

§ 2.3 错排问题

考虑如下问题：在一次宴会中，有 n 个人把他们的帽子放在衣帽间内。问有多少种方法交还他们的帽子，使得没有一个人得到他们自己原来的帽子。

定理3.2 当 $n \geq 1$ 时, 有

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

定理3.3 $D_n = (n-1) (D_{n-1} + D_{n-2})$ (3.8)

例 1 求 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全排列中，正好只有 r ($0 \leq r \leq n$) 个元素在原来位置上的排列个数。

例2

设有 n 册书分给 n 个学生，之后又将这 n 册书收回重新分给这 n 个学生。问有多少方式分配这 n 册书使得没有一个学生两次得到同一册书？