



§9.5.1 最佳一致逼近多项式的概念

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

连续情形的**最佳一致逼近**问题.

在函数空间 $C[a, b]$ 上, 引入**一致范数**

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \forall f \in C[a, b],$$

逼近集合 M 取 $n + 1$ 维**多项式空间** $\mathbb{P}_n[x]$.

$$\mathbb{P}_n[x] \subset C[a, b] \subset L^2_f[a, b]$$



§9.5.1 最佳一致逼近多项式的概念

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

连续情形的**最佳一致逼近**问题.

在函数空间 $C[a, b]$ 上, 引入**一致范数**

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \forall f \in C[a, b],$$

逼近集合 M 取 $n + 1$ 维多项式空间 $\mathbb{P}_n[x]$.
列出

对于任意的 $f \in C[a, b]$, 如果存在 $p^* \in \mathbb{P}_n[x]$ 使得

$$\|f - p^*\|_{\infty} = \inf_{p \in \mathbb{P}_n[x]} \|f - p\|_{\infty} \triangleq d(f, \mathbb{P}_n[x]),$$

则称 p^* 为函数 f 的**最佳一致逼近多项式**. 由推论 (9.1) 知,
最佳一致多项式 p^* 是存在的.



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

最佳一致逼近多项式具有的特征是什么？

p_n

\checkmark

$f(x)$



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

最佳一致逼近多项式具有的特征是什么？**切比雪夫交错定理**。

考虑**误差函数**

$$e^*(x) = f(x) - \underline{p^*(x)}, \quad x \in [a, b].$$

定义 $e^*(x)$ 的**极值点集**，即

$$\mathcal{L}_M = \{x \in [a, b] : |e^*(x)| = \|e^*\|_\infty\}.$$

无法用

p^* 是 f 的**最佳一致逼近多项式的充分条件**是：不存在多项式 $p \in \mathbb{P}_n[x]$ 使得

X

$$[f(x) - p^*(x)]p(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}_M. \quad (20)$$

相反地，可以证明条件 (20) 亦为 p^* 是 f 的最佳一致逼近多项式的必要条件。



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

考虑更为一般的**最佳一致多项式逼近问题**, 即

$$\arg \min_{p \in \mathbb{P}_n[x]} \left\{ \max_{x \in \mathcal{L}} |f(x) - p(x)| \right\} \quad (21)$$

其中 \mathcal{L} 是区间 $[a, b]$ 的任意闭子集.

$$\|f - p\|_\infty$$

第九章函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

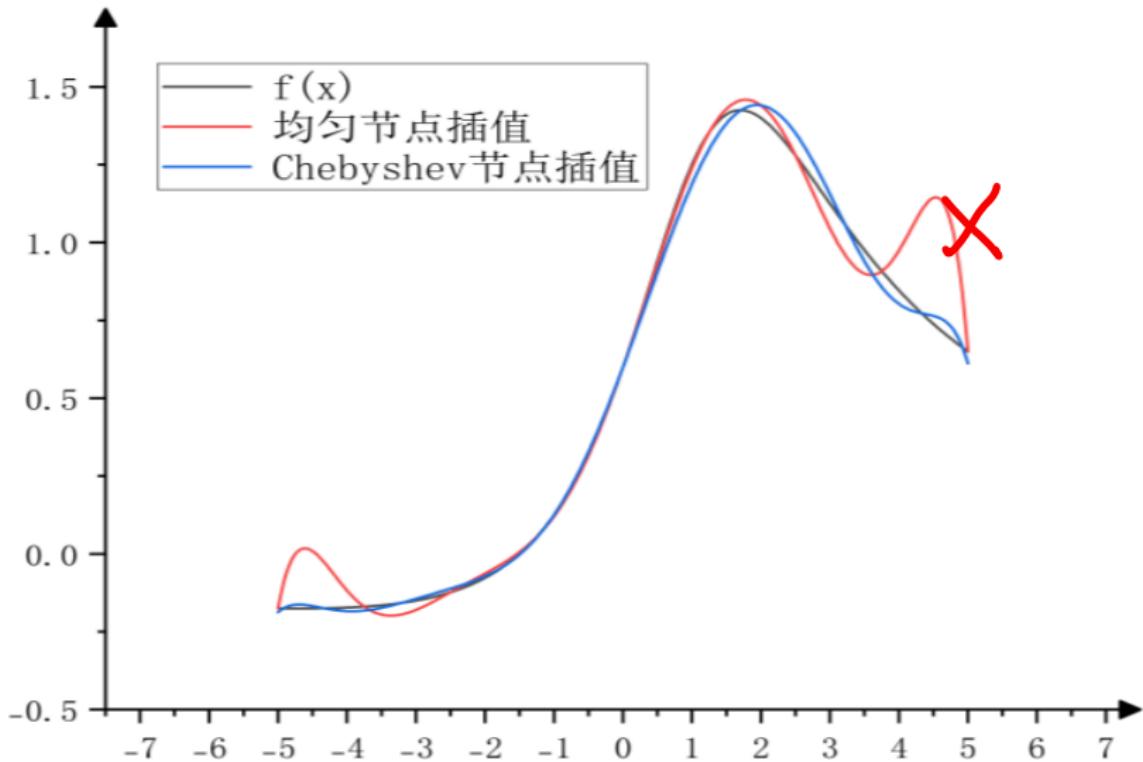
考虑更为一般的**最佳一致多项式逼近问题**, 即

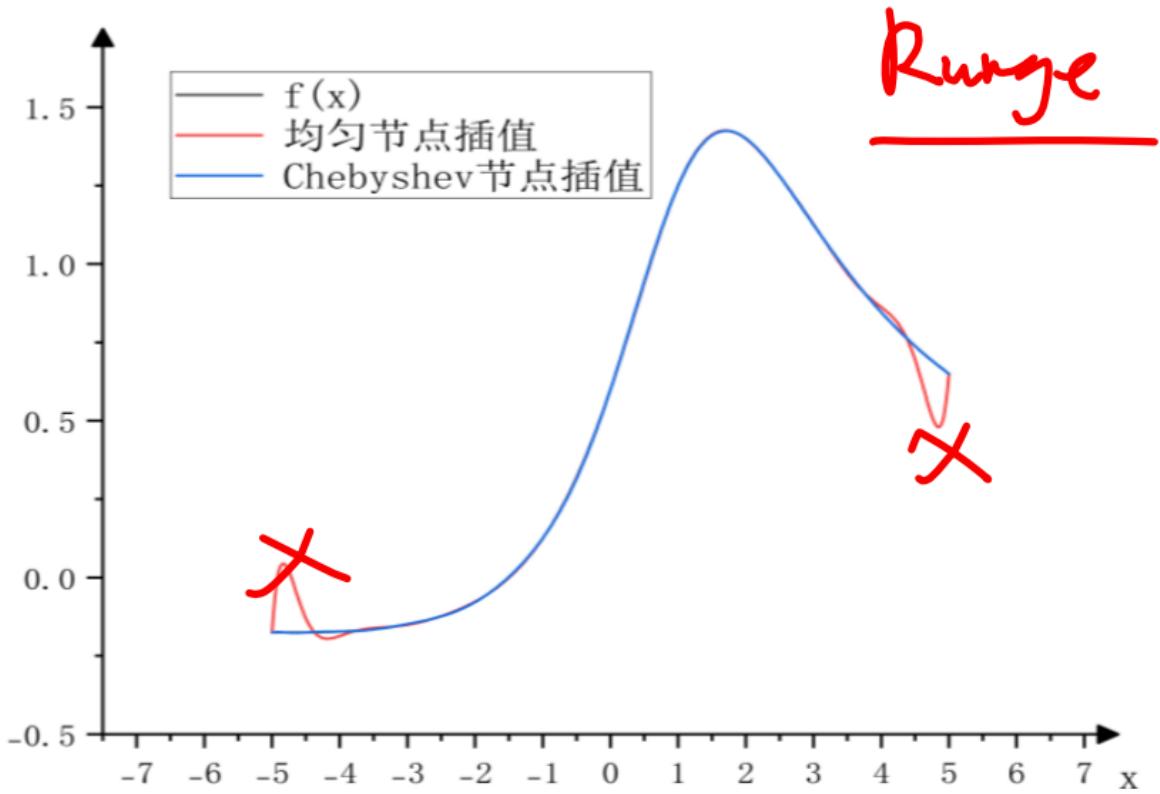
$$\arg \min_{p \in \mathbb{P}_n[x]} \left\{ \max_{x \in \mathcal{L}} |f(x) - p(x)| \right\} \quad (21)$$

其中 \mathcal{L} 是区间 $[a, b]$ 的任意闭子集.

定理 9.11

对任意的 $f \in C[a, b]$, $p^* \in \mathbb{P}_n[x]$, 记 $e^*(x) = f(x) - p^*(x)$,
 $\mathcal{L}_M = \{x \in \mathcal{L} : |e^*(x)| = \|e^*\|_\infty\}$, 则 p^* 是式 (21) 的解的充分
必要条件是不存在多项式 $p \in \mathbb{P}_n[x]$ 使得条件 (20) 成立.





Runge

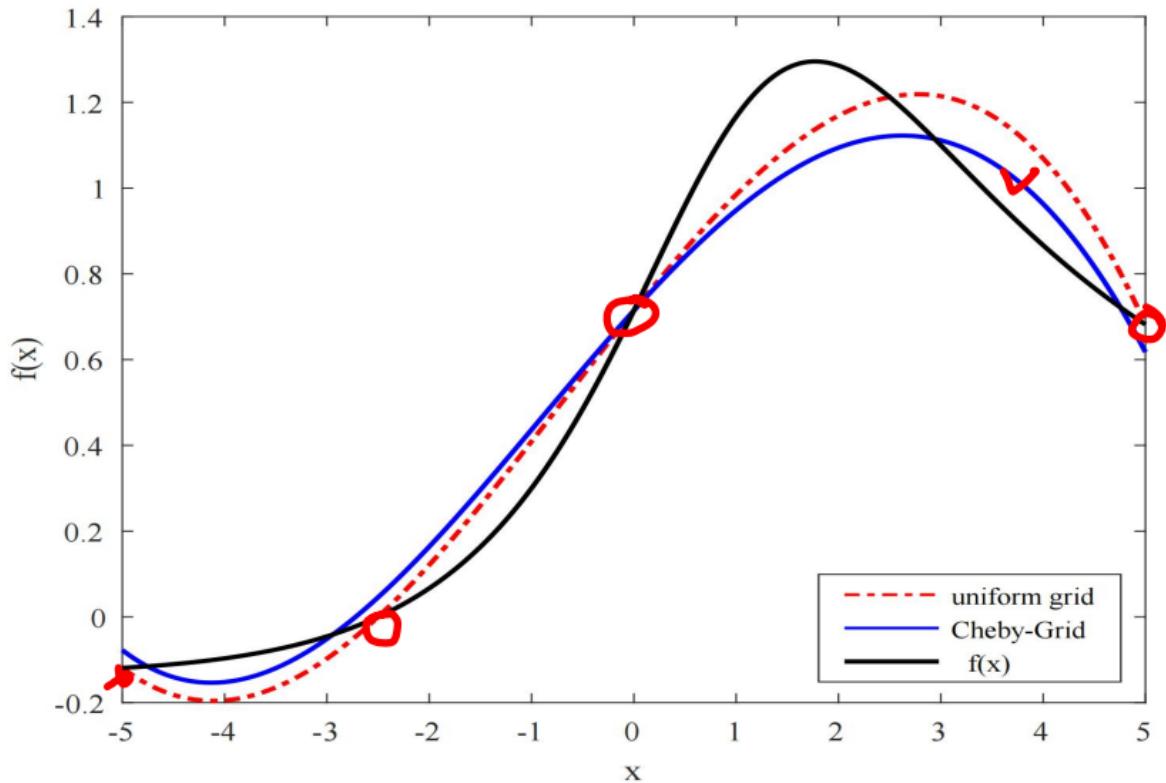


图 1: $N=4$



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

计算方法

§9.5 最佳一致逼近多项式

$$E(x) = f(x) - \underline{g}(x)$$





计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

一致逼近

最佳逼近元的误差应在整个逼近区间上均匀分布, 即误差函数的最大值与最小值大小相等, 符号相反, 且交错分布.

目标 最佳逼近 $x \in [a, b]$

$$\varepsilon(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$\rho \equiv \|\varepsilon(x)\|_{\infty}$$

$$\varepsilon(x_i) = \pm \rho$$

$$= \max_{x \in [a, b]} |\varepsilon(x)|$$

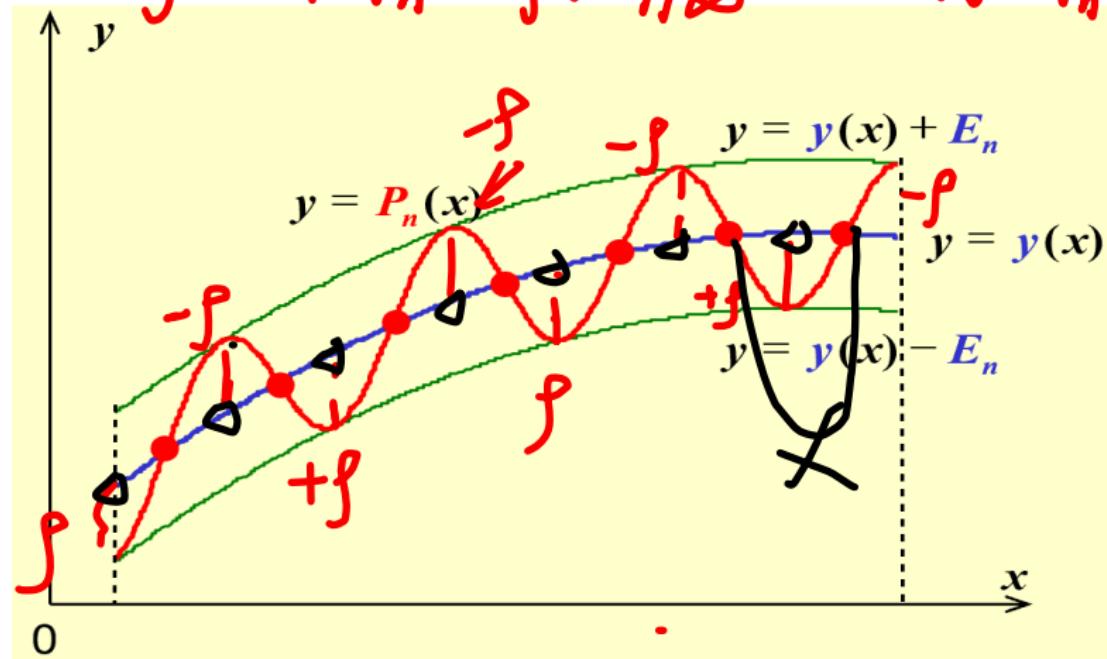
x_i : 交错点



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

最佳逼近元的误差应在整个逼近区间上均匀分布, 即误差函数的最大值与最小值大小相等, 符号相反, 且交错分布.

$$\rho = \|P_n - f(x)\|_{\infty} = \max |f - P_n|$$





§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

最佳逼近元的误差应在整个逼近区间上均匀分布, 即误差函数的最大值与最小值大小相等, 符号相反, 且交错分布.

定义 9.11

设 $g \in C[a, b]$, 称满足 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_k \leq b$ 的点集 $\{x_i\}_{i=0}^k$ 为 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**交错点组**, 如果它满足

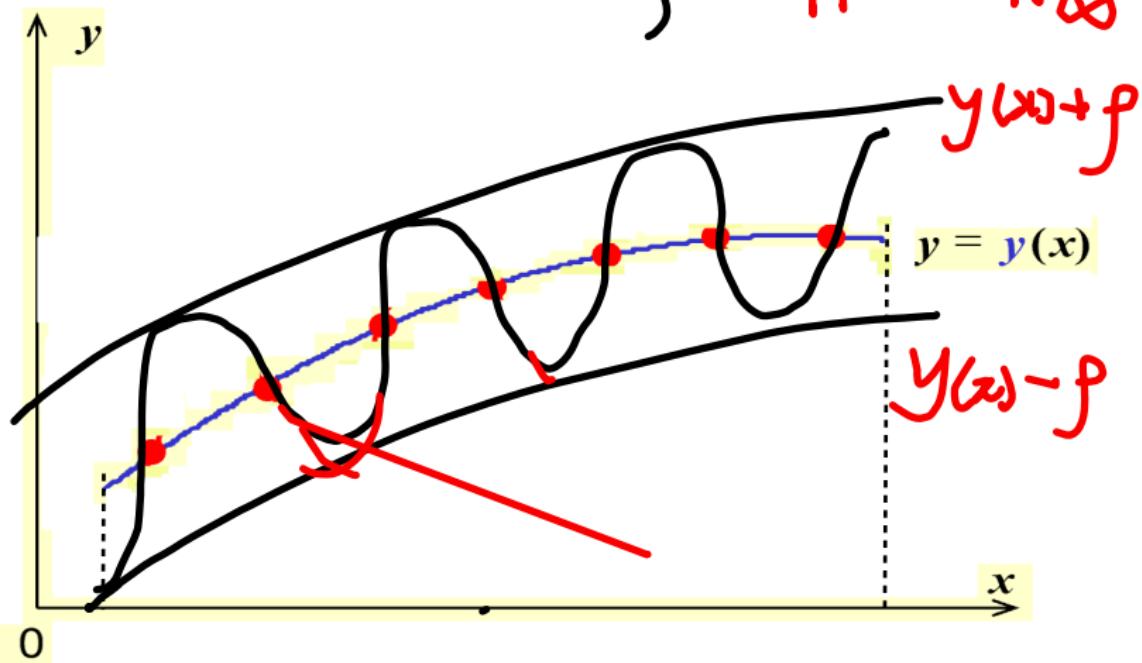
$$g(x_i) = (-1)^i \sigma \|g\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

其中 $\sigma = 1$ 或 $\sigma = -1$, 并称 x_i 为**交错点**.



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

$$f = \|\epsilon(x)\|_{\infty}$$



计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

chebyshew

定理 9.12



(切比雪夫交错定理) 设函数 $f \in C[a, b]$ 且 $f \notin \mathbb{P}_n[x]$, 则 p^* 是 f 的 n 次最佳一致逼近多项式的充分必要条件是 $f - p^*$ 在 $[a, b]$ 上存在有 $n + 2$ 个点组成的交错点组, 即有

$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ 使得

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^i \sigma \|f - p^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1.$$

其中 $\sigma = 1$ 或 $\sigma = -1$



计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

$$f = \|e^x - p_1^*(x)\|_{\infty}$$

例 9.14

试在线性函数空间中求 e^x 在区间 $[-1, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

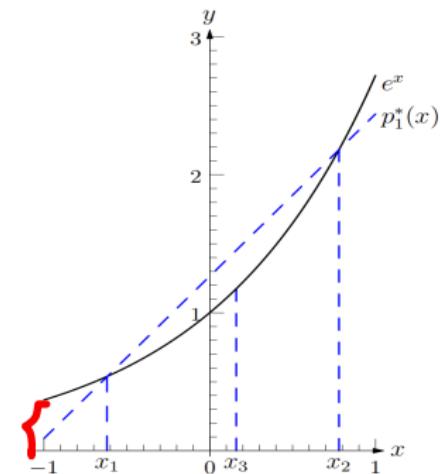
$$p_1^*(x) = c_0 + c_1 x$$

$n=1$, 线性... $+2$

$-1, x_1, 1$

$$\varepsilon(-1) = f, \varepsilon(1) = -f$$

$$\varepsilon(x_3) = -f$$





§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

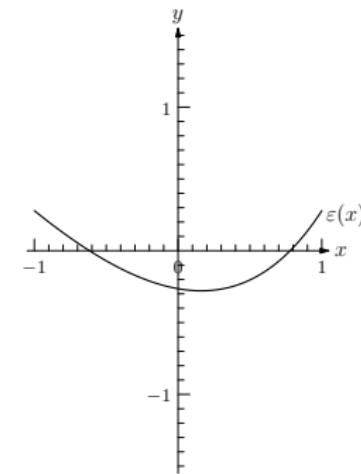
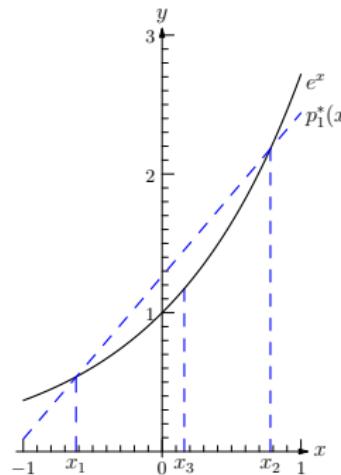
§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

例 9.14

试在线性函数空间中求 e^x 在区间 $[-1, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.



解 设 e^x 在 $[-1, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式为 $p_1^*(x) = c_0 + c_1x$. 利用切比雪夫交错定理及函数图像知: 误差函数 $\varepsilon(x) = e^x - p_1^*(x)$ 的极值在下面三个点上正负相间地取到, 即

$$\varepsilon(-1) = \rho, \quad \varepsilon(x_3) = -\rho, \quad \varepsilon(1) = \rho, \quad -1, x_3, 1$$

其中 $\rho = \max_{x \in [-1, 1]} |\varepsilon(x)|$, $x_1 < x_3 < x_2$, x_1 和 x_2 是 $p_1^*(x)$ 与 e^x 在 $[-1, 1]$ 上的交点.

因 x_3 是 $\varepsilon(x)$ 的极值点, 故满足

$$e^{x_3} - c_1 = \varepsilon'(x_3) = 0.$$

难

非线性

结合前面的条件,代入并求解得

$$\begin{cases} e^{-1} - (c_0 - c_1) = \rho, \\ e^{\underline{x}_3} - (c_0 + c_1 x_3) = -\rho, \\ e - (c_0 + c_1) = \rho, \\ e^{x_3} - c_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \approx 1.1752, \\ x_3 = \ln(a_1) \approx 0.1614, \\ \rho = \frac{e^{-1} + c_1 x_3}{2} \approx 0.2788, \\ c_0 = \rho + (1 - x_3)c_1 \approx 1.2643. \end{cases}$$

综上,所求的一次最佳逼近多项式 $p_1^*(x) \approx 1.2643 + 1.1752x$, 函数图像见图9.7(a), 误差分布见图9.7(b).



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

交错点组往往是不唯一的, 且计算交错点组是一个困难的问题.

但在一些特殊的情况下, 交错点组中的个别点很容易确定.

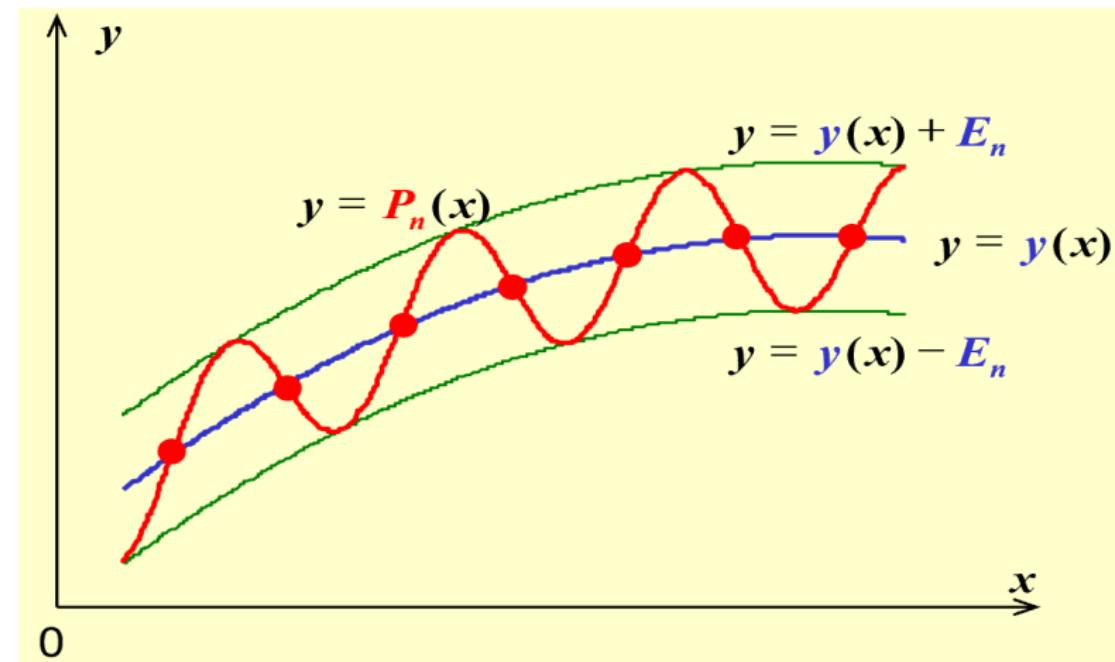
推论 9.4 (9.18)

设 p^* 是 f 的 n 次最佳一致逼近多项式, 如果 f 在区间 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 上不变号(恒正或恒负), 则 $f - p^*$ 的交错点组有且仅有 $n+2$ 个交错点, 且区间 $[a, b]$ 的端点属于 $f - p^*$ 的交错点组.



§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

最佳逼近元的误差应在整个逼近区间上均匀分布, 即误差函数的最大值与最小值大小相等, 符号相反, 且交错分布.





§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

例 9.15

$$f^{(3)}(x) > 0$$

$$\|f - P_1^*\|$$

设 $f(x) = \sqrt{x}$, 求 $f(x)$ 在区间 $[1/4, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

$n=1$. 结点. $n+2=3$, $\frac{1}{4} < x_1 < 1$

①看支点

②设误差 $\rho = \|f - P_1^*\|_\infty$

注 $P_1^*(x) = C_0 + C_1 x$

③列方程

④求系数

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

解 设 \sqrt{x} 在 $[1/4, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式为 $p_1^*(x) = c_0 + c_1x$, 并记 $\varepsilon(x) = f(x) - p_1^*(x)$. 因 $f''(x) = -x^{-3/2}/4$ 在 $(1/4, 1)$ 上不变号, 利用推论9.18 知, $x_0 = 1/4, x_2 = 1$ 均为 $\varepsilon(x)$ 的交错点. 而另一个交错点 $x_1 \in (1/4, 1)$ 应满足

$$\varepsilon'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - c_1 = 0.$$

利用交错点的定义, 有

$$f\left(\frac{1}{4}\right) - \left(c_0 + \frac{c_1}{4}\right) = f(1) - (c_0 + c_1) \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}.$$

解 设 \sqrt{x} 在 $[1/4, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式为 $p_1^*(x) = \underline{c_0} + \underline{c_1}x$, 并记 $\varepsilon(x) = f(x) - p_1^*(x)$. 因 $f''(x) = -x^{-3/2}/4$ 在 $(1/4, 1)$ 上不变号, 利用推论9.18 知, $x_0 = 1/4, x_2 = 1$ 均为 $\varepsilon(x)$ 的交错点. 而另一个交错点 $x_1 \in (1/4, 1)$ 应满足

$$\varepsilon'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - c_1 = 0.$$

$\textcolor{red}{P = ?}$

利用交错点的定义, 有

$$f\left(\frac{1}{4}\right) - \left(c_0 + \frac{c_1}{4}\right) = f(1) - (c_0 + c_1) \implies c_1 = \frac{2}{3}.$$

代入 x_1 需满足的条件, 得 $x_1 = 9/16$. 最后, 利用交错点的定义

$$f(1) - (c_0 + c_1) = -[f(x_1) - (c_0 + c_1 x_1)],$$

可求得 $c_0 = 17/48$. 综上, 所求的一次最佳一致逼近多项式

$$p_1^*(x) = \frac{17}{48} + \frac{2}{3}x.$$



§9.5.3 唯一性与 $d(f, \mathbb{P}_n[x])$ 的下界

定理 9.13

(唯一性定理) 设函数 $f \in C[a, b]$, 则 f 用空间 $\mathbb{P}_n[x]$ 的元素所
做的最佳一致逼近是唯一的.

—

$$P = \|f(x) - P_n^*(x)\|_\infty$$

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理



§9.5.3 唯一性与 $d(f, \mathbb{P}_n[x])$ 的下界

定理 9.13

(**唯一性定理**) 设函数 $f \in C[a, b]$, 则 f 用空间 $\mathbb{P}_n[x]$ 的元素所做的**最佳一致逼近是唯一的**.

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

定理 9.14

(de la Vallée-Poussin 定理) 设函数 $f \in C[a, b]$, 若存在多项式 $p \in \mathbb{P}_n[x]$, 使得 $f - p$ 在 $[a, b]$ 上至少 $n + 2$ 个点 x_0, x_1, \dots, x_{n+1} 处的取值正负相间, 则

$$d(f, \mathbb{P}_n[x]) \geq \delta = \min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - p(x_i)|.$$



§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$n \geq 2$

在一般情况下，**求解最佳一致逼近多项式是很困难的**，通常只能是近似计算。一种常用的方法是 **Remez 算法**。

设函数 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式为 $p^*(x)$ ，那么 $f - p^*$ 在 $[a, b]$ 上存在 $n + 2$ 个交错点 $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ ，使得

$$p^*(x_i) - f(x_i) = (-1)^i \mu, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1, \quad (22)$$

其中 $p^*(x) = \sum_{i=0}^n c_i^* x^i$, $\mu = \sigma d(f, \mathbb{P}_n[x])$.

如果交错点 $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ 一旦确定，那么通过线性方程组 (22) 可求出 p^* 的系数 $c_0^*, c_1^*, \dots, c_n^*$ 和最佳逼近值 $d(f, \mathbb{P}_n[x])$.



§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

寻找交错点 $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ 并非一件容易的事, Remez 采用逐次逼近策略提出一种近似算法.

具体步骤如下:

(1) 设定精度 $\varepsilon > 0$, 在 $[a, b]$ 上任选 $n + 2$ 个初始点

$a \leq x_0^0 < x_1^0 < \cdots < x_n^0 \leq b$ 作为初始交错点, 代入式

(22), 求得 $p^0(x) = \sum_{i=0}^n c_i^0 x^i$ 及 μ^0 .

(2) 设第 l 步的交错点为 $\{x_i^l\}_{i=0}^{n+1}$, 逼近多项式

$p^l(x) = \sum_{i=0}^n c_i^l x^i$, 逼近误差为 μ^l , 记

$$\eta^l \triangleq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p^l(x)| = |f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})|,$$



计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

难

如果 $\eta^l - |\mu^l| < \varepsilon$, 则算法结束, $p^l(x)$ 作为最佳一致逼近多项式 p^* 的近似; 否则, 利用 \hat{x} 替换交错点 $\{x_i^l\}_{i=0}^{n+1}$ 中的某一点, 得到新的交错点 $\{x_i^{l+1}\}_{i=0}^{n+1}$, 规则如下:

- ① 当 $\hat{x} \in (x_i^l, x_{i+1}^l)$ 时, 若 $f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})$ 与 $f(x_i^l) - p^l(x_i^l)$ 同号, 则用 \hat{x} 替换 x_i^l ; 否则用 \hat{x} 替换 x_{i+1}^l .
- ② 当 $\hat{x} < x_0^l$ 时, 若 $f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})$ 与 $f(x_0^l) - p^l(x_0^l)$ 同号, 则用 \hat{x} 替换 x_0^l ; 否则新的交错点为 $\{\hat{x}, x_0^l, \dots, x_n^l\}$.
- ③ 当 $\hat{x} > x_{n+1}^l$ 时, 若 $f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})$ 与 $f(x_{n+1}^l) - p^l(x_{n+1}^l)$ 同号, 则用 \hat{x} 替换 x_{n+1}^l ; 否则新的交错点为 $\{x_1^l, \dots, x_{n+1}^l, \hat{x}\}$.

- (3) 将新的交错点 $\{x_i^{l+1}\}_{i=0}^{n+1}$ 代入式 (22), 求得

$$p^{l+1}(x) = \sum_{i=0}^n c_i^{l+1} x^i \text{ 及 } \mu^{l+1}. \text{ 令 } l \leftarrow l + 1, \text{ 返回步骤 (2).}$$



§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

优点: Remez 算法是收敛的, 且对于许多函数, 收敛速度甚至是二次的; 对于初值的选取也不太敏感.

优点
FFT

缺点: Remez 算法的计算量是比较大的.

近似求解方法中有一类重要的方法: 用切比雪夫多项式.



§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

优点: Remez 算法是收敛的, 且对于许多函数, 收敛速度甚至是二次的; 对于初值的选取也不太敏感.

缺点: Remez 算法的计算量是比较大的.

近似求解方法中有一类重要的方法是: 用切比雪夫多项式.

$$\|f - P_h^*\|_\infty$$

近似最佳一致逼近. 看雪夫值/和



§9.6.1 切比雪夫多项式的性质

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

切比雪夫多项式 $T_k(x)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的多项式空间 $\mathbb{P}_n(x)$ 关于权函数 $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ 的一组正交基, 即

$$\underline{T_k(x) = \cos(k \arccos x)}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi/2, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$T_k(x)$ 在 $[-1, 1]$ 恰有 k 个不同的实根

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2k}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$



§9.6.1 切比雪夫多项式的性质

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$T_0 = 1$	$1 = T_0$
$T_1 = x$	$x = T_1$
$T_2 = 2x^2 - 1$	$x^2 = (T_0 + T_2)/2$
$T_3 = 4x^3 - 3x$	$x^3 = (3T_1 + T_3)/4$
$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$x^4 = (3T_0 + 4T_2 + T_4)/8$
$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$x^5 = (10T_1 + 5T_3 + T_5)/16$
$T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$x^6 = (10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)/32$
$T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$x^7 = (35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7)/64$
$T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$x^8 = (35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)/128$
$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$x^9 = (126T_1 + 64T_3 + 36T_5 + 9T_7 + T_9)/256$
\vdots	\vdots

Table: $\{T_i(x)\}_{i=0}^n$ 与 $\{x^i\}_{i=0}^n$ 之间的相互线性表示



§9.6.2 最小零偏差问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

考虑区间 $[-1, 1]$ 上空间 $\mathbb{P}_{n-1}[x]$ 对 $f(x) = x^n$ 的最佳一致逼近问题, 即求 $p_{n-1}^* \in \mathbb{P}_{n-1}[x]$, 使得

$$\|f - p_{n-1}^*\| = \min_{p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}[x]} \|x^n - p_{n-1}\|_\infty$$

其中 $\|f\| = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.



§9.6.2 最小零偏差问题

考虑区间 $[-1, 1]$ 上空间 $\mathbb{P}_{n-1}[x]$ 对 $f(x) = x^n$ 的最佳一致逼近问题, 即求 $p_{n-1}^* \in \mathbb{P}_{n-1}[x]$, 使得

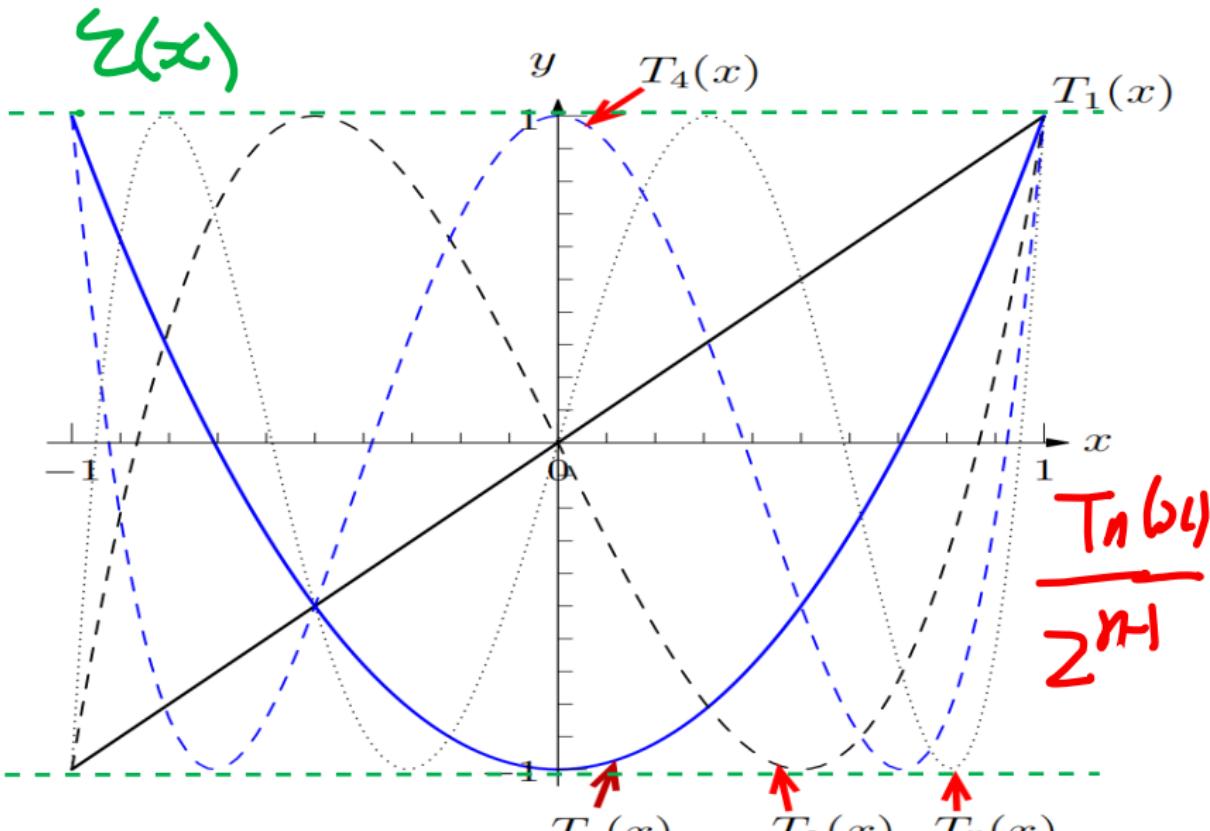
$$\|f - p_{n-1}^*\| = \min_{p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}[x]} \|x^n - p_{n-1}\|,$$

其中 $\|f\| = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

若记 $\mathbb{P}_n^1[x]$ 为所有首项系数为 1 的 n 次多项式的全体, 则前述问题等价于求 $p_n^* \in \mathbb{P}_n^1[x]$, 使得

$$p_n^* = x^n - f_{n-1}^*(x) \quad \|p_n^* - 0\| = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1[x]} \|p_n - 0\|.$$

因此, 该问题亦称为**最小零偏差问题**.



$[-1, 1]$

Figure: 切比雪夫多项式



§9.6.2 最小零偏差问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 在 $n+1$ 个点

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

处符号交错并取到最大值 1 或最小值 -1, 且 $T_n(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的多项式, 故可大胆猜测 $p_n^*(x) = 2^{1-n} T_n(x)$.



计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

§9.6.2 最小零偏差问题

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]$$

切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 在 $n+1$ 个点

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

处符号交错并取到最大值 1 或最小值 -1, 且 $T_n(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的多项式, 故可大胆猜测 $p_n^*(x) = 2^{1-n} T_n(x)$.

定理 9.15

对于任意的 $p_n \in \mathbb{P}_n^1[x]$, 有

$$\|p_n(x) - 0\|_{\infty}$$

$$\|p_n\| = \max_{x \in [-1, 1]} |p_n(x)| \geq \|2^{1-n} T_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

当且仅当 $p_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$ 时, 等号成立.



§9.6.3 插值余项极小化问题

计算方法

69.6 切比雪夫多项式

设函数 $f(x) \in C^{n+1}[-1, 1]$, 若取 $n+1$ 个互不相同的节点 $-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < -1$, 构造 $f(x)$ 的 n 次插值多项式 $q_n(x)$, 则有

$$\|f - q_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$



§9.6.3 插值余项极小化问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

设函数 $f(x) \in C^{n+1}[-1, 1]$, 若取 $n + 1$ 个互不相同的节点 $-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < -1$, 构造 $f(x)$ 的 n 次插值多项式 $q_n(x)$, 则有

$$\|f - q_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

问题: 如何选取节点 $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ 使得插值余项尽可能的小, 等价于寻找多项式

$$\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

$$w(x) p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \in \mathbb{P}_{n+1}^1[x],$$

使其在区间 $[-1, 1]$ 的零偏差最小.



§9.6.3 插值余项极小化问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

T_{n+1}

当节点取 $n + 1$ 次切比雪夫多项式的零点时, 即

$$x_{i-1} = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

$\|p_{n+1}(x)\|$ 取到最小值, 为

$$\|T_{n+1}(x)\|_{\infty} \leq 1$$

$$\|f - q_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot 2^{-n} \|T_{n+1}\| = \frac{\|f^{(n+1)}\|}{2^n (n+1)!}. \quad \text{LEMMA} \rightarrow D$$

当 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上变化不大时, 取切比雪夫多项式的零点作为插值节点, 此时 $q_n(x)$ 可视为 $f(x)$ 的近似最佳一致逼近多项式.



§9.6.3 插值余项极小化问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

16

如果插值区间为 $[a, b]$ 时, 利用仿射变换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t \quad t \in [-1, 1]$$

插值节点可取为

$$x_{i-1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

$$[a, b] \leftarrow [-1, 1]$$

切比雪夫插值余项

$$R_n(x(t)) = f(x(t)) - q_n(x(t)) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!2^{2n+1}} T_{n+1}(t)$$

$$\|T_{n+1}(t)\|_\infty = 1 \quad \|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M$$

$$\frac{\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Lab04 Lagrange插值

口2

对函数 $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-2x+7}$, $x \in [-5,5]$, 构造N次Lagrange插值函数, 取

$$\max_{-5 \leq x \leq 5} \|f(x) - p(x)\| \approx \max_i |f(y_i) - p(y_i)|, y_i = \frac{i}{50} - 5, i = 0, \dots, 500$$

为近似误差。其中, N+1个插值节点分别取值为:

$$(1) \quad x_i = -5 + \frac{10}{N}i, i = 0, 1, \dots, N$$

$$(2) \quad x_i = -5 \cos\left(\frac{2i+1}{2N+2}\pi\right), i = 0, 1, \dots, N$$

Chebyshev点

令N=4,8,16,32, 比较以上两组节点的插值结果。

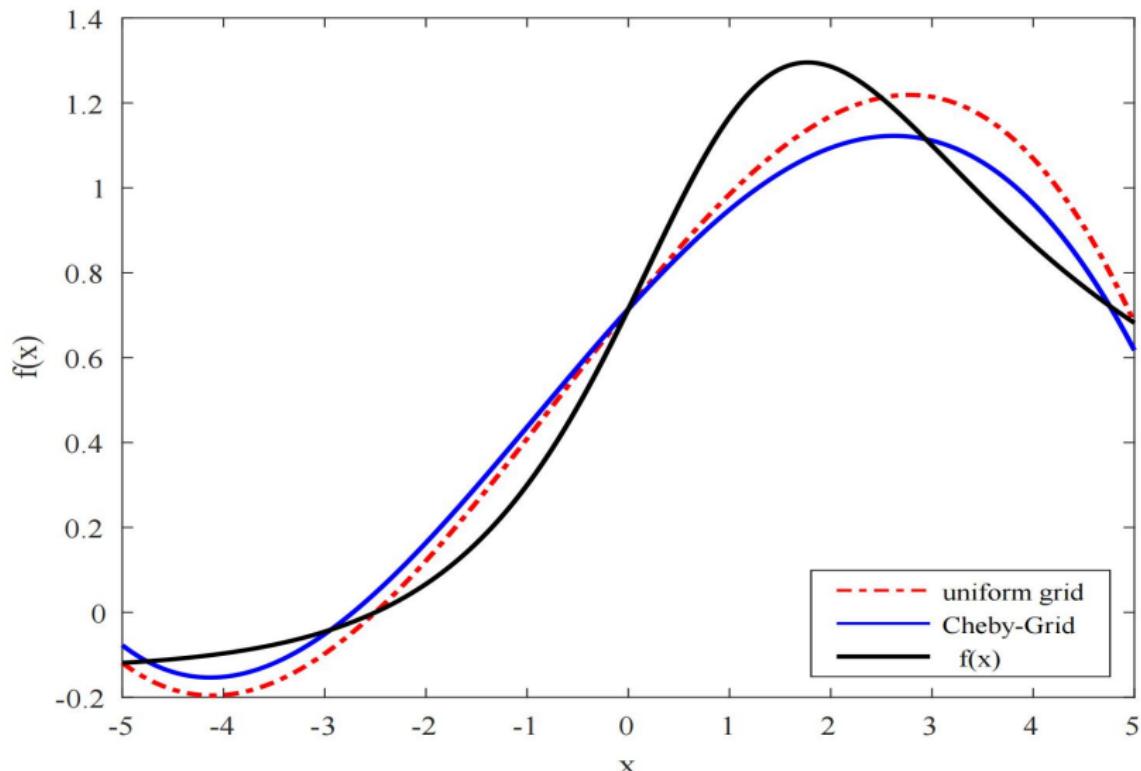
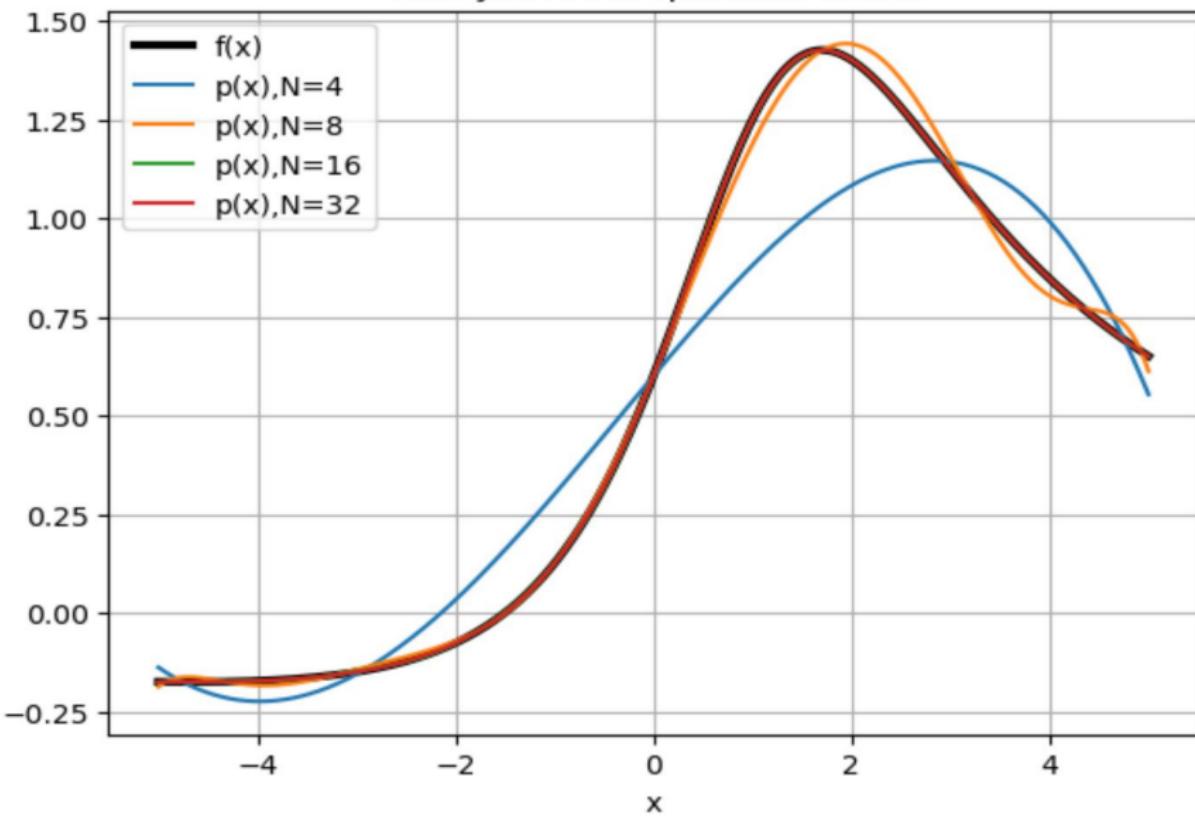


图 1: $N=4$

Chebyshev interpolation nodes





§9.6.4 切比雪夫逼近问题

函数和

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

如何用切比雪夫多项式级数部分和来逼近函数.

对于任意的 $f \in C[-1, 1]$, 取权函数 $\rho(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, 可按空间 $L_\rho^2[-1, 1]$ 的内积构造 n 次最佳平方逼近多项式

$$S_n(x) = c_0 \frac{T_0(x)}{2} + \sum_{i=1}^n c_i T_i(x),$$

$\approx f(x)$

其中

$$c_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$c_i = \frac{(f, T_i)}{(T_i, T_i)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_i(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

称 $S_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 按切比雪夫多项式展开的部分和. 可以证明:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{[f(x) - S_n(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0.$



计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

§9.6.4 切比雪夫逼近问题

$$C^1[-1, 1] \subset L_2^2[-1, 1]$$

如果 $f \in C^1[-1, 1]$, 那么

$$S_n \xrightarrow{\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}} f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - S_n(x)| = 0,$$

即 $S_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

如果 $f \in C^r[-1, 1]$, 那么存在由 f 和 r 决定的常数 c , 使得

$$|c_i| \leq \frac{c}{i^r}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$\frac{1}{N^2}$

$$\frac{c_i}{i^r} \rightarrow 0$$



计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

§9.6.4 切比雪夫逼近问题

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x)$$

对于足够光滑的函数 f , 随着 i 的增大, 它的切比雪夫多项式

级数展开系数 c_i 迅速趋于零.

$$|c_{n+2}| \ll |c_{n+1}| \ll |c_n|$$

对于截断的展开式 $S_n(x)$, 如果 $c_{n+1} \neq 0$ 且系数 c_i 迅速趋于零, 那么

$$|c_m| \ll |c_n|$$

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i T_i(x) \approx c_{n+1} T_{n+1}(x), \quad m > n$$

而 $T_{n+1}(x)$ 恰好有 $n+2$ 个相等的极大值和极小值, 故 $S_n(x)$ 可视为近似最佳一致逼近多项式.

$$\underline{S_n(x) \approx f(x)}$$



§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

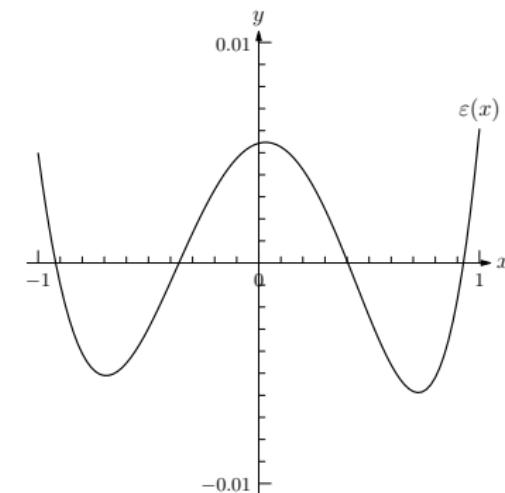
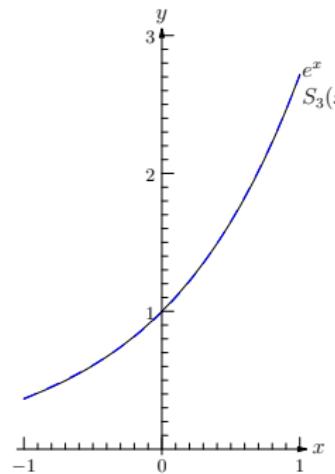
§9.6.4 切比雪夫逼近问题

$$L_p^2[-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 9.16 利用切比雪夫多项式，

设 $f(x) = e^x$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的三次最佳平方逼近.



解 按切比雪夫多项式展开公式, 知

和

$$S_3(x) = c_0 \frac{T_0(x)}{2} + \sum_{i=1}^3 c_i T_i(x),$$

其中

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos(j\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

解 按切比雪夫多项式展开公式, 知

$$S_3(x) = c_0 \frac{T_0(x)}{2} + \sum_{i=1}^3 c_i T_i(x),$$

其中

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos(j\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

利用数值积分可求得

$$c_0 \approx 2.5321318, \quad c_1 \approx 1.1303182, \quad c_2 \approx 0.2714953, \quad c_3 \approx 0.0443369.$$

解 按切比雪夫多项式展开公式, 知

$$S_3(x) = c_0 \frac{T_0(x)}{2} + \sum_{i=1}^3 c_i T_i(x),$$

其中

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{\cos \theta} \cos(j\theta) d\theta, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

利用数值积分可求得

$$c_0 \approx 2.5321318, \quad c_1 \approx 1.1303182, \quad c_2 \approx 0.2714953, \quad c_3 \approx 0.0443369.$$

综上, 所求的三次最佳平方逼近切比雪夫多项式

$$S_3(x) \approx 1.2660659 + 1.1303182T_1(x) + 0.2714953T_2(x) + 0.0443369T_3(x),$$

其形状如图9.9(a)所示, 逼近误差见图9.9(b).



§9.6.4 切比雪夫逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

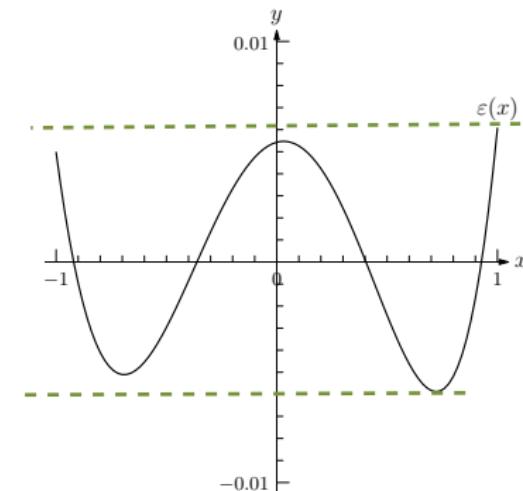
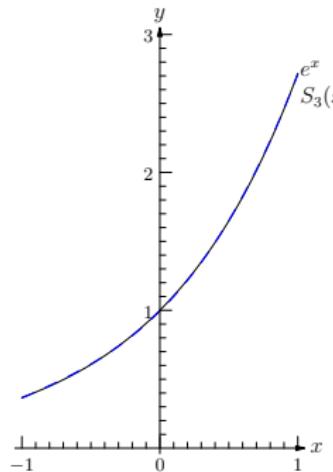
§9.7 函数逼近的若干重要定理

例 9.16 利用切比雪夫多项式，

$$f(x) = ?$$

设 $f(x) = e^x$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的三次最佳平方逼近.

$$\varepsilon(x) = f(x) - S_3(x) \quad \checkmark$$



从逼近误差的分布情况来看, 切比雪夫多项式级数 $S_n(x)$ 与最佳一致逼近具有非常相似的特征, 即误差函数是均匀分布的. 鉴于最佳一致逼近多项式往往难于求得, 而最佳平方逼近多项式相对易于计算, 故用切比雪夫多项式 $S_n(x)$ 来近似求解最佳一致逼近问题是一个常用的方法.

雪夫和
 $\varepsilon(x) \leq C_{n+1} T_{n+1}(x)$

n次近似
最佳一致逼近



§9.6.4 切比雪夫逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

对于足够光滑的函数 f , 随着 i 的增大, 它的切比雪夫多项式级数展开系数 c_i 迅速趋于零.

对于截断的展开式 $S_n(x)$, 如果 $c_{n+1} \neq 0$ 且系数 c_i 迅速趋于零, 那么

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i T_i(x) \approx c_{n+1} T_{n+1}(x),$$

而 $T_{n+1}(x)$ 恰好有 $n+2$ 个相等的极大值和极小值, 故 $S_n(x)$ 可视为近似最佳一致逼近多项式.



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

多项式作为一类常用的函数被广泛的使用, 具有简单、高效等优点.

当多项式的次数较高时, 譬如 $n \geq 20$, 容易出现不稳定, 强震荡等现象, 计算效率降低.

想法: 用低次的多项式去逼近高次的多项式.



§9.6.1 切比雪夫多项式的性质

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$T_0 = 1$	$1 = T_0$
$T_1 = x$	$x = T_1$
$T_2 = 2x^2 - 1$	$x^2 = (T_0 + T_2)/2$
$T_3 = 4x^3 - 3x$	$x^3 = (3T_1 + T_3)/4$
$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$x^4 = (3T_0 + 4T_2 + T_4)/8$
$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$x^5 = (10T_1 + 5T_3 + T_5)/16$
$T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$x^6 = (10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)/32$
$T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$x^7 = (35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7)/64$
$T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$x^8 = (35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)/128$
$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$x^9 = (126T_1 + 64T_3 + 36T_5 + 9T_7 + T_9)/256$
\vdots	\vdots

Table: $\{T_i(x)\}_{i=0}^n$ 与 $\{x^i\}_{i=0}^n$ 之间的相互线性表示



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

$\leftarrow \leftarrow T_0, \cdots / T_n(x)$

多项式 $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 的低次逼近可按以下步骤计算：

- (1) 利用表1, 将多项式 $p_n(x)$ 写成切比雪夫多项式级数的形式, 即

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x);$$

- (2) 取**切比雪夫多项式级数**的前 m 项, 记为

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i T_i(x);$$

- (3) 再利用表1, 将多项式 $S_m(x)$ 写成幂级数的形式, 即

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^m \hat{a}_i x^i.$$



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$[-1, 1]$ 上

例 9.17

设 $f(x) = e^{-x}$, 其 Taylor 展开式的前 10 项为

$$e^{-x} \approx p_9(x) \triangleq 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^9}{9!},$$



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$[-1, 1]$ 上

例 9.17

$$\|T_k\|_{\infty} = 1$$

设 $f(x) = e^{-x}$, 其 Taylor 展开式的前 10 项为

$$e^{-x} \approx p_9(x) \triangleq 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^9}{9!},$$

利用表1, 多项式 $p_9(x)$ 可以写成 Chebyshev 多项式级数的形式, 即

$$\begin{aligned} p_9(x) \approx & 1.2661 \times T_0(x) - 1.1303 \times T_1(x) + 0.2715 \times T_2(x) - 0.0443 \times T_3(x) \\ & + 0.005474 \times T_4(x) - 0.000543 \times T_5(x) + \underline{\underline{0.000045}} \times T_6(x) \quad \checkmark \\ & - 0.000003198 \times T_7(x) + 0.0000001992 \times T_8(x) - \underline{\underline{0.00000001104}} \times T_9(x). \end{aligned}$$

容易看出, 随着 k 增大, $T_k(x)$ 的系数迅速变小, 又因 $|T_k(x)| \leq 1$, 故可略去次数较高的 $T_k(x)$ 项. 此时, 逼近多项式的次数显著降低了, 从而大大节省了计算工作量.



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

若要求 $[-1, 1]$ 上逼近 e^{-x} 的绝对误差不超过 0.00005 的多项式, 可只取 $T_5(x)$ 以前的项作近似, 即

$$\begin{aligned} S_5(x) &\approx 1.2661 \times T_0(x) - 1.1303 \times T_1(x) + 0.2715 \times T_2(x) - 0.0443 \times T_3(x) \\ &\quad + 0.005474 \times T_4(x) - 0.000543 \times T_5(x) \\ &= 1.000045 - 1.000022x + 0.499199x^2 - 0.166488x^3 + 0.043794x^4 - 0.008687x^5. \end{aligned}$$



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

若要求 $[-1, 1]$ 上逼近 e^{-x} 的绝对误差不超过 0.00005 的多项式, 可只取 $T_5(x)$ 以前的项作近似, 即

$$\begin{aligned} S_5(x) &\approx 1.2661 \times T_0(x) - 1.1303 \times T_1(x) + 0.2715 \times T_2(x) - 0.0443 \times T_3(x) \\ &\quad + 0.005474 \times T_4(x) - 0.000543 \times T_5(x) \\ &= 1.000045 - 1.000022x + 0.499199x^2 - 0.166488x^3 + 0.043794x^4 - 0.008687x^5. \end{aligned}$$

而若直接按 Taylor 展开式截断到含有 x^5 的项, 则有

$$p_5(x) \triangleq 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!},$$

此时, $|e^{-x} - p_5(x)| \leqslant 1/6! + 1/7! + \dots \approx 0.0016$, 约为前者绝对误差的 33 倍.



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

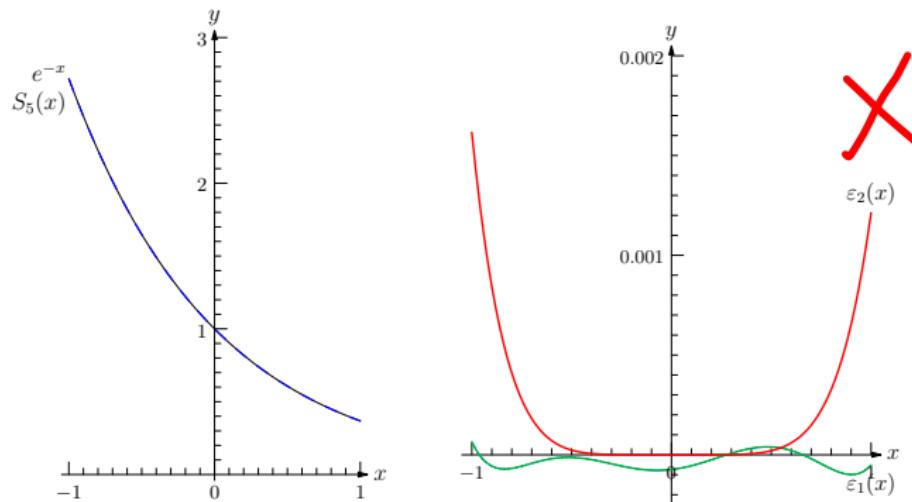
§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

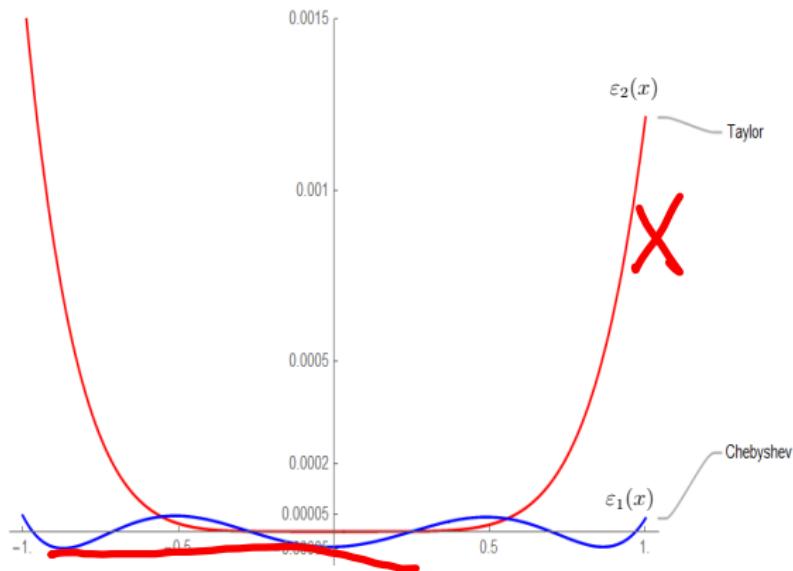
§9.7 函数逼近的若干重要定理

两种多项式逼近的误差分布:

$$\varepsilon_1(x) = e^{-x} - S_5(x), \quad \varepsilon_2(x) = e^{-x} - p_5(x).$$



$$\varepsilon_1(x) = e^{-x} - S_5(x), \quad \varepsilon_2(x) = e^{-x} - p_5(x).$$



$S_5(x)$ 亂 $f(x)$ 亂 以 $-\pi/2$
 $\times P_5(x)$



§9.7.1 连续函数的多项式逼近

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

定理 9.16

(维尔斯特拉斯第一定理) 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\|f - p\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

成立.

该定理告诉我们可以用多项式按预先指定的精度来一致逼近连续函数, 即多项式函数空间是连续函数空间的稠密子集.



§9.7.1 连续函数的多项式逼近

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

构造性的证明是伯恩斯坦 (Bernstein) 给出的, 他引进了如下的伯恩斯坦多项式:

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad x \in [0, 1].$$

明显地, $B_n(f; x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的 n 次多项式.



§9.7.1 连续函数的多项式逼近

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

构造性的证明是伯恩斯坦 (Bernstein) 给出的, 他引进了如下的伯恩斯坦多项式:

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad x \in [0, 1].$$

明显地, $B_n(f; x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的 n 次多项式.

可以证明: 对于任意的函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 当 $n \rightarrow \infty$, 伯恩斯坦多项式 $B_n(f; x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

一般的区间 $[a, b]$, 可通过仿射变换 $y = (x - a)/(b - a)$ 转化为区间 $[0, 1]$ 来证明.



§9.7.1 连续函数的多项式逼近

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

对于周期函数，有类似的结论。

定理 9.17

(维尔斯特拉斯第二定理) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数，则对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在三角多项式 $t(x)$ ，使得

$$\|f - t\| = \max_{x \in (-\infty, +\infty)} |f(x) - t(x)| < \varepsilon$$

成立。

可以证明：维尔斯特拉斯第一定理与第二定理是相互等价的。



§9.7.2 逼近的阶

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

为了描述收敛速度的快慢, 需要引入连续模和光滑模的概念.

定义 9.12

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 其中 I 是有限或无限, 开或不开均可以. 对于 $h > 0$, 称

$$\omega(f; h) \triangleq \sup_{x, x+t \in I, |t| < h} |f(x+t) - f(x)|$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的连续模.

连续性模的几何意义是: 当 x_1, x_2 的距离小于 h 时, $f(x)$ 在 x_1, x_2 的值相差不会超过 $\omega(f; h)$.

$\omega(f; h)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的非负单调增函数.

函数 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充分必要条件是 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \omega(f; h) = 0$.



§9.7.2 逼近的阶

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

若记 $\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$ 是函数 f 在点 x 的步长为 h 的一阶向前差分, 那么

$$\Delta_h^r f(x) \triangleq \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(x)) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x + ih)$$

称为 f 在点 x 步长为 h 的 r 阶向前差分.

定义 9.13

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 称

$$\omega_r(f; h) \triangleq \sup_{x, x+rt \in [a, b], |t| < h} |\Delta_h^r f(x)|$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的 r 阶光滑模. 当 $r = 1$ 时, r 阶光滑模就是连续模.



§9.7.2 逼近的阶

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

$\omega_r(f; h)$ 是 h 的增函数, 连续函数, 且 $\omega_r(f; 0) = 0$. 不难证明:

$$\omega_r(f; h) \leqslant 2^{r-1} \omega(f; h) \leqslant 2^r \|f\|_\infty.$$

当 $f(x) \in C^r[a, b]$ 时, 有

$$\omega_r(f; h) \leqslant h^r \|f^{(r)}\|_\infty,$$

以及 $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_r(f; h)/h^r = 0$ 的充分必要条件是 $f(x) \in \mathbb{P}_r[x]$.



§9.7.2 逼近的阶

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

对于 $f(x) \in C[a, b]$, 函数 f 的 n 次最佳一致多项式逼近误差记为

$$E_n(f) = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n[x]} \|f - p_n\|_\infty.$$

对于 $f(x) \in C_{2\pi}$, 函数 f 的 n 次最佳一致三角多项式逼近误差记为

$$E_n^*(f) = \min_{t_n \in \mathbb{T}_n[x]} \|f - t_n\|_\infty,$$

其中

$$\mathbb{T}_n[x] \triangleq \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

由维尔斯特拉斯第一和第二定理知, 数列 $\{E_n(f)\}_{n=0}^\infty$ 和 $\{E_n^*(f)\}_{n=0}^\infty$ 均收敛于 0.



§9.7.2 逼近的阶

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

定理 9.18

(Jackson 定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则存在常数 C 使得

$$E_n^*(f) \leq C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

以及

$$E_n^*(f) \leq C\omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

成立.



§9.7.2 逼近的阶

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

若函数 f 有更高阶的连续导数, 则 $E_n^*(f)$ 有更快的收敛速度.

定理 9.19

设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 且具有 r 阶的连续导数, 则存在常数 C_r 使得

$$E_n^*(f) \leq \frac{C_r}{n^r} \omega(f^{(r)}, \frac{1}{n}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

成立.



§9.7.3 被逼近函数的性质

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

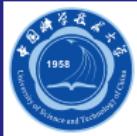
若已知 $E_n^*(f)$ 的收敛速度, 则可反过来估计函数的连续模和光滑模.

定义 9.14

设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, 若 $f(x)$ 满足

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in I,$$

其中 $C, \alpha \in \mathbb{R}$ 是正常数, 则称 $f(x)$ 满足 **李普希茨条件**, 记作 $f \in \text{Lip}_C^\alpha$ 或 $f \in \text{Lip}^\alpha$.



§9.7.3 被逼近函数的性质

计算方法

定理 9.20

设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则存在常数 $C_r (r = 1, 2, \dots)$ 使得

$$\omega_r(f, h) \leq C_r h^r \sum_{0 \leq n \leq h^{-1}} (n+1)^{r-1} E_n^*(f), \quad h > 0,$$

成立.

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理



§9.7.3 被逼近函数的性质

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

定理 9.20

设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则存在常数 $C_r (r = 1, 2, \dots)$ 使得

$$\omega_r(f, h) \leq C_r h^r \sum_{0 \leq n \leq h^{-1}} (n+1)^{r-1} E_n^*(f), \quad h > 0,$$

成立.

定理 9.21

(Bernstein 逆定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则 $f \in Lip\alpha (0 < \alpha < 1)$ 的充分必要条件是

$$E_n^*(f) = O(n^{-\alpha}).$$



§9.7.3 被逼近函数的性质

计算方法

第九章 函数逼近

§9.1 逼近问题的描述

§9.2 内积空间的最佳逼近

§9.3 最佳平方逼近与正交多项式

§9.4 周期函数的最佳平方逼近与快速傅立叶变换

§9.5 最佳一致逼近多项式

§9.6 切比雪夫多项式

§9.7 函数逼近的若干重要定理

于代数多项式的连续函数类的最佳逼近有类似的定量理论,但与基于三角多项式的最佳逼近理论有不同的性态.

在函数逼近论中,还有许多非常重要的课题,譬如宽度,熵,最优恢复,样条函数的逼近理论等.

多变量的函数逼近理论,目前虽然有了一些结果,但是还很不完善.

在应用方面,近些年来流行的小波分析,压缩感知,深度学习等都大量用到了函数逼近理论,使得它成为一门经久不衰的学科.

10. 求 $f(x) = e^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最佳一致逼近多项式. (1次最佳一致逼近)
11. 如何选取 r , 使 $p(x) = x^2 + r$ 在 $[-1, 1]$ 上与零的偏差最小? 是否唯一?
12. 设 $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$ 在 $[0, 1]$ 上求 3 次最佳一致逼近多项式.

