

Задание 1: Доказать, что при устремлении параметра температуры к бесконечности, плотность Gumbel-Softmax концентрируется в центре симплекса.

Доказательство

Рассмотрим случайный вектор $\mathbf{y} \in \Delta^{k-1}$ из Gumbel-Softmax распределения. Как показано в [1]

$$y_i = \frac{\exp(\log(\pi_i) + g_i)/\tau}{\sum_{j=1}^k \exp(\log(\pi_j) + g_j)/\tau)}$$

где g_j из $Gumbel(0, 1)$. Возьмём предел y_i при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_i = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\exp(\log(\pi_i) + g_i)/\tau}{\sum_{j=1}^k \exp(\log(\pi_j) + g_j)/\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{j=1}^k 1} = \frac{1}{k}$$

Таким образом при $\tau \rightarrow \infty$ все компоненты распределены равномерно, значит плотность Gumbel-Softmax концентрируется в центре симплекса.

Список литературы

- [1] Jang, E, Gu, S, and Poole, B 2016 Categorical Reparameterization with Gumbel-Softmax. Available at <http://arxiv.org/abs/1611.01144>