第五部分：矩阵的特征值与特征向量

计算实矩阵的按模最大（小）的特征值及其相应的特征向量的乘幂法，反幂法

①幂法

例：用幂法求 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ 按模最大特征值及特征向量. 取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，误差不超过 10^{-3}.

$y^{(0)}=Ax^{(0)}$

$y^{(1)}\to x^{(1)}$ $\lambda_1=$最大值.

$y^{(2)}=Ax^{(1)}$

$y^{(2)}\to x^{(2)}$ $\lambda_2=$最大值

解：$y^{(0)}=x^{(0)}=(0,0,1)^T$.

$\Rightarrow x^{(1)}=Ay^{(0)}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\alpha_1=2$

$x^{(1)}\to y^{(1)}$ $\Rightarrow y^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\-0.5\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x^{(2)}=Ay^{(1)}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-0.5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\-2\\2.5\end{pmatrix}$ $\alpha_2=2.5$

$x^{(2)}\to y^{(2)}$ $\Rightarrow y^{(2)}=\begin{pmatrix}0.2\\-0.8\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow x^{(3)}=Ay^{(2)}$ .....

$\alpha_8=2.9990624$

$\alpha_9=2.9996973$

又 $|\alpha_9-\alpha_8|=0.0006049<0.001=10^{-3}$

$\Rightarrow \lambda_1\approx\alpha_9=2.9996973$ $\quad x_1\approx x^{(9)}$

②.反幂法

已知 $x^{(0)}=y^{(0)}$

$Ax^{(1)}=y^{(0)}\Rightarrow x^{(1)}$

⇓

$LUx^{(1)}=y^{(0)}\Rightarrow x^{(1)}$

$x^{(1)}\to y^{(1)}$

$Ax^{(2)}=y^{(1)}\Rightarrow x^{(2)}$

⇓

$LUx^{(2)}=y^{(1)}\Rightarrow x^{(2)}$

例：$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$ 对应于 $\lambda=0.4$ 的特征向量

$y_0=(1,1,1,1)^T$

解：

$(A-0.4I)y_1=y_0$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1.6&-1&0&0\\-1&1.6&-1&0\\0&-1&1.6&-1\\0&0&-1&1.6\end{pmatrix}y_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

对 $(A-0.4I)$ 进行LU分解

$\begin{pmatrix}1.6&-1&0&0\\-1&1.6&-1&0\\0&-1&1.6&-1\\0&0&-1&1.6\end{pmatrix}$