2017年浙江省高等数学竞赛

工科类试题

一、计算题：(每小题14分，满分70分)

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\sqrt{\cos 2x}\cos x}{x-\ln(1+x)}$.

2．求曲线 $C: y=x^2$ 与直线 $L: y=x$ 所围图形绕直线 L 旋转所成旋转体的体积.

3．计算 $\iint\limits_D |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\}$.

4．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和.

5．设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

二、(满分20分) 已知 $f(x)$ 连续且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$，$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求积分 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

三、(满分20分) 计算曲线积分 $\int_L \dfrac{(x-1)\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 是从 $(-2,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

四、(满分20) 证明：

$$(\cos x)^p\le\cos(px),x\in[0,\frac{\pi}{2}],0<p<1.$$

五、(满分20分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，$f(0)=0$，证明：

$$|f(x)|\le\sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x}.$$

2017 年浙江省高等数学竞赛

数学类试题

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\sqrt{\cos 2x}\cos x}{x-\ln(1+x)}$.

2．求不定积分 $\int x[3+\ln(1+x^2)]\arctan x\,\mathrm{d}\,x$.

3．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和.

4．设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=3x+\int_0^x (t-x)^2 f(t)\,\mathrm{d}\,t$，求 $f^{(2017)}(0)$ 的值.

5．设 $f(x)=\sin(\pi x^2)$，求 $\lim\limits_{x\to\infty} x[f(x+1/x)-f(x)]$.

二、(满分 20 分) 已知 $f(x)$ 连续且 $f(x+2)-f(x)=\sin x$，$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=0$. 求积分 $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

三、(满分 20 分) 计算曲线积分 $\int_L \dfrac{(x-1)\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 是从 $(-2,0)$ 到 $(2,0)$ 的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

四、(满分 20 分) 设 $f\left(x\right)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，证明：

$$\max f(x)-\min f(x)\le\sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}\,x}\,.$$

五、(满分 20 分) 设 $g\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$，证明：$f(x)=xg(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

2017 年浙江省高等数学竞赛
工科类试题参考解答

一、计算题

1．【参考解答】：因为当 $x \to 0$ 时，

$$x-\ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}, e^{x^2}-1 \sim x^2, 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

所以原式 $=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1+1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

$$=3+2\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=3+2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=3+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=5$$

2．【参考解答】：两曲线交点坐标为 $(0,0),(1,1)$，曲线 C 上点

(x,x^2) 到 L 的距离为 $r=\dfrac{(x,x^2)\cdot(1,-1)}{|(1,-1)|}=\dfrac{|x-x^2|}{\sqrt{2}}$，于是

$\mathrm{d}V=\pi r^2\,\mathrm{d}l=\sqrt{2}\pi r^2\,\mathrm{d}x$，所以

$$V=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (x-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{2}}{60}$$

3．【参考解答】：记 $D_1=\{(x,y)|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，

令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则

$$\iint_D |xy| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} abr^2 \cos\theta \sin\theta abr \mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^1 a^2b^2r^3 \mathrm{d}r = \frac{a^2b^2}{2}$$

4.【参考解答】：考虑级数$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

$S(x) = x + (1-x)\ln(1-x), x \in [-1,1)$

当$x = 1$时，$S(1) = 1$；

当$x \neq 0$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = x^{-1}S(x)$

当$x = 0$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 0$

5.【参考解答】：$f'(x) = 3 + \int_0^x 2(x-t)f(t) \mathrm{d}t$

$f''(x) = 2\int_0^x f(t) \mathrm{d}t$，$f'''(x) = 2f(x)$

$f^{(n+3)} = 2f^{(n)}$ 所以

$f^{(2017)}(0) = 2^{672} f'(0) = 3 \times 2^{672} (2017 = 672 \times 3 + 1)$

二、【参考解答】：考虑函数$F(x) = \int_x^{x+2} f(t) \mathrm{d}t$，那么

$$F'(x) = f(x+2) - f(x) = \sin x$$

由 此 $F(x) = C - \cos x$ ， 因 为 $\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = 0$ ， 即

$F(0)=C-1=0$，所以$C=1$，从而可得

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x=F(1)=1-\cos 1$$

三、【参考解答】：记$P=\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2},Q=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$，

可得$P_y'=Q_x'$，积分与路径无关. 取

L_1：从$(-2,0)$到$(0,0)$的直线段,

L_2：从$(0,0)$到$(2,0)$的上半圆$(x-1)^2+y^2=1$，

$$\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}=\int_{L_2}(x-1)\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x=-\pi$$

四、【参考解答】：记$f(x)=(\cos x)^p-\cos(px)$，则

$$f'(x)=p[\sin(px)-(\cos x)^{p-1}\sin x]$$

由于$(\cos x)^{p-1}\sin x\geq\sin x\geq\sin px$，所以$f'(x)\leq 0$.

又$f(0)=0$, 从而 $f(x)\leq 0$, 即$(\cos x)^p\leq\cos(px)$成立.

五、【参考解答】：由于$f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t$，所以

$$\left|f(x)\right|\leq\int_0^x\left|f'(t)\right|\mathrm{d}\,t\leq\sqrt{\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}\,x}$$

2017 年浙江省高等数学竞赛
数学类试题参考解答

一、计算题

1.【参考解答】：因为当$x\to 0$时,

$$x-\ln(1+x)\sim\frac{x^2}{2},e^{x^2}-1\sim x^2,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

所以原式$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1+1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

$$= 3 + 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = 3 + 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= 3 + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 5$$

2.【参考解答】: $\int x[3+\ln(1+x^2)]\arctan x\,\mathrm{d}\,x$

$$= 3\int x\arctan x\,\mathrm{d}\,x + \int x\ln(1+x^2)\arctan x\,\mathrm{d}\,x$$

$$= 3\int x\arctan x\,\mathrm{d}\,x + \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}[\ln(1+x^2)\arctan x]$$

$$= 3\int x\arctan x\,\mathrm{d}\,x + \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2)\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int (x^2+1-1)\,\mathrm{d}[\ln(1+x^2)\arctan x]$$

$$= 3\int x\arctan x\,\mathrm{d}\,x + \frac{x^2+1}{2}\ln(1+x^2)\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int [\ln(1+x^2)+2x\arctan x]\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\ln(1+x^2)\arctan x$$

$$+\frac{1}{2}\int [4x\arctan x - \ln(1+x^2)]\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\ln(1+x^2)\arctan x$$

$$+ x^2\arctan x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + C$$

3.【参考解答】: 考虑级数$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\left|x\right|<1$$

$S(x)=x+(1-x)\ln(1-x),x\in[-1,1)$

当$x=1$时，$S(1)=1$；

当$x\neq 0$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}=x^{-1}S(x)$

当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}=0$

4.【参考解答】: $f'(x)=3+\int_0^x 2(x-t)f(t)\,\mathrm{d}\,t$

$f''(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$，$f'''(x)=2f(x)$

$f^{(n+3)}=2f^{(n)}$ 所以

$$f^{(2017)}(0)=2^{672}f'(0)=3\times 2^{672}(2017=672\times 3+1)$$

5.【参考解答】: $f(x+1/x)=\sin[\pi(x+1/x)^2]$

$=\sin[\pi(x^2+2+1/x^2)]=\sin[\pi(x^2+1/x^2)]$

又$f(x+1/x)-f(x)=\pi\cos(\xi)/x^2$，所以

$$\lim_{x\to\infty}x[f(x+1/x)-f(x)]=0$$

二、【参考解答】: 考虑函数$F(x)=\int_x^{x+2}f(t)\,\mathrm{d}\,t$，那么

$$F'(x)=f(x+2)-f(x)=\sin x$$

由 此 $F(x)=C-\cos x$ ， 因 为 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=0$ ， 即

$F(0)=C-1=0$，所以$C=1$，从而可得

$$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(1) = 1-\cos 1$$

三、【参考解答】: 记 $P=\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}, Q=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$,

可得 $P_y'=Q_x'$, 积分与路径无关. 取

L_1: 从 $(-2,0)$ 到 $\left(0,0\right)$ 的直线段,

L_2: 从 $\left(0,0\right)$ 到 $(2,0)$ 的上半圆 $(x-1)^2+y^2=1$,

$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} = \int_{L_2} (x-1)\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x = -\pi$$

四、【参考解答】: 设 $f(x_1)=\max f(x), f(x_2)=\min f(x)$,

则

$$\max f(x)-\min f(x)=\int_{x_2}^{x_1} f'(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\leq \left|\int_{x_2}^{x_1}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}\,t\right| \leq \int_0^1 \left|f'(t)\right|\mathrm{d}\,t \leq \sqrt{\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}\,x}$$

五、【参考解答】: 因为 $g\left(x\right)$ 连续, 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

对于任意的 $\delta>0$, $\exists T>0$, 当 $x>T$ 时, $g(x)>2/\delta$,

且有 $x>T$, $g(x+\delta/2)\geq g(x)$.

取 $\varepsilon_0=1, \forall\delta>0$, 有

$$f(x+\delta/2)-f(x)=(x+\delta/2)g(x+\delta/2)-xg(x)$$

$$=x[g(x+\delta/2)-g(x)]+g(x+\delta/2)\delta/2$$

$$\geq g(x+\delta/2)\delta/2\geq 1$$

所以 $f(x)=xg(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续上不一致连续