\pi)^2>M$ ועל $x_2=\left(M\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>M$. מתקיים $\sin\sqrt{x_1}=0$,
$\sin\sqrt{x^2}=1$. מכיוון ש- $x_1\,,x_2>M$, מתקיים:
$1=|0-1|=\left|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}\right|\le\left|\sin\sqrt{x_1}-L\right|+\left|L-\sin\sqrt{x_2}\right|<0.5+0.5=1$, כלומר קיבלנו
$1<1$, וזו סתירה.

שאלה 4:

א. נתון כי $\lim_{x\to a}f(x)=b$, וכי קיימת סביבה נקובה של a כך שבסביבה זו הערכים ש- f מקבלת שייכים לסביבה נקובה של b, וכן כי $\lim_{y\to b}g(y)=c$. הראו כי $\lim_{x\to a}g\left(f(x)\right)=c$.

יהי $\varepsilon>0$. מהנתון על הסביבות של $a\,,b$, קיימים $\delta_1\,,\delta_2>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta_1$, אז

$0<|f(x)-b|<\delta_2$. מהנתון על הגבול של g , קיים δ_3 כך שאם $0<|y-b|<\delta_3$, אז $|g(y)-b|<\varepsilon$.
נפעיל את הגדרת הגבול על f עם $\varepsilon=\delta_3$, ונקבל שקיים $\delta_4>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta_4$, אז $|f(x)-b|<\delta_3$.
נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_4\}$, ונקבל שאם $0<|x-a|<\delta$, אז $0<|f(x)-b|<\delta_3$, ולכן $|g(f(x))-c|<\varepsilon$.

ב. הראו כי לא ניתן לוותר על התנאי על ערכי f. כלומר, הראו כי $\lim_{x\to a} f(x)=b$ וגם $\lim_{y\to b} g(y)=c$ אינו גורר $\lim_{x\to a} g(f(x))=c$.

נסתכל על $f(x)\equiv 1$, ועל $g(y)=\begin{cases}1 & y=1\\ 0 & y\neq 1\end{cases}$. אז לכל a , $\lim_{x\to a} f(x)=1$, $\lim_{y\to 1} g(y)=0$, אבל $\lim_{x\to a} g(f(x))=1\neq 0$.

שאלה 5:

הוכיחו כי ההגדרות הבאות של $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ שקולות:

א. לכל M קיים a כך שלכל $x>a$ מתקיים: $f(x)>M$.

ב. לכל סדרה a_n המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, מתקיים: $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\infty$.

נניח כי (א) מתקיים, תהי $a_n\to\infty$, ויהי M. מהגדרת התכנסות סדרה לאינסוף, לכל a קיים N כך שלכל $n>N$, $a_n>a$, ואז מ- (א) נובע כי לכל $n>N$, $f(a_n)>M$, כלומר $f(a_n)\to\infty$.
נניח כעת כי (ב) מתקיים. נניח בשלילה כי קיים M כך שלכל a קיים $x>a$ עבורו $f(x)\leq M$. נבנה סדרה המתכנסת לאינסוף בצורה הבאה: לכל n נבחר את a_n להיות מספר המקיים $a_n>n$ וגם $f(a_n)\leq M$ (נוכל לעשות זאת מהנחת השלילה). מתקיים כי $a_n\to\infty$, אבל $f(a_n)\leq M$ לכל n, ולכן גם $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\leq M$, בסתירה לכך שהנחנו כי (ב) מתקיים.

שאלה 6:

הוכיחו לפי הגדרה:

א. אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, אז $\lim_{x\to 0} f(x^2+x+x_0)=L$.

יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta_1$, $|f(x)-L|<\varepsilon$. אם נדאג כי $|x|<1$, אז $x^2\leq|x|$, ואז $|x^2+x+x_0-x_0|=|x^2+x|<2|x|$, ולכן אם נבחר $\delta_2=\min\left\{1,\frac{\delta_1}{2}\right\}$, נקבל כי אם $0<|x|<\delta_2$, אז $0<|(x_2+x+x_0)-x_0|<\delta_1$, ולכן $|f(x^2+x+x_0)-L|<\varepsilon$, וסיימנו.

ב. אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, אז: $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=L$.

יהי $\varepsilon>0$. מהנתונים, קיים x_0 כך שאם $x>x_0$ אז $|f(x)-L|<\varepsilon$, וקיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$, אז $g(x)>x_0$, ולכן לכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$, $|f(g(x))-L|<\varepsilon$, וסיימנו.