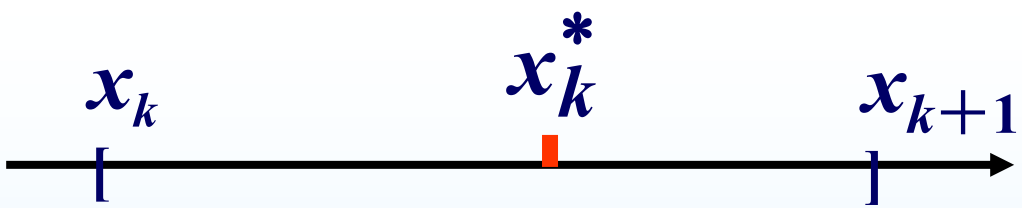
0.1 R-S (黎曼-斯蒂阶)积分简介

定义 设$f(x)$, $g(x)$为定义在$[a, b]$上的实值函数，做一剖分：$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, 并任取点

$$x_k^* \in [x_k, x_{k+1}], k=0,1,2,\cdots,n-1.$$



做和式

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)[g(x_{k+1})-g(x_k)]$$

若存在实数I, 使对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 只要

$$\lambda = \max_{0\le k\le n-1}(x_{k+1}-x_k)<\delta$$

对任意分点及任意 x_k^* 的取法均有

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

记为 $(R)\int_a^b f(x)dg(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)[g(x_{k+1})-g(x_k)] = I$$

称 I 为$f(x)$关于$g(x)$在$[a, b]$上的R-S积分, 简记为

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dg(x).$$

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) \triangleq \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dg(x)$

存在, 称为广义R-S积分.

注 黎曼积分 $\int_a^b f(x)dx$ 是*R-S*积分的特例.

R-S积分性质:

1) $$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) \pm \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

2) $$\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

3) 设α,β是任意常数，则

$$\int_a^b \alpha f(x)d[\beta g(x)] = \alpha\beta\int_a^b f(x)d[g(x)].$$

以上三个等式成立的意义是:当等号右边存在时,左边也存在并相等.

4) 若$a < c < b$, 则有

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x)$$

5) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$

注 以上1～5条性质可全部推广到广义R-S积分.

如

5′) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}f(x) + \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} [f(x)g(x)]_a^b$$

6)（施瓦兹不等式）设g(x)单增，$f_1(x)$和$f_2(x)$平方可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i^2(x)dg(x) < \infty \quad (i=1,2)$$

则$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dg(x)$ 存在，并且

$$[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dg(x)]^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^2(x)dg(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f_2^2(x)dg(x)$$

证明 存在性因 $\left|f_1\cdot f_2\right|\le\dfrac{1}{2}[\left|f_1\right|^2+\left|f_2\right|^2]$

建立关于λ的二次式，因

$$0\le\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)-\lambda f_2(x)]^2dg(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^2(x)dg(x)-2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)dg(x)$$

$$+\lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^2(x)dg(x)$$

$$\Rightarrow\quad[2\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)dg(x)]^2$$

$$-4\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^2(x)dg(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^2(x)dg(x)\le 0$$

定理0.1.1 若$f(x)$在R上连续且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)$$

存在，并有实数列C_k, $k=0, \pm 1,\cdots$， 使

$$\cdots < C_{-1} < C_0 < C_1 < \cdots$$

且 $g(x)$ 在$[C_k, C_{k+1})$上取常数，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(C_k)\left[g(C_k+0) - g(C_k-0)\right].$$

问题 若$g(x)$是离散型随机变量的分布函数，$f(x)$关于$g(x)$的广义R-S积分形式？

设ξ是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{\xi = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,3....$$

其分布函数g(x)是有界、单调不降的阶梯函数，

$$\cdots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \cdots$$

$$g(x+0) - g(x-0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_k; \\ p_k, & x = x_k \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)\left[g(x_k+0)-g(x_k-0)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k)p_k$$

特别当 $f(x)=x$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dg(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x_k)p_k$$

为离散型随机变量ξ的数学期望.

定理0.1.2 若$f(x)$在R上连续且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)$$

存在，有函数列$f_n(x)$ $n=0$，$\pm 1,\cdots$，一致收敛到f(x),则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dg(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x).$$

定理0.1.3 （控制收敛定理）若$f(x)$在R上连续且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x)$$

存在，若有函数列$f_n(x)$ $n=0, \pm 1,\cdots,$ 满足

$$|f_n(x)| \le h(x), n=1,2,\cdots \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dg(x) < +\infty$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dg(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x).$$