习题课 2

陈文轩

2025年3月31日

陈文轩

作业 3

构造积分
$$\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h}f(x)\,\mathrm{d}x$$
 的数值积分公式
$$I(f)=a_{-1}f(-h)+a_0f(0)+a_1f(2h),\ h>0;$$

构造积分
$$\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h}f(x)\,\mathrm{d}x$$
 的数值积分公式
$$I(f)=a_{-1}f(-h)+a_0f(0)+a_1f(2h),\ h>0;$$

积分对
$$p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2$$
 无误差,对应方程组
$$\begin{cases} a_{-1}+a_0+a_1=3h\\ -2a_{-1}+4a_1=3h\\ a_{-1}+4a_1=3h \end{cases}$$

构造积分
$$\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h}f(x)\,\mathrm{d}x$$
 的数值积分公式
$$I(f)=a_{-1}f(-h)+a_{0}f(0)+a_{1}f(2h)\text{, }h>0\text{;}$$

积分对
$$p_0(x)=1, p_1(x)=x, p_2(x)=x^2$$
 无误差,对应方程组
$$\begin{cases} a_{-1}+a_0+a_1=3h\\ -2a_{-1}+4a_1=3h\\ a_{-1}+4a_1=3h\\ \Rightarrow a_{-1}=0, a_0=2.25h, a_1=0.75h \end{cases}$$



分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位): $\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 。

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小

数点后 4 位):
$$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, dx$$
.

准确值:
$$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_0^2 \approx 0.46663;$$

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位): $\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 。

准确值:
$$\int_0^2 e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_0^2 \approx 0.46663;$$

$$f(0) = 0, f(1) \approx 0.30956, f(2) \approx 0.12306;$$

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位): $\int_{0}^{2}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ 。

分别利用梯形公式和 Simpson 公式求如下积分及其误差 (计算结果至少保留小数点后 4 位): $\int_{-\infty}^{2} e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 。

记
$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x) dx$$
,设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式,其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

- (1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度,并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程);
- (2) 设 f(x) 足够光滑 (可微), 求该数值积分公式的误差。

记
$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x) dx$$
,设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式,其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

- (1) 试确定参数 A,B,C,α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度,并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程);
- (2) 设 f(x) 足够光滑 (可微),求该数值积分公式的误差。

取 A=C, 积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,

记
$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x) dx$$
,设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式,其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

- (1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度,并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程);
- (2) 设 f(x) 足够光滑 (可微),求该数值积分公式的误差。
- 取 A=C, 积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,
- $p_2(x) = x^2, p_4(x) = x^4$ 无误差,对 $p_6(x) = x^6$ 可能有误差。

记
$$I(f)=\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$
,设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式,其中 $I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha).$

- (1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度,并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程);
- (2) 设 f(x) 足够光滑 (可微),求该数值积分公式的误差。

取 A=C, 积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,

 $p_2(x) = x^2, p_4(x) = x^4$ 无误差,对 $p_6(x) = x^6$ 可能有误差。

对应方程组
$$\begin{cases} 2A+B=4\\ A\alpha^2=\frac{8}{3}\\ A\alpha^4=\frac{32}{5} \end{cases} \implies \begin{cases} A=C=\frac{10}{9}\\ B=\frac{16}{9}\\ \alpha=\frac{2}{5}\sqrt{15} \end{cases}$$
 , 代数精度为 5 次。

◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆ 壹 ▶ ◆ 壹 ▶ 壹 ◆ ♀ ♀ ♀ ○ ○ 2025 年 3 月 31 日 5 / 17

陈文轩 习题课 2

记
$$I(f) = \int_{-2}^{2} f(x) dx$$
,设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式,其中 $I(f) \approx S(f(x)) = Af(-\alpha) + Bf(0) + Cf(\alpha)$.

- (1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度,并确定该公式的代数精度 (需给出求解过程);
- (2) 设 f(x) 足够光滑 (可微),求该数值积分公式的误差。

取 A=C, 积分对 x^{2k+1} 无误差。积分对 $p_0(x)=1$,

 $p_2(x) = x^2, p_4(x) = x^4$ 无误差,对 $p_6(x) = x^6$ 可能有误差。

误差为
$$E(f) = \frac{E(x^6)}{6!} f^{(6)}(\xi) = \left(\int_{-2}^2 x^6 \, \mathrm{d}x - S(x^6) \right) \frac{f^{(6)}(\xi)}{216} =$$

$$\frac{64}{7875}f^{(6)}(\xi), \xi \in [-2, 2]$$

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2)=S''(2)=0(n=3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2)=S''(2)=0(n=3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3, i = 0, 1, 2$$

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2)=S''(2)=0(n=3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$$
 满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$ 。记 $M_i = S''(x_i)$,则

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2)=S''(2)=0(n=3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

$$\begin{split} S_i(x) &= a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2 \\ 满足 \ S(x_i) &= f(x_i), i = 0, 1, 2, 3 \text{。id } M_i = S''(x_i), \text{ 则} \\ \frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2 \end{split}$$

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2)=S''(2)=0(n=3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$$
 满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$ 。记 $M_i = S''(x_i)$,则
$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2$$
 $M_i = 0, i = 0, 3$,其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$ 。解方程组得到:

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2) = S''(2) = 0 (n = 3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

满足
$$S(x_i)=f(x_i), i=0,1,2,3$$
。记 $M_i=S''(x_i)$,则
$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{f[x_i,x_{i+1}]-f[x_{i-1},x_i]}{h_i}, i=1,2$$
 $M_i=0, i=0,3$,其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$ 。解方程组得到:
$$S(x)=\begin{cases} -4+6.25(x+2)^2-0.25(x+2)^3, & x\in[-2,-1]\\ 2+1.75(x+1)-0.75(x+1)^2+0.09375(x+1)^3, & x\in[-1,1]\\ 2.5-0.9375(x-1)-0.1875(x-1)^2+0.0625(x-1)^3, & x\in[1,2] \end{cases}$$

 $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$

求满足下表数据以及边界条件 S''(-2) = S''(2) = 0 (n = 3) 的三次样条插值函数 S(x),并计算 S(0) 的值。注意:n 为小区间个数。

| x | -2.00 | -1.00 | 1.00 | 2.00 |
|------|-------|-------|------|------|
| f(x) | -4.00 | 2.00 | 2.50 | 1.50 |

$$\begin{split} \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} &= \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{h_i}, i = 1, 2 \\ M_i &= 0, i = 0, 3, \ \ \mbox{其中} \ h_i = x_{i+1} - x_i \mbox{\bullet} \ \mbox{解方程组得到:} \\ S(x) &= \\ \left\{ \begin{aligned} -4 + 6.25(x+2)^2 - 0.25(x+2)^3, & x \in [-2, -1] \\ 2 + 1.75(x+1) - 0.75(x+1)^2 + 0.09375(x+1)^3, & x \in [-1, 1] \\ 2.5 - 0.9375(x-1) - 0.1875(x-1)^2 + 0.0625(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{aligned} \right. \\ \mbox{故} \ S(0) &= 3.5625 = \frac{57}{16} \end{split}$$

 $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, 1, 2$ 满足 $S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, 3$ 。记 $M_i = S''(x_i)$,则

作业 4

给定函数 f(x) 离散值如下:

| x | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.06 |
|------|------|------|------|------|
| f(x) | 2.5 | 1.0 | 2.0 | 3.5 |

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 f'(0.02) 和 f'(0.04);

给定函数 f(x) 离散值如下:

| x | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.06 |
|------|------|------|------|------|
| f(x) | 2.5 | 1.0 | 2.0 | 3.5 |

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 f'(0.02) 和 f'(0.04);

向前差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.02} = 75;$$

给定函数 f(x) 离散值如下:

| x | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.06 |
|------|------|------|------|------|
| f(x) | 2.5 | 1.0 | 2.0 | 3.5 |

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 f'(0.02) 和 f'(0.04);

向前差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.02} = 75;$$

向后差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02} = -75, f'(0.04) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50;$$

给定函数 f(x) 离散值如下:

| x | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.06 |
|------|------|------|------|------|
| f(x) | 2.5 | 1.0 | 2.0 | 3.5 |

分别用向前、向后以及中心差商公式计算 f'(0.02) 和 f'(0.04);

向前差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.04)}{0.02} = 75;$$

向后差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.02) - f(0.00)}{0.02} = -75, f'(0.04) = \frac{f(0.04) - f(0.02)}{0.02} = 50;$$

中心差分:

$$f'(0.02) = \frac{f(0.04) - f(0.00)}{0.04} = -12.5, f'(0.04) = \frac{f(0.06) - f(0.02)}{0.04} = 62.5_{\bullet}$$

 陈文轩
 习题课 2
 2025 年 3 月 31 日
 8 / 17

用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x} \sin(x) dx$ 及其积分误差;

用 3 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x} \sin(x) dx$ 及其积分误差;

准确值: 0.4666。

用
$$3$$
 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x} \sin(x) dx$ 及其积分误差;

准确值: 0.4666。

先换元
$$\int_{-1}^{1} e^{-t-1} \sin(t+1) dt$$
,记 $g(t) = e^{-t-1} \sin(t+1)$,

用
$$3$$
 点的 Gauss-Legendre 数值积分公式求积分 $\int_0^2 e^{-x} \sin(x) dx$ 及其积分误差;

准确值: 0.4666。

先换元
$$\int_{-1}^{1} e^{-t-1} \sin(t+1) dt$$
,记 $g(t) = e^{-t-1} \sin(t+1)$,

$$I(g) = \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \approx 0.4663\,\text{,}$$



试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x) dx$ 的 2 点 Gauss 积分公式,这里 $(x-1)^2$ 为权重 函数;

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x) dx$ 的 2 点 Gauss 积分公式,这里 $(x-1)^2$ 为权重函数;

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1) \, \mathrm{d}t$,此时通过 G-S 正交化得到正交多项式为:

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x) \, \mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式,这里 $(x-1)^2$ 为权重函数;

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1) \, \mathrm{d}t$,此时通过 G-S 正交化得到正交多项式为: $p_2(t)=t^2-\frac{3}{5}$,节点为 $\alpha_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}, \alpha_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$,由于对称性,

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x) \, \mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式,这里 $(x-1)^2$ 为权重函数;

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1) \, \mathrm{d}t$,此时通过 G-S 正交化得到正交多项式为: $p_2(t)=t^2-\frac{3}{5}$,节点为 $\alpha_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}, \, \alpha_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$,由于对称性,权重相等,代入 f(t)=1 时无误差,得到 $W_1=W_2=\frac{1}{3}$,

试推导积分 $\int_0^2 (x-1)^2 f(x) \, \mathrm{d}x$ 的 2 点 Gauss 积分公式,这里 $(x-1)^2$ 为权重函数;

先换元为 $\int_{-1}^1 t^2 f(t+1) \, \mathrm{d}t$,此时通过 G-S 正交化得到正交多项式为: $p_2(t)=t^2-\frac{3}{5}$,节点为 $\alpha_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},$ $\alpha_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$,由于对称性,

权重相等,代入 f(t)=1 时无误差,得到 $W_1=W_2=\frac{1}{3}$,

故
$$I(f) = \frac{1}{3}f\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{1}{3}f\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$
。

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

陈文轩 2025 年 3 月 31 日 11/1

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$, 有:



设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$, 有:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5)$$

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$, 有:

$$\begin{split} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5) \end{split}$$



设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$, 有:

$$\begin{split} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5) \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \frac{2}{3}h^4f''''(x) + O(h^5) \end{split}$$

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

作 Taylor 展开至 $O(h^5)$, 有:

$$\begin{split} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \frac{1}{24}h^4f''''(x) + O(h^5) \\ f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \frac{2}{3}h^4f''''(x) + O(h^5) \\ f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \frac{2}{3}h^4f''''(x) + O(h^5) \end{split}$$

←□ → ←□ → ← = → へ = → へ へ ○

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

陈文轩 2025 年 3 月 31 日 12 / 1

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

$$\begin{split} &Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h) \\ = &(A+B+C+D+E)f(x) + (-2A-B+D+2E)hf'(x) \\ &+ (2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+2E)h^2f''(x) + (-\frac{4}{3}A-\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}D+\frac{4}{3}E)h^3f'''(x) \\ &+ (\frac{2}{3}A-\frac{1}{24}B+\frac{1}{24}D+\frac{2}{3}E)h^4f''''(x) \\ = & hf'(x) + O(h^5) \end{split}$$

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=0\\ -2A-B+D+2E=1\\ (2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+2E=0\\ -\frac{4}{3}A-\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}D+\frac{4}{3}E=0\\ \frac{2}{3}A-\frac{1}{24}B+\frac{1}{24}D+\frac{2}{3}E=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12}\\ B=-\frac{2}{3}\\ C=0\\ D=\frac{2}{3}\\ E=\frac{1}{12} \end{cases}$$

设函数 f(x) 充分光滑,试推导如下数值微分公式,使其截断误差为

$$O(h^4), f'(x) = \frac{1}{h}(Af(x-2h) + Bf(x-h) + Cf(x) + Df(x+h) + Ef(x+2h))_{\bullet}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=0 \\ -2A-B+D+2E=1 \\ (2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D+2E=0 \\ -\frac{4}{3}A-\frac{1}{6}B+\frac{1}{6}D+\frac{4}{3}E=0 \\ \frac{2}{3}A-\frac{1}{24}B+\frac{1}{24}D+\frac{2}{3}E=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{12} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=0 \\ D=\frac{2}{3} \\ E=\frac{1}{12} \end{cases}$$

因此数值微分公式为

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + O(h^4).$$

推导二阶导数的微分误差

 防文轩
 习题课 2
 2025 年 3 月 31 日
 15 / 17

推导二阶导数的微分误差

$$f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

推导二阶导数的微分误差

$$\begin{split} f(x) - L_2(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ f''(x) - L_2''(x) &= 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)((x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2)) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &+ 2\cdot\frac{f'''(\xi)}{3!}((x-x_0) + (x-x_1) + (x-x_2)) \end{split}$$

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 99

 防文轩
 フ製製 2

推导二阶导数的微分误差

$$\begin{split} f(x) - L_2(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ f''(x) - L_2''(x) &= 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)((x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2)) \\ &+ \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &+ 2\cdot\frac{f'''(\xi)}{3!}((x-x_0) + (x-x_1) + (x-x_2)) \\ f''(x_0) - L_2''(x_0) &= 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f'''(\xi)}{3!}\right)2h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(-6h) = O(h) \end{split}$$

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$y^{\prime}(x)=f(x,y)$$

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + f f_y \end{aligned}$$

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{split} y'(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + ff_y \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2 \end{split}$$

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{split} y'(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + f f_y \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy} y' + f_y(f_x + f f_y) + f(f_{xy} + f_{yy} f_y) \\ &= f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f f_y^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{xx} &= f_{xxx} + f_{xx} f, \end{split}$$

陈文轩 2025 年 3 月 31 日 16/17

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{split} y'(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + ff_y \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} &= f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f_y \end{split}$$

16 / 17

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{split} y''(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + ff_y \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} &= f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) &= (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y) \end{split}$$

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 99

16 / 17

陈文轩 2025 年 3 月 31 日

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{split} y'(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + ff_y \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} &= f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) &= (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_xf_y) &= f_x(f_{xx} + f_{xy}f) + f_x(f_{xy} + f_{yy}f) \end{split}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ■ 900

16 / 17

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$\begin{split} y'(x) &= f(x,y) \\ y''(x) &= f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + ff_y \\ y'''(x) &= f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y) \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{xx} &= f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{yy}f^2) &= (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_xf_y) &= f_x(f_{xx} + f_{xy}f) + f_x(f_{xy} + f_{yy}f) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ff_y^2) &= (f_x + ff_y)f_y^2 + 2ff_y(f_{xy} + f_{yy}f) \end{split}$$

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

计算 Runge-Kutta 方法中的 y''', y''''

$$y''(x) = f(x,y)$$

$$y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y) \cdot y'(x) = f_x + ff_y$$

$$y'''(x) = f_{xx} + f_{xy}y' + f_y(f_x + ff_y) + f(f_{xy} + f_{yy}f_y)$$

$$= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + ff_y^2$$

$$\frac{d}{dx}f_{xx} = f_{xxx} + f_{xx}f, \qquad \frac{d}{dx}(f_{xy})f = f_{xy}(f_x + ff_y) + (f_{xxy} + f_{xyy}f)f$$

$$\frac{d}{dx}(f_{yy}f^2) = (f_{xyy} + f_{yyy}f)f^2 + 2ff_{yy}(f_x + ff_y)$$

$$\frac{d}{dx}(f_xf_y) = f_x(f_{xx} + f_{xy}f) + f_x(f_{xy} + f_{yy}f)$$

$$\frac{d}{dx}(ff_y^2) = (f_x + ff_y)f_y^2 + 2ff_y(f_{xy} + f_{yy}f)$$

$$y''''(x) = ff_y^3 + 4f^2f_yf_{yy} + f^3f_{yyy} + f_y^2f_x + 3ff_xf_{yy} + 5ff_yf_{xy} + 3f_xf_{xy} + 3f^2f_{xxy} + f_yf_{xx} + 3ff_{xxy} + f_{xxx}$$

讨论梯形格式
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$
 的绝对稳定性, $h > 0$ 。

陈文轩 2025 年 3 月 31 日 17/17

讨论梯形格式
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$
 的绝对稳定性, $h > 0$ 。

令
$$f(x,y)=\lambda y$$
,则有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$ 。令 $z=\lambda h$,则

陈文轩 2025 年 3 月 31 日

讨论梯形格式
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$
 的绝对稳定性, $h > 0$.

令
$$f(x,y)=\lambda y$$
,则有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$ 。令 $z=\lambda h$,则
$$\xi=\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2+z}{2-z}$$
。由于 $|\xi|<1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z)<0^{(*)}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$,

讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1}))$ 的绝对稳定性, h > 0。

令
$$f(x,y)=\lambda y$$
,则有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$ 。令 $z=\lambda h$,则 $\xi=\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2+z}{2-z}$ 。由于 $|\xi|<1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z)<0^{(*)}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$,故梯形格式是 A-稳定的。

<ロ > ← □ > ← □ > ← □ > ← □ = − → へへへ

讨论梯形格式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))$ 的绝对稳定性, h>0。

令
$$f(x,y)=\lambda y$$
,则有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$ 。令 $z=\lambda h$,则
$$\xi=\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2+z}{2-z}$$
。由于 $|\xi|<1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z)<0^{(*)}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$,故梯形格式是 A-稳定的。

(*) 対
$$z = a + bi, |\xi|^2 = \frac{(2+a)^2 + b^2}{(2-a)^2 + b^2}, |\xi|^2 < 1$$
 时应有



讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1}))$ 的绝对稳定性, h > 0。

令
$$f(x,y)=\lambda y$$
,则有 $y_{n+1}=y_n+\frac{h\lambda}{2}(y_n+y_{n+1})$ 。令 $z=\lambda h$,则 $\xi=\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2+z}{2-z}$ 。由于 $|\xi|<1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(z)<0^{(*)}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\lambda)<0$,故梯形格式是 A-稳定的。

(*) 对
$$z=a+bi, |\xi|^2=\frac{(2+a)^2+b^2}{(2-a)^2+b^2}$$
, $|\xi|^2<1$ 时应有
$$(2+a)^2+b^2<(2-a)^2+b^2\Rightarrow 4a<-4a\Rightarrow a<0$$
, 即 $\mathrm{Re}(z)<0$ 。

陈文轩 2025 年 3 月 31 日 17