第二部分：非线性方程求根方法

不动点迭代的一般理论，牛顿迭代法迭代格式，牛顿迭代法误差估计和收敛速度分析，非线性方程组迭代法。

① 不动点迭代

1). 将 $f(x)=0 \Rightarrow x=\varphi(x)$. 称为迭代函数　　$\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$, 而 $\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$，p阶收敛

2). $x^*=\varphi(x^*)$. x^*为不动点

3). $x_{k+1}=\varphi(x_k)$　为不动点迭代. $|\varphi'(x)|\leq L$. $0<L<1$ 收敛.

② 牛顿迭代

将 $f(x)=0$ 的 $f(x)$ 线性化. 用线性方程解逼近非线性方程解

1). 格式: $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$　　$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 则 $\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

2). 收敛: 至少平方收敛 →. 设 $f(x^*)=0$. $\Rightarrow \varphi'(x^*)=0$, 至少平方收敛.

3). 缺陷: A. $f'(x_k)$为0.

B. 死循环.　　$x^{(k+1)}=x^{(k)}-F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)})$　$k=0,1\cdots$

③ 弦截法

1). 格式: $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)$

2). 要求两个初值.

例, 1. 牛顿迭代解 $xe^x-1=0$.

解: $f(x)=xe^x-1$　　$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

则迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_ke^{x_k}-1}{(x_k+1)e^{x_k}}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{x_k+1}$