# Спектральный анализ в классификации временных рядов*

***Максим Христолюбов, В. В. Стрижов***

Московский физико-технический институт

В работе решается задача классификации моментов временных рядов на пересекающиеся классы. По временным рядам, снятых с показаний акселлерометра, определяется движение, совершаемое человеком. Исследуется возможность декомпозиции сложных движений на элементарные действия. Для порождения информативных признаков, в пространстве которых происходит классификация и декомпозиция, используется алгоритм SSA "Гусеница".

**Ключевые слова**: *временной ряд; классификация; SSA "Гусеница"; локально-аппроксимирующая модель, порождение признаков*

## 1 Введение

Временные ряды являются объектами сложной структуры, требующие предварительной обработки и представления их в удобном для классификации виде. Необходимо отобразить исходный временной ряд в пространство признаков. Например, в [3] временной ряд аппроксимируется моделью авторегрессии, а признаками являются ее параметры. В [**?**] качестве аппроксимирующей модели используется модель сингулярного спектра, а признаками являются $k$ наибольших собственных чисел траекторной матрицы участка временного ряда.

В статье изучается задача классификации движений человека по временным рядам и декомпозиция его движений на элементарные действия. В работе исследуется признаковое описание временных моментов ряда. В качестве признаков для классификации используются собственные числа траекторной матрицы участка ряда, предшествующего моменту времени. Новизна подхода заключается в том, чтобы не просто брать несколько наибольших собственных чисел траекторной матрицы, а учитывать частоты, которым соответствуют эти собственные числа, при классификации. На основе спектрального разложения производится построение пространства описаний элементарных действий.

## 2 Постановка задачи

Задан исходный временной ряд $\mathbf{d} = \{d_i\}_{i=1}^{M} \in \mathbb{R}^M$. Каждому моменту времени $d_i$ соответствует множество меток классов $\mathbf{y}_i \subset 2^Y$, где $Y$ — множество меток классов. Считается, что каждое движение человека представляется, как сумма периодических рядов, причем известен максимальный период $T$.

Требуется решить задачу классификации точек ряда:

$$R : \mathcal{I} \to 2^Y,$$

где $\mathcal{I} = \{1, \dots M\}$ — моменты времени, на котором задан временной ряд, а $Y$ — множество меток классов.

Каждый классифицируемый момент времени $i \in \{2T, \dots M\} \subset \mathcal{I}$, отобразим с помощью $: \mathcal{I} \to \mathbb{R}^{2T}$ в временной сегмент $\mathbf{x}_i$ длины $2T$, содержащий локальную информацию о поведении ряда:

$$(i) = \mathbf{x}_i = \{d_k\}_{k=i-2T+1}^{i}. \tag{1}$$

---

*

Полученные сегменты $\mathbf{x} \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^{2T}$ — объекты сложной структуры, представленные временными рядами. Рассматривается задача классификации, а именно восстановление зависимости

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{y} \in 2^Y$. Тогда исходная задача классификации представляет собой $R = f\circ$.

Данная постановка задачи естественным образом обобщается на случай, когда движения человека описываются $S$ временными рядами с общими моментами времени $\mathcal{I}$. Этот случай отличается только тем, что компонентами временного ряда $\mathbf{x}_i$ являются векторы $\{x_i^{(s)}\}_{s=1}^S$

Классификация временных рядов $\mathbf{x}$ производится в пространстве признаков, порожденных с помощью алгоритма многомерной "Гусеницы" MSSA-L. Задача алгоритма MSSA-L состоит в представлении временного ряда в виде суммы интерпретируемых компонент. Поставим в соответствие временному ряду $\mathbf{x}$ его траекторную матрицу Ганкеля $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{T \times ST}$:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \ldots, \mathbf{X_S}], \tag{2}$$

где $T$ — ширина окна, $\mathbf{X_s} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ — матрица Ганкеля для ряда $\mathbf{x}^{(s)}$

$$\mathbf{X^{(s)}} = \begin{pmatrix} x_1^{(s)} & x_2^{(s)} & \ldots & x_T^{(s)} \\ x_2^{(s)} & x_3^{(s)} & \ldots & x_{T+1}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_T^{(s)} & x_{T+1}^{(s)} & \vdots & x_{2T}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Ее сингулярное разложение

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}\,(\mathbf{h})\mathbf{V} = \sum_{j=1}^{T} h_j \mathbf{u_j} \mathbf{v_j^{\mathsf{T}}}, \tag{3}$$

где $h_1 \ldots h_T$ — сингулярные числа матрицы $\mathbf{X}$, которые будут использоваться как признаковое описание временного ряда $\mathbf{x}$.

По каждой компоненте $h_j$ в сингулярном разложении определяется ее период $\varphi \in \mathbb{R}$:

TODO

Таким образом, каждому временному ряду $\mathbf{x}$ сопоставляется вектор

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_\varphi\}_{\varphi \in \Phi} \in \mathbb{H}$$

, где $\Phi$ — множество всех периодов компонент $\Phi = \{\varphi \mid \exists i \in \{2T, \ldots M\} \subset \mathcal{I}\, \exists j \in \{1, \ldots T\} :$ $\varphi$ — период компоненты $h_j(x_i)\}$

В качестве гипетезы порождения данных рассматривается следующее предположение: каждой метке класса $y \in Y$ соответствует вектор $\mathbf{h}_y \in \mathbb{H}$, а признаки временного ряда $\mathbf{x}$ представляются как сумма

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{y \in f(x)} \mathbf{h}_y + \varepsilon, \quad \varepsilon = N(0, \sigma^2 I_{|Phi|})$$

.

Составим из $\mathbf{h}_y$ матрицу $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_{y_1}, \ldots \mathbf{h}_{y_{|Y|}})$, тогда гипотеза переформулируется в виде

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{y}.$$

Искомая функция $f$ запишется в виде $f(x, H) = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{x})$

Пусть после вышеописанных преобразований моментов временного ряда $i \in \mathcal{I}$ получена выборка $\mathfrak{D} = \{(\mathbf{h}_i, \mathbf{y}_i)\}_{i=2T}^{M}$. Задача состоит в нахождении функции матрицы $H$, минимизирующие суммарные потери на выборке $\mathfrak{D}$, при заданной функция потерь вида

$$\mathscr{L}(\mathfrak{D}, \mathbf{H}) = \sum_{i=2T}^{M} \mathscr{L}(\mathbf{h}_i, \mathbf{H}\mathbf{y}_i)$$

, характеризующей суммарную ошибку классификации на элементах выборки $\mathfrak{D}$.

В качестве базовой функции для минимизации рассматривается Средне Квадратичная Ошибка $\mathscr{L} = MSE$.

## 3 Вычислительный эксперимент

## References


[1] McNames J.. 1999. Innovations in local modeling for time series prediction // *Ph.D. Thesis, Stanford University*

[2] Zhuravlev U.I, Ryazanov V. V., Senko O. V.. 2005. Recognition. Mathematical methods. Software system. Practical applications. // *Fazis, Moscow*

[3] N. P. Ivkin, M. P. Kuznetsov. 2015. Time series classification algorithm using combined feature description. *Machine Learning and Data Analysis* (11):1471–1483.

[4] Strijov V.V., Motrenko A.P.. 2016. Extracting fundamental periods to segment human motion time series. *Journal of Biomedical and Health Informatics* 20(6):1466 – 1476.

[5] Grabovoy A.V., Strijov V.V. 2020. Quasiperiodic time series clustering for human activity recognition *Lobachevskii Journal of Mathematics*


*Received*