2015 年浙江省高等数学（微积分）竞赛

工科、数学类试题

一、计算题

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$，其中 n 为正整数. **(工科、数学类)**

2、设 $f(x)=\int_1^x \ln(t+x)\,\mathrm{d}\,t$，求 $f^{(2015)}(1)$ 的值. **(工科、数学类)**

3、计算 $\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_{1-y}^1 \dfrac{y\sin x}{x}\mathrm{d}\,x$. **(工科、数学类)**

4、求不定分 $\int\dfrac{x+1}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}\,x$. **(工科类)**

5、设 a 和 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 皆为正常数，求 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)={x_1}^{t_1}{x_2}^{t_2}\cdots{x_n}^{t_n}$$

在约束 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a\left(x_i>0,i=1,2,\cdots,n\right)$ 下的最大值。**(数学类)**

6、设 $u=F(x,y)$ 为方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的一个解，请给出方程 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的一个解. **(工科、数学类)**

二、设数列 $\{a_n\}$ 单调增加，且 $a_n\geq 3,n=1,2,3,\cdots$

(1) 证明 $\left\{{a_n}^{1/a_n}\right\}$ 单调减少；

(2) 试讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^{1/a_n}$. **(工科类)**

考研竞赛数学

三、龟兔赛跑：龟和兔从$(10,0)$处同时出发，兔子以 10 米/ 秒匀速沿螺旋线$r=10e^{-\theta/100}$，$\theta\in[0,+\infty)$跑出，乌龟以以 0.1 米/ 秒匀速沿直线向极点O（终点）跑出，问龟兔谁取胜？**(工科、数学类)**

四、设$V=\left\{(x,y,z)\middle|z\geq x^2+y^2,x+y+z\leq 0\right\}$，求$V$内部体积最大的锥体体积. **(工科类)**

五、设$f(x)=e^x\sin x$.

(1) 求$f^{(m)}(0)$；

(2) 证明：

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(m-2k-1)!}=\frac{2^{m/2}}{m!}\sin\frac{m\pi}{4}\left(m\geq 1\right).$$

其中l为不大于$\dfrac{m-1}{2}$最大整数. **(工科类)**

六、设$x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n-x_n^3,n=1,2,3,\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$并求$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^{\ 2}$的值. **(数学类)**

七、设$a_n>0,n=1,2,3,\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k=0$，证明：$\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_k$收敛. **(数学类)**

八、设$f\left(x\right)$是二阶连续可导的实函数，记

$$a=\sup_{x\in R}\left|f(x)\right|,b=\sup_{x\in R}\left|f''(x)\right|,$$

其中$0<a,b<+\infty$. 证明：$\sup\limits_{x\in R}\left|f'(x)\right|\leq 2\sqrt{ab}$. **(数学类)**

考研竞赛数学

2015年浙江省高等数学（微积分）竞赛
工科、数学类参考答案

一、计算题

1、【参考解答】：拆分函数表达式为

$$\frac{1-\cos x\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

则由极限运算的四则运算法则好等价无穷小、洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{2x(\sqrt[n]{\cos nx})^{n-1}}=\frac{1+n}{2}$$

2、【参考解答】：换元积分，得 $f(x)=\int_{1+x}^{2x}\ln(t)\,\mathrm{d}\,t$. 由求导

运算法则，递推得

$$f'(x)=2\ln(2x)-\ln(1+x)$$

$$f''(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}$$

$$f^{(n+2)}(x)=(-1)^n n!\left[\frac{2}{x^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$f^{(2015)}(1)=2013!\left(\frac{1}{2^{2014}}-2\right)$$

3、【参考解答】：交换积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_{1-y}^1\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}\,x=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_{1-x}^1\frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^1(2x-x^2)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\,x=\int_0^1(2-x)\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_0^1(x-2)\,\mathrm{d}\cos x=2-\cos 1-\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=2-\cos 1-\sin 1$$

4、【参考解答】：拆分积分得

考研竞赛数学

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx + \int \frac{1}{2x(x^2+4)^2}\,dx^2$$

$$= \frac{-1}{2(x^2+4)} - \frac{1}{2x(x^2+4)} - \int \frac{1}{2x^2(x^2+4)}\,dx$$

$$= \frac{-x-1}{2x(x^2+4)} - \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x^2+4)}\right] dx$$

$$= \frac{-x-1}{2x(x^2+4)} + \frac{1}{8x} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + c$$

5、【参考解答】: 令 $L = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} + \lambda(x_1 + \cdots + x_n - a)$,

令 $L_{x_i} = \dfrac{t_i x_1^{t_1} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n}}{x_i} + \lambda = 0\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$

$$L_\lambda = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a = 0$$

解方程组，得 $x_i = \dfrac{a t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，所以

$$\max f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{a^b}{b^b} t_1^{t_1} t_2^{t_2} \cdots t_n^{t_n}$$

其中 $b = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$.

6、【参考解答】: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 即为 $\dfrac{\partial^2 (xv)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 (xv)}{\partial x^2}$,

所以 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 有解 $v = \dfrac{F(x,y)}{x}$.

二、【参考证明】: (1) 记 $f(x) = x^{1/x} = e^{\ln x / x}$，则

$$f'(x) = e^{\ln x / x}(\ln x / x)' = e^{\ln x / x}(1 - \ln x) / x^2$$

即当 $x > 3$ 时，$f'(x) < 0$，所以 $\left\{a_n^{1/a_n}\right\}$ 单调减少.

（2）因为 $\left\{a_n\right\}$ 单调增加，则 $\left\{a_n\right\}$ 收敛（记为 a）或

考研竞赛数学

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_n / a_n} = a^{1/a};$$

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/a_n} = 1.$

三、【参考解答】: $S_{兔} = \int_0^{+\infty} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta$

$$= 10\int_0^{+\infty} e^{-\theta/100}\sqrt{1+10^{-4}}\, d\theta = 10^3\sqrt{1+10^{-4}}$$

兔子到终点所需时间 $t_{兔} = 10^2\sqrt{1+10^{-4}}$, 而 $t_{龟} = 100$, 应是龟取胜.

四、【参考解答】: $x+y+z=0$ 与 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 $z=0$ 上投影为 $x^2+y^2+x+y=0, z=0$. 此圆的面积为 $\dfrac{\pi}{2}$, 所以平面 $x+y+z=0$ 被 $z=x^2+y^2$ 所截部份面积为 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$. V 内一点 (x_0, y_0, z_0) 到 $x+y+z=0$ 的距离为 $\dfrac{|x_0+y_0+z_0|}{\sqrt{3}}$, 此时锥体体积

$$V_{锥} = \frac{|x_0+y_0+z_0|\pi}{6}$$

(x_0, y_0, z_0) 可取在 $z = x^2+y^2$ 上, 所以求最大锥体体积即求 $x+y+z$ 在满足 $z=x^2+y^2$ 上最大值, 从而可得最大值点为 $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, 即 $V_{\max} = \dfrac{\pi}{12}$.

五、【参考解答】: (1) $f'(x) = \sqrt{2}e^x \sin(x+\pi/4)$, 得

$$f^{(m)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + n\pi/4),$$

代入 $x=0$, 得 $f^{(m)}(0) = (\sqrt{2})^m \sin(m\pi/4)$

考研竞赛数学

(2) $f(x)=e^x\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k x^m}{(2k+1)!(m-2k-1)!}$$

又 $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{f^{(m)}(0)x^m}{m!}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{2^{m/2}x^m}{m!}\sin\dfrac{m\pi}{4}$，所以

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(m-2k-1)!}=\frac{2^{m/2}}{m!}\sin\frac{m\pi}{4}.$$

六、【参考证明】：记 $f(x)=x-x^3$，则当 $x\in(0,1)$ 时，

$$f(x)=x(1-x^2)<x \text{ 且 } f(x)>0,$$

所以 $x_n\in(0,1)$ 且 x_n 单调减少，所以 $\{x_n\}$ 收敛．记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由递推关系得 $a=a-a^3$，解得 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．并且可得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^{\ 2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n^{\ 2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{1/x_{n+1}^2-1/x_n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(x_n-x_n^3)^2}{2x_n^4-x_n^6}=\frac{1}{2}$$

七、【参考证明】：记 $s_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k=0$，

所以 $s_n=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}s_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ 收敛.

八、【参考证明】：由泰勒公式，$\forall x,h$，有

$$f\left(x+h\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)h+\frac{f''\left(\xi\right)}{2}h^2$$

得 $-f'\left(x\right)h=f\left(x\right)-f\left(x+h\right)+\dfrac{f''\left(\xi\right)}{2}h^2$，所以

考研竞赛数学

$$h\left|f'(x)\right| \leq 2a + b\frac{h^2}{2}, \forall x, h$$

即对任意的h，有$\sup\limits_{x\in R}\left|f'(x)\right|h \leq 2a + b\frac{h^2}{2}$，即

$$0 \leq 2a - \sup_{x\in R}\left|f'(x)\right|h + b\frac{h^2}{2}$$

所以判别式$\Delta \leq 0$，即$(\sup\limits_{x\in R}\left|f'(x)\right|)^2 \leq 4ab$，所以不等式

$\sup\limits_{x\in R}\left|f'(x)\right| \leq 2\sqrt{ab}$成立.

微信公众号:
考研竞赛数学(xwmath)
考研竞赛数学