一、计算题（每小题14分，满分70分）

1、 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

2、 求不定积分，其中n为正整数.

$$\int(1+x^n)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\mathrm{d}x.$$

3、 求定积分

$$\int_0^1\frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2+\left(x^2+x\right)^2}\mathrm{d}x.$$

4、 设椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的线密度为$\rho(x,y)=|xy|$，求椭圆的质量.

5、 求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2-1}{n\cdot 2^n}$的和.

二、简答题（每小题20分，满分80分）

6、 设$s(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

(1) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{s(x)}{x}$;

(2) 问$y=s(x)$是否有渐近线，并说明理由.

7、 设$a>0$是常数，$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是连续函数. 证明:

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^z\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ =&\frac{1}{2}\int_0^a(a-x)^2f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

8、 设f在$(0,+\infty)$上连续，且$\forall a>0,b>0$，有

$$\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^b f(x)\mathrm{d}x.$$

求$f(x)$的表达式.

9、 设连续函数$f(x):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$满足$\forall x,y\in\mathbf{R}^+$，

$$\lim_{n\to+\infty}[f_n(x)-f_n(y)]=0$$

其中$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$. 试问：是否存在$x_0\in(0,+\infty)$，使得

$$\begin{aligned}&\forall x\in(0,x_0),f(x)>x;\\&\forall x\in(x_0,+\infty),f(x)<x.\end{aligned}$$

一、计算题（每小题14分，满分70分）

1、 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

【参考解答】：基于海涅定理和等价无穷小

$$\ln(1+x)\sim x,\sin x\sim x$$
$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}(x\to 0)$$

考虑如下极限式的极限，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}n^2\ln\left(\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)\\=&\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x+x\sin x-1}{x^2}\\=&\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{x^2}\\=&-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由极限计算的对数法，得

$$\text{原式}=e^{1/2}=\sqrt{e}.$$

2、 求不定积分，其中n为正整数.

$$\int(1+x^n)^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}\mathrm{d}x.$$

【参考解答】：分子分母同时除以x^{n+1}，得

$$\begin{aligned}\text{原式}=&\int\frac{\frac{1}{x^{n+1}}}{\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{-(1+1/n)}}\mathrm{d}x\\=&\int\frac{-\frac{1}{n}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{(1+1/n)}}=\left(\frac{1}{x^n}+1\right)^{-\frac{1}{n}}+C\\=&x(1+x^n)^{-\frac{1}{n}}+C\end{aligned}$$

3、 求定积分

$$\int_0^1\frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2+\left(x^2+x\right)^2}\mathrm{d}x.$$

【参考解答】：根据被积函数结构，考虑分子分母同除以$(x+3)^2$，得

$$\begin{aligned}\text{原式}=&\int_0^1\frac{\frac{x^2+6x+3}{(x+3)^2}}{1+\left(\frac{x^2+x}{x+3}\right)^2}\mathrm{d}x\\=&\int_0^1\frac{\mathrm{d}\frac{x^2+x}{x+3}}{1+\left(\frac{x^2+x}{x+3}\right)^2}\\=&\arctan\left(\frac{x^2+x}{x+3}\right)\Bigg|_0^1\\=&\frac{\pi}{2}-\arctan 2=\arctan\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4、设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的线密度为$\rho(x,y)=|xy|$，求椭圆的质量.

【参考解答】：由密度函数关于两个变量都为偶函数且曲线关于两个坐标轴都对称，故

$$M=\int_L |xy|\mathrm{d}s=4\int_{L_1} xy\mathrm{d}s$$

其中曲线L_1的参数方程为

$$x=5\cos t, y=4\sin t, 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$$

故由对弧长的曲线积分的直接参数方程计算法，由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{16+9\sin^2 t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}M&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 20\sin t\cos t\sqrt{16+9\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{40}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16+9\sin^2 t}\mathrm{d}\left(16+9\sin^2 t\right)\\&=\frac{40}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16+9\sin^2 t}\mathrm{d}\left(16+9\sin^2 t\right)\\&=\left[\frac{80}{27}\left(16+9\sin^2 t\right)^{3/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4880}{27}\end{aligned}$$

5、求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n\cdot 2^n}$的和.

【参考解答】：由级数的线性运算性质，得

$$\text{原式}=\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

令$x=\frac{1}{2}$构建两个幂级数，收敛区间都为$(-1,1)$. 在收敛区间内，由幂级数的解析性质，

$$\begin{aligned}&S_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n=x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\\&=x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'\\&=x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\\&\Rightarrow S_1\left(\frac{1}{2}\right)=2\\&S_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t\\&=-\ln(1-x)\\&\Rightarrow S_2\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2\end{aligned}$$

故得原式$=2-\ln 2$.

二、简答题（每小题20分，满分80分）

6、 设$s(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$.

(1) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{s(x)}{x}$；

(2) 问$y=s(x)$是否有渐近线，并说明理由.

【参考解答】：**(1)** 设$n\pi\le x\le(n+1)\pi$，则

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\le s(x)\le\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t$$

由于$|\cos t|$是周期为π的周期函数，故有

$$\begin{aligned}&\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\\&=n\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2n\\&\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|\mathrm{d}t\\&=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=2n+2\end{aligned}$$

于是可得

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{s(x)}{x}\le\frac{2n+2}{n\pi}$$

故由夹逼准则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) 由$s(x)$的定义式可知，函数在全体实数范围内连续，故无铅直渐近线；又由(1)可知

$$\lim_{x\to+\infty}s(x)=\infty$$

故无水平渐近线. 由(1)，考察极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}x\right]$$

取子变化过程$x_n=n\pi,y_n=n\pi+1$，则可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{x_n}|\cos t|\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}x_n\\&=\int_0^{n\pi}|\cos t|\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}n\pi\\&=2n-\frac{2}{\pi}n\pi=0\\&\int_0^{y_n}|\cos t|\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}y_n\\&=\int_0^{n\pi+1}|\cos t|\mathrm{d}t-\frac{2}{\pi}(n\pi+1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2n + \int_{n\pi}^{n\pi+1} |\cos t| \mathrm{d}t - 2n - \frac{2}{\pi} \\
&= \sin 1 - \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

故极限不存在. 类似可得

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{s(x)}{x} = -\frac{2}{\pi}$$

也有$s(x) + \frac{2}{\pi}x$当$x \to -\infty$极限不存在，故$y = s(x)$不存在渐近线.

7、 设$a > 0$是常数，$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$是连续函数. 证明：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^a \int_0^z \int_0^y f(x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

【参考解答】：积分区域用不等式可以描述为

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 \le z \le a \\ 0 \le y \le z \\ 0 \le x \le y \end{matrix} \right\}$$

交换积分次序，积分区域可以描述为

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 0 \le x \le a \\ x \le z \le a \\ x \le y \le z \end{matrix} \right\}$$

于是相应的累次积分表达式为

$$
\begin{aligned}
xx &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_x^a \mathrm{d}z \int_x^z f(x) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^a f(x) \mathrm{d}x \int_x^a (z-x) \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

8、 设f在$(0, +\infty)$上连续，且$\forall a > 0, b > 0$，有

$$\int_a^{ab} f(x) \mathrm{d}x = \int_1^b f(x) \mathrm{d}x.$$

求$f(x)$的表达式.

【参考解答】：由于右侧积分与a无关，所以对已知等式两端关于a求导，得

$$bf(ab) - f(a) = 0$$

令$a = 1$，得$bf(b) = f(1)$. 由变量符号描述的无关性和b的任意性，得

$$f(x) = \frac{f(1)}{x}.$$

9、 设连续函数$f(x) : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$满足$\forall x, y \in \mathbf{R}^+$，

$$\lim_{n \to +\infty} [f_n(x) - f_n(y)] = 0$$

其中$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$. 试问：是否存在$x_0 \in (0, +\infty)$，使得

$$\forall x \in (0, x_0), f(x) > x;$$
$$\forall x \in (x_0, +\infty), f(x) < x.$$

【参考解答】：设$f(x) = \dfrac{x}{2}$.假设$f_1(x) = f(x)$，则代入递推式得

$$f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x)}{2} = \cdots = \frac{x}{2^n}$$

显然函数满足条件

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}[f_n(x) - f_n(y)]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x-y}{2^n} = 0\end{aligned}$$

由于在$(0, +\infty)$内，恒有

$$f(x) - x = -\frac{x}{2} < 0$$

即结论不是对于所有的函数 都成立！