§ 2.4 相对位置上有限制的排列问题

实例 考虑n个小学生列队散步的问题：设有n个小学生，每天他们要排成一列队到公园散步一次，除第一个学生外，每个学生前面都有另一个学生，由于学生们不喜欢每天排在自己前面的同学总是同一个人，他们希望每天都要改变一下排在自己前面的那个人，问**有多少种方法改变他们的位置**？

- 这个问题实质上是一个相对位置上有限制的排列问题。将它抽象成一般的数学问题：
- 对于给定的正整数n，计算集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的且不允许出现12，23，34，…，(n-1)n的全排列个数Q_n。

对于这个问题，有下列定理，其结论就是该问题的解。

定理2.4 对于n≥1，有

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\cdot 1!$$

定理2. 4

- **证明：** 设S是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有全排列组成的集合，显然有$|S|=n!$。

令$p_j(j=1,2,\cdots,n-1)$表示S中的排列有形式$j(j+1)$出现这一性质。

而$A_j(j=1,2,\cdots,n-1)$表示S中具有性质p_j的排列所组成的集合。于是S中不具有性质$p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$的排列的集合为$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}$

因而有 $Q_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}|$

定理2.4

由**容斥原理**有

$$Q_n = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}|$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}|$$

定理2. 4

- 由于A_j表示S中具有性质p_j的排列所组成的集合。于是A_1中的一个排列可以看作是具有(n-1)个元素{12,3，4，…,n}的一个排列，

因此有 $|A_1| = (n-1)!$

同理 $|A_j| = (n-1)!(j=2,3,\cdots n-1)$

定理2. 4

- 又由于$A_i \cap A_j$表示S中同时具有性质p_i, p_j的排列所组成的集合。于是$A_1 \cap A_2$中的一个排列可以看作是具有(n-2)个元素{123,4,5，…,n}的一个排列，

因此有 $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$

而$A_1 \cap A_3$中的一个排列可以看作是具有(n-2)个元素{12,34，5，…,n}的一个排列，

因此也有$|A_1 \cap A_3| = (n-2)!$

定理2.4

- 类似地，有

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!(i \neq j; i,j=1,2,\cdots,n-1)$

一般地，一个具有性质$p_1,p_2\cdots,p_{n-1}$中的k-个性质的排列可以看作是具有(n-k)个元素的一个排列。

从而对于$\{1,2,\cdots,n-1\}$中的一个k-组合$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$有

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = (n-k)!(1 \le k \le n-1)$$

定理2. 4

又由于对k=1,2,⋯,n-1有$\binom{n-1}{k}$个 {1,2,⋯,n-1} 的k-组合。将以上值代入Q_n表达式可得

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}\cdot(n-1)! + \binom{n-1}{2}\cdot(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\cdot 1!$$

由本2.4定理知，当问题中的`时，满足题设要求的方法数为

$$Q_6 = 6! - \binom{5}{1}\cdot 5! + \binom{5}{2}\cdot 4! - \binom{5}{3}\cdot 3! + \binom{5}{4}\cdot 2! - \binom{5}{5}\cdot 1! = 309$$

由此可见 相对位置上有限制的排列问题实际上也是一个错排问题。

它与前节中讲的错排问题都是一种有限制条件的排列，所不同的仅在于：

前节计算的是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的且第 i 个位置上不允许出现 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 的排列数，即计算的是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的且有一些绝对禁用位置的排列个数。

而本节则研究的是计算 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的且有某些相对禁用位置的排列数。

只要仔细考察式(2.9)，不难发现相对位置上有限制的排列问题与错排问题有着密切的关系。它体现在下面的定理中。

定理2.5 当$n\geqslant 2$时，有

$$Q_n=D_n+D_{n-1} \qquad (2.10)$$

证明：留作练习。

利用式(2.10)可以从已知的D_n，D_{n-1}来计算Q_n。

例1 有n名儿童围坐在一个旋转木马上，问有多少种方式改变他们的座位，使得每个儿童有一个不同的儿童坐在他们的前面。

解：

这个问题实际上是求集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的圆排列中不出现12，23，…，(n-1)n，n1的圆排列个数。

- 设S是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有圆排列组成的集合，
  由式(1.6)知$|S|=(n-1)!$
又设$p_i(i=1,2,\cdots,n-1)$表示S中圆排列具有$i(i+1)$形式这一性质。p_n表示S中圆排列具有$n1$形式这一性质。

- 令$A_i(i=1,2,\cdots,n)$表示S中具有性质p_i的元素组成的集合。则 $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$ 就表示S中不具有性质$p_1,p_2,\cdots,p_n$的元素组成的集合

由**容斥原理**有

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\right|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|$$

$$+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

- 由于A_1是所有圆排列中出现12的圆排列的集合，故A_1的一个圆排列可以看成是具有n-1个元素的集合{12,3，⋯,n}的一个圆排列，

因此有$|A_1|=(n-2)!$

同理可得$|A_i|=(n-2)!(i=2,3,\cdots,n)$

类似地，$A_1 \cap A_2$中的一个***圆排列***可以看成是具有n-2个元素的集合{123,4，…,n} 的一个***圆排列***，

故有 $|A_1 \cap A_2| = (n-3)!$

同理有 $|A_i \cap A_j| = (n-3)!(i \neq j; i,j=1,2,\cdots,n)$

一般地，对于1≤k≤n-1，有

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots A_{i_k}\right| = (n-k-1)!$$

故所求方式数为

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right|$$

$$= (n-1)! - \binom{n}{1} \cdot (n-2)! + \binom{n}{2} \cdot (n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot 0! + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 1$$

例2 求集合A＝{a,b,c,d,e,f,g,h}的全排列中，abc和efgh均不出现的全排列个数。

解：令S表示集合A中所有全排列组成的集合，

p_1表示在S中的一个排列出现abc这一性质，

p_2表示在S中的一个排列出现efgh这一性质，

$A_i(i=1,2)$表示S中具有性质p_i的排列所组成的集合，

则$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$表示不出现abc也不出现efgh的排列所组成的集合。

例2

- 由**容斥原理**式(2.4)有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=|S|-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$

而 $|S|=8!$。A_1的一个排列相当于集合 $\{abc,d,e,f,g,h\}$ 的一个排列，

故 $|A_1|=6!$

例2

- 同样，A_2的一个排列相当于集合 {a,b,c,d,efgh} 的一个排列，

故 $|A_2|=5!$

而$A_1 \cap A_2$的一个排列相当于集合 {abc,d,efgh} 的一个排列，

故 $|A_1 \cap A_2|=3!$

所以 $|A_1 \cap A_2|=8!-(6!+5!)+3!=39486$

于是，在集合A的全排列中，abc和efgh均不出现的全排列个数是39486。

由于学生们不喜欢每天排在自己前面的同学总是同一个人，他们希望每天都要改变一下排在自己前面的那个人，问有多少种方法改变他们的位置？》