# תרגיל בית מספר 5

1 $A \subseteq \Re$ קבוצה סגורה. הוכח כי לכל $x \in \Re$ קיימת נקודה קרובה ביותר ל $x$ ב $A$.
כלומר, קיימת $a_x \in A$ כך שלכל $a \in A$ : $|x-a| \geq |x-a_x|$.

*2 הוכח כי $\Re, \phi$ הן הקבוצות היחידות ב $\Re$ שהן גם פתוחות וגם סגורות.

3 תהינה $A, B \subseteq \Re$ קבוצות. $A \subseteq B$ . נאמר ש $A$ צפופה ב $B$ אם $B = \overline{A}$
כאשר $\overline{A} = A \cup A'$ ( ונקרא הסגור של $A$ ).
א. תן דוגמא לשתי קבוצות צפופות ב $\Re$ שאינן $\Re$ עצמו.
ב. הוכח ש $A$ צפופה ב $B$ $\Leftrightarrow$ בכל סביבה של כל נקודה של $B$ יש איבר של $A$.

4 מצאו דוגמאות לקבוצה $A \neq \phi$ עבור כל אחת מהדרישות הבאות:
א. $A' = \phi$ , ב. $A' = A$ , ג. $A' \subseteq A, A' \neq A$ , ד. $A' \cap A = \phi, A' \neq \phi$ ,
ה. $A'' \equiv (A')' = \phi, A' \neq \phi$.

5 נסמן ב $id$ את פונקצית הזהות: $id(x) = x \ \ , \ \forall x$.
א. הוכח כי אם $f$ חח"ע אז קיימת $g$ כך ש- $g \circ f = id$.
ב. הוכח כי אם $f$ על אז קיימת $g$ כך ש- $f \circ g = id$.
ג. מצא פונקציה $f$ כך שיש $g$ כך ש- $g \circ f = id$ אבל לא קיימת $h$ כך ש- $f \circ h = id$.
ד. הוכח כי אם $g \circ f = id$ וגם $f \circ h = id$ אז $g = h$.

6 א. מצא דוגמא לפונקציה $f$ שאינה קבועה ואיננה הזהות המקיימת :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \Re$$

ב. הראה שאם $f$ מקיימת $\forall x, y \in \Re \quad |f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$
אז $f$ קבועה. ( רמז : נסו להוסיף ולהפחית $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ).