Дифференцируемый алгоритм поиска архитектуры с контролем сложности

М. Е. Христолюбов   В. В. Стрижов

khristolyubov@phystech.edu, strijov@phystech.edu

Москва, Московский физико-технический институт

Москва 2022

Цель исследования

Цель

Построить гладко согласованный атлас для фазовой траектории временного ряда

Проблема

Для фазовой траектории не определено понятия согласованного атласа, отсутствует метод его построения и способ проверки атласа на согласованность.

Метод решения

Устанавливается связь между фазовой траекторией и многообразием. С помощью математического понятия согласованного атласа для многообразия вводится определение согласованного атласа моделей для фазовой траектории. Предлагается метод построения атласа и способ проверки атласа на гладкую согласованность.

Основная литература

- Исаченко Р.В., Стрижов В.В. *Снижение размерности пространства в задачах декодирования сигналов*. 2021.
- F. Takens *Detecting strange attractors in turbulence*. 1981.
- Albert Gu, Karan Goel, Christopher R'e *Efficiently Modeling Long Sequences with Structured State Spaces* 2021
- А.В. Чернавский *Часть первая. Многообразия*. 2010.

Теневая фазовая траектория

- Доступ к фазовой траектории динамической системы отсутствует, вместо нее работают с фазовой траекторией ряда. Точка фазовой траектории ряда $[s_1, \ldots s_m]$ в момент времени i является предысторией ряда длины N:

$$\mathbf{x}_i^{(N)} = \eta(s_i).$$

  В данном случае $\mathbf{x}_i^{(N)}$ — точки фазовой траектории

$$\mathbf{x}_i^{(N)} = \eta(s_i) = [s_{i-N+1}, \ldots, s_i].$$

- Локальная параметризация многообразия M размерности n в окрестности $X(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$ — это взаимнооднозначное отображение ϕ подмножества $W \in \mathbb{R}^n$ в $X(\mathbf{x})$.

Многообразие

Гладким n-мерным многообразием M называется множество, для которого задана система подмножеств X_i и взаимно однозначные отображения на них $\phi_i : W_i \to X_i$ открытых подмножеств W_i аффинного пространства $\mathbb{R}^n$, причем

- $M = \cup X_i$,
- Для каждой пары ϕ_i, ϕ_j прообразы пересечения $X_i \cap X_j$ — множества

  $$W_{ij} = \phi_i^{-1}(X_i \cap X_j) \text{ и } W_{ji} = \phi_j^{-1}(X_i \cap X_j)$$

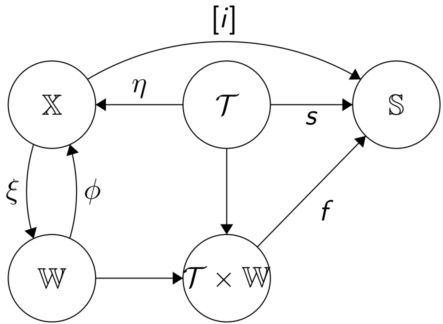
  являются открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$,
- $\phi_{ij} = \phi_j^{-1}\phi_i$ есть диффеоморфизм

  $$W_{ij} = \phi_i^{-1}(X_i \cap X_j) \text{ на } W_{ji} = \phi_j^{-1}(X_i \cap X_j).$$

Карты и атлас

- Взаимнооднозначное отображение: $\phi : W \to X$, где W — область в $\mathbb{R}^n$, $X \subset M$, называется в общем случае локальной параметризацией, также картой многообразия M или локальной координатной системой. Две карты называются гладко согласованными, если для них выполнено условие 3) определения 3.
- Совокупность карт ϕ_i называется атласом, если области X_i покрывают M. Если выполнены три условия определения 3, то говорят, что данный атлас является гладко согласованным и определяет в M структуру гладкого многообразия.

Алгоритм аппроксимации



Аппроксимацией точки **x** фазовой траектории называется композиция $\xi \circ \phi$ вложения точки фазовой траектории в скрытое пространство $\xi : \mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{W}$ и восстановления $\phi : \mathbb{W} \hookrightarrow \mathbb{X}$.

Модели аппроксимации как карты многообразия фазовой траектории

- Каждая точка $\mathbf{w}_i$ скрытого пространства восстанавливает точку фазовой траектории $\hat{\mathbf{x}}_i = [f(t_j, \mathbf{w}_i)]_{j=0}^{N}$. Тогда из соображений непрерывности данная функция восстановления обобщается на окрестность W_i точки w_i и строится $\phi_i : W_i \hookrightarrow X_i$ так, что для всех $\mathbf{w} \in W_i$ выполнено

$$\phi_i(\mathbf{w}) = \hat{\mathbf{x}}_i$$

.

- Таким образом из алгоритма аппроксимации естественным образом возникает система отображений

$$\phi_i : W_i \to X_i \text{ и обратных отображений } \phi_i^{-1} = \xi_i : X_i \hookrightarrow W_i$$

Согласованность атласа

- Пусть дана функция
$$\xi(\mathbf{x}) = \arg\min_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{w})).$$
Если $L(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{w}))$ — выпуклая функция, а $\phi(\mathbf{w})$ — линейная функция, тогда $\xi(\mathbf{x})$ — гладко дифференцируемая функция.
- Таким образом, в модели ARIMA ξ является гладко дифференцируемой в соответствии с доказанной теоремой, так как L — квадратичная функция ошибки, а f линейно зависит от своих параметров.

Постановка вычислительного эксперимента

- Цель эксперимента – сравнить модели аппроксимации и убедиться, что атлас гладко согласован.
- Вычислительный эксперимент проводится на синтетической выборке и данных акселерометра мобильного устройства. Сравнивается качество аппроксимации и липшицевость отображения в пространство параметров моделей.

Результаты вычислительного эксперимента

- Результаты моделей аппроксимации на синтетической выборке:

Модель	Std	Размерность СП	MeanStabError	MaxStabError	max L
SSA	2.12	2	2.06	3.98	0.35
LSTM	4.21	2	1.80	3.63	0.51
S4	3.93	2	1.20	3.52	0.44

- Результаты моделей аппроксимации на данных акселерометра мобильного устройства:

Модель	Std	Размерность СП	MeanStabError	MaxStabError	max L
SSA	30.0	10	1.80	5.22	0.64
LSTM	44.2	10	3.08	7,88	1,04
S4	33.1	10	2,14	6,33	0,98

Визуализация липшицевости отображения в пространство параметров модели

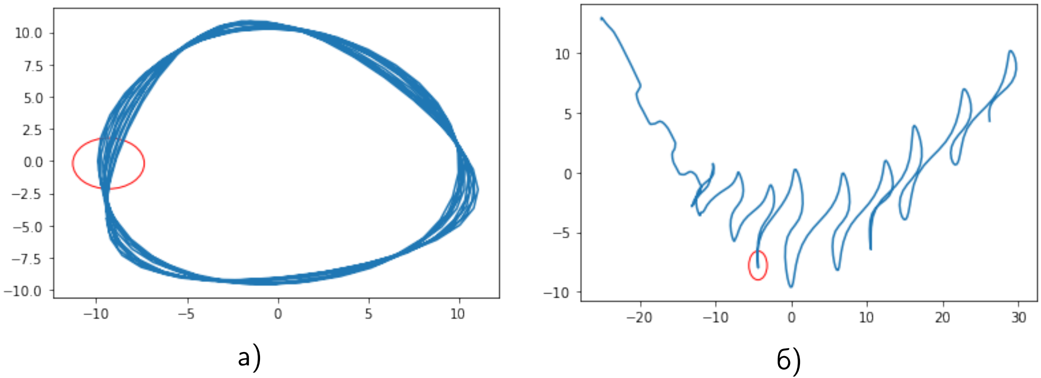


Рис.: Фазовая траектория и траектория в пространстве параметров модели

Заключение

- Введено понятие атласа для набора моделей аппроксимации фазовой траектории.
- Предложен метод, построения атласа многообразия фазовой траектории ряда.
- Проведен эксперимент по проверке атласа на согласованность.