# 2013 年浙江省高等数学 (微积分) 数学、工科类竞赛试题

#### 一、计算题

1、求 
$$\lim_{n o +\infty}\sum_{k=1}^nrac{k-\sin^2k}{n^2}\Big[\ln\Big(n+k-\sin^2k\Big)-\ln n\Big]$$
.(数

### 学、工科类)

2、已知异面面直线 
$$L_1: rac{x-5}{4} = rac{y-1}{-3} = rac{z+1}{1}$$
与 
$$L_2: rac{x+2}{-2} = rac{y-2}{9} = rac{z-4}{2} \,,$$

- (1) 求公垂线L的方程. (数学类)
- (2) 求两直线间的距离. (工科类)

3、求积分 
$$\int \frac{\sin{\left(x+a\right)}}{\sin{\left(x+b\right)}} \mathrm{d}\,x$$
 ,其中为  $a,b$  常数. (数学、工科类)

**4、**设
$$f\left(x
ight)=e^{x}\cos x$$
,证明 $\sum_{n=0}^{+\infty}rac{f^{\left(n
ight)}\left(x
ight)}{2^{n}}$ 收敛并求和函数.

## (数学类)

5、设某均匀物体由半径为 1 的半球体下接一个高为h的正圆锥体而成,已知该物体的的重心位于球心,求h的值。(工科类)

6、已知二元函数
$$u\left(x,y\right)$$
满足 $\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ,且 $u\Big|_{x=0}=y^{2},u\Big|_{y=1}=\cos x$ ,求 $u\Big(x,y\Big)$ 的表达式。(数学、工科类)

二、设
$$f_n(x) = x^n \ln x$$
,求

$$(1)\lim_{n o +\infty}rac{1}{n!}f_n^{ig(nig)}(rac{1}{n})$$
.(数学类)

(2) 
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} f_n^{(n-1)}(\frac{1}{n})$$
 (工科类)

三、设函数 f(x) 在闭区间 $\begin{bmatrix}0,1\end{bmatrix}$ 上连续,在开区间 $\begin{bmatrix}0,1\end{bmatrix}$ 上可导,f(0)=f(1)=0,证明:  $\forall x\in \begin{bmatrix}0,1\end{bmatrix}$ ,  $\exists \xi\in \begin{bmatrix}0,1\end{bmatrix}$ , 使得  $f'(\xi)=f(x)$ . (数学类)

四、证明: 
$$f(x) = \frac{1-x^{\alpha}}{1-x^{\beta}}(\alpha > \beta > 0)$$
在 $(0,1)$ 上严格单调

## 增.(数学、工科类)

五、设
$$x_1=1,\sin x_n=x_n\cos x_{n+1},x_{n+1}\in\left[0,rac{\pi}{2}
ight],$$

$$n=1,2,\cdots$$
. 证明:

(1) 
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$
 ; (2) 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$  收敛.(数学类)

**六、** 计算 
$$\int_0^{+\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{\left(2n\right)!!}) (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n \left(n+1\right)!}) \, \mathrm{d}\, x$$
 .

### (工科类)

七、已知
$$\sin x = x \cos y, x, y \in \left[0, rac{\pi}{2}
ight]$$
,证明 $y < x < 2y$  .

## (工科类)

(全) 考研克赛数学

# 2013 年浙江省高等数学 (微积分) 数学、工科类竞赛试题参考解答

#### 一、计算题

1、【参考解答】: 记
$$f(x) = x \ln(1+x)$$
,取

$$x_k = \frac{k-1}{n}, \Delta x_k = \frac{1}{n}, \ \ x_{k-1} < \xi_k = \frac{k-\sin^2 k}{n} < x_k$$

$$\sum_{k=1}^n rac{k-\sin^2 k}{n^2} \Big[ \ln \Big( n+k-\sin^2 k \Big) - \ln n \Big] = \sum_{k=1}^n f\Big( \xi_k \Big) \Delta x_k$$

原式 = 
$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{1}{4}$$
.

2、【参考解答】(1) 由于 $ec{l}_1 imesec{l}_2=-5ig(3,2,-6ig)$ ,公垂线L方

向向量可取为 $ec{l}=ig(3,2,-6ig)$ . 过公垂线L与 $L_1$ 的平面 $\pi_1$ ,

其法向量为  $ec{n}_1=ec{l}_1 imesec{l}=ig(16,27,17ig)$  .

取
$$L_1$$
上点 $M_1ig(5,1,-1ig)$ ,则方程为 $16ig(x-5ig)+27ig(y-1ig)+17ig(z+1ig)=0$ 

即 $\pi_1:16x+27y+17z=90$ .

同理可得过公垂线  $L 与 L_2$  的平面  $\pi_2$  的方程为:

58x+6y+31z=20,所以公垂线L的方程为

$$\begin{cases} 16x + 27y + 17z = 90 \\ 58x + 6y + 31z = 20 \end{cases}$$

(2) 过 $L_1$  且平行于 $L_2$  的平面 $\pi$  过点 $M_1$   $\left(5,1,-1\right)$  且法向量为

$$ec{n}=ec{l}_{_{\! 1}} imesec{l}_{_{\! 2}}=-5ig(3,2,-6ig)$$
 ,

所以
$$\pi$$
方程为 $3(x-5)+2(y-1)-6(z+1)=0$ ,即 $3x+2y-6z-23=0$ .

因平面  $\pi$  平行于  $L_2$  ,故所求距离 d 即为  $L_2$  到  $\pi$  的距离,即为  $M_2\left(-2,2,4\right)$  到  $\pi$  距离

$$\mathbf{d} = \frac{\left| 3\left(-2\right) + 2 \times 2 - 6 \times 4 - 23 \right|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + \left(-6\right)^2}} = 7$$

3、【参考解答】由三角函数恒等变换公式,得

$$\sin\!\left(x+a\right) = \sin\!\left(x+b\right) \cos\!\left(a-b\right) + \cos\!\left(x+b\right) \sin\!\left(a-b\right)$$

原积分 = 
$$\cos(a-b)x + \sin(a-b)\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx$$
  
=  $\cos(a-b)x + \sin(a-b)\ln|\sin(x+b)| + c$ 

4、【参考解答】  $f'(x) = \sqrt{2}e^x \cos(x + \pi/4)$ ,所以

$$f^{\left(n
ight)}ig(xig) = \left(\sqrt{2}
ight)^n e^x \cosig(x+n\pi \ /\ 4ig)$$

由于 $\left|f^{(n)}\left(x
ight)
ight|\leq (\sqrt{2})^n e^x$ ,所以

$$\sum_{n=0}^{+\infty} rac{\left|f^{\left(n
ight)}\left(x
ight)
ight|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} rac{e^x}{(\sqrt{2})^n}$$

收敛,且

$$egin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} rac{f^{\left(n
ight)}\!\left(x
ight)}{2^n} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{+\infty} rac{e^x e^{ix} e^{in\pi/4}}{(\sqrt{2})^n} \ &= \operatorname{Re}\!\left[e^{x\left(1+i
ight)}\!\left(1+i
ight)
ight] = e^x \left(\cos x - \sin x
ight) \end{aligned}$$

5、【参考解答】以球心为坐标坐标原点,半球体与正圆锥体的公共部份为xOy平面,则半球体

$$\Omega_1 = \left\{ \left(x,y,z
ight) \middle| x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 
ight\}$$
,正圆锥体 $\Omega_2 = \left\{ \left(x,y,z
ight) \middle| x^2 + y^2 \leq \left(1 + rac{z}{h}
ight)^2, -h \leq z \leq 0 
ight\}$ .

记 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,则重心位于球心即为 $z_c = 0$ ,即

$$\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}\,V = \iiint_{\Omega_1}z\,\mathrm{d}\,V + \iiint_{\Omega_2}z\,\mathrm{d}\,V = 0$$
 即  $\pi\int_0^1z\Big(1-z^2\Big)\mathrm{d}\,z + \pi\int_{-h}^0z\Big(1+\frac{z}{h}\Big)^2\,\mathrm{d}\,z$  
$$= \pi\Big(1\left/\left.4-h^2\right.\left/\left.12\right.\right) = 0$$
 所以  $h = \sqrt{3}$ .

6、【参考解答】由
$$u_x+u=cig(xig)$$
得 $e^xig(u_x+uig)=e^xcig(xig)$ ,即 $\Big(e^xu\Big)_x=e^xcig(xig)$ .于是 $e^xu=\int e^xcig(xig)dx+gig(yig)$ ,

得 $u = f(x) + e^{-x}g(y)$ , 其中f,g为为任意函数.

由
$$uig|_{x=0}=y^2,uig|_{y=1}=\cos x$$
,得 $fig(0ig)+gig(yig)=y^2$ ,即 $gig(yig)=y^2-fig(0ig)$   $fig(xig)+e^{-x}gig(1ig)=\cos x$ ,得 $fig(xig)=\cos x-e^{-x}gig(1ig)$  所以 $u=\cos x+e^{-x}ig(y^2-1ig)$ .

二、【参考解答】(1)  $f_n'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1}$ ,

$$\begin{split} \left(f_{n}(x)\right)^{(n)} &= \left(nx^{n-1}\ln x + x^{n-1}\right)^{(n-1)} \\ &= n(f_{n-1}(x))^{(n-1)} + \left(n-1\right)! \\ &\frac{1}{n!}(f_{n}(x))^{(n)} = \frac{1}{\left(n-1\right)!}(f_{n-1}(x))^{(n-1)} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{1!}f_{1}'\left(x\right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{split}$$

记
$$x_n = f_n^{\left(n
ight)} \Big(rac{1}{n}\Big)rac{1}{n!} = \sum_{k=1}^n rac{1}{k} - \ln n$$
 ,则

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{1}{x} \mathrm{d}\, x < 0$$

$$\begin{split} & \boxplus x_n > \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}\, x + \frac{1}{n} - \ln n \\ & = \int_1^n \frac{1}{x} \mathrm{d}\, x + \frac{1}{n} - \ln n = \frac{1}{n} \, , \end{split}$$

即 $\left\{ x_{n}\right\}$ 单调减有下界,所以 $\left\{ x_{n}\right\}$ 收敛 所以

$$\lim_{n o +\infty} f_n^{ig(nig)}\Big(rac{1}{n}\Big)rac{1}{n!}=c$$
 (欧拉常数).

(2) 
$$f_n'(x) = nx^{n-1} \ln x + x^{n-1}$$

$$egin{align} f_n^{(n-1)}ig(xig) &= \Big(nx^{n-1}\ln x + x^{n-1}\Big)^{(n-2)} \ &= nf_{n-1}^{ig(n-2ig)}ig(xig) + xig(n-1ig)! \ \end{cases}$$

$$rac{1}{n\,!}f_n^{(n-1)}ig(xig)=rac{1}{ig(n-1ig)!}f_{n-1}^{ig(n-2ig)}ig(xig)+rac{x}{n}$$

$$=rac{1}{2!}f_{2}^{\;\prime}\left(x
ight)+\sum_{k=3}^{n}rac{x}{k}=x(\ln x+\sum_{k=2}^{n}rac{1}{k})$$

$$f_n^{ig(n-1ig)}iggl(rac{1}{n}iggr)rac{1}{n\,!}=rac{1}{n}(\sum_{k=2}^nrac{1}{k}-\ln n)$$

而 
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n < \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx - \ln n = 0$$
,又有

$$\sum_{k=2}^{n}rac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k}^{k+1}rac{1}{x}dx+rac{1}{n}-\ln n=rac{1}{n}-\ln 2$$

所以 
$$\lim_{n \to +\infty} f_n^{(n-1)} \left( \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} (\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln n) = 0$$
 .

三、【参考解答】 
$$\forall x \in ig(0,1ig)$$
 , 若 $fig(xig) = 0$  则由罗尔定理可

知, 
$$\exists \xi \in (0,1)$$
,使得 $f'(\xi) = 0 = f(x)$ .

若
$$f(x) \neq 0$$
,则考虑函数 $g(t) = f(t) - tf(x)$ ,则

$$g\left(x\right)g\left(1\right)=-\left(1-x\right)f^{2}\left(x\right)<0$$

(A) 考研竞赛数学

四、【参考证明】 f(x) 严格单调增等价于

$$h(t) = \frac{1-t^{\lambda}}{1-t} (\lambda = \frac{\alpha}{\beta} > 1)$$

的严格单调增.记 $g(t) = 1 - t^{\lambda}$ ,则

$$g''ig(tig) = -\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2} < 0$$
 ,

从而g(t)是凸函数,所以

$$egin{align} orall t_1 < t_2 < 1, t_2 = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 \cdot 1, \ \lambda_1 = rac{1-t_2}{1-t_1} > 0, \lambda_2 = rac{t_2-t_1}{1-t_1} > 0 \ \end{pmatrix}$$

使得  $g\left(t_{2}\right)>\lambda_{1}g\left(t_{1}\right)+\lambda_{2}g\left(1\right)=rac{1-t_{2}}{1-t_{1}}g\left(t_{1}\right)$ ,即

$$rac{g\left(t_{2}
ight)}{1-t_{2}}\!>\!rac{g\left(t_{1}
ight)}{1-t_{1}}$$
 ,

从而 $h\left(t_{1}\right) < h\left(t_{2}\right)$ ,所以 $f\left(x\right)$ 严格单调增.

五、【参考证明】由微分中值定理 得 $\exists \xi \in ig(0,1ig)$ 使

$$\sin 1 - \sin 0 = \cos \xi = \cos x_2 \ \text{,}$$

于是得 $x_2 = \xi < 1$ . 一般地

$$\sin x_n - \sin 0 = x_n \cos \xi = x_n \cos x_{n+1}$$

得 $x_{n+1} = \xi < x_n < 1$ . 又

$$\sin x_n > x_n - \frac{x_n^3}{6}, \cos x_{n+1} < 1 - \frac{x_{n+1}^2}{2} + \frac{x_{n+1}^4}{24}$$

所以
$$x_n - rac{x_n^3}{6} < x_n \left[ 1 - rac{x_{n+1}^2}{2} + rac{x_{n+1}^4}{24} 
ight]$$
,即

$$x_{n+1}^2 - rac{x_{n+1}^4}{12} < rac{x_n^2}{3}$$
 .

因为 $x_n < 1$ ,所以

$$\left|x_{n+1}^2\left(1-rac{1}{12}
ight) < x_{n+1}^2\left(1-rac{x_{n+1}^2}{12}
ight) < rac{x_n^2}{3}$$

于是
$$x_{n+1}<rac{2x_n}{\sqrt{11}}$$
,即 $x_n\leq (rac{2}{\sqrt{11}})^{n-1}$ ,所以

$$\lim_{n o +\infty} x_n = 0$$

且级数
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{\sqrt{11}})^{n-1}$$
 收敛.

六、【参考解答】令 $t=x^2$ ,则

原积分 = 
$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n n!} \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{4^n (n+1)!} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-0.5t} (e^{0.25t} - 1) \frac{4}{t} dt$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} (e^{-0.25t} - e^{-0.5t}) \frac{1}{t} dt$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} dx \int_{0.25}^{0.5} e^{-xy} dy$$

$$= 2 \int_{0.25}^{0.5} dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = 2 \int_{0.25}^{0.5} \frac{1}{y} dy = 2 \ln 2$$

七、【参考证明】由中值定理  $\sin x = x \cos \xi, \xi \in (0,x)$ ,得  $\cos \xi = \cos y$ ,即  $y = \xi < x$ .又由

$$\sin x = 2\sinrac{x}{2}\cosrac{x}{2} < x\cosrac{x}{2}$$
 ,

得  $\cos y < \cos \frac{x}{2}$ . 由于  $\cos x$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  中严格单调减,所以

$$rac{x}{2} < y$$
,即 $x < 2y$ ,所以 $y < x < 2y$ .