§3.1 收敛性与极限定理

一、分布函数弱收敛

定义3.1.1 对于分布函数列$\{F_n(x)\}$,如果存在单调不降函数$F(x)$, 使

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

在$F(x)$的每一连续点成立, 称$F_n(x)$**弱收敛**于$F(x)$.

记为

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x).$$

注 分布函数列的极限函数$F(x)$是有界非降函数，但不一定是分布函数.

定理3.1.1 连续性定理（列维—克拉美）

正极限定理 设分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$, 则相应的特征函数列收敛于特征函数，且在t 的任一有限区间内收敛是一致的.

$$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x) \Rightarrow \{\varphi_n(t)\} \to \varphi(t) \text{ 一致成立.}$$

逆极限定理 设特征函数列$\{\varphi_n(t)\}$收敛于某一函数$\varphi(t)$，且$\varphi(t)$在$t=0$连续，则相应的分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$，而且$\varphi(t)$是$F(x)$的特征函数.

$$\{\varphi_n(t)\} \to \varphi(t) \xRightarrow{\text{在}t=0\text{处连续}} F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$$

连续性定理可用来确定随机变量序列的极限分布.

二、随机变量的收敛性

定义3.1.2 设随机变量序列$\{X_n\}$的分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于r.v.X 的分布函数$F(x)$, 称$\{X_n\}$**依分布收敛**于X, 记为

$$X_n \xrightarrow{W} X, \quad as \quad n \to \infty$$

定义3.1.3 ：设$\{X_n\}, n=1,2,\ldots$是定义在(Ω, F, P)上的随机变量序列，若存在一个随机变量X(可以是常数)，使

$$P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$$

称随机变量序列$\{X_n\}$ **以概率为1收敛**于X，或称**几乎处处收敛**于X，记为

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X. \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} X_n = X \quad (a.s.)$$

定义3.1.4 设$\{X_n\}$, n=1,2,…是定义在(Ω, F, P)上的随机变量序列, 若对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1.$$

称随机变量序列$\{X_n\}$**依概率收敛**于X, 记为

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad (p) \qquad \text{或} \qquad X_n \xrightarrow{p} X.$$

定义3.1.5 设$\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$是定义在(Ω, F, P)上的随机变量序列, 若 $E|X_n|^2<\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0,$$

称随机变量序列$\{X_n\}$**均方收敛**于X, 记为

$$\mathop{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}_{n\to\infty} X_n = X.$$

三、几种收敛性的关系

均方收敛

概率为1 收敛

依概率收敛

依分布收敛

证明 随机变量序列$\{X_n\}$均方收敛于X, 则一定依概率收敛于X.

证 由马尔科夫不等式,对 $\forall \varepsilon > 0$有

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0.$$