§2.5　一般有限制的排列

§2.3节中的错排问题是一种有限制的排列，即i不排在第i位的排列。更一般地若i不排在某些位的1，2，…,n的全排列，其排列个数又如何计算呢?此类问题的解法之一是利用所谓“棋子多项式”。

设n是一个正整数，一个n×n棋盘是指一个正方形被均分为n×n个小方格所成的“图形”。一个n×n棋盘去掉某些格后剩下部分也称它为一个棋盘。在给定棋盘C中放入k个无区别的棋子，要求每个棋子只能放一格，且各子不同行不同列，记不同的放法数为$r_k(C)$，问$r_k(C)$=?此问题称为**棋子问题**。

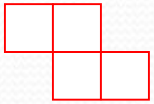
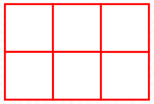
定义2.1 给定棋盘C，令$r_0(C)=1$,n为C的格子数，称

♡♡$R(C)= \sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k$

为棋盘C的棋子多项式。

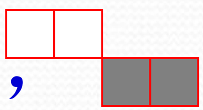
定理2.6 给定棋盘C，指定C中某格A。令C_i为C中删去A所在行与列所剩的棋盘，Ce为C中删去格A所剩的棋盘，则

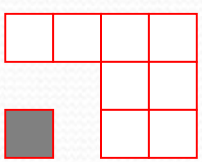
♡ $R(C)=xR(C_i)+R(C_e)$ (2.11)

［例2］ 计算R()与R()。

■

定义2.2 设C_1和C_2是两个棋盘，若C_1的所有格都不与C_2的所有格同行同列，则称两个棋盘是**独立**的。

例如， 中无阴影的棋盘与有阴影的棋盘是独立的。

 中无阴影的棋盘与有阴影的棋盘不独立

定理2.7

若棋盘C可分解为两个独立的棋盘C_1和C_2，则

♡♡$R(C)=R(C_1)R(C_2)$ (2.12)

考虑集合｛1,2,…,n｝的一个全排列且满足i(i=1,2,…,n)不排在某些已知位，求不同的排列方式数。此问题称为n元有禁位的排列问题，可通过棋子多项式求解。首先建立一个n×n棋盘C，再对每一个元i，若i不排在第j位，则将C中第i行第j列的小格画上阴影。对i的所有禁位都做如此处理。处理完毕后，称C中阴影部分为禁区棋盘。最后求出禁区棋盘的棋子多项式，再将相应数据代入下面定理2.7中的公式，即可求得排列数。

定理2.8

n元有禁位的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^n r_n$$

其中r_i为将i个棋子放入禁区棋盘的方式数，$i=1,2,\ldots,n$。

[例4]

四位小朋友x_1,x_2,x_3,x_4排成一行，但x_1不愿排在第二位；x_2不愿排在第三、四位；x_3不愿排在第一位；x_4不愿排在第二、三位，求不同的排法数。

[例5]

试解错排问题。

[例6] 四对夫妇前来参加宴会，围圆桌而坐，男女相间，夫妇不相邻，问有多少种入座方式数?

作业

- 1， 2， 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 21