

Раннее прогнозирование достаточного объема выборки для обобщенной линейной модели.

Бучнев В. С., Грабовой А. В., Гадаев Т. Т., Стрижов В. В.

Исследуется проблема снижения затрат на сбор данных, необходимых для построения адекватной модели. Рассматриваются задачи обобщенной линейной модели. Для решения этих задач требуется, чтобы выборка содержала необходимое число объектов. Требуется предложить метод вычисления оптимального объема данных, соблюдая при этом баланс между точностью модели и и трудозатратами при сборе данных. Предпочтительны те методы оценки объема, которые позволяют строить адекватные модели по выборкам возможно меньшего объема.

Ключевые слова: *Обобщенная линейная модель, размер выборки.*

1 Введение

При планировании эксперимента требуется оценить минимальный объем выборки — число производимых измерений набора показателей или признаков, необходимый для построения сформулированных условий.

Существует большое количество оценки размера выборки. Например, тест множителей Лагранжа, тест отношения правдоподобия и тест Вальда. В работах [1–3] на основе данных методов построена оценка оптимального размера выборки. Основным минус этих методов заключается в том, что статистики, используемые в критериях, имеют асимптотическое распределение и требуют большого объема выборки.

Существуют также байесовские оценки объема выборки: критерий средней апостериорной дисперсии, критерий среднего покрытия, критерий средней длины и метод максимизации полезности. Первые три метода требуют анализа некоторой функции эффективности от размера выборки. Используя некоторое решающее правило, по данной функции определяется достаточный объем выборки. Метод максимизации полезности максимизирует ожидание некоторой функции полезности по объему выборки. Все эти методы опираются на апостериорное распределение, что требует достаточно большого объема выборки.

Предлагается исследовать зависимость среднего значения логарифма правдоподобия от размера доступной выборки, а также его дисперсию. В данной работе предлагается использовать не сами функции эффективности, а их аппроксимации. Для этого предлагается использовать аппроксимацию ковариационной матрицы вектора параметра. После чего аппроксимировать данные две зависимости при помощи метода бутстреп. Для вычислительного эксперимента предлагается использовать классические выборки из UCI репозитория и синтетические данные.

2 Постановка задачи

Дана выборка размера m :

$$\mathfrak{D}_m = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i=1}^m,$$

где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ - вектор признаков, $y_i \in \mathbb{Y}$.

Выборка \mathfrak{D}_m разбита случайно на обучение и контроль:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{T}_m} = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i \in \mathcal{T}_m} \quad \mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m} = \{\mathbf{x}_i, y_i\}_{i \in \mathcal{L}_m}, \quad \mathcal{T}_m \sqcup \mathcal{L}_m = \{1, \dots, m\}.$$

Предполагается, что выборка \mathfrak{D}_m не противоречит гипотезе порождения данных.

Рассмотрим параметрическое семейство функций для аппроксимации неизвестного распределения $p(y|\mathbf{x}, \mathbf{w})$, где $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ - вектор параметров:

$$\mathfrak{F} = \left\{ f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}) | \mathbf{w} \in \mathbb{W}, \int_{y \in \mathbb{Y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}) dy d\mathbf{x} = 1 \right\}.$$

Для модели f с вектором параметров \mathbf{w} определим функцию правдоподобия и логарифмическую функцию правдоподобия выборки \mathfrak{D} :

$$L(\mathfrak{D}, \mathbf{w}) = \prod_{y, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}} f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}), \quad l(\mathfrak{D}, \mathbf{w}) = \sum_{y, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}} \log f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}),$$

где $f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w})$ - аппроксимация апостериорной вероятности выборки $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}$ при заданном векторе параметров \mathbf{w} .

Рассмотрим правдоподобие выборки $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}$:

$$L(\mathfrak{D}_{\mathcal{T}_m}, \mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}) = \prod_{y, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{T}_m}} f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}).$$

Рассмотрим логарифм правдоподобия выборки $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}$:

$$l(\mathfrak{D}_{\mathcal{T}_m}, \mathbf{w}) = \sum_{y, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{T}_m}} \log f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}).$$

Будем рассматривать ожидаемое значение функции l :

$$\tilde{l}(\mathfrak{D}) = \mathbb{E}_{y, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}} l(\{y, \mathbf{x}\}, \mathbf{w}).$$

Рассмотрим ожидаемое значение логарифма правдоподобия по разным обучающим выборкам $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}$ размера m^* :

$$l(m^*) = \mathbb{E}_{\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}} \tilde{l}(\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}).$$

Будем считать, что объем выборки достаточный, если:

$$\forall m_1, m_2 > m^* \quad |l(m_1) - l(m_2)| < \varepsilon,$$

где ε - достаточно малое пороговое значение.

Для оценки вектора параметров используется принцип максимума правдоподобия:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{W}} L(\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_m}, \mathbf{w}).$$

Рассмотри матрицу информации Фишера:

$$\mathbf{I}(\mathfrak{D}, \mathbf{w}) = -\nabla \nabla l(\mathfrak{D}, \mathbf{w}).$$

Будем считать, что $\hat{\mathbf{w}}$ имеет следующее распределение:

$$\hat{\mathbf{w}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{V}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{I}^{-1}(\mathfrak{D}, m).$$

Для линейной регрессии $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, где y представимо в виде:

$$y = \mathbf{x}^\top \mathbf{w} + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Аппроксимация плотности апостериорной вероятности имеет вид:

$$f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathcal{N}(y | \mathbf{x}^\top \mathbf{w}, 1).$$

Для логистической регрессии $\mathbb{Y} = \{0, 1\}$, где y является бернуллиевской случайной величиной:

$$y \sim \mathcal{Be}(\theta),$$

где θ - неизвестный параметр распределения. Аппроксимация плотности апостериорной вероятности имеет вид:

$$f(y, \mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathcal{Be}(y | \theta), \quad \theta = \frac{1}{1 + \exp(-\mathbf{x}^\top \mathbf{w})}.$$

Литература

- [1] *S. G. Self and R. H. Mauritsen* Power/sample size calculations for generalized linear models // Biometrics, 1988.
- [2] *G. Shieh* On power and sample size calculations for likelihood ratio tests in generalized linear models // Biometrics, 2000.
- [3] *G. Shieh* On power and sample size calculations for Wald tests in generalized linear models // Journal of Statistical Planning and Inference, 2005.
- [4] *D. B. Rubin and H. S. Stern* Sample size determination using posterior predictive distributions // Sankhya : The Indian Journal of Statistics Special Issue on Bayesian Analysis, 1998.
- [5] *Maher Qumsiyeh* Using the bootstrap for estimation the sample size in statistical experiments // Journal of modern applied statistical methods, 2002.