2014 浙江省高等数学（微积分）竞赛

工科类试题

一、计算题

1、求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[na]+\sin n}{n+\cos n}$，其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数.

2、求不定分$\int\min\{x+2,x^2,4-3x\}\,\mathrm{d}\,x$.

3、设$f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求$f^{(2014)}(0)$.

4、求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\dfrac{\cos(1+t^2)}{t}\mathrm{d}\,t$.

5、求过直线$L:\begin{cases}x+y+z=0\\x=2\end{cases}$且与球面$x^2+y^2+z^2=2z$相切的平面$\pi$的方程.

二、设$f_n(x)=x^n-x-1,n>1$. (1) 证明$f_n(x)$有唯一正根，记之为x_n；(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-1)$.

三、求由平面$z=0,z=\sqrt{3}y$和曲面$\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}y-z=0$围成的立体体积$(0\le x\le\pi)$.

四、讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n\sin n^2}{n}$的收敛性.

五、在xOy面上,动点P曲线$y=f(x)$上, $0\le f(x)\le1$，A点坐标$(1,1)$，Q点坐标$(0,1)$，D点的坐标为$(1,0)$，曲线与y轴的交点为B，P点在x轴的投影点为C.

（1）假设曲边三角形$S_2(QAP)$与曲边梯形$T_2(PADC)$的面积相同，求曲线$f(x)$的表达式.

（2）如果曲边三角形$S_1(QBP)$与曲边梯形$T_1(OBPC)$的面积相同，求曲线$f(x)$的表达式.

(3) 记$a=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t$，如果$\dfrac{S_1}{T_1}=\dfrac{S_2}{T_2}$，试问$a$是否为确定的常数?

2014 浙江省高等数学（微积分）竞赛
工科类参考解答

一、计算题

1、【参考解答】：因为$na-1<[na]\le na$，所以

$$\frac{na-1+\sin n}{n+\cos n}<\frac{[na]+\sin n}{n+\cos n}\le\frac{na+\sin n}{n+\cos n}$$

而$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na+\sin n}{n+\cos n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{na-1+\sin n}{n+\cos n}=a$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[na]+\sin n}{n+\cos n}=a$$

2、【参考解答】：画图可以得区间分割点为$x=1,-1$，所以

$$\min\{x+2,x^2,4-3x\}=\begin{cases}x+2 & x<-1\\ x^2 & x\in[-1,1]\\ 4-3x & x>1\end{cases}$$

于是原积分$=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+2x+C & x<-1\\ \dfrac{x^3}{3}+C_1 & x\in[-1,1]\\ 4x-\dfrac{3x^2}{2}+C_2 & x>1\end{cases}$．由原函数的连续性，得原积分$=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+2x+C & x<-1\\ \dfrac{x^3}{3}+C-\dfrac{7}{6} & x\in[-1,1]\\ 4x-\dfrac{3x^2}{2}+C-\dfrac{10}{3}, & x>1\end{cases}$

3、【参考解答】：记$g(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

记$h(t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}$，则

$$\begin{aligned}h^{(n)}(t)&=(-1)^n\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)(1+t)^{-\frac{1}{2}-n}\\&=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}(1+t)^{-\frac{1}{2}-n}\end{aligned}$$

所以可得泰勒级数为

$$\begin{aligned}h(t)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}t^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n\end{aligned}$$

于是$g'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$，得

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$$

因此$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+2}$，从而得

$$\frac{f^{(2014)}(0)}{(2014)!}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\Big|_{2n+2=2014}$$

即$f^{(2014)}(0)=\frac{(2012)!}{2^{2012}((1006)!)^2(2013)}(2014)!$.

4、【参考解答】：由积分中值定理，知 $\exists x<\xi<2x$，使得

$$\int_x^{2x}\frac{\cos(1+t^2)}{t}\mathrm{d}t=\cos(1+\xi^2)\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\cos(1+\xi^2)\ln 2$$

所以原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos(1+\xi^2)\ln 2=\ln 2\cos 1$.

5、【参考解答】：设平面π为$(1+a)x+y+z=2a$，则点

$(0,0,1)$到π的矩离为 1，即

$$\frac{|1-2a|}{\sqrt{(1+a)^2+1+1}}=1$$

得$3a^2-6a-2=0$，即$a=1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. 所以平面π方程为

$$\left(2+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)x+y+z=2+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{或}\left(2-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)x+y+z=2-2\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

二、**【参考解答】**：（1）由于$f_n{}'(x)=nx^{n-1}-1$，当$x\in\left(0,\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}\right)$，$f_n(x)$单调减　$f(x)<f_n(0)=-1<0$无根；当$x\in\left(\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}},+\infty\right)$，$f_n(x)$单增且$f_n(2)=2^n-3>0$，所以$f_n(x)$有唯一正根$x_n$.

（2）易知$1<x_n<2$，且$x_n=\sqrt[n]{x_n+1}\to 1$. 记$a_n=\sqrt[n]{x_n+1}$，$b_n=\sqrt[n]{2}$，则

$$\lim_{n\to\infty}n(x_n-1)=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)\frac{\sqrt[n]{x_n+1}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$$

而$\dfrac{\sqrt[n]{x_n+1}-1}{\sqrt[n]{2}-1}=x_n\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}b_n^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_n^k}$且

$$\left|a_n^k-b_n^k\right|\le\left|a_n^n-b_n^n\right|=x_n-1\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{x_n+1}-1}{\sqrt[n]{2}-1}=1$，从而得

$$\lim_{n\to\infty}n(x_n-1)=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)=\ln 2.$$

三、【参考解答】：**【思路一】** 当 $x=x_0\in[0,\pi]$时，两曲面交立体底面边缘为 x 轴和 $y=\sin x$ 且用平行于平面 $x=0$ 的平面 $x=x_0$ 截此立体所得截面为三角形，三个顶点为

$(x_0,0,0)$，$(x_0,\sin x_0,0)$ 及 $\begin{cases}z=\sqrt{3}y\\ z=\sqrt{3}(\sin x_0-y)\end{cases}$，即

$\left(x_0,\dfrac{\sin x_0}{2},\dfrac{\sqrt{3}\sin x_0}{2}\right)$．于是所得截面为等边三角形，其面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x_0$，所以

$$V=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

【思路二】 两曲面交线 $\begin{cases}z=\sqrt{3}y\\ z=\sqrt{3}(\sin x-y)\end{cases}$，即 $\begin{cases}y=\sin x/2\\ z=\sqrt{3}y\end{cases}$，

所以向 xOy 平面的投影柱面为 $y=\dfrac{\sin x}{2}$，所以

$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_{D_1}(\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{3}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\sqrt{3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x/2}^{\sin x}(\sin x-y)\,\mathrm{d}y\\&\quad+\sqrt{3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x/2}y\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}\pi=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi\end{aligned}$$

四、【参考解答】：由三角函数的恒等变换关系，得

$$\begin{aligned}\sin n\sin n^2&=\frac{1}{2}[\cos(n^2-n)-\cos(n^2+n)]\\&=\frac{1}{2}[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)]\end{aligned}$$

【思路一】 $\forall N>0$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin n\sin n^2\right|=\left|\frac{1}{2}[1-\cos N(N+1)]\right|\le 1,$$

而$\dfrac{1}{n}$单调递减趋于 0，所以由狄利克雷判别法得级数收敛.

【思路二】 级数的前 N 项部分和为

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin n\sin n^2}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos n(n+1)}{n(n+1)}$$

收敛，所以级数收敛.

五、【参考解答】：(1) 曲边梯形的面积$T_2=\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 曲边三角形的面积S_2与T_2相同，即

$$1-\frac{1+f(x)}{2}x=S_2+T_2=2\int_x^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

所以得$-1-f-xf'=-4f$，即$xf'=3f+1$. 由此得

$$\frac{f'}{3f+1}=\frac{1}{x}，即\frac{1}{3}\ln(3f+1)'=\frac{1}{x},$$

得$3f\left(x\right)+1=Cx^3$. 因$f(1)=1$，所以$f(x)=\dfrac{4x^3-1}{3}$.

(2) 曲边梯形的面积$T_1=\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}\,x$，曲边三角形的面积$S_1$与$T_1$相同，即$\dfrac{1+f(x)}{2}x=2\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}\,x$. 求导整理得$xf'=3f$，分离变量解得$f\left(x\right)=Cx^3$，因为$f(1)=1$，所以$f(x)=x^3$.

(3) $\dfrac{S_1}{T_1}=\dfrac{S_2}{T_2}$，即 $\dfrac{S_1+T}{T_1}=\dfrac{S_2+T_2}{T_2}$，代入

$$\frac{x(1+f)}{F(x)}=\frac{2-x(1+f)}{F(1)-F(x)}$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t,$

$$F(1)-F(x)=\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}\,t, a=F(1),$$

所以 $F(1)(x+xf)=2F(x)$，两端求导得

$$a(1+f+xf')=2f(x)\text{，即有 } xf'=(\frac{2}{a}-1)f-1,$$

解得 $f\left(x\right)=Cx^{\frac{2}{a}-1}+\dfrac{a}{2-a}$，即

$$f\left(x\right)=(1-\frac{a}{2-a})x^{\frac{2}{a}-1}+\frac{a}{2-a}$$

其中 $0<a<1$ 任意，所以不能确定.