

计算方法作业 #6

陈文轩

KFRC

更新: April 12, 2025

1 题目

注意: 须给出解题过程或步骤, 不可直接写答案; 必要时, 可使用计算器帮助。

$$e = 2.7182818285$$

- (6pts) 利用牛顿迭代公式估算 $\ln 2$ 的值 (可取 $f(x) = e^x - 2 = 0$), 取初值 $x_0 = 0.618$, 迭代 5 次, 列表计算 $x_i, i = 1, 2, \dots, 5$ 。请估计 x_5 的有效数字位数 (计算 x_5 时, 请保留尽量多的小数点位数);
- (6pts) 设 $n > 1$, 给出用牛顿法计算 $\sqrt[n]{a} (a > 0)$ 时的迭代公式, 并用它来计算 $\sqrt[5]{2025}$, 取初值 $x_0 = 5.0$, 求 x_4 ;
- (10pts) 写出对方程 $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ 求根时的 Newton 迭代公式 $x_n = \varphi(x_{n-1})$;
- (10pts) 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的光滑实值函数, $r \in \mathbb{R}$ 为 $f(x)$ 的一个 p 重根 ($p \geq 2$), 试推导迭代公式 $x_{k+1} = x_k - p \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 在根 r 附近的收敛阶。

Deadline: 2025.4.13

2 解答

1. $f(x) = e^x - 2, f'(x) = e^x$, 迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 2}{e^{x_n}}$ 。

$$x_0 = 0.618, x_1 = 0.69600, x_2 = 0.693151, x_3 = 0.69314718056, x_4 = 0.6931471805599453,$$

$$x_5 = 0.69314718055994530941723212145818。实际上, x_5 的误差在 10^{-45} 量级。$$

2. $f(x) = x^n - a, f'(x) = nx^{n-1}$, 迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^n - a}{nx_n^{n-1}}$

$$x_0 = 5, x_1 = 4.648, x_2 = 4.5858, x_3 = 4.58464, x_4 = 4.58443。$$

3. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2, f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, 迭代公式为 $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^3 - 4x_n^2 + 5x_n - 2}{3x_n^2 - 8x_n + 5}$ 。

4. 设 $f(x) = (x-r)^p g(x), g(r \neq 0), f'(x) = p(x-r)^{p-1} g(x) + (x-r)^p g'(x)$, 令 $e_k = x_k - r$,

则 r 附近 $f(x_k) = e_k^p g(x_k)$, $f'(x_k) = e_k^{p-1}(pg(x_k) + e_k g'(x_k))$, 带入迭代公式,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e_k^p g(x_k)}{e_k^{p-1}(pg(x_k) + e_k g'(x_k))} = x_k - \frac{e_k g(x_k)}{pg(x_k) + e_k g'(x_k)}, \text{ 两边同时减去 } r,$$

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= e_k - \frac{e_k g(x_k)}{pg(x_k) + e_k g'(x_k)} = e_k \left(1 - \frac{pg(x_k)}{pg(x_k) + e_k g'(x_k)}\right) = e_k \cdot \frac{e_k g'(x_k)}{pg(x_k) + e_k g'(x_k)} \\ &= e_k^2 \cdot \frac{g'(x_k)}{pg(x_k) + e_k g'(x_k)} \stackrel{C := \frac{g'(r)}{pg(r)}}{=} C e_k^2 \end{aligned}$$

因此迭代公式是二次收敛的。