

§3.5 随机过程的均方积分（一）

本节主要介绍黎曼意义下的均方积分概念

一、均方积分概念

定义3.5.1 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程,
 $f(t), t \in [a, b]$ 是普通函数,任意取分点 $a=t_0 <$
 $t_1 \cdots < t_n = b$,将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,做和

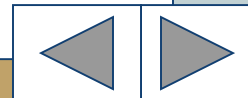
$$\sum_{k=1}^n f(t_k^*)X(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

其中 $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, n$.

记
$$\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$

若均方极限
$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k$$

存在, 且与区间 $[a, b]$ 的分法及 t^* 的取法无关,
称为二阶矩过程 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼均方
积分, 记为



$$\int_a^b f(t)X(t)dt$$

特别当 $f(t)=1, t \in [a, b]$ 则

$$\int_a^b X(t)dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 在 $[a, b]$ 上的均方积分.

定义3.5.2 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程,
 $f(t), t \in [a, b]$ 是普通函数,任意取分点 $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b$,将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,若均方极限



$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k^*) [X(t_k) - X(t_{k-1})]$$

存在, 且与区间 $[a, b]$ 的分法及 t^* 的取法无关,
称为二阶矩过程 $f(t)$ 对 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼—
斯蒂阶均方积分, 记为

$$\int_a^b f(t) dX(t)$$

二、均方积分准则

定理3.5.1 设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 是二阶矩过程, $f(t)$ 是普通函数, $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积的充分必要条件是二重积分

$$\int_a^b \int_a^b f(s) \overline{f(t)} R(s, t) ds dt$$

存在, 其中 $R(s, t)$ 是 $X(t)$ 的自相关函数..

证 充分性 若 $\overline{f(s)f(t)R(s,t)}$ 的二重积分存在,
对 $[a, b] \times [a, b]$ 的任意分割

$a=t_0 < t_1 \cdots < t_n=b, a=s_0 < s_1 \cdots < s_m=b$ 及任意

$(s_k^*, t_j^*) \in (s_{k-1}, s_k] \times (t_{j-1}, t_j], (k=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots, n)$

有
$$\int_a^b \int_a^b \overline{f(s)f(t)R(s,t)} ds dt$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{f(s_k^*)f(t_j^*)R(s_k^*, t_j^*)} \Delta s_k \Delta t_j$$



存在,其中

$$\Delta s = \max_{1 \leq k \leq m} \Delta S_k, \quad \Delta S_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\Delta t = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j, \quad \Delta t_j = t_j - t_{j-1},$$

$$\text{上式} = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n E[f(s_k^*) X(s_k^*) \overline{f(t_j^*) X(t_j^*)}] \Delta s_k \Delta t_j$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n E[f(s_k^*) X(s_k^*) \Delta s_k \overline{f(t_j^*) X(t_j^*) \Delta t_j}]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E \left[\sum_{k=1}^m f(s_k^*) X(s_k^*) \Delta s_k \sum_{j=1}^n f(t_j^*) X(t_j^*) \Delta t_j \right]$$

由均方收敛准则知

$$\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k^*) X(t_k^*) \Delta t_k$$

存在, 即 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

必要性 由洛易夫判别准则, 若均方积分

$$\int_a^b f(t) X(t) dt$$

存在, 则下列极限存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta s \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E \left[\sum_{k=1}^m f(s_k^*) X(s_k^*) \Delta s_k \overline{\sum_{j=1}^n f(t_j^*) X(t_j^*) \Delta t_j} \right]$$

$$= E \left[\int_a^b f(s) X(s) ds \overline{\int_a^b f(t) X(t) dt} \right]$$

$$(= E \left[\left| \int_a^b f(t) X(t) dt \right|^2 \right])$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s) \overline{f(t)} E[X(s) \overline{X(t)}] ds dt$$

$$= \int_a^b \int_a^b f(s) \overline{f(t)} R(s, t) ds dt$$

注1 实际推出重要公式

$$E\left[\left|\int_a^b f(x)X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

推论1 若 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 的自相关函数 $R(s, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上可积, 则 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积

$$E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b R(s, t)dsdt$$

重要
公式

推论2 若 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续,则 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

证 根据均方连续性准则,

$\{X(t), t \in [a, b]\}$ 均方连续,  定理4.2.1之推论

$X(t)$ 的自相关函数 $R(s, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续,

 $R(s, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上可积,

 **推论1** $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积.

EX.1 设 $X(t)=A\cos at+B\sin at, t\geq 0$, a 为常数
 $a\neq 0$, A 与 B 相互独立,均服从 $N(0,\sigma^2)$,判断 $X(t)$ 是否均方可积.

解 $m_X(t) = E(A)\cos at + E(B)\sin at = 0,$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=E[A^2\cos as\cdot\cos at+B^2\sin as\cdot\sin at]$$

$$= \sigma^2\cos a(t-s).$$

在 $[0,+\infty]\times[0,+\infty]$ 上连续,故 $X(t)$ 对所有
 $t\geq 0$ 均方连续,从而均方可积.



定义3.5.3 广义黎曼均方积分定义为

$$\int_a^\infty f(t)X(t)dt \triangleq \text{l.i.m}_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)X(t)dt$$

推论3 广义均方积分 $\int_a^\infty f(t)X(t)dt$

存在的充分必要条件是广义二重积分

$$\int_a^\infty \int_a^\infty f(s) \overline{f(t)} R(s, t) ds dt$$

存在且有限.

三、均方积分性质

定理3.5.2 均方积分具有以下性质

1) 均方积分惟一性

若 $\int_a^b f(t)X(t)dt = Y_1, \quad \int_a^b f(t)X(t)dt = Y_2$

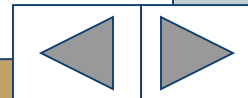
则 $Y_1 = Y_2 \quad (a.e.).$

2) 线性性

若 $X(t), Y(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积, 则对 $\forall \alpha, \beta \in C$

$$\int_a^b [\alpha f(t)X(t) + \beta g(t)Y(t)]dt$$

$$= \alpha \int_a^b f(t)X(t)dt + \beta \int_a^b g(t)Y(t)dt$$



特别有

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dt = \alpha \int_a^b X(t) dt + \beta \int_a^b Y(t) dt$$

3) 可加性

设 $a < c < b$, 若 $\int_a^c f(t)X(t)dt$ 及 $\int_c^b f(t)X(t)dt$ 存在,

则
$$\int_a^b f(t)X(t)dt = \int_a^c f(t)X(t)dt + \int_c^b f(t)X(t)dt$$

以上各条性质类似于普通黎曼积分.

4) 设 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 均方连续, 则

$$\left\| \int_a^b X(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|X(t)\| dt;$$

证 由定理3.5.1之推论1

$$E\left[\left|\int_a^b X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b R(s,t)dsdt$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b |R(s,t)|dsdt = \int_a^b \int_a^b |E[X(s)\overline{X(t)}]|dsdt$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b [E(|X(s)|^2)E(|X(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}dsdt$$

许瓦兹
不等式

$$= \left\{\int_a^b [E(|X(t)|^2)]^{\frac{1}{2}}dt\right\}^2 = \left\{\int_a^b \|X(t)\|dt\right\}^2$$

定理3.5.3 均方积分的矩

若 $f(t)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积, 则有

$$1) \quad E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right] = \int_a^b f(t)m_X(t)dt$$

$$2) \quad E\left[\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2\right] = \int_a^b \int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$$

定理4.5.1
之注2

证 1)

$$\begin{aligned} E\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\right] &= E\left[\text{l.i.m}_{\Delta \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k\right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} E\left[\sum_k f(t_k^*)X(t_k^*)\Delta t_k\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*) E[X(t_k^*)] \Delta t_k = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_k f(t_k^*) m_X(t_k^*) \Delta t_k \\ &= \int_a^b f(t) m_X(t) dt \end{aligned}$$

续EX.1 设 $X(t) = A \cos at + B \sin at, t \geq 0$, a 为常数 $a \neq 0$, A 与 B 相互独立, 均服从 $N(0, \sigma^2)$, 令

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds,$$

计算 $m_Y(t)$ 和 $D_Y(t)$.

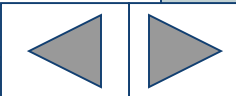
解 $m_Y(t) = E[Y(t)] = \int_0^t E[X(s)] ds = 0,$

$$R_Y(s, t) = \int_0^s \int_0^t R_X(u, v) du dv$$

$$= \int_0^s \int_0^t \sigma^2 \cos a(u - v) du dv$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2} [1 - \cos as - \cos at + \cos a(t - s)]$$

$$D_Y(t) = \frac{2\sigma^2}{a^2} (1 - \cos at).$$



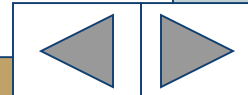
EX.2 设 A, B 相互独立同分布于 $N(0, \sigma^2)$, $X(t) = At + B$, $t \in [0, 1]$, 试求下列随机过程的数学期望.


$$Z(t) = \int_0^1 X(t) dt, \quad Y(t) = \int_0^1 X^2(t) dt,$$

解 $\because E[X(t)] = E(A)t + E(B) = 0,$

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E[A^2 t^2 + 2ABt + B^2] \\ &= E(A^2)t^2 + E(B^2) + 2E(A)E(B)t = \sigma^2(1 + t^2) \end{aligned}$$

$$\therefore E[Z(t)] = \int_0^1 E[X(t)] dt = 0,$$




$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \int_0^1 E[X^2(t)] dt \\ &= \int_0^1 \sigma^2 (1+t^2) dt = \frac{4}{3} \sigma^2. \end{aligned}$$

四、均方不定积分

定义3.5.4 设 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续,

$$Y(t) = \int_a^t X(s) ds \quad \forall t \in [a, b],$$

称为 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的**均方不定积分**.

定理3.5.4 设 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续,则其在 $[a, b]$ 上的均方不定积分 $Y(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可导,且

- 1) $Y'(t) = X(t);$
- 2) $E[Y(t)] = \int_a^t E[X(s)]ds,$
 $m_Y(t) = \int_a^t m_X(s)ds;$
- 3) $R_Y(s, t) = \int_a^s \int_a^t R_X(u, v)dudv.$

定理3.5.5 (牛顿-莱布尼兹公式) 设 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可导, $X'(t)$ 均方连续, 则有

$$\int_a^b X'(t)dt = X(b) - X(a)$$

证 $X'(t)$ 均方连续

→ $Y(t) = \int_a^t X'(s)ds$ 在 $[a, b]$ 上均方可导, 且
 $Y'(t) = X'(t)$, 定理4.4.4之1)

→ $[Y(t) - X(t)]' = Y'(t) - X'(t) \equiv 0, \quad t \in [a, b],$

→ $Y(t) - X(t) = X \cdot \circ \circ \circ$ 与 t 无关的
随机变量

→ $Y(t) = X(t) + X, \quad t \in [a, b],$

令 $t = a$, 得 $X(a) + X = Y(a) = 0,$



$$X = -X(a)$$



$$\int_a^b X'(t)dt = Y(b) = X(b) - X(a).$$

EX.5 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 为参数为 σ^2 的维纳过程,求积分过程

$$X(t) = \int_0^t W(s)ds, \quad t \geq 0,$$

的均值函数和相关函数.

解 $m_X(t) = E[\int_0^t W(s)ds] = \int_0^t E[W(s)]ds = 0,$

$$R_X(s, t) = \int_0^s \int_0^t R_W(u, v) du dv$$

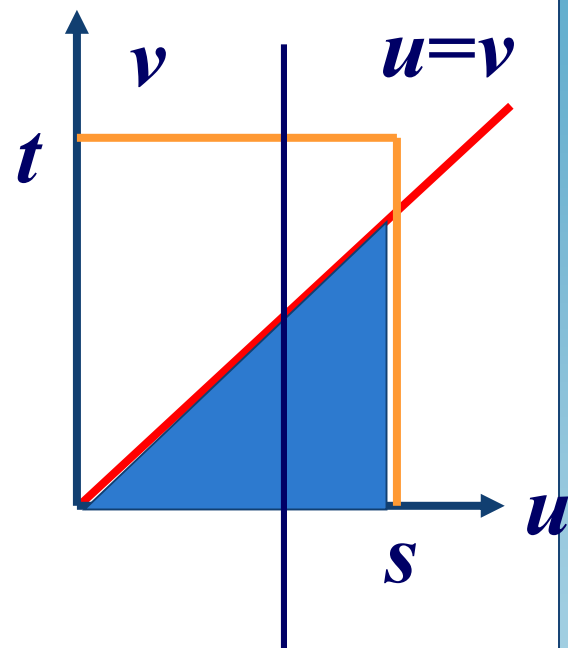
$$= \int_0^s \int_0^t \sigma^2 \min(u, v) du dv$$

设 $s \leq t$

$$R_X(s, t) = \sigma^2 \int_0^s du \int_0^u \min(u, v) dv$$

$$+ \sigma^2 \int_0^s du \int_u^t \min(u, v) dv$$

$$= \sigma^2 \int_0^s du \int_0^u v dv + \sigma^2 \int_0^s du \int_u^t u dv$$



$$= \frac{\sigma^2 s^2}{6} (3t - s)$$

由 s 与 t 的对称性

$$R_X(s, t) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 s^2}{6} (3t - s), & 0 \leq s \leq t; \\ \frac{\sigma^2 t^2}{6} (3s - t), & 0 \leq t < s \end{cases}$$

维纳过程是均方连续, 均方不可导, 均方可积的二阶矩过程.

二阶矩过程的极限、连续、导数、积分，其统计特征主要由相关函数表征。

均方可导



均方连续



均方可积

逆均不真