

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

Курдюкова Антонина Дмитриевна

Снижение размерности фазового пространства в задачах канонического корреляционного анализа

03.03.01 – Прикладные математика и физика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович

Москва

2022

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи прогнозирования сигнала	7
3	Построение прогноза временных рядов	7
3.1	Теорема Такенса о вложениях	9
3.2	Метод сходящегося перекрестного отображения	10
3.3	Метод проекций на латентные структуры	12
4	Вычислительный эксперимент по анализу гипотезы	14
5	Заключение	22
	Литература	23
	Список основных обозначений	25

Аннотация

Данная работа посвящена решению задачи декодирования сигналов и методам сходящегося перекрестного отображения Сугихары. Метод сходящегося перекрестного отображения используется для исследования временных рядов на наличие причинно-следственной связи. С помощью метода PLS, входящего в группу методов канонического корреляционного анализа, можно построить прогноз временного ряда. Современная интерпретация метода Сугихары дает возможность сформулировать важную гипотезу о том, что метод PLS является частным случаем метода сходящегося перекрестного отображения. Сформулирован вариант теоремы о вложениях для проверки удовлетворения методов прогноза условиям Сугихары. Решается прикладная задача прогнозирования сигнала гироскопа по сигналу акселерометра при различных типах движения человека

Ключевые слова: *снижение размерности, фазовое пространство, аттрактор, метод сходящегося перекрестного отображения, теорема Такенса о вложениях*

1 Введение

Решается задача прогнозирования сигналов походки человека. Такие сигналы обладают сложной структурой. Под сложной структурой понимается наличие зависимостей и изменяющийся период. Рассматриваются два связанных фазовых пространства. Одно из них является исходным, другое – целевым. Например, фазовые пространства сигналов акселерометра и гироскопа одного мобильного устройства; пространства сигналов акселерометра в правой руке и акселерометра в левой руке человека; пространство траектории движения руки, восстановленной по видеоряду движения человека, и пространство сигнала акселерометра на этой руке.

Цель работы заключается в построении более простой модели прогнозирования, работающей не хуже уже существующих моделей прогнозирования временных рядов.

Для повышения качества прогноза, а также для упрощения прогностической модели, предлагается учесть зависимости между временными рядами и перейти в пространство меньшей размерности. Снижение размерности позволяет учитывать внутреннее низкоразмерное представление временных рядов.

Для снижения размерности траекторного пространства используются метод проекций в латентное пространство (partial least squares PLS) [1, 2]. Для этого метода существуют нелинейные модификации, например, описанная в работе [3]. Снижение размерности позволяет сделать прогностическую модель более устойчивой, изучить связь между главными компонентами временных рядов, а также найти траекторное подпространство, в котором обнаружение связи между временными рядами осуществляется наиболее простым путем.

Для определения наличия связи между временными рядами используется метод сходящегося перекрестного отображения (convergent cross mapping, CCM) [4, 5]. Метод CCM проверяет, насколько близки точки фазового пространства временного ряда \mathbf{y} , соответствующие ближайшим соседям временного ряда \mathbf{x} . Под близостью понимается существование взаимно однозначного соответствия, которое отображает

окрестность фазовой траектории x в окрестность фазовой траектории y .

В современной литературе описаны различные модификации метода сходящегося перекрестного отображения. Метод симплексной проекции, описанный в [4], позволяет строить краткосрочный прогноз траекторий хаотических динамических систем. В работе исследуются различия между детерминированным хаосом системы и ошибкой измерения данных с шумом. Оценивается размерность фазового пространства аттрактора хаотического временного ряда. За рамками статьи остаются временные ряды конечной длины. Метод последовательных локально взвешенных глобальных линейных отображений (S-Mar), описанный в [6], рассматривает временной ряд как результат эволюции динамической системы во времени. Описаны некоторые проблемы, касающиеся прогнозирования при обнаружении нелинейностей и хаоса. Рассматривается нелинейное прогнозирование в задаче классификации. Предлагается метод характеристики нелинейности с помощью S-mar и метод анализа нескольких краткосрочных временных рядов сложного аттрактора. В работе [7] описан метод многомерных вложений. Рассматривается влияние нелинейных процессов на эпизодические взаимосвязи наблюдаемых переменных динамической системы. Подход заключается в построении ряда алгоритмов, от глобального линейного до локального нелинейного, для прогнозирования данных на основе вложений с запаздывающими координатами [8]. В качестве алгоритма прогнозирования используется метод S-mar [6]. Подход, описанный в [9], применяется к сложным взаимосвязанным системам. Основная идея работы заключается в реконструкции аттрактора многомерного временного ряда с разных точек зрения и их объединение в единую модель. Эффективен для коротких и зашумленных временных рядов.

Метод сходящегося перекрестного отображения используется для исследования временных рядов на наличие причинно-следственных связей. С помощью метода PLS, входящего в группу методов канонического корреляционного анализа, можно построить прогноз временного ряда. Современная интерпретация метода Сугихары дает возможность сформулировать важную гипотезу о том, что метод PLS является

частным случаем метода сходящихся перекрестных отображений.

Требуется построить модель прогнозирования сигналов, включающую в себя метод сходящегося перекрестного отображения и методы канонического корреляционного анализа.

Метод сходящегося перекрестного отображения не предполагает выбора собственного подпространства, в котором аппроксимируется фазовая траектория временного ряда и не включает прогностическую модель. В работе [10] выбор собственного подпространства осуществляется перебором по главным компонентам. В работе [11] по PLS представлен метод выбора оптимального подпространства. В данной дипломной работе предлагается перенести методы выбора подпространства с PLS на ССМ.

Введем несколько базовых понятий.

Определение 1. *Динамическая система \mathcal{S} — множество элементов, для каждого из которых задано положение в фазовом пространстве в зависимости от времени.*

Такая математическая модель позволяет изучать различные зависимости, а также изменения систем со временем.

Динамическая система может описывать различные взаимодействия в природе. Например, связь между сардинами, анчоусами и температурой поверхности моря [5], данные о кори, ветряной оспе и популяции морского фитопланктона [4]. В данной дипломной работе динамической системой \mathcal{S} является движущийся человек.

Динамика различных процессов, в том числе упомянутых выше, не является полностью случайной, то есть изменения динамической системы обладают детерминированностью. Поэтому в основе динамики системы \mathcal{S} лежит *многообразие* [12] \mathcal{M} , управляющее ей.

2 Постановка задачи прогнозирования сигнала

Заданы временные ряды $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{N_1}$ и $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^{N_2}$. Требуется построить прогноз ряда \mathbf{y} на следующие m значений N_2+1, \dots, N_2+m . При построении прогностической модели \mathcal{F} нужно учесть влияние ряда $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{N_1}$ на ряд \mathbf{y} . Значения ряда \mathbf{x} в моменты времени N_2+1, \dots, N_2+m известны, то есть $N_1 > N_2+m$.

При построении прогноза ряда \mathbf{y} на один шаг по времени вперед учитываются h предыдущих значений этого ряда и все предшествующие текущему моменту времени значения ряда \mathbf{x} . Тогда прогностическая модель имеет вид:

$$\hat{y}_{t+1} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{w}}, y_t, \dots, y_{t-L+1}, x_1, \dots, x_t), \quad (1)$$

Решение задачи оптимизации (2) дает параметры модели \mathbf{w} :

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}), \quad (2)$$

где \mathcal{L} — функция потерь.

3 Построение прогноза временных рядов

Опишем процесс построения фазового пространства \mathbb{X} . Строится ганкелева матрица \mathbf{X} по временному ряду \mathbf{x} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_2 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k_1} & \dots & x_{N_1} \end{bmatrix}^T = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k_1}], \quad k_1 = N_1 - n + 1, \quad (3)$$

где n — ширина окна. Тогда вектора $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k_1}$ образуют фазовую траекторию или, иными словами, аттрактор $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$ временного ряда \mathbf{x} . На эти вектора натянуто

фазовое пространство \mathbb{X} размерности n . Аналогично, строим ганкелекву матрицу \mathbf{Y} для временного ряда \mathbf{y} . Аттрактор \mathbf{M}_Y и фазовое пространство \mathbb{Y} соответствуют временному ряду \mathbf{y} . Формально, под терминами *фазовое пространство* и *аттрактор* будем понимать следующее:

Определение 1 *Фазовое пространство \mathbb{X} динамической системы \mathcal{S} – совокупность всех допустимых состояний динамической системы.*

Определение 2 *Аттрактор \mathbf{M} – компактное подмножество фазового пространства динамической системы \mathcal{S} , описывающее динамику этой системы.*

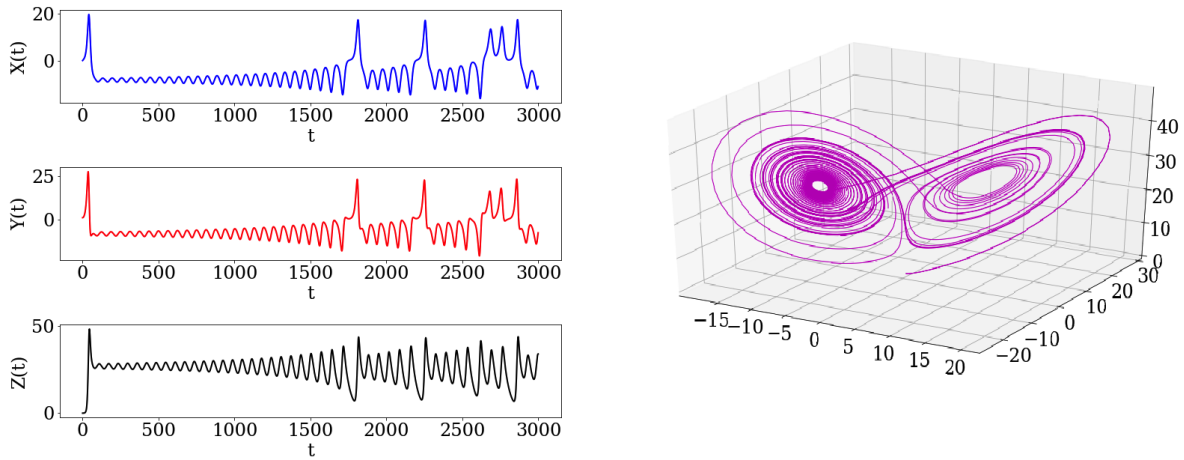


Рис. 1: Аттрактор Лоренца

Одним из способов описания динамической системы является система дифференциальных уравнений, где каждая переменная зависит от состояния и изменения остальных переменных. На рисунке (1) справа в качестве примера представлен аттрактор Лоренца. Динамика описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = X(r - Z) - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (4)$$

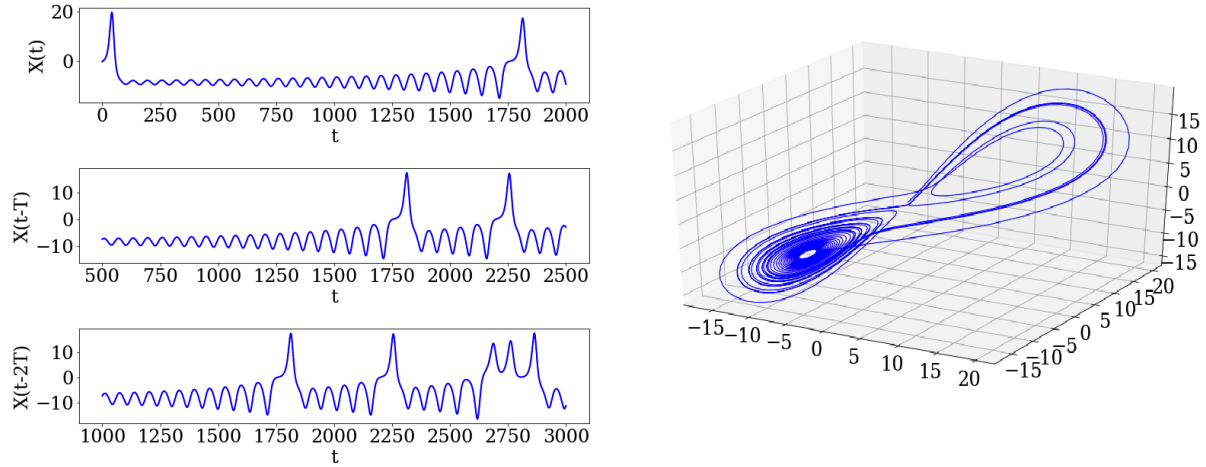


Рис. 2: Аттрактор Лоренца, восстановленный по наблюдаемой X

где σ , r , b — параметры. Слева на рисунке (1) изображены решения $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ системы дифференциальных уравнений (4). Евклидово пространство данных переменных образует пространство состояний системы. Многообразие состояний системы в этом пространстве образует аттрактор \mathbf{M} . Проекция многообразия \mathbf{M} на координатные оси дает временной ряд соответствующей наблюдаемой. С другой стороны, при определенных условиях по временному ряду одной из наблюдаемых можно восстановить многообразие аттрактора в фазовом пространстве. Эти условия описаны в следующем разделе.

3.1 Теорема Такенса о вложениях

Теорема Такенса формулирует условия, при которых хаотическая динамическая система \mathcal{S} может быть восстановлена из последовательности наблюдений состояния динамической системы. Теорему для динамической системы \mathcal{S} с дискретным временем записывается следующим образом:

Теорема 1 Пусть \mathbb{M} — пространство состояний динамической системы \mathcal{S} размерности ν . Динамика системы задается гладким отображением $f_{\mathbf{M}} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$. Предположим, что динамика $f_{\mathbf{M}}$ имеет аттрактор $\mathbf{M} \subset \mathbb{M}$ размерности $d_{\mathbf{M}}$. Со-

гласно теореме Уитни о вложениях [13], аттрактор \mathbf{M} может быть вложен в евклидово пространство размерности $d > 2k_M$. То есть, существует диффеоморфизм ϕ , который отображает многообразие \mathbf{M} в пространство \mathbb{R}^d , причем производная отображения ϕ имеет полный ранг.

Диффеоморфизм задается следующим образом:

$$\phi(x) = (\alpha(x), \alpha(f_M(x)), \dots, \alpha(f_M^{d-1}(x))), \quad (5)$$

где $\alpha : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция наблюдений, сопоставляет каждой точке аттрактора \mathbf{M} вещественное число. Функция α должна быть дважды дифференцируема, а ее производная должна иметь полный ранг.

Теорема показывает, что скрытое представление \mathbf{M}_X исходного многообразия \mathbf{M} восстанавливается по одной лишь его проекции, то есть по временному ряду $X(t)$. Теорема проиллюстрирована на рисунке 2. Изображен временной ряд $X(t)$ и две его копии $X(t - T)$ и $X(t - 2T)$, сдвинутые на интервалы T и $2T$ соответственно. Тогда в координатном пространстве $(X(t), X(t - T), X(t - 2T))$ временные ряды представляют собой скрытое представление \mathbf{M}_X многообразия \mathbf{M}_X .

Представление \mathbf{M}_X сохраняет важные математические свойства исходной динамической системы \mathcal{S} , которые не меняются при плавном изменении координат. Иными словами, метод позволяет построить *диффеоморфизм* между \mathbf{M} и \mathbf{M}_X — взаимно однозначное отображение гладких многообразий, причем функция отображения и обратная к ней являются дифференцируемыми. Но геометрическая структура исходного аттрактора \mathbf{M} при этом не сохраняется.

3.2 Метод сходящегося перекрестного отображения

Метод сходящегося перекрестного отображения (convergent cross mapping, CMM) используется для исследования временных рядов на наличие причинно-следственной связи. Корреляция не подразумевает причинно-следственную связь между временными рядами. Метод основан на теореме Такенса о вложениях. В общем случае

многообразие аттрактора динамической системы требуется восстановить по одной наблюдаемой.

Согласно принципам метода сходящегося перекрестного отображения временной ряд \mathbf{y} может быть восстановлен по временному ряду \mathbf{x} только если временной ряд \mathbf{x} связан с рядом \mathbf{y} . Временные ряды считаются связанными, если окрестность фазовой траектории \mathbf{M}_X временного ряда \mathbf{x} взаимно однозначно отображается в окрестность фазовой траектории \mathbf{M}_Y ряда \mathbf{y} . Иными словами,

Утверждение Между аттракторами \mathbf{M}_X и \mathbf{M}_Y существует взаимнооднозначное соответствие φ , если наблюдаемые \mathbf{X} и \mathbf{Y} принадлежат одной динамической системе.

Построим отображение φ . Пусть построены ганкелевы матрицы \mathbf{X} и \mathbf{Y} по временным рядам \mathbf{x} и \mathbf{y} согласно (3). Эти матрицы определяют фазовые траектории \mathbf{M}_X и \mathbf{M}_Y в фазовых пространствах \mathbb{X} и \mathbb{Y} соответственно. Выберем элемент \mathbf{x}_{t_0} фазовой траектории \mathbf{M}_X . Найдем k ближайших к \mathbf{x}_{t_0} точек фазовой траектории \mathbf{M}_X . Временные индексы ближайших соседей обозначим t_1, \dots, t_k .

Так как временные ряды \mathbf{x} и \mathbf{y} определены на единой оси времени, то точке $\mathbf{x}_{t_0} \in \mathbf{M}_X$ взаимно однозначно соответствует точка \mathbf{y}_{t_0} фазовой траектории \mathbf{M}_Y . Аналогично, моментам времени t_1, \dots, t_k однозначно соответствуют точки $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{M}_Y$.

Отображение φ из множества точек \mathbf{M}_X в \mathbf{M}_Y введем согласно [14] следующим образом:

$$\varphi : \mathbf{x}_0 \mapsto \hat{\mathbf{y}}_0 = \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{y}_{t_i}, \quad w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^k u_j}, \quad u_i = \exp(-\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{t_i}\|). \quad (6)$$

Определение 3 Временные ряды \mathbf{x} и \mathbf{y} называются *связанными*, если отображение φ является липшицевым:

$$\rho_Y(\varphi(\mathbf{x}_i), \varphi(\mathbf{x}_j)) \leq C \rho_X(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbf{M}_X.$$

Для проверки наличия связи между временными рядами \mathbf{x} и \mathbf{y} введем метрическую функцию близости векторов в окрестностях $U_k(\mathbf{x}_{t_0})$ и $U_k(\mathbf{y}_{t_0})$:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{R(U_k(\mathbf{x}_{t_0}))}{R(U_k(\mathbf{y}_{t_0}))}, \quad R(U_k(\mathbf{x}_{t_0})) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \rho_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}_{t_0}, \mathbf{x}_{t_j}). \quad (7)$$

Если $J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ больше заданного порога, то временной ряд \mathbf{y} зависит от временного ряда \mathbf{x} .

3.3 Метод проекций на латентные структуры

Метод проекций на латентные структуры PLS [1,2] используют для нахождения фундаментальных зависимостей между двумя матрицами \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Отбираются наиболее значимые признаки. Новые признаки являются линейными комбинациями исходных признаков. Осуществляется переход в фазовое пространство меньшей размерности. Метод PLS позволяет найти фазовое подпространство, в котором наблюдается связь между главными компонентами исходных временных рядов. Это позволяет исследовать наличие связи между временными рядами.

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k_1}$ и $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times k_2}$ — матрицы двух фазовых пространств, построенных по временному ряду \mathbf{x} и \mathbf{y} соответственно. Требуется построить прогноз временного ряда \mathbf{y} с учетом связи с временным рядом \mathbf{x} . Предполагается линейная зависимость между строками \mathbf{X} и \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \cdot \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^{k_2}, \mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{k_1}, i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\Theta}$ — матрица весов линейной зависимости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор ошибок.

Ошибка вычисляется по формуле:

$$L(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Theta}\|_2^2 \quad (9)$$

Алгоритм PLS находит матрицы \mathbf{T} , \mathbf{U} , \mathbf{P} , \mathbf{Q} , с помощью которых осуществляется переход в латентное пространство согласно формулам:

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F}, \quad (10)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{E}.$$

Матрицы \mathbf{T}, \mathbf{U} наилучшим образом описывают \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Их столбцы ортогональны. Матрицами \mathbf{P} и \mathbf{Q} определяется переход из латентного пространства в исходное. Матрицы \mathbf{X} и \mathbf{Y} — матрицы невязок.

Алгоритм PLS также позволяет определить матрицу \mathbf{W} , с помощью которой рассчитывается матрица весов $\mathbf{\Theta}$:

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{Q}^T. \quad (11)$$

The diagram is a commutative diagram with four nodes: \mathcal{S} at the top, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times k_1}$ on the left, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times k_2}$ on the right, and $\mathbf{T}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ at the bottom. Arrows connect the nodes as follows: a curved arrow from \mathcal{S} to \mathbf{X} , a curved arrow from \mathcal{S} to \mathbf{Y} , a straight horizontal arrow from \mathbf{X} to \mathbf{Y} labeled \mathcal{F} , a curved arrow from \mathbf{X} to \mathbf{T}, \mathbf{U} labeled \mathbf{P} , and a curved arrow from \mathbf{Y} to \mathbf{T}, \mathbf{U} labeled \mathbf{Q} .

$$(12)$$

На коммутативной диаграмме \mathcal{S} — динамическая система, порождающая часть, \mathbf{X} — фазовое пространство, \mathbf{Y} — наблюдаемое пространство, \mathcal{F} — гомоморфизм, \mathbf{T}, \mathbf{U} — латентно-согласованные пространства, не можем измерить напрямую.

Стоит обратить внимание на прогностическую модель \mathcal{F} и на отображение φ . Обе функции задают связь между фазовыми пространствами \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Современная интерпретация метода сходящегося перекрестного отображения позволяет сформулировать следующую гипотезу о связи \mathcal{F} и φ :

Гипотеза Метод проекций на латентные структуры является частным случаем метода сходящегося перекрестного отображения.

Гипотеза позволяет перенести многие важные факты, справедливые для метода PLS, на метод сходящихся перекрестных отображений.

4 Вычислительный эксперимент по анализу гипотезы

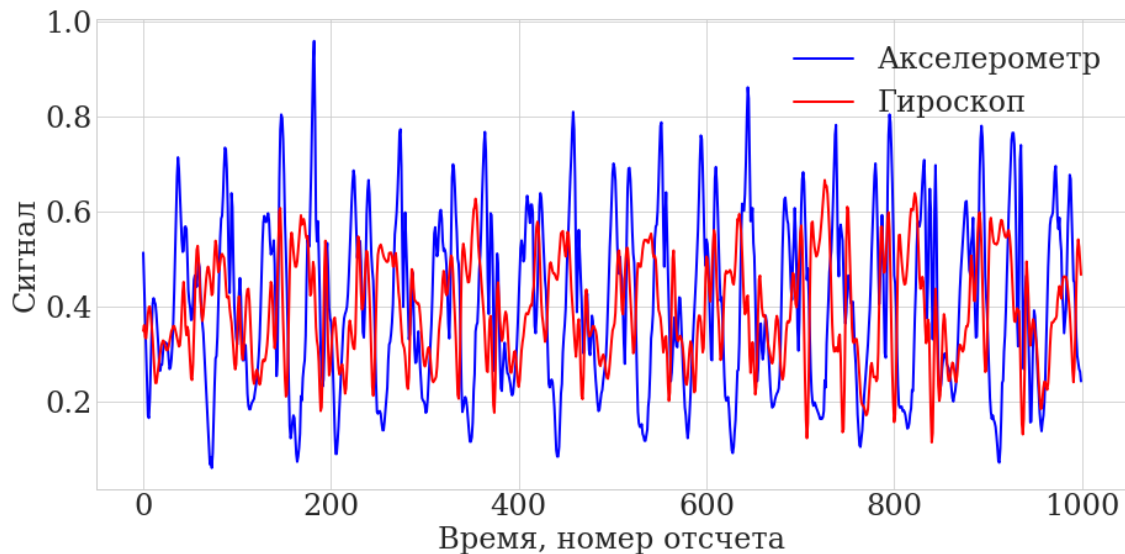
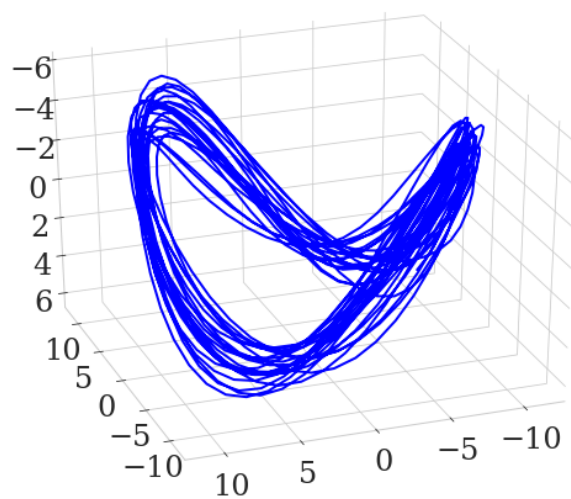


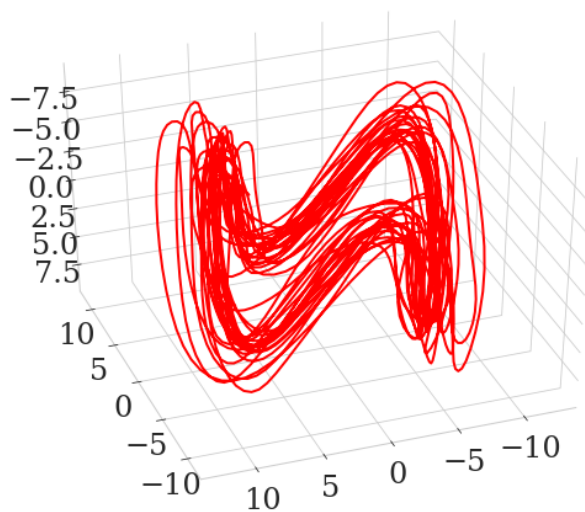
Рис. 3: Данные акселерометра и гироскопа одного мобильного устройства для ходьбы

Вычислительный эксперимент проводился на данных [15]. Целью вычислительного эксперимента является исследование качества предсказания для зависимых и независимых временных рядов. Прогноз строится с помощью метода PLS. Временные ряды проверяются на зависимость с помощью метода сходящегося перекрестного отображения.

В качестве сигналов, которые связаны между собой, были взяты сигналы акселерометра и гироскопа одного мобильного устройства. Были рассмотрены разные типы активности, такие как ходьба различной интенсивности и бег. В качестве сигналов, несвязанных между собой, выбирались сигналы датчиков разных мобиль-



(а) Акселерометр



(б) Гироскоп

Рис. 4: Траектории в фазовом пространстве для ходьбы

ных устройств.

Для сигналов был выполнен анализ главных компонент с помощью алгоритма SSA(Singular Spectrum Analysis). Для вычислительного эксперимента выбирались первые шесть главных компонент. После этого выполнялась стандартизация и шкалирование временного ряда.

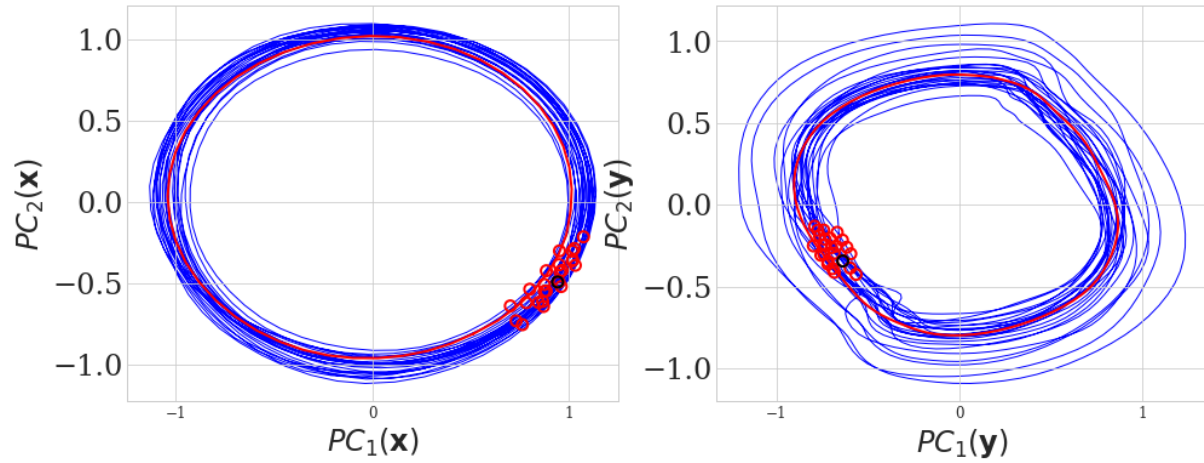


Рис. 5: Поиск ближайших соседей на фазовой траектории для метода CSM



Рис. 6: Истинный и предсказанный с помощью алгоритма PLS сигнал гироскопа для ходьбы

На рисунке (3) изображены исходные сигналы акселерометра и гироскопа одного мобильного устройства при ходьбе. На рисунке (??) изображены фазовые траектории для этих сигналов соответственно. Поиск ближайших соседей на фазовых траекториях проиллюстрирована на рисунке (5). Окрестности из ближайших точек временного ряда x соответствует окрестность точек временного ряда y . Отображение является липшицевым, что подтверждает наличие связи между временными рядами x и y ,

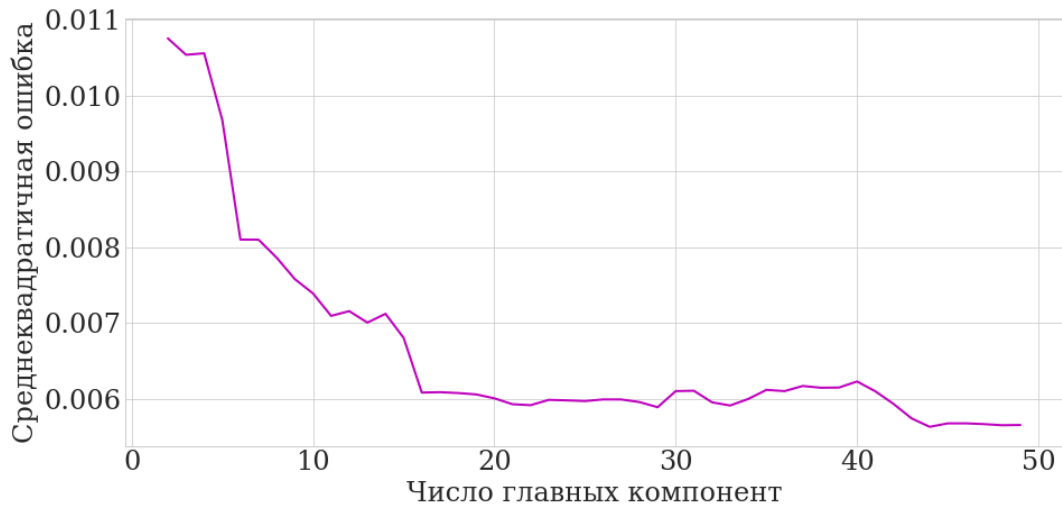


Рис. 7: Зависимость ошибки MSE прогноза от числа главных компонент для зависимых рядов



Рис. 8: Предсказание сигнала акселерометра для несвязанных сигналов с помощью алгоритма PLS

порожденными одной и той же динамической системой \mathcal{S} — движущимся человеком. На рисунке (6) представлен прогноз сигнала гироскопа, полученный с помощью алгоритма PLS.

Исходные данные, фазовые траектории и прогноз для медленной ходьбы пред-

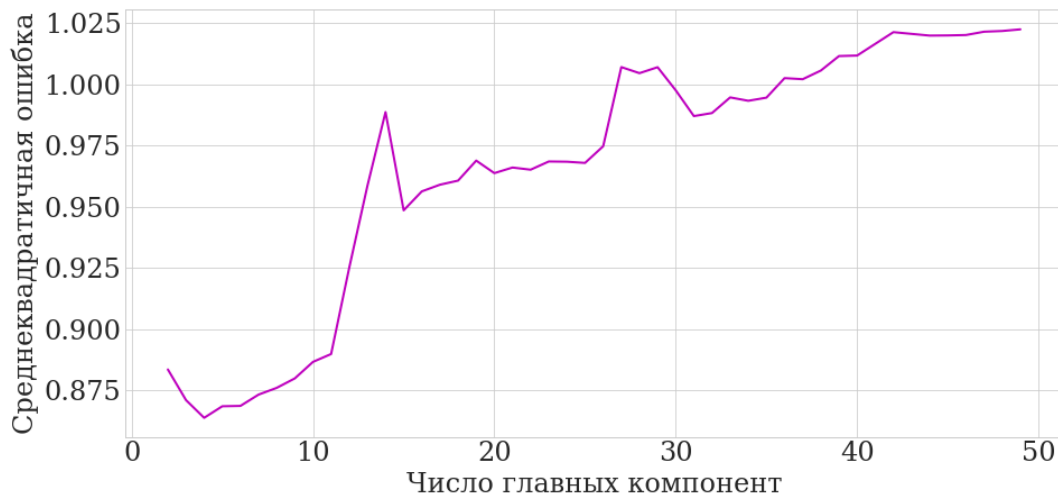


Рис. 9: Зависимость ошибки MSE прогноза от числа главных компонент для несвязанных временных рядов

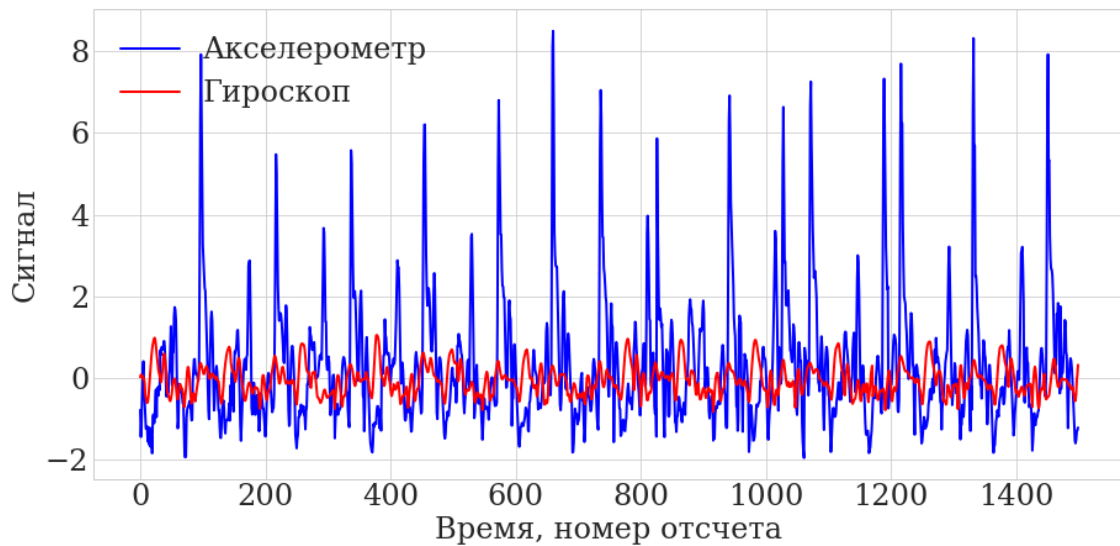


Рис. 10: Данные акселерометра и гироскопа одного мобильного устройства для медленной ходьбы

ставлены на рисунках (10), (11) и (12) соответственно.

На рисунке (8) представлен прогноз сигнала акселерометра в случае двух совершенно несвязанных сигналов. Уже визуально видно, что прогноз в этом случае

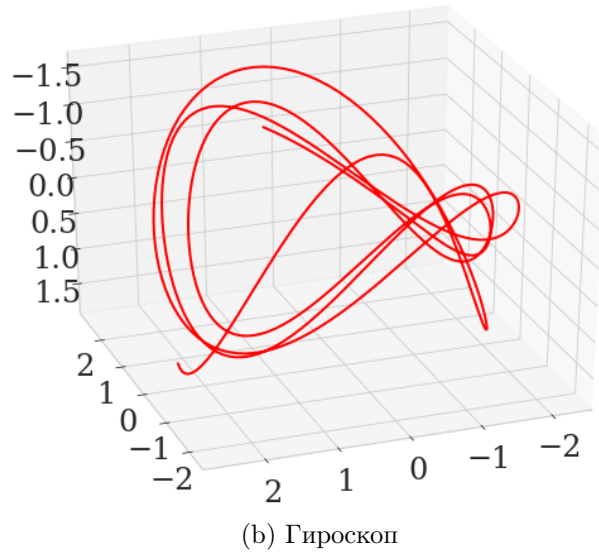
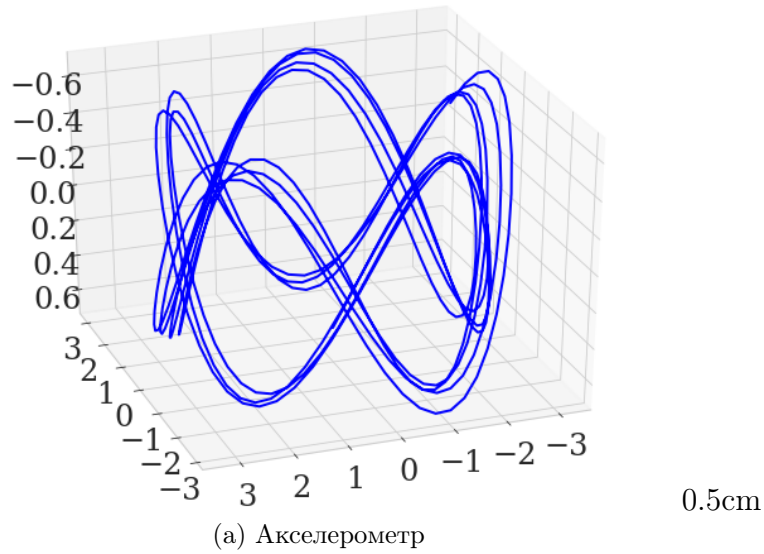


Рис. 11: Траектории в фазовом пространстве для медленной ходьбы

сильно проигрывает случаю связанных сигналов.

Для каждой пары истинного сигнала и предсказанного сигнала подсчитывалась среднеквадратичная ошибка MSE. Результаты представлены в таблице 1. Ошибка прогноза для случая двух несвязанных сигналов значительно превышает значение ошибки для случая связанных сигналов.

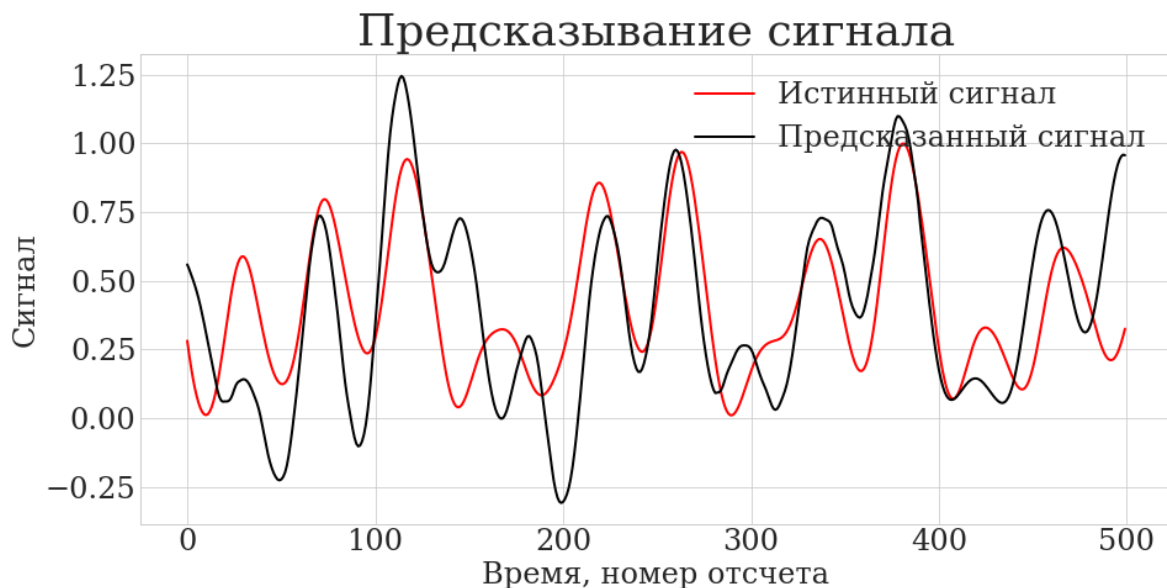


Рис. 12: Предсказание сигнала гироскопа с помощью алгоритма PLS для медленной ходьбы

Проведен анализ среднеквадратичной ошибки прогноза от числа компонент в алгоритме PLS. На рисунке (7) проиллюстрирована зависимость ошибки MSE от числа компонент для случая связанных сигналов. С увеличением числа компонент значение ошибки прогноза падает. Оптимальное число компонент равно примерно 17-ти. На рисунке (9) представлен аналогичный график для случая двух несвязанных сигналов. Ошибка прогноза растет с увеличением числа компонент. Следует выбирать около трех компонент.

Рассчитаны коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена между истинными и предсказанными сигналами. Временные ряды разбивались на 10 блоков, на каждом из которых был рассчитан коэффициент корреляции. Результаты приведены в таблице 3 и 4. Номер эксперимента соответствует описанию из таблицы 1 соответственно. По результатам вычислений Коэффициенты корреляции ниже в случае несвязанных сигналов.

Еще один эксперимент проводился для пары сигналов, которые сдвигались друг относительно друга на несколько отсчетов. Интервал сдвига меняется в пределах от

50 до 450. В таблице 2 приведены значения среднеквадратичной ошибки для данного эксперимента. Результаты показывают, что с увеличением интервала сдвига возрастает значение ошибки MSE.

Таблица 1: Среднеквадратичное отклонение между истинными показаниями устройств и предсказаниями, полученными с помощью алгоритма PLS

Номер эксперимента	Датчики	Прибор	Тип движения	MSE
1	Акселерометр + гироскоп	один	ходьба	0.006
2	Акселерометр + гироскоп	один	медленная ходьба	0.069
3	Акселерометр + акселерометр	разные	ходьба	0.997
4	Акселерометр + гироскоп	один	бег	0.027
5	Акселерометр + гироскоп	один	быстрая ходьба	0.024

Таблица 2: Предсказание сигнала гироскопа по сигналу акселерометра одного мобильного устройства при ходьбе с помощью алгоритма PLS, сигналы сдвинуты относительно друг друга

Величина сдвига	MSE
0 отсчетов	0.0061
50 отсчетов	0.0054
100 отсчетов	0.0081
150 отсчетов	0.0086
200 отсчетов	0.0094
250 отсчетов	0.0097
300 отсчетов	0.0116
350 отсчетов	0.0118
400 отсчетов	0.0126
450 отсчетов	0.0152

Вычислительный эксперимент подтверждает теоретический факт о том, что метод PLS является частным случаем метода перекрестных отображений Сугихары.

Результаты эксперимента позволяют ответить на вопрос: достаточно ли из двух сигналов, акселерометра и гироскопа, какого-либо одного из них. Этого можно достичь в случае хорошего качества восстановления одного сигнала по второму. В данном эксперименте по сигналу акселерометра восстанавливается сигнал гироскопа с помощью алгоритма PLS.

Все результаты вычислительного эксперимента воспроизводимы по ссылке [16].

Таблица 3: Коэффициент корреляции Пирсона между истинным и предсказанным сигналами

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.77	0.80	0.73	0.63	0.70	0.88	0.67	0.70	0.76	0.62
2	-0.23	0.92	0.74	-0.12	0.71	0.89	0.92	0.91	-0.24	-0.39
3	0.32	0.10	0.03	-0.10	-0.17	0.20	0.65	-0.66	0.34	0.37
4	0.80	0.75	0.66	0.50	0.48	0.47	0.71	0.68	0.54	0.37
5	-0.05	0.53	-0.04	-0.44	0.27	-0.18	-0.24	-0.30	-0.10	0.74

Таблица 4: Коэффициент корреляции Спирмена между истинным и предсказанным сигналами

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.74	0.77	0.71	0.51	0.64	0.83	0.60	0.51	0.69	0.63
2	-0.24	0.90	0.66	-0.16	0.74	0.83	0.86	0.89	-0.02	-0.37
3	0.31	0.13	-0.10	-0.11	-0.11	0.21	0.45	-0.51	0.30	0.09
4	0.81	0.78	0.51	0.53	0.42	0.48	0.72	0.78	0.48	0.30
5	0.04	0.50	-0.08	-0.57	0.21	-0.22	-0.29	-0.18	0.02	0.74

5 Заключение

В данной работе исследована связь между методами канонического корреляционного анализа и методами сходящихся перекрестных отображений Сугихары. Сформулирована теорема о том, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода Сугихары. Справедливость теоремы показана на частном примере для метода PLS.

В работе проведен анализ литературы и обзор современных методов в области канонического корреляционного анализа и методов Сугихары.

Проведен вычислительный эксперимент по построению прогноза сигналов с датчиков движения человека. Решена задача учета структуры временных рядов. Предложенный подход объединяет метод PLS и метод сходящегося перекрестного отображения. Исследована среднеквадратичная ошибка прогноза, а также корреляция Пирсона и Спирмена между истинным и предсказанным сигналами. Показано, что наличие зависимости между временными рядами улучшает качество прогноза.

В продолжении данной работы планируется исследование справедливости гипотезы в теоретической постановке, а также рассмотреть другие методы канонического корреляционного анализа.

Список литературы

- [1] Paul Geladi. Notes on the history and nature of partial least squares (pls) modelling. *Journal of Chemometrics*, 2(4):231–246, 1988.
- [2] Agnar Höskuldsson. Pls regression methods. *Journal of chemometrics*, 2(3):211–228, 1988.
- [3] Фарух Юрьевич Яушев, Роман Владимирович Исаченко, and Вадим Викторович Стрижов. Модели согласования скрытого пространства в задаче прогнозирования. *Системы и средства информатики*, 31(1):4–16, 2021.
- [4] George Sugihara and Robert M May. Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series. *Nature*, 344(6268):734–741, 1990.
- [5] George Sugihara, Robert May, Hao Ye, Chih-hao Hsieh, Ethan Deyle, Michael Fogarty, and Stephan Munch. Detecting causality in complex ecosystems. *science*, 338(6106):496–500, 2012.
- [6] George Sugihara. Nonlinear forecasting for the classification of natural time series. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, 348(1688):477–495, 1994.
- [7] Paul A Dixon, Maria J Milicich, and George Sugihara. Episodic fluctuations in larval supply. *Science*, 283(5407):1528–1530, 1999.
- [8] David A Rand and L-S Young. *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980: proceedings of a symposium held at the University of Warwick 1979/80*, volume 898. Springer, 2006.

- [9] Hao Ye and George Sugihara. Information leverage in interconnected ecosystems: Overcoming the curse of dimensionality. *Science*, 353(6302):922–925, 2016.
- [10] Карина Равилевна Усманова and Вадим Викторович Стрижов. Модели обнаружения зависимостей во временных рядах в задачах построения прогностических моделей. *Системы и средства информатики*, 29(2):12–30, 2019.
- [11] Р. В. Исаченко. *Снижение размерности пространства в задачах декодирования сигналов (научный руководитель В.В. Стрижов)*. PhD thesis, Московский физико-технический институт, 2021.
- [12] Rob Kirby. Manifold theory. *Algebraic and Geometric Topology, Part*, 2(2):273, 1978.
- [13] Hassler Whitney. The singularities of a smooth n -manifold in $(2n-1)$ -space. *Annals of Mathematics*, pages 247–293, 1944.
- [14] Kazimieras Pukenas. An algorithm based on the convergent cross mapping method for the detection of causality in uni-directionally connected chaotic systems. *Mathematical Models in Engineering*, 4(3):145–150, 2018.
- [15] Данные акселерометра и гироскопа: <https://github.com/Intelligent-Systems-Phystech/Kurdyukova-BS-Thesis/tree/master/code/data>.
- [16] Код вычислительного эксперимента: <https://github.com/Intelligent-Systems-Phystech/Kurdyukova-BS-Thesis/tree/master/code>.
- [17] Edward De Brouwer, Adam Arany, Jaak Simm, and Yves Moreau. Latent convergent cross mapping. In *International Conference on Learning Representations*, 2020.
- [18] Ilya Sutskever, Oriol Vinyals, and Quoc V Le. Sequence to sequence learning with neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 27, 2014.
- [19] Chris Finlay, Jörn-Henrik Jacobsen, Levon Nurbekyan, and Adam Oberman. How to train your neural ode: the world of jacobian and kinetic regularization. In *International conference on machine learning*, pages 3154–3164. PMLR, 2020.

Список основных обозначений

\mathcal{S} — динамическая система

\mathbb{M} — пространство состояний динамической системы

f_M — динамика системы

\mathbf{M} — многообразие

ϕ — диффеоморфизм вложения

α — функция наблюдений

$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_1}\}$ — исходный временной ряд

$\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_{N_2}\}$ — целевой временной ряд

\mathbb{X} — фазовое пространство исходной переменной

\mathbb{Y} — фазовое пространство целевой переменной

$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k_1}]$ — исходная матрица

$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k_2}]$ — целевая матрица

\mathbf{M}_X — аттрактор исходной переменной

\mathbf{M}_Y — аттрактор целевой переменной

\mathcal{F} — прогностическая модель

\mathbf{w} — параметры модели

$\mathcal{L}(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y})$ — функция ошибки прогностической модели

h — горизонт прогнозирования

m — количество шагов прогноза

Θ — матрица весов линейной зависимости

ε — вектор ошибок линейной зависимости

$L(\Theta, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — функция ошибки линейной зависимости

\mathbf{P} — матрица перехода из латентного пространства в исходное

\mathbf{Q} — матрица перехода из латентного пространства в целевое

\mathbf{T}, \mathbf{U} — матрицы, описывающие латентно-согласованные пространства

φ — отображение фазовых пространств

ρ_X, ρ_Y — метрики в пространствах \mathbb{X} и \mathbb{Y}

C — константа Липшица

$U_k(\mathbf{x}_0)$ — окрестность k ближайших соседей точки \mathbf{x}_0

$R(U_k(\mathbf{x}_0))$ — среднее расстояние от точки \mathbf{x}_0 до k ближайших соседей

J — метрическая функция близости