

10个球，放入2个盒子，每盒不空。求方法数：

(1) 如果球无区别，盒子有区别，结果为 [填空1];

(2) 如果球有区别，盒子有区别，结果为 [填空2];

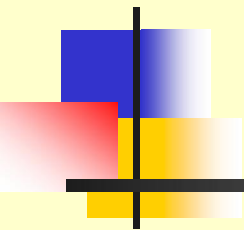
(3) 如果球无区别，盒子无区别，结果为 [填空3];

(4) 如果球有区别，盒子无区别，结果为 [填空4];

第三章

母函数

组合数学

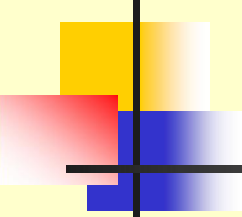


棋盘C的棋子多项式

$$R(C) = \sum_{k=0}^n r_k(C) x^k \quad \text{当 } n \rightarrow \infty$$

时，该多项式称为 [填空1]

3.1 母函数的基本概念



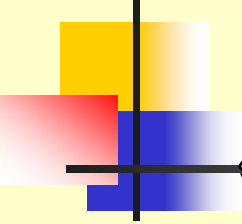
母函数又称发生函数或生成函数，它是解决计数问题的一个重要工具。

- 母函数的类型较多，这里仅讨论最常见的两种类型的母函数：

1. 普通母函数
2. 指数母函数

下面，我们分别进行讨论。

一、普通母函数

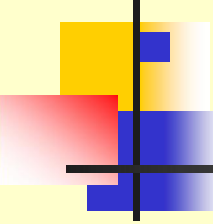


定义3.1 给定一个无穷序列
 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ (简记为 $\{a_n\}$, 下同),

称函数

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

为序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数。



必须注意的是，在定义3.1中，普通母函数是一个无穷级数，没有必要去讨论它的收敛性，实质上它只是引进一个表示序列的记号而已。

此时变量 x 只是一种形式变元。对这种级数可以把它看成形式幂级数，我们可以按通常方式定义其加法、乘法、形式微分等运算，从而构成一个代数体系。



由定义3.1可知

一个序列和它的普通母函数是一一对应的。给定了一个序列就可以得到这个序列的普通母函数。

反之，如果给定了普通母函数，则序列也随之而定。

由此可见，普通母函数实质上是序列的另一种表达形式。

[例1]

求序列 $\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}\right)$ 的普通母函数。

解： 由定义3.1和式(1.13)有

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \\ &= (1+x)^n \end{aligned}$$



例2

求序列 $\left(\binom{n-1}{0}, -\binom{n}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots, (-1)^k \binom{n+k-1}{k}, \dots \right)$

的普通母函数。

■ **解：** 由定义 **3.1** 和式 **(1.18)** 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{n-1}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^k \binom{n+k-1}{k}x^k + \cdots \\ &= (1+x)^{-n} \end{aligned}$$

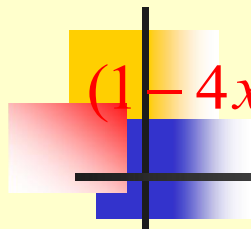


例 3

证明 $(1-4x)^{-1/2}$ 是序列

$\left(\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{2n}{n}, \dots \right)$ 的普通母函数。

■ **证明:** 由牛顿二项式定理式 (1.16)
有



$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-i+1)}{i!}(-4x)^i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4^i \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2i-1}{2}\right)}{i!} x^i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)}{i!} x^i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i \cdot i! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)}{i! \cdot i!} x^i$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2i)[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-1)]}{i! \cdot i!} x^i$$

$$= \binom{0}{0} + \binom{2}{1} x^1 + \binom{4}{2} x^2 + \cdots + \binom{2n}{n} x^n + \cdots$$



由定义3.1知,

$(1-4x)^{-1/2}$ 是序列

$$\left(\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \dots, \binom{2n}{n}, \dots \right)$$

的普通母函数。



例4

求序列 $(0, 1 \times 2 \times 3, 2 \times 3 \times 4, \dots, n(n+1)(n+2), \dots)$ 的普通母函数。

解：由式 (1.20) 有 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

将上式两边同时微分两次得

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$



将上式两边再微分有

$$\frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

- 再将上式两边同乘以x得

$$\begin{aligned}\frac{6}{(1-x)^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)(n+2)x^n \\ &= 0 + 1 \times 2 \times 3x^1 + 2 \times 3 \times 4x^2 + \cdots \\ &\quad + n(n+1)(n+2)x^n + \cdots\end{aligned}$$



由定义3.1知

$f(x)=6x/(1-x)^4$ 是序列


$(0, 1 \times 2 \times 3, 2 \times 3 \times 4, \dots, n(n+1)(n+2), \dots)$ 的
普通母函数。



二、指数母函数

由上面的例子可见，普通母函数特别适用于某些序列，尤其是包含组合数的序列，这是由于它具有牛顿二项式定理的形式。

但是，对于具有排列数的那些序列，我们考虑下列类型的母函数(**指数母函数**)更为合适。



给定无穷序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, 称 **函数**

$$\begin{aligned} f_e(x) &= a_0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a_n \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

为序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的指数母函数。

- 之所以称为指数母函数是由于式(3.2)的右边很像指数函数e的幂级数展开式。

注意，指数母函数也是形式幂级数。



例5

设 n 是整数，求序列

$(p(n, 0), p(n, 1), \dots, p(n, n))$ 的

指数母函数 $f_e(x)$ 。

解：由定义3.2和式(1.7)以及例1的结论有

$$\begin{aligned} f(x) &= p(n, 0) + p(n, 1) \frac{x^1}{1!} + p(n, 2) \frac{x^2}{2!} + \cdots + p(n, n) \frac{x^n}{n!} + 0 + \cdots \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \\ &= (1+x)^n \end{aligned}$$



例6 求序列

$p(0, 0), p(2, 1), p(4, 2), \dots, p(2n, n), \dots$
的指数母函数 $f_e(x)$ 。

解：由定义3.2和式(1.7)，再利用例3的结果有

$$f_e(x) = p(0,0) + p(2,1)\frac{x^1}{1!} + p(4,2)\frac{x^2}{2!} + \cdots + p(2n,n)\frac{x^n}{n!} + 0 + \cdots$$

$$= \binom{0}{0} + \binom{2}{1}x^1 + \binom{4}{2}x^2 + \cdots + \binom{2n}{n}x^n + \cdots$$

$$= (1+4x)^{-1/2}$$

例7 求序列 $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$ 的指数母函数 $f_e(x)$ 。其中 α 是实数。

解： 由定义3.2知

$$f(x) = 1 + a \frac{x^1}{1!} + a^2 \frac{x^2}{2!} + \dots + a^n \frac{x^n}{n!} + \dots = e^{ax}$$

■ 若 $\alpha = 1$ ，则序列 $(1, 1, \dots, 1)$ 的指数母函数为 e^x 。

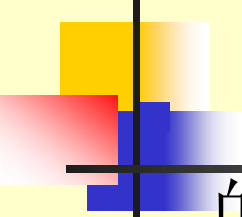


例8

求序列 $(1, 1 \times 4, 1 \times 4 \times 7, \dots, 1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n+1), \dots)$ 的指数母函数。

解：由定义3.2和二项式定理式(1.16)有

$$\begin{aligned} f_e(x) &= 1 + (1 \times 4) \frac{x^1}{1!} + (1 \times 4 \times 7) \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &\quad + 1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n+) \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3n+1)}{n!} x^n \\ &= (1-3x)^{-4/3} \end{aligned}$$



由定义3.2易见, 序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的指数母函数也是序列 $(a_0, a_1, a_2/2!, \dots, a_n/n!, \dots)$ 的普通母函数。

这说明普通母函数与指数母函数之间有着密切的联系, 这种联系可由下面的定理表出。

定理 3. 1

设 $f(x)$, $f_e(x)$ 分别是序列 $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ 的普通母函数和指数母函数, 则

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-s} f_e(sx) ds$$

证明: 由指数母函数的定义 有

$$f_e(sx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(sx)^n}{n!}$$

将上式两边同乘以 e^{-s} 并从0到 ∞ 积分得

$$\int_0^{\infty} e^{-s} f(sx) ds = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s} a_n \frac{s^n x^n}{n!} ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = n!$$

故

$$\int_0^{\infty} e^{-s} f_e(sx) ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

证毕

