תרגיל בית 3

תאריך הגשה: יום חמישי, 10/4/2014, עד שעה 18:00

שאלה 1:

יהיו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות המתכנסות לאותו הגבול. הראו כי הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המכילה את איברי a_n, b_n לסירוגין (כלומר: $(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots)$) מתכנסת לאותו הגבול כמו שתי הסדרות המקוריות.

נסמן את גבול הסדרות ב- L, ואת הסדרה החדשה ב- c_n. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת הגבול, קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$, $|a_n - L| < \varepsilon$, וקיים N_2 כך שלכל $n > N_2$, $|b_n - L| < \varepsilon$. לכן, אם נבחר $N = \max\{2N_1, 2N_2\}$ (בדקו מדוע זו הבחירה הנכונה!), מתקיים לכל $n > N$, $|c_n - L| < \varepsilon$.

שאלה 2:

הוכיחו או הפריכו על פי הגדרה את קיום הגבול:

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{a_n+1} - \sqrt[3]{a_n}\right)$, כאשר a_n סדרה המקיימת: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n > 0$.

ע"י כפל וחילוק בגורם החיובי $\sqrt[3]{a_n+1}^2 + \sqrt[3]{a_n+1}\sqrt[3]{a_n} + \sqrt[3]{a_n}^2$ ושימוש בזהות $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$, נקבל: $\frac{1}{\sqrt[3]{a_n}^2} > \frac{1}{\sqrt[3]{a_n+1}^2 + \sqrt[3]{a_n+1}\sqrt[3]{a_n} + \sqrt[3]{a_n}^2} = \sqrt[3]{a_n+1} - \sqrt[3]{a_n}$.

יהי $\varepsilon > 0$. מהנתון על התכנסות $a_n \to \infty$, קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}$, לכן מהחישוב הקודם נקבל כי לכל $n > N$, $\left|\sqrt[3]{a_n+1} - \sqrt[3]{a_n}\right| < \varepsilon$, כלומר הסדרה שואפת ל- 0.

שאלה 3:

יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות מתכנסות. נתון כי הקבוצות $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \le b_n\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid b_n \le a_n\}$ אינן חסומות. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n \le a_n\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \le b_n\}$.

נניח בשלילה $b > a$. מהנתון על התכנסות הסדרות, ועבור $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$, $a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, וכן קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$, $b_n > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, ולכן לכל $n > \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$, בסתירה לכך ש- A לא חסומה. באופן דומה לא יתכן $a > b$, ולכן בהכרח $a = b$.

שאלה 4:

הוכיחו כי כל מספר ממשי הוא גבול של סדרה של רציונליים וגם של סדרה של אי-רציונליים,

כלומר: לכל $x \in \mathbb{R}$ קיימות סדרות $\{r_n\} \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $\{q_n\} \subset \mathbb{Q}$, כך ש-

$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} r_n = x$.

נראה כי כל ממשי הוא גבול של סדרת רציונליים, באופן דומה ניתן להוכיח עבור סדרת אי-רציונליים.

יהי $x \in \mathbb{R}$. נבנה סדרה כך: את a_1 נבחר להיות מספר רציונלי כלשהו בקטע הפתוח $(x-1, x+1)$ (קיים כזה כי $x-1$, $x+1$ שניהם רציונליים או ששניהם אי-רציונליים, בהתאם לרציונליות x, וראינו כי בין כל זוג כזה קיים מספר רציונלי). באופן דומה נבחר את a_2 להיות רציונלי כלשהו בקטע הפתוח $\left(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right)$, ובאופן כללי נבחר את a_n להיות רציונלי בקטע הפתוח $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$. אז a_n היא בבירור סדרת רציונליים, ומקיימת: $x-\frac{1}{n} < a_n < x+\frac{1}{n}$ לכל n, ולכן מסנדוויץ׳ (או ישירות מהגדרת הגבול) נקבל כי $a_n \to x$.

שאלה 5:

א. יהי $0 < \beta \le 1$, ותהי $\{a_n\}$ הסדרה המוגדרת ע״י: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta}\right)$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת (לגבול סופי או במובן הרחב) ומצאו את גבולה.

נראה מונוטוניות עולה באינדוקציה: $(\beta-1)^2 \ge 0 \Leftarrow \beta^2 - 2\beta + 1 \ge 0 \Leftarrow \beta^2 + 1 \ge 2\beta$. $\beta > 0$, לכן: $\frac{\beta^2+1}{2\beta} \ge 1$, והצבה פשוטה מראה כי זה אומר $a_2 \ge a_1$. ל- n כללי, נניח $a_n \ge a_{n-1}$, אז: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\beta a_n^2 + \frac{1}{\beta}\right) \ge \frac{1}{2}\left(\beta a_{n-1}^2 + \frac{1}{\beta}\right) = a_n$, והוכחנו מונוטוניות עולה. באינדוקציה פשוטה ניתן להראות גם כי $a_n \le \frac{1}{\beta}$, ולכן נקבל כי זו סדרה מתכנסת, ונסמן את הגבול ב- L. מיחידות הגבול והעובדה כי $a_{n+1} \to L \Leftarrow a_n \to L$ נקבל כי L מקיים: $L = \frac{1}{2}\left(\beta L^2 + \frac{1}{\beta}\right)$. פתרון המשוואה הזו נותן $L = \frac{1}{\beta}$.

ב. יהי $\beta > 0$, ותהי $\{a_n\}$ הסדרה המוגדרת ע״י: $a_1 = \beta$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת (לגבול סופי או במובן הרחב) ומצאו את גבולה.

ראשית נשים לב כי מכיוון ש- $\beta > 0$, מתקיים כי $a_n > 0$ לכל n. לכן, מההגדרה ברור כי $a_{n+1} > a_n$. לכן הסדרה מונוטונית עולה ולכן מתכנסת במובן הרחב. נניח כי מתכנסת לגבול סופי L, אז מיחידות הגבול נקבל כי הוא מקיים $L = L + \frac{1}{2L}$, כלומר $\frac{1}{2L} = 0$. L בהכרח מקיים $L \ge a_1 = \beta > 0$ לכן זו סתירה, ולכן $a_n \to \infty$.

שאלה 6:

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$.

שימוש בקריטריון המנה נותן $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{2}{e}<1$, לכן הסדרה שואפת ל- 0.

ב. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\left((3n)!\right)^{1/n}}$.

נסמן $a_n=\frac{n^{3n}}{(3n)!}$, אז הסדרה הנתונה היא $\sqrt[n]{a_n}$. נחשב במקום זאת $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ונקבל $\frac{e^3}{27}$, ולכן זה גם הגבול המבוקש.

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(\cos(n))^{n^2}}}{\sqrt{n}}$.

איברי הסדרה a_n מקיימים $|a_n|\le\frac{2}{\sqrt{n}}$, לכן הסדרה שואפת ל- 0.

ד. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n-(n-1)^n}{n^n+2}$.

נוכל לרשום: $\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)\left(\frac{n^n}{n^n+2}\right)=\frac{(n+1)^n-(n-1)^n}{n^n+2}$, ומכאן נקבל כי הסדרה שואפת ל- $e-\frac{1}{e}$.