第二章
容斥原理

§2.1 容斥原理

- 容斥原理又称包含排除原理，它是利用集合的基本运算来解决实际问题中的大量计算问题，因此它是解决计数问题的主要工具之一。

■ 在一些计数问题中，经常是间接计算一个集合中的元素个数比直接计算更容易。

比如，某单位正在举行酒会，有187人参加，其中有25位女宾。由于某种需要，该单位想知道有多少男宾出席?

如果直接去计算男宾的人数就显得费时麻烦。但是，如果间接计算就显得很容易了。即先计算参加酒会的女宾数量，然后从参加酒会总人数中减去女宾的人数就得到男宾的数量。这是一个显而易见的道理。它是利用如下原理进行计算的。

如图2.1，集合A是集合S的子集，则计算A中元素的个数等于S中元素的个数再减去属于S但又不属于A的元素个数，即

$$|A| = |S| - |\overline{A}| \qquad (2.1)$$

或

$$|\overline{A}| = |S| - |A| \qquad (2.2)$$

如果把集合A看成是具有某种性质p的元素所组成，则公式(2.2)表明：S中不具有性质p的元素个数等于S中元素的个数减去具有性质p的元素个数。

■ 公式(2.1)、(2.2)的容斥原理的一个雏形，将它加以逻辑推广就得到一般的容斥原理。

■　下面，我们考虑集合S中具有两个子集合$A_1.A_2$的文氏(Venn)图2-2。利用此图，有计算集合$A_1 \cup A_2$和$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$中的元素个数的公式为

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \qquad (2.3)$$

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \qquad (2.4)$$

同样，如果把集合$A_i = (i=1,2)$ 看成是具有某种性质$p_i = (i=1,2)$的元素所组成，则式(2. 4)表明：S中既不具有性质 p_1又不具有性质 p_2的元素个数等于S中元素的个数减去具有性质p_1的元素个数和具有性质p_2的元素个数再加上既具有性质 p_1又具有性质 p_2 的元素的个数。

- 公式(2.3)和(2.4)是由S中的一个集合(或一种性质)推广到S中具有两个集合(或两种性质)的容斥原理。之所以称为容斥原理，是因为首先把所有的元素容纳在内，然后再排斥掉 A_1和 A_2中的元素，再重新容纳 $A_1 \cap A_2$ 中的元素。

一般地，令 $A_i(i=1,2,\cdots,m)\subseteq S$ ，且 A_i 是S中具有性质 p_i 的元素所组成的子集合。则

$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ 是S中同时具有性质 $p_1,p_2,\cdots p_m$ 的元素子集

合，$\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}$ 是S中既不具有性质 p_1，又不具有性质 p_2，……，更不具有性质 p_m 的元素子集合。

于是我们有下的容斥原理。

定理2.1 S中不具有性质 $p_1, p_2, \cdots p_m$ 的元素个数为

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| - \sum_{i\neq j j\neq k}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m| \qquad (2.5)$$

- 式中，第一个和式取遍集合 {i | i=1, 2, •••m},
- 第二个和式取遍集合

{(i, j) | i, j=1, 2, •••, m; i≠j} ,

- 第三个和式取遍集合

{(i, j, k) | , i, j, k=1, 2, •••, m; i≠j≠k}

提示:

式(2.5)的左端是计算S中不具有m个性质$p_1, p_2, \cdots p_m$中任何一个元素的个数。如果我们能够证明式(2.5)右端不具有m个性质 $p_1, p_2, \cdots p_m$ 中的任何一个性质的一个元素被计算的次数的净值为1，而至少具有这m个性质$p_1, p_2, \cdots p_m$中之一的元素被计算的次数的净值为0的话，那么式(2.5)就被证明。

- 首先考虑S中一个不具有这m个性质 $p_1, p_2, \cdots p_m$ 中任何一个性质的元素x，它在S中，但不在$A_i (i=1,2,\cdots,m)$ 中。于是它在式(2.5)右边被计算的次数的净值为

$$1-0+0-0+\cdots+(-1)^m \cdot 0=1$$

其次考虑S中的恰好具有这m个性质中n个性质(1≤n≤m)的一个元素y，由于它在S中，故它在S中被计算的次数为$\binom{n}{0}=1$

又由于y恰好具有n个性质，所以它是集合$A_1, A_2, \cdots, A_m$中的n个集合的元素，因而它在$\sum|A_i|$中被计算的次数是$\binom{n}{1}=n$ 。

- 又因为在n个性质中取出一对性质的方法有 $\binom{n}{2}$ 个，故y是 $\binom{n}{2}$ 个集合 $A_i \cap A_j$ 中的一个元素，所以它在 $\sum|A_i \cap A_j|$ 中被计算的次数是 $\binom{n}{2}$；

同样的道理，它在 $\sum|A_i \cap A_j \cap A_k|$ 中被计算的次数是 $\binom{n}{3}$，……，因此，y在式(2.5)右端被计算的次数的净值为

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m}$$

由于n<k时，$\binom{n}{k}=0$ ，且由式（1.15）有

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^m\binom{n}{m}$$

$$=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$=0$$

- 于是，若y具有m个性质p_1，p_2，…，p_m中的至少一个性质时，它在式(2.5)右边被计算的次数的净值为0。故定理得证。

■ 此定理还可以用归纳法证之。
留作练习。

在集合S中至少具有性质p_1，p_2，…，p_m中的一个性质的元素个数是

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m| \quad (2.6)$$

- 证明：由于集合$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$是S中至少具有m个性质$p_1$，$p_2$，…，$p_m$中的一个性质之元素所组成的子集合，所以有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$$

将式(2.5)代入上式即得式(2.6)。
故推论得证。

- ■ 所谓***容斥原理***指的就是式*(2.5)*和*(2.6)*这两个公式。

而式(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)均是这两个公式的特例。

例1

某校甲班共有学生60名，

其中24个学生喜爱数学，28个学生喜爱物理，

26个学生喜爱化学，

10个学生既喜爱数学又喜爱物理，

8个学生既喜爱数学又喜爱化学，

14个学生既喜爱物理又喜爱化学，

6个学生对这三门学科都喜爱，

*问*有多少学生对这三门学科都不喜爱?

例2

求从1到1000的整数中不能被5，6和8中任何一个整除的整数个数。

例3 求欧拉函数$\phi(n)$之值。

解： 首先定义欧拉函数$\phi(n)$为小于n又和n互素的正整数的个数。

我们知道，对于任一大于1的正整数n都可以唯一地分解为

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots\cdots p_m^{a_m}$$

■其中$p_1<p_2<\dots<p_m$都是不超过n的素数，而$a_1,a_2,\dots,a_m$都是正整数。

设S={1, 2, …, n}，令Q_i(i=1, 2, …, m)表示S中能被p_i(i=1, 2, …, m)整除的整数这一性质，并令A_i为S中具有性质Q_i的那些整数所组成的集合。则

$\overline{A_i}$为S中不能被p_i整除的整数所组成的集合。于是

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\cdots\overline{A_m}|$就是$s$中不能被$p_1,p_2,\cdots p_m$整除的整数个数。

■由容斥原理式(2.5)有

$$\varphi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_m}|$$

$$= |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

而 $|S| = n, |A_i| = \dfrac{n}{p_i} (i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j} (i, j = 1, 2, \ldots, m; i \neq j)$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k} (i, j, k = 1, 2, \cdots, m; i \neq j \neq k)$$

………………

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_m| = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m}$$

将以上数值代入 $\varphi(n)$ 表达式得

$$\varphi(n)=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_m}|$$

$$=n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\frac{n}{p_3}+\cdots+\frac{n}{p_m}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-1}p_m}\right)$$

$$-\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1p_2\ldots p_m}$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$$

如$n=30=2\times3\times5$,则

$\varphi(30)=30(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5)=8$

即小于30而与30互素的正整数有8个:

1,7,11,13,17,19,23,29。

［例4］在由a,b,c,d四个字符构成的n位符号串中，求a,b,c至少出现一次的符号串的数目。

〔例5〕把n本不同的书放入m个有编号的箱子中去(n≥m)，使得没有一个箱子为空，问共有多少种放法?

[例6] 求不超过120的素数个数。

因$11^2=121$，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。

设A_i 为不超过120的数 i 的倍数集，i=2，3，5，7。

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60, |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24, |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3} \right\rfloor = 20, |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor = 12,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor = 8, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor = 8,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor = 5, |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor = 3,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 4,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2,$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,$$

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}\right| &= 120 - |A_2| - |A_3| - |A_5| \\
&\quad - |A_7| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| \\
&\quad + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| + |A_5 \cap A_7| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| \\
&\quad - |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
&\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 \\
&\quad + 8 + 5 + 3) - (4 + 2 + 1 + 1) \\
&= 27.
\end{aligned}
$$

注意：27并非就是不超过120的素数个数，因为这里排除了2，3，5，7这四个数，又包含了1这个非素数。2，3，5，7本身是素数。故所求的不超过120的素数个数为：

$$27+4-1=30$$