2012 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

(工科类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)$.

2．设函数 $f:R\to R$ 可导，且 $\forall x,y\in R$，满足 $f(x+y)\ge f(x)+y+xy$，求 $f(x)$ 的表达式.

3．计算 $\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$ （n 为正整数）.

4．计算 $\iint\limits_D \left|x-y\right|\min\left\{x,2y\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 为 $y^2=x$ 与 $y=x^2$ 围成的平面有界闭区域.

5. 求曲线 $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta,\end{cases}(0\le\theta\le\pi)$ 的形心，其中 $a>0$ 为常数.

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6．证明：$\dfrac{1}{n}+\ln n<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}<1+\ln n, n\in\mathbb{Z}^+$.

7．设 $u:R^2\to R$ 所有二阶偏导连续，证明 u 可表示为 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件为

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

8. 在草地中间有一个底面半径为 3 米的圆柱形的房子. 外墙脚拴一只山羊，已知拴山羊的绳子长为 π 米，外墙底面半径为 3 米，求山羊能吃到草的草地面积.

9．证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\dfrac{1}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}, n\in\mathbb{Z}^+$.

(经管类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)$.

2．设 $f(x)=e^{ax}\sin bx$ （$a,b\in R$ 为常数），求 $f^{(n)}(0)$.

3．计算 $\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$ （n 为正整数）.

4. 求积分 $\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{x}, x>0$，常数 $a>0$，试求最小的常数 a，使得 $f(x)\geq 6$.

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6. 证明：$\frac{1}{n}+\ln n<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<1+\ln n, n\in\mathbb{Z}^{+}$.

7. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}$ 的值.

8. 在草地中间有一个半径为 R 的圆形池塘，池塘边拴着一只山羊，拴山羊的绳子长为 $kR(0<k<2)$，求山羊能吃到草的草地面积.

9.（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$;

（2）证明 $\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$.

(数学类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)$.

2. 设函数 $f:R\to R$ 可导，且 $\forall x,y\in R$，满足 $f(x+y)\geq f(x)+y+xy$，求 $f(x)$ 的表达式.

3. 计算 $\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(\cos x+\sin x)\cos x}\mathrm{d}x$.

4. 计算 $\iint\limits_D |x-y|\min\{x,2y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 为 $y^2=x$ 与 $y=x^2$ 围成的平面有界闭区域.

5. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}$ 的值.

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6. 证明：$\forall x,y\in[0,1]$，$\exists\theta\in[0,1]$ 使

$$\frac{xe^y-ye^x}{x-y}\geq 1-\theta^2.$$

7. 设 $u:R^2\to R$ 所有二阶偏导连续，证明 u 可表示为 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充分必要条件为

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

8. 在草地中间有一个底面半径为 3 米的圆柱形的房子. 外墙脚拴一只山羊，已知拴山羊的绳子长为 π 米，外墙底面半径为 3 米，求山羊能吃到草的草地面积.

9. 设 $a_n\geq 0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明:

$$\lim_{N\to\infty}\left(N\sum_{n=N}^{\infty}a_n\right)=0\Leftrightarrow\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}n^2a_n=0\left(N\in\mathbb{Z}^+\right).$$

(文专类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)$.

2. 设 $f(x)=e^{ax}\sin bx$ （$a,b\in R$ 为常数），求 $f^{(n)}(0)$.

3. 计算 $\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$ （n 为正整数）.

4. 求积分 $\int\frac{x}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{x},x>0$，常数 $a>0$，试求最小的常数 a，使得 $f(x)\geq 6$.

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6. 设 $p\in R$，且 $p\geq 1$，证明 $\forall a\geq 0,b\geq 0$ 有 $\frac{a^p+b^p}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^p$.

7. 验证

$$\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(\cos x+\sin x)\cos x}=\int_0^{\pi/4}\frac{\frac{\pi}{4}-x}{(\cos x+\sin x)\cos x}\mathrm{d}x$$

并计算积分 $\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(\cos x+\sin x)\cos x}\mathrm{d}x$.

8. 在草地中间有一个半径为 R 的圆形池塘，池塘边拴着一只山羊，拴山羊的绳子长为 $kR(0<k<2)$，求山羊能吃到草的草地面积.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

2012 浙江省高等数学（微积分）竞赛

参考答案

(工科类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1.【参考解析】 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^a+x^b)}{\ln x}=A,$$

当 $a>b$，则 $b-a<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{b-a}=0$，所以

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^a(1+x^{b-a})}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\ln x+\ln(1+x^{b-a})}{\ln x}=a$$

当 $a=b$，则

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x^a)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2+a\ln x}{\ln x}=a$$

当 $a<b$，则 $a-b<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{a-b}=0$，所以

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^b(x^{a-b}+1)}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\ln x+\ln(x^{a-b}+1)}{\ln x}=b$$

所以综上可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)=\max\left\{a,b\right\}.$

2．【参考解析】 由不等式，$\forall y>0$，有 $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}\geq 1+x$，则

$$\lim_{y\to0^+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=f'_+\left(x\right)\geq 1+x$$

$$\forall y<0，有\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\leq 1+x,$$

则 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=f'_-\left(x\right)\leq 1+x$。由于函数可导，所以 $f'_-\left(x\right)=f'_+\left(x\right)=f'\left(x\right)=1+x$，即

$$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+C$$

其中 C 为任意常数.

3.【参考解析】 基于定积分对积分区间的可加性，有

$$I=\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi-\pi}^{k\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$$

令 $\left(k-1\right)\pi+t=x$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ 且 $x=\left(k-1\right)\pi$,

$t=0,x=k\pi,t=\pi$，所以

$$I=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left[\left(k-1\right)\pi+t\right]\left|\sin\left[\left(k-1\right)\pi+t\right]\right|\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left[\left(k-1\right)\pi+t\right]\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(k-1\right)\pi\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\sum_{k=1}^{n}\left(k-1\right)+\sum_{k=1}^{n}\pi=n\left(n-1\right)\pi+n\pi=n^2\pi.$$

4.【参考解析】 令用 $y=x,x=2y$ 分割由 $y=x^2,x=y^2$ 围成的区域，得到由下到上三个部分，分别得到三个区域的简单 $X-$ 的不等式描述形式，

$$D_1=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le\frac{1}{2},x^2\le y\le\frac{x}{2}\right\}$$

$$D_2=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le\frac{1}{2},\frac{x}{2}\le y\le x\right\}$$

$$\cup\left\{\left(x,y\right)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 1,x^2\le y\le x\right\}$$

$$D_3=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le 1,x\le y\le\sqrt{x}\right\}$$

并且在三个区域内的被积函数分别为

$$D_1:f\left(x,y\right)=\left(x-y\right)\cdot 2y$$

$$D_2:f\left(x,y\right)=\left(x-y\right)\cdot x$$

$$D_3:f\left(x,y\right)=\left(y-x\right)\cdot x$$

所以最终的二重积分对应的累次积分表达式

$$\iint\limits_D |x-y|\min\{x,2y\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\frac{x}{2}}(x-y)2y\ \mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{x}(x-y)x\ \mathrm{d}y$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x-y)x\ \mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}(y-x)x\ \mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{1344}+\frac{1}{512}+\frac{7}{1280}+\frac{1}{168}=\frac{253}{17920}$$

5.【参考解析】 由曲线弧的形心计算公式，有

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\,\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s},\bar{y}=\frac{\int_L y\,\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s}$$

由对弧长的曲线积分的直接参数方程计算方法，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x_\theta')^2+(y_\theta')^2}d\theta=3a\sin\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\int_L \mathrm{d}s=\int_0^\pi 3a\sin\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta-3a\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a\cdot\frac{1}{2}-3a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3a.$$

$$\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi a\cos^3\theta x\cdot 3a\sin\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a^2\int_0^\pi\cos^3\theta\sin\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta-3a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a^2\cdot\frac{1}{5}-3a^2\cdot\frac{1}{5}=0$$

$$\int_L y\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi a\sin^3\theta x\cdot 3a\sin\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a^2\int_0^\pi\sin^4\theta|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta-3a^2\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^4\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=3a^2\cdot\frac{1}{5}-3a^2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{6}{5}a^2$$

所以形心坐标为 $\overline{x}=0,\overline{y}=\dfrac{2a}{5}$.

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6.【参考解析】 当 $i-1<x<i$ 时，有

$$\frac{1}{i}<\frac{1}{x}<\frac{1}{i-1},$$

$$\frac{1}{i}=\int_{i-1}^{i}\frac{1}{i}\mathrm{d}x<\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_{i-1}^{i}\frac{1}{i-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{i-1}$$

对不等式两端求和，有

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\sum_{i=2}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i-1}$$

即 $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i-1}$，积分出来，得

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\ln n<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i-1}$$

由左边不等式，两端加 1，得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\ln n+1$，由右边不等式，两端同时加 $\dfrac{1}{n}$，得 $\displaystyle\ln n+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$，所以最终可得

$$\ln n+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\ln n+1.$$

7.【参考解析】 $(\Rightarrow)$ 设 $u=f(x)g(y)$ 时，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x)g(y),\frac{\partial u}{\partial y}=f(x)g'(y),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$$

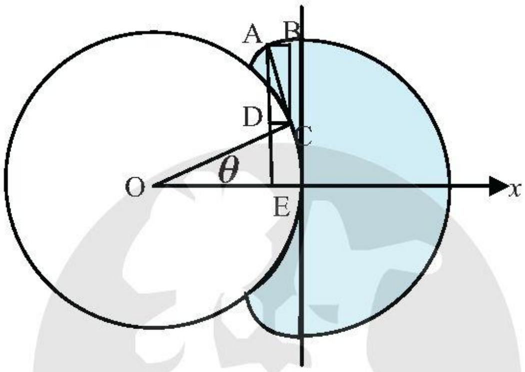
所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}&=f'(x)g(y)\cdot f(x)g'(y)\\&=g(y)f(x)\cdot f'(x)g'(y)=u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 设 $uu_{xy}=u_xu_y$ 成立，改写等式，移项，并两端同时除以 u^2，则 $\dfrac{uu_{xy}-u_xu_y}{u^2}=\left(\dfrac{u_x}{u}\right)_y=0$．即 $\dfrac{u_x}{u}=r\left(x\right)$，其中 $\dfrac{u_x}{u}=\left(\ln|u|\right)'_x$，所以 $\ln|u|=\int r\left(x\right)\mathrm{d}x+C\left(y\right)$，

即 $u=\pm e^{\int r(x)\mathrm{d}x+C(y)}=\pm e^{\int r(x)\mathrm{d}x}\cdot e^{C(y)}=f\left(x\right)g\left(y\right)$.

8.【参考解析】如图。



羊能吃到草的地方是图中蓝色部分区域，分为三个部分，其中右侧为半径为 π 的半圆，上下两部分相等。考虑上半部分。设圆柱形房子的圆的参数方程为 $x=3\cos\theta, y=3\sin\theta$，设 $A(x,y)$ 是上半部分草区域的上边界线，则依附于圆上的绳子和切线 AC 长度的和要等于总的绳子的长度 π，所以 $|AC|=\pi-3\theta$，由于 $AC\perp OC, AD\perp OE$，所以角度 $\angle DAC=\theta$，因此由圆上点 C 的坐标可以得到 A 点的坐标，即有

$$\begin{cases} x=3\cos\theta-(\pi-3\theta)\sin\theta, \\ y=3\sin\theta+(\pi-3\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

由于绳子长度为 π，所以它全部依附于圆周上对应的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，即 $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$. 对应的横坐标为 $x_0=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$. 由直角坐标系下定积分求面积的几何意义，对应的面积为

$$S_{\text{上}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left[3\sin\theta+(\pi-3\theta)\cos\theta\right]\mathrm{d}\left(3\cos\theta-(\pi-3\theta)\sin\theta\right)$$

$$-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}3\sin\theta\,\mathrm{d}(3\cos\theta)=\frac{\pi^3}{18}$$

所以羊能吃到的草的面积为

$$S=\frac{\pi^3}{18}\times2+\frac{\pi\left(\pi\right)^2}{2}=\frac{11\pi^3}{18}.$$

8.【参考解析】证明考虑转换为二项式展开，即

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$$

考虑将其中的 $\frac{1}{k}$ 转换位 k 描述形式，于是有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k x^{k-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-1}{x}\left[\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-x)^k\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{-1}{x}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-x)^k-1\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-1}{x}\left[\left(1-x\right)^n-1\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1-\left(1-x\right)^n}{x}\,\mathrm{d}x$$

而右侧也借助相同的积分运算，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

令$1-x=t$，则$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t, x=0, t=1, x=1, t=0$，

所以$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\int_0^1\frac{1-\left(1-t\right)^n}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{1}{k}$.

(经管类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．同工科类题 1.

2．【参考解析】直接逐阶求导探索可能思路:

$$f'(x)=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$$

$$=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin bx+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos bx\right)$$

令$\left(\theta=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，则

$$f'\left(x\right)=e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\sin bx+\sin\theta\cos bx\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin\left(bx+\theta\right)$$

类似可得

$$f''\left(x\right)=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left[a\sin\left(bx+\theta\right)+b\cos\left(bx+\theta\right)\right]$$
$$=\left(a^2+b^2\right)e^{ax}\sin\left(bx+2\theta\right)$$

以此类推，可得

$$f^{(n)}(x)=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\left(\sin(bx+n\theta)\right)$$

所以$f^{(n)}(0)=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin(n\theta)$.

3．同工科类题 3.

4．【参考解析】 积分为有理式积分，采用部分分式拆分方法计算，于是$\dfrac{1+x^2}{1+x^2+x^4}=\dfrac{1}{2\left(x^2+x+1\right)}+\dfrac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}$

所以借助积分的线性运算性质，得

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1+x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)/\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2+1}\mathrm{d}x\\
&\qquad+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)/\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2+1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}$$

5．【参考解析】 考虑求函数的最小值，令

$$f'(x)=x-\frac{a}{x^2}=0\text{得}x_0=\sqrt[3]{a}$$

继续求二阶导数，得$f''(x_0)=1+\dfrac{2a}{x_0^3}>0\left(a>0\right)$，驻点唯一，所以函数$f\left(x\right)$在$\sqrt[3]{a}$处取到最小值

$$f\left(\sqrt[3]{a}\right)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2}.$$

令$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^2}=6$，可得$a=8$，即当$a=8$时$f(x)\geq 6$，且在$x_0=2$时，$f(2)=6$，所以$a_{\min}=8$.

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6．同工科类题 6.

7．【参考解析】 考虑拆分基于定义法求和，于是有

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$$

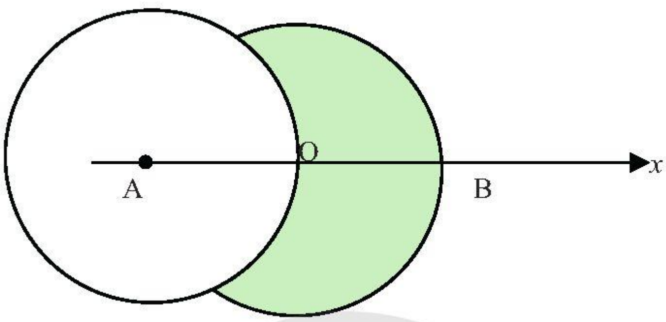
$$=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}\frac{1}{2n}$$

其中 $\frac{1}{2n}=1-\frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}$，所以

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}=\frac{1}{2^{2n-2}}C_{2n-2}^{n-1}-\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n},$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n}}C_{2n}^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\right]=1.$

8．【参考解析】 考虑羊可以渡河吃草，所以能够吃到草的面积为以绳长半径的圆的面积减去水塘重叠部分面积。如图



以过拴羊点与池塘圆心的连线为 x 轴，拴山羊点为原点，则池塘边界圆为 $(x-R)^2+y^2=R^2$ 而羊能跑的最大圆周为 $x^2+y^2=k^2R^2$，易知在 $x=\frac{R}{2}k^2$ 时，两圆有两个交点

$$S=\frac{\pi k^2R^2}{2}+2\int_0^{\frac{Rk^2}{2}}\left(\sqrt{k^2R^2-x^2}-\sqrt{2xR-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}k^2R^2+\frac{R^2k}{2}\sqrt{4-k^2}-\frac{\pi}{2}R^2$$

$$+k^2R^2\arcsin\frac{k}{2}-R^2\arcsin\left(\frac{k^2}{2}-1\right)$$

9．【参考解析】（1）由 $\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$，得

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\bullet\sin\frac{n}{2^n}\Big/\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{2^n}}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi}{2^n}}{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\pi/4\right)}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cdots,\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2}}=\frac{\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}{2}\cdots$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots=\frac{2}{\pi}$$

(数学类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．同工科类题 1.

2．同工科类题 2.

3．【参考解析】 利用三角函数和差化积公式，有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{(\cos x+\sin x)\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\sqrt{2}\cos\left(x-\pi/4\right)\cos x}\mathrm{d}x$$

令 $x=t-\frac{\pi}{4}$，则 $x=0,t=\frac{\pi}{4},x=\frac{\pi}{4},t=0,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，

所以

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\pi/4-t}{\sqrt{2}\cos t\cos(t-\pi/4)}(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi/4-t}{(\cos t+\sin t)\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos t+\sin t)\cos t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{t}{(\cos t+\sin t)\cos t}\mathrm{d}t$$

所以

$$I=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x+\sin x)\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan x)\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}\tan x$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\ln\left(1+\tan x\right)\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

4．同工科类题 4

5．同经管类题 7

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6．【参考解析】改写已知不等式左侧，对于 $x\neq y$，不妨设 $y>x$，有

$$\frac{xe^y-ye^x}{x-y}=\frac{e^y/y-e^x/x}{1/y-1/x}$$

于是由柯西中值定理$\exists\xi\in\left(x,y\right)\subset\left(0,1\right)$，使得

$$\frac{xe^y-ye^x}{x-y}=\frac{\xi e^\xi-e^\xi}{\xi^2}/(-\frac{1}{\xi^2})=e^\xi(1-\xi)\geq 1-\xi$$

取 $\theta=\sqrt{\xi}\in(0,1)$，即有 $\frac{xe^y-ye^x}{x-y}\geq 1-\theta^2.$

7．同工科类题 7

8．同工科类题 8

9．【参考解析】 记 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n = \sigma_N$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n &= \sum_{n=1}^{N} n^2\left(\sigma_n - \sigma_{n+1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N} n^2 \sigma_n - \sum_{n=2}^{N+1}\left(n-1\right)^2 \sigma_n\\ &= \sigma_1 - N^2\sigma_{N-1} + \sum_{n=2}^{N}\left(2n-1\right)\sigma_n\end{aligned}$$

所以由 $\lim\limits_{N\to\infty}\left(N\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n\right) = 0$，得

$$\left(\sigma_1 - N^2\sigma_{N-1}\right)/N \to 0,$$

因为 $\left(2n-1\right)\sigma_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$，所以

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N}\left(2n-1\right)\sigma_n = 0,$$

从而有 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} n^2 a_n = 0.$

(文专类)

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．同工科类题 1

2．同工科类题 2

3．同工科类题 3

4．【参考解析】

$$\int \frac{x}{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C$$

5．同经管类题 5

二、证明题与应用题（每小题 20 分，满分 80 分）

6．【参考解析】 记 $f(x)=x^p$，由泰勒公式，有

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{\left(a-b\right)^2}{8}f''(\xi)$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{\left(b-a\right)^2}{8}f''(\eta)$$

因为 $p\geq 1$ 时，$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}\geq 0$，所以

$$f(a)+f(b)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

即原不等式成立.

7．同经管类题 3

8．同经管类题 8

9．【参考解析】 由中值定理：

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi),\xi\in(x,x+1),$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 都存在，对上式两端求极限，

则有

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x+1)-\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$