# §1.4 二项式定理

**定理1.7(二项式定理)**

当n是一个正整数时对任何x和y，有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \qquad (1.12)$$

## 证明：

$$\because (x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n个}$$

在这n个因子中，项 $x^k y^{n-k}$是从n个因子(x+y)中选取k个因子(x+y), k=0, 1, ⋯, n。在这k个(x+y)里都取x，而从余下的n-k个因子(x+y)中选取y作乘积得到。因此$x^k y^{n-k}$的系数为上述选法的个数，即为$\binom{n}{k}$组合数。故有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

此定理也可用归纳法证明(略)。

组合数$\binom{n}{k}$由于出现在二项式的展开式中，而把它称作二项式系数。在计算机科学中，特别是算法分析的一些公式里，二项式系数经常出现，因此对它的一些性质和它所满足的许多恒等式都必须熟练掌握。

在§1.3节中，推论1，2，3就是二项式系数的一些重要性质。

# 推论1

当n是正整数时，对任何x, y均有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} y^{k}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^{n-k} y^{k}$$

在实际应用中，y=1的情况经常出现，于是有下列

## 推论2 当n是正整数时，对所有的x有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad (1.13)$$

令x=1时，由推论3当n是正整数时，都有

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad (1.14)$$

在式(1.13)中，令x=-1时，有推论4当n是正整数时，有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}=0$$

(1.15)

注意，推论3表明，在具有n个元素的集合中，所有子集的个数为$2^n$。

推论4表明，在具有n($n\neq0$)个元素的集合中，偶数子集的个数与奇数子集的个数相等。

## 定义1.6 对于任何实数α和整数k，有

$$\binom{a}{k}=\begin{cases}\dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} & k>0\\ 1 & k=0\\ 0 & k<0\end{cases}$$

为了区别二项式系数 $\binom{n}{k}$，称 $\binom{a}{k}$ 为广义的二项式系数。

## 定理1.8

设α 是一个任意实数，则对于满足 $|x/y|<1$ 的所有x和y有

$$(x+y)^a=\sum_{k=o}^{\infty}\binom{a}{k}x^k y^{a-k} \qquad (1.16)$$

式中

$$\binom{a}{k}=\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}$$

在式(1.16)中，若令z=x/y，则有

**推论1**　对于|z|<1的任何z，有

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^{k} \qquad (1.17)$$

在式(1.17)中，若令α=-n(n为正整数)，则有推论2

对于|z|<1的任何z，有　(1.18)

$$(1+z)^{-n}=\frac{1}{(1+z)^{n}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{n+k-1}{k}z^{k}$$

证明：略

在式(1.18)中，令n=1,就有 $\binom{n+k-1}{k}=1$，
于是又得到

**推论3**　当|z|<1时，有

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \qquad (1.19)$$

又在式(1.19)中，用-z代替z,就有

**推论4**　当|z|<1时，有

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \qquad (1.20)$$

在式(1.17)中，若令α=1/2，则有

推论5　当|z|<1时，有

$$\sqrt{1+z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k \qquad (1.21)$$

证明：当α=1/2时，$\binom{a}{0}$=1，而对于k>0，有

$$\binom{a}{k}=\frac{1/2(1/2-1)\ldots(1/2-k+1)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

- 将上式代入式(1.17)即得式(1.21)。

又在式(1.18)中，若用-rz代替z(r为非零常数)，则有

推论6 当|-rz|<1,即|z|<1/|r|时

$$(1-rz)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}r^k z^k \qquad (1.22)$$