§5.2 鸽笼原理的一般形式

在定理5.1中，如果将n+1改写成

$$n+1=\underbrace{2+2+\cdots+2}_{n}-n+1$$

于是定理2.1就可以叙述为：如果把2+2+…+2−n+1个物体放入n个盒子中去，则至少存在一个 i(i=1, 2, …, n)，使得第 i 个盒子中至少放有两个物体。

我们设想，如果在2+2+2+ ·+2−n+1中的第i个2改为正整数q_i（i=1, 2, …， n）就得到鸽笼原理的一般形式：

定理5.2 设q_i是正整数(i=1, 2, …, n), q≥$q_1+q_2+\cdots+q_n$−n+1, 如果把q个物体放入n个盒子中去，则存在一个i，使得第i个盒子中至少有q_i个物体。

证明：

■ 用反证法。假设结论不成立，即对每一个 i，第 i 个盒子至多放有 n_i 个物体（$n_i \le q_i - 1$），从而这n个盒子放入的物体的总数为

$$q = \sum_{i=1}^{n} n_i \le \sum_{i=1}^{n} (q_i - 1) = \sum_{i=1}^{n} q_i - n < q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$$

♡

这与 $q \ge q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$ 矛盾，从而定理得证。

■ 这样一来，定理5.1是定理5.2的特殊形式。

■

推论1 如果把n(r−1)+1个物体放入n个盒子中，则至少存在一个盒子放有不少于r个物体。

推论2 对于正整数 $m_i(i=1,2\cdots,n)$，如果 $(\sum_{i=1}^{n} m_i)/n > r-1$，至少存在一个i，使得 $m_i \geq r$。

推论2证明：

$$\because \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)/n > r-1$$

有 $$\sum_{i=1}^{n} m_i > n(r-1)$$

或 $$\sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant n(r-1)+1$$

设第 i 个盒子放有 m_i 个物体，由推论1知，把不少于n(r-1)+1的 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 个物体放入n个盒子里，至少存在一个i使得 $m_i \geq r$。

[例1] 证明：在由每个包含n^2+1个不同的实数的序列中，存在一个长度为n+1的递增子序列，或者存在一个长度为n+1的递减子序列。（一个序列的长度是指该序列的元素个数）。

证明： 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$是一个实数序列，并假设在这个序列中没有长度为n+1的递增子序列，则要证明一定有一个长度为n+1的递减子序列。

- 令m_k表示以a_k为首项的最长递增子序列的长度（$k=1,2\cdots,n^2+1$），则对于每个k（$1\le k\le n^2+1$），由假设知1≤m_k≤n。即是说有n^2+1个数$m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$都在1到n之间。由推论1知，在$m_1,m_2,\cdots,m_{n^2+1}$个数中必有r=n+1个数是相同的（$\because n^2+1=n(r-1)+1$）。

不妨设♡$m_{k_1}=m_{k_2},=\cdots=m_{k_{n+1}}$

其中 $1\le k_1<k_2<\cdots k_{n+1}\le n^2+1$ 。下面指出，当 $k_i<k_{i+1}$ 时，必有 $a_{k_i}\ge a_{k_{i+1}}$，若对某个 i(i=1, 2, …, n), 有 $a_{k_i}<a_{k_{i+1}}$，则可把 a_{k_i} 放在以 $a_{k_{i+1}}$ 为首项的最长递增子序列的前面，就得到以 a_{k_i} 为首项的一个递增子序列，这样一来，就有 $m_{ki}>m_{k_{i+1}}$，这与 $m_{ki}=m_{k_{i+1}}$ 相矛盾，因此对每个i=1, 2, …, n都有

$$a_{k_1}\ge a_{k_2}\ge\cdots\ge a_{k_{n+1}}$$

这样一个长度为n+1的递减子序列。

故本例结论成立。

[例2]

将两个大小不一的圆盘分别分成200个相等的扇形。在大圆盘上任选取100个扇形染成红色，另外的100个扇形染成蓝色，并将小圆盘上的扇形任意染成红色或蓝色，然后将小圆盘放大圆盘上且中心重合时，转动小圆盘可使其每一扇形都迭放于大圆盘的某一扇形内.证明：当适当转动小圆盘可使迭放的扇形对中，同色者至少为100对。

证明： 1. 首先将大圆盘固定不动，则使小圆盘的每一扇形都迭放于大圆盘的一个扇形中有200种可能的位置(将这200种可能位置看作200个不同的盒子)。

2. 由于在这200种可能位置中，小圆盘上的每一扇形都有100次配成同色的扇形对(将同色的扇形对看作放入盒子中的物体)。因此这样的扇形对一共有200×100个。而$200\times100>200\times(100-1)+1$♡

故由推论1知，至少有一种小圆盘与大圆盘的迭放可使迭放的扇形对中至少有100个同色的扇形对。

［例3］如果将1，2，…，10随机地摆成一圈，则必有某相邻三数之和至少是17

解：

- 设 $m_i(i=1,2,\cdots,10)$表示该圈上相邻三数之和，这样的和共有十个。而1, 2, …10中的每一个都出现在 $m_1,m_2,\cdots m_{10}$这十个和的三个之中。而

$$\left(\sum_{i=1}^{10} m_i\right)/10=\frac{3(1+2+\cdots+10)}{10}=16.5>17-1$$

- 故由推论2知，存在一个$i(i=1,2,\cdots,10)$使 $m_i\geq 17$。

[例4] 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。

- **解：**

设 a_1 为第一天该棋手下棋的盘数，a_2 是第一、二天该棋手下棋盘数的和，a_j 是第一、二、…、j天该棋手下棋盘数的和，j=1, 2, ..., 77，于是序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 是严格递增序列，且 $a_1 \geq 1, a_{77} \leq 132$

于是序列 $a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$ 也是严格递增序列。而 $a_{77}+21 \le 153$ ，故154个数$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1+21, a_2+21, \cdots, a_{77}+21$都在1和153两个整数之间，由鸽笼原理知，这154个数中必有两个是相等的。

- 故一定存在两个数i和j，使得 $a_i = a_j + 21$ 即$a_i - a_j = 21$因此，在j+1天，j+2天，…，i天这些天中，这个棋手恰好下棋21盘。