§1.3 组 合

定义1.4 设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是具有n个元素的集合，r是非负整数。从这n个不同的元素里取r个不考虑次序组合起来($r\leqslant n$)，称为集合A的r组合。 记为$C(n, r)$

换句话说，A的r-组合是A的r-无序子集。

定理1.5

对于$r \leqslant n$，有$C(n,r) = P(n,r)/r! = n!/r!(n-r)!$ (1.7)

证明：从n个不相同的元素里取r个元素的组合个数为$C(n,r)$。

而r个元素可以组成$r!$个r-排列，

一个r-组合 → r!个r-排列

C(n,r)个r-组合 → r!C(n,r)个r-排列，

$r!C(n,r)=P(n,r)$。

这实际上就是从n个元素中选取r个元素组成的r-排列数$P(n,r)$

$$C(n,r) = P(n,r)/r! = n!/r!(n-r)!$$

推论1

$$C(n, r)=C(n, n-r) \qquad (1.8)$$

推论2

（Pascal公式）

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \qquad (1.9)$$

推论2

也可用组合分析的方法论证：

在集合A的n个元素中固定一个元素，不妨设为a_1，
于是，从n个元素中取r个元素的组合

(1) r个元素中包含a_1。这可以从除去a_1的n-1个元素中取r-1个元素的组合，然后将a_1加入而得到，其组合个数为C(n-1, r-1)。

(2) r个元素中不包含a_1。这可以从除去a_1的n-1个元素中取r个元素的组合而得到，
其组合个数为C(n-1, r)。

由加法规则即得

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$$

利用式(1-9)和初始值C(n,0)=C(n,n)=1，对所有非负整数可计算出表1-1的三角形阵列，通常称这个三角阵列为杨辉三角形或Pascal三角形。

0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

填空题 2分

数510510能被［填空1］个不同的奇数整除

提醒：

(1) 510510=2*3*5*7*11*13*17

(2) 1是奇数也能够被整除

多选题 2分

题目要求如例子3，则集合A=｛1, 2, •••, 1000｝的数据整除3，可以分成3个子集合：A_1=｛1, 4, 7, •••, 1000｝ $|A_1|$ = 1000/3 +1=334， A_2=｛2, 5, 8, •••, 998｝ $|A_2|$ = 998/3 +1=333， A_3=｛3, 6, 9, •••, 999｝ $|A_3|$ = 999/3 =333，下面的分析正确的是：

- A 3个数据都来自统一集合的和可以被3整除：C(334,3)+2*C(333,3)
- B 3个分别来自子集合A1,A2,A3的和可以被3整除: 334*333*333
- C A中取3个数的和能够被3整除的方法有：C(334,3)+2*C(333,3)+334*333*333
- D A中取3个数的和能够被3整除的方法有：C(1000,3)

重复组合

定义1.5 从重集B= $\{k_1 \bullet b_1, k_2 \bullet b_2, \cdots, k_n \bullet b_n\}$ 中选取r个元素不考虑次序组合起来，称为从B中取r个元素的重复组合

定理1.6 B= $\{\infty \bullet b_1, \infty \bullet b_2, \cdots, \infty \bullet b_n\}$ 的r组合数为

$$F(n, r) = C(n+r-1, r) \tag{1.11}$$

证明：设n个元素b_1，b_2，…，b_n和自然数1，2，…，n一一对应，于是所考虑的任何组合便可看成是一个r个数的组合 $\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$ 。可认为各c_i是按大小次序排列的，相同的c_i 连续地排在一起。如按$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_r$排列。

重复组合

- 令$d_i=c_i+i-1\,(i=1,2,\cdots,r)$即

  $d_1=c_1,\quad d_2=c_2+1,\quad \cdots\quad ,d_r=c_r+r-1$。

- 由于c_i最大可取n，故d_i最大可取n+r-1，这样就得到一个集合{1,2,…,n+r-1}的r组合$d_1,d_2,\cdots,d_r$ $(d_1<d_2<\cdots<d_r)$

- 易见有一种$\{c_1,c_2,\cdots,c_r\}$的取法便有一种$\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$的取法。而这两种取法有一一对应关系，从而这两个组合计数问题是等价的。

- 这样一来，允许重复的从n个不同元素中取r个元素的组合数和不允许重复的从n+r-1个不同元素中取r个元素的组合数是相同的。故有

$$F(n,r)=C(n+r-1,r)$$

重复组合

注意：在定理1.6中，如果B的不同元素的重复数至少是r，则结论仍成立。

单选题 2分

某餐厅有7种不同的菜，为了招待朋友，一个顾客需要买14个菜，问有多少种买法?

A F(7,14)=C(7+14-1,14）=C(20,14)

B 7^14

C C(7,14)

D F(14,7)=C(14+7-1,7)=C(20,7)

单选题 1分

求n个无区别的球放入r个有标志的盒子($n>r$)而无一空盒的方式数。

A　C(n,r)

B　F(n,r)

C　F(n-r,r)

D　F(r,n-r)

单选题 1分

在由数0，1，…，9组成的r位整数所组成的集合中，如果将一个整数重新排列而得到另一个整数，则称这两个整数是等价的。那么有多少不等价的整数?

A 10^r

B F(10,r)

C F(r,10)

D C(10,r)

单选题 1分

在由数0，1，…，9组成的r位整数所组成的集合中，如果将一个整数重新排列而得到另一个整数，则称这两个整数是等价的。那么如果数字0和9最多只能出现一次，有多少不等价的整数。

A. F(10,r)-2*F(10,r-2)

B. F(8,r)+F(8,r-2)+2*F(8,r-1)

C. 2*F(8,r)+F(8,r-2)+2*F(8,r-1)

D. F(10,r)+2*F(10,r-1)+F(10,r-2)

单选题 1分

求方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$的非负整数解的个数。其中, n, r为非负整数。

- A F(n,r)
- B F(r,n)
- C C(n,r)
- D P(n,r)