① 曲线拟合最小二乘法算法

基本思路：根据描点判断为何种曲线，以二次曲线为例。

设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

求拟合函数 $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$

使 $\sum_{i=1}^{m}[\varphi(x_i)-y_i]^2=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x_i)-y_i\right]^2$ 达到最小值。

设基函数 $\varphi_0(x)=1$ $\varphi_1(x)=x$ $\varphi_2(x)=x^2$

则有
$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2)\\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\(\varphi_2,f)\end{pmatrix}$$

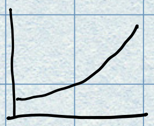
f 为 y 值

其中 $(\varphi_k,\varphi_j)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)$，$m$ 为点个数

解出 a_0,a_1,a_2，回代.

例：

x	1	2	3	4	5
y	4	4.5	6	8	9



画出点有用的.

解：各点变化描述二次曲线.

则令 $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 令 $\varphi_0(x)=1$ $\varphi_1(x)=x$ $\varphi_2(x)=x^2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}5 & 15 & 55\\ 15 & 55 & 225\\ 55 & 225 & 979\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31.5\\108\\429\end{pmatrix} \Rightarrow y(x)=3+0.7071x+0.1071x^2$$

② 超定方程组的最小二乘解

$Ax=b$

(1). 计算 $D=A^TA$. $f=A^Tb$

(2). 求 $Dx=f$.

例：
$$\begin{cases}2x+4y=11\\3x-5y=3\\x+2y=6\\4x+2y=14\end{cases}$$

解：
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & -5\\1 & 2\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\3\\6\\14\end{pmatrix}$$

(1).
$$D=A^TA=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\4 & -5 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & -5\\1 & 2\\4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 3\\3 & 49\end{pmatrix}$$

$$f=A^Tb=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\4 & -5 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\3\\6\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}101\\69\end{pmatrix}$$

(2)
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}30 & 3\\3 & 49\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}101\\69\end{pmatrix}$$

③ 正交多项式

1) $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，称 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上正交.

2) 勒让德多项式.

表达式：$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$

$P_0(x)=1$ $P_1(x)=x$

正交性：
$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n\end{cases}$$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$. $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

递推性：$xP_n(x)=\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)+\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

零点：$P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 内有 n 个不同零点.

④. 最佳平方逼近　　例: 求在区间$[\frac{1}{4},1]$上求$f(x)=\sqrt{x}$的最佳平方逼近函数.

解: 取正交多项式. $p_0(x)=1$. $p_1(x)=x$

则 $\Rightarrow p(x)=a_0p_0(x)+a_1p_1(x)=a_0+a_1x$

$$\begin{pmatrix}(p_0,p_0) & \\ & (p_1,p_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(p_0,f(x))\\(p_1,f(x))\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \\ & \frac{21}{64}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{12}\\\frac{31}{80}\end{pmatrix}$$

$(p_0,p_0)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}1^2dx=\frac{3}{4}$　　$(p_0,f(x))=\int_{\frac{1}{4}}^{1}1\cdot\sqrt{x}\,dx=\frac{7}{12}$

$(p_1,p_1)=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x^2dx=\frac{21}{64}$　　$(p_1,f(x))=\int_{\frac{1}{4}}^{1}x\cdot\sqrt{x}\,dx=\frac{31}{80}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0=\frac{7}{9}\\a_1=\frac{124}{105}\end{cases}\qquad\Rightarrow p(x)=\frac{7}{9}+\frac{124}{105}x$$