A. V. Goncharov

Выравнивание декартовых произведений упорядоченных множеств.

Работа посвящена исследованию метрических методов анализа объектов сложной структуры. Предлагается обощить метод динамического выравнивания двух временных рядов на случай объектов, определенных на двух и более осях времени. В дискретном представлении такие объекты являются матрицами. Метод динамического выравнивания временных рядов обобщается как метод динамического выравнивания матриц. Предложена функция расстояния, устойчивая к монотонным нелинейным деформациям декартового произведения двух и более временных шкал. Определен выравнивающий путь между объектами. В дальнейшем объектом называется матрица, в которой строки и столбцы соответствуют осям времени. Исследованы свойства предложенной функции расстояния. Для иллюстрации метода решаются задачи метрической классификации объектов на модельных данных и данных из датасета MNIST.

Key words: функция расстояния; динамическое выранивание; расстояние между матрицами; нелинейные деформации времени; пространственно-временные ряды.

1 Введение

Временные ряды представляют собой набор измерений, упорядоченных по оси времени. Анализ временных рядов производится при решении задач, связанных с классификацией активности человека по измерениям акселерометра телефона, поиском паттернов в EEG сигналах (электроэнцефалограмма), кластеризации набора ECoG (электрокортикограмма) данных и во многих других задачах [1]. Рассматриваются объекты, для которых время между измерениями фиксировано. В данной работе для построения адекватной функции расстояния между объектами требуется учесть нелинейные деформации относительно оси времени: глобальные и локальные сдвиги, растяжения и сжатия [2].

В [3] приводятся различные методы решения задач анализа временных рядов: классификации, детектирования паттернов, кластеризации и других. В [4] описание временных рядов строится с помощью анализа параметров моделей, в [6] используется их признаковое описание, в [7] происходит анализ их формы. Комбинации этих подходов описаны в [3].

Метрические методы находят схожие объекты в наборе. Используются функции расстояния над временными рядами: расстояние Хаусдорфа [12], MODH [13], расстояние, основанное на HMM [8], Евклидово расстояние в исходном пространстве или в пространтсве сниженной размерности [7], LCSS [9]. Показано [10], что в случае локальных или глобальных деформаций времени при решении задач, требующих анализа исходной формы временного ряда метод динамического выравнивания оси времени DTW превосходит [11] другие функции расстояния по качеству итогового решения задачи, так как при наличие смещений двух объектов друг относительно друга требуется выравнивать их оптимальным образом, для вычисления расстояния между ними.

В этой работе предлагается перейти от рассмотрения объекта $\mathbf{s}(t)$, временного ряда, к более общему случаю $\mathbf{s}(\mathbf{t})$,в котором компоненты вектора $\mathbf{t}$ — оси времени. Из-за существенного роста вычислительной сложности при увеличении числа осей времени предлагается рассмотреть объекты $\mathbf{s}(t_1, t_2)$, определенные на двух осях времени. Оси времени считаются независимыми. В случае единственной дискретной и ограниченной сверху шкалы времени объект представим вектором фиксированной размерности. Аналогично объект настоящего исследования представим матрицей.

Вводятся ограничения на зависимости осей времени в декартовом произведении для таких объектов. Определена гипотеза порождения данных: объекты одного класса эквивалентности получены при помощи допустимых преобразований, а именно локальных деформаций — растяжений и сжатий каждой из осей времени по отдельности. В дискретном случае преобразование представио дуплицированием строк и столбцов матриц. В число допустимых преобразований попадают и глобальные деформации: сдвиги по осям времени, представимые добавлением и удалением крайних строк и столбцов исходных матриц. Для каждой из осей времени выполняются свойства времени: монотонность и непрерывность. Похожими на описанные свойствами обладает объект, например, частотный спектр сигнала, где одна ось определяет время, а другая — частоту, величину, обратную времени.

Между двумя объектами, матрицами, в случае допустимых преобразований требуется определить инвариантную к преобразованием осей времени функцию расстояния, которая сможет выделить классы эквивалентности множества преобразованных объектов. Работа посвящена определению такой функции расстояния как обобщения метода динамического выравнивания временных рядов DTW для матриц.

Целью данной работы является построение метода, основанного на динамическом выранивании осей времени для матриц. Метод динамического выравнивания временных рядов [5] определен только для объектов с одной осью времени, что делает его неприменимым для описанного случая. Однако концепции, используемые на каждой стадии вычисления оптимального выравнивания, обобщены на рассматриваемый случай. Работа исследует свойства предложенного метода и сравнивает результаты применения метода к задачам классификации изображений [14] с результатами функции расстояния L_2.

Для иллюстрации и анализа результатов решается задача метрической классификации объектов (матриц низкой размерности). Используются наборы данных: модельные данные, которые согласующиеся с выдвинутой гипотезой порождения данных для временных рядов, подмножество датасета MNIST сниженной размерности и частотный спектр сигнала.

2 Постановка заадчи

Рассмотрим задачу построения функции расстояния между объектами. Функция расстояния инвариантна к допустимым преобразованиям осей времени: глобальным и локальным линейным и нелинейным деформациям временной шкалы. Ниже приведены две постановки задачи, с помощью которых определены свойства предложенной функции расстояния, оценены ее качество и проведены сравнение нескольких функций расстояния: предложенной и L_2.

Первая постановка задачи импользует общее свойство функций расстояния: “объединение” схожих объектов и “разделение” непохожих объектов. Вводится определение свойства инвариантности функции расстояния к допустимым преобразованиям осей времени. Вторая постановка задачи уточняет первую и заключается в проведении метрической классификации методом ближайшего соседа.

Постановка задачи выбора функции расстояния между двумя объектами:

На двух временных осях заданы объекты вида $\mathbf{A}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Функция $G_w(\mathbf{A}) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{\hat{n}\times\hat{n}}$ задает допустимые преобразования исходного объекта $\mathbf{A}$: глобальные сдвиги, локальные линейные и нелинейные деформации, а именно растяжения и сжатия оси времени, сдвиги значений по оси времени. Скалярный параметр $w \in \mathbb{R}^+$ функции G фиксирует набор этих преобразований.

Допустимым элементарным преобразованием матрицы $\mathbf{A}$ назовем дуплицирование случайных строк и столбцов исходной матрицы, добавление или удаление крайних строк и столбцов. Допустимым преобразованием примем некоторую последовательность допустимых элементарных преобразований матрицы $\mathbf{A}$ и обозначим как $G_w(\mathbf{A})$.

Будем называть объект $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\hat{n}\times\hat{n}}$, полученным из объекта $\mathbf{A}$ при помощи допустимых преобразований $G_{\hat{w}}$, если существует $\hat{w} \in \mathbb{R}^+ : \mathbf{B} = G_{\hat{w}}(\mathbf{A})$.

Функцию расстояния между двумя объектами $\rho : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{\hat{n}\times\hat{n}} \to \mathbb{R}^+$ оценим на выборке $\mathfrak{D} = \{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^m$ объектов вида $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Для каждого объекта выборки $\mathbf{A}_i$ и объекта $\mathbf{B}_j$ его класса эквивалентности $\{\mathbf{B}_j\}_i =$

$\{\mathbf{B} \in \mathfrak{D} | \exists w_i, w_j : G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_j}(\mathbf{B}_j)\}$, заданы допустимые трансформации с параметрами w_i и w_j, такие, что $G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_j}(\mathbf{B}_j)$. Для каждого объекта выборки $\mathbf{A}_i$ и объекта $\mathbf{C}_j$ из других классов эквивалентности $\{\mathbf{C}_k\}_i = \{\mathbf{C} \in \mathfrak{D} | \nexists w_i, w_k : G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_k}(\mathbf{C})\}$, не существует таких $w_i, w_k : G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_k}(\mathbf{C}_k)$.

Решается задача поиска функции расстояния ρ, значение которой на паре объектов одного класса эквивалентности меньше, чем на любой паре объектов из разных: для любого $i, j, k \quad \rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j) < \rho(\mathbf{A}, \mathbf{C}_k)$. Функцию расстояния, обладающую таким свойством назовем инвариантной на классах эквивалентности.

Критерием качества для функции расстояния ρ на выборке $\mathfrak{D}$ примем долю объектов, для которых указанное неравенство выполняется:

$$S_\rho(\mathfrak{D}) = \frac{1}{m} \sum_i \prod_{\{\mathbf{B}_j\}_i} \prod_{\{\mathbf{C}_k\}_i} \left[\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j) < \rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_k)\right], \quad \text{где}$$

Постановка задачи выбора функции расстояния ρ сводится к задаче максимизации критерия качества.

Прикладное использование функции расстояния:

Задана выборка $\mathfrak{D} = \{(\mathbf{A}_i, y_i)\}_{i=1}^m$, состоящая из пар объект — ответ. Объектами служат объекты сложной структуры: $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а ответами являются метки класса — $y_i \in Y = \{1, ..., E\}$, где $E \ll m$. Выборка разделена на обучение $\mathfrak{D}_l = \{(\mathbf{A}_i, y_i)\}_{i=1}^{m_1}$ и контроль $\mathfrak{D}_t = \{(\mathbf{A}_i, y_i)\}_{m_1}^{m_1+m_2}$.

Пусть модель классификации f принадлежит множеству моделей метрической классификации 1NN, которые классифицируемому объекту ставят в соответствие метку класса ближайшего объекта из обучающей выборки по заданной функции расстояния ρ:

$$\hat{y} = f(\mathbf{B}|\rho) = y_{\underset{i=1,\dots,m_1}{\operatorname{argmin}} \rho(B, A_i)}.$$

Критерий качества S модели f для задачи классификации — доля правильно проставленного класса на контрольной выборке:

$$S(f|\rho) = \frac{1}{m_2} \sum_{i=m_1}^{m_1+m_2} [f(\mathbf{A}_i|\rho) = y_i].$$

Требуется выбрать функцию расстояния ρ для модели классификации $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to Y$, максимизирующую критерий качества S на контрольной выборке:

$$f = \underset{\rho \in \{mDTW, L_2\}}{\operatorname{argmax}} \big(S(f|\rho)\big). \tag{1}$$

3 MatrixDTW определение

Предлагается использовать функцию расстояния Dynamic Time Warping, модифицированную для случая выравнивания двойной шкалы времени.

Определение 1: *Даны два объекта* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Тензор невязок* $\boldsymbol{\Omega}^{n \times n \times n \times n}$ *— такой тензор, что его элемент* $\boldsymbol{\Omega}(i, j, k, l)$ *равен квадрату разности между элементами* $\boldsymbol{A}(i, j)$ *и* $\boldsymbol{B}(k, l)$*:*

$$\boldsymbol{\Omega}(i, j, k, l) = (\mathbf{A}(i, j) - \mathbf{B}(k, l))^2.$$

Определение 2: *Путем* $\boldsymbol{\pi}$ *между двумя объектами* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *назовем множество индексов тензора* $\boldsymbol{\Omega}$*:*

$$\boldsymbol{\pi} = \{(i, j, k, l)\}, \quad i, j, k, l \in \{1, ..., n\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

Частичный порядок. *Для элементов пути* $\boldsymbol{\pi}$ *с фиксированными значениями* i, k *задан порядок: выравнивающий путь для фиксированных строк двух матриц упорядочен —* $\{(i, j_r, k, l_r))\}_{r=1}^R \subset \boldsymbol{\pi}$ *мощностью* R. *Аналогично для фиксированных столбцов с индексами* j, l.

Граничные условия. *Пусть* $(i, j, k, l) \in \boldsymbol{\pi}$, *тогда* $(1, j, 1, l) \in \boldsymbol{\pi}$ *и* $(i, 1, k, 1) \in \boldsymbol{\pi}$. *Путь* $\boldsymbol{\pi}$ *содержит элементы тензора* $\boldsymbol{\Omega}$*:* $(1, 1, 1, 1) \in \boldsymbol{\pi}$ *и* $(n, n, n, n) \in \boldsymbol{\pi}$.

Непрерывность по направлению. *Для упорядоченного подмножества пути* $\{(i, j_r, k, l_r)\}_{r=1}^R \subset \boldsymbol{\pi}$ *выполняется условие непрерывности:*

$$j_r - j_{r-1} \leq 1, \quad l_r - l_{r-1} \leq 1, \quad r = 2, ..., R.$$

В шаге пути $\boldsymbol{\pi}$ *по фиксированному направлению времени* i, k *встречаются только соседние элементы матрицы (включая соседние по диагонали). Аналогично для фиксированных* j, l.

Монотонность по направлению. *Для упорядоченного подмножества пути* $\{(i, j_r, k, l_r)\}_{r=1}^R \subset \boldsymbol{\pi}$ *выполняется хотя бы одно из условий монотонности функции выравнивания времени:*

$$j_r - j_{r-1} \geq 1, \quad l_r - l_{r-1} \geq 1, \quad r = 2, ..., R.$$

Свойства пути между матрицами обобщают свойства пути между двумя временными рядами.

Определение 3. *Стоимость* $Cost(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\pi})$ *пути* $\boldsymbol{\pi}$ *между объектами* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$*:*

$$Cost(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\pi}) = \sum_{(i,j,k,l) \in \boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\Omega}(i, j, k, l). \tag{2}$$

Определение 4. *Выравнивающий путь* $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ *между объектами* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *— путь наименьшей стоимости среди всех возможных путей между объектами:*

$$\hat{\boldsymbol{\pi}} = \underset{\boldsymbol{\pi}}{argmin}\, Cost(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\pi}). \tag{3}$$

Функция расстояния $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{mDTW}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (MatrixDTW) между объектами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ рассчитывается как стоимость выравнивающего пути $\hat{\boldsymbol{\pi}}$:

$$\mathrm{mDTW}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{Cost}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\boldsymbol{\pi}}). \tag{4}$$

Алгоритм вычисления значения расстояния

Построение алгоритма вычисления значения функции расстояния между матрицами основан на алгоритме расчета функции расстояния между временными рядами. В случае выравнивания одной временной шкалы итоговая матрица расстояний $\boldsymbol{D}$ в каждом элементе $\boldsymbol{D}(i, j)$ содержит расстояние между под-рядом первого временного ряда и под-рядом второго временного ряда. Рассмотрим алгоритм динамического выравнивания двух временных рядов $\mathbf{s} \in R^n$ и $\mathbf{c} \in R^m$:

```
DTW(s,c):
    D(1:n+1,1:m+1) = inf;
    D(1,1) = 0;
    for i = 2 : n+1
        for j = 2 : m+1
            d = (s(i-1)-c(j-1))^2;
            D(i,j) = d + min( [ D(i-1,j), D(i,j-1), D(i-1,j-1) ]);
    return sqrt(D(n+1,m+1)).
```

Рис. 1: Алгоритм вычисления DTW для временных рядов

Элемент $\boldsymbol{D}(i, j)$ матрицы $\boldsymbol{D}$ соответствует стоимости выравнивающего пути между подпоследовательностями исходных временных рядов: $\mathbf{s}(1:i) = \mathbf{s}(t), t = 1, \ldots, i$ и $\mathbf{c}(1:j) = \mathbf{c}(t), t = 1, \ldots, j$. Алгоритм построения наилучшего выравнивания времени подразумевает, что выравнивающий путь между этими подпоследоватльностями получен одним из трех способов — если стоимость выравнивающего пути между подпоследовательностями $\mathbf{s}(1:\bar{i})$ и $\mathbf{c}(1:\bar{j})$ минимальна для $\overline{i, j}$ из множества:

$$\overline{i, j} \in \{\{i-1, j\}, \{i, j-1\}, \{i-1, j-1\}\},$$

тогда выравнивающий путь между $\mathbf{s}(1:i)$ и $\mathbf{c}(1:j)$ получен добавлением пары (i, j) к выбранному выравнивающему пути с минимальной стоимостью из трех.

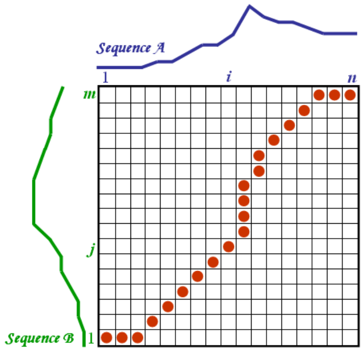

Рис. 2: Алгоритм построения выравнивающего пути для случая одной шкалы времени.

Предложенный алгоритм переносит эти рассуждения на случай выранивания двух матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Элемент $\boldsymbol{D}(i, j, k, l)$ четырехиндексного тензора расстояний $\boldsymbol{D}$ соответствует стоимости выравнивающего пути между $\mathbf{A}(1 : i, 1 : j) = \mathbf{A}(t_1, t_2), t_1 = 1, \dots, i, t_2 = 1, \dots, j$ и $\mathbf{B}(1 : k, 1 : l) = \mathbf{B}(t_1, t_2), t_1 = 1, \dots, k, t_2 = 1, \dots, l$. Выравнивающий путь между этими подматрицами получен одним из семи способов — если стоимость выравнивающего пути между подматрицами $\mathbf{A}(1 : \bar{i}, 1 : \bar{j})$ и $\mathbf{B}(1 : \bar{k}, 1 : \bar{l})$ минимальна для $\overline{i, j, k, l}$ из множества:

$$\overline{i, j, k, l} \in \{\{i-1, j, k, l\}, \{i, j-1, k, l\}, \{i, j, k-1, l\}, \{i, j, k, l-1\}, \{i-1, j, k-1, l\},$$
$$\{i, j-1, k, l-1\}, \{i-1, j-1, k-1, l-1\}\},$$

тогда к выравнивающему пути между этими подматрицами добавляется элемент пути (i, j, k, l) и поправка $\boldsymbol{d\pi}$ пути $\boldsymbol{\pi}$, алгоритм вычисления которой приведен ниже.

Обозначим выравнивающий путь между $\mathbf{A}(1 : i, 1 : j)$ и $\mathbf{B}(1 : k, 1 : l)$ как $\boldsymbol{\pi}(i, j, k, l)$, тогда поправка $\boldsymbol{d\pi}$ пути $\boldsymbol{\pi}(i, j, k, l)$ при фиксированных $\overline{i, j, k, l}$ вычисляется следующим образом:

Correction($\overline{\mathrm{i,j,k,l}}$, $\boldsymbol{\pi}(\overline{\mathrm{i,j,k,l}})$) :

  if $\overline{\mathrm{i,j,k,l}} \in \{$ (i-1, j, k,l) ; (i, j, k-1, l) ; (i-1, j, k-1, l) $\}$:

    $\widehat{\pi} = \{ (\bar{\mathrm{i}}, \mathrm{r}, \bar{\mathrm{k}}, \mathrm{f}) \in \boldsymbol{\pi}(\overline{\mathrm{i, j, k, l}}) \mid \mathrm{r, f} \in \mathbb{N}\}$

  elif $\overline{\mathrm{i,j,k,l}} \in \{$ (i, j-1, k, l); (i, j, k, l-1); (i, j-1, k, l-1) $\}$:

    $\widehat{\pi} = \{ (\mathrm{r}, \bar{\mathrm{j}}, \mathrm{f}, \bar{\mathrm{l}}) \in \boldsymbol{\pi}(\overline{\mathrm{i, j, k, l}}) \mid \mathrm{r, f} \in \mathbb{N}\}$

  elif $\overline{\mathrm{i,j,k,l}}$ = i-1,j-1,k-1,l-1:

    $\widehat{\pi} = \{ (\bar{\mathrm{i}}, \mathrm{r}, \bar{\mathrm{k}}, \mathrm{f}) \in \boldsymbol{\pi}(\overline{\mathrm{i, j, k, l}}) \mid \mathrm{r,f} \in \mathbb{N}\} \cup \{ (\mathrm{r}, \bar{\mathrm{j}}, \mathrm{f}, \bar{\mathrm{l}}) \in \boldsymbol{\pi}(\overline{\mathrm{i, j, k, l}}) \mid \mathrm{r,f} \in \mathbb{N}\}$

  $\boldsymbol{d\pi} = \{$ element $\in \widehat{\pi}$: произведены замены индексов $\bar{\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, $\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}$, $\bar{\mathrm{k}} = \mathrm{k}$, $\bar{\mathrm{l}} = \mathrm{l}$ $\}$

  return $\boldsymbol{d\pi}$

Рис. 3: Алгоритм вычисления поправки $d\pi$ пути π

Алгоритм динамического выравнивания двух матриц и вычисления расстояния mDTW между ними с учетом приведенного выше алгоритма примет вид:

---

mDTW($\mathbf{A}, \mathbf{B}$) :

$\quad$ $\mathbf{D}$(1:n+1,1:n+1, 1:n+1, 1:n+1) = inf;

$\quad$ $\mathbf{D}$(1,1,1,1) = 0;

$\quad$ $\boldsymbol{\pi}$(1,1,1,1) = ((1,1),(1,1))

$\quad$ for i,j,k,l $\in \mathbb{N}^{2:n+1} \times \mathbb{N}^{2:n+1} \times \mathbb{N}^{2:n+1} \times \mathbb{N}^{2:n+1}$:

$\quad\quad$ $\overline{\text{i,j,k,l}}$ = argmin([$\mathbf{D}$(i-1, j, k, l), $\mathbf{D}$(i, j-1, k, l), $\mathbf{D}$(i, j, k-1, l), $\mathbf{D}$(i, j, k, l-1), $\mathbf{D}$(i-1, j, k-1, l), $\mathbf{D}$(i, j-1, k, l-1), $\mathbf{D}$(i-1, j-1, k-1, l-1)]);

$\quad\quad$ $\boldsymbol{d\pi}$ = Correction($\overline{\text{i,j,k,l}}$, $\boldsymbol{\pi}$($\overline{\text{i,j,k,l}}$))

$\quad\quad$ $\boldsymbol{\pi}$(i, j, k, l) = $\boldsymbol{d\pi} \cup \{(\overline{\text{i,j,k,l}})\}$

$\quad\quad$ cost = $(\mathbf{A}(\text{i, j})\text{-}\mathbf{B}(\text{k, l}))^2 + \sum_{(\text{r,f,t,g}) \in \boldsymbol{d\pi}} (\mathbf{A}(\text{r, f})\text{-}\mathbf{B}(\text{t, g}))^2$;

$\quad\quad$ $\mathbf{D}$(i,j,k,l) = cost + $\mathbf{D}$($\overline{\text{i,j,k,l}}$)

$\quad$ return sqrt($\mathbf{D}$(n+1,n+1,n+1,n+1))

Рис. 4: Алгоритм вычисления расстояния между матрицами

Следует отметить, что алгоритм имеет высокую сложность вычисления — $O(n^4)$. Предполагается ускорение метода с использованием ограничения Sakoe-Chiba band, что сократит вычислительную сложность алгоритма до $O(n^2k^2)$, где k — параметр ограничения.

4 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проведен на модельных данных с допустимыми преобразованиями, и на реальных данных: объектах коллекции MNIST, с допустимыми преобразованиями, на спектрограммах зашумленных сигналов.

Решается задача метрической классификации методом ближайшего соседа. В таблице приведены значения критерия качества функции расстояния $S_\rho(\mathfrak{D})$ и критерия качества метрической классификации $S(f|p)$ при использовании двух функций расстояния: предложенной в работе mDTW и L_2.

Модельные данные — это нулевые матрицы со случайными ненулевыми строками, столбцами, подпрямоугольниками с наложенным шумом. К ним применены допустимые преобразования, согласованные с гипотезой наличия локальных и глобальных искажений. На Рис.5 показан пример оптимального выравнивания двух объектов. Линиями показаны элементы пути $\boldsymbol{\pi}$.

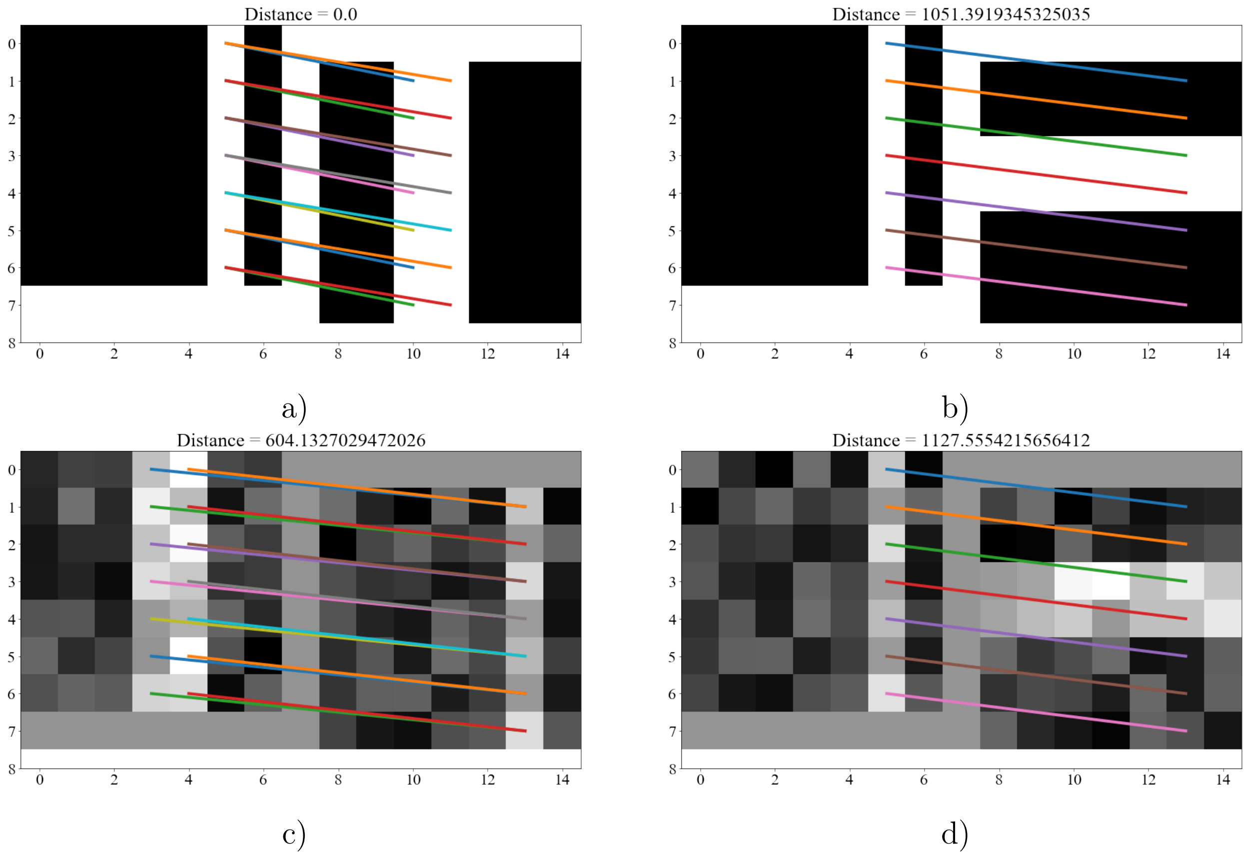

Рис. 5: Выравнивание модельных данных: a) один класс без шума, b) разные классы без шума, c) один класс с шумом, d) разные классы с шумом.

Подготовлена подвыборка набора данных MNIST. Она состоит из 100 объектов классов: 0 и 1 сниженной размерности с допустимыми преобразованиями. На Рис.6 показан пример оптимального выравнивания объектов.

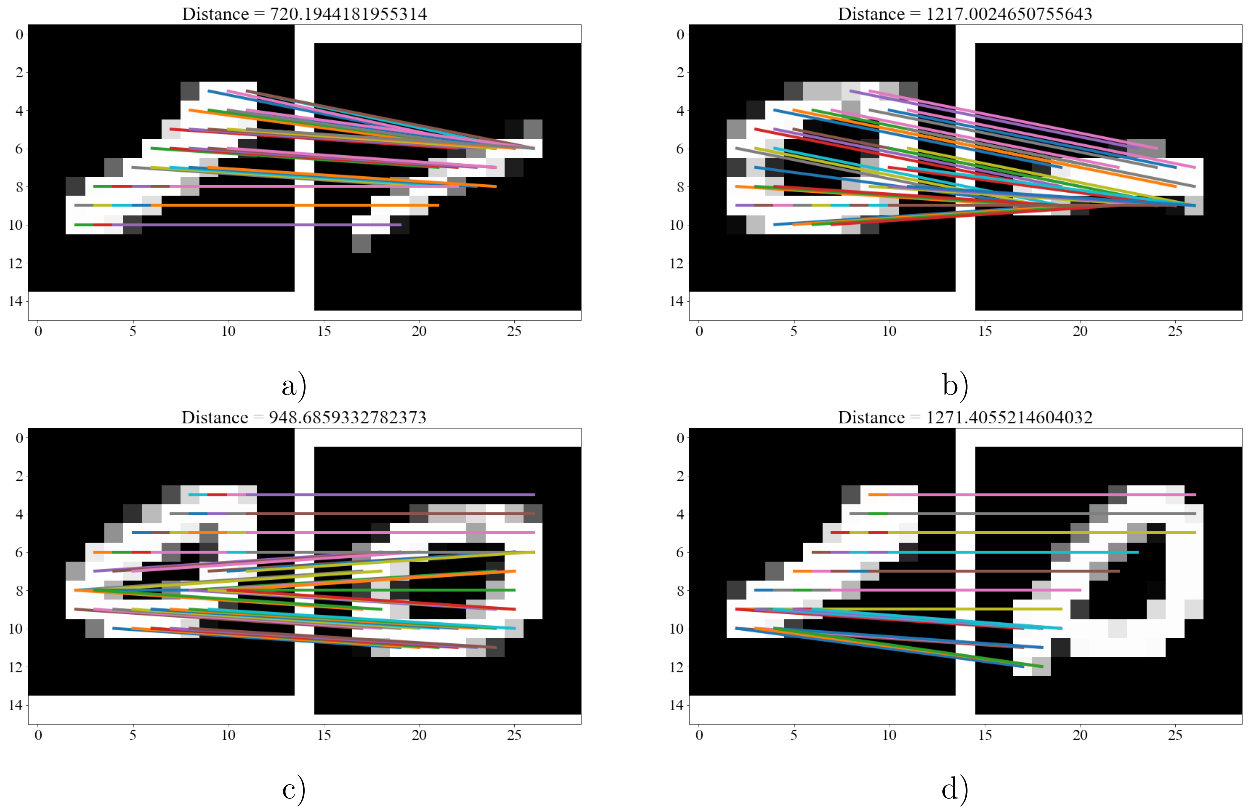

Рис. 6: Выравнивание данных mnist: a) один класс, b) разные классы, c) один класс, d) разные классы.

Аналогичный эксперимент проведен для решения задачи метрической классификации спектров различных сигналов, пример которых приведен на Рис.7. На рисунке показаны примеры Фурье-спектров этих сигналов. Спектр получен путем применения быстрого преобразования Фурье к исходному сигналу для различных окон с фиксированным размером и сдвигом. Исходные временные ряды обладали свойством периодичности, период выбирался случайным образом.

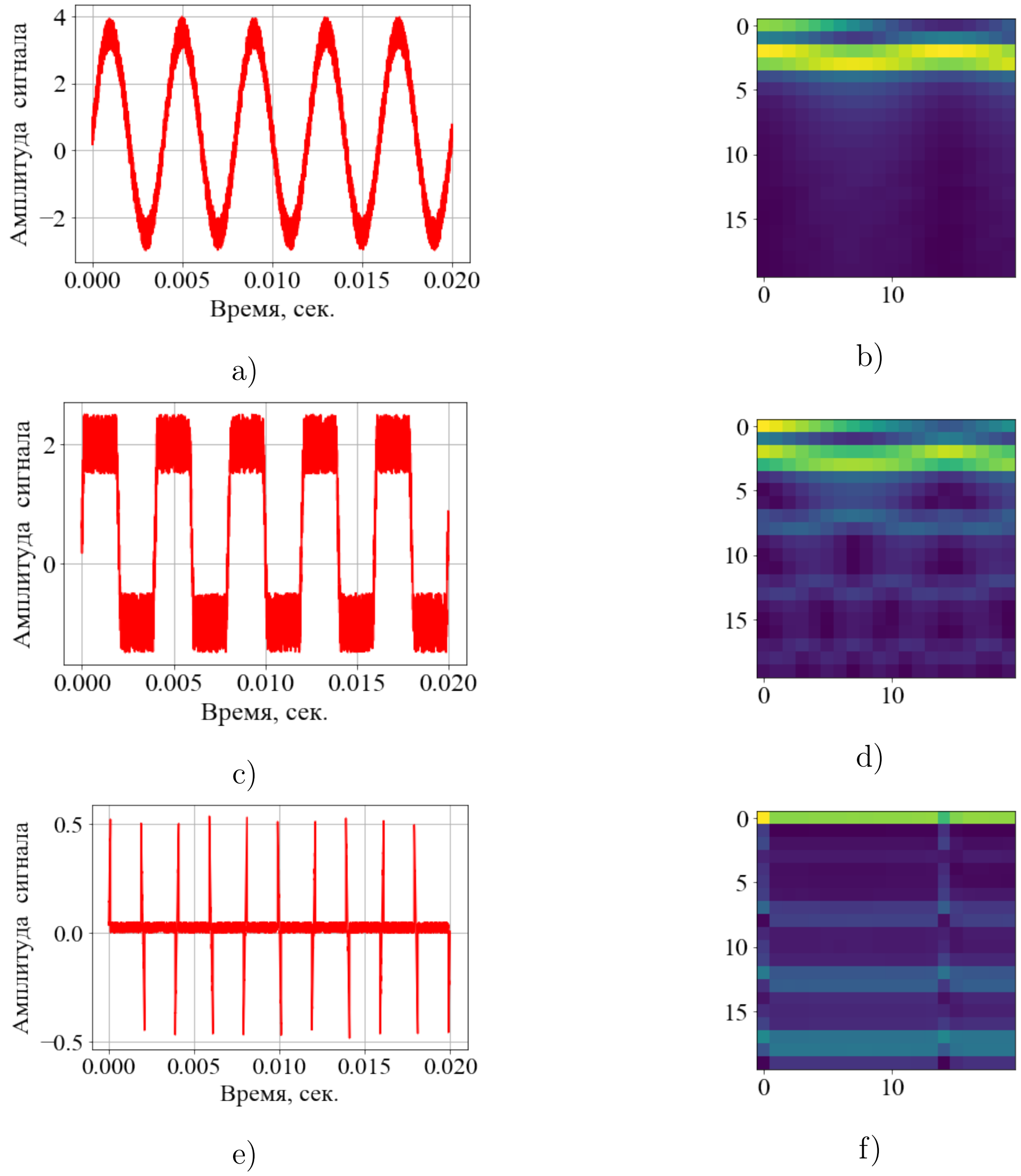

Рис. 7: Данные спектров сигнала: a) класс 1, b) спектр класса 1, c) класс 2, d) спектр класса 2, e) класс 3, f) спектр класса 3.

Тестирование проведено на различного рода данных: исходных модельных данных без наложения допустимых преобразований, с ними, а также на модельных данных с наложенным поверх объектов случайным шумом.

Данные / Метод	L_2		MatrixDTW	
	$S(f\|p)$	$S_\rho(\mathfrak{D})$	$S(f\|p)$	$S_\rho(\mathfrak{D})$
Модельные данные без преобразований	92%	78%	100%	85%
Модельные данные с преобразованиями	86%	65%	100%	82%
Модельные данные с преобразованиями и шумом	69%	61%	92%	78%
MNIST без преобразований	95%	-	95%	-
MNIST с преобразованиями	53%	-	92%	-
Спектр сигнала	83%	-	96%	-

В каждом из проведенных экспериментов была продемонстрирована устойчивость предложенного подхода к допустимым преобразованиям. Наилучшее значение критерия качества задачи классификации было достигнуто при использовании предложенной функции расстояния.

5 Заключение

В работе предложено обощение метода динамического выравнивания временных рядов для случая объектов, определенных на двух осях времени. Существует теоретическое обобщение предлагаемых методов на случай конечного множества осей времени. Вычислительный эксперимент позволил проанализировать свойства подхода: устойчивость к допустимым преобразованиям и разделяющая способность функции расстояния как на реальных, так и модельных данных. Качество решения задачи метрической классификации выше решения, основанного на Евклидовом расстоянии. Вычислительная сложность метода высокая, что ограничивает его применимость на объектах высокой размерности.

Список литературы

1. *N.J. Hill, T.N. Lal, M. Schroder, T. Hinterberger, B. Wilhelm, F. Nijboer, U. Mochty, G. Widman, C. Elger, B. Scholkopf, A. Kubler, N. Birbaumer.* Classifying EEG and ECoG signals without subject training for fast BCI implementation: comparison of nonparalyzed and completely paralyzed subjects // IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering. 2006. Vol. 14 (2), Pp. 183–186.

2. *H. Sakoe, S. Chiba.* A dynamic programming approach to continuous speech recognition // Proceedings of the Seventh International Congress on Acoustics. 1971. Vol. 3, Pp. 65–69.

3. *S. Aghabozorgi, S. S. Ali, T. Y. Wah* Time-series clustering – A decade review // Information Systems. 2015. Vol. 53, Pp. 16–38.

4. *T. Warrenliao.* Clustering of time series data — a survey // Pattern Recognition. 2005. Vol. 38 (11), Pp.1857–1874.

5. *A. V. Goncharov, V. V. Strijov.* Analysis of Dissimilarity Set Between Time Series // Computational Mathematics and Modeling. 2018. Vol. 29 (3), Pp. 359–366.

6. *V. Hautamaki, P. Nykanen, P. Franti.* Time-series clustering by approximate prototypes // Proceedings of 19th International Conference on Pattern Recognition, ICPR. 2008. No. D, Pp. 1–4.

7. *C. Faloutsos, M. Ranganathan, Y. Manolopoulos.* Fast subsequence matching in time-series databases // ACM SIGMOD. 1994. Rec. 23 (2), Pp. 419–429.

8. *P. Smyth.* Clustering sequences with hidden Markov models // Adv. Neural Inf. Process. 1997. Syst 9, Pp. 648–654.

9. *A. Banerjee, J. Ghosh.* Clickstream clustering using weighted longest common subsequences // Proceedings of the Workshop on Web Mining. 2001. SIAM Conference on Data Mining. Pp. 33–40.

10. *J. Aach, G.M. Church.* Aligning gene expression time series with time warping algorithms // Bioinformatics. 2001. Vol. 17 (6). P. 495.

11. *B.K. Yi, C. Faloutsos.* Fast time sequence indexing for arbitrary Lp norms // Proceedings of the 26th International Conference on Very Large Data Bases. 2000. Pp. 385–394.

12. *N. Basalto, R. Bellotti, F. D. Carlo, P. Facchi, S. Pascazio* Hausdorff clustering of financial time series // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. Vol. 379 (2). Pp. 635–644.

13. *L. Gorelick, M. Blank, E. Shechtman, M. Irani, R. Basri.* Actions as Space-Time Shapes // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2007. Vol. 29 (12), Pp. 2247.

14. *J. Alon, V. Athitsos, S. Sclaroff* Online and Offline Character Recognition Using Alignment to Prototypes // Eighth International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR'05). 2005.