המשך תכונות של פונקציות אינטגרביליות

<u>משפט.</u> אם f ו: g אינטגרביליות, אז גם מכפלתן fg אינטגרבילית.

<u>הוכחה:</u> נניח ש: A $|f(x)| \leq$, B $|g(x)| \leq$ לכל $x \in [a,b]$. לכל חלוקה P מתקיים

$$U(P,fg) - L(P,fg) \leq$$

$$\sum_i [\sup_{[x_{i-1},x_i]} (fg) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} (fg)] \Delta x_i$$

אבל לכל s,t בקטע $[x_{i-1},x_i]$ מתקיים

$$f(s)g(s) - f(t)g(t) =$$

$$[f(s)-f(t)]g(s)+[g(s)-g(t)]f(t) \leq$$
$$[\sup f-\inf f]B+[\sup g-\inf g]A \leq$$
$$B[\sup f-\inf f]+A[\sup g-\inf g]$$

לכן הגודל $U(P,fg)-L(P,fg)$ חסום ע"י

$$B\sum_i[\sup f-\inf f]\Delta x_i$$
$$+A\sum_i[\sup g-\inf g]\Delta x_i$$
$$=B[U(P,f)-L(P,f)]$$
$$+A[U(P,g)-L(P,g)]$$
$$\leq B\epsilon+A\epsilon$$

וזה ניתן להיעשות קטן כרצוננו. לכן fg אינטגר-בילית.

מסקנה: אם f אינטגרבילית אז גם f^2 ולמעשה f^n אינטגרבילית לכל n.

משפט. אם f אינטגרבילית ו: $|f(x)| \geq c > 0$ לכל $a \leq x \leq b$, אזי $1/f$ אינטגרבילית.

הוכחה: לכל שתי נקודות s ו: t

$$\left|\frac{1}{f(s)} - \frac{1}{f(t)}\right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)f(t)|}$$

$$\leq \frac{1}{c^2}|f(s) - f(t)|$$

לכן בקטע החלוקה ה: i:

$$\frac{1}{f(s)} - \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{c^2}[\sup f - \inf f]$$

לכל שתי נקודות s,t בקטע (אגף ימין אינו שלילי), ועל כן מקבלים

$$\sup_s \frac{1}{f(s)} - \inf_t \frac{1}{f(t)} \le \frac{1}{c^2}[\sup f - \inf f]$$

אבל אז

$$\begin{aligned} 0 &\le U(P,1/f) - L(P,1/f) \\ &\le \frac{1}{c^2}[U(P,f) - L(P,f)] \end{aligned}$$

וזה ניתן להיעשות קטן כרצוננו.

<u>משפט.</u> אם f אינטגרבילית גם $|f|$ כזאת, ומ-תקיים

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| .$$

<u>הוכחה:</u> כרגיל יש את הקשר

$$U(P,|f|)-L(P,|f|) = \sum_i [\sup|f| - \inf|f|]\Delta x_i .$$
(1)

לכל שני מספרים a, b מתקיים

$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

ולכן מקבלים לכל שתי נקודות s, t בקטע

$$||f(s)|-|f(t)|| \leq |f(s)-f(t)| .$$

אבל נובע מזה ש:

$$\sup|f| - \inf|f| \leq \sup f - \inf f$$

ולכן אגף ימין של (1) חסום מלעיל ע"י

$$\sum_i [\sup f - \inf f]\Delta x_i = U(P,f) - L(P,f)$$

ובוחרים חלוקה P עבורה

$$.U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

בנוסף על כך מתקיים

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

ומאחר ויודעים כעת ש: $|f(x)|$ אינטגרבילית מקבלים

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

ונובע מכך

$$.\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

<u>דוגמא.</u> הפונקציה f אשר שווה ל: 1 על האי-רציונלים ו: 1- על הרציונלים איננה אינטגרבילית

על $[0,1]$ בעוד $1 = |f|$ אינטגרבילית על קטע זה.

<u>הערה:</u> יש משפט כללי יותר: אם ϕ היא פונקציה רציפה, ואם הפונקציה f היא אינטגרבילית וה-טווח שלה בתחום ההגדרה של ϕ, אז $\phi(f)$ אינט-גרבילית. בדוגמאות הקודמות היה לנו

$$\phi(t) = t^2,\ \frac{1}{t},\ |t|$$

<u>תרגיל.</u> תן דוגמא לסדרת פונקציות אינטגר-ביליות f_n כך ש: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים לכל $a \le x \le b$, אבל $f(x)$ איננה אינטגרבילית.

<u>תשובה.</u> תהי $\{s_n\}$ סדרת הרציונלים בקטע $[0,1]$, ותהי f_n, $n \geq 1$, מוגדרת ע"י

$$.f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{אם } x = s_1, ..., s_n \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז לכל $x \in [0,1]$ מתקיים

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

כאשר $f(x)$ היא פונקצית דיריכלה, שאינה אינט-גרבילית.

נתיחס כעת באופן יותר ספציפי למבנה של החלוקות המקרבות.

הגדרה: עבור חלוקה $P=\{x_i\}_{i=0}^n$ אנו קוראים "קוטר החלוקה" לגודל

$$.d(P)=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$$

הגדרה. תהי $P_1,P_2,P_3,\ldots$ סדרת חלוקות כך שלחלוקה P_k יש q_k נקודות חלוקה וקוטר $d(P_k)$, $k\ge 1$. אז אומרים שזוהי "סדרת חלוקות תקינה" אם

$$.\lim_{n\to\infty}d(P_n)=0$$

הערה: יש לשים לב שאין מושג של "חלוקה תקינה" אלא "סדרה תקינה של חלוקות".

דוגמא. בחלוקה P_n מחלקים את $[a,b]$ ל: n קטעים שווים, כך ש:

$$,x_i=a+(b-a)i/n,\ 0\le i\le n$$

ואז $d(P_n) = (b-a)/n$.

<u>משפט.</u> אם f אינטגרבילית אז לכל סדרה תקינה של חלוקות $P_1, P_2 ...$ מתקיים

$$L(P_n, f), U(P_n, f) \to \int_a^b f$$

כאשר $n \to \infty$.

<u>הוכחה:</u> f אינטגרבילית ולכן לפי ההגדרה קי-ימת לכל $\epsilon > 0$ חלוקה P_ϵ כך ש: $L(P_\epsilon, f)$ קרוב עד כדי $\epsilon/2$ ל: $\int_a^b f$ מלמטה:

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < L(P_\epsilon, f) < \int_a^b f.$$

נסמן

$$P_\epsilon = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_p = b\}$$

נקח סדרה תקינה של חלוקות $P_1, P_2, ..., P_n, ...$
כך ש

$$P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_{q_n} = b\}$$

(יש q_n נקודות חלוקה) ונתון ש: $d(P_n) \to 0$
כאשר $n \to \infty$. צריך להוכיח ש:

$$.L(P_n, f) \to \int_a^b f$$

ניקח עידון משותף

$$P_n^\star = P_\epsilon \cup P_n = \{y_0, ..., y_p\} \cup \{x_0, ..., x_{q_n}\}$$

ומקבלים עבורו

$$(\star) \quad \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < L(P_\epsilon) \leq L(P_n^\star) \leq \int_a^b f$$

מקבלים

$$\left|L(P_n, f) - \int_a^b f\right| \leq |L(P_n, f) - L(P_n^\star, f)|$$

$$+\left|L(P_n^\star, f) - \int_a^b f\right|$$

ונובע מ: $(\star)$ שהמחובר השני קטן מ: $\epsilon/2$, ונתרכז במחובר הראשון. עבור n גדול הרוב המכריע של נקודות חלוקה של $P_n^\star$ הן נקודות השייכות ל: P_n ורק מיעוט הנקודות שייכות ל: P_ϵ. מאחר ו: $P_n^\star = P_\epsilon \cup P_n$ נובע שהמחוברים ב: $L(P_n, f)$ ו:

$L(P^\star, f)$ נבדלים רק באותם קטעים שמכילים נקודה כלשהי $y_1, ..., y_p$ של P_ϵ:

$$|L(P_n, f) - L(P^\star, f)| \leq \left|\sum_{P_n} - \sum_{P_n^\star}\right|$$

כאשר הסכומים באגף ימין הם רק על קטעים המכילים נקודות מ: $y_1, ..., y_p$,

$$\leq \left|\sum_{P_n}\right| + \left|\sum_{P_n^\star}\right|$$

p הנקודות $y_1, ..., y_p$ יכולות להופיע לכל היותר ב: $2p$ קטעים ואורך כל קטע אינו עולה על $d(P_n)$, כי זהו המרחק המכסימלי בין שתי נקודות x_i ו: x_{i-1} ב: P_n, והוספת הנקודות $y_1, ..., y_p$ יכולה רק להקטין אותו. נמשיך בהערכה הבאה:

$$\leq 2p{\cdot}M{\cdot}d(P_n) + 2p{\cdot}M{\cdot}d(P_n) = 4p{\cdot}M{\cdot}d(P_n)$$

ואפשר לקחת N_0 כך ש: $n > N_0$ $d(P_n)$ כה קטן שמתקיים

$$.4pMd(P_n) < \epsilon/2$$

מקבלים בסכ"ה עבור $n > N_0$

$$,\left|L(P_n, f) - \int_a^b f\right| < \epsilon$$

מה שמוכיח ש: $L(P_n, f) \to \int_a^b f$ כאשר $n \to \infty$. בצורה דומה מוכיחים ש: $U(P_n, f) \to \int_a^b f$ כאשר $n \to \infty$.

<u>מסקנה:</u> אם f אינטגרבילית ו: $P_1, P_2, ...$ סדרה תקינה של חלוקות, אז נבחר בכל קטע $[x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ של P_n נקודה

$$,x_{i-1,n} \leq \xi_{i,n} \leq x_{i,n}$$

כאשר $\xi_{i,n}$ היא נקודה כלשהי בקטע. אז מתקי-
ים

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,n})\right) = \int_a^b f \quad . \tag{1}$$

הסכומים המופיעים ב: (1) נקראים סכומי רימן.

הוכחת המסקנה: מאחר ו:

$$m_i \le f(\xi_{i,n}) \le M_i$$

נובע ש:

$$L(P_n, f) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i,n})\Delta x_i \le U(P_n, f). \tag{2}$$

אבל הביטויים הקיצוניים באגפי שמאל וימין
מתכנסים כל אחד ל: $\int_a^b f$, מה שמוכיח את הטענה.

יש גישה שונה להגדרת אנטגרל רימן, כזו הננ-
קטת בספר של מייזלר, לפיה מתיחסים לסדרות
תקינות של חלוקות P_n , עם בחירה כלשהי של
נקודות ביניים $\xi_{i,n}$. אם סכומי רימן המתקבל-
ים מתכנסים לגבול, וזהו אותו הגבול לכל סדרה
תקינה ולכל בחירה של נקודות ביניים, אזי הגבול
הזה מוגדר להיות " האינטגרל של רימן". שתי
ההגדרות שקולות, וראינו לעיל כיוון אחד.
להראות כיוון שני, נניח ש: f אינטגרבילית רי-
מן (לפי ההגדרה נקודות הביניים), ונבחר בקטע
$[x_{i-1}, x_i]$ נקודה ξ_i כך ש:

$$.M_i - \frac{\epsilon}{b-a} < f(\xi_i) \le M_i$$

אז מתקיים

$$\sum_i \left(M_i - \frac{\epsilon}{b-a}\right)\Delta x_i \le \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_i M_i \Delta x_i$$

כלומר

$$U(P,f) - \epsilon \le \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \le U(P,f)$$

או מה ששקול לזה

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \le U(P,f) \le \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i + \epsilon .$$

ולכן אם החלוקה P היא מספיק עדינה, אז הסכום

$$\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

קרוב לערך הגבולי, שהוא האינטגרל. נובע מכך שגם שגם הביטויים $U(P,f)$ מתקרבים לאותו הגבול. אותו נימוק תופס גם לגבי הסכומים התחתונים $L(P,f)$. נובע מכך שלכל $\epsilon > 0$ קי- ימת חלוקה P כך ש:

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon,$$

וזה גורר את האינטגרביליות לפי ההגדרה המקור- ית בה השתמשנו.