§2.3 泊 松 过 程(一)

一、计数过程与泊松过程

在天文，地理，物理，生物，通信，医学，计算机网络，密码学等许多领域，都有关于随机事件流的**计数问题**，如：

电话交换机上的呼唤流；

计算机网络上的（图象，声音）流；

编码（密码）中的误码流；

交通中事故流；

均构成以时间顺序出现的事件流 $A_1, A_2, \ldots$

定义2.3.1 随机过程$\{N(t), t\geq 0\}$称为**计数过程(Counting Process)**,如果$N(t)$表示在$[0, t]$内事件A 出现的总次数.

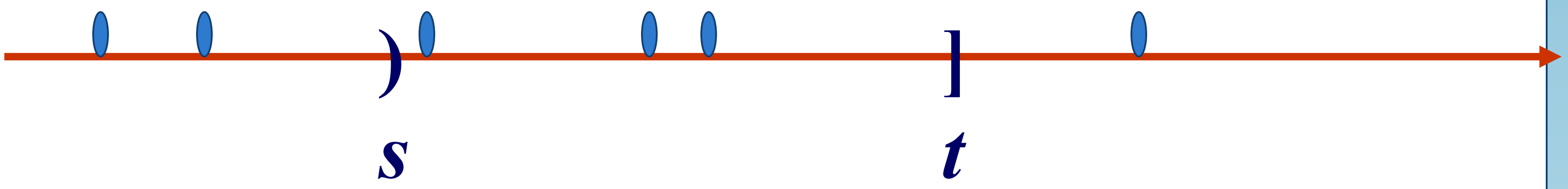
计数过程应满足：

(1) $N(t)\geq 0$;

(2) $N(t)$ 取非负整数值;

(3) 如果$s < t$，则$N(s) \le N(t)$;

(4) 对于$s < t$, $N(t) - N(s)$表示时间间隔$(s, t]$内事件出现的次数.



引例 在数字通信中误码率 λ 是重要指标, 设$\{N(t), t\geq 0\}$为时间段[0, t]内发生的误码次数, $\{N(t), t\geq 0\}$是计数过程, 而且满足

(1) 初始时刻不出现误码是必然的, 故$N(0)=0$;

(2) 在互不相交的区间

$$[0, t_1], (t_1, t_2], \cdots, (t_{n-1}, t_n], \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

出现的误码数互不影响, 故$N(t)$独立增量过程.

在系统稳定运行的条件下, 在相同长度区间内出现k个误码概率应相同, 故可认为$N(t)$是平稳增量过程.

$\{N(t), t\geq 0\}$是平稳独立增量过程;

(3) 认为Δt时间内出现一个误码的可能性与区间长度成正比是合理的,即有

$$P\{N(\Delta t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\ \lambda>0;$$

(4) 假定对足够小的Δt时间内,出现两个以上误码的概率是关于Δt的高阶无穷小也是合理的, 有

$$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=o(\Delta t).$$

一般数学模型：

此过程有如下特点：

1) 零初值性 $N(0)=0$;

2) 独立增量性 任意两个不相重叠的时间间隔内到达的呼叫次数相互独立;

3) 齐次性 在$(s, t]$时间内到达的呼叫次数仅与时间间隔长度$t-s$ 有关，而与起始时间 s 无关;

4）普通性 在充分小的时间间隔内到达的呼叫次数最多仅有一次，即对充分小的 Δt, 有

$$P\{N(\Delta t)=0\}=p_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{N(\Delta t)=1\}=p_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}p_k(\Delta t)=o(\Delta t),$$

其中$\lambda>0$.

定义2.3.2 设计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$ 满足:

$$\begin{cases} (1)\ N(0)=0; \\ (2)\ \text{是平稳独立增量过程}; \\ (3)\ P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h),\ \lambda>0; \\ (4)\ P\{N(h)\geq 2\}=o(h). \end{cases}$$

称$\{N(t), t\geq 0)$是参数(或速率, 强度)为λ的**齐次泊松过程**.

定理2.3.1 齐次泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$在时间间隔$(t_0, t_0+t]$内事件出现n次的概率为

$$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},(n=0,1,2,\cdots)$$

证　记 $P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{[N(t)-N(0)]=n\}$

$$=P\{N(t_0+t)-N(t_0)=n\}\qquad(1)$$

平稳增量

1° 由条件(2)～(4)，得：

$$P_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}=P\{N(t)=0,N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$=P\{N(t)=0\}\,P\{N(t+h)-N(t)=0\}$$

增量独立

$$=P_0(t)[1-\lambda h+o(h)]$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}$$

令 $h \to 0$, 得
$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda \\ P_0(0) = 1, \qquad (\text{条件(1)}\ N(0)=0) \end{cases}$$

解得 $$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

2^o 当$n \geq 1$, 根据全概率公式有

$$p_n(t+h) = p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h)$$

$$p_n(t+h)=(1-\lambda h)p_n(t)+\lambda h p_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{h}$$

令$h\to 0$,得 $$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以$e^{\lambda t}$后移项整理得

$$\frac{d[e^{\lambda t}P_n(t)]}{dt}=\lambda e^{\lambda t}p_{n-1}(t) \qquad (2)$$

当$n=1$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{d[e^{\lambda t}P_1(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

解得 $$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

假设 $$P_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$ 成立

代入(2)式有

$$\frac{d[e^{\lambda t}P_n(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} + C$$

利用初始条件 $P_n(0)=0$, 可证得

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

对一切 $n \geq 0$ 均成立.

定理证明反之亦然, 得泊松过程的等价定义:

定义2.3.2 '设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下述条件:

(1) $N(0)=0$;

(2) $N(t)$是独立增量过程;

(3) 对一切$0\le s<t$, $N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t-s))$, 即

$$P\{[N(t)-N(s)]=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

注 有 $P\{N(t)=k\}=P\{[N(t)-N(0)]=k\}$

$$=\frac{[\lambda t]^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

问题 若$N(t)$的一维分布是泊松分布, 能否推出第(3)条成立?

EX.2 设$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，事件A在$(0,\tau)$时间区间内出现n次，试求：

$$P\{N(s)=k \mid N(\tau)=n\},\ \ 0<k<n,\ 0<s<\tau$$

解 原式$=\dfrac{P\{N(s)=k, N(\tau)=n\}}{P\{N(\tau)=n\}}$

$$=P\{N(s)=k, N(\tau)-N(s)=n-k\}\cdot n!e^{\lambda\tau}(\lambda\tau)^{-n}$$

$$=e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda(\tau-s)}\frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!}n!e^{\lambda\tau}(\lambda\tau)^{-n}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}$$

$$= C_n^k\left(\frac{s}{\tau}\right)^k\left(1-\frac{s}{\tau}\right)^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

二、齐次泊松过程的有关结论

1. 数字特征

因对$\forall t > 0$, $N(t) \sim P(\lambda t)$.

均值函数 $m(t) = E\{N(t)\} = \lambda t$

方差函数 $D(t) = \lambda t$

有 $\lambda = E\{N(t)\}/t$

称λ为事件的到达率

λ是单位时间内事件出现的平均次数.

均方差函数 $C(s,t)=\lambda\min(s,t)$，

相关函数 $R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st.$

EX.3 设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别是强度为λ_1和λ_2的相互独立的泊松过程,

1) 令$Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$，$t>0$,求$Y(t)$的均值函数和相关函数.

2) 证明 $X(t)=N_1(t)+N_2(t)$, $t>0$, 是强度为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

解 1) $m_Y(t)=E[N_1(t)]-E[N_2(t)]=(\lambda_1-\lambda_2)t,$

$$
\begin{aligned}
R_Y(s,t) = E\{[N_1(s)-N_2(s)][N_1(t)-N_2(t)]\} \\
&= E[N_1(s)N_1(t)] + E[N_2(s)N_2(t)] \\
&\quad - E[N_1(s)N_2(t)] - E[N_2(s)N_1(t)] \\
&= R_{N_1}(s,t) + R_{N_2}(s,t) - E[N_1(s)]E[N_2(t)] \\
&\quad - E[N_2(s)]E[N_1(t)]
\end{aligned}
$$

$$
= \lambda_1 \min(s,t) + \lambda_1^2 st + \lambda_2 \min(s,t) + \lambda_2^2 st - 2\lambda_1\lambda_2 st
$$

$$
= (\lambda_1 + \lambda_2)\min(s,t) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)st - 2\lambda_1\lambda_2 st.
$$

2) 根据泊松分布的可加性知

$$X(t)=N_1(t)+N_2(t),\quad t>0,$$

服从参数为$(\lambda_1+\lambda_2)t$的泊松分布.

注：$X(t)=N_1(t)-N_2(t)$的特征函数为

独立和的特征函数

$$\varphi_X(u)=\exp\{\lambda_1 te^{ju}+\lambda_2 te^{-ju}\}-(\lambda_1+\lambda_2)t\}$$

由分布函数与特征函数的一一对应的惟一性定理知$X(t)$不是泊松过程.

EX.4 设一位交通警察需处理的交通事故次数$\{N(t), t \geq 0\}$是泊松过程, 且每个工作日需处理λ件事故. 试求:

(1) 他在某个周末两天需处理3件事故的概率p;

(2) 第3次事故在星期日内发生的概率q.

解 不妨记周六为 $t_1 = 6 = t_0 + 1$

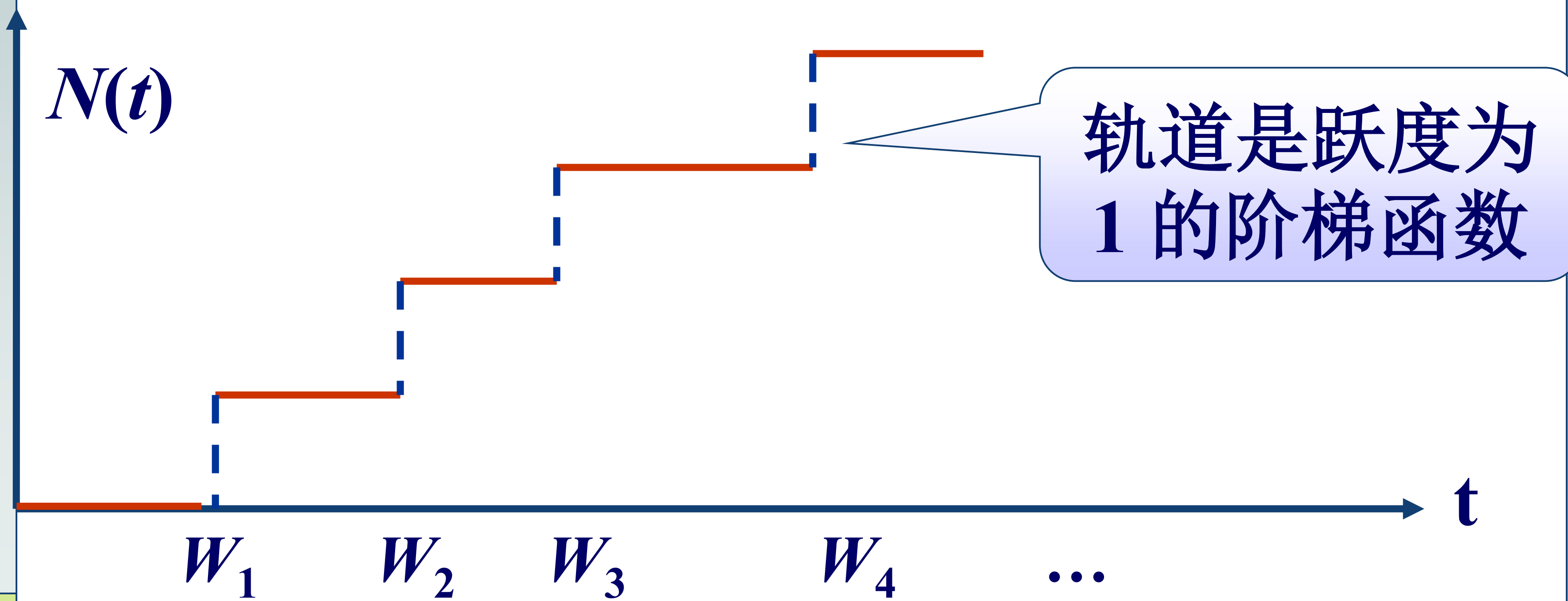
周日为 $t_2 = 7 = t_0 + 2$

$$p = P\{N(t_2) - N(t_0) = 3\} = P\{N(2) - N(0) = 3\}$$

$$= P\{N(2) = 3\} = \frac{(2\lambda)^3}{3!} e^{-2\lambda} = \frac{8\lambda^3}{6} e^{-2\lambda}$$

$$q = P\{N(t_2) - N(t_1) = 3, N(t_1) - N(t_0) = 0\}$$
$$+ P\{N(t_2) - N(t_1) = 2, N(t_1) - N(t_0) = 1\}$$
$$+ P\{N(t_2) - N(t_1) = 1, N(t_1) - N(t_0) = 2\}$$
$$= P\{N(1) = 3\}P\{N(1) = 0\}$$
$$+ P\{N(1) = 2\}P\{N(1) = 1\}$$
$$+ P\{N(1) = 1\}P\{N(1) = 2\}]$$
$$= \frac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \cdot \lambda e^{-\lambda}$$
$$= \frac{7\lambda^3}{6} e^{-2\lambda}$$

2. 时间间隔与等待时间的分布



W_n为事件A第n 次出现的等待时间(到达时间).

用T_n表示事件A第$n-1$次出现与第n次出现的**时间间隔.**

有 $W_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$ 和 $T_i=W_i-W_{i\text{-}1}$

定理2.3.2 设$\{T_n, n\geq 1\}$是参数为λ的泊松过程$\{N(t), t\geq 0\}$的时间间隔序列，则$\{T_n, n\geq 1\}$相互独立同服从指数分布，且$E\{T\}=1/\lambda$.

证 (1) 因 $\{T_1>t\}=\{(0, t)$内事件A不出现$\}$

$$P\{T_1>t\}=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$$

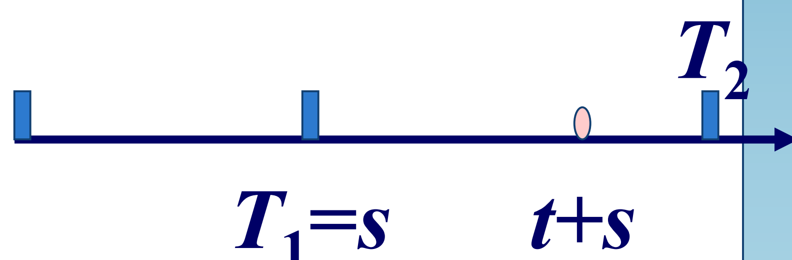
$$F_{T_1}(t)=1-P\{T>t\}=1-e^{-\lambda t},\qquad t\geq 0$$

即T_1服从均值为$1/\lambda$的指数分布.

(2) 由泊松过程的平稳独立增量性, 有

$P\{T_2>t|T_1=s\}=P\{$在$(s, t+s)$内事件A不出现$|T_1=s\}$

$=P\{N(t+s)-N(s)=0\}$



$=P\{N(t)-N(0)=0\}$

$=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$

与s无关

故T_2与T_1相互独立，且T_2也服从均值为$1/\lambda$的指数分布.

(3) 对于一般 $n>1$ 和$t>0$以及 r_1，r_2，…，$r_{n-1}>0$, 有

$$P\{T_n>t \mid T_i=r_i, 1\le i\le n-1\}$$

$$=P\{N(t+r_1+\dots+r_{n-1})-N(r_1+r_2+\dots+r_{n-1})=0\}$$

$$=P\{N(t)-N(0)=0\}=e^{-\lambda t}.$$

即 $$F_n(t)=P\{T_n\le t\}=1-e^{-\lambda t},\qquad t\ge 0.$$

定理2.3.3 参数为λ的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$，事件A第n 次出现的等待时间服从 Γ分布，其概率密度为：

$$f_{W_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0\end{cases}$$

注：在排队论中称W_n服从爱尔朗分布.

证　因W_n是事件A 第 n次出现的等待时间，故

$$\{W_n\leq t\}=\{N(t)\geq n\}=\{(0,t)\text{内}A\text{至少出现}n\text{次}\}$$

$$F_{W_n}(t)=P\{W_n\le t\}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},t\ge 0$$

$$f_{W_n}(t)=F'_{W_n}(t)=[\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=n}^{\infty}\lambda\frac{(\lambda t)^k}{k!}]e^{-\lambda t},$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},\qquad t\ge 0.$$

3. 到达时间的条件分布

EX2.3.7 设$\{N(t),t\geq 0$是参数为λ的泊松过程，已知事件A在$[0, t]$内出现一次，试确定事件A到达时间的分布.

解 对任意$0 < s \leq t$, 有

$$P\{W_1 \leq s | N(t)=1\} = \frac{P\{W_1 \leq s, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$= \frac{P\{N(s)=1, N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}}$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

得条件分布函数 $F_{W_1|N(t)}(s|1)=\begin{cases}0, & s<0;\\ \dfrac{s}{t}, & 0\le s<t;\\ 1, & s\ge t.\end{cases}$

条件概率密度 $f_{W_1|N(t)}(s|1)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & 0\le s<t;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

事件A在$[0, t]$内出现一次的条件下, 其等待时间W_1在$[0, t]$上服从均匀分布.

定义：设（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）是来自总体X一样本

（1）X_i 与总体同分布；

（2） $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

称（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）为简单随机样本，简称样本.

引理2.3.1 设总体X有概率密度$f(x)$，$X_{(1)}$, $X_{(2)}$, …$X_{(n)}$是X的简单随机样本生成的顺序统计量(order statistics)，其概率密度为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n!\, f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)$$

当$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

定理2.3.4 设$\{N(t),t\geq 0\}$是Poisson过程，已知在$[0, t]$时间内A出现n次，这n次到达时间$W_1,W_2,\ldots,W_n$的联合条件分布密度为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n \mid N(t)=n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<\cdots<t_n\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

注 1 $W_1, W_2, \ldots, W_n$与n个相互独立同服从$[\,0, t\,]$上均匀分布随机变量$U_1, U_2, \ldots, U_n$的顺序统计量$U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$有相同分布, 而且.

$$W_1 < W_2 < \cdots < W_n$$

$W_1, W_2,\ldots,W_n$可视为由相互独立在（0，t）上均匀分布随机变量$U_1, U_2,\ldots,U_n$所得的顺序统计量.

注 2 $$\sum_{k=1}^{n} U_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Ex.2.3.9 设到达电影院的观众组成强度为 λ 的Possion流, 如果电影从t 时刻开演， 计算$(0, t]$内到达电影院的观众等待时间总和的数学期望.

解 设W_k 是第k 名观众到达时刻， 在$(0, t)$内到达的观众数为$N(t)$, 则总等待时间为

$$\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)$$

根据全数学期望公式

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\right]=E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\,\middle|\,N(t)\right]\right\}$$

对$\forall n\ge 1$,

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\,\middle|\,N(t)=n\right]=nt-E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}W_k\,\middle|\,N(t)=n\right]\}$$

由定理2.3.3 知 $W_1,W_2,\ldots,W_n$与 $[0,t]$上均匀分布相互独立随机变量的顺序统计量 $U_{(1)},U_{(2)},\ldots,U_{(n)}$ 有相同的分布函数.

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k \big| N(t)=n]$$

随机变量函数的条件期望公式

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} t_k f(t_1,t_2,\cdots t_n \big| N(t)=n)dt_1 dt_2\cdots dt_n$$

$$=E\left(\sum_{k=1}^{n} U_{(k)}\right)=E\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E(U_k)=\frac{nt}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\big| N(t)=n]=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

Poisson过程

$$\Rightarrow \quad E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\,\middle|\,N(t)\right]=\frac{t}{2}N(t)$$

$$\Rightarrow \quad E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\right]=E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\,\middle|\,N(t)\right]\right\}$$

$$=E\left[\frac{t}{2}N(t)\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$