

# Распределенные методы второго порядка с быстрой скоростью сходимости и компрессией

Московский физико-технический институт  
Кафедра Интеллектуальных систем

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов В.В.  
Консультант: П. Рихтарик

Апрель, 2021

# Постановка задачи

## Оптимизационная задача





Определить оптимальные параметры модели машинного обучения путем решения оптимизационной задачи:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ P(x) := f(x) + \frac{\lambda}{2} \|x\|^2 \right\}, \quad (1)$$

где  $x$  — параметры модели, а  $f$  — функция потерь.

Предполагается, что данные для обучения распределены между  $n$  клиентами, каждый клиент  $i \in \{1, \dots, n\}$  имеет доступ к  $m$  векторам признаков объектов  $a_{ij} \in \mathbb{R}^d$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Функция  $f$  имеет вид

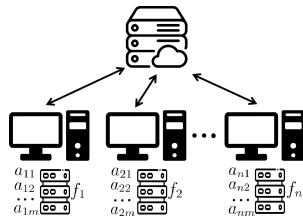
$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad f_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{ij}(x), \quad f_{ij}(x) = \varphi_{ij}(a_{ij}^\top x). \quad (2)$$

-  Konstantin Mishchenko, Eduard Gorbunov, Martin Takac, and Peter Richtarik.  
*Distributed learning with compressed gradient differences.*  
arXiv:1901.09269, 2019.
-  Zhize Li, Dmitry Kovalev, Xun Qian, and Peter Richtarik.  
*Acceleration for compressed gradient descent in distributed and federated optimization.*  
In International Conference on Machine Learning, 2020.
-  Rixon Crane and Fred Roosta.  
*DINGO: Distributed Newton-type method for gradient-norm optimization.*  
Advances in Neural Information Processing Systems, volume 32, pages 9498.
-  Rustem Islamov, Xun Qian, and Peter Richtarik.  
*Distributed second order methods with fast rates and compressed communication.*  
arXiv:2102.07158, 2021.

# Модель распределенной оптимизации

## Достоинства и недостатки модели

- + Возможно обучать модели на больших объемах данных, распределенных между устройствами;
- + Возможно параллелизовать вычисления на устройствах;
- Скорость обмена данными между Клиентом и Сервером намного медленнее, чем скорость вычислений на самих устройствах и сервере.



Архитектура модели

«Клиент-Сервер».

## Существующие подходы и их недостатки

- Скорость сходимости методов первого порядка зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Скорость сходимости методов второго порядка зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Стоимость коммуникации между сервером и клиентом для методов второго порядка очень дорогая.

## Цель

Предложить эффективный с точки зрения коммуникации метод второго порядка, чья скорость сходимости не зависит от числа обусловленности.

# Предположения и структура Гессианов

## Предположение

Поставленная оптимизационная задача имеет хотя бы одно решение  $x^*$ . Для всех  $i, j$  функция потерь  $\varphi_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является дважды непрерывно дифференцируемой функцией с  $\nu$ -липшецевой второй производной.

## Гессианы функций

Гессианы функций  $f_{ij}, f_i, f$  соответственно имеют вид

$$\mathbf{H}_{ij}(x) = \varphi''(a_{ij}^\top x) a_{ij} a_{ij}^\top, \quad \mathbf{H}_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}(x), \quad \mathbf{H}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(x). \quad (3)$$

# Основная идея: NEWTON-STAR

## NEWTON-STAR

Предположим, что Серверу известен Гессиан  $\mathbf{H}(x^*)$  функции  $f$  в оптимуме. Шаг метода NEWTON-STAR имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 P(x^*))^{-1} \nabla P(x^k) = x^k - (\mathbf{H}(x^*) + \lambda \mathbf{I})^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right). \quad (4)$$

## Теорема 1 (Исламов, 2021)

Предположим, что  $\mathbf{H}(x^*) \succeq \mu^* \mathbf{I}$ ,  $\mu^* \geq 0$ , причем  $\mu^* + \lambda > 0$ . Тогда NEWTON-STAR сходится локально квадратично

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\nu}{2(\mu^* + \lambda)} \left( \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|a_{ij}\|^3 \right) \|x^k - x^*\|^2. \quad (5)$$

## Достоинства и недостатки NEWTON-STAR

- Локальная квадратичная сходимость, наследованная от стандартного метода Ньютона; Скорость сходимости не зависит от числа обусловленности;
- Стоимость коммуникаций между Сервером и Клиентом  $\mathcal{O}(d)$  — такая же, как и у градиентных методов. Каждый клиент пересылает серверу только градиент  $\nabla f_i(x^k)$ ;
- Метод имеет только теоретическую значимость, Гессиан в оптимуме не известен.



## Дополнительные предположения

Каждая функция  $\varphi_{ij}$  является выпуклой, параметр регуляризации  $\lambda$  положительный.

## Основная идея метода

Аппроксимируем матрицу  $\mathbf{H}(x^*)$  на шаге  $k$  матрицей  $\mathbf{H}^k$  вида

$$\mathbf{H}^k = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_{ij}^k a_{ij} a_{ij}^\top \right), \quad x^{k+1} = x^k - \left( \mathbf{H}^k + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right). \quad (6)$$

Требования:

- $h_{ij}^k \rightarrow \varphi_{ij}''(a_{ij}^\top x^*)$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
- обновление элементов вектора  $h_i^k := (h_{i1}^k, \dots, h_{im}^k)$  должно быть мало, т.е. вектор  $h_i^{k+1} - h_i^k$  разрежен.

# Механизм обновления коэффициентов

## Определение

Рандомизированное отображение  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющее условиям

$$\mathbb{E} [\mathcal{C}(h)] = h, \quad \mathbb{E} [\|\mathcal{C}(h)\|^2] \leq (\omega + 1) \|h\|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

называется **оператором несмещенной компрессии**.

**Пример:** оператор *Rand-r*, выходом такого оператора являются случайно выбранные  $r$  элементов входа, домноженные на  $\frac{m}{r}$ . Для этого оператора параметр  $\omega = \frac{m}{r} - 1$ .

Введем  $h_i(x) := (\varphi''_{i1}(a_{i1}^\top x), \dots, \varphi''_{im}(a_{im}^\top x))^\top$ .

## Механизм обновления (DIANA-trick [1])

$$h_i^{k+1} = \left[ h_i^k + \eta \mathcal{C}_i^k(h_i(x^k) - h_i^k) \right]_+. \quad (8)$$

---

**Algorithm 1** NL: NEWTON-LEARN ( $\lambda > 0$  case)
 

---

**Parameters:** learning rate  $\eta > 0$

**Initialization:**  $x^0 \in \mathbb{R}^d$ ;  $h_1^0, \dots, h_n^0 \in \mathbb{R}_+^m$ ;  $\mathbf{H}^0 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h_{ij}^0 a_{ij} a_{ij}^\top \in \mathbb{R}^{d \times d}$

**for**  $k = 0, 1, 2, \dots$  **do**

    Broadcast  $x^k$  to all workers

**for** each node  $i = 1, \dots, n$  **do**

        Compute local gradient  $\nabla f_i(x^k)$

$h_i^{k+1} = [h_i^k + \eta \mathcal{C}_i^k(h_i(x^k) - h_i^k)]_+$

        Send  $\nabla f_i(x^k)$  and  $\mathcal{C}_i^k(h_i(x^k) - h_i^k)$  to server

**Option 1:** Send  $\{a_{ij} : h_{ij}^{k+1} - h_{ij}^k \neq 0\}$  to server

**Option 2:** Do nothing if server knows  $\{a_{ij} : \forall j\}$

**end for**

$x^{k+1} = x^k - (\mathbf{H}^k + \lambda \mathbf{I})^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right)$

$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (h_{ij}^{k+1} - h_{ij}^k) a_{ij} a_{ij}^\top$

**end for**

---

Псевдокод для метода NEWTON-LEARN

# Сходимость NEWTON-LEARN

Введем функцию Ляпунова  $\Phi_1^k := \|x^k - x^*\|^2 + \frac{1}{3mn\eta\nu^2 R^2} \sum_{i=1}^n \|h_i^k - h_i(x^*)\|^2$ , где  $R = \max_{i,j} \|a_{ij}\|$ .

## Теорема 2 (Исламов, 2021)

Пусть  $\eta \leq \frac{1}{\omega+1}$  и  $\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{12\nu^2 R^6}$  для всех  $k \geq 0$ . Тогда выполнено

$$\mathbb{E} [\Phi_1^k] \leq \theta_1^k \Phi_1^0, \quad \mathbb{E} \left[ \frac{\|x^{k+1} - x^*\|^2}{\|x^k - x^*\|^2} \right] \leq \theta_1^k \left( 6\eta + \frac{1}{2} \right) \frac{\nu^2 R^6}{\lambda^2} \Phi_1^0,$$

где  $\theta_1 = 1 - \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{5}{8} \right\}$ .

**Лемма:** при использовании оператора Rand- $r$  достаточно предположить, что  $\|x^0 - x^*\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{12\nu^2 R^6}$ .

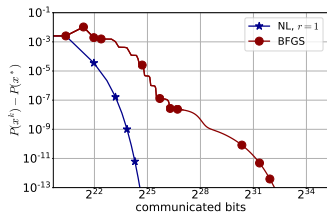
## Достоинства и недостатки NEWTON-LEARN

- Локальная линейная и сверхлинейная сходимость, независимая от числа обусловленности;
- Стоимость коммуникаций между Сервером и Клиентом  $\mathcal{O}(d)$  — такая же, как и у градиентных методов;
- Из сходимости функции Ляпунова следует, что алгоритм итеративно приближает Гессиан в оптимуме.

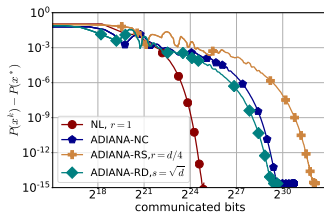
# Эксперименты

Эксперименты проведены для логистической регрессии на различных наборах данных библиотеке LIBSVM.

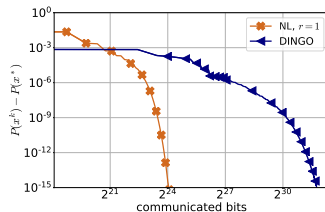
$$P(x) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \log \left( 1 + \exp(-b_{ij} a_{ij}^\top x) \right) + \frac{\lambda}{2} \|x\|^2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}^d, b_{ij} \in \{-1, 1\}. \quad (9)$$



w8a,  $\lambda = 10^{-3}$



a9a,  $\lambda = 10^{-4}$



phishing,  $\lambda = 10^{-5}$

- Экспериментальное и теоретическое подтверждение сходимости предложенного метода;
- Экспериментальные данные показывают превосходство предложенного метода над существующими SOTA методами в терминах сложности коммуникаций;
- Придуман первый метод второго порядка в дистрибутивной оптимизации, скорость сходимости которого не зависит от числа обусловленности функции.