最优化算法作业 1

陈文轩

更新：March 8, 2025

1. 判断以下集合是否是凸集

- 考虑这样点的集合，这些点离给定点 x_0 比离给定集合 S 中的任何点都更近，即集合 $\{x \mid ||x-x_0||_2 \leq ||x-y||_2, \forall y \in S\}, S \subset \mathbb{R}^n$。

  记 $A=\{x \mid ||x-x_0||_2 \leq ||x-y||_2, \forall y \in S\}, A_y=\{x \mid ||x-x_0||_2 \leq ||x-y||_2\}$，由于

$$
\begin{aligned}
&||x-x_0||_2 \leq ||x-y||_2 \Longleftrightarrow ||x-x_0||_2^2 \leq ||x-y||_2^2 \\
\Longleftrightarrow &||x||_2^2 - 2\langle x, x_0\rangle + ||x_0||_2^2 \leq ||x||_2^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||_2^2 \\
\Longleftrightarrow &\langle x, y-x_0\rangle \leq \frac{1}{2}||y||_2^2 - ||x_0||_2^2
\end{aligned}
$$

  因此 A_y 是闭的半空间，显然是凸集。因此 $A=\bigcap\limits_{y\in S} A_y$ 也是凸集。

- 记 $n\times n$ 的对称矩阵集合为 $\mathbb{S}^n$，集合 $\{X\in\mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X)\geq 1\}$。

  $\{X\in\mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X)\geq 1\} = \{X\in\mathbb{S}^n \mid X-I_n \succeq 0\} = \mathbb{S}^n_+ + I_n$，这是一个凸锥的平移，因此也是凸集。

2. 判断以下函数是否是凸函数

- 函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{r}|x|_{[i]}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义，其中向量 $|x|$ 的分量满足 $|x|_i=|x_i|$(即 $|x|$ 是 x 的每个分量的绝对值)，而 $|x|_{[i]}$ 是 $|x|$ 中第 i 大的分量。换句话说，$|x|_{[1]}\geq|x|_{[2]}\geq\cdots\geq|x|_{[n]}$ 是 x 的分量的绝对值按非增序排序。

  显然 $\forall i$，$g_i(x)=|x_i|$ 是凸函数，因此 $g_i(x)$ 的任意非负系数线性组合也是凸函数。又 $f(x)=\max\limits_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\}\\|I|=r}}\sum\limits_{i\in I}g_i(x)$ 是有限个凸函数逐点取最大值，故 $f(x)$ 是凸函数。

- 若 f,g 都是凸函数，并且都非递减，而且 f,g 函数值都是正的。那么他们的乘积函数 $h=fg$ 是否为凸函数？

由 f,g 凸，有$\forall x,y\in\mathbb{R},\lambda\in[0,1], f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$。又由 f,g 函数值为正，有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)g(\lambda x+(1-\lambda)y)\le(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))$, 即$h(\lambda x+(1-\lambda)y)\le(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))$.

又由 f,g 非递减，有

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))-(\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y))\\
=&(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))-(\lambda f(x)g(x)+(1-\lambda)f(y)g(y))\\
=&\lambda^2 f(x)g(x)+\lambda(1-\lambda)(f(y)g(x)+f(x)g(y))+(1-\lambda)^2 f(y)g(y)-\lambda f(x)g(x)-\\
&(1-\lambda)f(y)g(y)\\
=&\lambda(1-\lambda)(f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)g(x)-f(y)g(y))\\
=&-\lambda(1-\lambda)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\le 0
\end{aligned}
$$

故 $h(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$，即 $h(x)$ 是凸函数。

3. 对于最大分量函数 $f(x)=\max\limits_{1\le i\le n} x_i, x\in\mathbb{R}^n$，证明其共轭函数为

$$
f^*(y)=\begin{cases}0 & y\ge 0,\sum_i y_i=1\\ \infty & \text{otherwise}\end{cases}
$$

$f^*(y)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}(y^Tx-\max\limits_{1\le i\le n}x_i)$。考虑以下情形：

- $y\ge 0,\sum\limits_{i=1}^n y_i>1$，此时取 $x=t\mathbb{1},t\to+\infty$ 时 $f^*(y)=t\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i-1\right)\to\infty$。
- $y\ge 0,\sum\limits_{i=1}^n y_i<1$，此时取 $x=t\mathbb{1},t\to-\infty$ 时 $f^*(y)=-t\left(1-\sum\limits_{i=1}^n y_i\right)\to\infty$。
- y 的某个分量 $y_i<0$，此时取 $x=te_i,t\to-\infty$ 时 $f^*(y)=ty_i\to\infty$。
- $y\ge 0,\sum\limits_{i=1}^n y_i=1$，此时取 $x=t\mathbb{1},f^*(y)=t\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i-1\right)=0$。又有

$$
y^Tx-\max_{1\le i\le n}x_i=\sum_{j=1}^n x_jy_j-\max_{1\le i\le n}x_i\le\sum_{j=1}^n y_j\max_{1\le i\le n}x_i-\max_{1\le i\le n}x_i
$$

$$
=\max_{1\le i\le n}x_i\left(\sum_{i=1}^n y_i-1\right)=0
$$

故 $f^*(y)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}(y^Tx-\max\limits_{1\le i\le n}x_i)=0$

由上，即有 $f^*(y)=\begin{cases}0 & y\ge 0,\sum_i y_i=1\\ \infty & \text{otherwise}\end{cases}$

4. 对于分式线性问题

$$
\begin{aligned}
\min\quad & f_0(x)\\
s.t.\quad & Gx\le h, Ax=b
\end{aligned}
$$

其中分式线性函数：

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \mathrm{dom}\, f_0(x) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

证明该问题等价于一个线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + dz \\ s.t. \quad & Gy \leq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

令 $z = \dfrac{1}{e^T x + f}, y = xz$，此时显然有 $z > 0, x = \dfrac{y}{z}, f_0(x) = \dfrac{c^T \frac{y}{z} + d}{\frac{1}{z}} = c^T y + dz$。此时有

$$Gy \leq hz \iff G\frac{y}{z} \leq h \iff Gx \leq h, \quad Ay = bz \iff A\frac{y}{z} = b \iff Ax = b$$

$$e^T y + fz = 1 \iff e^T xz + fz = 1 \iff e^T x + f = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{e^T x + f}$$

因此两个问题等价。

5. 对于 $i = 1, \cdots, m$，令 B_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的球体，它的球心和半径分别是 x_i 和 ρ_i。我们希望找到 $B_i, i = 1, \cdots, m$ 的最小外接球，即找到一个球 B，使得 B 包含所有 B_i，并且 B 的半径最小。将这个问题写为一个 SOCP 问题。

直接写出 SOCP 问题即可：

$$\begin{aligned} \min_{c \in \mathbb{R}^n, R \in \mathbb{R}} \quad & R \\ s.t. \quad & R - \rho_i \geq 0, i = 1, \cdots, m \\ & ||x_i - c||_2 \leq R - \rho_i, i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$