§0.3 特征函数

一、特征函数的定义及例

设X, Y是实随机变量, 复随机变量

$$Z = X + jY,$$

的数学期望定义为

$$E(Z) = E(X) + j\,E(Y), \qquad j = \sqrt{-1}$$

特别

$$E(e^{jtX}) = E(\cos tX) + jE(\sin tX)$$

X是实随机变量

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF(x) + j\int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} dF(x)$$

求随机变量X的函数的数学期望

注 1) $\forall t \in R$, $\cos tx$ 和 $\sin tx$ 均为有界函数, 故

$E(e^{jtX})$ 总存在.

2) $E(e^{jtX})$ 是实变量t 的函数.

定义0.3.1 设X是定义在(Ω,F, P)上的随机变量, 称

$$\varphi(t)=E(e^{jtX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}dF(x),\quad t\in R$$

为X的**特征函数**.

关于X的分布函数的富里埃-司蒂阶变换

当X是连续型随机变量

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx;$$

当X是离散型随机变量

$$\varphi(t)=\sum_{k}e^{jtx_k}p_k.$$

Ex.1 单点分布 $P\{X=c\}=1,$

$$\varphi(t)=E(e^{jtc})=e^{jtc},\ t\in \mathrm{R}.$$

Ex.2 两点分布

$$\varphi(t)=e^{jt\cdot 0}(1-p)+e^{jt\cdot 1}p$$

$$=1-p+pe^{jt}=q+pe^{jt},\ t\in R.$$

Ex.3 二项分布 $\varphi(t)=(q+pe^{jt})^n,\ t\in R$

Ex.4 泊松分布 $\varphi(t)=e^{\lambda(e^{jt}-1)},\ t\in R$

Ex.5 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad (\lambda>0)$$

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}\lambda e^{jtx}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cos tx dx+j\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\sin tx dx$$

$$=\lambda\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}+j\lambda\frac{t}{\lambda^2+t^2}=\left(1-\frac{jt}{\lambda}\right)^{-1},\ t\in R$$

Ex.6 均匀分布 $U[-a, a]$,

$$\varphi(t)=\frac{\sin at}{at}, t\in R$$

Ex.7 正态分布$N(a,\sigma^2)$

$$\varphi(t)=e^{jat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2},\quad t\in R$$

特别正态分布$N(0,1)$，则

$$\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2},\quad t\in R$$

特征函数

证明 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{u=\frac{x-a}{\sigma}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jt(a+\sigma u)}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jat-\frac{1}{2}\sigma^2\mu^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(u-ja\sigma)^2}{2}}du=e^{jat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2},\ t\in R$$

二、特征函数性质

性质0.3.1 随机变量X的特征函数满足:

1) $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1;$

2) $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t).$

证 1) $|\varphi(t)|^2 = |E(\cos tX) + jE(\sin tX)|^2$

$$= [E(\cos tX)]^2 + [E(\sin tX)]^2$$

$$\le [E(\cos tX)^2] + [E(\sin tX)^2]$$

$$= E[(\cos tX)^2 + (\sin tX)^2] = 1 = \varphi(0)$$

司蒂阶积分性质或矩的性质

$$2)\quad \overline{\varphi(t)}=\overline{E(e^{jtX})}=\overline{E(\cos tX)+jE(\sin tX)}$$

$$=E(\cos tX)-jE(\sin tX)$$

$$=E[\cos(-tX)]+jE[\sin(-tX)]$$

$$=E[e^{j(-t)X}]=\varphi(-t)$$

性质0.3.2 随机变量X的特征函数为$\varphi_X(t)$, 则$Y=aX+b$的特征函数是

$$\varphi_Y(t)=e^{jbt}\varphi_X(at)$$

a, b是常数.

证 $\varphi_\eta(t) = E[e^{j(aX+b)t}]$

$$= E[e^{jbt}e^{j(at)X}] = e^{jbt}\varphi_X(at)$$

Ex.8 设$\eta \sim N(a,\sigma^2)$, 求其特征函数.

解 设$X \sim N(0, 1)$, 有$Y=\sigma X+ a$, 且

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in R.$$

$$\varphi_Y(t) = e^{jat}\varphi_X(\sigma t) = e^{jat}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in R.$$

性质0.3.3 随机变量X的特征函数$\varphi(t)$在R上一致连续.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ 使\ |h| < \delta 时, 对 t 一致地有$$

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

一般，$\delta = \delta(\varepsilon, t)$

性质0.3.4 特征函数是非负定的函数，即对任意正整数n, 任意复数$z_1, z_2, \ldots, z_n$,及$t_r \in R$, $r = 1, 2, \cdots, n$,有

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \varphi(t_r - t_s) z_r \overline{z_s} \geq 0.$$

证

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varphi(t_r-t_s)z_r\bar{z}_s=\sum_{r,s=1}^{n}z_r\bar{z}_s\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(t_r-t_s)x}dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{r,s=1}^{n}z_r\bar{z}_s e^{jt_r x}e^{-jt_s x}]dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{r=1}^{n}z_r e^{jt_r x}\right|^2 dF(x)\geq 0.$$

注 以上性质中$\varphi(0)=1$,一致连续性，非负定性是本质性的.

定理0.3.1 (波赫纳—辛钦) 函数$\varphi(t)$为特征函数的充分必要条件是在R上一致连续，非负定且$\varphi(0)=1$.

定理0.3.2 若随机变量X的n阶矩存在, 则X的特征函数$\varphi(t)$的k阶导数$\varphi^{k}(t)$存在, 且

$$E(X^k)=j^{-k}\varphi^{(k)}(0), \quad (k\le n)$$

证 仅证连续型情形

设X的概率密度为$f(x)$，有

$$\frac{d[e^{jtx}f(x)]^k}{dt}=j^k x^k e^{jtx}f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{jtx}x^k f(x)\right|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^k f(x)\right|dx=E[|X|^k]<\infty$$

对 $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}f(x)dx$两边求导，得

$$\varphi^{(k)}(t)=j^k\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jtx}x^k f(x)dx=j^k E(X^k e^{jtX})$$

令t=0，得 $\varphi^{(k)}(0)=j^k E(X^k)$

故 $E(X^k)=j^{-k}\varphi^{(k)}(0)$

Ex.9 随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 $\varphi(t)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\cos t\,dx \qquad (\because f(x)=f(-x))$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(t+1)x+\cos(t-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{t+1}\sin[(t+1)\frac{\pi}{2}]+\frac{1}{t-1}[\sin(t-1)\frac{\pi}{2}]\right\},\quad t\in R.$$

因 $\varphi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=2-\frac{1}{4}\pi^2.$

故 $E(X)=j^{-1}\varphi'(0)=0$

$$D(X)=E(X^2)=j^{-2}\varphi''(0)=-\left(2-\frac{1}{4}\pi^2\right)=\frac{1}{4}\pi^2-2.$$

三、反演公式及唯一性定理

由随机变量X的分布函数可惟一确定其特征函数：

$$F(x) \Rightarrow \varphi(t)$$

问题

能否由X的特征函数唯一确定其分布函数？

$$\varphi(t) \Rightarrow F(x)$$

从而 $\varphi(t) \overset{?}{\Leftrightarrow} F(x)$

定理0.3.3（反演公式）设随机变量X 的分布函数和特征函数分别为$F(x)$和 $\varphi(t)$, 则对$F(x)$的任意连续点x_1, x_2,（$x_1<x_2$），有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-jtx_1}-e^{-jtx_2}}{jt}\varphi(t)dt.$$

推论1(唯一性定理)分布函数$F_1(x)$和$F_2(x)$恒等的充要条件是它们的特征函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$恒等.

推论2 若随机变量X的特征函数 $\varphi(t)$在R上绝对可积，则X为连续型随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-jtx}\varphi(t)dt$$

反演公式

注 对于连续型随机变量X，概率密度与特征函数互为富氏变换(仅差一个负号).

推论3 随机变量X是离散型的，其分布律为

$$p_k=P\{X=k\},\qquad k=0,\pm1,\pm2.\cdots$$

其特征函数为

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{jkt},\qquad t\in R.$$

且 $$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-jtk}\varphi(t)dt$$

反演公式

证　设 $s\in N$, 有

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{e}^{-jts}\varphi(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k e^{jkt}e^{-jts}dt$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}p_s dt+\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq s}}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_k\mathrm{e}^{jt(k-s)}dt=2\pi p_s+0$$

其中当$k \neq s$时 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{jt(k-s)} dt = 0.$

$$\Rightarrow \quad p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-jtk} \varphi(t) dt.$$

Ex.9 随机变量X在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上服从均匀分布, $Y=\cos X$,利用特征函数求Y的概率密度.

解 X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

Y的特征函数为

$$\varphi_Y(t) = E(e^{\mathrm{j}tY}) = E(e^{jt\cos X})$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{j}t\cos x} \frac{1}{\pi} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{jt\cos x} \frac{1}{\pi} dx$$

偶函数

令

$$u = \cos x, \qquad du = -\sin x dx = -\sqrt{1-u^2}\, dx$$

$$\varphi_Y(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^{jtu} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理，知随机变量Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1;\\ 0. & \text{其它.}\end{cases}$$

Ex.12 已知随机变量X的特征函数为

$$\varphi(t)=\cos^2 t,\ t\in R$$

试求X的概率分布.

解 $\varphi(t)=\cos^2 t=\left(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{4}e^{2jt}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2jt}$$

$$=e^{2jt}P\{X=2\}+e^{0jt}P\{X=0\}+e^{-2jt}P\{X=-2\}$$

根据特征函数与分布函数一一对应的惟一性定理, 知随机变量X的分布律为

X	-2	0	2
p	1/4	1/2	1/4

四、独立随机变量和的特征函数

定理0.3.4 随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，令

$$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k \quad 则 \quad \varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)$$

Ex.10 随机变量$Y\sim B(n,p)$,写出其特征函数.

解 二项分布随机变量Y可表示为$Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$,且$X_k\sim B(1,p)$, $k=1,2,\ldots,n$, 相互独立, 故Y的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=(q+pe^{\mathrm{j}t})^n$$

Ex.11 若$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立, 且$X_k\sim N(0,1)$, 证明 $Y=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 也服从$N(0,1)$分布.

证 X_k的特征函数为$\varphi_k(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, 则

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)=e^{-\frac{nt^2}{2}},\qquad t\in R$$

从而

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k}\left(t\big/\sqrt{n}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}},\qquad t\in R$$

由唯一性定理知, $Y\sim N(0,1)$.

五、多维随机变量的特征函数

定义0.3. 2 二维随机变量(X, Y)的特征函数定义为

$$\varphi(t_1,t_2)=E[e^{j(t_1X+t_2Y)}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x+t_2y)}dF(x,y)$$

连续型

$$\varphi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x+t_2y)}f(x,y)dxdy$$

离散型

$$\varphi(t_1,t_2)=\sum_r\sum_s e^{j(t_1x_r+t_2y_s)}p_{r,s}.$$

定义0.3.3 n维随机向量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的分布函数为$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,则它的特征函数为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E[e^{j(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}dF(x_1,\cdots,x_n)$$

性质0.3.5

1) 随机变量（$X_1,X_2,\dots,X_n$）相互独立的充要条件是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k)$$

与独立和 $Y=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的特征函数性质有什么差别？

2) 二维随机变量(X, Y)的特征函数为$\varphi(t_1,t_2)$，则$Z=aX+bY+c$ 的特征函数为

$$\varphi_Z(t)=e^{jtc}\varphi(at,bt),\quad t\in R.$$

特别有

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi(t,t)$$

证

$$\varphi_Z(t)=E[e^{jt(aX+bY+c)}]=e^{jtc}E[e^{jt(aX+bY)}]$$

$$=e^{jtc}E[e^{jatX+jbtY}]$$

$$=e^{jtc}\varphi(at,bt).$$

Ex.13 设(X_1,X_2)服从二维正态分布，且$E(X_k)=k$, $k=1,2$,记.

$$K_{ij}=Cov(X_k,X_j)=k+j,\quad k,j,=1,2.$$

求$Y=X_1+X_2$的特征函数.

解 $\varphi_{X_1,X_2}(t_1,t_2)=$

$$=e^{j(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2)-\frac{1}{2}[\sigma_1^2 t_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2+\sigma_2^2 t_2^2]}$$

$$=e^{j(t_1+2t_2)-\frac{1}{2}(2t_1^2+2\times 3t_1 t_2+4t_2^2)}$$

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{X_1,X_2}(t,t)=e^{j3t-6t^2}$$

$$= e^{j3t} e^{-\frac{1}{2}\times 12t^2}, \ t \in R.$$

故 $Y=X_1+X_2 \sim N(3,12)$.