2013 年浙江省高等数学（微积分）

数学、工科类竞赛试题

一、计算题

1、求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k-\sin^2 k}{n^2}\left[\ln\left(n+k-\sin^2 k\right)-\ln n\right]$.**(数学、工科类)**

2、已知异面面直线 $L_1:\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ 与

$$L_2:\frac{x+2}{-2}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-4}{2},$$

(1) 求公垂线 L 的方程. **(数学类)**

(2) 求两直线间的距离. **(工科类)**

3、求积分 $\displaystyle\int\frac{\sin\left(x+a\right)}{\sin\left(x+b\right)}\mathrm{d}\,x$,其中为 a,b 常数. **(数学、工科类)**

4、设 $f\left(x\right)=e^x\cos x$，证明 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}\left(x\right)}{2^n}$ 收敛并求和函数. **(数学类)**

5、设某均匀物体由半径为 1 的半球体下接一个高为 h 的正圆锥体而成，已知该物体的的重心位于球心，求 h 的值. **(工科类)**

6、已知二元函数 $u\left(x,y\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，且 $u\big|_{x=0}=y^2,u\big|_{y=1}=\cos x$，求 $u\left(x,y\right)$ 的表达式. **(数学、工科类)**

二、设$f_n(x)=x^n\ln x$，求

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n!}f_n^{(n)}(\dfrac{1}{n})$.**(数学类)**

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n!}f_n^{(n-1)}(\dfrac{1}{n})$.**(工科类)**

三、设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$上可导，$f(0)=f(1)=0$，证明：$\forall x\in(0,1)$，$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=f(x)$. **(数学类)**

四、证明：$f(x)=\dfrac{1-x^{\alpha}}{1-x^{\beta}}(\alpha>\beta>0)$在$(0,1)$上严格单调增. **(数学、工科类)**

五、设$x_1=1,\sin x_n=x_n\cos x_{n+1},x_{n+1}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$n=1,2,\cdots$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$； (2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$收敛.**(数学类)**

六、计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n+1)!}\right)\mathrm{d}x$.

(工科类)

七、已知$\sin x=x\cos y,x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，证明$y<x<2y$.

(工科类)

2013年浙江省高等数学（微积分）数学、工科类竞赛试题参考解答

一、计算题

1、**【参考解答】**：记 $f\left(x\right)=x\ln(1+x)$，取

$$x_k=\frac{k-1}{n},\Delta x_k=\frac{1}{n},\ \ x_{k-1}<\xi_k=\frac{k-\sin^2 k}{n}<x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k-\sin^2 k}{n^2}\left[\ln\left(n+k-\sin^2 k\right)-\ln n\right]=\sum_{k=1}^{n}f\left(\xi_k\right)\Delta x_k$$

原式 $=\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{4}$.

2、**【参考解答】(1)** 由于 $\vec{l}_1\times\vec{l}_2=-5\left(3,2,-6\right)$，公垂线 L 方向向量可取为 $\vec{l}=\left(3,2,-6\right)$. 过公垂线 L 与 L_1 的平面 π_1，其法向量为 $\vec{n}_1=\vec{l}_1\times\vec{l}=\left(16,27,17\right)$.

取 L_1 上点 $M_1\left(5,1,-1\right)$，则方程为

$$16\left(x-5\right)+27\left(y-1\right)+17\left(z+1\right)=0$$

即 $\pi_1: 16x+27y+17z=90$.

同理可得过公垂线 L 与 L_2 的平面 π_2 的方程为：$58x+6y+31z=20$，所以公垂线 L 的方程为

$$\begin{cases}16x+27y+17z=90\\ 58x+6y+31z=20\end{cases}$$

(2) 过 L_1 且平行于 L_2 的平面 π 过点 $M_1\left(5,1,-1\right)$ 且法向量为

$$\vec{n}=\vec{l}_1\times\vec{l}_2=-5\left(3,2,-6\right),$$

所以 π 方程为 $3\left(x-5\right)+2\left(y-1\right)-6\left(z+1\right)=0$，即

$$3x+2y-6z-23=0.$$

因平面 π 平行于 L_2，故所求距离 d 即为 L_2 到 π 的距离，即为 $M_2\left(-2,2,4\right)$ 到 π 距离

$$\mathrm{d}=\frac{\left|3\left(-2\right)+2\times2-6\times4-23\right|}{\sqrt{3^2+2^2+\left(-6\right)^2}}=7$$

3、【参考解答】由三角函数恒等变换公式，得

$$\sin\left(x+a\right)=\sin\left(x+b\right)\cos\left(a-b\right)+\cos\left(x+b\right)\sin\left(a-b\right)$$

$$\text{原积分}=\cos\left(a-b\right)x+\sin\left(a-b\right)\int\frac{\cos\left(x+b\right)}{\sin\left(x+b\right)}\mathrm{d}\,x$$

$$=\cos\left(a-b\right)x+\sin\left(a-b\right)\ln\left|\sin\left(x+b\right)\right|+c$$

4、【参考解答】$f'\left(x\right)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\pi/4\right)$，所以

$$f^{(n)}\left(x\right)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\cos\left(x+n\pi/4\right)$$

由于$\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\le(\sqrt{2})^n e^x$，所以

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left|f^{(n)}\left(x\right)\right|}{2^n}\le\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^x}{(\sqrt{2})^n}$$

收敛，且

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}\left(x\right)}{2^n}=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^x e^{ix}e^{in\pi/4}}{(\sqrt{2})^n}$$

$$=\mathrm{Re}\left[e^{x(1+i)}\left(1+i\right)\right]=e^x\left(\cos x-\sin x\right)$$

5、【参考解答】以球心为坐标坐标原点，半球体与正圆锥体的公共部份为xOy平面，则半球体

$$\Omega_1=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x^2+y^2+z^2\le1,z\ge0\right\},$$

正圆锥体$\Omega_2=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x^2+y^2\le\left(1+\frac{z}{h}\right)^2,-h\le z\le0\right\}.$

记$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，则重心位于球心即为$z_c=0$，即

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}V+\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}V=0$$

即$\pi\int_0^1 z\left(1-z^2\right)\mathrm{d}z+\pi\int_{-h}^0 z\left(1+\dfrac{z}{h}\right)^2\mathrm{d}z$

$=\pi\left(1/4-h^2/12\right)=0$

所以$h=\sqrt{3}$.

6、【参考解答】 由$u_x+u=c\left(x\right)$得$e^x\left(u_x+u\right)=e^xc\left(x\right)$，

即$\left(e^xu\right)_x=e^xc\left(x\right)$. 于是$e^xu=\int e^xc\left(x\right)dx+g\left(y\right)$，

得$u=f\left(x\right)+e^{-x}g\left(y\right)$，其中$f,g$为为任意函数.

由$u\big|_{x=0}=y^2,u\big|_{y=1}=\cos x$，得

$$f\left(0\right)+g\left(y\right)=y^2\text{，即}g\left(y\right)=y^2-f\left(0\right)$$

$$f\left(x\right)+e^{-x}g\left(1\right)=\cos x\text{，得}f\left(x\right)=\cos x-e^{-x}g\left(1\right)$$

所以$u=\cos x+e^{-x}\left(y^2-1\right)$.

二、【参考解答】(1) $f_n'\left(x\right)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}$,

$$\begin{aligned}(f_n(x))^{(n)}&=\left(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}\right)^{(n-1)}\\&=n(f_{n-1}(x))^{(n-1)}+\left(n-1\right)!\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n!}(f_n(x))^{(n)}=\frac{1}{\left(n-1\right)!}(f_{n-1}(x))^{(n-1)}+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{1!}f_1'\left(x\right)+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k}=\ln x+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$$

记$x_n=f_n^{(n)}\left(\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{n!}=\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{1}{k}-\ln n$，则

$$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x<0$$

且$x_n > \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}\,x+\frac{1}{n}-\ln n$

$$=\int_1^n \tfrac{1}{x}\mathrm{d}\,x+\frac{1}{n}-\ln n=\frac{1}{n},$$

即$\left\{x_n\right\}$单调减有下界，所以$\left\{x_n\right\}$收敛 所以

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}=c\text{(欧拉常数)}.$$

(2) $f_n{}'\left(x\right)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}$

$$f_n^{(n-1)}\left(x\right)=\left(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}\right)^{(n-2)}$$

$$=nf_{n-1}^{(n-2)}\left(x\right)+x\left(n-1\right)!$$

$$\frac{1}{n!}f_n^{(n-1)}\left(x\right)=\frac{1}{\left(n-1\right)!}f_{n-1}^{(n-2)}\left(x\right)+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{1}{2!}f_2{}'\left(x\right)+\sum_{k=3}^{n}\frac{x}{k}=x(\ln x+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k})$$

$$f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}=\frac{1}{n}(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)$$

而$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln n<\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx-\ln n=0$，又有

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx+\frac{1}{n}-\ln n=\frac{1}{n}-\ln 2$$

所以$\lim_{n\to+\infty} f_n^{(n-1)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)=0$.

三、【参考解答】 $\forall x\in\left(0,1\right)$，若$f\left(x\right)=0$ 则由罗尔定理可知，$\exists\xi\in\left(0,1\right)$，使得$f'\left(\xi\right)=0=f\left(x\right)$.

若$f\left(x\right)\neq 0$，则考虑函数$g\left(t\right)=f\left(t\right)-tf\left(x\right)$，则

$$g\left(x\right)g\left(1\right)=-\left(1-x\right)f^2\left(x\right)<0$$

所以$\exists\eta\in(x,1)$，使得$g(\eta)=0$.

又$g(0)=0$，所以$\exists\xi\in(0,\eta)$，使得$g'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-f(x)=0.$$

四、【参考证明】 $f(x)$严格单调增等价于

$$h(t)=\frac{1-t^{\lambda}}{1-t}\ \left(\lambda=\frac{\alpha}{\beta}>1\right)$$

的严格单调增.记$g(t)=1-t^{\lambda}$，则

$$g''(t)=-\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}<0,$$

从而$g(t)$是凸函数，所以

$$\forall t_1<t_2<1,t_2=\lambda_1t_1+\lambda_2\cdot 1,$$

$$\lambda_1=\frac{1-t_2}{1-t_1}>0,\lambda_2=\frac{t_2-t_1}{1-t_1}>0$$

使得$g(t_2)>\lambda_1g(t_1)+\lambda_2g(1)=\dfrac{1-t_2}{1-t_1}g(t_1)$，即

$$\frac{g(t_2)}{1-t_2}>\frac{g(t_1)}{1-t_1},$$

从而$h(t_1)<h(t_2)$，所以$f(x)$严格单调增.

五、【参考证明】 由微分中值定理 得$\exists\xi\in(0,1)$使

$$\sin 1-\sin 0=\cos\xi=\cos x_2,$$

于是得$x_2=\xi<1$. 一般地

$$\sin x_n-\sin 0=x_n\cos\xi=x_n\cos x_{n+1}$$

得$x_{n+1}=\xi<x_n<1$. 又

$$\sin x_n>x_n-\frac{x_n^3}{6},\cos x_{n+1}<1-\frac{x_{n+1}^2}{2}+\frac{x_{n+1}^4}{24}$$

所以$x_n-\dfrac{x_n^3}{6}<x_n\left(1-\dfrac{x_{n+1}^2}{2}+\dfrac{x_{n+1}^4}{24}\right)$，即

$$x_{n+1}^2-\frac{x_{n+1}^4}{12}<\frac{x_n^2}{3}.$$

因为$x_n<1$，所以

$$x_{n+1}^2\left(1-\frac{1}{12}\right)<x_{n+1}^2\left(1-\frac{x_{n+1}^2}{12}\right)<\frac{x_n^2}{3}$$

于是$x_{n+1}<\frac{2x_n}{\sqrt{11}}$，即$x_n\le(\frac{2}{\sqrt{11}})^{n-1}$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=0$$

且级数$\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\le\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{\sqrt{11}})^{n-1}$收敛.

六、【参考解答】 令$t=x^2$，则

$$\text{原积分}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{t^n}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{4^n\left(n+1\right)!}\right)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-0.5t}(e^{0.25t}-1)\tfrac{4}{t}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{+\infty}(e^{-0.25t}-e^{-0.5t})\tfrac{1}{t}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{0.25}^{0.5}e^{-xy}\mathrm{d}y\\&=2\int_{0.25}^{0.5}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\mathrm{d}x=2\int_{0.25}^{0.5}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=2\ln 2\end{aligned}$$

七、【参考证明】 由中值定理$\sin x=x\cos\xi,\xi\in\left(0,x\right)$，得$\cos\xi=\cos y$，即$y=\xi<x$. 又由

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}<x\cos\frac{x}{2},$$

得$\cos y<\cos\frac{x}{2}$. 由于$\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中严格单调减，所以

$\frac{x}{2}<y$，即$x<2y$，所以$y<x<2y$.