Восстановление траектории движения руки по видео

Владимиров Эдуард
vladimirov.ea@phystech.edu

Исаченко Роман
isa-ro@yandex.ru

Курдюкова Антонина
kurdiukova.ad@phystech.edu

6 марта 2022 г.

Аннотация

Решается задача прогнозирования временного ряда со сложной структурой. Под сложной структурой понимается наличие зависимостей и варьирующийся период. Требуется найти причинно-следственные связи между рядами и снизить размерность траекторных пространств. В работе показано, что методы канонического корреляционного анализа, такие как метод главных компонент, метод частичных наименьших квадратов и другие, являются частным случаем метода перекрестных отображений Сугихары. Для демонстрации результатов работы используется траектория движения руки, восстановленная по видео, и сигнал акселерометра.

Ключевые слова: временной ряд · фазовая траектория · траекторное подпространство · сходящееся перекрёстное отображение · частичные наименьшие квадраты · канонический корреляционный анализ

1 Введение

В данной работе решается задача прогнозирования временного ряда на основе других рядов. Одна из трудностей задачи заключается в обнаружении связи между рядами и исключении несвязанных рядов из прогностической модели. Решение этой проблемы повышает качество прогноза.

В данной работе применяется метод сходящегося перекрёстного отображения (convergent cross mapping, CCM) [1, 2], который эффективен для рядов, порождённых динамической системой. Он основан на сравнении ближайших соседей в траекторном пространстве ряда $\mathbf{x}$, полученных с помощью ряда $\mathbf{y}$.

При построении прогностической модели используется траекторная матрица (или матрица сдвига), описывающая фазовое пространство временного ряда. Например, в методе анализа спектральных компонент (singular spectrum analysis, SSA) [3, 4, 5] прогноз временного ряда основан на спектральном разложении ковариационной матрицы, полученной по траекторной. В CCM матрицы сдвига используются для проверки наличия липшицева отображения между траекторными пространствами.

Однако размерность траекторного пространства может оказаться чрезмерно высокой, что приводит к неустойчивости прогностической модели. В таком случае необходимо снизить размерность траекторного пространства путём построения проекции фазовой траектории в некоторое подпространство. Для CCM нет конкретного способа выбрать подпространство, в котором аппроксимируется фазовая траектория. В работе [6] эта проблема решается с помощью сферической регрессии. Согласно этому методу, информация об искомом подпространстве извлекается из множества эмпирических направлений $\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \,|\, i < j\}$. В работе [7] используется автоматический выбор пары главных компонент. Идея заключается в сравнении спектральных плотностей главных компонент. Также используется простой перебор по главным компонентам [8].

Метод проекции в латентное пространство (partial least squares, PLS) [9, 10] отбирает наиболее значимые признаки и строит новые как их линейные комбинации. Это позволяет получить простую, точную и устойчивую прогностическую модель. Наряду с PLS используется метод канонического анализа корреляции (CCA) [11]. Он похож на PLS за исключением того, что первый метод максимизирует ковариацию, а последний — корреляцию. Недостатком этих моделей является их низкая точность при оценивании нелинейных зависимостей между данными. Разработаны нелинейные модели PLS[12, 13] и CCA[14, 15]. В данной статье используется модель NNPLS [16], которая преобразует исходные данные с помощью нейронной сети.

В теоретической части работы показано, что CCA и PLS являются частными случаями CCM.

В качестве модели для предсказания временного ряда по набору рядов используется алгоритм многомерной гусеницы [3], являющийся обобщением на многомерный случай алгоритма SSA

Эксперимент проводится на наборе вручную собранных данных. Он представляет собой совокупность ключевых точек, полученных по видео движения человека, а также показания акселерометра и гироскопа, снятые с руки человека. В эксперименте строится прогноз рядов, использующий обнаруженные связанные компоненты рядов

2 Постановка задачи

Пусть значения исходного временного ряда $\mathbf{x}(t)$ доступны в моменты времени $t = 1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что на значения $\mathbf{x}(t)$ оказывает влияние набор внешних факторов $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_m(t)$

В момент прогноза n необходимо определить будущие значения исходного процесса $\mathbf{x}(t)$ в моменты времени $n+1, \ldots, n+p$, учитывая влияние внешних факторов $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_m(t)$. При этом считаем, что значения внешних факторов в моменты времени $\mathbf{y}_1(n+1), \ldots, \mathbf{y}_1(n+p), \ldots, \mathbf{y}_m(n+1), \ldots, \mathbf{y}_m(n+p)$ являются доступными.

Для вычисления будущих значений временного ряда требуется определить функциональную зависимость, отражающую связь между прошлыми значениями $\mathbf{x}$ и будущими, а также принимающую во внимание влияние внешних факторов $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$.

$$\mathbf{x}(t) = F(\mathbf{x}(t-1), \ldots, \mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_1(t-1), \ldots, \mathbf{y}_m(t), \mathbf{y}_m(t-1), ...) + \varepsilon_t \qquad (1)$$

Зависимость (1) называется моделью прогнозирования с учётом внешних факторов. Требуется создать такую модель, для которой среднее квадратичное отклонение истинного значения от прогнозируемого стремится к минимальному для заданного p.

$$\hat{E} = \frac{1}{p} \sum_{i=n+1}^{n+p} \varepsilon_i^2 \to min \qquad (2)$$

2.1 Метод CCM

Зададим для временного ряда $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ его траекторную матрицу следующим образом:

$$\mathbf{H}_\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_\tau \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_{\tau+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_{N+1} & \ldots & x_n \end{bmatrix},$$

где N — число задержек, $\tau = n - N + 1$

Обозначим i-ый столбец матрицы $\mathbf{H}_\mathbf{x}$ как $\mathbf{x}_i$. Тогда матрица $\mathbf{H}_\mathbf{x}$ примет вид:

$$\mathbf{H}_\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\tau], \qquad \mathbf{x}_i = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+N-1}]^\mathsf{T}$$

Заметим, что все векторы $\mathbf{x}_t$ принадлежат N-мерному траекторному пространству $\mathbb{H}_\mathbf{x} \subseteq \mathbb{R}^N$ ряда $\mathbf{x}$ и образуют фазовую траекторию $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$.

Обнаружение зависимости между рядами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ осуществляется следующим образом. Выберем момент $t_0 \in \{1, \ldots, \tau\}$ и найдём k ближайших соседей $\mathbf{x}_{t_0}$ в $\mathbb{H}_\mathbf{x}$. Обозначим их множество как $U_k(\mathbf{x}_{t_0}) = \{\mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}\}$.

Так как оба ряда определены на одной временной оси, найдём $U_k(\mathbf{z}_{t_0})$ в пространстве $\mathbb{H}_\mathbf{z}$, проделав все вышеприведённые операции. Определим отображение из $U_k(\mathbf{x}_{t_0})$ в $U_k(\mathbf{z}_{t_0})$ следующим образом:

$$\varphi : \mathbf{x}_{t_i} \to \mathbf{z}_{t_i}, \qquad i = 1, \ldots, k$$

. Утверждается, что ряды $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ связаны, если отображение φ является липшицевым.

$$\rho_{\mathbb{H}_\mathbf{z}}(\varphi(\mathbf{x}_i), \varphi(\mathbf{x}_j)) \leqslant n\rho_{\mathbb{H}_\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \qquad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{H}_\mathbf{x}$$

Проверим наличие такого отображения следующим образом. Введём меру близости векторов в окрестностях $U_k(\mathbf{x}_{t_0})$ и $U_k(\mathbf{z}_{t_0})$:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{R(U_k(\mathbf{x}_{t_0}))}{R(U_k(\mathbf{z}_{t_0}))}, \qquad R(U_k(\mathbf{x}_{t_0})) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \rho_{\mathbb{H}_\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{t_0}, \mathbf{x}_{t_j}) \tag{3}$$

Если $L(x, z)$ больше некоторого порога $C(n)$, то ряд $\mathbf{z}$ зависит от ряда $\mathbf{x}$

Прогноз $\hat{x}_t$ первого элемента вектора $\mathbf{x}$ строится следующим образом:

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^{k} w_i x_{t_i}, \qquad w_i = \frac{u_i}{\sum\limits_{j=1}^{k} u_j}, \qquad u_i = \exp(-||\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_i}||),$$

где x_{t_i} — первые компоненты ближайших соседей $\mathbf{x}_t$

2.2 Метод PLS

Метод частичных наименьших квадратов восстанавливает связь между наборами данных $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Матрицы объектов $\mathbf{X}$ и целевая матрица $\mathbf{Y}$ проецируются на латентное пространство $\mathbb{R}^l$ меньшей размерности следующим образом:

$$\underset{n\times m}{\mathbf{X}} = \underset{n\times l}{\mathbf{T}} \cdot \underset{l\times m}{\mathbf{P}^\mathsf{T}} + \underset{n\times m}{\mathbf{E}}$$
$$\underset{n\times k}{\mathbf{Y}} = \underset{n\times l}{\mathbf{U}} \cdot \underset{l\times k}{\mathbf{Q}^\mathsf{T}} + \underset{n\times k}{\mathbf{F}},$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{U}$ — матрицы описания объектов и исходов в латентном пространстве, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — матрицы перехода из латентного пространства в исходное, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ — матрицы остатков.

Функция преобразования исходных данных имеет вид:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{W}_\mathbf{x} \qquad g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}\mathbf{W}_\mathbf{y},$$

где матрицы весов $\mathbf{W}_\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m\times l}$ и $\mathbf{W}_\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{k\times l}$ находятся путём максимизации выборочной ковариации:

$$(\mathbf{W}_\mathbf{x}, \mathbf{W}_\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{W}_\mathbf{x}, \mathbf{W}_\mathbf{y}}{argmax}\, Cov(\mathbf{X}\mathbf{W}_\mathbf{x}, \mathbf{Y}\mathbf{W}_\mathbf{y})$$

2.3 Метод CCA

Канонический корреляционный анализ находит две матрицы перехода в латентные пространства для $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно, так чтобы коэффициент корреляции между проекциями был максимальным.

$$(\mathbf{w}_{\mathbf{x}_1}, \mathbf{w}_{\mathbf{y}_1}) = \underset{\mathbf{w}_\mathbf{x}, \mathbf{w}_\mathbf{y}}{argmax}\, Corr(\mathbf{X}\mathbf{w}_\mathbf{x}, \mathbf{Y}\mathbf{w}_\mathbf{y}) \tag{4}$$

Первые столбцы матриц весов находятся путём решения данной задачи оптимизации (4). Затем ищутся векторы, максимизирующие ту же корреляцию, но с ограничением, что они не коррелируют с первой парой векторов. Процедура продолжается l шагов, где l — размерность латентного пространства.

2.4 Алгоритм предсказания

TODO

Список литературы

[1] G. Sugihara, B. Grenfell, and R. M. May. Distinguishing error from chaos in ecological time series. Phil. Trans. Roy. Soc. London B, 330(1257):235–51, 1990.

[2] George Sugihara and Robert M May. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. Nature, 344(6268):734–741, 1990.

[3] Nina Golyandina and D Stepanov. Ssa-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series. In proceedings of the 5th St. Petersburg workshop on simulation, volume 293, page 298. St. Petersburg State University St. Petersburg, Russia, 2005.

[4] Nina Golyandina, Vladimir Nekrutkin, and Anatoly A Zhigljavsky. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. CRC press, 2001.

[5] Anatoly Zhigljavsky. Singular spectrum analysis for time series: Introduction to this special issue. Statistics and its Interface, 3(3):255–258, 2010.

[6] Карина Равилевна Усманова, ЮИ Журавлёв, КВ Рудаков, and ВВ Стрижов. Аппроксимация фазовой траектории квазипериодических сигналов методом сферической регрессии. Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, (4):40–46, 2020.

[7] Th Alexandrov and N Golyandina. Automatic extraction and forecast of time series cyclic components within the framework of ssa. In Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation, pages 45–50. St. Petersburg State University St. Petersburg, 2005.

[8] Карина Равилевна Усманова and Вадим Викторович Стрижов. Модели обнаружения зависимостей во временных рядах в задачах построения прогностических моделей. Системы и средства информатики, 29(2):12–30, 2019.

[9] Roman Rosipal. Nonlinear partial least squares an overview. Chemoinformatics and advanced machine learning perspectives: complex computational methods and collaborative techniques, pages 169–189, 2011.

[10] Roman Rosipal and Nicole Kramer. Overview and recent advances in partial least squares. In International Statistical and Optimization Perspectives Workshop Subspace, Latent Structure and Feature Selection, pages 34–51. Springer, 2005.

[11] David R Hardoon, Sandor Szedmak, and John Shawe-Taylor. Canonical correlation analysis: An overview with application to learning methods. Neural computation, 16 (12):2639–2664, 2004.

[12] S Joe Qin and Thomas J McAvoy. Nonlinear pls modeling using neural networks. Computers & Chemical Engineering, 16(4):379–391, 1992.

[13] Hugo Hiden, Ben McKay, Mark Willis, and M Tham. Non-linear partial least squares using genetic programming. Genetic programming, pages 128–133, 1998.

[14] Pei Ling Lai and Colin Fyfe. Kernel and nonlinear canonical correlation analysis. International Journal of Neural Systems, 10(05):365–377, 2000.

[15] Galen Andrew, Raman Arora, Jeff Bilmes, and Karen Livescu. Deep canonical correlation analysis. In International conference on machine learning, pages 1247–1255. PMLR, 2013.

[16] Elif Bulut and Erol Egrioglu. A new partial least square method based on elman neural network. American Journal of Intelligent Systems, 4(4):154–158, 2014.