2009 年浙江省高等数学（微积分）竞赛试题
(工科、数学、经管、文专类节选)

一、计算题

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i\sin\dfrac{i\pi}{n}$.

2、计算不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}\,x$.

3、设 $f(x)=(\tan\dfrac{\pi x}{4}-1)[(\tan\dfrac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\dfrac{\pi x^{100}}{4}-100)]$，

求 $f'(1)$.

4、设 $\begin{cases} x=\cot t \\ y=\dfrac{\cos 2t}{\sin t}\end{cases}, t\in(0,\pi)$,求此曲线的拐点.

5、已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+b)^{\frac{1}{x^2}}=1$，求常数的值 a,b.

6、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{i=n}^{2n}\dfrac{1}{i(n+i)}$.

7、计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2(\ln x-1)^2}}\,\mathrm{d}\,x.$

8、设 $f(x)=x\sin^2 x$，求 $f^{(2009)}(0)$.

9、已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[e^x+\dfrac{ax^2+bx}{1-x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=1$，求常数 a,b 的值.

10、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}$.

11、设 $z=g[xf(x+y,2y)]$，且 g 二阶可导，f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12、设 f 为连续函数，$\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{d}v\int_0^x f(u+v-x)\mathrm{d}u$，

求$\varphi'(x)$.

二、设 $f(0)=0, 0<f'(x)<1$，证明：当 $x>0$ 时，$\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2>\int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$.

三、设$g(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}\,\mathrm{d}t$，求$g(x)$的最小值.

四、设曲线$y=e^{-x}\sqrt{|\sin x|},\ \ 0\le x\le n\pi,\ \ n\in z^{+}$，求此曲线与$x$轴围成的图形绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积，并求$\lim\limits_{n\to\infty}V_n$.

五、设$F(t)=\int_0^{\pi}\ln(1-2t\cos x+t^2)\,\mathrm{d}x$，证明：

（1）$F(t)$为偶函数；（2）$F(t^2)=2F(t)$.

六、设f为连续函数，且$0\le f(x)\le 1$，证明在$[0,1]$上方程$2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$有唯一解.

七、设$f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}+x-r\left(r>0\right)$.

(1) 证明：$f_n\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$内有唯一的零点x_n；

(2) 问r为何值时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，发散?

八、设f在$[0,+\infty)$上可导，且$f'\left(x\right)>f\left(x\right)$，$f\left(0\right)\ge 0$. 证明$f\left(x\right)\ge 0\left(x\ge 0\right)$.

九、设f导函数连续，$R(x,y,z)=\int_0^{x^2+y^2}f(z-t)\mathrm{d}t$，曲面$S$为$z=x^2+y^2$被平面$y+z=1$所截得的下面部分，内侧，$L$为$S$的正向边界，求

$$\oint_L 2xzf\left(z-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+\left[x^3+2yzf\left(z-x^2-y^2\right)\right]\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

2009年浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

(工科、数学、经管、文专类节选)参考解答

一、计算题

1、【参考解析】：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i\pi}{n}\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1 x\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}$$

2、【参考解析】：$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\int\mathrm{d}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C$$

3、【参考解析】：对函数$f\left(x\right)$求导，得

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}[(\tan(\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)]$$

$$+(\tan\frac{\pi x}{4}-1)[(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)]'$$

所以$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}[(1-2)L(1-100)=-\frac{\pi}{2}\times 99!$

4、【参考解析】：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\csc t\cot t-2\cos t,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\csc^2 t$.

所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos t(1+2\sin^2 t),\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-3\sin^3 t\cos 2t$.

令$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$得$t_1=\frac{\pi}{4},t_2=\frac{3\pi}{4}$. 并且当$0<t<\frac{\pi}{4}$时，

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$；当$\frac{\pi}{4}<t<\frac{3\pi}{4}$时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$；当$\frac{3\pi}{4}<t<\pi$

时，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$. 所以拐点为$(1,0)(-1,0)$.

5、【参考解析】：**【思路一】**由对数函数的连续性质，有

$$\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+b)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx-1)\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x+2ax+b)}{2x}}=1$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+2ax+b)=0, b=-1$. 又由

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+2a)}{2}=0\text{，得}a=-\frac{1}{2}.$$

【思路二】基于重要极限，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}(1+e^x+ax^2+bx-1)^{\frac{1}{e^x+ax^2+bx-1}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+ax^2+bx-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+(\frac{1}{2}+a)x^2+o(x^2)}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=-1$$

6、【参考解析】：改写极限式得

$$\lim_{n\to\infty}n\sum_{i=n}^{2n}\frac{1}{i(n+i)}=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)(2n+i)}+\frac{1}{2n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+i/n)(2+i/n)}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{x+1}{x+2}\bigg|_0^1=\ln\frac{4}{3}$$

7、【参考解析】：令 $t=x\left(\ln x-1\right)$，则 $\mathrm{d}t=\ln x\,\mathrm{d}x$，

$$\text{原式}=\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$$

$$= \ln\left[x(\ln x-1)+\sqrt{1+x^2(\ln x-1)^2}\right]+C$$

8、【参考解析】:【思路一】由于 $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$，于是

由余弦函数的麦克劳林级数公式

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

代入原来函数表达式，得

$$f(x)=x\sin^2 x=x\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\cos 2x$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}=\frac{x}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!}$$

取 $2n+1=2009$，得 $n=1004$，所以

$$f^{(2009)}(0)=-(-1)^{1004}\frac{2^{2007}}{(2008)!}\cdot 2009!=-2009\cdot 2^{2007}.$$

【注】类似可得 $f(x)=x^3\sin^2 x$ 求 $f^{(2009)}(0)$.(工科、数学类)

【思路二】莱布尼兹公式，得

$$f(2009)(x)=\sum_{k=0}^{2009}C_{2009}^{k}x^{(k)}\left(\sin^2 x\right)^{(2009-k)}$$

于是可得

$$f^{(2009)}(0)=C_{2009}^{1}\left(\sin^2 x\right)^{(2008)}\Big|_{x=0}=2009(\sin 2x)^{(2007)}(0)$$

$$=2009\cdot 2^{2007}\sin\frac{2007\pi}{2}=-2009\cdot 2^{2007}$$

9、【参考解析】:要极限存在，必有

$$1=\lim_{x\to 0}\left(e^x+\frac{ax^2+bx}{1-x}\right)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(e^x+\frac{ax^2+bx}{1-x}\right)}$$

即 $0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(e^x+\dfrac{ax^2+bx}{1-x}\right)}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-x)^2-ax^2+2ax+b}{x(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-x)^2-ax^2+2ax+b}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(xe^x-ax-2e^x+2a+\frac{e^x+b}{x}\right)$$

于是可得 $a=\dfrac{1}{2},b=-1.$

10、【参考解析】：利用对数函数的连续性，考虑极限

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{n!}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{\left(n+1\right)\cdots\cdots(2n)}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln\left(1+x\right)\mathrm{d}\,x=\ln4-1=\ln\frac{4}{e}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{4}{e}.$

11、【参考解析】：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xf_1'(x+y,2y)+f(x+y,2y)\right)g'\left[xf(x+y,2y)\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_y'$$

$$=xg''\left(2f_2'+f_1'\right)\left(xf_1'+f\right)+g'\left(2f_2'+f_1'+2xf_{12}''+xf_{11}''\right)$$

12、【参考解析】: 令 $u+v-x=t$，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，

则 $\int_0^x f(u+v-x)\mathrm{d}u=\int_{v-x}^{v} f(t)\,\mathrm{d}t=F(v)-F(v-x)$，

代入原式，得

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_0^x\left[\int_0^x f(u+v-x)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v\\&=\int_0^x\left[F(v)-F(v-x)\right]\mathrm{d}v\\&=\int_0^x F(v)\mathrm{d}v-\int_0^x F(v-x)\mathrm{d}v\,(v-x=y)\\&=\int_0^x F(v)\mathrm{d}v+\int_0^{-x}F(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以对上式两端关于 x 求导，得

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=F(x)-F(-x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{-x}^{0}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-x}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

二、【参考解析】: 令 $F(x)=(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)^2-\int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$，

则 $F(0)=0,F'(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)]$. 由 $f(0)=0$ 且 $0<f'(x)<1$，知当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

又设 $g(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)$,则

$$g(0)=0,g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0,$$

所以 $F'(x)>0$，从而 $F(x)>F(0)$，所以原不等式成立.

【注】当 $x=1$ 时，则有 $\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

三、【参考解析】: 当 $x>1$ 时，

$$g(x)=2x\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t,g'(x)=2\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t>0,$$

故当 $x\geq 1$ 时 $g(x)$ 单调增加;

当 $x<-1$ 时，

$$g(x)=-2x\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t,g'(x)=-2\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t<0,$$

故当$x\le 1$时$g(x)$单调减少；

当$-1<x<1$时，

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(x-t)e^{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=x\int_{-1}^{x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_{-1}^{x}te^{t^2}\,\mathrm{d}t+\int_x^1 te^{t^2}\,\mathrm{d}t-x\int_x^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$g'(x)=\int_{-1}^{x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t-\int_x^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-x}^{x}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

由$g'(x)=0$得$x=0$．当$-1<x<0$时，$g'(x)<0$，当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，故$x=0$是$g(x)$的极小值点，又

$$g(1)=g(-1)=2\int_0^1 e^{t^2}\,\mathrm{d}t>2\int_0^1\mathrm{d}t=2$$

$$g(0)=2\int_0^1 te^{t^2}\,\mathrm{d}t=e^{t^2}\Big|_0^1=e-1$$

故$g(x)$的最小值为$g(0)=e-1$.

四、【参考解析】：由旋转体计算公式$V=\int_a^b \pi f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$，

得$V_n=\pi\int_0^{n\pi}e^{-2x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$$=\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k\int_{k\pi}^{\left(k+1\right)\pi}e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1+e^{2\pi}}{5}\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left(-1\right)^k\left[e^{-2\pi(k+1)}(2\sin(\pi k)+\cos(\pi k))\right]$$

$$=\frac{1+e^{2\pi}}{5e^{2\pi}}\pi\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2\pi k}=\pi\frac{1+e^{2\pi}}{5e^{2\pi}}\frac{e^{2\pi}\left(1-e^{-2\pi n}\right)}{e^{2\pi}-1}$$

于是得

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\pi\frac{1+e^{2\pi}}{5e^{2\pi}}\frac{e^{2\pi}\left(1-e^{-2\pi n}\right)}{e^{2\pi}-1}=\frac{\pi}{5}\frac{1+e^{2\pi}}{e^{2\pi}-1}$$

五、【参考解析】：(1) $F(-t)=\int_0^{\pi}\ln(1+2t\cos x+t^2)\,\mathrm{d}x$

令$x=\pi-u$，则

$$
\begin{aligned}
F(-t) &= \int_0^{\pi} \ln(1-2u\cos x+u^2)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^{\pi} \ln(1-2t\cos x+t^2)\,\mathrm{d}\,x = F(t)
\end{aligned}
$$

所以 $F(t)$ 为偶函数.

（2） $2F(t) = F(t) + F(-t)$

$$
= \int_0^{\pi} \ln[(1+t^2)^2 - 4t^2\cos^2 x)]\,\mathrm{d}\,x
$$

$$
= \int_0^{\pi} \ln(1+2t^2\cos 2x + t^4)\,\mathrm{d}\,x
$$

令 $2x = \pi - y$，则

$$
\begin{aligned}
2F(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2(-t^2)\cos y + (-t^2)^2)\,\mathrm{d}\,y \\
&= \int_0^{\pi} \ln(1-2(-t^2)\cos y + (-t^2)^2)\,\mathrm{d}\,y \\
&= F(-t^2) = F(t^2)
\end{aligned}
$$

六、【参考解析】: 设 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t - 1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$
F(0) = -1 < 0\text{，}\quad F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t\text{，}
$$

当 $f(x) = 1$ 时，$F(1) = 0, x = 1$ 是 $2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ 的解；

当 $0 \le f(x) < 1$ 时，$F(1) = 1 - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t > 0$，由零点定理，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使 $F(\xi) = 0$，即方程

$$
2x - \int_0^x f(\mathrm{t})\,\mathrm{d}\,t = 0
$$

至少有一解. 又 $F'(x) = 2 - f(x) > 0$，故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递增，因此 $[0,1]$ 上方程 $2x - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ 有唯一解.

七、【参考解析】: (1) $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且在 $(0,+\infty)$

内可导，$f_n(0)=-r<0$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少存在一个零点. 因为

$$f_n'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}+1>0, x>0$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，即 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的零点.

(2) 当 $0<r<1$ 时，$0<x_n<1$. 因为 $x\in(0,1)$ 时，$x^{\frac{1}{n}}$ 随 n 的增大而增大，又 $x^{1/n}+x=r$，所以 x_n 单调递减，由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=u$. 如果 $u>0$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{1/n}+x_n\right)=\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n}+u=1+u$$

与 $x_n^{1/n}+x_n=r$ 矛盾，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 由于

$$r=\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{1/n}+x_n\right)=\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n}<1$$

所以，根据根值判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

当 $r>1$ 时，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 又

$$r=\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{1/n}+x_n\right)=\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n}>1$$

这与根值判别法结论矛盾，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

当 $r=1$ 时，因为 $f_n(x)$ 单调增加，因为

$\frac{1}{n}<(1-\frac{1}{n})^n\to e^{-1}(n\to\infty)$，

即当 n 充分大时，$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}<1-\frac{1}{n}$，即 $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}+\frac{1}{n}<1$

于是当n充分大时，$x_n > \frac{1}{n}$，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

八、【参考解析】：令$F(x)=e^{-x}f(x)$，则$F\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上可导，且$F'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)\geq 0$，所以$F\left(x\right)$在$[0,+\infty)$上单调增加，又因为$F(0)=e^{0}f(0)=f(0)\geq 0$，从而$F(x)\geq F(0)\geq 0$，即$e^{-x}f(x)\geq 0$，所以

$$f\left(x\right)\geq 0\left(x\geq 0\right).$$

九、【参考解析】：考虑斯托克斯公式，则曲面S单位法向量为

$$\vec{n}^{\circ}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\left(-2x,-2y,1\right)$$

并且令$z-t=u$，则$R(x,y,z)=\int_{z-x^2-y^2}^{z}f(u)\,\mathrm{d}\,u$，并记$P=2xzf\left(z-x^2-y^2\right),Q=x^3+2yzf\left(z-x^2-y^2\right)$，函数自变量都位于曲面$S$：$z=x^2+y^2$上，所以满足曲面的方程，即

$$P=2xzf\left(0\right),Q=x^3+2yzf\left(0\right),R=\int_0^z f(u)\,\mathrm{d}\,u$$

于是原积分$I=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}\,S$，代入得

$$I=\iint\limits_S\frac{3x^2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\mathrm{d}\,S$$

由于$\mathrm{d}\,S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，所以

$$I=3\iint\limits_{D}x^{2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

其中D为$1-y=x^{2}+y^{2}$所围积分区域，即

$$D:x^{2}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^{2}\leq\frac{5}{4}.$$

令$x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}r\cos\theta,y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}r\sin\theta$，其中

$$0\leq\theta\leq2\pi,0\leq r\leq1$$

得变换的雅克比行列式为$|\,J\,|=\dfrac{5r}{4}$，所以

$$\begin{aligned}I&=3\iint\limits_{D}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}r\cos\theta\right)^{2}\frac{5r}{4}\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,r\\&=\frac{75}{16}\int_{0}^{2\pi}\cos^{2}\theta\,\mathrm{d}\,\theta\int_{0}^{1}r^{3}\cos t=\frac{75}{16}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{75\pi}{64}.\end{aligned}$$