2007 年浙江省大学生数学竞赛试题

(综合工科、数学、文专类)

1、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{\ln(1+x)}$.

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

3、设 $\begin{cases} x=\cos(t^2) \\ y=\int_0^{t^2} e^{-u^2}\sin u\,\mathrm{d}\,u \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,x^2}$.

4、求 $\int\dfrac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}\mathrm{d}\,x$.

5、计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},\left(\alpha\neq 0\right)$.

6、设 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$，求 a,b 的值.

7、设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x-3}$，求 $f^{(n)}(x)$.

8、求 p 的值，使 $\int_a^b (x+p)^{2007}e^{(x+p)^2}\,\mathrm{d}\,x=0$. .

9、设 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f''(x)\geq 0$ 且

$$0\leq f(x)\leq 1-e^{-x^2},$$

求 $f\left(x\right)$ 的表达式.

10、计算 $\int_0^a \mathrm{d}\,x\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\,\mathrm{d}\,y$，$(a>0,b>0)$.

11、计算 $\iint\limits_S (x^2+y)\,\mathrm{d}\,S$，其中 S 为圆柱面

$$x^2+y^2=4,(0\le z\le 1).$$

12、设函数$f(x)$满足方程，

$$e^x f(x)+2e^{\pi-x}f(\pi-x)=3\sin x, x\in R,$$

求$f(x)$的极值.

13、证明：当$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}<\frac{\ln(1+\sin x)}{\pi-x}$.

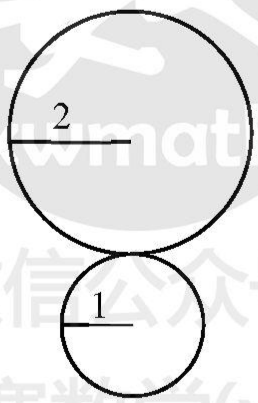
14、设$u_n=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}$，$v_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}$

求：(1)$\frac{u_{10}}{v_{10}}$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

15、求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}$.

16、证明：$\cos\sqrt{2}x\le -x^2+\sqrt{1+x^4}, x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)$.

17、某水库的泄洪口为圆形，半径为 1 米，现有一半径为 2 米的闸门悬于泄洪口的正上方（如图），问闸门下降多少米时，泄洪口被盖住一半？



18、已知$y=f(x)$是$\left[0,1\right]$上二阶可导函数，且

$$f(0)=\frac{1}{2},f(1)=1,f'(1)>1.$$

证明：$\exists\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=1$.

19、有一张边长为4π的正方形纸$ABB'A'$，C,D分别为AA',BB'两对边的中点，E 为DB'的中点，现将纸卷成圆柱形，使A与A'重合，B与B'重合，并将圆柱垂直放在xOy平面上，且B与原点O重合，D若在y轴正向上，求：

(1) 通过C,E两点的直线绕z轴旋转所得的旋转曲面方程；

(2) 此旋转曲面、xOy平面和过A点垂直于z轴的平面所围成的立体体积.

20、求函数$f(x,y,z)=\dfrac{x^2+yz}{x^2+y^2+z^2}$在

$$D=\{(x,y,z)\big|1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$$

的最大值、最小值.

21、设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的系数满足，

$$a_0=2,na_n=a_{n-1}+n-1,n=1,2,3,\cdots$$

求此幂级数的和函数.

22、已知$f\left(x\right)$二阶可导，且

$$f(x)>0,f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2\ge 0,x\in R.$$

(1) 证明:$f(x_1)f(x_2)\ge f^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right),\forall x_1,x_2\in R$.

(2) 若$f(0)=1$，证明$f(x)\ge e^{f'(0)x},x\in R$.

2007 年浙江省大学生数学竞赛参考解答
(综合工科、数学、文专类)

1、**【参考解析】**：由等价无穷小 $\ln\left(1+x\right) \sim x\left(x \to 0\right)$ 及洛必达法则，由

$$\left[(1+x)^{1/x}\right]' = (1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = e$，且

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\ln(x+1)}{2x^2+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\ln(1+x)} = -\dfrac{e}{2}$.

2、**【参考解析】**：由重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = e$，并考虑等价无穷小 $\sin x \sim x\left(x \to 0\right)$ 与洛必达法则，对分子两项求导得

$$\left[(1+x)^{1/x}\right]' = (1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

$$\left[(1+2x)^{1/(2x)}\right]' = (1+2x)^{\frac{1}{2x}}\left[\frac{1}{x(2x+1)} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2}\right]$$

以上两个括号里面分别应用洛必达法则求极限，得

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\ln(x+1)}{2x^2+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(2x+1)}-\frac{\ln(2x+1)}{2x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-(2x+1)\ln(2x+1)}{2x^2(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\ln(2x+1)}{12x^2+4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2x}{4x}=-1$$

所以原式$=-\frac{1}{2}e-\left(-1\right)e=\frac{e}{2}.$

3、【参考解析】：对两个参数表达式分别求导，得

$$x'\left(t\right)=-2t\sin(t^2),y'\left(t\right)=2te^{-t^4}\sin\left(t^2\right)$$

所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'\left(t\right)}{x'\left(t\right)}=\frac{2te^{-t^4}\sin\left(t^2\right)}{-2t\sin(t^2)}=-e^{-t^4}$，于是可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(-e^{-t^4}\right)'_x=\left(-e^{-t^4}\right)'_t\frac{1}{-2t\sin(t^2)}$$

$$=\frac{4t^3e^{-t^4}}{-2t\sin(t^2)}=-\frac{2t^2e^{-t^4}}{\sin(t^2)}$$

4、【参考解析】：令$x^5=t$，则

$$F\left(x\right)=\int\frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\frac{x^5}{\sqrt{x^5+1}}\mathrm{d}\left(x^5\right)$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{t}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int\frac{t+1-1}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}\left(t+1\right)$$

$$=\frac{1}{5}\int\sqrt{t+1}\,\mathrm{d}\left(t+1\right)-\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}\left(t+1\right)$$

$$=\frac{2}{15}(t+1)^{3/2}-\frac{2}{5}\sqrt{t+1}+C$$

$$=\frac{2}{15}(x^5+1)^{3/2}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5+1}+C$$

5、【参考解析】：令$x=\frac{1}{t}$，则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

所以$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$.

6、【参考解析】：令$x=\frac{1}{x}$，则函数表达式转换为

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-a-bx+\left(\sqrt[3]{1-x^3}-1\right)}{x}=0$$

即$\lim_{x\to 0}\frac{3-a+\left(\sqrt[3]{1-x^3}-1\right)}{x}=b$，则由于

$$\sqrt[3]{1-x^3}-1\sim-\frac{x^3}{3}\left(x\to 0\right)$$，所以$a=3,b=0$.

7、【参考解析】：对有理函数分解部分分式，得

$$f(x)=x+\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}+2$$

对函数求一阶、二阶导数，得

$$f'\left(x\right)=1+\frac{27}{4}\frac{-1}{(x-3)^2}+\frac{1}{4}\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f''\left(x\right)=\frac{27}{4}\frac{\left(-1\right)\left(-2\right)}{(x-3)^3}+\frac{1}{4}\frac{\left(-1\right)\left(-2\right)}{(x+1)^3}$$

由此可以推导

$$f^{(n)}=\frac{27}{4}\frac{\left(-1\right)^n n!}{(x-3)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{4(x+1)^{n+1}},n\ge 2$$

8、【参考解析】：令$x+p=t$，则

$$\int_a^b(x+p)^{2007}e^{(x+p)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{a+p}^{b+p}t^{2007}e^{t^2}\,\mathrm{d}t=0$$

被积函数$f\left(t\right)=t^{2007}e^{t^2}$为奇函数，要积分为零，当且仅当积分区间关于原点对称，即

$b+p=-\left(a+p\right)$，由此解得 $p=-\dfrac{a+b}{2}$.

9、**【参考解析】**：由题意可知 $f'\left(x\right)$ 单调增加且 $f\left(0\right)=0$. 由此可知 $f'\left(x\right)\equiv 0$. 否则，假设存在 x_0，使得 $f'\left(x_0\right)>0$，则当 $x>x_0$ 时，

$$\begin{aligned} f(x)-f\left(x_0\right) &= \int_{x_0}^{x} f'(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_{x_0}^{x} f'\left(x_0\right)\mathrm{d}\,x \\ &= \left(x-x_0\right)f'\left(x_0\right)\to+\infty\left(x\to+\infty\right) \end{aligned}$$

从而与 $0\leq f(x)\leq 1-e^{-x^2}$ 矛盾. 所以 $f'\left(x\right)\leq 0$.

同理，可以验证 $f'\left(x\right)$ 小于 0 不成立，即 $f'\left(x\right)\equiv 0$，从而 $f\left(x\right)\equiv C=0.$

10、**【参考解析】**：令 $b^2x^2=a^2y^2$，得

$$y=\frac{b}{a}x\left(x\geq 0,y\geq 0\right),$$

分割积分区域 $D:0\leq x\leq a,0\leq y\leq b$ 为上下两个部分，记作 D_1,D_2，则

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_1} e^{a^2y^2}\,\mathrm{d}\,\sigma+\iint\limits_{D_2} e^{b^2x^2}\,\mathrm{d}\,\sigma$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^b \mathrm{d}\,y\int_0^{\frac{a}{b}y} e^{a^2y^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_0^a \mathrm{d}\,x\int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2x^2}\,\mathrm{d}\,y \\ &= \frac{a}{b}\int_0^b ye^{a^2y^2}\,\mathrm{d}\,y+\frac{b}{a}\int_0^a xe^{b^2x^2}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \frac{1}{2ab}\int_0^b e^{a^2y^2}\,\mathrm{d}(a^2y^2)+\frac{1}{2ab}\int_0^a e^{b^2x^2}\,\mathrm{d}(b^2x^2) \\ &= \frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1) \end{aligned}$$

11、**【参考解析】**：由于积分曲面关于 yOz,zOx 面对称，并对 x,y 变量具有轮换对称性，所以由对面积的曲面积分偶倍奇零计算性质，得

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}S=\iint_S y^2\,\mathrm{d}S,\iint_S y\,\mathrm{d}S=0$$

即 $\iint_S (x^2+y)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$

$=\frac{1}{2}\iint_S 4\,\mathrm{d}S=2\cdot 2\pi\cdot 2\cdot 1=8\pi$

12、**【参考解析】**：由条件，令 $x=\pi-x$，则

$$e^{\pi-x}f(\pi-x)+2e^{x}f(x)=3\sin x$$

与原等式联立解方程组，得 $f(x)=e^{-x}\sin x$.

对 $f(x)$ 求一阶、二阶导数，并令一阶导数等于 0，得

$$f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)=0$$

得可能极值点 $x_k=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$.

$$f''(x)=-2\cos xe^{-x}$$

因为当 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 时，有极大值 $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}\frac{\sqrt{2}}{2}$；

当 $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$ 时，有极小值 $-e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi+\pi)}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13、**【参考证明】**：令 $t=\pi-x$，则 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$，不等式等价

于 $\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}}<\frac{\ln(1+\sin t)}{t}$，即 $\frac{t\cos t}{1+\sin t}<\ln(1+\sin t)$.

而 $\int_0^t \frac{\cos t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\ln(1+\sin t)$ 且

$$\left(\frac{\cos t}{1+\sin t}\right)'=\frac{-1}{1+\sin t}<0,$$

所以 $\ln(1+\sin t)=\int_0^t \frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$> \int_0^t \frac{\cos t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}\,x = \frac{t\cos t}{1+\sin t}.$$

14、【参考解析】: (1) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}-\frac{3}{3k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n} = v_n$$

所以$\frac{u_n}{v_v}=1$. 即$\frac{u_{10}}{v_{10}}=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}\,x = \ln 3$$

15、【参考解析】: 因为

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

所以$(n+1-k)\left(C_n^k\right)^{-1} = \left(nC_{n-1}^k\right)^{-1}$, $k<n$. 由此可得

$$0 < \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} n^{-2}\left[C_{n-1}^k\right]^{-1} + \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{n-1} n^{-2} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[nC_n^k\right]^{-1} = 0.$

16、**【参考解析】**：原不等式等价于

$$f(x)\equiv\cos\sqrt{2}x\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)\le 1，且 f\left(0\right)=1.$$

于是$f'\left(x\right)=$

$$\frac{\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)\left[2x\cos\left(\sqrt{2}x\right)-\sqrt{2}\sqrt{x^4+1}\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]}{\sqrt{x^4+1}},$$

令$g\left(x\right)=2x\cos\left(\sqrt{2}x\right)-\sqrt{2}\sqrt{x^4+1}\sin\left(\sqrt{2}x\right)$

$$g'\left(x\right)=-2\left[\left(1+x^4-\sqrt{x^4+1}\right)\cos\left(\sqrt{2}x\right)\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}x\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)\sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]/\sqrt{x^4+1}<0$$

而$g\left(0\right)=0$，所以$g\left(x\right)<f\left(0\right)=0$，从而得$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减，即$f\left(x\right)\le 1$，即原不等式成立.

17、**【参考解析】**：取小圆的圆心为原点、水平线为x 轴，垂线为y轴，则泄洪口圆周方程为$x^2+y^2=1$，闸门（原始位置）为$x^2+(y-3)^2=4$，下降后为$x^2+(y-h)^2=4$，两圆交点为：$(\pm a,\dfrac{h^2-3}{2h})$，其中

$$a=\frac{\sqrt{4h^2-(h^2-3)^2}}{2h}\text{或}a=\cos\theta,\ \theta=\arcsin\frac{h^2-3}{2h}$$

盖住的面积为

$$S=2\int_0^a\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}-h\right)\mathrm{d}\,x$$
$$=x\sqrt{1-x^2}+\left[\arcsin x\right]_0^a$$
$$+x\sqrt{4-x^2}+4\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^a-2ah$$

$$= a\sqrt{1-a^2} + \arcsin a + a\sqrt{4-a^2} + 4\arcsin\frac{a}{2} - 2ah$$

$$= \arcsin\frac{\sqrt{4h^2-(h^2-3)^2}}{2h} - 4\arcsin\frac{\sqrt{4h^2-(h^2-3)^2}}{4h}$$

$$+\sqrt{4h^2-(h^2-3)^2} = \frac{1}{2}$$

18、**【参考证明】**：因为$f(0)=\dfrac{1}{2}, f(1)=1$，所以由拉格朗日中值定理， $\exists\eta\in(0,1)$，使得

$$\frac{f\left(1\right)-f\left(0\right)}{1-0} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'\left(\eta\right) < 1$$

又因为$f\left(x\right)$连续，所以由闭区间上连续函数的介值定理，可知$\exists\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=1$.

19、**【参考解析】**：(1) 容易知道，圆柱面的方程为

$$S:\left\{(x,y,z)\mid x^2+(y-2)^2=4, 0\le z\le 4\pi\right\}$$

则D的坐标为$\left(0,4,0\right)$， E的坐标为$\left(2,2,0\right)$， C的坐标为$\left(0,4,4\pi\right)$. 所以过C,E两点的直线方程为

$$L_{CE}: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-4\pi}$$

其参数方程为$x=2+2t, y=2-2t, z=-4\pi t$，所以绕$z$轴旋转所得的旋转曲面的参数方程为

$$x=\sqrt{\left(2+2t\right)^2+\left(2-2t\right)^2}\cos\theta$$
$$y=\sqrt{\left(2+2t\right)^2+\left(2-2t\right)^2}\sin\theta$$
$$z=-4\pi t$$

消去参数t,θ，得$\left(2-\dfrac{z}{2\pi}\right)^2+\left(2+\dfrac{z}{2\pi}\right)^2=x^2+y^2$，整理得$x^2+y^2=8+\dfrac{z^2}{2\pi^2}$，为旋转单叶双曲面.

(2) 所求体积即为 $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{2\pi^2}=8$ 与 $z=0, z=4\pi$ 所围立体的体积. 所以由旋转体体积计算公式，或三重积分的截面法，得

$$V=\int_0^{4\pi}\pi\left(8+\frac{z^2}{2\pi^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{128\pi^2}{3}$$

20、【参考解析】: 分为三个部分讨论，分别内部的无条件极值，两个边界上的条件极值:

(1) 内部的无条件极值：令

$$\begin{cases} f_x'(x,y,z)=\dfrac{2xy^2+2xz^2-2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}=0 \\ f_y'(x,y,z)=\dfrac{zx^2+z^3-2yx^2-y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}=0 \\ f_z'(x,y,z)=\dfrac{yx^2+y^3-2zx^2-z^2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}=0 \end{cases}$$

得解得驻点: $(x,0,0),(0,y,-y),(0,y,y)$. 由此得

$$f(x,0,0)=1,\ f(0,y,y)=\frac{1}{2},\ f(0,y,-y)=-\frac{1}{2}.$$

(2) 在圆周 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，令

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$
$$L_x'(x,y,z)=2x+2\lambda x=0$$
$$L_y'(x,y,z)=z+2\lambda y=0$$
$$L_z'(x,y,z)=y+2\lambda z=0$$
$$L_\lambda'(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$$

得驻点为 $(1,0,0),(-1,0,0),(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}),(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}),$ $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}),(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. 代入函数得函数值为

$$1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}.$$

(3) 在圆周 $x^2+y^2+z^2=4$ 上，类似令

$$L(x,y,z)=x^2+yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

$$\begin{aligned}L_x'(x,y,z)&=2x+2\lambda x=0\\L_y'(x,y,z)&=z+2\lambda y=0\\L_z'(x,y,z)&=y+2\lambda z=0\\L_\lambda'(x,y,z)&=x^2+y^2+z^2-4=0\end{aligned}$$

得驻点为 $(2,0,0),(-2,0,0),(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2},\sqrt{2}),$ $(0,\sqrt{2},-\sqrt{2}),(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$,代入函数得函数值为

$$1,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}.$$

综上可得 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 在 D 上的最大值为 1，

最小值为 $-\dfrac{1}{2}$.

21、【参考解析】: 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $S(0)=a_0=2$，

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=S(x)+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)'$

$$=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

由此可得 $S'(x)-S(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$. 该微分方程为一阶非齐

次线性微分方程，所以由通解计算公式可得

$$S(x)=e^{-\int -1\,\mathrm{d}x}\left(\int \frac{x}{(1-x)^2}e^{\int -1\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=Ce^x-\frac{1}{x-1}$$

代入$S(0)=2$，得$C=-1$，即$S(x)=e^x+\dfrac{1}{1-x}$.

22、【参考解析】：(1) 所证不等式等价于

$$\frac{\ln f(x_1)+\ln f(x_2)}{2}\ge \ln f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),\quad \forall x_1,x_2\in R$$

也即证明$F(x)=\ln f(x)$是凹函数即可. 由于

$$\left[\ln f(x)\right]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$\left[\ln f(x)\right]''=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}\ge 0$$

所以$F(x)=\ln f(x)$是凹函数，即结论成立.

(2) $F(x)=F(0)+F'(0)x+\dfrac{F''(\xi)}{2}x^2$

$$=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}x+\left.\frac{f(x)f''(x)-\left[f'(x)\right]^2}{2f^2(x)}\right|_{x=\xi}\cdot x^2$$
$$\ge f'(0)x$$

即: $f(x)\ge e^{f'(0)x},x\in R$.