1.1 随机过程定义

定义1.1.1 设给定概率空间(Ω, F, P)和指标集T, 若对每个$t\in T$, 有定义在(Ω, F, P)上的随机变量$X_t(\omega), \omega\in\Omega$与之对应. 称依赖于$t$的随机变量族为随机过程(随机函数).

记为 $\{X(t,\omega), t\in T\}$, $\{X_t(\omega), t\in T\}$

$\{X_t, t\in T\}$, $\{X(t), t\in T\}$.

注 指标集T又称参数集或参数空间.

当$T=(1,2,\ldots,\ n)$,

$$\{X(t,\omega),t\in T\}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

随机向量

当$T=(1,2,\ldots,n,\ldots)$,

$$\{X(t,\omega),t\in T\}=(X_1,X_2,\cdots)$$

时间序列

当$T=\{(x,y):a<x<b,\ c<y<d\}$,

$$\{X(t,\omega),t\in T\}$$

平面随机场，或
多维指标集随机过程

随机过程是n维随机变量，随机变量序列的一般化, 是随机变量$X(t)$, $t\in T$的集合.

随机过程$\{X_t, t \in T\}$可视为质点M随时间推移所作的随机运动变化过程.

随机事件$\{X_t = x\}$表示随机过程在时刻t时处于状态x.

称集合

$$E = \{x : X_t(\omega) = x, t \in T\}$$

为随机过程的状态空间.

Ex.7 质点布朗运动 设质点在直线上随机游动, 经随机碰撞后各以1/2的概率向左或向右移动.

若经无穷多次碰撞

记 $\{\omega_1^{(t)}\}=\{$第t次向左$\}$,

$\{\omega_2^{(t)}\}=\{$第t次向右$\}$,

定义随机变量序列

$$X_t(\omega)=\begin{cases}-1, & \omega=\omega_1^{(t)};\\ 1, & \omega=\omega_2^{(t)}.\end{cases}\quad (t=1,2,\cdots)$$

则 $\{X_t(\omega): t=1,2,\cdots\}$ 描述了直线上随机质点的运动.

其参数集 $T=\{1,2,\ldots\}$，状态空间 $E=\{-1, 1\}$.

随机过程的理解

定义指标集和样本空间的积集

$$T\times\Omega=\{(t,\omega): t\in T, \omega\in\Omega\}$$

随机过程 $\{X_t(\omega), t\in T\}$ 是定义在积集 $T\times\Omega$ 上的二元函数:

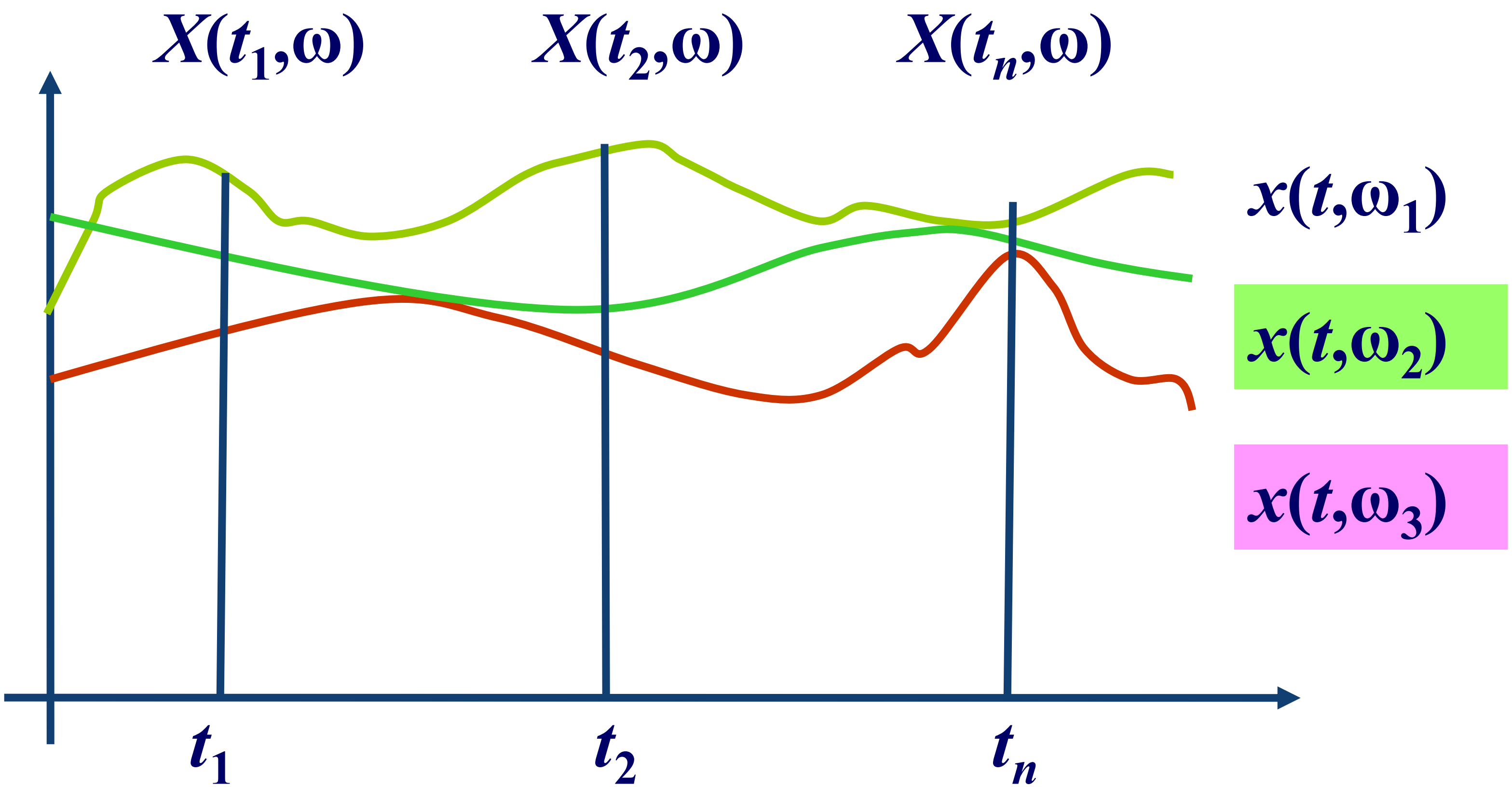
$$X_t(\omega)=X(t,\omega),\quad (t\in T,\omega\in\Omega)$$

1) 对固定的 $t\in T, X_t(\omega), \omega\in\Omega$ 是一个定义在概率空间(Ω, F, P) 上的随机变量;

即对于特定的试验条件

2)当固定$\omega_0\in\Omega$ 作为时间变量$t\in T$的函数,是一个$x(t,\omega_0)$定义在T上的普通函数.

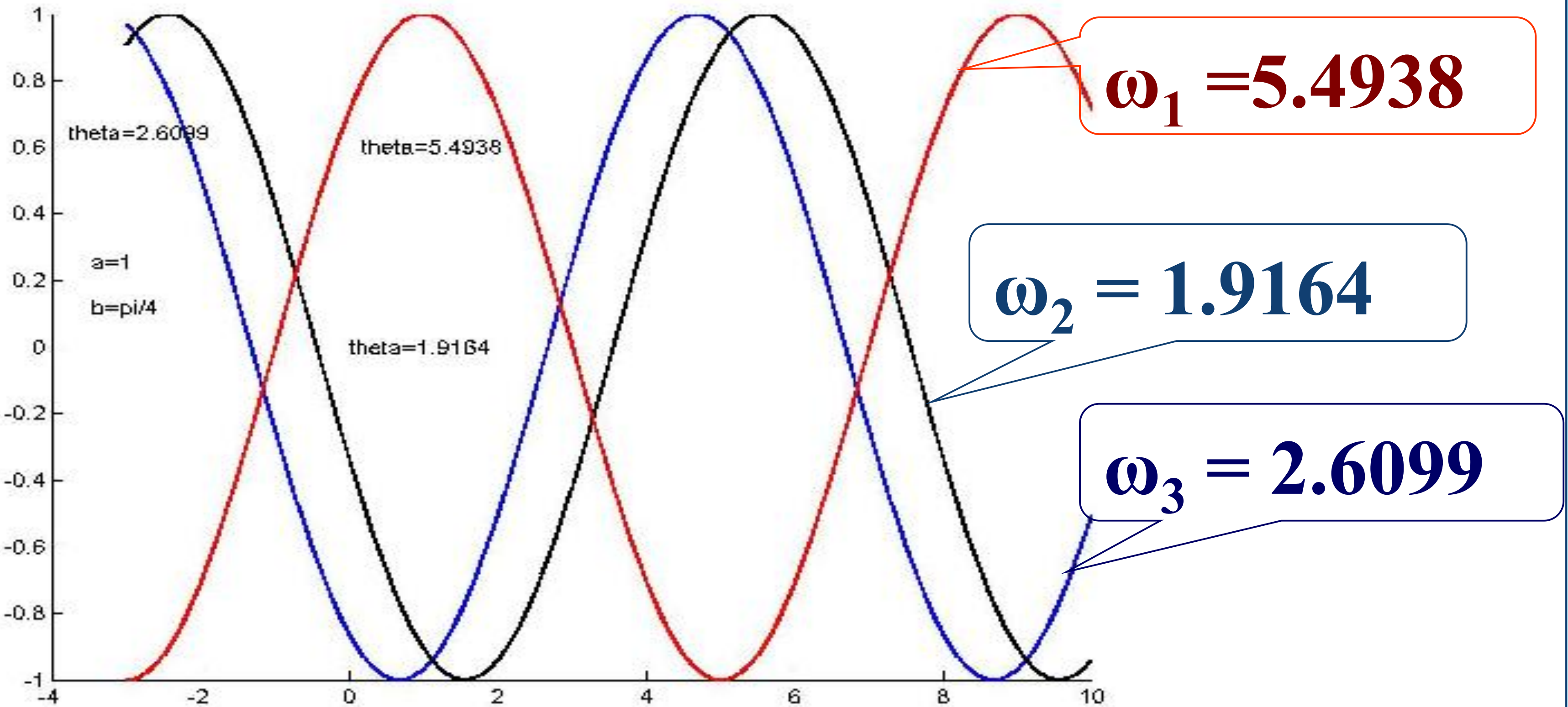
随机过程的定义



Ex.8 随机相位正弦波

$$X_t(\omega) = \alpha\cos(\beta t+\Theta),\ \Theta \sim U(0,\ 2\pi)$$

当t变化时, 构成一族随机变量. 对不同的ω得到不同的确定性函数.



随机相位正弦波

定义2.1.2 对每一固定$\omega\in\Omega$, 称$x_t(\omega)$是随机过程$\{X_t(\omega), t\in T\}$相应于ω的**样本函数**(或**轨道, 路径, 现实**).

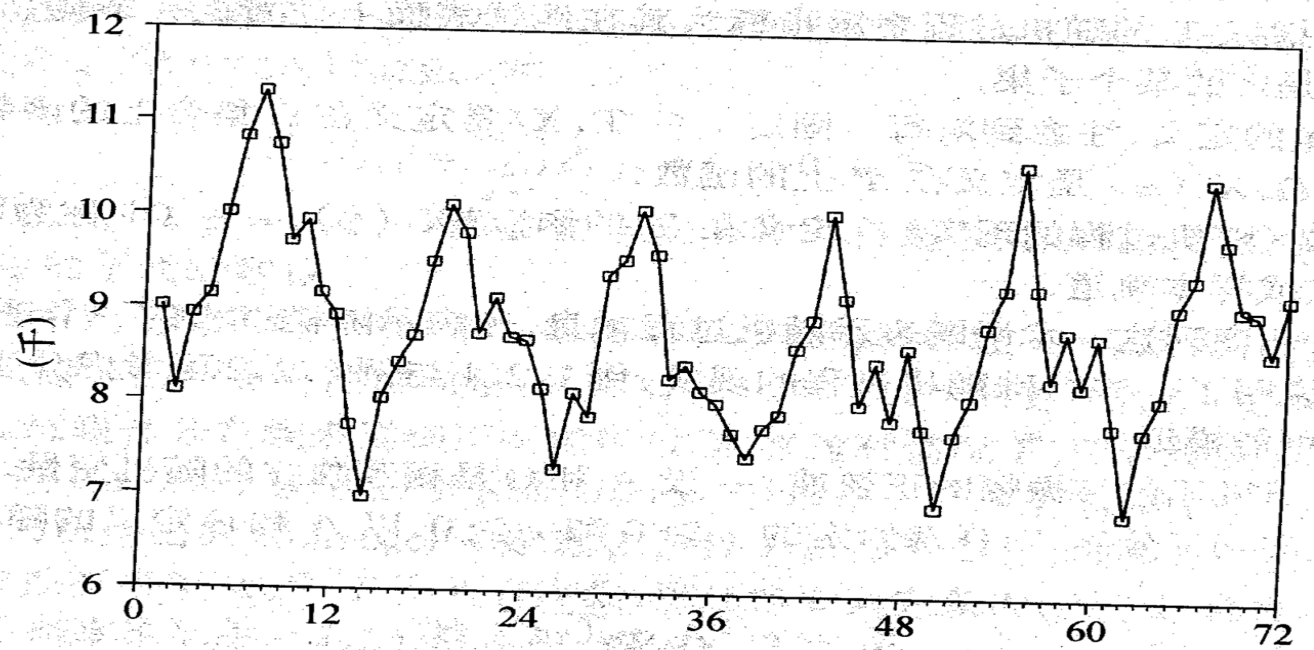
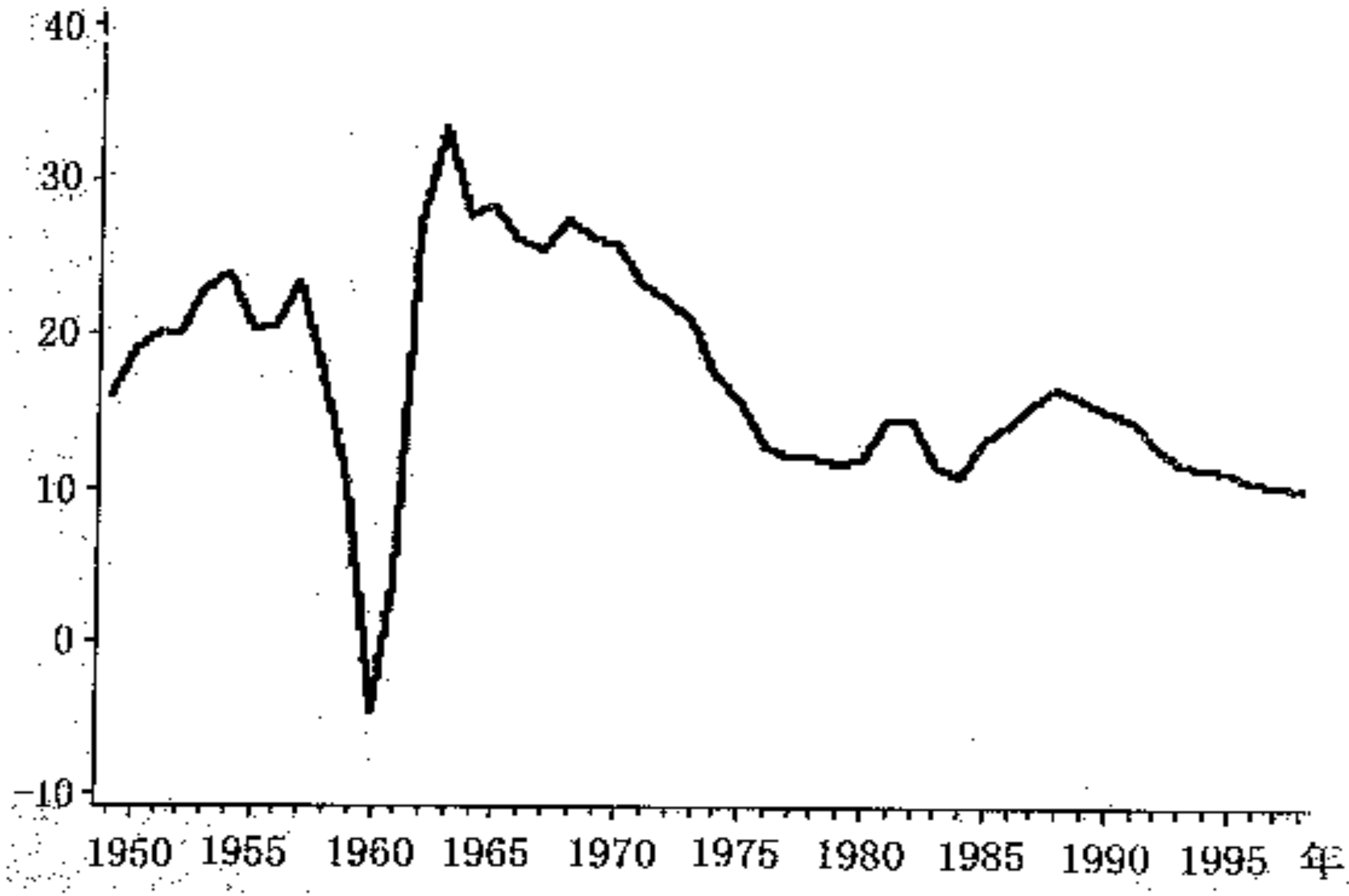


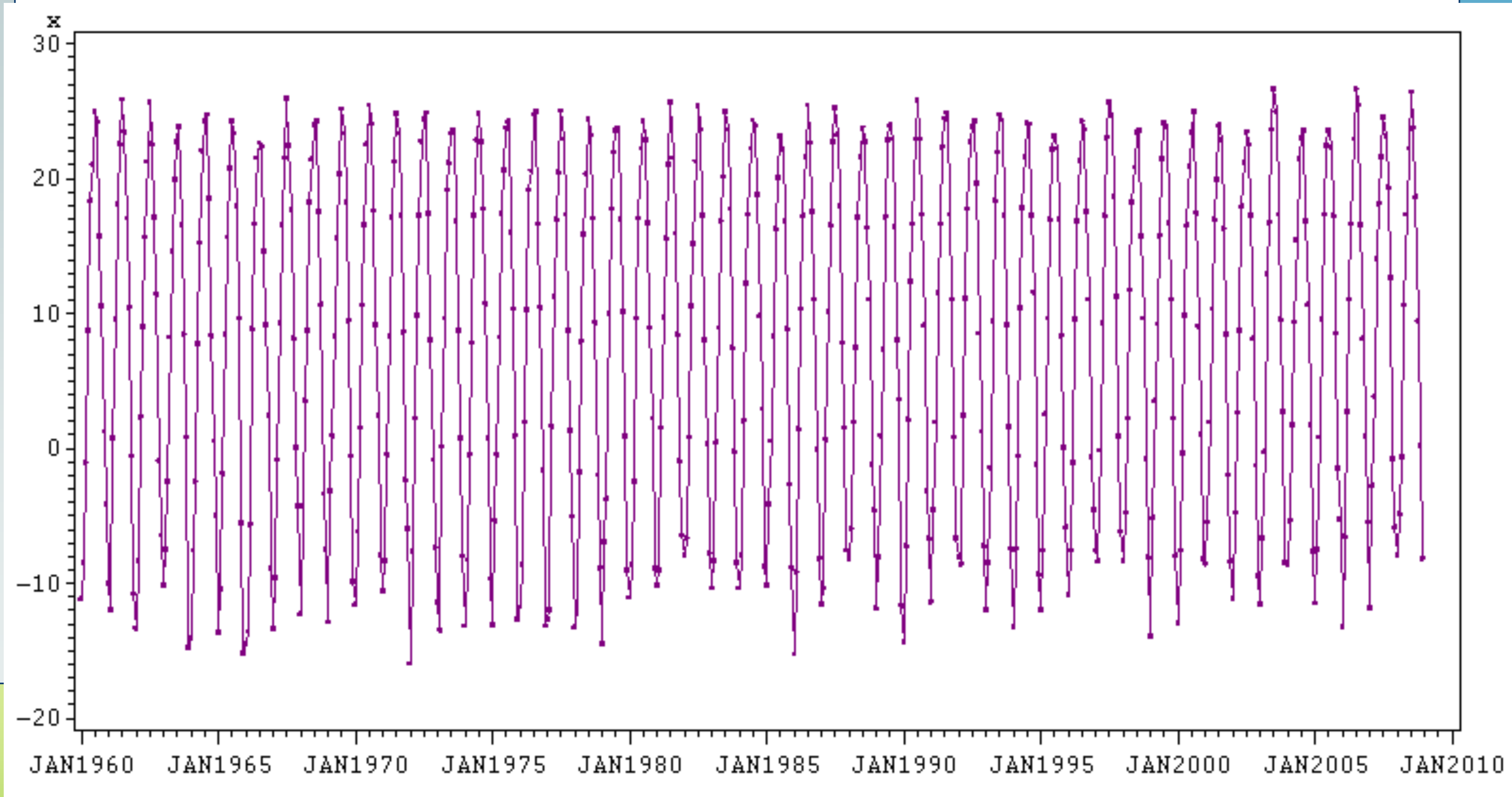
图 1.6　美国月事故死亡数据，1973 − 1978(国家安全委员会).

随机过程的定义



我国人口自然增长率数据图

随机过程的定义



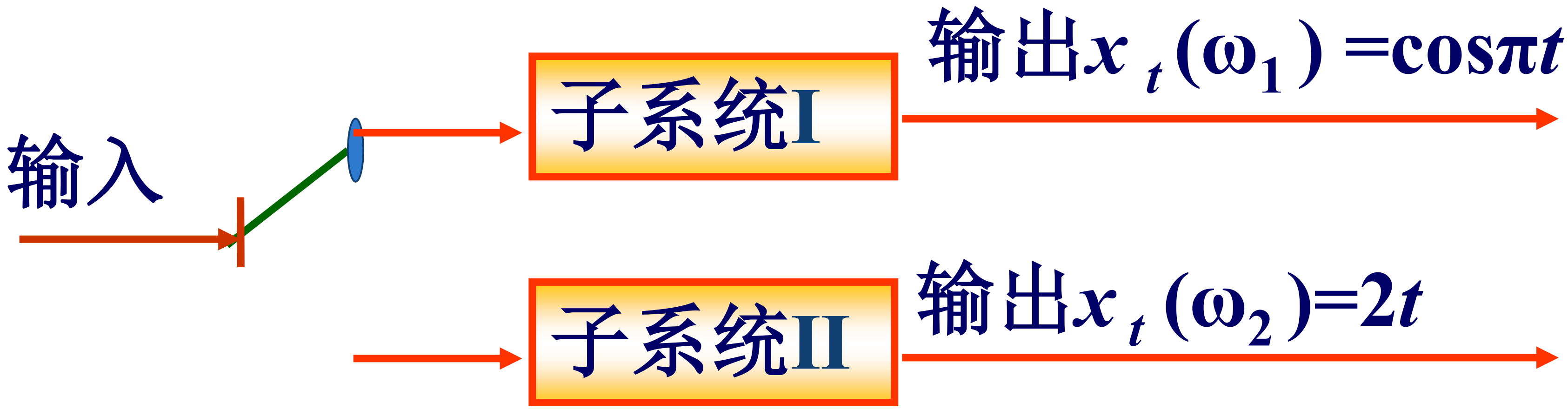
x
30
20
10
0
−10
−20
JAN1960
JAN1965
JAN1970
JAN1975
JAN1980
JAN1985
JAN1990
JAN1995
JAN2000
JAN2005
JAN2010

随机过程的定义

如果有时光机回到当初重新进行一次随机过程的实验，今天也许不是这样；但是到了今天，用我们敬爱的徐全智老师的话来说，那就是一条谁也无法更改的样本、现实、轨迹！

我们就这样匆匆忙忙地奔跑在人生的路上，马不停蹄地追赶，马不停蹄地错过.

Ex.9 随机开关系统如下



系统开始运行时, 随机开关以概率p 接通子系统I,以概率$1-p$接通子系统II. 定义了如下随机过程:

$$X_t(\omega)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{接通子系统 I};\\ 2t, & \text{接通子系统 II.}\end{cases}\qquad t\in R.$$

写出过程$\{X_t(\omega), t\geq 0\}$的所有样本函数.

解 用ω_1表示接通子系统I,

ω_2表示接通子系统II,

则过程仅有两条样本函数:

$$x_t(\omega_1)= \cos\pi t, \quad \text{和} \quad x_t(\omega_2)= 2t.$$

Ex.8 质点布朗运动 假定独立重复抛一个均匀硬币，则定义了直线上的质点布朗运动,

$$X_n(\omega)=\begin{cases}1, & 第n次出现正面;\\ -1, & 第n次出现反面.\end{cases}\quad n=1,2,\cdots$$

分析确定此过程的样本空间及样本函数.

解 将抛第n次硬币的试验记为E_n，则过程试验为无穷维集积

$$E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n\times\cdots$$

记 $\{\omega_1^{(n)}\}=\{第n次出现正面\},$

$\{\omega_2^{(n)}\}=\{第n次出现反面\},$

第n次试验对应的样本空间是

$$\Omega_n = \{\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}\}, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

此随机过程的样本空间为无穷维乘积空间

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n \times \cdots$$

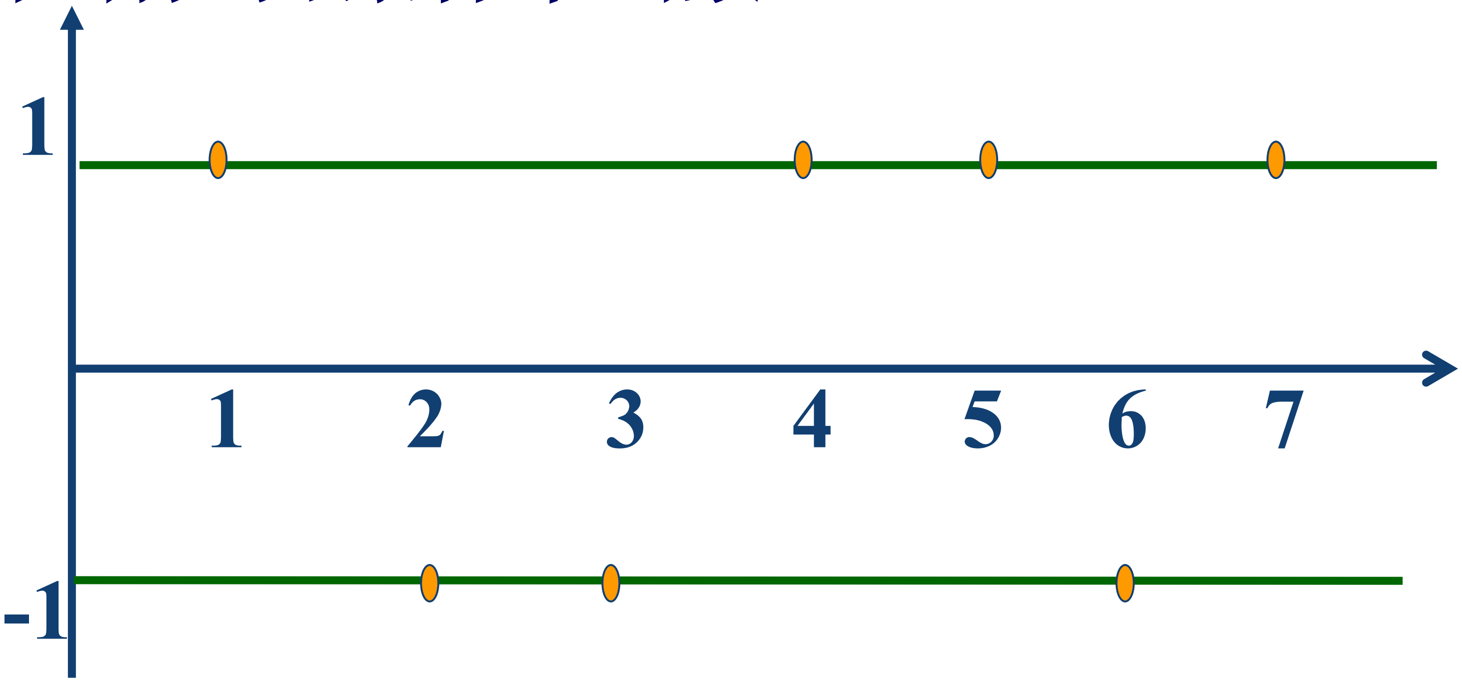
$$= \{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}, \cdots \omega_{i_n}^{(n)} \cdots) : i_n = 1,2; n = 1,2,\cdots\}$$

对所有 $n = 1,2,\cdots,$ 有

$X_n(\omega)$	-1	1
p	1/2	1/2

均为两点分布随机变量.

过程有无穷条样本函数



是对应Ω的样本点

$$\omega=(\omega_{i_1}^{(1)},\omega_{i_2}^{(2)},\cdots\omega_{i_n}^{(n)}\cdots)=(\text{正},\text{反},\text{反},\text{正},\text{正},\text{反},\text{正},\cdots)$$

的一条样本函数.

1.1.2 随机过程的分布

需要研究一族随时间或地点变化的随机变量的**整体**或**局部统计规律性**.

定义1.1.3 随机过程 $\{X_t(\omega), t\in T\}$ 对 $\forall t\in T$，随机变量 $X_t(\omega)$ 的分布函数

$$F(t;x) \triangleq P\{X(t)\le x\},\qquad x\in R,$$

称为过程 的**一维分布函数族**.

注 仅描述了随机过程在各个孤立时间点处的统计特性.

需描述随机过程中任意两个或多个随机变量之间的整体统计规律.

定义1.1.4 随机过程 $\{X_t(\omega), t\in T\}$ 对给定n及 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$, 随机向量$X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n}$的$n$维联合分布函数为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_{t_1}\le x_1,X_{t_2}\le x_2,\cdots,X_{t_n}\le x_n\}$$

称集合

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n):(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_n;t_i\in T,n\ge 1\}$$

为随机过程的有限维分布函数族.

随机过程的n维分布函数族能近似地描述过程的统计特性, n 越大则描述越趋于完善.

需研究随机过程与有限维分布函数的关系.

随机过程的有限维分布函数有以下性质:

1) 对称性:对1, 2, …, n的任一排列$j_1, j_2, \dots, j_n$, 均有

$$F(t_{j_1},\cdots,t_{j_n};x_{j_1},\cdots,x_{j_n}) = F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

注 因事件乘积满足交换律.

2) 相容性：对任意固定的自然数$m<n$, 均有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

$$=F(t_1,t_2,\cdots,t_m,\cdots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_m,\infty\cdots\infty)$$

$$=\lim_{x_{m+1},\cdots,x_n\to\infty}F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,\ldots,x_m,\cdots x_n)$$

注 联合分布函数能完全确定边缘分布函数.

定理1.1.1(柯尔莫哥罗夫存在定理)

如果有限分布函数族

$$\mathrm{F}=\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

满足相容性和对称性, 则存在一个概率空间上的一个随机过程$\{X(t),t\in T\}$ 以F 为有限维分布函数族, 即有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$=P\{X(t_1)\leq x_1,\cdots,X(t_n)\leq x_n\}.$$

故可用有限维分布描述随机过程的整体统计特性.

特征函数和分布函数相互惟一确定，也可用特征函数族描述随机过程的整体统计特性.

类似地, 随机过程的有限维特征函数满足:

1) 对1,2,…,n的任一排列$j_1, j_2, \ldots, j_n$有

$$\varphi(t_{j_1},\cdots,t_{j_n};\theta_{j_1},\cdots,\theta_{j_n}) = \varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$$

2) 对任意固定的自然数$m<n$, 均有

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_m;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$$

$$=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_m,\cdots,t_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,0,\cdots,0)$$

Ex.9 类似于随机开关系统, 设随机过程 $\{X_t(\omega),t\in R\}$只有两条样本函数

$$X_t(\omega_1)=2\cos t,\quad X_t(\omega_2)=-2\cos t,\ t\in R$$

且 $$P(\omega_1)=\frac{2}{3},\ P(\omega_2)=\frac{1}{3}$$

求 1) 一维分布函数$F(0;x)$ 和 $F(\pi/4;x)$;

2) 二维分布函数$F(0,\pi/4;x,y)$.

解 1) 对任意实数 $t\in R$, 有

$X(t)$	$-2\cos t$	$2\cos t$
p	$1/3$	$2/3$

特别

$X(0)$	-2	2
p	$1/3$	$2/3$

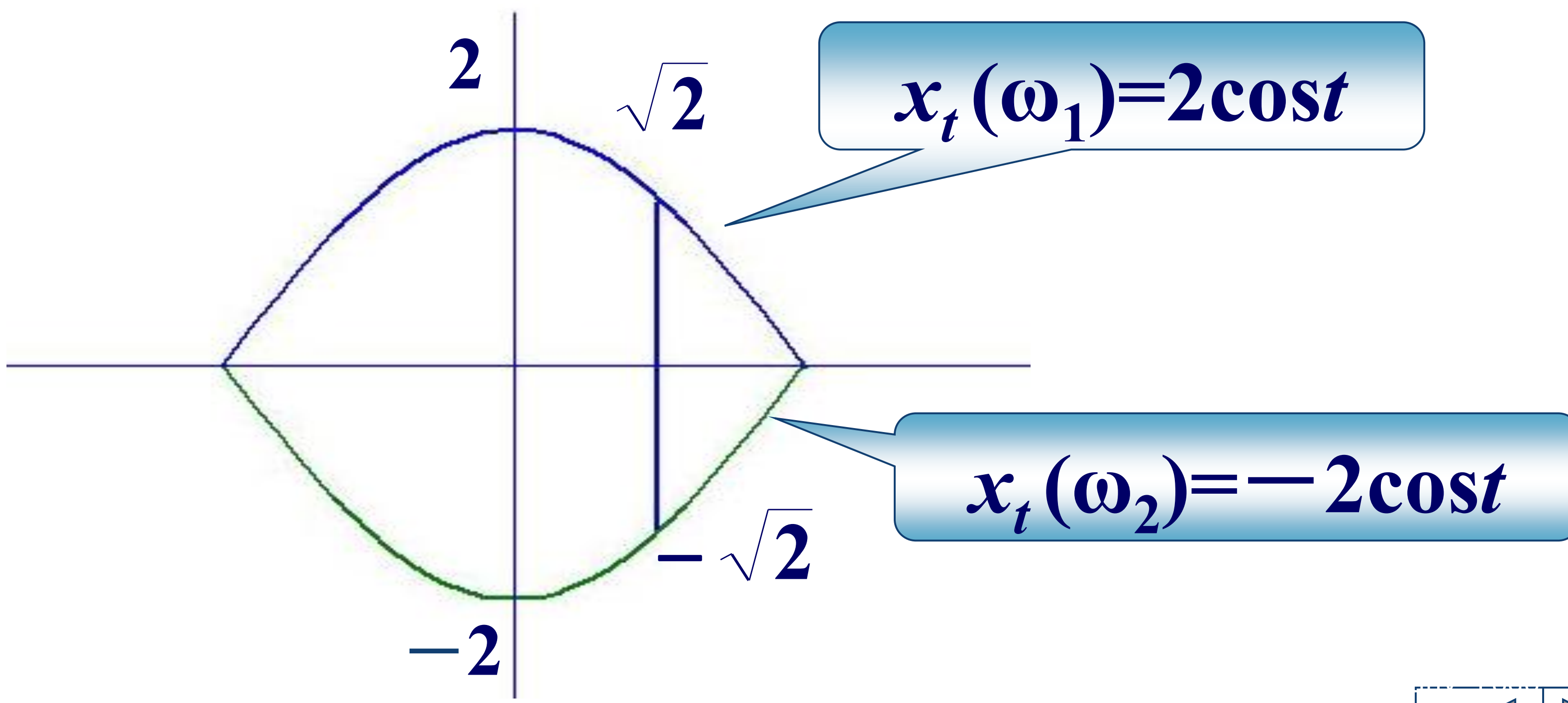
$X(\frac{\pi}{4})$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
p	$1/3$	$2/3$

其分布函数分别为

$$F_{X_0}(x)=\begin{cases}0, & x<-2;\\ \frac{1}{3}, & -2\le x<2;\\ 1, & 2\le x;\end{cases}$$

$$F_{X_{\frac{\pi}{4}}}(x)=\begin{cases}0, & x<-\sqrt{2};\\ \frac{1}{3}, & -\sqrt{2}\le x<\sqrt{2};\\ 1, & \sqrt{2}\le x;\end{cases}$$

2) 分析



二维随机变量$(X_0, X_{\pi/4})$的联合分布律为

$(X_0(\omega), X_{\pi/4}(\omega))$	$(-2,-\sqrt{2})$	$(2,\sqrt{2})$
p	$1/3$	$2/3$

其联合分布函数为

$$F_{0,\frac{\pi}{4}}(x,y) = P\{X_0 \le x, X_{\frac{\pi}{4}} \le y\} =$$

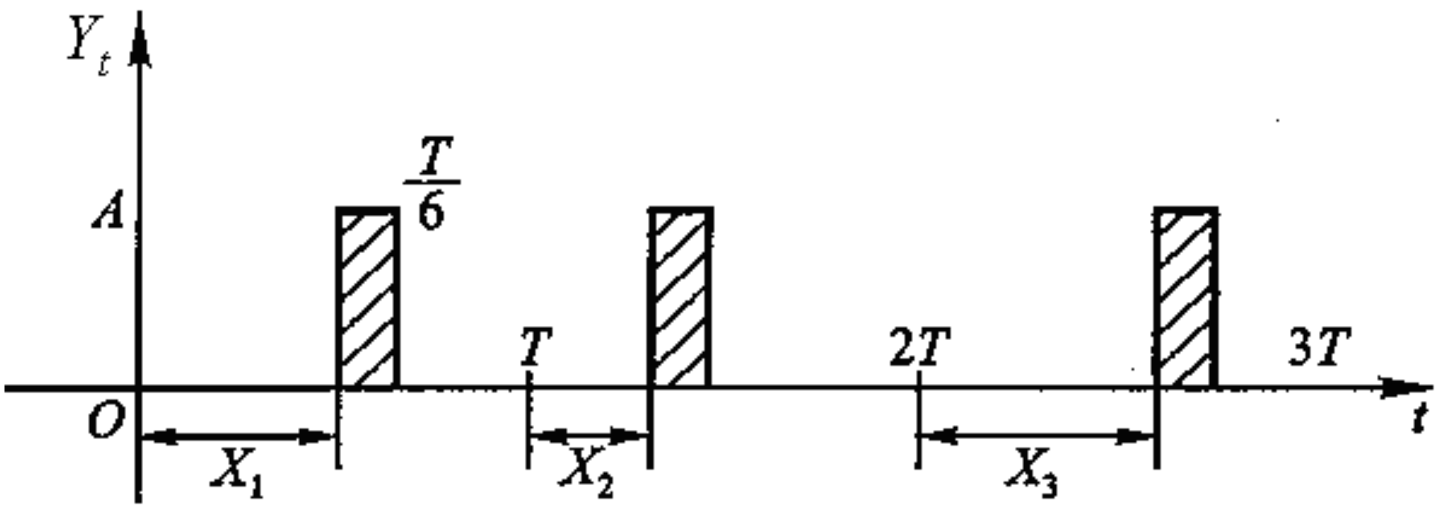
$$= \begin{cases} 0, & x < -2, y < -\sqrt{2}; \\ \dfrac{1}{3}, & -2 \le x < 2 \text{且} -\sqrt{2} \le y \text{或} -\sqrt{2} \le y < \sqrt{2} \text{且} -2 \le x; \\ 1, & 2 \le x, \sqrt{2} \le y; \end{cases}$$

Ex. 10 (脉冲位置调制信号)参见教材P10.

1)每隔T秒输出宽度为$T/6$, 幅度为A的脉冲;

2)各脉冲开始时间为X_j, j=1,2, …, n,相互独立.

3) $X_i \sim U(0,5/6T)$.

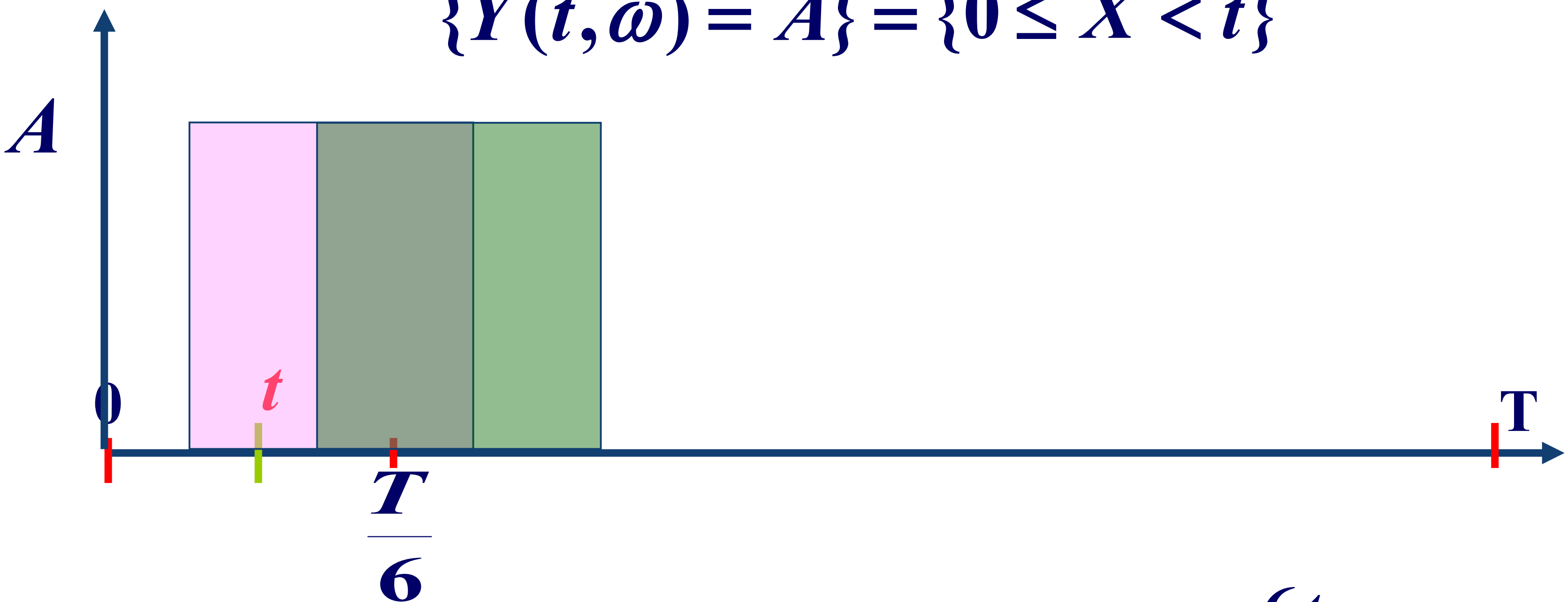


求Y_t的一维概率密度.

解 X_j 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{5T}, & 0\le x\le \dfrac{5}{6}T;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

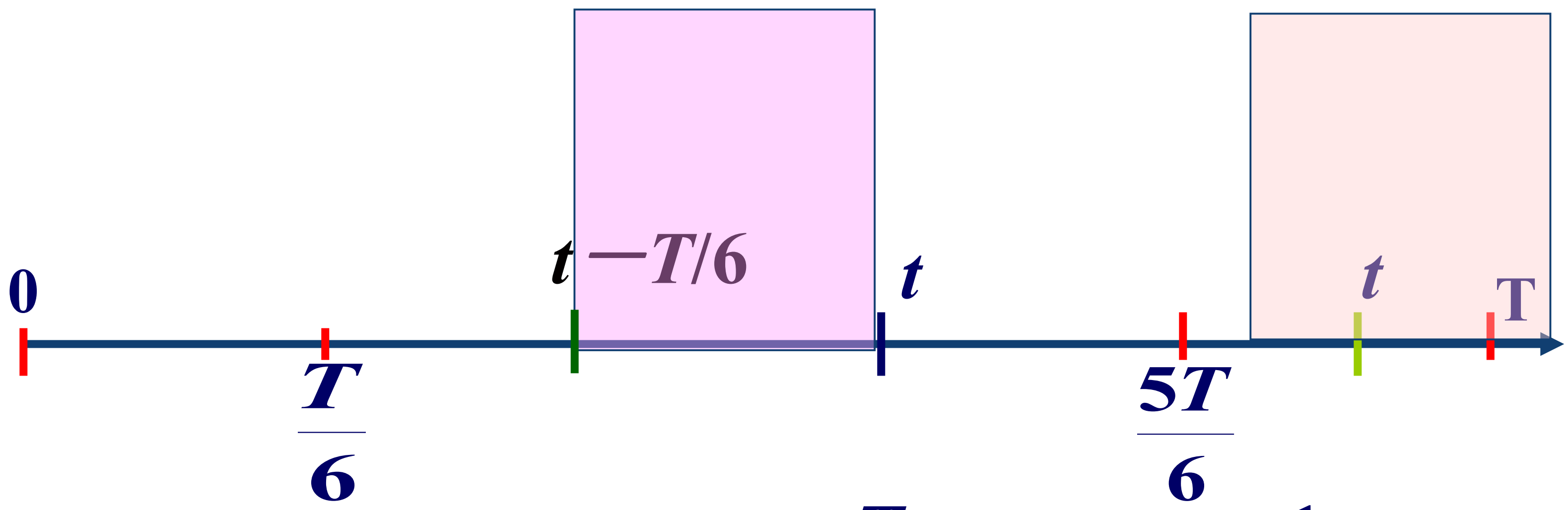
当$0\le t<T/6$,

$$\{Y(t,\omega)=A\}=\{0\le X<t\}$$



$$P\{Y(t,\omega)=A\}=P\{0\le X<t\}=\frac{6t}{5T};$$

当$T/6 \le t < 5T/6$,



$$P\{Y(t,\omega)=A\}=P\{t-\frac{T}{6}\le X<t\}=\frac{1}{5};$$

当$5T/6 \le t < T$,

$$P\{Y(t,\omega)=A\}=P\{t-\frac{T}{6}<X<\frac{5T}{6}\}=\frac{6}{5T}(T-t).$$

Ex.11 随机正弦波 设随机过程

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Theta), \qquad t \in R,$$

其中ω是正常数, 随机变量A 与Θ相互独立, $A \sim U(0,1)$, $\Theta \sim U(-\pi, \pi)$, 试求过程的一维概率密度.

解 1) 首先固定$A=a$, 设

$$Y(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$$

其中a 是常数,可求得$Y(t)$的一维概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - y^2}}, & |y| < a; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

2) 因 $Y(t)=X(t|A=a)$，有 $f_{X|A}(x|a)=f_Y(x)$

用连续型全概率公式

$$f_X(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|A}(x|a)dF_A(a)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|A}(x|a)f_A(a)da$$

$$=\int_0^1 f_{X|A}(x|a)da$$

$$=\begin{cases}\int_x^1 \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}da, & |x|<1; \\ 0 & \text{其它}\ .\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right), & |x|<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

思考题:

为什么可以用过程的有限维分布函数族或特征函数族描述随机过程的统计特性?