计算方法作业 #9

陈文轩
KFRC

更新：April 25, 2025

1 题目

1. (4pts) 设 n 阶实方阵 A 有相异的特征根 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$。对给定的实数 $\alpha \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，利用规范幂法或规范反幂法，设计一个能计算离 α 距离最近的矩阵 A 的特征根的迭代格式（注：不容许对矩阵求逆）。
2. (8pts) 考虑用 Jacobi 方法计算矩阵 $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值。求对 A 作一次 Givens 相似变换时的 Givens（旋转）变换矩阵 Q（要求相应的计算效率最高）以及 Givens 变换后的矩阵 B（其中，$B = Q^\top AQ$）。
3. (8pts) 设 $p < q$，$Q(p, q, \theta)$ 为 n 阶Givens矩阵，θ 为角度。记

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n} = Q^\top(p, q, \theta)AQ(p, q, \theta),$$

假设 $a_{pq} \neq 0$，证明：当 θ 满足 $\cot 2\theta = \dfrac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2.$$

提示：只需证 $b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$。
4. (10pts) 设 $A = \dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & 7 & 24 \\ 0 & 50 & -25 \\ 24 & 24 & -7 \end{bmatrix}$，利用 Householder 矩阵，求 A 的正交分解，即 $A = QR$，其中 Q、R 分别为 Householder 正交阵和上三角阵。

Deadline:2025.5.5

2 解答