§2.2

重集的r-组合

■ 在第一章§1.3节中，曾给出了重集 $B=\{n_1\cdot b_1, n_2\cdot b_2, \ldots, n_k\cdot b_k\}$ 在重复数 $k_i=\infty(i=1,2,\ldots,n)$ 时与在重复数 $k_i\geqslant r(i=1,2,\ldots,n)$ 时的r-组合数是相同的，见式(1.11)。

在这一节，我们用实例说明，

当重集B的元素具有任意给定的重复数时，

怎样利用式(1.11)和*容斥原理*求B的r-组合数。

［例1］ 求重集$B=\{3\bullet a_1, 7\bullet a_2, 2\bullet a_3, 15\bullet a_4\}$的r-组合数，其中r=12。

■ **解：** 构造集合B′ = $\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \infty\cdot a_3, \infty\cdot a_4\}$。令集合B′的所有12-组合构成的集合为S。由式(1.11)有

$$|S| = F(4, 12) = \binom{4+12-1}{12} = 455$$

- 令p_1表示S中的元素至少含有4个a_1这一性质，p_2表示S中的元素至少含有8个a_2这一性质，p_3表示S中的元素至少含有3个a_3这一性质，p_4表示S中的元素至少含有16个a_4这一性质。

并令A_i $(i=1,2,3,4)$表示S中具有性质$p_i(i=1,2,3,4)$的元素所构成的集合，于是B的12-组合数就是S中不具有性质p_1,p_2,p_3和p_4的元素个数。

由容斥原理式(2.5)有

由于已经求得 $|S|=455$，

下面分别计算(A)式右端其他的项。

由于A_1中的每一个12-组合至少含有4个a_1，故将每一个这样的组合去掉4个a_1 就得到集合B' 的一个8-组合。

反之，如果取B' 的一个8-组合并加4个a_1进去，就得到了A_1的一个12-组合。于是A_1的12-组合数就等于B' 的8-组合数

故有 $|A_1| = F(4,8) = \binom{4+8-1}{8} = 165$

- 同样的分析可得

$|A_2|=F(4,4)=\binom{4+4-1}{4}=35$

$|A_3|=F(4,9)=\binom{4+9-1}{9}=220$

$|A_4|=0$ (特别注意：包含16个a_4的12-组合是不可能的)

- 用类似的分析方法可分别求得下列式子

$$|A_1 \cap A_2| = F(4,0) = \binom{4+0-1}{0} = 1$$

$$|A_1 \cap A_3| = F(4,5) = \binom{4+5-1}{5} = 56$$

$$|A_1 \cap A_4| = 0$$

$$|A_2 \cap A_3| = F(4,1) = \binom{4+1-1}{1} = 4$$

$$|A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_2 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$ (5+4+5>12)

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

将上面的值代入(A)式即得B的12-组合数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|$$

- =455-(165+35+220+0)

  +(1+56+4+0+0+0)-0+0

- =96