2021 年浙江省高等数学(微积分)竞赛 (数学类与工科类)试题

一、计算题 (每小题 14 分, 满分 70 分)

1、设
$$x_n=igg(1+rac{1}{n^2}igg)igg(1+rac{2}{n^2}igg)\cdotsigg(1+rac{n}{n^2}igg)$$
,求 $\lim_{n o +\infty}x_n$.

- 2、求 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)$ 的所有渐近线.
- 3、求不定积分 $\displaystyle \int \dfrac{x \, \mathrm{d} \, x}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} \, .$
- 4、求定积分 $\int_0^{rac{\pi}{2}} rac{\mathrm{d}x}{1+ an^{2021}x}$.
- 5、求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}$ 的和.
- 二、(满分 20 分) 设 $a_1=1, a_n=\sin a_{n-1} (n\geq 2)$,证明: $a_n\geq \frac{1}{\sqrt{n}} (n\geq 2)$.
- 三、(满分 20 分) 计算 $\iint_D \left(\sin\left(x^3y\right) + x^2y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中D由 $y=x^3$ 、y=-1和x=1围成的有限闭区域.
- 四、(满分 20 分) 一卡车沙子通过传送带卸货,假设沙子落到地上堆成一个正圆锥体,且圆锥体的底面半径始终等于圆锥体的高,如果传送带以每分钟 3 立方米匀速卸沙,问当圆锥到达 3 米高时,卸了多少时间,此时圆锥高h的增长速度为多少?

全考研竞赛数学

2021 浙江省高等数学(微积分)竞赛试题 (数学类与工科类)参考解答

一、计算题: (每小题 14 分, 满分 70 分)

1、设
$$x_n=(1+rac{1}{n^2})(1+rac{2}{n^2})\cdots(1+rac{n}{n^2})$$
,求 $\lim_{n o\infty}x_n$.

【参考解答】: 两边取对数,则有: $\ln x_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n^2})$.

不妨记 $f(x) = \ln(1+x)$,则有f(0) = 0,从而由导数定义可知:

$$f'(0)=\lim_{x o 0}rac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{n o\infty}rac{f(rac{k}{n^2})-f(0)}{rac{k}{n^2}}$$
 ,

所以当 $n \to \infty$ 时,由极限与无穷小关系可得:

$$f(rac{k}{n^2}) = f'(0) \cdot rac{k}{n^2} + o(rac{1}{n^2})$$
,即 $\ln(1 + rac{k}{n^2}) = rac{k}{n^2} + o(rac{1}{n^2})$,

故
$$\lim_{n o\infty}\ln x_n=\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n\ln(1+rac{k}{n^2})$$

$$=\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n\left[rac{k}{n^2}+o(rac{1}{n^2})
ight]=rac{1}{2}$$

所以
$$\lim_{n o\infty}x_n=e^{rac{1}{2}}=\sqrt{e}$$
 .

2、求
$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)$$
的所有渐近线.

【参考解答】: 由于

(全) 考研竞赛数学

$$\lim_{x o 1} f(x) = \lim_{x o 1} rac{x^3}{(x-1)^2} \cos(2\arctan x) = \infty$$
 ,

所以x = 1为垂(铅)直渐近线. 由于

$$k=\lim_{x o\infty}rac{f(x)}{x}=\lim_{x o\infty}rac{x^2}{(x-1)^2}\cos(2\arctan x)=-1$$
 ,

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} (f(x) + x)$$

$$b = \lim_{x o \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x o \infty} (f(x) + x)$$
 $= \lim_{x o \infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} \cos(2 \arctan x) + x \right)$

$$=\lim_{x o\infty}iggl(rac{x^3}{(x-1)^2}-xiggr)\cos(2\arctan x)\ +\lim_{x o\infty}xiggl(\cos(2\arctan x)+1iggr)$$

$$=\lim_{x o\infty}rac{2x^2-x}{\left(x-1
ight)^2}\mathrm{cos}(2rctan x)$$

$$+\lim_{x\to\infty} 2x\cos^2(\arctan x) = -2$$

所以斜渐近线为y = -x - 2. 所以该曲线的所有渐近线为

$$x=1 \, \text{mb} \, y = -x-2 \, .$$

3、求不定积分
$$\int \frac{x \, \mathrm{d} \, x}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}$$
 .

【参考解答】: 拆分积分,得

$$\int \frac{x \, \mathrm{d} x}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} \\
= \int \frac{x-1}{(x-1)^2 \sqrt{2-(x-1)^2}} \, \mathrm{d} x \\
+ \int \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{2-(x-1)^2}} \, \mathrm{d} x \\
\triangleq I_1 + I_2$$

令
$$t = \sqrt{2 - (x - 1)^2}$$
,得

学 考研克赛数学

$$\begin{split} I_1 &= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(x-1)^2}{(x-1)^2 \sqrt{2 - (x-1)^2}} = \int \frac{1}{t^2 - 2} \mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int (\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}}) \,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + 2x - x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2x - x^2} + \sqrt{2}} \right| + C \end{split}$$

 $\diamondsuit x - 1 = \sqrt{2} \sin t$,得

$$egin{align} I_2 &= \int rac{1}{2\sin^2 t} \mathrm{d}\,t = -rac{1}{2}\cot t + C \ &= -rac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)} + C \ \end{array}$$

代入得

原式 =
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-x^2}+\sqrt{2}} \right| - \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(x-1)} + C.$$

4、求定积分
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d} x}{1 + \tan^{2021} x}$$
.

【参考解答】: 令 $x=rac{\pi}{2}-t$,则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{1 + \tan^{2021}x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{2021}t}{1 + \tan^{2021}t} \,\mathrm{d}\,t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{2021}x}{1 + \tan^{2021}x} \,\mathrm{d}\,x$$

于是可得

$$egin{aligned} & \int_0^{rac{\pi}{2}} rac{\mathrm{d}\,x}{1+ an^{2021}\,x} \ &= rac{1}{2} iggl(\int_0^{rac{\pi}{2}} rac{\mathrm{d}\,x}{1+ an^{2021}\,x} + \int_0^{rac{\pi}{2}} rac{ an^{2021}\,x}{1+ an^{2021}\,x} \mathrm{d}\,x iggr) \end{aligned}$$

$$=rac{1}{2}\int_0^{rac{\pi}{2}}\mathrm{d}\,x=rac{\pi}{4}$$

5、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$ 的和.

【参考解答】: 由无穷级数的运算性质, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1) + n + 1}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= e + e + e - 1 = 3e - 1$$

二、(满分 20 分) 设 $a_1=1$, $a_n=\sin a_{n-1} (n\geq 2)$,

证明: $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} (n \geq 2)$.

【参考解答】: (方法一) 当n = 2时,

$$a_2=\sin 1\geq \sin rac{\pi}{4}=rac{1}{\sqrt{2}}$$
 ,

显然成立;假设 $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} (n \geq 3)$ 也成立,只需证明

$$egin{align} a_{n+1} &= \sin a_n \, \geq \sin rac{1}{\sqrt{n}} > rac{1}{\sqrt{n}} - rac{1}{6} iggl(rac{1}{\sqrt{n}}iggr)^3 \ &> rac{1}{\sqrt{n+1}} = rac{rac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+iggl(rac{1}{\sqrt{n}}iggr)^2}} \ \end{aligned}$$

令
$$x=rac{1}{\sqrt{n}}\in\left[0,rac{1}{\sqrt{3}}
ight]$$
,即证 $x-rac{1}{6}x^3>rac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0$,

即证

$$x^2-rac{1}{3}x^4+rac{1}{36}x^6>rac{x^2}{1+x^2}, x\in \left[0,rac{1}{\sqrt{3}}
ight],$$

即证
$$rac{1}{1+x^2}>rac{1}{3}-rac{1}{36}x^2$$
,而 $rac{1}{1+x^2}\geqrac{1}{1+\left(rac{1}{\sqrt{3}}
ight)^2}=rac{3}{4}>rac{1}{3}>rac{1}{3}-rac{1}{36}x^2$,

由数学归纳法, $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} (n \geq 2)$.证毕!

(方法二) 对n 作数学归纳法. 当n=2时,

$$a_2 = \sin 1 \ge \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

设当n=m时结论成立,则

$$a_m \geq rac{1}{\sqrt{m}}, a_{m+1} = \sin a_m \geq \sin rac{1}{\sqrt{m}}$$
 .

而仅需证明

$$\sin \frac{1}{\sqrt{m}} \ge \frac{1}{\sqrt{m+1}}$$

$$\Leftarrow \sin x \ge \sin \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} (0 \le x \le 1)$$

$$\Leftarrow \sin(\tan \theta) \ge \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \sin \theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

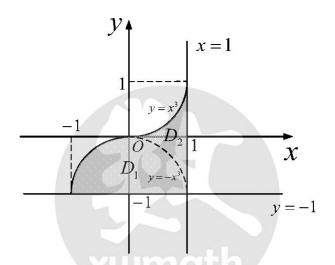
$$\Leftarrow \tan \theta \ge \theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

这是成立的,故有结论 $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} (n \geq 2)$.

三、(满分 20 分) 计算 $\iint_D (\sin(x^3y) + x^2y) dx dy$, 其

中D由 $y=x^3,y=-1$ 和x=1围成的有限闭区域.

【参考解答】:积分区域D如图阴影部分所示。



添加辅助曲线 $y=-x^3$ 将该积分区域划分为 D_1 和 D_2 两部分,显然 D_1 关于 y 轴对称, D_2 关于 x 轴对称,从而

$$egin{aligned} \iint\limits_{D} \sin(x^3 y) \, \mathrm{d} \, x \, \mathrm{d} \, y &= \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} &= 0 + 0 = 0 \ \iint\limits_{D_2} x^2 y \, \mathrm{d} \, x \, \mathrm{d} \, y &= 0 \, , \end{aligned}$$

于是可得

$$egin{align} & \iint_D \left(\sin(x^3 y) + x^2 y
ight) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \ & = \iint_D x^2 y \, \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y = 2 \! \int_0^1 \mathrm{d}\, x \! \int_{-1}^{-x^3} x^2 y \, \mathrm{d}\, y \ & = \int_0^1 \! x^2 y^2 \left| rac{-x^3}{-1} \, \mathrm{d}\, x = \int_0^1 \! (x^8 - x^2) \, \mathrm{d}\, x = rac{1}{9} - rac{1}{3} = -rac{2}{9} \ & =$$

四、(满分 20 分) 一卡车沙子通过传送带卸货,假设沙子落到地上堆成一个正圆锥体,且圆锥体的底面半径始终等于圆锥体的高,如果传送带以每分钟 3 立方米匀速卸沙,问当圆锥达到 3 米高时,卸了多少时间,此时圆锥高 h 的增长速度为多少?

【参考解答】:设经过t分钟后,圆锥高为h,则

$$3t = rac{1}{3} \cdot \pi h^2 \cdot h \Rightarrow 9t = \pi h^3$$
 .

令h=3得, $t=3\pi$. 进一步

(全) 考研竞赛数学

$$9\,\mathrm{d}\,t = 3\pi h^2\,\mathrm{d}\,h \Rightarrow rac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t} = rac{3}{\pi h^2} \Rightarrow rac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t}igg|_{h=3} = rac{1}{3\pi}\,.$$

故当圆锥高达 3 米高时,卸了 3π 分钟,此时圆锥的高h 的增长速度为 $\frac{1}{3\pi}$ 米每分钟。

五、(满分 20 分,限数学类做) 若 $f(x):(0,\pi)\to R$ 连续,f(x)>0, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,且对于任意的 $x\in(0,\pi)$ 满足

$$\int_{rac{\pi}{2}}^{x} rac{\mathrm{d}\,t}{f^2(t)} = -rac{\cos x}{f(x)}$$
,求 $f(x)$ 的表达式.

【参考解答】:对题设等式两边关于x 求导数,则有

$$rac{1}{f^2(x)} = -rac{-\sin x \cdot f(x) - \cos x \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$
 ,

即 $f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$. 从而

$$f'(x)\sec x + f(x)\sec x \cdot \tan x = \sec^2 x$$
,

即 $(f(x)\sec x)' = \sec^2 x$, 两边积分可得:

 $f(x) \sec x = \tan x + C \Rightarrow f(x) = \sin x + C \cos x$.

由f(x) > 0可知, $C = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$. 若不然,

 $C>0\Rightarrow f(x)=\sqrt{1+C^2}\sin(x+arphi), arphi=rctan C$ $\Rightarrow f(\pi-arphi)=0$,矛盾;

 $C<0\Rightarrow f(x)=\sqrt{1+C^2}\sin(x+arphi), arphi=rctan C$ $\Rightarrow f(-arphi)=0$,矛盾. 故 $f(x)=\sin x$.

六、(满分 20 分, 限工科类做) 设 Γ 是上半球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \ge 0)$$

上的光滑曲线,起点和终点分别在平面 $z=0,z=\frac{R}{2}$ 上,曲

线的切线与z轴正向的夹角为常数 $lpha\in\left(0,rac{\pi}{6}
ight)$,求曲线 Γ 的

长度.

【参考解答】: 设曲线 Γ 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$$

则 Γ 的切向量为 $\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.而由题设可知:

$$0 < \cos \alpha = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \Rightarrow z'(t) > 0.$$

故曲线 Γ 的长度为:

$$egin{align} s &= \int_{\Gamma} \mathrm{d}\, s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \, \mathrm{d}\, t \ &= \int_a^b rac{z'(t)}{\cos lpha} \, \mathrm{d}\, t \ &= rac{1}{\cos lpha} [z(b) - z(a)] = rac{R}{2\cos lpha} \end{split}$$