## 1 Постановка задачи

Задано множество m объектов  $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^m$  и множество n показателей  $\Gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^n$ . Множество измерений представлено в виде матрицы исходных данных  $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m,n}$  в пространстве действительных чисел:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Произвольный объект описывается при помощи векторастроки  $\mathbf{a}_{i \bullet} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ . Вектора-столбцы  $a_{\bullet j}$  матрицы A содержат измерения j-го показателя для всех измеряемых объектов.

Также задан упорядоченный набор  $\mathbf{q}_0 = (q_{01}, \dots, q_{0m})^{\top}$  экспертных оценок интергральных индикаторов m объектов и упорядоченный набор  $\mathbf{w}_0 = (w_{01}, \dots, w_{0n})^{\top}$  экспертных оценок весов показателей. Каждому объекту  $\omega_i$  поставлена в соответствие экспертная оценка  $q_{0i}$ , каждому показателю  $\gamma_i$  поставлена экспертная оценка  $w_{0i}$ .

По исходным экспертным оценкам весов  $\mathbf{w}_0$  можно вычислить значения вектора интегрального индикатора:

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0. \tag{1}$$

Также по исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального оператора  $\mathbf{q}_0$  можно вычислить веса показателей:

$$\mathbf{w}_1 = A^+ \mathbf{q}_0. \tag{2}$$

**Определение 1.** Согласованными значениями интегрального оператора и весов показателей называются такие значения  $\hat{\mathbf{q}}$  и  $\hat{\mathbf{w}}$ , при которых выполняется условие

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}} = A\hat{\mathbf{w}}, \\ \hat{\mathbf{w}} = A^{+}\hat{\mathbf{q}}. \end{cases}$$
 (3)

## 2 $\alpha$ -согласование

Процедура пошагового согласования имеет следующий вид. Сначала находим

$$\mathbf{q}_1 = A\mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}_1 = A^+\mathbf{q}_0. \tag{4}$$

Мы получили два отрезка  $[\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1]$  и  $[\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1]$ . Евлкидова длина этих отрезков  $\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_1\|$ ,  $\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_1\|$  характеризует несогласованность экспертных оценок. Далее найдем среднее значение:

$$\mathbf{q}_2 = \alpha \mathbf{q}_0 + (1 - \alpha)\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{w}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{w}_0 + \alpha \mathbf{w}_1, \tag{5}$$

где  $\alpha$  — параметр доверия экспертным оценкам интегральных индикаторов объектов. По  $\mathbf{w}_2, \mathbf{q}_2$  аналогично находим  $\mathbf{w}_3$  и  $\mathbf{q}_3$ .

Теорема 1. Итеративная процедура пошагового согласования сходится к

$$\mathbf{q}_{\alpha} = \alpha \mathbf{q}_{0} + (1 - \alpha)A\mathbf{w}_{0}, \quad \mathbf{w}_{\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{w}_{0} + \alpha A^{+}\mathbf{q}_{0}. \tag{6}$$

**Лемма 1.** Тройка  $(\mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{w}_{\alpha}, A)$  удовлетворяет определению согласования.

## 3 Решение задачи на основе ранжирования экспертов

Необходимо придумать алгоритм, как предпочесть одного эксперта другому. Одним из решений является следующее предположение, основанное на  $\alpha$ -согласовании. Можем ранжировать экспертов в порядке близости их согласованности. Здесь для каждого эксперта  $\alpha$  определяется как результат задачи оптимизации:

$$\alpha_{i}^{*} = \arg\min_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \frac{1}{n} \|\mathbf{q}_{\alpha i} - \mathbf{q}_{0i}\|^{2} + \frac{1}{m} \|\mathbf{w}_{\alpha i} - \mathbf{w}_{0i}\|^{2} \right\}.$$
 (7)

Тогда эксперт тем согласованнее, чем выражение  $\frac{1}{n} \left\| \mathbf{q}_{\alpha_i^*} - \mathbf{q}_0 \right\|^2 + \frac{1}{m} \left\| \mathbf{w}_{\alpha_i^*} - \mathbf{w}_0 \right\|^2$ . Далее на основе рейтинга экспертов мы даем им вес, с которым рейтинг продуктов соответствующего эксперта будет браться. Взвешенная сумма рейтингов продуктов агреггируется и получается рейтинг продуктов. При решении задачи были отброшены устрицы, т. к. более половины экспертов не дали оценку данному продукту. Пропуски для остальных продуктов заполнялись по 3 ближайшим соседам.

## 4 Эксперименты

Найдем наиболее согласованного эксперта путем решения оптимизационной задачи. Рейтинг продуктов будем выдавать как рейтинг наиболее согласованного эксперта. Результаты сравнения моего рейтинга с полученными другими студентами.

Код доступен по ссылке: github.com/Intelligent-Systems-Phystech/Ratings/Islamov Rustem.

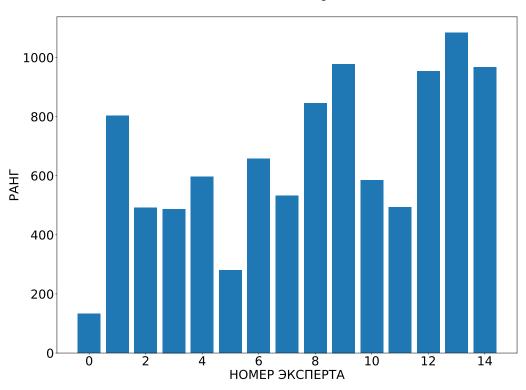


Рис. 1: Рейтинг экспертов.

Рис. 2: Рейтинг продуктов.

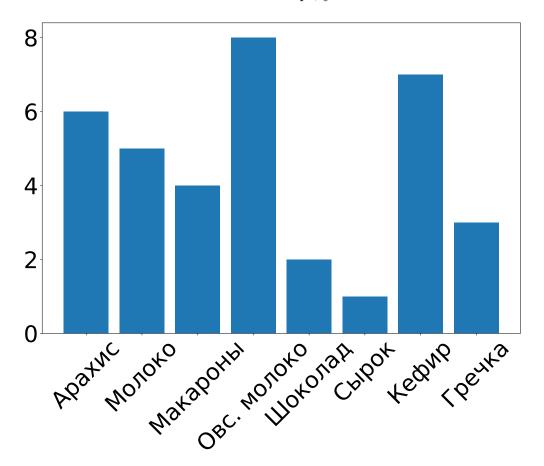
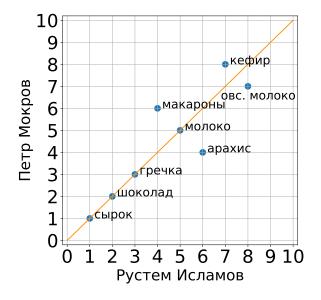


Рис. 3: Результаты сравнения рейтингов, полученных разными студентами.



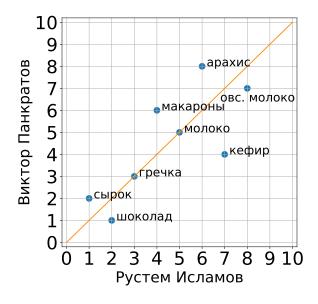


Рис. 4: Результаты сравнения рейтингов, полученных разными студентами и средним рейтингом.

