第五章 鸽笼原理与Ramsey定理

习题

- 5.3. 在边长为1的正三角形内任意放置5个点，则其中至少有两个点的距离<=1/2

- 5.5. 在下图中，每个方格着红色或蓝色，证明至少存在两列有相同的着色。

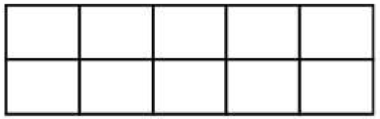

图 2-3

主观题 10分

5.6. 任给五个整数，则必能从中选出三个，使得它们的和能被3整除。

主观题 5分

5.7. 一个学生打算用37天总共60学时自学一本书，他计划每天至少自学1学时，证明：无论他怎样安排自学时间表，必然存在相继的若干天，在这些天内其自学总时数恰好为13学时(假定每天自学学时数为整数)。

主观题 10分

5.8. 已知n个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,证明：在这n个数中总是可以选择两个数使得这两个数的和或差能被 n整除。

主观题 10分

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是1，2，…，n的一个排列，
证明：如果n是奇数，则乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots\cdots(a_n-n)$
是一个偶数

主观题 10分

5.10. 证明：在任意52个整数中，必存在两个数，其和或差能被100整除。

- 5.11. 证明：N（4，4）=18

- 2.12. 证明：$N(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le N(a_1-1,a_2,\cdots,a_n)$

$$+N(a_1,a_2-1,\cdots,a_n)$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$+N(a_1,a_2,\cdots,a_n-1)$$

- 证明：记 $N_i = N(a_1, a_2, \cdots, a_i - 1, \cdots, a_n)$ $i = 1, 2, \cdots, n$ 记 $X = \sum_{i=1}^{n} N_i$

考虑 X个顶点的完全图，用n种颜色Ci ($i = 1, 2, \cdots, n$) 对完全图的边着色。

在X点中任取一点p，由p和余下的点连接了X-1条边。则有：

$$\begin{aligned} X - 1 &= N_1 + N_2 + \cdots \ldots + Nn - 1 \\ &\geq N_1 + N_2 + \cdots + N_n - (n-1) \\ &= N_1 + N_2 + \cdots + N_n \text{ -n+1} \end{aligned}$$

现在有$c_1, c_2, \cdots, c_n$个鸽笼，由鸽笼原理，至少有个鸽笼i，里面存在有Ci色的边为n_i个（鸽子）。

- 所以，这N_i条边连接了另外N_i个顶点，所以有：$N_i=N(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_i-1,a_{i+1},\cdots,a_n)$，从而有：
- 或者有c_1色的纯a_1角形；
- 或者有c_2色的纯a_2角形；
- ……
- 或者有c_i色的纯a_i-1角形；而这N_i个点和P相连，所以有纯a_i角形；
- ……
- 或者有c_i色的纯a_n角形。

$N(a_1,a_2,...,a_n)$ 是保证存在上述纯a_i角形的最少顶点数量，

所以有该结论成立。

5.13. 证明：如果 $N(a,b-1)$ 和 $N(a-1,b)$ 都是偶数，则

$$N(a,b) < N(a-1,b) + N(a,b-1)$$

- 证明：问题实际上是证明：$N(a,b) \le N(a-1,b) + N(a,b-1) - 1$

$X = N\left(a-1,b\right) + N\left(a,b-1\right) - 1$ 因为N(a-1,b)和N(a,b-1)都是偶数，则X是奇数，假设现在有X个人。

可以证明，这X个人不可能都认识N(a-1,b)-1个人。用反证法。
设这X人认识的人数都是N(a-1,b)-1,则总共认识的人数是Y=X*(N(a-1,b)-1)
这是奇数，但实际上每一个相识关系涉及2个人，因此会计算2次，总次数应该是偶数，因此假设错误。
在这x个人当中，下列2种情况之一必定出现：

- (1) 存在1个p,他认识的人数<=N(a-1,b)<N(a-1,b)-1
- (2) 或者存在1个p,他认识的人数>N(a-1,b)

- (1) 存在1个p,他认识的人数<N(a-1,b)-1
- 则p不认识的人数至少>X-(N(a-1,b)-1)
- = N(a-1,b)+N(a,b-1)-1-N(a-1,b)+1
- =N(a,b-1)
- 这说明或者a个人互相认识，或者b-1个人互相不认识，加上都不认识的p，则有b个人不认识，所以原式子成立

- (1）存在1个p,他认识的人数<N(a-1,b)-1
- (2) 存在1个p,他认识的人数>N(a-1,b)

- (2）存在1个p,他认识的人数>N(a-1,b)
- 　　这表明或者有a-1个人互相认识，或者b个人互相不认识。加上和p都互相认识，因此或者存在a个人互相认识，或者存在b个人互相不认识。因此得证。