十七边形可以使用尺规作图画出。下面我们给出一个例子以突显复数在解决几何难题的重要作用。

问题　设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是以原点为圆心的单位圆上的 n 个点 $(n > 2)$。如果 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是正 n 边形的 n 个顶点，证明 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$。

仔细分析这一问题，这里的 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 是复平面的 n 个点相加。要想解决这一问题，我们需要介绍几个基本的概念：

我们知道如果想要在复平面上确定一个复数，那么我们需要知道这一复数的实部和虚部。因此复数可以由以下形式来表达：

$$z = x + iy \tag{1}$$

其中 $i \triangleq \sqrt{-1}$。我们称 (1) 式为复数的代数表示形式，x 和 y 分别被称为复数的实部和虚部。

类似地，复平面的复数可以使用类似极坐标的形式来表示，即当我们知道一个复数在复平面上相对 O 点的长度（一般称之为**模**），以及 O 点到该复数组成的射线相对于实轴正半轴的角度（一般称之为**辐角**），那么我们就能在复平面上唯一确定一个复数。因此复数还可以由以下形式来表示：

$$z = re^{i\theta} \tag{2}$$

其中,e 为自然指数，r 表示复数的模，θ 表示复数的辐角，上式被称为复数的指数形式。有了这一形式，下面我们给出一个关于复数的重要定理：

定理 1. *在复数域有如下等式：*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3}$$

证明. 依次考虑函数 $\cos x, \sin x, e^x$ 的泰勒展开：

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{4}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{5}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{6}$$

我们将 $x = i\theta$ 带入 (6) 式可以得到：

$$e^{i\theta} = \overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}}^{\cos\theta} + i\overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!}}^{\sin\theta} \tag{7}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

即为 (3), 证毕。 □

第一个发现该等式且给出证明的是欧拉，因此该公式也被称之为**欧拉公式**。限于篇幅，我们给出了这一定理的一个不太严谨的证明。这一定理将复数的代数形式和指数形式相结合，得到了一个新的复数表示形式：

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \tag{8}$$

(8) 式被称为复数的三角形式。

在实际应用中，我们可以根据实际需要来灵活运用和转化三种不同的复数表达形式，以此来减轻工作量。

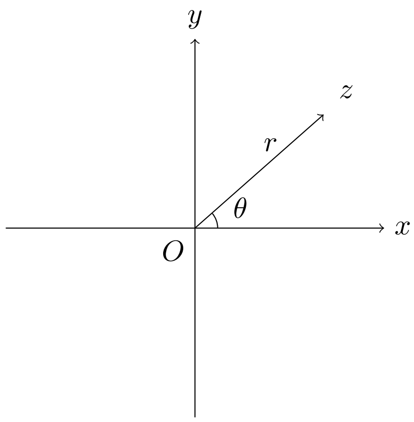

图 1: 复数 z 的辐角和模长

在引入了关于复数的表达形式以及欧拉公式之后, 我们给出一个解决问题的重要定理：

定理 2. 对于一元方程 $z^n = \zeta, \zeta = re^{i\theta} \in \mathbb{C}\,(\zeta \neq 0, n > 0)$, 其在复数域上一定存在 n 个互不相等的根 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，且这些根满足：

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{9}$$

证明. 由 $\zeta = re^{i\theta}$ 可知，复数 ζ 的模长为 r, 辐角为 θ。对于任一复数 $z = r_0 e^{i\theta_0}$，由复数的指数表达进行计算可知:

$$z^n = r_0^n e^{in\theta_0}$$

此时，z^n 的辐角变为原来的 n 倍，模长为原来的 n 次方。由此可知，若对一个复数进行 n 次方运算，其模长变成了 r, 辐角变成了 θ，则该复数的模长应该为 $\sqrt[n]{r}$, 其辐角应该为 $\frac{\theta+2k\pi}{n}$。这样的复数有无穷多个，但考虑到由于 k 的选取会导致一部分复数在复平面上的位置完全重复，因此这些复数可以分成 n 类，我们可以从这些类中选取较为简单的一些，即为 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 的情况，因此结论成立。 □

我们来考虑最开始的问题：

证明. 由于 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为正 n 边形的 n 个顶点, 且这 n 个点分布在复平面的单位圆周上, 不失一般性地，我们令：

$$z_k = e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

显然，这 n 个复数为多项式 $z^n = e^{i\theta}$ 的 n 个互异的根。因此

$$z^n - e^{i\theta} = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \tag{11}$$

分析 (11) 式, 左式是一个 n 次多项式，且该多项式除了 n 次项以及 0 次项之外，其他项的系数都为 0。右式也一样为一个 n 次多项式, 我们只考察其 $n-1$ 次方项，很容易得到右式的 $n-1$ 次方项为：

$$a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} z_k \tag{12}$$

由于左右两个多项式相等，则右式的 $n-1$ 次项也应该为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0 \tag{13}$$

□