Модели обнаружения зависимостей во временных рядах (проекции в латентные пространства)

1 Цель

Работа посвящена обнаружению причинно-следственных связей между разнородными временным рядами. Примеры зависимых разнородных временных рядов:

1. Эконометрические временные ряды.
2. Связь показателей ЭКГ и пульса (`http://smartlab.ws/component/content/article?id=60`)

Если прогноз временного ряда $\mathbf{x}$ строится с использованием группы временных рядов $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$, то установление зависимостей ряда $\mathbf{x}$ от $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ может повысить качество прогноза и упростить прогностическую модель. Если установлено, что ряд $\mathbf{x}$ не зависит от ряда $\mathbf{y}_i$, то $\mathbf{y}_i$ можно исключить из прогностической модели. В данной работе для обнаружения зависимостей между рядами в работе применяется два подхода: тест Гренджера и метод снижения размерности PLS.

1.1 Тест Генджера

В основе теста Гренджера лежит следующий подход. Считаем, что ряд $\mathbf{x}$ зависит от ряда $\mathbf{y}$ (или следует из ряда $\mathbf{y}$), если использование истории ряда $\mathbf{y}$ при построении прогностической модели улучшает прогноз ряда $\mathbf{x}$. Тест Гренджера позволяет установить причинно-следственные связи между рядами и основан на сравнении качества прогноза, в котором используется история только прогнозируемого ряда, и прогноза, который дополнительно использует историю других рядов. Если улучшение качества прогноза подтверждается статистически, то говорят, что прогнозируемый ряд следует из использовавшихся во втором прогнозе рядов. Более формально используемый в этой работе тест Гренджера описан в разделе 4. Тест Гренджера применим к стационарным временным рядам, поэтому в случае нестационарных рядов их необходимо продифференцировать перед проведением теста Гренджера. Тест Гренджера используется в различных задачах, в котрых необходимо исследовать взаимосвязь между развивающимися во времени процессами

В данной работе для построения прогноза одного временного ряда по нескольким используется алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L). Этот алгоритм является обобщением на многомерный случай алгоритма анализа спектральных компонент SSA .

Метод SSA основан на разложении временного ряда в сумму интерпретируемых компонент. Он делится на четыре основных шага: запись ряда в виде траекторной матрицы, ее сингулярное разложение, группировка компонент полученных при сингулярном разложении, по каждой сгруппированной матрице восстанавливается временной ряд. Таким образом исходный временной ряд представляется в виде суммы временных рядов. Метод SSA применяется в таких задачах, как выявления трендов во временных рядах, подавления шума во временных рядах, прогнозирование временных рядов.

2 Постановка задачи прогнозирования

Поставим задачу прогноза многомерного временного ряда.

Обозначим $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(s)})^\mathsf{T}$ – заданный s-мерный временной ряд. Построим матрицу плана из сегментов ряда:

$$\begin{pmatrix} x_0^{(1)} & \ldots & x_{n-1}^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_0^{(s)} & \ldots & x_{n-1}^{(s)} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{0 \div (n-1)}. \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{x}_n = \left(x_n^{(1)}, \ldots x_n^{(s)}\right)^\mathsf{T}$ – значение ряда $\mathbf{X}$ в момент времени n. Построим прогноз $\hat{\mathbf{x}}$ ряда $\mathbf{X}$ в точке $\mathbf{x}_n$. Проделаем это k раз для различных обучающих выборок $\mathbf{X}^i_{\text{train}} = \mathbf{X}_{i \div (n+i-1)}$, $i = 0, \ldots, (k-1)$. Получим k прогнозов $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \ldots \hat{\mathbf{x}}_{n+k-1})$ ряда $\mathbf{X}$ в точках $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \ldots \mathbf{x}_{n+k-1}$.

Прогностическая модель имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-L+2}),$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}} S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \ldots \hat{\mathbf{x}}_{n+k-1}) = S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}),$$

где функция потерь

$$S(\mathbf{w}, \mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(1)}_{n+i}, \hat{\mathbf{x}}^{(1)}_{n+i}).$$

В данной работе в качестве прогностической модели $\mathbf{f}$ используется алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L). Функция $\mathbf{f}$ имеет вид:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \ldots, \mathbf{x}_{t-L+2}) = \begin{pmatrix} x^{(1)}_{t-L+2} & \ldots & x^{(1)}_t \\ x^{(2)}_{t-L+2} & \ldots & x^{(2)}_t \\ & \vdots & \\ x^{(s)}_{t-L+2} & \ldots & x^{(s)}_t \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}.$$

вектор коэффициентов $\mathbf{p}$ определяется алгоритмом многомерной гусеницы MSSA-L. Алгоритм MSSA-L подробнее описан в следующем разделе.

3 Алгоритм многомерной гусеницы (MSSA-L)

Алгоритм MMSA-L является обобщением на многомерный случай алгоритма гусеницы (SSA). Задача алгоритма MSSA-L состоит в представлении временного ряда в виде суммы интерпретируемых компонент. Это осуществляется в четыре шага: запись ряда в виде траекторной матрицы, сингулярное разложение этой матрицы, группировка компонент, полученных при сингулярном разложении, в интерпретируемые компоненты и восстановление временного ряда по каждой из интерпретируемых компонент.

По ряду (1) построим матрицу Ганкеля $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{L \times sK}$, $K = N - L + 1$:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_s],$$

где L – ширина окна, $\mathbf{H}_i \in \mathbb{R}^{L \times K}$ – матрица Ганкеля для ряда $\mathbf{x}^{(i)}$,

$$\mathbf{H}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_0^{(i)} & x_1^{(i)} & \ldots & x_{N-L}^{(i)} \\ x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & \ldots & x_{N-L+1}^{(i)} \\ & & \vdots & \\ x_{L-1}^{(i)} & x_L^{(i)} & \ldots & x_{N-1}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

По матрице Ганкеля $\mathbf{H}$ восстановим временной ряд $\mathbf{X}$. Метод многомерной гусеницы строит приближение $\hat{\mathbf{H}}$ матрицы $\mathbf{H}$ меньшего ранга с помощью сингулярного разложения этой матрицы и восстанавливает ряд по матрице $\hat{\mathbf{H}}$. Сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_d > 0$ – сингулярные числа матрицы $\mathbf{H}$, $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ – столбцы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Тогда наилучшее приближение матрицы $\mathbf{H}$ матрицей ранга $r < d$ имеет вид :

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}$$

По матрице $\hat{\mathbf{H}}$ восстанавливается временной ряд $\mathbf{X}$ путем усреднения элементов, стоящих на антидиагоналях.

Алгоритм многомерной гусеницы также позволяет построить прогноз временного ряда в момент N по $(L-1)$ предыдущим значениям ряда. Алгоритм находит такой вектор коэффициентов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{(L-1)}$, что значения ряда $\mathbf{X}$ в момент N:

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_{N-L+1}^{(1)} & \ldots & x_{N-1}^{(1)} \\ x_{N-L+1}^{(2)} & \ldots & x_{N-1}^{(2)} \\ & \vdots & \\ x_{N-L+1}^{(s)} & \ldots & x_{N-1}^{(s)} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{p} \tag{2}$$

Заметим, что коэффициенты $\mathbf{p}$ оказываются общими для всех компонент ряда $\mathbf{X}$.

Для каждого $i \in [1, r]$ обозначим $\tilde{\mathbf{u}}_i$ первые $(L-1)$ компонент столбца $\mathbf{u}_i$, π_i – последнюю компоненту столбца $\mathbf{u}_i$ и $\nu = \sum_{i=1}^{r} \pi_i^2$. Тогда вектор коэффициентов $\mathbf{p}$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{i=1}^{r} \pi_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tag{3}$$

Заметим, что для одномерного временного ряда справедливы все приведенные соотношения при $s = 1$.

4 Тест Гренджера

В работе для установления причинно-следственных связей предлагается использовать статистический тест Гренджера. Ниже приведен алгоритм теста Гренджера для проверки наличия зависимости одного временного ряда от другого. Пусть требуется проверить, зависит ли ряд $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$. Выдвинем гипотезу о независимости ряда $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$ и проверим ее. Делаем это следующим образом.

1. Строим прогноз ряда $\mathbf{x}$ без использования ряда $\mathbf{y}$ и находим значение функции потерь

   $$S_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i),$$

   где n – длина тестовой выборки.

   Функцию $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ выбираем в зависимости от распределения ошибок прогноза на тестовой выборке (**??**).

2. Строим прогноз ряда $\mathbf{x}$ с использованием ряда $\mathbf{y}$. Вычисляем для него значение функции потерь

$$S_{\mathbf{xy}} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}\left(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_i\right).$$

3. Рассмотрим статистику

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{N-2k}{k} \cdot \frac{S_{\mathbf{x}} - S_{\mathbf{xy}}}{S_{\mathbf{xy}}},$$

где N – длина обучающей выборки, k – размерность регрессионной модели. Статистика T имеет распределение $F(k, N-2k)$ (распределение Фишера с параметрами $(k, N-2k)$).

4. Если ряд $\mathbf{x}$ не зависит от ряда $\mathbf{y}$, то значения $S_{\mathbf{x}}$ и $S_{\mathbf{xy}}$ будут близки, а статистика $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – незначима. Поэтому в случае больших значений статистики $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ отвергаем гипотезу о независимости ряда $\mathbf{x}$ от $\mathbf{y}$. Выберем некоторое критические значение t статистики $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда критерий зависимости ряда $\mathbf{x}$ от ряда $\mathbf{y}$ выглядит следующим образом:

$$\text{Из } T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > t \quad \text{следует, что ряд } \mathbf{x} \text{ зависит от ряда } \mathbf{y}$$

5. Аналогично проверим зависимость ряда $\mathbf{x}$ от восстановленного (с помощью алгоритма MSSA-L) ряда $\hat{\mathbf{y}}$. Для этого используем статистику

$$T(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{N-2k}{k} \cdot \frac{S_{\mathbf{x}} - S_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{y}}}}{S_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{y}}}}.$$

Для более подробного изучения связи между временными рядами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вычисляем кросс–корреляционную функцию $\gamma_{\mathbf{xy}}(h)$

$$\gamma_{\mathbf{xy}}(h) = \frac{\mathsf{E}\left[\left(\mathbf{x}_t - \mu_{\mathbf{x}}\right)\left(\mathbf{y}_{t+h} - \mu_{\mathbf{y}}\right)\right]}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}},$$

где E – математическое ожидание, μ – выборочное среднее, σ – выборочная дисперсия.

Если h^* соответствует максимальному значению кросс-корреляции, то говорят, что ряд $\mathbf{y}$ сдвинут на h^* относительно $\mathbf{x}$. Заметим, что если ряд $\mathbf{x}$ сдвинут на h_1 относительно ряда $\mathbf{y}$, а ряд $\mathbf{y}$ сдвинут на h_2 относительно ряда $\mathbf{z}$. То ряд $\mathbf{x}$ сдвинут на $h_3 = h_1 + h_2$ относительно ряда $\mathbf{z}$.

Пусть прогноз ряда $\mathbf{x}$ строится с использованием истории ряда $\mathbf{y}$ и пусть с помощью вычисления кросс-корреляции рядов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ получено, что ряд $\mathbf{x}$ отстает от ряда $\mathbf{y}$ на h отсчетов времени. Тогда использование при прогнозе ряда $\mathbf{y}$, сдвинутого на h отсчетов назад, может повысить качество прогноза.

5 PLS

В этом подходе предлагается строить прогноз по некоторой истории ряда сразу в несколько последующих моментов времени.

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ – история временного ряда, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}$ – значения ряда в последующие моменты времени. Предполагается, что между строками матриц $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ существует линейная зависимость:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{r}},$$

где Θ – матрица параметров модели, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор ошибок прогноза.

Ошибка прогноза вычисляется следующим образом:

$$S(\Theta, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = ||\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \Theta||_2^2 = \sum_{i=} ||\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i \cdot \Theta||_2^2$$

Для нахождения параметров модели Θ предлагается использовать метод частных наименьших квадратов PLS. Алгоритм PLS находит в латентном пространстве матрицу $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times l}$, наилучшим образом описывающую матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ проецируются в латентное пространство следующим образом:

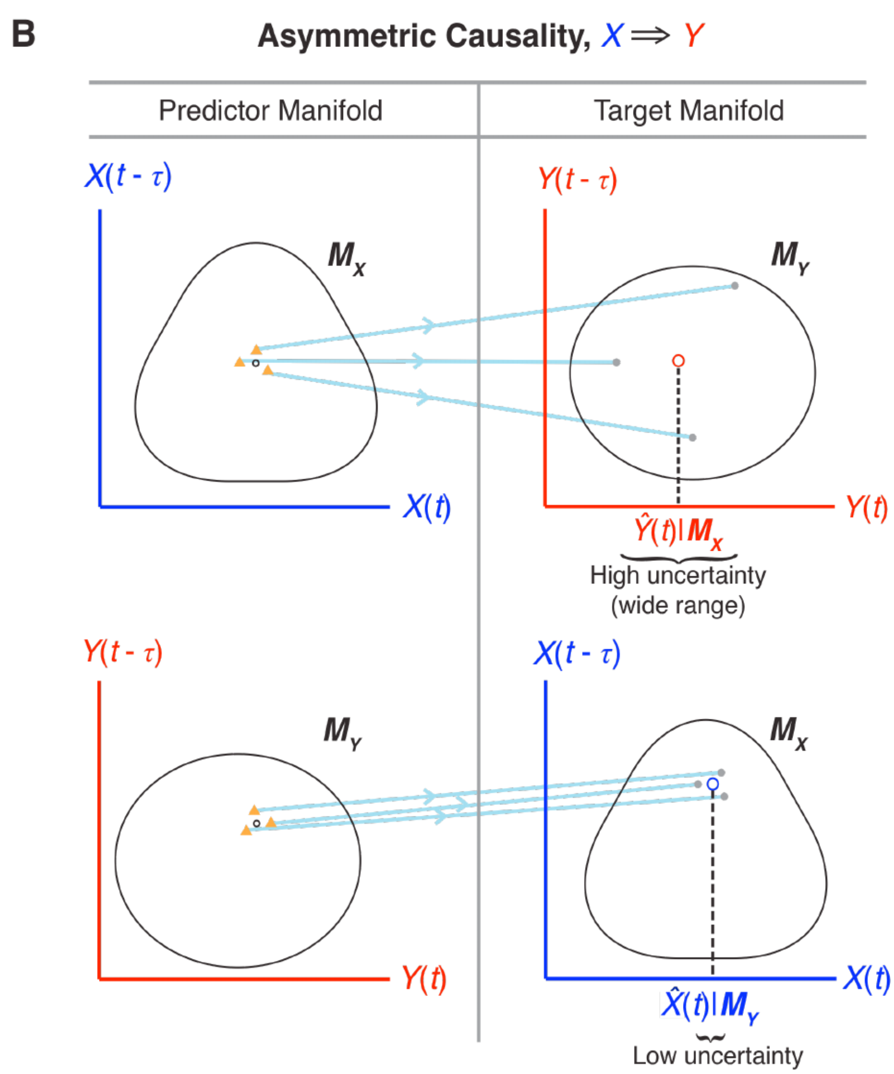
$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{F} = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{p}_k^T + \mathbf{F}$$

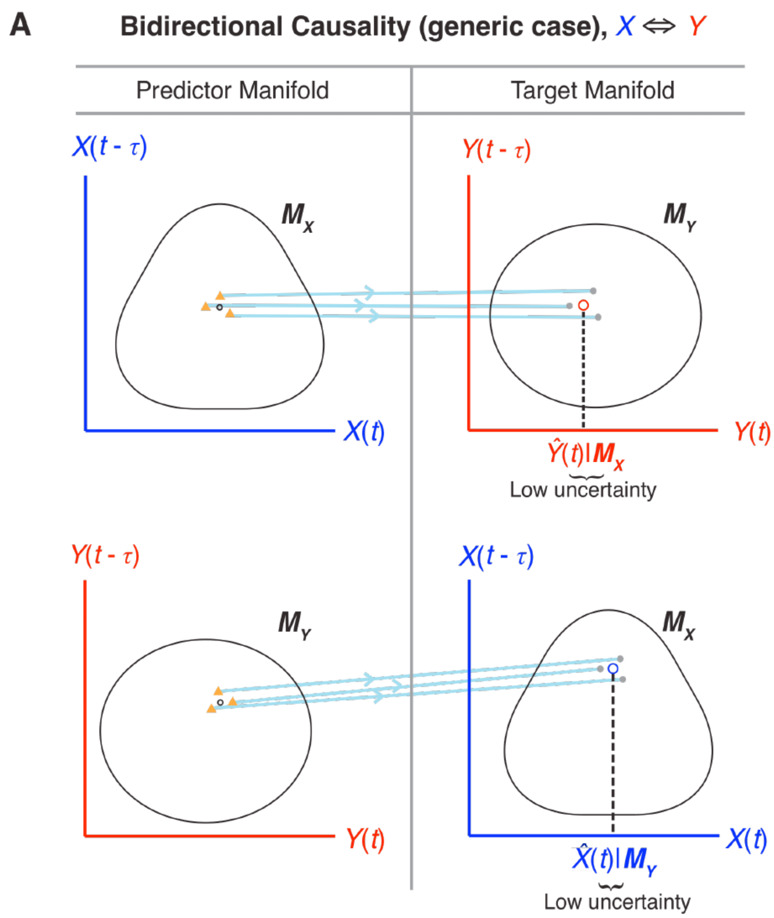
$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{E} = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{q}_k^T + \mathbf{E}$$

где $\mathbf{T}$ — матрица совместного описания объектов и ответов в латентном пространстве, причём столбцы матрицы $\mathbf{T}$ ортогональны; $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — матрицы перехода из латентного пространства в исходные пространства; $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ — матрицы невязок.

Алгоритм PLS находит матрицы $\mathbf{T}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$, а также такую матрицу $\mathbf{W}$, что параметры модели можно вычислить по формуле

$$\Theta = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{Q}^T$$





6 CCM

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – временные ряды длины N.

Прогноз ряда $\mathbf{Y}$ с помощью ряда $\mathbf{X}$ строится следующим образом.

Строим матрицу Ганкеля

$$\mathbf{H_x} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_{L-1} & \mathbf{X}_L \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 & \dots & \mathbf{X}_L & \mathbf{X}_{L+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{X}_{N-L+1} & \mathbf{X}_{N-L+2} & \dots & \mathbf{X}_{N-1} & \mathbf{X}_N \end{pmatrix},$$

где L – ширина окна, длина истории ряда, используемая при нахождении главных компонент. Аналогично строим матрицу $\mathbf{H_y}$

Обозначим t-ю строку матрицы $\mathbf{H_x}$ через $\mathbf{x}_t$. Найдем k ближайших соседей вектора $\mathbf{x}_t$. Обозначим их индексы через $t_1, \dots, t_k$. Тогда ближайшие соседи $\mathbf{x}_t$ это строки матрицы $\mathbf{H_x}$ с номерами $t_1, \dots, t_k$:

$$\mathbf{x}_{t_i} = \left(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_i-1}, \dots, \mathbf{x}_{t_i-(L-1)}\right), \quad i = 1, \dots, k$$

Прогноз $\hat{\mathbf{Y}}_t$ строится следующим образом

$$\hat{\mathbf{Y}}_t = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{w}_i Y_{t_i}, \quad \text{где } t_i \text{– индексы ближайших соседей } \mathbf{x}_t$$

$$\mathrm{w}_i = \frac{u_i}{\sum_i u_i}, \quad u_i = \exp - \left(\frac{||\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_i}||_2}{||\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_{L+1}}||_2} \right)$$

Аналогично строится прогноз ряда $\mathbf{X}$ с использованием ряда $\mathbf{Y}$.

Этот подход можно применять для обнаружения зависимости между рядами следующим образом. Пусть выбран момент времени t^* и вектор $\mathbf{x}_{t^*}$. И пусть $\mathbf{x}_{t_1} \ldots, \mathbf{x}_{t_k}$ – ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$. Тогда вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ – строки матрицы $\mathbf{Y}$, соответствующие строки матрицы $\mathbf{H}_{\mathbf{y}}$. Тогда, если вектора $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \ldots, \mathbf{y}_{t_k}$ расположены достаточно близко, то утверждается, что ряд $\mathbf{Y}$ зависит от ряда $\mathbf{X}$.

Заметим, что можно искать ближайших соседей не во всем фазовом пространстве, а только в некотором его подпространстве, натянутом на первые главные компоненты. Пусть сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}_X$ имеет вид

$$\mathbf{H}_{\mathbf{X}} = \mathbf{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}} \mathbf{V}_{\mathbf{x}}$$

Пусть $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}^l$ – минор матрицы $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}$ размера l. Тогда проекция ряда $\mathbf{X}$ в подпространство, натянутое на l главных компонент имеет вид.

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^l = \mathbf{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}^l.$$

Аналогично строится $\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^l$. Далее предлагается искать ближайших соседей не в полных фазовых пространствах, задающихся матрицами Ганкеля $\mathbf{H}_{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{H}_{\mathbf{y}}$, а в подпространствах, задающихся матрицами $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^l$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^l$.

Рассмотрев различные подпространства, можно выбрать то, которое будет наилучшим образом описывать исследуемый временной ряд и будет иметь минимальную размерность. Перебор различных подпространств также позволяет установить зависимости между подпространствами ряда $\mathbf{X}$ и ряда $\mathbf{Y}$.

7 CCM, эксперимент

7.1 Сгенерированные данные

Эксперимент проводился на двух сгенерированных рядах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X} = \sin t + 2\sin\frac{t}{2} + \sigma_x^2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_x^2 = 0.3$$

$$\mathbf{Y} = \sin(2t+5) + \sigma_y^2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_y^2 = 0.25,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

Строим матрицу Ганкеля $\mathbf{H_x}$ по ряду $\mathbf{X}$, взяв ширину окна $L = 250$. Для некоторого момента времени t^* рассмотрим вектор $\mathbf{x}_{t^*}$, равный t^*-й строке матрицы $\mathbf{H_x}$. Выберем k и найдем среди строк матрицы $\mathbf{H_x}$ k ближайших (в смысле евклидовой нормы) соседей вектора $\mathbf{x}_{t^*}$. Обозначим индексы найденных векторов $t_1, \dots, t_k$, а сами найденные вектора – $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$.

На рисунке изображен ряд $\mathbf{X}$ и $k = 25$ ближайших соседей для момента $t^* = 15$. Моменты времени $t_1, \dots, t_k$ выделены красным, момент t^* – черным.

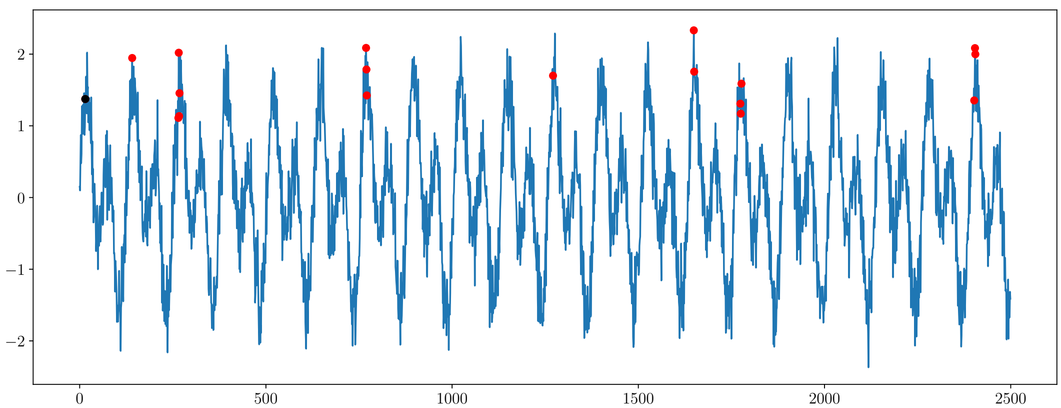


Рис. 1: Ближайшие соседи точки $\mathbf{x}_{15}$

Строим матрицу Ганкеля $\mathbf{H_y}$ по ряду $\mathbf{Y}$. Обозначим i-ю строку $\mathbf{H_y}$ через $\mathbf{y}_i$. Тогда по найденным индексам $t_1, \dots, t_k$ можно отобрать соответствующие $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$. Если ряд $\mathbf{Y}$ зависит от ряда $\mathbf{X}$, то вектора $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$, как и $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$, будут находиться рядом в фазовом пространстве. Изобразим $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ и $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ на фазовых траекториях.

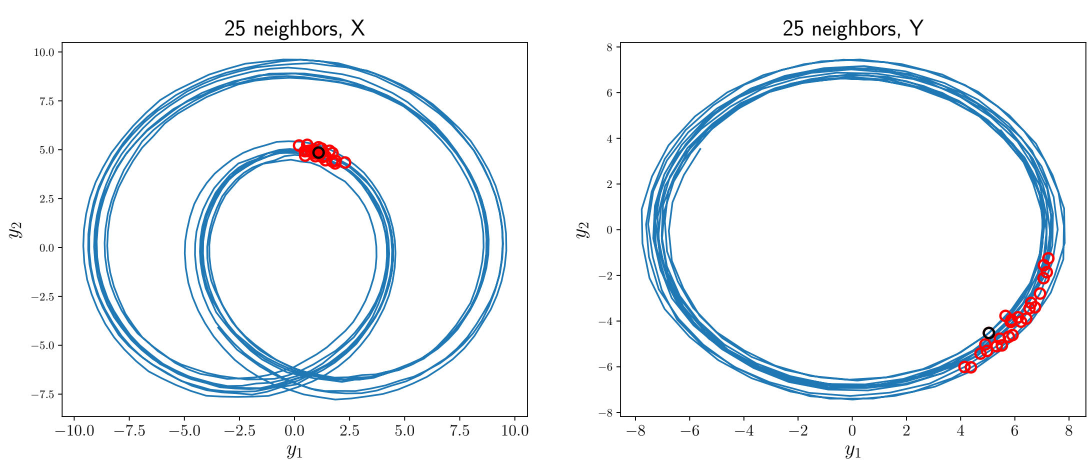


Рис. 2: Точки на фазовых траекториях рядов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, соответствующие 15-ти ближайшим соседям $\mathbf{x}_{15}$

Видно, что точки обоих фазовых траекториях расположены близко друг другу. Значит, ряд $\mathbf{Y}$ зависит от ряда $\mathbf{X}$.

Аналогично для некоторого t^* находим ближайших соседей вектора $\mathbf{y}_{t^*}$. Обозначим их $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$. На рисунке изображен ряд $\mathbf{Y}$ и $k = 25$ ближайших соседей вектора $\mathbf{y}_{20}$.

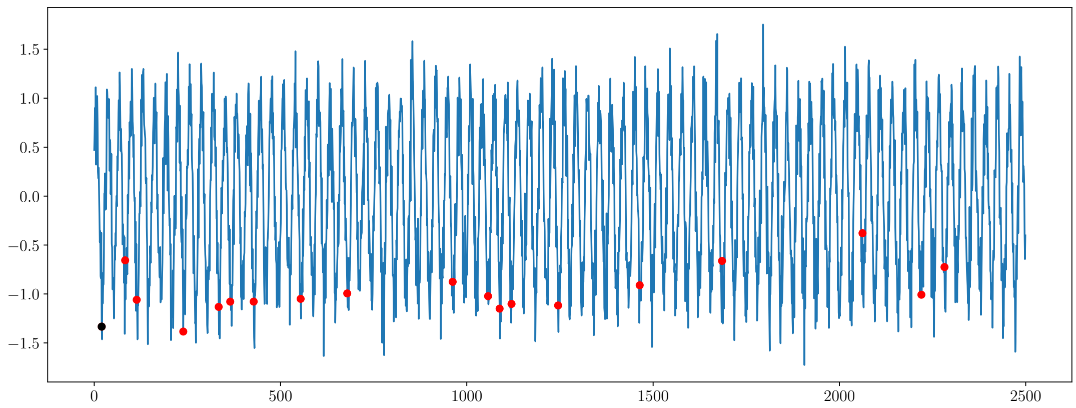


Рис. 3: Ближайшие соседи точки $\mathbf{y}_{20}$

Изобразим $\mathbf{y}_{t^*}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$ и соответствующие им $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$ на фазовых траекториях.

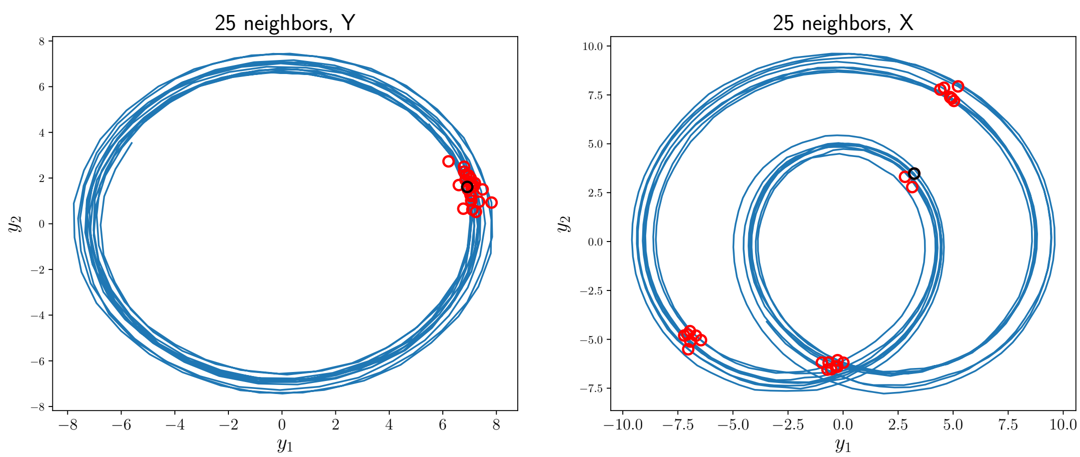


Рис. 4: Точки на фазовых траекториях рядов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, соответствующие 15-ти ближайшим соседям $\mathbf{y}_{20}$

Видим, что точки $\mathbf{x}_{t^*}, \mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_{15}}$ расположены на фазовых траекториях близко друг к другу. При этом они распадаются на четыре плотные группы. Это связано с тем, что период ряда $\mathbf{X}$ в четыре раза меньше периода ряда $\mathbf{Y}$.

7.2 Реальные данные

В эксперимент исследуются ряд объема потребления электроэнергии $\mathbf{X}$ и ряд значений температуры $\mathbf{Y}$ в течение года. Так как эти ряды не являются стационарными, их необходимо продифференцировать и отнормировать перед тем, как исследовать зависимости между ними. Ряд температуры будем приводить к стационарной форме следующим образом. Рассмотрим ряд длины светового дня в течение года $\mathbf{Z}$.

Определим,насколько ряд $\mathbf{Z}$ опережает ряд $\mathbf{Y}$. То есть найдем такое h, что $\mathbf{Y}(t+h) = \mathbf{Z}(t)$. Вычтем из ряда $\mathbf{Y}$ ряд $\mathbf{Z}$ с учетом сдвига. Полученный ряд будет стационарным рядом температуры.

Исходные ряды потребления электроэнергии, температуры и длины светового дня изображены на рис. 5. Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры изображены на рис. 6.

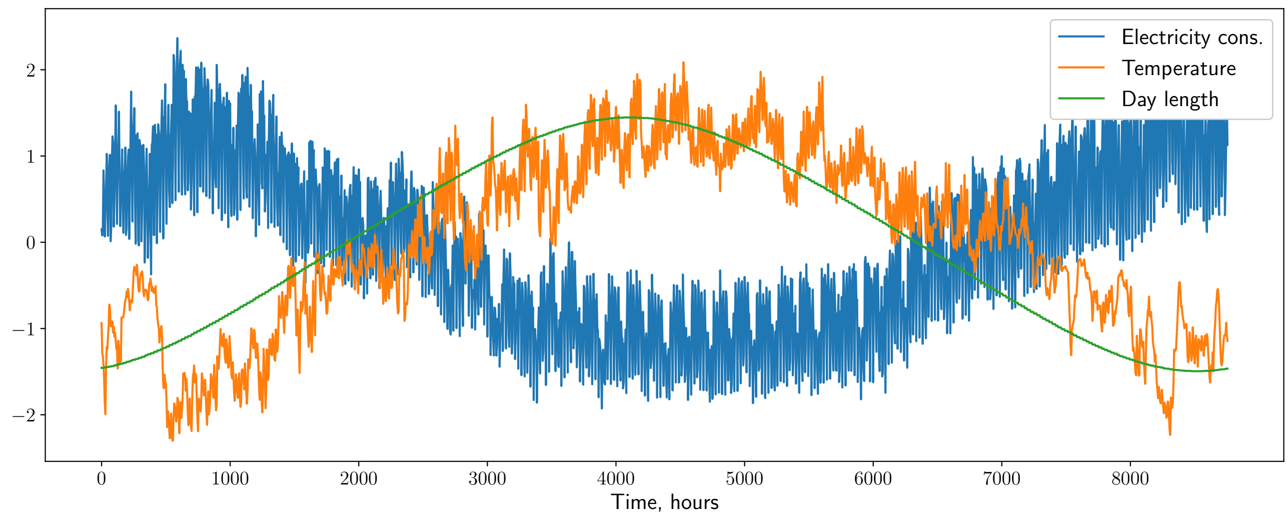


Рис. 5: Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры

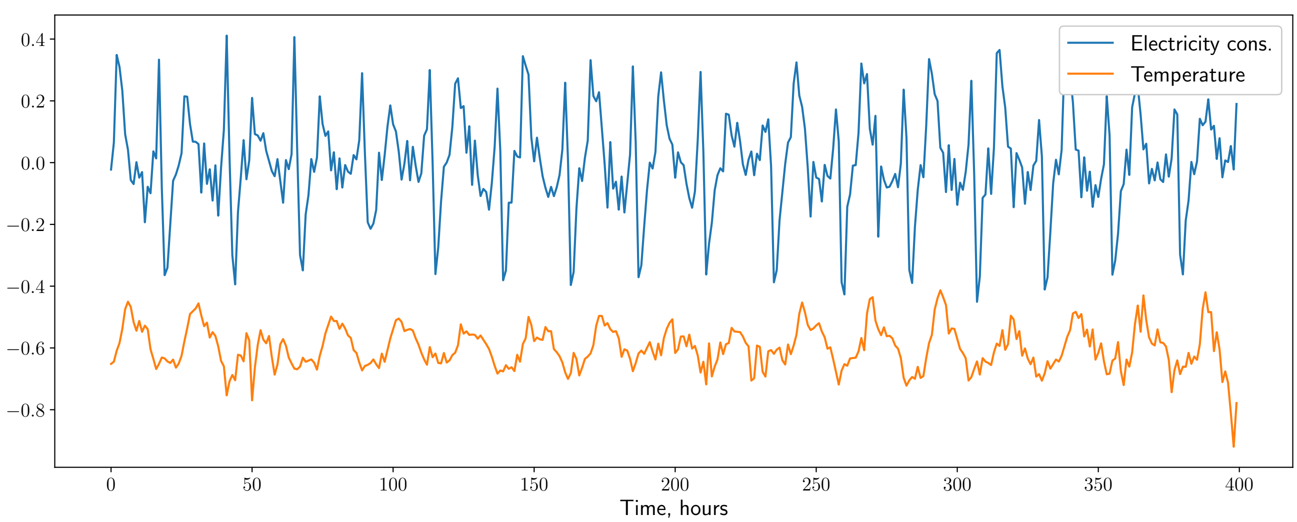


Рис. 6: Продифференцированные и нормированные ряды потребления электроэнергии и температуры

Исследуем зависимость ряда температуры $\mathbf{Y}$ от ряда потребления электроэнергии $\mathbf{X}$. Делаем это аналогично эксперименту на искусственных данных. Выбираем ширину окна L и некоторый момент времени t^*. Находим k ближайших соседей векторов $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$ и их расположение в фазовом пространстве.

Возьмем $L = 170$, что соответствует периоду в семь дней. Возьмем $t^* = 400$. На рис. 7 красным показаны ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$

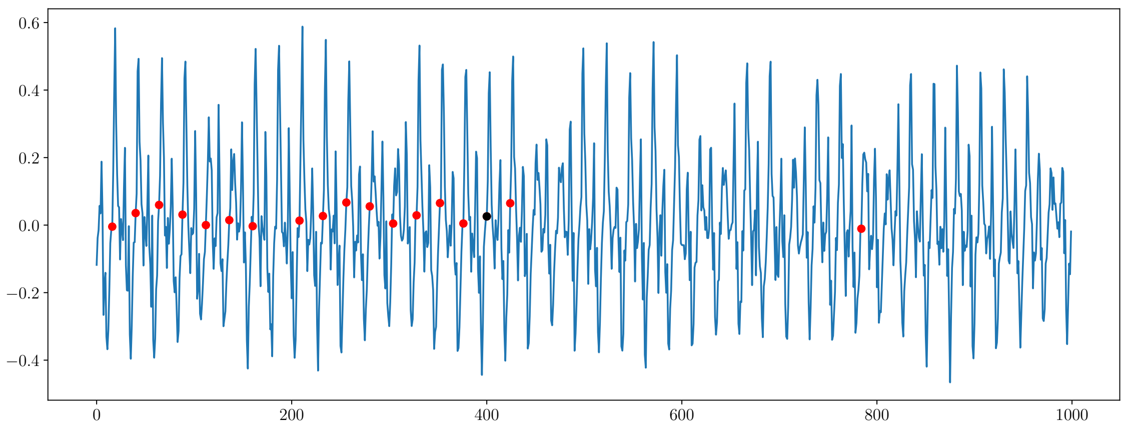


Рис. 7: Ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$, ширина окна $L = 170$

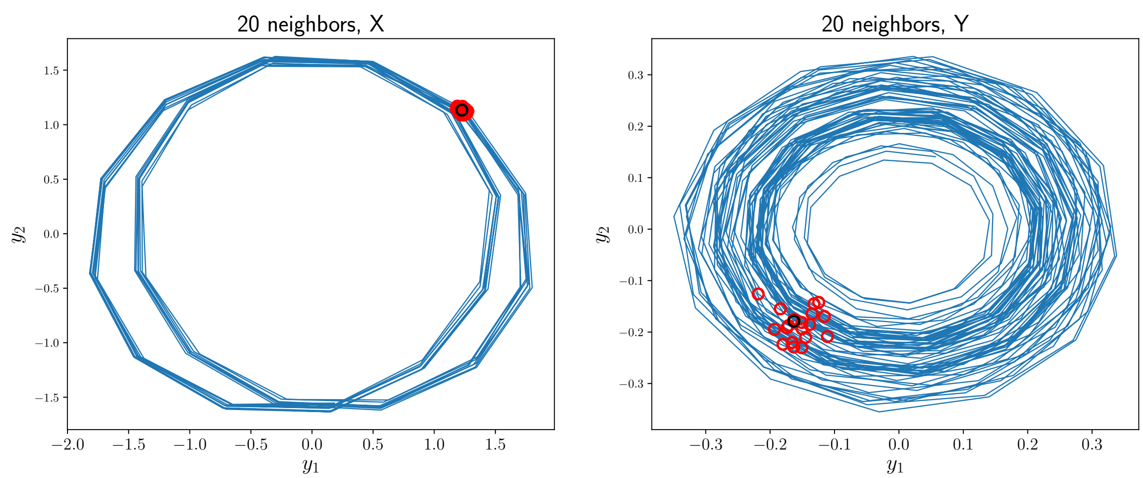


Рис. 8: Ближайшие соседи векторов $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$ на фазовых диаграммах с периодом 12 часов

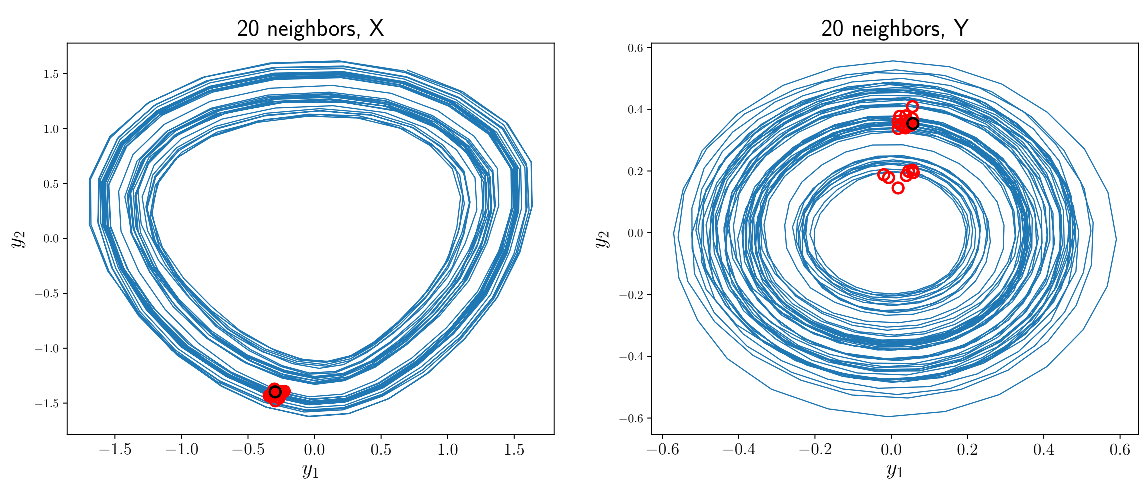


Рис. 9: Ближайшие соседи вектора $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$ на фазовых диаграммах с периодом 24 часа

Исследуем зависимость ряда $\mathbf{X}$ от ряда $\mathbf{Y}$. Возьмем $t^* = 400, L = 170$. На рис. 10 красным показаны ближайшие соседи вектора $\mathbf{y}_{t^*}$

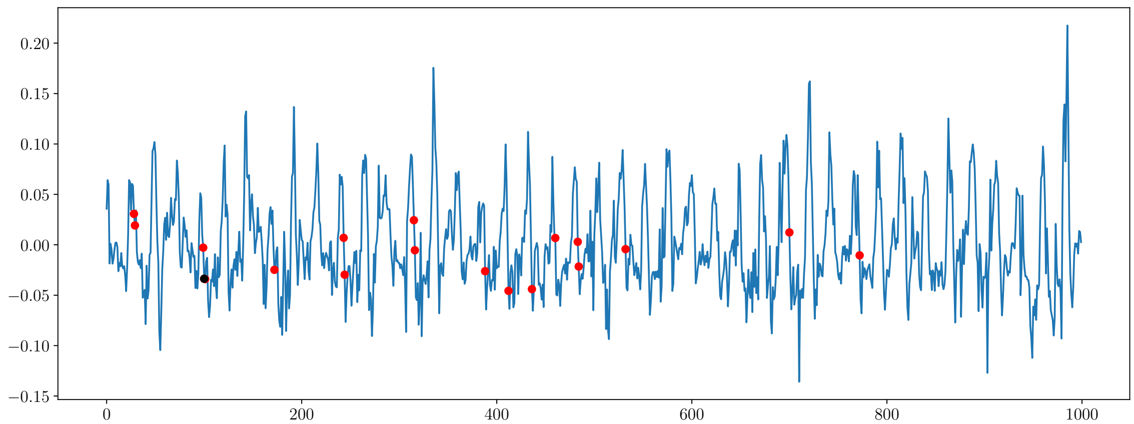


Рис. 10: Ближайшие соседи вектора $\mathbf{y}_{t^*}$, ширина окна $L = 100$

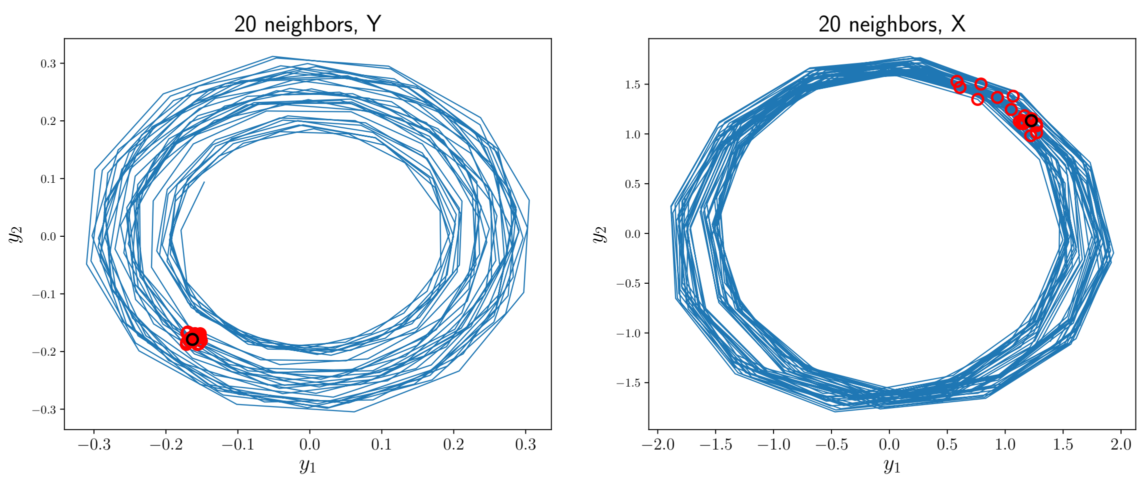


Рис. 11: Ближайшие соседи векторов $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$ на фазовых диаграммах с периодом 12 часов

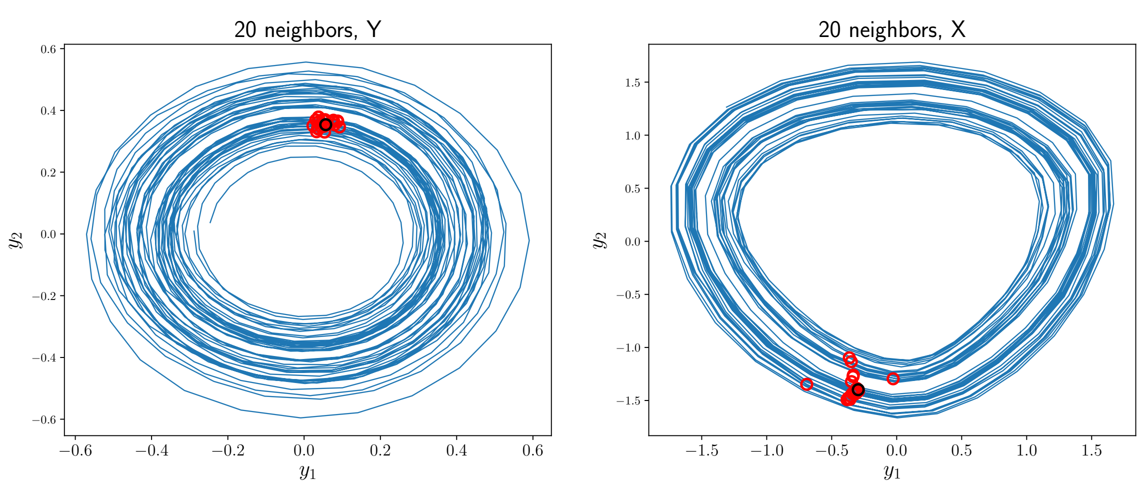


Рис. 12: Ближайшие соседи векторов $\mathbf{x}_{t^*}$ и $\mathbf{y}_{t^*}$ на фазовых диаграммах с периодом 24 часа

7.3 Перебор подпространств

Пусть $\mathbf{P_x}$ и $\mathbf{P_y}$ – проекции рядов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ в некоторые фазовые подпространства. Для фиксированного t^* находим ближайших соседей $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k}$ и соответствующие им $\mathbf{y}_{t_1}, \mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k}$. Здесь $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{y}_t$ – строки матриц $\mathbf{P_x}$ и $\mathbf{P_y}$ соответственно.

Будем перебирать различные комбинации из первых l главных компонент и соответствующие им подпространства $\mathbf{P_x}$ и $\mathbf{P_y}$. Для каждого набора $\mathcal{T}$ главных компонент будем находить среднее расстояние между k ближайшими соседями для ряда $\mathbf{X}$ и между ближайшими соседями для ряда $\mathbf{Y}$.

$$S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathcal{T}) = \frac{\text{dist}(\mathbf{X})}{\text{dist}(\mathbf{Y})}, \quad \text{dist}(\mathbf{X}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{x}_{t_i}||_2$$

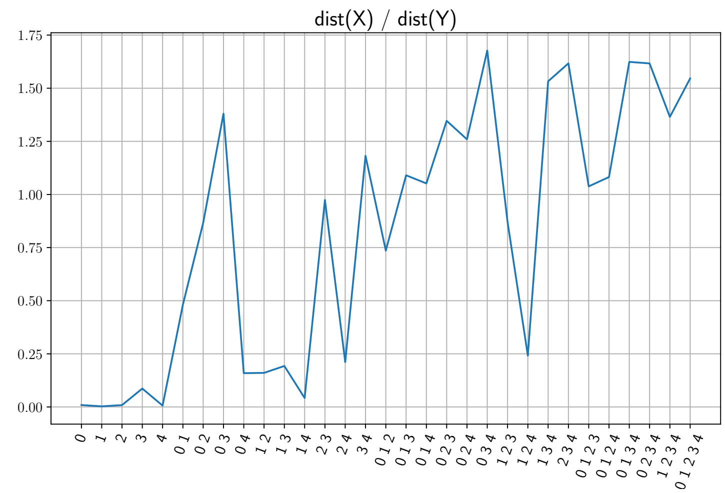


Рис. 13: Отношение расстояния между ближайшими соседями ряда $\mathbf{X}$ к расстоянию между соседями ряда $\mathbf{Y}$. Ближайшие соседи определяются по ряду $\mathbf{X}$

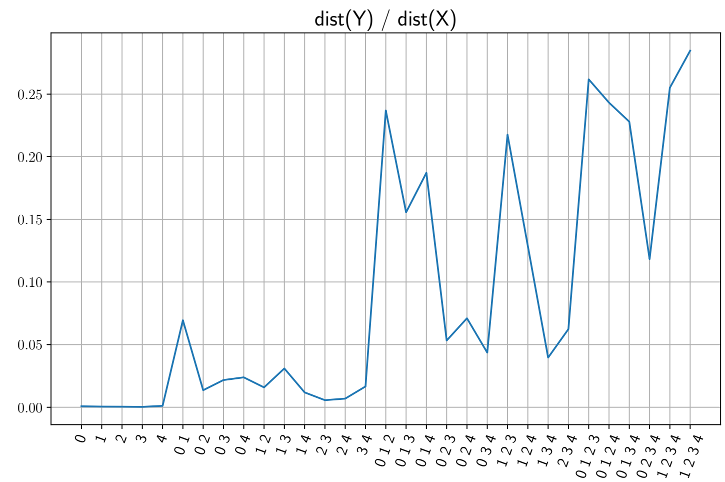


Рис. 14: Отношение расстояния между ближайшими соседями ряда $\mathbf{Y}$ к расстоянию между соседями ряда $\mathbf{X}$. Ближайшие соседи определяются по ряду $\mathbf{Y}$