

第七章 常微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

chenxjin@ustc.edu.cn

考慮初值問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

关于等距分割时(即节点均匀,i.e,
 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 这里, $x_k = a + kh$,
 $h = \frac{b-a}{n}$ 为步长)的数值解.

建立差格式主要有三种方法:

- 基于数值微分, i.e., 向前, 向后Euler公式
- 基于数值积分, i.e., 向前、向后Euler公式, 梯形公式, 线性多步法
- 基于Taylor展开, i.e., Runge-Kutta方法

Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge – Kutta方法**.

Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge – Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 x_n 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$ 得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge – Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 x_n 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$ 得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge – Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 x_n 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$ 得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

注意到 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \dots \end{cases}$

Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为Runge – Kutta方法.

将解函数 $y(x)$ 在 x_n 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$ 得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

注意到 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \dots \end{cases}$, 比如, 取前3项, 可构造差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)) \right] (\clubsuit)$$

Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为Runge – Kutta方法.

将解函数 $y(x)$ 在 x_n 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$ 得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

注意到 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \dots \end{cases}$, 比如, 取前3项, 可构造差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)) \right] (\clubsuit)$$

取的项数越多，方法的阶数越高. 但同时需要计算更多 f 的偏导值.

Runge – Kutta法

为避免计算 $f(x, y)$ 的高阶导数, Runge – Kutta 猜想用 $f(x, y)$ 在点 (x_n, y_n) 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶.

Runge – Kutta法

为避免计算 $f(x, y)$ 的高阶导数, Runge – Kutta 猜想用 $f(x, y)$ 在点 (x_n, y_n) 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶.

二元函数的泰勒公式

定理 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续且有直到 $n + 1$ 阶的连续偏导数, $(x_0 + h, y_0 + k)$ 为此邻域内任一点, 则有

$$\begin{aligned}f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\&+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\&+ \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \quad (0 < \theta < 1)\end{aligned}$$

Runge – Kutta法

为避免计算 $f(x, y)$ 的高阶导数, Runge – Kutta 猜想用 $f(x, y)$ 在点 (x_n, y_n) 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶.

Runge – Kutta法

为避免计算 $f(x, y)$ 的高阶导数, Runge – Kutta 猜想用 $f(x, y)$ 在点 (x_n, y_n) 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶.

以二阶 Runge – Kutta 公式为例, 即通过选取适当的参数 a, b, c_1, c_2 使得

$$c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 f\left(x_n + ah, y(x_n) + bhf(x_n, y(x_n))\right) \quad (1)$$

$$\approx f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) \right] \quad (2)$$

Runge – Kutta法

为避免计算 $f(x, y)$ 的高阶导数, Runge – Kutta 猜想用 $f(x, y)$ 在点 (x_n, y_n) 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶.

以二阶 Runge – Kutta 公式为例, 即通过选取适当的参数 a, b, c_1, c_2 使得

$$c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 f\left(x_n + ah, y(x_n) + bhf(x_n, y(x_n))\right) \quad (1)$$

$$\approx f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) \right] \quad (2)$$

$$\text{or } (1) = (2) + O(h^2)$$

为了达到原格式(♣)的阶数2, 对(1)式在 (x_n, y_n) 处 Taylor 展开后的前几个低阶项的系数应与(2)式的系数相等, 即

Runge – Kutta法

为避免计算 $f(x, y)$ 的高阶导数, Runge – Kutta 猜想用 $f(x, y)$ 在点 (x_n, y_n) 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶.

以二阶 Runge – Kutta 公式为例, 即通过选取适当的参数 a, b, c_1, c_2 使得

$$c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 f\left(x_n + ah, y(x_n) + bhf(x_n, y(x_n))\right) \quad (1)$$

$$\approx f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) \right] \quad (2)$$

$$\text{or } (1) = (2) + O(h^2)$$

为了达到原格式(♣)的阶数2, 对(1)式在 (x_n, y_n) 处 Taylor 展开后的前几个低阶项的系数应与(2)式的系数相等, 即

$$(2) + O(h^2) = (1) =$$

$$\begin{aligned} & c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 [f(x_n, y(x_n)) + ahf_x(x_n, y(x_n)) + bhf_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) + O(h^2)] \\ &= (c_1 + c_2) f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[2c_2 af_x + 2c_2 bf_y f \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

二阶Runge – Kutta公式

因此，参数 a, b, c_1, c_2 需满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 a = 1 \\ 2c_2 b = 1 \end{cases}$$

二阶Runge – Kutta公式

因此，参数 a, b, c_1, c_2 需满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2a = 1 \\ 2c_2b = 1 \end{cases}$$

令 $y(x_n) = y_n$, 故有

$$(1) = c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f\left(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n)\right) \quad (3)$$

$$\approx (2) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right]$$

二阶Runge – Kutta公式

因此，参数 a, b, c_1, c_2 需满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2a = 1 \\ 2c_2b = 1 \end{cases}$$

令 $y(x_n) = y_n$, 故有

$$(1) = c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f\left(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n)\right) \quad (3)$$

$$\approx (2) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right]$$

回顾 (♣) 格式

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)) \right] \quad (\clubsuit)$$

二阶Runge – Kutta公式

因此，参数 a, b, c_1, c_2 需满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2a = 1 \\ 2c_2b = 1 \end{cases}$$

令 $y(x_n) = y_n$, 故有

$$(1) = c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f\left(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n)\right) \quad (3)$$

$$\approx (2) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right]$$

将(3)式代替 (♣) 格式中的中括号部分, 可得二阶差分格式

$$y_{n+1} = y_n + h \left[c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f\left(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n)\right) \right] \quad (\diamond)$$

差分格式 (\diamond) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \end{cases}$$

差分格式 (\diamond) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bkh_1) \end{cases}$$

例如，取 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, a = 1, b = 1$ ，则有二阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

差分格式 (◇) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bkh_1) \end{cases}$$

例如，取 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, a = 1, b = 1$ ，则有二阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

此即为

公式.

差分格式 (◇) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bkh_1) \end{cases}$$

例如，取 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, a = 1, b = 1$ ，则有二阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

此即为 公式.

二阶Runge-Kutta公式的局部截断误差为 $O(h^3)$. 类似地想法，可建立高阶的Runge-Kutta公式，常见的为3阶，4阶公式.

三阶、四阶Runge – Kutta公式

常用的三阶Runge – Kutta公式

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{array} \right.$$

三阶、四阶Runge – Kutta公式

常用的三阶Runge – Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

常用的四阶Runge – Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

一般的Runge-Kutta公式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2 + \cdots + c_m K_m) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h K_1) \\ \vdots \\ K_m = f(x_n + a_m h, y_n + h \sum_{i=1}^{m-1} b_{mi} K_i) \end{array} \right.$$

其中，系数 a_i, b_i, c_i 满足某个代数方程组 (易知, $\sum_{i=1}^m c_i = 1$), 它由需要达到的阶确定.

例：用四阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_1) \\ k_3 = f(x_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

解初值问题： $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x & (0 \leq x \leq 0.8), \text{ 取步} \\ y(0) = 1 \end{cases}$
长 $h = 0.2$.

解： $h = 0.2$ 代入前面的四阶Runge-Kutta公式，得：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = y_n^2 \cos x_n \\ k_2 = (y_n + 0.1k_1)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_3 = (y_n + 0.1k_2)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_4 = (y_n + 0.2k_3)^2 \cos(x_n + 0.2) \end{array} \right.$$

计算结果列表如下：

解： $h = 0.2$ 代入前面的四阶Runge-Kutta公式，得：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = y_n^2 \cos x_n \\ k_2 = (y_n + 0.1k_1)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_3 = (y_n + 0.1k_2)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_4 = (y_n + 0.2k_3)^2 \cos(x_n + 0.2) \end{array} \right.$$

计算结果列表如下：

| n | x_n | y_n | $y(x_n)$ | $ y_n - y(x_n) $ |
|-----|-------|---------|----------|------------------|
| 1 | 0.2 | 1.24789 | 1.24792 | 0.00003 |
| 2 | 0.4 | 1.63762 | 1.63778 | 0.00016 |
| 3 | 0.6 | 2.29618 | 2.29696 | 0.00078 |
| 4 | 0.8 | 3.53389 | 3.53802 | 0.00413 |

方程组和高阶方程的数值解法

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$$

方程组和高阶方程的数值解法

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$$

写成向量的形式: $\begin{cases} \frac{dY}{dx} = F(x, Y) \\ Y(a) = \eta \equiv (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)^T \end{cases}$

单个微分方程的各种方法都可以直接平行运用过来.

以两个方程的方程组为例

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \\ y(a) = y_0 \\ z(a) = z_0 \end{cases}, a \leq x \leq b$$

此时的向前Euler公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

下面是一种二元常微方程组的四阶Runge-Kutta公式：

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

下面是一种二元常微方程组的四阶Runge-Kutta公式：

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} K_1^{(1)} \\ K_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} K_2^{(1)} \\ K_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_1^{(2)}) \\ g(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_1^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} K_3^{(1)} \\ K_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_2^{(2)}) \\ g(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_2^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} K_4^{(1)} \\ K_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n + h, y_n + hK_3^{(1)}, z_n + hK_3^{(2)}) \\ g(x_n + h, y_n + hK_3^{(1)}, z_n + hK_3^{(2)}) \end{pmatrix}$$

例：考虑微分方程组的数值解. (P160, 例7.7)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0.09u(1 - \frac{u}{20}) - 0.45uv \\ \frac{dv}{dt} = 0.06v(1 - \frac{v}{15}) - 0.001uv \\ u(0) = 1.6 \\ v(0) = 1.2 \end{cases}$$

例：考虑微分方程组的数值解. (P160, 例7.7)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0.09u(1 - \frac{u}{20}) - 0.45uv \\ \frac{dv}{dt} = 0.06v(1 - \frac{v}{15}) - 0.001uv \\ u(0) = 1.6 \\ v(0) = 1.2 \end{cases}$$

解：用Euler预估–校正公式(即改进的Euler公式)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u}_{n+1} \\ \bar{v}_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} f(t_n, u_n, v_n) \\ g(t_n, u_n, v_n) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[\begin{pmatrix} f(t_n, u_n, v_n) \\ g(t_n, u_n, v_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, \bar{v}_{n+1}) \\ g(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, \bar{v}_{n+1}) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

取 $h = 1$, 计算结果如下表:

| $t(\text{年})$ | $u(t)$ | $v(t)$ |
|---------------|----------|---------|
| 0 | 1.6 | 1.2 |
| 1 | 1.02457 | 1.26834 |
| 2 | 0.640912 | 1.3366 |
| 3 | 0.391211 | 1.41077 |

高阶微分方程

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(a) = \eta_1 \\ y'(a) = \eta_2 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \eta_m \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$$

高阶微分方程

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(a) = \eta_1 \\ y'(a) = \eta_2 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \eta_m \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{cases} y = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_{m-1}}{dx} = y_m \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{cases}, \quad a \leq x \leq b$$

即：高阶常微分方程可化为一阶常微分方程组.

例：考察初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -30y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 在区间 $[0, 0.5]$ 上的解。

分别用欧拉显式、隐式格式以及改进的欧拉格式计算数值解。

| 节点 x_i | 欧拉显式 | 欧拉隐式 | 改进欧拉法 | 精确解 $y = e^{-30x}$ |
|----------|-----------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|
| 0.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.1 | -2.0000 | 2.5000×10^{-1} | 2.5000 | 4.9787×10^{-2} |
| 0.2 | 4.0000 | 6.2500×10^{-2} | 6.2500 | 2.4788×10^{-3} |
| 0.3 | -8.0000 | 1.5625×10^{-2} | 1.5626×10^1 | 1.2341×10^{-4} |
| 0.4 | 1.6000×10^1 | 3.9063×10^{-3} | 3.9063×10^1 | 6.1442×10^{-6} |
| 0.5 | -3.2000×10^1 | 9.7656×10^{-4} | 9.7656×10^1 | 3.0590×10^{-7} |

常微分方程初值问题

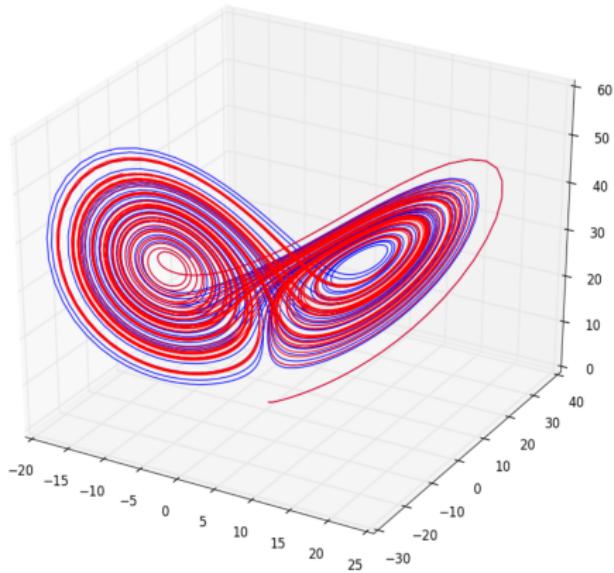
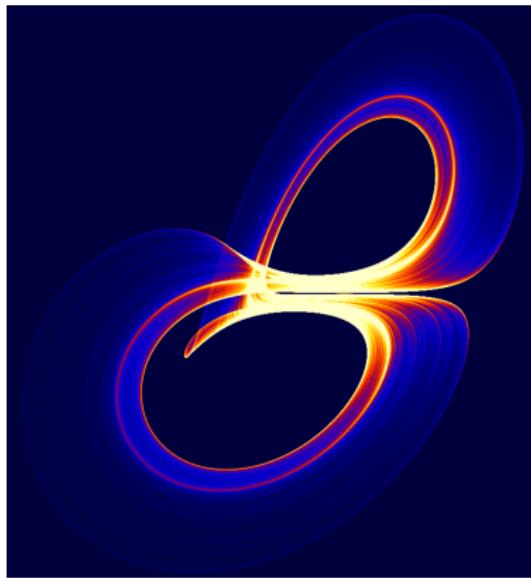
$$\begin{cases} y' = -y + x - e^{-1}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

其精确解为 $y(x) = e^{-x} + x - 1 - e^{-1}$ 。

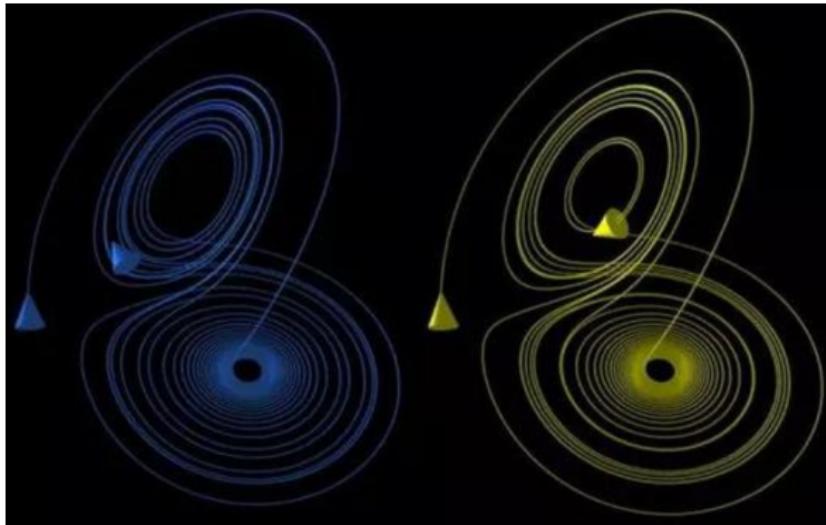
分别取 $h = 1, 2, 4$, 用经典4阶R-K法计算, 结果见表1。

表 1:

| x_n | $h = 1$ 时的解 | $h = 2$ 时的解 | $h = 4$ 时的解 | 解析解 |
|-------|-------------|-------------|-------------|---------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1.6839 | 1.7547 | | 1.6819 |
| 5 | 3.6394 | 3.6730 | 5.4715 | 3.6389 |
| 7 | 5.6331 | 5.6457 | | 5.6330 |
| 9 | 7.6323 | 7.6367 | 16.8291 | 7.6322 |
| 11 | 9.6321 | 9.6336 | | 9.6321 |
| 13 | 11.6321 | 11.6326 | 57.6171 | 11.6321 |

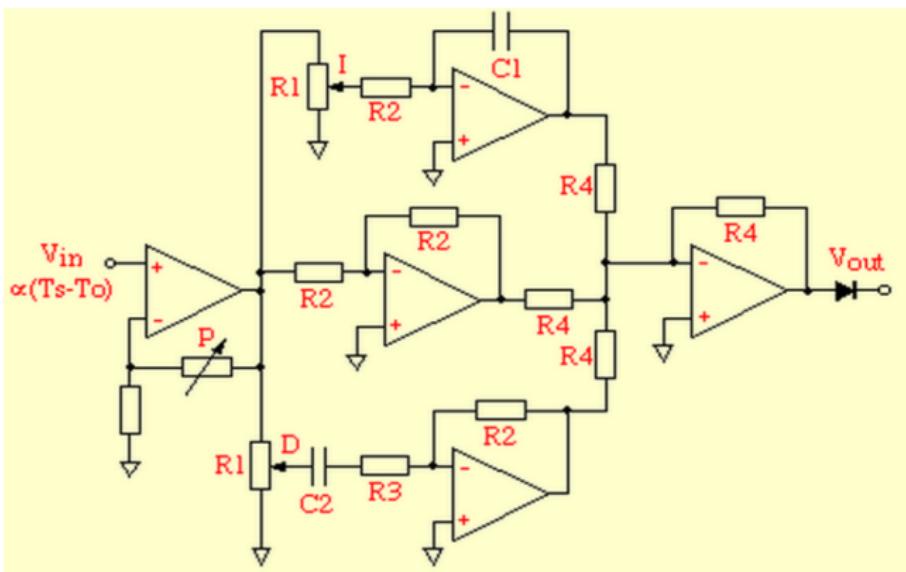
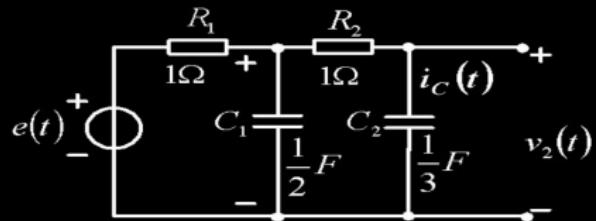


$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

给定如图所示电路，已知激励信号 $e(t) = \sin(2t)u(t)$
 初始时刻，电容的端电压均为零，求输出信号 $v_2(t)$



常微分方程解的稳定性

设初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解存在唯一. 对不同的初值 y_0 , 方程的解为不同的**轨线**. 解在有限范围内连续的依赖于 y_0 , 但当 x 扩充到无穷区间时, 这种连续依赖性不一定成立.

常微分方程解的稳定性

常微分方程解的稳定性

定义：设 $y = y(x)$ 为方程取初值 y_0 时的解。
若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, s.t 只要 $|z_0 - y(x_0)| < \delta$,
方程取初值 z_0 的解 $z = z(x)$ 就存在唯一, 且满足
 $|z(x) - y(x)| < \varepsilon (\forall x \geq x_0)$, 则称解 $y(x)$ 是
(Lyapunov 意义下) 稳定的.

进而, 若解 $y(x)$ 是稳定的, 且满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (z(x) - y(x)) = 0,$$

则称 $y(x)$ 是渐进稳定的.

常微分方程解的稳定性

我们称一个常微初值问题的解 $y(x)$ 是

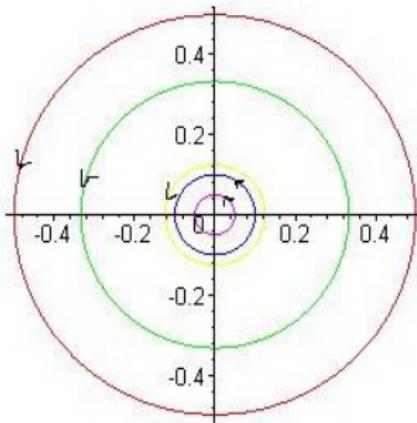
- 稳定的，是指只要初值变化足够小，轨线(即解曲线 $y(x)$)的变化就可足够小.
- 渐进稳定的，是指初值变化足够小时，轨线的改变量越来越趋0 (当自变量趋向 ∞ 时).

常微分方程解的稳定性

我们称一个常微初值问题的解 $y(x)$ 是

- 稳定的，是指只要初值变化足够小，轨线(即解曲线 $y(x)$)的变化就可足够小.
- 渐进稳定的，是指初值变化足够小时，轨线的改变量越来越趋0 (当自变量趋向 ∞ 时).

例：微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的轨线如图，它的解都是稳定的，但不是渐进稳定的.



常微分方程解的稳定性

例. 典型的渐进稳定微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}(\lambda) < 0)$$

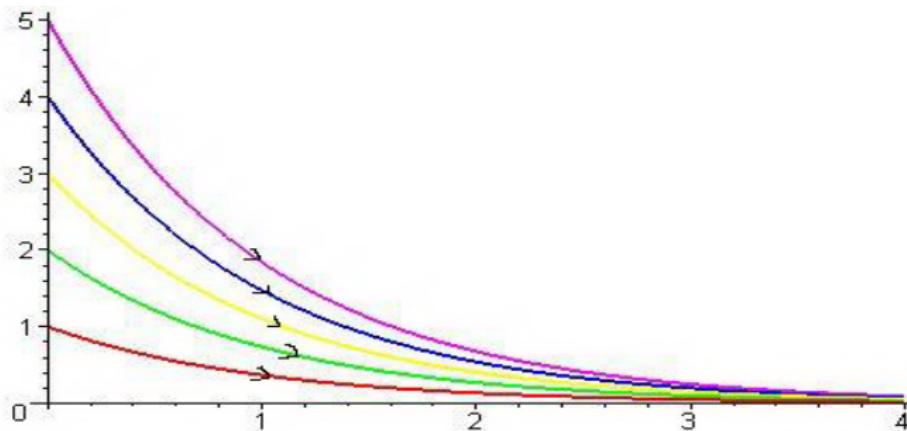
的轨线如下图，它的解都是渐进稳定的.

常微分方程解的稳定性

例. 典型的渐进稳定微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}(\lambda) < 0)$$

的轨线如下图，它的解都是渐进稳定的.



差分方程的绝对稳定性

设求微分方程数值解时采用某种方法建立的差分方程为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \quad (\spadesuit)$$

我们希望采用此方法时，即使初值有误差，对结果的影响也能足够的小，即**方法对初始误差有抑制作用**.

如果微分方程的解本身是不稳定，那就没理由要求这两组解充分接近，故**差分格式(方程)的绝对稳定性建立在原微分方程初值问题的解本身是渐进稳定的**基础之上.

差分方程的绝对稳定性

定义：差分方程称为绝对稳定的，若差分方程作用到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}\lambda < 0)$$

时，对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当 $z \equiv \lambda h$ 落在这个区域时，差分方程的解趋于0 (i.e., $y_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$). 这个区域称为差分方程(格式)的稳定区域.

差分方程的绝对稳定性

定义：差分方程称为绝对稳定的，若差分方程作用到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}\lambda < 0)$$

时，对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当 $z \equiv \lambda h$ 落在这个区域时，差分方程的解趋于0 (i.e., $y_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$). 这个区域称为差分方程(格式)的稳定区域.

将差分格式(♠)应用到上述的渐进稳定初值问题，可得：

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} \quad (\heartsuit)$$

定理：差分方程 $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j})$ 绝

对稳定的充要条件为：存在左半复平面上的一个子区域D，当 λh 落在此区域时，齐次差分方程(?)

的特征方程 (i.e., $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda h \beta_j) \xi^j = 0$)，它是一个

关于的 ξ 多项式)的所有根的绝对值均小于1.

设给定的初始值 y_i ($0 \leq i \leq k - 1$) 有误差 e_i 时，
由(心)得到的 $\{\tilde{y}_{n+j}\}$ 与初始值没有误差时得到
的 $\{y_{n+j}\}$ 之差为 $\{e_{n+j}\}$ ，则 e_{n+j} 满足一样的形式：

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j e_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k \beta_j e_{n+j}$$

设给定的初始值 y_i ($0 \leq i \leq k - 1$) 有误差 e_i 时，
由(心)得到的 $\{\tilde{y}_{n+j}\}$ 与初始值没有误差时得到
的 $\{y_{n+j}\}$ 之差为 $\{e_{n+j}\}$ ，则 e_{n+j} 满足一样的形式：

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j e_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k \beta_j e_{n+j}$$

故对典型的渐进稳定方程，**绝对稳定的方法**满足

$$e_n \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

即初值 y_i ($0 \leq i \leq k - 1$) 的扰动误差对数值结果
没有什么影响。

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}\lambda < 0)$$

例：讨论Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 的绝对稳定性.

例：讨论Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 的绝对稳定性.

解：将Euler公式作用于常微 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得 $y_{n+1} = y_n + \lambda hy_n$. 其特征方程为

$$\rho(\xi) = \xi - (1 + \lambda h)$$

其根为 $\xi = 1 + \lambda h$. 当 $|1 + \lambda h| < 1$ 时, $|\xi| < 1$. 故Euler法为绝对稳定的, 稳定区域如图所示(即 $z \equiv x + iy = \lambda h$ 落在以-1为圆心的复单位圆内).

例：讨论Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 的绝对稳定性.

解：将Euler公式作用于常微 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得 $y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n$. 其特征方程为

$$\rho(\xi) = \xi - (1 + \lambda h)$$

其根为 $\xi = 1 + \lambda h$. 当 $|1 + \lambda h| < 1$ 时, $|\xi| < 1$. 故Euler法为绝对稳定的, 稳定区域如图所示(即 $z \equiv x + iy = \lambda h$ 落在以-1为圆心的复单位圆内).

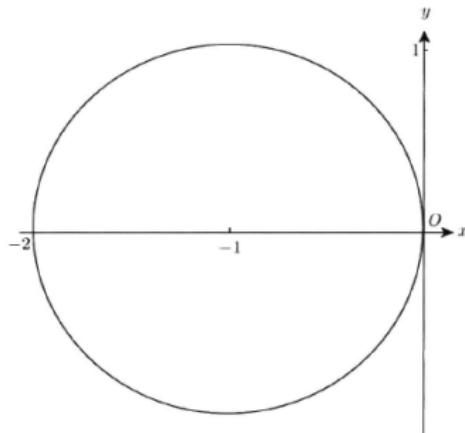


图 7.3 Euler 方法的绝对稳定区域

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}\lambda < 0)$$

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

若 y_n 有误差 ρ_n , 记 $y_n^* = y_n + \rho_n$. 易得误差方程（误差关系式）

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \lambda h \rho_{n+1}$$

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

若 y_n 有误差 ρ_n , 记 $y_n^* = y_n + \rho_n$. 易得误差方程（误差关系式）

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \lambda h \rho_{n+1}$$

其特征方程为

$$\rho(\xi) = (1 - \lambda h)\xi - 1$$

其根为 $\xi = \frac{1}{1-\lambda h}$. 当 $Re\lambda < 0$ 时, 恒有 $|\xi| = |\frac{1}{1-\lambda h}| < 1$ (对任意 $h > 0$). 故, 向后Euler格式的绝对稳定区域是整个左半复平面。

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

若 y_n 有误差 ρ_n , 记 $y_n^* = y_n + \rho_n$. 易得误差方程（误差关系式）

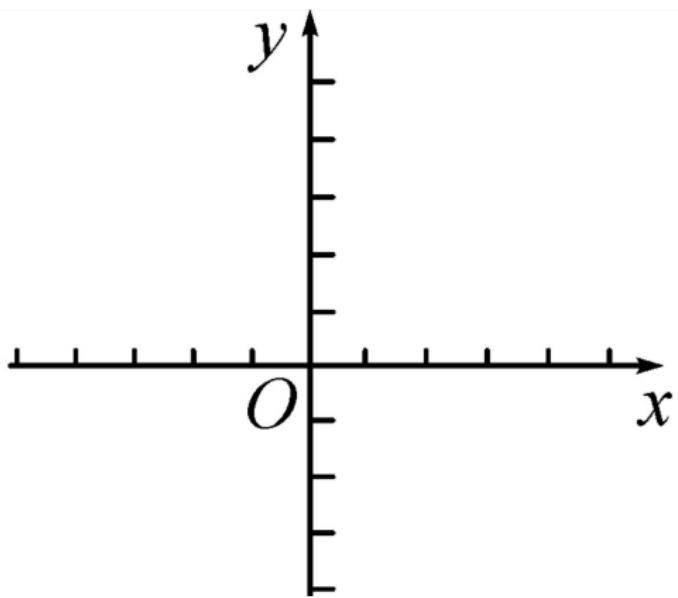
$$\rho_{n+1} = \rho_n + \lambda h \rho_{n+1}$$

其特征方程为

$$\rho(\xi) = (1 - \lambda h)\xi - 1$$

其根为 $\xi = \frac{1}{1-\lambda h}$. 当 $Re\lambda < 0$ 时, 恒有 $|\xi| = |\frac{1}{1-\lambda h}| < 1$ (对任意 $h > 0$). 故, 向后Euler格式的绝对稳定区域是整个左半复平面。

【定义】当某个方法（或格式）的绝对稳定区域是整个左半复平面时, 则称该格式是**无条件绝对稳定(或A稳定)**
由上可知, 向后Euler格式是**无条件绝对稳定的**.



中心格式的稳定性

讨论中心差分方法的稳定性。 $\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\text{Re}\lambda < 0)$

解 中心差分公式： $y_{n+1} = y_{n-1} + 2\lambda h y_n$

中心格式的稳定性

讨论中心差分方法的稳定性。

解 中心差分公式： $y_{n+1} = y_{n-1} + 2\lambda h y_n$

误差方程： $\rho_{n+1} = \rho_{n-1} + 2\lambda h \rho_n$

不失一般性，考虑由 ρ_0, ρ_1 对以后 ρ_n 的影响。

此差分方程的特征方程为： $\xi^2 - 2\lambda h \xi - 1 = 0$

-

中心格式的稳定性

它的两个根为：

$$\xi_1 = \lambda h + \sqrt{1 + (\lambda h)^2}, \quad \xi_2 = \lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2}$$

由差分方程理论（略）， ρ_n 的一般解可由下式表达：

$$\rho_n = a \left(\lambda h + \sqrt{1 + (\lambda h)^2} \right)^n + b \left(\lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2} \right)^n$$

其中 a, b 可由 ρ_0, ρ_1 决定。又：

$$\lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2} = \lambda h - 1 + O((\lambda h)^2)$$

由于 $\text{Re}(\lambda h) < 0$ ，故 $|\lambda h - 1| > 1$ ， ρ_n 因 n 增大而恶性发展，所以方法对任何 h 是不稳定的。

幂级数展开

$$z = \lambda h$$

令 $f(z) = \sqrt{1+z^2}$, 则

$$\begin{aligned}f(z) &= f(0) + \frac{1}{2} z^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} z^4 \\&\quad + \frac{f^{(6)}(0)}{6!} z^6 + \dots\end{aligned}$$

讨论如下三阶Runge—Kutta方法的绝对稳定性

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{array} \right.$$

三阶Runge – Kutta的绝对稳定性

将该3阶Runge – Kutta公式应用到 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3]$$

$$K_1 = \lambda y_n$$

$$K_2 = \lambda y_n(1 + \frac{1}{2}\lambda h)$$

$$K_3 = \lambda y_n \left[1 + \lambda h + (\lambda h)^2 \right]$$

其差分格式为: $y_{n+1} = y_n \left[1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3 \right]$

其特征方程为: $\xi - (1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3)$

三阶Runge – Kutta的绝对稳定性

将该3阶Runge – Kutta公式应用到 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$, 得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3]$$

$$K_1 = \lambda y_n$$

$$K_2 = \lambda y_n(1 + \frac{1}{2}\lambda h)$$

$$K_3 = \lambda y_n [1 + \lambda h + (\lambda h)^2]$$

其差分格式为: $y_{n+1} = y_n [1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3]$

其特征方程为: $\xi - (1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3)$

因 $Re\lambda < 0$, 故存在 $h_0 > 0$, 当 $h < h_0$ 时, 特征根

$$|\xi| = |1 + \lambda h + O(\lambda h)^2| < 1$$

所以, 3阶Runge – Kutta是绝对稳定格式.

k 阶Runge – Kutta的绝对稳定性

可以证明， k 阶Runge—Kutta都是绝对稳定格式，且同阶的不同格式具有相同的稳定区域，不同阶的格式稳定区域不同.

k 阶 Runge – Kutta 的绝对稳定性

可以证明, k 阶 Runge – Kutta 都是绝对稳定格式, 且同阶的不同格式具有相同的稳定区域, 不同阶的格式稳定区域不同.

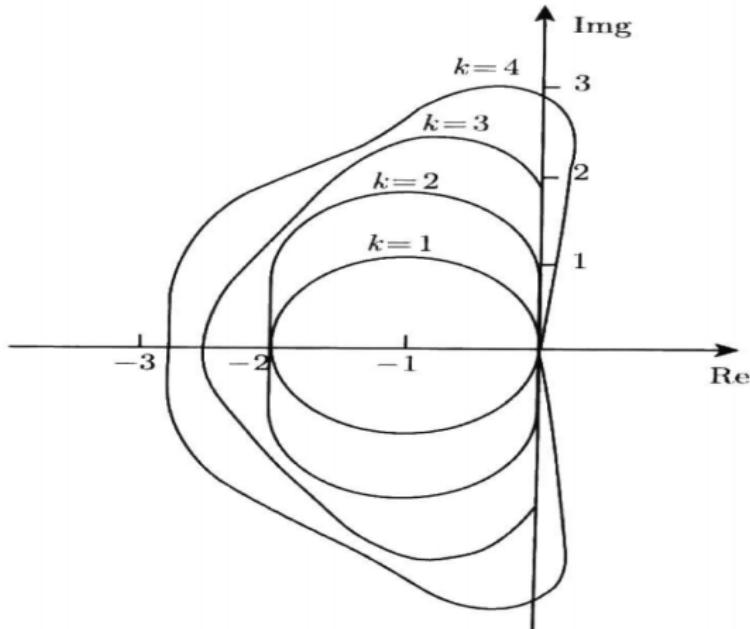


图 7.4 Runge-Kutta 绝对稳定区域

| 方法 | $E(\lambda h)$ | 绝对稳定区间 |
|-----------------|---|---------------------------|
| 显式 Euler 法 | $1 + \lambda h$ | $-2 < \lambda h < 0$ |
| 改进 Euler/Heun 法 | $1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}$ | $-2 < \lambda h < 0$ |
| 3阶R-K法 | $1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{3!}$ | $-2.51 < \lambda h < 0$ |
| 4阶R-K法 | $1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}$ | $-2.785 < \lambda h < 0$ |
| 隐式 Euler 法 | $\frac{1}{1 - \lambda h}$ | $-\infty < \lambda h < 0$ |
| 中点隐公式 | $\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}$ | $-\infty < \lambda h < 0$ |
| 2级4阶R-K隐公式 | $\frac{1 + \lambda h/2 + (\lambda h)^2/12}{1 - \lambda h/2 + (\lambda h)^2/12}$ | $-\infty < \lambda h < 0$ |

