Утверждение. Пусть L - дифференцируемая фукнция, такая что все стационарные точки L являются локальными минимумами. Пусть также гессиан H^{-1} функции потерь L является обратимым в каждой стационарной точке. Тогда

$$\nabla_h Q(T(\theta_0, h), h) = \nabla_h Q(\theta^\eta, h) - \nabla_h \nabla_\theta L(\theta^\eta, h)^\top H^{-1} \nabla_\theta Q(\theta^\eta, h)$$

Доказательство. Условие оптимальности:

$$\nabla_\theta L(T(\theta_0, h)) = 0$$

Отсюда получаем

$$0 = \nabla_h \left(\nabla_\theta L(T(\theta_0, h))\right) = \nabla^2_{\theta,h} L(\theta^\eta, h) + \nabla^2_\theta L(\theta^\eta, h)\theta'_h$$

Следовательно

$$\theta'_h = (\nabla^2_\theta L(\theta^\eta, h))^{-1} \nabla^2_{\theta,h} L(\theta^\eta, h)$$

Тогда полный градиент

$$\nabla_h Q(T(\theta_0, h), h) = \nabla_h Q(\theta^\eta, h) + \nabla_\theta Q(\theta^\eta, h)^\top \theta'_h$$

Запишется как

$$\nabla_h Q(T(\theta_0, h), h) = \nabla_h Q(\theta^\eta, h) + \nabla_\theta Q(\theta^\eta, h)^\top (\nabla^2_\theta L(\theta^\eta, h))^{-1} \nabla^2_{\theta,h} L(\theta^\eta, h) =$$

$$= \nabla_h Q(\theta^\eta, h) + \nabla^2_{\theta,h} L(\theta^\eta, h)^\top (\nabla^2_\theta L(\theta^\eta, h))^{-1} \nabla_\theta Q(\theta^\eta, h)$$