比如某单位举行晚会，有6个部门表演节目，上场次序编号为1，2，3，….,6。现进行抽签，以决定上场次序。但其中一个部门希望自己抽的编号是偶数，另外一个部门希望抽到4或者6，还有一个部门不希望自己抽到的编号是3的倍数。那么，抽签结果使大家都满意的概率是多少？

问题可以考虑为：其中一个部门希望自己抽的编号不是奇数（是偶数），另外一个部门希望抽到不是1,2,3,5(是4或者6），还有一个部门不希望自己抽到的编号是3的倍数。那么，抽签结果使大家都满意的概率是多少？

本题可以考虑6！种抽签方式中，把不满足条件的排除掉！

问题是如何表示不是1,2,3,5；如何表示不是奇数？如何表示不是3的倍数这些抽签方式？

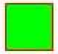
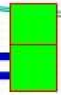
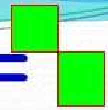
§2.5 一般有限制的排列

§2.3节中的错排问题是一种有限制的排列，即i不排在第i位的排列。更一般地若i不排在某些位的1，2，…,n的全排列，其排列个数又如何计算呢?此类问题的解法之一是利用所谓“棋子多项式”。

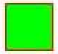
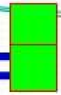
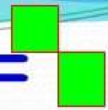
设n是一个正整数，一个$n \times n$棋盘是指一个正方形被均分为$n \times n$个小方格所成的“图形”。一个$n \times n$棋盘去掉某些格后剩下部分也称它为一个棋盘。在给定棋盘C中放入k个无区别的棋子，要求每个棋子只能放一格，且各子不同行不同列，记不同的放法数为$r_k(C)$，问$r_k(C)=?$此问题称为**棋子问题**。

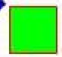
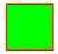
- 例如图2.3是四个棋子放入5×5棋盘的一种放法。

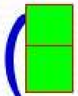
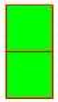
	1	2	3	4	5
1				○	
2		○			
3					
4			○		
5	○				

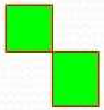
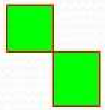
例1 设$C_1=$  ，$C_2=$  ，$C_3=$  ，

请分别求$r_1(C_1),r_2(C_1)$；$r_1(C_2),r_2(C_2)$; $r_1(C_3),r_2(C_3)$的值

例1 设$C_1=$  , $C_2=$  , $C_3=$  有

$r_1(C_1)=r_1($  $)=1,r_2($  $)=0$

$r_1(C_2)=r_1($  $)=2,r_2($  $)=0$

$r_1(C_3)=r_1($  $)=2,r_2($  $)=1$

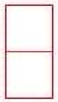
定义2.1 给定棋盘C，令$r_0(C)=1$,n为C的格子数，称

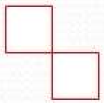
$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)x^k$$

为棋盘C的棋子多项式。

例如由例1求得的结果，易知

R()$=1+x$,

R()$=1+2x$,

R()$=1+2x+x^2$

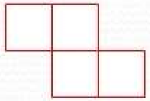
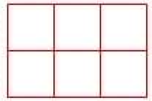
定理2.6 给定棋盘C，指定C中某格A。令C_i为C中删去A所在行与列所剩的棋盘，Ce为C中删去格A所剩的棋盘，则

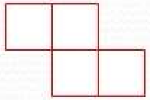
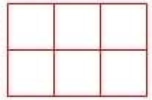
$$R(C)=xR(C_i)+R(C_e) \qquad (2.11)$$

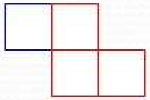
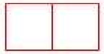
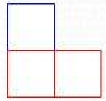
证明： 将k个棋子放入棋盘C，其所有放法可按格A有棋子与没有棋子分为两类。格A有棋子相当于在格A放一个棋子后，再将余下k-1个棋子放入C_i，故放法总数为$r_{k-1}(C_i)$。格A没有棋子的放法数为$r_k(C_e)$。由加法规则

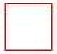
$$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e)$$

（此后略）。

［例2］ 计算R()与R()。

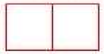
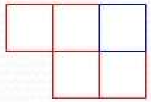
［例2］ 计算R()与R()。

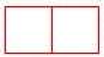
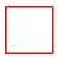
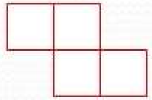
解：R()=xR()+R()

=xR()+［xR()+R()］

$=x(1+2x)+x(1+x)+(1+2x)$

$=1+4x+3x^2$

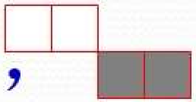
R()=xR()+R()

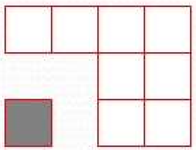
=xR()+［xR()+R()］

$$=x(1+2x)+x(1+x)+(1+4x+3x^2)$$

$$=1+6x+6x^2$$

定义2.2 设C_1和C_2是两个棋盘，若C_1的所有格都不与C_2的所有格同行同列，则称两个棋盘是**独立**的。

例如，中无阴影的棋盘与有阴影的棋盘是独立的。

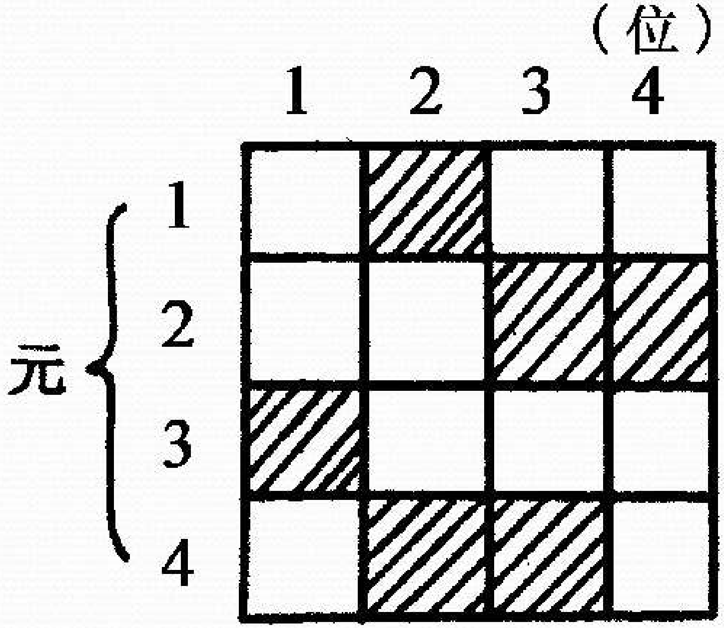
中无阴影的棋盘与有阴影的棋盘不独立

定理2.7

若棋盘C可分解为两个独立的棋盘C_1和C_2，则

$$R(C)=R(C_1)R(C_2) \qquad (2.12)$$

考虑集合{1,2,…,n}的一个全排列且满足$i(i=1,2,\cdots,n)$不排在某些已知位，求不同的排列方式数。此问题称为n元有禁位的排列问题，可通过棋子多项式求解。首先建立一个$n\times n$棋盘C，再对每一个元i，若i不排在第j位，则将C中第i行第j列的小格画上阴影。对i的所有禁位都做如此处理。处理完毕后，称C中阴影部分为禁区棋盘。最后求出禁区棋盘的棋子多项式，再将相应数据代入下面定理2.7中的公式，即可求得排列数。



例如{1,2,3,4}的全排列，要求1不排在第二位；2不排在第三、四位；3不排在第一位；4不排在第二、三位。此问题对应的禁区棋盘如图2.4中阴影部分所示。

定理2.8

n元有禁位的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^n r_n$$

其中r_i为将i个棋子放入禁区棋盘的方式数，i=1,2,…,n。

Pi为禁区棋盘放符合要求的i个棋子的性质，Ai为满足Pi性质的数据组成的集合(i=1,2,…,n)。则要满足条件，就应该 $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$

【例4】

四位小朋友X_1,X_2,X_3,X_4排成一行，但X_1不愿排在第二位；X_2不愿排在第三、四位；X_3不愿排在第一位；X_4不愿排在第二、三位，求不同的排法数。

解： 该问题是一个4元有禁位的排列问题。该问题所对应的棋盘即为图2.4。设C为图2.4的禁区棋盘，利用式(2.11)可求得

$$R(C)=1+6x+11x^2+7x^3+x^4$$

即$r_1=6,r_2=11,r_3=7,r_4=1$。由定理2.7，

可得排列数为

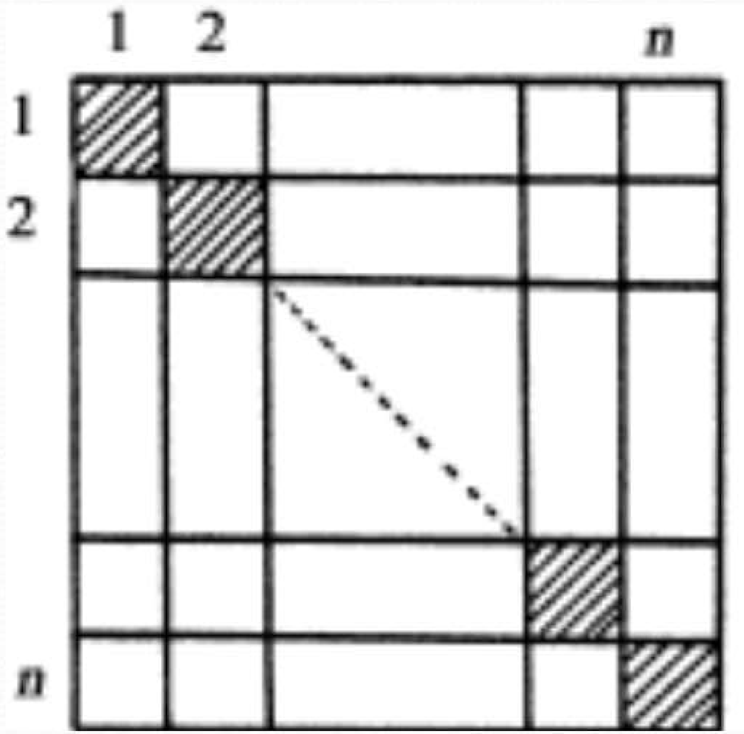
$$N=4!-r_1\cdot(4-1)!+r_2\cdot(4-2)!-r_3(4-3)!+r_4$$

$$=4!-6\cdot 3!+11\cdot 2!-7\cdot 1!+1=4.$$

[例5]

试解错排问题。

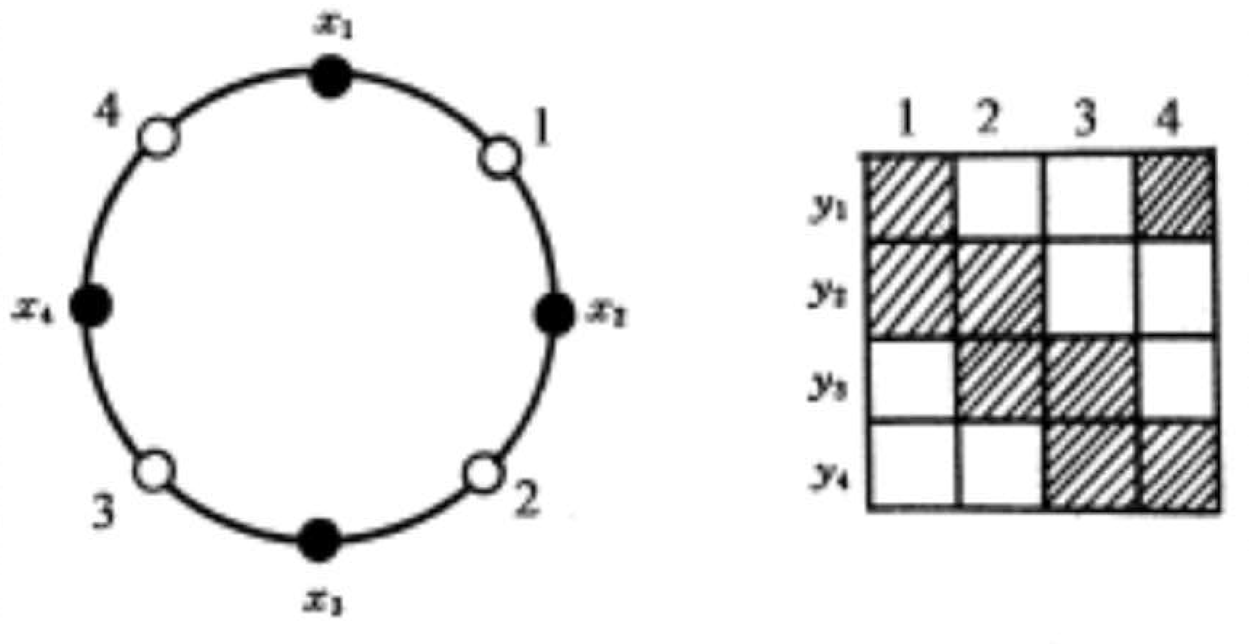
解： 错排问题对应的棋盘如图2.5所示。



[例6] 四对夫妇前来参加宴会，围圆桌而坐，男女相间，夫妇不相邻，问有多少种入座方式数?

解：设女士x_1,x_2,x_3,x_4，其丈夫依次为y_1,y_2,y_3,y_4。先让女士入座，其方式数为6(4个元的圆排列数)。女士坐定后再让男士入座，下面计算男士入座的方式数。

设一种女士入座的方式如图2.6(a)所示，其中“o”表示空座位。按题意y_1不能坐1，4位；y_2不能坐1，2位；y_3不能坐2，3位；y_4不能坐3，4位。因此男士的入座方式是一个有禁位的排列，对应的禁区棋盘如图3.6(b)中阴影所示。



(a) (b)

主观题 10分

有5个人看电影，其中第一个人不愿意坐1，3位置；第二个人不愿意坐2，4位置；第三个人不愿意坐1，5位置；第四个人不愿意坐3，5位置；第五个人不愿意坐1,2位置，请问一共有多少种就坐方法。

主观题 10分

某单位举行晚会，有6个部门表演节目，上场次序编号为1，2，3，....,6。现进行抽签，以决定上场次序。但其中一个部门希望自己抽的编号是偶数，另外一个部门希望抽到4或者6，还有一个部门不希望自己抽到的编号是3的倍数。那么，能够满足要求的抽签方案是有 多少种？

作业

- 1， 2， 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 20