3.3 *母函数在排列、组合中的应用*

母函数有着广泛的应用，它不仅可以用来处理排列组合的计数问题、整数分拆问题，……而且还可以用来证明(或推导)各种有用的组合恒等式。

特别是在第五章讨论的递归关系中有着重要的应用。

从这节开始我们分别讨论母函数在某些问题中的应用。

首先，我们考虑下列事实。令a, b, c表示三个不同的物体。显然有三种方法从这三个不同的物体中选取一个，或者选a，或者选b，或者选c

我们把这些可能的选取象征性地记为 $a+b+c$

同样，从这三个不同的物体中选取两个有三种方法，或者选取a和b，或者选取b和c，或者选取c和a。

我们把这些可能选取也象征性地记为 $ab+bc+ca$

而从这三个不同的物体中选取三个只有一种方法，把这种可能的选取象征性地记为 abc

考虑多项式

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)$$

$$=1+(a+b+c)x^1+(ab+bc+ca)x^2+(abc)x^3$$

从这个多项式可以看出，以上所有的可能选取方法都作为x的幂的系数被表示出来了。

特别是，x^i的系数就是从三个不同的物体中选取i个物体的方法的表示。这并不是偶然的巧合。

下面，利用乘法规则和加法规则对上面的多项式予以解释。

对物体a，因子$(1+ax)$象征性地表示有两种选取方法：

不选取a，或选取a。

其中x仅是一个形式变量。

x^0的系数表明不选取a，x^1的系数表明a被选取。

对于$(1+bx)$,$(1+cx)$可作类似的解释。这样，$(1+ax)(1+bx)(1+cx)$就表明：对三个不同的物体a,b,c，其选择方法是，不选取a或选取a；不选取b或选取b；不选取c或选取c。

于是这三个因子的乘积中x的幂指数就表示被选取的物体的个数，而对应的***系数***则表明了所有可能的选取方法。

因此，由普通母函数的定义知，三个因子的乘积(1+ax)(1+bx)(1+cx)就是选取物体a，b，c的所有不同方法的普通母函数。

如果由于某种实际的需要，我们只对可能的选取方法的个数感兴趣，而不是对不同的选取方法感兴趣，则可令$a=b=c=1$。

于是有

$$(1+x)(1+x)(1+x)=(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$$

该多项式表明

只有一种方法 $\left(\binom{3}{0}=1\right)$ 从三个物体中一个也不选取，有三种方法$\left(\binom{3}{1}=3\right)$ 从这三个物体中选取一个，有三种方法 $\left(\binom{3}{2}=3\right)$ 从这三个物体中选取两个。有一种方法$\left(\binom{3}{3}=1\right)$ 这三个物体中选取三个。一般说来，考虑多项式

$$(1+x)(1+x)\cdots(1+x)=(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

对于这个多项式可作上面$n=3$时的同样的解释。也就是说，从n个不同的物体中选其r个物体，其方法数为$(1+x)^n$的幂级数展开式中x^r的系数$\binom{n}{r}$。

以上讨论的是从n个不同物体中选取r个物体(每个物体至多选取一次)的简单情形。

当从n个不同的物体中，允许重复选取r个物体时，*上面的情况就可作如下的推广。*

由于因子$(1+x)$象征性地表示某一物体可以不选，或者只选一次。

那么，类似地，我们可以用因子$(1+x+x^2)$象征性地表示某一物体可以不选，或者选一次，或者选两次。也就是说某一物体至多选两次。

同样，用因子$(1+x+x^2+x^3+\ldots)$象征性地表示某一物体可以不选，或者选一次，或者选两次，或者选三次，……。

那么，$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n$的幂级数展开式中，x^r的系数a_r就表示从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体的方式数。

下面，我们举例加以说明。

例1 证明从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体的方式数为

$$F(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

这个问题可以等价地叙述为：证明重集B=｛$\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, ..., \infty \cdot b_n$｝的r-组合数为$\binom{n+r-1}{r}$。这就是定理1.6已经证明过的结论。

下面用母函数法证明：设a_r表示从n个不同物体中允许重复选取r个物体的方式数，由上面的分析可知，序列$(a_0,a_1,...,a_r,...)$的普通母函数为

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{-n(-n-1) \quad \cdots(-n-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n(n+1) \quad \cdots(n+r-1)}{r!}x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

$$a_r = F(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

例2　　证明从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体，但每个物体至少出现一次的方式数为$\binom{r-1}{n-1}$

证明：设a_r表示从n个不同物体中允许重复地选取r个物体，但每个物体至少出现一次的方式数，则序列$(a_0,a_1,\ldots,a_r,\ldots)$的普通母函数为

$$f(x)=(x+x^2+\cdots+x^r\cdots)^n=x^n(1+x+x^2+\cdots)^n$$

$$=x^n\left(\frac{1}{1-x}\right)^n=x^n\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^{r+n}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}x^r$$

$$=\sum_{r=n}^{\infty}\binom{r-1}{n-1}x^r=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r-1}{n-1}x^r\text{(注意，当}k>n\text{时,}\binom{n}{k}=0)$$

故有 $a_r=\binom{r-1}{n-1}$

例3 求从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体，但每个物体出现偶数次的方式数。

解：设a_{2r}为所求的方式数，由于每个物体出现偶数次。故可用因子$(1+x^2+x^4+...)$表示某一物体可以不选，或选取两次，或选取4次，……。

因此序列$(a_0,a_1,\ldots,a_r,\ldots)$的普通母函数为

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1 - x^2}\right)^n$$

$$= 1 + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n+1}{2}x^4 + \binom{n+2}{3}x^6 + \cdots + \binom{n+r-1}{r}x^{2r} + \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^{2r}$$

故有 $a_{2r} = \binom{n+r-1}{r}$

填空题 2分

设置

例4 在一个书架上共有16本书，其中4本是高等数学，3本是普通物理，4本是数据结构，5本是离散数学。求从中选取r本书的方式数［填空1］，其中r=12。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

解：这个问题实际上是求重集

$B=\{4\cdot M, 3\cdot P, 4\cdot S, 5\cdot D\}$ 的r-组合数

也是§2.2节中例1的问题。

设a_r是选取r本书的方式数。

由于高等数学最多只能选4本，

普通物理最多只能选3本，

数据结构最多只能选4本，

离散数学最多只能选5本。

故序列($a_0,a_1,\ldots,a_r,\ldots$)的普通母函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$
$$\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$
$$=1+4x+10x^2+20x^3+34x^4+50x^5+65x^6+76x^7+80x^8+76x^9$$
$$+65x^{10}+50x^{11}+34x^{12}+20x^{13}+4x^{14}+x^{16}$$

取f(x)展开式中x^r的系数即为所求的方式数。
当r=12, x^{12}的系数为34，即 $a_{12}=34$

这个答案与§3.2节中例1用容斥原理所求的结果是一致的。

例5 现有2n个A，2n个B和2n个C，求从它们之中选出3n个字母的不同的方式数

解：这个问题实际上是求重集

B=｛2n ·A,2n ·B,2n ·C｝的3n 组合数。

设a_r为所求的方式数,

则序列$(a_0,a_1,\ldots, a_r,\ldots)$的普通母函数为

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{2n})^3=\left(\frac{1-x^{2n+1}}{1-x}\right)^3$$

$$=(1-x^{2n+1})^3\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-k-2)}{k!}(-x)^k\right]$$

$$=(1-3x^{2n+1}+3x^{4n+2}-x^{6n+3})\left[1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(k+2)}{k!}x^k\right]$$

$$=(1-3x^{2n+1}+3x^{4n+2}-x^{6n+3})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$$

在上式中x^{3n}的系数为 $\binom{3n+2}{2}-3\binom{n+1}{2}$

故当$r=3n$时有 $a_{3n}=\binom{3n+2}{2}-3\binom{n+1}{2}$

以上，我们讨论了普通母函数在组合计数问题中的应用。下面说明指数母函数在排列计数问题中的一些应用。

我们已知道 $$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

是从n个不同的物体中选取r个物体的组合数a_r所成的序列的普通母函数。

利用式(1.7)将上式变形有

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \sum_{r=0}^{n} p(n,r) \frac{x^r}{r!}$$

这表明从n个不同的物体中选取r个物体的排列数恰好是$x^r/r!$的系数。

而$(1+x)=(1+x^1/1!)$象征性地表示某一物体在排列中可以不选取，或者选取一次。

由此我们得到启发，某一物体在排列中可以不取，或取一次，或取两次，……，或取r次可用如下形式表示：

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}$$

特别是，如果某物体的重复次数是∞时，则上式的形式变为

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

同样地，如果某一物体在排列中至少取两次，至多取五次，则可用下面的形式表示

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$$

下面，我们举例说明。

例6 证明从n个不同的物体中允许重复地选取r个物体的排列数为n^r

证明：这个问题实质上是证明重集 $B=\{\infty\cdot b_1,\infty\cdot b_2,\ldots,\infty\cdot b_n\}$ 的r 排列数为n^r。这就是§1.2节定理1.3已经证明过的结论。这里用母函数的方法证明。

设a_r为所求的排列数，由上面的分析知，序列$(a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)$的指数母函数为

$$f_e(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots)^n$$

$$= (e^x)^n = e^{nx} = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \frac{x^r}{r!}$$

故有 $a_r = n^r$

例7 求1，3，5，7，9五个数字组成r位数的个数。其中要求7，9出现的次数为偶数。其余数字的出现不加限制。

解：这个问题等价于求重集B={∞ ·1,∞ ·3,∞ ·5，∞ ·7，∞ ·9)} 的r排列数。其中要求7，9出现偶数次。

设所求的r-排列数为a_r，则序列$(a_0,a_1,\ldots,a_r,\ldots)$的指数母函数为

$$f_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2\cdot(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3$$

而

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

故

$$\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

所以有 $f_e(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^3$

$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}e^x)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{5^r}{r!}x^r+2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{3^r}{r!}x^r+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(5^r+2\times 3^r+1)\frac{x^r}{r!}$$

故 $a_r=\frac{1}{4}(5^r+2\times 3^r+1)$

例8 用红、白和绿三种颜色给1×n棋盘中的正方形着色，要求偶数个正方形着红色，而着白色和绿色的正方形个数不加限制，求不同的着色方式数。

解：若用R，B和V分别表示红、白和绿三种颜色，则该问题实际上是求重集B=$\{\infty \cdot R, \infty \cdot B, \infty \cdot V\}$ 的n 排列。

其中要求R出现偶数次。

设a_n为所求的方式数。定义$a_0=1$，于是序列$(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$的指数母函数为

$$f_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

故有 $a_n=\frac{1}{2}(3^n+1)$

例9 在所有的n位数中，包含数字3，8，9，但不包含数字0，4的数有多少?

解：这是第二章容斥原理的习题8。这里用母函数法来求解。

这个问题实际上是求重集B=

{∞·1,∞·2,∞·3，∞·5，∞·6，∞·7，∞·8，∞·9 ｝的n 排列个数，其中要求数字3，8，9至少出现一次，而其他的数字则不加限制。

设符合题意的数有a_n个，则序列$(a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots)$的指数母函数为

$$f_e(x)=(x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^5$$

$$=(e^x-1)^3(e^x)^5$$

$$=e^{8x}-3e^{7x}+3e^{6x}+e^{5x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(8^n-3\times 7^n+3\times 6^n-5^n)\frac{x^n}{n!}$$

故有 $a_n=8^n-3\times 7^n+3\times 6^n-5^n$

这个结果与用容斥原理所得的结果是一致的。

例10 求1，2，3，4，5五个数字组成的r位数的个数，其中要求1出现的次数与2出现的次数的和必须是偶数。

解：设a_r为所求的符合题意的个数。

由于1出现次数与2出现的次数的和为偶数，这有两种情况：

(1) 1出现的次数与2出现的次数都为偶数。

(2) 1出现的次数与2出现的次数都为奇数。

故由加法规则知，序列**(a_0,a_1,…， a_r)**的指数母函数为

$$f_e(x) = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3$$
$$+(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3$$
$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot e^{3x}+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot e^{3x}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

故有 $$a_n=\frac{1}{2}(5^{n+1})$$