

§ 2.4 泊松过程的推广

2.4.1 更新计数过程

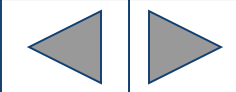
对齐次泊松过程进行推广：

考虑计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的时间间隔序列 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 相互独立同分布的情形。

同类型设备的更新，如

一个元件； 一个灯泡； 一个系统...

若各更换对象的寿命具有相同概率密度，则



相继两次损坏之间的运行时间 T_1, T_2, \dots 相互独立同分布.

一、更新过程定义

定义2.4.1 设 $\{T_n, n \geq 1\}$ 是相互独立同分布的
非负随机变量序列, 令

$$W_n = \sum_{i=1}^n T_i, n \geq 1, W_0 = 0$$

称 $N(t) = \sup\{n : W_n \leq t\}$

计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新(计数)过程.

注 1 更新过程是满足零初值性的平稳独立增量过程.

注 2 事件发生一次称为一次更新,则

T_n : 第 $n-1$ 到第 n 次更新相距时间(更新间距).

W_n : 第 n 次更新发生的时刻(更新时刻).

$N(t)$: t 时刻之前发生的总更新次数.

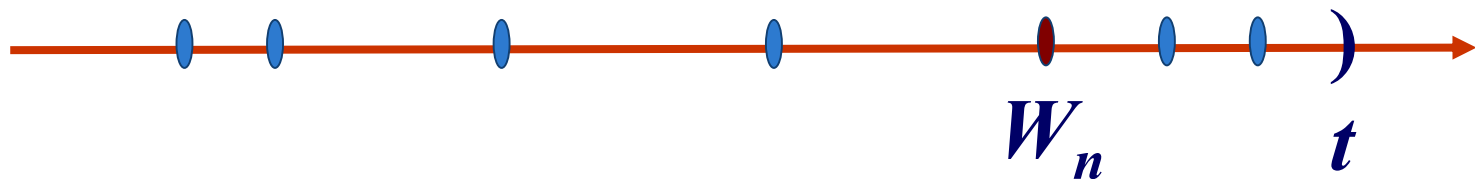
二、更新过程有关分布

结论1 更新过程的更新间距 T_n 的分布函数为 $F(x)$, $F_n(x)$ 为更新时刻 W_n 的分布函数, 则

$$1) \quad F_n(t) = 1 - F_{N(t)}(n-1).$$

$$2) \quad P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

证 1) 因 $\{N(t) \geq n\} = \{W_n \leq t\}$



$$2) \quad P\{N(t) = n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\}$$

$$\begin{aligned} &= P\{W_n \leq t\} - P\{W_{n+1} \leq t\} \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \end{aligned}$$

结论2 更新过程的更新间距的特征函数为 $\varphi_T(u)$, 则更新时刻的特征函数为

$$\varphi_{W_k}(u) = [\varphi_T(u)]^k$$

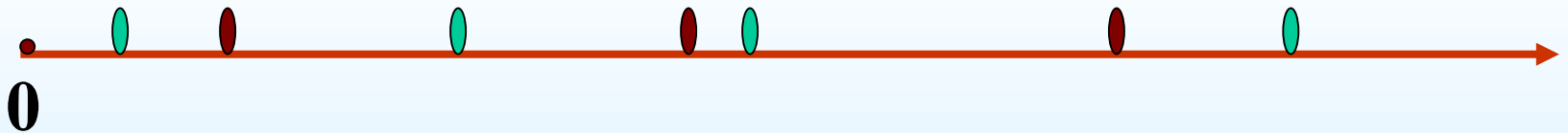
泊松过程是更新过程. 强度为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 其到达时间间隔序列相互独立同服从参数为 λ 的指数分布.

反之, 若更新计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的更新间距具有指数分布, 则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程.

证明: 见P61.

定理2.4.1 更新计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程的充要条件是更新间距具有指数分布.

Ex.4 设 $[0, t]$ 时间内到达计数器的离子数形成泊松过程, 平均每分钟到达4个. 某计数器对到达的离子每隔一个才记录一次. 讨论记录下的离子个数是否构成泊松过程?



解 设

$$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$$

是相继到达的离子之间的时间间隔独立同服从参数为 $\lambda=4$ 的指数分布 .

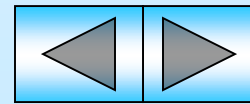
相继被记录的离子之间的时间间隔

$$T_1 = X_1 + X_2, T_2 = X_3 + X_4, \cdots T_n = X_{2n-1} + X_{2n}, \cdots$$

也独立同分布, 因

$$\{T_1 > t\} = \{X_1 + X_2 > t\}$$

$$= \{[0, t] \text{内至多到达一个离子}\}$$



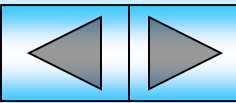
$$\begin{aligned}P\{T_1 > t\} &= P\{N(t) \leq 1\} = P\{N(t) = 0\} + P\{N(t) = 1\} \\&= e^{-4t} + 4te^{-4t}\end{aligned}$$

$T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 的分布函数均为

$$\begin{aligned}F_T(t) &= P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} \\&= 1 - e^{-4t} - 4te^{-4t}, \quad t > 0,\end{aligned}$$

非指数
分布

记录下的离子个数不能构成泊松过程.



三、更新函数

更新过程的更新函数为 $M(t) = E[N(t)]$

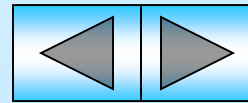
更新密度(强度) 为 $m(t) = M'(t)$

定理2.4.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是更新过程, 其更新函数为

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

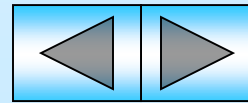
更新密度(强度) 为

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$



$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad M(t) &= E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{N(t) = k\} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} n[F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)
 \end{aligned}$$

Ex.5 对某电力系统进行定时检查, 每次检查均以概率 $p(0 < p < 1)$ 需停电检修. 用 N_j 表示第 j 次检查时已发生停电检修的次数, 讨论此计数过程是否为更新过程.



分析 在每个检查时刻独立进行贝努里试验,
其中 $A=\{\text{停电检修}\}$, $P(A)=p$.

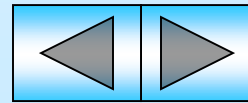
将“停电检修”视为更新事件,第 j 次检查
时已发生停电检修的次数记为 N_j . 讨论

$$\{N_j, j=1, 2, \dots\}$$

是否为更新过程.

第 j 次检查相当于进行 j 重贝努里试验.
更新间距相互独立同服从几何分布

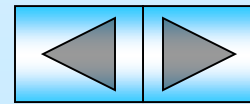
$$P\{T_i = k\} = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots, (i = 1, 2, \dots)$$



2.4.2 复合泊松过程

EX. 6 调查城市人员流动情况, 可在关键路口观察公交车的载客情况, 设 $[0, t]$ 内通过的公交车数 $N(t)$ 是一个poisson过程, 而每辆车的载客人数为 ξ_n , 则经公交车通过此路口的人数为:

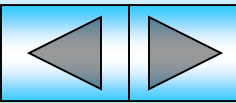
$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n$$



定义2.4.3 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是齐次poisson过程, $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列, 并与 $N(t)$ 相互独立, 称

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, t \geq 0$$

为复合poisson过程..

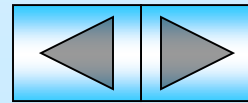


EX.7 设某仪器受到震动而引起损伤，若震动次数 $N(t)$ 按强度为 λ 的Poisson过程发生，第 k 次震动时引起的损伤为 D_k ，且 D_1, D_2, \dots 相互独立同分布，与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 相互独立。

又假设仪器受到震动而引起损伤将随时间按指数衰减。

分析

- 1) 设初始损伤为 D_k ，经时间 t 后衰减为 $D_k e^{-\alpha t}, t \geq 0 \quad (\alpha > 0)$;



2) 假设各次震动而引起损伤是可叠加的, 则在 t 时刻的总损伤可表示为

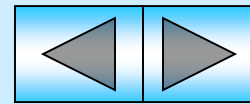
$$D(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)}, t \geq 0$$

其中 W_k 是第 k 次受震动的时刻. 此过程非复合泊松过程.

定理2.4.3 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是复合泊松过程

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \quad t \geq 0$$

则满足:



1) 是独立增量过程.

2) Y_1 的特征函数为 $\varphi_{Y_1}(u)$, 则 $X(t)$ 的一维特征函数

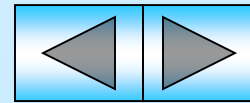
$$\varphi_X(t, u) = e^{jt[\varphi_{Y_1}(u)-1]}, \quad t \geq 0.$$

3) 均值函数和方差函数分别为

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[N(t)]E(Y_1) = \lambda t E(Y_1).$$

$$D_X(t) = D(N)E(Y_1^2) = \lambda t E(Y_1^2).$$

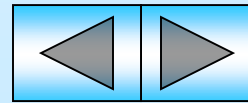
证 2) 由全期望公式



$$\begin{aligned}\varphi_X(u; t) &= E[e^{juX(t)}] = E\{E[e^{juX(t)}|N(t)]\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{juX(t)}|N(t)=k]P\{N(t)=k\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因 } E[e^{juX(t)}|N(t)=k] &= E[e^{ju\sum_{n=1}^k Y_n}] \\ &= \prod_{n=1}^k E(e^{juY_1}) = [\varphi_{Y_1}(u)]^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \varphi_X(u; t) &= \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi_{Y_1}(u)]^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{\lambda t[\varphi_{Y_1}(u)-1]}\end{aligned}$$

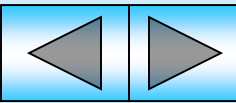


EX.8 保险公司赔偿金储备问题

设寿命投保人的死亡数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程, Y_n 表示第 n 个死亡者的赔偿金额, Y_n , $n=1,2, \dots$ 相互独立同分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$Y(t)$ 是保险公司在 $[0, t]$ 时间段内的总赔付金额, 试求平均赔付金额和 $D[Y(t)]$.



解

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \quad t \geq 0$$

是复合泊松过程, 有

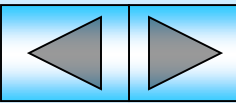
$$E[Y(t)] = E[N(t)]E(Y_1) = \lambda t E(Y_1).$$

$$E(Y_1) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\alpha}$$

保险公司在 $[0, t)$ 时间内平均支付的赔偿金为

$$E[Y(t)] = \lambda t E(Y_1) = \lambda t \frac{1}{\alpha}.$$

$$D[Y(t)] = \lambda t E(Y_1^2) = \lambda t \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{2\lambda t}{\alpha^2}.$$



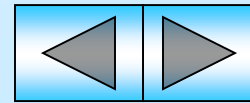
续EX.7 考虑总损伤的平均程度,需求 $E[D(t)]$.

解

由全期望公式

$$\begin{aligned} E[D(t)] &= E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)}\right] \\ &= E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \middle| N(t)\right]\right\} \end{aligned}$$

对任意正整数 n , 有



$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \mid N(t) = n\right]$$

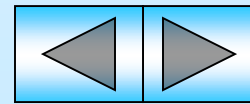
$$= E\left[\sum_{k=1}^n D_k e^{-\alpha(t-W_k)} \mid N(t) = n\right]$$

$$= E(D_k) e^{-\alpha t} E\left[\sum_{k=1}^n e^{\alpha W_k} \mid N(t) = n\right]$$

根据定理2.3.5可得

$$E\left[\sum_{k=1}^n e^{\alpha W_k} \mid N(t) = n\right]$$

D_k 与 $N(t)$
相互独立
 D_k 与
 W_k 相互
独立.



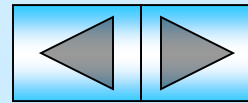
$$E\left[\sum_{k=1}^n e^{\alpha W_k} \mid N(t) = n\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^n e^{\alpha U_{(k)}}\right] = E\left[\sum_{k=1}^n e^{\alpha U_k}\right] = nE(e^{\alpha U_1})$$

$$= n \frac{1}{t} \int_0^t e^{\alpha x} dx = \frac{n}{\alpha t} (e^{\alpha t} - 1)$$

$$\Rightarrow E[D(t) \mid N(t)] = \frac{N(t)}{\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) E(D_1)$$

$$\Rightarrow E[D(t)] = \frac{\lambda}{\alpha} E(D_1) (1 - e^{-\alpha t}), \quad t \geq 0.$$



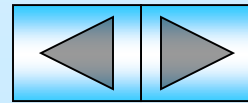
2.4.3 泊松过程的叠加与分解

1. 泊松过程的叠加

定理2.4.4 设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是相互独立的强度分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程, 则 $\{N(t)=N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程.

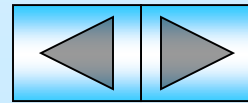
证明参见P56, 需证零初值性、独立增量性、增量平稳性及泊松性.

注 定理可以推广到任意有限个过程的情形.



EX.9 设小轿车、大型客车，运输车三类车独立到达大型收费站，这三类车在 $[0, t]$ 时间内的到达数是强度分别为 λ_1, λ_2 及 λ_3 的泊松过程，分别记为 $\{N_i(t), t \geq 0\}$. (假设各类汽车没有长度,没有延时).

- (1)求两辆大型客车到达时间间隔的概率密度.
- (2)求两辆汽车到达时间间隔的概率密度.
- (3) 求非小轿车到达的时间间隔的概率密度.



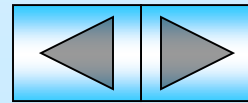
解 设 T_1, T_2, T_3 分别表示小轿车、大型客车，运输车到达的时间间隔。

(1) 两辆大型客车之间

$$f_{T_2}(t) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

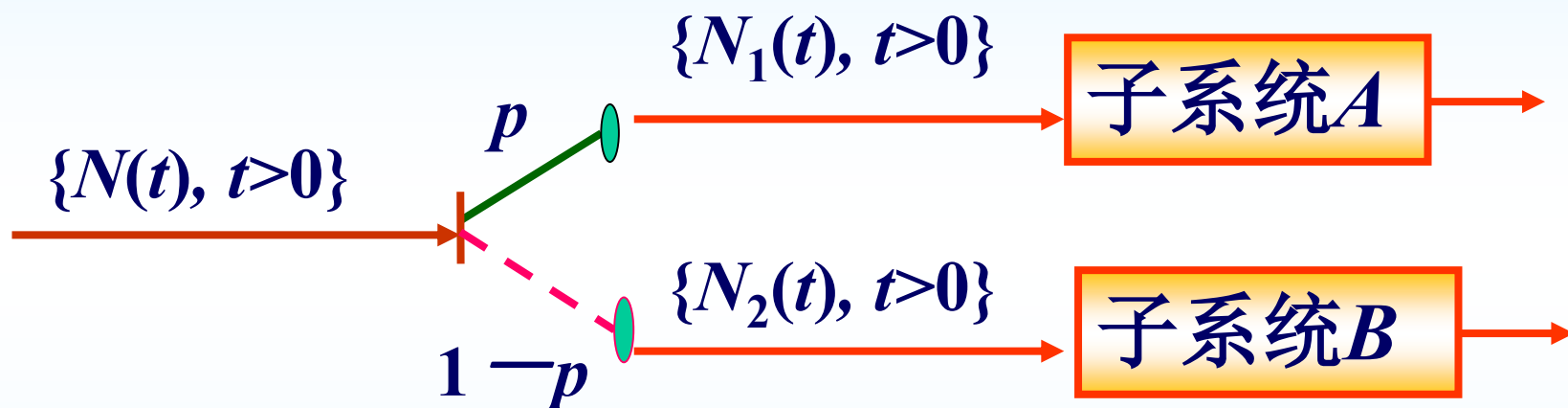
(2) 因独立泊松过程之和仍为泊松过程，参数为 $\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$$f_{T_s}(t) = \begin{cases} \lambda_S e^{-\lambda_S t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$



2.泊松过程的分解

分解模型—随机并联系统

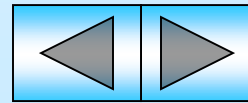


若输入 $\{N(t), t > 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，子系统A与B的输入过程 $\{N_1(t), t > 0\}$ 、 $\{N_2(t), t > 0\}$ 有什么关系？

问题 对任意 $t \in T$, 有 $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$,

(1) $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 与 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是否仍为泊松过程?

(2) $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 与 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是否相互独立?



定理2.4.5 $\{N(t), t \geq 0\}$ 强度为 λ 的泊松过程, 全体事件可分为 r 类, 第 i 类事件发生的概率为 p_i , 且

$$0 < p_i < 1, i = 1, 2, \dots, r, \sum_{i=1}^r p_i = 1$$

则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 可分解为 r 个相互独立的泊松过程之和, 各泊松过程的参数分别为 λp_i , $i=1, 2, \dots, r$.

$r=2$ 时的证明参见P59.

