浙江省首届高等数学(微积分)竞赛试题

一、计算题

1、求极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x-1)(\sqrt{1+x}-1)}$$
.

2、求积分
$$\iint\limits_{D} |xy-1| \,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$
,其中

$$D = \{(x,y) \mid \frac{1}{2} \le x \le 2, \frac{1}{2} \le y \le 2\}.$$

3、设 $y = x^2 e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^{hx}$ 的一个解,求 常数a,b,c,h.

4、设f(x)连续,且当x > -1时

$$f(x)[\int_0^x f(t) \, \mathrm{d} \, t + 1] = rac{x e^x}{2(1+x)^2}$$
 ,

求
$$f(x)$$
.
$${f 5.} \;\; orall S_n = \sum_{k=1}^n rctan rac{1}{2k^2} \,, \;\; rac{1}{x} \lim_{n o \infty} S_n \,.$$

6、求积分
$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} (1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}} dx$$
.

二、求平面
$$x+2y-2z=1$$
 含在椭圆柱体 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 内的面积.

三、证明:
$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) \,\mathrm{d}\,x > 0$$
.

四、设二元函数 f(x,y) 有一阶连续的偏导数,且 f(0,1) = f(1,0). 证明: 单位圆周上至少存在两点满足方程

$$y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) - x \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0.$$

五、设 $\left\{a_{n}\right\},\left\{b_{n}\right\}$ 为满足 $e^{a_{n}}=a_{n}+e^{b_{n}},n\geq 1$ 两个实数列,

已知
$$a_n>0 (n\geq 1)$$
 ,且 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛,证明: $\sum_{n=1}^\infty rac{b_n}{a_n}$ 也收敛.

六、 已知
$$a_{_{\! 1}}=1, a_{_{\! 2}}=1, a_{_{\! n+2}}=2a_{_{\! n+1}}+3a_{_{\! n}}, n\geq 1$$
 ,求

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}x^{n}$$
 的收敛半径、收敛域和函数.

浙江省首届高等数学(微积分)竞赛参考解析

一、计算题

1、【参考解析】:由等价无穷小,当 $x \to 0$ 时,

$$1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 - x, \sqrt{1 + x} - 1 - \frac{1}{2}x$$

所以原式
$$=\lim_{x o 0}rac{rac{1}{2}x^2}{x\cdotrac{x}{2}}=1$$
.

2、【参考解析】:用xy=1分割积分区域为上下两个部分,分别为 D_1,D_2 ,则由积分的可加性,得

$$\int\!\!\!\int_D |\ xy-1\ |\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int\!\!\!\int_{D_1} \ + \int\!\!\!\int_{D_2}$$

$$=\int_{rac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\,x\int_{rac{1}{2}}^{rac{1}{x}}(1-xy)\,\mathrm{d}\,y+\int_{rac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\,x\int_{rac{1}{x}}^{2}(xy-1)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_{rac{1}{2}}^2 \! \left[y - rac{x}{2} y^2
ight] \! \left| rac{1}{x} \, \mathrm{d} \, x + \int_{rac{1}{2}}^2 \! \left[rac{x}{2} y^2 - y
ight] \! \left| rac{1}{x} \, \mathrm{d} \, x
ight] \! dx = 0$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} (\frac{x}{8} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}) \, \mathrm{d}\, x + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x + \frac{1}{2x} - 2) \, \mathrm{d}\, x$$

$$= 2 \ln 2 + \frac{15}{64}$$

3、【参考解析】: 将 $y = x^2 e^x$ 求一阶、二阶导数,得

$$y' = 2xe^x + x^2e^x, y'' = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$$

代入
$$y'' + ay' + by = ce^{hx}$$
,得:

$$2e^x+4xe^x+x^2e^x+a(2xe^x+x^2e^x)+bx^2e^x=ce^{hx}$$
 ,
整理得

$$[(1+a+b)x^2+(4+2a)x+2]e^x=ce^{hx}$$

比较两端等式,可得

$$(1+a+b)=0,4+2a=0,c=2,h$$
 文 1考研竞赛数学

所以a,b,c,h可取为a=-2,b=1,c=2,h=1.

4、【参考解析】: 令x=0时,由已知等式可得f(0)=0. 令

 $y = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d} \, t$,则 y' = f(x) ,所以原等式可以改写为

$$y'(y+1) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$$

该微分方程为可分离变量的微分方程,分离并两端积分

$$\int (y+1) \,\mathrm{d}\, y = \int rac{x e^x}{2(1+x)^2} \,\mathrm{d}\, x$$

左边
$$=\frac{1}{2}y^2+y+C_1$$

右边积分考虑分部积分法,得

$$\int rac{xe^x}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}\,x = -\int \left[rac{1}{1+x}
ight]' \cdot xe^x \,\mathrm{d}\,x$$
 $= -\left[rac{x}{1+x}e^x - \int rac{1}{1+x} \cdot (xe^x)' \,\mathrm{d}\,x
ight]$
 $= -\left[rac{x}{1+x}e^x - \int e^x \,\mathrm{d}\,x
ight] = rac{e^x}{1+x} + C_2$

所以原微分方程通解为

$$rac{1}{2}y^2 + y = rac{e^x}{2(1+x)} + C$$
 ,

由
$$f(0) = 0$$
得 $C = -rac{1}{2}$,即 $(y+1)^2 = rac{e^x}{(1+x)}$,解得

$$y=\sqrt{rac{e^x}{1+x}}-1, x>-1$$

由于
$$y' = \left(\int_0^x f(t) dt\right)' = f(x)$$
,所以

今 考研竞赛数学

$$f(x) = y' = rac{1}{2} rac{1}{\sqrt{rac{e^x}{(1+x)}}} rac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} \ = rac{1}{2} \sqrt{rac{(1+x)}{e^x}} rac{xe^x}{(1+x)^2} = rac{x\sqrt{(1+x)e^x}}{2(1+x)^2}$$

5、【参考解析】:由 $S_{_1}=rctanrac{1}{2}$,由恒等式

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

可得得

$$S_{\scriptscriptstyle 2} = \arctan rac{1}{2} + \arctan rac{1}{8} = \arctan rac{rac{1}{2} + rac{1}{8}}{1 - rac{1}{2} \cdot rac{1}{8}} = \arctan rac{2}{3}$$

$$S_3 = \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{1}{18} = \arctan \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18}} = \arctan \frac{3}{4}$$

以此类推可得 $S_n=rctanrac{n}{n+1}$,所以

$$\lim_{n o \infty} S_n = \lim_{n o \infty} \arctan rac{n}{n+1} = rac{\pi}{4}$$
 .

6、【参考解析】:根据被积函数的结构,考虑

$$\left(xe^{x+1/x}
ight)'=e^{x+rac{1}{x}}+xe^{x+rac{1}{x}}(x+rac{1}{x})'=(1+x-rac{1}{x})e^{x+rac{1}{x}}\,, \ \int_{rac{1}{2}}^{2}(1+x-rac{1}{x})e^{x+rac{1}{x}}\,\mathrm{d}\,x=\left(xe^{x+1/x}
ight)igg|_{rac{1}{2}}^{2}=rac{3}{2}e^{rac{5}{2}}$$

二、【参考解析】: 由对面积的曲面积分的几何意义。考望完整数学

$$S = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}\, S$$

其中 Σ : $z=rac{x}{2}+y-rac{1}{2},D_{xy}:rac{x^2}{4}+rac{y^2}{9}\leq 1$.于是由对面

积的曲面积分直接计算法,

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(rac{\partial z}{\partial x}
ight)^2 + \left(rac{\partial z}{\partial y}
ight)^2} \; \mathrm{d}\,\sigma = \sqrt{1 + rac{1}{4} + 1} \, \mathrm{d}\,\sigma = rac{3}{2} \, \mathrm{d}\,\sigma$$

由投影区域椭圆的面积等于 $A=\pi ab=\pi\cdot 2\cdot 3=6\pi$,得

$$S = rac{3}{2} \iint\limits_D \mathrm{d}\, \sigma = rac{3}{2} \cdot A = 9\pi$$
 .

三、【参考解析】:考虑换元,令 $x^2=t$,得

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\operatorname{d}x^2=\int_0^{2\pi}rac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\operatorname{d}t$$

$$=\int_0^\pi rac{1}{2\sqrt{t}} \sin t \, \mathrm{d}\, t + \int_\pi^{2\pi} rac{1}{2\sqrt{t}} \sin t \, \mathrm{d}\, t$$

$$=\int_0^\pi rac{1}{2\sqrt{t}}\sin t\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi rac{-\sin x}{2\sqrt{x+\pi}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=rac{1}{2}\int_0^\pi\!\left(\!rac{1}{\sqrt{t}}\!-\!rac{1}{\sqrt{t}+\pi}\!
ight)\!\sin t\,\mathrm{d}\,t>0$$

四、【参考解析】: 设单位原方程为 $C: x^2 + y^2 = 1$,其参数

方程为: $egin{cases} x = \cos heta \ y = \sin heta \end{cases}, 0 \leq heta \leq 2\pi$.圆周上点对应的函数可设

为 $F(heta)=f(\cos heta,\sin heta)$,则

$$\begin{split} F'\Big(\theta\Big) &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,\theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,\theta} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial y} \sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\theta = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \end{split}$$

$$y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) - x \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$
 ,

等价于证明在 $\left[0,2\pi
ight]$ 内至少存在两点 $heta_{_{1}}, heta_{_{2}}$,满足方程

$$F'(heta) = igl[f(\cos heta, \sin heta) igr]' = 0$$
. 由于

$$F(0)=f(1,0),F(rac{\pi}{2})=f(0,1),F(2\pi)=f(1,0)$$
 ,

且 $F(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$ 在 $\left[0, 2\pi\right]$ 连续,由罗尔定理得:在

$$\left[0,rac{\pi}{2}
ight]$$
和 $\left[rac{\pi}{2},2\pi
ight]$ 内都至少存在一点 $heta_{_{1}}, heta_{_{2}}$,满足方程

$$F'(\theta) = \left[f(\cos \theta, \sin \theta) \right]' = 0$$
.

成以近, $oldsymbol{ol}oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{ol}oldsymbol{ol}oldsymbol{oldsymbol{ol}oldsymbol{ol}oldsymbol{oldsymbol{ol}oldsymbol{oldsymbol{ol}ol{ol}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$

$$b_n = \ln(e^{a_n} - a_n)$$
 ,

故只需证明: $\sum_{n=1}^{\infty}rac{\ln(e^{a_n}-a_n)}{a_n}$. 令 $f(x)=\ln(e^x-x)$,则

$$f(0)=0$$
,且 $f'(x)=rac{e^x-1}{e^x-x}>0, x>0$,所以函数 $fig(xig)$

单调增加,于是f(x)>f(0)=0. 由此可得 $b_n>0$, 即级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} rac{a_n}{b_n}$$
为正项级数.

因为 $\sum_{i=1}^{\infty}a_{n}$ 收敛,所以 $\lim_{n
ightarrow\infty}a_{n}=0$,由于

$$egin{aligned} rac{\ln(e^{a_n}-a_n)}{a_n} \ &= \lim_{x o 0^+}rac{\ln(e^x-x)}{x^2} \ &= \lim_{x o 0^+}rac{e^x-1}{2x(e^x-x)} = \lim_{x o 0^+}rac{x}{2x(e^x-x)} = rac{1}{2x(e^x-x)} \end{aligned}$$

所以由比较判别法,可知 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a}$ 收敛.

六、【参考解析】: 由递推关系式可得

$$a_{_{n+2}}-3a_{_{n+1}}=-\left(a_{_{n+1}}-3a_{_{n}}\right)$$

即
$$rac{a_{_{n+2}}-3a_{_{n+1}}}{a_{_{n+1}}-3a_{_n}}=-1$$
.于是令 $b_{_n}=a_{_{n+1}}-3a_{_n}$,则

$$\frac{b_{_{n+1}}}{b_{_{n}}} = -1 \, \boxminus \, b_{_{1}} = a_{_{2}} - 3 a_{_{1}} = -2 \, .$$

即 $\{b_n\}$ 是等比数列,所以

$$b_n = (-2) \cdot (-1)^{n-1} = 2 \cdot (-1)^n$$
 ,

由此可得

田此可得
$$a_{n+1}-3a_n=2\cdot(-1)^n$$
,即 $a_{n+1}=2\cdot(-1)^n+3a_n$ 于是 $a_n=2\cdot(-1)^{n-1}+3a_{n-1}$,即 $a_{n+1}=2\cdot(-1)^n+3igl(2\cdot(-1)^{n-1}+3a_{n-1}igr) = 2\cdot(-1)^n+2\cdot3(-1)^{n-1}+3^2a_{n-1}$

由
$$a_{n-1} = 2 \cdot (-1)^{n-2} + 3a_{n-2}$$
,得

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3(-1)^{n-1} + 3^2 \left(2 \cdot (-1)^{n-2} + 3 a_{n-2} \right) \\ &= 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3(-1)^{n-1} + 2 \cdot 3^2 (-1)^{n-2} + 3^3 a_{n-2} \end{aligned}$$

以此类推可得

$$egin{align} a_{n+1} &= 2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot 3^2 \cdot (-1)^{n-1} \ &+ 2 \cdot 3^2 \cdot (-1)^{n-2} \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot (-1) + 3^n \, a_1 \ &= 2 \cdot (-1)^n rac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)} = rac{(-1)^n - 3^n}{2} \ \end{array}$$

所以
$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} + 3^{n-1}}{2}$$
,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}x^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}rac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}x^{n}$$
文文考研竞赛数学

所以收敛半径为

$$R=\lim_{n o\infty}\left|rac{a_{_{n}}}{a_{_{n+1}}}
ight|=\lim_{n o\infty}\left|rac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{rac{2}{(-1)^{n}+3^{n}}}
ight|=rac{1}{3}$$
 ,

即收敛半径为 $\frac{1}{3}$.

当
$$x = \frac{1}{3}$$
时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} rac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2}iggl(rac{1}{3}iggr)^n = \sum_{n=1}^{\infty} rac{\left[(rac{-1}{3})^{n-1}+1
ight]3^{-1}}{2}$$
 发散.

当
$$x = -\frac{1}{3}$$
时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} rac{(-1)^{n-1}+3^{n-1}}{2} iggl(-rac{1}{3}iggr)^n = \sum_{n=1}^{\infty} rac{-(rac{1}{3})^n+rac{(-1)^n}{3}}{2}$$
发散.

故收敛域为
$$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$
.

$$\diamondsuit Sig(xig) = \sum_{n=1}^{\infty} rac{(-1)^{n-1} + 3^{n-1}}{2} x^n$$
 , 則

$$egin{align} S\left(x
ight) &= \sum_{n=1}^{\infty} rac{-1}{2} (-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} rac{1}{6} (3x)^n \ &= rac{1}{2} x \cdot rac{1}{1+x} + rac{x}{2} \cdot rac{1}{1-3x} = rac{x(1-x)}{(1+x)} \end{aligned}$$