MODI – projekt I, zadanie 41

Michał Stolarz

Obiekt dynamiczny opisany jest ciągłym modelem w przestrzeni stanu :

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}x} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t) \quad (1)$$

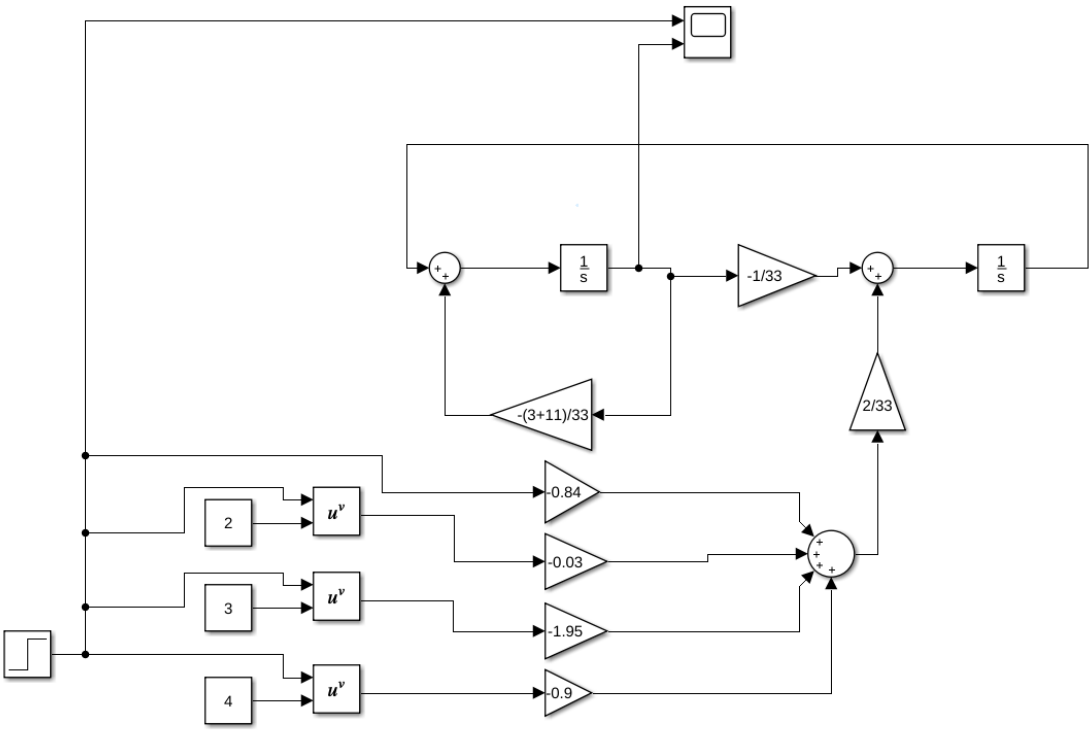
$$\frac{\mathrm{dx_2(t)}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u(t)^2 + \alpha_3 u(t)^3 + \alpha_4 u(t)^4) \quad (2)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3)$$

gdzie: K = 2, T1 = 3, T2 = 11, α1 = −0,84, α2 = −0,03, α3 = −1,95, α4 = −0,9, sygnał sterujący spełnia warunek −1 ≤ u ≤ 1.

**Zad nr 1**

Reprezentację graficzną dynamicznego modelu ciągłego (równania 1,2,3) przedstawia ilustracja nr 1.




Ilustracja 1: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

## Zad nr 2

Dynamiczny model dyskretny został wyprowadzony przy użyciu dyskretyzacji metodą Eulera. Proces ten udokumentowano poniżej. Tp oznacza tutaj oczywiście czas próbkowania.

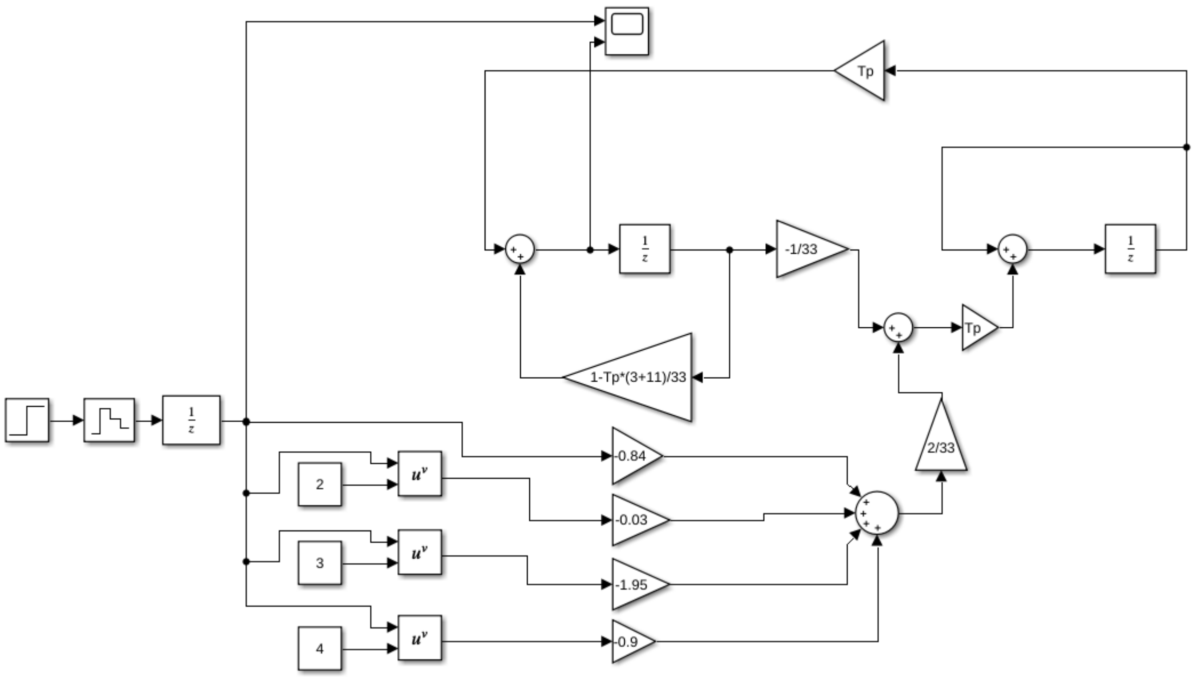
$$\frac{x_1(k) - x_1(k-1)}{Tp} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1)$$

$$\frac{x_2(k) - x_2(k-1)}{Tp} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) + \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u(k-1)^2 + \alpha_3 u(k-1)^3 + \alpha_4 u(k-1)^4)$$

$$x_1(k) = x_1(k-1) - Tp\left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k-1) - x_2(k-1)\right) = x_1(k-1)\left(1 - Tp\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\right) + x_2(k-1)Tp$$

$$x_2(k) = x_2(k-1) - Tp\left(\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) - \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u(k-1)^2 + \alpha_3 u(k-1)^3 + \alpha_4 u(k-1)^4)\right)$$

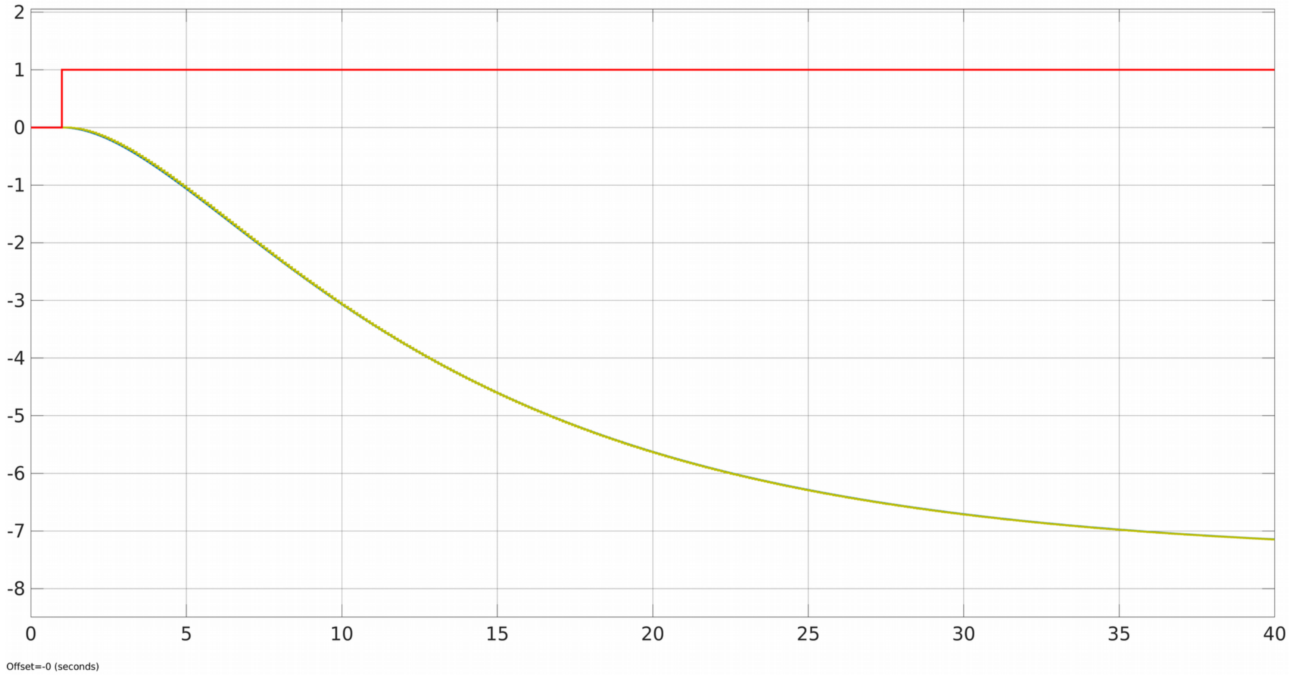
$$y(k) = x_1(k)$$



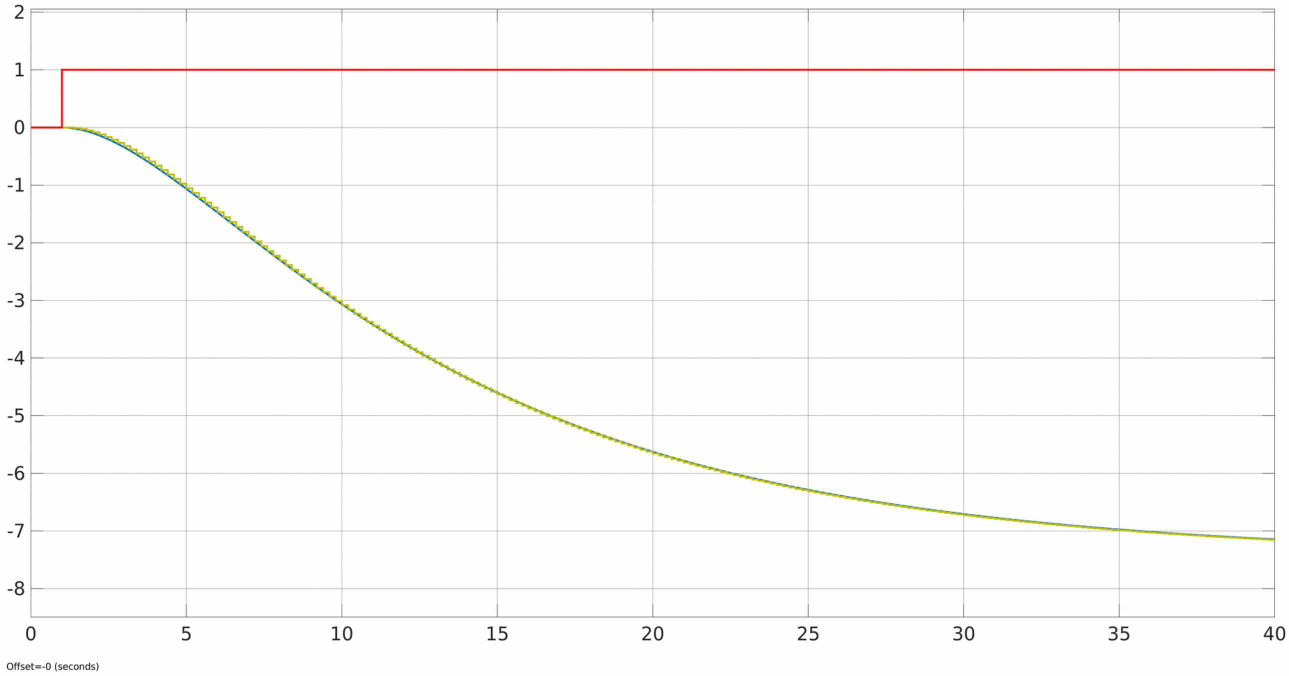

Ilustracja 2: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego

**Zad nr 3**

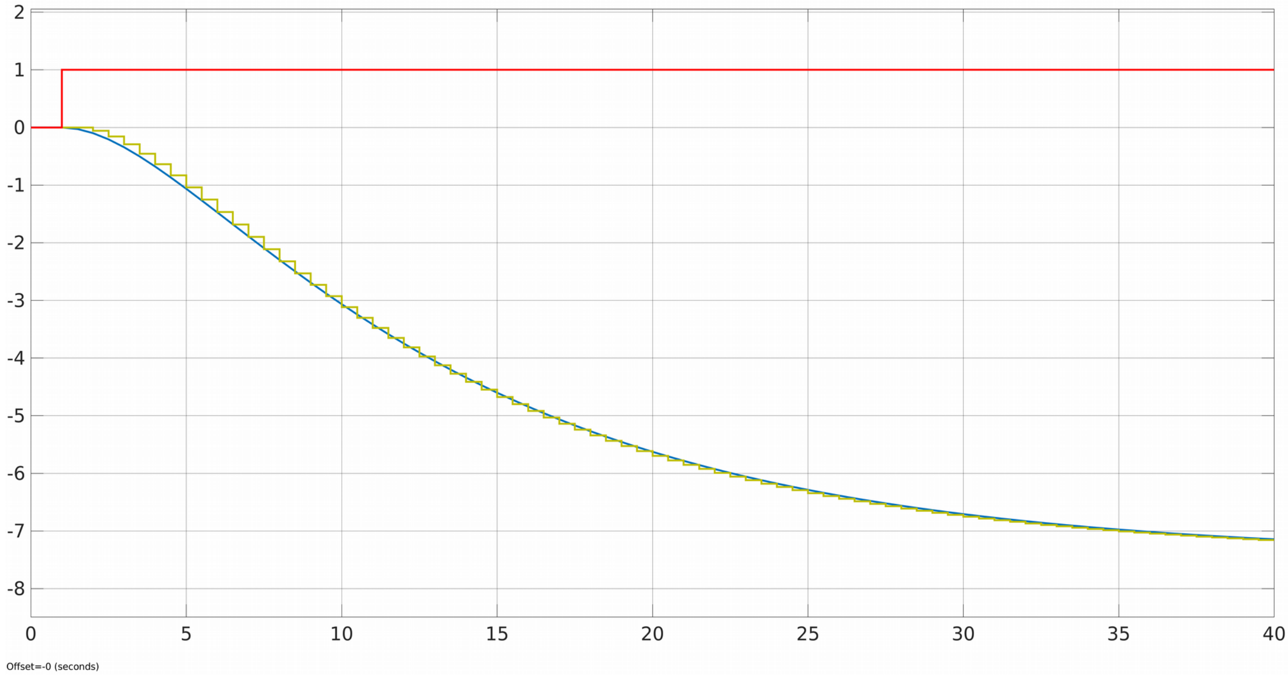
W zadaniu tym zasymulowano dynamiczny model ciągły i dyskretny dla tego samego skoku sygnału sterującego (od wartości 0 do 1 w chwili 1 sek.) przy zerowych warunkach początkowych. Na kolejnych ilustracjach porównano otrzymane odpowiedzi dla okresu próbkowania 0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 5 sek. w okresie 40 sek. Czerwonym kolorem narysowany jest skok jednostkowy (pobudzający układ), niebieskim – odpowiedź dynamicznego modelu ciągłego, żółtym – odpowiedź dynamicznego modelu dyskretnego (uzyskanego z wyprowadzeń z poprzedniego zadania).



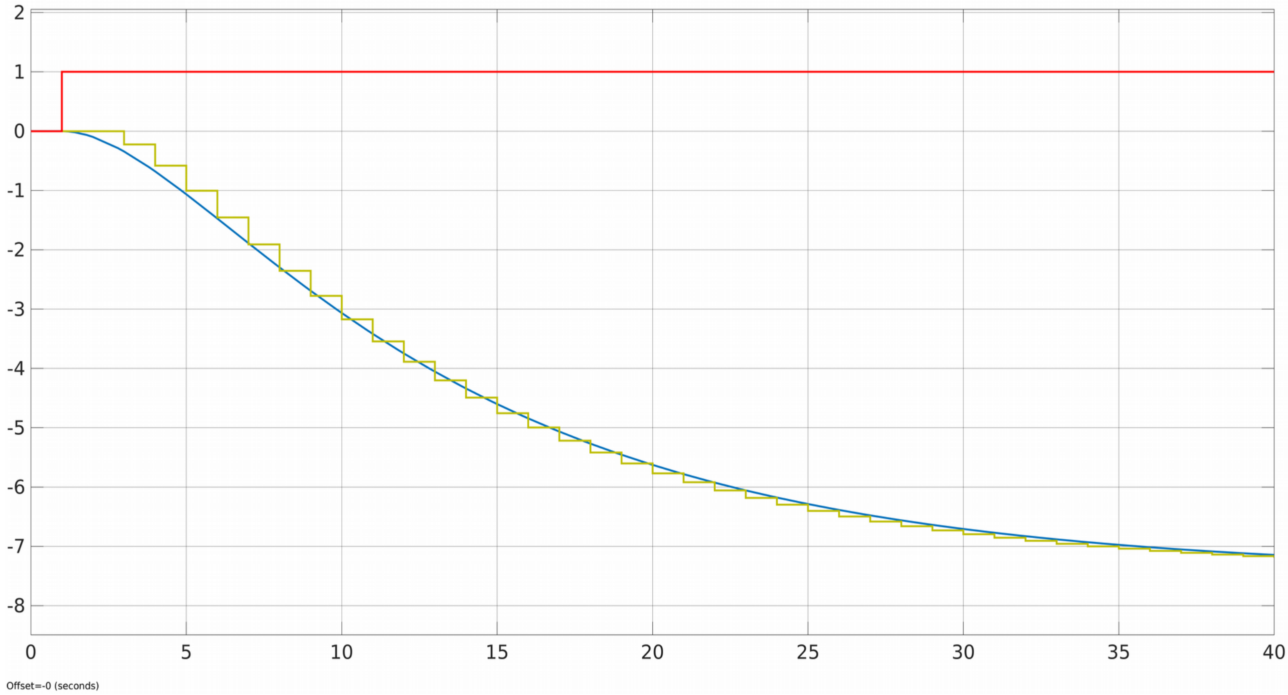
Ilustracja 3: Wykres dla okresu próbkowania 0,1s



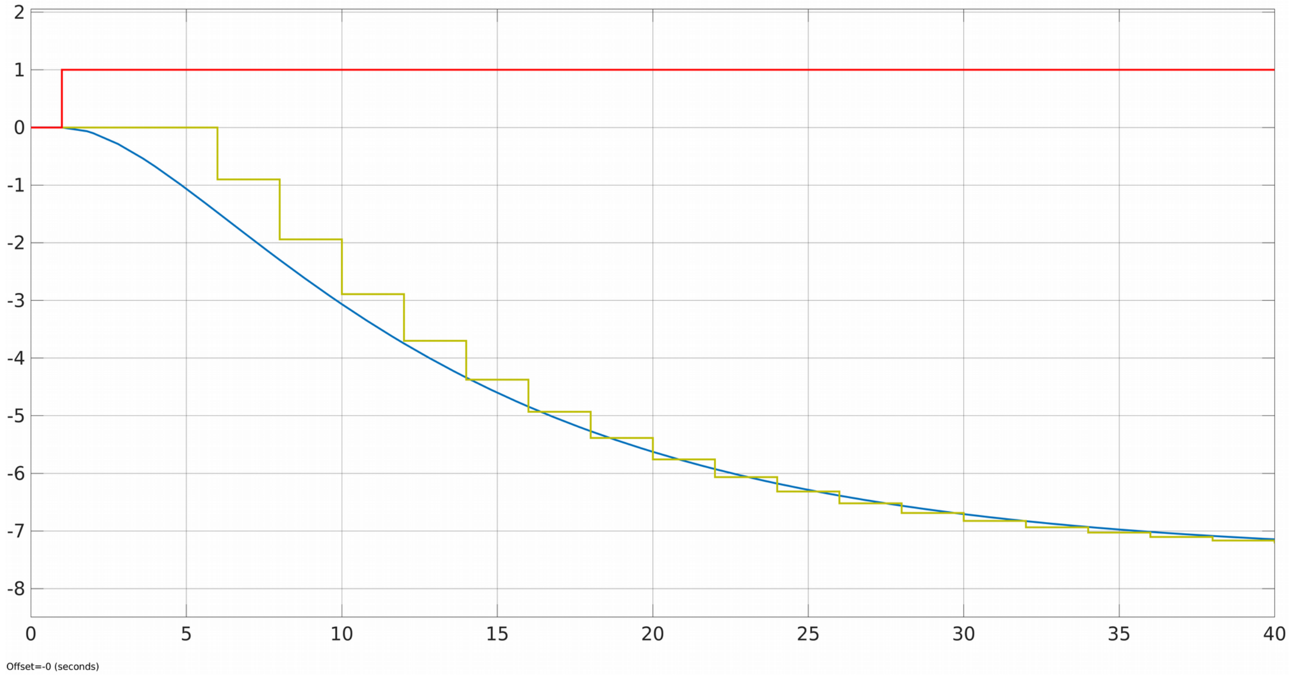
Ilustracja 4: Wykres dla okresu próbkowania 0,2s



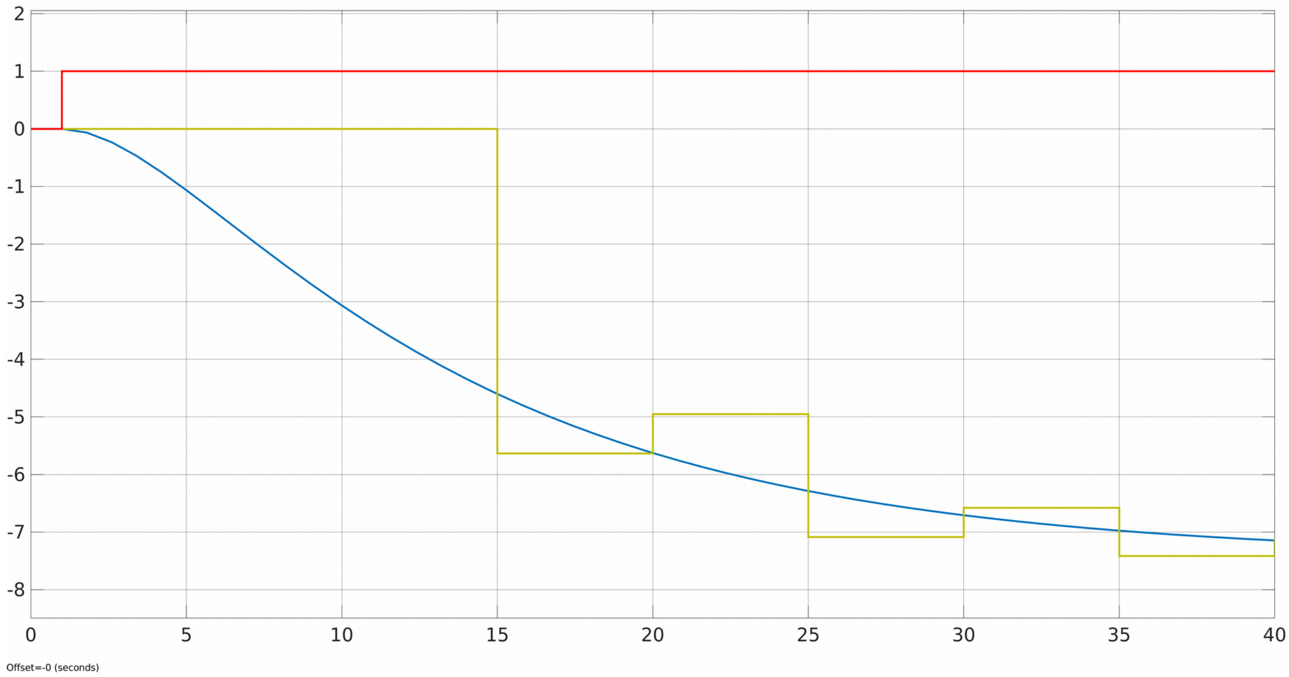

Ilustracja 5: Wykres dla okresu próbkowania 0,5s




Ilustracja 6: Wykres dla okresu próbkowania 1s




Ilustracja 7: Wykres dla okresu próbkowania 2s




Ilustracja 8: Wykres dla okresu próbkowania 5s

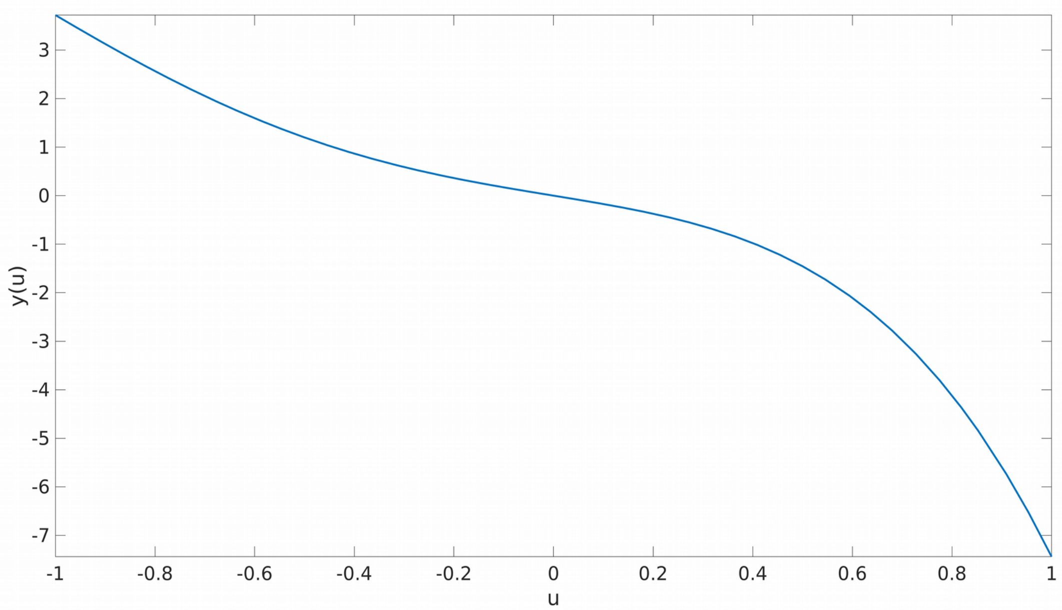
Jak widać na powyższych wykresach im mniejszy jest okres próbkowania, tym model dyskretny lepiej odzwierciedla model ciągły.

**Zad nr 4**

Na podstawie dynamicznego modelu ciągłego wyznaczono charakterystykę statyczną y(u). Wzór został wyznaczony poniżej, natomiast jej przebieg znajduje się na ilustracji nr 9.

$$0 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1 + x_2$$
$$0 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 + \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$
$$y = x_1$$

$$y(u) = x_1 = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$




Ilustracja 9: Wykres charakterystyki statycznej

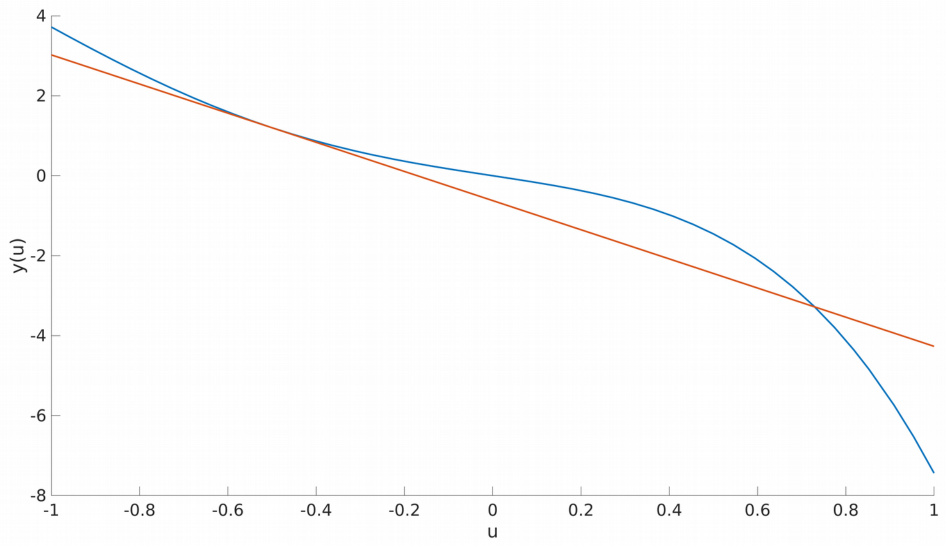
**Zad nr 5**

Poniżej wyznaczono analitycznie charakterystykę statyczną zlinearyzowaną w dowolnym punkcie ū. Dokonano tego poprzez rozwinięcie w szereg Taylora (nieliniowych elementów charakterystyki) i odrzucenie składników nieliniowych tego rozwinięcia.

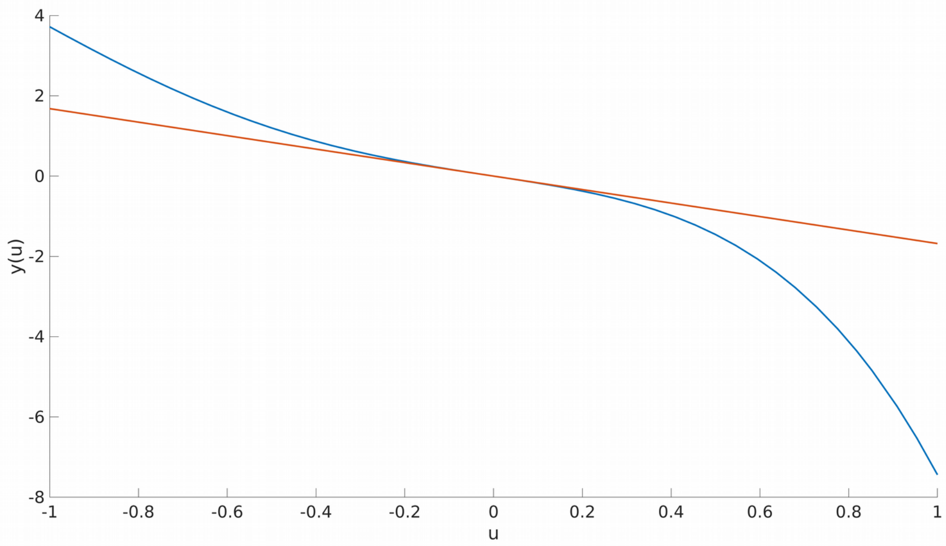
$$y(u) = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$
$$y(u) \approx K(\alpha_1 u + \alpha_2(\overline{u}^2 + 2\overline{u}(u - \overline{u})) + \alpha_3(\overline{u}^3 + 3\overline{u}^2(u - \overline{u})) + \alpha_4(\overline{u}^4 + 4\overline{u}^3(u - \overline{u})))$$
$$y(u) \approx K(u(\alpha_1 + 2\alpha_2\overline{u} + 3\alpha_3\overline{u}^2 + 4\alpha_4\overline{u}^3) - (\alpha_2\overline{u}^2 + 2\alpha_3\overline{u}^3 + 3\alpha_4\overline{u}^4))$$

**Zad nr 6**

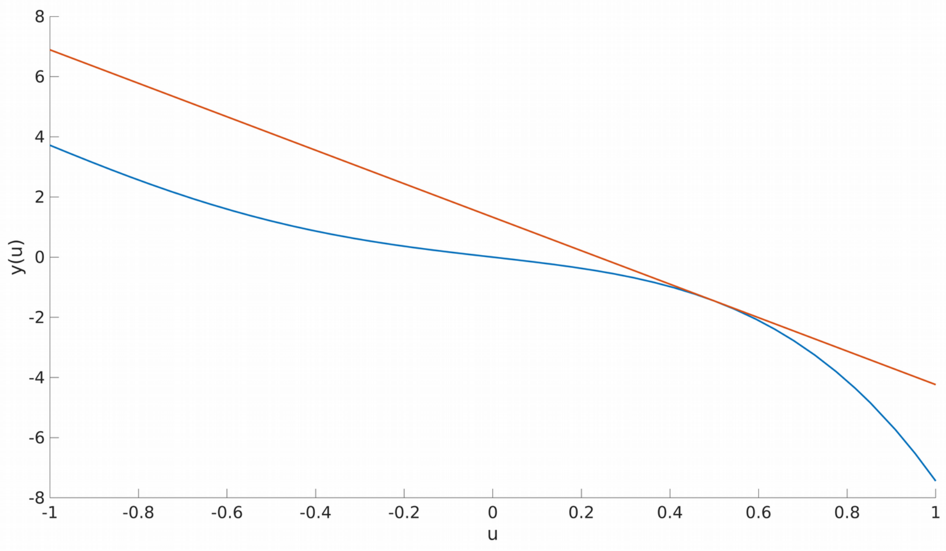
Zlinearyzowana charakterystyka statyczna (kolor czerwony) została przedstawiona na kolejnych ilustracjach na tle charakterystyki nieliniowej (kolor niebieski) dla 3 punktów linearyzacji (-0,5 ; 0 ; 0,5).




Ilustracja 10: Wykres charakterystyki zlinearyzowanej dla punktu -0,5




Ilustracja 11: Wykres charakterystyki zlinearyzowanej dla punktu 0




Ilustracja 12: Wykres charakterystyki zlinearyzowanej dla punktu 0,5

## Zad nr 7

Dynamiczny dyskretny model zlinearyzowany został wyznaczony w sposób analityczny w dowolnym punkcie ū poniżej. Dokonano tego także poprzez rozwinięcie w szereg Taylora (nieliniowych elementów charakterystyki) i odrzucenie składników nieliniowych tego rozwinięcia.

$$x_1(k) = x_1(k-1)\left(1 - Tp\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right) + x_2(k-1)Tp$$

$$x_2(k) = x_2(k-1) - Tp\left(\frac{1}{T_1T_2}x_1(k-1) - \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u(k-1)^2 + \alpha_3 u(k-1)^3 + \alpha_4 u(k-1)^4)\right)$$

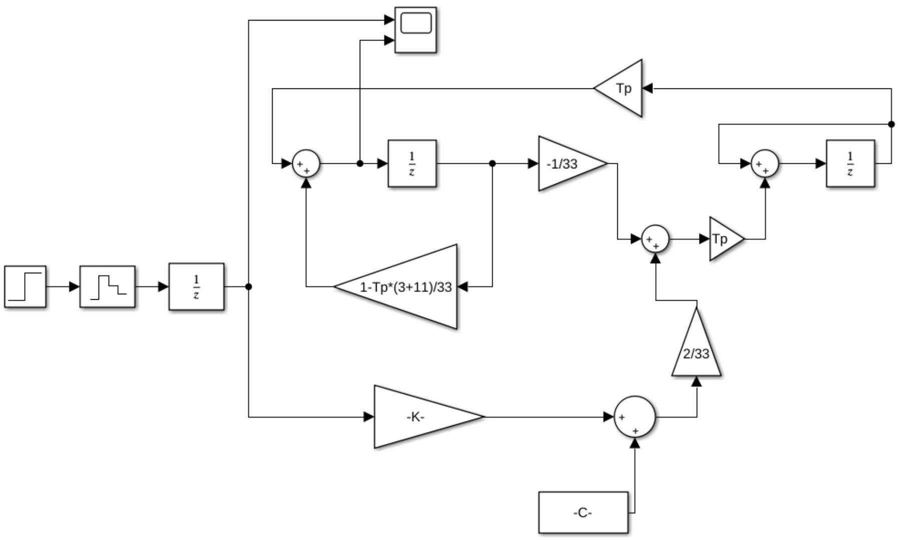
$$x_2(k) \approx x_2(k-1) - Tp\left(\frac{1}{T_1T_2}x_1(k-1) - \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2(\overline{u}^2 + 2\overline{u}(u(k-1)-\overline{u})) + \alpha_3(\overline{u}^3 + 3\overline{u}^2(u(k-1)-\overline{u})) + \alpha_4(\overline{u}^4 + 4\overline{u}^3(u(k-1)-\overline{u})))\right)$$

$$x_2(k) \approx x_2(k-1) - Tp\left(\frac{1}{T_1T_2}x_1(k-1) - \frac{K}{T_1T_2}(u(k-1)(\alpha_1 + 2\alpha_2\overline{u} + 3\alpha_3\overline{u}^2 + 4\alpha_4\overline{u}^3) - (\alpha_2\overline{u}^2 + 2\alpha_3\overline{u}^3 + 3\alpha_4\overline{u}^4))\right)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

## Zad nr 8

Reprezentację graficzną dynamicznego modelu dyskretnego, wyznaczonego w poprzednim zadaniu, przedstawia ilustracja nr 13.




Ilustracja 13: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego