§1.3 随机过程的常见类型

过程基本类型

可按照随机过程的参数集T和状态空间E对过程进行分类:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">参数集 T</td></tr>
<tr><td>离 散</td><td>连 续</td></tr>
<tr><td rowspan="2">状态空间E</td><td>离 散</td><td>(离散参数)链</td><td>(连续参数)链</td></tr>
<tr><td>非离散</td><td>随机序列</td><td>随机过程</td></tr>
</table>

可按随机过程的概率结构特征进行分类，有以下重要过程：

1. 二阶矩过程

定义1.3.1 设已给随机过程$\{X_t, t\in T\}$ (实或复)，若对任意$t\in T$，均有 $E[|X_t|^2]<\infty$，称其为二阶矩随机过程.

由许瓦茨不等式

$$\left|E(X_s\overline{X_t})\right|^2 \le \left|E(X_s)\right|^2 \cdot \left|E(X_t)\right|^2 < \infty$$

故二阶矩过程的协方差函数与相关函数总存在.

定理1.3.1 设$\{X_t, t\in T\}$是二阶矩随机过程，且$m_X(t)=0$，则其协方差函数$R(s,t)$满足性质：

(1) 非负定性

对给定$n\geq 1$及 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，任意的普通函数 $\theta(t), t\in T$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_k,t_j)\theta(t_k)\overline{\theta(t_j)}\geq 0$$

(2) 埃密特性，即 $R(t,s)=\overline{R(s,t)}$.

证明参见P23.

以下3类重要过程都是二阶矩过程:

2. 正态过程

过程$\{X_t, t \in T\}$的任意维随机向量服从联合正态分布, 即有限维分布函数族

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n): t_1, t_2, \cdots t_n \in T, n \geq 1\}$$

是正态分布函数族.

3. 宽平稳过程

$\{X_t, t\in T\}$是复值二阶矩过程, 满足

均值函数 $m(t)=E(X_t)=m;$

协方差函数 $C(s,t)=C(s-t),\ s,t\in t.$

仅与$s-t$有关

称为宽((或广义、或弱)平稳过程, 通常简称平稳过程.

4. 严平稳过程

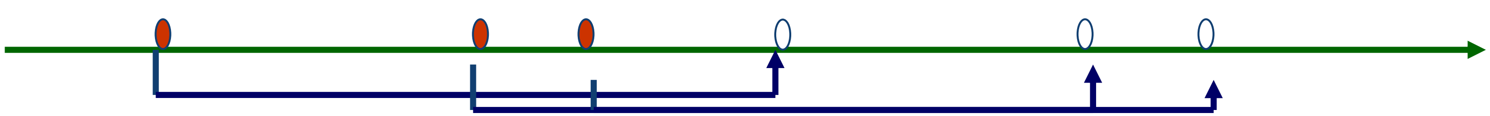
过程$\{X_t, t\in T\}$对任意$n>1, t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$和实数$\tau$,当$t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_n+\tau \in T$时,

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{与}\ (X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \cdots, X_{t_n+\tau})$$

具有相同分布,即

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= F_{t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad (x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R_n$$



严平稳过程的任意有限维分布不随时间的推移而改变.

5. 正交增量过程

$\{X_t, t \in T\}$是复值二阶矩过程, 对任意的 $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$且 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ 有

$$E[(X_{t_2} - X_{t_1})\overline{(X_{t_4} - X_{t_3})}] = 0$$

称过程是正交增量过程.

6. 马尔科夫过程

过程 $\{X_t, t\in T\}$ 对任意 $n>1$, $t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$, 及状态空间 E 中的任意元素 $x_i(1\le i\le n)$ 均有

$$P\{X_{t_n}\le x_n \mid X_{t_1}=x_1, X_{t_2}=x_2, \cdots, X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$

$$=P\{X_{t_n}\le x_n \mid X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$

马尔科夫过程在随时间推移的演变过程中，知道“现在”状态的条件下，“过去”的信息对推断“将来”状态的概率性质不再起作用.

1.3.2 独立过程与平稳独立增量过程

1. 独立过程

定义1.3.2 设随机过程$\{X_t, t \in T\}$，对任意的正整数$n \geq 1$及任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$随机变量

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$$

相互独立，称过程$\{X_t, t \in T\}$为独立过程.

独立随机过程的有限维分布由一维分布确定，即有

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{t_k}(x_k),\quad (x_1,\cdots,x_n)\in R_n$$

Ex.1 高斯白噪声 设实值时间序列 $\{X_n, n\in N\}$ 的均值函数与方差函数分别为

$$E(X_n)=0,\qquad D(X_n)=\sigma^2,$$

自相关函数为

$$R(m,n)=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \sigma^2, & m\neq n.\end{cases}$$

两两不相关序列.

称为**离散白噪声**(序列).

若 $\{X_t, t \in R\}$ 随机过程满足

$$E(X_t) = 0,$$

$$R(s,t) = \sigma^2 \delta(s-t) = \begin{cases} 0, & s \neq t \\ \infty, & s = t \end{cases}$$

称其为连续参数白噪声.

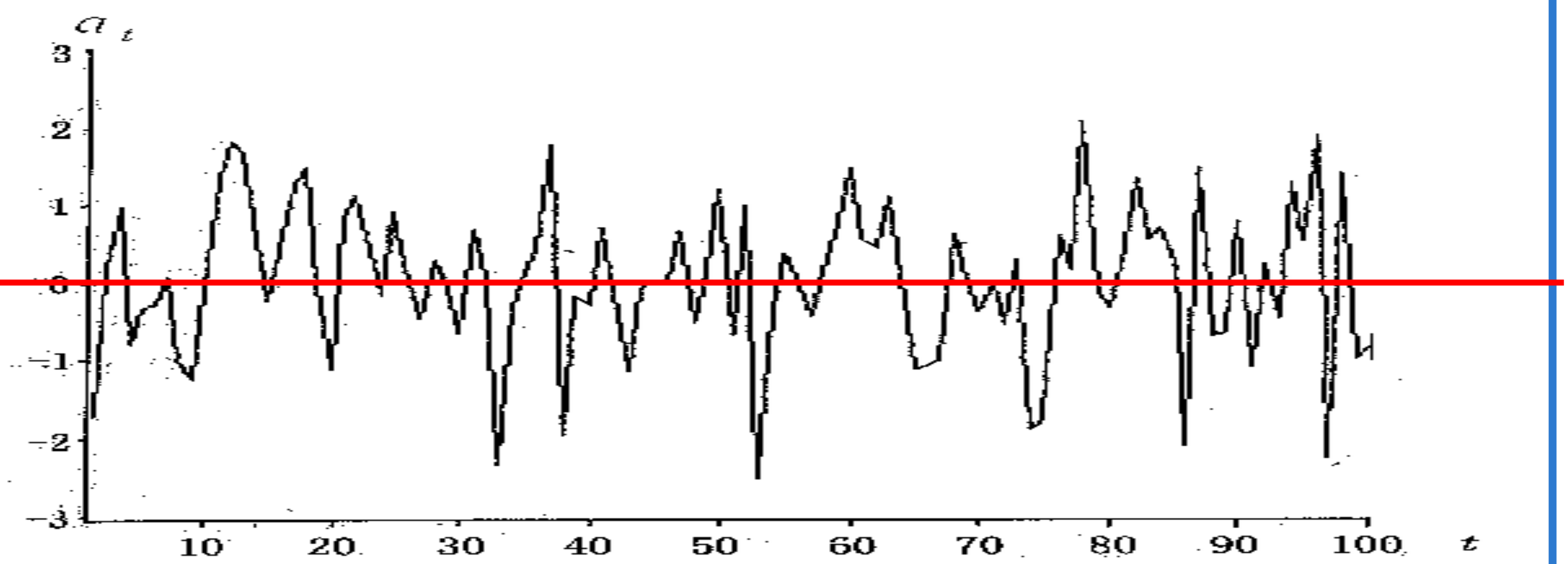
若 X_n 都服从正态分布, 称 $\{X_n, n \in N\}$ 是高斯白噪声序列.

对于 n 维正态随机变量有

相互独立 $\Leftrightarrow$ 不相关

故高斯白噪声序列是独立时间序列.

高斯白噪声是典型的随机干扰数学模型,普遍存在于电流的波动,通信设备各部分的波动,电子发射的波动等各种波动现象中.



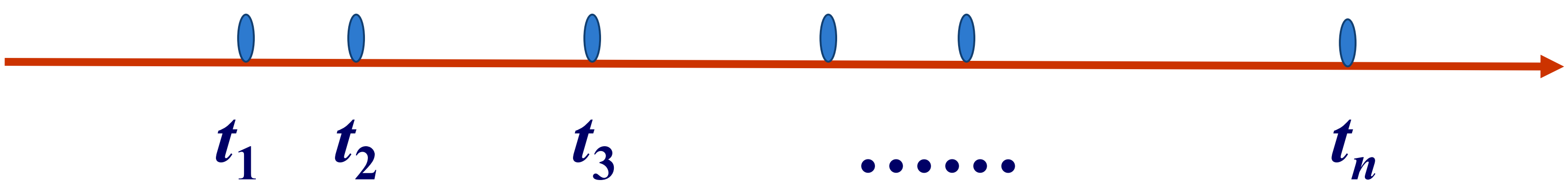
正态白噪声的一条现实

2.独立增量过程

定义1.3.3 设随机过程 $\{X_t, t\in T\}$，对任意的正整数$n\geq 2$ 及T中 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，过程的增量

$$X_{t_1}, X_{t_2}-X_{t_1}, X_{t_3}-X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$

相互独立，称其为独立增量过程(可加过程)．



$$X_t = X_{t_0} + \sum_{i=1}^{n} X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$$

Ex. 2 若$\{X_n, n \in N^+\}$是独立时间序列, 令

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} X_k, \quad X_0 = 0$$

则$\{Y_n, \ n \in N^+\}$是独立增量过程.

证 因$\{X_n, n \in N^+\}$ 相互独立, 若$n_1 < n_2 < \cdots < n_m$

则

$$Y_{n_2}-Y_{n_1}=\sum_{k=0}^{n_2}X_k-\sum_{k=0}^{n_1}X_k=X_{n_1+1}+\cdots+X_{n_2},$$

$$Y_{n_3}-Y_{n_2}=X_{n_2+1}+\cdots+X_{n_3},\cdots,$$

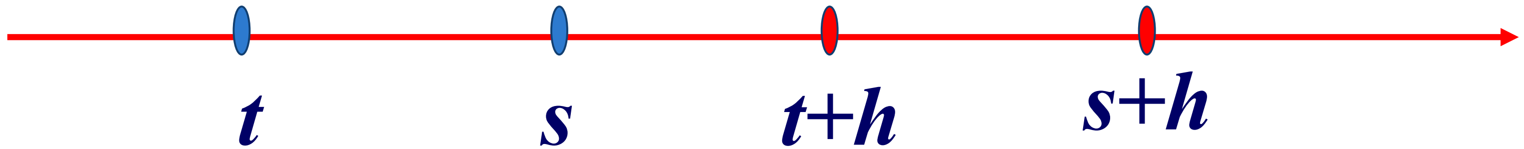
$$Y_{n_m}-Y_{n_{m-1}}=X_{n_{m-1}+1}+\cdots+X_{n_m}$$

相互独立, 即各增量相互独立.

3.平稳增量过程

定义1.3.4 设随机过程$\{X_t, t\in T\}$ 对任意$t<s\in T$及实数h, 随机变量 $X_t - X_s$ 与 $X_{t+h} - X_{s+h}$ 具有相同的概率分布, 称是一个具有平稳增量的过程, 简称平稳增量过程.

称过程的增量是时齐的, 或齐次的.



平稳增量过程的增量的分布仅与区间长度$s-t$的大小有关, 与起始点无关.

若过程既为独立增量过程, 又为平稳增量过程，称其为平稳独立增量过程.

续Ex.2 若$\{X_n, n\in N^+\}$ 相互独立并同分布，令

$$Y_n=\sum_{k=0}^{n}X_k, \quad X_0=0$$

则$\{Y_n, \ n\in N^+\}$的增量是时齐的

因对任意正整数$n_1 < n_2$及m,

$$Y_{n_2} - Y_{n_1} = X_{n_1+1} + \cdots + X_{n_2}$$

与 $$Y_{n_2+m} - Y_{n_1+m} = X_{n_1+m+1} + \cdots + X_{n_2+m}$$

有相同分布.

独立(平稳)增量过程的性质

以下性质中总假定$T=[0, +\infty)$, 且$X_0 = 0$ 或 $P\{X_0=0\}=1$.

性质1.3.1 设$\{X_t, t\in T\}$是平稳独立增量过程, 且$X_0=0$, 则有

1. 均值函数 $m(t)=m\,t$, (m 为常数);

2. 方差函数 $D(t)=\sigma^2 t$, (σ为常数);

3. 协方差函数 $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$, $\quad s,t\in T$.

证明 第3条, 当$t>s$时,由增量的独立性,

$$X_s = X_s - X_0 \quad 与 \quad X_t - X_s$$

相互独立,并利用第1条,可得

$$C(s,t)=E\{[X_t-m(t)][X_s-m(s)]\}$$

$$=E(X_tX_s)-m(s)m(t)$$

$$=E\{[X_t-X_s+X_s]X_s\}-m(s)m(t)$$

$$=E(X_t-X_s)E(X_s)+E(X_s^2\}-m^2st$$

$$=m(t-s)ms+\sigma^2 s+m^2s^2\cdots$$

$$=\sigma^2 s$$

X_t-X_s与X_s相互独立.

同理当$t<s$时，$C(s,t)=\sigma^2 t$，故

$$C(s,t)=\sigma^2\min(s,t).$$

性质1.3.2 设 $\{X_t, t \in T\}$ 是独立增量过程，其有限维分布由一维分布和增量分布确定.

证 对任意的$n \geq 1$及任取 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$, 由增量的独立性可知

$$Y_1 = X_{t_1}, Y_2 = X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, Y_n = X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

相互独立. 且

$$X_{t_1} = Y_1, X_{t_2} = Y_1 + Y_2, \cdots, X_{t_n} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 的特征函数为

$$\varphi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)=E\{e^{j[\theta_1 X_{t_1}+\cdots+\theta_n X_{t_n}]}\}$$

$$=E\{e^{j[\theta_1 Y_1+\theta_2(Y_1+Y_2)\cdots+\theta_n(\sum_{k=1}^{n} Y_k)]}\}$$

$$=E\{e^{j[(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)Y_1+(\theta_2+\cdots+\theta_n)Y_2+\cdots+\theta_n Y_n]}\}$$

$$=E[e^{j(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)Y_1}]E[e^{j((\theta_2+\cdots+\theta_n)Y_2)}]\cdots E[e^{j\theta_n Y_n}]$$

$$=\underline{\varphi_{t_1}}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\underline{\varphi_{t_2-t_1}}(\theta_2+\cdots+\theta_n)\cdots\underline{\varphi_{t_n-t_{n-1}}}(\theta_n)$$

其中$\varphi_{t_k-t_{k-1}}(\theta)$表示随机变量$X_{t_k}-X_{t_{k-1}}$的特征函数.

根据特征函数与分布函数的惟一性定理知，$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 的联合分布函数由一维分布和增量分布完全确定.

注1 对于独立增量过程 $\{X_t, a \le t \le b\}$, 且 $P\{X_0=0\}=1$, 其有限维分布由增量分布确定.

分析 因对任意$a<t\le b$, 有

$$X_t = X_t - X_a$$

由增量分布确定了一维分布.

注2 对于平稳独立增量过程 $\{X_t, a \le t \le b\}$，且 $P\{X_0=0\}=1$,其有限维分布由一维分布确定.

分析 因增量 $X_t - X_s$ 与

$$X_{t-s+a} = X_{t-s+a} - X_a$$

同分布.

思考题:

1. 白噪声过程是否一定是独立过程?

2. 独立过程是否是独立增量过程? 反之?