MATH5015P 最优化算法 **2025 春**

作业 1

提交日期: *3 月 18 日*

问题 1 (判断集合是否是凸集) *1.* 考虑这样点的集合，这些点离给定点 x_0 比离给定集合 S 中的任何点都更近，即集合 $\{x \mid \|x - x_0\|_2 \le \|x - y\|_2 \text{ for all } y \in S\}$, *where* $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. 记 $n \times n$ 的对称矩阵集合为 $\mathbb{S}^n$, 集合 $\{X \in \mathbb{S}^n \mid \lambda_{\min}(X) \ge 1\}$.

问题 2 (判断是否是凸函数) *1.* 函数 $f(x) = \sum_{i=1}^r |x|_{[i]}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义，其中向量 $|x|$ 的分量满足 $|x|_i = |x_i|$（即，$|x|$ 是 x 的每个分量的绝对值），而 $|x|_{[i]}$ 是 $|x|$ 中第 i 大的分量。换句话说，$|x|_{[1]} \ge |x|_{[2]} \ge \ldots \ge |x|_{[n]}$ 是 x 的分量的绝对值按非增序排序。

2. 若 f, g 都是凸函数，并且都非递减，而且 f, g 函数值都是正的。那么他们的乘积函数 $h = fg$ 是否为凸函数？

问题 3 对于最大分量函数 $f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i, x \in \mathbb{R}^n$, 证明其共轭函为

$$f^*(y) = \begin{cases} 0, & \textit{if } y \ge 0, \sum_i y_i = 1. \\ \infty, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

问题 4 对于分式线性问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & Gx \le h, Ax = b \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中分式线性函数:

$$f_0 = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \quad \mathrm{dom} f_0(x) = \{x | e^T x + f > 0\}. \tag{1.2}$$

证明该问题等价于一个线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + dz \\ \text{s.t.} \quad & Gy \le hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \ge 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

问题 5 对于 $i = 1, \ldots, m$, 令 B_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的球体, 它的球心和半径分别是 x_i 和 ρ_i. 我们希望找到 B_i, $i = 1, \ldots, m$ 的最小外接球，即找到一个球 B，使得 B 包含所有 B_i, 并且 B 的半径最小。将这个问题写为一个 *SOCP* 问题。