# 2010 浙江省高等数学 (微积分) 竞赛试题 (工科、数学、经管、文专类)

### 一、计算题

1. 已知 
$$\lim_{x \to \infty} \left( f\left(x\right) + g\left(x\right) \right) = 1, \lim_{x \to \infty} \left( f\left(x\right) - g\left(x\right) \right)^2 = 1$$
,求  $\lim_{x \to \infty} f\left(x\right) g\left(x\right)$ .(文专类)

2. 求极限
$$\lim_{n o +\infty} \left[ rac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} 
ight]^n$$
 (经管类)

3. 求极限 
$$\lim_{n o +\infty} \left[ \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + rac{1}{2} 
ight]^{rac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$$
 . (工

## 科、数学类)

4. 计算
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d} x}{\left(1+x^2\right)^2}$$
. (经管类)

5. 求不定积分 
$$\int \frac{e^x \left(1 + \sin x \cos x\right)}{\cos^2 x} dx$$
. (经管、文专类)

6. 计算
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{\left(1+x^2\right)\left(2-2x+x^2\right)}$$
. (工科类)

7. 设 $\Delta ABC$ 为锐角三角形,求  $\sin A + \sin B + \sin C - \cos A - \cos B - \cos C$  的最大值和最小值. (工科、经管类)

8. 设[x]为小于等于x的最大整数,

$$D=\{ig(x,yig)ig|\ 1\leq x\leq 3,\ 2\leq y\leq 4\ \}$$
 ,

求 
$$\iint_D [x+y] dx dy$$
. (经管类)

(公)考研竞赛数学

9. 计算
$$\iint_{R^2} \exp\left[-rac{x^2-2
ho xy+y^2}{2\left(1-
ho^2
ight)}
ight] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$
,其中 $0 \le 
ho < 1$ .

(数学类)

10. 已知分段光滑的简单闭曲线  $\Gamma$  (约当曲线) 落在平面  $\pi: ax + by + cz + 1 = 0$  上,设  $\Gamma$  在  $\pi$  上围成的面积为 A ,求

$$\oint_{\Gamma} \frac{\left(bz-cy\right)\mathrm{d}\,x+\left(cx-az\right)\mathrm{d}\,y+\left(ay-bx\right)\mathrm{d}\,z}{ax+by+cz}\,,$$

其中 $\vec{n}$ 与 $\Gamma$ 的方向成右手系. (数学类、工科类)

11. 设f(x)连续,满足

$$f\left(x
ight) = \sqrt{x} + \int_{0}^{x} e^{x^2 - t^2} f\left(t
ight) \mathrm{d}\,t$$
 ,

求f'(1) - 3f(1)的值. (工科类)

**12.** 设f(x)连续,满足

$$fig(xig) = x - 2 \int_0^x e^{x^2 - t^2} fig(tig) \mathrm{d}\,t$$
 ,

且
$$f(1) = \frac{1}{e}$$
, 求 $f^{(n)}(1)$ 的值. (数学类)

13. 设f(x)连续,满足 $f(x)=x^2+\int_0^x e^{x-t}f'(t)\mathrm{d}\,t$ ,求f'(0). (经管、文专类)

**14.** 请用 a,b 描述圆  $x^2+y^2\leq 2y$  落在椭圆  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$  内的充分必要条件,并求此时椭圆的最小面积. (数学类、文专类)

**15.** 求曲线  $y=6-x^2$  与直线 y=5 所围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V .

二、定义数列
$$\{a_n\}$$
如下:

(全)考研竞赛数学

$$a_1 = rac{1}{2}, a_n = \int_0^1 \max \left\{ a_{n-1}, x 
ight\} \, \mathrm{d} \, x, \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$
 ,

求  $\lim_{n \to \infty} a_n$ . (数学、工科、经管、文专类)

三、设函数 $fig(xig)\in C^2(R)$ ,且 $\lim_{x o\infty}f(x)=0, ig|f''(x)ig|\leq 1$ ,

证明:  $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ . (数学类)

四、设非负函数fig(xig)在ig[0,1ig]上满足

$$orall x,y,$$
  $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$   $oxed{\exists}$   $f\left(1
ight)=1$  ,

证明:  $(1) f(x) \leq 2x, x \in [0,1]$ ;

(2) 
$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d} \, x \le \frac{1}{2}$$
. (数学类)

**五、**设有圆盘随着时间t 的变化,圆盘中心沿曲线

$$L: x = \cos t, y = \sin t, z = t^2 (t \ge 0)$$

向空间移动,且圆盘面的法向与L的切向一致。若圆盘半径

$$r\left(t
ight)$$
随时间改变,有 $r(t)=t^{rac{3}{2}}$ ,求在时间段 $\left[0,rac{1}{2}
ight]$ 内圆盘所

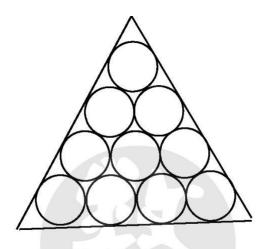
扫过的空间体积. (工科类)

六、证明: 当 $\forall x>0,$   $\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{t^{2}}{2}}\mathrm{d}t<\frac{1}{x}e^{-\frac{x^{2}}{2}}.$  (工科类、经管类)

七、证明:
$$an^2x+2\sin^2x>3x^2,x\in\left[0,rac{\pi}{2}
ight]$$
. (工科类)

八、设有一个等边三角形,内部放满n 排半径相同的圆彼此相切(如图为n=4 的情形),记A为等边三角形的面积, $A_n$ 

为
$$n$$
排圆的面积之和,求 $\lim_{n o \infty} rac{A_n}{A}$ . (经管、文专类)



九、设 $f(x)=e^xP(x)$ ,其中 $P\left(x
ight)$ 为 5 次多项式,证明:

- (1)f(x)必有极值点;
- (2) f(x)必有奇数个极值点. (经管类)
- 十、设全体正整数集合为  $N^+$  ,若集合  $G\subset N^+$  对加法封闭 (即  $\forall x,y\in G\Rightarrow x+y\in G$  ),且 G 内所有元素的最大公约数为 1,证明 : 存在正整数 N ,当正整数 n>N 时, $n\in G$  . (数学类)

# 2010 浙江省高等数学(微积分)竞赛试题及参考解答 (工科、数学、经管、文专类)

#### 一、计算题

1.【参考解析】: 由极限的运算法则,得

$$\lim_{x o\infty}4fig(xig)gig(xig)=\lim_{x o\infty}ig(fig(xig)+gig(xig)ig)^2\ -\lim_{x o\infty}ig(fig(xig)-gig(xig)ig)^2=0$$

所以  $\lim_{x \to \infty} f(x)g(x) = 0$ .

**2.【参考解析**】:容易知道底数部分极限趋于 1,由对数法和等价无穷小,极限转换为计算

$$egin{aligned} &\lim_{n o +\infty} n \ln rac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n o +\infty} n \left(rac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - 1
ight) \ &= \lim_{n o +\infty} n rac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = -\lim_{n o +\infty} rac{n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}
ight)^2} \ &= -\lim_{n o +\infty} rac{n}{2n+1+2\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = -rac{1}{4} \end{aligned}$$

所以原极限 $=e^{-\frac{1}{4}}$ .

3.【参考解析】: 容易知道底数部分极限趋于 1, 由对数法和等价无穷小, 极限转换为计算

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \ln \left[ \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left[ \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$=\lim_{n\to +\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2\Big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Big)}=-\frac{1}{2}$$

所以原极限 $=e^{-\frac{1}{2}}$ .

- 4. [参考解析]:  $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{\left(1+x^2\right)^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \,\mathrm{d}\,x$  $= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$  $= \frac{\pi+1}{2} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \frac{\pi+2}{4}$
- 5. 【参考解析】: 原积分=  $\int \left(e^x \sec^2 x + e^x \tan x\right) \mathrm{d} x$  $= \int e^x \, \mathrm{d} \tan x + \int e^x \tan x \, \mathrm{d} x$   $= e^x \tan x - \int e^x \tan x \, \mathrm{d} x + \int e^x \tan x \, \mathrm{d} x$   $= e^x \tan x + C$
- 6.【参考解析】: 将被积函数拆分为部分分式,得

$$egin{split} rac{1}{\left(1+x^2
ight)\!\left(2-2x+x^2
ight)} &= rac{1}{5}\!\left(\!rac{2x+1}{1+x^2}\!-\!rac{2x-3}{2-2x+x^2}\!
ight) \ &= rac{1}{5}\!\left(\!rac{1}{1+x^2}\!+\!rac{2x}{1+x^2}\!-\!rac{2x-2}{2-2x+x^2}\!+\!rac{1}{2-2x+x^2}\!
ight) \end{split}$$

于是由积分的线性运算性质,对以上括号里面求不定积分,得 原函数为

$$egin{split} F\left(x
ight) &= rac{1}{5} egin{bmatrix} rctan x + \ln\left(1 + x^2
ight) \ &- \ln\left|x^2 - 2x + 2
ight| + rctan\left(x - 1
ight) \end{bmatrix} \ &= rac{1}{5} egin{bmatrix} rctan x + \lnrac{1 + x^2}{x^2 - 2x + 2} + rctan\left(x - 1
ight) \end{bmatrix} \end{split}$$

所以原积分

(A) 考研克赛数学

$$= \frac{1}{5} \left[ \arctan x + \ln \frac{1 + x^2}{x^2 - 2x + 2} + \arctan (x - 1) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x \to +\infty} \left[ \arctan x + \ln \frac{1 + x^2}{x^2 - 2x + 2} + \arctan (x - 1) \right]$$

$$- \frac{1}{5} \lim_{x \to -\infty} \left[ \arctan x + \ln \frac{1 + x^2}{x^2 - 2x + 2} + \arctan (x - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{5} \left[ -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{2}{5} \pi.$$

7.【参考解析】:  $i led f ig( B, C ig) = \sin ig( B + C ig) + \sin B \ + \sin C + \cos ig( B + C ig) - \cos B - \cos C$ 

$$\Rightarrow \begin{cases} f_B'\left(B,C\right) = \cos\left(B+C\right) + \cos B - \sin\left(B+C\right) + \sin B = 0 \\ f_C'\left(B,C\right) = \cos\left(B+C\right) + \cos C - \sin\left(B+C\right) + \sin C = 0 \end{cases}$$

解得

$$\cos B + \sin B = \cos C + \sin C \Rightarrow B = C$$
  
或 $B + C = \frac{\pi}{2}$ (含去)

由此可得 $\cos{\left(2B\right)}+\cos{B}-\sin{\left(2B\right)}+\sin{B}=0$ ,于是

$$B=rac{\pi}{3}, A=C=B=rac{\pi}{3}$$

即  $\max fig(B,Cig) = rac{\sqrt{3-1}}{2}, \min fig(B,Cig) = 1.$ 

8.【参考解析】: 由积分的几何意义,得

$$egin{align} & \iint_D ig[x+yig] \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \ &= 3 imesrac{1}{2} + 3 imes 4 imesrac{1}{2} + 3 imes 5 imesrac{1}{2} + 6 imesrac{1}{2} = 18 \end{split}$$

原积分 
$$=2 \iint_{R^2} \exp \left[ -rac{\left(1-
ho
ight)t^2+\left(1+
ho
ight)s^2}{\left(1-
ho^2
ight)} 
ight] \mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s$$
  $=2 \sqrt{1-
ho^2} \iint_{\mathcal{D}^2} \exp \left[ -x^2-y^2 
ight] \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 2 \sqrt{1-
ho^2}\,\pi$ 

**10.【参考解析】**:由积分曲线落在平面陕个,所以满足平面方程,即原积分

$$I = -\oint_{\Gamma} \! \left( bz - cy 
ight) \mathrm{d}\, x + \left( cx - az 
ight) \mathrm{d}\, y + \left( ay - bx 
ight) \mathrm{d}\, z$$

并且由斯托克斯公式和平面π的单位法向量

$$ec{n}^{\circ} = \left[ rac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, rac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, rac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} 
ight]$$

并由两类曲面积分的关系,得

$$egin{split} I &= - \! \int \!\!\! \int 2a \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, z + 2b \, \mathrm{d}\, z \, \mathrm{d}\, x + 2c \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \ &= -2 \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \int \!\!\! \int _{\pi} \mathrm{d}\, S = -2A \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \, . \end{split}$$

11.【参考解析】: 对已知等式两端求导,得

$$egin{split} f'ig(xig) &= rac{1}{2\sqrt{x}} + \left[e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}fig(tig)\mathrm{d}\,t
ight]' \ &= rac{1}{2\sqrt{x}} + 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}fig(tig)\mathrm{d}\,t + e^{x^2}e^{-x^2}fig(xig) \ &= rac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\int_0^x e^{x^2-t^2}fig(tig)\mathrm{d}\,t + fig(xig) \end{split}$$

代入
$$\int_0^x e^{x^2-t^2}fig(tig)\mathrm{d}\,t = fig(xig)-\sqrt{x}$$
和 $x=1$ ,得 $f'ig(1ig)=rac{1}{2}+2ig[fig(1ig)-1ig]+fig(1ig)$ 

即
$$f'ig(1ig)-3fig(1ig)=-rac{3}{2}$$
 .

## 12.【参考解析】:; 对等式两端求导, 得

$$f'(x) = 1 - 2f(x) - 4x \int_0^x e^{x^2 - t^2} f(t) dt$$
 $= 1 - 2f(x) + 2x (f - x + 1)$ 
 $f'' = 2 - 4x + 2f + 2(x - 1)f'$ 
 $f''' = 4f' + 2(x - 1)f'' - 4$ 
 $f^{(n+1)} = 2(x - 1)f^{(n)} + 2nf^{(n-1)}$ 
 $f^{(n+1)}(1) = 2nf^{(n-1)}(1)$ 
而  $f'(1) = 1$ ,  $f''(1) = -2e^{-1}$ ,  $f'''(1) = 0$ , 所以
 $f^{(2n+1)}(1) = 0$ ,  $n \ge 1$ .
$$f^{(2n)}(1) = 2^{n-1}(2n-1)\cdots 3f''(1)$$
 $= -2^n(2n-1)!! e^{-1}$ ,  $n \ge 2$ .

# 13.【参考解析】:

$$f'=2x+f'+\int_0^x e^{x-t}f'ig(tig)\mathrm{d}\,t=2x+f'+f-x^2$$
,  
于是 $f=-2x+x^2$ ,所以 $f'ig(0ig)=-2$ .

14.【参考解析】: 
$$x^2+y^2\leq 2y$$
 落在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内的

充分必要条件即为(0,1)到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的距离  $d \ge 1$ . 而

$$egin{split} d^2 &= \min fig(tig) = \min igg[a^2\cos^2 t + ig(b\sin t - 1ig)^2igg] \ fig(tig) &= a^2 + ig(b^2 - a^2ig)\sin t^2 - 2b\sin t + 1 \end{split}$$

要求最小值,只需讨论 $t\in\left[0,\pi\left/
ight.2
ight]$ ,得

$$b\geq b^2-a^2$$
时,  $\left(b-1
ight)^2b\leq b^2-a^2$  $b\leq b^2-a^2$ 时,  $a^2b^2\geq b^2+a^4$ .

即充分必要条件为 $b > b^2 - a^2$ 时, b > 2;  $b < b^2 - a^2$ 时,  $a^2b^2 > b^2 + a^4$ .

此时椭圆面积 $S = \pi ab$ ,取得最小值时必有d = 1.

$$b\geq b^2-a^2$$
时, $b=2,a\geq \sqrt{2},S=2\sqrt{2}\pi$ ; $b\leq b^2-a^2$ 时, $a^2b^2=b^2+a^4$ .记 $a=\cos^{-1}x,b=\left(\cos x\sin x
ight)^{-1}$ ,

即  $\sin x \leq \cos x \ \left(x \in \left[0, \pi \ / \ 4\right]\right)$  时, $S = \pi \ / \left(\sin x \cos^2 x\right)$ 

的最小值. 易得为 $S_{\min}=2\sqrt{2}\pi$  ,所以包围圆 $x^2+y^2\leq 2y$ 的椭圆的最小面积为 $S_{\min}=2\sqrt{2}\pi$ .

## 15.【参考解析】:

【参考解析】: 
$$V=\int_{-1}^1\piig(6-x^2ig)^2\,\mathrm{d}\,x-\pi imes 5^2 imes 2=14rac{2}{5}\pi$$

### 二、【参考解析】: 由

$$a_n = \int_0^1 \max \left\{ a_{n-1}, \, x \right\} \mathrm{d} \, x \geq \int_0^1 a_{n-1} \, \mathrm{d} \, x = a_{n-1},$$

即 $\{a_n\}$ 单调增且 $a_1=rac{1}{2}\leq 1$ . 设 $0\leq a_n\leq 1$ ,则

$$0 \leq a_{n+1} = \int_0^1 \max\left\{a_n, x\right\} \mathrm{d}\, x \leq \int_0^1 \mathrm{d}\, x = 1$$

即 $\{a_n\}$ 有界. 可知 $\{a_n\}$ 收敛. 记其极限为 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ ,有

$$a = \int_0^1 \max \left\{ a, \, x 
ight\} \mathrm{d} \, x = \int_0^a a \, \mathrm{d} \, x + \int_a^1 x \, \mathrm{d} \, x = rac{1 + a^2}{2}$$

即 a=1.

三、【参考解析】:  $\forall x$ ,若 $f'(x) \neq 0$ ,不妨设f'(x) > 0,

则 
$$\exists x \in ig(a,big)$$
 , 对  $orall t \in ig(a,big)$  , 有  $f'ig(tig) > rac{f'ig(xig)}{2}$  且  $ig|f''ig| \leq 1$  .

可取得

(全) 考研竞赛数学

$$b-a=f'(x)$$
或 $b-a=1$ ( $f'(x)>1$ 时)

即有 $\left(f'ig(xig)
ight)^2/2<\int_a^bf'ig(tig)\mathrm{d}\,t=fig(big)-fig(aig)$ ,或

$$f'ig(xig)/2 < \int_a^b f'ig(tig) \mathrm{d}\,t = fig(big) - fig(aig)$$

当 $n o\infty$ 时, $a,b o\infty$ .又 $\lim_{x o\infty}fig(xig)=0$ ,所以

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0.$$

四、【参考解析】: (1)  $\forall x,y,f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ ,所以

$$fig(xig)$$
单调增加;  $orall x \in ig(0,1ig), \exists n \in N$  ,  $rac{1}{2} < nx < 1$  , 由此

得
$$nf\left(x
ight) \leq f\left(nx
ight) \leq f\left(1
ight) = 1$$
,所以 $f\left(x
ight) \leq rac{1}{n} < 2x$ .

(2) 
$$\int_{0}^{1} f(x) \, \mathrm{d} \, x = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x) \, \mathrm{d} \, x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(1 - x) \, \mathrm{d} \, x$$
$$\leq \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(1) \, \mathrm{d} \, x = \frac{1}{2}$$

## 五、【参考解析】:

$$V = \int_0^{rac{1}{2}} \pi r^2 \, \mathrm{d} \, s = \int_0^{rac{1}{2}} \pi t^3 \sqrt{1 + 4t^2} \, \mathrm{d} \, t = rac{\left(\sqrt{2} + 1
ight)\pi}{120}$$

## 六、【参考解析】:

$$x\!\int_{x}^{+\infty}\!e^{-\frac{t^{2}}{2}}\,\mathrm{d}t = \!\!\int_{x}^{+\infty}\!x\!e^{-\frac{t^{2}}{2}}\,\mathrm{d}t < \!\!\int_{x}^{+\infty}\!t\!e^{-\frac{t^{2}}{2}}\,\mathrm{d}t < \!\!e^{-\frac{t^{2}}{2}}.$$

七、【参考解析】:  $\tan x > x$ ,

$$\left( an x 
ight)' = 1 + an^2 x > 1 + x^2$$

由此可得  $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ . 并且容易计算得到

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

所以
$$an^2x+2\sin^2x>3x^2,x\in\left[0,rac{\pi}{2}
ight].$$

八、【参考解析】:设圆的半径为r,三角形的边长为a,则

$$2ig(n-2ig)r+2r\sqrt{3}=a$$

解得 $r=rac{a}{2ig(n-2ig)+2\sqrt{3}}$ . 于是可得

$$A_n = rac{\pi a^2}{\left(n-2+\sqrt{3}
ight)^2} rac{n\left(n+1
ight)}{8}$$

其中
$$A=rac{\sqrt{3}}{4}a^2$$
,所以 $\lim_{n o\infty}rac{A_n}{A}=rac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .

九、【参考解析】:  $f'(x)=e^x\left(P(x)+P'(x)\right)$ ,所以P(x)+P'(x)是 5 次多项式,必有零点,设为a.若是k重零点,则

$$P(x) + P'(x) = (x - a)^k Q(x)$$

Q(x)是5-k次多项式且 $Q(a) \neq 0$ .

若k是奇数, 当x 经过a 时f'(x) 改变符号, 即a 是f(x) 的极值点;

若k是偶数,Qig(xig)是5-k次的,可得Qig(xig)必有一奇数重零点,f必有极值点。

(2) P(x) + P'(x) 的奇数重零点只能是奇数个,所以 f 的极值点必是奇数个.

十、【参考解析】: 由条件,存在G中有限个数,不妨设为  $a_j,j=1,2\cdots,k$ ,其最大公约数为 1. 本题即要证:存在正整数 N,当正整数 n>N时,方程  $a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$ 有非负整数解.

先证明: 若a,b 的最大公约数为 1, ax + by 等源度影响

## 有非负整数解.

易知 $a, 2a, \dots, ab$  被b 除的余数都不相同,则n 必与某一ma , 被b除的余数相同,即n-ma被b整除,ax+by=n有 非负整数解.

若最大公约数为 $\left(a,b
ight)$ ,则

$$ax+by=ig(a,big)n\;,\,n\geqrac{ab}{ig(a,big)}$$

有非负整数解.

有非负整数解. 
$$ax+by+cz=ig(a_1x+b_1yig)ig(a,big)+cz=n$$
有非负整数解。一般的,对充分大的 $n$ ,

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=n$$

有非负整数解.

(全) 考研克赛数学