

计算方法作业 #7

陈文轩

KFRC

更新: April 12, 2025

1 题目

1. (10pts) 用 Doolittle 分解法解如下线性方程组 (请给出详细的解题过程, 包括矩阵分解):

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{cases}$$

2. (10pts) 求如下三对角阵 A 的 Crout 分解:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

3. (6+4pts) 设有线性方程组

$$\begin{cases} 35.26x_1 + 14.96x_2 &= 20.25 \\ 187.30x_1 + 79.43x_2 &= 19.75 \end{cases}$$

- (a). 试求该方程组系数矩阵 A 的条件数 $\text{cond}_1(A)$ (结果保留 2 位小数);
(b). 若方程组右端项 $b = (20.25, 19.75)^\top$ 有扰动 $\delta b = (-0.01, 0.01)^\top$, 试给出此时方程组解的相对误差估计 (在 $\|\cdot\|_1$ 范数下, 结果保留 2 位小数)。

Deadline: 2025.4.20

2 解答

1. 系数矩阵的 LU 分解为

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

求解 $Ly = b$, 得到 $y = \left(2, \frac{18}{5}, \frac{50}{7}\right)^\top$; 求解 $Lx = y$, 得到 $x = \left(-\frac{4}{7}, 2, \frac{10}{7}\right)^\top$ 。

$$2. \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{15}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{52}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{89}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{15}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 3526 & 1496 \\ 18730 & 7943 \end{bmatrix}, \|A\|_1 = \frac{5564}{25}, A^{-1} = \frac{1}{6531} \begin{bmatrix} -397150 & 74800 \\ 936500 & -176300 \end{bmatrix},$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{444550}{2177} \Rightarrow \text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = \frac{98939048}{2177} \approx 45447.43。$$

解的相对误差估计为 $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \lesssim \text{cond}_1(A) \cdot \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} \approx 22.7237$, 即相对误差为 2272.37%。