2006 年浙江省高等数学(工科类)竞赛试题

一、计算题

1．计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n - e^x\right]$.

2．求 $\displaystyle\int \frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)}\,\mathrm{d}\,x$.

3．求 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_y^1 \left[\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right]\mathrm{d}\,x$.

4．求过 $(1,2,3)$ 且与曲面 $z = x + (y-z)^3$ 的所有切平面皆垂直的平面方程.

二、设 $f(x) = e^x - \dfrac{x^3}{6}$，问 $f(x) = 0$ 有几个实根?并说明理由.

三、求 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)^3$ 中 x^{20} 的系数.

四、计算 $\displaystyle\int_C xy\,\mathrm{d}\,s$,其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

五、设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数，试证:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| \le \left|\sin x\right|$$

的充分必要条件为 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k \le 1$.

六、求最小的实数 c，使得满足 $\displaystyle\int_0^1 \left|f(x)\right| \mathrm{d}\,x = 1$ 的连续函数 $f\left(x\right)$ 都有 $\displaystyle\int_0^1 f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x \le c$.

2006 年浙江省高等数学(工科类)竞赛

参考解答

一、计算题

1.【参考解析】: 原极限$=\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\left[\left(1+x/n\right)^{n/x}\right]^{x}-e^{x}\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty} ne^{x}\left\{\left[\frac{\left(1+x/n\right)^{n/x}}{e}\right]^{x}-1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} ne^{x}\left\{\left[1+\frac{\left(1+x/n\right)^{n/x}-e}{e}\right]^{x}-1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} ne^{x}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}-e}{e}x=x^{2}e^{x-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}-e}{\frac{x}{n}}$$

$$=x^{2}e^{x-1}\lim_{t\to0}\frac{\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}-e}{t}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}x^{2}e^{x-1}\lim_{t\to0}\frac{\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^{2}}}{1}$$

$$=x^{2}e^{x}\lim_{t\to0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{(1+t)t^{2}}$$

$$=x^{2}e^{x}\lim_{t\to0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^{2}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}x^{2}e^{x}\lim_{t\to0}\frac{1-1-\ln(1+t)}{2t}=-\frac{x^{2}e^{x}}{2}$$

【注】考虑一阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式，则有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x}-\frac{1}{2}\left(e^{x}x^{2}\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)$$

所以原极限$=\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{x}-\frac{1}{2}\left(e^{x}x^{2}\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{2}}\right)-e^{x}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(e^x x^2\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{e^x x^2}{2}.$$

2.**【参考解析】**：考虑部分分式方法，从而有

$$\frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)}=\frac{1+x^4+x^8}{x(1-x)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{3x}{4\left(x^2+1\right)}-\frac{x^3}{2\left(x^4+1\right)}-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{3}{8(x+1)}$$

所以原积分可以拆分成无关积分之和，即

$$\int\frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{3x}{4\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$$

$$-\int\frac{x^3}{2\left(x^4+1\right)}\mathrm{d}x-\int\frac{3}{8(x-1)}\mathrm{d}x-\int\frac{3}{8(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{3}{8}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{8}\ln\left(x^4+1\right)$$

$$-\frac{3}{8}\ln|x-1|-\frac{3}{8}\ln|x+1|+C$$

$$=-\frac{1}{8}\ln\left|1-x^8\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1-x^4\right|+\ln|x|+C$$

【注】先凑微分换元，即

$$\int\frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1+x^4+x^8}{x^2(1-x^8)}\mathrm{d}\left(x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2+t^4}{t(1-t^4)}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\frac{1+t^2+t^4}{t^2(1-t^4)}\mathrm{d}\left(t^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+u+u^2}{u(1-u^2)}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\int\frac{1+u+u^2}{u(1-u)(1+u)}\mathrm{d}u$$

再对被积函数分解部分分式，

$$\frac{1+u+u^2}{u(1-u^2)}=\frac{1}{u}-\frac{1}{2(u+1)}-\frac{3}{2(u-1)}$$

所以原积分

$$\int \frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\ln\left|1-u^2\right|-\ln\left|1-u\right|+\ln\left|u\right|\right]+C$$

将$u=t^2=x^4$代入，则得积分结果为

$$-\frac{1}{8}\ln\left|1-x^8\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1-x^4\right|+\ln\left|x\right|+C$$

【或】$\int \frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \frac{1+x^4+x^8}{x^4(1-x^8)}\mathrm{d}\left(x^4\right)$，再令$t=x^4$求解.

3.【参考解析】：将积分拆分成两部分，有

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left[\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}x$$

第二部分直接计算，得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{y^2}\left(1-y\right)\mathrm{d}y$$

第一个部分交换积分次序，依据四个上下限绘制积分区域边界曲线，并由不等式结构确定积分区域，即

$$y=0,y=1,x=y,x=1$$
$$D_Y:0\le y\le 1,y\le y\le 1$$

可得$D_X:0\le x\le 1,0\le y\le x$

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{e^{x^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

将两个结果代入原积分计算式，并由积分符号的无关性，得

$$I=\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{y^2}\left(1-y\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}y+\int_0^1 ye^{y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=0+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}\left(y^2\right)=\frac{e-1}{2}.$$

4.【参考解析】：曲面上任意点$\left(x,y,z\right)$处的法向量可以取为

$$\vec{n}=\left(1,3\left(y-z\right)^2,3\left(y-z\right)^2\left(-1\right)-1\right)$$

两平面垂直即两平面的法向量垂直，设所求平面的法向量为 $\left(A,B,C\right)$，则有

$$\vec{n}\cdot\left(A,B,C\right)=A+3B\left(y-z\right)^2-3C\left(y-z\right)^2-C=0$$

要使得上式恒为 0，可取 $A-C=0,3B-3C=0$，即 $A=C=B$ 即可。因此，由平面的点法式方程，可得过点 $(1,2,3)$ 的平面方程为

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0,$$

$$\text{即}\,(x-1)+(y-2)+(z-3)=0$$

最终整理得 $x+y+z-6=0.$

【注】也可以通过在曲面上特殊取点的方式，通过两平面垂直的关系来确定得到 A,B,C 之间的等式关系.

二、【参考解析】：由于 $e^x>0$，当 $x\le 0$ 时，$-\dfrac{x^3}{6}\ge 0$，所以 $f\left(x\right)>0$，即当 $x\le 0$ 时,，方程 $f(x)=0$ 无根. 而当 $x>0$ 时，

$$\begin{aligned}f(x)&=e^x-\frac{x^3}{6}\\&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^\xi}{4!}x^4-\frac{x^3}{6}\\&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{e^\xi}{4!}x^4>0\end{aligned}$$

所以 $f(x)=0$ 也无根. 即方程 $f(x)=0$ 无实根.

三、【参考解析】：当 $\left|x\right|<1$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)^3=\left(\frac{x}{1-x}\right)^3=\left(\frac{1}{1-x}\right)^3\cdot x^3$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)''\cdot\frac{x^3}{2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''\cdot\frac{x^3}{2}$$

$$=\frac{x^3}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^{n+1}$$

所以x^{20}即为$n=19$的系数，所以等于$\frac{19\cdot 18}{2}=171.$

四、【参考解析】：对弧长的曲线积分有两个重要性质，一个是被积函数定义在积分曲线上，满足描述积分曲线的方程；第二个是偶倍奇零的计算性质和轮换对称性。

由于题中曲线具有轮换对称性，并且积分曲线为一个半径为R的圆，所以有

$$\int_C (x+y+z)^2\,\mathrm{d}s$$
$$=\int_C (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s+2\int_C (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}s$$

即$0=\int_C R^2\,\mathrm{d}s+6\int_C xy\,\mathrm{d}s$，所以

$$\int_C xy\,\mathrm{d}s=-\frac{R^2}{6}\int_C \mathrm{d}s=-\frac{R^2}{6}\cdot 2\pi R=-\frac{\pi R^3}{3}.$$

五、【参考解析】：**(必要性)** 由于$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le\left|\sin x\right|$,则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|,x\ne 0$$

由此可得$\lim_{x\to 0}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{x}\right|=\sum_{k=1}^{n}ka_k\le\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=1$.

(充分性) 要证明$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le\left|\sin x\right|$，只需证明:

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|}{\left|\sin x\right|}\le 1,\left|\sin x\right|\ne 0.$$

若$\left|\sin x\right|=0$，不等式显然成立．也即只需证明:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\le 1,$$

而$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\le\sum_{k=1}^{n}a_k\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|,\sum_{k=1}^{n}ka_k\le 1$．故只要验证:$\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\le k$，即$\left|\sin kx\right|\le k\left|\sin x\right|$即可．下面用数学归

纳法证明:

当$k=1$时，显然成立;

假设当$k=n$时，有$\left|\sin nx\right|\le n\left|\sin x\right|$；当$k=n+1$时，

$$
\begin{aligned}
&\left|\sin(n+1)x\right|=\left|\sin(nx+x)\right|\\
=&\left|\sin nx\cos x+\sin x\cos nx\right|\\
\le&\left|\sin nx\right|+\left|\sin x\right|\le(n+1)\left|\sin x\right|
\end{aligned}
$$

综上可知结论成立

六、【参考解析】: 由积分绝对值不等式和换元法，有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x\le\int_0^1\left|f(\sqrt{x})\right|\mathrm{d}\,x\\
=&2\int_0^1 t\left|f(t)\right|\mathrm{d}\,x\le 2\int_0^1\left|f(t)\right|\mathrm{d}\,x=2
\end{aligned}
$$

取$y=2x$，显然$\int_0^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x=1$，而

$$
\int_0^1 f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}
$$

取$y=(n+1)x^n$，显然$\int_0^1\left|f(x)\right|\mathrm{d}\,x=1$，而

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1(n+1)\left(\sqrt{x}\right)^n\mathrm{d}\,x\\
=&2\cdot\frac{n+1}{n+2}\to 2,\quad n\to\infty
\end{aligned}
$$

故最小的实数$c=2$.