数学分析

数列极限

- 证明：$\{q^n \mid 0<|q|<1\}: \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0,\ n\in N^*$
- 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0$
- 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a,\ \lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_{n-i}}{n}=ab,\ n\in N^*$
- 证明：$\{y_n\}$是单调增加的正无穷大量，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=a,\ n\in N^*$
- 证明：$\{a_n|a_n>0\},\ \exists\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$
- 证明：$0<x_1<1,x_{n+1}=x_n(1-x_n)\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=1$
- 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i})-ln(n)=\gamma\approx0.5772...$
- 证明：$\forall\xi\in(a,b),\exists\delta>0s.t.\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap(a,b):$

  $(f(x)-f(\xi))(x-\xi)\geqslant0\Rightarrow f(x)\nearrow in\ (a,b)$
- 实数系基本定理的互证（分别用确界定理和有限覆盖定理证明剩余六个）

  确界定理：任何上（下）有界的非空集合必存在上（下）确界

  有限覆盖定理：闭区间的开覆盖中比存在有限个开区间覆盖该闭区间

  单调有界定理：单调有界数列必收敛

  致密性定理：有界数列必有收敛子列

  柯西收敛定理：数列收敛的充要条件是数列为柯西列

  聚点定理：有界无穷点集必有聚点

  闭区间套定理：如果$\{[a_n,b_n]\}$形成一个闭区间套，则存在唯一实数ξ属于所有的闭区间，且$\xi=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$

函数极限和连续函数

- 根据定义求函数极限的一般方法及步骤
- 两个重要极限的证明：$\lim\limits_{x\to0}\frac{sin(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
- 证明海涅定理（归结原则）：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\{x_n|\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=x_0,\ x_n\neq x_0\},\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$
- 证明（Cantor定理）：$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow f(x)$在[a,b]一致连续
- 证明：$f(x)\in C(0,+\infty),f(x^2)=f(x)\Rightarrow f(x)=C,\forall x\in(0,+\infty)$
- 证明：若函数f(x)在R上一致连续，则$\exists A,B>0s.t.|f(x)|\leqslant A|x|+B$

微分

- 已知$f(x)\in D(U(0,\delta)),f(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}=A$，求$f'(0)$
- 证明：$f''(x)+(f'(x))^2=x,f'(0)=0\Rightarrow x=0$不是$f(x)$极值点
- 已知$f_n(x)=x^nln(x)$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n^{(n-1)}(\frac{1}{n})*\frac{1}{(n-1)!}$

- 证明Leibniz公式：$f,g\in D(R)\Rightarrow [fg]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}g^{(k)}$
- 求x=0处n阶导数：$y=\frac{e^x}{x}\quad y=(x+\sqrt{x^2+1})^m$
- 求（恒等变形法）：$(sinaxsinbx)^{(n)}\quad (sin^6x+cos^6x)^{(n)}$

微分中值定理及其应用

- 证明（使用达布定理和比较的思想）：$f(x)\in D^2R,|f(x)|\leqslant 1,f^2(0)+(f^{'}(0))^2>1$

  $\Rightarrow\exists\xi\in Rs.t.f^{''}(\xi)+f(\xi)=0$
- 奇偶阶导数极值判断
- 证明：

  $f(x)\in D[0,c],f^{'}(x)\searrow in[0,c],f(0)=0,0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$

  $\Rightarrow f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$
- 证明（k方法）：Fermat引理，Rolle定理，Largrange定理，Cauchy定理
- 证明：$a_1<a_2<\ldots<a_n,\ f(x)\in D^{(n)}[a_1,a_n],\ f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_n)=0$

  $\Rightarrow\forall c\in[a_1,a_n],\ \exists\xi\in(a_1,a_n)s.t.f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\ldots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$
- 证明：$f(x)$是[a,b]上凸函数，$f(x)\in D(a,b)$

  $\Rightarrow\forall x_1,x_2\in(a,b):f^{'}(x_1)<f^{'}(x_2)$
- 证明：$f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1),f(0)=0$

  $\Rightarrow\exists\xi\in[0,h]s.t.\frac{f(h)-hf^{'}(h)}{h^2}=\frac{\xi f^{'}(\xi)-f(\xi)-\xi^2f^{''}(\xi)}{\xi^2}$
- 证明：

  $f(x)\in D^2[a,b]\Rightarrow\exists\xi s.t.f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=(\frac{b-a}{2})^2f^{''}(\xi)$
- 证明（应用凸函数几何意义）：f(x)是[a,b]上的可微凸函数，

  $f(a)=f(b)=0,f^{'}(a)=\alpha>0,f^{'}(b)=\beta<0\Rightarrow\int_a^bf(x)dx\leqslant\frac{\alpha\beta(b-a)^2}{2(\beta-\alpha)}$
- 证明（Largrange和Cauchy太严格了，大多数情况还是用Rolle）：

  $f,g\in C[a,b]\cap D(a,b),g^{'}(x)\not\equiv 0,\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)s.t.\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$
- 证明：$f(x)\in D^3[a,b]\Rightarrow\forall x_1,x_2\in(a,b),\exists\xi\in(a,b)s.t.$

  $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)[f^{'}(x_1)+f^{'}(x_2)]-\frac{1}{12}(x_1-x_2)^3f^{'''}(\xi)$
- 证明：$f(x)\in D^2[0,1],\ f(0)=2,\ f(1)=e+\frac{1}{e}$

  $\Rightarrow\exists\xi\in(0,1)s.t.f^{''}(\xi)=f(\xi)$
- 证明：$f(x)\in D^2[a,b],f(a)=f(b)=0\Rightarrow$

  $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{''}(x)|$
- 证明：

  $f(x)\in C(0,1]\cap D(0,1],\exists\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}f^{'}(x)$，则f(x)在(0,1]一致连续
- 构造过渡函数，证明无限区间上的Rolle定理
- 证明Darboux定理：

  $f(x)\in D[a,b],\forall k\in(f_+^{'}(a),f_-^{'}(b)),\exists\xi s.t.f^{'}(\xi)=k$
- 证明（Darboux定理应用）：$f(x)\in D^2[0,\frac{\pi}{4}],f(0)=0,f(\frac{\pi}{4})=f^{'}(0)=1$

  $\Rightarrow\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{4})s.t.f^{''}(\xi)=2f(\xi)f^{'}(\xi)$

- 证明：

  $f(x) \in C(U(x_0,\delta)) \cap D(\mathring{U}(x_0)), \lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x) = A \Rightarrow \exists f^{'}(x_0) = A$

- 证明Jensen不等式：f(x)是下凸函数，$f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$
- 证明：$f(x) \in C^1[0,1], f(0) = 0, f(1) = 1 \Rightarrow \int_0^1 |f(x) - f^{'}(x)| dx \geqslant \frac{1}{e}$
- 证明：$f(x)$是(a,b)内的下凸函数$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$：

  $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leqslant \frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
- 证明：$f(x), g(x) \in C[0,1]$且单调性处处一致，则：

  $\int_0^1 f(x) g(x) dx \geqslant \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$
- 证明：$f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b), f(a) = f(b) = 2022$

  $\Rightarrow \exists \xi, \eta \in (a,b) s.t. e^{\eta - \xi}[f^{'}(\eta) + f(\eta)] = 2022$
- 证明L'Hospital法则，并叙述等价命题：

$$n \geqslant 1, \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = l \in R, \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(F(x))}{x} = l$$

$$F(x) \in D(U(0,\delta)), \lim_{x \to 0} F^{'}(x) = A, \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

$$f(x) \not\equiv g(x), \ \forall x \in U(0,\delta) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{F(f(x)) - F(g(x))}{f(x) - g(x)} = A$$

$$f(x) \in D(U(0,\delta)), f(x) \not\equiv 0 \Rightarrow \exists n \geqslant 0, c \neq 0 s.t. \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = c$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1, f(x), g(x) \in D(0,\delta), g(x) \not\equiv 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(F(x))}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x), g(x) \in D(U(0,\delta)), f(x) \not\equiv g(x), \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - g(x)}{g^{-1}(x) - f^{-1}(x)} = 1$$

- 计算：$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^x - (sinx)^x}{x^3}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{(2+x)^x - 2^x}{x^2}$
- 证明（洛必达等价命题的应用）：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{e}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(sin(x))-x}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1+tan(x)}{1+sin(x)})^{\frac{1}{sin^3(x)}}=\sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)-arctan(x)}{tan(x)-arcsin(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{x+1})^{\frac{x+1}{x}}-(1+tan(x))^{\frac{1}{tan(x)}}}{x^2}=\frac{e}{2}$$

- 叙述并证明：带Peano、Lagrange、Cauchy、积分余项的Taylor公式
- 证明（常用带Lagrange余项的Taylor公式）：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\ x\in R$$

$$sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),x\in R$$

$$cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),x\in R$$

$$ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+o(x^n),x>-1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n),x\neq -1$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n),x\neq -1$$

$$tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots+\frac{(2^{2n}-1)2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)}{n!}x^n+o(x^n)$$

不定积分

- 不定积分铁律第一条：结果记得+C+C+C+C+C+C+C+C+C+C+C
- 好题（注意方法）：

$$I=\int\frac{cos(x)}{acos(x)+bsin(x)}dx\ J=\int\frac{sin(x)}{acos(x)+bsin(x)}dx$$

- 基本积分表（还是背一下）：

$$\int sec(x)dx = ln|sec(x) + tan(x)| + C$$

$$\int csc(x)dx = ln|csc(x) - cot(x)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}d = arcsin(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}ln|\frac{x-a}{x+a}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arctan(\frac{x}{a}) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 arcsin(\frac{x}{a})) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C$$

- Euler第一、二、三替换:

$$a > 0: \ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

$$c > 0: \ \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta): \ \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$

- 三角函数万能公式以及特殊情况下的替换:

$$tan\frac{x}{2} = t: \ sinx = \frac{2t}{1+t^2} \ cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$R(cosx, -sinx) = -R(cosx, sinx) : t = cosx$$

$$R(-cosx, sinx) = -R(cosx, sinx) : t = sinx$$

$$R(-cosx, -sinx) = R(cosx, sinx) : t = tanx$$

- 以下不定积分以及类似形式不可能用初等函数表示:

$$\int e^{-x^2}dx \int \frac{sinx}{x}dx \int \frac{cosx}{x}dx \int \frac{dx}{ln(x)} \int \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int ln(sinx)dx \int \sin(x^2)dx \int R(x, P_n(x))dx(n > 2)$$

定积分

- 证明黎曼可积的充要条件:

  $\forall P, \lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\Delta x_i) \to 0 : \lim\limits_{\lambda \to 0}\overline{S}(P) = L = l = \lim\limits_{\lambda \to 0}\underline{S}(P)$

  引理1:

  若在原有划分中加入分点形成新的划分，则大和不增，小和不减

  引理2: $\forall \overline{S}(P_1) \in \overline{S}, \underline{S}(P_2) \in \underline{S} : m(b-a) \leqslant \underline{S}(P_2) \leqslant \overline{S}(P_1) \leqslant M(b-a)$

  引理3（Darboux定理）: $\forall [a, b]$上有界函数$f(x) : \lim\limits_{\lambda \to 0}\overline{S}(P) = L, \ \lim\limits_{\lambda \to 0}\underline{S}(P) = l$

- 证明黎曼可积的其他充要条件:

$$\forall\Delta,\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to 0:\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists[a,b]\text{的划分}\Delta s.t.\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\sigma>0,\exists[a,b]\text{的划分}\Delta,\text{其对应于}\omega_i\geqslant\varepsilon\text{的子区间长度和小于}\sigma$$

- 证明：$f(x)\in D[0,a],f(0)=0,f^{'}(x)\leqslant M\Rightarrow\int_0^a f(x)dx\leqslant\frac{M}{2}a^2$
- 证明：

$$f(x)\in C[0,\pi],\int_0^\pi f(\theta)cos\theta d\theta=\int_0^\pi f(\theta)sin\theta d\theta=0$$
$$\Rightarrow\exists\alpha,\beta\in(0,\pi)(a\neq\beta)s.t.f(\alpha)=f(\beta)=0$$

- 证明Riemann-Lebesque引理：$f\in R[a,b]\Rightarrow\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)sin\lambda xdx=0$
- 证明：$f(x),g(x)$在$[a,b]$连续正定$\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)dx}{\int_a^b g(x)f^n(x)dx}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$
- 证明：$f(x)\in C[0,1],0<m\leqslant f(x)\leqslant M\Rightarrow[\int_0^1\frac{dx}{f(x)}][\int_0^1 f(x)dx]\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$
- 证明：$f(x)\in C^1[a,b]\Rightarrow|f(x)|\leqslant\int_0^1(|f(x)|+|f^{'}(x)|)dx$
- 证明：$f(x)\in C^1[0,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}f^{'}(x)+f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$
- 证明（积分第一中值定理）：$f(x),g(x)\in R[a,b],g(x)\not\equiv 0$

  $\Rightarrow\exists\eta\in[m,M]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=\eta\int_a^b g(x)dx$
- 证明（特别地）：$f(x)\in C[a,b]$

  $\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$
- 证明（Bonnet型）：$g(x)\in R[a,b],f(x)\searrow in[a,b]$

  $\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx$
- 证明（Bonnet型）：$g(x)\in R[a,b],f(x)\nearrow in[a,b]$

  $\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(b)\int_\xi^b g(x)dx$
- 证明（Weierstrass型）：$g(x)\in R[a,b],f(x)$在$[a,b]$单调

  $\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx$
- 证明（$H\ddot{o}lder$不等式）：$f(x),g(x)\in C[a,b],p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

  $\Rightarrow\int_a^b|f(x)g(x)|dx\leqslant(\int_a^b|f(x)|^pdx)^{\frac{1}{p}}*(\int_a^b|g(x)|^qdx)^{\frac{1}{q}}$
- 证明：$f(x)\in C^2[0,1],f(0)=f(1)=0,f(x)\not\equiv 0\Rightarrow\int_0^1|\frac{f^{''}(x)}{f(x)}|dx\geqslant 4$
- 证明：$f(x)\in C^1[a,b],f(a)=0$

  $\Rightarrow f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b|f^{'}(x)|^2dx\quad\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b|f^{'}(x)|^2dx$
- 证明：$f(x)\in C[0,1],f(x)\searrow,\forall\alpha\in[0,1]:\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)dx$
- 证明（Young不等式）：$f(x)\nearrow in[0,+\infty),f(0)=0,a,b>0$

  $\Rightarrow\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy\geqslant ab$
- 证明：$f(x),f_h(x)=f(x+h)\in R[a,b]\Rightarrow\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|dx=0$
- 证明：$f(x)\in R[a,b],F(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]\Rightarrow F(x)\in C[a,b]$

- 证明（接）： $f(x)\in C[a,b]\Rightarrow F(x)\in D[a,b],F^{'}(x)=f(x)$
- 证明：$f(x)\in C^1(R)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}[f(x+\frac{k}{n^2+k^2})-f(x)]=\frac{ln2}{2}f^{'}(x)$
- 证明：$f(x)\in D(R),f(0)=0,|f^{'}(x)|\leqslant|f(x)|\Rightarrow f(x)\equiv 0$
- 证明：$f(x)\in C[0,\pi],\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)cosxdx=0$

  $\Rightarrow \exists\alpha,\beta\in(0,\pi),\alpha\neq\beta s.t.f(\alpha)=f(\beta)=0$
- 证明：$f(x)\in C[a,b],f(x)\geqslant 0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)dx)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$
- 已知$f(x)=2\int_0^x tf^2(t)dt-1$，求$f(x)$
- 证明（上一命题的引理）： $f(x),g(x)\in R[a,b],\forall\Delta:a=x_0<\ldots<x_n=b,\forall\{\xi_n\}:$

  $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$
- 证明：$f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\int_a^x[\int_a^t f(u)du]dt=\int_a^x(x-t)f(t)dt,\forall x\in[a,b]$
- 证明：$f(x)\in D[0,1],f^{'}(x)\in[0,1],f(0)=0\Rightarrow(\int_0^1 f(x)dx)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)dx$
- 证明：$f(x)\in C^1[0,a],f(0)=0$

  $\Rightarrow\int_0^a|f(x)f^{'}(x)|dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a(f^{'}(x))^2dx$
- 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^nxdx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!} & n=2k,k\in N^*\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}*\frac{\pi}{2} & n=2k-1,k\in N^*\end{cases}$$

- 证明（Wallis公式）： $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$
- 证明（stirling公式）：$n!\sim\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n(n\to+\infty)$
- 证明（Hadamard不等式）：f(x)是[a,b]上的下凸函数，则

  $f(\frac{a+b}{2})*(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}*(b-a)$
- 证明：$\int_{e^{-2n\pi}}^1|(cos(ln\frac{1}{x}))^{'}|dx=4n$
- 证明：$\int_0^{2\pi}f(acosx+bsinx)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sqrt{a^2+b^2}sinx)dx$
- 证明：$\int_0^1\frac{arctanx}{1+x}dx=\frac{\pi}{8}ln2$
- 计算：$\int_0^1\frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^2x}{sinx+cosx}dx\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(2n+1)x}{sinx}dx$
- 已知$f(x)$连续$,f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)dx=1$求$\int_1^3 f(x)dx$
- 证明：$f(x)\in C^1[a,b]\Rightarrow\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f^{'}(x)|dx$
- 证明：$f(x)\in D^2[0,1],f^{''}(x)\leqslant 0\Rightarrow\int_0^1 f(x^2)dx\leqslant f(\frac{1}{3})$
- 证明：$f(x)\searrow in[0,2\pi]\Rightarrow\int_0^{2\pi}f(x)sin(nx)dx\geqslant 0$
- 证明：以下默认 $\begin{matrix}y=f(x) & x=x(t),y=y(t) & r=r(\theta)\\ x\in[a,b] & t\in[T_1,T_2] & \theta\in[\alpha,\beta]\end{matrix}$

  平面面积：

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_{T_1}^{T_2} |y(t)x'(t)|dt$$
$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$$

曲线弧长:

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$
$$\int_{T_1}^{T_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$
$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

旋转体体积:

$$\pi\int_a^b [f(x)]^2dx$$
$$\pi\int_{T_1}^{T_2} y^2(t)|x'(t)|dt$$
$$\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)sin\theta d\theta$$

曲率:

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{r^2+2r'-rr''}{[r^2+(r')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

反常积分

- 证明（Cauchy判别法）：

$$f(x)\geqslant 0\ in\ [a,+\infty)\subset(0,+\infty), K>0$$
$$(1)\ \ f(x)\leqslant\frac{K}{x^p}, p>1\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}$$
$$(2)\ \ f(x)\geqslant\frac{K}{x^p}, p\leqslant 1\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{发散}$$

- 证明（Cauchy判别法的极限形式）：

$$f(x)\leqslant 0\ in\ [a,+\infty)\subset(0,+\infty), \lim_{x\to+\infty} x^pf(x)=l$$
$$(1)\ \ 0\leqslant l<+\infty, p>1\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{收敛}$$
$$(2)\ \ 0<l\leqslant+\infty, p\leqslant 1\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)dx\text{发散}$$

- 证明满足以下条件则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛（两个重要的判别法）：

$$(Abel)\ \int_a^{+\infty} f(x)dx收敛, g(x)在[a,+\infty)单调有界$$

$$(Dirichlet)\ F(x)=\int_a^A f(x)dx在[a,+\infty)有界$$

$$g(x)在[a,+\infty)单调且\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

- 证明（Cauchy判别法）：

$$f(x)\geqslant 0\ in\ [a,b), x\in[b-\eta_0,b), \exists K>0 s.t.$$

$$(1)\ \ f(x)\leqslant\frac{K}{(b-k)^p}, p<1\Rightarrow\int_a^b f(x)dx收敛$$

$$(2)\ \ f(x)\geqslant\frac{K}{(b-x)^p}, p\geqslant 1\Rightarrow\int_a^b f(x)dx发散$$

- 证明（Cauchy判别法的极限形式）：

$$f(x)\geqslant 0\ in\ [a,b), \lim_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=l$$

$$(1)\ \ 0\leqslant l<+\infty, p<1\Rightarrow\int_a^b f(x)dx收敛$$

$$(2)\ \ 0<l\leqslant+\infty, p\geqslant 1\Rightarrow\int_a^b f(x)dx发散$$

- 证明满足以下条件则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛（两个重要的判别法）：

$$(Abel)\ \int_a^b f(x)dx收敛, g(x)在[a,b)单调有界$$

$$(Dirichlet)\ F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)dx在(0,b-a]有界$$

$$g(x)在[a,b)单调且\lim_{x\to b^-} g(x)=0$$

——cxc