一. 填空题（30 分，每空 3 分）

1.1 已知正态分布随机变量 $Y \sim N(0,\sigma^2)$，Y 的三阶累计量值 $c_3 =$ ________________。

1.2 强度为 λ 的齐次 Poisson 过程亦称以速率为 λ 到达服务机构的计数过程，其相关函数 $R(s,t)=$__________________________。

1.3 某一非周期平稳正态随机过程 $\mathrm{X}(t)$ 的自相关函数为 $\mathrm{R_X}(\tau)=13e^{-4|\tau|}+4$，其一维特征函数为______________________。

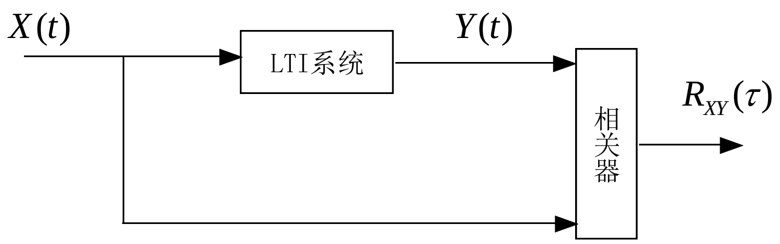
1.4 二阶矩随机过程 $\mathrm{X}(t)$ 在 $t=t_0$ 处均方可微的充分必要条件是其自相关函数 $R_X(s,t)$ 满足___________________________________。

1.5 参数为 σ^2 的 Wiener 过程 $\mathrm{W}(t)$ 是均方连续的正态过程，但不是均方可微过程，其方差函数 $\mathrm{Var[W(t)]}=$ ________________________。

1.6 已知平稳随机过程 $\mathrm{X}(t)$ 的功率谱密度函数为 $\mathrm{S_X}(\omega)=\dfrac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$，该过程的二阶矩或平均功率 $E\{|\mathrm{X}(t)|^2\}=$_________________________。

1.7 随机相位信号 $\mathrm{X}(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中 a 和 ω_0 为常数，随机变量 Θ 在 $(0,2\pi]$ 上的均匀分布。$\mathrm{X}(t)$ 与其一阶均方导数 $\mathrm{X}'(t)$ 的互相关函数 $\mathrm{R_{xx'}}(\tau)$ ____。

1.8 利用互相关测量 LTI（线性时不变）系统的单位冲激响应 $\mathrm{h}(t)$ 的流程如下图。假设输入 $\mathrm{X}(t)$ 是白噪声过程，其自相关函数为 $\mathrm{R_X}(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$，$N_0$ 是不为零常数，LTI 系统的冲激响应 $\mathrm{h}(\tau)=$______________________________________。



1.9 某行业的 A、B 和 C 三个企业销售同一种产品的最初市场占有份额为 $\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$。经过市场调节与技术进步，A、B 和 C 三个企业产品销售的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix}0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$。企业 C 的最终占有份额是____________________________。

1.10 齐次马氏链的三状态 $\{0,1,2\}$ 的状态转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0.6\\ 0.5 & 0.5 & 0\\ 0.6 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix}$，其首达概率 $f_{02}^{(3)}=$____________________。

二、证明题（30 分，每小题 10 分）

2.1 假设 $\mathrm{X}(t)$ 和 $\mathrm{Y}(t)$ 是零均值的、方差为 σ^2 的、高斯的、平稳的、统计独立的随机过程，且有相同的自相关函数 $\mathrm{R}(\tau)$。证明 $\mathrm{Z}(t)=\mathrm{X}(t)\cos\omega_0 t+\mathrm{Y}(t)\sin\omega_0 t$ 是正态随机过程，其中 ω_0 为常数，且远大于 $\mathrm{X}(t)$ 和 $\mathrm{Y}(t)$ 的功率谱密度函数带宽。

2.2 假设 $\mathrm{F}(x)$ 是单调不减、右连续的有界函数，$\mathrm{F}(-\infty)=0$ 。又假设 X 和 Y 是相互统计独立的随机变量，且 X 的分布函数为 $\dfrac{\mathrm{F}(x)}{\mathrm{F}(\infty)}$，$\mathrm{F}(\infty)\neq 0$，Y 在 $(0,2\pi]$ 上均匀分布。证明 $\mathrm{F}(\omega)$ 是广义平稳过程 $\mathrm{X}(t)=\sqrt{\dfrac{\mathrm{F}(\infty)}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-j(Xt+Y)}$ 的谱函数。（提示：$\mathrm{R}(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j\omega\tau}\,\mathrm{dF}(\omega)$）

2.3 如果齐次马氏链$\{X(n), n \geq 0\}$中的状态i和状态j互通，且状态i是常返态，则j也是常返态。

三、分析题（14分）

3.1（6分）设齐次马氏链$\{X(n), n \geq 0\}$的状态空间为$S=\{0,1,2,3,4\}$，其一步状态转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

（1） 给出每个状态的周期数

（2） 说明哪些状态属于常返态和非常返态。

3.2（8 分）某接收机的输出信号为 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Phi)$，其中 ω_0 为常数，A 与 Φ 是相互独立的随机变量，且 $E(A)=2$，$Var(A)=4$，Φ 服从 $[0,2\pi)$ 上均匀分布。分析是否可以用样本的时间平均代替统计平均计算信号 $X(t)$ 的均值函数和相关函数？

四、计算题（26 分）

4.1（8 分）设 $X(t)$ 是零均值的、二阶均方可微的平稳正态过程，自相关函数为 $R_X(\tau)=4e^{-5|\tau|}$。计算随机向量过程 $[X(t),\ X''(t)]$ 的联合特征函数，其中 $X''(t)$ 为 $X(t)$ 的二阶均方导数过程。

4.2（10 分）非周期平稳随机过程 $\mathrm{X}(t)$ 的自功率谱密度函数为 $\mathrm{S}_X(\omega)=\dfrac{10}{\omega^2+25}$。该随机过程通过单位冲激响应为 $\mathrm{h}(t)=3e^{-3t}, t\geq 0$ 的 $R-C$ 积分电路，输出为 $\mathrm{Y}(t)$。计算

（1）输出过程 $\mathrm{Y}(t)$ 的自相关函数、自功率谱密度函数；

（2）$\mathrm{Y}(t)$ 与 $\mathrm{X}(t)$ 的互功率谱密度函数。

4.3（**8 分**）仅能容纳两位顾客的银行营业所由一个营业员为顾客服务，一位顾客接受营业员服务，另外一位顾客则等待，其余顾客发现这种情况，马上离开不返回。设顾客以速率为 2 人/小时的 Poisson 流到达该营业所，且每位顾客在营业所接受服务的平均时间为 0.2 小时。写出状态转移概率强度矩阵，计算各种状态的平稳分布概率。