第二章 容斥原理

§2.1 容斥原理

容斥原理又称包含排除原理，它是利用集合的基本运算来解决实际问题中的大量计算问题，因此它是解决计数问题的主要工具之一。

在一些计数问题中，经常是间接计算一个集合中的元素个数比直接计算更容易。

比如，某单位正在举行酒会，有187人参加，其中有25位女宾。由于某种需要，该单位想知道有多少男宾出席?

设集合A是集合S的子集，则计算A中元素的个数等于S中元素的个数再减去属于S但又不属于A的元素个数，即

$$|A| = |S| - |\overline{A}| \qquad (2.1)$$

或

$$|\overline{A}| = |S| - |A| \qquad (2.2)$$

如果把集合A看成是具有某种性质p的元素所组成，则公式(2.2)表明：S中不具有性质p的元素个数等于S中元素的个数减去具有性质p的元素个数。

公式(2.1)、(2.2)的容斥原理的一个雏形，将它加以逻辑推广就得到一般的容斥原理。

下面，我们考虑集合S中具有两个子集合$A_1.A_2$的文氏(Venn)图2-2。利用此图，有计算集合$A_1\cup A_2$和$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$中的元素个数的公式为

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2| \qquad (2.3)$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2| \qquad (2.4)$$

同样，如果把集合$A_i = (i = 1,2)$看成是具有某种性质$p_i = (i = 1,2)$的元素所组成，则式(2.4)表明：S中既不具有性质p_1又不具有性质p_2的元素个数等于S中元素的个数减去具有性质p_1的元素个数和具有性质p_2的元素个数再加上既具有性质p_1又具有性质p_2的元素的个数。

公式(2.3)和(2.4)是由S中的一个集合(或一种性质)推广到S中具有两个集合(或两种性质)的容斥原理。之所以称为容斥原理，是因为首先把所有的元素容纳在内，然后再排斥掉A_1和A_2中的元素，再重新容纳$A_1 \cap A_2$中的元素。

一般地，令 $A_i(i=1,2,\cdots,m)\subseteq S$ ，且 A_i 是S中具有性质 p_i 的元素所组成的子集合。则

$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ 是S中同时具有性质 $p_1,p_2,\cdots p_m$ 的元素子集

合，$\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}$ 是S中既不具有性质 p_1，又不具有性质 p_2，……，更不具有性质 p_m 的元素子集合。

于是我们有下的容斥原理。

定理2.1

S中不具有性质 $p_1, p_2, \cdots p_m$ 的元素个数为

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| - \sum_{i\neq j j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m| \quad (2.5)$$

- 式中，第一个和式取遍集合 {i | i=1, 2, ⋯m}，
- 第二个和式取遍集合

{(i, j) | i, j=1, 2, ⋯, m; i≠j} ，

- 第三个和式取遍集合

{(i, j, k) | , i, j, k=1, 2, ⋯, m; i≠j≠k}

提示:

式(2.5)的左端是计算S中不具有m个性质中任何一个元素的个数。如果我们能够证明式(2.5)右端不具有m个性质 $p_1,p_2,\cdots p_m$ 中的任何一个性质的一个元素被计算的次数的净值为1，而至少具有这m个性质$p_1,p_2,\cdots p_m$中之一的元素被计算的次数的净值为0的话，那么式(2.5)就被证明。

证明： 式(2.5)的左端是计算S中不具有m个性质$p_1, p_2, \cdots p_m$中任何一个元素的个数。如果我们能够证明式(2.5)右端不具有m个性质

$p_1, p_2, \cdots p_m$中的任何一个性质的一个元素被计算的次数的净值为1，而至少具有这m个性质$p_1, p_2, \cdots p_m$中之一的元素被计算的次数的净值为0的话，那么式(2.5)就被证明。

- 首先考虑S中一个不具有这m个性质 $p_1, p_2, \cdots p_m$ 中任何一个性质的元素x，它在S中，但不在$A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 中。于是它在式(2.5)右边被计算的次数的净值为

$$1-0+0-0+\cdots+(-1)^m\cdot 0=1$$

其次考虑S中的恰好具有这m个性质中n个性质($1 \leqslant n \leqslant m$)的一个元素$y$，由于它在S中，故它在S中被计算的次数为$\binom{n}{0}=1$

又由于y恰好具有n个性质，所以它是集合$A_1, A_2, \cdots, A_m$中的n个集合的元素，因而它在$\sum|A_i|$中被计算的次数是$\binom{n}{1}=n$ 。

- 又因为在n个性质中取出一对性质的方法有$\binom{n}{2}$个，故y是$\binom{n}{2}$个集合$A_i \bigcap A_j$中的一个元素，所以它在$\sum \left| A_i \bigcap A_j \right|$中被计算的次数是$\binom{n}{2}$；

同样的道理，它在$\sum \left| A_i \bigcap A_j \bigcap A_k \right|$中被计算的次数是$\binom{n}{3}$，……，因此，$y$在式(2.5)右端被计算的次数的净值为

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m}$$

由于n<k时，$\binom{n}{k}=0$ ，且由式（1.15）有

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m}$$

$$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$=0$$

- 于是，若y具有m个性质p_1，p_2，…，p_m中的至少一个性质时，它在式(2.5)右边被计算的次数的净值为0。故定理得证。

此定理还可以用归纳法证之。留作练习。

在集合S中至少具有性质p_1，p_2 ，…，p_m中的一个性质的元素个数是

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \qquad (2.6)$$

- 证明：由于集合$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$是S中至少具有m个性质$p_1$，$p_2$，…，$p_m$中的一个性质之元素所组成的子集合，所以有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}|$$
$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$$

将式(2.5)代入上式即得式(2.6)。
故推论得证。

- 所谓*容斥原理*指的就是式*(2. 5)*和*(2. 6)*这两个公式。

而式(2. 1)、(2. 2)、(2. 3)、(2. 4)

均是这两个公式的特例。

填空题 5分

某校甲班共有学生60名，
其中24个学生喜爱数学，28个学生喜爱物理，
26个学生喜爱化学，
10个学生既喜爱数学又喜爱物理，
8个学生既喜爱数学又喜爱化学，
14个学生既喜爱物理又喜爱化学，
6个学生对这三门学科都喜爱，
*问*有［填空1］学生对这三门学科都不喜爱？

例1

某校甲班共有学生60名，

其中24个学生喜爱数学，28个学生喜爱物理，

26个学生喜爱化学，

10个学生既喜爱数学又喜爱物理，

8个学生既喜爱数学又喜爱化学，

14个学生既喜爱物理又喜爱化学，

6个学生对这三门学科都喜爱，

*问*有多少学生对这三门学科都不喜爱？

- **解：** 设60个学生组成的集合为S，

令p_1，p_2和p_3 分别表示一个学生喜爱数学，物理和化学这一性质。并令$A_i(i=1,2,3)$是S中具有性质p_i的那些学生所组成的集合。

于是既喜爱数学又喜爱物理的学生所组成的集合为$A_1\cap A_2$，既喜爱数学又喜爱化学的学生所组成的集合为$A_1\cap A_3$，既喜爱物理又喜爱化学的学生所组成的集合为$A_2\cap A_3$，三门学科都喜爱的学生组成的集合为$A_1\cap A_2\cap A_3$，

则三门学科都不喜爱的学生组成的集合为

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$$

- 于是，由式（2.5）有

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| \\
&=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3| \\
&+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3| \\
&=60-(24+28+26)+(10+8+14)-6 \\
&=8
\end{aligned}
$$

- *因此*，有8个学生对三门学科都不喜爱。

填空题 5分

从1到1000的整数中不能被5，6和8中任何一个整除的整数个数是［填空1］。

例2

求从1到1000的整数中不能被5，6和8中任何一个整除的整数个数。

解： 用 $\mathrm{Lcm}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ 表示n个整数$a_1, a_2, ..., a_n$的最小公倍数。

又令p_1表示一个整数能被5整除的性质，p_2表示一个整数能被6整降的性质

p_3表示一个整数能被8整除的性质。

S表示从1到1000的正整数组成的集合。

- 并令$A_i(i=1,2,3)$是S中具有性质p_i的那些整数组成的集合，则$\overline{A_i}$是S中不具有性质p_i的那些整数组成的集合。于是，由题意知，要求的是集合

$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$ 中的***整数个数***。

由式(2.5)知，当m=3时有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$$

$$=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)$$

$$+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|$$

$$+|A_2\cap A_3|)-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

而 $|S|=1000, |A_1|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$

$$|A_2|=\lfloor 1000/6\rfloor=166, |A_3|=\lfloor 1000/8\rfloor$$

$$=125$$

- 对于集合$A_i \cap A_j$，它表明在这个集合中的任一个整数同时具有性质$p_i, p_j (i \neq j, i=1,2,3)$。

我们又知道，一个整数能被$Lcm\ \{i, j\}$**整除，当且仅当它既能被**i**整除，也能被**j**整除。因此有**

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm\{5,6\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm\{5,8\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm\{6,8\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

同理有$|A_2 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{Lcm\{5,6,8\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$

将以上数值代入(A)式中有

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

因此，在1和1000之间不能被5，6和8中任何一个整除的整数个数是600。

例3 求欧拉函数φ(n)之值。

定义：欧拉函数φ(n)为小于n又和n互素的正整数的个数。

比如：小于30而与30互素的正整数有8个：1，7，11，13，17，19，23，29

所以：　φ(30)=8

解： 我们知道，对于任一大于1的正整数n都可以唯一地分解为

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots\cdots p_m^{a_m}$$

■其中$p_1 < p_2 < \ldots < p_m$都是不超过n的素数，而$a_1, a_2, \ldots, a_m$都是正整数。

设S={1, 2, ..., n}，令Q_i (i=1, 2, ..., m)表示S中能被p_i (i=1, 2, ..., m)整除的整数这一性质，并令A_i为S中具有性质Q_i的那些整数所组成的集合。则

$\overline{A_i}$为S中不能被p_i整除的整数所组成的集合。于是

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \cdots \overline{A_m}|$就是$s$中不能被$p_1, p_2, \cdots p_m$整除的整数个数。

■由容斥原理式(2.5)有

$$\varphi(n)=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_m}|$$

$$=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

而 $|S|=n,|A_i|=\dfrac{n}{p_i}(i=1,2,.....,m)$

$$|A_i\cap A_j|=\frac{n}{p_ip_j}(i,j=1,2,...,m;i\neq j)$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\frac{n}{p_ip_jp_k}(i,j,k=1,2,\cdots,m;i\neq j\neq k)$$

....

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots A_m|=\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}$$

将以上数值代入 $\varphi(n)$ 表达式得

$$\varphi(n)=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_m}|$$

$$=n-(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\frac{n}{p_3}+\cdots+\frac{n}{p_m})+(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-1}p_m})$$

$$-\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}$$

$$=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$$

如$n=30=2\times3\times5$,则

$\varphi(30)=30(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)=8$

即小于30而与30互素的正整数有8个:

1,7,11,13,17,19,23,29。

［例4］在由a, b, c, d四个字符构成的n位符号串中，求a, b, c至少出现一次的符号串的数目。

解： 令S表示由a, b, c, d构成的n位符号串的集合，又令A_1, A_2和A_3分别表示n位符号串中不出现a, b和c符号的集合，则

$$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$$

表示符号a, b, c至少出现一次的n位符号串集合。

由容斥原理式(2.5)知

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$$
$$=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|$$
$$+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

- 由于n位符号串中，每一位都可取a, b, c, d四种符号中的一种，故 $|S|=4^n$ 。

而不允许出现a的n位符号串的个数应是3^n。即 $|A_1|=3^n$。

同理有 $|A_2|=3^n$， $|A_3|=3^n$。

- 既不允许出现a, 又不允许出现b的n位符号串的个数应是2^n，故有$|A_1 \cap A_2|=2^n$。
同理有$|A_1 \cap A_3|=2^n$，$|A_2 \cap A_3|=2^n$。
显然，有$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=1$。
将以上数值代入(B)式即得

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1$$

故a, b, c至少出现一次的符号串的数目是$4^n-3 \cdot 3^n+3 \cdot 2^n-1$。

〔例5〕

把n本不同的书放入m个有编号的箱子中去(n≥m)，使得没有一个箱子为空，问共有多少种放法?

解： 令S表示把n本不同的书任意放入m个有编号箱子的所有放法所组成的集合。显然有$|S|=m^n$

令$p_i(i=1,2,\cdots,m)$表示箱子i为空这一性质，$A_i(i=1,2,\cdots,m)$表示S中具有性质p_i的元素所组成的集合，则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}$表示没有一个箱子为空的元素所组成的集合。由容斥原理知

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}|=|S|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

因A_i表示S中第i个箱子为空的所有放法所组成的集合，这就是说，第i个箱子为空时，n本不同的书只能放入$(m-1)$个箱子中去，而每本书有$m-1$种选择，因此n本书就有$(m-1)^n$种方式。即

$$|A_i|=(m-1)^n \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

而$A_i \cap A_j$则表示第i个和第j个箱子为空时所有放法的集合。

$$\therefore |A_i \cap A_j|=(m-2)^n (i \neq j; i, j=1, 2, \ldots, m)$$

- 一般地，对于m个箱子取k个箱子为空的组合 $\{i_1 i_2 \ldots i_k\}$ 有

$$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}| = (m-k)^n, (k=1, 2, \ldots, m)$$ 。

- 而对于k=1, 2, …, m，在m个带编号的箱子中取k个箱子一共有 $\binom{m}{k}$ 种方式。

由*乘法规则*和*容斥原理*即可得：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}| = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n$$

$$+\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}(m-m)^n$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

故符合题意的放入共有$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$种放法。

在2.2至2.4节中，将讨论容斥原理在排列，组合的某些应用。

[例6] 求不超过120的素数个数。

因$11^2=121$，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。

设A_i为不超过120的数i的倍数集，$i=2$，3，5，7。

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60, |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24, |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3} \right\rfloor = 20, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5, |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2,$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}\right| = 120 &- |A_2| - |A_3| - |A_5| \\
&- |A_7| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| \\
&+ |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| \\
&- |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| \\
&- |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
&+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|
\end{aligned}
$$

$$=120-(60+40+24+17)+(20+12+8$$
$$+8+5+3)-(4+2+1+1)$$
$$=27.$$

注意：27并非就是不超过120的素数个数，因为这里排除了2，3，5，7这四个数，又包含了1这个非素数。2，3，5，7本身是素数。故所求的不超过120的素数个数为：

$$27+4-1=30$$