2019 年浙江省高等数学（微积分）竞赛

工科类试题

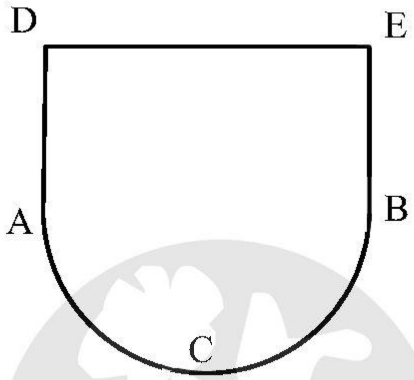
一、计算题(每小题 14 分，满分 70 分)

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

2、求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^{2}}\,\mathrm{d}\,x$.

3、求定积分 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos\left(\sin^{2}x\right)\cos x\,\mathrm{d}\,x$.

4、如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 $ABED$ 的三条边 AD, DE, EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值.



5、定义在 $[-1,1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n+1}}, & \dfrac{1}{2^{n+1}}<x\le\dfrac{1}{2^{n}} \\ 0, & -1\le x\le 0\end{cases},$$

讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

二、(满足 20 分)求积分

$$\iint_{D}\left(5y^{3}+x^{2}+y^{2}-2x+y+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D: 1\le(x-1)^{2}+y^{2}\le 4$ 且 $x^{2}+y^{2}\le 1$.

三、(满足 20 分)讨论级数$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$的敛散性，其中 $p>0$.

四、(满足 20 分)设由方程$x+y+z=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$(*) 确定函数$z=z\left(x,y\right)$.

(1)计算$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2)如果以$\vec{n}=(a,b,c)$为法向量的平面与(*)交为圆，求此法向量.

五、(满足 20 分)设$f\left(x\right)$在$\left[0,1\right]$上有连续的导函数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}(f(1)-f(0)).$$

2019 年浙江省高等数学（微积分）竞赛 经管类试题

一、计算题(每小题 14 分，满分 70 分)

1、求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$.

2、求不定积分$\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}\,x$.

3、求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$.

4、求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$的和.

5、如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 $ABED$ 的三条边 AD,DE,EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值.

2019年浙江省高等数学（微积分）竞赛
工科类试题参考解答

一、计算题

1、【参考解析】: 由三角等式 $\tan\left(x+y\right)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$，

得 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}}\right)^n$．由幂指函数

转换为指数函数 $f\left(x\right)^{g\left(x\right)}=e^{g\left(x\right)\ln f\left(x\right)}$，并由等价无穷小 $\tan x\sim x\left(x\to 0\right)$，问题转换为计算

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\frac{1+\tan\dfrac{1}{n}}{1-\tan\dfrac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\tan\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\tan\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{-\tan\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=2$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)=e^2$.

2、【参考解析】: 改写表达式凑微分，得

$$F(x)=\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x\ =2\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$$

分子分母同时除以$\cos^2 x$，得

$$F(x)=2\int\frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(x\tan x)}{(1-x\tan x)^2}=\frac{2}{1-x\tan x}+C$$

3、**【参考解析】**：**【思路一】** 令$x=\pi-t$，则

$$原式=\int_0^{\pi}\cos\left(\sin^2 t\right)\left(-\cos t\right)\mathrm{d}\,t$$

$$=-\int_0^{\pi}\cos\left(\sin^2 x\right)\left(\cos x\right)\mathrm{d}\,x$$

即$2\int_0^{\pi}\cos\left(\sin^2 x\right)\cos x\,\mathrm{d}\,x=0$，即

$$\int_0^{\pi}\cos\left(\sin^2 x\right)\cos x\,\mathrm{d}\,x=0.$$

【思路二】 直接令$\sin x=t$，则

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x$$

$$=\int_0^1\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t+\int_1^0\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_0^1\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t-\int_0^1\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t=0$$

4、**【参考解析】**：设$AD=x,DE=y\left(x>0,y>0\right)$，则

矩形和半圆面积之和为$xy+\dfrac{\pi y^2}{8}=1$，目标为

$$f\left(x,y\right)=2x+y+\frac{\pi y}{2}.$$

于是令$L\left(x,y,\lambda\right)=2x+y+\dfrac{\pi y}{2}+\lambda\left(xy+\dfrac{\pi y^2}{8}-1\right)$

令$\begin{cases} L'_x = 2 + \lambda y = 0 \\ L'_y = 1 + \dfrac{\pi}{2} + \lambda\left(x + \dfrac{\pi y}{4}\right) = 0 \\ L'_\lambda = xy + \dfrac{\pi y^2}{8} - 1 = 0 \end{cases}$，由第一、第二个方程消去$\lambda$，得$y = 2x$，代入第三个方程得$\dfrac{\pi x^2}{2} + 2x^2 - 1 = 0$，因为$x > 0$，所以$x = \sqrt{\dfrac{2}{4+\pi}}$，于是$y = 2\sqrt{\dfrac{2}{4+\pi}}$. 于是由最值的存在性，当$x = \sqrt{\dfrac{2}{4+\pi}}, y = 2\sqrt{\dfrac{2}{4+\pi}}$时，铁丝最小长度为

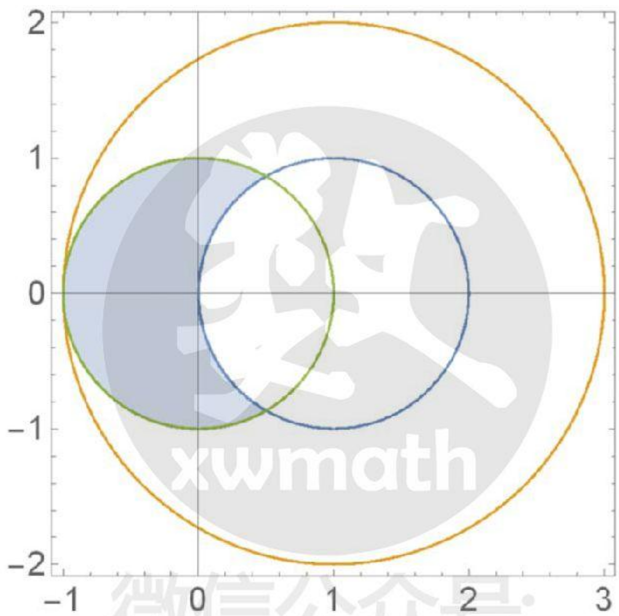
$$f_{\min}(x,y) = 4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}} + \pi\sqrt{\frac{2}{4+\pi}} = \sqrt{2(4+\pi)}.$$

5、【参考解析】：$f(x)$可能的间断点为$x = \dfrac{1}{2^n}$，由于

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2^n}\right)^+} f(x) = \frac{1}{2^n}, \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{2^n}\right)^-} f(x) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

所以$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2^n}\right)^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2^n}\right)^-} f(x)$，即$x = \dfrac{1}{2^n}$为第一类跳跃间断点.

二、【参考解析】：积分区域如下图



交点为$x=\frac{1}{2},y=-\frac{\sqrt{3}}{2};x=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}$．积分区域关于

x轴对称，所以由二重积分偶倍奇零的计算性质，得

$$原积分=\iint_D\left(x^2+y^2-2x+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

考虑二重积分极坐标计算法，令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，两个小圆的方程为$r=1,r=2\cos\theta$，所以积分为

$$\begin{aligned}原积分&=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{1}\left(r^2-2r\cos\theta+1\right)r\,\mathrm{d}r\\&\quad+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r^2-2r\cos\theta+1\right)r\,\mathrm{d}r\\&=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4\cos^4\theta}{3}-2\cos^2\theta-\frac{2\cos\theta}{3}+\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}\theta\\&\quad+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{3}{4}-\frac{2\cos\theta}{3}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{7\sqrt{3}}{8}+\frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

三、【参考解析】：改写通项表达式，得

$$\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=\frac{(-1)^n\left[n^p-(-1)^n\right]}{n^{2p}-1}$$

$$=\frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}-\frac{1}{n^{2p}-1}=\frac{(-1)^n}{n^p-\frac{1}{n^p}}-\frac{1}{n^{2p}-1}$$

考虑级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p-\frac{1}{n^p}}$：由比较判别法可知，$p>1$绝对收敛，$0<p\leq 1$条件收敛;

考虑级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}-1}$:由比较判别法可知,$p>\frac{1}{2}$绝对收敛，$0<p\leq\frac{1}{2}$发散;

所以原级数$p>\frac{1}{2}$收敛，$0<p\leq\frac{1}{2}$发散.

四、【参考解析】：(1)由全微分的形式不变性，得

$$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\mathrm{d}f\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=2x\cdot f'\mathrm{d}x+2y\cdot f'\mathrm{d}y+2z\cdot f'\mathrm{d}z$$

即$\mathrm{d}z=\frac{2x\cdot f'-1}{1-2z\cdot f'}\mathrm{d}x+\frac{2y\cdot f'-1}{1-2z\cdot f'}\mathrm{d}y$，然后令

$$\mathrm{d}x=y-z,\mathrm{d}y=z-x,$$

代入等式右边，整理得

$$\frac{2x\cdot f'-1}{1-2z\cdot f'}\left(y-z\right)+\frac{2y\cdot f'-1}{1-2z\cdot f'}\left(z-x\right)=x-y$$

(2) 当$x+y+z=\mathrm{d}$时，则该平面与曲面的交线为

$$\begin{cases}x+y+z=f\left(x^2+y^2+z^2\right)\\x+y+z=\mathrm{d}\end{cases}\text{即}\begin{cases}\mathrm{d}=f\left(x^2+y^2+z^2\right)\\x+y+z=\mathrm{d}\end{cases}$$

$\mathrm{d}=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$，即 $x^2+y^2+z^2=C$，所以当取 $a=b=c$ 时的法向量交线为圆.

五、【参考解析】：由于 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上有连续的导函数，所以由 $f\left(x\right)$ 在 $x=\dfrac{2k-1}{2n}$ 的一阶带皮亚诺余项的泰勒公式，得

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)+f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\cdot\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

于是可得

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n}+o(1)\left(\lim_{n\to\infty}o(1)=0\right)$$

于是两端取 $n\to\infty$ 的极限，由定积分定义得

$$\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f'\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n}+o(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))$$

【或】直接中值定理

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)=f'\left(\xi_k\right)\left(\frac{2k-1}{2n}<\xi_k<\frac{k}{n}\right),$$

直接得到最后的定积分定义表达式.

2019 年浙江省高等数学（微积分）竞赛经管类试题参考解答

一、计算题

1、**【参考解析】**：$\displaystyle\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\ln x}}$