

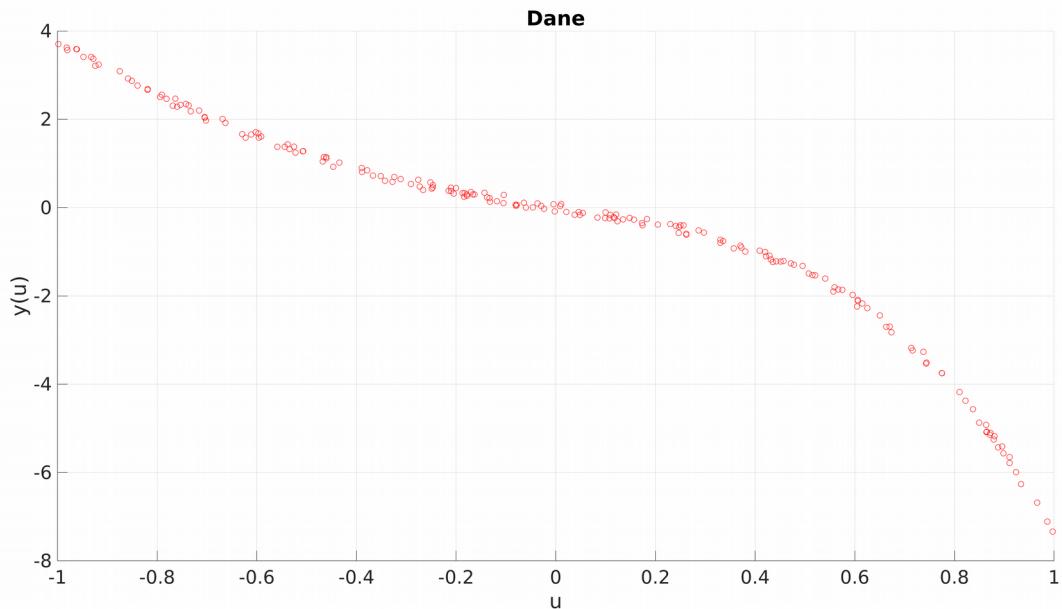
MODI – projekt II, zadanie 41

Michał Stolarz

Zad nr 1

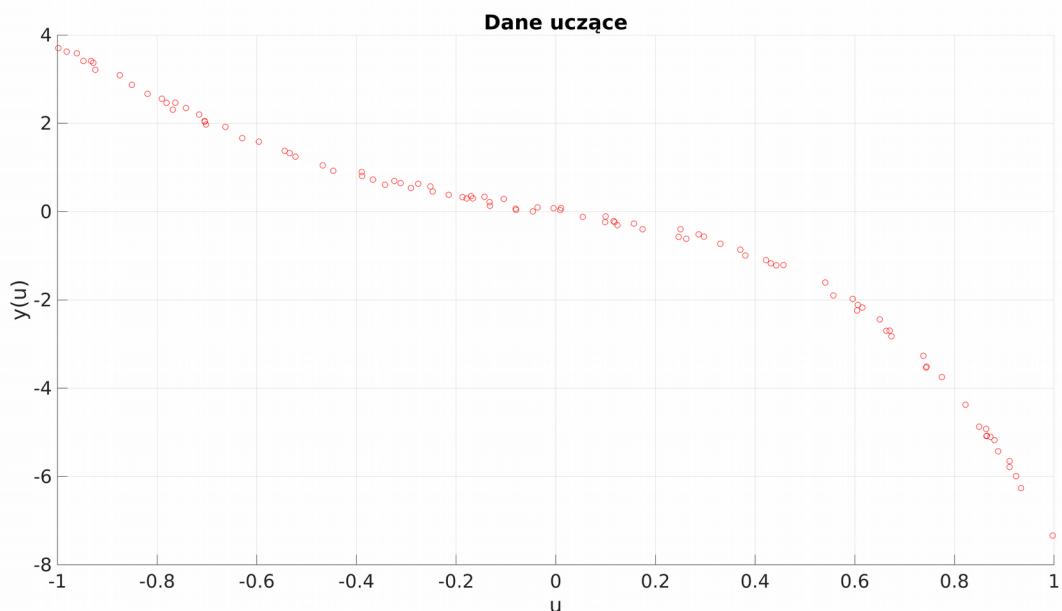
W zadaniu tym zidentyfikowano model statyczny na podstawie danych statycznych procesu podanych w pliku danestat41.zip . Zadanie to zrealizowano w 4 kolejnych podpunktach.

a) Początkowo narysowano dane statyczne (Ilustracja 1).

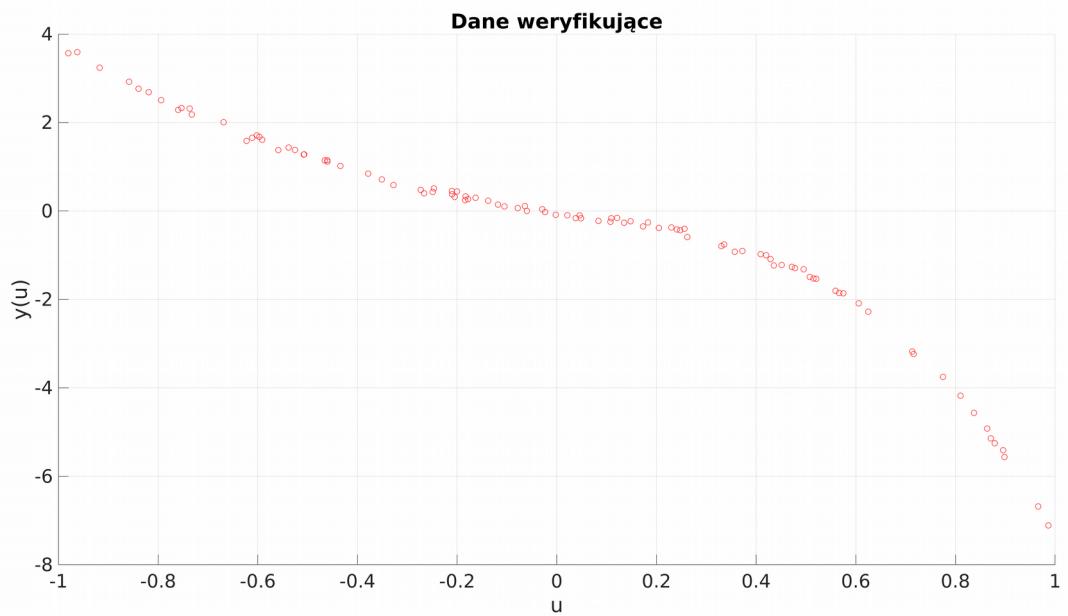


Ilustracja 1: Dane statyczne

b) Podzielono dane statyczne na zbiór uczący i weryfikujący (co druga próbka była kwalifikowana do zbioru weryfikującego), a następnie narysowano te zbiory na oddzielných rysunkach.



Ilustracja 2: Zbiór uczący danych statycznych

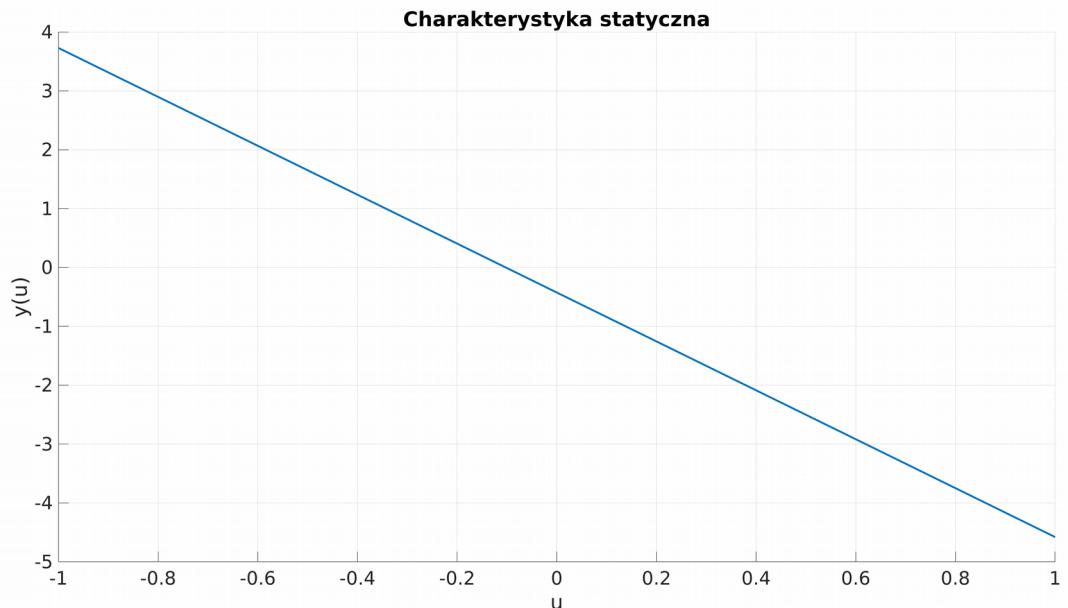


Ilustracja 3: Zbiór weryfikujący danych statycznych

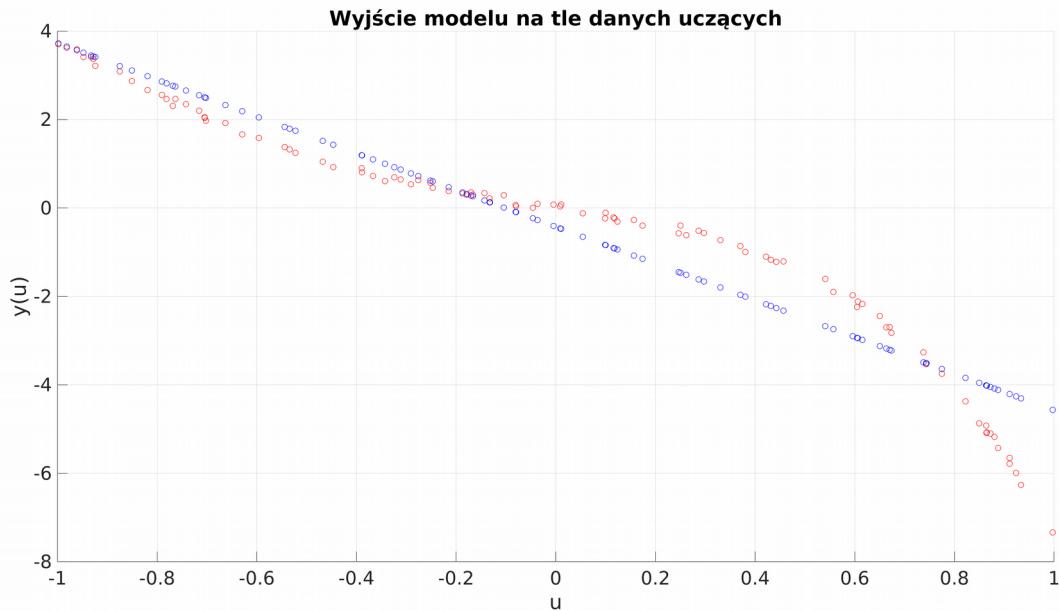
c) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono statyczny model liniowy postaci:

$$y(u) = a_0 + a_1 u$$

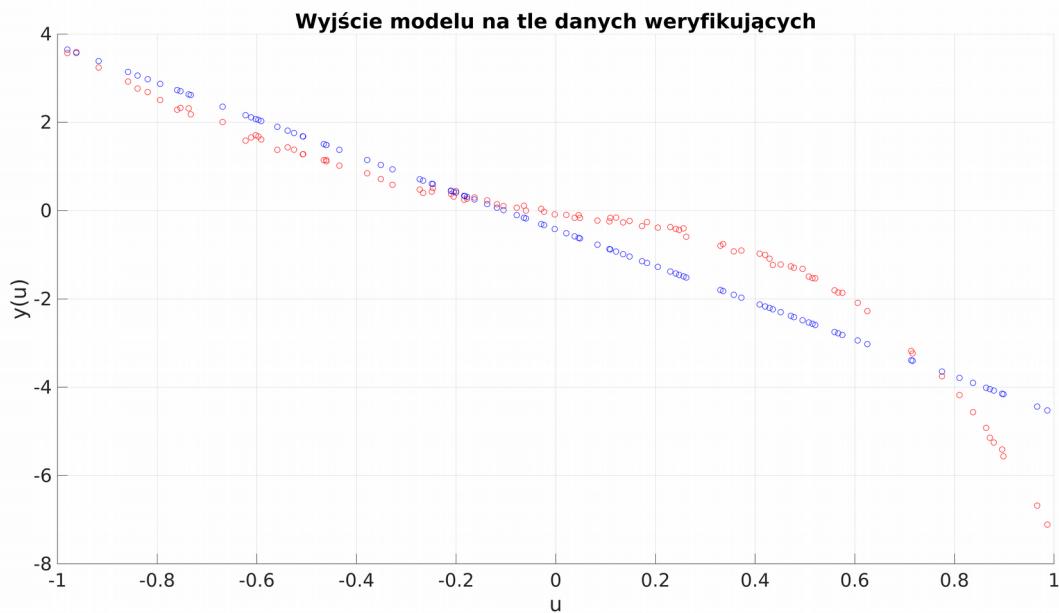
Gdzie $y(u)$ – statyczny model liniowy, u – sygnał wejściowy procesu, a_1, a_0 – parametry modelu liniowego. Narysowano charakterystykę $y(u)$ (Ilustracja 4), obliczono błędy modelu dla zbioru uczącego i weryfikującego. Na Ilustracjach 5 i 6 pokazano wyjście modelu na tle dwóch zbiorów danych. Czerwonym kolorem zaznaczono tam zbiór danych wyjściowych procesu, a niebieskim wyjście modelu.



Ilustracja 4: Charakterystyka $y(u)$



Ilustracja 5: Wyjście modelu na tle danych uczących



Ilustracja 6: Wyjście modelu na tle danych weryfikujących

Jak widać na powyższych ilustracjach wyjście statycznego modelu liniowego w znaczący sposób odbiega od wartości w zbiorze zarówno uczącym jak i weryfikującym. Wynika to oczywiście z faktu że używany jest model liniowy, który słabo dopasowuje się do posiadanych danych. O złej jakości otrzymanego modelu zaświadczają także wyliczone błędy. Dla zbioru uczącego błąd wynosi 55.2073 , natomiast dla weryfikującego 56.5049 . Błędy te można zmniejszyć przy zastosowaniu modeli wielomianowych, lepiej dopasowujących się do posiadanych danych. Błąd modelu wyliczono ze wzoru:

$$E = \sum_{i=1}^P (y_i - a_1 u_i - a_0)^2$$

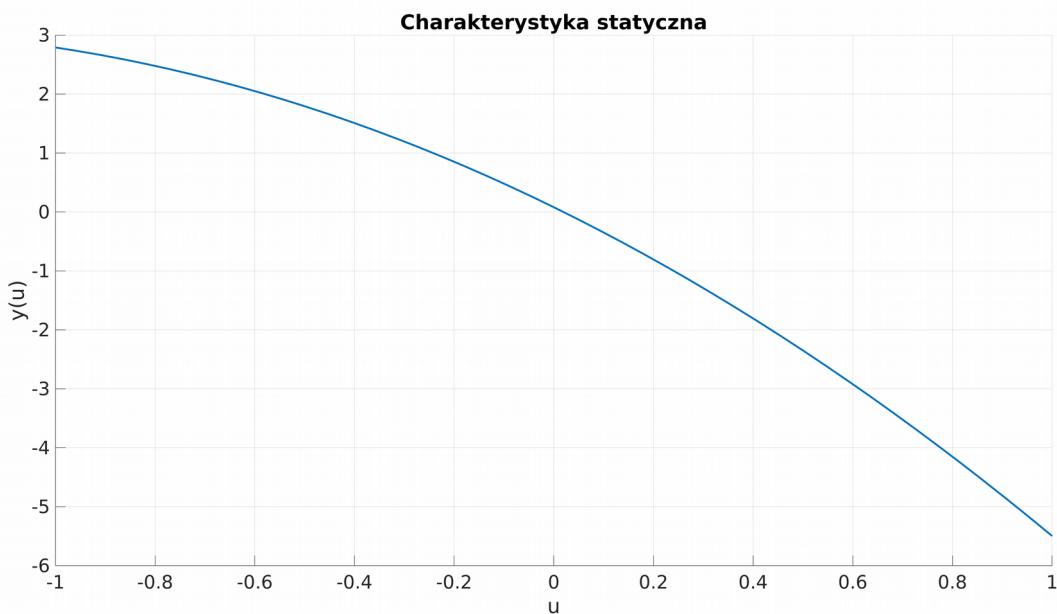
Gdzie E – błąd modelu, P – ilość próbek, y_i – kolejne próbki wyjścia procesu, u_i – kolejne próbki sygnału wejściowego procesu, a_1, a_0 – parametry wyznaczonego modelu liniowego.

d) Następnie metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono statyczne modele nieliniowe postaci:

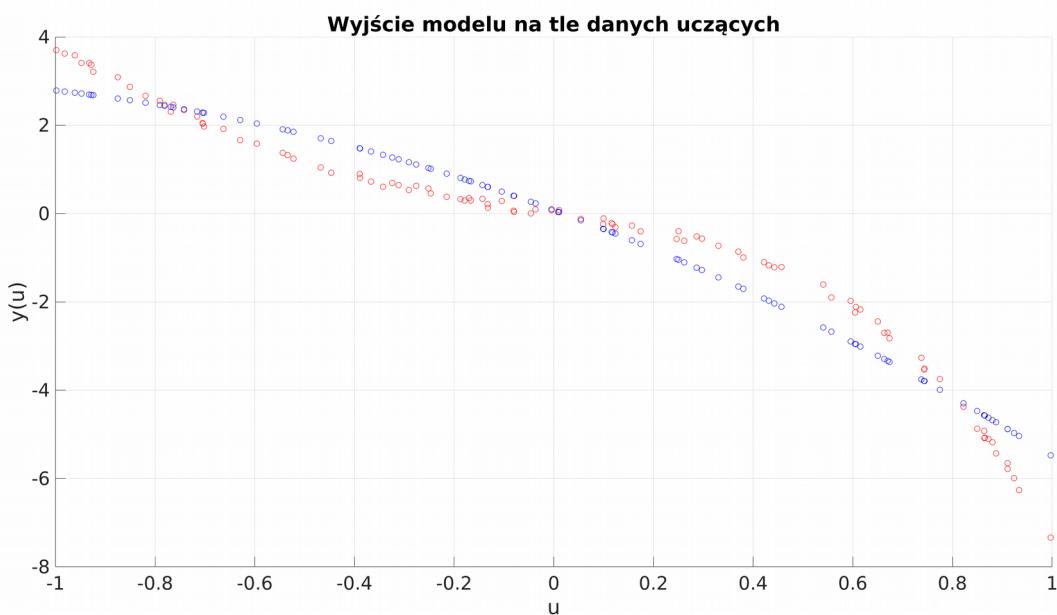
$$y(u) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i u^i$$

Gdzie $y(u)$ – statyczny model nieliniowy , N – stopień wielomianu, u – sygnał wejściowy procesu, a_i, a_0 – parametry modelu nieliniowego.

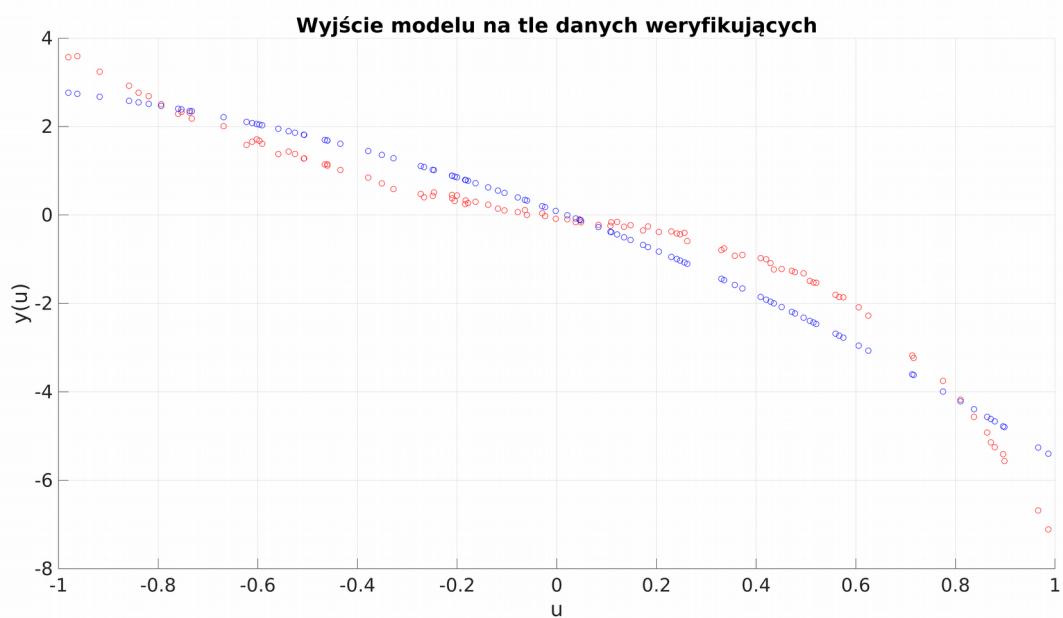
Wyznaczono statyczne modele nieliniowe dla różnych stopni wielomianu N . W każdym przypadku narysowano charakterystykę $y(u)$, obliczono błędy modelu dla zbioru uczącego i weryfikującego (podano je w Tabeli 1) oraz pokazano na rysunkach wyjście modelu na tle dwóch zbiorów danych (czerwonym kolorem zaznaczono zbiór danych wyjściowych procesu, a niebieskim wyjście modelu).



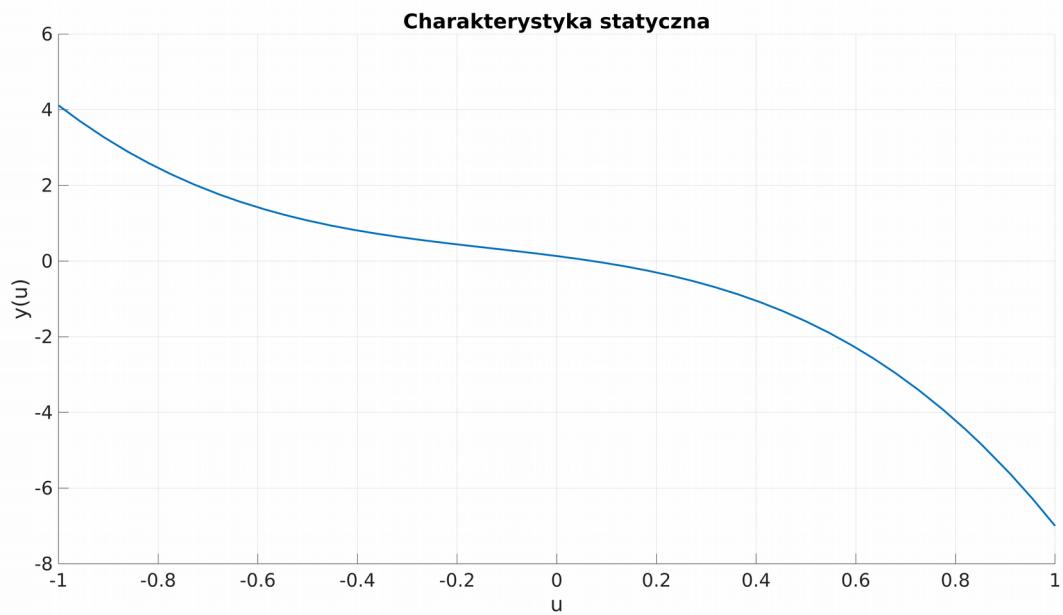
Ilustracja 7: Charakterystyka statyczna nieliniowego modelu drugiego stopnia



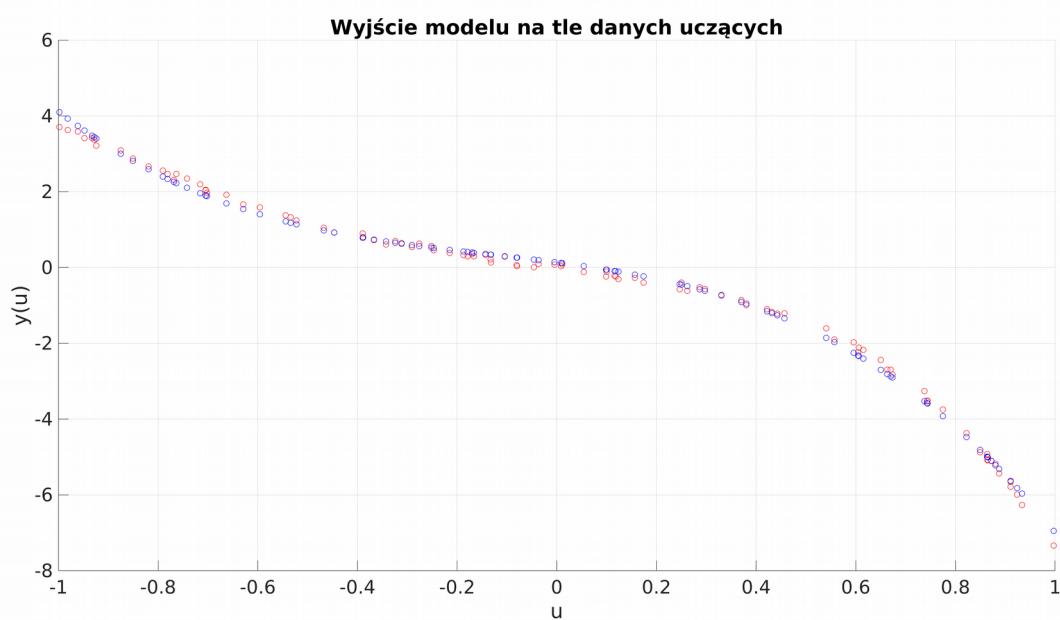
Ilustracja 8: Wyjście nieliniowego modelu drugiego stopnia na tle danych uczących



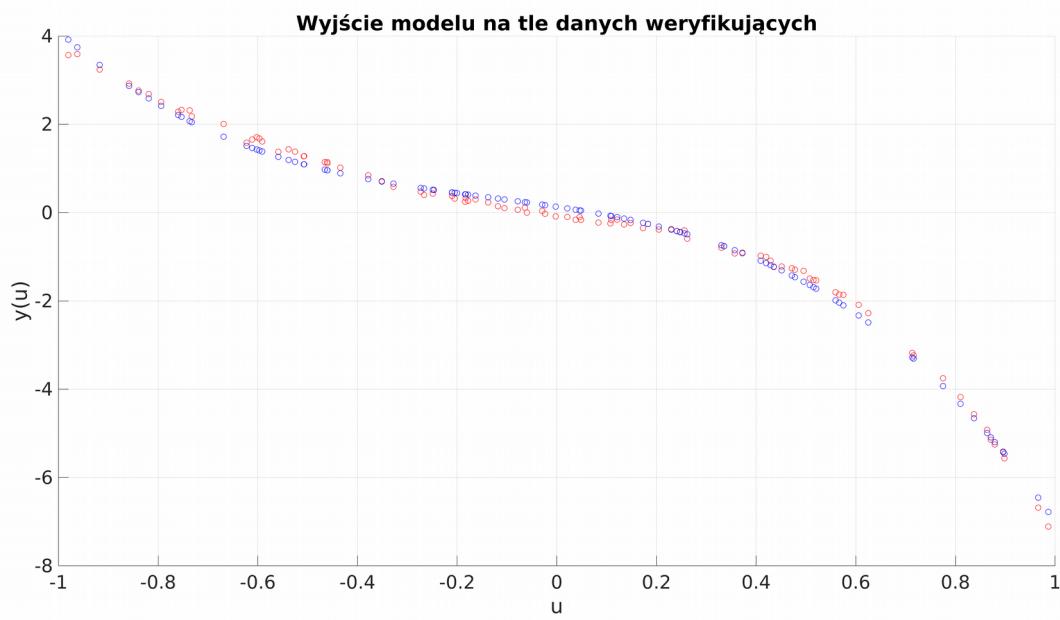
Ilustracja 9: Wyjście nieliniowego modelu drugiego stopnia na tle danych weryfikujących



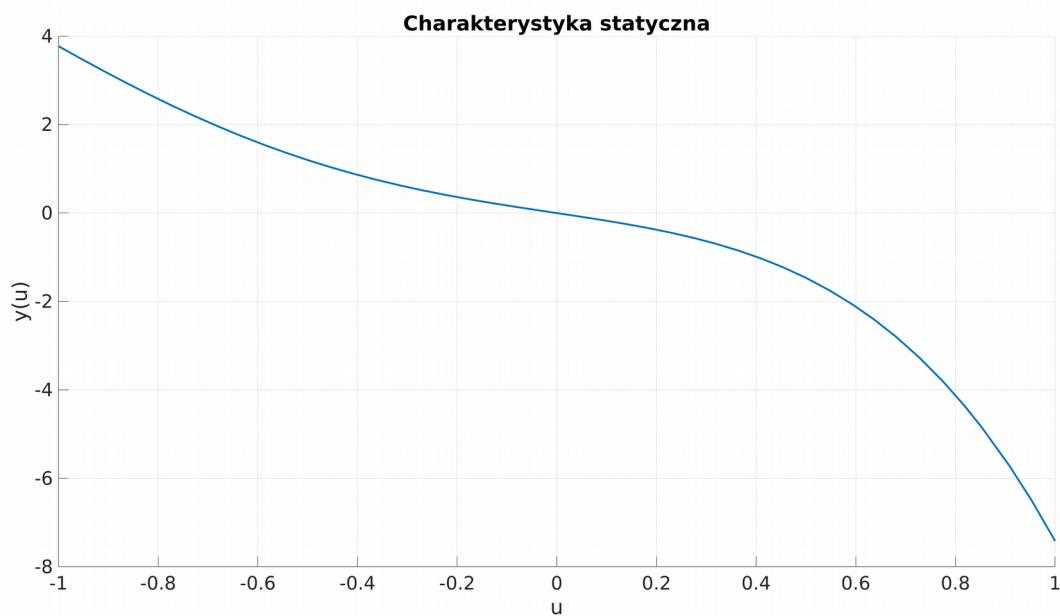
Ilustracja 10: Charakterystyka statyczna nieliniowego modelu trzeciego stopnia



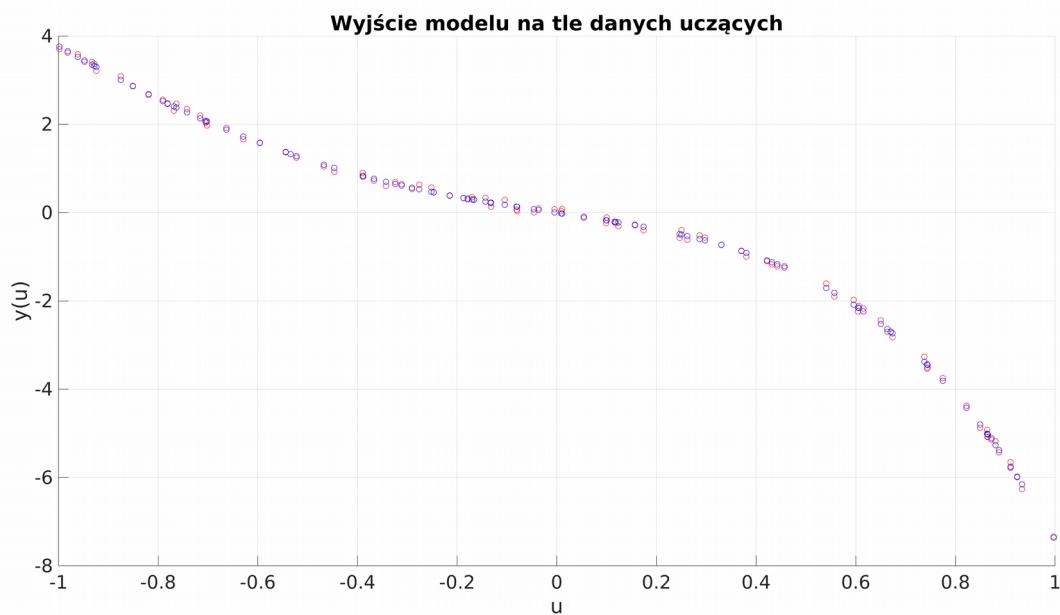
Ilustracja 11: Wyjście nieliniowego modelu trzeciego stopnia na tle danych uczących



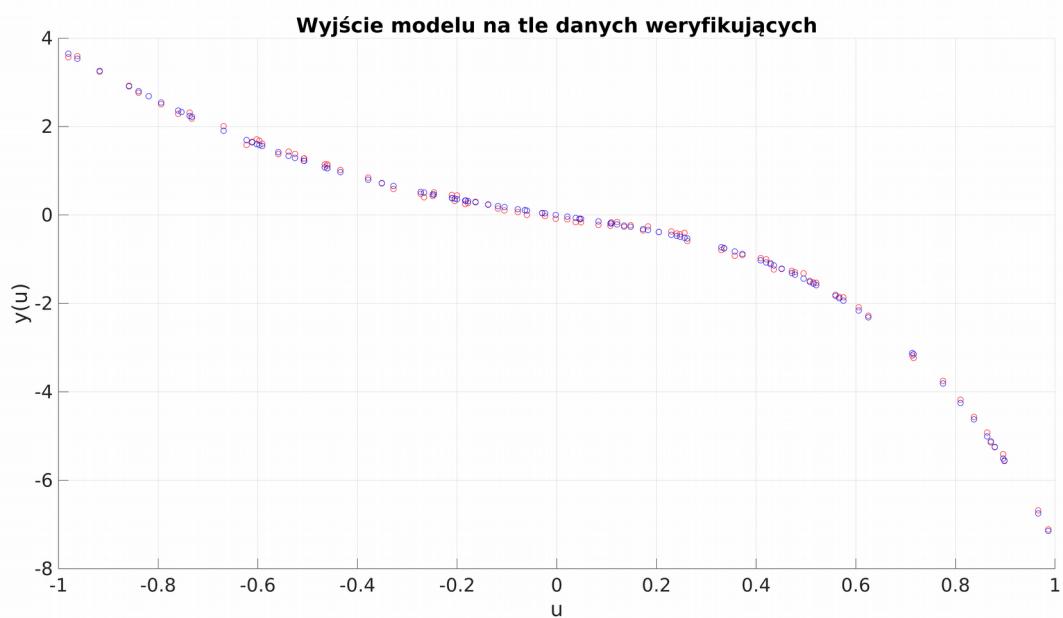
Ilustracja 12: Wyjście nieliniowego modelu trzeciego stopnia na tle danych weryfikujących



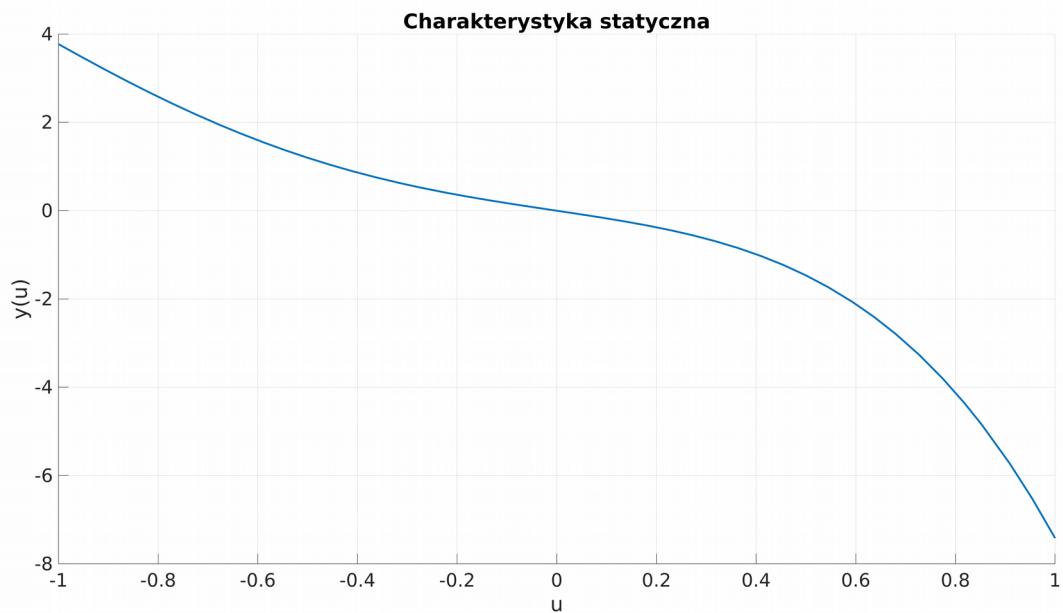
Ilustracja 13: Charakterystyka statyczna nieliniowego modelu czwartego stopnia



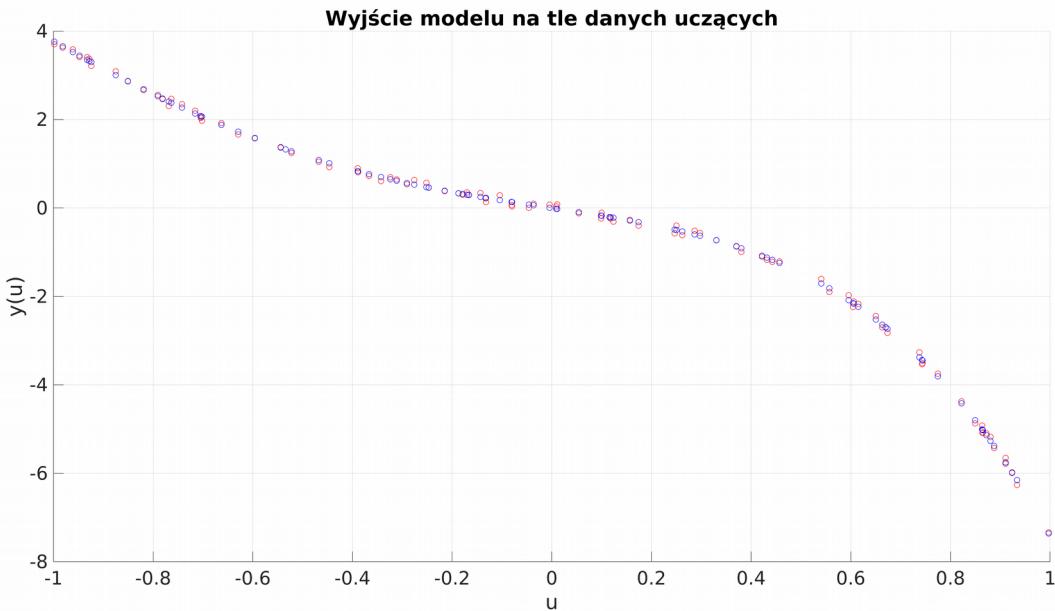
Ilustracja 14: Wyjście nieliniowego modelu czwartego stopnia na tle danych uczących



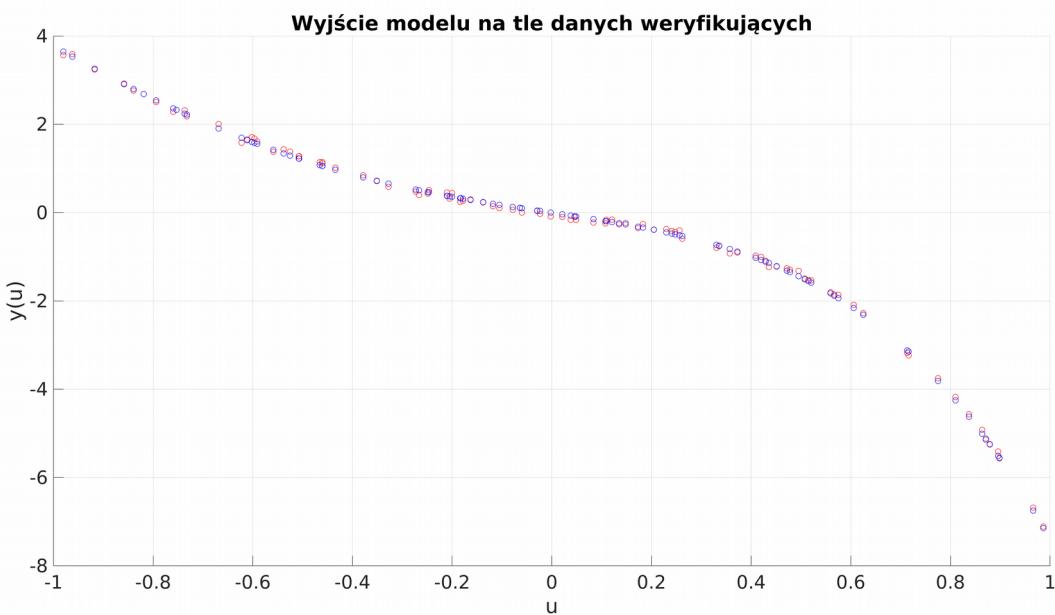
Ilustracja 15: Wyjście nieliniowego modelu czwartego stopnia na tle danych weryfikujących



Ilustracja 16: Charakterystyka statyczna nieliniowego modelu piątego stopnia



Ilustracja 17: Wyjście nieliniowego modelu piątego stopnia na tle danych uczących



Ilustracja 18: Wyjście nieliniowego modelu piątego stopnia na tle danych weryfikujących

Rząd modelu	Błąd dla zbioru uczącego	Błąd dla zbioru weryfikującego
2	34,8967	35,202
3	2,1422	2,3841
4	0,4159	0,3826
5	0,4158	0,3836

Tabela 1: Błędy modeli dla zbioru uczącego i weryfikującego

Błędy poszczególnych modeli wyznaczono ze wzoru:

$$E = \|Mw - y\|^2$$

Gdzie E – błąd modelu, y – wektor z próbками wyjścia procesu, M – macierz zawierająca wektor jedynek oraz wektory (podnoszone do kolejnych potęg w zależności od stopnia wielomianu) z kolejnymi próbками sygnału wejściowego procesu, w – wektor zawierający parametry wyznaczonego modelu.

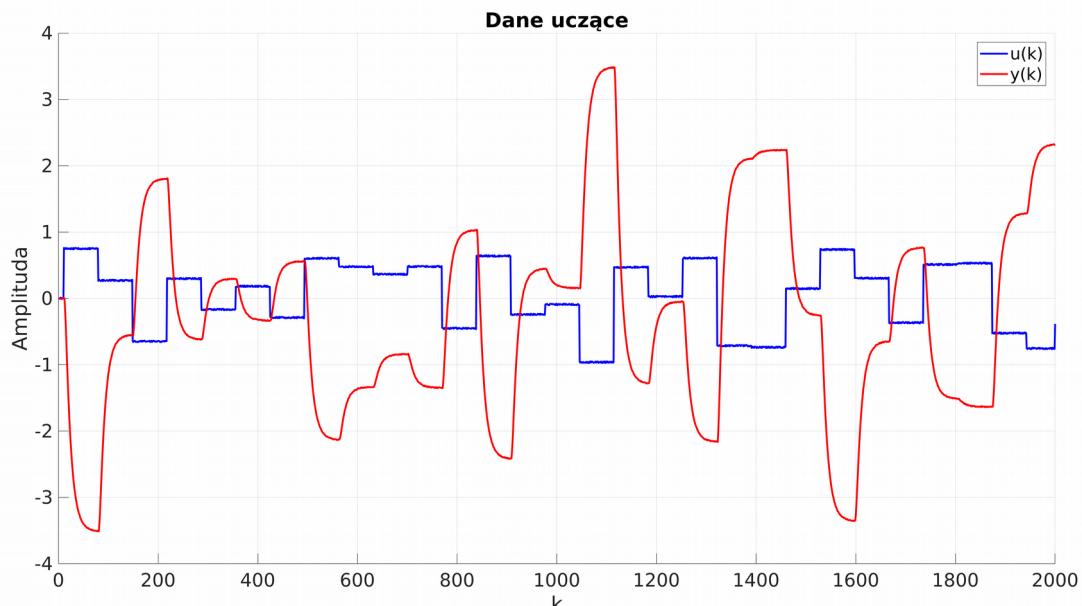
Jak widać na Ilustracjach 7-18 im wyższy stopień wielomianu będącego modelem badanego obiektu, tym lepiej odzwierciedla on rzeczywiste dane. Dzięki temu że model lepiej się dopasowuje to jego błąd względem rzeczywistych danych staje się mniejszy (należy tu zwracać szczególną uwagę na dane weryfikujące, a nie uczące). Jednak zależność ta trwa do pewnego momentu, ponieważ dla wielomianu stopnia 5 błąd wzrosł (błąd dla danych weryfikujących). Jest to spowodowane tym, że uzyskany model zbyt dokładnie dopasowuje się do poszczególnych próbek zamiast uśredniać całość danych.

e) Jako najlepszy model statyczny wybrano wielomian stopnia czwartego. Błąd dla danych weryfikujących jest dla niego najmniejszy (dla wyższych stopni błąd zaczyna rosnąć), a także jest znacznie mniejszy od błędu modelu stopnia trzeciego (dlatego też nie wybrano modelu stopnia trzeciego).

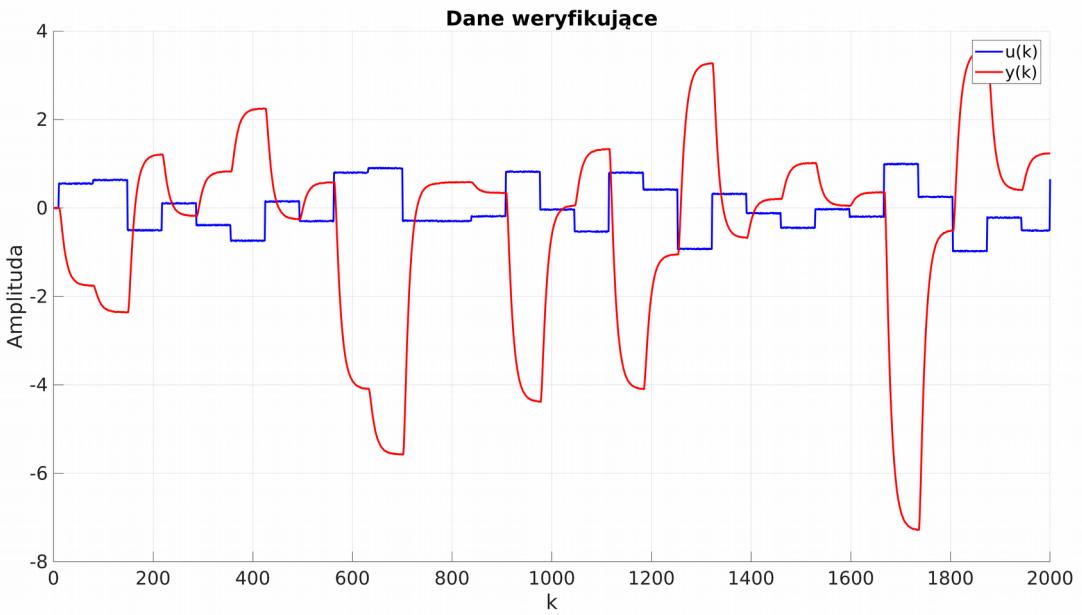
Zad nr 2

W zadaniu tym zidentyfikowano model dynamiczny na podstawie danych dynamicznych procesu podanych w plikach danedynucz41.zip i danesdynwer41.zip .

a) Narysowano zbiór uczący i weryfikujący danych dynamicznych. Niebieskim kolorem oznaczono sygnał wejściowy procesu, natomiast czerwonym – sygnał wyjściowy.



Ilustracja 19: Zbiór uczący danych dynamicznych

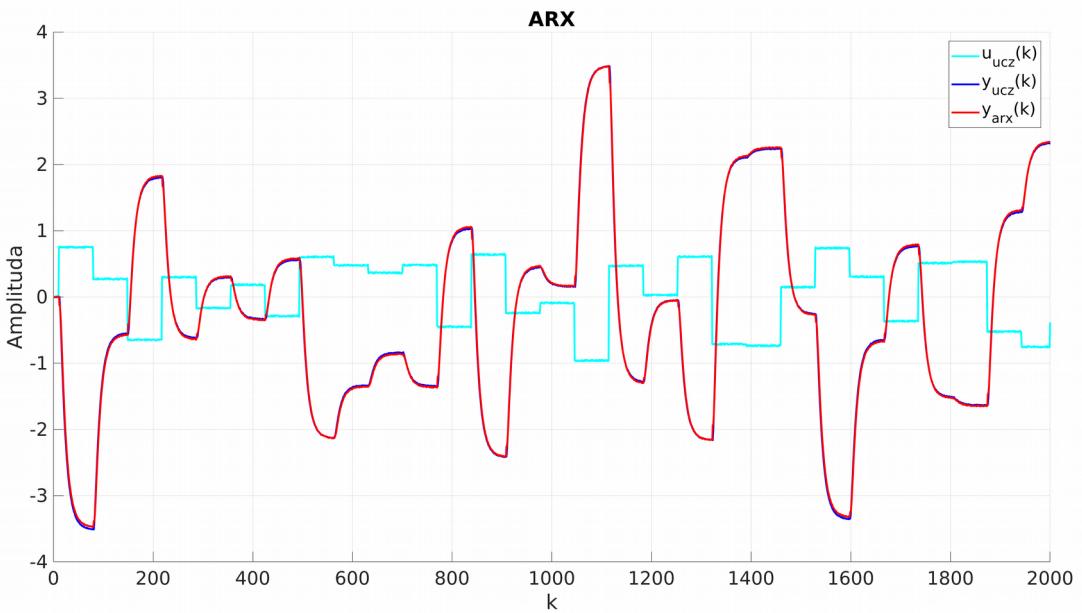


Ilustracja 20: Zbiór weryfikujący danych dynamicznych

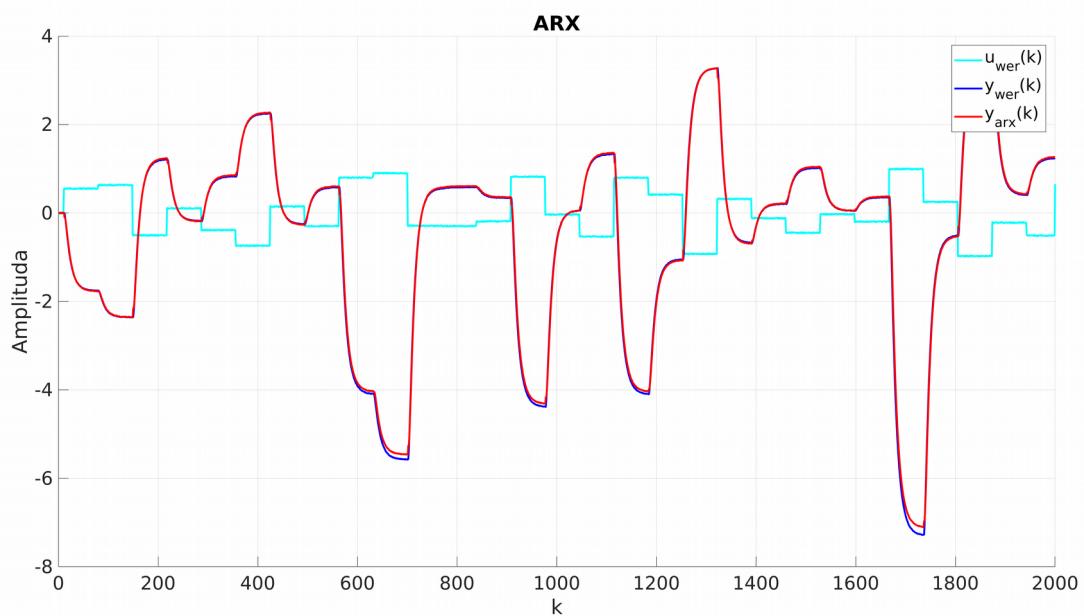
b) Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono dynamiczne modele liniowe postaci:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i)$$

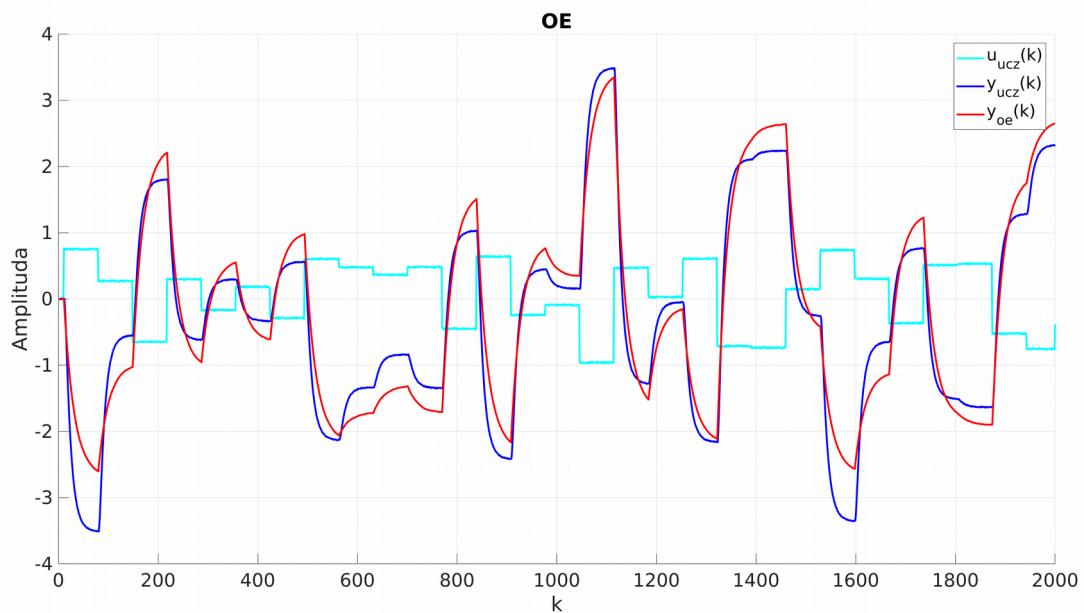
pierwszego ($n_A = n_B = 1$), drugiego ($n_A = n_B = 2$) i trzeciego rzędu ($n_A = n_B = 3$) dynamik. Dla każdego modelu obliczono błędy dla zbioru uczącego i weryfikującego w trybie bez rekurencji i z rekurencją (podano je w Tabeli 2) oraz pokazano na rysunkach wyjście modeli na tle dwóch zbiorów danych (w trybie bez rekurencji i z rekurencją). Przebiegi oznaczono następująco: $u_{ucz}(k)$ – sygnał sterujący (dane uczące), $u_{wer}(k)$ – sygnał sterujący (dane weryfikujące), $y_{ucz}(k)$ – sygnał wyjściowy (dane uczące), $y_{wer}(k)$ – sygnał wyjściowy (dane weryfikujące), $y_{arx}(k)$ – sygnał wyjściowy modelu (tryb bez rekurencji), $y_{oe}(k)$ – sygnał wyjściowy modelu (tryb z rekurencją)



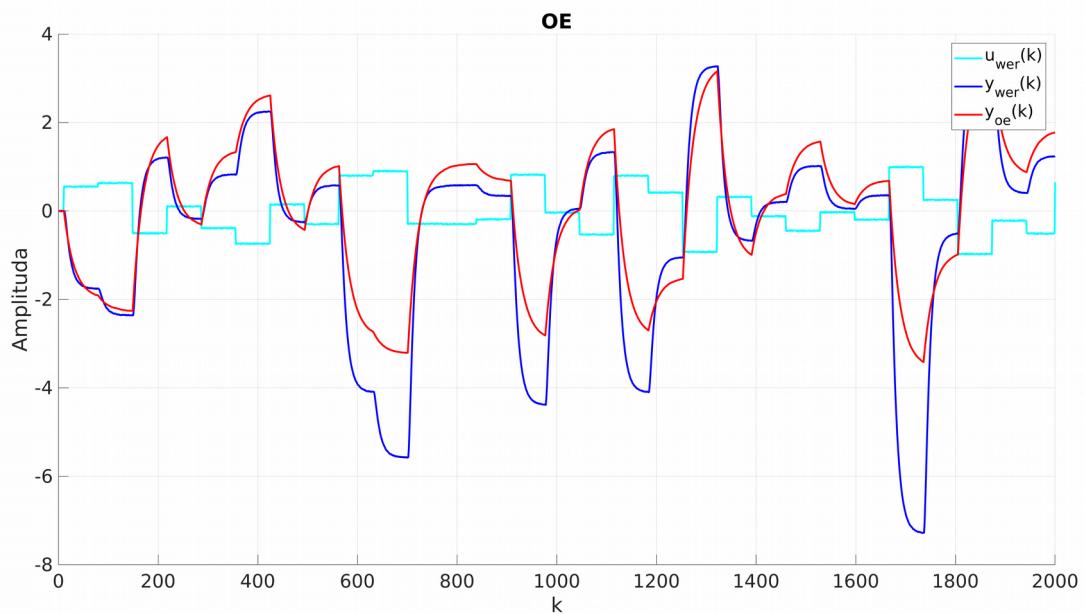
Ilustracja 21: Wyjście modelu (o 1 rzędzie dynamiki) w trybie bez rekurencji na tle zbioru danych uczących



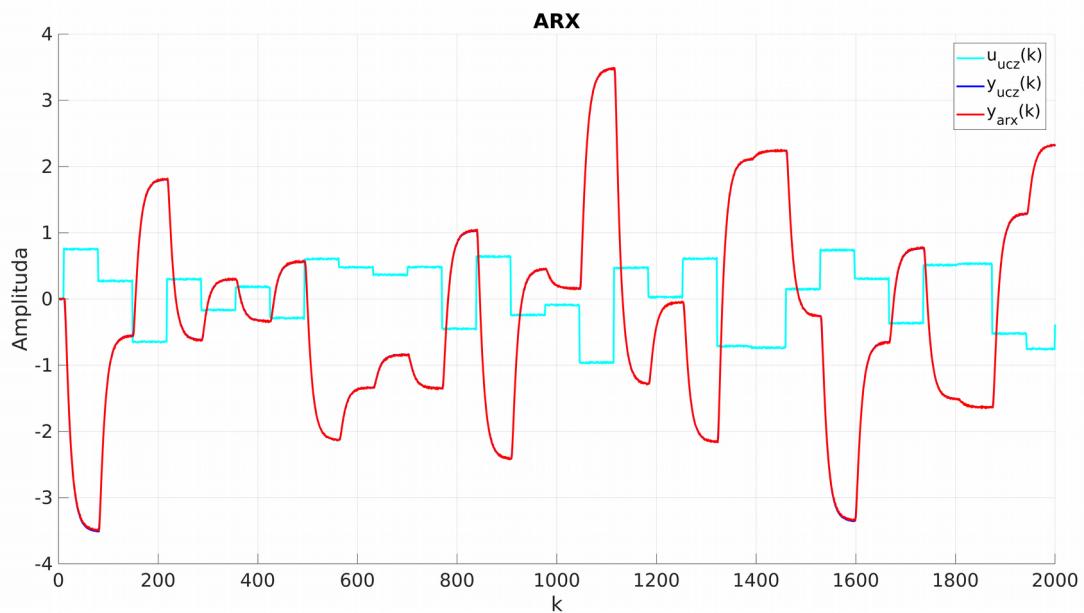
Ilustracja 22: Wyjście modelu (o 1 rzędzie dynamiki) w trybie bez rekurencji na tle zbioru danych weryfikujących



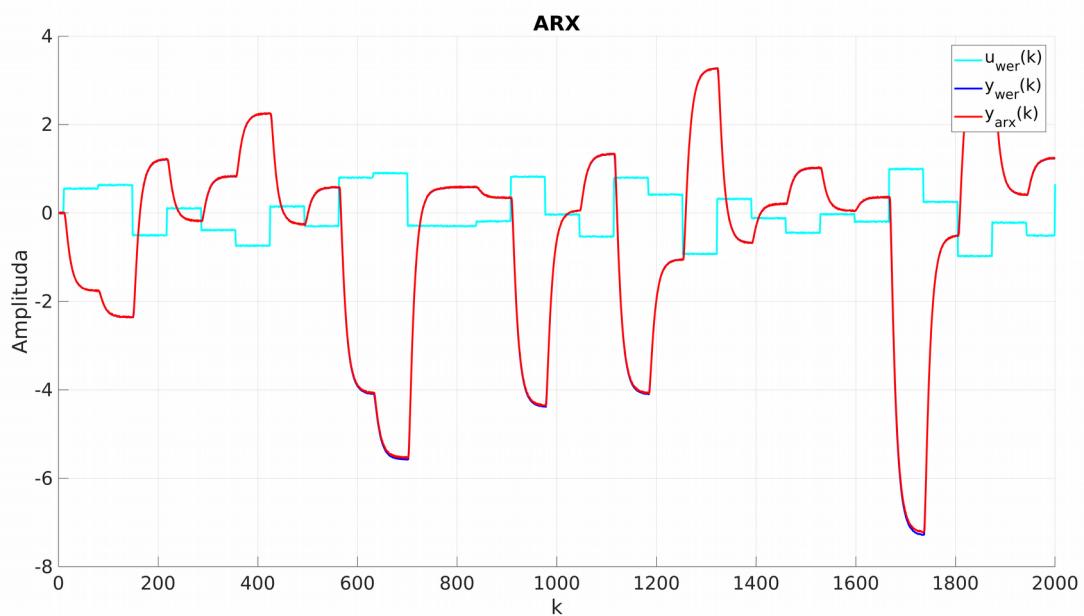
Ilustracja 23: Wyjście modelu (o 1 rzędzie dynamiki) w trybie z rekurencją na tle zbioru danych uczących



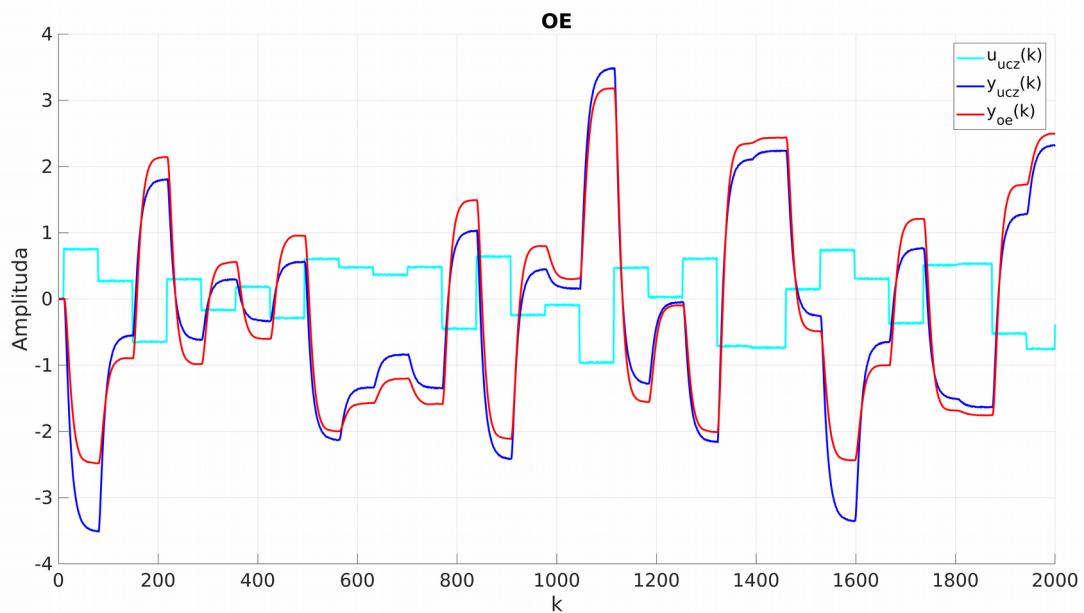
Ilustracja 24: Wyjście modelu (o 1 rzędzie dynamiki) w trybie z rekurencją na tle zbioru danych weryfikujących



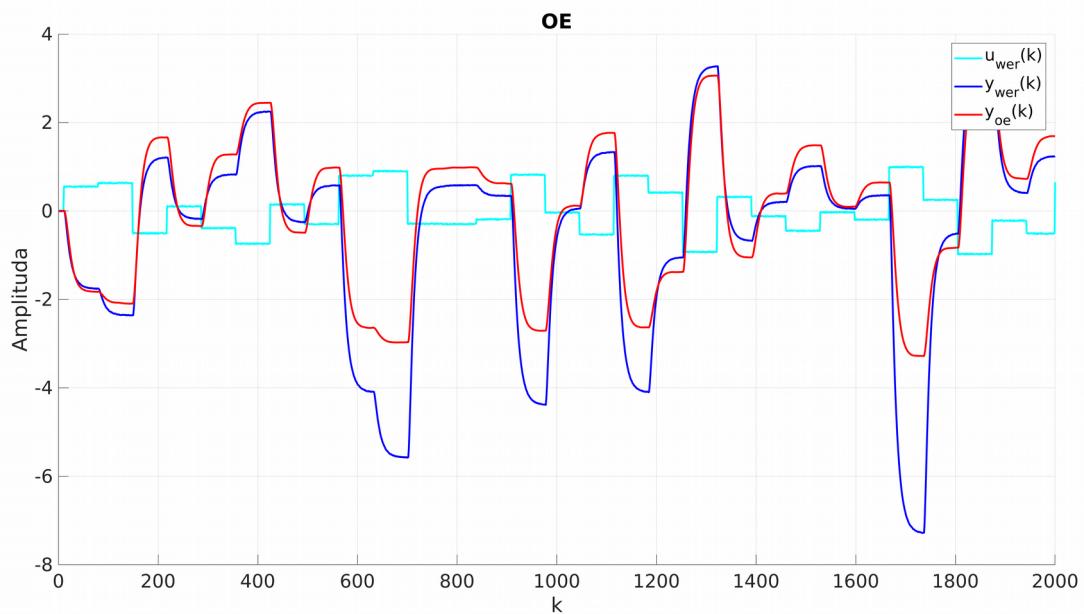
Ilustracja 25: Wyjście modelu (o 2 rzędzie dynamiki) w trybie bez rekurencji na tle zbioru danych uczących



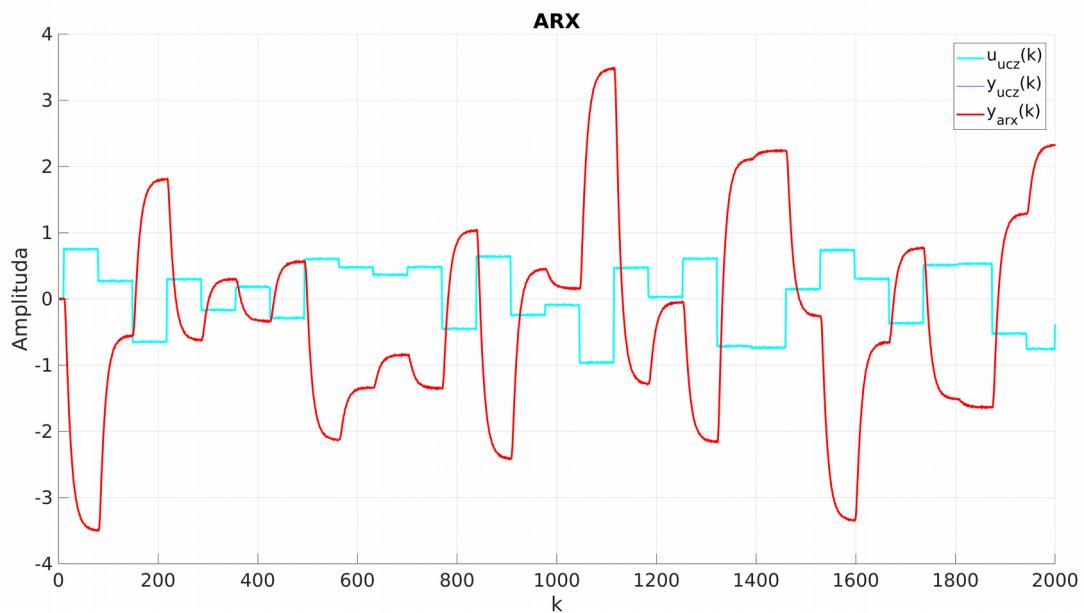
Ilustracja 26: Wyjście modelu (o 2 rzędzie dynamiki) w trybie bez rekurencji na tle zbioru danych weryfikujących



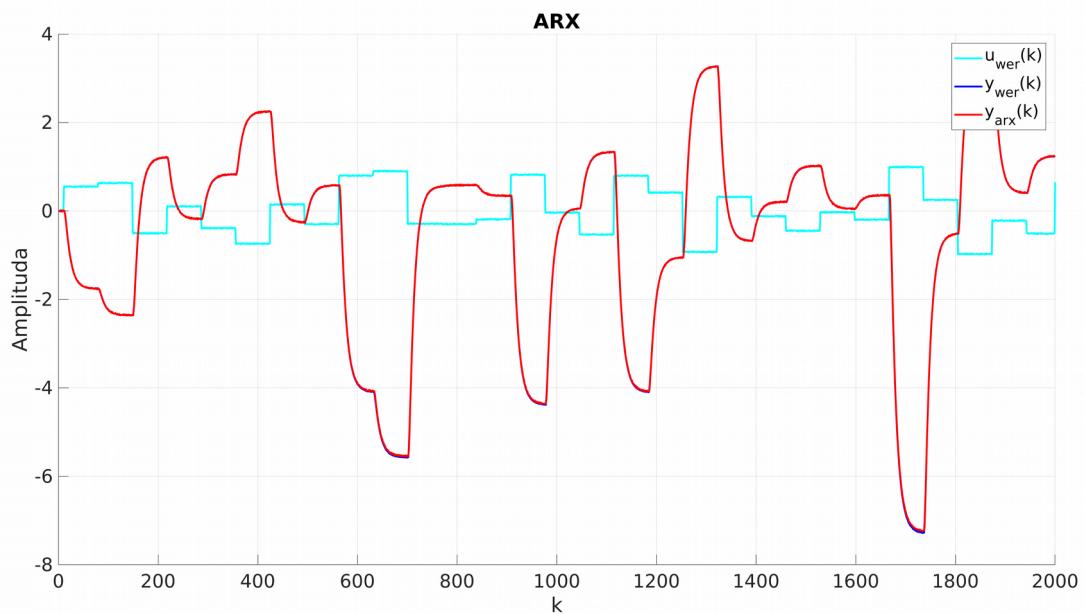
Ilustracja 27: Wyjście modelu (o 2 rzędzie dynamiki) w trybie z rekurencją na tle zbioru danych uczących



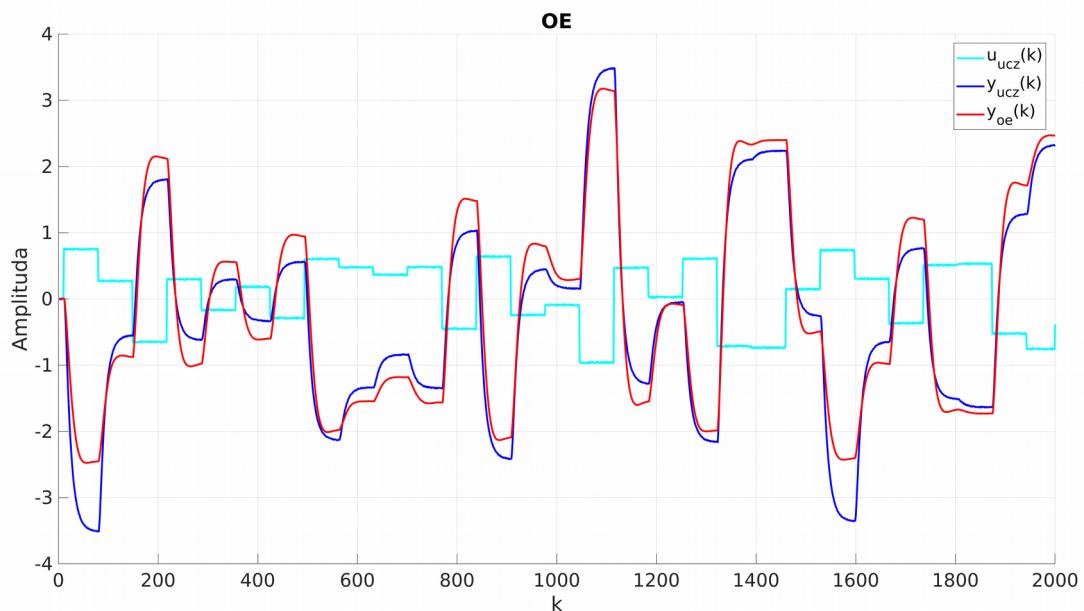
Ilustracja 28: Wyjście modelu (o 2 rzędzie dynamiki) w trybie z rekurencją na tle zbioru danych weryfikujących



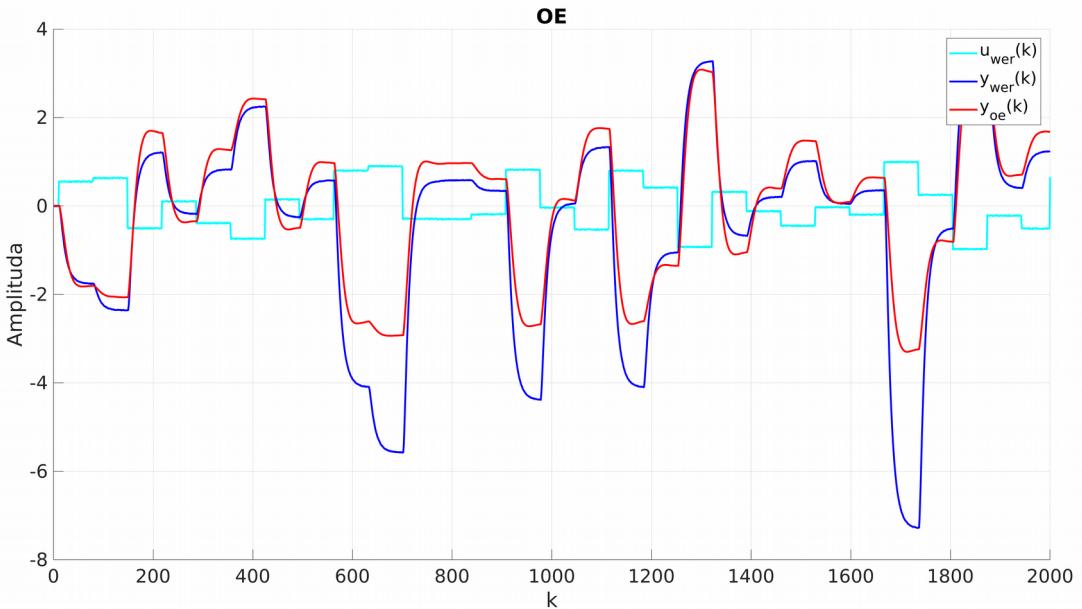
Ilustracja 29: Wyjście modelu (o 3 rzędzie dynamiki) w trybie bez rekurencji na tle zbioru danych uczących



Ilustracja 30: Wyjście modelu (o 3 rzędzie dynamiki) w trybie bez rekurencji na tle zbioru danych weryfikujących



Ilustracja 31: Wyjście modelu (o 3 rzędzie dynamiki) w trybie z rekurencją na tle zbioru danych uczących



Ilustracja 32: Wyjście modelu (o 3 rzędzie dynamiki) w trybie z rekurencją na tle zbioru danych weryfikujących

Rząd dynamiki	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
	ARX	OE	ARX	OE
1	2,1428	307,7454	8,9105	2131,3
2	0,2828	251,157	0,8846	1972,3
3	0,2429	257,0699	0,5672	1982,4

Tabela 2: Błędy dla zbioru uczącego i weryfikującego w trybie bez rekurencji i z rekurencją

Jak widać z powyższych wykresów oraz Tabeli 2, błędy dokładności modeli znacznie się różnią w zależności od: ich stopnia dynamiki, trybu (z rekurencją lub bez) oraz zbioru danych na jakich był testowany model. Dla trybu bez rekurencji (ARX) błędy są najmniejsze, ponieważ próbki wyjściowego sygnału (do testowania modelu) są pobierane ze zbioru danych. Dużo większe są błędy dla trybu z rekurencją. Powodem tego jest to, że w OE wykorzystywane są do testowania modelu jego przeszłe sygnały wyjściowe a nie rzeczywistego procesu (ze zbioru danych). Największe są błędy dla trybu z rekurencją, operującym na danych weryfikujących, ponieważ w odróżnieniu od przypadku gdzie wykorzystywano dane uczące, tutaj do testowania używane są inne dane, niż były użyte do tworzenia modelu. Mowa tu oczywiście o danych weryfikujących.

Należy zaznaczyć, że główną uwagę należy przywiązać do błędów dla danych weryfikujących i trybu z rekurencją, ponieważ dają one największy wgląd w rzeczywistą dokładność modelu w odwzorowaniu rzeczywistego procesu.

Na podstawie wyników zauważono, że model pierwszego rzędu dynamiki jest dość mało dokładny. Model o drugim rzędzie dynamiki jest już dużo dokładniejszy (dla obu zbiorów danych oraz dla obu trybów). Natomiast dla modelu o trzecim rzędzie dynamiki błędy dla trybu z rekurencją zaczynają rosnąć. Jest to powód dla którego zaprzestano dalszych badań.

c)

Z punktu widzenia dokładności najlepszym modelem będzie model 2 rzędu dynamiki. Błąd tego modelu w trybie z rekurencją dla zbioru weryfikującego jest najmniejszy.

d)

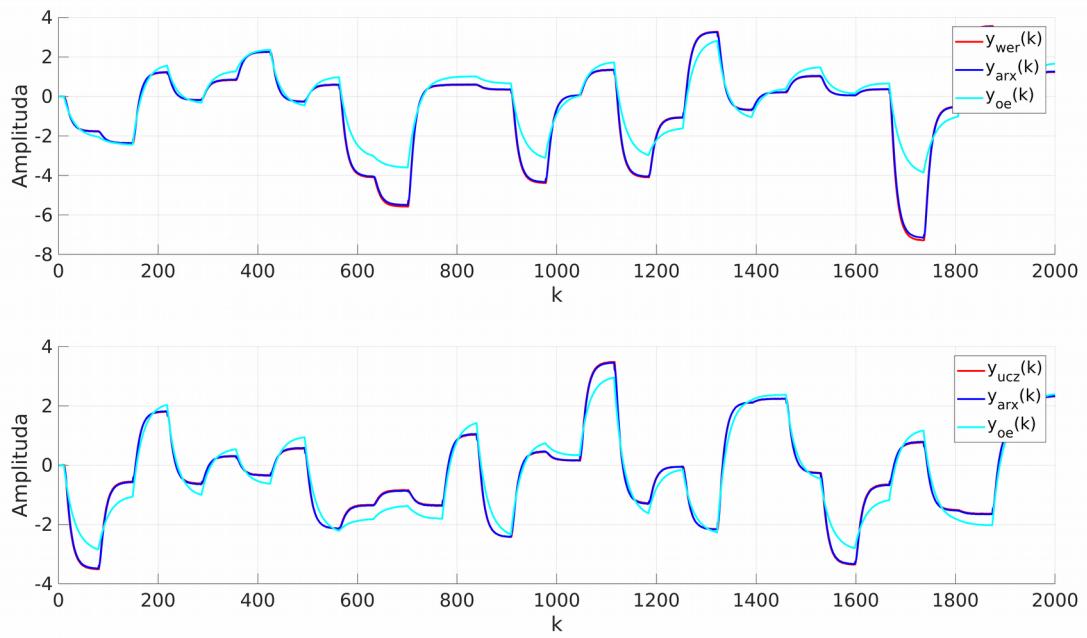
Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono szereg wielomianowych dynamicznych modeli nieliniowych. Rozważono modele o różnym rzędzie dynamiki i strukturze wielomianów o różnym stopniu. W Tabeli 3 przedstawiono błędy jakimi charakteryzowały się modele o rzędach dynamiki od 1 do 4 (dla rzędu od 4 w góre nie można było uzyskać już mniejszych błędów) i stopniach wielomianów od 2 do 5 (dla stopni powyżej 4 błąd, dla trybu z rekurencją i danych weryfikujących, zaczął rosnąć, lub przybierać nieustalone wartości NaN (Not a Number)).

Pierwszy rząd dynamiki				
	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
Stopień wielomianu	ARX	OE	ARX	OE
2	2,0359	275,3161	7,1737	1720,5
3	1,3434	58,7089	3,1072	538,1604
4	1,2442	33,0605	4,6285	132,114
5	1,243	33,8288	13,2438	NaN
Drugi rząd dynamiki				
	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
Stopień wielomianu	ARX	OE	ARX	OE
2	0,2659	203,7864	0,6004	1542,6
3	0,1392	10,4971	0,1839	46,8765
4	0,1229	0,5226	0,1324	2,6375
5	0,1226	0,5285	0,7648	98,508
Trzeci rząd dynamiki				
	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
Stopień wielomianu	ARX	OE	ARX	OE
2	0,2348	207,1654	0,4599	1550,5
3	0,106	8,9853	0,1947	51,1398
4	0,0744	0,151	0,0798	0,3638
5	0,0743	0,1545	0,2817	NaN
Czwarty rząd dynamiki				
	Zbiór uczący		Zbiór weryfikujący	
Stopień wielomianu	ARX	OE	ARX	OE
2	0,1714	200,8083	0,2722	1572,8
3	0,104	8,5046	0,2033	73,5529
4	0,0614	0,1192	0,0814	1,4339
5	0,0612	0,1183	0,0957	2,1593

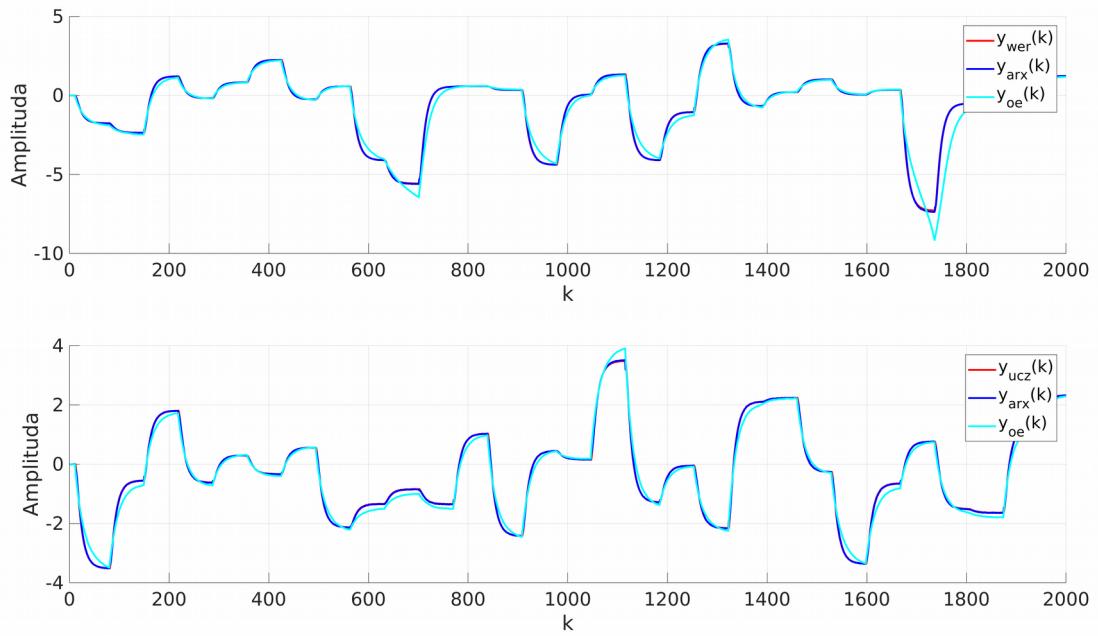
Tabela 3: Błędy dla zbioru uczącego i weryfikującego w trybie bez rekurencji i z rekurencją dla badanych modeli

Na poniższych wykresach w górnych podwykresach przedstawiono zachowanie badanych modeli dla danych weryfikujących, a w dolnych dla danych uczących. Przyjęto następujące oznaczenia: $y_{ucz}(k)$ – sygnał wyjściowy (dane uczące), $y_{ver}(k)$ – sygnał wyjściowy (dane weryfikujące), $y_{arx}(k)$ – sygnał wyjściowy modelu (tryb bez rekurencji), $y_{oe}(k)$ – sygnał wyjściowy modelu (tryb z rekurencją).

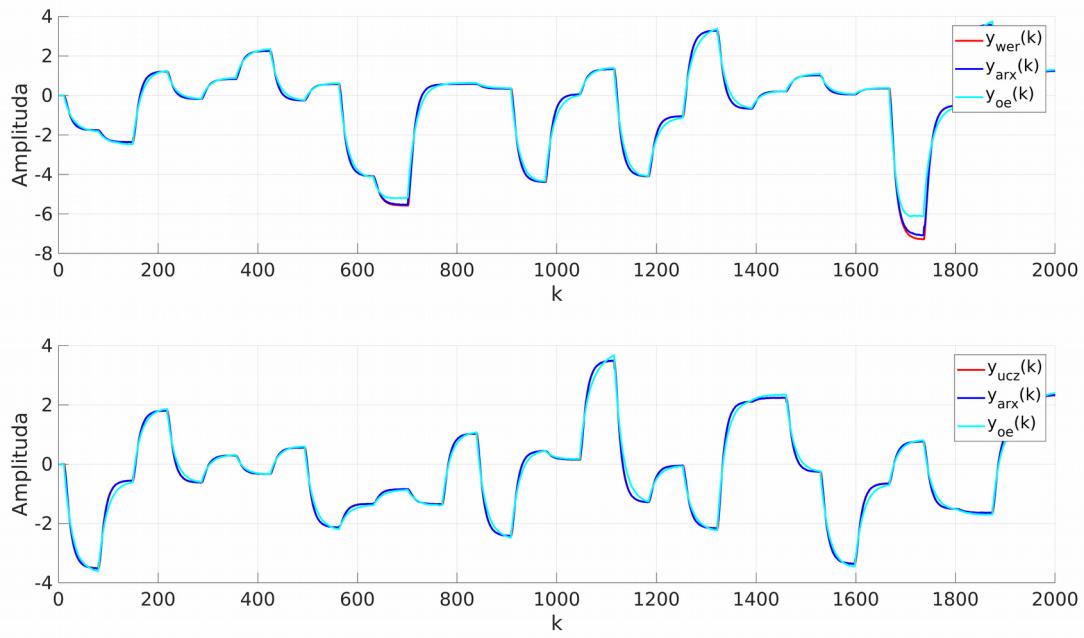
1.Pierwszy rząd dynamiki



Ilustracja 33: Model o dynamice pierwszego rzędu i drugim stopniu wielomianu

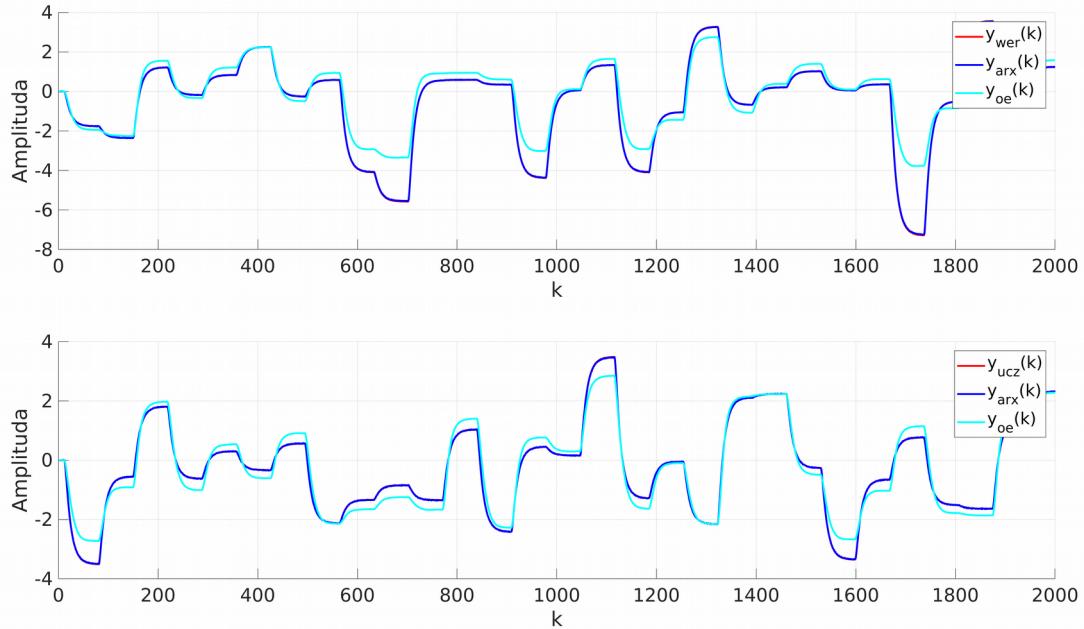


Ilustracja 34: Model o dynamice pierwszego rzędu i trzecim stopniu wielomianu

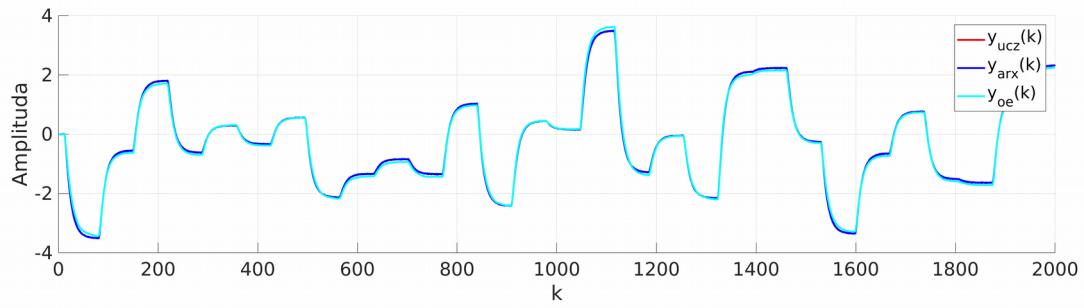
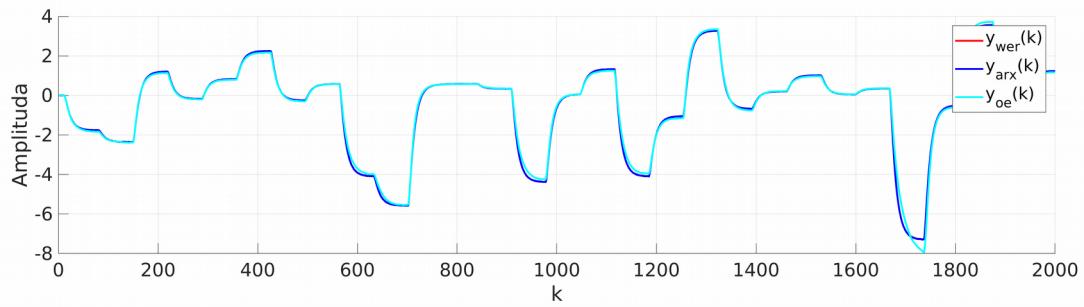


Ilustracja 35: Model o dynamice pierwszego rzędu i czwartym stopniu wielomianu

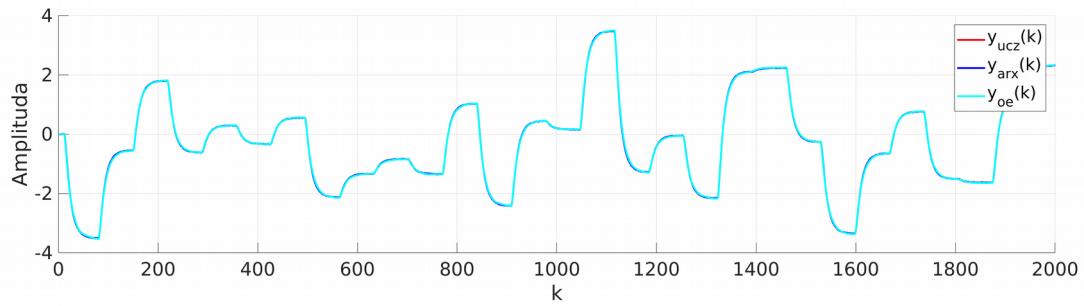
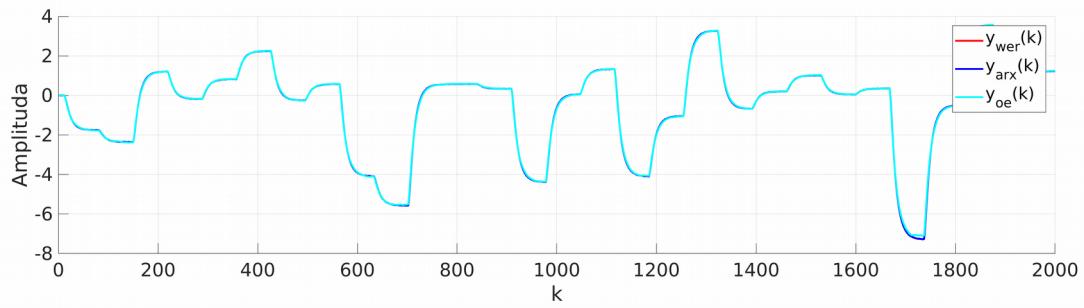
2. Drugi rząd dynamiki



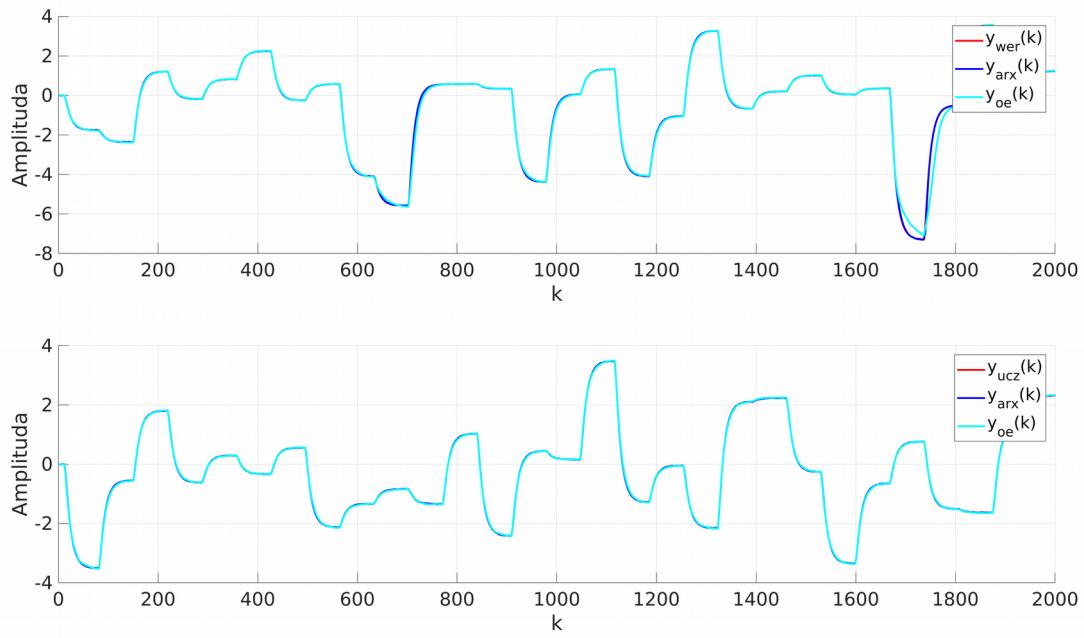
Ilustracja 36: Model o dynamice drugiego rzędu i drugim stopniu wielomianu



Ilustracja 37: Model o dynamice drugiego rzędu i trzecim stopniu wielomianu

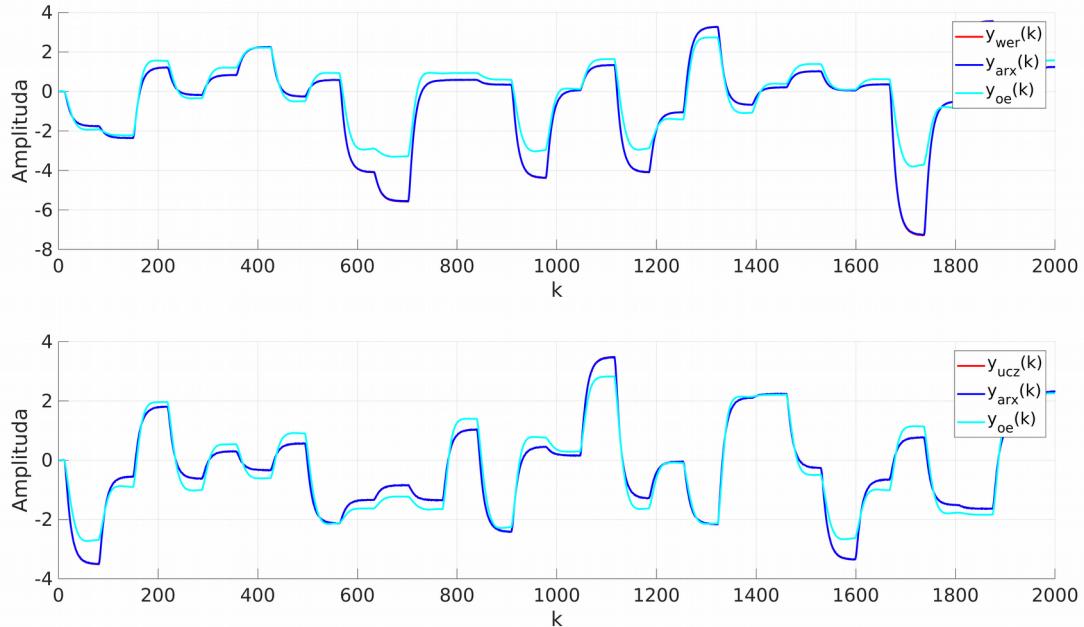


Ilustracja 38: Model o dynamice drugiego rzędu i czwartym stopniu wielomianu

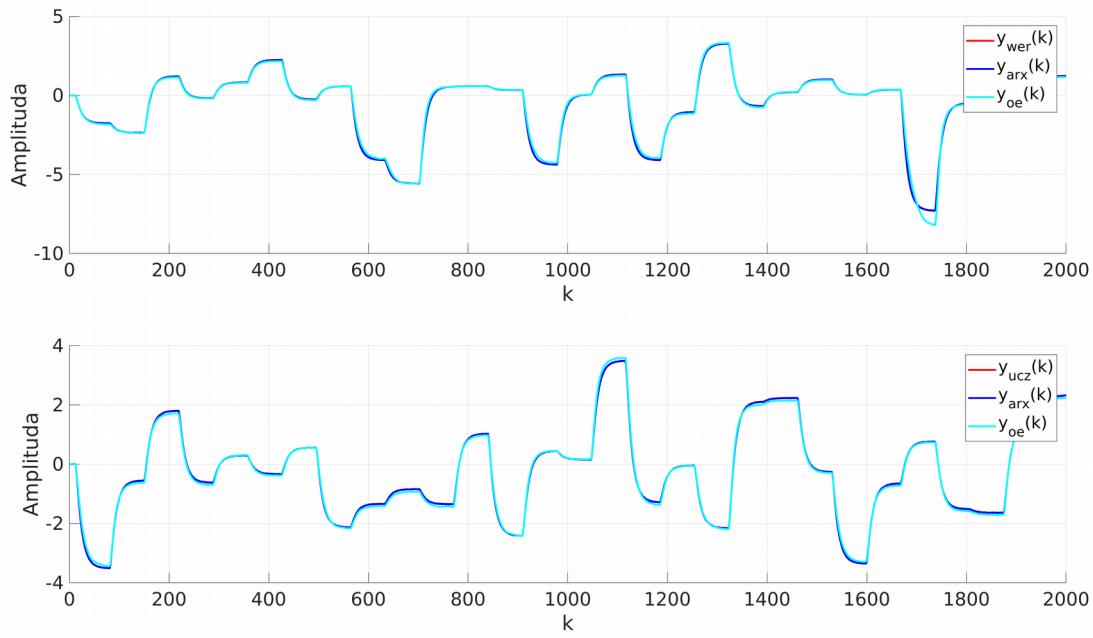


Ilustracja 39: Model o dynamice drugiego rzędu i piątym stopniu wielomianu

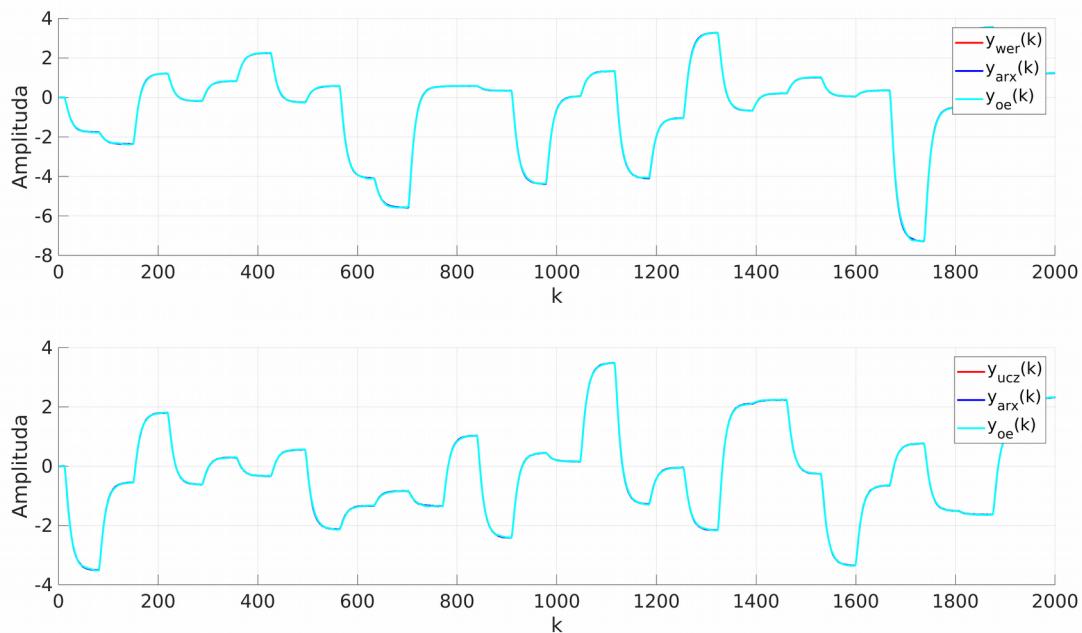
3.Trzeci rząd dynamiki



Ilustracja 40: Model o dynamice trzeciego rzędu i drugim stopniu wielomianu

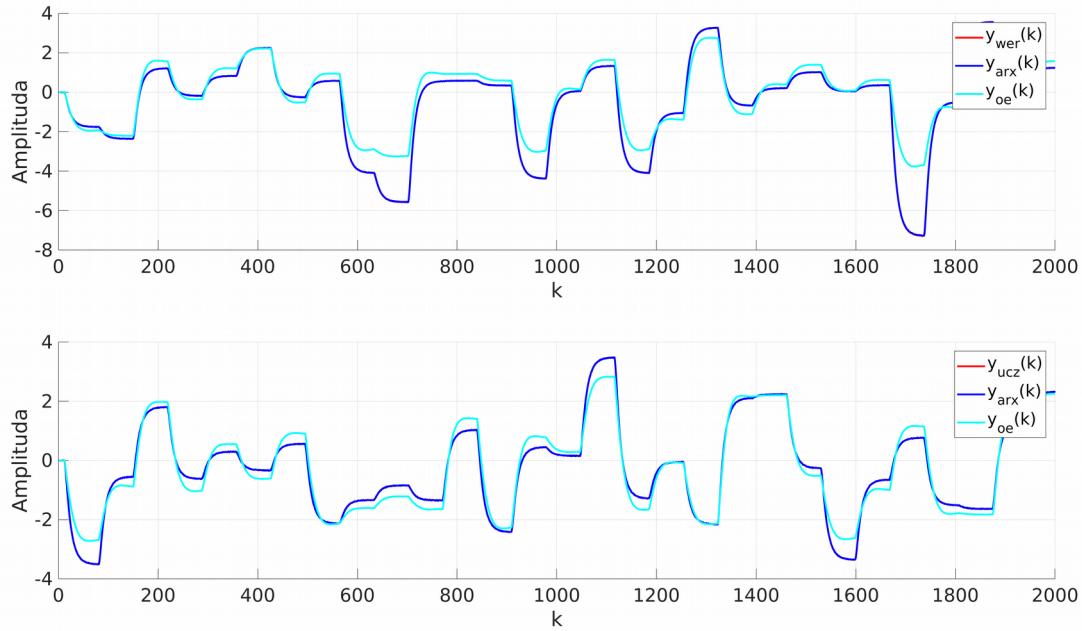


Ilustracja 41: Model o dynamice trzeciego rzędu i trzecim stopniu wielomianu

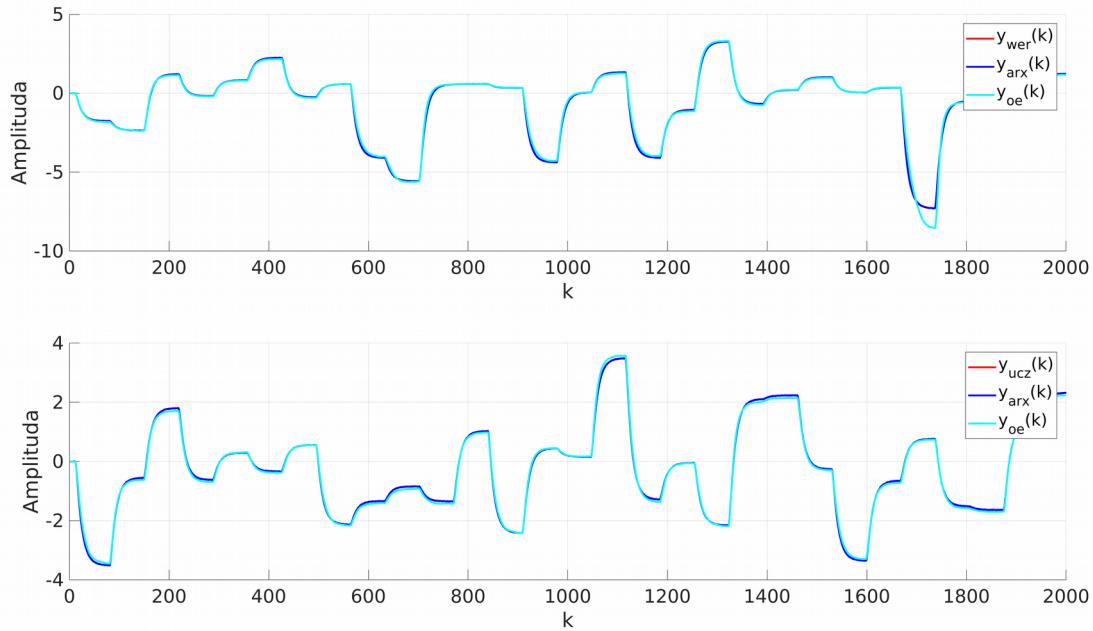


Ilustracja 42: Model o dynamice trzeciego rzędu i czwartym stopniu wielomianu

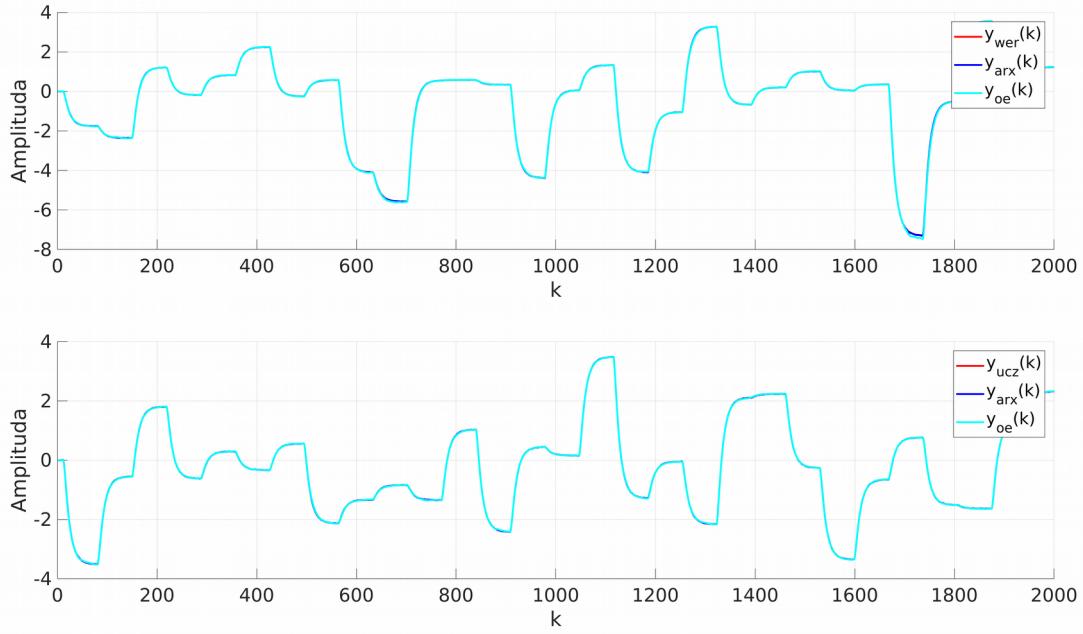
4.Czwarty rząd dynamiki



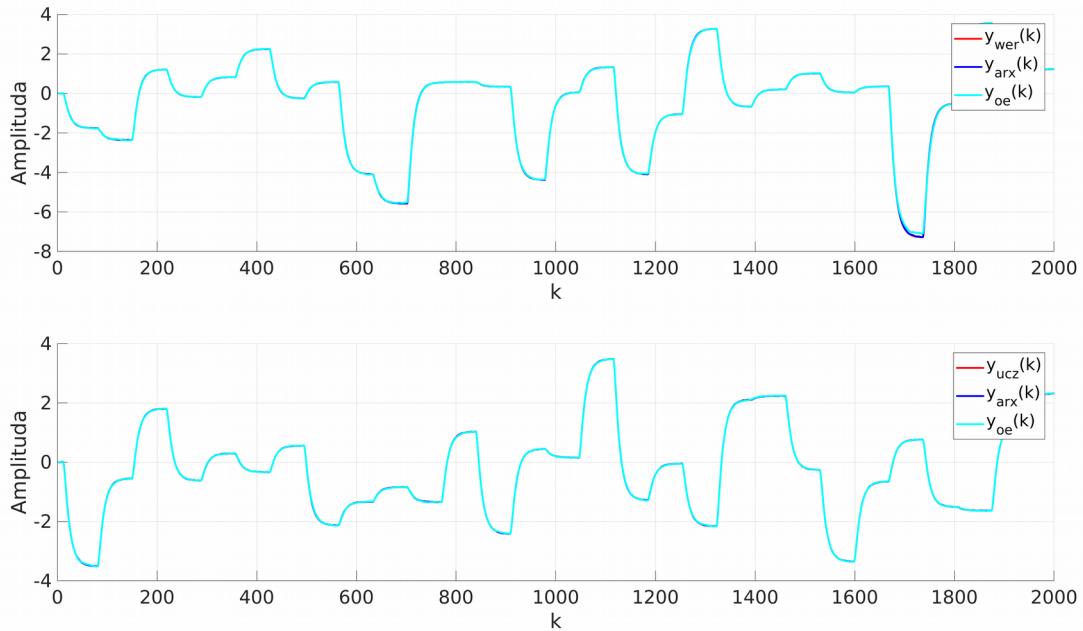
Ilustracja 43: Model o dynamice czwartego rzędu i drugim stopniu wielomianu



Ilustracja 44: Model o dynamice czwartego rzędu i trzecim stopniu wielomianu



Ilustracja 45: Model o dynamice czwartego rzędu i czwartym stopniu wielomianu



Ilustracja 46: Model o dynamice czwartego rzędu i piątym stopniu wielomianu

Jak widać na powyższych wykresach (Ilustracje 33 – 46) i Tabeli 3 dokładność modelu dla danego rzędu dynamiki rośnie wraz ze wzrostem stopnia wielomianu. Jednak zależność ta jest widoczna do pewnego momentu, ponieważ już dla stopnia wielomianu równego pięć, błąd (chodzi głównie o błąd dla trybu z rekurencją i danych weryfikujących) zaczyna rosnąć, lub nie jest możliwy do wyliczenia (stąd w Tabeli 3 pojawiają się wartości NaN, warto wspomnieć, że dla stopni wielomianu gdzie wystąpił taki przypadek wykres nie został zamieszczony w sprawozdaniu, gdyż wówczas model w ogóle nie naśadował rzeczywistych danych). Warto zauważyć, że podniesienie stopnia wielomianu (do czwartego stopnia włączając) w znaczący sposób wpływa na poprawę jakości modelu. Przykładowo w poprzednim zadaniu

(badano modele liniowe) błąd dla trybu z rekurencją, danych weryfikujących i modelu drugiego rzędu dynamiki, wynosił 1972,3 . Dzięki zwiększeniu stopnia wielomianu (do czwartego stopnia), błąd ten można zmniejszyć do wartości 2,6375 .

e)

Za najlepszy model nieliniowy uznano model o trzecim rzędzie dynamiki i czwartym stopniu wielomianu. Najlepiej odwzorowuje on rzeczywiste dane wyjściowe procesu oraz charakteryzuje się najmniejszymi błędami dla zbioru danych weryfikujących. Jako że błędy dla tego modelu są satysfakcyjne (są rzędu setnych i dziesiątych części), zaprzestano poszukiwania modeli o lepszych charakterystykach, w tym o wyrazach mieszanych.

f)

Na podstawie modelu o trzecim rzędzie dynamiki i czwartym stopniu wielomianu wyznaczono statyczny model nieliniowy.

Zakładając, że :

$$u(k) = u(k - i) = u$$

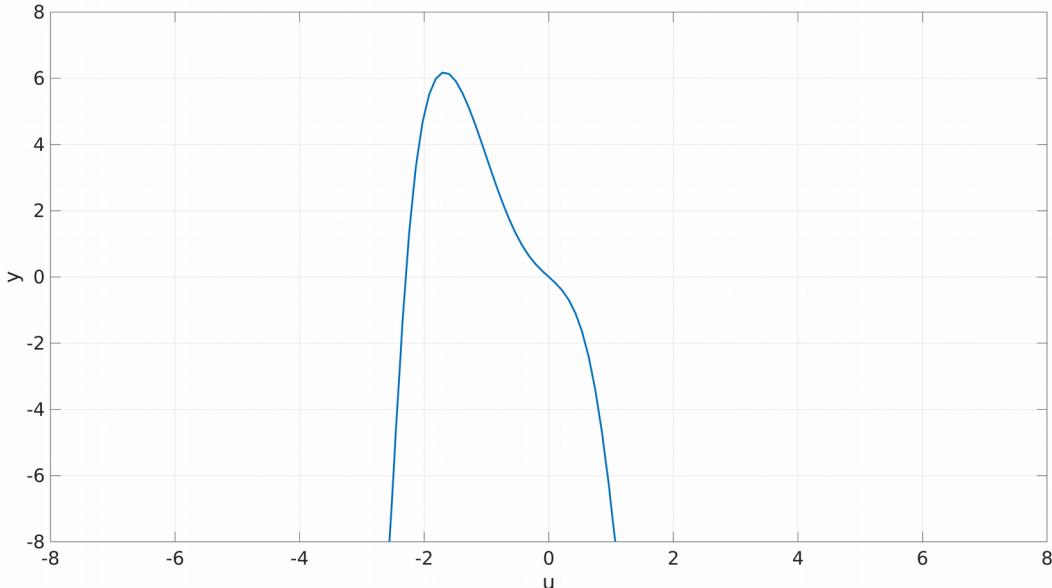
$$y(k) = y(k - i) = y$$

$$i = 1, \dots, N$$

gdzie N – rząd dynamiki modelu, wyprowadzony został nieliniowy model statyczny:

$$0 = -0,0866u - 0,0028u^2 - 0,2015u^3 - 0,0943u^4 - 0,0515y - 0,0001y^3$$

Poniższa Ilustracja przedstawia charakterystykę statyczną wybranego modelu.



Ilustracja 47: Charakterystyka statyczna wyprowadzonego nieliniowego modelu

Pliki z rozwiązaniami zadań:

- zadanie nr 1 zostało zrealizowane w plikach: **zad1_abc.m** (podpunkty a, b i c) , **zad1_d.m** (podpunkt d)

- zadanie nr 2 zostało zrealizowane w plikach: **zad2_abc.m** (podpunkty a, b i c) , **zad2_d.m** (podpunkt d) , **zad2_f.m** (podpunkt f)