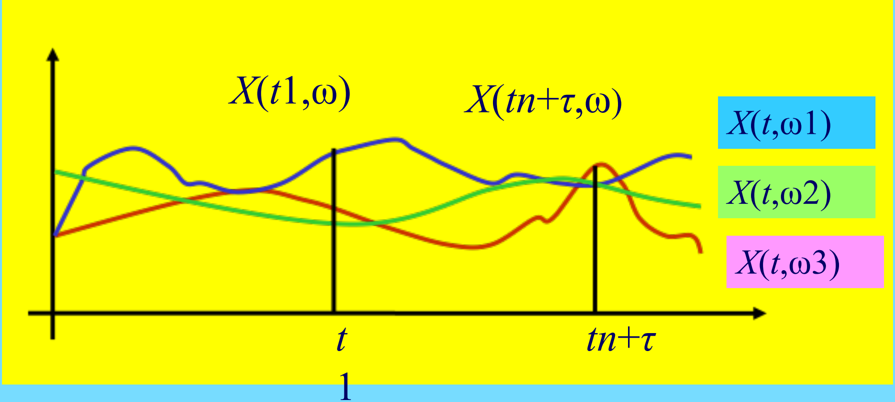
§4.3 平稳过程的各态历经性

一、问题背景

实际问题中常需确定随机过程的数学期望和方差、相关函数；

如飞机在高空飞行，受湍流影响产生机翼震动，需考虑机翼振幅大小的均值与方差.

设想　研究平稳过程$\{X(t),\ t\in T\}$,



进行足够多次的试验，得到样本函数族

$$\{(x(t,\omega_1),x(t,\omega_2),\boxed{?},x(t,\omega_n)),t\in T\}$$

根据大数定律，对固定$t1\in T$，可令

$$\hat{m}_X(t_1)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k(t_1),$$

统计平均

$$\hat{R}_X(\tau)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k(t_1)\overline{x_k(t_1+\tau)},$$

缺点 1) 需要很大 n ,实际工程中难以实现.

2) 过程具有不可重复性.

问题

能否用一条样本函数去估计随机过程的数字特征?

即能否用一条样本函数在时间轴上的均值

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt$$

时间平均

近似估计$E\{X(t)\}$?

?

过程须满足一定条件时可行。

二、平稳过程的各态历经性

定义4.3.1 设$\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$是平稳过程,

若均方极限

$$\langle X(t)\rangle \triangleq \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

二次均方极限

存在,称为$X(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的时间平均.

对于固定的τ,均方极限

$$\langle X(t)\overline{X(t+\tau)}\rangle \triangleq \underset{\tau\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(t+\tau)}dt$$

二次均方极限

存在,称为$X(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的时间相关函数.

注1 应保证$\{X(t), t\in R\}$在任意有限区间上均方可积.(均方连续是充分条件).

注2 时间平均 $\langle X(t)\rangle$ 是随机变量,

时间相关函数 $\langle X(t)\overline{X(t+\tau)}\rangle$ 是随机过程.

参数为τ

平稳随机过程的均值函数是常数，相关函数$R(\tau)$是普通函数.

Ex.1 设$X(t)=Y$, $t\in(-\infty,+\infty)$, 且 $D(Y)\neq 0$, $D(Y)<+\infty$.计算$X(t)$ 的时间平均和时间相关函数

解 $\{X(t)\}$ 是平稳过程.

$$\langle X(t)\rangle = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Ydt = Y$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = \underset{\tau\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\overline{X(t+\tau)}dt$$

$$= \underset{\tau\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Y\overline{Y}dt = |Y|^2$$

Ex.2 设 $$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta),\ t\in(-\infty,+\infty)$$

a,ω_0是实常数, $\Theta\sim U(0,2\pi)$,计算$X(t)$ 的时间平均和时间相关函数.

解 因 $$m_X=0,\quad R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau,$$

$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是平稳过程.

$$\langle X(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega_0 t+\Theta)dt$$

$$=\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{a}{2T}\int_{-T}^{T}(\cos\omega_0 t\cos\Theta-\sin\omega_0 t\sin\Theta)dt$$

$$=\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{a}{2T}\cos\Theta\int_{-T}^{T}\cos\omega_0 t\,dt$$

$$=\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{a\cos\Theta\sin\omega_0 T}{\omega_0 T}=0,$$

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

$$=\underset{\tau\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos[\omega_0(t+\tau)+\Theta]dt$$

$$=\underset{\tau\to\infty}{\text{l.i.m}}\frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}[\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau+2\Theta)+\cos\omega_0\tau]dt$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cos\omega_0\tau$$

定义4.3.2 设$\{X(t), t\in(-\infty,+\infty)\}$是平稳过程

1) 若$P\{\langle X(t)\rangle = m_X\} = 1$,

称$X(t)$的均值具有各态历经性(均方遍历性).

2) 若对任意τ, $P\{\langle X(t)\overline{X(t+\tau)}\rangle = R_X(\tau)\} = 1$

称$X(t)$的相关函数具有各态历经性.

均值和相关函数都具有各态历经性的平稳过程称为各态历经过程.

注 各态历经过程一定是平稳过程, 逆不真.

一个随机过程具备各态历经性, 可以通过研究其一条 样本函数来获取过程的全部信息.

思想方法：用时间平均代替统计平均.

续Ex.1 设$X(t)=Y$, $t\in(-\infty,+\infty)$, 且 $D(Y)\neq 0$, $D(Y)<+\infty$, $\{X(t)\}$ 是平稳过程.

若Y非单点分布时，

$$\langle X(t)\rangle = Y \neq \text{常数},$$

$$P\{\langle X(t)\rangle = E[X(t)]\}\neq 1$$

$X(t)$的均值不具有各态历经性.

又因

$$R_X(\tau) = E[X(t)\overline{X(t+\tau)}] = E(|Y|^2) \neq |Y|^2$$

$X(t)$的自相关函数也不具有各态历经性.

续Ex.2 设 $$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Theta), t \in (-\infty, +\infty)$$

a,ω0是实常数, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$,讨论过程的遍历性.

解 $$m_X = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} a\cos(\omega_0 t + \theta)d\theta = 0$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega_0 t + \Theta)dt = \langle X(t) \rangle$$

$$E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}a^2\cos(\omega_0 t+\theta)\cos[\omega_0(t+\tau)+\theta]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cos\omega_0\tau \quad =\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

$X(t)$的均值和相关函数都具有各态历经性.

多数情况不必根据定义验证过程的均方遍历性, 以下给出判断遍历性的遍历性定理.

三、均值各态历经性定理

定理4.3.1　设$\{X(t),t\in R\}$是平稳过程,则其均值各态历经的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

或

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)(R_X(\tau)-|m_X|^2)d\tau=0$$

推论1 实随机过程$\{X(t),t\in R\}$是平稳过程, 则其均值各态历经的充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau=0$$

证 均值各态历经

$$\Longleftrightarrow \quad P\{\langle X(t)\rangle = m_X\}=1$$

$$\Longleftrightarrow \quad E\{\langle X(t)\rangle\}=E[X(t)]=m_X,\quad D\{\langle X(t)\rangle\}=0$$

即有 $$E\{\langle X(t)\rangle\}=E[\operatorname*{l.i.m}_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X(t)]dt = m_X,$$

$$E\{\langle X(t)\rangle^2\} = E\{[\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt]^2\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} E[\int_{-T}^{T} X(t)dt]^2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \cdot 2\int_{0}^{2T} (2T-\tau)R_X(\tau)d\tau$$

$$D\{\langle X(t)\rangle\} = E[\langle X(t)\rangle^2] - \{E[\langle X(t)\rangle]\}^2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T^2}\int_0^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)d\tau - m_X^2$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_X(\tau)-m_X^2]d\tau = 0.$$

推论2 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|C_X(\tau)|d\tau < \infty$,则实平稳过程

$X(t)$的均值各态历经

因当$T\to\infty$时

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau\right| < \frac{1}{T}\int_0^{2T}|C_X(\tau)|d\tau \to 0$$

推论3 若平稳过程$\{X(t), t\in R\}$的相关函数满足

$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = m_X^2,$$

则$X(t)$是均值各态历经的.

续Ex.2 设 $$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Theta), t\in R$$

a, ω_0是实常数, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$,讨论过程的遍历性.

解 已按定义验证了$X(t)$的均值各态历经,

因 $E[X(t)]=0$,

$$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau=C_X(\tau),$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C_X(\tau)d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{a^2}{4\omega_0^2T^2}\left(1-\cos\omega_0T\right)=0.$$

故 $X(t)$ 的均值有各态历经性.

Ex.3 设随机过程$X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，其中$A,\omega,\Theta$是相互独立的随机变量，$\Theta\sim U[-\pi,\pi]$，$\omega\sim U[-5, 5]$，$E(A)=0$，$D(A)=4$，讨论

1) $X(t)$是否平稳过程；

2) $X(t)$的均值是否各态历经.

解　$E[X(t)]=E[A\cos(\omega t+\Theta)]=0$；

$$R_X(t,t+\tau)=E\{X(t)X(t+\tau)\}$$

$$=E\{A2\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)\}$$

$$= 4 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-5}^{5} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(ut + \varphi)\cos(u(t + \tau) + \varphi)] du d\varphi$$

$$= \frac{4}{5\tau} \sin 5\tau = R_X(\tau),$$

$X(t)$是平稳过程, 又因

$$\lim_{\tau \to \infty} R_X(\tau) = \frac{4}{5\tau} \sin 5\tau = 0 = m_x^2$$

$X(t)$关于均值各态历经.

四、相关函数各态历经性定理

定理4.3.2 $\{X(t),t\in R\}$是均方连续的平稳过程, 且对固定的τ,$\{X(t)X(t+\tau),\ t\in R\}$也是

均……程,

则$\{X(t),t\in R\}$的相关函数各态历经的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)\left(B(u)-|R_X(\tau)|^2\right)du=0$$

其中 $B(u)=E\{X(t)\overline{X(t+\tau)}\,\overline{X(t+u)}X(t+\tau+u)\}.$

证　令 $Z(t)=X(t)\overline{X(t+\tau)}$,

则 $R_X(\tau)=E[Z(t)]=m_Z$,

根据定理4.3.1, 对固定的τ, $Z(t)$均值各态历经的充要条件为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)C_Z(u)du$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)[R_Z(u)-|m_Z|^2]du$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|u|}{2T}\right)[R_Z(u)-|R_X(\tau)|^2]du = 0,$$

推论1 又若定理4.3.1 中的 $\{X(t), t\in R\}$是实随机过程，则相关函数均方遍历的充要条件为

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{u}{2T}\right)[R_Z(u)-R_X^2(\tau)]du = 0$$

五、各态历经性的应用

对于具有各态历经性的平稳过程, 可以通过一条样本函数来推断过程的统计特征.

如$\{X(t), t\in[0,+\infty)\}$的均值各态历经, 则有

$$m_X = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt \qquad (a.e.)$$

因均方积分$\int_0^T X(t)dt$存在,可将区间$[0,T]$等分,

有 $$\int_0^T X(t)dt = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{k=1}^{N} X(t_k)\Delta t_k$$

其中 $$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad t_k = k\Delta t_k = \frac{kT}{N},$$

$$\Rightarrow \quad m_X = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{1}{T} \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{T}{N} \sum_{k=1}^{N} X\left(\frac{kT}{N}\right) \qquad (a.e.)$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X\left(\frac{kT}{N}\right)$$

因均方收敛必依概率收敛，故对$\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X\left(\frac{kT}{N}\right)-m_X\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

即统计量 $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X\left(\frac{kT}{N}\right)$

是均值m_X的相合估计量

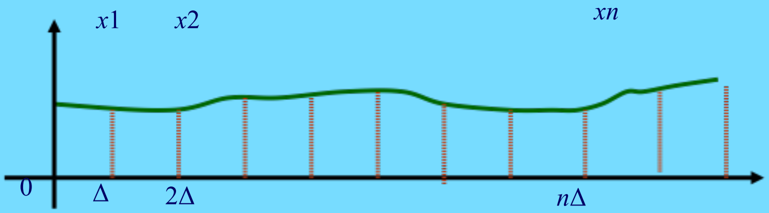
对一次抽样得到的样本函数 $x(t),\ t\in$
$[0,+\infty]$,

取足够大的T及N, 使T/N很小, 有

$$m_X \approx \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} x\left(\frac{kT}{N}\right),$$

可令 $$\hat{m}_X = \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} X\left(\frac{kT}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N} X(k\Delta),\ \left(\Delta = \frac{T}{N}\right).$$



类似地，可得$R_X(\tau)$的近似估计量为

$$\hat{R}_X(r\Delta)=\frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r}X(k\Delta)X\big((k+r)\Delta\big),\ (\Delta=\frac{T}{N})$$

工程实际中有许多随机过程满足各态历经性，数学验证往往很困难.

可以根据工程背景来确定.

或先假定它的各态历经性, 对数据进行统计分析, 检验是否合乎实际, 否则修改假定,另做分析.

思考题:

1）时间平均、时间相关函数与统计平均、统计相关函数概念有什么本质区别？又有什么联系?

2）均值的遍历性与自相关函数的遍历性是否有必然的联系?

3）列举平稳过程遍历性的判断方法.