一、简答题

1. 请给出随机过程的定义，一般通过什么工具或手段可以确定和研究随机过程？

1.

解：设给定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$和指标集T，若对每个$t\in T$，有定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量$X_t(\omega),\omega\in\Omega$与之对应. 称依赖于$t$的随机变量族$X_t$为**随机过程**(随机函数)，记为$\{X_t(\omega),t\in T\}$，或记为$X_t,t\in T$及$X(t),t\in T$.

根据柯尔莫哥罗夫存在定理，我们可以通过随机过程的有限维分布函数族。

随机过程的均值函数、方差函数、自相关函数等数字特征研究确定一个随机过程。

2. 在你所学过的随机过程中，哪个（些）随机机过程同时具有马尔可夫性，平稳性，均方遍历性？请简要说明理由。

并举例说明遍历过程的均值和自相关函数的估计。

徐

如何理解马氏过程的马氏性？马氏过程的分布有什么特点？

答：马氏性即知道“当前状态”的情况下，过去信息对推断将来的概率分布不起作用。马氏过程的有限维分布函数由转移分布函数与初始分布函数确定.

1、请分别说明平稳随机过程均值的均方遍历性，齐次马尔可夫链的遍历性与状态的遍历性（遍历态）的含义.

解：平稳随机过程均值均方遍历的含义是指：可认为过程的一条样本函数就经历了状态空间的所有状态，故可用时间均值来代替统计均值；3

齐次马尔可夫链为遍历的是指：随着转移步数的无限增大，马氏链转移到状态空间各个状态的概率会逐步稳定于某个极限概率，且此极限概率与初始状态无关；2

遍历态则是指齐次马尔可夫链从该种状态出发，几乎一定会在有限步返回，且每一步均有返回的可能.

定义：正常返 非周期　　2

2．随机过程 $X(t)=X+Yt,-\infty<t<+\infty$，其中 $X\sim B(1,0.4),Y\sim U\left(0,2\pi\right)$，且相互独立，请画出两条样本函数简图，并给出均值函数 $m_X(t)$

3．(张)随机过程 $X(t)=\cos\left(t+A\right),-\infty<t<+\infty$，其中 A 是随机变量，其分布律为 $P\{A=i\}=\frac{1}{3}(i=0,\frac{\pi}{2},\pi)$，求：（1）画出样本函数简图；（2）求均值函数 $m_X(t)$．

2. 随机过程 $X_t=At^2+B,-\infty<t<+\infty$，其中 $A\sim B(1,0.4)$(即 0-1 分布)，$B\sim U(0,2\pi)$（即均匀分布），且 A 与 B 相互独立，请画出该随机过程 X_t 两条样本函数简图，并求均值函数 $m_X(t)$ 和 $R_X(s,t)$

设随机过程 $X(t)=Y\cdot t+c,t\in(0,\infty),c$ 为常数，Y 服从[0,1]区间上的均匀分布。

（1）请画出 $X(t)$的任意三条样本函数；

（2）求 $X(t)$的一维概率密度和一维分布函数；

（3）求 $X(t)$的均值函数、相关函数和协方差函数。

（2）求 $X(t)$ 的一维特征函数

徐

设随机过程 $X(t)=Y\cdot t+c, t\in(0,\infty)$, c 为常数，Y 服从[0,1]区间上的均匀分布。

（1）请画出 $X(t)$ 的任意三条样本函数；

（2）求 $X(t)$ 的一维概率密度和一维分布函数；

（3）求 $X(t)$ 的均值函数、相关函数和协方差函数。

$X(t)=\xi t+W(t)$，其中 $\xi\sim N(0,1)$，$W(t)$ 是参数为 σ^2 的维纳过程且与 ξ 相互独立。

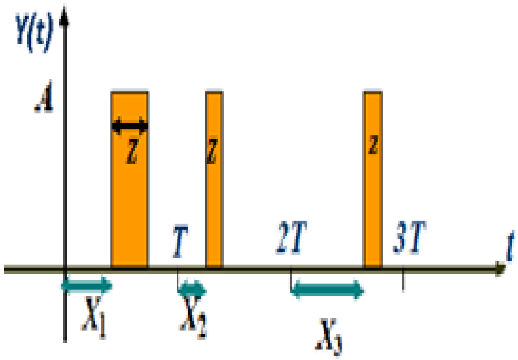
（1）$X(t)$ 是正态过程吗？

（2）$X(t)$ 是平稳独立增量过程吗？

（3）求 $R_X(s,t)$。

（4）求 $X(t)$ 的 n 维分布的协方差矩阵

5. 一通讯系统，每隔 T 秒输出一个脉冲宽度为 $Z\sim U(0,T/3)$，幅度为 A 的脉冲。第 j 次脉冲开始时间为 X_j，j=1, 2, 3 …，X_j 相互独立同分布，$X_1\sim U(0,2T/3)$，X_j 与 Z 相互独立。其中一个样本函数如图，这个通讯系统传输的信号称为脉冲位置调制信号 $Y(t)$。求 $Y(t)$的一维概率分布.



$$P\{Y(t)=A\}=P\{0\le X_1\le t,\ X_1+Z\ge t\}$$

X_1:开始时刻，Z：结束时刻；t:观察时刻.　(X_1,Z)服从二维均匀分布.

$$\begin{cases} X_1+Z\ge t, \\ 0\le X_1\le t \\ 0\le X_1\le \dfrac{2}{3}T \end{cases} \Rightarrow \max(0,t-Z)\le X_1\le \min(t,\frac{2}{3}T)$$

二、(10 分)设 $\{X(n), n=1,2,\cdots,100\}$ 是独立同分布的随机序列，其中 $X(k)$ 的分布律为

$P\{X(k)=1\}=P\{X(k)=-1\}=\dfrac{1}{2}, k=1,2,\cdots,100$，设 $Y(n)=\sum_{k=n}^{100}X(k),\quad n=1,2,\cdots,100$.

(1) 求 $Y(n)$ 的特征函数 $\varphi_n(u)$；(2) 求 $Y(n)$ 的分布律；(3) 计算相关函数 $R_Y(m,n)$.

5.设 $\{X(t), t\in T\}$ 为平稳独立增量过程，其中 $T=[a,b\}$, $P\{X(a)=0\}=1$.已知 $X(t)$ 的分布函数为 $F(x;t)$,试写出 $\{X(t_1),X(t_2),X(t_3)\}$ 的联合分布函数 $F(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3)$.

设某保险公司在 $[0,t]$ 这段时间内接到的索赔次数服从参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t\ge 0\}$，第 k 次

索赔发生时的索赔额为 X_k，有 $X_1,X_2,\cdots$ 相互独立同服从于区间 $[a,b]$ 上的均匀分布($0<a<b$)，且与泊松过程 $\{N(t), t\ge 0\}$ 相互独立。

（1）求该保险公司在 t 时刻之前需要支付的累计索赔的期望值；

（2）由于资金具有时间价值，如果无风险利率为 r，那么在 0 时刻产生的索赔额大小为 x 的资金在 t 时刻的净现值为 xe^{-rt}。求保险公司在 t 时刻之前需要支付的索赔的累计期望净现值。

3、设顾客在$[0,t)$时段内进入百货大楼的人数是一泊松过程，平均每 10 分钟进入 25 人。再设每位顾客购物的概率为 0.2，而每位顾客是否购物相互独立，且与进入大楼的顾客数相互独立。令$Y(t)$表示$[0,t)$内购物的顾客人数。

（1） 试问$\{Y(t),t\geq 0\}$是否为泊松过程，为什么？

（2） 试求第 20 位购物顾客的等待时间不超过 20 分钟的概率；

（3） 试求相邻两购物顾客的购物时间间隔的分布。

4. $\{N(t),t\geq 0\}$为一个零初值且具有独立增量的计数过程，已知其一维分布为泊松分布$N(t)\sim P(\lambda t)$，能否确定过程$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程？如果不能的话还需在此基础上添加一个什么条件？

3. 设在$[0,t)$时段内乘客到达某售票处的数目是强度为$\lambda=3$（人/分）的泊松过程，试求：

(1) 在 4 分钟内有 8 位乘客到达售票处的概率p_1；

(2) 在 4 分钟内有 8 位乘客到达的条件下，前 2 分钟内有 3 个乘客到达的概率p_2；

(3) 相邻两乘客到达售票处的平均时间间隔.

四、(14 分)设 X，Y_1，Y_2，……为相互独立的随机变量序列，其中 X 服从参数为 10 的泊松分布，Y_1，Y_2，……同服从参数为 5 的指数分布. 令

$$X(t)=\sum_{k=1}^{X}\mathrm{I}_{[0,t]}(Y_k),\quad t\in[0,+\infty]$$

其中示性函数定义为

$$\mathrm{I}_{[s,t]}(Y_k)=\begin{cases}1, & s\le Y_k\le t;\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

试计算过程$\{X(t)\}$的均值函数 $E\{X(t)\}$.

三、（10 分）设随机过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数为.

$$C_X(t_1,t_2)=t_1t_2$$

试求过程 $Y(s)=\int_0^s X(t)dt,\ s\in T$ 的协方差函数和方差函数.

四、(10 分)设$[0,t)$时间段内到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程，每位顾客购买商品的概率为 p，且与其他顾客是否购买商品无关，与顾客人数无关。令 $Y(t)$ 表示 $[0,t)$ 内购物的顾客人数。

（1）试确定$\{Y(t),t>0\}$是什么类型的随机过程？（2）试求$\{Y(t),t>0\}$的一维、二维概率分布。

五、（10 分）已知随机过程 $\{X(t), t \in R\}$ 的均值函数 $m_X(t) = 0$，看相关函数为 $R_X(\tau) = \exp(-\tau^2)$，若 $Y(t) = X(t) + \dfrac{dX(t)}{dt}$，求 $m_Y(t)$，$R_Y(\tau)$，

设 X_n(n 为自然数)是相互独立随机变量序列，其分布律为

$$X_n \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}, \quad n = 1,2,\ldots$$

试问该随机变量序列是否依概率收敛？是否均方收敛？说明理由

过程 $X(t)=\cos(\omega t + \Theta), t \in (-\infty, +\infty), \omega$ 是常数，Θ 服从 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。

（1）试求过程的均值函数和相关函数；（2）判断过程是否均方连续，是否均方可微。

四、(15 分)设 $\{Y(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$ 是实正交增量过程，$E[Y(t)]=0$，且 $E\{[Y(t)-Y(s)]^2\}=|t-s|$，$-\infty<s,t<+\infty$， 令 $X(t)=Y(t)-Y(t-1),t\in(-\infty,+\infty)$， 求其自相关函数和对应的谱密度函数。并判断随机过程 $\{Y(t),t\in R\}$ 是否是均值均方遍历的？

(15 分) $X(t)$ 是一个平稳的零均值的正态随机过程，其功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}1, |\omega|\le 5\\ 0, 其他\end{cases},$$

(1) 求 $X(t)$ 的一维概率密度。

(2) 求 $X(t)$ 的二维联合概率密度，当 t_1,t_2 是什么关系时 $X(t_1),X(t_2)$ 相互独立。

六：设 $\{W(t),t\ge 0\}$ 是标准维纳过程，常数 $a>0$，令 $X(t)=W(t+a)-W(t),t\ge 0$，请证明下述结论：

(1) $\{X(t),t\ge 0\}$ 是正态过程；

(2) $\{X(t),t\ge 0\}$ 是宽平稳过程且是严平稳过程；

(3) $\{X(t),t\ge 0\}$ 满足均方连续，均方可微，均方可积；

(4) $\{X(t),t\ge 0\}$ 具有均方遍历性。

三、(10 分) 设 $\{W(t), t\geq 0\}$ 为参数 σ^2 的维纳过程，

（1） 证明 $\{W(t), t\geq 0\}$ 的均方可积性。

（2） 求其均方积分过程 $\{X(t)=\int_0^t W(s)ds, t\geq 0\}$ 的均值函数和方差函数。

（3） 写出 $X(t)$ 的一维概率密度。

3. 试阐述随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 均方连续、均方可导、均方可积的充要条件,这些条件成立的主要理论依据是什么?

平稳过程的？并分别给出例子。

已知随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)=e^{-\tau^2}$，试求 $\{X(t), t\in T\}$ 与其

导数过程的互相关函数 $R_{X\dot{X}}(s,t)$.

五、（15 分）已知随机相位正弦波 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta), t\in R$（$\omega$ 为常数，$A\sim U(1,2)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$），且 A 与 Θ 相互独立。

（1）证明 $X(t)$ 是平稳过程；

（2）讨论 $\{X(t), t\in R\}$ 的均方连续性，均方可积性和均方可导性；

（3）判断 $\{X(t), t\in R\}$ 均值的均方遍历性；

（4）若 $X(t)$ 均方可导，求导数过程 $\{X'(t), t\in R\}$ 的自相关函数及二者的互相关函数。

已知 $R_X(\tau)=\exp(-\tau^2)$，若 $Y(t)=X(t)+\dfrac{dX(t)}{dt}$，求 $R_Y(\tau)$.

设 $\{W(t), t\geq 0\}$ 是 $\sigma^2=1$ 的维纳过程，令 $X(t)=W(t+1)-W(t)$. (1) 证明 $\{X(t), t\geq 0\}$ 是宽平稳过程；(2) 判断过程 $\{X(t), t\geq 0\}$ 的均值是否具有均方遍历性.

设随机过程 $X(t)=\xi\cos(\beta t+\eta), t\in R$，其中 $\xi\sim N(0,1)$, $\eta\sim U(0,2\pi)$, ξ 与 η

相互独立，β 为正常数. 试证：随机过程 $\{X(t), t\in R\}$ 为平稳过程，且具有关于均值的均方遍历性.

若 $\{X(t), t\geq 0\}$ 和 $\{Y(t), t\geq \tau_1\}$ 是联合平稳的平稳过程，求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$；

设齐次马尔科夫链的状态空间为 $E=\{0,1,2\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}，其中 0<p<1$$

（1）试讨论此马氏是否存在平稳分布，存在则求出；（2）讨论该齐次马尔科夫链是否是遍历的，平稳分布是否为极限分布.

设齐次马氏链$\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1)画出状态转移图；(2)讨论各状态性质；(3)分解状态空间.

徐

设齐次马尔科夫链的状态空间为 $E=\{0,1,2\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

是否存在极限分布？若存在则求出，并讨论该极限分布是否为平稳分布.

设马氏链 $\{X(n), n \geq 0\}$ 的状态空间 $E=\{1,2,3\}$，其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

证明此链具有遍历性，并求其平稳分布。（

设齐次马氏链$\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$的状态空间$E=\{0,1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(1) 画出状态转移图;　(2)讨论各状态性质;　(3)分解状态空间.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

求 $P\{X_0=1, X_1=1, X_2=2\}$;

求 $P\{X_2=i\}, i=0,1,2.$