<u>תורת החבורות – תרגיל בית 3</u>

<u>שאלה 2</u>

תהי X קבוצת השברים המצומצמים. לכל אחת מהקבוצות הבאות <u>בדוק</u> אם היא חבורה ביחס לפעולת חיבור:

$$1)\quad Y=\left\{\frac{a}{b}\in X \,\middle|\, b \text{ is odd}\right\}$$

$$2)\quad Z=\left\{\frac{a}{b}\in X \,\middle|\, b \text{ is even}\right\}$$

<u>פתרון:</u>

בשני המקרים אסוציאטיביות מתקיימת (כי חיבור של רציונליים ההינה פעולה אסוציאטיבית),

אדיש קיים $\left(0=\frac{0}{1}\in Y,\ 0=\frac{0}{2}\in Z\right)$, ולכל $\frac{a}{b}$ המקיים את הדרישה, גם $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$ מקיים אותה הדרישה.

לכן בשני המקרים עלינו לבדוק את הסגירות לחיבור.

1) Y הינה חבורה: יהיו $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in Y$. אז $(b,2)=(d,2)=1$. מכאן $(b\cdot d,2)=1$, ולכן

$$\left(\frac{b\cdot d}{(b\cdot d, ad+bc)},2\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{ad+bc}{b\cdot d}\in Y.$$

2) Z אינה חבורה: $\frac{1}{6}\in Z$, אך $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\notin Z$.

<u>שאלה 4</u>

תהי $G=\left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, z^n=1, n\in\mathbb{Z}^+\right\}$ -- אוסף כל שורשי היחידה. <u>הוכח</u>:

א) $(G,\cdot)$ חבורה.

ב) $(G,+)$ אינה חבורה.

<u>פתרון:</u>

א) <u>סגירות</u>: יהיו $z,w\in G$, אז קיימים טבעיים n,m כך ש $z^n=w^m=1$.

מכאן $(zw)^{nm}=\left(z^n\right)^m\left(w^m\right)^n=1^m\cdot 1^n=1 \quad\Rightarrow\quad zw\in G$.

<u>אסוציאטיבית</u>: נובעת מאסוציאטיביות ב- $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

<u>קיום אדיש</u>: $1^1=1 \quad \Rightarrow \quad 1\in G$ אדיש כפלי.

<u>קיום הופכי</u>: יהי $z\in G$, אז קיים $n\in\mathbb{N}$: $z^n=1$. לכן $\left(z^{-1}\right)^n=1$, ומכאן ההופכי שייך ל- G גם כן.

ב) אין סגירות לגבי חיבור: $1\in G$, אך $1+1\notin G$.

<u>שאלה 7</u>

תהי G חבורה בה לכל a,b מתקיים כי $(ab)^3=a^3b^3$ וגם $(ab)^5=a^5b^5$.

<u>הוכח</u>: $(G,*)$ חבורה אבלית.

<u>פתרון:</u> תחילה נציין כי

$$(ab)^3=a^3b^3 \quad\Rightarrow\quad \cancel{a}baba\cancel{b}=\cancel{a}aabb\cancel{b} \quad\Rightarrow\quad baba=aabb$$

ועכשיו:

$$(ab)^5=a^5b^5 \quad\Rightarrow\quad \cancel{a}bababab\cancel{ab}=\cancel{a}aaaabbbb\cancel{b} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad (baba)(baba)=aaaabbbb \quad\Rightarrow\quad (\cancel{aa}bb)(aa\cancel{bb})=\cancel{aa}aabb\cancel{bb} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad bbaa=aabb \quad\Rightarrow\quad \cancel{b}ba\cancel{a}=\cancel{b}ab\cancel{a} \quad\Rightarrow\quad ba=ab$$

<u>שאלה 8</u>

תהי $(G,*)$ קבוצה סופית עם פעולה כך שלכל שלושה איברים $a,b,c\in G$ מתקיים

1) $a*b\in G$
2) $(a*b)*c=a*(b*c)$
3) $a*b=a*c \Rightarrow b=c$
4) $b*a=c*a \Rightarrow b=c$

א) <u>הוכח</u>: $(G,*)$ חבורה.

ב) האם הטענה תישאר נכונה אם נוותר על תנאי הסופיות?

<u>פתרון:</u>

א) לפי תרגיל כיתה, מספיק להראות קיום יחידה ימנית וקיום הופכי ימני לכל אברי G.

ניח כי $G=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ ונביט בקבוצה $x_1G=\{x_1x_1,x_1x_2,\cdots,x_1x_n\}$.

מסגירות מקבלים כי $x_1G\subseteq G$, ומחוק הצמצום השמאלי כי השוויון מתקיים.

כעת, $x_1\in G=x_1G$, לכן קיים $1\le k\le n$ עבורו $x_1=x_1x_k$. אם נוכיח כי לכל $1\le j\le n$ $x_jx_k=x_j$, נקבל כי x_k יחידה ימנית.

יהי $1\le j\le n$. $Gx_1=G$ (הכלה אחת נובעת מהסגירות, והשוויון -- מחוק הצמצום הימני) ומתקיים $x_j\in G=Gx_1$ $\Leftarrow$ קיים $1\le\xi\le n$ עבורו $x_j=x_\xi x_1$. מכאן מקבלים כי $x_jx_k=\left(x_\xi x_1\right)x_k=x_\xi\left(x_1x_k\right)=x_\xi x_1=x_j$.

כעל נוכיח קיום הופכי ימני לכל אברי G.

יהי $1\le j\le n$, אז $x_jG=G$ (הכלה אחת נובעת מהסגירות, והשוויון מחוק הצמצום הימני) ומתקיים $x_k\in G=x_jG$, לכן קיים $1\le\xi\le n$ עבורו $x_k=x_jx_\xi$ $\Leftarrow$ x_ξ ההופכי הימני של x_j.

ב) <u>תשובה</u>: לא

<u>דוגמא</u>: קבוצת הטבעיים לגבי חיבור מקיימת את ארבעת הדרישות של התרגיל, אך אינה חבורה.