填空题 8分

设置

10个球，放入2个盒子，每盒不空。求方法数：

（1）如果球无区别，盒子有区别，结果为 [填空1];

（2）如果球有区别，盒子有区别，结果为 [填空2];

（3）如果球无区别，盒子无区别，结果为 [填空3];

（4）如果球有区别，盒子无区别，结果为 [填空4];

作答

第三章 函数

组合数学

填空题 2分

设置

棋盘C的棋子多项式

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k \quad 当\ n\rightarrow\infty$$

时，该多项式称为 [填空1]

作答

3.1母函数的基本概念

母函数又称发生函数或生成函数，它是解决计数问题的一个重要工具。

- 母函数的类型较多，这里仅讨论最常见的两种类型的母函数：

  1. 普通母函数
  2. 指数母函数

下面，我们分别进行讨论。

一、普通母函数

定义3.1 给定一个无穷序列 $(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)$(简记为｛$a_n$｝，下同)，

称函数

$$f(x)=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$$

为序列 $(a_0, a_1, \ldots, an, \ldots)$ 的普通母函数。

必须注意的是，在定义3.1中，普通母函数是一个无穷级数，没有必要去讨论它的收敛性，实质上它只是引进一个表示序列的记号而已。

此时变量x只是一种形式变元。对这种级数可以把它看成形式幂级数，我们可以按通常方式定义其加法、乘法、形式微分等运算，从而构成一个代数体系。

由定义3.1可知

一个序列和它的普通母函数是一一对应的。给定了一个序列就可以得到这个序列的普通母函数。

反之，如果给定了普通母函数，则序列也随之而定。

由此可见，普通母函数实质上是序列的另一种表达形式。

[例1]

求序列 $\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}\right)$ 的普通母函数。

解： 由定义3.1和式(1.13)有

$$f(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

$$=(1+x)^n$$

例2 求序列 $\left(\binom{n-1}{0},-\binom{n}{1},\binom{n+1}{2},\cdots,(-1)^k\binom{n+k-1}{k},\cdots\right)$ 的普通母函数。

- **解：** 由定义 ***3.1***和式 ***(1.18)***有

$$f(x)=\binom{n-1}{0}-\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\cdots+(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k+\cdots$$

$$=(1+x)^{-n}$$

例 3

证明$(1-4x)^{-1/2}$是序列

$$\left(\binom{0}{0},\binom{2}{1},\binom{4}{2},\cdots\binom{2n}{n},\cdots\right)$$ 的普通母函数。

- **证明：** 由牛顿二项式定理式(1. 16)有

$$(1-4x)^{-1/2}=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-i+1)}{i!}(-4x)^i$$

$$=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4^i(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(\frac{2i-1}{2})}{i!}x^i$$

$$=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)}{i!}x^i$$

$$=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i\cdot i!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)}{i!\cdot i!}x^i$$

$$=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2i)[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)]}{i!\cdot i!}x^i$$

$$=\binom{0}{0}+\binom{2}{1}x^1+\binom{4}{2}x^2+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots$$

由*定义3.1*知，

$(1-4x)^{-1/2}$是序列

$$\left(\binom{0}{0},\binom{2}{1},\binom{4}{2},\cdots\binom{2n}{n},\cdots\right)$$ 的普通母函数。

例4 求序列(0，1×2×3，2×3×4，…，n(n+1)(n+2),…)的普通母函数。

解： 由式(1.20)有

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}$$

将上式两边同时微分两次得

$$\frac{2}{(1-x)^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

例4

将上式两边再微分有

$$\frac{6}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

- 再将上式两边同乘以x得

$$\frac{6}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)(n+2)x^{n}$$

$$=0+1\times2\times3x^1+2\times3\times4x^2+\cdots$$

$$+n(n+1)(n+2)x^n+\cdots$$

由定义*3.1*知

$f(x)=6x/(1-x)^4$是***序列***
(0，1×2×3，2×3×4，...，n(n+1)(n+2)，...)的
普通母函数。

二、*指数母函数*

由上面的例子可见，普通母函数特别适用于某些序列，尤其是包含组合数的序列，这是由于它具有牛顿二项式定理的形式。

但是，对于具有排列数的那些序列，我们考虑下列类型的母函数(***指数母函数***)更为合适。

定义3-2

给定无穷序列($a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$),称***函数***

$$f_e(x)=a_0+a_1\frac{x^1}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为序列($a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$)的指数母函数。

- 之所以称为指数母函数是由于式(3.2)的右边很像指数函数e的幂级数展开式。

注意，指数母函数也是形式幂级数。

例5

设n是整数，求序列 $(p(n,0), p(n,1), \ldots, p(n,n))$ 的指数母函数 $f_e(x)$。

解：由定义3.2和式(1.7)以及例1的结论有

$$f(x) = p(n,0) + p(n,1)\frac{x^1}{1!} + p(n,2)\frac{x^2}{2!} + \cdots + p(n,n)\frac{x^n}{n!} + 0 + \cdots$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

$$= (1+x)^n$$

例6 求序列 $p(0,0), p(2,1), p(4,2), \ldots, p(2n,n), \ldots)$ 的指数母函数 $f_e(x)$。

解： 由定义3.2和式(1.7)，再利用例3的结果有

$$f_e(x)=p(0,0)+p(2,1)\frac{x^1}{1!}+p(4,2)\frac{x^2}{2!}+\cdots+p(2n,n)\frac{x^n}{n!}+0+\cdots$$

$$=\binom{0}{0}+\binom{2}{1}x^1+\binom{4}{2}x^2+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots$$

$$=(1+4x)^{-1/2}$$

例7 求序列 $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^n, \ldots\}$ 的指数母函数 $f_e(x)$。其中 α 是实数。

解：由定义3.2知

$$f(x) = 1 + a\frac{x^1}{1!} + a^2\frac{x^2}{2!} + \cdots + a^n\frac{x^n}{n!} + \cdots = e^{ax}$$

- 若 α =1，则序列(1，1，…，1)的指数母函数为e^x。

例8 求序列(1，1×4，1×4×7，…，1×4×7×…×(3n+1)，…)的指数母函数。

解： 由定义3.2和二项式定理式(1.16)有

$$f_e(x)=1+(1\times 4)\frac{x^1}{1!}+(1\times 4\times 7)\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$+1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n+)\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n+1)}{n!}x^n$$

$$=(1-3x)^{-4/3}$$

由定义3.2易见，序列$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$的指数母函数也是序列$(a_0, a_1, a_2/2!, \ldots, a_n/n!, \ldots)$的普通母函数。

这说明普通母函数与指数母函数之间有着密切的联系，这种联系可由下面的定理表出。

定理3。1

设f(x), f_e(x)分别是序列$(a_0, a_1, \ldots, an, \ldots)$的普通母函数和指数母函数，则

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} f_e(sx)ds$$

证明： 由指数母函数的定义 有

$$f_e(sx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(sx)^n}{n!}$$

将上式两边同乘以e^-s并从0到∞积分得

$$\int_0^\infty e^{-s} f(sx)ds = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-s} a_n \frac{s^n x^n}{n!} ds = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!} \int_0^\infty e^{-s} s^n ds$$

$$\int_0^\infty e^{-s} s^n ds = n!$$

故

$$\int_0^\infty e^{-s} f_e(sx)ds = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = f(x)$$

证毕