

§ 2.2 维纳过程

一、维纳过程的数学模型

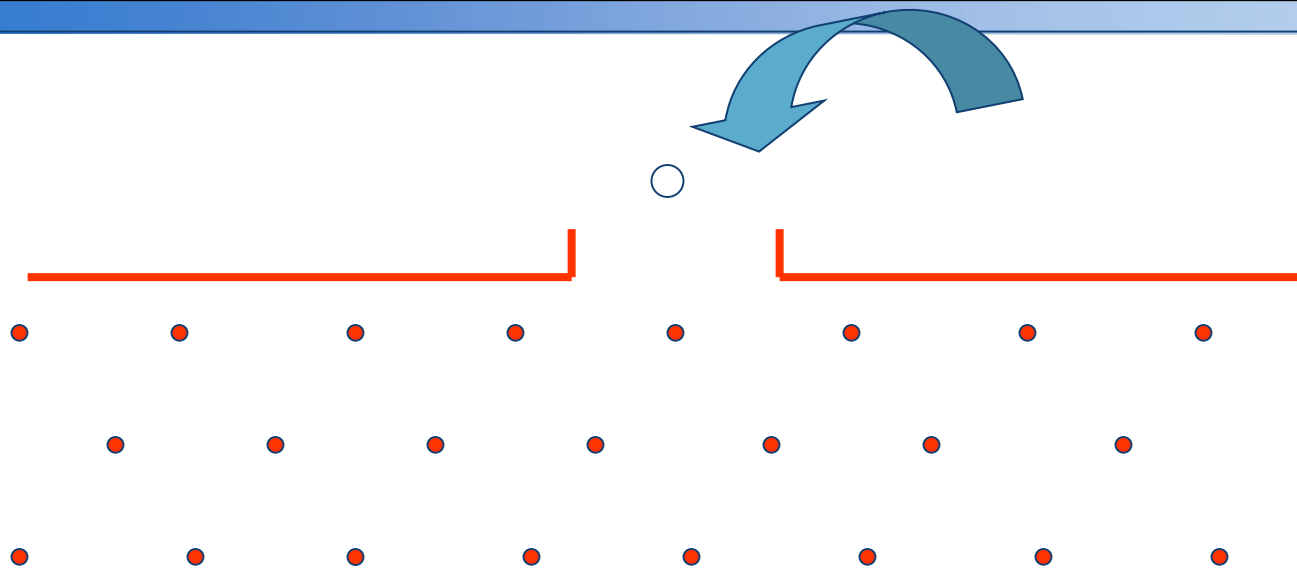
维纳过程是英国植物学家罗伯特.布朗在观察漂浮在液面的花粉运动—布朗运动规律时建立的随机游动数学模型.

EX.1 (高尔顿钉板模拟试验)

将一个小球投入无限大高尔顿钉板内, 小球各以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左或向右移动一格.



维纳过程



$$X(k) = \begin{cases} 1, & \text{在第} k \text{层向右位移一格;} \\ -1, & \text{在第} k \text{层向左位移一格.} \end{cases}$$

$X(k)$	-1	
$P\{X(k)=i\}$	$1/2$	$1/2$

$\{X(k), k \in N^+\}$ 是一个独立随机过程, 令

$$Y(n) = \sum_{k=0}^n X(k),$$

小球在第 n 次碰撞后所处位置

$\{Y(n), n \in N^+\}$ 是一个平稳独立增量过程.

均值函数为

$$E[Y(n)] = E\left[\sum_{k=1}^n X(k)\right] = 0,$$

方差函数为

$$D[Y(n)] = \sum_{k=1}^n D(X(k)) = n,$$

由独立同分布中心极限定理知 $as \quad n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\frac{Y(n)}{\sqrt{n}} \leq y\right\} = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X(k)}{\sqrt{n}} \leq y\right\} \rightarrow \Phi(y)$$

即 $Y^*(n) = \frac{Y(n)}{\sqrt{n}}, n = 1, 2, \dots$ 依分布收敛到标准正态分布

二、维纳过程的定义

定义2.2.1 若随机过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 满足下条件(1)~(3)称 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的**维纳过程**（或布朗运动）。

- (1) $P(W_0=0)=1$;
- (2) 具有独立增量;
- (3) $W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2|t-s|)$, ($\sigma > 0$).

维纳过程应用广泛：电路理论、通信和控制、生物、经济管理等。

维纳过程的研究成果应用于计量经济学，使其方法论产生了一次飞跃，成功地应用于非平稳的经济过程，如激烈变化的金融商品价格的研究。

三、维纳过程的分布

1. 一维分布: $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$;

2. 增量分布: $W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 |t - s|)$;

设 $t > s$, 因 $W(0)=0$, 且 $W(t)$ 是平稳独立增量过程, 故

$$W(t) - W(s) = W(t - s + s) - W(s)$$

与 $W(t - s) - W(0) = W(t - s)$

有相同分布 $N(0, \sigma^2(t - s))$.

3. 维纳过程是正态过程.

证 设维纳过程 $\{W(t), t \geq 0\}$ 的参数是 σ^2 ,
任取 n 及 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$X_k \triangleq W(t_k) - W(t_{k-1}),$$

则 $X_k \sim N(0, \sigma^2(t_k - t_{k-1}))$, $t_0 = 0, k = 1, 2, \cdots, n$

相互独立, 且有

$$W(t_k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$



$$\begin{bmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

正态随机向量的线性变换服从正态分布。

四、维纳过程的数字特征

1. $E\{W(t)\}=0$;
2. $C(s, t)=R(s, t)=\sigma^2 \min(s, t)$

维纳过程是平稳独立增量过程

EX.1 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，求下列过程的均值函数和相关函数。

1) $X(t) = W^2(t), t \geq 0;$

2) $X(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right), t > 0.$

解 1) $m_X(t) = E[X(t)] = E[W^2(t)]$

$$= D[W(t)] + \{E[W(t)]\}^2 = \sigma^2 t.$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[X(s)X(t)] = E[W^2(s)W^2(t)] \\ &= E\{W^2(s)[W(t) - W(s) + W(s)]^2\} \quad (s < t) \end{aligned}$$



独立
增量

$$= E\{W^2(s)[W(t) - W(s)]^2\} + E[W^4(s)] \\ + 2E\{W^3(s)[W(t) - W(s)]\}$$

$$= E[W^2(s)]E\{[W(t) - W(s)]^2\} + E[W^4(s)]$$

$$= \sigma^2 s \sigma^2 (t - s) + 3\sigma^4 s^2 = \sigma^4 (st + 2s^2)$$

故 $R_X(s, t) = \sigma^4 (st + 2\min^2(s, t))$

其中因 $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t);$

$$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 | t - s |)$$

另因 若 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 有

$$E(X^n) = \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sigma^n (n-1)(n-3) \cdots 1, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

$$2) \quad m_X(t) = E[X(t)] = tE[W(\frac{1}{t})] = 0, \quad t > 0.$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E[sW(\frac{1}{s})tW(\frac{1}{t})] = stE[W(\frac{1}{s})W(\frac{1}{t})] \\ &= st\sigma^2 \min(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}) = \sigma^2 \min(s, t). \end{aligned}$$

五、维纳过程的判定

定理2.2.1 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是正态过程，若 $W_0 = 0$ ，对任意 $s, t > 0$ ，有 $E(W_t) = 0$ ， $E(W_s W_t) = C^2 \min(s, t)$ ，且轨道连续，则 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是维纳过程。

推论 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的维纳过程，则以下过程仍是维纳过程。

(1) 对任意的 $\tau \geq 0, \{W(t+\tau) - W(\tau), t \geq 0\}$

(2) 对任意的 $\lambda > 0, \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} W(\lambda t), t \geq 0 \right\}$

(3)
$$Y(t) = \begin{cases} tW\left(\frac{1}{t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$