浙江省首届高等数学（微积分）竞赛试题

一、计算题

1、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)(\sqrt{1+x}-1)}$.

2、求积分$\iint\limits_D |xy-1|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{2}\le y\le 2\}.$$

3、设$y=x^2e^x$是方程$y''+ay'+by=ce^{hx}$的一个解，求常数a,b,c,h.

4、设$f(x)$连续，且当$x>-1$时，

$$f(x)[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+1]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2},$$

求$f(x)$.

5、设$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{1}{2k^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

6、求积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\dfrac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

二、求平面$x+2y-2z=1$含在椭圆柱体$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$内的面积.

三、证明：$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x>0$.

四、设二元函数$f(x,y)$有一阶连续的偏导数，且$f(0,1)=f(1,0)$. 证明：单位圆周上至少存在两点满足方程

$$y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)-x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0.$$

五、设$\{a_n\},\{b_n\}$为满足$e^{a_n}=a_n+e^{b_n},n\ge 1$两个实数列，已知$a_n>0(n\ge 1)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$也收敛.

六、已知$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n,n\ge 1$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径、收敛域和函数.

浙江省首届高等数学（微积分）竞赛参考解析

一、计算题

1、【参考解析】：由等价无穷小，当$x \to 0$时，

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x, \sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$$

所以原式$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{x}{2}} = 1$.

2、【参考解析】：用$xy=1$分割积分区域为上下两个部分，分别为D_1, D_2，则由积分的可加性，得

$$\iint\limits_{D} |xy-1| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} (1-xy)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{2} (xy-1)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(y - \frac{x}{2}y^2\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{x}{2}y^2 - y\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{2} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(2x + \frac{1}{2x} - 2\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln 2 + \frac{15}{64}$$

3、【参考解析】：将$y=x^2e^x$求一阶、二阶导数，得

$$y' = 2xe^x + x^2e^x, y'' = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$$

代入$y''+ay'+by=ce^{hx}$，得：

$$2e^x + 4xe^x + x^2e^x + a(2xe^x + x^2e^x) + bx^2e^x = ce^{hx},$$

整理得

$$[(1+a+b)x^2 + (4+2a)x + 2]e^x = ce^{hx}$$

比较两端等式，可得

$$(1+a+b)=0, 4+2a=0, c=2, h=1$$

所以 a,b,c,h 可取为 $a=-2,b=1,c=2,h=1$.

4、**【参考解析】**: 令 $x=0$ 时，由已知等式可得 $f(0)=0$. 令 $y=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$，则 $y'=f(x)$，所以原等式可以改写为

$$y'(y+1)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$$

该微分方程为可分离变量的微分方程，分离并两端积分

$$\int(y+1)\,\mathrm{d}\,y=\int\frac{xe^x}{2(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

左边 $=\frac{1}{2}y^2+y+C_1$

右边积分考虑分部积分法，得

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}\,x&=-\int\left(\frac{1}{1+x}\right)'\cdot xe^x\,\mathrm{d}\,x\\&=-\left[\frac{x}{1+x}e^x-\int\frac{1}{1+x}\cdot(xe^x)'\,\mathrm{d}\,x\right]\\&=-\left[\frac{x}{1+x}e^x-\int e^x\,\mathrm{d}\,x\right]=\frac{e^x}{1+x}+C_2\end{aligned}$$

所以原微分方程通解为

$$\frac{1}{2}y^2+y=\frac{e^x}{2(1+x)}+C,$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=-\frac{1}{2}$，即 $(y+1)^2=\frac{e^x}{(1+x)}$，解得

$$y=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}-1,x>-1$$

由于 $y'=\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)'=f\left(x\right)$，所以

$$f(x)=y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{e^x}{(1+x)}}}\frac{(1+x)e^x-e^x}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+x)}{e^x}}\frac{xe^x}{(1+x)^2}=\frac{x\sqrt{(1+x)e^x}}{2(1+x)^2}$$

5、【参考解析】：由 $S_1=\arctan\frac{1}{2}$，由恒等式

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

可得得

$$S_2=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\arctan\frac{2}{3}$$

$$S_3=\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\arctan\frac{3}{4}$$

....

以此类推可得 $S_n=\arctan\frac{n}{n+1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

6、【参考解析】：根据被积函数的结构，考虑

$$\left(xe^{x+1/x}\right)'=e^{x+\frac{1}{x}}+xe^{x+\frac{1}{x}}(x+\frac{1}{x})'=(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\left(xe^{x+1/x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$$

二、【参考解析】：由对面积的曲面积分的几何意义，得

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

其中$\Sigma: z=\frac{x}{2}+y-\frac{1}{2}, D_{xy}: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1$．于是由对面积的曲面积分直接计算法，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\mathrm{d}\sigma$$

由投影区域椭圆的面积等于$A=\pi ab=\pi\cdot 2\cdot 3=6\pi$，得

$$S=\frac{3}{2}\iint_{D}\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\cdot A=9\pi.$$

三、【参考解析】：考虑换元，令$x^2=t$，得

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x^2=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\frac{-\sin x}{2\sqrt{x+\pi}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t\,\mathrm{d}t>0$$

四、【参考解析】： 设单位原方程为$C: x^2+y^2=1$，其参数方程为：$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}, 0\leq\theta\leq 2\pi$．圆周上点对应的函数可设为$F(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$，则

$$F'(\theta)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$$

$$=-\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}$$

所以要证明单位圆周上至少存在两点满足方程

$$y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)-x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0,$$

等价于证明在 $\left[0,2\pi\right]$ 内至少存在两点 θ_1,θ_2，满足方程

$F'(\theta)=\left[f(\cos\theta,\sin\theta)\right]'=0$. 由于

$$F(0)=f(1,0),F(\frac{\pi}{2})=f(0,1),F(2\pi)=f(1,0),$$

且 $F(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 连续，由罗尔定理得：在

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ 内都至少存在一点 θ_1,θ_2，满足方程

$$F'(\theta)=\left[f(\cos\theta,\sin\theta)\right]'=0.$$

即所在结论成立.

五、【参考解析】：由 $e^{a_n}=a_n+e^{b_n},n\geq 1$ 得：

$$b_n=\ln(e^{a_n}-a_n),$$

故只需证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(e^{a_n}-a_n)}{a_n}$.令 $f(x)=\ln(e^x-x)$，则

$f(0)=0$，且 $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}>0,x>0$，所以函数 $f\left(x\right)$

单调增加，于是 $f(x)>f(0)=0$. 由此可得 $b_n>0$，即级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 为正项级数.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(e^{a_n}-a_n)}{a_n}}{a_n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x-x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{2x(e^x-x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x(e^x-x)}=\frac{1}{2}$$

所以由比较判别法，可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$收敛.

六、**【参考解析】**：由递推关系式可得

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=-\left(a_{n+1}-3a_n\right)$$

即$\frac{a_{n+2}-3a_{n+1}}{a_{n+1}-3a_n}=-1$．于是令$b_n=a_{n+1}-3a_n$，则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=-1 \text{ 且 } b_1=a_2-3a_1=-2.$$

即$\left\{b_n\right\}$是等比数列，所以

$$b_n=(-2)\cdot(-1)^{n-1}=2\cdot(-1)^n,$$

由此可得

$$a_{n+1}-3a_n=2\cdot(-1)^n,\quad \text{即 } a_{n+1}=2\cdot(-1)^n+3a_n$$

于是$a_n=2\cdot(-1)^{n-1}+3a_{n-1}$，即

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2\cdot(-1)^n+3\left(2\cdot(-1)^{n-1}+3a_{n-1}\right)\\&=2\cdot(-1)^n+2\cdot3(-1)^{n-1}+3^2a_{n-1}\end{aligned}$$

由$a_{n-1}=2\cdot(-1)^{n-2}+3a_{n-2}$，得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2\cdot(-1)^n+2\cdot3(-1)^{n-1}+3^2\left(2\cdot(-1)^{n-2}+3a_{n-2}\right)\\&=2\cdot(-1)^n+2\cdot3(-1)^{n-1}+2\cdot3^2(-1)^{n-2}+3^3a_{n-2}\end{aligned}$$

以此类推可得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2\cdot(-1)^n+2\cdot3^2\cdot(-1)^{n-1}\\&\quad+2\cdot3^2\cdot(-1)^{n-2}\cdots+2\cdot3^{n-1}\cdot(-1)+3^na_1\\&=2\cdot(-1)^n\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=\frac{(-1)^n-3^n}{2}\end{aligned}$$

所以$a_n=\frac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}x^n$$

所以收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}}{\frac{(-1)^n+3^n}{2}}\right|=\frac{1}{3},$$

即收敛半径为$\frac{1}{3}$.

当$x=\frac{1}{3}$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}+1\right]3^{-1}}{2}\text{发散.}$$

当$x=-\frac{1}{3}$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{(-1)^n}{3}}{2}\text{发散.}$$

故收敛域为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

令$S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}x^n$, 则

$$\begin{aligned}S\left(x\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2}(-x)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}(3x)^n\\&=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-3x}=\frac{x(1-x)}{(1+x)(1-3x)}\end{aligned}$$