Ранжирование экспертов при помощи γ^2 - согласования.
Александра Харь, 774

Постановка задачи:
Пусть заданы множество объектов $V = \{v_i\}_{i=1}^m$ и множество показателей $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$.

Множество измерений показателей каждого объекта представлено в виде матрицы исходных данных $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$.

Также пусть имеется K экспертов, для каждого из которых известны вектор его оценок объектов (интегральные идникаторы) $q_0 = (q_{01}, \dots, q_{0m})^T \in \mathbb{R}^m$ и вектор его оценок показателей $w_0 = (w_{01}, \dots, w_{0n})^T \in \mathbb{R}^n$.

Требуется на основе этих данных отранжировать данных экспертов.

По исходным экспертным оценкам весов показателей w_0 вычислим значение вектора интегрального индикатора:

$$q_1 = Aw_0 \tag{1}$$

Также по исходным экспертным оценкам значения вектора интегрального индикатора q_0 вычислим веса показателей:

$$w_1 = A^+ q_0 \tag{2}$$

, где A^+ - псевдообратная матрица.

В общем случае $q_0 \neq q_1,\ w_0 \neq w_1$.

Назовем значения $\hat{q}$ и $\hat{w}$ - согласованными значениями интегрального индикатора и весов показателей , если:

$$\hat{q} = A\hat{w},\ \hat{w} = A^+\hat{q} \tag{3}$$

γ^2 **согласование:**

Определим согласованное решение как решение, удовлетворяющее условию (3), при котором расстояние от согласованных векторов q_γ и w_γ таких, что $q_\gamma = Aw_\gamma$, до соответственно, векторов экспертных оценок q_0 и w_0 будет минимальным.

Пусть $\epsilon^2 = ||Aw - q_0||^2,\ \delta^2 = ||w - w_0||^2$.

Решение задачи нахождения минимального расстояния от согласованных векторов до векторов экспертных оценок имеет вид

$$w_\gamma = arg \min_{w \in W} (\epsilon^2 + \gamma^2 \delta^2) \tag{4}$$

, где весовой множитель $\gamma^2 \in (0, \infty)$ - определяет степень компромисса между оценкой объектов и показателей. При малых значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка объектов, а при больших значениях γ^2 в большей степени учитывается экспертная оценка показателей.

Теорема. Функционал $\epsilon^2 + \gamma^2\delta^2$ достигает единственного глобального минимума на множестве $w_\gamma \in W$ в точке

$$w_\gamma = (A^TA + \gamma^2 I)^{-1}(A^T q_0 + \gamma^2 w_0) \tag{5}$$

Доказательство: функционал $\epsilon^2 + \gamma^2\delta^2$ - строго выпуклая функция, поэтому точка минимума существует и единственна.

$$w_\gamma = arg \min_{w \in W} (||Aw - q_0||^2 + \gamma^2 ||w - w_0||^2) \tag{6}$$

$||Aw - q_0||^2 + \gamma^2||w - w_0||^2 = (Aw, Aw) - 2(Aw, q_0) + (q_0 q_0) + \gamma^2(w, w) - 2\gamma^2(w, w_0) + \gamma^2(w_0, w_0) =$
$= (A^TAw, w) - 2(A^Tq_0, w) + (q_0, q_0) + \gamma^2(w, w) - 2\gamma^2(w, w_0) + \gamma^2(w_0, w_0) =$
$= (A^TAw - 2A^Tq_0 + \gamma^2 w - 2\gamma^2 w_0, w) + (q_0, q_0) + \gamma^2(w_0, w_0).$

$\Delta_w = 2(A^TA + \gamma^2 I)w - 2(A^Tq_0 + \gamma^2 w_0) = 0 \Rightarrow w_\gamma = (A^TA + \gamma^2 I)^{-1}(A^Tq_0 + \gamma^2 w_0).$

Полученная процедурой γ^2 - согласования $w_\gamma = (A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T q_0 + \gamma^2 w_0)$ удовлетворяет требованием согласования (так как $q_\gamma = A w_\gamma$, то $A(A^T A + \gamma^2 I)^{-1}(A^T q_0 + \gamma^2 w_0) = A w_\gamma$).

Параметр γ^2 для получения согласованных векторов $q_\gamma = A w_\gamma$ и w_γ выбирается исходя из условия $\dfrac{\epsilon^2}{m} = \dfrac{\delta^2}{n}$ или же назначается экспертами.