Первое теоретическое задание

Фельдман Даниил

Докажем утверждение о том, что максимизация вариационной нижней оценки эквивалентна минимизации KL-дивергенции между распределением $q(\mathbf{w}) \in Q$ и апостериорным распределением параметров $p(\mathbf{w}|\mathbf{h}, X, \mathbf{y})$:

$$\hat{q} = \arg\max_{q \in Q} \int\limits_{\mathbf{w}} q(\mathbf{w}) \log \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|X, \mathbf{h})}{q(\mathbf{w})} d\mathbf{w} \Leftrightarrow \hat{q} = \arg\min_{q \in Q} D_{KL}(q(\mathbf{w}) || p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, X, \mathbf{h}))$$

$$D_{KL}(q(\mathbf{w}) || p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, X, \mathbf{h})) = \int\limits_{\mathbf{w}} q(\mathbf{w}) \log \frac{q(\mathbf{w})}{p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, X, \mathbf{h})} =$$

$$= -\int\limits_{\mathbf{w}} q(\mathbf{w}) \log \frac{p(\mathbf{w}|\mathbf{y}, X, \mathbf{h})}{q(\mathbf{w})} =$$

$$= -(\int\limits_{\mathbf{w}} q(\mathbf{w}) \log \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|X, \mathbf{h})}{q(\mathbf{w})} d\mathbf{w} - \int\limits_{w} q(\mathbf{w}) \log p(\mathbf{y}|X, \mathbf{h}) d\mathbf{w}) =$$

$$= -(\int\limits_{\mathbf{w}} q(\mathbf{w}) \log \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|X, \mathbf{h})}{q(\mathbf{w})} d\mathbf{w} - \log p(\mathbf{y}|X, \mathbf{h}) \int\limits_{w} q(\mathbf{w}) d\mathbf{w}) =$$

$$= -\int\limits_{\mathbf{w}} q(\mathbf{w}) \log \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|X, \mathbf{h})}{q(\mathbf{w})} d\mathbf{w} + \log p(\mathbf{y}|X, \mathbf{h})$$

Мы получили два слагаемых, второе из которых не зависит от $\mathbf{w}$. Поэтому минимизация KL-дивергенции эквивалентна максимизации первого слагаемого без знака минус, что и является вариационной нижней оценкой.