§1.2 随机过程的数字特征

在实际应用中,很难确定出随机过程的有限维分布函数族.

过程的数字特征能反映其局部统计性质,在许多实际问题和理论问题中都能很好地满足研究目的.

在某些特定情况下,随机过程的数字特征可以完全确定其有限维分布.

需确定各类数字特征随时间的变化规律.

1.2.1均值函数与方差函数

定义1.2.1 设$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 和 $\{Y_t(\omega), t \in T\}$ 是两个实随机过程, 称

$$Z_t(\omega) = X_t(\omega) + jY_t(\omega), t \in T, \quad j = \sqrt{-1}$$

为复随机过程.

定义1.2.2 给定实随机过程$\{X_t(\omega), t \in T\}$, 称

$$m(t) \triangleq E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x), t \in T$$

为此过程的均值函数.

随机过程的数字特征

复随机过程的均值函数定义为

$$m_Z(t) \triangleq E(X_t) + jE(Y_t), t \in T$$

定义1.2.3 给定随机过程 $\{X_t, t \in T\}$，称

$$D(t) \triangleq D(X_t) = E\{X_t - m(t)\}^2$$

为过程的**方差函数**.

称 $\sqrt{D(t)}$ 为过程的**均方差函数**.

复随机过程的方差函数定义为

$$D_Z(t) \triangleq E\{|Z_t - m_Z(t)|^2\}, \quad t \in T.$$

因 $$Z_t - m_Z(t) = [X_t - m_X(t)] + j[Y_t - m_Y(t)]$$

故 $$D_Z(t) = E\{[X_t - m_X(t)]^2\} + E\{[Y_t - m_Y(t)]^2\}$$
$$= D_X(t) + D_Y(t).$$

一般而言,均值函数和方差函数是时间的函数.

问题 均值函数和方差函数分别表征了随机过程的什么特征?

随机过程的数字特征

均值函数表征了随机过程在各时间点上的平均特征.

方差函数描述了随机过程在各时点处的波动程度.

仅描述了各个孤立时点过程的状态特征.

1.2.2 协方差函数与相关函数(相关系数)

需要研究在两个不同时点随机过程状态间的关联关系.

回顾 两个随机变量的相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

刻画了随机变量X与Y的线性相关程度.

以下引入的数字特征都是刻画两个不同时点随机过程状态之间的线性关联程度.

定义1.2.4 给定随机过程 $\{X_t(\omega), t\in T\}$, $s, t\in T$, 称

$$\rho(s,t) \triangleq \frac{Cov(X_s, X_t)}{\sigma(s)\sigma(t)}$$

为过程的自相关系数函数. 称

$$C(s,t) \triangleq Cov(X_s, X_t) = E\{[X_s - m(s)][X_t - m(t)]\}$$

为过程的协方差函数.

随机过程的数字特征

称 $R(s,t) \triangleq E(X_s X_t)$

为过程的**自相关函数**.

重点研究内容

有 $D(t) = C(t,t) = E[X_t - m(t)]^2$

$$C(s,t) = R(s,t) - m(s)m(t)$$

特别当 $m(t) \equiv 0$ 时

零均值随机过程

$$C(s,t) = R(s,t)$$

对于复随机过程 $Z_t = X_t + jY_t$

自相关函数为 $R_Z(s,t) \triangleq E(Z_s\overline{Z_t})$

协方差函数为

$$C(s,t) \triangleq Cov(Z_s,\overline{Z}_t) = E\{[Z_s - m_Z(s)]\overline{[Z_t - m_Z(t)]}\}$$

Ex.1 设U, V是两个相互独立随机变量，均服从标准正态分布$N(0, 1)$，构成随机过程

$$X_t = U + Vt, \qquad t \geq 0$$

计算过程的均值函数、方差函数及相关函数，并给出过程的一维和二维分布.

解 因 $$E(U)=E(V)=0,$$

$$D(U)=D(V)=1$$

故均值函数为

$$m(t)=E[X_t]=E(U)+E(V)\cdot t=0,\quad t\geq 0$$

方差函数为

U, V相互独立

$$D(t)=E[X_t^{\ 2}]-m^2(t)=E(U+Vt)^2$$

$$=E(U^2)+2tE(UV)+t^2E(V^2)=1+t^2,\quad t\geq 0$$

协方差函数为

随机过程的数字特征

$$C(s,t)=R(s,t)=E(X_sX_t)$$

$$=E[(U+Vs)(U+Vt)]$$

$$=E(U^2)+(s+t)E(UV)+stE(V^2)=1+st,\quad s,t\geq 0$$

因

$$X_t=U+Vt\sim N(0,1+t^2)$$

故过程的一维概率密度为

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}},\quad x\in R,t\geq 0$$

二维概率密度参见教材P17.

Ex.2 (教材P18例1.2.3) 随机开关系统过程

$$X_t=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{出现正面}\omega=\omega_1;\\ 2t & \text{出现反面}\omega=\omega_2.\end{cases}\qquad t\in R.$$

求该过程的均值函数,方差函数,相关函数,协方差函数.

解 因对任意实数$t\in R$, 有

$X(t)$	$\cos\pi t$	$2t$
p	1/2	1/2

随机过程的数字特征

$$m_X(t)=E(X_t)=\frac{1}{2}\cos\pi t+t;$$

$$E(X_t^2)=\frac{1}{2}\cos^2\pi t+2t^2;$$

$$D_X(t)=E(X_t^2)-m_X(t)=(\frac{1}{2}\cos\pi t-t)^2;$$

注意到X_s与X_t不相互独立, 联合分布律为

$(X(t),X(s))$	$(\cos\pi t,\ \cos\pi s)$	$(2t,\ 2s)$
p	1/2	1/2

$$R_X(s,t) = E(X_s X_t)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\pi t\cos\pi s + \frac{1}{2}\times 2t\times 2s$$

$$= \frac{1}{2}\cos\pi t\cos\pi s + 2ts.$$

协方差函数为

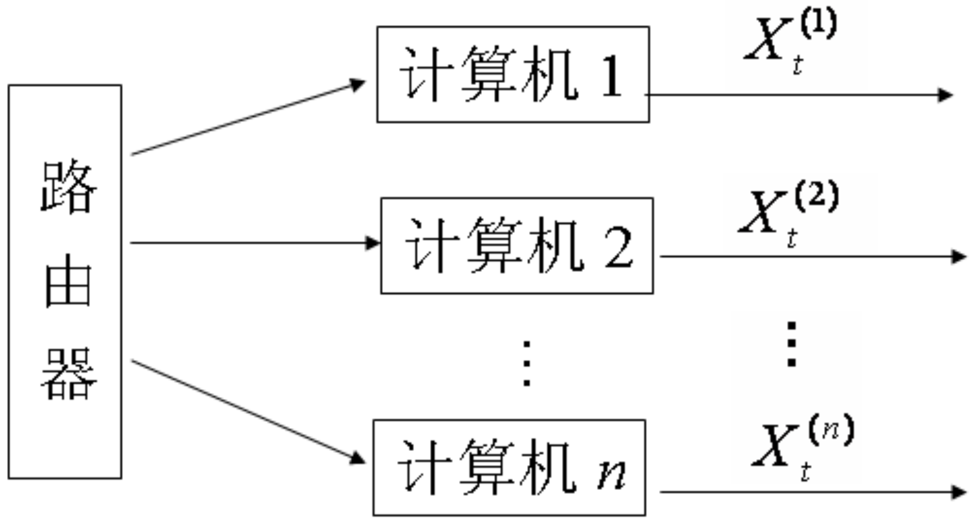
$$C(s,t) = R(s,t) - m(s)m(t)$$

$$= [\frac{1}{2}\cos\pi t\cos\pi s + 2ts] - (\frac{1}{2}\cos\pi s + s)(\frac{1}{2}\cos\pi t + t)$$

$$= \frac{1}{4}\cos\pi t\cos\pi s - \frac{t}{2}\cos\pi s - \frac{s}{2}\cos\pi t + ts$$

1.2.3 多维随机过程及互相关函数

Ex.6 n台计算机通过一个有带宽限制的路由器获取网络数据，第i台计算机获取数据的速度是随机过程：$\{X_t^{(i)}, t \geq 0\}, i = 1,2,\cdots,n$



需研究各台计算机的速度之间的关联关系.

定义1.2.5 设给定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$和指标集T, 若对每个$t\in T$, 有定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机向量$(X_t^{(1)}(\omega), X_t^{(2)}(\omega),\cdots, X_t^{(n)}(\omega))$,$\omega\in\Omega$与之对应. 称

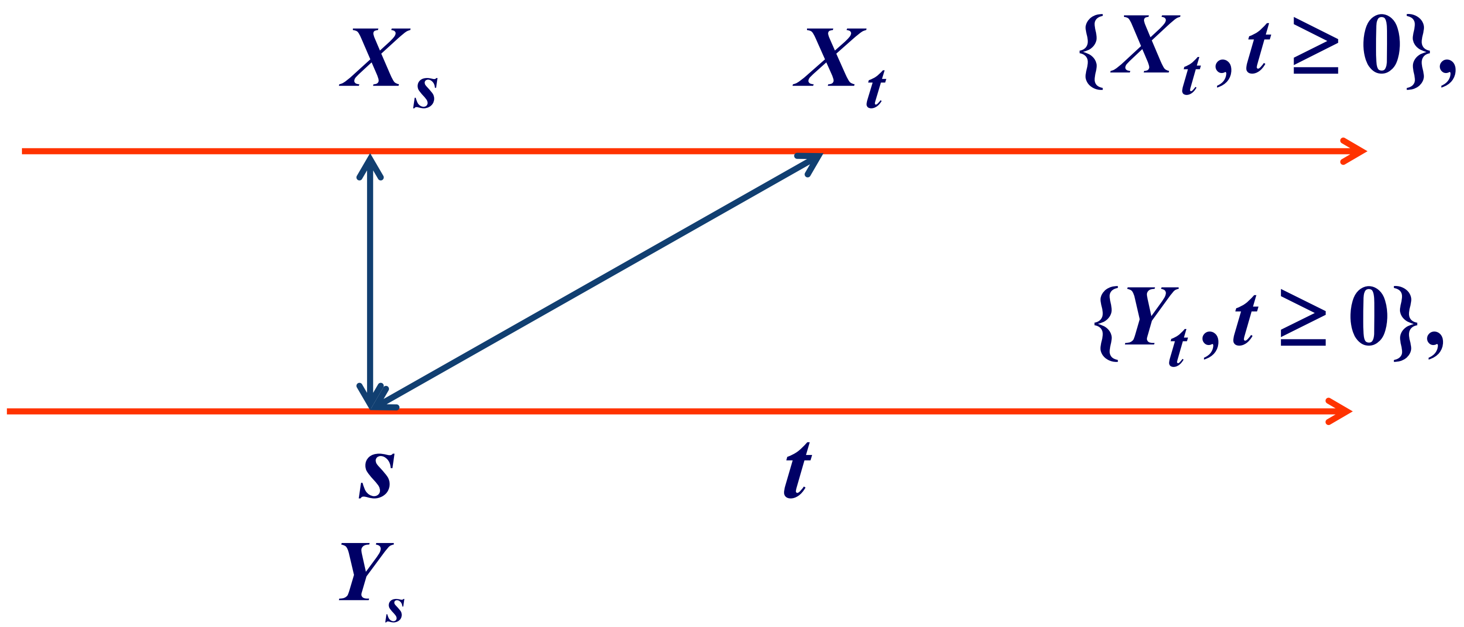
$$\{(X_t^{(1)}(\omega), X_t^{(2)}(\omega),\cdots, X_t^{(n)}(\omega)),t\in T\}$$

为n**维随机过程**.

可定义多维随机过程的联合分布函数.参见教材P21.

随机过程的数字特征

工程实践中常需要研究多维随机过程的不同过程在相同或不同时点处的关联关系.



引进两个随机过程的互相关函数.

定义1.2.6 给定两个复随机过程$\{Z_t^{(1)}, t \in T\}$和$\{Z_t^{(2)}, t \in T\}$,称

$$C_{Z^{(1)}Z^{(2)}}(s,t) = \mathrm{Cov}(Z_s^{(1)}, \overline{Z_t^{(2)}})$$

$$= E\{[Z_s^{(1)} - m_{Z^{(1)}}(s)]\overline{[Z_t^{(2)} - m_{Z^{(2)}}(s)]}\}$$

为两个随机过程的**互协方差函数**.

称 $$R_{Z^{(1)}Z^{(2)}}(s,t) = E[Z_s^{(1)}\overline{Z_t^{(2)}}]$$

为两个随机过程的**互相关函数**.

特定时点两过程间状态相关程度的刻画指标.

当时间s和t变动, 两个过程的互协方差函数和互相关函数反映了它们之间的整体相关程度.

对实随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 和 $\{Y_t, t \in T\}$

$$C_{XY}(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, Y_t) = E(X_s, Y_t) - m_X(s) m_Y(T)$$

若对任意$s, t \in T$

$$C_{XY}(s,t) = 0$$

或

$$E(X_s Y_t) = m_X(s) m_Y(\mathrm{t}) = E(X_s) E(Y_t)$$

称两个过程互不相关.

若对任意$s, t\in T$

$$R_{XY}(s,t)=E(X_sY_t)=0$$

称两个过程正交.

Ex.6 设某系统输入信号是过程$\{X_t, t\in T\}$输出过程是带有噪声的过程:

$$Y_t=X_t+N_t, t\in T$$

其中$\{N_t, t\in T\}$是噪声过程.计算输出过程的均值函数与相关函数.

解 $m_Y(t)=E(Y_t)=E(X_t)+E(N_t)=m_X(t)+m_N(t)$

$$R_Y(s,t)=E\{(X_s+N_s)(X_t+N_t)\}$$

$$=R_X(s,t)+R_{XN}(s,t)+R_{NX}(s,t)+R_N(s,t)$$

特别当$\{X_t,t\in T\}$与$\{N_t,t\in T\}$相互正交,则

$$R_Y(s,t)=R_X(s,t)+R_N(s,t)$$

Ex.7 已知实随机过程$\{X_t,t\in T\}$的自相关函数为$R(s,t)$, 令

$$Y_t=X_{t+a}-X_t$$

求自相关函数$R_{YY}(s,t)$.

随机过程的数字特征

解 $R_{YY}(s,t)=E[(X_{s+a}-X_s)Y_t]$

$$=R_{XY}(s+a,t)-R_{XY}(s,t)$$

代入 $R_{XY}(s,t)=E(X_sY_t)=E[X_s(X_{t+a}-X_t)]$

$$=R(s,t+a)-R(s,t)$$

$$R_{YY}(s,t)=R(s+a,t+a)-R(s+a,t)-R(s,t+a)+R(s,t)$$

特别取$s=t$,则

$$R_{YY}(t,t)=E[(X_{t+a}-X_t)^2]=D(Y_t)$$

$$=R(t+a,t+a)-R(t+a,t)-R(t,t+a)+R(t,t)$$