2018 年浙江省高等数学（微积分）竞赛 (工科类)试题

一、计算题

1、求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{\left(2+\cos x\right)\sin x}$.

2、求定积分 $\int_{-1}^{1} \frac{\left(x-\cos x\right)^2 \cos x}{x^2+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x$.

3、设二元函数 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程

$$z^5-xz^4+yz^3=1$$

确定的二阶可导隐函数，求 $z''_{xy}\left(0,0\right)$.

4、计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$，其中 D 是由不等式 $\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}$ 所确定的区域.

5、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\ e^{\left(x-t\right)^2}-1\ \right]t\,\mathrm{d}\,t}{x^4}$.

二、证明题与应用题

6、求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[2+\left(-1\right)^n\right]^n}{n}x^n$ 收敛域及 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[2+\left(-1\right)^n\right]^n}{n\cdot 6^n}$ 的和.

7、讨论函数 $f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2-6y+10\right)e^y$ 的极值情况.

8、已知曲线型构件 $L:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的线密度为 $\rho=\left|x^2+x-y^2-y\right|$，求 L 的质量.

9、已知 $a_n>0,a_1<1,\left(n+1\right)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n,n=1,2,\cdots$

证明：数列 $\left\{a_n\right\}$ 收敛.

2018 年浙江省高等数学（微积分）竞赛 (工科类)参考解答

一、计算题

1、【参考解答】: 【思路一】万能公式法，令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{1+t^2}{\left(3+t^2\right)t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left[\frac{2t}{3\left(t^2+3\right)}+\frac{1}{3t}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\ln\left(t^2+3\right)+\frac{\ln t}{3}+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}+3\right)+\frac{\ln\tan\frac{x}{2}}{3}+C$$

【思路二】凑微分并换元，可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin^2 x}$$

$$=\int\frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{(2+\cos x)\left(1-\cos^2 x\right)}$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}u}{(2+u)\left(1-u^2\right)}(u=\cos x)$$

$$=\int\left[\frac{1}{3(u+2)}-\frac{1}{2(u+1)}+\frac{1}{6(u-1)}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{3}\ln|u+2|-\frac{1}{2}\ln|u+1|+\frac{1}{6}\ln\left|u-1\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\cos x+2|-\frac{1}{2}\ln|\cos x+1|$$
$$+\frac{1}{6}\ln\left|\cos x-1\right|+C$$

2、**【参考解答】**：原式$=\int_{-1}^{1}\frac{\left(x^2-2x\cos x+\cos^2 x\right)\cos x}{x^2+\cos^2 x}$.

由于函数$\frac{2x\cos x}{x^2+\cos^2 x}$为奇函数，所以

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}\cos x\,\mathrm{d}x=2\sin 1.$$

3、**【参考解答】**：由$x=0,y=0$代入等式，得$z=1$．对等式两端关于x求导，得

$$5\frac{\partial z}{\partial x}z^4-4x\frac{\partial z}{\partial x}z^3+3y\frac{\partial z}{\partial x}z^2-z^4=0$$

代入$x=0,y=0,z=1$，得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{5}$；再等式两端关于$y$求导，得

$$5\frac{\partial z}{\partial y}z^4-4x\frac{\partial z}{\partial y}z^3+3y\frac{\partial z}{\partial y}z^2+z^3=0$$

代入$x=0,y=0,z=1$，得$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{5}$；在对第一个导数等式两端关于$y$求导，得

$$5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}z^4-4\frac{\partial z}{\partial y}z^3+20\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}z^3$$
$$-4x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}z^3-12x\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}z^2+3\frac{\partial z}{\partial x}z^2$$
$$+3y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}z^2+6y\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}z=0$$

代入$x=0,y=0,z=1$，得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{5}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{5}$得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{3}{25}.$$

4、【参考解答】: 积分区域由$x^2+y^2=4$的第一象限部分和$x^2+y^2=2x$上半部分围成，由二重积分极坐标计算法，得

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 r^2 r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4-4\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{4}$$

5、【参考解答】: 令$x-t=u$，则

$$\int_0^x e^{(x-t)^2} t\,\mathrm{d}t=\int_x^0 e^{u^2}(x-u)\,\mathrm{d}(-u)$$

$$=\int_0^x e^{u^2}(x-u)\,\mathrm{d}u=x\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u-\int_0^x u e^{u^2}\,\mathrm{d}u$$

代入极限式，并由洛必达法则，得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u-\int_0^x u e^{u^2}\,\mathrm{d}u-\int_0^x t\,\mathrm{d}t}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u+x e^{x^2}-x e^{x^2}-x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{u^2}\,\mathrm{d}u-x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{12x^2}=\frac{1}{12}$$

二、证明题与应用题

6、【参考解答】: 由级数的运算性质，在收敛区间内

$$\text{原级数}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{2n}x^{2n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$$

则得级数的收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. 代入可知$x=\pm\frac{1}{3}$级数都

不收敛. 故收敛域为$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[2+(-1)^n\right]^n}{n6^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)6^{2k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{2k}}{2k\cdot 6^{2k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)6^{2k-1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{k\cdot 4^k}$$

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，则$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，所以$S(x)=-\ln(1-x)$.

令$h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}$，则

$$h'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

$$h(x)=\int_0^x h(x)\,\mathrm{d}x+h(0)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

于是

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[2+(-1)^n\right]^n}{n6^n}=\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{4}\right)+h\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}=\frac{1}{2}\ln\frac{28}{15}$$

7、**【参考解答】**：令$\nabla f=0$，即

$$\begin{cases}f'_x=2xe^y=0\\ f'_y=e^y\left(x^2+(y-2)^2\right)=0\end{cases}$$

解得$x=0,y=2$. 可以求得海塞矩阵为

$$H=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2e^y & 2e^y x \\ 2e^y x & e^y\left(x^2+(y-2)y\right) \end{pmatrix}$$

代入$x=0,y=2$，得$H=\begin{pmatrix} 2e^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，方法失败.

令$x=0$，则$g\left(y\right)=f\left(0,y\right)=\left(y^2-6y+10\right)e^y$. 由于$g'\left(y\right)=e^y(y-2)^2\geq 0$，即函数$g\left(y\right)$严格单调增加，所以函数在$\left(0,2\right)$处不取极值. 即函数没有极值.

8、**【参考解答】**：L的质量为$M=\int\limits_L\left|x^2+x-y^2-y\right|\mathrm{d}\,s$.

曲线参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin t-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos t-\dfrac{1}{2} \qquad\qquad 0\leq t\leq 2\pi \\ z=2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}(\sin t+\cos t) \end{cases}$$

且$\mathrm{d}\,s=\sqrt{x'^2\left(t\right)+y'^2\left(t\right)+z'^2\left(t\right)}\,\mathrm{d}\,t$

$$=\sqrt{3-3\sin t\cos t}\,\mathrm{d}\,t=\sqrt{3-\frac{3}{2}\sin 2t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\left|x^2+x-y^2-y\right|=\frac{3}{2}\left|\cos(2t)\right|$$

由对弧长的曲线积分的参数方程计算法，得

$$M=\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\left|\cos(2t)\right|\sqrt{3-\frac{3}{2}\sin 2t}\,\mathrm{d}\,t$$

其中被积函数的原函数为

$$\int \frac{3}{2}\cos(2t)\sqrt{3-\frac{3}{2}\sin 2t}\,\mathrm{d}\,t=\int f\left(t\right)\mathrm{d}\,t$$
$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{3-\frac{3}{2}\sin 2t}\,\mathrm{d}\left(3-\frac{3}{2}\sin 2t\right)$$
$$=-\frac{1}{3}\left(3-\frac{3}{2}\sin 2t\right)^{3/2}+C$$

于是由积分的可加性，记

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}f+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}f-\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}f+\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}f$$
$$=-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-4\right)+\frac{\sqrt{3}-9}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-9}{2\sqrt{2}}$$
$$+\frac{\sqrt{3}-9}{2\sqrt{2}}+\sqrt{3}-\frac{9}{2\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}\left(9-\sqrt{3}\right)$$

9、**【参考解答】**:**【思路一】**假设$a_n<1$，则

$$\left(n+1\right)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n<n+1$$

即$a_{n+1}^2<1$，即$a_{n+1}<1$，归纳得$\left\{a_n\right\}$有界. 于是

$$\left(n+1\right)a_{n+1}^2=na_n^2+a_n>na_n^2+a_n^2=\left(n+1\right)a_n^2$$

即$a_{n+1}^2>a_n^2$，所以$\left\{a_n\right\}$单调递增有上界，于是由单调有界原理知数列$\left\{a_n\right\}$收敛.

【思路二】因为$a_n>0,a_1<1$，由递推式得

$$1-a_{n+1}^2=1-\frac{na_n^2+a_n}{n+1}=\frac{n+1-na_n^2-a_n}{n+1}$$
$$=\frac{n\left(1-a_n^2\right)+\left(1-a_n\right)}{n+1}$$

所以$a_2<1$，假设$0<a_{n-1}<1$，可得$a_n<1$. 又由递推

式，得

$$a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{na_n^2+a_n}{n+1}-a_n^2$$

$$=\frac{na_n^2+a_n-na_n^2-a_n^2}{n+1}=\frac{a_n\left(1-a_n\right)}{n+1}>0$$

所以数列$\left\{a_n\right\}$单调递增有上界，于是由单调有界原理知数列$\left\{a_n\right\}$收敛.