

§3.4 随机过程的均方导数

一、均方导数概念

定义3.4.1 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程, 对于确定的 $t \in T$, 若存在 $Y \in H$, 使得

$$\text{l.i.m}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = Y$$

称 $X(t)$ 在 t 处均方可微(可导), 称 Y 为 $X(t)$ 在 t 处的均方导数, 记为



$$\frac{dX(t)}{dt} \quad \text{或} \quad X'(t).$$

若对 $t \in T$, $X(t)$ 都均方可微, 称 $\{X(t), t \in T\}$ 为均方可微过程.

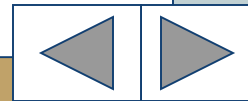
可证明均方导数过程

$$\{X'(t), t \in T\}$$

仍是二阶矩过程, 可定义其均方导数过程

$$\{X''(t), t \in T\},$$

余类推.



EX.1 试求随机过程

$$X(t) = At + B$$

的均方导数, 其中 A 、 B 是相互独立的随机变量.

解

$$\begin{aligned} X'(t) &= \text{l.i.m}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \\ &= \text{l.i.m}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) + B - (At + B)}{\Delta t} = \text{l.i.m}_{\Delta t \rightarrow 0} A = A \end{aligned}$$

而

$$E \left| \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - A \right|^2 = E |A - A|^2 = 0$$

在一般情况下, 直接判断随机过程的可微性并求出导数过程是极其困难的.

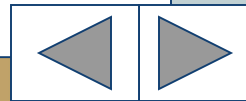
为将随机过程的均方导数研究问题转移到实数域进行讨论分析, 引进**广义二阶导数概念**:

定义3.4.2 称二元函数 $f(s, t)$ 在 (s, t) 处**广义二阶可微**, 若极限

$$\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{f(s + \Delta s, t + \Delta t) - f(s + \Delta s, t) - f(s, t + \Delta t) + f(s, t)}{\Delta t \Delta s}$$

存在, 称此极限为 $f(s, t)$ 在 (s, t) 处的**广义二阶导数**.

注 广义二阶导数是二重极限, 而二阶混合偏导是二次极限, 一般情况下二者不相等.



引理3.4.1 若二元函数 $f(s, t)$ 关于 s, t 的一阶偏导存在, 二阶混合偏导存在并连续, 则 $f(s, t)$ 一定是广义二阶可微的. 且广义二阶导数为

$$f''_{st}(s, t) = f''_{ts}(s, t)$$


二、均方可微准则

定理3.4.1 (均方可微准则)


二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在 $t_0 \in T$ 处均方可微的充要条件是其相关函数 $R(s, t)$ 在 (t_0, t_0) 处广义二阶可微.

证 由均方收敛定义及收敛准则可知,
 $\{X(t), t \in T\}$ 在 t_0 处均方可微

 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}$ 存在



$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} E \left\{ \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} \overline{\frac{X(t_0 + \Delta s) - X(t_0)}{\Delta s}} \right\} \text{存在}$$



$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta t \Delta s} [R(t_0 + \Delta t, t_0 + \Delta s) - R(t_0 + \Delta t, t_0) \\ - R(t_0, t_0 + \Delta s) + R(t_0, t_0)] \quad \text{存在,}$$

即, $R(s, t)$ 在 (t_0, t_0) 处广义二阶可微.

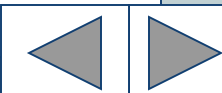
推论3.4.1 二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关函数 $R(s, t)$ 在 $T \times T$ 的对角线上广义二阶可微, 则 $R'_s(s, t), R'_t(s, t), R''_{st}(s, t), R''_{ts}(s, t)$ 在 $T \times T$ 上均存在. 而且

(1) 导数过程 $\{X'(t), t \in T\}$ 的均值函数为

$$m_{X'}(t) = E[X'(t)] = \frac{d}{dt} E[X(t)] = m'_X(t)$$

(2) 导数过程 $\{X'(t), t \in T\}$ 的自相关函数为

$$R_{X'}(s, t) = E[X'(s) \overline{X'(t)}] = R''_{st}(s, t) = R''_{ts}(s, t)$$



(3) 导数过程 $\{X'(t), t \in T\}$ 与 $\{X(t), t \in T\}$ 的互相关函数为

$$R_{X'X}(s, t) = E[X'(s)\overline{X(t)}] = R'_s(s, t)$$

$$R_{XX'}(s, t) = E[X(s)\overline{X'(t)}] = R'_t(s, t)$$

证

$$\begin{aligned} (1) \quad m_{X'}(t) &= E[X'(t)] = E\left[\text{l.i.m}_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\left[\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{m_X(t + \Delta t) - m_X(t)}{\Delta t} \right] = m'_X(t)$$

$$(3) \quad R_{X'X}(s, t) = E[X'(s) \overline{X(t)}]$$

$$= E\left[\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{X(s + \Delta s) - X(s)}{\Delta s} \cdot \overline{X(t)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{E[X(s + \Delta s) \overline{X(t)} - X(s) \overline{X(t)}]}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{R(s + \Delta s, t) - R(s, t)}{\Delta s} = R'_s(s, t)$$

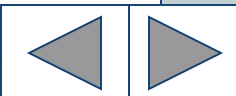
$$(2) \quad R_{X'}(s, t) = E[X'(s) \overline{X'(t)}]$$

$$= E\left[\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{X(s + \Delta s) - X(s)}{\Delta s} \cdot \overline{X'(t)}\right]$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{E[X(s + \Delta s) \overline{X'(t)} - X(s) \overline{X'(t)}]}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{R'_t(s + \Delta s, t) - R'_t(s, t)}{\Delta s} = R''_{ts}(s, t)$$

由(3)可得



EX.2 设随机变量 ξ 满足 $E(\xi)=0$, $D(\xi)=\sigma^2$,

令 $X(t)=\xi t, \quad t \in T$

证明 $\{X(t), t \in T\}$ 是均方可微过程.

证 $\{X(t), t \in R\}$ 是二阶矩过程,

$$E[X(t)]=0, \quad D[X(t)]=t^2\sigma^2,$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)\overline{X(t)}] \\ &= E[\xi s \overline{\xi t}] = stE(\xi\bar{\xi}) = st\sigma^2 \end{aligned}$$

其广义二阶导数为

$$\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta s \Delta t} [R_X(s + \Delta s, t + \Delta t) - R_X(s + \Delta s, t) \\ - R_X(s, t + \Delta t) + R_X(s, t)]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\sigma^2}{\Delta s \Delta t} [(s + \Delta s)(t + \Delta t) - (s + \Delta s)t - s(t + \Delta t) + st]$$

$$= \sigma^2 < \infty$$

故 $\{X(t), t \in T\}$ 是一个均方可微过程.



EX.3 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，讨论随机过程 $X(t) = W^2(t), t \geq 0$ 是否均方可微？

解 自相关函数为

$$R(s, t) = \sigma^4 (st + 2 \min^2(s, t))$$

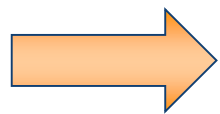
$$\begin{aligned} R'_{s+}(t, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{R(t + \Delta t, t) - R(t, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{\sigma^4 [(t + \Delta t)t + 2t^2 - 3t^2]}{\Delta t} = \sigma^4 t, \end{aligned}$$



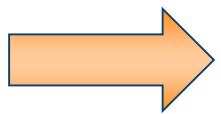
$$R'_{s-}(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0-} \frac{R(t + \Delta t, t) - R(t, t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0-} \frac{\sigma^5 [(t + \Delta t)t + 2(t + \Delta t)^2 - 3t^2]}{\Delta t} = 5\sigma^4 t,$$

$R'_{s+}(t, t) \neq R'_{s-}(t, t)$, 所以 $R'_s(t, t)$ 不存在,



$R(s, t)$ 不是广义二阶可导的;



$X(t) = W^2(t)$, $t \geq 0$ 不是均方可微的.

三、均方导数基本性质

性质3.4.1 均方可导必均方连续. $\{X(t), t \in T\}$

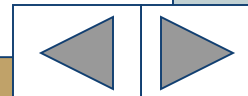
在 t 处均方可微, 则 $X(t)$ 在 t 处均方连续.

证 $X'(t) \in H$, 故

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E[|X(t + \Delta t) - X(t)|^2]$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\left[\left|\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right|^2\right] \cdot (\Delta t)^2 = E[|X'(t)|^2] \cdot 0 = 0$$

注 性质的逆不真.




EX.4 参数为 σ^2 的Wiener过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是均方连续的,但不是均方可微的.

解 已证均方连续性,

因 $R_W(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$,

$$\begin{aligned} R_W(t + \Delta t, t) - R_W(t, t) &= \sigma^2 [\min(t + \Delta t, t) - t] \\ &= \begin{cases} 0, & \Delta t > 0; \\ \Delta t, & \Delta t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$


$$R'_{s+}(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{0}{\Delta t} = 0,$$

$$R'_{s-}(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{\Delta t}{\Delta t} = 1.$$

$R'_s(t, t)$ 不存在, 因此 $\{W(t), t \geq 0\}$ 不是均方可微的.

注 可通过引进Dirac- δ 函数, 定义Wiener过程的导数过程(参见P93).

性质3.4.2 均方导数在概率为1 的意义下惟一.

若 $X'(t) = Y_1(t), X'(t) = Y_2(t),$

则 $Y_1(t) = Y_2(t) \quad (a.e)$

证 由均方极限的惟一性可得.



性质3.4.3 均方导数具有线性性

$X(t), Y(t)$ 均方可微, 则 $\{aX(t) + bY(t), t \in T\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, 也均方可微, 且

$$[aX(t) + bY(T)]' = aX'(t) + bY'(t)$$

请自证

性质3.4.4 设 $f(t)$ 是定义在 T 上的普通可微函数, $\{X(t), t \in T\}$ 是均方可微过程, 则 $\{f(t)X(t), t \in T\}$ 也是可微过程, 有

$$[f(t)X(t)]' = f'(t)X(t) + f(t)X'(t)$$

性质3.4.5 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是均方可微过程, 且 $X'(t)=0$, 则 $X(t)$ 是一个常随机变量 (即与指标 t 无关的随机变量).

等价于

具有相等均方导数的两个随机过程，它们最多仅相差一个随机变量，即

$$[X(t) + X]' = X'(t)$$

