2011年浙江省大学生数学竞赛
(工科、数学类)试题

一、计算题

1、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\cos^4 n}+\sqrt{(n+1)\sin^4 n}-\sqrt{n+2}\right)$.**(工)**

2、若 $a_i\in R, i=1,2,\cdots,k$ 满足 $\sum\limits_{i=0}^{k}a_i=0$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_k\sqrt{n+k}\right).$$**(数)**

3、求 $\int\max(1,x,x^2,\cdots,x^n)\mathrm{d}x$.**(工、数)**

4、计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x^2-x+1\right]\cos x\,\mathrm{d}\,x$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. **(工、文专)**

5、计算 $\iint\limits_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1}\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$.**(工、数)**

6、设球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上的曲线段 C 在 xOy 平面上的投影曲线为: $\begin{cases}x=R\cos t\cos(4t)\\ y=R\cos t\sin(4t)\end{cases}(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$，且 C 的密度与该点到 z 轴的距离成正比，比例常数为 k，求 C 的质量. **(工、数)**

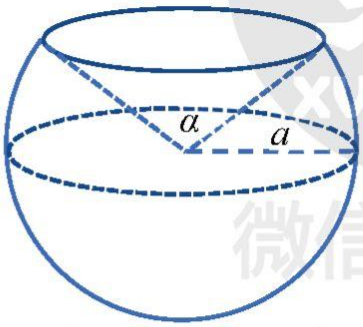
二、证明: $\left[x^3\right]+x^2=\left[x^2\right]+x^3$ 存在一个非常整数，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.**(数)**

三、设曲面 S 为半径为 a 的球面挖去一个小球冠剩下的部分（如图），如果图中所示角度 $\alpha\in(0,\pi)$，求 S 的形心与球心的距离. **(数)**

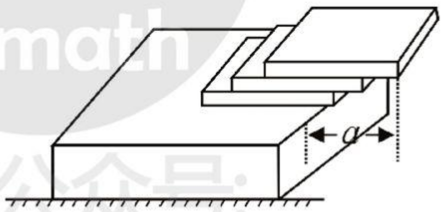
四、设 $x,y,z\in R^+$，求方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ 7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的

解. **(工、数)**

五、 有三块相同的密度均匀的正方形砖块（边长 16cm，厚度为 1cm），两侧对齐叠放于一台面上（如图），从一侧伸出台面，问如何叠放在确保所有砖块不落下的前提下使砖块伸出台面总长度 a 最大？并求此最大值. **(工)**



题三图



题五图

六、 设 f 连续，函数 $g(t)=\int_0^1 |f(x)-t|\,\mathrm{d}x$，证明

$$\max_{0\le t\le 1} g(t)=\max\{g(0),g(1)\}.$$ **(数)**

七、 设 $f:[0,1]\to[-a,b]$ 连续，且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=ab$，证明：$0\le \dfrac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$. **(工)**

八、 已知数列 $\{a_n\}:0\le a_n\le 1, n=1,2,3,\cdots$，定义：

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left[1-\left(1-a_k\right)^n\right], n=1,2,3,\cdots$$

证明：(i) 若数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项非零，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$；

(ii) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}=0$. **(工)**

九、 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛. **(数)**

2011 年浙江省大学生数学竞赛

(工科、数学类)参考解答

一、计算题

1、**【参考解答】**：化简极限式，得

原极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\cos^2 n+\sqrt{n+1}\sin^2 n-\sqrt{n+2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2 n\frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\sin^2 n\frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)$$

$=0$

2、**【参考解答】**：**【思路一】**因$a_0+a_1+\cdots+a_k=0$，即

$$a_k=-a_0-a_1-\cdots-a_{k-1},$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k}a_i\sqrt{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k-1}a_i\left(\sqrt{n+i}-\sqrt{n+k}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}a_i\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{i-k}{\sqrt{n+i}+\sqrt{n+k}}\right)=0$$

【思路二】由于$\sqrt{n+k}=\sqrt{n}+\dfrac{k}{2\sqrt{n+\varepsilon_k}}$，所以

$$a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_k\sqrt{n+k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_ik}{2\sqrt{n+\varepsilon_{k_i}}}$$

即原极限$=0$.

3、**【参考解答】**：当$x\in(-1,1)$时，

$$f(x)=\max\left(1,x,x^2,\cdots,x^n\right)=1;$$

当$x>1$时，$f(x)=x^n$. 当$x<-1$且n为偶数时，$f(x)=x^n$；n为奇数时，$f(x)=x^{n-1}\ (n\geq 1)$，于是可得n为偶数时，

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+1-\dfrac{1}{n+1}+C, & x>1\\ x+C & x\in\left[-1,1\right]\\ \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}-1+\dfrac{1}{n+1}+C, & x<-1\end{cases}$$

n 为奇数时，

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+1-\dfrac{1}{n+1}+C & x>1\\ x+c & x\in\left[-1,1\right]\\ \dfrac{1}{n}x^{n}-1+\dfrac{1}{n}+C & x<-1\end{cases}$$

4、**【参考解答】**：当$0<x<1$时，$f\left(x\right)=\left[x^2-x+1\right]=0$，

当$1<x<\dfrac{\pi}{2}$时，$f\left(x\right)=1$，则

$$原积分=\int_1^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}\,x=1-\sin 1.$$

5、**【参考解答】**：原积分$=\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}\,y$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_0^{1-\sqrt{x}}\sqrt[3]{\sqrt{x}+y}y\,\mathrm{d}\,y$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}\,x\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt[3]{y}\left(y-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\,y$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{3}{7}-\frac{3\sqrt{x}}{4}+\frac{9}{28}x^{7/6}\right)\mathrm{d}\,x=2\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}+\frac{9}{28}\frac{6}{13}\right)$$

6、**【参考解答】**：曲线段C的参数方程为

$$x=R\cos t\cos\left(4t\right),y=R\cos t\sin\left(4t\right),z=R\sin t$$

其密度为$\rho=kR\cos t$，则

$$m=\int_C\rho\,\mathrm{d}\,s=kR\int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2+\left(z'\right)^2}\,\mathrm{d}\,t$$

$$=kR\int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{1+16\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= kR\int_0^{\pi/2}\cos t\sqrt{17-16\sin^2 t}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= kR\int_0^1\sqrt{17-16t^2}\,\mathrm{d}\,t$$
$$= kR\left[\frac{1}{2}t\sqrt{17-16t^2}+\frac{17}{8}\arcsin\frac{4t}{\sqrt{17}}\right]_0^1$$
$$= kR\left(\frac{1}{2}+\frac{17}{8}\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

二、【参考解答】:记 $f\left(x\right)=x^3-x^2-\left[x^3\right]+\left[x^2\right]$，则 $f\left(x\right)$ 在 $[\sqrt[3]{3},\sqrt{3})$ 上连续，且

$$f\left(\sqrt[3]{3}\right)=3-\sqrt[3]{9}-3+2=2-\sqrt[3]{9}<0$$

当 $x\to\sqrt{3}$ 时，$f\left(x\right)\to 3\sqrt{3}-3-3+2=3\sqrt{3}-4>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\sqrt[3]{3},\sqrt{3}\right)$ 上有一根.

三、【参考解答】: 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则挖去部份为 $z\geq\cos\dfrac{\alpha}{2}$，于是

$$z_c=\frac{\iint\limits_S z\,\mathrm{d}\,S}{\iint\limits_S \mathrm{d}\,S}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{\alpha/2}^{\pi}a^3\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_{\alpha/2}^{\pi}a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\pi a^3(\cos\alpha-1)}{4\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=-a\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

即 S 的形心与球心的距离 $-a\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

四、【参考解答】: 考察函数 $f=7x^3+14y^3+21z^3$ 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值.

$$L=7x^3+14y^3+21z^3+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

令 $\begin{cases} L_x=21x^2+2\lambda x=0 \\ L_y=42y^2+2\lambda y=0 \\ L_z=63z^2+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，得 $x=-\dfrac{2\lambda}{21},y=-\dfrac{2\lambda}{42},z=-\dfrac{2\lambda}{63}$，

则 $\left(\dfrac{2\lambda}{21}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}\right)=1$，于是得 $\lambda=-9$．即

$$x=\frac{6}{7},y=\frac{3}{7},z=\frac{2}{7}.$$

因此最小值为 $f_{\min}=\dfrac{1}{49}\left(6^3+2\times3^3+3\times2^3\right)=6$．于是方程组的解为 $x=\dfrac{6}{7},y=\dfrac{3}{7},z=\dfrac{2}{7}$．

五、【参考解答】：设台面上一垂直于边的直线为 x 轴，边沿处为原点。第一块伸出台面长度为 b，第二块伸出台面长度为 $b+c$，第三块伸出台面长度为 $b+c+d=a$，当三块的的重心落在台面上即重心坐标 $x_c\le 0$ 时，砖块不落下.

第一块砖 x 方向重心坐标为 $b-8$，三块的重心坐标 $\dfrac{3b+2c+d-24}{3}\left(\le 0\right)$．同理上面二块重心坐标也应满足 $2c+d-16\le 0$ 及 $d-8\le 0$．砖块不落下的前提下使砖块伸出台面总长度 a 最大，取 $d=8,c=4,b=\dfrac{8}{3}$，即

$$a=12+\frac{8}{3}.$$

六、【参考证明】：改写积分表达式，得

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^1 \left| f(x) - t \right| \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left| tf(x) - t + \left(1 - t\right) f(x) \right| \mathrm{d}x \\
&\le t \int_0^1 \left| f(x) - t \right| \mathrm{d}x + \left(1 - t\right) \int_0^1 \left| f(x) \right| \mathrm{d}x \\
&= \left(1 - t\right) g(0) + tg(1) = \max\left\{ g(0), g(1) \right\}
\end{aligned}
$$

显然有 $\max\limits_{0\le t\le 1} g(t) \ge \max\left\{ g(0), g(1) \right\}$，所以

$$
\max_{0\le t\le 1} g(t) = \max\left\{ g(0), g(1) \right\}.
$$

七、【参考证明】：因为 $-a \le f\left(x\right) \le b$，于是可得

$$
0 \le \left(f(x) - \frac{b-a}{2} \right)^2 \le \left(\frac{b+a}{2} \right)^2,
$$

所以由积分的保序性，得

$$
0 \le \int_0^1 \left(f(x) - \frac{b-a}{2} \right)^2 \mathrm{d}x \le \left(\frac{b+a}{2} \right)^2
$$

由于 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = ab$，于是可得

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(f(x) - \frac{b-a}{2} \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \left(b - a\right) \int_0^1 f\left(x\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \\
&= ab - \left(b - a\right) \int_0^1 f\left(x\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \\
&= -\left(b - a\right) \int_0^1 f\left(x\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2
\end{aligned}
$$

代入以上不等式，得

$$
0 \le -\left(b - a\right) \int_0^1 f\left(x\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \le \left(\frac{a+b}{2} \right)^2
$$

移项整理得$0 \le \left(b-a\right)\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，两端除以$\left(b-a\right)^2$，即得$0 \le \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \le \frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$.

八、【参考证明】：(i) 若数列$\left\{a_n\right\}$中有无穷多项非零，则$\forall T > 0, \exists M > 0, \left\{a_i\right\}_1^M$中至少有$2\left[T\right]$个不为 0，记为$a_{i_j} \ne 0, j = 1,2,\cdots,2\left[T\right]$. 对于$a_{i_j}\left(j = 1,2,\cdots,\ 2\left[T\right]\right)$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$\left(1 - a_{i_j}\right)^n < \frac{1}{2}$. 即当$n > N$时，有

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left[1 - \left(1 - a_k\right)^n\right] \ge \sum_{k=1}^{2\left[T\right]}\left[1 - \left(1 - a_{i_k}\right)^n\right] \ge \left[T\right]$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty.$

(ii) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$，使得$\sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{2}$，对于$M, \exists N > 0$使得$\frac{M}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. 当$n > N$时，有

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[1 - \left(1 - a_k\right)^n\right] \\
&= \sum_{k=1}^{M}\left[1 - \left(1 - a_k\right)^n\right] + \sum_{k=M+1}^{n}\left[1 - \left(1 - a_k\right)^n\right] \\
&\le M + \sum_{k=M+1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-1}\left(1 - a_k\right)^j \le M + n\sum_{k=M+1}^{n} a_k
\end{aligned}$$

所以$\frac{b_n}{n} \le \frac{M}{n} + \sum\limits_{k=M+1}^{n} a_k < \varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = 0.$

九、【参考证明】：由算术-几何平均值不等式，得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{m}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\sum_{n=1}^{m}\frac{\sqrt[n]{a_1 2a_2\cdots na_n}}{\sqrt[n]{n!}}\\
&\le 3\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{ka_k}{n}=3\sum_{k=1}^{m}ka_k\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n^2}\le 6\sum_{k=1}^{m}a_k
\end{aligned}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$收敛.