תרגול 5

<u>תרגיל:</u>

יהא $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{k}a_ix_1^{m_{1_i}}x_2^{m_{2_i}}\cdots x_n^{m_{n_i}}$ פולינום ממשי ב-n משתנים שאינו פולינום האפס. הוכיחו כי קבוצת השורשים שלו היא קבוצה דלילה במרחב המטרי $(\mathbb{R}^n,d_{max})$.

<u>פתרון:</u>

ראינו בהרצאה כי F היא פונקציה רציפה מ-$(\mathbb{R}^n,d_{max})$ ל-$(\mathbb{R},d_{Eucl})$. הקבוצה $\{0\}$ היא סגורה ב-$(\mathbb{R},d)$ כי היא יחידון. לכן, מרציפות F נובע כי קבוצת השורשים של F היא $F^{-1}\{0\}$ והיא סגורה ב-$(\mathbb{R}^n,d_{max})$.

לכן, $\overline{F^{-1}\{0\}}=F^{-1}\{0\}$. נותר להראות, אם כן, שמתקיים $int\,F^{-1}\{0\}=\emptyset$. נראה זאת באינדוקציה על n. עבור $n=1$, נקבל כי F היא פולינום במשתנה אחד. כידוע, יש לו מספר סופי של שורשים. ראיתם בהרצאה כי קבוצה סופית ב-$(\mathbb{R},d)$ תמיד דלילה.

נניח, כי הטענה נכונה עבור n ונוכיח את נכונותה בעזרת זה, עבור $n+1$:

לשם כך, נתבונן ב-$G(x_1,\cdots,x_{n+1})=\sum_{i=1}^{k}a_ix_1^{m_{n_i}}\cdots x_{n+1}^{m_{n+1_i}}$ שניתן להציג באופן הבא:

$$G(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{k_1}P_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_{n+1}^{j}$$

כאשר P_j, לכל j, הם פולינומים ממשתנים $x_1,\cdots,x_n$ ולא כולם פולינומי האפס, כאשר:

$$k_1=\max_{1\le i\le k}\{m_{(n+1)_i}\}$$

נרצה להראות כי $Int(G^{-1}\{0\})=\emptyset$. נניח בשלילה, אם כן, כי אין זה נכון – כלומר, קיים $x\in Int(G^{-1}\{0\})$ שהוא מרכז של כדור פתוח B ב-$(\mathbb{R}^{n+1},d_{max})$ אשר כולו מוכל ב-$G^{-1}\{0\}$. כדור זה הוא קובייה סביב x ברדיוס מסויים r במרחב $(\mathbb{R}^{n+1},d_{max})$.

מכאן, שלכל $1\le j\le n+1$ קיים קטע (a_j,b_j) שאורכו r, כך שמתקיים:

$$B=\prod_{j=1}^{n+1}(a_j,b_j)=\left(\prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j)\right)\times(a_{n+1},b_{n+1})$$

כאשר $x_j\in(a_j,b_j)$ וכן $\prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j)$ היא קוביה סביב $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ ברדיוס r במרחב $(\mathbb{R}^n,d_{max})$. לכן, לכל $c\in\prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j)$ הפולינום:

$$\sum_{j=1}^{k_1}P_j(c_1,c_2,\cdots,c_n)x_{n+1}^{j}$$

מתאפס על הקטע (a_{n+1},b_{n+1}) כי הוא מקבל ערכים בקטע זה שהם ערכים של G ב-$B=\prod_{j=1}^{n+1}(a_j,b_j)$ שהם 0. לכן, בהכרח נסיק כי $P_j(c_1,c_2,\cdots,c_n)x_{n+1}^{j}$ הוא פולינום האפס, שכן אחרת נקבל מספר אינסופי של שורשים. אך זה נכון לכל $1\le i\le k$, אך הנחנו כי לא כל P_j הינם פולינומי האפס, כלומר קיים $1\le j_0\le k_1$ אינו פולינום האפס והינו פולינום ממעלה n. אך נסיק מכך כי $\bar{x}$ מהווה נקודה פנימית של $P_{j_0}^{-1}\{0\}$ ונקבל סתירה להנחת האינדוקציה.