Пространство параметров модели для аппроксимация фазовой траектории

М. Е. Христолюбов

khristolyubov@phystech.edu

Научный руководитель: д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

strijov@phystech.edu

Москва, Московский физико-технический институт

Москва 2022

Цель: аппроксимация фазовой траектории временного ряда

Проблема

Временные ряды — объекты сложной структуры, неизвестна размерность многообразия фазовой траектории.

Метод решения

Устанавливается связь между фазовой траекторией и многообразием. С помощью математического понятия согласованного атласа для многообразия вводится определение согласованного атласа моделей для фазовой траектории. Предлагается метод построения атласа и способ проверки атласа на гладкую согласованность.

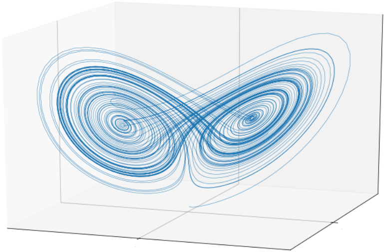
Основная литература

- Исаченко Р.В., Стрижов В.В. *Снижение размерности пространства в задачах декодирования сигналов*. 2021.
- F. Takens *Detecting strange attractors in turbulence*. 1981.
- Albert Gu, Karan Goel, Christopher R'e *Efficiently Modeling Long Sequences with Structured State Spaces* 2021
- А.В. Чернавский *Многообразия*. 2010.

Фазовая траектория и модель временного ряда

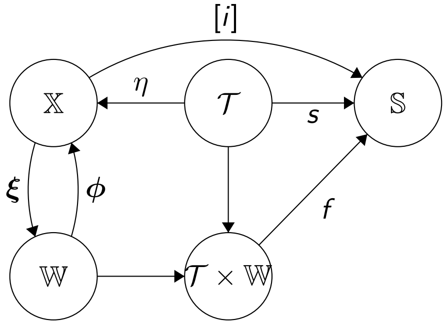
- Точка фазовой траектории ряда $[s(t_1), \dots s(t_m)], t_i \in \mathcal{T}, s(t_1) \in \mathbb{S}$ в момент времени t_i является предысторией длины N временного ряда:
$$\mathbf{x}_i^{(N)} = \boldsymbol{\eta}(t_i) = [s_{i-N+1}, \dots, s_i] \in \mathbb{X}.$$
- Модель временного ряда — это параметризованная скалярная функция $f(t, \mathbf{w})$. Существует значения параметра $\mathbf{w}_0$ минимизирующее $L(\mathbf{x}, f(t, \mathbf{w}))$, такое что ряд $[f(t_i, \mathbf{w}_0)]_{i-N+1}^{i}$ аппроксимирует исходный ряд $[x_i]_{i-N+1}^{i}$.

M



Фазовая траектория, состоящая из предысторий в каждый момент времени $\mathbf{x}_i^{(N)} = [s_{i-N+1}, \dots, s_i]$

Латентное представление фазовой траектории



Отображение $\phi : \mathbb{W} \to \mathbb{X}$ восстанавливает точки фазовой траектории из скрытого пространства:

$$\phi(\mathbf{w}) = [f(t_i, \mathbf{w})]_{i=0}^{N}$$

Отображение $\xi : \mathbb{X} \to \mathbb{W}$ называется вложением в скрытое пространство:

$$\xi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{w})).$$

Аппроксимацией точки $\mathbf{x}$ фазовой траектории называется композиция $\xi \circ \phi$ вложения точки фазовой траектории в скрытое пространство $\xi : \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{W}$ и восстановления $\phi : \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{X}$.

Многообразие, аппроксимирующее фазовую траекторию

- Гладким n-мерным многообразием M называется множество, для которого задана система подмножеств X_i и взаимно однозначные отображения на них $\phi_i : W_i \to X_i$ открытых подмножеств W_i аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, причем 1) $M = \cup X_i$, 2) для каждой пары ϕ_i, ϕ_j прообразы $X_i \cap X_j$ — множества

$$W_{ij} = \phi_i^{-1}(X_i \cap X_j) \text{ и } W_{ji} = \phi_j^{-1}(X_i \cap X_j) \text{ открытые,}$$

  3) $\phi_{ij} = \phi_j^{-1} \circ \phi_i$ — диффеоморфизм $W_{ij} = \phi_i^{-1}(X_i \cap X_j)$ на $W_{ji} = \phi_j^{-1}(X_i \cap X_j)$.
- Взаимнооднозначное отображение: $\phi : W \to X$, $X \subset M$, называется локальной параметризацией, картой или локальной координатной системой. Две карты гладко согласованны, если для них выполнено условие 3).
- Совокупность карт $\{\phi_i\}$ называется атласом, если области X_i покрывают M. Если выполнены три условия определения 3, то говорят, что данный атлас является гладко согласованным.

Согласованность атласа

- **Теорема**. Дана функция

$$\xi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{w}} L\left(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{w})\right).$$

  Если $L(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{w}))$ — выпуклая функция, а $\phi(\mathbf{w})$ — линейная функция, тогда $\xi(\mathbf{x})$ — гладко дифференцируемая функция.
- Таким образом, в модели ARIMA ξ является гладко дифференцируемой в соответствии с доказанной теоремой, так как L — квадратичная функция ошибки, а f линейно зависит от своих параметров.

Модели аппроксимаций физической активности

- Анализ сингулярного спектра Гусеница:

$$\mathbf{X}_i^{(N)} = \mathbf{U}(\mathbf{h})\mathbf{V} = \sum_{j=1}^{N/2} h_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^{\mathsf{T}}. \tag{1}$$

- Автоэнкодер LSTM:

$$\mathbf{f}_t = \sigma_g(\mathbf{W}_f \mathbf{x}_t + \mathbf{U}_f \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_f)$$

$$\mathbf{i}_t = \sigma_g(\mathbf{W}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{U}_i \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_i), \qquad \mathbf{o}_t = \sigma_g(\mathbf{W}_o \mathbf{x}_t + \mathbf{U}_o \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_o)$$

$$\mathbf{c}_t = \mathbf{f}_t \circ \mathbf{c}_{t-1} + \mathbf{i}_t \circ \sigma_c(\mathbf{W}_c \mathbf{x}_t + \mathbf{U}_c \mathbf{h}_{t-1} + \mathbf{b}_c), \qquad \mathbf{h}_t = \mathbf{o}_t \circ \sigma_h(\mathbf{c}_t).$$

- Нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s(t), w)dt.$$

- Модель S4.

Модель S4

Модель S4 задается системой уравнений, $s(t_0), y(t_0) \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{w}(t_0) \in \mathbb{R}^h$:

$$\boldsymbol{w}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}s(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{D}s(t).$$

Матрица $\mathbf{A}$ иницилизируется следующим образом:

$$A_{nk} = -\begin{cases} (2n+1)^{\frac{1}{2}}(2k+1)^{\frac{1}{2}} & \text{при } n > k, \\ n+1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n < k, \end{cases}$$

и представляется в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^* - \mathbf{PQ}^*,$$

где $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{h\times h}$, $\mathbf{\Lambda}$ диагональная и $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{h\times 1}$. Обучаемые параметры модели - диагонаяльная матрица $\mathbf{\Lambda}$ и векторы $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

Сравнение моделей аппроксимации

В вычислительном эксперименте сравниваются качество аппроксимации и липшицевость отображения в пространство параметров моделей.

Синтетическая выборка:

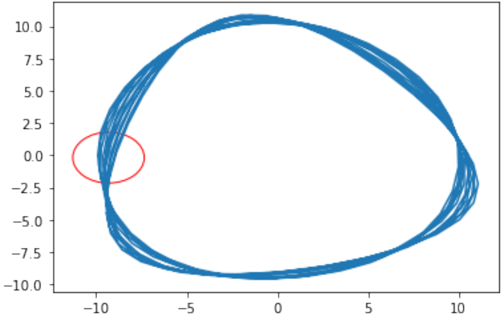
Модель	Std	Размерность СП	MeanStabError	MaxStabError	max L
SSA	**2.12**	2	2.06	3.98	**0.35**
LSTM	4.21	2	1.80	3.63	0.51
S4	3.93	2	**1.20**	**3.52**	0.44

Данные акселерометра мобильного устройства:

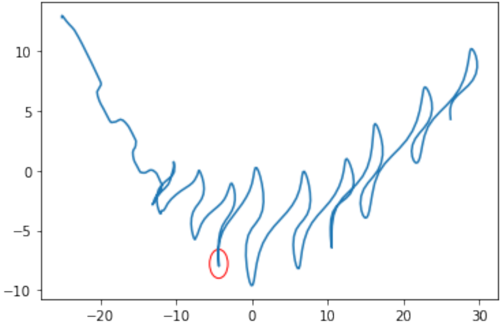
Модель	Std	Размерность СП	MeanStabError	MaxStabError	max L
SSA	**30.0**	10	**1.80**	**5.22**	**0.64**
LSTM	44.2	10	3.08	7,88	1,04
S4	33.1	10	2,14	6,33	0,98

Визуализация липшицевости отображения в пространство параметров

Представление фазовой траектории в пространстве параметров модели изменяется непрерывно:



Фазовая траектория



Траектория в пространстве параметров

Результаты, выносимые на защиту

- Показано, что для фазовой траектории временного ряда применима математическая теория многообразий.
- Предложен метод построения атласа многообразия фазовой траектории ряда.
- Проведено сравнение моделей аппроксимации.
- Проведен эксперимент по проверке атласа на согласованность.