

Распределенные методы второго порядка с быстрой скоростью сходимости и компрессией

Исламов Рустем Ильфакович

Московский физико-технический институт
Кафедра Интеллектуальных систем

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов В.В.
Консультант: Ph.D. (к.ф.-м.н) П. Рихтарик

Июнь, 2021

Постановка задачи

Оптимизационная задача





Определить оптимальные параметры модели машинного обучения путем решения оптимизационной задачи:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ P(x) := f(x) + \frac{\lambda}{2} \|x\|^2 \right\}, \quad (1)$$

где x — параметры модели, а f — функция потерь.

Предполагается, что данные для обучения распределены между n клиентами, каждый клиент $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет доступ к m векторам признаков объектов $a_{ij} \in \mathbb{R}^d$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Функция f имеет вид

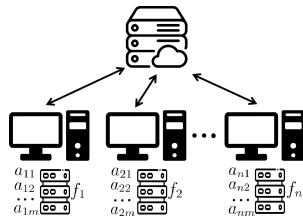
$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad f_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f_{ij}(x), \quad f_{ij}(x) = \varphi_{ij}(a_{ij}^\top x). \quad (2)$$

-  Konstantin Mishchenko, Eduard Gorbunov, Martin Takac, and Peter Richtarik.
Distributed learning with compressed gradient differences.
arXiv:1901.09269, 2019.
-  Zhize Li, Dmitry Kovalev, Xun Qian, and Peter Richtarik.
Acceleration for compressed gradient descent in distributed and federated optimization.
In International Conference on Machine Learning, 2020.
-  Rixon Crane and Fred Roosta.
DINGO: Distributed Newton-type method for gradient-norm optimization.
Advances in Neural Information Processing Systems, volume 32, pages 9498.
-  Rustem Islamov, Xun Qian, and Peter Richtarik.
Distributed second order methods with fast rates and compressed communication.
arXiv:2102.07158, 2021.

Модель распределенной оптимизации

Достоинства и недостатки модели

- + Возможно обучать модели на больших объемах данных, распределенных между устройствами;
- + Возможно параллелизовать вычисления на устройствах;
- Скорость обмена данными между Клиентом и Сервером намного медленнее, чем скорость вычислений на самих устройствах и сервере.



Архитектура модели

«Клиент-Сервер».

Существующие подходы и их недостатки

- Скорость сходимости методов первого порядка зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Скорость сходимости методов второго порядка зависит от числа обусловленности поставленной оптимизационной задачи;
- Стоимость коммуникации между сервером и клиентом для методов второго порядка очень дорогая.

Цель

Предложить эффективный с точки зрения коммуникации метод второго порядка, чья скорость сходимости не зависит от числа обусловленности.

Предположения и структура Гессианов

Предположения

Поставленная оптимизационная задача имеет хотя бы одно решение x^* . Для всех i, j функция потерь $\varphi_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией с ν -липшецевой второй производной.

Гессианы функций

Гессианы функций f_{ij}, f_i, f соответственно имеют вид

$$\mathbf{H}_{ij}(x) = \varphi''(a_{ij}^\top x) a_{ij} a_{ij}^\top, \quad \mathbf{H}_i(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}(x), \quad \mathbf{H}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i(x). \quad (3)$$

Основная идея: NEWTON-STAR

NEWTON-STAR

Предположим, что Серверу известен Гессиан $\mathbf{H}(x^*)$ функции f в оптимуме. Шаг метода NEWTON-STAR имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 P(x^*))^{-1} \nabla P(x^k) = x^k - (\mathbf{H}(x^*) + \lambda \mathbf{I})^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right). \quad (4)$$

Теорема 1 (Исламов, 2021)

Предположим, что $\mathbf{H}(x^*) \succeq \mu^* \mathbf{I}$, $\mu^* \geq 0$, причем $\mu^* + \lambda > 0$. Тогда NEWTON-STAR сходится локально квадратично

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\nu}{2(\mu^* + \lambda)} \left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|a_{ij}\|^3 \right) \|x^k - x^*\|^2. \quad (5)$$

Достоинства и недостатки NEWTON-STAR

- Локальная квадратичная сходимость, наследованная от стандартного метода Ньютона. Скорость сходимости не зависит от числа обусловленности;
- Стоимость коммуникаций между Сервером и Клиентом $\mathcal{O}(d)$ — такая же, как и у градиентных методов. Каждый клиент пересылает серверу только градиент $\nabla f_i(x^k)$;
- Метод имеет только теоретическую значимость, Гессиан в оптимуме не известен.

Дополнительные предположения

Каждая функция φ_{ij} является выпуклой, параметр регуляризации λ положительный.

Основная идея метода

Аппроксимируем матрицу $\mathbf{H}(x^*)$ на шаге k матрицей \mathbf{H}^k вида

$$\mathbf{H}^k = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_{ij}^k a_{ij} a_{ij}^\top \right), \quad x^{k+1} = x^k - \left(\mathbf{H}^k + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right). \quad (6)$$

Требования:

- $h_{ij}^k \rightarrow \varphi_{ij}''(a_{ij}^\top x^*)$ при $k \rightarrow \infty$;
- обновление элементов вектора $h_i^k := (h_{i1}^k, \dots, h_{im}^k)^\top$ должно быть слабым, т.е. вектор $h_i^{k+1} - h_i^k$ разрежен.

Оператор несмещенной компрессии

Определение

Рандомизированное отображение $\mathcal{C} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее условиям

$$\mathbb{E} [\mathcal{C}(h)] = h, \quad \mathbb{E} [\|\mathcal{C}(h)\|^2] \leq (\omega + 1) \|h\|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

называется **оператором несмещенной компрессии**.

Оператор Rand- r

Оператор Rand- r , определенный по формуле $\mathcal{C}(h) := \frac{m}{r} \cdot \xi \circ h$, где ξ — случайный вектор из равномерного распределения над множеством $\{h \in \{0, 1\}^m : \|h\|_0 = r\}$, а \circ определяет поэлементное умножение. Данный оператор имеет параметр $\omega = \frac{m}{r} - 1$.

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}(h) = \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пример
оператора
Rand-2.

Механизм обновления коэффициентов

Введем вектор вторых производных функций потерь:

$$h_i(x) := \left(\varphi''_{i1}(a_{i1}^\top x), \dots, \varphi''_{im}(a_{im}^\top x) \right)^\top.$$

Механизм обновления (DIANA-trick [1])

Вектор $h_i^k = (h_{i1}^k, \dots, h_{im}^k)^\top$ обновляется согласно формуле:

$$h_i^{k+1} = \left[h_i^k + \eta \mathcal{C}_i^k(h_i(x^k) - h_i^k) \right]_+, \quad (8)$$

где \mathcal{C}_i^k — оператор несмещенной компрессии, а η — числовой коэффициент.

Algorithm 1 Шаг метода NEWTON-LEARN

- 1: **каждый клиент** $i \in \{1, \dots, n\}$:
 - 2: вычисляет $\nabla f_i(x^k)$
 - 3: обновляет $h_i^{k+1} = [h_i^k + \eta \mathcal{C}_i^k(h_i(x^k) - h_i^k)]_+$
 - 4: отправляет $\nabla f_i(x^k)$, $h_i^{k+1} - h_i^k$ и $\{a_{ij} : h_{ij}^{k+1} - h_{ij}^k \neq 0\}$ на сервер
 - 5: **сервер:**
 - 6: $x^{k+1} = x^k - (\mathbf{H}^k + \mathbf{I})^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x^k) + \lambda x^k \right)$
 - 7: $\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (h_{ij}^{k+1} - h_{ij}^k) a_{ij} a_{ij}^\top$
-

Сходимость NEWTON-LEARN

Введем функцию Ляпунова $\Phi_1^k := \|x^k - x^*\|^2 + \frac{1}{3mn\eta\nu^2 R^2} \sum_{i=1}^n \|h_i^k - h_i(x^*)\|^2$, где $R = \max_{i,j} \|a_{ij}\|$.

Теорема 2 (Исламов, 2021)

Пусть $\eta \leq \frac{1}{\omega+1}$ и $\|x^k - x^*\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{12\nu^2 R^6}$ для всех $k \geq 0$. Тогда выполнено

$$\mathbb{E} [\Phi_1^k] \leq \theta_1^k \Phi_1^0, \quad \mathbb{E} \left[\frac{\|x^{k+1} - x^*\|^2}{\|x^k - x^*\|^2} \right] \leq \theta_1^k \left(6\eta + \frac{1}{2} \right) \frac{\nu^2 R^6}{\lambda^2} \Phi_1^0,$$

где $\theta_1 = 1 - \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{5}{8} \right\}$.

Лемма: при использовании оператора Rand- r достаточно предположить, что $\|x^0 - x^*\|^2 \leq \frac{\lambda^2}{12\nu^2 R^6}$, для следующих x^k неравенство будет выполнено автоматически.

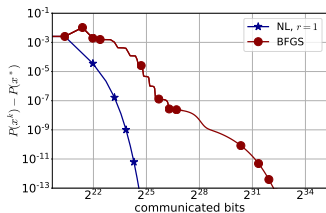
Достоинства и недостатки NEWTON-LEARN

- Локальная линейная и сверхлинейная сходимость, независимая от числа обусловленности;
- Стоимость коммуникаций между Сервером и Клиентом $\mathcal{O}(d)$, если $r = \mathcal{O}(1)$ — такая же, как и у градиентных методов;
- Из сходимости функции Ляпунова следует, что алгоритм итеративно приближает Гессиан в оптимуме.

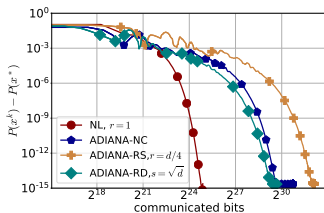
Эксперименты

Эксперименты проведены для логистической регрессии на различных наборах данных библиотеке LIBSVM.

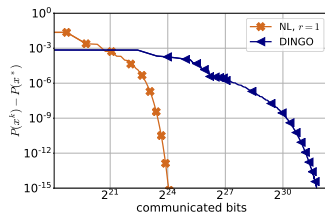
$$P(x) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \log \left(1 + \exp(-b_{ij} a_{ij}^\top x) \right) + \frac{\lambda}{2} \|x\|^2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}^d, b_{ij} \in \{-1, 1\}. \quad (9)$$



w8a, $\lambda = 10^{-3}$



a9a, $\lambda = 10^{-4}$



phishing, $\lambda = 10^{-5}$

Сравнение NL с BFGS, ADIANA и DINGO в терминах сложности коммуникаций.

Результаты, выносимые на защиту

- Экспериментальное и теоретическое подтверждение сходимости предложенного метода;
- Экспериментальные данные показывают превосходство предложенного метода над существующими SOTA методами в терминах сложности коммуникаций;
- Придуман первый метод второго порядка в дистрибутивной оптимизации, скорость сходимости которого не зависит от числа обусловленности функции.

Публикация

Статья [4] принята на *38-th International Conference on Machine Learning (ICML 2021)*.