线性代数习题课讲义

作者：???

组织：KFRC

时间：99999.13.32

版本：1.0

目录

第一章 矩阵之前

1.1 作业解答

1.1.1 周二

作业 1.1 (P114 T514)

计算 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{100}$。

1.2 One More Thing

1.2.1 数与数域

1.2.1.1 复数与单位根

定理 1.2 (Euler)

对于任意实数 θ，有 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$。特别地，当 $\theta = \pi$ 时，有 $e^{i\pi} + 1 = 0$.

例题 1.1 计算 $\sum\limits_{j=0}^{n} \cos j\theta$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{n} \sin j\theta$.

解 对 $\theta = 2k\pi$，有 $\cos^i\theta = 1$，$\sin^i\theta = 0$，故 $\sum\limits_{i=0}^{n} \cos i\theta = n + 1$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \sin i\theta = 0$.

对 $\theta \neq 2k\pi$，令 $T = \sum\limits_{j=1}^{n} e^{ij\theta} = \sum\limits_{j=0}^{n} \cos j\theta + i\sum\limits_{j=1}^{n} n\sin^j\theta$, 有 $e^{i\theta}T = T + e^{i(n+1)\theta} - 1$，故 $T = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.

分别计算实部虚部，有 $\sum\limits_{i=0}^{n} \cos i\theta = \dfrac{1 - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)}$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \sin i\theta = \dfrac{\sin(n+1)\theta - \sin\theta}{2(1 - \cos\theta)}$.

定义 1.3

n 次单位根是指

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \cdots, n-1$$

这 n 个复数，记 $\omega_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + isin\dfrac{2\pi}{n}$，则他们可以写为 $\omega_n^0, \omega_n^1, \cdots, \omega_n^{n-1}$。

之所以叫单位根，是因为其满足

命题 1.4 (单位根的性质)

n 次单位根是方程 $x^n = 1$ 的全部根.

根据**因式定理**，可以推出

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \omega_n^k)$$

对比各项系数可以得到一些恒等式。事实上最常用的为：

命题 1.5 (单位根恒等式)

1.
$$\sum_{k=0}^{n-1}(\omega_n^k)^m=\begin{cases} n & n\mid m \\ 0 & n\nmid m \end{cases}$$

2.
$$\omega_n^a=\omega_n^{a\pm n}$$

3.
$$\overline{\omega_n^a}=\omega_n^{-a}$$

4.
$$\omega_{mn}^{ma}=\omega_n^a$$

第二个恒等式就是最重要的**循环**性质。出于循环，它可以将一些东西按照模 n 的余数分类。

例题 1.2 计算 $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k}$，$\binom{n}{m}$ 为组合数 C_n^m，$\lfloor x\rfloor$ 为向下取整，即不大于 x 的最大整数。

解 考虑三次单位根 $\omega_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，由二项式定理有

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\cdots \tag{1.1}$$

$$(1+\omega_3)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega_3^k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\omega_3+\binom{n}{2}\omega_3^2+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\cdots \tag{1.2}$$

$$(1+\omega_3^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega_3^{2k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\omega_3^2+\binom{n}{2}\omega_3+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}\omega_3^2+\cdots \tag{1.3}$$

将 (1.1),(1.2) 和 (1.3) 相加，注意到 $1+\omega_3+\omega_3^2=0$，有

$$(1+1)^n+(1+\omega_3)^n+(1+\omega_3^2)^n=3\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k}$$

即有

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{3k}=\frac{1}{3}(2^n+(1+\omega_3)^n+(1+\omega_3^2)^n)$$

练习 1.1 计算 $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{3}\rfloor}\binom{n}{3k+1}$。

例题 1.3 计算 $\sum\limits_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$。

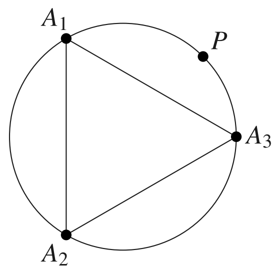
解

$$\binom{k}{m}=const\left(\frac{(1+x)^k}{x^m}\right),\text{其中}const(f(x))\text{表示}f(x)\text{的常数项}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=const\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{(1+x)^k}{x^m}\right)=const\left(\frac{1}{x^m}\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}\right)=const\left(\frac{(1+x)^{n+1}}{x^{m+1}}\right)=\binom{n+1}{m+1}.$$

例题 1.4 单位圆内接正 n 边形 $A_1A_2A_3\ldots A_n$ 中，P 为单位圆上一点，证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}|PA_k|^2=2n$。

证明



放在复平面上，设 $A_1=\omega_n$，则 $A_k=\omega_n^k, \forall k=1,2,\cdots,n$。设 $P=z$。

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|PA_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|z-\omega_n^k|^2=\sum_{k=1}^{n}(z-\omega_n^k)(\overline{z}-\overline{\omega_n^k})=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\omega_n^k\overline{z}-z\overline{\omega_n^k}+1\right)=2n$$

最后一个等号用到 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_n^k=0$。

1.2.1.2 数环、数域

定义 1.6 (数环、数域)

若复数域 $\mathbb{C}$ 的某个包含 1 的子集 K 满足以下条件：

1. $a,b\in K\Rightarrow a+b\in K$;
2. $a,b\in K\Rightarrow a-b\in K$;
3. $a,b\in K\Rightarrow ab\in K$;

则称 K 为数环。

若还满足 $a\in K, a\neq 0\Rightarrow a^{-1}\in K$，则称 K 为数域。

不难验证：

命题 1.7 (数环、数域-例子)

有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$、复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域。整数集 $\mathbb{Z}$ 是数环但不是数域。

笔记 当然，还有形态更复杂的数环和数域，例如所有 $a+bi$ 在 $a,b\in\mathbb{Z}$ 时构成数环，$a,b\in\mathbb{Q}$ 构成数域。

对于究竟怎样的集合是数环/数域，有一个简单的结论：

命题 1.8 (最小的数环、数域)

任何数环包含 $\mathbb{Z}$，任何数域包含 $\mathbb{Q}$。

1.2.2 杂项

1.2.2.1 求和符号练习

线性代数中求和符号是一个重要的工具，有时候可以用来简化问题，有时候可以用来构造问题。在中学时，我们知道 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，除此之外，还有多重求和及集合求和。以下给出定义：

定义 1.9 (多重求和及集合求和)

(1)(多重求和) $\sum\limits_{a_1,a_2,\cdots,a_m=1}^{n} x_{a_1a_2\cdots a_m} \triangleq \sum\limits_{a_1=1}^{n}\sum\limits_{a_2,a_3,\cdots,a_m=1}^{n} x_{a_1a_2\cdots a_m} = \cdots = \sum\limits_{a_1=1}^{n}\sum\limits_{a_2=1}^{n}\cdots\sum\limits_{a_m=1}^{n} x_{a_1a_2\cdots a_m}$

(2)(集合求和) $\sum\limits_{e\in\Lambda} x_e$ 用于表示对集合 Λ 中所有元素 e 的 x_e 值求和。集合 Λ 是索引集合，可以是有限的或无限的。索引集合包含所有我们想要求和的索引 e。对于集合 Λ 中的每个元素 e，x_e 表示与 e 相关联的数值。$\sum$ 表示对所有 x_e 进行累加，其中 e 遍历集合 Λ 的所有元素。例如 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{e\in\{1,2,\cdots,n\}} a_e$。

集合 Λ 也可以被替换为某一条件，例如 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{1\le i\le n} a_i$，$\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}$

♣

下面是一些求和符号的练习。

例题 1.5 证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_ib_j = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_ib_j = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\right)$

证明 显然矩阵 $\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_m \end{bmatrix}$ 的元素按行求和等于按列求和，故得证。

例题 1.6 计算 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i+j)^2$

解

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+j^2+2ij) = n\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = 2n\cdot\frac{n(n+a)(2n+1)}{6} + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{3} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}\end{aligned}$$

例题 1.7(Chebyshev) 若 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n, b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$，则 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j\right)\le n\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k$。

证明 只需证明 $n\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\ge 0$。令 $S=\sum\limits_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$.

$$\begin{aligned}2S &= \sum_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j) + \sum_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i) = \sum_{i,j=1}^{n}(a_j-a_i)(b_j-b_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}(a_jb_j+a_ib_i-a_ib_j-a_jb_i) = 2n\sum_{k=1}^{n} a_kb_k - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_ib_j = 2\left(n\sum_{k=1}^{n} a_kb_k - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)\right)\end{aligned}$$

例题 1.8 记 $H_k=\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$，(1) 求 $\sum\limits_{1\le j<k\le n}\frac{1}{k-j}$(用 H_k 表示)，(2) 证明 $\sum\limits_{j=1}^{n-1} H_j = nH_n - n$。

解

(1) $\sum\limits_{1\le j<k\le n}\frac{1}{k-j} = \sum\limits_{k=2}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{1}{k-j} = \sum\limits_{k=2}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} = \sum\limits_{k=2}^{n} H_{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} H_k$

(2) $\sum\limits_{j=1}^{n-1} H_j = \sum\limits_{j=1}^{n-1}\sum\limits_{l=1}^{j}\frac{1}{l} = \sum\limits_{l=1}^{n-1}\sum\limits_{j=l}^{n-1}\frac{1}{l} = \sum\limits_{l=1}^{n-1}\frac{n-l}{l} = \sum\limits_{l=1}^{n}\frac{n-l}{l} = \sum\limits_{l=1}^{n}\left(\frac{n}{l}-1\right) = nH_n - n$

例题 1.9(Abel) 记 $B_n=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i$，则 $S=\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i = B_na_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} B_i(a_{i+1}-a_i)$。

证明

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=1}^{n} a_i B_{i-1} = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i$$
$$= a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})B_i - a_1 B_0 = B_n a_n - \sum_{i=1}^{n-1} B_i(a_{i+1} - a_i)$$

1.2.2.2 组合恒等式

引理 1.10

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} (0 \leq k \leq n)$$
2. $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
3. $$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

定理 1.11 (二项式定理)

对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 及 $n \in \mathbb{N}^*$，有 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$。

证明 归纳。利用引理1.10(3)，有

$$(1+x)^n = (1+x)\cdot(1+x)^{n-1} = (1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)x^k + 1 + x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

推论 1.12

利用上述定理和引理，可以得到：

1. $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$
2. $$\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\text{为偶数}}}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\text{为奇数}}}\binom{n}{k} = 2^{n-1}$$
3. $$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\text{。特别地，}\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$
4. $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$
5. $$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

6.
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$$

证明 (1)(2) 对 $(1+x)^n$ 使用二项式定理，分别取 $x=1$ 和 $x=-1$ 即可。

(3) 注意到 $(1+x)^{m+n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^m$，分别使用二项式定理，展开后比较 x^k 系数。

(4)$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ 两侧对 x 求导，并取 $x=1$ 即可。

(5) 见例题1.3。

(6) 利用引理1.10**(3)** 归纳即可。

例题 1.10 设 $n\le m$，证明：$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$。

证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}&=[x^m](1+x)^n\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(1+x)^n=[x^m](1+x)^n(2+x)^m\\&=[x^m](1+x)^n\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^kx^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k\end{aligned}$$

其中 $[x^m]f(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的 m 次项系数。

第二章 行列式

2.1 作业解答

2.2 更多、更多的行列式

2.2.1 行列式的定义

行列式具有多种定义，以下只列出常见的三种，请读者自行验证它们的等价性。

逆序数定义又称为行列式的完全展开定义。具体表述为：

定义 2.1 (逆序数定义)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵，定义行列式

$$\det A=\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\triangleq\sum_{\sigma\in S_n}2(\chi_{A_n}(\sigma))-\frac{1}{2})a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

其中 χ 是示性函数，S_n 是 n 阶置换群，A_n 是 n 阶交错群。

笔记 $2(\chi_{A_n}(\sigma))-\frac{1}{2})$ 本质上是检验置换 σ 的奇偶性。对 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}$,$2(\chi_{A_n}(\sigma))-\frac{1}{2})\equiv(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$。

归纳法定义又称为按行展开法定义。该定义直接给出了行列式的计算式（展开式）。

定义 2.2 (归纳法定义)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵，定义行列式 $\det A$ 是按下列法则确定的一个数：

1. 当 $n=1$ 时，$\det a_{11}=a_{11}$；
2. 当 $n\geq 2$ 时，$\det A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$，其中 A_{1j} 是 A 中元 a_{1j} 的代数余子式。

由这一定义可以得到：

定理 2.3 (Laplace 展开定理)

设 A 是 n 阶方阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，对任意正整数 $r<n$，任意取定 r 个指标 $1\leq i_1<i_2,\cdots<i_r\leq n$，则 $\det A$ 的值等于它的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行（或列）元组成的所有 r 阶子式分别与它们的代数余子式的乘积之和。即

$$\begin{aligned}\det A&=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{r}(i_k+j_k)}A\begin{pmatrix}i_{r+1}&i_{r+2}&\cdots&i_n\\j_{r+1}&j_{r+2}&\cdots&j_n\end{pmatrix}\\&=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n}A\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_r\\i_1&i_2&\cdots&i_r\end{pmatrix}(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{r}(i_k+j_k)}A\begin{pmatrix}j_{r+1}&j_{r+2}&\cdots&j_n\\i_{r+1}&i_{r+2}&\cdots&i_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_n$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 去掉 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 后剩下的数按从小到大排列得到，$j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 去掉 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 后剩下的数按从小到大排列得到。

证明 此定理的证明已超出线性代数 B1 的范围，但是可以参考《线性代数（李炯生 查建国 王新茂）》教材的

2.3 节。

例题 2.1 设 $\det A$ 是 n 阶行列式，正整数 $r < n$。若 $\det A$ 的所有 r 阶子式都等于零，证明：$\det A = 0$。

证明 由 Laplace 展开定理，$\det A$ 的 r 阶子式等于零，有 $\det A$ 的展开式中求和的每一项都是 0，故 $\det A = 0$。

行列式的公理化定义将行列式归结为满足 3 条性质的线性映射，而不是直接给出行列式的具体形式。

定义 2.4 (公理化定义)

n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$ 上的规范反对称 n 重线性函数称为数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶行列式函数，简称 n 阶行列式。换言之，行列式函数 $\det : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ 是满足以下三条性质的函数：

1. 规范性：$\det(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$，其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组标准正交基；
2. 反对称性：$\forall 1 \le i < j \le n, \det(\cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_j, \cdots) = -\det(\cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_i, \cdots)$；
3. 线性性：$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \det(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \lambda \det(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \mu \det(\beta_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$。

♣

2.2.2 行列式计算练习

矩阵/行列式打洞的神秘技巧并不是线性代数的核心，但为了考试，请大家务必掌握。

2.2.2.1 定义法/降阶法/化为上三角

例题 2.2 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$。

解

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xlongequal[-2r_1 \to r_4]{\substack{r_1 \to r_2 \\ -2r_1 \to r_3}} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[3r_2 \to r_4]{-3r_2 \to r_3} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -9 & -42 \\ 0 & 0 & 1 & 46 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} -9 & -42 \\ 1 & 46 \end{bmatrix} = -372$$

例题 2.3 计算 $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 0 \\ 13 & 12 & 11 & 0 & 10 \end{bmatrix}$。

解

$$\det\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&3&2&0\\0&5&4&0&0\\9&8&7&6&0\\13&12&11&0&10\end{bmatrix}\xlongequal{\text{第一行展开}}(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix}0&0&3&0\\0&5&4&0\\9&8&7&0\\13&12&11&10\end{bmatrix}\xlongequal{\text{第一行展开}}-(-1)^{1+3}\cdot 3\det\begin{bmatrix}0&5&0\\9&8&0\\13&12&10\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一行展开}}-(-1)^{1+2}\cdot 15\det\begin{bmatrix}9&0\\13&10\end{bmatrix}=15\cdot 90=1350$$

例题 2.4 计算 $\det\begin{bmatrix}x&y&&&\\&x&y&&\\&&x&\ddots&\\&&&\ddots&y\\y&&&&x\end{bmatrix}_{n\times n}$。

解 $\det\begin{bmatrix}x&y&&&\\&x&y&&\\&&x&\ddots&\\&&&\ddots&y\\y&&&&x\end{bmatrix}\xlongequal{\text{第一列展开}}x\cdot\det\begin{bmatrix}x&y&&\\&x&\ddots&\\&&\ddots&y\\&&&x\end{bmatrix}+(-1)^{n+1}y\cdot\begin{bmatrix}y&&&\\x&y&&\\&\ddots&\ddots&\\&&x&y\end{bmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n$

笔记 有一定规律 (元素大量重复) 矩阵化为上三角的重要结构:$(1,1,\cdots,1)$

例题 2.5 计算 $\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{bmatrix}$

解

$$\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{bmatrix}\xlongequal[-a^4r_1\to r_4]{\substack{-ar_1\to r_2\\-a^2r_1\to r_3}}\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\0&b^4-a^4&c^4-a^4&d^4-a^4\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}b-a&c-a&d-a\\b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\b^4-a^4&c^4-a^4&d^4-a^4\end{bmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\a+b&a+c&a+d\\(a^2+b^2)(a+b)&(a^2+c^2)(a+c)&(a^2+d^2)(a+d)\end{bmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&(a^2+c^2)(a+c)-(a^2+b^2)(a+b)&(a^2+d^2)(a+d)-(a^2+b^2)(a+b)\end{bmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\det\begin{bmatrix}c-b&d-b\\(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)&(d-b)(a^2+b^2+d^2+ab+bd+ad)\end{bmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

笔记 如果没有 $(1,1,\cdots,1)$，一般先尝试逐行/逐列求和。

例题 2.6 计算 $\det\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$

解 $\det\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}3&3&3&3\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}=3\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\xlongequal[c_1\leftrightarrow c_4]{c_2\leftrightarrow c_3}3\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=-3$

例题 2.7 计算 $\det\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}_{n\times n}$

解

$$\det\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}$$
$$=(x+(n-1)a)\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{bmatrix}=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

2.2.2.2 加边

首先回忆这个典型：

例题 2.8 计算 $\Delta=\det\begin{bmatrix}a&b&b&\cdots&b\\c&d&&&\\c&&d&&\\\vdots&&&\ddots&\\c&&&&d\end{bmatrix}_{n\times n}$

解 若 $d=0$，显然有 $\Delta=0$。

$d\neq0$ 时，$\det\begin{bmatrix}a&b&b&\cdots&b\\c&d&&&\\c&&d&&\\\vdots&&&\ddots&\\c&&&&d\end{bmatrix}\xlongequal[\forall k=2,\cdots,n]{-\frac{c}{d}c_k\to c_1}\det\begin{bmatrix}a-\dfrac{bc}{d}(n-1)&b&b&\cdots&b\\0&d&&&\\0&&d&&\\\vdots&&&\ddots&\\0&&&&d\end{bmatrix}=d^{n-1}\left(a-\dfrac{bc}{d}(n-1)\right)$

这启发了对前面一道例题的另外一种解法。

例题 2.9 计算 $\det\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}_{n\times n}$

解 $\det\begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & & & \\ -1 & & x-a & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & x-a \end{bmatrix} = (x-a)^n\left(1+\frac{a}{x-a}n\right)$

显然，两种方法的结果是一致的。

笔记 如果出现大量重复元素，但是找不到 $(1,1,\cdots,1)$ 时，可以尝试加边。

先介绍一个结论：

命题 2.5

设准上三角形方阵 $A=(A_{ij})_{k\times k}$ 的每个对角块 A_{kk} 都是方阵，则有

$$\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{k}\det A_{jj}$$

证明 首先考虑 $k=2$ 的情况，设

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1.r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

考虑 $\det A$ 的完全展开式中的非零项，若 $\prod_{i=1}^{n}a_{ij_i}\neq 0$，则必然有 $(j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n)$ 是 $(r+1,r+2,\cdots,n)$ 的一个排列，进而 $(j_1,j_2,\cdots,j_r)$ 是 $(1,2,\cdots,r)$ 的一个排列，故 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)=\tau(j_1,j_2,\cdots,j_r)+\tau(j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n)$。因此，

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\substack{1\le j_1,\cdots,j_r\le r\\ r+1\le j_{r+1},\cdots,j_n\le n}}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_r)+\tau(j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n)}\prod_{i=1}^{n}a_{ij_i}\\ &=\left(\sum_{1\le j_1,\cdots,j_r\le r}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_r)}\prod_{i=1}^{r}a_{ij_i}\right)\left(\sum_{r+1\le j_{r+1},\cdots,j_n\le n}(-1)^{\tau(j_{r+1},j_{r+2},\cdots,j_n)}\prod_{i=r+1}^{n}a_{ij_i}\right)\\ &=\det A_{11}\det A_{22}\end{aligned}$$

当 $k\ge 3$ 时 A 可以分块成 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & B \end{bmatrix}$，从而 $\det A=\det A_{11}\det B$。同理 B 可以继续分块，故有 $\det A=\prod_{j=1}^{k}\det A_{jj}$。

例题 2.10 计算 $\det\begin{bmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{bmatrix}$

解

$$
\det\begin{bmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & 1+x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}
$$

$$
=\det\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & 1+x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & 1+x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}
$$

$$
\xlongequal[i=n,\cdots,2]{\text{前者}\quad -c_i\to c_{i-1}}\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & x_1-1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1)\\ 1 & x_2-1 & x_1(x_2-1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_1-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n-1 & x_n(x_1-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_1-1)\end{bmatrix}+2\det\begin{bmatrix}x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}
$$

$$
=-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\cdot\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}+2\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}
$$

$$
=(2\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1))\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)
$$

最后一步使用到 Vandermonde 行列式的性质，会在后续提及。

除了加 $(1,1,\cdots,1)$ 之外，还有可能需要添加其他类型的边，这需要根据行列式的特殊性质来判断。

例题 2.11 计算 $\det\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{bmatrix}$

解

$$
\det\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 3 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3\end{bmatrix}
$$

$$\xlongequal{\text{第四行展开}} (-1)(-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & n-4 & \\ & & & & & & n-3 \end{bmatrix} \xlongequal{\text{命题2.5}} \det\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}(n-3)! = 6(n-3)!$$

例题 2.12 证明：$\det\begin{bmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} = \det A + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} A_{kj}$。

证明

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11}+x_1 & a_{12}+x_2 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ 0 & a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1}+x_1 & a_{n2}+x_2 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一行展开}} \det A + \sum_{j=1}^{n} x_j(-1)^{j+1+1}(-1)\det\begin{bmatrix} 1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列展开}} \det A + \sum_{j=1}^{n} x_j(-1)^{j+3}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}M_{kj} = \det A + \sum_{j=1}^{n} x_j(-1)^{j+3+1+k}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}A_{kj}$$

$$= \det A + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} A_{kj}$$

例题 2.13 计算 $\det\begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix}$

解 $n = 1,2$ 时自行计算。$n \geq 3$ 时

$$\det\begin{bmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ 0 & a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第一项为 0}]{\text{第一列展开}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \det \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & \cdots & a_{k-1} \\ a_{k+1} & \cdots & a_{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} = 0$$

例题 2.14 计算 $\det \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix}$

解

$$\det \begin{bmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & & & \\ -x_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -x_n & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1+\sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

2.2.2.3 逐行/列加减

对相邻行与行/列与列之间关联度高 (如相差一定倍数) 时，可以采用逐行/列加减的方法。

例题 2.15 计算 $\det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$

解 $$\det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix} \xlongequal[-r_1 \to r_3]{-r_1 \to r_2} \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y-x & y-x & y-x \\ z-x & z-x & z-x \end{bmatrix} = 0$$

该方法也适用于行之间差距不大的情形。

例题 2.16 计算 $\det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & x & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & x \end{bmatrix}$

解
$$\det\begin{bmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\1&x&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\1&a_1&x&\cdots&a_{n-1}&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_1&a_2&\cdots&x&a_n\\1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&x\end{bmatrix}\xlongequal[\forall k=2,\cdots,n+1]{-r_1\to r_k}\det\begin{bmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&a_n\\0&x-a_1&0&\cdots&0&0\\0&0&x-a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a_{n-1}&0\\0&0&0&\cdots&0&x-a_n\end{bmatrix}=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)$$

例题 2.17 计算 $\det\begin{bmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{bmatrix}$

解
$$\det\begin{bmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{bmatrix}\xlongequal[k=1,2,3]{-c_k\to c_{k+1}}\det\begin{bmatrix}a^2&2a+1&2a+3&2a+5\\b^2&2b+1&2b+3&2b+5\\c^2&2c+1&2c+3&2c+5\\d^2&2d+1&2d+3&2d+5\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a^2&2a+1&2&2\\b^2&2b+1&2&2\\c^2&2c+1&2&2\\d^2&2d+1&2&2\end{bmatrix}$$
$$=0$$

例题 2.18 计算 $\det\begin{bmatrix}1&a&a^2&\cdots&a^{n-1}\\a^{n-1}&1&a&\cdots&a^{n-2}\\a^{n-2}&a^{n-1}&1&\cdots&a^{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a^2&a^3&\cdots&1\end{bmatrix}$

解
$$\det\begin{bmatrix}1&a&a^2&\cdots&a^{n-1}\\a^{n-1}&1&a&\cdots&a^{n-2}\\a^{n-2}&a^{n-1}&1&\cdots&a^{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a^2&a^3&\cdots&1\end{bmatrix}\xlongequal[\forall k=1,\cdots,n-1]{-ar_{k+1}\to r_k}\det\begin{bmatrix}1-a^n&0&0&\cdots&0\\0&1-a^n&0&\cdots&0\\0&0&1-a^n&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a^2&a^3&\cdots&1-a^n\end{bmatrix}=(1-a^n)^{n-1}$$

笔记 这题中的矩阵被称为轮换矩阵，我们会在后面讨论一般情形下的行列式。

例题 2.19 计算 $f(x)=\det\begin{bmatrix}x&-1&&&&\\&x&-1&&&\\&&x&-1&&\\&&&\ddots&\ddots&\\&&&&x&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&x+a_{n-1}\end{bmatrix}$

解
$$\det\begin{bmatrix}x&-1&&&&\\&x&-1&&&\\&&x&-1&&\\&&&\ddots&\ddots&\\&&&&x&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&x+a_{n-1}\end{bmatrix}\xlongequal[\forall k=n-1,\cdots,1]{xc_{k+1}\to c_k}\begin{bmatrix}0&-1&&&&\\&0&-1&&&\\&&0&-1&&\\&&&\ddots&\ddots&\\&&&&0&-1\\x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k&*&*&\cdots&*&x+a_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列展开}} (x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k)(-1)^{n+1} \det(-I_{n-1}) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

笔记 实际上，这个例子并不平凡。题中所给出的矩阵与一个特殊的矩阵相关，这个矩阵是多项式 $f(x)$ 的友矩阵。以下给出定义：

定义 2.6 (友矩阵)

设 $f(x) = x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 次首一多项式，则称 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}$ 为 $f(x)$ 的友矩阵。此时显然有 $\det(xI_n - A) = f(x)$，即 A 的特征多项式为 $f(x)$。

笔记 友矩阵可用于求数列通项，同时也与最小多项式，给定域上的相似标准型有关。

例题 2.20 计算 $\Delta = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ & 2 & -1 & & & \\ & & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{bmatrix}$

解 令 $f(x) = x^n + \sum\limits_{k=0}^{n-2} 2x^k$，则 $\Delta = f(2) = 2^{n+1} - 2$。

例题 2.21 计算 Vandermonde 行列式：

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

解

$$\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) \xlongequal[\forall k=n,\cdots,2]{-a_n c_{k-1} \to c_k} \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 - a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ 1 & a_2 - a_n & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1}(a_k - a_n) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列展开}} (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-1}(a_k - a_n) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)\Delta_{n-1}(a_1, a_2, \cdots, a_n - 1)$$

又有 $\Delta_1 = 1, \Delta_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$，故归纳有 $\Delta_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$。

以下是一些 Vandermonde 行列式的应用。

例题 2.22 计算 $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1+x_1 & 1+x_2 & 1+x_3 & \cdots & 1+x_n \\ x_1+x_1^2 & x_2+x_2^2 & x_3+x_3^2 & \cdots & x_n+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^n & x_2^{n-1}+x_2^n & x_3^{n-1}+x_3^n & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^n \end{bmatrix}$

解

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1+x_1 & 1+x_2 & 1+x_3 & \cdots & 1+x_n \\ x_1+x_1^2 & x_2+x_2^2 & x_3+x_3^2 & \cdots & x_n+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^n & x_2^{n-1}+x_2^n & x_3^{n-1}+x_3^n & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^n \end{bmatrix} \xrightarrow[\forall k=1,\cdots,n-1]{-r_k\to r_{k+1}} \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

例题 2.23 计算 $\det\begin{bmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b^{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{bmatrix}$

解

$$\det\begin{bmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b^{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n+1}a_k^n \det\begin{bmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}a_k^n\cdot\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right) = \prod_{1\le i<j\le n+1}(a_ib_j-a_jb_i)$$

例题 2.24(Lagrange 插值) 设 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{F}$ 各不相同，$b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{F}$，证明：存在唯一的 $n-1$ 次多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$，使得 $f(a_i)=b_i,\forall i$。

证明 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kx^k$ 满足条件，则

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1 \\ c_0+c_1a_2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2 \\ \quad\vdots \\ c_0+c_1a_n+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

由 Vandermonde 行列式的性质知系数矩阵可逆，故解存在唯一。

例题 2.25 证明：$\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k=0 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2=0 \\ \quad\vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n=0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{C}$ 上只有零解。

证明 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是一组非零解，$(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ 是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中互异非零的值，$(l_1,l_2,\cdots,l_k)$ 是对

应出现次数，则 $\sum_{j=1}^{k} l_j > 0 \Rightarrow l_j$ 不全为 0。此时原方程组即

$$\begin{cases} l_1y_1 + l_2y_2 + \cdots + l_ky_k = 0 \\ l_1y_1^2 + l_2y_2^2 + \cdots + l_ky_k^2 = 0 \\ \quad\vdots \\ l_1y_1^n + l_2y_2^n + \cdots + l_ky_k^n = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{取前}k\text{个}} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^k & y_2^k & \cdots & y_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0, \text{矛盾。}$$

例题 2.26 证明：对 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n-1} k!$ 整除 $\Delta_n = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$。

证明 令 $f_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$，则 $\dfrac{f_k(x)}{k!} = \dbinom{k}{x}$。在 $m < n$ 时视 $\dbinom{m}{n} = 0$。

$$\text{则 } \Delta_n = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \xlongequal{\text{适当的列变换}} \det \begin{bmatrix} 1 & f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_{n-1}(a_1) \\ 1 & f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_{n-1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_{n-1}(a_n) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_n}{\prod_{k=1}^{n-1} k!} = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{f_1(a_1)}{1!} & \frac{f_2(a_1)}{2!} & \cdots & \frac{f_{n-1}(a_1)}{(n-1)!} \\ 1 & \frac{f_1(a_2)}{1!} & \frac{f_2(a_2)}{2!} & \cdots & \frac{f_{n-1}(a_2)}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{f_1(a_n)}{1!} & \frac{f_2(a_n)}{2!} & \cdots & \frac{f_{n-1}(a_n)}{(n-1)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \cdots & \binom{a_1}{n-1} \\ 1 & \binom{a_2}{1} & \binom{a_2}{2} & \cdots & \binom{a_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{a_n}{1} & \binom{a_n}{2} & \cdots & \binom{a_n}{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}, \text{得证。}$$

2.2.2.4 拆项与递推

对于一些特殊的行列式，可以将其某一行/列拆成两项，从而简化计算或得到递推。

例题 2.27 计算 $\Delta = \det \begin{bmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{bmatrix}$

证明 记 $e = (1,1,1)^T, \lambda = (x,y,z)^T$，则

$$\Delta = \det(\lambda + ae, \lambda + be, \lambda + ce) = \det(\lambda, \lambda + be, \lambda + ce) + \det(ae, \lambda + be, \lambda + ce) = \det(\lambda, be, ce) + \det(ae, \lambda, \lambda) = 0.$$

例题 2.28 证明：$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$

证明

$$\det \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

例题 2.29 计算 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$

解

$$\Delta_n=\det\begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}+\det\begin{bmatrix} ca-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c & c & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$=\det\begin{bmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & a-b \end{bmatrix}_{n\times n}+(a-c)\Delta_{n-1}=c(a-b)^{n-1}+(a-c)\Delta_{n-1}$$

对 $b=c$，由于 $\Delta_1=a$，计算得 $\Delta_n=nb(a-b)^{n-1}+(a-b)^n$。

对 $b\neq c$，同理有 $\Delta_n=(a-c)^{n-1}+(a-b)\Delta_{n-1}$, 联立并消去 Δ_{n-1} 得 $\Delta_n=\dfrac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$。

练习 2.1 (1) 计算 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ (2) 计算 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix} d & b & b & \cdots & b & b \\ c & x & a & \cdots & a & a \\ c & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & a & a & \cdots & x & a \\ c & a & a & \cdots & a & x \end{bmatrix}_{n\times n}$

例题 2.30 计算 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix} a+b & a & & & \\ b & a+b & a & & \\ & b & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ & & & b & a+b \end{bmatrix}_{n\times n}$

解

$$\Delta_n \xlongequal{\text{第一行展开}} (a+b)\Delta_{n-1}-a\det\begin{bmatrix} b & a & & & \\ & a+b & a & & \\ & b & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ & & & b & a+b \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \xlongequal{\text{第一列展开}} (a+b)\Delta_{n-1}-ab\Delta_{n-2}$$

$\Rightarrow \Delta_n-b\Delta_{n-1}=a(\Delta_{n-1}-b\Delta_{n-2})$。又 $\Delta_1=a+b,\Delta_2=a^2+b^2+ab\Rightarrow\Delta_n=a^n+b\Delta_{n-1}$。

若 $a=b$，直接计算有 $\Delta n=(n+1)a^n$。

若 $a\neq b$，同理有 $\Delta_n=b^n+a\Delta_{n-1}$。联立消去 Δ_{n-1} 得 $\Delta_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}=\sum\limits_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$。

笔记 $a\neq b$ 时最终答案形式上不要求 $a\neq b$，这是否意味着不必要进行分类讨论？

✍ **练习 2.2** 计算 $\Delta_n = \det\begin{bmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{bmatrix}_{n\times n}$

事实上，这类行列式被称为三对角行列式。我们有如下结论：

命题 2.7

设 $\Delta_n = \det\begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}_{n\times n}$，$x, y \in \mathbb{C}$ 是 $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ 的根，则有 $\Delta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$。

证明 留作练习。

2.2.2.5 乘法分解

首先介绍几个引理：

引理 2.8

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$，则 $\det(AB) = \det A \cdot \det B$，$\det A = \det A^T$。

引理 2.9

(1) 若 A 可逆，则 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$。

(2) 若 D 可逆，则 $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C)$。

证明 自行打洞即可。

引理 2.10

(1) 若 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则 $\det(A - B^T B) = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^T)$

(2) 若 $A \in \mathbb{F}^{n\times m}, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则 $\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$。

证明 (1)$\det\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & I_m \end{bmatrix} \xlongequal{-c_2 B \to c_1} \det\begin{bmatrix} A - B^T B & B^T \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \det(A - B^T B)$

又由引理2.9(1)，有 $\det\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & I_m \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^T)$，即有 $\det(A - B^T B) = \det A \cdot \det(I_m - BA^{-1}B^T)$。

(2) $\det\begin{bmatrix} \lambda I_n & \lambda B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} = \lambda^n \det\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} \xlongequal{\text{引理2.9(2)}} \lambda^n \det(\lambda I_m - BA)$,

$$\det\begin{bmatrix}\lambda I_n & \lambda B\\ A & \lambda I_m\end{bmatrix}=\lambda^m\det\begin{bmatrix}\lambda I_n & B\\ A & I_m\end{bmatrix}\xlongequal{\text{引理2.9(1)}}\lambda^m\det(\lambda I_n-AB)$$

例题 2.31 设 $A=\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ -b & a & -d & c\\ -c & d & a & -b\\ -d & -c & b & a\end{bmatrix}$，计算 $\det A$。

解 A 行与行相互正交,列与列相互正交,因此可以考虑 AA^T。$\det(AA^T)=\det((a^2+b^2+c^2+d^2)I_4)=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$，又 $\det(AA^T)=\det A\cdot\det A^T=(\det A)^2$，故 $\det A=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)$。验证符号后可得 $\det A=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。

例题 2.32 计算 $\Delta_n=\det\begin{bmatrix}a_1 & & & & & b_1\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & d_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1\end{bmatrix}$

解

$$\text{记}A=\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} & & b_1\\ & \iddots & \\ b_n & & \end{bmatrix},C=\begin{bmatrix} & & c_n\\ & \iddots & \\ c_1 & & \end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1\end{bmatrix}\text{，则若}A\text{可逆，}$$

$$\Delta_n=\det A\det(D-CA^{-1}B)=\prod_{k=1}^n a_k\cdot\det\left(\begin{bmatrix}d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} & & c_n\\ & \iddots & \\ c_1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & b_1\\ & \iddots & \\ b_n & & \end{bmatrix}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^n a_k\cdot\det\left(\begin{bmatrix}d_n & & \\ & \ddots & \\ & & d_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{b_nc_n}{a_n} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{b_1c_1}{a_1}\end{bmatrix}\right)=\prod_{k=1}^n(a_kd_k-b_kc_k)$$

若 A 不可逆，则 $f(t)=\det(tI_n+A)$ 关于 t 的 n 次多项式，由代数学基本定理，$f(t)$ 在 $\mathbb{C}$ 有 n 个根，设为 $x_1,\cdots,x_n$。记 $\delta=\min\limits_{\substack{1\le k\le n\\ x_k\neq 0}}|x_k|>0$，则 $\forall t\in\mathring{U}(0,\delta),f(t)\neq 0$。故在 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内取一列 $\{t_m\}\to 0$，则对 $\forall m\in\mathbb{N}^*$，有 $\det\begin{bmatrix}A+tI_n & B\\ C & D\end{bmatrix}=\prod\limits_{k=1}^n((a_k+t)d_k-b_kc_k)$。由行列式及伴随对矩阵元素的连续性，可令 $m\to\infty$，得到与上面一致的答案。

笔记 本题对不可逆的 A 的处理方法称为扰动法，在比较多的题型中均有使用场景。

练习 2.3 使用递推法完成例题2.32。

例题 2.33 计算 $\det\begin{bmatrix}10 & 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 10 & 3 & x\\ 3 & 1 & 3 & 10 & x\\ 3 & 0 & x & x & 10\end{bmatrix}$。

解

$$\det\begin{bmatrix}10&1&2&3&3\\1&10&2&1&0\\2&2&10&3&x\\3&1&3&10&x\\3&0&x&x&10\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}10&1\\1&10\end{bmatrix}\det\left(\begin{bmatrix}10&3&x\\3&10&x\\x&x&10\end{bmatrix}-\frac{1}{99}\begin{bmatrix}2&2\\3&1\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&-1\\-1&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&3\\2&1&0\end{bmatrix}\right)$$

$$=99\det\left(\begin{bmatrix}10&3&x\\3&10&x\\x&x&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{8}{11}&\frac{8}{11}&\frac{6}{11}\\\frac{8}{11}&\frac{94}{99}&\frac{29}{33}\\\frac{6}{11}&\frac{29}{33}&\frac{10}{11}\end{bmatrix}\right)=99\det\begin{bmatrix}\frac{102}{11}&\frac{25}{11}&x-\frac{6}{11}\\\frac{25}{11}&\frac{896}{99}&x-\frac{29}{33}\\x-\frac{6}{11}&x-\frac{29}{33}&\frac{100}{11}\end{bmatrix}=-1364x^2+1950x+70122$$

例题 2.34 计算 $\det\begin{bmatrix}0&2&3&4&\cdots&n\\2&3&6&8&\cdots&2n\\3&6&8&12&\cdots&3n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&2n&3&4n&\cdots&n^2-1\end{bmatrix}$

解

$$\det\begin{bmatrix}0&2&3&4&\cdots&n\\2&3&6&8&\cdots&2n\\3&6&8&12&\cdots&3n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&2n&3&4n&\cdots&n^2-1\end{bmatrix}=\det\left(\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\end{bmatrix}-I_n\right)=(-1)^n\det\left(I_n-\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\end{bmatrix}\right)$$

$$=(-1)^n\det\left(1-\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}\right)=(-1)^n\left(1-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)=(-1)^n\left(1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

例题 2.35 (2021B2Mid) $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=i+j+\delta_{ij}$，$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ 为 Kronecker 符号。求 $\det A$。

解

$$\det A=\det\left(I_n+\begin{bmatrix}2&3&4&\cdots&n+1\\3&4&5&\cdots&n+2\\4&5&6&\cdots&n+2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n+1&n+2&n+3&\cdots&2n\end{bmatrix}\right)=\det\left(I_n+\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\\vdots&\vdots\\1&n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(I_2+\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\\vdots&\vdots\\1&n\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}1+\sum\limits_{k=1}^{n}&\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\\\sum\limits_{k=1}^{n}1&1+\sum\limits_{k=1}^{n}k\end{bmatrix}=-\frac{1}{12}n^4+\frac{13}{12}n^2+n+1$$

笔记 这题还可以使用加边方法完成，但是需要加两次。读者可以自行尝试。

练习 2.4 计算 $\det\begin{bmatrix} 1+x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ x_2+y_1 & 1+x_2+y_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1}+y_n \\ x_n+y_1 & \cdots & x_n+y_{n-1} & x_n+y_n \end{bmatrix}$

例题 2.36 计算 $\det\begin{bmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{bmatrix}$

解

$$\det\begin{bmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \binom{n}{0}a_0^n & \binom{n}{1}a_0^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n}{0}a_1^n & \binom{n}{1}a_1^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0}a_n^n & \binom{n}{1}a_n^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \cdot \prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$$

2.2.3 函数与行列式

2.2.3.1 多项式与行列式

首先回到之前的一个例题：

例题 2.37 计算 $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$

解 考虑 $f(x) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{bmatrix} \xlongequal{\text{最后一列展开}} A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$，所求即为 $-A_3$。

由代数学基本定理，$f(x)$ 所有零点为 a,b,c,d。由韦达定理，$-\dfrac{A_3}{A_4} = a+b+c+d$。

又 $A_4 = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)$，

故 $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix} = -A_3 = (a+b+c+d)A_4 = (d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c+d)$。

重新考虑 Vandermonde 行列式，可以得到：

例题 2.38 计算 $\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\det\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}$。

解 考虑 $f(x)=\det\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}$ 为 $n-1$ 次多项式，则 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 为 $f(x)$ 的 $n-1$ 个零点。

$\Rightarrow f(x)=C\prod\limits_{k=2}^{n}$。又 $f(0)=(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=2}^{n}a_k$，$f(a_1)=\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

$$f(0)=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & \end{bmatrix}=\prod_{k=2}^{n}a_k\cdot\Delta_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n)。$$

$\Rightarrow C=(-1)^{n-1}\Delta_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n)$，$\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\Delta_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n)\prod\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_1)$。

递推得 $\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$。

2.2.3.2 行列式的导数与积分

命题 2.11

设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$，$a_{ij}(t)$ 连续可导，则 $\dfrac{d}{dt}\det A(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\det\begin{bmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix}$。

证明 $A(t)=\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}\prod\limits_{k=1}^{n}a_{kj_k}(t)$

$$A'(t)=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}\sum_{l=1}^{n}\left(a'_{lj_l}(t)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}a_{kj_k}(t)\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a'_{lj_l}(t)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}a_{kj_k}(t)\right)$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\det\begin{bmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a'_{l1}(t) & \cdots & a'_{ln}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

例题 2.39 n 是偶数，计算 $\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\\frac{n}{2}&\frac{n^2}{3}&\cdots&\frac{n^n}{n+1}&\frac{n^{n+1}}{n+2}\end{bmatrix}$

解 $\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\\frac{n}{2}&\frac{n^2}{3}&\cdots&\frac{n^n}{n+1}&\frac{n^{n+1}}{n+2}\end{bmatrix}=n!\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\\frac{n}{2}&\frac{n^2}{3}&\cdots&\frac{n^n}{n+1}&\frac{n^{n+1}}{n+2}\end{bmatrix}=(n-1)!\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\\frac{n^2}{2}&\frac{n^3}{3}&\cdots&\frac{n^{n+1}}{n+1}&\frac{n^{n+2}}{n+2}\end{bmatrix}$

令 $f(x)=(n-1)!\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\\frac{x^2}{2}&\frac{x^3}{3}&\cdots&\frac{x^{n+1}}{n+1}&\frac{x^{n+2}}{n+2}\end{bmatrix}$，则 $f(n)=\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\\frac{n}{2}&\frac{n^2}{3}&\cdots&\frac{n^n}{n+1}&\frac{n^{n+1}}{n+2}\end{bmatrix}$, $f(0)=0$。

由命题2.11，$f'(x)=(n-1)!\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\x&x^2&\cdots&x^n&x^{n+1}\end{bmatrix}=(n-1)!x\cdot\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&2&\cdots&2^{n-1}&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&\cdots&n^{n-1}&n^n\\1&x&\cdots&x^{n-1}&x^n\end{bmatrix}$

$$=(n-1)!x\cdot\prod_{i\le i<j\le n}(j-i)\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-k)\triangleq C\cdot\prod_{k=0}^{n}(x-k)\text{，其中}C=(n-1)!\prod_{i\le i<j\le n}(j-i)$$

$$\Rightarrow f(n)=\int_0^n f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=C\int_0^n x(x-1)\cdots(x-n)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{y=n-x}\frac{C}{2}\left(\int_0^n x(x-1)\cdots(x-n)\mathrm{d}x-\int_n^0(-y)(1-y)\cdots(n-y)\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{C}{2}\left(\int_0^n x(x-1)\cdots(x-n)\mathrm{d}x+(-1)^{n+3}\int_0^n y(y-1)\cdots(y-n)\mathrm{d}y\right)\xlongequal{2|n}0$$

故 $\det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\2&2^2&\cdots&2^n&2^{n+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n&n^{n+1}\\\frac{n}{2}&\frac{n^2}{3}&\cdots&\frac{n^n}{n+1}&\frac{n^{n+1}}{n+2}\end{bmatrix}=0$。

2.2.3.3 行列式与 Taylor 公式

还是回到之前的例题：

例题 2.40 计算 $D_n(x)=\det\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}$

解 在 a 处进行 Taylor 展开，其中 $(x-\xi)(a-\xi)<0$：

$$D_n(x)=D_n(a)+D_n'(a)(x-a)+\frac{D_n''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{D_n^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{D_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{D_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$D_n'(x)=\det\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}+\cdots+\det\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=nD_{n-1}(x)$$

$\Rightarrow D_n^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)D_{n-k}(x)$，又 $D_2(a)=D_3(a)=\cdots=D_n(a)=0$，有 $D_n'(a)=\cdots=D_n^{(n-2)}=0$

而 $D_n^{(n-1)}(x)=n(n-1)\cdots2\cdot D_1(x)=n!x,D_n^{(n)}(x)=n!D_0(x)=n!$，由 $D_n(x)$ 是 n 次多项式，$D_n^{(n+1)}(x)=0$。

$\Rightarrow D_n(x)=\dfrac{D_n^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\dfrac{D_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=na(x-a)^{n-1}+(x-a)^n$。

例题 2.41 设 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导，$\forall x\in I,|f(x)|<M_0$，$|f^{(n)}(x)|<M_n$。证明：$\exists M_1,\cdots,M_{n-1}$，使得 $\forall x\in I,k=1,\cdots,n-1,|f^{(k)}(x)|<M_k$。

证明 取非 0 互异 $a_1,\cdots,a_{n-1}\in I$，在 x 处作 Taylor 展开：$f(x+a_i)=f(x)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}a_i^k+\dfrac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!}a_i^n$。

$\Rightarrow|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}a_i^k|=|f(x+a_i)-f(x)-\dfrac{f^{(n)}(\xi_i)}{n!}a_i^n|\le 2M_0+\dfrac{A}{n!}M_n$，其中 $A=\max\limits_{1\le i\le n-1}|a_i|^n$。

令 $A_i(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}a_i^k$，则 $|A_i(x)|\le 2M_0+\dfrac{A}{n!}M_n$，且有

$$\begin{bmatrix}a_1&\frac{a_1^2}{2!}&\cdots&\frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}\\a_2&\frac{a_2^2}{2!}&\cdots&\frac{a_2^{n-1}}{(n-1)!}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&\frac{a_n^2}{2!}&\cdots&\frac{a_n^{n-1}}{(n-1)!}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f'(x)\\f''(x)\\\vdots\\f^{(n-1)}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1(x)\\A_2(x)\\\vdots\\A_n(x)\end{bmatrix},\forall x\in I。记\ D_n=\begin{bmatrix}a_1&\frac{a_1^2}{2!}&\cdots&\frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!}\\a_2&\frac{a_2^2}{2!}&\cdots&\frac{a_2^{n-1}}{(n-1)!}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&\frac{a_n^2}{2!}&\cdots&\frac{a_n^{n-1}}{(n-1)!}\end{bmatrix},$$

由 $\det D_n=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{a_k}{k!}\cdot\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\neq0$，方程组有唯一解 $\begin{bmatrix}f'(x)\\f''(x)\\\vdots\\f^{(n-1)}(x)\end{bmatrix}=D_n^{-1}\begin{bmatrix}A_1(x)\\A_2(x)\\\vdots\\A_n(x)\end{bmatrix}$，

不妨设为 $f^{(k)}(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{jk}A_i(x)$，则 $|f^{(k)}(x)|\le\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda_{jk}||A_i(x)|\le\left(2M_0+\dfrac{A}{n!}M_n\right)\sum\limits_{j=1}^{n}|\lambda_{jk}|\triangleq M_k$。

2.2.4 综合练习

例题 2.42(轮换矩阵的行列式) 设 $\operatorname{circ}(a_1,\cdots,a_n)=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_n&a_1&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_2&a_3&\cdots&a_1\end{bmatrix}$，计算 $\det\operatorname{circ}(a_1,\cdots,a_n)$。

解 令 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{k+1}x^k$，记 $\omega_j=e^{\frac{2j\pi i}{n}}$，则 $\omega_j\cdot\omega_k=\omega_{j+k}$。记 $\Omega=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\\omega_1&\omega_2&\cdots&\omega_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\omega_1^{n-1}&\omega_2^{n-1}&\cdots&\omega_n^{n-1}\end{bmatrix}$，

则 $\det\Omega=\prod\limits_{i\le j<k\le n}(\omega_k-\omega_j)\neq0$。记 $\Lambda=(\lambda_{ij})_{n\times n}=\operatorname{circ}(a_1,\cdots,a_n)\Omega$，则 $\det\Lambda=\det\operatorname{circ}(a_1,\cdots,a_n)\cdot\det\Omega$。

考虑 $\lambda_{11}=1a_1+\omega_1a_2+\cdots+\omega_1^{n-1}a_n=f(\omega_1)$，$\lambda_{21}=1a_n+\omega_1a_1+\cdots+\omega_1^{n-1}a_{n-1}=\omega_1f(\omega_1)$，同理可得

$$\Lambda = \begin{bmatrix} f(\omega_1) & f(\omega_2) & \cdots & f(\omega_n) \\ \omega_1 f(\omega_1) & \omega_2 f(\omega_2) & \cdots & \omega_n f(\omega_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} f(\omega_1) & \omega_2^{n-1} f(\omega_2) & \cdots & \omega_n^{n-1} f(\omega_n) \end{bmatrix} \Rightarrow \det\Lambda = \prod_{l=1}^{n} f(\omega_l) \cdot \prod_{i\le j<k\le n} (\omega_k - \omega_j)$$

$$\Rightarrow \det \operatorname{circ}(a_1, \cdots, a_n) = \frac{\det\Lambda}{\det\Omega} = \prod_{k=1}^{n} f(\omega_k)。$$

练习 2.5 计算 $\operatorname{circ}(a_1, \cdots, a_n)^{-1}$

例题 2.43(Cauchy 行列式) 设复数列 $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n$ 满足 $x_i \neq y_j, \forall i, j$，计算

$$\det C_n(x,y) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \frac{1}{x_n-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{bmatrix}$$

解

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \frac{1}{x_n-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\forall k=1,\cdots,n-1]{-r_n \to r_k} \det \begin{bmatrix} \frac{x_n-x_1}{(x_1-y_1)(x_n-y_1)} & \frac{x_n-x_1}{(x_1-y_2)(x_n-y_2)} & \cdots & \frac{x_n-x_1}{(x_1-y_n)(x_n-y_n)} \\ \frac{x_n-x_2}{(x_2-y_1)(x_n-y_1)} & \frac{x_n-x_2}{(x_2-y_2)(x_n-y_2)} & \cdots & \frac{x_n-x_2}{(x_2-y_n)(x_n-y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n-y_1} & \frac{1}{x_n-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n-y_n} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_n-y_j} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1-y_1} & \frac{1}{x_1-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{1}{x_2-y_1} & \frac{1}{x_2-y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal[\forall k=1,\cdots,n-1]{-c_n \to c_k} \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_n-y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1-y_n}{(x_1-y_1)(x_1-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_1-y_2)(x_1-y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_1-y_n} \\ \frac{y_1-y_n}{(x_2-y_1)(x_2-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_2-y_2)(x_2-y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_2-y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_n-y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x_n-x_j}{x_n-y_j} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1-y_n}{(x_1-y_1)(x_1-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_1-y_2)(x_1-y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1}-y_n}{(x_1-y_{n-1})(x_1-y_n)} \\ \frac{y_1-y_n}{(x_2-y_1)(x_2-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_2-y_2)(x_2-y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1}-y_n}{(x_2-y_{n-1})(x_2-y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_1-y_n}{(x_{n-1}-y_1)(x_{n-1}-y_n)} & \frac{y_2-y_n}{(x_{n-1}-y_2)(x_{n-1}-y_n)} & \cdots & \frac{y_{n-1}-y_n}{(x_{n-1}-y_{n-1})(x_{n-1}-y_n)} \end{bmatrix}$$

$$
= \frac{1}{x_n - y_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(x_n - x_j)(y_j - y_n)}{(x_n - y_j)(x_j - y_n)} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \frac{1}{x_1 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} \\ \frac{1}{x_2 - y_1} & \frac{1}{x_2 - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 - y_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \frac{1}{x_{n-1} - y_2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} \end{bmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{递推}} \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n} (x_i - y_j)}
$$

笔记 $x_n = n - 1, y_n = -n$ 时，$C_n(x, y)$ 称为 Hilbert 矩阵。Hilbert 矩阵正定且高度病态 (对任意一个元素的微小扰动都会导致行列式和逆的巨大变化)。

第三章 Jordan 标准型

3.1 多项式矩阵的相抵

定义 3.1 (多项式矩阵)

设 $\mathbb{F}$ 是数域，λ 是未定元，数域 $\mathbb{F}$ 上所有关于未定元 λ 的多项式集合记为 $\mathbb{F}[\lambda]$。取 $m\times n$ 个多项式 $a_{ij}(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda], 1\le i\le m, 1\le j\le n$，则

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda)\\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda)\end{bmatrix}$$

称为数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 多项式矩阵，简称 λ 矩阵或多项式矩阵。数域 $\mathbb{F}$ 上所有 $m\times n$ 多项式矩阵的集合记为 $(\mathbb{F}[\lambda])^{m\times n}$。♣

多项式矩阵的加法，纯量与多项式矩阵的乘法，多项式矩阵的乘法以及多项式矩阵的行列式，转置，迹的定义和通常数域 $\mathbb{F}$ 上方阵相同，但应注意多项式矩阵的行列式，迹是关于未定元 λ 的多项式。

定义 3.2 (多项式矩阵的秩)

设 $A(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{m\times n}$，$A(\lambda)$ 的秩是 $A(\lambda)$ 中非零子式的最高阶数，仍记为 $\operatorname{rank}A(\lambda)$。若 n 阶方阵 $A(\lambda)$ 的秩等于 n，则称 $A(\lambda)$ 是满秩的。显然 $A(\lambda)$ 满秩 $\Leftrightarrow \det A(\lambda)\neq 0$。♣

定义 3.3 (多项式矩阵的逆矩阵)

对于 n 阶方阵 $A(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$，若存在 n 阶方阵 $B(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$，使得 $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$，则称 $A(\lambda)$ 是可逆的，$B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆矩阵，记为 $A(\lambda)^{-1}$。♣

定理 3.4

设 $A(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$，则 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow \det A(\lambda)\in\mathbb{F}\backslash\{0\}$。♡

证明

$\Rightarrow$：设 $A(\lambda)$ 可逆，则存在 $B(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$，使 $A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=I_n$。由 $\det A(\lambda)\det B(\lambda)=\det I_n=1$，$\det A(\lambda),\det B(\lambda)\in\mathbb{F}[\lambda],\deg(1)=0$，有 $\deg(A(\lambda))=\deg(B(\lambda))=0$，故 $\det A(\lambda)\in\mathbb{F}\backslash\{0\}$。

$\Leftarrow$：设 $\det A(\lambda)\in\mathbb{F}\backslash\{0\}$，设 $a=\det A(\lambda)$，考虑 $A^*(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的伴随矩阵，由 $A^*(\lambda)$ 中元素是 $A(\lambda)$ 的 $n-1$ 阶子式，故 $A^*(\lambda),\dfrac{1}{a}A^*(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$，而 $A(\lambda)\left(\dfrac{1}{a}A^*(\lambda)\right)=I_n=\left(\dfrac{1}{a}A^*(\lambda)\right)A(\lambda)$，故 $A(\lambda)$ 可逆，$A(\lambda)^{-1}=\dfrac{1}{a}A^*(\lambda)$。

笔记 若 $A(\lambda)$ 可逆，则 $A(\lambda)$ 满秩，但是反之不成立。这与通常方阵不同。

定义 3.5 (多项式矩阵的初等变换，初等 λ 矩阵)

多项式矩阵的初等 λ 变换分为以下三类：

1. 对调矩阵的两行或两列；
2. 把某一行或某一列乘以非零多项式加到另一行或另一列；

3. 以非零常数乘矩阵的某一行或某一列。

依次称为对多项式矩阵的第一。第二和第三种初等变换。

记 $P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}, T_{ij}(f(\lambda)) = I_n + f(\lambda)E_{ij}, D_i(a) = I_n + (a-1)E_{ii}$，则 $P_{ij}, T_{ij}(f(\lambda)), D_i(a)$ 被称为第一，第二，第三类初等 λ 矩阵。

分别用第一、第二、第三种初等 λ 矩阵左乘 $A(\lambda)$，相当于对 $A(\lambda)$ 做第一、第二、第三种初等行变换。分别用第一、第二、第三种初等 λ 矩阵右乘 $A(\lambda)$，相当于对 $A(\lambda)$ 做第一、第二、第三种初等列变换。

初等 λ 变换不改变多项式矩阵的秩。

定理 3.6

设 $m \times n$ 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r，则 $A(\lambda)$ 可以经过有限次初等 λ 变换化为 $\begin{bmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 的形式，其中 $D(\lambda) = \operatorname{diag}(d_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda))$ 是 r 阶对角多项式方阵，$d_1(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 是首一多项式且 $d_j(\lambda) | d_{j+1}(\lambda), \forall j = 1, \cdots, r-1$。

等价的说，存在 $s, t \in \mathbb{N}$，m 阶初等 λ 方阵 $P_1(\lambda), \cdots, P_s(\lambda)$ 和 n 阶初等 λ 方阵 $Q_1(\lambda), \cdots, Q_t(\lambda)$ 使得 $P_s(\lambda) \cdots P_1(\lambda) A(\lambda) Q_1(\lambda) \cdots Q_t(\lambda) = \begin{bmatrix} D(\lambda) & O \\ O & O \end{bmatrix}$。

证明 此处略去。

定理 3.7

设 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$，则 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $A(\lambda)$ 可表示为有限个初等 λ 矩阵的乘积。

证明 由定理3.6易得。

定义 3.8 (多项式矩阵的相抵)

设 $A(\lambda), B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$，若 $A(\lambda)$ 可经有限次初等变换化为 $B(\lambda)$，即 $\exists P(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times m}, Q(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n \times n}$ 可逆，使得 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵。

容易验证，多项式矩阵的相抵关系是等价关系。于是，根据多项式矩阵的相抵关系可以把数域 $\mathbb{F}$ 上所有 $m \times n$ 多项式矩阵分类：彼此相抵的多项式矩阵属于同一类，不相抵的多项式矩阵属于不同的类。和一般数域上的相抵一样，两个基本问题是：多项式矩阵在相抵下的标准型是什么？多项式矩阵在相抵下的全系不变量是什么？

首先，由 $A(\lambda) = I_2, B(\lambda) = \operatorname{diag}(1, \lambda)$ 不相抵可以得出多项式矩阵的秩不足以构成多项式矩阵的全系不变量，所以必须寻找多项式矩阵在相抵下的其他不变量。

定义 3.9

设 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m \times n}$，多项式矩阵 $A(\lambda)$ 中所有 k 阶非零子式的最大公因子称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$。若 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式均为 0，则约定 $D_k(\lambda) = 0$。

容易验证，若 $\operatorname{rank} A(\lambda) = r$，记 $\min\{m, n\} = s$，则 $D_{r+1}(\lambda) = \cdots = D_s(\lambda) = 0$，对于 $1 \le k \le r$，$D_k(\lambda)$ 是非零多项式，且 $D_k(\lambda) | D_{k+1}(\lambda), \forall k = 1, \cdots, r-1$。

我们先介绍一个引理。

引理 3.10 (Binet-Cauchy 公式)

对 $A \in \mathbb{F}^{p\times q}, B \in \mathbb{F}^{q\times p}$，有

$$\det(AB) = \begin{cases} 0, & q < p \\ \det A \cdot \det B, & q = p \\ \displaystyle\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_p\le q} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}, & q > p \end{cases}$$

证明 此处略去。

命题 3.11

对 $A \in \mathbb{F}^{p\times q}, B \in \mathbb{F}^{q\times p}$，记 $C = AB$，则对 C 的 r 阶子式有

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & q < p \\ \displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le q} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}, & q \ge p \end{cases}$$

证明 对 $A_1 = \begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 q} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r q} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{1 j_1} & b_{1 j_2} & \cdots & b_{1 j_r} \\ b_{2 j_1} & b_{2 j_2} & \cdots & b_{2 j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{q j_1} & b_{q j_2} & \cdots & b_{q j_r} \end{bmatrix}$ 使用引理3.10即可。

定理 3.12

设 $A(\lambda), B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m\times n}$，则 $A(\lambda), B(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow$ $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同。换言之，多项式矩阵的行列式因子是其在相抵下的全系不变量。

证明 以下设 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子分别为 $D_k(\lambda), \tilde{D}_k(\lambda)$。

必要性　设多项式矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵，则存在可逆多项式矩阵 $P(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{m\times m}, Q(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$，使得 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$。由命题3.11有：

$$B(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_k\le m} P(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k \end{pmatrix}\left((A(\lambda)Q(\lambda))\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_k\le m}\ \sum_{1\le t_1<t_2<\cdots<t_k\le n} P(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k \end{pmatrix} A(\lambda)\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k \end{pmatrix} Q(\lambda)\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

若 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $D_k(\lambda) = 0$，则 $A(\lambda)$ 的每个 k 阶子式为 0，故 $B(\lambda)$ 的每个 k 阶子式为 0，即 $B(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子 $\tilde{D}_k(\lambda) = 0$。反之亦然。

若 $D_k(\lambda) \neq 0$，则 $D_k(\lambda)$ 整除每个 $A(\lambda)$ 的 k 阶子式，故 $D_k(\lambda)$ 整除每个 $B(\lambda)$ 的 k 阶子式，即 $D_k(\lambda)$ 整除 $B(\lambda)$ 的每个 k 阶子式，故 $\tilde{D}_k(\lambda)|D_k(\lambda)$。同理可证 $D_k(\lambda)|\tilde{D}_k(\lambda)$，又作为最大公因子，$D_k(\lambda), \tilde{D}_k(\lambda)$ 均为首一多项式，故 $D_k(\lambda) = \tilde{D}_k(\lambda)$。

这说明 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同。

充分性　若 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的行列式因子相同，并设 $\operatorname{rank} A(\lambda) = r$，则由定理3.6，$A(\lambda)$ 相抵于如下多项式矩阵：

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}D(\lambda) & O\\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)) & O\\ O & O\end{bmatrix}$$

多项式矩阵 $C(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子同样为 $D_k(\lambda)$，易得 $D_1(\lambda)=d_1(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)=\prod\limits_{j=1}^{r}d_j(\lambda),D_r(\lambda)=\cdots=D_{\min\{m,n\}}(\lambda)=0\Rightarrow d_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ 由 $D_k(\lambda)$ 唯一确定 $(D_0(\lambda)=1)$。

由于 $A(\lambda),B(\lambda)$ 的行列式因子相同，有 $B(\lambda),C(\lambda)$ 相抵，由传递性，$A(\lambda),B(\lambda)$ 相抵。

由充分性证明的启发，可以引进：

定义 3.13 (不变因子)

设多项式矩阵 $A(\lambda)\in(\mathbb{F})^{m\times n}$ 的秩为 r，k 阶行列式因子为 $D_k(\lambda)$，约定 $D_0(\lambda)=1$，定义 $d_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ 为 $A(\lambda)$ 的不变因子。♣

定理 3.14

设多项式矩阵 $A(\lambda)\in(\mathbb{F})^{m\times n}$ 的秩为 r，阶不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$，则 $A(\lambda)$ 相抵于 Smith 标准型 $\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)) & O\\ O & O\end{bmatrix}$，且 $A(\lambda)$ 的不变因子是其在相抵下的全系不变量。♡

证明 由定理3.12的证明易得。

定理3.12和定理3.14解决了多项式矩阵在相抵下的标准型和全系不变量的问题，下面将给出 $\mathbb{C}$ 上多项式矩阵在相抵下的另一种全系不变量。

定义 3.15 (初等因子，初等因子组)

多项式矩阵 $A(\lambda)\in(\mathbb{F})^{m\times n}$ 的秩为 r，阶不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$，由 $\mathbb{C}$ 是代数闭域，故 $d_k(\lambda)$ 可分解为一次因式的乘积。由此可设

$$\begin{aligned}d_1(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{1t}}\\ d_2(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{2t}}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ d_r(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{rt}}\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是两两不同的复数，$e_{ij}\in\mathbb{N},i=1,2,\cdots,r,j=1,2,\cdots,t$，由 $d_k(\lambda)|d_{k+1}(\lambda)$，有 $0\le e_{1j}\le e_{2j}\le\cdots\le e_{rj},j=1,2,\cdots,t$。当 $e_{kl}>0$ 时，因子 $(\lambda-\lambda_k)^{e_{kl}}$ 被称为矩阵 $A(\lambda)$ 属于 λ_k 的初等因子，$A(\lambda)$ 的初等因子的全体称为 $A(\lambda)$ 的初等因子组。♣

定理 3.16

复数域上的多项式矩阵的秩和初等因子组是其在相抵下的全系不变量。♡

证明 由定义可得不变因子可以唯一确定初等因子组和秩。

反之，设秩为 r 的 $A(\lambda)$ 的初等因子组为 $\{(\lambda-\lambda_p)^{e_{pq}}\}_{1\le p\le t}$，将其下标按 p 分组并按 e_{pq} 递增排列，并在最前面补充足够的 1 使得每组均有 r 个元素，得到增广因子组 $\{(\lambda-\lambda_p)^{e_{pl}}\}_{\substack{1\le p\le t\\1\le l\le r}}$，由 $d_k(\lambda)|d_{k+1}(\lambda)$，有 $d_k(\lambda)=\prod\limits_{p=1}^{t}(\lambda-\lambda_p)^{e_{pk}},1\le k\le r$(思考原因)。如此初等因子组可以唯一确定不变因子。

由上，初等因子组与秩、不变因子是等价的，故秩和初等因子组是多项式矩阵在相抵下的全系不变量。

笔记 该定理中秩的条件是不可以删去的。

3.2 Jordan 标准型的概念与求法

下面的定理给出方阵的相似与多项式矩阵相抵之间的重要联系。

定理 3.17

n 阶复方阵 A, B 相似 $\Leftrightarrow$ 多项式矩阵 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 相抵。

证明

若方阵 A, B 相似，则存在可逆方阵 P 使得 $B = P^{-1}AP$。此时，P 作为可逆多项式矩阵有 $\lambda I_n - B = P^{-1}(\lambda I_n - A)P$，故 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 相抵。

反之，若 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 相抵，则存在可逆多项式矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 使得 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \lambda I_n - B$。设 $Q(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{k} \lambda^j Q_j, Q(\lambda)^{-1} = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda^j R_j$，设 $W = Q(B) = \sum\limits_{j=0}^{k} Q_j B^j$。由 $Q(\lambda)^{-1}Q(\lambda) = I_n$，有 $\sum\limits_{j=0}^{m} R_j Q(\lambda)\lambda^j = I_n \Rightarrow \sum\limits_{j=0}^{m} R_j W B^j = I_n$。又 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = \lambda I_n - B$，有 $P(\lambda)^{-1}(\lambda I_n - B) = (\lambda I_n - A)Q(\lambda) = Q(\lambda)\lambda - AQ(\lambda)$。用 B 代替 λ，有 $Q(B)B = AQ(B)$，即 $WB = AW$。由此得到 $WB^l = A^l W, \forall l \in \mathbb{N}$。于是有 $I_n = \sum\limits_{j=0}^{m} R_j W B^j = \sum\limits_{j=0}^{m} R_j A^j W = (\sum\limits_{j=0}^{m} R_j A^j)W$。这表明 W 是可逆矩阵且 $B = W^{-1}AW$。

笔记 对 n 阶复方阵 A，$\lambda I_n - A$ 被称为 A 的特征方阵。显然特征方阵是满秩的。

由定理3.16和定理3.17，可以得到：

定理 3.18

n 阶复方阵 A 与 B 相似的充要条件是它们的特征方阵 $\lambda I_n - A, \lambda I_n - B$ 的初等因子组相同。也就是说，复方阵的特征方阵的初等因子组是复方阵在相似下的全系不变量。

在介绍复方阵的 Jordan 标准型的概念之前，还需要一个引理。

引理 3.19

准对角多项式矩阵 $A(\lambda) = \mathrm{diag}(A_1(\lambda), A_2(\lambda))$ 的初等因子组由对角块 $A_1(\lambda), A_2(\lambda)$ 的初等因子组合并而成。

证明 此处略去。

以下给出复方阵的 Jordan 标准型的概念。

定义 3.20 (Jordan 块，Jordan 标准型)

记 $N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$，则形如 $\lambda I_m + N_m$ 的矩阵被称为一个 m 阶 Jordan 块，记作 $J_m(\lambda)$。Jordan 标准型是由对角线由若干个 Jordan 块组成的准对角矩阵。

定理 3.21

设 n 阶复方阵 A 的特征方阵 $\lambda I_n - A$ 的初等因子组为

$$\begin{gathered}(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}},(\lambda-\lambda_1)^{m_{12}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{m_{1k_1}},\\(\lambda-\lambda_2)^{m_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{m_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{m_{2k_2}},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}},(\lambda-\lambda_t)^{m_{t2}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{m_{tk_t}},\end{gathered}$$

其中 $m_{j1}\ge m_{j2}\ge\cdots\ge m_{jk_j}>0, j=1,2,\cdots,t$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 两两不同。则复方阵 A 相似于如下的 Jordan 标准型：

$$J=\mathrm{diag}(J_{m_{11}}(\lambda_1),\cdots,J_{m_{1k_1}}(\lambda_1),J_{m_{21}}(\lambda_2),\cdots,J_{m_{t1}}(\lambda_t),\cdots,J_{m_{tk_t}}(\lambda_t))$$

证明 对 $k\in\mathbb{N},\lambda_0\in\mathbb{C}$，记 $M=\lambda I_k - J_k(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_0 & -1 & & & \\ & \lambda-\lambda_0 & -1 & & \\ & & \lambda-\lambda_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & \lambda-\lambda_0\end{bmatrix}$,

由 $M\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1\\ 2 & 3 & \cdots & k\end{pmatrix}=(-1)^{k-1}$，故行列式因子 $D_1(\lambda)=\cdots=D_{k-1}(\lambda)=1, D_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k$，对应不变因子 $d_1(\lambda)=\cdots=d_{k-1}(\lambda)=1,d_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k$，因此 M 的初等因子组为 $\{(\lambda-\lambda_0)^k\}$。由引理3.19，$\lambda I_n-J,\lambda I_n-A$ 的初等因子组相同，故 A 与 J 相似。

最后总结求复方阵 A 的 Jordan 标准型的过程如下：

1. 求出特征方阵 $\lambda I_n - A$ 的不变因子；
2. 把不变因子分解为一次因式的乘积，得到初等因子组；
3. 写出每个初等因子的 Jordan 块；
4. 把所有 Jordan 块进行合并，得到 Jordan 标准型。

使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型的可逆矩阵 P 称为过渡矩阵。过渡矩阵的求法如下：

1. 对特征方阵 $\lambda I_n - A$ 施加初等 λ 变换，把 $\lambda I_n - A$ 化为 $\lambda I_n - J$，从而求出 n 阶可逆多项式矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$ 使得 $P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q(\lambda)=\lambda I_n - J$；
2. 求出 $R(\lambda)=Q(\lambda)^{-1}$；
3. 把 $R(\lambda)$ 写成矩阵的多项式 $R(\lambda)=\sum\limits_{j=1}^{m}R_m\lambda^m$，则 $P=R(A)$。

该方法正确性的证明留给读者。

3.3 Jordan 标准型的应用

例题 3.1 证明：A,A^T 相似。

证明 设 A 的 Jordan 标准型为 J，即证 J,J^T 相似。设 $J=\mathrm{diag}(J_{m_{11}}(\lambda_1),\cdots,J_{m_{tk_t}}(\lambda_t))$。

对 $\forall 1\le i\le t, 1\le j\le k_i$，容易求得 $J_{m_{ij}}(\lambda_i),J_{m_{ij}}(\lambda_i)^T$ 的初等因子组均为 $\{(\lambda-\lambda_i)^{m_{ij}}\}$，故存在可逆方阵 P_{ij} 使得 $P_{ij}^{-1}J_{m_{ij}}(\lambda_i)P_{ij}=J_{m_{ij}}(\lambda_i)^T$，令 $P=\mathrm{diag}(P_{11},\cdots,P_{tk_t})$，即有 $P^{-1}JP=J^T$，即 A,A^T 相似。

例题 3.2 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，证明：$\exists B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=B^2$。

解 先证明：$J_m(a^2),J_m(a)^2$ 相似。

$J_m(a)^2=(aI_m+N_m)^2=a^2I_m+2aN_m+N_m^2\Rightarrow(\lambda I_n-J_m(a)^2)\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1\\2&3&\cdots&k\end{pmatrix}=(-2a)^{n-1}$，故 $J_m(a^2),J_m(a)^2$ 的初等因子组相同，均为 $(\lambda-a^2)^m$。故 $J_m(a^2),J_m(a)^2$ 相似。