תורת ההסתברות

תרגיל מס׳ 6

פתרונות

תרגיל 1.

(א)

נשתמש בעובדה כי Y הוא פונקציה חח"ע של X. תהיה

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : u = an^2 + b,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

אזי $P(Y \in \mathcal{U}) = 1$. לכל $u \in \mathcal{U}$,

$$P(Y = u) = P\left(X = \sqrt{\frac{u-b}{a}}\right) = \frac{\lambda^{n_u}}{n_u!}e^{-\lambda},$$

כאשר $n_u := \sqrt{\frac{u-b}{a}}$ לכל $u \in \mathcal{U}$.

(ב)

$$\begin{aligned}
&E\left(e^{-X}X(X-1)\cdot \ldots \cdot (X-p)\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-p)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-1})^n}{(n-p-1)!} = e^{-\lambda}(\lambda e^{-1})^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-1})^k}{k!} = \\
&= \\
&= e^{-\lambda(1-e^{-1})}(\lambda e^{-1})^{p+1}.
\end{aligned}$$

תרגיל 2.

(א)

$$\begin{aligned}
&E\big[(F_X(X))^{\alpha}\big] = \int_{-\infty}^{\infty}(F_X(x))^{\alpha}dF_X(x) = \\
&= \int_0^1 u^{\alpha}du = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha} & \text{if} \quad \alpha > -1, \\ \infty & \text{if} \quad \alpha \le -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

(ב)

$$E(X\mathbf{1}_{\{X\ge 6\}}) = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathbf{1}_{\{x\ge 6\}} f_X(x)dx = \int_6^{\infty} x\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/8}dx =$$
$$= \int_{\sqrt{6}}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-t/8}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\sqrt{6}/8}.$$

יהיה $Y = X\mathbf{1}_{\{-1\le X\le 5\}}$. נשים לב כי $P(Y\in[-1,5]) = 1$. לכן:

$$F_Y(y) = P(Y\le y) =$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{if } \ y\ge 5, \\ P(X\le y) + P(X>5) & \text{if } \ 0\le y<5, \\ P(-1<X\le y) & \text{if } \ -1\le y<0, \\ 0 & \text{if } \ y<-1. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{if } \ y\ge 5, \\ \Phi(y/2) + 1 - \Phi(5/2) & \text{if } \ 0\le y<5, \\ \Phi(y/2) - \Phi(-1/2) & \text{if } \ -1\le y<0, \\ 0 & \text{if } \ y<-1. \end{cases}$$

<u>תרגיל 3</u>. אם $X\sim U(-3,5)$, אז:

$$F_Y(y) = P(Y\le y) =$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{if } \ y\ge 4, \\ P(X\le y) & \text{if } \ -3\le y<4, \\ 0 & \text{if } \ y<-3. \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ y\ge 4, \\ \frac{y+3}{8} & \text{if } \ -3\le y<4, \\ 0 & \text{if } \ y<-3. \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-3}^{5} g(x)\frac{1}{8}dx = \int_{-3}^{5}\frac{x}{8}dx + \int_4^5 \frac{1}{2}dx = 3/2.$$

$$E(Y^2) = \int_{-3}^{5} g^2(x)\frac{1}{8}dx = \int_{-3}^{5}\frac{x^2}{8}dx + \int_4^5 2dx = 6\frac{1}{12}.$$

$$\text{VAR }(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3\frac{5}{6}.$$

תרגיל 4.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \le y) = \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } \ y \ge 6, \\ P(X \le y/2) & \text{if } \ 2 \le y < 6, \\ P(-y/2 < X \le y/2) & \text{if } \ 0 \le y < 2, \\ 0 & \text{if } \ y < 0. \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } \ y \ge 6, \\ \frac{y+2}{8} & \text{if } \ 2 \le y < 6, \\ \frac{y}{4} & \text{if } \ 0 \le y < 2, \\ 0 & \text{if } \ y < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$E(Y) = \int_{-1}^{3} 2|x|\frac{1}{4}dx = \int_{0}^{1} xdx + \int_{1}^{3} \frac{x}{2}dx = 5/2.$$

תרגיל 5.

(א)

נגדיר מ"מ חדש: $X = \mathbf{1}_{A\cap C}$.

$$
\begin{aligned}
\text{VAR } (X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = P(X=1) - [P(X=1)]^2 = \\
&= P(A\cap C) - [P(A\cap C)]^2.
\end{aligned}
$$

לכן:

$$\text{VAR } (\mathbf{1}_{A\cap C}) = 0 \quad \iff \quad P(A\cap C) \in \{0,1\}.$$

(ב)

נסמן: $p := P(A) = E(\mathbf{1}_A) = 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda)$.

$$
\begin{aligned}
m_3 &= E\big((\mathbf{1}_A - p)^3\big) = E\big(\mathbf{1}_A - 3p\mathbf{1}_A + 3p^2\mathbf{1}_A - p^3\big) = \\
&= p - 3p^2 + 2p^3 = pq(q-p),
\end{aligned}
$$

כאשר $q = 1 - p$:.

<u>תרגיל 6.</u>

(א)

$$N_k \sim \text{Geom }\left(\frac{n-k+1}{n}\right).$$

לכן

$$E(N_k)=\frac{n}{n-k+1}\text{ and }\text{ VAR }(N_k)=\frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}.$$

(ב)

יהי X_i המספר שנבחר בצעד i. המאורעות $\{N_3=5\}$ ו- $\{N_5=7\}$ תלוים כי

$$\begin{aligned} & P(N_3=5,N_5=7)= \\ = \;& P(X_1<3,X_2<3,X_3<3,X_4<3,3\le X_5\le 4,X_6<5,X_7\ge 5)= \\ = \;& \left(\frac{2}{n}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{n}\right)\left(\frac{n-4}{n}\right)\neq\left(\frac{2}{n}\right)^4\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot\left(\frac{4}{n}\right)\left(\frac{n-4}{n}\right)= \\ = \;& P(N_3=5)P(N_5=7). \end{aligned}$$