第二章 容斥原理

- 容斥原理定理
- 求任意重集的r组合的方法

单选题 1分

在S={1,2,3,...,2000}个整数集合中，有多少个整数能够被7整除，但不能被6，也不能被10整除？

A 1314

B 182

C 219

主观题 10分

在S={1,2,3,...,2000}个整数集合中，

(1) 至少能够被2,3,5之一整除的数有多少个？

(2) 至少能够被2，3，5中2个数同时整除的数有多少个？

$S=\{1,2,3,\ldots,2000\}$

P1: S中能够被2整除的性质

P2: S中能够被3整除的性质

P3: S中能够被5整除的性质

Ai: S中具有Pi性质的元素组成的集合(i=1,2,3)

则(1) 是求$|A1 \cup A2 \cup A3| = (|A1|+|A2|+|A3|) - (|A1 \cap A2| + |A1 \cap A3| + |A2 \cap A3|) + |A1 \cap A2 \cap A3|$

(2) 是求$|(A1 \cap A2) \cup (A2 \cap A3) \cup (A1 \cap A3)|$

Q1: S中能够被6（2*3）整除的性质

Q2: S中能够被15整除的性质

Q3: S中能够被10整除的性质

单选题 3分

在S={2*a_1,2*a_2,...,2*a_n}的全排列中，若任何2个相同字符都不相邻，则叫做“简单字”。比如$a_2a_1a_3a_2a_1a_3$是一个n=3的简单字。请求出n=5的简单字的个数。

A $\frac{10!}{2^5}$-5* $\frac{9!}{2^4} + 10 * \frac{8!}{2^3} - 10 * \frac{7!}{2^2} + 5 * \frac{6!}{2}$-5!

B $\frac{10!}{2^5}$

C $\frac{10!}{2^5}$-5*2* $\frac{9!}{2^4} + 10 * 2^2 * \frac{8!}{2^3} - 5 * 2^3 * \frac{7!}{2^2}$+$2^4$* $\frac{6!}{2^1} + 2^5 * 5!$

主观题 10分

分别求出满足下列各条件时方程x1+x2+x3=14的整数解的个数。

(1) 每个变量都满足: $0 \le x_i \le 6$(i=1,2,3)

(2) $0 \le x_1 \le 8$, $-6 \le x_2 \le 2$, $3 \le x_3 \le 8$

分别求出满足下列各条件时方程x1+x2+x3=14的整数解的个数。

(1) 每个变量都满足: $0 \le x_i \le 6$(i=1,2,3)

(2) $0 \le x_1 \le 8$, $-6 \le x_2 \le 2$, $3 \le x_3 \le 8$

解答：

(1) 问题实际是求B={6*a,6*b,6*c}的14组合数,用容斥原理求得解的个数是15。

分别求出满足下列各条件时方程x1+x2+x3=14的整数解的个数。

(1) 每个变量都满足: $0 \le x_i \le 6$(i=1,2,3)

(2) $1 \le x_1 \le 8$, $-6 \le x_2 \le 2$, $3 \le x_3 \le 8$

解答：

（2）令y1=x1-1,y2=x2+6,y3=x3-3,

则问题变成求

y1+1+y2-6+y3+3=14

y1+y2+y3=16,且$0 \le y_1 \le 7$, $0 \le y_2 \le 8$, $0 \le y_3 \le 5$

变成求B={7*a,8*b,5*C}的16组合数等于15。

定理2.1

S中不具有性质 $p_1, p_2, \cdots p_m$ 的元素个数为

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{i \neq j}|A_i \cap A_j| - \sum_{i \neq j j \neq k}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \quad (2.5)$$

- 式中，第一个和式取遍集合 {i | i=1, 2, …m}，
- 第二个和式取遍集合

{(i, j) | i, j=1, 2, …, m; i≠j}，

- 第三个和式取遍集合

{(i, j, k) | , i, j, k=1, 2, …, m; i≠j≠k}

在集合S中至少具有性质p_1，p_2 ，…，p_m中的一个性质的元素个数是

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \qquad (2.6)$$

§2.3 错排问题

考虑如下问题：在一次宴会中，有n个人把他们的帽子放在衣帽间内。问有多少种方法交还他们的帽子，使得没有一个人得到他们自己原来的帽子。

- 这个问题实质上是一个错排问题。

单选题 1分

判断错排解题思路的正误：因为n个人拿帽子有n!种，其中拿到自己帽子只有一种，所以错排是n!-1。

A 正确

B 错误

§2.3 错排问题

考虑如下问题：在一次宴会中，有n个人把他们的帽子放在衣帽间内。问有多少种方法交还他们的帽子，使得没有一个人得到他们自己原来的帽子。这个问题实质上是一个错排问题。

- 用1，2，…，n表示n位来宾。第i位来宾的帽子是i号。发帽方式可用下面的形式表示：

客人1 2 … i … n　　帽子$a_1a_2\cdots a_i\cdots a_n$

- $a_1a_2\cdots a_i\cdots a_n$是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列，要使得没有一位客人领到自己的帽子，就一定要有$a_i \neq i, (i=1, 2, \cdots, n)$。这样一来，问题就变成要求出有多少个 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全排列，使得对所有的i都有$a_i \neq i$ ，我们称这种排列为*错排*。用D_n表示错排的个数。于是有下面的关于错排计数定理。其结论就是这个问题的解答。

定理3.2 当n≥1时，有

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

- 证明：令S是 {1, 2, •••, n} 的所有全排列组成的集合，则 |S| =n!。

又在集合S中定义性质p_i为$a_i=i$ (i=1, 2, •••, n)。一个排列$a_1a_2\cdots a_i\cdots a_n$，如果某个$a_i=i$，我们就说该排列具有性质$p_i$，又令$A_i$ (i=1, 2, •••, n) 是S中具有性质p_i的排列所组成的子集合。

又因 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个错排就是一个排列，并且这个排列不具有性质 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n$ 中的任何一个性质，

这样一来，$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$ 就是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有错排组成的集合的个数，因而有

$$D_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$$

由容斥原理知

$$D_n = \left| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \right|$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- 又由于具有性质p_1的排列一定在第一个位置上是1，故集合A_1中的所有排列应具有形式$1i_2i_3\cdots i_n$，

  其中$i_2i_3\cdots i_n$是集合$\{2, 3, \cdots, n\}$的一个全排列，

因此有 $|A_1|=(n-1)!$。

同样有 $|A_i|=(n-1)!, i=2, \cdots, n$。

- 又由于具有性质p_1与p_2的排列形式一定是$12i_3\cdots i_n$，

其中$i_3\cdots i_n$是$\{3,4,\cdots,n\}$上的一个全排列，

故$|A_1\cap A_2|=(n-2)!$。

同样有$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$

$(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$

- 一般地，同时具有性质$p_1p_2\cdots p_i\cdots p_k$的排列个数为$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|=(n-k)!$，其中$1\leqslant k\leqslant n$。
- 因为在集合$\{1,2,\cdots,n\}$中取k个数的组合方式是，这样，具有k个性质的排列个数一共有$(n-k)!$。

- 将以上数值代入D_n的表达式即得

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!)$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!})$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

本定理得证。

- 错排问题的实质是：将一个集合中的n个元素依次给以标号1，2，…，n。求每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

例如，在$\{1, 2, \cdots, 9\}$的全排列中，求偶数在原来位置上，其余都不在原来位置上的错排数。这个问题实际上是1，3，5，7，9五个数的错排问题，

由公式(3.7)知，当n=5时有

$$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^5 \frac{1}{5!}\right) = 44$$

- 由于e^{-1}　可以表示成下列的无穷级数

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots$$

故 $$e^{-1} = \frac{D_n}{n!} + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!} + (-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!} + \cdots$$

于是有 $$\left| e^{-1} - \frac{D_n}{n!} \right| < \frac{1}{(n+1)!}$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!} = e^{-1}$$ 约=36.79%

- 这表明，当n充分大时，$D_n/n!$近似等于e^{-1}。而$D_n/n!$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的错排个数与它的全排列个数之比。

它表明我们随机地选择$\{1, 2, \cdots, n\}$的一个全排列是一个错排的概率。

也就是说，当n很大时，其错排的概率基本上是相当的。

另外错排数还具有如下的递归关系公式。

定理3.3 $D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$ (3.8)

- **证明：** $\{1,2,\cdots,n\}$ 的错排可以分为互不相容的两种类型：

(1)对于$k\in\{2,3,\cdots,n\}$，令$a_1=k,a_k=1$。

由于$a_1\neq1$，故选取a_1的方法共有(n-1)种。

又由于$a_1=k$，$a_k=1$的值已定，故将剩下的n-2个数由$\{2,3,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n\}$进行排列，

由于 $a_i \neq i$

$(i=2, 3, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n)$

故这样的排列个数为D_{n-2}。由乘法规则知，此类型包含的错排数为$(n-1)D_{n-2}$。

- (2) 对于$k \in \{2, 3, \cdots, n\}$，令$a_1=k, a_k \neq 1$。

在这种情况下，选取a_1的方法仍为$(n-1)$种。但这时只有$a_1=k$的值已定，且$a_k \neq 1$，故将剩下的$(n-1)$个数由

$\{2, 3, \cdots, k-1, 1, k+1, \cdots, n\}$作错排（这里将1看成k），其错排数为$D_{n-1}$。由***乘法规则***知，此类型的错排数为$(n-1)D_{n-1}$。

由于这两种类型互不相容，由***加法规则***有

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \text{证毕}$$

显然， 当$n=1$时，$D_1=0$, $n=2$时，$D_2=1$。于是对任意n，由初值$D_1=0$, $D_2=1$，及式(2.8)可计算出任何D_n之值。

例1 求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全排列中，正好只有 $r\ (0\leqslant r\leqslant n)$ 个元素在原来位置上的排列个数。

- *解*：从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中取 r 个数一共有 $\binom{n}{r}$ 种方式，选定 r 后，其余还剩 $n-r$ 个数不在原来的位置上，这相当于 $n-r$ 个元素的**错排**，其***错排数***为

$$D_{n-r}=(n-r)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}\right)$$

- 由**乘法规则**知所求排列的个数为

$$D_{n-r}\binom{n}{r}=(n-r)!\binom{n}{r}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}\right)$$

$$=\frac{n!}{r!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-r}\frac{1}{(n-r)!}\right)$$

例2 设有n册书分给n个学生，之后又将这n册书收回重新分给这n个学生。问有多少方式分配这n册书使得**没有一个学生两次得到同一册书**？

解： 显然，这n册书可以用n!种方式来进行第一次分配。对第二次分配，由题意知，这是一个错排，其分配方式有D_n种。

由**乘法规则**，所求的方式总数为

$$n!\cdot D_n = (n!)^2\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\approx (n!)^2 e^{-1}$$

主观题　10分

N个人参加晚会，每个人寄存一顶帽子和一把雨伞，会后每个人任取一顶帽子和一把雨伞。请问：

（1）有多少种可能性使得没有一个人拿到他原来的任一物品？

（2）有多少种可能使得没有人能够同时拿到他原来的两件物品？

N个人参加晚会，每个人寄存一顶帽子和一把雨伞，会后每个人任取一顶帽子和一把雨伞。请问：

（1）有多少种可能性使得没有一个人拿到他原来的任一物品？

（2）有多少种可能使得没有人能够同时拿到他原来的两件物品？

- 解：(1) 每个人拿帽子和拿雨伞是互不相干，独立的。每个人错拿帽子有Dn种，错拿雨伞也有Dn种，由乘法规则得：
- Dn*Dn

N个人参加晚会，每个人寄存一顶帽子和一把雨伞，会后每个人任取一顶帽子和一把雨伞。请问：

（1）有多少种可能性使得没有一个人拿到他原来的任一物品？

（2）有多少种可能使得没有人能够同时拿到他原来的两件物品？

- 解：(2) 每个人随便取一顶帽子和一把雨伞的方法是 $(n!)^2$，设Pi表示第i个人同时拿到自己帽子和雨伞的性质，Ai是具有Pi性质的元素集合(i=1,2,3,...,n)，则没有人同时拿到自己帽子和雨伞的方案数是

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- $\sum_{i=1}^{n}|Ai|$ =C(n,1)*(n-1)!²
- $\sum_{i \neq j}|Ai \cap Aj| = \mathrm{C}(\mathrm{n}, 2) * (\mathrm{n}-2)!^{2}$
- ………

主观题 10分

某照相馆给n个人分别照相后，装入每个人的纸袋里，问出现下面的情况有多少种可能？

（1）没有一个人拿到自己的相片。

（2）至少有一个人拿到自己的相片。

（3）至少有2个人拿到自己的相片。

某照相馆给n个人分别照相后，装入每个人的纸袋里，问出现下面的情况有多少种可能？
（1）没有一个人拿到自己的相片。
（2）至少有一个人拿到自己的相片。
（3）至少有2个人拿到自己的相片。

解：
(1) 没有一个人拿到自己相片，是错排：Dn
(2) 至少有一个人拿到自己的相片: n!-Dn
(3) 至少2个人拿到自己的相片：
恰好有一个人拿到自己的相片的方法是:C(n,1)Dn-1
所以：
n!-Dn-C(n,1)Dn-1