«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

Курдюкова Антонина Дмитриевна

Снижение размерности фазового пространства в задачах канонического корреляционного анализа

03.03.01 – Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович

Москва

2022

Содержание

Аннотация

Данная работа посвящена задаче снижения размерности фазового пространства методами канонического корреляционного анализа. Исследуется связь между методом канонического корреляционного анализа и методом сходящихся перекрестных отображений Сугихары. Вид прогностических моделей представим в виде условия принадлежности двух аттракторов, восстанавливаемых в исходном и целевом фазовых пространствах, к общей динамической системе. В работе рассмотрены методы PLS-CCA, нелинейный метод CCA, seq2seq, Neural ODE. Сформулирован вариант теоремы о вложениях Такенса для проверки того, что метод канонического корреляционного анализа или другой метод прогноза удовлетворяет условиям Сугихары. Решается прикладная задача в теоретической постановке. Рассматривается видеоряд ходьбы человека с акселерометром на руке.

Ключевые слова: *снижение размерности, фазовое пространство, аттрактор, CCM, теорема Такенса о вложениях*

1 Введение

1.1 Введение

В работе рассматривается задача снижения размерности фазового пространства. Исследуется связь между методами корреляционного анализа и методом сходящихся перекрестных отображений (convergent cross mapping, CCM) [1, 2]. Для CCM нет способа выбора собственного подпространства, в котором аппроксимируется многообразие компакта и работает прогностическая модель. На текущий момент выбор собственного пространства осуществляется перебором по главным компонентам, например в [3]. Работа Исаченко [..] по PLS дает возможность перенести методы выбора подпространства с PLS на CCM.

Определение 1 *Динамическая система – множество элементов, для которого задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы*

Динамическая система представляет собой такую математическую модель некоего объекта, процесса или явления, в которой пренебрегают «флуктуациями и всеми другими статистическими явлениям».

Определение 2 *Многообразие – хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству* $\mathbb{R}^n$

2 Теоретическая часть

Пусть $s_1 = \{s_i^1\}_{i=1}^{N_1}$ и $s_2 = \{s_i^2\}_{i=1}^{N_2}$ — заданные временные ряды. Опишем, как строится фазовое пространства временного ряда. Строится ганкелева матрица для ряда s:

$$\mathbf{H_1} = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_{n1} \\ s_2 & \dots & s_{n_1+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k_1} & \dots & s_{N_1} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \left[\mathbf{s}_1^1, \mathbf{s}_2^1, \dots, \mathbf{s}_k^1\right], \quad k_1 = N_1 - n_1 + 1,$$

где n – ширина окна. Аналогично для временного ряда s_2. Тогда вектора $\mathbf{s}_1^1, \mathbf{s}_2^1, \dots, \mathbf{s}_k^1$ образуют фазовую траекторию, или, иными словами, аттрактор $\mathbf{M}_1$ временного ряда s_1. На эти же вектора натянуто фазовое пространство размерности n_1 временного ряда s_1.

Определение 3 *Фазовое пространство динамической системы – совокупность всех допустимых состояний динамической системы.*

Определение 4 *Траектория динамической системы в фазовом пространстве – последовательность состояний*

Определение 5 *Аттрактор – компактное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.*

2.1 Метод сходящихся перекрестных отображений

Метод сходящихся перекрестных отображений (convergent cross mapping, CMM) используется для исследования временных рядов на нналичие причинно–следственной связи. Корелляция не подразумевает причинно–следственную связь между рядами. Метод основан на теореме Такенса о вложениях. В общем случае многообразие аттрактора динамической системы может быть восстановлено по одной наблюдаемой $\mathbf{X}$.

Согласно методу временной ряд s_1 может быть восстановлен по ряду s_2 только если временной ряд s_2 связан с рядом s_1. Временные ряды считаются связанными, если окрестность фазовой траектории $\mathbf{x}$ временного ряда s_1 взаимно однозначно отображается в окрестность фазовой траектории $\mathbf{y}$ ряда s_2. Иными словами,

Определение 6 *Аттракторы* $\mathbf{M}_1$ *и* $\mathbf{M}_2$ *наблюдаемых* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$, *если* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *принадлежат одной динамической системе.*

2.2 Метод проекций на латентные структуры

Метод проекций на латентные структуры PLS [4, 5] используют для нахождения фундаментальных зависимостей между двумя матрицами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Отбираются наиболее значимые прихнаки. Новые признаки являются их линейными комбинациями. Осуществляется переход в фазовое пространство меньшей размерности. Метод PLS позволяет найти фазовое подпространство, в котором наблюдается связь между главными компонентами исходных временных рядов. Это позволяет исследовать наличие связи между временными рядами.

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ — матрицы двух фазовых пространств, построенных по временному ряду $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ соответственно. Требуется построить прогноз временного ряда $\mathbf{s}_2$ с учетом связи с временным рядом $\mathbf{s}_1$. Предполагается линейная зависимость между строками $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^r,\ \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где $\mathbf{\Theta}$ — матрица весов линейной зависимости, ε — вектор ошибок.

Ошибка вычисляется по формуле:

$$S(\mathbf{\Theta}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{\Theta}\|_2^2 \tag{2}$$

Алгоритм PLS находит матрицы $\mathbf{T}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$, с помощью которых осуществляется переход в латентное пространство согласно формулам:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} + \mathbf{F} \tag{3}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} + \mathbf{E} \tag{4}$$

Матрица $\mathbf{T}$ наилучшим образом описывает $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Ее столбцы ортогональны. Матрицами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ определяется переход из латентного пространства в исходное. Матрицы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — матрицы невязок.

Алгоритм PLS также позволяет определить матрицу $\mathbf{W}$, с помощью которой рассчитывается матрица весов $\mathbf{\Theta}$:

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{W}(\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \tag{5}$$

2.3 Постановка задачи

Теорема 1

Лемма 2

Доказательство.

■

3 Результаты экспериментов

3.1 Вычислительный эксперимент

4 Заключение

Список литературы

[1] George Sugihara and Robert M May. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, 344(6268):734–741, 1990.

[2] George Sugihara, Robert May, Hao Ye, Chih-hao Hsieh, Ethan Deyle, Michael Fogarty, and Stephan Munch. Detecting causality in complex ecosystems. *science*, 338(6106):496–500, 2012.

[3] Карина Равилевна Усманова and Вадим Викторович Стрижов. Модели обнаружения зависимостей во временных рядах в задачах построения прогностических моделей. *Системы и средства информатики*, 29(2):12–30, 2019.

[4] Paul Geladi. Notes on the history and nature of partial least squares (pls) modelling. *Journal of Chemometrics*, 2(4):231–246, 1988.

[5] Agnar Höskuldsson. Pls regression methods. *Journal of chemometrics*, 2(3):211–228, 1988.