מבוא לתורת הקבוצות - תרגיל 3 - הערות

1. רשמו את $A \setminus B$ ואת $A \triangle B$ עבור הקבוצות הבאות:

   (א) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 7\}$

   - $A \setminus B = \{3, 5, 9\}$, $A \triangle B = \{3, 4, 5, 9\}$.

   (ב) $A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\, n > 2 \right\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

   - שימו לב לכך ש-$A = \mathbb{Q}$!

   (ג) A המקיימת $A \triangle \mathbb{C} = \varnothing$, $B = \mathbb{R}$

   - שימו לב לכך ש-$A = \mathbb{C}$!

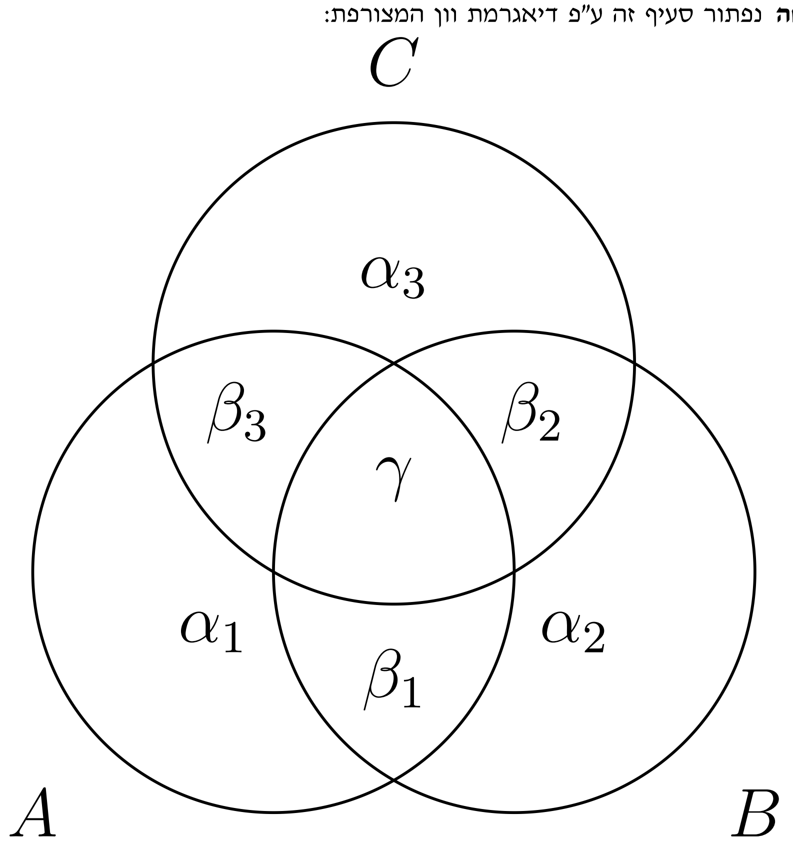
2. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

   (א) פעולת החיסור של קבוצות ($\setminus$) הנה סימטרית.

   הפרכה $\{0\} \setminus \varnothing \neq \varnothing \setminus \{0\}$

   (ב) פעולת ההפרש הסימטרי ($\triangle$) הנה אסוציאטיבית.

   הוכחה נפתור סעיף זה ע"פ דיאגרמת וון המצורפת:



מתקיים:

$$\begin{aligned} A\triangle B &= \alpha_1\cup\alpha_2\cup\beta_2\cup\beta_3 \\ B\triangle C &= \alpha_2\cup\alpha_3\cup\beta_1\cup\beta_3 \\ A\triangle(B\triangle C) &= \gamma\cup\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3 \\ (A\triangle B)\triangle C &= \gamma\cup\alpha_1\cup\alpha_2\cup\alpha_3 \end{aligned}$$

ולכן השוויון הדרוש.

(ג) פעולת הכפל של קבוצות ($\times$) הנה קומוטטיבית.

הפרכה נגדיר $a_i=\{i\}$ לכל $i\in\{0,1\}$. אזי:

$$(0,1)\in(a_0\times a_1)\setminus(a_1\times a_0)$$

3. הוכיחו כל אחת מן הטענות הבאות:

(א) $A\subseteq B$ אם ורק אם $A\cap B=A$ אם ורק אם $A\cup B=B$ אם ורק אם $A\setminus B=\varnothing$ אם ורק אם $A\setminus B\subseteq B$.

הוכחה אם $A\subseteq B$ אז כל איבר ב־A הוא איבר ב־B ולכן גם ב־$A\cap B$ (ולכן $A\subseteq A\cap B$), ומצד שני תמיד $A\cap B\subseteq A$, ולכן $A\cap B=A$.
נניח כי $A\cap B=A$. ברור כי $B\subseteq A\cup B$. יהי $x\in A\cup B$; אם $x\in A$ אז $x\in A\cap B$ ולכן $x\in B$ בכל מקרה, ולכן $A\cup B\subseteq B$ ומכאן $A\cup B=B$.
נניח כי $A\cup B=B$. נניח בשלילה כי קיים $x\in A\setminus B$. אז, $x\notin B$ ולכן $x\notin A\cup B$ ולכן $x\notin A$, סתירה. לכן $A\setminus B=\varnothing$.
נניח כי $A\setminus B=\varnothing$. מכיוון ש־$\varnothing\subseteq B$ נובע כי $A\setminus B\subseteq B$.
נניח כי $A\setminus B\subseteq B$. יהי $x\in A$. אם $x\notin B$ אז $x\in A\setminus B$ ולכן $x\in B$ וזו סתירה; לכן $x\in B$, כלומר $A\subseteq B$.

(ב) מכפלה קרטזית של שתי קבוצות היא ריקה אם ורק אם אחת מן הקבוצות במכפלה הנה ריקה.

הוכחה נביט במכפלה הקרטזית $A\times B$. אם A,B אינן ריקות, אז קיים $a\in A$ ו־$b\in B$, ולכן $(a,b)\in A\times B$ ולכן $A\times B$ אינה ריקה.
מצד שני, נניח כי A ריקה; נניח בשלילה כי $A\times B$ אינה ריקה. יהי $(a,b)\in A\times B$. מהגדרת המכפלה הקרטזית, $a\in A$, בסתירה לכך ש־A ריקה. באופן דומה נראה כי אם B ריקה אז $A\times B$ ריקה.

4. יהיו A,B,X,Y קבוצות. הוכיחו שניים מבין השוויונים הבאים:

(א) $(A\cup B)\times X=(A\times X)\cup(B\times X)$

הוכחה איבר באגף שמאל הוא מהצורה (c,x) כאשר $c\in A\cup B$, כלומר $c\in A$ או $c\in B$, ולכן (c,x) נמצא באגף ימין. הכיוון ההפוך דומה (וכך גם שאר הסעיפים בשאלה זו).

(ב) $A\times(X\cup Y)=(A\times X)\cup(A\times Y)$

(ג) $(A\cap B)\times X=(A\times X)\cap(B\times X)$

(ד) $A\times(X\cap Y)=(A\times X)\cap(A\times Y)$

5. תהי $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרה של קבוצות הקבועה ממקום מסוים; כלומר, עבורה קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq k$ מתקיים $x_n = x_k$. הוכיחו כי לסדרה זו קיים גבול ומצאו אותו.

הוכחה תהי $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרה כנ"ל ויהי k עבורו לכל $n \geq k$ מתקיים $x_n = x_k$. יהי $y \in \overline{\lim} x_n$. אזי

$$y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} x_j \subseteq \bigcap_{i=k}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} x_j = \bigcap_{i=k}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} x_k = x_k$$

ולכן $\overline{\lim} x_n \subseteq x_k$. מצד שני, יהי $w \in x_k$. אזי:

$$w \in x_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} x_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} x_j = \underline{\lim} x_n$$

ולכן $x_k \subseteq \underline{\lim} x_n$. משתי ההכלות הללו נובע כי $\lim x_n = \underline{\lim} x_n = x_k = \overline{\lim\, x_n}$.

6. תהי $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרה של קבוצות, ותהי x_{n_k} תת סדרה אינסופית שלה. הוכיחו:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n \subseteq \underline{\lim} x_n \subseteq \underline{\lim} x_{n_k} \subseteq \overline{\lim} x_{n_k} \subseteq \overline{\lim} x_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

מצאו דוגמה עבורה

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n \subset \underline{\lim} x_n \subset \underline{\lim} x_{n_k} \subset \overline{\lim} x_{n_k} \subset \overline{\lim} x_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

ומצאו דוגמה עבורה

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n = \underline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_{n_k} = \overline{\lim} x_{n_k} = \overline{\lim} x_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n$$

טענת עזר להוכחה תהי s_n סדרה מונוטונית עולה של קבוצות (כלומר, לכל $n_1 < n_2$, $s_{n_1} \subseteq s_{n_2}$). תהי s_{n_k} תת סדרה של s_n. אזי, לכל m טבעי,

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} s_n = \bigcup_{\substack{n=m \\ n \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} s_n$$

הוכחת טענת העזר ההכלה בכיוון $\supseteq$ טריביאלית. נוכיח את ההכלה בכיוון $\subseteq$. אכן, יהי $w \in \bigcup_{n=m}^{\infty} s_n$. אזי, קיים $n_1 \geq m$ טבעי עבורו $w \in s_n$. יהי n_2 אינדקס כלשהו המקיים $n_2 > n_1$ וגם $n_2 \in \langle n_k \rangle$. אזי: $s_{n_1} \subseteq s_{n_2}$ (ממונוטוניות הסדרה). לכן $w \in s_{n_2}$ ולכן

$$w \in \bigcup_{\substack{n=m \\ n \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} s_n$$

כדרוש.

הוכחת התרגיל נוכיח כל הכלה בנפרד, בסדר משמאל לימין.

(א) לפי ההגדרה של $\underline{\lim} x_n$,

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} x_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} x_j = \underline{\lim} x_n$$

(ב) לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\bigcap_{j=i}^{\infty} x_j \subseteq \bigcap_{\substack{j=i \\ j \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} x_j$$

(שכן באגף ימין החיתוך הוא על פחות קבוצות). נגדיר $s_i = \bigcap_{j=i}^{\infty} x_j$. מסיבה דומה, s_i סדרה מונוטונית (עולה), שכן ל־i גדול יותר החיתוך הוא על פחות קבוצות. לכן, לפי טענת העזר

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} s_i = \bigcup_{\substack{i=0 \\ i \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} s_i$$

ולכן

$$\underline{\lim} x_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} x_j = \bigcup_{\substack{i=0 \\ i \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} x_j \subseteq \bigcup_{\substack{i=0 \\ i \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} \bigcap_{\substack{j=i \\ j \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} x_j = \underline{\lim} x_{n_k}$$

(ג) ראינו בכיתה.

(ד) (ניתן להוכיח סעיף זה באמצעות טענת עזר דומה לזו שהוכחנו, אך נוכיח בשיטה שונה) יהי $y \in \overline{\lim} x_{n_k}$. אזי,

$$y \in \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} \bigcup_{\substack{j=i \\ j \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} x_j$$

יהי m טבעי כלשהו. נבחר $i \in \langle n_k \rangle$ המקיים $i \geq m$. לפי ההנחה,

$$y \in \bigcup_{\substack{j=i \\ j \in \langle n_k \rangle}}^{\infty} x_j \subseteq \bigcup_{j=i}^{\infty} x_j$$

לכן קיים $j \geq i \geq m$ עבורו $y \in x_j$. הוכחנו כי לכל m טבעי קיים $j \geq m$ עבורו $y \in x_j$. במילים אחרות,

$$y \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{j=m}^{\infty} x_j = \overline{\lim} x_n$$

(ה) לפי ההגדרה של $\overline{\lim} x_n$,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n \supseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} x_j = \overline{\lim} x_n$$

דוגמה א' נגדיר

$$x_n = \begin{cases} \{1,2,4\} & n > 0 \text{ is divided by } 4 \\ \{1,2\} & n > 0 \text{ is even but not divided by } 4 \\ \{1,3\} & n \text{ is odd} \\ \{0\} & n = 0 \end{cases}$$

ונבחר $n_k = 2k$. אזי

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=0}^{\infty} x_n &= \varnothing \\ \underline{\lim} x_n &= \{1\} \\ \underline{\lim} x_{n_k} &= \{1,2\} \\ \overline{\lim} x_{n_k} &= \{1,2,4\} \\ \overline{\lim} x_n &= \{1,2,3,4\} \\ \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n &= \{0,1,2,3,4\} \end{aligned}$$

דוגמה ב' נגדיר $x_n = \varnothing$ לכל n טבעי, ו־$n_k = k$.

7. נגדיר סדרה $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ באופן הבא:

$$x_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

מצאו את $\underline{\lim} x_n$ ואת $\overline{\lim} x_n$. האם ל־x_n יש גבול?

פתרון ראשית נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$, ולכן $\underline{\lim} x_n \subseteq \overline{\lim} x_n \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$. מצד שני, לכל $n \geq 1$ טבעי ולכל $z \geq 0$ טבעי

$$z = \frac{zn}{n} \in x_n$$

ולכן

$$\mathbb{N} \subseteq \underline{\lim} x_n \subseteq \overline{\lim} x_n \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,\infty)$$

טענה $\mathbb{N}=\underline{\lim}x_n$.

הוכחה מספיק להראות הכלה בכיוון $\supseteq$. כלומר, מספיק להראות ש־$y\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)$ שאינו שלם אינו נמצא ב־$\underline{\lim}x_n$. יהי y כזה. מאחר ו־y רציונלי חיובי, קיימים $p,q\in\mathbb{N}$ עבורם $y=\frac{p}{q}$, p,q זרים, $q>1$. יהי ℓ טבעי. עלינו למצוא $k\geq\ell$ עבורו $y\notin x_k$. נבחר $k=jq+1$ עבור j טבעי מינימלי כך ש־$\ell\geq jq+1$. נניח בשלילה כי $y\in x_k$. אזי, קיים $m\in\mathbb{N}$ עבורו $\frac{p}{q}=\frac{m}{jq+1}$, ולכן

$$\begin{aligned}
p\left(jq+1\right) &= mq\\
pjq+p &= mq\\
p &= q\left(m-pj\right)
\end{aligned}$$

אך זו סתירה לכך ש־q אינו מחלק את p.

טענה $\overline{\lim}x_n=\mathbb{Q}\cap[0,\infty)$.

הוכחה שוב, מספיק להראות הכלה בכיוון $\supseteq$. יהי $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)$. אזי, לכל $k\geq 1$ טבעי מתקיים $r=\frac{kp}{kq}$ ולכן לפי התרגיל הקודם

$$r\in\bigcap_{k=1}^{\infty}x_{qk}\subseteq\overline{\lim}x_{qk}\subseteq\overline{\lim}x_k$$

כדרוש.

מסקנה לסדרה אין גבול.