

Снижение размерности фазового пространства в задачах канонического корреляционного анализа

Курдюкова Антонина

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

8 июня 2022 г.

Снижение размерности фазового пространства

Решается задача декодирования сигналов. Требуется восстановить зависимость между двумя наборами гетерогенных данных.

Цель

Показать, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода сходящихся перекрестных отображений Сугихары.

Проблема

Сложная структура временного ряда – наличие нелинейных зависимостей и варьирующийся период.

Требуется построить адекватную модель прогноза сигнала гироскопа по сигналу акселерометра для ходьбы.

Решение

Предлагается использовать скрытое пространство, снизив размерность исходного фазового пространства, и применить метод сходящихся перекрестных отображений для учёта причинно-следственных связей между временными рядами.

Литература

Предлагается латентный ССМ для выявления причинно-следственных связей в хаотических динамических системах

- De Brouwer E. et al. Latent convergent cross mapping //International Conference on Learning Representations, 2020

Предложены методы декодирования сигналов. Учитываются зависимости в исходном и целевом пространствах, а также случай избыточности описания исходных данных

- Исаченко Р. В., Стрижов В. В. Снижение размерности пространства в задачах декодирования сигналов, 2018

Предлагаемый метод осуществляет нелинейную реконструкцию пространства состояний по временному ряду и позволяет отличить причинность от корреляции во временных рядах

- Sugihara G. et al. Detecting causality in complex ecosystems //Science, 2012

Прогностическая модель в задаче декодирования

Дано

Выборка – (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , где

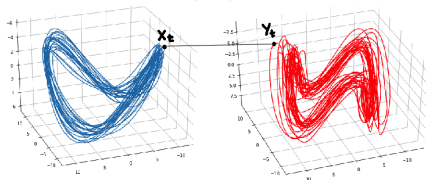
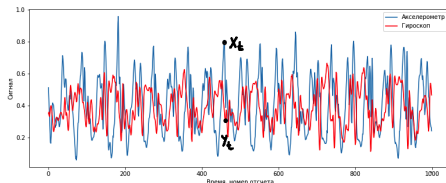
$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_1}\}$,

$\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_{N_2}\}$.

Требуется построить прогноз ряда \mathbf{y} на m значений вперед:

$$y_{N_2+1}, \dots, y_{N_2+m}.$$

При построении прогноза учесть влияние ряда \mathbf{x} на \mathbf{y} .



Прогноз на один шаг вперед

$$\hat{x}_{t+1} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{w}}, y_t, \dots, y_{t-h+1}, x_t, \dots, x_1),$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}),$$

здесь \mathcal{L} – функция потерь, h —горизонт прогнозирования.

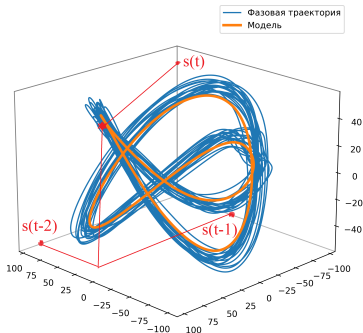
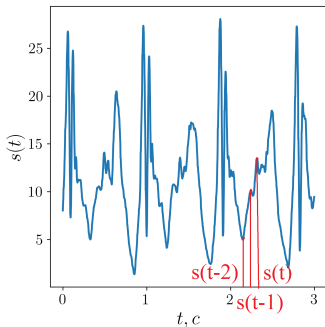
Построение фазового пространства

Траекторная матрица временного ряда x

Точки $x_j \in \mathbb{R}^k$ образуют фазовую траекторию

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_2 & \dots & x_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & \dots & x_{N_1} \end{bmatrix}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n],$$

где k - ожидаемая длина периода, $n = N_1 - k + 1$.

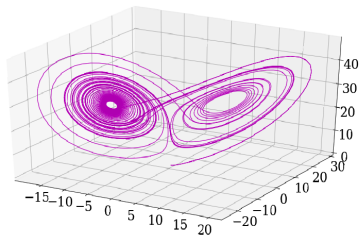
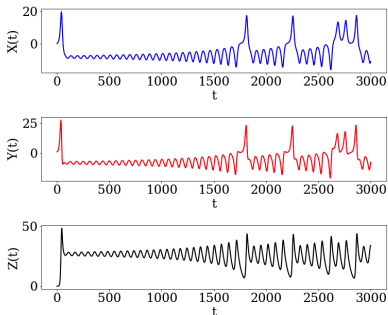


Аттрактор Лоренца

Динамическую систему можно описывать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = X(r - Z) - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases}$$

где σ , r , b — параметры.



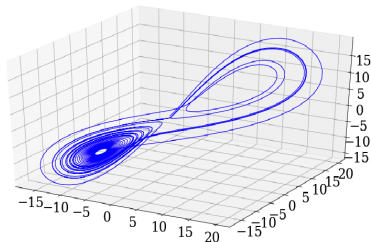
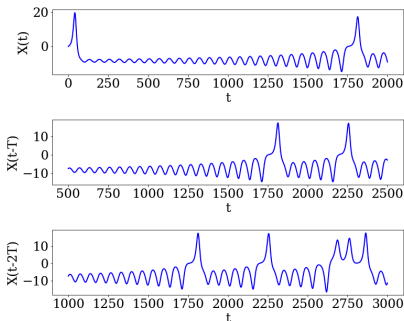
Теорема Такенса о вложениях

Теорема формулирует условия, при которых аттрактор динамической системы можно восстановить по временному ряду лишь одной из наблюдаемых.

Многообразие $\phi(x)$ отображает аттрактор \mathbf{M} в его скрытое представление \mathbf{M}_X :

$$\phi(x) = (\alpha(x), \alpha(f_M(x)), \dots, \alpha(f_M^{d-1}(x))),$$

где $\alpha : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция наблюдений, f_M задает динамику системы, d — размерность скрытого представления.



Метод перекрестных сходящихся отображений

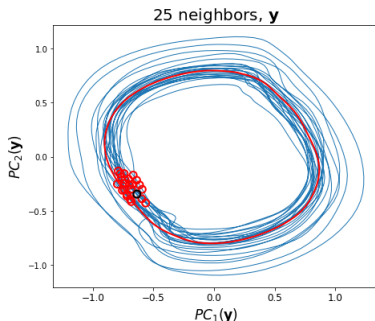
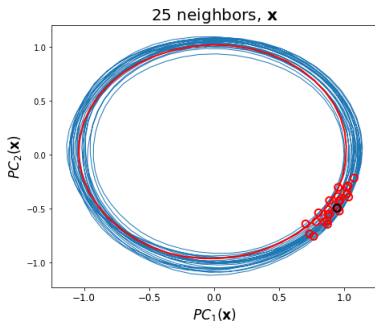
Выберем точку фазовой траектории $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Найдем k ближайших соседей $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k} \in \mathbf{X}$.

Временным индексам t_1, \dots, t_k соответствуют точки $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{Y}$.

Введем отображение:

$$\varphi : \mathbf{x}_0 \mapsto \hat{\mathbf{y}}_0 = \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{y}_{t_i}, \quad w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^k u_j}, \quad u_i = \exp(-\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{t_i}\|).$$



Зависимость между временными рядами

Липшицевость отображения

Временные ряды x и y называются **связанными**, если отображение φ является липшицевым:

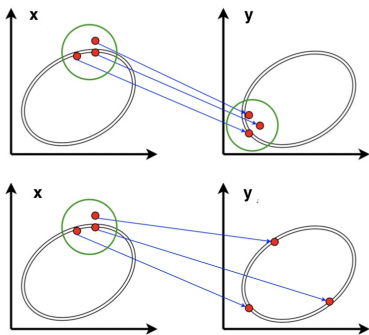
$$\rho_Y(\varphi(x_i), \varphi(x_j)) \leq C \rho_X(x_i, x_j), \quad x_i, x_j \in X.$$

Функция близости

Для проверки наличия связанности введём метрическую функцию близости векторов в окрестностях $U_k(x_0)$ и $U_k(y_0)$:

$$L(x, y) = \frac{R(U_k(x_0))}{R(U_k(y_0))}, \quad R(U_k(x_0)) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \rho_x(x_0, x_{t_j}).$$

Если $L(x, y)$ больше заданного порога, то временной ряд y зависит от временного ряда x .

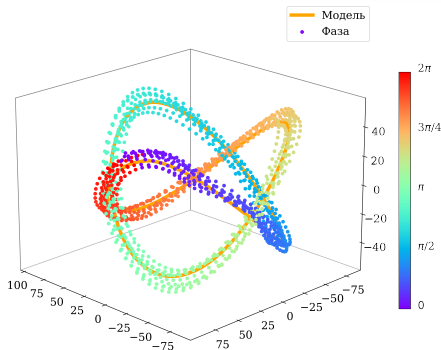


Модель определения фазы

Модель $m : \varphi \rightarrow \mathbf{x}$ ставит в соответствие фазе $\varphi \in [0, 2\pi)$ точку ожидаемой траектории $E(\hat{\mathbf{x}}|\varphi)$.

Регрессия Надарая-Ватсона

$$m(\varphi) = E(\hat{\mathbf{x}}|\varphi) = \frac{\sum_{\vec{x} \in \vec{X}} \vec{x} K\left(\frac{\rho(\hat{\varphi} - \varphi)(\vec{x})}{h}\right)}{\sum_{\vec{x} \in \vec{X}} K\left(\frac{\rho(\hat{\varphi} - \varphi)(\vec{x})}{h}\right)}.$$



Функции потерь

$$L_1(\varphi) = \frac{1 - \cos(\varphi - \varphi')}{2}, \quad L_2(\varphi) = \sum_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \varepsilon, \mathbf{x}' \in \mathbf{X}} \rho(\varphi, \varphi'), \quad L_3(\varphi) = \frac{\|\mathbf{x} - m(\varphi)\|_2}{d(\varphi)}$$

Искомое значение фазы

$$\hat{\varphi}_i = \arg \min_{\varphi} \lambda_1 \cdot L_1(\varphi) + \lambda_2 \cdot L_2(\varphi) + \lambda_3 \cdot L_3(\varphi), \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1.$$

Снижение размерности фазового пространства

Линейная зависимость

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{k \times r}$ – матрицы фазовых пространств \mathbf{x} , \mathbf{y} .

Предполагается линейная зависимость между строками \mathbf{X} и \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \cdot \boldsymbol{\Theta} + \varepsilon \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^r, \mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k.$$

Метод частных наименьших квадратов (PLS)

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{F} = \sum_{j=1}^l \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{p}_j^T + \mathbf{F}$$

$k \times n \quad k \times l \quad l \times n \quad k \times n \quad k \times 1 \quad 1 \times n \quad k \times n$

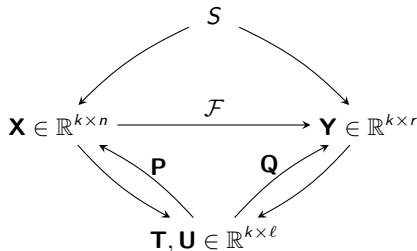
$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{E} = \sum_{j=1}^l \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}_j^T + \mathbf{E}$$

$k \times r \quad k \times l \quad l \times r \quad k \times r \quad k \times 1 \quad 1 \times r \quad k \times r$

Ошибка

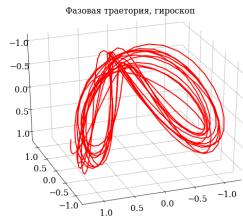
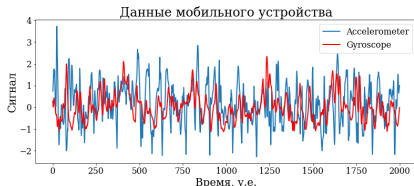
$$L(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Theta}\|_2^2$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{Q}^T$$



Вычислительный эксперимент

Данные



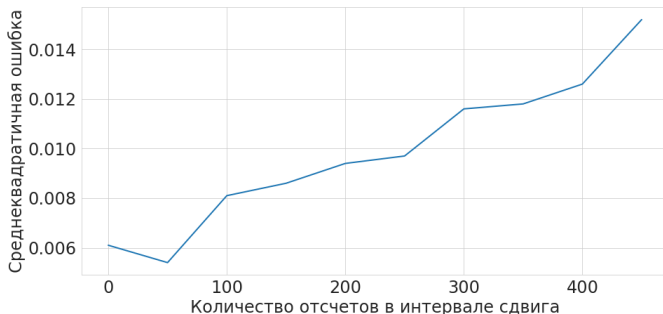
Ошибка предсказания алгоритма PLS

	Датчики	Прибор	Тип движения	MSE
1	Акселерометр + гироскоп	один	ходьба	0.006
2	Акселерометр + гироскоп	один	медленная ходьба	0.069
3	Акселерометр + акселерометр	разные	ходьба	0.997
4	Акселерометр + гироскоп	один	бег	0.027
5	Акселерометр + гироскоп	один	быстрая ходьба	0.024

Корреляция Пирсона и Спирмена

	Прибор	Тип движения	$E_p \pm D_p$	$E_s \pm D_s$
1	Один	ходьба	0.664 ± 0.01	0.663 ± 0.01
2	Один	медленная ходьба	0.411 ± 0.33	0.409 ± 0.28
3	Разные	ходьба	0.108 ± 0.13	0.077 ± 0.08
4	Один	бег	0.596 ± 0.02	0.581 ± 0.03
5	Один	быстрая ходьба	0.029 ± 0.14	0.017 ± 0.15

Зависимость ошибки MSE от величины сдвига сигналов



Выносятся на защиту

- Исследовано утверждение о том, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода перекрестных сходящихся отображений.
- Предложен метод обобщения PLS и CCM.
- Проведен вычислительный эксперимент на данных мобильного устройства.
- Показано, что учет зависимостей между временными рядами улучшает качество прогноза.
- Планируется рассмотреть другие методы канонического корреляционного анализа.