

# Мультимоделирование как универсальный способ описания выборки общего вида\*

Логинев Р. А., Адуенко А. А., Стрижов В. В.

logipamar@yandex.ru

В случае неоднородных данных в машинном обучении использования одной модели недостаточно. Для выявления этого используют комбинации нескольких моделей - мультимодели. Работа нацелена на то, чтобы изучить по последовательности постепенно приходящих данных эволюцию представлений о модели. Рассмотреть, в какие моменты предпочтительнее разветвлять одну модель, а также какими критериями пользоваться для объединения ещё недообученного ответвления с имеющимися моделями. Исследования проводятся на синтетических данных из многоуровневой модели или смеси распределений.

**Ключевые слова:** мультимоделирование, бинарная классификация, эволюция моделей, адаптивное обучение.

## 1 Введение

Работа посвящена исследованию решения задач бинарной классификации при помощи мультимоделей. Решение этой задачи может быть использовано в вопросах кредитного скоринга [], медицинской диагностики [], предсказания качества продукции и других областях. В некоторых задачах встречаются данные, для описания которых требуется вводить несколько моделей. Например, для задачи кредитного скоринга важность признаков в модели может отличаться в зависимости от региона заявителя. Как пример, многодетность может быть положительным параметром для более благополучных регионов и отрицательным для менее состоятельных. Тогда используют решающее правило о разделении выборки на кластеры, а затем на каждом из них строят отдельную модель. Такой подход называют многоуровневой моделью.

Один из алгоритмов построения и обучения оптимальной модели, основанный на байесовском выводе и ЕМ-алгоритме, описан в [Aduenko-main]. Более того, известна процедура выявления максимального числа необходимых моделей, а также построена функция, которая, в отличие от методов, основанных на дивергенциях Брегмана и KL-дивергенциях, позволяет оценить различимость двух моделей.

Однако этот алгоритм рассматривает выборку как статическую и известную заранее. В прикладных задачах появляются данные, имеющие временную структуру. Из-за этого на одном и том же объекте ответ с течением времени может различаться. Таким образом целью работы является исследование эволюции модели во времени. Более того, в статье приведены эксперименты, выявляющие необходимый размер выборки, которую возможно отделить для построения новой модели. Подобные результаты планируется получить на синтетических данных, где временная структура будет различной: случайный выбор модели и непрерывные отрезки во времени, на которых поступает каждая модель.

В упомянутой работе такая оптимизация алгоритма не приведена, и новый подход позволяет улучшить качество мультимоделей в задачах бинарной классификации.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №00-00-00000. Научный руководитель: Стрижов В. В. Задачу поставил: Стрижов В. В. Консультант: Адуенко А. А.

Предлагается построить модификацию этого алгоритма, взяв его за основу. Один из методов заключается в том, чтобы для новой модели учитывать лишь ту часть выборки, которая поступила последней. Размер этой части является гиперпараметром и будет подобран на синтетических данных.

Затем полученный алгоритм предлагается сравнить с уже имеющимся как на построенных синтетических данных, так и на собранных в репозитории UCI данных о кредитном скоринге, бинаризованных данных о стоимости квартир и о качестве вина [1].

## 2 Постановка задачи

Как уже отмечено, в работе рассматривается задача бинарной классификации. Это означает что изначально имеется некоторая выборка объектов. Объект представляется в виде пары  $(\mathbf{x}, y)$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  - признаковое описание объекта, а  $y \in \{0, 1\}$  - корректный класс объекта.

Соответственно, выборка обозначается  $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}, i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$ , а матрицей  $\mathbf{X}$  обозначим матрицу объектов, у которой в строке с индексом  $i$  будет содержаться признаковое описание объекта  $\mathbf{x}_i$ .

**Определение 1.** Моделью бинарной классификации будем называть параметрическое семейство функций  $f$ , отображающих декартово произведение множества значений признакового описания объектов  $\mathbb{X}$  и множества параметров  $\mathbb{W}$  в множество значений целевой переменной  $\mathbb{Y} = \{0, 1\}$

**Определение 2.** Бинарным классификатором называется отображение  $f$  из множества признакового описания объектов  $\mathbb{X}$  в пространство целевой переменной  $\mathbb{Y}$

**Определение 3.** Вероятностным классификатором называется условное распределение вида

$$q(y|\mathbf{x}) : \mathbb{Y} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Имея вероятностный классификатор, можно построить бинарный классификатор по следующему принципу:

$$f(\mathbf{x}) = I\{q(1|\mathbf{x}) > T\},$$

где  $T \in (0, 1)$  - порог классификации, который является одним из гиперпараметров модели.

Для оценки качества модели в общем случае необходима функция ошибки, не зависящая от порога классификации. Для этого подходит AUC ROC - площадь под ROC-кривой, описание которой имеется в [2]

Чтобы избежать проблемы переобучения, множество объектов представляется в виде объединения обучающей и тестовой выборки:  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{test} \sqcup \mathcal{D}_{train}$ .

Соответственно определяются и множества индексов:

$$\mathcal{D}_{train} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}, i \in \mathcal{I}_{train} \subset \mathcal{I}$$

$$\mathcal{D}_{test} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}, i \in \mathcal{I}_{test} \subset \mathcal{I}$$

Если же объекты отсортированы во времени, то обучающая выборка должна идти во времени раньше, поэтому рассматриваются следующие множества в качестве индексных:

$$\mathcal{I}_{train} = \{1, \dots, t\}$$

$$\mathcal{I}_{test} = \{t + 1, \dots, m\}$$

Как было отмечено, данные могут не описываться одной моделью. Поэтому для решения задачи классификации рассмотрим множество  $\mathbb{M} = \{f_i\}, i \in \mathfrak{M}$  - множество используемых моделей, где каждый из  $f_i$  - вероятностный бинарный классификатор.

**Определение 4.** *Выборкой с временной структурой называется такое множество объектов  $\mathfrak{D} = \{\mathbf{x}_i, y_i\}, i \in \mathcal{I}$ , на котором задано отображение  $t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{N}$ , определяющее время прибытия объекта, такое, что*

$$\forall i, j \in \mathcal{I} : i < j \Rightarrow t(\mathbf{x}_i) < t(\mathbf{x}_j)$$

Целью обучения является задать множество моделей  $\mathbb{M}$ , множество параметров  $\mathbf{w}$  для каждой из них, причём каждый из параметров должен быть функцией от времени прибытия объекта, поскольку рассматривается эволюция модели. Обозначим эти параметры как функции  $\{\mathbf{w}_i(t)\}, i \in \mathfrak{M}$

Более того, требуется определить, по какой из моделей считать ответ на объекте. Для этого необходимо построить отображение  $\mathcal{M} : \mathbb{X} \rightarrow \mathfrak{M}$  из множества признаков описания объектов в множество индексов моделей, которое задаст выбранную модель.

Задав такие множества, становится возможным построить классификатор  $f_{mult}$  следующим образом:

1. Выбрать модель при помощи отображения  $\mathcal{M}$
2. Вычислить значения параметров, учитывая время прихода объекта  $t(\mathbf{x})$
3. Получить предсказание обученной выбранной модели

$$f_{mult}(\mathbf{x}) = f_{\mathcal{M}(\mathbf{x})}(\mathbf{w}_{\mathcal{M}(\mathbf{x})}(t(\mathbf{x})), \mathbf{x})$$

Таким образом, требуется решить следующую оптимизационную задачу, решение которой будем называть *обучением мультимоделей*:

$$\begin{aligned} & \arg \max AUCROC(\mathfrak{D}_{train}, f_{mult}(\mathcal{M}, \mathbf{w})) \\ & s.t. \mathcal{M} : \mathbb{X} \rightarrow \mathfrak{M} \\ & \mathbf{w} = \mathbf{w}(t) = \{\mathbf{w}_i(t)\}_{i \in \mathfrak{m}} \end{aligned}$$

**Описание отдельных моделей.** В качестве моделей для множества  $\mathbb{M}$  будут рассматриваться модели логистической регрессии с вектором весов  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  и набором гиперпараметров  $\mu$ :

$$p(y, \mathbf{w} | \mathbf{x}, \mu) = \sigma(y \mathbf{w}^\top \mathbf{x}) p(\mathbf{w} | \mu)$$

$$\text{Здесь } \sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Каждая из моделей будет обучаться методом максимальной обоснованности, который описан в [1]

**Природа данных.** Исследование будет проведено на синтетических данных для того, чтобы построенная модель соответствовала получаемым данным. Будут рассмотрены 2 случая, при которых становится целесообразным использование мультимоделей.

**Рис. 1** Сравнение одиночной и многоуровневой модели

Первый случай - это случай *многоуровневой модели*. В данном случае при генерации будет использован набор правил, который определит, к какой группе объектов (к какому кластеру), будет принадлежать объект  $\mathbf{x}$ . После этого для каждого кластера будет задан свой вектор весов, по которому будет вычисляться вероятность принадлежности конкретному классу. Затем, если эта вероятность выше некоторого порога, объекту будет сопоставлен класс 1, иначе -  $-1$ .

Другой случай - случай *смеси моделей*. Пусть данные генерируются из  $k$  моделей, для каждой из которых задан вектор весов. Пусть также есть вектор  $\pi \in \mathbb{R}^k$ , где  $\pi_i$  задаёт вероятность генерации объекта из модели с индексом  $i$ . Этот вектор будет сгенерирован из симметричного распределения Дирихле.

В каждом из случаев вектора весов будут генерироваться из нормального распределения с нулевым средним и диагональной матрицей ковариаций. Именно такие распределения будут рассматриваться в качестве априорных при обучении классификаторов в данной работе.

### 3 Базовый эксперимент

В качестве базового алгоритма использовался алгоритм для построения мультимodelей, описанный в [1]. Для самого простого случая рассматривается многоуровневая модель с двумя группами рассматриваемых объектов. В данном эксперименте для удобства визуализации рассматривается  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ .

В задачах, в которых используются многоуровневые модели, правила, по которым объекты разделяются по группам, зафиксированы заранее. Поэтому изначально обучающая выборка разделена на кластеры:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \sqcup \mathfrak{D}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{D}_K$$

Поэтому для обучения многоуровневой модели требуется лишь обучить логистическую регрессию на каждой выборке  $\mathfrak{D}_i$ , чтобы затем получить оптимальные веса  $\mathbf{w}_i$  для каждой из моделей. Чтобы получить ответ на тесте, достаточно вычислить правило, по которому объект относится к кластеру, а затем получить предсказания, используя фиксированную для данного кластера модель.

Для базового эксперимента выбран параметр  $K = 2$ . Цель - рассмотреть, насколько будут отличаться предсказания при использовании многоуровневой модели и одиночной логистической регрессии. Также оценить уровень значимости для гипотезы различимости одиночной и многоуровневой модели при помощи алгоритма *s-score*, описанного в [1].

Видим, что использование мультимodelей в этом конкретном случае даёт улучшение в точности классификации. Две прямые в данном случае хорошо разделяют точки разных цветов, соответствующие различным классам. Однако результат *s-score* оказывается статистически незначимым. Возможно, такой эффект объясняется недостаточным размером выборки для отвержения гипотезы неразличимости моделей. Поэтому одной из дальнейших целей исследования является выявление размера выборки, при котором можно выделить в данных новую модель.

Однако в случае, при котором закономерности в данных меняются с течением времени, объекты, имеющие одинаковые признаковые описания, но разные ответы на них,

вносят шум в построенную модель, и для улучшения качества классификации требуется не учитывать в модели подобные предыдущие случаи. Более того, если данный приходит последовательно, для нового прогноза возможно использовать только те данные, которые были получены до поступления нового объекта.

Таким образом, дальнейший эксперимент должен включать в себя рассмотрение новой синтетической выборки с меняющейся разделяющей прямой, а также оценку качества с использованием базовой модели, обученной на соответствующем префиксе.

## 4 Описание модификации алгоритма

В работах, учитывающих изменение модели во времени, применяют либо анализ временных рядов [1], который зачастую рассматривается для задач одномерной регрессии и учитывает наличие множества других признаков лишь в специфичных случаях, либо анализ последовательностей [2]. Задача анализа последовательности формализуется следующим образом: пусть аналогично поставленной выше задаче зафиксирована обучающая выборка  $\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\}_{i=1}^N$ . Отличие заключается в том, что каждый из  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{X}^k$  - это последовательность признаков описаний объектов, а для задачи классификации  $\mathbf{y}_i \in \{1, -1\}^k$  - ответы на этой последовательности.

Обученная модель может учитывать предыдущие объекты и предсказанные ответы на них, что и требуется для учёта временной структуры. Одним из распространенных методов является метод скользящего окна. Для зафиксированного гиперпараметра - половины длины окна  $d$ , для каждого объекта  $\mathbf{x}_{i,j} \in \mathbb{X}$  рассматривается стандартная задача обучения с учителем. Но в качестве дополнительных признаков рассматриваются также описания ближайших расположенных объектов внутри обучающей выборки, а именно  $\mathbf{x}_{i,j-d}, \dots, \mathbf{x}_{i,j+d}$ .

Существует также модифицированная версия этого алгоритма, в которой в пространство признаков также вводятся предсказания модели на  $d$  предыдущих объектах  $(\mathbf{y}_{i,j-d}, \dots, \mathbf{y}_{i,j-1})$ .

Однако все эти методы более, чем в  $d$  раз увеличивают размерность пространства признаков. При этом учитываются только близкие во времени объекты. Для рассматриваемой задачи же требуется метод, который будет как убирать из рассмотрения моделью нерелевантные данные, так и дообучать модель при помощи новых объектов.

Идею скользящего окна можно адаптировать для построения нового метода, который позволит учесть заявленные требования к модели. Пусть  $D$  - гиперпараметр, размер окна (именно всего окна, а не его половины). Он подбирается на основании экспериментов с базовым алгоритмом. Длина окна должна быть такой, чтобы модель, обученная лишь на данных внутри окна, могла стать статистически значимо отличимой от текущей модели.

Пусть  $\mathfrak{D}$  - выборка, заданная в постановке задачи. Разобьём отсортированные по времени данные на группы подряд идущих объектов по  $D$  штук. Таким образом, в группу  $G_i$  попадут объекты  $\{\mathbf{x}_j : j \in [Di, D(i+1) - 1]\}$ . Под мультимоделью в дальнейшем понимается один из двух случаев - многоуровневая модель или же смесь моделей.

Предполагается, что существует обучаемая мультимодель  $f$  с параметрами  $\mathbf{w}$ , которая обучена на данных, пришедших до текущего момента времени. Данные рассматриваются по группам. Пусть в данный момент рассматривается группа  $G_i$ . Предлагается сделать для этой группы следующие действия:

1. Построить мультимодель  $f_0$ , обучив её на данных из  $G_i$ ;
2. Вычислить  $s$ -score для оценки различимости  $f$  и  $f_0$ ;
3. Если различимость не отвергается, то дообучить  $f$  на данных из  $G_i$ ;

4. Если отвергается, заменить  $f$  на  $f_0$ .

Подразумевается, что если накопились данные, которые описываются значимо отличимой мультимodelью, рассматривать предыдущие данные уже не имеет смысла, ведь модель могла стать обученной на неверных для текущего момента времени ответах.

## 5 Вычислительных эксперимент и анализ ошибки

- Построить синтетическую выборку с меняющейся во времени разделяющей прямой;
- Реализовать предложенный алгоритм;
- Подготовить реальные данные, например, о недвижимости в Бостоне (можно взять у Адуенко);
- Оценить AUC-ROC score на синтетических и реальных данных;
- Построить графики сложности мультимodelей (количества составных моделей) в зависимости от момента времени.

## 6 Заключение

### Литература

- [1] *Author N.* Paper title // 10-th Int'l. Conf. on Anyscience, 2009. Vol. 11, No. 1. Pp. 111–122.
- [2] *Автор И. О.* Название книги. Город: Издательство, 2009. 314 с.
- [3] *Автор И. О.* Название статьи // Название конференции или сборника, Город: Изд-во, 2009. С. 5–6.
- [4] *Автор И. О., Соавтор И. О.* Название статьи // Название журнала. 2007. Т. 38, № 5. С. 54–62.
- [5] [www.site.ru](http://www.site.ru) — Название сайта. 2007.
- [6] *Воронцов К. В.*  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$  в примерах. 2006. <http://www.ccas.ru/voron/latex.html>.
- [7] *Львовский С. М.* Набор и вёрстка в пакете  $\text{\LaTeX}$ . 3-е издание. Москва: МЦНМО, 2003. 448 с.