Геометрическая алгебра для решения задачи декодирования

Панченко Святослав

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Москва,
2021 г.

Цель исследования

Задача

Имея пару синхронизированных временных рядов, требуется построить предсказательную модель, восстанавливающую значения второго ряда по известным значениям первого.

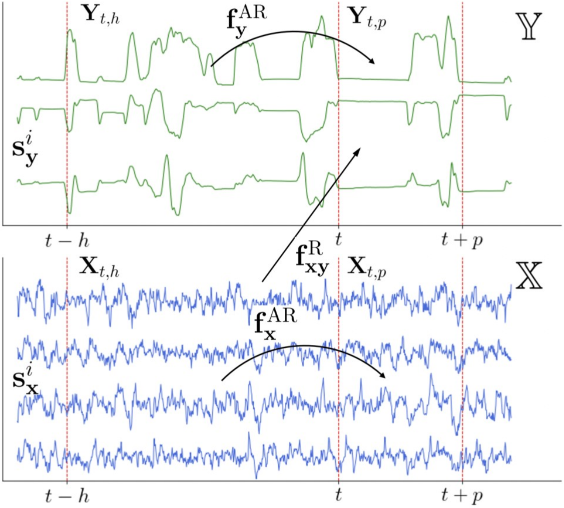
Проблема

Классические методы решения задачи декодирования, такие как high-order PLS, не учитывают связь между фазовыми траекториями временных рядов.

Решение

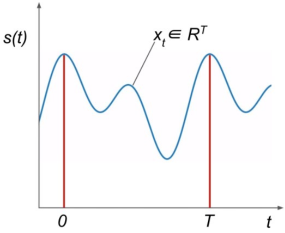
Предлагается построить предсказательную модель на основе нахождения оптимального преобразования в пространстве фазовых траекторий рядов, за счёт чего улучшается качество и существенно снижается вычислительная стоимость предсказания.

Задача декодирования



Фазовое (траекторное) пространство

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \dots \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N-n+1} & s_{N-n+2} & \cdots & s_N \end{bmatrix}$$



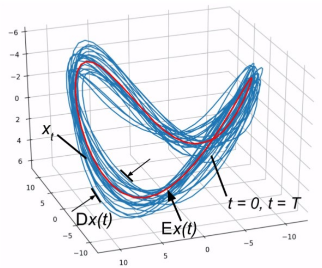
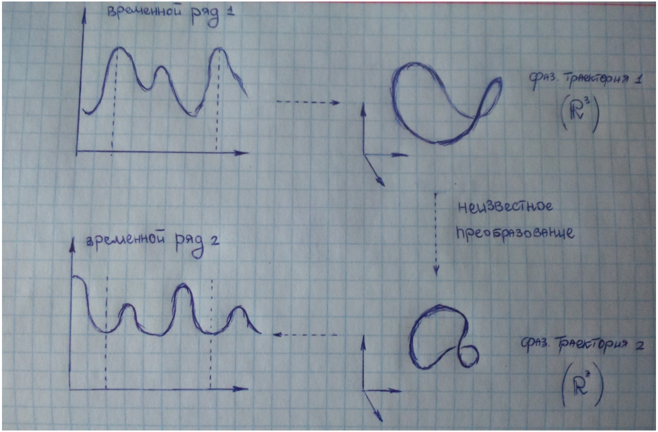


Схема работы предсказательной модели



Аксиомы

1. $\mathcal{G}$ – кольцо с единцией;
2. $\mathcal{G}$ содержит подмножество $\mathcal{G}_0$ – поле *скаляров*;
3. $\mathcal{G}$ содержит подмножество $\mathcal{G}_1$ – множество *векторов*, замкнутое относительно сложения, и для любых $\lambda \in \mathcal{G}_0, \mathsf{v} \in \mathcal{G}_1 : \lambda \mathsf{v} = \mathsf{v}\lambda \in \mathcal{G}_1$;
4. Квадрат каждого вектора является скаляром, т.е. для любого $\mathsf{a} \in \mathcal{G}_1 : \mathsf{a}^2 := \mathsf{aa} \in \mathcal{G}_0$;
5. $\mathcal{G}$ есть прямая сумма $\mathcal{G}_r$ – множества r-векторов.

- $A \in \mathcal{G}$ единственным образом представим в виде конечной суммы $A = \sum_r A_r = \sum_r \langle A \rangle_r$, где $A_r \in \mathcal{G}_r$
- $\mathsf{ab} = \frac{1}{2}(\mathsf{ab} + \mathsf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathsf{ab} - \mathsf{ba}) = \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} + \mathsf{a} \wedge \mathsf{b}$,

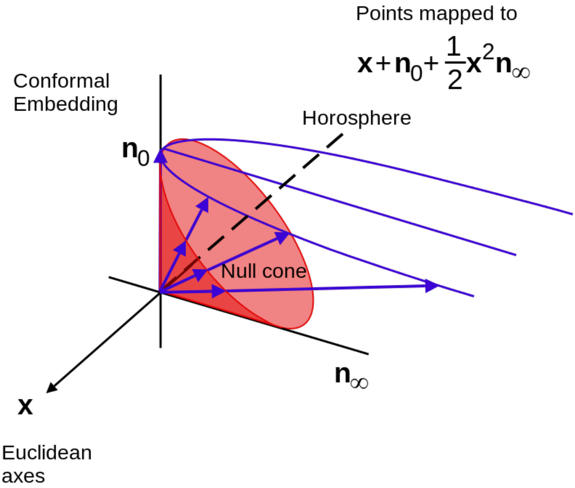


Рис.: Биекция из $\mathbb{R}^{p,q}$ в $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$

Имеется два множества геометрических объектов в $\mathbb{R}^3$, которым соответствуют точки в конформной геометрической алгебре $\{P_k\}_{k=1}^n$ и $\{Q_k\}_{k=1}^n$. Предполагается, что второе множество было получено из первого в результате поворота и трансляции.

Задача оптимизации

$$\max_{M \in \mathcal{M}} \langle \tilde{M} \mathcal{L} M \rangle_0, \ \textit{где}$$

$$\mathcal{L}X = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} w_k \left(\hat{Q}_k X P_k + \tilde{\hat{Q}}_k X \tilde{P}_k \right),$$

$$\mathcal{M} \subset span\{1, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_1 n_\infty, e_2 n_\infty, e_3 n_\infty, e_{123} n_\infty\}$$

($\mathcal{M}$ – множество композиций ротора-трансляции)

Theorem

Пусть $\{P_k\}_{k=1}^n$ *и* $\{Q_k\}_{k=1}^n$ *– два множества конформных объектов в* $\mathbb{R}^{4,1}$*, а оператор* $\mathcal{L}$ *определен как:*

$$\mathcal{L}X = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k\left(\hat{Q}XP_k + \tilde{\hat{Q}}X\tilde{P}_k\right)$$

Тогда максимизатор квадратичной формы $\langle\tilde{M}\mathcal{L}M\rangle_0$, $M \in \mathcal{M}$*, даётся выражением* $M = R + Q$*:*

- $R \in \mathbb{R}^3_+$ *– собственный ротор композиции операторов* $P_R\mathcal{L}'$*, отвечающий наибольшему его собственному значению*
- $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\tilde{P}_Q\mathcal{L}P_Q)^+\mathcal{L}$
- $Q = -(\tilde{P}_Q\mathcal{L}P_Q)^+\mathcal{L}R$

- Проблема: предложенная формализация и решение приведены только для случая $\mathbb{R}^3$.
  Решение: и то, и другое без труда обобщаются на случай $\mathbb{R}^n$ средствами конформной геометрической алгебры.
- Проблема: в предложенном решении в качестве допустимых преобразований пространства рассматриваются только композиции поворотов и трансляций.
  Решение: можно обобщить до класса всевозможных линейных преобразований (в композиции с трансляциями), воспользовавшись аналогом полярного разложения в геометрической алгебре.

Открытые вопросы

- Верно ли, что искомое преобразование существует для любой пары фазовых траекторий синхронизированных временных рядов? Если это не так, то при каких условиях такое преобразование существует?
- Какова оптимальная размерность фазового пространства для поиска преобразования?

Литература

- *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics*, David Hestenes, Garret Eugene Sobczyk, May 1985, American Journal of Physics
- *Applications of Clifford's Geometric Algebra*, Eckhard Hitzer, Tohru Nitta and Yasuaki Kuroe, May 24, 2013
- *Geometric Algebra, Introduction*, Eric Chisolm, May 29, 2012
- *Geometric Computing with Clifford Algebra*, Hestenes et al (2000), in G. Sommer (ed.), Springer Verlag
- *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Christian Perwass, January 2009
- *Estimating Motors from a Variety of Geometric Data in 3D Conformal Geometric Algebra*, Robert Jan Valkenburg, Leo Dorst, January 2011