

# § 2.2

## 重集的 $r$ -组合

在第一章 § 1.3 节中，曾给出了重集  
 $B = \{n_1 \cdot b_1, n_2 \cdot b_2, \dots, n_k \cdot b_k\}$  在重复数  
 $k_i = \infty (i=1, 2, \dots, n)$  时与在重复数  
 $k_i \geq r (i=1, 2, \dots, n)$  时的  $r$ -组合数是相同  
的，见式 (1.11)。

在这一节，我们用实例说明，  
当重集  $B$  的元素具有任意给定的重复数时，  
怎样利用式 (1.11) 和 容斥原理 求  $B$  的  $r$ -组合数。

**[例1]** 求重集  $B = \{3 \bullet a_1, 7 \bullet a_2, 2 \bullet a_3, 15 \bullet a_4\}$  的  $r$ -组合数, 其中  $r=12$ 。

**解:** 构造集合  $B' = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \infty \cdot a_3, \infty \cdot a_4\}$ 。令集合  $B'$  的所有12-组合构成的集合为  $S$ 。由式 (1.11) 有

$$|S| = F(4, 12) = \binom{4+12-1}{12} = 455$$



- 令  $p_1$  表示  $S$  中的元素至少含有 4 个  $a_1$  这一性质,  
 $p_2$  表示  $S$  中的元素至少含有 8 个  $a_2$  这一性质,  
 $p_3$  表示  $S$  中的元素至少含有 3 个  $a_3$  这一性质,  
 $p_4$  表示  $S$  中的元素至少含有 16 个  $a_4$  这一性质。

并令  $A_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) 表示  $S$  中具有性质

$p_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) 的元素所构成的集合, 于是  $B$  的  
12-组合数就是  $S$  中不具有性质  $p_1, p_2, p_3$  和  $p_4$  的  
元素个数。

由容斥原理式(2.5)有

由于已经求得  $|S| = 455$ ,

下面分别计算(A)式右端其他的项。

由于 $A_1$ 中的每一个12-组合至少含有4个 $a_1$ ,  
故将每一个这样的组合去掉4个 $a_1$  就得到集合 $B'$  的一个8-组合。

反之, 如果取 $B'$  的一个8-组合并加4个 $a_1$ 进去,  
就得到了 $A_1$ 的一个12-组合。于是 $A_1$ 的12-组合数就等于 $B'$  的8-组合数

$$\text{故有 } |A_1| = F(4, 8) = \binom{4+8-1}{8} = 165$$



- 同样的分析可得
$$|A_2| = F(4, 4) = \binom{4+4-1}{4} = 35$$
$$|A_3| = F(4, 9) = \binom{4+9-1}{9} = 220$$
$$|A_4| = 0 \quad (\text{特别注意: 包含16个} a_{\underline{4}} \text{的12-组合是不可能的})$$

- 用类似的分析方法可分别求得下列式子

$$|A_1 \cap A_2| = F(4,0) = \binom{4+0-1}{0} = 1$$

$$|A_1 \cap A_3| = F(4,5) = \binom{4+5-1}{5} = 56$$

$$|A_1 \cap A_4| = 0$$

$$|A_2 \cap A_3| = F(4,1) = \binom{4+1-1}{1} = 4$$

$$|A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_2 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \quad (5+4+5 > 12)$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$



将上面的值代入 (A) 式即得B的12-组合数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$

$$\begin{aligned} &= 455 - (165 + 35 + 220 + 0) \\ &\quad + (1 + 56 + 4 + 0 + 0 + 0) - 0 + 0 \end{aligned}$$

$$= 96$$

求重集 $B=\{2.a_1, 5.a_2, 4.a_3, 7.a_4\}$ 的10组合数

- A  $F(4,10)=286$
- B  $F(4,10)- (F(4,7)+F(4,4)+F(4,5)+F(4,2))=65$
- C  $F(4,10)-(F(4,7)+F(4,4)+F(4,5)+F(4,2)) + (F(4,1)+F(4,2))=79$
- D  $4^{10}$

## 填空题 5分

重集 $B=\{2.a_1, 5.a_2, 4.a_3, 7.a_4\}$ 的10组合数为[填空  
1]

提醒：不写过程，只提交最后计算后的数字。