《瀚海之巅》2024 第 3 期 · 征解

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2024 年 8 月 16 日

1. 证明: 如果映射 $f : [0,1] \to [0,1]$ 连续, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 并且在 $[0,1]$ 上 $(f \circ f)(x) \equiv x$, 则 $f(x) \equiv x$.

供题人: 郭维基

2. 称数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 为**完全单调的 (completely monotonic)**, 若对任意 $k, n \in \mathbb{N}$, 总有 $(-1)^k(\Delta^k a)_n \geq 0$, 这里 Δ 是差分算子, 即 $(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n$.
   (a) 若 μ 是 $[0,1]$ 上的某个 Borel 测度, 令 $a_n = \int x^n \mathrm{d}\mu$, 验证 $\{a_n\}$ 是完全单调数列.
   (b) 考察 $\{a_n\}$ 的对数凸性, 即 $a_n a_{n+2} \geq a_{n+1}^2, n \in \mathbb{N}$. Hausdorff 矩问题是说: 对任意的完全单调数列 $\{a_n\}$, 是否总存在 Borel 测度 μ 满足 (a) 的条件. 在承认其正确性的前提下, 直接推出 $\{a_n\}$ 具有对数凸性.
   (c) 考虑更加初等的证明. 设数列 $\{a_n\}$ 是完全单调的.
      i 证明: 对任意 $k, m, n \in \mathbb{N}$,
$$(-1)^k(\Delta^k a)_m = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k+i} \binom{n}{i} (\Delta^{k+i} a)_{m+n-i}.$$
      ii 对于 $u, v > 0, uv = \frac{1}{4}$, 证明: $u(\Delta^2 a)_0 + (\Delta a)_1 + v a_2 \geq 0$.
      iii 证明: $a_n a_{n+2} \geq a_{n+1}^2, n \in \mathbb{N}$.

供题人：胡洁洋

3. 证明 $\zeta(\frac{1}{2} + i\tau) \ll \tau^{\frac{1}{6}} \log \tau \quad (\tau > 0, \tau \to \infty)$.

供题人：杨文颜

4. 计算 $j(\sqrt{3}i)$ 的值.

供题人：杨文颜

5. (Apostol)
   我们记
$$G(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n^5 x^n}{1 - x^n},$$

且

$$f(x)=\sum_{n\geq 1, n\text{奇数}}\frac{n^5x^n}{1+x^n}.$$

(a) 证明 $F(x)=G(x)-34G(x^2)+64G(x^4)$.

(b) 证明

$$\sum_{n\geq 1, n\text{奇数}}\frac{n^5}{1+e^{n\pi}}=\frac{31}{504}.$$

供题人：杨文颜

6. 对正整数 n, 设 $x_{ij}\in[0,1], \forall 1\leq i,j\leq n$. 证明:

$$\prod_{j=1}^{n}(1-\prod_{i=1}^{n}x_{ij})+\prod_{i=1}^{n}(1-\prod_{j=1}^{n}(1-x_{ij}))\geq 1.$$

供题人：邓博文

7. 设 L/K 为可分代数扩张. $f\in K[X_1,\dots,X_n]$. 存在 $g\in L[X_1,\dots,X_n]$, $f=g^m$. 证明: 存在 $c\in K, h\in K[X_1,\dots,X_n]$, 使得 $f=ch^m$.

供题人：孙之棋

8. 设 $X_i\sim U(0,1)$ 独立同分布, $i\geq 1$. 记 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, 定义

$$N=\min\{n\in\mathbb{N}\mid S_n\geq 1\}.$$

求 $\mathbb{E}[N]$.

供题人: 徐思懿

题源: MSE.