1 Постановка задачи

Задано множество m объектов $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^m$ и множество n показателей $\Gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^n$. Множество измерений представлено в виде матрицы исходных данных $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$ в пространстве действительных чисел: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Произвольный объект описывается при помощи вектора-строки $\mathbf{a}_{i\bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$. Вектора-столбцы $a_{\bullet j}$ матрицы A содержат измерения j-го показателя для всех измеряемых объектов.
Также задан упорядоченный набор $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \dots, q_{0m})^\top$ экспертных оценок интергральных индикаторов m объектов и упорядоченный набор $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, \dots, w_{0n})^\top$ экспертных оценок весов показателей. Каждому объекту ω_i поставлена в соответствие экспертная оценка q_{0i}, каждому показателю γ_j поставлена экспертная оценка w_{0j}.
По исходным экспертным оценкам весов $\mathbf{w}_0$ можно вычислить значения вектора интегрального индикатора:

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0. \tag{1}$$

Также по исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального оператора $\mathbf{q}_0$ можно вычислить веса показателей:

$$\mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0. \tag{2}$$

Определение 1. *Согласованными значениями интегрального оператора и весов показателей называются такие значения $\hat{\mathbf{q}}$ и $\hat{\mathbf{w}}$, при которых выполняется условие*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} & = A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} & = A^+\hat{\mathbf{q}}. \end{cases} \tag{3}$$

2 α-согласование

Процедура пошагового согласования имеет следующий вид. Сначала находим

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0. \tag{4}$$

Мы получили два отрезка $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$ и $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$. Евлкидова длина этих отрезков $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$, $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$ характеризует несогласованность экспертных оценок. Далее найдем среднее значение:

$$\mathbf{q}_2 = \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{w}_2 = (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha\mathbf{w}_1, \tag{5}$$

где α — параметр доверия экспертным оценкам интегральных индикаторов объектов. По $\mathbf{w}_2, \mathbf{q}_2$ аналогично находим $\mathbf{w}_3$ и $\mathbf{q}_3$.

Теорема 1. *Итеративная процедура пошагового согласования сходится к*

$$\mathbf{q}_\alpha = \alpha\mathbf{q}_0 + (1-\alpha)A\mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_\alpha = (1-\alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha A^+\mathbf{q}_0. \tag{6}$$

Лемма 1. *Тройка $(\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha, A)$ удовлетворяет определению согласования.*

3 Решение задачи на основе ранжирования экспертов

Необходимо придумать алгоритм, как предпочесть одного эксперта другому. Одним из решений является следующее предположение, основанное на α-согласовании. Можем ранжировать экспертов в порядке близости их согласованности. Здесь для каждого эксперта α определяется как результат задачи оптимизации:

$$\alpha_i^* = \arg\min_{\alpha\in[0,1]} \left\{ \frac{1}{n}\mathrm{dist}_1(\mathbf{q}_{\alpha i} - \mathbf{q}_{0i}) + \frac{1}{m}\mathrm{dist}_2(\mathbf{w}_{\alpha i} - \mathbf{w}_{0i}) \right\}. \qquad (7)$$

Здесь $\mathrm{dist}_j, j \in \{1, 2\}$ — расстояние Махаланобиса, которое определяется по формуле:

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top S^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \qquad S - \text{ ковариационная матрица.}$$

Предполагается, что на признаках продуктов имеется некоторое распределение с ковариационной матрицей S. Так как матрица S нам не известна, то мы ее приближаем матрицей корреляций Пирсона между признаками. Тогда эксперт тем согласованнее, чем выражение $\frac{1}{n}\mathrm{dist}_1(\mathbf{q}_{\alpha_i^*}, \mathbf{q}_0) + \frac{1}{m}\mathrm{dist}_2(\mathbf{w}_{\alpha_i^*}, \mathbf{w}_0)$. Далее на основе рейтинга экспертов мы даем им вес, с которым рейтинг продуктов соответствующего эксперта будет браться. Взвешенная сумма рейтингов продуктов агреггируется и получается рейтинг продуктов. При решении задачи были отброшены устрицы, т. к. более половины экспертов не дали оценку данному продукту. Пропуски для остальных продуктов заполнялись по 3 ближайшим соседам.

4 Эксперименты

Найдем наиболее согласованного эксперта путем решения оптимизационной задачи. Рейтинг продуктов будем выдавать как рейтинг наиболее согласованного эксперта. Результаты сравнения моего рейтинга с полученными другими студентами.

Код доступен по ссылке: github.com/Intelligent-Systems-Phystech/Ratings/Islamov Rustem.

Рис. 1: Рейтинг экспертов.

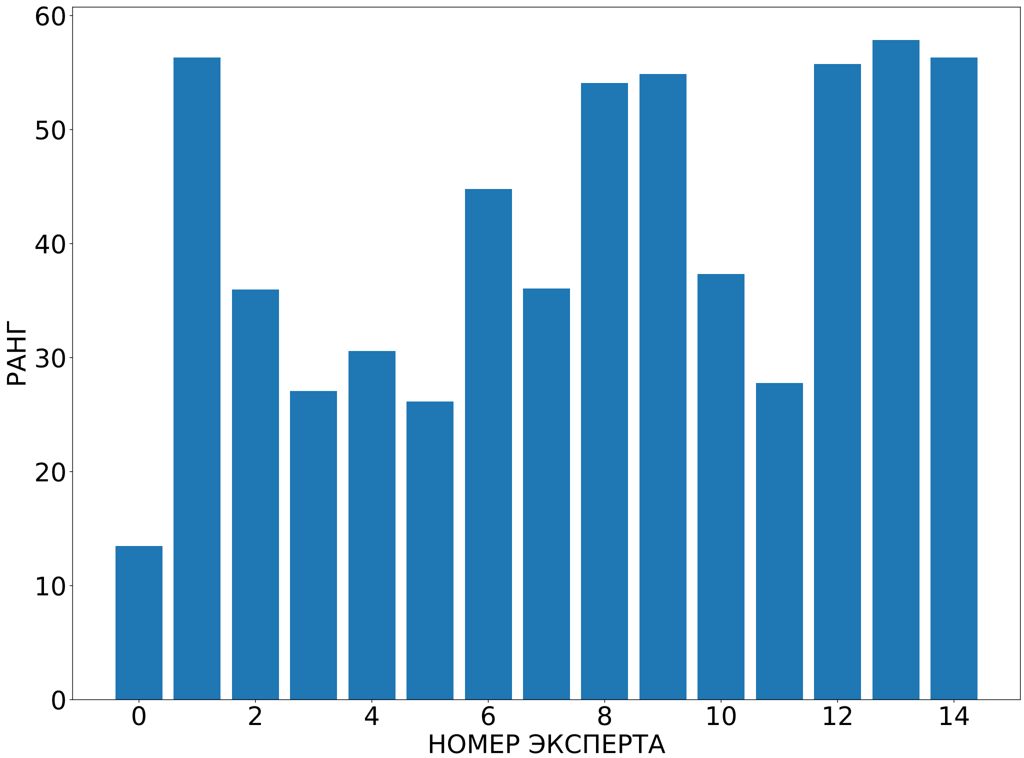


Рис. 2: Рейтинг продуктов.

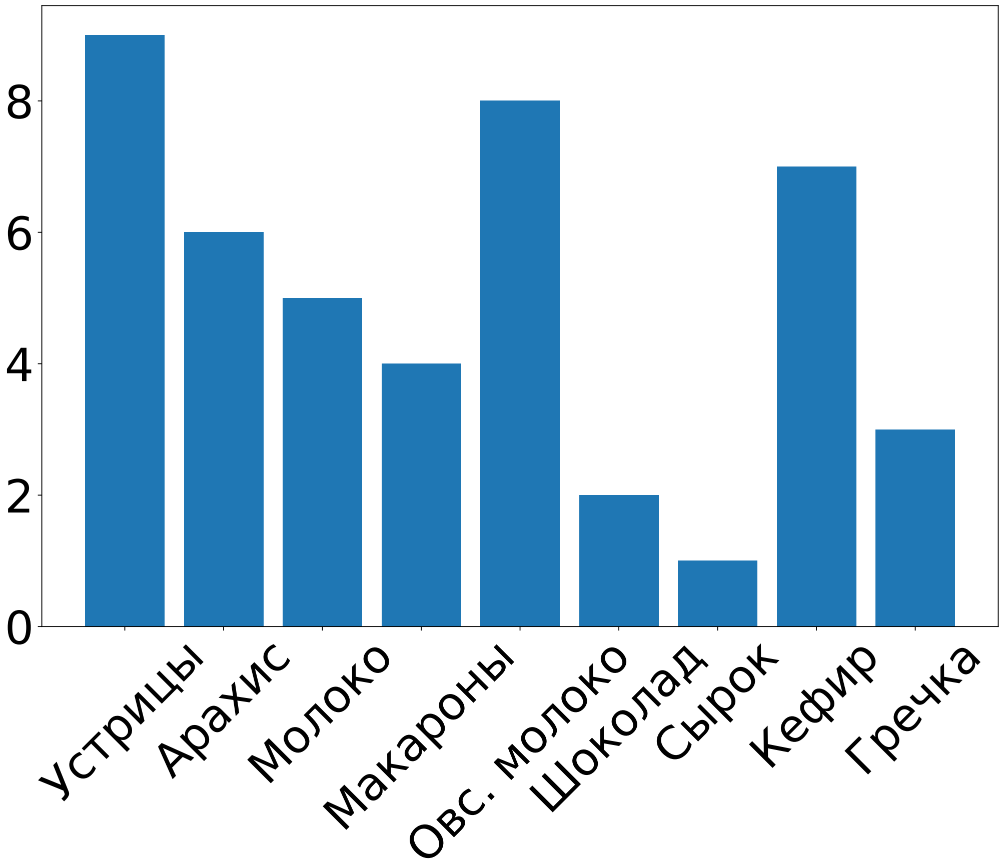


Рис. 3: Результаты сравнения рейтингов, полученных разными студентами.

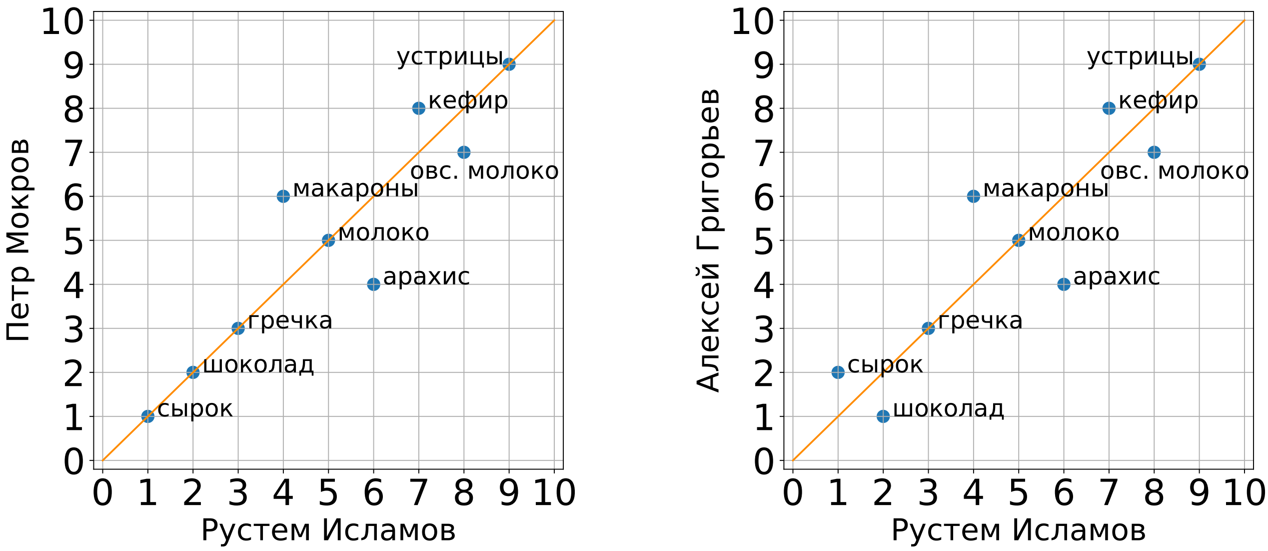


Рис. 4: Результаты сравнения рейтингов, полученных разными студентами и средним рейтингом.

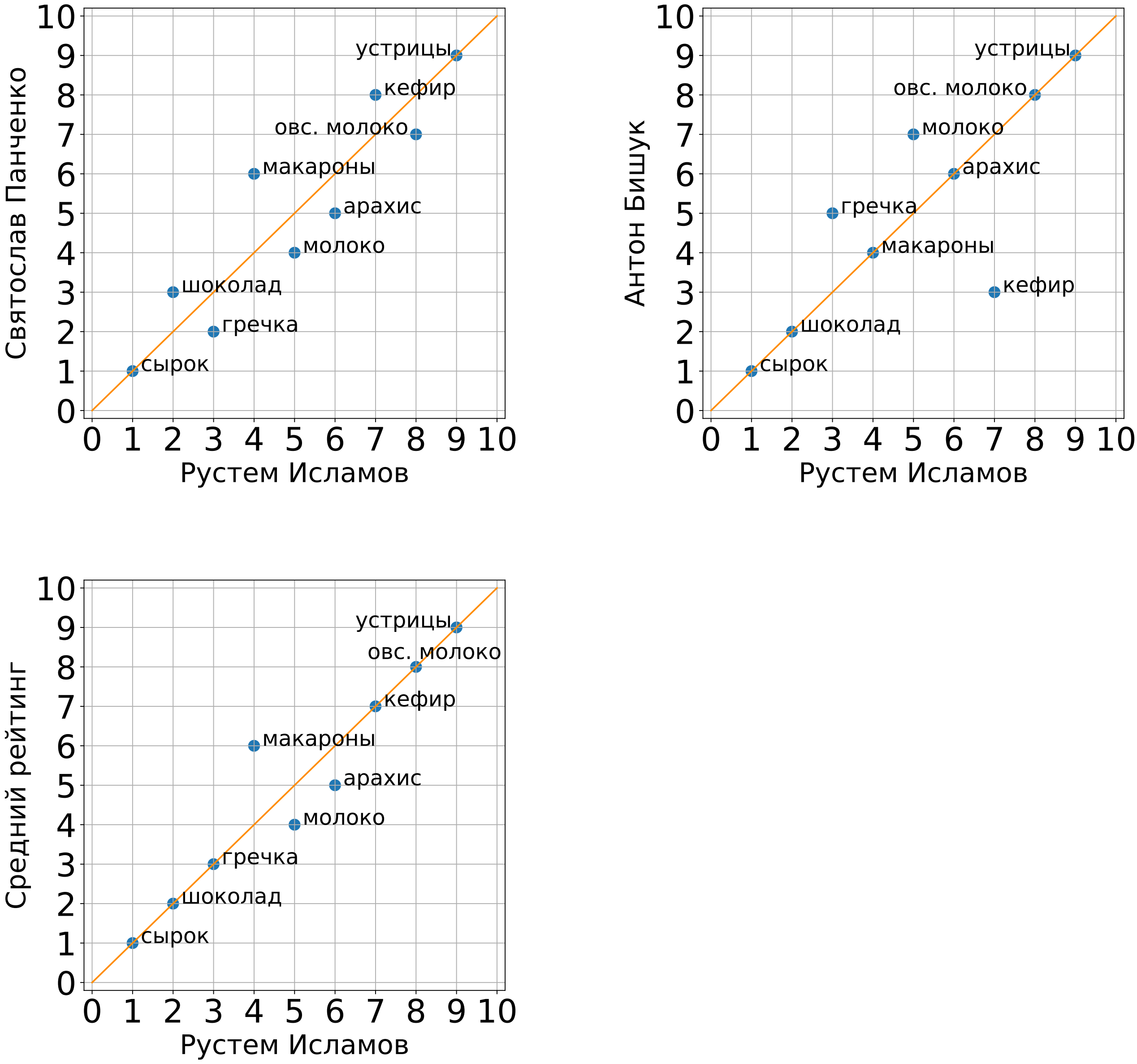
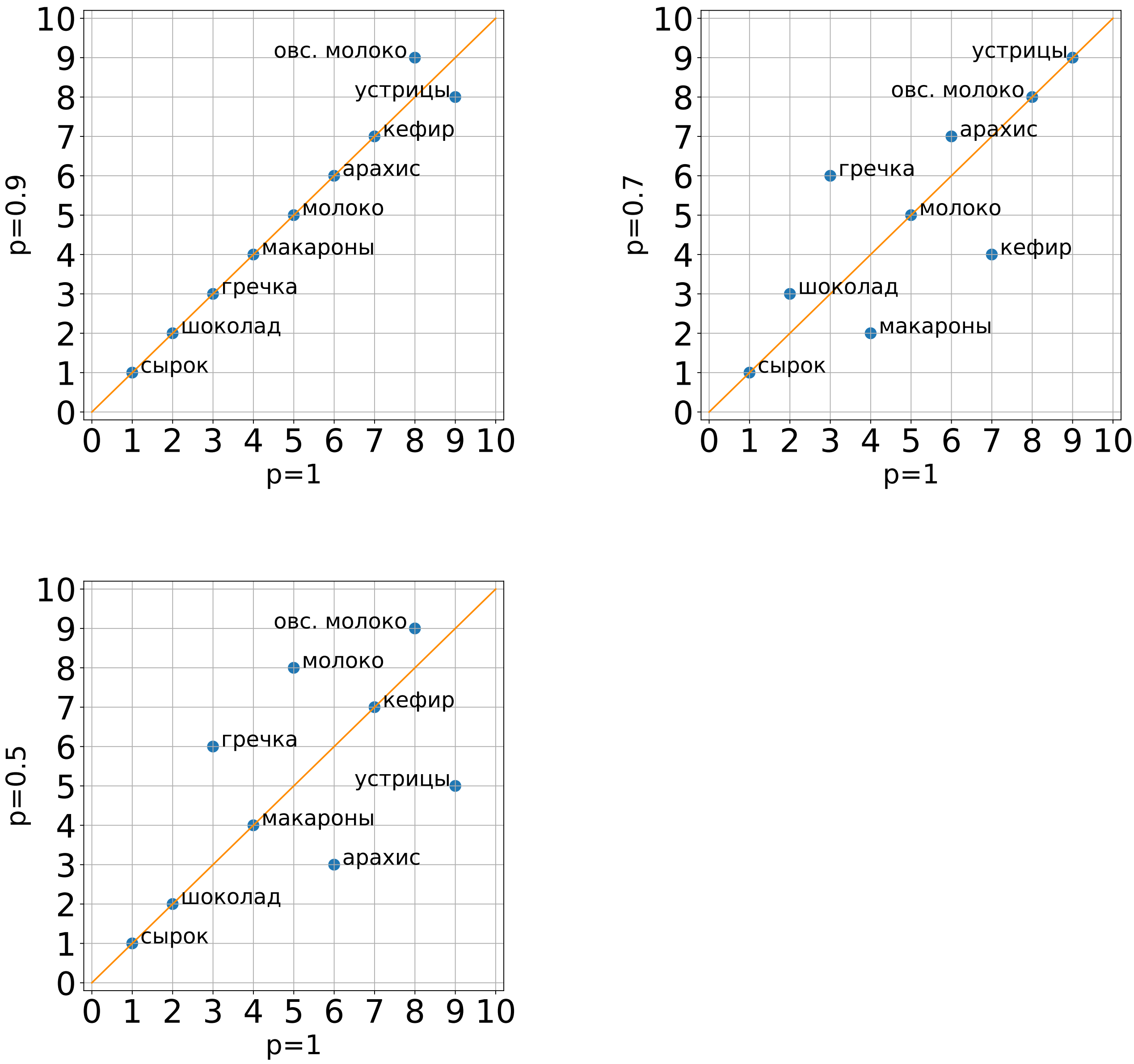


Рис. 5: Изменение рейтинга продуктов в результате прореживания данных.



5 Устойчивость к пустотам

Удалим из исходной матрицы признаков некоторую долю продуктов. Исследуем, как этого меняются рейтинги продуктов.