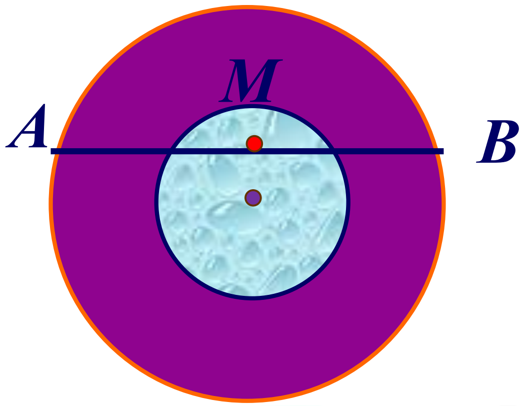
概率论概要

贝特郎悖论问题: 在半径为r的圆C内任意作一弦，求此弦长度l大于$\sqrt{3}r$的概率.

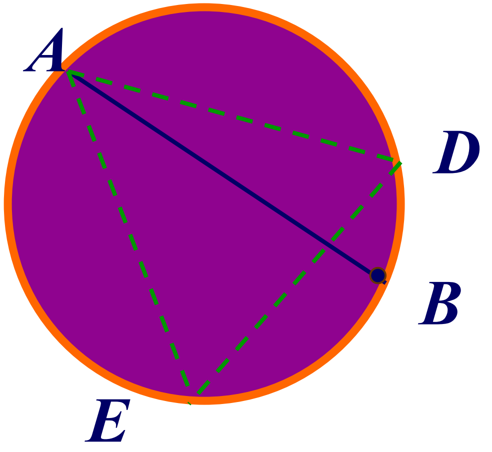
算法1 假定弦AB的中点M随机落入圆C内



A={随机点M落入半径为r/2的同心子圆C_1内}

$$p_1 = P(A) = \frac{\mu_1(C_1)}{\mu_1(C)} = \frac{\pi(\frac{r}{2})^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

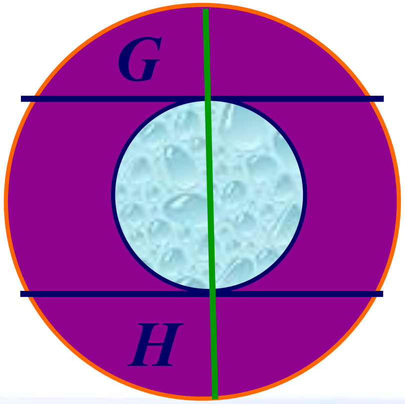
算法2 假定弦AB的端点B在圆周上随机分布，



B={随机点B落于劣弧DE上}

$$p_2 = P(B) = \frac{\mu_2(DE\text{弧长})}{\mu_2(\text{圆周})} = \frac{\frac{1}{3}\times 2\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{3}$$

算法3 假定弦AB的中点M在垂直直径上随机分布



C={随机点*M*落于线段*GH*上}

$$p_3 = P(\mathrm{C}) = \frac{\mu_3(\text{线段GH})}{\mu_3(\text{直径})} = \frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}}{2r} = \frac{1}{2}$$

§0.0 概率空间

一、随机事件的公理化定义

回顾初等概率论中引进古典概率、几何概率等定义，有如下问题：

对于随机试验E的样本空间Ω，是否Ω的每一个子集(事件)都能确定概率?

定义（σ代数)：设随机试验E的样本空间为Ω, F是Ω的子集组成的集族，满足

(1) $\Omega \in F$;

(2)若$A \in F$, 则$\overline{A} \in F$. （对逆运算封闭）

(3) 若$A_i \in F, (i = 1,2,\cdots)$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ 则（对可列并运算封闭）

σ可加

称F为Ω的一个σ−代数（事件体），F中的集合称为事件.

Ex.1 在编号为1,2, …, n 的 n个元件中取一件.

1. 考虑元件的编号，则全体基本事件为

$$A_k = \{k\} \qquad (k = 1,2,\cdots,n)$$

样本空间为

$$\Omega = \{1,2,\cdots,n\}$$

构造如下事件:

$$A_{k,s} = A_k \cup A_s \quad (k,s = 1,2,\cdots,n),$$

$$A_{i,k,s} = A_i \cup A_k \cup A_s \quad (i,k,s = 1,2,\cdots,n)$$

………

$$A_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}} = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_{n-1}}$$

$$(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1} = 1,2,\cdots,n)$$

可验证集族 $\{\phi, \Omega, A_k, A_{k,s}, \cdots, A_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}\}$ 组成一个σ代数.

2. 考虑元件是正品或次品，则基本事件为

A_1={取到正品}，　A_2={取到次品}

则 $F = \{\phi, A_1, A_2, \Omega\}$ 为一个 σ 代数.

通常称 $F = \{\phi, A, \overline{A}, \Omega\}$ 是由A产生的最简单σ代数.

Ex.2 测量一个零件, 考虑其测量结果与实际长度的误差.

基本事件为$\{x\}$, 样本空间为

$$\Omega = \{x : x \in R_1\} = R_1$$

则R_1的子集全体: ϕ, Ω , 单点集$\{x\}$, 一切开的, 闭的, 半开闭区间等组成的集族F是一个代数.

另外, 令 $A_1 = \{x : x \geq 0\}$={出现正误差}

$A_2 = \{x : x < 0\}$={出现负误差}

则 $\mathrm{F}=\{\phi, A_1, A_2, \Omega\}$ 为一个σ代数.

注：对同一研究对象的同一试验, 试验目的不同, 其样本空间和σ代数的结构会不同.

定义 (可测空间) 样本空间Ω和σ代数的二元体(Ω, F) 称为可测空间.

可测空间有如下性质:

1. $\phi \in F \qquad (\because \phi=\overline{\Omega})$;

2.对可列交运算封闭. 若 $A_i \in F\ (i=1,2,\cdots)$,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{F}$$

证 因 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}$, $A_i \in \mathrm{F} \Rightarrow \overline{A_i} \in \mathrm{F}$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathrm{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{F}$$

3. 对有限并,有限交封闭:若 $A_i \in \mathrm{F}$,$i = 1,2,\cdots,n$

则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{F}, \text{或} \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathrm{F}$$

4. 对差运算封闭,即若 $A \in \mathrm{F}, B \in \mathrm{F}$,则 $A - B \in \mathrm{F}$.

$$\because A - B = A \cap \overline{B} \in F$$

二、概率的公理化定义

柯氏公理体系是现代概率论的基石.

定义(概率)：设(Ω, F)是一可测空间,对$A \in \mathrm{F}$定义在F上的实值集函数$P(A)$,满足

1) 非负性：对 $\forall A \in \mathrm{F}, 0 \le P(A) \le 1$;

2) 规范性:$P(\Omega) = 1$;

3) 完全可加性, 对

$$\forall A_i \in \mathrm{F}, i=1,2,\cdots; \quad A_i \cap A_j = \phi, i \neq j;$$

有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称P是(Ω, F)上的概率(测度), $P(A)$是事件A的概率. 三元体(Ω, F, P)称为概率空间.

Ex.3 设某路口到达的车辆数为m, 基本事件为$\{m\}$, 样本空间$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$,

F是Ω的一切子集组成的集族，则F是一个σ代数.

令 $P(\varphi)=0$, 并对$A\in$ F 令

$$P(A)=\sum_{k\in A}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\qquad(\lambda>0)$$

证明P为可测空间(Ω, F)上的概率测度.

证 1)

$$P(\Omega)=\sum_{k\in\Omega}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=1$$

2) 因 $\lambda>0$, 对$\forall k$ 有 $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\geq 0$,

$$\Rightarrow 0 \le P(A) = \sum_{k \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \le \sum_{k \in \Omega} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1;$$

3) 设

$$A_i \in \mathrm{F}, (i = 1, 2, \cdots), A_i \cap A_j = \phi, (i \ne j),$$

有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k \in A_i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

三、乘积样本空间

设A 和 B 是两个集合，称

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

为A与B 的积集.

定义 设随机试验E_i, i=1,2, …n的样本空间分别为Ω_i, i=1,2, …n, 称

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \omega_i \in \Omega_i, i=1, 2, \ldots, n\}$$

为乘积样本空间.

Ex.3 设抛一枚均匀硬币试验E_1的样本空间为

$$\Omega_1 = \{T, H\}$$

掷一颗均匀硬币骰子试验E_2的样本空间为

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

先掷一颗均匀硬币骰子,再抛一枚均匀硬币试验的样本空间可设为

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2)\ ,\ \omega_i \in \Omega_i\ i=1,2\}$$

有 $\omega=(T, i) \in \Omega$, $\omega= (H, i) \in \Omega$, $i=1,2, \ldots,6$.

Ex.4 n次独立重复抛一枚均匀硬币试验E的样本空间为

$$\Omega_n=\{(\omega_1, \omega_2\ldots, \omega_n)\ , \omega_i \in \Omega, i=1, 2, \ldots, n\}$$

$$=\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega=\Omega^n$$

称为Ω的n维乘积空间.

如 $(T, T, H) \in \Omega^3$, $(H, T, H) \in \Omega^3$.

四、概率性质

设(Ω, F, P)是概率空间, 则概率P有如下性质:

1) $P(\varphi)=0$;

2)有限可加性: 若

$$A_i \in \mathrm{F}, i=1,2,\cdots,n;\ A_i \cap A_j=\phi,(i \neq j)$$

则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

推论1: $P(A)+P(\overline{A})=1$;

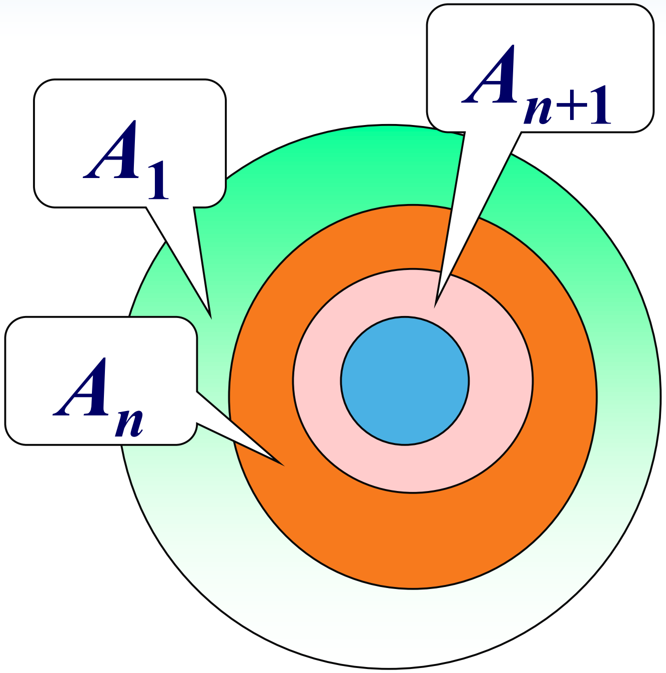
推论2 (单调性) :若 $B \subset A$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \text{ 且 } P(A) \geq P(B),$$

3) 概率的连续性

若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 且 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n = \phi$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$



证:

$$\because A_n = (A_n - A_{n+1}) \cup (A_{n+1} - A_{n+2}) \cup \cdots$$

$$= \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k - A_{k+1}) \triangleq \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k, \quad n = 1,2,\cdots$$

其中$B_1, B_2, \ldots$互不相容，特别由完全可加性有

$$1 \geq P(A_1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}) \geq 0$$

收敛级数的余项极限为0, $(as \quad n \to \infty)$, 即

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}) \to 0, \quad as\ n \to \infty.$$

推论1: 若 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$, 则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A).$$

概率空间

推论2： 若 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$，则

$$\mathop{\mathrm{lin}}_{n\to\infty} P(A_n) = P(A).$$

证：在推论2中

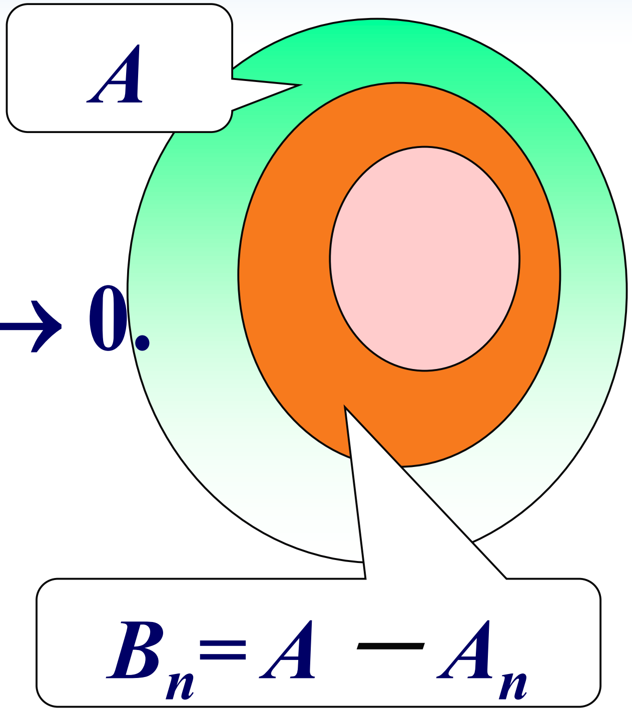
令 $B_n = A - A_n$，则 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$，

且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A}_n \cap A)$$

$$= \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right) \cap A = \overline{A} \cap A = \phi$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$$



$$\Rightarrow P(A) - P(A_n) = P(A - A_n) \to 0.$$

$$\Rightarrow P(A_n) \to P(A), \quad as\ n \to \infty$$

4）多除少补原理

设　$A_i \in \mathrm{F}, i = 1,2,\cdots,n,$ 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) -$$

$$\sum_{1\le i\le k\le n} P(A_i A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

推论：概率具有次可加性

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

五、条件概率

定义： 设$(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$是概率空间，$A, B\in \mathrm{F}$，且$P(B)>0$

$$P(A|B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为已知事件B发生的条件下，事件A发生的**条件概率**.

定理： 设(Ω, F, P)是概率空间,$B\in F$,且$P(B)>0$,则对$\forall A\in F$,有$P(A|B)$对应,集函数$P(\bullet|B)$满足三条公理:

1) $\forall A \in F,\ 0 \le P(A|B) \le 1;$

2) $P(\Omega|B) = 1;$

3) $A_i \in \mathrm{F}, i = 1,2,\cdots,$ 且 $A_i \cap A_j = \phi, (i \ne j)$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

条件概率是概率.

定义 记P_B= P（·|B），则P_B是可测空间Ω，F)上的概率，称(Ω，F，P_B)是**条件概率空间**.

定理 设A是概率空间(Ω, F, P)上的正概率事件,$B\in F$, 且$P_A(B)>0$, 则对任意$C\in F$有

$$P_A(C|B) = P(C|A\cap B)$$

证

$$P_A(C|B) = \frac{P_A(B\cap C)}{P_A(B)} = \frac{P(B\cap C|A)}{P(B|A)}$$

$$= \frac{P(ABC)}{P(A)} \Big/ \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = P(C|A\cap B).$$

Ex. 10 张签中有三张幸运签, 3人依次各抽一张签, 第一个人抽到幸运签, 假若第二人也抽到, 问第三人抽到幸运签的概率.

解 设 A_i={第i 人抽到幸运签}, i=1,2,3.

记 $P_{A_1}=P(\cdot|A_1)$,

有 $$P_{A_1}(A_2)=P(A_2|A_1)=\frac{2}{9},$$

所求概率为

$$P_{A_1}(A_3|A_2)=P(A_3|A_1A_2)=\frac{1}{8}.$$

六、全概率公式与*Bayes*公式

定理 设 (Ω, F, P)是概率空间,若

1) $A_i \in F$, 且 $P(A_i)>0$, $(i=1,2,\ldots)$;

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, $A_i A_j = \phi$.

完备性条件.

则对任意$B \in F$有

1) $$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B \mid A_i);$$

2) $$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)P(B|A_i)},\ (j=1,2,\cdots).$$

七、随机变量

定义 设(Ω, F, P)是概率空间, $X(\omega)$是定义在Ω上的单值实函数, 若对于任意实数$x \in R$, 有

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} \in F,$$

称$X(\omega)$是随机变量.

可测空间
(Ω, F)上的
可测函数.

注　由随机变量定义及σ代数性质, 有

$$\{X < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X \le x - \frac{1}{k}\} \in \mathrm{F}$$

$$\{X = x\} = \{X \le x\} - \{X < x\} \in \mathrm{F}$$

$$\{X > x\} = \Omega - \{X \le X\} \in \mathrm{F}, \cdots$$

八、分布函数

定义 设$X(\omega)$是定义在概率空间(Ω, F, P)上的随机变量, 令

$$F(x) = P\{X \le x\}, \qquad \forall x \in \mathrm{R}$$

称$F(x)$为X的分布函数.

对 $\forall a < b \in R$, 有 $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$,

性质

1) $F(x)$是单调不减函数;

2) $0 \le F(x) \le 1, \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$

3） $F(x)$是右连续函数，即对

$$\forall x \in R, \quad F(x+0) = F(x).$$

九、二维随机变量

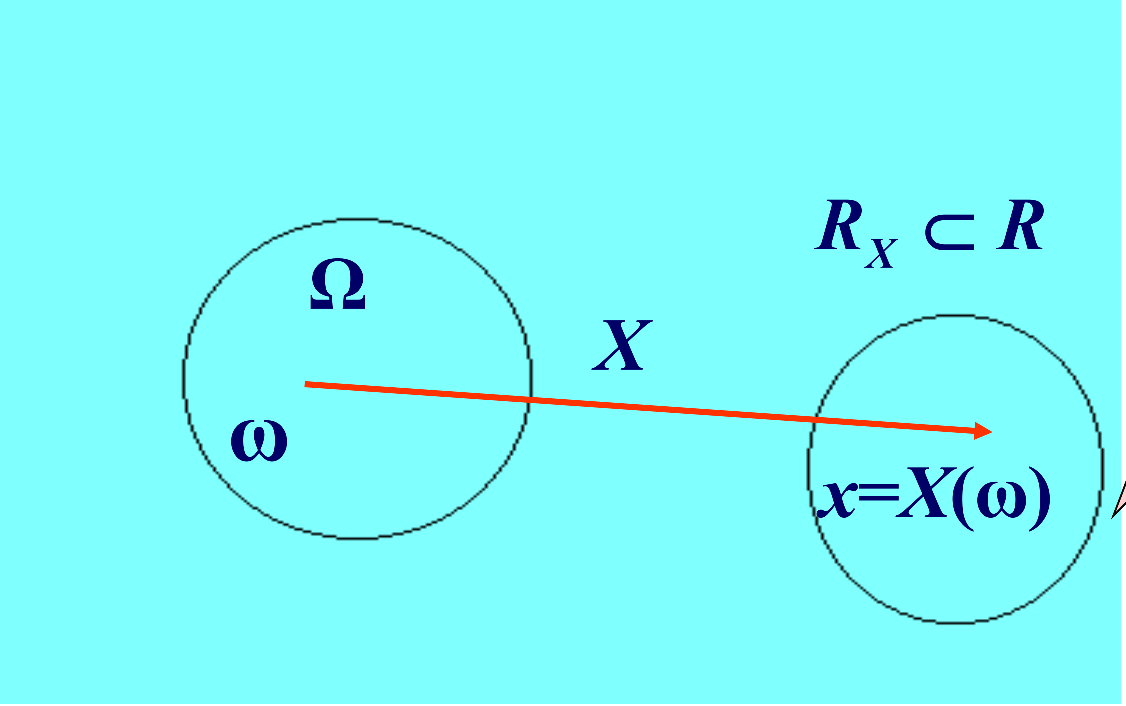
定义 如果X和Y是定义在同一概率空间(Ω, F, P)上的两个随机变量,称(X,Y)为二维随机变量(向量).

思考: 如何准确理解“维”的含义?
如何理解“定义在同一概率空间”?

1. 随机变量概念的理解.

X是概率空间(Ω, F, P)上的随机变量, 有

1) 对于$\omega \in \Omega$，有唯一$X(\omega)$与之对应,



随机变量X可理解为从样本空间Ω到实数集R_X的一个映射.

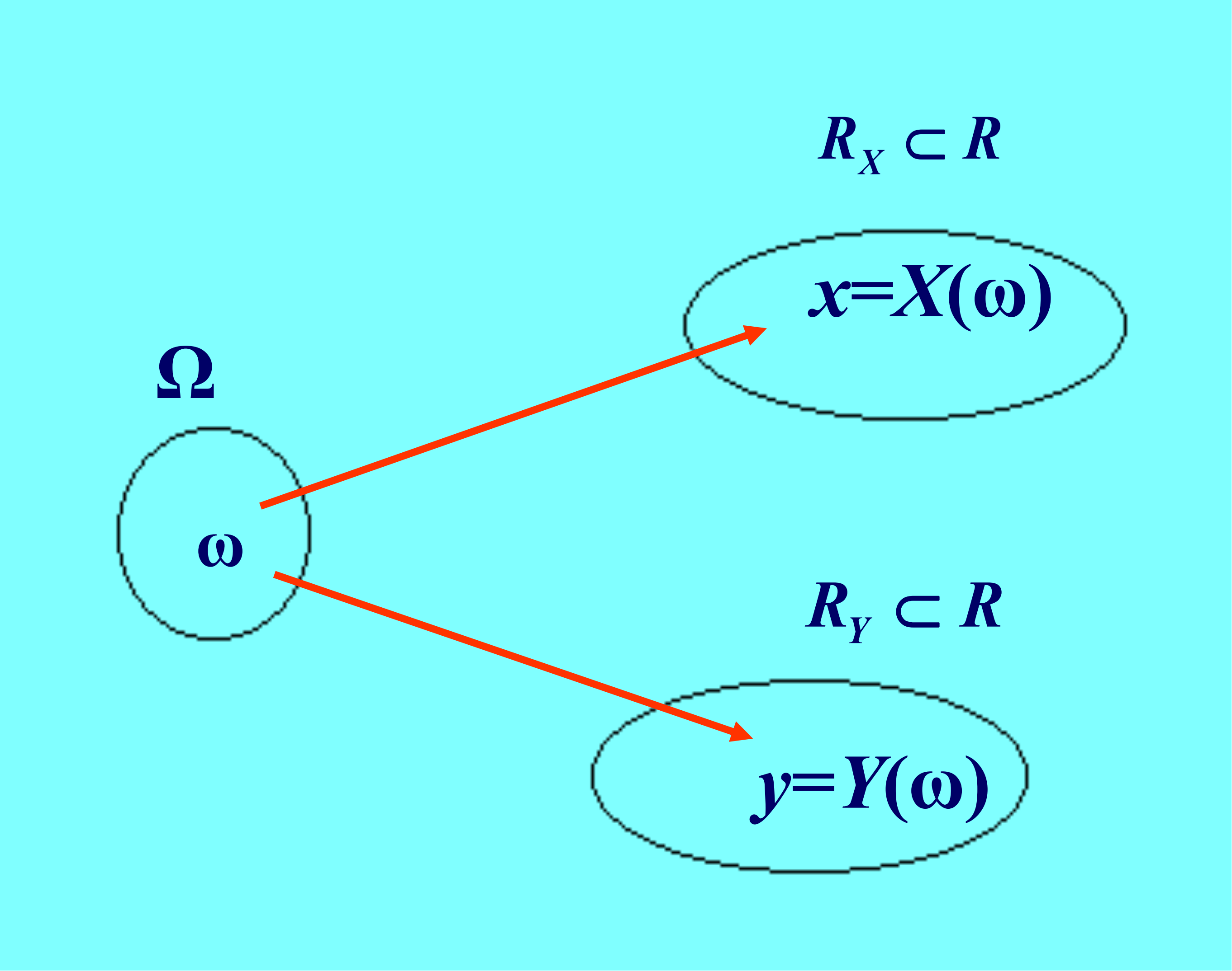
2) 对$\forall x \in R$,均有

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} = \{\omega : \omega \in X^{-1}(-\infty, x]\} \in \mathrm{F};$$

2. 二维随机变量(X,Y)

1) 对$\forall \omega \in \Omega$,有唯一$(X(\omega),Y(\omega))$与之对应.

概率空间



(X,Y)是概率空间(Ω,F,P)上的随机向量.

Ex.1 随机试验E:检查n个学生的健康情况,$\{i\}$表示抽检到第i名学生，记样本空间为

$$\Omega=\{1, 2, \cdots, n\}$$

对于样本点 $(i)\in\Omega$ 可定义

身高：$X(i)\triangleq h,$ 体重：$Y(i)\triangleq w.$

身高X与体重Y构成定义在(Ω, F)上的二维随机变量(X, Y).

EX.2 先抛一枚均匀硬币,再掷一颗均匀骰子试验的样本空间为

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{(\omega_1,\omega_2)\ ,\ \omega_i\in\ \Omega_i\ \ i=1,\ 2\}$

对 $(\omega_1, i)\in\Omega$, 其中$\omega_1= H, T$; $i=1,2, \ldots,6.$

定义二维随机变量

$$(X(\omega),Y(\omega))=\begin{cases}(1,i), & \omega_1=T,\quad \omega_2=i\ ; \\ (0,i), & \omega_1=H,\quad \omega_2=i\ ;\end{cases}$$

注: 由(X,Y)的联合分布可确定分量X, Y各自的分布, 反之不行.

如“(X,Y)服从二维正态分布”与“X,Y是两个
正态分布随机变量”是完全不同的概念.

定义 设(X, Y) 是定义在(Ω,F, P)上的随机向量,对 $\forall (x, y)\in \mathrm{R}^2$

$$F(x, y) \triangleq P\{\omega : X(\omega)\le x, Y(\omega)\le y\}$$

称为(X, Y)的**联合分布函数**.

定理 若$F(x,y)$是联合分布函数,则有

1) $F(x,y)$分别对x 和y 单调不降;

2) $F(x,y)$对每个变元右连续;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0,\ \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0,$

$$\lim_{\substack{y\to+\infty \\ x\to+\infty}} F(x,y)=1;$$

4) $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2,$

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0.$$

注

1) 此定理的逆成立;

2) 可以推广到任意有限维的情形;

3) 分布函数与概率空间 $(\Omega, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ 的概率一一对应.

十、条件分布

定义 设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，记

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y|X=x\}$$

$$=\lim_{\alpha,\beta\to o^{+}}\frac{F(x+\beta,y)-F(x-\alpha,y)}{F(x+\beta,+\infty)-F(x-\alpha,+\infty)},\quad(\alpha,\beta>0)$$

若极限存在，称为在$X=x$的条件下，随机变量Y的**条件分布函数**.

注 需满足对 $\forall \alpha > 0, \beta > 0,$

$$F(x+\beta,+\infty)-F(x-\alpha,+\infty)$$

$$= F_X(x+\beta)-F_X(x-\alpha)$$

$$= P\{x-\alpha < X \le x+\beta\} > 0.$$

离散型随机变量(X,Y), 在$y=y_k$条件下X的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y_k) = \mathrm{P}\{X \le x | y = y_k\}$$

$$= \frac{\sum_{x_i \le x} \mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_\mathrm{k}\}}{\mathrm{P}\{Y = y_k\}}$$

$$P\{X=x_i|Y=y_k\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_k\}}{P\{Y=y_k\}},\quad i=1,2,\cdots$$

称为条件分布律.

连续型(X, Y), 有

$$F_{Y|X}(y|x)=\mathrm{P}\{Y\le y|X=x\}=\frac{\int_{-\infty}^{y}f(x,v)\mathrm{d}v}{f_X(x)}$$

称 $$f_{Y|X}(y|x)=F_{Y|X}'(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(\mathrm{x})}$$

为在X=x条件下，随机变量Y的条件密度函数.

Ex.3 已知$X \sim N(\mu, \tau^2)$，给定$X=x$ 的条件下,Y的条件分布为$N(x, \sigma^2)$，求Y的分布及给定$Y=y$的条件下X的条件分布.

解 已知

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tau^2}}, \quad x \in R,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}, y \in R.$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tau^2} - \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}, (x,y) \in R_2$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\tau^2} - \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau^2+\sigma^2)}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2(\tau^2+\sigma^2)}}, \quad y \in R$$

十一、随机向量的独立性

定义 设(X, Y)是二维随机变量, 对
$\forall (x, y) \in R^2$

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\} \qquad (1)$$

成立, 称X与Y相互独立.

注 本质上是事件的独立, (X,Y)定义在(Ω, F, P)上, 对$\forall(x,y)\in R_2$, 随机事件$\{X\le x\}$与$\{Y\le y\}$相互独立.

$$(1)式 \Leftrightarrow F_X(x)F_Y(y)=F(x,y) \qquad (2)$$

对所有$(x, y)\in R_2$成立.

定义 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是n维随机变量,若对任意

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n).$$

成立, 称随机向量$X_1, X_2,\ldots, X_n$相互独立.

定理 若随机变量$X_1, X_2,\ldots, X_n$相互独立，则其中任意$k(2\le k\le n)$个随机变量

$$X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k}$$

也相互独立.

定理 设有$n_1+n_2+\ldots+n_k$维随机变量

$$(X_{11},\cdots,X_{1,n_1},X_{2,1},\cdots,X_{2,n_2},\cdots,X_{k,1},\cdots,X_{k,n_k})$$

若 ψ_i 是 n_i 元实变实值连续函数, 令

$$Y_i = \varphi_i(X_{i_1}, \cdots, X_{i,n_i}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

有 1) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ 必为同一概率空间的随机变量;

2) 若 $(X_{11}, \cdots, X_{1,n_1}, X_{2,1}, \cdots, X_{2,n_2}, \cdots, X_{k,1}, \cdots, X_{k,n_k})$

相互独立, 则 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ 也相互独立.

随机变量（*X*, *Y*）的联合概率密度函数是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y)$$

$$g(x)=\begin{cases}\cos\pi & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

证明*X*与*Y*都服从正态分布；**(2)** 判断*X*与*Y*是否相互独立？