3.2 母函数的基本运算

上节介绍了普通母函数和指数母函数的概念，这节将讨论母函数运算的一些基本关系。

设A(x), B(x)和C(x)分别是序列 $(a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_r, \ldots)$ $(c_0, c_1, \ldots, c_r, \ldots)$ 的普通母函数，

则有下列定义

定义3.3

$C(x)=A(x)+B(x)$当且仅当对所有的i，都有$c_i=a_i+b_i(i=0,1,2,\ldots,r,\ldots)$。

定义3.4

$C(x)=A(x)B(x)$当且仅当对所有的i，都有

$$c_i=\sum_{k=0}^{i}a_k b_{i-k}(i=0,1,2\cdots,r,\cdots)$$

例1

设A(x)是序列$(a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)$的普通母函数，则A(x)/(1-x)是序列

$(a_0, a_0+a_1, \ldots, a_0+a_1+\ldots+a_r, \ldots)$的普通母函数

证明：由式(1.20)知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots$$

- 故1/(1-x)是序列(1，1，…，1，…)的普通母函数。

令B(x)=1/(1-x)，由定义3.4有

$$c_0 = a_0 \cdot 1 = a_0$$

$$c_1 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 = a_0 + a_1$$

$$c_2 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_r = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + \cdots + a_r \cdot 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$$

- 故A(x)/(1-x)=A(x)B(x)=C(x)是序列

$(a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \ldots, a_0+a_1+\ldots+a_r, \ldots)$的普通母函数。

- 结论：若 $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$ ，则 $B(x) = \dfrac{A(x)}{1-x}$

- 另外，我们在这里看一看形如$b_k=f(a_m, a_{m+1}, a_{m+2},\ldots, a_{m+l})$的母函数，它们有利于我们学会用母函数来解决问题。

App.1：

若 $b_k = \begin{cases} 0 & k < l \\ a_{k-l} & k \geq l \end{cases}$ 则 $B(x) = x^l A(x)$

证： $B(x) = 0 + 0 + \cdots + 0 + b_l x^l + b_{l+1} x^{l+1} + \cdots$

$$= a_0 x^l + a_1 x^{l+1} + \cdots$$

$$= x^l A(x)$$

App.2：若 $b_k = a_{k+l}$，

则 $$B(x) = [A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k] / x^l$$

证：

$$\therefore \quad B(x) = a_l + a_{l+1}x + a_{l+2}x^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{x^l}(a_l x^l + a_{l+1}x^{l+1} + a_{l+2}x^{l+2} + \cdots)$$

$$= [A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{l-1}x^{l-1}] / x^l$$

$$= [A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k] / x^l$$

App.3： 若 $b_k=\sum_{i=0}^{k}a^i$，则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(k+1)(k+2)x^k=\frac{1}{(1-x)^3}$$

App.4： 若 $b_k = a_k + a_{k+1} + \cdots = \sum_{l=k}^{\infty} a_l$，

则 $$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

App.5： 若$b_k = ka_k$，则 $B(x) = xA'(x)$

App.6： 若 $b_k = \frac{a_k}{1+k}$，则 $B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

［**例2**］求和$\sum_{i=1}^{r} i^2$的值。

解：先求序列$(0^2, 1^2, 2^2, \ldots, r^2, \ldots)$的普通母函数。

由式(1.20)知 $$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

两边微分后再乘以x得 $$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$$

再将上式两边微分后再乘以x得

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k=0+1^2x^1+2^2x^2+\cdots+r^2x^r+\cdots$$

故$\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$是序列$(0^2, 1^2, 2^2, ..., r^2, ...)$的普通母函数。

由例1的结论知，$\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^4}$是序列$(0^2, 0^2+1^2, 0^2+1^2+2^2 ..., 0^2+1^2+2^2+...+ r^2, ...)$的普通母函数。

又由二项式定理式(1. 16)知

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}=x(1+x)\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)\cdots(-4-r+1)]}{r!}(-1)^r x^r\right]$$

$$=x(1+x)\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-4)(-5)(-6)\cdots(-4-r+1)]}{r!}(-1)^r x^r\right]$$

$$=x(1+x)\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+3)!}{3!\,r!}\right]x^r$$

$$=x(1+x)+x(1+x)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$$

- 由上式可见，在$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$的展开式中，x^r的系数是

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{6}+\frac{(r-1)r(r+1)}{6}=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

故有

$$\sum_{i=1}^{r} i^2 = 1^2+2^2+\cdots+r^2=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

- 设A(x), B(x)和C(x)分别是序列
  $(a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)$,
  $(b_0, b_1, \ldots, br, \ldots)$
  $(c_0, c_1, \ldots, c_r, \ldots)$的指数母函数，有

定义3.5 C(x)=A(x)+B(x)当且仅当对所有的i, 都有$c_i=a_{i+}b_i$ (I=0, 1, 2, ..., r, ...)

定义3.6 C(x)=A(x)B(x)当且仅当对所有的i, 都有 $c_i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k b_{i-k} (i = 0,1,2,\cdots,r,\cdots)$

认真体会定义3.6的原因：

$$A(x)B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^k}{k!}\frac{b_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{a_k b_{n-k}x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}$$

例3 证明恒等式

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}=\frac{2(2^{r+1}-1)}{(r+2)(r+1)}$$

证明： 原式左端 $=\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i+1)!(i+1)!}$

$$=\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{(r-i)!i!}\frac{1}{(r-i+1)}\frac{1}{i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{1}{i+1}\frac{1}{r-i+1}$$

将上式与定义3.6相比较，可见有

$$a_i=\frac{1}{i+1},b_{r-1}=\frac{1}{k-i+1}$$

考虑序列

$(a_0, a_1, \ldots, a_r, \ldots)=(1, 1/2, \ldots, 1/(r+1), \ldots)$，

求它的指数母函数。由于

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{r!}x^r+\frac{1}{(r+1)!}x^{r+1}+\cdots$$

故有 $$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{1}{2}\frac{x}{1!}+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{1}{r}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{1}{r+1}\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

因此$\frac{e^x-1}{x}$是序列$(a_0,a_1,\ldots,a_r,\ldots)=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{r+1},\cdots\right)$
的指数母函数

又由定义3.6知，$\frac{e^x-1}{x}\frac{e^x-1}{x}=\frac{(e^x-1)^2}{x^2}$是序列

$$\left(1\times1,\frac{1}{2}\times1+1\times\frac{1}{2},\binom{2}{0}\times\frac{1}{3}\times1+\binom{2}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\binom{2}{2}\times1\times\frac{1}{3},\cdots,\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{1}{i+1}\frac{1}{r-i+1},\cdots\right)$$

的指数母函数。

而

$$\frac{(e^x-1)^2}{x^2}=\frac{1}{x^2}(e^{2x}-2e^x+1)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left\{\left[1+\frac{1}{1!}(2x)^1+\frac{1}{2!}(2x)^2+\cdots+\frac{1}{r!}(rx)^r+\cdots\right]\right.$$

$$\left.-2\left[1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{r!}x^r+\cdots\right]+1\right\}$$

$$=\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{2}{2!}\right)+\left(\frac{2^3}{3!}-\frac{2}{3!}\right)\frac{x}{1!}+2!\left(\frac{2^4}{4!}-\frac{2}{4!}\right)\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$+r!\left(\frac{2^{r+2}}{(r+2)!}-\frac{2}{(r+2)!}\right)\frac{x^r}{r!}+\cdots$$

这表明

$(e^x-1)^2/x^2$ 也是序列

$$\left(\left(\frac{2^2}{2!}-\frac{2}{2!}\right),\left(\frac{2^3}{3!}-\frac{2}{3!}\right),2!\left(\frac{2^4}{4!}-\frac{2}{4!}\right),\cdots,r!\left(\frac{2^{r+2}}{(r+2)!}-\frac{2}{(r+2)!}\right),\cdots\right)$$

的指数母函数。

故有

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{1}{i+1}\frac{1}{r-i+1}=r!\left(\frac{2^{r+2}}{(r+2)!}-\frac{2}{(r+2)!}\right)=\frac{2(2^{r+2}-1)}{(r+2)(r+1)}$$

从而有

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{(r-i+1)!}\frac{1}{(i+1)!}=\frac{2(2^{r+1}-1)}{(r+2)(r+1)}$$