

§2.1 正态过程

在现实问题中, 满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布.

电子技术中的热噪声是由大量的热运动引起, 也服从正态分布.

由于一个随机过程可以用有限维分布来描述, 为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.

§2.1 正态过程

在现实问题中, 满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布.

电子技术中的热噪声是由大量的热运动引起, 也服从正态分布.

由于一个随机过程可以用有限维分布来描述, 为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.

一、多维正态随机变量

1. 概率密度与特征函数

若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

记

$$\mu = E \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$,
 $|\rho| < 1$, 故协方差
矩阵满足 $|C| \neq 0$.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

(X, Y) 的联合概率密度为

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}\end{aligned}$$

记为 $(X, Y) \sim N(\mu, C)$.

定义2.1.1 设 $C=(c_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, μ 是 n 维实值列向量, 定义 n 维随机向量

$$X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T C^{-1} (X - \mu) \right\} \quad (*)$$

其中 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 称 X 服从 n 维正态分布.

记为 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T \sim N(\mu, C)$.

注 当 $C=(c_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, 有 $|C| \neq 0$;
若 $|C|=0$ 则不能用(*)式给出其概率密度. 称 X
服从退化正态分布或奇异正态分布.

定义2.1.2 n 维正态分布随机向量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的特征函数为

$$\varphi(t) = \exp\left\{j\mu^T t - \frac{1}{2} t^T C t\right\} \quad (**)$$

其中 $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

2.边缘分布及二阶矩

以下结论总假定随机向量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 服从 $N(\mu, C)$.

非退化

定理2.1.2 n 维正态分布随机变量 X 的任一子向量

$$(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_m})^T$$

也服从正态分布 $N(\tilde{\mu}, \tilde{C})$, 其中 $\tilde{\mu}$

\tilde{C} 是 C 保留第 k_1, k_2, \dots, k_m 行及列所得的 m 阶矩阵.

多元正态分布的边缘分布仍是正态分布

3.独立性问题

定理2.1.3 n 维正态分布随机向量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立的充要条件是它们两两不相关.

等价于其协方差矩阵是对角阵.

4.正态随机向量的线性变换

定理2.1.4正态随机向量 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$,
记 $E(X)=\mu$, 协方差矩阵为 C .

对 X 的线性组合

$$Y = \sum_{j=1}^n l_j X_j = L^T X, \quad L^T = (l_1, l_2, \dots, l_n)$$

有
$$E(Y) = \sum_{j=1}^n l_j \mu_j = L^T \mu,$$

$$D(Y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n l_j l_k c_{jk} = L^T C L,$$

定理2.1.5 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu, C)$ 的充要条件是它的任何一个非零线性组合

$$\sum_{j=1}^n l_j X_j,$$

可将多维正态随机变量问题转化为一维正态分布问题.

服从一维正态分布.

定理2.1.6 若 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu, C)$, $K=(k_{ij})_{m \times n}$ 是任意矩阵, 则 $Y=KX$ 服从 m 维正态分布 $N(K\mu, KCK^T)$.

正态分布的线性变换不变性

证 对于任意 m 维实值列向量 t , Y 的特征函数为

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= E(e^{jt^T Y}) = E(e^{jt^T KX}) = E(e^{j(K^T t)^T X}) \\ &= \exp\left\{j\mu^T (K^T t) - \frac{1}{2}(K^T t)^T C (K^T t)\right\}\end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ j(K\mu)^T t - \frac{1}{2} t^T (KCK^T) t \right\}$$

即随机向量 $Y=KX$ 服从 m 维正态分布 $N(K\mu, KBK^T)$

关于定理2.1.6的思考问题:

能否保证 $Y=KX$ 服从非退化正态分布 ?

反例: 设随机变量 X_0 与 V 相互独立, 都服从标准正态分布 $N(0,1)$, 令

$$X(1)=X_0+V, \quad X(2)=X_0+2V, \quad X(3)=X_0+3V,$$

问 $(X(1), X(2), X(3))$ 是否服从非退化正态分布?

分析 设

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix}$$

因

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ V \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

\mathbf{X} 的协方差矩阵为

$$\mathbf{KCK}^T = K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$| \mathbf{KCK}^T | = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$X=(X(1), X(2), X(3))$ 不服从非退化正态分布.

一般地, 若 $X=(X_1, X_2)$ 是非退化二维正态随机向量, 其线性变换 $Y= \mathbf{K}X$, 有

- 1) 每一分量服从正态分布;
- 2) 不能构成二维以上的非退化联合正态分布;

3) 当 $|KCK^T| \neq 0$ 时, 随机向量 Y 服从非退化正态分布.

可证明

推论 非退化正态分布随机向量 X 的行满秩线性变换仍服从非退化正态分布.

定理2.1.7 若随机向量 X 服从 $N(\mu, C)$, 则存在一个正交变换 U , 使得 $Y=UX$ 是一个相互独立的正态随机向量.

证 因 C 为实对称矩阵, 存在正交阵 U , 使

$$UCU^T = D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

d_i 是 C 的特征向量

又因 C 是正定阵(从而非奇异)

→ C 有 n 个线性无关特征向量

设 U 是以单位正交特征向量为列构成的正交阵, 令 $Y=UX$ 则得证.

二、正态随机过程

定义2.1.3 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 称为正态过程, 如果它的任意有限维分布都是联合正态分布. 即对任意的正整数 n 和 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 都服从正态分布.

注

- 1) 上述几个定理均可应用于正态过程.
- 2) 若存在 n , 对 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 服从退化正态分布, 称 $\{X(t), t \in T\}$ 为退化正态过程.
- 3) 正态过程的有限维分布由二阶矩完全确定.

有 对任意的 $n \geq 1$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T \sim N(\mu, C),$$

$$\mu = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_1, t_2) & \cdots & C(t_1, t_n) \\ C(t_2, t_1) & C(t_2, t_2) & \cdots & C(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_n, t_1) & C(t_n, t_2) & \cdots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

$$C(t_i, t_j) = E\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\} \\ (1 \leq i, j \leq n).$$

Ex.1 随机振幅电信号

设 $X(t) = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t, t \in R$

$$E(\xi) = E(\eta) = 0, E(\xi^2) = E(\eta^2) = \sigma^2, \quad \omega \text{ 为常数}$$

ξ 与 η 相互独立同服从正态分布,

- 1) 试求 $X(t)$ 的均值函数和相关函数;
- 2) 写出一维概率密度和二维概率密度.

解 1) $E\{X(t)\} = E(\xi)\cos\omega t + E(\eta)\sin\omega t = 0$

因 $E(\xi\eta) = 0$, 故

$$\begin{aligned}
 R(s, t) &= E\{(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)(\xi \cos \omega s + \eta \sin \omega s)\} \\
 &= E(\xi^2) \cos \omega t \cos \omega s + E(\eta^2) \sin \omega t \sin \omega s \\
 &= \sigma^2 \cos \omega(s - t) = \sigma^2 \cos(\tau), (\tau = s - t) \\
 \Rightarrow D(X(t)) &= R(t, t) = \sigma^2 \cos 0 = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

2) $X(t)$ 的一维密度为

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

$X(t_i)$ 是相互独立正态随机变量的线性组合, 故 $(X(t_1), X(t_2))$ 服从二维正态分布, 其相关系数为

$$\rho = \frac{R(s, t) - m(s)m(t)}{\sqrt{R(s, s)}\sqrt{R(t, t)}} = \frac{\sigma^2 \cos \omega \tau}{\sigma^2} = \cos \omega \tau$$

得过程 $X(t)$ 的二维密度为

仅与 $\tau=s-t$ 有关

$$f(x_1, x_2; s, t)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - \cos^2 \omega \tau}} e^{-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2 \cos \omega \tau + x_2^2}{2\sigma^2(1 - \cos^2 \omega \tau)}},$$

$(x, y) \in R_2.$

Ex.3 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 相互独立，都是正态随机过程，设

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \quad t \in R$$

证明 $Z(t)$ 是正态过程。

证 对任意正整数 n 及 $t_1, t_2, \dots, t_n \in R$
 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 和 $(Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n))$

都是 n 维联合正态随机向量，并相互独立。

$(Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n))$ 的 n 维特征函数为

$$\varphi_z(t_1, t_2, \dots, t_n; u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$= E\{e^{j[u_1(X(t_1)+Y(t_1))+\dots+u_n(X(t_n)+Y(t_n))]\}\}$$

$$= E\{e^{j[u_1X(t_1)+\dots+u_nX(t_n)]}\}E\{e^{j[u_1Y(t_1)+\dots+u_nY(t_n)]}\}$$

$$= \exp\{j\mu'_X u - \frac{1}{2}u' C_X u\} \exp\{j\mu'_Y u - \frac{1}{2}u' C_Y u\}$$

$$= \exp\{j(\mu_X + \mu_Y)' u - \frac{1}{2}[u' C_X u + u' C_Y u]\}$$

$$= \exp\{j(\mu_X + \mu_Y)'u - \frac{1}{2}[u'(C_X + C_Y)u]\}$$

由特征函数和分布函数的惟一性定理知

$$(Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n))$$

是正态随机向量.

例2.1.4 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是正态过程，证明以下过程仍为正态过程。

(1) 对任意的 $\tau \geq 0, \{X(t+\tau) - X(\tau), t \geq 0\}$

(2) 对任意的 $\lambda > 0, \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X(\lambda t), t \geq 0 \right\}$

(3)
$$Y(t) = \begin{cases} tX\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

(4) 对 $t_0 > 0$
$$Z(t) = \begin{cases} X(t_0 + s) - X(s), & s > 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$