Теория

Лемма 1. *Пусть*

1. *Вариационное распределение $q_{\mathbf{w}}\left(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}\right)$ и априорное распределение $p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})$ являются абсолютно непрерывными.*

2. *Решение задачи*

$$\mathbf{h}^* = \underset{\mathbf{h}\in U_{\mathbf{h}}}{\arg\min} D_{\mathrm{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) \| p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) \tag{0.1}$$

   единственно для любого $\boldsymbol{\theta} \in U_{\boldsymbol{\theta}}$.

3. *Задана бесконечная последовательность векторов вариационных параметров $\boldsymbol{\theta}[1], \boldsymbol{\theta}[2], \dots, \boldsymbol{\theta}[i], \dots \in U_{\boldsymbol{\theta}}$, такая что*

$$\lim_{i\to\infty} C_p\left(\boldsymbol{\theta}[i]|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}\right) = 0$$

Тогда следующее выражение стремится к нулю:

$$\iint_{\mathbf{w},\boldsymbol{\Gamma}} \left|p(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{h}[i], \boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}\left(\mathbf{w}|\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i]\right)\right| q_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) d\boldsymbol{\Gamma} d\mathbf{w}$$

где $\boldsymbol{\theta}[i] = \left[\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i], \boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right], \mathbf{h}[i]$ — решение задачи (0.1) для $\boldsymbol{\theta}[i]$.

Доказательство. Рассмотрим выражение:

$$C_p\left(\boldsymbol{\theta}[i]|U_{\mathbf{h}}, \boldsymbol{\lambda}\right) = \min_{\mathbf{h}\in U_{\mathbf{h}}} D_{\mathrm{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}[i]) \| p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}))$$

По условию последовательность минимумов сходится к нулю.

$$\lim_{i\to\infty} \min_{\mathbf{h}\in U_{\mathbf{h}}} D_{\mathrm{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}[i]) \| p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = 0$$

Разложим дивергенцию на два неотрицательных слагаемых.

$$D_{\mathrm{KL}}(q(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}) \| p(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})) = D_{\mathrm{KL}}\left(q_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}\right) \| p(\boldsymbol{\Gamma}|\mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})\right) +$$

$$+\mathrm{E}_{\Gamma\sim q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma})} \mathrm{E}_{\mathrm{w}\sim q_{\mathrm{w}}(\mathrm{w}|\Gamma,\theta_{\mathrm{w}})} \log\left(\frac{q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\Gamma, \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}\right)}{p(\mathbf{w}|\Gamma, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda})}\right)$$

Так как сумма двух неотрицательных чисел сходится к 0, тогда и каждое слагаемое сходится к 0. Возьмем последнее:

$$0 = \lim_{i\to\infty} \mathrm{E}_{\Gamma\sim q_{\Gamma}(\Gamma|\theta_{\Gamma}[i])} \mathrm{E}_{\mathrm{w}\sim q_{\mathrm{w}}(\mathrm{w}|\Gamma,\theta_{\mathrm{w}}[i])} \log\left(\frac{q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\Gamma,\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right)}{p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\mathbf{h}[i],\lambda)}\right) =$$

По определению мат. ожидания имеем:

$$= \lim_{i\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\int_{\mathrm{w}} \log\left(\frac{q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\Gamma,\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right)}{p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\mathbf{h}[i],\lambda)}\right) q_{\Gamma}\left(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) d\mathbf{w} d\Gamma\right| \geq$$

Воспользуемся неравенством Пинскера:

$$\left\|F_q\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) - F_p(\mathbf{h}[i])\right\|_{\mathrm{TV}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{KL}}\left(p(\mathbf{w}|\Gamma,\mathbf{h}[i],\boldsymbol{\lambda})\|q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\Gamma,\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right)\right)}$$

$$2\left(\left\|F_q\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) - F_p(\mathbf{h}[i])\right\|_{\mathrm{TV}}\right)^2 \leq \widehat{\mathrm{KL}}\left(p(\mathbf{w}|\Gamma,\mathbf{h}[i],\boldsymbol{\lambda})\|q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\Gamma,\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right)\right)$$

где $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ — расстояние по вариации, F_q, F_p — функции распределения $q_{\mathrm{w}}\left(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}\right), p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\mathbf{h},\boldsymbol{\lambda}), \widehat{\mathrm{KL}}\left(p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\mathbf{h},\boldsymbol{\lambda})\|q_{\mathbf{w}}\left(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}\right)\right)$ — дивергенция при фиксированной структуре

$$\geq \lim_{i\to\infty}\int_{\Gamma} 2\left\|F_q\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) - F_p(\mathbf{h}[i])\right\|_{\mathrm{TV}}^2 q_{\Gamma}\left(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) d\mathbf{\Gamma} \geq 0$$

Получаем:

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\Gamma} \left\|F_q\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) - F_p(\mathbf{h}[i])\right\|_{\mathrm{TV}}^2 q_{\Gamma}\left(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) d\mathbf{\Gamma} \geq$$

По неравенству Йенсена:

$$\geq \lim_{i\to\infty}\left(\int_{\Gamma} \left\|F_q\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) - F_p(\mathbf{h}[i])\right\|_{\mathrm{TV}} q_{\Gamma}\left(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) d\mathbf{\Gamma}\right)^2 \geq 0$$

Тогда

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\Gamma} \left\|F_q\left(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{w}}[i]\right) - F_p(\mathbf{h}[i])\right\|_{\mathrm{TV}} q_{\Gamma}\left(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) d\mathbf{\Gamma} = 0$$

Далее, применяя лемму Шеффе:

$$\lim_{i\to\infty}\iint_{\mathbf{w},\mathbf{\Gamma}} \left|p(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\mathbf{h}[i],\boldsymbol{\lambda}) - q_{\mathbf{w}}\left(\mathbf{w}|\mathbf{\Gamma},\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{w}}[i]\right)\right| q_{\mathbf{\Gamma}}\left(\mathbf{\Gamma}|\boldsymbol{\theta}_{\Gamma}[i]\right) d\mathbf{\Gamma} d\mathbf{w} = 0$$

$\square$