Динамическое ценообразование с помощью Томсоновского Сэмплирования

Александра Харь

Московский физико-технический институт
Факультет управлени и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель д.ф.-м.н. В. В. Стрижов, Ю.В. Дорн

Дано:

- $\mathcal{B}$ ($|\mathcal{B}| = n$) - множество товаров;
- Период времени T - горизонт планирования;
- $\{\mathcal{J}_t\}_{t=1}^{T}$ - история заказов, где $\mathcal{J}_t = \{(d_{i,t}, p_{i,t})\}_{i \in \mathcal{B}}$, $d_{i,t}$ - количество товара i купленное период времени t по цене $p_{i,t}$.

Фактический *агрегированный* спрос $d_{i,t}$ при цене $p_{i,t}$ можно считать i-й компонентой реализации случайной многозначной функции *агрегированного* спроса $\mathcal{D}_t(p_{1,t}, \dots, p_{n,t})$, которая нам неизвестна.

Задача: Построить алгоритм ценообразования, максимизирующий ожидаемый доход за период времени T.

Замечание: После каждой установки цен мы наблюдаем фактический спрос (покупки), эти наблюдения алгоритм может использовать во время работы.

Постановка задачи [уточнение]

Введем обозначения:

- $\mathrm{p}_t = (\mathrm{p}_{1,t}, \ldots, \mathrm{p}_{n,t})$ - вектор цен;
- $\mathrm{R}_t(\mathrm{p}_t) = \sum_{i \in \mathcal{B}} \mathcal{D}_{i,t}(\mathrm{p}_t) \cdot \mathrm{p}_{i,t}$ - случайная функция прибыли при ценах p_t;
- $\mathrm{p}^* = \underset{\mathrm{p}}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{ER}_t(\mathrm{p})$ - оптимальные постоянные цены при известном распределении $\mathcal{D}(\mathrm{p}_t)$.

Задача: Построить алгоритм подбора цен p_t, максимизирующий выражение:

$$\sum_{t=1}^{T} \mathrm{ER}_t(\mathrm{p}_t)$$

при условии, что распределение $\mathcal{D}(\mathrm{p}_t)$ изначально неизвестно.

Модель функции спроса

Функция $R_t(p_t)$ определяется вектором цен p_t и *неизвестной* функцией спроса $\mathcal{D}(p_t)$.
В нашем подходе предлагается на каждом этапе работы алгоритма строить *модель* функции спроса.

Модель функции спроса

Функция спроса на время t для товара i задается уравнением:

$$d_{i,t}(p_i) = f_{i,t}\left(\frac{p_i}{p_{i,t-1}}\right)^{\gamma_i^*}, \tag{1}$$

где $f_{i,t}$ - прогноз спроса для товара i на день t если цена на него $p_{i,t-1}$, $\gamma_i^* < 0$ – эластичность товара i.

Модель функции спроса

Функция $R_t(p_t)$ определяется вектором цен p_t и *неизвестной* функцией спроса $\mathcal{D}(p_t)$.

В нашем подходе предлагается на каждом этапе работы алгоритма строить *модель* функции спроса.

Модель функции спроса

Функция спроса на время t для товара i задается уравнением:

$$d_{i,t}(p_i) = f_{i,t}\left(\frac{p_i}{p_{i,t-1}}\right)^{\gamma_i^*}, \tag{1}$$

где $f_{i,t}$ - прогноз спроса для товара i на день t если цена на него $p_{i,t-1}$, $\gamma_i^* < 0$ – эластичность товара i.

Если $p_{i,t}$ близко к $p_{i,t-1}$, то можно произвести следующую аппроксимацию:

$$d_{i,t}(p_i) \approx f_{i,t} + (p_i - p_{i,t-1})\frac{f_{i,t}\gamma_i^*}{p_{i,t-1}}. \tag{2}$$

Постановка задачи

Оптимизационная задача

Прибыль от товара i из множества $\mathbb{B}$ может быть оценена следующим образом:

$$\text{Rev}_{i,t}(\text{p}_{i,t}) = \text{p}_{i,t} \times \text{d}_{i,t}(\text{p}_{i,t}) \approx \frac{\text{p}_{i,t}^2 \text{f}_{i,t} \gamma_i^*}{\text{p}_{i,t-1}} - \text{p}_{i,t}\text{f}_{i,t}\gamma_i^* + \text{p}_{i,t}\text{f}_{i,t}. \quad (3)$$

Пусть $\text{p} = [\text{p}_1, \text{p}_2, \ldots, \text{p}_n]$ – вектор цен на товары множества $\mathbb{B}$. Оптимизируем, используя оценку на величины γ_i^*, $\text{f}_{i,t}$:

$$\text{p}_t = \underset{\text{p}}{\operatorname{argmax}} \sum_{i \in \mathbb{B}} \frac{\text{p}_i^2 \text{f}_{i,t} \gamma_i^*}{\text{p}_{i,t-1}} - \text{p}_i \text{f}_{i,t} \gamma_i^* + \text{p}_i \text{f}_{i,t}. \quad (4)$$

Аппроксимация неизвестной функции спроса

На каждом шаге алгоритма для подсчета функции $\mathrm{Rev}_{i,t}(\mathrm{p}_{i,t})$ нам будет необходимо оценивать параметры:

1. параметр эластичности i-го товара γ_i^*;
2. прогноз спроса $\mathrm{f}_{i,t}$ на этот товар в момент времени t при некой фиксированной цене.

Методы оценивания параметров:

- Параметр эластичности $\gamma \Longrightarrow$ Томпсоновское сэмплирование,
- прогноз спроса $f_{i,t} \Longrightarrow$ модели для прогнозирования временных рядов ARIMA.

Оценка параметра

Оценка вектора эластичностей γ^*

$$\Pi_0(\gamma) = N(\gamma \mid \mu_0, \Sigma_0) \tag{5}$$

$$\Pi_t(\gamma) \propto \Pi_{t-1}(\gamma) N(R_t \mid Rev_t, \sigma^2) \propto N(\gamma \mid \mu_t, \Sigma_t), \tag{6}$$

Оценка вектора эластичностей γ^*

$$\Pi_0(\gamma) = N(\gamma \mid \mu_0, \Sigma_0) \tag{5}$$

$$\Pi_t(\gamma) \propto \Pi_{t-1}(\gamma) N(R_t \mid Rev_t, \sigma^2) \propto N(\gamma \mid \mu_t, \Sigma_t), \tag{6}$$

где $\mu_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1} \left(\Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} + \frac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2} \theta_t\right),$

Оценка вектора эластичностей γ^*

$$\Pi_0(\gamma) = N(\gamma \mid \mu_0, \Sigma_0) \tag{5}$$

$$\Pi_t(\gamma) \propto \Pi_{t-1}(\gamma) N(R_t \mid Rev_t, \sigma^2) \propto N(\gamma \mid \mu_t, \Sigma_t), \tag{6}$$

где $\mu_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1} \left(\Sigma_{t-1}^{-1} \mu_{t-1} + \frac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2} \theta_t\right)$,
$\Sigma_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1}$,

Оценка параметра

Оценка вектора эластичностей γ^*

$$\Pi_0(\gamma) = N(\gamma \mid \mu_0, \Sigma_0) \tag{5}$$

$$\Pi_t(\gamma) \propto \Pi_{t-1}(\gamma) N(R_t \mid Rev_t, \sigma^2) \propto N(\gamma \mid \mu_t, \Sigma_t), \tag{6}$$

где $\mu_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1} \left(\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} + \frac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2}\theta_t\right)$,

$\Sigma_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1}$,

$M_t^{-1} = \frac{\theta_t \theta_t^T}{\sigma^2} + \lambda I, \ \theta_{ti} = \frac{p_i^2 f_{i,t}}{p_{i,t-1}} - p_i f_{i,t}, \ \bar{R}_t = \sum_{i \in \mathbb{B}} p_i f_{i,t}$,

λ – небольшое число > 0, нужное для того, чтобы матрица была невырожденной.

Оценка параметра

Оценка вектора эластичностей γ^*

$$\Pi_0(\gamma) = N(\gamma \mid \mu_0, \Sigma_0) \tag{5}$$

$$\Pi_t(\gamma) \propto \Pi_{t-1}(\gamma) N(R_t \mid Rev_t, \sigma^2) \propto N(\gamma \mid \mu_t, \Sigma_t), \tag{6}$$

где $\mu_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1}\left(\Sigma_{t-1}^{-1}\mu_{t-1} + \dfrac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2}\theta_t\right),$

$\Sigma_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + M_t^{-1}\right)^{-1},$

$M_t^{-1} = \dfrac{\theta_t \theta_t^T}{\sigma^2} + \lambda I,\ \theta_{ti} = \dfrac{p_i^2 f_{i,t}}{p_{i,t-1}} - p_i f_{i,t},\ \bar{R}_t = \sum_{i \in \mathbb{B}} p_i f_{i,t},$

λ – небольшое число > 0, нужное для того, чтобы матрица была невырожденной.

Теорема (Харь, 2021):

Пусть γ^* – истинный вектор эластичностей.
Тогда $||\mathbb{E}(\gamma^* - \mu_t)|| \to 0$, при $t \to +\infty$.

Алгоритм

Алгоритм Max-Rev-TS

input Множество товаров $\mathbb{B}$, период времени T.

• Инициализируется априорное $\Pi_0(\gamma) = N(\gamma \mid \mu_0, \Sigma_0)$;

For $t = 1, \ldots, T$

- Сэмплируем γ_t из Π_{t-1};
- Используя прогноз спроса, получаем $f_{i,t}$ $\forall i \in \mathbb{B}$;
- Решаем оптимизационную задачу:

$$\mathsf{p}_t = \operatorname*{argmax}_{\mathsf{p}} \sum_{i \in \mathbb{B}} \frac{\mathsf{p}_i^2 \mathsf{f}_{i,t} \gamma_{i,t}}{\mathsf{p}_{i,t-1}} - \mathsf{p}_i \mathsf{f}_{i,t} \gamma_{i,t} + \mathsf{p}_i \mathsf{f}_{i,t},$$ получаем p_t;

- Применяем цену p_t, получаем выигрыш $\mathsf{R}_t(\mathsf{p}_t)$;
- Изменяем распределение $\Pi_t(\gamma)$ по формуле (6), используя полученное значение $\mathsf{R}_t(\mathsf{p}_t)$.

Список литературы

- Ravi Ganti, Matyas Sustik, Quoc Tran, and Brian Seaman. Thompson Sampling for Dynamic Pricing, 2018.
- Keskin N Bora Harrison, J Michael and Assaf Zeevi. Bayesian dynamic pricing poli- cies: Learning and earning under a binary prior distribution.Management Science, 58(3):570–586, 2012.
- Kalyan T Talluri and Garrett J Van Ryzin. The theory and practice of revenue management.71 Springer Science Business Media, 68, 2006.