Геометрическая алгебра, внешнее произведение и кватернионы

Панченко Святослав

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Москва,
2021 г.

Аксиоматика геометрической алгебры

Геометрическая алгебра $\mathcal{G}$ – это множество элементов с определёнными на них операциями сложения и произведения, которые подчиняются следующим аксиомам:

Акс. 1

$\mathcal{G}$ – кольцо с единцией, т.е., в частности:

1. сложение и произведение ассоциативны
2. у обеих операций есть *единичный* элемент (0 и 1 соответственно)
3. у каждого элемента есть обратный по сложению
4. сложение коммутативно
5. произведение дистрибутивно относительно сложения справа и слева

Произвольный элемент алгебры будем называть *мультивектором*.

Аксиоматика геометрической алгебры

Акс. 2

$\mathcal{G}$ содержит подмножество $\mathcal{G}_0$ – поле, содержащее вышеупомянутые 0 и 1.

Элементы $\mathcal{G}_0$ называются *0-векторами* или *скалярами*.

Акс. 3

$\mathcal{G}$ содержит подмножество $\mathcal{G}_1$, замкнутое относительно сложения, и для любых $\lambda \in \mathcal{G}_0, \mathrm{v} \in \mathcal{G}_1 : \lambda\mathrm{v} = \mathrm{v}\lambda \in \mathcal{G}_1$.

Элементы $\mathcal{G}_0$ называются *1-векторами* или просто *векторами*.

Аксиоматика геометрической алгебры

Акс. 4

Квадрат каждого вектора является скаляром, т.е. для любого $a \in \mathcal{G}_1 : a^2 := aa \in \mathcal{G}_0$.

Симметричную комбинацию векторов a и b

$$a \cdot b := \frac{1}{2}(ab + ba)$$

назовём *внутренним* или *скалярным* произведением.

Следствие

Скалярное произведение векторов является скаляром, т.к.

$$\frac{1}{2}(ab + ba) = \frac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2) =: Q(a, b)$$

Акс.5

Скалярное произведение невырожденно.

Классифицируем оставшиеся элементы геометрической алгебры. Пусть $r > 1$: произведение r попарно ортогональных векторов назовём простым *r-вектором* (*r-blade*); их конечную сумму – r-вектором. Множество r-векторов обозначим $\mathcal{G}_r$.
В силу Акс.3, если $A \in \mathcal{G}_r$, то $\lambda A \in G_r$ для любого скаляра λ.
Поэтому:

- $\mathcal{G}_r$ образует линейное пространство для всех r, с $\mathcal{G}_0$ в качестве поля скаляров;
- $0 \in \mathcal{G}_r$ для всех r.

Акс.6

Если $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_1$, то $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Иначе $\mathcal{G}$ есть прямая сумма $\mathcal{G}_r$.

Аксиома утверждает, в частности, что каждый элемент $A \in \mathcal{G}$ единственным образом представим в виде конечной суммы

$$A = \sum_r A_r, \text{ где } A_r \in \mathcal{G}_r,$$

т.е. A либо является r-вектором для конкретного r, либо является конечной суммой r-векторов для разных r (смешанным мультивектором).

Представление геометрического произведения

Рассмотрим произведение пары векторов a и b:

$$\mathsf{ab} = \frac{1}{2}(\mathsf{ab} + \mathsf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathsf{ab} - \mathsf{ba}) = \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} + \mathsf{a} \wedge \mathsf{b},$$

где антисимметричная часть

$$\mathsf{a} \wedge \mathsf{b} := \frac{1}{2}(\mathsf{ab} - \mathsf{ba})$$

называется *внешним* произведением.

Интерпретация внешнего произведения

Случай коллинеарных векторов

Если $a \parallel b$, то $ab - ba = 0$, произведение ab коммутирует и $ab = a \cdot b$. При этом $a \wedge b = 0$.

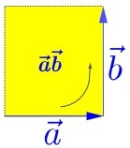
Интерпретация внешнего произведения

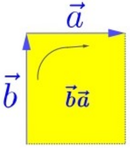
Случай ортогональных векторов

Если $a \cdot b = 0$, то ab является простым бивектором, произведение ab антикоммутирует и $B := ab = a \wedge b$. При этом квадрат B

$$B^2 = abab = -abba = -|a|^2|b|^2 \text{ - отрицательный скаляр.}$$

Сопоставим B ориентированный сегмент плоскости (смена ориентации происходит с помощью перестановки множителей $ba = -ab$).





Интерпретация внешнего произведения

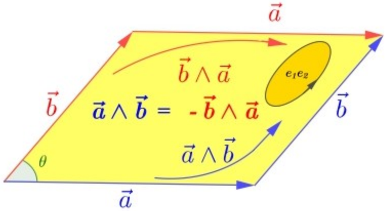
Случай произвольных векторов

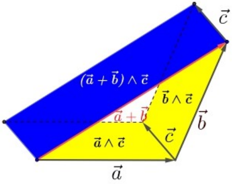
Представим b в виде суммы $b_{\parallel} + b_{\perp}, b_{\parallel} = \lambda a$. Тогда

$$ab = ab_{\parallel} + ab_{\perp} = a \cdot b_{\parallel} + a \wedge b_{\perp} = \lambda |a|^2 + a \wedge b_{\perp};$$

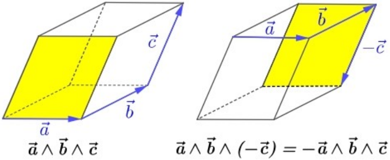
$$\text{к тому же, } ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

В силу единственности разложения (Акс. 6) $a \wedge b = a \wedge b_{\perp}$ – бивектор, соответствующий ориентированному сегменту плоскости, $(a \wedge b)^2 = -|a|^2|b|^2 \sin(\theta)$





Линейные свойства в пространстве бивекторов



Представление тривекторов

Отражение вектора вдоль оси

Рассмотрим вектор v и ось, задаваемую вектором n. Справедливо равенство:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}(\mathrm{n}\mathrm{n}^{-1}) = (\mathrm{v}\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1} = (\mathrm{v}\cdot\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1} + (\mathrm{v}\wedge\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1} = Pr_{\mathrm{n}}(\mathrm{v}) + Re_{\mathrm{n}}(\mathrm{v});$$

$Pr_n(\mathrm{v}) := (\mathrm{v}\cdot\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1} = \dfrac{(\mathrm{v}\cdot\mathrm{n})\mathrm{n}}{|\mathrm{n}|^2}$ – ортогональная проекция v на n;

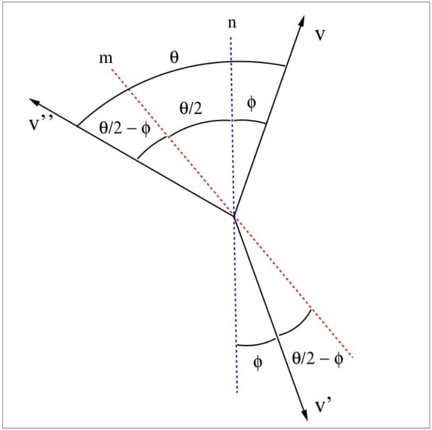
$Re_{\mathrm{n}}(\mathrm{v}) := (\mathrm{v}\wedge\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1}$ – ортогональная составляющая в v относ. n.

Тогда отражение вектора v вдоль оси имеет вид:

$$\mathrm{v}' = -Pr_{\mathrm{n}}(\mathrm{v}) + Re_{\mathrm{n}}(\mathrm{v}) = -(\mathrm{v}\cdot\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1} + (\mathrm{v}\wedge\mathrm{n})\mathrm{n}^{-1} =$$

$$= -(\mathrm{n}\cdot\mathrm{v})\mathrm{n}^{-1} - (\mathrm{n}\wedge\mathrm{v})\mathrm{n}^{-1} = -\mathrm{n}\mathrm{v}\mathrm{n}^{-1}$$

Для осуществления поворота в плоскости на угол θ можно взять 2 любых оси на плоскости под углом $\theta/2$ друг к другу и осуществить 2 последовательных отражения вдоль этих осей (порядок осей задаёт направление поворота).



Ротор в геометрической алгебре

В силу найденного выше выражения для отражения вектора вдоль оси и способа осуществить поворот как композицию отражений, для обладающих нужным свойством осей n и m имеем:

$$\mathrm{v}'' = -\mathrm{m}(-\mathrm{n}\mathrm{v}\mathrm{n}^{-1})\mathrm{m}^{-1} = \mathrm{m}\mathrm{n}\mathrm{v}(\mathrm{m}\mathrm{n})^{-1} = R\mathrm{v}R^{-1}.$$

Произведение $R = \mathrm{mn}$ называется *ротором*. Далее полагаем m и n единичными векторами.

Экспоненциальное представление ротора

Для ротора можно получить следующее выражение:

$$R = \mathrm{mn} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} + \mathrm{m} \wedge \mathrm{n} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} - \mathrm{n} \wedge \mathrm{m},$$

при этом $(\mathrm{n} \wedge \mathrm{m})^2 = -\sin(\theta/2)^2$ и $B = (\mathrm{n} \wedge \mathrm{m})/\sin(\theta/2)$ - единичный бивектор плоскости вращения, $B^2 = -1$.
Окончательно,

$$R = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)B = \exp(-B\theta/2)$$

Связь с комплексными числами

Геометрическая алгебра над двумерным евклидовым пр-вом

$$\mathbb{G}^{(2)} := \left\{ g | g = g_0 + g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_{12} \right\} = \mathbb{G}_0^{(2)} + \mathbb{G}_1^{(2)} + \mathbb{G}_2^{(2)}$$

$$\mathbb{G}_+^{(2)} = \mathbb{G}_0^{(2)} + \mathbb{G}_2^{(2)} = \left\{ g | g = g_0 + g_3 e_{12} \right\} \cong \mathbb{C}$$

Геометрическая алгебра над трёхмерным евклидовым пр-вом

$$\mathbb{G}^{(3)} := span_{\mathbb{R}} \left\{ 1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123} \right\}$$

$$\mathbb{G}_+^{(3)} = \mathbb{G}_0^{(3)} + \mathbb{G}_2^{(3)} = \left\{ g | g = g_0 + g_1 e_{12} + g_2 e_{13} + g_3 e_{23} \right\}$$

– изоморфна алгебре кватернионов

Литература

- *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics*, David Hestenes, Garret Eugene Sobczyk, May 1985, American Journal of Physics
- *Applications of Clifford's Geometric Algebra*, Eckhard Hitzer, Tohru Nitta and Yasuaki Kuroe, May 24, 2013
- *Geometric Algebra, Introduction*, Eric Chisolm, May 29, 2012