

组合数学

电子科大计算机学院

戴波

Email: *daibo@uestc.edu.cn*

Tel: 17711083830

第一章

排列、组合与二项式定理

§1.1 加法规则和乘法规则

1. 加法规则

设 S 是有限集合，若 $S_i \subseteq S$ ， $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$ 且 $i \neq j$ 时，

$S_i \cap S_j = \phi$ 则有：

$$|S| = \left| \bigcup_{i=1}^m S_i \right| = \sum_{i=1}^m |S_i| \quad (1.1)$$

特别：当 $m=2$ 时，有

$$|S| = |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$$

^ 1. 加法规则

换言之，加法规则可以叙述为：

若集合 S 可以分解为互不相交子集 S_1 , S_2 , ..., S_m 之和,则 确定 S 中的事物个数

1. 先求出各子集 S_i 中的事物个数
2. 然后相加。

^ 1.加法规则

其中 $m=2$:

假若有互相独立的两个事件X和Y分别有 k 种和 1 种方法产生, 则产生X和Y的方法数有 $k+1$ 种。

例

- 有一所学校给一名物理竞赛优胜者发奖，奖品有三类：第一类是三种不同版本的法汉词典；第二类是四种不同类型的物理参考书；第三类是两种不同的奖杯。这位优胜者只能挑选一样奖品。那么，这位优胜者挑选奖品的方法有多少？

解：设S是所有这些奖品的集合， S_i 是第i类奖品的集合($i=1,2,3$)。显然 $S_i \cap S_j = \varnothing (i \neq j)$ ，于是由加法规则有

$$|S| = \left| \bigcup_{i=1}^3 S_i \right| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 3 + 4 + 2 = 9$$

也就是说这位优胜者挑选奖品的方法共有9种。

2. 乘法规则

若 S_i ($i=1, 2, \dots, m$) 为有限集, 且

$$S=S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m = \{ (a_1, a_2, \dots, a_m) \mid a_i \in S_i, i=1, 2, \dots, m \} ,$$

则有

$$|S| = |S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = \prod_{i=1}^m |S_i| \quad (1.2)$$

特别, 当 $m=2$ 时, 有

$$|S| = |S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2| \quad \heartsuit$$

2.乘法规则

注意：

对于S中的元 (a_1, a_2, \dots, a_m) ,

它的各分量是相互独立的。

2.乘法规则

其中 $m=2$:

若有互相独立的两个事件X和Y分别有 k 种和 l 种方法产生，则同时产生事件X与事件Y的方法数为 $k \times l$ 。

[例]

- 从A地到B地有两条不同的道路，从B地到C地有四条不同的道路，而从C地到D地有三条不同的道路。
- 求从A地经B、C两地到达D地的道路数。

[例]

由数字1, 2, 3, 4, 5可以构成多少个所有
数字互不相同的四位偶数。



例]

求出从7个数学系的学生，8个化学系的学生，105个经济系的学生和21个物理系的学生中选出两个不同专业的学生的方法数。

[例]

- 某种样式的运动服的着色由底色和装饰条纹的颜色配成。底色可选红、蓝、橙、黄，条纹色可选黑、白，则共有 $4 \times 2 = 8$ 种着色方案。
- 若此例改成底色和条纹都用红、蓝、橙、黄四种颜色的话，则，方案数就不是 $4 \times 4 = 16$ ，而只有 $4 \times 3 = 12$ 种。(必须能区分条纹色)
- 在乘法法则中要注意事件 A 和事件 B 的相互独立性。

通常我们用集合和重集的概念来区别是否重复

- 集合： $A = \{a, b, c, d\}$
- 重集：集合中的元素可以重复。

如重集 $B = \{a, a, b, b, b, c, d, d, d, d, d\}$ 则有11个元素，2个a, 3个b，1个c和5个d。

B简记为 $B = \{2 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 5 \cdot d\}$ 。

- 重集的一般形式为

$$B = \{k_1 \cdot b_1, k_2 \cdot b_2, \dots, k_n \cdot b_n\}$$

由上可以总结：在实际中，
大量的计数问题分为两大类；

1. 计算事物的有序安排或有序选择数。这又分为
如下两种情况：

- a. 不允许任何事物重复
- b. 允许事物重复

排列

2. 计算事物的无序安排或无序选择数。这又分为
如下两种情况：

- a. 不允许任何事物重复
- b. 允许事物重复

组合