טכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה

רשימות הרצאה בקורס

תורת הקבוצות

(104290)

הוכן ע"י
פרופ' עמוס נבו
ד"ר אנדריי אסינובסקי

אתר הקורס: http://moodle.technion.ac.il/course/view.php?id=1959

תוכן עניינים

שלום לסטודנטים בקורס של תורת הקבוצות.

החוברת שלפניכם הינה סיכום של הרצאות בקורס בתורת הקבוצות (104290) הניתן בטכניון. היא מהווה אמצעי עזר לימודי, הנוסף להרצאות ולספרים המומלצים. היא נכתבה במטרה לספק חומר לימוד המותאם במיוחד לקורס זה. היא תכיל את החומר של הקורס שיובא בהרצאות, ואף יותר: לעיתים תמצאו בה הוכחות נוספות למשפטים, או דוגמאות נוספות הממחישות את המשפטים.

עם זאת, עליכם לקחת בחשבון שייתכן שבנושאים מסוימים החומר יוצג בחוברת בסדר מעט שונה מזה שבהרצאות; או שיהיו מספר נושאים שיכוסה בהרצאה אבל לא בחוברת, או להיפך.

אם תיתקלו בטעות (בין אם מתמטית ובין אם לשונית), או בניסוח שייראה לכם לא ברור או לא מוצלח, אתם מוזמנים להעיר על כך לכתובת דואר אלקטרוני 104290@gmail.com. כך תעזרו לנו לשפר את החוברת עבור הסטודנטים שייעזרו בה בשנים הבאות.

בהצלחה!

המחברים

1 מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות

1.1 קבוצה, שייכות, הכלה, תת־קבוצה

מושג הקבוצה. מושג ה**קבוצה** הוא המושג הבסיסי ביותר במתמטיקה. עקב כך אין לו הגדרה באמצעות מושגים בסיסיים יותר. קבוצה מאופיינת לגמרי ע"י האיברים שלה.

תאור של קבוצה. ניתן לתאר או להגדיר קבוצה מסויימת במספר דרכים. דרך אחת היא לתת רשימה של איברים. במקרה זה איברי הקבוצה נכתבים בין סוגריים מסולסלים. לדוגמא: הרישום $X = \{1, 2, 5\}$, פירושו: X היא הקבוצה שאבריה הם המספרים 1, 2 ו־ 5 (ואין בה איברים אחרים). את השייכות של איבר לקבוצה מסמנים בעזרת הסימן $\in$,[1] אי־שייכות בעזרת הסימן $\notin$. למשל, עבור הקבוצה X הנ"ל, מתקיים: $1 \in X$, $2 \in X$, $3 \notin X$ וכו'. X היא קבוצה סופית: יש בה שלושה איברים. עבור קבוצות אינסופיות, ברישום מהצורה $Y = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ מתכוונים לכך שהחוקיות הברורה נמשכת.

דרך שניה להגדיר קבוצה מסויימת היא מתן תנאי השייכות לקבוצה. למשל, ניתן להגדיר את הקבוצה Y מהדוגמא הקודמת באופן הבא: Y היא קבוצת המספרים הטבעיים המתחלקים ב־ 3.

שוויון קבוצות. שתי קבוצות נחשבות שוות אם יש להן בדיוק אותם איברים. במילים אחרות, $X = Y$ אם ורק אם מתקיים: $x \in X \Leftrightarrow x \in Y$. לדוגמא, $\{1, 1, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$. הרישום שבו כל איבר מופיע פעם אחת בדיוק נחשב ל"תקני", ולפי כך תמיד נעדיף אותו. (למשל, במקרה של קבוצה סופית, ברישום כזה רואים בבירור מה מספר האיברים בקבוצה).

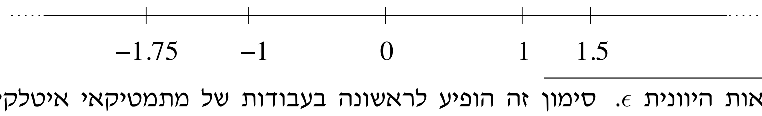
בנוסף, בקבוצה אין חשיבות לסדר האיברים, ולכן $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\}$ וכד'.

קבוצות "מוכרות". לקבוצות שימושיות במיוחד יש שמות וסימונים סטנדרטיים. נציין כמה מהן:

- קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
  קבוצה המספרים הטבעיים ללא 0 תסומן ב־ $\mathbb{N}_+$: $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.[2]
- קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$. אלה המספרים שניתן לכתוב בצורה p/q כאשר $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. כל מספר שלם x הוא רציונלי כי ניתן לכתוב אותו כ־ $x/1$. דוגמאות של מספרים שאינם רציונליים: $\sqrt{2}$, π, e.

  אחת התכונות של קבוצת המספרים הרציונליים היא **צפיפות**, שפירושה: בין כל שני מספרים רציונליים r, s קיים מספר רציונלי נוסף (למשל, $(r+s)/2$). מכאן גם נובע: בין כל שני מספרים רציונליים יש אינסוף מספרים רציונליים. לכן (בניגוד למספרים הטבעיים והשלמים), אם r הוא מספר רציונלי, אז לא קיים לו "העוקב המיידי" (או: המספר הרציונלי "הבא").

  לכל מספר רציונלי יש אינסוף דרכים לרשום אותו. לדוגמא: $2/5$ ו־ $52/130$ הן הצגות שונות של אותו מספר רציונלי. לכל מספר רציונלי קיימת הצגה מצומצמת עם מספר חיובי במכנה, והצגה כזאת היא יחידה.
- קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$. אלה כל המספרים שניתן לרשום כשבר עשרוני (סופי או אינסופי). תאור סטנדרטי לקבוצה זו הוא הישר הממשי: כל נקודה על הישר הממשי מתאימה למספר ממשי יחיד, ולהיפך (נאמר שיש התאמה הדדית בין המספרים הממשיים לנקודות של הישר הממשי):



[1] מקור הסימן $\in$ הוא האות היוונית ϵ. סימון זה הופיע לראשונה בעבודות של מתמטיקאי איטלקי Giuseppe Peano (1858 – 1932), והוכנס לשימוש רחב ע"י פילוסוף בריטי Bertrand Russell (1872 – 1970).

[2] נציין שבחלק מספרי לימוד מתמטיים 0 לא נחשב למספר טבעי.

ניתן להוכיח שמספר ממשי x הוא רציונלי אם ורק אם הפיתוח העשרוני שלו הינו מחזורי ממקום מסויים. למשל: $0.382647474747\ldots$ הוא מספר רציונלי. זה כולל גם את המספרים עם פיתוח עשרוני סופי: ניתן להתייחס לפיתוח עשרוני כזה כלפיתוח שבו החל ממקום מסויים מופיעים רק אפסים (למשל, $0.125 = 0.125000000\ldots$). נציין שלמספרים בעלי פיתוח עשרוני סופי קיים פיתוח עשרוני נוסף, עם אינסוף ספרות 9, למשל: $1 = 0.999999\ldots$, $0.125 = 0.124999999\ldots$, וכד'.

- קטעים (פתוחים, סגורים וחצי־פתוחים חצי־סגורים; חסומים ולא חסומים) ב־ $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} & (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \le a\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}
\end{aligned}
$$

הקבוצה הריקה. הקבוצה שאין בה איברים נקראת **הקבוצה הריקה**. היא תסומן ב־ $\varnothing$; לפי כך, $\{\} = \varnothing$. [3] לפי ההגדרה של שוויון קבוצות, יש רק קבוצה ריקה אחת. ניתן גם להגדיר אותה ע"י מתן תנאי שלא מתקיים אף פעם, למשל:

$\{x \in \mathbb{N} :\ x = x + 1\} = \varnothing$, או $\{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 = 2\} = \varnothing$, או $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 = -1\} = \varnothing$, וכו'

תת־קבוצה; הכלה של קבוצות. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. נאמר ש־ X **היא תת־קבוצה של** Y (או: X **היא קבוצה חלקית של** Y, או: X **מוכלת ב־** Y) אם כל איבר של X שייך ל־ Y, כלומר אם מתקיים $x \in X \Rightarrow x \in Y$. נסמן זאת ב־ $X \subseteq Y$. לדוגמא: $\{1,3\} \subseteq \{1,2,3,5\}$.

במילים אחרות, X היא תת־קבוצה של Y אם ניתן לקבל את X מ־ Y ע"י השמטת חלק מאברי Y, כאשר ייתכנו גם שני המקרים הקיצוניים: אם לא הושמט אף איבר של Y, מתקבלת הקבוצה Y עצמה; אם הושמטו כל אברי Y, מתקבלת הקבוצה הריקה. לפי כך, לכל קבוצה X מתקיים: $X \subseteq X$ ו־ $\varnothing \subseteq X$.

נאמר ש־ X **היא תת־קבוצה ממש של** Y (או: X **מוכלת ממש ב־** Y) אם $X \subseteq Y$ ו־ $X \neq Y$. נסמן זאת ע"י $X \subsetneqq Y$.

מינוח נוסף: ההכלה ממש נקראת גם **הכלה חזקה**, וההכלה הרגילה נקראת גם **הכלה חלשה**.[4]

תכונות של הכלה. נציין מספר תכונות של הכלת קבוצות. הן נובעות ישירות מההגדרה של תת־קבוצה.

[1] טענה.

1. אם $X \subseteq Y$ ו־ $Y \subseteq Z$, אז $X \subseteq Z$.
2. $X = Y$ אם ורק אם $X \subseteq Y$ ו־ $Y \subseteq X$.

הערה. הטענה בסעיף זה היא התנאי לשוויון קבוצות שראינו קודם ($x \in X \Leftrightarrow x \in Y$), המנוסח עתה בעזרת מושג ההכלה. נשתמש בו פעמים רבות בהוכחות של שוויון קבוצות ע"י **הכלה דו־כיוונית**, כלומר: כדי להוכיח $X = Y$, נוכיח $X \subseteq Y$ ו־ $Y \subseteq X$.

[3] מקור הסימן $\varnothing$, שלעיתים נכתב גם בצורה $\emptyset$, הוא האות ø שמשתמשים בה בכמה שפות סקנדינביות. הסימן $\varnothing$ לא קשור בשום צורה לאות היוונית ϕ!

[4] הערה לגבי סימון: קיימות גישות שונות לסימונים של הכלה. יש המסמנים את ההכלה החלשה ב־ $\subseteq$ ואת ההכלה ממש ב־ $\subset$. יש המסמנים את ההכלה החלשה ב־ $\subset$ ואת ההכלה ממש ב־ $\subsetneqq$. לפי כך, סימון $\subset$ איננו חד־משמעי ולכן לא נשתמש בו: אנו מסמנים הכלה חלשה ב־ $\subseteq$ והכלה ממש ב־ $\subsetneqq$. קיים גם סימן $\subsetneq$, שהוא גרסה של $\subsetneqq$.

מספר התת־קבוצות של קבוצה סופית.

[2] טענה. אם X היא קבוצה סופית בת n איברים, אז יש לה בדיוק 2^n תת־קבוצות (ולפי כך $2^n - 1$ תת־קבוצות ממש).

דוגמא. לקבוצה $X = \{1,2,3\}$ יש 8 תת־קבוצות:

$$\{1,2,3\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,3\}, \quad \{1\}, \quad \{2\}, \quad \{3\}, \quad \varnothing.$$

(כולן פרט ל־ $\{1,2,3\}$ הן תת־קבוצות ממש של X.)

הוכחה. תהי X קבוצה בת n איברים. כאשר בונים תת־קבוצה A של X, יש להחליט לגבי כל איבר של X, האם הוא שייך ל־A או לא. לכן מספר הקבוצות שניתן לקבל בדרך זו הוא $\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{\text{פעמים } n} = 2^n$. $\square$

קבוצה כאיבר של קבוצה אחרת. נסתכל בקבוצה $X = \{1,\{2,3\}\}$. בקבוצה זו שני איברים: המספר 1 והקבוצה $\{2,3\}$. נדגיש שהמספרים 2 ו־ 3 אינם איברים של X.

נסתכל בדוגמא נוספת: $Y = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$. בקבוצה זו שני איברים: הקבוצה $\{1,2\}$ והקבוצה $\{2,3\}$. המספרים 1, 2 ו־ 3 אינם איברים של Y.

לצורך הבהרה נוספת, נתמקד בהבדל בין $\varnothing$ לבין $\{\varnothing\}$. בקבוצה $\varnothing$ אין אף איבר, ויש לה תת־קבוצה אחת: $\varnothing$ עצמה. בקבוצה $\{\varnothing\}$ יש איבר אחד: $\varnothing$, ויש לה שתי תת־קבוצות: $\varnothing$ ו־ $\{\varnothing\}$. לפי כך, מתקיים גם $\varnothing \in \{\varnothing\}$ וגם $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$! לעומת זאת, $\varnothing \subseteq \varnothing$ היא טענה נכון, ואילו $\varnothing \in \varnothing$ שקרית: לא קיים שום x שיקיים $x \in \varnothing$. נסכם זאת בטבלה הבאה, וננתח בה באופן דומה מספר קבוצות נוספות (הקורא מוזמן למלא טבלה כזאת באופן עצמאי לשם ביקורת).

קבוצה	מספר איברים	רשימת איברים	מספר תת־קבוצות	רשימת תת־קבוצות
$\varnothing$	0	אין	1	$\varnothing$
$\{\varnothing\}$	1	$\varnothing$	2	$\varnothing,\ \{\varnothing\}$
$\{\{\varnothing\}\}$	1	$\{\varnothing\}$	2	$\varnothing,\ \{\{\varnothing\}\}$
$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$	2	$\varnothing,\ \{\varnothing\}$	4	$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
$\{1\}$	1	1	2	$\varnothing,\ \{1\}$
$\{1,\varnothing\}$	2	$1,\ \varnothing$	4	$\varnothing,\ \{1\},\ \{\varnothing\},\ \{1,\varnothing\}$
$\{1,\{\varnothing\}\}$	2	$1,\ \{\varnothing\}$	4	$\varnothing,\ \{1\}\ \{\{\varnothing\}\},\ \{1,\{\varnothing\}\}$
$\{1,\{1\}\}$	2	$1,\ \{1\}$	4	$\varnothing,\ \{1\}\ \{\{1\}\},\ \{1,\{1\}\}$

תרגילים.

1. לכל $k \in \mathbb{N}_+$ נסמן

$$k\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} :\ \ n \text{ מתחלק ב־ } k\ \} = \{0,k,2k,3k,\ldots\}.$$

יהיו $k,m \in \mathbb{N}_+$.

(א) מהי הקבוצה $k\mathbb{N} \cap m\mathbb{N}$?

(ב) איזה קשר בין k ו־ m שקול לטענה $k\mathbb{N} \subseteq m\mathbb{N}$?

2. תהיינה $X_1 = \varnothing, X_2 = \{\varnothing\}, X_3 = \{\{\varnothing\}\}, X_4 = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, X_5 = \{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$. מהם כל הזוגות (i,j) כך ש־ $X_i \in X_j$, ומהם כל הזוגות כך ש־ $X_i \subseteq X_j$?

3. האם ייתכן: $Y \subsetneqq X$ ו־ $X \subsetneqq Y$? האם ייתכן: $Y \subsetneqq X$ ו־ $X \subseteq Y$?

4. תהי $X = \{1\}$. תנו דוגמא של קבוצות Y ו־ Z כך ש־
(א) $X \in Y, \quad Y \in Z, \quad X \in Z$;
(ב) $X \in Y, \quad Y \in Z, \quad X \notin Z$;
(ג) $X \in Y, \quad Y \in Z, \quad X \subseteq Z$;
(ד) $X \subsetneq Y, \quad Y \in Z, \quad X \in Z$.

5. מה נובע מ־: $X \subseteq Y, Y \subseteq Z, Z \subseteq X$? האם ייתכן שכל ההכלות הן הכלות ממש? האם ייתכן שאחת מההכלות היא הכלה ממש?

1.2 פעולות בולאניות בין קבוצות

נגדיר מספר פעולות בין קבוצות: איחוד, חיתוך, הפרש והשלמה. פעולות אלה הנקראות **פעולות בולאניות**[5].

איחוד וחיתוך. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. נגדיר את האיחוד והחיתוך שלהן באופן הבא:

- האיחוד: $X \cup Y = \{x : \quad x \in X \text{ או } x \in Y\}$.
- החיתוך: $X \cap Y = \{x : \quad x \in X \text{ וגם } x \in Y\}$.

(יש לזכור שבביטוי "$x \in X$ או $x \in Y$" הכוונה ל־ "x שייך ל־ X, או x שייך ל־ Y, או x שייך לשתיהן".)

דוגמאות.

- אם $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$, אז $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X \cap Y = \{3, 4\}$.
- אם $X = [1, 3]$, $Y = [2, 4]$, אז $X \cup Y = [1, 4]$, $X \cap Y = [2, 3]$.
- אם $X = [1, 2]$, $Y = (2, 3]$, אז $X \cup Y = [1, 3]$, $X \cap Y = \varnothing$.
- אם $X = [1, 2]$, $Y = [3, 4]$, אז הקבוצה $X \cup Y$ איננה קטע או קבוצה "סטנדרטית" מסוג אחר, ולכן הדרך הפשוטה ביותר לרשום אותה היא באמצעות סימן האיחוד: $[1, 2] \cup [3, 4]$.

קבוצות X ו־ Y המקיימות $X \cap Y = \varnothing$ נקראות **זרות**. אם ידוע ש־ X ו־ Y הן קבוצות זרות, האיחוד שלהן נקרא **איחוד זר**, לעיתים נסמן איחוד כזה ב־ $X \sqcup Y$.

נראה מספר טענות על איחוד וחיתוך של קבוצות. רובן נובעות באופן מיידי מההגדרות, לכן נוכיח רק אחת מהן.

[3] טענה (תכונות של איחוד וחיתוך).

1.
   - $X \cap Y \subseteq X$, $X \cap Y \subseteq Y$.
   - $X \subseteq X \cup Y$, $Y \subseteq X \cup Y$.
   - אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup Y = Y$ ו־ $X \cap Y = X$.
2. חוקי החילוף (הקומוטטיביות):
   - $X \cup Y = Y \cup X$;

[5] על שם מתמטיקאי ופילוסוף בריטי George Boole (1815-1864).

- $X \cap Y = Y \cap X$.

3. חוקי הקיבוץ (האסוציאטיביות):

- $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

4. חוקי הפילוג (דיסטריבוטיביות):

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$;
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

הוכחה של חוק הפילוג השני. נוכיח את שויון הקבוצות ע"י הכלה דו־כיוונית.

כיוון ראשון: נוכיח $X \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

יהי $x \in X \cup (Y \cap Z)$.
זה אומר: $x \in X$ או $x \in Y \cap Z$
נניח ש־ $x \in X$. אז $x \in X \cup Y$ וגם $x \in X \cup Z$. לכן $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
נניח ש־ $x \in Y \cap Z$. זה אומר: $x \in Y$ וגם $x \in Z$. מכאן, $x \in X \cup Y$ וגם $x \in X \cup Z$. לכן $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
קיבלנו שבכל מקרה מ־ $x \in X \cup (Y \cap Z)$ נובע $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
לכן הוכחנו $X \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

כיוון שני: נוכיח $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z)$.

יהי $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
זה אומר: $x \in X \cup Y$ וגם $x \in X \cup Z$.
אם $x \notin X$, מזה נובע: $x \in Y$ וגם $x \in Z$. כלומר, $x \in Y \cap Z$ ולכן $x \in X \cup (Y \cap Z)$.
אם $x \in X$, אז בבירור $x \in X \cup (Y \cap Z)$.
קיבלנו שבכל מקרה מ־ $x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ נובע $x \in X \cup (Y \cap Z)$.
לכן הוכחנו $(X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z)$. $\square$

הפרש קבוצות. פעולה בולאנית נוספת, **הפרש של קבוצות**, מוגדרת ע"י

$$X \setminus Y = \{x : \quad x \in X \text{ וגם } x \notin Y\}.$$

דוגמאות: תהיינה $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{3,4\}$, $Z = \{2,5\}$. עבור קבוצות אלה,

$$X \setminus Y = \{1,2\}, \quad Y \setminus X = \varnothing, \quad X \setminus Z = \{1,3,4\}, \quad Z \setminus X = \{5\}, \quad Y \setminus Z = \{3,4\}, \quad Z \setminus Y = \{2,5\}.$$

נשים לב: אם $X \subseteq Y$ אז $X \setminus Y = \varnothing$. אם $X \cap Y = \varnothing$, אז $X \setminus Y = X$ ו־ $Y \setminus X = Y$.

קבוצת הדיון. תהי X קבוצה. הנסיון להגדיר את "הקבוצה של כל האיברים שלא שייכים ל־ X" נתקל בבעיות לוגיות מסוימות[6]. לכן תמיד מניחים שהקבוצות הנידונות הן תת־קבוצות של קבוצה "מספיק גדולה" U. U תיקרא **קבוצת הדיון** או **עולם ההתייחסות**. קבוצת הדיון נקבעת לפי ההקשר.

[6] לא ניכנס לפרטים, אבל הדוגמא הבאה תבהיר במה מדובר. ניקח $X = \{1,2,3\}$. מהם כל האיברים שלא שייכים ל־ $\{1,2,3\}$? יש "יותר מדי" עצמים שהם לא 1, 2 ו־ 3, ואין שום דרך סבירה לתאר אותם כקבוצה.

המשלים של הקבוצה. תהי X קבוצה, כאשר קבוצת הדיון היא U. כעת ניתן לדבר על "הקבוצה של כל האיברים שלא שייכים ל־ X", כאשר הכוונה תהיה לקבוצה של כל אברי U שלא שייכים ל־ X, כלומר $U \setminus X$. קבוצה זו נקראת **המשלים של X [בתוך U]**, והיא מסומנת ב־ X' (סימונים נפוצים אחרים הם $\bar{X}$ ו־ X^c).

נדגיש שניתן לקבוע את X' רק אם קבוצת הדיון נקבעה מראש. ניקח, לדוגמא, $X = \{0, 1, 2\}$. מהי X'? זה תלוי בקבוצת הדיון.
אם קבוצת הדיון היא $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, אז $X' = \{3, 4, 5, 6\}$.
אם קבוצת הדיון היא $\mathbb{N}$, אז $X' = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$, קבוצת כל המספרים הטבעיים פרט ל־ 0, 1 ו־ 2.
אם קבוצת הדיון היא $\mathbb{R}$, אז $X' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, קבוצת כל המספרים הממשיים פרט ל־ 0, 1 ו־ 2.

[4] טענה (תכונות של הפרש ומשלים). בטענות הבאות מניחים שכל הקבוצות הן תת־קבוצות של קבוצת דיון U.

1. $X \setminus Y = X \cap Y'$.

   הסבר: כל אחד מהביטויים הוא קבוצת כל אברי U השייכים ל־ X ולא שייכים ל־ Y.

2. $(X')' = X$. (הוכיחו כתרגיל.)

3. **חוקי דה מורגן** (De Morgan)[7]:
   - $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$
   - $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$

הוכחת חוק דה מורגן הראשון ע"י הכלה דו־כיוונית:

כיוון ראשון: נוכיח $(X \cup Y)' \subseteq X' \cap Y'$.
יהי $x \in (X \cup Y)'$.
זה אומר: $x \notin X \cup Y$.
מכאן $x \notin X$ וגם $x \notin Y$ (אחרת היה מתקיים $x \in X \cup Y$).
לכן $x \in X'$ ו־ $x \in Y'$, כלומר $x \in X' \cap Y'$.

כיוון שני: נוכיח $X' \cap Y' \subseteq (X \cup Y)'$.
יהי $x \in X' \cap Y'$.
זה אומר: $x \in X'$ וגם $x \in Y'$. כלומר, $x \notin X$ ו־ $x \notin Y$.
לכן $x \notin X \cup Y$, כלומר $x \in (X \cup Y)'$. □

ניתן להוכיח את חוק דה מורגן השני באופן דומה. במקום זאת, נראה איך הוא נובע מחוק דה מורגן הראשון ומהטענה $(X')' = X$:

$$(X \cap Y)' = ((X')' \cap (Y')')' = ((X' \cup Y')')' = X' \cup Y'.$$

(במעבר הראשון והשלישי השתמשנו ב־ $(X')' = X$; במעבר השני בחוק דה מורגן הראשון.)

נביא דוגמא לחוקי דה מורגן שאינה שייכת לעולם המתמטיקה. בתור קבוצת דיון U ניקח את קבוצת התושבים בעיר מסוימת. נסמן ב־ X את קבוצת התושבים בעלי שיער בהיר, אז X' היא קבוצת התושבים בעלי שיער כהה. נסמן ב־ Y את קבוצת התושבים המעדיפים שוקולד מריר, אז Y' היא קבוצת התושבים המעדיפים שוקולד חלב.
מהי הקבוצה $X \cup Y$? אבריה הם כל התושבים בעלי שיער בהיר וכל התושבים המעדיפים שוקולד מריר. לכן המשלים שלה היא הקבוצה של בעלי שיער כהה המעדיפים שוקולד חלב, כלומר $X' \cap Y'$.
מהי הקבוצה $X \cap Y$? אבריה הם כל התושבים בעלי שיער בהיר המעדיפים שוקולד מריר. המשלים שלה היא הקבוצה שאבריה הם כל התושבים בעלי שיער כהה וכל התושבים המעדיפים שוקולד חלב, כלומר $X' \cup Y'$.

[7] על שם מתמטיקאי ולוגיקן בריטי Augustus De Morgan, $1806 - 1871$.

נראה מהן התוצאות של הפעולות הבולאניות בין קבוצה נתונה X לקבוצה הריקה, ל־ X עצמה, למשלים שלה X', ולקבוצת הדיון U. כל התוצאות נובעות באופן ישיר מההגדרות, ודאו שאתם מבינים את כולן!

[5] טענה.

תהי X קבוצה בקבוצת דיון U. מתקיים:

$$\begin{array}{lll} X \cup \varnothing = X & X \cap \varnothing = \varnothing & X \setminus \varnothing = X, \quad \varnothing \setminus X = \varnothing \\ X \cup X = X & X \cap X = X & X \setminus X = \varnothing \\ X \cup X' = U & X \cap X' = \varnothing & X \setminus X' = X, \quad X' \setminus X = X' \\ X \cup U = U & X \cap U = X & U \setminus X = X', \quad X \setminus U = \varnothing \end{array}$$

הוכחה: תרגיל.

טענות **[3]**, **[4]**, **[5]** מאפשרות לעיתים להוכיח שוויון של קבוצות לא ע"י הכלה דו־כיוונית אלא ע"י סדרת שוויונות. נביא לכך דוגמא פשוטה.

דוגמא. תהיינה X, Y שתי קבוצות. נוכיח: אם $X \cap Y = \varnothing$, אז $X \cap Y' = X$.

פתרון 1. נוכיח את הטענה ע"י הכלה דו־כיוונית.

$X \cap Y' \subseteq X$ מתקיים בבירור: אם $x \in X \cap Y'$, אז $x \in X$ ו־ $x \in Y'$, ובפרט $x \in X$.

נוכיח $X \subseteq X \cap Y'$:
יהי $x \in X$. מאחר שנתון $X \cap Y = \varnothing$, מתקיים $x \notin Y$, כלומר $x \in Y'$. מכאן $x \in X \cap Y'$.

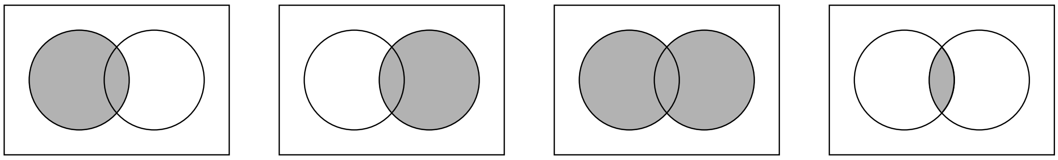
פתרון 2. נשתמש בטענות:

$$X \overset{[5]}{=} X \cap U \overset{[5]}{=} X \cap (Y \cup Y') \overset{[3.4]}{=} (X \cap Y) \cup (X \cap Y') \overset{\text{נתון}}{=} \varnothing \cup (X \cap Y') \overset{[5]}{=} X \cap Y'.$$

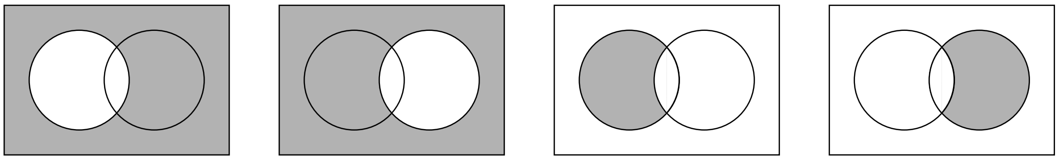
דיאגרמות ון. דיאגרמות ון (Venn diagrams)[8] הן דרך גרפית להציג פעולות בולאניות. בדיאגרמת ון עבור שתי קבוצות, הקבוצות מיוצגות ע"י שני תחומים (למשל עיגולים) נחתכים בתוך מלבן המייצג את קבוצת הדיון. תחומים אלה מחלקים את הדיאגרמה לארבעה חלקים המתאימים ל־ $X \cap Y$, $X \cap Y'$, $X' \cap Y$ ו־ $X' \cap Y'$. כל ביטוי המתקבל מ־ X ו־ Y ע"י פעולות של איחוד, חיתוך, הפרש והשלמה יבוטא ע"י איחוד של כמה מהחלקים האלה. בדומה בונים דיאגרמה עבור שלוש קבוצות[9].

האיור הבא הינו דיאגרמת ון עבור שתי קבוצות (העיגול השמאלי מייצג קבוצה X, העיגול הימני מייצג קבוצה Y).

[8] על שם לוגיקן ופילוסוף בריטי John Venn, $1834 - 1923$.
[9] דיאגרמות ון עבור יותר משלוש קבוצות תהיינה יותר מסובכות.

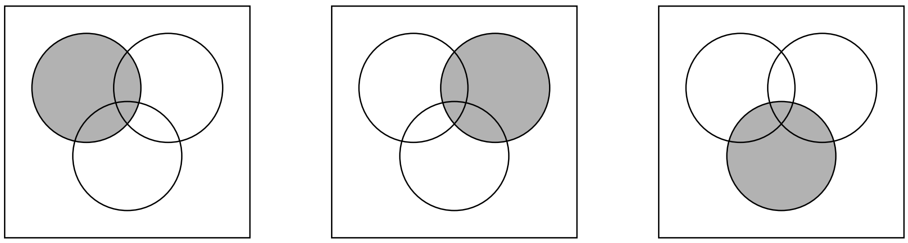


X Y $X \cup Y$ $X \cap Y$

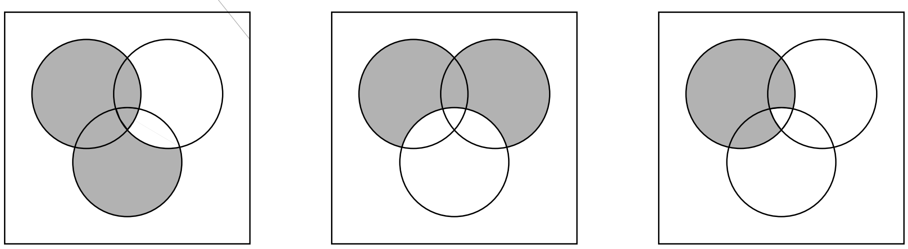


X' Y' $X \setminus Y$ $Y \setminus X$

והאיור הבא הינו דיאגרמת ון עבור שלוש קבוצות.

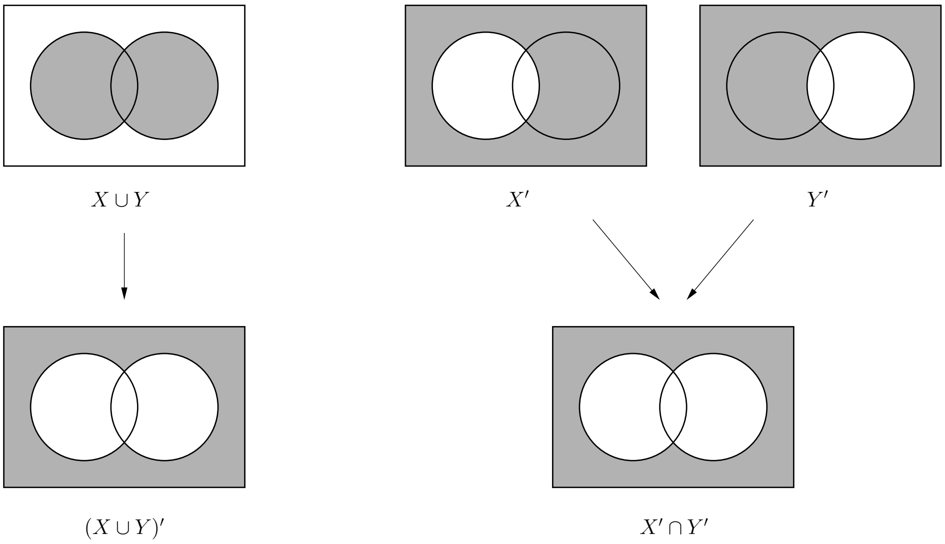


X Y Z

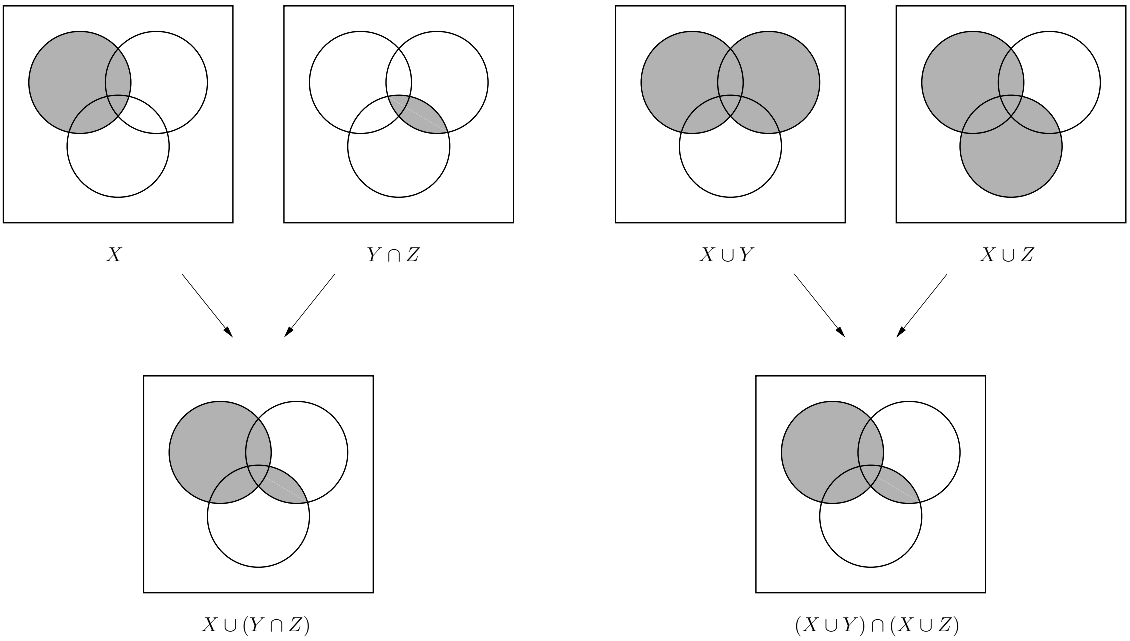


$X \cup (Z \setminus Y)$ $(X \cup Y) \setminus Z$ $X \setminus (Y \cap Z)$

ניתן להשתמש בדיאגרמות ון כדי לבדוק נכונות של טענות על פעולות בקבוצות. למשל, כדי להשתכנע בנכונות חוק דה מורגן הראשון, $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$, מוודאים שלביטויים $(X \cup Y)'$ ו־ $X' \cap Y'$ מתאימים אותם התחומים בדיאגרמת ון עבור שתי קבוצות:



כדי להשתכנע בנכונות של חוק הפילוג $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, מוודאים שלביטויים $X \cup (Y \cap Z)$ ו־ $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ מתאימים אותם התחומים בדיאגרמת ון עבור שלוש קבוצות:



מספר איברים בקבוצה סופית. עבור קבוצה סופית X, נסמן ב־ $|X|$ את מספר האיברים בה. למשל, אם $X = \{1, 4, 8\}$, אז $|X| = 3$.

לפי **עקרון החיבור** הקומבינטורי, אם X ו־ Y הן שתי קבוצות **זרות**, אז $|X \cup Y| = |X| + |Y|$[10]. מכאן נובעת הטענה הבאה:

[10]יכולנו גם לכתוב בעזרת סימן האיחוד הזר: $|X \sqcup Y| = |X| + |Y|$.

[6] טענה: תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סופיות. אז

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

הוכחה. בדרך כלל מוכיחים טענה זו ע"י שיקול קומבינטורי: בסכום $|X| + |Y|$ האיברים של $X \cap Y$ נספרו פעמיים, ולכן יש לחסר $|X \cap Y|$.

ניתן גם להסיק את הטענה מהמקרה הפרטי שלה הדן בקבוצות זרות. בהוכחה הבאה אנחנו למעשה מפרקים את הקבוצות X, Y ו־ $X \cup Y$ לתת־קבוצות זרות.

$$|X| + |Y| = |(X \cap Y') \sqcup (X \cap Y)| + |(X' \cap Y) \sqcup (X \cap Y)| = \underbrace{|X \cap Y'| + |X \cap Y|} + \underbrace{|X' \cap Y| + |X \cap Y|} =$$
$$= \underbrace{|X \cap Y'| + |X \cap Y| + |X' \cap Y|} + |X \cap Y| =$$
$$= |(X \cap Y') \sqcup (X \cap Y) \sqcup (X' \cap Y)| + |X \cap Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|,$$

ומכאן $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$. □

תרגילים.

1. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. הוכיחו כי הטענות הבאות שקולות:
   (א) $X \subseteq Y$,
   (ב) $X \cap Y = X$,
   (ג) $X \cup Y = Y$,
   (ד) $X \setminus Y = \varnothing$,
   (ה) $(Y \setminus X) \cup X = Y$.

2. קיימת אנלוגיה מסוימת בין האיחוד וההפרש של קבוצות מצד אחד לבין החיבור והחיסור של מספרים ממשיים מצד שני. אך אנלוגיה זו היא חלקית בלבד: למשל, בתרגיל הקודם ראיתם ש־ $(Y \setminus X) \cup X = Y$ מתקיים רק עבור הקבוצות המקיימות $X \subseteq Y$. בתרגיל זה נמשיך לחקור שאלה זו.
   התבוננו כעת בשוויון $(Y \cup X) \setminus X = Y$.
   (א) מצאו דוגמא המראה ששוויון זה לא נכון באופן כללי.
   (ב) מצאו תנאי פשוט השקול לשוויון זה. כלומר, עליכם לנסח ולהוכיח טענה המצורה:
   "עבור קבוצות X ו־ Y מתקיים $(Y \cup X) \setminus X = Y$ אם ורק אם ..."
   (ג) הסבירו מדוע מ־ $X \cup Z = Y \cup Z$ לא נובע $X = Y$. (עליכם לא רק למצוא דוגמא נגדית אלא גם להסביר מהי התכונה של מספרים ממשיים שמאפשרת צמצום, ואין לה תכונה מקבילה בקבוצות.)
   (ד) הסבירו מדוע מ־ $X \setminus Z = Y \setminus Z$ לא נובע $X = Y$.

3. תהיינה X, Y, Z שלוש קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות: אם טענה נכונה, הוכיחו אותה; אם טענה לא נכונה, מצאו דוגמא נגדית. כמו כן, בחלק מהטענות מתקיימת הכלה בכיוון אחד (כלומר, הן נכונות אם מחליפים את $=$ ב־ $\subseteq$ או ב־ $\supseteq$). מצאו כל ההכלות כאלה והוכיחו אותן. (ניתן להשתמש בדיאגרמות ון כדי **לנחש** תשובות, אבל שיקולים הנובעים מהתבוננות בדיאגרמות לא מהווים הוכחה.)

(א) $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus Y$.
(ב) $(X \cup Y) \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z)$.
(ג) $(X \cup Y) \setminus (Y \cup Z) = X \setminus (Y \cup Z)$.
(ד) $(X \cup Y) \cap (Z \setminus X) = (Y \cap Z) \setminus X$.
(ה) $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$.
(ו) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$.

4. הוכיחו בשתי דרכים: הכלה דו־כיוונית וסדרת שוויונות תוך שימוש בטענות **[3]**, **[4]**, **[5]**:

(א) אם $X \cup Y = X \cup Z$, אז $X \cup Y' = X \cup Z'$.
(ב) אם $X \cap Y = X \cap Z$, אז $X \cap Y' = X \cap Z'$.
(ג) אם $X \cup Z = Y \cup Z$ וגם $X \cap Z = Y \cap Z$, אז $X = Y$.

5. תהיינה X, Y שתי קבוצות. נגדיר $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. זו פעולה בולאנית נוספת הנקראת **הפרש סימטרי**.
לדוגמא, אם $X = \{1,2,3,4\}, Y = \{3,4,5,6,7\}$, אז $X \triangle Y = \{1,2,5,6,7\}$.

(א) הוכיחו: $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Y)$ (לפי כך, זו דרך נוספת להגדיר את ההפרש הסימטרי).
(ב) סמנו את $X \triangle Y$ בדיאגרמת ון.
(ג) הוכיחו: $X \triangle Y = Y \triangle X$.
(ד) למה שווים הביטויים $X \triangle \varnothing$, $X \triangle X$, $X \triangle X'$, $X \triangle U$?
(ה) הוכיחו: $X \triangle Y = \varnothing$ אם ורק אם $X = Y$.
(ו) הוכיחו: $(X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)$. סמנו קבוצה זו בדיאגרמת ון. הסבירו איך מטענה זו נובע שהביטוי $X \triangle Y \triangle Z$ (ללא סוגריים) מוגדר היטב. הסיקו שהביטויים מהצורה $X_1 \triangle X_2 \triangle \ldots \triangle X_k$ מוגדרים היטב.
(ז) תהיינה $X_1 = \{1,2\}, X_2 = \{2,3\}, X_3 = \{3,4\}, X_4 = \{4,5\}, X_5 = \{1,3,5\}$.
נסמן $A = X_1 \triangle X_2 \triangle X_3 \triangle X_4 \triangle X_5$.
איך ניתן לקבוע האם $2 \in A$ והאם $3 \in A$ בלי לחשב את A?
השלימו (והוכיחו) את הטענה: "$x \in X_1 \triangle X_2 \triangle \ldots \triangle X_k$ אם ורק אם x שייך..."
(ח) תהיינה X, Y שתי קבוצות. הוכיחו: קיימת קבוצה Z כך ש־ $X \triangle Z = Y$, והיא מוגדרת באופן יחיד.
(ט) פעולת ההפרש הסימטרי נקראת גם "exclusive or" (XOR). מדוע?

6. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

(א) אם $X \subseteq Y \cap Z$, אז $X \subseteq Y$ וגם $X \subseteq Z$.
(ב) אם $X \subseteq Y \cup Z$, אז $X \subseteq Y$ או $X \subseteq Z$.
(ג) אם $X \cap Y = X \cup Y$, אז $X = Y$.
(ד) אם $X \triangle Z = Y \triangle Z$, אז $X = Y$.

7. תהיינה $X_1, X_2, \ldots, X_k$ קבוצות בקבוצת הדיון U. לכל $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ נסמן: $X_i^1 = X_i$, $X_i^0 = X_i'$.
כל קבוצה מהצורה $X_1^{j_1} \cap X_2^{j_2} \cap \cdots \cap X_k^{j_k}$, כאשר $j_i \in \{0,1\}$ לכל $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, נקראת **קבוצה יסודית**.

(א) הוכיחו כי עבור $X_1, X_2, \ldots, X_k$ נתונות, קיימות לכל היותר 2^k קבוצות יסודיות שונות. תנו דוגמא בה מספרן יהיה קטן ממש מ־ 2^k.

(ב) עבור $k=2,3$: מה הפירוש של הקבוצות היסודיות בדיאגרמות ון? כיצד העובדה שבדיאגרמת ון יש **בדיוק** 2^k תחומים מתיישבת עם תוצאת הסעיף הקודם (**לכל היותר** 2^k קבוצות יסודיות)?

(ג) הוכיחו כי אם שתי קבוצות יסודיות שונות זו מזו, אז הן זרות.

(ד) הוכיחו כי עבור $X_1, X_2, \ldots, X_k$ נתונות, האיחוד של כל הקבוצות יסודיות הוא U.

(ה) הוכיחו כי תוצאת כל שילוב של פעולות בולאניות על $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ניתנת לכתיבה כאיחוד של קבוצות יסודיות (לדוגמא: $X_1 \cup X_2 = (X_1 \cap X_2') \cup (X_1 \cap X_2) \cup (X_1' \cap X_2)$).

(ו) עבור $k=3$, כתבו את הקבוצות הבאות כאיחוד של קבוצות יסודיות:

$$X_1 \setminus (X_2 \setminus X_3), \quad (X_3 \cup X_2) \setminus (X_2 \cap X_3), \quad ((X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \cap X_3))', \quad X_1 \triangle X_2 \triangle X_3.$$

8. המחישו את ההוכחה של טענה **[6]** בדיאגרמת ון.

9. ציירו דיאגרמת ון עבור ארבע קבוצות. ודאו שקיבלתם חלוקה של קבוצת הדיון ל־ 16 תחומים.

10. איך העובדה שלקבוצה בגודל n יש 2^n תת־קבוצות קשורה לעובדה שבדיאגרמת ון עבור n קבוצות יש 2^n תחומים?

11. תהיינה X, Y, Z, T ארבע קבוצות, ותהיינה

$$A = X \cup (Y \cap (Z' \cup T')), \quad B = (X \cup Y) \setminus ((Z \cap T) \setminus X), \quad C = (X \cup Y) \setminus (Z' \cup T').$$

אילו שתי קבוצות מבין A, B, C בהכרח שוות?

12. תהיינה X, Y, Z קבוצות סופיות.

(א) בטאו את $|X \cup Y \cup Z|$ באמצעות $|X|, |Y|, |Z|, |X \cap Y|, |X \cap Z|, |Y \cap Z|, |X \cap Y \cap Z|$.

(ב) בטאו את $|X \triangle Y|$ באמצעות $|X|, |Y|, |X \cap Y|$.

1.3 משפחות של קבוצות

משפחה של קבוצות, קבוצת אינדקסים. תהי I קבוצה לא ריקה, ונניח שלכל $i \in I$ מותאמת קבוצה X_i. אוסף הקבוצות X_i נקרא **משפחה של קבוצות**, היא תסומן ב־ $(X_i)_{i \in I}$. הקבוצה I תיקרא **קבוצת האינדקסים**.

דוגמא. $(X_1 = \{5, 6, 7\},\ X_2 = [3, 4],\ X_3 = \mathbb{Z})$ היא משפחה של קבוצות עם קבוצת האינדקסים $\{1, 2, 3\}$.

איחוד וחיתוך מוכללים. תהי $(X_i)_{i \in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר:

- **האיחוד** של $(X_i)_{i \in I}$ הוא קבוצת האיברים השייכים לפחות לאחד מאברי המשפחה:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : \ \text{קיים } i \in I \text{ כך ש־ } x \in X_i\}.$$

- **החיתוך** של $(X_i)_{i \in I}$ הוא קבוצת האיברים השייכים לכל אברי המשפחה:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x : \ \text{לכל } i \in I \text{ מתקיים } x \in X_i\}.$$

אם קבוצת האינדקסים היא $I = \mathbb{N}$ (או $I = \mathbb{N}_+$), המשפחה $(X_i)_{i \in I}$ נקראת גם **סדרה [אינסופית] של קבוצות**, ומסומנת גם ב־ $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ (או $(X_i)_{i=1}^{\infty}$). האיחוד והחיתוך המוכללים במקרים אלה יסומנו גם ב־ $\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$, $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i$ כאשר קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}$, ב־ $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ כאשר קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}_+$.

באופן דומה נשתמש בסימונים $(X_i)_{i=k}^{\infty}$, $\bigcup_{i=k}^{\infty} X_i$ ו־ $\bigcap_{i=k}^{\infty} X_i$ כאשר קבוצת האינדקסים היא $\{k, k+1, k+2, \dots\}$, ובסימונים $(X_i)_{i=k}^{m}$, $\bigcup_{i=k}^{m} X_i$ ו־ $\bigcap_{i=k}^{m} X_i$ כאשר קבוצת האינדקסים היא $\{k, k+1, \dots, m-1, m\}$.

דוגמאות:

1. תהיינה $I = \{1,2,3\}$; $X_1 = \{3,4,5,6\}$, $X_2 = \{4,5,6,7\}$, $X_3 = \{5,6,7,8\}$.
   אז $\bigcup_{i\in I} X_i = \{3,4,5,6,7,8\}$, $\bigcap_{i\in I} X_i = \{5,6\}$.
2. תהיינה $I = \mathbb{N}_+$; לכל $i \in \mathbb{N}_+$, $X_i = \{1,2,\dots,i\}$.
   אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \mathbb{N}_+$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \{1\}$.
3. תהיינה $I = \mathbb{N}_+$; לכל $i \in \mathbb{N}_+$, $X_i = (0, 1/n)$.
   אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = (0,1)$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \varnothing$.
4. תהיינה $I = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; לכל $i \in \mathbb{R}_+$, $X_i = (-\infty, i) = \{x \in R : x < i\}$.
   אז $\bigcup_{i\in I} X_i = \mathbb{R}$, $\bigcap_{i\in I} X_i = (-\infty, 0]$.

[7] חוקי דה מורגן המוכללים:

- $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)' = \bigcap_{i\in I} X_i'$
- $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)' = \bigcup_{i\in I} X_i'$

הוכחת חוק דה מורגן המוכלל הראשון:

נניח ש־ $x \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)'$. זה אומר: $x \notin \bigcup_{i\in I} X_i$. לכן לכל $i \in I$ מתקיים $x \notin X_i$, כלומר $x \in X_i'$. מכאן $x \in \bigcap_{i\in I} X_i'$. בכך הוכחנו $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)' \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i'$.

נניח ש־ $x \in \bigcap_{i\in I} X_i'$. זה אומר: לכל $i \in I$ מתקיים $x \in X_i'$, כלומר $x \notin X_i$. לכן $x \notin \bigcup_{i\in I} X_i$, כלומר $x \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)'$. בכך הוכחנו $\bigcap_{i\in I} X_i' \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)'$. $\square$

תרגילים:

1. תהיינה $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ ו־ $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ שתי המשפחות המוגדרות ע"י

$$X_i = \left[\frac{1}{i},\ 1+\frac{1}{i}\right], \qquad Y_i = \left[\frac{(-1)^i}{i},\ 1+\frac{1}{i}\right].$$

מצאו את הקבוצות

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i.$$

2. לכל a ממשי, תהיינה $X_i = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $Y_i = [a, +\infty)$. מהו $\bigcap_{a\in\mathbb{R}} X_a$ ומהו $\bigcap_{a\in\mathbb{R}} Y_a$?

3. תהיינה $(X_i)_{i\in I}$ ו־ $(Y_i)_{i\in I}$ שתי משפחות של קבוצות.

(א) הוכיחו: $\bigcup_{i\in I}(X_i \cup Y_i) = \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$.

(ב) הוכיחו: $\bigcup_{i\in I}(X_i \cap Y_i) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$. תנו דוגמא להכלה ממש.

(ג) הוכיחו: $\bigcup_{i\in I}(X_i \setminus Y_i) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right)$. תנו דוגמא להכלה ממש.

(ד) בעזרת חוק דה מורגן המוכלל, הסיקו מסעיף ב': $\bigcap_{i\in I}(X_i \cup Y_i) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right)$.

4. תהי $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ משפחה של קבוצות. נגדיר משפחה נוספת $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ע"י

- $Y_0 = X_0$
- לכל $n \in \mathbb{N}_+$, $Y_n = X_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} X_k\right)$.

הוכיחו:

(א) המשפחה $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ היא משפחה של קבוצות זרות. כלומר, לכל $k, m \in \mathbb{N}$, $k \neq m$, מתקיים $Y_k \cap Y_m = \varnothing$.

(ב) לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\bigcup_{n=0}^{k} Y_n = \bigcup_{n=0}^{k} X_n$.

(ג) $\bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

1.4 קבוצת החזקה

קבוצת החזקה. תהי X קבוצה. הקבוצה של כל התת־קבוצות של X נקראת **קבוצת החזקה** של X. היא תסומן ב־ $P(X)$. לפי כך, $P(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$.

במילים אחרות, $Y \in P(X)$ אם ורק אם $Y \subseteq X$.

מטענה **[2]** נובע שאם X היא קבוצה סופית ו־ $|X| = n$, אז $|P(X)| = 2^n$ (מכאן המונח "קבוצת החזקה")[11].

דוגמאות.

1. כידוע, לכל קבוצה X מתקיים $\varnothing \subseteq X$ ו־ $X \subseteq X$. לכן לכל קבוצה X מתקיים $\varnothing \in P(X)$ ו־ $X \in P(X)$.

[11] וסימון נוסף לקבוצת החזקה של X: 2^X.

2. אם $X = \{1,2,3\}$, אז $P(X) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$.
3. ניקח $X = \varnothing$.

   $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ (בקבוצה זו איבר אחד),

   $P(P(\varnothing)) = \{\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\ \}$ (בקבוצה זו שני איברים),

   $P(P(P(\varnothing))) = \{\ \varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ \}$ (בקבוצה זו ארבעה איברים),

   וכו'.

תרגילים.

1. הוכיחו: $X \subseteq Y$ אם ורק אם $P(X) \subseteq P(Y)$.
2. הוכיחו: $P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y)$.
3. הוכיחו: $P(X \cup Y) \subseteq P(X) \cup P(Y)$. מתי מתקיים שוויון?
4. הוכיחו: $P(X) \setminus P(Y) \subseteq P(X \setminus Y)$. האם ייתכן שוויון?
5. תהי $(X_i)_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. הוכיחו:

   (א) $\bigcap_{i\in I} P(X_i) = P(\bigcap_{i\in I} X_i)$.

   (ב) $\bigcup_{i\in I} P(X_i) \subseteq P(\bigcup_{i\in I} X_i)$. תנו דוגמא להכלה ממש.

1.5 זוגות סדורים; מכפלה קרטזית

זוגות סדורים. נסתכל בקבוצה $\{x,y\}$. כידוע, בקבוצה אין חשיבות לסדר של איברים, כלומר $\{x,y\} = \{y,x\}$. אנו מעוניינים במושג של **זוג סדור** (x,y) שבו תהיה גם חשיבות למקום. הזוג הסדור ייקבע ע"י כך שייקבע מי הרכיב הראשון ומי הרכיב השני. כלומר נרצה שיתקיים: $(x,y) = (a,b)$ אם ורק אם $x = a$ ו־ $y = b$.

נגדיר זוג סדור שיקיים דרישה זו במונחי קבוצות, על ידי $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$.

[8] טענה: $(x,y) = (a,b)$ אם ורק אם $x = a$ ו־ $y = b$. כלומר, $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$ אם ורק אם $x = a$ ו־ $y = b$.

הוכחה. כיוון אחד ברור: אם $x = a$ ו־ $y = b$, אז $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

נוכיח את הכיוון השני:

נניח $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

נבחין שני מקרים: (1) $\{x\} = \{x,y\}$; (2) $\{x\} \neq \{x,y\}$.

1. אם $\{x\} = \{x,y\}$, אז $y \in \{x\}$ ולכן $x = y$. מכאן $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\},\{x\}\} = \{\{x\}\}$. לכן מהנתון נובע: $\{a\} \in \{\{x\}\}$ ו־ $\{a,b\} \in \{\{x\}\}$. מכאן $\{a\} = \{a,b\} = \{x\}$, ולכן $a = b = x = y$.
2. אם $\{x\} \neq \{x,y\}$, אז $x \neq y$. מהנתון נובע $\{a\} \in \{\{x\},\{x,y\}\}$. אם $\{a\} = \{x,y\}$, אזי $a = x = y$, סתירה. לכן $\{a\} = \{x\}$ ומכאן $x = a$. כעת מהנתון נובע $\{\{a\},\{a,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$. אם $b \neq y$ אז $\{a\} = \{a,y\}$ ו־ $\{a\} = \{a,b\}$, מכאן $a = y = b$, סתירה. לכן $y = b$. □

נציין שבזוג סדור ייתכן ששני רכיבים שווים. לדוגמא, $(2,2)$ הוא זוג סדור "חוקי".

מכפלה קרטזית. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. **המכפלה הקרטזית**[12] שלהן, שתסומן ב־ $X \times Y$, היא קבוצת כל הזוגות הסדורים עם רכיב ראשון השייך ל־ X ורכיב שני השייך ל־ Y:

$$X \times Y = \{(x,y):\ x \in X, y \in Y\}.$$

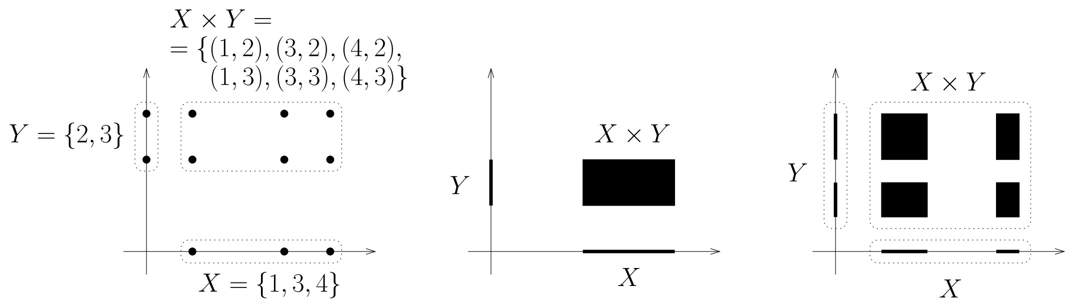
דוגמא: אם $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{3,4\}$, אז $X \times Y = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$.

[9] טענה:

אם X ו־ Y הן קבוצות סופיות כך ש־ $|X| = k$ ו־ $|Y| = m$, אז $|X \times Y| = km$.

הוכחה: בקביעת $(x,y) \in X \times Y$, יש k אפשרויות לבחור את הרכיב הראשון x ו־ m אפשרויות לבחור את הרכיב השני y. $\square$

תאור גרפי של המכפלה הקרטזית $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. אם $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, אז ניתן לייצג את המכפלה הקרטזית $X \times Y$ במישור עם מערכת צירים (המישור כולו, המכונה גם **המישור הקרטזי**, הלא הוא התאור של $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). תאור זה עוזר להבנה האינטואיטיבית של הנושא ומאפשר להמחיש חלק מהטענות. באיור הבא נראה, בפרט, שהמכפלה הקרטזית של שני קטעים היא מלבן במישור, והמכפלה הקרטזית של שתי קבוצות שהינן איחודים של קטעים היא איחוד של מלבנים.



תכונות של מכפלה קרטזית. נראה מספר תכונות של מכפלה קרטזית. נוכיח אחדות מהן ואת השאר נשאיר כתרגיל.

[10] טענה.

1. $X \times Y = \varnothing \ \Leftrightarrow\ X = \varnothing$ או $Y = \varnothing$.

הוכחה. כיוון $\Rightarrow$: אם $X \times Y \neq \varnothing$, כלומר קיים $(x,y) \in X \times Y$, אז $x \in X$ ו־ $y \in Y$ ולכן $X \neq \varnothing$ ו־ $Y \neq \varnothing$.

כיוון $\Leftarrow$: אם $X \neq \varnothing$ ו־ $Y \neq \varnothing$, אז קיימים $x \in X$ ו־ $y \in Y$, מכאן $(x,y) \in X \times Y$, לכן $X \times Y \neq \varnothing$. $\square$

2. $X_1 \times Y_1 = X_2 \times Y_2 \quad \Leftrightarrow \quad (X_1 = X_2$ ו־ $Y_1 = Y_2)$ או בשני האגפים לפחות אחת מהקבוצות היא $\varnothing$.

הוכחה. כיוון $\Rightarrow$: אם $X_1 = X_2$ ו־ $Y_1 = Y_2$, אז בבירור $X_1 \times Y_1 = X_2 \times Y_2$. אם בשני האגפים לפחות אחת מהקבוצות היא $\varnothing$ (למשל, $Y_1 = X_2 = \varnothing$), אז לפי סעיף 1 מתקיים $X_1 \times Y_1 = X_2 \times Y_2 = \varnothing$.

כיוון $\Leftarrow$: אם $X_1 \times Y_1 = X_2 \times Y_2 = \varnothing$, אז הטענה נובעת מסעיף 1.
כעת נניח ש־ $X_1 \times Y_1 = X_2 \times Y_2 \neq \varnothing$. לפי סעיף 1, אף אחת מהקבוצות X_1, Y_1, X_2, Y_2 אינה $\varnothing$.
אם $X_1 \neq X_2$, אז קיים איבר x ששייך רק לאחת מבין הקבוצות X_1, X_2. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $x \in X_1 \setminus X_2$.
נבחר $y \in Y_1$. הזוג הסדור (x,y) שייך ל־ $X_1 \times Y_1$ (כי $x \in X_1$, $y \in Y_1$) אבל לא שייך ל־ $X_2 \times Y_2$ (כי $x \notin X_2$),

[12] על שם פילוסוף ומתמטיקאי צרפתי René Descartes (בלטינית, Renatus Cartesius), $1596 - 1650$.

ומכאן $X_1 \times Y_1 \neq X_2 \times Y_2$.

בכך הוכחנו $X_1 = X_2$, ובאופן דומה ניתן להוכיח $Y_1 = Y_2$. $\square$

מסקנה: $X \times Y = Y \times X \quad \Leftrightarrow \quad X = Y$ או $X = \varnothing$ או $Y = \varnothing$.

3. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$;

$(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$.

הוכחה של $\boldsymbol{X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)}$.

הכלה $\subseteq$: יהי $(x, y) \in X \times (Y \cup Z)$. אז $x \in X$, ו־ $y \in Y$ או $y \in Z$. אם $y \in Y$, אז $(x, y) \in X \times Y$ ולכן $x \in (X \times Y) \cup (X \times Z)$. ואם $y \in Z$, אז $(x, y) \in X \times Z$ ולכן $(x, y) \in (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

הכלה $\supseteq$: יהי $(x, y) \in (X \times Y) \cup (X \times Z)$. אז $(x, y) \in X \times Y$ או $(x, y) \in X \times Z$. אם $(x, y) \in X \times Y$, אז $x \in X$ ו־ $y \in Y$, מכאן $y \in Y \cup Z$, לכן $(x, y) \in X \times (Y \cup Z)$. ואם $(x, y) \in X \times Z$, אז $x \in X$ ו־ $y \in Z$, מכאן $y \in Y \cup Z$, לכן $(x, y) \in X \times (Y \cup Z)$. $\square$

4. $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$;

$(X \cap Y) \times Z) = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$.

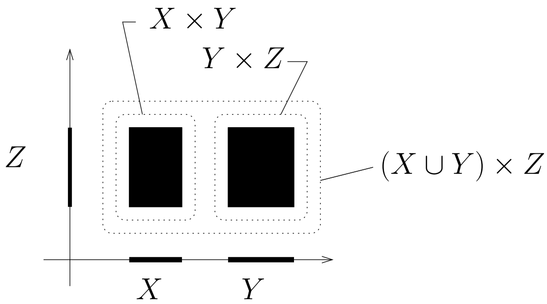
הוכחה: תרגיל.

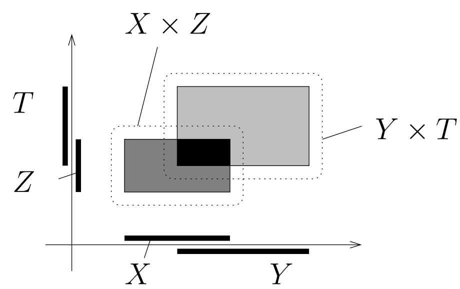
5. $X \times (Y \setminus Z) = (X \times Y) \setminus (X \times Z)$;

$(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$.

הוכחה: תרגיל.

הצד השמאלי של האיור הבא ממחיש את הטענה $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$ (אמנם עבור המקרה $X \cap Y = \varnothing$). הצד הימני שלו ממחיש את הטענה $(X \cap Y) \times (Z \cap T) = (X \times Z) \cap (Y \times T)$ אותה תתבקשו להוכיח בתרגילים. ניתן גם ללמוד ממנו שבאופן כללי לא ניתן להציג את ההאיחוד $(X \times Z) \cup (Y \times T)$ כמכפלה קרטזית של שתי קבוצות.





תרגילים:

1. תהיינה X ו־ Y שתי תת־קבוצות של $\mathbb{N}$. הוכיחו כילא ייתכן $X \times Y = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ x \leq y\}$.
2. השלימו את ההוכחה של טענה **[10]**.
3. (א) הסיקו מטענה **[10.4]**:
$$(X \cap Y) \times (Z \cap T) = (X \times Z) \cap (X \times T) \cap (Y \times Z) \cap (Y \times T).$$
(ב) הוכיחו: $(X \cap Y) \times (Z \cap T) = (X \times Z) \cap (Y \times T)$. (השוו עם הסעיף הקודם!)

(ג) הוכיחו: $(X \times Z) \cap (Y \times T) = (X \times T) \cap (Y \times Z)$.

4. (א) תהיינה X, Y, Z שלוש קבוצות כך ש־ $Z \neq \varnothing$. נתון: $(X \times Y) \cup (Y \times X) = Z \times Z$. הוכיחו יכ $X = Y = Z$.
(מדוע הדרישה $Z \neq \varnothing$ הינה חיונית?)

(ב) הוכיחו או הפריכו: $(X \times X) \setminus (Y \times Z) = (X \setminus Y) \times (X \setminus Z)$.

(ג) הוכיחו: $(X \times X) \setminus (Y \times Y) = (X \times (X \setminus Y)) \cup ((X \setminus Y) \times X)$. המחישו טענה זו בצורה גרפית (בדומה לאיורים האחרונים).

5. תהיינה X, Y, Z, T ארבע קבוצות.

(א) הוכיחו: אם קיימות שתי קבוצות A ו־ B כך ש־ $(X \times Y) \cup (Z \times T) = A \times B$, אז מתקיימת לפחות הכלה אחת מבין $X \subseteq Z$, $Z \subseteq X$, $Y \subseteq T$, $T \subseteq Y$.

(ב) תנו דוגמא המראה שההיפך לא נכון. כלומר, דוגמא של X, Y, Z, T כך שמתקיימת לפחות הכלה אחת מבין $X \subseteq Z$, $Z \subseteq X$, $Y \subseteq T$, $T \subseteq Y$, אבל לא קיימות קבוצות A ו־ B כך ש־ $(X \times Y) \cup (Z \times T) = A \times B$.

(ג) נתחו שאלה זו באופן מלא. כלומר, תארו כל המצבים בהם קיימות קבוצות A ו־ B כך ש־
$(X \times Y) \cup (Z \times T) = A \times B$. למה שוות A ו־ B במצבים אלה?

6. האם מ־ $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ נובע $x = a, y = b, z = c$? כלומר, האם ניתן להגדיר שלשה סדורה ע"י $(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$?

1.6 מכפלה קרטזית מוכללת

מכפלה קרטזית מוכללת. ניתן להכליל את המושג של מכפלה קרטזית ולהגדיר מכפלה קרטזית של יותר משתי קבוצות. נתחיל מהמקרה של שלוש קבוצות.

נגדיר **שלשה סדורה** ע"י $(x, y, z) = ((x, y), z)$.

תהיינה X, Y, Z שלוש קבוצות. נגדיר

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) : x \in X, y \in Y, z \in Z\},$$

כלומר **המכפלה הקרטזית $\boldsymbol{X \times Y \times Z}$** היא קבוצת כל השלשות הסדורות בהן הרכיב הראשון שייך ל־ X, הרכיב השני ל־ Y, הרכיב השלישי ל־ Z.

באופן כללי, לכל $n \in \mathbb{N}_+$ נגדיר **$\boldsymbol{n}$־יה סדורה** ע"י $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$.

תהי $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ משפחה של n קבוצות. נגדיר

$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i\}.$$

כלומר **המכפלה הקרטזית $\boldsymbol{\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n}$** היא קבוצת כל ה־$n$־יות הסדורות בהן הרכיב הראשון שייך ל־ X_1, הרכיב השני ל־ X_2, ..., הרכיב ה־n־י ל־ X_n.

אם בנוסף כל הקבוצות במשפחה שוות: $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, המכפלה הקרטזית $\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n \text{ פעמים}}$ תסומן גם ב־ X^n. לדוגמא, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

כמו כן, נגדיר את המכפלה הקרטזית של סדרה אינסופית של קבוצות $(X_1, X_2, X_3, \dots)$:

$$\bigtimes_{i\in\mathbb{N}_+} X_i = \bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in X_i\}.$$

עד עתה הגדרנו מכפלה קרטזית עבור משפחות של קבוצות עם קבוצת האינדקסים $\{1, 2, \dots, n\}$ או $\mathbb{N}_+$. בהמשך נחזור לנושא זה ונגדיר גם מכפלה קרטזית עבור משפחות של קבוצות עם קבוצת אינדקסים כלשהי[13].

דוגמאות.

1. תהיינה $X_1 = \{2,3\}, X_2 = \{3,4\}, X_3 = \{2,4,5\}, X_4 = \{1\}$. אז

$$\bigtimes_{n=1}^{4} X_n = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 = \{(2,3,2,1), (2,3,4,1), (2,3,5,1), (2,4,2,1), (2,4,4,1), (2,4,5,1),$$
$$(3,3,2,1), (3,3,4,1), (3,3,5,1), (3,4,2,1), (3,4,4,1), (3,4,5,1)\}.$$

2. לכל $i \in \mathbb{N}_+$, תהי $X_i = \{1, 2, \dots, i\}$. אז

$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i \le i\}.$$

תרגילים.

1. (א) הסיקו מההגדרה של שלשה סדורה: אם $(a,b,c) = (x,y,z)$, אז $x = a$, $y = b$ ו־ $z = c$.
   (ב) הכלילו זאת עבור n־יות סדורות, לכל $n \in \mathbb{N}_+$.
2. תהיינה $X_1, X_2, \dots, X_n$ קבוצות סופיות: לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|X_i| = k_i$. למה שווה $\left|\bigtimes_{i=1}^{n} X_i\right|$?
3. נגדיר את המשפחה הבאה של קבוצות:
   $I = \mathbb{N}_+$; עבור $i \in \mathbb{N}_+$ זוגי: $X_i = \{2, 3, 4, 6, \dots\}$; עבור $i \in \mathbb{N}_+$ אי־זוגי: $X_i = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
   תארו את הקבוצה $\bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i$.
4. נתון

$$\bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i = \pm i\}.$$

   מהן הקבוצות X_i?

1.7 הגבול העליון והגבול התחתון של סדרת קבוצות

הגבול העליון והגבול התחתון של סדרת קבוצות. תהי $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות. נגדיר:

[13] שימו לב שלא נתנו הגדרה פורמלית לסדרה אינסופית $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. גם את זה נשלים כשנחזור לטפל בנושא של מכפלה קרטזית בצורה יותר כללית ומדוייקת.

- **הגבול העליון** של סדרת הקבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$: $\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} X_n$ $\overline{\lim}X_k =$;
- **הגבול התחתון** של סדרת הקבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$: $\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} X_n$ $\underline{\lim}X_k =$.

נראה את הפירוש של מושגים אלה בטענה הבאה:

[11] טענה:

- $\overline{\lim}X_k$ היא קבוצת כל האיברים השייכים למספר אינסופי של קבוצות X_k.

הוכחה. $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} X_n$ אם ורק אם לכל $m \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $x \in \bigcup_{n=m}^{\infty} X_n$, כלומר אם ורק אם לכל אינדקס $m \in \mathbb{N}_+$ קיים אינדקס $n \geq m$ כך ש־ $x \in X_n$. תנאי זה מתקיים אם ורק אם x שייך למספר אינסופי של קבוצות X_k. □

- $\underline{\lim}X_k$ היא קבוצת כל האיברים השייכים לכל הקבוצות X_k, פרט למספר סופי (במילים אחרות – השייכים לכל אברי הסדרה החל מאינדקס מסויים).

הוכחה. $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} X_n$ אם ורק אם קיים $m \in \mathbb{N}_+$ כך ש־ $x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} X_n$, כלומר אם ורק אם לכל $n \geq m$ מתקיים $x \in X_n$. תנאי זה מתקיים אם ורק אם x שייך לכל אברי הסדרה החל מאינדקס מסויים. □

דוגמאות.

1. תהי $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הקבוצות בה $X_k = \{5, 6\}$ לכל k זוגי, $X_k = \{6, 7\}$ לכל k אי־זוגי.
אז $\underline{\lim}X_k = \{6\}, \overline{\lim}X_k = \{5, 6, 7\}$.
2. תהי $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת הקבוצות בה $X_k = [-1/k, k]$.
אז $\underline{\lim}X_k = \overline{\lim}X_k = [0, +\infty)$.

סדרת קבוצות מתכנסת. סדרה של קבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ נקראת **מתכנסת** אם $\underline{\lim}X_k = \overline{\lim}X_k$. אז הקבוצה הזאת נקראת **הגבול** של סדרת הקבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$: $\lim X_k = \underline{\lim}X_k = \overline{\lim}X_k$.

למשל, בדוגמא 1 לעיל סדרת הקבוצות אינה מתכנסת; ובדוגמא 2 סדרת הקבוצות מתכנסת, והגבול שלה היא הקבוצה $[0, +\infty)$.

פונקציה אופיינית. תהי X קבוצה. לכל תת־קבוצה A של X נתאים פונקציה χ_A מ־ X ל־ $\{0, 1\}$ ע"י:

$$\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{array} \right\}.$$

הפונקציה χ_A נקראת **הפונקציה האפיינית של A**, או **הפונקציה המציינת של A**.

דוגמא: תהי $X = \{1, 2, 3, 4\}$. ניקח, למשל, את שלוש התת־קבוצות הבאות של X: $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2\}$, $C = \varnothing$. אז χ_A, χ_B ו־ χ_C הן פונקציות הבאות מ־ X ל־ $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(1) = 1,\ \chi_A(2) = 1,\ \chi_A(3) = 0,\ \chi_A(4) = 1;$$

$$\chi_B(1) = 0,\ \chi_B(2) = 1,\ \chi_B(3) = 0,\ \chi_B(4) = 0;$$

$$\chi_C(1) = 0,\ \chi_C(2) = 0,\ \chi_C(3) = 0,\ \chi_C(4) = 0.$$

פונקציה אופיינית וסדרות של קבוצות. תהי $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה של תת־קבוצות של X. לכל $k \in \mathbb{N}_+$ נגדיר $f_k = \chi_{X_k}$. בכך קיבלנו סדרה של פונקציות $(f_k)_{k=1}^{\infty}$. נבחר $x \in X$. כאשר מציבים x בפונקציות f_k, מתקבלת סדרה $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ של המספרים 0 ו־ 1. לפי כך מוגדרים הגבול העליון והגבול התחתון של סדרות אלה: $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ ו־ $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. הטענה הבאה דנה בקשר בין הגבול העליון והגבול התחתון של סדרת קבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ לבין הגבול העליון והגבול התחתון של הפונקציות האפייניות של אבריה $f_k = \chi_{X_k}$.

[12] טענה. תהי $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה של תת־קבוצות של X. לכל $k \in \mathbb{N}_+$ נסמן $f_k = \chi_{X_k}$. אז לכל $x \in X$ מתקיים:

1. $x \in \overline{\lim} X_k$ אם ורק אם $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

הוכחה:

כיוון $\Leftarrow$: נניח ש־ $x \in \overline{\lim} X_k$. זה אומר: לכל m קיים $n \geq m$ כך ש־ $x \in X_n$, כלומר $f_n(x) = 1$. לכן לכל m מתקיים $\sup\limits_{n\geq m} f_n(x) = 1$, ולכן $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

כיוון $\Rightarrow$: נניח ש־ $x \notin \overline{\lim} X_k$. זה אומר: קיים m כך שלכל $n \geq m$ מתקיים $x \notin X_n$, כלומר $f_n(x) = 0$. לכן עבור m זה מתקיים $\sup\limits_{n\geq m} f_n(x) = 0$, ולכן $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$. $\square$

2. $x \in \underline{\lim} X_k$ אם ורק אם $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

הוכחה:

כיוון $\Leftarrow$: נניח ש־ $x \in \underline{\lim} X_k$. זה אומר: קיים m כך שלכל $n \geq m$ מתקיים $x \in X_n$, כלומר $f_n(x) = 1$. לכן עבור m זה מתקיים $\inf\limits_{n\geq m} f_n(x) = 1$, ולכן $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 1$.

כיוון $\Rightarrow$: נניח ש־ $x \notin \underline{\lim} X_k$. זה אומר: לכל m קיים $n \geq m$ כך ש־ $x \notin X_n$, כלומר $f_n(x) = 0$. לכן לכל m מתקיים $\inf\limits_{n\geq m} f_n(x) = 0$, ולכן $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) = 0$. $\square$

נדגים טענה זאת עבור סדרת הקבוצות: $X_n = \{5, 6\}$ לכל n זוגי, $X_n = \{6, 7\}$ לכל n אי־זוגי. ראינו באחת הדוגמאות לעיל ש־ $\overline{\lim} X_k = \{5, 6, 7\}$, $\underline{\lim} X_k = \{6\}$. ניקח כמה ערכי x ונסתכל בסדרה $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$.

עבור $x = 6$ מקבלים סדרה $(1, 1, 1, 1, \dots)$ כי 6 שייך לכל הקבוצות בסדרה. הגבול העליון והגבול התחתון של סדרה זו הם 1, בהתאם לכך ש־ 6 שייך ל־ $\overline{\lim} X_k = \{5, 6, 7\}$ ול־ $\underline{\lim} X_k = \{6\}$.

עבור $x = 7$ מקבלים סדרה $(1, 0, 1, 0, \dots)$ כי 7 שייך לקבוצות עם אינדקס אי־זוגי. הגבול העליון של סדרה זו הוא 1, והגבול התחתון הוא 0, בהתאם לכך ש־ 7 שייך ל־ $\overline{\lim} X_k = \{5, 6, 7\}$ ולא שייך ל־ $\underline{\lim} X_k = \{6\}$.

עבור $x = 8$ מקבלים סדרה $(0, 0, 0, 0, \dots)$ כי 8 לא שייך לאף קבוצה בסדרה. הגבול העליון והגבול התחתון של סדרה זו הם 0, בהתאם לכך ש־ 8 לא שייך ל־ $\overline{\lim} X_k = \{5, 6, 7\}$ ולא שייך ל־ $\underline{\lim} X_k = \{6\}$.

תרגילים:

1. מצאו את הגבול העליון ואת הגבול התחתון של הסדרות הבאות של קבוצות:

(א) $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k = [k, k+1]$,

(ב) $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k = \left[\frac{1}{k}, 2\right]$,

(ג) $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k = \left[1 - \frac{1}{k}, 3 + \frac{(-1)^k}{k}\right]$.

2. תהי $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות. הוכיחו כי $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}_+} X_k \subseteq \underline{\lim} X_k \subseteq \overline{\lim} X_k \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_+} X_k$.

3. (א) בנו סדרת קבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש־
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \{1,2,3,4\}, \quad \overline{\lim} X_k = \{1,2,3\}, \quad \underline{\lim} X_k = \{1,2\}, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = \{1\}.$$
(ב) הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות $A \subsetneqq B \subsetneqq C \subsetneqq D$, קיימת סדרת קבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ כך ש־
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = D, \quad \overline{\lim} X_k = C, \quad \underline{\lim} X_k = B, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = A.$$

4. תהי X קבוצת דיון ותהיינה $A, B \subseteq X$. הוכיחו:
   (א) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$.
   (ב) $\chi_{A'} = 1 - \chi_A$.
   (ג) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B)$.
   (ד) השלימו: $\chi_{A\cup B} = \dots$.
   (ה) השלימו: $\chi_{A\triangle B} = \dots$.

5. סדרה של קבוצות $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית עולה** אם לכל $k \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $X_k \subseteq X_{k+1}$. $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית יורדת** אם לכל $k \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $X_k \supseteq X_{k+1}$.

   הוכיחו: אם $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת, אז היא סדרת קבוצות מתכנסת. למה שווה $\lim X_k$ במקרים אלה?

6. תהיינה $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ ו־ $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ שתי סדרות של קבוצות.
   (א) הוכיחו: $\underline{\lim}(X_k \cap Y_k) = \underline{\lim} X_k \cap \underline{\lim} Y_k$.
   (ב) הוכיחו: $\overline{\lim}(X_k \cap Y_k) \subseteq \overline{\lim} X_k \cap \overline{\lim} Y_k$. תנו דוגמא להכלה ממש.

2 יחסים; יחסי שקילות

2.1 הגדרה ודוגמאות

מושג היחס. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. **יחס בין X ל־ Y** הוא תת־קבוצה של $X \times Y$. הסיבה להגדרה כזו היא שיחס (או קשר) בין איברים מסויימים של X לאיברים מסויימים של Y ניתן לתאור מלא ע"י ציון של כל הזוגות הסדורים (x, y) העומדים ביחס, כאשר הרכיב הראשון שייך ל־ X והשני ל־ Y. אם R הוא יחס, ו־ $(x, y) \in R$, נאמר **x עומד ביחס R עם y** (או **x עומד ביחס עם y** כאשר ידוע מההקשר באיזה יחס מדובר).

דוגמא. ניקח $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$. הקבוצה

$$R = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 4)\},$$

בהיותה תת־קבוצה של $X \times Y$, היא דוגמא של יחס בין X ל־ Y. כאן, לדוגמא, 1 עומד ביחס עם 3 ועם 6, וכן הלאה: ביחס זה יש שישה איברים (זוגות).

בנוסף למתן רשימה מפורשת של הזוגות העומדים ביחס, קיימות דרכים אחרות לתארו. נראה כמה מהן ונדגים אותן עבור היחס R מהדוגמא האחרונה:

1. טבלה בעלת שתי שורות: הזוגות השייכים ליחס רשומים בעמודות, הרכיב הראשון בשורה הראשונה, הרכיב השני מתחתיו בשורה השניה:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. מטריצה: השורות מתאימות לאברי X, העמודות מתאימות לאברי Y. הזוג $(x, y) \in X \times Y$ מתאים למשבצת ששייכת לשורה x ולעמודה y. היחס מתואר ע"י סימון המשבצות המתאימות לזוגות השייכים ליחס:

	3	4	5	6
1	$\bullet$			$\bullet$
2	$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$
3		$\bullet$		

3. גרף דו־צדדי: קדקדי הצד השמאלי מתאימים לאברי X, קדקדי הצד הימני מתאימים לאברי Y. הזוגות השייכים ליחס מחוברים ע"י צלעות:

סיבים. יהי R יחס בין X ל־ Y, ויהיו $a \in X$, $b \in Y$. קבוצת כל אברי Y העומדים ביחס עם $a \in X$ תיקרא **הסיב מעל $a \in X$**. קבוצת כל אברי X העומדים ביחס עם $b \in Y$ תיקרא **הסיב מעל $b \in Y$**. כלומר, הסיב מעל $a \in X$ הוא הקבוצה $R_a = \{y \in Y :\ (a,y) \in R\}$, והסיב מעל $b \in Y$ הוא הקבוצה $R^b = \{x \in X :\ (x,b) \in R\}$.

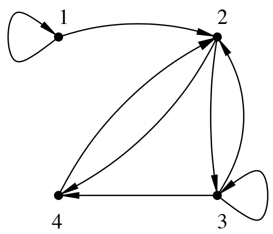
למשל, עבור היחס R מהדוגמא האחרונה:

$$R_1 = \{3,6\},\ \ R_2 = \{3,4,6\},\ \ R_3 = \{4\};\ \ \ R^3 = \{1,2\},\ \ R^4 = \{2,3\},\ \ R^5 = \varnothing,\ \ R^6 = \{1,2\}.$$

יחס בקבוצה. מקרה פרטי חשוב הוא יחס בין קבוצה לעצמה ($X = Y$). במקרה זה, במקום "יחס בין X ל־ X", נאמר לשם קיצור **יחס ב־ X**, או **יחס על X**. לפי ההגדרה, יחס ב־ X הוא תת־קבוצה של $X \times X$.

תאור נוסף ליחס ב־ X הוא גרף מכוון. קדקדי הגרף מתאימים לאברי הקבוצה X. אם הזוג (x,y) שייך ליחס, נעביר חץ ("קשת מכוונת") מ־ x אל y. אם גם (x,y) וגם (y,x) שייכים ליחס, אז בין נקודות אלה יהיו שני חיצים, בכיוונים הפוכים. אם (x,x) שייך ליחס, נעביר חץ מנקודה x לעצמה ("קשת עצמית").

האיור הבא מתאר את היחס $\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,2)\}$ בקבוצה $\{1,2,3,4\}$.



נציין במיוחד שני יחסים ספציפיים שניתן להגדיר בין כל שתי קבוצות X ו־ Y:

- **היחס הריק** בין X ל־ Y הוא $\varnothing$ (בתור תת־קבוצה של $X \times Y$). פירושו הוא שאף זוג $(x,y) \in X \times Y$ אינו עומד ביחס.
- **היחס המלא** בין X ל־ Y הוא הקבוצה $X \times Y$ כולה. פירושו הוא שכל זוג $(x,y) \in X \times Y$ עומד ביחס.

בכל קבוצה X קיים יחס (מ־ X ל־ X) מיוחד נוסף:

- **יחס הזהות** ב־ X הוא היחס $I_X = \{(x,x) :\ x \in X\}$. לדוגמא, עבור $X = \{1,2,3,4\}$ יחס הזהות הוא $I_X = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

מבחינת תורת הקבוצות, כל קשר בין שני משתנים (למשל, $x = y$, $x < y$, $x = y^2$) הוא יחס. עקב כך, מושג היחס הוא חשוב ושימושי מאוד במתמטיקה. למשל (כפי שנראה בפרק הבא), ההגדרה המדוייקת של מושג הפונקציה מבוסס על יחסים (וזאת מפני שפונקציה מקבוצה X לקבוצה Y היא קשר מסויים בין איברים של X לבין איברים של Y). גם הסדרים בקבוצות הם למעשה יחסים. לדוגמא, תהי $X = \{1,2,3,4,5\}$, ונגדיר בה יחס R ע"י $x < y \Leftrightarrow (x,y) \in R$. אז

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

תרגילים.

1. תהי $X=\{1,2,3,4,5\}$, ונגדיר בה יחס R ע"י $(x,y)\in R \Leftrightarrow |x-y|\le 1$. כתבו יחס זה במפורש.
2. תהי $X=\{1,2,3,4,5\}$. ציירו את הגרפים המכוונים המתארים את היחס המלא, את היחס הריק ואת יחס הזהות ב־ X.
3. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סופיות כך ש־ $|X|=k$, $|Y|=m$. מהו מספר היחסים השונים בין X ל־ Y?
4. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סופיות, ויהי R יחס בין X ל־ Y. הוכיחו:

$$\sum_{x\in X}|R_x|=\sum_{y\in Y}|R^y|.$$

2.2 פעולות בין יחסים

אם R ו־ S הם שני יחסים בין X ל־ Y, אז, מאחר שהם תת־קבוצות של אותה הקבוצה $X\times Y$, ניתן לבצע בהם פעולות בולאניות: $R\cup S$, $R\cap S$ וכו'. כעת נגדיר שתי פעולות נוספות הקשורות ליחסים.

יחס הפוך. יהי R יחס בין X ל־ Y. אז ***היחס ההפוך ל־ R*** (סימון: R^{-1}) הוא היחס בין Y ל־ X המוגדר ע"י

$$(y,x)\in R^{-1}\ \Leftrightarrow (x,y)\in R.$$

דוגמא 1. יהי $R=\{(1,3),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(3,4)\}$ יחס בין $X=\{1,2,3\}$ ל־ $Y=\{3,4,5,6\}$. עבורו, $R^{-1}=\{(3,1),(6,1),(3,2),(4,2),(6,2),(4,3)\}$, יחס מ־ Y ל־ X. מאחר שיחס הוא קבוצה, אין חשיבות לסדר בין אבריו. ניתן גם "לסדר אותו לפי אברי Y" ולכתוב $R^{-1}=\{(3,1),(3,2),(4,2),(4,3),(6,1),(6,2)\}$.

דוגמא 2. יהי R היחס הבא ב־ $\mathbb{N}$: $R=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\ n=2m\}=\{(0,0),(1,2),(2,4),\dots\}$.
אז $R^{-1}=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\ n=m/2\}=\{(0,0),(2,1),(4,2),\dots\}$.

שימו לב: השתמשנו באותיות m ו־ n בתאור של R ובתאור של R^{-1} באופן בלתי תלוי: בשניהם האות m מסמנת את הרכיב הראשון והאות n את הרכיב השני. כמובן, יכולנו לכתוב גם $R^{-1}=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\ m=n/2\}$.

דוגמא 3. יהי R היחס הבא ב־ $\mathbb{R}$: $R=\{(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ n=m^2\}$. אז $R^{-1}=\{(m,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\ n=\pm\sqrt{m}\}$.

הרכבת יחסים. יהיו R יחס בין X ל־ Y, S יחס בין Y ל־ Z. נגדיר ***S מורכב על R*** (סימון: $S\circ R$) להיות היחס בין X ל־ Z המוגדר ע"י

$$(x,z)\in S\circ R\quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{c}\text{קיים } y\in Y \text{ כך ש־}\\ (x,y)\in R \text{ ו־ } (y,z)\in S\end{array}$$

נראה איך הרכבת יחסים מתבטאת בתאור עם שתי שורות. נכתוב את היחס R מעל היחס S. הזוג (x,z) $(x\in X, z\in Z)$ שייך ל־ $S\circ R$ אם ורק אם x מופיע בשורה הראשונה של R, z מופיע בשורה השניה של S, וקיים $y\in Y$ (אחד לפחות) שמופיע מתחת ל־ x ביחס R ומעל z ביחס S.

דוגמא. תהיינה $X=\{1,2,3\}, Y=\{2,3,4,5,6\}, Z=\{3,4,5\}$.
ניקח R היחס הבא בין X ל־ Y: $R=\{(1,3),(1,5),(2,2),(3,4)\}$,
S היחס הבא בין Y ל־ Z: $S=\{(3,5),(4,4),(5,4),(5,5),(6,3)\}$.

כדי למצוא $S\circ R$ נכתוב R ו־ S בשתי שורות:

$$R=\left[\begin{array}{cccc}1&1&2&3\\3&5&2&4\end{array}\right]$$

$$S=\left[\begin{array}{ccccc}3&4&5&5&6\\5&4&4&5&3\end{array}\right]$$

מכאן נמצא:

$$S\circ R=\left[\begin{array}{ccc}1&1&3\\4&5&4\end{array}\right]$$

אכן:
הזוג $(1,4)$ שייך ל־ $S\circ R$ מפני ש־ $(1,5)\in R$ ו־ $(5,4)\in S$;
הזוג $(1,5)$ שייך ל־ $S\circ R$ מפני ש־ $(1,3)\in R$ ו־ $(3,5)\in S$ (וגם מפני ש־ $(1,5)\in R$ ו־ $(5,5)\in S$);
הזוג $(3,4)$ שייך ל־ $S\circ R$ מפני ש־ $(3,4)\in R$ ו־ $(4,4)\in S$.

בבניה של $S\circ R$, נוח נדמיין את הנתון $(x,y)\in R$ כתהליך בו x **עובר** ל־ y. אז אברי $S\circ R$ הם כל הזוגות $(x,z)\in X\times Z$ כך שניתן להגיע מ־ x ל־ z באמצעות "המתווך" $y\in Y$, בעזרת שני היחסים: תחילה R, אחר כך S.[14] נחזור לדוגמא האחרונה:

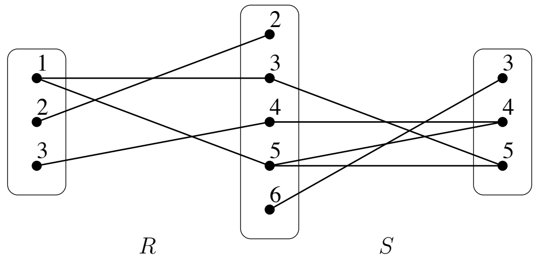
- נצא מ־ $1\in X$. באמצעות היחס R מגיעים מ־ $1\in X$ ל־ $3\in Y$ ול־ $5\in Y$. כעת, באמצעות היחס S, מגיעים מ־ $3\in Y$ ל־ $5\in Z$ ולכן $(1,5)\in S\circ R$; ומ־ $5\in Y$ ל־ $4\in Z$ ול־ $5\in Z$ ולכן $(1,4),(1,5)\in S\circ R$ (את הזוג $(1,5)$ קיבלנו פעמים, זה לא יקבל ביטוי בתשובה כי זה איבר בקבוצה).
- נצא מ־ $2\in X$. באמצעות היחס R מגיעים מ־ $2\in X$ ל־ $2\in Y$. מ־ $2\in Y$ לא ניתן להתקדם ע"י S ולכן לא מקבלים כאן איברים חדשים של $S\circ R$.
- נצא מ־ $3\in X$. באמצעות היחס R מגיעים מ־ $3\in X$ ל־ $4\in Y$. כעת, באמצעות היחס S, מגיעים מ־ $4\in Y$ ל־ $4\in Z$ ולכן $(3,4)\in S\circ R$.

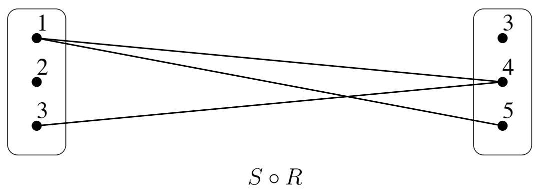
לסיכום: הגענו מ־ $x=1$ ל־ $z=4$ באמצעות $y=5$, מ־ $x=1$ ל־ $z=5$ באמצעות $y=3$ או $y=5$ ומ־ $x=1$ ל־ $z=4$ באמצעות $y=4$, ולכן $S\circ R=\{(1,4),(1,5),(3,4)\}$.

בניית $S\circ R$ תהיה עוד יותר ברורה אם נתאר את היחסים ע"י גרף דו־צדדי. נצייר את שני היחסים ביחד; הזוג (x,z) שייך ל־

[14] שימו לב: ביחס $S\circ R$, היחס הראשון ש"פועל" הוא R, והשני הוא S. בפרק על פונקציות נראה למה הסימון הוא כזה (R מימין, S משמאל) ולא להיפך.

$S \circ R$ אם ורק אם ניתן להגיע מ־ x ל־ z באמצעות איבר מסויים ("המתווך") של Y (אולי במספר דרכים):





אם R הוא יחס בין X ל־ Y ו־ S הוא יחס בין Y ל־ X, ניתן להגדיר גם $S \circ R$ (הוא יהיה יחס בין X ל־ X) וגם $R \circ S$ (הוא יהיה יחס בין Y ל־ Y).

בפרט, אם R ו־ S הם שני יחסים ב־ X, אז שני היחסים $S \circ R$ ו־ $R \circ S$ הם יחסים ב־ X. שימו לב: באופן כללי הם לא שווים זה לזה. לדוגמא (בדקו!): $X = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(1,2)\}$, $S = \{(1,1),(2,1)\}$. אז $S \circ R = \{(1,1)\}$, $R \circ S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

נראה מספר טענות על הרכבת יחסים.

[13] טענה.

1. **אסוציאטיביות של הרכבת יחסים**: יהיו R_1 יחס בין X_1 ל־ X_2, R_2 יחס בין X_2 ל־ X_3, R_3 יחס בין X_3 ל־ X_4. אז $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$ (זה יחס בין X_1 ל־ X_4).

הוכחה. מההגדרה של הרכבת יחסים נובע שהטענות $(x,y) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ ו־ $(x,y) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$ שקולות לאותה העובדה:

קיימים $a \in X_2$ ו־ $b \in X_3$ כך ש־ $(x,a) \in R_1$, $(a,b) \in R_2$ ו־ $(b,y) \in R_3$. □

הערה. טענה זו מאפשרת לכתוב בלי סוגריים ביטויים מהצורה $R_3 \circ R_2 \circ R_1$, וגם ביטויים יותר ארוכים מהצורה $R_n \circ R_{n-1} \circ \cdots \circ R_2 \circ R_1$ (כאן R_i הוא יחס בין קבוצה X_i לקבוצה X_{i+1}, וההרכבה ה"ארוכה" שרשמנו היא יחס בין X_1 ל־ X_{n+1}).

בפרט, אם R הוא יחס בקבוצה X, מגדירים **חזקות** של R באופן הבא: $R^1 = R$, ועבור $k > 1$, $R^k = R \circ R^{k-1}$. כלומר, $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ R \circ R$, $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$ וכו' – הטענה שהוכחנו כעת מאפשרת לכתוב בלי סוגריים, בפרט, ביטויים כאלה.

2. יהי R יחס בין X ל־ Y. אז $R \circ I_X = R$ ו־ $I_Y \circ R = R$. (I_X ו־ I_Y הם יחסי הזהות בקבוצות X ו־ Y בהתאמה.)

הוכחה חלקית: נוכיח $I_Y \circ R = R$.

יהי $(x,z) \in R$. מאחר ש־ $(z,z) \in I_Y$, מקבלים $(x,z) \in I_Y \circ R$. לכן $R \subseteq I_Y \circ R$.

נניח $(x,z) \in I_Y \circ R$. זה אומר: קיים $y \in Y$ כך ש־ $(x,y) \in R$ ו־ $(y,z) \in I_Y$. לפי הגדרה של יחס הזהות I_Y, מ־ $(y,z) \in I_Y$ נובע $y = z$. מאחר ש־ $(x,y) \in R$, מקבלים $(x,z) \in R$. לכן $I_Y \circ R \subseteq R$. □

3. יהי R יחס בין X ל־ Y. אז $(R^{-1})^{-1} = R$.

הוכחה. זה נובע ישירות מההגדרה של R^{-1}.

4. יהיו R יחס בין X ל־ Y, S יחס בין Y ל־ Z. אז $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

הוכחה. $(z,x) \in (S \circ R)^{-1}$ אם ורק אם $(x,z) \in S \circ R$, אם ורק אם קיים $y \in Y$ כך ש־ $(x,y) \in R$ ו־ $(y,z) \in S$, אם ורק אם קיים $y \in Y$ כך ש־ $(z,y) \in S^{-1}$ ו־ $(y,x) \in R^{-1}$, אם ורק אם $(z,x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$.

הכללה של טענה זו: $(R_n \circ \cdots \circ R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1} \circ \cdots \circ R_n^{-1}$ (כאשר הביטויים מוגדרים).

תרגילים.

1. בעמוד 27 ציינו כמה דרכים לתאר יחסים: טבלה בעלת שתי שורות, מטריצה, גרף דו־צדדי. עבור כל אחד מהן, הסבירו איך התאור של R^{-1} מתקבל מהתאור של R. אותה השאלה עבור גרף מכוון המתאר יחס בקבוצה X.

2. מצאו את $S \circ R$ ואת $R \circ S$ כאשר R ו־ S הם שני יחסים בקבוצה X, במקרים הבאים:

   (א) $X = \{1,2\}$, $R = \{(1,1),(1,2)\}$, $S = \{(1,2),(2,2)\}$.

   (ב) $X = \mathbb{N}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow x \le y$, $(x,y) \in S \Leftrightarrow x \ge y$.

   (ג) $X = \mathbb{N}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow x < y$, $(x,y) \in S \Leftrightarrow x > y$.

   (ד) X קבוצה כלשהי, R יחס כלשהו ב־ X, S הוא היחס המלא ב־ X.

3. יהי R יחס מ־ X ל־ Y.

   (א) הוכיחו כי אם $(x,y) \in R^{-1} \circ R$, אז גם $(y,x) \in R^{-1} \circ R$.

   (ב) מצאו דוגמא שבה לא יתקיים $I_X \subseteq R^{-1} \circ R$.
   השלימו את המשפט: "$I_X \subseteq R^{-1} \circ R$ אם ורק אם לכל ...... הסיב ......" (ראו הגדרה של מושג הסיב בעמוד 28).

   (ג) מצאו דוגמא שבה יתקיים $I_X \subsetneqq R^{-1} \circ R$, .

   (ד) מצאו תנאי הכרחי ומספיק לשוויון $I_X = R^{-1} \circ R$ (גם כן באמצעות סיבים).

4. יהי R היחס ב־ $\mathbb{N}$ המוגדר ע"י $(x,y) \in R \Leftrightarrow x > y$. יהי $n \in \mathbb{N}_+$. אילו זוגות שייכים ליחס R^n?

2.3 יחסים רפלקסיביים, סימטריים וטרנזיטיביים

בפרקים הבאים נדון ביחסים בין קבוצה לעצמה (כזכור, במקרה כזה אומרים "יחס בקבוצה X"). נגדיר מספר סוגים מיוחדים של יחסים.

לאורך הדיון הבא, R הוא יחס בקבוצה X.

- היחס R הוא **רפלקסיבי** אם לכל $x \in X$ מתקיים $(x,x) \in R$.
- היחס R הוא **סימטרי** אם $(x,y) \in R \;\Rightarrow\; (y,x) \in R$.
- היחס R הוא **טרנזיטיבי** אם $\langle\, (x,y) \in R,\ (y,z) \in R \,\rangle \;\Rightarrow\; (x,z) \in R$.

נראה מה הפירוש של הגדרות אלה בגרף המכוון המתאר את היחס:

- R הוא רפלקסיבי אם ורק אם מכל נקודה יש חץ לעצמה [15].
- R הוא סימטרי אם ורק אם מתקיים: אם יש חץ מקדקד x לקדקד y, אז יש גם חץ בכיוון ההפוך, מ־ y ל־ x.
- R הוא טרנזיטיבי אם ורק אם מתקיים: אם יש חץ מנקודה x לנקודה y ויש חץ מנקודה y לנקודה z, אז יש גם חץ מ־ x ל־ z.

[14] טענה. יהי R יחס בקבוצה X.

1. R רפלקסיבי אם ורק אם $I_X \subseteq R$.

הוכחה. זה נובע ישירות מההגדרה של יחס רפלקסיבי. $\square$

2. R סימטרי אם ורק אם $R \subseteq R^{-1}$ אם ורק אם $R = R^{-1}$.

הוכחה. נניח ש־ R סימטרי ויהי $(x,y) \in R$. אז, מאחר ש־ R סימטרי, $(y,x) \in R$ ולכן $(x,y) \in R^{-1}$. לכן $R \subseteq R^{-1}$.

נניח ש־ $R \subseteq R^{-1}$. יהי $(x,y) \in R$. מאחר ש־ $R \subseteq R^{-1}$, מקבלים $(x,y) \in R^{-1}$ ולכן $(y,x) \in R$. כלומר R מקיים את ההגדרה של יחס סימטרי.
בכך הוכחנו ש־ R סימטרי אם ורק אם $R \subseteq R^{-1}$.

נשים לב: מ־ $R \subseteq R^{-1}$ נובע $R^{-1} \subseteq (R^{-1})^{-1} = R$, ולכן $R = R^{-1}$. מצד שני, ברור שמ־ $R = R^{-1}$ נובע $R \subseteq R^{-1}$.
לכן קיבלנו גם: $R \subseteq R^{-1}$ אם ורק אם $R = R^{-1}$. $\square$

3. R טרנזיטיבי אם ורק אם $R \circ R \subseteq R$.

הוכחה. נניח ש־ R טרנזיטיבי ויהי $(x,z) \in R \circ R$. זה אומר: קיים $y \in X$ כך ש־ $(x,y),(y,z) \in R$. מאחר ש־ R טרנזיטיבי, מקבלים $(x,z) \in R$. לכן $R \circ R \subseteq R$.

נניח ש־ $R \circ R \subseteq R$ ויהיו $(x,y),(y,z) \in R$. מההגדרה של הרכבת יחסים מקבלים: $(x,z) \in R \circ R$. לכן $(x,z) \in R$, כלומר R טרנזיטיבי. $\square$

דוגמאות. נסתכל במספר יחסים ב־ $\mathbb{Z}$ ונבדוק האם הם רפלקסיביים, סימטריים וטרנזיטיביים.

1. $(x,y) \in R \ \Leftrightarrow\ x < y$.

R אינו רפלקסיבי. לדוגמא, $(0,0) \notin R$. (למעשה, אין אף זוג מהצורה (x,x) ששייך ליחס זה.)

R אינו סימטרי. לדוגמא, $(0,1) \in R$ אבל $(1,0) \notin R$.

R הוא יחס טרנזיטיבי:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x,y) \in R \\ (y,z) \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x < y \\ y < z \end{array} \right\} \Rightarrow x < z \Rightarrow (x,z) \in R.$$

2. $(x,y) \in R \ \Leftrightarrow\ x \leq y$.

R אינו סימטרי ו־ R טרנזיטיבי: מוכיחים זאת בדומה לדוגמא הקודמת.

אבל R זה הוא רפלקסיבי: לכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $x \leq x$ ולכן $(x,x) \in R$.

[15] כמובן ייתכן שיש חיצים נוספים.

3. $(x,y) \in R \ \Leftrightarrow\ |x-y| \le 1$.

R הוא רפלקסיבי: לכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $|x-x| \le 1$, ולכן $(x,x) \in R$ לכל $x \in \mathbb{Z}$.

R הוא סימטרי:

$$(x,y) \in R \ \Rightarrow\ |x-y| \le 1 \ \Rightarrow\ |y-x| \le 1 \ \Rightarrow\ (y,x) \in R.$$

R אינו טרנזיטיבי. לדוגמא, $(0,1) \in R$ ו־ $(1,2) \in R$ אבל $(0,2) \notin R$.

תרגילים.

1. בכל סעיף קבעו האם היחס R בקבוצה X הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

   (א) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow xy > 0$.

   (ב) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow xy > 0$.

   (ג) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow xy \ge 0$.

   (ד) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow x = -y$.

2. קראו את ההסבר הבא:

   "נוכיח שאם יחס R בקבוצה X הוא סימטרי וטרנזיטיבי, אז הוא רפלקסיבי. יהי $x \in X$. ניקח $(x,y) \in R$. לפי סימטריות, מ־ $(x,y) \in R$ נובע $(y,x) \in R$. לפי טרנזיטיביות, מ־ $(x,y) \in R$ ו־ $(y,x) \in R$ נובע $(x,x) \in R$. בכך הוכחנו שלכל $x \in X$ מתקיים $(x,x) \in R$. כלומר R הוא יחס רפלקסיבי."

   איפה בדיוק הטעות בטיעון זה?

   מצאו דוגמא של יחס R בקבוצה X שהינו סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.

3. כל יחס בקבוצה X שייך לאחת משמונה סוגים בהתאם לכך האם הוא רפלקסיבי או לא, סימטרי או לא, טרנזיטיבי או לא (למשל, אחת משמונת הסוגים הוא קבוצת היחסים הלא רפלקסיביים, סימטריים ולא טרנזיטיביים). עבור הקבוצה $X = \{1,2,3\}$, תנו שמונה דוגמאות של יחסים ב־ X, יחס אחד מכל סוג.

4. תהי X קבוצה סופית, כך ש־ $|X| = k$.

   (א) כמה יחסים ב־ X קיימים?

   (ב) כמה יחסים רפלקסיביים ב־ X קיימים?

   (ג) כמה יחסים סימטריים ב־ X קיימים?

   (ד) כמה יחסים רפלקסיביים וסימטריים ב־ X קיימים?

5. תרגיל זה דן במושג של "סגור טרנזיטיבי".

   תהי X קבוצה, ויהי R יחס ב־ X. **הסגור הטרנזיטיבי של R** (יסומן ב־ $\overline{R}$) הוא היחס הטרנזיטיבי המינימלי שמכיל את R. כלומר, $\overline{R}$ מקיים את התכונות הבאות:

   - R הוא יחס בקבוצה X.
   - $R \subseteq \overline{R}$.
   - $\overline{R}$ טרנזיטיבי.
   - לכל T שהינו יחס טרנזיטיבי ב־ X המכיל את R, מתקיים $\overline{R} \subseteq T$.

(א) יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון (V קבוצת הקדקדים, E קבוצת הצלעות של G).
נגדיר ב־ V יחס R באופן הבא: $(u,v)\in R$ אם ורק אם $u=v$ או u ו־ v מחוברים ע"י צלע.
מהו היחס $\overline{R}$?

(ב) נגדיר ב־ $\mathbb{Z}$ יחס R ע"י: $(x,y)\in R$ אם ורק אם $|x-y|=5$. מהו היחס $\overline{R}$?

(ג) נגדיר ב־ $\mathbb{Z}$ יחס R ע"י: $(x,y)\in R$ אם ורק אם $|x-y|=1$. מהו היחס $\overline{R}$?

(ד) נגדיר ב־ $\mathbb{Z}$ יחס R ע"י: $(x,y)\in R$ אם ורק אם $x-y=1$. מהו היחס $\overline{R}$?

(ה) השלימו את המשפט: "אם R הוא יחס טרנזיטיבי, אז $\overline{R}$ ......"

(ו) יהי R יחס בקבוצה X. הוכיחו כי $\overline{R}$ הוא החיתוך של כל היחסים הטרנזיטיביים ב־ X שמכילים את R.
כלומר:

$$\overline{R}=\bigcap_{\substack{T\in\mathcal{T}\\ R\subseteq T}} T$$

כאשר $\mathcal{T}$ היא קבוצת כל היחסים הטרנזיטיביים ב־ X.
(שימו לב שמתוצאה זו נובע שלכל יחס R קיים סגור טרנזיטיבי, ושהוא מוגדר באופן יחיד.)

(ז) יהי R יחס בקבוצה X. נגדיר: $R^1=R$, ולכל n טבעי הגדול מ־ 1: $R^n=R^{n-1}\circ R$. כלומר, $R^n=R\circ R\circ\ldots\circ R$ (הרכבה של n "גורמים" שכל אחד מהם הוא R). הוכיחו:

$$\overline{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} R^n.$$

2.4 יחס שקילות

הגדרה של יחס שקילות. יהי R יחס בקבוצה X. נאמר ש־ R הוא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמאות כלליות:

1. בכל קבוצה X היחס המלא ($(x,y)\in R$ לכל $x\in X, y\in Y$) הוא יחס שקילות.
2. בכל קבוצה X יחס הזהות I_X הוא יחס שקילות.

דוגמאות נוספות (נשתמש בהן בהמשך לצורך הדגמת מושגים שונים הקשורים למושג של יחס שקילות).

1. נתחיל מדוגמא מעולם הסטטיסטיקה. תהי X קבוצת תושבי המדינה. נתבונן במדרגות הכנסה: המדרגה הראשונה היא טווח ההכנסה $s<2000$, המדרגה השניה היא $2000\le s<4000$, המדרגה השלישית היא $4000\le s<6000$, וכן הלאה עד המדרגה האחרונה שהיא טווח ההכנסה $s\ge 10000$. יהי R היחס הבא: עבור שני אנשים $x,y\in X$ מתקיים $(x,y)\in R$ אם ורק אם x שייך לאותה מדרגת ההכנסה כמו y.

   לדוגמא, אם ההכנסה של x היא 3456, אם ההכנסה של y היא 4567 ואם ההכנסה של z היא 5678, אז, בפרט, $(x,x)\in R$, $(x,y)\notin R$, $(x,z)\notin R$, $(y,z)\in R$.

   R הוא יחס רפלקסיבי כי כל תושב בבירור נמצא באותה מדרגת הכנסה כמו הוא עצמו.

   R הוא יחס סימטרי: אם $(x,y)\in R$, אז x שייך לאותה מדרגת ההכנסה כמו y. מכאן y שייך לאותה מדרגת ההכנסה כמו x, ולכן $(y,x)\in R$.

R הוא יחס טרנזיטיבי: אם $(x,y)\in R$ ו־ $(y,z)\in R$, אז x שייך לאותה מדרגת ההכנסה כמו y ו־ y שייך לאותה מדרגת ההכנסה כמו z. מכאן z שייך לאותה מדרגת ההכנסה כמו x, ולכן $(x,z)\in R$.

לכן R הוא יחס שקילות.

2. יהי R היחס הבא ב־ $\mathbb{R}$:

$$(x,y)\in R \ \Leftrightarrow\ |x|=|y|.$$

כלומר, x ו־ y ביחס R אם ורק אם יש להם אותו ערך מוחלט. למשל, $(3,3)\in R$, $(4,-4)\in R$, $(3,5)\notin R$.

R הוא יחס רפלקסיבי: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x|=|x|$ ולכן $(x,x)\in R$.

R הוא יחס סימטרי:

$$(x,y)\in R\ \Rightarrow\ |x|=|y|\ \Rightarrow\ |y|=|x|\ \Rightarrow\ (y,x)\in R.$$

R הוא יחס טרנזיטיבי:

$$\left\{\begin{array}{c}(x,y)\in R\\(y,z)\in R\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c}|x|=|y|\\|y|=|z|\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ |x|=|z|\ \Rightarrow\ (x,z)\in R.$$

לכן R הוא יחס שקילות.

3. יהי $n\in\mathbb{N}_+$ מספר קבוע. נגדיר R_n, היחס הבא ב־ $\mathbb{Z}$:

$$(x,y)\in R_n \Leftrightarrow\ n|(x-y).$$

כלומר, שני מספרים שלמים עומדים ביחס R_n אם ורק אם ההפרש שלהם מתחלק בלי שארית ב־ n.

לדוגמא, $(2,7)\in R_5$, $(2,7)\notin R_3$, $(3,-11)\in R_7$, $(2,2)\in R_5$, $(2,-2)\notin R_3$, $(2,-2)\in R_4$.

עבור n קבוע:

R_n הוא יחס רפלקסיבי: לכל $x\in\mathbb{Z}$ מתקיים $n|(x-x)$ (0 מתחלק ב־ n) ולכן $(x,x)\in R_n$.

R_n הוא יחס סימטרי:

$$(x,y)\in R_n\ \Rightarrow\ n|(x-y)\ \Rightarrow\ x-y=n\cdot k \text{ כך ש־ } k\in\mathbb{Z} \text{ קיים }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y-x=n\cdot(-k)\ \Rightarrow\ n|(y-x)\ \Rightarrow\ (y,x)\in R_n.$$

R_n הוא יחס טרנזיטיבי:

$$\left\{\begin{array}{c}(x,y)\in R_n\\(y,z)\in R_n\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c}n|(x-y)\\n|(y-z)\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{c}x-y=n\cdot k\\y-z=n\cdot m\end{array}\right\} \text{ כך ש־ } k,m\in\mathbb{Z} \text{ קיימים }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x-z=n\cdot(k+m)\ \Rightarrow\ n|(x-z)\ \Rightarrow\ (x,z)\in R_n.$$

לכן לכל $n\in\mathbb{N}_+$, R_n הוא יחס שקילות.

נציין דרך נוספת להגדיר את היחס R_n. היא מבוססת על **משפט החלוקה עם שארית**:

יהיו $x\in\mathbb{Z}$ ו־ $n\in\mathbb{N}_+$. אז קיימים $q,r\in\mathbb{Z}$, הנקבעים באופן יחיד, כך ש־

$x = qn + r$ ו־ $0 \leq r < n$.

המספר r הוא **השארית בחלוקה של x ב־ n.** x מתחלק ב־ n [ללא שארית] אם ורק אם $r = 0$.

ניקח, לדוגמא, $n = 5$. עבור $x = 23$ מתקיים $23 = 4 \cdot 5 + 3$, לכן השארית בחלוקה של 23 ב־ 5 שווה ל־ 3. עבור $x = -28$ מתקיים $-28 = (-6) \cdot 5 + 2$, לכן השארית בחלוקה של -28 ב־ 5 שווה ל־ 2. עבור $x = 40$ מתקיים $40 = 8 \cdot 5 + 0 = 8 \cdot 5$, לכן השארית בחלוקה של 40 ב־ 5 שווה ל־ 0 (כלומר, 40 מתחלק ב־5).

יהי $n \in \mathbb{N}_+$ מספר קבוע, ויהיו x_1, x_2 שני מספרים שלמים. נחלק אותם עם שארית ב־ n ונבחין בין שני מקרים: (1) התקבלו שאריות שוות, (2) התקבלו שאריות שונות.

נניח שהשאריות שוות, נסמן אותן ב־ r. זה אומר: $x_1 = q_1 n + r$, $x_2 = q_2 n + r$. נחסר שוויונות אלה ונקבל: $(x_1 - x_2) = (q_1 - q_2)n$. קיבלנו ש־ $x_1 - x_2$ מתחלק ב־ n, כלומר $n|(x_1 - x_2)$.

כעת נניח שהשאריות שונות, נסמן אותן ב־ r_1 ו־ r_2. זה אומר: $x_1 = q_1 n + r_1$, $x_2 = q_2 n + r_2$, כאשר $r_1 \neq r_2$. ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $r_1 < r_2$. נחסר: $(x_2 - x_1) = (q_2 - q_1)n + (r_2 - r_1)$. מאחר ש־ $0 \leq r_1 < r_2 < n$, מקבלים $0 < r_2 - r_1 < n$. לכן $r_2 - r_1$ היא השארית בחלוקה של $x_2 - x_1$ ב־ n, והיא שונה מ־ 0. כלומר, $x_2 - x_1$ לא מתחלק ב־ n: $n \nmid (x_2 - x_1)$.

בכך הוכחנו: עבור $n \in \mathbb{N}_+$ קבוע, $x_1 - x_2$ מתחלק ב־ n אם ורק אם ל־ x_1 ו־ x_2 אותה שארית בחלוקה ב־ n. לכן ניתן להגדיר את היחס R_n גם באופן הבא: x ביחס עם y אם ורק אם ל־ x ו־ y אותה שארית בחלוקה ב־ n.

4. יהי R היחס הבא ב־ $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ הוא סימון מקוצר ל־ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, קבוצת הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים):

$$((x, y), (z, t)) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = z^2 + t^2.$$

לדוגמא, $((0, -5), (-4, 3)) \in R$, $((1, 2), (-2, 1)) \in R$, $((2, 9), (6, -7)) \in R$, $((2, 6), (4, 5)) \notin R$.

אם נפרש $\mathbb{R}^2$ כמישור עם מערכת צירים, הביטוי $x^2 + y^2$ הוא ריבוע המרחק בין הנקודה $(0, 0)$ לנקודה (x, y). לכן ניתן לתאר יחס זה גם כך: (x, y) עומד ביחס עם (z, t) אם ורק אם הנקודות (x, y) ו־ (z, t) נמצאות באותו מרחק מראשית הקואורדינטות.

R הוא יחס רפלקסיבי: לכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$ ולכן $((x, y), (x, y)) \in R$.

R הוא יחס סימטרי:

$$((x, y), (z, t)) \in R \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \;\Rightarrow\; z^2 + t^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; ((z, t), (x, y)) \in R.$$

R הוא יחס טרנזיטיבי:

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x, y), (z, t)) \in R \\ ((z, t), (u, v)) \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \\ z^2 + t^2 = u^2 + v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \Rightarrow ((x, y), (u, v)) \in R.$$

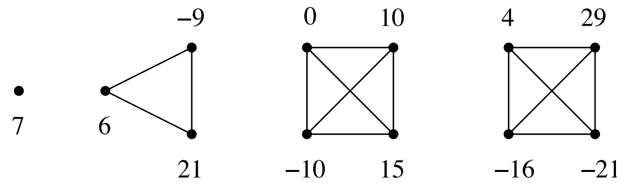
לכן R הוא יחס שקילות.

נשים לב: בכל אחת מהדוגמאות לעיל, קיים מאפיין של אברי הקבוצה כך ששני אברים שייכים ליחס אם ורק אם הם זהים **מבחינת המאפיין הזה**: בדוגמא 1 המאפיין הוא **שייכות למדרגת הכנסה**, בדוגמא 2 **ערך מוחלט**, בדוגמא 3 **שארית בחלוקה ב־ n**, בדוגמא 4 **מרחק מהראשית**.

סימון $\sim$. כאשר ידוע שיחס R הוא יחס שקילות, במקום $(x, y) \in R$ כותבים גם $x \underset{R}{\sim} y$, או פשוט $x \sim y$.

גרף לא מכוון כתאור של יחס שקילות. ניזכר בתאור של יחס R בקבוצה X ע"י גרף מכוון (ראו בעמוד 28). **אם ידוע** ש־ R הוא יחס שקילות, ניתן, בגלל הסימטריות, להשתמש בגרף לא מכוון: במקום שני חיצים, מ־ x ל־ y ומ־ y ל־ x, נחבר x ו־ y ע"י קשת אחת לא מכוונת. כמו כן, בגלל הרפלקסיביות, אין צורך לציין שכל נקודה מחוברת לעצמה, ולכן לא נצייר קשתות עצמיות.

האיור הבא מתאר בדרך זו את יחס השקילות המוגדר ע"י $x \sim y \Leftrightarrow 5|(x-y)$ בקבוצה $X = \{-21, -16, -10, -9, 0, 4, 6, 7, 10, 15, 21, 29\}$ (כלומר, הוא מוגדר כמו R_5 מדוגמא 3 לעיל, אבל לא ב־ $\mathbb{Z}$ אלא בקבוצה X).



נשים לב: הקבוצה X **התפרקה** למספר תת־קבוצות זרות שבתוך כל תת־קבוצה כל זוג של איברים שייך ליחס. בפרק הבא נראה שתופעה זו תקרה בכל יחס שקילות, וננסח אותה באופן פורמלי.

תרגילים.

1. תהי X קבוצה לא ריקה. מדוע היחס הריק ב־ X איננו יחס שקילות?

2. בכל סעיף קבעו האם היחס R הוא יחס שקילות בקבוצה X. עבור יחסי שקילות, מצאו מאפיין של אברי הקבוצה הקובע את השייכות ליחס (כמו בהערה אחרי הדוגמאות).

(א) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow xy > 0$.

(ב) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow xy \geq 0$.

(ג) $X = \mathbb{Z}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow 2|(x+y)$.

(ד) $X = \mathbb{Z}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow 3|(x+y)$.

(ה) $X = \mathbb{Z}$, $(x,y) \in R \Leftrightarrow 3|(x+2y)$.

(ו) $X = \mathbb{R}^2$, $((x,y),(z,t)) \in R \Leftrightarrow x = z$.

(ז) $X = \mathbb{R}^2$, $((x,y),(z,t)) \in R \Leftrightarrow x = t$.

(ח) $X = \mathbb{R}^2$, $((x,y),(z,t)) \in R \Leftrightarrow \langle$ קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־ $(z,t) = \lambda(x,y)$ $\rangle$.

(ט) $X = \mathbb{R}^2$, $((x,y),(z,t)) \in R \Leftrightarrow \langle$ קיים $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־ $(z,t) = \lambda(x,y)$ $\rangle$.

(י) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $((x,y),(z,t)) \in R \Leftrightarrow \langle$ קיים $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־ $(z,t) = \lambda(x,y)$ $\rangle$.

(יא) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $((x,y),(z,t)) \in R \Leftrightarrow \langle$ קיים $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ כך ש־ $(z,t) = \lambda(x,y)$ $\rangle$.

3. יהיו R ו־ S שני יחסי שקילות בקבוצה X. הוכיחו כי $R \cap S$ הוא יחס שקילות. הראו ע"י דוגמא ש־ $R \cup S$ לא בהכרח יחס שקילות (אילו בין שלוש התכונות בהגדרה של יחס שקילות לא בהכרח מתקיימות?).

4. יהיו R יחס שקילות בקבוצה X. האם R^{-1} הוא בהכרח יחס שקילות?

5. יהיו R ו־ S שני יחסי שקילות בקבוצה X.

(א) הראו ע"י דוגמא ש־ $R \circ S$ לא בהכרח יחס שקילות (אילו בין שלוש התכונות בהגדרה של יחס שקילות לא בהכרח מתקיימות?).

(ב) הוכיחו: $S \circ R$ הוא יחס שקילות אם ורק אם $S \circ R = R \circ S$.

(ג) הוכיחו: אם $S \circ R$ הוא יחס שקילות, אז הוא שווה לחיתוך של כל יחסי שקילות ב־ X המכילים את R ואת S.

6. נסמן $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. לכל k, $1 \leq k \leq 4$, קבעו כמה יחסי שקילות יש ב־ $[k]$.

2.5 מחלקות שקילות

מחלקות שקילות. יהי R יחס שקילות בקבוצה X, ויהי $a \in X$. קבוצת כל אברי X שעומדים ביחס R עם a תיקרא **מחלקת השקילות של a לפי היחס R** (כאשר ידוע באיזה יחס שקילות מדובר, נאמר פשוט **מחלקת השקילות של a**). מחלקת השקילות של a מסומנת ב־ $[a]_R$ (או פשוט $[a]$). לפי כך,

$$[a]_R = \{x \in X : \; x \underset{R}{\sim} a\}.$$

נציין שהודות לסימטריות ניתן לכתוב גם $[a]_R = \{x \in X : \; a \underset{R}{\sim} x\}$.

או, תוך שימוש בסימון המקורי:

$$[a]_R = \{x \in X : \; (x, a) \in R\} = \{x \in X : \; (a, x) \in R\}.$$

דוגמאות. נעבור על הדוגמאות שראינו לעיל, ונמצא בהן מחלקות שקילות.

1. X קבוצת תושבי המדינה, היחס מוגדר ע"י $x \sim y$ אם ורק אם x ו־ y שייכים לאותה מדרגת הכנסה.

אז $[a]$ היא קבוצת האנשים השייכים לאותה מדרגת ההכנסה כמו a.

ניקח דוגמא מפורשת: נניח שבמדינה יש רק שמונה תושבים: $X = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, וההכנסות שלהם רשומות בטבלה הבאה:

שם	A	B	C	D	E	F	G	H
הכנסה	5445	900	2345	2222	15000	4554	7654	2345

כמו כן, נניח שוב שקיימות שש מדרגות ההכנסה:

$$s < 2000; \quad 2000 \leq s < 4000; \quad 4000 \leq s < 6000; \quad 6000 \leq s < 8000; \quad 8000 \leq s < 10000; \quad 10000 \leq s.$$

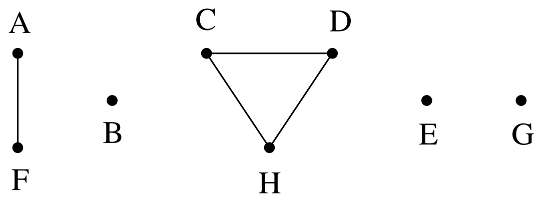
אז

$$[A] = \{x \in X : \; x \sim A\} = \{x \in X : \; A \text{ באותה מדרגת הכנסה כמו } x\} =$$
$$= \{x \in X : \; 4000 \leq s < 6000 \text{ במדרגת הכנסה } x\} = \{A, F\}.$$
$$[B] = \{x \in X : \; x \sim B\} = \{x \in X : \; B \text{ באותה מדרגת הכנסה כמו } x\} =$$
$$= \{x \in X : \; s < 2000 \text{ במדרגת הכנסה } x\} = \{B\}.$$
$$[C] = \{x \in X : \; x \sim C\} = \{x \in X : \; C \text{ באותה מדרגת הכנסה כמו } x\} =$$
$$= \{x \in X : \; 2000 \leq s < 4000 \text{ במדרגת הכנסה } x\} = \{C, D, H\}.$$

וכן הלאה. בדקו ש־

$$[D] = \{C, D, H\}, \quad [E] = \{E\}, \quad [F] = \{A, F\}, \quad [G] = \{G\}, \quad [H] = \{C, D, H\}.$$

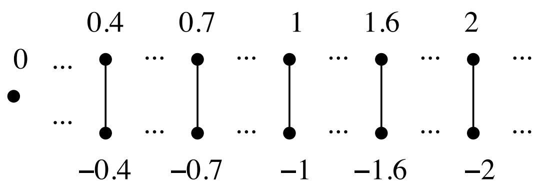
נרשום את כל מחלקות השקילות לפי יחס זה: $\{A, F\},\ \{B\},\ \{C, D, H\},\ \{E\},\ \{G\}$. נשים לב לשתי העובדות הבאות: (1) אלה קבוצות זרות; (2) האיחוד שלהן הוא X. לפי כך, מחלקות השקילות הן **רכיבי הקשירות** של הגרף המתאר את היחס:



2. $X = \mathbb{R}$, היחס מוגדר $x \sim y \;\Leftrightarrow\; |x| = |y|$.

$$[3] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \sim 3\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = |3|\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = 3\} = \{-3, 3\}.$$
$$[-3] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \sim -3\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = |-3|\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = 3\} = \{-3, 3\}.$$
$$[-5.3] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \sim -5.3\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = |-5.3|\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = 5.3\} = \{-5.3, 5.3\}.$$
$$[0] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = |0|\} = \{x \in \mathbb{R} :\ |x| = 0\} = \{0\}.$$

באופן כללי, $[a] = \{a, -a\}$, כלומר מחלקת שקילות של a היא קבוצת כל המספרים בעלי אותו ערך מוחלט כמו זה של a. האיור הבא מתאר יחס זה (כמובן, אין אפשרות לצייר בשלמות את הגרף של היחס כי הוא מוגדר בקבוצה אינסופית. אבל החוקיות ברורה: כל $a \neq 0$ עומד ביחס רק עם עצמו ועם $-a$; 0 עומד ביחס רק עם עצמו). נשים לב שמחלקות שקילות שונות הן זרות, וקל להבין שהאיחוד של כל מחלקות השקילות הוא $\mathbb{R}$:



3. $X = \mathbb{Z}$, היחס מוגדר ע"י $x \sim y \;\Leftrightarrow\; 5|(x - y)$ (סימנו את היחס הזה ב־ R_5).

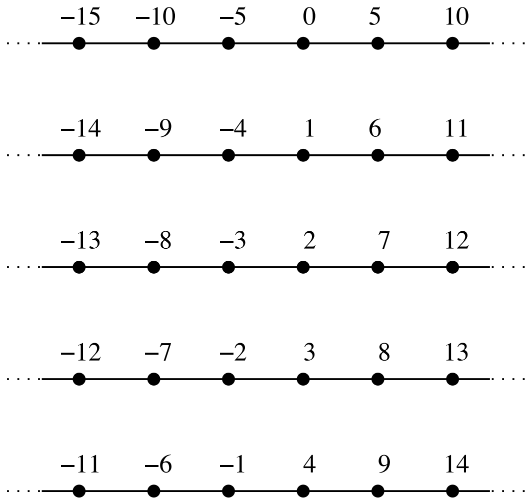
$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} :\ x - 0 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}.$$
$$[3] = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \sim 3\} = \{x \in \mathbb{Z} :\ x - 3 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k + 3 :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}.$$
$$[-2] = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \sim -2\} = \{x \in \mathbb{Z} :\ x + 2 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k - 2 :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k + 3 :\ k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}.$$
$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \sim 2\} = \{x \in \mathbb{Z} :\ x - 2 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k + 2 :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}.$$
$$[7] = \{x \in \mathbb{Z} :\ x \sim 7\} = \{x \in \mathbb{Z} :\ x - 7 = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k + 7 :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{5k + 2 :\ k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}.$$

מחלקת השקילות של a היא קבוצת כל המספרים השלמים שהשארית שלהם בחלוקה ב־ 5 שווה לשארית של a בחלוקה ב־ 5. כלומר לכל $a \in \mathbb{Z}$, מחלקת השקילות של a היא אחת מבין חמש הקבוצות הבאות:

$$\{5k:\ k\in\mathbb{Z}\},\quad \{5k+1:\ k\in\mathbb{Z}\},\quad \{5k+2:\ k\in\mathbb{Z}\},\quad \{5k+3:\ k\in\mathbb{Z}\},\quad \{5k+4:\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

ביתר דיוק, מחלקת השקילות של a היא הקבוצה היחידה מביניהן ש־ a עצמו שייך לה.

האיור הבא מתאר יחס זה. איור זה הוא לא בדיוק הגרף של היחס: כדי לא לסבך אותו, לא חיברנו את כל הזוגות העומדים ביחס (למשל, 0 ו־ 10 לא מחוברים ע"י קשת); באיור זה שני איברים עומדים ביחס אם ורק אם קיים **מסלול** ביניהם. כל אחד מחמשת הישרים באיור זה הוא אחת ממחלקות השקילות. רואים שגם בדוגמא זו מחלקות שקילות שונות הן זרות, ושהאיחוד של כל מחלקות השקילות הוא הקבוצה שבה מוגדר היחס, כלומר $\mathbb{Z}$.



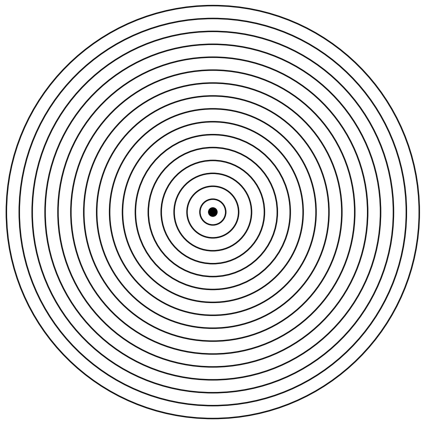
באופן כללי, עבור $n \in \mathbb{N}_+$ קבוע כלשהו, מחלקת השקילות של a לפי היחס R_n תהיה אחת מבין n הקבוצות הבאות (ביתר דיוק, הקבוצה היחידה מבייהן ש־ a שייך לה):

$$\{nk:\ k\in\mathbb{Z}\},\ \ \{nk+1:\ k\in\mathbb{Z}\},\ \ \{nk+2:\ k\in\mathbb{Z}\},\ \ \ldots,\ \ \{nk+(n-1):\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

4. $X=\mathbb{R}^2$, היחס מוגדר ע"י $(x,y)\sim(z,t)\ \Leftrightarrow\ x^2+y^2=z^2+t^2$.

$$\begin{aligned}
&[(1,1)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x,y)\sim(1,1)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1^2+1^2\}=\\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=2\}.\\
&[(5,0)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x,y)\sim(5,0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=5^2+0^2\}=\\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=25\}.\\
&[(3,4)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x,y)\sim(3,4)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=3^2+4^2\}=\\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=25\}.\\
&[(0,0)]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x,y)\sim(0,0)\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=0^2+0^2\}=\\
&\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=0\}=\{(0,0)\}.
\end{aligned}$$

באופן כללי, $[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = a^2+b^2\}$. במילים אחרות, מבחינה גאומטרית, מחלקת השקילות של (a,b) היא האוסף של כל הנקודות במישור הנמצאות במרחק $\sqrt{a^2+b^2}$ מ־ $(0,0)$, כלומר – המעגל עם מרכז ב־ $(0,0)$ ורדיוס $\sqrt{a^2+b^2}$ (רק עבור $(a,b)=(0,0)$ מחלקת השקילות היא נקודה בודדת $(0,0)$). האיור הבא הוא תאור סכימתי של מחלקות השקילות לפי יחס זה. (כל נקודה במישור שייכת למחלקת שקילות מסוימת, אבל אין אפשרות לצייר את כל מחלקות השקילות כך שהאיור יהיה ברור). שוב, מחלקות שקילות שונות הן זרות, ואיחודן הוא X (כאן $\mathbb{R}^2$).



שתי מחלקות שקילות הן זהות או זרות. בדוגמאות הקודמות הדגשנו: אם a ו־ b הם שני אברי X, אז מחלקות השקילות שלהם או זהות: $[a]=[b]$, או זרות: $[a]\cap[b]=\varnothing$. ביתר דיוק: כאשר a ביחס עם b, מתקיים $[a]=[b]$; ואילו כאשר a לא ביחס עם b, מתקיים $[a]\cap[b]=\varnothing$. כמו כן, ראינו שהאיחוד של כל מחלקות השקילות הוא X, הקבוצה שבה מוגדר היחס. נוכיח עובדות אלה באופן כללי.

[15] טענה. יהי R יחס שקילות בקבוצה X.

1. לכל $a \in X$ מתקיים $a \in [a]$. עקב כך, $[a] \neq \varnothing$.
2. אם $a \sim b$, אז $[a]=[b]$.
3. אם $a \not\sim b$, אז $[a]\cap[b]=\varnothing$.
4. האיחוד של כל מחלקות השקילות לפי היחס R היא X, כלומר: $\bigcup_{a\in X}[a] = X$.

הוכחה.

1. הטענה נובעת מיידית מכך ש־ $a \sim a$.
2. יהי $x \in [a]$. זה אומר $a \sim x$. מאחר ש־ $a \sim b$, מקבלים מהטרנזיטיביות $b \sim x$. לכן $x \in [b]$. בכך הוכחנו $[a] \subseteq [b]$. באופן דומה מוכיחים $[b] \subseteq [a]$. לכן $[a]=[b]$.
3. נניח ש־ $x \in [a]\cap[b]$. זה אומר: $a \sim x$ וגם $b \sim x$. מהסימטריות והטרנזיטיביות נובע $a \sim b$, בסתירה להנחה.
4. אם $x \in \bigcup_{a\in X}[a]$, אז x שייך לאחת ממחלקות השקילות לכן בבירור $x \in X$.

אם $x \in X$ אז, לפי סעיף 1, $x \in [x]$. כלומר x שייך לאחת ממחלקות השקילות, ולכן $x \in \bigcup_{a\in X}[a]$.

תרגילים.

1. בכל סעיף, בדקו ש־ $\sim$ הוא יחס שקילות, ומצאו את מחלקות השקילות המצויינות. בסעיפים עם $X = \mathbb{R}^2$ או $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ציירו אותן במישור.

   (א) $X = \mathbb{R}$. $x \sim y$ אם ורק אם $x - y \in \mathbb{Z}$.
   מצאו את $[1]$, את $[1.3]$ ואת $[-2.7]$.

   (ב) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $x \sim y$ אם ורק אם $xy > 0$.
   מצאו את $[1]$, את $[2.5]$ ואת $[-1]$.

   (ג) $X = \mathbb{R}^2$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם $x + y = z + t$.
   מצאו את $[(2,0)]$, את $[(0,3)]$ ואת $[(4,4)]$.

   (ד) $X = \mathbb{R}^2$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם $\max\{x,y\} = \max\{z,t\}$.
   מצאו את $[(0,0)]$, את $[(1,3)]$ ואת $[(3,-2)]$.

   (ה) $X = \mathbb{R}^2$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם $\min\{x,y\} = \min\{z,t\}$.
   מצאו את $[(2,3)]$, את $[(2,2)]$ ואת $[(3,-2)]$.

   (ו) $X = \mathbb{R}^2$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם $|x + y| = |z + t|$.
   מצאו את $[(1,3)]$, את $[(-5,1)]$ ואת $[(2,-2)]$.

   (ז) $X = \mathbb{R}^2$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם $\max\{|x|,|y|\} = \max\{|z|,|t|\}$.
   מצאו את $[(0,0)]$, את $[(2,3)]$ ואת $[(-3,-2)]$.

   (ח) $X = \mathbb{R}^2$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם $\min\{|x|,|y|\} = \min\{|z|,|t|\}$.
   מצאו את $[(0,0)]$, את $[(0,1)]$ ואת $[(1,1)]$.

   (ט) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם קיים $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ כך ש־ $(x,y) = k(z,t)$.
   מצאו את $[(1,2)]$, את $[(-2,-4)]$ ואת $[(2,1)]$.

   (י) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $(x,y) \sim (z,t)$ אם ורק אם קיים $k > 0$ כך ש־ $(x,y) = k(z,t)$.
   מצאו את $[(1,2)]$, את $[(-2,-4)]$ ואת $[(2,4)]$.

2. תהי X קבוצה ויהי $\sim$ יחס שקילות ב־ X, כך שיש בדיוק שתי מחלקות שקילות שונות. יהיו $x, y \in X$ כך ש־ $x \not\sim y$.
   הוכיחו כי $[y] = X \setminus [x]$.

2.6 קבוצת מנה וחתך

קבוצת מנה. מהטענה **[15]** נובע: אם R הוא יחס שקילות בקבוצה X, אז האוסף של כל מחלקות השקילות לפי R הוא **חלוקה** של X; כלומר, קבוצה של קבוצות, זרות בזוגות, שאיחודן X. קבוצה זו – הקבוצה של מחלקות השקילות לפי R ב־ X – נקראת **קבוצת המנה של X לפי יחס שקילות R**, והיא מסומנת ב־ X/R. לפי כך, $X/R = \{[a]_R :\ a \in X\}$.

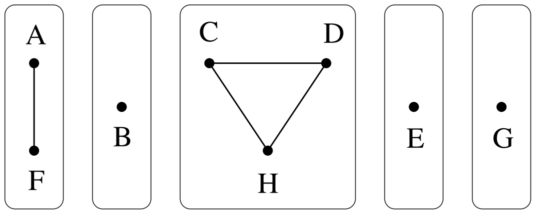
אם כן, קבוצת המנה היא קבוצה שאבריה הן תת־קבוצות של X. נעיר כי בגרף המתאר את יחס השקילות, הקבוצה X מתחלקת לחלקים זרים (רכיבי קשירות) שבתוך כל אחד מהם כל איבר מחובר לכל איבר אחר (ראו דוגמאות לעיל). חלקים אלה הם מחלקות השקילות, ולכן הם האיברים של קבוצת המנה.

חתך. כזכור, אנחנו מעדיפים (אם אפשר) לרשום קבוצה כך שכל איבר יופיע פעם אחת בדיוק. כדי להציג את קבוצת המנה $X/R = \{[a]_R :\ a \in X\}$ בצורה כזאת, יש לכתוב $X/R = \{[a]_R :\ a \in T\}$ כאשר T היא תת־קבוצה של X שמכילה איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות. קבוצה T כזאת נקראת **חתך**. לא תמיד קל למצוא חתך; מצד שני, בדוגמאות רבות ניתן למצוא חתכים שונים (אז רצוי לנחש חתך פשוט לתאור). נחזור לדוגמאות שלנו.

1. X היא קבוצת תושבי המדינה, $x \sim y$ אם ורק אם הם נמצאים באותה מדרגת הכנסה. כפי שראינו בפרק הקודם, מחלקות השקילות ביחס זה הן קבוצות האנשים שנמצאים באותה מדרגת הכנסה. אברי קבוצת המנה הם הקבוצות האלה. נחזור לדוגמא המפורשת – דוגמא 1 בעמוד 39. אם נרשום $X/R = \{[A],[B],[C],[D],[E],[F],[G],[H]\}$, זה יהיה נכון אבל לא יעיל כי ברישום זה חלק מאברי קבוצת המנה מופיעים מספר פעמים (למשל, $[C]=[D]=[H]$).

נרשום את קבוצת המנה במפורש. יש בה חמישה איברים, כמספר מחלקות השקילות לפי היחס:

$$X/R = \{\ \ \{A,F\},\ \ \{B\},\ \ \{C,D,H\},\ \ \{E\},\ \ \{G\}\ \ \}$$



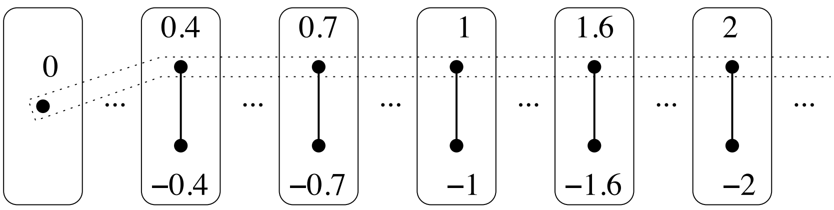
ניקח, למשל, חתך $\{A,B,H,E,G\}$ (איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות). בעזרת חתך זה נוכל לרשום: $X/R = \{[A],[B],[H],[E],[G]\}$. כעת כל איבר בקבוצת המנה רשום פעם אחת בדיוק.

2. $X=\mathbb{R}$, היחס R מוגדר ע"י $|x|=|y| \ \Leftrightarrow\ x \sim y$.

כאן $\mathbb{R}/R = \{[a]:\ a \in \mathbb{R}\}$ כאשר $[a]=\{-a,a\}$. בצורה זו כל מחלקת שקילות (פרט ל־ $[0]=\{0\}$) מופיעה פעמיים. ניתן לנחש שקבוצה $[0,+\infty)$ מכילה איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות, כלומר היא חתך לפי יחס זה. נרשום בעזרתה את קבוצת המנה:

$$\mathbb{R}/R = \{[a]:\ a \in [0,+\infty)\}$$
כאשר $[a]=\{-a,a\}$.

באיור הבא, מחלקות שקילות – אברי קבוצת המנה – מוקפים במלבנים עם פינות מעוגלות. החתך $[0,+\infty)$ מוקף בקו מנוקד.



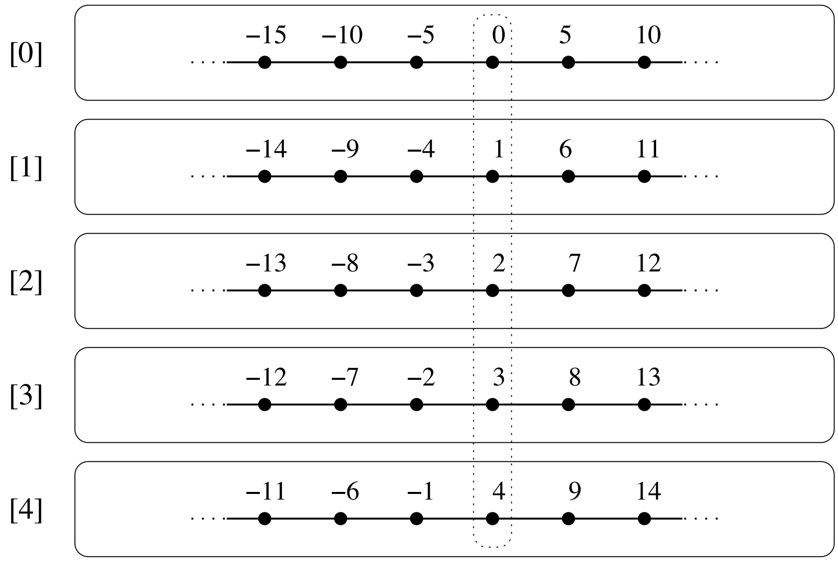
נעיר שהקבוצה $[0,+\infty)$ איננה חתך יחיד במקרה זה. לדוגמא, גם הקבוצה $(-\infty,0]$ היא חתך, וגם $(-3,0]\cup[3,+\infty)$, וגם $[-6,-4]\cup[0,4)\cup(6,+\infty)$, ורבות אחרות: כל קבוצה המכילה מספר אחד בדיוק מבין $-a$ ו־ a לכל $a \in \mathbb{R}$, היא חתך.

3. $X=\mathbb{Z}$, היחס R_5 המוגדר ע"י $5|(x-y) \ \Leftrightarrow\ x \sim y$.

כאן $\mathbb{Z}/R_5 = \{[a]:\ a \in \mathbb{Z}\}$ כאשר $[a]=5k+a:\ k \in \mathbb{Z}$. בצורה זו כל מחלקת שקילות מופיעה אינסוף פעמים. ראינו שכל מחלקת שקילות מכילה את כל המספרים בעלי שארית מסויימת בחלוקה ב־ 5. השאריות האפשריות הן 0, 1, 2, 3 ו־ 4. לכן החתך הפשוט ביותר הוא $\{0,1,2,3,4\}$, ונרשום בעזרתו:

$$\mathbb{Z}/R_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$$
כאשר, עבור $a = 0,1,2,3,4$: $[a] = \{5k + a :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

לפי כך, בקבוצת המנה יש חמישה איברים, ראו איור:



דוגמאות לחתכים אחרים: $\{4,5,6,7,8\}$, $\{25,-14,2,38,-6\}$, או כל תת־קבוצה של $\mathbb{Z}$ שאבריה הם חמישה מספרים בעלי שאריות שונות (כל השאריות האפשריות) בחלוקה ב־ 5.

באופן כללי, לכל $n \in \mathbb{N}_+$, עבור היחס R_n:

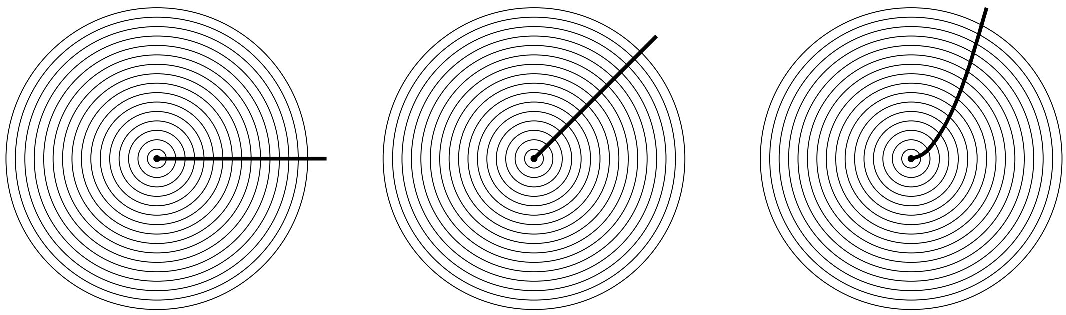
$$\mathbb{Z}/R_n = \{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$$
כאשר, עבור $a = 0,1,2,\ldots,n-1$: $[a] = \{nk + a :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4. $X = \mathbb{R}^2$, היחס R המוגדר ע"י $(x,y) \sim (z,t) \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

כאן $(\mathbb{R}^2)/R = \{[(a,b)] :\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ כאשר $[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2\}$. שוב, כל מחלקת שקילות (פרט ל־ $[(0,0)] = \{(0,0)\}$) מופיעה אינסוף פעמים. התבוננות בתאור הגאומטרי יכולה לעזור למצוא חתך פשוט, לדוגמא $\{(a,0) :\ a \in [0,+\infty)\}$. נכתוב בעזרתו:

$$(\mathbb{R}^2)/R = \{[(a,0)] :\ a \in [0,+\infty)\}$$
כאשר $[(a,0)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = a^2\}$.

חתכים אפשריים אחרים הם, לדוגמא, $\{(a,a) :\ a \in [0,+\infty)\}$, או $\{(a,a^2) :\ a \in [0,+\infty)\}$, או כל קבוצה אחרת שמכילה נקודה אחת בדיוק במרחק p מ־ $(0,0)$, לכל $0 \geq p$. האיור מציג מחלקות שקילות של יחס זה עם שלושת החתכים שרשמנו.



מספר איברים במחלקות השקילות במקרה סופי. יהי R יחס שקילות בקבוצה **סופית** X. מאחר שקבוצת המנה היא חלוקה של X, סכום מספרי האיברים במחלקות השקילות השונות שווה למספר האיברים ב־ X. למשל, בדוגמא 1 בעמוד 39 (ראו גם איור בעמוד 44),

$$X/R = \{[A],[B],[H],[E],[G]\},$$

ולכן

$$|X| = |A| + |B| + |H| + |E| + |G| = 2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 8.$$

באופן כללי, ניתן לנסח טענה זו כך:

$$\sum_{[x]\in X/R} |[x]| = |X|.$$

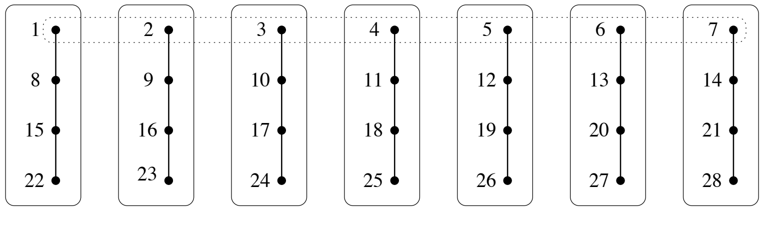
אם בנוסף בכל מחלקות השקילות אותו מספר איברים, נוכל לדעת מה הגודל של קבוצת המנה:

[16] עובדה. תהי X קבוצה סופית כך ש־ $|X| = n$. יהי R יחס שקילות ב־ X כך שלכל $x \in X$ מתקיים $|[x]| = k$ (כלומר, בכל מחלקת שקילות מספר האיברים הוא k). אז $|X/R| = n/k$.

הסבר. $|X/R|$ הוא מספר מחלקות השקילות. מאחר ש־ X היא איחוד זר שלהן, ובכולן מספר האיברים הוא k, הרי ש־ $|X| = k \cdot |X/R|$. מכאן $|X/R| = |X|/k = n/k$. □

הערה. על טענה זו מבוסס משפט חשוב בתורת החבורות – **משפט לגרנז'.**

דוגמא. תהי $X = \{1, 2, \dots, 27, 28\}$. נגדיר בה יחס שקילות $\sim$ בדומה ליחס מדוגמא 3: $x \sim y \;\Leftrightarrow\; 7|(x-y)$. האיור הבא מתאר את היחס הזה; בכל מחלקת שקילות מספר האיברים הוא 4, ומספר האיברים בקבוצת המנה (כלומר, מספר מחלקות השקילות) הוא $28/4 = 7$.



פירוש אפשרי ליחס זה: X הם הימים בחודש פברואר, שני ימים עומדים ביחס אם ורק אם הם חלים באותו יום של שבוע (שניהם ביום ראשון, או שניהם ביום שני, וכו'). ביחס זה יש 7 מחלקות שקילות – כמספר ימי השבוע, ובכל מחלקת שקילות 4 איברים. בתור דוגמא של חתך ניתן לקחת את שבעת הימים הראשונים של החודש (או, למשל, שבעה ימים עוקבים כלשהם).

תרגילים.

1. בכל סעיף מצאו חתך ורשמו בעזרתו את קבוצת המנה. תנו תאור גאומטרי (בדומה לדוגמא 4 לעיל) לקבוצת המנה עבור היחסים בסעיפים (ג) – (י).

   (א) $X=\mathbb{R}$. $x\sim y$ אם ורק אם $x-y\in\mathbb{Z}$.

   (ב) $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $x\sim y$ אם ורק אם $xy>0$.

   (ג) $X=\mathbb{R}^2$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $x+y=z+t$.

   (ד) $X=\mathbb{R}^2$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $\max\{x,y\}=\max\{z,t\}$.

   (ה) $X=\mathbb{R}^2$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $\min\{x,y\}=\min\{z,t\}$.

   (ו) $X=\mathbb{R}^2$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $|x+y|=|z+t|$.

   (ז) $X=\mathbb{R}^2$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $\max\{|x|,|y|\}=\max\{|z|,|t|\}$.

   (ח) $X=\mathbb{R}^2$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $\min\{|x|,|y|\}=\min\{|z|,|t|\}$.

   (ט) $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם קיים $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ כך ש־ $(x,y)=k(z,t)$.

   (י) $X=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם קיים $k>0$ כך ש־ $(x,y)=k(z,t)$.

2. נסתכל ביחס הבא ב־ $\mathbb{R}^2$: $(x,y)\sim(z,t)$ אם ורק אם $x=z$. בדקו שזה יחס שקילות. אילו מבין הקבוצות הבאות הן חתכים לפי יחס זה?

   (א) $\{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}$

   (ב) $\{(0,x):\ x\in\mathbb{R}\}$

   (ג) $\{(x,2x):\ x\in\mathbb{R}\}$

   (ד) $\{(x,x^2):\ x\in\mathbb{R}\}$

   (ה) $\{(x^2,x):\ x\in\mathbb{R}\}$

3. תהי X קבוצה סופית ו־ R יחס שקילות בה.

   (א) מהו R אם $|X/R|=|1|$?

   (ב) מהו R אם $|X/R|=|X|$?

2.7 שימושים באלגברה

בפרק זה נראה כמה יחסי שקילות המופיעים בקורס באלגברה לינארית.

חשבון מודולרי: החוגים הסופיים $\mathbb{Z}_n$. בדרך כלל בקורס ראשון של אלגברה מגדירים את $\mathbb{Z}_n$ כקבוצה $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ שמוגדרות בה פעולות החיבור והכפל באופן הבא: הפעולה מתבצעת כרגיל ב־ $\mathbb{Z}$, ואם התוצאה חורגת מ־ $\{0,1,2,\dots,n-1\}$, היא מוחלפת בשארית בחלוקה ב־ n. למשל, $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$, ודוגמאות של חיבור וכפל בקבוצה זו:

$$1+2\underset{\text{mod }5}{=}3,\qquad 2+3\underset{\text{mod }5}{=}5\underset{\text{mod }5}{=}0,\qquad 4+4\underset{\text{mod }5}{=}8\underset{\text{mod }5}{=}3;$$

$$2 \cdot 2 \underset{\text{mod } 5}{=} 4, \qquad 2 \cdot 3 \underset{\text{mod } 5}{=} 6 \underset{\text{mod } 5}{=} 1, \qquad 3 \cdot 4 \underset{\text{mod } 5}{=} 12 \underset{\text{mod } 5}{=} 2.$$

הגדרה זו אומרת בעצם: הקבוצה $\mathbb{Z}_n$ מתקבלת מ־ $\mathbb{Z}$ כאשר "מזהים" מספרים בעלי אותה שארית בחלוקה ב־ n. הדרך הפורמלית לבצע זאת היא להגדיר ב־ $\mathbb{Z}$ יחס שקילות כך שהאיברים שעתידים להיות לא מובחנים יהיו שקולים. אז בקבוצת המנה כל האיברים האלה יהפכו לאותו איבר: מחלקת השקילות המשותפת שלהם.

ראינו שהיחס R_n עושה בדיוק את מה שנדרש: x ו־ y שקולים אם ורק אם הם בעלי אותה שארית בחלוקה ב־ n. לכן $\mathbb{Z}_n$ היא למעשה $\mathbb{Z}/R_n$: הקבוצה שהתקבלה מ־ $\mathbb{Z}$ ע"י זיהוי של מספרים בעלי אותה שארית בחלוקה ב־ n, כלומר קבוצת מחלקות השקילות של היחס R_n ב־ $\mathbb{Z}$. לכן הרישום $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ הוא רק רישום מקוצר במקום $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$.

שקילות־שורות של מטריצות. תהיינה A ו־ B שתי מטריצות מאותו סדר. אומרים ש־ B **שקולת־שורות ל־ A** אם ניתן להגיע מ־ A ל־ B ע"י סדרה של **פעולות שורה אלמנטריות**. קל להוכיח את שלוש התכונות הבאות: (1) כל מטריצה שקולת־שורות לעצמה (יש לקחת סדרה ריקה של פעולות); (2) אם B שקולת־שורות ל־ A, אז A שקולת־שורות ל־ B (מחליפים את הפעולות בפעולות ההפוכות והולכים "מהסוף להתחלה"); (3) אם B שקולת־שורות ל־ A ו־ C שקולת־שורות ל־ B, אז C שקולת־שורות ל־ A (מגיעים מ־ A ל־ B וממשיכים מ־ B ל־ C). שלוש התכונות האלה הן בדיוק הרפלקסיביות, הסימטריות והטרנזיטיביות. לכן היחס של שקילות־שורה בקבוצת המטריצות מסדר מסוים (כלומר, היחס המוגדר ע"י: $(A, B) \in R$ אם ורק אם B שקולת־שורות ל־ A) הוא יחס שקילות.

מה יכול לשמש כחתך לפי יחס זה? ידוע שכל מטריצה שקולת־שורות למטריצה קנונית אחת בדיוק. במילים אחרות, בכל מחלקת שקילות יש מטריצה קנונית אחת בדיוק. לכן קבוצת המטריצות הקנוניות היא חתך.

שקילות ביחס לתת־מרחב. יהי V מרחב וקטורי ויהי W תת־מרחב שלו. נגדיר ב־ V את היחס הבא:

$$v_1 \sim v_2 \;\Leftrightarrow\; v_1 - v_2 \in W.$$

נוכיח שזה יחס שקילות (בכך גם נצדיק שימוש בסימון $\sim$):

- לכל $v \in V$ מתקיים $v - v = 0 \in W$, כלומר $v \sim v$. בכך הוכחנו שהיחס רפלקסיבי.
- נניח ש־ $v_1 \sim v_2$, כלומר $v_1 - v_2 \in W$. מכאן, לפי הסגירות של W לכפל בסקלר, נובע $v_2 - v_1 = (-1) \cdot \underbrace{(v_1 - v_2)}_{\in W} \in W$, כלומר $v_2 \sim v_1$. בכך הוכחנו שהיחס סימטרי.
- נניח ש־ $v_1 \sim v_2$ ו־ $v_2 \sim v_3$, כלומר $v_1 - v_2 \in W$ ו־ $v_2 - v_3 \in W$. מכאן, לפי הסגירות של W לחיבור, נובע $v_1 - v_3 = \underbrace{(v_1 - v_2)}_{\in W} + \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\in W} \in W$, כלומר $v_1 \sim v_3$. בכך הוכחנו שהיחס טרנזיטיבי.

יהי $v \in V$. מחלקת השקילות שלו היא

$$[v] = \{u \in V : \; u \sim v\} = \{u \in V : \; u - v = w \in W\} = \{v + w : \; w \in W\}.$$

נסמן את הקבוצה הזאת ב־ $v + W$ כי היא מתקבלת ע"י הוספה של הווקטור v לכל אברי W, ונקרא לה **הזזה של התת־מרחב W בווקטור v**.

נסתכל בדוגמא יותר מפורשת. יהי $V = \mathbb{R}^n$. תהי A מטריצה ממשית מסדר $m \times n$, ויהי W מרחב הפתרונות של המערכת $Ax = 0$. כידוע, W זה הוא תת־מרחב של V.

יהי $v \in V$. אז

$$[v] = \{u \in V : \ u - v \in W\} = \{u \in V : \ A(u - v) = 0\} = \{u \in V : \ Au = Av\}.$$

נסמן $b = Av$. אז $[v] = \{u \in V : \ Au = b\}$, כלומר $[v]$ היא קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax = b$ (קבוצה זו לא ריקה כי v שייך לה). אם נשווה את זה עם התוצאה $[v] = v + W$, נקבל: קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax = b$ היא הזזה של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה $Ax = 0$ בווקטור שהינו פתרון פרטי כלשהו של $Ax = b$. ובמונחים של יחסי שקילות: אם קבוצת הפתרונות של המערכת $Ax = b$ לא ריקה, אז היא מחלקת שקילות לפי היחס $\sim$.

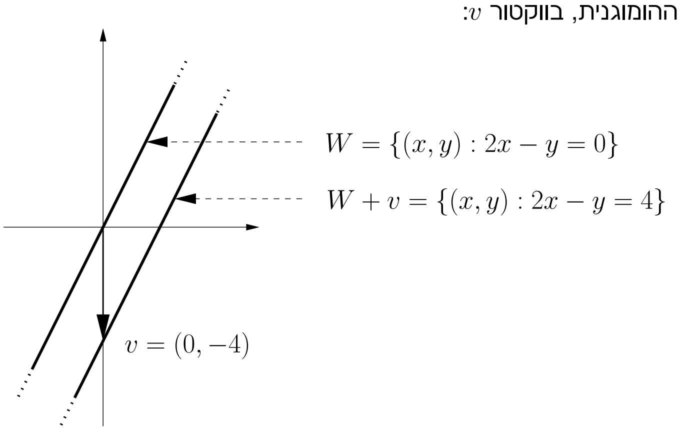
יהיו, למשל, $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא $W = span((1,2)) = \{(t, 2t) : \ t \in \mathbb{R}\}$.

נסתכל במערכת הלא הומוגנית $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$. היא שקולה למשוואה בודדת $2x - y = 4$, ולכן קבוצת הפתרונות שלה היא

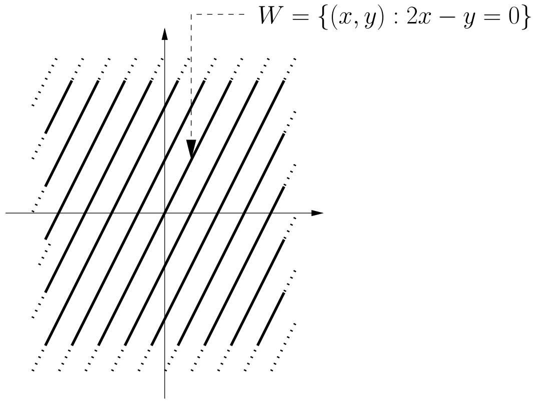
$$\{(t, 2t - 4) : \ t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2t) + (0, -4) : \ t \in \mathbb{R}\} = W + (0, -4).$$

שימו לב ש־ $v = (0, -4)$ הוא פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית, והפתרון הכללי שלה הוא ההזזה של הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית, בווקטור v:



מצאנו את מחלקת השקילות של איבר מסוים, $v = (0, -4)$. ניתן להראות שכל מחלקות השקילות כאן הן, מבחינה גאומטרית,

הישרים המקבילים ל־ W. שימו לב שהישרים האלה זרים, ואיחודם הוא כל המישור:



דמיון של מטריצות. תהיינה A ו־ B שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר. אומרים ש־ B **דומה ל־ A** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־ $B = P^{-1}AP$.

נוכיח שהיחס R המוגדר ע"י: B דומה ל־ $A \Leftrightarrow (A,B) \in R$, הוא יחס שקילות.

- כל A דומה לעצמה כי $A = I^{-1}AI$. בכך הוכחנו רפלקסיביות.
- נניח ש־ B דומה ל־ A, כלומר $B = P^{-1}AP$ כאשר P מטריצה הפיכה. מזה נובע $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$, ולכן A דומה ל־ B. בכך הוכחנו סימטריות.
- נניח ש־ B דומה ל־ A ו־ C דומה ל־ B. כלומר $B = P^{-1}AP$ ו־ $C = Q^{-1}BQ$ כאשר P ו־ Q מטריצות הפיכות. מזה נובע $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$, ולכן C דומה ל־ A. בכך הוכחנו טרנזיטיביות.

מציאת חתך לפי יחס זה אפשרית בעזרת **צורת ג'ורדן של מטריצה** – נושא שנלמד בדרך כלל בקורס שני של אלגברה לינארית.

תרגילים

1. (א) כמה מטריצות קנוניות יש ב־ $\mathbb{Z}_2^{2\times 3}$? ב־ $\mathbb{Z}_p^{2\times 3}$? ב־ $\mathbb{Z}_p^{2\times n}$?
   (ב) מצאו במפורש את החלוקה של $\mathbb{Z}_2^{2\times 3}$ למחלקות שקילות לפי שקילות שורות. (כלומר, כתבו את כל מחלקות השקילות.)

2.8 שימוש ביחס שקילות בהגדרת הקבוצות $\mathbb{Z}$ ו־ $\mathbb{Q}$

אנו מתייחסים לקבוצות $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ כלקבוצות מוכרות מראש. עם זאת, בתורת הקבוצות יש להן הגדרות מדוייקות. את ההגדרה הפורמלית של $\mathbb{N}$ נראה בסוף הקורס, ובינתיים נמשיך להתייחס אליה (יחד עם פעולות של חיבור וכפל בה ותכונותיהן) כלקבוצה מוכרת. נראה כעת איך מגדירים את $\mathbb{Z}$ בעזרת $\mathbb{N}$, ואיך מגדירים את $\mathbb{Q}$ בעזרת $\mathbb{Z}$.

הגדרת $\mathbb{Z}$. נסתכל בקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ונגדיר בה יחס $\sim$ ע"י $(x,y) \sim (z,t) \;\Leftrightarrow\; x+t = z+y$. נבדוק ש־ $\sim$ הוא יחס שקילות:

- לכל $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים $x+y = x+y$, ולכן $(x,y)\sim(x,y)$. בכך הוכחנו רפלקסיביות.

- $(x,y)\sim(z,t) \Rightarrow x+t=z+y \Rightarrow z+y=x+t \Rightarrow (z,t)\sim(x,y)$. בכך הוכחנו סימטריות.
- $\left\{\begin{array}{c}(x,y)\sim(z,t)\\(z,t)\sim(u,v)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}x+t=z+y\\z+v=u+t\end{array}\right\}$. נחבר את השוויונות ונקבל $x+t+z+v=z+y+u+t$. מכאן $(x,y)\sim(u,v)$, ובכך הוכחנו טרנזיטיביות.

נרצה להתייחס למחלקת השקילות $[(x,y)]$ לפי יחס זה כלמייצג של המספר השלם $x-y$.

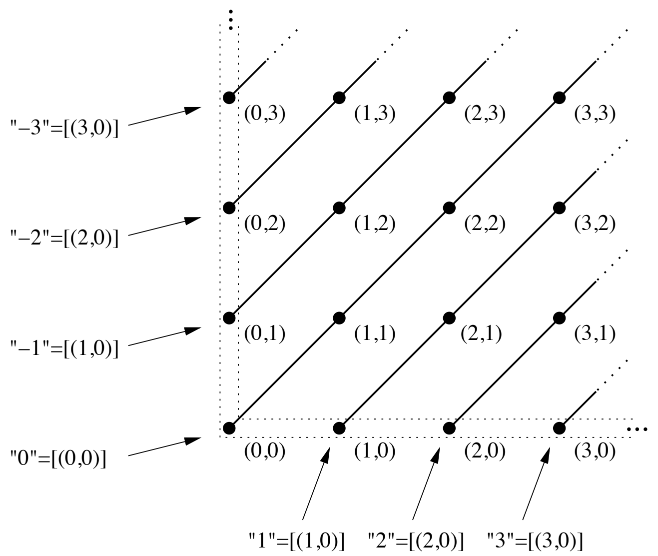
נוכיח שהקבוצה $\mathcal{T}=\{(a,0):\ a\in\mathbb{N}\}\cup\{(0,a):\ a\in\mathbb{N}_+\}$ היא חתך לפי היחס $\sim$. נשתמש בעובדה שאם $a,b\in\mathbb{N}$ ו־ $a\le b$, אז קיים $c\in\mathbb{N}$ יחיד כך ש־ $b=a+c$. ניתן לראות ש־ $(a,b)\sim(0,c)$, $(b,a)\sim(c,0)$ ו־ $(a,a)\sim(0,0)$. בנוסף, ב־ $\mathcal{T}$ אין שני איברים העומדים ביחס: עבור $x\ne y$ מתקיים $(x,0)\not\sim(y,0)$ ו־ $(0,x)\not\sim(0,y)$, ולכל x,y מתקיים $(x,0)\not\sim(0,y)$. לכן כל $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שקול לאיבר אחד בדיוק של $\mathcal{T}$.

נסמן: $\mathbb{Z}=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/\sim$, כלומר קבוצת המנה לפי יחס שקילות זה. נגדיר בה פעולות של חיבור וכפל לפי

$$[(x,y)]+[(z,t)]=[(x+z,y+t)],$$
$$[(x,y)]\cdot[(z,t)]=[(xz+yt,xt+yz)].$$

נוכיח שפעולות אלה מוגדרות היטב. כלומר, אם $(x,y)\sim(x',y')$ ו־ $(z,t)\sim(z',t')$,
אז $(x+z,y+t)\sim(x'+z',y'+t')$ ו־ $(xz+yt,xt+yz)\sim(x'z'+y't',x't'+y'z')$. החישוב הראשון פשוט מאוד: מ־ $x+y'=x'+y$ ו־ $z+t'=z'+t$ נובע ע"י חיבור $x+z+y'+t'=x'+z'+y+t$. החישוב השני (עבור הכפל) יושאר כתרגיל.

נעבור לסימנים המוכרים. לכל $x\in\mathbb{N}$, מחלקת השקילות $[x,0]$ תסומן (בתור מספר שלם) ב־ "x", מחלקת השקילות $[0,x]$ ב־ "$-x$":



לסיום, אנו **מזהים** כל מספר טבעי $x\in\mathbb{N}$ עם המספר השלם $x=[x,0]\in\mathbb{Z}$. החיבור והכפל של אברי $\mathbb{Z}$ מהצורה $[x,0]$ **מתיישבים** עם החיבור והכפל של אברי $\mathbb{N}$:

$$[(x,0)]+[(y,0)]=[(x+y,0+0)]=[(x+y,0)],$$
$$[(x,0)]\cdot[(y,0)]=[(x\cdot y+0\cdot 0,x\cdot 0+0\cdot y)]=[(xy,0)].$$

הגדרת $\mathbb{Q}$**.** הבניה של $\mathbb{Q}$ בעזרת $\mathbb{Z}$ דומה לבניה הקודמת, לכן לא ניכנס לכל הפרטים.

נסתכל בקבוצה $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_+$ ונגדיר בה יחס $\sim$ ע"י $(x,y)\sim(z,t)\ \Leftrightarrow\ xt=zy$. קל לבדוק ש־ $\sim$ הוא יחס שקילות.

נרצה להתייחס למחלקת שקילות $[(x,y)]$ כלמייצג של המספר הרציונלי x/y.

נסמן: $\mathbb{Q}=(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_+)/\sim$, כלומר קבוצת המנה לפי יחס שקילות זה. מחלקות השקילות אחדות לפי יחס זה מופיעות באיור הבא.

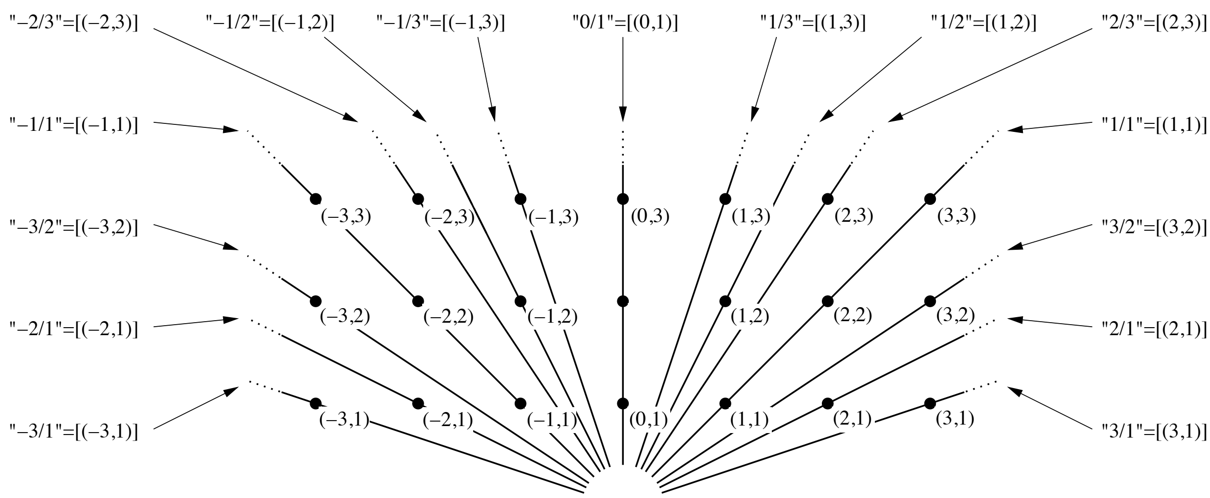
נגדיר פעולות של חיבור וכפל ב־ $\mathbb{Q}$ לפי

$$[(x,y)]+[(z,t)]=[(xt+yz,yt)],$$
$$[(x,y)]\cdot[(z,t)]=[(xz,yt)].$$

בדומה לחשבון שנעשה בבניה הקודמת (עבור הפעולות ב־ $\mathbb{Z}$) ניתן להוכיח שפעולות אלה מוגדרות היטב.

הסימון הרגיל של איבר של $\mathbb{Q}$ הוא $\frac{x}{y}$ במקום $[(x,y)]$.

לסיום, אנו **מזהים** כל מספר שלם $y\in\mathbb{Z}$ עם המספר השלם $y=[y,1]\in\mathbb{Q}$. החיבור והכפל של אברי $\mathbb{Q}$ מהצורה $[y,1]$ **מתיישבים** עם החיבור והכפל של אברי $\mathbb{Z}$.



תרגילים.

1. בבניה של $\mathbb{Z}$, הוכיחו כי הכפל מוגדר היטב. כלומר, אם $(x,y)\sim(x',y')$ ו־ $(z,t)\sim(z',t')$, אז $(xz+yt,xt+yz)\sim(x'z'+y't',x't'+y'z')$.

2. השלימו פרטים בבניה של $\mathbb{Q}$:

(א) הוכיחו כי היחס $\sim$ המוגדר בקבוצה $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_+$ ע"י $xt=zy \iff (x,y)\sim(z,t)$ הוא יחס שקילות.

(ב) הוכיחו כי פעולות החיבור והכפל ב־ $\mathbb{Q}$ מוגדרות היטב.

(ג) הוכיחו כי החיבור והכפל של אברי $\mathbb{Q}$ מהצורה $[y,1]$ מתיישבים עם החיבור והכפל של אברי $\mathbb{Z}$.

2.9 יחס שקילות המושרה ע"י חלוקה

חלוקה. תהי X קבוצה, ותהי $\mathcal{P}$ קבוצה של תת־קבוצות לא ריקות של X כך ש־

- $\bigcup_{A\in\mathcal{P}} A = X$: האיחוד של אברי $\mathcal{P}$ הוא X,
- אם $A,B\in\mathcal{P}$ ו־ $A\neq B$, אז $A\cap B=\varnothing$.

כלומר, הקבוצה X היא **איחוד זר** של אברי $\mathcal{P}$. בעזרת הסימן של איחוד זר, ניתן לכתוב זאת גם בצורה

- $\bigsqcup_{A\in\mathcal{P}} A = X$.

קבוצה $\mathcal{P}$ כזאת נקראת **חלוקה** של X. לדוגמא, הקבוצה $\{\{1,3\},\{2,4,6\},\{5\}\}$ היא חלוקה של $\{1,2,3,4,5,6\}$.

ראינו בטענה **[15]** שאם R הוא יחס שקילות בקבוצה X, אז קבוצת המנה X/R (כלומר, קבוצת מחלקות השקילות לפי היחס R) מהווה חלוקה של X. בדרך זו כל יחס שקילות ב־ X מגדיר חלוקה של X. נראה כעת שגם ההיפך נכון: כל חלוקה של X מגדירה יחס שקילות ב־ X. יתרה מזו, נראה כי ניתן **לזהות** יחסי שקילות וחלוקות.

חלוקה $\mathcal{P}$ ויחס השקילות המושרה $E_{\mathcal{P}}$. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה של X. נגדיר ב־ X יחס $E_{\mathcal{P}}$ ע"י:

$$a \text{ ו־ } b \text{ שייכים לאותה קבוצה בחלוקה } \mathcal{P} \iff (a,b)\in E_{\mathcal{P}}.$$

קל לראות ש־ $E_{\mathcal{P}}$ הוא יחס שקילות. הוא נקרא **יחס השקילות המושרה ע"י החלוקה $\mathcal{P}$**.

[17] טענה. תהי X קבוצה.

1. יהי R יחס שקילות ב־ X. קבוצת המנה לפי R היא חלוקה מסויימת של X. אז יחס השקילות המושרה ע"י חלוקה זו הוא R.
   באופן פורמלי: אם R הוא יחס שקילות ב־ X, אז $E_{X/R}=R$.

הוכחה. $(x,y)\in E_{X/R}$ אם ורק אם x ו־ y שייכים לאותה קבוצה בחלוקה X/R. מאחר שזו קבוצת המנה לפי היחס R, זה קורה אם ורק אם $(x,y)\in R$.

2. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה של X. נסתכל ביחס השקילות המושרה ע"י $\mathcal{P}$. אז קבוצת המנה לפי יחס שקילות זה היא $\mathcal{P}$.
   באופן פורמלי: אם $\mathcal{P}$ היא חלוקה של X, אז $X/E_{\mathcal{P}}=\mathcal{P}$.

הוכחה. x ו־ y שייכים לאותה קבוצה (מחלקת שקילות) ב־ $X/E_{\mathcal{P}}$ אם ורק אם $(x,y)\in E_{\mathcal{P}}$ אם ורק אם שייכים לאותה קבוצה ב־ $\mathcal{P}$.

ניתן לפרש את הטענה הזאת באופן הבא. אין הבדל עקרוני בין יחס שקילות לחלוקה של קבוצה. יחס שקילות הוא רק הדרך ליצור חלוקה (הוא קובע אילו זוגות שייכים לאותה תת־קבוצה, ואילו לתת־קבוצות שונות). בצורה יותר מדוייקת ניתן לומר שקיימת התאמה הדדית חד־חד־ערכית בין יחסי שקילות בקבוצה X לבין חלוקות של X.

תרגילים.

1. הוכיחו כי היחס $E_{\mathcal{P}}$ המוגדר לפני טענה **[17]** הוא יחס שקילות. שימו לב שהטרנזיטיביות נובעת מכך שהקבוצות בחלוקה זרות זו לזו.

2. תהי $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

(א) יהי $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ יחס ב־ X. ודאו ש־ R הוא יחס שקילות. כתבו במפורש את קבוצת המנה X/R.

(ב) תהי $\mathcal{P} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ חלוקה של X. כתבו במפורש את יחס השקילות $E_{\mathcal{P}}$ המושרה ע"י $\mathcal{P}$.

3. נסמן ב־ B_n את מספר יחסי שקילות בקבוצה $\{1, 2, \ldots n\}$. בדקו ש־ $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$. למה שווה B_4? מצאו נוסחת נסיגה עבור B_n.

3 פונקציות

3.1 הגדרות וסימונים

בקורסים של חדו"א או אלגברה מגדירים את המושג **פונקציה f מקבוצה X לקבוצה Y** ככלל אשר מתאים איבר **יחיד** של Y **לכל** איבר של X. נשים לב כי האוסף של כל הזוגות $(x, f(x))$, כאשר $x \in X$, הוא תת־קבוצה של $X \times Y$, כלומר – יחס בין X ל־ Y. עקב כך, בתורת הקבוצות מגדירים את המושג "פונקציה" כיחס מסוג מסויים. כמו כן: כשרוצים להגדיר פונקציה מסויימת, יש לציין מראש את תחום ההגדרה ואת הטווח. לכן לפונקציה יש שלושה מרכיבים: תחום ההגדרה, הטווח, והכלל.

הגדרה של פונקציה. פונקציה היא שלשה סדורה $f = (X, Y, F)$, כאשר X ו־ Y הן קבוצות, ו־ F הוא יחס בין X ל־ Y המקיים את התכונה:

- **לכל** $x \in X$ קיים $y \in Y$ **אחד בדיוק** כך ש־ $(x, y) \in F$.

הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה של f**, הקבוצה Y נקראת **הטווח של f**, היחס F נקרא **הכלל המגדיר את f**.

פונקציה f עם תחום הגדרה X וטווח Y נקראת **פונקציה מ־ X ל־ Y**. עובדה זו תסומן כך: $f : X \to Y$.

את עבור $x \in X, y \in Y$ מתקיים $(x, y) \in F$, נסמן זאת ע"י $f(x) = y$, או ע"י $x \overset{f}{\mapsto} y$ (או, כאשר ברור באיזו פונקציה מדובר, ע"י $x \mapsto y$).

כמשתמע מההגדרה, שתי פונקציות תהיינה **שוות** אם ורק אם יש להן אותו תחום הגדרה X, אותו טווח Y, ואותו כלל.

הדוגמאות הבאות נועדו להבהיר את ההגדרה. תהיינה $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$. נסתכל במספר יחסים בין X ל־ Y.

- $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.[16]
יחס זה לא מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Y: בהגדרה נדרש **שלכל** איבר $x \in X$ יהיה איבר [יחיד] $y \in Y$ כך ש־ $(x, y) \in R$. כאן עבור $x = 2$ אין y כזה.

- $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.
יחס זה לא מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Y: בהגדרה נדרש שלכל $x \in X$ יהיה איבר **יחיד** $y \in Y$ כך ש־ $(x, y) \in R$. כאן עבור $x = 3$ יש שני y כאלה: 4 ו־ 6.

- $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.
יחס זה מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Y. אם נסמן אותה ב־ f, אז $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 6$.

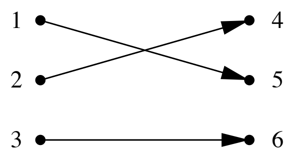
- $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.
גם יחס זה מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Y. אם נסמן אותה ב־ f, אז $f(1) = f(3) = 5, f(2) = 4$.

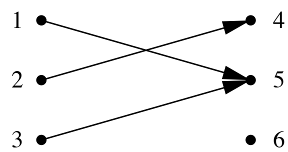
נסכם: יהי R יחס בין X ל־ Y. היחס R מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Y אם ורק אם, ברישום של R ע"י שתי שורות, בשורה הראשונה כל איבר של X יופיע פעם אחת בדיוק.[17]

[16] תזכורת: זה רישום מקוצר ל־ $R = \{(1, 5), (3, 4)\}$.
[17] ואין שום דרישה דומה לגבי השורה השניה, ראו בדוגמא האחרונה.

אם תחום ההגדרה של f שווה לטווח שלה ($Y = X$), כלומר $f : X \to X$, נאמר גם כי **f היא פונקציה ב־ X** (לשם קיצור, במקום "f היא פונקציה מ־ X ל־ X").

תאור ע"י גרף דו־צדדי מכוון. נתאר פונקציה בעזרת גרף דו־צדדי מכוון, כאשר קדקדי הצד השמאלי מתאימים לאברי תחום ההגדרה X, קדקדי הצד הימני מתאימים לאברי הטווח Y, ולכל $(x, y) \in F$, נצייר חץ מהקדקד המתאים ל־ x אל הקדקד המתאים ל־ y. כביטוי לדרישות בהגדרה של מושג הפונקציה, מ**כל** קדקד של תחום הגדרה יוצא חץ **יחיד** (ואין, באופן כללי, דרישות דומות לגבי קדקדי הטווח). האיור הבא מתאר בדרך זו את הפונקציות משתי הדוגמאות האחרונות.





תאור של פונקציה ממשית ע"י גרף במישור. התאור הנפוץ ביותר של פונקציה ממשית (כלומר, פונקציה שתחום ההגדרה והטווח שלה הם תת־קבוצות של $\mathbb{R}$) הוא **גרף במישור** – אוסף כל הנקודות $(x, f(x))$ ב־ $\mathbb{R}^2$. אם f היא פונקציה רציפה, אז הנקודות האלה יוצרות עקומה. אם תחום ההגדרה הוא $X \subseteq \mathbb{R}$, אז התנאי שבהגדרת הפונקציה מתבטא בכך שלכל $x \in X$, לקו האנכי שעובר דרך $(x, 0)$ יש נקודת חיתוך אחת בדיוק עם הגרף.

פונקצית הזהות. יחס הזהות I_X בקבוצה X מגדיר פונקציה ב־ X. היא תיקרא גם **פונקצית הזהות** ב־ X, והיא גם כן תסומן ב־ I_X.

הרכבת פונקציות. תהיינה $f : X \to Y$ ו־ $g : Y \to Z$ שתי פונקציות. נתבונן בהרכבת היחסים המתאימים: $G \circ F$. יחס זה מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Z (באחד התרגילים תתבקשו להוכיח זאת); היא תסומן ב־ $g \circ f$ (לפי כך, $g \circ f : X \to Z$). מההגדרות נובע שעבור $x \in X$ יתקיים $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

הטענה $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ – האסוציאטיביות של הרכבת פונקציות – נובעת מהטענה הכללית עבור הרכבה של יחסים **[13.1]**.

כמו כן, עבור $f : X \to Y$ מתקיים $f \circ I_X = f$ ו־ $I_Y \circ f = f$ – גם זה נובע מהטענות המתאימות עבור יחסים **[13.2]**.

תרגילים.

1. השלימו את ההוכחות של הטענות:

   (א) אם $f : X \to Y$ ו־ $g : Y \to Z$ הן שתי פונקציות ו־ F ו־ G הם היחסים המתאימים, אז היחס $G \circ F$ מגדיר פונקציה מ־ X ל־ Z.

   (ב) יחס הזהות I_X בקבוצה X הוא פונקציה ב־ X.[18]

   (ג) עבור $f : X \to Y$ מתקיים $f \circ I_X = f$ ו־ $I_Y \circ f = f$.

2. תהיינה X ו־ Y קבוצות סופיות, כך ש־ $|X| = m, |Y| = n$. כמה פונקציות מ־ X ל־ Y קיימות? (התייחסו, בפרט, לשלושת המקרים הבאים: $m = 0, n > 0$; $m > 0, n = 0$; $m = n = 0$.)

3. מצאו פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ יתקיים $f(f(x)) = -x$. (האם קיימת פונקציה רציפה כזאת?)

[18] מדי פעם נוותר על דיוק ונאמר "יחס R הוא פונקציה" במקום "יחס R מגדיר פונקציה". כמו כן, לעיתים נסמן פונקציה והיחס המגדיר אותה באותו סימון.

4. הגדירו באופן פורמלי את המושג "מטריצה מסדר $m \times n$ עם רכיבים השייכים לקבוצה X". (טבלה מלבנית עם מספרים בתאים היא למעשה לא מטריצה אלא ציור של מטריצה. עליכם להשלים את המשפט: "מטריצה היא פונקציה מ־ ... ל־ ...").

5. באופן לא פורמלי, פעולה בינארית בקבוצה X היא כלל המתאים לכל $a, b \in X$ את ה"תוצאה" $a \star b$ (שגם כן שייכת ל־ X). תנו הגדרה פורמלית של המושג "פעולה בינארית בקבוצה X" (באמצעות מושג הפונקציה).

3.2 התמונה של פונקציה; פונקציות על ופונקציות חד־חד־ערכיות

התמונה. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. קבוצת האברים y ב־ Y עבורם קיים $x \in X$ (אחד לפחות) כך ש־ $f(x) = y$, נקראת **התמונה של f**, והיא תסומן ב־ $\mathrm{Im}(f)$. לפי כך,

$$\mathrm{Im}(f) \;=\; \{y \in Y :\; f(x) = y \text{ כך ש־ } x \in X \text{ קיים}\} \;=\; \{f(x) :\; x \in X\}.$$

ניתן להגדיר תמונה גם באופן הבא. עבור $y \in Y$, כל $x \in X$ המקיים $f(x) = y$ נקרא **מקור של y** (ביחס לפונקציה f). לפי כך, התמונה של f היא קבוצת אברי Y שקבוצת מקורותיהם ביחס לפונקציה f לא ריקה.

אם מתארים פונקציה f ע"י טבלה עם שתי שורות, אז $\mathrm{Im}(f)$ היא קבוצת איברי Y המופיעים בשורה השניה. אם מתארים את f ע"י גרף דו־צדדי, אז $\mathrm{Im}(f)$ זו קבוצת הקדקדים אליהם מגיע חץ אחד לפחות.

אם f היא פונקציה ממשית ומתארים אותה ע"י גרף במישור, אז $\mathrm{Im}(f)$ היא קבוצת המספרים y כאלה שהקו האפקי העובר דרך $(0, y)$ חותך את הגרף של f (פעם אחת לפחות).

דוגמאות. בדוגמאות הבאות X הוא תחום הגדרה ו־ Y הוא טווח.

1. $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{4,5,6,7,8\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$. עבור פונקציה זו, $\mathrm{Im}(f) = \{4,6,7\}$.
2. $X = Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^2$ (כלומר $f(x) = x^2$). עבור פונקציה זו, $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$.
3. $X = Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^3$ (כלומר $f(x) = x^3$). עבור פונקציה זו, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
4. $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 9x - 10$. עבור פונקציה זו, לא נוכל למצוא את התמונה בקלות. (עם זאת, ברור כי $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$. תוך שימוש בשיטות הנלמדות בחדו"א, ניתן להראות כי בדוגמא זו $\mathrm{Im}(f)$ היא קבוצה חסומה מלרע, ולכן היא מוכלת ממש ב־ $\mathbb{R}$).

נדון בשני סוגים חשובים של פונקציות: **פונקציות על ופונקציות חד־חד־ערכיות.**

פונקציות על. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. נאמר כי f היא **פונקציה מ־ X <u>על</u> Y** (או פשוט **פונקציה על**, כאשר ידוע מהו הטווח של f) אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ אחד לפחות כך ש־ $f(x) = y$.

להלן שני אפיונים של פונקציות על (כל אחד מהם יכול לשמש כהגדרה חלופית של מושג זה):
(1) $f : X \to Y$ היא פונקציה על אם ורק אם $\mathrm{Im}(f) = Y$;
(2) $f : X \to Y$ היא פונקציה על אם ורק אם לכל $y \in Y$ קבוצת המקורות של y ביחס ל־ f לא ריקה.

תהי $f : X \to Y$ פונקציה.
f היא על אם ורק אם בתאור ע"י טבלה עם שתי שורות, **כל** $y \in Y$ מופיע בשורה השניה (פעם אחת לפחות).
f היא על אם ורק אם בתאור ע"י גרף דו־צדדי, **לכל** קדקד בצד המתאים ל־ Y, מגיע חץ אחד לפחות.

אם f היא $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ומתארים אותה ע"י גרף במישור, אז: f היא על אם ורק אם כל קו אופקי חותך את הגרף (פעם אחת לפחות). (הכלילו עבור $f : A \to B$ כאשר $A, B \subseteq \mathbb{R}$)

כדי לקבוע האם פונקציה מסויימת היא על, חייבים לדעת מה הטווח שלה. תיתכנה שתי פונקציות המוגדרות באמצעות אותו יחס כך שאחת מהן היא על והשניה לא, כי הטווחים שלהן שונים זה מזה. מצד שני, אם $f : X \to Y$ איננה על, ניתן לקבל ממנה פונקציה על ע"י החלפת Y ב־ $\mathrm{Im}(f)$ (תהליך זה נקרא **צמצום של הטווח לתמונה**).

דוגמאות.

1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.
   פונקציה זו היא על כי $\mathrm{Im}(f) = Y = \{6, 7, 8\}$.
2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{6, 7, 8\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.
   פונקציה זו איננה על כי $\mathrm{Im}(f) = \{6, 7\}$ ו־ $Y = \{6, 7, 8\}$.
3. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{6, 7\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.
   פונקציה זו היא על כי $\mathrm{Im}(f) = Y = \{6, 7\}$ (קיבלנו פונקציה זו מהקודמת ע"י צמצום של הטווח).
4. $X = Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^3$. פונקציה זו היא על כי $\mathrm{Im}(f) = Y = \mathbb{R}$.
5. $X = Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^2$. פונקציה זו איננה על כי $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$ ו־ $Y = \mathbb{R}$.
6. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, +\infty)$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^2$. פונקציה זו היא על כי $\mathrm{Im}(f) = Y = [0, +\infty)$ (קיבלנו פונקציה זו מהקודמת ע"י צמצום של הטווח).

פונקציות חד־חד־ערכיות. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. נאמר כי f היא **פונקציה חד־חד־ערכית** (קיצורים: חח"ע, $1 : 1$) אם לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ אחד **לכל היותר** כך ש־ $f(x) = y$.

להלן מספר אפיונים של פונקציות חד־חד־ערכיות. תהי $f : X \to Y$.
(1) f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם לכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

(2) f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם לכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים:

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

(3) f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם לכל $y \in Y$ קבוצת המקורות של y ביחס ל־ f או ריקה, או שיש בה איבר יחיד.

תהי $f : X \to Y$ פונקציה.
f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם בתאור ע"י טבלה עם שתי שורות, כל איבר של Y מופיע בשורה השניה פעם אחת לכל היותר (כלומר – מופיע פעם אחת בדיוק או לא מופיע אף פעם). במילים אחרות: כל אברי השורה השניה שונים זה מזה.
f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם בתאור ע"י גרף דו־צדדי, לכל קדקד בצד המתאים ל־ Y נכנס חץ אחד לכל היותר (כלומר – נכנס חץ יחיד או לא נכנס אף חץ). במילים אחרות: חיצים שונים מגיעים לקדקדים שונים.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המתוארת ע"י גרף במישור היא חד־חד־ערכית אם ורק אם כל קו אופקי חותך את הגרף פעם אחת לכל היותר.

אם $f : X \to Y$ איננה חד־חד־ערכית, ניתן לקבל ממנה פונקציה חד־חד־ערכית ע"י בחירה של מקור יחיד לכל איבר בתמונה, **וצמצום** מתאים **של תחום ההגדרה**.

דוגמאות:

1. $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{5,6,7,8,9\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.
פונקציה זו היא חד־חד־ערכית.
2. $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{5,6,7,8,9\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.
פונקציה זו איננה חד־חד־ערכית כי $f(1) = f(3)$.
3. $X = \{2,3,4,5\}$, $Y = \{5,6,7,8,9\}$, $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.
פונקציה זו היא חד־חד־ערכית. קיבלנו פונקציה זו מהקודמת ע"י בחירה של מקור יחיד ל־ 6 וצמצום מתאים של תחום הגדרה.
4. $X = Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^3$. פונקציה זו היא חד־חד־ערכית: לכל איבר y בתמונה יש מקור יחיד, $\sqrt[3]{y}$.
5. $X = Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^2$. פונקציה זו איננה חד־חד־ערכית: למשל, $f(1) = f(-1)$.
6. $X = [0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, f מוגדרת ע"י $x \mapsto x^2$. פונקציה זו היא חד־חד־ערכית: לכל איבר y בתמונה יש מקור יחיד, $\sqrt{y}$ (שכן הפעם תחום ההגדרה הוא קבוצת המספרים האי־שליליים).

השוואה בין המושגים "פונקציה על" ו־ "פונקציה חד־חד־ערכית". נשווה את ההגדרה של פונקציה על עם ההגדרה של פונקציה חד־חד־ערכית. ההגדרה של פונקציה על נדרש שלכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ <u>אחד לפחות</u> כך ש־ $y = f(x)$. כלומר קבוצת המקורות של כל $y \in Y$ תהיה לא ריקה. ההגדרה של פונקציה חד־חד־ערכית נדרש שלכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ <u>אחד לכל היותר</u> כך ש־ $y = f(x)$. כלומר לכל $y \in Y$ קבוצת המקורות שלו תהיה ריקה או יהיה בה איבר אחד בדיוק.

בפרט, $f : X \to Y$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל (כלומר, גם חד־חד־ערכית וגם על) אם ורק אם <u>לכל</u> איבר של הטווח יש מקור <u>אחד בדיוק</u> (כל איבר של הטווח מופיע פעם אחת בדיוק בשורה השניה; לכל איבר של הטווח מגיע חץ אחד בדיוק). כלומר, $f : X \to Y$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל אם ורק אם עבור Y מתקיימים התנאים ("לכל ..." ו־ "... יחיד ...") הדומים לאלה שמתקיימים עבור X בכל פונקציה.

אי תלות של המושגים "פונקציה על" ו־ "פונקציה חד־חד־ערכית"; הקשר ביניהם במקרה של קבוצה סופית. התכונות "פונקציה על" ו־ "פונקציה חד־חד־ערכית" באופן כללי לא תלויות. נראה שתי משפחות של דוגמאות לזה: בקבוצות סופיות וב־ $\mathbb{R}$:

1. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5,6\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. פונקציה זו היא חד־חד־ערכית ועל.
2. $X = \{1,2\}$, $Y = \{4,5,6\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$. פונקציה זו היא חד־חד־ערכית, לא על.
3. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. פונקציה זו היא על, לא חד־חד־ערכית.
4. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5,6\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$. פונקציה זו היא לא חד־חד־ערכית, לא על.

בדוגמאות הבאות $X=Y=\mathbb{R}$. אמתו את כל הטענות!

1. $f(x)=2x+1$ היא חד־חד־ערכית ועל.
2. $f(x)=2^x$ היא חד־חד־ערכית, לא על.
3. $f(x)=x(x-1)(x+1)$ היא על, לא חד־חד־ערכית.
4. $f(x)=x^2$ היא לא חד־חד־ערכית ולא על.

במצבים מסויימים יש קשר בין שתי התכונות. אחד מהם הוא כאשר X ו־ Y הן קבוצות סופיות. הטענה הבאה ידועה בקומבינטוריקה בשם **עקרון שובך היונים** או **עקרון דיריכלה**[19]:

[18] טענה. תהי $f:X\to Y$ פונקציה, ונניח כי X ו־ Y הן קבוצות סופיות.

- אם $|X|<|Y|$, אז f איננה על.
- אם $|X|>|Y|$, אז f איננה חד־חד־ערכית.
- אם $|X|=|Y|$, אז: f היא חד־חד־ערכית אם ורק אם f היא על.

נראה מספר טענות על פונקציות חד־חד־ערכיות ופונקציות על.

[19] טענה. תהיינה $f:X\to Y, g:Y\to Z$.

1. אם f ו־ g הן חד־חד־ערכיות, אז $g\circ f$ היא חד־חד־ערכית.

הוכחה. נניח כי $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. זה אומר: $g(f(x_1))=g(f(x_2))$. מאחר ש־ g חד־חד־ערכית, מקבלים $f(x_1)=f(x_2)$. כעת, מאחר ש־ f חד־חד־ערכית, מקבלים $x_1=x_2$.

2. אם f ו־ g הן על, אז $g\circ f$ היא על.

הוכחה. יהי $z\in Z$. מאחר ש־ g על, קיים $y\in Y$ כך ש־ $g(y)=z$. כעת, מאחר ש־ f על, קיים $x\in X$ כך ש־ $f(x)=y$. לפי כך $g(f(x))=z$, כלומר קיים $x\in X$ כך ש־ $(g\circ f)(x)=z$.

3. אם $g\circ f$ היא חד־חד־ערכית, אז f היא חד־חד־ערכית.

הוכחה. נניח כי $f(x_1)=f(x_2)$. מכאן $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ כלומר $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. מאחר ש־ $g\circ f$ חד־חד־ערכית, מקבלים $x_1=x_2$.

4. אם $g\circ f$ היא על, אז g היא על.

הוכחה. יהי $z\in Z$. מאחר ש־ $g\circ f$ היא על, קיים $x\in X$ כך ש־ $(g\circ f)(x)=y$, כלומר $g(f(x))=z$. נסמן $y=f(x)$: זה איבר של Y, ועבורו מתקיים $g(y)=z$. □

תרגילים.

1. לכל פונקציה, קבעו האם היא חד־חד־ערכית והאם היא על:

[19] הוא נקרא עקרון דיריכלה על שם מתמטיקאי גרמני Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1859 – 1805. הוא נקרא עקרון שובך היונים עקב הפירוש הבא: (1) אם נשים (למשל) 4 יונים ב־ 5 קופסאות, בהכרח תהיה קופסה ריקה; (2) אם נשים 5 יונים ב־ 4 קופסאות, בהכרח תהיה קופסה עם יותר מיונה אחת; (3) אם נשים 5 יונים ב־ 5 קופסאות אז: אין קופסה ריקה אם ורק אם אין בכל קופסה יושבת יונה אחת בדיוק.

(א) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.

(ב) $f : [-2, 2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$.

(ג) $f : [-1, 1] \to [-2, 2]$, $f(x) = \sin(x)$.

(ד) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

2. תהיינה $f : X \to Y, g : Y \to Z$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $g \circ f$ היא חד־חד־ערכית, אז g היא חד־חד־ערכית.

(ב) אם $g \circ f$ היא על, אז f היא על.

(ג) אם f ו־ g הן חד־חד־ערכיות ועל, אז $g \circ f$ היא חד־חד־ערכית ועל.

(ד) אם $g \circ f$ היא חד־חד־ערכית ועל, אז f ו־ g הן חד־חד־ערכיות ועל.

(ה) אם $g \circ f$ היא חד־חד־ערכית ו־ f היא על, אז g היא חד־חד־ערכית.

(ו) אם $g \circ f$ היא על ו־ g היא חד־חד־ערכית, אז f היא על.

3. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סופיות: $|X| = m$, $|Y| = n$.

(א) כמה פונקציות מ־ X ל־ Y יש?

(ב) נניח ש־ $n \leq m$. כמה פונקציות חד־חד־ערכיות מ־ X ל־ Y יש? (ומה קורה אם $n > m$?)

(ג) נניח ש־ $n \geq m$. כמה פונקציות מ־ X **על** Y יש?
למעשה, זו שאלה די קשה, ופתרון שלה מבוסס על "עקרון הכלה־הפרדה" מקומבינטוריקה. אם אינכם שולטים בו, פתרו את השאלה עבור המקרה $m = n$ ועבור המקרה $m = n + 1$. (...ומה קורה אם $n < m$?)

4. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה.

(א) יהי S יחס שקילות ב־ Y.
נגדיר יחס R ב־ X ע"י:
$$(a, b) \in R \quad \text{אם ורק אם} \quad (f(a), f(b)) \in S.$$
הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

(ב) יהי R יחס שקילות ב־ X.
נגדיר יחס S ב־ Y ע"י:
$(c, d) \in S$ אם ורק אם קיימים $a, b \in X$ כך ש־ $c = f(a)$, $d = f(b)$ ו־ $(a, b) \in R$.
הוכיחו כי אם f אינה על, אז S אינו יחס שקילות.
הוכיחו כי אם f היא חד־חד־ערכית ועל, אז S הוא יחס שקילות.
מצאו דוגמא שבה f הינה על ואינה חד־חד־ערכית, ו־ S הוא יחס שקילות.
מצאו דוגמא שבה f הינה על ואינה חד־חד־ערכית, ו־ S אינו יחס שקילות.

3.3 פונקציות הפיכות

בסעיף זה נגדיר מושג של **פונקציה הפיכה** ונוכיח, בין השאר, טענה חשובה מאוד: פונקציה f היא הפיכה אם ורק אם היא חד־חד־ערכית ועל.

הגדרה של פונקציה הפיכה. תהי $f = (X, Y, F)$ פונקציה. נאמר כי f היא **פונקציה הפיכה** אם היחס F^{-1} (כלומר, היחס ההפוך ליחס F המגדיר את f) מגדיר פונקציה מ־ Y ל־ X. במקרה כזה נסמן: $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$; הפונקציה f^{-1} תיקרא **הפונקציה ההפכית ל־ f**.

דוגמאות.

1. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

פונקציה זו איננה פונקציה הפיכה כי היחס ההפוך $F^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ אינו מגדיר פונקציה מ־ Y ל־ X: $4 \in Y$ ביחס עם שני אברי X.

2. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5,6,7\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

פונקציה זו איננה פונקציה הפיכה כי היחס ההפוך $F^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ אינו מגדיר פונקציה מ־ Y ל־ X: $6 \in Y$ אינו ביחס עם אף איבר של X.

3. $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5,6\}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

פונקציה זו היא פונקציה הפיכה כי היחס ההפוך $F^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ מגדיר פונקציה מ־ Y ל־ X. לפי כך, f^{-1} היא הפונקציה ההפכית של f.

ניתן לראות שמה ש"הפריע" לפונקציות בשתי הדוגמאות הראשונות להיות הפיכות זו העובדה שאחת מהן לא חד־חד־ערכית, והשניה לא על. בטענה הבאה נראה, בפרט, שפונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חד־חד־ערכית ועל.

[20] טענה (אפיון של פונקציות הפיכות וטענות נוספות).

1. אם $f: X \to Y$ היא פונקציה הפיכה, אז גם $f^{-1}: Y \to X$ היא פונקציה הפיכה ומתקיים $(f^{-1})^{-1} = f$.

הוכחה. לפי טענה **[13.3]**, היחס F מקיים $F = (F^{-1})^{-1}$. כעת, מאחר שנתון כי F (שהוא היחס ההפוך של F^{-1}) מגדיר את הפונקציה f, מקבלים $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. אם $f: X \to Y$ הפיכה, אז $f^{-1} \circ f = I_X$ ו־ $f \circ f^{-1} = I_Y$.

הוכחה של $f^{-1} \circ f = I_X$.

נוכיח את ההכלה $\subseteq$. נניח כי $(x,z) \in F^{-1} \circ F$. זה אומר: קיים $y \in Y$ כך ש־ $(x,y) \in F$, $(y,z) \in F^{-1}$. מ־ $(x,y) \in F$ נובע $(y,x) \in F^{-1}$. קיבלנו: $(y,x) \in F^{-1}$ ו־ $(y,z) \in F^{-1}$. מאחר ש־ F^{-1} מגדיר פונקציה, הרי ש־ $x = z$. לכן $(x,z) \in I_X$.

כעת נוכיח את ההכלה $\supseteq$. יהי $(x,x) \in I_X$. מאחר ש־ F מגדיר פונקציה, קיים $y \in Y$ כך ש־ $(x,y) \in F$. לכן $(y,x) \in F^{-1}$, ולכן $(x,x) \in F^{-1} \circ F$.

את הטענה $f \circ f^{-1} = I_Y$ מוכיחים באופן דומה.

ניתן לנסח טענה זו גם כך: אם f הפיכה אז $f(x) = y$ אם ורק אם $f^{-1}(y) = x$.

3. [ההיפך של הטענה הקודמת.] תהי $f : X \to Y$ פונקציה. אם קיימת פונקציה $g : Y \to X$ כך ש־ $g \circ f = I_X$ ו־ $f \circ g = I_Y$, אז $g = f^{-1}$ ובפרט f היא פונקציה הפיכה.

הוכחה. נתון כי g פונקציה. לכן נשאר להוכיח את שוויון היחסים $G = F^{-1}$ כיחסים.

הוכחת ההכלה $\supseteq$. יהי $(y, x) \in F^{-1}$, כאשר $x \in X$, $y \in Y$. מכאן $(x, y) \in F$. נסתכל ב־ y. מאחר ש־ G מגדיר פונקציה מ־ Y ל־ X, קיים $z \in X$ כך ש־ $(y, z) \in G$. מכאן $(x, z) \in G \circ F$. מאחר ש־ $G \circ F = I_X$, מקבלים $x = z$. לכן $(y.x) \in G$.

את ההכלה $\subseteq$ מוכיחים באופן דומה.

4. **פונקציה $f : X \to Y$ היא הפיכה אם ורק אם היא חד־חד־ערכית ועל.**

הוכחת הכיוון $\Leftarrow$. מאחר ש־ f הפיכה, מתקיים $f^{-1} \circ f = I_X$ ו־ $f \circ f^{-1} = I_Y$. לפי טענה **[19.3]**, מ־ $f^{-1} \circ f = I_X$ ומכך ש־ I_X היא חד־חד־ערכית נובע כי f היא חד־חד־ערכית; ולפי טענה **[19.4]**, מ־ $f \circ f^{-1} = I_Y$ ומכך ש־ I_Y היא על נובע כי f היא על.

הוכחת הכיוון $\Rightarrow$. תהי f פונקציה חד־חד־ערכית ועל. נסתכל ביחס F^{-1} (היחס ההפוך ל־ F). מאחר ש־ f היא על, לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ אחד לפחות כך ש־ $(x, y) \in F$, כלומר $(y, x) \in F^{-1}$. מאחר ש־ f היא חד־חד־ערכית, x כזה הוא יחיד. לכן קיבלנו: לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ יחיד כך ש־ $(y, x) \in F^{-1}$. כלומר היחס F^{-1} מגדיר פונקציה. לפי כך קיימת פונקציה f^{-1}, ולכן f הפיכה.

5. נניח $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. אם f ו־ g הפיכות, אז גם $g \circ f$ הפיכה, ומתקיים $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

הוכחה. $f^{-1} \circ g^{-1}$ היא פונקציה $Z \to X$. נחשב $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$ ו־ $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f = (f^{-1} \circ I_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = I_X.$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = (g \circ I_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_Z.$$

לכן, לפי סעיף 3, הפונקציה $f^{-1} \circ g^{-1}$ היא הפונקציה ההפכית של $g \circ f$, ובפרט $g \circ f$ הפיכה.

הכללת הטענה: תהיינה $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ קבוצות, ולכל $1 \le i \le n$, תהי $f_i : X_i \to X_{i+1}$ פונקציה הפיכה. אז גם $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ (זו פונקציה $X_1 \to X_{n+1}$; ביטוי זה מוגדר באופן חד משמעי בגלל האסוציאטיביות של הרכבת פונקציות) היא פונקציה הפיכה, ומתקיים: $(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_n^{-1}$.

6. אם $f : X \to Y$ הפיכה, $g, h : Y \to Z$ ומתקיים $g \circ f = h \circ f$, אז $g = h$.
אם $f, g : A \to B$, $h : B \to C$ הפיכה ומתקיים $h \circ f = h \circ g$, אז $f = g$.

הוכחת הטענה הראשונה. מ־ $g \circ f = h \circ f$ נובע $(g \circ f) \circ f^{-1} = (h \circ f) \circ f^{-1}$, לכן $g \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ (f \circ f^{-1})$, $g \circ I_Y = h \circ I_Y$, ולבסוף $g = h$.

את הטענה השניה מוכיחים באופן דומה.

דוגמאות.

1. הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ לא הפיכה כי היא לא חד־חד־ערכית ולא על. אבל אם נצמצם את תחום ההגדרה והטווח שלה, נוכל לקבל פונקציה שתהיה הפיכה. תהי $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ הפונקציה המוגדרת ע"י אותו הכלל: $g(x) = x^2$. זו פונקציה הפיכה, ועבורה $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

2. הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = e^x$ איננה הפיכה כי היא לא על: התמונה שלה היא $(0, +\infty)$. נצמצם את הטווח ונסתכל בפונקציה $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ המוגדרת ע"י $g(x) = e^x$. פונקציה זו היא הפיכה וההופכית שלה היא $g^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g^{-1}(x) = \ln(x)$.

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x+1$. כדי למצוא f^{-1}, נכתוב $b=2a+1$ ונבטא a באמצעות b: $2a=b-1$ ולכן $a=\frac{b-1}{2}$. מכאן $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$.

תרגילים.

1. בדקו האם הפונקציות הבאות הפיכות. עבור ההפיכות שביניהן, מצאו את הפונקציה ההפכית:
   (א) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{x}{x-1}$.
   (ב) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x}, & -1<x<0\\ \frac{x}{1-x}, & 0\le x<1\end{cases}$
   (ג) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $f(x,y)=(4x+y,2x+y)$.
   (ד) $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2$ המוגדרת ע"י $f(x,y)=(4x+y,2x+y)$.
   (ה) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $f(x,y)=(4x+2y,2x+y)$.
   (ו) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<0\\ 2x-2, & 0\le x<1\\ (x-1)^2, & 1\le x\end{cases}$
   (ז) $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$.
   (ח) $f:(-5,5]\to[0,+\infty)$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$.
   (ט) $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$.
   (י) $f:[0,\pi/2]\to[0,1]$ המוגדרת ע"י $f(x)=\cos(x)$.
   (יא) $f:[0,\pi/2]\to[-1,1]$ המוגדרת ע"י $f(x)=\cos(x)$.
   (יב) $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ המוגדרת ע"י $f(x)=\cos(x)$.
   (יג) $f:[\pi/2,3\pi/2]\to[-1,1]$ המוגדרת ע"י $f(x)=\cos(x)$.
   (יד) $f:[\pi,2\pi]\to[-1,1]$ המוגדרת ע"י $f(x)=\cos(x)$.

2. תהי f הפונקציה הממשית המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, ולפחות אחד מבין המספרים c ו־ d אינו 0.
   (א) מצאו את תחום ההגדרה "הטבעי" של f, כלומר את קבוצת כל המספרים הממשיים x שעבורם $f(x)$ מוגדר.
   בהמשך התרגיל, הניחו כי הקבוצה שמצאתם כאן היא תחום ההגדרה של f.
   (ב) מצאו את התמונה של f.
   בהמשך התרגיל, הניחו שהקבוצה שמצאתם כאן היא הטווח של f.
   (ג) מצאו תנאי לכך ש־ f תהיה הפיכה (התנאי המבוקש הוא קשר מסויים בין a,b,c,d). בהנחה שתנאי זה מתקיים: מצאו נוסחה מפורשת עבור $f^{-1}(x)$.

3. השלימו את ההוכחות של סעיפים 2, 3 ו־ 6 בטענה **[20]**.

4. תהיינה $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם $g\circ f$ הפיכה, אז f ו־ g הפיכות.
   (ב) אם $g\circ f$ הפיכה, אז מבין f ו־ g לפחות אחת הפיכה.

5. תהי $f:X\to Y$. נסתכל בארבע ההנחות הבאות:

I. f היא חד־חד־ערכית.

II. f היא על.

III. קיימת $g : Y \to X$ כך ש־ $g \circ f = I_X$.

IV. קיימת $g : Y \to X$ כך ש־ $f \circ g = I_Y$.

בין ארבע הטענות הבאות, יש שתי טענות נכונות ושתי טענות לא נכונות. מצאו את הטענות הנכונות והוכיחו אותן.

(א) I $\Leftrightarrow$ III.

(ב) I $\Leftrightarrow$ IV.

(ג) II $\Leftrightarrow$ III.

(ד) II $\Leftrightarrow$ IV.

שימו לב: התוצאה של תרגיל זה הינה עידון של טענה **[20]** (סעיפים 2, 3, 4).

6. תהי $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = |x|$.
מצאו $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ כך ש־ $f \circ g = I_{\mathbb{N}}$. האם $g = f^{-1}$?

7. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = (x+1, x-2)$.
מצאו $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך ש־ $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$. האם $g = f^{-1}$?

3.4 יחס השקילות המושרה ע"י פונקציה

תהיינה X, Y שתי קבוצות לא ריקות, ותהי f פונקציה מ־ X ל־ Y. נגדיר את היחס הבא ב־ X:

$$(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y).$$

נבדוק כי R זה הוא יחס שקילות:

- רפלקסיביות: לכל $x \in X$ מתקיים $f(x) = f(x)$, לכן $(x, x) \in R$.
- סימטריות:

$$(x, y) \in R \;\Rightarrow\; f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; f(y) = f(x) \;\Rightarrow\; (y, x) \in R.$$

- טרנזיטיביות:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x, y) \in R \\ (y, z) \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = f(z) \;\Rightarrow\; (x, z) \in R.$$

יחס שקילות זה, R, ייקרא **יחס השקילות המושרה ע"י** f.

נראה שבארבע הדוגמאות שחקרנו בהרחבה בפרק הקודם, ניתן לייצג את יחסי השקילות בדרך זו:

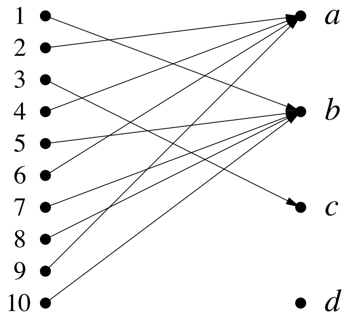
1. X קבוצת תושבי המדינה, $x \sim y$ אם ורק אם x ו־ y שייכים לאותה מדרגת הכנסה.
הפונקציה מ־ X ל־ Y, קבוצת מדרגות ההכנסה, המוגדרת ע"י $f(x) =$[המדרגה בה נמצאת ההכנסה של x], משרה יחס זה.

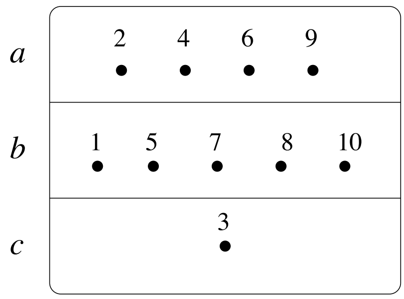
2. $X = \mathbb{R}$, היחס R מוגדר ע"י $|x| = |y| \iff x \sim y$.
הפונקציה מ־ $X = \mathbb{R}$ ל־ $Y = [0, +\infty)$ המוגדרת ע"י $f(x) = |x|$, משרה יחס זה.

3. $X = \mathbb{Z}$, היחס R מוגדר ע"י $5|(x-y) \iff x \sim y$.
הפונקציה מ־ $X = \mathbb{Z}$ ל־ $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x \mod 5$ (הפונקציה שמתאימה ל־ x את השארית של x בחלוקה ב־ 5), משרה יחס זה.

4. $X = \mathbb{R}^2$, היחס R מוגדר ע"י $x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \iff (x, y) \sim (z, t)$.
הפונקציה מ־ $X = \mathbb{R}^2$ ל־ $Y = [0, +\infty)$ המוגדרת ע"י $f(x, y) = x^2 + y^2$, משרה יחס זה.

האיור הבא מציג דוגמא נוספת: פונקציה f עם תחום הגדרה $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ויחס השקילות ב־ X המושרה ע"י f. לדוגמא, $f(1) = f(5)$ ולכן 1 ו־ 5 שייכים לאותה מחלקת שקילות, וכו'. שימו לב שניתן לזהות את מחלקות השקילות עם הערכים המתקבלים ע"י פונקציה.





החלוקה המוגדרת ע"י הערכים שפונקציה מקבלת היא דרך טבעית להגדיר יחס שקילות. שני איברים שקולים ביחס זה אם ורק אם הפונקציה מקבלת עליהם אותו ערך. במילים אחרות, אנו מתעלמים מהזהות האינדיוידואלית של אברי X ותמעניינים רק בשאלה מהו הערך של $f(x)$.
למשל, בדוגמא עם מדרגות הכנסה אנו מתעלמים מהזהות האינדיוידואלית של כל תושב, ומתעניינים רק במדרגה שבה נמצאת הכנסתו. באופן דומה, בדוגמא 2 אנו מתעניינים לא ב־ x עצמו, אלא בערך המוחלט שלו; בדוגמא 3 אנו מתעניינים לא ב־ x עצמו, אלא בשארית של x בחלוקה ב־ 5; בדוגמא 4 אנו מתעניינים לא ב־ x עצמו, אלא במרחק מ־ x לראשית.

תהי $f : X \to Y$ פונקציה, ויהי R יחס השקילות המושרה ע"י f. נסתכל בפונקציה $\pi : X \to X/R$ המוגדרת ע"י $\pi(x) = [x]_R$. קל לראות שזו פונקציה על; נקרא לה **ההיטל של** X **על קבוצת המנה** (לפי יחס השקילות המושרה ע"י f). הפונקציה π היא הכלי הפורמלי שבעזרתו "מזהים" איברים x, y המקיימים $f(x) = f(y)$: אם x ו־ y **שקולים** ב־ X, אז מחלקות השקילות שלהם **שוות** בקבוצת המנה.

הפירוק הקנוני של פונקציה. תהי $f : X \to Y$ פונקציה. נסתכל בסדרת הפונקציות הבאה:

$$X \xrightarrow{\pi} X/R \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{i} Y$$

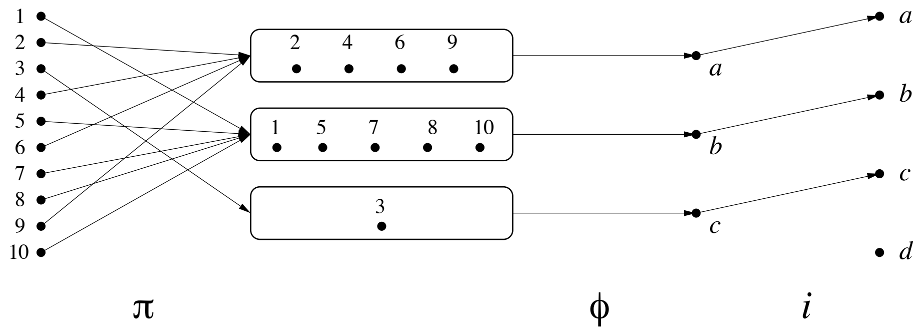
כאשר R הוא יחס השקילות המוגדר ע"י f, ושלוש הפונקציות π, φ, i מוגדרות באופן הבא:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & X & \to & X/R \\ & x & \mapsto & [x]_R \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi: & X/R & \to & \mathrm{Im}(f) \\ & [x]_R & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} i: & \mathrm{Im}(f) & \to & Y \\ & y & \mapsto & y \end{array}$$

[21] טענה. תהי $f : X \to Y$ פונקציה, ותהיינה π, φ, i כפי שהוגדרו לעיל. אז מתקיים:

1. π ("ההיטל") היא פונקציה על.
2. φ היא פונקציה מוגדרת היטב, חד־חד־ערכית ועל.
3. i ("השיכון") היא פונקציה חד־חד־ערכית.
4. **הפונקציה f היא ההרכבה של שלוש פונקציות אלה:** $f = i \circ \varphi \circ \pi$.

את ההוכחה של טענה **[21]** נשאיר כתרגיל. נמחיש אותה עבור הפונקציה מהאיור בעמוד הקודם:



הפירוק $f = i \circ \varphi \circ \pi$ נקרא **הפירוק הקנוני של** f. ניתן לסכם אותו בדיאגרמה הבאה:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi\downarrow & & i\uparrow \\ X/R & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Im}(f) \end{array}$$

אם נצמצם את הטווח של f ל־ $\mathrm{Im}(f)$, נקבל את הדיאגרמה הבאה:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathrm{Im}(f) \\ \pi\downarrow & \nearrow & \varphi \\ X/R & & \end{array}$$

באלגברה קיימים משפטים רבים ("משפטי איזומורפיזם") שבהן φ היא לא רק פונקציה חד־חד־ערכית ועל, אלא גם "מעבירה" את התכונות האלגבריות שיש בקבוצה X/R לקבוצה $\mathrm{Im}(f)$.

תרגיל: הוכיחו את הטענה **[21]**.

3.5 סדרה, סדרה מוכללת, משפחה של קבוצות, מכפלה קרטזית מוכללת

אחד המושגים הבסיסיים בחדו"א הוא המושג של סדרה. סדרה מהצורה $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ מוגדרת כאשר ידוע מה האיבר במקום הראשון, מה האיבר במקום השני וכן הלאה. בהגדרה פורמלית נפרש את $a_k = x$ ("הרכיב ה־k של הסדרה הוא x") כ־ $f(k) = x$, ואת הסדרה כולה כפונקציה עם תחום הגדרה $\mathbb{N}$ או $\mathbb{N}_+$. לדוגמא, הסדרה הממשית $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_+}$ המוגדרת ע"י $a_k = (-1)^k\, k^2$, כלומר $(-1, 4, -9, 16, -25, 36, \dots)$, היא, לפי ההגדרה הפורמלית, הפונקציה הבאה מ־ $\mathbb{N}_+$ ל־ $\mathbb{Z}$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ -1 & 4 & -9 & 16 & -25 & 36 & \dots \end{bmatrix}$. בדומה יוגדרו גם סדרות סופיות.

הגדרה של סדרה. תהי $I = \mathbb{N}_+$ או $I = \mathbb{N}$ **קבוצת האינדקסים**, ותהי X קבוצה כלשהי. פונקציה a מ־ I ל־ X נקראת **סדרה [אינסופית של אברי X]**. במקום $a(x)$ נכתוב a_x, והסדרה כולה תסומן $(a_k)_{k\in I}$.

לסדרה סופית אותה ההגדרה, כאשר קבוצת האינדקסים היא $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ או $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. סדרה סופית עם שלושה רכיבים תיקרא גם **שלשה סדורה**, סדרה סופית עם ארבעה רכיבים **רביעיה סדורה**, וכן הלאה.

סדרה מוכללת. אם בתור קבוצת אינדקסים ניקח קבוצה לא ריקה כלשהי, נקבל סדרה מוכללת. לפי כך, תהי $I \neq \varnothing$ **קבוצת אינדקסים** ו־ X קבוצה כלשהי. פונקציה מ־ I ל־ X תיקרא **סדרה מוכללת [של אברי X]**. גם עבור הסדרות המוכללות נשתמש בסימון $(a_k)_{k\in I}$.

בפרק 1 דיברנו על המושגים **משפחת קבוצות ומכפלה קרטזית**, מבלי להגדיר אותם פורמלית. נביא כעת הגדרות כאלה.

משפחה של קבוצות. אם X בהגדרה של סדרה מוכללת היא קבוצה של קבוצות, הסדרה נקראת גם **משפחה של קבוצות**.

דוגמא. תהי $I = \mathbb{R}$, $X = P(\mathbb{Q})$. לכל $a \in I$ נגדיר $A_a = \{x \in \mathbb{Q} : \ x < a\}$. זה מגדיר משפחה של קבוצות $(A_k)_{k\in\mathbb{R}}$ שבה האיבר המותאם למספר ממשי a הוא הקבוצה של כל המספרים הרציונליים הקטנים מ־ a.

מכפלה קרטזית מוכללת. תהי $(A_i)_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. **המכפלה הקרטזית** של משפחה זו היא קבוצת הפונקציות $\varphi : I \to \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ המקיימות את התנאי: לכל $i \in I$, מתקיים $\varphi(i) \in A_i$. מכפלה קרטזית זו מסומנת ב־ $\bigtimes\limits_{i\in I} A_i$.

אם קבוצת האינדקסים היא $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, נשתמש גם בסימון $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. אם בנוסף אלה קבוצות שוות: $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = X$, נסמן את המכפלה הקרטזית גם ב־ X^n.

נשווה הגדרה זו עם הגדרה זמנית שניתנה בפרק 1.6. תהיינה, לדוגמא, $A_1 = \{6, 8\}$, $A_2 = \{7, 8, 9\}$, $A_3 = \{6\}$. לפי ההגדרה הזמנית, אברי הקבוצה $\bigtimes\limits_{i\in\{1,2,3\}} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3$ הן שש השלשות הסדורות הבאות:

$$(6, 7, 6), \quad (6, 8, 6), \quad (6, 9, 6), \quad (8, 7, 6), \quad (8, 8, 6), \quad (8, 9, 6).$$

לפי ההגדרה הפורמלית, שלשה סדורה היא פונקציה עם תחום ההגדרה $\{1, 2, 3\}$. למשל, השלשה הסדורה $(8, 9, 6)$ היא הפונקציה המוגדרת ע"י $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}$. כלומר היא אחת מהפונקציות φ המקיימות: $\varphi(1) \in A_1$, $\varphi(2) \in A_2$, $\varphi(3) \in A_3$.
לכן היא שייכת ל־ $\bigtimes\limits_{i\in\{1,2,3\}} A_i$ גם לפי ההגדרה הפורמלית.

תרגילים.

1. תהי X קבוצת הסדרות כאשר קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}_+$, וגם כל הרכיבים שייכים ל־ $\mathbb{N}_+$. כלומר, $X = (\mathbb{N}_+)^{\mathbb{N}_+}$.
   (א) הוכיחו כי הקבוצה $\{f \in X : \ f \circ f = (1, 2, 3, 4, \ldots)\}$ היא קבוצה אינסופית.
   (ב) הוכיחו כי הקבוצה $\{f \in X : \ f \circ f = (1, 1, 1, 1, \ldots)\}$ היא קבוצה אינסופית.
   (ג) הוכיחו כי הקבוצה $\{f \in X : \ f \circ f = (2, 3, 4, 5, \ldots)\}$ היא ריקה.
   (ד) האם קיימת $g \in X$ כך שהקבוצה $\{f \in X : \ f \circ f = g\}$ היא לא ריקה וסופית?

2. בכל סעיף: מצאו את המכפלה הקרטזית $\bigtimes\limits_{i\in I} A_i$ (תארו באופן כללי את אברי המכפלה הקרטזית, ורשמו במפורש חמישה איברים שלה).
   (א) תהי $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; לכל $n \in I$ תהי $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(ב) תהי $I=\mathbb{N}_+$; לכל $n\in I$ תהי $A_n=\{1,2,\dots,n\}$.

(ג) תהי $I=\mathbb{N}_+$; לכל $n\in I$ תהי $A_n=\{n\}$.

(ד) תהי $I=\mathbb{N}_+$; לכל $n\in I$ תהי $A_n=\{-n,n\}$.

(ה) תהי $I=\mathbb{N}$; לכל $n\in I$ תהי A_n קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים, לכל $n\in I$ אי־זוגי תהי A_n קבוצת המספרים הטבעיים האי־זוגיים.

(ו) תהי $I=\mathbb{N}$; לכל $n\in I$ תהי $A_n=\mathbb{R}$.

(ז) תהי $I=\mathbb{R}$; לכל $i\in I$ תהי $A_i=\mathbb{N}$.

(ח) תהי $I=\mathbb{R}$; לכל $i\in I$ תהי

$$A_i=\begin{cases}[-1,0), & i<0\\ \{0\}, & i=0\\ (0,1], & i>0\end{cases}$$

3. (א) הוכיחו כי לא קיימת משפחה $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ של תת־קבוצות של $\mathbb{N}$ כך ש־ $\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} A_i$ היא קבוצת כל הסדרות העולות של מספרים טבעיים.

(ב) מצאו משפחה $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ של תת־קבוצות של $\mathbb{N}$ כך ש־ $\bigtimes_{i\in\mathbb{N}} A_i$ היא קבוצת כל הסדרות f של מספרים טבעיים המקיימות את התנאי: לכל $n\in\mathbb{N}$, $f(n)$ הוא זוגי אם ורק אם n הוא זוגי (כלומר, קבוצת הסדרות שבהן במקומות הזוגיים נמצאים מספרים זוגיים, ובמקומות האי־זוגיים נמצאים מספרים אי־זוגיים).

(ג) תהיינה I ו־ A שתי קבוצות, ותהי $\mathcal{B}$ קבוצה שאבריה הן פונקציות מ־ I ל־ A (לא בהרכח $\mathcal{B}$ היא קבוצת <u>כל</u> הפונקציות מ־ I ל־ A). מצאו תנאי הכרחי ומספיק לקיום של $(A_i)_{i\in I}$, משפחה של תת־קבוצות של A, כך ש־ $\mathcal{B}=\bigtimes_{i\in I} A_i$.

4. תהי $I=\{1,2,\dots,n\}$, ונניח שלכל $i\in I$ הקבוצה A_i היא סופיות: $|A_i|=a_i$. כמה איברים יש במכפלה הקרטזית $\bigtimes_{i\in I} A_i$?

3.6 פונקציות מושרות

הגדרה של פונקציות מושרות. תהי $f:X\to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר בעזרתה שתי **פונקציות מושרות**:

- **הפונקציה המושרה** $\boldsymbol{f_*:P(X)\to P(Y)}$, המוגדרת ע"י $f_*(A)=\{f(x):\ x\in A\}$.
- **הפונקציה המושרה** $\boldsymbol{f^*:P(Y)\to P(X)}$, מוגדרת ע"י $f^*(B)=\{x\in X:\ f(x)\in B\}$.

הפונקציה המושרה f_* פועלת על תת־קבוצות של תחום ההגדרה של f.
עבור $A\subseteq X$, $f_*(A)$ הוא התמונה של הקבוצה A תחת f
(לדוגמא, אם $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, אז $f_*(A)=\{f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)\}$).

הפונקציה המושרה f^* פועלת על תת־קבוצות של הטווח של f.
עבור $B\subseteq Y$, $f^*(B)$ היא קבוצת המקורות של אברי B תחת f.

דוגמא 1. תהי $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ המוגדרת ע"י $f(1)=4$, $f(2)=f(3)=5$, כלומר $F=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&5\end{bmatrix}$. אז הפונקציות המושרות פועלות כך:

$f^*(\varnothing)=\varnothing$
$f^*(\{4\})=\{1\}$
$f^*(\{5\})=\{2,3\}$
$f^*(\{6\})=\varnothing$
$f^*(\{4,5\})=\{1,2,3\}$
$f^*(\{4,6\})=\{1\}$
$f^*(\{5,6\})=\{2,3\}$
$f^*(\{4,5,6\})=\{1,2,3\}$

$f_*(\varnothing)=\varnothing$
$f_*(\{1\})=\{4\}$
$f_*(\{2\})=\{5\}$
$f_*(\{3\})=\{5\}$
$f_*(\{1,2\})=\{4,5\}$
$f_*(\{1,3\})=\{4,5\}$
$f_*(\{2,3\})=\{5\}$
$f_*(\{1,2,3\})=\{4,5\}$

דוגמא 2.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$. אז, למשל,

$f^*(\{1,2,4\})=\{-2,-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2},2\}$
$f^*([0,4])=[-2,2]$
$f^*((0,4])=[-2,0)\cup(0,2]$
$f^*([1,4])=[-2,-1]\cup[1,2]$
$f^*([-7,4])=[-2,2]$
$f^*([-7,0])=\{0\}$
$f^*([-7,0))=\varnothing$
$f^*([-7,-2))=\varnothing$

$f_*(\{-2,-1,1\})=\{1,4\}$
$f_*([0,1])=[0,1]$
$f_*([-2,2])=[0,4]$
$f_*([-3,2])=[0,9]$
$f_*([2,3])=[4,9]$
$f_*([-3,-2]\cup[1,2])=[1,9]$
$f_*([-3,-2]\cup[1,2))=[1,9]$
$f_*([-3,-2)\cup[1,2))=[1,4)\cup(4,9]$

נראה מספר טענות על הפונקציות המושרות.

טענה [22] תהי $f:X\to Y$, ותהיינה $A_1,A_2\subseteq X$, $B_1,B_2\subseteq Y$.

הפונקציה המושרה $f^*:P(Y)\to P(X)$ מקיימת את הטענות הבאות:

1. $f^*(\varnothing)=\varnothing$
2. $f^*(Y)=f^*(\mathrm{Im}(f))=X$

הסעיפים 1 ו־ 2 נובעים באופן מיידי מההגדרה.

3. $f^*(B_1\cup B_2)=f^*(B_1)\cup f^*(B_2)$

הוכחה. $x\in f^*(B_1\cup B_2)\;\Leftrightarrow\; f(x)\in B_1\cup B_2\;\Leftrightarrow\;(f(x)\in B_1$ או $f(x)\in B_2)\;\Leftrightarrow$ $(x\in f^*(B_1)$ או $x\in f^*(B_2))\;\Leftrightarrow\; x\in f^*(B_1)\cup f^*(B_2)$.

4. $f^*(B_1\cap B_2)=f^*(B_1)\cap f^*(B_2)$

הוכחה. $x\in f^*(B_1\cap B_2)\;\Leftrightarrow\; f(x)\in B_1\cap B_2\;\Leftrightarrow\;(f(x)\in B_1$ ו־ $f(x)\in B_2)\;\Leftrightarrow$ $(x\in f^*(B_1)$ ו־ $x\in f^*(B_2))\;\Leftrightarrow\; x\in f^*(B_1)\cap f^*(B_2)$.

5. $f^*(B_1\setminus B_2)=f^*(B_1)\setminus f^*(B_2)$

הוכחה. $x\in f^*(B_1\setminus B_2)\;\Leftrightarrow\; f(x)\in B_1\setminus B_2\;\Leftrightarrow\;(f(x)\in B_1$ ו־ $f(x)\notin B_2)\;\Leftrightarrow$ $(x\in f^*(B_1)$ ו־ $x\notin f^*(B_2))\;\Leftrightarrow\; x\in f^*(B_1)\setminus f^*(B_2)$. $\square$

טענה [22] אומרת ש**הפונקציה המושרה f^* שומרת על הפעולות הבולאניות.** בטענה הבאה נראה שעבור הפונקציה המושרה f_* רוב הטענות המתאימות מתקיימות, באופן כללי, רק עם הכלה.

[23] טענה. תהי $f : X \to Y$, ותהיינה $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$.

הפונקציה המושרה $f_* : P(X) \to P(Y)$ מקיימת את הטענות הבאות:

1. $f_*(\varnothing) = \varnothing$
2. $f_*(X) = \mathrm{Im}(f)$

הסעיפים 1 ו־ 2 נובעים באופן מיידי מההגדרה.

3. $f_*(A_1 \cup A_2) = f_*(A_1) \cup f_*(A_2)$

הוכחת $\subseteq$. יהי $y \in f_*(A_1 \cup A_2)$. זה אומר: קיים $x \in A_1 \cup A_2$ כך ש־ $y = f(x)$. אם $x \in A_1$ אז $y \in f_*(A_1)$, ואם $x \in A_2$ אז $y \in f_*(A_2)$. בכל מקרה $y \in f_*(A_1) \cup f_*(A_2)$.

הוכחת $\supseteq$. יהי $y \in f_*(A_1) \cup f_*(A_2)$. אם $y \in f_*(A_1)$ אז קיים $x \in A_1$ כך ש־ $y = f(x)$; אם $y \in f_*(A_2)$ אז קיים $x \in A_2$ כך ש־ $y = f(x)$. בכל מקרה קיים $x \in A_1 \cup A_2$ כך ש־ $y = f(x)$. לכן $y \in f_*(A_1 \cup A_2)$.

4. $f_*(A_1 \cap A_2) \subseteq f_*(A_1) \cap f_*(A_2)$

הוכחה. יהי $y \in f_*(A_1 \cap A_2)$. זה אומר: קיים $x \in A_1 \cap A_2$ כך ש־ $y = f(x)$. מאחר ש־ $x \in A_1$, מתקיים $y \in f_*(A_1)$; ומאחר ש־ $x \in A_2$, מתקיים $y \in f_*(A_2)$. לכן $y \in f_*(A_1) \cap f_*(A_2)$.

דוגמא להכלה ממש:
תהיינה $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{4,5\}$; $f : X \to Y$ המוגדרת ע"י $f(1) = f(2) = 4$, $f(3) = 5$.
ניקח $A_1 = \{1,3\}$, $A_2 = \{2,3\}$.
עבורם $f_*(A_1 \cap A_2) = f_*(\{3\}) = \{5\}$, ואילו $f_*(A_1) \cap f_*(A_2) = \{4,5\} \cap \{4,5\} = \{4,5\}$.

5. $f_*(A_1 \setminus A_2) \supseteq f_*(A_1) \setminus f_*(A_2)$

הוכחה. יהי $y \in f_*(A_1) \setminus f_*(A_2)$. זה אומר: קיים $x \in A_1$ כך ש־ $y = f(x)$, ולא קיים $x' \in A_2$ כך ש־ $y = f(x')$. בפרט, $x \notin A_2$. כלומר $x \in A_1 \setminus A_2$, ולכן $y \in f_*(A_1 \setminus A_2)$.

דוגמא להכלה ממש:
תהיינה $X = \{1,2\}$, $Y = \{3\}$; $f : X \to Y$ המוגדרת ע"י $f(1) = f(2) = 3$.
ניקח $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$.
עבורם $f_*(A_1 \setminus A_2) = f_*(\{1\}) = \{3\}$, ואילו $f_*(A_1) \setminus f_*(A_2) = \{3\} \setminus \{3\} = \varnothing$. $\square$

[24] טענה. תהי $f : X \to Y$, ותהיינה $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

1. $A \subseteq f^*(f_*(A))$.

הוכחה. יהי $x \in A$. אז $f(x) \in f_*(A)$. לכן x שייך ל־ $f^*(f_*(A))$, בתור אחד מהמקורות של $f(x)$ שהוא איבר של $f_*(A)$.

2. $f_*(f^*(B)) \subseteq B$.

הוכחה. יהי $y \in f_*(f^*(B))$. זה אומר: קיים $x \in f^*(B)$ כך ש־ $y = f(x)$. ומ־ $x \in f^*(B)$ נובע $f(x) \in B$, כלומר $y \in B$. $\square$

הערה. בספרים רבים הפונקציות המושרות f_* ו־ f^* מסומנות ב־ f ו־ f^{-1}. כדי להבין לאיזו פונקציה הכוונה (כלומר, האם "f" היא f או f_*, האם "f^{-1}" היא f^{-1}[20] או f^*), יש לבדוק על מה הפונקציה מופעלת: על **איברים** של X \ של Y, או על **תת־קבוצות** שלהן.

[20] ייתכן ש־ f^{-1}, הפונקציה ההפכית של $f : X \to Y$, לא קיימת כלל!

תרגילים.

1. תהי $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x,y)=x^2+y^2$. מצאו:
   (א) $f_*\left((-1,1)\times(-2,2)\right)$
   (ב) $f_*((-\infty,0)\times\{0\})$
   (ג) $f^*([-4,4])$
   (ד) $f^*([0,4])$
   (ה) $f^*([-4,0])$
   (ו) $f^*([-4,0))$

2. הוכיחו כי שלוש הטענות הבאות שקולות:
   (א) $f:X\to Y$ היא חד־חד־ערכית.
   (ב) $f_*:P(X)\to P(Y)$ היא חד־חד־ערכית.
   (ג) $f^*:P(Y)\to P(X)$ היא על.

3. הוכיחו כי שלוש הטענות הבאות שקולות:
   (א) $f:X\to Y$ היא על.
   (ב) $f_*:P(X)\to P(Y)$ היא על.
   (ג) $f^*:P(Y)\to P(X)$ היא חד־חד־ערכית.

4. הוכיחו כי שלוש הטענות הבאות שקולות:
   (א) $f:X\to Y$ היא חד־חד־ערכית.
   (ב) לכל $A_1,A_2\subseteq X$ מתקיים $f_*(A_1\cap A_2)=f_*(A_1)\cap f_*(A_2)$ (השווו עם טענה **[23.4]**).
   (ג) לכל $A_1,A_2\subseteq X$ מתקיים $f_*(A_1\setminus A_2)=f_*(A_1)\setminus f_*(A_2)$ (השווו עם טענה **[23.5]**).

שימו לב: בפרט יש להראות שאם $f:X\to Y$ איננה חד־חד־ערכית, אז קיימות קבוצות $A_1,A_2\subseteq X$ כך ש־ $f_*(A_1\cap A_2)\subsetneqq f_*(A_1)\cap f_*(A_2)$, וקיימות קבוצות $C_1,C_2\subseteq X$ כך ש־ $f_*(C_1\setminus C_2)\supsetneqq f_*(C_1)\setminus f_*(C_2)$

5. תהי $f:X\to Y$, ותהיינה $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$.
   (א) הוכיחו כי $f^*(B')=(f^*(B))'$ (ב־ X ההשלמה היא ביחס ל־ X, ב־ Y ביחס ל־ Y).
   (ב) האם בהכרח מתקיים $f_*(A')\subseteq(f_*(A))'$? $f_*(A')\supseteq(f_*(A))'$? $f_*(A')=(f_*(A))'$?
   (ג) איך משתנות התשובות בסעיף הקודם אם נתון כי f היא פונקציה חד־חד־ערכית? פונקציה על? פונקציה חד־חד־ערכית ועל?

6. הוכיחו כי אם f הפיכה אז f_* ו־ f^* הפיכות ומתקיים $f^*=(f_*)^{-1}=(f^{-1})_*$.

4 שקילות עצמה וקרדינלים

4.1 שקילות עצמה: הגדרה ודוגמאות

כאשר מדובר בקבוצות סופיות, ניתן לדבר על מספר האיברים בקבוצה, ועל קבוצות בעלות אותו מספר איברים. בפרק זה נכליל את המושגים האלה לקבוצות אינסופיות. העובדה הבאה תהיה נקודת המוצא:

- אם X ו־ Y הן קבוצות סופיות, אז יש ביניהן פונקציה חד־חד־ערכית ועל אם ורק אם הן בעלות אותו מספר איברים.

עובדה זו היא אחת הגרסאות של עקרון שובך היונים, ראו טענה **[18]**. מאחר שהטענה "יש פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין קבוצה X לקבוצה Y" היא בעלת משמעות גם עבור קבוצות אינסופיות, ניקח אותה כהגדרה למושג של **שקילות עצמה**. מושג זה יכליל את מושג השוויון מבחינת הגודל מקבוצות סופיות לקבוצות כלשהן.

הגדרה של שקילות עצמה. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. נאמר ש־ $\boldsymbol{Y}$ **שקולה ל־** $\boldsymbol{X}$ (או $\boldsymbol{Y}$ **שקולת־עצמה ל־** $\boldsymbol{X}$, או $\boldsymbol{Y}$ **שקולה ל־** $\boldsymbol{X}$ **מבחינת העצמה**) אם קיימת פונקציה $f : X \to Y$ חד־חד־ערכית ועל.

שקילות עצמה היא יחס שקילות. עלינו להצדיק את המונח "Y שקולה ל־ X" ולהראות שיחס זה מקיים את ההגדרה של יחס שקילות. נעשה זאת בטענה הבאה:

[25] טענה.
תהי $\mathcal{F}$ קבוצה של קבוצות. היחס R ב־ $\mathcal{F}$ המוגדר ע"י: $(X,Y) \in R$ אם ורק אם Y שקולה ל־ X, הוא יחס שקילות.

הוכחה.

1. לכל $X \in \mathcal{F}$ מתקיים $(X,X) \in R$ כי פונקציית הזהות I_X היא חד־חד־ערכית ועל. לכן R הוא יחס רפלקסיבי.
2. נניח ש־ $(X,Y) \in R$. זה אומר: קיימת פונקציה $f : X \to Y$ חד־חד־ערכית ועל. לפי הטענה **[20.1]**, גם $f^{-1} : Y \to X$ היא חד־חד־ערכית ועל[21]. לכן $(Y,X) \in R$. לכן R הוא יחס סימטרי.
3. נניח ש־ $(X,Y) \in R$ ו־ $(Y,Z) \in R$. זה אומר: קיימות פונקציות $f : X \to Y$ ו־ $g : Y \to Z$, שתיהן חד־חד־ערכיות ועל. לפי הטענה **[19.(1,2)]**, גם $g \circ f : X \to Z$ היא חד־חד־ערכית ועל. לכן $(X,Z) \in R$. לכן R הוא יחס טרנזיטיבי. $\square$

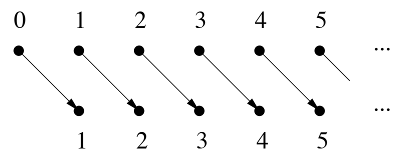
הודות לסימטריות, נוכל לומר: $\boldsymbol{X}$ **ו־** $\boldsymbol{Y}$ **הן קבוצות שקולות [זו לזו]** במקום "Y שקולה ל־ X" או "X שקולה ל־ Y". העובדה ש־ X ו־ Y הן קבוצות שקולות תסומן ע"י $X \sim Y$.

נביא מספר דוגמאות.

[26] טענה. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_+$. (תזכורת: $\mathbb{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, כולל 0; $\mathbb{N}_+$ היא קבוצת המספרים הטבעיים ללא 0.)

הוכחה. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ ע"י $f(x) = x + 1$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן קבוצות אלה שקולות. $\square$

האיור הבא מתאר פונקציה זו. ניתן לראות שהיא באמת חד־חד־ערכית ועל כי לכל איבר בטווח מגיע חץ אחד בדיוק.



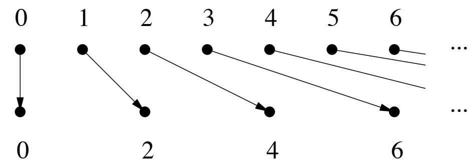
[21] השתמשנו גם בטענה **[20.4]**: פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חד־חד־ערכית ועל.

הערה. באופן דומה ניתן להוכיח כי לכל k שלם, הקבוצה $\mathbb{N}$ שקולה לקבוצה $\{x \in \mathbb{N} :\ x \geq k\} = \{k, k+1, k+2, k+3, \dots\}$.

בדוגמא זו ראינו בפעם הראשונה את המצב שבו קבוצה שקולה מבחינת העצמה לקבוצה שמוכלת בה ממש ($A \subsetneqq B$ ו־ $A \sim B$). זה לא יכול לקרות בקבוצות סופיות, ולכן ייתכן שבשלב ראשון זה יכול להפתיע. עם זאת, נראה בהמשך שעבור קבוצות אינסופיות זה מצב רגיל, ובינתיים נמשיך ונביא דוגמאות נוספות לתופעה זו.

[27] טענה. $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$. ($2\mathbb{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים: $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$).

הוכחה. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ ע"י $f(x) = 2x$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל (ראו איור), ולכן הקבוצות שקולות. □



באופן דומה ניתן להוכיח כי לכל k טבעי חיובי, הקבוצה $\mathbb{N}$ שקולה לקבוצה $k\mathbb{N} = \{0, k, 2k, 3k, \dots\}$.

נסתכל בקבוצת המספרים הטבעיים האי־זוגיים, נסמן אותה ב־ $2\mathbb{N}+1$: $2\mathbb{N}+1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. אחרי שראינו ש־ $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, התוצאה $\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N}+1)$ צפויה למדי. נציין שתי דרכים להוכיח אותה:

1. נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N} \to (2\mathbb{N}+1)$ ע"י $g(x) = 2x+1$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן $\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N}+1)$.
2. נגדיר פונקציה $h : 2\mathbb{N} \to (2\mathbb{N}+1)$ ע"י $h(x) = x+1$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן $2\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N}+1)$. כעת מ־ $\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N})$ ו־ $2\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N}+1)$ מקבלים $\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N}+1)$ לפי טרנזיטיביות של שקילות עצמות (טענה **[25.3]**).

נסתכל בשוויון הקבוצות $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$ (נזכיר שהסימן $\sqcup$ מציין איחוד זר). הוא מדגים תופעה נוספת שלא תיתכן עבור קבוצות סופיות: הקבוצה $\mathbb{N}$ היא איחוד זר של שתי תת־קבוצות שלה, $2\mathbb{N}$ ו־ $2\mathbb{N}+1$, כאשר כל אחת מתת־קבוצות אלה שקולה ל־ $\mathbb{N}$ כולה.

[28] טענה. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

הוכחה. כדי למצוא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Z}$, עלינו לבנות סדרה שבה כל מספר שלם יופיע פעם אחת בדיוק (היזכרו בהגדרה הפורמלית של סדרה; העובדה שכל מספר שלם יופיע פעם אחת בדיוק יבטיח שהפונקציה תהיה חד־חד־ערכית ועל). נתחיל לבנות את הסדרה מ־ 0, ונוסיף מספרים חיוביים ושליליים לסירוגין, לפי הסדר:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots.$$

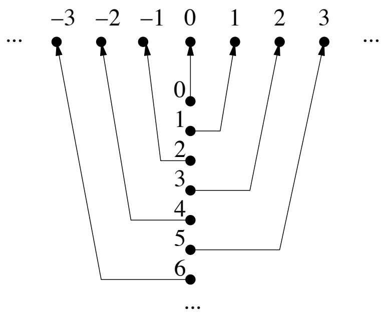
כלומר, אנחנו מגדירים פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ שתתנהג באופן הבא:

$$f(0) = 0,\quad f(1) = 1,\quad f(2) = -1,\quad f(3) = 2,\quad f(4) = -2,\quad f(5) = 3,\quad f(6) = -3,\quad \dots.$$

ניתן להגדיר את הפונקציה הזאת ע"י נוסחה מפורשת באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \text{ אי־זוגי} \\ -\frac{x}{2}, & x \text{ זוגי} \end{cases}$$

(הוכיחו כי פונקציה זו היא באמת חד־חד־ערכית ועל). □



[29] טענה. $\mathbb{N} \sim (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

הוכחה. עלינו למצוא פונקציה $\mathbb{N} \to (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ חד־חד־ערכית ועל. במקום להגדיר אותה ע"י נוסחה מפורשת, נתאר בניה של סדרה בה כל איבר של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ יופיע פעם אחת בדיוק. כמו כן, ניזכר ש־ $\mathbb{N}^2$ הוא סימון נוסף עבור $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

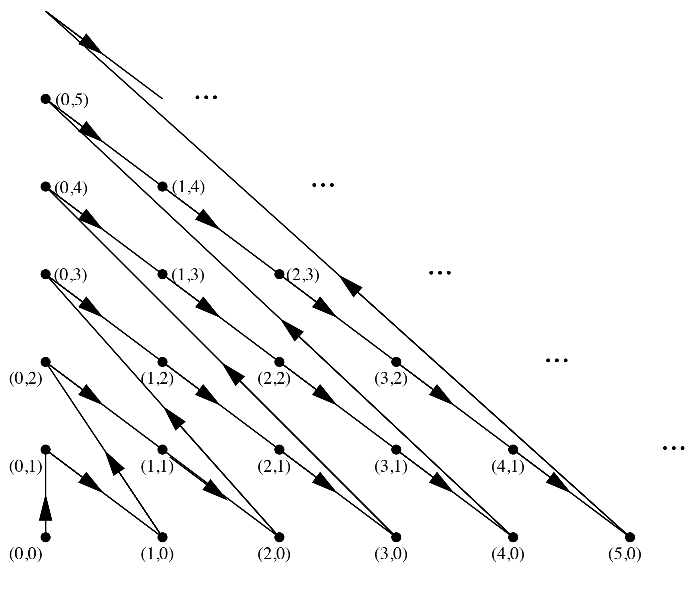
נסדר את אברי $\mathbb{N}^2$ כך האיבר הראשון יהיה $(0,0)$ (הזוג היחיד עם הסכום הרכיבים 0), אחריו יופיעו כל הזוגות עם הסכום הרכיבים 1, אחריהם יופיעו כל הזוגות עם הסכום הרכיבים 2, וכו'. הסידור הפנימי של הזוגות בעלי סכום הרכיבים n יהיה $(0,n),(1,n-1),(2,n-2),\ldots,(n,0)$.

כך נקבל סדרה שתחילתה

$$(\,(0,0),\quad (0,1),\ (1,0),\quad (0,2),\ (1,1),\ (2,0),\quad (0,3),\ (1,2),\ (2,1),\ (3,0),\quad (0,4),\ \ldots\,)\,.$$

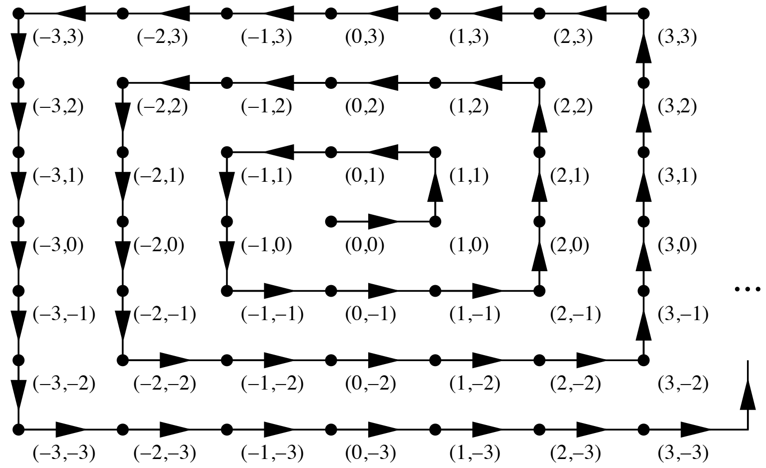
מדוע כל איבר של $\mathbb{N}^2$ יופיע בסדרה זו פעם אחד בדיוק? לכל n, מספר הזוגות שסכום רכיביהם n הוא מספר סופי: $n+1$. לכן, בהינתן $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ עם $x+y=n$, מובטח שנגיע לזוגות עם סכום הרכיבים n, ובפרט נגיע ל־ (x,y). $\square$

האיור הבא מתאר בניה זו. החיצים מסמנים את הסדר לפיו אברי $\mathbb{N}^2$ מופיעים לסדרה. באיור זה רואים בבירור כי מגיעים לכל איבר של $\mathbb{N}^2$ פעם אחת בדיוק.



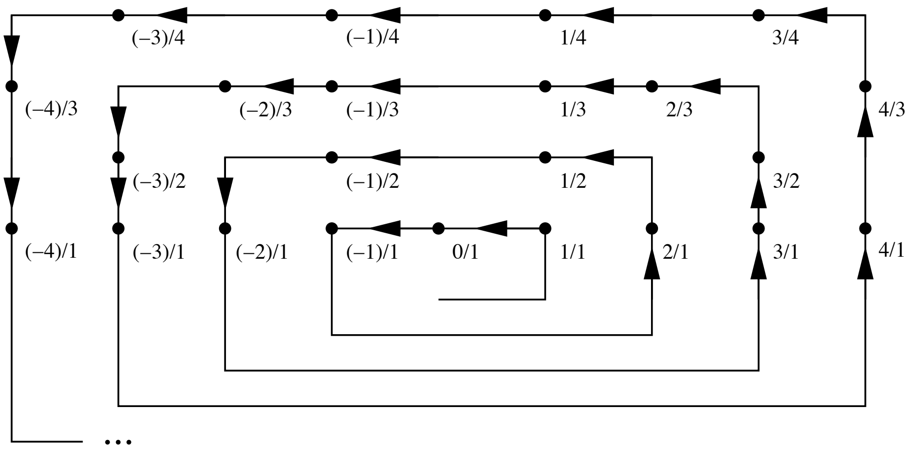
[30] טענה. $\mathbb{N} \sim (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$.

האיור הבא מתאר (בדומה לאיור הקודם) בניה של סדרה שבה כל איבר של $\mathbb{Z}^2$ מופיע פעם אחת בדיוק. לכן סדרה זו היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Z}^2$.



[31] טענה. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

הוכחה. נעיר תחילה שאחרי שהוכחנו $\mathbb{N} \sim (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, הטענה $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ כבר לא כל כך מפתיעה כי כל מספר רציונלי הוא מנה של שני מספרים שלמים. שיקול זה עדיין לא נותן פונקציה חד־חד־ערכית ועל באופן מיידי כי ההתאמה $(x, y) \mapsto x/y$ איננה חד־חד־ערכית ובנוסף לא מוגדרת עבור $y = 0$. לכן נשנה את הבניה קצת. באיור הקודם נחליף סימון (x, y) ב־ x/y, נמחק את כל הנקודות מהצורה $(x, 0)$ (כי הביטויים $x/0$ לא מייצגים מספרים רציונליים), וניקח בחשבון רק את השברים המצומצמים עם מכנה חיובי – בניה זו תיתן פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Q}$.



נראה בניה נוספת של פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Q}$. נסתכל בכל המספרים הרציונליים בצורתם המצומצמת x/y. נרשום את השברים המצומצמים עם $|x| + |y| = 1$, אח"כ עם $|x| + |y| = 2$, אח"כ עם $|x| + |y| = 3$ וכן הלאה. עבור כל ערך

של $|x|+|y|$, נכתוב קודם את המספרים החיוביים כשאנחנו מסדרים אותם לפי העליה של המונים; ואח"כ את הנגדיים שלהם. כך נקבל את הסדרה:

$$\underbrace{\frac{0}{1},}_{|x|+|y|=1}\ \underbrace{\frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},}_{|x|+|y|=2}\ \underbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{1},}_{|x|+|y|=3}\ \underbrace{\frac{1}{3},\ \frac{3}{1},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{3}{1},}_{|x|+|y|=4}\ \underbrace{\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{4}{1},}_{|x|+|y|=5}$$

$$\underbrace{\frac{1}{5},\ \frac{5}{1},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{5}{1},}_{|x|+|y|=6}\ \underbrace{\frac{1}{6},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{2},\ \frac{6}{1},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{5}{2},\ -\frac{6}{1},}_{|x|+|y|=7}\ \ldots$$

גם בסדרה זו, כל מספר רציונלי יופיע בעם אחת בדיוק. $\square$

נסכם: בטענות **[26]** ־ **[31]** הוכחנו שהקבוצות $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ שקולות ל־ $\mathbb{N}$. נעיר שלפי הטענה **[25.3]** (הטרנזיטיביות של שקילות עצמות), כל הקבוצות האלה שקולות ביניהן.

אחרי שהוכחנו ש־ $\mathbb{N}$ שקולה ל־ $\mathbb{Z}$ ול־ $\mathbb{Q}$, השאלה הטבעית היא האם $\mathbb{N}$ שקולה ל־ $\mathbb{R}$. התשובה היא **לא**, נוכיח את זה בהמשך. בינתיים נראה ש־ $\mathbb{R}$ שקולה לכל קטע פתוח (a,b).

[32] טענה. לכל $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, הקטע הפתוח (a,b) שקול לקטע הפתוח $(0,1)$.

הוכחה. נסתכל בפונקציה $f:(0,1)\to(a,b)$ המוגדרת ע"י $f(x)=(b-a)x+a$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל (בפרט, עבור $y\in(a,b)$, מתקיים $f^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a}$), לכן קבוצות אלה שקולות. $\square$

[33] מסקנה. כל שני קטעים פתוחים ב־ $\mathbb{R}$ שקולים זה לזה.

הוכחה. יהיו (a,b) ו־ (c,d) שני קטעים פתוחים ב־ $\mathbb{R}$. לפי טענה **[32]**, שניהם שקולים ל־ $(0,1)$. לכן, לפי טענה **[25.3]** (הטרנזיטיביות של שקילות עצמות), הם שקולים ביניהם. $\square$

[34] טענה. $\mathbb{R}\sim(0,1)$.

הוכחה. נסתכל בפונקציה $f:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\tan(x)$. פונקציה זו היא ענף אחד של פונקצית הטנגנס, והיא פונקציה חד־חד־ערכית ועל. מכאן $\mathbb{R}\sim(-\pi/2,\pi/2)$. כעת, לפי טענה **[32]**, $(-\pi/2,\pi/2)\sim(0,1)$. ומכאן, לפי הטרנזיטיביות של שקילות עצמות, $\mathbb{R}\sim(0,1)$. $\square$

[35] מסקנה. לכל $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, הקטע הפתוח (a,b) שקול ל־ $\mathbb{R}$.

תרגילים.

1. (א) הוכיחו כי לכל קבוצה X מתקיים: $X\sim(X\times\{0\})$.
   (ב) הוכיחו כי לכל קבוצה X מתקיים: $(\{0\}\times X)\sim(X\times\{0\})$.
   (ג) תהי I קבוצה לא ריקה, ותהי $(X_i)_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. יהי α איבר מסויים של I. נניח שלכל $i\in I\setminus\{\alpha\}$ מתקיים $|X_i|=1$. הוכיחו: $X_\alpha\sim\left(\bigtimes_{i\in I}X_i\right)$.
2. הוכיחו:
   (א) לכל $k,m\in\mathbb{N}$, מתקיים $\{x\in\mathbb{N}:\ x\geq m\}\sim\{x\in\mathbb{N}:\ x\geq k\}$.
   (ב) לכל $k,m\in\mathbb{N}_+$, מתקיים $k\mathbb{N}\sim m\mathbb{N}$.
3. הוכיחו כי $\mathbb{N}$ שקולה לקבוצת המספרים הראשוניים $\{2,3,5,7,11,\ldots\}$. ביתר כלליות, הוכיחו כי $\mathbb{N}$ שקולה לכל תת־קבוצה אינסופית שלה.

4. הוכיחו כי $(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})\sim\mathbb{N}$ (מצאו בניה הדומה לזו שהייתה בהוכחה של טענה **[30]**).

5. בדומה למה שהוכחנו עבור קטעים פתוחים, הוכיחו כי לכל $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, הקטע הסגור $[a,b]$ שקול ל־ $[0,1]$. הסיקו שכל שני קטעים סגורים בציר הממשי הינם שקולים זה לזה.

6. יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$. הסקנו כי $(a,b)\sim(c,d)$ מכך ששני הקטעים שקולים ל־ $(0,1)$. תנו הוכחה ישירה: מצאו פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין (a,b) ו־ (c,d).

7. הוכיחו כי $[0,1)\sim(0,1]$. הכלילו.

8. האם $[0,2]\sim([0,1)\cup[2,3])$? האם $[0,3]\sim([0,1)\cup[2,3])$?

9. הוכיחו כי $\mathbb{R}\sim(0,1)$ בדרך ישירה, כלומר מצאו פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין $(0,1)$ ו־ $\mathbb{R}$.

10. הוכיחו כי $\mathbb{R}\sim(0,+\infty)$.

11. נסו להוכיח כי $[0,1]\sim(0,1)$. הערה: זה תרגיל יחסית קשה כי לא קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל **רציפה** בין קבוצות אלה. בהמשך יהיו ברשותנו כלים נוספים להוכחת שקילות, ואז נקבל תוצאה זו בדרך עקיפה אבל בקלות.

12. הוכיחו כי כל שני עיגולים פתוחים במישור שקולים זה לזה.

13. הוכיחו כי הקבוצה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y>0\}$ (הרביע הראשון הפתוח במישור) שקולה לקבוצה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0\}$ (חצי המישור העליון הפתוח במישור). רמז: השתמשו בהצגה הקטבית של המישור.

4.2 טענות על שקילות עצמות

בפרק זה נוכיח מספר טענות על שקילות עצמות.

[36] טענה. לכל שתי קבוצות X ו־ Y מתקיים $(X\times Y)\sim(Y\times X)$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $f:(X\times Y)\to(Y\times X)$ ע"י $f((x,y))=(y,x)$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן קבוצות אלה שקולות. □

[37] טענה. תהיינה X,Y,A,B ארבע קבוצות כך ש־ $X\cap Y=\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$, $X\sim A$, $Y\sim B$. אז $(A\cup B)\sim(X\cup Y)$.

הוכחה. מאחר ש־ $X\sim A$ ו־ $Y\sim B$, קיימות פונקציות $f:X\to A$ ו־ $g:Y\to B$ חד־חד־ערכיות ועל. נגדיר פונקציה $h:(X\cup Y)\to(A\cup B)$ באופן הבא:

$$h(x)=\left\{\begin{array}{ll} f(x), & x\in X\\ g(x) & x\in Y\end{array}\right\}.$$

הפונקציה h מוגדרת היטב (כלומר, לכל $x\in(X\cup Y)$, $f(x)$ מוגדר באופן יחיד) כי X ו־ Y הן קבוצות זרות.

הפונקציה h היא חד־חד־ערכית: נניח ש־ $h(x_1)=h(x_2)$. אם $x_1,x_2\in X$, מזה נובע $f(x_1)=f(x_2)$, ומכאן $x_1=x_2$ כי f חד־חד־ערכית. אם $x_1,x_2\in Y$, מזה נובע $g(x_1)=g(x_2)$, ומכאן $x_1=x_2$ כי g חד־חד־ערכית. המצב $x_1\in X,x_2\in Y$ (או להיפך) לא ייתכן כי אז $h(x_1)\in A$, $h(x_2)\in B$ (או להיפך) – בסתירה לכך ש־ A ו־ B הן קבוצות זרות.

הפונקציה h היא על: יהי $a\in(A\cup B)$. אם $a\in A$ אז יש לו מקור כי f היא על, ואם $a\in B$ אז יש לו מקור כי g היא על.

הוכחנו שקיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין $(X\cup Y)$ ו־ $(A\cup B)$, ולכן קבוצות אלה שקולות. □

[38] טענה. תהיינה X,Y,A,B ארבע קבוצות כך ש־ $X\sim A$, $Y\sim B$. אז $(A\times B)\sim(X\times Y)$.

הוכחה. מאחר ש־ $X\sim A$ ו־ $Y\sim B$, קיימות פונקציות $f:X\to A$ ו־ $g:Y\to B$ חד־חד־ערכיות ועל. נגדיר פונקציה $h:(X\times Y)\to(A\times B)$ באופן הבא: $h((x,y))=(f(x),g(y))$.

הפונקציה h היא חד־חד־ערכית: נניח ש־ $h((x_1,y_1)) = h((x_2,y_2))$. זה אומר: $(f(x_1),g(y_1)) = (f(x_2),g(y_2))$. מכאן $f(x_1) = f(x_2)$, $g(y_1) = g(y_2)$. מאחר ש־ f ו־ g הן פונקציות חד־חד־ערכיות, מקבלים $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, ומכאן $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

הפונקציה h היא על: יהי $(a,b) \in A \times B$. מאחר ש־ f ו־ g הן על, קיימים $x \in X$ ו־ $y \in Y$ כך ש־ $f(x) = a$, $g(y) = b$. אז (x,y) הוא המקור של (a,b) כי $h((x,y)) = (f(x),g(y)) = (a,b)$.

הוכחנו כי קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין $(X \times Y)$ ו־ $(A \times B)$, ולכן קבוצות אלה שקולות. □

נראה דוגמא לשימוש בטענה זו. בטענה **[29]** הוכחנו כי $\mathbb{N} \sim (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. כעת מטענה **[38]** נובע שלכל קבוצה X השקולה ל־ $\mathbb{N}$, מתקיים $\mathbb{N} \sim (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \sim (X \times X)$. למשל, $\mathbb{N} \sim (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ (תוצאה זו קיבלנו בדרך ישירה בטענה **[30]**), $\mathbb{N} \sim (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, $\mathbb{N} \sim (2\mathbb{N} \times \mathbb{Q})$, וכדומה.

מרחב הפונקצות מ־ X ל־ Y; סימון Y^X. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. נסמן ב־ Y^X את הקבוצת כל הפונקציות מ־ X ל־ Y, כלומר $Y^X = \{f: \ \ f : X \to Y\}$. קבוצה זו תיקרא גם **מרחב הפונקצות מ־ X ל־ Y.**

הסימון הזה נבחר מהסיבה הבאה: אם X ו־ Y הן קבוצות סופיות, כך שמספר האיברים ב־ X הוא m ומספר האיברים ב־ Y הוא n, אז יש בדיוק n^m פונקציות מ־ X ל־ Y. לדוגמא, עבור $X = \{1,2,3\}$ ל־ $Y = \{0,1\}$, מספר הפונקציות מ־ X ל־ Y הוא $2^3 = 8$:

$$Y^X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

ומספר הפונקציות מ־ Y ל־ X הוא $3^2 = 9$:

$$X^Y = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

[39] טענה. תהיינה X,Y,A,B ארבע קבוצות כך ש־ $X \sim A$, $Y \sim B$. אז $Y^X \sim B^A$.

הוכחה. מאחר ש־ $X \sim A$ ו־ $Y \sim B$, קיימות פונקציות $f : X \to A$ ו־ $g : Y \to B$ חד־חד־ערכיות ועל. נגדיר פונקציה $\varphi : Y^X \to B^A$ ע"י $\varphi(h) = g \circ h \circ f^{-1}$ (תחום ההגדרה של φ הוא Y^X, כלומר h היא פונקציה $X \to Y$).

φ היא באמת פונקציה מ־ Y^X ל־ B^A: מאחר ש־ $f^{-1} : A \to X$ ו־ $g : Y \to B$, עבור $h : X \to Y$ מקבלים $g \circ \ h \circ f^{-1} : A \to B$, כלומר $\varphi(h) \in B^A$.

φ היא פונקציה חד־חד־ערכית: נניח ש־ $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$. זה אומר: $g \circ h_1 \circ f^{-1} = g \circ h_2 \circ f^{-1}$. מאחר ש־ f (ולכן גם f^{-1}) ו־ g הן פונקציות הפיכות, מזה נובע $h_1 = h_2$.

φ היא פונקציה על: תהי $t \in B^A$. המקור שלה הוא $g^{-1} \circ t \circ f$: זו באמת פונקציה מ־ X ל־ Y, ומתקיים $\varphi(g^{-1} \circ t \circ f) = g \circ (g^{-1} \circ t \circ f) \circ f^{-1} = (g \circ g^{-1}) \circ t \circ (f \circ f^{-1}) = I_B \circ t \circ I_A = t$.

הוכחנו ש־ $\varphi : Y^X \to B^A$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן הקבוצות Y^X ו־ B^A שקולות זו לזו. □

את המצב המתואר בטענה זו ובהוכחתה ניתן לתאר ע"י הדיאגרמה הבאה:

$$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{\varphi(h)}{\longrightarrow} & B \\ f^{-1}\uparrow & \bigcirc & g\downarrow \\ X & \stackrel{h}{\longrightarrow} & Y \end{array}$$

המעגל באמצע הדיאגרמה מסמן את העובדה שיש כאן שתי דרכים להגיע מקבוצה X לקבוצה Y, כאשר התוצאות הסופיות הן זהות: אחת הדרכים היא h, והשניה $g \circ \varphi(h) \circ f^{-1}$. דיאגרמות כאלה נקראות "דיאגרמות קומוטטיביות".

ניתן לפרש את הטענות **[37]**, **[38]** ו־ **[39]** באופן הבא. אם נתונות שתי קבוצות X ו־ Y (בטענה **[37]** נדרש גם שהן תהיינה זרות), ומחליפים אותן בקבוצות שקולות (שוב, זרות בטענה **[37]**): X ב־ A, Y ב־ B, אז האיחוד, המכפלה הקרטזית ומרחב הפונקציות בין הקבוצות החדשות שקולים לאיחוד, המכפלה הקרטזית ומרחב הפונקציות (בהתאמה) בין הקבוצות המקוריות.

שקילות בין $P(X)$ לבין $\{0,1\}^X$. נשים לב שעבור $Y = \{0,1\}$ אברי Y^X הם הפונקציות האפייניות של כל התת־קבוצות של X (ראו הגדרה בעמוד 24). בטענה הבאה נוכיח שקילות של הקבוצות $P(X)$ ו־ $\{0,1\}^X$ בעזרת פונקציות אופייניות.

[40] טענה. לכל קבוצה X, מתקיים $P(X) \sim \{0,1\}^X$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $\chi : P(X) \to \{0,1\}^X$ באופן הבא: לכל $A \in P(X)$ נתאים את הפונקציה האפיינית שלה $\chi_A : X \to \{0,1\}$ המוגדרת לפי: לכל $x \in X$,

$$\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{array} \right\}.$$

במילים אחרות, χ_A היא הפונקציה ששולחת את כל אברי A ל־ 1, ואת כל אברי $X \setminus A$ ל־ 0. נסתכל בדוגמא: תהי $X = \{1,2,3,4,5\}$. אז, למשל,

$$\{1,2,4\} \stackrel{\chi}{\longmapsto} \chi_{\{1,2,4\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (1,1,0,1,0),$$

$$\{1,5\} \stackrel{\chi}{\longmapsto} \chi_{\{1,5\}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1,0,0,0,1),$$

$$\varnothing \stackrel{\chi}{\longmapsto} \chi_{\varnothing} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0,0,0,0,0).$$

(מאחר ש־ $X = \{1,2,3,4,5\}$, ניתן לכתוב את אברי $\{0,1\}^X$ כסדרות בינאריות.)

נוכיח ש־ χ היא חד־חד־ערכית. תהיינה $A, B \in P(X)$, $A \neq B$. זה אומר: קיים איבר של X ששייך לאחת מהן ולא שייך לשניה. נניח בלי הגבלת הכלליות שקיים a כך ש־ $a \in A$, $a \notin B$. אז χ_A ו־ χ_B יפעלו באופן שונה על a: $\chi_A(a) = 1$ ו־ $\chi_B(a) = 0$. לכן $\chi_A \neq \chi_B$.

נוכיח ש־ φ היא על. תהי $f \in \{0,1\}^X$, כלומר $f : X \to \{0,1\}$. נגדיר $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$. אז מתקיים $\chi_A = f$.

הוכחנו ש־ $\chi : P(X) \to \{0,1\}^X$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן הקבוצות $P(X)$ ו־ $\{0,1\}^X$ שקולות זו לזו. □

ההתאמה $A \mapsto \chi_A$ היא טבעית מאוד, ולכן ניתן לראות בקבוצה $\{0,1\}^X$ ייצוג של $P(X)$. במובן זה המושג של מרחב הפונקציות מכליל את המושג של קבוצת החזקה.

שימו לב שאם X היא קבוצה סופית כך ש־ $|X| = n$, אז מספר האיברים בכל אחת מהקבוצות $P(X)$ ו־ $\{0,1\}^X$ הוא 2^n.

שלוש הטענות הבאות: **[41]**, **[42]**, **[43]** הן טענות חשובות מאוד. הן יאפשרו לנו להכליל טענות קומבינטוריות אחדות מקבוצות סופיות לקבוצות כלשהן.

[41] טענה. תהיינה X,Y,Z שלוש קבוצות, כך ש־ $Y\cap Z=\varnothing$. אז $X^{Y\cup Z}\sim X^Y\times X^Z$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $\varphi:X^{Y\cup Z}\to X^Y\times X^Z$ ע"י $(f|_Y,f|_Z)\xmapsto{\varphi} f$. כלומר, עבור $f:(Y\cup Z)\to X$, $\varphi(f)$ הוא הזוג הסדור שרכיבו הראשון הוא הצמצום של f לתחום הגדרה Y, ורכיבו השני הוא הצמצום של f לתחום הגדרה Z. מאחר ש־ $f|_Y\in X^Y$ ו־ $f|_Z\in X^Z$, הזוג הסדור $\varphi(f)$ באמת שייך ל־ $X^Y\times X^Z$.

דוגמא: תהיינה $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5\}$, $Z=\{6,7,8\}$. דוגמאות של הפעולת φ:

$$\begin{bmatrix}4&5&6&7&8\\1&2&1&2&1\end{bmatrix}\xmapsto{\varphi}\left(\begin{bmatrix}4&5\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6&7&8\\1&2&1\end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix}4&5&6&7&8\\1&1&1&2&2\end{bmatrix}\xmapsto{\varphi}\left(\begin{bmatrix}4&5\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6&7&8\\1&2&2\end{bmatrix}\right).$$

φ היא פונקציה חד־חד־ערכית: תהיינה $f,g\in X^{Y\cup Z}$ כך ש־ $f\neq g$. מאחר ש־ $f\neq g$, קיים $u\in(Y\cup Z)$ כך ש־ $f(u)\neq g(u)$. u שייך ל־ Y או ל־ Z, נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $u\in Y$. אז u שייך לתחום ההגדרה של $f|_Y$ ושל $g|_Y$. מאחר שהפונקציות $f|_Y$ ו־ $g|_Y$ הן צמצומים של f ו־ g, כלומר $f|_Y(u)=f(u)$ ו־ $g|_Y(u)=g(u)$, מתקיים $f|_Y(u)\neq g|_Y(u)$ ולכן $f|_Y\neq g|_Y$. מכאן $(f|_Y,f|_Z)\neq(g|_Y,g|_Z)$ (זוגות אלה שונים ברכיב ראשון), כלומר $\varphi(f)\neq\varphi(g)$.

φ היא פונקציה על: יהי $(g,h)\in X^Y\times X^Z$. המקור שלו הוא הפונקציה $f:(Y\cup Z)\to X$ המוגדרת ע"י

$$f(u)=\left\{\begin{array}{ll}g(u), & u\in Y\\ h(u), & u\in Z\end{array}\right\}.$$

מאחר ש־ $Y\cap Z=\varnothing$, $f(u)$ מוגדר באופן יחיד, ולכן היא f באמת פונקציה מ־ $Y\cup Z$ ל־ X.

הוכחנו ש־ $\varphi:X^{Y\cup Z}\to X^Y\times X^Z$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן הקבוצות $X^{Y\cup Z}$ ו־ $X^Y\times X^Z$ שקולות זו לזו. □

[42] טענה. תהיינה X,Y,Z שלוש קבוצות. אז $(X\times Y)^Z\sim X^Z\times Y^Z$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $\varphi:(X\times Y)^Z\to X^Z\times Y^Z$ באופן הבא. תהי $f\in(X\times Y)^Z$, כלומר $f:Z\to(X\times Y)$. תהיינה $g:Z\to X$ ו־ $h:Z\to Y$ הפונקציות הבאות: עבור $z\in Z$, $g(z)=x$ ו־ $h(z)=y$ כאשר $f(z)=(x,y)$. נגדיר $\varphi(f)=(g,h)$.

במילים אחרות, φ מעבירה את $f:Z\to(X\times Y)$ לזוג סדור של פונקציות כאשר ברכיב הראשון $z\in Z$ עובר לרכיב הראשון של $f(z)$, וברכיב השני z עובר לרכיב השני של $f(z)$. ניקח לדוגמא $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5\}$, $Z=\{6,7,8,9\}$. אז, למשל,

$$\begin{bmatrix}6&7&8&9\\(1,4)&(2,4)&(3,5)&(2,4)\end{bmatrix}\xmapsto{\varphi}\left(\begin{bmatrix}6&7&8&9\\1&2&3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6&7&8&9\\4&4&5&4\end{bmatrix}\right),$$

$$\begin{bmatrix}6&7&8&9\\(3,5)&(3,4)&(1,4)&(2,5)\end{bmatrix}\xmapsto{\varphi}\left(\begin{bmatrix}6&7&8&9\\3&3&1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6&7&8&9\\5&4&4&5\end{bmatrix}\right).$$

φ היא פונקציה חד־חד־ערכית: תהיינה $f_1,f_2\in(X\times Y)^Z$ כך ש־ $f_1\neq f_2$. זה אומר שקיים $z\in Z$ כך ש־ $f_1(z)\neq f_2(z)$. לכן $g_1(z)\neq g_2(z)$ או $h_1(z)\neq h_2(z)$, כאשר $f_1(z)=(g_1(z),h_1(z))$, $f_2(z)=(g_2(z),h_2(z))$. מכאן (מאחר ש־ $\varphi(f_1)=(g_1,h_1)$, $\varphi(f_2)=(g_2,h_2)$) נובע $\varphi(f_1)\neq\varphi(f_2)$.

φ היא פונקציה על: יהי $(g,h)\in X^Z\times Y^Z$. המקור שלו הוא פונקציה $f:Z\to(X\times Y)$ המוגדרת ע"י $f(x)=(g(x),h(x))$.

הוכחנו ש־ $\varphi : (X\times Y)^Z \to X^Z \times Y^Z$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל, ולכן הקבוצות $(X\times Y)^Z$ ו־ $X^Z\times Y^Z$ שקולות זו לזו. $\square$

[43] טענה. תהיינה X, Y, Z שלוש קבוצות. אז $(X^Y)^Z \sim X^{Y\times Z}$.

הוכחה. נגדיר פונקציה $\varphi : (X^Y)^Z \to X^{Y\times Z}$ באופן הבא. תהי $f \in (X^Y)^Z$, כלומר $f : Z \to (X^Y)$. לכל $y\in Y, z \in Z$ מתקיים: $f(z) : Y \to X$ ו־ $(f(z))(y) \in X$. נגדיר את $\varphi(f)$ ע"י $(y,z) \overset{\varphi(f)}{\longmapsto} (f(z))(y)$ (שימו לב כי $\varphi(f)$ היא פונקציה מ־ $Y \times Z$ ל־ X, כלומר $\varphi(f) \in X^{Y\times Z}$).

דוגמא. ניקח $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{5,6\}$, $Z = \{7,8,9\}$. דוגמאות של הפעולה של φ:

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c} 7 \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} 8 \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \end{bmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{bmatrix} (5,7) & (5,8) & (5,9) & (6,7) & (6,8) & (6,9) \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c} 7 \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} 8 \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{bmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} \begin{bmatrix} (5,7) & (5,8) & (5,9) & (6,7) & (6,8) & (6,9) \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

φ היא פונקציה חד־חד־ערכית: תהיינה $f_1, f_2 \in (X^Y)^Z$ כך ש־ $f_2 \neq f_1$. כלומר, קיים $z \in Z$ כך ש־ $f_1(z) \neq f_2(z)$. זה אומר שקיים $y \in Y$ כך ש־ $(f_1(z))(y) \neq (f_2(z))(y)$. מכאן ש־ $(\varphi(f_1))(y,z) \neq (\varphi(f_2))(y,z)$, ולכן $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$.

φ היא פונקציה על: תהי $g \in X^{Y\times Z}$. אז הפונקציה $f : Z \to X^Y$ המוגדרת ע"י $(f(z))(y) = g((y,z))$ לכל $y\in Y, z\in Z$ היא המקור של g תחת φ.

הוכחנו שהפונקציה $\varphi : (X^Y)^Z \to X^{Y\times Z}$ היא חד־חד־ערכית ועל, ולכן הקבוצות פונקציה $(X^Y)^Z$ ו־ $X^{Y\times Z}$ שקולות זו לזו. $\square$

הרעיון מאחורי ההוכחה נובע מהעובדה הבאה: כדי להגדיר פונקציה g של שני משתנים (y,z), יש לקבוע, לכל ערך z_0 של המשתנה z, מהו $g(y, z_0)$ לכל הערכים של y. למשל, אם Y היא קבוצה של תלמידים, Z היא קבוצת המקצועות שהם לומדים, ו־ X היא קבוצת המספרים הטבעיים מ־ 0 עד 100, אז העובדה: "לכל תלמיד ולכל מקצוע: תלמיד זה קיבל ציון במקצוע זה" זהה לעובדה: "לכל מקצוע: כל תלמיד קיבל ציון במקצוע זה". הביטוי הראשון מתאר פונקציה מ־ $Y\times Z$ ל־ X (רשימת הציונים המלאה); הביטוי השני מתאר פונקציה מ־ Z ל־ X^Y (רשימת הציונים הממויינת לפי המקצועות).

הטענות הקומבינטוריות שהוזכרו לפני הטענות **[41], [42], [43]** הן **חוקי החזקות במספרים הטבעיים**. תהיינה X, Y, Z קבוצות **סופיות** כך ש־ $|X| = a$, $|Y| = b$, $|Z| = c$. אז $|Y \cup Z| = b + c$ (זאת בהנחה ש־ $Y\cap Z = \varnothing$), $|Y\times Z| = bc$, $|Y^Z| = b^c$, וכדומה. לכן עבור X, Y, Z אלה, מהטענות **[41]**, **[42]** ו־ **[43]** נובעים החוקים המוכרים של חזקות עבור מספרים טבעיים: $a^{b+c} = a^b\cdot a^c$, $(ab)^c = a^c\cdot b^c$, $(a^b)^c = a^{bc}$.

תרגילים.

1. הוכיחו כי $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$.
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}}$.
3. הוכיחו:

(א) תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות כך ש־ $X \sim \mathbb{N}$, $Y \sim \mathbb{N}$ ו־ $X \cap Y = \varnothing$. הוכיחו כי $(X \cup Y) \sim \mathbb{N}$.

(ב) תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות כך ש־ $X \sim \mathbb{N}$ ו־ $Y \sim \mathbb{N}$. הוכיחו כי $(X \times Y) \sim \mathbb{N}$.

4. הוכיחו כי אם $X \sim Y$, אז $P(X) \sim P(Y)$.

5. הראו כי טענה **[41]** לא תהיה נכונה אם לא נניח $Y \cap Z = \varnothing$. איזה שיקול בהוכחת הטענה לא יעבוד במקרה זה?

4.3 קרדינלים

המושג של קרדינל $|X|$. לכל קבוצה X נתאים את **הקרדינל** שלה, המסומן ב־ $|X|$, שיאפיין אותה מבחינת העצמה: $|X| = |Y|$ אם ורק אם $X \sim Y$. כלומר, אם שתי קבוצות שקולות עצמה, יהיה להן אותו קרדינל, ואם שתי קבוצות אינן שקולות עצמה, אז הקרדינלים שלהן יהיו שונים. לפי כך, הקרדינל של קבוצה ניתן לזיהוי עם מחלקת השקילות המכילה את הקבוצות השקולות לה. במקום המושג **קרדינל** משתמשים גם במילה **עצמה**.

הקרדינלים הסופיים. מאחר ששתי קבוצות סופיות הן שקולות אם ורק אם יש להן אותו מספר איברים, הקרדינל של קבוצה סופית מתאפיין על ידי מספר האיברים. עקב כך בתור הקרדינלים של קבוצות סופיות משתמשים במספרים טבעיים, כלומר עבור קבוצה סופית X, הקרדינל שלה $|X|$ הוא מספר האיברים בה. בפרט, זה מצדיק את השימוש באותו הסימן $|X|$ עבור מספר האיברים בקבוצה סופית ועבור הקרדינל.

לדוגמא, $|\varnothing| = 0$; $|\{0\}| = |\{1\}| = |\{123\}| = 1$; $|\{12, -\frac{1}{11}, \sqrt{2}, \pi\}| = 4$ $|\{0,1,2,3\}| = |\{1,2,3,4\}| = $.

נעבור לקרדינלים של קבוצות אינסופיות.

הקרדינל $\aleph_0$. הקרדינל של $\mathbb{N}$ יסומן ב־ $\aleph_0$ (קרי: **אלף־אפס**. כלומר, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

סימון זה הוכנס לשימוש ע"י המתמטיקאי הגרמני גאורג קנטור, Georg Cantor, 1845 – 1918, הנחשב לאבי תורת הקבוצות. נהוג לחשוב שסימן זה נבחר כאות הראשונה של המילה "אינסוף" בעברית. להלן קטע מהספר של קנטור שבו סימון זה הופיע לראשונה.

§ 6.

Die kleinste transfinite Cardinalzahl Alef-null.

Die Mengen mit endlicher Cardinalzahl heissen *‚endliche Mengen'*, alle anderen wollen wir *‚transfinite Mengen'* und die ihnen zukommenden Cardinalzahlen *‚transfinite Cardinalzahlen'* nennen.

Die Gesammtheit *aller endlichen Cardinalzahlen* ν bietet uns das nächstliegende Beispiel einer transfiniten Menge; wir nennen die ihr zukommende Cardinalzahl (§ 1) *‚Alef-null'*, in Zeichen $\aleph_0$, definiren also

(1) $$\aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}.$$

ראינו בטענות **[26 – 31]** שהקבוצות $\mathbb{N}_+$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ו־ $\mathbb{Q}$ שקולות ל־ $\mathbb{N}$. לכן הקרדינל (או העצמה) של כל הקבוצות האלה הוא $\aleph_0$:

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_+| = |2\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. בהמשך נראה קבוצות נוספות בעלות העצמה $\aleph_0$.

קבוצות בנות מניה. נאמר שקבוצה X היא **קבוצה בת מניה** (או **ניתנת למניה**) אם היא סופית או בעלת העצמה $\aleph_0$ (כלומר, אם $|X| = n \in \mathbb{N}$ או $|X| = \aleph_0$).

ניתן לפרש את המונח הזה באופן הבא. $|X| = n$ אם ורק אם X שקולה ל־ $\{1, 2, \dots, n\}$; $|X| = \aleph_0$ אם ורק אם X שקולה ל־ $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. במקרה הראשון קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $\{1, 2, \dots, n\}$ ל־ X, במקרה השני קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $\mathbb{N}_+$ ל־ X. כלומר, קיימת סדרה (סופית או אינסופית) שבה כל איבר של X מופיע פעם אחת בדיוק. במילים אחרות, ניתן לסדר את אברי הקבוצה כך שנוכל להגיע לכל איבר שלה ע"י מנית אבריה לפי סידור זה ("האיבר הראשון, האיבר השני, ..."). לדוגמא, בהוכחת השקילות $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ למעשה הפכנו את $2\mathbb{N}$ לסדרה $(0, 2, 4, 6, \dots)$ שבה כל איבר של $2\mathbb{N}$ מופיע פעם אחת בדיוק; בהוכחת השקילות $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ הפכנו את $\mathbb{Z}$ לסדרה $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$ שבה כל איבר של $\mathbb{Z}$ מופיע פעם אחת בדיוק, וכדומה.

הקרדינל א. הקרדינל של $\mathbb{R}$ מסומן ב־ $\aleph$ (או ב־ c); קרדינל זה נקרא **עצמת הרצף**[22]. בטענה **[34]** הוכחנו שכל קטע פתוח (a, b) שקול ל־ $\mathbb{R}$, לכן עצמת כל קטע פתוח היא גם כן א. בהמשך נראה ש־ $\aleph \neq \aleph_0$.

4.4 השוואת עצמות

יהיו α ו־ β שני קרדינלים ותהיינה X ו־ Y שתי קבוצות כך ש־ $|X| = \alpha$, $|Y| = \beta$. נאמר ש־ $\boldsymbol{\alpha}$ **קטן או שווה מ־** $\boldsymbol{\beta}$ (נסמן זאת ב־ $\boldsymbol{\alpha \leq \beta}$) אם X שקולה לתת־קבוצה של Y (כלומר, קיימת Z, תת־קבוצה של Y, כך ש־ $X \sim Z$). במקרה זה נאמר גם: **העצמה של $\boldsymbol{X}$ קטנה או שווה מהעצמה של $\boldsymbol{Y}$**, $\boldsymbol{|X| \leq |Y|}$.

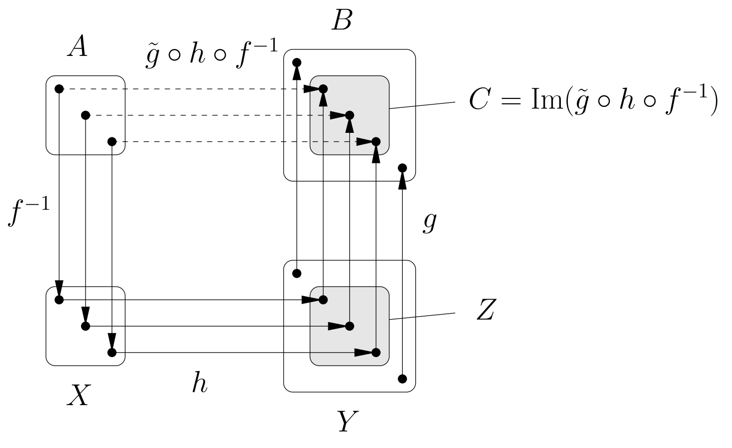
מאחר שהגדרנו $\alpha \leq \beta$ בעזרת קבוצות שעומדות מאחורי עצמות אלה, יש להוכיח שמושג זה **מוגדר היטב**, כלומר לא תלוי בבחירת הקבוצות. נעשה זאת בטענה הבאה.

[44] טענה.

תהיינה X, Y, A, B ארבע קבוצות כך ש־ $A \sim X$, $B \sim Y$. אם X שקולה לתת־קבוצה של Y, אז A שקולה לתת־קבוצה של B.

הוכחה. תהי Z תת־קבוצה של Y כך ש־ $X \sim Z$. תהיינה $f : X \to A$, $g : Y \to B$ ו־ $h : X \to Z$ פונקציות חד־חד־ערכיות ועל, ויהי $\tilde{g} : Z \to B$ הצמצום של g לתחום הגדרה Z. הפונקציות f^{-1}, h, $\tilde{g}$ הן חד־חד־ערכיות, לכן הרכבתן $\tilde{g} \circ h \circ f^{-1} : A \to B$ היא גם כן חד־חד־ערכית. נסמן $C = \operatorname{Im}(\tilde{g} \circ h \circ f^{-1})$. נצמצם את הטווח של $(\tilde{g} \circ h \circ f^{-1})$ ל־ C ונקבל פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ A ל־ C. לפי כך, C היא תת־קבוצה של B השקולה ל־ A. □

האיור הבא ממחיש את ההוכחה:



[22] מקור הסימון c במילה continuum, רצף.

למעשה, זו גם כן דיאגרמה קומוטטיבית:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tilde{g}\circ h\circ f^{-1}} & C \\ f^{-1}\downarrow & \bigcirc & \tilde{g}\uparrow \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

מסקנה. אם $|X|\leq|Y|$, $|A|=|X|$, $|B|=|Y|$, אז $|A|\leq|B|$.

מסקנה זו ממשיכה את הטענות **[37]**, **[38]** ו־ **[39]**: היא אומרת שאם נתונות שתי קבוצות כך שהעצמות שלהן עומדות ביחס $\leq$, ומחליפים את הקבוצות האלה בקבוצות השקולות להן בהתאמה, אז העצמות של הקבוצות החדשות גם כן עומדות ביחס $\leq$.

נציין שמ־ $|X|=|Y|$ נובע $|X|\leq|Y|$: אכן, אם X שקולה ל־ Y, אז ברור שקיימת תת־קבוצה של Y השקולה ל־ X (בתור תת־קבוצה כזאת של Y ניתן לבחור את Y כולה). לדוגמא, $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$, ולכן מתקיים $|\mathbb{Z}|\leq|\mathbb{N}|$ וגם $|\mathbb{N}|\leq|\mathbb{Z}|$.

לעומת זאת, ייתכן המצב שבו $|X|\leq|Y|$ אבל $|X|\neq|Y|$. במצב כזה נאמר: **העצמה של X קטנה ממש מהעצמה של Y**, ונסמן זאת ב־ $|X|<|Y|$. לדוגמא, $|\{1,2\}|\leq|\{3,4,5,6\}|$ כי ל־ $\{3,4,5,6\}$ יש תת־קבוצה השקולה ל־ $\{1,2\}$: למשל, $\{3,4\}$. אבל ברור ש־ $|\{1,2\}|\neq|\{3,4,5,6\}|$. לכן $|\{1,2\}|<|\{3,4,5,6\}|$. דוגמא נוספת: $|\mathbb{N}|\leq|\mathbb{R}|$ כי ל־ $\mathbb{R}$ יש תת־קבוצה השקולה ל־ $\mathbb{N}$ – למשל, $\mathbb{N}$ כולה; אבל, כפי שכבר ציינו (אבל עוד לא הוכחנו), $|\mathbb{R}|\neq|\mathbb{N}|$. לפי כך $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$.

טענות על השוואת קרדינלים. שתי הטענות הבאות מספקות דרך נוחה להוכחה של טענות מסוג $|X|\leq|Y|$:

[45] טענה. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות. אז:

1. $|X|\leq|Y|$ אם ורק אם קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $f:X\to Y$.
2. $|X|\leq|Y|$ אם ורק אם קיימת פונקציה על $g:Y\to X$.

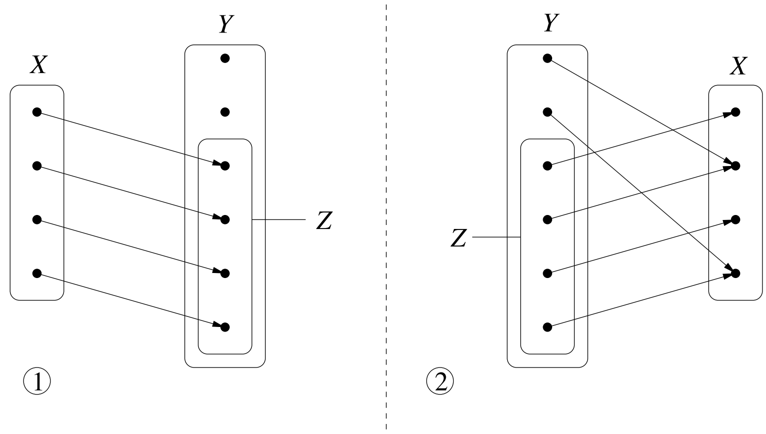
הוכחה של 1. נניח ש־ $|X|\leq|Y|$. זה אומר: קיימת $Z\subseteq Y$ כך ש־ $Z\sim X$. מכאן נובע כי קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ X ל־ Z. אם נרחיב את הטווח שלה ל־ Y, נקבל פונקציה חד־חד־ערכית (לא בהכרח על) מ־ X ל־ Y.

בכיוון השני, נניח ש־ $f:X\to Y$ היא פונקציה חד־חד־ערכית. נצמצם את הטווח של f ל־ $\mathrm{Im}(f)$, ונקבל פונקציה **חד־חד־ערכית ועל** מ־ X ל־ $\mathrm{Im}(f)$. בכך קיבלנו $X\sim\mathrm{Im}(f)$, כלומר מצאנו תת־קבוצה של Y, הלא היא $\mathrm{Im}(f)$, השקולה ל־ X.

הוכחה של 2. נניח ש־ $|X|\leq|Y|$. זה אומר: קיימת $Z\subseteq Y$ כך ש־ $X\sim Z$. לפי כך קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ Z ל־ X. נרחיב את הפונקציה הזאת לפונקציה עם תחום הגדרה Y, כאשר הערכים שלה עבור אברי $Y\setminus Z$ נקבעים בדרך שרירותית (למשל, ניתן לקבוע כי כל אברי $Y\setminus Z$ יעברו תחת פונקציה זו לאיבר קבוע x_0). בכך קיבלנו פונקציה על (לא בהכרח חד־חד־ערכית) מ־ Y ל־ X.

בכיוון השני, נניח ש־ $g:Y\to X$ היא פונקציה על. לכל $x\in X$ יש מקור אחד לפחות תחת הפונקציה g. נבחר לכל $x\in X$ מקור אחד, ונסמן את הקבוצה של המקורות שבחרנו ב־ Z. הצמצום של g לתחום ההגדרה Z הוא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ Z ל־ X: $g|_Z$ היא פונקציה על כי ב־ Z יש מקור לכל איבר של X, והיא חד־חד־ערכית כי ב־ Z יש מקור <u>יחיד</u> לכל איבר של X. לכן $X\sim Z$, ובכך מצאנו תת־קבוצה של Y, הלא היא Z, השקולה ל־ X. לכן $|X|\leq|Y|$. $\square$

האיור הבא מציג באופן סכימתי את ההוכחות של שני הסעיפים של טענות זו.



נוכיח מספר טענות נוספות על השוואת עצמות.

[46] טענה.

1. אם $X \subseteq Y$, אז $|X| \leq |Y|$.

הוכחה. X היא תת־קבוצה של Y, וכמובן $X \sim X$. כלומר, ל־ Y יש תת־קבוצה השקולה ל־ X. לכן $|X| \leq |Y|$.

(ניתן גם להסיק תוצאה זו מטענה **[45.1]**: נסתכל בפונקציה $i : X \to Y$ המוגדרת ע"י $i(x) = x$ לכל $x \in X$. ברור שזו פונקציה חד־חד־ערכית, ולכן $|X| \leq |Y|$.)

2. לכל קבוצה X, מתקיים $|X| \leq |X|$.
ניסוח שקול: לכל קרדינל α, מתקיים $\alpha \leq \alpha$.

הוכחה. טענה זו נובעת באופן מיידי מהסעיף הקודם.

3. אם $|X| \leq |Y|$ ו־ $|Y| \leq |Z|$, אז $|X| \leq |Z|$.
ניסוח שקול: עבור קרדינלים, אם $\alpha \leq \beta$ ו־ $\beta \leq \gamma$, אז $\alpha \leq \gamma$.

הוכחה. לפי טענה **[45.1]**, קיימות פונקציות חד־חד־ערכיות $f : X \to Y$ ו־ $g : Y \to Z$. לפי טענה **[19.1]**, הפונקציה $(g \circ f) : X \to Z$ היא פונקציה חד־חד־ערכית. לכן, לפי טענה **[45.1]**, $|X| \leq |Z|$. □

מאחר שהסימן $\leq$ מושאל מההשוואה של מספרים, השימוש בו יהיה מוצדק אם השוואת העצמות תקיים תכונות בסיסיות של השוואת מספרים. תכונות אלה הן:

- רפלקסיביות של היחס $\leq$: **לכל x מתקיים $x \leq x$**;
- טרנזיטיביות של היחס $\leq$: **אם $x \leq y$ ו־ $y \leq z$, אז $x \leq z$**;
- אנטיסימטריות של היחס $\leq$: **אם $x \leq y$ ו־ $y \leq x$, אז $x = y$**.

הטענות המקבילות עבור קרדינלים יהיו:

- **לכל קבוצה X מתקיים $|X| \leq |X|$**: הוכחנו את זה בטענה **[46.2]**;

- **אם $|Y| \le |X|$ ו־ $|Z| \le |Y|$, אז $|Z| \le |X|$**: הוכחנו את זה בטענה **[46.3]**;
- **אם $|Y| \le |X|$ ו־ $|X| \le |Y|$, אז $|Y| = |X|$**. כלומר: אם קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $f : X \to Y$ וקיימת פונקציה חד־חד־ערכית $g : Y \to X$, אז קיימת פונקציה **חד־חד־ערכית ועל** $h : X \to Y$. נוכיח את זה בהמשך. זו טענה עמוקה מאוד וההוכחה שלה תהיה קשה בהשוואה למה שלמדנו עד כה.

תכונה בולטת נוספת של השוואת מספרים היא העובדה שכל שני מספרים ניתנים להשוואה: לכל שני מספרים x ו־ y, מתקיים: $x \le y$ או $y \le x$. לכן נרצה לדעת האם לכל שתי קבוצות X ו־ Y מתקיים ש־ $|Y| \le |X|$ או $|X| \le |Y|$. זה אכן נכון, גם את העובדה הזאת נוכיח בהמשך.

תרגילים.

1. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות: $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$, $|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{N}|$, $|\mathbb{N}| > |\mathbb{Q}|$, $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{N}|$, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{Q}|$.
2. הוכיחו:
   (א) לאף קבוצה X לא מתקיים $|X| < |X|$.
   (ב) אם $|Y| < |X|$ ו־ $|Z| < |Y|$, אז $|Z| < |X|$.
   (ג) לא ייתכן שעבור שתי קבוצות X ו־ Y יתקיים: $|Y| < |X|$ וגם $|X| < |Y|$.
3. הוכיחו: אם $|Y| < |X|$ ו־ $|Z| \le |Y|$, אז $|Z| < |X|$.
4. האם המצבים הבאים ייתכנו? מה ניתן להסיק מהם על הקשר בין $|X|$, $|Y|$ ו־ $|Z|$?
   (א) $|Y| \le |X|$, $|Z| \le |Y|$, $|X| \le |Z|$.
   (ב) $|Y| < |X|$, $|Z| < |Y|$, $|X| < |Z|$.
   (ג) $|Y| \le |X|$, $|Z| \le |Y|$, $|X| < |Z|$.

4.5 שיטת האלכסון של קנטור

בפרק זה נכיר שיטה המאפשרת במקרים מסוימים להוכיח ששתי קבוצות **אינן** שקולות. שיטה זו פותחה ע"י קנטור, והיא נקראת "שיטת האלכסון". נפתח בשתי דוגמאות.

[47] טענה. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

הוכחה. עלינו להוכיח: $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ ו־ $|\mathbb{N}| \ne |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

כדי להוכיח $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, יש לבנות פונקציה $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ חד־חד־ערכית, וזה לא קשה. לדוגמא, ניתן לקחת פונקציה המוגדרת ע"י $g(x) = (x, x, x, \dots)$.

כדי להוכיח $|\mathbb{N}| \ne |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, יש להראות שלא קיימת פונקציה $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ חד־חד־ערכית ועל ועל. לצורך זה, מספיק להוכיח שלא קיימת פונקציה $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ שהיא על (אם לא קיימת פונקציה על, אז בוודאי לא קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל).

זה כבר יותר קשה: יש אינסוף פונקציות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; זה לא ברור מאליו שאף אחת מהן איננה על. השיקול הבא מוכיח את זה.

נניח, בדרך השלילה, ש־ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ היא פונקציה על. נגיע לסתירה בכך שנבנה איבר שאינו שייך לתמונה של f.

לכל $x \in \mathbb{N}$, $f(x)$ הוא איבר ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, כלומר סדרה של מספרים טבעיים. נסמן לכל $x \in \mathbb{N}$: $f(x) = (a_{x0}, a_{x1}, a_{x2}, a_{x3}, \dots)$. נרשום את זה בצורה של טבלה אינסופית:

$$\begin{aligned}
0 &\xmapsto{f} (\boldsymbol{a_{00}},\ a_{01},\ a_{02},\ a_{03},\ a_{04},\ \dots),\\
1 &\xmapsto{f} (a_{10},\ \boldsymbol{a_{11}},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ \dots),\\
2 &\xmapsto{f} (a_{20},\ a_{21},\ \boldsymbol{a_{22}},\ a_{23},\ a_{24},\ \dots),\\
3 &\xmapsto{f} (a_{30},\ a_{31},\ a_{32},\ \boldsymbol{a_{33}},\ a_{34},\ \dots),\\
4 &\xmapsto{f} (a_{40},\ a_{41},\ a_{42},\ a_{43},\ \boldsymbol{a_{44}},\ \dots),\\
&\dots
\end{aligned}$$

(שימו לב שהדגשנו את "האיברים האלכסוניים" בטבלה זו. כעת נשתמש בהם כדי להגיע לסתירה – מכאן השם של השיטה.)

נסתכל בסדרה ℓ המוגדרת ע"י $\ell(x) = a_{xx} + 1$ לכל $x \in \mathbb{N}$, כלומר

$$\ell = (\boldsymbol{a_{00}} + 1,\ \boldsymbol{a_{11}} + 1,\ \boldsymbol{a_{22}} + 1,\ \boldsymbol{a_{33}} + 1,\ \boldsymbol{a_{44}} + 1,\ \dots).$$

ברור ש־ $\ell \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. כלומר, הסדרה ℓ היא איבר בטווח של f. מאחר שהנחנו ש־ f היא פונקציה על (זאת הייתה הנחת השלילה שלנו), קיים $z \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\ell = f(z)$. אבל

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{הרכיב ה־ } 0 & \text{הרכיב ה־ } 1 & \text{הרכיב ה־ } 2 & & \text{הרכיב ה־ } z \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
f(z) & = & (\ a_{z0}, & a_{z1}, & a_{z2}, & \dots & \boldsymbol{a_{zz}}, & \dots) \\
\ell & = & (a_{00}+1, & a_{11}+1, & a_{22}+1, & \dots & \boldsymbol{a_{zz}+1}, & \dots),
\end{array}$$

כלומר, $f(z)$ ו־ ℓ שונים ברכיב ה־ z: $(f(z))(z) \neq \ell(z)$. מכאן $\ell \neq f(z)$, והגענו לסתירה.

את הסדרה ℓ שהובילה אותנו לסתירה בנינו כך שלכל x טבעי, הרכיב ה־ x של ℓ שונה מהרכיב ה־x של $f(x)$. כלומר, היה עלינו למצוא ℓ בטווח של f שתקיים: $\ell(x) \neq (f(x))(x)$ לכל x טבעי. הדרך שבה עשינו את זה, $\ell(x) = (f(x))(x) + 1$, היא כנראה האפשרות הפשוטה ביותר, אך נציין כי קיימות אפשרויות רבות אחרות. למשל, יכולנו להגדיר $\ell(x) = (f(x))(x) + 2$, או $\ell(x) = 3(f(x))(x) + 4$, וכד').

נחזור על ההוכחה ונרשום אותו בצורה יותר תמציתית:

נניח, בדרך השלילה, ש־ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ היא פונקציה על.
נגדיר $\ell \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ע"י: $\ell(x) = (f(x))(x) + 1$ לכל $x \in \mathbb{N}$.
מאחר ש־ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ היא (לפי ההנחה) פונקציה על, קיים $z \in \mathbb{N}$ כך ש־ $f(z) = \ell$. מכאן, בפרט, $(f(z))(z) = \ell(z)$. מצד שני, לפי הגדרת ℓ, מתקיים $\ell(z) = (f(z))(z) + 1$. זאת סתירה כי לא ייתכן $(f(z))(z) = (f(z))(z) + 1$.

סיכום: הוכחנו $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$ ו־ $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, ולכן $|\mathbb{N}| < |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. □

נביא דוגמאות נוספות לשימוש בשיטת האלכסון.

[48] טענה. $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

הוכחה. כדי להראות $|\mathbb{N}| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$, יש לבנות פונקציה חד־חד־ערכית $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. להלן דרך פשוטה לעשות זאת: לכל $x \in \mathbb{N}$, תהי $g(x)$ הפונקציה האופיינית של $\{x\}$: $g(0) = (1,0,0,\dots)$, $g(1) = (0,1,0,\dots)$, $g(2) = (0,0,1,\dots)$, וכו'.

כדי להראות $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \neq |\mathbb{N}|$, מספיק להוכיח שלא קיימת פונקציה על מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
נניח, בדרך השלילה, ש־ $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ היא פונקציה על.
נגדיר $\ell \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ע"י: $\ell(x) = 1 - (f(x))(x)$ לכל $x \in \mathbb{N}$.[23]

[23] ℓ זו "תעבוד" מהסיבה הבאה: לכל $a \in \{0,1\}$ מתקיים, מצד אחד, $1 - a \in \{0,1\}$; ומצד שני, $a \neq 1 - a$.

מאחר ש־ $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ היא (לפי ההנחה) פונקציה על, קיים $z \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\ell = f(z)$. מכאן, בפרט, $\ell(z) = (f(z))(z)$. מצד שני, לפי הגדרת ℓ, מתקיים $\ell(z) = 1 - (f(z))(z)$. זאת סתירה כי בקבוצה $\{0,1\}$ לא ייתכן $(f(z))(z) = 1 - (f(z))(z)$.

לסיכום: הוכחנו $|\mathbb{N}| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ ו־ $|\mathbb{N}| \neq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$, ולכן $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$. $\square$

נחזור ונסביר איך מצאנו את הנוסחה $\ell(x) = 1-(f(x))(x)$ המגדירה את ℓ. המטרה היא להגדיר $\ell \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ כך שלכל $x \in \mathbb{N}$ יתקיים $\ell(x) \neq (f(x))(x)$. מאחר שהטווח של הפונקציות ℓ ו־ $f(x)$ הוא הקבוצה $\{0,1\}$, עלינו לדרוש: אם $(f(x))(x) = 0$ אז $\ell(x) = 1$, ואם $(f(x))(x) = 1$ אז $\ell(x) = 0$. ההגדרה $\ell(x) = 1 - (f(x))(x)$ מיישמת דרישה זו.

הערה. אם בטענה **[48]** ובהוכחתה נחליף את $\mathbb{N}$ בקבוצה כלשהי X, נקבל את הטענה $|X| < |\{0,1\}^X|$, הידועה בשם **משפט קנטור.** סעיף 4.6 יוקדש לדיון מורחב במשפט זה.

נוכיח בשיטת אלכסון תוצאה מסוג קצת שונה:

[49] טענה. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. או, באופן שקול: $\aleph_0 < \aleph$.

הוכחה. ראשית, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ כי $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

נוכיח $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$. לפי טענות **[26]**, **[34]** ו־ **[25.3]**, מספיק להוכיח: $(0,1) \not\sim \mathbb{N}_+$. נוכיח שלא קיימת פונקציה על מ־ $\mathbb{N}_+$ ל־ $(0,1)$.

נניח בדרך השלילה ש־ $f : \mathbb{N}_+ \to (0,1)$ היא פונקציה על.

כעת נבנה מספר $a \in (0,1)$ באופן הבא. הספרה לפני הנקודה העשרונית תהיה 0: זה יבטיח ש־ $a \in (0,1)$. הספרות אחרי הנקודה העשרונית ייקבעו כך: לכל $n \in \mathbb{N}_+$ נסתכל בפיתוח העשרוני של $f(n)$, כאשר למספרים הממשיים בעלי שני פיתוחים עשרוניים, כדוגמת $1.25 = 1.249999\ldots$, נבחר בפיתוח העשרוני עם אינסוף 9־יות. כעת, אם הספרה ה־n־ית אחרי הנקודה של $f(n)$ היא 5, אז הספרה ה־n־ית אחרי הנקודה של a תהיה 4. אם הספרה ה־n־ית אחרי הנקודה של $f(n)$ איננה 5, אז הספרה ה־n־ית אחרי הנקודה של a תהיה 5. במילים אחרות, הספרה ה־n־ית אחרי הנקודה של a תהיה שונה מהספרה n־ית אחרי הנקודה של $f(n)$, כאשר משתמשים רק בספרות 4 ו־ 5[24].

<u>לדוגמא</u>, אם

$$f(1) = 0.\mathbf{1}23456\ldots$$
$$f(2) = 0.4\mathbf{5}6789\ldots$$
$$f(3) = 0.12\mathbf{3}123\ldots$$
$$f(4) = 0.222\mathbf{3}33\ldots$$
$$f(5) = 0.0102\mathbf{0}3\ldots$$
$$f(6) = 0.23344\mathbf{5}\ldots$$
$$\ldots$$

אז נקבל $a = 0.545554\ldots$.

מאחר שפונקציה f היא על (לפי ההנחה), קיים $m \in \mathbb{N}_+$ כך ש־ $a = f(m)$. זה אומר ש־ a ו־ $f(m)$ שווים בכל הספרות אחרי הנקודה העשרונית (זה לא יכול להיות מספר עם שני פיתוחים כי a לא מכיל ספרות 0 ו־ 9). בפרט, הספרה ה־m־ית של a שווה לספרה ה־m־ית של $f(m)$. בכך הגענו לסתירה: לפי הבניה של a, הספרה ה־m־ית שלו **שונה** מהספרה ה־m־ית של $f(m)$.

[24] כמובן, אין חשיבות מיוחדת דווקא לספרות 4 ו־ 5. השימוש רק בשתי ספרות השונות מ־ 0 ו־ 9 בבניה של a מאפשר להימנע מדיון במספרים בעלי שני פיתוחים עשרוניים.

לכן m כזה לא קיים, ולכן a לא בתמונה של f, בסתירה להנחה ש־ f היא פונקציה על. $\square$

שאלה להמשך. הוכחנו כי $\aleph_0 < \aleph$, וטבעי לשאול: האם יש קרדינל ביניהם? כלומר, האם קיימת קבוצה X (למשל, תת־קבוצה של $\mathbb{R}$) כך ש־ $\aleph_0 < |X| < \aleph$? לעת עתה, נשאיר את השאלה הזאת להיות פתוחה, ונדון בה בהמשך.

תרגילים.

1. נחזור להוכחה של טענה **[47]**. הסבירו מדוע לא ניתן להגדיר בה $\ell(x) = 2(f(x))(x)$.
האם ניתן להגדיר $\ell(x) = 2(f(x))(x) + 1$? $\ell(x) = 2(f(x))(x) - 1$?
2. נחזור להוכחה של טענה **[48]**. הסבירו מדוע לא ניתן היה להגדיר $\ell(x) = (f(x))(x) + 1$.
3. הוכיחו בשיטת האלכסון ש־ $(0,1)^{\mathbb{Z}} \not\sim \mathbb{Z}$ (כאן $(0,1)$ הוא קטע פתוח). שימו לב שלא ניתן להגדיר $\ell(x) = 1 - (f(x))(x)$ (מדוע?).
4. הוכיחו כי הקבוצות הבאות אינן שקולות ל־ $\mathbb{N}$:
   (א) $\{x \in (0,1) :$ בפיתוח העשרוני של x מופיעות רק הספרות 2, 3 ו־ $4\}$
   (לדוגמא, $0.234342\ldots$ שייך לקבוצה זו).
   (ב) $\{x \in (0,1) :$ בפיתוח העשרוני של x בכל מקום זוגי מופיעה הספרה $7\}$
   (לדוגמא, $0.270797\ldots$ שייך לקבוצה זו).
   (ג) $\{x \in (0,1) :$ בפיתוח העשרוני של x במקומות הזוגיים מופיעות ספרות זוגיות, ובמקומות האי־זוגיים ספרות אי־זוגיות$\}$
   (לדוגמא, $0.301852\ldots$ שייך לקבוצה זו).

4.6 משפט קנטור

בסעיף זה נוכיח את אחד המשפטים החשובים על עצמות:

[50] משפט קנטור. לכל קבוצה X מתקיים $|X| < |\{0,1\}^X|$. או, באופן שקול: לכל קבוצה X מתקיים $|X| < |P(X)|$.

שני הניסוחים שקולים זה לזה מפני שאנו רואים ב־ $\{0,1\}^X$ ייצוג של $P(X)$ (ראו טענה **[40]** והערה אחרי הוכחתה), ובפרט $P(X) \sim \{0,1\}^X$. נוכיח את שתי הגרסאות, ונמליץ לקוראים לוודא ששתי ההוכחות זהות באופן עקרוני, ורק מנוסחות במונחים שונים.

הוכחה ראשונה. כדי להוכיח כי $|X| < |\{0,1\}^X|$, ניתן לחזור על ההוכחה של טענה **[48]**, כשמחליפים בה $\mathbb{N}$ ב־ X, בלי שום שינוי נוסף:

נוכיח ש־ $|X| \neq |\{0,1\}^X|$. מספיק להוכיח שלא קיימת פונקציה $f : X \to \{0,1\}^X$ שהיא על.
נניח, בדרך השלילה, שקיימת פונקציה על $f : X \to \{0,1\}^X$.
נגדיר $\ell \in \{0,1\}^X$ ע"י: $\ell(x) = 1 - (f(x))(x)$ לכל $x \in X$.
מאחר ש־ $f : X \to \{0,1\}^X$ היא (לפי ההנחה) פונקציה על, קיים $z \in X$ כך ש־ $\ell = f(z)$. מכאן, בפרט, $\ell(z) = (f(z))(z)$.
מצד שני, לפי הגדרת ℓ, מתקיים $\ell(z) = 1 - (f(z))(z)$.
קיבלנו $\ell(z) = (f(z))(z)$ ו־ $\ell(z) = 1 - (f(z))(z)$, לכן $(f(z))(z) = 1 - (f(z))(z)$. אבל $(f(z))(z) \in \{0,1\}$ ולכן הגענו לסתירה: בקבוצה $\{0,1\}$ אין איבר α המקיים $\alpha = 1 - \alpha$.
מכאן $|X| \neq |\{0,1\}^X|$.

הפונקציה $g : X \to \{0,1\}^X$ המוגדרת ע"י $x \overset{g}{\longmapsto} \chi_{\{x\}}$ היא פונקציה חד־חד־ערכית. מכאן $|X| \leq |\{0,1\}^X|$.

לסיכום, $|X| < |\{0,1\}^X|$. $\square$

הערה. באופן דומה ניתן להראות שלכל קבוצה X ולכל קבוצה Y כך ש־ $|Y| \geq 2$, מתקיים $|X| < |Y^X|$: ננסה להגדיר פונקציה $f : X \to Y^X$ שתהיה על. מאחר ש־ $|Y| \geq 2$, לכל $x \in X$ יהיה בקבוצה Y איבר אחד לפחות השונה מ־ $(f(x))(x)$, וזה יאפשר להגדיר ℓ כך שלכל $x \in X$ יתקיים $\ell(x) \neq (f(x))(x)$; זה אומר ש־ ℓ איננה בתמונה של f, בסתירה להנחה ש־ f היא על.

הוכחה שניה. כעת נוכיח את הניסוח $|X| < |P(X)|$.

נוכיח $|X| \neq |P(X)|$. מספיק להוכיח שלא קיימת פונקציה $f : X \to P(X)$ שהיא על.
נניח, בדרך השלילה, כי $f : X \to P(X)$ היא פונקציה על.
נסתכל ב־ $x \in X$ כלשהו. מאחר שהטווח של f הוא $P(X)$, $f(x)$ היא תת־קבוצה מסוימת של X. לכן לכל $x \in X$ מתקיימת אחת משתי האפשרויות: $x \in f(x)$ או $x \notin f(x)$. נסמן ב־ S את קבוצת אברי X שעבורם מתקיימת האפשרות השניה: $S = \{x \in X : \ x \notin f(x)\}$.
S היא תת־קבוצה של X, כלומר $S \in P(X)$. במילים אחרות, S שייכת לטווח של f. מאחר שהנחנו ש־ f היא פונקציה על, ל־ S יש מקור ביחס ל־ f: קיים $z \in X$ כך ש־ $S = f(z)$. נשאל עבור z: האם הוא שייך ל־ S?
נניח ש־ $z \in S$. לפי ההגדרה של S, זה אומר: $z \notin f(z)$. נציב $f(z) = S$ (כך הגדרנו את z) ונקבל: $z \notin S$.
כעת נניח ש־ $z \notin S$. לפי ההגדרה של S, זה אומר: $z \in f(z)$. נציב $f(z) = S$ ונקבל: $z \in S$.
לפי כך קיבלנו: מ־ $z \in S$ נובע $z \notin S$, ומ־ $z \notin S$ נובע $z \in S$. זאת כמובן סתירה, ולכן לא קיימת פונקציה f כזאת.
מכאן $|X| \neq |P(X)|$.

הפונקציה $g : X \to P(X)$ המוגדרת ע"י $g(x) = \{x\}$ היא חד־חד־ערכית. מכאן $|X| \leq |P(X)|$.

לסיכום, $|X| < |P(X)|$. □

החשיבות של משפט קנטור הוא, בפרט, בכך שממנו נובע שלכל קבוצה X קיימת קבוצה בעלת עוצמה הגדולה ממש מהעצמה של X. במילים אחרות, לכל קרדינל α קיים קרדינל β כך ש־ $\alpha < \beta$. מכאן גם נובע שקיימת סדרה עולה ממש של קרדינלים: $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$, כאשר $\alpha_k = |X_k|$, $X_0 = \mathbb{N}$, $X_{k+1} = P(X_k)$.

תרגילים.

1. תנו דוגמא של ארבע קבוצות, X, Y, Z, T, כך ש־ $\aleph = |X| < |Y| < |Z| < |T|$. (רמז: קחו, למשל, $X = \mathbb{R}$ והשתמשו במשפט קנטור מספר פעמים.)

2. הוכיחו בשיטת האלכסון שלכל קבוצה X מתקיים: (א) $|X| < |\{0,1,2\}^X|$; (ב) $|X| < |\mathbb{N}^X|$.

4.7 משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין

כפי שציינו בפרק 4.4, כדי להצדיק את השימוש בסימן $\leq$ עבור עצמות, יש להוכיח, בפרט, את התכונה: **אם $|X| \leq |Y|$ ו־ $|Y| \leq |X|$, אז $|X| = |Y|$**. טענה זו היא ידועה בשם **משפט $\mathbf{Cantor - Schröder - Bernstein}$** (CSB); נוכיח אותה בפרק זה.

טענה זו לא ברורה מאליה כי $\leq$ כאן אינו סימן ההשוואה של מספרים אלא סימון לעובדה מסוימת על קבוצות (ראו הגדרה בתחילת פרק 4.4). הפירוש של הטענה הוא: אם ל־ Y יש תת־קבוצה השקולה ל־ X, ול־ X יש תת־קבוצה השקולה ל־ Y, אז X ו־ Y שקולות. או (תוך שימוש בטענה **[45]**): אם קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $f : X \to Y$, וקיימת פונקציה חד־חד־ערכית $g : Y \to X$, אז קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל $h : X \to Y$. העובדה שאין שום קשר בין הפונקציות f ו־ g מצביעה על כך שמשפט זה אינו קל להוכחה.

השם המשולש למשפט זה נובע מהסיפור מאחורי הוכחתו. קנטור הבין את החשיבות של הטענה, שיער אותה, ונתן הוכחה

שהייתה נכונה, אבל לא מוצלחת במובן מסוים: הוא השתמש בהוכחתו בכלים הרבה יותר כבדים ממה שצריך. שרדר[25] נתן הוכחה יותר פשוטה, אבל הייתה בה טעות; ברנשטיין[26] מצא הוכחה פשוטה נכונה.

נביא שתי הוכחות למשפט זה (הראשונה זהה באפן עקרוני להוכחה של ברנשטיין).

[51] משפט Cantor – Schröder – Bernstein:

אם $|X| \le |Y|$ ו־ $|Y| \le |X|$, אז $|X| = |Y|$.

או, באופן שקול: עבור קרדינלים, אם $\alpha \le \beta$ ו־ $\beta \le \alpha$, אז $\alpha = \beta$.

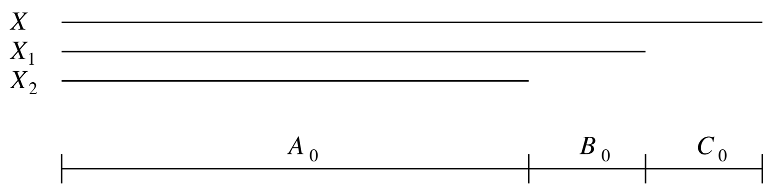
הוכחה ראשונה למשפט Cantor – Schröder – Bernstein.

תחילה נוכיח את ה**למה** הבאה:

אם $X_2 \subseteq X_1 \subseteq X$ ו־ $X_2 \sim X$, אז $X_1 \sim X$.[27]

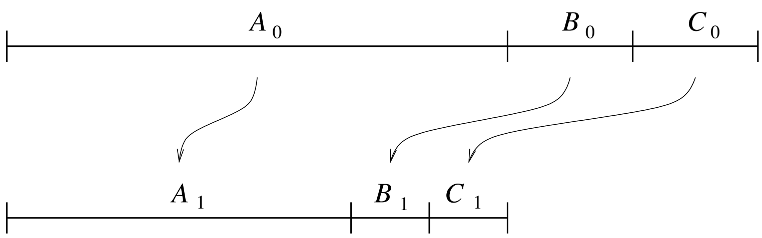
הוכחת הלמה:

ניתן להניח כי $X \neq \varnothing$ כי אחרת הטענה ברורה. ניתן להניח ש־ $X_2 \subsetneq X_1 \subsetneq X$ כי אחרת מקבלים $X_1 \sim X$ באופן מיידי. נסמן: $A_0 = X_2$, $B_0 = X_1 \setminus X_2$, $C_0 = X \setminus X_1$ (נשים לב כי הקבוצות A_0, B_0, C_0 אינן ריקות). אז $X_2 = A_0$, $X_1 = A_0 \sqcup B_0$, $X = A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0$.[28] לפי כך, נתון $A_0 \sim (A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0)$, ועלינו להוכיח $(A_0 \sqcup B_0) \sim (A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0)$.



מאחר ש־ $A_0 \sim (A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0)$, קיימת פונקציה φ חד־חד־ערכית ועל מ־ $A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0$ ל־ A_0. נסמן ב־ A_1, B_1, C_1 את התמונות של A_0, B_0, C_0 (בהתאמה) תחת פונקציה זו (כלומר: $A_1 = \varphi_*(A_0), B_1 = \varphi_*(B_0), C_1 = \varphi_*(C_0)$). לפי כך:

- $A_0 = A_1 \sqcup B_1 \sqcup C_1$;
- $A_0 \sim A_1,\ B_0 \sim B_1,\ C_0 \sim C_1$.



נסמן כעת $A_2 = \varphi_*(A_1), B_2 = \varphi_*(B_1), C_2 = \varphi_*(C_1)$. מקבלים:

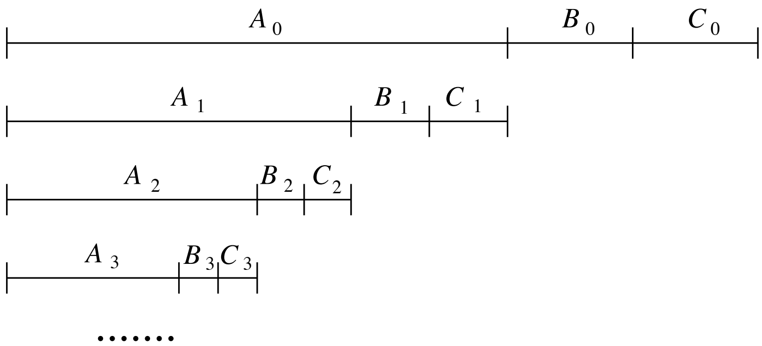
[25] מתמטיקאי גרמני Ernst Schröder, $1841 - 1902$.
[26] מתמטיקאי גרמני Felix Bernstein, $1878 - 1956$.
[27] שימו לב שלמה זו מאוד הגיונית מבחינה אינטואיטיבית: אם קבוצה X_1 נמצאת (במובן ההכלה) בין שתי קבוצות X_0, X_2 בעלות אותה עצמה α, אז גם X_1 היא בעלת העצמה α.
[28] נזכיר כי ב־ $\sqcup$ אנו מסמנים איחוד זר.

- $A_1 = A_2 \sqcup B_2 \sqcup C_2$;
- $A_1 \sim A_2,\ B_1 \sim B_2,\ C_1 \sim C_2$.

בשלב הבא נסמן $A_3 = \varphi_*(A_2), B_3 = \varphi_*(B_2), C_3 = \varphi_*(C_2)$ ונקבל

- $A_2 = A_3 \sqcup B_3 \sqcup C_3$;
- $A_2 \sim A_3,\ B_2 \sim B_3,\ C_2 \sim C_3$,

וכן הלאה: לכל k טבעי, בהינתן A_k, B_k, C_k, אנו מגדירים $A_{k+1} = \varphi_*(A_k), B_{k+1} = \varphi_*(B_k), C_{k+1} = \varphi_*(C_k)$. כלומר, קיבלנו שלוש משפחות של קבוצות: $(A_n)_{n\geq 0}, (B_n)_{n\geq 0}, (C_n)_{n\geq 0}$.



נסמן $D = \bigcap_{n\geq 0} A_n$ (ייתכן ש־ D היא קבוצה ריקה). מתקיים

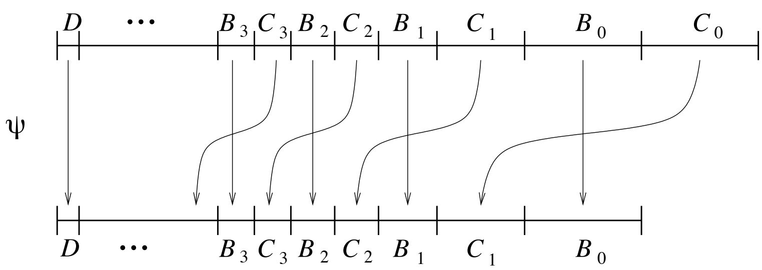
$$A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0 = D \sqcup B_0 \sqcup C_0 \sqcup B_1 \sqcup C_1 \sqcup B_2 \sqcup C_2 \sqcup B_3 \sqcup C_3 \sqcup \cdots = D \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} C_n\right).$$

מאחר שזה איחוד זר, ניתן "לצמצם" את C_0:

$$A_0 \sqcup B_0 = D \sqcup B_0 \sqcup C_1 \sqcup B_1 \sqcup C_2 \sqcup B_2 \sqcup C_3 \sqcup B_3 \sqcup C_4 \sqcup \cdots = D \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} C_n\right).$$

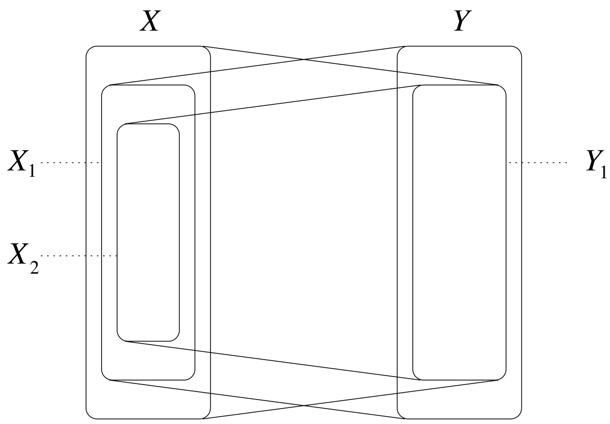
נגדיר פונקציה $\psi : (A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0) \to (A_0 \sqcup B_0)$ באופן הבא:

$$\psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \in D \cup \left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) \\ \varphi(x), & x \in \bigcup_{n\geq 0} C_n \end{array} \right\}$$



מאחר ש־ $\ldots \sim C_3 \sim C_2 \sim C_1 \sim C_0$, הפונקציה ψ היא חד־חד־ערכית ועל. ולכן $(A_0 \sqcup B_0) \sim (A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0)$, ובכך הוכחנו את הלמה.

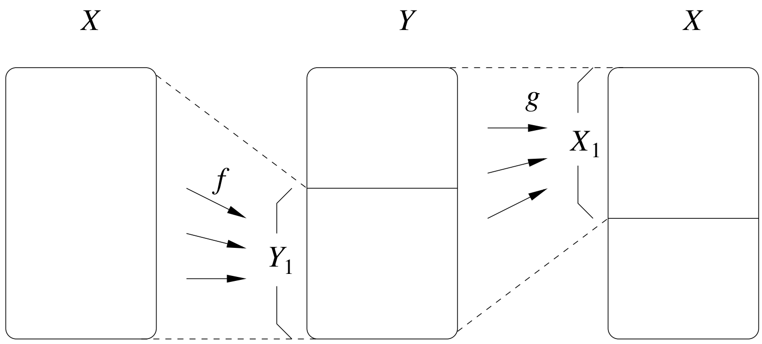
נחזור להוכחת המשפט. נתון $|Y| \leq |X|$ ו־ $|X| \leq |Y|$. זה אומר: קיימת תת־קבוצה X_1 של X כך ש־ $|Y| = |X_1|$, וקיימת תת־קבוצה Y_1 של Y כך ש־ $|X| = |Y_1|$. בפרט, קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל g מ־ Y ל־ X_1. נסמן $X_2 = g_*(Y_1)$. מתקיים $X \supseteq X_1 \supseteq X_2$, ו־ $|X| = |Y_1| = |X_2|$.



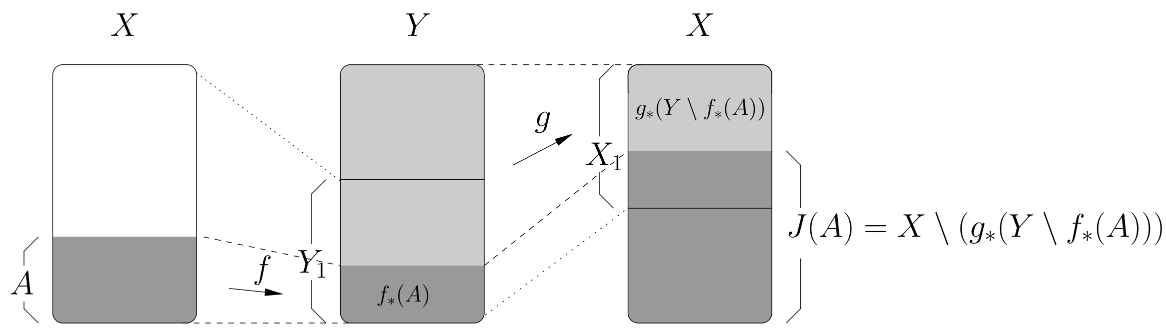
כעת, לפי הלמה, $|X| = |X_1|$. מאחר ש־ $|Y| = |X_1|$, מקבלים $|X| = |Y|$. □

הוכחה שנייה למשפט Cantor – Schröder – Bernstein.

לפי הנתון, קיימת תת־קבוצה Y_1 של Y כך ש־ $X \sim Y_1$, וקיימת תת־קבוצה X_1 של X כך ש־ $Y \sim X_1$. תהיינה $f : X \to Y_1$ ו־ $g : Y \to X_1$ פונקציות חד־חד־ערכיות ועל.



לכל $A \subset X$, נסמן: $J(A) = X \setminus (g_*(Y \setminus f_*(A)))$. (ההעתקה $A \mapsto J(A)$ היא פונקציה $P(X) \to P(X)$.)



למה: אם $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, אז $J(A_1) \subseteq J(A_2)$.

הוכחת הלמה:

$$A_1 \subseteq A_2 \;\Rightarrow\; f_*(A_1) \subseteq f_*(A_2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y \setminus f_*(A_1) \supseteq Y \setminus f_*(A_2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g_*(Y \setminus f_*(A_1)) \supseteq g_*(Y \setminus f_*(A_2)) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; X \setminus (g_*(Y \setminus f_*(A_1))) \subseteq X \setminus (g_*(Y \setminus f_*(A_2))) \;\Rightarrow\; J(A_1) \subseteq J(A_2)$$

המשך ההוכחה של המשפט. נאמר ש־ A (תת־קבוצה של X) היא **מיוחדת** אם $A \subseteq J(A)$.
נראה שב־ X בהכרח קיימת תת־קבוצה מיוחדת (אחת לפחות). נשים לב שלכל $A \subseteq X$ מתקיים $X \setminus X_1 \subseteq J(A)$. בפרט זה נכון עבור $A = X \setminus X_1$, כלומר מתקיים $(X \setminus X_1) \subseteq J(X \setminus X_1)$. לכן $X \setminus X_1$ היא תת־קבוצה מיוחדת של X.

כעת נמצא A (תת־קבוצה של X) שמקיימת $J(A) = A$.

נסמן ב־ Z את האיחוד של כל התת־קבוצות המיוחדות של X.

לכל תת־קבוצה מיוחדת B מתקיים $B \subseteq Z$, ומכאן $J(B) \subseteq J(Z)$ (לפי הלמה).

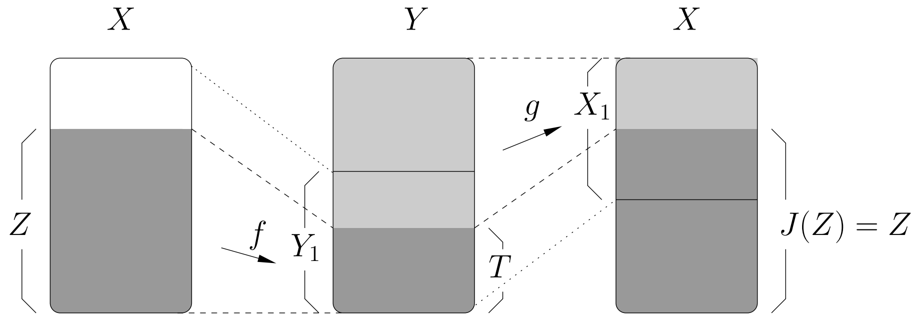
מצד שני, $B \subseteq J(B)$ כי B היא תת־קבוצה מיוחדת.

נסכם: קיבלנו שלכל תת־קבוצה מיוחדת B מתקיים

$$B \subseteq J(B) \subseteq J(Z).$$

מאחר ש־ $B \subseteq J(Z)$ מתקיים **לכל** תת־קבוצה מיוחדת B, הרי שהאיחוד של כל התת־קבוצות המיוחדות גם כן מוכל ב־ $J(Z)$, כלומר מתקיים $Z \subseteq J(Z)$. מכאן, לפי הלמה, $J(Z) \subseteq J(J(Z))$. זה אומר שגם $J(Z)$ היא תת־קבוצה מיוחדת. לכן לפי הגדרת Z (האיחוד של כל התת־קבוצות המיוחדות) מתקיים $J(Z) \subseteq Z$. ומכאן $J(Z) = Z$.

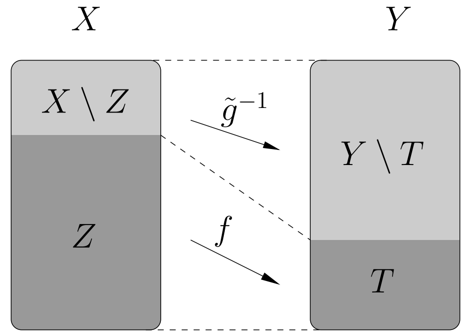
נסמן $T = f_*(Z)$.



הצמצום $\tilde{f}$ של הפונקציה f לתחום הגדרה Z הוא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ Z ל־ T, והצמצום $\tilde{g}$ של הפונקציה g לתחום הגדרה $Y \setminus T$ הוא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $Y \setminus T$ ל־ $X \setminus Z$. לכן הפונקציה $h : X \to Y$ המוגדרת ע"י

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & x \in Z \\ \tilde{g}^{-1}(x), & x \in X \setminus Z \end{array} \right\}$$

היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ X ל־ Y, ומכאן $X \sim Y$. $\square$



שימושים של משפט Cantor – Schröder – Bernstein. משפט CSB הוא משפט שימושי מאוד. הוא מאפשר לקבוע שקילות בין שתי קבוצות X ו־ Y כאשר קשה למצוא פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין X ל־ Y, אבל קל למצוא שתי פונקציות חד־חד־ערכיות, אחת מ־ X ל־ Y, שניה מ־ Y ל־ X. נדגים זאת ע"י שתי דוגמאות.

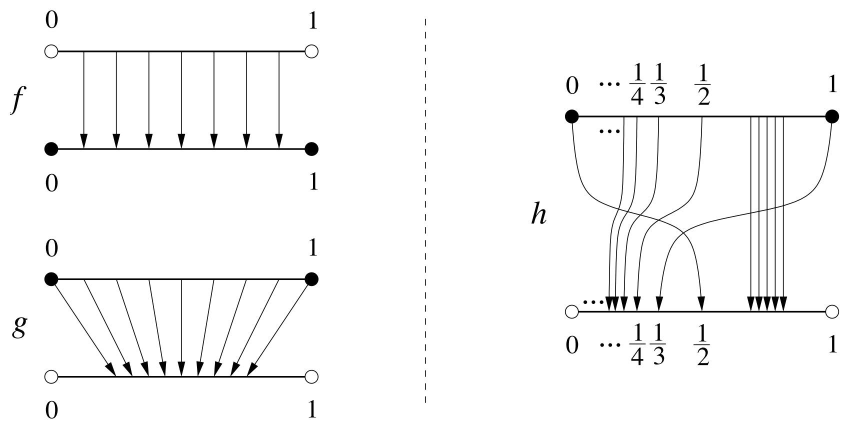
[52] טענה. $[0,1] \sim (0,1)$.

הוכחה: נסתכל בפונקציות הבאות: $f : (0,1) \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $f(x) = x$, ו־ $g : [0,1] \to (0,1)$ המוגדרת ע"י $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. קל לבדוק שפונקציות אלה הן חד־חד־ערכיות. קיבלנו ש־ $|(0,1)| \leq |[0,1]|$ כי f חד־חד־ערכית[29], ו־ $|[0,1]| \leq |(0,1)|$ כי g חד־חד־ערכית. לכן, לפי משפט CSB, הקבוצות שקולות: $|[0,1]| = |(0,1)|$. $\square$

לצורך השוואה, נראה איך ניתן להוכיח שקילות של קבוצות אלה בעזרת פונקציה חד־חד־ערכית ועל. נגדיר $f : [0,1] \to (0,1)$ באופן הבא: $f(0) = \frac{1}{2}$; לכל $n \in \mathbb{N}_+$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}$ (כלומר, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{5}$ וכו'); ועבור שאר אברי $(0,1)$ נגדיר $f(x) = x$. זו פונקציה חד־חד־ערכית ועל. לכן $[0,1] \sim (0,1)$.

[29] במקום להגדיר פונקציה f, יכולנו גם להגיד: $(0,1) \subseteq [0,1]$, ולכן $|(0,1)| \leq |[0,1]|$.

כשאנחנו מחפשים פונקציה ממשית כדוגמא לתופעה כלשהי, אנחנו קודם כל חושבים על פונקציות רציפות. הקושי במציאת דוגמא כאן נובע מהעובדה שלא קיימת פונקציה רציפה חד־חד־ערכית ועל בין קטע פתוח וקטע סגור (זה נובע ממשפטי ויירשטרס). לעומת זאת, קל מאוד למצוא שתי פונקציות חד־חד־ערכיות, אחת בכל כיוון, ולהשתמש במשפט **CSB**. האיור הבא מציג את שתי ההוכחות: בצד השמאלי את ההוכחה בעזרת משפט **CSB**, ובצד הימני את ההוכחה לפי ההגדרת של שקילות עצמות.



ניזכר שכל קטע פתוח (a,b) שקול ל־ $\mathbb{R}$ (ראו טענות **[32]** ו־ **[34]**). כעת ניתן להסיק מטענה **[52]** שגם כל קטע סגור $[a,b]$ שקול ל־ $\mathbb{R}$. נוכיח תוצאה יותר כללית:

[53] טענה. תהי S תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ המכילה קטע כלשהו. אז $|S| = \aleph$.

הוכחה. מצד אחד: $S \subseteq \mathbb{R}$, לכן $|S| \leq \aleph$.

מצד שני: כל קטע מכיל קטע פתוח. לכן S מכילה קטע פתוח I. מכאן $|S| \geq |I|$. מאחר שכל קטע פתוח שקול ל־ $\mathbb{R}$, הרי ש־ $|I| = \aleph$ ולכן $|S| \geq \aleph$.

קיבלנו $|S| \leq \aleph$ ו־ $\aleph \geq |S|$, לכן $|S| = \aleph$ לפי **CSB**. □

נדגיש כי בטענה האחרונה S היא לא בהכרח קטע או קרן מסוג כלשהו, אלא קבוצה כלשהי שמכילה קטע. תהי, לדוגמא, $X = |\{-10,-8,-6\} \cup (3.41, 3.42] \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \mathbb{N}|$. מטענה **[53]** נובע כי $|X| = \aleph$.

תרגילים.

1. בתרגיל זה נתאר הוכחה נוספת של משפט **CSB**, ונבקש להשלים פרטים.

נניח ש־ X, Y הן שתי קבוצות, ו־ $f : X \to Y$ ו־ $g : Y \to X$ הן פונקציות חד־חד־ערכיות. נסמן ב־ Y_1 את התמונה של f וב־ X_1 את התמונה של g, ונסמן ב־ $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ את הצמצומים של f ושל g לתמונותיהן. כלומר, $\tilde{f} : X \to Y_1$ ו־ $\tilde{g} : Y \to X_1$ הן פונקציות חד־חד־ערכיות ועל.

יהי $y \in Y$. אם $y \in Y_1$, אז קיים $\tilde{f}^{-1}(y) \in X$. אם איבר זה של X שייך ל־ X_1, אז קיים $\tilde{g}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(y)) \in Y$. נמשיך בתהליך זה: מאיבר של Y נלך למקור שלו ביחס ל־ f (אם הוא קיים), ומאיבר של X נלך למקור שלו ביחס ל־ g (אם הוא קיים) – כל עוד זה אפשרי (כלומר, כל עוד אנחנו פוגשים באיברים ששייכים לתמונה של פונקציה מתאימה). מתקבלת שרשרת

$$y,\ \tilde{f}^{-1}(y),\ \tilde{g}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(y)),\ \tilde{f}^{-1}(\tilde{g}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(y))),\ \tilde{g}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{g}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(y)))),\ \ldots$$

הראו:

(א) כל איבר של X וכל איבר של Y שייך לשרשרת אחת בדיוק.

(ב) ייתכנו שלושה סוגים של שרשראות: כאלה שבהן יש איבר אחרון ששייך ל־ X, כאלה שבהן יש איבר אחרון ששייך ל־ Y, וכאלה שאין בהן איבר אחרון.

(ג) לכל אחד מהסוגים של השרשראות: קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל בין אברי השרשרת השייכים ל־ X לבין אברי השרשרת השייכים ל־ Y.

(ד) הסיקו מזה את משפט **CSB**.

2. הוכיחו: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$.

3. בסעיף זה נוכיח את הגרסה המישורית של טענה **[53]**. הוכיחו (בכל הסעיפים, הכוונה לעיגולים בעלי רדיוס חיובי):

(א) כל עיגול פתוח במישור שקול לכל עיגול סגור.

(ב) כל עיגול פתוח במישור שקול למישור כולו (רמז: הניחו תחילה שמדובר בעיגול שמרכזו בראשית הקואורדינטות. עברו להצגה הקטבית של נקודותיו והשתמשו בטענה **[34]**).

(ג) כל תת־קבוצה של המישור המכילה עיגול כלשהו, שקולה למישור כולו.

4.8 קבוצות בנות מניה

בפרק זה נסכם מה שאנחנו כבר יודעים על קבוצות בעלות העצמה $\aleph_0$, נראה דוגמאות נוספות, נוכיח ש־ $\aleph_0$ הוא הקרדינל האינסופי הקטן ביותר ונסיק מזה אפיון של קבוצות אינסופיות.

תזכורת.

- לפי הגדרה, $\aleph_0$ הוא הקרדינל של $\mathbb{N}$.
- הקבוצות הבאות הן גם כן בעלות העצמה $\aleph_0$:
$\mathbb{N}+k=\{k,k+1,k+2,\dots\}$ לכל $k\in\mathbb{N}$; $k\mathbb{N}=\{0,k,2k,\dots\}$ לכל $k\in\mathbb{N}_+$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$.
כמו כן, אם $|X|=\aleph_0$ ו־ $|Y|=\aleph_0$, אז $|X\cup Y|=\aleph_0$ ו־ $|X\times Y|=\aleph_0$ (מכאן, בפרט, $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$, וכדומה).
- קבוצה נקראת בת מניה אם היא סופית או בעלת העצמה $\aleph_0$. קבוצה X היא בת מניה אם ורק אם ניתן לבנות סדרה, סופית או אינסופית, שבה כל איבר של X מופיע פעם אחת בדיוק.

[54] טענה. לכל $n\in\mathbb{N}_+$, מתקיים $|\mathbb{N}^n|=|\mathbb{N}^{\{1,2,\dots,n\}}|=\aleph_0$.[30]

הוכחה. נוכיח את הטענה $|\mathbb{N}^n|=\aleph_0$ באינדוקציה על n. עבור $n=1$ היא מתקיימת לפי ההגדרה של $\aleph_0$. עבור $n=2$ היא נובעת מטענה **[29]**.

עבור $n>2$,

$$|\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{n-1}| \overset{\text{אינדוקציה + [38]}}{=} |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| \overset{[29]}{=} \aleph_0.$$

המעבר הראשון, $|\mathbb{N}^n|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{n-1}|$, נובע מכך שהפונקציה $f:\mathbb{N}^n\to(\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{n-1})$ המוגדרת ע"י $f((x_1,x_2,\dots,x_n))=(x_1,(x_2,\dots,x_n))$, היא חד־חד־ערכית ועל. □

[55] מסקנה. תהי X קבוצה בעלת העצמה $\aleph_0$. אז לכל $n\in\mathbb{N}_+$ מתקיים $|X^n|=|X^{\{1,2,\dots,n\}}|=\aleph_0$.

[30] נזכיר ש־ $X^n=\underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{n\text{ פעמים}}$. לכן X^n ו־ $X^{\{1,2,\dots,n\}}$ הם למעשה שני סימונים לאותה הקבוצה: קבוצת הסדרות באורך n של אברי X.

הוכחה. לפי טענות **[39]** ו־ **[54]**, $|X^{\{1,2,\dots,n\}}| = |\mathbb{N}^{\{1,2,\dots,n\}}| = \aleph_0$. $\square$

נוכיח מספר טענות על המקום של $\aleph_0$ בין קרדינלים הסדורים לפי היחס $\leq$. נראה תחילה שהעצמה $\aleph_0$ גדולה ממש מכל עצמה סופית:

[56] טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$. אזי $n < \aleph_0$.

הוכחה. נסתכל בפונקציה $f : \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x$. זו פונקציה חד־חד־ערכית, לכן כי $|\{0,1,\dots,n-1\}| \leq |\mathbb{N}|$, כלומר $n \leq \aleph_0$. כמו כן, לא קיימת פונקציה $g : \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{N}$ שהיא על. אכן, אם $g : \{0,1,\dots,n-1\} \to \mathbb{N}$, אז הקבוצה $\{g(0), g(1), \dots, g(n-1)\}$ היא קבוצה סופית, לכן יש בה האיבר הגדול ביותר N, ואז $N+1 \notin \mathrm{Im}(g)$. $\square$

כעת נוכיח ש־ $\aleph_0$ היא העצמה האינסופית הקטנה ביותר:

[57] טענה. קבוצה X היא אינסופית אם ורק אם יש לה תת־קבוצה בעלת העצמה $\aleph_0$.

הוכחה. כיוון אחד ברור: אם X היא קבוצה סופית, אז כל תת־קבוצה שלה גם כן סופית, ולכן אין לה תת־קבוצה בעלת העצמה $\aleph_0$.

כעת תהי X קבוצה אינסופית. נבחר בה איבר a_0. מאחר ש־ X אינסופית, ברור ש־ $X \setminus \{a_0\} \neq \varnothing$. נבחר בקבוצה זו איבר a_1. מאחר ש־ X אינסופית, ברור ש־ $X \setminus \{a_0, a_1\} \neq \varnothing$. נמשיך באופן אינדוקטיבי: לכל $k = 1,2,3,\dots$, נבחר $a_k \in X \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ שאיננה ריקה כי X אינסופית ו־ $\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$ סופית.

נגדיר $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$. קבוצה זו היא בעלת העצמה $\aleph_0$ כי אם נכתוב את אבריה כסדרה: $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, כל איבר מופיע בה פעם אחת בדיוק (לא ייתכן $a_i = a_j$ עבור $i < j$ כי a_j שייך ל־ $X \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{j-1}\}$). $\square$

[58] מסקנה. קבוצה X היא אינסופית אם ורק אם $\aleph_0 \leq |X|$.

[59] מסקנה. קבוצה X היא בת מניה אם ורק אם $|X| \leq \aleph_0$.

הוכחה. תהי X קבוצה בת מניה. אז, לפי הגדרה, X סופית או $|X| = \aleph_0$. לכן $|X| \leq \aleph_0$.

בכיוון השני, נניח $|X| \leq \aleph_0$. אם X סופית אז היא בת מניה לפי הגדרה. אם X אינסופית, אז $|X| \geq \aleph_0$ לפי המסקנה **[58]**. לכן, לפי **CSB**, $|X| = \aleph_0$ ומכאן X בת מניה. $\square$

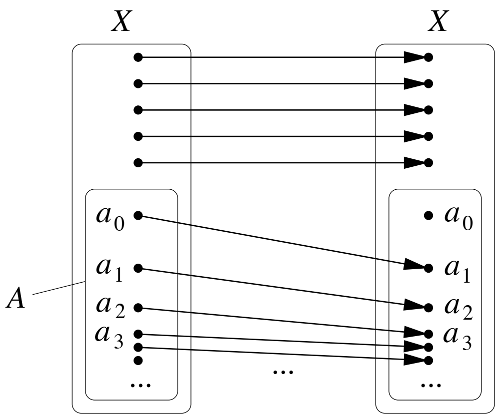
כאשר הוכחנו $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_+$ (טענה **[26]**), הערנו שאנחנו נתקלים במצב שלא קורה בקבוצות סופיות ולכן מפתיע: לקבוצה X יש תת־קבוצה ממש השקולה ל־ X. מאז ראינו דוגמאות נוספות לתופעה זו, למשל: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \sim (0,1)$ וכו'. בטענה הבאה נראה שמצב כזה קורה בכל קבוצה אינסופית; יתר על כן: הוא **מאפיין** קבוצות אינסופיות.

[60] טענה. קבוצה X היא אינסופית אם ורק אם יש לה תת־קבוצה Y כך ש־ $Y \subsetneqq X$ ו־ $X \sim Y$.

הוכחה. אם X סופית, אז העצמה שלה היא מספר האיברים בה. בכל תת־קבוצה המוכלת ממש, יהיה מספר איברים יותר קטן, ולכן לא ייתכן שיש לה תת־קבוצה ממש בעלת אותה העצמה.

כעת תהי X קבוצה אינסופית. לפי טענה **[57]**, יש לה תת־קבוצה $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ בעלת העצמה $\aleph_0$. נסתכל בפונקציה $f : X \to X \setminus \{a_0\}$ המוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} a_{i+1}, & x = a_i \in A \\ x, & x \notin A \end{cases}$$



הפונקציה f היא חד־חד־ערכית ועל, ולכן X שקולה ל־ $X \setminus \{a_0\}$, שהיא תת־קבוצה של X המוכלת ממש. □

הערה. בתורת הקבוצות האקסיומתית האפיון מהטענה האחרונה משמש כ**הגדרה** של המושג **קבוצה אינסופית**.

הטענה הבאה היא מסקנה נוספת מטענה **[57]**. היא אומרת שהאיחוד של קבוצה אינסופית X עם קבוצה סופית או בעלת העצמה $\aleph_0$ לא משפיע על העצמה של X:

[61] טענה. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות כך ש־ X היא קבוצה אינסופית ו־ $|Y| \le \aleph_0$. אז $|X \cup Y| = |X|$.

הוכחה. ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש־ X ו־ Y הן קבוצות זרות כי אחרת ניתן להחליף את Y ב־ $Y_0 = Y \setminus X$:Y_0 זרה ל־ X ומתקיים $|Y_0| \le |Y| \le \aleph_0$.
מאחר ש־ X היא קבוצה אינסופית, יש לה, לפי טענה **[57]**, תת־קבוצה A בעלת העצמה $\aleph_0$. כעת $|A \cup Y| = |A| = \aleph_0$, ומכאן $|X| = |(X \setminus A) \cup A| = |(X \setminus A) \cup (A \cup Y)| = |X \cup Y|$. □

איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. תוצאות רבות על קבוצות בנות מניה ניתן לקבל בעזרת הטענה הבאה:

[62] טענה. תהי $\mathcal{F} = (X_i)_{i \in I}$ משפחה של קבוצות. אם קבוצת האינדקסים I היא בת מניה, ולכל $i \in I$ הקבוצה X_i היא בת מניה, אז $\bigcup\limits_{i \in I} X_i$ היא גם כן קבוצה בת מניה.

במילים אחרות, **איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.**

הוכחה. קבוצת האינדקסים I היא סופית או בעלת העצמה $\aleph_0$. במקרה הראשון ניתן להניח ש־ $I = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, במקרה השני ש־ $I = \mathbb{N}$. לפי כך נניח שאברי המשפחה הן $X_0, X_1, X_2, \dots$.

יהי $k \in I$, ונסתכל בקבוצה X_k. מאחר שגם היא בת מניה, ניתן לכתוב $X_k = \{x_{k0}, x_{k1}, x_{k2}, \dots\}$.

נבנה פונקציה חד־חד־ערכית $f : \bigcup\limits_{i \in I} X_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא. יהי $a \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$. יהי j האינדקס המינימלי כך ש־ $a \in X_j$. אז $a = x_{jm}$ עבור m טבעי מסוים. נגדיר $f(a) = (j, m)$.

f היא פונקציה מוגדרת היטב כי לכל $a \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ הגדרנו את $f(a)$ באופן יחיד. היא חד־חד־ערכית כי אם $a \neq b$, $a = x_{jm}$, $b = x_{\ell p}$, אז $(j, m) \neq (\ell, p)$ (אכן, אם $j = \ell$ ו־ $m = p$ אז a ו־ b נמצאים באותה קבוצה ובאותו מקום לפי הסידור שקבענו), ולכן $f(a) \neq f(b)$.

לכן $|\bigcup\limits_{i \in I} X_i| \le |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. □

למעשה, הפונקציה f בהוכחה זו משכנת את $\bigcup_{i\in I} X_i$ ב־ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ בדרך הטבעית ביותר: האיבר ה־ m בקבוצה ה־ j נשלח לזוג (j,m). עבור x נתון בחרנו j ספציפי כי ייתכן ש־ x שייך ליותר מקבוצה אחת, ולן היינו צריכים לדאוג לכך ש־ f תהיה מוגדרת היטב.

[63] דוגמא. ניזכר שקבוצת כל הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים איננה בת מניה: $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$ (טענה **[47]**). כעת נוכיח שקבוצת הסדרות **הקבועות ממקום כלשהו** של מספרים טבעיים היא בעלת העצמה $\aleph_0$.

סדרה אינסופית $(x_0,x_1,x_2,\dots)$ נקראת **קבועה ממקום k** אם לכל $m\geq k$ מתקיים $x_m=x_k$. לכל $k\in\mathbb{N}$ נסמן ב־ X_k את קבוצת הסדרות מ־ X הקבועות ממקום k. לדוגמא: הסדרה $(6,7,5,5,5,5,\dots)$ לא שייכת ל־ X_0 ול־ X_1, אבל שייכת ל־ X_k לכל $k\in\{2,3,\dots\}$. הסדרה $(8,8,8,8,8,8,\dots)$ שייכת ל־ X_k לכל $k\in\mathbb{N}$.

סדרה $(x_0,x_1,x_2,\dots)$ נקראת **קבועה ממקום כלשהו** (או **מתייצבת**) אם קיים $k\in\mathbb{N}$ כך שהיא קבועה ממקום k.

נסמן ב־ X את קבוצת הסדרות הקבועות ממקום כלשהו ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. נוכיח ש־ $|X|=\aleph_0$.

ברור ש־ $X=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$.

נוכיח שלכל $k\in\mathbb{N}$ קבוע, $|X_k|=\aleph_0$. תהי $f_k: X_k\to\mathbb{N}^{k+1}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $(x_0,x_1,x_2,\dots)\mapsto(x_0,x_1,x_2,\dots,x_k)$. פונקציה זו מעבירה סדרה ℓ לסדרה סופית באורך $k+1$ שרכיביה הם $k+1$ הרכיבים הראשונים של ℓ. פונקציה זו היא חד־חד־ערכית ועל כי אברי X_k מתייצבים במקום ה־k ועקב כך $f_k(\ell)$ מאפשר "לשחזר" את ℓ באופן יחיד [31].

לכן לכל $k\in\mathbb{N}$, מתקיים $|X_k|=|\mathbb{N}^k| \overset{[54]}{=} \aleph_0$.

קיבלנו ש־ X היא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה, ולכן X כולה היא קבוצה בת מניה: $|X|\leq\aleph_0$.

מצד שני, ברור ש־ X היא קבוצה אינסופית ולכן $|X|\geq\aleph_0$. לכן, לפי **CSB**, $|X|=\aleph_0$.

[64] דוגמא. תהי X קבוצת התת־קבוצות **הסופיות** של $\mathbb{N}$. נוכיח ש־ $|X|=\aleph_0$ (כזכור, קבוצת כל התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ איננה בת מניה: לפי משפט קנטור, $|P(\mathbb{N})|>|\mathbb{N}|$).

לכל $k\in\mathbb{N}$, תהי X_k קבוצת התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ בעלות k איברים: $X_k=\{Y:\ Y\subseteq\mathbb{N},\ |Y|=k\}$. ברור ש־ $X=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$.

נוכיח שלכל $k\in\mathbb{N}$ הקבוצה X_k היא בת מניה. עבור $k=0$, $X_0=\{\varnothing\}$ ולכן $|X_0|=1$.

לכל $k\in\mathbb{N}_+$, נגדיר פונקציה $f_k: X_k\to\mathbb{N}^k$ ע"י

$f(\{x_1,x_2,\dots,x_k\})$ היא הסדרה שרכיביה הם $x_1,x_2,\dots,x_k$ בסדר עולה[32].

לכל $k\in\mathbb{N}_+$, הפונקציה f_k היא חד־חד־ערכית, לכן $|X_k|\leq|\mathbb{N}^k|=\aleph_0$.

לכן X היא בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. בנוסף, X היא קבוצה אינסופית ולכן $|X|\geq\aleph_0$. מכאן $|X|=\aleph_0$ לפי **CSB**.

תרגילים.

1. תהי X קבוצה. הוכיחו: X היא קבוצה אינסופית אם ורק אם קיימת פונקציה $f: X\to X$ שהיא חד־חד־ערכית ולא על.

[31] לדוגמא: עבור $k=3$ הפונקציה f_3 היא $(x_0,x_1,x_2,\dots)\mapsto(x_0,x_1,x_2,x_3)$. המקור היחיד של $(0,1,0,1)$ תחת פונקציה זו הוא הסדרה $(0,1,0,1,1,1,1,\dots)$.

[32] יש לציין באיזה סדר מסדרים אותם כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת היטב.

2. תהי X קבוצה כך ש־ $|X| > \aleph_0$, ותהי Y תת־קבוצה של X כך ש־ $|Y| \le \aleph_0$. הוכיחו כי $|X| = |X \setminus Y|$.
3. הוכיחו: העצמה של קבוצת הסדרות ב־ $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שרכיביהן 0 ו־ 1 לסירוגין החל ממקום כלשהו, היא $\aleph_0$.
4. תהי X קבוצת המעגלים במישור, בעלי רדיוס רציונלי ומרכז בעל שתי קואורדינטות רציונליות. הוכיחו כי $|X| = \aleph_0$.
5. הוכיחו כי קבוצת כל הסדרות המחזוריות (החל ממקום כלשהו) של מספרים טבעיים, היא קבוצה בת מניה.
6. הוכיחו כי קבוצת כל הסדרות של מספרים טבעיים שהן סדרות חשבוניות החל ממקום כלשהו, היא קבוצה בת מניה.
7. תהי X קבוצה של ריבועים **זרים** במישור. הוכיחו כי X בת מניה. (רמז: בכל ריבוע ניתן למצוא נקודה בעלת שתי קואורדינטות רציונליות.)

4.9 קבוצות בעלות העצמה א

לפי הגדרה, א היא העצמה של $\mathbb{R}$, והוכחנו בטענה **[53]** שהיא גם כן העצמה של כל תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ המכילה קטע. בפרק זה נראה קבוצות נוספות בעלות עצמה זו.

שתי הטענות הבאות הן משפטים קלאסיים של תורת הקבוצות. הן נוסחו והוכחו ע"י קנטור.

[65] משפט. $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, ולכן $|P(\mathbb{N})| = \aleph$.

הוכחה. לפי טענה **[40]**, $P(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. לפי טענה **[53]**, $[0,1) \sim \mathbb{R}$. לכן מספיק להוכיח $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1)$.

נגדיר פונקציה $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1)$ ע"י $(a_1, a_2, a_3, \dots) \xmapsto{f} 0.a_1a_2a_3\dots$. כלומר הופכים סדרה של 0־ים ו־ 1־ים לפיתוח **עשרוני** של מספר, לדוגמא: $(0,1,1,0,0,1,\dots) \mapsto 0.011001\dots$. פונקציה זו היא חד־חד־ערכית (מאחר שהשתמשנו רק ב־ 0־ים ו־ 1־ים, לא יתקבל אותו מספר משני מקורות שונים). לכן $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \le |\,[0,1)\,|$.

נגדיר פונקציה $g : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא. עבור $x \in [0,1)$, נסתכל בפיתוח **הבינארי** שלו. נהפוך את הספרות אחרי הנקודה לסדרה, סדרה זו תהיה $g(x)$. אם x הוא מספר בעל שני פיתוחים בינאריים (כדוגמת $0.0110000\dots = 0.0101111\dots$), נבחר את הפיתוח עם אפסים. הפונקציה g היא חד־חד־ערכית, ולכן $|\,[0,1)\,| \le |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

כעת, לפי **CSB**, מקבלים $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ומכאן $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$. □

[66] משפט. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$ (במילים: **המישור הממשי שקול מבחינת העצמה לישר הממשי!**[33]), ולכן $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \aleph$.

הוכחה. מאחר ש־ $\mathbb{R} \sim [0,1)$, מספיק להוכיח $[0,1) \times [0,1) \sim [0,1)$.

קל לראות ש־ $|\,[0,1)\,| \le |\,[0,1) \times [0,1)\,|$: אכן, $[0,1)$ שקולה לתת־קבוצה $[0,1) \times \{0\}$ של $[0,1) \times [0,1)$.

כדי להוכיח $|\,[0,1) \times [0,1)\,| \le |\,[0,1)\,|$, נגדיר פונקציה $f : (\,[0,1) \times [0,1)\,) \to [0,1)$ ע"י $(\,(0.a_1a_2a_3\dots), (0.b_1b_2b_3\dots)\,) \xmapsto{f} (0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots)$ (עבור מספרים עם שני פיתוחים עשרוניים נשתמש בפיתוח עם אפסים). כלומר, הזוג (x,y) של מספרים ב־ $[0,1)$ יעבור תחת f למספר ב־ $[0,1)$ שפיתוחו העשרוני המתקבל ע"י בחירת הספרות מ־ x ומ־ y לסירוגין, לדוגמא: $(\,(0.123\dots), (0.345\dots)\,) \xmapsto{f} (0.132435\dots)$. הפונקציה f היא חד־חד־ערכית, ולכן $|\,[0,1) \times [0,1)\,| \le |\,[0,1)\,|$.

כעת, לפי **CSB**, מקבלים $|\,[0,1)\,| = |[0,1) \times [0,1)|\,|$ ולכן $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$. מכאן גם $\aleph = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$. □

מטענה זו נובעת המסקנה הבאה:

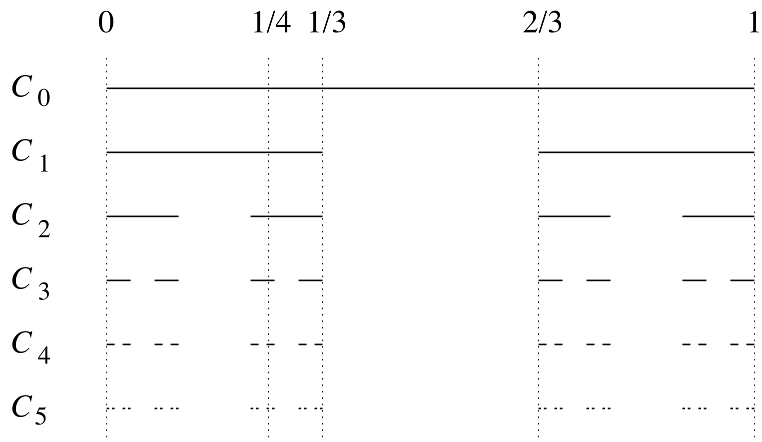
[67] מסקנה. לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $|\mathbb{R}^n| = \aleph$.

הוכחה. בדומה להוכחה של טענה **[54]**, לכל $n > 2$ נקבל באינדוקציה: $\aleph = |\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$. □

[33] במכתב לדדקינד, קנטור כתב על תוצאה זו (ועל המסקנה הבאה): "אני רואה את זה, אבל לא מאמין!"

קבוצת קנטור. ראינו (טענה **[53]**) שאם תת־קבוצה S של $\mathbb{R}$ מכילה קטע, אז $|S| = \aleph$. טבעי לשאול, האם גם ההיפך נכון? כלומר, אם S היא תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ כך ש־ $|S| = \aleph$, האם מובטח ש־ S מכילה קטע? מסתבר שהתשובה היא "לא": בדוגמא הבאה נראה תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ בעלת העצמה $\aleph$ שלא מכילה אף קטע. דוגמא זו נמצאה ע"י קנטור ולכן היא קרויה על שמו.

[68] דוגמא. ניקח את הקטע הסגור $C_0 = [0,1]$. נוציא ממנו את השליש האמצעי הפתוח ונסמן ב־ C_1 את הקבוצה שמתקבלת: $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. קבוצה זו היא איחוד של שני קטעים סגורים, כל אחד באורך $1/3$. נוציא מכל אחד מהם את השליש האמצעי הפתוח ונקבל $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$: קבוצה זו היא איחוד של ארבעה קטעים סגורים, כל אחד באורך $1/9$. נמשיך באותו אופן: לכל n טבעי, מהקבוצה C_n, שהיא איחוד של 2^n קטעים סגורים באורך $1/3^n$, מקבלים קבוצה C_{n+1} ע"י הוצאת השליש האמצעי הפתוח מכל קטע. לפי כך, C_{n+1} היא איחוד של 2^{n+1} קטעים סגורים באורך $1/3^{n+1}$.



כך קיבלנו משפחה של קבוצות $(C_n)_{n\geq 0}$. תהי $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$. כלומר, אברי C הם כל המספרים ב־ $[0,1]$ שלא הוצאו באף שלב. קבוצה זו נקראת **קבוצת קנטור**. נראה שקבוצה זו לא מכילה קטע, ושעצמתה היא $\aleph$.

נניח ש־ C מכילה קטע (a,b). יהי ℓ האורך שלו: $\ell = b - a$. מצד שני, האורך המקסימלי של קטע שמוכל ב־ C_n הוא $1/3^n$, ולכן עבור n מספיק גדול (לכל $n > \log_{1/3} \ell$), C_n לא תכיל קטע באורך ℓ. לכן גם C לא תכיל קטע באורך ℓ.

נסתכל בפיתוח לפי בסיס 3. C_0 היא $[0,1]$; C_1 היא הקבוצה של כל אברי $[0,1]$ שניתן לכתוב לפי בסיס 3 כך שהספרה הראשונה אחרי הנקודה איננה 1; C_2 היא הקבוצה של כל אברי $[0,1]$ שניתן לכתוב לפי בסיס 3 כך ששתי הספרות הראשונות אחרי הנקודה אינן 1; וכן הלאה: C_n היא הקבוצה של כל אברי $[0,1]$ שניתן לכתוב לפי בסיס 3 כך ש־ n הספרות הראשונות אחרי הנקודה אינן 1. לכן C היא הקבוצה של כל אברי $[0,1]$ שניתן לכתוב לפי בסיס 3 בעזרת הספרות 0 ו־ 2 בלבד (לדוגמא, $1/4 \in C$ כי $1/4 = 2/3^2 + 2/3^4 + 2/3^6 + \ldots$, כלומר הפיתוח של $1/4$ לפי בסיס 3 הוא $0.020202\ldots$). לפי כך יש פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ C ל־ $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$: $0.a_1a_2a_3\ldots \mapsto (a_1,a_2,a_3,\ldots)$. לכן $|C| = |\{0,2\}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \aleph$.

מאז שהתחלנו לדון בעצמות, עובדות רבות הצביעו על כך שאין קשר ישיר בין עצמות לבין מידה (מושג המידה מכליל את המושגים של אורך, שטח, נפח וכד' לקבוצות שהן לא בהכרח קטעים). למשל, כל הקטעים הפתוחים בישר הממשי הם בעלי אותה עצמה, בלי קשר למידה (אורך). קבוצת קנטור מדגימה את זה בצורה עוד יותר חדה: היא "קטנה" מבחינת המידה (למעשה, המידה שלה היא 0), אבל "גדולה" מבחינת העצמה.

תרגילים.

1. בהוכחה של משפט **[65]**, בהגדרה של הפונקציה f השתמשנו בפיתוח עשרוני, ובהגדרה של הפונקציה g בפיתוח בינארי. מה היה משתבש בהוכחה אם היינו משתמשים בשתיהן בפיתוח עשרוני או בשתיהן בפיתוח בינארי?

2. תהי $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(a) = (-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$. הראו כי f היא פונקציה חד־חד־ערכית. מה ניתן להסיק מזה לגבי $|\mathbb{R}|$ ו־ $|P(\mathbb{N})|$? שימו לב כי זו הוכחה נוספת לאחד מהכיוונים במשפט **[65]**.

3. תהי X קבוצה בעלת העצמה $\aleph_0$.

(א) תהי $\mathcal{F}$ משפחה של תת־קבוצות זרות של X (כלומר: לכל $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, מתקיים $A \cap B = \varnothing$). הוכיחו כי $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$.

(ב) תהי $\mathcal{F}$ משפחה של תת־קבוצות של X כך שהחיתוכים בין אבריה הן קבוצות בגודל 1 לכל היותר (כלומר: לכל $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, מתקיים $|A \cap B| \leq 1$). הוכיחו כי $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$.

(ג) תהי $\mathcal{F}$ משפחה של תת־קבוצות של X כך שהחיתוכים בין אבריה הן קבוצות בגודל n לכל היותר (כלומר: לכל $A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B$, מתקיים $|A \cap B| \leq n$), כאשר n הוא מספר טבעי מסויים. הוכיחו כי $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$.

בהמשך התרגיל נראה שאם בשאלה האחרונה נחליף את התנאי "לכל $A, B \in \mathcal{F}$ (שונות) מתקיים $|A \cap B| \leq n$ כאשר n הוא מספר טבעי מסויים" בתנאי "לכל $A, B \in \mathcal{F}$ (שונות) מתקיים ש־ $A \cap B$ היא קבוצה סופית" – אז המסקנה $|\mathcal{F}| \leq \aleph_0$ כבר לא תהיה נכונה. בשני הסעיפים הבאים נראה שתי דוגמאות שבהן החיתוך בין כל זוג של אברי $\mathcal{F}$ הוא קבוצה סופית, ומתקיים $|\mathcal{F}| = \aleph$.

(ד) תהי $X = \mathbb{Q}$. לכל α ממשי, תהי ℓ_α סדרה כלשהי של מספרים רציונליים המתכנסת ל־ α; ותהי S_α קבוצת המספרים הרציונליים השייכים לסדרה ℓ_α. נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את המשפחה של כל הקבוצות S_α שהתקבלו בדרך זו, כלומר: $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

- הוכיחו כי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq \beta)$ מתקיים ש־ $S_\alpha \cap S_\beta$ היא קבוצה סופית.
- הוכיחו כי $|\mathcal{F}| = \aleph$.

(ה) תהי $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. נסתכל על X כעל קבוצת הנקודות בעלות שתי קואורדינטות שלמות במישור. יהי $R_0 = \mathbb{R} \times [-1, 1]$: הפס האופקי בעל רוחב 2 החסום ע"י הישרים $y = -1$ ו־ $y = 1$. כעת, לכל $\alpha \in [0, \pi)$, יהי R_α הפס המתקבל מ־ R_0 ע"י סיבובו סביב הנקודה $(0, 0)$ בזווית α; ונסמן ב־ S_α את קבוצת הנקודות מ־ X הנצמאות בתוך R_α.

- הוכיחו כי לכל $\alpha \in [0, \pi)$, הקבוצה S_α לא ריקה.
- הוכיחו כי לכל $\alpha, \beta \in [0, \pi)$ $(\alpha \neq \beta)$ מתקיים ש־ $S_\alpha \cap S_\beta$ היא קבוצה סופית.
- הוכיחו כי $|\mathcal{F}| = \aleph$.

(ו) הוכיחו שלכל קבוצה X בעלת העצמה $\aleph_0$, קיימת משפחה $\mathcal{F}$ של תת־קבוצות של X כך שלכל שני אברי $\mathcal{F}$ חיתוכם סופי, ומתקיים $|\mathcal{F}| = \aleph$.

4. בהוכחה של משפט **[66]**: למה f היא פונקציה חד־חד־ערכית? למה היא לא על?

5. מהי העצמה של קבוצת המספרים המרוכבים?

6. האם המספר $3/26$ שייך לקבוצת קנטור? ו־ $7/26$?

4.10 חשבון עצמות

כזכור, המספרים הטבעיים מזוהים עם העצמות של קבוצות סופיות. בפרק זה נכליל את הפעולות המוכרות של החיבור, הכפל והחזקה של מספרים הטבעיים, לקרדינלים כלשהם.

חיבור. יהיו α ו־ β שני קרדינלים. תהיינה A ו־ B שתי קבוצות זרות כך ש־ $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$[34]. נגדיר $\alpha + \beta = |A \cup B|$.
נוכיח שמספר עובדות הידועות על חיבור המספרים הטבעיים נשארות נכונות עבור חיבור עצמות.

[69] טענה. [כאן ובטענות אחרות בהמשך הסעיף האותיות α, β, γ וכו' מסמנות קרדינלים כלשהם.]

1. החיבור של עצמות מוגדר היטב, כלומר תוצאת החיבור $\alpha + \beta$ לא תלויה בבחירה של הקבוצות A ו־ B.
   הוכחה. אם $|X| = |A|$, $|Y| = |B|$ ו־ $X \cap Y = A \cap B = \varnothing$, אז $|X \cup Y| = |A \cup B|$ לפי טענה **[37]**.
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
   הוכחה. נובע מ־ $A \cup B = B \cup A$.
3. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
   הוכחה. נובע מ־ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
4. אם $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$, אז $\alpha + \beta \leq \gamma + \delta$.
   הוכחה. אם $f : A \to C$ ו־ $g : B \to D$ הן פונקציות חד־חד־ערכיות, אז הפונקציה $h : (A \cup B) \to (C \cup D)$ המוגדרת ע"י
   $$h(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{array} \right\}$$
   היא חד־חד־ערכית.
5. $\alpha + 0 = \alpha$.
   הוכחה. נובע מ־ $A \cup \varnothing = A$. □

החיבור של עצמות סופיות מתיישב עם החיבור של המספרים הטבעיים. נוכיח מספר תוצאות על החיבור של עצמות אינסופיות מוכרות.

[70] טענה.

1. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
   הוכחה. ניקח $A = 2\mathbb{N}$, $B = 2\mathbb{N} + 1$. קבוצות אלה הן זרות ושתיהן בעלות העצמה $\aleph_0$.
   לכן $\aleph_0 + \aleph_0 = |2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} + 1)| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
2. לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $\aleph_0 + n = \aleph_0$.
   הוכחה. מאחר ש־ $0 \leq n < \aleph_0$,
   $$\aleph_0 \overset{[69.5]}{=} \aleph_0 + 0 \overset{[69.4]}{\leq} \aleph_0 + n \overset{[69.4]}{\leq} \aleph_0 + \aleph_0 \overset{[70.1]}{=} \aleph_0.$$
   מכאן, לפי **CSB**, $\aleph_0 + n = \aleph_0$.
3. $\aleph + \aleph = \aleph$.
   הוכחה. ניקח $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$. הקבוצות האלה זרות, ו־ $\aleph = |B| = |A|$. לכן $\aleph + \aleph = |(0, 1) \sqcup (2, 3)| = \aleph$.

[34] אנו דורשים ש־ A ו־ B תהיינה זרות כדי שהחיבור של קרדינלים סופיים יתיישב עם החיבור של מספרים טבעיים. אם הקבוצות A ו־ B אינן זרות, ניקח במקומן את $\{0\} \times A$ ו־ $\{1\} \times B$. קבוצות אלה כבר זרות, וכמובן $|A| = |\{0\} \times A|$, $|B| = |\{1\} \times B|$

4. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\aleph + n = \aleph$; כמו כן, $\aleph + \aleph_0 = \aleph$.

הוכחה. מאחר ש־ $0 \le n < \aleph_0 < \aleph$,

$$\aleph = \aleph + 0 \le \aleph + n \le \aleph + \aleph_0 \le \aleph + \aleph = \aleph.$$

מכאן, לפי **CSB**, $\aleph + n = \aleph$, ו־ $\aleph + \aleph_0 = \aleph$. □

נסכם את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

$\alpha + \beta$	n	$\aleph_0$	$\aleph$
m	$m+n$	$\aleph_0$	$\aleph$
$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph$
$\aleph$	$\aleph$	$\aleph$	$\aleph$

כפל. יהיו α ו־ β שני קרדינלים. ניקח שתי קבוצות A ו־ B, כך ש־ $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$. נגדיר $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$ (בדרך כלל נכתוב $\alpha\beta$ במקום $\alpha \cdot \beta$).

[71] טענה.

1. הכפל של עצמות מוגדר היטב, כלומר תוצאת הכפל $\alpha\beta$ לא תלויה בבחירה של הקבוצות A ו־ B.

   הוכחה. אם $|A| = |X|$ ו־ $|B| = |Y|$, אז $|A \times B| = |X \times Y|$ לפי טענה **[38]**.

2. $\alpha\beta = \beta\alpha$.

   נובע מ־ $|A \times B| = |B \times A|$ (טענה **[36]**).

3. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

   הוכחה. נובע מ־ $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$ (ההתאמה $((x,y),z) \leftrightarrow (x,(y,z))$ היא חד־חד־ערכית ועל).

4. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

   הוכחה. נובע מ־ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ והעובדה שאם $A \cap B = \varnothing$ אז $(A \times C) \cap (B \times C) = \varnothing$.

5. אם $\alpha \le \gamma$, $\beta \le \delta$, אז $\alpha\beta \le \gamma\delta$.

   הוכחה. אם $f : A \to C$ ו־ $g : B \to D$ הן פונקציות חד־חד־ערכיות, אז הפונקציה $h : (A \times B) \to (C \times D)$ המוגדרת ע"י $h(a,b) = (f(a), g(b))$ היא גם כן חד־חד־ערכית.

6. $\alpha \cdot 0 = 0$.

   הוכחה. נובע מ־ $A \times \varnothing = \varnothing$.

7. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

   הוכחה. נובע מ־ $A \sim A \times \{0\}$ (ע"י ההתאמה $x \leftrightarrow (x,0)$). □

הכפל של עצמות סופיות מתיישב עם הכפל של המספרים הטבעיים. נוכיח מספר תוצאות על הכפל של עצמות אינסופיות מוכרות.

[72] טענה.

1. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

הוכחה. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

2. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.

הוכחה. מ־ $1 \leq n < \aleph_0$ נובע

$$\aleph_0 \overset{[71.7]}{=} \aleph_0 \cdot 1 \overset{[71.5]}{\leq} \aleph_0 \cdot n \overset{[71.5]}{\leq} \aleph_0 \cdot \aleph_0 \overset{[72.1]}{=} \aleph_0,$$

ומכאן לפי **CSB** $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.

3. $\aleph \cdot \aleph = \aleph$.

הוכחה. $\aleph \cdot \aleph = |\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \overset{[66]}{=} \aleph$.

4. לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $\aleph \cdot n = \aleph$; כמו כן, $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$.

הוכחה. מ־ $1 < n < \aleph_0 < \aleph$ נובע

$$\aleph = \aleph \cdot 1 \leq \aleph \cdot n \leq \aleph \cdot \aleph_0 \leq \aleph \cdot \aleph = \aleph,$$

ומכאן לפי **CSB** $\aleph \cdot n = \aleph$ ו־ $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$.

נסכם את התוצאות שקיבלנו בטבלה:

$\alpha \cdot \beta$	0	$n \geq 1$	$\aleph_0$	$\aleph$
0	0	0	0	0
$m \geq 1$	0	mn	$\aleph_0$	$\aleph$
$\aleph_0$	0	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph$
$\aleph$	0	$\aleph$	$\aleph$	$\aleph$

חזקה. יהיו α ו־ β שני קרדינלים. תהיינה A ו־ B שתי קבוצות כך ש־ $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$. נגדיר $\alpha^\beta = |A^B|$.

[73] טענה.

1. החזקה של עצמות מוגדרת היטב, כלומר התוצאה α^β לא תלויה בבחירה של הקבוצות A ו־ B.

הוכחה. אם $|X| = |A|$ ו־ $|Y| = |B|$, אז $|X^Y| = |A^B|$ לפי טענה **[39]**.

2. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.

הוכחה. נובע מ־ $A^{B \sqcup C} \sim A^B \times A^C$ (טענה **[41]**).

3. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$.

הוכחה. נובע מ־ $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$ (טענה **[42]**).

4. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

הוכחה. נובע מ־ $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$ (טענה **[43]**).

5. אם $0 < \alpha \le \gamma$, $0 < \beta \le \delta$, אז $\alpha^\beta \le \gamma^\delta$ (תכונת המונוטוניות).

הוכחה. תהיינה A, B, C ו־ D ארבע קבוצות כך ש־ $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, $|C| = \gamma$, $|D| = \delta$.
מאחר ש־ $\alpha \le \gamma$ ו־ $\beta \le \delta$, ל־ C יש תת־קבוצה X השקולה ל־ A, ול־ D יש תת־קבוצה Y השקולה ל־ B. תהיינה $f : A \to X$ ו־ $g : B \to Y$ פונקציות חד־חד־ערכיות ועל.
לכל $h \in A^B$, תהי $\varphi(h) \in X^Y$ הפונקציה המוגדרת ע"י $\varphi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$, ותהי $\psi(h) \in C^D$ פונקציה שמתלכדת עם $\varphi(h)$ על Y ומוגדרת בדרך שרירותית על $D \setminus Y$. ההתאמה $h \mapsto \varphi(h)$ היא חד־חד־ערכית (נתקלנו במצב דומה בהוכחה של טענה **[39]**), ולכן גם ההתאמה $h \mapsto \psi(h)$ היא חד־חד־ערכית. לפי כך בנינו פונקציה חד־חד־ערכית $\psi : A^B \to C^D$, ומכאן $\alpha^\beta \le \gamma^\delta$.

6. לכל קרדינל α מתקיים $\alpha^0 = 1$. בפרט, $0^0 = 1$.

הוכחה. לכל קבוצה A, קיימת פונקציה אחת בדיוק מ־ $\varnothing$ ל־ A: הפונקציה המוגדרת ע"י היחס הריק.

7. לכל קרדינל $\alpha > 0$ מתקיים $0^\alpha = 0$.

הוכחה. אם $A \neq \varnothing$, אז לא קיימת אף פונקציה מ־ A ל־ $\varnothing$.

8. לכל קרדינל α, מתקיים $\alpha^1 = \alpha$.

הוכחה. עבור $\alpha = 0$, זה נובע מסעיף 7. עבור $\alpha \neq 0$: לכל קבוצה $A \neq \varnothing$, מתקיים $|A^{\{0\}}| = |A|$ ע"י ההתאמה $\{(0,x)\} \leftrightarrow x$.

9. לכל קרדינל $\alpha > 0$, מתקיים $1^\alpha = 1$.

הוכחה. עבור $\alpha = 0$, זה נובע מסעיף 6. עבור $\alpha \neq 0$: לכל קבוצה A, קיימת פונקציה אחת בדיוק f מ־ A ל־ $\{0\}$: לכל $x \in A$, $f(x) = 0$. $\square$

תוך שימוש בחזקות של קרדינלים, נוכל לרשום **עצמות נוספות**: $2^\aleph$, $2^{2^\aleph}$, וכן הלאה. לפי משפט קנטור, $|X| < \{0,1\}^X$, ומכאן $\alpha < 2^\alpha$ לכל קרדינל α. לכן $\aleph < 2^\aleph < 2^{2^\aleph} < \ldots$, וכל העצמות המוכרות לנו עד עתה הן

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < \aleph < 2^\aleph < 2^{2^\aleph} < 2^{2^{2^\aleph}} < \ldots.$$

החזקות של קרדינלים סופיים מתיישבות עם החזקות של מספרים טבעיים (פרט ל־ 0^0). נוכיח מספר תוצאות על עצמות אינסופיות.

[74] טענה.

1. לכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $\aleph_0^n = \aleph_0$.

הוכחה. עבור $n = 1$, נובע מ־ **[73.8]**.
עבור $n = 2$,

$$\aleph_0^2 = \aleph_0^{1+1} \overset{[73.2]}{=} \aleph_0^1 \cdot \aleph_0^1 \overset{[73.8]}{=} \aleph_0 \cdot \aleph_0 \overset{[72.1]}{=} \aleph_0.$$

עבור $n > 2$ נוכיח באינדוקציה:

$$\aleph_0^n \overset{[73.2]}{=} \aleph_0^{n-1} \cdot \aleph_0^1 \overset{\text{אינדוקציה}}{=} \aleph_0 \cdot \aleph_0 \overset{[72.1]}{=} \aleph_0.$$

2. $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. נובע מ־ $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (טענה **[65]**).

3. $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

הוכחה.

$$\aleph^{\aleph_0} \overset{[74.2]}{=} (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \overset{[73.4]}{=} 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} \overset{[72.1]}{=} 2^{\aleph_0} \overset{[74.2]}{=} \aleph.$$

4. $(2^{\aleph})^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

הוכחה.

$$(2^{\aleph})^{\aleph} \overset{[73.4]}{=} 2^{\aleph\cdot\aleph} \overset{[72.3]}{=} 2^{\aleph}.$$

5. $(2^{2^{\aleph}})^{2^{\aleph}} = 2^{2^{\aleph}}$.

הוכחה.

$$(2^{2^{\aleph}})^{2^{\aleph}} \overset{[73.4]}{=} 2^{2^{\aleph}\cdot 2^{\aleph}} \overset{[73.2]}{=} 2^{2^{\aleph+\aleph}} \overset{[70.3]}{=} 2^{2^{\aleph}}$$

נבנה טבלה של α^β עבור $\alpha \leq 2^{2^{\aleph}}$, $\beta \leq 2^{\aleph}$. מהחישובים שביצענו עד כה, נובע:

α^β		β					
		0	1	$n>1$	$\aleph_0$	$\aleph$	$2^{\aleph}$
α	0	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2^n	$\aleph$	$2^{\aleph}$	$2^{2^{\aleph}}$
	$m>2$	1	m	m^n	$\vert$	$\vert$	$\vert$
	$\aleph_0$	1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
	$\aleph$	1	$\aleph$	$---$	$\aleph$	$\vert$	$\vert$
	$2^{\aleph}$	1	$2^{\aleph}$	$---$	$---$	$2^{\aleph}$	$\vert$
	$2^{2^{\aleph}}$	1	$2^{2^{\aleph}}$	$---$	$---$	$---$	$2^{2^{\aleph}}$

תכונת המונוטוניות **[73.5]** מאפשרת להשלים את הטבלה:

α^β		β					
		0	1	$n>1$	$\aleph_0$	$\aleph$	$2^{\aleph}$
α	0	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2^n	$\aleph$	$2^{\aleph}$	$2^{2^{\aleph}}$
	$m>2$	1	m	m^n	$\aleph$	$2^{\aleph}$	$2^{2^{\aleph}}$
	$\aleph_0$	1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	$\aleph$	$2^{\aleph}$	$2^{2^{\aleph}}$
	$\aleph$	1	$\aleph$	$\aleph$	$\aleph$	$2^{\aleph}$	$2^{2^{\aleph}}$
	$2^{\aleph}$	1	$2^{\aleph}$	$2^{\aleph}$	$2^{\aleph}$	$2^{\aleph}$	$2^{2^{\aleph}}$
	$2^{2^{\aleph}}$	1	$2^{2^{\aleph}}$	$2^{2^{\aleph}}$	$2^{2^{\aleph}}$	$2^{2^{\aleph}}$	$2^{2^{\aleph}}$

הערה. צורת רישום $2^\aleph$, $2^{2^\aleph}$ וכו' תשמש כסימון תקני לעצמות אלה. למשל, אם רוצים למצוא את העצמה של $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, החישוב המיידי נותן $\aleph^\aleph$. ראינו ש־ $2^\aleph = \aleph^\aleph$, וזאת הצורה בה נכתוב את התשובה: $|\mathbb{R}^\mathbb{R}| = 2^\aleph$.

האם קיימים קרדינלים אינסופיים שאינם בסדרה $\aleph < 2^\aleph < 2^{2^\aleph} < \ldots$? התשובה היא "כן". למשל, ניקח סדרה של קבוצות בעלות כל העצמות מהסדרה הזאת: $|X_0| = \aleph$, $|X_1| = 2^\aleph$, $|X_2| = 2^{2^\aleph}$ וכו'. כעת נגדיר $X = \bigcup\limits_{n\geq 0} X_n$. קל להבין שהעצמה של X לא שייכת לסדרה $\aleph, 2^\aleph, 2^{2^\aleph}, \ldots$ (למה?). יתר על כן: העצמה של X פותחת סדרה עולה נוספת של קרדינלים: $|X|, |P(X)|, |P(P(X))|, \ldots$.

שאלה חשובה אחרת על סדרת הקרדינלים האינסופיים $\aleph_0 < \aleph < 2^\aleph < 2^{2^\aleph} < \ldots$ היא האם אלה קרדינלים עוקבים. למשל, כבר שאלנו האם קיים קרדינל α כך ש־ $\aleph_0 < \alpha < \aleph$. בשלב זה של הקורס עדיין עדיין אין לנו שום דרך להתמודד עם שאלה זו. בפרט, אם ידוע $\aleph_0 \leq |X| < \aleph$, מזה עוד לא נובע ש־ X בת מניה (כי לא שללנו את האפשרות שקיימת עצמה שהיא קטנה ממש מ־ $\aleph$ אך גדולה ממש מ־ $\aleph_0$).

תרגילים.

1. הוכיחו כי לכל קרדינל α מתקיים $\alpha + \alpha = 2 \cdot \alpha$ ו־ $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$.
2. יהיו α, β, γ שלושה קרדינלים כך ש־ $0 < \alpha$, $\beta < \gamma$.
   (א) האם בהכרח מתקיים $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$?
   (ב) האם בהכרח מתקיים $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$?
   (ג) האם בהכרח מתקיים $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$?
   (ד) האם בהכרח מתקיים $\beta^\alpha < \gamma^\alpha$?
3. הוכיחו כי $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$ באופן ישיר, כלומר מצאו קבוצות X ו־ Y כך ש־ $|X| = \aleph$, $|Y| = \aleph_0$, $|X \times Y| = \aleph$.
4. הוכיחו:
   (א) $2^\aleph + n = 2^\aleph + \aleph_0 = 2^\aleph + \aleph = 2^\aleph + 2^\aleph = 2^\aleph$.
   (ב) $2^\aleph \cdot n = 2^\aleph \cdot \aleph_0 = 2^\aleph \cdot \aleph = 2^\aleph \cdot 2^\aleph = 2^\aleph$.
5. יהיו α ו־ β שני קרדינלים השייכים לקבוצה $\{\aleph_0, \aleph, 2^\aleph, 2^{2^\aleph}, \ldots\}$. הוכיחו:
   (א) $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$;
   (ב) $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$;
   (ג) אם $\beta < \alpha$ אז $\alpha^\beta = \alpha$;
   (ד) אם $\beta \geq \alpha$ אז $\alpha^\beta = 2^\beta$.

   (הדרכה. הגדירו $\alpha_0 = \aleph_0$, ו־ $\alpha_{k+1} = 2^{\alpha_k}$ לכל k טבעי. הוכיחו באינדוקציה שלכל k טבעי מתקיימות העובדות: $\alpha_k + \alpha_k = \alpha_k$, $\alpha_k \cdot \alpha_k = \alpha_k$, $\alpha_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_k}$, $\alpha_k^{\alpha_{k-1}} = \alpha_k$. אח"כ השתמשו בחוקי המונוטוניות.)
6. תהיינה X קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{R}^2$ ל־ $\mathbb{R}^3$, Y קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{N}^2$ ל־ $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, Z קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{Q}^4$, T קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{Q}^\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}^\mathbb{Q}$. מצאו את העצמות של קבוצות אלה וסדרו אותם לפי הגודל.
7. הוכיחו כי לא ניתן לכסות את המישור ע"י $\aleph_0$ ישרים, כלומר לא קיימת קבוצה X בעלת העצמה $\aleph_0$ של ישרים במישור כך שהאיחוד של אברי X הוא המישור כולו.

4.11 דוגמאות נוספות לחישוב עצמות

[75] דוגמא: העצמה של קבוצת הפולינומים עם מקדמים שלמים היא $\aleph_0$.

פולינום עם מקדמים שלמים הוא סכום סופי מהצורה $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, כאשר x הוא המשתנה, והמקדמים $a_0, a_1, \ldots, a_n$ הם מספרים שלמים. החזקה הגבוהה ביותר של x שהמקדם שלה שונה מ־ 0 נקראת **המעלה** של הפולינום. לדוגמא: $1 + 2x + 5x^2$ הוא פולינום ממעלה 2; $3x - 8x^3 + 11x^{17}$ הוא פולינום ממעלה 17.

קבוצת הפולינומים עם מקדמים שלמים מסומנת ב־ $\mathbb{Z}[x]$. **נוכיח ש־ $\mathbb{Z}[x]$ היא קבוצה בת מניה.**

לכל $k \in \mathbb{N}$, נסמן ב־ $\mathbb{Z}_k[x]$ את קבוצת הפולינומים עם מקדמים שלמים ממעלה קטנה או שווה מ־ k. ברור ש־ $\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_k[x]$.

נוכיח שלכל k טבעי מתקיים $|\mathbb{Z}_k[x]| = \aleph_0$. תהי $\varphi_k : \mathbb{Z}_k[x] \to \mathbb{Z}^{\{0,1,\ldots,k\}}$ המוגדרת ע"י $\varphi_k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$. ברור שהפונקציה φ_k היא חד־חד־ערכית ועל, לכן $|\mathbb{Z}_k[x]| = |\mathbb{Z}^{\{0,1,\ldots,k\}}| = \aleph_0^{k+1} = \aleph_0$. מכאן $\mathbb{Z}[x]$ היא קבוצה בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה (טענה **[62]**). כמובן $\mathbb{Z}[x]$ היא קבוצה אינסופית, ולכן $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$.

[76] דוגמא: העצמה של קבוצת המספרים האלגבריים היא $\aleph_0$.

מספר ממשי נקרא **אלגברי** אם הוא שורש של פולינום עם מקדמים שלמים. נסמן את הקבוצה של מספרים אלגבריים ב־ A. נשים לב ש־ $\mathbb{Q} \subseteq A$ כי מספר רציונלי a/b הוא שורש של פולינום עם מקדמים שלמים $bx - a$. עם זאת, $\mathbb{Q}$ מוכלת ממש ב־ A: לדוגמא, $\sqrt{2}$ אינו רציונלי, אבל הוא מספר אלגברי כי הוא שורש של הפולינום $x^2 - 2$. לפי כך, $\mathbb{Q} \subsetneqq A \subsetneqq \mathbb{R}$ ולכן $\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph$. נראה ש־ $|A| = \aleph_0$.

כידוע, לכל פולינום עם מקדמים ממשיים יש מספר סופי של שורשים ממשיים (למעשה הוא חסום ע"י מעלת הפולינום). יהי $p \in \mathbb{Z}[x]$, נסמן את קבוצת השורשים שלו ב־ $r(p)$. אז $A = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{Z}[x]} r(p)$. כאן כל קבוצה $r(p)$ סופית, וקבוצת האינדקסים $\mathbb{Z}[x]$ היא בת מניה לפי התוצאה הקודמת **[75]**. לכן A היא קבוצה בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה.

מספר ממשי שאינו אלגברי נקרא **טרנסצנדנטי**. לפי כך, קבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים היא $\mathbb{R} \setminus A$. לפי כך, הוכחנו שקיימים מספרים טרנסצנדנטיים מבלי למצוא אף דוגמא של מספר כזה[35]. יתר על כן, מבחינת העצמות, "רוב" המספרים הממשיים הם טרנסצנדנטיים: $|\mathbb{R} \setminus A| = \aleph$ (למה? $|\mathbb{R} \setminus A| > \aleph_0$ כמעט מיידי, אבל למה עצמה זו שווה ל־ $\aleph$?)

[77] דוגמא: העצמה של קבוצת הפונקציות העולות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{N}$ היא $\aleph$.

פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ נקראת **עולה** אם $x \leq y \Leftarrow f(x) \leq f(y)$[36]. תהי X קבוצת הפונקציות העולות ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. נוכיח ש־ $|X| = \aleph$.

מצד אחד: $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ולכן $|X| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.

כעת נראה $|X| \geq \aleph$ ע"י בניית פונקציה חד־חד־ערכית φ מהקבוצה $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (שעצמתה $\aleph$) ל־ X. עבור $\ell \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, נגדיר $\varphi(\ell)$ להיות הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המוגדרת באופן הבא: $f(0) = 0$; ועבור $n > 0$, $f(n) = f(n-1) + \ell(n-1)$. (לדוגמא: עבור $\ell = (01001101\ldots)$ נקבל $\varphi(\ell) = (001112334\ldots)$; עבור $\ell = (11100100\ldots)$ נקבל $\varphi(\ell) = (012333444\ldots)$).

ברור שלכל $\ell \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, הפונקציה $\varphi(\ell)$ באמת עולה (לכל $n > 0$ מתקיים $f(n) = f(n-1) + \ell(n-1) \geq f(n-1)$), לכן φ היא באמת פונקציה מ־ $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ל־ X. היא גם חד־חד־ערכית: נניח ש־ $\ell_1 \neq \ell_2$, ויהי k המספר הקטן ביותר כך ש־ $\ell_1(k) \neq \ell_2(k)$; אז לכל $n \leq k$ יתקיים $(\varphi(\ell_1))(n) = (\varphi(\ell_2))(n)$, אבל עבור k יהיה $(\varphi(\ell_1))(k) \neq (\varphi(\ell_2))(k)$, ולכן

[35] דוגמאות של מספרים טרנסצנדנטיים מוכרים הם π ו־ e. ההוכחות שמספרים אלה באמת טרנסצנדנטיים אינן אלמנטריות.

[36] ליתר דיוק, פונקציות כאלה נקראות **עולות במובן חלש** או **לא יורדות**. לשם קיצור, נקרא להן פשוט **עולות**.

$\varphi(\ell_1) \neq \varphi(\ell_2)$[37]. ובכן, מצאנו פונקציה חד־חד־ערכית $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$, לכן $\aleph = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |X|$.

הראנו $|X| \leq \aleph$ ו־ $|X| \geq \aleph$, לכן, לפי CSB, $|X| = \aleph$.

[78] דוגמא: העצמה של קבוצת הפונקציות היורדות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{N}$ היא $\aleph_0$.

פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ נקראת **יורדת** אם $x \geq y \Leftarrow f(x) \leq f(y)$[38]. תהי X קבוצת הפונקציות היורדות ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. נוכיח ש־ $|X| = \aleph_0$.

נשים לב שכל פונקציה f ב־ X מתייצבת, כלומר קיים k כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $f(n) = f(k)$: אחרת נקבל שקיימים מספרים טבעיים $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ כך ש־ $f(k_1) > f(k_2) > f(k_3) > \ldots$, וזה לא ייתכן כי ב־ $\mathbb{N}$ אין סדרה אינסופית יורדת ממש.

מעכשיו, הפתרון דומה לזה שבדוגמא **[63]** : לכל k טבעי, מגדירים X_k כקבוצת הפונקציות מ־ X שמתייצבות ב־ k או לפניו, כלומר $f \in X_k$ אם $f \in X$ ולכל $n \geq k$ מתקיים $f(n) = f(k)$. ברור ש־ $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$. לכל $k \in \mathbb{N}$, $|X_k| = \aleph_0$: כדי להראות את זה, בונים פונקציה $\pi_k : X_k \to \mathbb{N}^{\{0,1,\ldots,k\}}$ המוגדרת ע"י $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$. זו פונקציה חד־חד־ערכית כי אברי X_k מתייצבים ב־ k, ולכן $|X_k| \leq |\mathbb{N}^{\{0,1,\ldots,k\}}| = \aleph_0^{k+1} = \aleph_0$.

לכן $|X| \leq \aleph_0$ לפי המשפט על איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. כדי להראות שוויון, מספיק למצוא תת־קבוצה אינסופית של X, למשל ־ הקבוצה של כל הפונקציות הקבועות ב־ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

נשווה את שתי התוצאות האחרונות. בשתיהן מדובר בתת־קבוצה של $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המוגדרת ע"י תנאי מסוים. מאחר ש־ $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$, ברור מראש שהעצמה היא לכל היותר $\aleph$. ניתן לפרש את התוצאות כך: התנאי בדוגמא הראשונה – פונקציות עולות – לא היה "מספיק חזק" כדי להוריד את העצמה, ואילו התנאי בדוגמא השניה (ניתן להבין מהפתרון שהתנאי שבאמת עבד פה היה זה שהפונקציות מתייצבות) היה "מספיק חזק" כדי להוריד את העצמה ל־ $\aleph_0$.

[79] דוגמא: העצמה של קבוצת הפונקציות ההפיכות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$ היא $2^{\aleph}$.

תהי X הקבוצה של הפונקציות ההפיכות (כלומר, הפונקציות שהן החד־חד־ערכיות וגם על) מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$. נוכיח ש־ $|X| = 2^{\aleph}$.

מצד אחד: $X \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ולכן $|X| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

תהיינה A ו־ B שתי תת־קבוצות של $\mathbb{R}$ כך ש־ $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{R}$ ו־ $|A| = |B| = \aleph$. לדוגמא, ניתן לקחת $A = (-\infty, 0)$, $B = [0, +\infty)$. תהי φ פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ A ל־ B (פונקציה כזאת קיימת כי $|A| = |B|$). לשם פשטות, עבור $x \in A$ נסמן את $\varphi(x)$ ב־ x'.

לכל C, תת־קבוצה כלשהי של A, נתאים פונקציה $h_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ באופן הבא. יהי $x \in A$.

- אם $x \in C$, נגדיר $h_C(x) = x$, $h_C(x') = x'$.
- אם $x \notin C$, נגדיר $h_C(x) = x'$, $h_C(x') = x$.

כלומר, אם $x \in C$ אז x ו־ x' עוברים לעצמם, ואם $x \notin C$ אז x ו־ x' מתחלפים תחת פונקציה זו.

h_C היא באמת פונקציה עם תחום הגדרה $\mathbb{R}$: כל איבר של $\mathbb{R}$ הוא או איבר של A, או איבר של B (ושייך רק לאחת מהן, כי הן זרות). אם הוא שייך ל־ B אז ניתן לכתוב אותו בצורה x' עבור x יחיד A, (כי φ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ A ל־ B). בכל מקרה הכלל מגדיר את $h_C(x)$ ואת $h_C(x')$.

[37] מדוע φ איננה פונקציה על?

[38] שוב, המונח היותר מדוייק הוא **פונקציה יורדת במובן חלש** או **פונקציה לא עולה**.

כמו כן, פונקציה h_C היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל: לכל זוג x ו־ x', או שכל אחד הוא המקור של עצמו ($x \mapsto x$, $x' \mapsto x'$ תחת h_C), או שהם מקור אחד של השני ($x \mapsto x'$, $x' \mapsto x$ תחת h_C).

הפונקציה $X \to P(A)$ המוגדרת ע"י $C \mapsto h_C$ היא חד־חד ערכית: קל לראות שאם $C \neq D$ אז $h_C \neq h_D$. לכן $|X| \geq |P(A)| = 2^{\aleph}$.

קיבלנו $|X| \leq 2^{\aleph}$ ו־ $|X| \geq 2^{\aleph}$, לכן $|X| = 2^{\aleph}$.

נסכם: ידוע שהעצמה של קבוצת כל הפונקציות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$ היא $2^{\aleph}$. שאלנו האם התנאי הנוסף – פונקציות הפיכות – הוא מספיק חזק כדי להוריד את העצמה. מצאנו שלא: העצמה של קבוצת הפונקציות ההפיכות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$ היא עדיין $2^{\aleph}$. בהוכחה זו, בעצם, התאמנו (בעזרת פונקציה חד־חד־ערכית ועל) **חלק** מפונקציות כאלה לקבוצת החזקה של $(-\infty, 0)$. מאחר ש־ $|(-\infty,0)| = \aleph$ ולכן $|P((-\infty,0))| = 2^{\aleph}$, מזה נבע שהעצמה של הקבוצה הנדונה היא לפחות $2^{\aleph}$.

נסתכל כעת בקבוצה אחרת של פונקציות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$: פונקציות רציפות. ברור ש"פונקציה אקראית" לא תהיה רציפה: אם כל ערכי $f(x)$ נבחרים בצורה אקראית, אין שום סיבה לכך שלערכים "קרובים" של x יתאימו ערכים "קרובים" של $f(x)$. כלומר, במובן מסויים "רוב" הפונקציות הממשיות אינן רציפות בשום מקום. בדוגמא הבאה נראה שזה מוצא ביטוי גם בעצמות: תנאי זה – רציפות – כבר מספיק חזק כדי להוריד עצמה.

[80] דוגמא: העצמה של קבוצת הפונקציות הרציפות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$ היא $\aleph$.

תהי X הקבוצה של הפונקציות הרציפות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$. נוכיח ש־ $|X| = \aleph$.

הוכחה של טענה זו מבוססת על טענה עזר מחדו"א שניתן לנסח כך: "פונקציה ממשית רציפה נקבעת ע"י הערכים שלה בנקודות הרציונליות". זה אומר: אם $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הן פונקציות רציפות ולכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $g(a) = f(a)$, אז $g = f$ (כלומר, מתקיים $g(x) = f(x)$ **לכל** $x \in \mathbb{R}$).

נוכיח את טענת העזר. נניח ש־ f ו־ g רציפות, ולכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(a) = g(a)$. כידוע, כל מספר ממשי הוא גבול של סדרה שאבריה מספרים רציונליים. יהי $x \in \mathbb{R}$. תהי $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה **של מספרים רציונליים** שמתכנסת ל־ x: $\lim x_n = x$. אז, מאחר ש־ f ו־ g רציפות, מתקיים

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(x).$$

נחזור להוכחת הטענה $|X| = \aleph$. נגדיר פונקציה φ מ־ X ל־ $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, ע"י $\varphi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ (כלומר, $\varphi(f)$ היא הצמצום של f לתחום ההגדרה $\mathbb{Q}$). מטענת העזר נובע ש־ φ היא פונקציה חד־חד־ערכית. לכן $|X| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

מצד שני, לכל c ממשי, הפונקציה הקבועה $f(x) \equiv c$ היא רציפה. מכאן $|X| \geq \aleph$.

קיבלנו $|X| \leq \aleph$ ו־ $|X| \geq \aleph$. לכן, לפי CSB, $|X| = \aleph$.

תרגילים.

1. חשבו את העצמות של הקבוצות הבאות:
   (א) קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$, המתכנסות לגבול סופי עבור $x \to +\infty$.
   (ב) קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$, המתכנסות ל־ 0 עבור $x \to +\infty$.
   (ג) קבוצת הפונקציות היורדות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Q}$.
   (ד) קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Q}$, המתכנסות ל־ 0 עבור $n \to +\infty$.
   (ה) קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{Q}$, מתכנסות ל־ 0 עבור $n \to +\infty$ ויורדות.
   (ו) קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$ בעלות נקודת אי־רציפות אחת לכל היותר.

(ז) קבוצת כל היחסים ב־ $\mathbb{N}$.

(ח) קבוצת כל יחסי השקילות ב־ $\mathbb{N}$.

(ט) הקבוצה של כל הקבוצות הבלתי תלויות במרחב הווקטורי $\mathbb{R}^3$.

(י) הקבוצה של כל הקבוצות הפורשות את המרחב הווקטורי $\mathbb{R}^3$.

(יא) הקבוצה של כל הקבוצות הסופיות הפורשות את המרחב הווקטורי $\mathbb{R}^3$.

(יב) הקבוצה של כל התת־קבוצות הסופיות של $\mathbb{R}$.

(יג) הקבוצה של כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$ שהינן בעלות העצמה $\aleph_0$.

(יד) הקבוצה של כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$ שהינן בעלות העצמה $\aleph$.

הוכיחו:

2. (א) העצמה של קבוצת המספרים האי־רציונליים היא $\aleph$.

(ב) העצמה של קבוצת המספרים טרנסצנדנטיים היא $\aleph$.

3. תרגיל זה הינו המשך לדוגמא **[80]**.

(א) תהי X_1 קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שיש להן נקודת אי־רציפות אחת לכל היותר. הוכיחו כי $\aleph = |X_1|$.

(ב) תהי X_1 קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שיש להן מספר סופי של נקודות אי־רציפות. הוכיחו כי $\aleph = |X_2|$.

(ג) תהי X_1 קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שיש להן לכל היותר $\aleph_0$ נקודות אי־רציפות. הוכיחו כי $\aleph = |X_3|$.

(ד) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה עולה. הוכיחו כי קבוצת נקודות האי־רציפות של f היא קבוצה בת מניה. (הדרכה: כל אי־רציפות של פונקציה מונוטונית היא מסוג "קפיצה". לכל c, נקודת אי־רציפות של f, נגדיר $d_c = \lim_{x\to c+} f(x) - \lim_{x\to c-} f(x)$. הראו כי לכל n טבעי, קבוצת נקודות האי־רציפות של f שעבורן $d_c < \frac{1}{n}$ היא קבוצה סופית. הסיקו כי קבוצת נקודות האי־רציפות של f היא קבוצה בת מניה.)

(ה) תהי כעת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה עולה. הוכיחו כי קבוצת נקודות האי־רציפות של f היא קבוצה בת מניה. (שימו לב: השיקול מהסעיף הקודם לא יעבוד כי הפעם f מוגדרת לא על קטע סגור אלא על $\mathbb{R}$ כולו, ולכן לא מובטח שקבוצת נקודות האי־רציפות של f שעבורן $d_c < \frac{1}{n}$ תהיה קבוצה סופית.)

(ו) תהי X קבוצת הפונקציות המונוטוניות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\aleph = X$.

4.12 סכום ומכפלה של משפחות כלשהן של קרדינלים

כשדיברנו על חשבון עצמות, הגדרנו סכום ומכפלה של שני קרדינלים. הודות לאסוציאטיביות של פעולות אלה, ניתן לדבר על סכום ועל מכפלה של מספר כלשהו (אך סופי) של קרדינלים. בפרק זה נדבר על סכומים ומכפלות של קבוצה כלשהי של קרדינלים. למעשה, ההגדרות די צפויות:

תהי $(\alpha_i)_{i\in I}$ משפחה של קרדינלים. לכל $i \in I$, תהי A_i קבוצה כלשהי כך ש־ $|A_i| = \alpha_i$. נגדיר:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \left| \bigcup_{i\in I} (A_i \times \{i\}) \right|,$$

$$\prod_{i\in I} \alpha_i = \left| \bigtimes_{i\in I} A_i \right|.$$

כלומר הסכום של $(\alpha_i)_{i\in I}$ הוא הקרדינל של האיחוד הזר של קבוצות בעלות עצמות אלה (בהגדרה השתמשנו בקבוצות $A_i \times \{i\}$ במקום A_i כדי להבטיח שהאיחוד יהיה זר), והמכפלה היא הקרדינל של המכפלה הקרטזית של קבוצות כאלה.

דוגמא: נחשב את $\sum_{n\in\mathbb{N}_+} n = 1+2+3+4+\ldots$ ואת $\prod_{n\in\mathbb{N}_+} n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots$.

למעשה, לא כל כך קשה לנחש את התשובות. עבור הסכום, אנחנו מצפים שיתקיים

$$1+2+3+4+\ldots \geq 1+1+1+1+\ldots = \aleph_0,$$

$$1+2+3+4+\ldots \leq \aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\ldots = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0,$$

ועבור מכפלה,

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots = 2^{\aleph_0} = \aleph,$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots \leq \aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\ldots = {\aleph_0}^{\aleph_0} = \aleph,$$

אבל עדיין יש להצדיק את רוב המעברים. במקום לעשות זאת (חלק מהטענות יופיעו בתרגילים), נעשה את הדוגמא הזאת ברמה של קבוצות.

כמובן, בתור נציג לקרדינל סופי n ניקח את הקבוצה $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$.

הסכום $1+2+3+4+\ldots$ הוא עצמת הקבוצה $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{1,2,\ldots,n\}\times\{n\} = \{(a,b)\in(\mathbb{N}_+)^2 :\ a\leq b\}$. נשים לב שהקבוצה A מכילה את הקבוצה $\{(1,n) :\ n\in\mathbb{N}_+\}$ שעצמתה בבירור $\aleph_0$. מצד שני, A מוכלת ב־ $(\mathbb{N}_+)^2$ שעצמתה גם כן $\aleph_0$. בכך הוכחנו ש־ $1+2+3+4+\ldots = \aleph_0$.

המכפלה $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots$ היא עצמת הקבוצה $\bigtimes_{n=1}^{\infty}\{1,2,\ldots,n\}$. לא קשה לראות (הוכיחו!) כי הגורם $\{1\}$ לא משפיע על עצמת קבוצה זו, כלומר אנחנו מחפשים את עצמת הקבוצה $B = \bigtimes_{n=2}^{\infty}\{1,2,\ldots,n\}$. הקבוצה B מכילה את הקבוצה $\bigtimes_{n=2}^{\infty}\{1,2\}$; כלומר $\{1,2\}^{(\mathbb{N}_+\setminus\{1\})}$, ולכן $|B|\geq 2^{\aleph_0}=\aleph$. מצד שני, B מוכלת ב־ $(\mathbb{N}_+)^{(\mathbb{N}_+\setminus\{1\})}$, ולכן $|B|\leq {\aleph_0}^{\aleph_0}=\aleph$. בכך הוכחנו ש־ $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots = \aleph$.

תרגילים

1. תהי I קבוצת אינדקסים כלשהי.
   (א) הוכיחו כי $\sum_{i\in I} 1$ (כלומר, $\sum_{i\in I}\alpha_i$ כאשר $\alpha_i = 1$ לכל $i\in I$) שווה ל־ $|I|$.
   (ב) האם בהכרח $\prod_{i\in I}\alpha_i = 1$?

2. תהי I קבוצת אינדקסים כלשהי, ונניח שלכל $i\in I$ מתקיים $\alpha_i = \alpha$
   (א) הוכיחו כי $\sum_{i\in I}\alpha = \alpha\cdot|I|$.
   (ב) הוכיחו כי $\prod_{i\in I}\alpha = \alpha^{|I|}$.

3. תהיינה $(\alpha_i)_{i\in I}$ ו־ $(\beta_i)_{i\in I}$ שתי משפחות של קרדינלים כך שלכל $i \in I$ מתקיים $\alpha_i \le \beta_i$.
הוכיחו כי $\sum_{i\in I}\beta_i \le \sum_{i\in I}\alpha_i$ ו־ $\prod_{i\in I}\beta_i \le \prod_{i\in I}\alpha_i$.

4.13 אי־שוויון קניג

בפרק זה נוכיח את המשפט הבא:

[81] משפט (אי־שוויון קניג[39]): תהיינה $(\alpha_i)_{i\in I}$ ו־ $(\beta_i)_{i\in I}$ שתי משפחות של קרדינלים כך שלכל $i \in I$ מתקיים $\alpha_i < \beta_i$. אז מתקיים:

$$\sum_{i\in I}\alpha_i \ < \ \prod_{i\in I}\beta_i.$$

הייחוד של טענה זו הוא באי־שוויון **חזק** בתוצאה. אכן, ברוב התוצאות שראינו עד עכשיו מאי־שוויונות חזקים יכולנו להסיק רק אי־שוויון חלש (למשל: אם לכל $i \in I$ מתקיים $\alpha_i < \beta_i$, אז ניתן להסיק $\sum_{i\in I}\alpha_i \le \sum_{i\in I}\beta_i$, אבל לא ניתן להסיק $\sum_{i\in I}\alpha_i < \sum_{i\in I}\beta_i$). העובדה שבאי־שוויון קניג מופיע סכום מול מכפלה, לא הופכת אותו לברור או פשוט (במיוחד כשהקרדינלים וקבוצת האינדקסים הם אינסופיים).

מצד שני, הייתה לנו תוצאה כללית אחת שבא הוכחנו אי־שוויון חזק בין עצמות: משפט קנטור **[50]**. לכן לא נופתע שאי־שוויון קניג יוכח בשיטת האלכסון (ובמיוחד אם נשים לב כי משפט קנטור הוא מסקנה של אי־שוויון קניג!)

הוכחה.

תהיינה $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I}$ קבוצות זרות כך ש־ $|A_i| = \alpha_i, |B_i| = \beta_i$. נזכיר שנתון: לכל $i \in I$, מתקיים $|A_i| < |B_i|$.

- **נוכיח כי קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $\boldsymbol{f : \bigcup_{i\in I} A_i \ \to \ \bigtimes_{i\in I} B_i}$.**

לכל $i \in I$, תהי g_i פונקציה חד־חד־ערכית מ־ A_i ל־ B_i. פונקציות כאלה קיימות כי $|A_i| < |B_i|$, ומאותה הסיבה, לכל $i \in I$, הפונקציה g_i איננה על.

לכל $i \in I$, יהי b_i איבר של B_i שאינו שייך לתמונה של g_i.

יהי $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$. נבנה $\varphi_a : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$ באופן הבא:

- אם $x \in A_i$, נגדיר $\varphi_a(i) = g_i(a)$,
- אם $x \notin A_i$, נגדיר $\varphi_a(i) = b_i$.

בכל אחד מהמקרים, $\varphi_a(i) \in B_i$ (מפני ש־ g_i היא פונקציה מ־ A_i ל־ B_i; ו־ $b_i \in B_i$). לכן $\varphi_a \in \bigtimes_{i\in I} B_i$. מכאן ש־ $f : a \mapsto \varphi_a$ הינה פונקציה מ־ $\bigcup_{i\in I} A_i$ ל־ $\bigtimes_{i\in I} B_i$.

נראה ש־ f היא פונקציה חד־חד־ערכית. יהיו $a_1, a_2 \in \bigcup_{i\in I} A_i$, $a_1 \neq a_2$. כעת יש שתי אפשרויות:

- אם $a_1, a_2 \in A_i$, אז $\varphi_{a_1}(i) = g_i(a_1)$ ו־ $\varphi_{a_2}(i) = g_i(a_2)$. מאחר ש־ g_i היא פונקציה חד־חד־ערכית, אלה איברים שונים: $\varphi_{a_1}(i) \neq \varphi_{a_2}(i)$. מכאן $\varphi_{a_1} \neq \varphi_{a_2}$ (כי פונקציות אלה מקבלות ערכים שונים עבור i), כלומר $f(a_1) \neq f(a_2)$.
- אם $a_1 \in A_i, a_2 \in A_j$ כאשר $i \neq j$, אז $\varphi_{a_1}(i) = g_i(a_i) \in \mathrm{Im}(g_i)$, ואילו $\varphi_(a_1)(i) = b_i \notin \mathrm{Im}(g_i)$, ומכאן שגם במקרה זה $f(a_1) \neq f(a_2)$.

[39] על שם מתמטיקאי הונגרי Gyula Kőnig (1849 – 1913).

נדגים חלק זה של ההוכחה: תהי $I = \{1,2\}$, ותהיינה

$$A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{6,7,8\}; \quad B_1 = \{11,12,13\}, B_2 = \{16,17,18,19\}.$$

ניקח

$$g_1 : 1 \mapsto 11,\ 2 \mapsto 12; \quad g_2 : 6 \mapsto 16,\ 7 \mapsto 17,\ 8 \mapsto 18.$$

אז $b_1 = 5, b_2 = 19$.

במקרה זה, נקבל

$$f : 1 \mapsto (11,19),\ 2 \mapsto (12,19),\ 6 \mapsto (5,16),\ 7 \mapsto (5,17),\ 8 \mapsto (5,18).$$

נעבור לחלק השני בהוכחה:

- **נוכיח כי לא קיימת פונקציה $h : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigtimes_{i \in I} B_i$ שהינה פונקציה על.**

  תהי $h : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigtimes_{i \in I} B_i$.

  לכל $i \in I$, תהי $h_i : A_i \to B_i$ הפונקציה המוגדרת ע"י $h_i(a) = (h(a))(i)$.

  מאחר שלכל $i \in I$ מתקיים $|A_i| < |B_i|$, אנו מסיקים שלכל $i \in I$ קיים $d_i \in B_i$ כך ש־ $d_i \notin \mathrm{Im}(h_i)$.

  תהי $delta : I \to \bigcup_{i \in I} B_i$ המוגדרת ע"י $\delta(i) = d_i$. מאחר שלכל $i \in I$ מתקיים $d_i \in B_i$, הרי ש־ $\delta \in \bigtimes_{i \in I} B_i$.

  נוכיח כי $\delta \notin \mathrm{Im}(h)$ (שימו לב שפועל כאן אותו העקרון כמו בשיטת האלכסון).

  נניח בשלילה ש־ $\delta \in \mathrm{Im}(h)$. אז קיים $a \in A_{i_0}$ (כאשר i_0 הוא איבר מסויים בקבוצת האינדקסים) כך ש־ $\delta = h(a)$.
  כעת, $\delta(i_0) = (h(a))(i_0) = h_{i_0}(a) \in \mathrm{Im}(h_{i_0})$, בסתירה להגדרת δ: לכל $i \in I$ מתקיים $\delta(i) = d_i \notin \mathrm{Im}(h_i)$.

בכך סיימנו את ההוכחה. $\square$

תרגילים

1. הראו שמשפט קנטור נובע מאי־שויון קניג.
2. בפרק 4.12 הראנו ש־ $(1+2+3+4+\dots) < (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots)$. הסיקו תוצאה זו מאי־שויון קניג.
3. (הכללה של הסעיף הקודם) תהי $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ סדרה עולה ממש של קרדינלים. הוכיחו ש־ $\sum_{i \in I} c_i < \prod_{i \in I} c_i$.
4. תהי כעת $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots$ סדרה עולה חלש של קרדינלים. האם בהכרח $\sum_{i \in I} c_i < \prod_{i \in I} c_i$? האם בהכרח $\sum_{i \in I} c_i \leq \prod_{i \in I} c_i$?

5 יחסי סדר חלקי

5.1 הגדרה ודוגמאות

הגדרה של יחס סדר חלקי. יחס R בקבוצה X נקרא ***יחס סדר חלקי*** אם הוא מקיים את שלוש התכונות הבאות:

1. רפלקסיביות: לכל $x \in X$, מתקיים $(x,x) \in R$.
2. טרנזיטיביות: אם $(x,y) \in R$ ו־ $(y,z) \in R$, אז $(x,z) \in R$.
3. אנטי־סימטריות: אם $(x,y) \in R$ ו־ $(y,x) \in R$, אז $x = y$.

הקבוצה X יחד עם יחס סדר חלקי המוגדר בה נקראת **קבוצה סדורה חלקית** (לפי הסדר R).

סימון $\leq$ עבור יחס סדר חלקי כללי. הדרישות בהגדרה של יחס סדר חלקי מבטאות את מה שצפוי מכל יחס שנקרא "סדר". דוגמא בולטת של יחס סדר חלקי הוא היחס $\leq$ בקבוצת המספרים הממשיים (כלומר, היחס R המוגדר ע"י $(x,y) \in R \Leftrightarrow x \leq y$). עקב כך נהוג לסמן יחס סדר חלקי כלשהו באמצעות הסימן $\leq_R$: אם ידוע שיחס R הוא יחס סדר חלקי, במקום $(x,y) \in R$ נכתוב $x \leq_R y$.

עם סימון זה, שלוש הדרישות בהגדרה של יחס סדר חלקי נראות כך:

1. רפלקסיביות: לכל $x \in X$, מתקיים $x \leq_R x$.
2. טרנזיטיביות: אם $x \leq_R y$ ו־ $y \leq_R z$, אז $x \leq_R z$.
3. אנטי־סימטריות: אם $x \leq_R y$ ו־ $y \leq_R x$, אז $x = y$.

קבוצה X סדורה חלקית לפי יחס $\leq_R$ תסומן ב־ $(X, \leq_R)$. בדרך כלל נשתמש, לשם פשטות, בסימון $\leq$ (במקום $\leq_R$): נכתוב $x \leq y$ במקום $x \leq_R y$, ו־ $(X, \leq)$ במקום $(X, \leq_R)$, ונאמר: "x קטן או שווה מ־ y". כלומר, נשתמש בסימון ובמינוח של היחס $\leq$ הרגיל עבור יחס סדר חלקי כלשהו. נשתמש בהתאם גם בסימונים $>$, $\geq$, $<$ (כשנחוץ, נכתוב $<_R$ וכד'):

- נכתוב $x < y$ ("x קטן מ־ y") כאשר $x \leq y$ ו־ $x \neq y$;
- נכתוב $x \geq y$ ("x גדול או שווה מ־ y") כאשר $y \leq x$;
- נכתוב $x > y$ ("x גדול או שווה מ־ y") כאשר $y < x$.

איברים ניתנים להשוואה. יחס סדר מלא. שרשרת. המילה "חלקי" במונח "סדר חלקי" מתייחסת לכך שבאופן כללי, אם X סדורה חלקית לפי $\leq$, ו־ $x, y \in X$, לא נדרש שבהכרח יתקיים $x \leq y$ או $y \leq x$. אם עבור $x, y \in X$ מתקיים $x \leq y$ או $y \leq x$, נאמר ש־ x ו־ y **ניתנים להשוואה**. אחרת נאמר ש־ x ו־ y **לא ניתנים להשוואה** (או: x ו־ y **הם איברים בלתי תלויים**).

יחס סדר חלקי שבו כל שני איברים ניתנים להשוואה נקרא **יחס סדר לינארי**, או **יחס סדר מלא**. הסדר הרגיל $\leq$ ("קטן או שווה") בקבוצה $\mathbb{R}$ (או ב־ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$...) הוא יחס סדר מלא.

אם $(X, \leq_X)$ היא קבוצה סדורה חלקית ו־ Y היא תת־קבוצה של X כך שכל שני אברי Y ניתנים להשוואה לפי הסדר $\leq_X$, נאמר ש־ Y היא **שרשרת** ב־ X.

נראה שתי דוגמאות נוספות של יחסי סדר חלקי.

[82] דוגמא: יחס ההכלה של קבוצות.

תהי X קבוצה כלשהי שאבריה הן קבוצות (למשל, X יכולה להיות קבוצת החזקה של קבוצה מסוימת). נגדיר עבור $A, B \in X$:

$$A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B.$$

יחס זה הוא יחס סדר חלקי כי (1) לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$, (2) מ־ $A \subseteq B$ ו־ $B \subseteq C$ נובע $A \subseteq C$, (3) מ־ $A \subseteq B$ ו־ $B \subseteq A$ נובע $A = B$. יחס כזה, באופן כללי, איננו יחס לינארי.

תהי, למשל, $X = P(\{1,2,3\})$. אז, לפי יחס ההכלה, $\{1\} \leq \{1,2,3\}$, $\varnothing \leq \{1,3\}$, וכו. יחס ההכלה בקבוצה זו אינו לינארי: לדוגמא, $\{1,2\}$ ו־ $\{2,3\}$ לא ניתנים להשוואה (כי אף אחת מהקבוצות האלה לא מוכלת בשניה).

ב־ X יש מספר שרשראות, לדוגמא: $\{\varnothing, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

[83] דוגמא: יחס התחלקות ב־ $\mathbb{N}_+$.

נגדיר ב־ $\mathbb{N}_+$ את היחס הבא:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x|y.$$

כלומר, "x קטן או שווה מ־ y" לפי יחס זה אם ורק אם y מתחלק בלי שארית ב־ x. יחס זה הוא יחס סדר חלקי כי (1) לכל $x \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $x|x$, (2) מ־ $x|y$ ו־ $y|z$ נובע $x|z$, (3) מ־ $x|y$ ו־ $y|x$ נובע $x = y$ (כלומר: לא קיימים x ו־ y שונים ב־ $\mathbb{N}_+$ כך שיתקיים גם $x|y$ וגם $y|x$). לפי יחס זה, לדוגמא, $3 \leq 12$, $7 \leq 28$. יחס זה אינו יחס סדר לינארי: לדוגמא, 5 ו־ 7 לא ניתנים להשוואה. נשים לב לתפקיד המיוחד של המספר 1 ביחס זה: לכל $x \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $1 \leq x$.

תרגילים

1. יהי $\leq$ יחס סדר חלקי בקבוצה X.

(א) הוכיחו: אם $x < y$ ו־ $y < z$, אז $x < z$.

(ב) הוכיחו כי לא ייתכן המצב: $x < y$ ו־ $y < x$.

(ג) האם ייתכן המצב: $x < y$ ו־ $y \leq x$.

(ד) הוכיחו כי גם היחס $\geq$ הוא יחס סדר חלקי בקבוצה X.

2. יהי S יחס בקבוצה X כך ש־

- לכל $x \in X$ מתקיים $(x,x) \notin S$ (אנטי־רפלקסיביות).
- אם $(x,y) \in S$ אז $(y,x) \notin S$ (א־סימטריות).
- אם $(x,y),(y,z) \in S$ אז $(x,z) \in S$ (טרנזיטיביות).

יחס S שמקיים דרישות אלה נקרא "יחס סדר חלקי חזק".

הוכיחו:

(א) אם R הוא יחס סדר חלקי, אז $R \setminus I_R$ הוא יחס סדר חלקי חזק.

(ב) אם S הוא יחס סדר חלקי חזק, אז $S \cup I_R$ הוא יחס סדר חלקי.

(ג) קיימת התאמה חד־חד־ערכית ועל בין קבוצת יחסי סדר חלקי לבין קבוצת יחסי סדר חלקי חזקים ב־ X.

3. כמה יחסי סדר חלקי קיימים בקבוצה $\{1,2,3\}$?

4. כמה (מבחינת העצמה) יחסי סדר חלקי יש ב־ $\mathbb{N}$?

5. נגדיר את היחס R בקבוצה של מספרים מרוכבים ע"י $(z,w)\in R \Leftrightarrow |z|\le|w|$. האם R הוא יחס סדר חלקי? אם כן, האם זה יחס סדר לינארי?

6. נתבונן ביחס המוגדר ע"י $x\le y \quad\Leftrightarrow\quad x|y$ (בדומה ליחס מהדוגמא **[83]**) בקבוצה $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. הום יחס זה הוא יחס סדר חלקי?

7. כעת נתבונן ביחס המוגדר ע"י $x\le y \quad\Leftrightarrow\quad x|y$ בקבוצה $\mathbb{N}$. (לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $n|0$). הום יחס זה הוא יחס סדר חלקי?

8. תנו דוגמא של קבוצה של קבוצות שבה יחס ההכלה יהיה לינארי.

9. תהיינה $(X,\le_X)$, $(Y,\le_Y)$ שתי קבוצות סדורות חלקית. נגדרי יחס $\le$ ב־ $X\times Y$ באופן הבא:

$$(a,b)\le(c,d) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a\le_X c \\ b\le_Y d \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי $\le$ הוא יחס סדר חלקי.

(ב) השלימו: "$\le$ הוא יחס לינארי אם ורק אם ..."

10. תהי X קבוצה סדורה חלקית סופית. הוכיחו כי ניתן להשלים את היחס החלקי הנתון בה ליחס לינארי. (רמז: אינדוקציה על גודל הקבוצה.)

11. תהיינה $(X_1,\le_1)$ ו־ $(X_2,\le_2)$ שתי קבוצות סדורות חלקית זרות. נגדרי יחס $\le$ ב־ $X_1\cup X_2$ באופן הבא:

$$a\le b \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} a,b\in X_1 \text{ ו־ } a\le_1 b \\ a,b\in X_2 \text{ ו־ } a\le_2 b \\ a\in X_1 \text{ ו־ } b\in X_2 \end{array}\right.$$

(א) הוכיחו כי $\le$ הוא יחס סדר חלקי.

(ב) מה ישתנה אם לא נדרוש ש־ X_1 ו־ X_2 הן קבוצות זרות?

12. (הכללה של התרגיל הקודם) תהי $(I,\le_I)$ קבוצה סדורה חלקית, ותהי $(X_i)_{i\in I}$ משפחה של קבוצות זרות כאשר לכל $i\in I$ הקבוצה X_i היא קבוצה סדורה חלקית לפי יחס $\le_i$.

נגדרי יחס $\le$ ב־ $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ באופן הבא:

$$a\le b \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \text{קיים } i\in I \text{ כך ש־ } a,b\in X_i \text{ ומתקיים } a\le_i b \\ \\ a\in X_i \text{ ו־ } b\in X_j \text{ כאשר } i<_I j \end{array}\right.$$

הוכיחו כי $\le$ הוא יחס סדר חלקי.

5.2 דיאגרמות הסה

קודם מיידי ועוקב מיידי. תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ויהיו $x, y \in X$. אם $x < y$ ולא קיים $a \in X$ כך ש־ $x < a < y$, נאמר ש־ x הוא **קודם מיידי** של y, ו־ y הוא **עוקב מיידי** של x. במקרה כזה נאמר גם ש־ x ו־ y הם **שכנים**.

דוגמא. תהי $X = P(\{1,2,3,4,5\})$ הסדורה לפי הכלה. יהי $A = \{1,2,4\}$. אז הקודמים המיידיים של A הם $\{1,2\}$, $\{1,4\}$ ו־ $\{2,4\}$; והעוקבים המיידיים של A הם $\{1,2,3,4\}$ ו־ $\{1,2,4,5\}$.

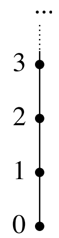
דיאגרמת הסה. דרך נוחה לתאר קבוצות סדורות חלקית היא **דיאגרמת הסה** (Hasse diagram)[40].

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נצייר ציור שבו אברי X יתוארו ע"י נקודות, ולכל $x \in X$ הנקודה המתאימה ל־ x תחובר ע"י קשתות לשכנים של x, כאשר אם y הוא קודם מיידי של x, אז הנקודה המתאימה ל־ y תופיע ברמה יותר נמוכה מאשר הנקודה המתאימה ל־ x, ואם z הוא עוקב מיידי של x, אז הנקודה המתאימה ל־ z תופיע ברמה יותר גבוהה מאשר הנקודה המתאימה ל־ x. ציור כזה הוא דיאגרמת הסה של $(X, \leq)$.

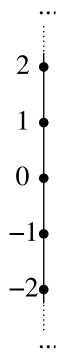
שימו לב: בדיאגרמת הסה רק שכנים מחוברים ע"י קשת. אם $y \leq x$ אבל הם לא שכנים, לא מציירים קשת בין הנקודות x ו־ y. במקרה כזה העובדה $x \leq y$ מתבטאת במסלול עולה מ־ x ל־ y.

דיאגרמת הסה היא תאור מושלם עבור קבוצות סדורות חלקית סופיות. עבור קבוצה אינסופית, ניתן לצייר דיאגרמת הסה של תת־קבוצה שלה, עם סדר מושרה. לפעמים (במקרים פשוטים) דיאגרמת הסה של תת־קבוצה מספיקה כדי להבין את האופי של היחס בכל הקבוצה. להלן מספר דוגמאות.

דיאגרמת הסה של $\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר הרגיל $\leq$:

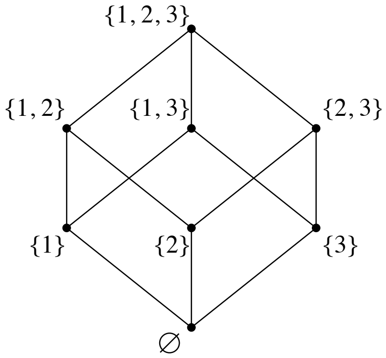


דיאגרמת הסה של $\mathbb{Z}$ הסדורה לפי הסדר הרגיל $\leq$:

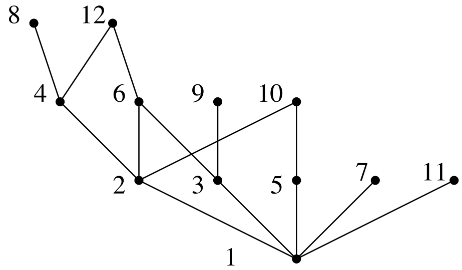


[40]על שם מתמטיקאי גרמני Helmut Hasse, $1898 - 1979$.

דיאגרמת הסה של $P(\{1,2,3\})$ לפי יחס ההכלה:



דיאגרמת הסה של $\{1,2,3,\ldots,12\}$ (תת־קבוצה של $\mathbb{N}_+$) לפי יחס ההתחלקות:



תרגילים

1. ציירו את דיאגרמת הסה של $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$ הסדורה ע"י $(a,b) \leq (c,d) \;\Leftrightarrow\; a \leq c, b \leq d$.
2. ציירו את דיאגרמת הסה של $P(\{1,2,3,4\})$ הסדורה לפי ההכלה.
3. נחזור לשאלה ששאלנו בפרק הקודם: כמה יחסי סדר חלקי קיימים בקבוצה X כך ש־ $|X| = 3$? הדרכה: תארו את כל דיאגרמות הסה האפשריות. (התשובה הנכונה היא מספר הגדול מ־ 15. אם $|X| = 4$, התשובה היא 219.)

5.3 איברים מיוחדים בקבוצות סדורות חלקית

איבר מינימלי, איבר מקסימלי; האיבר הראשון, האיבר האחרון. תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נגדיר כמה סוגים של איברים מיוחדים.

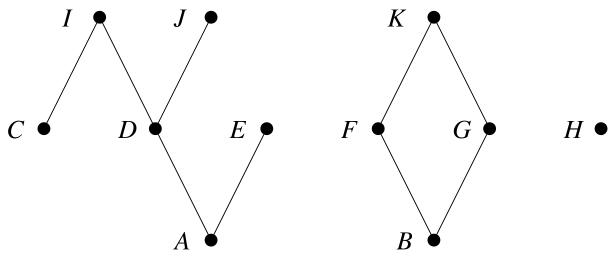
- $x \in X$ נקרא **איבר מינימלי של X** אם מ־ $y \leq x$ נובע $x = y$. (במילים אחרות: לא קיים $y \in X$ כך ש־ $y < x$.)
- $x \in X$ נקרא **איבר מקסימלי של X** אם מ־ $x \geq y$ נובע $x = y$. (במילים אחרות: לא קיים $y \in X$ כך ש־ $y > x$.)
- $x \in X$ נקרא **האיבר הראשון של X** (או: **האיבר הקטן ביותר של X**) אם לכל $y \in X$ מתקיים $x \leq y$.
- $x \in X$ נקרא **האיבר האחרון של X** (או: **האיבר הגדול ביותר של X**) אם לכל $y \in X$ מתקיים $x \geq y$.

יש דמיון בין המושגים "איבר מינימלי" ו"האיבר הראשון", ולכן חשוב להבין מה ההבדל ביניהם. ההגדרות אומרות למעשה: x הוא איבר מינימלי של X אם ורק אם ב־ X אין אף איבר קטן מ־ x; ואילו x הוא האיבר הראשון של X אם ורק אם כל האיברים האחרים ב־ X גדולים ממנו. בין השאר זה אומר: אם x הוא האיבר הראשון של X, אז הוא ניתן להשוואה עם כל אברי X (לעומת זאת, עבור איבר מינימלי לא כך הדבר). יתר על כן: ייתכן שבקבוצה סדורה חלקית יש יותר מאיבר מינימלי אחד (נראה את זה בדוגמאות), אבל יש איבר ראשון אחד לכל לכל היותר (נוכיח את זה בטענה **[84]**).

דיון דומה נכון כמובן גם עבור המושגים "איבר מקסימלי" ו"האיבר האחרון".

נעבור על דוגמאות שראינו (ראו דיאגרמות הסה לעיל):

- בקבוצה $\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר הרגיל $\leq$, 1 הוא האיבר הראשון, והוא גם איבר מינימלי יחיד. בקבוצה זו לא קיים איבר אחרון, ואין אף איבר מקסימלי.
- בקבוצה $\mathbb{Z}$ הסדורה לפי הסדר הרגיל $\leq$,לא קיימים איבר ראשון ואיבר אחרון, ואין בה אף איבר מינימלי ואף איבר מקסימלי.
- בקבוצה $P(\{1,2,3\})$ עם יחס ההכלה, $\varnothing$ הוא האיבר הראשון, והוא גם איבר מינימלי יחיד; $\{1,2,3\}$ הוא האיבר האחרון, והוא גם איבר מקסימלי יחיד.
- בקבוצה $\{1,2,3,\ldots,12\}$ עם יחס ההתחלקות, 1 הוא האיבר הראשון, והוא גם איבר מינימלי יחיד; לא קיים בה איבר אחרון, וכל האיברים הבאים הם איברים מקסימליים: $7,8,9,10,11,12$.
- דוגמא נוספת: בקבוצה הסדורה המתוארת ע"י דיאגרמת הסה באיור הבא, לא קיימים איבר ראשון ואיבר אחרון; איברים מינימליים בה הם A,B,C,H, איברים מקסימליים הם E,H,I,J,K. שימו לב ש־ H הוא גם מינימלי וגם מקסימלי.



[84] טענה. תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית.

1. ב־ $(X,\leq)$ יש איבר ראשון אחד לכל היותר. (במילים אחרות: אם ב־ X יש איבר ראשון, אז הוא יחיד.)
2. ב־ $(X,\leq)$ יש איבר אחרון אחד לכל היותר.

הוכחה של 1. נניח ש־ x הוא איבר ראשון וגם y הוא איבר ראשון ב־ X. אז $x \leq y$ (כי x הוא איבר ראשון) וגם $y \leq x$ (כי y הוא איבר ראשון). מכאן, לפי האנטי־סימטריות, $x=y$.

3. אם ב־ $(X,\leq)$ קיים האיבר הראשון x, אז הוא איבר מינימלי יחיד ב־ X.
4. אם ב־ $(X,\leq)$ קיים האיבר האחרון x, אז הוא איבר מקסימלי יחיד ב־ X.

הוכחה של 3. כדי להוכיח ש־ x הוא איבר מינימלי, עלינו להראות: מ־ $y \leq x$ נובע $y=x$.
ובכן, נניח ש־ $y \in X$ מקיים $y \leq x$. מאחר ש־ x הוא האיבר הראשון, מתקיים $x \leq y$. מ־ $y \leq x$ ו־ $x \leq y$ נובע $y=x$, וזה מה שרצינו להוכיח.

כעת נוכיח ש־ x הוא איבר מינימלי **יחיד** ב־ X. נניח ש־ z הוא איבר מינימלי ב־ X. מאחר ש־ x הוא האיבר הראשון, מתקיים $x \leq z$. מאחר ש־ z הוא איבר מינימלי, מזה נובע $z=x$. בכך הוכחנו שב־ X אין איבר מינימלי השונה מ־ x. $\square$

חסם מלעיל, חסם מלרע; האינפימום, הסופרמום. נגדיר כמה סוגים נוספים של איברים מיוחדים בקבוצות סדורות. שימו לב שההגדרות מתייחסות לא רק לקבוצה סדורה X אלא גם לתת־קבוצה שלה.

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ותהי A תת־קבוצה של X.

- $x \in X$ נקרא **חסם מלרע של A** [ב־ X] אם לכל $a \in A$ מתקיים $x \leq a$.
- $x \in X$ נקרא **חסם מלעיל של A** [ב־ X] אם לכל $a \in A$ מתקיים $a \leq x$.
- האיבר האחרון בקבוצת החסמים מלרע של A (אם הוא קיים) נקרא **האינפימום של A** [ב־ X]. סימון: $\inf(A)$.
- האיבר הראשון בקבוצת החסמים מלעיל של A (אם הוא קיים) נקרא **הסופרמום של A** [ב־ A]. סימון: $\sup(A)$.

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ותהי $A \subseteq X$. באופן כללי, ייתכן של־ A יש חסם מלרע אחד, ייתכן שיש יותר מחסם מלרע אחד, וייתכן שאין אף חסם מלרע. אם ל־ A יש חסם מלרע אחד לפחות, נאמר ש־ A היא קבוצה **חסומה מלרע**. אם A חסומה מלרע, ייתכן שיש לה אינפימום וייתכן שלא, אבל אם ל־ A יש אינפימום, אז הוא יחיד (כי הוא האיבר הראשון בקבוצת החסמים מלרע של A). כמו כן, אם האינפימום של A קיים, אז ייתכן שהוא שייך ל־ A וייתכן שלא.

עובדות מתאימות נכונות עבור חסמים מלעיל ועבור הסופרמום, ובאופן דומה מגדירים את המושג "קבוצה **חסומה מלעיל**".

דוגמאות.

- $X = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3\}$.

  ל־ A יש חסם מלרע יחיד: 0, ואינסוף חסמים מלעיל: כל המספרים הטבעיים הגדולים או שווים ל־ 3.

  0 הוא האינפימום של A, 3 הוא הסופרמום של A.

- $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1)$.

  כל $x \leq 0$ הוא חסם מלרע של A, כל $x \geq 1$ הוא חסם מלעיל של A.

  0 הוא האינפימום של A (והוא שייך ל־ A), 1 הוא הסופרמום של A (והוא לא שייך ל־ A).

- $X = \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 2\}$.

  כל מספר רציונלי חיובי y שמקיים $y^2 > 2$ הוא חסם מלעיל של A. אבל ל־ A אין סופרמום כי לכל מספר רציונלי חיובי y המקיים $y^2 > 2$ קיים מספר רציונלי חיובי z כך ש־ $z < y$ ועדיין $z^2 > 2$.

- נשנה את הדוגמא הקודמת: $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 2\}$.

  הפעם ל־ A קיים סופרמום: המספר $\sqrt{2}$. כמובן הוא לא שייך ל־ A.

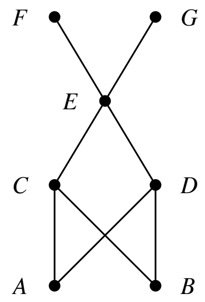
  שתי הדוגמאות האחרונות ממחישות הבדל חשוב מאוד בין $\mathbb{Q}$ ל־ $\mathbb{R}$. לקבוצת המספרים הרציונליים יש תת־קבוצות לא ריקות חסומות מלעיל שאין להן סופרמום (רציונלי). לעומת זאת, בקבוצת המספרים הממשיים לכל תת־קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל קיים סופרמום (ממשי). תכונה זו של $\mathbb{R}$ נקראת "תכונת הסופרמום", או "תכונת השלמות".[41] מבחינה לא פורמלית זה אומר: אף על פי שקבוצת המספרים הרציונליים היא קבוצה "צפופה", עדיין יש בה "חורים". הבניה המדוייקת של $\mathbb{R}$ היא למעשה סתימת חורים אלה – הוספה של סופרמומים לקבוצות חסומות מלעיל שלא היה להם סופרמום ב־ $\mathbb{Q}$.[42] ובקבוצה $\mathbb{R}$ כבר אין "חורים" – זו אחת הדרכים להבין את תכונת השלמות.

  תכונת השלמות של $\mathbb{R}$ חיונית לפיתוח של חשבון דיפרנציאלי. כבר בדיון על סדרות ועל פונקציות רציפות, טענות חשובות רבות נובעות מתכונת השלמות, למשל: משפט בולצנו־ויירשטרס, הלמה על קטעים מוכלים, משפט ערך הביניים, משפטי ויירשטרס; ובאמצעות טענות אלה – כמעט כל המשפטים של חשבון דיפרנציאלי.

[41] ייתכן שציפיתם שהשלמות היא תכונת הסופרמום יחד עם תכונת האינפימום (שכידוע גם כן מתקיימת ב־ $\mathbb{R}$). מסתבר שתכונת הסופרמום גוררת את תכונת האינפימום!

[42] כמובן, משפט זה מתאר את הבניה בצורה מאוד שטחית ולא פורמלית.

- שינוי נוסף לדוגמאות הקודמות: $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 2\}$.
  שוב, $\sqrt{2}$ הוא הסופרמום של A. הפעם הסופרמום שייך ל־ A.
- נסתכל בקבוצה $X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ המתוארת ע"י דיאגרמת הסה באיור הבא. נסתכל במספר תת־קבוצות שלה, ונרשום את החסמים מלעיל ומלרע, האינפימום והסופרמום (אם קיימים).



תת קבוצה	חסמים מלרע	האינפימום	חסמים מלעיל	הסופרמום
$\{A, B\}$	אין	אין	C, D, E, F, G	אין
$\{A, B, C, D\}$	אין	אין	E, F, G	E
$\{A, B, C, E\}$	אין	אין	E, F, G	E
$\{C, D\}$	A, B	אין	E, F, G	E
$\{C, G\}$	A, B, C	C	G	G

תרגילים

1. (א) מצאו דוגמא של קבוצה סדורה חלקית שיש בה אינסוף איברים מינימליים ואין אף איבר מקסימלי.
   (ב) מצאו דוגמא של קבוצה סדורה חלקית שיש בה אינסוף איברים מינימליים ויש איבר מקסימלי יחיד.
   (ג) מצאו דוגמא של קבוצה סדורה חלקית שיש בה אינסוף איברים מינימליים ואינסוף איברים מקסימליים.
   (ד) מצאו דוגמא של קבוצה סדורה חלקית שיש בה איבר מינימלי יחיד אך אין בה איבר ראשון.
   (ה) תהי X קבוצה סדורה חלקית שבה אין אף איבר מינימלי ואין אף איבר מקסימלי. האם בהכרח X סדורה לינארית?
2. תהי X קבוצה סדורה חלקית כך שבכל תת־קבוצה לא ריקה שלה יש איבר ראשון ואיבר אחרון.
   (א) הוכיחו כי X היא קבוצה סדורה לינארית.
   (ב) הוכיחו כי X היא קבוצה סופית.
   (ג) נשנה את הנתון: נניח רק שבכל תת־קבוצה לא ריקה של X יש איבר ראשון. האם עדיין ניתן להסיק את התוצאות של הסעיפים הקודמים? (במקרה של תשובה שלילית, תנו דוגמא נגדית).
3. תהי X קבוצה סדורה חלקית שבה מתקיימת תכונת הסופרמום. כלומר: לכל A, תת־קבוצה לא ריקה חסומה מלעיל של X, קיים (ב־ X) $\sup(A)$.
   הוכיחו כי ב־ X מתקיימת גם תכונת האינפימום. כלומר: לכל A, תת־קבוצה לא ריקה חסומה מלרע של X, קיים (ב־ X) $\inf(A)$.
   (הדרכה: תהי A קבוצה לא ריקה חסומה מלרע. תהי B קבוצת החסמים מלרע של A. B היא קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. לכן קיים $\sup(B)$...)

4. תהי X קבוצה סדורה חלקית.

(א) הוכיחו כי $\varnothing$ חסומה מלעיל וחסומה מלרע.

(ב) השלימו: "ב־ X קיים $\sup(\varnothing)$ אם ורק אם..."

(ג) השלימו: "ב־ X קיים $\inf(\varnothing)$ אם ורק אם..."

הגדרה. תהי X קבוצה סדורה חלקית. X נקראת **סריג** אם לכל $x, y \in X$, קיימים (ב־ X) $\sup(\{x,y\})$ ו־ $\inf(\{x,y\})$.
X נקראת **סריג שלם** אם לכל תת־קבוצה A של X קיימים (ב־ X) $\sup(A)$ ו־ $\inf(A)$.

5. תהי Z קבוצה כלשהי, ותהי $X = P(Z)$ הסדורה לפי ההכלה. הוכיחו כי X היא סריג. האם היא סריג שלם?

6. תהי $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הסדורה לפי $(a,b) \le (c,d) \Leftrightarrow a \le c, b \le d$. הוכיחו כי X היא סריג. האם היא סריג שלם?

7. תהי $X = \mathbb{N}_+$ הסדורה לפי יחס ההתחלקות. הוכיחו כי X היא סריג. האם היא סריג שלם?

8. הוכיחו שאם X הוא סריג, אז לכל תת־קבוצה סופית של X יש אינפימום וסופרמום (ב־ X). הסיקו כי כל סריג סופי הוא סריג שלם.

9. יהי X סריג שלם. הוכיחו כי ב־ X יש איבר ראשון ואיבר אחרון.

10. תהי X קבוצה סדורה חלקית כך שב־ X יש איבר ראשון, ולכל תת־קבוצה לא ריקה של X יש סופרמום (ב־ X).

(א) הוכיחו כי X היא סריג שלם.

(ב) הראו ע"י דוגמא שאם נתון שב־ X יש איבר אחרון (במקום ראשון), אז X היא לא בהכרח סריג.

5.4 הומומורפיזם ואיזומורפיזם של קבוצות סדורות חלקית

פונקציה שומרת סדר. תהיינה $(X, \le_X)$ ו־ $(Y, \le_Y)$ קבוצות סדורות חלקית. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **פונקציה שומרת סדר** (או **הומומורפיזם של קבוצות סדורות**) אם מתקיים: לכל $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \le_X x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le_Y f(x_2).$$

דוגמאות.

- הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x + 10$ היא פונקציה שומרת סדר.
- לכל קבוצה סדורה X, פונקצית הזהות ב־ X היא פונקציה שומרת סדר.
- תהיינה X, Y קבוצות סדורות לא ריקות כלשהן. יהי $y_0 \in Y$. הפונקציה $f : X \to Y$ המוגדרת ע"י $f(x) = y_0$ לכל x, היא פונקציה שומרת סדר.

עם הנחות נוספות על f, ניתן לקבל תוצאות נוספות על פונקציות שומרות סדר. נראה את זה בטענות הבאות.

[85] טענה. תהיינה $(X, \le_X)$ ו־ $(Y, \le_Y)$ קבוצות סדורות חלקית, ותהי f פונקציה **חד־חד־ערכית** שומרת סדר מ־ X ל־ Y. אז

$$x_1 <_X x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) <_Y f(x_2)$$

.

הוכחה. נניח ש־ $x_1 <_X x_2$. מכאן $x_1 \leq_X x_2$ ולכן $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$. (כי f שומרת סדר.)
כמו כן, $x_1 \neq x_2$ ולכן $f(x_1) \neq f(x_2)$ (כי f חד־חד־ערכית).
לפי כך, $f(x_1) <_Y f(x_2)$. □

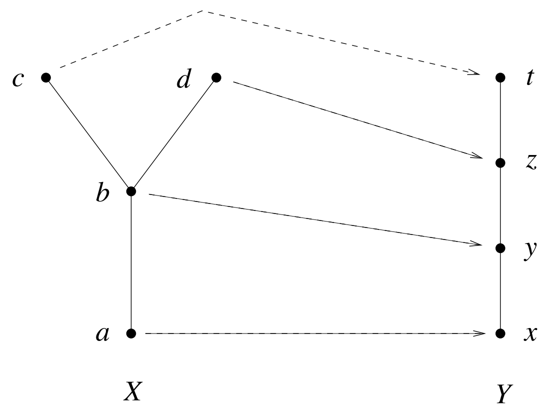
[86] טענה. תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית, ותהי f פונקציה שומרת סדר מ־ X **על** Y. יהי $x_0 \in X$, ונסמן $y_0 = f(x_0)$.

1. אם x_0 הוא האיבר הראשון ב־ X, אז y_0 הוא האיבר הראשון ב־ Y.
2. אם x_0 הוא האיבר האחרון ב־ X, אז y_0 הוא האיבר האחרון ב־ Y.

הוכחה של 1. יהי $y \in Y$. מאחר ש־ f היא פונקציה על, קיים $x \in X$ כך ש־ $y = f(x)$. מאחר ש־ x_0 הוא האיבר הראשון ב־ X, מתקיים $x_0 \leq_X x$. מאחר ש־ f שומרת סדר, מזה נובע $y_0 \leq_Y y$.

בכך הוכחנו: לכל $y \in Y$, מתקיים $y_0 \leq_Y y$. לכן y_0 הוא האיבר הראשון ב־ Y. □

תהי $f : X \to Y$ פונקציה שומרת סדר. פירוש ההגדרה הוא שאם שני איברים של X עומדים ביחס הסדר (של X): $x_1 \leq_X x_2$, אז גם האיברים המתאימים להם ב־ Y עומדים ביחס הסדר (של Y): $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$. ניתן לומר שהקשרים הקיימים ב־ X (מבחינת הסדר) נשמרים תחת הפונקציה f. בשתי הטענות האחרונות ראינו שאם יש הנחות נוספות על f, אז היא יכולה לשמור על תכונות נוספות של אברי X. יחד עם זאת, אפילו אם נניח ש־ f היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל, זה עוד לא יבטיח ש־ f שומרת את כל התכונות של סדר, וזאת מפני שייתכן שב־ Y קיימים קשרי סדר נוספים (פרט לאלה המוכתבים מ־ X ע"י הפונקציה f). נתבונן, למשל, בדוגמא הבאה:



הפונקציה f בציור זה שומרת סדר: כל קשרי סדר בין אברי X קיימים בין האיברים המתאימים של Y. יחד עם זאת, ב־ Y קיימים קשרי סדר נוספים. אכן, c ו־ d לא ניתנים להשוואה ב־ X, אבל האיברים המתאימים z ו־ t ניתנים להשוואה ב־ Y: $z \leq_Y t$. עקב כך, תכונות אחדות של X ושל אבריה לא נשמרות ע"י f. למשל, d הוא איבר מקסימלי ב־ X, אבל האיבר המתאים z לא מקסימלי ב־ Y; ב־ X לא קיים איבר אחרון, וב־ Y קיים.

זה קורה מפני שאם $f : X \to Y$ היא פונקציה שומרת סדר הפיכה, אז $f^{-1} : Y \to X$ לא בהכרח שומרת סדר (בפרט, ייתכן ש־ x_1 ו־ x_2 לא ניתנים להשוואה ב־ X, אבל $f(x_1)$ ו־ $f(x_2)$ ניתנים להשוואה ב־ Y). דיון זה מוביל להגדרה הבאה.

איזומורפיזם. תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית. פונקציה $f : X \to Y$ נקראת **איזומורפיזם** (של קבוצות סדורות) אם היא חד־חד־ערכית ועל, ומתקיים: לכל $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \leq_X x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) \leq_Y f(x_2).$$[43]

במילים אחרות, איזומורפיזם היא פונקציה $f : X \to Y$ חד־חד־ערכית שומרת סדר כך שגם $f^{-1} : Y \to X$ שומרת סדר.

איזומורפיזם שומר על כל התכונות הקשורות לסדר. נדגים את זה עבור המושגים של איבר מינימלי ואיבר מקסימלי.

[87] טענה. תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית, ותהי $f : X \to Y$ איזומורפיזם. יהי $x_0 \in X$, נסמן $y_0 = f(x_0)$.

1. אם x_0 הוא איבר מינימלי ב־ X, אז y_0 הוא איבר מינימלי ב־ Y.
2. אם x_0 הוא איבר מקסימלי ב־ X, אז y_0 הוא איבר מקסימלי ב־ Y.

הוכחה של 1. נניח $y \leq y_0$, עלינו להוכיח $y = y_0$.

מאחר ש־ f היא על, קיים $x \in X$ כך ש־ $f(x) = y$. הנחנו $y \leq y_0$, כלומר $f(x) \leq f(x_0)$, ולכן, מאחר ש־ f איזומורפיזם, מתקיים $x \leq x_0$. מאחר ש־ x_0 הוא איבר מינימלי ב־ X, מזה נובע $x = x_0$. לכן $f(x) = f(x_0)$, כלומר $y = y_0$. $\square$

כפי שציינו, בין כל שתי קבוצות סדורות (לא ריקות) ניתן לבנות פונקציה שומרת סדר. לעומת זאת, קיום של איזומורפיזם בין קבוצות סדורות X ו־ Y הוא תנאי חזק מאוד על קבוצות אלה: זה אומר בעצם ש־ X ו־ Y זהות זו לזו בכל מה שקשור לסדר. עקב כך מגדירים את המושג הבא:

תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית. נאמר ש־ $\boldsymbol{Y}$ **איזומורפית ל־** $\boldsymbol{X}$ אם קיים איזומורפיזם $f : X \to Y$.

בטענה הבאה נוכיח שאיזומורפיזם של קבוצות הוא יחס שקילות.

[88] טענה. תהיינה X, Y, Z קבוצות סדורות חלקית. אז:

1. X איזומורפית ל־ X.
2. אם Y איזומורפית ל־ X, אז X איזומורפית ל־ Y.
3. אם Y איזומורפית ל־ X, אז Z איזומורפית ל־ Y, אז Z איזומורפית ל־ Y.

הוכחה.

1. I_X היא איזומורפיזם.
2. אם $f : X \to Y$ היא איזומורפיזם, אז $f^{-1} : Y \to X$ היא איזומורפיזם. באמת, מאחר ש־ f היא חד־חד־ערכית ועל, גם f^{-1} היא חד־חד־ערכית ועל. כמו כן, f^{-1} שומרת סדר, וההופכית שלה (הלא היא f) שומרת סדר.
3. אם $f : X \to Y$ ו־ $g : Y \to Z$ הן פונקציות איזומורפיזם, אז $g \circ f : X \to Y$ היא איזומורפיזם. אכן, $g \circ f$ היא חד־חד־ערכית ועל, ומתקיים: $x_1 \leq_X x_2$ אם ורק אם $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$ אם ורק אם $g(f(x_1)) \leq_Z g(f(x_2))$. $\square$

הודות לסימטריות, נוכל לומר "X ו־ Y איזומורפיות [זו לזו]" במקום "Y איזומורפית ל־ X". נסמן את זה באופן הבא: $X \cong Y$.

[89] דוגמאות.

[43] בפרט, x_1 ו־ x_2 ניתנים להשוואה אם ורק אם $f(x_1)$ ו־ $f(x_2)$.

1. לכל $a<b$, $c<d$, הקטעים הסגורים $[a,b]$ ו־ $[c,d]$, עם הסדר הרגיל, איזומורפיים זה לזה. בתור איזומורפיזם ניתן לבחור $f:[a,b]\to[c,d]$ המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ [44]. באופן דומה מוכיחים $(a,b)\cong(c,d)$, $[a,b)\cong[c,d)$ וכו'.

2. כל קטע ממשי פתוח (a,b) איזומורפי ל־ $\mathbb{R}$. ניתן להשתמש בפונקצית $\tan(x)$ עבור הקטע $(-\pi/2,\pi/2)$, תוצאת הסעיף הקודם וטרנזיטיביות של איזומורפיזם.

3. לעומת זאת, אף קטע ממשי סגור $[a,b]$ לא יהיה איזומורפי ל־ $\mathbb{R}$. זאת מפני שבקטע סגור קיים האיבר הראשון, וב־ $\mathbb{R}$ לא. (הדרכה להוכחה מדויקת: מניחים בדרך השלילה ש־ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא איזומורפיזם. מוכיחים שמאחר ש־ a הוא האיבר הראשון ב־ $[a,b]$, $f(a)$ חייב להיות האיבר הראשון של $\mathbb{R}$. אבל ב־ $\mathbb{R}$ אין איבר ראשון – סתירה).

   באופן דומה מוכיחים: בין הקטעים (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$ אין זוג של איזומורפיים, וביניהם רק (a,b) איזומורפי ל־ $\mathbb{R}$.

4. חצי הישר הפתוח $(a,+\infty)$ איזומורפי ל־ $\mathbb{R}$ (פונקציה מעריכית תהיה איזומורפיזם עבור $a=0$). באופן דומה, גם $(-\infty,b)$ איזומורפי ל־ $\mathbb{R}$ (מצאו איזומורפיזם). עקב כך, $(a,+\infty)$ ו־ $(-\infty,b)$ איזומורפיים זה לזה.

   לעומת זאת, הקטעים $[a,+\infty)$ ו־ $(-\infty,b]$ אינם איזומורפיים ל־ $\mathbb{R}$, ואינם איזומורפיים זה לזה.

5. לכל $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\cong\{x\in\mathbb{N}:\ x\geq n\}$. הפונקצית $x\mapsto x+n$ היא איזומורפיזם.

6. לכל $k\in\mathbb{N}_+$, $\mathbb{N}\cong k\mathbb{N}$. הפונקצית $x\mapsto kx$ היא איזומורפיזם .

7. $\mathbb{N}$ לא איזומורפית ל־ $\mathbb{Z}$. הסבר אפשרי: ב־ $\mathbb{N}$ קיים האיבר הראשון, וב־ $\mathbb{Z}$ לא (כתבו הוכחה מדויקת!).

8. $\mathbb{Z}$ לא איזומורפית ל־ $\mathbb{Q}$. הסבר אפשרי: הסדר $\leq$ ב־ $\mathbb{Q}$ הוא סדר צפוף, כלומר: לכל $x,y\in\mathbb{Q}$, $x<y$, קיים $z\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $x<z<y$, והסדר $\leq$ ב־ $\mathbb{Z}$ לא צפוף. שיקול זה מביא לפתרון הבא. נניח בדרך השלילה ש־ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ היא איזומורפיזם. יהיו $a=f(1)$ ו־ $b=f(2)$. אז מ־ $1<2$ נובע $a<b$. יהי c מספר רציונלי כלשהו בין a ל־ b (למשל, ניתן לבחור $c=(a+b)/2$). הפונקציה f היא על, לכן קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש־ $f(x)=c$. אבל אז מ־ $a<c<b$, כלומר $f(1)<f(x)<f(2)$, נובע $1<x<2$, וזו סתירה: ב־ $\mathbb{Z}$ אין x כזה.

9. $\mathbb{Q}$ לא איזומורפית ל־ $\mathbb{R}$. הסבר אפשרי: הקבוצות $\mathbb{Q}$ ו־ $\mathbb{R}$ אינן שקולות עצמה, לכן אין ביניהן אף פונקציה חד־חד־ערכית ועל. הסבר אחר: ב־ $\mathbb{R}$ מתקיימת תכונת הסופרמום, וב־ $\mathbb{Q}$ לא (הראו איך בדיוק נובע מזה שאין איזומורפיזם בין קבוצות אלה).

איזומורפיזם של יחסי סדר לינאריים. בדיון לפני הגדרת האיזומורפיזם ראינו שאם נתון ש־ $f:X\to Y$ היא פונקציה שומרת סדר והפיכה, מזה עדיין לא נובע ש־ f^{-1} שומרת סדר. בטענה הבאה נוכיח שאם נתון בנוסף שהסדר ב־ X הוא סדר לינארי, אז ניתן להסיק f^{-1} שומרת סדר. (וזה לא מפתיע: המצב הטיפוסי שבו f שומרת סדר ו־ f^{-1} לא שומרת סדר, נוצר כאשר ב־ X יש איברים x_1,x_2 שלא ניתנים להשוואה, ואילו $f(x_1),f(x_2)$ ניתנים להשוואה ב־ Y. ברור שאם נתון מראש ש־ X סדורה לינארית, זה לא יכול לקרות.)

[90] טענה. תהיינה $(X,\leq_X)$ ו־ $(Y,\leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית, כאשר הסדר ב־ X הוא סדר לינארי. תהי $f:X\to Y$ פונקציה שומרת סדר והפיכה. אז:

1. גם f^{-1} שומרת סדר (או, במילים אחרות: אז f היא איזומורפיזם).

2. גם Y היא קבוצה סדורה לינארית.

הוכחה.

[44] זו הפונקציה הלינארית המעבירה את a ל־ c ואת b ל־ d. בפרט, היא פונקציה עולה; שימו לב: זה אומר שהיא שומרת סדר.

1. יהיו $y_1, y_2 \in Y$ כך ש־ $y_1 \leq_Y y_2$. נסמן $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$. יש להוכיח ש־ $x_1 \leq_X x_2$.
נתון ש־ X סדורה לינארית. לכן אם לא מתקיים $x_1 \leq_X x_2$, אז בהכרח $x_2 <_X x_1$. מאחר ש־ f שומרת סדר וחד־חד־ערכית, מזה נובע $y_2 <_Y y_1$, בסתירה להנחה.

2. יהיו $y_1, y_2 \in Y$. נסמן $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$. מאחר ש־ X סדורה לינארית, מתקיים: $x_1 \leq_X x_2$ או $x_2 \leq_X x_1$. מאחר ש־ f שומרת סדר, מכאן נובע: $y_1 \leq_Y y_2$ או $y_2 \leq_Y y_1$. $\square$

תרגילים.

1. הוכיחו כי $(0, +\infty) \cong (-\infty, 0)$ באופן ישיר, כלומר מצאו פונקצית איזומורפיזם בין קבוצות אלה.

2. יהי $n \in \mathbb{N}$, ותהי $X_n = \{0,1\}^n = \{0,1\}^{\{1,\ldots,n\}}$. נסדר את X לפי

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 \leq b_1, \\ a_2 \leq b_2, \\ \ldots \\ a_n \leq b_n \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי כלל זה באמת מגדיר יחס סדר חלקי ב־ X.

(ב) ציירו את דיאגרמת הסה של X_3.

(ג) הוכיחו כי X_n איזומורפית ל־ $P(\{1, 2, \ldots, n\})$ הסדורה לפי ההכלה.

3. בכל סעיף, קבעו האם הקבוצות איזומורפיות זו לזו.

(א) $[0,2]$ ו־ $[0,1) \cup [2,3]$.

(ב) $[0,3]$ ו־ $[0,1) \cup [2,3]$.

(ג) $[0,2]$ ו־ $[0,1] \cup [2,3]$.

(ד) $[0,2]$ ו־ $[0,1) \cup (2,3]$.

(ה) $\mathbb{N}$ ו־ $\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}_+\}$.

(ו) $\mathbb{N}$ ו־ $\{1 - \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}_+\}$.

(ז) $\mathbb{N}$ וקבוצת המספרים הראשוניים $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$.

4. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סדורות חלקית. אם ב־ X יש תת־קבוצה איזומורפית ל־ Y, וב־ Y יש תת־קבוצה איזומורפית ל־ X, אז X ו־ Y איזומורפיות זו לזו.

5. הוכיחו כי אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא איזומורפיזם, אז היא פונקציה רציפה.

5.5 יחסי סדר מילוניים

יחסי הסדר המילוניים: הלועזי והעברי. תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית. נגדיר ב־ $X \times Y$ יחס $\leq_e$ באופן הבא:

$$(x_1,y_1) \leq_e (x_2,y_2) \quad \text{אם ורק אם} \quad \begin{cases} x_1 <_X x_2, \\ \text{או} \\ x_1 = x_2 \ \text{ו־}\ y_1 \leq_Y y_2. \end{cases}$$

היחס $\leq_E$ נקרא **יחס הסדר המילוני האנגלי ("השמאלי")** כי סדר המילים במילון (לשפה שבה כותבים משמאל לימין) נקבע לפי עקרון דומה.

באופן דומה נגדרי ב־ $X \times Y$ את **יחס הסדר המילוני העברי ("הימני")** שיסומן ב־ $\leq_H$:

$$(x_1,y_1) \leq_h (x_2,y_2) \quad \text{אם ורק אם} \quad \begin{cases} y_1 <_Y y_2, \\ \text{או} \\ y_1 = y_2 \ \text{ו־}\ x_1 \leq_X x_2. \end{cases}$$

נוכיח שהיחסים $\leq_e$ ו־ $\leq_h$ הם באמת יחסי סדר חלקי.

[91] טענה. תהיינה $(X,\leq_X)$ ו־ $(Y,\leq_Y)$ קבוצות סדורות חלקית. היחסים המילוניים $\leq_e$ ו־ $\leq_h$ ב־ $X \times Y$ הם יחסי סדר חלקי.

הוכחה עבור $\leq_e$ (ההוכחה עבור $\leq_h$ מתבצעת באופן דומה).

- רפלקסיביות. לכל $(x,y) \in X \times Y$ מתקיים: $x = x$ ו־ $y \leq_Y y$, ולכן $(x,y) \leq_e (x,y)$.
- טרנזיטיביות. נניח ש־ $(x_1,y_1) \leq_e (x_2,y_2)$ ו־ $(x_2,y_2) \leq_e (x_3,y_3)$.
זה אומר: (1) $x_1 <_X x_2$, או ($x_1 = x_2$ ו־ $y_1 \leq_Y y_2$); (2) $x_2 <_X x_3$, או ($x_2 = x_3$ ו־ $y_2 \leq_Y y_3$).
כעת יש שני מקרים:
  - אם $x_1 <_X x_2$ או $x_2 <_X x_3$, אז $x_1 <_X x_3$ ולכן $(x_1,y_1) \leq_e (x_3,y_3)$.
  - אם $x_1 = x_2$ ו־ $y_1 \leq_Y y_2$, ו־ $x_2 = x_3$ ו־ $y_2 \leq_Y y_3$, אז $x_1 = x_3$ ו־ $y_1 \leq_Y y_3$, ולכן $(x_1,y_1) \leq_e (x_3,y_3)$.
- אנטי־סימטריות. נניח ש־ $(x_1,y_1) \leq_e (x_2,y_2)$ ו־ $(x_2,y_2) \leq_e (x_1,y_1)$.
זה אומר: (1) $x_1 <_X x_2$, או ($x_1 = x_2$ ו־ $y_1 \leq_Y y_2$); (2) $x_2 <_X x_1$, או ($x_2 = x_1$ ו־ $y_2 \leq_Y y_1$).
המצבים ($x_1 <_X x_2$ ו־ $x_2 <_X x_1$), ($x_1 = x_2$ ו־ $x_2 <_X x_1$), ($x_1 <_X x_2$ ו־ $x_2 = x_1$) לא ייתכנו.
לכן האפשרות היחידה היא: ($x_1 = x_2$ ו־ $y_1 \leq_Y y_2$) וגם ($x_2 = x_1$ ו־ $y_2 \leq_Y y_1$). מזה נובע מיידית $x_1 = x_2$ ו־ $y_2 = y_1$, כלומר $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. □

בטענה הבאה נראה שאם היחסים $\leq_X$ ו־ $\leq_Y$ הם יחסי סדר לינארי, אז גם הסדרים המילוניים $\leq_e$ ו־ $\leq_h$ הם סדרים לינאריים.

[92] טענה.

תהיינה $(X,\leq_X)$ ו־ $(Y,\leq_Y)$ קבוצות סדורות לינארית. אז היחסים המילוניים $\leq_e$ ו־ $\leq_h$ ב־ $X \times Y$ הם יחסי סדר לינארי.

הוכחה עבור $\leq_e$ (ההוכחה עבור $\leq_h$ מתבצעת באופן דומה).

יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$. נוכיח שהם ניתנים להשוואה לפי היחס $\leq_e$.

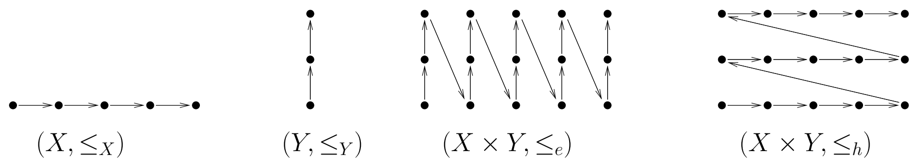
מאחר ש־ $\leq_X$ ו־ $\leq_Y$ הם סדרים לינאריים, x_1 ו־ x_2 ניתנים להשוואה לפי $\leq_X$, y_1 ו־ y_2 ניתנים להשוואה לפי $\leq_Y$.

אם $x_1 <_X x_2$, אז $(x_1,y_1) <_e (x_2,y_2)$.

אם $x_2 <_X x_1$, אז $(x_2,y_2) <_e (x_1,y_1)$.

נניח כעת ש־ $x_1 = x_2$. אם $y_1 <_Y y_2$, אז $(x_1,y_1) <_e (x_2,y_2)$. אם $y_2 \leq_Y y_1$, אז $(x_2,y_2) \leq_e (x_1,y_1)$. □

האיור הבא ממחיש את היחסים המילוניים עבור שתי קבוצות סופיות: $|X| = 5$, $|Y| = 3$. כל חץ מצביע מאיבר לעוקב המיידי שלו.



תרגילים.

1. (א) תהיינה $(X,\le_X)$ ו־ $(Y,\le_Y)$ קבוצות סדורות חלקית. הוכיחו: $(X\times Y,\le_e)\cong(Y\times X,\le_h)$.

   (ב) הסיקו: לכל קבוצה סדורה חלקית X מתקיים $(X\times X,\le_e)\cong(X\times X,\le_h)$.

   (ג) תנו דוגמא של שתי קבוצות X ו־ Y סדורות לינארית כך ש־ $(X\times Y,\le_e)$ לא איזומורפית ל־ $(X\times Y,\le_h)$.

   (ד) תנו דוגמא של שתי קבוצות X ו־ Y סדורות לינארית ולא איזומורפיות זו לזו כך ש־ $(X\times Y,\le_e)$ איזומורפית ל־ $(X\times Y,\le_h)$.

2. תהי $X=\{x,y,z\}$ עם יחס הסדר החלקי שבו $x<_X y$, $x<_X z$, ו־ y ו־ z לא ניתנים להשוואה; תהי $Y=\{a,b,c\}$ עם יחס הסדר החלקי שבו $a<_Y c$, $b<_Y c$, ו־ a ו־ b לא ניתנים להשוואה. בנו את דיאגרמות הסה עבור $(X\times Y,\le_e)$ ועבור $(X\times Y,\le_h)$.

3. בכל סעיף, קבעו האם הקבוצות איזומורפיות זו לזו. בקבוצות המוכרות הכוונה לסדר הרגיל $\le$. בסימן $\times_e$ הכוונה למכפלה קרטזית הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי, בסימן $\times_h$ הכוונה למכפלה קרטזית הסדורה לפי הסדר המילוני העברי.

   (א) $\mathbb{N}\times_e\mathbb{Z}$ ו־ $\mathbb{Z}\times_e\mathbb{N}$.

   (ב) $\mathbb{N}\times_e\{0\}$ ו־ $\{0\}\times_e\mathbb{N}$.

   (ג) $\mathbb{N}\times_e\{0,1\}$ ו־ $\{0,1\}\times_e\mathbb{N}$.

   (ד) $\mathbb{N}$ ו־ $\{0,1\}\times_e\mathbb{N}$.

   (ה) $\mathbb{N}$ ו־ $\mathbb{N}\times_e\{0,1\}$.

   (ו) $\{1,2,3\}\times_e\{4,5,6,7\}$ ו־ $\{1,2\}\times_h\{4,5,6,7,8,9\}$.

6 הלמה של צורן ואקסיומת הבחירה

6.1 הלמה של צורן

הטענה הבאה נקראת **הלמה של צורן**[45]:

[93] הלמה של צורן.

תהי $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה סדורה חלקית. אם לכל שרשרת[46] ב־ $\mathcal{F}$ קיים חסם מלעיל (שגם כן שייך ל־ $\mathcal{F}$), אז ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי (אחד לפחות).

לא נוכיח את הלמה של צורן אלא נתייחס אליה כלאקסיומה. הלמה של צורן שקולה לטענה שנקראת **אקסיומת הבחירה**, עליה נלמד בפרק 6.4. הניסוח של אקסיומת הבחירה מאוד אינטואיטיבי ונראה הגיוני לקבל אותה בתור אקסיומה. מצד שני, הלמה של צורן יותר נוחה לשימוש בהוכחות של טענות. רוב ההוכחות שמסתמכות על הלמה של צורן הן הוכחות של קיום בלבד: בדרך כלל, מוכיחים בהן קיום של קבוצה בעלת תכונה מסויימת אך לא מראים שום דרך קונסטרוקטיבית לבניה של קבוצה כזו.

דוגמא לשימוש בלמה של צורן. נפתח בדוגמא יחסית פשוטה. היא דנה במושג "תת־קבוצה בלתי תלויה של קבוצה סדורה חלקית", שמוגדר באופן הבא. תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית, ותהי $Y\subseteq X$, $Y\neq\varnothing$. נאמר ש־ Y היא **קבוצה בלתי תלויה** (לפי יחס הסדר המוגדר ב־ X) אם כל שני אברי Y לא ניתנים להשוואה. לדוגמא, ב־ $P(\{1,2,3\})$ הסדורה לפי יחס ההכלה (ראו דוגמא 82), הקבוצה $\{\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}\ \}$ היא קבוצה בלתי תלויה. דוגמא נוספת: ב־ $\mathbb{N}_+$ הסדורה לפי יחס ההתחלקות (ראו דוגמא 83), קבוצת המספרים הראשוניים היא קבוצה בלתי תלויה.

[94] טענה.

תהי $(X,\leq)$ קבוצה לא ריקה סדורה חלקית. ב־ X יש תת־קבוצה B בלתי תלויה מקסימלית. (זה אומר: B היא קבוצה בלתי תלויה, אבל לכל $z\in X\setminus B$, הקבוצה $B\cup\{z\}$ כבר תהיה תלויה; כלומר, קיים $t\in B$ כך ש־ z ו־ t ניתנים להשוואה.)

הוכחה. נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את קבוצת כל התת־קבוצות הבלתי־תלויות ב־ X. $\mathcal{F}$ לא ריקה כי לכל $x\in X$, הקבוצה $\{x\}$ היא בלתי תלויה. $\mathcal{F}$ סדורה חלקית לפי הכלה של קבוצות.

תהי $\mathcal{C}=(A_i)_{i\in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. נסתכל ב־ $A=\bigcup_{i\in I}A_i$. ברור ש־ A הוא חסם מלעיל של השרשרת כי לכל $i\in I$ מתקיים $A_i\subseteq A$. כדי שנוכל להשתמש בלמה של צורן, יש להוכיח ש־ $A\in\mathcal{F}$[47], כלומר ש־ A היא קבוצה בלתי תלויה.

נניח בדרך השלילה ש־ A היא קבוצה תלויה. כלומר, קיימים $x,y\in A$ הניתנים להשוואה. אז, מאחר ש־ $A=\bigcup_{i\in I}A_i$, קיימים $i,j\in I$ כך ש־ $x\in A_i$, $y\in A_j$. מאחר ש־ $\mathcal{C}$ היא שרשרת, מתקיים: $A_i\subseteq A_j$ או $A_j\subseteq A_i$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $A_i\subseteq A_j$. אז, מאחר ש־ $x\in A_i$, מתקיים גם $x\in A_j$. לפי כך, $x,y\in A_j$, ומכאן ש־ x ו־ y לא ניתנים להשוואה (כי $A_j\in\mathcal{F}$, כלומר בלתי תלויה) בסתירה להנחתנו.

לפי כך, הראנו שלכל שרשרת ב־ $\mathcal{F}$ קיים חסם מלעיל, והוא גם כן שייך ל־ $\mathcal{F}$. לכן, **לפי הלמה של צורן**, ב־ $\mathcal{F}$ קיים איבר מקסימלי B. קבוצה זו היא תת־קבוצה בלתי תלויה מקסימלית של X. $\square$

תרגילים.

1. תהי $(X,\leq_X)$ קבוצה סדורה חלקית. הוכיחו בעזרת הלמה של צורן שהיחס $\leq_X$ ניתן להרחבה ליחס לינארי (מלא).

[45]על שם מתמטיקאי אמריקאי ממוצא גרמני Max August Zorn, $1906-1993$.

[46]נזכיר את ההגדרה של שרשרת. תהי X קבוצה סדורה חלקית, ותהי $Y\subseteq X$. Y היא שרשרת אם כל שני אבריה ניתנים להשוואה.

[47]זה הצעד המרכזי ברוב ההוכחות שמשתמשות בלמה של צורן. בהינתן $\mathcal{C}=(A_i)_{i\in I}$, שרשרת ב־ $\mathcal{F}$, המועמד הטבעי לחסם מלעיל הוא $A=\bigcup_{i\in I}A_i$. כדי להשתמש בלמה של צורן, יש להוכיח שהוא גם כן שייך ל־ $\mathcal{F}$.

(הדרכה. הגדירו $\mathcal{F}$ להיות קבוצת כל יחסי סדר החלקי המכילים את $\leq_X$. הראו שב־ $\mathcal{F}$ מתקיים התנאי של הלמה של צורן. לפי כך, ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי. הוכיחו כי הוא סדר לינארי.)

2. תהי X קבוצה אינסופית. הוכיחו כי קיימת חלוקה של X לתת־קבוצות בעלות העצמה $\aleph_0$. (הדרכה: הגדירו $\mathcal{F}$ להיות קבוצת החלוקות של תת־קבוצות של X לתת־קבוצות בעלות העצמה $\aleph_0$...)

3. הסיקו מהשאלה הקודמת שלכל קבוצה אינסופית X מתקיים $X \sim X \times \{0,1\}$.

4. תהי $\mathcal{F}$ הקבוצה שאיבריה הן כל הקבוצות של עיגולים זרים במישור. $\mathcal{F}$ היא קבוצה סדורה לפי ההכלה. הוכיחו כי ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי.

5. תהי X קבוצה אינסופית. התבוננו בהוכחה (שגויה) של הטענה (הלא נכונה) הבאה: "ב־ X קיימת תת־קבוצה סופית מקסימלית":

- תהי $\mathcal{F}$ קבוצת כל התת־קבוצות הסופיות של X. תהי $\mathcal{C} = (A_i)_{i \in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. אז $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$, ולכן, לפי הלמה של צורן, יש ב־ $\mathcal{F}$ איבר מקסימלי.

ברור שהטענה לא נכונה, אבל מה בדיוק לא נכון בהוכחה זו?

6.2 שימוש בלמה של צורן באלגברה לינארית: בסיס המל

בטענה הבאה נדון מושג של בסיס במרחב וקטורי. בקורס של אלגברה לינארית מגדירים בסיס עבור מרחבים וקטוריים נוצרים סופית (כלומר, מרחבים וקטוריים שיש להם קבוצה פורשת סופית). אם ננסה להגדיר בסיס באופן דומה ("קבוצה פורשת בלתי תלויה") במרחב שאינו נוצר סופית, ניתקל במספר בעיות ברמה של הגדרות. למשל, האם יש טעם לדבר על "צירוף לינארי של אינסוף וקטורים"? ניקח, לדוגמא, את מרחב הסדרות הממשיות האינסופיות $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) : \; a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}\}$, ונסתכל בקבוצת הווקטורים

$$v_1 = (1,1,1,\ldots), \quad v_2 = (2,2,2,\ldots), \quad v_3 = (3,3,3,\ldots), \quad \ldots$$

אם נחשוב על הצירופים הלינאריים

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_+} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \qquad \text{ו־} \qquad \sum_{i \in \mathbb{N}_+} (-1)^i v_i = -v_1 + v_2 - v_3 + \ldots$$

נבין שיש כאן בעיה: הערך הצפוי בכל רכיב הוא למעשה טור שאינו מתכנס. עקב כך, הביטוי "צירוף לינארי" מתייחס רק לצירוף לינארי סופי, כלומר – עם מספר סופי של מחוברים: $\sum_{i=1}^{k} v_i$.

נעבור להגדרות של המרחב הנפרש ע"י קבוצת וקטורים, ושל תלות ואי־תלות לינארית. ההגדרות תקפות עבור מרחב וקטורי כלשהו; עבור מרחבים נוצרים סופית הגדרות אלה מתיישבות עם ההגדרות הרגילות שלמדתם באלגברה.

הגדרות. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

- תהי S קבוצת וקטורים (סופית או אינסופית) ב־ V. **התת־מרחב הנפרש ע"י S** הוא קבוצת כל הצירופים הלינאריים הסופיים של אברי S (קל להוכיח שקבוצה זו היא באמת תת־מרחב של V). תת־מרחב זה מסומן ב־ $span(S)$. אם $W = span(S)$, נאמר ש־ **W הוא התת־מרחב (של V) הנפרש ע"י S**, ונאמר ש**הקבוצה S פורשת את W**.

- קבוצת וקטורים T נקראת **תלויה לינארית** אם יש לה תת־קבוצה סופית $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq T$ וקיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$, לא כולם 0, כך ש־ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$.

  אם T איננה תלויה לינארית, נאמר שהיא **בלתי תלויה לינארית**.

- **בסיס** של מרחב וקטורי V הוא קבוצה בלתי תלויה שפורשת את V.[48]

דוגמא. יהי $V = \mathbb{R}[x]$, המרחב של כל הפולינומים הממשיים. מרחב זה אינו נוצר סופית (מדוע?). הקבוצה $B = \{1, x, x^2, \dots\}$ היא בסיס שלו: מצד אחד, כל פולינום הוא צירוף לינארי סופי של אברי B; ומצד שני, קל לראות שזו קבוצה בלתי תלויה לינארית (למעשה, זה אומר: כל תת־קבוצה סופית של B היא בלתי תלויה לינארית לפי "ההגדרה הרגילה").

האם לכל מרחב וקטורי יש בסיס? במקרה של מרחב נוצר סופית ניתן להוכיח זאת הדרכים הבאות:

- לוקחים קבוצה S שפורשת את V ומשמיטים ממנה וקטורים בלי לפגוע במרחב הנפרש – אם/כל עוד זה אפשרי. כך מגיעים לקבוצה S' שהיא קבוצה פורשת מינימלית של V[49]; קל להוכיח ש־ S בלתי תלויה לינארית, ולכן היא בסיס של V.

- לוקחים את הקבוצה הריקה $\varnothing$ (שהיא קבוצה בלתי תלויה) ומוסיפים אליה וקטורים מ־ V כך שהקבוצה תישאר בלתי תלויה – כל עוד זה אפשרי. כך מגיעים לקבוצה T שהיא קבוצה בלתי תלויה מקסימלית ב־ V[50]; ניתן להוכיח ש־ T פורשת את V, ולכן היא בסיס של V.

הוכחות אלה מבוססות על העובדה שתהליך ההשמטה (בהוכחה הראשונה) או ההוספה (בהוכחה השניה) של וקטורים ייפסק בשלב מסויים ותתקבל קבוצה פורשת מינימלית או בלתי תלויה מקסימלית. כדי להצדיק את זה, מוכיחים טענת עזר שאומרת ש־ (כל עוד מדובר בקבוצות סופיות) מספר האיברים בקבוצה בלתי תלויה כלשהי ב־ V קטן או שווה ממספר האיברים בקבוצה כלשהי שפורשת את V.

לעומת זאת, אם V לא נוצר סופית, כל זה לא ברור מאליו. בפרט (אם נחשוב על ההוכחה השניה), מאחר שמספר הווקטורים בקבוצה בלתי תלויה כבר לא חסום ע"י מספר סופי, לא ברור שקיימת קבוצה בלתי תלויה מקסימלית.

מסתבר שלא ניתן להוכיח את זה תוך שימוש בכלים אלמנטריים. עם זאת, ניתן להוכיח את זה בעזרת הלמה של צורן. שימו לב: הלמה של צורן מבטיחה שבתנאים מסויימים בקבוצה סדורה יש איבר מקסימלי, וזה בדיוק מה שאנחנו מחפשים: איבר מקסימלי בקבוצת התת־קבוצות הבלתי־תלויות של V, הסדורה לפי ההכלה.

[95] משפט. לכל מרחב וקטורי V קיים בסיס.

הוכחה. קודם כל, נניח ש־ $V \neq \{0\}$ (כי לגבי מרחב האפס קיבלנו מוסכמה שהקבוצה הריקה היא בסיס שלו; ראו הערה בעמוד הקודם). לכן קיים $v \in V$ כך ש־ $v \neq 0$.

נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את קבוצת כל התת־קבוצות הבלתי־תלויות לינארית של V. $\mathcal{F}$ לא ריקה כי לכל $v \in V$, $v \neq 0$, הקבוצה $\{v\}$ היא בלתי תלויה (לכן $\{v\} \in \mathcal{F}$). $\mathcal{F}$ סדורה חלקית לפי יחס ההכלה.

תהי $\mathcal{C} = (A_i)_{i \in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. נסתכל ב־ $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. ברור ש־ A הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$ כי לכל $i \in I$ מתקיים $A_i \subseteq A$.

כדי שנוכל להשתמש בלמה של צורן, יש להוכיח ש־ $A \in \mathcal{F}$, כלומר ש־ A היא קבוצה בלתי תלויה לינארית.

[48] עבור $V = \{0\}$, הקבוצה הריקה נחשבת לבסיס לפי מוסכמה.

[49] כלומר: S' פורשת את V, אבל אין לה תת־קבוצה ממש שעדיין פורשת את V. במילים אחרות, S' היא **איבר מינימלי** בקבוצת התת־קבוצות של V שפורשות אותו, הסדורה לפי ההכלה.

[50] כלומר: T בלתי תלויה ב־ V, אבל אין ב־ V קבוצה בלתי תלויה ש־ T מוכלת בה ממש. במילים אחרות, T היא **איבר מקסימלי** בקבוצת התת־קבוצות הבלתי תלוחות ב־ V, הסדורה לפי ההכלה.

נניח בדרך השלילה ש־ A היא קבוצה תלויה לינארית. זה אומר: קיימת $Q = \{v_1, \ldots, v_k\}$, תת־קבוצה סופית של A, וסקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, לא כולם 0, כך ש־ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$. מאחר ש־ $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, לכל $1 \le j \le k$ קיים $i_j \in I$ כך ש־ $v_j \in A_{i_j}$ (כלומר: כל אחד מאברי Q שייך לאיבר כלשהו של $\mathcal{C}$). מאחר ש־ $\mathcal{C}$ היא שרשרת, גם $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ היא שרשרת סופית, לכן קיים בה איבר A_m (כאשר $m \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$) כך ש־ $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq A_m$.[51] זה אומר ש־ A_m היא קבוצה תלויה, וזו סתירה: לכל $i \in I$, הקבוצה A_i שייכת ל־ $\mathcal{F}$, ולכן היא בלתי תלויה.

לכן ב־ $\mathcal{F}$ מתקיים התנאי של הלמה של צורן. לכן, **לפי הלמה של צורן**, ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי, נסמן אותו ב־ T (כלומר, T היא קבוצה בלתי תלויה לינארית מקסימלית להכלה). נוכיח ש־ T פורשת את V. אם לא כך, אז קיים $v \in V$ שאינו צירוף לינארי סופי של אברי T. נסתכל בקבוצה $T \cup \{v\}$. אנחנו טוענים שהיא גם כן בלתי תלויה. אחרת יש לה תת־קבוצה סופית S כך שניתן לכתוב את 0 כצירוף לינארי של אבריה באופן לא טריויאלי (לא כל הסקלרים 0). הוקטור v שייך ל־ S כי אחרת נקבל ש־ T תלויה. נניח ש־ $\alpha v + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_k w_k = 0$ כאשר $w_1, \ldots, w_k \in T$ ולא כל הסקלרים הם 0. אם $\alpha = 0$, מקבלים $\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_k w_k = 0$ ומכאן $\beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$ כי $w_1, \ldots, w_k \in T$, ו־ T בלתי־תלויה; זאת סתירה כי קיבלנו כל הסקלרים 0. ואם $\alpha \neq 0$, אז

$$v = -\frac{1}{\alpha}\left(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \ldots + \beta_k w_k\right),$$

וזאת סתירה להנחה ש־ v אינו שייך ל־ $span(T)$.

לפי כך, T היא קבוצה בלתי־תלויה שפורשת את V, כלומר T היא בסיס של V. □

הערות.

1. בדומה לתוצאות רבות מאוד שנובעות מהלמה של צורן, משפט זה טוען רק שבסיס קיים, אבל הוא לא מספק שום דרך לבנות אותו. אכן, רק במקרים מיוחדים מאוד ניתן להצביע על בסיס מפורש של מרחב וקטורי שאינו נוצר סופית.

2. בהמשך לדיון זה, ניתן להגדיר את מושג המימד עבור מרחבים וקטוריים כלשהם. כדי לעשות זאת, מראים ש־ (בדומה למה שקורה במרחבים וקטוריים בעלי מימד סופי) בכל מרחב וקטורי V, כל קבוצה בלתי תלויה לינארית קטנה או שווה מבחינת העצמה מכל קבוצה שפורשת את V. מזה נובע שכל הבסיסים של V שקולים מבחינת העצמה. זה מאפשר להגדיר את המימד של V, $\dim(V)$, כקרדינל של בסיס (כלשהו) של V.

3. הסוג של בסיס שדיברנו עליו בפרק זה נקרא **בסיס המל**[52]. במרחבים וקטוריים עם מבנה נוסף (למשל, מרחבי הילברט) ניתן לדבר גם על צירופים לינאריים אינסופיים, בתנאי שהם מתכנסים. מושג הבסיס משתנה בהתאם.

תרגילים.

1. יהי V מרחב וקטורי ויהי $B = \{v_i\}_{i \in I}$ בסיס שלו. הוכיחו שכל וקטור ניתן לכתיבה כצירוף לינארי (סופי) של אברי B באופן יחיד. (רמז: הוכחת המקרה הכללי דומה מאוד להוכחה עבור מרחבים בעלי מימד סופי.)

2. (א) יהי $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, מרחב הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים. לכל $n \in \mathbb{N}$, תהי e_n הסדרה שבה הרכיב ה־ n הוא 1, ושאר הרכיבים הם 0. כלומר:

$$e_0 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad e_1 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots$$

וכו'. הוכיחו כי הקבוצה $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ היא קבוצה בלתי תלויה ב־ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, אבל איננה בסיס שלו.

[51] למעשה, השתמשנו כאן בעובדה הבאה: אם X היא קבוצה סופית (לא ריקה) סדורה לינארית, אז יש בה איבר אחרון. ההוכחה – באינדוקציה על גודל הקבוצה.

[52] Hamel basis, על שם מתמטיקאי גרמני Georg Karl Wilhelm Hamel, 1877 – 1954.

(ב) יהי W התת־מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ שאבריו הם כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים שרכיביהן הם 0 ממקום מסויים. הוכיחו כי $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא בסיס של W.

(ג) יהי U התת־מרחב של $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ שאבריו הם כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים שהינן קבועות ממקום מסויים. מצאו בסיס של U (רמז: מספיק להוסיף וקטור אחד לבסיס של W מהסעיף הקודם).

(ד) נחזור ל־ $V=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. לכל $\beta\in\mathbb{R}$, תהי $\ell_\beta=\left(1,\beta,\beta^2,\beta^3,\dots\right)$. הוכיחו כי $\{\ell_\beta\}_{\beta\in\mathbb{R}}$ היא קבוצה בלתי תלויה (רמז: השתמשו במטריצת ונדרמונדה). הסיקו מכך (ומהעובדות שצויינו בלי הוכחה בסיום הפרק) כי $\dim(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})=\aleph$.

3. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נקראת "פונקציה חיבורית" אם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(א) סעיף זה הוא תרגיל סטנדרטי בחדו"א.

- הוכיחו כי אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה חיבורית רציפה, אז היא פונקציה מהצורה $f(x)=cx$, כאשר $c=f(1)$. (רמז: מוכיחים תחילה שזה נכון לכל x טבעי; אחר כך – לכל x שלם; אחר כך – לכל x רציונלי: עד כאן משתמשים רק בלינאריות. כעת מוכיחים, בעזרת הרציפות, שזה נכון לכל x ממשי.)
- הוכיחו כי ניתן להסיק אותה תוצאה אם נתון רק ש־ f רציפה ב־ 0.
- הוכיחו כי ניתן להסיק אותה תוצאה אם נתון רק ש־ f רציפה ב־ a, כאשר a הוא מספר ממשי כלשהו.

(ב) מטרת התרגיל היא להוכיח שקיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חיבורית שאיננה מהצורה $f(x)=cx$. נסתכל על $\mathbb{R}$ כעל מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$, ויהי $B=\{v_i\}_{i\in I}$ בסיס שלו. יהי $x\in\mathbb{R}$, נגדיר $f(x)$ באופן הבא. ניתן לכתוב את x כצירוף לינארי סופי של אברי B באופן יחיד: $x=\beta_1v_{i_1}+\beta_2v_{i_2}+\ldots+\beta_kv_{i_k}$ (כאשר $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k\in\mathbb{Q}$). נגדיר: $f(x)=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k$.
הוכיחו:

- $f(x)$ היא פונקציה חיבורית.
- $f(x)$ איננה פונקציה קבועה. (רמז: יהיו $v_i,v_j\in B$. מהם $f(v_i)$ ו־ $f(v_i+v_j)$?)
- לכל x ממשי, מתקיים $f(x)\in\mathbb{Q}$.
- $f(x)$ לא רציפה באף מקום. (רמז: f לא רציפה באף קטע כי היא לא מקיימת משפט מפורסם על פונקציות רציפות. כמו כן, ממה שהראיתם לעיל נובע שאם f רציפה בנקודה אחת כלשהי, אז היא רציפה ב־ $\mathbb{R}$.)
- $f(x)$ איננה מהצורה $f(x)=cx$.

6.3 שימושים בלמה של צורן בחשבון עצמות.

נראה מספר שימושים של הלמה של צורן בתורת הקבוצות. התוצאות הבאות יעזרו לנו להשלים את החשבון של עצמות.

בהוכחות נשתמש בטענת העזר הבאה.

[96] טענת עזר.

תהיינה X,Y שתי קבוצות. נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את קבוצת כל הזוגות (A,f) כאשר $A\subseteq X$, $f:A\to Y$ [53]. נגדיר ב־ $\mathcal{F}$ יחס סדר חלקי[54] ע"י

$$(A_1,f_1)\le(A_2,f_2)\quad\Leftrightarrow\quad A_1\subseteq A_2,\ f_2|_{A_1}=f_1.$$

תהי $\mathcal{C}=((A_i,f_i))_{i\in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. נסתכל ב־ $(B,g)=(\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\bigcup\limits_{i\in I}f_i)$ [55]. אז:

---

[53] שימו לב: A איננה תת־קבוצה מסוימת של X. אברי $\mathcal{F}$ הם כל הפונקציות $A\to Y$, עבור כל התת־קבוצות A של X

[54] הוכיחו כי הוא באמת יחס סדר חלקי!

[55] $\bigcup\limits_{i\in I}f_i$ מוגדרת ע"י היחס $\bigcup\limits_{i\in I}F_i$. באופן כללי איחוד של יחסים פונקציונליים לא בהכרח מגדיר פונקציה. במצב המתואר הוא מגדיר פונקציה, נוכיח את זה בסעיף הראשון של הלמה.

1. g היא פונקציה מ־ B ל־ Y.
2. הזוג (B,g) הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$, והוא גם כן שייך ל־ $\mathcal{F}$.
3. אם לכל $i \in I$ הפונקציה f_i היא חד־חד־ערכית, אז גם g היא פונקציה חד־חד־ערכית.
4. אם לכל $i \in I$ התמונה של f_i היא Z_i, אז התמונה של g היא $\bigcup_{i\in I} Z_i$.

הוכחה.

1. יהי $x \in B$. זה אומר: קיים $i \in I$ כך ש־ $x \in A_i$. עבור אותו i, f_i היא פונקציה $A_i \to Y$, לכן קיים $y \in Y$ כך ש־ $(x,y) \in F_i$, ומכאן $(x,y) \in G$ [56]. נראה ש־ y כזה הוא יחיד: נניח שגם $(x,z) \in G$. מכאן שקיים $j \in I$ כך ש־ $x \in A_j$, $f_j(x) = z$. כעת, מאחר ש־ $\mathcal{C}$ היא שרשרת, מתקיים: $(A_i,f_i) \le (A_j,f_j)$ או $(A_j,f_j) \le (A_i,f_i)$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $(A_i,f_i) \le (A_j,f_j)$. אז $f_j|_{A_i} = f_i$, ולכן $y = f_i(x) = f_j(x)$. מכאן ש־ $y = z$, כלומר $g(x)$ מוגדר באופן יחיד
2. ברור ש־ $(A_i,f_i) \le (B,g)$ לכל $i \in I$, וכעת הוכחנו גם ש־ $(B,g) \in \mathcal{F}$. לכן (B,g) הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$ השייך ל־ $\mathcal{F}$.
3. נניח ש־ $g(x_1) = y$ ו־ $g(x_2) = y$. זה אומר: קיימים $i,j \in I$ כך ש־ $f_i(x_1) = y$ ו־ $f_j(x_2) = y$. בדומה לשיקול בהסבר הקודם, ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $(A_i,f_i) \le (A_j,f_j)$. אז $f_j|_{A_i} = f_i$, ולכן $y = f_i(x_1) = f_j(x_1)$. קיבלנו $f_j(x_1) = f_j(x_2) = y$. מאחר ש־ f_j היא פונקציה חד־חד־ערכית, מכאן נובע $x_1 = x_2$.
4. אם $y \in \mathrm{Im}(g)$, אז קיים $x \in B$ כך ש־ $(x,y) \in G$, לכן קיים $i \in I$ כך ש־ $(x,y) \in F_i$, ומכאן $y \in Z_i$. ההכלה ההפוכה ברורה.

נעבור לשימושים.

כל שני קרדינלים ניתנים להשוואה. את כל הקרדינלים שראינו, יכולנו להשוות:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \aleph < 2^{\aleph} < \ldots.$$

נוכיח, בעזרת הלמה של צורן, שכל שני קרדינלים ניתנים להשוואה.

[97] משפט. אם α ו־ β הם שני קרדינלים, אז $\alpha \le \beta$ או $\beta \le \alpha$.

הוכחה. אם $\alpha = 0$ או $\beta = 0$, אז הטענה ברורה. לכן נניח ש־ $\alpha, \beta \ne 0$. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות כך ש־ $|X| = \alpha$, $|Y| = \beta$. עלינו להוכיח: $|X| \le |Y|$ או $|Y| \le |X|$. כלומר: קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $X \to Y$, או קיימת פונקציה על $X \to Y$.

נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את הקבוצת כל הזוגות (A,f) כאשר $\varnothing \ne A \subseteq X$ ו־ $f : A \to Y$ היא פונקציה חד־חד־ערכית, כאשר $\mathcal{F}$ סדורה חלקית לפי היחס:

$$(A_1,f_1) \le (A_2,f_2) \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2,\ f_2|_{A_1} = f_1.$$

הקבוצה $\mathcal{F}$ לא ריקה כי לכל $x \in X, y \in Y$, הזוג $(\{x\}, x \mapsto y)$ שייך לה.

תהי $\mathcal{C} = ((A_i,f_i))_{i\in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. נסתכל ב־ $(B,g) = (\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} f_i)$.

[56] הסימון כאן הוא כמו בהגדרה של המושג "פונקציה": אנו מסמנים פונקציה באות קטנה $(f,g,h,\ldots)$, ואת היחס שמגדיר אותה באות גדולה מתאימה $(F,G,H,\ldots)$. לפי כך, הרישום $f(x) = y$ הוא סימון לעובדה $(x,y) \in F$.

לפי טענת העזר **[96.(1,2,3)]**, (B,f) הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$ השייך ל־ $\mathcal{F}$ (כלומר: f היא פונקציה חד־חד־ערכית מ־ B ל־ Y, ולכל $i \in I$ מתקיים $(A_i, f_i) \le (B,g)$). לכן $\mathcal{F}$ מקיימת את התנאי של הלמה של צורן. לכן, **לפי הלמה של צורן**, ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי, נסמן אותו ב־ (D,h). כלומר, $h : D \to Y$ היא פונקציה חד־חד־ערכית מ־ D (תת־קבוצה של X) ל־ Y.

אם $D = X$, אז h היא פונקציה חד־חד־ערכית $X \to Y$, ולכן מתקיים $|X| \le |Y|$.

נניח כעת ש־ $D \subsetneqq X$. נוכיח ש־ h היא פונקציה **על** Y. אחרת קיים $y_0 \in Y \setminus \mathrm{Im}(h)$. כמו כן, ומאחר ש־ $D \subsetneqq X$, קיים $x_0 \in X \setminus D$. תהי $h' : (D \cup \{x_0\}) \to Y$ המוגדרת ע"י $h'(x) = h(x)$ לכל $x \in D$, ו־ $h'(x_0) = y_0$. הפונקציה h' היא חד־חד־ערכית ולכן $h' \in \mathcal{F}$. כעת ב־ $\mathcal{F}$ מתקיים $(h, D) < (h', D \cup \{x_0\})$, בסתירה לכך ש־ (D,h) הוא איבר מקסימלי של $\mathcal{F}$. לכן במקרה זה h היא פונקציה חד־חד־ערכית מ־ D **על** Y, ולכן $|D| = |Y|$. מאחר ש־ $D \subseteq X$, מקבלים $|Y| \le |X|$. □

ראינו בחשבון קרדינלים: $\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$, $\aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph + \aleph$, $2^{\aleph} = 2^{\aleph} \cdot 2^{\aleph} = 2^{\aleph} + 2^{\aleph}$, וכו'. כעת נכליל בעזרת הלמה של צורן את התוצאות האלה: נראה שלכל קרדינל אינסופי α מתקיים $\alpha = \alpha \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.

[98] משפט. לכל קרדינל אינסופי α מתקיים: $\alpha + \alpha = \alpha$.

הוכחה. מאחר שלכל קרדינל α מתקיים $\alpha + \alpha = \alpha \cdot 2$, מספיק להוכיח $\alpha \cdot 2 = \alpha$. תהי X קבוצה כך ש־ $|X| = \alpha$. נוכיח ש־ $|X \times \{0,1\}| = |X|$.

נסמן ב־ $\mathcal{F}$ את קבוצת כל הזוגות מהצורה (A,f) כאשר $A \subseteq X$ ו־ $f : A \to (A \times \{0,1\})$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל, כאשר $\mathcal{F}$ סדורה חלקית לפי היחס

$$(A_1, f_1) \le (A_2, f_2) \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2,\ f_2|_{A_1} = f_1.$$

הקבוצה $\mathcal{F}$ לא ריקה כי ב־ X יש תת־קבוצה A_0 בעלת העצמה $\aleph_0$, ועבורה מתקיים $A_0 \sim (A_0 \times \{0,1\})$.

תהי $\mathcal{C} = ((A_i, f_i))_{i \in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. נסתכל ב־ $(B,g) = (\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i \in I} f_i)$.

לפי טענת העזר **[96.(1,2,3,4)]**, (B,f) הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$ השייך ל־ $\mathcal{F}$. כלומר: f היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $B = \bigcup_{i\in I} A_i$ על $B \times \{0,1\} = \bigcup_{i\in I} (A_i \times \{0,1\})$, ולכל $i \in I$ מתקיים $(A_i, f_i) \le (B,g)$.

לפי כך, ב־ $\mathcal{F}$ מתקיים התנאי של הלמה של צורן, ולכן, **לפי הלמה של צורן**, ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי (D,h). בפרט, h היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ D ל־ $D \times \{0,1\}$, ולכן $|D| = |D \times \{0,1\}|$.

אם $D = X$, אין מה להוכיח. נניח ש־ $D \subsetneqq X$.

נוכיח ש־ $X \setminus D$ היא קבוצה סופית. אחרת, אם $X \setminus D$ היא קבוצה אינסופית, אז יש בה תת־קבוצה Z בעלת העצמה $\aleph_0$. מאחר ש־ $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$, קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל $g : Z \times \{0,1\} \to Z$. אבל אז הפונקציה $f \cup g$ היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $(D \cup Z) \times \{0,1\}$ ל־ $(D \cup Z)$, וזאת סתירה למקסימליות של (D,h).

מאחר ש־ $X \setminus D$ היא קבוצה סופית, מתקיים $|D| = |X|$ (לפי טענה **[61]**). כעת מ־ $|D| = |D \times \{0,1\}|$ נובע $|X| = |X \times \{0,1\}|$. □

נוכיח שתי מסקנות ממשפט זה.

[99] מסקנה. אם α ו־ β הם שני קרדינלים, לפחות אחד מהם אינסופי, אז $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ β הוא קרדינל אינסופי ו־ $\alpha \le \beta$. אז $\beta = \beta + \beta \ge \alpha + \beta \ge 0 + \beta = \beta$, ומכאן $\alpha + \beta = \beta$. □

[100] מסקנה. תהי X קבוצה אינסופית, $Y \subseteq X$ כך ש־ $|Y| < |X|$. אז $|X| = |X \setminus Y|$.

נסמן $\alpha = |X|$, $\beta = |Y|$, $\gamma = |X \setminus Y|$; ולפי הנתון $\beta < \alpha$. ברור ש־ $\alpha = \beta + \gamma$. כמו כן, לפחות אחד מביו β ו־ γ הוא קרדינל אינסופי (אחרת היינו מקבלים ש־ α הוא קרדינל סופי). לכן לפי טענה **[99]**, מתקיים $\alpha = \max\{\gamma, \beta\}$. מאחר ש־ $\alpha < \beta$, מזה נובע $\gamma = \alpha$, וזה מה שרצינו להוכיח. $\square$

כעת נוכיח טענה על כפל קרדינלים.

[101] משפט. לכל קרדינל אינסופי α מתקיים $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

הוכחה. תהי X קבוצה כך ש־ $|X| = \alpha$. נוכיח שמתקיים $|X \times X| = |X|$.

תהי $\mathcal{F}$ הקבוצת כל הזוגות (A, f) כאשר $A \subseteq X$ אינסופית, ו־ f היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $A \times A$ ל־ A, כאשר $\mathcal{F}$ סדורה לפי היחס

$$(A_1, f_1) \leq (A_2, f_2) \quad \Leftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2,\ f_2|_{A_1} = f_1.$$

$\mathcal{F}$ לא ריקה כי ל־ X יש תת־קבוצה A_0, בעלת העצמה $\aleph_0$; עבורה קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $A_0 \times A_0$ ל־ A_0.

תהי $\mathcal{C} = ((A_i, f_i))_{i \in I}$ שרשרת ב־ $\mathcal{F}$. נסתכל ב־ $(B, g) = (\bigcup\limits_{i \in I} A_i, \bigcup\limits_{i \in I} f_i)$.

לפי טענת העזר **[96.(1,2,3,4)]**, (B, f) הוא חסם מלעיל של $\mathcal{C}$ השייך ל־ $\mathcal{F}$. כלומר: f היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $B \times B = \bigcup\limits_{i \in I}(A_i \times A_i)$ על $B = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, ולכל $i \in I$ מתקיים $(A_i, f_i) \leq (B, g)$.

הראנו שב־ $\mathcal{F}$ מתקיים התנאי של הלמה של צורן, ולכן, **לפי הלמה של צורן**, ב־ $\mathcal{F}$ יש איבר מקסימלי (D, h) שהוא פונקציה חד־חד־ערכית ועל מ־ $D \times D$ ל־ D (כאשר D היא תת־קבוצה אינסופית של X). בפרט מתקיים $|D| = |D \times D|$.

ברור ש־ $|X| \leq |D|$ כי D היא תת־קבוצה של X. אם נוכיח ש־ $|X| = |D|$, זה יסיים את ההוכחה. לכן נניח, בדרך השלילה, ש־ $|X| > |D|$. אז, לפי מסקנה **[100]**, $|X| = |X \setminus D|$. לכן $|X \setminus D| > |D|$, ולכן D שקולה לתת־קבוצה Z של $X \setminus D$: $|Z| = |D|$. מאחר ש־ $|D| = |D \times D|$, מתקיים $|Z| = |D| = |D \times D| = |D \times Z| = |Z \times D| = |Z \times Z|$.

הקבוצות D ו־ Z הן אינסופיות, והקבוצות $D \times Z$, $Z \times D$, $D \times D$ הן זרות זו לזו (כי Z היא תת־קבוצה של $X \setminus D$). לכן מתקיים

$$|(D \times Z) \cup (Z \times D) \cup (Z \times Z)| = |D \times Z| + |Z \times D| + |Z \times Z| = |Z| + |Z| + |Z| = |Z|,$$

(השוויון האחרון נובע ממשפט **[98]**: $\alpha + \alpha + \alpha = \alpha$).

לכן קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל

$$p:\ (D \times Z) \cup (Z \times D) \cup (Z \times Z)\ \to\ Z.$$

נשים לב שהקבוצה $(D \times Z) \cup (Z \times D) \cup (Z \times Z)$, שהינה תחום ההגדרה של p, זרה ל־ $D \times D$.

תהי $q = h \cup p$. תחום ההגדרה של q הוא $(D \cup Z) \times (D \cup Z) = (D \times D) \cup (D \times Z) \cup (Z \times D) \cup (Z \times Z)$, כלומר האיחוד (הזר) של תחומי ההגדרה של h ושל p. פעולת q היא כפעולת h ב־ $D \times D$, וכפעולת p ב־ $(D \times Z) \cup (Z \times D) \cup (Z \times Z)$. הפונקציות h ו־ p הן חד־חד־ערכיות עם תמונות זרות, ולכן q חד־חד־ערכית; כמו כן, h ו־ p הן פונקציות על עם תמונות (בהתאמה) D ו־ Z, לכן q היא פונקציה על עם התמונה $D \cup Z$.

לכן $q \in \mathcal{F}$. כמו כן, $h < q$ לפי יחס ההכלה ב־ $\mathcal{F}$, וזאת סתירה למקסימליות של h.

לכן $|X| = |D|$, וזה מסיים את ההוכחה (מ־ $|D| = |D \times D|$ מקבלים $|X| = |X \times X|$). $\square$

[102] מסקנה. יהיו α ו־ β שני קרדינלים השונים מ־ 0, לפחות אחד מהם אינסופי. אז $\alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

ההוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ β הוא קרדינל אינסופי ו־ $0 < \alpha \leq \beta$. אז מתקיים $\beta = 1 \cdot \beta \leq \alpha \cdot \beta \leq \beta \cdot \beta = \beta$, ולכן $\alpha \cdot \beta = \beta$. $\square$

[103] מסקנה. יהיו α ו־ β שני קרדינלים כך ש־ $\alpha \leq 2^\beta$, $\alpha > 1$ ו־ β אינסופי. אז $\alpha^\beta = 2^\beta$.

הוכחה.

$$2^\beta \leq \alpha^\beta \leq (2^\beta)^\beta = 2^{\beta\cdot\beta} = 2^\beta,$$

ומכאן $\alpha^\beta = 2^\beta$. □

ניתן להבין טענה זו באופן הבא: אם β הוא קרדינל אינסופי ו־ α קרדינל גדול מ־ 1, אז הערך של α לא משפיע על הערך של α^β כל עוד $\alpha \leq 2^\beta$. למשל, עבור $\beta = \aleph$ מתקיים $(2^\aleph)^\aleph = \aleph^\aleph = \aleph_0^\aleph = \ldots = 3^\aleph = 2^\aleph$.

תרגילים.

1. תהי X קבוצה אינסופית, ויהי $\alpha = |X|$. הוכיחו:
   (א) העצמה של קבוצת הפונקציות ההפיכות מ־ X ל־ X היא 2^α.
   (ב) העצמה של קבוצת התת־קבוצות בעלות העצמה α (כלומר, של $\{Y : Y \in P(X), |Y| = |X|\}$), היא 2^α.
2. תהי X קבוצה אינסופית, ויהי $\alpha = |X|$.
   (א) הסבירו מדוע $\alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$.
   (ב) השתמשו בשוויון $\alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$ כדי להוכיח שקיימת חלוקה של X לתת־קבוצות בעלות העצמה $\aleph_0$.
   (ג) נתונה חלוקה של X לתת־קבוצות בעלות העצמה $\aleph_0$: $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$, כאשר $|X_i| = \aleph_0$ לכל $i \in I$.
   הוכיחו כי $\alpha = |I|$.
   (ד) השתמשו בשוויון $\alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$ כדי להוכיח שקיימת חלוקה של X ל־ $\aleph_0$ תת־קבוצות בעלות העצמה α.
   (ה) נתונה חלוקה של X ל־ $\aleph_0$ תת־קבוצות: $X = \bigsqcup_{i\in I} Y_i$, כאשר $|I| = \aleph_0$.
   הוכיחו כי קיים $i \in I$ כך ש־ $|Y_i| = \alpha$.
3. תהי $(X, \leq_X)$ קבוצה סדורה חלקית, כך ש־ $|X| > 1$. הוכיחו כי קיימת פונקציה חד־חד־ערכית ועל $f : X \to X$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים $f(x) \neq x$.

6.4 אקסיומת הבחירה

הטענה הבאה נקראת **אקסיומת הבחירה**:

[104] אקסיומת הבחירה.

תהי $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i\in I}$ משפחה לא ריקה של קבוצות לא ריקות. אזי קיימת פונקציה $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ (הנקראת **פונקצית בחירה**) כך שלכל $i \in I$ מתקיים $f(i) \in X_i$.

הטענה הבאה ואקסיומת הבחירה נובעות זו מזו בקלות, ולכן הטענה הבאה נחשבת לניסוח חלופי של אקסיומת הבחירה:

[105] אקסיומת הבחירה, ניסוח שני.

תהי $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i\in I}$ משפחה לא ריקה של קבוצות. אם $X_i \neq \varnothing$ לכל $i \in I$, אז $\bigtimes_{i\in I} X_i \neq \varnothing$.

נוכיח ששני הניסוחים של אקסיומת הבחירה שקולים זה לזה.

הניסוח ב־ [104] גורר את הניסוח ב־ [105]: תהי $\mathcal{X}=\{X_i\}_{i\in I}$ משפחה לא ריקה של קבוצות. תהי $f:I\to\bigcup\limits_{i\in I}X_i$ פונקצית בחירה ב־ $\mathcal{X}$. אז הסדרה המוכללת $(f(i))_{i\in I}$ שייכת ל־ $\bigtimes\limits_{i\in I}X_i$.

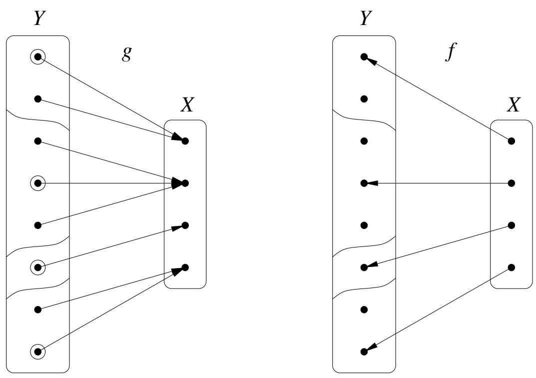
הניסוח ב־ [105] גורר את הניסוח ב־ [104]: יהי $(a_i)_{i\in I}\in\bigtimes\limits_{i\in I}X_i$. אז הפונקציה $f:I\to\bigcup\limits_{i\in I}X_i$ המוגדרת ע"י $f(i)=a_i$ היא פונקצית בחירה ב־ $\mathcal{X}$.

אקסיומת הבחירה היא טענה שנראית ברורה אינטואיטיבית. יחד עם זאת, היא לא נובעת מאקסיומות אחרות של הלוגיקה ושל תורת הקבוצות, לכן היא נחשבת לאקסיומה. בנוסף, ישנן טענות השקולות לאקסיומת הבחירה שמצד אחד אינן "ברורות" באותה מידה, ומצד שני הן חיוניות להוכחות של משפטים רבים במתמטיקה. הלמה של צורן היא אחת מהטענות השקולות לאקסיומת הבחירה.

למעשה כבר השתמשנו באקסיומת הבחירה מספר פעמים, בלי לציין זאת במפורש. אחת מהן היה בהוכחה של טענה **[45.2]**: $|X|\leq|Y|$ אם ורק אם קיימת פונקציה על $g:Y\to X$.

ראו את הוכחת הטענה הזאת בעמוד 85. בהוכחת הכיוון הראשון: אם $|X|\leq|Y|$, אז קיימת פונקציה על $g:Y\to X$ – אין צורך להשתמש באקסיומת הבחירה (האפשרות לבחור איבר מקבוצה <u>אחת</u> – $x_0\in X$ – נובע מאקסיומות אחרות). לעומת זאת, בהוכחת הכיוון השני: אם קיימת פונקציה על $g:Y\to X$, אז $|X|\leq|Y|$ – יש צורך לבחור איבר בקבוצת המקורות של כל $x\in X$, וזה מתאפשר הודות לאקסיומת הבחירה. נביא הוכחה מדויקת:

נניח שקיימת פונקציה על $g:Y\to X$. לכל $x\in X$, תהי A_x קבוצת המקורות שלו תחת g, כלומר $A_x=g^*(\{x\})=\{y\in Y: g(y)=x\}$, ותהי $\mathcal{A}=(A_x)_{x\in X}$. תהי f פונקצית בחירה ב־ $\mathcal{A}$. f היא פונקציה מ־ X לקבוצה $\bigcup_{x\in X}A_x=Y$, כך שמתקיים $f(x)\in A_x$ לכל $x\in X$. בנוסף, f היא פונקציה חד־חד־ערכית: אם $z=f(x_1)=f(x_2)$, אז $z\in A_{x_1}$ ו־ $z\in A_{x_2}$; מכאן $g(z)=x_1$ ו־ $g(z)=x_2$, וזה אומר ש־ $x_1=x_2$ כי g היא פונקציה. האיור הבא ממחיש כיוון זה של ההוכחה.



תרגילים:

1. הוכיחו כי כל אחת מהטענות הבאות שקולה לאקסיומת הבחירה:

(א) תהי X קבוצה לא ריקה. נסמן: $P'(X)=P(X)\setminus\{\varnothing\}$. אז קיימת $f:P'(X)\to X$ כך שלכל $A\in P'(X)$ מתקיים $f(A)\in A$.

(ב) יהי R יחס בין X ל־ Y (קבוצות לא ריקות) כך שלכל $x \in X$ מתקיים $R_x \neq \varnothing$.[57] אז קיימת פונקציה $f : X \to Y$ המקיימת: אם $f(x) = y$, אז $(x, y) \in R$.

(ג) לכל יחס שקילות קיים חתך.

2. תהי $f : X \to X$. הוכיחו כי קיימת $g : X \to X$ כך ש־ $f \circ g \circ f = f$.

3. תהיינה $f : B \to C$ ו־ $g : A \to C$ שתי פונקציות המקיימות $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$. הוכיחו כי קיימת פונקציה $h : B \to A$ כך ש־ $g \circ h = f$.

4. תהי $(X_i)_{i \in I}$ משפחה של קבוצות זרות. נסמן $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. הוכיחו כי מתקיים $|X| \geq |I|$.

5. מצאו פונקציית בחירה ללא שימוש באקסיומת הבחירה במשפחות הבאות:

(א) $P'(\mathbb{Z})$.

(ב) $P'(\mathbb{Q})$.

(ג) קבוצת כל הקטעים הסגורים ב־ $\mathbb{R}$.

(ד) קבוצת כל הקטעים פתוחים ב־ $\mathbb{R}$.

(הערה: כשאומרים "למצוא פונקצית בחירה ללא שימוש באקסיומת הבחירה ", הכוונה לכלל **מפורש** שמתאים לכל איבר במשפחה את אחד מהאיברים שלו. למשל, ב־ $P'(\mathbb{N})$ ניתן להגדרי פונקצית בחירה באופן הבא: $f(A)$ הוא האיבר הקטן ביותר של A.)

6.5 שימוש באקסיומת הבחירה בתורת המידה: דוגמא של קבוצה לא מדידה

בפרק זה נראה כיצד משתמשים באקסיומת הבחירה בבניה בעלת חשיבות בתורת המידה.

מושג המידה נועד להכליל את מושג האורך של קבוצה על הישר (ובאופן יותר כללי, את מושג השטח של קבוצה במישור, את מושג הנפח של קבוצה במרחב, וכו'). במקרה של קבוצות על הישר, המטרה היא להתאים לכל X (תת־קבוצה של $\mathbb{R}$) מספר אי־שלילי $m(X)$ (שיכול להיות גם $+\infty$) שיתיישב עם האורך במובן הבא:

1. אם X הוא קטע מהצורה (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ או $[a, b)$ עבור $a \leq b$, אז $m(X) = b - a$.
2. אם קבוצה Y מתקבלת מ־ X ע"י הזזה או שיקוף, אז $m(Y) = m(Y)$.
3. אם X היא איחוד זר של משפחה בת־מניה של קבוצות ($X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, כאשר $|I| \leq \aleph_0$), אז $m(X) = \sum_{i \in I} m(X_i)$.

טבעי לנסות להגדיר מידה של קבוצות על הישר הממשי בעזרת אינטגרל מסויים. עבור $X \subseteq \mathbb{R}$, נסתכל בפונקציה

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

(למעשה, זו הפונקציה האפיינית של X). כעת נגדיר

$$m(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).$$

[57] ראו הגדרה של סיבים בעמוד 28.

הדרישות 1 ו־ 2 לעיל יתקיימו, אבל הדרישה 3 כבר לא. למשל, הגדרה זו לא קובעת את $m(X)$ עבור $X = \mathbb{Q}$ (או, אם רוצים לתת דוגמא חסומה: $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$), כי פונקצית דיריכלה, כידוע, לא אינטגרבילית. במילים אחרות, $m(X)$ שתארנו לעיל, איננה מידה.

אחת הגישות המפורסמות והשימושיות היא **מידת לבג** (Lebesgue measure), שנתאר כעת. נתייחס כאן רק למקרה שבו X היא תת־קבוצה **חסומה** של $\mathbb{R}$.

יש אינסוף דרכים לכסות את X ע"י משפחה בת מניה של קטעים (כלומר: למצוא משפחה של קטעים $\mathcal{Y} = (Y_i)_{i\in I}$ כך ש־ $|I| \leq \aleph_0$ וכך ש־ $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} Y_i$). משפחה כזאת תיקרא **כיסוי בן מניה** של X. לכל כיסוי כזה $\mathcal{Y}$, נסמן ב־ $s(\mathcal{Y})$ את סכום אורכי הקטעים ששייכים ל־ $\mathcal{Y}$. יהי $m^*(X)$ האינפימום של קבוצת הערכים של $s(\mathcal{Y})$ המתקבלים עבור כל הכיסויים בני מניה של X:

$$m^*(X) = \inf_{\mathcal{Y}} s(\mathcal{Y}).$$

המספר $m^*(X)$ נקרא **המידה החיצונית** של X.

כעת, יהי $[a,b]$ קטע כלשהו שמכיל את X (קטע כזה קיים כי הנחנו ש־ X היא קבוצה חסומה). תהי $X' = [a,b] \setminus X$ (ההשלמה של X עד $[a,b]$). נגדיר את **המידה הפנימית** של X ע"י $m_*(X) = (b-a) - m^*(X')$.

לא קשה להראות שתמיד $m_*(X) \leq m^*(X)$. אם מתקיים $m_*(X) = m^*(X)$, נאמר כי X היא **קבוצה מדידה** ונגדיר את **המידה** שלה (לפי לבג) להיות הערך המשותף הזה: $m(X) = m_*(X) = m^*(X)$.

(הגדרה זו מורחבת בקלות לקבוצות לא חסומות, אבל לא ניכנס לפרטים.)

לבג נתן הגדרה זו בשנת 1904, והוא קיווה שכל תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ תהיה מדידה. (ניתן, למשל, להראות ש־ $\mathbb{Q}$ היא קבוצה בעלת מידה 0, בהתאם לעובדה שהיא איחוד בן מניה של נקודות בודדות, שהמידה של כל אחת מהן היא 0.) אך כבר בשנה הבאה Vitali בנה דוגמא של קבוצה לא מדידה. להלן הבנייה שלו.

נגדיר בקטע $[0,1]$ את היחס הבא: $x \sim y$ אם ורק אם $(x-y) \in \mathbb{Q}$. קל לבדוק שזה יחס שקילות. יהי V חתך של $[0,1]$ לפי יחס זה. כלומר, V היא קבוצה שמתקבלת ע"י בחירת איבר אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות[58]. **כאן השתמשנו באקסיומת הבחירה** – היא מבטיחה שניתן לבחור איבר אחד מכל מחלקת שקילות ולבנות את הקבוצה V. נציין כי מהבניה נובע כי לכל $a \in [0,1]$ קיים x יחיד ב־ V כך שההפרש $a - x$ הוא רציונלי.

מסתבר ש־ V היא קבוצה לא מדידה. נוכיח זאת.

נניח בשלילה שקיים $\mu(V) = m$. נשים לב שלכל $q \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ מתקיים $\mu(V+q) = \mu(V) = m$ (בגלל דרישה 2 בהגדרה של מידה).

הקבוצה $W = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} (V+q)$ היא איחוד בן מניה של קבוצות בעלות המידה m. לכן (לפי דרישה 3 בהגדרה של מידה) אם $m = 0$ אז $\mu(W) = 0$, ואם $m > 0$ אז $\mu(W) = \infty$. נסכם: או ש־ $\mu(W) = 0$, או ש־ $\mu(W) = \infty$.

מצד שני, קל לראות ש־ $[0,1] \subseteq W \subseteq [-1,2]$. לכן בהכרח $1 \leq \mu(W) \leq 3$, בסתירה למה שקיבלנו כרגע.

תרגיל: נסו להוכיח כי המידה של קבוצת קנטור היא 0.

[58] מאחר שבכל מחלקת שקילות יש אינסוף איברים, יש אינסוף דרכים לעשות בחירות כאלה. לפי כך, V איננה קבוצה ספציפית, אלא יש אינסוף קבוצות V שניתן לקבל בדרך זו.

7 קבוצות סדורות היטב; אורדינלים

7.1 קבוצות סדורות היטב

קבוצה סדורה היטב. קבוצה סדורה חלקית $(X, \leq)$ תיקרא **קבוצה סדורה היטב** אם לכל תת־קבוצה לא ריקה שלה יש איבר ראשון. הסדר $\leq$ ייקרא במקרה זה **סדר טוב.**

דוגמאות. כל הקבוצות הבאות (עם הסדרים המצויינים) הן קבוצות סדורות היטב.

1. קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$, הסדורה לפי הסדר הרגיל $\leq$.

אנחנו מתייחסים לזה כלעובדה מוכרת על המספרים הטבעיים. לגבי הדוגמאות הבאות, אתם מתבקשים בשלב זה להשתכנע בצורה לא פורמלית שאלה באמת קבוצות סדורות היטב. ברוב המקרים ההוכחות נובעות מטענות שנלמד בהמשך ומהעובדה ש־ $\mathbb{N}$ (עם הסדר הרגיל) היא קבוצה סדורה היטב. לפי כך, הדוגמא לעיל היא הדוגמא הבסיסית של קבוצה סדורה היטב.

חלק מהדוגמאות הבאות $(3, 4, 5)$ מתייחסות לדרכים אחרות לסדר את $\mathbb{N}$. כדי שלא נצטרך לציין זאת כל פעם כשמדובר ביחס הסדר הרגיל, נאמץ **מוסכמה: אם אחת מהקבוצות ה"רגילות" – $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ או $\mathbb{R}$ – מוזכרת בלי ציון של יחס סדר, אז הכוונה היא לסדר הרגיל.**

2. הקבוצה הריקה $\varnothing$ (ההגדרה מתקיימת עבורה באופן טריויאלי).

3. $\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר הבא: כל המספרים הזוגיים מוכרזים קטנים מכל המספרים האי־זוגיים, כאשר הסידורים הפנימיים בתוך המספרים הזוגיים ובתוך המספרים האי־זוגיים הם לפי הסדר הרגיל. כלומר:

$$0 < 2 < 4 < 6 < \ldots < 1 < 3 < 5 < 7 < \ldots.$$

4. $\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר הבא: הסדר בין כל המספרים הטבעיים שאינם 0 הוא כרגיל, ו־ 0 מוכרז להיות גדול מכל המספרים הטבעיים האחרים:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots < 0.$$

5. $\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר הבא: המספרים הגדולים מ־ 3 סדורים כרגיל, המספרים $0, 1, 2, 3$ מוכרזים להיות גדולים מהם, והסידור הפנימי של $0, 1, 2, 3$ הוא $3 < 2 < 1 < 0$:

$$4 < 5 < 6 < 7 < \ldots < 3 < 2 < 1 < 0.$$

6. $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי:

$$(0, 0) < (0, 1) < (1, 0) < (1, 1) < (2, 0) < (2, 1) < (3, 0) < (3, 1) < \ldots.$$

7. $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ הסדורה לפי הסדר המילוני העברי:

$$(0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < (3, 0) < \ldots < (0, 1) < (1, 1) < (2, 1) < (3, 1) < \ldots.$$

8. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי:

$$(0,0)<(0,1)<(0,2)<\ldots<(1,0)<(1,1)<(1,2)<\ldots<(2,0)<(2,1)<(2,2)<\ldots<(3,0)<(3,1)<\ldots\ldots$$

9. כל קבוצה סופית עם סדר לינארי.

תרגילים.

1. לפניכם עוד כמה דוגמאות של קבוצות סדורות היטב (כולן לפי הסדר הרגיל $\leq$). קבעו לאילו מהדוגמאות לעיל הן איזומורפיות:
   (א) קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ־ 10.
   (ב) קבוצת המספרים הטבעיים המתחלקים ב־ 3.
   (ג) קבוצת המספרים הראשוניים.
   (ד) $\left\{1-\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\right\}$.
   (ה) $\left\{1-\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\right\}\cup\{1\}$.
   (ו) $\left\{1-\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\right\}\cup\left\{2-\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\right\}$.
2. הסבירו מדוע הקבוצות הבאות (עם הסדר הרגיל) אינן סדורות היטב:
   (א) $\mathbb{Z}$.
   (ב) $\mathbb{Q}$.
   (ג) $\mathbb{Q}\cap[0,+\infty)$.
   (ד) $\mathbb{R}$.
   (ה) $(0,1)$ (הקטע הפתוח).
   (ו) $[0,1]$ (הקטע הסגור).
   (ז) $\{\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\}$.
   (ח) $\{0\}\cup\{\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\}$.
   (ט) $\{1-\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\}\cup\{1+\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\}$.
   (י) $\{1-\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\}\cup\{1\}\cup\{1+\frac{1}{n}\,:\;n\in\mathbb{N}_+\}$.

מהתבוננות בדוגמאות לעיל ניתן לשים לב:

1. כל הסדרים הטובים שמופיעים בדוגמאות אלה הם סדרים לינאריים. זה נכון תמיד – נוכיח את זה בטענה **[108]**.
2. כל קבוצה סדורה היטב נראית כמספר קבוצות האיזומורפיות ל־ $\mathbb{N}$, ש"שמו אותם בשורה ואולי עוד קבוצה סופית אחריהן". אכן, זה מייצג במובן מסויים מבנה כללי של קבוצות סדורות היטב, אבל יש לקחת בחשבון שניתן לקחת "הרבה מאוד" קבוצות כאלה וגם "לשים אותם בשורה" בדרכים שונות. כדי למיין קבוצות סדורות היטב, מדברים על **טיפוסי סדר** שמייצגים אותן מבחינת הסדר בדומה לדרך שבה קרדינלים מייצגים קבוצות מבחינת העצמה. כלומר, נאמר שלשתי קבוצות סדורות

היטב אותות טיפוס סדר אם ורק אם הן איזומורפיות.[59] נדחה דיון שיטתי ומדוייק בטיפוסי סדר לפרק 7.3, אבל כבר עכשיו נסמן ב־ ω את טיפוס הסדר של $\mathbb{N}$ הסדורה לפי הסדר הרגיל. כלומר, ω הוא טיפוס סדר של כל קבוצה סדורה היטב האיזומורפית ל־ $\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל. זה מאפשר לתאר טיפוסי סדר של קבוצות סדורות היטב אחרות: למשל, בדוגמא 3 זה $\omega+\omega$ (שתי קבוצות האיזומורפיות ל־ $\mathbb{N}$ "הרגילה", זו אחרי זו); בדוגמא 4: $\omega+1$ (קבוצת איזומורפיות ל־ $\mathbb{N}$ "הרגילה", ואחריה עוד איבר אחד); בדוגמא 5: $\omega+4$; בדוגמא 6: ω; בדוגמא 7: $\omega\cdot\omega = \omega+\omega+\omega+\ldots$.

מסקנות מההגדרה. נראה מספר טענות הנובעות מההגדרה של סדר טוב.

[106] טענה.

אם $(X,\leq)$ היא קבוצה סדורה היטב, אז כל תת־קבוצה של X (הסדורה לפי אותו הסדר) היא גם כן קבוצה סדורה היטב.

טענה **[106]** נובעת באופן מיידי מההגדרה של קבוצה סדורה היטב.

בפרט, מטענה זו נובע שכל תת־קבוצה של $\mathbb{N}$ (הסדורה לפי הסדר הרגיל) היא קבוצה סדורה היטב. נציין במיוחד את הדוגמאות הבאות:

1. $\{x\in\mathbb{N}:\ x\leq n\}=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$.
2. $\{x\in\mathbb{N}:\ x\geq n\}=\{n,n+1,n+2,n+3,\ldots\}$.
3. $n\mathbb{N}=\{x\in\mathbb{N}:\ k|x\}=\{0,n,2n,3n,4n,\ldots\}$.
4. קבוצת המספרים הראשוניים $\{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$.

[107] טענה. אם $(X,\leq)$ היא קבוצה סדורה היטב, אז יש בה איבר ראשון (לפי יחס זה).

הוכחה. מאחר שלכל תת־קבוצה של X יש איבר ראשון (זו ההגדרה של קבוצה סדורה היטב) ו־ X היא תת־קבוצה של עצמה, אז בפרט בה יש איבר ראשון. $\square$

הערה 1. ההיפך לא נכון, כלומר: אם ב־ X יש איבר ראשון, זה לא מבטיח שהיא סדורה היטב. לדוגמא: בקטע הסגור $[0,1]$ יש איבר ראשון, אבל הוא לא קבוצה סדורה היטב (לפי הסדר הרגיל) כי יש בו תת־קבוצות ללא איבר ראשון – למשל, הקטע הפתוח $(0,1)$.

הערה 2. קיימות קבוצות סדורות היטב עם איבר אחרון (דוגמא: $\{0,1,2\}$), וקיימות קבוצות סדורות היטב ללא איבר אחרון (דוגמא: $\mathbb{N}$).

[108] טענה. אם $\leq$ הוא סדר טוב, אז הוא סדר לינארי.

הוכחה. תהי $(X,\leq)$ סדורה היטב ויהיו $x,y\in X$. אז, בפרט, בקבוצה $\{x,y\}$ יש איבר ראשון, כלומר מתקיים $x\leq y$ או $y\leq x$. בכל מקרה, x ו־ y ניתנים להשוואה. $\square$

הערה. גם כאן ההיפך לא נכון, כלומר: לא כל סדר לינארי הוא סדר טוב. לדוגמא, הקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, הסדורה לפי הסדר הרגיל $\leq$, היא קבוצה סדורה לינארית אבל לא סדורה היטב (למה? ראו טענה **[107]**). דוגמא נוספת: כל תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ שמכילה קטע איננה סדורה היטב כי כל קבוצה כזאת מכילה קטע פתוח, ולו אין איבר ראשון.

[109] טענה. תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה היטב, ויהי $x\in X$ שאינו איבר אחרון ב־ X. אז ל־ x יש עוקב מיידי יחיד[60].

[59] ניתן לדבר גם על טיפוסי סדר של קבוצות סדורות חלקית כלשהן, אבל אנחנו נשתמש במושג זה רק עבור קבוצות סדורות היטב.

[60] תזכורת: y הוא עוקב מיידי של x אם $x<y$ ולא קיים z כך ש־ $x<z<y$.

הוכחה. מאחר ש־ X היא קבוצה סדורה לינארית (לפי טענה **[108]**) ו־ x אינו איבר אחרון, הרי שקיים ב־ X איבר (אחד לפחות) גדול מ־ x. נסתכל בקבוצה של כל האיברים כאלה: $A = \{y \in X \,:\, y > x\}$. מאחר ש־ A לא ריקה, יש בה איבר ראשון; נסמן אותו ב־ y_0.

האיבר y_0 הוא עוקב מיידי של x, כי אם קיים y כך ש־ $x < y < y_0$ אז y גם כן שייך ל־ A, ואז $y < y_0$ בסתירה להגדרה של y_0 כאיבר הראשון של A. בנוסף, y_0 הוא העוקב המיידי היחיד של x, כי אם גם y_1, השונה מ־ y_0, הוא עוקב מיידי של x, אז מתקיים גם $y_1 \in A$, לכן $y_0 < y_1$, ומכאן $x < y_0 < y_1$, כלומר y_1 לא יכול להיות עוקב מיידי של x. $\square$

הערה. לעומת זאת, אם x אינו איבר ראשון של X, לא מובטח שיש לו קודם מיידי. למשל, בדוגמא 3 אחרי ההגדרה ($\mathbb{N}$ הסדורה לפי "הזוגיים לפני האי־זוגיים", $0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots$), לאיבר 1 אין קודם מיידי: כל האיברים הקטנים מ־ 1 לפי סדר זה הם המספרים הזוגיים, ולכל y זוגי מתקיים, לפי סדר זה, $y < y + 2 < 1$. בדוגמא 8, לכל איבר מהצורה $(k, 0)$ אין קודם מיידי.

הטענה הבאה היא אפיון של קבוצות סדורות היטב בין קבוצות סדורות לינארית:

[110] טענה. תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה לינארית. היא סדורה היטב אם ורק אם אין בה סדרה אינסופית יורדת:

$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$.

הוכחה. מצד אחד, אם ב־ X יש סדרה כזאת, אז לקבוצה $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ אין איבר ראשון ולכן X לא סדורה היטב.

מצד שני: נניח ש־ X לא סדורה היטב. אז יש בה תת־קבוצה A שאין בה איבר ראשון. נבחר שרירותית $x_0 \in A$. מאחר שב־ A אין איבר ראשון, קיים $x_1 \in A$ כך ש־ $x_1 < x_0$. מאותה הסיבה, קיים $x_2 \in A$ כך ש־ $x_2 < x_1$. נמשיך באופן דומה: לכל $x_k \in A$ נוכל למצוא $x_{k+1} \in A$ כך ש־ $x_{k+1} < x_k$, וכך נבנה סדרה אינסופית יורדת של אברי X.[61]

תרגילים:

1. קבעו אילו בין הקבוצות הבאות הן קבוצות סדורות היטב. עבור קבוצות סדורות היטב: מצאו את "טיפוס הסדר" שלהן (באמצעות ω). עבור קבוצות שאינן סדורות היטב: מצאו בהן סדרה אינסופית יורדת.

   (א) $\mathbb{N}$ הסדורה לפי $0 < \ldots < 4 < 3 < 2 < 1$ (0 קטן מכולם, ושאר המספרים הטבעיים סדורים באופן הפוך מהרגיל).

   (ב) $\mathbb{N}$ הסדורה לפי $10 < 11 < 0 < 1 < 2 \ldots < 12 < 13$ ($10, 11$ לפני כולם, $12, 13$ אחרי כולם, השאר כרגיל).

   (ג) $\mathbb{N}$ הסדורה לפי $1 < 0 < 3 < 2 < 5 < 4 < 7 < 6 \ldots$ (היפוך של סדר בין כל הזוגות $2k, 2k + 1$).

   (ד) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ הסדורה כמו בהוכחה של טענה **[29]** (ראו עמוד 75).

   (ה) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הסדורה לפי היחס המילוני הלועזי.

   (ו) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הסדורה כמו בהוכחה של טענה **[30]** (ראו עמוד 76).

   (ז) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ הסדורה לפי היחס המילוני הלועזי.

   (ח) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ הסדורה לפי היחס המילוני העברי.

2. תהי $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (קבוצת הסדרות של מספרים טבעיים). נגדיר בה סדר באופן הבא:

   $(a_0, a_1, a_2, \ldots) < (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ אם ורק אם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־

   - $a_m < b_m$,
   - לכל $0 \leq k < m$ מתקיים $a_k = b_k$.

[61] כדי לכתוב הוכחה מדוייקת, יש צורך להשתמש באקסיומת הבחירה.

(א) הוכיחו כי סדר זה הוא סדר חלקי.

(ב) הוכיחו כי סדר זה הוא סדר לינארי.

(ג) הוכיחו כי סדר זה אינו סדר טוב (מצאו סדרה אינסופית יורדת).

(ד) האם תוכלו להגדרי בקבוצה זו סדר לינארי אחר שהוא סדר טוב?

3. (א) מצאו סדר טוב ב־ $\mathbb{N}$ כך שטיפוס הסדר יהיה $\omega+\omega+\omega$.

(ב) מצאו סדר טוב ב־ $\mathbb{N}$ כך שטיפוס הסדר יהיה $5+\omega+\omega+\omega$.

(ג) האם ניתן להגדיר סדר טוב ב־ $\mathbb{Z}$? האם ניתן לעשות זאת כך שטיפוס הסדר יהיה $1+\omega+\omega$?

(ד) האם ניתן להגדיר סדר טוב ב־ $\mathbb{Q}$?

4. הוכיחו שאם X היא תת־קבוצה של $\mathbb{R}$ שהינה סדורה היטב לפי הסדר הרגיל המושרה מ־ $\mathbb{R}$, אז X היא קבוצה בת מניה.

7.2 משפט ההשוואה של קבוצות סדורות היטב

רישא; קטע התחלי. תהי $(X,\le)$ קבוצה סדורה היטב. תת־קבוצה A של X נקראת **רישא** ב־ X אם מתקיים: אם $x\in A$ ו־ $y<x$, אז $y\in A$. במלים אחרות: עבור כל איבר x של A, כל אברי X הקטנים מ־ x גם כן שייכים ל־ A.

דוגמא: לכל n טבעי, הקבוצה $\{0,1,2,\dots,n\}$ היא רישא של $\mathbb{N}$. לעומת זאת, למשל, הקבוצה $B=\{0,1,2,3,4,6\}$ איננה רישא של $\mathbb{N}$ כי 6 שייך ל־ B ואילו 5 (איבר של $\mathbb{N}$ שהינו קטן מ־ 6) לא שייך לה.

ברור שכל קבוצה X היא רישא של עצמה. נוציא מקרה זה מהדיון ע"י **המוסכמה** הבאה: **בכל שימוש בביטוי "רישא של X" נתכוון לרישא ממש, כלומר לרישא שאיננה X כולה.**

נגדיר כעת מושג קשור. תהי X קבוצה סדורה היטב, ויהי $a\in X$. נסתכל בקבוצת כל אברי X הקטנים מ־ a:
$I_X(a)=\{x\in X:\ x<a\}$. קבוצה זו תיקרא **הקטע ההתחלי של X הנקבע ע"י a**. קל לראות שכל קטע התחלי הוא רישא ב־ X; וגם ההיפך נכון: כל רישא ב־ X היא קטע התחלי הנקבע ע"י איבר מסויים (נוכיח זאת בטענה **[111]**). עקב כך, הקטע ההתחלי של X הנקבע ע"י a ייקרא גם **הרישא של X הנקבעת ע"י a**.

לעיתים, כאשר ידוע באיזו קבוצה X מדובר, נכתוב $I(a)$ במקום $I_X(a)$. לדוגמא, ב־ $\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל, $I(4)=\{0,1,2,3\}$.

[111] טענה. תהי $(X,\le)$ קבוצה סדורה היטב. אז כל רישא[62] ב־ X היא קטע התחלי הנקבע ע"י איבר מסויים.

הוכחה. תהי A רישא ב־ X. מאחר ש־ $A\subsetneqq X$, הקבוצה $X\setminus A$ לא ריקה. יהי b האיבר הראשון ב־ $X\setminus A$ (הוא קיים כי X סדורה היטב). נוכיח ש־ $A=I_X(b)$:

– נניח ש־ $a\in A$. אם $b\le a$ אז $b\in A$ כי A רישא. אבל זה לא ייתכן כי $b\in X\setminus A$. לכן בהכרח $a<b$, ומכאן $a\in I_X(b)$.

– נניח ש־ $a\in I_X(b)$. זה אומר: $a<b$. מאחר ש־ b הוא האיבר <u>הראשון</u> של $X\setminus A$, בהכרח מתקיים $a\in A$. $\square$

את המושגים "רישא" ו"קטע התחלי" ניתן להגדיר (באותו אופן) בקבוצות סדורות לינארית כלשהן. בטענה האחרונה ראינו שבקבוצות סדורות היטב כל רישא היא קטע התחלי ולכן מושגים אלה מתלכדים. יתר על כן, תכונה זו מאפיינת קבוצות סדורות היטב בין קבוצות סדורות לינארית בעלות איבר ראשון (תתבקשו להוכיח זאת בתרגילים). לדוגמא, נסתכל ב־ $X=[0,1]$ (קבוצה סדורה לינארית אבל לא סדורה היטב), ובתת־קבוצה שלה $A=[0,0.5]$. A היא רישא ב־ X אבל לא קטע התחלי.

נעבור ל**משפט ההשוואה של קבוצות סדורות היטב** שניתן לנסח בצורה הבאה: אם X ו־ Y הן שתי קבוצות סדורות היטב, אז או שהן איזומורפיות, או שאחת מהן איזומורפית לרישא של השניה.

[112] משפט. תהיינה $(X,\le_X)$ ו־ $(Y,\le_Y)$ קבוצות סדורות היטב. אז מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות:

[62] נזכיר כי הכוונה לרישא ממש.

1. $(X,\leq_X)\cong(Y,\leq_Y)$ (X איזומורפית ל־ Y).

2. קיים $y_0\in Y$ כך ש־ $(X,\leq_X)\cong(I_Y(y_0),\leq_Y)$ (X איזומורפית לרישא של Y).

3. קיים $x_0\in X$ כך ש־ $(Y,\leq_Y)\cong(I_X(x_0),\leq_X)$ (Y איזומורפית לרישא של X).

נוכיח מספר טענות הנחוצות להוכחה של המשפט.

[113] טענה. תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה היטב, ותהי $f:X\to X$ פונקציה חד־חד־ערכית שומרת סדר. אז לכל $x\in X$ מתקיים $f(x)\geq x$.

הוכחה. נניח בדרך השלילה שקיים $x\in X$ כך ש־ $f(x)<x$. נסתכל בקבוצה של כל האיברים המקיימים זאת: $A=\{x\in X:\ f(x)<x\}$. לפי ההנחה, $A\neq\varnothing$. לכן, מאחר ש־ X סדורה היטב, ב־ A יש איבר ראשון; נסמן אותו ב־ a. מאחר ש־ a שייך ל־ A, מתקיים $f(a)<a$. מאחר ש־ f חד־חד־ערכית שומרת סדר, מזה נובע $f(f(a))<f(a)$. נסמן $b=f(a)$, ונקבל $f(b)<b$. בפרט זה אומר: $b\in A$. כמו כן, $b<a$. זאת סתירה לכך ש־ a הוא האיבר הראשון של A. $\square$

הערה: תכונה זו לא מתקיימת בקבוצות סדורות לינארית כלשהן. למשל, $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x-1$ היא פונקציה חד־חד־ערכית שומרת סדר, אבל $f(x)<x$ לכל $x\in\mathbb{Z}$.

[114] טענה. תהיינה $(X,\leq_X)$ ו־ $(Y,\leq_Y)$ שתי קבוצות סדורה היטב איזומורפיות: $(X,\leq_X)\cong(Y,\leq_Y)$. אז קיים איזומורפיזם אחד בלבד מ־ X ל־Y.

הוכחה. מאחר ש־ X ו־ Y הן קבוצות איזומורפיות, קיים ביניהן איזומורפיזם אחד לפחות.

נוכיח את היחידות. נניח שפונקציות $f:X\to Y$ ו־ $g:X\to Y$ הן איזומורפיזמים. נסתכל בפונקציה $g^{-1}\circ f$. היא חד־חד־ערכית מפני שהיא הרכבה של שתי פונקציות חד־חד־ערכיות, והיא שומרת סדר מפני שהיא הרכבה של שתי פונקציות שומרות סדר. לכן, לפי טענה **[113]**, לכל $x\in X$ מתקיים $(g^{-1}\circ f)(x)\geq x$. מכאן, מאחר ש־ g שומרת סדר, $f(x)\geq g(x)$. באופן דומה, אם נסתכל בפונקציה $f^{-1}\circ g$, נקבל שלכל $x\in X$ מתקיים $g(x)\geq f(x)$. לכן לכל $x\in X$ מתקיים $g(x)=f(x)$, ומכאן $g=f$. $\square$

[115] מסקנה. אם $(X,\leq)$ היא קבוצה סדורה היטב, אז האיזומורפיזם היחיד מ־ X ל־ X הוא פונקצית הזהות.

הערה: גם תכונה זו לא מתקיימת בקבוצות סדורות לינארית כלשהן. לדוגמא, שוב ניקח $X=\mathbb{Z}$. לכל n שלם, הפונקציה $x\mapsto(x+n)$ היא איזומורפיזם בין $\mathbb{Z}$ לעצמה.

[116] טענה. בקבוצה סדורה היטב $(X,\leq_X)$ לא קיימת רישא[63] שהינה איזומורפית ל־ X.

הוכחה. לפי טענה **[111]**, כל רישא ב־ X היא קטע התחלי. נניח שקיים $a\in X$ כך ש־ X איזומורפית ל־ $I(a)$. יהי $f:X\to I(a)$ איזומורפיזם. נסתכל ב־ $f(a)$. מאחר ש־ $f(a)\in I(a)$, מתקיים $f(a)<a$, וזאת סתירה לטענה **[113]**. $\square$

[117] טענה. בקבוצה סדורה היטב $(X,\leq_X)$ אם $I(a)\cong I(b)$, אז $a=b$. במילים אחרות, אין רישות שונות שהינן איזומורפיות זו לזו.

הוכחה. נניח בדרך השלילה ש־ $a,b\in X$, $a\neq b$ ו־ $I_X(a)\cong I_X(b)$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $a<b$. אז $I_X(a)$ היא גם רישא של $I_X(b)$ המוגדרת ע"י a (כלומר: $I_X(a)=I_{I_X(b)}(a)$). זה אומר ש־ $I_X(b)$ איזומורפית לרישא של עצמה, וזאת סתירה לטענה **[116]**. $\square$

הערה 1. לפי טענה **[116]** קבוצה סדורה היטב לא יכולה להיות איזומורפית ל**רישא** של עצמה. לעומת זאת, קבוצה סדורה היטב יכולה להיות איזומורפית ל**תת־קבוצה ממש** של עצמה: לדוגמא, $\mathbb{N}$ איזומורפית ל־ $2\mathbb{N}$, ע"י הפונקציה $f:\mathbb{N}\to2\mathbb{N}$, $f(x)=2x$.

[63] שוב נזכיר כי הכוונה לרישא ממש.

הערה 2. גם הטענות **[116]** ו־ **[117]** לא מתקיימות עבור קבוצות סדורות לינארית. לדוגמא, ב־ $\mathbb{Z}$ לכל שני איברים a ו־ b מתקיים $I(a) = I(b)$. ולמשל הקטע הפתוח $A = (0,2)$ איזומורפי לרישא של עצמו $I_A(1) = (0,1)$.

בהוכחה של משפט **[112]** נצטרך עוד לטענה הפשוטה הבאה:

[118] טענה. תהיינה X ו־ Y קבוצות סדורות היטב איזומורפיות, ויהי $f : X \to Y$ האיזומורפיזם ביניהן.[64] יהי $x \in X$; נסמן $y = f(x)$. אז $I_X(x) \cong I_Y(y)$.

הוכחה. זה כמעט ברור: נתבונן בצמצום של f לתחום ההגדרה $I_X(x)$. ברור שזו פונקציה חד־חד־ערכית ושומרת סדר; להשלמת ההוכחה יש להראות שהתמונה שלה היא $I_Y(y)$ ולהשתמש בטענה **[90]**. (תתבקשו לעשות זאת בתרגילים).

לפני שניגש להוכחה של משפט **[112]**, נצטט פעם נוספת את הטענות שבהן נשתמש (בחלק מהן נצטט רק מקרה רלוונטי להוכחה):

- **[90]** אם X, Y קבוצות סדורות היטב ו־ $f : X \to Y$ פונקציה שומרת סדר חד־חד־ערכית ועל, אז f היא איזומורפיזם.
- **[116]** בקבוצה סדורה היטב X לא קיימת רישא שהינה איזומורפית ל־ X כולה.
- **[117]** בקבוצה סדורה היטב X: אם $I(a) \cong I(b)$, אז $a = b$ (אין רישות שונות שהינן איזומורפיות זו לזו).
- **[118]** יהי $f : X \to Y$ איזומורפיזם בין קבוצות סדורות היטב. יהי $x \in X$, ונסמן $y = f(x)$. אז $I_X(x) \cong I_Y(y)$.

כמו כן, נצטט שוב את **משפט [112]** עצמו:

תהיינה X ו־ Y קבוצות סדורות היטב. אז מתקיימת בדיוק אחת משלוש האפשרויות הבאות:

1. $X \cong Y$ (X איזומורפית ל־ Y).
2. קיים $y_0 \in Y$ כך ש־ $X \cong I_Y(y_0)$ (X איזומורפית לרישא של Y).
3. קיים $x_0 \in X$ כך ש־ $Y \cong I_X(x_0)$ (Y איזומורפית לרישא של X).

רעיון ההוכחה של משפט [112].

בכל אחד משלושת המקרים המתוארים במשפט, מדובר באיזומורפיזם בין תת־קבוצה של X לבין תת־קבוצה של Y. לכן (בתור נסיון ראשון להוכיח את המשפט) טבעי לנסות לבנות איזומורפיזם כזה "מלמטה" באופן הבא: לאיבר הראשון של X נתאים את האיבר הראשון של Y, לאיבר השני של X נתאים את האיבר השני של Y, וכן הלאה. אנחנו מצפים שאם הקבוצה X "תמוצה לפני Y", נקבל מקרה 2; אם הקבוצה Y "תמוצה לפני X", נקבל מקרה 3; אם שתי הקבוצות "ימוצו בו זמנית", נקבל מקרה 1. הבעיה היא שכאשר אנחנו עוברים מאיבר לעוקב שלו, החל מהאיבר הראשון, בקבוצה סדורה היטב – לא מובטח שנגיע לכל אברי הקבוצה. למעשה, בדרך זו נגיע לכל אברי הקבוצה רק במקרה של קבוצה סופית או קבוצה איזומורפית ל־ $\mathbb{N}$ "הרגילה" (כלומר, קבוצה בעלת טיפוס סדר ω). מנגד, נתבונן בדוגמא 3 מפרק 7.1: $\mathbb{N}$ הסדורה לפי $0 < 2 < 4 < 6 < \ldots < 1 < 3 < 5 < 7 < \ldots$. אם נצא מהאיבר הראשון (שהוא 0) ומכל איבר נעבור לאיבר העוקב – לעולם לא נגיע למספרים האי־זוגיים.[65]

לכן ננקוט בשיטה אחרת. עבור $x \in X$ ננסה להתאים איבר $y \in Y$ כך שמתקיים $I_X(x) \cong I_Y(y)$. זה דומה למה שניסינו לעשות בפסקה הקודמת (ניתן להראות שהאיברים שהצלחנו להתאים זה לזה שם, יותאמו זה לזה גם כאן), אבל יותר יעיל: בניה זו ניתן לבצע בקבוצות סדורות היטב כלשהן. לא מובטח שנצליח למצוא y כזה **לכל** $x \in X$, אבל הפעם לא תהיה בזה שום

[64] נזכיר כי לפי טענה **[114]**, יש איזומורפיזם <u>יחיד</u> מ־ X ל־ Y.

[65] ודאו שכך יקרה גם בדוגמאות 4, 5, 7, 8.

בעיה: נסתכל, למשל, ב־ $X = \{0, 10, 20, 30, 40, \dots\}$ ו־ $Y = \{5, 6, 7\}$ (עם הסדר הרגיל). אז ל־ $x = 0$ יתאים $y = 5$, ל־ $x = 10$ יתאים $y = 6$, ל־ $x = 20$ יתאים $y = 7$; ולא נצליח להתאים y ל־ $x = 40, 50, 60, \dots$, אבל זה לא יהיה בעייתי אלא פשוט יאמר שמתקיים מקרה 3: Y איזומורפי לרישא של X (אכן, $I_X(30) = \{0, 10, 20\} \cong \{5, 6, 7\}$). כדי לאפשר בניה פורמלית, נתבונן בקבוצת כל אברי X שעבורם ההתאמה המתוארת לעיל אפשרית (נסמן קבוצה זו ב־ A); אם $A \subsetneqq X$, נראה שמתקיים מקרה 3, ואם $A = X$, אז מקרה 1 או 2 (בהתאם לכך האם קבוצת האיברים המתאימים ל־ X היא Y כולה או תת־קבוצה ממש שלה.)

הוכחה של משפט [112].

אם $X = \varnothing$ או $Y = \varnothing$, הטענה ברורה. לכן מעכשיו נניח ש־ X ו־ Y הן קבוצות לא ריקות.

נסמן ב־ A את התת־קבוצה הבאה של X:

$$A = \{\ x \in X : \quad \text{קיים } y \in Y \text{ כך ש־ } I_X(x) \cong I_Y(y)\ \}$$

נשים לב שלכל x ב־ A קיים y **יחיד** ב־ Y שמקיים $I_X(x) \cong I_Y(y)$: אכן, אם עבור y_1, y_2 שונים ב־ Y מתקיים $I_X(x) \cong I_Y(y_1)$ ו־ $I_X(x) \cong I_Y(y_2)$, אז $I_Y(y_1) \cong I_Y(y_2)$ בסתירה לטענה **[117]**.

בדומה, נסמן ב־ B את התת־קבוצה הבאה של Y:

$$B = \{\ y \in Y : \quad \text{קיים } x \in X \text{ כך ש־ } I_X(x) \cong I_Y(y)\ \}$$

משיקולים הדומים לאלה שהובאו לעיל, לכל y ב־ B קיים x **יחיד** ב־ X שמקיים $I_X(x) \cong I_Y(y)$.

תהי $\varphi : A \to B$ הפונקציה המתאימה לכל $x \in A$ את אותו האיבר y (היחיד) של Y שמקיים $I_X(x) \cong I_Y(y)$. מההגדרות של A ו־ B ומההערות אחרי הגדרות אלה (על היחידות) נובע ש־ φ היא באמת פונקציה מ־ A ל־ B; יתר על כן: היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל.

נראה כעת ש־ φ שומרת סדר. יהיו $x_1, x_2 \in A$ כך ש־ $x_1 < x_2$; נסמן $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)$. לפי ההגדרה של φ, מתקיים $I_X(x_2) \cong I_Y(y_2)$; נסמן ב־ α את האיזומורפיזם (היחיד) מ־ $I_X(x_2)$ ל־ $I_Y(y_2)$. כעת, x_1 הוא איבר בתחום ההגדרה של α (כי $x_1 < x_2$), לכן $\alpha(x_1) \in I_Y(y_2)$, ולכן $\alpha(x_1) < y_2$. כעת, לפי טענה **[118]** (עבור האיזומורפיזם α), מתקיים $I_X(x_1) \cong I_Y(\alpha(x_1))$. מצד שני, לפי ההגדרה של φ, מתקיים $I_X(x_1) \cong I_Y(y_1)$. לכן, לפי טענה **[117]**, מתקיים $\alpha(x_1) = y_1$. ראינו ש־ $\alpha(x_1) < y_2$, ולכן קיבלנו $y_1 < y_2$.

לסיכום: $\varphi : A \to B$ היא פונקציה שומרת סדר חד־חד־ערכית ועל בין קבוצות סדורות היטב. לכן, לפי טענה **[90]**, φ היא איזומורפיזם. לכן $A \cong B$.

אם $A = X$ ו־ $B = X$, אז מתקיים מקרה 1 מהמשפט.

כעת נראה שאם A היא תת־קבוצה ממש של X, אז היא רישא שלו, ואם B היא תת־קבוצה ממש של Y, אז היא רישא שלו.

נניח ש־ $A \subsetneqq X$. זה אומר שהקבוצה $X \setminus A$ לא ריקה; נסמן ב־ c את האיבר הראשון שלה. נוכיח כי $A = I_X(c)$:

- יהי $x \in I_X(c)$. אז $x < c$. מאחר ש־ c הוא האיבר הראשון ב־ $X \setminus A$, הרי שבהכרח $x \in A$. בכך הוכחנו $I_X(c) \subseteq A$.
- יהי $x \in A$. עלינו להוכיח $c < x$. ברור ש־ $x \neq c$ (כי $x \in A$ ו־ $c \in X \setminus A$). נניח בדרך השלילה ש־ $x > c$. מאחר ש־ $x \in A$, קיים איזומורפיזם $\beta : I_X(x) \to I_Y(\varphi(x))$. אז, לפי טענה **[118]** (עבור האיזומורפיזם β ואיבר c השייך לתחום ההגדרה של β), מתקיים $I_X(c) \cong I_Y(\beta(c))$. מכאן ש־ $c \in A$ (הגענו למסקנה ש־ c מקיים את הדרישה בהגדרת A), וזאת סתירה להגדרה של c. לכן בהכרח מתקיים $x < c$, כלומר $x \in I_X(c)$, ובכך הוכחנו $A \subseteq I_X(c)$.

נניח ש־ $B \subsetneqq Y$. זה אומר שהקבוצה $Y \setminus B$ לא ריקה; נסמן ב־ d את האיבר הראשון שלה. נוכיח כי $B = I_Y(d)$:

- יהי $y \in I_Y(d)$. אז $y < d$. מאחר ש־ d הוא האיבר הראשון ב־ $Y \setminus B$, הרי שבהכרח $y \in B$. בכך הוכחנו $I_Y(d) \subseteq B$.
- יהי $y \in B$. עלינו להוכיח $y < d$. ברור ש־ $y \neq d$ (כי $y \in B$ ו־ $d \in Y \setminus B$). נניח בדרך השלילה ש־ $y > d$. מאחר ש־ $y \in B$, קיים $x = \varphi^{-1}(y)$ וקיים איזומורפיזם $\gamma : I_X(x) \to I_Y(y)$. נסמן $c = \gamma^{-1}(d)$; ברור ש־ $c < x$. אז, לפי טענה **[118]** (עבור האיזומורפיזם γ ואיבר c השייך לתחום ההגדרה של γ), מתקיים $I_X(c) \cong I_Y(d)$. מכאן ש־ $d \in B$, וזאת סתירה להגדרה של d. לכן בהכרח מתקיים $y < d$, כלומר $y \in I_Y(d)$, ובכך הוכחנו $B \subseteq I_Y(d)$.

נסכם:

- אם $A = X$ ו־ $B = Y$, אז $Y \cong X$ (מקרה 1 במשפט: הקבוצות X ו־ Y איזומורפיות).
- אם $A = X$ ו־ $B \subsetneqq Y$, אז קיים $d \in Y$ כך ש־ $X \cong I_Y(d)$ (מקרה 2 במשפט; במקרה זה נאמר: X **קצרה** מ־ Y).
- אם $A \subsetneqq X$ ו־ $B = Y$, אז קיים $c \in X$ כך ש־ $Y \cong I_X(C)$ (מקרה 3 במשפט; במקרה זה נאמר: Y **קצרה** מ־ X).

לא ייתכן שמתקיים בו זמנית $A \subsetneqq X$ ו־ $B \subsetneqq Y$ כי לפי מה שהוכחנו במצב כזה בהכרח קיימים $c \in X$ ו־ $d \in Y$ כך ש־ $A = I_X(c)$ ו־ $B = I_Y(d)$. ידוע ש־ $A \cong B$, לכן קיבלנו $I_X(c) \cong I_Y(d)$. אבל מזה נובע ש־ $c \in A$ (ראו את ההגדרה של A). לכן $c \in I_X(c)$ וזה בבירור לא ייתכן.

להשלמת ההוכחה נשאר להוכיח שהאפשרויות המוזכרות בו לא יכולות להתקיים בו זמנית. אכן, אם בו זמנית $Y \cong X$ ו־ $X \cong I_Y(d)$, אז $Y \cong I_Y(d)$ בסתירה לטענה **[116]**. מאותה הסיבה לא ייתכן בו זמנית $Y \cong X$ ו־ $Y \cong I_X(c)$. ואם בו זמנית $X \cong I_Y(d)$ ו־ $Y \cong I_X(c)$: יהי δ איזומורפיזם מ־ X ל־ $I_Y(d)$. אז, לפי טענה **[118]**, מתקיים $I_X(c) \cong I_Y(\delta(c))$, ומכאן $Y \cong I_Y(\delta(c))$ בסתירה לטענה **[116]**. $\square$

תרגילים

1. הוכיחו שהתכונה בטענה **[111]** מאפיינת קבוצות סדורות היטב בין קבוצות סדורות לינארית בעלות איבר ראשון. כלומר, הוכיחו שאם $(X, \leq)$ היא קבוצה סדורה לינארית עם איבר ראשון אך איננה סדורה היטב, אז יש בה רישא שאיננה קטע התחלי הנקבע ע"י איבר מסויים. (רמז: ב־ X יש תת־קבוצה לא ריקה B שאין בה איבר ראשון. תהי A קבוצת כל החסמים מלרע של B. הראו ש־ A היא רישא אך איננה קטע התחלי.)
2. השלימו את ההוכחה של טענה **[118]**.
3. בכל אחד מהסעיפים הבאים: קבעו איזה מקרה ממשפט **[112]** מתקיים. מהן הקבוצות A ו־ B? מהו $\varphi(x)$ עבור איברים נתונים? (A, B ו־ φ כמו בהוכחת המשפט).
   (א) $X = \mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל,
   $Y = \mathbb{N}$ עם הסדר $0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots$.
   מהם $\varphi(2)$ ו־ $\varphi(3)$?
   (ב) $X = \mathbb{N}$ עם הסדר $0 < 2 < 4 < \ldots < 1 < 3 < 5 < \ldots$,
   $Y = \mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל.
   מהם $\varphi(2)$ ו־ $\varphi(4)$?
   (ג) $X = \mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל,
   $Y = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי.
   מהם $\varphi(2)$ ו־ $\varphi(3)$?
   (ד) $X = \mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל,
   $Y = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ הסדורה לפי הסדר המילוני העברי.
   מהם $\varphi(3)$ ו־ $\varphi(4)$?

7.3 אורדינלים

בפרק זה נדון בצורה שיטתית בטיפוסי סדר של קבוצות סדורות היטב (שהוזכרו כבר בפרק 7.1). טיפוסי הסדר של קבוצות סדורות היטב נקראים **אורדינלים**, או **סודרים**. לפי כך, לכל קבוצה סדורה היטב X אנו מתאימים אורדינל שלה (שיסומן ב־ $\overline{X}$, או ב־ $(ord(X)$) כך ש־ $\overline{X}=\overline{Y}$ אם ורק אם $X\cong Y$. לפי כך, אורדינלים מאפיינים קבוצות סדורות היטב מבחינת הסדר באופן דומה לזה שבו קרדינלים מאפיינים קבוצות מבחינת העצמה. נדגיש שוב שאורדינלים מוגדרים רק עבור קבוצות סדורות היטב.

אורדינלים סופיים והאורדינל ω. אם X ו־ Y הן קבוצות **סופיות** סדורות לינארית (ולכן – היטב[66]), בעלות אותו מספר איברים, אז $X\cong Y$. כלומר סדר טוב בקבוצה סופית מוגדר לגמרי ע"י מספר האיברים בה. עקב כך, האורדינלים הסופיים יסומנו ע"י מספרים טבעיים: מספר טבעי k יסמן את הסדר הלינארי בקבוצה בת k איברים:

$$k=ord(\{0,1,2,\dots,k-1\})=ord(I_{\mathbb{N}}(k)).$$

בפרט, $0=ord(\varnothing)$.

האורדינל של $\mathbb{N}$, עם היחס $\le$ הרגיל, יסומן ב־ ω.

נקבל אורדינלים נוספים כתוצאה מדיון בחשבון אורדינלים.

סידור של אורדינלים. משפט ההשוואה של סדרים טובים **[112]** מאפשר להגדיר יחס סדר בין אורדינלים, באופן הבא. יהיו α ו־ β שני אורדינלים שונים, ונניח ש־ $\alpha=\overline{A}$, $\beta=\overline{B}$. לפי המשפט, אם $\alpha\neq\beta$ (כלומר, $A\ncong B$) אז אחת מהקבוצות A ו־ B איזומורפית לרישא של השניה. אם A איזומורפית לרישא של B ("A קצרה מ־ B"), נאמר $\alpha<\beta$; ואם B איזומורפית לרישא של A ("B קצרה מ־ A"), נאמר $\alpha>\beta$. קל לראות שיחס זה $<$ בין אורדינלים הוא יחס סדר לינארי, ושהוא מוגדר היטב (לא תלוי בבחירת A ו־ B). העובדה שכל שני אורדינלים ניתנים להשוואה והעובדה שלא ייתכן בו־זמנית $\beta<\alpha$ ו־ $\alpha<\beta$, נובעות ממשפט ההשוואה. האורדינלים המוכרים – הסופיים ו־ ω – מסודרים לפי סדר זה כך:

$$0<1<2<3<\ldots<\omega.$$

בנוסף, סדר ההשוואה בין אורדינלים הוא סדר טוב. בניסוח מדוייק של טענה זו יש להיזהר כי נראה שלא ניתן לדבר על "קבוצת כל האורדינלים" (כלומר, האוסף של כל האורדינלים אינו קבוצה – בדומה לאוסף של כל הקבוצות). שתי הטענות הבאות מתייחסות למקרים הבאים: קבוצת האורדינלים הקטנים מאורדינל נתון (ניתן להוכיח שאוסף כזה הוא כן קבוצה), וקבוצה כלשהי של אורדינלים.

[119] טענה. יהי α אורדינל, ותהי $W(\alpha)$ קבוצת האורדינלים הקטנים מ־ α: $W(\alpha)=\{\beta:\ \beta<\alpha\}$. אז $W(\alpha)$ היא קבוצה סדורה היטב, ומתקיים $ord(W(\alpha))=\alpha$.

לפני הוכחה, נתבונן בדוגמא. יהי $\alpha=4$. אז האורדינלים הקטנים מ־ 4 הם 0, 1, 2 ו־ 3. כלומר, $W(\alpha)=\{0,1,2,3\}$. מתקיים $ord(W(\alpha))=4$, בהתאם לטענה.

הוכחה. תהי A קבוצה כך ש־ $ord(A)=\alpha$. נגדיר פונקציה $f:A\to W(\alpha)$ באופן הבא. יהי $x\in A$. אז $I_A(x)$ היא רישא ב־ A, לכן $ord(I_A(x))<ord(A)=\alpha$, ולכן $ord(I_A(x))\in W(\alpha)$. נגדיר אפוא $f(x)=ord(I_A(x))$.

קל לראות ש־ f היא פונקציה שומרת סדר חד־חד־ערכית ועל. לכן היא איזומורפיזם (השתמשנו כאן בטענה **[90]**). מזה נובע ש־ $W(\alpha)$ היא סדורה היטב (כי A סדורה היטב) וש־ $ord(W(\alpha))=ord(A)=\alpha$. □

[66] בקבוצות סופיות כל סדר לינארי הוא סדר טוב. בקבוצות אינסופיות – כפי שראינו בדוגמאות – זה לא נכון באופן כללי.

[120] טענה. כל קבוצה של אורדינלים היא קבוצה סדורה היטב (ביחס לסדר ההשוואה שהגדרנו עבור אורדינלים).

הוכחה. תהי X קבוצה כלשהי של אורדינלים, ותהי A תת־קבוצה לא ריקה של X. יהי $\alpha \in A$. אם α הוא האיבר הראשון של A, סיימנו. כעת נניח ש־ α אינו האיבר הראשון של A, כלומר קיים $\beta \in A$ כך ש־ $\beta < \alpha$. אז מתקיים $\beta \in W(\alpha)$, ולכן $\beta \in A \cap W(\alpha)$. לפי טענה **[119]**, הקבוצה $W(\alpha)$ היא קבוצה סדורה היטב, לכן גם $A \cap W(\alpha) \ni \beta$ סדורה היטב (לפי טענה **[106]**). נסמן ב־ γ את האיבר הראשון של $A \cap W(\alpha)$. נוכיח ש־ γ הוא גם האיבר הראשון של A. אכן, יהי $\delta \in A$. אם $\delta < \gamma$, אז $\delta \in A \cap W(\alpha)$ (שהרי $\delta < \gamma < \alpha$), בסתירה לכך ש־ γ הוא האיבר הראשון ב־ $A \cap W(\alpha)$. לכן בהכרח $\gamma \leq \delta$.
בכך הוכחנו שלכל תת־קבוצה לא ריקה של X יש איבר ראשון, ולכן X סדורה היטב. □

נראה כעת מדוע לא ניתן להתייחס לאוסף של כל האורדינלים כלקבוצה. נניח ש־ $\boldsymbol{O}$ היא קבוצת כל האורדינלים. אז, לפי טענה **[120]**, $\boldsymbol{O}$ היא קבוצה סדורה היטב. נסמן את האורדינל שלה ב־ α. אז $\alpha \in \boldsymbol{O}$ (כי $\boldsymbol{O}$ היא קבוצת **כל** האורדינלים). אבל אז $W(\alpha)$ היא רישא ב־ $\boldsymbol{O}$ (המוגדרת ע"י α), ולפי טענה **[120]** מתקיים $ord(W(\alpha)) = \alpha$. זה אומר שב־ $\boldsymbol{O}$ יש רישא האיזומורפית ל־ $\boldsymbol{O}$ כולה, וזאת סתירה לטענה **[116]**.

עובדה זו ידועה בשם **פרדוקס בורלי־פורטי**[67], ופירושה היא: האוסף של כל האורדינלים הוא "יותר מדי גדול" כדי להיות קבוצה. במובן זה הוא דומה לפרדוקס רסל (על "הקבוצה של כל הקבוצות").

אורדינלים עוקבים וגבוליים. נחלק את כל האורדינלים לשני סוגים: אורדינלים עוקבים ואורדינלים גבוליים. אורדינל נקרא **עוקב** אם יש לו קודם מיידי. אחרת (כלומר, אם אין לו קודם מיידי) הוא נקרא **גבולי.** למשל, האורדינל 5 הוא אורדינל עוקב כי יש לו קודם מיידי: 4. למעשה, כל אורדינל סופי (פרט ל־ 0) הוא אורדינל עוקב ($n-1$ הוא הקודם המיידי של n). כלומר, בין האורדינלים שראינו עד עכשיו, רק 0 ו־ ω הם אורדינלים גבוליים. נראה דוגמאות נוספות אחרי שנכיר (בפרק הבא) אורדינלים נוספים.

7.4 חשבון אורדינלים

בפרק זה נפתח חשבון של אורדינלים: נדבר על חיבור, כפל וחזקה שלהם.

חיבור של אורדינלים. תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ שתי קבוצות סדורות היטב **זרות**. נסתכל באיחוד שלהן, $X \cup Y$, ונגדיר בו את היחס הבא $\leq$ שייקרא "יחס הסכום": עבור $a, b \in X \cup Y$,

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a, b \in X, \ \ a \leq_X b \\ a, b \in Y, \ \ a \leq_Y b \\ a \in X, \ b \in Y \end{cases}$$

כלומר, ההשוואה בתוך X ו־ Y תתבצע לפי היחסים המקוריים $\leq_X$ ו־ $\leq_Y$, ובנוסף כל אברי X יהיו בסדר זה קטנים מכל אברי Y. קל לראות ש־ $\leq$ כזה הוא גם כן סדר טוב. נסמן את הקבוצה $X \cup Y$ עם סדר זה ב־ $X \oplus Y$.

כעת מגדירים חיבור של אורדינלים באופן הבא. יהיו α ו־ β שני אורדינלים. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סדורות היטב זרות כך ש־ $\overline{X} = \alpha$, $\overline{Y} = \beta$. אז $\alpha + \beta$ מוגדר כאורדינל של $X \oplus Y$. קל לראות שחיבור זה מוגדר היטב, כלומר לא תלוי בבחירת הקבוצות A ו־ B ש"עומדות מאחורי" האורדינלים α ו־ β (אבל חשוב לקחת קבוצות **זרות**!).

[121] טענה (הוכיחו כתרגיל):

לכל אורדינל α, מתקיים:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

[67]על שם מתמטיקאי איטלקי Cesare Burali-Forti $(1861-1931)$ שגילה אותו.

נראה מה מתקבל כשמחברים את האורדינלים המוכרים: הסופיים ו־ ω.

קודם כל, נשים לב שעבור קבוצות סופיות, חיבור האורדינלים מתיישב עם חיבור המספרים הטבעיים. למשל, הסכום של האורדינלים 3 ו־ 5 הוא האורדינל 8: ניתן לקחת, למשל,

$$X = \{0, 1, 2\}, \quad Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

נסתכל כעת באורדינלים $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots$. בתור קבוצה בעלת אורדינל $\omega + n$ ניתן לקחת

$$(\mathbb{N} \times \{0\}) \ \oplus \ (\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{1\}),$$

לשם קיצור נסמן קבוצה זו ב־ $\mathbb{N} \oplus \{0, 1, \ldots, n-1\}$. נשים לב שעבור $k < m$ מתקיים $\omega + k < \omega + m$: אכן, הקבוצה $\mathbb{N} \oplus \{0, 1, \ldots, k-1\}$ היא רישא של $\mathbb{N} \oplus \{0, 1, \ldots, m-1\}$. לכן

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \ldots.$$

האורדינל "הבא", כלומר האורדינל הקטן ביותר שגדול מכל האורדינלים מהצורה $\omega + n$, $n \in \mathbb{N}$, הוא $\omega + \omega$. נדון בו בהמשך, ובינתיים נסתכל באורדינלים מהצורה $n + \omega$.

כאן נקבל תוצאה שיכולה להפתיע:

[122] טענה. לכל n טבעי, מתקיים $n + \omega = \omega$.

(בפרט, למשל, $1 + \omega = \omega$).

הוכחה.

$$n + \omega = \overline{\{0, 1, \ldots, n-1\}} + \overline{\mathbb{N}} =$$

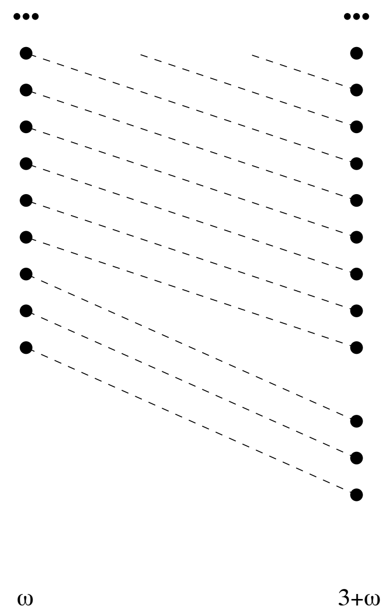
$$= \overline{\{0, 1, \ldots, n-1\}} + \overline{\{n, n+1, n+2, \ldots\}} =$$

$$= \overline{\{0, 1, \ldots, n-1\} \oplus \{n, n+1, n+2, \ldots\}} =$$

$$= \overline{\mathbb{N}} = \omega,$$

כאשר המעבר השני נובע מהעובדה $\mathbb{N} \cong \{n, n+1, n+2, \ldots\}$: אכן, הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x + n$ היא איזומורפיזם (ראו דוגמא **[89.5]**). $\square$

האיור הבא מבהיר את המצב. בשורה הראשונה מסומנת קבוצה בעלת הוארדינל ω. בשורה השניה הוספנו אליה שלושה איברים "מקדימה" וכך קיבלנו קבוצה בעלת האורדינל $3 + \omega$. אך אם מתעלמים מהזהות של האיברים, רואים בבירור שקבוצות אלה זהות מבחינת הסדר: הקוים בין הנקודות מסמנים את האיזומורפיזם.



דוגמאות אלה מראות בפרט שעבור אורדינלים לא בהכרח מתקיים $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. אכן, $\omega = \omega + 1$, ואילו $\omega < 1 + \omega$. כלומר, חיבור אורדינלים אינו קומוטטיבי.

לעומת זאת, חיבור אורדינלים הוא אסוציאטיבי: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. כדי להוכיח את זה, יש להראות שעבור שלוש קבוצות זרות סדורות היטב X, Y ו־ Z, מתקיים $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$. לא ניכנס להוכחה פורמלית, אבל נשים לב שתוצאה זו הגיונית: אלה שני סדרים בקבוצה $X \cup Y \cup Z$ שהינם בעל אותו פירוש: כל אברי X קטנים מכל אברי Y, וכל אברי Y קטנים מכל אברי Z; ובתוך כל אחת מהקבוצות X, Y, Z ההשוואה מתבצעת לפי הסדר המקורי שמוגדר בה.

נסכם:

- לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n + \omega = \omega$.
- האורדינלים מהצורה $\omega + n$ (עבור $n \in \mathbb{N}$) שונים זה מזה: $\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \ldots$.
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
- באופן כללי $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$.

כפל של אורדינלים. תהיינה $(X, \leq_X)$ ו־ $(Y, \leq_Y)$ שתי קבוצות סדורות היטב. נסתכל במכפלה הקרטזית שלהן, $X \times Y$, ונגדיר בה את היחס המילוני העברי ("הימני") [68] : עבור $(a,b), (c,d) \in X \times Y$,

$$(a,b) \leq (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b < d \\ \\ \begin{cases} b = d \\ a \leq c \end{cases} \end{array}\right.$$

[68] כמובן שזה עניין של מוסכמה: לצורך הגדרת כפל, יכולנו באותה מידה להשתמש בסדר המילוני האנגלי ("השמאלי"). זה היה משפיע על חלק מהתוצאות בהמשך — למשל על חוקי פילוג.

קל להוכיח שסדר זה הוא סדר טוב. הקבוצה $X \times Y$ הסדורה לפי יחס סדר זה תסומן ב־ $X \otimes_H Y$ (האינדקס התחתון H מזכיר שהסדר בה הוא הסדר המילוני העברי).

עובדה זו מאפשרת להגדיר כפל של אורדינלים. יהיו α ו־ β שני אורדינלים. תהיינה X ו־ Y שתי קבוצות סדורות היטב כך ש־ $\overline{X} = \alpha$, $\overline{Y} = \beta$. אז $\alpha \cdot \beta$ מוגדר כאורדינל של $X \otimes_H Y$.

[123] טענה (הוכיחו כתרגיל):

לכל אורדינל α, מתקיים:

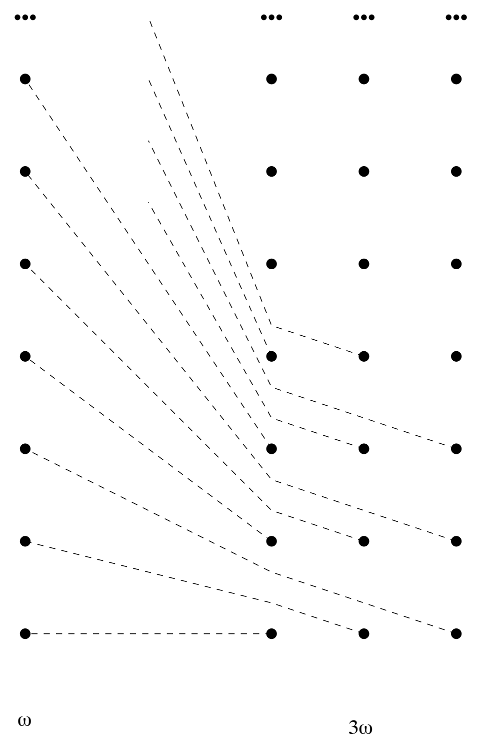
$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0, \quad \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

מה ניתן לומר על האורדינלים $\omega \cdot n$ (עבור $n \in \mathbb{N}$)? $\omega \cdot n$ הוא האורדינל של $\mathbb{N} \otimes_H \{0, 1, \ldots, n-1\}$. קל לראות שעבור $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, הקבוצה $\mathbb{N} \otimes_H \{0, 1, \ldots, m-1\}$ היא רישא (הרישא הנקבעת ע"י $(0, m)$) של $\mathbb{N} \otimes_H \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ולכן $\omega < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 3 < \ldots$.

ומהו $n \cdot \omega$? זה האורדינל של $\{0, 1, \ldots, n-1\} \otimes_H \mathbb{N}$. ניתן להראות שכל האורדינלים מהצורה הזאת שווים ל־ ω, כלומר: $\omega = 2\omega = 3\omega = \ldots$. כדי להוכיח את זה, יש להראות שהפונקציה $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, n-1\} \otimes_H \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י

$$x \ \mapsto \ (\lfloor x/n \rfloor, \, x \mod n)$$

היא איזומורפיזם. לא נכתוב הוכחה פורמלית, אבל האיור הבא מדגים את האיזומורפיזם של ω ו־ 3ω.



האם הכפל והחיבור של אורדינלים מקיימים את חוקי הפילוג? מסתבר שרק אחד מהם.

[124] טענה: יהיו α, β, γ שלושה אורדינלים. אז מתקיים

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

הוכחה. תהיינה A, B, C שלוש קבוצות כך ש־ $\overline{A} = \alpha, \overline{B} = \beta, \overline{C} = \gamma$, ו־ $B \cap C = \varnothing$.

עלינו להוכיח שהקבוצות הסדורות $A \otimes_H (B \oplus C)$ ו־ $(A \otimes_H B) \oplus (A \otimes_H C)$ הן זהות.

קודם כל, בתור **קבוצות**, שתיהן שוות ל־ $A \times (B \cup C)$. נוכיח את שויון הסדרים:

לפי הסדר $A \otimes_H (B \oplus C)$

$$(a,d) \leq (a',d') \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} d <_{B \oplus C} d' \\ \\ \left\{\begin{array}{c} d = d' \\ a \leq_A a' \end{array}\right\} \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{lr} d <_B d', & d, d' \in B \\ d <_C d', & d, d' \in C \\ & d \in B, d' \in C \end{array}\right] \\ \\ \left\{\begin{array}{c} d = d' \\ a \leq_A a' \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

ואילו לפי הסדר $(A \otimes_H B) \oplus (A \otimes_H C)$:

$$(a,d) \leq (a',d') \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{lr} (a,d) \leq_{A \otimes B} (a',d'), & (a,d),(a',d') \in A \times B \\ \\ (a,d) \leq_{A \otimes C} (a',d'), & (a,d),(a',d') \in A \times C \\ \\ & (a,d) \in A \times B,\ (a',d') \in A \times C \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{lc} \left[\begin{array}{c} d <_B d' \\ \\ \left\{\begin{array}{c} d = d' \\ a \leq_A a' \end{array}\right\} \end{array}\right], & d, d' \in B \\ \\ \left[\begin{array}{c} d <_C d' \\ \\ \left\{\begin{array}{c} d = d' \\ a \leq_A a' \end{array}\right\} \end{array}\right], & d, d' \in C \\ \\ & d \in B,\ d' \in C \end{array}\right]$$

שני התנאים האלה שקולים לאותו התנאי:

$$\left[\begin{array}{ll} d <_B d', & d, d' \in B \\ d <_C d', & d, d' \in C \\ & d \in B, d' \in C \\ d = d', a \leq_A a' & \end{array}\right]$$

□

נראה כיצד ניתן להשתמש בחוק הפילוג בהוכחות של שוויונות בחשבון האורדינלים:

$$\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1+1) = \omega \cdot 1 + \omega \cdot 1 = \omega + \omega,$$

ובדומה $\omega \cdot 3 = \omega + \omega + \omega$, $\omega \cdot 4 = \omega + \omega + \omega + \omega$, וכו'.

לעומת זאת, חוק הפילוג השני לא קיים: באופן כללי, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. למעשה, כבר ראינו דוגמא נגדית: $\omega = 2 \cdot \omega = (1+1) \cdot \omega$, ואילו $\omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$, ואלה אורדינלים שונים ($\omega$ הוא רישא של $\omega + \omega$), כלומר $1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega \neq (1+1) \cdot \omega$.[69]

האורדינל $\omega \cdot m + n$ (כאשר $m, n \in \mathbb{N}$) הוא האורדינל של הקבוצה $(\mathbb{N} \otimes \{0, 1, \ldots, m-1\}) \oplus (\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{m\})$. מכאן נובעת השוואה של כל האורדינלים מהצורה הזאת:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \omega < \omega+1 < \omega+2 < \ldots < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 2+1 < \omega \cdot 2+2 < \ldots < \omega \cdot 3 < \omega \cdot 3+1 < \omega \cdot 3+2 < \ldots,$$

כלומר $\omega \cdot m_1 + n_1 < \omega \cdot m_2 + n_2$ כאשר $m_1 < m_2$ או כאשר $m_1 = m_2$ ו־ $n_1 < n_2$.

האורדינל "הבא" – כלומר, האורדינל הקטן ביותר שגדול מכל האורדינלים מהצורה $\omega \cdot m + n$, הוא $\omega \cdot \omega$. טבעי לסמן אותו ב־ ω^2, ולכן נעבור כעת לחזקות של אורדינלים.

חזקות. יהיו α, γ שני אורדינלים. נגדיר את החזקה α^γ באופן הבא.

- אם $\gamma = 0$: נגדרי $\alpha^0 = 1$ לכל α.
- אם γ הוא אורדינל עוקב, $\gamma = \beta + 1$, נגדרי $\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
- אם γ הוא אורדינל גבולי, אז α^γ מוגדר כאורדינל הקטן ביותר שהוא גדול מכל האורדינלים מהצורה α^δ לכל $\delta < \gamma$:[70]

$$\alpha^\gamma = \min_{\delta < \gamma}\{\mu : \alpha^\delta < \mu\}.$$

לפי כך, $\omega^2 = \omega \cdot \omega$, $\omega^3 = \omega \cdot \omega \cdot \omega$ וכו'.

ניתן להוכיח תוצאות שונות על "בליעת" אורדינלים, כמו למשל $m \cdot \omega^n = \omega^n$, $\omega^k + \omega^n = \omega^n$ עבור $k < n$ (טבעיים) וכו' (ראו בתרגילים). מצד שני, כל האורדינלים הבאים שונים כי כל אחד מהם הוא רישא של אלה הבאים אחריו (ראו בעמוד הבא):

[69] אם היינו מגדירים את כפל האורדינלים בעזרת היחס המילוני הלועזי, דווקא חוק פילוג זה היה מתקיים, והראשון לא.

[70] למעשה, אנחנו משתמשים כאן בטענה שלא הוכחנו: לכל קבוצה של אורדינלים X קיים אורדינל μ הגדול מכל אברי X. השוו עם טענה **[120]** שהיא למעשה מקרה פרטי של טענה זו עבור קבוצות מהצורה $W(\mu)$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 0 & < & 1 & < & \ldots & < & \omega & < & \omega+1 & < & \ldots & < & \omega 2 & < & \omega 2+1 & < & \ldots \\
< & \omega^2 & < & \omega^2+1 & < & \ldots & < & \omega^2+\omega & < & \omega^2+\omega+1 & < & \ldots & < & \omega^2+\omega 2 & < & \omega^2+\omega 2+1 & < & \ldots \\
< & \omega^2 2 & < & \omega^2 2+1 & < & \ldots & < & \omega^2 2+\omega & < & \omega^2 2+\omega+1 & < & \ldots & < & \omega^2 2+\omega 2 & < & \omega^2 2+\omega 2+1 & < & \ldots \\
< & \omega^2 3 & < & \ldots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
< & \omega^3 & < & \omega^3+1 & < & \ldots & < & \omega^3+\omega & < & \omega^3+\omega+1 & < & \ldots & < & \omega^3+\omega 2 & < & \omega^3+\omega 2+1 & < & \ldots \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
< & \omega^3+\omega^2 & < & \omega^3+\omega^2+1 & < & \ldots & < & \omega^3+\omega^2+\omega & < & \omega^3+\omega^2+\omega+1 & < & \ldots & < & \omega^3+\omega^2+\omega 2 & < & \omega^3+\omega^2+\omega 2+1 & < & \ldots \\
< & \omega^3+\omega^2 2 & < & \ldots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
< & \omega^3 2 & < & \ldots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
< & \omega^4 & < & \ldots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
< & \omega^5 & < & \ldots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \\
< & \omega^\omega & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

ברשימה זו מופיעים כל האורדינלים מהצורה

$$\omega^n\beta_n+\omega^{n-1}\beta_{n-1}+\ldots+\omega^2\beta_2+\omega\beta_1+\beta_0,$$

כאשר $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{N}$ (ייצוג זה נקרא "ייצוג פולינומיאלי" של אורדינל, ונחשב לצורה סטנדרטית של אורדינלים אלה). ההשוואה שלהם מתבצעת לפי העקרון המילוני:

$$\omega^n\beta_n+\omega^{n-1}\beta_{n-1}+\ldots+\omega^2\beta_2+\omega\beta_1+\beta_0 \quad < \quad \omega^p\gamma_p+\omega^{p-1}\gamma_{p-1}+\ldots+\omega^2\gamma_2+\omega\gamma_1+\gamma_0$$

(מניחים ש־ $\beta_n,\gamma_p\neq 0$) אם ורק אם $n<p$, או $n=p$ ו־ $\beta_k<\gamma_k$ כאשר k הוא המספר הגדול ביותר כל ש־ $\beta_k\neq\gamma_k$.
לדוגמא:

$$\omega^4\,10+\omega^3\,20+\omega\,30+40 \quad < \quad \omega^5,$$

$$\omega^4\,10+\omega^3\,20+\omega\,30+40 \quad < \quad \omega^4\,11+\omega^2+1,$$

$$\omega^4\,10+\omega^3\,20+\omega\,30+40 \quad < \quad \omega^4\,10+\omega^3\,20+\omega^2,$$

$$\omega^4\,10+\omega^3\,20+\omega\,30+40 \quad < \quad \omega^4\,10+\omega^3\,20+\omega\,32.$$

האורדינל האחרון בטבלה מהעמוד הקודם הוא ω^ω. לפי ההגדרה, זה האורדינל הקטן ביותר שהינו גדול מכל האורדינלים בסדרה $\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\ldots$. האודינלים הבאים אחריו הם $\omega^\omega+1,\omega^\omega+2$ וכו'.

באופן דומה מוגדרים האורדינלים ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ וכו'.

נחזור לאורדינלים ה"קטנים" ונשאל: מהו 2^ω? לפי ההגדרה, זה האורדינל הקטן ביותר שהינו גדול מכל האורדינלים מהצורה 2^δ כאשר $\delta<\omega$. כלומר – מהאורדינלים בסדרה $2^0,2^1,2^2,2^3,\ldots$. מאחר שזו סדרה לא חסומה, 2^ω הוא האורדינל הקטן ביותר שהינו גדול מכל האורדינלים הסופיים, כלומר:

$$2^\omega=\omega.$$

תוצאה זו מראה שחזקות של אורדינלים "לא מתיישבות" עם חזקות של קרדינלים; בפרט, כל קבוצה סדורה היטב בעלת האורדינל 2^ω היא קבוצה בת מניה.

נתבונן כעת באורדינל ω^ω. מה ניתן לומר על קבוצה בעלת אורדינל זה? לפי ההגדרה, ω^ω הוא האורדינל הקטן ביותר שהינו גדול מ־ ω^n לכל n טבעי. כדי לבנות קבוצה בעלת אורדינל זה, נפעל כך. לכל n טבעי, תהי X_n קבוצה סדורה היטב בעלת האורדינל ω^n (נדאג בדרך הרגילה שאלה יהיו קבוצות זרות). נבנה סכום אינסופי $X=X_1\oplus X_2\oplus X_3\oplus X_4\oplus\ldots$. קל לראות שלכל רישא של X יהיה אורינל הקטן מ־ X^k עבור k טבעי מסויים, אבל האורדינל של X כולה גדול מ־ ω^n לכל n טבעי. לכן $ord(X)=\omega^\omega$.

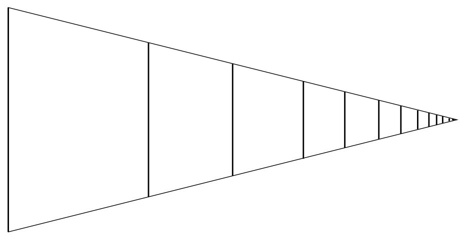
מה ניתן לומר על העצמה של X? לכל n טבעי העצמה של X^n היא $\aleph_0$, ולכן X היא איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה.

בדומה מוכיחים ש־ ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ וכו' הם אורדינלים של קבוצות בנות מניה. ניתן להוכיח שכל האורדינלים שניתן לקבל מהאורדינלים הסופיים בעזרת פעולות חשבון, הם אורדינלים של קבוצות בנות מניה.

עקב כך, טבעי לשאול האם ניתן להגדיר סדר טוב בקבוצה שאיננה בת־מניה. התשובה לשאלה זו תינתן בפרק הבא.

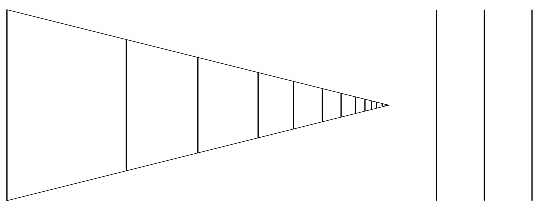
לסיום הדיון באורדינלים, נתאר דרך גרפית המאפשרת לדמיין קבוצות בעלות אורדינלים מסויימים, בפרט אלה "הקשים לאינטואיציה" (למשל, ω^ω).

האיור הבא מייצג את האורדינל ω. הקווים האנכיים הם המספרים $0, 1, 2, \ldots$. כשאנחנו עוברים משמאל לימין, קווים אלה מצטופפים כי מימין לכל מספר יש עוד אינסוף מספרים.



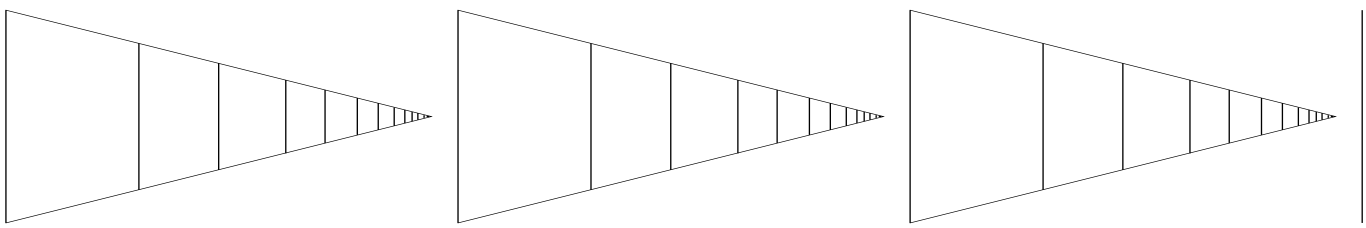
ω

האיור הבא הוא $\omega + 3$: ציירנו עוד שלושה קווים מימין ל־ ω:



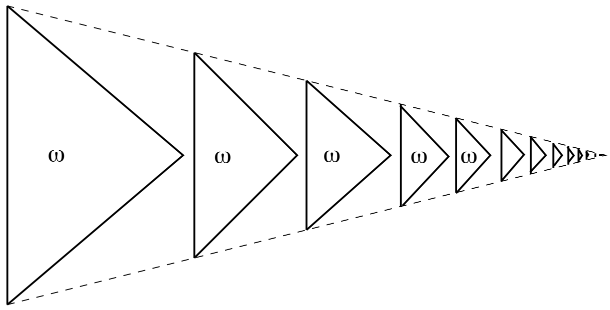
ω+3

האיור הבא הוא $\omega 3 + 1$: שלושה עותקים של ω ועוד 1 אחריהם:



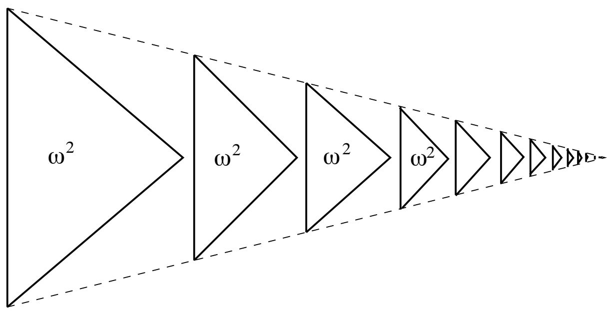
ω3+1

האיור הבא מתקבל מהאיור הראשון לעיל כאשר מחליפים כל קו אנכי במשולש המייצג עותק של ω. זה האורדינל $\omega + \omega + \omega + \cdots = \omega \cdot \omega = \omega^2$:



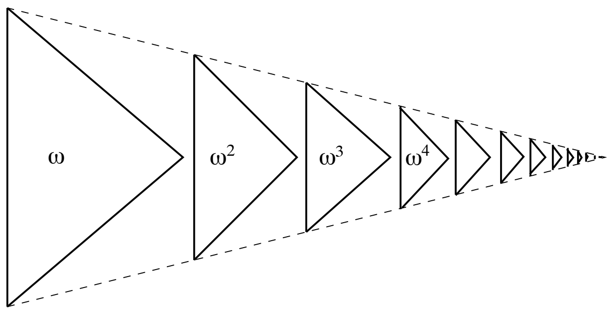
$\omega^2=\omega+\omega+\omega+\omega+\ldots$

כיצד נדמיין את ω^3? לפי ההגדרה, $\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega$, ולכן עלינו לשנות את האיור הקודם כך שכל משולש ייצג ω^2:



$\omega^3=\omega^2+\omega^2+\omega^2+\omega^2+\ldots$

באופן דומה נוכל לייצג ω^4, ω^5 וכו'. אך לא נוכל להשתמש בשיטה זו כדי לייצג את ω^ω כי ω ("החזקה") הוא אורדינל גבולי, ולכן ω^ω מוגדר כאורדינל הקטן ביותר שהינו גדול מכל האורדינלים $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots$. קל להוכיח ש־ $\omega^\omega = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \ldots$. לכן ניתן לייצג את ω^ω באופן הבא:



$\omega^\omega=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\ldots$

תרגילים.

1. מצאו את הצורה הסטנדרטית (הפולינומיאלית) של האורדינלים הבאים:
   (א) $(\omega+2)(\omega+3)$
   (ב) $(\omega+3)(\omega+2)$
   (ג) $(\omega+2)(3+\omega)$
   (ד) $(3+\omega)(\omega+2)$
   (ה) $(\omega+3)(2+\omega)$
   (ו) $(2+\omega)(\omega+3)$
   (ז) $(2+\omega)(3+\omega)$
   (ח) $(3+\omega)(2+\omega)$
2. יהיו α, β שני אורדינלים אינסופיים כך ש־ $\alpha < \beta$. האם בהכרח $\alpha + \beta = \beta$? הוכיחו או מצאו דוגמא נגדית.
3. יהיו α, β שני אורדינלים אינסופיים כך ש־ $\alpha < \beta$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) בהכרח קיים אורדינל γ כך ש־ $\alpha + \gamma = \beta$.
   (ב) (אם עניתם "כן" בסעיף הקודם) קיים γ **יחיד** כזה.
   (ג) בהכרח קיים אורדינל δ כך ש־ $\delta + \alpha = \beta$.
   (ד) (אם עניתם "כן" בסעיף הקודם) קיים δ **יחיד** כזה.
4. הוכיחו או הפריכו את חוקי הצמצום עבור אורדינלים:
   (א) אם $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, אז $\alpha = \beta$.
   (ב) אם $\alpha + \gamma = \alpha + \delta$, אז $\gamma = \delta$.
   (ג) אם $\alpha\gamma = \beta\gamma$ ($\gamma \neq 0$), אז $\alpha = \beta$.
   (ד) אם $\alpha\gamma = \alpha\delta$ ($\alpha \neq 0$), אז $\gamma = \delta$.
5. לפי ההגדרה, $\omega^\omega = \min(\delta : \delta > \omega, \omega^2, \omega^3, \dots)$. מטרת התרגיל היא להוכיח שניתן לייצג את ω^ω כסכום אינסופי: $\omega^\omega = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots$.
   (א) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\omega^n + \omega^{n+1} = \omega^{n+1}$.
   (ב) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} + \omega^n = \omega^n$.
   (ג) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots > \omega^n$.
   (ד) הוכיחו שאם α הוא אורדינל שהינו גדול מ־ ω^n לכל n טבעי, אז $\alpha \leq \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots$.
   (ה) הסיקו ש־ $\omega^\omega = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots$.

7.5 משפט הסדר הטוב

סעיף זה מוקדש למשפט הבא:

[125] משפט הסדר הטוב: בכל קבוצה ניתן להגדיר סדר טוב.

למעשה, משפט זה שקול לאקסיומת הבחירה וללמה של צורן. כמוהם, הוא לא קונסטרוקטיבי: למשל, הוא אומר שבקבוצה $\mathbb{R}$ ניתן להגדירי סדר (שיהיה כמובן שונה מהסדר הרגיל) שהוא סדר טוב, אבל לא מתאר אף דרך להגדיר סדר כזה.

את השקילות של אקסיומת הבחירה (CA), הלמה של צורן (ZL), ומשפט הסדר הטוב (WOT) מוכיחים בדרך כלל בצורה מעגלית:

1. אקסיומת הבחירה גוררת את הלמה של צורן,
2. הלמה של צורן גוררת את משפט הסדר הטוב,
3. משפט הסדר הטוב גורר את אקסיומת הבחירה.

ההוכחה של (1) קשה וטכנית, ולכן נוותר עליה.

ההוכחה של (2) היא שימוש סטנדרטי בלמה של צורן: בהינתן קבוצה X, מסתכלים במשפחת כל הזוגות (A,R) כאשר A היא תת־קבוצה של X שניתן להגדיר בה סדר טוב, ו־ R הוא סדר טוב ב־ A. משפחה זו סדורה ביחס להכלה (בדומה לדוגמאות שראינו), ומתקיים בה התנאי של הלמה של צורן. לכן יש בה איבר מקסימלי (A_0,R_0). כעת ניתן להוכיח ש־ $A_0=X$ כי אחרת ניתן להרחיב את הזוג (A_0,R_0) בסתירה למקסימליות שלו.

ההוכחה של (3) פשוטה מאוד: בהינתן קבוצה X, נגדיר בה סדר טוב. אז לכל תת־קבוצה של X ניתן לבחור את האיבר הראשון שלה – וזאת פונקצית בחירה ב־ X.

ראו גם `http://xkcd.com/982/` .

7.6 ה"אלפים"

כידוע, $\aleph>\aleph_0$, אבל האם קיימות עצמות ביניהם? באופן שקול: האם הקרדינל הקטן ביותר שהינו גדול מ־ $\aleph_0$, הוא $\aleph$? ניגש לשאלה זו בצורה יותר שיטתית.

ניקח קבוצה A "מספיק גדולה" – בינתיים נסתפק בקבוצה בעלת העצמה $\aleph$. נגדיר בה סדר טוב (זה אפשרי לפי משפט הסדר הטוב). ניתן לעשות זאת כך שיהיה בה האיבר האחרון: אם אין איבר כזה, ניקח את האיבר הראשון שלה ו"נעביר" אותו לסוף. כעת ב־ A יש איברים כך שעצמת הרישא שלהם גדולה ממש מ־ $\aleph_0$: למשל, האיבר האחרון מקיים את זה. מאחר ש־ A היא קבוצה סדורה היטב, קיים איבר ראשון בעל תכונה זו; נסמן אותו ב־ a. כלומר, לכל $b<a$ מתקיים $|I_A(b)|\le\aleph_0$, ואילו $|I_A(a)|>\aleph_0$. נסמן את האורדינל של $I_A(a)$ ("הסודר הראשון שאיננו בן מניה") ב־ Ω, ואת העצמה של נסמן ב־ $\aleph_1$. לפי כך, $\aleph_1$ הוא הקרדינל "הבא" אחרי $\aleph_0$.

האם $\aleph=\aleph_1$? או באופן שקול: האם $2^{\aleph_0}=\aleph_1$? קנטור חשב שכן, אבל לא הצליח להוכיח את זה. השערה זו הייתה ידועה כ**השערת הרצף** (Continuum conjecture), והיא הופיעה כבעיה הראשונה ברשימת השאלות הפתוחות החשובות שפירסם מתמטיקאי גרמני דויד הילברט (David Hilbert, 1862-1943) בשנת 1900, ושקבעה במידה רבה את כיווני התפתחות המתמטיקה במאה ה־20 ("23 הבעיות של הילברט").

באמצע המאה ה־ 20 מתמטיקאים שעבדו בתחום של תורת הקבוצות ושל לוגיקה מתמטית הוכיחו שבמובן מסויים השערת הרצף לא ניתנת להכרעה: לא ניתן להוכיח אותה ולא ניתן להפריך אותה. ליתר דיוק: הם הוכיחו שאם במערכת האקסיומות

של תורת הקבוצות אין סתירה פנימית, אז מצד אחד לא תהיה סתירה אם נוסיף אליה את השערת הרצף כאקסיומה נוספת, ומצד שני לא תהיה סתירה אם נוסיף אליה את השלילה של השערת הרצף.

בין השאר, זה אומר: לא נוכל להוכיח שלא קיימת קבוצה X כך ש־ $\aleph_0 < |X| < \aleph$, ומצד שני לעולם לא נוכל לתאר בניה קונסטרוקטיבית של קבוצה כזאת.

בלי קשר להשערת הרצף, נוכל להגדיר סדרה חדשה עולה של קרדינלים: אם ניקח קבוצה מספיק גדולה (למשל, בעלת העצמה $2^{\aleph_1}$) ונגדיר בה סדר טוב כך שיובטח שיש בה איברים x המקיימים $|I(x)| > \aleph_1$, אז יהיה איבר ראשון a בעל תכונה זו; נגדיר $|I(a)| = \aleph_2$.

נמשיך בצורה זו ונגדיר $\aleph_3$, $\aleph_4$ וכו׳ (ואין שום דרך לדעת איפה המקום של $\aleph$, $2^{\aleph}$, $2^{2^{\aleph}}$ וכו׳ ביניהם).

כדי למצוא את הקרדינל הקטן ביותר שיהיה גדול מכל הקרדינלים מהצורה $\aleph_n$, נפעל כך. לכל n טבעי ניקח קבוצה X_n כך ש־ $|X_n| = \aleph_n$, ונגדיר $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. נגדיר ב־ X סדר טוב כך שיובטח שיש בה איברים x המקיימים $|I(x)| > \aleph_n$ לכל n טבעי. אז יהיה ב־ X איבר ראשון a בעל תכונה זו; נגדיר $|I(a)| = \aleph_\omega$.

כצפוי, ניתן להמשיך ולהגדיר $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$, ..., $\aleph_{2\omega}$, ..., $\aleph_{\omega^2}$, ..., $\aleph_{\omega^\omega}$. אחרי כל הקרדינלים מהצורה $\aleph_\alpha$, כאשר α הם אורדינלים בני מניה, נגיע ל־ $\aleph_\Omega$ ־ הקרדינל ה־ $\aleph_1$ בסדר.

גישה זו מאפשרת להתייחס לקרדינלים כלתת־מחלקה של האורדינלים, ולקבל התאמה $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ מאורדינלים לקרדינלים. כמובן מחלקת הקרדינלים היא סדורה היטב.

השערת הרצף המוכללת היא $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

בפרק 4.13 הוכחנו את אי־שויון קניג **[81]**: אם $(\alpha_i)_{i\in I}$ ו־ $(\beta_i)_{i\in I}$ הן שתי משפחות של קרדינלים כך שלכל $i \in I$ מתקיים $\alpha_i < \beta_i$. אז מתקיים:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \ < \ \prod_{i\in I} \beta_i.$$

אי־שויון קניג מאפשר להוכיח תוצאות מעניינות הקשורות לאלפים.

[126] טענה. הקרדינל $\aleph$ איננו סכום של קבוצה בת־מניה של קרדינלים הקטנים ממנו.

הוכחה. אם $a_n < \aleph$ לכל $n \in \mathbb{N}$, אז

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \ < \ \prod_{n\in\mathbb{N}} \aleph = \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

□

[127] מסקנה. $\aleph_\omega \neq \aleph$.

(שימו לב: השאלה שבהשערת הרצף המקורית היא האם $\aleph_1 = \aleph$. כפי שאמרנו, שאלה זו לא ניתנת להכרעה. באופן יותר כללי, ניתן לשאול: מהו האורדינל α שעבורו $\aleph_\alpha = \aleph$? כאן אנחנו הוכיחים ש־ α זה לא יכול להיות ω.)

הוכחה. לפי ההגדרה, $\aleph_\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \aleph_n$, כלומר $\aleph_\omega$ הוא סכום של קבוצה בת מניה של קרדינלים הקטנים ממנו. □

נסתכל באי־שויון $d < d^{\aleph_0}$, כאשר d הוא קרדינל. כל קרדינל בן מניה מקיים אותו, אבל הקרדינלים "הגדולים" שהכרנו (אלה מהסדרה $\aleph, 2^{\aleph}, 2^{2^{\aleph}}, \ldots$) ייתנו שויון (למשל $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$). כעת נראה בניה של דוגמאות נוספות המקיימות את האי־שויון $d < d^{\aleph_0}$.

יהי c קרדינל אינסופי כלשהו. נעיין בסדרה $a_1 = c$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$:

$$c < 2^c < 2^{2^c} < 2^{2^{2^c}} < \ldots.$$

נגדיר $d = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$. אזת לפי אי־שויון קניג,

$$d = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n < \prod_{n\in\mathbb{N}} c_n$$

(כדי להשתמש באי־שויון קניג, ניתן להוסיף 0 כמחובר הראשון בסכום).

מצד שני, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $c_n \leq d$, ולכן $\prod_{n\in\mathbb{N}} c_n \leq d^{\aleph_0}$. לכן קיבלנו $d < d^{\aleph_0}$.

תרגיל. הראו שלאי־שויון $d < d^{\aleph_0}$ יש אינסוף פתרונות. (שימו לב: זה לא נובע באופן מיידי מכך שהתחלנו מ־ c כלשהו כי ייתכן שעבור בחירות שונות של c נקבל אותו d.)

8 תרגילי הכנה ושאלות ממבחנים

1. (מבחן סופי מועד ב', חורף 2002/03)

לכל $n \in \mathbb{N}_+$ נגדיר $E_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right) \cup \left[2, 2 + \frac{1}{n}\right]$.

(א) מצאו במפורש את הקבוצה

$$P = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} E_n$$

(ב) מצאו במפורש את הקבוצה

$$P = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} E_n$$

2. (בוחן אמצע, מועד ב', חורף 2004/05)

תהי $f : X \to X$ פונקציה. נסמן $f^{(n)} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (הרכבה של n "גורמים" שכל אחד מהם הוא f).

(א) נניח שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $f^{(n)} = I_X$ (פונקצית הזהות). הוכיחו כי f היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל.

(ב) נניח שלכל $x \in X$ קיים $n(x) \in \mathbb{N}$ (התלוי ב־ x) כך ש־ $f^{(n(x))}(x) = x$. הוכיחו כי לכל $x \in X$, הקבוצה $\{f^{(n)}(x) : \ n \in \mathbb{N}\}$ היא קבוצה סופית.

(ג) בהנחות של סעיף (ב), הוכיחו כי f היא פונקציה חד־חד־ערכית ועל.

3. (בוחן אמצע, מועד ב', חורף 2004/05)

נגדיר שתי קבוצות:

$$A = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \, |f(n+1) - f(n)| \le 2\right\}$$

$$B = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \, f(n+1) > f(n)\right\}$$

האם קבוצות אלה הן קבוצות בנות מניה?

4. (בוחן אמצע, מועד ב', חורף 2004/05)

(א) האם קבוצת כל הסדרות המתכנסות של מספרים טבעיים היא קבוצה בת מניה?

(ב) תהי $(B_i)_{i \in I}$ משפחה של כדורים בעלי רדיוס חיובי במרחב $\mathbb{R}^3$ כך שכל שניים מהם זרים. האם I היא בהכרח בת מניה?

(ג) האם קבוצת כל הסדרות המתכנסות של מספרים רציונליים בעלי מכנה שהוא חזקה של 2, היא קבוצה בת מניה?

5. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית. נגדיר ב־ V יחס R ע"י

$$(u - v) \in \mathrm{Ker}(T) \quad \Longleftrightarrow \quad (u, v) \in R.$$

(א) הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

(ב) הוכיחו כי $(u, v) \in R$ אם ורק אם $T(u) = T(v)$.

(ג) הוכיחו כי כל מחלקות השקילות לפי היחס R הן בעלות אותה עצמה.

(ד) השלימו: כל מחלקת שקילות לפי R היא קבוצה בגודל 1 אם ורק אם...

(ה) השלימו: יש רק מחלקת שקילות אחת לפי R אם ורק אם...

6. תהי X קבוצה. נגדיר יחס R ב־ X^X ע"י

$$f \circ f = g \circ g \quad \Longleftrightarrow \quad (f,g) \in R.$$

(א) הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

(ב) הוכיחו: לכל $f \in X^X$, או שכל אברי $[f]$ (מחלקת השקילות של f לפי היחס R) הם פונקציות הפיכות, או שכל אברי $[f]$ הם פונקציות לא הפיכות.

(ג) תהי $X = \{1,2,3\}$. מצאו את מחלקת השקילות לפי היחס R של כל אחת מהסדרות הבאות:

$$f = (1,1,1); \qquad g = (1,1,3); \qquad h = (1,2,3).$$

(ד) תהי $X = \mathbb{N}_+$. מצאו את העצמה של מחלקת השקילות של $(1,2,3,4,\ldots)$ לפי היחס R.

7. תהי E קבוצת יחסי השקילות ב־ $\mathbb{R}$ עם מספר סופי של מחלקות שקילות, ותהי F קבוצת יחסי השקילות ב־ $\mathbb{Z}$ עם מספר אינסופי של מחלקות שקילות. מה נכון: $|E| < |F|$, $|E| = |F|$, או $|E| > |F|$?

8. (בוחן אמצע, מועד ב', חורף 2004/05)

תהי

$$X = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) < \infty \right\}$$

נגדיר יחס R ב־ X באופן הבא:

$$(f,g) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g(n)$$

(א) הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

(ב) חשבו את עצמתה של כל מחלקת שקילות.

(ג) חשבו את עצמתה של קבוצת המנה.

9. (מבחן סופי מועד ב', חורף 2002/03)

נגדיר יחס R בקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ באופן הבא: $(f,g) \in R$ אם ורק אם הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} : \ f(n) \neq g(n)\}$ היא קבוצה סופית.

(א) הוכיחו כי R הוא יחס שקילות.

(ב) הוכיחו כי כל מחלקת שקילות היא קבוצה בת מניה.

(ג) מצאו את העצמה של קבוצת המנה.

10. (בוחן 2, חורף 2003/04)

תהיינה A ו־ B שתי הקבוצות הבאות:

$$A = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(2n+1) = f(2n) + 1 \right\}$$

$$B = \left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, f(n+2) = f(n+1) + 2f(n) \right\}$$

מצאו את העצמה של A ואת העצמה של B.

11. מצאו את העצמות של הקבוצות הבאות:

(א) קבוצת כל היחסים ב־ $\mathbb{N}$.

(ב) קבוצת כל יחסי השקילות ב־ $\mathbb{N}$.

(ג) קבוצת כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$ שהינן בעלות העצמה $\aleph_0$.

(ד) קבוצת כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$ שהינן בעלות העצמה $\aleph$.

(ה) קבוצת כל הקבוצות הבלתי תחויות לינארית ב־ $\mathbb{R}^3$.

(ו) קבוצת כל ההעתקות הלינאריות מ־ $\mathbb{R}^3$ ל־ $\mathbb{R}^2$.

(ז) קבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים המתכנסות ל־ 0.

(ח) קבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים שהינן מונוטוניות יורדות ומתכנסות ל־ 0.

(ט) קבוצת כל הפונקציות הממשיות המקיימות $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(י) קבוצת כל הפונקציות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{N}$ שהינן חד־חד־ערכיות ועל.

(יא) קבוצת כל הפונקציות מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{N}$ שהינן חד־חד־ערכיות ועל, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|f(n) - n| \le 1$.

(יב) קבוצת כל הפונקציות מ־ $\mathbb{R}$ ל־ $\mathbb{R}$ שהינן חד־חד־ערכיות ועל.

12. (מבחן סופי, מועד ב', חורף 2009/10)

יהי $V = \mathbb{Q}[x]$ המרחב הוקטורי (מעל $\mathbb{Q}$) של כל הפולינומים עם מקדמים רציונליים.

(א) מהי העצמה של קבוצת כל התת־מרחבים בעלי מימד סופי של V?

(ב) מהי העצמה של קבוצת כל התת־מרחבים של V?

13. (בוחן 2, חורף 2003/04)

נגדיר ארבע קבוצות:

(א) X_1, קבוצת כל התת־קבוצות של קבוצת הפונקציות הממשיות ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) הרציפות.

(ב) X_2, קבוצת כל התת־קבוצות של קבוצת הפונקציות מהקטע $[0,1]$ לקבוצה $\{0,1\}$.

(ג) X_3, קבוצת כל הפונקציות מקבוצת התת־קבוצות של הקטע $[0,1]$ ל־ $[0,1]$.

(ד) X_4, קבוצת כל הפונקציות מקבוצת התת־קבוצות של $\{0,1\}$ ל־ $[0,1]$.

סדרו את העצמות של קבוצות אלה לפי גדלן.

14. (מבחן סופי, חורף $2004/05$)

תהי F קבוצת כל התת־קבוצות של קבוצת הפונקציות מ־ $\mathbb{Z}$ ל־ $\mathbb{R}$. תהי G קבוצת כל הפונקציות מקבוצת כל התת־קבוצות של $\mathbb{R}$ לקבוצת כל התת־קבוצות של zz.

(א) האם F ו־ G הן קבוצות שקולות?

(ב) האם $|F| > \aleph^{\aleph^{\aleph}}$?

(ג) האם $|P(P(P(\mathbb{N})))| > |G|$?

15. (מבחן סופי מועד ב', חורף $2002/03$)

תהי $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}_+}$ (כלומר, קבוצת הסדרות שבהן כל רכיב הוא 1 או -1). חשבו את העצמה של התת־קבוצות הבאות של Ω:

(א) $A = \{\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots) : \ \forall i \in \mathbb{N}_+, \ \varepsilon_i + \varepsilon_{i+2} = 0\}$.

(ב) $B = \{\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots) : \ \forall i \in \mathbb{N}_+, \ \varepsilon_i + \varepsilon_{2i} = 0\}$.

(ג) $C = \left\{\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots) : \ \forall k \in \mathbb{N}_+, \ \left|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\right| < 2\right\}$.

16. (מבחן סופי, חורף $2004/05$)

(א) מצאו עצמה $\beta > 1$ כך מתקיים $\beta = \beta^{\aleph}$.

(ב) מצאו סדרה אינסופית עולה של עצמות ($\beta_n < \beta_{n+1}$ לכל n טבעי) כך שלכל n טבעי מתקיים $\beta_n = \beta_n^{\aleph}$.

17. (בוחן 2, חורף $2003/04$)

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה היטב, ותהי $\varnothing \neq Y \subseteq X$. נתון ש־ Y חסומה מלעיל. האם בהכרח קיים ל־ Y סופרמום?

18. נסתכל ביחס השקילות הבא בקבוצה $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$:

$$f \sim g \text{ אם ורק אם } f-g \text{ היא סדרה קבועה.}$$

הוכיחו כי כל מחלקות השקילות לפי יחס זה הינן בעלות אותה העצמה, ומצאו אותה. כמו כן, מצאו את העצמה של קבוצת המנה.

19. חשבו את הקרדינל $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 16 \cdot \ldots$, כלומר את $\prod_{n \in \mathbb{N}_+} \alpha_n$ כאשר $\alpha_n = 1$ עבור n אי־זוגי ו־$\alpha_n = 2^{\frac{n}{2}}$ עבור n זוגי.

20. (מבחן סופי, מועד ב', חורף $2009/10$)

תהי B תת קבוצה של $\mathbb{R}$ ונקח עליה ועל $[0,1]$ את הסדר המושרה מ־$\mathbb{R}$. נניח כי $f : [0,1] \to B$ הוא איזומורפיזם של סדרים. האם B היא בהכרח קטע סגור ב־$\mathbb{R}$?

21. (מבחן סופי, מועד ב', חורף $2009/10$)

האם קיימת ב־$P(\mathbb{Z})$ תת קבוצה K שעוצמתה $\aleph$ כך שלכל $A, B \in K$, $A \neq B$, מתקיים: $A \not\subseteq B$ ו־ $B \not\subseteq A$?

22. (מבחן סופי, מועד א', חורף $2009/10$)

ניקח את הקבוצה $\{0,1\}$ עם הסדר הרגיל ואת הקבוצה $\mathbb{Z}$ עם הסדר הרגיל.

(א) האם הקבוצה $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ הסדורה לפי הסדר המילוני העברי איזומורפית ל־ $\mathbb{Z}$ עם הסדר הרגיל?

(ב) האם הקבוצה $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי איזומורפית ל־ $\mathbb{Z}$ עם הסדר הרגיל?

(ג) האם הקבוצה $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי איזומורפית לאחת מבין הקבוצות הסדורות שהוגדרו בסעיפים א' ו־ ב'?

23. (מבחן סופי, מועד ב', חורף $2009/10$)

24. (א) האם $\mathbb{Q} \times \{0,1\}$ עם הסדר המילוני העברי איזומורפית ל־$\mathbb{Q}$?

(ב) אותה השאלה, כאשר $\mathbb{Q} \times \{0,1\}$ היא עם הסדר המילוני הלועזי.

25. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי A קבוצה בלתי תלויה לינארית ב־ V. הוכיחו כי קיים בסיס B של V כך ש־ $A \subseteq B$.

26. (בוחן 2, חורף $2003/04$)

יהי $V \neq \{0\}$ מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{Q}$. תת־קבוצה $C \subseteq V$ נקראת **קבוצה חסרת סכום** אם לכל $c_1, c_2 \in C$ מתקיים $c_1 + c_2 \notin C$.

הוכיחו כי לכל A, תת־קבוצה חסרת סכום של V, קיימת D, תת־קבוצה חסרת סכום מקסימלית של V, כך ש־ $A \subseteq D$. (כלומר, לא ניתן להוסיף איברים ל־ D ועדיין לקבל קבוצה חסרת סכום.)

27. (מבחן סופי, חורף $2004/05$)

תהי $X \neq \varnothing$ קבוצה, ותהי $R \neq \varnothing$ תת־קבוצה של $X \times X$.

משולש ב־ R הוא קבוצה של שלושה זוגות סדורים של אברי R, כלומר קבוצה מהצורה $\{(a,b),\ (b,c),\ (c,a)\}$, כאשר a, b, c שונים ביניהם.

הוכיחו כי ב־ R יש תת־קבוצה לא ריקה S כך שאין בה משולשים והיא קבוצה מקסימלית (להכלה) עם תכונה זו.

28. (מבחן סופי, מועד ב', חורף $2009/10$)

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. הוכיחו כי כל קבוצה בלתי תלויה B_0 ניתנת להשלמה לבסיס.

29. תהי X קבוצה בעלת עצמה אינסופית α.

(א) הוכיחו כי קיימות A ו־ B, שתי תת־קבוצות, של X, כך ש־ $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$, $|A| = |B| = \alpha$.

(ב) הוכיחו כי

$$|\{U \in P(X) :\ |U| = \alpha\}| = 2^{\alpha}.$$

30. (מבחן סופי, מועד א', חורף $2009/10$)

יהיו α, β שני קרדינלים כך ש־ $2 \leq \alpha \leq \beta$ ו־ β הוא קרדינל אינסופי.

(א) הוכיחו כי $\alpha^{(\alpha^\beta)} \geq \beta^{(\beta^\alpha)}$.

(ב) מצאו α, β כנ"ל שעבורם בסעיף א' מתקיים שויון.

(ג) מצאו α, β כנ"ל שעבורם בסעיף א' מתקיים אי־שויון ממש.

31. (מבחן סופי, מועד א', חורף 2009/10)

הוכיחו כי לכל קבוצה אינסופית X קיימת הצגה כאיחוד זר מהצורה

$$X = \bigsqcup_{i\in I} Y_i$$

כאשר לכל $i \in I$ הקבוצה Y_i שקולת עצמה ל־ $\mathbb{N}$.

32. (מבחן סופי, מועד א', חורף 2009/10)

הוכיחו כי בכל קבוצה אינסופית X קיימת פונקציה $f : X \to X$ המקיימת:

- $f(x) \neq x$ לכל $x \in X$,
- $f \circ f = I_X$.

33. (מבחן סופי, מועד ב', חורף 2009/10)

יהיו α, β שני קרדינלים המקיימים $\aleph_0 \leq \alpha < \beta$.

(א) האם בהכרח $\alpha^{\aleph} < \beta^{\aleph}$?

(ב) נניח בנוסף כי $2^\alpha < \beta$. האם בהכרח $\alpha^{\aleph_0} < \beta^{\aleph_0}$?

(ג) תהי A קבוצת כל הפונקציות הממשיות שצמצומן ל־$\mathbb{Q}$ הוא פולינום עם מקדמים רציונליים. חשבו את העצמה של A.

34. תהי X קבוצה בעלת עצמה אינסופית. נסמן:

$$P_{\aleph_0}(X) = \{A \in P(X) : \ |A| = \aleph_0\}.$$

(א) מצאו קבוצה X שעבורה $|P_{\aleph_0}(X)| = |X|$.

(ב) מצאו קבוצה X שעבורה $|P_{\aleph_0}(X)| > |X|$.

35. יהי $R \subseteq X \times X$ סדר חלקי ב־ X.

(א) נניח ש־ x, y הם שני אברי X שאינם ניתנים להשוואה (כלומר $(x,y) \notin R$ וגם $(y,x) \notin R$). הוכיחו כי היחס

$$\tilde{R} = R \cup \{(a,b) : \ (a,x) \in R \ \text{ וגם } \ (y,b) \in R\}$$

הוא גם כן יחס חלקי ב־ X.

(ב) הוכיחו כי כל סדר חלקי R ניתן להרחבה לסדר מלא. כלומר, קיים יחס סדר מלא S כך ש־ $R \subseteq S$.

36. (בוחן 2, חורף 2003/04)

נסתכל בסדר המילוני הניתן ע"י

$$(x,y) \leq (x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < x' \\ \begin{cases} x = x' \\ y \leq y' \end{cases} \end{array} \right.$$

(א) ניקח את הקבוצות $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ הסדורות לפי סדר מילוני זה. האם קבוצות סדורות אלה הן איזומורפיות?

(ב) חזרו על אותה השאלה עבור הקבוצות $\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ ו־ $\mathbb{N}\times\mathbb{Q}$.

37. הוכיחו כי ב־ $P(\mathbb{N}),\subseteq$ יש שרשרת $\{A_i:\ i\in I\}$ כך ש־ $|I|=\aleph$, כלומר – שרשרת בעלת עצמת הרצף.

(רמז: $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$.)

38. (מבחן סופי, חורף $2004/05$)

נסתכל ב־ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ וב־ $\mathbb{N}\times\{1,2\}$ עם הסדר המילוני "העברי". האם שני סדרים אלה הינם איזומורפיים?

39. נגדיר בקבוצה $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ את היחס הבא:

$$f<g \iff \text{קיים } n \text{ כך שלכל } k\in\{0,1,2,\dots,n-1\} \text{ מתקיים } f(k)=g(k), \text{ ובנוסף } f(n)<g(n)$$

(א) הוכיחו כי היחס המושרה $\leq$ הוא יחס סדר מלא ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(ב) מצאו סדרת פונקציות ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ שתהיה אינסופית יורדת לפי יחס זה: $f_{i+1}<f_i$ לכל $i\in\mathbb{N}$.

40. (מבחן סופי, חורף $2004/05$)

ניקח בקבוצה $\mathbb{N}\times[0,1]$ את שני הסדרים המילוניים: הסדר המילוני "העברי" והסדר המילוני "הלועזי".

(א) לכל אחד מהסדרים האלה: האם הוא סדר טוב?

(ב) לכל אחד מהסדרים האלה: האם הוא סדר צפוף?

41. (בוחן 2, חורף $2003/04$)

(א) האם קבוצות סדורות היטב בעלות האורדינלים $\omega+1+\omega+2$ ו־ $\omega+2+\omega+1$ הן איזומורפיות?

(ב) חזרו על אותה השאלה עבור האורדינלים $\omega+1+\omega+2$ ו־ $\omega+2+\omega+1$.

42. (מבחן סופי, מועד ב', חורף $2009/10$)

מבין חמשת האורדינלים הבאים, מצאו את כל הזוגות (γ,δ) כך ש־ $\gamma<\delta$ (כלומר, γ הוא רישא של δ):

$$1+\omega+2,\quad 2+\omega+1,\quad \omega+2+\omega,\quad 1+\omega+\omega,\quad \omega+\omega+1$$

43. (מבחן סופי, מועד ב', חורף $2009/10$)

האם קיימת קבוצה סדורה היטב A כך ש־ $|A|\geq 2$ ו־ A איזומורפית ל־ $A\times A$ הסדורה לפי הסדר המילוני הלועזי?

9 דוגמאות של מבחנים

מבחן אמצע בתורת הקבוצות 104290

סמסטר חורף תש"ע

על הנבחן לענות על כל השאלות, משך הבחינה: שעתיים, אין להיעזר בחומר עזר.

1. הוכח/הפרך:

(א) (10) קבוצת כל תתי הקבוצות של המספרים הרציונליים שקולה לקבוצת כל הפונקציות מהמספרים הטבעיים אל הקבוצה $\{0,1,2,3\}$.

(ב) (10) קבוצת כל הפונקציות מהמספרים השלמים לקבוצת כל הסדרות של מספרים רציונליים שקולה לקבוצת כל הסדרות של וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ עם רכיבים רציונליים.

(ג) (10) קבוצת כל הפונקציות מריבוע היחידה למספרים הטבעיים שקולה לקבוצת כל הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ לקבוצת כל הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ למספרים הרציונליים.

2. נגדיר על $\mathbb{R}^3$ יחס שקילות $(x,y,x) \sim (x',y',z') \iff x+y+z = x'+y'+z'$.

(א) (10) הגדירו העתקה חח"ע ועל בין מחלקת השקילות של $(0,0,0)$ לבין מחלקת השקילות של $(1,1,1)$.

(ב) (10) מצאו במפורש חתך של יחס השקילות.

(ג) (10) הגדירו העתקה חח"ע ועל בין מרחב המנה ל-$\mathbb{R}$.

3. נגדיר סדרת קבוצות $D_k \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ לפי: $D_k = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid \forall j,\ k \le j \le 2k,\ f(j) = 1\}$.
תהא $B = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid$ מקבלת את הערך 1 אינסוף פעמים $f\}$.

(א) (5) האם $B = limsup D_k$?

(ב) (10) האם $B = liminf D_k$?

4. תהא $f : X \to Y$ פונקציה. הוכח/הפרך:

(א) (5) אם $f_* : P(X) \to P(Y)$ חח"ע אז גם f חח"ע.

(ב) (10) אם $f^* : P(Y) \to P(X)$ חח"ע אז גם f חח"ע.

5. תהא $f : X \to Y$. נביט בשתי הטענות הבאות:
(1) f על.
(2) לכל שתי פונקציות $g,h : Y \to Z$ מתקיים $g \circ f = h \circ f$ גורר $g = h$.

(א) (5) הוכיחו כי טענה (1) גוררת את טענה (2).

(ב) (10) הוכיחו כי טענה (2) גוררת את טענה (1).

בהצלחה!

הטכניון - הפקולטה למתמטיקה 27/12/2011

מבחן אמצע בתורת הקבוצות 104290

סמסטר חורף תשע"ב

<u>על הנבחן לענות על כל השאלות, נמק הייטב! משך הבחינה: שעתיים, אין להיעזר בחומר עזר.</u>

1. הוכח/הפרך:

(א) (10) מרחב הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ למרחב הסדרות שכל רכיביהן רציונליים שקול למרחב הסדרות שרכיביהן הן פונקציות מ-$(0,1)$ למספרים השלמים.

(ב) (10) מרחב הפונקציות מ-$(0,1)$ לטבעיים שקול ל-$\mathbb{R}$.

(ג) (10) $\mathbb{N}$ שקולה לקבוצה $\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ f(n+1)>2^{f(n)}\}$.

2. נסמן $\Omega=\{-1,1\}^{\mathbb{N}}=\{\ f:\mathbb{N}\to\{-1,1\}\ \}$ ונגדיר:

$$A_n=\{f\in\Omega \mid \sum_{k=1}^{2n} f(k)=0\}$$

הוכח/הפרך:

(א) (10) $\limsup_{n\to\infty}(A_n)=\{f\in\Omega \mid$ f מקבלת את הערך 1 אינסוף פעמים ואת הערך -1 אינסוף פעמים$\}$

(ב) (10) $\limsup_{n\to\infty}(A_n)=\liminf_{n\to\infty}(A_n)$

(ג) (10) $\liminf_{n\to\infty}(A_n)\subseteq\{f\in\Omega \mid$ לכל k מספיק גדול $f(2k+1)+f(2k+2)=0\ \}$

3. נגדיר יחס R על $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ באופן הבא: $(a,b)R(c,d) \iff 2(a-c)=d-b$

(א) (5) הוכח בקצרה כי R הוא יחס שקילות.

(ב) (10) מצא במפורש את $L=[(0,0)]$ ושרטט את L כתת קבוצה של $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(ג) (10) האם הקבוצה $W=\{(n,-n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ מהווה חתך של יחס השקילות?

4. תהא $f:X\to Y$ פונקציה ותהא

$$\underset{B\mapsto\{x\in X\mid f(x)\in B\}}{f^*:P(Y)\to P(X)}$$

הפונקציה המושרה. הוכח/הפרך:

(א) (10) אם f^* על אז f חח"ע.

(ב) (10) אם f^* חח"ע אז f על.

בהצלחה!

מבחן בתורת הקבוצות 104290
מועד ב' תשס"א 1.3.2010
נמקו הייטב את כל תשובותיכם!!

1. יהא $V=\mathbb{Q}[x]$ המרחב הוקטורי (מעל $\mathbb{Q}$) של כל הפולינומים עם מקדמים רציונליים.
   (א) $(\mathbf{10})$ מהי עצמת קבוצת כל תתי המרחבים הוקטוריים הסוף מימדיים של V?
   (ב) $(\mathbf{10})$ מהי עצמת קבוצת כל תתי המרחבים הוקטוריים של V?
2. יהיו α,β עצמות המקיימות $\aleph_0\le\alpha<\beta$.
   (א) $(\mathbf{5})$ האם נובע $\alpha^{\aleph}<\beta^{\aleph}$?
   (ב) $(\mathbf{10})$ נניח בנוסף כי $2^{\alpha}<\beta$. האם נובע כי $\alpha^{\aleph_0}<\beta^{\aleph_0}$?
   (ג) $(\mathbf{10})$ תהא A קבוצת כל הפונקציות הממשיות שצמצומן ל־$\mathbb{Q}$ הוא פולינום עם מקדמים רציונליים. חשבו את עצמת A.
3.
   (א) $(\mathbf{10})$ מבין חמשת הסדרים הבאים, מצאו את כל הזוגות (γ,δ) בהן γ רישא של δ.

   $$1+\omega+2,\ 2+\omega+1,\ \omega+2+\omega.\ 1+\omega+\omega.\ \omega+\omega+1$$

   (ב) $(\mathbf{10})$ תהא A קבוצה סדורה הייטב ונניח $2\le|A|$. האם ייתכן כי $A\times A$ עם הסדר המילוני הלועזי איזומורפית ל־A?
4.
   (א) $(\mathbf{10})$ תהא B תת קבוצה של $\mathbb{R}$ ונקח עליה ועל $[0,1]$ את הסדר המושרה מ־$\mathbb{R}$. נניח כי $f:[0,1]\to B$ הוא איזומורפיזם של סדרים. האם B בהכרח קטע סגור ב־$\mathbb{R}$?
   (ב) $(\mathbf{10})$ האם קיימת ב־$P(\mathbb{Z})$ תת קבוצה K שעוצמתה א כך שאם $A,B\in K$ אז $A\not\subseteq B$ או $B\not\subseteq A$?
   (ג) $(\mathbf{5})$ האם $\mathbb{Q}\times\{0,1\}$ עם הסדר העברי איזומורפית ל־$\mathbb{Q}$?
5. $(\mathbf{15})$ יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. הוכיחו כי כל קבוצה בלתי תלויה B_0 ניתנת להשלמה לבסיס.

בהצלחה!