Динамическое ценообразование с помощью Томсоновского сэмплирования.

Функция спроса на момент времени t для вещи i задается уравнением:

$$d_{i,t}(p_i) = f_{i,t}\big(\frac{p_i}{p_{i,t-1}}\big)^{\gamma_{*,i}} \approx f_{i,t} + (p_i - p_{i,t-1})\frac{f_{i,t}\gamma_{*,i}}{p_{i,t-1}}, \tag{1}$$

где $f_{i,t}$ - прогноз спроса для товара i на день t если цена на него $p_{i,t-1}$, $\gamma_{*,i}$ - эластичность товара i, $\gamma_{*,i}$ показывает, как спрос товара i меняется относительно его цены.

Прибыль от товара i в корзине $\mathbb{B}$ может быть оценена следующим образом:

$$Rev_{i,t}(p_{i,t}) = p_{i,t} \times d_{i,t}(p_{i,t}) \approx p_{i,t}(f_{i,t} + (p_{i,t} - p_{i,t-1})\frac{f_{i,t}\gamma_{*,i}}{p_{i,t-1}}) = \frac{p_{i,t}^2 f_{i,t}\gamma_{*,i}}{p_{i,t-1}} - p_{i,t}f_{i,t}\gamma_{*,i} + p_{i,t}f_{i,t} \tag{2}$$

Пусть $p = [p_1, p_2, \dots, p_{|\mathbb{B}|}]$ - вектор цен на товары в корзине $\mathbb{B}$. Оптимизируем, используя оценку на величины $\gamma_{*,i},\ f_{i,t}$.

$$p_t = argmax_p \sum_{i\in\mathbb{B}} \frac{p_i^2 f_{i,t}\gamma_{*,i}}{p_{i,t-1}} - p_i f_{i,t}\gamma_{*,i} + p_i f_{i,t} \tag{3}$$

$\sqcap_0(\gamma_*) = N(\mu_0, \Sigma_0)$

$\sqcap_t(\gamma_*) \propto \sqcap_{t-1}(\gamma_*) N(R_t, Rev_t, \sigma^2)$

Пусть $\theta_{ti} = \dfrac{p_i^2 f_{i,t}}{p_{i,t-1}} - p_i f_{i,t},\ \bar{R}_t = \sum\limits_{i\in\mathbb{B}} p_i f_{i,t}$:

$Rev_t = \sum\limits_{i\in\mathbb{B}} \dfrac{p_{i,t}^2 f_{i,t}\gamma_{*,i}}{p_{i,t-1}} - p_{i,t}f_{i,t}\gamma_{*,i} + p_{i,t}f_{i,t} = \gamma_*^T\theta_t + \bar{R}_t$

$N(R_t, Rev_t, \sigma^2) = N(R_t, \gamma_*^T\theta_t + \bar{R}_t, \sigma^2) \propto exp\big(-\dfrac{1}{\sigma^2}\big(R_t - \bar{R}_t - \sigma_*^T\theta_t\big)^2\big) \propto exp\big(-(\gamma_* - \beta_t)^T M_t^{-1}(\gamma_* - \beta_t)\big),$

где $M_t^{-1}\beta_t = \dfrac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2}\theta_t \Rightarrow M_t^{-1} = \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2} + \lambda I$

$\sqcap_t(\gamma_*) \propto N(\gamma_*, \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}) N(\gamma, \beta_t, M_t) \propto N(\gamma_*, \mu_t, \Sigma_t),$

где $\mu_t = \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\big)^{-1}\big(\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} + \dfrac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2}\theta_t\big),$

$\Sigma_t = \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\big)^{-1}.$

Algorithm 0.1 Max-Rev-TS

0: **input** Корзина $\mathbb{B}$, содержащая B товаров, период времени T, в течении которого хотим максимизировать прибыль.
- Инициализируется априорное $\sqcap_0(\gamma_*)$;

For $t = 1, \dots, T$
- Сэмплируем γ_t из $\sqcap_{t-1}$;
- Используя прогноз спроса получаем $f_{i,t}$ для всех $i \in \mathbb{B}$;
- Решаем оптимизационную задачу $p_t = argmax_p \sum\limits_{i\in\mathbb{B}} \dfrac{p_i^2 f_{i,t}\gamma_{*,i}}{p_{i,t-1}} - p_i f_{i,t}\gamma_{*,i} + p_i f_{i,t;}$
- Применяем цену p_t, получаем выигрыш R_t;
- Изменяем распределение $\sqcap_t(\gamma_*)$ по формуле, приведенной выше.

End for

Теорема: Пусть γ_* - истинный вектор эластичностей. Тогда $||\mathbb{E}(\gamma_* - \mu_t)|| \to 0$, при $t \to +\infty$.
Доказательство:

$\Sigma_t^{-1} = \Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{t} \dfrac{\theta_i\theta_i^T}{\sigma^2};$

Рассмотрим такой раунд τ, что матрица $\Sigma_\tau^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{\tau} \dfrac{\theta_i\theta_i^T}{\sigma^2}$ невырождена.

Тогда $\forall\ t > \tau \hookrightarrow$:

$\mathbb{E}(\gamma_* - \mu_t) = \gamma_* - \mathbb{E}[\mu_t] = \gamma_* - \mathbb{E}\big[\big(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\big)^{-1}\big(\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} + \dfrac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2}\theta_t\big)\big] =$

$= \gamma_* - \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\big)^{-1}\big(\Sigma_{t-1}^{-1}\mathbb{E}[\mu_{t-1}] + \dfrac{\theta_t}{\sigma^2}\mathbb{E}[R_t] - \dfrac{\bar{R}_t\theta_t}{\sigma^2}\big) =$

$= \gamma_* - \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2} + \lambda I\big)^{-1}\big(\Sigma_{t-1}^{-1}\mathbb{E}[\mu_{t-1}] + \dfrac{\theta_t}{\sigma^2}(\theta_t^T\gamma_* + \bar{R}_t - \bar{R}_t)\big) =$

$= \gamma_* - \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}\big)^{-1}\big(\big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}\big)\gamma_* + \Sigma_{t-1}^{-1}\big(\mathbb{E}[\mu_{t-1}] - \gamma_*\big)\big) =$

$= \gamma_* - \gamma_* - \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}\big)^{-1}\Sigma_{t-1}^{-1}\big(\mathbb{E}[\mu_{t-1}] - \gamma_*\big)\big) =$

$= -\big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}\big)^{-1}\Sigma_{t-1}^{-1}\big(\mathbb{E}[\mu_{t-1}] - \gamma_*\big)\big) = \big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}\big)^{-1}\Sigma_{t-1}^{-1}\big(\gamma_* - \mathbb{E}[\mu_{t-1}]\big)\big).$

$\big(\Sigma_{t-1}^{-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}\big)^{-1}\Sigma_{t-1}^{-1} = \big(\sum\limits_{i=1}^{t} \dfrac{\theta_i\theta_i^T}{\sigma^2}\big)^{-1} \sum\limits_{i=1}^{t-1} \dfrac{\theta_i\theta_i^T}{\sigma^2} = \big(\sum\limits_{i=1}^{t} \theta_i\theta_i^T\big)^{-1} \sum\limits_{i=1}^{t-1} \theta_i\theta_i^T.$

Обозначим $x_t = \gamma_* - \mathbb{E}[\mu_t],\ x_{t-1} = \gamma_* - \mathbb{E}[\mu_{t-1}],\ A_t = \sum\limits_{i=1}^{t} \theta_i\theta_i^T,\ A_{t-1} = \sum\limits_{i=1}^{t-1} \theta_i\theta_i^T.$

Тогда $x_t = A_t^{-1}A_{t-1}x_{t-1} \Rightarrow A_t x_t = A_{t-1}x_{t-1}$

$c = ||A_t x_t|| \geqslant \lambda_{min}^{(t)}||x_t||$, где $\lambda_{min}^{(t)}$ - минимальное собственное число матрицы A_t, c - константа $\Rightarrow$

$$||x_t|| \leqslant \frac{c}{\lambda_{min}^{(t)}}. \tag{4}$$

$A_t = A_{t-1} + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2};$

$\forall\ x:\ ||x|| = 1 \hookrightarrow\ A_t x = A_{t-1}x + \dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}x.$

Рассмотрим скалярное произведение $x^T A_t x$:

$x^T A_t x = x^T A_{t-1}x + x^T\dfrac{\theta_t\theta_t^T}{\sigma^2}x \geqslant \lambda_{min}^{(t-1)} + \dfrac{(\theta_t^T x)^2}{\sigma^2}\ \Rightarrow$

$||A_t x|| \geqslant x^T A_t x \geqslant \lambda_{min}^{(t-1)} \quad \forall\ x:\ ||x|| = 1\ \Rightarrow$

$$\lambda_{min}^{(t)} \geqslant \lambda_{min}^{(t-1)}, \tag{5}$$

причем равенство достигается только в случае, когда вектор θ_t перпендикулярен $x_{min}^{(t-1)}$ - собственному вектору матрицы A_{t-1}, соответствующему собственному числу $\lambda_{min}^{(t-1)}$.

Тогда в силу (4), (5) получаем, что $\lambda_{min}^{(t)} \to +\infty$ при $t \to +\infty\ \Rightarrow ||x_t|| = ||\gamma_* - \mathbb{E}[\mu_t]|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

$\square$.