# Сэмплирование по важности в оптимизации с вероятностными ограничениями.

Вячеслав Горчаков

Московский физико-технический институт

Апрель, 2022.

# Построение оптимизационного решения задачи.

**Цель** предложить оптимизационный метод решения задачи нахождения оптимального потока мощности постоянного тока с вероятностными ограничениями (CC-DC-OPF).

**Проблема** CC-DC-OPF является вычислительно неразрешимой проблемой, а существующие аппроксимации имеют высокие требования к вычислительным ресурсам.

**Метод решения** предлагается подход с использованием сэмплирования по важности для построения аппроксимации по сценариям (scenario approximation, SC) для решения проблемы CC-DC-OPF

# Энергетические системы

Дана энергетическая система $G = (V, E)$, где V - множество вершин размера n (nodes/buses), а E - множество ребер размера m.
Пусть p - вектор подачи электроэнергии

$$p = (p_F, p_R, p_S)^\top,$$

Пусть $\theta$ вектор фазовых углов, а $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ матрица узловой проводимости системы, причем $p = B\theta$.

## DC power flow

$$p = B\theta \tag{1}$$

$$p_i^{\text{min}} \leq p_i \leq p_i^{\text{max}}, i \in V \tag{2}$$

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \bar{\theta}_{ij},\ (i, j) \in E \tag{3}$$

# Постановка проблемы CC-DC-OPF

Предположим, что флуктуации подачи электроэнергии $p$ имеют гауссовское распределение, $p = x + \xi$, where $\xi$ есть гауссовская неопределенность, $\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

## Формулировка CC-DC-OPF

$$\min_{x} \mathbb{E}_{\xi \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)} \operatorname{cost}(x, \xi) \tag{4}$$

$$\text{s. t.}: \mathbb{P}_{\xi \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)}(x + \xi \in \mathcal{P}) \geq 1 - \eta, 0 < \eta \leq 1/2,$$

$\eta$ - заданный уровень "уверенности"ограничения (confidence level), cost - выпуклая функция стоимости для реализации $\xi$.

# Scenario Approach

В подходе воспроизводятся детерминированные ограничения, каждое из которых означает реализацию неопределенности, для замены исходные вероятностных ограничений.

Формулировка scenario approach.

$$\min_x \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \mathrm{cost}(x, \xi_t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t.}: \; & p_t^{\min} \leq x + \xi^t \leq p_t^{\max}, \; 1 \leq t \leq N \\
& |\theta_i(\xi^t) - \theta_j(\xi^t)| \leq \bar{\theta}_{ij}, (i, j) \in \mathcal{E}, \; 1 \leq t \leq N \\
& x + \xi^t = B\theta(\xi^t), \; 1 \leq t \leq N,
\end{aligned}$$

$N$ - количество сценариев и $\{\xi^t\}_{i=1}^N$ - серия реализаций неопределенностей

# Структура алгоритма.

## Внутренняя аппроксимация

*По заданному множеству* $\mathcal{P}$ *строится множество* $\mathcal{P}_m$ *такое, что* $\mathbb{P}(x + \xi \in \mathcal{P}) \geq 1 - \eta$, *выполнено для* $\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

## Сэмплирование вне аппроксимации

*Сэмплирование точек происходит в области* $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_m$.

## Scenario approach подход

*Решение Scenario Approximation проблемы с набором сценариев. Сценарии сэмплируются с помощью метода сэмплирования по важности.*

# Scenario Approximation с сэмплированием по важности

$$\min_x \ \mathrm{cost}(x)$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t.}: \ & p_t^{\min} \le x + \xi^t \le p_t^{\max}, \ 1 \le t \le N \\
& |\theta_i(\xi^t) - \theta_j(\xi^t)| \le \bar{\theta}_{ij}, (i,j) \in \mathcal{E}, \ 1 \le t \le N \\
& x + \xi^t = B\theta(\xi^t), \ 1 \le t \le N \\
& x \in \mathcal{P}_m \\
& \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^N \sim D,
\end{aligned}$$

где $D$ распределение, определяемое как:

$$D = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i D_i, \ \alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{J} \alpha_i = 1,$$

$$\alpha_i \propto \Phi(-\Delta_i / \|\Sigma^{1/2}\omega_i\|_2), \tag{7}$$

# Вычислительный эксперимент

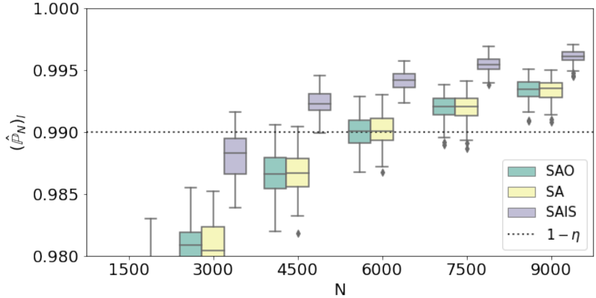
- Энергетические сети IEEE 30, IEEE 57, IEEE 118 и IEEE 300 с 30, 57, 118 и 300 вершин соответственно. Флуктуация уровня потребления имеет среднеквадратичное отклонение 0.07 от номинального своего значения для всех примеров.
- Сравниваются два алгоритма: SA - алгоритм scenario approximation и SAIS - алгоритм scenario approximation с сэмплированием по важности.
- Эмпирический уровень надежности $1-\delta$ определяется как усредненное по $L$=100 запускам сэмплирований по методу Монте-Карло значение доли выполненных с уверенностью $1-\eta$ ограничений.

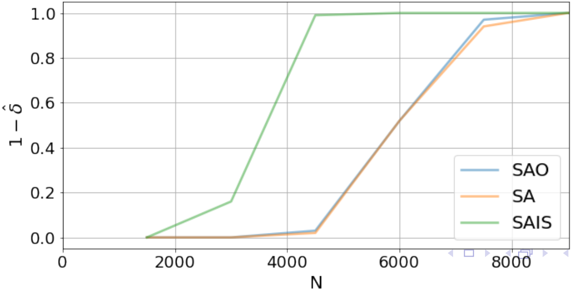
# Сравнение числа необходимых сэмплов и значений целевой функции

Сравнение числа необходимых сэмплов для достижения эмпирического уровня надежности $1 - \delta = 0.99$ при двух заданных $\eta = 0.05$ и $\eta = 0.01$.

| Case | $\eta$ | SA No | SA Cost | IS-SA No | IS-SA Cost |
|---|---|---|---|---|---|
| grid30 | 0.05 | 160 | 5.89e+03 | **60** | 5.87e+03 |
| grid57 | 0.05 | 210 | 2.52e+04 | **160** | 2.52e+04 |
| grid118 | 0.05 | 1300 | 8.72e+04 | **1050** | 8.72e+04 |
| grid300 | 0.05 | 1550 | 4.72e+05 | **1250** | 4.72e+05 |
| grid30 | 0.01 | 800 | 5.94e+03 | **300** | 5.96e+03 |
| grid57 | 0.01 | 1300 | 2.52e+04 | **300** | 2.53e+04 |
| grid118 | 0.01 | 6000 | 8.74e+04 | **3600** | 8.74e+04 |
| grid300 | 0.01 | 9000 | 4.72e+05 | **4500** | 4.72e+05 |

# Сравнительный анализ алгоритмов SA и SAIS



# Выносится на защиту

- Исследован алгоритм сэмплирования по важности для задачи нахождения оптимального потока мощности постоянного тока с вероятностными ограничениями (CC-DC-OPF).
- Показано, что алгоритм scenario approximation с применением сэмплирования по важности требует меньшее количество сценариев для достижения заданного уровня уверенности.
- Данный подход может быть распространен на автоматизированную систему для контроля в реальном времени объемных энергосистем.