Парето-ранжирование с предпочтениеми на признаках

Панченко Святослав

Московский Физико-Технический Институт
Факультет Прикладной Математики и Информатики
Кафедра интеллектуальных систем

Москва,
2021 г.

Построение рейтинга продуктов питания

Задача

Построить рейтинг для совокупности различных продуктов питания. Каждый вид еды характеризуется набором числовых признаков - калорийность, цена, содержание белков, жиров, углеводов (в расчёте на 100г) и набором экспертных оценок качества.

Требования к модели построения рейтинга

- устойчивость относительно добавления новых объектов;
- полный порядок на объектах;
- учёт пропусков в значениях признаков и экспертных оценок.

Идея

Строить рейтинг предлагается с помощью Парето-ранжирования с предпочтениями на признаках.

Постановка

Выборка

$$\mathfrak{D} = \{\mathrm{x}_i\},\ i \in \mathcal{I} = \{1, ..., m\},$$

$$\mathrm{x} = [\chi_1, ..., \chi_j, ..., \chi_d],\ j \in \mathcal{J} = \{1, ..., d\},$$

$\chi_j \in \mathbb{L}_j = \{l_1, ..., l_{k_j}\}$ — частично упорядоченное множество.

Статистические предположения о данных

Экспертные оценки независимо и одинаково распределены.

Задача

Построить интегральный индикатор y для заданного множества объектов $\mathfrak{D}$.

Вспомогательные определения

Определение n-отношения

Мы говорим, что объект $x_i = [x_{i1}, ..., x_{id}]$ *n-доминирует* объект $x_j = [x_{j1}, ..., x_{jd}]$,

$$\text{или } x_i \succ_n x_j,$$

если $x_{ik} \succeq x_{jk}$ для всех $k = 1, ..., d$, но $x_i \neq x_j$.

Определение $\tilde{n}$-отношения

Мы говорим, что объект $x_i = [x_{i1}, ..., x_{ir}, ..., x_{it}, ..., x_{id}]$ *ñ-доминирует* объект x_j с предпочтением на признаках $r \succ t$,

$$\text{если } x_i \succ_n x_j,$$

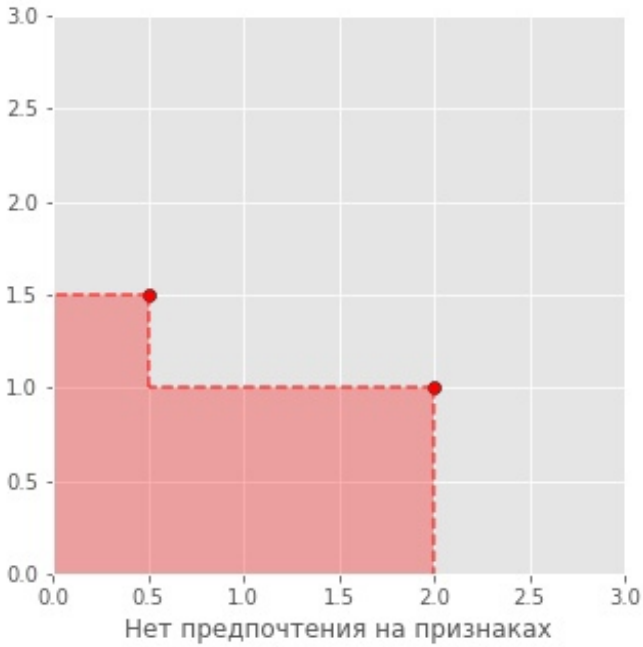
$$\text{или } x_i^{tr} \succ_n x_j,$$

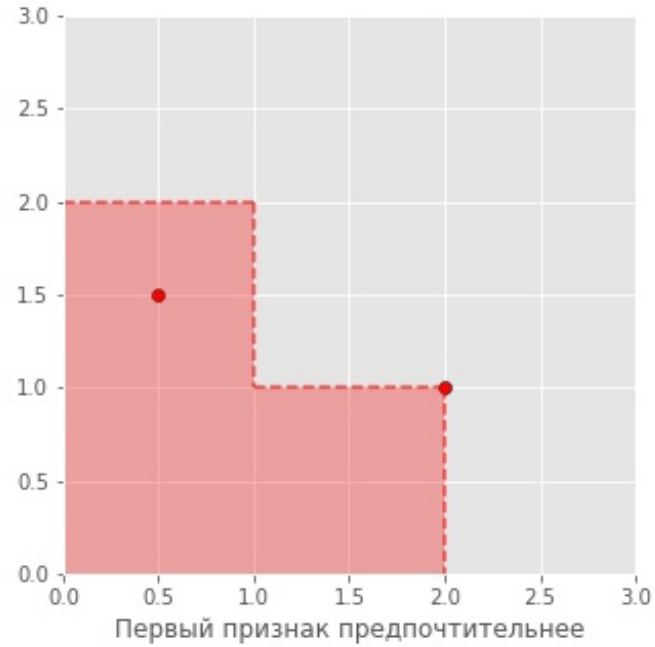
где $x_i^{tr} = [x_{i1}, ..., x_{it}, ..., x_{ir}, ..., x_{id}]$ - вспомогательный объект с измененным порядком следования признаков r и t.

Парето-оптимальный фронт

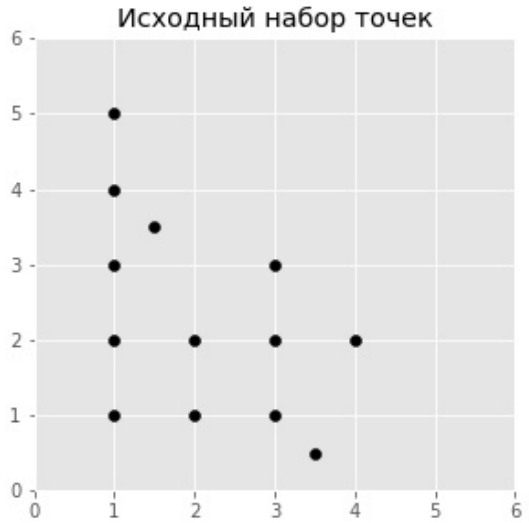
Набор объектов x_i, $i \in \mathcal{I}$, называется Парето-оптимальным фронтом POF_n, если для любого $x_i \in POF_n$ не существует объекта x, который бы его доминировал: $x \succ_n x_i$ (или $x \succ_{\tilde{n}} x_i$).

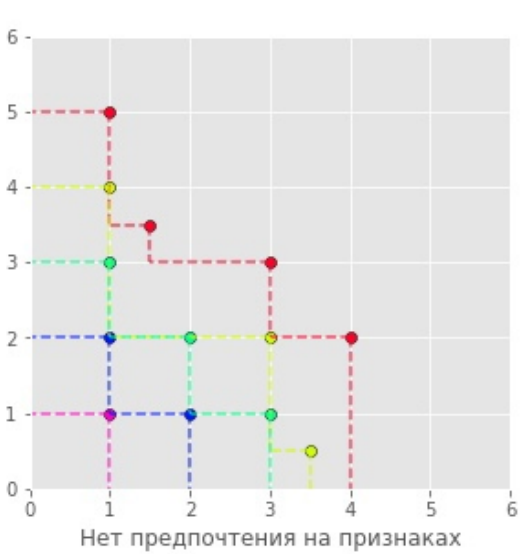
Парето-оптимальный фронт и его зона доминирования для пары точек в случае отсутствия и присутствия предпочтения на признаках

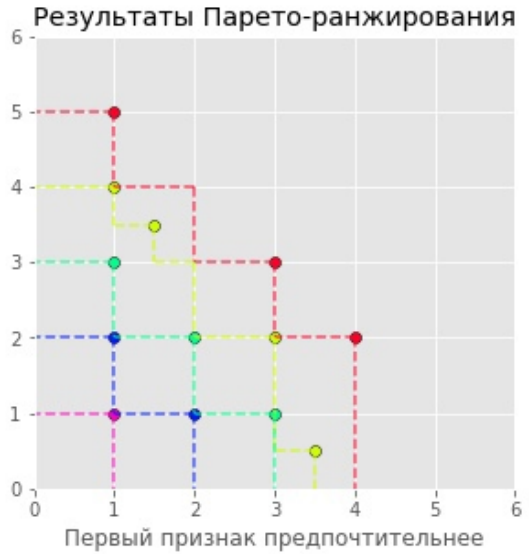


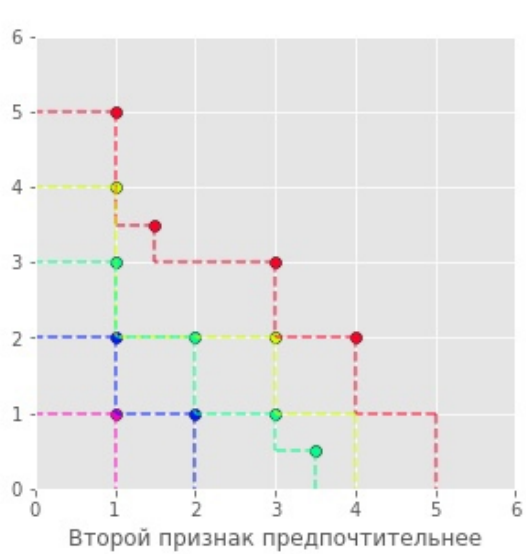


Парето-ранжирование









Комбинирование рейтингов

Проблема

Построение рейтинга указанным методом в пространстве высокой размерности приводит к выделению очень небольшого числа фронтов, поскольку объекты, как правило, несравнимы между собой.

Подзадача

Предложить способ комбинирования рейтингов. В качестве комбинируемых рейтингов могут выступать промежуточные рейтинги или оценки экспертов.

Идея

Позиции в промежуточных рейтингах рассматриваются в качестве нового признакового описания для построения нового рейтинга. Промежуточные рейтинги формируются на основе разбиения множества признаков на подмножества.

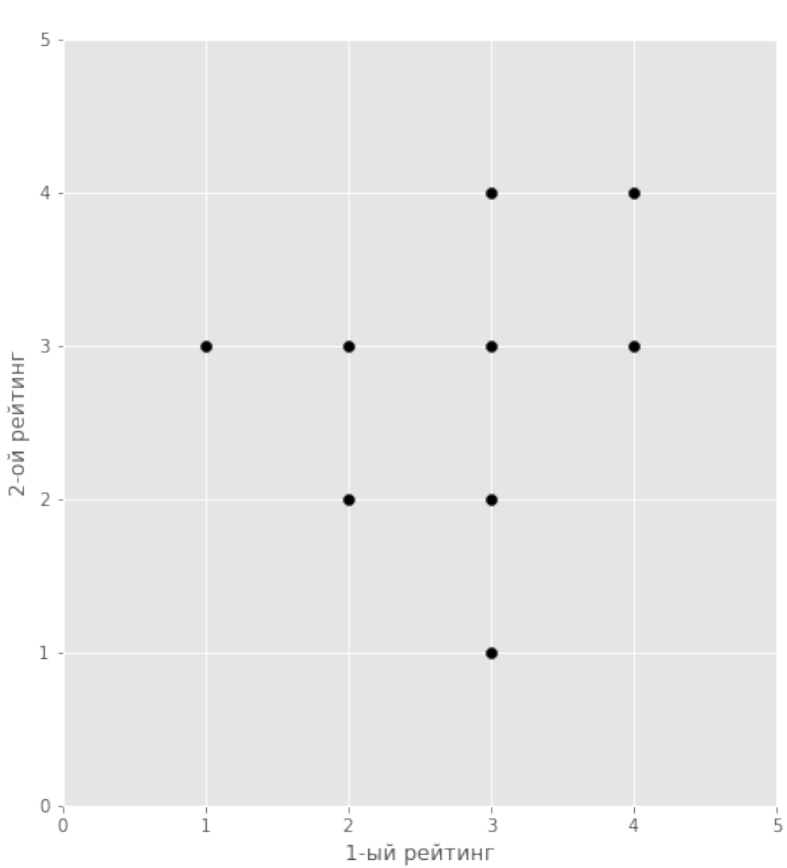
Слияние рейтингов на основе Парето-ранжирования

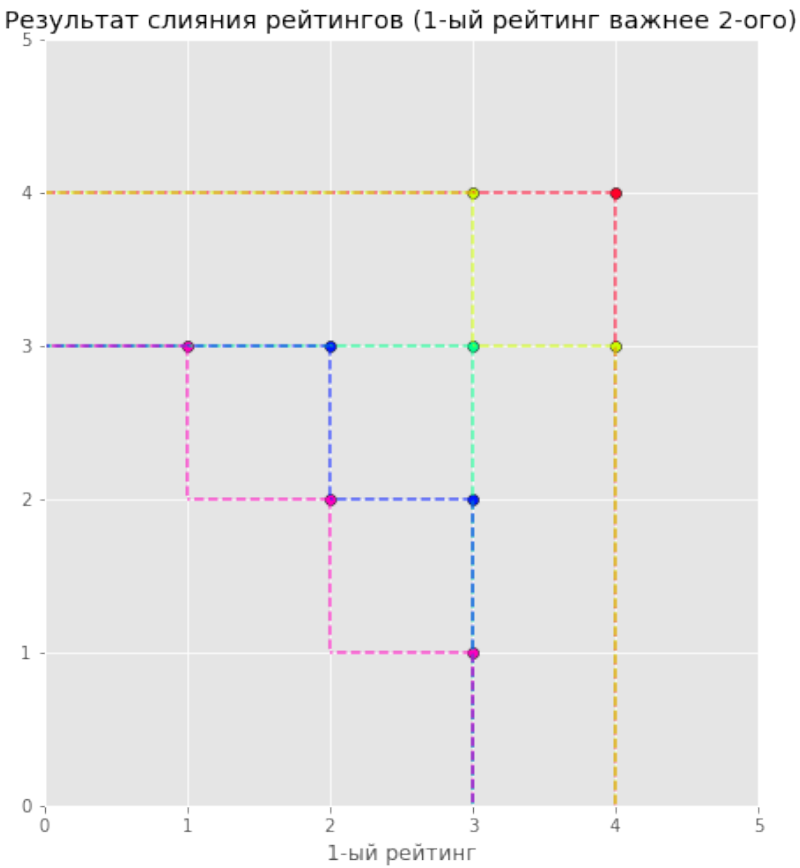
Предположим, что построены два промежуточных рейтинга φ_1 и φ_2. В таком случае каждому объекту x соответствуют его позиции в этих рейтингах:

$$y_i = \varphi_i(\mathrm{x}),\ i = 1, 2.$$

Тогда вектор $[y_1, y_2]^{\mathsf{T}}$ выступает в роли нового признакового описания объекта x; на основе совокупности таких описаний строится новый рейтинг.

Слияние рейтингов на основе Парето-ранжирования, иллюстрация





Выделенные подмножества признаков

Исходное множество признаков разбито на смысловые группы, для каждой из которых строится отдельный рейтинг. Группы упорядочены по убыванию предпочтения для построения итогового рейтинга.

- Экспертные оценки - 14 признаков (на момент составления рейтинга):
  - заполнение пропусков медианой;
- Соотношение калорийность-цена - 2 признака:
  - сравнение по цене происходит по принципу "чем меньше, тем лучше";
  - показатель цены считаем важнее.
- Соотношение белки-жиры-углеводы - 3 признака:
  - сравнение по показателю содержания жиров происходит по принципу "чем меньше, тем лучше";
  - показатель содержания жиров считаем наименее важным.

Медиана Кемени

Вместо построения Парето-ранжирования на основе совокупности экспертных оценок предлагается использовать аггрегированную оценку - *медиану Кемени*.

Медиана Кемени

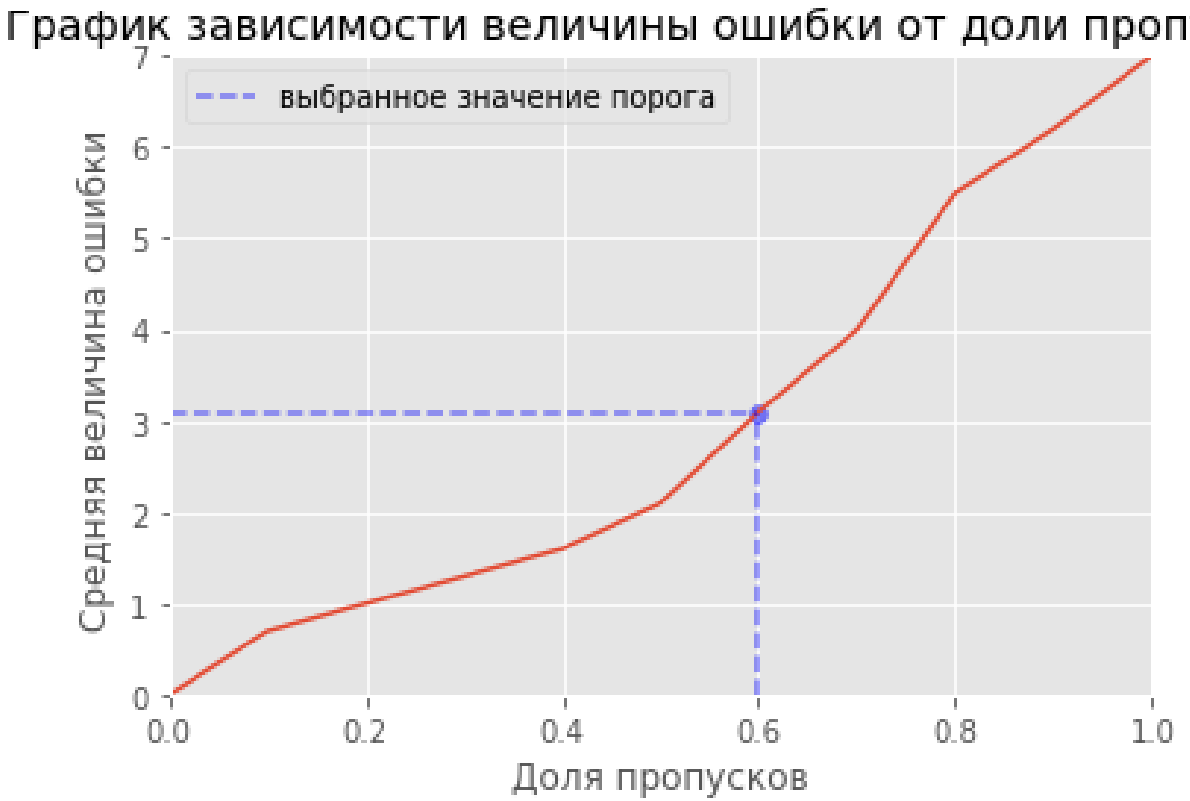
Пусть имеется k ранжирований на n объектах, заданных своими матрицами попарных предпочтений $A_u = ||a_{i,j}^{(u)}||_{i,j=1}^{n}$, $u = 1, ..., k$, $a_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ для всех $i, j = 1, ..., n$. Медиана Кемени - это ранжирование, задаваемое матрицей, наименее удалённой от остальных:

$$A^* = \arg\min \sum_{u=1}^{k} d(A, A_u) = \arg\min \sum_{u=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j} - a_{i,j}^{(u)}|$$

Для $i.i.d.$ ранжирований $A_1, ..., A_k$ справедливо, что медиана Кемени $A^* \xrightarrow{p} \mathbb{E}A_u$ при $k \to \infty$.

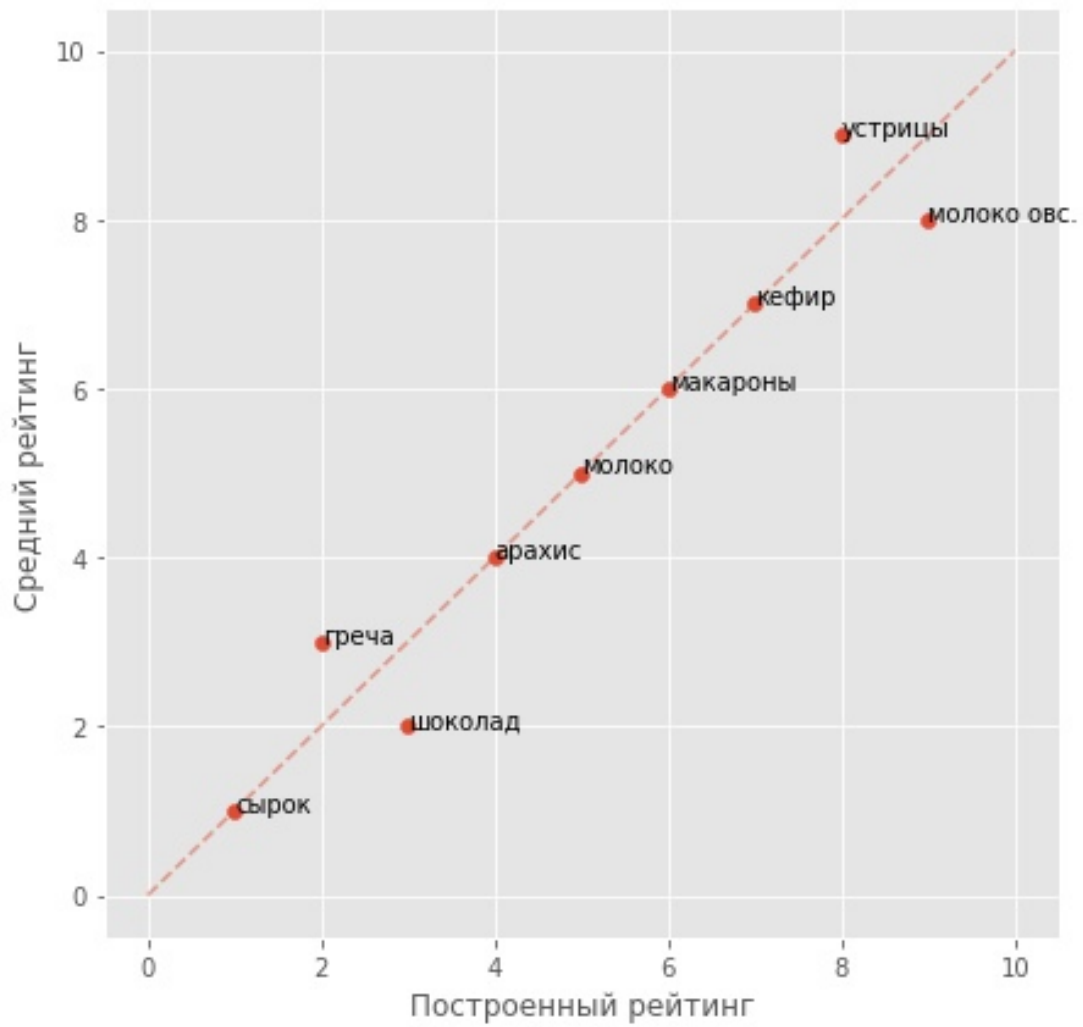
Отказ от принятия решения

На отложенной выборке измеряем величину ошибки как расстояние между рейтингами, построенными соответственно по всей выборке и по выборке с пропусками, отсюда выбираем желаемое значение порога.



Итоги

Сравнение полученного рейтинга со средним



Литература

- *Medvednikova M. M., Kuznetsov M. P., Strijov V. V.* (2015) 'Ordinal classification using Pareto fronts', Expert Systems with Applications.
- *Mironenkov A.A.* (2019) 'Hierarchical Pareto Classification of the Russian Regions by the Population's Quality of Life Indicators', Economic and Social Changes: Facts, Trends, Forecast.
- *С.Д. Двоенко, Д.О. Пшеничный, А.В. Попов* (2017) 'Групповое Ранжирование на Основе Медианы Кемени с Метрическими Свойствами', Известия ТулГУ, Технические науки, Вып. 10.