A. V. Goncharov

Выравнивание декартовых произведений упорядоченных множеств.

Работа посвящена исследованию метрических методов анализа объектов сложной структуры. Предлагается обощить метод динамического выравнивания двух временных рядов на случай объектов, определенных на двух и более осях времени. В дискретном представлении такие объекты являются матрицами. Метод динамического выравнивания временных рядов обобщается как метод динамического выравнивания матриц. Предложена функция расстояния, устойчивая к нелинейным деформациям декартового произведения двух и более временных шкал. Определен выравнивающий путь между объектами. В дальнейшем объектом называется матрица, в которой строки и столбцы соответствуют осям времени. Исследованы свойства предложенной функции расстояния. Для иллюстрации метода решаются задачи метрической классификации объектов на модельных данных и данных из датасета MNIST.

Key words: функция расстояния; динамическое выранивание; расстояние между матрицами; нелинейные деформации времени; пространственно временые ряды.

1 Введение

Временные ряды представляют собой набор измерений, упорядоченных по оси времени. Анализ временных рядов производится при решении задач, связанных с классификацией активности человека по измерениям акселерометра телефона, поиском характерного паттерна в EEG сигналах, кластеризации набора ECoG данных и во многих других задачах. Рассматриваются объекты, для которых время между измерениями фиксировано, но условия их измерений могут варьироваться. В данной работе для построения адекватной функции расстояния между объектами требуется учесть нелинейные деформации относительно оси времени: глобальные и локальные сдвиги, растяжения и сжатия [1].

Решение задач анализа временных рядов: классификации, детектирования паттернов, кластеризации и других, проводится различными методами [2]. Первая группа методов [3] основана на анализе параметров моделей, с помощью которых строится описание временных рядов. Вторая группа [4] основана на анализе их признакового описания. Третья группа основана на анализе формы [5]. Комбинации этих подходов описаны в [2].

Метрические методы находят схожие объекты внутри набора данных. Используются функции расстояния над временными рядами: расстояние Хаусдорфа [10], МОДН

[11], расстояние, основанное на HMM [6], Евклидово расстояние в исходном пространстве или в пространтсве сниженной размерности [5], LCSS [7] и др. Показано [8], что в случае локальных или глобальных деформаций времени при решении задач, требующих анализа исходной формы временного ряда метод динамического выравнивания оси времени DTW превосходит [9] другие функции расстояния по качеству итогового решения задачи, так как при наличие смещений двух объектов друг относительно друга требуется выравнивать их оптимальным образом, для вычисления расстояния между ними.

В этой работе предлагается перейти от рассмотрения объекта вида $\mathbf{s}(t)$, задающего временные ряды, к более общему случаю $\mathbf{s}(\mathbf{t})$. Возможно теоретическое обобщение предлагаемых методов на случай конечного множества осей времени. Из-за существенного роста вычислительной сложности предлагается рассмотреть объекты $\mathbf{s}(t_1,t_2)$, определенные на двух осях времени. В случае дискретной и ограниченной сверху шкалы времени объект представим вектором фиксированной размерности. Аналогично объект настоящего исследования представим матрицей.

Вводятся ограничения на зависимости осей времени в декартовом произведении для таких объектов. Определена гипотеза порождения данных: объекты одного класса эквивалентности получены при помощи допустимых преобразований, а именно локальных деформаций — растяжений и сжатий каждой из осей времени по отдельности. В дискретном случае преобразование представио дуплицированием строк и столбцов матриц. В число допустимых преобразований попадают и глобальные деформации: сдвиги по осям времени, представимые добавлением и удалением крайних строк и столбцов исходных матриц. Для каждой из осей времени выполняются свойства времени: монотонность и непрерывность. Похожими на описанные свойствами обладает объект, например, частотный спектр сигнала, где одна ось определяет время, а другая — частоту, величину, обратную времени.

Между двумя объектами, матрицами, в случае допустимых преобразований требуется определить инвариантную к преобразованием осей времени функцию расстояния, которая сможет выделить классы эквивалентности множества преобразованных объектов. Работа посвящена определению такой функции расстояния как обобщения метода динамического выравнивания временных рядов DTW для матриц.

Целью данной работы является построение метода, основанного на динамическом выранивании осей времени для матриц. Метод динамического выравнивания временных рядов определен только для объектов с одной осью времени, что делает его неприменимым для описанного случая. Однако концепции, используемые на каждой стадии вычисления оптимального выравнивания, обобщены на рассматриваемый случай. Ра-

бота исследует свойства предложенного метода и сравнивает результаты применения метода к задачам классификации изображений с результатами функции расстояния L_2 .

Для иллюстрации и анализа результатов решается задача метрической классификации объектов (матриц низкой размерности). Используются наборы данных: модельные данные, которые согласующиеся с выдвинутой гипотезой порождения данных для временных рядов, подмножество датасета MNIST сниженной размерности и частотный спектр сигнала.

2 Постановка заадчи

Рассмотрим задачу построения функции расстояния между объектами. Функция расстояния инвариантна к допустимым преобразованиям осей времени: глобальным и локальным линейным и нелинейным деформациям временной шкалы. Ниже приведены две постановки задачи, с помощью которых определены свойства предложенной функции расстояния, оценены ее качество и проведены сравнение нескольких функций расстояния: предложенной и L_2 .

Первая постановка задачи проверяет общее свойство функций расстояния: "объединение" схожих объектов и "разделение" непохожих объектов. Вводится определение свойства инвариантности функции расстояния к допустимым преобразованиям осей времени. Вторая постановка задачи уточняет первую и заключается в проведении метрической классификации методом ближайшего соседа.

Постановка задачи выбора функции расстояния между двумя объектами:

На двух временных осях заданы объекты вида $\mathbf{A}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Функция $G_w(\mathbf{A})$: $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ задает все допустимые преобразования исходного объекта \mathbf{A} : глобальные сдвиги, локальные линейные и нелинейные деформации. Параметр $w \in \mathbb{R}^+$ функции G фиксирует набор этих преобразований.

Допустимым элементарным преобразованием матрицы \mathbf{A} назовем дуплицирование случайных строк и столбцов исходной матрицы, добавление или удаление крайних строк и столбцов. А допустимым преобразованием примем случайную последовательность допустимых элементарных преобразований матрицы \mathbf{A} и обозначим как $G_w(\mathbf{A})$.

Объект $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ получен из объекта \mathbf{A} при помощи допустимых трансформаций $G_{\hat{w}}$, если существует $\hat{w} : \mathbf{B} = G_{\hat{w}}(\mathbf{A})$.

Качество функции расстояния между двумя объектами $\rho: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}} \to \mathbb{R}^+$ оценим на выборке $\mathfrak{D} = \{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^m$ объектов вида $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Заданы допустимые трансформации двух объектов $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{D}$, с параметрами w_1 и w_2 , такие, что $G_{w_1}(\mathbf{A}) = G_{w_2}(\mathbf{B})$. Задано множество объектов $\{\mathbf{C}_i\} \subset \mathfrak{D}$, для каждого из которых не существует таких $w_i, w : G_w(\mathbf{A}) = G_{w_i}(\mathbf{C}_i)$.

В данной работе решается задача выбора функции расстояния ρ , значение которой на паре объектов **A** и **B** меньше, чем на любой паре объектов **A** и **C**_i: для любого i $\rho(\mathbf{A},\mathbf{B})<\rho(\mathbf{A},\mathbf{C}_i)$.

Критерием качества для функции расстояния ρ на выборке $\mathfrak D$ примем долю объектов, для которых указанное неравенство выполняется:

$$S_{
ho}(\mathfrak{D}) = rac{1}{m} \sum_{i} \prod_{\{\mathbf{B}_{i}\}_{i}} \prod_{\{\mathbf{C}_{k}\}_{i}} \left[
ho(\mathbf{A}_{i}, \mathbf{B}_{j}) <
ho(\mathbf{A}_{i}, \mathbf{C}_{k}) \right],$$
 где

 $\{\mathbf{B}_j\}_i=\{\mathbf{B}\in\mathfrak{D}|\exists w_1,w_2:G_{w_1}(\mathbf{A}_i)=G_{w_2}(\mathbf{B})\},$ один класс эквивалентности с \mathbf{A}_i

$$\{\mathbf{C}_k\}_i=\{\mathbf{C}\in\mathfrak{D}|\nexists w_1,w_2:G_{w_1}(\mathbf{A}_i)=G_{w_2}(\mathbf{C})\},$$
 разные классы эквивалентности с \mathbf{A}_i

Постановка задачи выбора функции расстояния ρ сводится к задаче максимизации критерия качества:

$$\rho = \underset{\rho \in \{mDTW, L_2\}}{\operatorname{argmax}} S_{\rho}(\mathfrak{D}).$$

Прикладное использование функции расстояния:

Задана выборка $\mathfrak{D}=\{(\mathbf{A}_i,y_i)\}_{i=1}^m$, состоящая из пар объект — ответ. Объектами служат объекты сложной структуры: $\mathbf{A}_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$, а ответами являются метки класса — $y_i\in Y=\{1,...,E\}$, где $E\ll m$. Выборка разделена на обучение $\mathfrak{D}_l=\{(\mathbf{A}_i,y_i)\}_{i=1}^{m_1}$ и контроль $\mathfrak{D}_t=\{(\mathbf{A}_i,y_i)\}_{m_1}^{m_1+m_2}$.

Пусть модель классификации f принадлежит множеству моделей метрической классификации 1NN, которые классифицируемому объекту ставят в соответствие метку класса ближайшего объекта из обучающей выборки по заданной функции расстояния ρ :

$$\hat{y} = f(\mathbf{B}|\rho) = y_{\underset{i=1,\dots,m_1}{\operatorname{argmin}} \rho(B,A_i)}.$$

Критерий качества S модели f для задачи классификации — доля правильно проставленного класса на контрольной выборке:

$$S(f|\rho) = \frac{1}{m_2} \sum_{i=m_1}^{m_1+m_2} [f(\mathbf{A}_i|\rho) = y_i].$$

Требуется выбрать функцию расстояния ρ для модели классификации $f: \mathbb{R}^{n \times n} \to Y$, максимизирующую критерий качества S на контрольной выборке:

$$f = \underset{\rho \in \{mDTW, L_2\}}{\operatorname{argmax}} (S(f|\rho)). \tag{1}$$

3 MatrixDTW определение

Оптимальной функцией расстояния при допустимых преобразованиях объектов предлагается принять функцию расстояния Dynamic Time Warping, модифицированную для случая выравнивания двойной шкалы времени.

Определение 1: Даны два объекта $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть $\Omega^{n \times n \times n \times n}$ — такой тензор, что его элемент $\Omega(i, j, k, l)$ равен квадрату разности между элементами A(i, j) и B(k, l):

$$\mathbf{\Omega}(i, j, k, l) = (\mathbf{A}(i, j) - \mathbf{B}(k, l))^{2}.$$

Определение 2: Путем π между двумя объектами $A,B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ назовем множество индексов тензора Ω :

$$\pi = \{(i, j, k, l)\}, \quad i, j, k, l \in \{1, ..., n\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

Частичный порядок. Для элементов пути π с фиксированными значениями i,k задан порядок: упорядоченное подмножество $\{(i,j_r,k,l_r)\}_{r=1}^R \subset \pi$ мощностью R. Аналогично для фиксированных j,l.

Граничные условия. Пусть $(i, j, k, l) \in \pi$, тогда $(1, j, 1, l) \in \pi$ и $(i, 1, k, 1) \in \pi$. Путь π содержит противоположные углы тензора $\Omega: (1, 1, 1, 1) \in \pi$ и $(n, n, n, n) \in \pi$.

Непрерывность по направлению. Для упорядоченного подмножества пути $\{(i,j_r,k,l_r)\}_{r=1}^R \subset \pi$ выполняется условие непрерывности:

$$j_r - j_{r-1} \le 1$$
, $l_r - l_{r-1} \le 1$, $r = 2, ..., R$.

В шаге пути π по фиксированному направлению времени i,k встречаются только соседние элементы матрицы (включая соседние по диагонали). Аналогично для фиксированных j,l.

Монотонность по направлению. Для упорядоченного подмножества пути $\{(i,j_r,k,l_r)\}_{r=1}^R \subset \pi$ выполняется хотя бы одно из условий монотонности функции выравнивания времени:

$$j_r - j_{r-1} \ge 1$$
, $l_r - l_{r-1} \ge 1$, $r = 2, ..., R$.

Свойства выравнивающего пути между матрицами продолжают и обобщают свойства выравнивающего пути между двумя временными рядами. Предполагается, что другие определение стоимости пути, выравнивающего пути и функции расстояния между матрицами дублируют определения для случая временных рядов с точностью до определения выравнивающего пути.

Определение 3. Стоимость $Cost(A, B, \pi)$ пути π между объектами A, B:

$$Cost(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}) = \sum_{(i,j,k,l) \in \boldsymbol{\pi}} \Omega(i,j,k,l). \tag{2}$$

Определение 4. Выравнивающий путь $\hat{\pi}$ между объектами A, B — путь наименьшей стоимости среди всех возможных путей между объектами:

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \underset{\boldsymbol{\pi}}{\operatorname{argmin}} \operatorname{Cost}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\pi}). \tag{3}$$

Функция расстояния $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = mDTW(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (MatrixDTW) между объектами **A** и **B** рассчитывается как стоимость выравнивающего пути $\hat{\boldsymbol{\pi}}$:

$$mDTW(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{Cost}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\boldsymbol{\pi}}).$$
 (4)

Мотивация метода и алгоритм расчета расстояния

Построение алгоритма расчета функции расстояния между матрицами мотивирован алгоритмом расчета функции расстояния между временными рядами. В случае выравнивания одной временной шкалы итоговая матрица расстояний D в каждом элементе D(i,j) содержит расстояние между под-рядом первого временного ряда и под-рядом второго временного ряда. Рассмотрим алгоритм динамического выравнивания двух временных рядов $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$:

```
\begin{split} & \boldsymbol{D}(1:n+1,1:m+1) = inf; \\ & \boldsymbol{D}(1,1) = 0; \\ & for \quad i = 2:n+1 \\ & \quad for \quad j = 2:m+1 \\ & \quad d = (\mathbf{s}(i-1) - \mathbf{c}(j-1))^2; \\ & \quad \boldsymbol{D}(i,j) = d + min([\boldsymbol{D}(i-1,j),\boldsymbol{D}(i,j-1),\boldsymbol{D}(i-1,j-1)]); \\ & DTW(\mathbf{s},\mathbf{c}) = sqrt(\boldsymbol{D}(n+1,m+1)). \end{split}
```

Элемент D(i,j) матрицы D соответствует стоимости выравнивающего пути между подпоследовательностями исходных временных рядов: $\mathbf{s}(1:i)$ и $\mathbf{c}(1:j)$. Алгоритм построения наилучшего выравнивания времени подразумевает, что выравнивающий путь между этими подпоследоватльностями получен одним из трех способов.

Минимальная стоимость выравнивающего пути между:

1.
$$\mathbf{s}(1:i-1)$$
 и $\mathbf{c}(1:i)$,

- 2. $\mathbf{s}(1:i)$ и $\mathbf{c}(1:j-1)$,
- 3. $\mathbf{s}(1:i-1)$ и $\mathbf{c}(1:j-1)$,

тогда выравнивающий путь между $\mathbf{s}(1:i)$ и $\mathbf{c}(1:j)$ получен добавлением пары (i,j)к этому выравнивающему пути.

Предложенный алгоритм переносит эти рассуждения на случай выранивания двух матриц \mathbf{A}, \mathbf{B} . Элемент $\mathbf{D}(i,j,k,l)$ четырехмерного тензора расстояний \mathbf{D} соответствует стоимости выравнивающего пути между $\mathbf{A}(1:i,1:j)$ и $\mathbf{B}(1:k,1:l)$. Выравнивающий путь между этими подматрицами получен одним из семи способов. Минимальная стоимость у выравнивающего пути между:

- 1. $\mathbf{A}(1:i-1,1:j)$ и $\mathbf{B}(1:k,1:l)$. Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути $\{(i-1,j,k,l)\in \boldsymbol{\pi} \mid j,l$ произвольные,i,k фиксированные $\}$ с заменой i-1 на i.
- 2. $\mathbf{A}(1:i,1:j-1)$ и $\mathbf{B}(1:k,1:l)$. Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути $\{(i,j-1,k,l)\in\boldsymbol{\pi}\mid i,k$ произвольные, j,l фиксированные $\}$ с заменой j-1 на j.
- 3. $\mathbf{A}(1:i,1:j)$ и $\mathbf{B}(1:k-1,1:l)$. Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути $\{(i,j,k-1,l)\in\boldsymbol{\pi}\mid j,l$ произвольные,i,k фиксированные $\}$ с заменой k-1 на k.
- 4. $\mathbf{A}(1:i,1:j)$ и $\mathbf{B}(1:k,1:l-1)$. Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути $\{(i,j,k,l-1)\in \boldsymbol{\pi} \mid i,k$ произвольные, j,l фиксированные $\}$ с заменой l-1 на l.
- 5. $\mathbf{A}(1:i-1,1:j)$ и $\mathbf{B}(1:k-1,1:l)$. Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути $\{(i-1,j,k-1,l)\in \boldsymbol{\pi} \mid j,l$ произвольные,i,k фиксированные $\}$ с заменой i-1 на i,k-1 на k.
- 6. **A**(1:i,1:j-1) и **B**(1:k,1:l-1). Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути $\{(i,j-1,k,l-1)\in \boldsymbol{\pi} \mid i,k$ —произвольные,j,l—фиксированные $\}$ с заменой j-1 на j,l-1 на l.
- 7. $\mathbf{A}(1:i-1,1:j-1)$ и $\mathbf{B}(1:k-1,1:l-1)$. Тогда к этому выравнивающему пути добавляется пара индексов (i,j,k,l), а также дублируются все пары индексов пути

 $\{(i,j-1,k,l-1)\in \pmb{\pi} \mid i,k$ — произвольные, j,l — фиксированные $\}$ с заменой j-1 на $j,\ l-1$ на l и все пары индексов пути $\{(i-1,j,k-1,l)\in \pmb{\pi} \mid j,l$ — произвольные, i,k — фиксированные $\}$ с заменой i-1 на $i,\ k-1$ на k.

Алгоритм динамического выравнивания двух матриц и вычисления расстояния mDTW между ними с учетом перечисленных выше вариантов примет вид:

```
D(1:n+1,1:n+1,1:n+1,1:n+1) = inf;
D(1,1,1,1) = 0;
\pi(1,1,1,1) = ((1,1),(1,1))
for i, j, k, l \in \mathbb{N}^{2:n+1} \times \mathbb{N}^{2:n+1} \times \mathbb{N}^{2:n+1} \times \mathbb{N}^{2:n+1}
                                 \overline{i, j, k, l} = \operatorname{argmin}([D(i-1, j, k, l), D(i, j-1, k, l)),
                                          D(i, j, k-1, l), D(i, j, k, l-1), D(i-1, j, k-1, l), D(i, j-1, k, l-1),
                                          D(i-1, j-1, k-1, l-1));
                                 if \quad \overline{i,j,k,l} == i-1,j,k,l:
                                         cost = \sum_{r,f:((i-1,r),(k,f))\in\pi(i-1,i,k,l)} (\mathbf{A}(i,r) - \mathbf{B}(k,f))^2;
                                          \pi(i,j,k,l) = \pi(i-1,j,k,l) \cup \{((i,r),(k,f)) | ((i-1,r),(k,f)) \in
                                                  \in \pi(i-1,j,k,l)\} \cup \{((i,j),(k,l))\}
                                          D(i, j, k, l) = cost + D(\overline{i, j, k, l})
                                 if \quad \overline{i, i, k, l} == i, i-1, k, l:
                                          cost = \sum_{r,f:((r,j-1),(f,l))\in\pi(i,j-1,k,l)} (\mathbf{A}(r,j) - \mathbf{B}(f,l))^2;
                                          \pi(i,j,k,l) = \pi(i,j-1,k,l) \cup \{((r,j),(f,l)) | ((r,j-1),(f,l)) \in
                                                   \in \pi(i, j-1, k, l) \cup \{((i, j), (k, l))\}
                                          D(i, j, k, l) = cost + D(\overline{i, j, k, l})
                                 if \quad \overline{i,j,k,l} == i,j,k-1,l:
                                         cost = \sum_{r,f:((i,r),(k-1,f))\in\pi(i,j,k-1,l)} (\mathbf{A}(i,r) - \mathbf{B}(k,f))^2;
                                          \pi(i, j, k, l) = \pi(i, j, k - 1, l) \cup \{((i, r), (k, f)) | ((i, r), (k - 1, f)) \in
                                                   \in \pi(i, j, k-1, l) \cup \{((i, j), (k, l))\}
                                          D(i, j, k, l) = cost + D(\overline{i, j, k, l})
                                 if \quad \overline{i, j, k, l} == i, j, k, l-1:
                                          cost = \sum_{r,f:((r,i),(f,l-1))\in\pi(i,j,k,l-1)} (\mathbf{A}(r,j) - \mathbf{B}(f,l))^2;
                                          \pi(i,j,k,l) = \pi(i,j,k,l-1) \cup \{((r,j),(f,l)) | ((r,j),(f,l-1)) \in
                                                  \in \pi(i, j, k, l-1) \cup \{((i, j), (k, l))\}\
                                          D(i, j, k, l) = cost + D(\overline{i, j, k, l})
                                 if \quad \overline{i, j, k, l} == i-1, j, k-1, l:
                                          cost = \sum_{r,f:((i-1,r),(k-1,f))\in\pi(i-1,i,k-1,l)} (\mathbf{A}(i,r) - \mathbf{B}(k,f))^2;
```

$$\begin{split} \pi(i,j,k,l) &= \pi(i-1,j,k-1,l) \cup \{((i,r),(k,f))| \\ & | ((i-1,r),(k-1,f)) \in \pi(i-1,j,k-1,l)\} \cup \{((i,j),(k,l))\} \\ D(i,j,k,l) &= \cos t + D(\overline{i,j,k,l}) \\ if \quad \overline{i,j,k,l} &== i,j-1,k,l-1: \\ &\cos t = \sum_{r,f:((r,j-1),(f,l-1)) \in \pi(i,j-1,k,l-1)} (\mathbf{A}(r,j) - \mathbf{B}(f,l))^2; \\ \pi(i,j,k,l) &= \pi(i,j-1,k,l-1) \cup \{((r,j),(f,l))| \\ & | ((r,j-1),(f,l-1)) \in \pi(i,j-1,k,l-1)\} \cup \{((i,j),(k,l))\} \\ D(i,j,k,l) &= \cos t + D(\overline{i,j,k,l}) \\ if \quad \overline{i,j,k,l} &== i-1,j-1,k-1,l-1: \\ &\cos t = \sum_{r,f:((r,j-1),(f,l-1)) \in \pi(i,j-1,k,l-1)} (\mathbf{A}(r,j) - \mathbf{B}(f,l))^2 + \\ &+ \sum_{r,f:((i-1,r),(k-1,f)) \in \pi(i-1,j,k-1,l)} (\mathbf{A}(i,r) - \mathbf{B}(k,f))^2; \\ \pi(i,j,k,l) &= \pi(i,j-1,k,l-1) \cup \{((r,j),(f,l))| \\ & | ((r,j-1),(f,l-1)) \in \pi(i,j-1,k,l-1)\} \cup \{((i,r),(k,f))| \\ & | ((i-1,r),(k-1,f)) \in \pi(i-1,j,k-1,l)\} \cup \{((i,r),(k,f))| \\ & | ((i-1,r),(k-1,f)) \in \pi(i-1,j,k-1,l)\} \cup \{((i,j),(k,l))\} \\ D(i,j,k,l) &= \cos t + D(\overline{i,j,k,l}) \end{split}$$

$$MatrixDTW(\mathbf{A},\mathbf{B}) = sqrt(D(n+1,n+1,n+1,n+1))$$

Следует отмтетить, что алгоритм имеет высокую сложность вычисления — $O(n^4)$. Предполагается ускорение метода с использованием ограничения Sakoe-Chiba band, что сократит вычислительную сложность алгоритма до $O(n^2k^2)$, где k — параметр ограничения.

4 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проведен на модельных данных, согласованных с гипотезой порождения данных, на реальных данных: объекты коллекции MNIST, с допустимыми преобразованиями, на спектрограммах зашумленных сигналов.

Решается задача метрической классификации методом ближайшего соседа. В таблице приведены значения критерия качества функции расстояния $S_{\rho}(\mathfrak{D})$ и критерия качества метрической классификации S(f|p) при использовании двух функций расстояния: предложенной в работе mDTW и L_2 .

Модельные данные — это нулевые матрицы со случайными ненулевыми строками, столбцами, подпрямоугольниками с наложенным шумом. К ним применены допустимые преобразования, согласованные с гипотезой наличия локальных и глобальных искажений. На Рисунке 1 показан пример оптимального выравнивания двух объектов.

Линиями показаны элементы пути π .

Подготовлена подвыборка набора данных MNIST. Она состоит из 100 объектов классов: 0 и 1 сниженной размерности с допустимыми преобразованиями. На Рисунке 2 показан пример оптимального выравнивания объектов.

Аналогичный эксперимент проведен для решения задачи метрической классификации спектров различных сигналов, пример которых приведен на Рисунке 3. Примеры Фурье-спектров этих сигналов показаны на Рисунке 4. Спектр получен путем применения быстрого преобразования Фурье к исходному сигналу для различных окон с фиксированным размером и сдвигом. Исходные временные ряды обладали свойством периодичности, период выбирался случайным образом.

Тестирование проведено на различного рода данных: исходных модельных данных без наложения допустимых преобразований, с ними, а также на модельных данных с наложенным поверх объектов случайным шумом.

Данные / Метод	L_2		MatrixDTW	
	S(f p)	$S_{\rho}(\mathfrak{D})$	S(f p)	$S_{\rho}(\mathfrak{D})$
Модельные данные без преобразований	92%	78%	100%	85%
Модельные данные с преобразованиями	86%	65%	100%	82%
Модельные данные с преобразованиями и шумом	69%	61%	92%	78%
MNIST без преобразований	95%	-	95%	_
MNIST с преобразованиями	53%	-	92%	-
Спектр сигнала	83%	-	96%	_

В каждом из проведенных экспериментов была продемонстрирована устойчивость предложенного подхода к допустимым преобразованиям. Наилучшее значение критерия качества задачи классификации было достигнуто при использовании предложенной функции расстояния.

5 Заключение

В работе предложено обощение метода динамического выравнивания временных рядов для случая объектов, определенных на двух осях времени. Вычислительный эксперимент позволил проанализировать свойства подхода: устойчивость к допустимым преобразованиям и разделяющая способность функции расстояния как на реальных, так и модельных данных. Качество решения задачи метрической классификации выше

решения, основанного на Евклидовом расстоянии. Вычислительная сложность метода высокая, что ограничивает его применимость на объектах высокой размерности.

Список литературы

- 1. *H. Sakoe*, *S. Chiba*. A dynamic programming approach to continuous speech recognition // Proceedings of the Seventh International Congress on Acoustics. 1971. Vol. 3, Pp. 65–69.
- 2. S. Aghabozorgi, S. S. Ali, T. Y. Wah Time-series clustering A decade review // Information Systems. 2015. Vol. 53, Pp. 16–38
- 3. T. Warrenliao. Clustering of time series data a survey // Pattern Recognition. 2005. Vol. 38 (11), Pp.1857–1874.
- 4. V. Hautamaki, P. Nykanen, P. Franti. Time-series clustering by approximate prototypes // Proceedings of 19th International Conference on Pattern Recognition, ICPR. 2008. No. D, Pp. 1–4.
- 5. C. Faloutsos, M. Ranganathan, Y. Manolopoulos. Fast subsequence matching in timeseries databases // ACM SIGMOD. 1994. Rec. 23 (2), Pp. 419–429.
- 6. P. Smyth. Clustering sequences with hidden Markov models // Adv. Neural Inf. Process. 1997. Syst 9, Pp. 648–654.
- 7. A. Banerjee, J. Ghosh. Clickstream clustering using weighted longest common subsequences // Proceedings of the Workshop on Web Mining. 2001. SIAM Conference on Data Mining. Pp. 33–40.
- 8. J. Aach, G.M. Church. Aligning gene expression time series with time warping algorithms // Bioinformatics. 2001. Vol. 17 (6). P. 495.
- 9. B.K. Yi, C. Faloutsos. Fast time sequence indexing for arbitrary Lp norms // Proceedings of the 26th International Conference on Very Large Data Bases. 2000. Pp. 385–394.
- N. Basalto, R. Bellotti, F. D. Carlo, P. Facchi, S. Pascazio Hausdorff clustering of financial time series // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. Vol. 379 (2). Pp. 635–644

11. L. Gorelick, M. Blank, E. Shechtman, M. Irani, R. Basri. Actions as Space-Time Shapes // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2007. Vol. 29 (12), Pp. 2247.

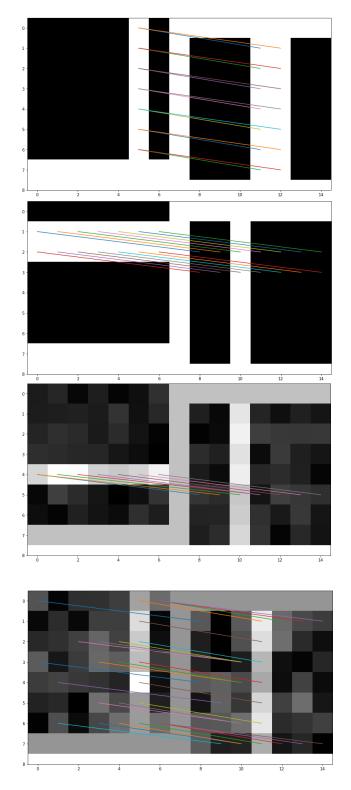


Рис. 1: Визуализация выравнивающего пути для модельных объектов двух классов.

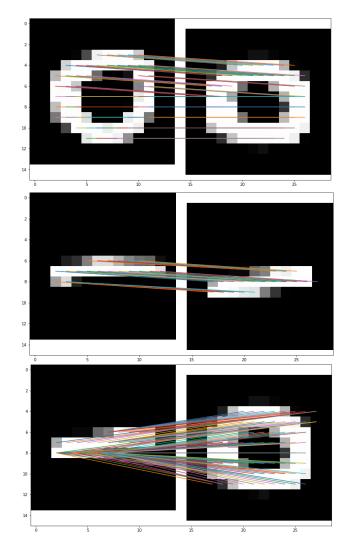


Рис. 2: Визуализация выравнивающего пути для объектов классов 0 и 1.

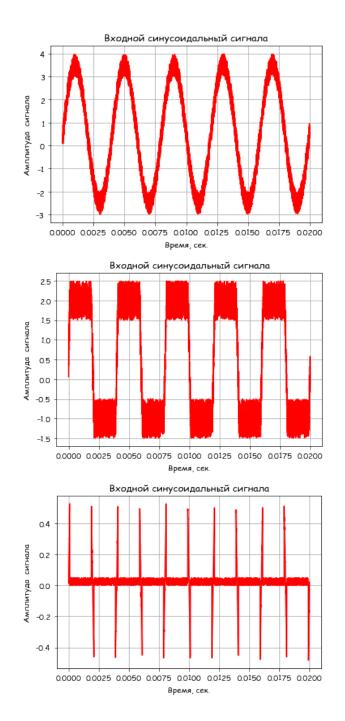


Рис. 3: Визуализация временных рядов для получения спектра сигнала.

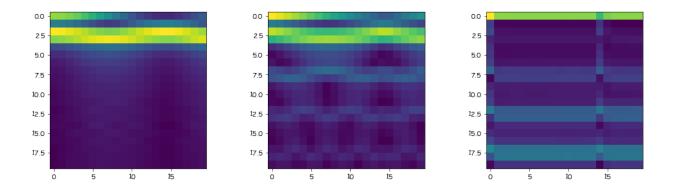


Рис. 4: Визуализация примеров объектов-спектров сигнала.