

MODI – projekt I, zadanie 41

Michał Stolarz

Obiekt dynamiczny opisany jest ciągłym modelem w przestrzeni stanu :

$$\frac{dx_1(t)}{dx} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t) \quad (1)$$

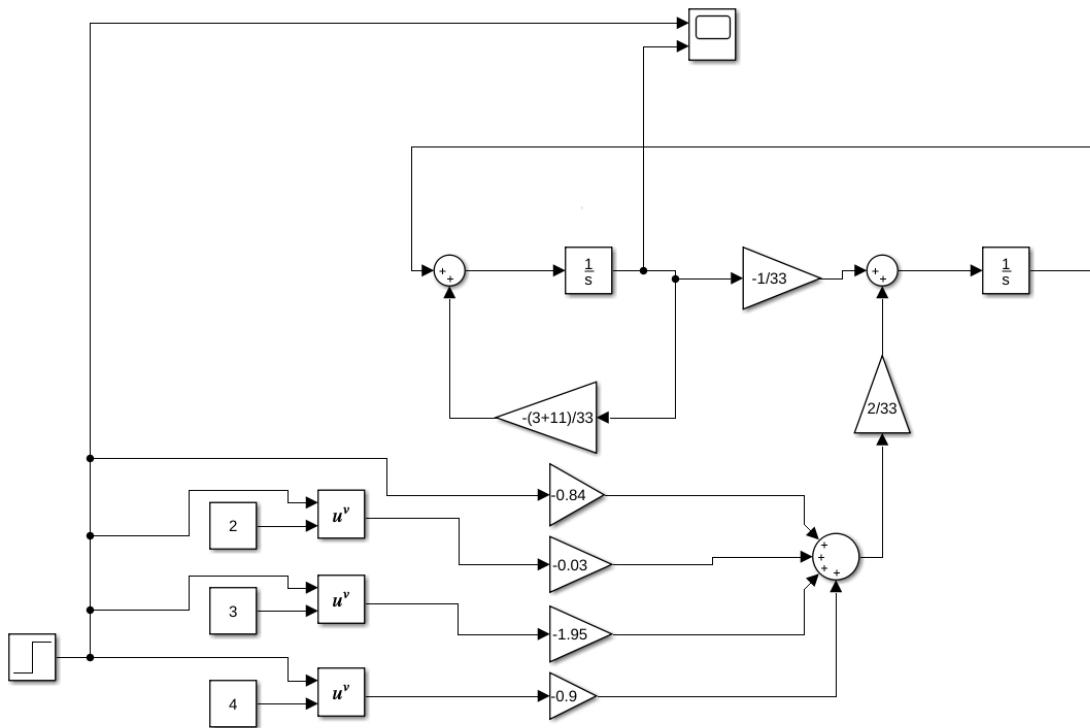
$$\frac{dx_2(t)}{dx} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u(t)^2 + \alpha_3 u(t)^3 + \alpha_4 u(t)^4) \quad (2)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (3)$$

gdzie: $K = 2$, $T1 = 3$, $T2 = 11$, $\alpha_1 = -0,84$, $\alpha_2 = -0,03$, $\alpha_3 = -1,95$, $\alpha_4 = -0,9$, sygnał sterujący spełnia warunek $-1 \leq u \leq 1$.

Zad nr 1

Reprezentację graficzną dynamicznego modelu ciągłego (równania 1,2,3) przedstawia ilustracja nr 1.



Ilustracja 1: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu ciągłego

Zad nr 2

Dynamiczny model dyskretny został wyprowadzony przy użyciu dyskretyzacji metodą Eulera. Proces ten udokumentowano poniżej. Tp oznacza tutaj oczywiście czas próbkowania.

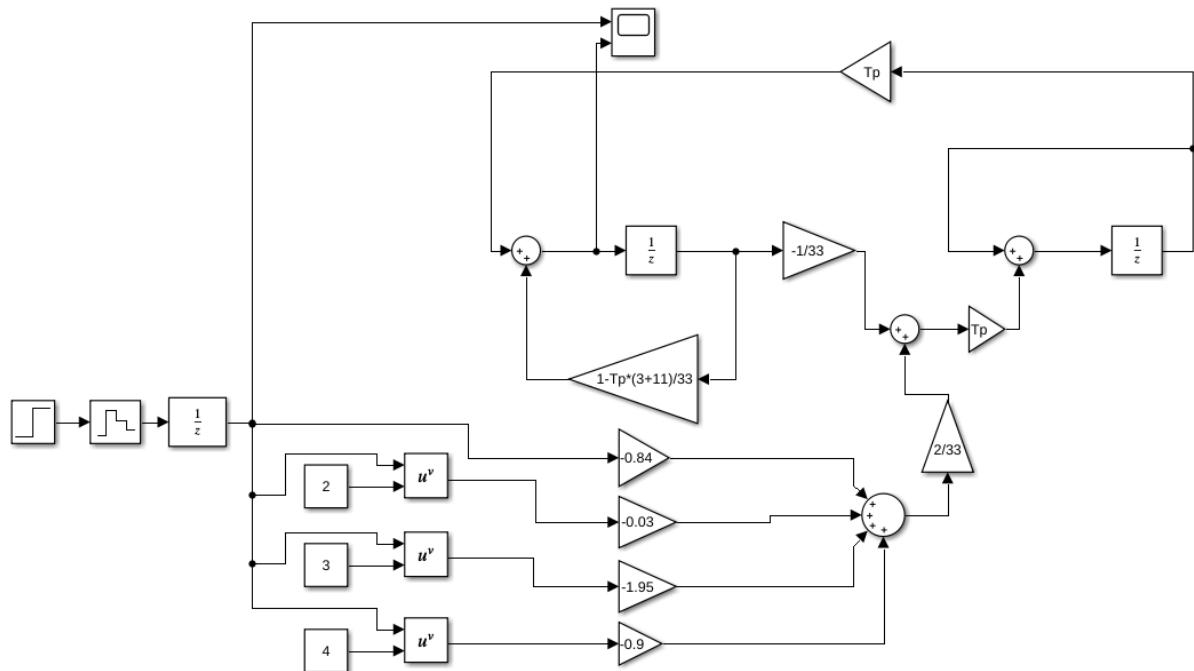
$$\frac{x_1(k) - x_1(k-1)}{Tp} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k-1) + x_2(k-1)$$

$$\frac{x_2(k) - x_2(k-1)}{Tp} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u(k-1)^2 + \alpha_3 u(k-1)^3 + \alpha_4 u(k-1)^4)$$

$$x_1(k) = x_1(k-1) - Tp \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k-1) - x_2(k-1) \right) = x_1(k-1) \left(1 - Tp \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right) + x_2(k-1) Tp$$

$$x_2(k) = x_2(k-1) - Tp \left(\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) - \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u(k-1)^2 + \alpha_3 u(k-1)^3 + \alpha_4 u(k-1)^4) \right)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

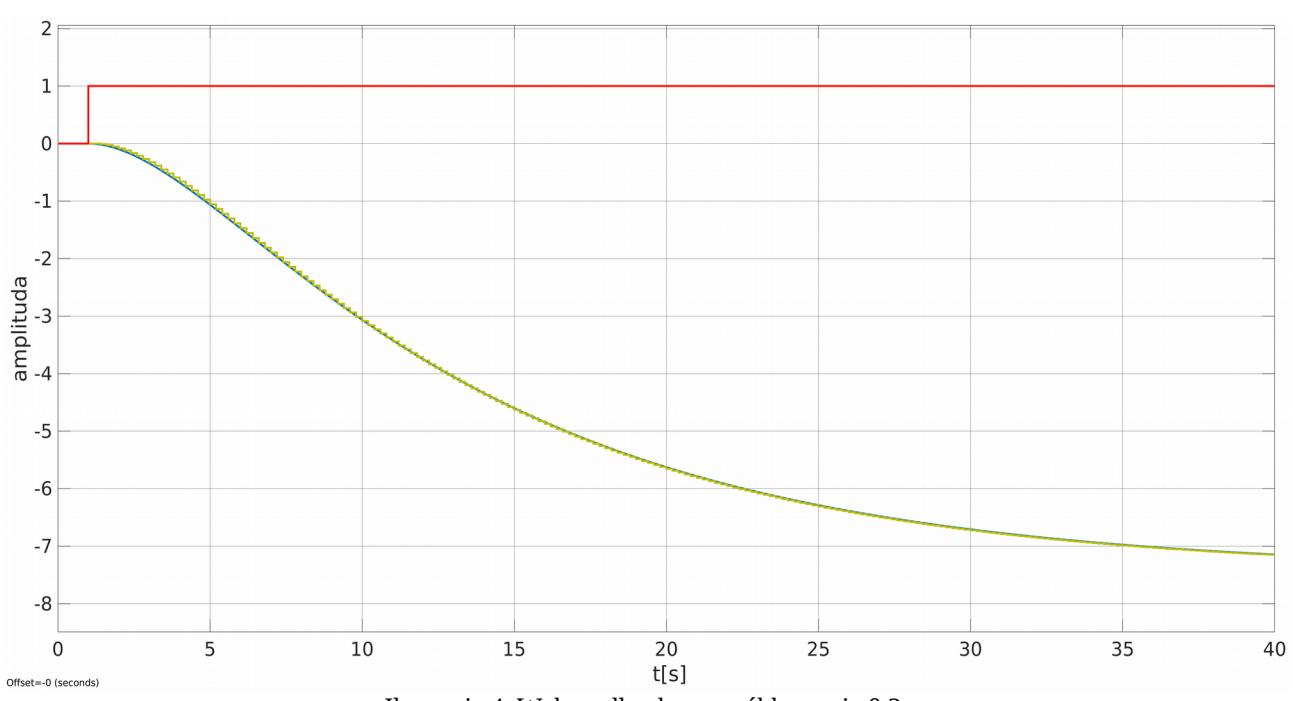
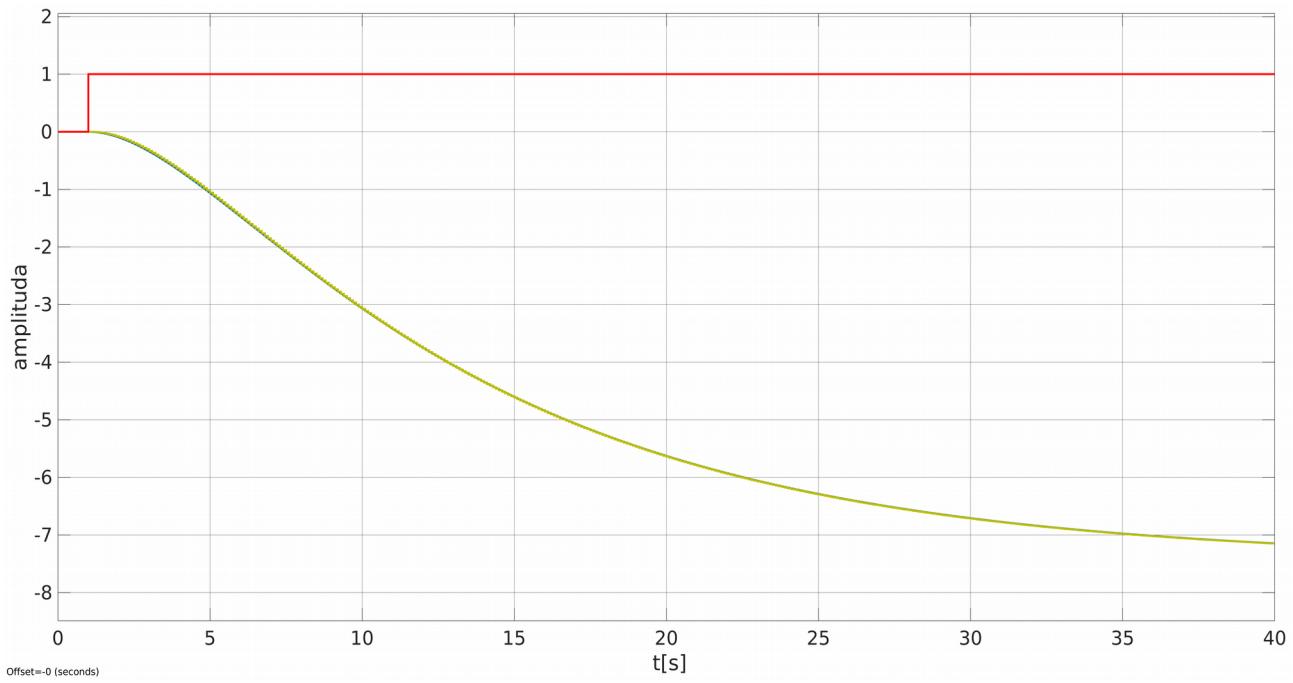


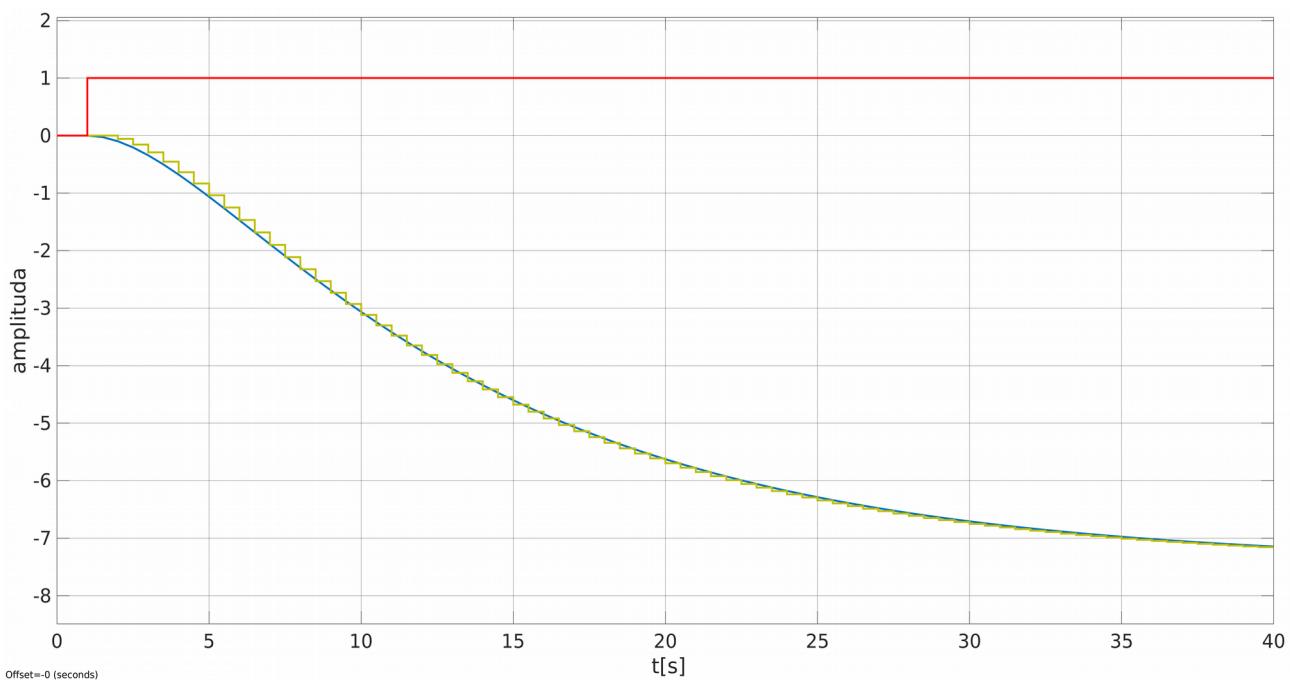
Ilustracja 2: Reprezentacja graficzna dynamicznego modelu dyskretnego

Zad nr 3

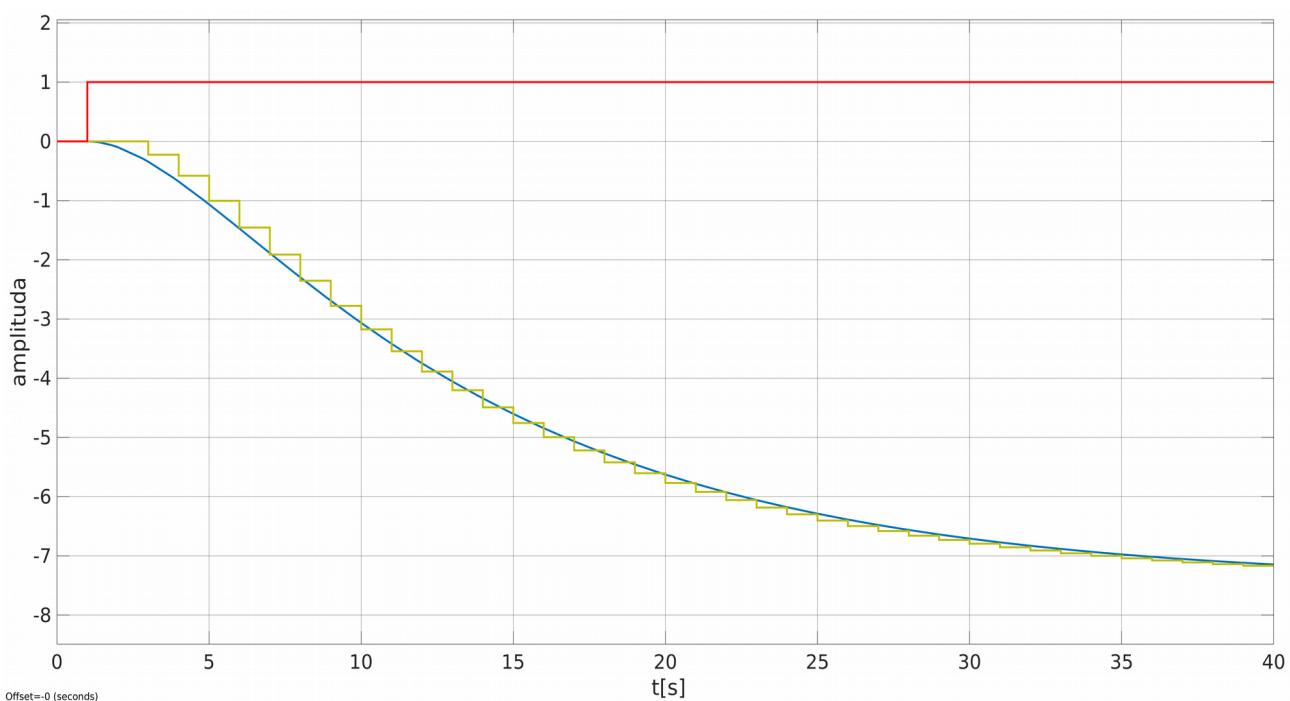
W zadaniu tym zasymulowano dynamiczny model ciągły i dyskretny dla tego samego skoku sygnału sterującego (od wartości 0 do 1 w chwili 1 sek.) przy zerowych warunkach początkowych. Na kolejnych ilustracjach porównano otrzymane odpowiedzi dla okresu próbkowania 0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 5 sek. w okresie 40 sek. Czerwonym kolorem narysowany jest skok jednostkowy (pobudzający układ), niebieskim –

odpowiedź dynamicznego modelu ciągłego, żółtym – odpowiedź dynamicznego modelu dyskretnego (uzyskanego z wyprowadzeń z poprzedniego zadania).

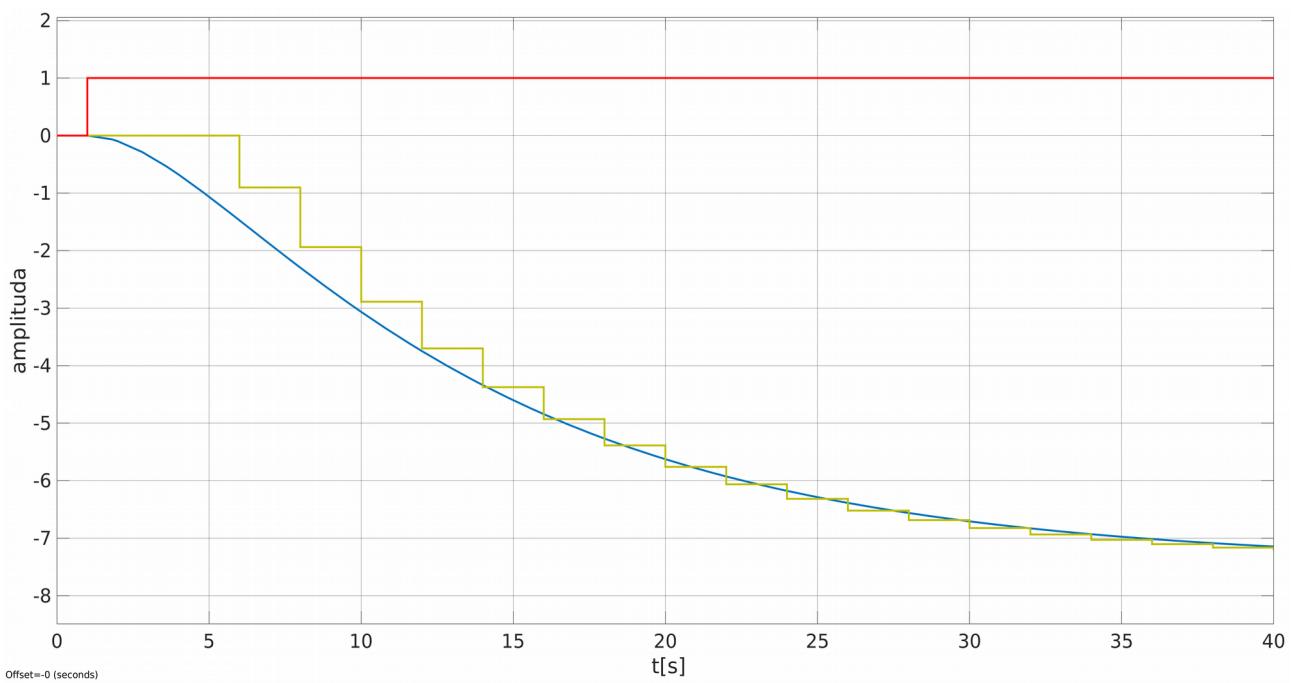




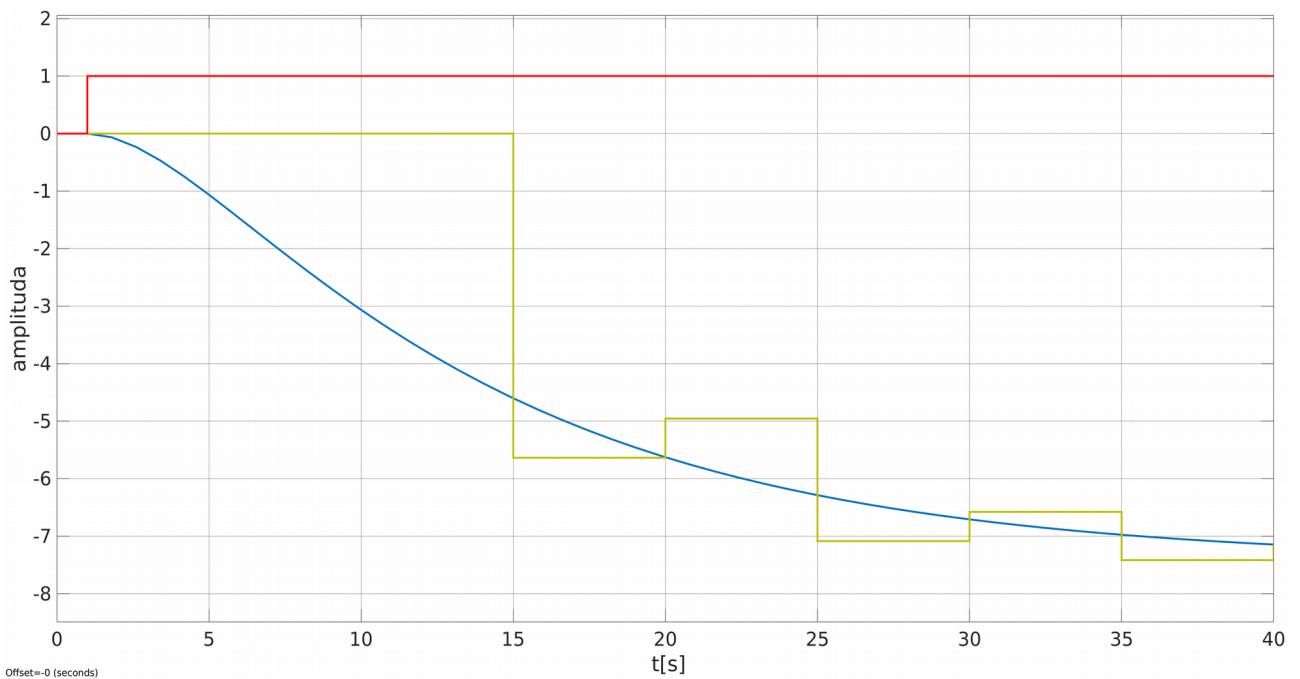
Ilustracja 5: Wykres dla okresu próbkowania 0,5s



Ilustracja 6: Wykres dla okresu próbkowania 1s



Ilustracja 7: Wykres dla okresu próbkowania 2s



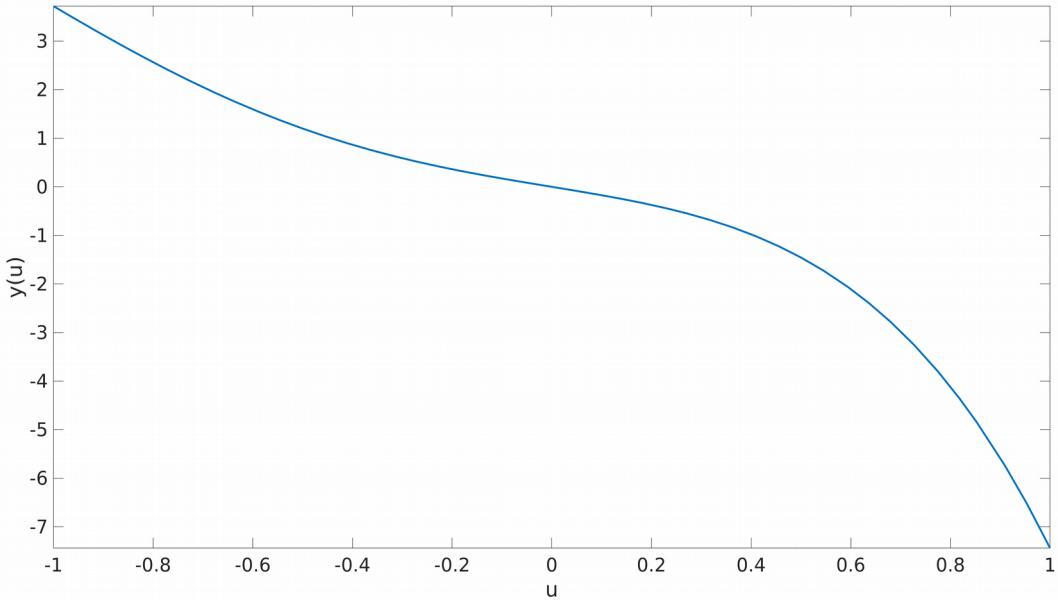
Ilustracja 8: Wykres dla okresu próbkowania 5s

Jak widać na powyższych wykresach im mniejszy jest okres próbkowania, tym model dyskretny lepiej odzwierciedla model ciągły.

Zad nr 4

Na podstawie dynamicznego modelu ciągłego wyznaczono charakterystykę statyczną $y(u)$. Wzór został wyznaczony poniżej, natomiast jej przebieg znajduje się na ilustracji nr 9.

$$0 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1 + x_2$$
$$0 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$
$$y = x_1$$
$$y(u) = x_1 = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$



Ilustracja 9: Wykres charakterystyki statycznej

Zad nr 5

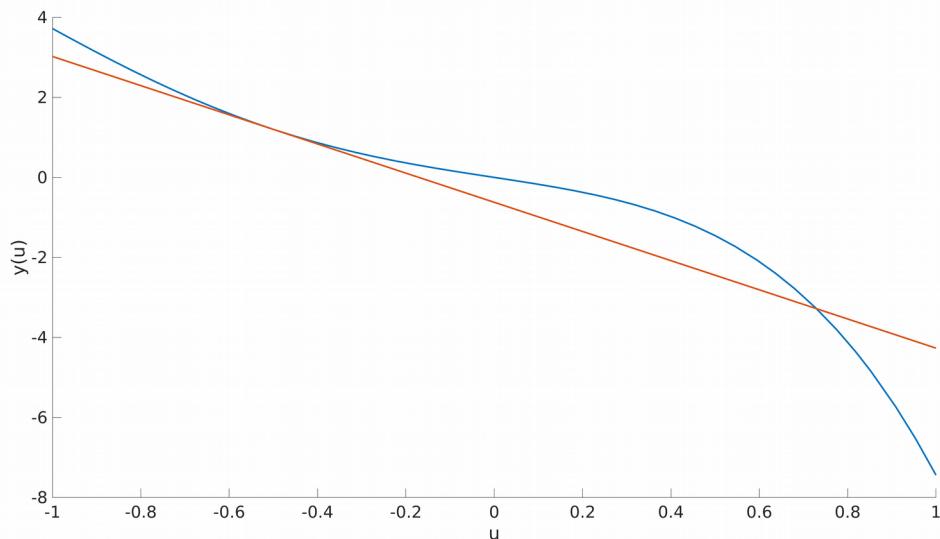
Poniżej wyznaczono analitycznie charakterystykę statyczną zlinearyzowaną w dowolnym punkcie \bar{u} . Dokonano tego poprzez rozwinięcie w szereg Taylora (nieliniowych elementów charakterystyki) i odrzucenie składników nieliniowych tego rozwinięcia.

$$y(u) = K(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4)$$
$$y(u) \approx K(\alpha_1 u + \alpha_2(\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})) + \alpha_3(\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})) + \alpha_4(\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u})))$$
$$y(u) \approx K(u(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3) - (\alpha_2\bar{u}^2 + 2\alpha_3\bar{u}^3 + 3\alpha_4\bar{u}^4))$$

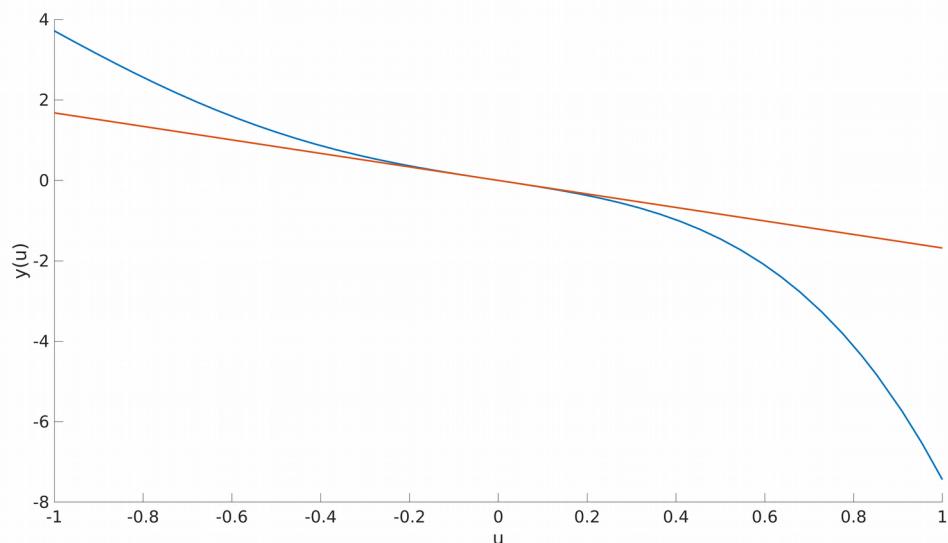
Zad nr 6

Zlinearyzowana charakterystyka statyczna (kolor czerwony) została przedstawiona na kolejnych ilustracjach na tle charakterystyki nieliniowej (kolor niebieski) dla 3 punktów liniaryzacji (-0,5 ; 0 ; 0,5).

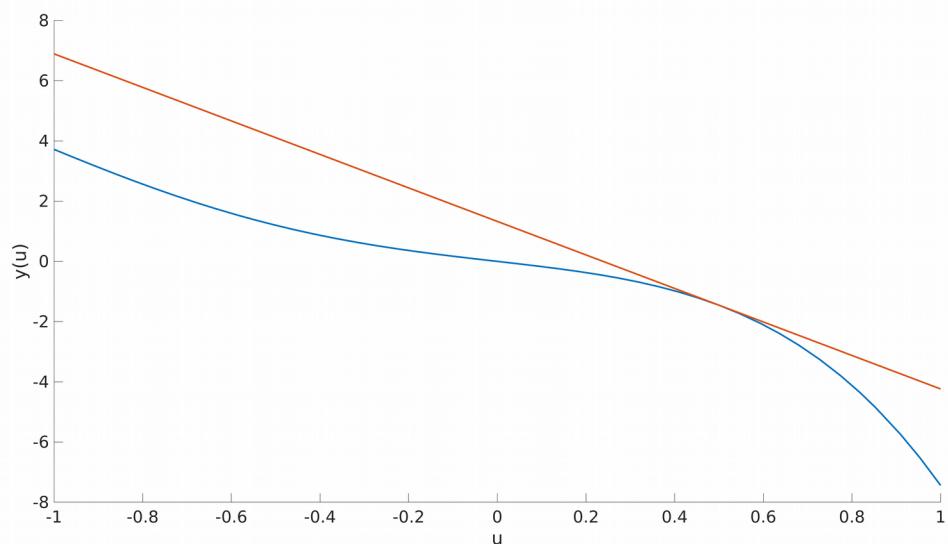
**Zad
nr 7**



Ilustracja 10: Wykres charakterystyki zlinearyzowanej dla punktu -0,5



Ilustracja 11: Wykres charakterystyki zlinearyzowanej dla punktu 0



Ilustracja 12: Wykres charakterystyki zlinearyzowanej dla punktu 0,5

Dynamiczny dyskretny model zlinearyzowany został wyznaczony w sposób analityczny w dowolnym punkcie \bar{u} poniżej. Dokonano tego także poprzez rozwinięcie w szereg Taylora (nieliniowych elementów charakterystyki) i odrzucenie składników nieliniowych tego rozwinięcia.

$$x_1(k) = x_1(k-1) \left(1 - Tp \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \right) + x_2(k-1) Tp$$

$$x_2(k) = x_2(k-1) - Tp \left(\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) - \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u(k-1)^2 + \alpha_3 u(k-1)^3 + \alpha_4 u(k-1)^4) \right)$$

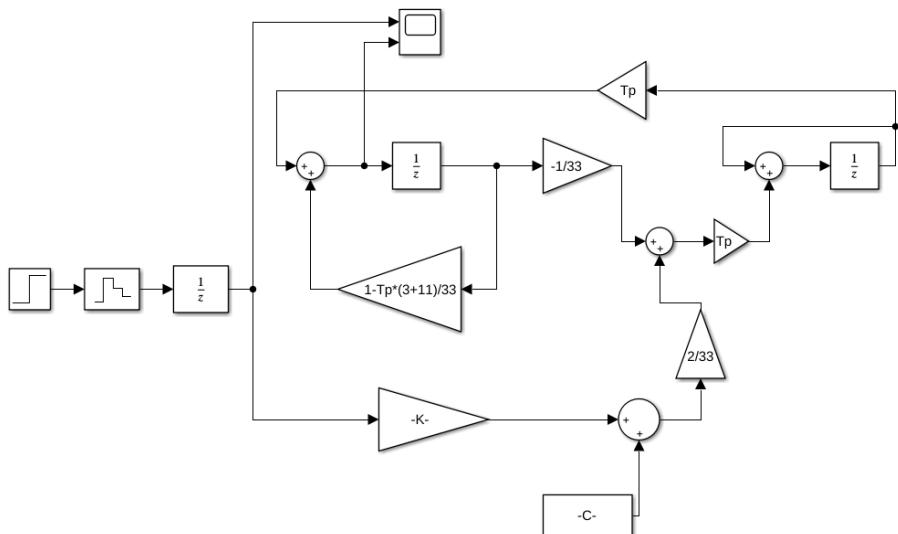
$$x_2(k) \approx x_2(k-1) - Tp \left(\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) - \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2(\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u(k-1) - \bar{u})) + \alpha_3(\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u(k-1) - \bar{u})) + \alpha_4(\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u(k-1) - \bar{u}))) \right)$$

$$x_2(k) \approx x_2(k-1) - Tp \left(\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k-1) - \frac{K}{T_1 T_2} (u(k-1)(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3) - (\alpha_2\bar{u}^2 + 2\alpha_3\bar{u}^3 + 3\alpha_4\bar{u}^4)) \right)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Zad nr 8

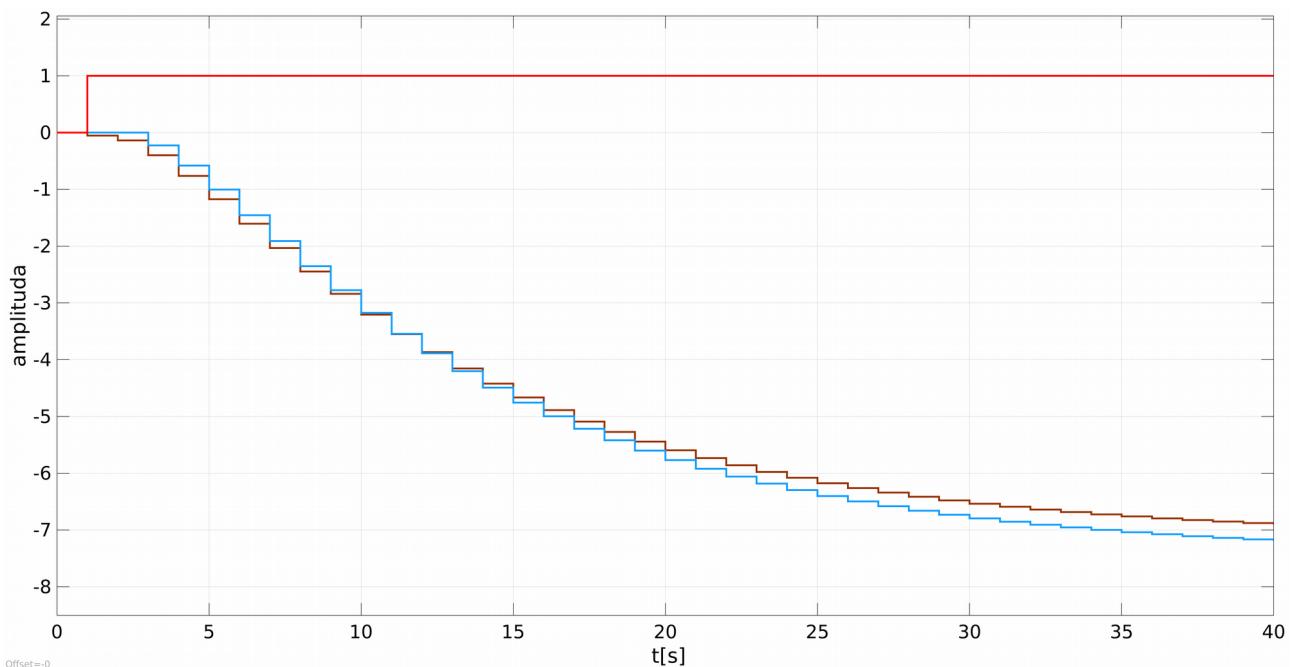
Reprezentację graficzną zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego, wyznaczonego w poprzednim zadaniu, przedstawia ilustracja nr 13.



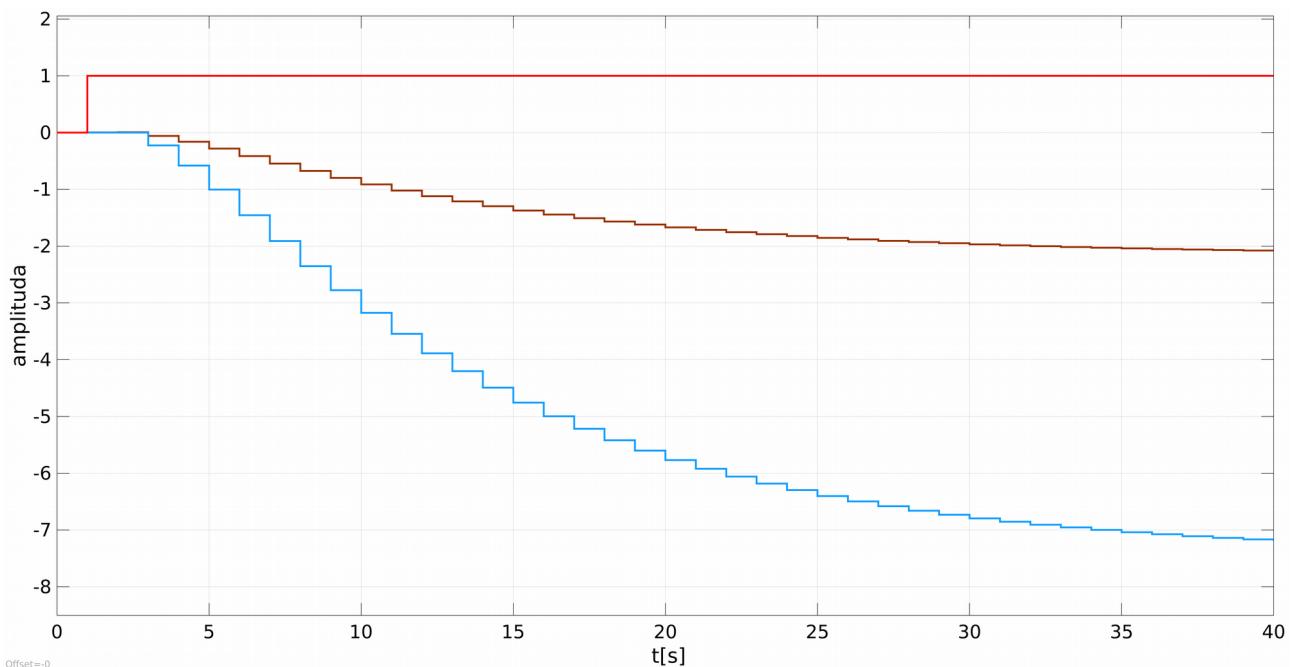
Ilustracja 13: Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego

Zad nr 9

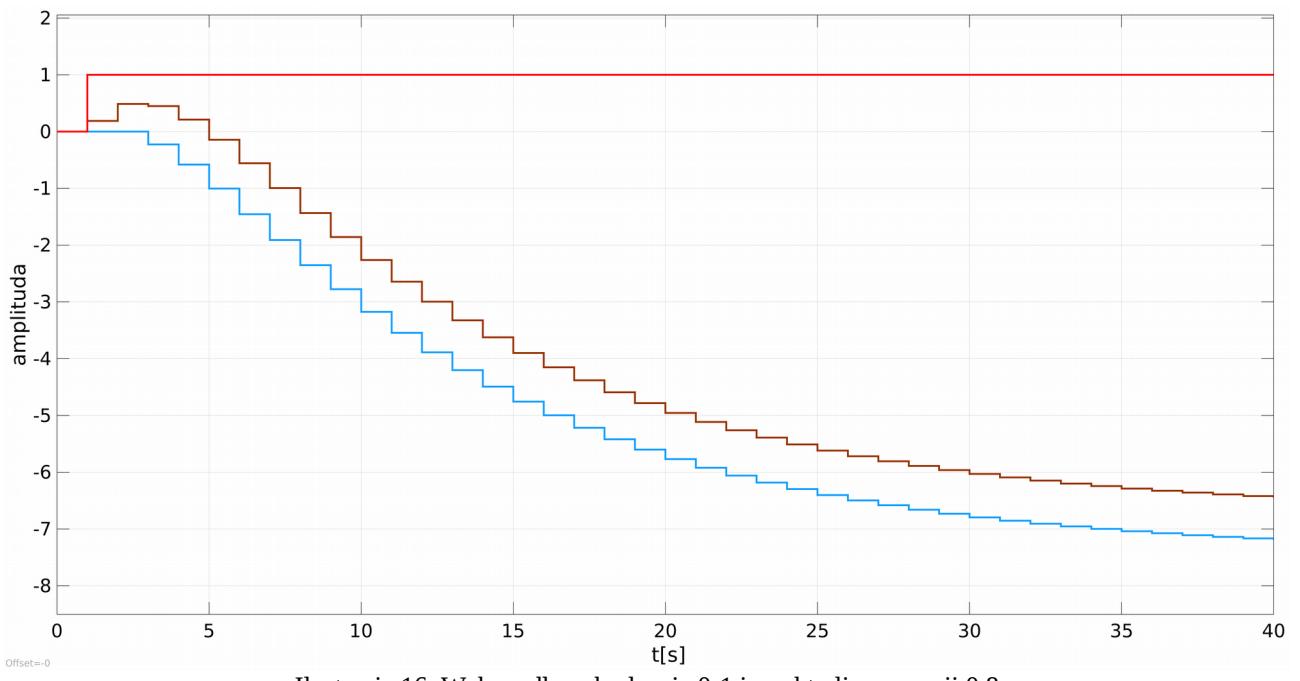
Zasymulowano dynamiczny model dyskretny w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej dla kilku skoków sygnału sterującego (o różnej wartości), przy różnych punktach linearyzacji. Przyjęto okres próbkowania 1 sek i porównano otrzymane odpowiedzi. Sporządzono oddzielne rysunki dla różnych wartości sygnału sterującego i punktów linearyzacji. Czerwonym kolorem wykreślony jest skok jednostkowy (pobudzający układy), niebieskim – odpowiedź dyskretnego dynamicznego modelu nieliniowego, brązowym – odpowiedź dyskretnego dynamicznego modelu zlinearyzowanego.



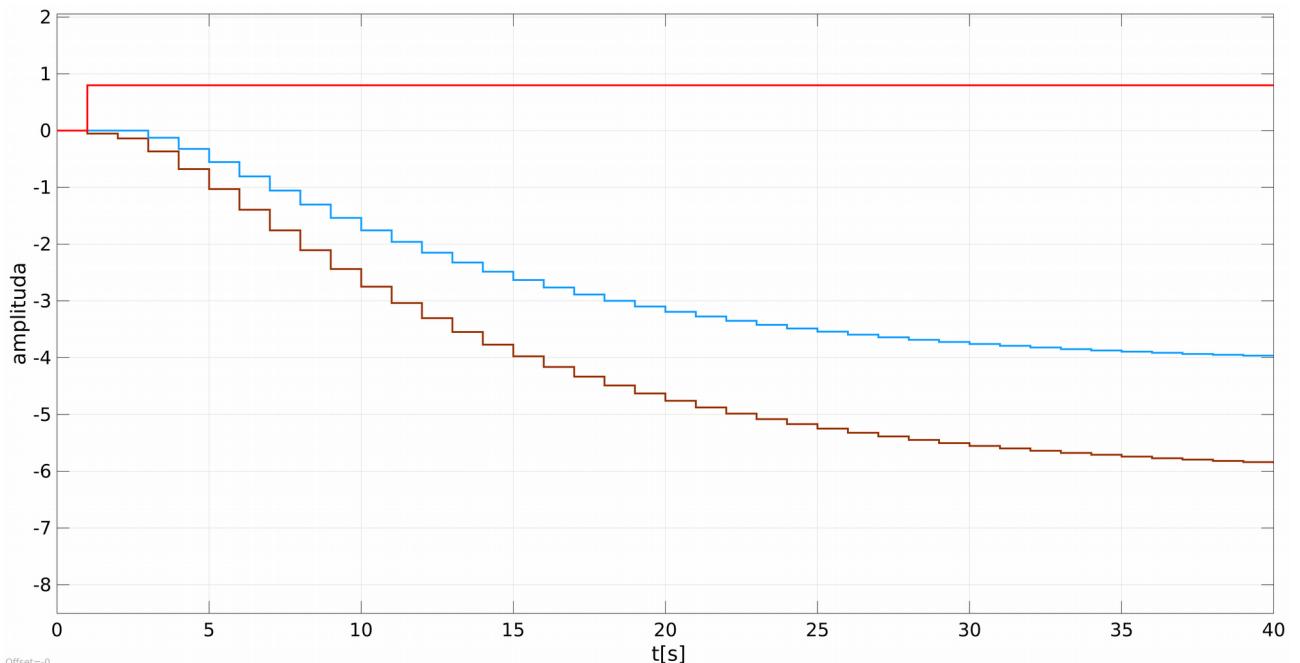
Ilustracja 14: Wykres dla pobudzenia 0-1 i punktu linearyzacji -0,8



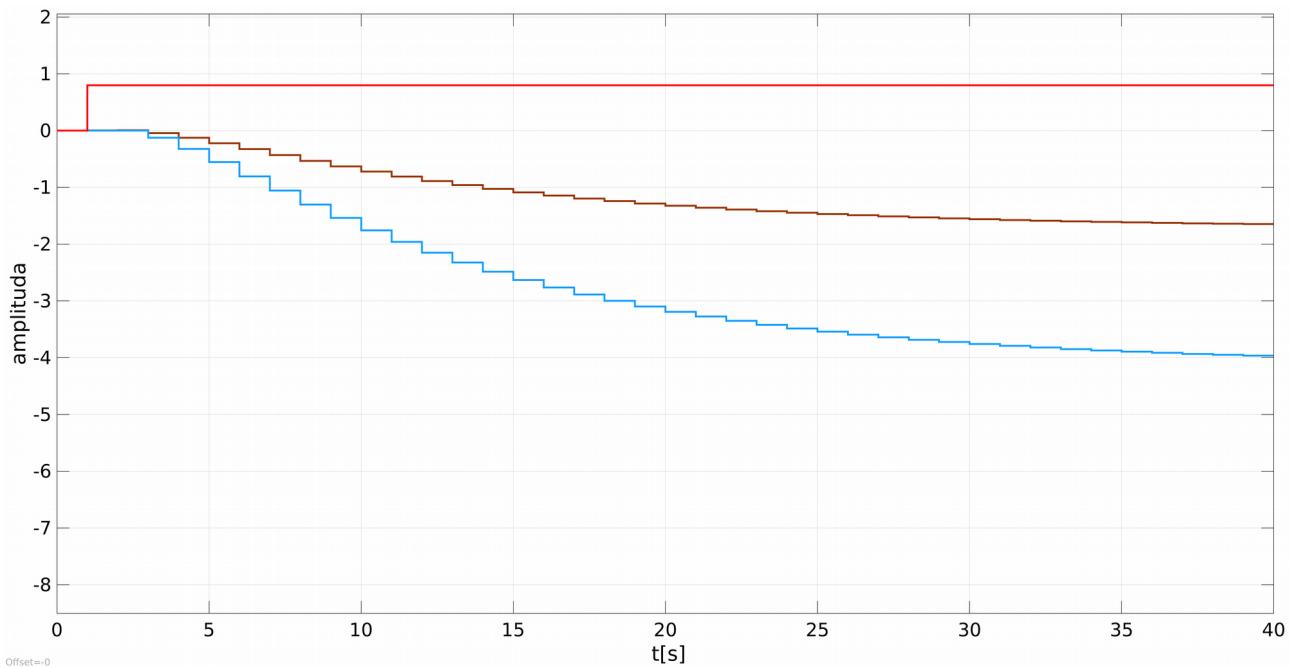
Ilustracja 15: Wykres dla pobudzenia 0-1 i punktu linearyzacji 0,2



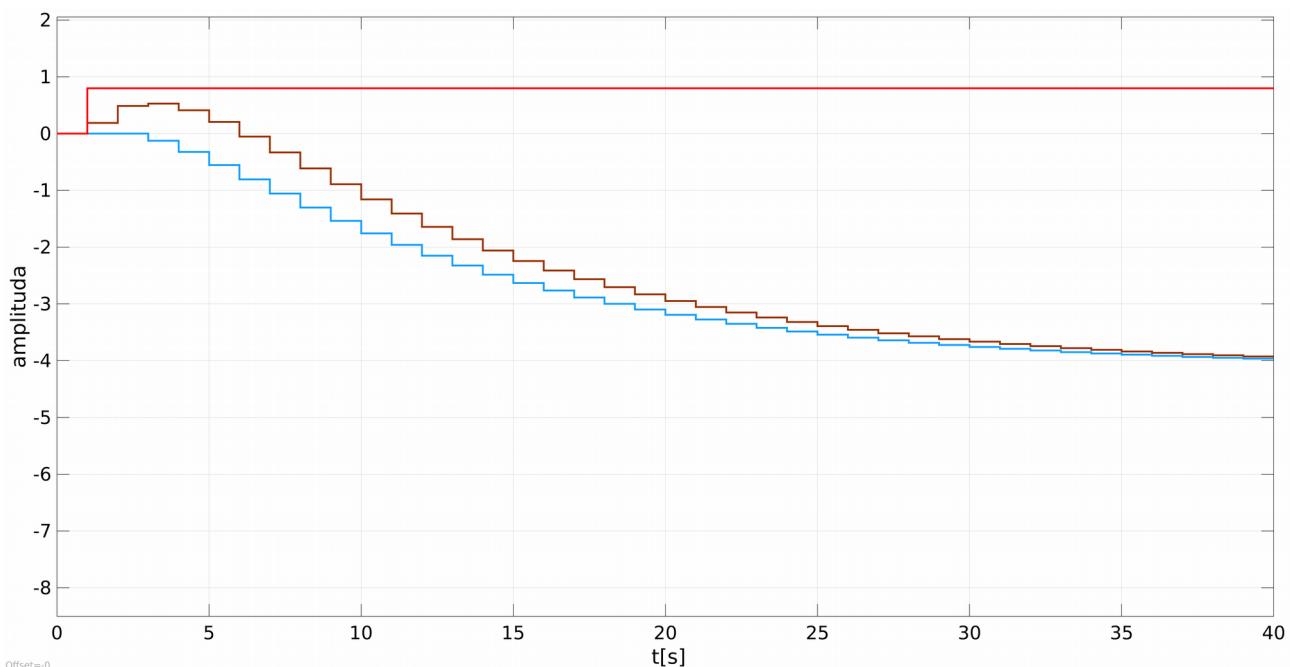
Ilustracja 16: Wykres dla pobudzenia 0-1 i punktu linearyzacji 0,8



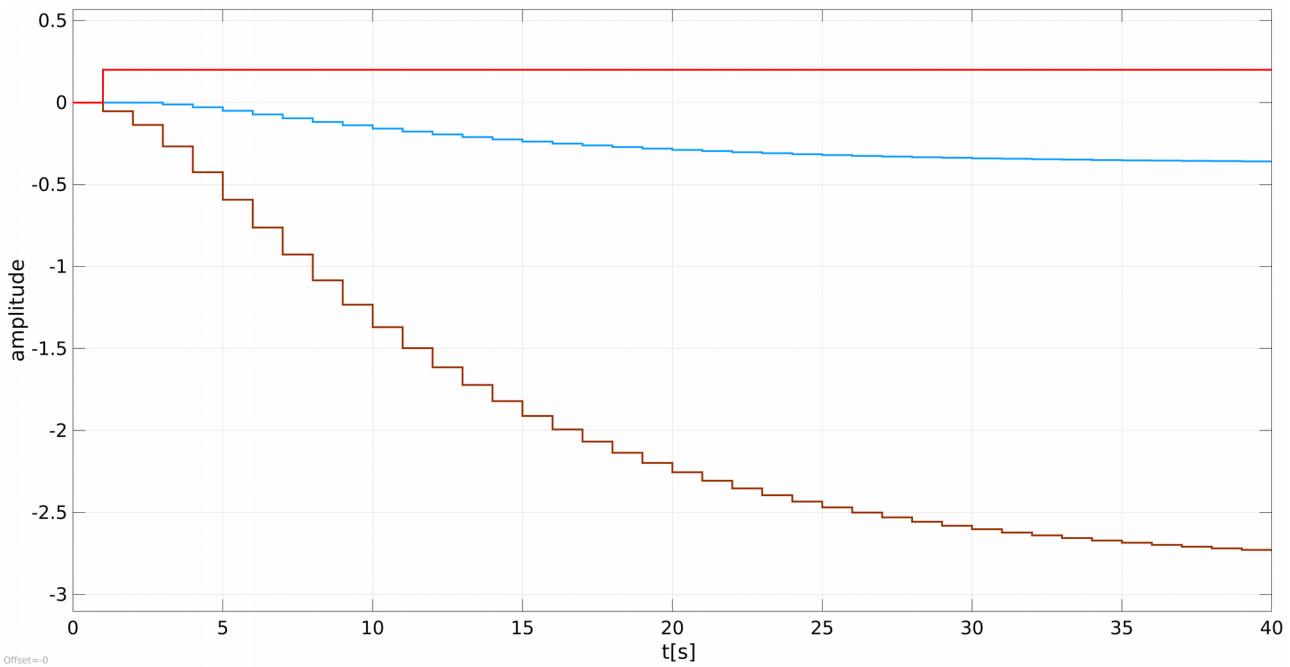
Ilustracja 17: Wykres dla pobudzenia 0-0,8 i punktu linearyzacji -0,8



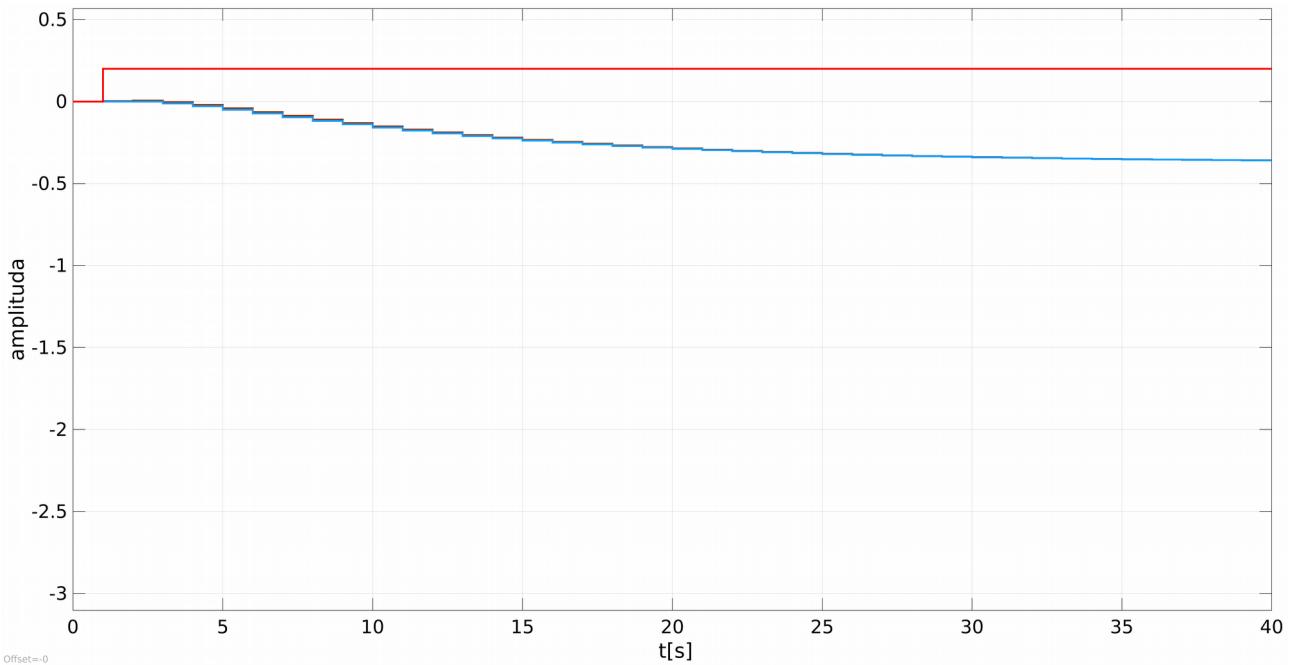
Ilustracja 18: Wykres dla pobudzenia 0-0,8 i punktu linearyzacji 0,2



Ilustracja 19: Wykres dla pobudzenia 0-0,8 i punktu linearyzacji 0,8



Ilustracja 20: Wykres dla pobudzenia 0-0,2 i punktu linearyzacji -0,8



Ilustracja 21: Wykres dla pobudzenia 0-0,2 i punktu linearyzacji 0,2

Jak widać zlinearyzowany model odzwierciedla nieliniowy z dokładnością, zależącą od punktu linearyzacji (najlepiej aproksymuje model w obrębie tego punktu). Charakterystyka zlinearyzowana najlepiej aproksymowała nieliniową na Ilustracji nr 14 (charakterystyki się niemalże pokrywają), 16 (tutaj charakterystyka zlinearyzowana osiąga większe wartości, lecz obie mają podobny przebieg), 19 (tutaj odstępstwo pojawiło się jedynie w pierwszych 30 sek, potem obie charakterystyki się pokrywają) i 21 (charakterystyki się niemalże pokrywają). Dla tych przypadków obie charakterystyki są do siebie najbardziej zbliżone. Zdecydowanie gorsze wyniki uzyskano dla Ilustracji 15, 17, 18, 20. Dla punktu linearyzacji 0,8 i

pobudzenia 0-0,2 charakterystyka zlinearyzowana znacząco odbiegała od liniowej (nie została przedstawiona z powodu na jej małą przejrzystość).

Zad nr 10

Na podstawie zlinearyzowanego dynamicznego modelu ciągłego wyznaczono odpowiadającą mu transmitancję w punkcie \bar{u} (punkt linearyzacji).

$$G(s) = \frac{-33(\frac{12}{55}\bar{u}^3 + \frac{39}{110}\bar{u}^2 + \frac{\bar{u}}{275} + \frac{14}{275})}{33s^2 + 1694s + 1}$$

Transmitancję wyznaczono za pomocą oprogramowania matlab. Do obliczeń użyto poniższego skryptu:

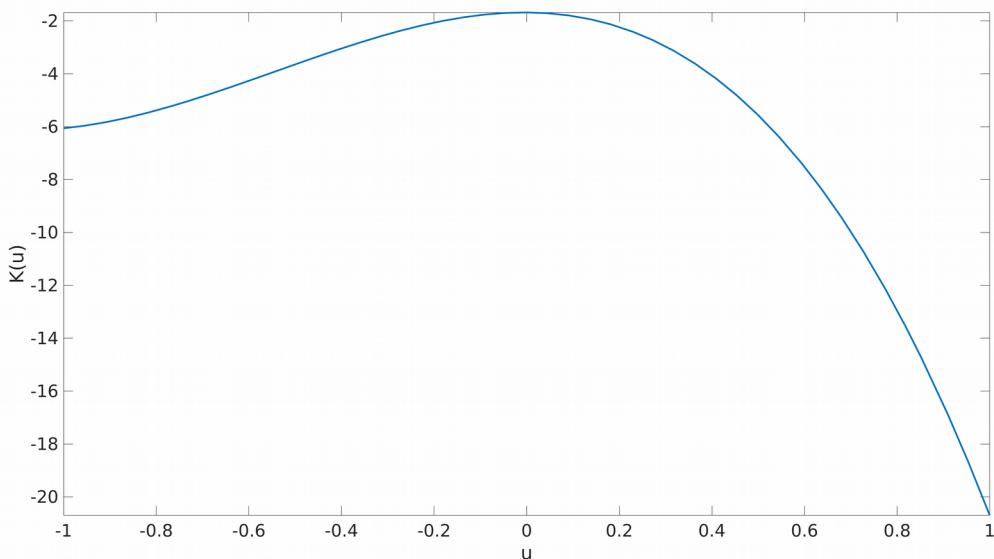
```
syms u_c s
K=2
T1=3
T2=11
a1=-0.84
a2=-0.03
a3=-1.95
a4=-0.9
A=[-(T1+T2)/T1*T2 1 ; -1/(T1*T2) 0]
B = [0 ; K*(a1+2*a2*u_c+3*a3*u_c^2+4*a4*u_c^3)/(T1*T2)]
C = [1 0]
D=0
G = C*(inv(eye(2)*s - A))*B + D
```

Zadania dodatkowe

Poprzez policzenie granicy transmitancji dyskretnej dla s dążącego do 0 można otrzymać następujące wzmacnienie statyczne K :

$$K = \frac{-3\bar{u}}{25} - \frac{117\bar{u}^2}{10} - \frac{36\bar{u}^3}{5} - \frac{42}{25}$$

Wzmocnienie statyczne wyznaczono za pomocą oprogramowania matlab. Do obliczeń użyto polecenia: `limit(G, s, 0)`.



Ilustracja 22: Zależność wzmacnienia statycznego od punktu linearyzacji