

最优化算法作业 1

陈文轩

更新: June 15, 2025

1. 判断以下集合是否是凸集

- 考虑这样点的集合, 这些点离给定点 x_0 比离给定集合 S 中的任何点都更近, 即集合 $\{x \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2, \forall y \in S\}, S \subset \mathbb{R}^n$ 。

记 $A = \{x \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2, \forall y \in S\}, A_y = \{x \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2\}$, 由于

$$\begin{aligned}\|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2 &\iff \|x - x_0\|_2^2 \leq \|x - y\|_2^2 \\ &\iff \|x\|_2^2 - 2\langle x, x_0 \rangle + \|x_0\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|_2^2 \\ &\iff \langle x, y - x_0 \rangle \leq \frac{1}{2}(\|y\|_2^2 - \|x_0\|_2^2)\end{aligned}$$

因此 A_y 是闭的半空间, 显然是凸集。因此 $A = \bigcap_{y \in S} A_y$ 也是凸集。

- 记 $n \times n$ 的对称矩阵集合为 \mathbb{S}^n , 集合 $\{X \in \mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X) \geq 1\}$ 。

$\{X \in \mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X) \geq 1\} = \{X \in \mathbb{S}^n \mid X - I_n \succeq 0\} = \mathbb{S}_+^n + I_n$, 这是一个凸锥的平移, 因此也是凸集。

2. 判断以下函数是否是凸函数

- 函数 $f(x) = \sum_{i=1}^r |x|_{[i]}$ 在 \mathbb{R}^n 上定义, 其中向量 $|x|$ 的分量满足 $|x|_i = |x_i|$ (即 $|x|$ 是 x 的每个分量的绝对值), 而 $|x|_{[i]}$ 是 $|x|$ 中第 i 大的分量。换句话说, $|x|_{[1]} \geq |x|_{[2]} \geq \dots \geq |x|_{[n]}$ 是 x 的分量的绝对值按非增序排序。

显然 $\forall i, g_i(x) = |x_i|$ 是凸函数, 因此 $g_i(x)$ 的任意非负系数线性组合也是凸函数。又 $f(x) = \max_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \sum_{i \in I} g_i(x)$ 是有限个凸函数逐点取最大值, 故 $f(x)$ 是凸函数。

- 若 f, g 都是凸函数, 并且都非递减, 而且 f, g 函数值都是正的。那么他们的乘积函数 $h = fg$ 是否为凸函数?

由 f, g 凸, 有 $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$,
 $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$ 。又由 f, g 函数值为正, 有
 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y)g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y))$,
 即 $h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y))$ 。

又由 f, g 非递减, 有

$$\begin{aligned} & (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) - (\lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)) \\ &= (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) - (\lambda f(x)g(x) + (1 - \lambda)f(y)g(y)) \\ &= \lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1 - \lambda)(f(y)g(x) + f(x)g(y)) + (1 - \lambda)^2 f(y)g(y) - \lambda f(x)g(x) - \\ & \quad (1 - \lambda)f(y)g(y) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(f(x)g(y) + f(y)g(x) - f(x)g(x) - f(y)g(y)) \\ &= -\lambda(1 - \lambda)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0 \end{aligned}$$

故 $h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$, 即 $h(x)$ 是凸函数。

3. 对于最大分量函数 $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i, x \in \mathbb{R}^n$, 证明其共轭函数为

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & y \geq 0, \sum_i y_i = 1 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (y^T x - \max_{1 \leq i \leq n} x_i)$ 。考虑以下情形:

- $y \geq 0, \sum_{i=1}^n y_i > 1$, 此时取 $x = t\mathbf{1}, t \rightarrow +\infty$ 时 $f^*(y) = t \left(\sum_{i=1}^n y_i - 1 \right) \rightarrow \infty$ 。
- $y \geq 0, \sum_{i=1}^n y_i < 1$, 此时取 $x = t\mathbf{1}, t \rightarrow -\infty$ 时 $f^*(y) = -t \left(1 - \sum_{i=1}^n y_i \right) \rightarrow \infty$ 。
- y 的某个分量 $y_i < 0$, 此时取 $x = te_i, t \rightarrow -\infty$ 时 $f^*(y) = ty_i \rightarrow \infty$ 。
- $y \geq 0, \sum_{i=1}^n y_i = 1$, 此时取 $x = t\mathbf{1}, f^*(y) = t \left(\sum_{i=1}^n y_i - 1 \right) = 0$ 。又有

$$\begin{aligned} y^T x - \max_{1 \leq i \leq n} x_i &= \sum_{j=1}^n x_j y_j - \max_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \sum_{j=1}^n y_j \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \max_{1 \leq i \leq n} x_i \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{故 } f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (y^T x - \max_{1 \leq i \leq n} x_i) = 0$$

$$\text{由上, 即有 } f^*(y) = \begin{cases} 0 & y \geq 0, \sum_i y_i = 1 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

4. 对于分式线性问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Gx \leq h, Ax = b \end{aligned}$$

其中分式线性函数：

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \text{dom } f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

证明该问题等价于一个线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + dz \\ \text{s.t.} \quad & Gy \leq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

令 $z = \frac{1}{e^T x + f}$, $y = xz$, 此时显然有 $z > 0$, $x = \frac{y}{z}$, $f_0(x) = \frac{c^T \frac{y}{z} + d}{\frac{1}{z}} = c^T y + dz$ 。此时有

$$\begin{aligned} Gy \leq hz &\iff G \frac{y}{z} \leq h \iff Gx \leq h, \quad Ay = bz \iff A \frac{y}{z} = b \iff Ax = b \\ e^T y + fz = 1 &\iff e^T xz + fz = 1 \iff e^T x + f = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{e^T x + f} \end{aligned}$$

因此两个问题等价。

5. 对于 $i = 1, \dots, m$, 令 B_i 是 \mathbb{R}^n 中的球体, 它的球心和半径分别是 x_i 和 ρ_i 。我们希望找到 $B_i, i = 1, \dots, m$ 的最小外接球, 即找到一个球 B , 使得 B 包含所有 B_i , 并且 B 的半径最小。将这个问题写为一个 SOCP 问题。

直接写出 SOCP 问题即可：

$$\begin{aligned} \min_{c \in \mathbb{R}^n, R \in \mathbb{R}} \quad & R \\ \text{s.t.} \quad & R - \rho_i \geq 0, i = 1, \dots, m \\ & \|x_i - c\|_2 \leq R - \rho_i, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$