§ 5.2 离散参数马氏链

5.2.1 离散参数马氏链的定义

设$\{X(t),t\in T\}$为马氏过程, 称 "$X(t)=x$"为"过程在 t 时刻处于状态x";

记 $E=\{x|X(t)=x,\ t\in T\}$称为过程的状态空间.

若E 是可数集, 称$\{X(t),t\in T\}$是马氏链.

若指标集T是可数集, 称$\{X(t),t\in T\}$是马氏序列.

本节讨论状态空间E和参数集T都是可列集的马尔科夫链.

马尔科夫链的理论系统而深入，在自然科学、工程技术及经济管理各领域有广泛的应用.

定义5.2.1 设$\{X(n), n\geq 0\}$为随机变量序列, 状态空间$E=\{0,1,2,\dots\}$, 如果对于任意非负整数 k 及$n_1< n_2<\dots n_r<m$，以及

$$i_{n_1}, i_{n_2}, \cdots, i_{n_r}, i_m, i_{m+k} \in E,$$

$$P\{X(m+k)=i_{m+k} | X(n_1)=i_1, \dots, X(n_r)=i_r, \dots, X(m)=i_m\}$$

$$= P\{X(m+k)=i_{m+k} | X(m)=i_m\}$$

成立,称$\{X(n), n\geq 0\}$为离散参数马氏链.

定义5.2.2 (等价定义) 随机变量序列 $\{X(n), n\geq 0\}$ 的状态空间$E=\{0,1,2,\ldots\}$, 如果对于任意非负整数m，以及 $i_0, i_1, \cdots, i_m, i_{m+1} \in E$,

$$P\{X(m+1)=i_{m+1} | X(m)=i_m, X(m-1)=i_{m-1}, \ldots, X(0)=i_0\}$$

$$=P\{X(m+1)=i_{m+1} | X(m)=i_m\}$$

成立,是$\{X(n), n\geq 0\}$ 为离散参数马氏链的充分必要条件.

注 必然性显然，充分性自证.

定义5.2.3 设$\{X(n):n\geq 0\}$为马氏链, 状态空间为$E=\{0,1,2,\ldots\}$, 称条件概率

$$p_{ij}^{(k)}(m)=P\{X(m+k)=j \mid X(m)=i\}$$

为马氏链在m时刻的k**步转移概率**.

特别 $p_{ij}^{(1)}(m)=P\{X(m+1)=j \mid X(m)=i\}$

称为一步**转移概率**.

表示在时刻m时$X(m)$取i值的条件下, 在下一时刻$m+1$时, $X(m+1)$取j值的概率.

定义5.2.4 称矩阵

$$P^{(k)}(m)=(p_{ij}^{(k)}(m))$$

$$=\begin{bmatrix} p_{00}^{(k)}(m) & p_{01}^{(k)}(m) & \cdots & p_{0n}^{(k)}(m) & \cdots \\ p_{10}^{(k)}(m) & p_{11}^{(k)}(m) & \cdots & p_{1n}^{(k)}(m) & p_{10}^{(k)}(m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n0}^{(k)}(m) & p_{n1}^{(k)}(m) & \cdots & p_{nn}^{(k)}(m) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

为马氏链 $\{X(n):n\geq 0\}$ 在时刻 m 的 k 步转移矩阵.

当$k=1$时，称

$$P(m)=(p_{ij}(m))$$

称为一步转移矩阵，简称**转移矩阵**.

称矩阵$A=(a_{ij})$为**随机矩阵**, 若 对$\forall i\in E$,满足

$$1)\ \ a_{ij}\geq 0; \qquad 2)\sum_{j\in E}a_{ij}=1.$$

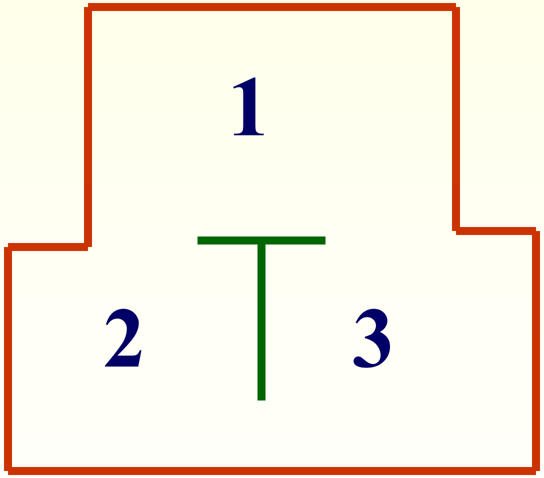
凡满足以上两条的行向量称为**概率向量**.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{转移矩阵}P\text{是随机矩阵.}\\ \text{转移矩阵}P\text{的行向量都是概率向量.}\end{array}\right.$$

EX.1 迷宫问题 定时观察老鼠位于哪一个房间?

状态空间 $E=\{1, 2, 3\}$,

$X(n)$为第n 次观察时老鼠所处位置.



记 $\pi_j(n) = P\{X(n) = j\}$,

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}(n-1), \quad i, j = 1,2,3.$$

根据全概率公式，对j =1, 2, 3有

$$\pi_j(n) = \pi_1(n-1)p_{1j}^{(1)} + \pi_2(n-1)p_{2j}^{(1)} + \pi_3(n-1)p_{3j}^{(1)}.$$

在时刻n, 老鼠处于各状态的概率只与第n－1次时所处状态与转移概率有关，而与第n－1次前的状态无关.

老鼠的随机转移状态运动过程是一个马氏链.

EX.2 设$X(n)$, n=1,2, …是相互独立随机变量, 令 $Y(n)=[X(1)+X(2)+\cdots+X(n)]^2 \quad n=1,2,\cdots$

证明 $\{Y(n), n=1,2,\cdots\}$是马尔科夫链.

证 记 $S_n = X(1)+X(2)+\cdots+X(n), \quad n=1,2,\cdots$

则 $Y(n)=S_n^2=\{[X(1)+X(2)+\cdots+X(n-1)]+X(n)\}^2$

$$=[S_{n-1}+X(n)]^2=S_{n-1}^2+2S_{n-1}X(n)+[X(n)]^2$$

且 $X(n)$与$Y(1)=S_1^2, Y(2)=S_2^2,\cdots,Y(n-1)=S_{n-1}^2$

分别相互独立, 故

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(1)=y_1, Y(2)=y_2, \cdots Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{S_{n-1}^2+2S_{n-1}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_1^2=y_1, \cdots, S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_1^2=y_1, \cdots, S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_1^2=y_1, \cdots, S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

因$X(n)$与$S_1^2, S_2^2, \cdots, S_{n-1}^2$均相互独立,故

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(1)=y_1, Y(2)=y_2, \cdots Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_1^2=y_1, \cdots, S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(1)=y_1, Y(2)=y_2, \cdots Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n\} \qquad (1)$$

另一方面

$$P\{Y(n)=y_n \mid Y(n-1)=y_{n-1}\}$$

$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n \mid S_{n-1}^2=y_{n-1}\}$$

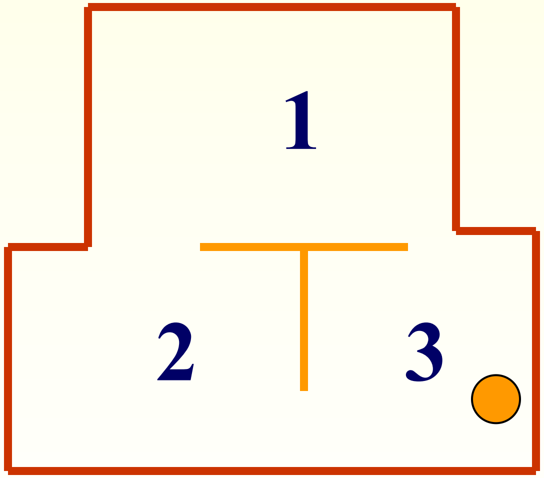
$$=P\{y_{n-1}+2\sqrt{y_{n-1}}X(n)+[X(n)]^2=y_n\} \qquad (2)$$

比较(1)和(2) 知 $\{Y(n), n=1,2,\cdots\}$是马尔科夫链

EX.3 另一类迷宫问题 假设在三个分隔间的第3间放有食物, 当老鼠到达第3分隔间, 受到食物吸引不再运动到其他房间.

分析 状态空间$E=\{1,2,3\}$，有

$p_{33}=1$, $p_{3j}=0$, $j=1, 2$.

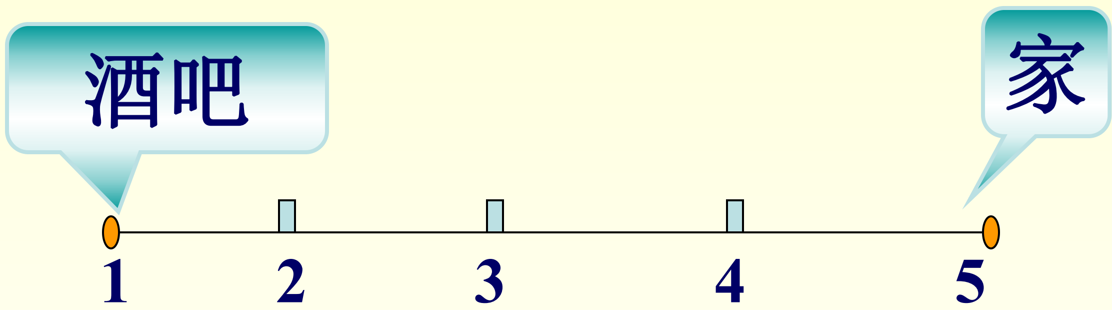


其转移矩阵形如

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

称状态3为**吸收状态**.

EX.4 醉汉问题



醉汉在街上徘徊, 在每一个街口以1/3的概率停下, 以1/3的概率向前或向后.

若他又返回酒吧或到家门, 不再游动 .

状态空间为$E=\{1,2,3,4,5\}$

运动的转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有两个吸收状态“1”和“5”

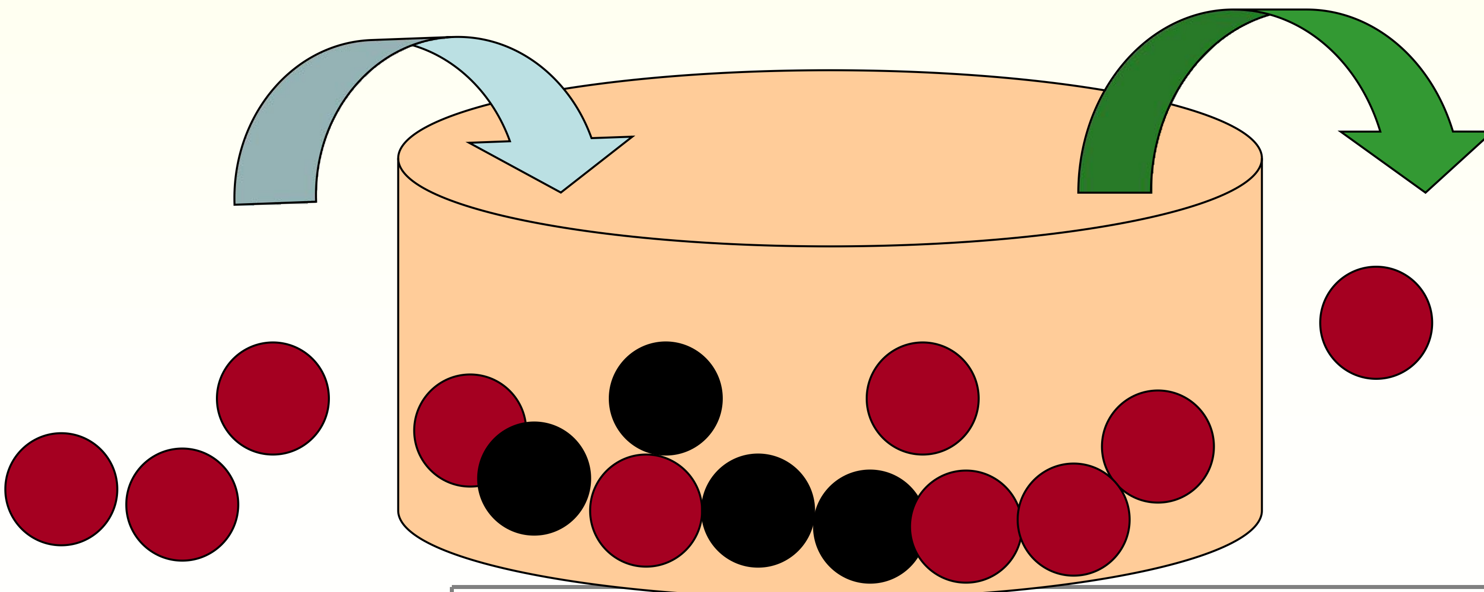
若不许他再进入酒吧，又被家人赶出门，则转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

称状态 “1”和 “5”是反射状态.

EX.5 *Polya*模型（传染病模型）

设坛子中有b个黑球，r 个红球. 从坛子中随机地摸出一个球，然后将球放回并加入c只同色球，如此取和放，不断进行下去. 研究坛子中黑色球个数.



分析 设$X(n)$表示第n次摸球后坛子中的黑球个数.每取放一次后黑球或者增加 c 个黑球,或者不变.

$$p_{ij}^{(1)}(n)=P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{i}{b+r+nc}, & j=i+c;\\[2ex] 1-\dfrac{i}{b+r+nc}, & j=i;\\[2ex] 0,\text{其他}. & \end{cases}$$

显然, $\{X(n), n\geq 1\}$是马氏链.

5.2.2 转移矩阵及C-K方程

定理5.2.1 马氏链$\{X(n),n\geq 0\}$的k步转移概率满足切普曼一柯尔莫哥洛夫方程

$$p_{ij}^{(k+l)}(m)=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(k)}(m)p_{rj}^{(l)}(m+k)$$

分析 需用概率式:

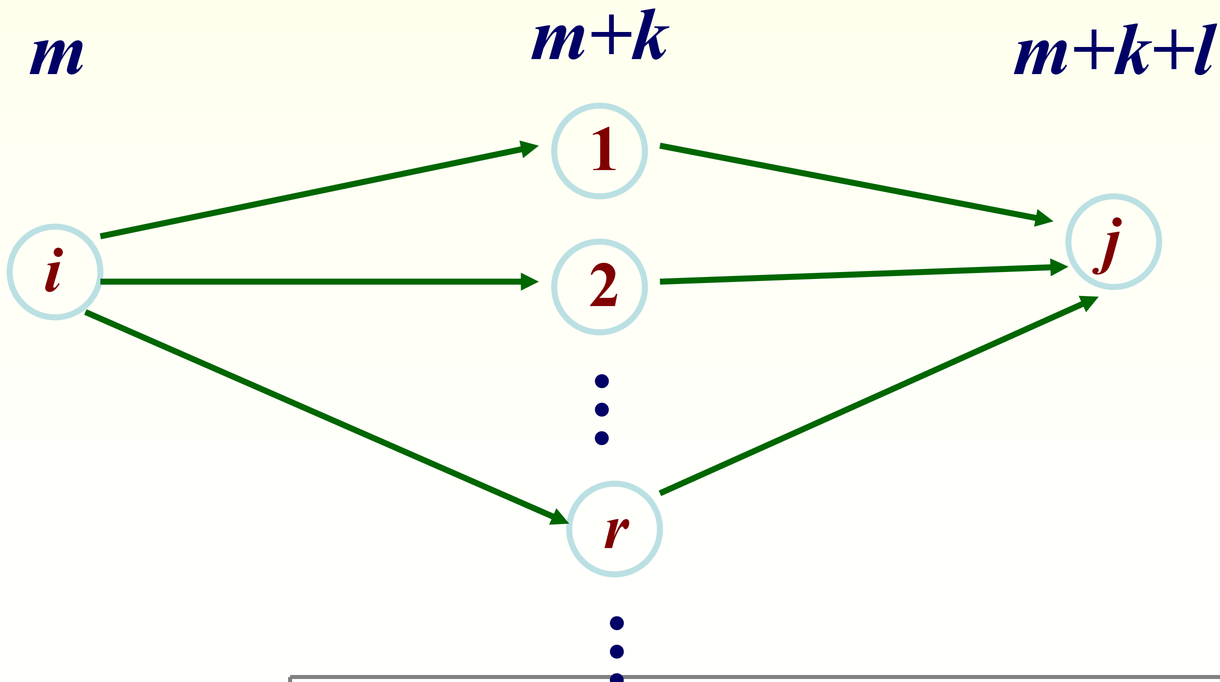
$$P(AB|C)=\frac{P(ABC)}{P(C)}=\frac{P(BC)}{P(C)}\frac{P(ABC)}{P(BC)}$$

$$=P(B|C)P(A|BC).$$

$$\{X(m)=i, X(m+k+l)=j\}$$

$$=\bigcup_{r\in E}\{X(m)=i, X(m+k)=r, X(m+k+l)=j\}$$

分析图



证 $P\{X(m+k+l)=\mathrm{j}\,|\,X(m)=i\}$

$$=\sum_{r\in E}P\{X(m+\mathrm{k})=r,X(m+k+l)=j\,|\,X(m)=i\}$$

$$=\sum_{r\in E}P\{X(m+k)=r\,|\,X(m)=i\}\times$$

马氏性

$$P\{X(m+k+l)=j\,|\,X(m)=i,X(m+k)=r\}$$

$$=\sum_{r\in E}P\{X(m+k)=r\,|\,X(m)=i\}\times$$

$$P\{X(m+k+l)=j\,|\,X(m+k)=r\}$$

即 $$p_{ij}^{(k+l)}(m)=\sum_{r\in E}p_{ir}^{(k)}(m)p_{rj}^{(l)}(m+k)$$

若记 $P^{(k)}(m)=(p_{ij}^{(k)}(m))$,

C—K方程的矩阵形式

则 $$P^{(k+l)}(m)=P^{(k)}(m)P^{(l)}(m+k)$$