אלגברה ב' - פתרון גליון 5 ותרגילים נבחרים מבחן מס' 1

תרגול נוסף של דן ב-14.05 בשעה 15:30 היכנשהו בין קומות 2 ל-9

♠ **[HK]** 8.3.1: נוכל לתאר את האופרטור הנתון כאופרטור הכפלה במטריצה:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

נזכור, שביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^n$, לכל אופרטור על $T_A \in L(\mathbb{C}^n)$ המוגדר ע"י $T_A(v) = A \cdot v$ עבור מטריצה קבועה $A \in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים השוויון $T_A^* = T_{A^*}$, ולכן נקבל כי במקרה שלנו -

$$T^*\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -i & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ -ix-y \end{bmatrix}.$$

♠ **[HK]** 8.3.9: מוכרת לנו מטריצה מייצגת של D יחסית לבסיס הסטנדרטי $\epsilon = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$:

$$A = [D]_\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

המטריצה של המכפלה הפנימית הנתונה בבסיס זה היא -

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

השאלה היא, אם-כן, כיצד לחשב את T_A^* כאשר המכפלה הפנימית על $\mathbb{R}^n$ ניתנת באמצעות מטריצה M. ובכן, בזכרנו כי M הפיכה וצמודה לעצמה, נחשב -

$$\begin{aligned} \langle T_A(u), v\rangle &= \langle Au, v\rangle \\ &= v^t \cdot M \cdot Au \\ &= (v^* \cdot M \cdot Au)^t \\ &= u^t A^t M^t v \\ &= u^t M \cdot (M^{-1}A^tM)v \\ &= \langle (M^{-1}A^tM)v, u\rangle \\ \Rightarrow T_A^* &= T_{M^{-1}A^*M} \end{aligned}$$

מכאן נוכל בקלות להסיק כי במקרה שלנו

$$[D^*(v)]_\epsilon = H^{-1}AH[v]_\epsilon.$$

כמובן, ישנה גם אופציה אחרת, והיא לעבוד עם ייצוג מטריצי של D ביחס לבסיס אורתונורמלי β של $R_4[x]$, ואז נקבל $[D^*]_\beta = [D]^*_\beta$. לדעתי חישוב זה איננו עדיף במקרה זה, מכיוון שהוא מחייב שינוי בסיסים בתוספת הפעלת תהליך גרם-שמידט... לא מלבב.

♠ **[HK]** 8.3.11: ברור שאם $E^* = E$, אזי גם $E^*E = EE = EE^*$. בכיוון ההפוך, נניח כי E הוא אופרטור הטל נורמלי (כלומר: $E^2 = E,\ E^*E = EE^*$), ועלינו להוכיח כי $E = E^*$.
נזכור את הנוסחה $\ker(E^*) = (ImE)^-$ וכי נורמליות גוררת $\ker(E^*) = \ker(E)$, ואז נקבל כי $Im(E) - \ker(E)$. מצד שני, אנו יודעים כי בהיות $E^2 = E$, המרחב V מתפרק לסכום הישר $V = Im(E) \oplus \ker(E)$. מכאן נובע ש-E הוא, על-פי הגדרה, אופרטור ההטלה הניצבת על $Im(E)$, והוכחתם בהרצאה שהוא צמוד לעצמו.

♠ **שאלה** 4: יהא V מרחב וקטורי כלשהו, ונשים לב לתכונה הבאה של אופרטורים "בעלי צמוד":
נניח כי $T \in L(V)$ אופרטור שיש לו T^*; אזי לכל $x, y \in V$ נקבל -

$$|\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, T^*y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|T^*y\|.$$

בפרט, אם $\|x\| = 1$ כלשהו, ו-$y \in V$ קבוע נקבל -

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \|T^*y\|$$

משמע: קבוצת המספרים $\langle Tx, y\rangle$ היא קבוצה חסומה לכל y.
במקרה שלנו, האופרטור D פשוט לא מקיים תכונה זו: נתבונן בסדרת החזקות של המשתנה x -

$$\|x^n\|^2 = \langle x^n, x^n\rangle = \frac{1}{2n+1}.$$

נגדיר וקטורים מנורמלים $u_n \triangleq \sqrt{2n+1}x^n$, ונתבונן בגדלים $|\langle D(u_n), 1\rangle|$:

$$\langle D(u_n), 1\rangle = \sqrt{2n+1}\int_0^1 nx^{n-1}dx = \sqrt{2n+1}.$$

אנו רואים שסדרת-הגדלים הנ"ל שואפת לאינסוף, ולכן היא לא יכולה להיות חסומה.
פתרון אלטרנטיבי תוכלו למצוא ב-[HK], עמוד 296.

♠ **שאלה** 5: בכל אחד מן המקרים הנ"ל, נשתמש באפיון/הגדרה -

$$Q = T^* \Leftrightarrow \forall_{x,y\in V}\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Qy\rangle$$

תחילה נוכיח כי $(S + kT)^* = S^* + \bar{k}\cdot T^*$:

$$\begin{aligned}
\langle (S+kT)x, y\rangle &= \langle Sx, y\rangle + k\langle Tx, y\rangle \\
&= \langle x, S^*y\rangle + k\langle x, T^*y\rangle \\
&= \langle x, S^*y\rangle + \langle x, \bar{k}T^*y\rangle \\
&= \langle x, S^*y + \bar{k}T^*y\rangle \\
&= \langle x, (S^* + \bar{k}\cdot T^*)y\rangle.
\end{aligned}$$

כעת נוכיח כי $(ST)^*=T^*S^*$:

$$\begin{aligned}\langle STx,y\rangle &= \langle S(Tx),y\rangle=\langle Tx,S^*y\rangle=\langle x,T^*(S^*y)\rangle\\ &= \langle x,(T^*S^*)y\rangle.\end{aligned}$$

להוכחת השוויון האחרון - $(T^*)^*=T$ - נסמן $Q\triangleq T^*$, ואז:

$$\langle T^*x,y\rangle=\langle Qx,y\rangle=\langle x,Q^*y\rangle=\langle x,(T^*)^*y\rangle.$$

♠ **שאלה 6:** G חבורה מסדר $n=pq$, ו-H תת-חבורה שלה מסדר p, כאשר נתון כי $q<p$. תהי K תת-חבורה כלשהי (אולי אחרת) מסדר p ב-G, ונתבונן במכפלה HK:

$$\begin{aligned}|HK| &= \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}=\frac{p^2}{|H\cap K|}>\frac{|G|}{|H\cap K|}\\ \Rightarrow |G| &< |HK|\cdot|H\cap K|\end{aligned}$$

מצד אחד, אנו זוכרים כי $HK\subseteq G$, ולכן בהכרח $|HK|\leq|G|$, ואנו מסיקים כי אז החיתוך $H\cap K$ חייב להכיל יותר מאיבר אחד.
מאידך, $H\cap K<K$ ולכן $|H\cap K|\big|p$, $|H\cap K|\neq 1$, ואנו מסיקים כי $|H\cap K|=p$ (p ראשוני). בהיות $H\cap K$ תת-קבוצה של החבורות H,K - שתיהן מסדר p - H חייבת להיות שווה ל-K.

פתרון שאלות מן הבחן:

♠ **שאלה 1ב':** הקבוצה $U_p=\{1,2,\ldots,p-1\}$ היא סופית. כפל מודולו p מהווה פעולה אסוציאטי-בית, ולכן סעיף א' בשאלה זו מראה שמספיק להראות שמתקיימים חוקי-הצמצום.
הכפל קומוטטיבי, ולכן די להראות צמצום משמאל - דהיינו:

$$ax\equiv bx\,(mod\,p)\Rightarrow a\equiv b\,(mod\,p)$$

ובכן, נניח כי $ax\equiv bx$ (ברישום מקוצר - הרי קבענו את p), ואז $ax-bx\equiv 0$, ואנו מסיקים כי $p\big|(a-b)x$. ברם, p זר ל-x, ולכן הוא חייב לחלק את ההפרש $a-b$, ואנו רואים כי $a\equiv b$, כנדרש.

♠ **שאלה 1ד':** נביא דוגמה: $G=\{a,b\}$, עם הפעולה המוגדרת ע"י $aa=ba=a$, ו-$ab=bb=b$ - דהיינו: כפל מימין ב-a נותן תמיד a, וכפל מימין ב-b נותן תמיד b; כפל משמאל ב-a או ב-b פועל באופן זהותי. בפרט, אין צמצום ימני ובוודאי שיש צמצום שמאלי (הכי טוב לראות זאת בטבלת-כפל), ונותר לנו להראות שאסוציאטיביות מתקיימת ביחס לפעולה זו:

$$\begin{aligned}(g_1g_2)a &= a=g_1a=g_1(g_2a)\\ (g_1g_2)b &= b=g_1b=g_1(g_2b).\end{aligned}$$

♠ **שאלה 2ג'**

פתרון ראשון: שמים לב לכך ש-A^tB היא מטריצה משולשת עליונה, שכל איברי-האלכסון שלה פרט לאיבר ה-$(1,1)$ הם אחדות, ואז:

$$detC = detA \cdot detB = detA^t \cdot detB = det(A^tB),$$

וזה שווה לאיבר ה-$(1,1)$ של A^tB, השווה ל-

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5.$$

פתרון שני: מתבוננים במערכת $Ax = b$. לפי כלל קרמר -

$$x_1 = \frac{detB}{detA} = detB \cdot detA = detC$$

- וזאת מכיוון שהאורתוגונליות של A גוררת $(detA)^2 = 1$. בנוסף, העמודות של A אורתונורמ-ליות, ולכן x_1 הוא המקדם הראשון של b בפיתוח פורייה לפי הבסיס המורכב מעמודותיה של A, ולכן:

$$x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5.$$