浙江省大学生高等数学（微积分）竞赛试题

（2004 年工科、数学专业合编）

一、计算题

1．计算：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t\,\mathrm{d}t-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$.

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+a^{2n}}$，其中 a 为常数.

3．计算 $\int_0^{\pi}\dfrac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2004}\mathrm{d}x$.

4．求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+15y$ 在

$$\Omega=\left\{(x,y)\middle|4x^2+y^2\le 1\right\}$$

上的最大、小值.

5．计算：$\iint\limits_D \max\left(xy,x^3\right)\mathrm{d}\sigma$，其中

$$D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}.$$

二．设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(n)}(0)$.

三. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在 $A\left(1,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 点的切线交 y 轴于 B 点，设 l 为从 A 到 B 的直线段，试计算

$$\int_l\left(\frac{\sin y}{x+1}-\sqrt{3}y\right)\mathrm{d}x+\left[\cos y\ln\left(x+1\right)+2\sqrt{3}x-\sqrt{3}\right]\mathrm{d}y.$$

四. 设函数 $f\left(x\right)$ 连续，$a<b$，且 $\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=0$，试证明：$f\left(x\right)\equiv 0, x\in\left[a,b\right]$.

五. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left(n!\right)^{\alpha}}}$ 的敛散性，其中 $\alpha>0$ 为常数.

六. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，证明：

$$\left(\int_0^1\frac{f\left(x\right)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{\pi}{2t}\int_0^1\frac{f^2\left(x\right)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\ \left(t>0\right).$$

七. 已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上三阶可导，且

$$f\left(0\right)=-1, f\left(1\right)=0, f'\left(0\right)=0,$$

试证至少存在一点 $\xi\in\left(0,1\right)$，使

$$f\left(x\right)=-1+x^2+\frac{x^2\left(x-1\right)}{3!}f'''\left(\xi\right), x\in\left(0,1\right)$$

浙江省大学生高等数学（微积分）竞赛试题
（2004 年工科、数学专业合编）参考解答

一、计算题

1．【参考解析】：**【思路一】** 由等价无穷小

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\,(x\to 0)\;,$$

并基于洛必达法则，可得(记原式极限为 A)

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\,\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\cdot\frac{1}{2}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2-2x}{x-x\tan^2 x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2-2x}{x-x\tan^2 x-\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2-2x}{x^3\left(\frac{x-\tan x}{x^3}-\frac{x\tan^2 x}{x^3}\right)}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\tan x}{x^3}-\frac{x\tan^2 x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{x\tan^2 x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x\tan^2 x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{3x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x\tan^2 x}{x^3}=-\frac{4}{3}$$

将结果代入以上极限式，并应用两次洛必达法则，得

$$A=-\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2-2x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x}{2x}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

【思路二】考虑带皮亚诺余项的麦克劳林公式，可以简化计算，比如可以得到

$$x-\tan x\sim-\frac{x^3}{3}(x\to 0)$$

这样可以直接得到

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\,\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{\left(-\frac{x^3}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-x-1}{-\frac{2x^3}{3}}$$

进一步依据 $e^x,\cos x$ 的三阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)$$

将它们代入极限式，可得

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-x-1}{-\frac{2x^3}{3}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{-\frac{2x^3}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. **【参考解析】**：令 $b=a^2$，则 $b\geq 0$，则

若 $0\leq b\leq 2$，则 $2\leq\sqrt[n]{2^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2\cdot 2^n}\to 2$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+a^{2n}}=2.$$

若 $b>2$，则 $b\leq\sqrt[n]{2^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2b^n}\to b$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+b^n}=b=a^2$$

因此，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+b^n}=\max\left\{2,a^2\right\}$.

3.【参考解析】: 原式$=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\pi^2}{4}+2004}\mathrm{d}x$

(令$x-\dfrac{\pi}{2}=t$)

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-\sin t}{t^2-\frac{\pi^2}{4}+2004}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{t^2-\frac{\pi^2}{4}+2004}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t^2-\frac{\pi^2}{4}+2004}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{t^2+\left(2004-\frac{\pi^2}{4}\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2004-\pi^2/4}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{\left(\frac{t}{\sqrt{2004-\pi^2/4}}\right)^2+1}\mathrm{d}\frac{t}{\sqrt{2004-\pi^2/4}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2004-\pi^2/4}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2004-\pi^2/4}}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{2004-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{\pi}{2\sqrt{2004-\pi^2/4}}$$

$$=\frac{4\pi\arctan\frac{\pi}{\sqrt{8016-\pi^2}}}{\sqrt{8016-\pi^2}}.$$

4．【参考解析】：(1)在区域内考虑无条件极值：令

$$\begin{cases} f_x'\left(x,y\right)=2x=0, \\ f_y'\left(x,y\right)=8y+15=0. \end{cases}$$

解得唯一驻点$\left(0,-\dfrac{15}{8}\right)$，因为$4\cdot 0^2+\left(-\dfrac{15}{8}\right)^2>1$，驻点不在区域内，所以在区域内没有需要考虑的最值点.

(2) 考虑区域边界上的有条件极值，即

$$f\left(x,y\right)=x^2+4y^2+15y$$

在约束条件$4x^2+y^2=1$下可能极值点. 令拉格朗日函数为

$$L\left(x,y,\lambda\right)=x^2+4y^2+15y+\lambda(4x^2+y^2-1)$$

并求解方程组$\begin{cases} F_x'\left(x,y\right)=2x+8\lambda x=0, \\ F_y'\left(x,y\right)=8y+15+2\lambda y=0, \\ F_\lambda'\left(x,y\right)=4x^2+y^2-1=0 \end{cases}$ 得驻点为

$(0,1),(0,-1)$. 并且$f(0,1)=19, f(0,-1)=-11$. 所以最大值为$f(0,1)=19$，最小值为$f(0,-1)=-11$.

5．【参考解析】：用$xy=x^3$分割积分区域分割成从左到右四个部分，分别记作D_1,D_2,D_3,D_4四个部分，于是

$$\begin{aligned} &\iint_D \max\left(xy,x^3\right)\mathrm{d}\,\sigma \\ &=\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}\,\sigma+\iint_{D_2} x^3\,\mathrm{d}\,\sigma+\iint_{D_3} xy\,\mathrm{d}\,\sigma+\iint_{D_4} x^3\,\mathrm{d}\,\sigma \\ &=\int_{-1}^0 \mathrm{d}\,x\int_0^{x^2} xy\,\mathrm{d}\,y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}\,x\int_{x^2}^1 x^3\,\mathrm{d}\,y \\ &\qquad+\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_{x^2}^1 xy\,\mathrm{d}\,y+\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{x^2} x^3\,\mathrm{d}\,y \\ &=-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

二.【参考解析】:【思路一】由 $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$，由

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,$$

得 $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}x^{2n}$. 两端在 $0,x$ 积分，

得 $$f(x)-f\left(0\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

由于 $f\left(0\right)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，所以

$$f\left(x\right)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

比较系数得

$$\begin{aligned}f^{(2n+1)}(0)&=\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1}\cdot\left(2n+1\right)!\\&=\left(-1\right)^{n+1}\cdot\left(2n\right)!,n=0,1,\cdots\end{aligned}$$

$$f^{(2n)}(0)=0,n=1,2,\cdots.$$

$$f\left(0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

【思路二】由 $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$，则

$$(1+x^2)f'(x)=-1,$$

对上式两边对 x 求 $(n-1)$ 阶导数，则由莱布尼茨公式得

$$\begin{aligned}&(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)\\&\quad+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0\end{aligned}$$

令 $x=0$，得:

$$f^{(n)}(0)=-n(n-1)f^{(n-2)}(0)$$

而 $f'(0)=-1, f''(0)=0$，则

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\pi/4, & n=0\\ 0, & n=2k\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)!, & n=2k-1\end{cases}$$

三.【参考解析】：方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 两边对 x 求导得

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{9}y'=0,$$

代入 $x=1, y=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $y'\big|_{x=1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以切线方程为 $y-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$，所以 B 点的坐标为 $(0,2\sqrt{3})$，设 $C\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $CABC$ 构成逆时针方向，围成封闭区域为 D，则由格林公式，得

$$\int_l=\iint_D-\int_{C\to A}-\int_{B\to C}$$

令 $Q(x,y)=\cos y\ln(x+1)+2\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3\sqrt{3},$$

$$C\to A: y=\frac{3\sqrt{3}}{2}, x:0\to 1$$

$$B\to C: x=0, y:2\sqrt{3}\to\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

将上面等式与曲线方程直接代入积分，得

$$
\int_{l} \quad = 3\sqrt{3}\iint_{D} \mathrm{d}\,\sigma + \sqrt{3}\int_{2\sqrt{3}}^{\frac{3}{2}\sqrt{3}} \mathrm{d}\,y
$$

$$
-\int_{0}^{1}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}\sqrt{3}}{x+1} - \sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{d}\,x
$$

$$
= \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \ln 2\cdot\sin\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} = \frac{21}{4} - \ln 2\cdot\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}
$$

四.【参考解析】：由定积分的定义，有

$$
\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| \mathrm{d}\,x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i)\right|\Delta x_i = 0
$$

以上等式无论$\left[a,b\right]$如何分割，$\xi_i \in \left[x_{i-1},x_i\right]$如何取值都成立.

假设存在$x_0 \in \left(a,b\right)$，使得$f\left(x_0\right) \neq 0$，不妨设$f\left(x_0\right) > 0$，则由于函数$f\left(x\right)$连续，则$\exists \delta > 0, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$，都有$f\left(x\right) > 0$，则$f\left(x\right)\cdot 2\delta > 0$，与$\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| \mathrm{d}\,x = 0$矛盾，所以$f\left(x\right) \equiv 0, x \in \left(a,b\right)$.

同理可证端点取值也等于 0，即$f\left(x\right) \equiv 0, x \in \left[a,b\right]$.

【或】由于函数$f\left(x\right)$连续，故在$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$内存在最大、最小值分别为$M_0, m_0$，显然$M_0 > 0, m_0 > 0$，并且有

$$
\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| \mathrm{d}\,x \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|f\left(x\right)\right| \mathrm{d}\,x \geq 2\delta m_0 > 0
$$

与$\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| \mathrm{d}\,x = 0$矛盾，故假设错误.

五.【参考解析】：**【思路一】**由正项级数的对数判别法：记

$a_n = \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n\ln n}$$
$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}$$
$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n+1)}=\alpha$$

若$\alpha>1$，则由极限保号性可知，$\exists k$，使得当$n>k$时，有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>\frac{\alpha+1}{2}=1+\frac{\alpha-1}{2}$$

则由对数判别法知，当$\alpha>1$时，级数收敛.

当$0<\alpha\le 1$时，因$a_n=\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\ge\frac{1}{n}$，所以原级数发散.

【注】正项级数的对数判别法:

(1) 若$\exists k$和常数$\alpha>0$使得当$n>k$时，$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\ge 1+\alpha$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若$\exists k$使得当$n>k$时，$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\le 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

【定理证明】: (1) $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\ge 1+\alpha$，则

$$\ln\frac{1}{a_n}\ge(1+\alpha)\ln n=(\ln n)^{1+\alpha}$$

即$\dfrac{1}{a_n} \ge n^{1+\alpha}, \dfrac{1}{n^{1+\alpha}} \ge a_n$，由比较判别法可知级数收敛.

(2) 由$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n} \le 1$，则$\ln\dfrac{1}{a_n} \le \ln n$，即 $a_n \ge \dfrac{1}{n}$，由比较判别法可知级数发散.

【思路二】由斯特林公式:

$$n! = \sqrt{2n\pi} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, 0 < \theta < 1$$

因为$(n!)^{\frac{\alpha}{n}} = \left(\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n+\frac{\theta}{12n}}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$

$$= n^{\alpha}(2\pi)^{\frac{\alpha}{2n}} n^{\frac{\alpha}{2n}} e^{-\alpha+\frac{\theta}{12n^2}\alpha}$$

而$(2\pi)^{\frac{\alpha}{2n}} n^{\frac{\alpha}{2n}} e^{-\alpha+\frac{\theta}{12n^2}\alpha} \to \dfrac{1}{e^{\alpha}}$，所以级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$与$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$有相同敛散性. 因此当$\alpha > 1$时，级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{\alpha}}}$收敛；当$0 < \alpha \le 1$时，级数发散.

【注】由此可得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}}$收敛，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$发散.

六.【参考解析】：由柯西-施瓦兹不等式，得

$$\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}\frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\le \int_0^1 \frac{1}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{t}\arctan\frac{1}{t}\right]_0^1\cdot\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{2t}\cdot\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$$

七．【参考解析】：$\forall x\in(0,1)$，令

$$g(t)=f(t)+1-t^2-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}t^2(t-1),\ \ t\in(0,1)$$

由已知可得 $g(x)=g(1)=g(0)=0$，从而

$$\exists\xi_1\in(0,x),\xi_2\in(x,1),$$

使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0, 0<\xi_1<x<\xi_2<1$．对 $g(t)$ 求导，得 $g'(t)=f'(t)-2t-\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(3t^2-2t)$

由 $f'(0)=0$，所以 $g'(0)=0=g'(\xi_1)$．于是 $\exists\eta_1\in(0,\xi_1)$ 使得 $g''(\eta_1)=0$．同理，由 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ 和 $\xi_1<\xi_2$ 知，$\exists\eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $g''(\eta_2)=0$.

于是可知 $\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使得 $g'''(\xi)=0$．由于

$$g''(t)=f''(t)-2-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(6t-2)$$

$$g'''(t)=f'''(t)-6\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}$$

由 $g'''(\xi)=0$ 代入可得 $f'''(\xi)=6\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}$，即

$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$$