§4.4 平稳过程的谱分析简介

付氏变换在应用和理论中是一种有效的分析方法, 特别在电路分析中用付氏变换确立了时域和频域间的关系.

现用付氏变换来研究平稳过程.

4.4.1 确定函数的功率谱密度

设$x(t)$是定义在时间轴上的确定函数(信号)，满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

信号总能量有限

则$x(t)$的付氏变换存在，或称$x(t)$具有频谱：

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad (1)$$

一般$F_x(\omega)$是共轭对称复函数，即

$$F_x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \overline{F_x(\omega)},$$

$F_x(\omega)$的逆变换为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (2)$$

从时域和频域两个角度计算信号总能量，有 Parseval(巴塞瓦尔)公式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega \qquad (3)$$

$x(t)$在R上的总能量

称$|F(\omega)|^2$为能谱密度.

(3)式为信号总能量的谱表示.

设$x(t)$是定义在时间轴上的确定函数(信号)，若不满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty,$$

定义截断函数

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \le T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \qquad (T > 0)$$

$x_T(t)$的付氏变换记为

$$F(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

巴塞瓦尔公式仍成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[x_T(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega,T)|^2 d\omega$$

4.4.2 平稳过程谱的物理背景和意义

类似分析确定信号的思想方法，也可用Fourier变换来分析平稳随机过程.

设平稳过程$\{X(t), t\in R\}$均方连续均方积分

$$F_X(\omega,T) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-j\omega t} dt$$

存在，且有巴塞瓦尔等式

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2T}\left|F(\omega,T)\right|^2 d\omega \qquad (3')$$

两端均为随机变量

成立。

对上式两边求均值，并取$T\to\infty$极限，左端为

$$\lim_{T\to\infty}E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X^2(t)dt\right\} \qquad (4)$$

称为平稳过程$X(t)$ 的平均功率.

若(4)中的积分与求均值可交换顺序，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}E\{|X(t)|^2\}dt = E[|X(t)|^2] = R_X(0) = \Psi_X^2 \qquad (5)$$

平均功率等于过程的均方值

(3′) 式右端

$$\lim_{T\to\infty}E\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2T}|F(\omega,T)|^2 d\omega\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\{\frac{1}{2T}E[|F(\omega,T)|^2\}d\omega \qquad (6)$$

记 $S_X(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[|F_X(\omega,T)|^2]$,

称 $S_X(\omega)$ 为平稳过程$X(t)$的功率谱密度(功率谱，谱密度).

注 从频率角度描述平稳过程统计规律的主要数字特征.

比较(5)式和(6)式,巴塞瓦尔等式可表示为

$$R_X(0)=\psi_X^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)d\omega \qquad (7)$$

称为平稳过程的平均功率谱表示式.

从频域的角度计算平稳过程的平均功率.

4.4.3 谱密度与谱函数

研究平稳过程的相关函数与功率谱密度间的关系.

定理4.4.1 (维纳—辛钦)设$\{X(t),\ t\in T\}$是均方连续平稳过程，$E[X(t)]=0$，当其相关函数$R(\tau)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|R(\tau)|d\tau<\infty,$$

则

$$
\begin{cases}
S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, & (8)\\
R(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega, & (9)
\end{cases}
$$

证明见

P151

平稳过程的相关函数与功率谱密度构成一对Fourier变换.

注 (9) 式称为相关函数的谱分解式.

在此基础上给出以下定义.

定义4.4.1 设平稳过程$\{X(t), t \in R\}$均方连续的，若其自相关函数满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty$，

称

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

为过程$X(t)$的功率谱密度(功率谱，谱密度).

称

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_X(\omega_1) d\omega_1, \quad \omega \in R$$

为过程$X(t)$的谱函数.

4.4.4 谱密度与谱函数的数学讨论

以上从工程的角度，将确定函数的谱密度概念引入平稳过程，得到了相关函数的谱展式，现从数学的角度进一步讨论.

引理（波纳赫－辛钦定理）函数$\psi(t)$为特征函数的充分必要条件是$\psi(t)$在R是一致连续，非负定且$\psi(0)=1$.

定理 (维纳—辛钦)均方连续平稳过程$\{X(t), t\in T\}$的相关函数$R_X(\tau)$可表示为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dF_X(\omega),\quad \tau\in R \quad (10)$$

其中$F(\omega)$是R 上的非负有界，单调不减，右连续函数，且

$$F_X(-\infty)=0,\quad F_X(+\infty)=2\pi R_X(0).$$

证 若$R_X(0)=0$，则$R_X(\tau)\equiv 0$，取$F_X(\omega)\equiv 0$ 即可.

若$R_X(0)>0$，令 $f(\tau)=\dfrac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$

有 $f(0)=\dfrac{R_X(0)}{R_X(0)}=1$,

由过程的均方连续性及平稳性推知.

$f(\tau)$是非负定函数,(因$R(\tau)$非负定),

且在R上一致连续

根据由波纳赫－辛钦定理，$f(\tau)$一定是某一随机变量(或分布函数)的特征函数,

⇒ 存在分布函数$G(\omega)$,使

$$f(\tau)=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dG(\omega)$$

令 $F_X(\omega)=2\pi R_X(0)G(\omega)$即为定理所求.

定理中

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dF_X(\omega),\quad \tau\in R$$

称为平稳过程相关函数的谱展式. 称

$F_X(\omega)$为过程$\{X(t),t\in T\}$的谱函数

定义4.4.1 $F_X(\omega)$为过程$\{X(t),t\in T\}$的**谱函数**，若存在$S_X(\omega)$，使

$$F_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_X(\omega_1)d\omega_1,\quad \omega\in R$$

称$S_X(\omega)$为过程的**谱密度**.

注 亦可利用特征函数和分布函数之间的关系，证得定理4.4.1 (维纳—辛钦).

定理4.3 设$\{X(t),t\in R\}$是均方连续的平稳过程, $E[X(t)]=m$, 相关函数为$R_X(\tau)$, 谱函数为$F(\omega)$, 则以下三个命题等价:

1) $\mathop{\text{l.i.m}}\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}X(t)dt=m$; (均值各态历经)

2) $F(\omega)$在ω处连续;

3) $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}C_X(\tau)d\tau=0.$

4.4.5 谱密度与谱函数的性质

定

理4.4.4

1）平稳过程的谱密度S(ω)为实值非负函数.

$$\overline{S(\omega)} = S(\omega) \ge 0.$$

2）实平稳过程 的谱密度S(ω)是实的、非负的偶函数.

P150 式(4.4.10)

证 1）

$$\overline{S(\omega)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left[\left|F(\omega,T)\right|^2\right] = S(\omega) \ge 0;$$

2) 因实平稳过程的相关函数是偶函数

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R(-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R(u)e^{j\omega u}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}R(u)e^{-j(-\omega)u}du=S(-\omega).$$

故$S(\omega)$ 是实的、非负的偶函

推论 若$\{X(t),\ t\in R\}$为实平稳过程，则

$$S_X(\omega)=2\int_0^{+\infty}R(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}S(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

因$R(\tau)$与$S(\omega)$均为偶函数，由P151式(4.4.13) 即可得.

由付氏变换性质，可得平稳过程的谱密度及相关函数的关系及性质（P151）

如：线性性、相似性、时间及频率的位移性质、对称性、微分性质、卷积性质等.

相关函数和谱密度对照表P154~155.

EX.1 设平稳过程的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\delta(\omega),$$

求相关函数$R_X(\tau)$.

其中 $\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0;\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$

解 因 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1,$

和 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0),$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{-j\omega 0}=\frac{1}{2\pi}.$$

EX.2 设平稳过程的相关函数为

$$R_X(\tau)=\sigma^2\cos a\tau,$$

求其功率谱密度.

解 将$R_X(\tau)$改写为

$$R_X(\tau)=\frac{\sigma^2}{2}(e^{ja\tau}+e^{-ja\tau}),$$

因$S_X(\omega)$与$R_X(\tau)$互为付氏变换对的关系有

$$R_X(\tau)=\frac{\sigma^2}{2}(e^{ja\tau}+e^{-ja\tau})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}S_X(\omega)d\omega,$$

故 $S_X(\omega)=\pi\sigma^2[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$.

4.5 平稳过程的谱分解

谱分解意义

两两互不相关的复谐波叠加而成的随机过程

$$X(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z_n e^{j\omega_n t},\quad j=\sqrt{-1}$$

必为平稳过程, 其中$\{Z_n\}$ 相互独立的随机变量序列$\{Z_n\}$ 是实数列.

逆问题：在什么条件下，一个平稳随机过程可以表示为复谐波的叠加?

平稳随机过程可以表示为无限个相异频率的随机振动叠加.

4.6 线性系统中的平稳过程

自学