

Сэмплирование по важности в оптимизации с вероятностными ограничениями.

Вячеслав Горчаков

Научный руководитель: профессор Ю.В. Максимов

Московский физико-технический институт

Июнь, 2022.

Построение оптимизационного решения задачи.

Цель

Предложить оптимизационный метод решения задачи нахождения оптимального потока мощности постоянного тока с вероятностными ограничениями (CC-DC-OPF).

Проблема

Алгоритма, который позволяет получить решение задачи CC-DC-OPF аналитически, не существует, а известные аппроксимации имеют высокие требования к вычислительным ресурсам.

Метод решения

Предлагается подход с использованием сэмплирования по важности для построения аппроксимации по сценариям (scenario approximation, SC) для решения проблемы CC-DC-OPF

Chance-constrained оптимизация (CC-opt)

Постановка: минимизация функции с набором вероятностных ограничений.

Формулировка проблемы в CC-opt

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{s. t. : } \mathbb{P}(g(x, \xi) \geq 0) \geq 1 - \eta, 0 < \eta \leq 1/2, \end{aligned} \tag{1}$$

$1 - \eta$ - заданный уровень «уверенности» ограничения (confidence level).

Энергетические системы

Дана энергетическая система $G = (V, E)$, где V - множество вершин размера n (nodes/buses), а E - множество ребер размера m .

Пусть p - вектор подачи электроэнергии

$$p = (p_F, p_R, p_S)^T,$$

Пусть θ вектор фазовых углов, а $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ матрица узловой проводимости системы, причем $p = B\theta$.

Тогда выражения мощности потока и ограничения энергосистемы:

$$p = B\theta \tag{2}$$

$$p_i^{\min} \leq p_i \leq p_i^{\max}, i \in V \tag{3}$$

$$|\theta_i - \theta_j| \leq \bar{\theta}_{ij}, (i, j) \in E \tag{4}$$

Постановка проблемы CC-DC-OPF

Предположим, что флуктуации подачи электроэнергии p имеют гауссовское распределение, $p = x + \xi$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Введем множество \mathcal{P} такое, что ограничения (3), (4) выполнены внутри этого множества.

$$\mathcal{P} = \{p : Wp \leq b\} = \{p : \bigcap_{i=1}^J \omega_i^\top p \leq b_i\},$$

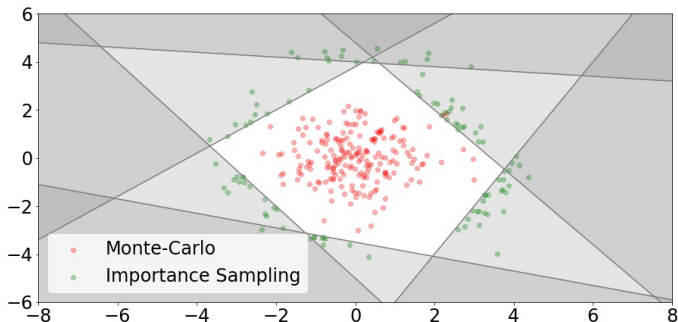
где $W \in \mathbb{R}^{J \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $J = 2m + 2n$

Формулировка CC-DC-OPF

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \mathbb{E}_{\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)} \text{cost}(x, \xi) \\ \text{s. t. : } \quad & \mathbb{P}_{\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)}(x + \xi \in \mathcal{P}) \geq 1 - \eta, 0 < \eta \leq 1/2, \end{aligned} \tag{5}$$

Визуализация сэмплирования

Распределение для ξ можно задавать по-разному. В работе применяется подход сэмплирования по важности (Importance Sampling).



Scenario Approach

В подходе воспроизводятся детерминированные ограничения, каждое из которых означает фиксированную реализацию неопределенности ξ . В совокупности ограничения эквивалентны исходному множеству вероятностных ограничений.

Формулировка scenario approach.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \text{cost}(x, \xi_t) \\ \text{s. t. : } \quad & p_t^{\min} \leq x + \xi^t \leq p_t^{\max}, \quad 1 \leq t \leq N \\ & |\theta_i(\xi^t) - \theta_j(\xi^t)| \leq \bar{\theta}_{ij}, (i, j) \in \mathcal{E}, \quad 1 \leq t \leq N \\ & x + \xi^t = B\theta(\xi^t), \quad 1 \leq t \leq N, \end{aligned} \tag{6}$$

N - количество сценариев и $\{\xi^t\}_{i=1}^N$ - серия реализаций неопределенностей

Структура алгоритма.

Внутренняя аппроксимация

По заданному множеству \mathcal{P} строится множество \mathcal{P}_m такое, что $\mathbb{P}(x + \xi \in \mathcal{P}) \geq 1 - \eta$, выполнено для $\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Сэмплирование вне аппроксимации

Сэмплирование точек происходит в области $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_m$.

Scenario approach подход

Решение Scenario Approximation проблемы с набором сценариев. Сценарии сэмплируются с помощью метода сэмплирования по важности.

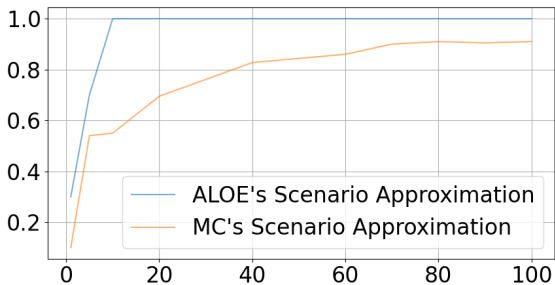
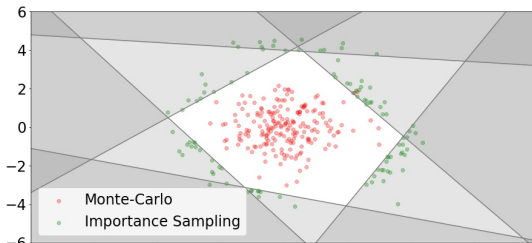
Scenario Approximation с сэмплированием по важности

$$\begin{aligned} \min_x \text{cost}(x, \xi_t) \quad (7) \\ \text{s. t. : } p_t^{\min} \leq x + \xi^t \leq p_t^{\max}, \quad 1 \leq t \leq N \\ |\theta_i(\xi^t) - \theta_j(\xi^t)| \leq \bar{\theta}_{ij}, (i, j) \in \mathcal{E}, \quad 1 \leq t \leq N \\ x + \xi^t = B\theta(\xi^t), \quad 1 \leq t \leq N, \\ x \in \mathcal{P}_m, \\ \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N \sim D, \end{aligned}$$

где D - распределение, определяемое как:

$$\begin{aligned} D = \sum_{i=1}^J \alpha_i D_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^J \alpha_i = 1, \\ \alpha_i \propto \Phi(-\Delta_i / \|\Sigma^{1/2} \omega_i\|_2), \quad (8) \end{aligned}$$

Сэмплирование по важности и Monte-Carlo



Теоретическая оценка

Theorem

Пусть \bar{x}_N есть решение проблемы (7) с N i.i.d. сэмплами такое, что никакие из сэмплов не лежат внутри \mathcal{P}_m . Предположим, что для любого N для любых реализаций ξ^1, \dots, ξ^N , оптимизационная проблема (7) имеет единственное решение или не имеет его. Тогда для любого $\delta \in (0, 1)$ и любой $\eta \in (0, 1/2]$, \bar{x}_N является также решением оптимизационной задачи с вероятностными ограничениями (5) с вероятностью $1 - \delta$ если

$$N \geq \left\lceil 2 \frac{(1 - \pi) \ln \frac{1}{\delta}}{\eta} + 2d + 2d(1 - \pi) \frac{\ln \frac{2(1 - \pi)}{\eta}}{\eta} \right\rceil,$$

где d есть размерность пространства управляемых генераторов, а π - вероятность того, что произвольный сценарий ξ принадлежит \mathcal{P}_m , $\pi < 1$.

Вычислительный эксперимент

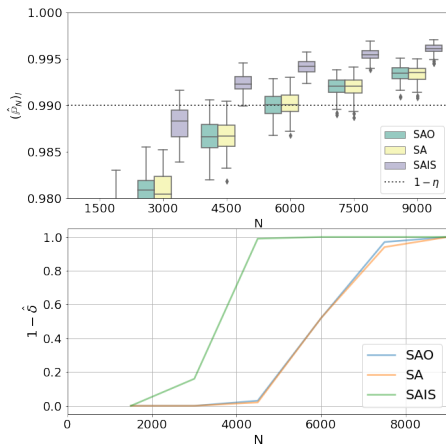
- Энергетические сети IEEE 30, IEEE 57, IEEE 118 и IEEE 300 с 30, 57, 118 и 300 вершин соответственно.
Флуктуация уровня потребления имеет среднеквадратичное отклонение 0.07 от номинального своего значения для всех примеров.
- Сравниваются два алгоритма: SA - алгоритм scenarion approximation и SAIS - алгоритм scenario approximation с сэмплированием по важности.
- Эмпирический уровень надежности $1 - \delta$ определяется как усредненное по $L = 100$ запускам сэмплирований по методу Монте-Карло значение доли выполненных с уверенностью $1 - \eta$ ограничений.

Сравнение числа необходимых сэмплов и значений целевой функции

Сравнение числа необходимых сэмплов для достижения эмпирического уровня надежности $1 - \delta = 0.99$ при двух заданных $\eta = 0.05$ и $\eta = 0.01$.

Case	η	SA No	SA Cost	IS-SA No	IS-SA Cost
grid30	0.05	160	5.89e+03	60	5.87e+03
grid57	0.05	210	2.52e+04	160	2.52e+04
grid118	0.05	1300	8.72e+04	1050	8.72e+04
grid300	0.05	1550	4.72e+05	1250	4.72e+05
grid30	0.01	800	5.94e+03	300	5.96e+03
grid57	0.01	1300	2.52e+04	300	2.53e+04
grid118	0.01	6000	8.74e+04	3600	8.74e+04
grid300	0.01	9000	4.72e+05	4500	4.72e+05

Сравнительный анализ алгоритмов SA и SAIS



SAO - исходный алгоритм scenario аппроксимаций, но вектор p имеет вид $p = (p_F, p_R)^\top$ (не учитываются балансирующие значения p_S).

Выносятся на защиту

- Исследован алгоритм сэмплирования по важности для задачи нахождения оптимального потока мощности постоянного тока с вероятностными ограничениями (CC-DC-OPF).
- Показано, что алгоритм scenario approximation с применением сэмплирования по важности требует меньшее количество сценариев для достижения заданного уровня уверенности.
- Данный подход может быть распространен на автоматизированную систему для контроля в реальном времени объемных энергосистем.