计算方法作业 #4

陈文轩
KFRC

更新：March 25, 2025

1 题目

1.1 符号说明

对常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$，两边在区间 $[x_{n-p}, x_[n+1]]$ 上积分得 $y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。我们用数值积分来近似 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，从而构造线性多步格式。

格式中有两个控制量 p 和 q，其中 p 控制积分区间，q 控制插值节点，若用积分节点 $\{x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}\}$ 近似计算 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，得到显式公式 $y_{n+1} = y_{n-p} + \sum_{j=0}^{q} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$；若用积分节点 $\{x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n+1-q}\}$ 近似计算 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，得到隐式公式 $y_{n+1} = y_{n-p} + \sum_{j=-1}^{q-1} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$

更一般地，一个 $k+1$ 步的线性多步格式具有如下形式：

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} + \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

1.2 作业

1. (12pts) 设有常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -y(x), 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$，假设求解区间 $[0,1]$ 被 n 等分，令 $h = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}(k = 0, 1, \cdots, n)$
   (a). 分别写出用向前 Euler 公式，向后 Euler 公式，梯形公式以及改进的 Euler 公式求上述微分方程数值解时的差分格式（即y_{k+1} 与 y_k二者之间的递推关系式）;
   (b). 设$y_0 = y(0)$，分别求这四种公式（方法）下的近似值y_n的表达式（注：这里的y_n即是$y(x_n) \equiv y(1)$ 的近似值;

(c). 当n足够大（即区间长度$h \to 0$时，分别判断四种方法下的近似值y_n是否收敛到原问题的真解$y(x)$在$x=1$处的值。

2. (8pts) 试推导 $p=1, q=2$ 显式公式$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right)$的局部截断误差，即验证$T_{n+1} \equiv y(n+1) - y_{n+1} = \frac{1}{3}h^4 y^{(4)}(x_{n-1}) + O(h^5)$（提示：将差分格式右端点某些项在某点处同时作 Taylor 展开）；

3. (18pts) 试用线性多步法构造$p=1, q=2$时的隐式差分格式，求该格式局部截断误差的误差主项并判断它的阶，最后为该隐式格式设计一种合适的预估-校正格式。

4. (12pts) 试推导如下 Runge-Kutta 公式的局部截断误差及其误差主项，判断该公式/格式的（精度）阶数。提示：利用二元函数的 Taylor 展开。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}(3k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk_1) \end{cases}$$

Deadline:2025.4.6

2 解答