数学分析（甲）II（H）

CXC

1　数分 I

Leibniz 公式　$f,g\in D(R)\Rightarrow [fg]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$

练习． 求：$(sinaxsinbx)^{(n)}\quad (sin^6x+cos^6x)^{(n)}$

证明． $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1), f(0)=0\Rightarrow \exists\xi\in[0,h]\ s.t.\frac{f(h)-hf^{'}(h)}{h^2}=\frac{\xi f^{'}(\xi)-f(\xi)-\xi^2f^{''}(\xi)}{\xi^2}$

基本积分表

$\int sec(x)dx=ln|sec(x)+tan(x)|+C$　　$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2arcsin(\frac{x}{a}))+C$

$\int csc(x)dx=ln|csc(x)-cot(x)|+C$　　$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}d=arcsin(\frac{x}{a})+C$　　$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$　　$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a})+C$

Euler 第一、二、三替换

$a>0$： $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t\quad c>0$： $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$： $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$

Wallis 公式　$\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$

Stirling 公式　$n!\sim\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n(n\to+\infty)$

练习． $\int_0^1\frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^2x}{sinx+cosx}dx\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(2n+1)x}{sinx}dx\quad\int_0^1\frac{arctanx}{1+x}dx=\frac{\pi}{8}ln2$

2　级数

练习． 考查极限的敛散性：$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(lnn)^p}$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p(p>0)$

证明． D'Alembert 判别法, Cauchy 判别法, Gauss 判别法

问题． 已知 f(x) 在 x=0 处 (n+k) 次可微，且 $f^{(n+i)}(0)=0(i=1,2,...,k-1)$，$f^{(n+k)}(0)\neq 0$，若 $f(x)=f(0)+f'(0)x+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n(0<\theta<1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

练习． 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n cosn\theta(|q|<1)$

定理． 常见泰勒展开公式
$(1+x)^x = 1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4+o(x^5) \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} = e-\frac{e}{2}x+o(x)$
$arcsinx = x+\frac{x^3}{6}+o(x^4) \quad arccosx = \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$
$arctanx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6) \quad shx = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$
$chx = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{x^4}+o(x^5) \quad thx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^6)$

证明． $\Sigma\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2$ 收敛

证明． 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n xdx$，则 $\lambda>0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛

证明． 设 f(x) 在 [0,1] 上二阶可导，则 $\forall x\in(0,1)$，$\exists\,\xi\in(0,1)\ s.t.\ \frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(0)}{x}-\frac{f(x)}{x(1-x)}+\frac{f(1)}{1-x}$

证明． 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_{n+k}^2(n=0,1,...)$，若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛则 $a_n\equiv 0$

证明． 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为收敛的正项函数，$\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格单调递减，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=+\infty$

证明． 设正数 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\rho$，则 $\rho<\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则 $\rho>\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散。

证明． 设 $\{a_n\}$ 是正数列，令 $s_n=\Sigma\frac{a_n}{n}$，$r_n=\Sigma\frac{1}{na_n}$，已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}s_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r_n$ 均存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}s_n\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r_n\geqslant 1$

证明． 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 满足 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\}$ 对 n 有界，$\{a_n\}$ 单调递减且趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

证明． 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0，且 $b_k=a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant 0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kb_k=a_1$

证明． Abel 变换，Abel 判别法，Dirichlet 判别法

练习． 求极限 $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$

证明． 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\forall c_n\geqslant 0$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$ 收敛

证明． $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n sinn}{n}$ 收敛

证明． 设 $0<\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}(n=1,2,...)$，$\psi$ 正值非减，使 $\int_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{dt}{t\psi(t)}<+\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}$ 收敛

证明． Mertens 定理
设级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛到 A，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$ 收敛到 B，则它们的柯西乘积必定存在且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛到 AB

证明． 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 和它们的柯西乘积 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$ 都收敛，则有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n=(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n)(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n)$

证明． 设 $\{f_n(x)\}$ 关于 $x\in(a,b)$ 一致收敛，$\lim\limits_{x\to a^+}f_n(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a^+}f_n(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$

证明． 设 $f(x)\in[-a,a],|f(x)|<|x|$，当 $x\neq0$ 时定义 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 [-a,a) 一致收敛于 0

证明． 设 $\{a_n\}$ 是单调减小的正数列，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n sinnx$ 在 R 上一致收敛的充要条件为 $\lim\limits_{n\to}na_n=0$

证明． 一致收敛的等价定义：
$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall x\in D,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$
Cauchy 准则：$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\forall x\in D,|f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon$
确界极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$
点列极限：$\forall\{x_n\}\subseteq D,\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0$

证明． 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，令 $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$，则 $\{f_n\}$ 在任意有界闭区间内一致收敛

定理． 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(x)b_n(x)(x\in D)$ 一致收敛的充分条件：
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(x)$ 关于 x 一致收敛，$b_n(x)$ 关于 n 单调且关于 x 一致有界
$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)$ 关于 x 一致有界，$b_n(x)$ 关于 n 单调且关于 x 一直趋向于 0

定理． Weierstrass 第一逼近定理
设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\forall\epsilon>0,\exists$ 多项式 $p(x)$ 使得 $|f(x)-p(x)|<\epsilon,\forall x\in[a,b]$, 且 $p(a)=f(a),p(b)=f(b)$
或者等价地叙述为：存在多项式函数列 $\{p_n(x)\}$ 在区间 [a,b] 上一致收敛于 f(x)

证明． 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 内一致收敛于 $f(x)$，且 $\forall n\in N,\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=a_n\in R$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都存在且相等

证明． 设 $f(x)\in C[a,b],\forall n\in N$，$\int_a^b x^nf(x)\equiv0$，则 $f(x)\equiv0$

证明． 连续性定理，逐项积分定理，逐项求导定理，Dini 定理

证明． $f_n(x)$ 在 [a,b] 上连续可微，$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f_n'(x)|\leqslant M$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 [a,b] 点点收敛 $\Rightarrow$ 一致连续

证明． 设 $u_n(x),v_n(x)\in C(a,b)$，$\forall n\in N^*,|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$，则若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$ 在 (a,b) 上点态收敛于一个连续函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 亦然

证明． 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 x=a,b 收敛，$\forall n\in N^*,u_n(x)\in\nearrow[a,b]\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 [a,b] 一致收敛

练习． 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}tan\frac{x}{2^n}dx$，证明 $\int_0^1x^{-x}dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$

练习． 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot sin(2\pi n!e)$；设 $f(x)=(xsinx)^2$，求 $f^{(2022)}(0)$

证明． 每个幂级数必定是某个函数的 Taylor 级数

证明． Riemann-Lebesgue 引理：$f(x)\in R[a,b]$，则 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)cospxdx=\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)sinpxdx=0$

问题． 设周期为 2π 的函数 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n，
证明 $\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)dt]cosnxdx$ 积分顺序可交换，并计算 F(x) 的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$

定理． 定义在任意长度为 2T 区间 [a,a+2T] 上的 f(x) 的 Fourier 级数
$a_n=\frac{1}{T}\int_a^{a+2T}f(x)cos\frac{\pi}{T}nx,\ b_n=\frac{1}{T}\int_a^{a+2T}f(x)sin\frac{\pi}{T}nx,\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_ncos\frac{\pi}{T}nx+b_nsin\frac{\pi}{T}nx$

Riemann 引理
设函数 $\psi(x)$ 在 [a,b] 上可积或绝对可积，则成立 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b\psi(x)sinpxdx=\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b\psi(x)cospxdx=0$

Riemann 局部化原理
f(x) 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 A $\Leftrightarrow\exists\delta>0\ s.t.\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\sigma}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}sin(n+\frac{1}{2})tdt=0$

Dini 收敛定理
假设 f(x) 以 2π 为周期, 且 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积, 则 $\forall x_0,\exists A,\exists\delta>0\ s.t.\ \int_0^{\sigma}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A|}{t}dt<+\infty$，那么 f(x) 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 A

另一种表述
假设 f(x) 以 2π 为周期，且 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，则 $\forall x_0,\exists\delta>0\ s.t.$ 存在 $f(x_0+),f(x_0-)$，
且 $\int_0^{\delta}\frac{f(x_0\pm t)-f(x_0\pm)}{t}dt$ 绝对收敛，则 f(x) 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$

Dirichlet 引理　设函数 $\psi(x)$ 在 $[0,\delta]$ 上单调，则成立 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(x)-\psi(0+)}{x}sinpxdx=0$

Foureir 级数收敛的 Dirichlet 判别法
设函数 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，且在 x_0 某领域 $O(x_0,\delta)$ 上分段单调有界，或在 x_0 处满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 $H\ddot{o}lder$ 条件，则 f(x) 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$，且 f(x) 的 Fourier 展开的部分和函数列 $S_n(x)$ 一致收敛于 f(x)

推论． 若 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 在点 x_0 处两个单侧导数 $f'_-(x),f'_+(x)$ 都存在, 或更进一步, 只要两个拟单侧导数 $\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(x_0\pm h)-f(x_0\pm)}{h}$ 存在，则 f(x) 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$

Weierstrass 第二逼近定理
设 f(x) 是以 2π 为周期的连续函数, 则存在三角多项式 $T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_kcoskx+\beta_ksinkx),\forall n\in N^*$,
使得 $\forall\epsilon>0,\exists n>N,\forall x\in R$：$|f(x)-T_n(x)|<\epsilon$，即函数列 $T_n(x)$ 一致收敛于 f(x)

定理． 设 $f(x)\in R[0,2\pi]$，且 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_ncosnx+b_nsinnx)$，则 a_n,b_n 存在且唯一

定理． Fourier 级数的一致收敛性、逐项积分定理、逐项微分定理、平方逼近性质、Bessel 不等式、Parseval 恒等式、平方收敛性质

3 多元函数

辉爷判别法 分母不保号则一般地极限不存在

Heine 定理

$\lim\limits_{(x \to x_0) \in E} f(x) = A$ 充要于任意 E 中收敛于 x_0 但是各项都异于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 有 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = A$

Brouwer 定理

设 $D \subset R^2$ 是一区域，向量值函数 $F: D \to R^2$ 在 D 上连续、单射，则 $F(D)$ 是一区域，且 $F(D)$ 上的反函数 F^{-1} 是连续函数

问题． 设 $f: R^n \to R^m$ 为连续映射，证明：对于 R^n 中的任意子集 A，成立 $f(\bar{A}) \subset f(\bar{A})$，并举例说明 $f(\bar{A})$ 能够是 $f(\bar{A})$ 的真子集

证明． 设函数 f 在圆周上有定义并且连续，证明可以找到一条直径的两个端点 a 与 b，使得 $f(a) = f(b)$

证明． 设 f(x,y) 满足 $(i): \forall y \neq b, \lim\limits_{x \to a} f(x,y) = \psi(y)$ $(ii) \exists \eta > 0\ s.t.\ \lim\limits_{y \to b} f(x,y)$ 关于 $x \in E, E = \{x: 0 < |x-a| < \eta\}$ 存在一致极限 $\varphi(x)$，证明 $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{x \to b} f(x,y) = \lim\limits_{x \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x,y)$

证明． 设有界点列 $z_n = (x_n, y_n)$ 满足 $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}} ||z_n|| = l$，$\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} ||z_n|| = L$，$\lim\limits_{n \to +\infty} ||z_{n+1} - z_n|| = 0$，证明 $\forall \mu \in (l, L)$，圆周 $x^2 + y^2 = \mu^2$ 上至少有 $\{z_n\}$ 的一个聚点

证明． 设 $f(x,y)$ 在某点领域内有连续偏导数 $f'_y(x,y)$，且 $f'_x(x,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在该点可微

函数分析性质的相互关系

重极限存在 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 累次极限存在，累次极限存在 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 方向极限存在，但重极限存在 $\longrightarrow$ 方向极限存在

偏导数连续 $\longrightarrow$ 可微，可微 $\longrightarrow$ 连续，可微 $\longrightarrow$ 偏导数存在，但连续 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 偏导数存在

证明． 若存在非零实数 a,b,c，使得 $f(x) \in C^1(R^3)$ 满足 $\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial z}$，则 $\exists g(x) \in C^1(R)$，使得 $f(a,b,c) = g(ax + by + cz)$

证明． 设 $z = f(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数，且满足 $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0$，则 $f(x,y)$ 为常数

Hadamard 公式 设 n 元函数 f 在 R^n 上具有连续偏导数，则 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$，成立：

$f(\vec{y} - \vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_i - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) dt$

证明． $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 某邻域上有定义，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 中有一个在 (x_0, y_0) 处连续，且都在 (x_0, y_0) 邻域上存在，则依然有 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微

证明． 设 $f(x,y,z)$ 满足 $\forall t, x, y, z:\ f(tx, ty, tz) = t^q f(x,y,z)$，$z = \psi(x,y)$ 是由 $f(x,y,z) = 0$ 唯一确定的隐函数，则 $\psi(x,y)$ 是一次齐次函数，即 $\forall t, x, y:\ \psi(tx, ty) = t\psi(x,y)$

定理． 一元隐函数存在性定理

定理 . 矩阵的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 是代数余子式对应矩阵的转置；无论矩阵 A 可逆与否，成立 $AA^*=A^*A=|A|E$，若 A 可逆，则 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

证明 . 设二元函数 $f(x,y):R^2\to R$ 具有连续偏导数，则存在一对一的连续的向量值函数 $\vec{G(t)}:R\to R^2$，使得 $f\circ\vec{G}\equiv$ 常数

证明 . 任一点法平面过定点的曲线必为球面曲线

空间曲线的法向量

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\Rightarrow\vec{n}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0),\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0),\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\}$

空间曲面的法向量

$z=f(x,y)\Rightarrow\vec{n}=\{f_x(P_0),f_y(P_0),-1\}$

$F(x,y,z)=0\Rightarrow\vec{n}=\{F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)\}$

$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P_0),\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(P_0),\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}(P_0)\}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$

证明 . 设 $u(x,y)$ 在 $\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上连续, 且在 $\{x^2+y^2<1\}$ 上满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$, 且在 $\{x^2+y^2=1\}$ 上 $u(x,y)>0$，则 $\forall(x,y)\in\{x^2+y^2\leqslant 1\},u(x,y)\geqslant 0$

问题 . 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续个三阶偏导数，且满足 $grad(f(P_0))=0$，$H_f(P_0)$ 半定且存在单位向量 $u=(a,b)^T$ 使得 $H_f(P_0)u=0$，同时 $(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y})^3f(P_0)\neq 0$，则 P_0 不是 f 的极值点

4 重积分

证明 . 多重积分可积（定义），积分中值定理，累次积分定理

证明 . 设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx$，$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}e^{f(x)-f(y)}dxdy\geqslant(b-a)^2$

重积分变量代换公式 $\int_{T(\Omega)}f(y_1,...,y_n)dy_1...dy_n=\int_\Omega f(y_1(\vec{x}),...,y_n(\vec{x}))\left|\frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}\right|dx_1...dx_n$

定理 . 第一、二类线、面积分存在性的条件，三大公式适用条件

线面积分计算公式、三大公式

第一类曲线积分：$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$

极坐标下：$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)cos\theta, r(\theta)sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

第二类曲线积分：$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_L [Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma]ds = \int_a^b [Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)]dt$

Gauss 系数：$S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv,\ E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\ F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\ G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

曲面面积：$S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv = \iint\limits_D \sqrt{q+f_x^2+f_y^2}dxdy = \iint\limits_D \frac{||\mathbf{grad}H||}{|H_z|}dxdy$

第一类曲面积分：$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$

第二类曲面积分：$\iint\limits_\Sigma [Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma]dS = \pm\iint\limits_D [P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv$

Green 公式：$\int\limits_{\partial D} Pdx+Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dxdy$

Gauss 公式：$\iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint\limits_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$= \iint\limits_D P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$

Stokes 公式：$\int_a^b Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)dt = \int\limits_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz$

$= \iint\limits_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$= \iint\limits_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)cos\gamma\right]dS$

$= \pm\iint\limits_D \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$

练习 . 计算下列积分：

$\int_0^1 \frac{x^3-x}{lnx}dx;\ \lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t dx\int_x^t sin(xy)^2dy;\ \iiint\limits_\Omega cos(x+y+z)dV(\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1)$

$I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin^2\theta+x^2cos^2\theta)d\theta,\ 0<x<+\infty;\ I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(\frac{1+\alpha cosx}{1-\alpha cosx}\right)\cdot\frac{dx}{cosx}$

$\int_0^{2\pi} e^{tan\theta}cos(tsin\theta)d\theta;\ \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx;\ \int_0^1 dx\int_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dy$

$\oint_C \frac{xdy-ydx}{ax^2+by^2},\ ab>0,\ C:\ x^2+y^2=1$(逆时针); $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2},\ C:\ |x|+|y|=1$(逆时针);

$\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, (1) $C:\ x^2+y^2=a^2$(逆时针) (2) $C:\ |x|+|y|=1$(逆时针)

问题 . 设函数 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有二阶连续偏导，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^2$，求 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$

调和函数 设 D 为平面区域，$u(x,y)\in C^2(D)$，如果 u 在 D 上满足 $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则称 u 为调和函数；$u(x,y)$ 为 D 上调和函数的充要条件为 $\forall P(x_0,y_0)\in D, \forall 0<r<dist(P_0,\delta D)$：$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+rcos\theta, y_0+rsin\theta)d\theta$

定理 . 设闭区域 D 由有限条分段光滑曲线围成，$u(x,y),v(x,y)\in C^2(D)$，$\vec{n}$ 为 D 的外法线方向，则：

(1) $\iint\limits_D \Delta u dxdy = \int\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds$

(2) $\iint\limits_D v\Delta u dxdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\int\limits_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}ds$

(3) $\iint\limits_D (v\Delta u-u\Delta v)dxdy = \int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$

简记 Stokes 公式 利用行列式记号，可以将 Stokes 公式 $\int\limits_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz$ 写成：

$$\iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dudv$$

问题． 设 D 是平面 R^2 上的有界闭区域，$u(x,y)$ 在 D 上连续，$u|_{\partial D} = 0$，且在 D 内每点处存在偏导数，且满足 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$，证明 $\forall (x,y) \in D$ 有 $u(x,y) = 0$

练习． $\int\limits_{L} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$，其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，从 Z 轴正向看去，方向是逆时针

问题． 设 f 是单变量函数，且连续可导，令 $F(t) = \iint\limits_{[0,t]^2} f(xy)dxdy$，求证：

$(1) F'(t) = \frac{2}{t}\Big(F(t) + \iint\limits_{[0,t]^2} xyf'(xy)dxdy\Big)$ $(2) F'(t) = \frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)ds$

问题． 设函数 f,g 都是 [a,b] 上递增的连续函数，且都不是常值函数，证明：
$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx > \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$

问题． 证明函数 $f(x,y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(u,v)dudv$ 至多有一个在 $[0,1]^2$ 上连续的解

问题． 设 f 在区间 $[0,1]$ 上具有连续的导数，记 $\epsilon_n = \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\epsilon_n$

练习． 计算：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2 - sin^x)dx\ (a > 1)$

定理． 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty) \times E$ 上有定义，$E \subset R$，则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 E 上一致收敛的充要条件是 $\forall$ 数列 $\{t_k\} : a < t_1 < ... < t_k < ...$，$\lim\limits_{k\to+\infty} t_k = +\infty$，函数列 $F_k(y) = \int_a^{t_k} f(x,y)dx$ 在 E 上一致收敛

问题． 设函数 $f(x)$ 在任意有界区间上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$，证明 $\lim\limits_{\sigma\to0^+} \sigma\int_0^{+\infty} e^{-\sigma x} f(x)dx = \alpha$

问题． 设 f 在 R 上连续有界，令 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}dt\ (y > 0)$，证明 $\lim\limits_{y\to0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt = f(x)$

问题． 设 f 是区间 $[0,A]$ 上的单调函数，证明 $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^A f(x)\frac{sin\alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}f(0+)$