§3.1 收敛性与极限定理

一、分布函数弱收敛

定义3.1.1 对于分布函数列 $\{F_n(x)\}$,如果存在单调不降函数F(x),使

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x),$$

在F(x)的每一连续点成立,称 $F_n(x)$ 弱收敛于F(x).

记为

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$
.



注 分布函数列的极限函数F(x)是有界非降函数,但不一定是分布函数.

定理3.1.1 连续性定理(列维一克拉美)

正极限定理 设分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于某一分布函数F(x),则相应的特征函数列收敛于特征函数,且在t的任一有限区间内收敛是一致的.

$$F_n(x) \to F(x) \Rightarrow \{ \varphi_n(t) \} \to \varphi(t)$$
一致成立.



逆极限定理 设特征函数列 $\{\varphi_n(t)\}$ 收敛于某一函数 $\varphi(t)$,且 $\varphi(t)$ 在t=0 连续,则相应的分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于某一分布函数F(x),而且 $\varphi(t)$ 是F(x)的特征函数.

$$\{\varphi_n(t)\} \to \varphi(t) \Rightarrow F_n(x) \to F(x)$$

连续性定理可用来确定随机变量序列的极限分布.



二、随机变量的收敛性

定义3.1.2 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 的分布函数列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $\mathbf{r.v.}X$ 的分布函数F(x),称 $\{X_n\}$ 依分布收敛于X,记为

$$X_n \xrightarrow{W} X$$
, as $n \to \infty$



定义3.1.3 : 设 $\{X_n\}$,n=1,2,...是定义在 $\{\Omega, F,P\}$)上的随机变量序列,若存在一个随机变量X(可以是常数),使

$$P\{\lim_{n\to\infty}X_n=X\}=1$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 以概率为1收敛于X,或称几乎处处收敛于X,记为

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X$$
. $\not \equiv \lim_{n \to \infty} X_n = X$ (a.s.)



定义3.1.4 设 $\{X_n\}$, n=1,2,...是定义在 $(\Omega, F,$

P)上的随机变量序列,若对 $∀\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|\geq \varepsilon\}=0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1.$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于X,记为

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X\quad (p)\qquad \text{if}\qquad X_n\overset{p}{\to}X.$$



定义3.1.5 设 $\{X_n\}$, n=1,2,...是定义在 $(\Omega, F,$

P)上的随机变量序列,若 $E|X_n|^2 < \infty$,且

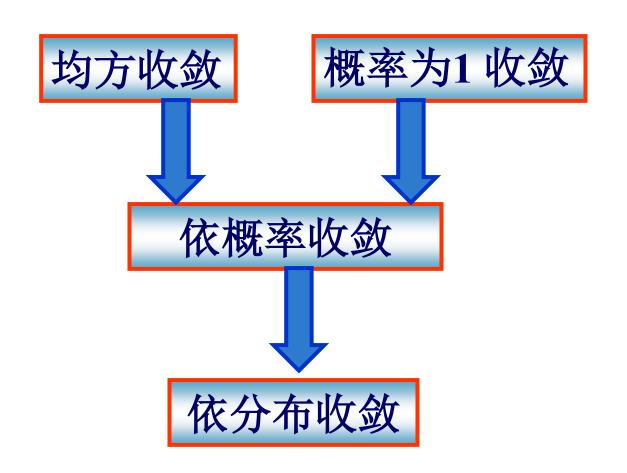
$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n-X|^2]=0,$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 均方收敛于X,记为

$$1 \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{m} X_n = X.$$



三、几种收敛性的关系



证明 随机变量序列 $\{X_n\}$ 均方收敛于X,则一定依概率收敛于X.

证 由马尔科夫不等式,对 ∀ε > 0有

$$P\{|X_n - X| \ge \varepsilon\} \le \frac{E[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n-X|\geq \varepsilon\}=0.$$



