

5.3 齐次马氏链

5.3.1 齐次马氏链的定义

定义5.3.1 若马氏链 $\{X(n), n \geq 0\}$ 的一步转移概率与起始时刻无关，即对任意 m

$$p_{ij}^{(1)}(m) = P\{X(m+1) = j | X(m) = i\} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

称 $\{X(n), n \geq 0\}$ 为齐次马氏链。

与 m
无关



若状态空间为 $E=\{0,1,2,\dots\}$

记 $P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

称 P 为一步转移矩阵.

转移矩阵是随机矩阵：每个元素为非负数，且每行之和均为1.

1) $0 \leq p_{ij} \leq 1$, 和 2) $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$ 成立



EX.1 在某数字通信系统中传0和1两种信号,且传递要经过多级.若每级由于噪声的存在,送出0,1信号的失真概率均为 p ($0 < p < 1$),则各级输入状态和输出状态的转移矩阵为

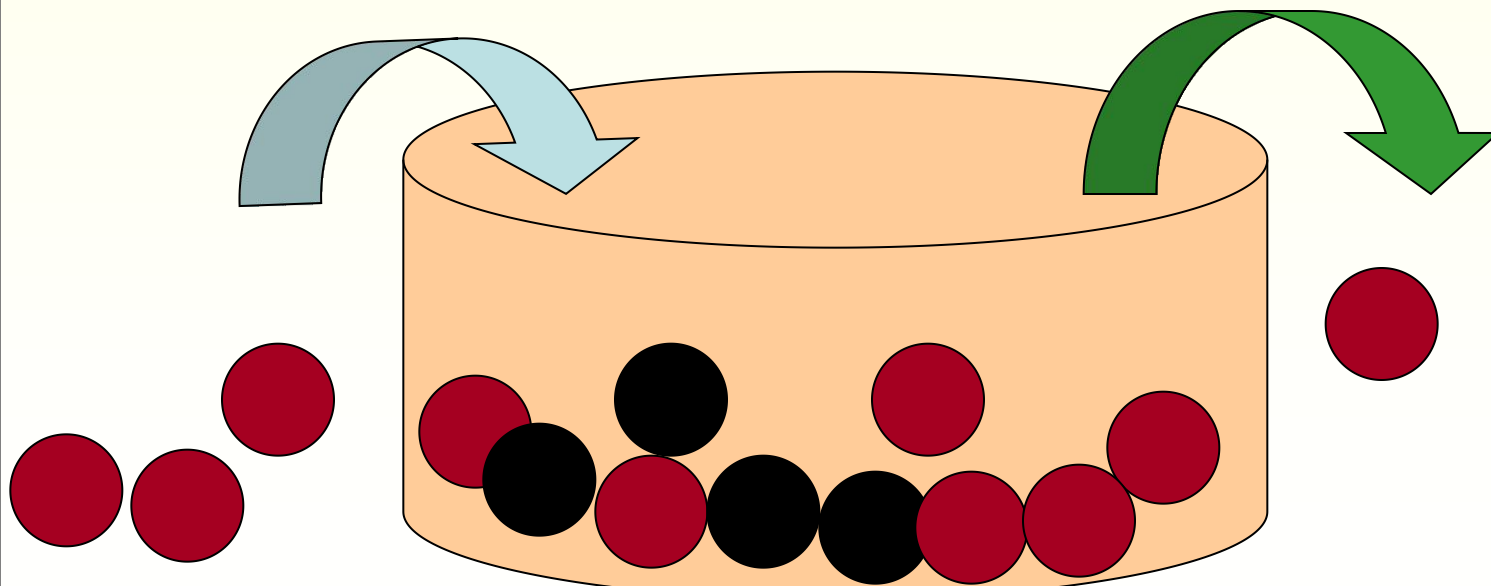
$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \quad E = \{0,1\}, \quad i, j \in E.$$

数字传输过程是齐次马氏链.



EX.2 *Polya*模型（传染病模型）

设坛子中有 b 个黑球， r 个红球. 从坛子中随机地摸出一个球，然后将球放回并加入 c 只同色球，如此取和放，不断进行下去. 研究坛子中黑色球个数.



$$p_{ij}^{(1)}(n) = P\{X(n+1) = j | X(n) = i\}$$

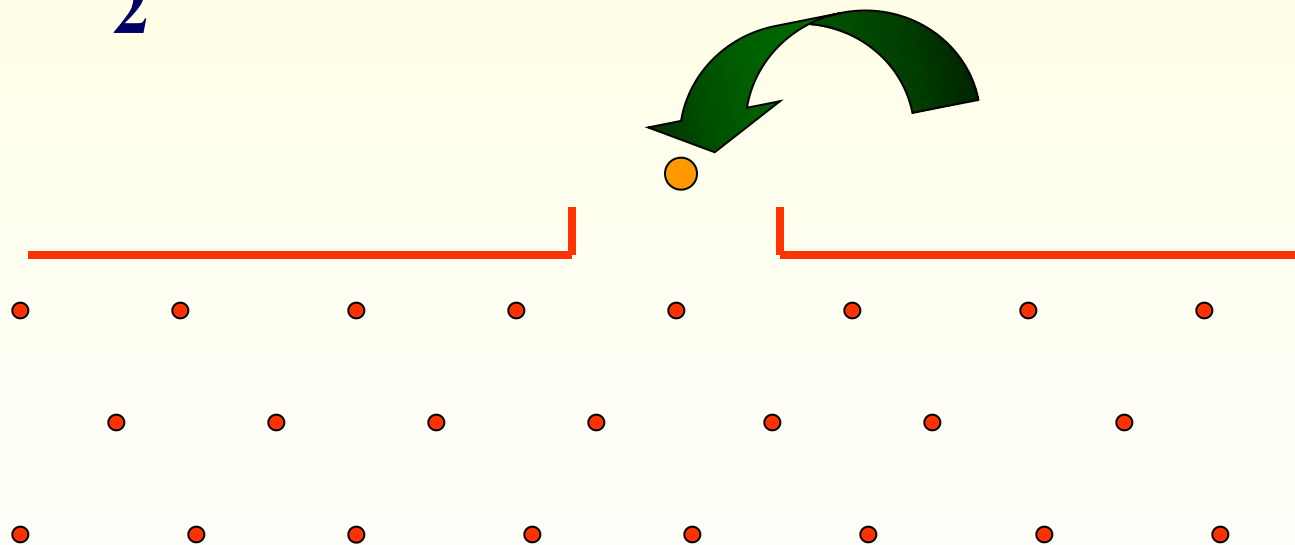
$$= \begin{cases} \frac{i}{b+r+nc}, & j = i + c; \\ 1 - \frac{i}{b+r+nc}, & j = i; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

n 次转移概率与 n 有关， $\{X(n), n \geq 1\}$ 是非齐次马氏链

$\{X(n), n \geq 1\}$ 非齐次马氏链.

EX3. 随机游动(高尔顿钉板试验)

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内, 小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



$$X(k) = \begin{cases} 1, & \text{在第} k \text{层向右位移一格;} \\ -1, & \text{在第} k \text{层向左位移一格.} \end{cases}$$

| $X(k)$ | -1 | 1 |
|---------------|-------|-------|
| $P\{X(k)=i\}$ | $1/2$ | $1/2$ |

令
$$Y(n) = \sum_{k=0}^n X(k),$$

随机游动 n 步
所处的状态

状态空间 $E=N$, 有

$$\begin{aligned} P\{Y(m_n) = j_n | Y(m_1) = j_1, Y(m_2) = j_2, \cdots Y(m_{n-1}) = j_{n-1}\} \\ = P\{Y(m_n) = j_n | Y(m_{n-1}) = j_{n-1}\} \end{aligned}$$

$\{Y(n), n \in N\}$ 是马氏过程。



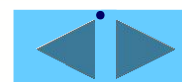
更进一步，因对任意 m 有

$$p_{ij}^{(1)}(m) = P\{Y(m+1) = j | Y(m) = i\} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

即马氏链 $\{Y(n), n \in N\}$ 的一步转移概率与起始时刻无关，是齐次马氏链。

转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$



5.3.2 齐次马氏链的性质

定理5.3.1 齐次马氏链 $\{X(n), n \geq 0\}$ 的 k 步转移概率满足切普曼—柯尔莫哥洛夫方程

$$p_{ij}^{(k+l)} = \sum_{r \in E} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(l)}$$

推论1 齐次马氏链的 n 步转移矩阵为(一步)转移矩阵的 n 次幂.

$$P^{(n)} = PP \cdots P = P^n$$



证 在 $C-K$ 方程中,

$$\text{令 } k=s=1, \text{ 有 } P^{(2)} = P^{(1)} P^{(1)} = P^2,$$

$$\text{令 } k=2, s=1, \text{ 有 } P^{(3)} = P^{(2)} P^{(1)} = P^2 P = P^3,$$

由数学归纳法知

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} P = P^{n-1} P = P^n$$

齐次马氏链的 n 步转移矩阵
由一步转移矩阵确定.



EX.4 天气预报问题 假设明日是否有雨仅与今日下雨与否有关，而与过去无关。把有雨称为“0”状态天气，无雨称为“1”状态天气，这是一个两状态马氏链。

记 $p_{00}=\alpha$, $p_{10}=\beta$, 则过程的一步转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

设 $\alpha=0.7$, $\beta=0.4$, 可得



$$P^{(4)} = P^4 = \begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$$

可知今日有雨且第四日仍有雨的概率为

$$p_{00}^{(4)} = 0.5749.$$

问题:

1) 计算 $P^{(8)}$, $P^{(16)}$, $P^{(32)}$, 尝试发现其变化规律.

2) 若 n 趋于无穷时 $P^{(n)}$ 将会如何变化?



定义5.3.2 给定齐次马氏链 $\{X(n), n \geq 0\}$,

记 $\pi_i(n) = P\{X(n) = i\}$, $i \in E$

称行向量

$$\pi(0) = \{\pi_0(0), \pi_1(0), \dots, \pi_i(0), \dots\}$$

为马氏链的**初始(概率)分布**

称行向量

$$\pi(n) = \{\pi_0(n), \pi_1(n), \dots, \pi_i(n), \dots\} \quad (n \neq 0)$$

为马氏链的**绝对(概率)分布**.



定理5.3.3 设 $\{X(n), n \geq 0\}$ 是齐次马氏链, 其绝对分布由初始分布和一步转移矩阵所完全确定.

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in E} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}, \quad j \in E$$

或 $\pi(n) = \pi(0)P^{(n)} = \pi(0)P^n, \quad n \geq 0.$

证 由全概率公式及马氏性知

$$\pi_j(n) = P\{X(n) = j\} = \sum_{i \in E} P\{X(0) = i, X(n) = j\}$$



$$= \sum_{i \in E} P\{X(0) = i, X(n) = j\}$$

$$= \sum_{i \in E} P\{X(0) = i\} P\{X(n) = j | X(0) = i\}$$

$$= \sum_{i \in E} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}, \quad j \in E$$

或 $\pi(n) = \pi(0) P^{(n)} = \pi(0) P^n, \quad n \geq 0.$

绝对分布

初始分布

定理5.3.4 齐次马氏链的有限维分布由初始分布和一步转移概率确定.

证 对于 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$,

$$\begin{aligned} & P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\} \\ &= \sum_{i \in E} P\{X(0)=i\} P\{X(n_1)=i_1 | X(0)=i\} \\ & \quad \times P\{X(n_2)=i_2 | X(n_1)=i_1\} \cdots P\{X(n_k)=i_k | X(n_{k-1})=i_{k-1}\} \end{aligned}$$

由 $\{X(n), n \geq 0\}$ 的齐次性, 以上各转移概率均可利用 $C-K$ 方程, 由一步转移概率求出.

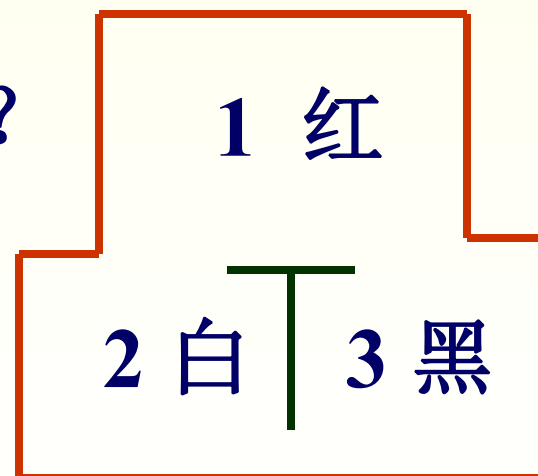


5.3.3 齐次马氏链的遍历性和平稳性

将老鼠迷宫涂上不同颜色，对老鼠运动进行足够多次的观察，以了解，

1) 哪一种颜色的吸引力最大？

2) 初始状态对结果有何种影响？



数学问题:

关注当 $n \rightarrow \infty$, $p_{ij}^{(n)}$ 的极限分布 ($j=1,2,3$) 是否与 i 有关?

定义5.3.4 设 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 是齐次马氏链, 若对 $\forall i, j \in E$, 下极限存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, \quad (i, j \in E)$$

且与 i 无关, 称此马氏链具有**遍历性**.



若 $\pi_j > 0, j \in E$, 且 $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$,

是概率
向量

称 $\{\pi_j, j \in E\}$ 为齐次马氏链的极限分布.

记 $\Pi = \{\pi_j, j \in E\}$,

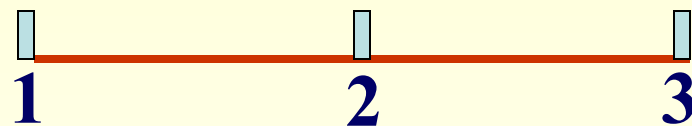
齐次遍历马氏链的 n 步转移矩阵, 有

$$\begin{matrix} P^{(n)} \rightarrow \\ \text{当 } n \rightarrow \infty \end{matrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$



EX.5 直线上的随机游动

状态空间 $E=\{1, 2, 3\}$



一步概率转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

讨论 $\{X(n), n \geq 1\}$ 是否遍历？

解 $\{X(n), n \geq 1\}$ 是齐次马氏链.



2步概率转移矩阵为 $P^2 = PP = \begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}$

3步概率转移矩阵为

$$P^3 = P^2 P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

一般有

$$P^{2n-1} = P,$$

$$P^{2n} = \begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$



对 $\forall i, j \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 都不存在
故 $\{X(n), n \geq 1\}$ 不是遍历马氏链.

定理5.3.5 (遍历性定理)

设齐次马氏链 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 的状态空间为 $E=\{1, 2, \dots, s\}$. 若存在正整数 n_0 , 对任意的 $i, j \in E$ 有 $P_{ij}^{(n_0)} > 0$, 则此马氏链是遍历的, 且极限分布 Π 是方程组



$$\pi_j = \sum_{i=1}^s \pi_i p_{ij}, \quad (j=1,2,\cdots,s), \quad (1)$$

在满足条件 $\pi_j > 0, \sum_{j=1}^s \pi_j = 1$ 下的唯一解.

是概率
向量

注一 对于齐次马氏链, 由 $C-K$ 方程, 有

记 $P = (p_{ij}), P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)}) = P^n,$

定理5.3.5 条件可叙述为: 存在正整数 n_0 , 使 n_0 步转移矩阵 P^{n_0} 的每一元 素都为正数.



补充定义1 称齐次马氏链的转移矩阵 P 是正则的, 若存在正整数 k , 使 P^k 的每一个元素均为正数.

推论1 若齐次马氏链的转移矩阵 P 是正则阵, 则此马氏链是遍历的.

注二 记 $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_s\}$,

定理5.3.5中(1)式可改写为

$$\Pi = \Pi P \quad (1')$$



$$\Pi P = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \pi_i p_{i1} & \sum_{i=1}^s \pi_i p_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^s \pi_i p_{is} \end{bmatrix}$$

$$= [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_s] = \Pi.$$

EX.6 迷宫问题 老鼠运动是齐次马氏链.

设老鼠运动的转移矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

正则阵

设初始分布为 $\pi_1(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 或 $\pi_2(0) = (1, 0, 0)$

由于 P 是正则阵, 则 $n \rightarrow \infty$ 时, 有



$$P^{(n)} = P^n \rightarrow W = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi \\ \Pi \end{bmatrix},$$

其中 $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.

第 n 步绝对分布为 $\pi(n) = \pi(0)P^{(n)} = \pi(0)P^n$,

有 $\pi(0)P^n \rightarrow \pi(0)W$, as $n \rightarrow \infty$

$$\pi_1(0)W = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) = \Pi$$



$$\pi_2(0)W = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) = \Pi$$

一般, 对任意初始概率向量 $\pi(0) = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ 均有 $\pi(0)W = \Pi$

定理5.3.6 设齐次马氏链 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 有遍历性, 其绝对分布与转移概率有相同极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \pi_j, j \in E$$



证 因绝对分布满足

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in E} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}, \quad j \in E$$

对两边取极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in E} \pi_i(0) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

由遍历性定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0, \quad (i, j \in E)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \sum_{i \in E} \pi_i(0) \pi_j = \pi_j \sum_{i \in E} \pi_i(0) = \pi_j$$



定义5.3.5 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 为齐次马氏链,

若存在 $V = \{v_j, j \in E\}$ 满足以下条件:

$$(1) \ v_j \geq 0, j \in E; \quad (2) \ \sum_{j \in E} v_j = 1;$$

$$(3) \ v_j = \sum_{i \in E} v_i p_{ij}.$$

称马氏链是**平稳的**, 称 V 是马氏链的**平稳分布**.



由定理5.3.5的等价形式可得**结论**:

正则(遍历)马氏链的极限分布是平稳分布.

定理5.3.7 若马氏链的初始分布是一个平稳分布 V , 则绝对分布为

$$\pi(n) = VP^n = VPP^{n-1} = VP^{n-1} = \dots = V$$

即绝对分布保持不变.

系统具有平稳性

EX.7 考虑经多级传送后, 数字传输的准确可靠程度如何? (**P161例5.3.2**)

$X(0)$ —进入系统第一级的数字;

$X(n)$ —表示第 n 级传出的数字,

$\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 是齐次马氏链, 状态空间为 $E=\{0,1\}$.

假设每一级的误码率为 p ($0 < p < 1$), 则转移矩阵为



$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

设初始分布为 $\pi(0)$.

经第 n 级传送后, 其概率分布(绝对分布)为

$$\pi(n) = \pi(0)P^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

需求极限分布.

因 P 是正则阵, 故此马氏链是遍历的, 极限分布即平稳分布.




由遍历性定理知问题转化为求 P 的概率向量

$$W=(w_1 \ w_2)$$

W 应满足:

是概率向量


$$\begin{cases} 1) \ w_1+w_2=1, w_i>0; \\ 2) \ WP=W. \end{cases}$$



$$WP = (w_1 \ w_2) \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$=[(1-p)w_1 + pw_2 \quad pw_1 + (1-p)w_2] = (w_1 \ w_2)$$



$$[(1-p)w_1 + pw_2 \quad pw_1 + (1-p)w_2] = (w_1 \ w_2)$$


$$\begin{cases} (1-p)w_1 + w_2 = w_1 \\ pw_1 + (1-p)w_2 = w_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$


$$\begin{cases} w_1 = w_2 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$


$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^n \rightarrow \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{当 } n \rightarrow \infty,$$

故极限分布为 $(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$, 从而有

$$\pi(n) = \pi(0)P^{(n)} = \pi(0)P^n$$

$$\rightarrow (p \quad 1-p) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})$$

当 $n \rightarrow \infty,$

最坏结果



例 (P169例5.3.6)

- 1) 由二步转移阵验证转移阵是正则阵.
- 2) 定理5.3.5的等价形式知马氏链是遍历的.
- 3) 由定理5.3.5之推论 知正则(遍历)马氏链的极限分布是平稳分布.

