第五章　马尔科夫过程

马尔科夫过程是由前苏联数学家 A.A.Markov 首先提出和研究的一类随机过程, 已成为内容丰富, 理论较完善，应用十分广泛的一门数学分支, 应用涉及计算机、自动控制、通信、生物学、经济、气象、物理、化学等等.

§ 5.1 马尔科夫过程的概念

一、马尔科夫性及定义

在已知系统现在所处状态下, 系统将来的演变与过去无关, 称为无后效性.

例如 生物基因遗传从这一代到下一代的转移仅依赖当代而与以往各代无关;

评估一个计算机系统的性能时, 系统将来的状态, 仅依赖于目前所处的状态, 而与过去的状态无关;

与平稳过程的本质差别:

平稳过程具有平稳性: 它的统计特性不随时间的推移而改变,它的变化情况与过去的情况有不可忽视的联系.

定义5.1.1 随机过程$\{X(t), t\in T\}$, 如果对于任意取定参数$t_1<t_2<\ldots<t_n$, 有

$$P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \cdots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$= P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\} \qquad (1)$$

称$\{X(t), t\in T\}$为马氏过程.

由条件分布函数定义, (1)式等价于

$$F_{t_n|t_1,\cdots,t_{n-1}}(x_n \mid x_1,\cdots,x_{n-1}) = F_{t_n|t_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$$

若条件密度存在, (1)式等价于

$$f_{t_n|t_1,\cdots,t_{n-1}}(x_n|x_1,\cdots,x_{n-1}) = f_{t_n|t_{n-1}}(x_n|x_{n-1})$$

二、满足马氏性的过程

定理5.1.1 独立过程$\{X(t),t\in T\}$是马氏过程;

证 1）对于$t_1< t_2< \ldots<t_n\in T$, 因$X(t_1)\ldots X(t_n)$相互独立,

$$P\{X(t_n)\le x_n|\ X(t_1)=x_1,\ X(t_2)=x_2,\ldots,\ X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}$$

$$=\frac{P\{X(t_n)\le x_n\}\cancel{P\{X(t_1)=x\}}\cdots\cancel{P\{X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}}{\cancel{P\{X(t_1)=x\}}\cdots\cancel{P\{X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}}$$

$$=P\{X(t_n)\le x_n\}=P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

定理5.1.2 独立增量过程 $\{Y(t),t\in T\}$, $T=[a, b]$, $a>-\infty$,且初始分布$P\{Y(a)=0\}=1$,则 $\{Y(t),t\in T\}$是马氏过程.

证 对于任意的 $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$, 需证

$$P\{Y(t_n) \le y_n \mid Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2, \cdots Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) \le y_n \mid Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

因增量 $Y(t_1) - Y(a) = Y(t_1)$, $Y(t_2) - Y(t_1), \dots,$ $Y(t_n) - Y(t_{n-1})$, $Y(t) - Y(t_n)$相互独立,

$$P\{Y(t_n) \le y_n \mid Y(t_1) = y_1, Y(t_2) = y_2, \cdots Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) - Y(t_{n-1}) \le y_n - y_{n-1} \mid Y(t_1) - Y(a) = y_1,$$

$$Y(t_2) - Y(t_1) = y_2 - y_1, \cdots Y(t_{n-1}) - Y(t_{n-2}) = y_{n-1} - y_{n-2}\}$$

$$= P\{Y(t_n) - Y(t_{n-1}) \le y_n - y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) - Y(t_{n-1}) \le y_n - y_{n-1} \mid Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

$$= P\{Y(t_n) \le y_n \mid Y(t_{n-1}) = y_{n-1}\}$$

因 $Y(t_n) - Y(t_{n-1})$
与 $Y(t_{n-1}) = Y(t_{n-1}) - Y(a)$
相互独立,

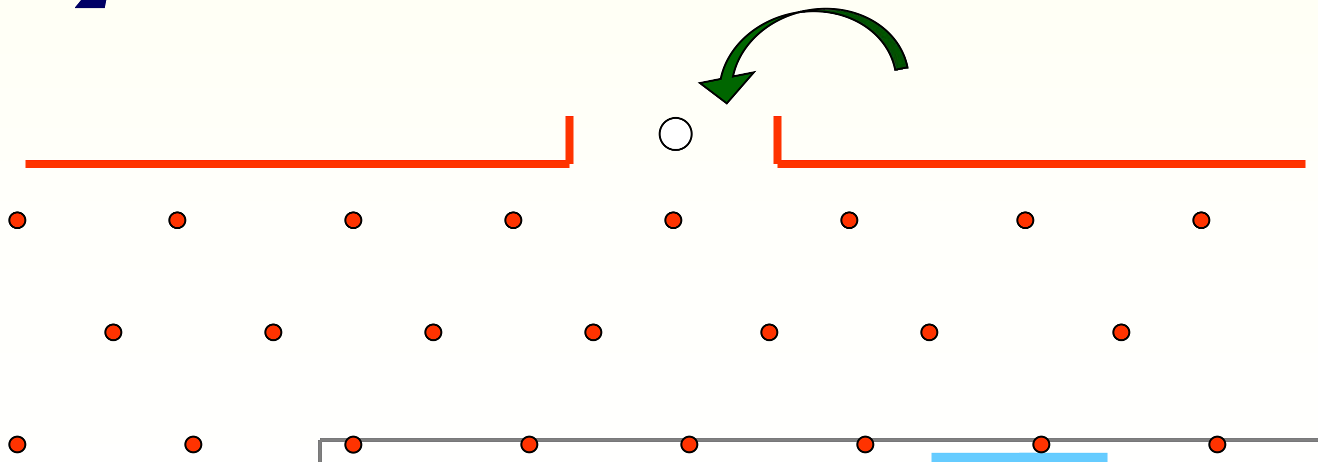
即将来状态与过去状态无关, 故独立增量过程 $\{Y(t), t \in T\}$是马氏过程.

EX.1 因泊松过程是平稳独立增量过程, 且$N(0)=0$, 故泊松过程是马尔科夫过程;

EX.2 设随机过程$\{X(n), n\geq 1\}$, $X(n)$是第n次投掷一颗骰子出现的点数, 则是独立过程, 从而是马氏过程.

EX.3 随机游动(高尔顿钉板试验)

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内, 小球各以$\frac{1}{2}$的概率向左或向右移动一格.



$$X(k)=\begin{cases}1, & \text{在第}k\text{层向右位移一格;}\\ -1, & \text{在第}k\text{层向左位移一格.}\end{cases}$$

$X(k)$	-1	1
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

$\{X(k), k\in N^{+}\}$ 是一个独立随机过程, 令

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),$$

随机游动n 步所处的状态

$\{Y(n),n\in N^{+}\}$是一个平稳独立增量过程.

$\{Y(n), n \in N^+\}$是马氏过程。

维纳过程也是平稳独立增量过程，且$W(0)=0$, 故维纳过程是马尔科夫过程.

三、马氏过程的有限维分布族

定义5.1.2 给定马氏过程X_t, 称条件概率

$$P_{s,t}(x,y) = P\{X_t \le y \mid X_s = x\}$$

为过程的转移分布函数，

称条件概率密度

$$\mathrm{f}_{\mathrm{t_n}|t_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$$

为转移概率密度，称

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

为转移概率。

若马氏过程有限维概率密度和转移概率密度存在，则

$$f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2|t_1}(x_2|x_1) \ldots f_{t_n|t_{n-1}}(x_n|x_{n-1})$$

马氏过程$\{X(t), t\in T\}$的有限维概率分布为

$$P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \cdots, X(t_n)=x_n\}$$

$$=P\{X(t_1)=x_1\}P\{X(t_2)=x_2 \mid X(t_1)=x_1\}\cdots$$

$$P\{X(t_n)=x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$$

称$P\{X(t_n)=x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$为**转移概率**.

注 马氏过程的研究重点是讨论条件分布和初始分布.

思考题:

1) 如何理解马氏过程的马氏性? 如何验证过程的马氏性?

2) 马氏过程的分布和数字特征有什么特点?