2021 年浙江省高等数学（微积分）竞赛（数学类与工科类）试题

一、计算题（每小题 14 分，满分 70 分）

1、设$x_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

2、求$y=\frac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)$的所有渐近线.

3、求不定积分$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

4、求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{2021}x}$.

5、求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n!}$的和.

二、(满分 20 分) 设$a_1=1,a_n=\sin a_{n-1}(n\geq 2)$，证明:$a_n\geq\frac{1}{\sqrt{n}}(n\geq 2)$.

三、(满分 20 分) 计算$\iint_D\left(\sin\left(x^3y\right)+x^2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$y=x^3$、$y=-1$和$x=1$围成的有限闭区域.

四、(满分 20 分) 一卡车沙子通过传送带卸货，假设沙子落到地上堆成一个正圆锥体，且圆锥体的底面半径始终等于圆锥体的高，如果传送带以每分钟 3 立方米匀速卸沙，问当圆锥到达 3 米高时，卸了多少时间，此时圆锥高h的增长速度为多少？

2021 浙江省高等数学（微积分）竞赛试题 (数学类与工科类)参考解答

一、计算题：(每小题 14 分，满分 70 分)

1、设 $x_n = (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【参考解答】：两边取对数，则有：$\ln x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$.

不妨记 $f(x)=\ln(1+x)$，则有 $f(0)=0$，从而由导数定义可知：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{k}{n^2})-f(0)}{\frac{k}{n^2}},$$

所以当 $n\to\infty$ 时，由极限与无穷小关系可得：

$$f(\frac{k}{n^2})=f'(0)\cdot\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})，即$$

$$\ln(1+\frac{k}{n^2})=\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)=\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

2、求 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)$ 的所有渐近线.

【参考解答】：由于

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)=\infty,$$

所以$x=1$为垂（铅）直渐近线. 由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)=-1,$$

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(f(x)+x)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)+x\right)\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)\cos(2\arctan x)\\
&\qquad+\lim_{x\to\infty}x\big(\cos(2\arctan x)+1\big)\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)\\
&\qquad+\lim_{x\to\infty}2x\cos^2(\arctan x)=-2
\end{aligned}$$

所以斜渐近线为$y=-x-2$. 所以该曲线的所有渐近线为

$$x=1\text{和}y=-x-2.$$

3、求不定积分$\displaystyle\int\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

【参考解答】: 拆分积分，得

$$\begin{aligned}
&\int\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}\\
&=\int\frac{x-1}{(x-1)^2\sqrt{2-(x-1)^2}}\mathrm{d}\,x\\
&\qquad+\int\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{2-(x-1)^2}}\mathrm{d}\,x\\
&\triangleq I_1+I_2
\end{aligned}$$

令$t=\sqrt{2-(x-1)^2}$，得

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-1)^2}{(x-1)^2\sqrt{2-(x-1)^2}}=\int\frac{1}{t^2-2}\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}})\mathrm{d}\,t$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-x^2}+\sqrt{2}}\right|+C$$

令 $x-1=\sqrt{2}\sin t$，得

$$I_2=\int\frac{1}{2\sin^2 t}\mathrm{d}\,t=-\frac{1}{2}\cot t+C$$

$$=-\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)}+C$$

代入得

$$\text{原式}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-x^2}+\sqrt{2}}\right|-\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)}+C.$$

4、求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+\tan^{2021}x}$.

【参考解答】：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+\tan^{2021}x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{2021}t}{1+\tan^{2021}t}\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{2021}x}{1+\tan^{2021}x}\mathrm{d}\,x$$

于是可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+\tan^{2021}x}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\,x}{1+\tan^{2021}x}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{2021}x}{1+\tan^{2021}x}\mathrm{d}\,x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

5、求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}$的和.

【参考解答】：由无穷级数的运算性质，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$
$$=e+e+e-1=3e-1$$

二、（满分 20 分） 设$a_1=1$，$a_n=\sin a_{n-1}(n\geq 2)$，

证明：$a_n\geq\frac{1}{\sqrt{n}}(n\geq 2)$.

【参考解答】：**（方法一）** 当$n=2$时，

$$a_2=\sin 1\geq\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

显然成立；假设$a_n\geq\frac{1}{\sqrt{n}}(n\geq 3)$也成立，只需证明

$$a_{n+1}=\sin a_n\geq\sin\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$$

$$>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}}$$

令$x=\frac{1}{\sqrt{n}}\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$，即证$x-\frac{1}{6}x^3>\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$，

即证

$$x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{36}x^6>\frac{x^2}{1+x^2},x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right],$$

即证$\dfrac{1}{1+x^2}>\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{36}x^2$，而

$$\frac{1}{1+x^2}\geq\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3}{4}>\frac{1}{3}>\frac{1}{3}-\frac{1}{36}x^2,$$

由数学归纳法，$a_n\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}(n\geq2)$.证毕!

（方法二）对n作数学归纳法. 当$n=2$时，

$$a_2=\sin 1\geq\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

设当$n=m$时结论成立，则

$$a_m\geq\frac{1}{\sqrt{m}},a_{m+1}=\sin a_m\geq\sin\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

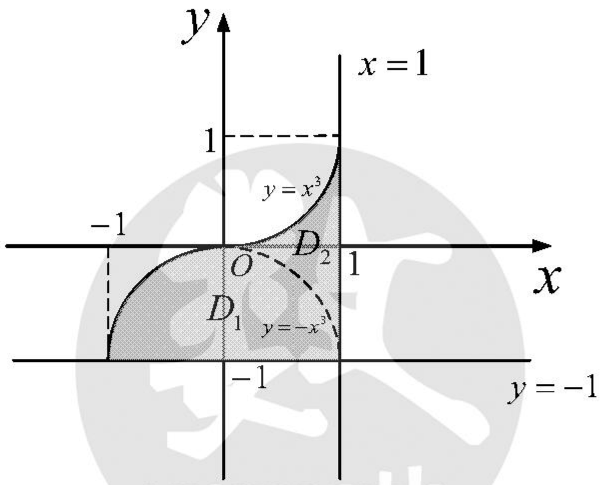
而仅需证明

$$\begin{aligned}&\sin\frac{1}{\sqrt{m}}\geq\frac{1}{\sqrt{m+1}}\\ \Leftarrow\ &\sin x\geq\sin\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(0\leq x\leq1)\\ \Leftarrow\ &\sin(\tan\theta)\geq\frac{\tan\theta}{\sec\theta}=\sin\theta,0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\\ \Leftarrow\ &\tan\theta\geq\theta,0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

这是成立的，故有结论$a_n\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}(n\geq2)$.

三、（满分 20 分）计算$\iint\limits_D(\sin(x^3y)+x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中$D$由$y=x^3,y=-1$和$x=1$围成的有限闭区域.

【参考解答】：积分区域D如图阴影部分所示。



添加辅助曲线 $y=-x^3$ 将该积分区域划分为 D_1 和 D_2 两部分，显然 D_1 关于 y 轴对称，D_2 关于 x 轴对称，从而

$$\iint\limits_{D}\sin(x^3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=0+0=0$$

$$\iint\limits_{D_2}x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

于是可得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D}(\sin(x^3y)+x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^{-x^3}x^2y\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1x^2y^2\Big|_{-1}^{-x^3}\mathrm{d}x=\int_0^1(x^8-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{9}\end{aligned}$$

四、(满分 20 分) 一卡车沙子通过传送带卸货，假设沙子落到地上堆成一个正圆锥体，且圆锥体的底面半径始终等于圆锥体的高，如果传送带以每分钟 3 立方米匀速卸沙，问当圆锥达到 3 米高时,卸了多少时间,此时圆锥高 h 的增长速度为多少?

【参考解答】：设经过 t 分钟后，圆锥高为 h，则

$$3t=\frac{1}{3}\cdot\pi h^2\cdot h\Rightarrow 9t=\pi h^3.$$

令 $h=3$ 得，$t=3\pi$. 进一步

$$9\,\mathrm{d}t = 3\pi h^2\,\mathrm{d}h \Rightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{\pi h^2} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=3} = \frac{1}{3\pi}.$$

故当圆锥高达 3 米高时，卸了3π分钟，此时圆锥的高h的增长速度为$\dfrac{1}{3\pi}$米每分钟.

五、(满分 20 分，限数学类做) 若$f(x):(0,\pi)\to R$连续，$f(x)>0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且对于任意的$x\in(0,\pi)$满足$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{f^2(t)} = -\frac{\cos x}{f(x)}$，求$f(x)$的表达式.

【参考解答】: 对题设等式两边关于x求导数，则有

$$\frac{1}{f^2(x)} = -\frac{-\sin x\cdot f(x)-\cos x\cdot f'(x)}{f^2(x)},$$

即$f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$. 从而

$$f'(x)\sec x + f(x)\sec x\cdot\tan x = \sec^2 x,$$

即$(f(x)\sec x)' = \sec^2 x$，两边积分可得:

$$f(x)\sec x = \tan x + C \Rightarrow f(x) = \sin x + C\cos x.$$

由$f(x)>0$可知，$C=0\Rightarrow f(x)=\sin x$. 若不然，

$$C>0\Rightarrow f(x)=\sqrt{1+C^2}\sin(x+\varphi),\varphi=\arctan C$$
$$\Rightarrow f(\pi-\varphi)=0,\text{矛盾;}$$
$$C<0\Rightarrow f(x)=\sqrt{1+C^2}\sin(x+\varphi),\varphi=\arctan C$$

$\Rightarrow f(-\varphi)=0$，矛盾. 故$f(x)=\sin x$.

六、(满分 20 分，限工科类做) 设Γ是上半球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$$

上的光滑曲线，起点和终点分别在平面$z=0, z=\dfrac{R}{2}$上，曲

线的切线与 z 轴正向的夹角为常数 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$，求曲线 Γ 的长度.

【参考解答】：设曲线 Γ 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$$

则 Γ 的切向量为 $\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$.而由题设可知：

$$0 < \cos\alpha = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \Rightarrow z'(t) > 0.$$

故曲线 Γ 的长度为：

$$\begin{aligned} s &= \int_\Gamma \mathrm{d}\, s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, \mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b \frac{z'(t)}{\cos\alpha} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{\cos\alpha}[z(b) - z(a)] = \frac{R}{2\cos\alpha} \end{aligned}$$