
第五章
鸽笼原理与Ramsey定理

§5.1 鸽笼原理的简单形式

鸽笼原理又称抽屉原理，它是组合数学中的一个重要的也是最基本的原理。这个原理是指：“有n只鸽子，飞进m(n>m)个鸽笼时，至少有一个鸽笼内有两只以上的鸽子”。这是一个显而易见的道理，然而，它却有许多重要而有趣的应用和几种不同的表达形式，这节先介绍鸽笼原理的简单表达形式。

定理5.1 如果把$n+1$个物体放到n个盒子中去，则至少有一个盒子中放有两个或更多的物体。

证明：用反证法。如果n个盒子中每个盒子至多放入一个物体，则放入n个盒子中的物体总数至多为n个。这与假设有$n+1$个物体矛盾。从而定理得证。 必须注意，鸽笼原理只指出了至少存在这样的盒子，并没有给出“**确定哪一个盒子有此性质**”的方法。因此，它只能用来解决存在性问题。

- ［例1］一教师每周5天工作日，上6次课，则这教师至少有一天要上两次课。

- ［例2］证明：把5个顶点放到边长为2的正方形中，至少存在两个顶点，它们之间的距离小于或等于$\sqrt{2}$。

证明： 把边长为2的正方形分成四个相等的小正方形，则每个小正方形的对角线长为$\sqrt{2}$。如果把每个小正方形当作一个盒子，由鸽笼原理知，把5个顶点放入4个盒子中，必有一个盒子中放入了两个顶点。即必有一个小正方形中有两个顶点。而小正方形的对角线长为$\sqrt{2}$。也就是说，小正方形中任意两点的最大距离为$\sqrt{2}$。这就证明了本题。

附，试证明把四个点放入2×3的矩形中，至少有两个点之间的距离不超过$\sqrt{5}$。

主观题 3分

在边长为1的正三角形中任选10点，请证明存在2点，他们的距离不超过1/3。

填空题 2分

一个口袋有10个黑球和8个白球，请问至少需要取出个 [填空1] 球，才能够保证取出的球中至少有一个黑球和一个白球。
如果要求取出的球里面至少有一对白球，至少应该取出 [填空2] 球。

主观题 5分

随意把3*9的棋盘用红蓝2色涂色。求证：必有2列方格的涂色方案是相同的。

随意把3*9的棋盘用红蓝2色涂色。求证：必有2列方格的涂色方案是相同的。

证明：每列3个方格，用2色涂色共有2^3=8个方案。由鸽笼原理，必有2列是相同的涂色方案。

［例3］

设 a_1,a_2,a_3 为三个任意的整数，为 b_1,b_2,b_3 的任一排列，则 a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3 中至少有一个是偶数.

[例3]

设 a_1,a_2,a_3 为三个任意的整数，为 b_1,b_2,b_3 的任一排列，则 a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3 中至少有一个是偶数.

证明：由鸽笼原理知，a_1,a_2,a_3 这三个整数中至少有两个数同为偶数或奇数。而 b_1,b_2,b_3 是 a_1,a_2,a_3 的一个排列.

因此，a_1,a_2,a_3，b_1,b_2,b_3 这六个数中至少有**4**个数同奇偶性。将这**4**个数放入**3**个盒子时，必有两个在同一盒子中，其差为偶数。故 a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3 中至少有一个为偶数。

［例4］在给定的n个整数$a_1, a_2, \cdots a_n$中，存在k和$l(0 \le k < l \le n)$，使得$a_{k+1} + \cdots + a_l$能被n整除。

［例4］ 在给定的n个整数$a_1,a_2,\cdots a_n$中，存在k和 $l(0\le k<l\le n)$，使得 $a_{k+1}+\cdots+a_l$ 能被n整除。

- **证明：** 考虑n个和：

$$a_1,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3,a_1+a_2+\cdots+a_n$$

分两种情况：

（1）如果这n个和中有一个能被n整除，则结论成立。

（2）如果这n个和中没有一个能被n整除，则这些和被n除时必有1，2，…，$n-1$这样的余数。由于有n个和，且只有$n-1$个余数，于是我们可以构造$n-1$个盒子，第i个“盒子”装被n除余数为i的数($i=1$，2，…，$n-1$)。

- 由鸽笼原理知，用n除各和时有两个和的余数是相同的。所以存在整数k和 $l(k<l)$,使得 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 和 $a_1+a_2+\cdots+a_l$ 被n除时有相同的余数r，即

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=b\,n+r$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_l=c\,n+r$$

- 两式相减得 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l=(c-b)n$

- 由上式知，$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 能被n整除。这就证明了本题的结论。

[例5]从1，2，…，$2n$中任意选出$n+1$个数，这$n+1$个数中，一定存在两个数，其中一个整数能整除另外一个整数。

[例5]从1，2，…，2n中任意选出n+1个数，这n+1个数中，一定存在两个数，其中一个整数能整除另外一个整数。

证明：

因为任一正整数都可以写成$2^k \cdot l$的形式，其中k是非负整数，l是正的奇数。
显然，从1到2n中只有n个奇数。由于选出的n+1个数都可以写成$2^k \cdot l$的形式，而l的取值只有n种可能。由鸽笼原理知至少有两个数所对应的奇数l是相同的，于是对应于k小的那个整数可以整除对应于k大的另一个整数，故本题结论得证。

主观题 5分

请证明，任意给出$n+2$个正整数中必有2个数，他们的和或者差能够被$2n$整除。

请证明，任意给出$n+2$个正整数中必有2个数，他们的和或者差能够被$2n$整除。

整除$2n$的余数$0,1,2,\ldots,2n-1$,可以构造$n+1$个盒子：
$0,(1,2n-1),(2,2n-2),\ldots,(n-1,n+1),n$
则$n+2$个数整除$2n$的余数在这n个盒子中，根据鸽笼原理：必有2个数在同一个盒子；如果这2个数的余数相同，则他们的差能够被$2n$整除，否则他们的和能够被$2n$整除。

［例6］在任意的一群人中，一定有这样的两个人，他们在这群人中有相同数目的熟人。

［例6］在任意的一群人中，一定有这样的两个人，他们在这群人中有相同数目的熟人。

证明：

- 设任意一群人的个数为n，且$n \geqslant 2$。(因为$n=1$时，不成其为一个人群)。
- 当$n=2$时，这两个人或者互相是熟人或者互相是生人。当这两个人是熟人时，则他们的熟人都是1个人。当这两个人互不相识时，则他们的熟人都是0。
- 故当$n=2$时，本例结论成立。

当$n\geqslant 3$时，假设用x_i(i=1,2,…,n)表示第i个人的熟人数目。下面分三种情况讨论。

(1)假设这群人中每人都有熟人。即$x_i\neq 0$且$1\leqslant x_i\leqslant n-1$。

视 $x_1,x_2,\ldots,x_n$为n个物体，1，2，…，n-1为n-1个盒子。这样一来，问题就成为把n个物体放入n-1个盒子的问题了。由鸽笼原理知至少有两个物体放在同一盒子中。不妨设x_k与x_l在同一盒子中$(k\neq l)$，即$x_k=x_l$。这表明第k个人与第l个人有相同数目的熟人。

在这种情况下，本例结论成立。

(2)假设这群人中只有1个人没有熟人，不妨设这个人就是第n个人。即x_n=0且1≤x_i≤n-2(i=1,2,⋯,n-1)。同样视x_1 ,x_2,⋯, x_{n-1}为n-1个物体，视1,2,⋯,n-2为n-2个盒子，则由鸽笼原理知至少有一个盒子里放了两个物体。不妨设x_k与x_l $(k \neq l, k, l \leq n-1)$在同一盒子里，即$x_k = x_l$。故第 个人与第 个人的熟人数目相同。

故在第二种情况下，本例结论也是成立的。

(3) 假设在这群人中至少有两个人都没有熟人，也就是说这两个人的熟人数目为0。故在这种情况下，本例结论仍然成立。

综上所述，本例结论成立。

[例7] 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。

主观题 5分

一棋手为参加一次锦标赛要进行91天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋25盘.

主观题 5分

一棋手为参加一次锦标赛要进行91天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下13盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋12盘.

[例7] 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。

解： 设 a_1 为第一天该棋手下棋的盘数，a_2 是第一、二天该棋手下棋盘数的和，a_j 是第一、二、...、j天该棋手下棋盘数的和，j=1, 2, ..., 77，于是序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 是严格递增序列，且 $a_1 \geq 1, a_{77} \leq 132$

于是序列$a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$也是严格递增序列。而$a_{77}+21 \le 153$，故154个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$都在1和153两个整数之间，由鸽笼原理知，这154个数中必有两个是相等的。

故一定存在两个数i和j，使得

$a_i = a_j + 21$ 即$a_i - a_j = 21$因此，在j+1天，j+2天，…，i天这些天中，这个棋手恰好下棋21盘。