2005 年浙江省大学生数学竞赛试题

(数学、工科、文、专科类)

一、计算题

1、计算 $\int_{-1}^{1}|1-2x|\,\mathrm{d}x$.

2、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, x>0\\ ax+b, x\le 0\end{cases}$ 可导，求常数 a,b 的值.

3、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^{n}$.

4、计算 $\int\dfrac{\sin x}{3\cos x+4\sin x}\mathrm{d}x$.

5、求函数 $f(x)=|x|+|x-1|+|x-3|$ 的最小值.

6、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{x}\sin t\ln(1+t)\,\mathrm{d}t-\dfrac{x^{3}}{3}+\dfrac{x^{4}}{8}}{(x-\sin x)\left(e^{x^{2}}-1\right)}$.

7、计算 $\int_{0}^{x}\min\left(4,t^{4}\right)\mathrm{d}t$.

8、计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{2005}x}$.

9、设 $z=f(x-y,x+y)+g(x+ky)$， f,g 具有二阶连续偏导数，且 $g''\neq 0$. 如果 $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+2\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}\equiv 4f_{22}''$，求常数 k 的值.

二、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 的值.

三、证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

(1) $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^{3}$.

(2) $\tan x>x+\dfrac{x^{3}}{3}+\dfrac{2}{15}x^{5}+\dfrac{1}{63}x^{7}$.

四、设$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^2}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x, B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2+\cos^2 x}\mathrm{d}x,$

$$C=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{10(1+\sin^2 x)}{4x^2+\pi^2}\mathrm{d}x$$

试比较A,B,C的大小.

五、在某平地上向下挖一个半径为R的半球形池塘，若某点泥土的密度为$\rho=e^{\frac{r^2}{R^2}}$，其中r为此点离球心的距离，试求挖此池塘所作的功.

六、设$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n}$,
$n=1,2,3,\cdots$

（1）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（2）证明数列$\left\{x_n\right\}$单调减少.

（3）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\cdot\frac{1}{n}$的敛散性.

七、对下列$f(x)$，分别说明是否存在一个区间$[a,b],(a>0)$，使$\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=\{x\mid x\in[a,b]\}$，并说明理由.

（1）$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$　　（2）$f(x)=\frac{1}{x}$

（3）$f(x)=1-\frac{1}{x}$

八、证明对于任何连续函数$f\left(x\right)$，有

$$\max\left\{\int_{-1}^{1}\left|x-\sin^2 x-f(x)\right|\mathrm{d}x,\int_{-1}^{1}\left|\cos^2 x-f(x)\right|\mathrm{d}x\right\}\geq 1.$$

九、计算$\int_L\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，其中$L$为$|x|+|y|=1$正向一周.

十、设$f(x)$在$\left[-1,1\right]$上二阶导数连续，证明：

$$\int_{-1}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi).$$

2005 年浙江省大学生数学竞赛参考解答
(数学、工科、文、专科类)

一、计算题

1、**【参考解析】**: (文专类)去绝对值，令$1-2x=0$，得$x=\dfrac{1}{2}$，

于是原式$=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\,\mathrm{d}\,x+\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-2x)\,\mathrm{d}\,x$

$$=\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[x-x^2\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

2、**【参考解析】**: (文专类)函数在$x=0$处连续、可导，于是

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=b$$

因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以$b=1$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-b}{x}=a$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2(1+x)}\right)=-\frac{1}{2}$$

由$f(x)$在$x=0$处可导，$f_-'(0)=f_+'(0)$，即$a=-\dfrac{1}{2}$.

3、**【参考解析】**: (文专类) 由$f\left(x\right)=e^{\ln f\left(x\right)}$，则

原式$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{1+\sqrt[n]{2/3}}{2}\right)^n=3\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1+\sqrt[n]{2/3}}{2}-1\right)\right]^n$

所以问题转换为计算

$$a=\lim_{n\to\infty} n\ln\left[1+\left(\frac{1+\sqrt[n]{2/3}}{2}-1\right)\right]$$

由等价无穷小 $\ln\left(1+x\right)\sim x, a^{x}-1\sim x\ln a\left(x\to 0\right)$，得

$$a=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+\sqrt[n]{2/3}}{2}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[n]{2/3}-1}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\frac{\frac{1}{n}\ln\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}=\ln\sqrt{\frac{2}{3}}$$

所以原式 $=3\cdot e^{\ln\sqrt{\frac{2}{3}}}=3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}$.

4、**【参考解析】**:(文专、数学、工科类) **【思路一】**令 $\tan x=u$，

则 $x=\arctan u,\ \mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+u^{2}}$，所以

$$原式=\int\frac{\tan u}{4\tan u+3}\mathrm{d}x=\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{(3+4u)\left(1+u^{2}\right)}$$

对被积函数进行部分分解，得

$$\frac{u}{(4u+3)\left(u^{2}+1\right)}=\frac{3u+4}{25\left(u^{2}+1\right)}-\frac{12}{25(4u+3)}$$

所以

$$原式=\frac{3}{50}\ln\left(u^{2}+1\right)-\frac{3}{25}\ln(4u+3)+\frac{4}{25}\arctan u+C$$

$$=-\frac{3}{25}\ln|3+4\tan x|+\frac{3}{50}\ln\left(1+\tan^{2}x\right)$$

$$+\frac{4}{25}\arctan(\tan x)+C$$

【思路二】 $\sin x=A(4\sin x+3\cos x)+B(4\cos x-3\sin x)$

$$=(4A-3B)\sin x+(3A+4B)\cos x$$

$$\begin{cases}4A-3B=0\\3A+4B=0\end{cases}$$ 得 $A=\dfrac{4}{25},B=-\dfrac{3}{25}$，

$$\int\frac{\sin x}{3\cos x+4\sin x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{4}{25}-\frac{3}{25}\frac{4\cos x-3\sin x}{4\sin x+3\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|4\sin x+3\cos x|+C$$

5、**【参考解析】**：（文专类）当 $x\le 0$ 时，

$$f(x)=-x-(x-1)-(x-3)=4-3x,$$

最小值为 $f\left(0\right)=4$.

当 $0<x\le 1$ 时，$f(x)=x+1-x+3-x=4-x$，最小值为 $f\left(1\right)=3$.

当 $1<x\le 3$ 时，$f(x)=x+(x-1)+3-x=x+2$，最小值为 $f\left(1\right)=3$.

当 $x>3$ 时，$f(x)=x+(x-1)+(x-3)=3x-4$，最小值为 $f\left(3\right)=5$.

综上可得最小值为 3.

6、**【参考解析】**：（数学、工科类）由等价无穷小简化分母，然后应用洛必达法则与麦克劳林公式，得

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\ln(1+t)\,\mathrm{d}t-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}}{\frac{x^3}{6}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+x)-x^2+\frac{x^3}{2}}{\frac{5x^4}{6}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0\left(x^5\right)\right]\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+0\left(x^3\right)\right]\right.$$

$$\left.-x^2+\frac{x^3}{2}\right\}\Big/\frac{5x^4}{6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}+0\left(x^4\right)}{\frac{5x^4}{6}}=\frac{1}{5}$$

7、**【参考解析】**:（工科类）令 $4=t^4$，得$t=\pm\sqrt{2}$，于是

$$\min\left(4,t^4\right)=\begin{cases}4,t<-\sqrt{2},t>\sqrt{2}\\ t^4,-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\end{cases}$$

令$f\left(x\right)=\int_0^x \min\left(4,t^4\right)\mathrm{d}t$. 则

当$x<-\sqrt{2}$时，

$$f\left(x\right)=\int_0^{-\sqrt{2}}t^4\,\mathrm{d}t+\int_{-\sqrt{2}}^{x}4\,\mathrm{d}t=4\left(x+\sqrt{2}\right)-\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

当$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$时，$f\left(x\right)=\int_0^x t^4\,\mathrm{d}t=\frac{x^5}{5}$

当$x>\sqrt{2}$时，

$$f\left(x\right)=\int_0^{\sqrt{2}}t^4\,\mathrm{d}t+\int_{\sqrt{2}}^{x}4\,\mathrm{d}t=4\left(x-\sqrt{2}\right)+\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

8、**【参考解析】**:（数学类）令$x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{2005}x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^{2005}x}$$

所以原式$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\tan^{2005}x}+\frac{1}{1+\cot^{2005}x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

9、**【参考解析】**：（数学、工科类）令

$$x-y=u, x+y=v,\ x+ky=w\ ,$$

则 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+g',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f_1'+f_2'+kg'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''+f_{22}''+g''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-f_{11}''+f_{12}''-f_{21}''+f_{22}''+kg''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{11}''-f_{12}''-f_{21}''+f_{22}''+k^2g''$$

代入等式得$(k+1)^2g''=0$，所以$k=-1.$

二、**【参考解析】**：（文专、数学、工科类）

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot(1-\cos x)\right]=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\right]$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\right]=1$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$$

所以$f''(0)=1$.

三、【参考解析】: (1) (文专类) 令 $f(x)=\tan x-\left(x+\dfrac{1}{3}x^3\right)$,

$f'(0)=0$. 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-(1+x^2), f(0)=0$.

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-2x, f''(x)=0$$

$$\begin{aligned}f'''(x)&=2\left(\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}-1\right)\\&=2\frac{1+2\sin^2 x-(1-\sin^2 x)^2}{\cos^4 x}\\&=2\frac{\sin^2 x(4-\sin^2 x)}{\cos^4 x}>0,\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

所以 $f''(x)>0$，进而 $f'(x)>0, f(x)>0$. 即得

$$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3,\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(2)（工科类） 由(1) $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$

$$\begin{aligned}\left(\tan x\right)'&=1+\tan^2 x>1+\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)^2\\&=1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{x^6}{9}\end{aligned}$$

所以结论成立.

四、【参考解析】: （文专类）

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^2}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi$$

由于 $\dfrac{\sin^2 x}{x^2+\cos^2 x}<1$，所以

$$B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x\le\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,x=\pi$$

由当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\sin x}{x}<1$，所以

$$\frac{10(1+\sin^2 x)}{4x^4+\pi^2}>\frac{10\left(1+\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)}{4x^2+\pi^2}>\frac{10}{\pi^2}>1,$$

即$C=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{10(1+\sin^2 x)}{4x^2+\pi^2}\mathrm{d}\,x\ge\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,x=\pi$.

综上可知$B<A<C$.

五、【参考解析】：（数学、工科类）以半球球心为原点，竖直向上建立$O-xyz$空间直角坐标系，则球面方程为

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2},-R\le z\le 0,$$

于是密度为$\rho=e^{\frac{r^2}{R^2}}=e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}$，则对应于$(x,y,z)$位置的小体积$\mathrm{d}\,V$泥土提到地表面所做的功为

$$mgh=\rho\cdot\mathrm{d}\,V\cdot g\cdot(-z)=-e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}gz\,\mathrm{d}\,V$$

记半球体为Ω，则挖此池塘所作的功为

$$W=\iiint\limits_{\Omega}-e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}gz\,\mathrm{d}\,V$$

考虑球坐标系，令

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$$

$$0\le\theta\le 2\pi,\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi,0\le r\le R$$

则由三重积分的球坐标变换计算公式，得

$$W=-g\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R e^{\frac{r^2}{R^2}}\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi g\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{2}\int_0^R e^{\frac{r^2}{R^2}}\cdot r^2\,\mathrm{d}\left(r^2\right)$$

$$=-2\pi g\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{R^4}{2}=\frac{\pi g R^4}{2}$$

六、【参考解析】：(1)（文专类）由题意可知

$$x_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n^2+k},n=1,2,\cdots,$$

并且$\frac{2n+1}{n^2+2n}\le x_n\le\frac{2n+1}{n^2}$，所以由夹逼定理可得

$$\lim_{x\to\infty}x_n=0.$$

(2) $x_{n+1}=\sum_{k=0}^{2(n+1)}\frac{1}{n^2+k}$

$$=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(n+1)^2+k}+\frac{1}{(n+1)^2+2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2+2n+2}$$

$$x_n-x_{n+1}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{2n+1}{(n^2+k)\left((n+1)^2+k\right)}-\left(\frac{1}{n^2+4n+2}+\frac{1}{n^2+4n+3}\right)$$

$$>\frac{(2n+1)(2n+1)}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}-\left(\frac{1}{(n^2+2n)}\frac{1}{(n^2+4n+1)}\right)$$

$$=\frac{(2n+1)(2n+1)}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)}\ge 0$$

所以数列$\left\{x_n\right\}$单调减少.

(3)（数学、工科类）由于

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\cdot\frac{1}{n} &= -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} \\
&\quad +\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13} \\
&\qquad -\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\cdots \\
&= (-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+(-1)^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) \\
&\quad +(-1)^3\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)+\cdots
\end{aligned}
$$

引进数列

$$
u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right],
$$

并记 $a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$，则由(1)(2)得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递减，于是由莱布尼兹判别法可知 $\sum u_k$ 收敛. 设原级数的部分和为 S_n， $\sum u_k$ 的部分和为 M_N，则有

$$
\left|S_n-M_N\right|\leqslant\left|M_{N+1}-M_N\right|=\left|u_{N+1}\right|\to 0\quad(N\to\infty)
$$

因此 $S_n-M_N\to 0(n\to\infty)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}M_N$，

因此原级数收敛.

七、【参考解析】: (文专、数学、工科类) 欲使 $f[a,b]=[a,b]$，必有 $f(a)=a,f(b)=b$.

（1）令 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}=x$，则

$$
x^2-3x+2=0\text{，即}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2
$$

解得 $x_1=1,x_2=2$，所以存在区间 $[1,2]$ 使 $f[1,2]=[1,2]$.

(2) $f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上严格单调减少，取$\frac{1}{a}=b,\frac{1}{b}=a$，所以存在区间

$$\left[a,\frac{1}{a}\right],(0<a<1)\text{使}f\left[a,\frac{1}{a}\right]=\left[a,\frac{1}{a}\right]$$

(3) 不存在，令$f(x)=1-\frac{1}{x}=x$，即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$，此方程无实数解，故不存在区间$[a,b],(a>0)$，使得$f[a,b]=[a,b]$.

八、【参考解析】: (数学类)

左边$\geq\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}\left|x-\sin^2x-f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left|\cos^2x-f(x)\right|\mathrm{d}x\right)$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1}x-\sin^2x-f(x)-\cos^2x+f(x)\mid dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x-1|\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=1=\text{右边}.$$

九、【参考解析】：(工科类)

令$P=\frac{y}{3x^2-2xy+3y^2},Q=-\frac{x}{3x^2-2xy+3y^2}$，则

可得$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3\left(x^2-y^2\right)}{\left(3x^2-2xy+3y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即积分与路径无关，于是取积分路径为

$$L_1:x=1,y:-1\to1,L_2:y=1,x:1\to-1$$
$$L_3:x=-1,y:1\to-1,L_4:y=-1,x:-1\to1$$

于是积分为

$$原式=\int_{-1}^{1}\frac{-\mathrm{d}y}{3-2y+3y^2}+\int_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x+3}$$

$$+\int_{1}^{-1}\frac{\mathrm{d}y}{3+2y+3y^2}+\int_{-1}^{1}\frac{-\mathrm{d}x}{3x^2+2x+3}$$

$$=-2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{3-2y+3y^2}-2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x+3}=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

十、【参考解析】：（数学类）因为

$$(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$$

$$(xf(x))''=2f'(x)+xf''(x)$$

于是

$$xf(x)=0+f(0)x+\left[2f'\left(\xi_x\right)+\xi_x f''\left(\xi_x\right)\right]\frac{x^2}{2!}$$

$$\int_{-1}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left\{f(0)x+\left[2f'\left(\xi_x\right)+\xi_x f''\left(\xi_x\right)\right]\frac{x^2}{2!}\right\}\mathrm{d}x$$

由积分中值定理

$$=2f'(\xi)+\xi f''(\xi)$$

于是得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx=\left[2f'(\xi)+\xi f''(\xi)\right]\frac{x^3}{6}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{\xi}{3}f''(\xi),\xi\in[-1,1].$$