

Модели обнаружения зависимостей во временных рядах (проекции в латентные пространства)

1. Цель

Работа посвящена обнаружению причинно-следственных связей между разнородными временными рядами. Примеры зависимых разнородных временных рядов:

1. Эконометрические временные ряды.
2. Связь показателей ЭКГ и пульса (<http://smartlab.ws/component/content/article?id=60>)

Если прогноз временного ряда \mathbf{x} строится с использованием группы временных рядов $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$, то установление зависимостей ряда \mathbf{x} от $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ может повысить качество прогноза и упростить прогностическую модель. Если установлено, что ряд \mathbf{x} не зависит от ряда \mathbf{y}_i , то \mathbf{y}_i можно исключить из прогностической модели. В данной работе для обнаружения зависимостей между рядами в работе применяется два подхода: тест Гренджера и метод снижения размерности PLS.

1.1. Тест Генджера

В основе теста Гренджера лежит следующий подход. Считаем, что ряд \mathbf{x} зависит от ряда \mathbf{y} (или следует из ряда \mathbf{y}), если использование истории ряда \mathbf{y} при построении прогностической модели улучшает прогноз ряда \mathbf{x} . Данный метод подробно рассмотрен в статьях [1, 2]. Тест Гренджера позволяет установить причинно-следственные связи между рядами и основан на сравнении качества прогноза, в котором используется история только прогнозируемого ряда, и прогноза, который дополнительно использует историю других рядов. Если улучшение качества прогноза подтверждается статистически, то говорят, что прогнозируемый ряд следует из использовавшихся во втором прогнозе рядов. Более

формально используемый в этой работе тест Гренджера описан в разделе 4. Тест Гренджера применим к стационарным временным рядам, поэтому в случае нестационарных рядов их необходимо продифференцировать перед проведением теста Гренджера. Тест Гренджера используется в различных задачах, в которых необходимо исследовать взаимосвязь между развивающимися во времени процессами [3, 4].

В данной работе для построения прогноза одного временного ряда по нескольким используется алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L) [5]. Этот алгоритм является обобщением на многомерный случай алгоритма анализа спектральных компонент SSA [6, 7, 8].

Метод SSA основан на разложении временного ряда в сумму интерпретируемых компонент. Он делится на четыре основных шага: запись ряда в виде траекторной матрицы, ее сингулярное разложение, группировка компонент полученных при сингулярном разложении, по каждой сгруппированной матрице восстанавливается временной ряд. Таким образом исходный временной ряд представляется в виде суммы временных рядов. Метод SSA применяется в таких задачах, как выявления трендов во временных рядах [9], подавления шума во временных рядах [10], прогнозирование временных рядов [11, 12].

Недостатком теста Гренджера является то, что при используемом в нем подходе невозможно точно определить структуру зависимости рядов. Например, два ряда могут следовать из третьего, но при отсутствии информации о третьем ряде тест Гренджера установит причинно-следственную связь между первым и вторым рядом, хотя она отсутствует. Проблема точного определения структуры зависимости рядов рассмотрена в работе [13].

В случае, когда тест Гренджера неприменим или не может обнаружить связь между рядами, применяется метод сходящегося перекрестно-

го отображения (convergent cross mapping, CCM). Этот метод основан на оценке того, насколько хорошо один ряд может быть восстановлен и использованием второго. Считается, что ряд \mathbf{x} точно восстанавливается по ряду \mathbf{y} , только если ряд \mathbf{y} влияет на ряд \mathbf{x} . Метод CCM основан на сравнении ближайших соседей в фазовом пространстве ряда \mathbf{x} , полученных с помощью ряда \mathbf{x} и с помощью ряда \mathbf{y} . Другими словами, проверяется, насколько точно моменты времени, соответствующие ближайшим соседям вектора \mathbf{y}_t , определяют ближайших соседей вектора \mathbf{x}_t . [14, 15].

Зависимость между рядами может наблюдаться не во всем фазовом пространстве, а только в некотором его подпространстве. Поэтому важно правильно выбрать главные компоненты при разложении в методе SSA. В данной работе предлагается применять метод CCM на подпространствах. Снижение размерности (проекция в фазовое подпространство) позволяет более детально изучить связь между главными компонентами рядов и найти подпространство, в котором наблюдается зависимость между рядами.

2. Постановка задачи прогнозирования

Поставим задачу прогноза многомерного временного ряда.

Обозначим $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(s)})^T$ – заданный s -мерный временной ряд. Построим матрицу плана из сегментов ряда:

$$\begin{pmatrix} x_0^{(1)} & \dots & x_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_0^{(s)} & \dots & x_{n-1}^{(s)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{0 \div (n-1)}. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(s)})^T$ – значение ряда \mathbf{X} в момент времени n .

Построим прогноз $\hat{\mathbf{x}}$ ряда \mathbf{X} в точке \mathbf{x}_n . Проделаем это k раз для различ-

ных обучающих выборок $\mathbf{X}_{\text{train}}^i = \mathbf{X}_{i:(n+i-1)}$, $i = 0, \dots, (k-1)$. Получим k прогнозов $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{n+k-1})$ ряда \mathbf{X} в точках $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+k-1}$.

Прогностическая модель имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-L+2}),$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{n+k-1}) = S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}),$$

где функция потерь

$$S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{n+i}^{(1)}, \hat{\mathbf{x}}_{n+i}^{(1)}).$$

В данной работе в качестве прогностической модели \mathbf{f} используется алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L). Функция \mathbf{f} имеет вид:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-L+2}) = \begin{pmatrix} x_{t-L+2}^{(1)} & \dots & x_t^{(1)} \\ x_{t-L+2}^{(2)} & \dots & x_t^{(2)} \\ \vdots & & \\ x_{t-L+2}^{(s)} & \dots & x_t^{(s)} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}.$$

вектор коэффициентов \mathbf{p} определяется алгоритмом многомерной гусеницы MSSA-L. Алгоритм MSSA-L подробнее описан в следующем разделе.

3. Алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L)

Алгоритм MSSA-L является обобщением на многомерный случай алгоритма гусеницы (SSA). Задача алгоритма MSSA-L состоит в представлении временного ряда в виде суммы интерпретируемых компонент. Это осуществляется в четыре шага: запись ряда в виде траекторной матрицы, сингулярное разложение этой матрицы, группировка компонент, полученных при сингулярном разложении, в интерпретируемые компоненты и восстановление временного ряда по каждой из интерпретируемых компонент.

По ряду (1) построим матрицу Ганкеля $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{L \times sK}$, $K = N - L + 1$:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_s],$$

где L – ширина окна, $\mathbf{H}_i \in \mathbb{R}^{L \times K}$ – матрица Ганкеля для ряда $\mathbf{x}^{(i)}$,

$$\mathbf{H}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_0^{(i)} & x_1^{(i)} & \dots & x_{N-L}^{(i)} \\ x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & \dots & x_{N-L+1}^{(i)} \\ & & \vdots & \\ x_{L-1}^{(i)} & x_L^{(i)} & \dots & x_{N-1}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

По матрице Ганкеля \mathbf{H} восстановим временной ряд \mathbf{X} . Метод многомерной гусеницы строит приближение $\hat{\mathbf{H}}$ матрицы \mathbf{H} меньшего ранга с помощью сингулярного разложения этой матрицы и восстанавливает ряд по матрице $\hat{\mathbf{H}}$. Сингулярное разложение матрицы \mathbf{H} имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$ – сингулярные числа матрицы \mathbf{H} , \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i – столбцы матриц \mathbf{U} и \mathbf{V} . Тогда наилучшее приближение матрицы \mathbf{H} матрицей ранга $r < d$ имеет вид :

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

По матрице $\hat{\mathbf{H}}$ восстанавливается временной ряд \mathbf{X} путем усреднения элементов, стоящих на антидиагоналях.

Алгоритм многомерной гусеницы также позволяет построить прогноз временного ряда в момент N по $(L - 1)$ предыдущим значениям ряда. Алгоритм находит такой вектор коэффициентов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{(L-1)}$, что

значения ряда \mathbf{X} в момент N :

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_{N-L+1}^{(1)} & \cdots & x_{N-1}^{(1)} \\ x_{N-L+1}^{(2)} & \cdots & x_{N-1}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N-L+1}^{(s)} & \cdots & x_{N-1}^{(s)} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{p} \quad (2)$$

Заметим, что коэффициенты \mathbf{p} оказываются общими для всех компонент ряда \mathbf{X} .

Для каждого $i \in [1, r]$ обозначим $\tilde{\mathbf{u}}_i$ первые $(L-1)$ компонент столбца \mathbf{u}_i , π_i – последнюю компоненту столбца \mathbf{u}_i и $\nu = \sum_{i=1}^r \pi_i^2$. Тогда вектор коэффициентов \mathbf{p} вычисляется по формуле:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1 - \nu^2} \sum_{i=1}^r \pi_i \tilde{\mathbf{u}}_i \quad (3)$$

Заметим, что для одномерного временного ряда справедливы все приведенные соотношения при $s = 1$.

4. Тест Гренджера

В работе для установления причинно-следственных связей предлагается использовать статистический тест Гренджера. Ниже приведен алгоритм теста Гренджера для проверки наличия зависимости одного временного ряда от другого. Пусть требуется проверить, зависит ли ряд \mathbf{x} от ряда \mathbf{y} . Выдвинем гипотезу о независимости ряда \mathbf{x} от ряда \mathbf{y} и проверим ее. Делаем это следующим образом.

1. Строим прогноз ряда \mathbf{x} без использования ряда \mathbf{y} и находим значение функции потерь

$$S_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i),$$

где n – длина тестовой выборки.

Функцию $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ выбираем в зависимости от распределения ошибок прогноза на тестовой выборке (??).

2. Строим прогноз ряда \mathbf{x} с использованием ряда \mathbf{y} . Вычисляем для него значение функции потерь

$$S_{\mathbf{xy}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i).$$

3. Рассмотрим статистику

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{N - 2k}{k} \cdot \frac{S_{\mathbf{x}} - S_{\mathbf{xy}}}{S_{\mathbf{xy}}},$$

где N – длина обучающей выборки, k – размерность регрессионной модели. Статистика T имеет распределение $F(k, N - 2k)$ (распределение Фишера с параметрами $(k, N - 2k)$).

4. Если ряд \mathbf{x} не зависит от ряда \mathbf{y} , то значения $S_{\mathbf{x}}$ и $S_{\mathbf{xy}}$ будут близки, а статистика $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – незначима. Поэтому в случае больших значений статистики $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ отвергаем гипотезу о независимости ряда \mathbf{x} от \mathbf{y} . Выберем некоторое критическое значение t статистики $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда критерий зависимости ряда \mathbf{x} от ряда \mathbf{y} выглядит следующим образом:

Из $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > t$ следует, что ряд \mathbf{x} зависит от ряда \mathbf{y}

5. Аналогично проверим зависимость ряда \mathbf{x} от восстановленного (с помощью алгоритма MSSA-L) ряда $\hat{\mathbf{y}}$. Для этого используем статистику

$$T(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{N - 2k}{k} \cdot \frac{S_{\mathbf{x}} - S_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{y}}}}{S_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{y}}}}.$$

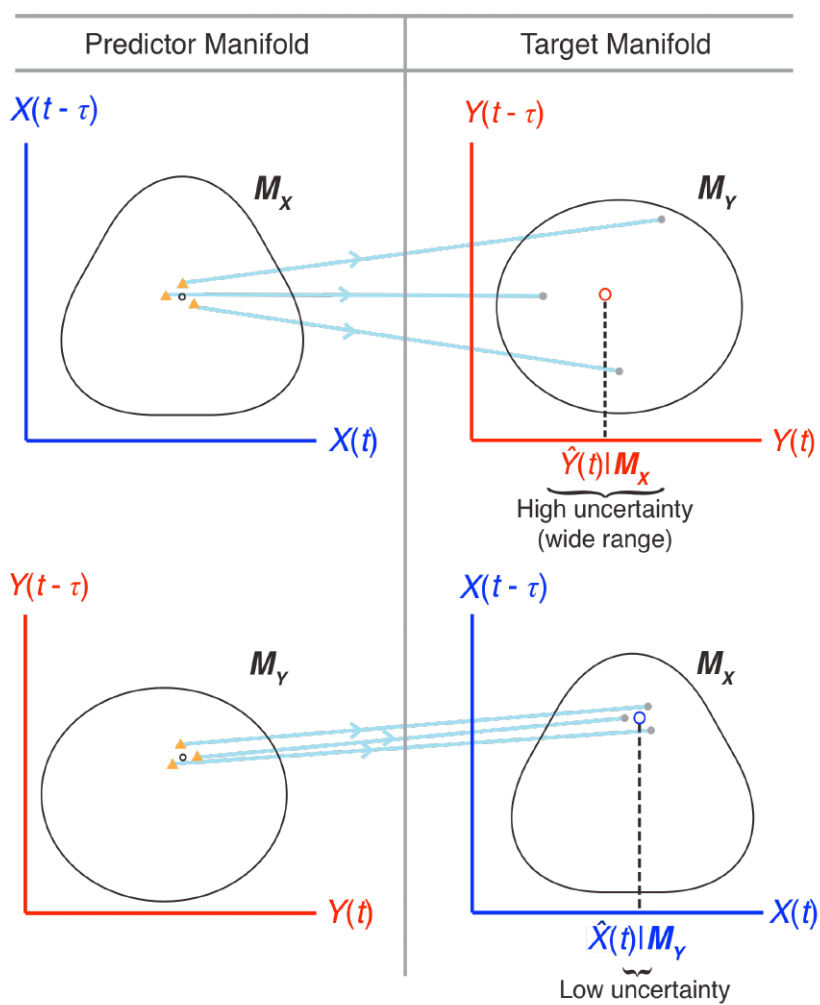
Для более подробного изучения связи между временными рядами \mathbf{x} и \mathbf{y} вычисляем кросс-корреляционную функцию $\gamma_{\mathbf{xy}}(h)$

$$\gamma_{\mathbf{xy}}(h) = \frac{\mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mu_{\mathbf{x}})(\mathbf{y}_{t+h} - \mu_{\mathbf{y}})]}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}},$$

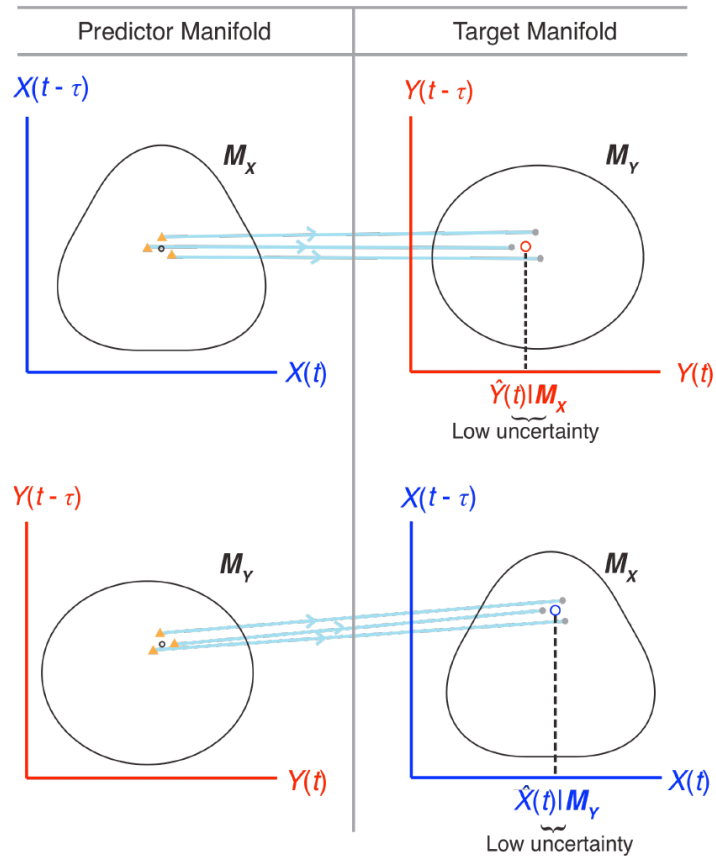
где \mathbf{E} – математическое ожидание, μ – выборочное среднее, σ – выборочная дисперсия.

Если h^* соответствует максимальному значению кросс-корреляции, то говорят, что ряд \mathbf{y} сдвинут на h^* относительно \mathbf{x} . То есть $\mathbf{x}_{t+h} = \mathbf{y}_t$. Заметим, что если ряд \mathbf{x} сдвинут на h_1 относительно ряда \mathbf{y} , а ряд \mathbf{y} сдвинут на h_2 относительно ряда \mathbf{z} . То ряд \mathbf{x} сдвинут на $h_3 = h_1 + h_2$ относительно ряда \mathbf{z} .

Пусть прогноз ряда \mathbf{x} строится с использованием истории ряда \mathbf{y} и пусть с помощью вычисления кросс-корреляции рядов \mathbf{x} и \mathbf{y} получено, что ряд \mathbf{x} отстает от ряда \mathbf{y} на h отсчетов времени. Тогда использование при прогнозе ряда \mathbf{y} , сдвинутого на h отсчетов назад, может повысить качество прогноза.

B**Asymmetric Causality, $X \Rightarrow Y$** 

A Bidirectional Causality (generic case), $X \Leftrightarrow Y$



5. CCM

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ – временные ряды длины N .

Опишем, как строится прогноз ряда \mathbf{y} с помощью ряда \mathbf{x} .

Строим матрицу Ганкеля ряда \mathbf{x} .

$$\mathbf{H}_x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{L-1} & x_L \\ x_2 & x_3 & \dots & x_L & x_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N-L+1} & x_{N-L+2} & \dots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix},$$

где L – ширина окна, длина истории ряда, используемая при нахождении

главных компонент. Аналогично строим матрицу \mathbf{H}_y .

Обозначим t -ю строку матрицы \mathbf{H}_x через \mathbf{x}_{t+L-1} соответственно. Тогда матрица \mathbf{H}_x принимает вид

$$\mathbf{H}_x = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_L \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i-L+1}, \dots, x_{i-1}, x_i), \quad i = L, \dots, N.$$

Заметим, что все вектора $\mathbf{x}_L, \dots, \mathbf{x}_N$ принадлежат L -мерному фазовому пространству \mathbf{M}_x ряда \mathbf{x} . Аналогично вводим $\mathbf{y}_t, t = L, \dots, N$, лежащие в фазовом пространстве \mathbf{M}_y ряда \mathbf{y} .

Выберем момент $t \in [L, N]$ и найдем k ближайших соседей вектора \mathbf{x}_t в \mathbf{M}_x . Обозначим их индексы через t_1, \dots, t_k . Тогда ближайшие соседи \mathbf{x}_t это строки матрицы \mathbf{H}_x с номерами $(t_1 - L + 1), \dots, (t_k - L + 1)$:

$$\mathbf{x}_{t_i} = (x_{t_i-L+1}, \dots, x_{t_i-1}, x_{t_i}), \quad i = 1, \dots, k$$

Прогноз \hat{y}_t строится следующим образом:

$$\hat{y}_t = \sum_{i=1}^k w_i y_{t_i}, \quad \text{где } t_i - \text{индексы ближайших соседей } \mathbf{x}_t$$

$$w_i = \frac{u_i}{\sum_i u_i}, \quad u_i = \exp - \left(\frac{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_i}\|_2}{\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_{L+1}}\|_2} \right)$$

Аналогично строится прогноз ряда \mathbf{X} с использованием ряда \mathbf{Y} .

Покажем, как описанный подход можно применяется для обнаружения зависимости между рядами. Пусть выбран момент времени t^* и вектор $\mathbf{x}_{t^*} = (x_{t^*-L+1}, \dots, x_{t^*-1}, x_{t^*})$. И пусть $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$ — ближайшие соседи вектора \mathbf{x}_{t^*} . Тогда вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ — строки матрицы \mathbf{H}_y , соответствующие индексам t_1, \dots, t_k . Тогда, если вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ расположены в \mathbf{M}_y достаточно близко, то утверждается, что ряд \mathbf{Y} зависит от ряда \mathbf{X} .

Введем меру близости $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ следующим образом:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\text{dist}(\mathbf{x})}{\text{dist}(\mathbf{y})}, \quad \text{dist}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{x}_{t_i}\|_2$$

Если $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ меньше некоторого порога s , то ряд \mathbf{y} зависит от ряда \mathbf{x} .

Заметим, что можно рассматривать ближайших соседей не во всем фазовом пространстве \mathbf{M}_x и \mathbf{M}_y , а только в некотором его подпространстве, натянутом на первые главные компоненты. Пусть сингулярное разложение матрицы \mathbf{H}_x имеет вид

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{U}_x \mathbf{\Lambda}_x \mathbf{V}_x$$

Пусть \mathcal{T}_x – некоторый набор индексов компонент ряда \mathbf{x} . Построим проекцию ряда \mathbf{x} на подпространство, натянутое на компоненты с номерами из \mathcal{T}_x . Обозначим это подпространство $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_x}$. Заменяем в матрице $\mathbf{\Lambda}_x$ элементы, находящиеся в строках с индексами, не из \mathcal{T}_x , нулями. Обозначим полученную матрицу $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_x$. Тогда проекция ряда \mathbf{x} в подпространство, натянутое на компоненты с индексами из \mathcal{T}_x задается траекторной матрицей

$$\mathbf{P}_{\mathcal{T}_x} = \mathbf{U}_x \tilde{\mathbf{\Lambda}}_x \mathbf{V}_x.$$

Аналогично по некоторому набору \mathcal{T}_y строится подпространство $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_y}$ и траекторная матрица $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_y}$. Далее предлагается искать ближайших соседей не в полных фазовых пространствах \mathbf{M}_x и \mathbf{M}_y , задающихся траекторными матрицами \mathbf{H}_x и \mathbf{H}_y соответственно, а в подпространствах $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_x}$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_y}$, задающихся матрицами $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_x}$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_y}$.

Рассмотрев различные подпространства, можно выбрать то, которое будет наилучшим образом описывать исследуемый временной ряд

и будет иметь минимальную размерность. Перебор различных подпространств также позволяет установить, между какими именно компонентами рядов \mathbf{x} и \mathbf{y} существует зависимость.

Зависимость рядов в выбранных подпространствах устанавливается аналогично зависимости в полных пространствах $\mathbf{M}_\mathbf{x}$ и $\mathbf{M}_\mathbf{y}$. Пусть $\mathcal{T}_\mathbf{x}$ и $\mathcal{T}_\mathbf{y}$ – наборы индексов главных компонент рядов \mathbf{x} и \mathbf{y} соответственно. Тогда $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ – траекторные матрицы проекций рядов \mathbf{x} и \mathbf{y} в подпространства, натянутые на $\mathcal{T}_\mathbf{x}$ и $\mathcal{T}_\mathbf{y}$ соответственно. Для фиксированного t^* находим k ближайших соседей $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$ и соответствующие им $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$. Здесь \mathbf{x}_t и \mathbf{y}_t – строки матриц $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{P}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ соответственно.

Будем перебирать различные комбинации индексов главных компонент и соответствующие им подпространства $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$. Для каждой пары $(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$ индексов главных компонент рядов \mathbf{x} и \mathbf{y} соответственно будем находить среднее расстояние между k ближайшими соседями для ряда \mathbf{x} и между ближайшими соседями для ряда \mathbf{y} . Введем меру близости векторов

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}) = \frac{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{x})}{\text{dist}(\mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{y})}, \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{x}_{t_i}\|_2 \quad (4)$$

Тогда задача поиска подпространств $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{x}}$ и $\mathbf{M}_{\mathcal{T}_\mathbf{y}}$ эквивалентна поиску номеров главных компонент $(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y})$ и имеет вид

$$(\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_\mathbf{x}, \mathcal{T}_\mathbf{y}) \quad (5)$$

$$|\mathcal{T}_\mathbf{x}| \rightarrow \min$$

$$|\mathcal{T}_\mathbf{y}| \rightarrow \min$$

6. ССМ, эксперимент

6.1. Сгенерированные данные

Эксперимент проводился на двух сгенерированных рядах \mathbf{X} и \mathbf{Y} :

$$\mathbf{X} = \sin t + 2 \sin \frac{t}{2} + \sigma_x^2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_x^2 = 0.3$$

$$\mathbf{Y} = \sin(2t + 5) + \sigma_y^2 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_y^2 = 0.25,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Строим матрицу Ганкеля $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$ по ряду \mathbf{X} , взяв ширину окна $L = 250$. Для некоторого момента времени t^* рассмотрим вектор \mathbf{x}_{t^*} , равный t^* -й строке матрицы $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$. Выберем k и найдем среди строк матрицы $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$ k ближайших (в смысле евклидовой нормы) соседей вектора \mathbf{x}_{t^*} . Обозначим индексы найденных векторов t_1, \dots, t_k , а сами найденные вектора – $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$.

На рисунке изображен ряд \mathbf{X} и $k = 25$ ближайших соседей для момента $t^* = 15$. Моменты времени t_1, \dots, t_k выделены красным, момент t^* – черным.

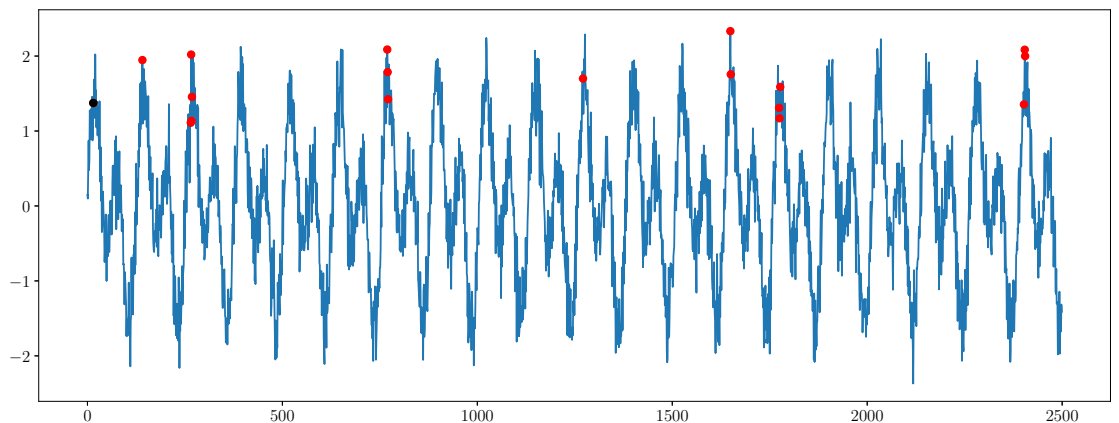


Рис. 1: Ближайшие соседи точки \mathbf{x}_{15}

Строим матрицу Ганкеля \mathbf{H}_y по ряду \mathbf{Y} . Обозначим i -ю строку \mathbf{H}_y через \mathbf{y}_i . Тогда по найденным индексам t_1, \dots, t_k можно отобрать соответствующие $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$. Если ряд \mathbf{Y} зависит от ряда \mathbf{X} , то вектора $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$, как и $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$, будут находиться рядом в фазовом пространстве. Изобразим $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ и $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ на фазовых траекториях.

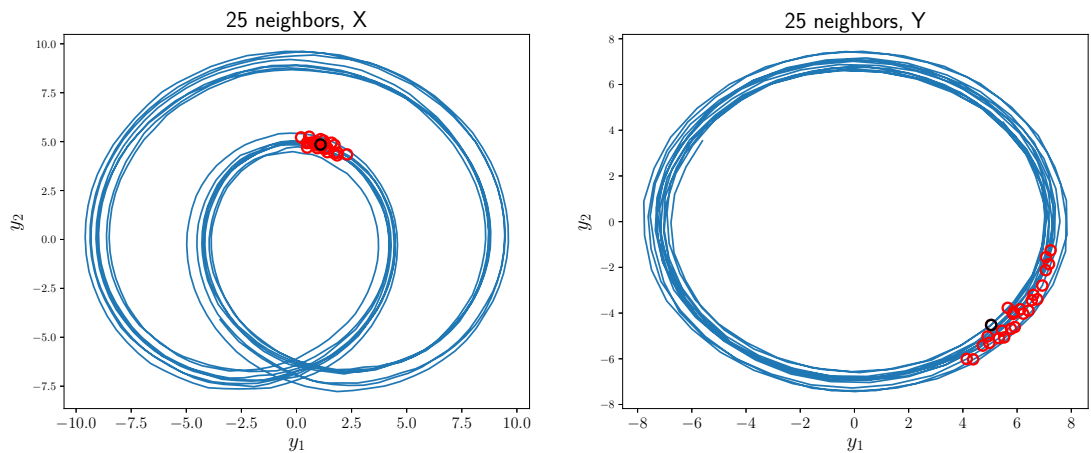


Рис. 2: Точки на фазовых траекториях рядов \mathbf{X} и \mathbf{Y} , соответствующие 15-ти ближайшим соседям \mathbf{x}_{15}

Видно, что точки обеих фазовых траекториях расположены близко друг другу. Значит, ряд \mathbf{Y} зависит от ряда \mathbf{X} .

Аналогично для некоторого t^* находим ближайших соседей вектора \mathbf{y}_{t^*} . Обозначим их $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$. На рисунке изображен ряд \mathbf{Y} и $k = 25$ ближайших соседей вектора \mathbf{y}_{20} .

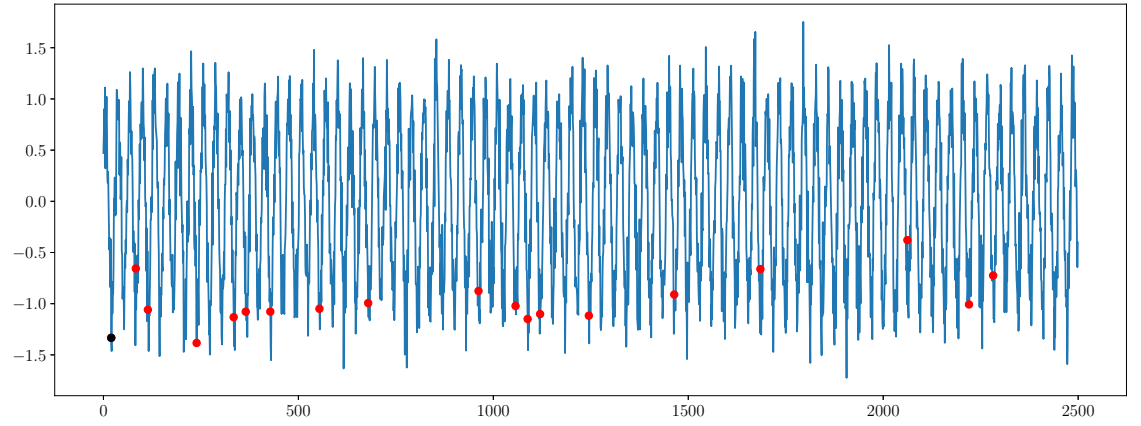


Рис. 3: Ближайшие соседи точки \mathbf{y}_{20}

Изобразим $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ и соответствующие им $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$ на фазовых траекториях.

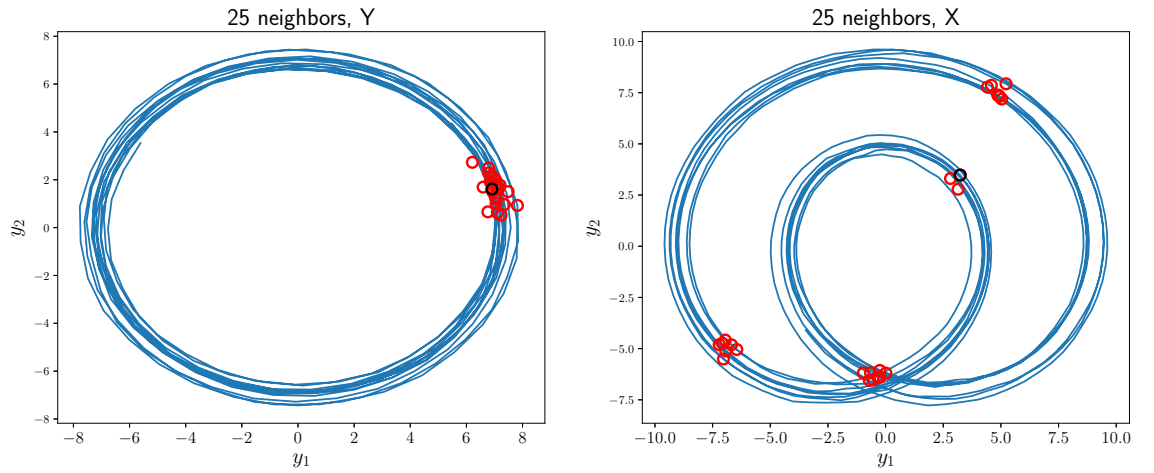


Рис. 4: Точки на фазовых траекториях рядов \mathbf{X} и \mathbf{Y} , соответствующие 15-ти ближайшим соседям \mathbf{y}_{20}

Видим, что точки $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_{15}}$ расположены на фазовых траекториях близко друг к другу. При этом они распадаются на четыре плотные группы. Это связано с тем, что период ряда \mathbf{X} в четыре раза меньше пе-

риода ряда \mathbf{Y} .

6.2. Реальные данные

В эксперименте исследуются ряд объема потребления электроэнергии \mathbf{X} и ряд значений температуры \mathbf{Y} в течение года. Так как эти ряды не являются стационарными, их необходимо продифференцировать и нормировать перед тем, как исследовать зависимости между ними. Ряд температуры будем приводить к стационарной форме следующим образом. Рассмотрим ряд длины светового дня в течение года \mathbf{Z} . С помощью вычисления кросс-корреляционной функции $\gamma_{\mathbf{xy}}(h)$ рядов \mathbf{X} и \mathbf{Z} . Определим, насколько ряд \mathbf{Z} опережает ряд \mathbf{Y} . То есть найдем такое h^* , что $\mathbf{Y}(t + h^*) = \mathbf{Z}(t)$. Вычтем из ряда \mathbf{Y} ряд \mathbf{Z} с учетом сдвига h^* . Полученный ряд $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{Z}(t - h^*)$ будет стационарным рядом температуры.

Исходные ряды потребления электроэнергии \mathbf{X} , температуры \mathbf{Y} и длины светового дня \mathbf{Z} изображены на рис. 5.

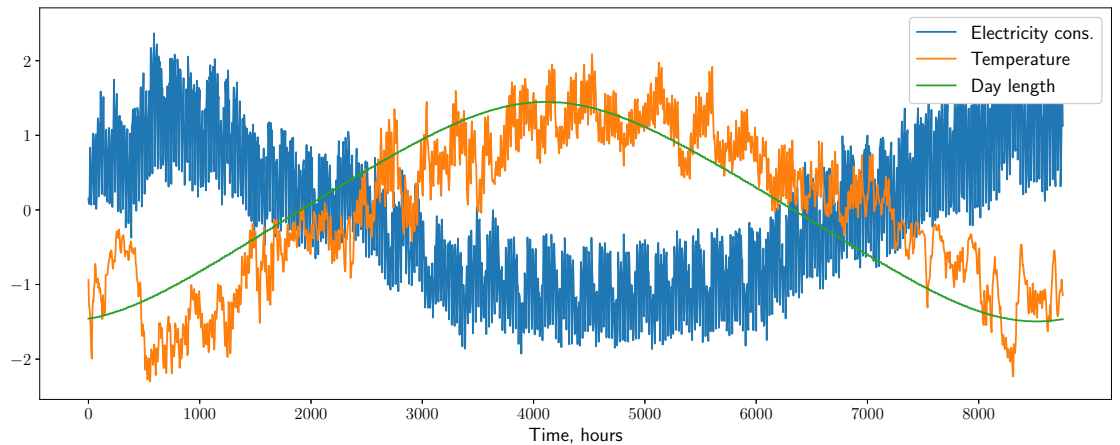


Рис. 5: Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры

Построим кросс-корреляционную диаграмму рядов \mathbf{Y} и \mathbf{Z}

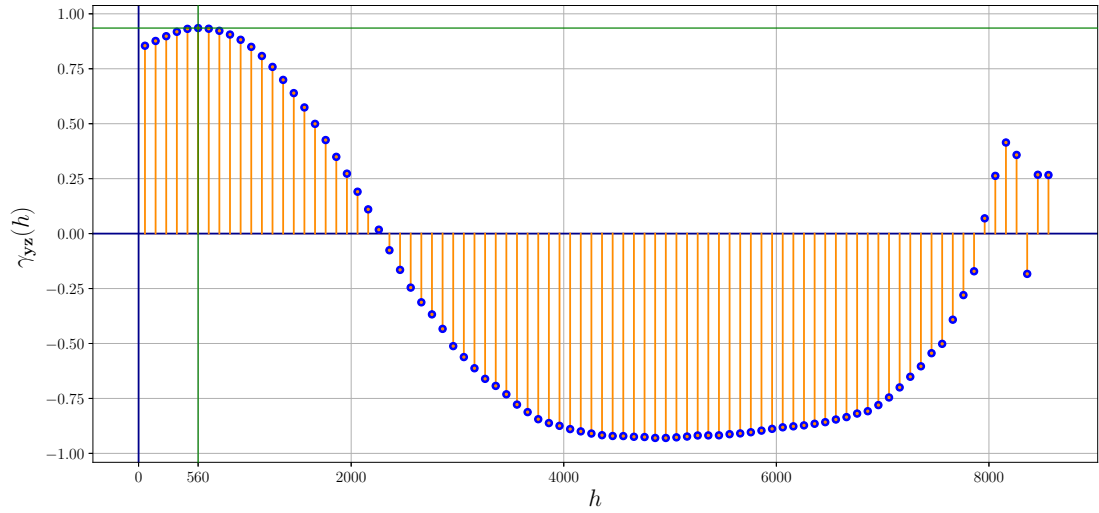


Рис. 6: Кросс-корреляционная диаграмма для ряда температуры \mathbf{Y} и длины светового дня \mathbf{Z}

Максимум модуля кросс-корреляции $\gamma_{yz}(h)$ достигается при $h = 560$. Значит,

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}(t + 560).$$

И новый стационарный ряд температуры имеет вид

$$\mathbf{Y}^*(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{Z}(t - 560).$$

Далее, для удобства, полученный ряд температуры \mathbf{Y}^* будем обозначать \mathbf{Y} . Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры изображены на рис. 7.

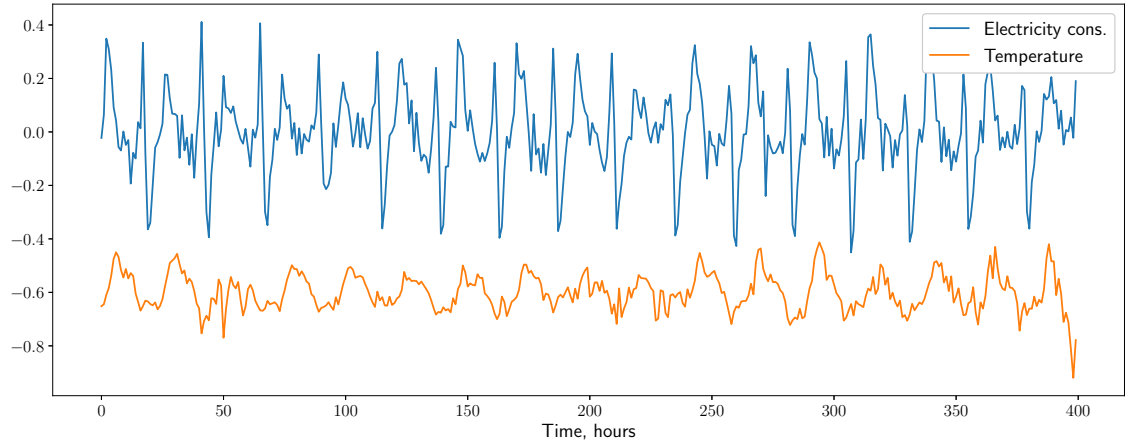


Рис. 7: Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры

Исследуем зависимость ряда температуры \mathbf{Y} от ряда потребления электроэнергии \mathbf{X} . Делаем это аналогично эксперименту на искусственных данных. Выбираем ширину окна L и некоторый момент времени t^* . Находим k ближайших соседей векторов \mathbf{x}_{t^*} и \mathbf{y}_{t^*} и их расположение в фазовом пространстве.

Возьмем $L = 170$, что соответствует периоду в семь дней. Возьмем $t^* = 400$. На рис. 8 красным показаны ближайшие соседи вектора \mathbf{x}_{t^*}

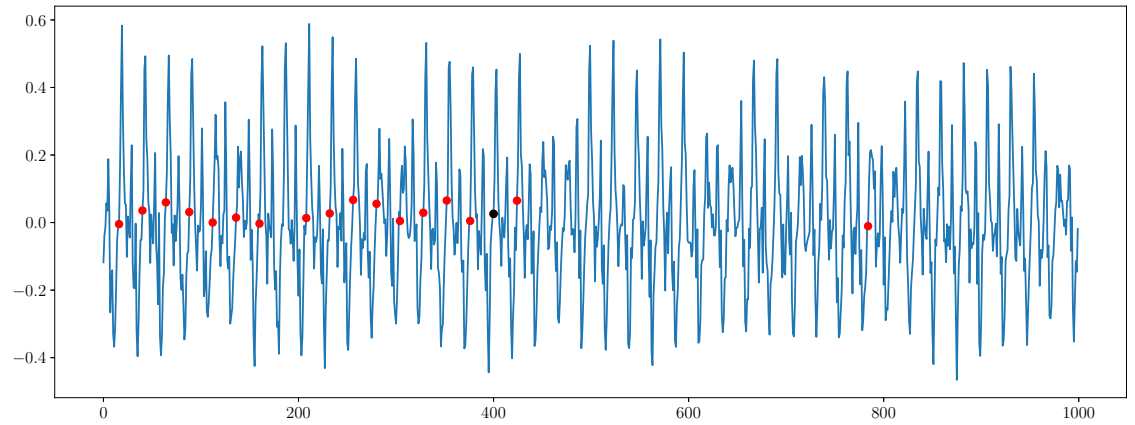


Рис. 8: Ближайшие соседи вектора \mathbf{x}_{t^*} , ширина окна $L = 170$

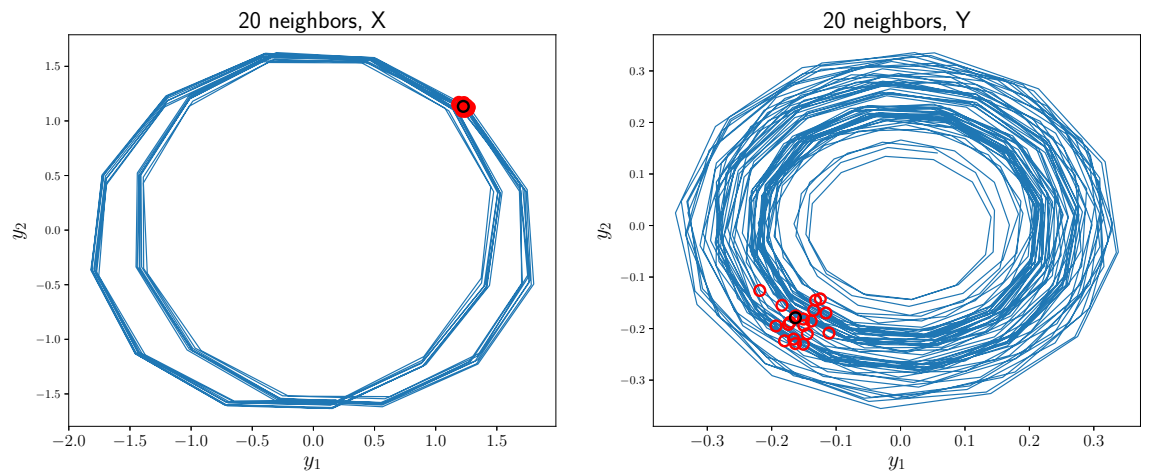


Рис. 9: Ближайшие соседи векторов \mathbf{x}_{t^*} и \mathbf{y}_{t^*} на фазовых диаграммах с периодом 12 часов

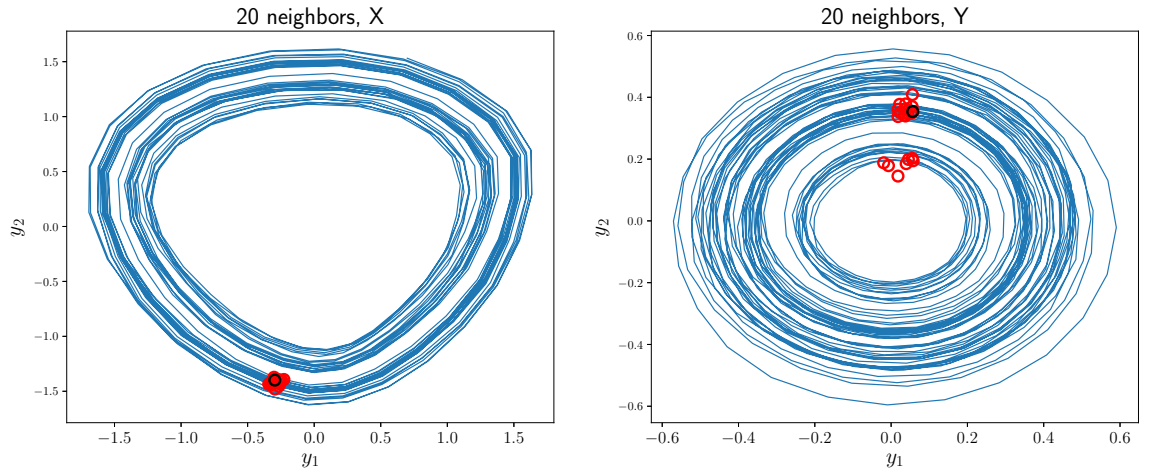


Рис. 10: Ближайшие соседи вектора \mathbf{x}_{t^*} и \mathbf{y}_{t^*} на фазовых диаграммах с периодом 24 часа

Исследуем зависимость ряда \mathbf{X} от ряда \mathbf{Y} . Возьмем $t^* = 400, L = 170$. На рис. 11 красным показаны ближайшие соседи вектора \mathbf{y}_{t^*}

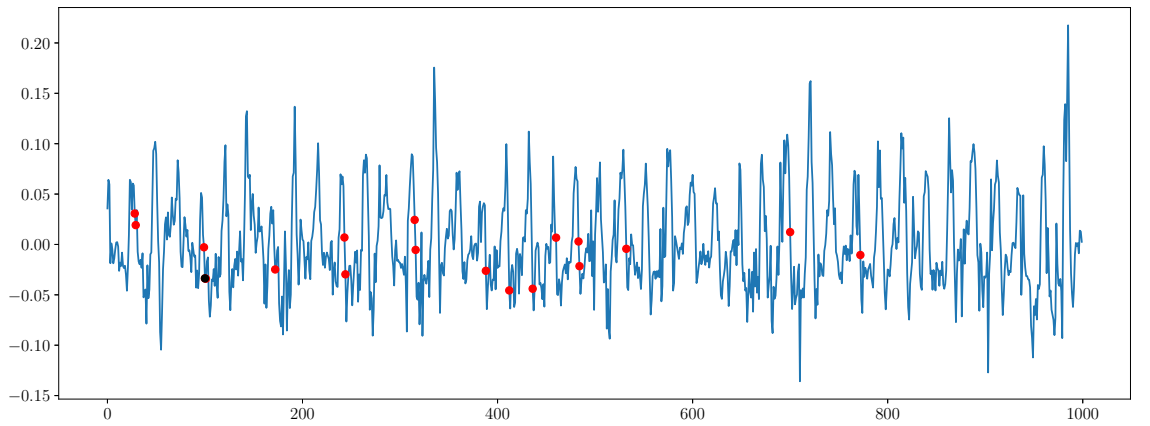


Рис. 11: Ближайшие соседи вектора \mathbf{y}_{t^*} , ширина окна $L = 100$

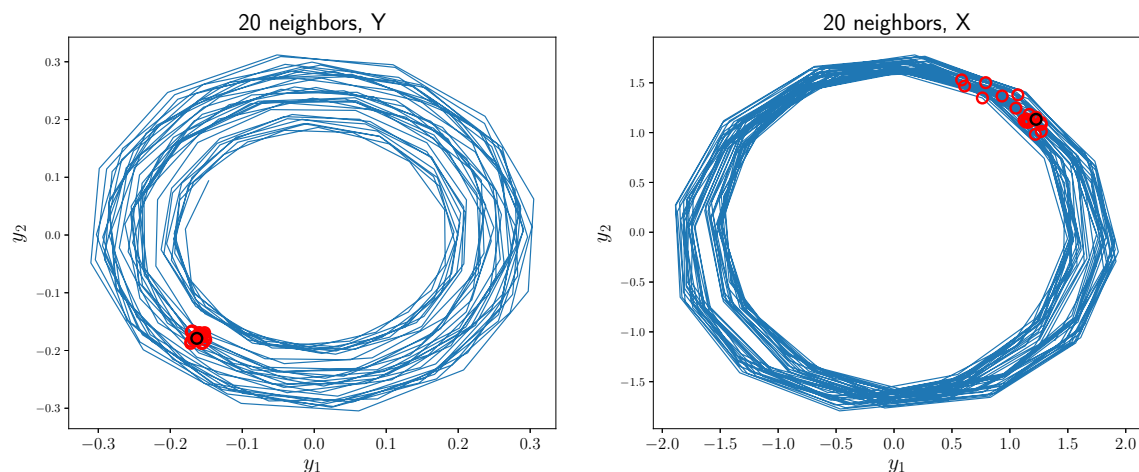


Рис. 12: Ближайшие соседи векторов \mathbf{x}_{t^*} и \mathbf{y}_{t^*} на фазовых диаграммах с периодом 12 часов

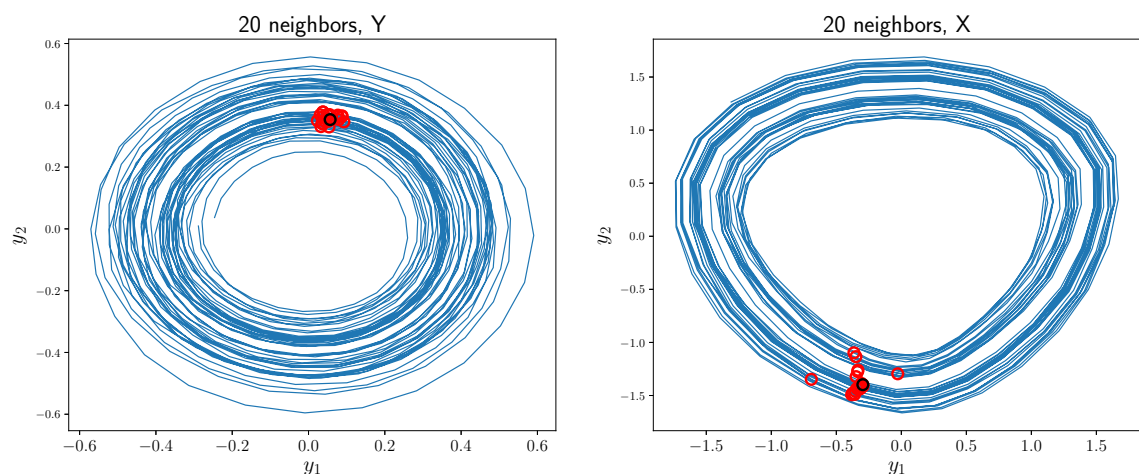


Рис. 13: Ближайшие соседи векторов \mathbf{x}_{t^*} и \mathbf{y}_{t^*} на фазовых диаграммах с периодом 24 часа

6.3. Перебор подпространств

Переберем фазовые подпространства рядов \mathbf{x} и \mathbf{y} размера не больше пяти. Для этого будет перебирать пары множеств индексов главных

компонент $(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$. Для каждой пары $(\mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$ найдем $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathcal{T}_x, \mathcal{T}_y)$, задающееся (4)

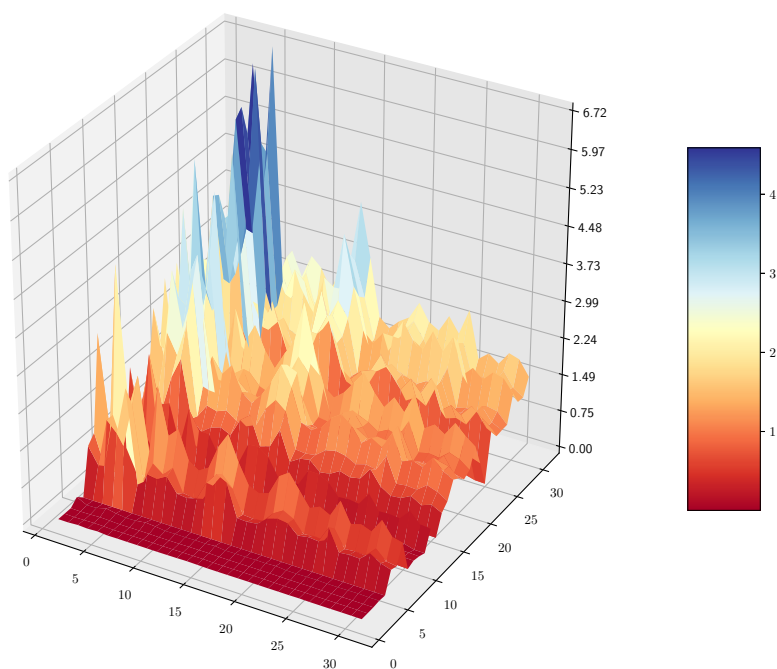


Рис. 14: Отношение расстояния между ближайшими соседями ряда \mathbf{X} к расстоянию между соседями ряда \mathbf{Y} . Ближайшие соседи определяются по ряду \mathbf{X}

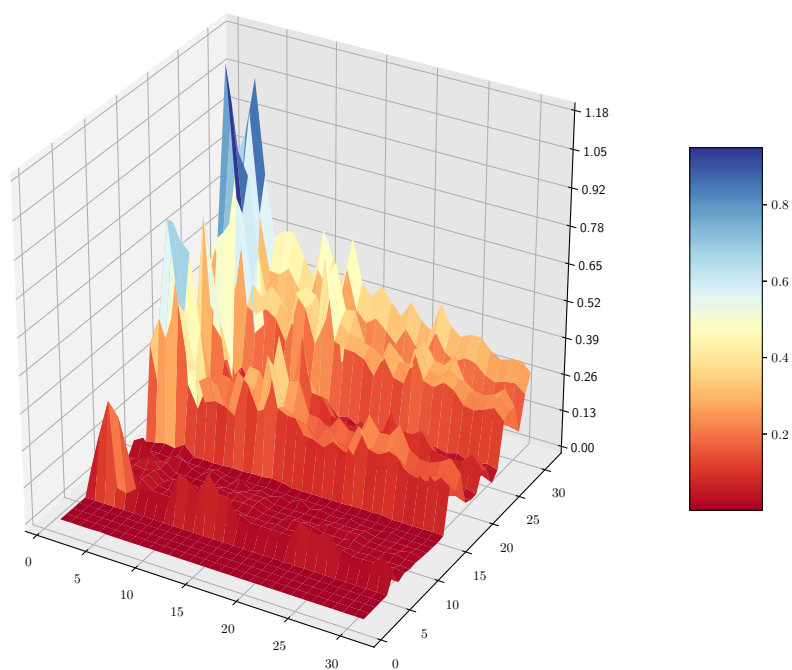


Рис. 15: Отношение расстояния между ближайшими соседями ряда \mathbf{Y} к расстоянию между соседями ряда \mathbf{X} . Ближайшие соседи определяются по ряду \mathbf{Y}

Список литературы

1. Clive WJ Granger. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 424–438, 1969.
2. Adam B Barrett, Lionel Barnett, and Anil K Seth. Multivariate granger causality and generalized variance. *Physical Review E*, 81(4):041907, 2010.
3. Craig Hiemstra and Jonathan D Jones. Testing for linear and nonlinear granger causality in the stock price-volume relation. *The Journal of Finance*, 49(5):1639–1664, 1994.
4. Robert Hoffmann, Chew-Ging Lee, Bala Ramasamy, and Matthew Yeung. Fdi and pollution: a granger causality test using panel data. *Journal of international development*, 17(3):311–317, 2005.
5. N Golyandina and D Stepanov. Ssa-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series. In *proceedings of the 5th St. Petersburg workshop on simulation*, volume 293, page 298, 2005.
6. Nina Golyandina, Vladimir Nekrutkin, and Anatoly A Zhigljavsky. Analysis of time series structure: Ssa and related techniques (chapman & hall crc monographs on statistics & applied probability). 2001.
7. Nina Golyandina and Anatoly Zhigljavsky. *Singular Spectrum Analysis for time series*. Springer Science & Business Media, 2013.
8. James B Elsner and Anastasios A Tsonis. *Singular spectrum analysis: a new tool in time series analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.
9. Theodore Alexandrov. A method of trend extraction using singular spectrum analysis. *arXiv preprint arXiv:0804.3367*, 2008.
10. Myles R Allen and Leonard A Smith. Monte carlo ssa: Detecting

- irregular oscillations in the presence of colored noise. *Journal of climate*, 9(12):3373–3404, 1996.
11. Hossein Hassani, Saeed Heravi, and Anatoly Zhigljavsky. Forecasting uk industrial production with multivariate singular spectrum analysis. *Journal of Forecasting*, 32(5):395–408, 2013.
 12. CAF Marques, JA Ferreira, A Rocha, JM Castanheira, P Melo-Gonçalves, N Vaz, and JM Dias. Singular spectrum analysis and forecasting of hydrological time series. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 31(18):1172–1179, 2006.
 13. Halbert White and Xun Lu. Granger causality and dynamic structural systems. *Journal of Financial Econometrics*, 8(2):193–243, 2010.
 14. George Sugihara, Robert May, Hao Ye, Chih-hao Hsieh, Ethan Deyle, Michael Fogarty, and Stephan Munch. Detecting causality in complex ecosystems. *science*, page 1227079, 2012.
 15. George Sugihara and Robert M May. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, 344(6268):734, 1990.