MATH5015P 最优化算法 **2025 春**

作业 4

提交日期: *5 月 11 日*

问题 1 对于可逆矩阵 A, 求解如下方程的零点

$$F(X) = X^{-1} - A = 0.$$

可以得到 A^{-1}。

1. 使用牛顿法（*Newton Schulz* 方法），写出迭代公式。

2. 实现该算法，随机生成 100×100 维可逆矩阵 A，作出误差随着迭代数的收敛图像。

提示：根据 $DF(X)[B] = -X^{-1}BX^{-1}$, 计算 $DF(X)^{-1}[B]$.

问题 2 (交集投影问题) 给定集合 $C_i, i = 1, 2, ..., m$ 为闭凸集，且易于计算投影，考虑投影问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}\|x - c\|^2, \\ \text{s.t.} \quad & x \in C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m, \end{aligned}$$

请使用 *ADMM* 算法求解该问题, 说明是否收敛（无需证明收敛）。

问题 3 相关系数矩阵的逼近问题的定义为：

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2}\|X - G\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad X_{ii} = 1, i = 1, 2, ..., n \\ X \succeq 0. \end{aligned}$$

其中自变量 X 取值于对称矩阵空间 S^n, G 为给定的实对称矩阵. 这个问题在金融领域中有重要的应用. 由于误差等因素, 根据实际观测得到的相关系数矩阵的估计 G 往往不具有相关系数矩阵的性质 (如对角线为 *1*, 正定性), 我们的最终目标是找到一个和 G 最接近的相关系数矩阵 X. 试给出满足如下要求的算法：

1. 对偶近似点梯度法，并给出化简后的迭代公式；

2. 针对原始问题的 *ADMM* ，并给出每个子问题的显式解.

问题 4 (算子性质) 给定算子 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 称 A 是单调算子，如果其满足

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y.$$

证明*:*

1. 给定闭凸函数 $f(x)$, 次微分算子 ∂f 是单调算子。
2. 给定闭凸函数 $f(x)$, 若 $f(x)$ 是 $\mu-$ 强凸的，那么 ∂f 是强单调算子, 即*:*

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2, \quad \forall x, y.$$

3. A 是非扩张的，等价于 $\frac{1}{2}(I + A)$ 是固定非扩张的。
4. 给定凸函数 $f(x)$, 且 $f(x)$ 一阶光滑 , $\nabla f(x)$ 是 *L-Lipschitz* 连续的。定义 $G = I - t\nabla f, t \in (0, 1/L]$.
   - 验证 G 是固定非扩张的 *(firmly non-expansive)*.
   - 若 $f(x)$ 是 $\mu-$ 强凸的，那么 G 是压缩算子，即存在 $\rho \in (0, 1)$ 使得

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \rho \|x - y\|.$$