2010 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

(工科、数学、经管、文专类)

一、计算题

1．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=1, \lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)^2=1$，求 $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)g\left(x\right)$．(文专类)

2．求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]^n$． (经管类)

3．求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\dfrac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$． (工科、数学类)

4. 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\,x}{\left(1+x^2\right)^2}$． (经管类)

5．求不定积分 $\displaystyle\int\frac{e^x\left(1+\sin x\cos x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}\,x$． (经管、文专类)

6．计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{\left(1+x^2\right)\left(2-2x+x^2\right)}$． (工科类)

7．设 ΔABC 为锐角三角形，求

$$\sin A+\sin B+\sin C-\cos A-\cos B-\cos C$$

的最大值和最小值． (工科、经管类)

8．设 $\left[x\right]$ 为小于等于 x 的最大整数，

$$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|\ 1\le x\le 3,\ 2\le y\le 4\ \right\},$$

求 $\displaystyle\iint\limits_D\left[x+y\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$． (经管类)

9. 计算$\iint\limits_{R^2}\exp\left[-\dfrac{x^2-2\rho xy+y^2}{2\left(1-\rho^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$0\le\rho<1$.

(数学类)

10．已知分段光滑的简单闭曲线Γ（约当曲线）落在平面$\pi: ax+by+cz+1=0$上，设Γ在π上围成的面积为A，求

$$\oint_\Gamma\frac{(bz-cy)\mathrm{d}x+(cx-az)\mathrm{d}y+(ay-bx)\mathrm{d}z}{ax+by+cz},$$

其中$\vec{n}$与Γ的方向成右手系.（数学类、工科类）

11．设$f(x)$连续，满足

$$f(x)=\sqrt{x}+\int_0^x e^{x^2-t^2}f(t)\mathrm{d}t,$$

求$f'(1)-3f(1)$的值.（工科类）

12．设$f(x)$连续，满足

$$f(x)=x-2\int_0^x e^{x^2-t^2}f(t)\mathrm{d}t,$$

且$f(1)=\dfrac{1}{e}$，求$f^{(n)}(1)$的值.（数学类）

13．设$f(x)$连续，满足$f(x)=x^2+\int_0^x e^{x-t}f'(t)\mathrm{d}t$，求$f'(0)$.（经管、文专类）

14．请用a,b描述圆$x^2+y^2\le 2y$落在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内的充分必要条件，并求此时椭圆的最小面积.（数学类、文专类）

15．求曲线$y=6-x^2$与直线$y=5$所围成的平面区域绕x轴旋转一周所得的旋转体体积V.

二、定义数列$\{a_n\}$如下:

$$a_1=\frac{1}{2}, a_n=\int_0^1 \max\left\{a_{n-1},x\right\}\mathrm{d}\,x,\quad n=2,3,4,\cdots,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. （数学、工科、经管、文专类）

三、设函数 $f\left(x\right)\in C^2(R)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \left|f''(x)\right|\leq 1$，

证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.（数学类）

四、设非负函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上满足

$$\forall x,y,\ f(x+y)\geq f(x)+f(y) \text{ 且 } f\left(1\right)=1,$$

证明：(1) $f(x)\leq 2x,\ \ x\in[0,1]$；

(2) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x\leq\frac{1}{2}$.（数学类）

五、设有圆盘随着时间 t 的变化，圆盘中心沿曲线

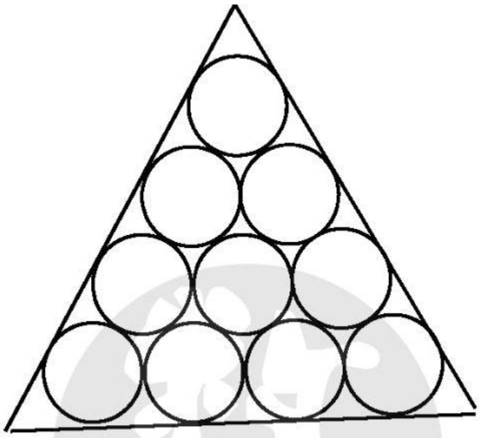
$$L: x=\cos t, y=\sin t, z=t^2 (t\geq 0)$$

向空间移动，且圆盘面的法向与 L 的切向一致。若圆盘半径 $r\left(t\right)$ 随时间改变，有 $r(t)=t^{\frac{3}{2}}$，求在时间段 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内圆盘所扫过的空间体积.（工科类）

六、证明：当 $\forall x>0, \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t<\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$.（工科类、经管类）

七、证明：$\tan^2 x+2\sin^2 x>3x^2, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.（工科类）

八、设有一个等边三角形，内部放满 n 排半径相同的圆彼此相切（如图为 $n=4$ 的情形），记 A 为等边三角形的面积，A_n 为 n 排圆的面积之和，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{A}$.（经管、文专类）



九、设$f(x)=e^{x}P(x)$，其中$P\left(x\right)$为 5 次多项式，证明：

(1) $f\left(x\right)$必有极值点；

(2) $f\left(x\right)$必有奇数个极值点.（经管类）

十、设全体正整数集合为N^{+}，若集合$G\subset N^{+}$对加法封闭（即$\forall x,y\in G\Rightarrow x+y\in G$），且$G$内所有元素的最大公约数为 1，证明：存在正整数$N$，当正整数$n>N$时，$n\in G$.（数学类）

2010 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题及参考解答

(工科、数学、经管、文专类)

一、计算题

1．【参考解析】：由极限的运算法则，得

$$\lim_{x\to\infty} 4f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right)^2 - \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)^2 = 0$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0.$

2．【参考解析】：容易知道底数部分极限趋于 1，由对数法和等价无穷小，极限转换为计算

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = -\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2}$$

$$= -\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1+2\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = -\frac{1}{4}$$

所以原极限 $= e^{-\frac{1}{4}}$.

3．【参考解析】：容易知道底数部分极限趋于 1，由对数法和等价无穷小，极限转换为计算

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\ln\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\frac{1}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=-\frac{1}{2}$$

所以原极限$=e^{-\frac{1}{2}}$.

4. **【参考解析】**: $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^2}=\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{\pi+1}{2}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi+2}{4}$$

5. **【参考解析】**: 原积分$=\int\left(e^x\sec^2x+e^x\tan x\right)\mathrm{d}x$

$$=\int e^x\,\mathrm{d}\tan x+\int e^x\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=e^x\tan x-\int e^x\tan x\,\mathrm{d}x+\int e^x\tan x\,\mathrm{d}x$$

$$=e^x\tan x+C$$

6. **【参考解析】**: 将被积函数拆分为部分分式，得

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(2-2x+x^2\right)}=\frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{1+x^2}-\frac{2x-3}{2-2x+x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x-2}{2-2x+x^2}+\frac{1}{2-2x+x^2}\right)$$

于是由积分的线性运算性质，对以上括号里面求不定积分，得原函数为

$$F\left(x\right)=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{l}\arctan x+\ln\left(1+x^2\right)\\ -\ln\left|x^2-2x+2\right|+\arctan\left(x-1\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\arctan x+\ln\frac{1+x^2}{x^2-2x+2}+\arctan\left(x-1\right)\right]$$

所以原积分

$$=\frac{1}{5}\left[\arctan x+\ln\frac{1+x^2}{x^2-2x+2}+\arctan(x-1)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\left[\arctan x+\ln\frac{1+x^2}{x^2-2x+2}+\arctan(x-1)\right]$$

$$-\frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}\left[\arctan x+\ln\frac{1+x^2}{x^2-2x+2}+\arctan(x-1)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{5}\pi.$$

7.【参考解析】: 记 $f(B,C)=\sin(B+C)+\sin B$

$$+\sin C+\cos(B+C)-\cos B-\cos C$$

令 $\begin{cases}f_B'(B,C)=\cos(B+C)+\cos B-\sin(B+C)+\sin B=0\\ f_C'(B,C)=\cos(B+C)+\cos C-\sin(B+C)+\sin C=0\end{cases}$,

解得

$$\cos B+\sin B=\cos C+\sin C\Rightarrow B=C$$

$$\text{或}B+C=\frac{\pi}{2}(\text{舍去})$$

由此可得 $\cos(2B)+\cos B-\sin(2B)+\sin B=0$，于是

$$B=\frac{\pi}{3},A=C=B=\frac{\pi}{3}$$

即 $\max f(B,C)=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\min f(B,C)=1.$

8.【参考解析】: 由积分的几何意义，得

$$\iint_D[x+y]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=3\times\frac{1}{2}+3\times4\times\frac{1}{2}+3\times5\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{2}=18$$

9. 【参考解析】: 令 $x=t+s,y=t-s$，则

$$原积分=2\iint\limits_{R^2}\exp\left[-\frac{(1-\rho)t^2+(1+\rho)s^2}{(1-\rho^2)}\right]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

$$=2\sqrt{1-\rho^2}\iint\limits_{R^2}\exp\left[-x^2-y^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\sqrt{1-\rho^2}\pi$$

10.【参考解析】：由积分曲线落在平面陕个，所以满足平面方程，即原积分

$$I=-\oint_\Gamma(bz-cy)\mathrm{d}x+(cx-az)\mathrm{d}y+(ay-bx)\mathrm{d}z$$

并且由斯托克斯公式和平面 π 的单位法向量

$$\vec{n}^\circ=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

并由两类曲面积分的关系，得

$$I=-\iint\limits_\pi 2a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2b\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+2c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\iint\limits_\pi\mathrm{d}S=-2A\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

11.【参考解析】：对已知等式两端求导，得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\left[e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}f(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}f(t)\mathrm{d}t+e^{x^2}e^{-x^2}f(x)\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x\int_0^x e^{x^2-t^2}f(t)\mathrm{d}t+f(x)\end{aligned}$$

代入 $\int_0^x e^{x^2-t^2}f(t)\mathrm{d}t=f(x)-\sqrt{x}$ 和 $x=1$，得

$$f'(1)=\frac{1}{2}+2\left[f(1)-1\right]+f(1)$$

即 $f'(1)-3f(1)=-\dfrac{3}{2}$.

12.【参考解析】:；对等式两端求导，得

$$f'(x)=1-2f(x)-4x\int_0^x e^{x^2-t^2}f(t)dt$$
$$=1-2f(x)+2x(f-x+1)$$
$$f''=2-4x+2f+2(x-1)f'$$
$$f'''=4f'+2(x-1)f''-4$$
$$f^{(n+1)}=2(x-1)f^{(n)}+2nf^{(n-1)}$$
$$f^{(n+1)}(1)=2nf^{(n-1)}(1)$$

而$f'(1)=1, f''(1)=-2e^{-1}, f'''(1)=0$，所以

$$f^{(2n+1)}(1)=0,n\geq 1.$$

$$f^{(2n)}(1)=2^{n-1}(2n-1)\cdots 3f''(1)$$
$$=-2^n(2n-1)!!\ e^{-1},n\geq 2.$$

13.【参考解析】:

$$f'=2x+f'+\int_0^x e^{x-t}f'(t)\mathrm{d}\,t=2x+f'+f-x^2\ ,$$

于是$f=-2x+x^2$，所以$f'(0)=-2.$

14.【参考解析】: $x^2+y^2\leq 2y$落在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内的

充分必要条件即为$(0,1)$到$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的距离$\mathrm{d}\geq 1$. 而

$$d^2=\min f(t)=\min\left[a^2\cos^2 t+(b\sin t-1)^2\right]$$
$$f(t)=a^2+(b^2-a^2)\sin t^2-2b\sin t+1$$

要求最小值, 只需讨论$t\in[0,\pi/2]$，得

$$b\geq b^2-a^2\text{时，}\quad (b-1)^2 b\leq b^2-a^2$$
$$b\leq b^2-a^2\text{时，}\ a^2b^2\geq b^2+a^4.$$

即充分必要条件为$b \geq b^2 - a^2$时，$b \geq 2$；$b \leq b^2 - a^2$时，

$$a^2 b^2 \geq b^2 + a^4.$$

此时椭圆面积$S = \pi ab$，取得最小值时必有$\mathrm{d} = 1$.

$b \geq b^2 - a^2$时，$b = 2, a \geq \sqrt{2}, S = 2\sqrt{2}\pi$；

$b \leq b^2 - a^2$时，$a^2 b^2 = b^2 + a^4$. 记

$$a = \cos^{-1} x, b = \left(\cos x \sin x\right)^{-1},$$

即$\sin x \leq \cos x\ \left(x \in \left[0, \pi / 4\right]\right)$时，$S = \pi / \left(\sin x \cos^2 x\right)$

的最小值. 易得为$S_{\min} = 2\sqrt{2}\pi$，所以包围圆$x^2 + y^2 \leq 2y$

的椭圆的最小面积为$S_{\min} = 2\sqrt{2}\pi$.

15.【参考解析】:

$$V = \int_{-1}^{1} \pi\left(6 - x^2\right)^2 \mathrm{d}\, x - \pi \times 5^2 \times 2 = 14\frac{2}{5}\pi$$

二、【参考解析】：由

$$a_n = \int_0^1 \max\left\{a_{n-1}, x\right\} \mathrm{d}\, x \geq \int_0^1 a_{n-1} \,\mathrm{d}\, x = a_{n-1},$$

即$\{a_n\}$单调增且$a_1 = \dfrac{1}{2} \leq 1$. 设$0 \leq a_n \leq 1$，则

$$0 \leq a_{n+1} = \int_0^1 \max\left\{a_n, x\right\} \mathrm{d}\, x \leq \int_0^1 \mathrm{d}\, x = 1$$

即$\{a_n\}$有界. 可知$\{a_n\}$收敛. 记其极限为$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$，有

$$a = \int_0^1 \max\left\{a, x\right\} \mathrm{d}\, x = \int_0^a a \,\mathrm{d}\, x + \int_a^1 x \,\mathrm{d}\, x = \frac{1 + a^2}{2}$$

即$a = 1$.

三、【参考解析】：$\forall x$，若$f'\left(x\right) \neq 0$，不妨设$f'\left(x\right) > 0$，

则$\exists x \in \left(a, b\right)$，对$\forall t \in \left(a, b\right)$，有$f'\left(t\right) > \dfrac{f'\left(x\right)}{2}$且$\left|f''\right| \leq 1$.

可取得

$$b-a=f'\left(x\right)\text{或}\, b-a=1\,(\,f'\left(x\right)>1\text{时})$$

即有$\left(f'\left(x\right)\right)^2/2<\int_a^b f'\left(t\right)\mathrm{d}\,t=f\left(b\right)-f\left(a\right)$，或

$$f'\left(x\right)/2<\int_a^b f'\left(t\right)\mathrm{d}\,t=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

当$n\to\infty$时，$a,b\to\infty$. 又$\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0.$$

四、【参考解析】: (1) $\forall x,y,\ f(x+y)\ge f(x)+f(y)$，所以

$f\left(x\right)$单调增加; $\forall x\in\left(0,1\right),\exists n\in N$，$\frac{1}{2}<nx<1$，由此

得$nf\left(x\right)\le f\left(nx\right)\le f\left(1\right)=1$，所以$f\left(x\right)\le\frac{1}{n}<2x.$

(2) $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_0^{\frac{1}{2}}f(1-x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\le\int_0^{\frac{1}{2}}f(1)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}$$

五、【参考解析】:

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi r^2\,\mathrm{d}\,s=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi t^3\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}\,t=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\pi}{120}$$

六、【参考解析】:

$$x\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t=\int_x^{+\infty}xe^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t<\int_x^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\,t<e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

七、【参考解析】: $\tan x>x,$

$$\left(\tan x\right)'=1+\tan^2 x>1+x^2$$

由此可得$\tan x>x+\frac{x^3}{3}$. 并且容易计算得到

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6},$$

所以$\tan^2 x + 2\sin^2 x > 3x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

八、【参考解析】: 设圆的半径为r，三角形的边长为a，则

$$2\left(n-2\right)r + 2r\sqrt{3} = a$$

解得$r = \dfrac{a}{2\left(n-2\right)+2\sqrt{3}}$. 于是可得

$$A_n = \frac{\pi a^2}{\left(n-2+\sqrt{3}\right)^2}\frac{n\left(n+1\right)}{8}$$

其中$A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{A} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

九、【参考解析】: $f'(x) = e^x\left(P(x)+P'(x)\right)$，所以$P(x)+P'(x)$是 5 次多项式，必有零点，设为$a$. 若是$k$重零点，则

$$P(x)+P'(x) = \left(x-a\right)^k Q\left(x\right)$$

$Q\left(x\right)$是$5-k$次多项式且$Q\left(a\right) \neq 0$.

若k是奇数, 当x经过a时$f'\left(x\right)$改变符号, 即a是$f\left(x\right)$的极值点;

若k是偶数，$Q\left(x\right)$是$5-k$次的, 可得$Q\left(x\right)$必有一奇数重零点，f必有极值点.

(2) $P(x)+P'(x)$的奇数重零点只能是奇数个，所以f的极值点必是奇数个.

十、【参考解析】: 由条件，存在G中有限个数，不妨设为$a_j, j = 1, 2\cdots, k$，其最大公约数为 1. 本题即要证: 存在正整数N，当正整数$n > N$时，方程$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = n$有非负整数解.

先证明: 若a, b的最大公约数为 1，$ax + by = n, n \geq ab$

有非负整数解.

易知$a, 2a, \cdots, ab$被b除的余数都不相同，则n必与某一ma，被b除的余数相同，即$n-ma$被b整除，$ax+by=n$有非负整数解.

若最大公约数为(a,b)，则

$$ax+by=(a,b)n\text{ , }n \geq \frac{ab}{(a,b)}$$

有非负整数解.

$$ax+by+cz=(a_1x+b_1y)(a,b)+cz=n$$

有非负整数解。一般的，对充分大的n，

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$$

有非负整数解.