# §1.3 组合

定义1.4　设A=$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$是具有n个元素的集合，r是非负整数。从这n个不同的元素里取r个不考虑次序组合起来($r\leqslant n$)，称为集合A的r组合。记为C(n, r)

换句话说，A的r-组合是A的r-无序子集。

# 定理1.5

对于r≤n，有C(n, r)= P(n, r)/r! = n!/r!(n−r)! （1.7）

证明：从n个不相同的元素里取r个元素的组合个数为C(n, r)。

而r个元素可以组成r!个r−排列，

一个r-组合 ⇒ r!个r-排列

C(n,r)个r-组合 ⇒ r!C(n,r)个r-排列，

r!C(n,r)=P(n,r)。

这实际上就是从n个元素中选取r个元素组成的r−排列数P(n, r)

$$C(n,r) = P(n,r)/r! = n!/r!(n-r)!$$

# 推论1

$$C(n, r)=C(n, n-r) \tag{1.8}$$

# 推论2

（Pascal公式）

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1) \qquad (1.9)$$

# 推论2

也可用组合分析的方法论证：

在集合A的n个元素中固定一个元素，不妨设为$a_1$，于是，从n个元素中取r个元素的组合

(1) r个元素中包含$a_1$。这可以从除去$a_1$的n-1个元素中取r-1个元素的组合，然后将$a_1$加入而得到，其组合个数为C(n-1, r-1)。

(2) r个元素中不包含$a_1$。这可以从除去$a_1$的n-1个元素中取r个元素的组合而得到，其组合个数为C(n-1, r)。

由加法规则即得

$$C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$$

**利用式(1-9)和初始值C(n,0)=C(n,n)=1，对所有非负整数可计算出表1-1的三角形阵列，通常称这个三角阵列为杨辉三角形或Pascal三角形。**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

# 例 2

数510510能被多少个不同的奇数整除?

# 例 3

从1，2，…，1000中选出三个整数，有多少种选法使得所选的三个整数的和能被3整除？

# 重复组合

**定义1.5** 从重集B=$\{k_1 \bullet b_1, k_2 \bullet b_2, \cdots, k_n \bullet b_n\}$中选取r个元素不考虑次序组合起来，称为从B中取r个元素的重复组合

**定理1.6** B=$\{\infty \bullet b_1, \infty \bullet b_2, \cdots, \infty \bullet b_n\}$的r组合数为

$$F(n,r)=C(n+r-1,r) \qquad (1.11)$$

证明：设n个元素$b_1$，$b_2$，…，$b_n$和自然数1，2，…，n一一对应，于是所考虑的任何组合便可看成是一个r个数的组合$\{c_1, c_2, \cdots, c_r\}$。可认为各$c_i$是按大小次序排列的，相同的$c_i$连续地排在一起。如按$c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_r$排列。

# 重复组合

- 令$d_i=c_i+i-1(i=1,2,\cdots,r)$即

  $d_1=c_1$，　$d_2=c_2+1$，　$\cdots$，$d_r=c_r+r-1$。

- 由于$c_i$最大可取n，故$d_i$最大可取$n+r-1$，这样就得到一个集合$\{1,2,\cdots,n+r-1\}$的r组合$d_1, d_2,\cdots, d_r$ $(d_1<d_2<\cdots<d_r)$

- 易见有一种$\{c_1,c_2,\cdots,c_r\}$的取法便有一种$\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$的取法。而这两种取法有一一对应关系，从而这两个组合计数问题是等价的。

- 这样一来，允许重复的从n个不同元素中取r个元素的组合数和不允许重复的从n+r-1个不同元素中取r个元素的组合数是相同的。故有

$$F(n,r)=C(n+r-1,r)$$

# 重复组合

**注意：** 在定理1.6中，如果B的不同元素的重复数至少是r，则结论仍成立。

## 例四

某餐厅有7种不同的菜，为了招待朋友，一个顾客需要买14个菜，问有多少种买法？

## 例五

求n个无区别的球放入r个有标志的盒子（n>r）而无一空盒的方式数。

# 例六

在由数0，1，…，9组成的r位整数所组成的集合中，如果将一个整数重新排列而得到另一个整数，则称这两个整数是等价的。那么

(1)有多少不等价的整数?

(2)如果数字0和9最多只能出现一次，又有多少不等价的整数。

# 例七

求方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$的非负整数解的个数。其中，$n$, $r$为正整数。