

一、简答题(每题 7 分, 共计 35 分)

1. 如何理解马氏过程的马氏性? 马氏过程的分布有什么特点?

2. 设 $\{X(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ 是一个零均值的平稳过程, 问 $X(t) + X(0), t \in (-\infty, \infty)$ 是否仍是平稳过程.

3. 根据统计数据, 从成都双流机场乘飞机到国内、港澳、欧洲、美洲旅游的人数之比为 4:3:2:1; 设每位游客到国内、港澳、欧洲、美洲所支付的平均旅游费用分别为 3000 元、6000 元、10000 元、15000 元。假设从成都双流机场乘飞机到这四个地区旅游的人数是一泊松过程, 每天平均人数为 1000 人, 求 1 周内从成都双流机场出发到国内、港澳、欧洲、美洲旅游的乘客总花费的数学期望和方差。

4. 设随机过程 $X(t) = R \cdot t + C, t \in (0, \infty), C$ 为常数, R 服从 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布。

(1) 求 $X(t)$ 的一维概率密度和一维分布函数;

(2) 求 $X(t)$ 的一维特征函数。

5. 设随机过程 $X(t) = \beta \cos(At + \Theta) (-\infty < t < +\infty)$, 其中 $\beta \sim N(0, 4), A \sim U(0, 1)$, 即 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布, 随机变量 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, 且二者相互独立。试求

(1) 该随机过程 $X(t)$ 的样本函数有多少条? 试做出其任意三条样本函数。

(2) 试求随机过程 $X(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s, t)$ 、方差函数 $D(t)$ 。

二、(15 分) 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是标准维纳过程, 常数 $k, a > 0$, 令

$$X(t) = W(kt + a) - W(kt),$$

请证明下述结论:

(1) $\{X(t)\}$ 是正态过程; (4)

(2) $\{X(t)\}$ 是宽平稳过程; (6)

(3) $\{X(t)\}$ 的均值具有均方遍历性; (3)

(4) $\{X(t)\}$ 的自相关函数具有均方遍历性。 (2)

三、(10 分) 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数为。

$$C_X(t_1, t_2) = t_1 t_2$$

试求过程 $Y(s) = \int_0^s X(t) dt, s \in T$ 的协方差函数和方差函数。

四、(15 分) 设 $\{Y(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 是实正交增量过程, $E[Y(t)] = 0$, 且 $E\{[Y(t) - Y(s)]^2\} = |t - s|$,

$-\infty < s, t < +\infty$, 令 $X(t) = Y(t) - Y(t-1), t \in (-\infty, +\infty)$, 求其自相关函数和对应的谱密度函数。

并判断随机过程 $\{Y(t), t \in R\}$ 是否是均值均方遍历的?

五、(10 分) 已知随机过程 $\{X(t), t \in R\}$ 的均值函数 $m_X(t) = 0$, 看相关函数为

$$R_X(\tau) = \exp(-\tau^2), \text{ 若 } Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}, \text{ 求 } m_Y(t), R_Y(\tau),$$

六、(15分) 设有四个状态 $I=\{0,1,2,3\}$ 的马氏链，它的一步转移概率矩阵

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 画出状态转移图；
- (2) 对状态进行分类；
- (3) 对状态空间 I 进行分解。
- (4) 该马氏链是否有平稳分布？如果有，请求出其平稳分布。