Теория

Лемма 1. *Пусть задан компакт* $U = U_{\mathrm{h}} \times U_{\theta}$ *и* $\lambda^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{struct}} = 0$. *Пусть решение задачи*

$$\min_{\mathbf{h}\in U_{\mathbf{h}}} D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h},\boldsymbol{\lambda})\right)$$

является единственным для некоторых $\lambda^{\mathrm{Q}}_{prior\,1}, \lambda^{\mathrm{Q}}_{prior\,2}, \lambda^{\mathrm{Q}}_{prior\,1} > \lambda^{\mathrm{Q}}_{prior\,2}$ *на* U *при некоторых фиксированных* $\lambda^{Q}_{likelihood}, \lambda^{\mathrm{L}}_{prior}, \lambda_{temp}, \lambda_1, \lambda_2$. *Пусть также решения задач*

$$\mathbf{h}^* = \arg\max_{\mathbf{h}} Q(\mathbf{h}|\mathbf{y},\mathbf{X},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda})$$

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{h},\boldsymbol{\lambda})$$

являются единственными на U *при* $\lambda^{\mathrm{Q}}_{prior\,1}, \lambda^{\mathrm{Q}}_{prior\,2}$ *и* $\lambda^{\mathrm{Q}}_{likelihood}, \lambda^{\mathrm{L}}_{prior}, \lambda_{temp}$. *Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$D_{KL}\left(q\left(\mathbf{w},\Gamma|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\Gamma|\mathbf{h}_1\right)\right) < D_{KL}\left(q\left(\mathbf{w},\Gamma|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\Gamma|\mathbf{h}_2\right)\right)$$

где $\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\theta}_2$ *— решения задачи при* $\lambda^{Q}_{prior\,1}, \lambda^{Q}_{prior\,2}$

$$\theta_1 = \theta^*\left(\mathbf{h}_1\right), \quad \theta_2 = \theta^*\left(\mathbf{h}_2\right)$$

Доказательство. Запишем в следующем виде:

$$D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_1,\boldsymbol{\lambda}_1\right)\right) = D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_1,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right)$$

$$D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\lambda}_2\right)\right) = D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right)$$

Так как данные дивергенции зависят только от тройки метапараметров и не зависят от остальных.

Из условия следует единственность данных решений $\mathbf{h}_1, \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{h}_2, \boldsymbol{\theta}_2$, подставим их, тогда получаем следующее:

$$\lambda^{Q}_{\mathrm{likelihood}} E_{q(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\theta_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X},\mathbf{w},\Gamma) - \lambda^{Q}_{\mathrm{prior}\ _1} D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_1,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right) + \log p\left(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda}_1\right) >$$

$$> \lambda^{Q}_{\mathrm{likelihood}} E_{q(\mathbf{w},\Gamma|\theta_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X},\mathbf{w},\Gamma) - \lambda^{Q}_{\mathrm{prior}\,1} D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\Gamma|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right) + \log p\left(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}_2\right)$$

$$\lambda^{Q}_{\mathrm{likelihood}} \mathrm{E}_{q(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\theta_2)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X},\mathbf{w},\Gamma) - \lambda^{Q}_{\mathrm{prior}\,2} D_{\mathrm{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right) + \log p\left(\mathbf{h}_2|\boldsymbol{\lambda}_2\right) >$$

$> \lambda^{Q}_{\text{likelihood}}\, E_{q(\mathbf{w},\Gamma|\theta_1)} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{X},\mathbf{w},\Gamma) - \lambda^{\text{Q}}_{\text{prior 2}} D_{\text{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_1,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right) + \log p\left(\mathbf{h}_1|\boldsymbol{\lambda}_1\right)$

Исспользуем оба неравенства и выносим общий множитель:

$$\left(\lambda^{\text{Q}}_{\text{prior 2}} - \lambda^{\text{Q}}_{\text{prior 1}}\right) D_{\text{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\Gamma|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_1,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right) >$$

$$\left(\lambda^{\text{Q}}_{\text{prior 2}} - \lambda^{\text{Q}}_{\text{prior 1}}\right) D_{\text{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right)$$

Сокращаем и используем отрицательность

$$D_{\text{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\Gamma|\boldsymbol{\theta}_1\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_1,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right) < D_{\text{KL}}\left(q\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_2\right)\|p\left(\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}|\mathbf{h}_2,\boldsymbol{\lambda}'\right)\right)$$

□