Модели обнаружения зависимостей во временных рядах (проекции в латентные пространства)

1. Цель

Работа посвящена обнаружению причинно-следственных связей между разнородными временным рядами. Примеры зависимых разнородных временных рядов:

1. Эконометрические временные ряды.
2. Связь показателей ЭКГ и пульса (`http://smartlab.ws/component/content/article?id=60`)

Если прогноз временного ряда $\mathbf{x}$ строится с использованием группы временных рядов $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$, то установление зависимостей ряда $\mathbf{x}$ от $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ может повысить качество прогноза и упростить прогностическую модель. Если установлено, что ряд $\mathbf{x}$ не зависит от ряда $\mathbf{y}_i$, то $\mathbf{y}_i$ можно исключить из прогностической модели. В данной работе для обнаружения зависимостей между рядами в работе применяется два подхода: тест Гренджера и метод снижения размерности PLS.

1.1. Тест Генджера

В основе теста Гренджера лежит следующий подход. Считаем, что ряд $\mathbf{x}$ зависит от ряда $\mathbf{y}$ (или следует из ряда $\mathbf{y}$), если использование истории ряда $\mathbf{y}$ при построении прогностической модели улучшает прогноз ряда $\mathbf{x}$. Данный метод подробно рассмотрен в статьях [1, 2]. Тест Гренджера позволяет установить причинно-следственные связи между рядами и основан на сравнении качества прогноза, в котором используется история только прогнозируемого ряда, и прогноза, который дополнительно использует историю других рядов. Если улучшение качества прогноза подтверждается статистически, то говорят, что прогнозируемый ряд следует из использовавшихся во втором прогнозе рядов. Более

формально используемый в этой работе тест Гренджера описан в разделе 4. Тест Гренджера применим к стационарным временным рядам, поэтому в случае нестационарных рядов их необходимо продифференцировать перед проведением теста Гренджера. Тест Гренджера используется в различных задачах, в котрых необходимо исследовать взаимосвязь между развивающимися во времени процессами [3, 4].

В данной работе для построения прогноза одного временного ряда по нескольким используется алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L) [5]. Этот алгоритм является обобщением на многомерный случай алгоритма анализа спектральных компонент SSA [6, 7, 8].

Метод SSA основан на разложении временного ряда в сумму интерпретируемых компонент. Он делится на четыре основных шага: запись ряда в виде траекторной матрицы, ее сингулярное разложение, группировка компонент полученных при сингулярном разложении, по каждой сгруппированной матрице восстанавливается временной ряд. Таким образом исходный временной ряд представляется в виде суммы временных рядов. Метод SSA применяется в таких задачах, как выявления трендов во временных рядах [9], подавления шума во временных рядах [10], прогнозирование временных рядов [11, 12].

Недостатком теста Гренджера является то, что при используемом в нем подходе невозможно точно определить структуру зависимости рядов. Например, два ряда могут следовать из третьего, но при отсутствии информации о третьем ряде тест Грернджера установит причинно-следственную связь между первым и вторым рядом, хотя она отсутствует. Проблема точного определения структуры зависимости рядов рассмотрена в работе [13].

В случае, когда тест Гренджера неприменим или не может обнаружить связь между рядами, применяется метод сходящегося перекрестно-

го отображения (convergent cross mapping, CCM). Этот метод основан на оценке того, насколько хорошо один ряд может быть восстановлен и использованием второго. Считается, что ряд $\mathbf{x}$ точно восстанавливается по ряду $\mathbf{y}$, только если ряд $\mathbf{y}$ влияет на ряд $\mathbf{x}$. Метод CCM основан на сравнении ближайших соседей в фазовом пространстве ряда $\mathbf{x}$, полученных с помощью ряда $\mathbf{x}$ и с помощью ряда $\mathbf{y}$. Другими словами, проверяется, насколько точно моменты времени, соответствующие ближайшим соседям вектора $\mathbf{y}_t$, определяют ближайших соседей вектора $\mathbf{x}_t$. [14, 15].

Зависимость между рядами может наблюдаться не во всем фазовом пространстве, а только в некотором его подпространстве. Поэтому важно правильно выбрать главные компоненты при разложении в методе SSA. В данной работе предлагается применять метод CCM на подпространствах. Снижение размерности (проекция в фазовое подпространство) позволяет более детально изучить связь между главными компонентами рядов и найти подпространство, в котором наблюдается зависимость между рядами.

2. Постановка задачи прогнозирования

Поставим задачу прогноза многомерного временного ряда.

Обозначим $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)})^{\mathsf{T}}$ – заданный s-мерный временной ряд. Построим матрицу плана из сегментов ряда:

$$\begin{pmatrix} x_0^{(1)} & \ldots & x_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_0^{(s)} & \ldots & x_{n-1}^{(s)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{0 \div (n-1)}. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{x}_n = \left(x_n^{(1)}, \ldots x_n^{(s)}\right)^{\mathsf{T}}$ – значение ряда $\mathbf{X}$ в момент времени n. Построим прогноз $\hat{\mathbf{x}}$ ряда $\mathbf{X}$ в точке $\mathbf{x}_n$. Проделаем это k раз для различ-

ных обучающих выборок $\mathbf{X}^i_{\text{train}} = \mathbf{X}_{i \div (n+i-1)}$, $i = 0, \ldots, (k-1)$. Получим k прогнозов $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \ldots \hat{\mathbf{x}}_{n+k-1})$ ряда $\mathbf{X}$ в точках $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \ldots \mathbf{x}_{n+k-1}$.

Прогностическая модель имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-L+2}),$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}} S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \ldots \hat{\mathbf{x}}_{n+k-1}) = S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}),$$

где функция потерь

$$S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(1)}_{n+i}, \hat{\mathbf{x}}^{(1)}_{n+i}).$$

В данной работе в качестве прогностической модели $\mathbf{f}$ используется алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L). Функция $\mathbf{f}$ имеет вид:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-L+2}) = \begin{pmatrix} x^{(1)}_{t-L+2} & \ldots & x^{(1)}_t \\ x^{(2)}_{t-L+2} & \ldots & x^{(2)}_t \\ & \vdots & \\ x^{(s)}_{t-L+2} & \ldots & x^{(s)}_t \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}.$$

вектор коэффициентов $\mathbf{p}$ определяется алгоритмом многомерной гусеницы MSSA-L. Алгоритм MSSA-L подробнее описан в следующем разделе.

3. Алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L)

Алгоритм MMSA-L является обобщением на многомерный случай алгоритма гусеницы (SSA). Задача алгоритма MSSA-L состоит в представлении временного ряда в виде суммы интерпретируемых компонент. Это осуществляется в четыре шага: запись ряда в виде траекторной матрицы, сингулярное разложение этой матрицы, группировка компонент, полученных при сингулярном разложении, в интерпретируемые компоненты и восстановление временного ряда по каждой из интерпретируемых компонент.

По ряду (1) построим матрицу Ганкеля $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{L \times sK}$, $K = N - L + 1$:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_s],$$

где L – ширина окна, $\mathbf{H}_i \in \mathbb{R}^{L \times K}$ – матрица Ганкеля для ряда $\mathbf{x}^{(i)}$,

$$\mathbf{H}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_0^{(i)} & x_1^{(i)} & \ldots & x_{N-L}^{(i)} \\ x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & \ldots & x_{N-L+1}^{(i)} \\ & & \vdots & \\ x_{L-1}^{(i)} & x_L^{(i)} & \ldots & x_{N-1}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

По матрице Ганкеля $\mathbf{H}$ восстановим временной ряд $\mathbf{X}$. Метод многомерной гусеницы строит приближение $\hat{\mathbf{H}}$ матрицы $\mathbf{H}$ меньшего ранга с помощью сингулярного разложения этой матрицы и восстанавливает ряд по матрице $\hat{\mathbf{H}}$. Сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_d > 0$ – сингулярные числа матрицы $\mathbf{H}$, $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ – столбцы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Тогда наилучшее приближение матрицы $\mathbf{H}$ матрицей ранга $r < d$ имеет вид :

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}$$

По матрице $\hat{\mathbf{H}}$ восстанавливается временной ряд $\mathbf{X}$ путем усреднения элементов, стоящих на антидиагоналях.

Алгоритм многомерной гусеницы также позволяет построить прогноз временного ряда в момент N по $(L-1)$ предыдущим значениям ряда. Алгоритм находит такой вектор коэффициентов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{(L-1)}$, что

значения ряда $\mathbf{X}$ в момент N:

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_{N-L+1}^{(1)} & \cdots & x_{N-1}^{(1)} \\ x_{N-L+1}^{(2)} & \cdots & x_{N-1}^{(2)} \\ & \vdots & \\ x_{N-L+1}^{(s)} & \cdots & x_{N-1}^{(s)} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{p} \tag{2}$$

Заметим, что коэффициенты $\mathbf{p}$ оказываются общими для всех компонент ряда $\mathbf{X}$.

Для каждого $i \in [1, r]$ обозначим $\tilde{\mathbf{u}}_i$ первые $(L-1)$ компонент столбца $\mathbf{u}_i$, π_i – последнюю компоненту столбца $\mathbf{u}_i$ и $\nu = \sum_{i=1}^{r} \pi_i^2$. Тогда вектор коэффициентов $\mathbf{p}$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{i=1}^{r} \pi_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tag{3}$$

Заметим, что для одномерного временного ряда справедливы все приведенные соотношения при $s = 1$.

4. Тест Гренджера

В работе для установления причинно-следственных связей предлагается использовать статистический тест Гренджера. Ниже приведен алгоритм теста Гренджера для проверки наличия зависимости одного временного ряда от другого. Пусть требуется проверить, зависит ли ряд $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$. Выдвинем гипотезу о независимости ряда $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$ и проверим ее. Делаем это следующим образом.

1. Строим прогноз ряда $\mathbf{x}$ без использования ряда $\mathbf{y}$ и находим значение функции потерь

$$S_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i\right),$$

где n – длина тестовой выборки.

Функцию $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ выбираем в зависимости от распределения ошибок прогноза на тестовой выборке (**??**).

2. Строим прогноз ряда $\mathbf{x}$ с использованием ряда $\mathbf{y}$. Вычисляем для него значение функции потерь

$$S_{\mathbf{xy}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i\right).$$

3. Рассмотрим статистику

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{N - 2k}{k} \cdot \frac{S_{\mathbf{x}} - S_{\mathbf{xy}}}{S_{\mathbf{xy}}},$$

где N – длина обучающей выборки, k – размерность регрессионной модели. Статистика T имеет распределение $F(k, N - 2k)$ (распределение Фишера с параметрами $(k, N - 2k)$).

4. Если ряд $\mathbf{x}$ не зависит от ряда $\mathbf{y}$, то значения $S_{\mathbf{x}}$ и $S_{\mathbf{xy}}$ будут близки, а статистика $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – незначима. Поэтому в случае больших значений статистики $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ отвергаем гипотезу о независимости ряда $\mathbf{x}$ от $\mathbf{y}$. Выберем некоторое критические значение t статистики $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда критерий зависимости ряда $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$ выглядит следующим образом:

$$\text{Из } T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > t \quad \text{следует, что ряд } \mathbf{x} \text{ зависит от ряда } \mathbf{y}$$

5. Аналогично проверим зависимость ряда $\mathbf{x}$ от восстановленного (с помощью алгоритма MSSA-L) ряда $\hat{\mathbf{y}}$. Для этого используем статистику

$$T(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{N - 2k}{k} \cdot \frac{S_{\mathbf{x}} - S_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{y}}}}{S_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{y}}}}.$$

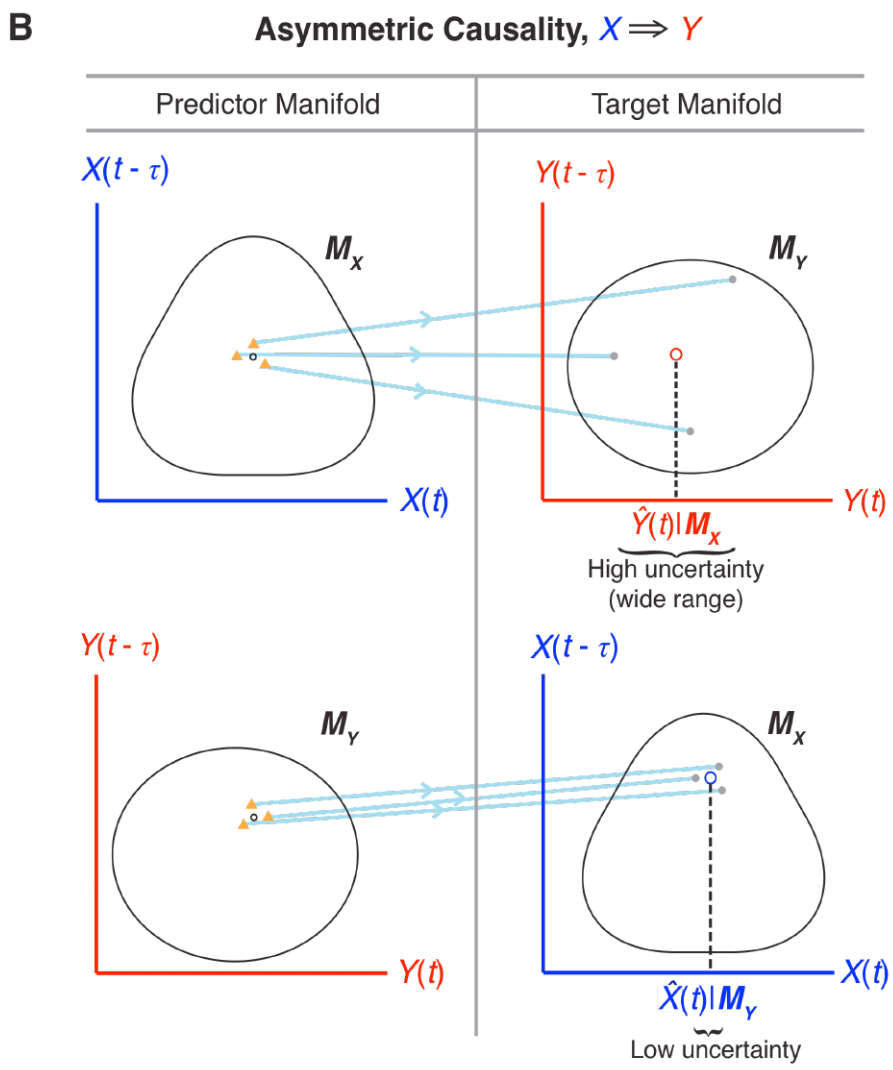
Для более подробного изучения связи между временными рядами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вычисляем кросс–корреляционную функцию $\gamma_{\mathbf{xy}}(h)$

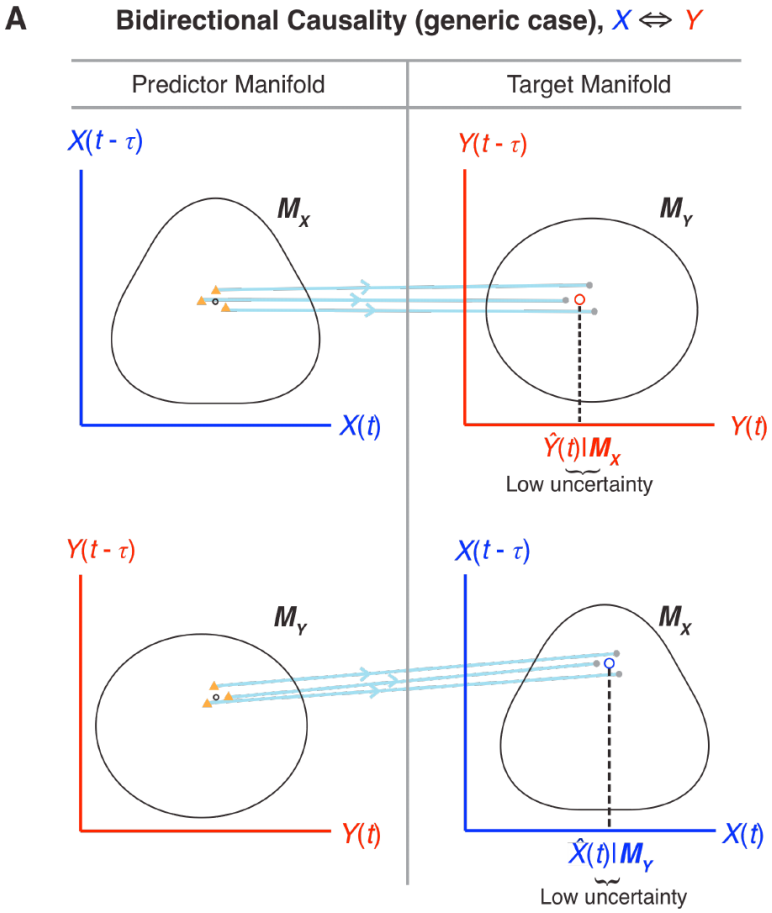
$$\gamma_{\mathbf{xy}}(h) = \frac{\mathsf{E}\left[(\mathbf{x}_t - \mu_{\mathbf{x}})\,(\mathbf{y}_{t+h} - \mu_{\mathbf{y}})\right]}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}},$$

где E – математическое ожидание, μ – выборочное среднее, σ – выборочная дисперсия.

Если h^* соответствует максимальному значению кросс-корреляции, то говорят, что ряд $\mathbf{y}$ сдвинут на h^* относительно $\mathbf{x}$. То есть $\mathbf{x}_{t+h} = \mathbf{y}_t$ Заметим, что если ряд $\mathbf{x}$ сдвинут на h_1 относительно ряда $\mathbf{y}$, а ряд $\mathbf{y}$ сдвинут на h_2 относительно ряда $\mathbf{z}$. То ряд $\mathbf{x}$ сдвинут на $h_3 = h_1 + h_2$ относительно ряда $\mathbf{z}$.

Пусть прогноз ряда $\mathbf{x}$ строится с использованием истории ряда $\mathbf{y}$ и пусть с помощью вычисления кросс-корреляции рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ получено, что ряд $\mathbf{x}$ отстает от ряда $\mathbf{y}$ на h отсчетов времени. Тогда использование при прогнозе ряда $\mathbf{y}$, сдвинутого на h отсчетов назад, может повысить качество прогноза.


B
Asymmetric Causality, X ⟹ Y
Predictor Manifold
Target Manifold
X(t - τ)
M_X
X(t)
Y(t - τ)
M_Y
Y(t)
Ŷ(t)|M_X
High uncertainty
(wide range)
Y(t - τ)
M_Y
Y(t)
X(t - τ)
M_X
X(t)
X̂(t)|M_Y
Low uncertainty



5. CCM

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ – временные ряды длины N.

Опишем, как строится прогноз ряда $\mathbf{y}$ с помощью ряда $\mathbf{x}$.

Строим матрицу Ганкеля ряда $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{H_x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{L-1} & x_L \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_L & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N-L+1} & x_{N-L+2} & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix},$$

где L – ширина окна, длина истории ряда, используемая при нахождении

главных компонент. Аналогично строим матрицу $\mathbf{H_y}$.

Обозначим t-ю строку матрицы $\mathbf{H_x}$ через $\mathbf{x}_{t+L-1}$ соответственно. Тогда матрица $\mathbf{H_x}$ принимает вид

$$\mathbf{H_x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_L \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i-L+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i), \quad i = L, \ldots, N.$$

Заметим, что все вектора $\mathbf{x}_L, \ldots, \mathbf{x}_N$ принадлежат L-мерному фазовому пространству $\mathbf{M_x}$ ряда $\mathbf{x}$. Аналогично вводим $\mathbf{y}_t, t = L, \ldots, N$, лежащие в фазовом пространстве $\mathbf{M_y}$ ряда $\mathbf{y}$.

Выберем момент $t \in [L, N]$ и найдем k ближайших соседей вектора $\mathbf{x}_t$ в $\mathbf{M_x}$. Обозначим их индексы через $t_1, \ldots, t_k$. Тогда ближайшие соседи $\mathbf{x}_t$ это строки матрицы $\mathbf{H_x}$ с номерами $(t_1 - L + 1), \ldots, (t_k - L + 1)$:

$$\mathbf{x}_{t_i} = (x_{t_i-L+1}, \ldots, x_{t_i-1}, x_{t_i}), \quad i = 1, \ldots, k$$

Прогноз $\hat{y}_t$ строится следующим образом:

$$\hat{y}_t = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{w}_i y_{t_i}, \quad \text{где } t_i\text{– индексы ближайших соседей } \mathbf{x}_t$$

$$\mathrm{w}_i = \frac{u_i}{\sum_i u_i}, \quad u_i = \exp - \left(\frac{||\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_i}||_2}{||\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_{L+1}}||_2} \right)$$

Аналогично строится прогноз ряда $\mathbf{X}$ с использованием ряда $\mathbf{Y}$.

Покажем, как описанный подход можно применяется для обнаружения зависимости между рядами. Пусть выбран момент времени t^* и вектор $\mathbf{x}_{t^*} = (x_{t^*-L+1}, \ldots, x_{t^*-1}, x_{t^*})$. И пусть $\mathbf{x}_{t_1} \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ – ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$. Тогда вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ – строки матрицы $\mathbf{H_y}$, соответствующие индексам $t_1, \ldots, t_k$. Тогда, если вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ расположены в $\mathbf{M_y}$ достаточно близко, то утверждается, что ряд $\mathbf{x}$ зависит от ряда $\mathbf{x}$.

Введем меру близости $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ следующим образом:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\text{dist}(\mathbf{x})}{\text{dist}(\mathbf{y})}, \quad \text{dist}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{x}_{t_i}||_2$$

Если $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ меньше некоторого порога s, то ряд $\mathbf{y}$ зависит от ряда $\mathbf{x}$.

Заметим, что можно рассматривать ближайших соседей не во всем фазовом пространстве $\mathbf{M_x}$ и $\mathbf{M_y}$, а только в некотором его подпространстве, натянутом на первые главные компоненты. Пусть сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H_x}$ имеет вид

$$\mathbf{H_x} = \mathbf{U_x \Lambda_x V_x}$$

Пусть $\mathcal{T}_\mathbf{x}$ – некоторый набор индексов компонент ряда $\mathbf{x}$. Построим проекцию ряда $\mathbf{x}$ на подпространство, натянутое на компоненты с номерами из $\mathcal{T}_\mathbf{x}$. Обозначим это подпространство $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$. Заменим в матрице $\mathbf{\Lambda_x}$ элементы, находящиеся в строках с индексами, не из $\mathcal{T}_\mathbf{x}$, нулями. Обозначим полученную матрицу $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_\mathbf{x}$. Тогда проекция ряда $\mathbf{x}$ в подпространство, натянутое на компоненты с индексами из $\mathcal{T}_\mathbf{x}$ задается траекторной матрицей

$$\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}} = \mathbf{U_x} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_\mathbf{x} \mathbf{V_x}.$$

Аналогично по некоторому набору $\mathcal{T}_\mathbf{y}$ строится подпространство $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ и траекторная матрица $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$. Далее предлагается искать ближайших соседей не в полных фазовых пространствах $\mathbf{M_x}$ и $\mathbf{M_y}$, задающихся траекторными матрицами $\mathbf{H}_x$ и $\mathbf{H_y}$ соответственно, а в подпространствах $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$, задающихся матрицами $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$.

Рассмотрев различные подпространства, можно выбрать то, которое будет наилучшим образом описывать исследуемый временной ряд

и будет иметь минимальную размерность. Перебор различных подпространств также позволяет установить, между какими именно компонентами рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ существует зависимость.

Зависимость рядов в выбранных подпространствах устанавливается аналогично зависимости в полных пространствах $\mathbf{M_x}$ и $\mathbf{M_y}$. Пусть $\mathcal{T}_\mathbf{x}$ и $\mathcal{T}_\mathbf{y}$ – наборы индексов главных компонент рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно. Тогда $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ – траекторные матрицы проекций рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в подпространства, натянутые на $\mathcal{T}_\mathbf{x}$ и $\mathcal{T}_\mathbf{y}$ соответственно. Для фиксированного t^* находим k ближайших соседей $\mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ и соответствующие им $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$. Здесь $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{y}_t$ – строки матриц $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ соответственно.

Будем перебирать различные комбинации индексов главных компонент и соответствующие им подпространства $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$. Для каждой пары $(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$ индексов главных компонент рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно будем находить среднее расстояние между k ближайшими соседями для ряда $\mathbf{x}$ и между ближайшими соседями для ряда $\mathbf{y}$. Введем меру близости векторов

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}) = \frac{\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{x})}{\mathrm{dist}(\mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{y})}, \quad \mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{x}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{x}_{t_i}||_2 \qquad (4)$$

Тогда задача поиска подпространств $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ эквивалентна поиску номеров главных компонент $(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$ и имеет вид

$$(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}) = \arg\max_{\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{x}} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}) \qquad (5)$$

$$|\mathcal{T}_\mathbf{x}| \to \min$$

$$|\mathcal{T}_\mathbf{y}| \to \min$$

6. CCM, эксперимент

6.1. Сгенерированные данные

Эксперимент проводился на двух сгенерированных рядах $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \sin t + 2\sin\frac{t}{2} + \sigma_x^2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_x^2 = 0.3$$

$$\mathbf{x} = \sin(2t+5) + \sigma_y^2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_y^2 = 0.25,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Строим матрицу Ганкеля $\mathbf{H_x}$ по ряду $\mathbf{x}$, взяв ширину окна $L = 250$. Для некоторого момента времени t^* рассмотрим вектор $\mathbf{x}_{t^*}$, равный t^*-й строке матрицы $\mathbf{H_x}$. Выберем k и найдем среди строк матрицы $\mathbf{H_x}$ k ближайших (в смысле евклидовой нормы) соседей вектора $\mathbf{x}_{t^*}$. Обозначим индексы найденных векторов $t_1, \ldots, t_k$, а сами найденные вектора – $\mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$.

На рисунке изображен ряд $\mathbf{x}$ и $k = 25$ ближайших соседей для момента $t^* = 15$. Моменты времени $t_1, \ldots, t_k$ выделены красным, момент t^* – черным.

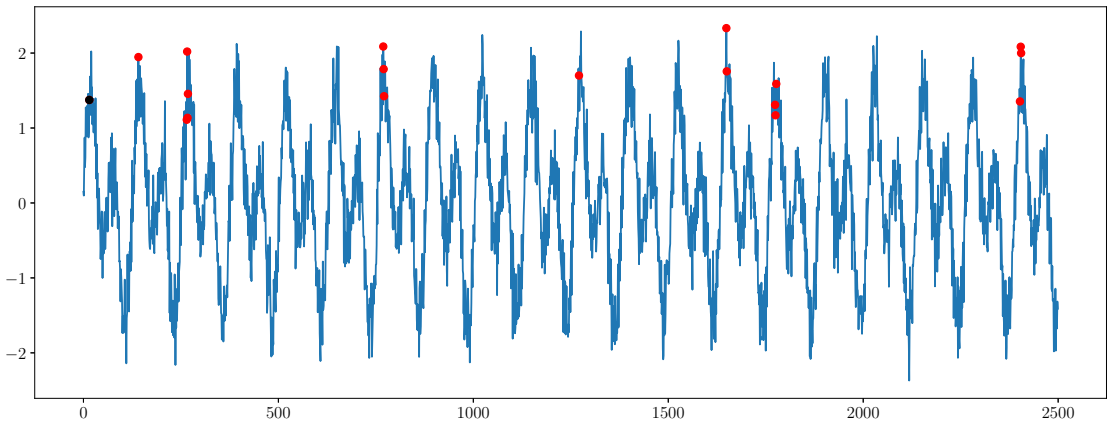


Рис. 1: Ближайшие соседи точки $\mathbf{x}_{15}$

Строим матрицу Ганкеля $\mathbf{H_y}$ по ряду $\mathbf{x}$. Обозначим i-ю строку $\mathbf{H_y}$ через $\mathbf{y}_i$. Тогда по найденным индексам $t_1, \ldots, t_k$ можно отобрать соответствующие $\mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$. Если ряд $\mathbf{x}$ зависит от ряда $\mathbf{x}$, то вектора $\mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$, как и $\mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$, будут находиться рядом в фазовом пространстве. Изобразим $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ и $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ на фазовых траекториях.

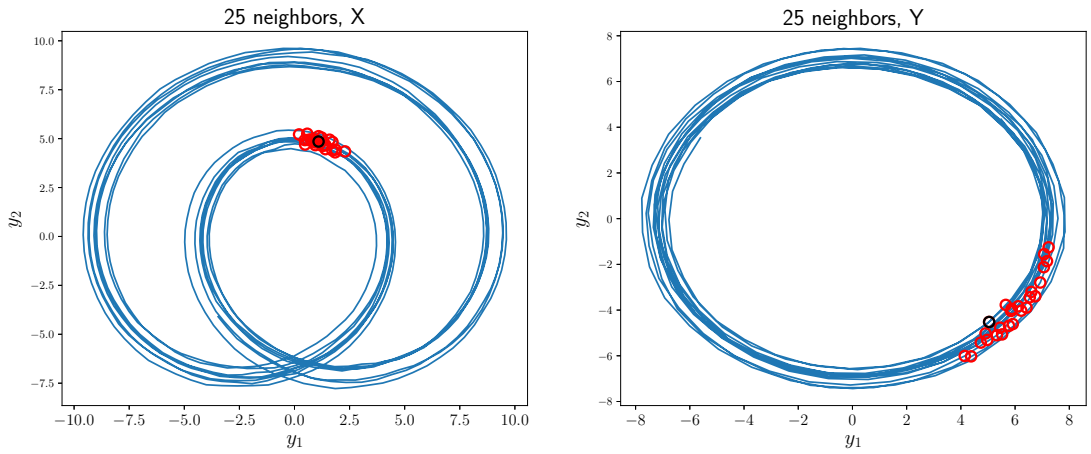


Рис. 2: Точки на фазовых траекториях рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$, соответствующие 15-ти ближайшим соседям $\mathbf{x}_{15}$

Видно, что точки обоих фазовых траекториях расположены близко друг другу. Значит, ряд $\mathbf{x}$ зависит от ряда $\mathbf{x}$.

Аналогично для некоторого t^* находим ближайших соседей вектора $\mathbf{y}_{t^*}$. Обозначим их $\mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$. На рис. 3 изображен ряд $\mathbf{x}$ и $k = 25$ ближайших соседей вектора $\mathbf{y}_{20}$.

Изобразим $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ и соответствующие им $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ на фазовых траекториях (рис. 4).

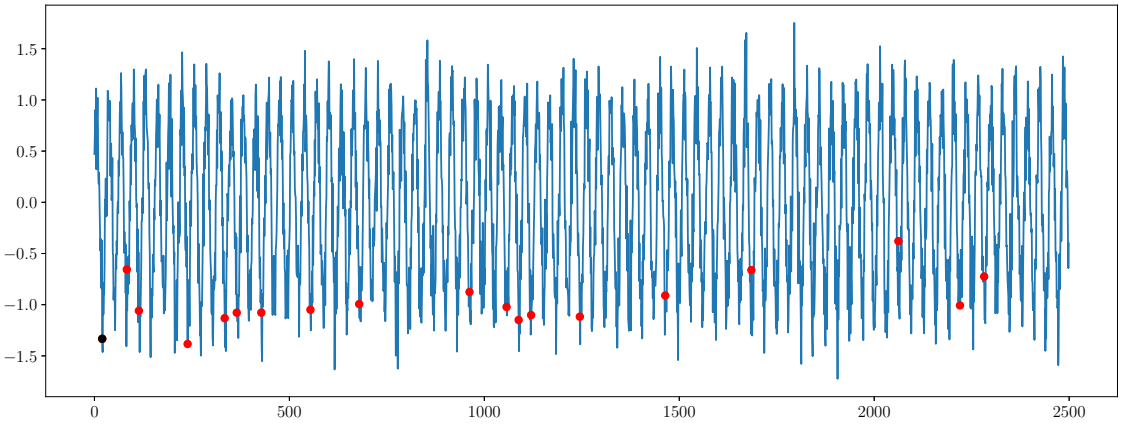


Рис. 3: Ближайшие соседи точки $\mathbf{y}_{20}$

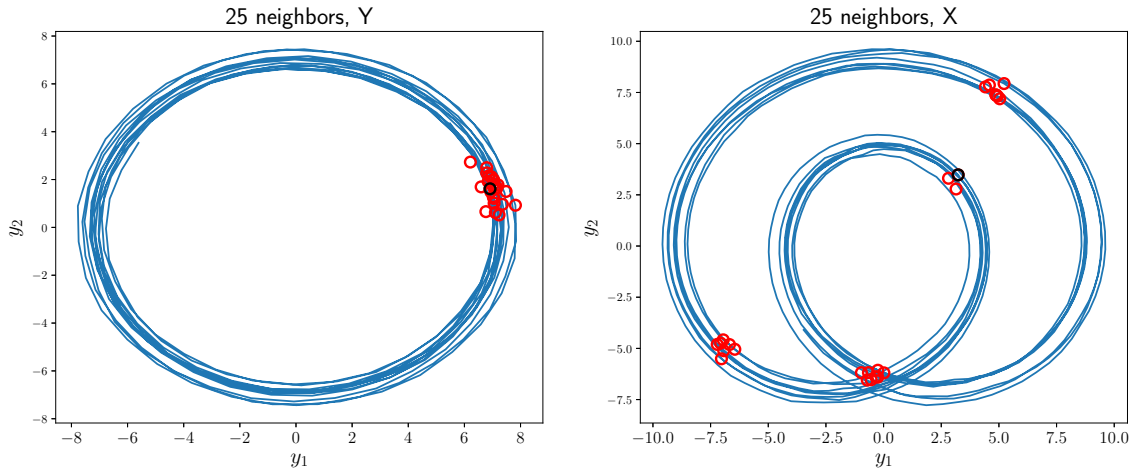


Рис. 4: Точки на фазовых траекториях рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}$, соответствующие 15-ти ближайшим соседям $\mathbf{y}_{20}$

Видим, что точки $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_{15}}$ расположены на фазовых траекториях близко друг к другу. При этом они распадаются на четыре плотные группы. Это связано с тем, что период ряда $\mathbf{x}$ в четыре раза меньше периода ряда $\mathbf{x}$.

6.2. Эксперимент на данных потребления электроэнергии и температуры

В эксперименте исследуются ряд объема потребления электроэнергии $\mathbf{x}$ и ряд значений температуры $\mathbf{x}$ в течение года. Так как эти ряды не являются стационарными, их необходимо продифференцировать и отнормировать перед тем, как исследовать зависимости между ними. Ряд температуры будем приводить к стационарной форме следующим образом. Рассмотрим ряд длины светового дня в течение года $\mathbf{Z}$. С помощью вычисления кросс-корреляционной функции $\gamma_{\mathbf{xy}}(h)$ рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{Z}$. Определим, насколько ряд $\mathbf{Z}$ опережает ряд $\mathbf{x}$. То есть найдем такое h^*, что $\mathbf{x}(t+h^*) = \mathbf{Z}(t)$. Вычтем из ряда $\mathbf{x}$ ряд $\mathbf{Z}$ с учетом сдвига h^*. Полученный ряд $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{Z}(t - h^*)$ будет стационарным рядом температуры.

Исходные ряды потребления электроэнергии $\mathbf{x}$, температуры $\mathbf{x}$ и длины светового дня $\mathbf{Z}$ изображены на рис. 5.

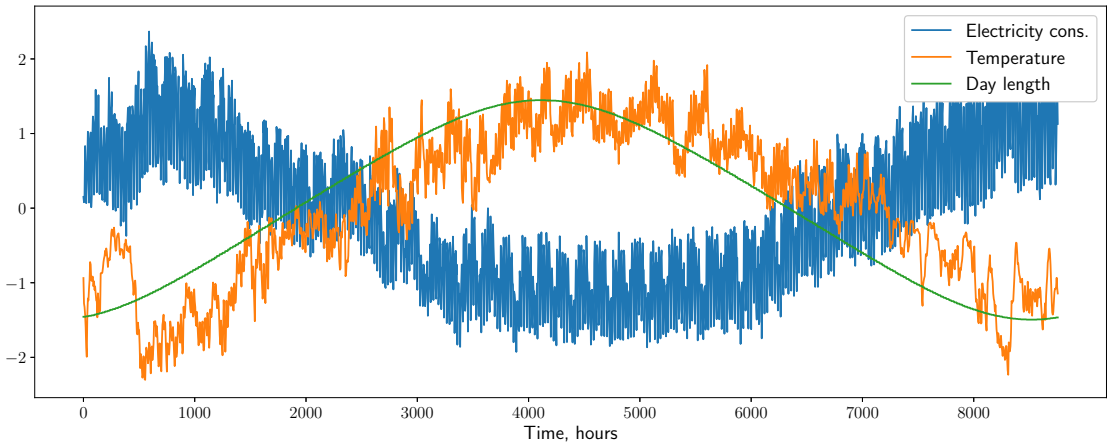


Рис. 5: Нормированные ряды потребления электроэнергии, температуры и длины светового дня

Построим кросс-корреляционную диаграмму рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{Z}$

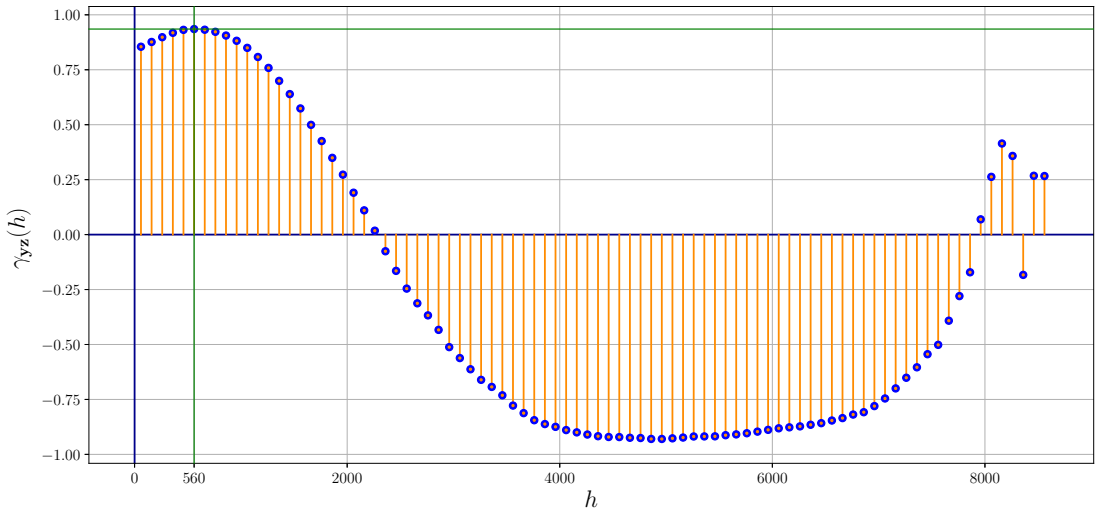


Рис. 6: Кросс-корреляционная диаграмма для ряда температуры $\mathbf{x}$ и длины светового дня $\mathbf{Z}$

Максимум модуля кросс–корреляции $\gamma_{\mathbf{yz}}(h)$ достигается при $h = 560$. Значит,

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{x}(t + 560).$$

И новый стационарный ряд температуры имеет вид

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{Z}(t - 560).$$

Далее, для удобства, полученный ряд температуры $\mathbf{x}^*$ будем обозначать $\mathbf{x}$. Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры изображены на рис. 7.

Исследуем зависимость ряда температуры $\mathbf{y}$ от ряда потребления электроэнергии $\mathbf{x}$. Делаем это аналогично эксперименту на искусственных данных. Выбираем ширину окна L и некоторый момент времени t^*. Находим k ближайших соседей векторов $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$ и их расположение в фазовом пространстве.

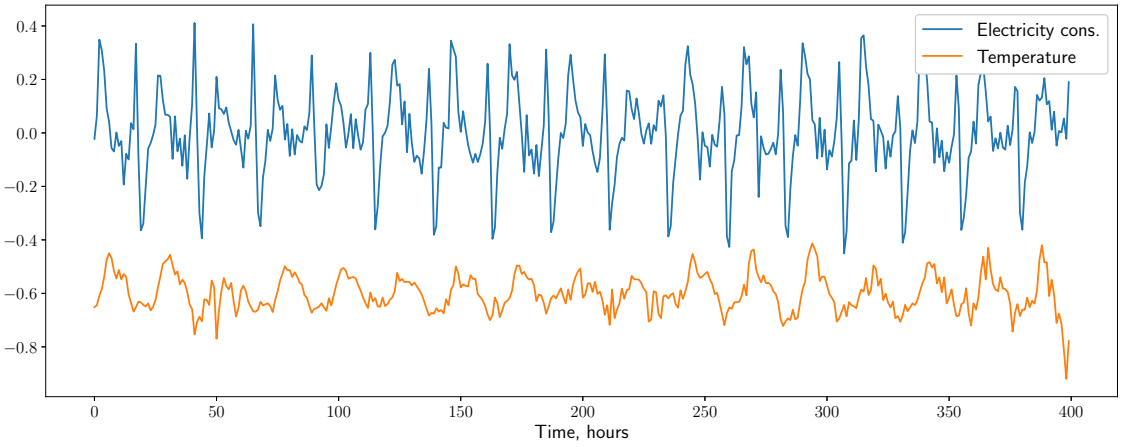


Рис. 7: Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры

Возьмем $L = 170$, что соответствует периоду в семь дней. Возьмем $t^* = 400$. На рис. 8 красным показаны ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$

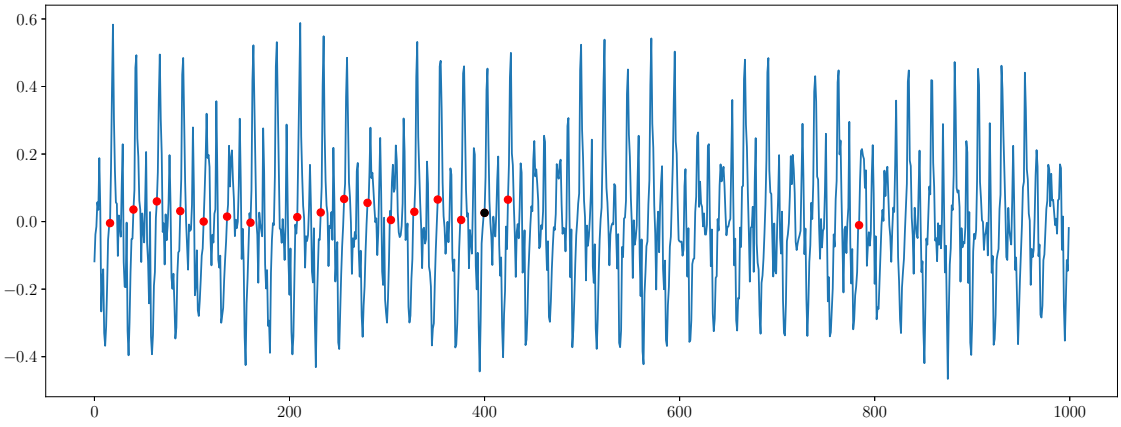


Рис. 8: Ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$, ширина окна $L = 170$

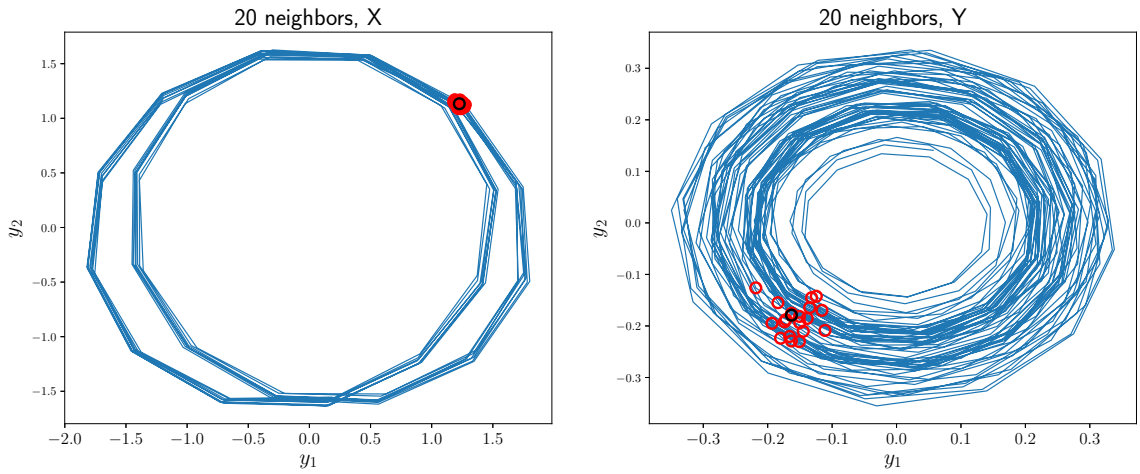


Рис. 9: Вектора $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ (ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$) и соответствующие вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ на фазовых диаграммах с периодом 12 часов

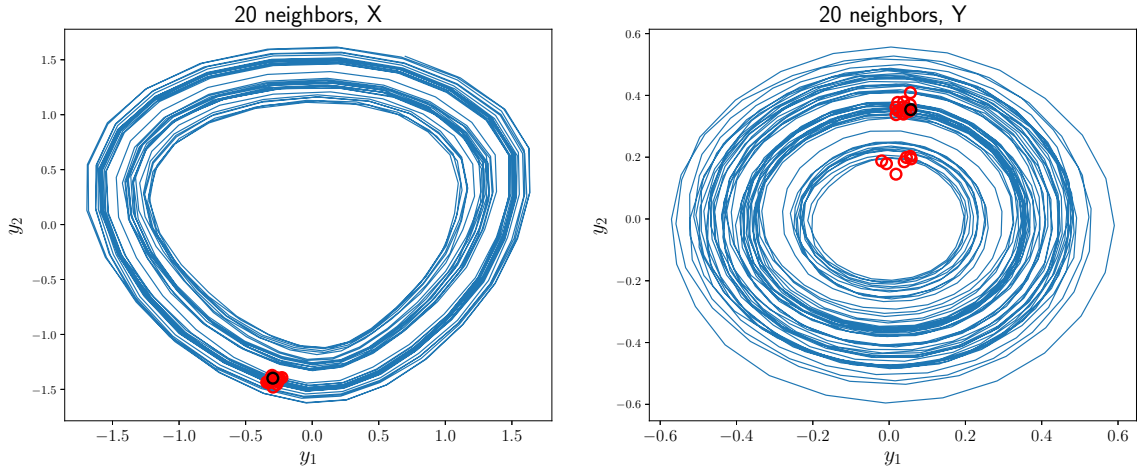


Рис. 10: Вектора $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ (ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$) и соответствующие вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ на фазовых диаграммах с периодом 24 часа

Исследуем зависимость ряда $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$. Возьмем $t^* = 400$, $L = 170$. На рис. 11 красным показаны ближайшие соседи вектора $\mathbf{y}_{t^*}$

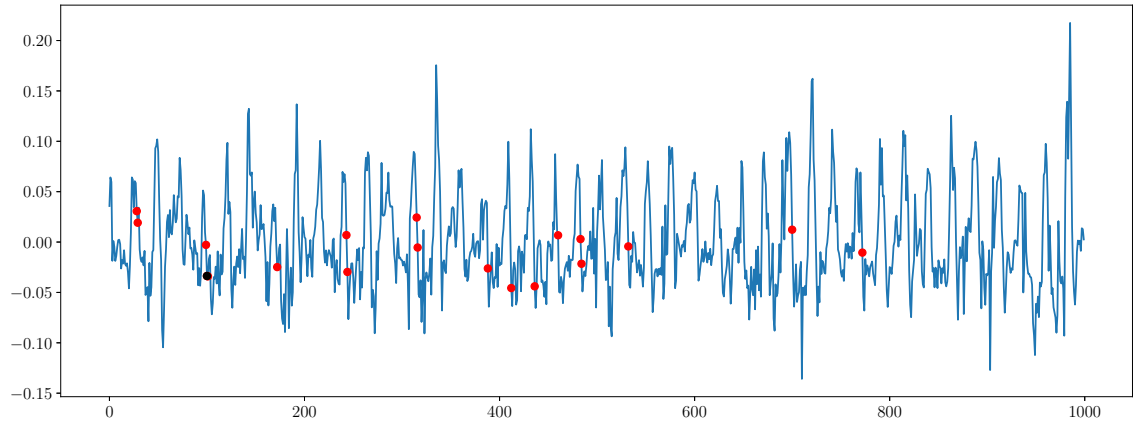


Рис. 11: Ближайшие соседи вектора $\mathbf{y}_{t^*}$, ширина окна $L = 100$

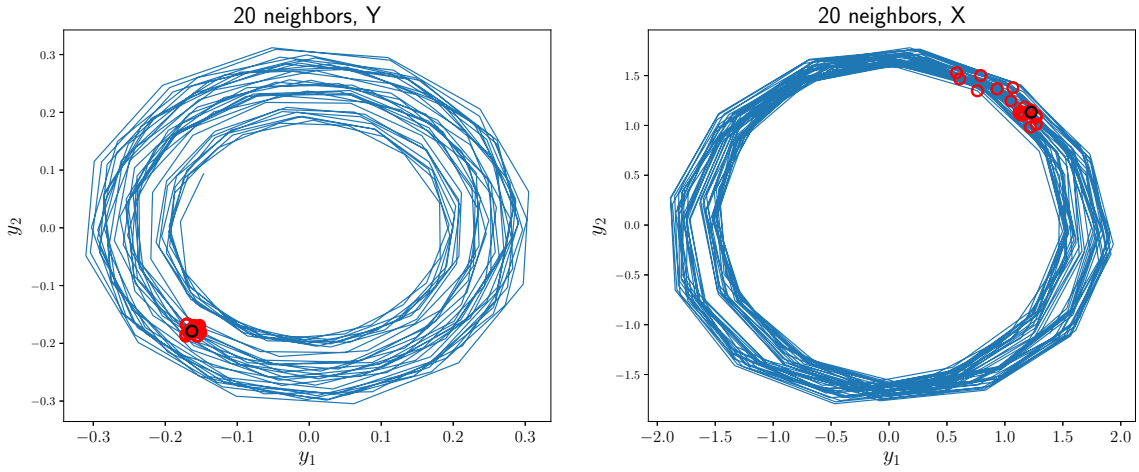


Рис. 12: Вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ (ближайшие соседи вектора $\mathbf{y}_{t^*}$) и соответствующие вектора $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ на фазовых диаграммах с периодом 12 часов

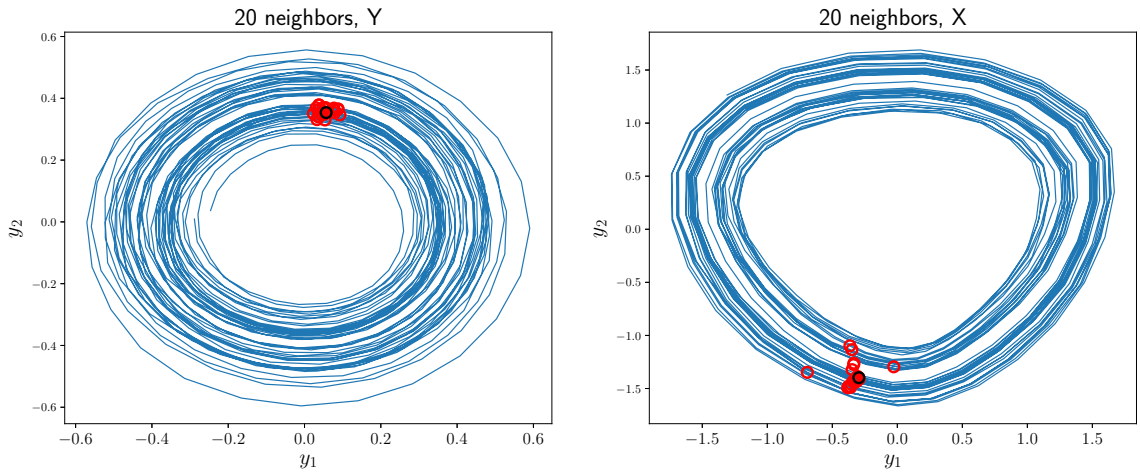


Рис. 13: Вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ (ближайшие соседи вектора $\mathbf{y}_{t^*}$) и соответствующие вектора $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ на фазовых диаграммах с периодом 24 часа

6.3. Перебор подпространств

Переберем фазовые подпространства рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ размера не больше пяти. Для этого будет перебирать пары множеств индексов главных компонент $(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$. Для каждой пары $(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$ найдем $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$, задающееся (4)

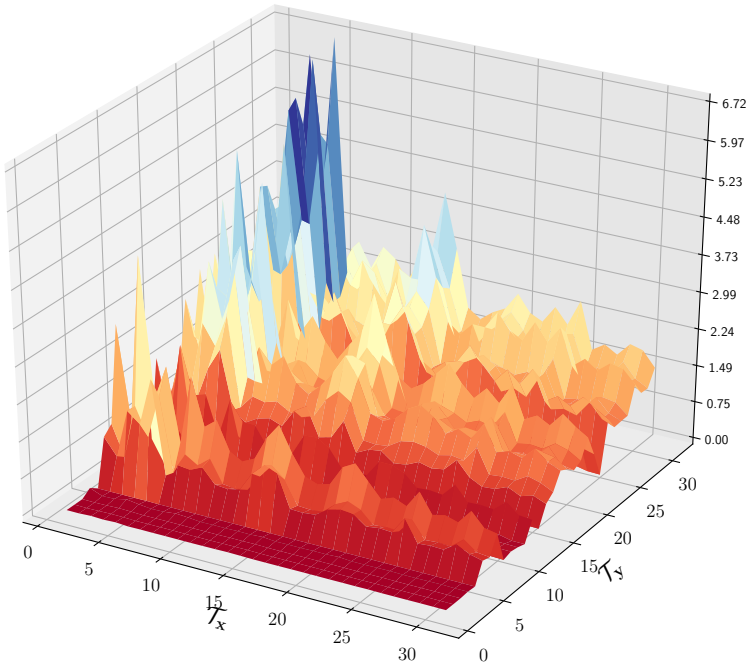


Рис. 14: Отношение расстояния между ближайшими соседями ряда **x** к расстоянию между соседями ряда **x**. Ближайшие соседи определяются по ряду **x**

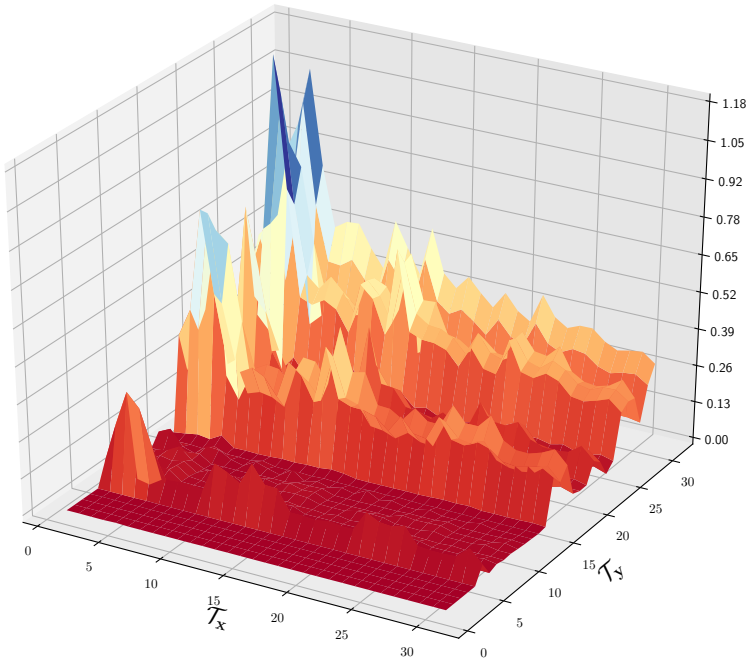


Рис. 15: Отношение расстояния между ближайшими соседями ряда **x** к расстоянию между соседями ряда **x**. Ближайшие соседи определяются по ряду **x**

6.4. Эксперимент на данных объема грузоперевозок и температуры

В эксперименте исследуется ряд объема грузоперевозок нефти в омской области **x** и ряд температуры **y**. Ряды заданы в течение года с частотой в один день. Так как ряд температуры не является стационарным, то его необходимо привести к необходимой форме аналогично пункту 6.2. На рис. 16 изображены исходные временные ряды **x** и **y**, а также ряд длины светового дня **z**.

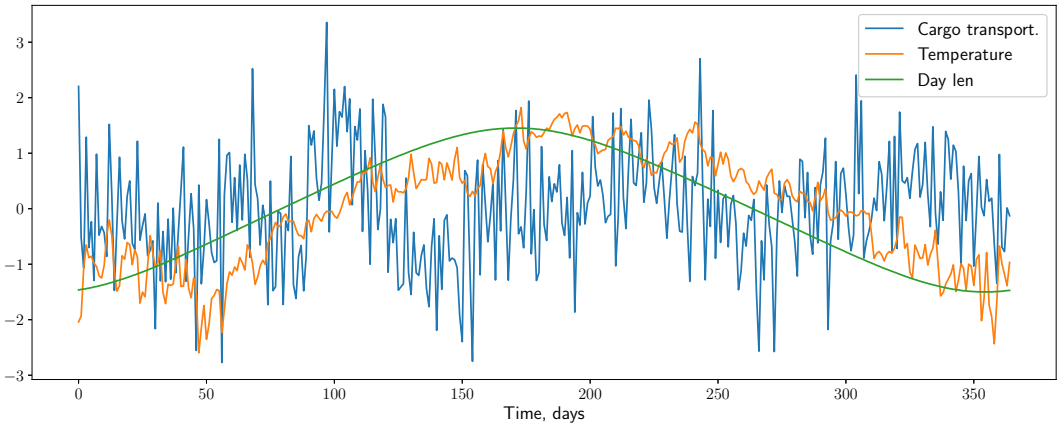


Рис. 16: Нормированные ряды объема грузоперевозок, температуры и длины светового дня

С помощью вычисления кросс-корреляционной функции $\gamma_{\mathbf{yz}}$ рядов **y** и **z** найдем, насколько ряд температуры **y** отстает от ряда длины дня **z**, и вычтем ряд **z** из ряда **y** с учетом найленного сдвига. На рис. 17 изображена кросс-корреляционная диаграмма рядов **x** и **z**

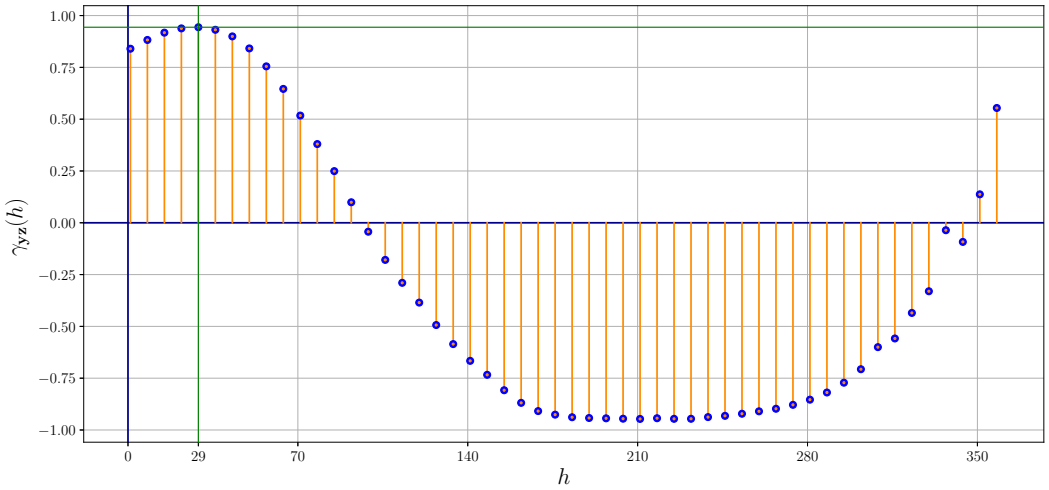


Рис. 17: Кросс-корреляционная диаграмма для ряда температуры **x** и длины светового дня **z**

Продифференцированные и нормированные ряды **x** и **y** изображены на рис. 18.

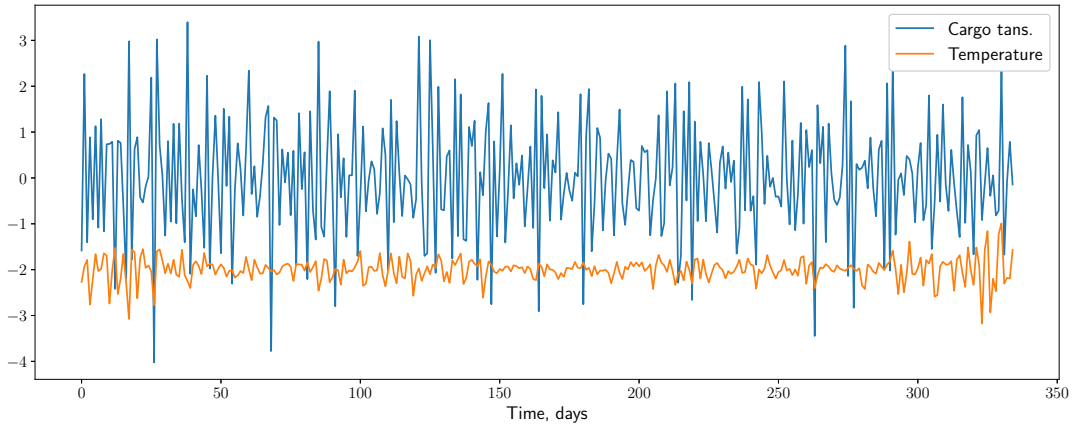


Рис. 18: Продифференцированные и нормированные ряды объема грузоперевозок **x** и температуры **y**

Исследуем зависимость между рядами **x** и **y**. Для этого зафиксируем ширину окна $L = 15$, что соответствует периоду в две недели. Построим траекторные матрицы $\mathbf{H_x}$ и $\mathbf{H_y}$. Их сингулярные числа изображены на рисунке:

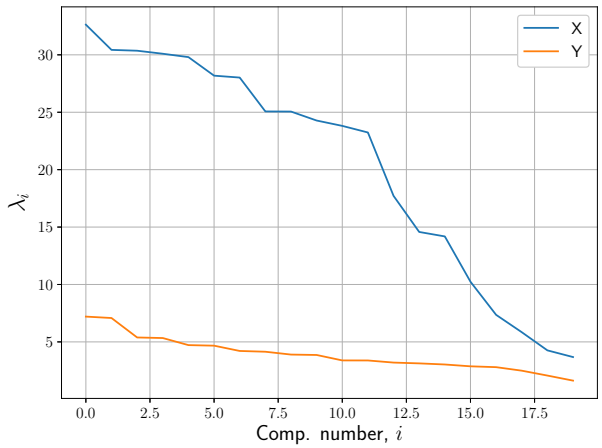


Рис. 19: Сингулярные числа матриц $\mathbf{H_x}$ и $\mathbf{H_y}$

Из графика 20 видно, что нет резкого скачка значений сингулярных чисел. Это означает, что скорее всего для рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не существует фазовых подпространств, проекции в которые точно аппроксимируют эти ряды.

Рассмотрим фазовые траектории рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в фазовые подпространства, натянутые на первые две главные компоненты. Возьмем $t^* = 10$ и изобразим ближайших соседей $\mathbf{x}_{t_1}, \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ вектора $\mathbf{x}_{t^*}$, а также соответствующие вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$.

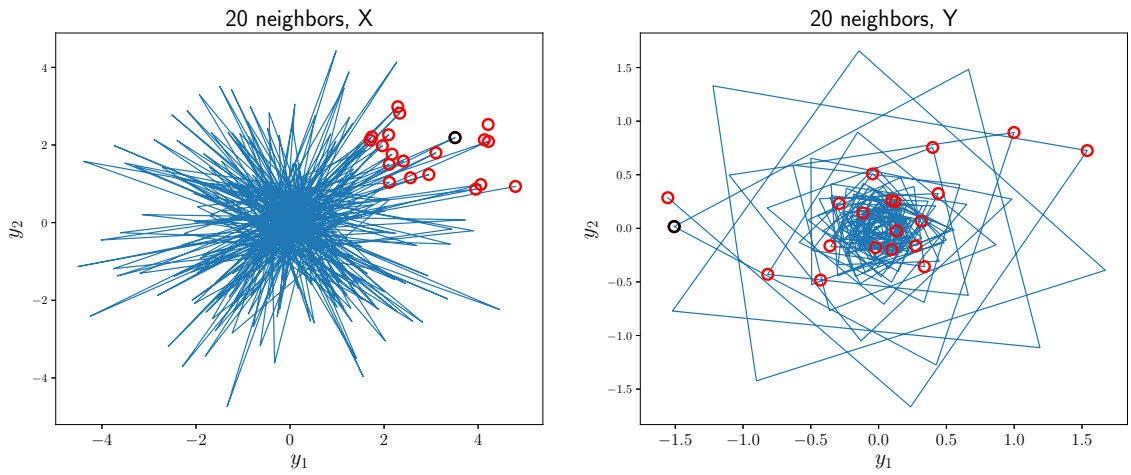


Рис. 20: Ближайшие соседи векторов $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$, определенные по ряду $\mathbf{x}$

Список литературы

1. Clive WJ Granger. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 424–438, 1969.
2. Adam B Barrett, Lionel Barnett, and Anil K Seth. Multivariate granger causality and generalized variance. *Physical Review E*, 81(4):041907, 2010.
3. Craig Hiemstra and Jonathan D Jones. Testing for linear and nonlinear granger causality in the stock price-volume relation. *The Journal of Finance*, 49(5):1639–1664, 1994.
4. Robert Hoffmann, Chew-Ging Lee, Bala Ramasamy, and Matthew Yeung. Fdi and pollution: a granger causality test using panel data. *Journal of international development*, 17(3):311–317, 2005.
5. N Golyandina and D Stepanov. Ssa-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series. In *proceedings of the 5th St. Petersburg workshop on simulation*, volume 293, page 298, 2005.
6. Nina Golyandina, Vladimir Nekrutkin, and Anatoly A Zhigljavsky. Analysis of time series structure: Ssa and related techniques (chapman & hall crc monographs on statistics & applied probability). 2001.
7. Nina Golyandina and Anatoly Zhigljavsky. *Singular Spectrum Analysis for time series*. Springer Science & Business Media, 2013.
8. James B Elsner and Anastasios A Tsonis. *Singular spectrum analysis: a new tool in time series analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.
9. Theodore Alexandrov. A method of trend extraction using singular spectrum analysis. *arXiv preprint arXiv:0804.3367*, 2008.
10. Myles R Allen and Leonard A Smith. Monte carlo ssa: Detecting

irregular oscillations in the presence of colored noise. *Journal of climate*, 9(12):3373–3404, 1996.

11. Hossein Hassani, Saeed Heravi, and Anatoly Zhigljavsky. Forecasting uk industrial production with multivariate singular spectrum analysis. *Journal of Forecasting*, 32(5):395–408, 2013.
12. CAF Marques, JA Ferreira, A Rocha, JM Castanheira, P Melo-Gonçalves, N Vaz, and JM Dias. Singular spectrum analysis and forecasting of hydrological time series. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 31(18):1172–1179, 2006.
13. Halbert White and Xun Lu. Granger causality and dynamic structural systems. *Journal of Financial Econometrics*, 8(2):193–243, 2010.
14. George Sugihara, Robert May, Hao Ye, Chih-hao Hsieh, Ethan Deyle, Michael Fogarty, and Stephan Munch. Detecting causality in complex ecosystems. *science*, page 1227079, 2012.
15. George Sugihara and Robert M May. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, 344(6268):734, 1990.