最优化算法作业 1

陈文轩

更新：March 25, 2025

1. 判断以下集合是否是凸集

- 考虑这样点的集合，这些点离给定点 x_0 比离给定集合 S 中的任何点都更近，即集合 $\{x \mid ||x-x_0||_2 \le ||x-y||_2, \forall y \in S\}, S \subset \mathbb{R}^n$。

  记 $A = \{x \mid ||x-x_0||_2 \le ||x-y||_2, \forall y \in S\}, A_y = \{x \mid ||x-x_0||_2 \le ||x-y||_2\}$，由于
  $$\begin{aligned}&||x-x_0||_2 \le ||x-y||_2 \Longleftrightarrow ||x-x_0||_2^2 \le ||x-y||_2^2\\ \Longleftrightarrow &||x||_2^2 - 2\langle x, x_0\rangle + ||x_0||_2^2 \le ||x||_2^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||_2^2\\ \Longleftrightarrow &\langle x, y-x_0\rangle \le \frac{1}{2}||y||_2^2 - ||x_0||_2^2\end{aligned}$$
  因此 A_y 是闭的半空间，显然是凸集。因此 $A = \bigcap\limits_{y\in S} A_y$ 也是凸集。

- 记 $n \times n$ 的对称矩阵集合为 $\mathbb{S}^n$，集合 $\{X \in \mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X) \ge 1\}$。

  $\{X \in \mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X) \ge 1\} = \{X \in \mathbb{S}^n \mid X - I_n \succeq 0\} = \mathbb{S}_+^n + I_n$，这是一个凸锥的平移，因此也是凸集。

2. 判断以下函数是否是凸函数

- 函数 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} |x|_{[i]}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义，其中向量 $|x|$ 的分量满足 $|x|_i = |x_i|$(即 $|x|$ 是 x 的每个分量的绝对值)，而 $|x|_{[i]}$ 是 $|x|$ 中第 i 大的分量。换句话说，$|x|_{[1]} \ge |x|_{[2]} \ge \cdots \ge |x|_{[n]}$ 是 x 的分量的绝对值按非增序排序。

  显然 $\forall i$，$g_i(x) = |x_i|$ 是凸函数，因此 $g_i(x)$ 的任意非负系数线性组合也是凸函数。又 $f(x) = \max\limits_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\}\\ |I|=r}} \sum\limits_{i\in I} g_i(x)$ 是有限个凸函数逐点取最大值，故 $f(x)$ 是凸函数。

- 若 f, g 都是凸函数，并且都非递减，而且 f, g 函数值都是正的。那么他们的乘积函数 $h = fg$ 是否为凸函数？

由 f, g 凸，有$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$,
$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$。又由 f, g 函数值为正，有
$f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))$,
即$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))$.

又由 f, g 非递减，有

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) - (\lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)) \\
=&(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) - (\lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y)) \\
=&\lambda^2 f(x)g(x) + \lambda(1-\lambda)(f(y)g(x) + f(x)g(y)) + (1-\lambda)^2 f(y)g(y) - \lambda f(x)g(x) - \\
&(1-\lambda)f(y)g(y) \\
=&\lambda(1-\lambda)(f(x)g(y) + f(y)g(x) - f(x)g(x) - f(y)g(y)) \\
=&-\lambda(1-\lambda)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq 0
\end{aligned}
$$

故 $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$，即 $h(x)$ 是凸函数。

3. 对于最大分量函数 $f(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i, x \in \mathbb{R}^n$，证明其共轭函数为

$$
f^*(y) = \begin{cases} 0 & y \geq 0, \sum_i y_i = 1 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}
$$

$f^*(y) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (y^T x - \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i)$。考虑以下情形：

- $y \geq 0, \sum\limits_{i=1}^n y_i > 1$，此时取 $x = t\mathbb{1}, t \to +\infty$ 时 $f^*(y) = t\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i - 1\right) \to \infty$。
- $y \geq 0, \sum\limits_{i=1}^n y_i < 1$，此时取 $x = t\mathbb{1}, t \to -\infty$ 时 $f^*(y) = -t\left(1 - \sum\limits_{i=1}^n y_i\right) \to \infty$。
- y 的某个分量 $y_i < 0$，此时取 $x = te_i, t \to -\infty$ 时 $f^*(y) = ty_i \to \infty$。
- $y \geq 0, \sum\limits_{i=1}^n y_i = 1$，此时取 $x = t\mathbb{1}, f^*(y) = t\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i - 1\right) = 0$。又有

$$
\begin{aligned}
&y^T x - \max_{1 \leq i \leq n} x_i = \sum_{j=1}^n x_j y_j - \max_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \sum_{j=1}^n y_j \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \max_{1 \leq i \leq n} x_i \\
=& \max_{1 \leq i \leq n} x_i \left(\sum_{i=1}^n y_i - 1\right) = 0
\end{aligned}
$$

故 $f^*(y) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (y^T x - \max\limits_{1 \leq i \leq n} x_i) = 0$

由上，即有 $f^*(y) = \begin{cases} 0 & y \geq 0, \sum_i y_i = 1 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$

4. 对于分式线性问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(x) \\
s.t. \quad & Gx \leq h, Ax = b
\end{aligned}
$$

其中分式线性函数：

$$f_0(x)=\frac{c^Tx+d}{e^Tx+f}, \operatorname{dom} f_0(x)=\{x \mid e^Tx+f>0\}$$

证明该问题等价于一个线性规划问题：

$$\begin{aligned}
\min \quad & c^Ty+dz \\
s.t. \quad & Gy \leq hz \\
& Ay=bz \\
& e^Ty+fz=1 \\
& z \geq 0
\end{aligned}$$

令 $z=\dfrac{1}{e^Tx+f}, y=xz$，此时显然有 $z>0, x=\dfrac{y}{z}, f_0(x)=\dfrac{c^T\frac{y}{z}+d}{\frac{1}{z}}=c^Ty+dz$。此时有

$$Gy \leq hz \Longleftrightarrow G\frac{y}{z} \leq h \Longleftrightarrow Gx \leq h, \quad Ay=bz \Longleftrightarrow A\frac{y}{z}=b \Longleftrightarrow Ax=b$$

$$e^Ty+fz=1 \Longleftrightarrow e^Txz+fz=1 \Longleftrightarrow e^Tx+f=\frac{1}{z} \Longleftrightarrow z=\frac{1}{e^Tx+f}$$

因此两个问题等价。

5. 对于 $i=1,\cdots,m$，令 B_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的球体，它的球心和半径分别是 x_i 和 ρ_i。我们希望找到 $B_i, i=1,\cdots,m$ 的最小外接球，即找到一个球 B，使得 B 包含所有 B_i，并且 B 的半径最小。将这个问题写为一个 SOCP 问题。

直接写出 SOCP 问题即可：

$$\begin{aligned}
\min_{c\in\mathbb{R}^n, R\in\mathbb{R}} \quad & R \\
s.t. \quad & R-\rho_i \geq 0, i=1,\cdots,m \\
& ||x_i-c||_2 \leq R-\rho_i, i=1,\cdots,m
\end{aligned}$$