数学分析（甲）II（H）

CXC

1 数分 I

Leibniz 公式 $f,g\in D(R)\Rightarrow [fg]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$

H$\ddot{o}$lder 不等式
$f(x),g(x)\in C[a,b],\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p,q\in R^*:\ \int_a^b|f(x)g(x)|dx\leqslant(\int_a^b|f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(\int_a^b|g(x)|^q)^{\frac{1}{q}}$

Schwarz 不等式 $[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$

基本积分表
$\int sec(x)dx=ln|sec(x)+tan(x)|+C$ $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2arcsin(\frac{x}{a}))+C$
$\int csc(x)dx=ln|csc(x)-cot(x)|+C$ $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|)+C$
$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}d=arcsin(\frac{x}{a})+C$ $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$
$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$ $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a})+C$

Euler 第一、二、三替换
$a>0:\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t\quad c>0:\ \sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta):\ \sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$

Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n(n\to+\infty)$

练习． $\int_0^1\frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^2x}{sinx+cosx}dx\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(2n+1)x}{sinx}dx\quad\int_0^1\frac{arctanx}{1+x}dx=\frac{\pi}{8}ln2$

2 级数

练习． 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}q^n cosn\theta(|q|<1)$

证明． $\Sigma\sqrt[n]{2}+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}-2$ 收敛

常见泰勒展开公式

$(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^5) \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + o(x)$

$arcsinx = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad arccosx = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) \quad shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$

$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{x^4} + o(x^5) \quad thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$

练习．考查极限的敛散性：$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(lnn)^p}$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]^p(p>0)$

证明．D'Alembert 判别法, Cauchy 判别法, Gauss 判别法

问题．已知 f(x) 在 x=0 处 (n+k) 次可微，且 $f^{(n+i)}(0)=0(i=1,2,...,k-1)$，$f^{(n+k)}(0)\neq 0$，若 $f(x)=f(0)+f'(0)x+...+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n(0<\theta<1)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$

证明．设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^nxdx$，则 $\lambda>0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛

证明．设 f(x) 在 [0,1] 上二阶可导，则 $\forall x\in(0,1)$, $\exists\,\xi\in(0,1)$ $s.t.$ $\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(0)}{x}-\frac{f(x)}{x(1-x)}+\frac{f(1)}{1-x}$

证明．设 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_{n+k}^2(n=0,1,...)$，若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛则 $a_n\equiv 0$

证明．设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 为收敛的正项函数，$\{a_n-a_{n+1}\}$ 严格单调递减，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})=+\infty$

证明．设正数 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\rho$，则 $\rho<\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛，则 $\rho>\frac{1}{2}$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散。

证明．$\{a_n\}$ 是正数列, $s_n=\Sigma\frac{a_n}{n}$, $r_n=\Sigma\frac{1}{na_n}$, 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}s_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r_n$ 均存在, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n\lim\limits_{n\to+\infty}r_n\geqslant 1$

证明．设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 满足 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\}$ 对 n 有界，$\{a_n\}$ 单调递减且趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛

证明．设数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0，且 $b_k=a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant 0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kb_k=a_1$

证明．Abel 变换，Abel 引理，Abel 判别法，Dirichlet 判别法

练习．求极限 $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$ **类似含参变量积分**

证明．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{n}$ 收敛, 其中 $c_n\geqslant 0$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$ 收敛

证明． $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n sinn}{n}$ 收敛

证明． 设 $\{\lambda_n\}$ 和 $\psi(x)$ 均正值非减，使 $\int_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{dt}{t\psi(t)}<+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_n}{\psi(\lambda_n)}\Big(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\Big)$ 收敛

Mertens 定理

设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛到 A，级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ 收敛到 B，则它们的柯西乘积必定存在且 $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ 收敛到 AB

证明． 设级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 和它们的柯西乘积 $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ 都收敛，则有 $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n=(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n)(\sum_{n=1}^{+\infty}b_n)$

证明． 设 $\{f_n(x)\}$ 关于 $x\in(a,b)$ 一致收敛，$\lim_{x\to a^+}f_n(x)$ 存在，则 $\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a^+}f_n(x)=\lim_{x\to a^+}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$

证明． 设 $f(x)\in[-a,a],|f(x)|<|x|$，当 $x\neq 0$ 时定义 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 [-a,a) 一致收敛于 0

证明． 设 $\{a_n\}$ 正值递减，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n sinnx$ 在 R 上一致收敛充要于 $\lim_{n\to+\infty}na_n=0$ **Abel 引理**

一致收敛的等价定义

$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall x\in D,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$

Cauchy 准则：$\forall\epsilon>0,\exists N,\forall m>n>N,\forall x\in D,|f_m(x)-f_n(x)|<\epsilon$

确界极限：$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

点列极限：$\forall\{x_n\}\subseteq D,\lim_{n\to+\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0$

证明． 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，令 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$，则 $\{f_n\}$ 在任意有界闭区间内一致收敛

定理． Abel 判别法：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x)b_n(x)(x\in D)$ 一致收敛的充分条件：

Dirichlet 判别法：$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x)$ 关于 x 一致收敛，$b_n(x)$ 关于 n 单调且关于 x 一致有界

$\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$ 关于 x 一致有界，$b_n(x)$ 关于 n 单调且关于 x 一致趋向于 0

***Weierstrass 第一逼近定理**

设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\forall\epsilon>0,\exists$ 多项式 $p(x)$ 使得 $|f(x)-p(x)|<\epsilon,\forall x\in[a,b]$，且 $p(a)=f(a),p(b)=f(b)$

或者等价地叙述为：存在多项式函数列 $\{p_n(x)\}$ 在区间 [a,b] 上一致收敛于 f(x)

证明． 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 内一致收敛于 $f(x)$，且 $\forall n\in N,\lim_{x\to x_0}f_n(x)=a_n\in R$，则 $\lim_{n\to+\infty}a_n$ 与 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 都存在且相等

证明． 连续性定理，逐项积分定理，逐项求导定理，Dini 定理

证明． $f_n(x)$ 在 [a,b] 上连续可微，则在 [a,b] 上 $\{f_n(x)\}$ 点态收敛 $\Rightarrow \{f_n(x)\}$ 一致收敛

练习． 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} tan\frac{x}{2^n}dx$，$\int_0^1 \frac{lnx}{1-x^2}dx$，证明 $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ **级数转化**

练习． 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot sin(2\pi n!e)$；设 $f(x)=(xsinx)^2$，求 $f^{(2022)}(0)$

问题． 设周期为 2π 的函数 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n，
证明 $\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)dt]cos(nx)dx$ 积分顺序可交换，并计算 F(x) 的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$

定理． 定义在任意长度为 2T 区间 [a,a+2T] 上的 f(x) 的 Fourier 级数
$a_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(x)cos\frac{\pi}{T}nx,\ b_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+2T} f(x)sin\frac{\pi}{T}nx,\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_ncos\frac{\pi}{T}nx + b_nsin\frac{\pi}{T}nx$

Riemann 引理
设函数 $\psi(x)$ 在 [a,b] 上可积或绝对可积，则成立 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)sinpxdx = \lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)cospxdx = 0$

Riemann 局部化原理
f(x) 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 A $\Leftrightarrow \exists\delta>0\ s.t.\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\delta \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}sin(n+\frac{1}{2})tdt = 0$

Dini 收敛定理
假设 f(x) 以 2π 为周期，且 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，则 $\forall x_0, \exists A, \exists\delta>0\ s.t.\ \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A|}{t}dt < +\infty$，那么 f(x) 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 A

另一种表述
假设 f(x) 以 2π 为周期，且 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，则 $\forall x_0, \exists\delta>0\ s.t.$ 存在 $f(x_0+), f(x_0-)$，
且 $\int_0^\delta \frac{f(x_0\pm t)-f(x_0\pm)}{t}dt$ 绝对收敛，则 f(x) 的 Fourier 级数在 x_0 收敛于 $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$

Dirichlet 引理 设函数 $\psi(x)$ 在 $[0,\delta]$ 上单调，或分段单调有界，则成立 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^\delta \frac{\psi(x)-\psi(0+)}{x}sinpxdx = 0$，或等价形式 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^\delta \psi(x)\frac{sinpx}{x}dx = \frac{\pi}{2}\psi(0+)$

Foureir 级数收敛的 Dirichlet 判别法
设函数 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，且在 x_0 某领域 $O(x_0,\delta)$ 上分段单调有界，或在 x_0 处满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 $H\ddot{o}lder$ 条件，则 f(x) 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$，且 f(x) 的 Fourier 展开的部分和函数列 $S_n(x)$ 一致收敛于 f(x)

推论． 若 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，在点 x_0 处两个单侧导数 $f'_-(x), f'_+(x)$ 都存在，或更进一步，只要两个拟单侧导数 $\lim\limits_{h\to0+}\frac{f(x_0\pm h)-f(x_0\pm)}{h}$ 存在，则 f(x) 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$

***Weierstrass 第二逼近定理**

设 f(x) 是以 2π 为周期的连续函数, 则存在三角多项式 $T_n(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k coskx+\beta_k sinkx),\forall n\in N^*$, 使得 $\forall\epsilon>0,\exists n>N,\forall x\in R$: $|f(x)-T_n(x)|<\epsilon$, 即函数列 $T_n(x)$ 一致收敛于 f(x)

定理 . Fourier 级数的一致收敛性、逐项积分定理、逐项微分定理、平方逼近性质、Bessel 不等式、Parseval 恒等式、平方收敛性质

3 多元函数

辉爷判别法 分母不保号则一般地重极限不存在

Heine 定理

$\lim\limits_{(x\to x_0)\in E}f(x)=A$ 充要于任意 E 中收敛于 x_0 但是各项都异于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$

Brouwer 定理

设 $D\subset R^2$ 是一区域，向量值函数 $F:D\to R^2$ 在 D 上连续、单射，则 $F(D)$ 是一区域，且 $F(D)$ 上的反函数 F^{-1} 是连续函数

问题 . 设 $f:R^n\to R^m$ 为连续映射，证明：对于 R^n 中的任意子集 A，成立 $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$，并举例说明 $f(\bar{A})$ 能够是 $\overline{f(A)}$ 的真子集

证明 . 设函数 f 在圆周上有定义并且连续, 证明可以找到一条直径的两个端点 a 与 b, 使得 $f(a)=f(b)$

证明 . 设 f(x,y) 满足 $(i):\forall y\neq b,\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\psi(y)$ $(ii)\exists\eta>0\ s.t.\ \lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ 关于 $x\in E,E=\{x:0<|x-a|<\eta\}$ 存在一致极限 $\varphi(x)$，证明 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ **夹逼**

证明 . 设有界点列 $z_n=(x_n,y_n)$ 满足 $\underline{\lim}_{n\to+\infty}||z_n||=l$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty}||z_n||=L$, $\lim\limits_{n\to+\infty}||z_{n+1}-z_n||=0$，证明 $\forall\mu\in(l,L)$，圆周 $x^2+y^2=\mu^2$ 上至少有 $\{z_n\}$ 的一个聚点

证明 . 设 $f(x,y)$ 在某点领域内有连续偏导数 $f'_y(x,y)$，且 $f'_x(x,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在该点可微

函数分析性质的相互关系

重极限存在 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 累次极限存在，累次极限存在 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 方向极限存在，但重极限存在 $\longrightarrow$ 方向极限存在

偏导数连续 $\longrightarrow$ 可微，可微 $\longrightarrow$ 连续，可微 $\longrightarrow$ 偏导数存在，可微 $\longrightarrow$ 方向导数存在

但连续 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 偏导数存在，连续 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 方向导数存在，偏导数 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 方向导数存在，可微 $\overset{X}{\longleftrightarrow}$ 偏导数有界

证明 . 若存在非零实数 a,b,c，使得 $f(x)\in C^1(R^3)$ 满足 $\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial z}$，则 $\exists g(x)\in C^1(R)$，使得 $f(x,y,z)=g(ax+by+cz)$

证明 . 设 $z=f(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数，且满足 $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0$，则 $f(x,y)$ 为常数

Hadamard 公式　设 n 元函数 f 在 R^n 上具有连续偏导数，则 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$，成立：

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (y_i - x_i) f_i'(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) dt$$

证明． 设 $f(x,y,z)$ 满足 $\forall t,x,y,z$：$f(tx,ty,tz) = t^q f(x,y,z)$，$z = \psi(x,y)$ 是由 $f(x,y,z) = 0$ 唯一确定的隐函数，则 $\psi(x,y)$ 是一次齐次函数，即 $\forall t,x,y$：$\psi(tx,ty) = t\psi(x,y)$

定理． 一元隐函数存在性定理

定理． 矩阵的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 是代数余子式对应矩阵的转置；无论矩阵 A 可逆与否，成立 $AA^* = A^*A = |A|E$，若 A 可逆，则 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

证明． 设二元函数 $f(x,y): R^2 \to R$ 具有连续偏导数，则存在一对一的连续的向量值函数 $\vec{G(t)}: R \to R^2$，使得 $f \circ \vec{G} \equiv$ 常数　　**隐函数定理**

空间曲线的法向量

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{vmatrix} (P_0)$$

空间曲面的法向量

$z = f(x,y) \Rightarrow \vec{n} = \{f_x(P_0), f_y(P_0), -1\}$

$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow \vec{n} = \{F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\}$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(P_0), \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(P_0), \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P_0)\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} (P_0)$$

证明． 任一点法平面过定点的曲线必为球面曲线

证明． 设 $u(x,y)$ 在 $\{x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 上连续，且在 $\{x^2+y^2 < 1\}$ 上满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$，且在 $\{x^2+y^2 = 1\}$ 上 $u(x,y) > 0$，则 $\forall (x,y) \in \{x^2+y^2 \leqslant 1\}, u(x,y) \geqslant 0$　　$trace(H) = \sum\limits_{i=1}^{dim(H)} \lambda_i$

问题． 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有连续的各个三阶偏导数，且满足 $grad(f(P_0)) = 0$，$H_f(P_0)$ 半定且存在单位向量 $u = (a,b)^T$ 使得 $H_f(P_0)u = 0$，同时 $(a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y})^3 f(P_0) \neq 0$，则 P_0 不是 f 的极值点

问题． 求 a,b 之值，使椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 包含圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$，且面积最小

4 重积分

证明． 多重积分可积（定义），积分中值定理，累次积分定理

证明． 设 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\Big[\int_a^b f(x)dx\Big]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f(x)]^2dx$，$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} e^{f(x)-f(y)}dxdy \geqslant (b-a)^2$

重积分变量代换公式 $\int_{T(\Omega)} f(y_1,...,y_n)dy_1...dy_n = \int_\Omega f(y_1(\vec{x}),...,y_n(\vec{x}))\Big|\frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}\Big|dx_1...dx_n$

定理． 第一、二类线、面积分存在性的条件（载体光滑），三大公式适用条件（+ 偏导连续）

线面积分计算公式、三大公式

第一类曲线积分：$\int\limits_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$

极坐标下：$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)cos\theta, r(\theta)sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

第二类曲线积分：$\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_L [Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma]ds = \int_a^b [Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)]dt$

Gauss 系数：$S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv,\ E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,\ F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,\ G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

曲面面积：$S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy = \iint\limits_D \frac{||\mathbf{grad}H||}{|H_z|}dxdy$

第一类曲面积分：$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$

第二类曲面积分：$\iint\limits_\Sigma [Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma]dS = \pm\iint\limits_D [P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv$

Green 公式：$\int\limits_{\partial D} Pdx+Qdy = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy$

Gauss 公式：$\iiint\limits_\Omega \Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz = \iint\limits_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

$= \iint\limits_D P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$

Stokes 公式：$\int_a^b Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)dt = \int\limits_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz$

$= \iint\limits_\Sigma \Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy$

$= \iint\limits_\Sigma \Big[\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)cos\alpha+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)cos\beta+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)cos\gamma\Big]dS$

$= \pm\iint\limits_D \Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$

练习 . 计算下列积分:
$\int_0^1 \frac{x^3-x}{lnx}dx$; $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t dx\int_x^t sin(xy)^2dy$; $\iiint\limits_{\Omega} cos(x+y+z)dV(\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1)$ **正交线性变换**
$I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin^2\theta+x^2cos^2\theta)d\theta,\ 0<x<+\infty$; $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\Big(\frac{1+\alpha cosx}{1-\alpha cosx}\Big)\cdot\frac{dx}{cosx}$ **嵌入法**
$\int_0^1 dx\int_0^x \Big(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\Big)dy$ $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$
$\oint_C \frac{xdy-ydx}{ax^2+by^2}$, $ab>0$, $C:\ x^2+y^2=1$(逆时针); $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, $C:\ |x|+|y|=1$(逆时针);
$\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, (1) $C:\ x^2+y^2=a^2$(逆时针) (2) $C:\ |x|+|y|=1$(逆时针)

问题 . 设函数 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有二阶连续偏导，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^2$，求 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$ **微分算子变换**

问题 . $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上有连续的二阶偏导，$f(x,1)=f(1,y)\equiv 0$，求证:
$\iint\limits_D xyf''_{xy}(xy)dxdy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

*** 调和函数** 设 D 为平面区域, $u(x,y)\in C^2(D)$, 如果 u 在 D 上满足 $\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则称 u 为调和函数；$u(x,y)$ 为 D 上调和函数的充要条件为 $\forall P(x_0,y_0)\in D,\forall 0<r<dist(P_0,\delta D)$：$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+rcos\theta,y_0+rsin\theta)d\theta$

简记 Stokes 公式 利用行列式记号，可以将 Stokes 公式 $\int\limits_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz$ 写成:

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dS=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} & \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}dudv$$

问题 . 设 D 是平面 R^2 上的有界闭区域，$u(x,y)$ 在 D 上连续，$u|_{\partial D}=0$，且在 D 内每点处存在偏导数，且满足 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u$，证明 $\forall(x,y)\in D$ 有 $u(x,y)=0$

练习 . $\int\limits_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 Z 轴正向看去，方向是逆时针

问题 . 设 f 是单变量函数，且连续可导，令 $F(t)=\iint\limits_{[0,t]^2}f(xy)dxdy$，求证:
$(1)F'(t)=\frac{2}{t}\Big(F(t)+\iint\limits_{[0,t]^2}xyf'(xy)dxdy\Big)$ $(2)F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2}f(s)ds$

问题． 设函数 f,g 都是 [a,b] 上递增的连续函数，且都不是常值函数，证明：
$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx > \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$ **射影变换**

问题． 证明函数 $f(x,y)=1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv$ 至多有一个在 $[0,1]^2$ 上连续的解

问题． 设 f 在区间 $[0,1]$ 上具有连续的导数，记 $\epsilon_n=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})$，求 $\lim_{n\to+\infty}n\epsilon_n$

练习． 计算：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2-sin^x)dx\ (a>1)$

问题． 设函数 $f(x)$ 在任意有界区间上可积，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$，证明 $\lim_{\sigma\to0^+}\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}f(x)dx=\alpha$

问题． 设 f 在 R 上连续有界，令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}dt\ (y>0)$，证明 $\lim_{y\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt=f(x)$

问题． 设 f 是区间 $[0,A]$ 上的单调函数，证明 $\lim_{a\to+\infty}\int_0^A f(x)\frac{sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(0+)$