# Выбор оптимальной модели рекуррентной сети в задачах поиска парафраза

Смердов Антон Николаевич

Научный руководитель
д.ф-м.н. В.В. Стрижов

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

МФТИ, 13 июня 2018

# Решаемая задача и предлагаемый подход

## Цель работы

Оптимизация структур моделей глубокого обучения и выбор модели с наибольшим правдоподобием.

## Проблема

Избыточное число параметров в моделях глубокого обучения влечёт переобучение и сложность оптимизации параметров.

## Метод решения

Используется вариационный байесовский подход с предположением о нормальном распределении вектора параметров модели. Для оптимизации структуры предлагается удалять параметры с наибольшей плотностью распределения в нуле.

# Литература

- *Sanborn A., Skryzalin J.* Deep Learning for Semantic Similarity // CS224d: Deep Learning for Natural Language Processing — Stanford, CA, USA: Stanford University, 2015. Unpublished.
- *Graves A.* Practical variational inference for neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems 24 (NIPS 2011). P. 2348–2356.
- *О.Ю. Бахтеев, В.В. Стрижов.* Выбор моделей глубокого обучения субоптимальной сложности // Автоматика и телемеханика, 2018.

# Задача нахождения оптимальной модели

Дано $\mathfrak{D} = \{(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, y_i)\}, i = \overline{1, N}$, $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ — последовательности векторов слов, $y_i \in \mathbb{Y}$ — экспертная оценка их близости. Оптимальная модель $\mathbf{f}$ находится максимизацией логарифма правдоподобия модели:

$$L_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}) = \log p(\mathbf{y}|\mathfrak{D}, \mathbf{f}) = \log \int_{\mathbf{w}} p(\mathbf{y}|\mathfrak{D}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w}|\mathbf{f}) d\mathbf{w}.$$

Априорное и апостериорное распределения параметров будем считать нормальными:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{f}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{A}_1^{-1}), \;\; p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{A}_2^{-1}).$$

# Предлагаемая модель

Решение предлагается искать в классе $\mathfrak{F}$ рекуррентных нейронных сетей с одним скрытым слоем.
Вектор значений скрытого слоя:

$$\mathbf{h}_i = \tanh(\mathbf{x}_i^T \mathbf{W} + \mathbf{h}_{i-1}^T \mathbf{U} + \mathbf{b}),$$

где $\mathbf{x}_i \in R^m$ – входной вектор, $\mathbf{h}_i \in R^n$, $\mathbf{W} \in R^{n \times m}$, $\mathbf{U} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in R^n$.

# Вариационная нижняя оценка $L_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f})$

Из неравенства Йенсена:

$$L_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{w}} \rho_2(\mathbf{w}) \log p(\mathbf{y}|\mathfrak{D}, \mathbf{f}) d\mathbf{w} \geq$$

$$\geq -\underbrace{D_{\text{KL}}(\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{A}_2^{-1})||\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{A}_1^{-1}))}_{L_{\mathbf{w}}(\mathfrak{D},\mathbf{f})} + \underbrace{\int_{\mathbf{w}} \rho_2(\mathbf{w}) \log p(\mathbf{y}|\mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) d\mathbf{w}}_{L_E(\mathbf{y},\mathfrak{D},\mathbf{f},\mathbf{w})}.$$

Второе слагаемое является матожиданием правдоподобия выборки $L_{\mathfrak{D}}(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) = \sum_{(\mathbf{a},\mathbf{b},y)\in\mathfrak{D}} \log p(y|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{w}, \mathbf{f})$.:

$$L_E(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) = -\mathsf{E}_{\mathbf{w}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{A}_2^{-1})} L_{\mathfrak{D}}(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}).$$

Оптимизируемый функционал записывается в виде

$$L(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) = L_E(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) + L_{\mathbf{w}}(\mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}),$$

оптимальная модель находится из выражения

$$\mathbf{f} = \text{argmin}_{\mathbf{f}\in\mathfrak{F}} L(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}).$$

# Предлагаемое решение $L(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) \to \min$

1. Для оценки $L_E(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w})$ воспользуемся интегрированием Монте-Карло:

$$L_E(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) \approx \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{S} L_{\mathfrak{D}}(\mathbf{y}, \mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}_k)$$

2. Сложность модели $L_{\mathbf{w}}(\mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w})$ может быть найдена аналитически:

$$L_{\mathbf{w}}(\mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) = D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{A}_1^{-1}) || \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{A}_2^{-1})) = \frac{1}{2}\Big( \log \frac{|\mathbf{A}_2^{-1}|}{|\mathbf{A}_1^{-1}|} -$$

$$- W + \mathrm{tr}(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1}) + (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)^T \mathbf{A}_2 (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)\Big)$$

# Обновление параметров распределений

Скалярные априорная дисперсия и вектор средних, апостериорная матрица ковариаций **диагональна**:
$\mathbf{A}_1^{-1} = \sigma\mathbf{I},\ \mathbf{A}_2^{-1} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}),\ \boldsymbol{\mu}_1 = \mu,\ \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{m}.$

Тогда $L_{\mathbf{w}}(\mathfrak{D}, \mathbf{f}, \mathbf{w}) = \sum\limits_{i=1}^{d}(\log \frac{\sigma}{\sigma_i} + \frac{(\mu - m_i)^2 + \sigma_i^2 + \sigma^2}{2\sigma^2})$

$$\frac{\partial}{\partial\mu} D_{\mathrm{KL}} = \sum_{i=1}^{W} \frac{\mu - m_i}{\sigma^2} = 0 \ \Rightarrow\ \hat{\mu} = \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{W} m_i.$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} D_{\mathrm{KL}} = \sum_{i=1}^{W} \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{(\mu - m_i)^2 + \sigma_i^2}{2\sigma^4} = 0 \ \Rightarrow\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{W}(\mu - m_i)^2 + \sigma_i^2.$$

В частности, если апостериорная матрица ковариаций **скалярна**, т.е. $\mathbf{A}_2^{-1} = \beta\mathbf{I}$:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2} D_{\mathrm{KL}} = \sum_{i=1}^{W} \frac{1}{2\sigma^2} - \frac{(\mu - m_i)^2 + \beta^2}{2\sigma^4} = 0 \ \Rightarrow\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{W}(\mu - m_i)^2 + \beta^2.$$

# Алгоритм обновления параметров распределений

Оптимизация параметров к:

1. Инициализация $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1},\ \mathbf{m} = \mathbf{0},\ \mu = 0,\ \sigma^2 = 1$
2. **Повторять**:
3. Сделать градиентный шаг $\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma} - \eta\nabla\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{m} := \mathbf{m} - \eta\nabla\mathbf{m}$
4. Обновить параметры априорного распределения $\mu := \hat{\mu},\ \sigma^2 := \hat{\sigma}^2.$
5. **Пока** значение $L$ не стабилизируется

# Проверка метода для задачи поиска парафраза

## Цели вычислительного эксперимента

Проверить работоспособность метода. Путём удаления наименее важных весов найти оптимальную структуру сети в задачах поиска парафраза.

## Данные

Вычислительный эксперимент проводился на выборке пар предложений разной степени схожести SemEval 2015.
Тренировочная, валидационная и тестовая выборки составили 70%, 15% и 15% соответственно.

Векторизация слов для использования алгоритмами проводилась методом GloVe.
Функционалом качества была выбрана F1-мера:

$$F_1 = \frac{2 \cdot \text{precision} \cdot \text{recall}}{\text{precision} + \text{precision}}$$

# Сравнение с базовыми алгоритмами

Результаты вычислительного эксперимента:

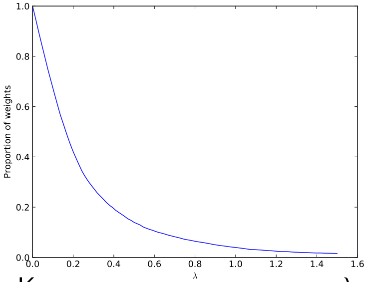
| Classificator | F1-measure |
|---|---|
| Logistic Regression | 0.286 |
| SVC | 0.290 |
| DecisionTreeClassifier | 0.316 |
| KNeighborsClassifier | 0.322 |
| RNN | 0.362 |
| RNN+variational, I, I | 0.311 |
| RNN+variational, D, I | 0.330 |

# Результаты вычислительного эксперимента

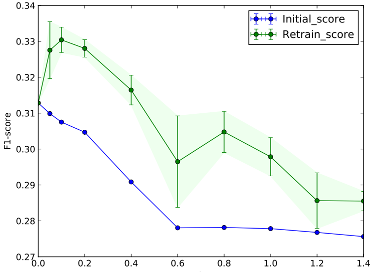
Чем больше плотность вероятности в нуле $\rho(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} exp(-\frac{\mu_i^2}{2\sigma_i^2})$, тем меньше важность параметра.

Обозначим отношение сигнал-шум за $\lambda = \left|\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right|$, тогда $\rho(0) \sim exp(-\frac{\lambda^2}{2})$.

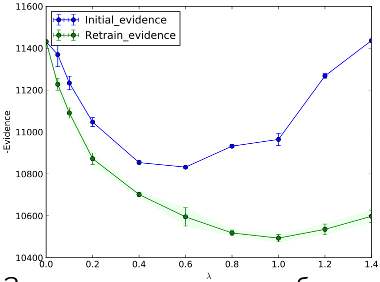
Параметры с большим значением $\lambda$ могут быть удалены.



Количество параметров от $\lambda$.



Зависимость F1-меры от $\lambda$.



Зависимость правдоподобия от $\lambda$.

# Заключение

- Предложена реализация байесовского вывода для задачи поиска парафраза.
- Минимизация правдоподобия модели не приводит к переобучению.
- Алгоритм удаления параметров позволяет упростить структуру модели без существенных потерь качества.

## Публикации

*А. Н. Смердов, О. Ю. Бахтеев, В. В Стрижов*. Выбор оптимальной модели рекуррентной сети в задачах поиска парафраза // Информатика и её применения, 2019. Том 13, выпуск 2.