Быстрая оптимизация мультизадачных моделей

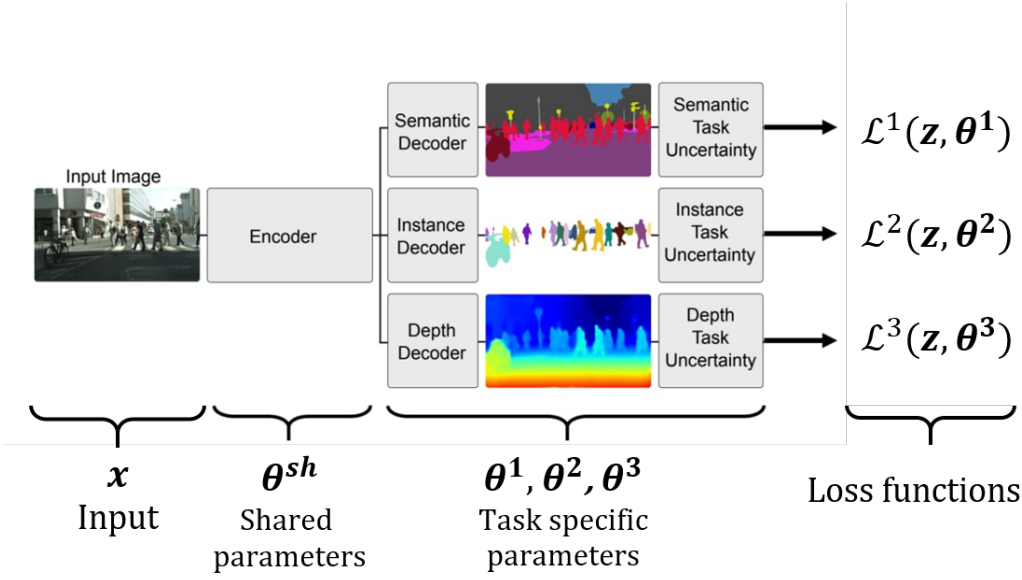
Филатов Андрей

Московский физико-технический институт
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов В.В.
Консультант: Меркулов Д.М.

9 Июня, 2021

Мультизадачные модели



Многокритериальная оптимизация

Заданы T функции потерь (задач) $\mathscr{L}^t$. Требуется их одновременная оптимизации:

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\theta}^{sh},\\ \boldsymbol{\theta}^1,\ldots,\boldsymbol{\theta}^T}} \mathscr{L}\left(\boldsymbol{\theta}^{sh},\boldsymbol{\theta}^1,\ldots,\boldsymbol{\theta}^T\right) = \min_{\substack{\boldsymbol{\theta}^{sh},\\ \boldsymbol{\theta}^1,\ldots,\boldsymbol{\theta}^T}} \left(\mathscr{L}^1\left(\boldsymbol{\theta}^{sh},\boldsymbol{\theta}^1\right),\ldots,\mathscr{L}^T\left(\boldsymbol{\theta}^{sh},\boldsymbol{\theta}^T\right)\right)^\top,$$

где $\boldsymbol{\theta}^{sh}$ — параметры общие параметры, а $\boldsymbol{\theta}^t$ — отдельные параметры для каждой задачи

Методы решения задачи мультикритериальной оптимизации

1. Взвешивание[1]: сводим мультикритериальную оптимизацию к одномерной оптимизации следующим образом:

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} w_t \mathscr{L}^t(\boldsymbol{\theta}).$$

2. Методы нулевого порядка: эволюционные алгоритмы и мультикритериальная байесовская оптимизация.[2]
3. Градиентные методы[3]: градиентный спуск, метод Ньютона.

---

[1] Chen и др., "Gradnorm: Gradient normalization for adaptive loss balancing in deep multitask networks".

[2] Deb и др., "A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II".

[3] Fliege и Svaiter, "Steepest descent methods for multicriteria optimization".

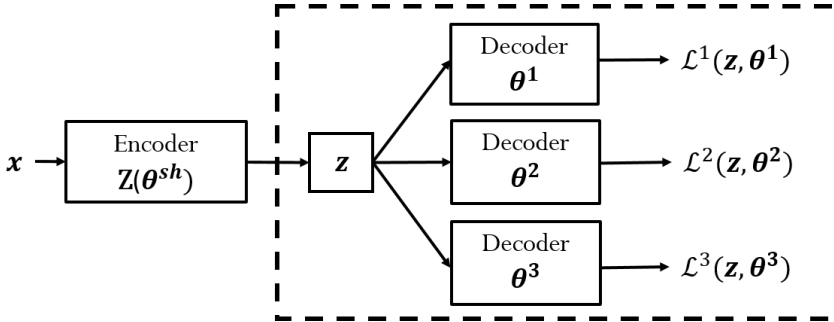
Мотивация

- Для градиентных методов оптимизации мультизадачных моделей теоретически обосновано лишь использование линейного поиска для нахождение шага;
- Линейный поиск неэффективен на практике из высокой вычислительной стоимости;

Цель

Создать вычислительно эффективный метод линейного поиска.

Быстрый линейный поиск



В алгоритме быстрого линейного поиска мы оптимизируем в скрытом пространстве Z.

Градиентные методы

- Multiple-gradient descent algorithm (MGDA)[4]

$$\min_{\alpha^1,\dots,\alpha^T}\left\{\left\|\sum_{t=1}^{T}\alpha^t\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\hat{\mathscr{L}}^t(\boldsymbol{\theta})\right\|_2^2 \mid \sum_{t=1}^{T}\alpha^t=1,\alpha^t\geq 0 \quad \forall t\right\},$$

$$\boldsymbol{d}^*=\sum_{t=1}^{T}\tilde{\alpha}^t\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\hat{\mathscr{L}}^t.$$

- Min-max подход[5]

$$\min_{\boldsymbol{d}}\max_{t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}^t}{\partial\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{d}\right)_t+g^t(\boldsymbol{d})$$

Рассматривая $g^t(\boldsymbol{d})=\|\boldsymbol{d}\|^2$ получаем двойственную к MGDA.
Рассматривая $g^t(\boldsymbol{d})=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}^t\boldsymbol{d}$ получаем метод Ньютона ($\boldsymbol{H}^t$ гессиан $\mathscr{L}^t$).

[4] Désidéri, "Mgda variants for multi-objective optimization".

[5] Fliege и Svaiter, "Steepest descent methods for multicriteria optimization".

Алгоритм линейного поиска

Пусть получено $\boldsymbol{d}$ — направление убывания всех функций: $\forall t\ \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathscr{L}^t \boldsymbol{d} < 0$.
Необходимо найти шаг η, чтобы:

$$\mathscr{L}^t(\boldsymbol{\theta} - \eta \boldsymbol{d}) < \mathscr{L}^t(\boldsymbol{\theta}),\ \forall t \in \{1 \dots T\}. \qquad (\star)$$

Теорема (Fliege 2000)[6]

Если условие $(\star)$ будет выполнено на каждой итерации, то для любой сходящейся подпоследовательности $\{\boldsymbol{\theta}_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} : \lim_{j\to\infty} \boldsymbol{\theta}_{k_j} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, созданной градиентным спуском, предел этой последовательности $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ — Парето станционарная точка.

[6] Fliege и Svaiter, "Steepest descent methods for multicriteria optimization".

Алгоритм линейного поиска

Правило Армихо

На каждом шаге градиентного спуска нам найти шаг η, чтобы выполнялось следующее правило Армихо $\forall t \in \{1 \dots T\}$:

$$\mathscr{L}^t(\boldsymbol{\theta}^{sh} - \eta \boldsymbol{d}_{sh}, \boldsymbol{\theta}^t - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}^t} \mathscr{L}^t) \leq \mathscr{L}^t - \eta\beta \left\| \frac{\partial \mathscr{L}^t}{\partial \boldsymbol{\theta}^t} \right\|^2 - \eta\beta \left(\frac{\partial \mathscr{L}^t}{\partial \boldsymbol{\theta}^{sh}} \right)^\top \boldsymbol{d}_{sh}.$$

Модифицированное правило Армихо

На каждом шаге градиентного спуска нам найти шаг η, чтобы выполнялось следующее правило Армихо $\forall t \in \{1 \dots T\}$:

$$\mathscr{L}^t(\boldsymbol{z} - \eta \boldsymbol{d}_z, \boldsymbol{\theta}^t - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}^t} \mathscr{L}^t) \leq \mathscr{L}^t - \eta\beta \left\| \frac{\partial \mathscr{L}^t}{\partial \boldsymbol{\theta}^t} \right\|^2 - \eta\beta \left(\frac{\partial \mathscr{L}^t}{\partial \boldsymbol{z}} \right)^\top \boldsymbol{d}_z.$$

Основной результат

Модифицированное правило Армихо

На каждом шаге градиентного спуска нам найти шаг η, чтобы выполнялось следующее правило Армихо :

$$\mathscr{L}^t(\boldsymbol{z} - \eta \boldsymbol{d}_z, \boldsymbol{\theta}^t - \eta \nabla_{\boldsymbol{\theta}^t} \mathscr{L}^t) \leq \mathscr{L}^t - \eta\beta \left\| \frac{\partial \mathscr{L}^t}{\partial \boldsymbol{\theta}^t} \right\|^2 - \eta\beta \left(\frac{\partial \mathscr{L}^t}{\partial \boldsymbol{z}} \right)^\top \boldsymbol{d}_z$$

Теорема (Филатов 2021)

Каждый частичный предел последовательности, созданной градиентным спуском с модифицированным правилом Армихо, является Парето станционарной точкой.

Базовый[7] и быстрый алгоритмы

Algorithm 1: Backtracking(γ, lr_{ub})

Ensure: Learning rate $\eta = lr_{ub}/\gamma$

repeat
  $\eta \leftarrow \gamma \cdot \eta$
  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{sh} \leftarrow \boldsymbol{\theta}^{sh} - \eta \cdot \boldsymbol{d}_{sh}$
  for $t \leftarrow 1$ to T **do**
    $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t} \leftarrow \boldsymbol{\theta}^{t} - \eta \cdot \nabla_{\boldsymbol{\theta}^t} \mathscr{L}^t$
  end for
until правило Армихо
for $t \leftarrow 1$ to T **do**
  $\boldsymbol{\theta}^{t}_{new} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t}$
end for
$\boldsymbol{\theta}^{sh}_{new} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{sh}$

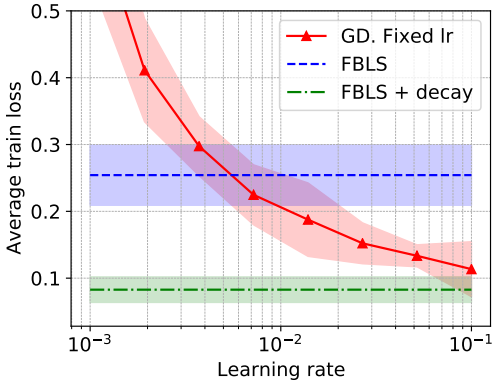
Algorithm 2: Fast backtracking(γ, lr_{ub})

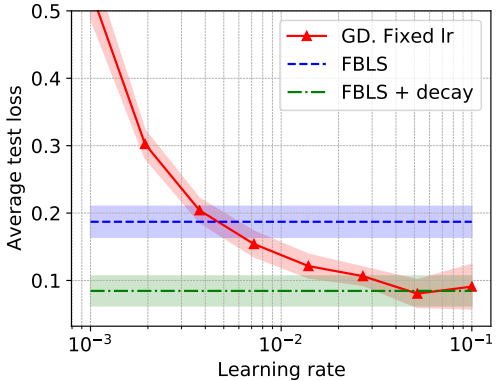
Ensure: Learning rate $\eta = lr_{ub}/\gamma$

repeat
  $\eta \leftarrow \gamma \cdot \eta$
  $\boldsymbol{z} \leftarrow \boldsymbol{z} - \eta \cdot \boldsymbol{d}_z$
  for $t \leftarrow 1$ to T **do**
    $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t} \leftarrow \boldsymbol{\theta}^{t} - \eta \cdot \nabla_{\boldsymbol{\theta}^t} \mathscr{L}^t$
  end for
until правило Армихо
for $t \leftarrow 1$ to T **do**
  $\boldsymbol{\theta}^{t}_{new} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{t}$
end for
$\boldsymbol{\theta}^{sh}_{new} \leftarrow \boldsymbol{\theta}^{sh} - \eta \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^{sh}}{\partial \boldsymbol{z}} \boldsymbol{d}_z$

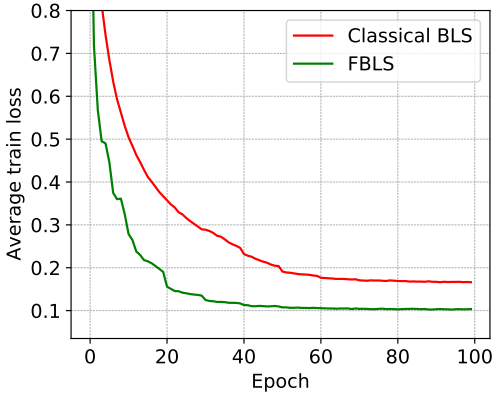
[7] Armijo, "Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives".

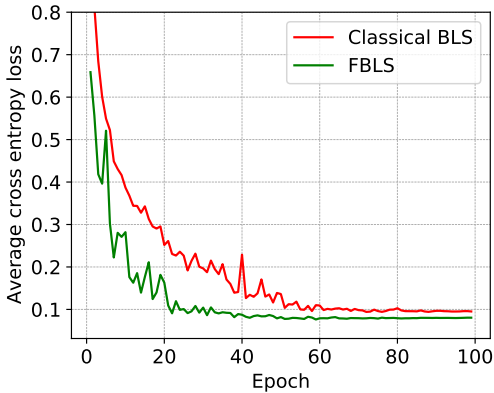
Сравнение предложенного метода с градиентным спуском на MultiMNIST



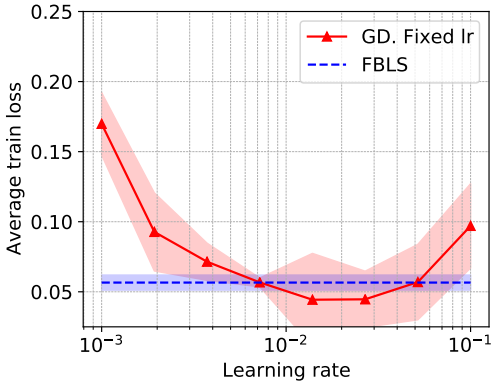


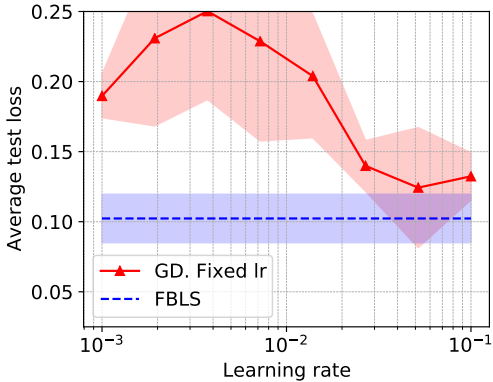
Сравнение предложенного метода с базовым линейным поиском на MultiMNIST





Сравнение предложенного метода с градиентным спуском на CIFAR-10





Сравнение времени работы алгоритмов

	MNIST ↓	CIFAR-10 ↓	Cityscapes ↓
FBLS (Ours)	1.05 (143)	0.15 (85)	1.28 (76800)
Backtracking	1.37 (195)	1.18 (650)	-
Classical SGD	1.0 (143)	1.0 (550)	1.0 (60000)
Latent space SGD	0.95 (136)	0.14 (80)	-

Результаты, выносимые на защиту

1. Предложен алгоритм быстрого линейного поиска для мультизадачных моделей.
2. Подтверждена теоретическая сходимость быстрого линейного поиска к Парето станционарной точке.
3. Проверена практическая эффективность метода на задачах MultiMNIST, CIFAR-10, Cityscapes.