MATH5015P 最优化算法 **2025 春**

作业 2

提交日期: *4* 月 *6* 日

问题 1 (KKT 条件) 考虑以下问题:

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^2} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\
\text{使得} \quad & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \le 2 \\
& (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \le 2
\end{aligned}
$$

其中 $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$。

1. 这是一个凸优化问题吗？

2. 写出此问题的拉格朗日函数。使用 *Slater* 条件验证在这个问题中是否存在强对偶性。

3. 写出这个优化问题的 *KKT* 条件。求出 *KKT* 点和最优点。

问题 2 (对偶问题、最优条件) 考虑一个凸的分段线性最小化问题，变量为 $x \in \mathbb{R}^n$。

$$\min \max_{i=1,\ldots,m} (a_i^T x + b_i)$$

其中，$a_i \in \mathbb{R}^n$，$b_i \in \mathbb{R}$。

1. 考虑原问题的如下等价问题(2.1)，推导(2.1)的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min \max_{i=1,\ldots,m} \; & y_i \\
\text{s.t.} \quad & a_i^T x + b_i \le y_i, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

变量为 $x \in \mathbb{R}^n$，$y \in \mathbb{R}^m$。

2. 假设我们通过平滑函数逼近目标函数, 逼近函数为:

$$f_0(x) = \log \sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i)$$

现在我们考虑无约束问题，即 $\min f_0(x)$. 证明该问题的对偶问题如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top z - \sum_{i=1}^{m} z_i \log z_i \\ \text{s.t.} \quad & A^\top z = 0, \mathbf{1}^T z = 1, z \succeq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$ 表示全为 *1* 的向量。

3. 设问题(2.1)的最优函数值为 p_1^*, 问题(2.2)最优值为 p_2^*. 证明

$$0 \le p_2^* - p_1^* \le \log m.$$

问题 3 (次微分) 若 $f(x) = \|x\|$ 表示任意范数，$x \in \mathbb{R}^n$，证明次微分集合如下

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : \|g\|_* \le 1, \langle g, x \rangle = \|x\|\},$$

其中 $\|g\|_*$ 表示对偶范数。

问题 4 (梯度法收敛性、函数的性质) 对于 $y \in \mathbb{R}^m$, 给定 μ 强凸, $L-$ 光滑函数 $g(y)$，即 $\nabla g(y)$ 的 *Lipschitz* 常数为 L. 若 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \le n$ 是行满秩矩阵，证明

1. $f(x) = g(Ax)$ 是 $\bar{L}$ 光滑的，其中
$$\bar{L} = L\|A\|^2.$$
$\|A\|$ 表示矩阵 A 的谱范数。

2. $f(x) = g(Ax)$ 满足规则性条件，即
$$\langle \nabla f(x), x - x_{\text{proj}} \rangle \ge \bar{\mu}\|x - x_{\text{proj}}\|^2$$
其中 x_{proj} 表示 x 到函数 $f(x)$ 最小值解集合的正交投影点，$\bar{\mu} = \mu\lambda_{\min}(AA^\top)$.

问题 5 (共轭函数性质) 考虑凸函数 $f(x)$ 的共轭函数

$$f^*(y) = \sup_x x^\top y - f(x).$$

证明*:*

- 若 $x \in \partial f(y)$, 则 $y \in \partial f^*(x)$.
- 若 $f(x)$ 是闭凸函数，利用 $f = f^{**}$ 证明 $x \in \partial f(y)$ 等价于 $y \in \partial f^*(x)$。