Утверждение 2

Формулировка

Пусть $m \gg 0, \lambda > 0, \frac{m}{\lambda} \in \mathbb{N}, \frac{m}{\lambda} \gg 0$. Тогда оптимизация функции

$$\mathrm{E}_q \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) - \lambda \mathrm{D}_{\mathrm{KL}}(q(\mathbf{w}) \| p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{h}))$$

эквивалентна оптимизации вариационной оценки обоснованности для произвольной случайной подвыборки $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{X}}$ мощности $\frac{m}{\lambda}$ из генеральной совокупности.

Доказательство

$$\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \log p\left(\mathbf{Y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}\right) - \lambda \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) =$$

$$= \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{m} \log p\left(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \right) \approx$$

$$\approx \lambda \left(\frac{m}{\lambda} \mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \mathsf{E}_{(\mathbf{x},y)} \log p\left(y|\mathbf{x}, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \right) \approx$$

$$\approx \lambda \left(\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{\frac{m}{\lambda}} \log p\left(\hat{y}_i|\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)\right) \right) \approx$$

$$\approx \lambda \left(\mathsf{E}_{q(\mathbf{w})} \sum_{i=1}^{\frac{m}{\lambda}} \log p\left(\hat{y}_i|\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{w}\right) - \mathsf{D}_{KL}\left(q\left(\mathbf{w}\right)||p\left(\mathbf{w}|\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{X}}\right)\right) \right),$$

Получаем, что максимизация ELBO для подвыборки эквивалетна оптимизации исходного выражения.

Мы предологаем независимость случайных величин, а также используем усиленный закон больших чисел при оценке мат. ожидания.