2008 年浙江省高等数学（微积分）竞赛试题

（工科、数学、文专类）

一、计算题

1、求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2、计算$\displaystyle\int\frac{1}{\cos(3+x)\sin(5+x)}\mathrm{d}\,x$.

3、设$f(x)=x^3\arcsin x$，求$f^{(2008)}(0)$.

4、求函数$f(x,y)=4x^4+y^4-2x^2-2\sqrt{2}xy-y^2$的极值.

5、假设立体I由$1-z=x^2+y^2$与$z=0$围成，密度为ρ；立体II由$1+z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=0$围成，密度为1. 已知立体I和立体II组成的立体的重心位于原点$(0,0,0)$，求ρ的值.

6、计算$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

7、求曲线$\begin{cases}x=\ln t\\ y=2t+\displaystyle\int_1^t e^{-(ts)^2}\mathrm{d}s\end{cases}$在$t=1$处的切线方程.

8、求曲线$y=x\sin x,x\in[\pi,2\pi]$与x轴所围的平面图形绕y轴旋转所得旋转体的体积.

二、计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2n}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n\cdot n}}\right)$.

三、设f在$[0,2]$上可导，且$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x=f(2)$，证明至少存在一点$\xi\in(0,2)$，使得$f'(\xi)=0$.

四、 (1) 证明 $f_n(x)=x^n+nx-2$（n 为正整数）在

$(0,+\infty)$上有唯一正零点a_n.

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n$.

五、已知t为常数，且$\max_{x\in[0,2\pi]}|\cos x+x-t|=\pi$，求$t$的值.

六、已知$\int_0^2\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x=a$. 求$\iint\limits_D\sin(x-y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D=\left\{(x,y)\,\big|\,|x|\le 1,|y|\le 1\right\}$.

七、设曲线$L:\begin{cases}z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\\x^2+y^2=2ax\end{cases}(a>0)$在$yOz$平面上的投影曲线为$\Gamma$，计算

$$\int_\Gamma\left(\frac{4a^2-z^2}{2a}\cdot y^2+y^2z^2\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{2}{3}y^3z+e^z\sin z\right)\mathrm{d}z.$$

八、证明：对$\forall x\in R,1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}>0.$

九、已知$a_1>0,a_2>0$.

(1) 若存在数列$\left\{y_n\right\}$满足条件：

$(a)\,y_n>0,(b)\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0,$
$(c)\,y_n=a_1y_{n+1}+a_2y_{n+2},n=1,2,3,\cdots$

证明：$a_1+a_2>1.$

(2) 若$a_1+a_2>1$，证明存在满足(a)(b)(c)的数列$\left\{y_n\right\}$.

十、分析级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right)$的收敛性.

十一、证明方程$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0$当$n$为奇数时有且仅有一个实根.

2008 年浙江省高等数学（微积分）竞赛试题（工科类、数学、文专类）参考解答

一、计算题

1、【参考解析】：基于重要极限，改写极限式得

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}-3}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{3}{e^x+e^{2x}+e^{3x}}\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\frac{1}{\sin x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}e^{\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}}{3\cos x}}=e^2$$

2、【参考解析】：【思路一】由三角恒等式变换式

$$\cos\left(x-y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

改写分子，凑项，得

$$原式=\frac{1}{\cos2}\int\frac{\cos[(5+x)-(3+x)]}{\cos(3+x)\sin(5+x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos2}\int\frac{\cos(5+x)\cos(3+x)}{\cos(3+x)\sin(5+x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{\cos2}\int\frac{\sin(5+x)\sin(3+x)}{\cos(3+x)\sin(5+x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos2}\left[\int\frac{\cos(5+x)}{\sin(5+x)}\mathrm{d}x+\int\frac{\sin(3+x)}{\cos(3+x)}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\cos2}\left[\int\frac{\mathrm{d}\sin(5+x)}{\sin(5+x)}-\int\frac{\mathrm{d}\cos(3+x)}{\cos(3+x)}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\cos2}[\ln|\sin(5+x)|-\ln|\cos(3+x)|]+$$

$$=\frac{1}{\cos2}\ln\left|\frac{\sin(5+x)}{\cos(3+x)}\right|+C$$

【思路二】由三角函数积化和差公式，得

$$\int \frac{1}{\cos(3+x)\sin(5+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sin 2(x+4)+\sin 2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{2}{\dfrac{2\tan(x+4)}{1+\tan^2(x+4)}+\sin 2}\,\mathrm{d}x$$

令 $t=\tan(x+4), x=\arctan t-4$

$$= \int \frac{2}{\dfrac{2\tan(x+4)}{1+\tan^2(x+4)}+\sin 2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{2}{t^2\sin 2+2t+\sin 2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sin 2}\int \frac{1}{t^2+\dfrac{2}{\sin 2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sin 2}\int \frac{1}{\left(t+\dfrac{1-\cos 2}{\sin 2}\right)\left(t+\dfrac{1+\cos 2}{\sin 2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\cos 2}\int \left(\frac{1}{t+\dfrac{1-\cos 2}{\sin 2}}-\frac{1}{t+\dfrac{1+\cos 2}{\sin 2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\cos 2}\ln\left|\frac{\tan(x+4)+\dfrac{1-\cos 2}{\sin 2}}{\tan(x+4)+\dfrac{1+\cos 2}{\sin 2}}\right|+C$$

3、**【参考解析】**： 由 $g'(x)=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，于是

由麦克劳林展开式

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+$$
$$\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^{n}+\cdots$$

令 $\alpha=-\frac{1}{2},x=-x^{2}$，得

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$
$$=1-\left(-\frac{1}{2}\right)x^{2}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^{4}+$$
$$\cdots+\left(-1\right)^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}+\cdots$$

两端在 $\left[0,x\right]$ 上积分，得

$$\arcsin x=x-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{3}}{3}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)}{2!}\frac{x^{5}}{5}+$$
$$\cdots+\left(-1\right)^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

于是可得

$$f(x)=x^{3}\arcsin x$$
$$=x^{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^{6}}{3}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)}{2!}\frac{x^{8}}{5}+\cdots$$
$$+\left(-1\right)^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2}-1)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\frac{x^{2n+4}}{2n+1}+\cdots$$

由此可得

$$f^{(2n+4)}\left(0\right)=\frac{(-1)^{n}\prod_{k=1}^{n}\left(-k-\frac{1}{2}+1\right)}{(2n+1)n!}(2n+4)!$$

令 $2n+4=2008$，则 $n=1002$，所以系数对应的项为

$$f^{(2008)}\left(0\right)=\frac{(-1)^{1002}\prod_{k=1}^{1002}\left(-k-\frac{1}{2}+1\right)}{2005\cdot 1002!}2008!$$

$$=\frac{\prod_{k=1}^{1002}\frac{1-2k}{2}}{2005\cdot 1002!}2008!=2008\cdot 2007\cdot 2006\cdot (2003!!)^{2}$$

4、【参考解析】：由无条件极值的判定与计算方法，令

$$f_x(x,y)=16x^3-4x-2\sqrt{2}y=0$$
$$f_y(x,y)=4y^3-2\sqrt{2}x-2y=0$$

用第一个式子乘以 $\sqrt{2}$ 减去(1)得 $y=\sqrt{2}x$，得三个驻点

$$\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y_2=1\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y_3=-1\end{cases}$$

再由二阶导数，即

$$A=f_{xx}(x,y)=48x^2-4,B=f_{xy}(x,y)=-2\sqrt{2},$$
$$C=f_{yy}(x,y)=12y^2-2$$

代入三点坐标，得 $A,AC-B^2$ 的值分别为

$$-4,0;20,192;20,192$$

所以两点 $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 都为极小值点，且极小值为 -2.

对于 $\left(0,0\right)$ 点，取 $y=\pm x$，则

$$g\left(x\right)=f(x,x)=x^2\left(5x^2-2\sqrt{2}-3\right)$$
$$h\left(x\right)=f(x,-x)=x^2\left(5x^2+2\sqrt{2}-3\right)$$

两函数分别在$x=0$处取到极大值和极小值，所以原点处不取极值.

5、【参考解析】：由重心计算公式，得

$$\frac{\iiint\limits_{I+II}\mu(x,y,z)z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{I+II}\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V}=0,$$

即$\iiint\limits_{I}\mu(x,y,z)z\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_{II}\mu(x,y,z)z\,\mathrm{d}V=0$. 代入密度，得$\iiint\limits_{I}\rho z\,\mathrm{d}V+\iiint\limits_{II}z\,\mathrm{d}V=0$，则由三重积分截面法，得

$$\iiint\limits_{II}z\,\mathrm{d}V=\pi\int_{-1}^{0}z(1+z)^2\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{12}$$

$$\iiint\limits_{I}z\,\mathrm{d}V=\pi\int_{0}^{1}z(1-z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}$$

所以$\rho=-\dfrac{\iiint\limits_{II}z\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{I}z\,\mathrm{d}V}=\dfrac{1}{2}$.

6、【参考解析】：令$x=\sec t=\dfrac{1}{\cos t}$，则$t=\arccos\dfrac{1}{x}$，

则$x=2,t=\dfrac{\pi}{3},x=+\infty,t\to\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}.$$

7、【参考解析】：令$ts=u,\mathrm{d}s=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}u$，则积分

$$\int_{1}^{t}e^{-(ts)^2}\mathrm{d}s=\int_{t}^{t^2}e^{-u^2}\frac{1}{t}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}\int_{t}^{t^2}e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

且当$t=1$时，$x=0$，$y=2$. 并且

$$x'(t)=\frac{1}{t},y'(t)=2-\frac{1}{t^2}\int_t^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{t}\left(2te^{-t^4}-e^{-t^2}\right)$$

取$t=1$，得

$$x'(1)=1,y'(t)=2+\left(2e^{-1}-e^{-1}\right)=2+e^{-1},$$

所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=0}=\frac{y'(1)}{x'(1)}=2+e^{-1}$，所以切线方程为

$$y=\left(2+e^{-1}\right)x+2.$$

8、**【参考解析】**：考虑柱壳法，则

$$V=\int_\pi^{2\pi}2\pi x\cdot(-x\sin x)\,\mathrm{d}x=2\pi\left(5\pi^2-4\right)$$

二、**【参考解析】**：

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2-2\ln 2.$$

三、**【参考解析】**：由积分中值定理，存在$x_0\in[0,1]$，使得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(x_0\right)=f(2)$$

所以由罗尔定理，存在$\xi\in\left(x_0,2\right)\subset(0,2)$，使得$f'(\xi)=0$.

四、**【参考解析】**：(1) 因为

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+n=n\left(x^{n-1}+1\right)>0(x\geq 0),$$

所以$f_n(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上有最多只有一个正零点a_n. 而$f_n(0)=-2<0$

$$\begin{aligned}f_n(n+1)&=\left[(n+1)^{n-1}+n\right](n+1)-2\\&\geq f_1(2)=2>0,n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

而$f_n\left(x\right)=x^n+nx-2$在$\left[0,n+1\right]$上连续，因此由闭区间上连续函数的零值定理，在$\left(0,n+1\right)$内至少存在有一个零点，综上可知结论成立.

(2) 令$g\left(x\right)=x^x$，则$\ln g(x)=x\ln x$，$g'(x)=x^x(1+\ln x)$，$g(x)=x^x$在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$单调递增，因此数列$\left\{n^n\right\}$单调增加.

因$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n}-1\le 0$，$f_n\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2^n}{n^n}>0$，所以

$$\frac{1}{n}\le a_n<\frac{2}{n},$$

因此$\frac{1}{n^n}\le a_n^n<\left(\frac{2}{n}\right)^n<\frac{1}{2^n}\quad(n>4)$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=0$

由$a_n^n+na_n-2=0$可得$na_n=2-a_n^n$. 综上可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}na_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-a_n^n\right)}=e^2.$$

五、【参考解析】：因为$f\left(x\right)=\cos x+x>0$且单调增加，因为$f'\left(x\right)=1-\sin x\ge 0$，并且$1\le f\left(x\right)\le 2\pi+1$，所以$1-t\le f\left(x\right)-t\le 2\pi+1-t$，其最值在两端点取到.

令$|1-t|=|2\pi+1-t|=\pi$，则可得

$$t=1-\pi,1+\pi,1+3\pi.$$

代入验证可知当$t=1+\pi$时

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|\cos x+x-t|=\pi.$$

六、【参考解析】：令$u=x-y,v=x+y$，则雅克比行列式$|J|=\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right|=\frac{1}{2}$，于是

$$\iint_D \sin(x-y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}u \int_{u-2}^{2-u} \sin u^2 \mathrm{d}v$$
$$= \int_0^2 (4-2u)\sin u^2 \mathrm{d}u = 4a - \int_0^2 \sin u^2 \mathrm{d}\left(u^2\right)$$
$$= 4a - \left[\cos u^2\right]_0^2 = 4a + 1 - \cos 4$$

七、【参考解析】:**【思路一】**由第二个曲面方程，可得曲线的参数方程为$\begin{cases} y = a\sin t \\ z = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t} \end{cases}$, $t: 0 \to 2\pi$ 代入被积表达式，得定积分的被积函数为

$$f\left(t\right) = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}a^5 \sin^4 t\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}} + \frac{e^{\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}} a\sin t \sin\left(\sqrt{2}a\sqrt{1-\cot}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$$
$$+ 2a^5 \sin^2 t\cos t(1-\cos t)$$
$$+ \frac{1}{2}a^2\cos t\sin^2 t\left(4a^2 - 2a^2(1-\cos t)\right)$$

于是原式$= \int_0^{2\pi} f\left(t\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi a^4}{4}$.

【注】其中比较难计算的积分为

$$\frac{a\sin t e^{a\sqrt{2-2\cos t}} \sin\left(a\sqrt{2-2\mathrm{cost}}\right)}{\sqrt{2-2\cos t}},$$

其可以计算得到原函数为

$$\frac{1}{2}e^{a\sqrt{2-2\cos t}}\left(\sin\left(a\sqrt{2-2\cos t}\right) - \cos\left(a\sqrt{2-2\cos t}\right)\right).$$

【思路二】由曲线方程为$\begin{cases} x^2 = 4a^2 - z^2 - y^2 \\ x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2} \end{cases}$ 消去x，得

$z^4 - 4a^2z^2 + 4a^2y^2 = 0$，即$z^2 = 2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2 - y^2}$

于是曲线的投影曲线方程围成的区域为

$$D=\{(y,z)\mid\sqrt{2a^2-2a\sqrt{a^2-y^2}}\le z \\ \le\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-y^2}}\}$$

于是由格林公式，二重积分被积函数为

$$\left(\frac{2}{3}y^3z+e^z\sin z\right)'_y-\left(\frac{4a^2-z^2}{2a}y^2+y^2z^2\right)'_z$$

即原式$=\dfrac{1}{a}\iint_D zy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}y^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2a^2-2a\sqrt{a^2-y^2}}}^{\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-y^2}}}z\mathrm{d}z$$

$$=4\int_0^a y^2\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}y$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi a^4}{4}$$

八、【参考解析】: 记$f(x)=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{4!}x^4$.

假设 $f\left(x_0\right)=0$，则 $x_0<0$. 由泰勒公式可知，存在 $\xi\in\left(x_0,0\right)$，使得

$$e^{x_0}=1+x_0+\frac{1}{2!}x_0^2+\frac{1}{3!}x_0^3+\frac{1}{4!}x_0^4+\frac{1}{5!}\xi^5$$

由$f\left(x_0\right)=0$可得$e^{x_0}=\dfrac{1}{5!}\xi^5$，因此$\xi>0$，与$\xi\in\left(x_0,0\right)$矛盾. 所以$f\left(x\right)\neq 0$. 因为$f\left(0\right)=1>0$，所以

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4>0.$$

九、【参考解析】: (1) 设$y_{n+1}+\lambda y_{n+2}=\mu\left(y_n+\lambda y_{n+1}\right)$，则由条件(c)知，

$$y_{n+1}+\lambda y_{n+2}=\mu\left(a_1 y_{n+1}+a_2 y_{n+2}+\lambda y_{n+1}\right)$$

比较系数得$\begin{cases}1=\mu\left(a_1+\lambda\right)\\ \lambda=\mu a_2\end{cases}$，消去$\lambda$解得

$$\mu=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}.$$

因此$\lambda=\mu a_2=\dfrac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}$.

令$z_n=y_n+\lambda y_{n+1}$，$z_{n+1}=\mu z_n$，其中

$$\mu=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2},\quad \lambda=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}$$

则$z_n=\mu^{n-1}z_1$，由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$和$z_n=y_n+\lambda y_{n+1}$可知$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，即$z_n=\mu^{n-1}z_1\to 0\left(n\to\infty\right)$. 因此，

$\left|\mu\right|<1$，即$-1<\dfrac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}<1$. 再由$a_2>0$知

$$-2a_2<-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}<2a_2,$$

即$a_1-2a_2<\sqrt{a_1^2+4a_2}<2a_2+a_1$. 特别有

$$\sqrt{a_1^2+4a_2}<2a_2+a_1\text{，即}4a_2<4a_2^2+4a_2a_1,$$

再由$a_2>0$得$a_1+a_2>1$.

(2) 令$\begin{cases}y_n=\mu^n\\ \lambda=\mu a_2\end{cases}$，其中$\mu=\dfrac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}$，则由

$a_1+a_2>1$，所以由$a_2>0$可知$4a_2<4a_2^2+4a_2a_1$，即

$\sqrt{a_1^2+4a_2}<2a_2+a_1$，也就可得，也即

$$\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}<1\text{，得}0<\mu<1.$$

因此(a) $y_n=\mu^n>0$成立，(b) $y_n=\mu^n\to 0$成立. 因

$$\mu=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}=\frac{2}{a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}\text{，所以}$$

$$\frac{1}{\eta}=\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}=a_1+\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}=a_1+a_2\mu$$

于是可得$1=\mu a_1+a_2\mu^2$，即$\mu^n=a_1\mu^{n+1}+a_2\mu^{n+2}$.

所以(c) $y_n=a_1y_{n+1}+a_2y_{n+2}$成立.

十、【参考解析】：因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{1+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{n^3\pi}{1+n^2}-n\pi\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

其中$a_n=\sin\dfrac{n\pi}{1+n^2}\to 0$. 记

$$g(x)=\sin\frac{x\pi}{1+x^2},x>1,$$

则因为$g'(x)=\pi\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\cos\dfrac{x\pi}{1+x^2}<0$，所以

$$a_{n+1}<a_n.$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛. 又由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=\pi$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}\pi\right)$条件收敛.

十一、【参考解析】：设$f_n(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$，

则

$$\lim_{x\to+\infty}f_{2n+1}(x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f_{2n+1}(x)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)=-\infty$$

因此存在$\eta\in(-\infty,+\infty)$，使得$f_{2n+1}(\eta)=0$，即

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0$$

当n为奇数时至少有一个实根.

容易得到$f_{2n+1}'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$.

如果$f_{2n+1}'\left(x_0\right)=0$，则$x_0<0$. 于是由泰勒公式可知，存在$\xi\in\left(x_0,0\right)$，使得

$$e^{x_0}=1+x_0+\frac{1}{2!}x_0^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x_0^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}\xi^{2n+1}$$

由于$f_{2n+1}'\left(x_0\right)=0$，所以$e^{x_0}=\frac{1}{(2n+1)!}\xi^{2n+1}$，因此$\xi>0$，与$\xi\in\left(x_0,0\right)$矛盾. 因此$f_{2n+1}'(x)\neq 0,\forall x\in R.$

由

$$\lim_{x\to\infty}f_{2n+1}'(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+x+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\right)=+\infty$$

可知$f_{2n+1}'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}>0$，因此$f_{2n+1}\left(x\right)$单调增加，则结论成立.