组合数学习题解答

孙世新　卢光辉　戴　波　编　著

张先迪　审

电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

/ —

2006.5

ISBN 7 81114 092 6

. ... — —

. O · 157-44

CIP 2006 031972

内 容 提 要

2003

组合数学习题解答

孙世新 卢光辉 戴 波 编 著

张先迪 审

出 版 610054

责任编辑

发 行

印 刷

开 本 787 × 1092 1/16 印张 13.875 字数 338

版 次 2006 5

印 次 2006 5

书 号 ISBN 7 81114 092 6/O · 5

印 数 1 4000

定 价 18.00

前　　言

，

，

1

2

“

”

编　　者

2005年10月于电子科技大学

目　　录

第一章　排列、组合与二项式定理

一、内容提要

加法规则 S $S_i \subseteq S$ $i=1\quad 2\quad 3\quad \cdots\quad m$ $S=\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$ $i \neq j$ $S_i \cap S_j = \phi$

$$|S| = \left|\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |S_i| \qquad 1.1$$

m=2

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

乘法规则 $S_i\left(i=1\quad 2\quad \cdots\quad m\right)$

$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m = \left\{\left(a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_m\right) \middle| a_i \in S_i\quad i=1\quad 2\quad \cdots\quad m\right\}$

$$|S| = |S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_m| = \prod_{i=1}^{m} |S_i| \qquad 1.2$$

m=2 $|S| = |S_1 \times S_2| = |S_1| \times |S_2|$

定义 1.1 $A=\{a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n\}$ n r n r $r \leq n$ A r– P n r A r– A r

$$P(n,r) = \begin{cases} 1 & n \geq r = 0 \\ 0 & n < r \end{cases}$$

定理 1.1 n r $r \leq n$

$$P(n\quad r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 1.3$$

推论 1 $n \geq r \geq 2$

$$P(n\quad r) = nP(n-1\quad r-1) \qquad 1.4$$

推论 2 $n \geq r \geq 2$

$$P(n\quad r) = r \cdot P(n-1\quad r-1) + P(n-1\quad r) \qquad 1.5$$

定义 1.2 $A=\{a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n\}$ n r

定理 1.2 $A=$ a_1 a_2 L a_n r

$$P(n\ \ r)/r = n!/(r(n-r)!) \qquad 1.6$$

定义 1.3 $B=\{\ k_1\cdot b_1\ \ k_2\cdot b_2\ \ \mathrm{L}\ \ k_n\cdot b_n\}$ r

r–

定理 1.3 $B=\{\infty\cdot b_1\ \ \infty\cdot b_2\ \ \cdots\ \ \infty\cdot b_n\}$ r– n^r

定理 1.4 $B=\{n_1\cdot b_1\ \ n_2\cdot b_2\ \ \cdots\ \ n_k\cdot b_k\}$

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\mathrm{L}\ n_k!}$$

$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$

定义 1.4 $A=\{a_1\ \ a_2\ \ \mathrm{L}\ \ a_n\}$ n r n

r $r\le n$ A r– A

r– A r– 用$C(n,r)$或$\binom{n}{r}$ A r–

$$C(n,\ r)=\binom{n}{r}=\begin{cases}1 & n\ge r=0\\ 0 & n<r\end{cases}$$

定理 1.5 $r\le n$

$$C(n\ \ r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n\ \ r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 1.7$$

推论 1 $C(n\ \ r)=C(n\ \ n-r)$ 1.8

推论 2 Pascal

$$C(n\ \ r)=C(n-1\ \ r)+C(n-1\ \ r-1) \qquad 1.9$$

推论 3 $C(n-1\ \ r-1)+C(n-2\ \ r-1)+\cdots+C(r-1\ \ r-1)=C(n\ \ r)$ 1.10

定理 1.6 $B=\{\infty\cdot b_1\ \ \infty\cdot b_2\ \ \cdots\ \ \infty\cdot b_n\}$ r–

$$F(n\ \ r)=\binom{n+r-1}{r} \qquad 1.11$$

定理 1.7 n x y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad 1.12$$

推论 1 n x y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k}y^k$$

推论 2　n　x

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k \quad 1.13$$

推论 3　n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad 1.14$$

推论 4　n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \quad 1.15$$

定理 1.8　α　$|x/y|<1$　x　y

$$(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k y^{\alpha-k} \quad 1.16$$

$$\binom{a}{k}=\begin{cases}\dfrac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} & k>0\\ 1 & k=0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

推论 1　$|z|<1$　z

$$(1+z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k \quad 1.17$$

推论 2　$|z|<1$　z

$$(1+z)^{-n}=\frac{1}{(1+z)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k \quad 1.18$$

推论 3　$|z|<1$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \quad 1.19$$

推论 4　$|z|<1$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \quad 1.20$$

推论 5　$|z|<1$

$$\sqrt{1+z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k \quad 1.21$$

推论 6　$|-rz|<1$　$|z|<1/|r|$

$$(1-rz)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^k z^k \tag{1.22}$$

恒等式 1　　n　k

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{1.23}$$

恒等式 2　　n

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1} \tag{1.24}$$

恒等式 3　　n

$$\sum_{k=0}^{n}(\ -1)^k k\binom{n}{k}=0 \tag{1.25}$$

恒等式 4　　n

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2} \tag{1.26}$$

恒等式 5　　n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}k^2=0 \tag{1.27}$$

恒等式 6　　n

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \tag{1.28}$$

恒等式 7　　n　m　p　$p\le\min\{m\quad n\}$

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p} \tag{1.29}$$

恒等式 8　　m　n

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}=\binom{m+n}{m} \tag{1.30}$$

恒等式 9　　n

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n} \tag{1.31}$$

恒等式 10　　p　q　n

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q}=\binom{n}{p}\binom{n}{q}$$

恒等式 11　　p　q　n

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q} \quad 1.32$$

恒等式 12　　n　k

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1} \quad 1.33$$

恒等式 13　　α　k

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+j}{j}=\binom{\alpha+k+1}{k} \quad 1.34$$

1

2　Pascal

3

4

5

Taylor

H.W.Gonld

二、习题解答

1.1　1000　9999

解：1000　9999　4

1　3　5　7　9

1000

1　2　3　L　9

1　3　5　7　9　5

1　2　L　9　8

0　1　2　L　9

8

0　1　2　L　9

7

$5\times8\times8\times7=2240$

1.2 1000 9999

解: 4 1 3 5 7 9 5 5

0 0

5 4

$$P\ 5\ 4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

1.3 52

解 52 52

52

52

1.4 10

解: 10 10

9 9

2

2×9 $10! - 2 \times 9$

1.5 10

10 $\frac{10!}{10}$

9

$\frac{9!}{9}$

$2 \times \frac{9!}{9}$

$$\frac{10!}{10} - 2 \times \frac{9!}{9} = 9! - 2 \times 8!$$

1.6 6 6

解: 6 $\frac{6!}{6}$ 6

2 5 3 4 …… 6 1

$$\frac{6!}{6} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! \times 5!$$

1.7 1 2 3 4 5 5

20 000

解：

方法一：

20 000　20 000

2　3　4　5　4

4　3　2

1　$4\times4\times3\times2\times1=96$

“　5　”　5　1

3　3　2

1　$3\times3\times2\times1=18$

5

$$96-18=78$$

方法二：

5　20 000　1　2　3　4

2　3　4　5

1　1　2　3　4　5

4　3　2　1

$$4\times3\times2\times1\times1=24$$

2　3　4　3　2

3　4　5　3　3

2　1

$$3\times3\times3\times2\times1=54$$

5

$$24+54=78$$

1.8

a　$\binom{n}{r}=\frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}$

证明：　$=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n}{n-r}\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n}{n-r}\cdot\binom{n-1}{r}=$

b　$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n-1}$

证明：　$=\frac{n}{n-1}\binom{2n}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2n!}{n!n!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\binom{2n}{n-1}=$

c　$n\binom{n-1}{r}=(r+1)\binom{n}{r+1}$

证明：

$$=n\binom{n-1}{r}=n\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}=(r+1)\cdot\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$

$$=(r+1)\cdot\binom{n}{r+1}=$$

1.9 1 10 000 000 000 100 1

1

解： 1 0 9 999 999 999 100

1 $\{\infty\cdot 0\ \ \infty\cdot 2\ \ \infty\cdot 3\ \mathrm{L}\ \ \infty\cdot 9\}$ $10-$ 9^{10}

1 1 10 000 000 000 $9^{10}-1$ 1

$10^{10}-1$ – $9^{10}-1$ $=10^{10}-9^{10}$ 1

注意： 0

1.10 1000 9999 3

3 3 7

解： 3

a 3 3 3

B=$\{\infty\cdot 0\ \ \infty\cdot 1\ \ \infty\cdot 2\ \ \infty\cdot 4\ \ \infty\cdot 5\ \mathrm{L}\ \ \infty\cdot 9\}$ 3 $(10-1)^3$

b 3 0 1 2 4 5 6 7 8 9

$\binom{8}{1}$ 3 $3\times(10-1)^2$

$$\binom{8}{1}\times 3\times(10-1)^2$$

a b

$$9^3+8\times 9^2\times\binom{3}{1}=2673$$

3 1 2 4 5 6 7 8 9

8

0 1 2 4 5 6 7 8 9

$$8\times 9^3=5832$$

7 0 7

$$8+\binom{3}{2}\times(10-1)=35$$

1.11 “ MISSISSIPPI ” S

解：　$B=\{1\cdot M \quad 4\cdot S \quad 4\cdot I \quad 2\cdot P\}$

$$\frac{11!}{1!2!4!4!}=34650$$

S 4 S B 7

$\frac{7!}{2!4!}$ 8 _M_I_I_I_P_P_I_

4 S 8 $\binom{8}{4}$

$$\frac{7!}{2!4!}\binom{8}{4}=7350$$

1.12 30 30

解： 30 30

C 30 3 C 30 4

1.13 $X_1+X_2+\cdots+X_n=r$

解：

方法一：

1 8

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=r \quad 1$$

$\binom{n+r-1}{r}$

1 $Y_i=X_i+1$ $i=1$ 2 $\cdots$ n 1

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=n+r \quad 2$$

2 1 2

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}$$

$k=n+r$

$$\binom{n+r-1}{n-1}=\binom{k-1}{n-1}$$

$y_1+y_2+\cdots+y_n=k$ $\binom{k-1}{n-1}$

1 $\binom{r-1}{n-1}$

方法二： r n

r r–1 n–1

$\binom{r-1}{n-1}$ $\binom{r-1}{n-1}$

1.14 1 10 000 5 5

解： 1 9999 4 0 235 0235

$x_1+x_2+x_3+x_4=5$

$$F(4, 5) = \binom{4+5-1}{5} = 56$$

$x_1+x_2+x_3+x_4=4$ $F(4, 4)=35$

$x_1+x_2+x_3+x_4=3$ $F(4, 3)=20$

$x_1+x_2+x_3+x_4=2$ $F(4, 2)=10$

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$ $F(4, 1)=4$

$$F(4, 4)+F(4, 3)+F(4, 2)+F(4, 1)=69$$

10 000 4 5 70 5

1.15 a a a a a b c d e a

解： a 4 b c d e 5 a 5 a

a $a\square a\square a\square a\square a$ 4

b c d e 4 4 4

1.16 1 2 L 1000 4

解： $A=\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ 1000 4

$$A_i=\{x|x=i \pmod 4\}\ i=1, 2, 3, 4$$

4 250

A a_1 a_2 a_3 $a_1+a_2+a_3=0$

mod4

a_1　a_2　a_3　　　A_4

$$N_1=C\quad 250\quad 3$$

a_1　a_2　a_3　　A_1　A_2　　A_1　　2　　A_2　　1

$$N_2= C\quad 250\quad 2\quad \times C\quad 250\quad 1$$

a_1　a_2　a_3　　A_3　A_4　A_1

$$N_3=[C\quad 250\quad 1\quad]^3$$

a_1　a_2　a_3　　A_2　A_4　A_2　2　A_4

$$N_4=C\quad 250\quad 2\quad \times C\quad 250\quad 1$$

a_1　a_2　a_3　　A_2　A_3　A_2　1　A_3　2

$$N_5=C\quad 250\quad 1\quad \times C\quad 250\quad 2$$

$$N= N_1+N_2+N_3+N_4+N_5=C\quad 250\quad 3\quad +3\times C\quad 250\quad 2\quad \times C\quad 250\quad 1\quad +[C\quad 250\quad 1\quad]^3$$

1.17　　$2x-7$　^{7}

解：　$X=2x$　$Y=-7$　$n=7$　　1.12

1.18　$3X-2Y$　^{18}　　X^5Y^{13}　　X^8Y^9

解：　　1.12　　$X=3x$　$Y=-2y$　$n=18$　$k=5$　　X^5Y^{13}

$$-\binom{18}{5}3^5\times 2^{13}$$

X^8Y^9　　0　$\because 8+9\neq 18\ \therefore$　$(3X-2Y)^{18}$　　X^8Y^9　　X^8Y^9

0

1.19　　$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

解：

方法一：

a　b　　n　　a　b

$$\overbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}^{n}=2^n$$

a　b　　$n-$　　k

$k=0\ 1\ 2\ \cdots\ n$　　a　$n-k$　b　　$B_k=\{k\cdot a\ (n-k)\cdot b\}$

$n-$　　1.4

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\qquad k=0\ 1\ 2\ \cdots\ n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

方法二：

$U=\{a_1$ L $a_n\}$ n “ ” “ ”

a_1 2 a_2 2 …… a_n 2

2×2×2×L ×2=2^n

n 0 1 L n

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

$$\sum_{R=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

1.20 $\frac{(2n)!}{2^n}$ $\frac{(3n)!}{2^n\times 3^n}$

$2n$

$(2n)!$

$2n$

1 2 $2n$ 2 1 2

$$2\binom{2n}{2}$$

3 4 1 2 $2n-2$

2 3 4

$$2\binom{2(n-1)}{2}$$

L L

$2n-1$ $2n$ 1 2 3 4 L $2n-2$ $2n-2$

$2n-$ $2n-2$ 2 $2n-1$ $2n$

$$2\binom{2n-(2n-2)}{2}=2\binom{2}{2}$$

$$2\binom{2n}{2}\times 2\binom{2(n-1)}{2}\times \cdots \times 2\binom{2}{2}$$

$$=2^n\times\binom{2n}{2}\times\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}$$

$$2^n\times\binom{2n}{2}\times\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}=(2n)!$$

$\therefore$ $$\frac{(2n)!}{2^n}=\binom{2n}{2}\times\binom{2(n-1)}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}$$

$\frac{(2n)!}{2^n}$

$3n$ $(3n)!$ $3n$

1　2　3　$3n$　3　1　2　3

$$3\quad\binom{3n}{3}$$

4　5　6　1　2　3　$3n$–3

3　4　5　6

$$3\quad\binom{3(n-1)}{3}$$

$\cdots\cdots$

$3n$–2　$3n$–1　$3n$　1　2　3　$\cdots$　$3n$–3　$3n$–3

$3n$–　$3n$–3　3　$3n$–2　$3n$–1　$3n$

$$3!\binom{3n-(3n-2)}{3}=3!\binom{3}{3}$$

$$3\quad\binom{3n}{3}\times 3!\quad\binom{3(n-1)}{3}\times\cdots\times 3\quad\binom{3}{3}$$

$$=(3!)^n\times\binom{3n}{3}\times\quad\binom{3(n-1)}{3}\times\cdots\times\binom{3}{3}$$

$$=2^n\times 3^n\times\binom{3n}{3}\times\quad\binom{3(n-1)}{3}\times\cdots\times\binom{3}{3}$$

$$2^n \times 3^n \times \binom{3n}{3} \times \binom{3(n-1)}{3} \times \cdots \times \binom{3}{3} = (3n)!$$

∴ $$\frac{(3n)!}{2^n \times 3^n} = \binom{3n}{3} \times \binom{3(n-1)}{3} \times \cdots \times \binom{3}{3}$$

$\frac{(3n)!}{2^n \times 3^n}$

1.21

$$\binom{n}{l}\binom{l}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$$

证明： n l r

选法一： n l l r

$\binom{n}{l}\binom{l}{r}$

选法二： n r $n-r$ $l-r$

$\binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$

$$\binom{n}{l}\binom{l}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{l-r}$$

1.22

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$$

证明：

方法一：

1.13

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

0 2

$$\int_0^2 (1+x)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^2 x^k \mathrm{d}x$$

$$\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_{x=0}^{2} = \left.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_{x=0}^{2}$$

∴ $$\frac{3^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^{k+1}}{k+1}$$

方法二：

1.23

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

∴
$$\binom{n}{k}=\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}$$

1.13

$$(1+x)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k}=1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^{k+1}$$

$x=2$

$$1+\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}=3^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}=3^{n+1}-1$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{(3^{n+1}-1)}{n+1}$$

1.23

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{m+k+1}\binom{n}{k}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

证明：　　1.13

$$(1-x)^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{k}$$

∴ $$x^m(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{m+k}$$

0 1

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{m+k+1}$$
$$=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{(1-x)^n}{m+1}\,\mathrm{d}x^{m+1}$$
$$=\frac{(1-x)^n}{m+1}x^{m+1}\Bigg|_{x=0}^{1}-\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}\,\mathrm{d}(1-x)^n$$
$$=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
$$=\text{L}\quad\text{L}$$
$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

∴ $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

1.24

a $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n+1}{m}$

b $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\binom{n}{m}2^{n-m}$

c $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$

证明：a $=\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}$ 1.9

$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m-2}$$ 1.9

$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-2}{m-2}+\binom{n-2}{m-3}$$ 1.9

$$=\text{L}\quad\text{L}$$ 1.9

$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\ldots+\binom{n-m+1}{m-m+1}+\binom{n-m+1}{m-m}$$
$$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\ldots+\binom{n-(m-1)}{m-(m-1)}+\binom{n-m}{m-m}+\binom{n-m}{m-m-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}+\binom{n-m}{-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k} \qquad \Theta \quad \binom{n-m}{-1}=0$$

$=$

b $\quad Q\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\frac{k!}{m!(k-m)!}\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-m-(k-m))!}$$

$$=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

$$\therefore\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}=\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}$$

$$=\binom{n}{m}2^{n-m} \qquad 1.14$$

c 1.13

$$(1-x)^{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{k}+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}x^{k}$$

$x=1$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right] \qquad 1.9$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}$$

$$=(-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}+(-1)^{m}\binom{n-1}{m}$$

$$=(-1)^{m}\binom{n-1}{m}+(-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}$$

$$=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

∴ $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$$

1.25

a $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$$

b $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

证明：a

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(n+k)!}{m!((n+k-m)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(n+k)!}{(n+k-m)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(n+k)!}{k!n!}\cdot\frac{n!}{(m-k)!(n-(m-k))!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}\binom{n}{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{n}\binom{n}{m-k} \qquad 1.8$$

$$=\sum_{j=m}^{0}\binom{n+m-j}{n}\binom{n}{j} \qquad j=m-k$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{k}{j} \qquad 1.14$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} \qquad 21$$

$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\binom{n-j}{k-j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}\binom{n-j}{n-k}=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-j}{n-k}$$

$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\binom{n}{j}\binom{m+n-j}{n} \qquad 1.29$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{n+m-j}{n}$$

∴ $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{k}$$

b 1.13

$$\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{2t}{1-t}\right)^{k}$$

$$\frac{1}{1-t}$$

$$\frac{1}{1-t}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^{k}\cdot t^{k}(1-t)^{-(k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^{k}\cdot t^{k}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{k+j}{j}(-t)^{j} \qquad 1.18$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{k}2^{k}\binom{k+j}{j}t^{k+j}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\binom{n}{k}2^{k}\binom{m}{m-k}t^{m} \qquad k+j=m$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\binom{m}{k}2^{k}t^{m}$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{k}t^{m} \qquad k>m \qquad \binom{m}{k}=0$$

$$\frac{1}{1-t}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^{n} \qquad \sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{k}t^{m} \qquad \text{A}$$

1.18

$$\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\cdot\binom{n+k}{k}\left(\frac{-2t}{1+t}\right)^{k}$$

$$\frac{1}{1+t}$$

$$\frac{1}{1+t}\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\cdot\binom{n+k}{k}(-2)^{k}t^{k}(1+t)^{-(k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\cdot\binom{n+k}{k}(-2)^{k}t^{k}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\binom{k+j}{j}t^{j}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\binom{n+k}{k}(-2)^k\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{k+j}{j}t^{k+j}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k}{k}(-2)^k(-1)^{m-k}\binom{m}{m-k}t^m$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(-2)^k(-1)^m\binom{m}{k}t^m$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k t^m \qquad \Theta \quad k>m \qquad \binom{m}{k}=0$$

$$\frac{1}{1-t}\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)} \qquad \sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k t^m \qquad \text{B}$$

$$\frac{1}{1-t}\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)^n=\frac{(1+t)^n}{(1-t)^{n+1}}=\frac{1}{1+t}\left(1-\frac{2t}{1+t}\right)^{-(n+1)}$$

A B A B

$$\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k t^m=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k t^m$$

t^m

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

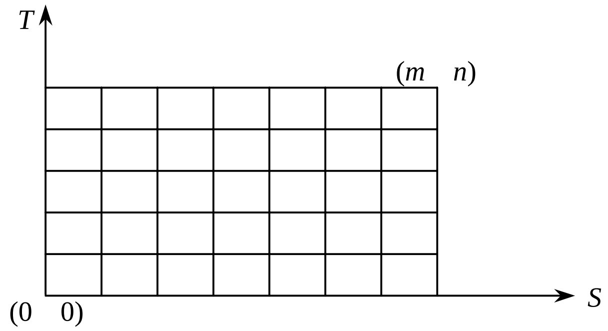
25.a

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m} \qquad \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=(-1)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k$$

1.26 1-1

$$S(0\ \ 0) \qquad T(m\ \ n) \qquad \binom{m+n}{m}$$



1-1

证明： S T E

N S T E N

m E n N E N $B=\{m\cdot E, n.N\}$

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}=\binom{m+n}{n}$$

$S(0\ \ 0)$ $T(m\ \ n)$ $\binom{m+n}{m}$

1.27 r k

$$\binom{-r}{k}=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}$$

证明： 1.6 $k\le 0$

$k>0$

$$\begin{aligned}\binom{-r}{k}&=\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!}\\&=\frac{(-1)^k r(r+1)\cdots(r+k-1)}{k!}\\&=\frac{(-1)^k(r+k-1)(r+k-2)\cdots r}{k!}\\&=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}\end{aligned}$$

第二章　鸽笼原理与 Ramsey 定理

一、内容提要

定理 2.1 $n+1$ n

定理 2.2 q_i $(i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)$ $q \geq q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ q

n i i q_i

推论 1 $n(r-1)+1$ n r

推论 2 $m_i(i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)}{n} > r-1$$

i $m_i \geq r$

定理 2.3 6

定理 2.4 10

定理 2.5 10

定理 2.6 20

定义 2.1 a b N a b a b

N a b Ramsey

定理 2.7

$$N(a\ \ b)=N(b\ \ a) \qquad 2.1$$

$$N(a\ \ 2)=a \qquad 2.2$$

定理 2.8 $a\ \ b \geq 2$ $N(a\ \ b)$

$$N(a\ \ b) \leq N(a-1\ \ b)+N(a\ \ b-1) \qquad 2.3$$

定理 2.9 $N(a-1\ \ b)$ $N(a\ \ b-1)$

$$N(a\ \ b) \leq N(a-1\ \ b)+N(a\ \ b-1)-1 \qquad 2.4$$

定理 2.1

$$N(3\ \ 3)=6 \qquad 2.5$$

$$N(3\ \ 4)=N(4\ \ 3)=9 \qquad 2.6$$

$$N(3\ \ 5) = N(5\ \ 3) = 14 \qquad 2.7$$

定义 2.2 n r c_1 c_2

L c_r N a_1 a_2 L a_r

c_1 a_1

c_2 a_2

L L

c_r a_r

N a_1 a_2 L a_r Ramsey

定理 2.11 1 a_1 a_2 a_3 $N(a_1\ \ a_2\ \ a_3)$

定理 2.12 r a_1 a_2 L $a_r \geq 2$ Ramsey N a_1 a_2 L a_r

定义 2.3 n r m

c_1 c_2 L c_m N a_1 a_2 L a_m r

a_1 r c_1

a_2 r c_2

L L

a_m r c_m

N a_1 a_2 L a_m r Ramsey

定理 2.13 r $a_1, a_2, \cdots, a_m \geq r$ Ramsey $N(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_m\ \ r)$

注意： r=1 2.13 —— 2.2 2.13

二、习题解答

2.1 A 50 15 18

证明：

方法一：

50>49=4 × 13−1 +1

1 13 13

13>=12 2−1 +1 2 13

2

方法二：

15 18 4 48

50>49=48 × 2–1 +1

1 2 2

2.2 a

$(a+0.1)$ 0.005

解： a $(a+0.005)$ $a+0.005$

$a+0.01$ $a+0.01$ $a+0.015$ ……

$a+0.095$ $a+0.1$ 20 20

21 0.005

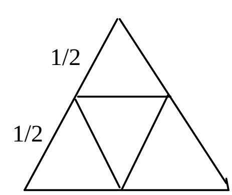
21

2.3 1 5 $\leq 1/2$

证明： 1 1/2 4 2-1 5

4 2

$\leq 1/2$



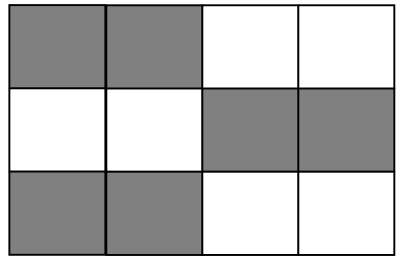
2-1

2.4 3×4 7 $\leq\sqrt{5}$

1

1

1



2-2

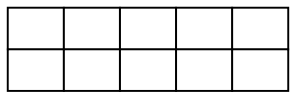
证明：　3×4　　6　1×2　　2-2

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$　　7　　6

$\leq\sqrt{5}$

$\leq\sqrt{5}$

2.5　　2-3



2-3

证明：　$2\times2=4$

4　　5　　5

2.6　　5　　3　　3

证明：　5　a_1　a_2　a_3　a_4　a_5　a_i　3　$b_i\left(i=1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\right)$

$0\leq b_i\leq2$　　0　1　2　　b_1　b_2　b_3　b_4　b_5

1

2

3

1　b_1　b_2　b_3　b_4　b_5　　5　　3

a_i　　3

2　b_1　b_2　b_3　b_4　b_5　　$5\geq2\times$　$3-1$　$+1$

1　　b_1　b_2　b_3　b_4　b_5

a_i　　3

3　　a_i　　3

5　　3　　3

2.7　　37　　60　　1

13

证明：　a_1　　a_2　　a_j　　……

j　　j=1　2　L　37

a_1　a_2　L　a_{37}　　1　　$a_1\geq1$　$a_{37}=60$

a_1+13　a_2+13　L　$a_{37}+13$　　$a_{37}+13=73$

74　a_1　a_2　L　a_{37}　a_1+13　a_2+13　L　$a_{37}+13$　[1　73]

74 a_1 a_2 $\cdots$ a_{37}

a_1+13 $\cdots$ $a_{37}+13$ i j $a_i=a_j+13$

$a_i-a_j=13$

$j+1$ $j+2$ $\cdots$ i 13

2.8 n a_1 a_2 $\cdots$ a_n n

n

证明：

方法一：

n 0 1 2 $\cdots$ $n-1$ n a_1 a_2 $\cdots$ a_n

n n n

n 0 1 2 $\cdots$ $n-1$ i $n-i$ n

方法二：

n

$$0<a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$$

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n$$

i j $1\le i<j\le n$ a_j-a_i a_j+a_i

n

$$b_i=a_n-a_i(i=1,2,\cdots,n-1) \qquad b_n=a_n+a_1$$

$b_i(i=1,2,\cdots,n)$ n n

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ $1\le c_i\le n-1$ $(i=1,2,\cdots,n)$

1 2 $\cdots$ $n-1$ $n-1$ $c_1,c_2,\cdots,c_n$ n

c_i,c_j $1\le i<j\le n$

$$c_i=c_j$$

$j=n$ $(a_n-a_i)-k_in=(a_n+a_1)-k_nn$ k_i k_n

$a_1+a_i=(k_n-k_i)n$

$1\le i<j\le n-1$ $(a_n-a_i)-k_in=(a_n-a_j)-k_jn$ k_i k_j

$a_j-a_i=(k_j-k_i)n$

2.9 a_1 a_2 $\cdots$ a_n 1 2 $\cdots$ n n

$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$

证明：

方法一：

n $1,2,\ldots,n$ $\frac{n+1}{2}$ a_1 a_2 $\cdots$ a_n $1,2,\ldots,n$

$2\times\frac{n+1}{2}=(n+1)$ n

方法二：

n $1,2,\ldots,n$ $\frac{n+1}{2}$ $\frac{n-1}{2}$

1 (a_1-1) (a_2-2) $\ldots$ (a_n-n) “ – ” “ – ”

a_1 a_2 $\cdots$ a_n $1,2,\ldots,n$ $1,2,\ldots,n$

n (a_1-1) (a_2-2) $\ldots$ (a_n-n)

“ ” “ ” $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$

2.10 52 100

证明： 52 a_1 a_2 $\cdots$ a_{52} 100 r_1 r_2 $\cdots$ r_{52}

100 0 1 2 $\ldots$ 99 100 51 $\{0\}$

$\{1\ \ 99\}$ $\{2\ \ 98\}$ $\ldots$ $\{49\ \ 51\}$ $\{50\}$ 51 52

52 51 r_i,r_j

$r_i=r_j$ $r_i+r_j=100$ a_i-a_j 100 a_i+a_j 100

2.11 N 4 4 ≤ 18

证明： 2.8 N 4 4 $\le N$ 3 4 $+N$ 4 3 =9+9=18

2.12 $N(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n)\le N(a_1-1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n)$

$$+N(a_1\ \ a_2-1\ \ \cdots\ \ a_n)$$

$$\ldots\ldots$$

$$+N(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n-1)$$

证明： $N_i=N(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_i-1\ \ \cdots\ \ a_n)$ $i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n$ $X=\sum_{i=1}^{n}N_i$ X

n C_i $i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n$ X P

P $X-1$

$$\begin{aligned} X-1 &= N_1+N_2+\ldots+N_n-1 \\ &\ge N_1+N_2+\ldots+N_n-(n-1) \\ &= N_1+N_2+\ldots+N_n-n+1 \end{aligned}$$

C_1 C_2 $\ldots$ C_n n $i\ (1\le i\le n)$

$X-1$ C_i N_i

C_i N_i N_i N_i $N_i=N$ a_1 a_2

L a_{i-1} a_i-1 a_{i+1} L a_n N_i

C_1 a_1

C_2 a_2

L L

C_{i-1} a_{i-1}

C_i a_i-1 P a_i-1 C_i

a_i a_i C_i a_i

C_{i+1} a_{i+1}

L L

C_n a_n

$N(a_1, a_2, ..., a_n)$

$$N\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\right) \le N\left(a_1-1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\right)+N\left(a_1 \quad a_2-1 \quad \cdots \quad a_n\right)+\text{L} \ +N\left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n-1\right)$$

2.13 $N\left(a \quad b\right.$

1

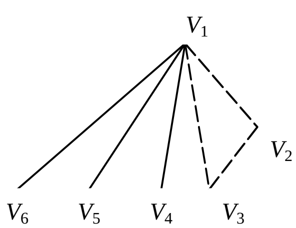
P b

P $N(a-1\ b)$
$N(a-1\ b)$ $a-1$ b
$a-1$ P P a
b

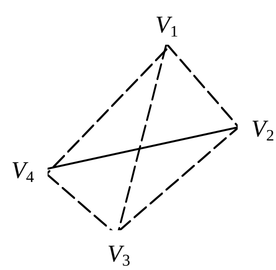
2.14 3

证明：

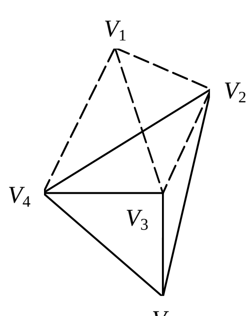
6 V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 6
2.3
V_1 V_2 V_3 2-4



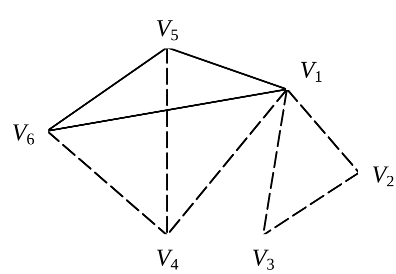
2-4



2-5



2-6



2-7

1 V_1V_4 V_1V_5 V_1V_6 2-4 V_4 V_5 V_6
V_5 V_6 V_1 V_5 V_6 V_4
V_5 V_6

2 V_1V_4 V_1V_5 V_1V_6 V_1V_4

V_2V_4 V_3V_4 V_3V_4 V_1 V_3 V_4

2-5

V_2V_4 V_3V_4 V_4

a V_4V_5 V_4V_6 V_4V_5 2-6

V_2V_5 V_3V_5 V_2 V_3 V_5 V_2 V_4

V_5 V_3 VV_4 V_5

b V_4V_5 V_4V_6 2-7 V_1 V_5 V_6

V_1V_5 V_1 V_4 V_5

6 6

7

3

2.15 17

证明： K_{17} V_1 V_1 16

16 2.2 1

6 16=3× 6–1 +1 6

K_6 K_6

2.3

2.16 $2n$ $2\binom{n}{3}$

证明： $2n$ $\binom{2n}{3}$

r_i i V_i $i=1$ 2 L $2n$ $2n-1$ V_i

$$r_i(2n-1-r_i)$$

$i=1$ 2 L $2n$ $2n$

$$\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

$2n$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

$2n$

$$\binom{2n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i)$$

$r_i(2n-1-r_i)$ $r_i = n$

$$\begin{aligned}\binom{2n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} r_i(2n-1-r_i) &\geq \binom{2n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} n(2n-1-n)\\ &=\binom{2n}{3}-n^2(n-1)\\ &=2\binom{n}{3}\end{aligned}$$

$$2\binom{n}{3}$$

注意：

2.17 m

m m

证明：

证法一：

$m(m-1)/2$ m n V_1 V_2 $\cdots$ V_n

V_iV_{i+1} $V_{i-1}V_i$ $V_{i+1}V_{i+2}$ $V_i = V_n$ $V_{i+1} = V_1, V_{i+2} = V_2$ V_iV_{i+1} $V_{i-1}V_i$ $V_{i+1}V_{i+2}$ V_iV_{i+1} $n=5$ 2-8

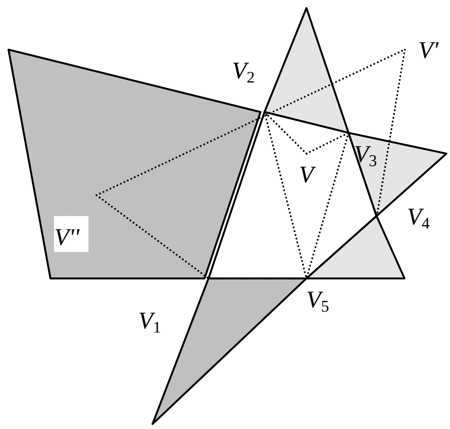
V_1 V_2 $\cdots$ V_n 2-8

2-8 V V'

2-8 V'' $n+1$ V_1 V_2 $\cdots$ V_n V'' V_1 V_2 $\cdots$ V_n

m V_1 V_2 $\cdots$ V_n m m

m m m



2-8

证法二：

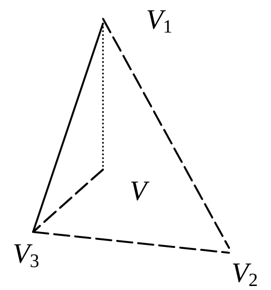
“ ”

m $\dfrac{m(m-1)}{2}$ k

V_1 V_2 $\cdots$ V_k $k=m$ $k<m$ V

V V_1 V_2 $\cdots$ V_k $\dbinom{k}{3}$ 2-9 V V_1 V_2 V_3

$k=m$



2-9

第三章　容 斥 原 理

一、内容提要

A_i　$i=1$　2　$\cdots$　m　$\subseteq S$　A_i　S　p_i

$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$　S　p_1　p_2　$\cdots$　p_m　$\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}$　S

p_1　p_2　$\cdots$　p_m

定理 3.1　S　p_1　p_2　$\cdots$　p_m

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right| &= |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| \\
&\quad - \sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

3.5　i　j　i　$j=1$　2　$\cdots$　m　$i\neq j$

i　j　k　i　j　$k=1$　2　$\cdots$　m　$i\neq j\neq k$　$\cdots\cdots$

推论　S　p_1　p_2　$\cdots$　p_m

$$ _1\cup\ _2\cup\cdots\cup \qquad \underset{1}{\ } \qquad \cap \qquad |\ \cap\ \cap\ | $$

$$ +\cdots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m| \tag{3.6}$$

定理 3.2　$n\geq 1$

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) \tag{3.7}$$

定理 3.3

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}) \tag{3.8}$$

定理 3.4　$n\geq 1$

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\cdot 1! \tag{3.9}$$

定理 3.5　$n\geq 2$

$$Q_n = D_n + D_{n-1} \qquad 3.10$$

定义 3.1 C $r_0(C)=1$ n C

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k$$

C

定理 3.6 C C A C_i C A

C_e C A

$$R(C)=xR(C_i)+R(C_e) \qquad 3.11$$

定义 3.2 C_1 C_2 C_1 C_2

定理 3.7 C C_1 C_2

$$R(C)=R(C_1)R(C_2) \qquad 3.12$$

定理 3.8 n

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots \pm r_n \qquad 3.13$$

r_i i $i=1$ 2 $\cdots$ n

二、习题解答

3.1 1 10000 3 4 5

解 S 1 10000 A_1 S 3

A_2 S 4 A_3 S 5 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

S 3 4 5

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \qquad 3.5$$

$$|S| = 10000$$

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{10000}{3} \right\rfloor = 3333$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{10000}{4} \right\rfloor = 2500$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{5} \right\rfloor = 2000$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{10000}{3\times 4} \right\rfloor = 833$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{3\times 5} \right\rfloor = 666$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{4\times 5} \right\rfloor = 500$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{10000}{3\times 4\times 5} \right\rfloor = 166$$

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 10000 - \quad 3333+2500+2000 \quad + \quad 833+666+500 \quad -166 = 4000$$

1　10000　　3　4　5　　4000

3.2　1　1000

解：　$S = \{1 \quad 2 \quad \cdots \quad 1000\}$　A_1　1　1000　$\overline{A_1}$

1　1000　A_2　1　1000　$\overline{A_2}$

1　1000

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$　1　1000

3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \qquad 3.5$$

$$|S| = 1000$$

$$|A_1| = \left\lfloor \sqrt{1000} \right\rfloor = 31$$

$$|A_2| = \left\lfloor \sqrt[3]{1000} \right\rfloor = 10$$

$A_1 \cap A_2$　1　1000

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \sqrt[6]{1000} \right\rfloor = 3$$

3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = 1000 - \quad 31+10 \quad +3 = 962$$

1　1000　　962

3.3　120

12　20　16　28

48 56 16

解： S A_1 S A_2 S

A_3 S $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$

3.5

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad 3.5$$

$|S|=120$ $|A_1|=48$ $|A_2|=56$

20

$|A_1\cap A_2|=20+12=32$ $|A_1\cap A_3|=16$ $|A_2\cap A_3|=28$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=12$

3.5

16=120− 48+56+$|A_3|$ + 32+16+28 −12

$|A_3|=64$

64

3.4 10 a a b b c c d d e e

解： S 10

A_1 S a A_2 S b

A_3 S c A_4 S d

A_5 S e $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}$

3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{5}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-\cdots-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5| \qquad 3.5$$

1.4

$$|S|=\frac{10!}{2!2!2!2!2!}$$

$$|A_i|=\frac{9!}{1!2!2!2!2!}\ (i=1\ 2\ \cdots\ 5)$$

$$|A_i\cap A_j|=\frac{8!}{1!1!2!2!2!}\ (i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ i\neq j)$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\frac{7!}{1!1!1!2!2!}\ (i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ k=1,2,\cdots,5;\ i\neq j\neq k)$$

$$\left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l\right| = \frac{6!}{1!1!1!1!2!}$$

$$(i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 5\quad j=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 5\quad k=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 5\quad l=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ 5\quad i\neq j\neq k\neq l)$$

$$\left|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\right| = \frac{5!}{1!1!1!1!1!}$$

3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right|$$

$$= \frac{10!}{2!2!2!2!2!} - \binom{5}{1}\frac{9!}{2!2!2!2!} + \binom{5}{2}\frac{8!}{2!2!2!} - \binom{5}{3}\frac{7!}{2!2!} + \binom{5}{4}\frac{6!}{2!} - \binom{5}{5}5!$$

$$=113400-5\times 22680+10\times 5040-10\times 1260+5\times 360-120$$

$$=39480$$

10 a a b b c c d d e e

39480

3.5 $B=\{3\cdot a\ \ 4\cdot b\ \ 2\cdot c\}$

abbbbcaca *abbbacacb*

解： S B 1.4

$$|S| = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

A_1 S 3 a A_2 S 4 b

A_3 S 2 c $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{3}|A_i| + \sum_{i\neq j}\left|A_i \cap A_j\right| - \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| \qquad 3.5$$

1.4

$$|A_1| = \frac{7!}{4!2!} = 105 \quad |A_2| = \frac{6!}{3!2!} = 60 \quad |A_3| = \frac{8!}{4!3!} = 280$$

$$\left|A_1 \cap A_2\right| = 4!/2! = 12 \quad \left|A_1 \cap A_3\right| = 6!/4! = 30$$

$$\left|A_2 \cap A_3\right| = 5!/3! = 20 \quad \left|A_1 \cap A_2 \cap A_3\right| = 3! = 6$$

3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right| = 1260-105-60-280+12+30+20-6=871$$

871

3.6 5 1 1

解： S 5 P_i 5 i

1 0 A_i S P_i $i=1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$

5 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}$ S 1 1 3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{5}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+\cdots-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5| \qquad 3.5$$

$$|S|=2^5$$

A_1 5 1 1 2 0 3 4 5

x x 0 1

A_1 10xxx

$$|A_1|=2^3$$

$$|A_2|=2^2 \quad |A_3|=2^2 \quad |A_4|=2^2 \quad |A_5|=2^3$$

$A_1\cap A_2$ 5 1 1 2 1

3 0 4 5 x $A_1\cap A_2$ 110xx

$$|A_1\cap A_2|=0$$

$A_1\cap A_3$ 5 1 1 3 1 2

0 4 0 5 x $A_1\cap A_2$ 1010x

$$|A_1\cap A_3|=2$$

$$|A_1\cap A_4|=1,|A_1\cap A_5|=2 \quad |A_2\cap A_3|=0,|A_2\cap A_4|=1,|A_2\cap A_5|=1$$

$$|A_3\cap A_4|=0,|A_3\cap A_5|=2 \quad |A_4\cap A_5|=0$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k| \quad (i=1\ 2\ \cdots\ 5 \quad j=1\ 2\ \cdots\ 5 \quad k=1\ 2\ \cdots\ 5 \quad i\neq j\neq k)$$

$|A_1\cap A_3\cap A_5|=1$ 0

$$|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l|=0\,(i=1,2,\cdots,5;\ j=1,2,\cdots,5;\ k=1,2,\cdots,5;\ l=1,2,\cdots,5;\ i\neq j\neq k\neq l)$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|=0$$

3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\right|=2^5-(2^3+2^2+2^2+2^2+2^3)+9-1+0-0=12$$

5 1 1 12

3.7 26 a b c $\cdots$ z john paul smite

解： S 26 A_1 S john A_2 S paul A_3 S smite

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ S john paul smite

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \qquad 3.5$$

$$|S| = 26! \quad |A_1| = 23! \quad |A_2| = 23! \quad |A_3| = 22!$$

$$|A_1 \cap A_2| = 20! \quad |A_1 \cap A_3| = 19! \quad |A_2 \cap A_3| = 19!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 16!$$

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 26! - 2 \cdot 23! - 22! + 20! + 2 \cdot 19! - 16!$$

26 a b c $\cdots$ z john paul smite

$26! - 2 \cdot 23! - 22! + 20! + 2 \cdot 19! - 16!$

3.8 n 3 8 9 0 4

解 0 4 1 2 3 5 6 7 8 9 8 n

S 8 n $|S| = 8^n$

P_1 n 3

P_2 n 8

P_3 n 9

A_i S P_i $i=1$ 2 3

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ S 3 8 9 n

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^{3} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \qquad 3.5$$

$$|A_1| = 7^n, |A_2| = 7^n, |A_3| = 7^n$$

$$|A_1 \cap A_2| = 6^n, |A_1 \cap A_3| = 6^n, |A_2 \cap A_3| = 6^n$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5^n$$

3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right| = 8^n - 3\cdot 7^n + 3\cdot 6^n - 5^n$$

n $8^n - 3\times 7^n + 3\times 6^n - 5^n$

注意： §4.3 9

3.9 25 14 12 6

5 6

解： S 25 F S B

S P S $\overline{B}\cap\overline{F}\cap\overline{P}$

S 3.5

$$\left|\overline{B}\cap\overline{F}\cap\overline{P}\right| = |S|-|B|-|F|-|P|+|B\cap F|+|B\cap P|+|F\cap P|-|B\cap F\cap P| \quad 3.5$$

$$|S|=25\quad |F|=14\quad |P|=12\quad |B|=6\quad |P\cap F|=6\quad |B\cap F|=5\quad |P\cap F\cap B|=2$$

6 5

5

$$|B\cap P| = 6-5+2=3$$

3.5

$$\left|\overline{B}\cap\overline{F}\cap\overline{P}\right| = |S|-|B|-|F|-|P|+|B\cap F|+|B\cap P|+|F\cap P|-|B\cap F\cap P|$$
$$=25-6-14-12+5+3+6-2$$
$$=5$$

5

3.10 $B=\{3\cdot a\ \ 4\cdot b\ \ 5\cdot c\}$ 10–

解： $B'=\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$ B' 10– S

1.11

$$|S| = F\quad 3\quad 10 \quad = \binom{3+10-1}{10} = 66$$

p_1 S 4 a p_2 S 5

b p_3 S 6 c A_i i=1 2 3

S p_i i=1 2 3 B 10– S

p_1 p_2 p_3 3.5

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = |S| - \sum_{i=1}^{3}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| - |A_1\cap A_2\cap A_3| \quad 3.5$$

$|S|=66$ 3.5

A_1　　10–　　4　a　　4　a

B'　　6–　　B'　　6–　　4　a

A_1　　10–　　A_1　10–　　B'　6–

$$|A_1| = F\quad 3\quad 6\quad = \binom{3+6-1}{6} = 28$$

$$|A_2| = F\quad 3\quad 5\quad = \binom{3+5-1}{5} = 21$$

$$|A_3| = F\quad 3\quad 4\quad = \binom{3+4-1}{4} = 15$$

$$|A_1 \cap A_2| = F\quad 3\quad 1\quad = \binom{3+1-1}{1} = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| = F\quad 3\quad 0\quad = \binom{3+0-1}{0} = 1$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0 \qquad 5+6=11>10$$

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = 0$$

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66-\quad 28+21+15\quad +\quad 3+1+0\quad -0$$

$$=6$$

10–　　6

注意：

3.11　　$B=\{\infty\cdot a\ \ 3\cdot b\ \ 5\cdot c\ \ 7\cdot d\}$　10–

解：　　$B' = \{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c, \infty\cdot d\}$　　B'　　10–

S　　1.11

$$|S| = F\quad 4\quad 10\quad = \binom{4+10-1}{10} = 286$$

p_1　S　　∞　a　　p_2　S　　4

b　　p_3　S　　6　c　　p_4　S

8　d　　A_i　i=1　2　3　4　　S　　p_i　i=1　2　3

4　　B　10–　　S　　p_1　p_2　p_3　p_4

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j|-\sum_{i\neq j\neq k}|A_i \cap A_j \cap A_k|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \qquad 3.5$$

$|S|=286$ 3.5

A_1 10– ∞ a

$$|A_1|=0$$

A_2 10– 4 b 4 b

B' 6– B' 6– 4 b A_2

10– A_2 10– B' 6–

$$|A_2|=F\quad 4\quad 6\quad =\binom{4+6-1}{6}=84$$

$$|A_3|=F\quad 4\quad 4\quad =\binom{4+4-1}{4}=35$$

$$|A_4|=\mathrm{F}\quad 4\quad 2\quad =\binom{4+2-1}{2}=10$$

$|A_1 \cap A_i|=0$ $\infty>10$ i=2 3 4

$$|A_2 \cap A_3|=\mathrm{F}\quad 4\quad 0\quad =\binom{4+0-1}{0}=1$$

$|A_2 \cap A_4|=0$ 4+8=12>10

$|A_3 \cap A_4|=0$

$|A_1 \cap A_i \cap A_j|=0$ $\infty>10$ i=2 3 4 j=2 3 4 $i\neq j$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4|=0$ 4+6+8=18>10

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|=0$ $\infty>10$

3.5

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|=286-\quad 0+84+35+10\quad +\quad 0+0+0+1+0+0\quad -\quad 0+0+0+0\quad +0$$

$$=158$$

B 10 158

3.12 $x_1+x_2+x_3=14$ 8

解： $y_i=x_i-1$ $i=1\ 2\ 3$ $y_1+y_2+y_3=11$ 7

§1.3　8　$B=\{7\cdot a\ \ 7\cdot b\ \ 7\cdot c\}$　11–

$B'=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$　B'　11–　S

1.11

$$|S|=F\quad 3\quad 11\quad =\binom{3+11-1}{11}=78$$

p_1　S　8　a　p_2　S　8

b　p_3　S　8　c　A_i　i=1　2　3

S　p_i　i=1　2　3　B　11–　S

p_1　p_2　p_3　3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|+\sum\left|A_i\cap A_j\right|-\left|A_1\cap A_2\cap A_3\right| \qquad 3.5$$

$|S|$=78　3.5

A_1　11–　8　a　8　a

B'　3–　B'　3–　8　a

A_1　11–　A_1　11–　B'　3–

$$|A_1|=\mathrm{F}\quad 3\quad 3\quad =\binom{3+3-1}{3}=10$$

$$|A_2|=\mathrm{F}\quad 3\quad 3\quad =\binom{3+3-1}{3}=10$$

$$|A_3|=\mathrm{F}\quad 3\quad 3\quad =\binom{3+3-1}{3}=10$$

$|A_1\cap A_2|=0$　8+8=16>11

$|A_1\cap A_3|=0$

$|A_2\cap A_3|=0$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

3.5

$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right|$=78–　10+10+10　+　0+0+0　–0=48

$x_1+x_2+x_3=14$　8　48

3.13　1　2　$\cdots$　8

解： S $\{1\ 2\ \cdots\ 8\}$

A_1 S 2

A_2 S 4

A_3 S 6

A_4 S 8

$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$ S

3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \qquad 3.5$$

$$|S|=8!\quad |A_1|=7!\quad |A_i|=7!(i=1\ 2\ 3\ 4)$$

$A_1\cap A_2$ 2 4

$$|A_1\cap A_2|=6!$$

$$|A_i\cap A_j|=6!\quad (i\ \ j=1\ 2\ 3\ 4\quad i\neq j)$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=5!\quad i\quad j\quad k=1\quad 2\quad 3\quad 4\quad i\neq j\neq k$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=4!$$

3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\right|=8!-\binom{4}{1}7!+\binom{4}{2}6!-\binom{4}{3}5!+\binom{4}{4}4!=24024$$

1 2 $\cdots$ 8

24024

注意：

3.14 1 2 $\cdots$ 8 4

解：4 $\binom{8}{4}$ 4

D_4 3.2 4

$$\binom{8}{4}D_4=630$$

3.15 9 $a\quad a\quad a\quad b\quad b\quad b\quad c\quad c\quad c$

解： 9 1 2 $\cdots$ 9

p_1 1 2

p_2 2 3

$\cdots$ $\cdots$

p_8 8 9

S 9 A_i p_i

$i=1$ 2 $\cdots$ 8 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_8}$

3.5

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_8}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{8}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| - \sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots + (-1)^8|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_8| \qquad 3.5$$

3.5

1.4

$$|S| = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680$$

A_1 1 2 $\{3a, 3b, 3c\}$

aa bb cc aa

bb cc 7 $abbbccc$ $\frac{7!}{3!3!1!}$

1 2

$$|A_1| = 3\frac{7!}{3!3!1!}$$

A_2 2 3

aa 2 3 7 $abbbccc$

1 2 3 $\cdots$ 6

4 5 6 7 8 9

$$|A_2| = 3\frac{7!}{3!3!1!}$$

$$|A_i| = 3\frac{7!}{3!3!1!} \quad i=3 \quad 4 \quad \cdots \quad 8$$

$$\sum_{i=1}^{8}|A_i| = 8\times3\times\frac{7!}{3!3!1!} = 3360$$

$$\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|$$

$A_1 \cap A_2$ 1 2 aa bb cc aa

2 3 $A_1 \cap A_2$

1 2 3 a $\{3b, 3c\}$

$\{3b, 3c\}$

$$\frac{6!}{3!3!}$$

$$|A_1 \cap A_2| = 3\,\frac{6!}{3!3!}$$

$A_i \cap A_j$ i j $A_1 \cap A_3$ $A_1 \cap A_3$ 1

2 3 4 aa bb cc 2

P 3 2 $=6$ aa bb $\{1a$ $1b$

$3c\}$ $\{1a$ $1b$ $3c\}$

$$\frac{5!}{3!}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 6 \times \frac{5!}{3!}$$

$\sum_{i \neq j}^{8} |A_i \cap A_j| \,(j > i+1 \quad i = 1 \quad 3 \quad \cdots \quad 6)$ i j $7-i$

$A_i \cap A_j$ i j $6+5+4+\cdots+1 = 21$

$$\sum_{i \neq j}^{8} |A_i \cap A_j| = (1+2+\cdots+6) \times 6 \times \frac{5!}{3!} = 21 \times 6 \times \frac{5!}{3!} \quad (j \neq i+1 \quad i=1 \quad 3 \quad \cdots \quad 6)$$

$$\sum_{i \neq j}^{8} |A_i \cap A_j| = 7 \times 3 \times \frac{6!}{3!3!} + 21 \times 6 \times \frac{5!}{3!} = 420 + 2520 = 2940$$

$$\sum_{i \neq j \neq k}^{8} |A_i \cap A_j \cap A_k| = 30 \times (3 \times 2 \times \frac{4!}{3!}) + 20 \times \quad 3! \times 3! \quad = 1440$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l}^{8} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 10 \times (3 \times 2 \times \frac{3!}{3!}) + 30 \times (3! \times 2!) = 420$$

$$\sum_{i \neq j \neq k \neq l \neq m}^{8} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| = 12 \times (3! \times 1!) = 72$$

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n}^{8} \left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n\right| = 1\times(3!\times 0!) = 6$$

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n\neq p}^{8} \left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n \cap A_p\right| = 0$$

$$\sum_{i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n\neq p\neq q}^{8} \left|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n \cap A_p \cap A_q\right| = 0$$

3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_8}\right| = 1680-3360+2940-1440+420-72+6=174$$

9 $a\quad a\quad a\quad b\quad b\quad b\quad c\quad c\quad c$

174

3.16 D_n n

证明： D_{2k-1} D_{2k} $k=1\ 2\ 3\ \cdots$

$k=1$ $D_1=0$ $D_2=1$

$k=n$ D_{2n-1} D_{2n}

$k=n+1$ 3.3 3.8

$$D_{2(n+1)-1} = D_{2n+1} = (2n+1-1)(D_{2n}+D_{2n-1}) = 2n(D_{2n}+D_{2n-1})$$

$$D_{2(n+1)} = D_{2n+2} = (2n+2-1)(D_{2n+1}+D_{2n})$$

3.17 $n\geq 2$

$$Q_n = D_n + D_{n-1}$$

证明： 3.4 3.9

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-1)!\frac{n-k}{k!}$$

$$=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k!}$$

3.2 3.7

$$D_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\qquad D_{n-1} = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

$$D_n + D_{n-1} = (n-1)!\left[n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n}{k!}\right] + (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

$$=(n-1)!\left[n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n}{k!}\right] + (n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}$$

$$=(n-1)!\left[n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}(n-k)\right]$$

$$=(n-1)!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n-k}{k!}=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{k!}=Q_n$$

$Q_n=D_n+D_{n-1}$

3.18 n $5n$ 5

$$(120)^n\left[(2n)!-\binom{n}{1}(2n-1)!+\binom{n}{2}(2n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}n!\right]$$

证明： 5 5

2 3

第一步： 5 2 3 $2n$

$(5!)^n=120^n$

第二步： x_i i 2 y_i i 3

x_iy_i y_ix_i i 5

123 45 = 12 345

y_ix_i $(i=1\ 2\ \cdots\ n)$ A_i $2n$ y_ix_i

$(i=1\ 2\ \cdots\ n)$

$$|A_i|=(2n-1)!\ i=1\ 2\ \cdots\ n$$

$$|A_i \cap A_j|=(2n-2)!\ 1\le i<j\le n$$

L L

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=(2n-k)!\ k=1\ 2\ \cdots\ n$$

S $2n$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=(2n)!-\binom{n}{1}(2n-1)!+\binom{n}{2}(2n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}n!$$

$$(120)^n\cdot\left[(2n)!-\binom{n}{1}(2n-1)!+\binom{n}{2}(2n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}n!\right]$$

3.19 a $S=\{1\ 2\ 3\ \cdots\ n\}$ k

$\binom{n-k+1}{k}$

证明： $\{a_1\ a_2\ \cdots\ a_k\}$ $S=\{1\ 2\ 3\ \cdots\ n\}$ k

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k \le n \quad 2$$

$$1 \le a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_k - (k-1) \le n - (k-1)$$

$\{a_1 \ a_2 - 1 \ \cdots \ a_k - k + 1\}$ $S' = \{1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n - k + 1\}$ k

$\{a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_k\}$ $\{a_1 \ a_2 - 1 \ \cdots \ a_k - k + 1\}$

$S = \{1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n\}$ k $S' = \{1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n - k + 1\}$

k $\binom{n-k+1}{k}$

3.19 b n

k $\frac{n}{k}\binom{n-k+1}{k-1}$

证明： A $n-3$ $1 \ 2 \ \cdots$

$n-3$ 1 $n-3$ $n-3$ $k-1$ A

k $3.19a$

$$\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{n-k+1}{k-1}$$

n n $n\binom{n-k+1}{k-1}$ k

k k k $n\binom{n-k+1}{k-1}$ k

k $\frac{n}{k}\binom{n-k+1}{k}$

注意本题也可以等价描述为： $S = \{1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n\}$

1 n k $\frac{n}{k}\binom{n-k+1}{k}$

3.20 $n(n \ge 3)$

解： n 1.6 $n-1$

$1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ n$

S $|S|=n!$

R_1 1 1 L_1 1 1

R_2 2 2 L_2 2 2

……

R_n n n L_n n n

注意， L_2 R_2

R_3 ……

A_i R_i $i=1$ 2 $\cdots$ n

A_{n+i} L_i $i=1$ 2 $\cdots$ n

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{2n}$ 3.5

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n}}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{2n}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j| - \sum_{i\neq j\neq k}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{2n}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{2n}| \quad 3.5$$

$2n$ $2n$ A_1 A_{n+1} A_2 A_{n+2} $\cdots$ A_n A_{2n}

1 2 3 4 $\cdots$ $2n-1$ $2n$ 2n 1

A_{2n} A_1

3.19b $2n$

$S=\{1,2,\cdots,n,\cdots,2n\}$ 1 $2n$ k

k

$$\frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

$k=1$ $n-1$

$n-1$

$$\sum_{i=1}^{2n}|A_i|=\frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1} \quad n-1$$

$$\sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j|=\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2} \quad n-2$$

$\cdots$ $\cdots$

$$\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \right| = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \quad n-k \qquad k=1 \quad 2 \quad \cdots \quad 2n$$

注意： $k=n+1 \quad n+2 \quad \cdots \quad 2n$

$$\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \right| = 0$$

$k=n+1 \quad n+2 \quad \cdots \quad 2n$ $\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \right|$

0 $n+1$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}$$

1 1 1

1 1 2 2

3.5

$$\left| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n}} \right| = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} \quad n-\mathrm{k}$$

$$(n-1)!$$

$$(n-1)! \left| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n}} \right| = (n-1)! \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

注意：

3.21 n n $1\ 2\ 3 \cdots n$

i i

a

b m

解： §3.3

$e^{-1} \approx D_n/n!$ n $D_n/n!$ e^{-1} $D_n/n!$ $1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$

$1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$

e^{-1}

a

$$1 - D_n/n! \approx 1 - e^{-1}$$

b m $1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$ m $\binom{n}{m}$

$n-m$ $n-m$ D_{n-m}

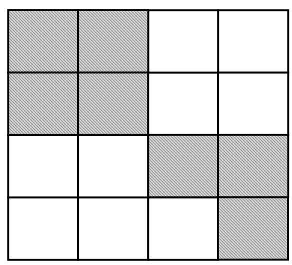
$$\binom{n}{m}D_{n-m} \approx \frac{n!}{m!}e^{-1}$$

m

$$\binom{n}{m}D_{n-m}/\mathrm{n}! \approx \frac{e^{-1}}{m!}$$

3.22

解： 3-1



3-1

C 3.11

(

第四章　母　函　数

一、内容提要

定义 4.1　$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$　$\{a_n\}$

$$f\quad x\quad = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad 4.1$$

$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$

定义 4.2　$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$

$$f_e(x) = a_0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \qquad 4.2$$

$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$

定理 4.1　$f(x)$　$f_e(x)$　$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} f_e(sx) \mathrm{d}s$$

定义 4.3　$A\quad x$　$B\quad x$　$C\quad x$　$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$　$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$　$(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$　$C\quad x\quad = A\quad x\quad + B\quad x$　i　$c_i = a_i + b_i$（$i = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots$）

定义 4.4　$A\quad x$　$B\quad x$　$C\quad x$　$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$　$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$　$(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$

$C\quad x\quad = A\quad x\quad B\quad x$　i　$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$（$i = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots$）

定义 4.5　$A\quad x$　$B\quad x$　$C\quad x$　$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$　$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$　$(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$

$C\quad x\quad = A\quad x\quad + B\quad x$　i　$c_i = a_i + b_i$（$i = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots$）

定义 4.6　$A\quad x$　$B\quad x$　$C\quad x$　$(a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots)$　$(b_0, b_1, \cdots, b_r, \cdots)$　$(c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdots)$

$C\quad x\quad = A\quad x\quad B\quad x$　i

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k b_{i-k} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, r, \cdots)$$

注意：

$$(1+x)(1+x)\mathrm{L}\ (1+x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

n r $1+x$ n

x^r $\binom{n}{r}$

$1+x$

$$1+x+x^2+\mathrm{L}\quad {}^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

n r $1+x+x^2+\mathrm{L}$ n

x^r $\binom{n+r-1}{r}=F$ n r

$1+x+x^2+x^3+\mathrm{L}$

L L

$$1+x\quad {}^n=\sum_{r=0}^{n}p(n,r)\frac{x^r}{r!}$$

n r $1+x$ n

$\frac{x^r}{r!}$ p n r

$1+x$ = $1+x^1/1$

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\mathrm{L}\ +\frac{x^r}{r!}+\mathrm{L}\quad {}^n=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}$$

n r

$1+x+\frac{x^2}{2!}+\mathrm{L}\ +\frac{x^r}{r!}+\mathrm{L}$ n $\frac{x^r}{r!}$ n^r

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\mathrm{L}\ +\frac{x^r}{r!}+\mathrm{L}$$

L r L L

定理 4.2 a b c L 0

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$$

x^n n a b c L $P(n)$

定义 4.7

1 $P_k(n)$ n 1 2 L k

2 $P_o(n)$ n

3 $P_d(n)$ n

4 $P_t(n)$ n 2 1 2 4 8 L

推论 1 $\{P_3(n)\}$ $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$

推论 2 $\{P_k(n)\}$ $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$

推论 3 $P(n)$ $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$

推论 4 $\{P_o(n)\}$ $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots}$

定理 4.3 a b c L 0

$$(1+x^a)(1+x^b)(1+x^c)\cdots$$

x^n n a b c L a b c L

推论 1 $\{P_d(n)\}$

$1+x$ $1+x^2$ $1+x^3$ $1+x^4$ L

推论 2 $\{P_t(n)\}$

$1+x$ $1+x^2$ $1+x^4$ $1+x^8$ L

定理 4.4 （Euler） n

$$P_o(n)=P_d(n)$$

定理 4.5 （Sylvester n

$$P_t(n)=1$$

定理 4.6 n

$$P(n)<e^{3\sqrt{n}}$$

定理 4.7 n m n m

定理 4.8 n m n

m

二、习题解答

4.1

a $(1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots)$

解： $(1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots)$ $f \quad x$ 4.1

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-x)^i \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

b $\left(\binom{c}{0}\ -\binom{c}{1}\ \binom{c}{2}\ \cdots\ -1^{\,n}\binom{c}{n}\ \cdots\right)$ c

解： $\left(\binom{c}{0}\ -\binom{c}{1}\ \binom{c}{2}\ \cdots\ -1^{\,n}\binom{c}{n}\ \cdots\right)$ $f \quad x$ 4.1

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{c}{0}-\binom{c}{1}x+\binom{c}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\binom{c}{n}x^n+\cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{c}{i}x^i \\ &= (1-x)^c \end{aligned}$$

c $(c^0, c^1, c^2, \cdots, c^n, \cdots)$ c

解： $(c^0, c^1, c^2, \cdots, c^n, \cdots)$ $f \quad x$ 4.1

$$\begin{aligned} f(x) &= c^0+cx+\cdots+c^n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}c^i x^i \\ &= \frac{1}{1-cx} \end{aligned}$$

d $\left(\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,(-1)^n,\cdots\right)$

解： $\left(\frac{1}{0!},\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\cdots,(-1)^n,\cdots\right)$ $f \quad x$ 4.1

$$f(x)=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\text{L}\ +(-1)^n\frac{1}{n!}x^n+\text{L}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^i}{i!}$$
$$=e^{-x}$$

e （$a_0,a_1,a_2,\text{L}\ ,a_n,\text{L}$） $a_n=\binom{n}{2}$

解： （$a_0,a_1,a_2,\text{L}\ ,a_n,\text{L}$） f x 4.1

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\text{L}\ +a_nx^n+\text{L}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\quad(\qquad a_i=\binom{i}{2})$$
$$=\frac{x^2}{(1-x)^3}$$

4.2

a $(1!,2!,3!,\text{L}\ ,n!,\text{L}\ )$

解： $(1!,2!,3!,\text{L}\ ,n!,\text{L}\ )$ $f_e(x)$ 4.2

$$f_e(x)=1!+2!\frac{1}{1!}x+3!\frac{1}{2!}x^2+\text{L}\ +(n+1)!\frac{1}{n!}x^n+\text{L}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)!\frac{x^i}{i!}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}$$

b $(0!,1!,2!,3!,\text{L}\ ,n!,\text{L}\ )$

解： $(0!,1!,2!,3!,\text{L}\ ,n!,\text{L}\ )$ $f_e(x)$ 4.2

$$f_e(x)\ =0+1!\frac{x}{1!}+2!\frac{x}{2!}+\text{L}\ ++n!\frac{x}{n!}+\text{L}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$$
$$=\frac{1}{1-x}$$

c （$c_0,c_1,c_2,\text{L}\ ,c_n,\text{L}$） （$c_0=1,c_n=c(c-1)\text{L}\ (c-n+1),n=1,2,3,\text{L}$）

解： （$c_0,c_1,c_2,\text{L}\ ,c_n,\text{L}$） $f_e(x)$ 4.2

$$f_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c(c-1)\text{L}\ (c-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{c}{n}x^n$$

$$=\quad 1+x^{\ c}$$

d $\quad (1, 2, 2^2\cdot 2!, 2^3, 3!, \cdots, n!, \cdots)$

解： $\quad (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots) \qquad f_e(x) \qquad 4.2$

$$f_e(x)=2^0+2^1\cdot 1!\frac{x}{1!}+2^2\cdot 2!\frac{x^2}{2!}+\cdots+2^n\cdot n!\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}2^i x^i$$

$$=\frac{1}{1-2x}$$

4.3 $\quad A(x), B(x) \qquad (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \quad (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots)$

a $\quad b_n = ka_n, k \qquad B(x)=kA(x)$

b $\quad b_n=\begin{cases}0, & n<m\\ a_{n-m}, & n\ge m\end{cases} \qquad B(x)=x^m A(x)$

c $\quad b_n=a_{n+m} \qquad B(x)=\dfrac{A(x)-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n}{x^m}$

d $\quad b_n=na_n \qquad B(x)=xA'(x)$

证明：

a $\quad B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}ka_n x^n=k\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=kA(x)$

b $\quad B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{m-1}b_n x^n+\sum_{n=m}^{\infty}b_n x^n=0+\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}x^n=x^m\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}x^{n-m}$

$$=x^m\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=x^m A(x)$$

c $\quad B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}x^n=\frac{1}{x^m}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}x^{n+m}$

$$=\frac{1}{x^m}\sum_{n=m}^{\infty}a_n x^n=\frac{1}{x^m}\left(\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n+\sum_{n=m}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n\right)$$

$$=\frac{1}{x^m}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n\right)$$

$$=\frac{A(x)-\sum_{n=0}^{m-1}a_n x^n}{x^m}$$

d $\quad B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n$

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad A'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$$

$$xA'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^n$$

$$B(x)=xA'(x)$$

4.4 $(1,b,b^2,\mathrm{L}\ ,b^n,\mathrm{L}\ )$ $\dfrac{1}{1-bx}$ $\dfrac{b^k x^k}{(1-bx)^{k+1}}$

解：$\Theta\ \dfrac{1}{1-bx}=\sum_{n=0}^{\infty}b^n x^n$

x

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{b}{(1-bx)^2}=\sum_{n-1}^{\infty}nb^n x^{n-1}$$

x

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{2b^2}{(1-bx)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)b^n x^{n-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{3\cdot 2b^3}{(1-bx)^4}=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)b^n x^{n-3}$$

L　L

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-bx}\right)=\frac{k!2b^k}{(1-bx)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)(n-2)\mathrm{L}\,(n-k+1)b^n x^{n-k}$$

$$\Rightarrow\frac{b^k}{(1-bx)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!k!}b^n x^{n-k}$$

x^k

$$\frac{b^k x^k}{(1-bx)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}b^n x^n$$

4.1 $\left\{\binom{n}{k}b^n\right\}$ $n=0,1,\mathrm{L}\ ,\infty$

4.5 A B C n A

解： n A a_n $\{a_n\}$

$$f(x)=(1+x^2+x^4+\mathrm{L}\ )(1+x+x^2+\mathrm{L}\ )^2$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{(1+x)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^3}+\frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{1-x}+\frac{\frac{1}{8}}{1+x}$$

1.22

$$1- \quad -rz \quad ^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^k z^k$$

x

$$f \quad x \quad =\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\binom{n+2}{2}+\frac{1}{4}(\,n+1)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}(\,-1)^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\ \frac{n+1 \quad n+3}{4}+\frac{1+ \quad -1^{\ n}}{8} \quad x^n$$

x^n

$$a_n=\frac{n+1 \quad n+3}{4}+\frac{1+ \quad -1^{\ n}}{8}$$

4.6 $B=\{\infty\cdot a,3\cdot b,5\cdot c,7\cdot d,\}$ 10–

B n– a_n $\{a_n\}$

$$f(x)=(1+x+x^2+\text{L}\ )(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

$$\times(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x}\cdot\frac{1-x^8}{1-x}$$

$$= \quad 1-x^4-x^6-x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}-x^{18} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k}{3}x^k$$

$$a_{10}=\binom{3+10}{3}-\binom{3+6}{3}-\binom{3+4}{3}-\binom{3+2}{3}+\binom{3+0}{3}$$

$$=286-84-35-10+1=158$$

B 10– 158

注意：

4.7 n r

a_r $\{a_n\}$

$$f(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^n$$
$$=x^n\quad 1+x^2+x^4+\cdots\quad{}^n$$
$$=\frac{x^n}{(1-x^2)^n}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{2k+n}\qquad 1.22$$
$$=\sum_{r=n}^{\infty}\binom{n+\frac{r-n}{2}-1}{\frac{r-n}{2}}x^r\qquad 2k+n=r$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}F\left(n,\frac{r-n}{2}\right)x^r$$

∴ $a_r=F(n\quad\frac{r-n}{2})$

$a_r=F(n\quad\frac{r-n}{2})$

4.8 n r 3

解： n r 3

a_r $\{a_r\}$

$$f(x)=(x^3+x^4+x^5+\cdots)^n$$
$$=x^{3n}\quad 1+x+x^2+\cdots)^n$$
$$=x^{3n}\quad 1-x)^{-n}$$
$$=x^{3n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k\qquad 1.22$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{k+3n}$$
$$=\sum_{k=3n}^{\infty}\binom{n+(k-3n)-1}{k-3n}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+(k-3n)-1}{k-3n}x^k\qquad \sum_{k=0}^{3n-1}\binom{n+(k-3n)-1}{k-3n}x^k=0$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}F(n,k-3n)\ x^k$$

∴ $a_r=F(n,k-3n)$

$a_r=F(n,k-3n)$

4.9 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\infty\cdot b_3,\infty\cdot b_4,\infty\cdot b_5,\infty\cdot b_6\}$ a_r B

$r-$ $(a_0,a_1,\cdots,a_r,\cdots)$

a b_i 3 i=1 2 3 4 5 6

b b_1 b_2 1 b_3 b_4 2 b_5 b_6 4

c b_1 b_6 b_3 3 b_4 5

d b_i i 1 2 3 4 5 6 8

解：

a （$a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots$）

$$f(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)^6$$

$$= \frac{1}{(1 - x^3)^6}$$

b （$a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots$）

$$f(x) = (1 + x)^2 (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^2 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2$$

$$= (1 + x)^2 \frac{x^4}{(1 - x)^2} \frac{(1 - x^5)^2}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{x^4 (1 - x^5)^2 (1 + x)^2}{(1 - x)^4}$$

c （$a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots$）

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)$$

$$\times (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2$$

$$= \frac{1}{1 - x^2} \frac{x}{1 - x^2} \frac{1}{1 - x^3} \frac{1}{1 - x^5} \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1 + x)^2 (1 - x^3)(1 - x^5)(1 - x)^4}$$

d （$a_0, a_1, \cdots, a_r, \cdots$）

$$f \quad x \quad = \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^8 \quad 6$$

4.10 1 2 3 4 5 6

r

a_r

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots + x^6)^2$$

x^r a_r

4.11 1 2 3 5 7

r a_r （$a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots$）

解： $B = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3, \infty \cdot 5, \infty \cdot 7\}$ r–

（$a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots$）

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+\cdots)\ 1\quad x^7\quad x^{14}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)}$$

4.12

解： a_r

（$a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots$）

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

x x^r a_r

4.13 $1\times n$

解： A B C D

$B=\{\infty\cdot A,\infty\cdot B,\infty\cdot C,\infty\cdot D\}$ n– A D

a_n $a_0=1$ （$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_r,\cdots$）

$$f_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2$$
$$=\frac{1}{2^2}(e^x+e^{-x})^2e^{2x}$$
$$=\frac{1}{2^2}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{2x}$$
$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^nx^n}{n!}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!}+1)$$
$$=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}(4^n+2^{n+1})\frac{x^n}{n!}+1)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+2^{n+1}}{4}\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^n+2^{n+1}}{4})\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\begin{cases}4^n+2^{n+1},n\geq 1\\ \quad 1\qquad\ ,n=0\end{cases}$$

4.14 2 3 4 5 6 7 r 3 5 2 4

r

解： r a_r $(a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$

$$f_e(x) = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)^2(x+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^2$$
$$=\frac{1}{2^2}\left(e^x+e^{-x}\right)^2\left(e^x-1\right)^2 e^{2x}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\left(6^r-2\cdot5^r+3\cdot4^r-4\cdot3^r+3\cdot2^r-2\right)\frac{x^r}{r!}+1$$

$$a_r=\begin{cases}0, & r=0\\ \frac{1}{4}(6^r-2\cdot5^r+3\cdot4^r-4\cdot3^r+3\cdot2^r-2), & r>0\end{cases}$$

4.15 a_r $B=\{4\cdot A, 1\cdot B, 2\cdot C, 1\cdot D, 2\cdot E,\}$ r–
$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$

解： 4.2 $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$

$$f_e(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2!})$$

4.16 $B=\{\infty\cdot1, \infty\cdot2, \infty\cdot3\}$ 0 r

解： r a_r $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r, \cdots)$

$$f_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}e^{3x}$$
$$=\frac{1}{2}(e^{4x}+e^{2x})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(4^k+2^k)\frac{x^k}{k!}$$

$a_r=\frac{1}{2}(4^r+2^r)$

$B=\{\infty\cdot1, \infty\cdot2, \infty\cdot3\}$ 0 r $\frac{1}{2}(4^r+2^r)$

4.17 4.3 4.8

a．定理 4.3 a b c L 0 $1+x^{a}$ $1+x^{b}$ $1+x^{c}$ L x^{n} n a b c L a b c L

b. 定理 4.8 n m n m

证明：

a. 4.2 $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\mathrm{L}}$ x^n n a b c L P n $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\mathrm{L}}$ $\{P$ n $\}$

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\mathrm{L}}=(1+x^a+x^{2a}+\mathrm{L}\ )\ (1+x^b+x^{2b}+\mathrm{L}\ )\ (1+x^c+x^{2c}+\mathrm{L}\ )$$

a b c L $i\geq 2$ x^{ia} x^{ib} x^{ic} 0

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\mathrm{L}}= \quad 1+x^a \quad 1+x^b \quad 1+x^c \quad \mathrm{L}$$

$1+x^{a}$ $1+x^{b}$ $1+x^{c}$ L x^{n} n a b c L a b c L

b n m Ferrers 4-1 n=24=6+6+5+4+3 5 6 4-2 n=24=5+5+5+4+3+2 6 5

m n m n m n m n m

```
. . . . . .          . . . . .
. . . . . .          . . . . .
. . . . .            . . . . .
. . . .              . . . .
. . .                . . .
                     . .
```

4-1 4-2

4.18 n m $n-m(m+1)/2$ m $(n>m(m+1)/2)$

证明： $n=a_1+a_2+\mathrm{L}\ +a_m$ $a_1>a_2>\mathrm{L}\ >a_m\geq 1$

$$n-(1+2+\cdots+m)=(a_1-m)+(a_2-(m-1))+\cdots+(a_m-1)$$

$$n-\ m(m-1)/2=(a_1-m)+(a_2-(m-1))+\cdots+(a_m-1)$$

$a_1-m\geq a_2-(m-1)\geq\cdots\geq a_m-1\geq 0$

$n>\dfrac{m(m+1)}{2}$ 0 m 0

n m $n-m(m+1)/2$

m

4.19

a §1.5 7

b $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}=\begin{cases}0 & k=n+1\\ \dbinom{n+1}{k} & 0\leq k\leq n\end{cases}$

c $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}=2^n$

证明：

a §4.1 1 $\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$$

$\left(\binom{m}{0},\binom{m}{1},\binom{m}{2},\cdots,\binom{m}{m}\right)$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k=(1+x)^m$$

4.4

$(1+x)^{m+n}$ $\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right\}$

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{p=0}^{m+n}\quad\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\quad x^p$$

1.13

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}x^p$$

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p}$$

b　　1.4.2　$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$

$1+x$　n

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{k}x^n$$

$$(1+x)^{n-1}=\binom{n-1}{0}x+\binom{n-1}{1}x^2+\cdots+\binom{n-1}{k-1}x^k+\cdots+\binom{n-1}{n-1}x^n$$

$$x^2(1+x)^{n-2}=\binom{n-2}{0}x^2+\cdots+\binom{n-2}{k-2}x^k+\cdots+\binom{n-2}{n-2}x^n$$

$$\vdots$$

$$x^k(1+x)^{n-k}=\binom{n-k}{0}x^k+\cdots+\binom{n-k}{n-k}x^n$$

x^k　　$\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}$

$$f(x)=(1+x)^n+x(1+x)^{n-1}+x^2(1+x)^{n-2}+\cdots+x^k(1+x)^{n-k}$$

$$=x^n\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^n+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k}\right]$$

$$g(x)=f(x)+x^n\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-1}+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^0\right]$$

$$g(x)=x^n\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^n+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-1}+\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n-k-2}+\cdots+\left(\frac{1+x}{x}\right)^0\right]$$

$$=x^n\left[\frac{1-(\frac{1+x}{x})^{n+1}}{1-\frac{1+x}{x}}\right]$$

$$=\quad 1+x\qquad{}^{n+1}-x^{n+1}$$

$g\quad x \qquad x^k \qquad f\quad x \qquad x^k \qquad g\quad x$

x^k

$$\begin{cases} \binom{n+1}{k} & 0 \le k \le n \\ \\ 0 & k = n+1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i} = \begin{cases} \binom{n+1}{k} & 0 \le k \le n \\ \\ 0 & k = n+1 \end{cases}$$

c. 1.7 1.12

$$\left[(1+x)^2-1\right]^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+x)^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\sum_{i=0}^{2(n-k)}\binom{2n-2k}{i}x^i\right]$$

X=−1 Y= $1+x$ ^{2} 1.12 1.13

$x^n \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}$

$$(1+2x+x^2-1)^n = (2x+x^2)^n = x^n(2+x)^n = x^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\cdot 2^{n-i}$$

$x^n \qquad 2^n \qquad x^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}\cdot x^i \qquad x^n \qquad i=0$

$\binom{n}{0}\cdot 2^{n-0} = 2^n$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

4.20 $n\quad k$

a　$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{q}$　　n　　$q=n$　n　　$q=n-1$

b　$\binom{2n}{0}-\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$

c　$\binom{n}{0}\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}$

d　$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+2^n\binom{n}{n}$

解：

a　$\because\ (1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$

$$(1-x)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n$$

$$\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{q}x^q$$

$$q=\begin{cases} n & n \\ n-1 & n \end{cases}$$

$$\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}\Big|_{x=1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{q}=\begin{cases} 2^{n-1} & n>0 \\ 1 & n=0 \end{cases}$$

b.　　1.4.2　　$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$

1+x　^{n}　　$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$

$$x^{2n}(1-x)^{2n}=\binom{2n}{0}x^{2n}-\binom{2n}{1}x^{2n+1}+\binom{2n}{2}x^{2n+2}-\cdots+\binom{2n}{2n}x^{4n}$$

$$x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}=\binom{2n-1}{0}x^{2n-1}-\binom{2n-1}{1}x^{2n}+\binom{2n-1}{2}x^{2n+1}-\cdots-\binom{2n-1}{2n-1}x^{4n-2}$$

$$x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}=\binom{2n-2}{0}x^{2n-2}-\binom{2n-2}{1}x^{2n-1}+\binom{2n-2}{2}x^{2n}-\cdots+\binom{2n-2}{2n-2}x^{4n-4}$$

$$\vdots$$

$$x^n(1-x)^n=\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}x^{n+1}+\binom{n}{2}x^{n+2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}$$

x^{2n}

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}$

$$A(x)=x^{2n}(1-x)^{2n}+x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}+x^{2n-2}(1-x)^{2n-2}+\cdots+x^n(1-x)^n$$

$A \quad x \qquad x^{2n} \qquad a_{2n} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=a_{2n}$

a_{2n}

$A(x) \qquad x^{2n} \qquad B(x)$

$$\begin{aligned}
B(x)&=A(x)+x^{n-1}(1-x)^{n-1}+x^{n-2}(1-x)^{n-2}+\cdots+x^0(1-x)^0\\
&=\frac{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}}{1-x(1-x)}=\frac{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}}{1-x+x^2}\cdot\frac{1+x}{1+x}\\
&=\{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}\}\cdot\frac{1+x}{1+x^3}\\
&=\{1-\left[x(1-x)\right]^{2n+1}\}\cdot(1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\cdots+(-1)^k x^{3k}+\cdots)
\end{aligned}$$

$B \quad x \qquad A \quad x \qquad x^{2n} \qquad a_{2n}=\begin{cases}1, & 2n\equiv 0(\bmod 3)\\ -1, & 2n\equiv 1(\bmod 3)\\ 0, & 2n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}=\begin{cases}1, & 2n\equiv 0(\bmod 3)\\ -1, & 2n\equiv 1(\bmod 3)\\ 0, & 2n\equiv 2(\bmod 3)\end{cases}$$

c
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-k)!(k-i)!i!}\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{k!}{(k-i)!i!}\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{k}\binom{k}{i}=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\\
&=\binom{n}{k}(1-x)^k\Big|_{x=1}\\
&=\begin{cases}1, k=0\\ 0, k>0\end{cases}
\end{aligned}$$

d $\Theta\ (1+2x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}2x+\binom{n}{2}(2x)^2+\mathrm{L}\ +\binom{n}{n}(2x)^n$

$x=1$

$$3^n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\mathrm{L}\ +2^n\binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\mathrm{L}\ +2^n\binom{n}{n}=3^n$$

第五章　递 归 关 系

一、内容提要

定义 5.1　$(a_0, a_1, \mathrm{L}, a_r, \mathrm{L})$　a_r

$a_i(0 \le i < r)$

1. 常系数线性齐次递归关系的解法

5.3　5.5

定义 5.2　$(a_0, a_1, \mathrm{L}, a_n, \mathrm{L})$　k+1

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \mathrm{L} + b_k a_{n-k} \quad (n \ge k) \qquad 5.12$$

$(a_0, a_1, \mathrm{L}, a_n, \mathrm{L})$　k　$b_i(i = 1, 2, \mathrm{L}, k)$

$b_k \ne 0$

定义 5.3　5.12

$$x^k - b_1 x^{k-1} - b_2 x^{k-2} - \mathrm{L} - b_k = 0 \qquad 5.13$$

5.12　5.13　5.12

定理 5.1　$q \ne 0$, $a_n = q^n$　5.12　q　5.13

定义 5.4　5.12

$$a_0 = h_0, a_1 = h_1, \mathrm{L}, a_{k-1} = h_{k-1} \qquad 5.14$$

5.14　5.12

定理 5.2　$q_1, q_2, \mathrm{L}, q_k$　5.12　$c_1, c_2, \mathrm{L}, c_k$

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \mathrm{L} + c_k q_k^n \qquad 5.15$$

5.12

定义 5.5　a_n　5.12

$c_1, c_2, \mathrm{L}, c_k$　a_n　5.15　5.15　5.12

定理 5.3　$q_1, q_2, \cdots, q_k$　5.12

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_k q_k^n$$

5.12

定理 5.4　5.12　5.13

$$x^k - b_1 x^{k-1} - b_2 x^{k-2} - \cdots - b_k = 0$$

m　q　$q^n, nq^n, \cdots, nm^{-1}q^n$　5.12

定理 5.5　$q_1, q_2, \cdots, q_t$　5.13　$m_1, m_2, \cdots, m_t$

$$\sum_{i=1}^{t} m_i = k$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} q_i^n \qquad 5.17$$

5.12

定义 5.6　$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$　$k+1$

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} + f(n) \qquad 5.18$$

$(a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$　k　$b_i(i=1, 2, \cdots, k)$

$b_k \neq 0$，$f(n) \neq 0$，$n \geq k$

定义 5.7　5.18　$f(n) = 0$

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k} \qquad 5.19$$

5.18

定理 5.6　$\overline{a_n}$　5.18　$a_n^* = \sum_{i=1}^{k} c_i q_i^n$　$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} q_i^n$　5.18

5.19

$$a_n = \overline{a_n} + a_n^*$$

5.18

2. 常系数线性非齐次递归关系的解法

5.6　5.18

5.19

5.18

$f \quad n$

1 $f(n)$ n k

a 1 5.18

5.19 5.18

$$\overline{a_n} = A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k \qquad 5.20$$

$A_0, A_1, \cdots, A_k$

b 1 5.18

5.19 m $(m \geq 1)$

$$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k n^m) \qquad 5.21$$

$A_0, A_1, \cdots, A_k$

2 $f(n)$ β^n

β 5.18 5.19

$$\overline{a_n} = A \cdot \beta^n \qquad 5.22$$

A

c β 5.18

5.19 k $(k \geq 1)$

$$\overline{a_n} = (A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_k)\beta^n \qquad 5.23$$

3. 迭代法与归纳法求解递归关系

迭代法

归纳法

4. 用母函数法求解递归关系的方法

$f \quad x$ $a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n \quad \cdots$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad 5.29$$

a_n 5.29 5.29 $f \quad x$

a_n 5.29

$$g \quad f \quad x \qquad = 0 \qquad (5.30)$$

5.30 $f \quad x$

$f \quad x$ a_n

Stirling

定义 5.8 $[x]_n = x(x-1)(x-2)\mathrm{L}\ (x-n+1)$

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,\ k)x^k \qquad 5.32$$

$S_1(n,\ k)$ Stirling $S_1(n,\ k)$ $[x]_n$ x^k

$n<k$ $S_1(n,\ k)=0$

定理 5.7 Stirling

$$\begin{cases} S_1(n+1,\ k) = S_1(n,\ k-1) - nS_1(n,\ k) & (n \geq 0,\ k>0) \\ S_1(0,\ 0) = 1, S_1(n,\ 0) = 0 & (n>0) \end{cases} \qquad 5.33$$

定义 5.9

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,\ k)[x]_k \qquad 5.34$$

$S_2(n,k)$ Stirling $n<k$ $S_2(n,\ k)=0$

定理 5.8 Stirling

$$\begin{cases} S_2(n+1 \quad k) = S_2(n \quad k-1) + kS_2(n \quad k) & (n \geq 0 \quad k>0) \\ S_2(0 \quad 0) = 1 \quad S_2(n \quad 0) = 0 & (n>0) \end{cases} \qquad 5.35$$

定理 5.9 Stirling $S_2(n,\ k)$ n k

定理 5.10 Stirling $S_2(n,\ k)$

1 $S_2(n,\ n)=1$

$S_2(n,\ k)=0$ $n<k$ $k=0<n$

2 $S_2(n,\ 2)=2^{n-1}-1$

3 $S_2(n,\ n-1) = \binom{n}{2}$

定义 5.10

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,\ k) \qquad 5.36$$

B_n Bell $B_0=1$

定理 5.11 Bell B_n

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

二、习题解答

5.1 $1\times n$ a_n

a_n

解： a_n $1\times n$

1 $n-1$

a_{n-1}

2 $n-2$

a_{n-2}

$a_1=2$ $a_2=3$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+a_{n-2}\,(n\geq 3) \\ a_1=2，a_2=3 \end{cases}$$

2

$$x^2-x-1=0$$

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

5.3 $a_n=c_1q_1^n+c_2q_2^n$

$a_1=2$ $a_2=3$

$$\begin{cases} c_1\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\times\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=2 \\ c_1\times(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2+c_2\times(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2=3 \end{cases}$$

$$c_1=\frac{5+3\sqrt{5}}{10} \qquad c_2=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$$

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}] \end{aligned}$$

5.2 a_n 0 n 0 1 2

a_n

解： n

1 1 $n-1$ 0 a_{n-1}

2 2 $n-1$ 0 a_{n-1}

3 0

1 $n-2$ 0 a_{n-2}

2 $n-2$ 0 a_{n-2}

$a_1=3$ $a_2=8$

a_n

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n \geq 3) \\ a_1 = 3, a_2 = 8 \end{cases}$$

$$x^2-2x-2=0$$

$$x_1=1+\sqrt{3} \quad x_2=1-\sqrt{3}$$

5.3

$$a_n=c_1 \quad 1+\sqrt{3} \quad {}^n+c_2 \quad 1-\sqrt{3} \quad {}^n$$

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3}) + c_2(1-\sqrt{3}) = 3 \\ c_1(1+\sqrt{3})^2 + c_2(1-\sqrt{3})^2 = 8 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \qquad c_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{6}\left[\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(3-2\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right]$$

5.3 n

解: F_n

1 $n-1$ $n-1$ F_{n-1}

2 $n-2$ $n-2$ F_{n-2}

$F_1=1$ $F_2=2$

F_n

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 3) \\ F_1 = 1, F_2 = 2 \end{cases}$$

2

§5.2 1

$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n$ F_1 F_2 L F_n L F x

$$F(x)=F_1x+F_2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n$$
$$=x+2x^2+x\sum_{n=3}^{\infty}F_{n-1}x^{n-1}+x^2\sum_{n=3}^{\infty}F_{n-2}x^{n-2}$$
$$=x+2x^2+x(\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n-F_1x)+x^2\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$$
$$=x+2x^2+xF(x)-x^2+x^2\cdot F(x)$$

$$F \quad x \quad = \quad x+x^2 \quad / \quad 1-x-x^2 \quad =[1/ \quad 1-x-x^2 \quad]-1$$

$1-x-x^2=0$ 2

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F(x)=(\frac{A}{1-x_1x}+\frac{B}{1-x_2x})-1$$

$$A=\frac{x_1}{\sqrt{5}} \quad B=\frac{-x_2}{\sqrt{5}}$$

$$F \quad x \quad =(\frac{x_1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}x_1^nx^n-\frac{x_2}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}x_2^nx^n)-1$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x_1^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{x_2^{n+1}}{\sqrt{5}})x^n-1$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n+1}-x_2^{n+1})$$

x_1 x_2

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} \quad n\geq 1$$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}}$

5.4 n

n ?

解： n a_n

1 $n-1$ a_{n-1}

2 $n-2$ a_{n-2}

3 $n-2$ a_{n-2}

$a_1=1$　$a_2=3$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} (n \geq 3) \\ a_1 = 1\text{，} a_2 = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1\text{，}\ x_2 = 2$$

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$$

$$\begin{cases} c_1 \times (-1) + c_2 \times 2 = 1 \\ c_1 \times (-1)^2 + c_2 \times 2^2 = 3 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{3}\text{，}\ c_2 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + 2^n \times \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{3}(-1)^n + 2^n \times \frac{2}{3}$ n

5.5

a $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} & (n \geq 1) \\ a_0 = 3 \end{cases}$

解：

$$a_n = 3a_{n-1} = 3^2 a_{n-2} = 3^3 a_{n-3} = \cdots = 3^n a_0 = 3^{n+1}$$

b $\begin{cases} a_n = 4a_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$

解： n n=2k+1

$$a_n = a_{2k+1} = 4 \cdot a_{2k-1} = 4^2 \cdot a_{2k-3} = \cdots = 4^i \cdot a_{2k-(2i-1)} = \cdots = 4^i \cdot a_1$$

$2k-(2i-1)=1$

$$i = k \qquad k = \frac{n-1}{2}$$

$$a_n = 4^{\frac{n-1}{2}} \times a_1 = 2^{n-1}$$

n n=2k

$$a_n = a_{2k} = 4 \cdot a_{2k-2} = 4^2 \cdot a_{2k-4} = \cdots = 4^i \cdot a_{2k-(2i)} = \cdots = 4^i \cdot a_0$$

$2k-2i=0$

$$i = k$$

$$a_n = 4^{\frac{n}{2}} \cdot a_0 = 0$$

$$a_n = \begin{cases} 0 \quad , \quad n \\ 2^{n-1} \quad , \quad n \end{cases}$$

c $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 1,\ a_1 = 4 \end{cases}$

解：

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

$$a_n = (c_1 + c_2 n)2^n$$

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 \times 0) \times 1 = 1 \\ (c_1 + c_2) \times 2^1 = 4 \end{cases}$$

$$c_1 = 1，c_2 = 1$$

$a_n = (1+n)2^n$

d $\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 16a_{n-2} - 20a_{n-3} & (n \geq 3) \\ a_0 = 0，a_1 = 1，a_2 = -1 \end{cases}$

解：

$$q^3 + q^2 - 16q + 20 = 0$$

$$q_1 = q_2 = 2，q_3 = -5$$

$$a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3(-5)^n$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ (c_1 + c_2) \times 2 - 5c_3 = 1 \\ (c_1 + 2c_2) \times 4 + 25c_3 = -1 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{5}{49}，c_2 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}，c_3 = -\frac{5}{49}$$

$$a_n = (\frac{5}{49} + \frac{1}{7}n) \times 2^n - \frac{5}{49} \times (-5)^n$$

e $\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n & (n \geq 2) \\ a_0 = 2，a_1 = 7 \end{cases}$

解：

$$q^2 - 7q + 12 = 0$$

$$q_1 = 3，q_2 = 4$$

$$a_n = c_1 3^n + c_2 4^n$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + 4c_2 = 7 \end{cases}$$

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$a_n = 3^n + 4^n$$

f $\begin{cases} a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} \quad (n \geq 3) \\ a_0 = 1，a_1 = 0，a_2 = 0 \end{cases}$

解：

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1=1 \quad x_2=1 \quad x_3=-2$$

$$a_n = (c_1 + c_2 n)1^n + c_3(-2)^n$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{8}{9} \quad c_2 = -\frac{6}{9} \quad c_3 = \frac{1}{9}$$

$a_n = \frac{8}{9} - \frac{6}{9}n + \frac{1}{9}(-2)^n$

5.6

a $\begin{cases} a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3 \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 0，a_1 = 1 \end{cases}$

解：

$$a_n^* = -6a_{n-1}^* - 9a_{n-2}^*$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$q_1 = q_2 = -3$$

5.3

$$a_n^* = \left(c_1 + c_2 n\right) \cdot \left(-3\right)^n$$

$f \quad n \quad =3 \qquad 1$

$$\overline{a_n} = A$$

$\overline{a}_n = A$

$$A = -6A - 9A + 3$$

$$A = \frac{3}{16}$$

5.6 $$a_n = \overline{a} + a^* = \frac{3}{16} + \left(c_1 + c_2 n\right)\ (-3)^n$$

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{3}{16} \\ c_2 = -\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{3}{16} + \left(-\frac{3}{16} - \frac{1}{12}n\right)\ (\text{-}3)^n$$

b $\begin{cases} a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3n^2 \quad (n \geq 2) \\ a_0 = 0\ ,\ a_1 = 1 \end{cases}$

解：

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = -2，x_2 = -3$$

5.3 $$a_n^* = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n$$

$f \quad n \quad = 3n^2 \qquad 1$

$$\overline{a_n} = A_0 n^2 + A_1 n + A_2$$

$$A_0 = \frac{1}{4}，A_1 = \frac{17}{24}，A_2 = \frac{115}{288}$$

$$a_n = a_n^* + \overline{a_n} = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{115}{288} = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{17}{24} + \dfrac{115}{288} = 1 \end{cases}$$

$$c_1=\frac{-14}{9},\ c_2=\frac{37}{32}$$

$$a_n=a_n^*+\overline{a_n}=\frac{-14}{9}(-2)^n+\frac{37}{32}(-3)^n+\frac{1}{4}n^2+\frac{17}{24}n+\frac{115}{288}$$

c $\begin{cases} a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}+3^n \quad (n\ge 2) \\ a_0=0, a_1=1 \end{cases}$

解：

$$x^2-7x+10=0$$

$$x_1=5 \quad x_2=2$$

$$a_n^*=5^n c_1+2^n c_2$$

$f\quad n\quad =3^n \qquad 3 \qquad \overline{a}_n=A\times 3^n \qquad \overline{a}_n=A\times 3^n$

$$A\times 3^n=7A\times 3^{n-1}-10A\times 3^{n-2}+3^n$$

$$A=-\frac{9}{2}$$

$$a_n=a_n^*+\overline{a}_n=5^n c_1+2^n c_2-\frac{9}{2}3^n$$

$$\begin{cases} c_1+c_2-\dfrac{9}{2}=0 \\ 5c_1+2c_2-\dfrac{9}{2}\times 3=1 \end{cases}$$

$$c_1=11/6 \quad c_2=8/3$$

$$a_n=\frac{11}{6}5^n+\frac{8}{3}2^n-\frac{9}{2}3^n$$

d $\begin{cases} a_n=-5a_{n-1}-6a_{n-2}+42\times 4^n \quad (n\ge 2) \\ a_0=0 \quad a_1=1 \end{cases}$

解：

$$x^2+5x+6=0$$

$$x_1=-2 \quad x_2=-3$$

$$a_n^* = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n$$

$f \quad n \quad =42\times 4^n \qquad 4$

$$\overline{a_n} = A\times 4^n$$

$\overline{a_n} = A\times 4^n$

$$A4^n+5A4^{n-1}+6A4^{n-2}=42\times 4^n$$

$$A=16$$

$$a_n=a^*+\overline{a}_n = c_1 \quad -2 \quad ^n+c_2 \quad -3 \quad ^n+16\times 4^n$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+16=0 \\ -2c_1-3c_2+64=1 \end{cases}$$

$$c_1=-111 \quad c_2=95$$

$$a_n=-111\times \quad -2 \quad ^n+95\times \quad -3 \quad ^n+16\times 4^n$$

e $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3\times 2^n \quad (n\geq 2) \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$

解：

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_1=2 \quad x_2=3$$

$$a_n^* = c_1 2^n + c_2 3^n$$

$f \quad n \quad =3\times 2^n \qquad 2 \qquad\qquad 1$

$$\overline{a_n} = (A_n + B)2^n$$

$$A=-6$$

$$a_n=a^*+\overline{a}_n=c_1 2^n+c_2 3^n-6n\times 2^n$$

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1+3c_2-12=1 \end{cases}$$

$$c_1=-13 \quad c_2=13$$

$$a_n=-13\times 2^n+13\times 3^n-6n\times 2^n$$

5.7 §5.1 Fibonacci 5.6 5.7 5.8 5.9

证明：

1 $$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2}-1$$ 5.6

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1}+F_n = F_n+F_{n-1}+F_n \\ &= F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+\cdots+F_1+F_0+F_1 \end{aligned}$$

$$F_n+F_{n-1}+F_{n-2}+\cdots+F_0=\sum_{i=0}^{n}F_i=F_{n+2}-F_1=F_{n+2}-1$$

2 $$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}-1$$ 5.7

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{2n-1}+F_{2n-2} \\ &= F_{2n-1}+F_{2n-3}+F_{2n-4} \\ &= F_{2n-1}+F_{2n-3}+F_{2n-5}+\cdots+F_1+F_0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}F_{2i-1}=F_{2n}-1$$

3 $$\sum_{i=0}^{n}F_i^2=F_n\cdot F_{n+1}$$ 5.8

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$$

$$\begin{aligned} F_n\cdot F_{n+1} &= F_n(F_n+F_{n-1})=F_n^2+F_n\cdot F_{n-1} \\ &= F_n^2+F_{n-1}^2+\cdots+F_1^2+F_1\cdot F_0 \\ &= F_n^2+F_{n-1}^2+\cdots+F_1^2+F_0^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n}F_i^2=F_n\cdot F_{n+1}$$

4 $$F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2=(-1)^{n+1}$$ 5.9

$$F_n=((1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1})/(2^{n+1}\cdot\sqrt{5})$$

$$\begin{aligned}
&F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2\\
&=\{[(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}]/(2^{n+2}\cdot\sqrt{5})\}\{[(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}]/(2^{n}\cdot\sqrt{5})\}\\
&\quad-\{[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}]/(2^{n+1}\cdot\sqrt{5})\}^2\\
&=\frac{1}{5\times 2^{2n+2}}[(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}][(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}]\\
&\quad-\frac{1}{5\times 2^{2n+2}}[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}]^2\\
&=(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

5.8

a $\begin{cases}a_n=(n+2)a_{n-1} & (n\ge 1)\\ a_0=2\end{cases}$

$a_0=2$

$a_1=$ 1+2 $a_0=2\times 3=$ 1+2

$a_2=$ 2+2 $a_1=2\times 3\times 4=$ 2+2

$a_3=$ 3+2 $a_2=2\times 3\times 4\times 5=$ 3+2

$a_n=$ $n+2$!

$a_n=$ $n+2$!

$n=1$ 2 3

$n=k$

$a_k=$ $k+2$!

$n=k+1$

$a_{k+1}=$ $k+1+2$ a_k

$=$ $k+1+2$ $k+2$!

$=$ $k+1+2$!

$n=k+1$

b $\begin{cases}a_n=ca_{n-1}+b\\ a_0=b\end{cases}$ b c

$a_n=ca_{n-1}+b=c$ $ca_{n-2}+b$ $+b$

$=c^2+cb+b$

$$=c^3 a_{n-3}+c^2b+cb+b$$

L L

$$=c^n a_0+c^{n-1}b+\mathrm{L}\ +cb+b$$

$$=b\quad c^n+c^{n-1}+\mathrm{L}\ +c^1+c^0$$

$$=\begin{cases}\dfrac{b(c^{n+1}-1)}{(c-1)} & c\neq 1\\ (n+1)b & c=1\end{cases}$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{b(c^{n+1}\text{-}1)}{(c\text{-}1)} & c\neq 1\\ (n+1)b & \mathrm{c}=1\end{cases}$$

c $\begin{cases}a_n=a_{n-1}-n+3 & (n\geq 1)\\ a_0=2\end{cases}$

解：

$$a_n=a_{n-1}-n+3$$

$$=\quad a_{n-2}-(n-1)+3)-n+3$$

$$=a_{n-2}-2n+3+4$$

$$=a_{n-3}-3n+3+4+5$$

$$=a_{n-4}-4n+3+4+5+6$$

L L

$$=a_1-(n-1)n+3+4+5+\mathrm{L}\ +(n+1)$$

$$=a_0-n^2+3+4+\mathrm{L}\ +(n+1)+(n+2)$$

$$=\quad -n^2+5n+4\quad /2$$

$$a_n=\quad -n^2+5n+4\quad /2$$

5.9

a $\begin{cases}a_n=a_{n-1}+n & (n\geq 1)\\ a_0=1\end{cases}$

解： $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $\{a_n\}$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n-1}+n\right)\cdot x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$$

$$=1+x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^n$$

$$=1+x\cdot f\left(x\right)+\frac{x}{\left(1-x\right)^{2}}$$

$$f\left(x\right)=\frac{x^{2}-x+1}{\left(1-x\right)^{3}}$$

$$\left(1-x\right)^{-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^{k}$$

$$f(x)=\left(x^{2}-x+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^{k}$$

$$a_{n}=\binom{n}{2}-\binom{n+1}{2}+\binom{n+2}{2}=\frac{n^{2}+n+2}{2}$$

b $\begin{cases} a_{n}=a_{n-1}+\dfrac{n\left(n+1\right)}{2} & (n\geq1) \\ a_{0}=0 \end{cases}$

解： $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}\quad\{a_{0}\quad a_{1}\quad \text{L}\quad a_{n}\quad \text{L}\ \}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n-1}+\frac{1}{2}n\left(n+1\right)\right]x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+1\right)x^{n}$$

$$=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(n+1\right)x^{n}=x\cdot f(x)+\frac{x}{\left(1-x\right)^{3}}$$

$$\therefore\qquad f(x)=\frac{\dfrac{x}{\left(1-x\right)^{3}}}{1-x}=\frac{x}{\left(1-x\right)^{4}}=x\cdot\sum_{\text{n}=0}^{\infty}\binom{4+n-1}{3}\cdot x^{n}$$

$$=\sum_{\text{n}=0}^{\infty}\binom{4+n-1}{3}\cdot x^{n+1}=\sum_{\text{n}=1}^{\infty}\binom{n+2}{3}\cdot x^{n}=\sum_{\text{n}=0}^{\infty}\binom{n+2}{3}\cdot x^{n}$$

$$a_{n}=\binom{n+2}{3}=\frac{1}{6}\left(n^{3}+3n^{2}+2n\right)$$

c $\begin{cases} a_{n}=a_{n-1}+2^{n-1} & (n\geq1) \\ a_{0}=0 \end{cases}$

解： $f\quad x\quad=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}\quad\{a_{0}\quad a_{1}\quad \text{L}\quad a_{n}\quad \text{L}\ \}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}x^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n-1}+2^{n-1}\right)x^{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{n}$$

$$=x\cdot f(x)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2x\right)^{n}-\frac{1}{2}$$

$$=x\cdot f(x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-x}=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2x\right)^{n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

$$a_n=2^n-1$$

d $\begin{cases} a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} & (n\geq 2) \\ a_0=1\ ,\ a_1=-2 \end{cases}$

解： $f\quad x\quad =\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\quad \{a_0\quad a_1\quad L\quad a_n\quad L\ \}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=1-2x+\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n=1-2x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(5a_{n-1}-6a_{n-2}\right)\cdot x^n$$

$$=1-2x+5\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n-6\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=1-2x+5x\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n-6x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=1-2x+5x\left(f(x)-1\right)-6x^2\cdot f(x)$$

$$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{1-7x}{(2x-1)(3x-1)}$$

$$=-\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3x-1}=\frac{5}{1-2x}-\frac{4}{1-3x}$$

$$=5\sum_{n=0}^{\infty}\left(2x\right)^n-4\sum_{n=0}^{\infty}\left(3x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(5\cdot 2^n-4\cdot 3^n\right)x^n$$

$$a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n\qquad n=0\quad 1\quad 2\quad L$$

5.10 a_n n

n

1 n 3

$$a_n=a_{n-1}+\quad n-1\quad n-2\quad n-3\quad /6+n-2$$

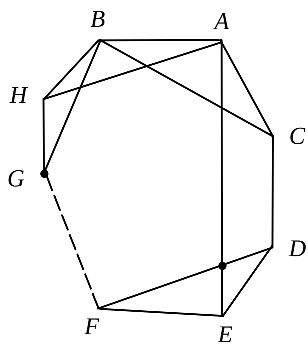
证明： 5-1 n ABC

AB AC A $n-1$

a_{n-1}

A $n-3$ ABC $n-2$

A $n-1$ AB AC BC



5-1

n–1 A D E F

E AE D F DF AE

n–1

$\binom{n-1}{3}$

A n–1

n–1 2 $\binom{n-1}{3}$

$$a_n = a_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 2 = a_{n-1} + \quad n-1 \quad n-2 \quad n-3 \ /6 + n-2 \qquad (n \geq 3)$$

2 $a_0=a_1=a_2=0$ a_0 a_1 a_2 L a_n L

a_n

$\{a_n\}$

$$f \quad x \quad = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad 1$$

$$-xf \quad x \quad = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \qquad 2$$

1 2

$$1-x \quad f \quad x \quad = \sum_{n=3}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\binom{n-1}{3} + n - 2 \right) x^n \qquad 1$$

$$f \quad x \quad = \frac{1}{1-x}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\binom{n-1}{3}+n-2\right)x^n$$

$$= \quad \binom{3}{3}x^4+\binom{4}{3}x^5+\cdots+\binom{n-1}{3}x^n+\cdots \qquad 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

$$+ \quad x^3+2x^4+3x^5+\cdots+nx^{n+2}+\cdots \qquad 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

1.23

$$\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k+1}$$

k=3 $\quad f \quad x \quad\quad x^n$

$$a_n= \quad n-2 \quad + \quad n-3 \quad \cdots \quad +1 \quad +\left(\binom{n-1}{3}+\binom{n-2}{3}+\cdots+\binom{3}{3}\right)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\binom{n}{4}$$

5.11 $\quad n$

a_n

$$a_n=\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1$$

证明： 2

$n \quad n \quad$ 5.10

2 $\quad n$

$$b_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\binom{n}{4}$$

$$a_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\binom{n}{4}+n$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}+\binom{n}{4}+1$$

$$=\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+1$$

5.12 $\quad$ 1 $\quad l \quad a_l$

$$a_l=\begin{cases}(l+1)^2/4 & l\\(l+1)^2/4 & l\end{cases}$$

证明： a b c $a\ge b\ge c$

l l=2n a=l=2n b 2n 2n–1

L n+1

b=2n c 2n 2n–1 L 2 1 2n

b=2n–1 c 2n–1 2n–2 L 2 2n–2

… …

b=n+2 c n+2 n+1 n n–1 4

b=n+1 c n+1 n

l=2n

2n+ 2n–2 + 2n–4 +L +4+2=n n+1

$$=\frac{l(l+2)}{4}$$

l l=2n+1 a=l=2n+1 b 2n+1

2n L n+1

b=2n+1 c 2n+1 2n L 2 1 2n+1

b=2n c 2n 2n–1 L 2 2n–1

……

b=n+2 c n+2 n+1 n 3

b=n+1 c n+1 1

l=2n+1

2n+1 + 2n–1 + 2n–3 +L +3+1= 2n+2 ^{2}/4

$$=\frac{(l+1)^2}{4}$$

$$a_l=\begin{cases}(l+1)^2/4 & l\\(l+2)l/4 & l\end{cases}$$

2 a_n 2n b_n 2n+1

a_n b_n

解： a_n 1 2 L 2n–1 2n 1

$$a_n=\frac{(1+1)^2}{4}+\frac{(2+2)\times 2}{4}+\frac{(3+1)^2}{4}+\frac{(4+2)^2\times 4}{4}\cdots+\frac{(2n-1+1)^2}{4}+\frac{(2n+2)\times 2n}{4}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1+1)^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+2)\times 2k}{4}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

$$a_n=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

b_n 1 2 $\cdots$ $2n-1$ $2n$ $2n+1$

1 2 $\cdots$ $2n-1$ $2n$ a_n

$$b_n=a_n+\frac{(2n+1+1)^2}{4}$$

$$=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}+\frac{(2n+1+1)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{6}$$

$$b_n=\frac{(n+1)(4n^2+11n+6)}{6}$$

5.13 Stirling S_2 n k

1 S_2 n 2 $=2^{n-1}-1$

证明：

方法一：

$$S_2(n+1，k)=S_2(n，k-1)+kS_2(n，k)$$

$$S_2(n，2)=S_2(n-1，1)+2S_2(n-1，2)=1+2+2^2S_2(n-2，2)$$

$$=1+2+2^2S_2(n-3，1)+2^3S_2(n-3，2)$$

$$=1+2+2^2+2^3S_2(n-4\quad 1)+2^4S_2(n-4\quad 2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2}$$

$$=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1$$

方法二：

S_2 n 2 n 2

a_1 n–1 2 a_1

n–1 2 2^{n-1} 2^{n-1}–1

2 S_2 n n–1 $=\binom{n}{2}$

S_2 n n–1 n n–1

n 2 $\binom{n}{2}$

n–2 n–2 1

$$S_2(n,\ n-1)=\binom{n}{2}$$

5.14 Stirling

$$\sum_{x=1}^{m} x^n=\sum_{k=0}^{n} k!S_2(n\quad k)\binom{m+1}{k+1}$$

证明：n x x^n

n k S_2 n k x

k $\binom{x}{k}k!$ n x k

k x–k S_2 n k $\binom{x}{k}k!$

k 1 x x^n

$$x^n=\sum_{k=1}^{x} k!S_2(n,\ k)\binom{x}{k}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{m} x^n &= \sum_{x=1}^{m}\sum_{k=1}^{x} k!S_2(n,\ k)\binom{x}{k}\\ &= \sum_{x=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} k!S_2(n,\ k)\binom{x}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{m} k!S_2(n,\ k)\binom{x}{k}\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k!S_2(n,\ k))\sum_{x=1}^{m}\binom{x}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k!S_2(n,\ k)\binom{m+1}{k+1} \qquad 1.33$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k!S_2(n,\ k)\binom{m+1}{k+1} \quad \Theta \quad k>n \qquad S_2(n,\ k)=0$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k!S_2(n,\ k)\binom{m+1}{k+1}$$

5.15

1 $1^3+2^3+\cdots+100^3$

解 5.14

$$\sum_{x=1}^{100}x^3=\sum_{k=0}^{3}k!S_2(3\quad k)\binom{100+1}{k+1}$$

$$=\binom{101}{2}+2!S_2(3,\ 2)\binom{101}{3}+3!S_2(3,\ 3)\binom{101}{4}$$

$$=\binom{101}{2}+6\times\binom{101}{3}+6\times\binom{101}{4}$$

2 $1^4+2^4+\cdots+100^4$

解 5.14

$$\sum_{x=1}^{100}x^4=\sum_{k=0}^{4}k!S_2(4\quad k)\binom{100+1}{k+1}$$

$$=\binom{101}{2}+2!S_2(4,\ 2)\binom{101}{3}+3!S_2(4,\ 3)\binom{101}{4}+4!S_2(4,\ 4)\binom{101}{5}$$

$$=\binom{101}{2}+14\times\binom{101}{3}+36\times\binom{101}{4}+24\times\binom{101}{5}$$

5.16 §5.6 5.11

证明 $n+1$ $\{a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_{n+1}\}$ B_{n+1} $n+1$

a_1

k $k=1\quad 2\quad \cdots\quad n+1$ $k-1$ n a_2

$a_3\quad \cdots\quad a_{n+1}$ $\binom{n}{n-1}$ $n+1-k$

B_{n-k+1}

$$\binom{n}{k-1} B_{n-k+1}$$

k=1　2　L　　n+1

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{n-1} B_{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{n-k+1} B_{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n} B_n + \binom{n}{n-1} B_{n-1} + \binom{n}{n-2} B_{n-2} + \mathrm{L} + \binom{n}{0} B_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

第六章　Pólya 定理

一、内容提要

定义 6.1　G　G

1　$\forall\ a, b \in G$　$a \circ b \in G$

2　$\forall\ a, b, c \in G$　$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

3　e　$e \in G$　$\forall\ a \in G$　$e \circ a = a \circ e = a$

4　G　$\forall\ a \in G$　$\exists\ b \in G$　$a \circ b = b \circ a = e$

b　a　a^{-1}　$b = a^{-1}$

G　$\circ$　$\langle G, \circ \rangle$　G

$\langle G\ \circ \rangle$　$\circ$　a　$b \in G$　$a \circ b$　ab　G

G　$|G|$　G　a　$b \in G$

$ab=ba$　G　Abel

定理 6.1　G　e

1　$e^{-1} = e$

2　G

3　G　$\forall\ a, b, c \in G$　$ab=ac$　$ba=ca$　$b=c$

4　$\forall\ a, b \in G$　$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

定义 6.2　G　e　$a \in G$　n

1　$a^{\circ} = e$

2　$a^n = a^{n-1}a$

3　$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$

定理 6.2　G　$a \in G$　m　n

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

定义 6.3　$\langle G, \circ \rangle$　H　G　G　$\circ$　$\langle H, \circ \rangle$

$\langle H, \circ \rangle$　$\langle G, \circ \rangle$

定理 6.3　G　H　G　H　G

1 $\forall\ a,\ b \in H$ $ab \in H$

2 $\forall\ a \in H$ $a^{-1} \in H$

定理 6.4 G $H \subseteq G$ $H \neq \phi$ $a,\ b \in H$ $ab \in H$

H G

定义 6.4 A σ A

定理 6.5 S_n n A

1 $|S_n| = n!$

2 $\forall\ \sigma,\ \tau,\ \alpha \in S_n$ $(\sigma\tau)\alpha = \sigma(\tau\alpha)$

3 $I\sigma = \sigma I = \sigma$ $\forall\ \sigma \in S_n$

4 $\forall\ \sigma \in S_n$ $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = I$

定理 6.6 S_n n A · $\langle S_n, \mathrm{g}\rangle$

n n

定义 6.5 σ A A k a_1 a_2 L a_k σ $a_1 = a_2$ $\sigma(a_2) = a_3$ L σ $a_{k-1} = a_k$ $\sigma(a_1) = a_1$ A x $\sigma(x) = x$ σ k $k-$ $(a_1 a_2 \cdots a_k)$

定理 6.7

定义 6.6 2

定理 6.8

推论 6.1

定义 6.7

定理 6.9 A_n n A n 1 A_n $\frac{n!}{2}$ S_n n

定理 6.10 n S_n

$$\left|\left[(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}\right]\right| = \frac{n}{c_1!c_2!\cdots c_n!\ 1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}$$

定义 6.8 R $\forall\ \langle a,\ b\rangle \in R$ a $b \in A$ R A

定义 6.9 R A

1 $\forall\ x \in A$ $\langle x,\ x\rangle \in R$ R

2 $\forall\ x,\ y \in A$ $\langle x,\ y\rangle \in R$ $\langle y,\ x\rangle \in R$ R

3 $\forall\ x,\ y,\ z \in A$ $\langle x,\ y\rangle$, $\langle y,\ z\rangle \in R$ $\langle x,\ z\rangle \in R$ R

4 A A

定义 6.10 R A $a \in A$

$$[a] = \{x \mid x \in A \text{ 且 } \langle a, x \rangle \in R\}$$

a R a a

定理 6.11 R A $\forall\ a, b \in A$

1 $[a] \neq \phi$

2 $a \in [b] \Leftrightarrow [a] = [b]$ $a \notin [b] \Leftrightarrow [a] \cap [b] = \phi$

3 $\bigcup_{x \in A} [x] = A$

定理 6.12 G M R M

定理 6.13 G M $a \in M$ G_a G a

定理 6.14 G M $\forall\ a \in M$ $|G| = |[a]| \cdot |G_a|$

定理 6.15 Burnside G M t G M

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{\tau \in G} c_1(\tau)$$

$c_1(\tau)$ τ 1–

定理 6.16 N n $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}$ N m

n

$$t = \frac{1}{|G|} \left[m^{c(\sigma_1)} + m^{c(\sigma_2)} + \cdots + m^{c(\sigma_k)} \right]$$

$c(\sigma_i)$ σ_i

二、习题解答

6.1

Z

a. Z $\circ$ a b Z $a \circ b$=5

b. O

c. a>0 $a \neq 1$ A= a^n n Z

d.G= $a+b\sqrt{2}$ a b Z

e.G= −1 0 1

解：a Z

2

b

c　　$a^{\circ}=1$　　$\left(a^{n}\right)^{-1}=a^{-n}$　　$(-n\in Z)$

d　　0　　$\left(a+b\sqrt{2}\right)^{-1}=-a-b\sqrt{2}$

2　$2=2+0\cdot\sqrt{2}$

e　　$1+1=2\notin G$

0

6.2　Z　　Z　$\circ$　$a\circ b=a+b-1$　　Z　$\circ$

证明：　$\forall\ a,\ b\in Z$　$a\circ b=a+b-1\in Z$

$\forall\ a,\ b,\ c\in Z$　$(a\circ b)\circ c=(a+b-1)\circ c$

$$=(a+b-1+c-1)=(a+b+c-1-1)0$$

$$=a\circ(b\circ c)$$

$\forall\ a\in Z$　$\exists\ e=1$　　$a\circ e=e\circ a=(a+e-1)=(a+1-1)=a$

$\forall\ a\in Z$　$\exists\ b=-a+2\in Z$　　$a\circ b=b\circ a=(a-a+2-1)=1=e$

$a^{-1}=-a+2$

6.1　$\langle Z,\circ\rangle$

6.3　G　$\circ$　　a　G　　m　n　　$a^m a^n=a^{m+n}$　　a^m　$^n=a^{mn}$

证明：

情况 1：m　n　　0　　$n=0$

$$a^m\circ a^0=a^m\circ e=a^m=a^{m+0}$$

e

$$\left(a^m\right)^0=e=a^{m\times 0}$$

情况 2：m　n

$$a^m\circ a^n = \overbrace{(a\circ a\circ\cdots\circ a)}^{m}\circ\overbrace{a\circ\cdots\circ a}^{n}=\overbrace{a\circ a\circ\cdots\circ a}^{m+n}=a^{m+n}$$

$$\left(a^m\right)^n=a^m\circ a^m\circ\cdots\circ a^m=a^{mn}$$

情况 3　m　n　　0　　$m<0$　　$a^m=\left(a^{-1}\right)^{-m}$　　3

2

6.4 G Abel a b G n ab $^n = a^n b^n$

证明： n

$n=1$ $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$

$n=k$ $k \geq 1$ $(ab)^k = a^k b^k$

$n=k+1$

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab) = (a^k b^k)(ab)$$

$$= a^k (b^k a) b = a^k (ab^k) b = (a^k a)(b^k b) = a^{k+1} b^{k+1}$$

$\forall\, n \in Z^+$ $(ab)^n = a^n b^n$

6.5 m $H=$ mk k Z H $+$ Z $+$

证明： H Z

$0 = m \times 0 \in H$

$$H \neq \phi$$

$\forall\, mk_1\ , mk_2 \in H$ $(k_1\ , k_2 \in Z)$

$$(mk_1 + mk_2) = m(k_1 + k_2) \in H$$

$\forall\, mk \in H$ $(k \in Z)$

$$(mk)^{-1} = -(mk) = m(-k) \in H$$

$\langle H , + \rangle$ $\langle Z , + \rangle$

6.6 H K G $H \cap K$ G H K G

证明： e G H K G $e \in H$ $e \in$ $e \in H \cap K$

$H \cap K \neq \phi$ $H \cap K \subseteq G$

$\forall\, a\ , b \in H \cap K$ $a\ , b \in H$ $a\ , b \in K$

H K $ab \in H$ $ab \in K$ $ab \in H \cap K$

$\forall\, x \in H \cap K$ $x \in H$ $x \in K$

H K $x^{-1} \in H$ $x^{-1} \in K$ $x^{-1} \in H \cap K$

$H \cap K$ G

$H \cup K$ G $H=K$ $H \cup K = H$ G

$H = \{\ 2k \mid k \in Z\ \}$ $k = \{\ 3k \mid k \in Z\ \}$ H K $\langle Z , + \rangle$ $H \cup K$

$\langle Z , + \rangle$

6.7 $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a　　σ　τ

b　　　σ　τ

c　　　$\sigma\ \tau$　$\tau\ \sigma$　$\tau\ \sigma\ \tau^{-1}$

解：

a　$\sigma=(1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 6)(4)(7)$

$\tau=(1\ \ 7)(2\ \ 6)(3\ \ 5\ \ 4)$

b　$\sigma=(1\ \ 6)(1\ \ 2)(1\ \ 5)(1\ \ 3)(1\ \ 4)(4\ \ 1)(1\ \ 7)(7\ \ 1)$

$\tau=(1\ \ 7)(2\ \ 6)(3\ \ 4)(3\ \ 5)$

c　$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&1&2&5&4&6&3\end{pmatrix}$

$=(1\ \ 7\ \ 3\ \ 2)(4\ \ 5)(6)$

$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&4&3&6&7&1\end{pmatrix}$

$=(1\ \ 5\ \ 6\ \ 7)(3\ \ 4)(2)$

$$\tau\sigma\tau^{-1}=\tau\sigma\circ\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&4&3&6&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&4&5&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&7&3&6&4&2&5\end{pmatrix}$$

$$=(1)(3)(2\ \ 7\ \ 5\ \ 4\ \ 6)$$

6.8　　　　　　S_3

解：　　　　$I=(1)(2)(3)=(1)$

$$a_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ \ 2)(3)$$

$$a_2=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ \ 3)(2)$$

$$a_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2\ \ 3)$$

$$a_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ \ 2\ \ 3)$$

$$a_5=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ \ 3\ \ 2)$$

$H_0=\{I\}$　　$H_1=S_3$　　$H_2=\{I\ ,\ (1\ \ 2)\}$　　$H_3=\{I\ ,\ (1\ \ 3)\}$　　$H_4=\{I\ ,\ (2\ \ 3)\}$

$H_5=\{I\ ,(1\quad 2\quad 3)\ ,(1\quad 3\quad 2)\}$

6.9 G M= 1 2 3 4 5

a G= 1 15 24 15 24

b G= 1 1234 13 24 1432

c G= 1 12 23 13

解：

a 1 5 1 1 3 2 1 2 1 1 2 2 1

$$P\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\frac{1}{4}\left(x_1^5+2x_1^3x_2+x_1x_2^2\right)$$

b 1 5 1 1 1 4 1 2 1 1 2 2 1

$$P\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\frac{1}{4}\left(x_1^5+2x_1x_4+x_1x_2^2\right)$$

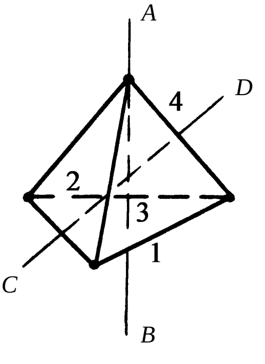
c

$$(1\quad 2)(2\quad 3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3)\notin G$$

6.10

解： $N=\{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ \}$ 6-1



6-1

1 $I=(1)(2)(3)(4)$ 1 4

2 6-1 AB $\pm 120°$

8

1 234 1^1 3^1

3 6-1 CD 180°

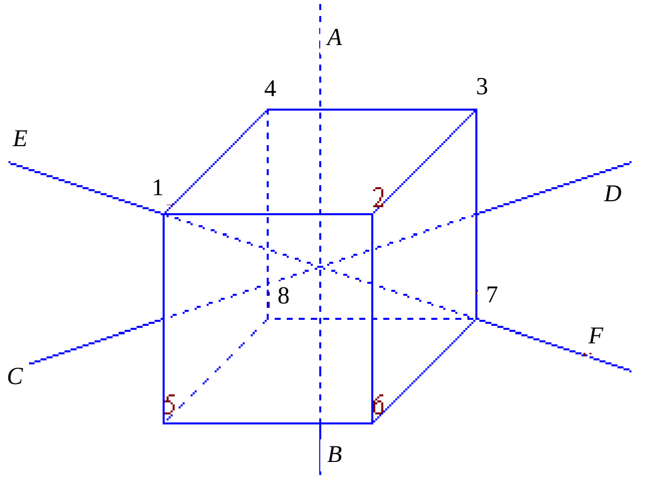
12 34 2^2 3 3

$$t=\frac{1}{12}\left(3^4+8\times 3^2+3*3^2\right)=15$$

15

6.11

解 6-2 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$



6-2

1 $I=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$ 1^8

2 AB $\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$

1 4 3 2 6 5 8 7 1 3 2 4 5 7 6 8 1 2 3 4 5 6 7 8

4^2 2^4 4^2 3 9

3 EF ±120° 1 7 4 2 5 3 6 8

1 7 2 4 5 6 3 8 1^2 3^2 4 8

4 CD 180° 1 5 2 8

3 7 4 6 $(2)^4$ 6

$|G|=24$

$$t=\frac{1}{24}\left(2^8+3\times2^4+6\times2^2+8\times2^4+6\times2^4\right)=23$$

23

6.12 6

解： 6-3 $N=\{1,2,3,4,5,6\}$ G

1 1 2 L 6 $I=$ 1 2 3 4 5 6

1^6

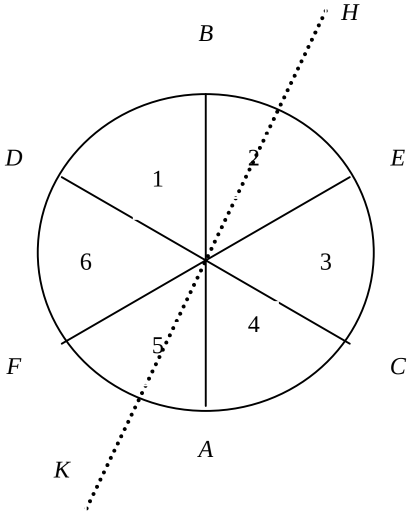
2 O $\frac{\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ π $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$

1 2 3 4 5 6 1 3 5 2 4 6 1 4 2 5 3 6 1 5 3 2 4 6 1 6 5 4 3 2 5

6^1 3^2 2^3

3 AB (1 2)(3 6)(4 5) 2^3 3

4 HK (2)(5)(1 3)(4 6) 1^2 2^2 3



6-3

12 Pólya

$$t=\frac{1}{12}\left(3^6+2\times3^1+2\times3^2+3^3+3\times3^3+3\times3^4\right)=92$$

92

6.13 5

3 6

解： 5

6-4 5 $N=\{1,2,3,4,5\}$

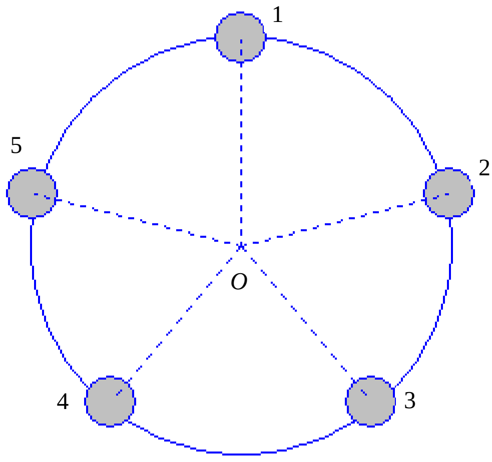
1 $I=$ 1 2 3 4 5 1^5

2 O $\frac{2\pi}{5}$ $\frac{4\pi}{5}$ $\frac{6\pi}{5}$ $\frac{8\pi}{5}$ $\frac{2\pi}{5}$

1 2 3 4 5 4 5^1

3 1O 1 2 5 3 4 1^1 2^2

5



6-4

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=\frac{1}{10}\left(x_1^5+4x_5+5x_1x_2^2\right)$$

$$P(3,3,3,3,3)=\frac{1}{10}\left(3^5+4\times3+5\times3\times3^2\right)=39$$

3 39

36

6.14

解: 6-5 r y b 4

$N=\{1,2,3,4\}$

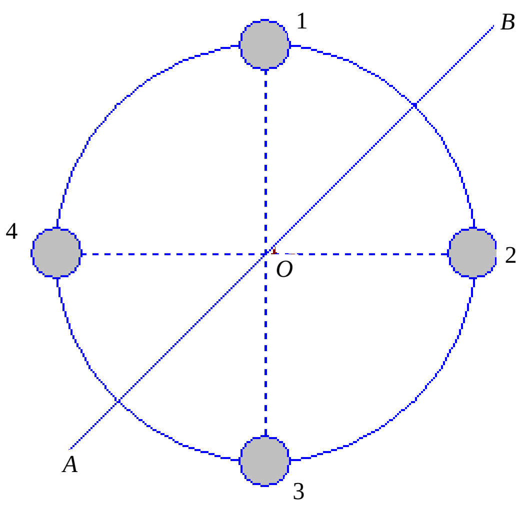
1 $I=$ 1 2 3 4 1^4

2 O $\pm\frac{\pi}{2}$ 1 2 3 4 1 4 3 2 4^1

3 O π 1 3 2 4 2^2

4 13 24 1 3 2 4 2 4 1 3

1^2 2^1



6-5

5 AB 1 2 3 4 2 2 2

8

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\frac{1}{8}\left(x_1^4+2x_4+x_2^2+2x_1^2x_2+2x_2^2\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(x_1^4+3x_2^2+2x_1^2x_2+2x_4\right)$$

$x_i=r^i+y^i+b^i$

$$P(r+y+b,\ r^2+y^2+b^2,\ r^3+y^3+b^3,\ r^4+y^4+b^4)$$
$$=\frac{1}{8}\left[\ (r+y+b)^4+3\left(r^2+y^2+b^2\right)^2+2(r+y+b)^2\left(r^2+y^2+b^2\right)+2\left(r^4+y^4+b^4\right)\ \right]$$

r^2yb $(r+y+b)^4$ $2(r+y+b)^2\left(r^2+y^2+b^2\right)$

$(r+y+b)^4$ r^2yb $C_4^2\cdot 2=12$ $2(r+y+b)^2\left(r^2+y^2+b^2\right)$ r^2yb

2 × 2=4

r^2yb 2

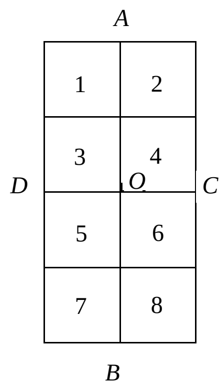
2

6.15 4 × 2 4

解: 4 × 2 4

4 × 2 $N=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

6-6



6-6

1　　$I =$ 1 2 3 4 5 6 7 8　　1 8

2　　O　π　　1 8 2 7 3 6 4 5　　2 4

3　　AB　　1 2 3 4 5 6 7 8　　2 4

4　　CD　　1 7 2 8 3 5 4 6　　2 4

4

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \frac{1}{4}\left[x_1^8 + 3x_2^4\right]$$

$x_k = b^k + w^k$

$$P(b+w,\ \ b^2+w^2,\ \ b^3+w^3, \cdots,\ \ b^8+w^8)$$
$$= \frac{1}{4}\left[(b+w)^8 + 3\left(b^2+w^2\right)^4\right]$$

b=1　　w^4

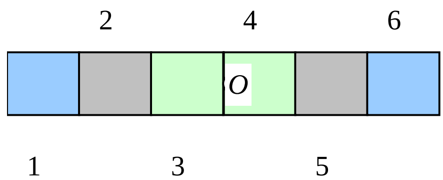
$$P(1+w, 1+w^2, 1+w^3, \cdots, 1+w^8)$$
$$= \frac{1}{4}\left[(1+w)^8 + 3\left(1+w^2\right)^4\right]$$

w^4

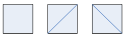
$$\frac{1}{4}\left[C_8^4 + 3C_4^2\right] = \frac{1}{4}\left[70+18\right] = 22$$

22

6.16　　1 × 6



6-7

解一　Burnside　6-7　3 

6　3^6=729　M={x_1　x_2　x_3　L　x_{729}}

180°　M

1　I

$$I= x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad L \quad x_{729} \qquad c_1 \quad I \quad =729$$

2　180°　σ　1　6　2　5　3　4

x_i　180°

$$c_1(\sigma) = 3^3 = 27$$

G={I　σ }　G　|G|=2　Burnside　G

$$t=\frac{1}{2}(729+27)=378$$

378

解二　Pólya　1 × 6

M　6　1 × 6　M

G　2　1　6　2　3　1

O　π　6-7　G

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=\frac{1}{2}\left(x_1^6+x_2^3\right)$$

$$P(3 ,3,3 , 3 ,3 , 3 , 3)=\frac{1}{2}\left(3^6+3^3\right)=378$$

378

6.17　6

解:　6

M　6　M　G　24

1　6　1　2　4　1　6　1　2　2　2　3

2　3　6　3　2　8　§ 6.4　4　G

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)=\frac{1}{24}\left(x_1^6+6x_1^2x_4+6x_2^3+3x_1^2x_2^2+8x_3^2\right)$$

$$P(2\ ,2\ ,2\ ,2\ ,2\ ,2)=\frac{1}{24}\left(2^6+6\cdot 2^2\cdot 2+6\cdot 2^3+3\cdot 2^2\cdot 2^2+8\cdot 2^2\right)=10$$

10

6.18 6 a_n n

n=0 1 2 3 4 5 6 a_n a_3

解： M G

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)=\frac{1}{24}\left(x_1^6+6x_1^2x_4+6x_2^3+3x_1^2x_2^2+8x_3^2\right)$$

b w w=1 a_n

$$P(1+b,\ 1+b^2,\ +b^3,\ 1+b^4,\ 1+b^5,\ 1+b^6)$$

$$=\frac{1}{24}\left((1+b)^6+6(1+b)^2(1+b^4)+6(1+b^2)^3+3(1+b)^2(1+b^2)^2+8(1+b^3)^2\right)$$

$$a_3=\frac{1}{24}(\binom{6}{3}+3\times 2\times 2+8\times 2)=2$$

6.19

解：

6.10 G

$$P(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\frac{1}{12}\left(x_1^4+8x_1x_3+3x_2^2\right)$$

$$P\ (3\ ,3\ ,3\ ,3)=\frac{1}{12}\left(3^4+8\cdot 3\cdot 3+3\cdot 3^2\right)=15$$

15

6.20 7

4

解： 6-8 $N=\{1\ ,2\ ,3\ ,4\ ,5\ ,6\}$

1 $I=$ 1 2 3 4 5 6 1^6

2 O $\frac{\pi}{3}$ 1 2 3 4 5 6

6^1 O $\frac{5\pi}{3}$ 2

3 O $\frac{2\pi}{3}$ 1 3 5 2 4 6 3^2

O $\frac{4\pi}{3}$ 2

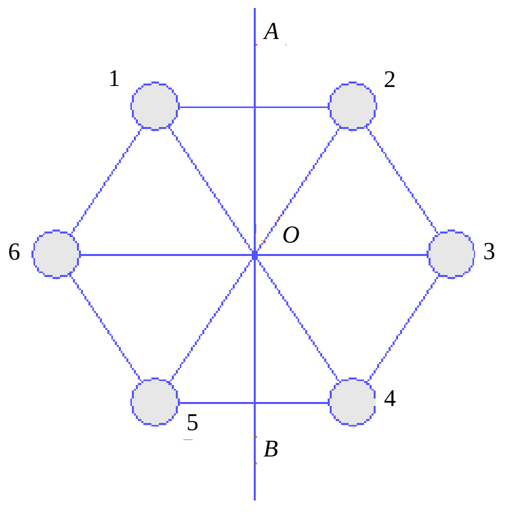
4 O π 1 4 2 5 3 6 2^3

5 AB 1 2 3 6 4 5 2^3

3 3

6 14 1 4 2 6 3 5 1^2 2^2

3 3



6-8

12 G

$$P\{x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_6\}=\frac{1}{12}\left(x_1^6+2x_6+2x_3^2+x_2^3+3x_2^3+3x_1^2x_2^2\right)$$

$x_i=b_1^i+b_2^i+b_3^i+b_4^i+b_5^i+b_6^i+b_7^i$

$$P(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7,\ \text{L}\ ,\ b_1{}^6+b_2{}^6+b_3{}^6+b_4{}^6+b_5{}^6+b_6{}^6+b_7{}^6)$$

$$=\frac{1}{12}\left[\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^6+2\sum_{i=1}^{7}b_i^6+2\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^3\right)^2+4\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^2\right)^3+3\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^2\right)^2\right]$$

4 b_i $\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^6$ $3\left(\sum_{i=1}^{7}b_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{7}b_i^2\right)^2$

$$\binom{6}{3}\times7\times6\times5\times4+\frac{1}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\times7\times6\times5\times4+\binom{6}{2}\times7\times6\times5\times4\times3+7\times6\times5\times4\times3\times2=$$

97440 $3\times4\times\binom{7}{2}\binom{5}{2}$=2520

4 $\frac{1}{12}(97440+2520)=8330$

第七章　网　络　流

一、内容提要

（一）基本概念

定义 7.1 G V E

1 0 s s

2 0 t t

3 i j c i j

G V E

定义 7.2 $G=$ V E i j f i j

1 f i j $\le c$ i j i j f i j $=0$

2 j

$$\sum_{i\in V} f(i,j)=\sum_{k\in V} f(j,k)$$

f i j i j f G f

定义 7.3 G i j E f i j $=c$ i j i j

f i j $<c$ i j i j

定义 7.4 G s $\sum_{j\in v} f(s,j)$ f f_v

$$f_v=\sum_{j\in v} f(s,j)$$

定义 7.5 G f f_v

定义 7.6 $G=$ V E

$$V = S \cup \overline{S} \quad S \cap \overline{S} = \Phi$$

s S t $\overline{S}$ S $\overline{S}$

G $(S, \overline{S})$

定义 7.7 $(S, \overline{S})$ $(S, \overline{S})$ $c(S, \overline{S})$

$$c(S, \overline{S}) = \sum_{\substack{i \in s \\ j \in \overline{s}}} c(i, j)$$

定理 7.1 $G=$ V E f_v

$$\max f_V \le \min c(S, \overline{S})$$

推论

$$\sum_{i \in V} f(s, i) = \sum_{j \in V} f(j, t)$$

定义 7.8 $G=$ V E $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$

1 $s_0 = s, s_n = t, s_i \in V, i = 0, 1, \cdots, n$

2 $(s_j, s_{j+1}) \in E$ $(s_{j+1}, s_j) \in E$ $j = 0$ 1 $\cdots$ $n-1$

$(s_1, s_2 \cdots s_n)$ G s t $(s_j, s_{j+1}) \in E$

$(s_{i+1}, s_i) \in E$

定义 7.9 G s t i j $f(i, j) < c(i, j)$,

i j f i j >0 s t f

注意： f f

定理 7.2 $\max f_v = \min c(s, \overline{s})$

推论

1

i j i j j i

c i j i j j i

2 s_1 s_2 $\cdots$ s_m t_1 t_2 $\cdots$ t_m

G'

s t s s_1 s_2 $\cdots$ s_m s s_1 s s_2 $\cdots$ s s_m

∞ t_1 t_2 L t_m t t_1 t t_2 t L

t_n t ∞ s G t G

3

i i' i'' i' i'' i' i''

c i' i'' $=c$ i h i h i'' i j i'' j

h j V

4 i i j j

§7.5

定义 7.10 i j c i j b i j

b i j $\le c$ i j b i j $\le f$ i j $\le c$ i j

f

1 ?

2

定理 7.3 f $(S,\overline{S})$

$$b(S,\overline{S})-c(\overline{S},S)\le f_v\le c(S,\overline{S})-b(\overline{S},S)$$

$$c(\overline{S},S)=\sum_{\substack{i\in s\\ j\in \overline{s}}}c(i,j),\ c(S,\overline{S})=\sum_{\substack{i\in \overline{s}\\ j\in s}}c(j,i)$$

$$b(S,\overline{S})=\sum_{\substack{i\in s\\ j\in \overline{s}}}b(i,j),\ b(\overline{S},S)=\sum_{\substack{i\in \overline{s}\\ j\in s}}b(j,i)$$

定理 7.3

$(S_1,\overline{S_1}),(S_2,\overline{S_2})$

$$b(S_1,\overline{S_1})-c(\overline{S_1},S_1)\le f_v\le c(S_1,\overline{S_1})-b(\overline{S_1},S_1)$$
$$b(S_2,\overline{S_2})-c(\overline{S_2},S_2)\le f_v\le c(S_2,\overline{S_2})-b(\overline{S_2},S_2)$$

$$b(S_1,\overline{S_1})-c(\overline{S_1},S_1)>c(S_2,\overline{S_2})-b(\overline{S_2},S_2)$$
$$b(S_2,\overline{S_2})-c(\overline{S_2},S_2)>c(S_1,\overline{S_1})-b(\overline{S_1},S_1)$$

定理 7.4

$(S, \overline{S})$ $\max f_v = \min\{c(S, \overline{S}) - b(\overline{S}, S)\}$

（二）基本方法

1 ——

1

$$\delta_{ij} = \begin{cases} c(i, j) - f(i, j) & (i, j) \\ f(i, j) & (i, j) \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_{ij}\}$$

δ

δ

2

A s^+ ∞

B x x y

a 若$(x, y) \in E$，且$f(x, y) < c(x, y)$，令$\delta_y = \min\{c(x, y) - f(x, y), \delta_x\}$ y (x^+, δ_y)，若$f(x, y) = c(x, y)$ y

b 若$(y, x) \in E$，且$f(y, x) > 0$，令$\delta_y = \min\{f(y, x), \delta_x\}$ y (x^-, δ_y)；若$f(y, x) = 0$ y

C B t t s t B t s t

A $u=t$

B u (v^+, δ_u),

$$f(v,u) \leftarrow f(v,u) + \delta_u$$

u (v^-, δ_u), $f(u,v) \leftarrow f(u,v) - \delta_u$

C v=s A u=v B

2

x x y

a $f(x,y) < c(x,y)$ $\partial_y = \min\{c(x,y) - f(x,y), \partial_x\}$ y (x^+, ∂_y)

$f(x,y) = c(x,y)$ y

b $f(x,y) > c(x,y)$ $\partial_y = \min\{f(y,x) - b(y,x), \partial_x\}$ y (x^-, ∂_y)

$f(y,x) = b(y,x)$ y

3

G= V E

$\overline{G}(V, E)$

G $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$

$\hat{G}$

$\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$

1 $\hat{G}$ G $\hat{S}$ $\hat{t}$ $\hat{G}$

2 $\hat{G}$ G $\hat{c}(i,j)$=c i j $-b$ i j $\hat{c}(i,j)$ $\hat{G}$

i j

3 G i j $\hat{c}(\hat{s}, j) = b(i,j)$ $\hat{S}$

j $\hat{c}(i, \hat{t}) = b(i,j)$ i $\hat{t}$

4 G s t c t s =∞

$\hat{G}$ G 7.5

定理 7.5 G $\hat{G}$ $\hat{f}$

$\hat{t}$

注意：$\hat{G}$ $\hat{f}$

$$\hat{f}\ (i,j) = f(i,j) - b(i,j)$$

$$\hat{f}(i,\hat{t}) = c(i,\hat{t})$$

$$\hat{f}(\hat{s}, j) = \hat{c}(\hat{s}, j)$$

$$\hat{f}(t,s)=f_v$$

$\hat{G}$ $\hat{f}$ 7.5 G

$$f(i,j)=\hat{f}(i,j)+b(i,j)$$

4 G

$\hat{G}$ 7.5

1 G $\hat{G}$

2 §7.4 $\hat{G}$ $\hat{f}$

3 $\hat{G}$ $\hat{t}$

G

4 $f(i,j)=\hat{f}(i,j)+b(i,j)$ G

5 §7.6 G

5

1

$G=$ V E l i j i j

$l(\mu(s_1,s_n))=\sum\limits_{(i,j)\in(s_1,s_n)} l(i,j)$ μ s_1 s_n $\min\{l[\mu$ s_1 s_n $]\}$

s_1 s_n i j

$G=$ V E $V=$ s_1 s_2 L s_n Γ_i j i j V i j E

$\Gamma_i^{-1}=$ j i j V j i E i V π* i

$$\pi*(i)=\begin{cases}\min\{l(\mu(s_1,i))\}, & i\in V\\ 0, i=s_1\end{cases}$$

V i π i π i

$$\pi(i)=\begin{cases}\pi*(i) & i\in S\\ \min\limits_{k\in S\mathrm{I}\,\Gamma_i^{-1}}\{\pi(k)+l(k\quad i)\} & i\in\overline{S}\end{cases}$$

2 Moore–Dijkstra

= s_1 s_2 L s_n π s_1 =0

$$\pi(i)=\begin{cases}l(s_1,i), i\in\Gamma_{s_1}\\ \infty, i\notin\Gamma_{s_1}\end{cases}$$

$j \in \bar{S}$　　$\pi(j) = \min_{i \in \bar{S}} \pi(i)$

$$\bar{S} \leftarrow \bar{S} - \{j\}$$

$|\bar{S}| = 0$　　3

$i \in \Gamma_j \cap \bar{S}$

$$\pi(i) \leftarrow \min\{\pi(i), \pi(j) + l(j, i)\}$$

6

1

$G=$ V E d i j E

i j c i j i j

f_v

$$\min \sum_{\substack{\text{所有} \\ (i,\ j)}} \mathrm{d}(i,\ j) f(i,\ j)$$

i j f i j

$$\sum f(i, j) - \sum f(j, i) = \begin{cases} f_v & i = s \\ 0 & i \neq s, t \\ -f_v & i = t \end{cases}$$

$$0 = f(i, j) \leq c(i, j)$$

2

Busacker Gowan 1961

μ s t

μ s t　　$\bar{f} = \min_{(i,\ j) \in \mu(s, t)} \{c(i,\ j)\}$

$\bar{f}$

∞

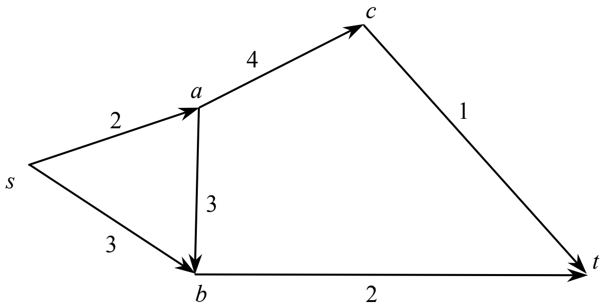
μ s t i j j i c j i $= \bar{f}$ d 0 i

$= -d$ i j

f_v s t

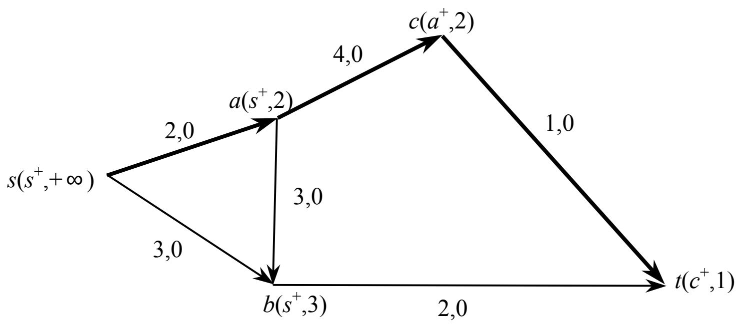
二、习题解答

7.1 7-19



7-19

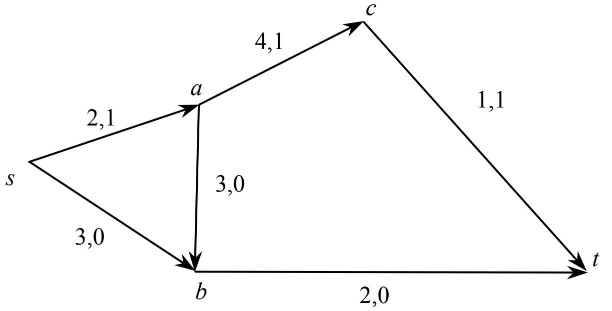
1 7-19 7-19 a



7-19 a

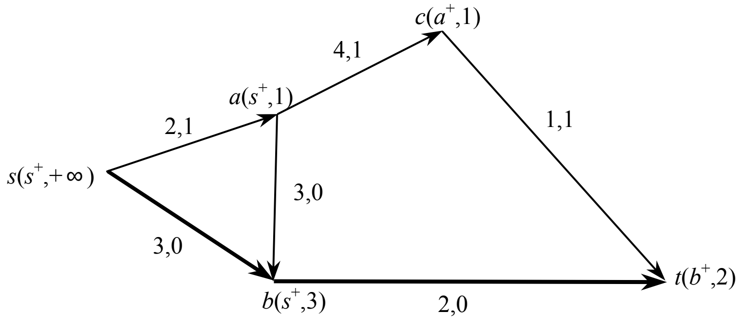
2 7-19 a s a c t $\delta_t=1$

7-19 b



7-19 b

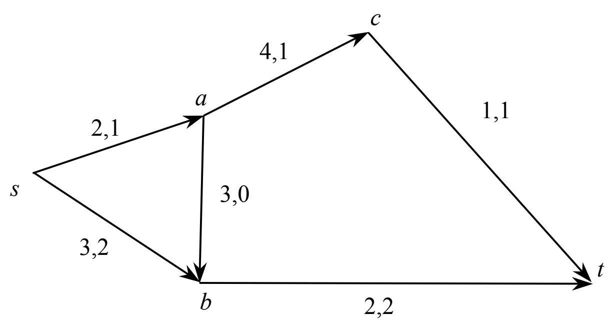
3 7-19 b 7-19 c



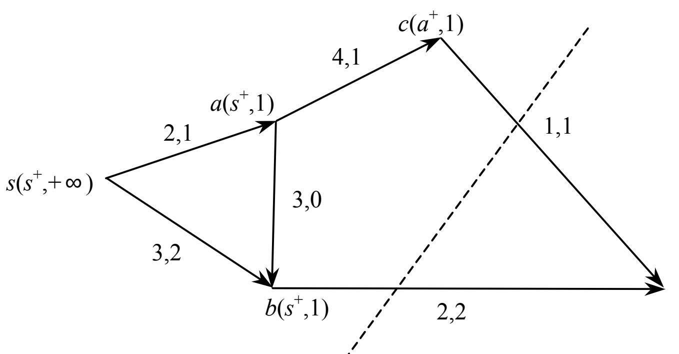
7-19　c

4　　7-19　c　　s　b　t　　δ_t=2

7-19　d



7-19　d



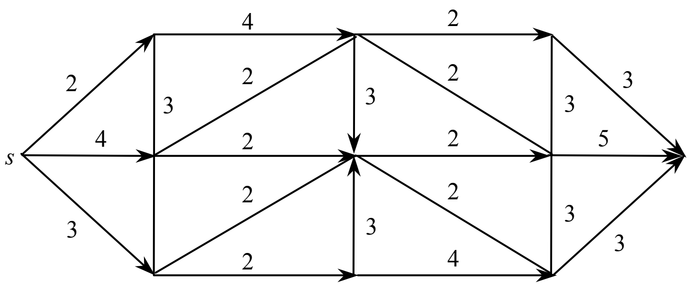
7-19　e

5　　7-19　d　　7-19　e　　t

s　t

3

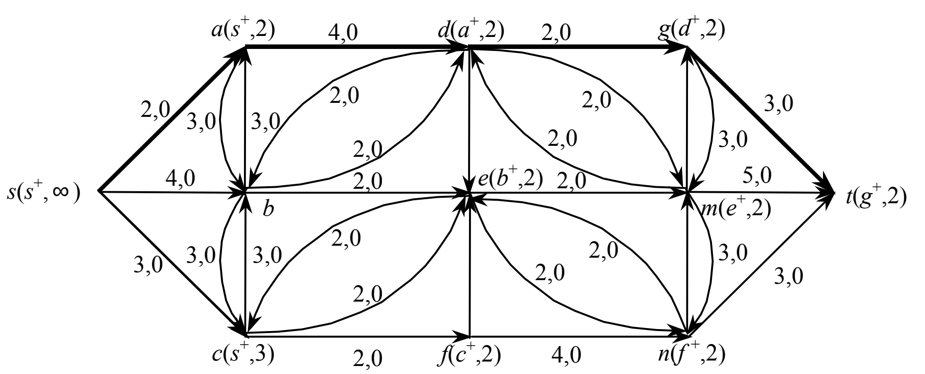
7.2 7-20



7-20

7-20 7.5

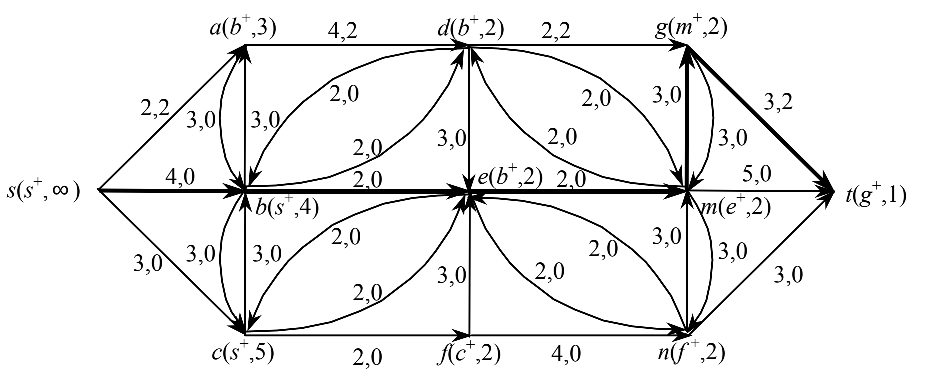
7-20 a



7-20 a

7-20 a s a d q t δ_t=2

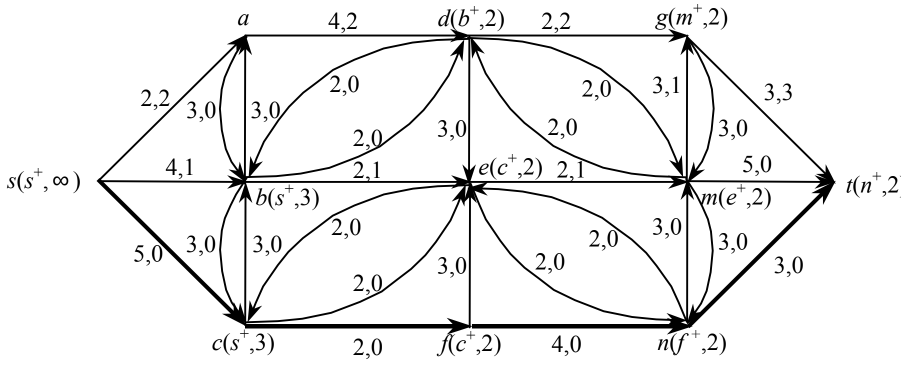
7-20 b



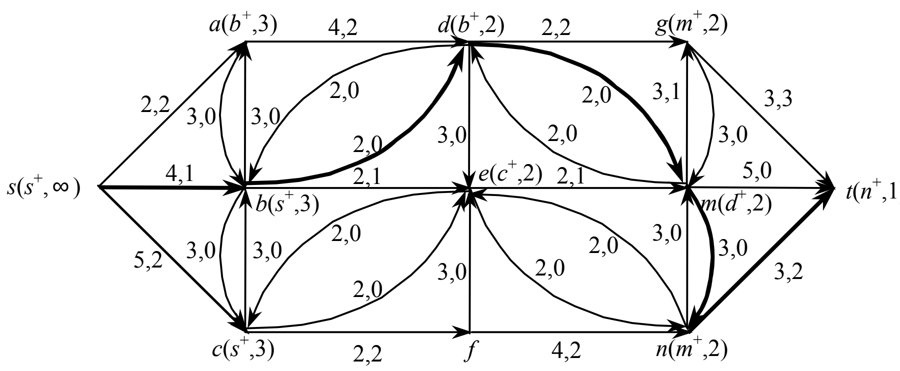
7-20 b

7-20 b s b e m g t δt=1 L

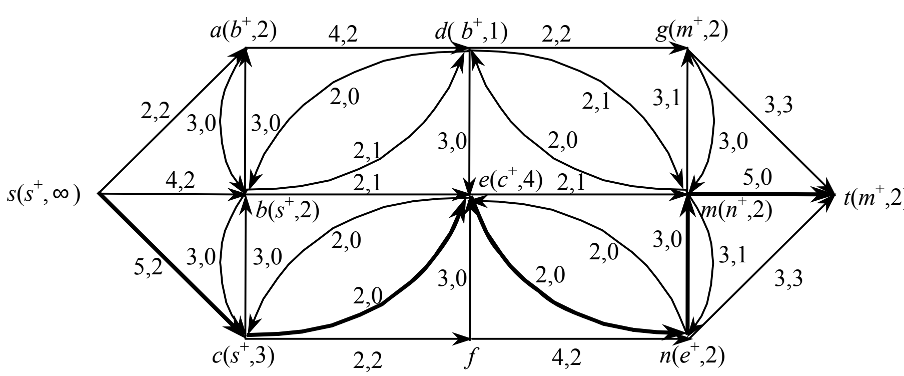
7-20 c d e f g h



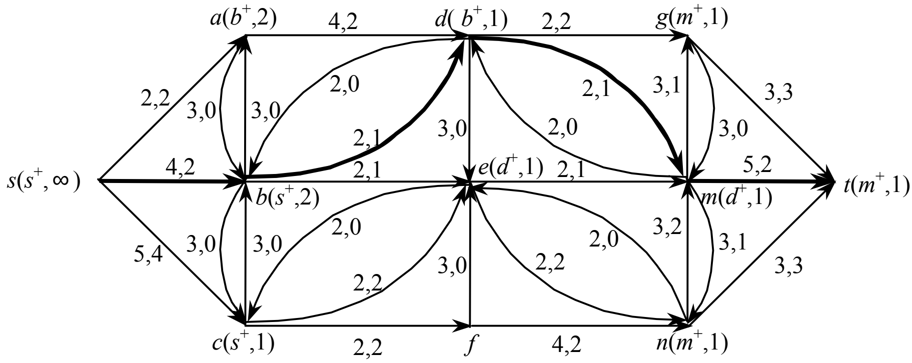
7-20 c



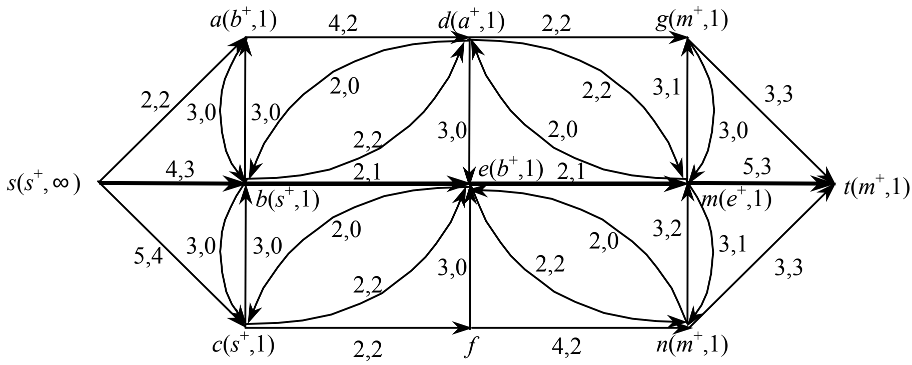
7-20 d



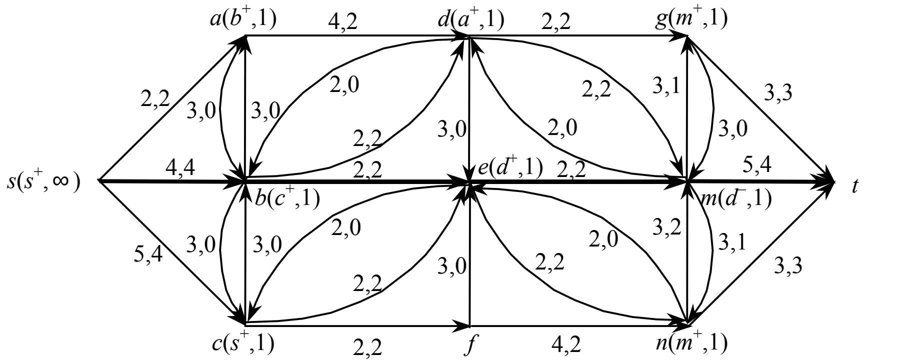
7-20 e



7-20 f



7-20 g

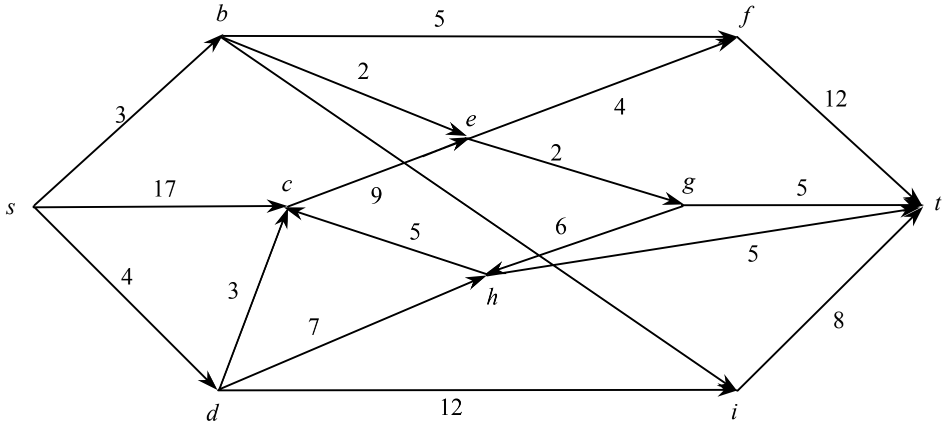


7-20 h

7-20 h t

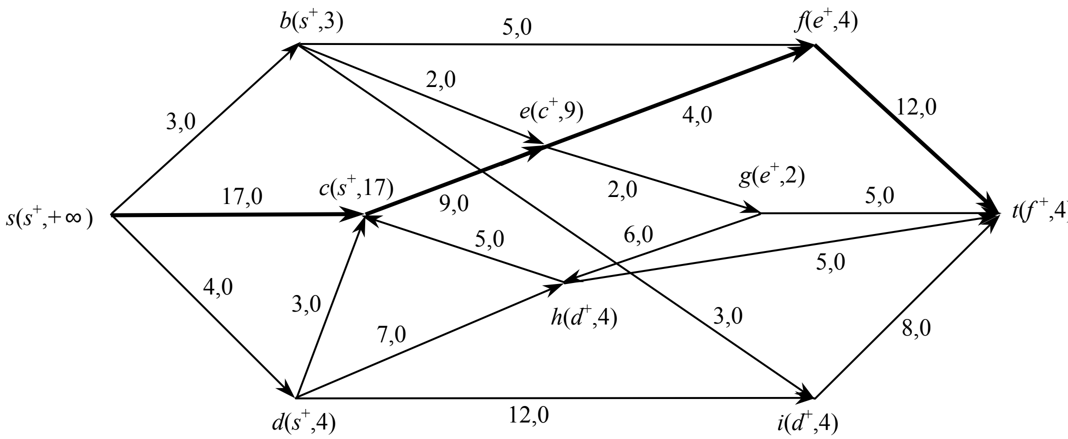
s t 10

7.3 7-21

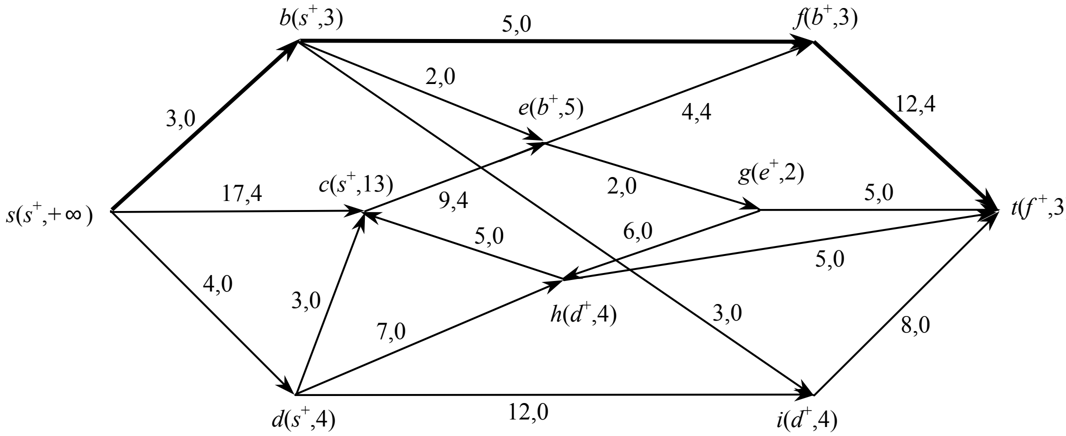


7-21

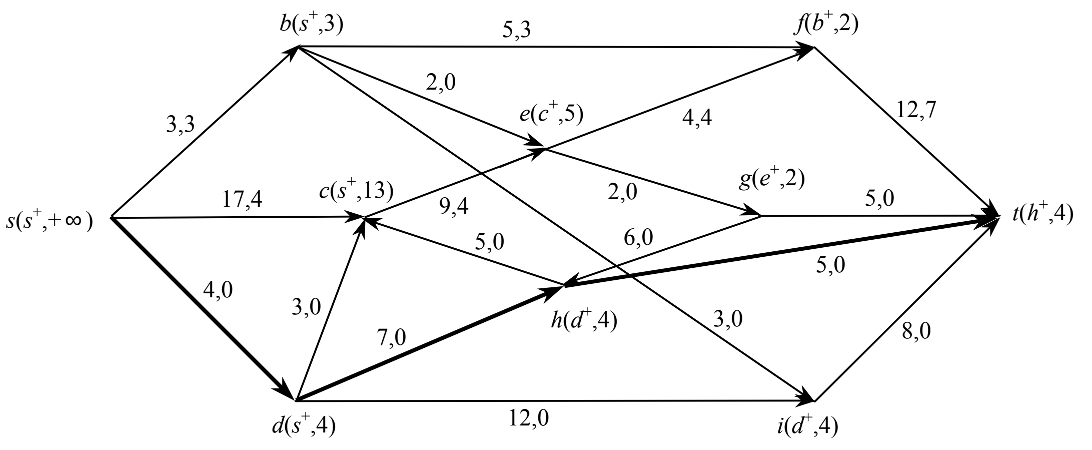
7-21



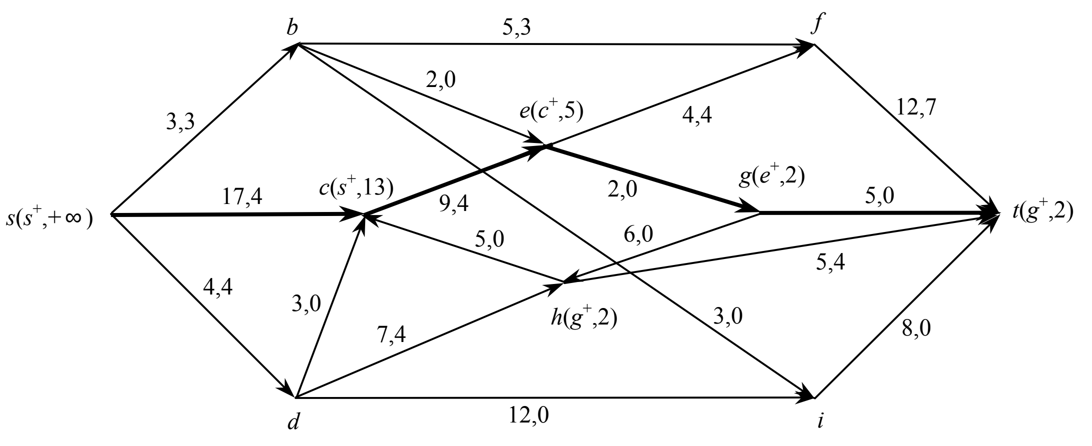
7-21 a



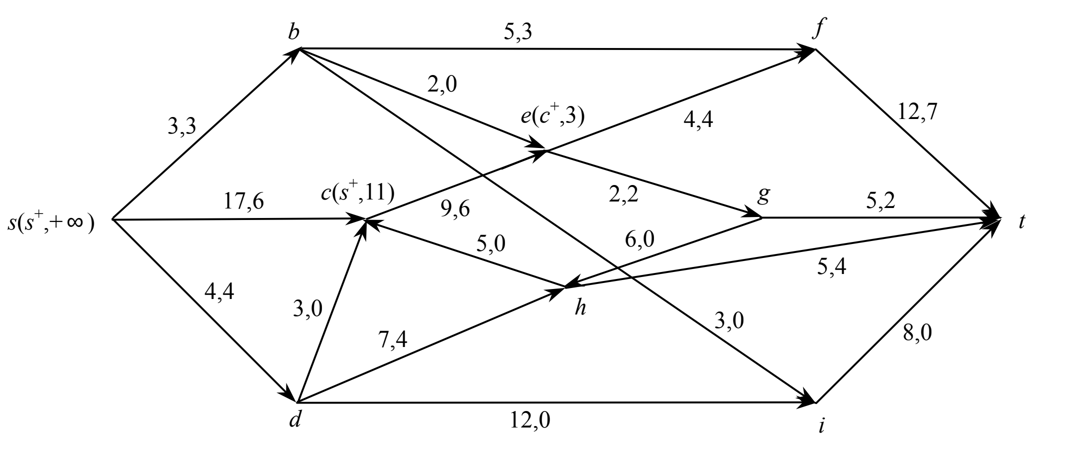
7-21 b



7-21　c



7-21　d

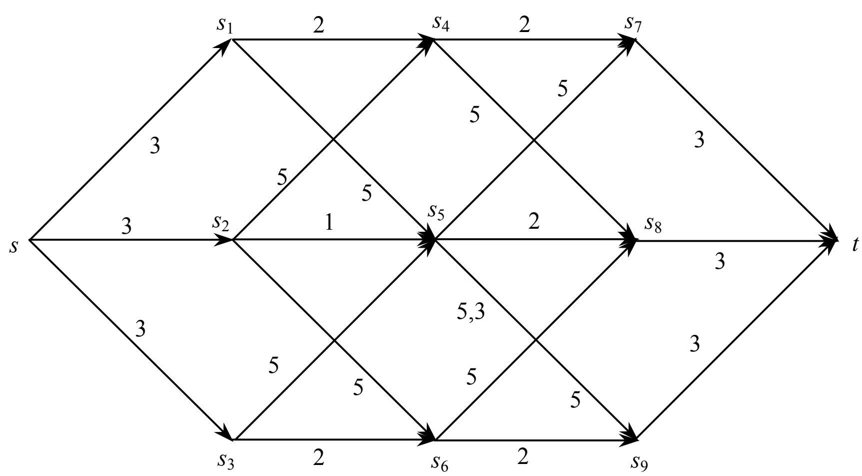


7-21　e

t　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　s　t

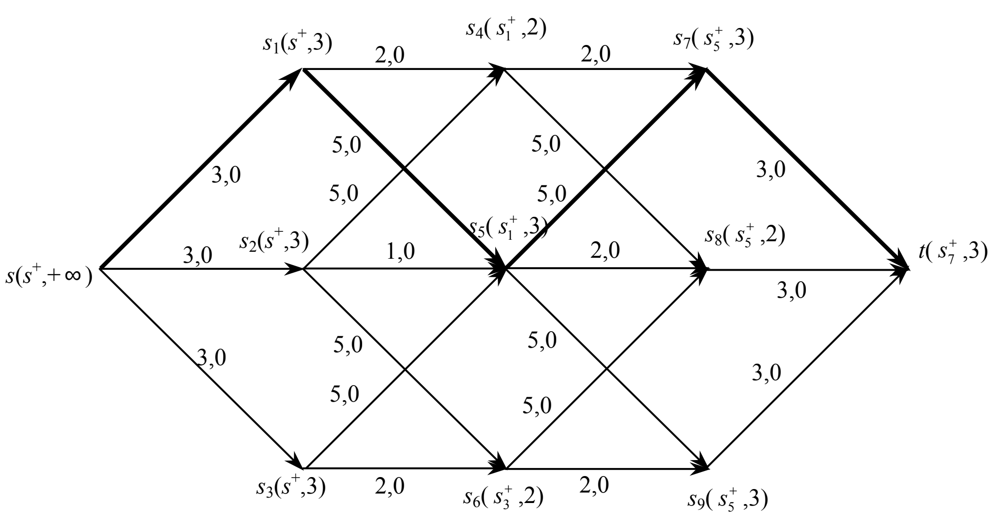
13

7.4　　　7-22

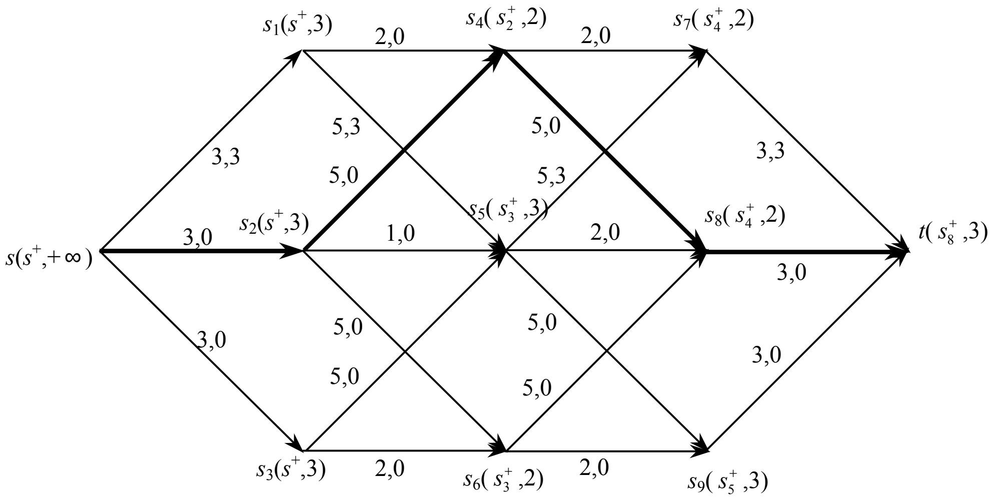


7-22

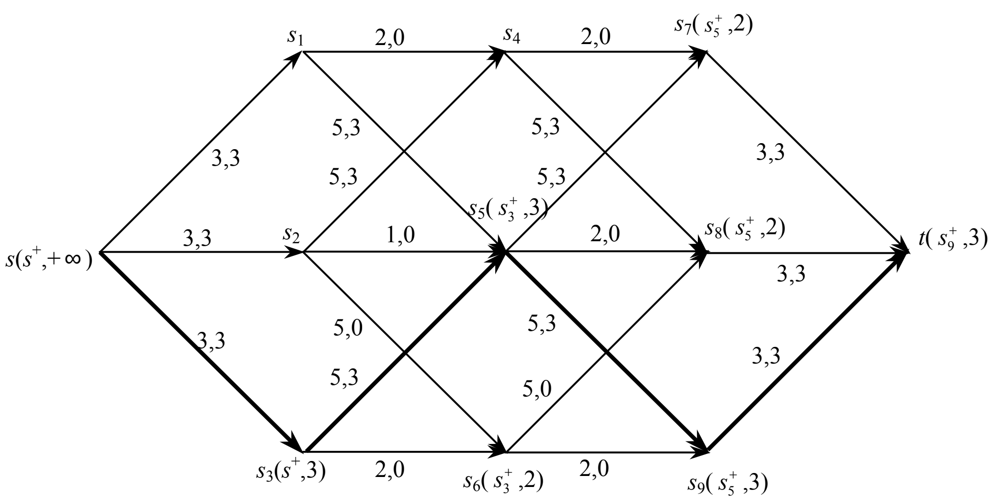
7-22



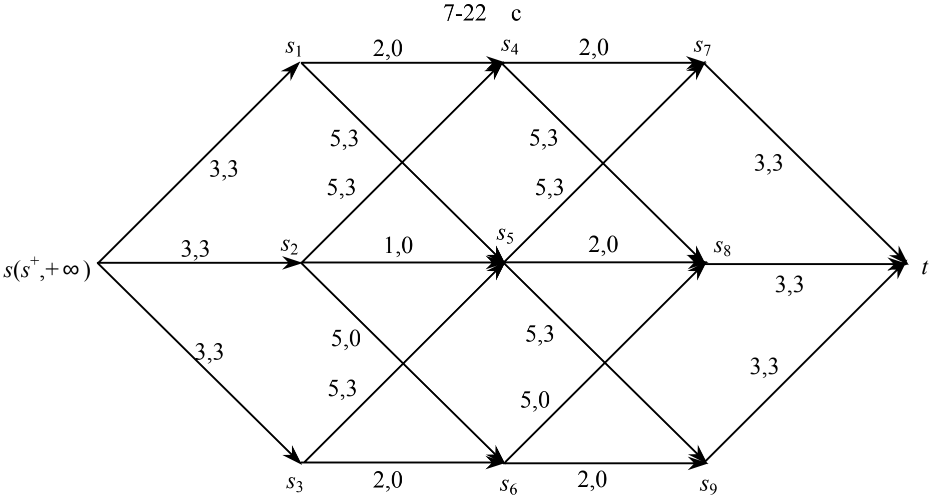
7-22　a



7-22　b



7-22　c



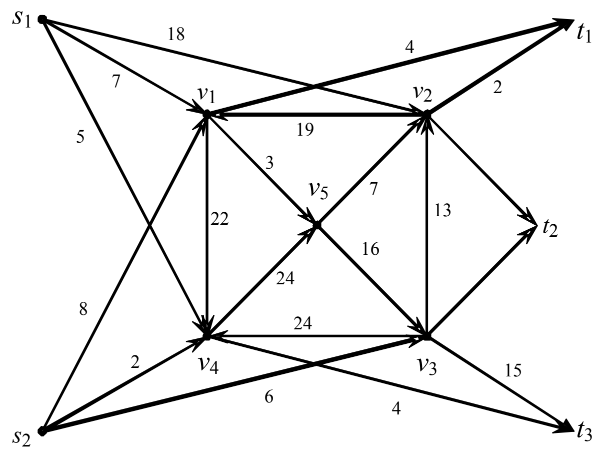
7-22　d

t s

t 9

7.5 s_1 s_2 7-23 t_1 t_2 t_3

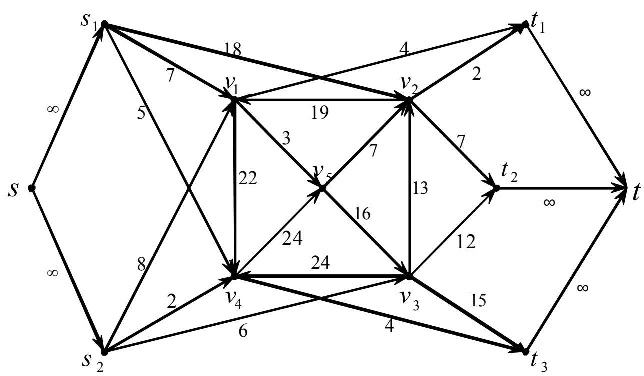
s_1 s_2 t_1 t_2 t_3



7-23

§7-5 7-23

7-23 a

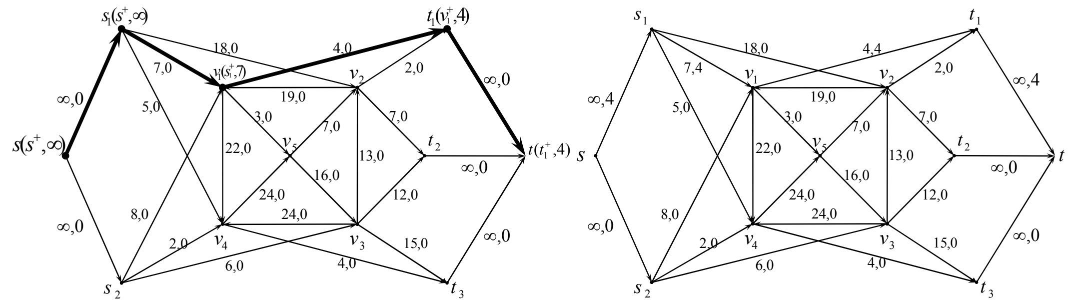


7-23 a

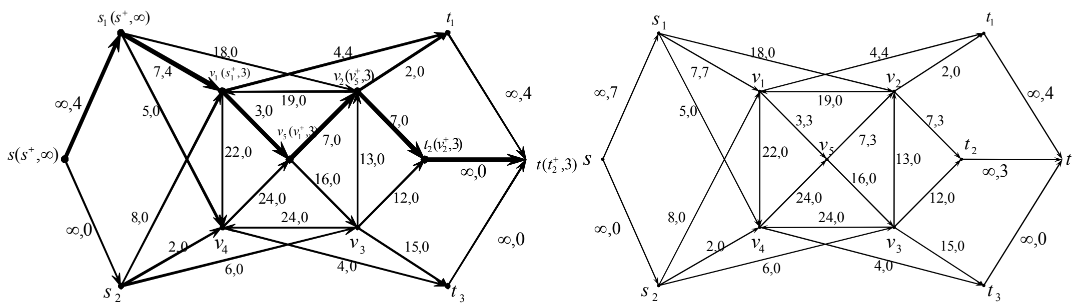
7-23 a 7-23

b 7-23 c 7-23 d 7-23 e 7-23 f 7-23 g 7-23 h 7-23 i 7-23 j

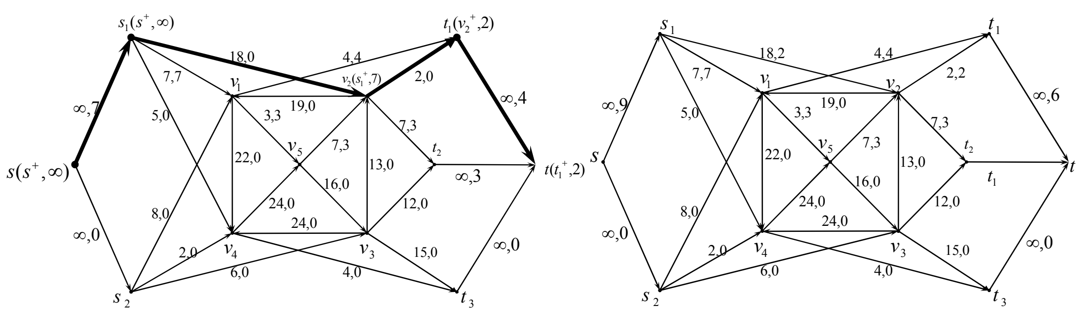
7-23 k



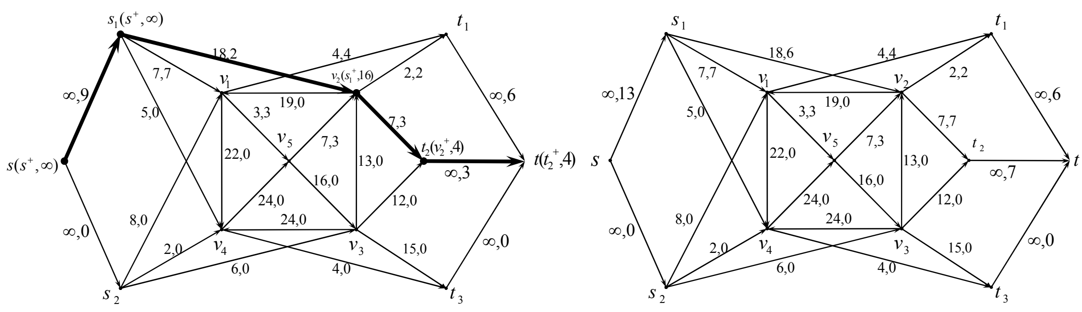
7-23　b



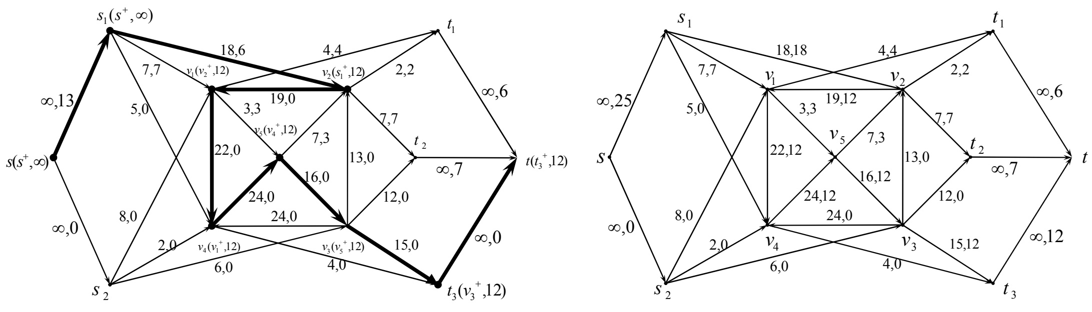
7-23　c



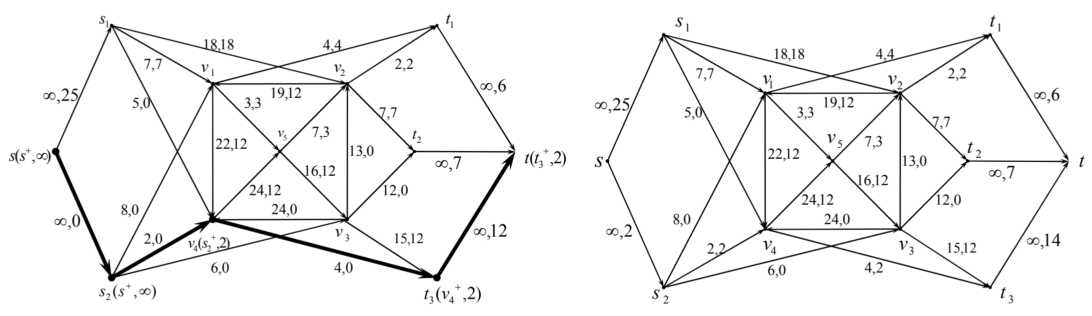
7-23　d



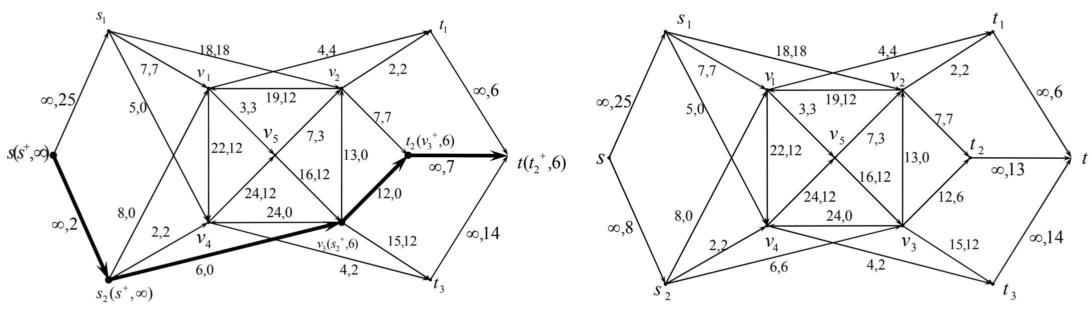
7-23　e



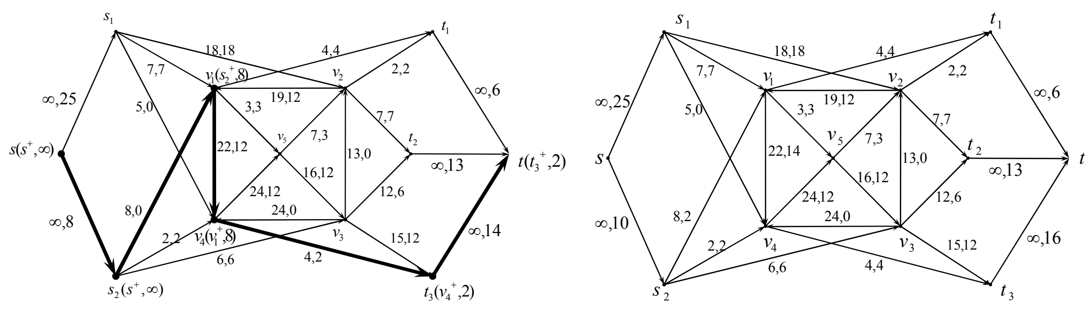
7-23 f



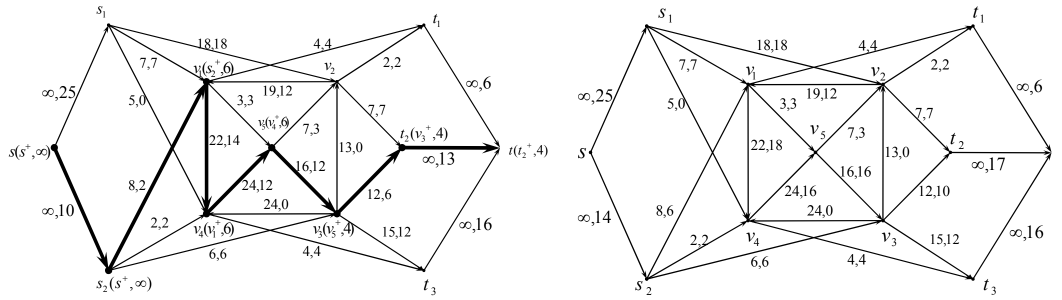
7-23 g



7-23 h



7-23 i

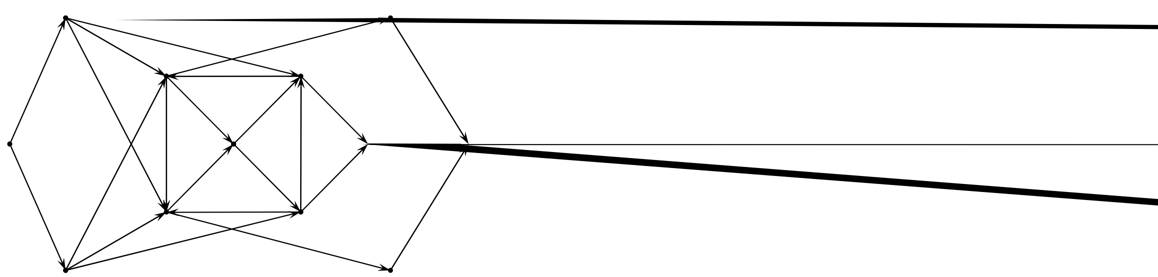


7-23 j

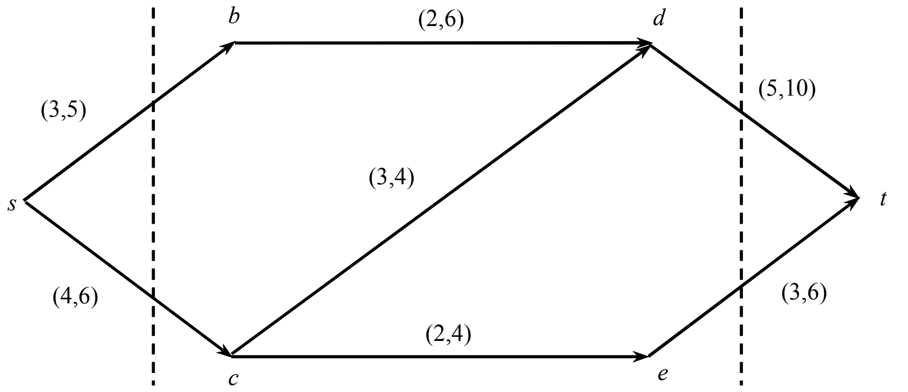
7-23 j 7-23 k t

s t

7-23 39 7-23 l 7-23



1　$\left(S_1, \overline{S_1}\right)$　$\left(S_2, \overline{S_2}\right)$



$$S_1=\{s\} \quad \overline{S_1}=\{b,\ c,\ d,\ e,\ t\}$$

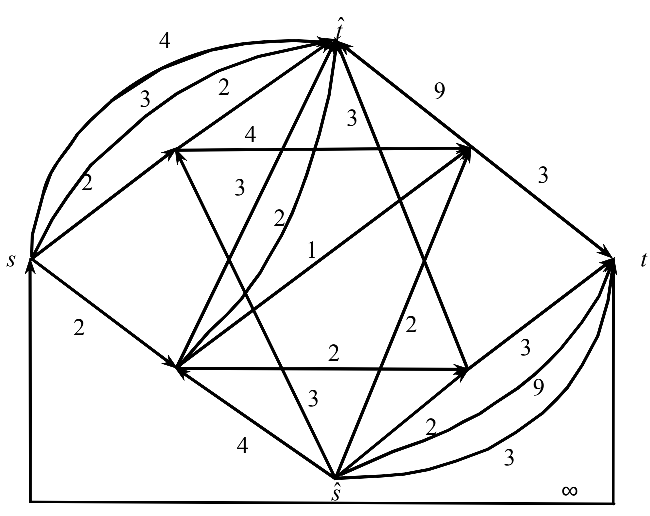
$$C=\left(S_1, \overline{S_1}\right)-b\left(\overline{S_1}, S_1\right)=5+6-0=11$$

$$S_2=\{s,\ b,\ c,\ d,\ e\} \quad \overline{S_2}=\{t\}$$

$$b\left(S_2, \overline{S_2}\right)-C\left(\overline{S_2},\ S_2\right)=9+3-0=12$$

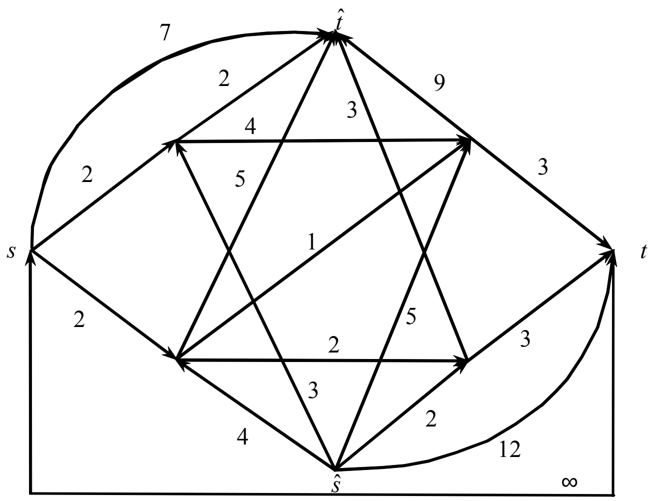
$$b\left(S_2,\overline{S_2}\right)-C\left(\overline{S_2},\ S_2\right)>C\left(S_1, \overline{S_1}\right)-b\left(\overline{S_1}, S_1\right)$$　7.3

2　§ 7.7　$\overline{G}$　7-24　a



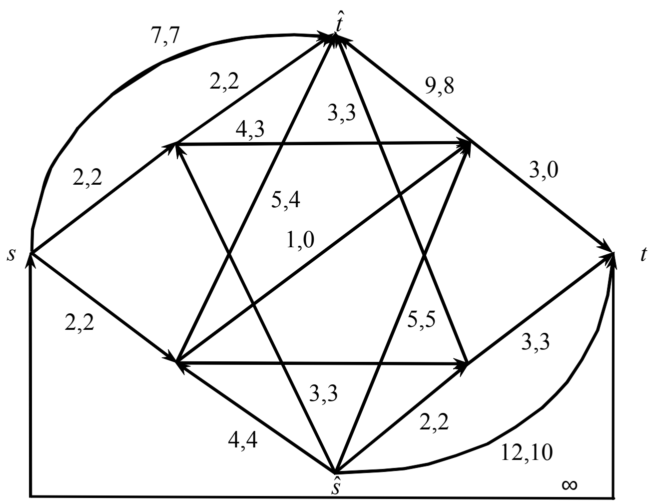
7-24　a

7-24　a　7-24　b



7-24 b

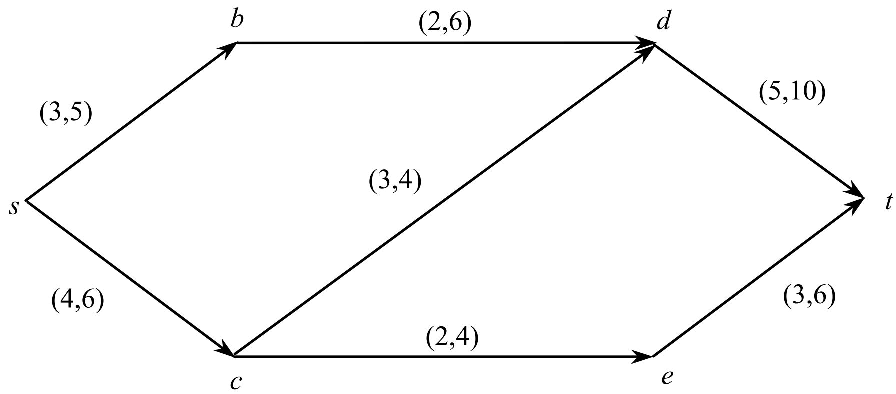
$\overline{G}$ 7-24 b 7-24 c



7-24 c

7-24 c t' 7.5

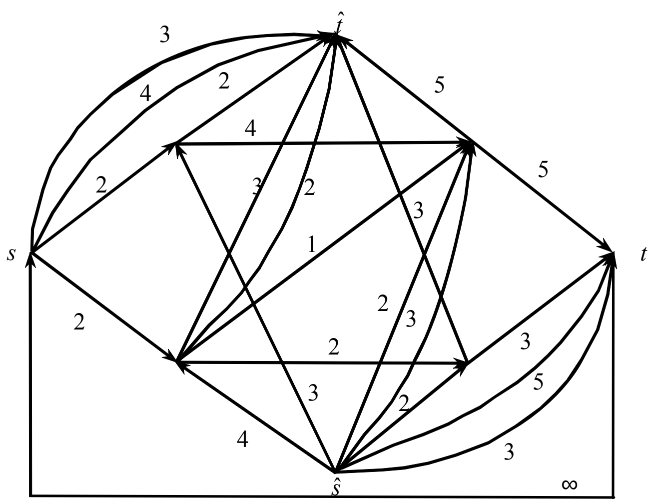
7.7 7-25 s t



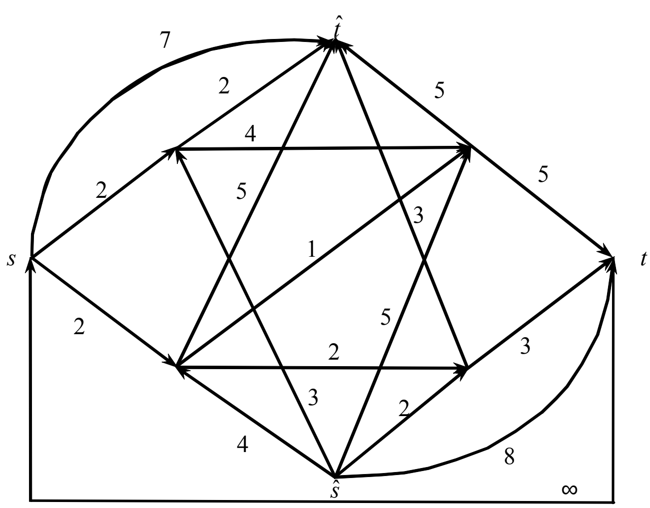
7-25

解：（1　　§7.7　　7-25

$\tilde{G}$c　7-25　a　　7-25　a　　7-25　b

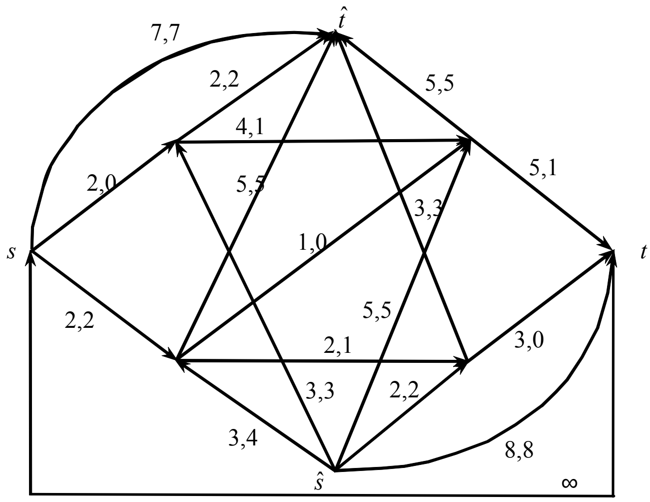


7-25　a



7-25　b

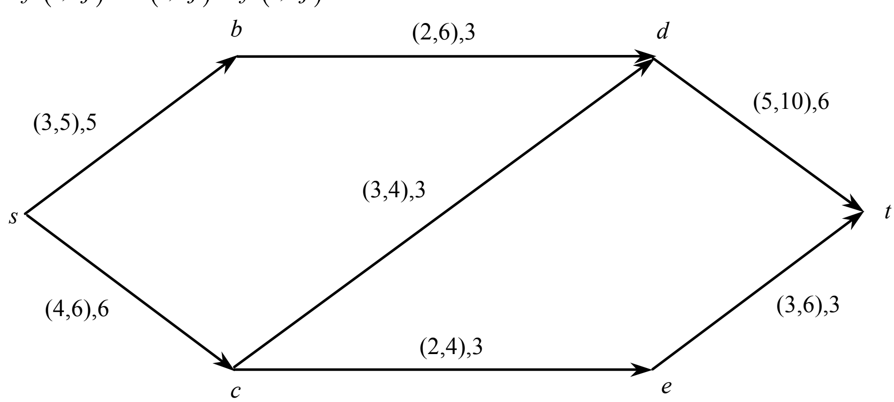
2 $\widetilde{G}$ 7-25 b 7-25 c



7-25 c

3 7-25 c $\hat{t}$ 7.5

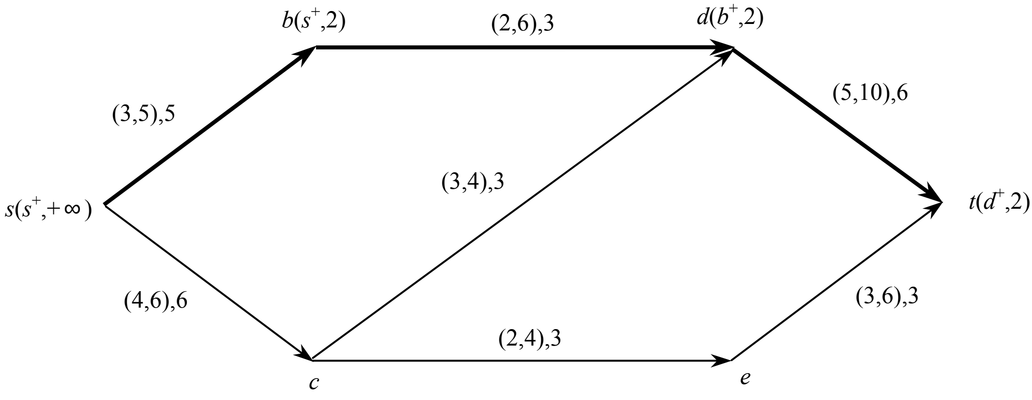
4 $f(i,\ j)=b(i,\ j)+\tilde{f}(i,\ j)$ G 7-25 d



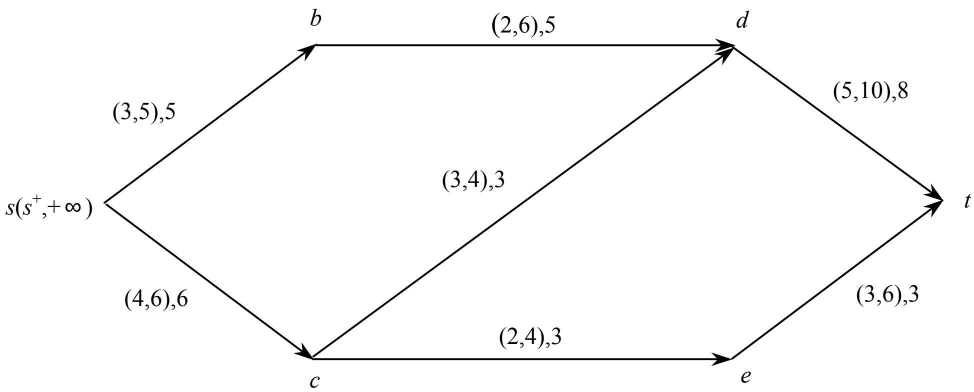
7-25 d

5 §7.6 7-25 d

7-25 e 7-25 f



7-25 e

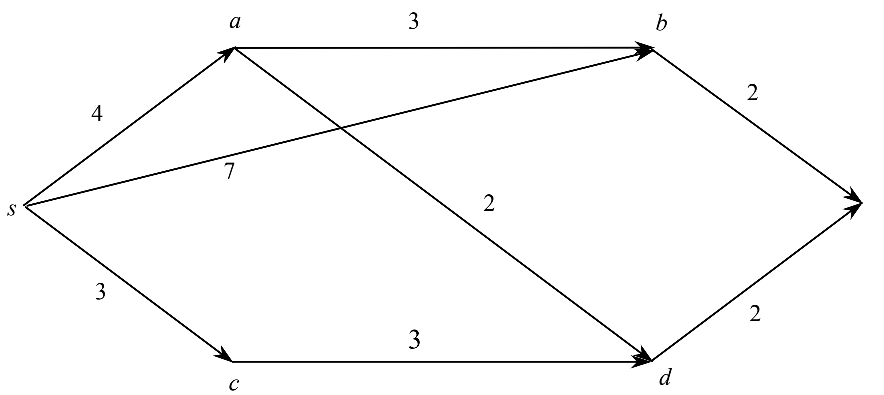


7-25 f

7-25 f *t*

s *t* 11 7-25

7.8 7-26 *s* *t*



7-26

§7.8 Moore-Dijkstra

1 $\overline{S}=\{a,\ b,\ c,\ d,\ t\}$ $\pi(S)=0$ $\pi(a)=4$ $\pi(b)=7$ $\pi(c)=3$ $\pi(d)=\infty$ $\pi(t)=\infty$

2 $j=c$ $\overline{S}=\{a,\ b,\ d,\ t\}$

3 Γ_j I $\overline{S}=\{d\}$ $\pi(d)=\min(\infty,\ 3+3)=6$

2 $j=a$ $\overline{S}=\{b,\ d,\ t\}$

3 Γ_j I $\overline{S}=\{b,\ d\}$ $\pi(b)=\min(7,\ 4+3)=7$ $\pi(d)=\min(6,\ 6)=6$

2 $j=d$ $\overline{S}=\{b,\ t\}$

3 Γ_j I $\overline{S}=\{t\}$ $\pi(t)=\min(\infty,\ 6+2)=8$

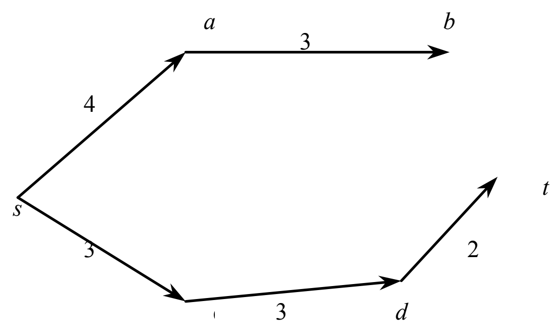
2 $j=b$ $\overline{S}=\{t\}$

3 Γ_j I $\overline{S}=\{t\}$ $\pi(t)=\min(8,\ 7+2)=8$

2 $j=t$ $\overline{S}=\{\phi\}$ $\left|\overline{S}\right|=0$

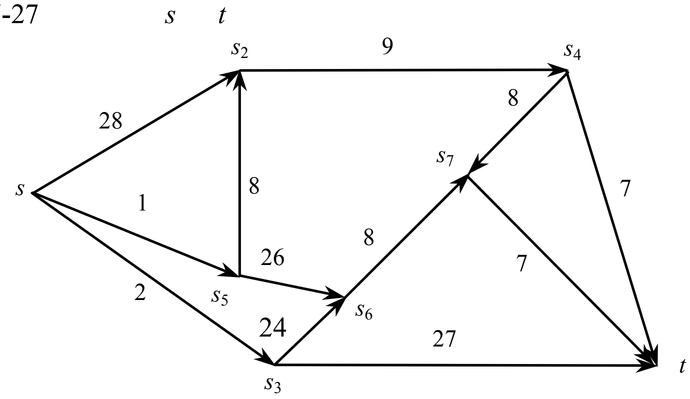
s t 8 s c d t

7-26 a



7-26 a

7.9 7-27 s t



7-27

解： Moore-Dijkstra

1 $\overline{S}=\{S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6,\ S_7,\ t\}$ $\pi(S)=0$ $\pi(S_2)=28$ $\pi(S_3)=2$ $\pi(S_5)=1$ $\pi(S_4)=\pi(S_6)=\pi(S_7)=\pi(t)=\infty$

2 $j=S_5$ $\overline{S}=\{S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_6,\ S_7,\ t\}$

3 $\Gamma_j\ \mathrm{I}\ \overline{S}=\{S_2,S_6\}$ $\pi(S_2)=\min\{28\ ,\ 9\}=9$ $\pi(S_6)=\min\{\infty\ ,\ 27\}=27$

2 $j=S_3$ $\overline{S}=\{S_2,\ S_4,\ S_6,\ S_7,\ t\}$

3 $\Gamma_j\ \mathrm{I}\ \overline{S}=\{S_6,t\}$ $\pi(S_6)=\min\{27\ ,\ 2+24\}=26$ $\pi(t)=\min\{\infty\ ,\ 2+27\}=29$

2 $j=S_2$ $\overline{S}=\{S_4,\ S_6,\ S_7,\ t\}$

3 $\Gamma_j\ \mathrm{I}\ \overline{S}=\{S_4\}$ $\pi(S_4)=\min\{\infty\ ,\ 9+9\}=18$

2 $j=S_4$ $\overline{S}=\{S_6,\ S_7,\ t\}$

3 $\Gamma_j\ \mathrm{I}\ \overline{S}=\{S_7,t\}$ $\pi(S_7)=\min\{\infty\ ,\ 18+8\}=26$ $\pi(t)=\min\{29\ ,\ 18+7\}=25$

2 $j=t$ $\overline{S}=\{S_6,\ S_7\}$

3 $\Gamma_j\ \mathrm{I}\ \overline{S}=\{\phi\}$

2 $j=S_6$ $\overline{S}=\{S_7\}$

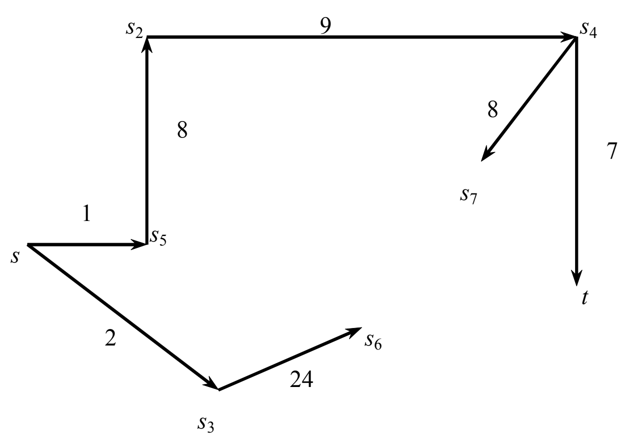
3 $\Gamma_j\ \mathrm{I}\ \overline{S}=\{S_7\}$ $\pi(S_7)=\min\{26\ ,\ 26+8\}=26$

2 $j=S_7$ $\overline{S}=\phi$ $|\overline{S}|=0$

s t $\pi(t)=25$ s s_5 s_2 s_4 t

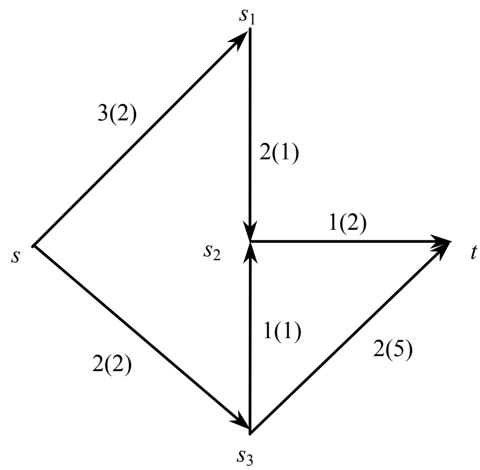
Moore-Dijkstra s $\pi($ s_3 $=2$ $\pi($ s_2 $=9$ $\pi($ s_3 $=2$ $\pi($ s_4 $=18$ $\pi($ t $=25$ $\pi($ s_7 $=26$ $\pi($ s_6 $=26$ s

7-27 a



7-27 a

7.10 7-28 $f_v = 2$



7-28

解： $f_v = 2$

1 7-28 §7.9 s t

$\mu(s,\ t)$ s s_3 s_2 t

$$d(s,\ s_3)+d(s_3,\ s_2)+d(s_2,\ t)=2+1+2=5$$

2 $\mu(s,\ t)$ $\tilde{f}$

$$\tilde{f}=\min\{C(s,\ s_3),\ C(s_3,\ s_2),\ C(s_2,\ t)\}=\min\{2\ ,\ 2\ ,\ 1\}=1$$

$\mu(s,\ t)$ $\tilde{f}$

$$C(s,\ s_3)\leftarrow C(s,\ s_3)-\tilde{f}=2-1=1$$

$$C(s_3,\ s_2)\leftarrow C(s_3,\ s_2)-\tilde{f}=1-1=0$$

$$C(s_2,\ t)\leftarrow C(s_2,\ t)-\tilde{f}=1-1=0$$

∞

$$d(s_3,\ s_2)=\infty\ d(s_2,\ t)=\infty$$

3 $\mu(s,\ t)$ i j $(j,\ i)$

$$C(s_3,\ s)=\tilde{f}=1\ d(s_3,\ s)=-2$$

$$C(s_2,\ s_3)=\tilde{f}=1\ d(s_2,\ s_3)=-1$$

$$C(t,\ s_2)=\tilde{f}=1\ d(t,\ s_2)=-2$$

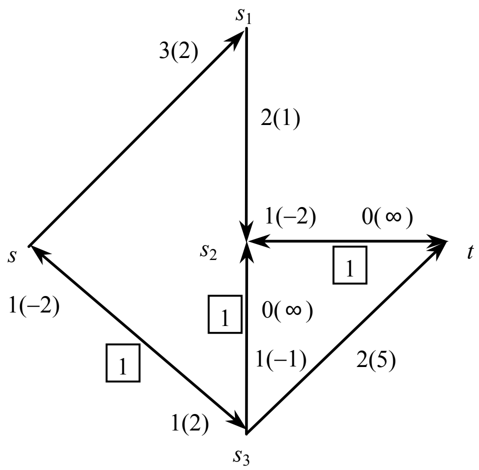
7-28 a

7-28 a

1 7-28 a s s_1 s_2 s_3 t

$$d(s,\ s_1)+d(s_1,\ s_2)+d(s_2,\ s_3)+d(s_3,\ t)=2+1-1+5=7$$

2 $f\%=\min\{C(s,\ s_1),\ C(s_1,\ s_2),\ C(s_2,\ s_3), C(s_3,\ t)\}=\min\{3,\ 2\ ,1,2\}=1$



7-28 a

s_2 s_3 1 s_3 s_2 1

s_3 s_2

$$C(s,\ s_1)\leftarrow C(s,\ s_1)-f\%=3-1=2$$

$$C(s_1,\ s_2)\leftarrow C(s_1,\ s_2)-f\%=2-1=1$$

$$C(s_2,\ s_3)\leftarrow C(s_2,\ s_3)-f\%=1-1=0$$

$$C(s_3,\ t)\leftarrow C(s_3,\ s_t)-f\%=2-1=1\ d(s_2,\ s_3)=\infty$$

3 $C(s_1,\ s)=f\%=1$ $d(s_1,\ s)=-2$

$C(s_2,\ s_1)=f\%=1$ $d(s_2,\ s_1)=-1$

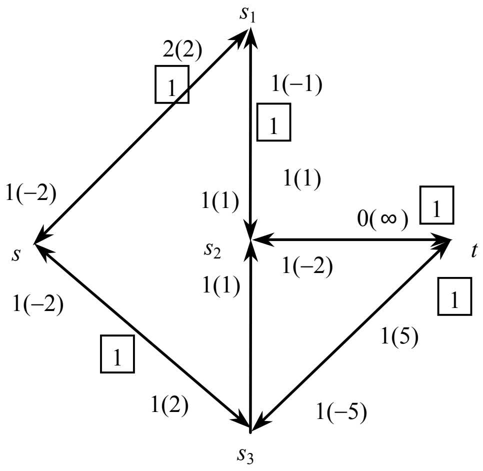
$C(s_3,\ s_2)=0+f\%=1$ $d(s_3,s_2)=1$

$C(t,\ s_3)=f\%=1$ $d(t\ ,\ s_3)=-5$

7-28 b

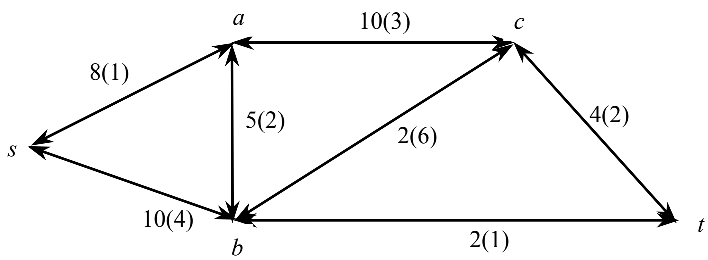
7-28 b s t f_v =2

1 × 5+1 × 7=12



7-28　b

7.11　　　7-29



7-29

解：1　　7-29　　7.9　　Moore-Dijkstra　　s　t
$\mu(s,\ t)$　　s　a　b　t

$$d(s,\ a)+d(a,\ b)+d(b,\ t)=1+2+1=4$$

2　　$\mu(s,\ t)$　　$\tilde{f}$

$\tilde{f}=\min\{C(s,\ a),\ C(a,\ b),\ C(b,\ t)\}=\min\{8,5,7\}=5$

$\mu(s,\ t)$　　$\tilde{f}$

$$C(s,\ a)\leftarrow C(s,\ a)-\tilde{f}=8-5=3$$

$$C(a,\ b)\leftarrow C(a,\ b)-\tilde{f}=5-5=0\ d(a,\ b)=\infty$$

$$C(b,\ t)\leftarrow C(b,\ t)-\tilde{f}=7-5=2$$

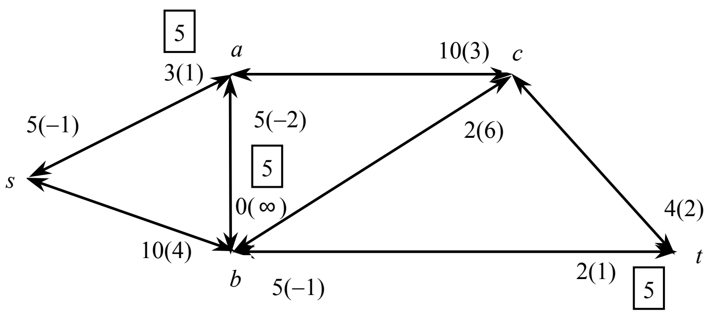
3　　$\mu(s,\ t)$　　i　j　　$(j,\ i)$、

$$C(a,\ s)=5\ d(a,\ s)=-1$$

$$C(b,\ a)=5\ d(b,\ a)=-2$$

$$C(t,\ b)=5\ d(t,\ b)=-1$$

7-29　a



7-29　a

7-29　a

1　　7-29　a　　s　b　t

$$d(s,\ b)+d(b,\ t)=4+1=5$$

2　$\tilde{f}=\min\{C(s,\ b),\ C(b,\ t)\}=2$

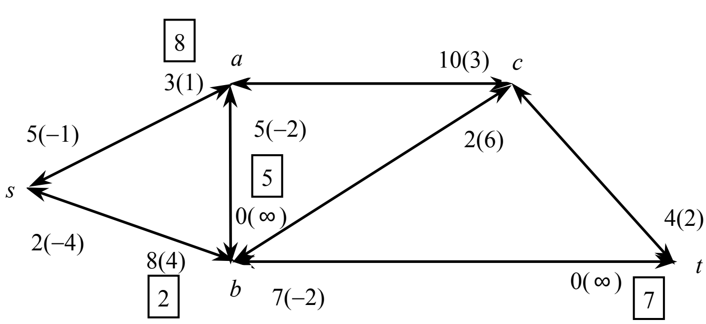
$C(s,\ b)\leftarrow C(s,\ b)-\tilde{f}=10-2=8$

$C(b,\ t)\leftarrow C(b,\ t)-\tilde{f}=2-2=0\ d(b,\ t)=\infty$

3　$C(b,\ s)=\tilde{f}=2\ d(b,\ s)=-4$

$C(t,\ b)=\tilde{f}=2=2\ d(t,\ b)=-1$

7-29　a　　7-29　b



7-29　b

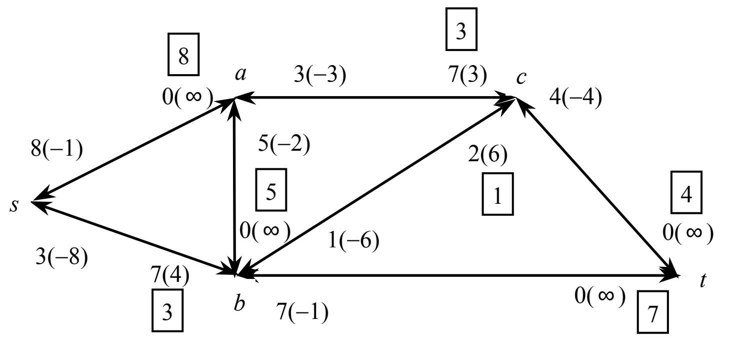
7-29　b

1 $s \quad a \quad c \quad t$

$$d(s,\ a)+d(a,\ c)+d(c,\ t)=1+3+2=6$$

2 $f\% = \min\{C(s,\ a),\ C(a,\ c),\ C(c,\ t)\} = \min\{3,10,4\} = 3$

(



7-29　d

7-29　d　　s　t　　s　t

11　　$5\times4+2\times5+3\times6+1\times7=55$

第八章　线 性 规 划

一、内容提要

1947　G.B.Dantzig

——

（一）线性规划问题的数学模型

$$y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_rx_r \qquad (8.1)$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r \le \quad = \quad \ge \quad b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r \le \quad = \quad \ge \quad b_2\\
&\qquad \text{L L}\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mr}x_r \le \quad = \quad \ge \quad b_m
\end{aligned} \qquad 8.1'$$

$$x_i \ge 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad r$$

a_{ij}　b_i　c_j　i=1　2　L　m　j=1　2　L　r　x_i

$$\max \quad \min \qquad y=\sum c_i x_i \qquad 8.2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \qquad &\sum_{i=1}^{r} a_{1i}x_i \le \quad = \quad \ge \quad b_1\\
&\sum_{i=1}^{r} a_{2i}x_i \le \quad = \quad \ge \quad b_2\\
&\qquad \text{L L}\\
&\sum_{i=1}^{r} a_{mi}x_i \le \quad = \quad \ge \quad b_m
\end{aligned} \qquad 8.2'$$

$x_i \geq 0$　i=1　2　L　r

定义 8.1　8.1

8.1′　8.2′　$x_i \geq 0$　i=1

2　L　r　8.1　8.1′

注意：

（二）线性规划问题的标准形式

8.2　8.2′

b_i

$$\max \quad y = \sum c_i x_i \qquad 8.3$$

$$\text{s.t.} \quad \sum a_{1i} x_i = b_1$$

$$\sum a_{2i} x_i = b_2$$

$$\text{L L} \qquad 8.3'$$

$$\sum a_{mi} x_i = b_m \quad x_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \text{L} \quad n$$

$$b_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \text{L} \quad m$$

8.3　8.3′

1

k

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \text{L} + a_{kr}x_r \leq b_k$$

$x_{r+k} \geq 0$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \text{L} + a_{kr}x_r + x_{r+k} = b_k$$

x_{r+k}

i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \text{L} + a_{ir}x_r \geq b_{\mathrm{i}}$$

$x_{r+i} \geq 0$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r-x_{r+i}=b_i$$

注意： 0

2

$$y=\sum c_i x_i$$

-1

$$y'=-y=-\sum c_i x_i$$

3 b_i

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ir}x_r=b_i$$

$b_i<0$ -1

$$-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\cdots-a_{ir}x_r=-b_i>0$$

4 x_j $-\infty<x_j<0$

$$x_j=x'_j-x''_j \quad x'_j\geq 0 \quad x''_j\geq 0$$

x'_j x''_j x_j

8.2 8.2′

$$\max \quad y=\sum c_i x_i \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum a_{1i}x_i \pm x_{r+1}=b_1 \\ & \sum a_{2i}x_i \pm x_{r+2}=b_2 \\ & \cdots\cdots \\ & \sum a_{mi}x_i \pm x_{r+m}=b_m \\ & x_i\geq 0 \quad x_{r+j}\geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad r \quad j=1 \quad 2 \quad \cdots \quad m \\ & b_i\geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad m \end{aligned} \tag{8.4′}$$

（三）线性规划问题的几何意义

定义 8.2 8.1′ x_1 x_2 $\cdots$ x_r

8.1

定义 8.3

1

2

3

4

注意：

定义 8.4 180°

定义 8.5 x

x

定义 8.6

r r

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\mathrm{L}\ +a_{ir}x_r=b_i$$

r

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\mathrm{L}\ +a_{ir}x_r>b_i$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\mathrm{L}\ +a_{ir}x_r<b_i$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\mathrm{L}\ +a_{ir}x_r=b_i$$

r m r

m r

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\mathrm{L}\ +a_{1r}x_r=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_V+\mathrm{L}\ +a_{2r}x_r=b_2$$
$$\mathrm{L}\ \mathrm{L}$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\mathrm{L}\ +a_{mr}x_r=b_m$$
$$x_i\geq 0\quad i=1\quad 2\quad \mathrm{L}\quad r$$

（四）线性规划问题的基本定理

定义 8.7　　8.4　　8.4′　　$r+m$　　r

0　　$r+m$　　r　0

0

定理 8.1　　8.4　　8.4′

定理 8.2　　8.4　　8.4′

（五）线性规划问题的单纯形方法

1

2　　§8.8

3

4

5　　3　4

（六）线性规划问题的表格法

1　x_1　x_2　L　x_m　x_{m+1}　x_{m+2}　L　x_{r+m}　　x_1　x_2　L

x_m　　x_{m+1}　x_{m+2}　L　x_{r+m}

2

$$
\begin{gathered}
x_1+v_{1\ m+1}x_{m+1}+v_{1\ m+2}x_{m+2}+\mathrm{L}\ +v_{1\ m+j}x_{m+j}+\mathrm{L}\ +v_{1\ r+m}x_{r+m}=w_1\\
x_2+v_{2\ m+1}x_{m+1}+v_{2\ m+2}x_{m+2}+\mathrm{L}\ +v_{2\ m+j}x_{m+j}+\mathrm{L}\ +v_{2\ r+m}x_{r+m}=w_2\\
\mathrm{L}\quad\mathrm{L}\\
x_k+v_{k\ m+1}x_{m+1}+v_{k\ m+2}x_{m+2}+\mathrm{L}\ +v_{k\ m+j}x_{m+j}+\mathrm{L}\ +v_{k\ r+m}x_{r+m}=w_k\\
\mathrm{L}\quad\mathrm{L}\\
x_m+v_{m\ m+1}x_{m+1}+v_{m\ m+2}x_{m+2}+\mathrm{L}\ +v_{m\ m+j}x_{m+j}+\mathrm{L}\ +v_{m\ r+m}x_{r+m}=w_m\\
y+v_{0\ m+1}x_{m+1}+v_{0\ m+2}x_{m+2}+\mathrm{L}\ +v_{0\ m+j}x_{m+j}+\mathrm{L}\ +v_{0\ r+m}x_{r+m}=w_0
\end{gathered}
$$

8-1

表　8-1

	v_{m+1}	v_{m+2}	L	v_{m+j}	L	v_{r+m}	
x_1	$v_{1\ \ m+1}$	$v_{1\ \ m+2}$	L	$v_{1\ \ m+j}$	L	$v_{1\ \ r+m}$	w_1
x_2	$v_{2\ \ m+1}$	$v_{2\ \ m+2}$	L	$v_{2\ \ m+j}$	L	$v_{2\ \ r+m}$	w_2
L	L	L	L	L	L	L	w_3
x_k	$v_{k\ \ m+1}$	$v_{k\ \ m+2}$	L	$v_{k\ \ m+j}$	L	$v_{k\ \ r+m}$	w_4
L	L	L	L	L	L	L	w_5
x_m	$v_{m\ \ m+1}$	$v_{m\ \ m+2}$	L	$v_{m\ \ m+j}$	L	$v_{m\ \ r+m}$	w_6
	$v_{0\ \ m+1}$	$v_{0\ \ m+2}$	L	$v_{0\ \ m+j}$	L	$v_{0\ \ r+m}$	w_0

3

8-1 x_{m+j} 0

x_1 x_2 L x_m $w_1/v_{1\ \ m+j}$ $w_2/v_{2\ \ m+j}$

L $w_m/v_{m\ \ m+j}$ $w_k/v_{k\ \ m+j}$ $x_{\ m+j}$

x_k $v_{k\ \ m+j}$

x_i x_{m+j} x_1 L x_{k-1} x_{m+j}

x_{k+1} L x_m x_{m1} L x_{m+j-1} L x_k x_{m+j+1} L x_{r+m} x_1 x_2 L x_{k-1} x_{m+j}

x_{k+1} L x_m x_{m+1} L x_{m+j-1} L x_k x_{m+j+1} L x_{r+m}

8-1

1

2

3

4 $v_{p\ \ m+q}$ $p \neq k$ $q \neq j$ $v_{p\ \ m+q} - v_{p\ \ m+j}\dfrac{v_{k,\,m+q}}{v_{k,\,m+j}}$ w_p $p \neq k$

$w_p - v_{p\ \ m+j}\dfrac{w_k}{v_{k,\,m+j}}$

4

3 4

1

0

2

3

（七）初始基本可行解的求法

1 m

b_1 b_2 L b_m 0 L 0

m x_j

2 $x_i \geq 0$ “ ≤ ”

3 1 2

M

M M

（八）线性规划问题的对偶问题

定义 8.8

$$\max \quad y = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{r} a_{1i} x_i \leq b_1$$

$$\cdots \quad \cdots \tag{8.32}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_{mi} x_i \le b_m$$

$$x_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, r$$

$$\min \qquad z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \ge c_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i \ge c_2$$

$$\cdots \quad \cdots \tag{8.33}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ir} y_i \ge c_r$$

$$y_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

8.33　　8.32　　8.32

定理 8.3

定理 8.4　8.32　8.33

$x_1', x_2', \cdots, x_r'$　$y_1', y_2', \cdots, y_m'$　8.32　8.33

$$\sum_{j=1}^{r} c_j x_j' \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i'$$

定理 8.5　$x_1', x_2', \cdots, x'_r$　$y_1', y_2', \cdots, y_m'$　8.32

8.33

$$\sum_{i=1}^{r} c_i x_i' = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i'$$

$x_1', x_2', \cdots, x_r'$　8.32

$y_1', y_2', \cdots, y_m'$　8.33

定理 8.6　8.32　8.33

8.6

推论

8.6

二、习题解答

8.1

a　max $y=2x_1+5x_2$

s.t. $x_1 \le 4$

$x_2 \le 3$

$x_1+2x_2 \le 8$

$x_i \ge 0$　$i=1$　2

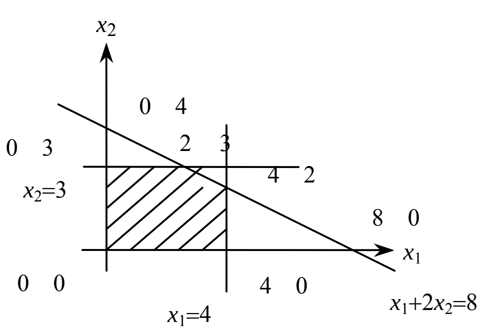
解： x_1x_2 8-1

$y=2x_1+5x_2$

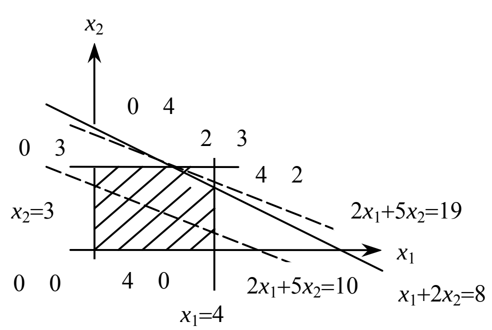
$2x_1+5x_2$

x_1x_2 $2x_1+5x_2=k$ k 8-2

k



8-1



8-2

8-2 $2x_1+5x_2=19$ 2 3 y

$x_1=2$　$x_2=3$ 19

b　max $y=5x_1+2x_2$

s.t. $-x_1+x_2 \le 5$

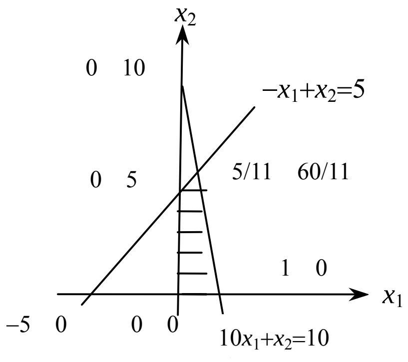
$10x_1+x_2 \le 10$

$x_i \ge 0$　$i=1$　2

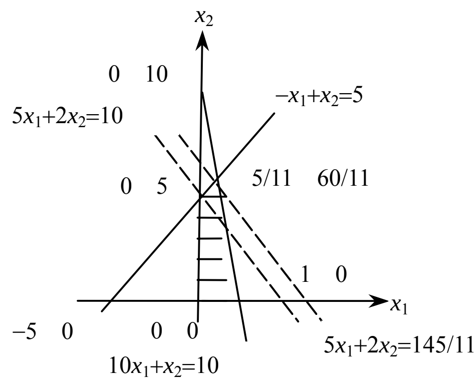
解： x_1x_2 8-3

$y=5x_1+2x_2$

$5x_1+2x_2$



8-3



8-4

x_1x_2 $5x_1+2x_2=k$ k 8-4

k

8-4 $5x_1+2x_2=145/11$ 5/11 60/11

y $x_1=5/11$ $x_2=60/11$ 145/11

c max $y=2x_1+2x_2$

s.t. $-x_1+x_2\le 1$

$x_1+x_2\le 3$

$x_i\ge 0$ $i=1$ 2

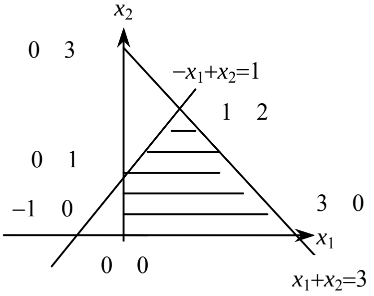
解： x_1x_2 8-5

$y=2x_1+2x_2$

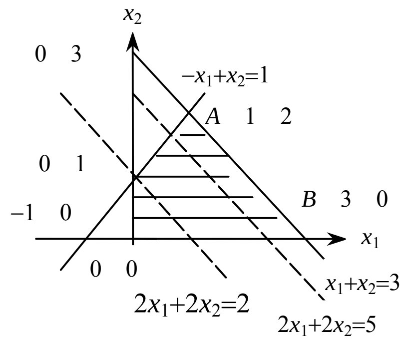
$2x_1+2x_2$

x_1x_2 $2x_1+2x_2=k$ k 8-6

$2x_1+2x_2=6$ AB k



8-5



8-6

AB $y=6$

8.2

a　min　$y=-3x_1-4x_2+2x_3$

s.t.　$3x_1+4x_2+x_3\le 2$

$2x_1-3x_2+x_3\ge -4$

$x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0$

$y'=-y$

max　$y'=3x_1+4x_2-2x_3$

s.t.　$3x_1+4x_2+x_3+x_4=2$

$-2x_1+3x_2-x_3+x_5=4$

$x_1\le 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0$

$x_1=x'_1-x''_1(x'_1\ge 0, x''_1\ge 0)$

$x_3=x'_3-x''_3(x'_3\ge 0,\ x''_3\ge 0)$

max　$y'=3x'_1-3x''_1+4x_2-2x'_3+2x''_3$

s.t.　$3x'_1-3x''_1+4x_2+x'_3-x''_3+x_4=2$

$-2x'_1+2x''_1+3x_2-x'_3+x''_3+x_5=4$

$x'_1\ge 0,\ x''_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x'_3\ge 0,\ x''_3\ge 0,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0$

b　min　$y=3x_1-4x_2+x_3$

s.t.　$-x_1+x_2+x_3\le 5$

$x_1-x_2-2x_3\ge -6$

$5x_1+x_2-3x_3=4$

$x_i\ge 0\quad i=1\ \ 2\ \ 3$

$y'=-y$

max　$y'=-3x_1+4x_2-x_3$

b_i　　$x_4,\ x_5$

max　$y'=-3x_1+4x_2-x_3$

s.t.　$-x_1+x_2+x_3+x_4=5$

$-x_1+x_2+2x_3+x_5=6$

$5x_1+x_2-3x_3=4$

$x_i\ge 0\quad i=1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5$

8.3

a　max　$y=3x_1+6x_2\quad 2x_3$

$$3x_1+4x_2+x_3+x_4=2$$
$$x_1+3x_2+2x_3+x_5=1$$
$$y-3x_1-6x_2-2x_3=0$$

0　0　0　2　1

$$x_4+3x_1+4x_2+x_3=2 \quad (1)$$
$$x_5+x_1+3x_2+2x_3=1 \quad (2)$$
$$y-3x_1-6x_2-2x_3=0 \quad (3)$$

x_2　1　2　$x_2=\min\{\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\}=\frac{1}{3}$

0　$\frac{1}{3}$　0　$\frac{2}{3}$　0

$$x_4+\frac{5}{3}x_1-\frac{5}{3}x_3-\frac{4}{3}x_5=\frac{2}{3} \quad (1')$$
$$x_2+\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_5=\frac{1}{3} \quad (2')$$
$$y-x_1+2x_3+2x_5=2 \quad (3')$$

x_1　1′　2′　$x_2=\min\{\frac{2}{5}\quad 1\}=\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$　$\frac{1}{5}$　0　0　0

$$x_1-x_3+\frac{3}{5}x_4-\frac{4}{5}x_5=\frac{2}{5} \quad (1'')$$
$$x_2+x_3-\frac{1}{5}x_4+\frac{3}{3}x_5=\frac{1}{5} \quad (2'')$$
$$y+x_3+\frac{3}{5}x_4+\frac{6}{5}x_5=\frac{12}{5} \quad (3'')$$

x_3,x_4,x_5　$x_3=x_4=x_5=0$　$\max y=\frac{12}{5}$

$\frac{2}{5}$　$\frac{1}{5}$　0　0　0

b min $y = x_1 - x_2$

s.t. $4x_1 - 5x_2 \le 10$

$5x_1 + 2x_2 \le 1$

$3x_1 + 3x_2 \le 12$

$x_i \ge 0 \quad i = 1 \quad 2$

x_3, x_4, x_5 $y' = -y$

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \\
&5x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\
&3x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\
&y' + x_1 - x_2 = 0 \\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

0 0 10 1 12

$$\begin{aligned}
&x_3 + 4x_1 - 5x_2 = 10 \\
&x_4 + 5x_1 + 2x_2 = 1 \\
&x_5 + 3x_1 + 3x_2 = 12 \\
&y' + x_1 - x_2 = 0 \\
&x_i \ge 0, i = 1, 2, 3, 4, 5
\end{aligned}$$

8-2 8-3

表 8-2

	x_1	x_1	
x_3	4	–5	10
x_4	5	$\boxed{2}$	1
x_5	3	3	12
y'	1	–1	0

表 8-3

	x_1	x_4	
x_3	$\frac{33}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
x_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_5	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{21}{2}$
y'	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$\max \quad y'=\frac{1}{2} \quad \min \quad y=-\frac{1}{2}$$

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{25}{2} \quad 0 \quad \frac{21}{2}$$

c　$\max \quad y=10x_1+15x_2+12x_3$

$$\text{s.t.} \quad -5x_1+6x_2+15x_3 \leq 15$$

$$2x_1+x_2+x_3 \geq 5$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3$$

x_4 , x_5

$$\begin{aligned} \max \quad & y=10x_1+15x_2+12x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -5x_1+6x_2+15x_3+x_4=15 \\ & 2x_1+x_2+x_3-x_5=5 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

y_1

$$\begin{aligned} \max \quad & z=-y_1 \\ \text{s.t.} \quad & -5x_1+6x_2+15x_3+x_4=15 \\ & 2x_1+x_2+x_3-x_5+y_1=5 \\ & x_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad y_1 \geq 0 \end{aligned}$$

0　0　0　15　0　5　　8-4　8-5

表　8-4

	x_1	x_2	x_3	x_5	
x_4	–5	6	15	0	15
y_1	$\boxed{2}$	1	1	–1	5
z	–2	–1	–1	1	–5

表　8-5

	y_1	x_2	x_3	x_5	
x_4	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{55}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
z	1	0	0	0	0

8-4 y_1 $\frac{5}{2}$ 0 0 $\frac{55}{2}$ 0 0

$\frac{5}{2}$ 0 0 $\frac{55}{2}$ 0 8-5 y_1 y

8-5 8-6

表 8-6

	x_2	x_3	x_5	
x_4	$\frac{17}{2}$	$\frac{35}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{55}{2}$
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
y	−10	−7	−5	25

d min $y = x_2 - 3x_3 + 2x_5$

s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 7$

$-2x_1 + 4x_3 + x_4 = 12$

$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$

$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

max $z = -\min\ y = -x_2 + 3x_3 - 2x_5$

s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 7$

$-2x_1 + 4x_3 + x_4 = 12$

$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$

$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

y_1

max $z' = -y_1$

s.t. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_5 + y_1 = 7$

$-2x_1 + 4x_3 + x_4 = 12$

$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$

$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $y_1 \geq 0$

0 0 0 12 0 10 7 8-7 8-8

表 8-7

	x_1	x_2	x_3	x_5	
x_4	−2	0	4	0	12
x_6	0	−4	3	8	10
y_1	1	$\boxed{3}$	−3	2	7
z'	−1	−3	3	−2	−7

表 8-8

	x_1	y_1	x_3	x_5	
x_4	−2	0	4	0	12
x_6	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	$\frac{32}{3}$	$\frac{58}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	−1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
z'	0	1	0	0	0

8-8 y_1 $\left(0, \frac{7}{3}, 0, 12, 0, \frac{58}{3}, 0\right)$

$y_1=0$ $\left(0, \frac{7}{3}, 0, 12, 0, \frac{58}{3}\right)$

$\left(0, \frac{7}{3}, 0, 12, 0, \frac{58}{3}\right)$

8-9 8-10 8-11

表 8-9

	x_1	x_3	x_5	
x_2	$\frac{1}{3}$	−1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_4	−2	$\boxed{4}$	0	12
x_6	$\frac{4}{3}$	−1	$\frac{32}{3}$	$\frac{58}{3}$
z	$-\frac{1}{3}$	−2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$

表 8-10

	x_1	x_4	x_5	
x_2	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	3
x_6	$\boxed{\frac{5}{6}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{32}{3}$	$\frac{67}{3}$
z	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{3}$

表 8-11

	x_6	x_4	x_5	
x_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{42}{15}$	$\frac{49}{5}$
x_3	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{32}{5}$	$\frac{82}{5}$
x_1	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{64}{5}$	$\frac{134}{5}$
z	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{276}{15}$	$\frac{197}{5}$

8-11

max $z=\frac{197}{5}$ min $y=-\frac{197}{5}$

$\frac{134}{5}$ $\frac{49}{5}$ $\frac{82}{5}$ 0 0 0

e

$$\min\quad y=2x_1-3x_2+6x_3+x_4-2x_5$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1-3x_2+x_3+3x_4-x_5=3$$
$$x_1+x_2 0-2x_3+9x_4=4$$
$$x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4,5$$

解：

$$\max\quad z=-\min\quad y=-2x_1+3x_2-6x_3-x_4+2x_5$$
$$\text{s.t.}\quad 2x_1-3x_2+x_3+3x_4-x_5=3$$
$$x_1+x_2-2x_3+9x_4=4$$
$$x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4,5$$

y_1 y_2

$$\max \quad z' = - \quad y_1 + y_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + y_1 = 3$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 + y_2 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad y_j \geq 0, j = 1, 2$$

0　0　0　0　0　3　4　　8-12　8-13

8-14

1　0　0　$\frac{1}{3}$　0

8-15

表　8-12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
y_1	2	–3	1	3	–1	3
y_2	1	1	–2	$\boxed{9}$	0	4
z'	–3	2	1	–12	1	–7

表　8-13

	x_1	x_2	x_3	y_1	x_5	
y_1	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	–1	$\frac{5}{3}$
x_4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
z'	$-\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$

表　8-14

	y_1	x_2	x_3	y_2	x_5	
x_1	$\frac{3}{5}$	–2	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1
x_4	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
z'	1	0	0	1	0	0

表　8-15

	x_2	x_3	x_5	
x_1	–2	1	$-\frac{3}{5}$	1
x_4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{15}}$	$\frac{1}{3}$
z	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{13}{15}$	$-\frac{7}{3}$

表　8-16

	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	−2	9	4
x_5	5	−5	15	5
z	$\frac{41}{3}$	0	13	2

8-16

$$\max \quad z=2 \qquad \min \quad y=-2$$

4　0　0　0　5

8.4　A

1　1　0.7　B　1

B　3

100 000

A　x_1　B　x_2

$$\max \quad y = 1.7^3 x_1 + 3 \times 1.7 x_2 = 4.913 x_1 + 5.1 x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 = 100\,000$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 100\,000$$
$$\max \quad y = 510\,000$$

8.5　A　B　A　200　B

100　A　150　50　10

B　60　40　20

30 000　13 000

5000

A　x_1　B　x_2　y

$$\max \quad y = 200 x_1 + 100 x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 150 x_1 + 60 x_2 \leq 30\,000$$
$$50 x_1 + 40 x_2 \leq 13\,000$$
$$10 x_1 + 20 x_2 \leq 5000$$
$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

x_3　x_4　x_5

$$150x_1+60x_2+x_3=30\,000$$
$$50x_1+40x_2+x_4=13\,000$$
$$10x_1+20x_2+x_5=5000$$
$$y-200x_1-100x_2=0$$
$$x_i\geq 0,\ i=1,2,3,4,5$$

8-17　　8-18　　8-19

表　8-17

	x_1	x_2	
x_3	$\boxed{150}$	60	30000
x_4	50	40	13000
x_5	10	20	5000
y	–200	–100	0

表　8-18

	x_3	x_2	
x_1	$\frac{1}{150}$	$\frac{2}{5}$	200
x_4	$-\frac{1}{3}$	$\boxed{20}$	3000
x_5	$-\frac{1}{15}$	16	3000
y	$\frac{4}{3}$	–20	40000

表　8-19

	x_3	x_4	
x_1	$\frac{1}{75}$	$-\frac{1}{50}$	140
x_2	$-\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	150
x_5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	600
y	1	1	43000

8-19　x_3　x_4　43 000

140　150　0　0　600　A　140　B　150

43 000

8.6

a max $y=-4x_1-3x_2$

s.t. $2x_1+x_2\geq 25$

$x_1+3x_2\geq 30$

$x_1+x_2\geq 20$

解： x_3 x_4 , x_5

$$2x_1+x_2-x_3=25$$

$$x_1+3x_2-x_4=30$$

$$x_1+x_2-x_5=20$$

$$y+4x_1+3x_2=0$$

y_1 y_2 y_3

max $z=-$ $y_1+y_2+y_3$

s.t. $2x_1+x_2-x_3+y_1=25$

$x_1+3x_2-x_4+y_2=30$

$x_1+x_2-x_5+y_3=20$

0 0 0 0 0 25 30 20

8-20 8-21 8-22 8-23

表 8-20

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
y_1	2	1	–1	0	0	25
y_2	1	$\boxed{3}$	0	–1	0	30
y_3	1	1	0	0	–1	20
z	–4	–5	1	1	1	–75

表 8-21

	x_1	y_2	x_3	x_4	x_5	
y_1	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	–1	$\frac{1}{3}$	0	15
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	10
y_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	–1	10
z	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1	–25

表　8-22

	y_1	y_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	9
x_2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	7
y_3	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\boxed{\frac{1}{5}}$	–1	4
z	$\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	–4

表　8-23

	y_1	y_2	x_3	y_3	x_5	
x_1	1	0	–1	–1	1	5
x_2	–1	0	1	2	–2	15
x_4	–2	–1	2	5	–5	20
z	1	1	0	1	0	0

8-23　y_1　y_2　y_3　5　15　0　20　0　0

0　0　$y_1 = y_2 = y_3 = 0$　5　15　0　20　0

5　15　0　20　0

8-23　8-23　y_1　y_2　y_3

8-23　8-24

表　8-24

	X_3	x_5	
x_1	–1	1	5
x_2	1	–2	15
x_4	2	–5	20
y	1	2	–65

8-24　x_3　x_5

–65　5　15　0　20　0

b　min　$y=-2x_1 - x_2 - x_3$

s.t. $4x_1+6x_2+3x_3 \le 8$

$x_1-9x_2+x_3 \le -3$

$-2x_1-3x_2+5x_3 \le -4$

解: x_4, x_5, x_6 $y'=-y$

$$4x_1+6x_2+3x_3+x_4=8$$
$$-x_1+9x_2-x_3-x_5=3 \quad 8\text{-}1$$
$$2x_1+3x_2-5x_3-x_6=4$$
$$y'-2x_1-x_2-x_3=0$$
$$x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5,6$$

8-1

y_1 y_2

$$\max \quad z=-\quad y_1+y_2$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1+6x_2+3x_3+x_4=8$$
$$-x_1+9x_2-x_3-x_5+y_1=3 \quad 8\text{-}2$$
$$2x_1+3x_2-5x_3-x_6+y_2=4$$
$$x_i \ge 0, i=1,2,3,4,5,6 \quad y_i \ge 0, i=1,2$$

8-2 0 0 0 8 0 0 3 4

8-25 8-26 8-27

表 8-25

	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	
x_4	4	6	3	0	0	8
y_1	–1	9	–1	–1	0	3
y_2	$\boxed{2}$	3	–5	0	–1	4
z	–1	–1	2	6	11	–7

表 8-26

	y_2	x_2	x_3	x_5	x_6	
x_4	–2	0	1	30	2	0
y_1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{21}{2}}$	$-\frac{7}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	5
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
z	$\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	–5

表　8-27

	y_2	y_1	y_3	y_5	y	
x_4	-2	0	13	0	2	0
x_2	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$
x_1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	-2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$
y'	1	1	0	0	0	0

8-27　y_1　y_2　$\frac{9}{7}$　$\frac{10}{21}$　0　0　0　0

0　0　$y_1 = y_2 = 0$　$\frac{9}{7}$　$\frac{10}{21}$　0　0　0　0　1

$\frac{9}{7}$　$\frac{10}{21}$　0　0　0　0　1

8-27　8-27　y_1　y_2　1

8-27　8-28　8-29

表　8-28

	x_3	x_5	x_6	
x_4	$\boxed{1}$	30	2	0
x_2	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$
x_1	-2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$
y'	$-\frac{16}{3}$	$\frac{4}{21}$	$-\frac{19}{21}$	$\frac{64}{21}$

表　8-29

	x_4	x_5	x_6	
x_3	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{2}{13}$	0
x_2	$\frac{1}{39}$	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{4}{273}$	$\frac{10}{21}$
x_1	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{11}{91}$	$\frac{9}{7}$
y'	$\frac{16}{39}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{53}{273}$	$\frac{64}{21}$

8-29 x_4 x_5 x_6 max $y'=\frac{64}{21}$

$\frac{9}{7}$ $\frac{10}{21}$ 0 0 0 0

$$\min\ y=-\max\ y'=-\frac{64}{21}$$

8.7

a max $y=5x_1+6x_2-4x_3+4x_4$

s.t. $x_1+x_2+5x_3-5x_4\le 3$

$x_1+x_2-x_3+x_4\ge 4$

$-x_1-2x_2-3x_3+3x_4\le 1$

$x_i\ge 0, i=1,2,3,4$

解：

$$\begin{aligned}\min\quad & z=3y_1-4y_2+y_3\\ \text{s.t.}\quad & y_1-y_2-y_3\ge 5\\ & y_1-y_2-2y_3\ge 6\\ & 5y_1+y_2-3y_3\ge -4\\ & -5y_1-y_2+3y_3\ge 4\end{aligned}$$

y_4 y_5 y_6 y_7 $z'=-z$

$$\begin{aligned}\max\quad & z'=-3y_1+4y_2-y_3\\ \text{s.t.}\quad & y_1-y_2-y_3-y_4=5\\ & y_1-y_2-2y_3-y_5=6\\ & 5y_1+y_2-3y_3-y_6=-4\\ & -5y_1-y_2+3y_3-y_7=4\end{aligned}$$

1

y_8 y_9 y_{10}

$$\begin{aligned}\max\quad & X=-\quad y_8+y_9+y_{10}\\ \text{s.t.}\quad & y_1-y_2-y_3-y_4+y_8=5\\ & y_1-y_2-2y_3-y_5+y_9=6\\ & -5y_1-y_2+3y_3+y_6=4\\ & -5y_1-y_2+3y_3-y_7+y_{10}=4\end{aligned}$$

0 0 0 0 0 4 0 5 6 4 8-30

8-31

表 8-30

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_7	
y_6	–5	–1	3	0	0	0	4
y_8	$\boxed{1}$	–1	–1	–1	0	0	5
y_9	1	–1	–2	–1	0	0	6
y_{10}	–5	–1	3	0	0	–1	4
x	–3	–3	0	–2	0	–1	0

表 8-31

	y_8	y_2	y_3	y_4	y_5	y_7	
y_6	5	–6	–2	–5	0	0	29
y_1	1	–1	–1	–1	0	0	5
y_9	1	0	–1	0	0	0	1
y_{10}	5	–6	–2	–5	0	–1	29
x	3	0	–6	–2	0	–1	15

8-31

b min $y=2x_1+2x_2$

s.t. $2x_1+4x_2\geq 1$

$x_1+2x_2\geq 1$

$2x_1+x_2\geq 1$

$x_i\geq 0,\ i=1,2$

$$\max \quad z=y_1+y_2+y_3$$

$$\text{s.t.}\quad 2y_1+y_2+2y_3\leq 2$$

$$4y_1+2y_2+y_3\leq 2$$

$$y_i\geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3$$

y_4 y_5

$$\text{s.t.}\quad 2y_1+y_2+2y_3+y_4=2$$

$$4y_1+2y_2+y_3+y_5=2$$

$$z-y_1-y_2-y_3=0$$

$$y_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

0　0　0　2　2

8-32　　8-33　　8-34　　8-35

表　8-32

	y_1	y_2	y_3	
y_4	2	1	2	2
y_5	$\boxed{4}$	2	1	2
z	-1	-1	-1	0

表　8-33

	y_5	y_2	y_3	
y_4	$-\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	1
y_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
z	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

表　8-34

	y_5	y_2	y_4	
y_3	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
y_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
z	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

表　8-35

	y_5	y_1	y_4	
y_3	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
y_2	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

8-31　　$0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \qquad \max \quad z=\frac{4}{3}$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \qquad \min \quad y=\frac{4}{3}$$

8.8

$$\max \quad y=x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -2x_1+x_2+x_3 \le 2$$
$$-x_1+x_2-x_3 \le 1$$
$$x_i \ge 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3$$

证： x_4 x_5

$$-2x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$-x_1+x_2-x_3+x_5=1$$
$$y-x_1-2x_2=0$$
$$x_i \ge 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

8-36 8-37 8-38 8-39

表 8-36

	x_1	x_2	x_3	
x_4	−2	1	1	2
x_5	−1	$\boxed{1}$	−1	1
y	−1	−2	0	0

表 8-37

	x_1	x_5	x_3	
x_4	−1	−1	$\boxed{2}$	1
x_2	−1	1	−1	1
y	−3	2	−2	2

表 8-38

	x_1	x_5	x_4	
x_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	−4	1	−1	3

表 8-39

	x_1	x_5	x_3	
x_4	-1	-1	2	1
X_2	-1	1	-1	1
y	-5	0	2	4

x_1

8.9 8.6

1

$$\max \quad y=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = b_1 \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = b_2 \\ & \cdots \cdots \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = b_m \\ & x_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad n \end{aligned} \tag{8.3'}$$

$b_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad m$

$$\max \quad y=CX \tag{8.4}$$

$$\text{s.t.} \quad AX=b \tag{8.4'}$$

$$X \geq 0$$

A 8.3' $X= \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m \quad x_{m+1} \quad \cdots \quad x_n)^T = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$

$X_B=\left(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m\right)^T \quad X_N=\left(x_{m+1} \quad \cdots \quad x_n\right)^T$

$C=(c_1 \quad \cdots \quad c_m \;\; _{m+1} \quad \cdots \quad c_n) \quad =(C_B \quad C_N) \quad C_B=(c_1 \quad \cdots \quad c_m) \quad C_N=(c_{m+1} \quad \cdots \quad c_n)$

$b=(b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)^T \quad O=(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$

$A= \quad B \quad N$ B A m

B N A $n-m$

$B=\ P_1\ \ P_2\ \ \cdots\ \ P_m \qquad N=\ P_{m+1}\ \ P_{m+2}\ \ \cdots\ \ P_n$

$p_i \qquad i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n \qquad$ 8.4'

$$(B\quad N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}=b$$

$$BX_B=b-NX_N$$

$B \qquad B^{-1}$

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N=B^{-1}b-B^{-1}(P_{m+1}\quad P_{m+2}\quad \cdots \quad P_n)\cdot\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=B^{-1}b-\sum_{j=m+1}^{n}B^{-1}P_jx_j$$

$$\because y=CX=(C_B\quad C_N)\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}=C_BX_B+C_NX_N$$

$$\begin{aligned} y&=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_NX_N \\ &=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N \\ &=C_BB^{-1}b+\left[(C_{m+1}\quad C_{m+2}\quad \cdots \quad C_n)-C_BB^{-1}(P_{m+1}\quad P_{m+2}\quad \cdots \quad P_n)\right]\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &=C_BB^{-1}b+\sum_{j=m+1}^{n}(C_j-C_BB^{-1}P_j)x_j \end{aligned}$$

8.3 　　 8.3'

$$\max\quad y=C_BB^{-1}b+\sum_{j=m+1}^{n}(C_j-C_BB^{-1}P_j)x_j \qquad 8.5$$

$$\text{s.t.}\quad X_B=B^{-1}b-\sum_{j=m+1}^{n}B^{-1}P_jx_j \qquad 8.5'$$

$$X_B\quad X_N\geq O$$

8.5 　　 $C_j-C_BB^{-1}P_j\leq 0$

$$\sigma_j=C_j-C_BB^{-1}P_j \qquad 8.6$$

x_j

2　定理 8.6　　 8.32　　 8.33

8.32 8.33

$$\max \quad y = CX \qquad 8.7$$

$$\text{s.t.} \quad AX \leq b \qquad 8.7'$$

$$X \geq O$$

$$\min \quad z = Yb \qquad 8.8$$

$$\text{s.t} \quad YA \geq C \qquad 8.8'$$

$$Y \geq O$$

A 8.32 $X=\ x_1\ \ x_2\ \ \mathrm{L}\ \ x_r)^T$ $Y=\ y_1\ \ y_2\ \ \mathrm{L}\ \ y_m$ $C=(c_1\ \ c_2\ \mathrm{L}\ \ c_r$ $b=(b_1\ \ b_2\ \ \mathrm{L}\ \ b_m)^T$ $O=\ 0\ \ 0\ \ \mathrm{L}\ \ 0$

8.7 8.7'

$$\text{Max} \quad y' = CX + C_\alpha X_\alpha \qquad 8.9$$

$$\text{s.t.} \quad AX + I \cdot X_\alpha = b \qquad 8.9'$$

$$X \geq 0 \quad X_\alpha \geq 0$$

$X_\alpha =\ x_{r+1}\ \ x_{r+2}\ \ \mathrm{L}\ \ x_{r+m})^T$ $C_\alpha =\ C_{r+1}\ \ C_{r+2}\ \ \mathrm{L}\ \ C_{r+m}$ $C_\alpha =\ C_{r+1}\ \ C_{r+2}\ \ \mathrm{L}\ \ C_{r+m}\ = 0\ \ 0\ \ \mathrm{L}\ \ 0$ I m

8.9 8.9' $\hat{X}^{(0)}$ B

$$\hat{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} X^* \\ X_\alpha^* \end{bmatrix}$$

X^* 8.7 8.7' .

1 8.6 8.9 8.9' x_j $\sigma_j \leq 0$

$$\sigma_j = C_j - C_B B^{-1} P_j \leq 0 . \quad j=1 \quad 2 \quad \cdots \quad r \quad r+1 \quad \cdots \quad r+m$$

$\sigma = (\sigma_1\ \ \sigma_2\ \ \mathrm{L}\ \ \sigma_r\ \ \sigma_{r+1}\ \ \mathrm{L}\ \ \sigma_{r+m})$

$$\sigma = (C_1 \quad C_2 \quad \cdots C_r \quad C_{r+1} \quad \cdots C_{r+m}) - C_B B^{-1} (P_1 \quad P_2 \quad \mathrm{L} \quad P_r \quad P_{r+1} \quad \cdots \quad P_{r+m}) \qquad 8.10$$

0

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \mathrm{L} \quad \sigma_r \quad = \quad C_1 \quad C_2 \cdots C_r \quad - C_B B^{-1} \quad P_1 \quad P_2 \quad \cdots P_r \quad \leq O$$

$$A = \quad B \quad N \quad = \quad P_1 \quad P_2 \quad \mathrm{L} \quad P_r \quad P_{r+1} \quad P_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad P_{r+m}$$

$$C - C_B B^{-1} A \leq O$$

$Y^{(0)} = C_B B^{-1}$

$$Y^{(0)}\ A \geq C$$

$Y^{(0)}$ 8.8 8.8'

8.10

$$\sigma_{r+1} \quad \sigma_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad \sigma_{r+m} \quad = \quad C_{r+1} \quad \cdots C_{r+m} \quad - C_B B^{-1} \quad P_{r+1} \quad \cdots \quad P_{r+m} \quad \leq 0 \qquad 8.11$$

$\because$ $C_{r+1}=C_{r+2}=\cdots=C_{r+m}=0$

$\therefore$ $Y^{(0)}\geq 0$

$\therefore Y^{(0)}$ 8.8 8.8' $Y^{(0)}=C_B B^{-1}$

B

$$X_B=B^{-1}\cdot b$$

$\therefore$ $Y^{(0)}\,b=C_B B^{-1}\,b=C_B X_B$

$$y'=CX+C_\alpha X_\alpha$$

1 8.4

$$y'=C_B X_B+C_N X_N$$

$\therefore$ $C_B X_B+C_N X_N=CX+C_\alpha X_\alpha$

$\hat{X}^{(0)}=\begin{bmatrix} X^* \\ X_\alpha^* \end{bmatrix}$ $\hat{X}^{(0)}=\begin{bmatrix} X_B^{(0)} \\ X_N^{(0)} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $CX^*+C_\alpha X_\alpha^*=C_B X_B^{(0)}+C_N X_N^{(0)}$

$\because C_\alpha=0$ $X_N^{(0)}=0$

$\therefore$ $CX^*=C_B X_B^{(0)}$ X^*

$$X_B^{(0)}=B^{-1}b$$

$\therefore$ $Y^{(0)}\;b=C_B B^{-1}\;b=C_B X_B^{(0)}=CX^*$

8.5

8.6 .

推论：

Max $y=CX$

s.t $AX\leq b$

$X\geq 0$

$X_\alpha=\quad x_{r+1},x_{r+2}\;\cdots\;x_{r+m})^T$

$\sigma_{r+1}\;\;\sigma_{r+2}\;\;\cdots\;\;\sigma_{r+m}$.

8.9 8.9' 8.6 $Y^{(0)}=C_B B^{-1}=$

$y_1\;\;y_2\;\;\cdots\;\;y_m)$. 8.11

$$\sigma_{r+1} \quad \sigma_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad \sigma_{r+m} \quad = \quad C_{r+1} \quad C_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad C_{r+m} \quad -C_B B^{-1} \quad P_{r+1} \quad P_{r+2} \quad \cdots \quad P_{r+m}$$

$$C_{r+1} = C_{r+2} = \mathrm{L} = C_{r+m} = 0 \qquad P_{r+1} \quad P_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad P_{r+m} \quad = I$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r+1} \quad \sigma_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad \sigma_{r+m} \quad &= \quad C_{r+1} \quad C_{r+2} \quad \cdots C_{r+m} \quad -C_B B^{-1} \quad P_{r+1} \quad P_{r+2} \quad \cdots \quad P_{r+m} \\
&= \quad 0 \quad 0 \quad \mathrm{L} \quad 0) - Y^{(0)} \; I \\
&= \quad 0 \quad 0 \quad \mathrm{L} \quad 0) - \quad y_1 \quad y_2 \quad \mathrm{L} \quad y_m) \\
&= \quad -y_1 \quad -y_2 \quad \mathrm{L} \quad -y_m)
\end{aligned}$$

$$y_1 \quad y_2 \quad \mathrm{L} \quad y_m) = \quad -\sigma_{r+1} \quad -\sigma_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad -\sigma_{r+m}$$

$$X_\alpha = \quad x_{r+1} \quad x_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad x_{r+m})^T$$

$$\sigma_{r+1} \quad \sigma_{r+2} \quad \mathrm{L} \quad \sigma_n$$

第九章　动 态 规 划

一、内容提要

Richard Bellman 1951

（一）基本概念

1

定义 9.1

定义 9.2

Markov Markov

定义 9.3

定义 9.4

2

3

w f_k w w

k T h_k w w k T

$$f_k \quad w \quad = \min \quad d \quad w \quad h_k \quad w \quad + f_{k-1} \quad h_k \quad w$$

k $k-1$

注意：

（二）动态规划应用举例

1

a n x_i

i f_i x_i f_i x_i

$$\max \quad y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1 \quad 2 \quad \text{L} \quad n$$

f_i x_i $i=1$ 2 L n

n

F_k x x k

$$F_1 \quad x \quad = f_1 \quad x$$

$$F_k \quad x \quad = \max_{0 \leq x_k \leq x} \{f_k \quad x_k \quad + F_{k-1} \quad x - x_k \quad \} \qquad k=2 \quad 3 \quad \text{L} \quad n$$

$$0 \leq x \leq a$$

F_n a F_n a

2

n D_1 D_2 L D_n D_i

$i=1$ 2 L n

D_i

i D_i x_i c_i

a_i C A

$$\max \quad R=\prod_{i=1}^{n} r_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le A$$

$$x_i \ge 1$$

q_i $u^{(i)}$ $v^{(i)}$ i $u^{(i)}$ $v^{(i)}$

$$\begin{cases} q_1(u^{(1)} \quad v^{(1)}) = \max\limits_{1\le x_1 \le \zeta_1} \quad r_1 \ x_1 \\ q_k(u^{(k)} \quad v^{(k)}) = \max\limits_{1\le x_k \le \zeta_k} \left\{ r_k \ x_k \quad q_{k-1}(u^{(k)} - c_k x_k \quad v^{(k)} - a_k x_k) \right\} \end{cases}$$

$$\zeta_k = \min\left\{ \left[\frac{u^{(k)}}{c_k}\right], \left[\frac{v^{(k)}}{a_k}\right] \right\}$$

q_1 $u^{(1)}$ $v^{(1)}$ q_2 $u^{(2)}$ $v^{(2)}$ L q_k $u^{(k)}$ $v^{(k)}$ q_n C A

3

a kg

n n 1 2 L n i

a_i kg c_i i=1 2 L n

n

i x_i

$$\max \quad R=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le a$$

$$x_i \ge 0 \qquad i=1\quad 2\quad 3 \cdots$$

f_k y y

k k=1 2 … n

$$\begin{cases} f_1(y)=\max\limits_{0\le x_1\le \left\lfloor \frac{y}{a_1}\right\rfloor} c_1 x_1 \\ f_k(y)=\max\limits_{0\le x_k\le \left\lfloor \frac{y}{a_k}\right\rfloor} \{c_k x_k + f_{k-1}(y-a_k x_k)\} \end{cases}$$

f_1 y f_2 y … f_n y x_1 y x_2 y … x_n y

f_n a

注意：

1 “ ”

b i v_i

2

4

n C= c_1 c_2 … c_n d_{ij} c_i c_j

i j=1 2 … n

n

f_k c_i S c_i k S

c_1

f_k c_i S =min $d_{ij}+f_{k-1}[c_j$ $S-$ c_j]

S c_i c_1

d_{i1}

f c_j S S ……

$f[c_1$ $C-c_1$]

5

二、习题解答

9.1 9-5 1

1

表 9-5

j / i	1	2	3	4	5
1	0	3	1	5	4
2	1	0	5	4	3
3	5	4	0	2	1
4	3	1	3	0	3
5	5	2	4	1	0

解： 1 1

1 k k

1 k $C-\{1$ $k\}$

1

$C=\{1$ 2 3 4 $5\}$ 5 $f_k(i,S)$ i k

S 1

$$f_k(i,S)=\min_{\substack{j\neq i\\1\le j\le 5}}\{d_{ij}+f_{k-1}[j,S-(j)]\}$$

1 $S=\Phi$ j 1

f 2 Φ =1

$f\quad 3\quad \Phi\quad =5$

$f\quad 4\quad \Phi\quad =3$

$f\quad 5\quad \Phi\quad =5$

2 S

$f\quad 2\quad 3\quad =d_{23}+f\quad 3\quad \Phi\quad =10$

$f\quad 2\quad 4\quad =d_{24}+f\quad 4\quad \Phi\quad =7$

$f\quad 2\quad 5\quad =d_{25}+f\quad 5\quad \Phi\quad =8$

$f\quad 3\quad 2\quad =d_{32}+f\quad 2\quad \Phi\quad =5$

$f\quad 3\quad 4\quad =d_{34}+f\quad 4\quad \Phi\quad =5$

$f\quad 3\quad 5\quad =d_{35}+f\quad 5\quad \Phi\quad =6$

$f\quad 4\quad 2\quad =d_{42}+f\quad 2\quad \Phi\quad =2$

$f\quad 4\quad 3\quad =d_{43}+f\quad 3\quad \Phi\quad =8$

$f\quad 4\quad 5\quad =d_{45}+f\quad 5\quad \Phi\quad =8$

$f\quad 5\quad 2\quad =d_{52}+f\quad 2\quad \Phi\quad =3$

$f\quad 5\quad 3\quad =d_{53}+f\quad 3\quad \Phi\quad =9$

$f\quad 5\quad 4\quad =d_{54}+f\quad 4\quad \Phi\quad =4$

3 S

$f\quad 2\quad 3\quad 4\quad =\min\{d_{23}+f\quad 3\quad 4\quad d_{24}+f\quad 4\quad 3\quad \}=10$

$f\quad 2\quad 3\quad 5\quad =\min\{d_{23}+f\quad 3\quad 5\quad d_{25}+f\quad 5\quad 3\quad \}=11$

$f\quad 2\quad 4\quad 5\quad =\min\{d_{24}+f\quad 4\quad 5\quad d_{25}+f\quad 5\quad 4\quad \}=7$

$f\quad 3\quad 2\quad 4\quad =\min\{d_{32}+f\quad 2\quad 4\quad d_{34}+f\quad 4\quad 2\quad \}=4$

$f\quad 3\quad 2\quad 5\quad =\min\{d_{32}+f\quad 2\quad 5\quad d_{35}+f\quad 5\quad 2\quad \}=4$

$f\quad 3\quad 4\quad 5\quad =\min\{d_{34}+f\quad 4\quad 5\quad d_{35}+f\quad 5\quad 4\quad \}=5$

$f\quad 4\quad 2\quad 3\quad =\min\{d_{42}+f\quad 2\quad 3\quad d_{43}+f\quad 3\quad 2\quad \}=8$

$f\quad 4\quad 2\quad 5\quad =\min\{d_{42}+f\quad 2\quad 5\quad d_{45}+f\quad 5\quad 2\quad \}=6$

$f\quad 4\quad 3\quad 5\quad =\min\{d_{43}+f\quad 3\quad 5\quad d_{45}+f\quad 5\quad 3\quad \}=9$

$f\quad 5\quad 2\quad 3\quad =\min\{d_{52}+f\quad 2\quad 3\quad d_{53}+f\quad 3\quad 2\quad \}=9$

$f\quad 5\quad 2\quad 4\quad =\min\{d_{52}+f\quad 2\quad 4\quad d_{54}+f\quad 4\quad 2\quad \}=3$

$f\quad 5\quad 3\quad 4\quad =\min\{d_{53}+f\quad 3\quad 4\quad d_{54}+f\quad 4\quad 3\quad \}=9$

4 S 3

$f\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad =\min\{d_{23}+f\quad 3\quad 4\quad 5\quad d_{24}+f\quad 4\quad 3\quad 5\quad d_{25}+f\quad 5\quad 3\quad 4\quad \}=10$

$f\quad 3\quad 2\quad 4\quad 5\quad =\min\{d_{32}+f\quad 2\quad 4\quad 5\quad d_{34}+f\quad 4\quad 2\quad 5\quad d_{35}+f\quad 5\quad 2\quad 4\quad \}=4$

$f\quad 4\quad 2\quad 3\quad 5\quad =\min\{d_{42}+f\quad 2\quad 3\quad 5\quad d_{43}+f\quad 3\quad 2\quad 5\quad d_{45}+f\quad 5\quad 2\quad 3\quad \}=7$

f 5 2 3 4 =min{d_{52}+f 2 3 4 d_{53}+f 3 2 4 d_{54}+f 4 2 3 }=8

5 S 4

f 1 2 3 4 5 =min{d_{12}+f 2 3 4 5 d_{13}+f 3 2 4 5 d_{14} +f 4 2 3 5 d_{15}+f 5 2 3 4 =5

$$1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$$

1 5

$$1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$$

9.2 100 x

$120x$, $1.2x^2$, $1.5x^2$

解： x_i i=1 2 3 i $f_i(x_i)$ i x_i

$$\min \quad y = f_1(x_1) + f_2(x_{2i}) + f_3(x_3) = 120x_1 + 1.2x_2^2 + 1.5x_3^2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$F_k(x)$ k x

$$F_1(x) = f_1(x)$$
$$F_k(x) = \min_{0 \leq x_k \leq x} \{ f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k) \}, k = 2,3$$
$$0 \leq x \leq 100$$

$F_3(100)$

$$F_1(x) = f_1(x) = 120x$$
$$F_2(x) = \min_{0 \leq x_2 \leq x} \{ f_2(x_2) + F_1(x - x_2) \}$$
$$F_3(x) = \min_{0 \leq x_3 \leq x} \{ f_3(x_3) + F_2(x - x_3) \}$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = 50 \quad x_3 = 40$$

$$F_3(100) = 6600$$

10 50 40

6600

9.3 A B

9-6 A 300 B

400

表 9-6

	A	B
	30%	50%
	50%	80%

解： $f_k(a,b)$ k a b

A x B $a-x$ A y B $b-y$

$$f_1(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)\}$$

$$f_k(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_{k-1}(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$f_1(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)\}$$

$$=400a+400b \qquad x=0 \quad y=0$$

$$f_2(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_1(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{-20x+600a+20y+480b\}$$

$$=600a+500b \qquad x=0 \quad y=b$$

$$f_3(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_2(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{20x+700a+50y+500b\}$$

$$=720a+550b \qquad x=a \quad y=b$$

$$f_4(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_3(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{44x+760a+65y+510b\}$$

$$=804a+575b \qquad x=a \quad y=b$$

$$f_5(a,b)=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{300x+400(a-x)+300y+400(b-y)+f_4(0.7x+0.5(a-x),0.5y+0.2(b-y))\}$$

$$=\max_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le b}}\{60.8x+802a+72.5y+515b\}$$

$$=862.8a+587.5b \qquad x=a \quad y=b$$

a　　　　　　　　b

$$f_5(a,b)=862.8a+587.5b$$

9-6　a

表　9-6（a）

	1		2		3		4		5	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
	a	0	$0.7a$	0	0.7^2a	0	0	0.7^3a	0	0.5　0.7　^3a
	b	0	$0.5b$	0	0.5^2b	0	0.5^3b	0	0	0.5^4b

9.4

9-7

表　9-7

	0	1	2	3	4	5
	0	3	7	9	12	13
	0	5	10	11	11	11
	0	4	6	11	12	12

解：　x_1，x_2，x_3　　1　2　3

$f_1($ x_1　$f_2($ x_2　$f_3($ x_3

$$\max \quad Y=\sum_{i=1}^{3} f_i(x_i)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2+x_3=5$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1 \quad 2 \quad 3$$

F_k　x　x　k　k=1　2　3　x_k　x

k

$$\begin{cases} F_1(x)=f_1(x) \\ F_k(x)=\max\limits_{0\le x_k\le x}\{f_k(x_k)+F_{k-1}(x-x_k)\} \quad k=2 \quad 3 \\ 0\le x\le 5 \end{cases}$$

$$F_3(x)=\max\{f_3(x_3)+F_2(x-x_3)\}$$

$$F_3(5)=\max_{0\le x_3\le 5}\{f_3(x_3)+F_2(5-x_3)\}$$

$=\max\{f_3(0)+F_2(5)\quad f_3(1)+F_2(4)\quad f_3(2)+F_2(3)\quad f_3(3)+F_2(2)\quad f_3(4)+F_2(1)$

$f_3(5)+F_2(0)\}$

$$F_2(x)=\max_{0\le x_2\le x}\{f_2(x_2)+F_1(x-x_2)\}$$

$$F_2(5)=\max_{0\le x_2\le 5}\{f_2(x_2)+F_1(5-x_2)\}$$

$=\max\{f_2(0)\}+\mathrm{F}_1(5)\quad f_2(1)+F_1(4)\quad f_2(2)+F_1(3)\quad f_2(3)+F_1(2)\quad f_2(4)+F_1(1)$

$f_2(5)+F_1(0)\}$

$=\max\{13\quad 17\quad 19\quad 18\quad 14\quad 11\}=19$

$$F_2(4)=\max_{0\le x_2\le 4}\{f_2(x_2)+F_1(4-x_2)\}$$

$=\max\{f_2(0)+F_1(4)\quad f_2(1)+F_1(3)\quad f_2(2)+F_1(2)\quad f_2(3)+F_1(1)\quad f_2(4)+F_1(0)\}$

$=\max\{12\quad 14\quad 17\quad 14\quad 11\}=17$

$$F_2(3)=\max_{0\le x_3\le 3}\{f_2(x_2)+F_1(3-x_2)\}$$

$=\max\{f_2(0)+F_1(3)\quad f_2(1)+F_1(2)\quad f_2(2)+F_1(1)\quad f_2(3)+F_1(0)\}$

$=\max\{9\quad 12\quad 13\quad 11\}=13$

$F_2(2)=\max\{f_2(0)+F_1(2)\quad f_2(1)+F_1(1)\quad f_2(2)+F_1(0)\}$

$=\max\{7\quad 8\quad 10\}=10$

$F_2(1)=\max\{f_2(0)+F_1(1)\quad f_2(1)+F_1(0)\}$

$=\max\{3\quad 5\}=5$

$F_2(0)=0$

$F_3(5)=\max\{19\quad 21\quad 19\quad 21\quad 17\quad 12\}=21$

$F_3(5)=21$　　　$x_3=1\quad x_2=2\quad x_1=2$　　　$x_3=3\quad x_2=2\quad x_1=0$

2　　　2　　　1

2　　　3

9.5　　　1

9-8　a　　b　　　1

表 9-8（*a*）概率表

	1	2	3	4
1	0.70	0.50	0.70	0.60
2	0.80	0.70	0.90	0.70
3	0.90	0.80	0.95	0.90

表 9-8（*b*）费用表

	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	2	4	3	3
3	3	5	4	4

解： i x_i r_i x_i c_i x_i

$$\max \quad R=\sum_{i=1}^{4} r_i(x_i)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{4} c_i(x_i) \le 10$$

$$x_i \ge 1 \quad i=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

q_k u^k k $u^{\ k}$

$$\begin{cases} q_1(u^{(1)}) = \max r_i(x_1)\text{，} \ 0 \le x_1 \le \zeta \\ q_k(u^{(k)}) = \max\limits_{1\le x_k \le \zeta_k} \{r_k(x_k) q_{k-1}(u^{(k)} - c_k(x_k))\}\text{，式中：} \zeta_k = \min\{3, u^{(k)} \ge c_k(x_k)\} \end{cases}$$

$$\therefore \quad q_4(10) = \max_{0\le x_4 \le 3}\{r_4(x_4)\cdot q_3(10-c_4(x_4))\}$$

$$= \max\{r_4(1)q_3(8) \quad r_4(2)q_3(7) \quad r_4(3)q_3(6)\}$$

$$q_3(8) = \max_{0\le x_3 \le 3}\{r_3(x_3)\cdot q_2(8-c_3(x_3))\}$$

$$= \max\{r_3(1)q_2(7) \quad r_3(2)q_2(5) \quad r_3(3)q_2(4)\}$$

$$=\{0.56 \quad 0.72 \quad 0.665\}=0.72$$

$$q_3(7) = \max_{0\le x_3 \le 3}\{r_3(x_3)\cdot q_2(7-c_3(x_3))\}$$

$$= \max\{r_3(1)q_2(6) \quad r_3(2)q_2(4) \quad r_3(3)q_2(3)\}$$

$$= \max\{0.56 \quad 0.45 \quad 0.475\}=0.63$$

$$q_3(6)=\max_{0\le x_3\le 3}\{r_3(x_3)\cdot q_2(6-c_3(x_3))\}$$

$=\max\{r_3(1)q_2(5)\quad r_3(2)q_2(3)\quad r_3(3)q_2(2)\}$

$=\max\{0.56\quad 0.45.0.475\}=0.56$

$$q_2(7)=\max_{0\le x_2\le 3}\{r_2(x_2)\cdot q_1(7-c_2(x_2))\}$$

$=\max\{r_2(1)q_1(5)\quad r_2(2)q_1(3)\quad r_2(3)q_1(2)\}$

$=\{0.45\quad 0.63.0.64\}=0.64$

$q_2(6)=\max\{r_2(1)q_1(4)\quad r_2(2)q_1(2)\quad r_2(3)q_1(1)\}$

$=\{0.45\quad 0.56\quad 0.56\}=0.56$

$q_2(5)=\max\{r_2(1)q_1(3)\quad r_2(2)q_1(1)\quad r_2(3)q_1(0)\}$

$=\{0.45\quad 0.49\quad 0\}=0.49$

$q_2(2)=\max\{r_2(1)q_1(2)\quad r_2(2)q_1(0)$

$=\{0.4\quad 0\}=0.4$

$q_2(3)=\max\{r_2(1)q_1(1)\}=0.35$

$q_4(10)=\max\{0.432\quad 0.441\quad 0.504\}$

0.504 9-8 c

表 9-8（c）

	1	2	1	3

9.6 12t $10m^3$

9-9

表 9-9

	t	m^3	
1	3	1	2
2	4	5	3

解： i x_i $i=1\quad 2$

$$\begin{aligned}\max\quad & Z=2x_1+3x_2\\ \text{s.t.}\quad & 3x_1+4x_2\le 12\\ & x_1+5x_2\le 10\\ & x_i\ge 0\qquad i=1\quad 2\end{aligned}$$

f_k　y　v　　　　k　　　　　　　　y　　　　　　v

$$f_k\quad y\quad v\quad = \max_{\substack{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i \le y \\ \sum_{i=1}^{k} v_i x_i \le v \\ x_i \ge 0}} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \qquad i=1\quad 2$$

∴　　$$f_2\quad y\quad v\quad = \max_{0\le x_2\le \min\left\{\left\lfloor \frac{y}{a_2}\right\rfloor \left\lfloor \frac{v}{v_2}\right\rfloor\right\}=2} \{3x_2 + f_1(y-4x_2\quad v-5x_2)\}$$

∴　　$$f_2\quad 12\quad 10\quad = \max_{0\le x_2\le \min\left\{\left\lfloor \frac{12}{4}\right\rfloor \left\lfloor \frac{10}{5}\right\rfloor\right\}=2} \{3x_2 + f_1(12-4x_2\quad 10-5x_2)\}$$

$$=\max\{f_1\quad 12\quad 10\qquad 3+f_1\quad 8\quad 5\qquad 6+f_1\quad 4\quad 0\quad\}$$

$$f_1\quad 12\quad 10\quad = \max_{0\le x_2\le \min\left\{\left\lfloor \frac{12}{3}\right\rfloor \left\lfloor \frac{10}{1}\right\rfloor\right\}=4} c_1 x_1$$

$$=\max\{0\quad 2\quad 4\quad 6\quad 8\}=8$$

$$f_1\quad 8\quad 5\quad = \max_{0\le x_2\le \min\left\{\left\lfloor \frac{8}{5}\right\rfloor \left\lfloor \frac{5}{1}\right\rfloor\right\}=2} c_1 x_1$$

$$=\max\{0\quad 2\quad 4\}=4$$

$$f_1\quad 4\quad 0\quad =0$$

∴　　$$f_2\quad 12\quad 10\quad =\max\{8\quad 7\quad 6\}=8$$

8　　　　　　$x_1=4$　$x_2=0$　　　　1　　　4

2　　　　　　　　8

9.7　　$x_1 x_2 \Lambda\ x_n$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \qquad i=1\ \ 2\ \ \mathrm{L}\quad n \end{cases}$$

解：　　　　　　　　　　1　n　　　　n

f_k　y　　　　y　y>0　　　k

$$\therefore \begin{cases} f_1(y)=y \\ f_k(y)=\max\limits_{0\le x_k\le y}\{x_k\, f_{k-1}(y-x_k)\},\ k=1,2,\mathrm{L}\ \ ,n \end{cases}$$

$$x_k=\frac{y}{k}\qquad f_k\quad y\quad = \quad \frac{y}{k}\quad k$$

$$f_1 \quad y \quad =y$$

$$f_2 \quad y \quad = \max_{0\le x_2 \le y}\{x_2 f_1(y-x_2)\} = \max\{x_2 \quad y-x_2 \quad \}$$

$x_2=\dfrac{y}{2}$ $\qquad x_2 \quad y-x_2 \quad \}$ $\qquad \dfrac{y}{2} \quad {}^2=f_2 \quad y$

$k=1 \quad 2$ $\qquad x_k=\dfrac{y}{k} \quad f_k \quad y \quad = \quad \dfrac{y}{k} \quad {}^k$

$x_{n-1}=\dfrac{y}{n-1} \quad f_{n-1} \quad y \quad = \quad \dfrac{y}{n-1} \quad {}^{n-1}$

$$f_n \quad y \quad = \max_{0\le x_n \le y}\{x_n f_{n-1}(y-x_n)\} = \max\{x_n \quad \frac{y-x_n}{n-1} \quad {}^{n-1}\}$$

$Z=x_n \quad \dfrac{y-x_n}{n-1} \quad {}^{n-1}$

$Z'=0$ $\qquad x_n=\dfrac{y}{n}$

$$f_n \quad y \quad =\frac{y}{n}\left(\frac{y-\dfrac{y}{n}}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{y}{n}\right)^n$$

$$x_k=\frac{y}{k} \quad f \quad y \quad =\left(\frac{y}{k}\right)^k$$

$y=1$

$$f_n \quad 1 \quad =\left(\frac{1}{n}\right)^n \qquad x_i=\frac{1}{n}$$

9.8 $\qquad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \ge 0 \qquad i=1 \ 2 \ \cdots \ n \end{cases}$$

解： $f_k \quad y$ $\qquad y \qquad k$

$$\therefore \begin{cases} f_1(y)=y^2 \\ f_k(y)=\min_{0\le x_k\le y}\{x_k^2+f_{k-1}(y-x_k)\},\ k=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$k=1 \qquad f_1 \quad y \quad =y^2$

$k=2$

$$f_2\ \ y\ \ =\min\{x_2^2+f_1\ \ y-x_2\ \ \}=\min\{x_2^2+\ \ y-x_2\ \ ^2\}$$

$x_2=\dfrac{y}{2}$　　$x_2^2+\ \ y-x_2\ \ ^2$　　　　$2\cdot\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{y^2}{2}$

$k=1\ \ 2$　　$x_k=\dfrac{y}{k}$　$f_k(y)=\dfrac{y^2}{k}$

$k=n-1$　　$x_i=\dfrac{y}{n-1}$　$f_{n-1}\ \ y\ \ =\ \ n-1\ \ \times\left(\dfrac{y}{n-1}\right)^2=\dfrac{y^2}{n-1}$

$$f_n\ \ y\ \ =\min_{0\le x_n\le y}\{x_n^2+f_{n-1}\ \ y-x_n\ \ \}$$

$$=\min\{x_n^2+\frac{(y-x_n)^2}{n-1}\}$$

$Z=x_n^2+\dfrac{(y-x_n)^2}{n-1}$

$$Z'=2x_n+\frac{1}{n-1}\ \ -2y+2x_n$$

$Z'=0$　　$x_n=\dfrac{y}{n}$　Z　　$\dfrac{y^2}{n}$　$f_n\ \ y\ \ =\dfrac{y^2}{n}$

$k=n$　　$x_k=\dfrac{y}{k}$　$f_k(y)=\dfrac{y^2}{k}$

$y=1$

$$f_n\ \ 1\ \ =\frac{1}{n}\quad x_i=\frac{1}{n}\quad i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n$$

9.9　$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i=a\\ \sum_{i=1}^{n}y_i=b\\ x_i\ge 0\ \ y_i\ge 0\ \ i=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n\end{cases}$$

解：　$f_k\ \ a\ \ b$　　a　b　　k

$$\therefore\begin{cases}f_1(a\ \ b)=ab\\ f_k(a\ \ b)=\max\limits_{\substack{0\le x_k\le a\\ 0\le y_k\le b}}\{x_ky_k+f_{k-1}(a-x_k\ \ b-y_k)\}\end{cases}\qquad k=1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n$$

$k=1$

$$f_1\ \ a\ \ b\ \ =ab$$

$k=2$

$$f_2\quad a\quad b\quad = \max\{x_2y_2+f_1\quad a-x_2\quad b-y_2\quad\}$$
$$= \max\{x_2y_2+\quad a-x_2\quad b-y_2\quad\}$$

$x_2=a\quad y_2=b$

$$f_2\quad a\quad b\quad =ab$$

∴ $k=n-1\quad x_{n-1}=a\quad y_{n-1}=b\quad x_i=0\quad y_i=0\quad i=1\quad 2\quad \cdots\quad n-2\quad f_{n-1}\quad a\quad b\quad =ab$

∴ $$f_n\quad a\quad b\quad = \max\{x_ny_n+f_{n-1}\quad a-x_n\quad b-y_n\quad\}$$
$$= \max\{x_ny_n+\quad a-x_n\quad b-y_n\quad\}$$

$x_n=a\quad y_n=b\quad f_n\quad a\quad b\quad ab$

∴

$$x_n=a\quad y_n=b\quad f_n\quad a\quad b\quad =ab$$

9.10

$$\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\le\left(x_1x_2\cdots x_n\right)^{1/n}\le\left(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}$$

$x_i>0\left(i=1,2,\cdots,n\right),\alpha<0<\beta$

证：

$\because \beta>0$

∴ $$\left(x_1^\beta x_2^\beta\cdots x_n^\beta\right)^{1/n}\le\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}$$

$$a>0,b>0$$

$$\max\quad z=\left(\prod_{i=1}^n x_i^\beta\right)^{1/n}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^n x_i^\beta=a$$

$$f_k\left(x\right)=\max_{\sum_{i=1}^k x_i^\beta=x}\left\{(\prod_{i=1}^k x_i^\beta)^{1/k}\right\}$$

$\beta>0\quad x\ge 0$

$$f_n\left(a\right)=\frac{a}{n}$$

$x>0$

$$f_1\left(x\right)=\max_{x_1^\beta=x}x_1^\beta=x$$

$n=k-1\quad x>0$

$$f_{k-1}(x)=\frac{x}{k-1}$$

$x\geq 0$

$$f_k(x)=\max_{\sum_{i=1}^{k}x_i^{\beta}=x}\left\{(\prod_{i=1}^{k}x_i^{\beta})^{1/k}\right\}$$

$$=\max_{\sum_{i=1}^{k}x_i^{\beta}=x}\left\{(\prod_{i=1}^{k-1}x_i^{\beta}\cdot x_k^{\beta})^{1/k}\right\}$$

$$=\max_{\sum_{i=1}^{k-1}x_i^{\beta}=x-x_k^{\beta}}\left\{\left[(\prod_{i=1}^{k-1}x_i^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}$$

$$=\max_{x_i^{\beta}\leq x}\left\{\left[f_{k-1}(x-x_k^{\beta})\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}$$

$$f_{k-1}(x-x_k^{\beta})=\frac{x-x_k^{\beta}}{k-1}$$

$$f_k(x)=\max_{x_i^{\beta}\leq x}\left\{\left[\frac{x-x_k^{\beta}}{k-1}\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}$$

$$x_k^{\beta}=\frac{x}{k}$$

$$f_k(x)=\max_{x_i^{\beta}\leq x}\left\{\left[\frac{x-x_k^{\beta}}{k-1}\cdot(x_k^{\beta})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}\right\}$$

$$=\left[\frac{x-\frac{x}{k}}{k-1}\cdot(\frac{x}{k})^{\frac{1}{k-1}}\right]^{\frac{k-1}{k}}$$

$$=\frac{x}{k}$$

第十章 区 组 设 计

一、内容提要

“ ”

（一）基本概念

定义 10.1 $S=$ s_1 s_2 L s_n n $A=$ a_{ij} $n\times n$ A

S A S A n

定义 10.2 $A=$ a_{ij} $B=$ b_{ij} n

a_{ij} b_{ij} n^2 a_{ij} b_{ij} i $j=1$ 2 L

n A B

定义 10.3 X X_1 X_2 L X_b b $\{X_1$ X_2

L $X_b\}$ X X_i $i=1$ 2 L b X

X

定义 10.4 π “ ” “

” “ ”

1 π

2 π

3 π 4 3

4 π 4 3

定义 10.5 π

定理 10.1 $n\geq 2$ π l $n+1$

1 l $n+1$

2 π $n+1$

定理 10.2 $n \geq 2$ π

1 $n+1$

2 $n+1$

3 $n+1$

4 $n+1$

5 π n^2+n+1

6 π n^2+n+1

定义 10.6 π n π l $n+1$

定义 10.7 π

π

定义 10.8 π π' π n

n π'

定理 10.3 π' n

性质 1 π' n^2

性质 2 π' n^2+n

性质 3 π' n

性质 4 π' $n+1$

性质 5 π'

定理 10.4 π' π' 10.3

π' n

定理 10.5 $n=P^m$ P m n

定理 10.6 $n=1$ 2 mod4 n $P=3$ mod4

n

定义 10.9 $X=$ x_1 x_2 L x_v X X

定义 10.10 $A=$ a_{ij} $m \times s$ A 1 2 L n

$s-$ 1 2 L n $m-$ A $m \times s$ $m \leq n$

$s \leq n$

定义 10.11 $A=$ a_{ij} $m \times n$ A 1 2 L n

A $n \times s$ B 1 1 2 L n B

定理 10.7 $A=$ a_{ij} 1 2 L n $m \times s$ N i i

n

$N \quad i \quad \geq m+s-n \quad i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad n$

定义 10.12 $A_1 \quad A_2 \quad \cdots \; A_k$ n $n \geq k \geq 2$ A_i A_j $i \neq j$ $i \quad j=1 \quad 2 \quad \cdots \quad k$ $A_1 \quad A_2 \quad \cdots \; A_k$

引理 $A= \; a_{ij}$ $B= \; b_{ij}$ $A= \; a_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$A'= \; a_{ij}'$ A' B

定理 10.8 $A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_k$ n $k \leq n-1$

定理 10.9 $n=P^m$ P m $n \geq 3$ $n-1$ n

定理 10.10 $A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_k$ n_1 $B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_k$ n_2 $n_1 \times n_2$ C_r

$$C_r = \begin{bmatrix} (a_{11}^{(r)}, B_r) & (a_{12}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{1n_1}^{(r)}, B_r) \\ (a_{21}^{(r)}, B_r) & (a_{22}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{2n_1}^{(r)}, B_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{n_1 1}^{(r)}, B_r) & (a_{n_1 2}^{(r)}, B_r) & \cdots & (a_{n_1 n_1}^{(r)}, B_r) \end{bmatrix}$$

$(a_{ij}^{(r)}, B_r)$ n_2 k l $(a_{ij}^{(r)}, b_{kl}^{(r)})$ $k \quad l=1 \quad 2 \quad \cdots \quad n_2$ $C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_k$ $n_1 \times n_2$

定理 10.11 $n = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_k^{a_k}$ n a_i P_i $i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad k$ $t=\min \; P_i^{a_i}-1$ $i=1 \quad 2 \quad \cdots \quad k$ $t \geq 2$ t n

定理 10.12 $n-1$ n n

定义 10.13 $X= \; x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_v$ $X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_b$ X

1 $|X_i|=k \quad i=1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad b$

2 $x_i \quad X \quad x_i$ b r

3 X $x_i \quad x_j$ b λ

4 $k<\upsilon$

$\{X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_b\} \quad X$ $\upsilon \quad r \quad k \quad \lambda \; -$ $b \quad \upsilon \quad r \quad k \quad \lambda$ 5 BIBD

Balanced Incomplete Block Design

定理 10.13 （$b \quad \upsilon \quad r \quad k \quad \lambda \; -$

$$bk=vr$$

$$r\quad k-1\quad =\lambda\quad v-1$$

定义 10.14 X_1 X_2 L X_b X b v r k λ −

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & x_i\in X_j\\ 0 & x_i\notin X_j\end{cases}\qquad i=1\quad 2\quad \text{L}\quad v\quad j=1\quad 2\quad \text{L}\quad b$$

$A=$ a_{ij} b v r k λ −

定理 10.14 $A=$ a_{ij} b v r k λ −

$$AA^T=\quad r-\lambda\quad I+\lambda J \qquad 10.9$$

10.9 J v 1 I v

定理 10.15 A b v r k λ − $B=AA^T$

$$\det B=\quad r-\lambda\quad^{v-1}\quad v\lambda-\lambda+r$$

$$b\geq v\quad r\geq k$$

定理 10.16 π′ n b v r k λ −

$b=n^2+n$ $v=n^2$ $r=n+1$ $k=n$ $\lambda=1$ $n\geq 2$

定义 10.15 b v r k λ − $v\geq 3$ $k=3$ b v r 3 λ −

$\lambda=1$ b v r 3 1 − v Steiner

定理 10.17 v Steiner

$$v\geq 3\quad v=1\quad 3\quad \mathrm{mod}6$$

定理 10.18 v Steiner φ_1 u Steiner φ_2

vu Steiner φ

定义 10.16 $X=$ 1 2 L v $v=6n+3$ φ X Steiner

φ b $b=v(v-1)/6=(2n+1)(3n+1)$ $3n+1$ $2n+1$

X $3n+1$ φ υ

Kirkman .

定义 10.17 $(b,v,r,k,\lambda)-$ $b=v$ $r=k$

$(b\quad v\quad r\quad k\quad \lambda)-$ $(v,k,\lambda)-$

定理 10.19 A $(v,k,\lambda)-$

$$AA^T=(k-\lambda)I+\lambda J$$
$$A^TA=(k-\lambda)I+\lambda J$$
$$AJ=JA=kJ$$

定理 10.20 A v k λ − v k λ −

λ

$$\left|X_i\ \text{I}\ X_j\right|=\lambda\quad i\neq j)$$

定理 10.21 A $(v,k,\lambda)-$

$$\lambda(v-1)=k(k-1)$$

定理 10.22 A $(v,k,\lambda)-$ v $k-\lambda$

定理 10.23 n n^2+n+1 $n+1$ 1 $-$ $n\geq 2$

定理 10.24 $\chi=\{X_1,X_2,\cdots X_v\}$ $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$ v,k,λ $-$

i

$$\chi'=\{X_1\cap X_i,X_2\cap X_i,\cdots,X_{i-1}\cap X_i,X_{i+1}\cap X_i,\cdots,X_v\cap X_i\}$$

χ' X_i $v-1$ k $k-1$ λ $\lambda-1$ $-$

定义 10.18 χ' χ

定理 10.25 $X''=\{X_1\setminus X_i\ \ X_2\setminus X_i\ \cdots\ X_{i-1}\setminus X_i\ \ X_{i+1}\setminus X_i\ \cdots\ X_v\setminus X_i\}$ χ''

$X\setminus X_i$ $v-1$ $v-k$ k $k-\lambda$ λ $-$

定义 10.19 χ'' χ

定义 10.20 H $+1$ -1 n

$$HH^T=nI$$

I n H Hadamard $H-$

定义 10.21 H $H-$ H $+1$ H

定理 10.26 $n>2$ n Hadamard

$$n=0(\bmod 4)$$

定理 10.27 $n\geq 8$ n H$-$ v k λ $-$

$$v=n-1\quad k=n/2-1\quad \lambda=n/4-1$$

定义 10.22 $A=\ a_{ij}$ $B=\ b_{ij}$ m n $m\times n$

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

A B Kronecker

定理 10.28 m n $H-$ $m\times n$

$H-$

（二）基本方法

1

1 $1\times n$ 1 2 3 L n

2 n $n-1$ $2\times n$ n

1 2 L $n-1$ $2\times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathrm{L} & n \\ n & 1 & 2 & \mathrm{L} & n-1 \end{pmatrix}$$

3 $2\times n$ $n-1$ $n-1$

$3\times n$ $n-1$ n 1 2 L $n-2$ $3\times$n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathrm{L} & n \\ n & 1 & 2 & \mathrm{L} & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \mathrm{L} & n-2 \end{pmatrix}$$

4 $n\times n$

注意： 1 $1, 2, \mathrm{L}\ , n$ $1\times n$

2 $m\times s$ n $m\le n$ $s\le n$

m m m

$N(i)=m+s-n$ i

1 2 L n

$m\times$ s+1 $s+1<n$

$n\times n$

n

2 $n=p^m$ $n-1$ n

1 10.9

2

n p^m $n=p^m$ p m

$n-1$ n $A_k(k=1, 2, \mathrm{L}\ , n-1)$

$$A_k=(a_{ij}^{(k)}), i, j=1, 2, \mathrm{L}\ , n; k=1, 2, \mathrm{L}\ , n-1$$

$a_{ij}^{(k)}=a_k\cdot a_i+a_j$

“+” “·” $GF(P^m)$ “ ” “ ” $a_1=1$

$a_n=0$

$n-1$ n $A_k(k=1, 2, \mathrm{L}\ , n-1)$ $n-1$ n

注意： $n=p^m$ p m $n-1$ n

3 n

1 10.10 10.11

2

$n \neq 2 \mod 4$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \mathrm{L}\ p_k^{\alpha_k} = n_1 \cdot n_2 \mathrm{L}\ n_k$$

2 $n_1 - 1$ $n_2 - 1$ L $n_k - 1$ n_1 n_2

L n_k

10.10 t n

t=min$\{n_i - 1\} \geq 2$ $i = 1, 2, \mathrm{L}\ , k$

注意： $n = p^m$=2 mod4 >6

n

4 $H-$ $H-$ $H-$

1 10.28

2

H_m H_n m n $H-$

10.22 H_m H_n $H_m \times H_n$

$H_m \times H_n$ $m \times n$ $H-$

注意： $H-$

5 ν k λ

1 10.27

2

4 n n>8 $H-$

$H-$

$H-$ 1 -1 0

ν k λ $-$ $\nu = n-1$ $k = n/2-1$ $\lambda = n/4-1$

6 (b, ν, r, k, λ)

1 10.24 10.25

2

5 ν k λ $-$

$(\nu, k, \lambda)-$ A

10.24 10.25 $(\nu, k, \lambda)-$

$\nu - 1$ k $k-1$ λ $\lambda - 1$ $-$ $\nu - 1$ $\nu - k$ k $k - \lambda$ λ $-$

A i i 0 1

$(\nu-1\ \ k\ \ k-1\ \ \lambda\ \ \lambda-1)-$

$\nu-1\ \ \nu-k\ \ k\ \ k-\lambda\ \ \lambda\ \ -$

注意： 4 5 6

$n>2$ $n=0$ mod4 $H-$ $\upsilon\ \ k\ \ \lambda\ -$

$\upsilon\ \ k\ \ \lambda$ $b\ \ \upsilon\ \ r\ \ k\ \ \lambda$

二、习题解答

10.1 π' n

1 π' n^2

2 π' n^2+n

3 π' n

4 π' $n+1$

5 π'

证： 10.7 10.8 π' π n

10.2 5 π n^2+n+1 $n+1$

π' n^2 1 10.2 6 π n^2+n+1

π' n^2+n 2 10.2 3 π

$n+1$ π

π' n 3

4 4 π' n

3 π' n π' n^2-n+1

1 4

π' π 10.4 5

10.2 7

解： 10.9 7

$$A_1=\begin{bmatrix}7&6&5&4&3&2&1\\6&5&4&3&2&1&7\\5&4&3&2&1&7&6\\4&3&2&1&7&6&5\\3&2&1&7&6&5&4\\2&1&7&6&5&4&3\\1&7&6&5&4&3&2\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}7&1&2&3&4&5&6\\6&7&1&2&3&4&5\\5&6&7&1&2&3&4\\4&5&6&7&1&2&3\\3&4&5&6&7&1&2\\2&3&4&5&6&7&1\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

10.3 6 7

解：$GF(7)=\{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\}$ 6 7

10.9

$$A_k=(a_{ij})^k \qquad (a_{ij})^k=a_k*a_i+a_j$$

k=1 2 L 6 i j=1 2 L 7

a_1=1 a_7=7 =0 6 7

$$A_1=(a_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix}2&3&4&5&6&7&1\\3&4&5&6&7&1&2\\4&5&6&7&1&2&3\\5&6&7&1&2&3&4\\6&7&1&2&3&4&5\\7&1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix} \qquad A_2=(a_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix}3&4&5&6&7&1&2\\5&6&7&1&2&3&4\\7&1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7&1\\4&5&6&7&1&2&3\\6&7&1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

$$A_3=(a_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix}4&5&6&7&1&2&3\\7&1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7&1&2\\6&7&1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6&7&1\\5&6&7&1&2&3&4\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix} \qquad A_4=(a_{ij}^{(4)})=\begin{bmatrix}5&6&7&1&2&3&4\\2&3&4&5&6&7&1\\6&7&1&2&3&4&5\\3&4&5&6&7&1&2\\7&1&2&3&4&5&6\\4&5&6&7&1&2&3\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

$$A_5=(a_{ij}^{(5)})=\begin{bmatrix}6&7&1&2&3&4&5\\4&5&6&7&1&2&3\\2&3&4&5&6&7&1\\7&1&2&3&4&5&6\\5&6&7&1&2&3&4\\3&4&5&6&7&1&2\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix} \qquad A_6=(a_{ij}^{(6)})=\begin{bmatrix}7&1&2&3&4&5&6\\6&7&1&2&3&4&5\\5&6&7&1&2&3&4\\4&5&6&7&1&2&3\\3&4&5&6&7&1&2\\2&3&4&5&6&7&1\\1&2&3&4&5&6&7\end{bmatrix}$$

10.4 11

解：$GF(11)=\{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\}$ 10 11

11 10.9

$A_k=(a_{ij})^k \qquad (a_{ij})^k=a_k*a_i+a_j$ k=1 2 i j=1 2 L 11

a_1=1 a_{11}=11 =0 11

$$A_1=(a_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix}2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&1\\3&4&5&6&7&8&9&10&11&1&2\\4&5&6&7&8&9&10&11&1&2&3\\5&6&7&8&9&10&11&1&2&3&4\\6&7&8&9&10&11&1&2&3&4&5\\7&8&9&10&11&1&2&3&4&5&6\\8&9&10&11&1&2&3&4&5&6&7\\9&10&11&1&2&3&4&5&6&7&8\\10&11&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\11&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\end{bmatrix}$$

$$A_2=(a_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix}3&4&5&6&7&8&9&10&11&1&2\\5&6&7&8&9&10&11&1&2&3&4\\7&8&9&10&11&1&2&3&4&5&6\\9&10&11&1&2&3&4&5&6&7&8\\11&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&1\\4&5&6&7&8&9&10&11&1&2&3\\6&7&8&9&10&11&1&2&3&4&5\\8&9&10&11&1&2&3&4&5&6&7\\10&11&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\end{bmatrix}$$

10.5 12

解 10.10 12

$$A_1=\begin{bmatrix}12&11&10&9&8&7&6&5&4&3&2&1\\11&12&9&10&7&8&5&6&3&4&1&2\\10&9&12&11&6&5&8&7&2&1&4&3\\9&10&11&12&5&6&7&8&1&2&3&4\\8&7&6&5&4&3&2&1&12&11&10&9\\7&8&5&6&3&4&1&2&11&12&9&10\\6&5&8&7&2&1&4&3&10&9&12&11\\5&6&7&8&1&2&3&4&9&10&11&12\\4&3&2&1&12&11&10&9&8&7&6&5\\3&4&1&2&11&12&9&10&7&8&5&6\\2&1&4&3&10&9&12&11&6&5&8&7\\1&2&3&4&9&10&11&12&5&6&7&8\end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 9 & 11 & 4 & 2 & 1 & 3 & 8 & 6 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & 10 & 12 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 11 & 9 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 7 & 5 \\ 9 & 11 & 12 & 10 & 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 5 & 7 & 12 & 10 & 9 & 11 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 6 & 8 & 11 & 9 & 10 & 12 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 5 & 10 & 12 & 11 & 9 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 9 & 11 & 12 & 10 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 8 & 6 & 5 & 7 & 12 & 10 & 9 & 11 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 & 11 & 9 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 8 & 7 & 5 & 10 & 12 & 11 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 & 9 & 11 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

10.6 15

3 5

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

10.10 15

$$C_1=\begin{bmatrix}
7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\
8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\
9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\
10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4\\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6\\
13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7\\
14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8\\
15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9\\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11\\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12\\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13\\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15
\end{bmatrix}$$

$$C_2=\begin{bmatrix}
15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9\\
14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8\\
13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7\\
12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6\\
11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\
10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4\\
9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\\
8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\
7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14\\
4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13\\
3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12\\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15
\end{bmatrix}$$

10.7　　21

3　　7

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}2&3&4&5&6&7&1\\3&4&5&6&7&1&2\\4&5&6&7&1&2&3\\5&6&7&1&2&3&4\\6&7&1&2&3&4&5\\7&1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}\qquad B_2=\begin{pmatrix}3&4&5&6&7&1&2\\5&6&7&1&2&3&4\\7&1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7&1\\4&5&6&7&1&2&3\\6&7&1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}$$

10.10 21

$$C_1=\begin{pmatrix}
2&3&4&5&6&7&1&9&10&11&12&13&14&8&16&17&18&19&20&21&15\\
3&4&5&6&7&1&2&10&11&12&13&14&8&9&17&18&19&20&21&15&16\\
4&5&6&7&1&2&3&11&12&13&14&8&9&10&18&19&20&21&15&16&17\\
5&6&7&1&2&3&4&12&13&14&8&9&10&11&19&20&21&15&16&17&18\\
6&7&1&2&3&4&5&13&14&8&9&10&11&12&20&21&15&16&17&18&19\\
7&1&2&3&4&5&6&14&8&9&10&11&12&13&21&15&16&17&18&19&20\\
1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21\\
16&17&18&19&20&21&15&2&3&4&5&6&7&1&9&10&11&12&13&14&8\\
17&18&19&20&21&15&16&3&4&5&6&7&1&2&10&11&12&13&14&8&9\\
18&19&20&21&15&16&17&4&5&6&7&1&2&3&11&12&13&14&8&9&10\\
19&20&21&15&16&17&18&5&6&7&1&2&3&4&12&13&14&8&9&10&11\\
20&21&15&16&17&18&19&6&7&1&2&3&4&5&13&14&8&9&10&11&12\\
21&15&16&17&18&19&20&7&1&2&3&4&5&6&14&8&9&10&11&12&13\\
15&16&17&18&19&20&21&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\
9&10&11&12&13&14&8&16&17&18&19&20&21&15&2&3&4&5&6&7&1\\
10&11&12&13&14&8&9&17&18&19&20&21&15&16&3&4&5&6&7&1&2\\
11&12&13&14&8&9&10&18&19&20&21&15&16&17&4&5&6&7&1&2&3\\
12&13&14&8&9&10&11&19&20&21&15&16&17&18&5&6&7&1&2&3&4\\
13&14&8&9&10&11&12&20&21&15&16&17&18&19&6&7&1&2&3&4&5\\
14&8&9&10&11&12&13&21&15&16&17&18&19&20&7&1&2&3&4&5&6\\
8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&1&2&3&4&5&6&7
\end{pmatrix}$$

$$C_2=\begin{pmatrix}
3&4&5&6&7&1&2&10&11&12&13&14&8&9&17&18&19&20&21&15&16\\
5&6&7&1&2&3&4&12&13&14&8&9&10&11&19&20&21&15&16&17&18\\
7&1&2&3&4&5&6&14&8&9&10&11&12&13&21&15&16&17&18&19&20\\
2&3&4&5&6&7&1&9&10&11&12&13&14&8&16&17&18&19&20&21&15\\
4&5&6&7&1&2&3&11&12&13&14&8&9&10&18&19&20&21&15&16&17\\
6&7&1&2&3&4&5&13&14&8&9&10&11&12&20&21&15&16&17&18&19\\
1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21\\
10&11&12&13&14&8&9&17&18&19&20&21&15&16&3&4&5&6&7&1&2\\
12&13&14&8&9&10&11&19&20&21&15&16&17&18&5&6&7&1&2&3&4\\
14&8&9&10&11&12&13&21&15&16&17&18&19&20&7&1&2&3&4&5&6\\
9&10&11&12&13&14&8&16&17&18&19&20&21&15&2&3&4&5&6&7&1\\
11&12&13&14&8&9&10&18&19&20&21&15&16&17&4&5&6&7&1&2&3\\
13&14&8&9&10&11&12&20&21&15&16&17&18&19&6&7&1&2&3&4&5\\
8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&1&2&3&4&5&6&7\\
17&18&19&20&21&15&16&3&4&5&6&7&1&2&10&11&12&13&14&8&9\\
19&20&21&15&16&17&18&5&6&7&1&2&3&4&12&13&14&8&9&10&11\\
21&15&16&17&18&19&20&7&1&2&3&4&5&6&14&8&9&10&11&12&13\\
16&17&18&19&20&21&15&2&3&4&5&6&7&1&9&10&11&12&13&14&8\\
18&19&20&21&15&16&17&4&5&6&7&1&2&3&11&12&13&14&8&9&10\\
20&21&15&16&17&18&19&6&7&1&2&3&4&5&13&14&8&9&10&11&12\\
15&16&17&18&19&20&21&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14
\end{pmatrix}$$

10.8　　　3*6　　　6

$$\begin{bmatrix}1&3&4&6&5&2\\3&4&1&5&2&6\\5&6&3&2&4&1\end{bmatrix}$$

解：　　　10.7

6

$$\begin{bmatrix}1&3&4&6&5&2\\3&4&1&5&2&6\\5&6&3&2&4&1\\2&1&5&3&6&4\\4&2&6&1&3&5\\6&5&2&4&1&3\end{bmatrix}$$

10.9　　　3*3　　　6

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&1&2\end{bmatrix}$$

解：　　　10.7

6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

10.10 3*7 7

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

解： 10.7

7

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

10.11 $(b\ \ v\ \ r\ \ k\ \ \lambda)-$

1 $b=8$，$v=6$，$r=5$，$k=3$，$\lambda=2$

证明： 10.13 $(b,v,r,k,\lambda)-$ $bk=vr$

$$bk=24$$

$$vr=30$$

$$bk\neq vr$$

$(b,v,r,k,\lambda)-$

2 $b=22$，$v=22$，$r=22$，$k=22$，$\lambda=22$

证明：

Θ $b=v$，$k=r$ $(b,v,r,k,\lambda)-$ v=22 k–λ=5

10.22

10.12 $(b,v,r,k,\lambda)-$ $v=21, b=28$和$r=8$ k,λ

$v=15, b=5$ $r=2$ b r

解： 10.13 $(b,v,r,k,\lambda)-$ $bk=vr$ $r(k-1)=\lambda(\upsilon-1)$

$v=21, b=28, r=8$

$$bk = vr \Rightarrow k = \frac{vr}{b} = 6$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \Rightarrow r = \frac{\lambda(k-1)}{v-1} = 2$$

$v = 15, k = 5, \lambda = 2,$

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \Rightarrow r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = 7$$

$$bk = vr \Rightarrow b = \frac{vr}{k} = 21$$

10.13 $(7, 3, 1)-$ 7 4 $\{x_1, x_2, x_4\}$ $\{x_2, x_3, x_5\}$ $\{x_3, x_4, x_6\}$ $\{x_4, x_5, x_7\}$

解： $b = 7$，$v = 7$，$r = 3$，$k = 3$，$\lambda = 1$

Θ $7 = 2^2 + 2 + 1$　3=2+1　10.23　n　$(n^2 + n + 1, n, 1)-$

$x_1, \mathrm{L}\ , x_7$

$\therefore$ 2 $(2^2 + 2 + 1, 3, 1)-$

10.4 2 10.4 1

2

x_2 x_6 x_7 $\{x_2, x_6, x_7\}$

$\{x_1, x_5, x_6\}$ $\{x_1, x_3, x_7\}$

10.14 $(v, k, \lambda)-$

	v=b	k=r	λ
a	46	10	2
b	34	12	4
c	67	12	2
d	54	11	2
e	53	13	3
f	92	14	2
g	41	39	4
h	211	15	1
k	106	15	2

解：

a $(v, k, \lambda)-$ 10.22 Θ v $k - \lambda = 8$

b $(v, k, \lambda)-$ 10.22 Θ v $k-\lambda=8$

c

d 10.21 Θ $r(k-1)\neq\lambda(v-1)$

e

f

g 10.21 Θ $r(k-1)\neq\lambda(v-1)$

h $b=14^2+14+1, k=14+1, \lambda=1$ $n=14$

10.6 14

k 10.22 $\Theta\, v$ $k-\lambda=13$

10.15 $(b, v, r, k, \lambda)-$ A A 0 1 1 0

A' A

a A'

b

c

证明： A $(b, v, r, k, \lambda)-$ A $v\times b$

A k 1 $v-k$ 0

A r 1 $b-r$ 0

A 1 λ λ

A' $v\times b$

A' $v-k$ 1 k 0

A' $b-r$ 1 r 0

A' 1 $b-2r+\lambda$

$b-2r+\lambda$ A'

$(b, v, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$

$(b, v, r, k, \lambda)-$ $b=v, r=k$ $(b\ \ v$

$b-r\ \ v-k\ \ b-2r+\lambda)-$ $b-r=v-k$ $(b\ \ v\ \ b-r\ \ v-k$

$b-2r+\lambda)-$

10.16 21 Steiner

3 Steiner φ_1 7 Steiner φ_2

10.18 21 Steiner

$X=\{x_1, x_2, x_3\}$ $Y=\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$

φ_1 X 3 Steiner $\{x_1, x_2, x_3\}$

φ_2 Y 7 Steiner

$\{y_1, y_2, y_4\}$ $\{y_2, y_3, y_5\}$ $\{y_3, y_4, y_6\}$ $\{y_4, y_5, y_7\}$ $\{y_5, y_6, y_1\}$ $\{y_6, y_7, y_2\}$ $\{y_7, y_1, y_3\}$

$Z=$ z_{ij} $i=1$ 2 3 $j=1$ 2 L 7 21 Z

3×7 i X x_i j Y

y_j

$$\begin{array}{c} \\ Z=\left\{z_{ij}\right\}= \end{array}\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} & z_{17} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} & z_{27} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} & z_{36} \end{bmatrix} \end{array}$$

Z 21 Steiner φ Z $3-$ $\{z_{ir}, z_{js}, z_{ht}\}$

φ

1 $r=s=t=1,2,3,4,5,6,7,$ $\{x_i \quad x_j \quad x_k\}\in\varphi_1$

$\{z_{11}, z_{21}, z_{31}\}$ $\{z_{12}, z_{22}, z_{32}\}$ $\{z_{13}, z_{23}, z_{33}\}$ $\{z_{14}, z_{24}, z_{34}\}$

$\{z_{15}, z_{25}, z_{35}\}$ $\{z_{16}, z_{26}, z_{36}\}$ $\{z_{17}, z_{27}, z_{37}\}$

2 $i=j=k=1,2,3$ $\{y_r \quad y_s \quad y_t\}\in\varphi_2$

$\{z_{11} \quad z_{12} \quad z_{14}\}$ $\{z_{21}, z_{22}, z_{24}\}$ $\{z_{31}, z_{32}, z_{34}\}$ $\{z_{12}, z_{13}, z_{15}\}$ $\{z_{22}, z_{23}, z_{35}\}$ $\{z_{32} \quad z_{32} \quad z_{35}\}$

$\{z_{13}, z_{14}, z_{16}\}$ $\{z_{23}, z_{24}, z_{26}\}$ $\{z_{33}, z_{34}, z_{36}\}$ $\{z_{14}, z_{15}, z_{17}\}$ $\{z_{24}, z_{25}, z_{27}\}$ $\{z_{34}, z_{35}, z_{37}\}$

$\{z_{15}, z_{16}, z_{11}\}$ $\{z_{25}, z_{26}, z_{21}\}$ $\{z_{35}, z_{36}, z_{31}\}$ $\{z_{16}, z_{17}, z_{12}\}$ $\{z_{26}, z_{27}, z_{22}\}$ $\{z_{36}, z_{37}, z_{32}\}$

$\{z_{17}, z_{11}, z_{13}\}$ $\{z_{27}, z_{21}, z_{23}\}$ $\{z_{37}, z_{31}, z_{33}\}$

3 $\{x_i \quad x_j \quad x_k\}\in\varphi_1$ $\{y_r \quad y_s \quad y_t\}\in\varphi_2$

$\{z_{11}, z_{22}, z_{34}\}$ $\{z_{11}, z_{24}, z_{32}\}$ $\{z_{12}, z_{21}, z_{34}\}$ $\{z_{12}, z_{24}, z_{31}\}$ $\{z_{14}, z_{21}, z_{32}\}$ $\{z_{14}, z_{22}, z_{31}\}$

$\{z_{12}, z_{23}, z_{35}\}$ $\{z_{12}, z_{25}, z_{33}\}$ $\{z_{13}, z_{22}, z_{35}\}$ $\{z_{13}, z_{25}, z_{32}\}$ $\{z_{15}, z_{22}, z_{33}\}$ $\{z_{15}, z_{23}, z_{32}\}$

$\{z_{13}, z_{24}, z_{36}\}$ $\{z_{13}, z_{26}, z_{34}\}$ $\{z_{14}, z_{23}, z_{36}\}$ $\{z_{14}, z_{26}, z_{33}\}$ $\{z_{16}, z_{23}, z_{34}\}$ $\{z_{16}, z_{24}, z_{33}\}$

$\{z_{14}, z_{25}, z_{37}\}$ $\{z_{14}, z_{27}, z_{35}\}$ $\{z_{15}, z_{24}, z_{37}\}$ $\{z_{15}, z_{27}, z_{34}\}$ $\{z_{17}, z_{24}, z_{35}\}$ $\{z_{17}, z_{25}, z_{34}\}$

$\{z_{15}, z_{26}, z_{31}\}$ $\{z_{15}, z_{21}, z_{36}\}$ $\{z_{11}, z_{25}, z_{36}\}$ $\{z_{11}, z_{26}, z_{35}\}$ $\{z_{16}, z_{21}, z_{35}\}$ $\{z_{16}, z_{25}, z_{31}\}$

$\{z_{16}, z_{27}, z_{32}\}$ $\{z_{16}, z_{22}, z_{37}\}$ $\{z_{12}, z_{26}, z_{37}\}$ $\{z_{12}, z_{27}, z_{36}\}$ $\{z_{17}, z_{26}, z_{32}\}$ $\{z_{17}, z_{22}, z_{36}\}$

$\{z_{17}, z_{21}, z_{33}\}$ $\{z_{17}, z_{23}, z_{31}\}$ $\{z_{11}, z_{23}, z_{37}\}$ $\{z_{11}, z_{27}, z_{33}\}$ $\{z_{13}, z_{21}, z_{37}\}$ $\{z_{13}, z_{27}, z_{31}\}$

70 21 Steiner

10.17 27 Steiner

解： 3 Steiner φ_1 9 Steiner φ_2

10.18 27 Steiner

10.18

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 4 $H-$ 8 $H-$

$(v, k, \lambda)-$ 4 BIBD

解： 10.22 10.28 8 H− H_8

$$H_8 = H_2 \times H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

−1 0

$(7,3,1)-$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$(7,3,1)-$

$X_1 = \{x_1, x_4, x_5\}$ $X_2 = \{x_2, x_4, x_6\}$ $X_3 = \{x_3, x_4, x_7\}$ $X_4 = \{x_1, x_2, x_3\}$

$X_5 = \{x_1, x_6, x_7\}$ $X_6 = \{x_2, x_5, x_7\}$ $X_7 = \{x_3, x_5, x_6\}$

10.24 10.25 $X \mathrm{I}\ X_1$ $X \mathrm{I}\ X_2$ $X \backslash X_1$ $X \backslash X_2$ 4 BIBD

1 $X\mathrm{I}\ X_1$ 6 3 2 1 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 3 2 1 0 –

$$X_2\ \mathrm{I}\ X_1 = \{x_4\} \qquad X_3\ \mathrm{I}\ X_1 = \{x_4\} \qquad X_4\ \mathrm{I}\ X_1 = \{x_1\}$$

$$X_5\ \mathrm{I}\ X_1 = \{x_1\} \qquad X_6\ \mathrm{I}\ X_1 = \{x_5\} \qquad X_7\ \mathrm{I}\ X_1 = \{x_5\}$$

2 $X\mathrm{I}\ X_2$ 6 3 2 1 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 3 2 1 0 –

$$X_1\ \mathrm{I}\ X_2 = \{x_4\} \qquad X_3\ \mathrm{I}\ X_2 = \{x_4\} \qquad X_4\ \mathrm{I}\ X_2 = \{x_2\}$$

$$X_5\ \mathrm{I}\ X_2 = \{x_6\} \qquad X_6\ \mathrm{I}\ X_2 = \{x_2\} \qquad X_7\ \mathrm{I}\ X_2 = \{x_6\}$$

3 $X \backslash X_1$ 6 4 3 2 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 4 3 2 1 –

$$X_2 \backslash X_1 = \{x_2, x_6\} \qquad X_3 \backslash X_1 = \{x_3, x_7\} \qquad X_4 \backslash X_1 = \{x_2, x_3\}$$

$$X_5 \backslash X_1 = \{x_6, x_7\} \qquad X_6 \backslash X_1 = \{x_2, x_7\} \qquad X_7 \backslash X_1 = \{x_3, x_6\}$$

4 $X \backslash X_2$ 6 4 3 2 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 4 3 2 1 –

$$X_1 \backslash X_2 = \{x_1, x_5\} \qquad X_3 \backslash X_2 = \{x_3, x_7\} \qquad X_4 \backslash X_2 = \{x_1, x_3\}$$

$$X_5 \backslash X_2 = \{x_1, x_7\} \qquad X_6 \backslash X_2 = \{x_5, x_7\} \qquad X_7 \backslash X_2 = \{x_3, x_5\}$$

参 考 文 献

1 2003
2 1981
3 1987
4 C.L.Liu 1987
5 3 2002
6 1994
7 .
1989
8 Richard A Brualdi Introductory Combinatorics Prentice Hall Inc 1999
9 L.Lovász Combinatorial Problems and Exercises North Holland Publishing Company 1979
10 A.Kaufmann D.Coster Exercies de Combinatorique avec Solutions DUNOD 1969