# 第五章

## 鸽笼原理与Ramsey定理

# §5.1 鸽笼原理的简单形式

鸽笼原理又称抽屉原理，它是组合数学中的一个重要的也是最基本的原理。这个原理是指："有n只鸽子，飞进m(n>m)个鸽笼时，至少有一个鸽笼内有两只以上的鸽子"。这是一个显而易见的道理，然而，它却有许多重要而有趣的应用和几种不同的表达形式，这节先介绍鸽笼原理的简单表达形式。

# 定理5.1

如果把n+1个物体放到n个盒子中去，则至少有一个盒子中放有两个或更多的物体。

**证明：** 用反证法。如果n个盒子中每个盒子至多放入一个物体，则放入n个盒子中的物体总数至多为n个。这与假设有n+1个物体矛盾。从而定理得证。　必须注意，鸽笼原理只指出了至少存在这样的盒子，并没有给出“**确定哪一个盒子有此性质**”的方法。因此，它只能用来解决存在性问题。

- ［例1］一教师每周上7次课，则这教师至少有一天要上两次课(除星期天)。在此例中，把“天”当作“盒子”。

- ［例2］证明：把5个顶点放到边长为2的正方形中，至少存在两个顶点，它们之间的距离小于或等于$\sqrt{2}$。

**证明：**把边长为2的正方形分成四个相等的小正方形，则每个小正方形的对角线长为$\sqrt{2}$。如果把每个小正方形当作一个盒子，由鸽笼原理知，把5个顶点放入4个盒子中，必有一个盒子中放入了两个顶点。即必有一个小正方形中有两个顶点。而小正方形的对角线长为$\sqrt{2}$。也就是说，小正方形中任意两点的最大距离为$\sqrt{2}$。这就证明了本题。

附，试证明把四个点放入2×3的矩形中，至少有两个点之间的距离不超过$\sqrt{5}$。

**［例3］**

**设 $a_1,a_2,a_3$ 为三个任意的整数，为 $b_1,b_2,b_3$ 的任一排列，则 $a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3$ 中至少有一个是偶数.**

证明：由鸽笼原理知，$a_1,a_2,a_3$ 这三个整数中至少有两个数同为偶数或奇数。而 $b_1,b_2,b_3$ 是 $a_1,a_2,a_3$ 的一个排列.

因此，$a_1,a_2,a_3$，$b_1,b_2,b_3$ 这六个数中至少有**4**个数同奇偶性。将这**4**个数放入**3**个盒子时，必有两个在同一盒子中，其差为偶数。故 $a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3$ 中至少有一个为偶数。

［例4］ 在给定的n个整数$a_1, a_2, \cdots a_n$中，存在$k$和 $l(0 \le k < l \le n)$，使得 $a_{k+1} + \cdots + a_l$ 能被n整除。

- **证明：** 考虑n个和：

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

**分两种情况：**

(1) 如果这n个和中有一个能被n整除，则结论成立。

- (2) 如果这n个和中没有一个能被n整除，则这些和被n除时必有1，2，…，n-1这样的余数。由于有n个和，且只有n-1个余数，于是我们可以构造n-1个盒子，第i个“盒子”装被n除余数为i的数(i=1，2，…，n-1)。

- **由鸽笼原理知，用n除各和时有两个和的余数是相同的。所以存在整数k和** $l(k<l)$ **,使得** $a_1+a_2+\cdots+a_k$ **和** $a_1+a_2+\cdots+a_l$ **被n除时有相同的余数r，即**

$$a_1+a_2+\cdots+a_k=b\,n+r$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_l=c\,n+r$$

- **两式相减得** $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l=(c-b)n$

- **由上式知，** $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ **能被n整除。这就证明了本题的结论。**

**[例5]从1，2，…，2n中任意选出n+1个数，这n+1个数中，一定存在两个数，其中一个整数能整除另外一个整数。**

**证明:**

因为任一正整数都可以写成$2^k \cdot l$的形式，其中k是非负整数，l是正的奇数。

显然，从1到2n中只有n个奇数。由于选出的n+1个数都可以写成$2^k \cdot l$的形式，而l的取值只有n种可能。由鸽笼原理知至少有两个数所对应的奇数l是相同的，于是对应于k小的那个整数可以整除对应于k大的另一个整数，故本题结论得证。

［例6］在任意的一群人中，一定有这样的两个人，他们在这群人中有相同数目的熟人。

**证明：**

- 设任意一群人的个数为n，且n≥2。(因为n=1时，不成其为一个人群)。
- 当n=2时，这两个人或者互相是熟人或者互相是生人。当这两个人是熟人时，则他们的熟人都是1个人。当这两个人互不相识时，则他们的熟人都是0。
- 故当n=2时，本例结论成立。

当n≥3时，假设用$x_i$(i=1,2,…,n)表示第i个人的熟人数目。下面分三种情况讨论。

(1)假设这群人中每人都有熟人。即$x_i \neq 0$且$1 \leqslant x_i \leqslant n-1$。

视 $x_1, x_2, \ldots, x_n$为n个物体，1，2，…，n-1为n-1个盒子。这样一来，问题就成为把n个物体放入n-1个盒子的问题了。由鸽笼原理知至少有两个物体放在同一盒子中。不妨设$x_k$与$x_l$在同一盒子中($k \neq l$)，即$x_k = x_l$。这表明第k个人与第l个人有相同数目的熟人。

在这种情况下，本例结论成立。

(2)假设这群人中只有1个人没有熟人，不妨设这个人就是第n个人。即$x_n$=0且1≤$x_i$≤n-2(i=1,2,⋯,n-1)。同样视$x_1$ ,$x_2$,⋯, $x_{n-1}$为n-1个物体，视1,2,⋯,n-2为n-2个盒子，则由鸽笼原理知至少有一个盒子里放了两个物体。不妨设$x_k$与$x_l$ $(k \neq l, k, l \leq n-1)$在同一盒子里，即$x_k = x_l$。故第 个人与第 个人的熟人数目相同。

故在第二种情况下，本例结论也是成立的。

(3) 假设在这群人中至少有两个人都没有熟人，也就是说这两个人的熟人数目为0。故在这种情况下，本例结论仍然成立。

**综上所述，本例结论成立。**

**[例7]** 一棋手为参加一次锦标赛要进行77天的训练，如果他每天至少下一盘棋，且每周至多下12盘棋，试证明不管他怎样安排，必存在相继的若干天，在这段时间中他恰好下棋21盘。

**解：** 设 $a_1$ 为第一天该棋手下棋的盘数，$a_2$ 是第一、二天该棋手下棋盘数的和，$a_j$ 是第一、二、…、j天该棋手下棋盘数的和，j=1, 2, ..., 77，于是序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{77}$ 是严格递增序列，且 $a_1 \geq 1, a_{77} \leq 132$

于是序列$a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21$也是严格递增序列。而$a_{77}+21\le 153$，故154个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21$都在1和153两个整数之间，由鸽笼原理知，这154个数中必有两个是相等的。

故一定存在两个数i和j，使得

$a_i=a_j+21$ 即$a_i-a_j=21$因此，在j+1天，j+2天，…，i天这些天中，这个棋手恰好下棋21盘。