1 Постановка задачи

Задано множество m объектов $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^m$ и множество n показателей $\Gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^n$. Множество измерений представлено в виде матрицы исходных данных $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ в пространстве действительных чисел: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Произвольный объект описывается при помощи вектора-строки $\mathbf{a}_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$. Вектора-столбцы $a_{\bullet j}$ матрицы A содержат измерения j-го показателя для всех измеряемых объектов.
Также задан упорядоченный набор $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \dots, q_{0m})^\top$ экспертных оценок интергральных индикаторов m объектов и упорядоченный набор $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, \dots, w_{0n})^\top$ экспертных оценок весов показателей. Каждому объекту ω_i поставлена в соответствие экспертная оценка q_{0i}, каждому показателю γ_j поставлена экспертная оценка w_{0j}.
По исходным экспертным оценкам весов $\mathbf{w}_0$ можно вычислить значения вектора интегрального индикатора:

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0. \tag{1}$$

Также по исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального оператора $\mathbf{q}_0$ можно вычислить веса показателей:

$$\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0. \tag{2}$$

Определение 1. *Согласованными значениями интегрального оператора и весов показателей называются такие значения $\hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{w}}$, при которых выполняется условие*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} &= A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} &= A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \tag{3}$$

2 α-согласование

Процедура пошагового согласования имеет следующий вид. Сначала находим

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0. \tag{4}$$

Мы получили два отрезка $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$ и $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$. Евлкидова длина этих отрезков $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$, $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$ характеризует несогласованность экспертных оценок. Далее найдем среднее значение:

$$\mathbf{q}_2 = \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{w}_2 = (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1, \tag{5}$$

где α — параметр доверия экспертным оценкам интегральных индикаторов объектов. По $\mathbf{w}_2, \mathbf{q}_2$ аналогично находим $\mathbf{w}_3$ и $\mathbf{q}_3$.

Теорема 1. *Итеративная процедура пошагового согласования сходится к*

$$\mathbf{q}_\alpha = \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_\alpha = (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0. \tag{6}$$

Лемма 1. *Тройка $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha, A)$ удовлетворяет определению согласования.*

3 γ-согласование

Определим согласованное решение как $\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{w}_\gamma$ таких, что $\mathbf{q}_\gamma = A\mathbf{w}_\gamma$. Находим $\mathbf{w}_\gamma$ решая оптимизационную задачу

$$\mathbf{w}_\gamma = \arg\min_{\mathbf{w}} \left\{ \|A\mathbf{w} - \mathbf{q}\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|^2 \right\}, \tag{7}$$

где γ^2 определяет степень компромисса между оценкой объектов и показателей. Решением этой оптимизационной задачи является

$$\mathbf{w}_\gamma = \left(A^\top A + \gamma^2 I\right)^{-1} (A^\top \mathbf{q}_0 + \gamma^2 \mathbf{w}_0). \tag{8}$$

4 Задача

Необходимо придумать алгоритм, как предпочесть одного эксперта другому. Одним из решений является следующее предположение, основанное на α-согласовании. Можем ранжировать экспертов в порядке близости их согласованности:

$$\text{эксперт } i \text{ предпочтительнее эксперта } j, \text{ если } |q_{0i} - q_{\alpha i}| \leq |q_{0j} - q_{\alpha j}|. \tag{9}$$

При этом предпочтение контролируется параметром α.
Вторым решением является ранжирование экспертов на основе γ-согласования:

$$\text{эксперт } i \text{ предпочтительнее эксперта } j, \text{ если } |q_{0i} - q_{\gamma i}| \leq |q_{0j} - q_{\gamma j}|. \tag{10}$$

При этом предпочтение контролируется параметром γ^2.

5 Эксперименты

Найдем наиболее согласованного эксперта путем решения оптимизационной задачи. Эта задача ставится для α-согласования. Данная задача имеет вид:

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{m} \|\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{q}_0\|_\infty^2 + \frac{1}{n} \|\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_0\|_\infty^2 \right\}. \tag{11}$$

Рейтинг продуктов будем выдавать как рейтинг наиболее согласованного эксперта. Результаты сравнения моего рейтинга с полученными другими студентами

Рис. 1: Результаты сравнения рейтингов полученных разными студентами.