《瀚海之巅》2024 第 3 期 · 征解解答

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2024 年 8 月 17 日

1. 证明: 如果映射 $f:[0,1]\to[0,1]$ 连续, $f(0)=0, f(1)=1$, 并且在 $[0,1]$ 上 $(f\circ f)(x)\equiv x$, 则 $f(x)\equiv x$.

供题人: 郭维基

证明. 假设存在 $(0,1)$ 上的一点 a 使 $f(a)\neq a$, 设 $f(a)=b$, 则 $f(b)=f(f(a))=a$. 不妨设 $a<b$. 构造集合 $T=\{t|\forall x\in[t,a], f(x)>x\}$. 由 $f(a)=b>a$ 知集合 T 非空, 由 $f(0)=0$ 知集合 T 有下界, 于是集合 T 有下确界, 设 $c=\inf T$. 由映射 f 的连续性可知 $c<a$ 且 $f(c)=c$. 因为 $f(c)=c<a, f(a)=b>a$, 故存在 $d\in(c,a)$ 使 $f(d)=a$. 但由此有 $b=f(a)=f(f(d))=d<a<b$, 矛盾! 所以不存在 $a\in(0,1)$ 使 $f(a)\neq a$. 亦即 $f(x)\equiv x$. □

2. 称数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 为**完全单调的 (completely monotonic)**, 若对任意 $k,n\in\mathbb{N}$, 总有 $(-1)^k(\Delta^k a)_n\geq 0$, 这里 Δ 是差分算子, 即 $(\Delta a)_n=a_{n+1}-a_n$.
   (a) 若 μ 是 $[0,1]$ 上的某个 Borel 测度, 令 $a_n=\int x^n \mathrm{d}\mu$, 验证 $\{a_n\}$ 是完全单调数列.
   (b) 考察 $\{a_n\}$ 的对数凸性, 即 $a_n a_{n+2}\geq a_{n+1}^2, n\in\mathbb{N}$. Hausdorff 矩问题是说: 对任意的完全单调数列 $\{a_n\}$, 是否总存在 Borel 测度 μ 满足 (a) 的条件. 在承认其正确性的前提下, 直接推出 $\{a_n\}$ 具有对数凸性.
   (c) 考虑更加初等的证明. 设数列 $\{a_n\}$ 是完全单调的.
      i 证明: 对任意 $k,m,n\in\mathbb{N}$,
      $$(-1)^k(\Delta^k a)_m=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}\binom{n}{i}(\Delta^{k+i}a)_{m+n-i}.$$
      ii 对于 $u,v>0, uv=\frac{1}{4}$, 证明: $u(\Delta^2 a)_0+(\Delta a)_1+va_2\geq 0$.
      iii 证明: $a_n a_{n+2}\geq a_{n+1}^2, n\in\mathbb{N}$.

供题人：胡洁洋

证明. (a) 由

$$\begin{aligned}(\Delta^k a)_n &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}a_{n+i}\\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\int x^{n+i}\mathrm{d}\mu\\ &= \int x^n\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x^i\mathrm{d}\mu\\ &= \int x^n(x-1)^k\mathrm{d}\mu\\ &= (-1)^k\int x^n(1-x)^k\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

进而 $(-1)^k(\Delta^k a)_n \geq 0$, 即 $\{a_n\}$ 完全单调.

(b) 设测度 μ 满足 $a_n = \int x^n\mathrm{d}\mu$, 结论由 Cauchy 不等式立得.

(c) i 对 n 使用归纳法. $n=0,1$, 结论平凡. 对所有小于 $n(n\geq 1)$ 假设成立, 对于 n, 由归纳假设及 $n=1$ 情形,

$$\begin{aligned}&(-1)^k(\Delta^k a)_m\\ =&\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{k+i}\binom{n-1}{i}(\Delta^{k+i}a)_{m+n-1-i}\\ =&\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}[(-1)^{k+i+1}(\Delta^{k+i+1}a)_{m+n-1-i}+(-1)^{k+i}(\Delta^{k+i}a)_{m+n-i}]\\ =&\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}](\Delta^{k+i}a)_{m+n-i}\\ =&\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k+i}\binom{n}{i}(\Delta^{k+i}a)_{m+n-i},\end{aligned}$$

由归纳法原理, 结论成立.

ii 使用 ε-room 技术. 只需对任意 $\alpha\in(0,1)$, 证明 $u(\Delta^2 a)_0+\alpha(\Delta a)_1+va_2>0$. 利用 (i), 将三者展开, 有

$$\begin{cases}-(\Delta a)_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(\Delta^{i+1}a)_{n+1-i},\\ (\Delta^2 a)_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+2}\binom{n}{i}(\Delta^{i+2}a)_{n-i},\\ a_2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(\Delta^{i}a)_{n+2-i},\end{cases}$$

我们证明存在 n, $u(\Delta^2 a)_0+\alpha(\Delta a)_1+va_2$ 的 $(-1)^{i+1}(\Delta^{i+i}a)_{n+1-i}$ 前系数大于 0, 即

$$u\binom{n}{i-1}+v\binom{n}{i+1}>\alpha\binom{n}{i},$$

进一步化简, 即

$$\alpha+u+v<(n+1)\left(\frac{u}{n-i+1}+\frac{v}{i+1}\right),$$

由 Cauchy 不等式, 只需保证 $\alpha+u+v<\frac{(n+1)(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2}{n+2}$, 取

$$n=\left[\frac{(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2}{1-\alpha}\right]+1$$

即可. 取这个 n, 即有

$$u(\Delta^2 a)_0+\alpha(\Delta a)_1+va_2=\sum *\cdot(-1)^{i+1}(\Delta^{i+1}a)_{n+1-i}\geq 0,$$

这里的 $*$ 为某个正数. 再令 $\alpha\to 1$, 知 $u(\Delta^2 a)_0+(\Delta a)_1+va_2\geq 0$.

iii 在 (ii) 中取 $u(\Delta^2 a)_0=va_2$, 有 $-\Delta a_1=a_1-a_2\leq\sqrt{a_2(a_0-2a_1+a_2)}$, 两边平方即有 $a_0a_2\geq a_1^2$, 对于一般的 $n=n_0$, 由数列 $\{a_{n+n_0}\}$ 也是完全单调的, 故 $a_{n_0}a_{n_0+2}\geq a_{n_0+1}^2$.

□

3. 证明 $\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)\ll\tau^{\frac{1}{6}}\log\tau\quad(\tau>0,\tau\to\infty)$.

供题人：杨文颜

证明. 我们知道

引理 0.1. 设 $s=\sigma+i\tau,\sigma_0>0,0<\delta<1$. 对 $\sigma\geq\sigma_0,x\geq 1,0<|\tau|\leq(1-\delta)2\pi x$ 一致地有

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^s}-\frac{x^{1-s}}{1-s}+O(x^{-\sigma}).$$

根据如下 van der Corput 不等式，即

引理 0.2. *(a)* 令 $a,b\in\mathbb{R},a<b,f\in C^2([a,b]),b-a=N$，且

$$|f''(t)|\asymp\lambda>0\quad(a<t<b),$$

那么

$$\sum_{a<n\leq b}e^{2\pi i f(n)}\ll N\lambda^{1/2}+\lambda^{-1/2}.$$

(b) 令 $a,b\in\mathbb{R},a<b,f\in C^3([a,b]),b-a=N$，且

$$|f'''(t)|\asymp\lambda>0\quad(a<t<b),$$

那么

$$\sum_{a<n\leq b}e^{2\pi i f(n)}\ll N\lambda^{1/6}+N^{1/2}\lambda^{-1/6}.$$

取 $f(n) = -(\tau/2\pi)\log t$ 可以得到估计

$$\sum_{a<n\le b} n^{-i\tau} \ll \min(\tau^{1/2} + a\tau^{-1/2}, a^{1/2}\tau^{1/6} + a\tau^{-1/6}).$$

对 $\tau > 0, a < b \le 2a$ 一致成立，因此显然有

$$\begin{aligned}\sum_{a<n\le b} n^{-1/2-i\tau} &\ll \min((\tau/a)^{1/2} + (a/\tau)^{1/2}, \tau^{1/6} + a^{1/2}\tau^{-1/6}) \\ &\ll \min(\tau^{1/6}, (\tau/a)^{1/2}).\end{aligned}$$

对于 $r \le \log x/\log 2$, 选择 $a = 2^r, b = \min(2^{r+1}, x)$ 并将上述估计相加, 得

$$\sum_{n\le x} n^{-1/2-i\tau} \ll \tau^{1/6}\log\tau \quad (x \ll \tau)$$

代入 $x = \tau$ 即可得到上述估计. □

4. 计算 $j(\sqrt{3}i)$ 的值.

供题人：杨文颜

证明. 首先我们注意到 Hecke 算子 T_2 作用在 j 函数上可以得到如下恒等式。

$$j(2\tau) + j(\frac{1+\tau}{2}) + j(\frac{\tau}{2}) = (j(\tau) - 744)^2 - 2\cdot 196884 + 3\cdot 744.$$

代入 $\tau = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 后并且由于 $j(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}) = 0$，我们显然有

$$3\cdot j(\sqrt{3}i) = j(1+\sqrt{3}i) + j(\frac{1+\sqrt{3}i}{4}) + j(\frac{3+\sqrt{3}i}{4}) = 744^2 - 2\cdot 196884 + 3\cdot 744.$$

从而

$$j(\sqrt{3}i) = \frac{744^2 - 2\cdot 196884 + 3\cdot 744}{3} = 54000.$$

□

此结果已经用 python 程序检查，检查代码与计算结果如下。

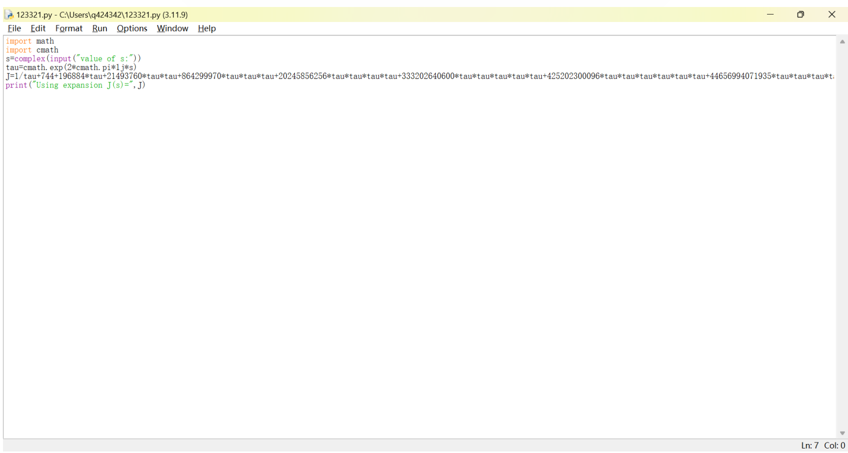

图 1: 检查代码

图 2: 计算结果

5. (Apostol)

我们记

$$G(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{n^5x^n}{1-x^n},$$

且

$$f(x)=\sum_{n\geq 1,n\text{奇数}}\frac{n^5x^n}{1+x^n}.$$

(a) 证明 $F(x)=G(x)-34G(x^2)+64G(x^4)$.

(b) 证明

$$\sum_{n\geq 1,n\text{奇数}}\frac{n^5}{1+e^{n\pi}}=\frac{31}{504}.$$

供题人：杨文颜

证明. (a) 显然

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^5x^n}{1-x^n}=\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)x^n.$$

于是

$$G(n)=\sigma_5(n).$$

类似读者可以证明

$$r(n)=\sum_{p|n,p\text{奇数}}p^5\cdot(-1)^{n/p+1}$$

满足

$$F(x)=\sum_{n\geq 1}r(n)x^n.$$

对于奇数来说

$$r(n)=\sigma_5(n),$$

并且

$$r(2^\alpha n)=-\sigma_5(n).\quad (\alpha\geq 1)$$

下面设 n 是一个奇数，那么

$$r(2n)=-\sigma_5(n)=\sigma_5(2n)-34\sigma_5(n).$$

并且 $\alpha\geq 2$ 时自然有

$$\begin{aligned}&\sigma_5(2^\alpha n)-34\sigma_5(2^{\alpha-1}n)+64\sigma_5(2^{\alpha-1}n)\\=&\sigma_5(n)\cdot((1+2^5+\cdots+2^{5\alpha})-34(1+2^5+\cdots+2^{5(\alpha-1)})\\&+64(1+2^5+\cdots+2^{5(\alpha-2)}))\\=&-\sigma_5(n).\end{aligned}$$

故自然得到要求证等式。

(b) 不难看出

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geq 1,n\text{奇数}}\frac{n^5e^{-n\pi}}{1+e^{-n\pi}}=F(e^{-\pi})\\=&G(e^{-\pi})-34G(e^{-2\pi})+64G(e^{-4\pi})=A(\frac{i}{2})-34A(i)+64A(2i).\end{aligned}$$

其中

$$A(\tau)=\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)e^{2\pi in\tau}$$

自然满足

$$1-504A(\tau)=E_6(\tau).$$

E_6 为模形式，所以不难知道

$$E_6(\frac{i}{2})=-64E_6(2i).$$

且有熟知结论

$$E_6(i)=0.$$

不难证明上述结论.

$\square$

6. 对正整数 n, 设 $x_{ij}\in[0,1],\forall 1\leq i,j\leq n$. 证明:

$$\prod_{j=1}^n(1-\prod_{i=1}^n x_{ij})+\prod_{i=1}^n(1-\prod_{j=1}^n(1-x_{ij}))\geq 1.$$

供题人：邓博文

证明. 考虑矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 满足

$$a_{ij}\in\{0,1\}, 且 P(a_{ij}=1)=x_{ij}, P(a_{ij}=0)=1-x_{ij}, \forall 1\le i,j\le n$$

设事件

$$M=\{A 的每一列都有 0\}$$

$$N=\{A 的每一行都有 1\}$$

则

$$P(M)=\prod_{j=1}^{n}(1-\prod_{i=1}^{n}x_{ij})$$

$$P(N)=\prod_{i=1}^{n}(1-\prod_{j=1}^{n}(1-x_{ij}))$$

注意到 M 和 N 的并是必然事件, 因为如果 M 不成立, 则 A 中必然有一列全是 1, 此时 A 的每一行都有 1, 故 N 成立. 所以

$$\text{LHS}=P(M)+P(N)\ge P(M\cup N)=1$$

证毕.

□

7. 设 L/K 为可分代数扩张. $f\in K[X_1,\dots,X_n]$. 存在 $g\in L[X_1,\dots,X_n]$, $f=g^m$. 证明: 存在 $c\in K, h\in K[X_1,\dots,X_n]$, 使得 $f=ch^m$.

供题人：孙之棋

证明. (a) 由于可取 L/F 的正规闭包，故不妨设 L/F 为正规扩张。设 f 在 L 中不可约分解为

$$f=\prod_{i=1}^{k}p_i^{mn_i}$$

对任意 p_i, 对任意 $\sigma\in\mathrm{Gal}(L/F)$, $\sigma(p_i)$ 也必定在 f 的不可约分解中出现, 从而与某个 p_j 相差常数倍. 故 f 可分解为

$$f=c\prod_{i=1}^{s}(\prod_{j=1}^{t_i}p_{ij}^{n_i})^m$$

其中 $c\in L, p_{i1},\dots,p_{it_i}$ 为 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 的一个轨道. 由于

$$\prod_{j=1}^{t_i}p_{ij}^{n_i}$$

是 $\mathrm{Gal}(L/K)$ 不变的，且因为 L/K 可分，故其属于 $K[X_1,\dots,X_n]$. 对比系数可知 $c\in K$.

□

8. 设 $X_i \sim U(0,1)$ 独立同分布, $i \geq 1$. 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 定义

$$N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \geq 1\}.$$

求 $\mathbb{E}[N]$.

供题人: 徐思懿

题源: MSE.

解. 注意到 N 为非负离散型随机变量, 因此有

$$\mathbb{E}[N] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N > k).$$

而

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N > k) &= \mathbb{P}(S_k < 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k < 1) \\
&= \int_{\{(x_1,\cdots,x_k)\in[0,1]^k \mid x_1+\cdots+x_k<1\}} f(x_1,\cdots,x_k)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

这里 $f(x_1,\cdots,x_k) = f_1(x_1)\cdots f_k(x_k) = 1^k = 1$ 为 $(X_1,\cdots,X_k)$ 的联合密度. 而积分区域即 k 维单形, 于是

$$\mathbb{E}[N] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

□