2016浙江省高等数学（微积分）竞赛

工科类试题

一、计算题：（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1+x}{\sin^2 x}}$．

2．求不定积分 $\int \frac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\mathrm{d}x$．

3．已知函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$，求 $f^{(n)}(0)$ 的值。

4．求函数 $f(x,y,z)=\frac{z}{1+xy}+\frac{y}{1+xz}+\frac{x}{1+yz}$ 在

$$V=\{(x,y,z)\in R^3 \,|\, 0\le x,y,z\le 1\}$$

的最大值.

5．已知 $\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2}$，其中

$0\le\alpha,\beta\le\pi/2$，求 α,β 的值.

二、（满分 20 分） 记

$y_n(x)=\cos(n\arccos x), n=0,1,2,\cdots$

(1) 证明当 $n\ne m$ 时 $\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=0$．

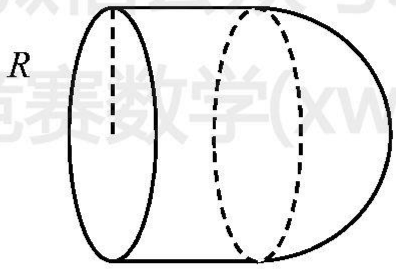
(2) 求 $c_n, n=0,1,2,\cdots$ 使 $e^{\arccos x}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n y_n(x)$．

三、（满分 20 分） 设曲面 S 为：

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}+z^2=1, z\geq 0.$$

计算 $\iint\limits_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$S$ 方向向上.

四、(满分 20) 如图，设一个均匀物体是由体积相同的一个半球和一个圆柱拼接而成，圆柱的底面与半球的大圆面重合，底面半径为 R，求此物体的重心。



五、(满分 20 分) 已知 $P_n(x)$ 为 n 次实系数多项式，有 n 个不同实根。证明：$P_n(x)+P_n{}'(x)$ 有 n 个不同的实根.

2016 浙江省高等数学（微积分）竞赛
数学类试题

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\cos(\sqrt{n^2+1}-n)}{\ln(n^2+2)-2\ln n}$，其中 n 为正整数.

2．求不定积分 $\int\frac{1-x^2\cos x}{(1+x\sin x)^2}\mathrm{d}\,x$.

3．设函数$f(x)=\dfrac{1+xe^x}{1+x}$，求$f^{(5)}(0)$.

4．求函数$f(x,y,z)=\dfrac{z}{1+xy}+\dfrac{y}{1+xz}+\dfrac{x}{1+yz}$在

$$V=\{(x,y,z)\in R^3 \,|\, 0\le x,y,z\le 1\}$$

的最大值.

5．已知$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{2}$，其中$0\le\alpha,\beta\le\pi/2$，求$\alpha,\beta$的值.

二、(满分 20) 记$y_n(x)=\cos(n\arccos x), n=0,1,2,\cdots$

(1) 证明当$n\ne m$时$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=0$.

(2) 求$c_n, n=0,1,2,\cdots$使$e^{\arccos x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_ny_n(x)$.

三、(满分 20 分) 设$u=e^x\sin y, v=e^x\cos y$，求

$$\oint_C\frac{(xu+yv)\mathrm{d}x+(yu-xv)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中C为绕原点的任何一条光滑简单闭曲线.

四、(满分 20 分) 已知实系数多项式$P(x)$仅有实根，证明：$P(x)+P'(x)$也仅有实根.

五、(满分 20 分) 设$\alpha\ge 3$，有界数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+2}=\alpha a_n+(1-\alpha)a_{n-1}, n\ge 1.$$

证明：对$n\ge 1$, $a_n=a_0$.

2016 浙江省高等数学（微积分）竞赛

工科类参考解答

一、计算题：

1.【参考解析】：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1+x}{\sin^2 x}}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}(\cos x-1)\frac{1+x}{\sin^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

2.【参考解析】：原式$=\displaystyle\int\frac{1+x\sin x-x(\sin x+x\cos x)}{(1+x\sin x)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{1+x\sin x}\mathrm{d}x+\int\frac{-x}{(1+x\sin x)^2}\mathrm{d}(1+x\sin x)$$

$$=\int\frac{1}{1+x\sin x}\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x\sin x}$$

$$=\frac{x}{1+x\sin x}+C$$

3.【参考解析】：由$\dfrac{1}{(1+x)^2}=-\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k=-\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k kx^{k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)x^k$$

所以$\dfrac{1}{(1+x^2)^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)x^{2k}$，于是可得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^k(k+1)(2k)! & n=2k\\ 0 & n=2k+1\end{cases}$$

4.【参考解析】：当$0<x,y,z\le 1$时，

$$f''_{xx}=\frac{2zy^2}{(1+xy)^3}+\frac{2yz^2}{(1+xz)^3}>0$$

没有极大值点，所以最大值一定在边界上取到.

当$z=0$时，$f(x,y,0)=x+y\le 2=f(1,1,0)$

当$z=1$时，$f(x,y,1)$的最大值也在边界上取到．由x,y,z的轮换对称性，只需求$f(1,1,1)=1.5$，所以$\max f(x,y,z)=2$

5.【参考解析】:**【思路一】**方程变形为

$$1-2\sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2})+2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2})-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+\frac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})=\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\pm\sqrt{\cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2})-1}$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})=1\Rightarrow \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha=1\Rightarrow \alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$$

【思路二】记$f(\alpha,\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta$，

$$\begin{cases} f'_\alpha=-\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha=0\\ f'_\beta=-\sin(\alpha+\beta)+\cos\beta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow 2\sin\beta\cos\beta=\cos\beta\Rightarrow \sin\beta=\frac{1}{2}$$

所以$f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$. 在边界上 $f(\alpha,\beta)\le\sqrt{2}$，所以仅当

$\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$时，$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2}$.

二、【参考解析】:(1) 当$n\ne m$时，

$$\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x \underline{\underline{令x=\cos t}} \int_0^{\pi}\cos nt\cos mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(n+m)t+\cos(n-m)t]\mathrm{d}\,t=0$$

(2) $e^{\arccos x}y_m(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n y_n(x)y_m(x)$

$$c_m=\int_{-1}^{1}\frac{y_m(x)e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x\Big/\int_{-1}^{1}\frac{y_m(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t\Big/\int_0^{\pi}\cos^2 mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{\pi}\cos mt\,\mathrm{d}\,e^t$$

$$=((-1)^m e^{\pi}-1)+m\int_0^{\pi}e^t\sin mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$=((-1)^m e^{\pi}-1)-m^2\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t=\frac{(-1)^m e^{\pi}-1}{m^2+1}$$

其中$c_0=\dfrac{e^{\pi}-1}{\pi}$.

当$m\neq 0$时，$c_m=\dfrac{2((-1)^m e^{\pi}-1)}{(m^2+1)\pi}$

三、【参考解析】：记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$P=\frac{x}{r^3},Q=\frac{y}{r^3},R=\frac{z}{r^3},$$

$$P_x'=\frac{r-3xr_x'}{r^2}=\frac{r-3x^2/r}{r^2}=\frac{r^2-3x^2}{r^3}$$

同理$Q_y'=\dfrac{r^2-3y^2}{r^3},R_z'=\dfrac{r^2-3z^2}{r^3}$. 记$S_1$为$xOy$平面

上$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{16}\le 1$与$x^2+y^2\ge 1$的公共部分

方向向下．S_2为：$x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$方向向下．D

为S, S_1, S_2所围区域，则

$$\iint\limits_{S} = \oiint\limits_{S+s_1+s_2} - \iint\limits_{S_1} - \iint\limits_{S_2}$$

$$= \iiint\limits_{D} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,\mathrm{d}V + 0$$

$$- \iint\limits_{S_2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint\limits_{S_2} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{S_2} dS = 2\pi.$$

四、【参考解析】：以半球心为坐标原点，圆柱的对称轴为y轴，指向球面方向为y轴正向．由对称性知$\bar{x}=\bar{z}=0$．又半球体积为$\dfrac{2\pi R^3}{3}$，于是圆柱高为$\dfrac{2R}{3}$，记

$$D_1 = x^2+z^2 \le R^2, D_2: x^2+z^2 \le R^2 - y^2$$

则可以得

$$\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}V = \int_{-2R/3}^{0} y\,\mathrm{d}y \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}\sigma + \int_0^R y\,\mathrm{d}y \iint\limits_{D_2} \mathrm{d}\sigma$$

$$= \pi R^2 \int_{-2R/3}^{0} y\,\mathrm{d}y + \pi \int_0^R y(R^2-y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{2\pi R^4}{9} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{36}$$

所以 $\overline{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V}=\dfrac{\pi R^4/36}{4\pi R^3/3}=\dfrac{R}{48}$.

五、【参考解析】：设 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 为 $P_n(x)$ 的 n 个不同实根，也是 $f(x)=e^xP_n(x)$ 的根.

由罗尔定理知 $\exists\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$ 使 $f'(\xi_i)=0$，即 $\xi_i,i=1,2,\cdots,n-1$ 是 $P_n(x)+P_n{}'(x)$ 的 $n-1$ 个实根. 又由

$$\lim_{x\to-\infty}e^xP_n(x)=0$$

知 $\exists\xi_0<x_1$ 使 $f'(\xi_0)=0$. 若不然 $x<x_1$ 时，$f'(x)\neq0$. 不妨设 $f(x)>0$，即单调增，与 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^xP_n(x)=0$ 矛盾.

即 $\exists\xi_0<x_1$ 是 $P_n(x)+P_n{}'(x)$ 的根. 所以 $P_n(x)+P_n{}'(x)$ 有 n 个不同的实根.

2016 浙江省高等数学（微积分）竞赛
数学类参考解答

一、计算题

1.【参考解析】：由 $\ln(n^2+2)-2\ln n=\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$，因为 $\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\to0$，分子对数里面加 1 减 1，于是由 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$ 得

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(\sqrt{n^2+1}-n)-1}{2/n^2}$

$$= -\lim_{n\to\infty} n^2 \sin^2\left(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\right)$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)^2 n^2}{4}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4(\sqrt{n^2+1}+n)^2} = -\frac{1}{16}$$

2.【参考解析】: 原式 $= \int \frac{1+x\sin x - x(\sin x + x\cos x)}{(1+x\sin x)^2} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{1+x\sin x} \mathrm{d}\,x + \int \frac{-x}{(1+x\sin x)^2} \mathrm{d}(1+x\sin x)$$

$$= \int \frac{1}{1+x\sin x} \mathrm{d}\,x + \int x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x\sin x}$$

$$= \frac{x}{1+x\sin x} + C$$

3.【参考解析】: 记 $g(x) = \frac{1-e^x}{1+x}$，则 $f(x) = g(x) + e^x$，

而 $(1+x)g(x) = 1-e^x$，于是

$$g^{(n)}(0) + ng^{(n-1)}(0) = -1, g(0) = 0$$

$$\Rightarrow g^{(1)}(0) = -1 \Rightarrow g^{(2)}(0) = 1 \Rightarrow g^{(3)}(0) = -4$$

$$\Rightarrow g^{(4)}(0) = 15 \Rightarrow g^{(5)}(0) = -76$$

所以 $f^{(5)}(0) = g^{(5)}(0) + 1 = -75$.

4.【参考解析】: 当 $0 < x, y, z \le 1$ 时，

$$f''_{xx} = \frac{2zy^2}{(1+xy)^3} + \frac{2yz^2}{(1+xz)^3} > 0$$

没有极大值点，所以最大值一定在边界上取到.

当 $z = 0$ 时，$f(x,y,0) = x + y \le 2 = f(1,1,0)$

当 $z = 1$ 时，$f(x,y,1)$ 的最大值也在边界上取到. 由

x,y,z 的轮换对称性，只需求 $f(1,1,1)=1.5$，所以 $\max f(x,y,z)=2$

5.【参考解析】:【思路一】方程变形为

$$1-2\sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2})+2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2(\frac{\alpha+\beta}{2})-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+\frac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})=\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\pm\sqrt{\cos^2(\frac{\alpha-\beta}{2})-1}$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})=1\Rightarrow \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha=1\Rightarrow \alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$$

【思路二】记 $f(\alpha,\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta$ ，

$$\begin{cases} f'_\alpha=-\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha=0 \\ f'_\beta=-\sin(\alpha+\beta)+\cos\beta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow 2\sin\beta\cos\beta=\cos\beta\Rightarrow \sin\beta=\frac{1}{2}$$

所以 $f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$.

在边界上 $f(\alpha,\beta)\le\sqrt{2}$ ， 所以仅当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$ 时，

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{2}.$$

二、【参考解析】: (1) 当 $n\neq m$ 时，

$$\int_{-1}^{1}\frac{y_n(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}\,x \underline{\underline{令 x=\cos t}} \int_0^{\pi}\cos nt\cos mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(n+m)t+\cos(n-m)t]\,\mathrm{d}\,t=0$$

(2) $e^{\arccos x}y_m(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n y_n(x)y_m(x)$

$$c_m=\int_{-1}^{1}\frac{y_m(x)e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x\Big/\int_{-1}^{1}\frac{y_m(x)y_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t\Big/\int_0^{\pi}\cos^2 mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t=\int_0^{\pi}\cos mt\,\mathrm{d}\,e^t$$

$$=((-1)^m e^{\pi}-1)+m\int_0^{\pi}e^t\sin mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$=((-1)^m e^{\pi}-1)-m^2\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi}e^t\cos mt\,\mathrm{d}\,t=\frac{(-1)^m e^{\pi}-1}{m^2+1}$$

其中$c_0=\dfrac{e^{\pi}-1}{\pi}$.

当$m\neq 0$时，$c_m=\dfrac{2((-1)^m e^{\pi}-1)}{(m^2+1)\pi}$

三、【参考解析】：积分记为$\oint\limits_C P\,\mathrm{d}\,x+Q\,\mathrm{d}\,y$，得

$P_y'=Q_x'$，由积分与路径无关：对任意$\varepsilon>0$，有

$$\oint\limits_C=\oint\limits_{x^2+y^2=\varepsilon^2}=\int_0^{2\pi}-v\,\mathrm{d}\,\theta$$

由ε的任意性，得

$$\int_0^{2\pi} -v\,\mathrm{d}\theta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} -v\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} -e^{\varepsilon\cos\theta}\cos(\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon\cos\theta_1}\cos(\varepsilon\sin\theta_1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = -2\pi.$$

四、【参考解析】：设$P(x)$为n次多项式，$x_1 < x_2 < \cdots < x_s$为$P(x)$的不同实根，也是$f(x)=e^x P(x)$的根.

$$P(x) = (x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\cdots(x-x_s)^{l_s}$$

其中$l_1+l_2+\cdots+l_s=n$，则

$$P(x)+P'(x) = (x-x_1)^{l_1-1}(x-x_2)^{l_2-1}\cdots(x-x_s)^{l_s-1}h(x)$$

其中$h\left(x\right)$为s次多项式.由罗尔定理知，$\exists \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$使$f'(\xi_i)=0$，即$\xi_i\left(i=1,2,\cdots,s-1\right)$是$P(x)+P'(x)$的$s-1$个实根，也是$h\left(x\right)$的$s-1$个实根，即

$$h(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{s-1})g(x)$$

显然$g\left(x\right)$为1次多项式，所以$P(x)+P'(x)$也仅有实根.

五、【参考解析】：记$c_n = a_{n+1}-a_n$，则$\{c_n\}$满足

$$c_{n+1} = -c_n + (\alpha-1)c_{n-1}\ ,n\ge 1$$

【思路一】考虑方程$\lambda^2+\lambda+1-\alpha=0$，其根为

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{4\alpha-3}}{2},\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{4\alpha-3}}{2}$$

数列$\{c_n\}$通项为$c_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n$. 易知$\lambda_2 \le -2$. 由$\{c_n\}$有界可知$k_2=0$.

当$\alpha>3$时，$\lambda_1 > \dfrac{-1+\sqrt{4\times 3-3}}{2}=1$，同理得$k_1=0$，所以$c_n=0$，进而可得$a_n=a_0$；

当$\alpha=3$时，$\lambda_1=1$，即$c_n=k_1$，从而$\{c_n\}$为等差

数列且有界，所以$a_n = a_0$.

【思路二】对任意$|x| < 1$，有

$$c_{n+2}x^{n+2} = -c_{n+1}x^{n+2} + \beta c_n x^{n+2} \left(\beta = \alpha - 1\right)$$

于是$\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+2}x^{n+2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}x^{n+2} + \beta\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+2}$，

即

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - c_1 x - c_0$$

$$= -x\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n + c_0 x + \beta x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

于是可得$[\beta x^2 - x - 1]\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = -(c_1 + c_0)x - c_0$，又

$$\beta x^2 - x - 1 = \beta(x - x_1)(x - x_2),$$

其中$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\beta}}{2\beta}$，且当$\beta > 2$时

$$\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2\beta} = \frac{2}{\sqrt{1+4\beta}-1} < \frac{2}{\sqrt{1+4\times 2}-1} = 1$$

所以$|x_{1,2}| < 1$，$(c_1 + c_0)x + c_0$有两个零点，得

$$c_1 = c_0 = 0, a_0 = a_1 = a_2 = a_n$$

当$\beta = 2$时，$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$，有

$$(c_1 + c_0)x + c_0 = (c_1 + c_0)(x + 0.5)$$

$$\beta\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{-(c_1 + c_0)}{x - 1}$$

于是可得$c_n = c_0$，$\{a_n\}$为等差数列且有界，所以$a_n = a_0$