第四章 思考题

1. 解线性方程组的迭代法有何特点？它与解方程组的直接法有何不同？
2. 解线性方程组的迭代法收敛定理对迭代产生的向量序列的误差是如何估计的？
3. 迭代法求解线性方程组的本质是什么？
4. 迭代法想要收敛，充分必要条件是什么？

第四部分：线性方程组的迭代解法

雅可比迭代和高斯-赛德尔迭代的计算格式、收敛性判断方法，迭代向量序列的误差估计方法，初等变分定理，最速下降的基本思想。

① 雅可比迭代

D-L-U 分解

例：
$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix}$$

取反

$B_J = D^{-1}(L+U)$

$f_J = D^{-1}b$

$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J$

$d = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2$

解：
$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 11 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} & & \\ -4 & & \\ -2 & -1 & \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} & 3 & -2 \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } B_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & & \\ & \frac{1}{11} & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 3 & -2 \\ -4 & & 1 \\ -2 & -1 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & & \\ & \frac{1}{11} & \\ & & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

则迭代格式为 $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3/8 & -1/4 \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

② 高斯—赛德尔

例
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$B_{G-S} = (D-L)^{-1}U$

$f_{G-S} = (D-L)^{-1}b$

$x^{(k+1)} = B_{G-S}x^{(k)} + f_{G-S}$

$d = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2$

解：
$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -1 & 0 & \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } B_{G-S} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_{G-S} = (D-L)^{-1}b = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$$

则 $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix}x^{(k)} + \begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$

③ 收敛性判断 1) 对于迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

收敛 $\Longleftrightarrow$ 谱半径 $\rho(B) < 1$

2) 推论：若 $\|B\|_a < 1$，则收敛. （任何就行） 常用 $\|A\|_1$，$\|A\|_\infty$

3) $Ax=b$，A若为严格对角占优 $\Rightarrow \begin{cases}\text{雅~}\\ \text{高斯~}\end{cases}$ 收敛

A若为对称正定 $\Rightarrow$ 高斯收敛