§3.4 整数的拆分与 Ferrers 图

作为母函数应用的一个实例，下面讨论把n个无区别的球放在一些无区别的盒子中的问题.

把n个无区别的球分放在一些无区别的盒子中，究竟有多少种不同的放法?

无区别的盒子意味着，如果有四个相同的球，则在第一个盒子中放入三个球，

第二个盒子中放入一个球与第一个盒子中放入一个球，第二个盒子中放入三个球的放法是一样的。

一个整数的拆分是把整数分拆为若干个正整数部分。而这些部分的次序是无关紧要的。

如5=3+2和5=2+3被认为是同样的拆分法。显然整数n的一个拆分等价于把n个无区别的球分放在一些无区别的盒子中的一种方法。

正整数n的拆分种数记作P(n)。

例如，对于正整数n =1,2,3,4的拆分是

n=1:　1=1　　∴P(1)=1

n=2:　2=2, 2=1+1　　∴P(2)=2

n=3:　3=3, 3=2+1,3=1+1+1　　∴P(3)=3

n=4:　4=4, 4=3+1,4=2+2,

4=2+1+1, 4=1+1+1+1　　∴P(4)=5

首先考虑恒等式

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$1+x^3+x^6+x^9+\cdots=\frac{1}{1-x^3}$$

于是有

$$\frac{1}{(1-x)(1-x)^2(1-x^3)}=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$$

$$=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots$$

在上式中可以看出x^n的系数等于n拆分为1，2，3的和的方法数。例如x^3的系数是3，这表示整数3拆分成1，2，3的和的方法数是3，即

$3=3$，$3=2+1$，$3=1+1+1$

又例如x^4的系数是4，它表明有4种方法将4拆分为1，2，3的和。即

$4=3+1$，$4=2+2$，$4=2+1+1$，$4=1+1+1+1$

这与上面的例子是吻合的。由此我们可以分析如下：

在因子$(1+x+x^2+x^3+...)$中的$1,x,x^2,x^3,...,$分别表示数字1没有被选，选一个1，选二个1，选三个1，……。

同样的，因子$(1+x^2+x^4+x^6+...)$则表示2没有被选，或选一个2，或选二个2，或选三个2，……。因子$(1+x^3+x^6+x^9+...)$则表示3没有被选，或选一个3，或选二个3，或选三个3，……。这样，上面三个因子的乘积的x^n的系数就是n拆分为1，2，3的和的方法数。

又如x^6的系数是7，它表示6拆分为1，2，3的和的方法有7种，见*表4-1*。

由此可见，函数$1/(1-x)(1-x^2)1-x^3)$的级数展开式中，x^n的系数就等于把n拆分为1，2，3的和的方法数$P(n)$。

注：表4－1见书69页。

一般地，有下面的定理。

定理3.2

设a,b,c,...是大于0的正整数，则

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$$

的级数展开式中的x^n的系数等于把正整数n拆分成a,b,c,...的和的方法数P(n)。

证明：如前所述，只需注意

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}=(1+x^a+x^{2a}+\cdots)$$

$$(1+x^b+x^{2b}+\cdots)(1+x^c+x^{2c}+\cdots)$$

如果项x^n是由x^{3a}，x^b,x^{2c} ,...的乘积所组成，则

$$n=a+a+a+b+c+c+\cdots$$

于是每当n可以拆分为a,b,c的和时，x^n就会出现。这就证明了定理的结论。

定义3.7

1.用$P_k(n)$表示n拆分成1,2,…，k的允许重复的方法数。

2.用$P_o(n)$表示n拆分成奇整数的方法数。

3.用$P_d(n)$表示n拆分成不同的整数的方法数。

3.用$P_t(n)$表示n拆分成2的不同幂(即1，2，4，8，…)的方法数。

由上面的讨论和定理3.2即可得

推论1 $\{P_3(n)\}$ 的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

推论2 $\{P_k(n)\}$ 的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

推论3 $\{P(n)\}$ 的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

在定理3.2中，令a,b,c,...是奇整数，我们又有

推论4 {$P_0(n)$} 的普通母函数是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$$

定理3.3 设a,b,c,...都是大于0的正整数，则

$$(1+x^a)(1+x^b)(1-x^c)\cdots$$

的级数展开式中x^n项的系数就是把n拆分成a,b,c,...的和，且a,b,c,...最多只出现一次的方法数。

由定理3.3即可得

推论1 {$P_d(n)$} 的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

推论2 {$P_i(n)$} 的普通母函数是

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$$

定理3.4(Euler)对于正整数n都有

$$p_0(n)=p_d(n)$$

证明：

$$\because 1+x=\frac{1-x^2}{1-x},1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1+x^3=\frac{1-x^6}{1-x^3},1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4},$$

$$\therefore (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots$$

上式的左端正好是$P_d(n)$的普通母函数(由定理3.3的推论1)，而上式的右端，可将分子分母的所有偶次幂约去就得到

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$$

这正好是$P_0(n)$的普通母函数(由推论4)。

$$\therefore P_o(n)=P_d(n)$$

以上我们证明了把n拆分成奇整数的和的方式数等于把n拆分成不相同的整数的和的方式数。

- 下面我们验证当n=7的情况。

7=7	7=7
7=5+1+1	7=6+1
7=3+3+1	7=5+2
7=3+1+1+1+1	7=4+3
7=1+1+1+1+1+1+1	7=4+2+1

∴$P_o(7)=5$　　$P_d(7)=5$

于是$P_o(7)=P_d(7)$。

定理3.5(Sylvester)

对正整数n，有 $P_t(n)=1$

证明：我们知道，任何正整数都可唯一地用一个二进制数来表示，而一个二进制数又可唯一地表成2的幂的和。由此即得结论。

- 如正整数39可以表成

$$39=100111=2^0+2^1+2^2+2^5$$

下面用另一种方法来证明定理3.5。

我们知道，序列(1，1，…，1)的普通母函数是

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

又

$$\because 1+x=\frac{1-x^2}{1-x},1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2}$$

$$1+x^4=\frac{1-x^8}{1-x^4},1+x^8=\frac{1-x^{16}}{1-x^8},\cdots\cdots$$

$$\therefore (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}$$

而上式右端是$P_t(n)$的普通母函数(由定理3.3的推论2)

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$$

$$\therefore p_t(n) = 1$$

定理证毕。

例1

证明恒等式

$$\frac{1}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{90})(1+x^{100}+x^{200}+\cdots+x^{900})\cdots(1+x^{10^k}+x^{2\cdot 10^k}+\cdots+x^{9\cdot 10^k})\cdots$$

并用整数拆分的说法，这个恒等式的组合意义是什么?

证明：

$$\text{左端}=\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{1-x^{10}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{100}}{1-x^{10}}\cdot\frac{1-x^{1000}}{1-x^{100}}\bullet\cdots\bullet\frac{1-x^{10^{k+1}}}{1-x^{10^k}}\cdots$$

$$=(1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x^{10^k}+x^{2\cdot10^k}+\cdots+x^{9\cdot10^k})$$

$$\bullet(1+x^{100}+x^{200}+\cdots+x^{900})\bullet\cdots$$

$$\bullet(1+x^{10^k}+x^{2\cdot10^k}+\cdots+x^{9\cdot10^k})\cdots$$

$$=\text{右端}$$

而 $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

因此，这个恒等式表明，任何正整数都可唯一地拆分成形式为

$$k\cdot 10^n, k=1,2,\cdots; n=0,1,2,\cdots$$

的不同部分。**换句话说，任何整数的十进制表示是唯一的。**

例如，对于整数349有唯一的拆分：

$$349=9\cdot 10^0+4\cdot 10^1+3\cdot 10^2$$

通常，对于大的n，要求出将n拆分成某些整数的和的方式数P(n)是很困难的，但在有些问题中并不需要P(n)的精确值，只需P(n)的估计式就够了。

下面的定理就给出了P(n)的估计式。

定理3.6对于任何正整数n,有

$$p(n) < e^{3\sqrt{n}}$$

证明：由推论3知｛P(n)｝的普通母函数为

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

将上式两边取对数得

$$\log f(x) = -\log(1-x) - \log(1-x^2) - \log(1-x^3) - \cdots$$

由对数的泰勒展开式知

$$-\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots$$

于是有

$$\log f(x) = (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots) + (x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \cdots) + (x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \cdots) + \cdots$$

$$= (x + x^2 + x^3 + \cdots) + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} \cdots) + (\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^9}{3} \cdots) + \cdots$$

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2}(\frac{x}{1-x}) + \frac{1}{3}(\frac{x^3}{1-x^3}) + \cdots$$

对于 $\frac{x^n}{1-x^n}$，设 $x \in (0,1)$，则有

$$x^{n-1} < x^{n-2} < \cdots < x^2 < x < 1$$

故有

$$x^{n-1} < \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}}{n}$$

即

$$\frac{x^{n-1}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}} < \frac{1}{n}$$

而 $$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$

故有 $$\frac{x^n}{1-x^n}<\frac{1}{n}\frac{x}{1-x}$$

将上面的不等式代入（A）式有

$$\log f(x)<\frac{x}{1-x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{x}{1-x}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{x}{1-x}+\cdots$$

$$=\frac{x}{1-x}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

由于$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=2$

故有$\log f(x)<\frac{2x}{1-x}$

而$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n>p(n)x^n$

故有$\log p(n)<\log f(x)-n\log x<\frac{2x}{1-x}-n\log x$

而对于x>1时，有 $\log x<x-1$

- 于是有

$$-\log x = \log\frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

- 将以上结果代入（B）式得

$$\log p(n) < 2\left(\frac{x}{1-x}\right) + n\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

- 在上式中，令 $x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$，则有

$$\log p(n) < 3\sqrt{n}$$

- 所以有 $p(n) < e^{3\sqrt{n}}$
- 证毕。

这个定理的估计式还可以进一步加以改进。现在，已经有人证明了近似式：

$$p(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}$$

下面，我们讨论与整数拆分有着密切关系的 Ferrers 图。

设n的一个拆分为

$$n=a_1+a_2+\ldots+a_k$$

并假设$\mathbf{a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_k \geq 1}$。

下面画一个图,这个图由一行行的点所组成。

在第一行有a_1个点,

第二行有a_2个点,

......,

第k行有a_k个点，称这图为 Ferrers图。

整数的拆分可以用一个Ferrers图来表示,

例如16=6+5+3+1+1的Ferrers

图如图4-1

当给定Ferrers图后，可以将它的行与列对换，这就得到另一个图。

显然，这个图也是一个Ferrers图。也就是说，一个Ferrers图的行与列对换所得的图仍是一个Ferrers图。

如图4-1作行与列的对换就得到图4-2。称图4-2为图4 1的共轭图。这个图表示整数16的另一个拆分：

$$16=5+3+3+2+2+1$$

由此可见，n的一个拆分对应唯一的一个Ferrers图，反过来，一个Ferrers图又对应 一个 n的唯一拆分。

所以n的一个拆分同它的Ferrers图之间是一一对应的。

定理3.7正整数n拆分成m项的和的方式数等于n拆分成最大数为m的方式数

证明：只须考虑Ferrers图和它的共轭图之间的关系，本定理结论即可得证。

例如，对n=24,如图4-3(书**75**页)

定理3.8 正整数n拆分成最多不超过m个项的和的方式数等于n拆分成最大的数不超过m的方式数。

证明：留作练习。