Теорема 1. *Пусть выборка* $D = (x_i, y_i)_{i=1}^m$ *независима. Пусть* $m \gg 0, \frac{m}{\lambda} \gg 0$, *тогда оптимизация выражений* (1) *и* (2) *эквивалентны:*

$$\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \log p\left(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}\right) - \lambda \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \tag{1}$$

$$\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{\frac{m}{\lambda}} \log p\left(\hat{y}_i|\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{X}}\right)\right) \tag{2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \log p\left(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}\right) - \lambda \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) = {}^{1} \\
=&\frac{1}{\lambda}\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{m} \log p\left(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \approx {}^{2} \\
\approx&\frac{m}{\lambda}\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})}\mathsf{E}_{(\mathbf{x},y)} \log p\left(y|\mathbf{x}, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \approx {}^{3} \\
\approx&\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{\frac{m}{\lambda}} \log p\left(\hat{y}_i|\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \approx {}^{4} \\
\approx&\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{\frac{m}{\lambda}} \log p\left(\hat{y}_i|\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{X}}\right)\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\hat{D} = \left(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}\right)$ — произвольная подвыборка выборки $D = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Получили, что оптимизация

□

[1] так как элементы выборки не зависимы
[2] УЗБЧ
[3] УЗБЧ
[4] В силу того, что $m \gg 0$ и $\frac{m}{\lambda} \gg 0$