

# 计算方法作业 #10

陈文轩  
KFRC

更新: May 10, 2025

## 1 题目

1. (6pts) 在最小二乘法原理下求下列矛盾方程组: 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 6x_2 = 14 \\ 3x_1 + x_2 = 7.5 \\ x_1 + x_2 = 4.5 \end{cases}$$
2. (8pts) 利用最小二乘法构造二次多项式  $y = p(x)$  去拟合下列数据 (这里  $x$  代表年份,  $y$  为人数), 并计算  $y(2015)$ , 结果精确到小数点后一位。

$x$	2010	2011	2012	2013	2014
$y$	134091	134735	135404	136072	136782

3. (6pts) 给出下列数据, 用最小二乘法求形如  $y = a \cos x + b \sin x$  的经验公式。

$x_i$	0.20	0.25	0.30	0.50
$y_i$	1.36	1.20	1.02	0.32

4. (12pts) 利用最小二乘法构造一个二次多项式  $p(x)$ , 去拟合下列人口数据 ( $x$  代表年份,  $p(x)$  为人数, 单位: 亿), 并分别预测一下2024年末和2034年末的人口数, 计算结果精确到小数点后3位。

年份	年末人口	出生人口	死亡人口	出生率‰	死亡率‰	城镇人口	乡村人口	城镇化率‰
2018	14.0541	0.1523	0.0993	10.84	7.07	8.6433	5.4108	61.5
2019	14.1008	0.1465	0.0998	10.39	7.08	8.8426	5.2582	62.7
2020	14.1212	0.1202	0.09976	8.51	7.06	9.022	5.0992	63.9
2021	14.1260	0.1062	0.1014	7.52	7.18	9.1425	4.9835	64.7
2022	14.1175	0.0956	0.1041	6.77	7.37	9.2071	4.9104	65.22
2023	14.0967	0.0902	0.1110	6.40	7.87	9.3267	4.7733	66.15

Deadline:2025.5.11

## 2 解答

$$1. \text{ 转化为矩阵形式 } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 7.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}, x = (A^T A)^{-1} A^T b = \left( \frac{593}{220}, \frac{87}{55} \right)^T$$

$$2. \text{ 令 } t = x - 2010, \text{ 则矩阵形式为 } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 134091 \\ 134735 \\ 135404 \\ 136072 \\ 136782 \end{bmatrix}。$$

解为  $(A^T A)^{-1} A^T b \approx (9.3571, 634.4714, 134091.71)^T$ , 对应  $x = t + 2010$ , 有

$$p(x) = 9.3571(x - 2010)^2 + 634.4714(x - 2010) + 134091.71, p(2015) \approx 137498.0。$$

$$3. A = \begin{bmatrix} \cos 0.2 & \sin 0.2 \\ \cos 0.25 & \sin 0.25 \\ \cos 0.3 & \sin 0.3 \\ \cos 0.5 & \sin 0.5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.9801 & 0.1987 \\ 0.9689 & 0.2474 \\ 0.9553 & 0.2955 \\ 0.8776 & 0.4794 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1.36 \\ 1.20 \\ 1.02 \\ 0.32 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.00 \\ -3.00 \end{bmatrix}$$

$$4. \text{ 令 } t = x - 2018, \text{ 则矩阵形式为 } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 14.0541 \\ 14.1008 \\ 14.1212 \\ 14.1260 \\ 14.1175 \\ 14.0967 \end{bmatrix}。$$

解为  $(A^T A)^{-1} A^T b \approx (-0.00809, 0.0534, 14.058)^T$ , 对应  $x = t + 2018$ , 有

$$p(x) = -0.00809(x - 2018)^2 + 0.0534(x - 2018) + 14.058$$

$$p(2024) \approx 14.087, p(2034) \approx 12.841。$$