

---

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ РУКИ ПО ВИДЕО

---

Владимиров Эдуард  
vladimirov.ea@phystech.edu

Курдюкова Антонина  
kurdiukova.ad@phystech.edu

Исаченко Роман  
roman.isachenko@phystech.edu

Стрижов Вадим  
strijov@ccas.ru

24 марта 2022 г.

## АННОТАЦИЯ

В работе решается задача прогнозирования временного ряда со сложной структурой. Под сложной структурой понимается наличие зависимостей и варьирующийся период. Требуется найти причинно-следственные связи между временными рядами. Для этого предлагается снизить размерность траекторных пространств. В работе показано, что методы канонического корреляционного анализа, такие как метод главных компонент, метод частичных наименьших квадратов и другие, являются частным случаем метода перекрестных отображений Сугихары. Для демонстрации результатов работы решается задача восстановления траектории движения руки по видео.

**Ключевые слова:** временной ряд · фазовая траектория · траекторное подпространство · сходящееся перекрёстное отображение · частичные наименьшие квадраты · канонический корреляционный анализ

## 1 Введение

В данной работе решается задача прогнозирования временного ряда на основе других рядов. Одна из трудностей задачи заключается в обнаружении связи между рядами и исключении несвязанных рядов из прогностической модели. Решение этой проблемы повышает качество прогноза.

В данной работе применяется метод сходящегося перекрёстного отображения (convergent cross mapping, CCM) [1, 2], который эффективен для рядов, порождённых динамической системой. Он основан на сравнении ближайших соседей в траекторном пространстве ряда  $x$ , полученных с помощью ряда  $y$ .

При построении прогностической модели используется траекторная матрица (или матрица сдвига), описывающая фазовое пространство временного ряда. Например, в методе анализа спектральных компонент (singular spectrum analysis, SSA) [3, 4, 5] прогноз временного ряда основан на спектральном разложении ковариационной матрицы, полученной по траекторной. В ССМ матрицы сдвига используются для проверки наличия липшицева отображения между траекторными пространствами.

Однако размерность траекторного пространства может оказаться чрезмерно высокой, что приводит к неустойчивости прогностической модели. В таком случае необходимо снизить размерность траекторного пространства путём построения проекции фазовой траектории в некоторое подпространство. Для ССМ нет конкретного способа выбрать подпространство, в котором аппроксимируется фазовая траектория. В работе [6] эта проблема решается с помощью сферической регрессии. Согласно этому методу, информация об искомом подпространстве извлекается из множества эмпирических направлений  $\{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \mid i < j\}$ . В работе [7] используется автоматический выбор пары главных компонент. Идея заключается в сравнении спектральных плотностей главных компонент. Также используется простой перебор по главным компонентам [8].

Метод проекции в латентное пространство (partial least squares, PLS) [9, 10] отбирает наиболее значимые признаки и строит новые как их линейные комбинации. Это позволяет получить простую, точную и устойчивую прогностическую модель. Наряду с PLS используется метод канонического анализа корреляции (CCA) [11]. Он похож на PLS за исключением того, что первый метод максимизирует ковариацию, а последний — корреляцию. Недостатком этих моделей является их низкая точность при оценивании нелинейных зависимостей между данными. Разработаны нелинейные модели PLS[12, 13] и CCA[14, 15]. В данной статье используется модель NNPLS [16], которая преобразует исходные данные с помощью нейронной сети.

В теоретической части работы показано, что методы понижения размерности CCA и PLS являются частными случаями ССМ. Для этой цели вводятся различные меры близости между целевой переменной и её аппроксимацией, являющейся линейной комбинацией её ближайших соседей, для сравнения качества согласованности исходного пространства и его подпространства.

В качестве модели для предсказания временного ряда по набору рядов используется алгоритм локально взвешенного глобального линейного отображения (sequential locally weighted global linear map, SMap) [17].

Эксперимент проводится на наборе вручную собранных данных. Он представляет собой совокупность ключевых точек, полученных по видео движения человека, а также показания акселерометра и гироскопа, снятые с руки человека. В эксперименте строится прогноз рядов, использующий обнаруженные связанные компоненты рядов.

## 2 Постановка задачи

Пусть значения исходного временного ряда  $\mathbf{x}(t)$  доступны в моменты времени  $t = 1, 2, \dots, n$ . Предполагается, что на значения  $\mathbf{x}(t)$  оказывает влияние набор внешних факторов  $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)$

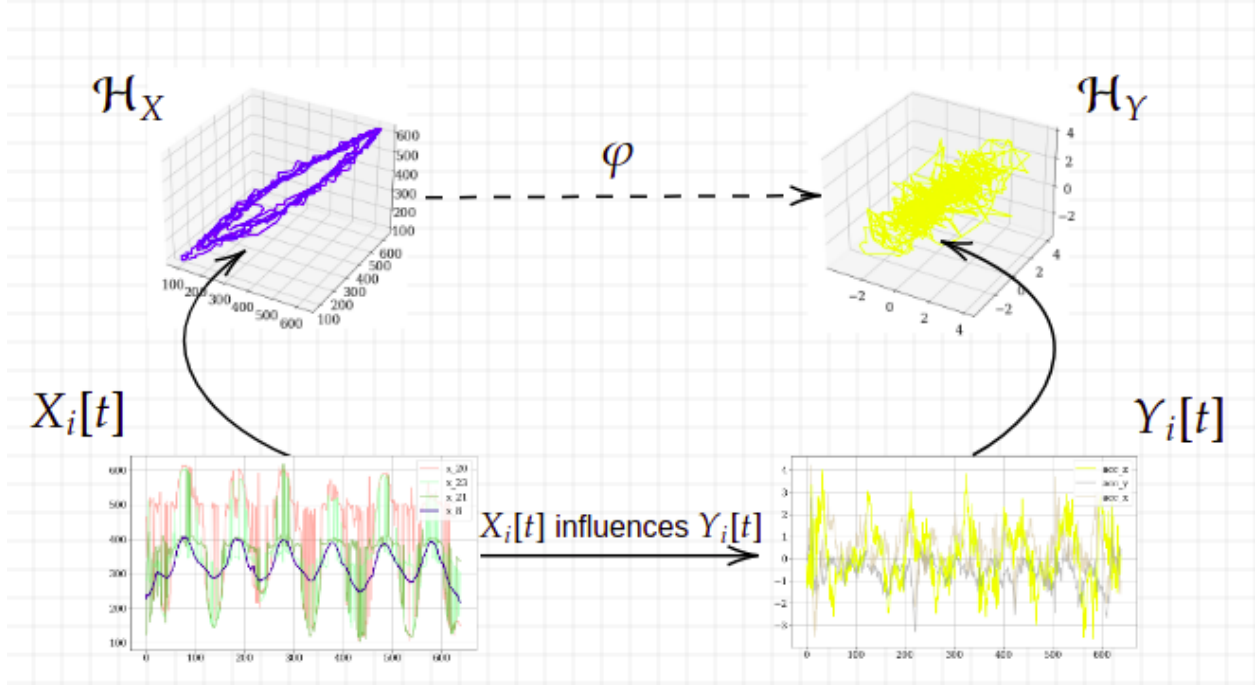


Рис. 1: Блок-схема

В момент прогноза  $n$  необходимо определить будущие значения исходного ряда  $\mathbf{x}(t)$  в моменты времени  $n+1, \dots, n+p$ , учитывая влияние внешних факторов  $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_m(t)$ . При этом считаем, что значения внешних факторов являются доступными в моменты времени:

$$\mathbf{y}_1(n+1), \dots, \mathbf{y}_1(n+p), \dots, \mathbf{y}_m(n+1), \dots, \mathbf{y}_m(n+p).$$

Для вычисления будущих значений временного ряда требуется определить функциональную зависимость, отражающую связь между прошлыми значениями  $\mathbf{x}$  и будущими, а также принимающую во внимание влияние внешних факторов  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ :

$$\mathbf{x}(t) = F(\mathbf{x}(t-1), \dots, \mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_1(t-1), \dots, \mathbf{y}_m(t), \mathbf{y}_m(t-1), \dots) + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Зависимость (1) называется **моделью прогнозирования с учётом внешних факторов**. Требуется создать такую модель, для которой среднее квадратичное отклонение истинного значения от прогнозируемого стремится к минимальному для заданного  $p$ .

$$\hat{E} = \frac{1}{p} \sum_{i=n+1}^{n+p} \varepsilon_i^2 \rightarrow \min_F. \quad (2)$$

## 2.1 Метод ССМ

Зададим траекторную матрицу временного ряда  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$  следующим образом:

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_\tau \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{\tau+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_{N+1} & \dots & x_n \end{bmatrix},$$

где  $N$  — число задержек,  $\tau = n - N + 1$ .

Обозначим  $i$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{H}_x$  как  $\mathbf{x}_i$ . Матрица  $\mathbf{H}_x$  имеет вид:

$$\mathbf{H}_x = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\tau], \quad \mathbf{x}_i = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+N-1}]^\top$$

Заметим, что все векторы  $\mathbf{x}_t$  принадлежат  $N$ -мерному траекторному пространству  $\mathbb{H}_x \subseteq \mathbb{R}^N$  ряда  $\mathbf{x}$  и образуют фазовую траекторию  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ .

Обнаружение зависимости между рядами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$  осуществляется следующим образом. Возьмём элемент  $\mathbf{x}_0$  из траекторного пространства  $\mathbb{H}_x$  и найдём  $k$  ближайших соседей в этом же пространстве. Обозначим их временные индексы (от ближнего к дальнему) как  $t_1, \dots, t_k$ .

Так как оба ряда определены на одной временной оси, то по значению ряда  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t_0 \in \{1, \dots, n\}$  можно однозначно получить значение ряда  $\mathbf{z}$  в тот же момент времени, и наоборот. Введём отображение из  $\mathbb{H}_x$  в  $\mathbb{H}_z$  следующим образом:

$$\varphi : \mathbf{x}_0 \mapsto \hat{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{z}_{t_i}, \quad w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^k u_j}, \quad u_i = \exp(-\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{t_i}\|)$$

Утверждается, что ряды  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$  связаны, если отображение  $\varphi$  является липшицевым.

$$\rho_{\mathbb{H}_z}(\varphi(\mathbf{x}_i), \varphi(\mathbf{x}_j)) \leq C \rho_{\mathbb{H}_x}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{H}_x.$$

Проверим наличие этого отображения следующим образом. Введём меру близости векторов в окрестностях  $U_k(\mathbf{x}_{t_0})$  и  $U_k(\mathbf{z}_{t_0})$ :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{R(U_k(\mathbf{x}_{t_0}))}{R(U_k(\mathbf{z}_{t_0}))}, \quad R(U_k(\mathbf{x}_{t_0})) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \rho_{\mathbb{H}_x}(\mathbf{x}_{t_0}, \mathbf{x}_{t_i}) \quad (3)$$

Если  $L(x, z)$  больше некоторого порога  $C(n)$ , то ряд  $\mathbf{z}$  зависит от ряда  $\mathbf{x}$

## 2.2 Метод PLS

Метод частичных наименьших квадратов восстанавливает связь между наборами данных  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ . Матрицы объектов  $\mathbf{X}$  и целевая матрица  $\mathbf{Y}$  проецируются на латентное пространство  $\mathbb{R}^l$  меньшей размерности следующим образом:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^\top + \mathbf{E}$$

$n \times m$ 
 $n \times l$ 
 $l \times m$ 
 $n \times m$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{F},$$

$n \times k \quad n \times l \quad l \times k \quad n \times k$

где  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{U}$  — матрицы описания объектов и исходов в латентном пространстве,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  — матрицы перехода из латентного пространства в исходное,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}$  — матрицы остатков.

Функция преобразования исходных данных имеет вид:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{W}_x \quad g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}\mathbf{W}_y,$$

где матрицы весов  $\mathbf{W}_x \in \mathbb{R}^{m \times l}$  и  $\mathbf{W}_y \in \mathbb{R}^{k \times l}$  находятся путём максимизации выборочной ковариации:

$$(\mathbf{W}_x, \mathbf{W}_y) = \underset{\mathbf{W}_x, \mathbf{W}_y}{\operatorname{argmax}} \operatorname{Cov}(\mathbf{X}\mathbf{W}_x, \mathbf{Y}\mathbf{W}_y)$$

### 2.3 Метод ССА

Канонический корреляционный анализ находит две матрицы перехода в латентные пространства для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  соответственно, так чтобы коэффициент корреляции между проекциями был максимальным.

$$(\mathbf{w}_{x1}, \mathbf{w}_{y1}) = \underset{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y}{\operatorname{argmax}} \operatorname{Corr}(\mathbf{X}\mathbf{w}_x, \mathbf{Y}\mathbf{w}_y) \quad (4)$$

Первые столбцы матриц весов находятся путём решения данной задачи оптимизации (4). Затем ищутся векторы, максимизирующие ту же корреляцию, но с ограничением, что они не коррелируют с первой парой векторов. Процедура продолжается  $l$  шагов, где  $l$  — размерность латентного пространства.

### 2.4 Алгоритм предсказания

Пусть дана обучающая выборка

$$\mathfrak{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i) \mid i = 1, \dots, d\} = (\mathbf{X}, \mathbf{y}),$$

где  $\mathbf{x}_i$  — элемент траекторного пространства, а  $y_i$  — будущее значение временного ряда. В одномерном случае:

$$\mathbf{x}_i = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+N-1}]^T, \quad y_i = x_{i+N}.$$

Для многомерного ряда его предсказанием служит  $k$ -ая компонента, а в качестве  $\mathbf{x}_i$  выступает его значение в момент времени  $i$ . Поэтому алгоритм придётся запускать  $D$  раз, где  $D$  — размерность ряда.

Пусть алгоритм предсказывает значение ряда в момент времени  $t_0$ . Вначале каждому  $\mathbf{x}_i \in X \setminus \{x_{t_0}\}$  поставим в соответствие:

$$\mathbf{w}_i = \exp \left( - \frac{\theta \cdot \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{t_0}\|}{\frac{1}{d-1} \sum_{j=1, j \neq t_0}^d \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{t_0}\|} \right),$$

где  $\theta$  — коэффициент локализации. Таким образом, близкие к  $\mathbf{x}_{t_0}$  соседи имеют больший вес, чем дальние. Затем элементы  $\mathbf{x}_i$  и  $y_i$  умножаются на вычисленные веса  $\mathbf{w}_i$

Для прогнозирования ряда используется авторегрессионная модель порядка  $t_0 - 1$ :

$$X_{t_0} = \mu + \psi_1 X_{t_0-1} + \dots + \psi_{t_0-1} X_1 + u_{t_0}, \quad u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad \psi_p \neq 0.$$

Обозначим полученный прогноз  $\widehat{X}_{t_0}$ . Оптимальность прогноза будем понимать в смысле среднего квадратичного отклонения:

$$\min_{\psi_1, \dots, \psi_{t_0-1}} E(\widehat{X}_{t_0} - y_0)^2$$

### 3 Вычислительный эксперимент

Целью эксперимента является сравнение различных стратегий снижения размерности целевого пространства. Важной его частью является изучение результатов алгоритма прогнозирования временного ряда, применённого к элементам пространства фазовых траекторий и траекторного подпространства меньшей размерности.

#### 3.1 Описание данных и работы модели

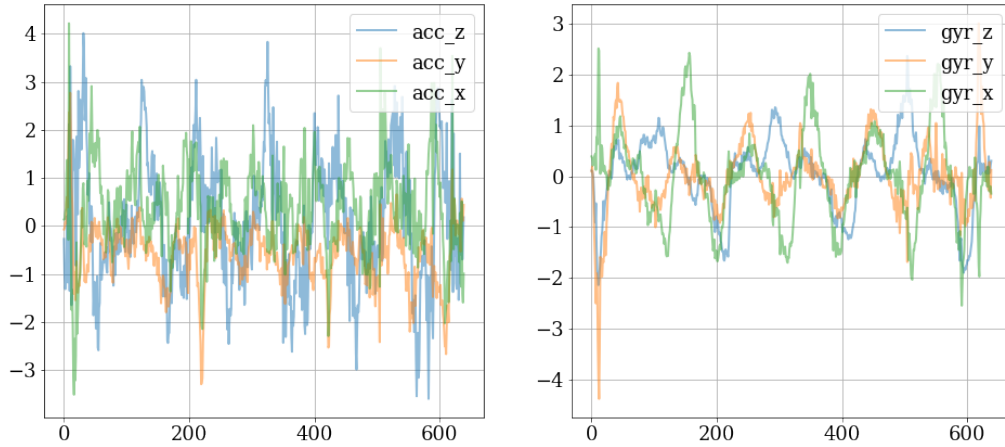


Рис. 2: Данные акселерометра и гироскопа

Первоначальные данные представляют собой набор видеороликов, на которых выполняются различные движения руками (циклические и хаотические), а также показания акселерометра и гироскопа частотой в 100 Герц, закреплённых на одной из рук. Далее по видеоряду с помощью фреймворка `alpharose` [\[links\]](#) получаются координаты конечностей, а именно 68 ключевых точек. Затем из полученного временного ряда исключаются сильно скореллированные компоненты. После этого полученные многомерные ряды приводятся к одной временной шкале с помощью удаления элементов более длинного ряда.

Перед началом эксперимента зафиксируем следующие переменные:  $N$  — размерность траекторного пространства,  $k$  — число ближайших соседей, рассматриваемых в ССМ,  $n_{tr}$  — размер обучающей выборки,  $E_{vid}$  — число признаков, полученных из видеоряда, которые будут использованы в алгоритме. Для каждой пары компонент, взятых из разных временных рядов, применим метод ССМ. В результате получим матрицу корреляций, в которой на  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце стоит коэффициент корреляции Пирсона между  $i$ -ой компонентной "приборного" временного ряда и  $j$ -ой компонентой ряда, восстановленного по видео. После этого для каждого целевого признака выбираем  $E_{vid}$  видео-признаков, обладающих максимальной корреляцией в соответствующей строке. Затем на основе этих признаков обучается алгоритм.

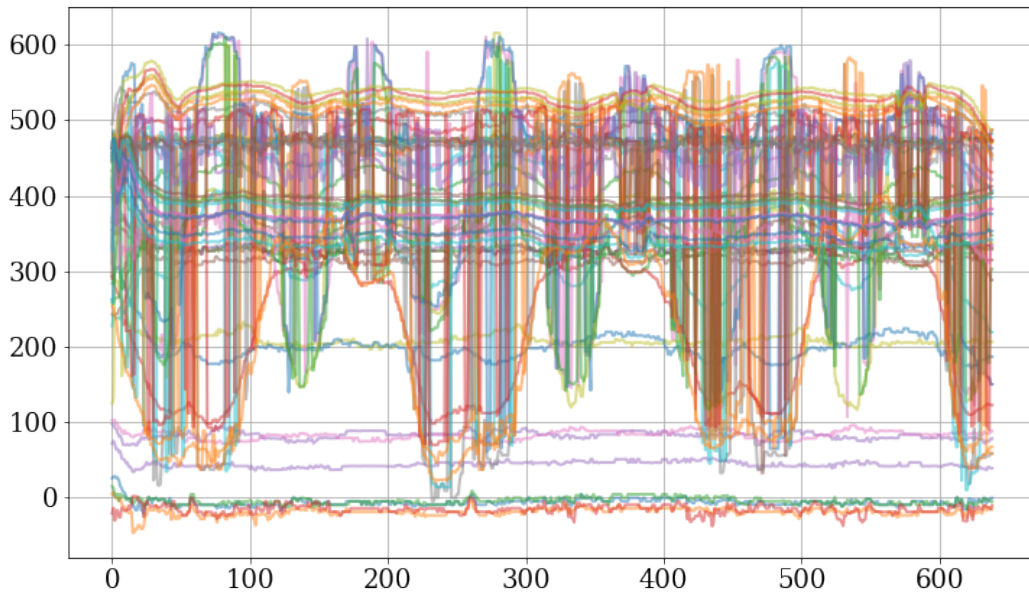


Рис. 3: Данные кейпоинтов, полученные по видео

### 3.2 Сравнение методов снижения размерности

Таблица 1: Сравнение ошибки (MSE) предсказательной модели, применённой в траекторном пространстве и в его подпространстве, полученном ССМ

	acc_z	acc_y	acc_x	gyr_z	gyr_y	gyr_x
space	1.053	0.401	0.483	0.084	0.090	0.063
subspace	0.315	0.043	0.150	0.001	0.015	0.001

### Список литературы

- [1] G. Sugihara, B. Grenfell, and R. M. May. Distinguishing error from chaos in ecological time series. *Phil. Trans. Roy. Soc. London B*, 330(1257):235–51, 1990.

Таблица 2: Среднеквадратичное отклонение между истинными показаниями устройств и предсказаниями, полученными с помощью одного из методов снижения размерности

Целевой признак \ Метод		CCM	PLS	CCA	Naive
cyclic	acc_z	0.163	<b>0.040</b>	0.116	0.141
	acc_y	0.009	<b>0.007</b>	0.011	0.008
	acc_x	<b>0.044</b>	0.045	0.089	0.049
	gyr_z	<b>0.000</b>	0.001	0.001	0.001
	gyr_y	<b>0.002</b>	0.004	0.005	0.003
	gyr_x	0.009	0.004	0.004	<b>0.003</b>
chaotic	acc_z	<b>0.315</b>	0.416	0.416	0.331
	acc_y	<b>0.043</b>	0.045	0.429	0.055
	acc_x	0.150	0.177	0.221	<b>0.143</b>
	gyr_z	<b>0.001</b>	0.002	0.003	0.003
	gyr_y	<b>0.015</b>	0.022	0.061	0.026
	gyr_x	<b>0.001</b>	0.013	0.015	0.008

- [2] George Sugihara and Robert M May. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, 344(6268):734–741, 1990.
- [3] Nina Golyandina and D Stepanov. Ssa-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series. In *proceedings of the 5th St. Petersburg workshop on simulation*, volume 293, page 298. St. Petersburg State University St. Petersburg, Russia, 2005.
- [4] Nina Golyandina, Vladimir Nekrutkin, and Anatoly A Zhigljavsky. *Analysis of time series structure: SSA and related techniques*. CRC press, 2001.
- [5] Anatoly Zhigljavsky. Singular spectrum analysis for time series: Introduction to this special issue. *Statistics and its Interface*, 3(3):255–258, 2010.
- [6] Карина Равилевна Усманова, ЮИ Журавлёв, КВ Рудаков, and ВВ Стрижов. Аппроксимация фазовой траектории квазипериодических сигналов методом сферической регрессии. *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика*, (4):40–46, 2020.
- [7] Th Alexandrov and N Golyandina. Automatic extraction and forecast of time series cyclic components within the framework of ssa. In *Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation*, pages 45–50. St. Petersburg State University St. Petersburg, 2005.
- [8] Карина Равилевна Усманова and Вадим Викторович Стрижов. Модели обнаружения зависимостей во временных рядах в задачах построения прогностических моделей. *Системы и средства информатики*, 29(2):12–30, 2019.
- [9] Roman Rosipal. Nonlinear partial least squares an overview. *Chemoinformatics and advanced machine learning perspectives: complex computational methods and collaborative techniques*, pages 169–189, 2011.



- [10] Roman Rosipal and Nicole Kramer. Overview and recent advances in partial least squares. In *International Statistical and Optimization Perspectives Workshop Subspace, Latent Structure and Feature Selection*, pages 34–51. Springer, 2005.
- [11] David R Hardoon, Sandor Szedmak, and John Shawe-Taylor. Canonical correlation analysis: An overview with application to learning methods. *Neural computation*, 16(12): 2639–2664, 2004.
- [12] S Joe Qin and Thomas J McAvoy. Nonlinear pls modeling using neural networks. *Computers & Chemical Engineering*, 16(4):379–391, 1992.
- [13] Hugo Hiden, Ben McKay, Mark Willis, and M Tham. Non-linear partial least squares using genetic programming. *Genetic programming*, pages 128–133, 1998.
- [14] Pei Ling Lai and Colin Fyfe. Kernel and nonlinear canonical correlation analysis. *International Journal of Neural Systems*, 10(05):365–377, 2000.
- [15] Galen Andrew, Raman Arora, Jeff Bilmes, and Karen Livescu. Deep canonical correlation analysis. In *International conference on machine learning*, pages 1247–1255. PMLR, 2013.
- [16] Elif Bulut and Erol Egrioglu. A new partial least square method based on elman neural network. *American Journal of Intelligent Systems*, 4(4):154–158, 2014.
- [17] George Sugihara. Nonlinear forecasting for the classification of natural time series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 348(1688):477–495, 1994.