

# Билинейность геометрического произведения для решения задачи декодирования

Панченко Святослав

Московский физико-технический институт  
Факультет управления и прикладной математики  
Кафедра интеллектуальных систем

Москва,  
2021 г.

# Цель исследования

## Задача

Имея пару синхронизированных временных рядов, требуется построить предсказательную модель, восстанавливающую значения второго ряда по известным значениям первого.

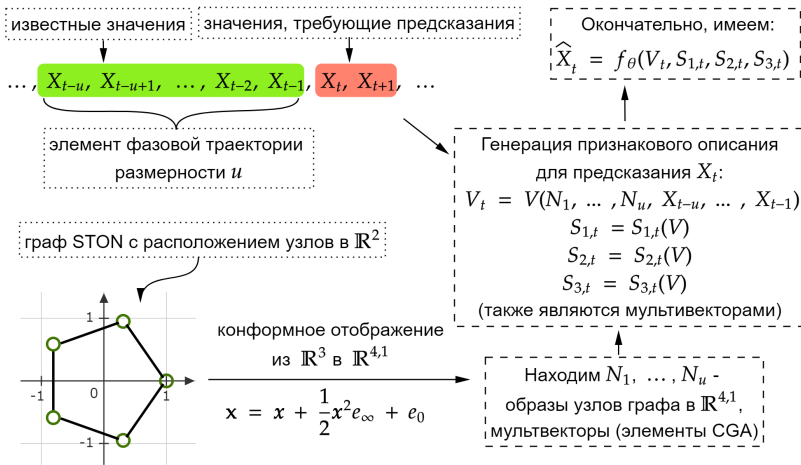
## Проблема

Классические методы решения задачи декодирования, такие как high-order PLS, не учитывают геометрическую связь между траекториями временных рядов.

## Решение

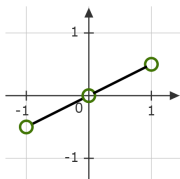
Предлагается построить предсказательную модель с использованием методов геометрической алгебры, которые позволят использовать скрытую алгебро-геометрическую структуру рядов для снижения размерности и повышения качества предсказания.

## Задача предсказания значений временного ряда

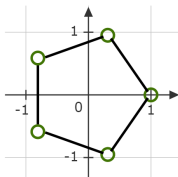


## Примеры конфигураций STON в 2D

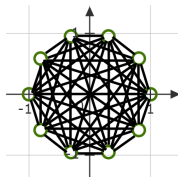
(a) Простейшая линейная конфигурация, 3 узла



(b) Кольцевая конфигурация, 5 узлов



(c) Полносвязная круговая конфигурация, 10 узлов



Каждый узел исходно характеризуется набором координат  $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, u$ . Сопоставим узлу следующий 4-вектор:

$$N_i = x_i^{(1)} \wedge x_i^{(2)} \wedge x_i^{(3)} \wedge x_i^{(4)},$$

где

$x_i = \vec{x}_i + \frac{1}{2}\vec{x}_i^2 e_\infty + e_0$  – конформный образ центра узла

$$x^{(1)} = re_1 + \frac{1}{2}(re_1)^2 e_\infty + e_0, \quad x_i^{(1)} = x_i + x^{(1)}$$

$$x^{(2)} = re_2 + \frac{1}{2}(re_2)^2 e_\infty + e_0, \quad x_i^{(2)} = x_i + x^{(2)}$$

$$x^{(3)} = re_3 + \frac{1}{2}(re_3)^2 e_\infty + e_0, \quad x_i^{(3)} = x_i + x^{(3)}$$

$$x^{(4)} = -re_1 + \frac{1}{2}(-re_1)^2 e_\infty + e_0, \quad x_i^{(4)} = x_i + x^{(4)}$$

## Формирование гиперполя $V$

$\dots, X_{t-u}, X_{t-y+1}, \dots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t, \dots$

последовательность значений ряда -  
элемент фазовой траектории размерности  $u$

матрица смежности  
графа  $A$

+ образы узлов  
графа в  $\mathbb{R}^{4,1}$

$N_1, \dots, N_u$

$$\Omega_{i,t} = N_i * X_{t-u+(i-1)}, i = \overline{1, u}$$

$$V_{N,t} = \sum_{i=1}^u \Omega_{i,t}$$

$$V_{AN,t} = \sum_{i=1}^u \sum_{j=1}^u A_{ij} * (\tilde{\Omega}_{i,t} * \Omega_{j,t})$$

$$V_t = V_{N,t} + V_{AN,t}$$

Вспомогательные гиперполя - аналоги производных:

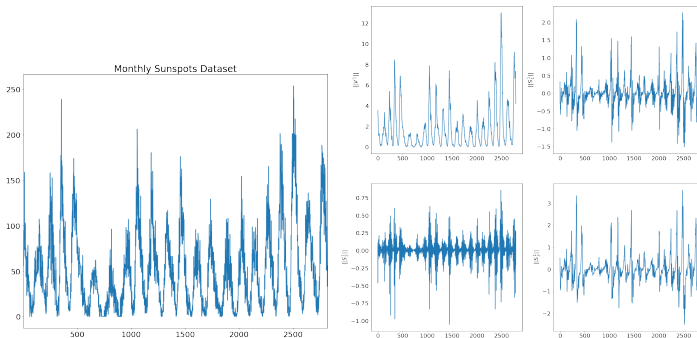
$$S_{1,t} = \frac{1}{L_1} \sum_{i=1}^{L_1} (V_t - V_{t-i})$$

$$S_{2,t} = S_{1,t} - S_{1,t-1}$$

$$S_{3,t} = \frac{1}{2L_1} \sum_{i=1}^{2L_1} (V_t - V_{t-i})$$

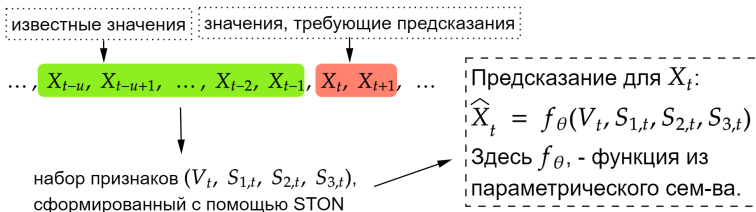
Для каждого из гиперполей (мультивекторов геометрической алгебры) находим его величину  $\|V_t\|$ ,  $\|S_{i,t}\|$  – сумму коэффициентов в разложении поля по базису алгебры. Итого, имеем четверку  $(\|V_t\|, \|S_{1,t}\|, \|S_{2,t}\|, \|S_{3,t}\|)$  – признаковое описание ряда на момент времени  $t$ . Символ нормы далее опускаем.

## Датасет Monthly Sunspots и построенные для него гиперполя



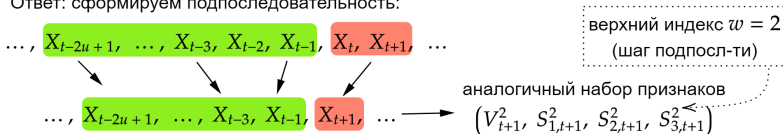


# Предлагаемое решение задачи предсказания



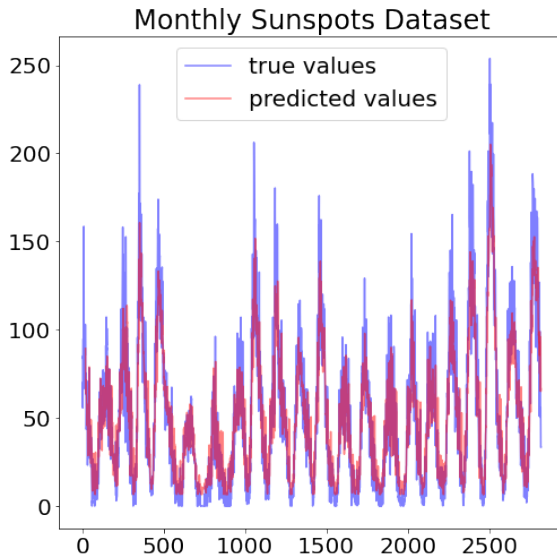
Вопрос: как построить предсказание на 1 шаг вперед для  $X_{t+1}$ , не зная  $X_t$ ?

Ответ: сформируем подпоследовательность:

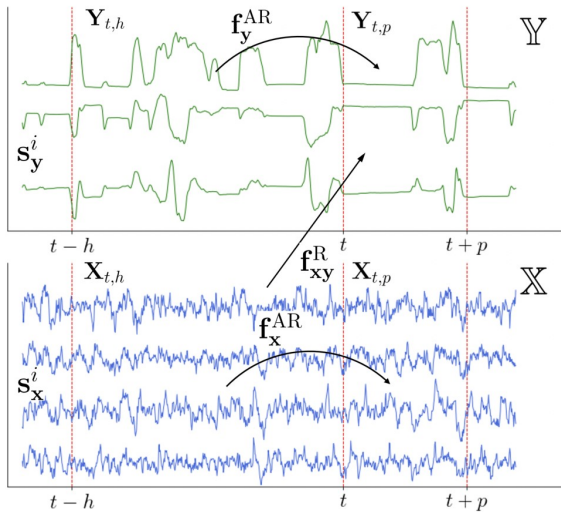


Аналогично, предсказание для  $X_{t+1}$ :  $\hat{X}_{t+1} = f_\theta^2(V_{t+1}^2, S_{1,t+1}^2, S_{2,t+1}^2, S_{3,t+1}^2)$

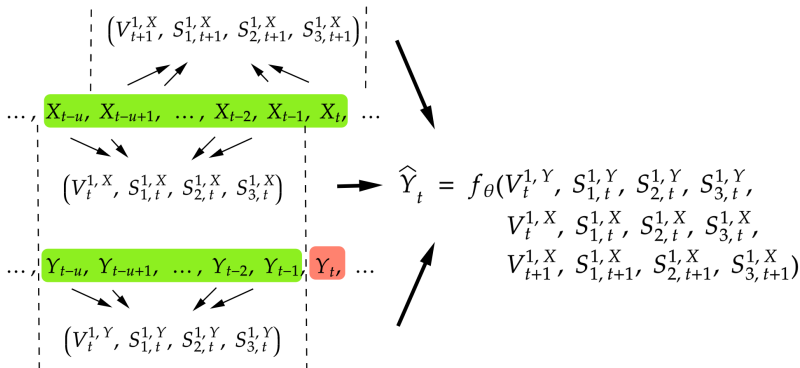
# Эксперимент: датасет Monthly Sunspots



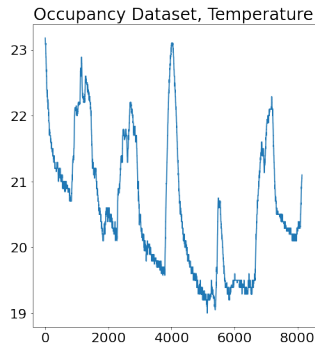
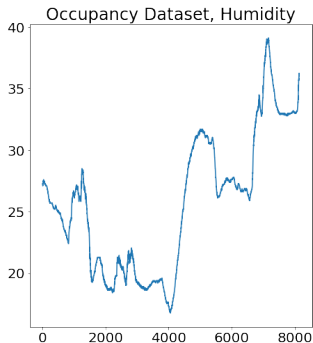
# Задача декодирования



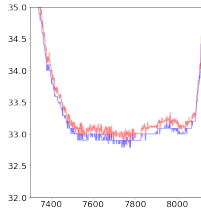
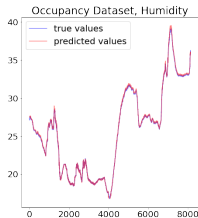
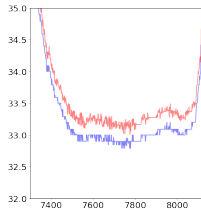
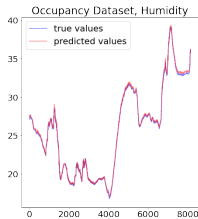
## Предлагаемое решение для задачи декодирования



# Эксперимент: датасет Occupancy Detection



# Сравнение предсказаний, полученных без и с использованием значений второго ряда



- Полученный результат: подтверждена принципиальная применимость описанного метода для задачи декодирования. Сильная сторона метода – возможность снижения размерности пространства от сколь угодно длинных участков траектории до 4 (12) значений.
- Планы на дальнейшее исследование:
  - Обогатить вычислительный эксперимент: датасеты с синхронизированными временными рядами (показатели акселерометра), сравнение с другими предсказательными моделями, подробный анализ ошибки.
  - Исследовать влияние структуры графа STON на результат решения задачи декодирования для рядов разного вида.
  - Исследовать возможность генерации информативных признаков, содержащих информацию о структуре одновременно обоих синхронизированных временных рядов.

- *Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics*, David Hestenes, Garret Eugene Sobczyk, May 1985, American Journal of Physics
- *Applications of Clifford's Geometric Algebra*, Eckhard Hitzer, Tohru Nitta and Yasuaki Kuroe, May 24, 2013
- *Geometric Algebra, Introduction*, Eric Chisolm, May 29, 2012
- *Geometric Computing with Clifford Algebra*, Hestenes et al (2000), in G. Sommer (ed.), Springer Verlag
- *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Christian Perwass, January 2009
- *Estimating Motors from a Variety of Geometric Data in 3D Conformal Geometric Algebra*, Robert Jan Valkenburg, Leo Dorst, January 2011