Структурированное ценообразование для взаимозаменяемых товаров.

Николай Савельев

Московский физико-технический институт
Факультет управлени и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель д.ф.-м.н. В.В. Стрижов, Ю.В. Дорн

Постановка задачи

Дано:

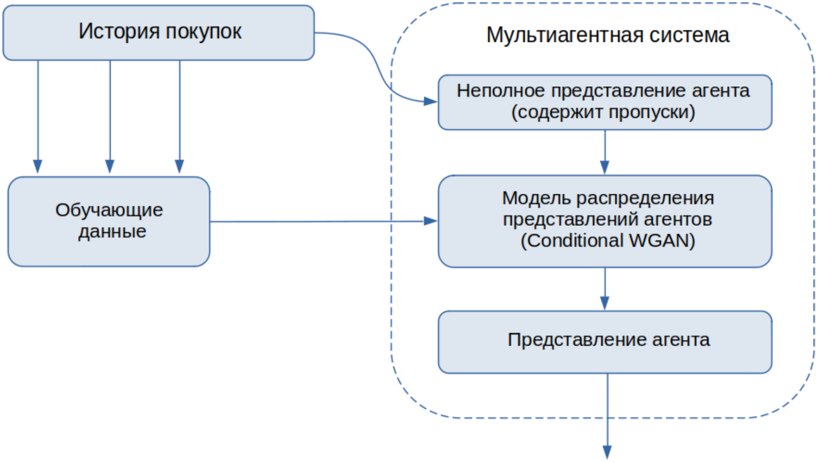
- $\mathcal{B}$ $(|\mathcal{B}| = k)$ - множество взаимозаменяемых товаров;
- $\mathcal{C}$ $(|\mathcal{C}| = n)$- множество клиентов;
- $\{\mathcal{J}_t\}_{t=1}^{T}$ - история заказов, где $\mathcal{J}_t = \{(d_{i,j,t}, p_{i,t})\}_{i \in \mathcal{B}, j \in \mathcal{C}}$, $d_{i,j,t}$ - количество товара i купленное пользователем j в момент времени t по цене $p_{i,t}$.

Фактический спрос $d_{i,j,t}$ при цене $p_{i,t}$ можно считать i-й компонентой реализации случайной многозначной функции спроса $d_j(p_t)$ клиента j, которая нам неизвестна.
Задача: Построить алгоритм ценообразования, максимизирующий ожидаемый доход за период времени T.

Метод решения

Персональный уровень цены агента (private value) - максимальное значение цены товара, при котором возможна покупка этого товара агентом.

Представление агента - вектор $q \in \mathbb{R}^k$ его персональных уровней цен на множество товаров $\mathcal{B}$.



Неполное представление агента - вектор $\hat{q} \in \mathbb{R}^k$:

$$\hat{q}_i = \max\{p_{i,t} : (d_{i,t}, p_{i,t}) \in \{\mathcal{J}_t\}_{t=1}^T\}, \quad \max\{\varnothing\} = Null.$$

Максимизация дохода

Пусть $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ - матрица потребительских ценностей.

Введем целевую функцию дохода $Rev : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$Rev(p) = \sum_{j=1}^{k} p_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}(Q, p, i, j), \tag{1}$$

$$\mathcal{I}(Q, p, i, j) = \begin{cases} 1, \mathit{if}\ \mathcal{S} := \{s : q_{is} \geq p_s\} \neq \emptyset \ \mathit{and}\ j = \underset{s \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmax}}\, q_{is} \\ 0, \mathit{otherwise} \end{cases}.$$

Тогда искомый вектор цен является решением оптимизационной задачи

$$Rev(p) \to \max_p . \tag{2}$$

Утверждение. Для любой матрицы $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$, найдется такой набор индексов $i_1, \dots i_k$, что вектор $(q_{i_1 1}, \dots, q_{i_k k})^T$ является решением оптимизационной задачи (2).

Процедура clean

Процедура clean

1. Пусть $q_{i_1 j_1}$ - максимальный элемент матрицы Q. Тогда удаляем все элементы вида $q_{i_1 j} : q_{i_1 j} \leq q_{i_1 j_1}$.

2. Пусть $q_{i_2 j_2}$ - следующий по убыванию элемент, имеющий другой второй индекс , первый индекс этого элемента тоже будет другой, так как иначе он был бы удален на предыдущем шаге. Удаляем элементы вида $q_{i_2 j} : q_{i_2 j} \leq q_{i_2 j_2}$.

3. Повторяем шаг 3 для остальных вторых индексов.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ \color{red}{7} & \color{red}{0} & \color{blue}{8} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \color{red}{3} & \color{blue}{5} & \color{red}{1} \\ 2 & 4 & 6 \\ & & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & 5 & \\ \color{blue}{2} & 4 & 6 \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

Теорема и следствие

Теорема (Савельев, 2021). Пусть $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}, n \geq k$. Тогда функция

$$Rev(p) = \sum_{j=1}^{k} p_j \sum_{i=1}^{n} I(Q, p, i, j),$$

$$I(Q, p, i, j) = \begin{cases} 1, if\ S := \{s : q_{is} \geq p_s\} \neq \emptyset\ and\ j = arg \max_{s \in S} q_{is} \\ 0, otherwise \end{cases}$$

достигает максимума на векторе вида $(q_{i_1 1}, \ldots, q_{i_k k})^T$, где q_{ij} - это элемент матрицы Q, который не был удален процедурой clean.

Следствие (необходимое условие единственности максимума). Пусть $Q \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$. Для того, чтобы точка максимума функции $Rev(p)$ была единственна, необходимо выполнение неравенства $n \geq k$.

Исследование процедуры clean

В ходе эксперимента было сгенерированно 100 матриц потребительских ценностей размера 100 на 100. Элементы матриц являлись независимыми равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$ случайными величинами. С каждой матрицей была произведена процедура clean, далее строки матрицы были отсортированы по числу оставшихся элементов. Среднее число оставшихся элементов этих строк представлено на графике.