0. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 为零均值 4 维正态随机变量，证明

（1） $E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$;

（2） $E(X_1^2X_2^2)=E(X_1^2)E(X_2^2)+2[E(X_1X_2)]^2$.

1. 二项分布 $X\sim B(n,p)$，$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$，特征函数为 $\varphi(u)=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{j}u})^n,u\in\mathbf{R}$.

2. 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$，则特征函数为 $\varphi(u)=\mathrm{e}^{\lambda(e^{ju-1})},t\in\mathbf{R}$.

3. **均匀分布** $X\sim U[-a,a]$，$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，特征函数为$\varphi(u)=\frac{\sin a u}{au}$.

4. **指数分布**$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\lambda>0$，特征函数为$\varphi(u)=\left(1-\frac{\mathrm{j}u}{\lambda}\right)^{-1},u\in\mathbf{R}$.

5. 正态分布 $X\sim N(0,1)$，则其特征函数为$\varphi(u)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2},u\in\mathbf{R}$.

若 $X\sim N(a,\sigma^2)$，则特征函数为$\varphi(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}au-\frac{1}{2}\sigma^2u^2},u\in\mathbf{R}$.

正交增量过程

6. (平稳过程的谱分解) 设 $\{X_t,t\in T\}$ 是一个复值二阶矩过程，若对任意的 $t_1,t_2,t_3,t_4\in T$，且 $t_1<t_2<t_3<t_4$，有 $E\left[\left(X_{t_2}-X_{t_1}\right)\left(\overline{X_{t_4}-X_{t_3}}\right)\right]=0$，称过程 $\{X_t,t\in T\}$ 是**正交增量过程**.

7. 设 $\{X_t,t\in[0,+\infty)\}$ 是**平稳独立增量过程**，且 $X_0=0$（或 $P\{X_0=0\}=1$），则

(1) 均值函数 $m(t)=mt(m=m(1)$ 为常数 $)$;

(2) 方差函数 $D(t)=\sigma^2t(\sigma^2=D(1)$ 为常数$)$;

(3) 协方差函数 $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t),s,t\in T$.

8. 若记 $\boldsymbol{\mu}=E\binom{X}{Y}=\binom{\mu_1}{\mu_2},\boldsymbol{X}=\binom{x}{y}$，$f(x,y)$ 的矩阵表示式为

$f(x,y)=\frac{1}{2\pi(\det\boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}$

记为 $(X,Y)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$.

9. n 维正态分布随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的**特征函数**为 $\varphi(t)=\exp\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{t}\right\}$.

10. 若 n 维正态随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 服从 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{m\times n}$ 是任意矩阵，则线性变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}$ 服从 m 维正态分布 $N(\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})$.

11. 设 $\{X_t,t\geqslant 0\}$ 是**正态过程**，记 $X_t=X(t),t\geqslant 0$, 以下过 程仍为正态过程.

（1） 对任意 $\tau\geqslant 0,\{X(t+\tau)-X(\tau),t\geqslant 0\}$;

（2） 对常数 $\lambda>0,\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}X(\lambda t),t\geqslant 0\right\}$;

（3） $Y(t)=\begin{cases}tX\left(\frac{1}{t}\right), & t>0,\\ 0, & t=0;\end{cases}$

（4） 当 $t_0>0,Z(s)=\begin{cases}X(t_0+s)-X(s), & s>0,\\ 0, & s=0.\end{cases}$

12. 若随机过程 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 满足

（1） 是独立增量过程;

（2） 对任意 $s,t\geqslant 0,W_t-W_s\sim N(0,\sigma^2|t-s|)(\sigma>0)$;

（3） $P\{W_0=0\}=1$.

则称 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是参数为 σ^2 的**维纳过程**，特别当 $\sigma=1$ 时，称 $\{W_t,t\geqslant 0\}$是标准维纳过程.

当 $t>0$ 时有：$W_t=W_t-W_0\sim N(0,\sigma^2t)(\sigma>0)$,

维纳过程的均值函数与方差函数分别为

$$E(W_t)=0,\qquad D(W_t)=E(W_t^2)=\sigma^2t,t\geqslant 0.$$

协方差函数为 $\mathrm{R}(\mathrm{s},\mathrm{t})=\mathrm{C}(\mathrm{s},\mathrm{t})=\sigma^2\min(\mathrm{s},\mathrm{t}),s,t\geqslant 0$

13. 维纳过程是正态过程.

14. 设 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是正态过程，若 $W_0=0$，对任意 $s,t>0$，有$E(W_t)=0,E(W_sW_t)=C^2\min(s,t),C>0$，且轨道连续，则 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是**维纳过程**，反之亦然. 轨道连续是指随机过程的样本函数是连续函数.

15. 设 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是参数为 σ^2的**维纳过程**，记 $W_t=W(t),t\geqslant 0$，则

（1） 对任意 $\tau\geqslant 0,\{W(t+\tau)-W(\tau),t\geqslant 0\}$;

（2） 对常数 $\lambda>0,\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}W(\lambda t),t\geqslant 0\right\}$;

（3） $\left\{tW\left(\frac{1}{t}\right),t\geqslant 0\right\}$，其中 $tW\left(\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=0}\doteq 0$;

仍为维纳过程.

16. 计数过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的**齐次泊松过程**，当且 仅当满足下列条件：

（1） $N(0)=0$;

（2） 具有独立增量;

（3） 对任意 $0\leqslant s<t$，随机变量 $N(t)-N(s)$ 服从参数为 $\lambda(t-s)$ 的泊松分布：

$$P\{N(t)-N(s)=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)},k=0,1,2,\cdots.$$

补充：$\mathrm{m(t)=EN(t)=\lambda t,D(t)=\lambda t}$

相关函数：$R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2st$.

协方差函数：$C(s,t)=\lambda\min(s,t),s,t\in T$.

条件概率公式：

a. $0<k\leqslant n,0<s<\tau$

$$\begin{aligned}P\{N(s)=k\mid N(\tau)=n\}&=\frac{P\{N(s)=k,N(\tau)=n\}}{P\{N(\tau)=n\}}\\&=\frac{P\{N(s)=k,N(\tau)-N(s)=n-k\}}{P\{N(\tau)=n\}}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda(\tau-s)}\frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!}n!\,\mathrm{e}^{\lambda\tau}(\lambda\tau)^{-n}\\&=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}\\&=\mathrm{C}_n^k\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

b. $P\{N_2(t)=k\mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\mathrm{C}_n^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$;

c. $\mathrm{E}\{N_2(t)=k\mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{n\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

相关分布：$\mathrm{T_n}:F_n(t)=P\{T_n\leqslant t\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t},t\geqslant 0$（指数分布）

$W_n:F_{W_n}(t)=P\{W_n\leqslant t\}=P\{N(t)\geqslant n\}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$,

泊松分布的分解 参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$，全体事件可分为 r 类，第 i 类事件发生的概率为 $0<p_i<1,i=1,2,\cdots,r,\sum_{i=1}^r p_i=1$. 则 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 可分解为 r 个相互独立的泊松过程之和，各泊松过程的参数分别为 $\lambda p_i,i=1,2,\cdots,r$.

17. 设 $\left\{X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)}Y_n,t\geqslant 0\right\}$ 是一个**复合泊松过程**，泊松过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的强度为 λ，则 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 满足：

（1） 是独立增量过程;

（2） 一维特征函数为 $\varphi_X(u;t)=\mathrm{e}^{\lambda t[\varphi_{Y_1}(u)-1]}$;

（3） $E[X(t)]=\lambda tE(Y_1)=E[N(t)]E(Y_1)$,

（4） $D[X(t)]=\lambda tE(Y_1^2)=E[N(t)]E(Y_1^2)$.

补充：$\mathrm{l.i.m}_{n\to\infty}X_n=X$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}=0$.

均方连续性 二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R(s,t)$ 在对角线上连续. 如：泊松过程、维纳过程

均方连续过程的**样本函数可能不连续**：泊松过程。

18. **洛易夫准则** 设随机变量序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 对 $n\geqslant 1$ 均有 $X_n\in H$，则其均方收敛的充分必要条件是极限 $\lim\limits_{m,n\to\infty}E(X_m\bar{X}_n)$存在.

补充：称极限$\lim\limits_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta t\to 0}}\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta t\Delta s}$为二元函数 $f(s,t)$ 在 (s,t) 处的广义二阶导数，极限存在则**广义二阶可微**,

均方可微准则 实二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在 $t_0\in T$ 处均方可微的充要条件是其相关函数 $R(s,t)$ 在 (t_0,t_0) 上广义二阶可微.

若$\mathrm{R(s,t)}$在对角线上广义二阶可微，则 $R'_{\ s}(s,t),R'_t(s,t),R''_{st}(s,t),R''_{st}(s,t)$ 均在 $T\times T$ 上存在.

19. 设二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$ **均方可导**，其均值函数为 $m(t)$，自相关函数为 $R(s,t)$，则有

（1） 导数过程 $\{X'(t),t\in T\}$ 的**均值函数**为

$$m_{X'}(t)=E[X'(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[X(t)]=m'(t);$$

（2） 导数过程 $\{X'(t),t\in T\}$ 的**自相关函数**为

$$R_{X'}(s,t)=E\left[X'(s)\overline{X'(t)}\right]=R''_{st}(s,t)=R''_{ts}(s,t);$$

（3） 过程 $\{X(t),t\in T\}$ 与导数过程 $\{X'(t),t\in T\}$ 的**互相关函数**为

$$R_{X'X}(s,t)=E\left[X'(s)\overline{X(t)}\right]=\frac{\partial}{\partial s}R(s,t)=R'_s(s,t),$$

$$R_{XX'}(s,t)=E\left[X(s)\overline{X'(t)}\right]=\frac{\partial}{\partial t}R(s,t)=R'_t(s,t).$$

20. 若 $f(t)X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积，则有

（1） $E\left[\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t\right]=\int_a^b f(t)m_X(t)\mathrm{d}t$，其中 $m_X(t)=E[X(t)]$;

（2） $E\left[\left|\int_a^b f(t)X(t)\mathrm{d}t\right|^2\right]=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t$.

补充：若随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ **上均方连续**，则有

（1） $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积;

（2） $\left\|\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|X(t)\|\,\mathrm{d}t$.

若随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上**均方连续**，则其均方不定积分$\{Y(t),t\in[a,b]\}$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，均方可导，且 $Y'(t)=X(t),t\in(a,b)$.

（1） $E[Y(t)]=\int_a^t E[X(s)]\mathrm{d}s$;

（2） $R_Y(s,t)=\int_a^s\int_a^t R_X(u,v)\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$.

重要积分 $\int_0^t\int_0^s min\{u,v\}dudv=\begin{cases}\frac{s^2}{6}(3t-s), & 0\leqslant s\leqslant t\\ \frac{t^2}{6}(3s-t), & 0\leqslant t\leqslant s\end{cases}$

重要积分： $\int_t^{t+L}\int_s^{s+L}min\{u,v\}dudv=\begin{cases}\frac{1}{2}L^2(2t+L), & s\geqslant t+L\\ \frac{L^2}{2}(2t+L)+\frac{L^2}{6L^2}(t+L-s)^3, & t\leqslant s\leqslant t+L\\ \frac{L^2}{2}(2s+L)+\frac{L^2}{6L^2}(s+L-t)^3, & s\leqslant t\leqslant s+L\\ \frac{L^2}{2}(L+2s), & t\geqslant s+L\end{cases}$

补充：定义 如果随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是二阶矩过程，即 $E[X^2(t)]<+\infty$，且满足

（1） 对任意 $t \in T$，均值函数为常数 $E[X(t)] = m$；
（2） 对任意 $s,t \in T$，自相关函数 $R(s,t) = E[X(s)X(t)] = R(t-s)$． 则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为宽平稳过程（或称为弱平稳过程或广义平稳过程）.

严平稳过程：是宽平稳$\boxed{\leftrightarrow}$二阶矩存在。

正态过程：严平稳 $\boxed{\leftrightarrow}$宽平稳

重要三角函数公式：

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

实平稳过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的**自相关函数**满足:

(1) $R_X(0) \geqslant 0$;
(2) $|R_X(\tau)| \leqslant R_X(0)$，亦即 $|C_X(\tau)| \leqslant C_X(0)$;
(3) $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$，即 $R_X(\tau)$ 是偶函数。

均方连续性 实平稳过程 $\{X(t), t \in T\}$ 均方连续的充要条件是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续，且此时 $R_X(\tau)$ 处处连续.

若 $\{X(t), t \in T\}$ 是**均方连续的实平稳过程**，则有

(1) $E\left[\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right] = m_X(b-a)$;

(2) $E\left[\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right]^2 = \int_a^b\int_a^b R(t-s)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{b-a}[(b-a)-|\tau|]R(\tau)\mathrm{d}\tau$.

21.（**均方可导性**）设 $X_T = \{X(t), t \in T\}$ 是**平稳过程**，有如下结论成立:

(1) X_T 均方可微的充要条件是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处二次可微，此时 $R''(\tau)$ 处处存在;
(2) 若 X_T 是均方可微的平稳过程，则其均方导数过程$\{X'(t), t \in T\}$ 仍为平稳过程，其均值函数为 $\boldsymbol{m_{X'}(t) = 0}$；自相关函数为 $\boldsymbol{R_{X'}(\tau) = -R''_X(\tau)}$；$\{X(t), t \in T\}$ 与 $\{X'(t), t \in T\}$ 的互相关函数为

$$\boldsymbol{R_{XX'}(\tau) = R'_X(\tau), R_{X'X}(\tau) = -R'_X(\tau)}.$$

22. 设 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是实平稳过程，则 $X(t)$ 的均值具有**均方遍历性的充要条件**是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)\mathrm{d}\tau = 0,$$

或者

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_X(\tau)-m_X^2)\mathrm{d}\tau = 0$$

23. 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|C_X(\tau)|\mathrm{d}\tau < \infty$，则实平稳随机过程 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 的均值具有**均方遍历性**.

24. 若实平稳过程 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 的相关函数满足$\lim\limits_{\tau\to\infty}R_X(\tau) = m_X^2$，则该过程的均值具有**均方遍历性**.

25（**维纳 − 辛钦**）设有平稳过程 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 是均方连续．若其自相关函数 $R(\tau)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R(\tau)|\mathrm{d}\tau < +\infty$，则此平稳过程的谱密度 $S(\omega)$ 满足

$$\begin{cases} S(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ R(\tau) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \end{cases}$$

26. 若 $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ 为实平稳过程，则

$$\begin{cases} S(\omega) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau, \\ R_X(\tau) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau. \end{cases}$$

补充：**性质**对于任意连续函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x = f(0), \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

补充：**独立过程、零初值的独立增量过程**是马氏过程。

平稳独立增量过程是齐次马氏链。

定义 随机变量序列 $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间为 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，若对任意非负整数 m，以及 $i_0, i_1, \cdots, i_m, i_{m+1} \in E$，有

$$P\{X_{m+1} = i_{m+1} \mid X_m = i_m, X_{m-1} = i_{m-1}, \cdots, X_0 = i_0\} = P\{X_{m+1} = i_{m+1} \mid X_m = i_m\}$$

成立，则$\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是离散参数马氏链。

齐次马氏链（转移概率与起始点 m 无关） $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ 的**转移概率** $p_{ij}^{(k)}$ 满足 CK 方程：$p_{ij}^{(k+l)} = \sum_{r\in E} p_{ir}^{(k)}p_{rj}^{(l)}$。

遍历性定理：$\boldsymbol{\Pi = \Pi P, \Pi 1 = 1, \Pi > 0}$（即向量 $\boldsymbol{\Pi}$ 的每个分量均为正数）. 即有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi P} &= (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^s \pi_i p_{i1}, \sum_{i=1}^s \pi_i p_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^s \pi_i p_{is}\right) = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s) = \boldsymbol{\Pi}. \end{aligned}$$

设 $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ 为齐次马氏链，若存在 $\{v_j, j \in E\}$ 满足条件:

(1) $v_j \geqslant 0, j \in E$;
(2) $\sum_{j\in E} v_j = 1$;
(3) $v_j = \sum_{i\in E} v_i p_{ij}$.

则称此马氏链是平稳的，且称 $\{v_j, j \in E\}$ 为此马氏链的**平稳分布**.
(1)，(2)，(3) 式等价于向量形式：$\boldsymbol{V \geqslant 0, V1 = 1, V = VP}$.

补充：**定义**若 $f_{ii} = 1$，称状态 i 是**常返状态**；若 $f_{ii} < 1$，称状态 i 是**非常返状态**（瞬时状态）．若马氏链的全体状态都是常返态，则其为常返马氏链.

27.（**常返状态判别准则**）状态 i 常返的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = \infty$.

28. 设 i 是常返状态，则 i 是**零常返**的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

29. 设 E 为齐次马氏链的**状态空间**，$i \in E$，则

(1) i 是非常返状态 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} < +\infty$（此时 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$）;

(2) i 是零常返状态 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = +\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;
(3) i 是正常返状态 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = +\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} \neq 0$.

30. **平均首达时间与平均返回时间**的计算式分别为

$$\mu_{ij} = E(T_{ij}) = \sum_{n=1}^\infty n f_{ij}^{(n)}, \mu_i = \mu_{ii} = E(T_{ii}) = \sum_{n=1}^\infty n f_{ii}^{(n)}.$$

31. **周期**：$d = \text{g. c. d}\{n: f_{ii}^{(n)} > 0\}$

32. i 为**遍历状态** $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty p_{ii}^{(n)} = +\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i}$.

33. 设 N 是非常返态集，$i \in N, j$ 是常返态，则**最终概率** f_{ij} 满足 以下方程

$$f_{ij} = \sum_{k\in N} p_{ik}f_{kj} + \sum_{k\in H} p_{ik}, i \in N,$$

其中 $H = \{k \mid k \leftrightarrow j, k \in E\}$.

补充：如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称状态 i 和 j 互通（相通），记为 $i \leftrightarrow j$.

分解定理 齐次马氏链的状态空间 E 可唯一地分解为

$$E = N + C_1 + C_2 + \cdots + C_k + \cdots,$$

其中 N 是全体非常返状态的集合，$C_1, C_2, \cdots, C_k, \cdots$ 是互不相交的不可约常返闭集.

若一个马氏链的状态空间是有限集合时，称其为**有限马氏链**．有限马氏链有如下性质:
(1) 所有非常返状态所组成的集合不可能是闭集;
(2) 没有零常返状态;
(3) 必有正常返状态;
(4) 状态空间可分解为

$$E = N + C_1 + C_2 + \cdots + C_k,$$

其中，N 为非常返状态集，C_1，C_2，$\cdots, C_k$ 为互不相交的不可约正常返闭集.

34.（**柯西 − 施瓦茨不等式**）若随机变量 X, Y 的有关数字特征存 在，则

$$\{E[|X \cdot Y|]\}^2 \leqslant E(X^2) \cdot E(Y^2).$$

当且仅当 $P\{Y = aX\} = 1$ 时等式成立.