ODEs direction fields and approximations by ODE-Net

Vyacheslav Gorchakov

2021

1 Введение.

В данной лабораторной работе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Рассматриваются такие уравнения как $y' = y/x$, $y' = -y/x$, $y' = -x/y$, $y' = (x+y)/(x-y)$. Для каждого из данных уравнений строятся векторные поля и векторные потоки на фазовых портретах. Для поля направления строится его аппроксимация с помощью ODE-net.

2 Теория.

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где F — известная функция трех переменных, определенная в области G из R_3, x — независимая переменная из интервала (a, b), $y(x)$ — неизвестная функция, $y'(x)$ — ее производная.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производной, т.е. уравнения вида $y' = f(x, y)$ называют уравнениями в нормальной форме.

Функция $y = y(x)$ называется решением дифференциального уравнения, если она непрерывно дифференцируема на (a, b) и при всех x из (a, b) удовлетворяет уравнению $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

График решения дифференциального уравнения называют интегральной кривой дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, правая часть которого $f(x, y)$ и ее частная производная по y непрерывны в некоторой области D имеет место геометрическая интерпретация, называемая полем направлений.

Если через каждую точку (x, y) области D провести некоторый отрезок $l(x, y)$ с угловым коэффициентом, равным значению правой части $f(x, y)$ в точке (x, y), то получится изображение, которое называется «полем направлений». Любая интегральная кривая $y = y(x)$ в каждой своей точке $(x, y(x))$ касается отрезка $l(x, y)$.

Если дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$, имеет решение, то решений у него, вообще говоря, бесконечно много и эти решения могут быть записаны в виде $y = y(x, C)$, где C — произвольная константа.

Выражение $y(x, C)$ называют общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка:

при всех допустимых значениях C функция $y = y(x, C)$ является решением уравнения $y'(x, C) = f(x, y(x, C))$;

для любого наперед заданного решения y=f(x) найдется такое значение константы C, $C = ^*$, что $y(x, C^*) = f(x)$.

Поле направлений, совокупность точек плоскости , в каждой из которых задано определённое направление, изображающееся обычно стрелкой (небольшим отрезком), проходящей через данную точку. Если дано уравнение $y' = -f(x,)$, то в каждой точке некоторой области плоскости известно значение углового коэффициента $k = f(x_0, y_0)$ касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку; направление касательной можно изобразить стрелкой (небольшим отрезком).

Таким образом, это дифференциальное уравнение определяет П. н.; наоборот, П. н., заданное в некоторой области плоскости xOy, определяет дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$. Проводя достаточно густую сеть изоклин [линий одинакового наклона П. н. $f(x,) =$, где C — постоянная], можно приближённо построить семейство интегральных кривых как совокупность линий, имеющих в каждой своей точке направление, совпадающее с направлением поля (метод изоклин).

3 Эксперименты.

3.1 Поля направлений.

Используется библиотека sympy для построения полей направлений рассматриваемых дифференциальных уравнений.

Спираль Матрица модели для построения: $\begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$

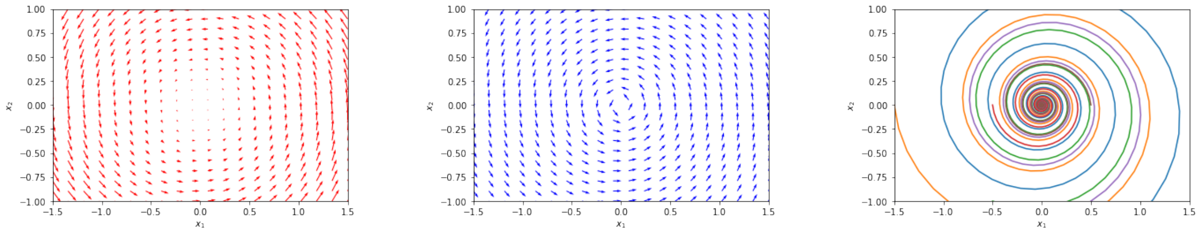

Рис. 1

Центр. Матрица модели для построения: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

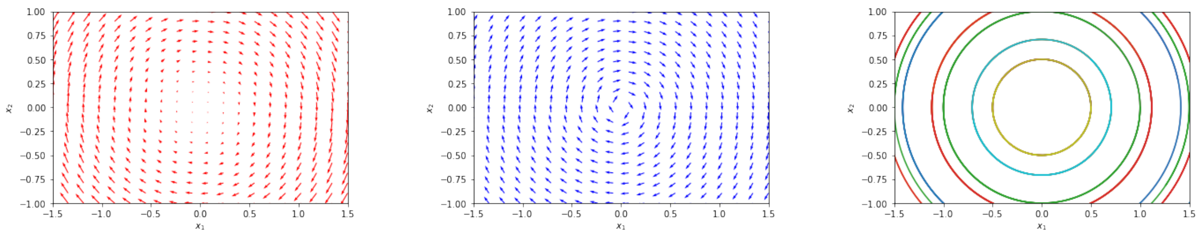

Рис. 2

Седло. Матрица модели для построения: $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

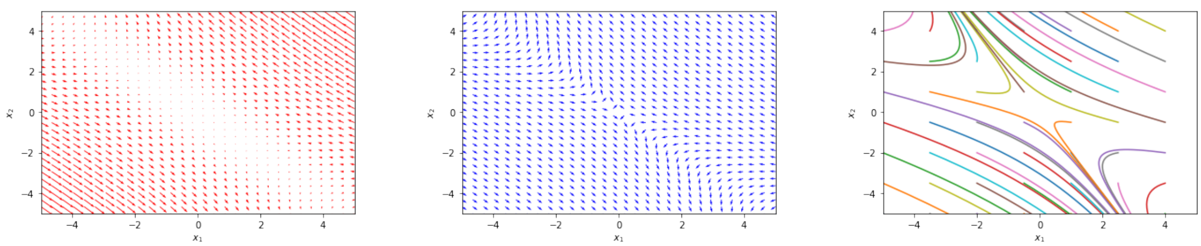

Рис. 3

Узел (node) Матрица модели для построения: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

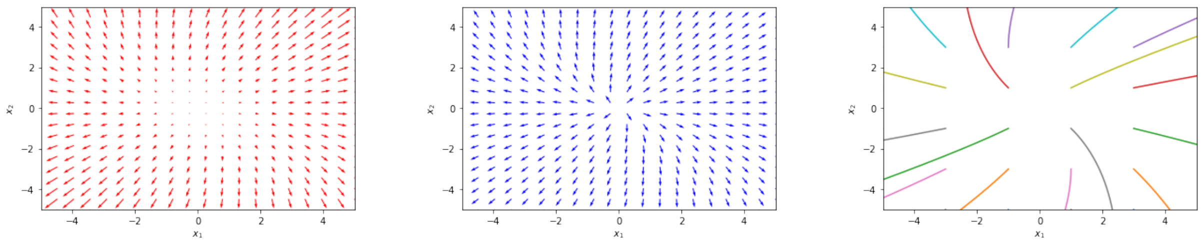

Рис. 4

Improper node Матрица модели для построения: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

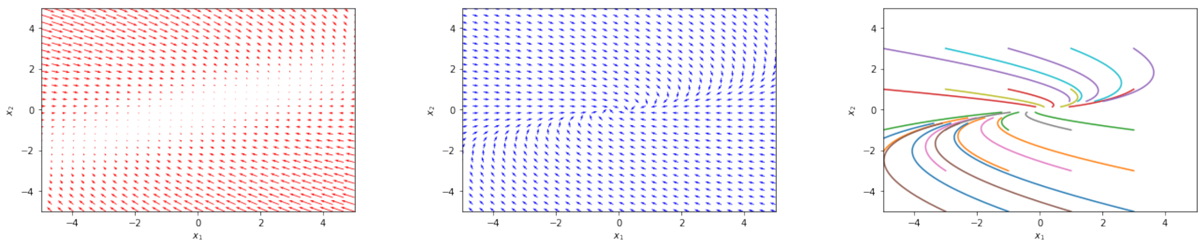

Рис. 5

Star Матрица модели для построения: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

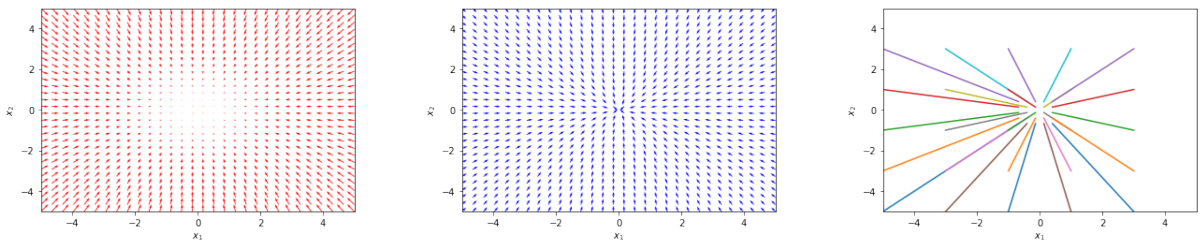

Рис. 6

3.2 Аппроксимации с помощью ODE-Net на примере спирали.

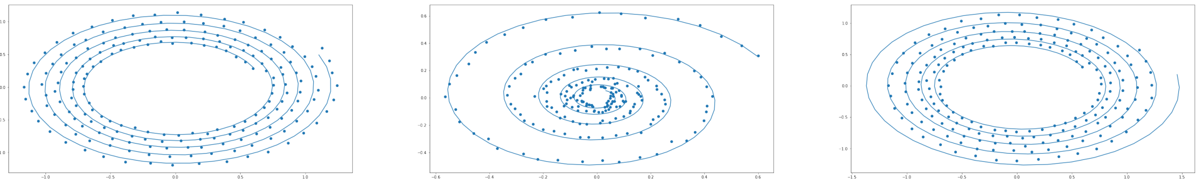

Рис. 7