

第五章 解线性方程组的迭代法

中国科学技术大学 数学学院

chenxjin@ustc.edu.cn

解线性方程组有两类方法：

- **直接法(消元法)**：得到的解是理论上准确的，计算复杂度为 $O(n^3)$ 量级，存储量为 $O(n^2)$ 量级，比较合适于 n 较小的情况.
- **迭代法**：占用存储空间少，程序实现简单，尤其用于大型稀疏矩阵(即系数矩阵中含有大量的0元素)时速度快.

解线性方程组有两类方法：

- **直接法(消元法)**：得到的解是理论上准确的，计算复杂度为 $O(n^3)$ 量级，存储量为 $O(n^2)$ 量级，比较合适于 n 较小的情况.
- **迭代法**：占用存储空间少，程序实现简单，尤其用于大型稀疏矩阵(即系数矩阵中含有大量的0元素)时速度快.

实际中，很多问题通常归结为求解具有大型 ($n \gg 1$) 稀疏矩阵的线性代数方程组. 此时，迭代法更重要！

线性方程(组)的迭代法

线性方程(组)的迭代法

对方程(组) $F(x) = 0$, 迭代法 基本步骤:

线性方程(组)的迭代法

对方程(组) $F(x) = 0$, 迭代法 基本步骤:

- 1 构造原方程组的等价形式 $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Phi(x)$.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组) $F(x) = 0$, 迭代法 基本步骤:

- 1 构造原方程组的等价形式 $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Phi(x)$.
- 2 写出迭代格式 $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, 并取合适的初值 $x^{(0)}$.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组) $F(x) = 0$, 迭代法 基本步骤:

- ① 构造原方程组的等价形式 $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Phi(x)$.
- ② 写出迭代格式 $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, 并取合适的初值 $x^{(0)}$.
- ③ 若极限 $x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}$ 存在, 则 x^* 为方程的解. 在计算上, 一般迭代至 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ 时停止.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组) $F(x) = 0$, 迭代法 基本步骤:

- ① 构造原方程组的等价形式 $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Phi(x)$.
- ② 写出迭代格式 $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, 并取合适的初值 $x^{(0)}$.
- ③ 若极限 $x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}$ 存在, 则 x^* 为方程的解. 在计算上, 一般迭代至 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ 时停止.

若极限 $x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}$ 不存在, 则失败. 需考虑采用另外的迭代格式 Φ 或初值 $x^{(0)}$.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组) $F(x) = 0$, 迭代法 基本步骤:

- ① 构造原方程组的等价形式 $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Phi(x)$.
- ② 写出迭代格式 $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, 并取合适的初值 $x^{(0)}$.
- ③ 若极限 $x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}$ 存在, 则 x^* 为方程的解. 在计算上, 一般迭代至 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ 时停止.

若极限 $x^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}$ 不存在, 则失败. 需考虑采用另外的迭代格式 Φ 或初值 $x^{(0)}$.

- 向量序列 $x^{(k)} \rightarrow x^* \Rightarrow x_i^{(k)} \rightarrow x_i^*$ (即 $x^{(k)}$ 各分量分别收敛到 x^* 的对应分量);
- 线性方程组作为一种特殊情形, 用迭代法求解的基本思想与非线性方程求根的迭代方法完全相同.

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故: 向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛 \iff

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故: 向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛 $\iff G^k \rightarrow 0 \iff$

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故: 向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛 $\iff G^k \rightarrow 0 \iff \rho(G) < 1$ (充要条件)

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故: 向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛 $\iff G^k \rightarrow 0 \iff \rho(G) < 1$ (充要条件)

注: 收敛与初值(即初始向量) $x^{(0)}$ 的选取无关!

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故: 向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛 $\iff G^k \rightarrow 0 \iff \rho(G) < 1$ (充要条件)

注: 收敛与初值(即初始向量) $x^{(0)}$ 的选取无关!

- 因 $\rho(G) \leq \|G\|$, 若存在范数 $\|G\|_p < 1$, 则迭代收敛; 反之不然.

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \iff x = Gx + c$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$$

通常称 G 为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^* , 则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故: 向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛 $\iff G^k \rightarrow 0 \iff \rho(G) < 1$ (充要条件)

注: 收敛与初值(即初始向量) $x^{(0)}$ 的选取无关!

- 因 $\rho(G) \leq \|G\|$, 若存在范数 $\|G\|_p < 1$, 则迭代收敛; 反之不然.
- 通常采用 $1, \infty$ 范数来粗略估计收敛性.

迭代法收敛的充要条件

定理

For the iterative formula

$$x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + c$$

to produce a sequence converging to $(I - G)^{-1}c$, for **any vector** c and any starting vector $x^{(0)}$, it is **necessary and sufficient** that the spectral radius of G be less than 1, i.e., $\rho(G) < 1$.

等价方程(形式)

作 $Ax = b$ 的等价方程 $x = Gx + c$ 时,

等价方程(形式)

作 $Ax = b$ 的等价方程 $x = Gx + c$ 时, 可以这样做: 将 A 分成两部分的差 $A = Q - P$ 并使 Q (通常称为分裂矩阵)可逆. 则

等价方程(形式)

作 $Ax = b$ 的等价方程 $x = Gx + c$ 时, 可以这样做: 将 A 分成两部分的差 $A = Q - P$ 并使 Q (通常称为分裂矩阵)可逆. 则

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff (Q - P)x = b \\ \iff Qx = Px + b &\iff x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b \end{aligned}$$

等价方程(形式)

作 $Ax = b$ 的等价方程 $x = Gx + c$ 时, 可以这样做: 将 A 分成两部分的差 $A = Q - P$ 并使 Q (通常称为分裂矩阵) 可逆. 则

$$\begin{aligned} Ax = b &\iff (Q - P)x = b \\ &\iff Qx = Px + b \iff x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b \end{aligned}$$

取 $G = Q^{-1}P$, $c = Q^{-1}b$ 即可.

Corollary

The iterative formula

$$Qx^{(k)} = (Q - A)x^{(k-1)} + b \quad (k \geq 1)$$

will produce a sequence converging to the solution of $Ax = b$, for any starting vector $x^{(0)}$, if $\rho(I - Q^{-1}A) < 1$.

常用的线性方程组迭代法

三种最常见、最基本的迭代格式或方法（由易到难，由简到繁）：

Jacobi 迭代 \implies Gauss-Seidel 迭代 \implies 松弛(SOR)迭代

Jacobi迭代

设待解方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Jacobi迭代

设待解方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

假定 A 的对角元 a_{ii} 全不为0，分别由第 i 个方程解出 x_i 得：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) \\ \vdots \\ x_n = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

它是原方程的一个等价方程

Jacobi迭代

设待解方程组为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

假定 A 的对角元 a_{ii} 全不为0, 分别由第 i 个方程解出 x_i 得:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) \\ \vdots \\ x_n = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

它是原方程的一个等价方程 (写成向量形式 $x = Gx + c$).

Jacobi迭代: 分量形式

Jacobi迭代格式(分量形式)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

即称为: **Jacobi迭代**, 也称简单迭代.

Jacobi迭代: 分量形式

Jacobi迭代格式(分量形式)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

即称为: **Jacobi迭代**, 也称简单迭代.

将A表示为 $A = D + L + U$ ，其中 $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

将A表示为 $A = D + L + U$ ，其中 $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

则Jacobi迭代格式写成向量形式即为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

将A表示为 $A = D + L + U$ ，其中 $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

则Jacobi迭代格式写成向量形式即为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\iff x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D$$

故Jacobi迭代矩阵为： $G = -D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代，我们有一些保证收敛的充分条件.

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代, 我们有一些保证收敛的充分条件.

定理: 若 A 满足下列条件之一, 则Jacobi迭代收敛.

- ① $A \equiv (a_{ij})$ 为严格行对角占优阵, 即 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$
- ② $A \equiv (a_{ij})$ 为严格列对角占优阵, 即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代, 我们有一些保证收敛的充分条件.

定理: 若 A 满足下列条件之一, 则Jacobi迭代收敛.

① $A \equiv (a_{ij})$ 为严格行对角占优阵, 即 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$

② $A \equiv (a_{ij})$ 为严格列对角占优阵, 即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$

验证:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代, 我们有一些保证收敛的充分条件.

定理: 若 A 满足下列条件之一, 则Jacobi迭代收敛.

① $A \equiv (a_{ij})$ 为严格行对角占优阵, 即 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$

② $A \equiv (a_{ij})$ 为严格列对角占优阵, 即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|$

验证: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

【注】: 严格行或列对角占优, 统称为严格对角占优.

Pf: ①. Jacobi迭代矩阵为 $G = -D^{-1}(L + U) \doteq (g_{ij})$, 其中

$$g_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i; \\ 0, & j = i. \end{cases}$$

故 $\rho(G) \leq \|G\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |g_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$, \implies Jacobi迭代收斂.

Pf: ①. Jacobi迭代矩阵为 $G = -D^{-1}(L + U) \doteq (g_{ij})$, 其中

$$g_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i; \\ 0, & j = i. \end{cases}$$

故 $\rho(G) \leq \|G\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |g_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$, \implies Jacobi迭代收敛.

②. A 严格列对角占优时 A^T 严格行对角占优. 且

$$\begin{aligned} I - D^{-1}A^T &\sim D(I - D^{-1}A^T)D^{-1} = (I - D^{-1}A)^T \sim I - D^{-1}A \\ \implies \rho(I - D^{-1}A^T) &= \rho(I - D^{-1}A) \end{aligned}$$

由①知Jacobi迭代收敛.

例：用Jacobi方法解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

例：用Jacobi方法解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

解：方程对应的Jacobi迭代格式分量为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 1.6 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 1.1 \end{cases}$$

例：用Jacobi方法解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

解：方程对应的Jacobi迭代格式分量为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 1.6 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 1.1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.5 \\ 1.6 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

由 $\|G\|_1 = 0.7 \Rightarrow \rho(G) \leq \|G\|_1 = 0.7 < 1$, 知Jacobi迭代收敛. 取初始值 $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, 计算结果由下表所示.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ X^{(k)} - X^{(k-1)}\ _\infty$
0	1	1	1	
1	-1.5	1.6	0.9	0.6
2	-1.25	2.08	1.09	0.48
3	-0.915	2.068	1.017	0.355
4	-0.9575	1.9864	0.9847	0.0425
5	-1.01445	1.98844	0.99711	0.05695
6	-1.00722	2.00231	1.0026	0.00723
7	-0.997543	2.00197	1.00049	0.009677

由 $\|G\|_1 = 0.7 \Rightarrow \rho(G) \leq \|G\|_1 = 0.7 < 1$, 知Jacobi迭代收敛. 取初始值 $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, 计算结果由下表所示.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ X^{(k)} - X^{(k-1)}\ _\infty$
0	1	1	1	
1	-1.5	1.6	0.9	0.6
2	-1.25	2.08	1.09	0.48
3	-0.915	2.068	1.017	0.355
4	-0.9575	1.9864	0.9847	0.0425
5	-1.01445	1.98844	0.99711	0.05695
6	-1.00722	2.00231	1.0026	0.00723
7	-0.997543	2.00197	1.00049	0.009677

原方程组的精确解是 $x = (-1, 2, 1)^T$.

Gauss – Seidel 迭代

Gauss – Seidel迭代

回顾：Jacobi迭代格式(分量形式)：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{array} \right.$$

Gauss – Seidel 迭代

Gauss – Seidel迭代

在Jacobi迭代中，使用最新算出的分量值

Gauss – Seidel迭代

在Jacobi迭代中，使用最新算出的分量值

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{array} \right.$$

即：Gauss–Seidel迭代. 仍记 $A = D + L + U$.

Gauss – Seidel迭代矩阵

Gauss – Seidel迭代矩阵

Gauss–Seidel迭代写成向量形式为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D + L$$

Gauss – Seidel迭代矩阵

Gauss–Seidel迭代写成向量形式为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D + L$$

$$\Longleftrightarrow Qx^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b, \quad Q = D + L$$

Gauss – Seidel迭代矩阵

Gauss—Seidel迭代写成向量形式为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Ux^{(k)} + (D + L)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D + L$$

$$\Longleftrightarrow Qx^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b, \quad Q = D + L$$

故Gauss—Seidel迭代矩阵为

$$G = -(D + L)^{-1}U = I - Q^{-1}A$$

【回顾】：严格行或列对角占优，统称为**严格对角占优**。

定理 5.1：若矩阵 M 严格对角占优，则 M 可逆.

【回顾】：严格行或列对角占优，统称为**严格对角占优**。

定理 5.1：若矩阵 M 严格对角占优，则 M 可逆。

Proof.

反证法。当 M 为严格行对角占优时，假设 M 不可逆，则存在非零向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 使得 $MX = 0$ 。不妨设 $0 \neq |x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ ，则有

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}x_j = 0 \Rightarrow |m_{ii}x_i| = \left| \sum_{j \neq i} m_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |m_{ij}||x_j| < |m_{ii}||x_i|$$

矛盾！同理，当 M 为严格列对角占优时，则 M^T 为严格行对角占优。由前知， M^T 可逆。综上， M 均可逆。 \square

Gauss – Seidel迭代收敛条件

Gauss-Seidel迭代格式收敛的充要条件是 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$ ，下面是一些Gauss-Seidel迭代收敛的充分条件.

Gauss – Seidel迭代收敛条件

Gauss-Seidel迭代格式收敛的充要条件是 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$ ，下面是一些Gauss-Seidel迭代收敛的充分条件.

定理：若矩阵 A 满足下列条件之一，则Gauss-Seidel迭代收敛.

- ① A 为严格(行或列)对角占优阵. (参见第4版定理5.3)
- ② A 为实对称正定阵. (参见第4版定理5.4)

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的非零特征值 λ , 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$.

由 $(D + L - A)v = \lambda(D + L)v$

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的非零特征值 λ , 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$.

由 $(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \Rightarrow (D + L + \lambda^{-1}U)v = 0$.

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的非零特征值 λ , 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$.

由 $(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \Rightarrow (D + L + \lambda^{-1}U)v = 0$. 若 $|\lambda| \geq 1$, 则 $D + L + \lambda^{-1}U$ 必严格对角占优, 由定理5.1知其可逆. 矛盾! 故有 $|\lambda| < 1$

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的非零特征值 λ , 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$.

由 $(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \Rightarrow (D + L + \lambda^{-1}U)v = 0$. 若 $|\lambda| \geq 1$, 则 $D + L + \lambda^{-1}U$ 必严格对角占优, 由定理5.1知其可逆. 矛盾! 故有 $|\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(I - (D + L)^{-1}A) < 1$. 故迭代收敛!



Proof.

② 同上，任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$ ，设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。

Proof.

② 同上，任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$ ，设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

记 $p \triangleq \bar{v}^T Dv > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T Uv$ 。

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

记 $p \triangleq \bar{v}^T Dv > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T Uv$ 。因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T Av > 0 \implies p + a + \bar{a} > 0$ 。

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

记 $p \triangleq \bar{v}^T Dv > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T Uv$ 。因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T Av > 0 \implies p + a + \bar{a} > 0$ 。由①知,
 $(D + L - A)v = \lambda(D + L)v$

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$. 因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T Dv > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T Uv$. 因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T Av > 0 \implies p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v$$

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$. 因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T A v > 0 \implies p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \text{ or } \\ -L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda} \bar{v}^T (D + U)$$

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$ 。因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T A v > 0 \Rightarrow p + a + \bar{a} > 0$ 。由①知,

$$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \text{ or } \\ -L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda} \bar{v}^T (D + U) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T (D + L) v} = -\frac{a}{p + \bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T (D + U) v} = -\frac{\bar{a}}{p + a}$$

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$ 。因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T A v > 0 \Rightarrow p + a + \bar{a} > 0$ 。由①知,

$$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \text{ or } \\ -L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda} \bar{v}^T (D + U) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T (D + L) v} = -\frac{a}{p + \bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T (D + U) v} = -\frac{\bar{a}}{p + a}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{|a|^2}{p(p + a + \bar{a}) + |a|^2}$$

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$ 。因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$ 。

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$ 。因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T A v > 0 \Rightarrow p + a + \bar{a} > 0$ 。由①知,

$$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \text{ or } -L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda} \bar{v}^T (D + U) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T (D + L) v} = -\frac{a}{p + \bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T (D + U) v} = -\frac{\bar{a}}{p + a}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{|a|^2}{p(p + a + \bar{a}) + |a|^2} < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$$

Proof.

② 同上, 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值 $\lambda \neq 0$, 设 $v \neq 0$ 为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$. 因 A 是实对称且正定的, 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定, 故 $\bar{v}^T A v > 0 \Rightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v \text{ or } \\ -L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda} \bar{v}^T (D + U) \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T (D + L) v} = -\frac{a}{p + \bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T (D + U) v} = -\frac{\bar{a}}{p + a}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{|a|^2}{p(p + a + \bar{a}) + |a|^2} < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(G) < 1$$

故 Gauss-Seidel 迭代收敛!



例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ 取初值 } x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ 取初值 } x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

解：A的对角元 $a_{22} = 0$ ，需做一下预处理（作2次行交换）：

$$(A, b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \\ -x_1 + 9x_3 = 8 \end{cases}$$

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ 取初值 } x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

解：A的对角元 $a_{22} = 0$ ，需做一下预处理（作2次行交换）：

$$(A, b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \\ -x_1 + 9x_3 = 8 \end{cases}$$

先求Jacobi迭代格式，由

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}(x_2 + x_3 + 7) \\ x_2 = \frac{1}{8}(x_1 + 7) \\ x_3 = \frac{1}{9}(x_1 + 8) \end{cases}$$

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ 取初值 } x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$$

解：A的对角元 $a_{22} = 0$ ，需做一下预处理（作2次行交换）：

$$(A, b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} 9x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \\ -x_1 + 9x_3 = 8 \end{cases}$$

先求Jacobi迭代格式，由

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{9}(x_2 + x_3 + 7) \\ x_2 = \frac{1}{8}(x_1 + 7) \\ x_3 = \frac{1}{9}(x_1 + 8) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k)} + 8) \end{cases}$$

故Gauss-Seidel迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{cases}$$

迭代 $k = 4$ 步后即得到解：

$$x^{(1)} = (0.7778, 0.9722, 0.9753)'$$

$$x^{(2)} = (0.9942, 0.9993, 0.9994)'$$

$$x^{(3)} = (0.9999, 0.9999, 0.9999)'$$

$$x^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)'$$

故Gauss-Seidel迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{cases}$$

迭代 $k = 4$ 步后即得到解：

$$x^{(1)} = (0.7778, 0.9722, 0.9753)'$$

$$x^{(2)} = (0.9942, 0.9993, 0.9994)'$$

$$x^{(3)} = (0.9999, 0.9999, 0.9999)'$$

$$x^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)'$$

精确解？

例：分别使用Jacobi迭代与Gauss-seidel迭代法求解 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

讨论两种迭代的收敛性.

例：分别使用Jacobi迭代与Gauss-seidel迭代法求解 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

讨论两种迭代的收敛性.

解：Jacobi迭代矩阵为：

$$G = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为 $|\lambda I - G| = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$

由于 $\rho(G) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$,

例：分别使用Jacobi迭代与Gauss-seidel迭代法求解 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

讨论两种迭代的收敛性.

解：Jacobi迭代矩阵为：

$$G = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为 $|\lambda I - G| = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$

由于 $\rho(G) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ ，知Jacobi迭代不收敛.

若使用Gauss—Siedel迭代法，则迭代矩阵为：

$$G = -(D + L)^{-1} U$$

若使用Gauss—Siedel迭代法，则迭代矩阵为：

$$G = -(D + L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可得其特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$$

由 $\rho(G) = \frac{1}{2} < 1$,

若使用Gauss—Siedel迭代法，则迭代矩阵为：

$$G = -(D + L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可得其特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$$

由 $\rho(G) = \frac{1}{2} < 1$ ，故Gauss-Seidel 迭代收敛.

Remark

1. Jacobi和Gauss-Seidel迭代法的收敛性比较

前面例子表明：Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；

Remark

1. Jacobi和Gauss-Seidel迭代法的收敛性比较

前面例子表明：Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；而Jacobi法收敛时，Gauss-Seidel法也可能不收敛。

2. 大多数情形下Gauss-Seidel迭代比Jacobi迭代要快，但也不绝对。迭代收敛的快慢最终还是由 $\rho(G)$ 的大小唯一确定， G 为迭代矩阵。

松弛(SOR)迭代

松弛(SOR)迭代

Gauss-seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

松弛(SOR)迭代

Gauss-seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

可以写成

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

$$\text{令 } r_i^{(k)} = a_{i1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \cdots + a_{in}x_n^{(k)} - b_i$$

则Gauss-Seidel迭代法可写成：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}r_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{a_{22}}r_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}}r_n^{(k)} \end{cases}$$

$$\text{令 } r_i^{(k)} = a_{i1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \cdots + a_{in}x_n^{(k)} - b_i$$

则 Gauss-Seidel 迭代法可写成：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}r_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{a_{22}}r_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}}r_n^{(k)} \end{cases}$$

设 $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, \dots, r_n^{(k)})$ 。由 $x^{(k)}$ 得到 $x^{(k+1)}$ 的过程，可以认为是将 $x^{(k)}$ 加上修正量 $-D^{-1}r^{(k)}$ 而得到 $x^{(k+1)}$ ，i.e.,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}r^{(k)}.$$

$$\text{令 } r_i^{(k)} = a_{i1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \cdots + a_{in}x_n^{(k)} - b_i$$

则 Gauss-Seidel 迭代法可写成：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}r_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{a_{22}}r_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}}r_n^{(k)} \end{cases}$$

设 $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, \dots, r_n^{(k)})$ 。由 $x^{(k)}$ 得到 $x^{(k+1)}$ 的过程，可以认为是将 $x^{(k)}$ 加上修正量 $-D^{-1}r^{(k)}$ 而得到 $x^{(k+1)}$ ，i.e.，

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}r^{(k)}.$$

猜想：更改修正量的大小（可通过一个参数，即松弛因子 ω ，来调节），算法或许能收敛更快！

故，在 Gauss-Seidel 迭代的基础上，引进松弛因子 ω ，即得到松弛(SOR)迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1} r^{(k)}$$

故，在 Gauss-Seidel 迭代的基础上，引进松弛因子 ω ，即得到松弛(SOR)迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1} r^{(k)} \iff$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\omega}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\omega}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{\omega}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

故，在 Gauss-Seidel 迭代的基础上，引进松弛因子 ω ，即得到松弛(SOR)迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1} r^{(k)} \iff$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\omega}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\omega}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{\omega}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

称为因子为 ω 的松弛(SOR)迭代， $\omega = 1$ 时的松弛迭代即为 Gauss-Seidel 迭代。

松弛(SOR)迭代的迭代矩阵

将松弛迭代格式写成向量形式, 可得:

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = \left[(1 - \omega)D - \omega U \right] x^{(k)} + \omega b$$

松弛(SOR)迭代的迭代矩阵

将松弛迭代格式写成向量形式, 可得:

$$\begin{aligned}(D + \omega L)x^{(k+1)} &= \left[(1 - \omega)D - \omega U \right] x^{(k)} + \omega b \iff \\ \textcolor{red}{x}^{(k+1)} &= (D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U \right) x^{(k)} + \omega (D + \omega L)^{-1} b \\ &\triangleq S_{\omega} x^{(k)} + f = \textcolor{red}{(I - Q^{-1}A)} x^{(k)} + \textcolor{red}{Q^{-1}b}\end{aligned}$$

松弛(SOR)迭代的迭代矩阵

将松弛迭代格式写成向量形式, 可得:

$$\begin{aligned}(D + \omega L)x^{(k+1)} &= \left[(1 - \omega)D - \omega U \right] x^{(k)} + \omega b \iff \\ \color{red}{x}^{(k+1)} &= (D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U \right) x^{(k)} + \omega (D + \omega L)^{-1} b \\ &\triangleq \color{red}{S}_\omega x^{(k)} + \color{red}{f} = \color{red}{(I - Q^{-1}A)} x^{(k)} + \color{red}{Q^{-1}b}\end{aligned}$$

故松弛因子为 ω 的松弛迭代矩阵为 (这里 $\color{red}{Q} = \frac{1}{\omega}D + \color{red}{L}$ 即分裂矩阵)

$$\color{red}{S}_\omega = (D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U \right) = \color{red}{I} - \color{blue}{Q^{-1}A}$$

例：用松弛(SOR)方法解下列方程组 (设 ω 为松弛因子)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

例：用松弛(SOR)方法解下列方程组 (设 ω 为松弛因子)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

回顾：与该方程组对应的Jacobi迭代格式（分量形式）为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 11) \end{cases}$$

例：用松弛(SOR)方法解下列方程组 (设 ω 为松弛因子)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

回顾：与该方程组对应的Jacobi迭代格式（分量形式）为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 11) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Gauss-Seidel 格式: } \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 11) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{2}(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 10x_3^{(k)} - 11) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{2}(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 10x_3^{(k)} - 11) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{松弛迭代格式: } \begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\omega}{2}(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\omega}{5}(x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{10}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 10x_3^{(k)} - 11) \end{cases}$$

- 定理： 1. 松弛(SOR)迭代收敛 $\implies 0 < \omega < 2$.
2. 若 A 为对称正定矩阵，则 $0 < \omega < 2$ 时松弛迭代收敛.

定理： 1. 松弛(SOR)迭代收敛 $\implies 0 < \omega < 2$.
2. 若 A 为对称正定矩阵，则 $0 < \omega < 2$ 时松弛迭代收敛.

Pf 1): 设松弛迭代收敛, 则 $\rho(S_\omega) < 1$. 设迭代矩阵 S_ω 的所有特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则: $|\det(S_\omega)| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1$.

$$\begin{aligned}\text{而 } \det(S_\omega) &= \det\left((D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U]\right) \\ &= \det(D + \omega L)^{-1} \cdot \det((1 - \omega)D - \omega U) \\ &= \frac{1}{a_{11} \cdots a_{nn}} \cdot [(1 - \omega)a_{11}] \cdots [(1 - \omega)a_{nn}] \\ &= (1 - \omega)^n\end{aligned}$$

故 $|(1 - \omega)^n| < 1 \implies |1 - \omega| < 1 \implies 0 < \omega < 2$.

2). 略

Remark

1. 通常，把 $0 < \omega < 1$ 的迭代称为亚松弛迭代， $1 < \omega < 2$ 的迭代称为超松弛迭代， $\omega = 1$ 的迭代为Gauss-Seidel迭代.
2. 松弛迭代方法收敛的快慢与松弛因子 ω 的选择有密切关系. 但是如何选取最佳松弛因子 ω 使得 $\rho(S_\omega)$ 达到最小，是一个尚未解决的问题. 实际上可采用试算的方法来确定较好的松弛因子. 经验上可取 $1.4 < \omega < 1.6$.

迭代方法小结

迭代方法小结

- 等价形式 (假设分裂矩阵 Q 非奇异, 即 $|Q| \neq 0$)

$$Ax = b \iff Qx = (Q - A)x + b \iff x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

迭代方法小结

- 等价形式 (假设分裂矩阵 Q 非奇异, 即 $|Q| \neq 0$)

$$Ax = b \iff Qx = (Q - A)x + b \iff x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- 迭代公式

$$Qx^{(k+1)} = (Q - A)x^{(k)} + b \iff x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b$$

迭代方法小结

- 等价形式 (假设分裂矩阵 Q 非奇异, 即 $|Q| \neq 0$)

$$Ax = b \iff Qx = (Q - A)x + b \iff x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- 迭代公式

$$Qx^{(k+1)} = (Q - A)x^{(k)} + b \iff x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b$$

Let $A = D + L + U$ and assume $0 < \omega < 2$.

迭代方法	分裂矩阵 Q	迭代矩阵 $G = I - Q^{-1}A$
Jacobi	D	$I - D^{-1}A$
Gauss-Seidel	$D + L$	$-(D + L)^{-1}U$
SOR(松弛迭代)	$\frac{1}{\omega}D + L$	$(D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U \right)$

迭代方法小结

- 等价形式 (假设分裂矩阵 Q 非奇异, 即 $|Q| \neq 0$)

$$Ax = b \iff Qx = (Q - A)x + b \iff x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- 迭代公式

$$Qx^{(k+1)} = (Q - A)x^{(k)} + b \iff x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b$$

Let $A = D + L + U$ and assume $0 < \omega < 2$.

迭代方法	分裂矩阵 Q	迭代矩阵 $G = I - Q^{-1}A$
Jacobi	D	$I - D^{-1}A$
Gauss-Seidel	$D + L$	$-(D + L)^{-1}U$
SOR(松弛迭代)	$\frac{1}{\omega}D + L$	$(D + \omega L)^{-1} \left((1 - \omega)D - \omega U \right)$

收敛条件

Jacobi迭代 $\xrightarrow{\text{使用最新分量}}$ Gauss-Seidel迭代 $\xrightarrow{\text{引进松弛因子 } \omega}$ 松弛迭代