线性代数期末复习

线性空间 内积空间

- 判断线性空间四个步骤
- 判断以矩阵为元素的F^{n*n}线性空间基和维数
- 取基、扩充的方法证明维数公式及相关问题
- 利用行列式值≠0求补空间
- 判断内积空间四个步骤
- Schimidt正交化
- 单位正交基作为基的坐标的内积运算
- 已知线性空间的基求交与和的方法

线性映射

- 证明维数公式 $dimL(V_1,V_2)=dimV_1*dimV_2$
- 求以矩阵为元素的 $\sigma:F[x]_4\rightarrow F^{2*2}$ 的像与核
- 证明维数公式 $r(\sigma)+dim(ker\sigma)=n$
- 证明维数公式 $r(\sigma)+r(\tau)-n\leq r(\sigma\tau)\leq min(r(\sigma),r(\tau))$
- 证明维数公式 $r(\sigma+\tau)\leq r(\sigma)+r(\tau)$
- 求对平面图形做线性变换的σ
- 证明n阶可逆映射$\sigma\in L(V,V)$存在多项式$p(x)s.t.p(0)\neq 0,p(\sigma)=0$
- 设$\sigma\in L(V,V),\xi\in V$，证明：若$\sigma^{k-1}(\xi)\neq 0,\sigma^k\xi=0,$则$\{\xi,\sigma(\xi),...,\sigma^{k-1}(\xi)\}$是线性无关的$(k>0)$
- 证明：

  （1）$Ker\sigma=Ker\sigma^2\Leftrightarrow(Ker\sigma)\bigcap(Im\sigma)=\{0\}$

  （2）$Im\sigma^2=Im\sigma\Leftrightarrow V=(Ker\sigma)+(Im\sigma)$
- 求像与核的一般步骤

矩阵

- 证明维数公式 $dimW_1+dimW_2=dim(W_1+W_2)+dimW_1\cap W_2$
- 证明三角矩阵求逆性质不变
- 约旦矩阵$J=\lambda E+J^{'}$拆分
- 一个向量与它的线性映射的结果分别在两个基下坐标的关系$Y=AX$
- 证明可逆矩阵满足$AB=E\Rightarrow BA=E$
- 证明若$\lambda\mu\neq 0$，则矩阵可交换的一个充要条件是$AB=\lambda A+\mu B$
- 证明对任意B满足$AB=BA$ 的充要A是数量矩阵，即$A=\lambda E$
- 矩阵的初等变换阵表示方式，以及左乘和右乘分别对应行、列变换
- 证明$A^k=tr(A)^{k-1}A$
- 证明 $r=r_c=r_r$

- 证明 $r(AB) \leq min(r(A), r(B))$（证明方法同$r_c = r_r$证明，要熟练）
- 熟悉相抵标准形的性质和应用
- 通过分块矩阵实现LU分解，掌握证明以及一般的操作步骤
- 一个向量在两个基下的坐标关系 $B_2 = B_1A \Rightarrow Y = A^{-1}X$
- 已知$B_1, B_2, P = B_1X, B_2 = B_1A$则求Y一般四步走：

  ${B_1}^{-1} \Rightarrow A = {B_1}^{-1}B_2 \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow Y = A^{-1}X$
- 证明Hamilton-Cayley定理：

  $A \in F_{n*n}, f(\lambda) = |\lambda E - A| \Rightarrow f(A) = 0$
- 证明矩阵乘积时学会从线性变换的角度去思考和构造
- 证明： $A \in M_{m*n}(F), B \in M_{n*s}(F) \Rightarrow r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$
- 证明：

$$A \in F^{m*n},\ B \in F^{n*p},\ W = \{Bx \mid x \in F^{sp*1},\ ABx = 0\}$$
$$\Rightarrow dimW = r(B) - r(AB)$$

行列式

- 证明：

  $A \in F^{m*n}, B \in F^{n*m}, \lambda \in F \Rightarrow \lambda^n * |\lambda I_m - AB| = \lambda^m * |\lambda I_n - BA|$
- 熟悉Kronecker符号δ_{ij}的灵活使用
- 证明和灵活使用Vandermonde行列式
- 已知AB，求|BA|
- 证明（并熟悉证明方法）：

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| * |B|$$

- 证明（并熟练应用）：$AA^* = A^*A = |A|E$

  注意：伴随矩阵是原矩阵的代数余子式所构成的矩阵的转置矩阵
- 证明：$A \in M_{n*m}, B \in M_{m*n}, \Rightarrow |E_n - AB| = |E_m - BA|$
- 计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-2} & {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c & c & \cdots & c \\ b & a & c & \cdots & c \\ b & b & a & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

线性方程组

- 证明：$AB = O \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$
- 证明：$r(A^TA) = r(A)$
- 证明：$A \in M_{n*n},\ r(A) + dim(N(A)) = n$
- 已知A是一个n阶方阵（n⩾2），$A_{11} \neq 0$，α是n维非零向量，证明：

  非齐次线性方程组AX=α有无穷多解当且仅当α是齐次线性方程组$A^*X=0_n$

- 证明：若X_0是AX=b的一个特解，$X_1...X_p$是AX=0的基础解系，则X_0，X_0+X_1，X_0+X_2，…，X_0+X_p线性无关，且AX=b的任意一个解X可以表示为

  $$X = k_0X_0 + k_1(X_0 + X_1) + k_2(X_0 + X_2)+...+k_p(X_0 + X_p)$$

  其中 $k_0 + k_1 + k_2+...+k_p = 1$

- 证明：$A \in M_n(R), |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \Rightarrow detA \neq 0$
- 证明：$A \in F^{m*n}, B \in F^{n*s}, W = \{Bx|x \in F^{s*1}, ABx = 0\}$

  $\Rightarrow W \in F^{n*1},\ dimW = r(B) - r(AB)$

- 证明：$A \in M_{m*n}(R), b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T \in R^m$则正规方程$(A^TA)X = A^Tb$有解
- 设$A \in M_{m*n}(R)(m \gg n), AX = b$是不相容方程组（无解），证明：

  $$\exists X^* \in R^n s.t. \forall X \in R^n : |b - AX^*| \leq |b - AX|$$

  这个X^*称为不相容方程组AX=b的最小二乘解

特征值与特征向量 矩阵的标准形

- 熟练掌握QR分解并灵活应用与证明
- 证明Hadamard不等式
- 证明：$\sigma \in L(V, V), B_1 = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, B_2 = \{\beta_1, ..., \beta_n\}, B_2 = B_1C$

  $\sigma = B_1A = B_2B \Rightarrow B = C^{-1}AC$

- 证明（并熟练掌握证明方法）：设λ_j和$V_{\lambda_j}(j = 1, ..., m)$是n维线性空间V(F)的线性变换$\sigma$的m个互不相同的特征值及相应的特征子空间，则m个特征子空间的和是直和，即：

  $$dim(V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}+...+V_{\lambda_m}) = \Sigma_{j=1}^m dimV_{\lambda_j}$$

- 求变换矩阵P使得$P^{-1}AP = \Lambda$的一般步骤
- 证明（以及求Q的一般步骤）：若A是一个n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵，使得：

  $Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

- 相似、相合、相抵矩阵的相互充要关系
- 相似矩阵和相合矩阵的行列式、特征值、秩的性质
- 特征向量法、配方法、初等变换法求相合标准型的一般步骤
- 证明实对称矩阵是正定矩阵且所有特征值大于零
- 证明实对称矩阵存在Cholesky分解并构造一种可行的分解方式
- 证明正定矩阵主对角元>0，行列式>0
- 证明矩阵正定的充要条件为所有顺序主子式（左上角主子式）大于零
- 证明矩阵实对称则下列条件等价：

  （1）A半正定　　　　　（2）A的正惯性系数等于A的秩

  （3）$A=P^TP$，P未必可逆（4）A的所有特征值非负

- 证明欧氏空间单位正交基之间的变换矩阵是正交矩阵
- 设$A, B \in M_n(F)$，A有n个不同的特征值，证明：

  $AB = BA \Leftrightarrow$A的特征向量也是B的特征向量

- 证明反对称矩阵的特征值必是零或纯虚数
- 设A是实对称矩阵，B是正定矩阵，证明：存在可逆矩阵C使得C^TAC, C^TBC都成对角形

- 证明：若对n元二次型X^TAX有X_1，X_2使得$X_1{}^TAX_1>0$，$X_2{}^TAX_2<0$，则存在X_0不等于零使得$X_0{}^TAX_0=0$
- 设$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$是矩阵$A=(a_{ij})_{n*n}$的n个特征值，证明$\lambda_1^2,\lambda_2^2,...,\lambda_n^2$是$A^2$的n个特征值，且：$\Sigma_{i=1}^n\lambda_i^2=\Sigma_{i=1}^n\Sigma_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$
- 证明对任意一个n阶矩阵$A\in M_n(C)$，存在可逆阵P使得$P^{-1}AP$为上三角阵
- 设A相似于对角阵，λ_0是A的特征值，X_0是A对应于λ_0的特征向量，证明：

$$r(A-\lambda_0E)^2=r(A-\lambda_0E);\nexists Y s.t.(A-\lambda_0E)Y=X_0$$

- 设σ是n维欧式空间V的一个变换，证明：$\forall\alpha,\beta\in V,(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)\Rightarrow\sigma$是线性变换,即$\forall\lambda,\mu\in R:\sigma(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\sigma(\alpha)+\mu\sigma(\beta)\Rightarrow\sigma$是正交变换
- 证明：若AB=BA，则A，B至少有一个共同的特征向量
- 证明：若A正定，B实对称，则AB可对角化
- 设A，B是n阶正定矩阵，证明A+B的最大特征值大于A的最大特征值
- 设A，B都是正定矩阵，证明若AB=BA则AB也是正定矩阵

——cxc