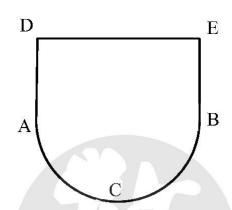
2019 年浙江省高等数学(微积分)竞赛 工科类试题

- 一、计算题(每小题 14 分,满分 70 分)
- 1、求极限 $\lim_{n o\infty} an^nigg(rac{\pi}{4}+rac{1}{n}igg).$
- 2、求不定积分 $\int rac{2x+\sin 2x}{\left(\cos x-x\sin x
 ight)^2}\mathrm{d}\,x.$
- 3、求定积分 $\int_0^\pi \cos \left(\sin^2 x\right) \cos x \,\mathrm{d}\,x$.
- **4、**如图,将一根铁丝折成两部分,一部分围成一个矩形 ABED 的三条边 AD, DE, EB ,另一部分围成一个半圆 ACB ,矩形和半圆的面积之和为 1,求铁丝长度的最小值.



5、定义在 $\left[-1,1\right]$ 上的函数

$$f(x) = egin{cases} rac{1}{2^{n+1}}, & rac{1}{2^{n+1}} < x \leq rac{1}{2^n}, \ 0, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

讨论fig(xig)的间断点,并判断其类型.

二、(满足 20 分)求积分

$$\int \int_D \Bigl(5y^3+x^2+y^2-2x+y+1\Bigr) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$
 ,

其中 $D:1\leq (x-1)^2+y^2\leq 4$ 且 $x^2+y^2\leq 1$

三、(满足 20 分)讨论级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$ 的敛散性,其中p > 0.

四、(满足 20 分)设由方程 $x+y+z=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$ (*) 确定函数 $z=z\left(x,y\right)$.

(1)计算
$$(y-z)rac{\partial z}{\partial x}+(z-x)rac{\partial z}{\partial y}$$
 ;

(2)如果以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为法向量的平面与(*)交为圆,求此法向量.

五、(满足 20 分)设f(x)在[0,1]上有连续的导函数,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \left|f\bigg(\frac{k}{n}\bigg)-f\bigg(\frac{2k-1}{2n}\bigg)\right| = \frac{1}{2}(f(1)-f(0))\,.$$

2019 年浙江省高等数学(微积分)竞赛 经管类试题

- 一、计算题(每小题 14 分,满分 70 分)
- 1、求极限 $\lim_{x \to 1^-} \ln x \ln(1-x)$.
- 2、求不定积分 $\int \frac{2x + \sin 2x}{\left(\cos x x \sin x\right)^2} \mathrm{d} x$.
- 3、求定积分 $\int_0^{rac{\pi}{4}} rac{\sin heta \cos heta}{\left(\cos heta + \sin heta
 ight)^2} \mathrm{d} heta.$
- **4、**求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ 的和.
- ABED的三条边AD,DE,EB,另一部分围成一个矩形 ACB,矩形和半圆的面积之和为 1,求铁丝长度的最小值。

2019 年浙江省高等数学(微积分)竞赛 工科类试题参考解答

一、计算题

1、【参考解析】:由三角等式 $an (x+y) = rac{ an x + an y}{1 - an x an y}$,

得
$$\lim_{n o \infty} an^n \left(rac{\pi}{4} + rac{1}{n}
ight) = \lim_{n o \infty} \left(rac{1 + anrac{1}{n}}{1 - anrac{1}{n}}
ight)^n$$
 . 由幂指函数

转换为指数函数 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$,并由等价无穷小 $an x\sim xig(x o 0ig)$,问题转换为计算

$$egin{align*} &\lim_{n o\infty} n\cdot\lnrac{1+ anrac{1}{n}}{1- anrac{1}{n}} \ &=\lim_{n o\infty}rac{\ln\left(1+ anrac{1}{n}
ight)}{rac{1}{n}}-\lim_{n o\infty}rac{\ln\left(1- anrac{1}{n}
ight)}{rac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{-\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

n

$$=\lim_{n o\infty}rac{\dfrac{1}{n}-\lim_{n o\infty}rac{-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=2$$

所以
$$\lim_{n o\infty} an^n\left(rac{\pi}{4}+rac{1}{n}
ight)=e^2$$
 .

2、【参考解析】: 改写表达式凑微分,得

(3) 考研竞赛数学

$$F(x) = \int \frac{2x + \sin 2x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx = 2\int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$$

分子分母同时除以 $\cos^2 x$,得

$$egin{aligned} F\left(x
ight) &= 2\intrac{x\sec^2x+ an x}{\left(1-x an x
ight)^2}\mathrm{d}x \ &= 2\intrac{\mathrm{d}(x an x)}{\left(1-x an x
ight)^2} = rac{2}{1-x an x} + C \end{aligned}$$

原式 =
$$\int_0^\pi \cos(\sin^2 t)(-\cos t) dt$$

= $-\int_0^\pi \cos(\sin^2 x)(\cos x) dx$

即 $2\int_0^\pi \cos\left(\sin^2x\right)\cos x\,\mathrm{d}\,x=0$,即

$$\int_0^\pi \cos \left(\sin^2 x\right) \cos x \, \mathrm{d}\, x = 0.$$

【思路二】直接令 $\sin x = t$,则

原式 =
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\sin^2 x\right) d\sin x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(\sin^2 x\right) d\sin x$$

= $\int_0^1 \cos\left(t^2\right) dt + \int_1^0 \cos\left(t^2\right) dt$
= $\int_0^1 \cos\left(t^2\right) dt - \int_0^1 \cos\left(t^2\right) dt = 0$

4、【参考解析】: 设AD=x,DE=yig(x>0,y>0ig),则

矩形和半圆面积之和为 $xy+rac{\pi y^2}{8}=1$,目标为

$$f(x,y)=2x+y+rac{\pi y}{2}$$
 .

于是令
$$Lig(x,y,\lambdaig)=2x+y+rac{\pi y}{2}+\lambdaigg(xy+rac{\pi y^2}{3}-1igg)$$

令
$$egin{cases} L_x'=2+\lambda y=0 \ L_y'=1+rac{\pi}{2}+\lambdaigg(x+rac{\pi y}{4}igg)=0$$
,由第一、第二个方程消 $L_\lambda'=xy+rac{\pi y^2}{8}-1=0 \end{cases}$

去 $oldsymbol{\lambda}$,得 $oldsymbol{y}=2x$,代入第三个方程得 $\dfrac{\pi x^2}{2}+2x^2-1=0$,

因为x>0,所以 $x=\sqrt{rac{2}{4+\pi}}$,于是 $y=2\sqrt{rac{2}{4+\pi}}$.于是

由最值的存在性,当 $x=\sqrt{rac{2}{4+\pi}},y=2\sqrt{rac{2}{4+\pi}}$ 时,铁丝最

小长度为

$$f_{\min}\left(x,y
ight) = 4\sqrt{rac{2}{4+\pi}} + \pi\sqrt{rac{2}{4+\pi}} = \sqrt{2(4+\pi)}$$
 .

5、【参考解析】: f(x)可能的间断点为 $x=rac{1}{2^n}$,由于

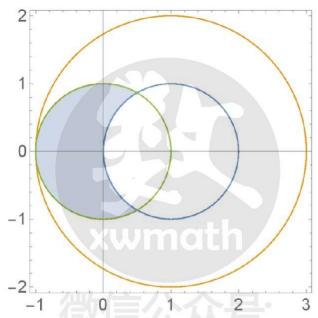
$$\lim_{x o\left(rac{1}{2^n}
ight)^{^+}}f(x)=rac{1}{2^n}, \ \lim_{x o\left(rac{1}{2^n}
ight)^{^-}}f(x)=rac{1}{2^{n+1}}$$

所以
$$\lim_{x o \left(\frac{1}{2^n}\right)^+} f(x)
eq \lim_{x o \left(\frac{1}{2^n}\right)^-} f(x)$$
,即 $x = \frac{1}{2^n}$ 为第一类跳跃

间断点.

二、【参考解析】: 积分区域如下图

(3) 考研竞赛数学



交点为 $x=rac{1}{2},y=-rac{\sqrt{3}}{2};x=rac{1}{2},y=rac{\sqrt{3}}{2}$.积分区域关于

x 轴对称,所以由二重积分偶倍奇零的计算性质,得

原积分=
$$\iint_D \left(x^2+y^2-2x+1\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

考虑二重积分极坐标计算法,令 $x=r\cos heta,y=r\sin heta$,两个小圆的方程为 $r=1,r=2\cos heta$,所以积分为

原积分
$$=2\int_{rac{\pi}{3}}^{rac{\pi}{2}}\mathrm{d}\, heta\int_{2\cos heta}^{1}\Bigl(r^2-2r\cos heta+1\Bigr)r\,\mathrm{d}\,r$$
 $+2\int_{rac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\, heta\int_{0}^{1}\Bigl(r^2-2r\cos heta+1\Bigr)r\,\mathrm{d}\,r$ $=2\int_{rac{\pi}{3}}^{rac{\pi}{2}}\Bigl(rac{4\cos^4 heta}{3}-2\cos^2 heta-rac{2\cos heta}{3}+rac{3}{4}\Bigr)\mathrm{d}\, heta$ $+2\int_{rac{\pi}{2}}^{\pi}\Bigl(rac{3}{4}-rac{2\cos heta}{3}\Bigr)\mathrm{d}\, heta$ $=rac{7\sqrt{3}}{8}+rac{5\pi}{6}$

三、【参考解析】: 改写通项表达式, 得

(全) 考研竞赛数学

$$\frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \frac{(-1)^n \left[n^p - (-1)^n \right]}{n^{2p} - 1}$$

$$= \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p} - 1} - \frac{1}{n^{2p} - 1} = \frac{(-1)^n}{n^p - \frac{1}{n^p}} - \frac{1}{n^{2p} - 1}$$

考虑级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p-\frac{1}{n^p}}$: 由比较判别法可知, p>1绝对收

敛, 0 条件收敛;

考虑级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}-1}$: 由比较判别法可知, $p>\frac{1}{2}$ 绝对收敛,

$$0 发散;$$

所以原级数 $p > \frac{1}{2}$ 收敛, 0 发散.

四、【参考解析】: (1)由全微分的形式不变性,得

$$\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y + \mathrm{d}\,z = \mathrm{d}\,f\!\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$= 2x \cdot f' dx + 2y \cdot f' dy + 2z \cdot f' dz$$

即
$$\mathrm{d}\,z = \frac{2x\cdot f'-1}{1-2z\cdot f'}\mathrm{d}\,x + \frac{2y\cdot f'-1}{1-2z\cdot f'}\mathrm{d}\,y$$
,然后令 $\mathrm{d}\,x = y-z, \mathrm{d}\,y = z-x$,

代入等式右边,整理得

$$\frac{2x \cdot f' - 1}{1 - 2z \cdot f'} \left(y - z\right) + \frac{2y \cdot f' - 1}{1 - 2z \cdot f'} \left(z - x\right) = x - y$$

(2) 当x + y + z = d时,则该平面与曲面的交线为

$$egin{cases} x+y+z=fig(x^2+y^2+z^2ig) \ x+y+z=\mathrm{d} \end{cases}$$
 即 $egin{cases} \mathrm{d}=fig(x^2+y^2+z^2ig) \ x+y+z=\mathrm{d} \end{cases}$

 $\mathbf{d}=f\Big(x^2+y^2+z^2\Big)$,即 $x^2+y^2+z^2=C$,所以当取a=b=c时的法向量交线为圆.

五、【参考解析】:由于f(x)在[0,1]上有连续的导函数,所以

由f(x)在 $x=rac{2k-1}{2n}$ 的一阶带皮亚诺余项的泰勒公式,得

$$figgl(rac{k}{n}iggr) = figgl(rac{2k-1}{2n}iggr) + f'iggl(rac{2k-1}{2n}iggr) \cdot rac{1}{2n} + oiggl(rac{1}{n}iggr)$$

于是可得

$$\sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$1 \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + o\left($$

$$=rac{1}{2}\sum_{k=1}^nf'iggl(rac{k}{n}-rac{1}{2n}iggr)rac{1}{n}+o(1)iggl(\lim_{n o\infty}o(1)=0iggr)$$

于是两端取 $n \to \infty$ 的极限,由定积分定义得

原式 =
$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} f' \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2n} \right) \frac{1}{n} + o(1) \right]$$

= $\frac{1}{2} \int_{0}^{1} f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(1) - f(0))$

【或】直接中值定理

$$f\bigg(\frac{k}{n}\bigg)-f\bigg(\frac{2k-1}{2n}\bigg)=f'\Big(\xi_k\Big)\bigg(\frac{2k-1}{2n}<\xi_k<\frac{k}{n}\bigg)\,,$$

直接得到最后的定积分定义表达式.

2019 年浙江省高等数学(微积分)竞赛 经管类试题参考解答

一、计算题

1、【参考解析】:
$$\lim_{x \to 1^-} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{1}$$