Конформная геометрическая алгебра и её применение

Панченко Святослав

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Москва,
2021 г.

Геометрическая алгебра: напоминание

Аксиомы

1. $\mathcal{G}$ – кольцо с единцией;
2. $\mathcal{G}$ содержит подмножество $\mathcal{G}_0$ – поле *скаляров*;
3. $\mathcal{G}$ содержит подмножество $\mathcal{G}_1$ – множество *векторов*, замкнутое относительно сложения, и для любых $\lambda \in \mathcal{G}_0, \mathrm{v} \in \mathcal{G}_1 : \lambda\mathrm{v} = \mathrm{v}\lambda \in \mathcal{G}_1$;
4. Квадрат каждого вектора является скаляром, т.е. для любого $\mathrm{a} \in \mathcal{G}_1 : \mathrm{a}^2 := \mathrm{aa} \in \mathcal{G}_0$;
5. $\mathcal{G}$ есть прямая сумма $\mathcal{G}_r$ – множества r-векторов.

- $A \in \mathcal{G}$ единственным образом представим в виде конечной суммы $A = \sum_r A_r = \sum_r \langle A \rangle_r$, где $A_r \in \mathcal{G}_r$
- $\mathrm{ab} = \frac{1}{2}(\mathrm{ab} + \mathrm{ba}) + \frac{1}{2}(\mathrm{ab} - \mathrm{ba}) = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b} + \mathrm{a} \wedge \mathrm{b}$,

Примеры геометрических алгебр

Геометрическая алгебра над двумерным евклидовым пр-вом

$$\mathbb{G}^{(2)} := \{g | g = g_0 + g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_{12}\} = \mathbb{G}_0^{(2)} + \mathbb{G}_1^{(2)} + \mathbb{G}_2^{(2)}$$

$$\mathbb{G}_+^{(2)} = \mathbb{G}_0^{(2)} + \mathbb{G}_2^{(2)} = \{g | g = g_0 + g_3 e_{12}\} \cong \mathbb{C}$$

Геометрическая алгебра над трёхмерным евклидовым пр-вом

$$\mathbb{G}^{(3)} := span_{\mathbb{R}}\{1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$$

$$\mathbb{G}_+^{(3)} = \mathbb{G}_0^{(3)} + \mathbb{G}_2^{(3)} = \{g | g = g_0 + g_1 e_{12} + g_2 e_{13} + g_3 e_{23}\}$$

– изоморфна алгебре кватернионов

Конформная геометрическая алгебра

Конформная геометрическая алгебра – это алгебра, конструируемая над образом биективного отображения из исходного (базового) пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ в пространство более высокой размерности $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$.

Преимущества:

- Многие преобразования базового пространства, такие как отражения, повороты, трансляции могут быть представлены в виде элементов конформной геометрической алгебры;
- Геометрические объекты, такие как точки, прямые, сферы, приобретают естественные представления как элементы конформной алгебры.

Ниже рассмотрим наиболее хорошо изученную конформную алгебру – погружение пространства $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^{4,1}$.

Построение конформной алгебры

1. $\mathbb{R}^{4,1} = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^{1,1}$, e_+, e_- – базис в $\mathbb{R}^{1,1}$, $e_+^2 = 1$, $e_-^2 = -1$
2. Вырожденный базис в $\mathbb{R}^{1,1}$:

$$n_o = (e_- - e_+)/2, \; n_\infty = e_- + e_+$$

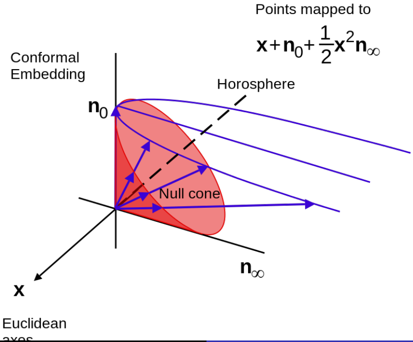
$$n_o^2 = 0, \; n_\infty^2 = 0, \; n_o \cdot n_\infty = -1$$

3. Элемент $\mathbb{R}^{4,1}$:

$$\mathrm{a} = \mathrm{x} + \alpha n_o + \beta n_\infty, \; \text{где } \mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$$

- Множество $\mathcal{N}^3 = \{\mathrm{a} \in \mathbb{R}^{4,1} \mid \mathrm{a}^2 = 0,\ \mathrm{a} \cdot n_\infty = -1\}$ – пересечение вырожденного конуса в $\mathbb{R}^{4,1}$ и гиперплоскости $\mathrm{a} \cdot n_\infty = -1$
- Элемент $\mathcal{N}^3$ (вид элемента и определяет биективное отображение между $\mathbb{R}^3$ и $\mathcal{N}^3$:

$$\mathrm{a} = \mathrm{x} + n_o + \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 n_\infty$$



Представление элементов $\mathbb{R}^3$ в CGA

1. Геометрическое произведение двух элементов $a, b \in \mathcal{N}^3$:

$$ab = \mathrm{xy} + (\mathrm{x} - \mathrm{y})n_o + \frac{1}{2}\left[(\mathrm{x}^2 + {}^2) + (\mathrm{yx}^2 - \mathrm{yx}^2)n_\infty + (\mathrm{y}^2 - \mathrm{x}^2)n_\infty \wedge n_o\right]$$

Отсюда $a \cdot b = -\frac{1}{2}(\mathrm{x} - \mathrm{y})^2$, и $(a - b)^2 = -2a \cdot b = (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2$, т.е. отображение является изометрией.

2. Сфера с центром в $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^3$ радиуса ρ:

$$(\mathrm{x} - \mathrm{p})^2 = \rho^2 \text{ или } a \cdot c = -\frac{1}{2}\rho^2$$

Воспользовавшись равенством $a \cdot n_\infty = -1$, получаем альтернативный способ представления сферы:

$$a \cdot s = 0, \text{ где } s = c - \frac{1}{2}\rho^2 n_\infty = \mathrm{p} + n_o + \frac{\mathrm{p}^2 - \rho^2}{2} n_\infty$$

Другие полезные представления

- Представление прямой, проходящей через точки $x, y \in \mathbb{R}^3$:
  $l = x \wedge (y - x) \wedge n_\infty = x \wedge y \wedge n_\infty \in \mathbb{R}^{4,1}$
- Представление плоскости, проходящей через точки $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:
  $p = x \wedge (y - x) \wedge (z - x) \wedge n_\infty = x \wedge y \wedge z \wedge n_\infty \in \mathbb{R}^{4,1}$
- Представление ротора:
  $R \in span\{1, e_{12}, e_{13}, e_{23}\} = \mathbb{R}^3_+ \subset \mathbb{R}^{4,1}, \ |R|^2 = 1$
- Представление оператора трансляции:
  $T_c = 1 + \frac{1}{2} c n_\infty \in span\{1, e_1 n_\infty, e_2 n_\infty, e_3 n_\infty\}$

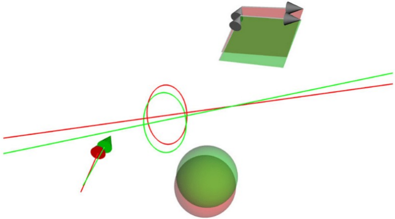
Motor

Motor – композиция ротора и трансляции:

$$M = T_c R \in span\{1, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_1 n_\infty, e_2 n_\infty, e_3 n_\infty, e_{123} n_\infty\}$$

Задача поиска композиции ротора-трансляции

Имеется два множества геометрических объектов в $\mathbb{R}^3$, которым соответствуют точки в конформной геометрической алгебре $\{P_k\}_{k=1}^n$ и $\{Q_k\}_{k=1}^n$. Предполагается, что второе множество было получено из первого в результате поворота и трансляции. Задача состоит в том, чтобы найти motor, наилучшим образом отображающий одно множество точек на второе.



Задание меры схожести

$$s(P,Q) = \langle P\hat{Q}\rangle_0, \text{ где } \hat{Q} = \langle Q\rangle_0 + \langle Q\rangle_1 + \langle Q\rangle_3 - \langle Q\rangle_2 - \langle Q\rangle_4 - \langle Q\rangle_5$$

- Точки: $s(P,Q) = P \cdot Q = -\frac{1}{2}d^2$
- Сферы: $s(P,Q) = ... = -\frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2)$
- Прямые и плоскости: $s(P,Q) = ... = cos(\theta)$

- Действие motor-а на элемент CGA:
  $MP_k\tilde{M}$, где $M = TR, \tilde{M} = \tilde{R}\tilde{T}$ (операция обращения)
- Суммарная схожесть после преобразования данных (в симметризованном виде):

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k \Big(\langle MP_k\tilde{M}\hat{Q}\rangle_0 + \langle\tilde{\hat{Q}}M\tilde{P}_k\tilde{M}\rangle_0 \Big) = \langle\tilde{M}\mathcal{L}M\rangle_0$$

$$\mathcal{L}X = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k \Big(\hat{Q}XP_k + \tilde{\hat{Q}}X\tilde{P}_k \Big)$$

- Задача оптимизации ($\mathcal{M}$ – множество motor-ов):

$$\max_{M\in\mathcal{M}} \langle\tilde{M}\mathcal{L}M\rangle_0$$

Случай ротора

Рассмотрим более простую задачу:

$$\max_{R\in\mathbb{R}^3_+,|R|^2=1} \langle \tilde{R}\mathcal{L}R\rangle_0$$

Здесь $|R|^2 = \langle R\tilde{R}\rangle_0 = \langle \tilde{R}R\rangle_0$.
Функция Лагранжа: $L(R) = \frac{1}{2}\langle \tilde{R}\mathcal{L}R\rangle_0 + \frac{\alpha}{2}\Big(\langle \tilde{R}R\rangle_0 - 1\Big)$.
Из условий оптимальности первого порядка находим:

- $\mathcal{L}R = \alpha R$
- $\alpha = \langle \tilde{R}\mathcal{L}R\rangle_0$

Отсюда делаем вывод: искомый ротор – собственный ротор оператора $\mathcal{L}$, соответствующий наибольшему его собственному значению.

Theorem

Пусть $\{P_k\}_{k=1}^n$ *и* $\{Q_k\}_{k=1}^n$ *– два множества конформных объектов в* $\mathbb{R}^{4,1}$*, а оператор* $\mathcal{L}$ *определен как:*

$$\mathcal{L}X = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k\left(\hat{Q}XP_k + \tilde{\hat{Q}}X\tilde{P}_k\right)$$

Тогда максимизатор квадратичной формы $\langle \tilde{M}\mathcal{L}M\rangle_0$, $M \in \mathcal{M}$, *даётся выражением* $M = R + Q$*:*

- $R \in \mathbb{R}^3_+$ *– собственный ротор композиции операторов* $P_R\mathcal{L}'$*, отвечающий наибольшему его собственному значению*
- $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\tilde{P_Q}\mathcal{L}P_Q)^+\mathcal{L}$
- $Q = -(\tilde{P_Q}\mathcal{L}P_Q)^+\mathcal{L}R$

Вопросы

1. Какая сигнатура у пространства, в которое погружается $\mathbb{R}^3$ для построения CGA?
2. Что представляет собой motor?
3. Если оператор $\mathcal{L}$ задаёт квадратичную форму, описывающую суммарную меру схожести после применения преобразования поворота, какой ротор будет наилучшим образом это преобразование описывать?

Литература

- *Geometric Computing with Clifford Algebra*, Hestenes et al (2000), in G. Sommer (ed.), Springer Verlag
- *Geometric Algebra with Applications in Engineering*, Christian Perwass, January 2009
- *Estimating Motors from a Variety of Geometric Data in 3D Conformal Geometric Algebra*, Robert Jan Valkenburg, Leo Dorst, January 2011