

Снижение размерности фазового пространства в задачах канонического корреляционного анализа

Курдюкова Антонина

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

27 апреля 2022 г.

Снижение размерности фазового пространства

Цель

Показать, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода сходящихся перекрестных отображений Сугихары.

Проблема

Сложная структура временного ряда – наличие нелинейных зависимостей и варьирующийся период.

Требуется построить адекватную модель прогноза сигнала гироскопа для движения руки по сигналу акселерометра на этой руке.

Решение

Предлагается снизить размерность с использованием скрытого пространства и применить метод сходящихся перекрестных отображений для учёта причинно-следственных связей между рядами.

Литература

- De Brouwer E. et al. Latent convergent cross mapping //International Conference on Learning Representations. – 2020.
- Усманова К. Р. и др. Аппроксимация фазовой траектории квазипериодических сигналов методом сферической регрессии //Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. – 2020. – №. 4. – С. 40-46.
- Исаченко Р. В., Стрижов В. В. Снижение размерности с помощью проекции на скрытое пространство в задаче декодирования сигналов //Интеллектуализация обработки информации. – 2018. – С. 86-87.
- Sugihara G. et al. Detecting causality in complex ecosystems //science. – 2012. – Т. 338. – №. 6106. – С. 496-500.

Прогностическая модель

Дано

Выборка – (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , где $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_1}\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_{N_2}\}$.

Требуется построить прогноз ряда \mathbf{x} на m значений вперед:

$$x_{N_1+1}, \dots, x_{N_1+m}.$$

При построение прогноза учесть влияние ряда \mathbf{y} на \mathbf{x} .

Модель

При построении прогноза на один шаг вперед будем использовать h предыдущих значений ряда \mathbf{x} и все предшествующие значения ряда \mathbf{y} :

$$\hat{x}_{t+1} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{w}}, x_t, \dots, x_{t-h+1}, y_t, \dots, y_1)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} L(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$$

Здесь L – функция потерь.

Снижение размерности пространства

Линейная зависимость

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{k \times r}$ – матрицы фазовых пространств \mathbf{x} , \mathbf{y} .

Предполагается линейная зависимость между строками \mathbf{X} и \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \cdot \boldsymbol{\Theta} + \varepsilon \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^r, \mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k.$$

Метод частных наименьших квадратов (PLS)

$$\mathbf{X}_{k \times n} = \mathbf{T}_{k \times l} \cdot \mathbf{P}_{l \times n}^T + \mathbf{F}_{k \times n} = \sum_{j=1}^l \mathbf{t}_j_{k \times 1} \cdot \mathbf{p}_j^T_{1 \times n} + \mathbf{F}_{k \times n},$$

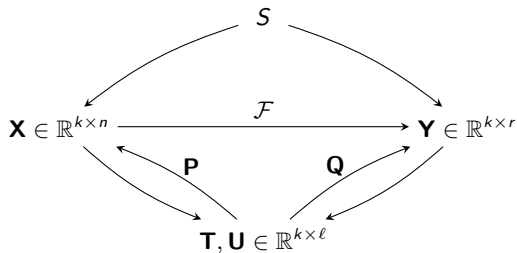
$$\mathbf{Y}_{k \times r} = \mathbf{U}_{k \times l} \cdot \mathbf{Q}_{l \times r}^T + \mathbf{E}_{k \times r} = \sum_{j=1}^l \mathbf{u}_j_{k \times 1} \cdot \mathbf{q}_j^T_{1 \times r} + \mathbf{E}_{k \times r}.$$

Ошибка

$$L(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Theta}\|_2^2$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{Q}^T$$

Коммутативная диаграмма



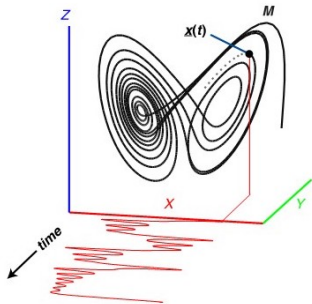
S – динамическая система,

\mathbf{X}, \mathbf{Y} – наблюдаемые фазовые пространства,

\mathbf{T}, \mathbf{U} – латентно-согласованные пространства, не можем измерить.

Метод Сугихары

(A)



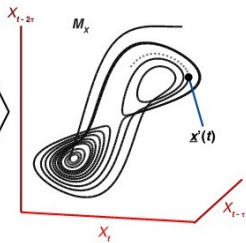
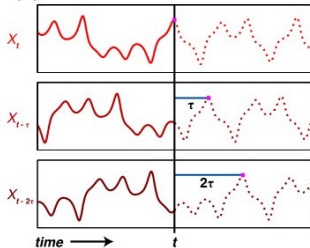
$\phi = \text{flow}$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = s(Y - X)$$

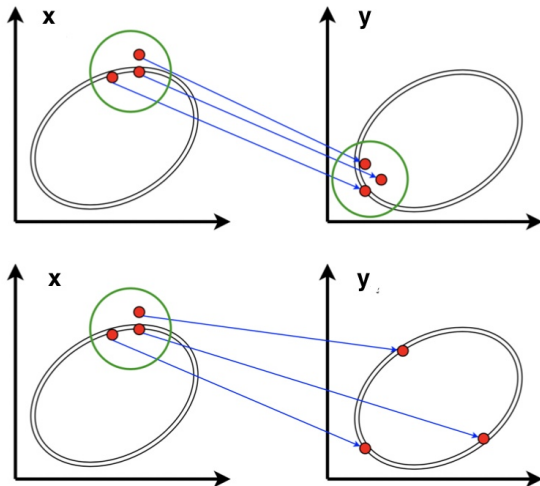
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = X(r - Z) - Y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = XY - bZ$$

(B)

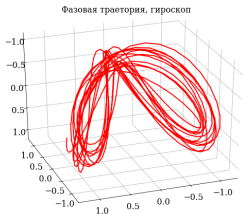
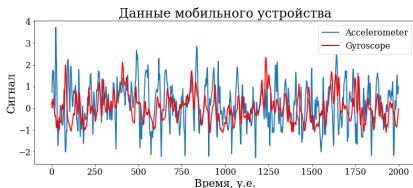


Метод перекрестных сходящихся отображений



Вычислительный эксперимент

Данные



- Два телефона в одной руке
- Два телефона в заднем кармане
- Телефон в руке и в противоположном заднем кармане

Цель

На примере решения прикладной задачи показать, что PLS – частный случай метода Сугихары.

Исследовать и другие методы, например Neural ODE.

Заключение

- Показано, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода Сугихары на примере PLS.
- Предложен метод обобщения PLS и CCM.
- Проведен вычислительный эксперимент на данных мобильного устройства.
- Показано, что учет зависимостей между временными рядами улучшает качество прогноза.
- Планируется рассмотреть другие методы канонического корреляционного анализа.