

计算方法作业 #8

陈文轩

KFRC

更新: April 15, 2025

1 题目

1. (10pts) 设有线性方程组 $Ax = b$, 其中,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (a). 写出 Jacobi 迭代的迭代格式 (分量形式);
(b). 求 Jacobi 迭代的迭代矩阵;
(c). 讨论此时 Jacobi 迭代法的收敛性 (请给出理由或证明)。
2. (10pts) 设有线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 50 \end{cases}$$

- (a). 分别写出 Gauss-Seidel 迭代和 SOR 迭代的分量形式;
(b). 求 Gauss-Seidel 迭代的分裂矩阵 (splitting matrix) 及迭代矩阵 (iteration matrix);
(c). 讨论 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性 (请给出理由或证明)。
3. (10pts) 设有线性方程组 $Ax = b$, 其中, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 。

利用如下迭代公式解此方程

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)}), \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$

- (a). 写出此迭代法的迭代矩阵;
(b). 求使该迭代法收敛时参数 α 的最大取值范围;
(c). 当 α 取何值时, 迭代收敛速度最快。

Deadline: 2025.4.27

2 解答