משוואות בהן הפתרון ניתן בצורה פרמטרית

בנושא זה, נסמן $y' = p$.

סוג אחד של מד"ר בהם אנו מקבלים פתרון בצורה פרמטרית הוא $x = f(p) = f(y')$

במקרה זה נקבל $y = \int y'(x)dx = \int pdx$

וע"י הצבה $x = f(p)$ נקבל $dx = f'(p)dp$ ולכן $y = \int pdx = \int pf'(p)dp + c$

כלומר

$$\begin{aligned} x &= f(p) \\ y &= \int pf'(p)dp + c. \end{aligned}$$

בנוסף יש את הפתרונות הסינגולריים $x = \lim_{p\to\pm\infty} f(p)$

תרגיל: $x = p^2$.

פתרון:

$$\begin{aligned} x &= p^2 \\ y &= \int y'(x)dx = \int pdx = \int pf'(p)dp + c = \int p2pdp + c = \frac{2}{3}p^3 + c. \end{aligned}$$

כאשר אפשר לרשום זאת בצורה מפורשת

$$p = \pm\sqrt{x} \implies y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

תרגיל: $x^2(1+p^2) - a^2p^2 = 0$.

פתרון:

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \\ y &= \int y'(x)dx = \int pdx = \int pf'(p)dp + c = pf(p) - \int f(p)dp = \\ = \;\; &\pm\frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}} - \left(\pm\int \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}dp\right) = \pm\frac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}} - \left(\pm a\sqrt{1+p^2}\right) + c \end{aligned}$$

ויש גם פתרונות סינגולריים

$$x = \lim_{p\to\pm\infty} \pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = \pm a$$

שנותן בעצם שני פתרונות סינגולריים (אבל אם חיפשנו רק y כפונקציה של x אזי אלה לא נחשבים).

משוואות לגרנג'

משוואות לגרנג' הן משוואות מהצורה

$$y = A(p)x + B(p)$$

נגזור לפי x ונקבל $p = y' = A'(p)\frac{dp}{dx}x + A(p) + B'(p)\frac{dp}{dx}$

נחליף תפקידי x, p כלומר $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dp}}$ ונקבל $p\frac{dx}{dp} = A'(p)x + A(p)\frac{dx}{dp} + B'(p)$

ולכן $\big(A(p) - p\big)\frac{dx}{dp} + A'(p)x = -B'(p)$

וזו מד"ר לינארית כאשר $x(p)$ ואחרי פתרון נקבל $x(p) = cf(p) + g(p)$

ו־ $y = A(p)\big(cf(p) + g(p)\big) + B(p) = cA(p)f(p) + A(p)g(p) + B(p)$

אבל זה עבור p עבורו $A(p) \neq p$.

אם $A(p_0) = p_0$ אז נקבל $y = A(p_0)x + B(p_0) = p_0x + B(p_0)$

תרגיל: פתרו $y = xp + x\sqrt{1+p^2}$

פתרון: נגזור ונקבל

$$p = y' = p + x\frac{dp}{dx} + \sqrt{1+p^2} + \frac{xp}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\sqrt{1+p^2}\frac{dx}{dp} + \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)x = 0$$

$$\frac{dx}{dp} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p}{1+p^2}\right)x = 0$$

$$\begin{aligned} x &= c\exp\left(-\int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{p}{1+p^2}dp\right) = \\ &= c\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\arctan p}{1-\sin\arctan p}\right) + \frac{1}{2}\ln(1+p^2)\right) = \\ &= c\sqrt{\frac{1-\sin\arctan p}{1+\sin\arctan p}}\sqrt{1+p^2} \end{aligned}$$

$$y = pc\sqrt{\frac{1-\sin\arctan p}{1+\sin\arctan p}}\sqrt{1+p^2} + c\sqrt{\frac{1-\sin\arctan p}{1+\sin\arctan p}}(1+p^2)$$

שימו לב כי חילקנו ב-$\sqrt{1+p^2}$ אבל כיוון שהוא חיובי אז לא נקבל פתרונות סינגולריים.

משוואות קלרו

משוואות קלרו הן משוואות מהצורה

$$y = px + f(p)$$

נגזור לפי x ונקבל $p = y' = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$

ולכן $\frac{dp}{dx}\left(x + f'(p)\right) = 0$

אם $\frac{dp}{dx} = 0$ אז $p = C$ ולכן $y = Cx + f(C)$

ואם $x + f'(p) = 0$ אז $x = -f'(p)$ ונקבל $y = -pf'(p) + f(p)$

תרגיל: פתרו $y = px + \sqrt{1+p}$.

פתרון: נגזור

$$p = y' = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{1+p}}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{1}{2\sqrt{1+p}}\right) = 0$$

אם $\frac{dp}{dx} = 0$ אזי $p = c$ ואז $y = cx + \sqrt{1+c}$

ואם $x + \frac{1}{2\sqrt{1+p}} = 0$ אז

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{1+p}}$$

$$y = -\frac{p}{2\sqrt{1+p}} + \sqrt{1+p}$$

שימו לב כי אפשר לחלץ פה את p כפונקציה של x ולקבל את y בצורה מפורשת כפונקציה של x.

תרגיל בית: עשו זאת.

מעטפה של משפחה של עקומות

תרגיל: מצאו מעטפת של $2ky = 2x + k^2$.

פתרון: נגזור לפי k

$$
\begin{aligned}
2ky &= 2x + k^2 \\
2y &= 2k
\end{aligned}
$$

ולכן $y = k$ ו־

$$x = \frac{2ky - k^2}{2} = \frac{2kk - k^2}{2} = \frac{k^2}{2}$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
y &= k \\
x &= \frac{k^2}{2}
\end{aligned}
$$

או $x = \frac{y^2}{2}$ בצורה מפורשת לא פרמטרית כאשר $x(y)$.

תרגיל: מצאו מעטפת של $y = \left(1 + \frac{k}{(1+\alpha)^2}\right)(x-1+\alpha)$ כאשר $\alpha \neq -1$ הוא הפרמטר של המשפחה ו־k קבוע (כלומר k שונים נותנים משפחות שונות).

פתרון: נגזור לפי α

$$
\begin{aligned}
y &= \left(1 + \frac{k}{(1+\alpha)^2}\right)(x - 1 + \alpha) \\
0 &= -\frac{2k}{(1+\alpha)^3}(x - 1 + \alpha) + \left(1 + \frac{k}{(1+\alpha)^2}\right)
\end{aligned}
$$

נחלץ את x מהמשוואה השנייה

$$x = \frac{\frac{2k(1-\alpha)+(1+\alpha)^3+k(1+\alpha)}{(1+\alpha)^3}}{\frac{2k}{(1+\alpha)^3}} = \frac{3k - k\alpha + (1+\alpha)^3}{2k}$$

ואז

$$y = \left(1 + \frac{k}{(1+\alpha)^2}\right)\left(\frac{3k - k\alpha + (1+\alpha)^3}{2k} - 1 + \alpha\right).$$

שימו לב כי חישובים אלו הם עבור $k \neq 0$. עבור $k = 0$ נקבל

$$y = x - 1 + \alpha$$

ולזה אין מעטפת (בדקו).

סיכום: 1. גזרו לפי הפרמטר.
2. מתוך שתי המשוואות שקיבלתם, חלצו את x, y כפונקציות של הפרמטר.
הערה: בכל החישובים שעשינו, הסתמכנו על זה שהכל גזיר ברציפות.