§1.5组合恒等式

- **恒等式1** 对于正整数n和k, 有

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad (1.23)$$

证明： 当k>n时， $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=0$

当1≤k≤n时，有

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots1}$$

$$=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

恒等式2

对于正整数n，有

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1} \qquad (1.24)$$

证明：

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad \text{（由式(1.23)）}$$

$$= n\cdot 2^{n-1} \quad \text{（由式(1.14)）}$$

恒等式3

对于正整数n>1，有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0 \qquad (1.25)$$

证明：由式(1.13)知有 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

将上式两边对x微分得 $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$

在上式中，令x=-1有 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}=0$

即恒等式3：$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}=0$

由此可见，可以用对二项式公式微分来导出组合恒等式。

恒等式4

对于正整数n，有

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

证明：将 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 的两边对x微分得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

将上式两端同乘以x后再对x微分得

$$n[(1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1} \qquad (1.26)$$

令上式中的x=1得恒等式4

恒等式5

对于正整数n>2，有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}k^2=0 \qquad （1.27）$$

▪

♡♡

证明： 只需在式(1.26)中令x=−1，即得式(1.27)。

恒等式6 对于正整数n，有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

证明： 由式(1. 13)有 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

对上式两端从0到1积分得 $\int_0^1(1+x)^n dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k dx$

$$\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1$$

上式即得恒等式6

恒等式7

对于正整数n, m和p, p≤min {m, n}有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p}$$

证明：由于 $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ 又由式(1.13)知

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$$

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+k}{k}x^k$$

因此有 $$[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k][\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k]=\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+k}{k}x^k$$

比较等式两边的系数得恒等式7

恒等式7还可以用组合分析的方法论证：

恒等式7也称 Vandermonde 恒等式。

用类似的方法证明，有恒等式8对于正整数m, n, 有

♡

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{k} \qquad (1.30)$$

事实上，这个恒等式是式(1.29)的推论，只需在式(1.29)中，令p=m即得式(1.30)。

又在式(1.30)中，令m=n，又有恒等式9对于任何正整数n, 有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

恒等式11

对于非负整数p, q, n有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q}=\binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q} \quad (1.32)$$

恒等式12

对于非负整数n和k，有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

可使用数学归纳法证明

恒等式13 对于所有实数α和非负整数k，有

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{a+j}{j}=\binom{a+k+1}{k} \qquad (1.34)$$

证明：首先注意，这个恒等式与前面的恒等式有一个很不同的地方，这就是$\binom{a+j}{j}$和$\binom{a+k+1}{k}$是广义的二项式系数。由于对实数α，在§1.4节已经定义了广义二项式系数的意义，因此Pascal公式对于α是实数和整数k也是成立的。于是反复使用Pascal公式就可以得到(1.34)

还有许多其他的有用恒等式，这可以在H.W.Gonld著的《组合恒等式》一书中找到。

■ 通过上面的一些恒等式的证明，我们可以发现，证明恒等式常用的方法有

■ 1、数学归纳法。
■ 2、利用二项式系数公式，特别是 Pascal公式。
■ 3、比较级数展开式中的系数(包括二项式定理和以后要讲的母函数法)。
■ 4、积分微分法。
■ 5、组合分析法。

■ 还有其他的一些常用方法，如有限差分法，级数变换法，多项式的有限Taylor展开法等。

这些方法本书未涉及，有兴趣的读者可参看HWGonld所著的《组合恒等式》一书。

作 业：

- 2， 4， 5， 6, 7， 10, 11, 13, 14, 16, 19, 24(a,b), 26