Распределенные методы второго порядка с быстрой скоростью сходимости и компрессией

Исламов Рустем

Московский физико-технический институт
Кафедра Интеллектуальных систем

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов В.В.

Апрель, 2021

Постановка задачи

Оптимизационная задача

Определить оптимальные параметры модели машинного обучения путем решения оптимизационной задачи:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ P(x) := f(x) + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 \right\}, \qquad (1)$$

где x — параметры модели, а f — функция потерь.

Предполагается, что данные для обучения распределены между n клиентами, каждый клиент $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет доступ к m векторам признаков объектов $a_{ij} \in \mathbb{R}^d$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Функция f имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x), \qquad f_i(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}(x), \qquad f_{ij}(x) = \varphi_{ij}(a_{ij}^\top x). \qquad (2)$$

Работы по теме

Konstantin Mishchenko, Eduard Gorbunov, Martin Takac, and Peter Richtarik.
Distributed learning with compressed gradient differences.
arXiv:1901.09269, 2019.

Zhize Li, Dmitry Kovalev, Xun Qian, and Peter Richtarik.
Acceleration for compressed gradient descent in distributed and federated optimization.
In International Conference on Machine Learning, 2020.

Rixon Crane and Fred Roosta.
DINGO: Distributed Newton-type method for gradient-norm optimization.
Advances in Neural Information Processing Systems, volume 32, pages 9498.

Rustem Islamov, Xun Qian, and Peter Richtarik.
Distributed second order methods with fast rates and compressed communication.
arXiv:2102.07158, 2021.

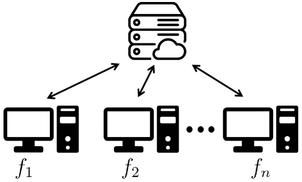
Модель распределенной оптимизации

Достоинства и недостатки модели

\+ Возможно обучать модели на больших объемах данных, распределенных между устройствами;

\+ Возможно параллелизовать вычисления на устройствах;

– Скорость обмена данными между Клиентом и Сервером намного медленнее, чем скорость вычислений на самих устройствах и сервере.



Архитектура модели «Клиент-Сервер».

Мотивация

Существующие подходы и их недостатки

- Скорость сходимости методов первого порядка зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Скорость сходимости методов второго порядка зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Стоимость коммуникации между сервером и клиентом для методов второго порядка очень дорогая.

Цель

Предложить эффективный с точки зрения коммуникации метод второго порядка, чья скорость сходимости не зависит от числа обусловленности.

Предположения и структура Гессианов

Предположение

Поставленная оптимизационная задача имеет хотя бы одно решение x^*. Для всех i, j функция потерь $\varphi_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией с ν-липшецевой второй производной.

Гессианы функций

Гессианы функций f_{ij}, f_i, f соответственно имеют вид

$$\mathrm{H}_{ij}(x) = \varphi''(a_{ij}^\top x)(x) a_{ij} a_{ij}^\top, \quad \mathrm{H}_i(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{H}_{ij}(x), \quad \mathrm{H}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}_i(x). \tag{3}$$

Основная идея: NEWTON-STAR

NEWTON-STAR

Предположим, что Серверу известен Гессиан $\mathrm{H}(x^*)$ функции f в оптимуме. Шаг метода NEWTON-STAR имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \left(\nabla^2 P(x^*)\right)^{-1} \nabla P(x^k) = x^k - (\mathrm{H}(x^*) + \lambda \mathrm{I})^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right). \tag{4}$$

Теорема о сходимости NEWTON-STAR

Предположим, что $\mathrm{H}(x^*) \succeq \mu^* \mathrm{I}, \mu^* \geq 0$, причем $\mu^* + \lambda > 0$. Тогда NEWTON-STAR сходится локально квадратично

$$\left\| x^{k+1} - x^* \right\| \leq \frac{\nu}{2(\mu^* + \lambda)} \left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|a_{ij}\|^3 \right) \left\| x^k - x^* \right\|^2. \tag{5}$$

Свойства NEWTON-STAR

Достоинства и недостатки NEWTON-STAR

- Локальная квадратичная сходимость, наследованная от стандартного метода Ньютона;
- Стоимость коммуникаций между Сервером и Клиентом $\mathcal{O}(d)$ — такая же, как и у градиентных методов. Каждый клиент пересылает серверу только градиент $\nabla f_i(x^k)$;
- Метод имеет только теоретическую значимость, Гессиан в оптимуме не известен.

NEWTON-LEARN

Дополнительные предположения

Каждая функция φ_{ij} является выпуклой, параметр регуляризации λ положительный.

Основная идея метода

Аппроксимируем матрицу $\mathrm{H}(x^*)$ на шаге k матрицей H^k вида

$$\mathrm{H}^k = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} h_{ij}^k a_{ij} a_{ij}^\top \right), \quad x^{k+1} = x^k - \left(\mathrm{H}^k + \lambda \mathrm{I} \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right). \quad (6)$$

Требования:

- $h_{ij}^k \to \varphi_{ij}''(a_{ij}^\top x^*)$ при $k \to \infty$;
- обнолвение элементов вектора $h_i^k := (h_{i1}^k, \ldots, h_{im}^k)$ должно быть мало, т.е вектор $h_i^{k+1} - h_i^k$ разрежен.

Механизм обновления коэффицентов

Определение

Рандомизированное отображение $\mathcal{C} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$*, удовлетворяющее условиям*

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{C}(h)\right] = h, \qquad \mathbb{E}\left[\|\mathcal{C}(h)\|^2\right] \leq (\omega + 1)\|h\|^2, \qquad \forall\ h \in \mathbb{R}^m, \tag{7}$$

называется **оператором несмещенной компрессии.**

Пример: *оператор Rand-*r*, выходом такого оператора являются случайно выбранные* r *элементов входа, домноженные на* $\frac{m}{r}$*. Для этого оператора параметр* $\omega = \frac{m}{r} - 1$.

Введем $A_i := (a_{i1}^\top, \ldots, a_{im}^\top), \varphi_i''(A_i x) := (\varphi_{i1}''(a_{i1}^\top x), \ldots, \varphi_{i1}''(a_{im}^\top x))^\top$.

Механизм обновления (DIANA-trick [1])

$$h_i^{k+1} = \left[h_i^k + \eta \mathcal{C}_i^k(\varphi_i^k(A_i x^k) - h_i^k)\right]_+ . \tag{8}$$

Сходимость NEWTON-LEARN

Введем функцию Ляпунова $\Phi_1^k := \left\|x^k - x^*\right\|^2 + \frac{1}{3mn\eta\nu^2 R^2}\sum_{i=1}^{n}\left\|h_i^k - \varphi_i''(A_i x^*)\right\|^2$, где $R = \max_{i,j}\|a_{ij}\|$.

Теорема о сходимости NEWTON-LEARN

Пусть $\eta \le \frac{1}{\omega+1}$ и $\left\|x^k - x^*\right\|^2 \le \frac{\lambda^2}{12\nu^2 R^6}$ для всех $k \ge 0$. Тогда выполнено

$$\mathbb{E}\left[\Phi_1^k\right] \le \theta_1^k \Phi_1^0, \qquad \mathbb{E}\left[\frac{\left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2}{\left\|x^k - x^*\right\|^2}\right] \le \theta_1^k\left(6\eta + \frac{1}{2}\right)\frac{\nu^2 R^6}{\lambda^2}\Phi_1^0,$$

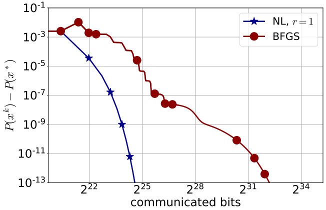
где $\theta_1 = 1 - \min\left\{\frac{\eta}{2}, \frac{5}{8}\right\}$.

Лемма: при использовании оператора разреживания достаточно предположить, что $\left\|x^0 - x^*\right\|^2 \le \frac{\lambda^2}{12\nu^2 R^6}$.

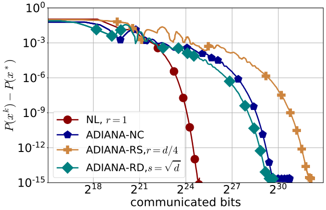
Эксперименты

Эксперименты проведены для логистической регрессии на различных наборах данных библиотеке LIBSVM.

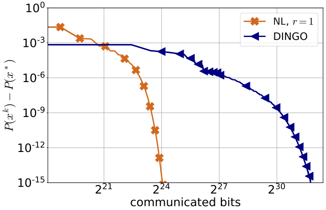
$$P(x) = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\log\left(1+\exp(-b_{ij}a_{ij}^\top x)\right)+\frac{\lambda}{2}\|x\|^2, \quad a_{ij}\in\mathbb{R}^d, b_{ij}\in\{-1,1\}. \tag{9}$$



w8a, $\lambda = 10^{-3}$



a9a, $\lambda = 10^{-4}$



phishing, $\lambda = 10^{-5}$

Результаты, выносимые на защиту

- Экспериментальное и теоретическое подтверждение сходимости предложенного метода;
- Экспериментальные данные показывают превосходство предложенного метода над существующими SOTA методами в терминах сложности коммуникаций;
- Придуман первый метод второго порядка в дистрибутивной оптимизации, скорость сходимости которого не зависитт от числа обусловленности функции.