第八部分：数值积分和数值微分

梯形公式，辛卜生求积公式，复合求积公式及算法，插值型求积公式的误差估计方法，高斯积分法，差商计算数值微分方法。

例1　设求积公式. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$.

解：令公式对 $1, x, x^2$ 精确成立

$$\begin{cases} 2 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = -\omega_0 + \omega_2 \\ \frac{2}{3} = \omega_0 + \omega_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{3} \\ \omega_1 = \frac{4}{3} \\ \omega_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

试 x^3 成立. x^4 不成立. 则代数精度为3.

①. 梯形公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max|f''(\xi)|$$

② 辛普森公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$|R| \le \frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \max f^{(4)}(\xi)$$

$$\frac{(b-a)^5}{2880}\max f^{(4)}(\xi)$$

④. 高斯公式　利用正交多项式.　高斯点为正交多项式零点, $n=1$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

当区间是 $[-1,1]$ 时, 作 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{2}$.

例：$n=2$时，用高斯公式计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

解：令 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$. $=\int_{-1}^{1} \frac{\sin(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} dt$

$$=\int_{-1}^{1} \frac{\sin[\frac{1}{2}(t+1)]}{t+1} dt$$

取高斯点为 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. $=\frac{\sin[\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1)]}{-\frac{\sqrt{3}}{3}+1}+\frac{\sin[\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{3}+1)]}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}$