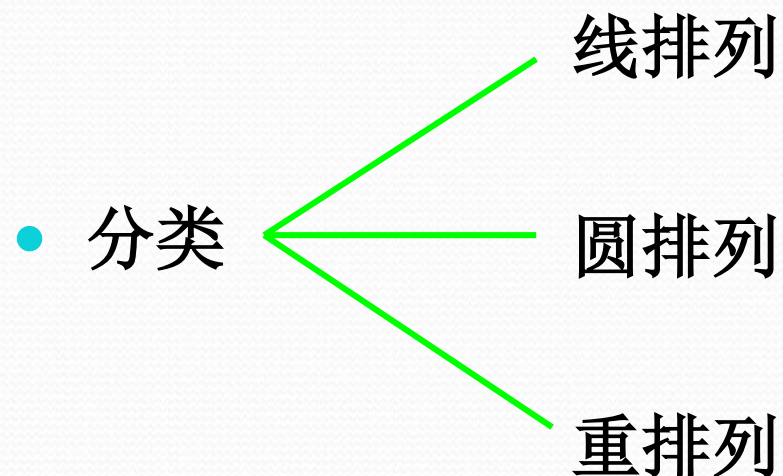


§ 1.2 排列

- 研究排列问题的主要目的是求出根据已知的条件所能作出的不同排列的种数。



线排列

线排列是把一些元素排成一条直线,

- $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$
- r 是正整数, 从这 n 个不同的元素中取 r 个按照一定的次序排列起来 ($r \leq n$), 称为集合 A 的 **r -排列**。
- 集合 A 的所有 r -排列的个数记为 **$P(n, r)$** 。 (定义1-1)
- **注意:** A 的 r -排列为 A 的 r 有序子集。
 - 例: 集合 $A = \{ a, b, c \}$
 - 集合 A 有 6 个 2-排列: ab, ac, ba, ca, bc, cb 即 **$P(3, 2) = 6$**
 - A 有 6 个 3-排列: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, 即 **$P(3, 3) = 6$**

线排列

- 定理1.1 对于正整数 $n, r, r \leq n$,有

$$\heartsuit\heartsuit P(n,r)=n(n-1)\dots(n-r+1)=n! \div (n-r)! \quad (1.3)$$

\heartsuit

线排列

- 推论1 当 $n \geq r \geq 2$ 时, 有

♡
$$P(n, r) = nP(n-1, r-1) \quad (1.4)$$

- 推论2 当 $n \geq r \geq 2$ 时, 有

♡♡
$$P(n, r) = rP(n-1, r-1) + P(n-1, r) \quad (1.5)$$

♡♡

例

例一：由数字1，2，3，4，5，6可以构成多少个数字互不相同的四位数。

例二：将具有9个字母的单词FRAGMENTS进行排列，要求字母A总是紧跟在字母R的右边，问有多少种这样的排法？

圆排列

一些元素排成一个圆圈的排列

- 定义1.2
- 从集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的 n 个不同元素中取出 r 个元素按照某种顺序 (如逆时针) 排成一个圆圈, 称这样的排列为圆排列 (或称循环排列)。

圆排列

- 注意：把一个圆排列旋转所得到的另一个圆排列视为相同的圆排列。即排列
- $a_1 a_2 \cdots a_r$,
- $a_2 a_3 \cdots a_r a_1$,
- $a_3 \cdots a_r a_1 a_2$,
- \cdots ,
- $a_r a_1 a_2 \cdots a_{r-1}$ 在圆排列中是同一个.
- 所以圆排列的个数为

$$\heartsuit \heartsuit P(n, r) / r = n! / (r(n-r)!) \quad (1.6)$$

例三

有8人围圆桌就餐，问有多少种就座方式？如果有两人不愿坐在一起，又有多少种就座方式？

例四

♡4男4女围圆桌交替就座有多少种方式?

重排列

- 上面我们讨论了从集合A (A中的元素是互不相同的) 中选 r 个元素进行排列，在每种排列中每个元素至多只出现一次的情况
- 现在考虑元素允许重复出现的情况，即考虑在重集 $B = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$ 中选 r 个元素进行的排列。

定义1-3

- 从重集 $B = \{k_1 \cdot b_1, k_2 \cdot b_2, \dots, k_n \cdot b_n\}$ 中选取 r 个元素按照一定的顺序排列起来，称这种 r -排列为重排列。

定理1-3

重集 $B = \{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, \dots, \infty \cdot b_n\}$ 的 r 排列的个数为 n^r

证明：选择 r -排列的第一项，可以从 n 个元素中任选一个
有 n 种选法

第二项，由于可以重复选取，仍有 n 种选法。

.....

由乘法规则可求得 r 排列的数目为 n^r

例五

由1, 2, 3, 4, 5, 6这六个数字能组成多少个五位数?
又可组成多少大于34500的五位数?

例五

万位：可选4，5，6。其余四位
任选

所以个数为 $3 \cdot 6^4$

万位和千位上的数字分别是**3**和**4**，
百位上的数字是**5**，**6**。个数为
 $2 \cdot 6^2$

万位选3，
千位选5，6
后三位任选，
个数为 $2 \cdot 6^3$

由加法规则知，大于34500的五位数的个数为
 $3 \cdot 6^4 + 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 = 4392 \heartsuit \heartsuit$

定理1-4

重集 $B = \{n_1 \cdot b_1, n_2 \cdot b_2, \dots, n_k \cdot b_k\}$ 的全排列个数为
$$n! / n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!$$

证明:

- 将 B 中的 n_i 个 b_i 分别赋予上标 $1, 2, \dots, n_i$, 即
 $b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^{n_i} (i = 1, 2, \dots, k)$
- $B=A= \{b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^{n_1}, \dots, b_k^1, b_k^2, \dots, b_k^{n_k} \}$ 。 A 中元素个数为 $n=n_1+n_2+\dots+n_k$
- 显然, 集合 A 的全排列个数为 $n!$ 。

定理1-4

- 又由于 n_i 个 b_i 赋予上标 $1, 2, \dots, n_i$ 的办法有 $n_i!$ 种
- 对于重集B的任一个全排列，都可以产生集合A的 $n_1!n_2!\cdots n_k!$ 个排列(由乘法规则)
- 故重集B的全排列个数为 $n! / n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!$

证毕。

例六

四面红旗、三面蓝旗、二面黄旗、五面绿旗可以组成多少由14面旗子组成的一排彩旗？

例七

用字母A、B、C组成五个字母的符号，要求在每个符号里，A至多出现2次，B至多出现1次，C至多出现3次，求此类符号的个数。