

Sterowanie procesami – projekt I, zadanie 8

Michał Stolarz

Proces dynamiczny opisany jest transmitancją ciągłą:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+8)}{(s-9)(s+10)(s+11)}$$

Zad nr 1

Wyznaczona (za pomocą ekstrapolatora zerowego rzędu) transmitancja dyskretna o okresie próbkowania 0,25s o ma postać:

$$G(z) = \frac{0.4626z^2 - 0.4525z + 0.04888}{z^3 - 9.634z^2 + 1.391z - 0.04979}$$

Biegunki transmitancji ciągłej znajdują się w punktach: 9, -10, -11. Natomiast zera w: -1, -8 .

Biegunki transmitancji dyskretnej znajdują się w punktach: 9,4877 , 0,0821 , 0,0639. Natomiast zera: 0,8546 , 0,1236. Transmitancje dyskretną oraz jej biegunki i zera wyznaczono przy pomocy poniższych komend:

```
Numerator = [0 1 9 8];
Denominator = [1 12 -79 -990];
sys = tf(Numerator,Denominator) % transmitancja ciągła
Ts = 0.25; % czas próbkowania
sysd = c2d(sys,Ts,'zoh') % zastosowanie ekstrapolatora zerowego rzędu
a = pole(sysd) % biegunki transmitancji dyskretnej
b = zero(sysd) % zera transmitancji dyskretnej
```

Zad nr 2

Modele w przestrzeni stanu przedstawiające się następującym wzorem:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

wyznaczono za pomocą poniższych komend w matlabie:

```
[num,den] = tfdata(sysd)
[A,B,C,D] = tf2ss(num{1},den{1})
A2 = A.'
B2 = C.'
C2 = B.'
```

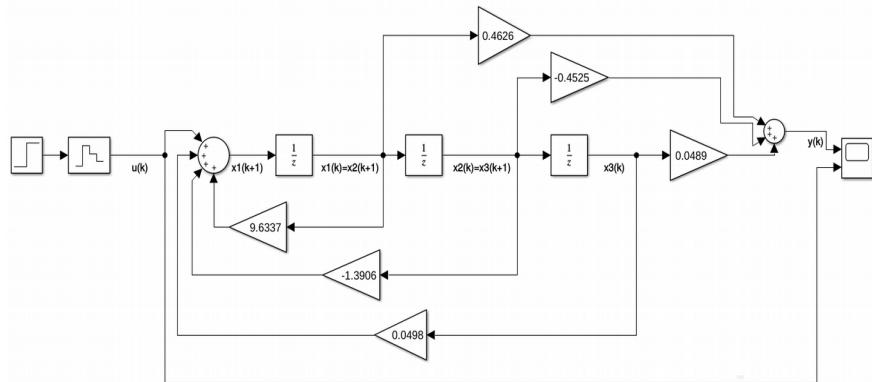
Gdzie num i den zawierają współczynniki w liczniku i mianowniku transmitancji dyskretnej. A, B, C, D to macierze współczynników w przestrzeni stanów (pierwsza metoda). A2, B2, C2 to pierwsze trzy macierze współczynników w przestrzeni stanów wyznaczonej drugą metodą (D pozostaje takie samo czyli 0). Dla pierwszej metody uzyskano następujące wyniki:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6337 & -1,3906 & 0,0498 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [0,4626 \quad -0,4525 \quad 0,0489] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

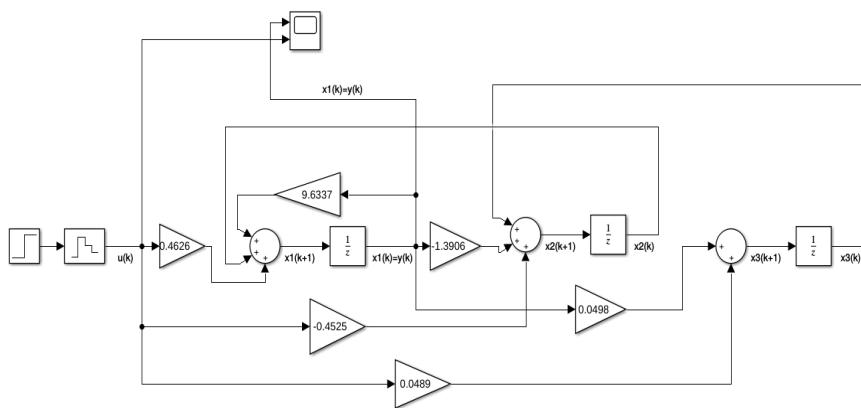
Dla drugiej metody:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6337 & 1 & 0 \\ -1,3906 & 0 & 1 \\ 0,0498 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4626 \\ -0,4525 \\ 0,0489 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Modele graficzne przedstawiono poniżej:



Ilustracja 1: Struktura modelu dyskretnego w przestrzeni stanu (wariant pierwszy metody bezpośredniej)



Ilustracja 2: Struktura modelu dyskretnego w przestrzeni stanu (wariant drugi metody bezpośredniej)

Zad nr 3

Poniżej wykazano symbolicznie, że obie reprezentacje modelu dyskretnego w przestrzeni stanu można sprowadzić do tej samej transmitancji. Na początku przedstawiono ogólne własności macierzy, z których skorzystano w dalszej części do wyprowadzenia dowodu. Gdzie I – macierz jednostkowa, $G(z)$ – transmitancja, A, B, C, D z indeksami dolnymi to macierze przestrzeni stanu dla jednego i drugiego wariantu metody bezpośredniej (D jest macierzą 1×1 czyli skalarem).

$$\begin{aligned}(A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\ (A - B)^T &= A^T - B^T \\ (AB)^T &= A^T B^T \\ I^T &= I\end{aligned}$$

$$G(z)_1 = C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$$

$$G(z)_2 = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

$$A_1^T = A_2$$

$$B_1^T = C_2$$

$$C_1^T = B_2$$

$$D_1 = D_2$$

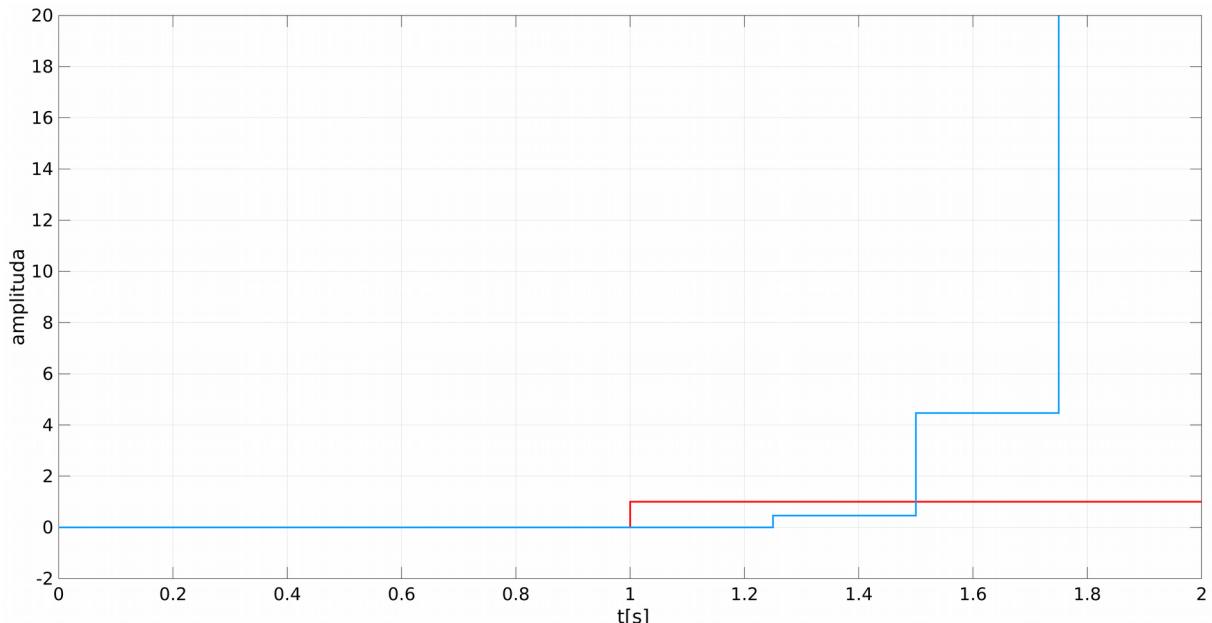
$$G(z)_2 = C_1^T(zI^T - A_1^T)^{-1}B_1^T + D_1$$

$$G(z)_2 = (C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1)^T$$

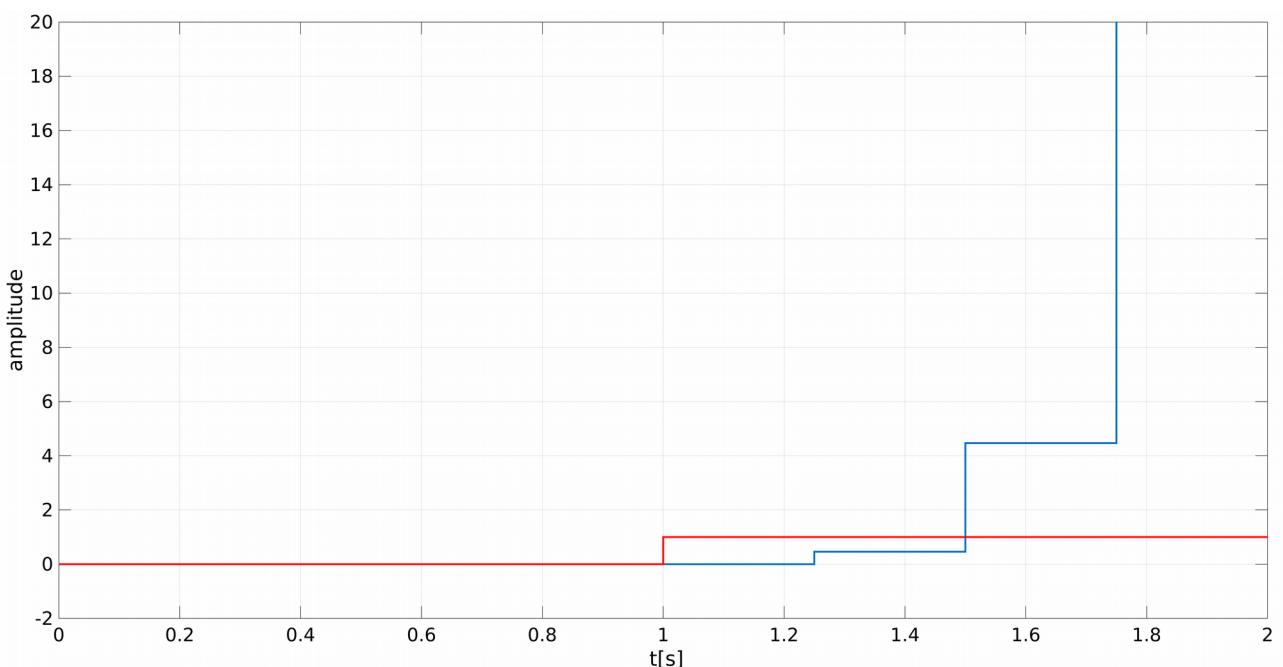
$$G(z)_2 = (G(z)_1)^T = G(z)_1$$

Zad nr 4

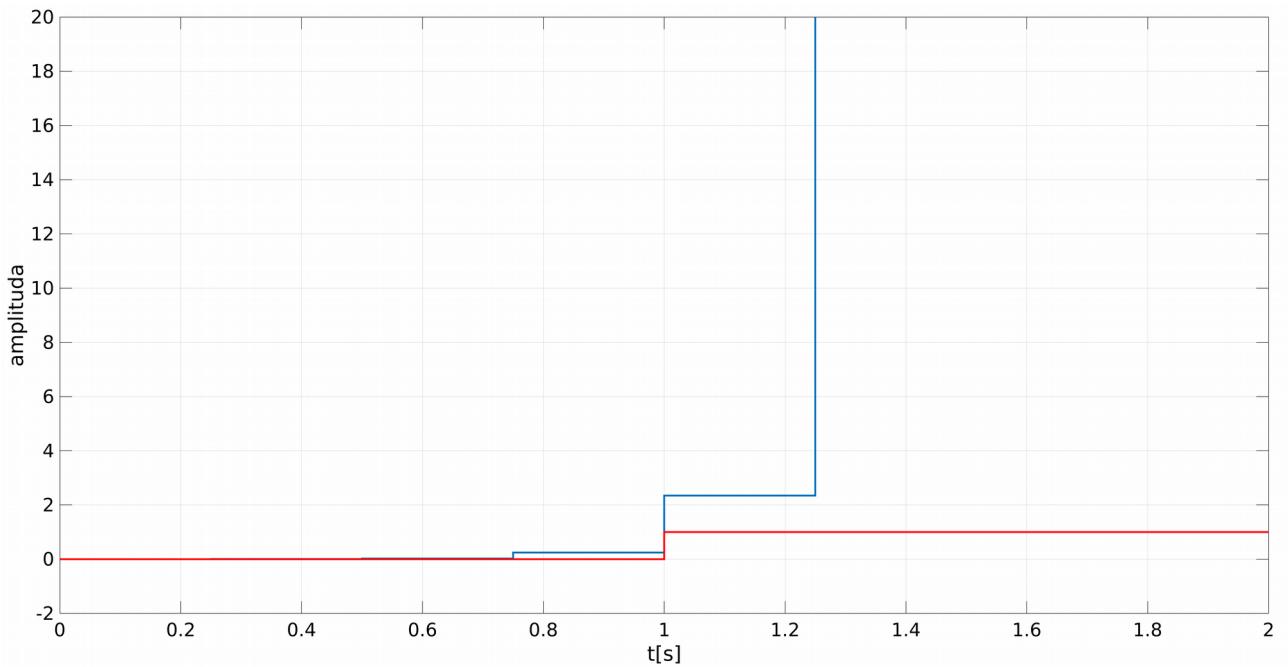
Porównano odpowiedzi skokowe transmitancji dyskretnej i obu modeli w przestrzeni stanu przy zmianie sygnału wejściowego z wartości 0 na 1 w chwili 1s. Symulacje przeprowadzono przy zerowych i niezerowych warunkach początkowych modeli w przestrzeni stanu. Z wyników jednoznacznie wynika, że modele są niestabilne, zarówno dla zerowych jak i niezerowych warunków początkowych (modele przestrzeni stanów). Fakt ten nie zaskakuje, jako że transmitancja ciągła (dana w zadaniu) także jest niestabilna, jako że ma biegum o dodatniej części rzeczywistej. Na poniższych wykresach kolorem czerwonym oznaczono skok jednostkowy, a niebieskim odpowiedź danego układu.



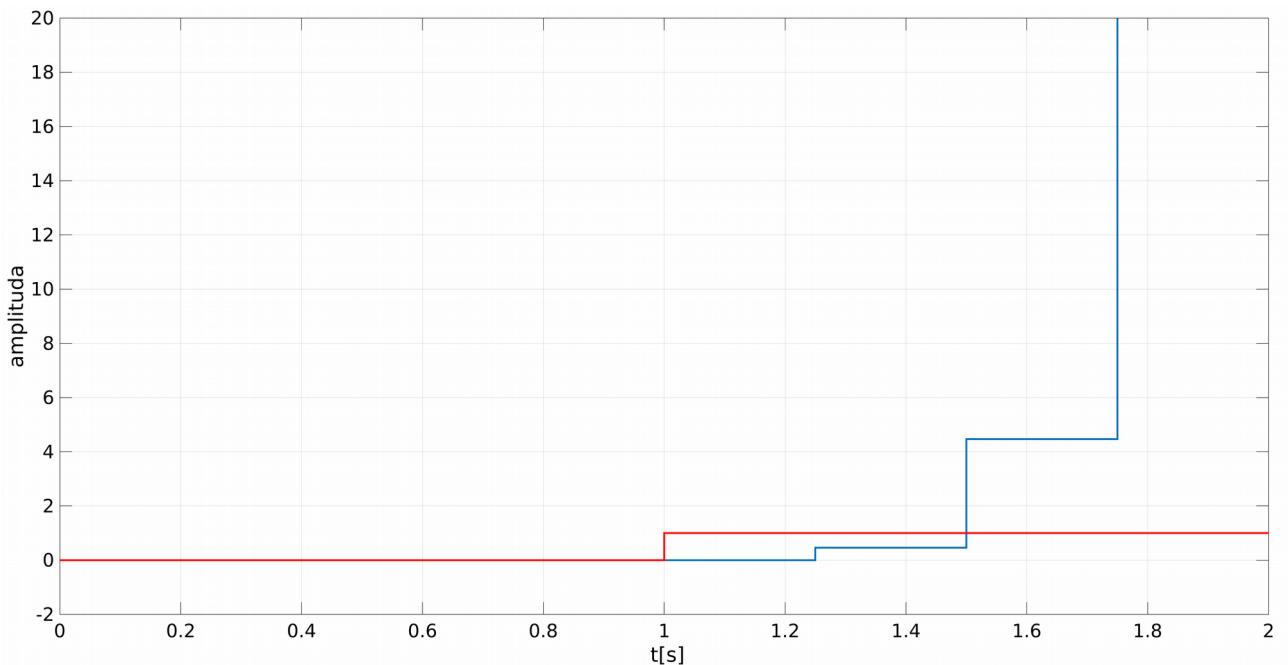
Ilustracja 3: Odpowiedź skokowa transmitancji dyskretnej



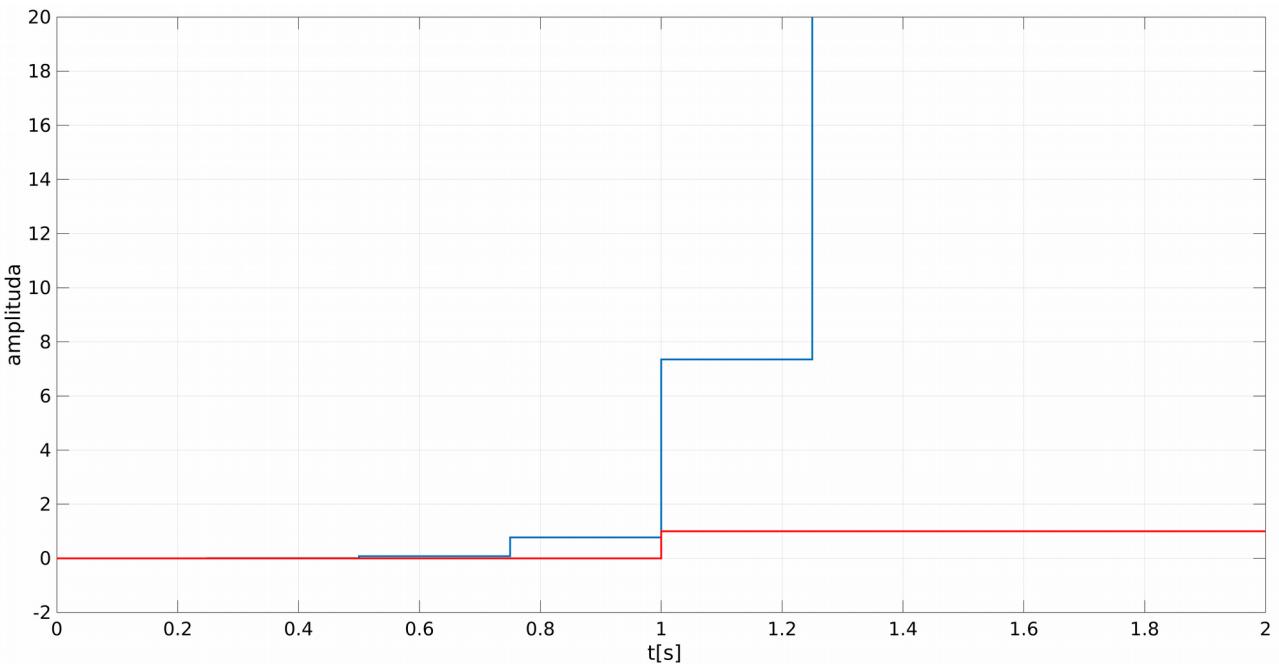
Ilustracja 4: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla zerowych warunków początkowych (1 wariant)



Ilustracja 5: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla niezerowych warunków początkowych (1 wariant,
warunek początkowy = 0,0008)



Ilustracja 6: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla zerowych warunków początkowych (2 wariant)



Ilustracja 7: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla niezerowych warunków początkowych (2 wariant, warunek początkowy = 0,0008)

Na powyższych wykresach widać także, że odpowiedzi skokowe obu modeli w przestrzeni stanu (zarówno dla warunków początkowych zerowych jak i niezerowych) są identyczne co jest dodatkowym dowodem na to, że są sobie równoważne.

Dalsze rozważania są przeprowadzane dla drugiej wersji modelu w przestrzeni stanu

Zad nr 5

Sprawdzono sterowalność i obserwonalność dla drugiej wersji modelu w przestrzeni stanu. Zastosowano tutaj komedy:

```

Co = ctrb(A2,B2) % macierz sterowalności
Ob = obsv(A2,C2) % macierz obserwonalności

d_co = det(Co) % wyznacznik macierzy sterowalności
d_ob = det(Ob) % wyznacznik macierzy obserwonalności

```

Gdzie : Co – macierz sterowalnosci, Ob – macierz obserwonalnosci, A2,C2,B2 – macierze przestrzeni stanu, d_co – wyznacznik macierzy sterowalnosci, d_ob – wyznacznik macierzy obserwonalnosci

Z obliczeń wynikło, że badany układ jest sterowalny i obserwonalny, ponieważ $d_{co} = -0.0121$, a $d_{ob} = 1$.

Zad nr 6

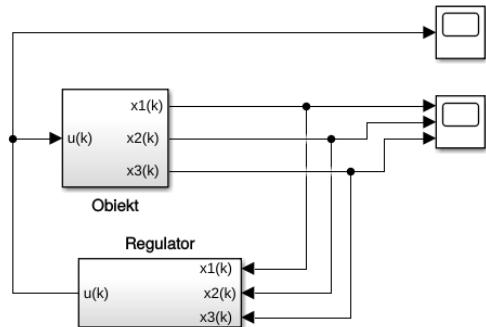
Wyznaczono regulator ze sprzężeniem od stanu o równaniu:

$$u(k) = -Kx(k)$$

$$u(k) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Gdzie: K – wektor z parametrami regulatora, $u(k)$ – sygnał sterujący, $x(k)$ – wektor zmiennych stanu.

Ogólna struktura tego układu regulacji została przedstawiona poniżej:

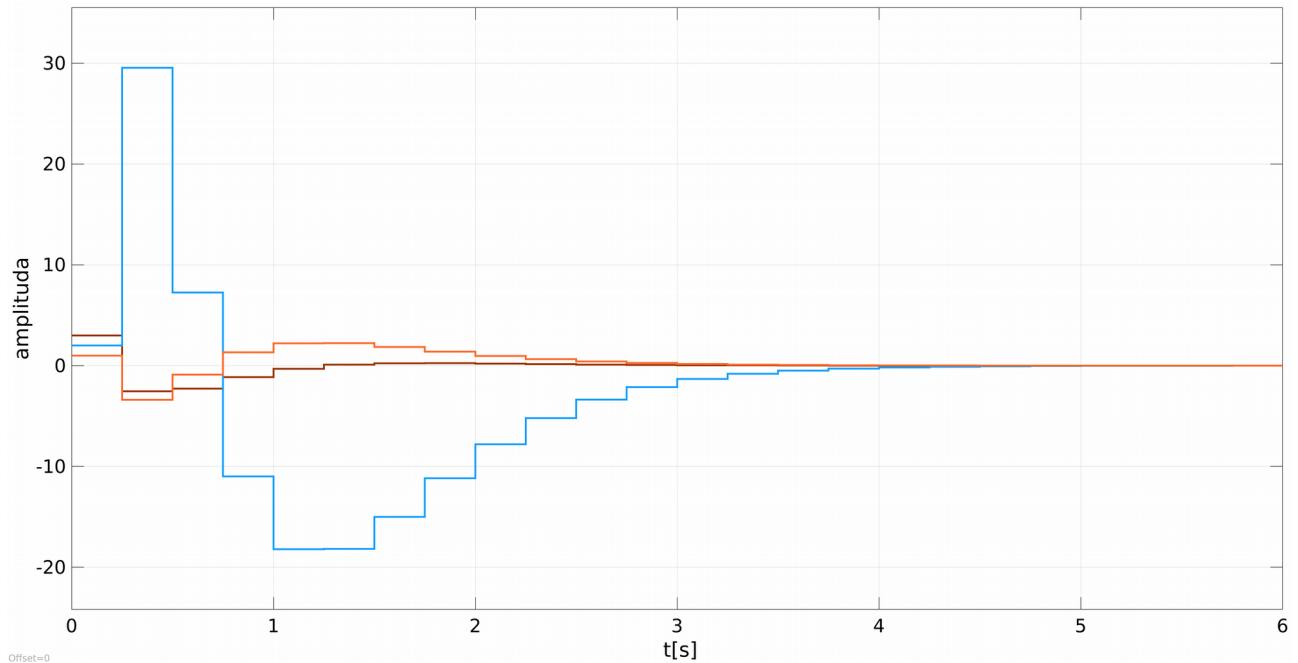


Ilustracja 8: Ogólna struktura układu regulacji

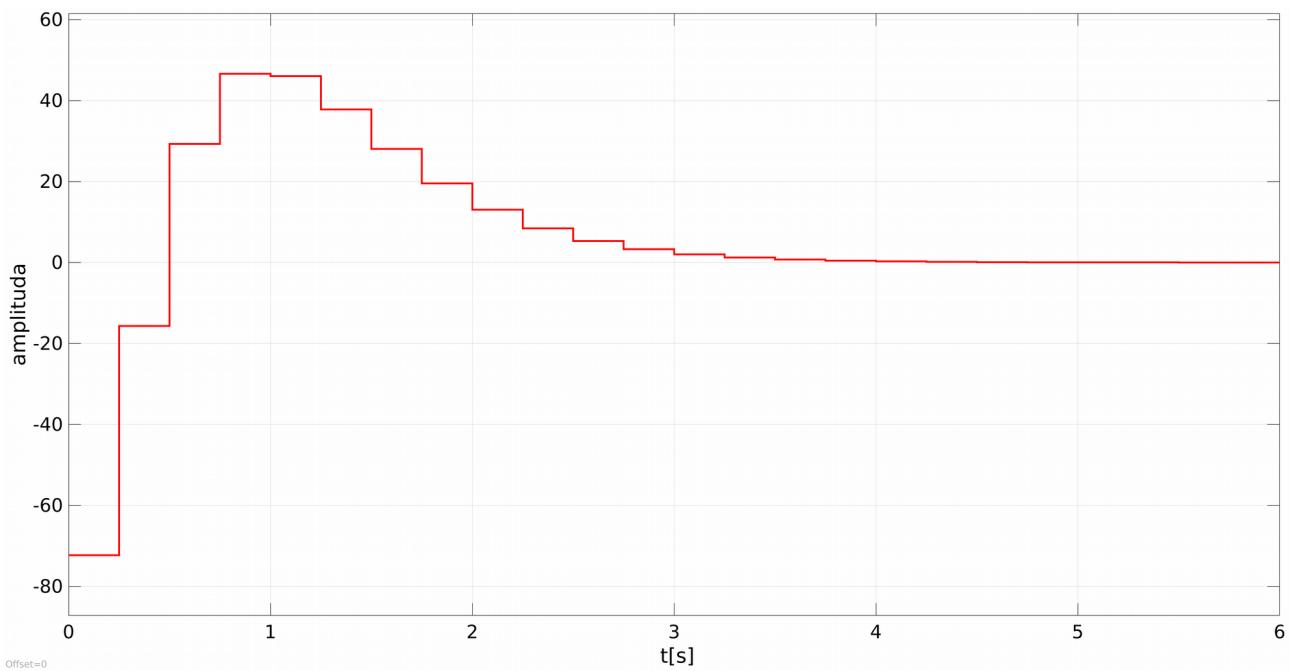
W kolejnej części zadania dobierano bieguny dla układu zamkniętego przy założonym warunku początkowym: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ oraz końcowym: $x_1=x_2=x_3=0$. Bieguny dobierano przy pomocy funkcji: $K = \text{acker}(A_2, B_2, p)$, gdzie K – wektor parametrów regulatora, A_2, B_2 – macierze przestrzeni stanu obiektu, p – wektor z testowanymi biegunami.

I:

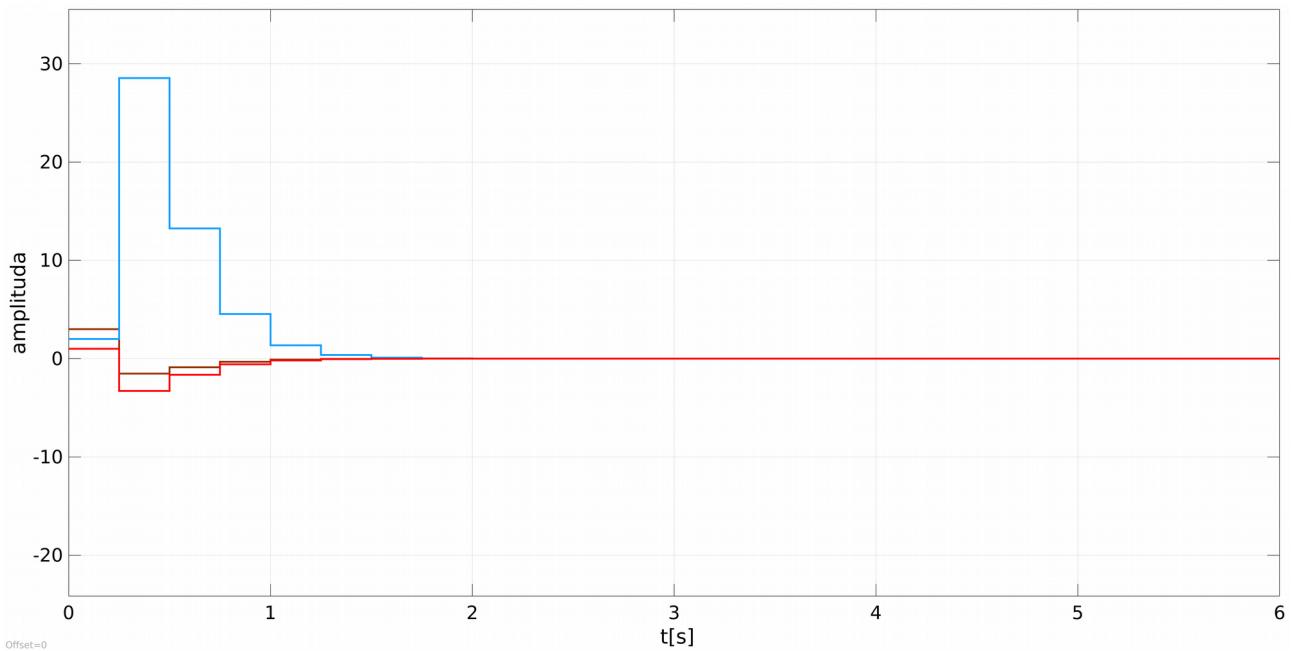
Przyjęto, że układ zamknięty ma trzy takie same biegony rzeczywiste. Symulacji dokonano dla czasu 6s (po tym czasie osiągany zostaje warunek końcowy). Jej wyniki przedstawiono na poniższych wykresach. W przebiegach trajektorii stanu układu zamkniętego czerwonym kolorem oznaczono x_3 , niebieskim – x_2 , brązowym – x_1 . Testy przeprowadzono tylko dla dodatnich biegunów, ponieważ ujemne wprowadzają układ w oscylacje.



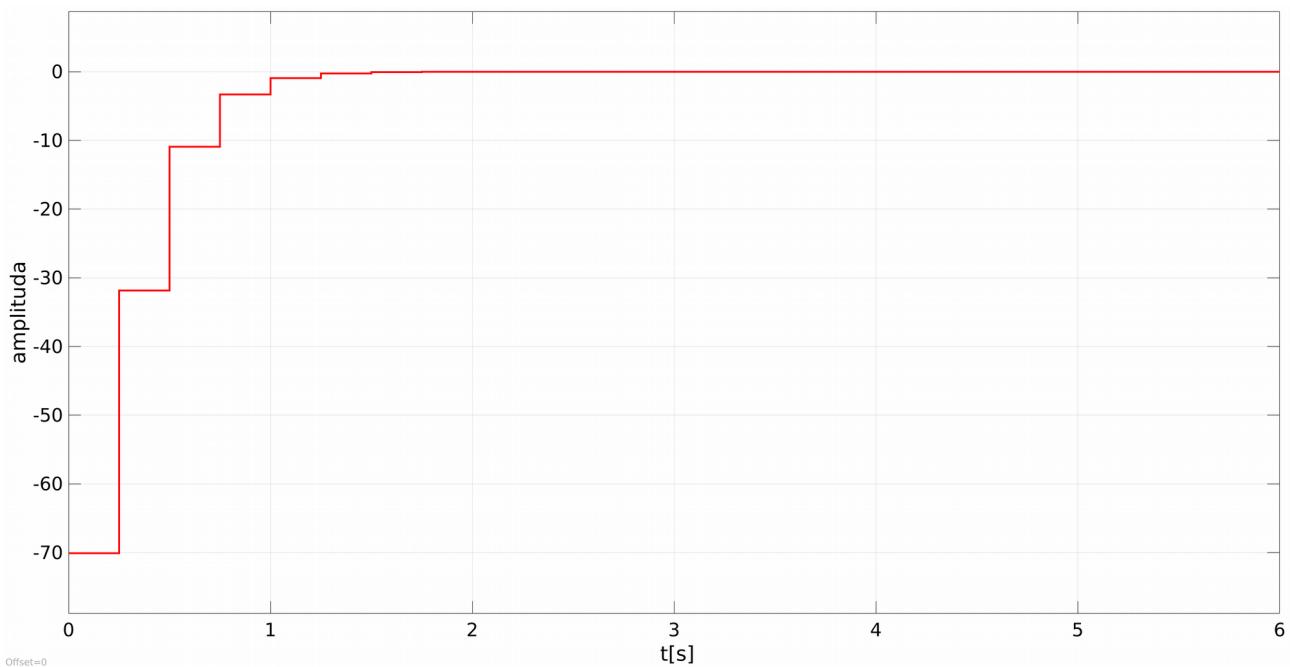
Ilustracja 9: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych 0,5



Ilustracja 10: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0,5



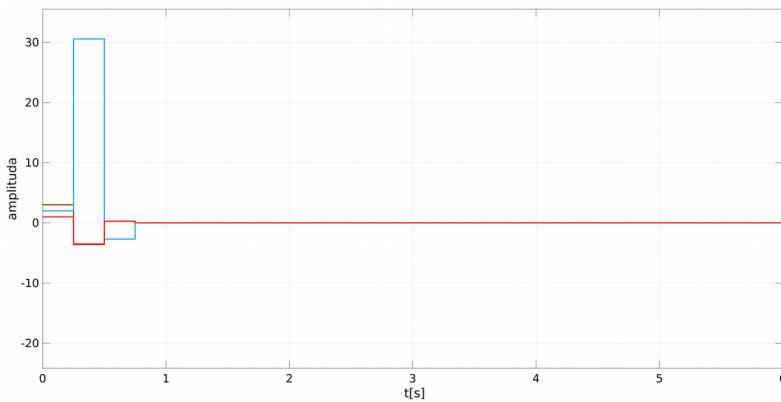
Ilustracja 11: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych 0,2



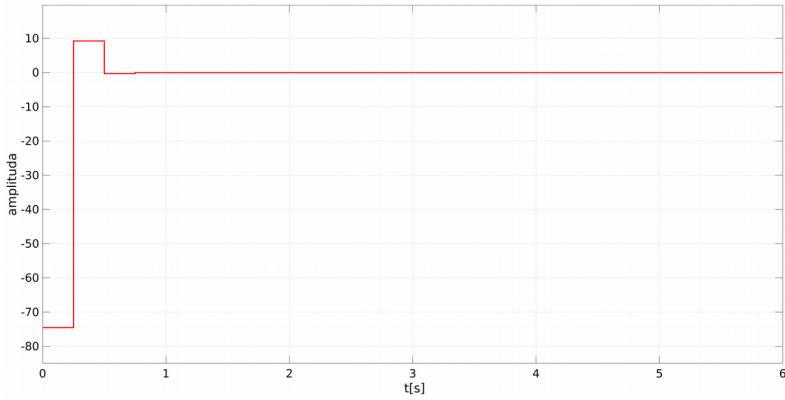
Ilustracja 12: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0,2

Jak widać na powyższych wykresach wybór biegunów w znaczący sposób pływa na postać przebiegu sygnału sterującego i trajektorii stanu układu zamkniętego. Widać, że im mniejszy moduł biegunów tym otrzymane przebiegi są szybsze. Na ilustracji nr 9 stany układu dużo wolniej osiągają warunek końcowy, niż na ilustracji nr 11. Natomiast sygnał sterujący dla biegunów 0,5 dużo wolniej osiąga wartość 0 niż dla biegunów 0,2 , a na dodatek ma duże przeregulowanie (sięgające do ok. 50).

W regulatorze można przyjąć zerowe bieguny. Wówczas układ stabilizuje się bardzo szybko, bo już po 3 okresach próbkowania i to mieszcząc się w wartościach osiąganych w poprzednich symulacjach (dla biegunów 0,2 i 0,5). Warto podkreślić, że sygnał sterujący zmienia się wówczas bardzo szybko. W jednej chwili zmiana taka wynosi ok. 85 jednostek.



Ilustracja 13: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych 0



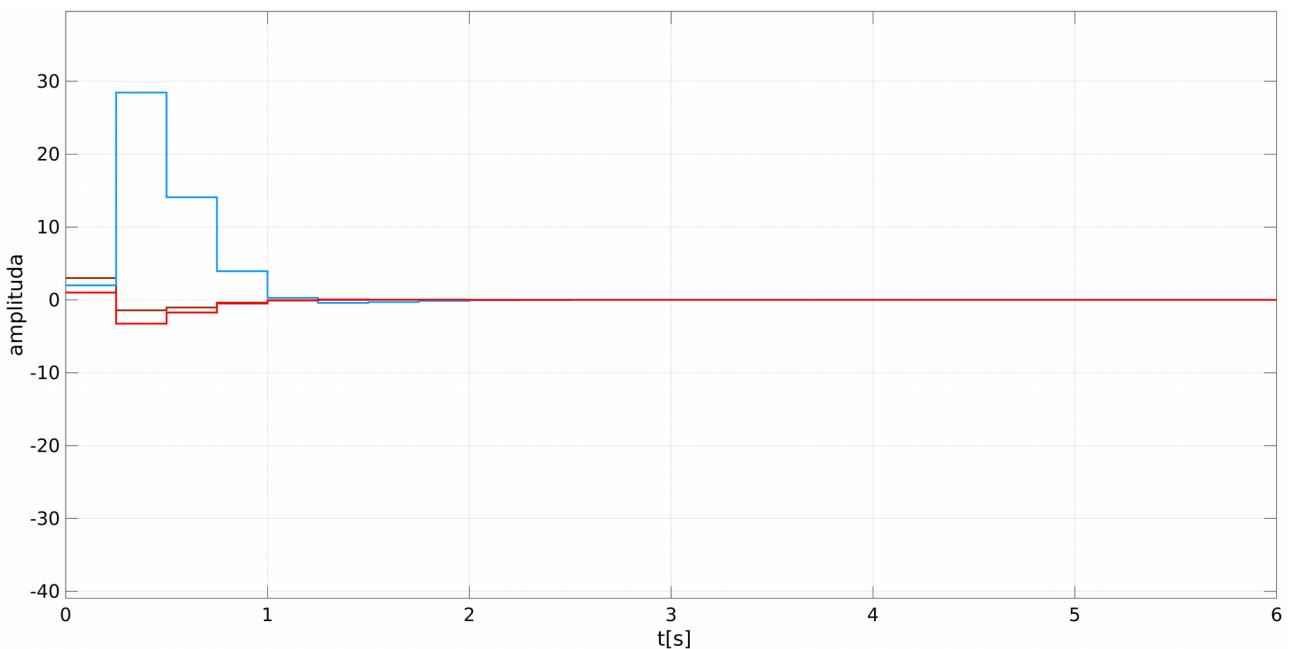
Ilustracja 14: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0

II:

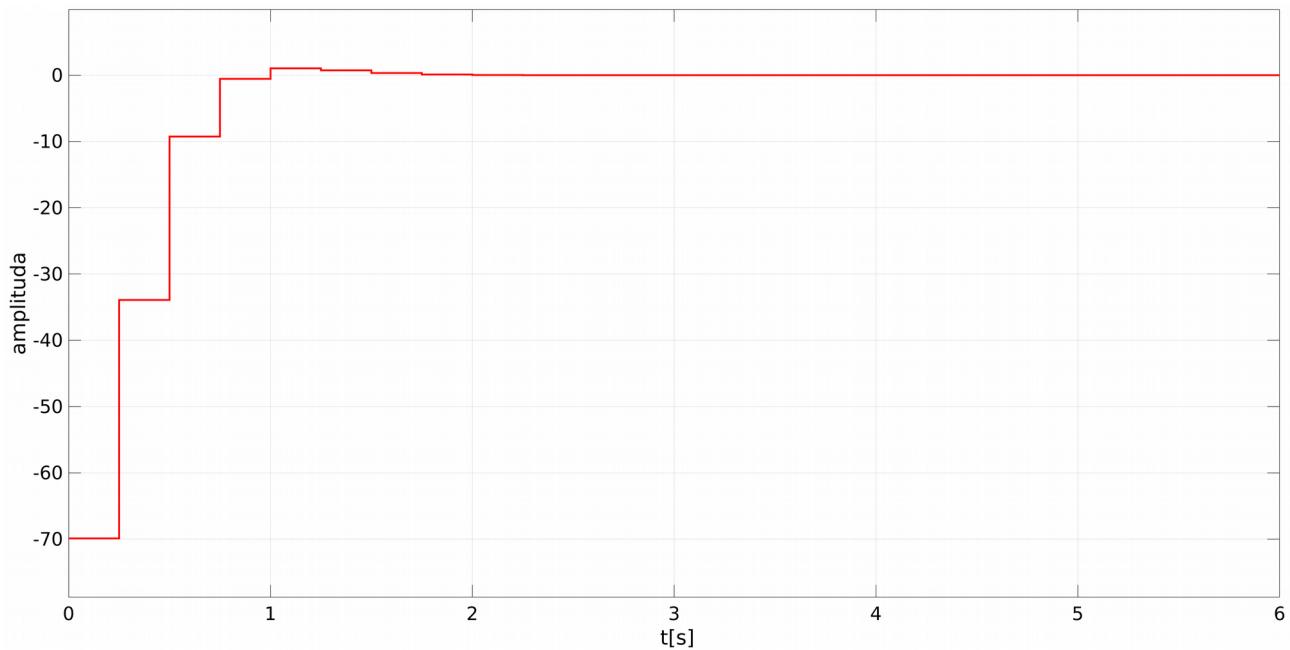
Następnie przyjęto, że układ zamknięty ma jeden biegun rzeczywisty i parę biegunków zespolonych sprzężonych ze sobą $z_{b2}=a+bj$, $z_{b3}=a-bj$. Poniższe wykresy ilustrują zachowanie sygnału sterującego i trajektorii poszczególnych zmiennych stanu dla niezmiennego bieguna rzeczywistego równego 0,3.

Bieguny także w tym przypadku dla małego modułu sprawiają, że układ działa szybciej. Jednak można zauważać, że bieguny zespolone sprzężone są tutaj dominujące (mają zazwyczaj większy moduł niż biegun rzeczywisty). Skutkiem tego jest, że nawet niewielka zmiana parametrów a i b znaczco wpływa na zachowanie układu, natomiast zmiana bieguna rzeczywistego nie aż tak bardzo (o ile para zespolonych biegunków sprzężonych nadal jest dominującą). Z wykresów widać, że im bieguny zespolone mają mniejszy moduł tym układ jest szybszy. W sygnale sterującym występuje mniejsze przeregulowanie, a w zmiennej stanu przyjmują mniejsze wartości i oczywiście szybciej dążą do zera.

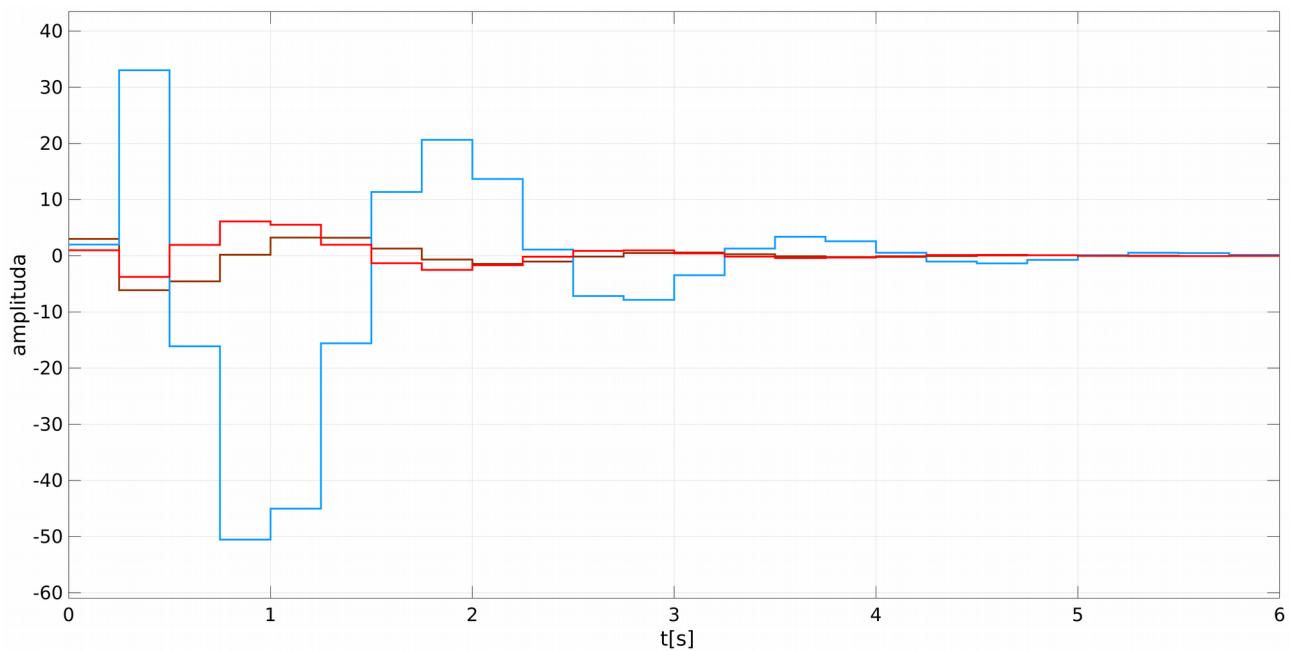
Warto też zauważyć, że sprzężone bieguny zespolone o mniejszych częściach urojonych znacznie polepszają zachowanie układu (szycie zbiega do zera), w porównaniu do przypadku gdy te same bieguny mają taki sam moduł ale większą część urojoną. Wynika stąd, że parametr b znaczco wpływa na to, czy układ oscyluje(im jest on większy tym układ bardziej oscyluje).



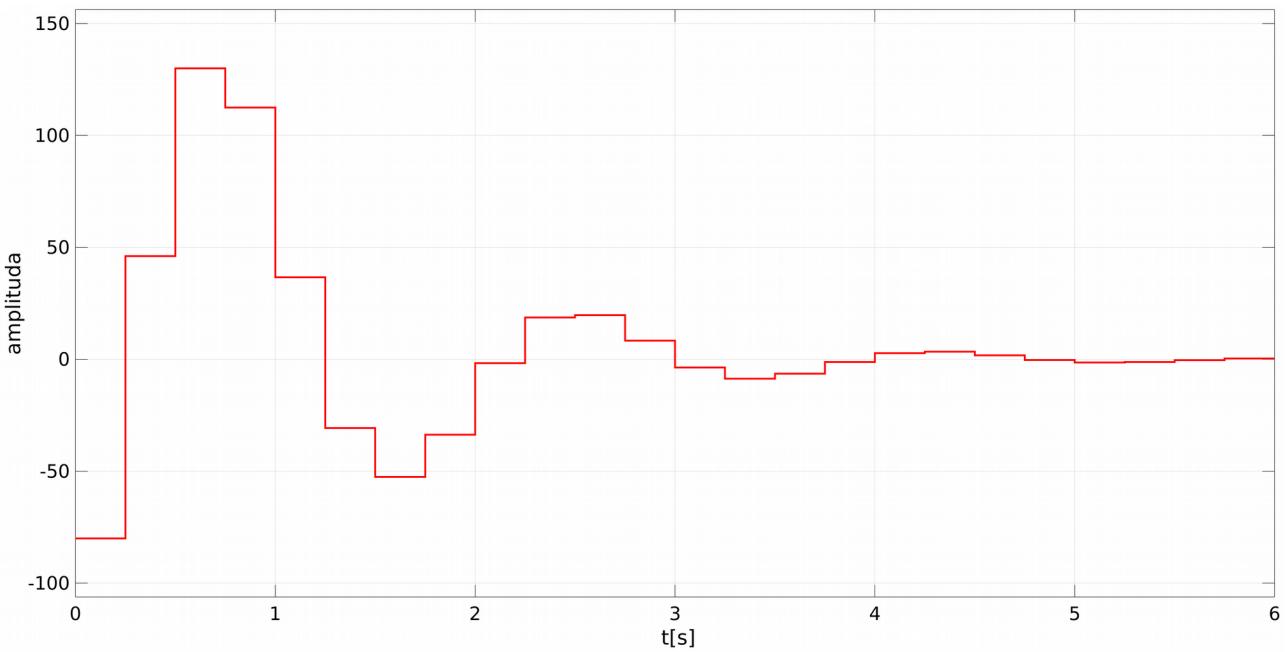
Ilustracja 15: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy $a=0,3$ $b=0,2$



Ilustracja 16: Sygnał sterujący przy $a=0,3$ $b=0,2$



Ilustracja 17: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy $a=0,5$ $b=0,6$

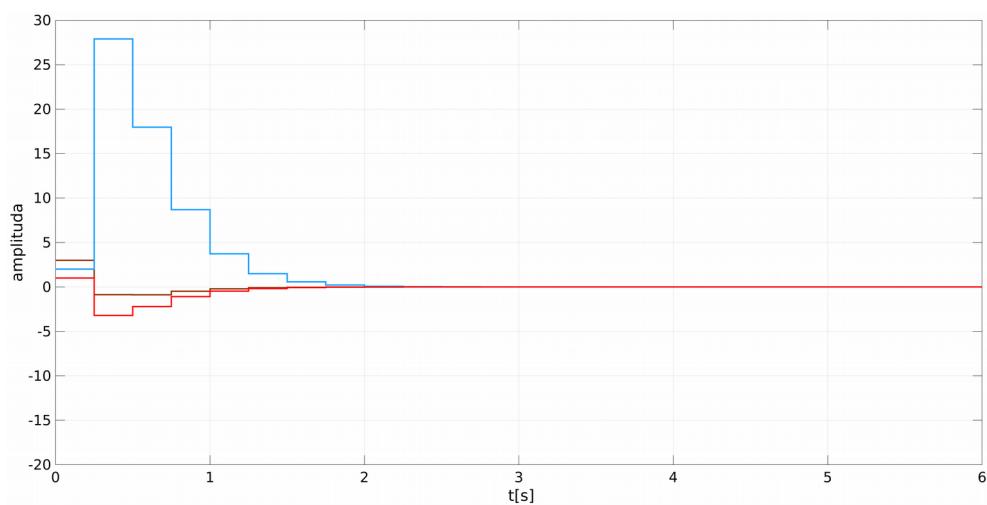


Ilustracja 18: Sygnał sterujący przy $a=0,5$ $b=0,6$

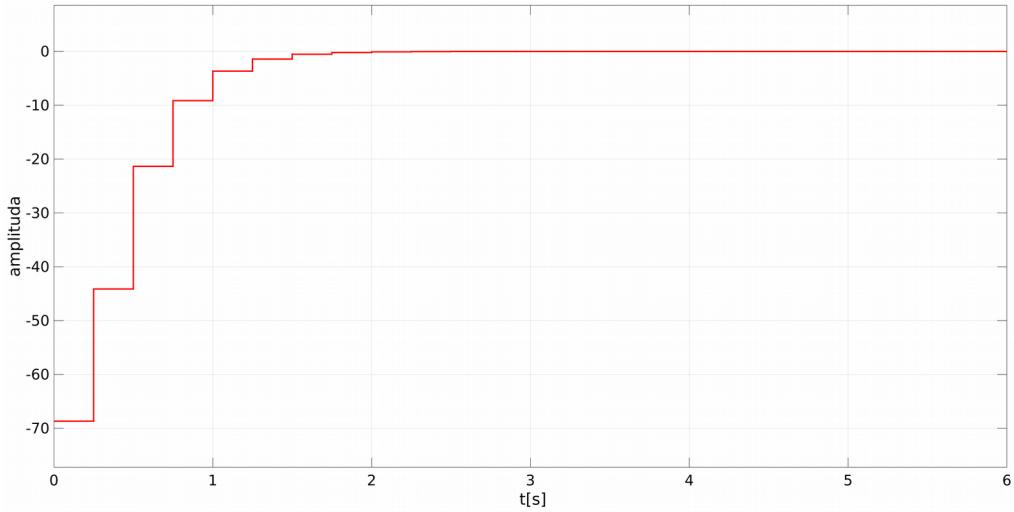
Zad nr 7

Najlepszy regulator został wybrany wedle takich kryteriów jak: szybki czas regulacji, niezbyt gwałtowne zmiany sygnału sterowania oraz mieszącą się w przyzwoitych granicach amplituda sygnału sterowania.

Najlepszy regulator z trzema rzeczywistymi biegunami został wybrany dla biegunów o wartościach 0,3 . Regulator ten jest nieco wolniejszy od regulatora o biegunach 0,2 , ale za to sygnał sterujący nie jest aż tak zmienny w czasie. W porównaniu do regulatora o biegunach 0,5 jest dużo szybszy (w przeciągu 2s trajektorie zmiennych stanu spadają do zera), a w sygnale sterującym nie występuje przeregulowanie (miało to miejsce dla biegunów 0,5) Przebiegi tego regulatora przedstawiono poniżej (oznaczenia kolorami jak poprzednio).

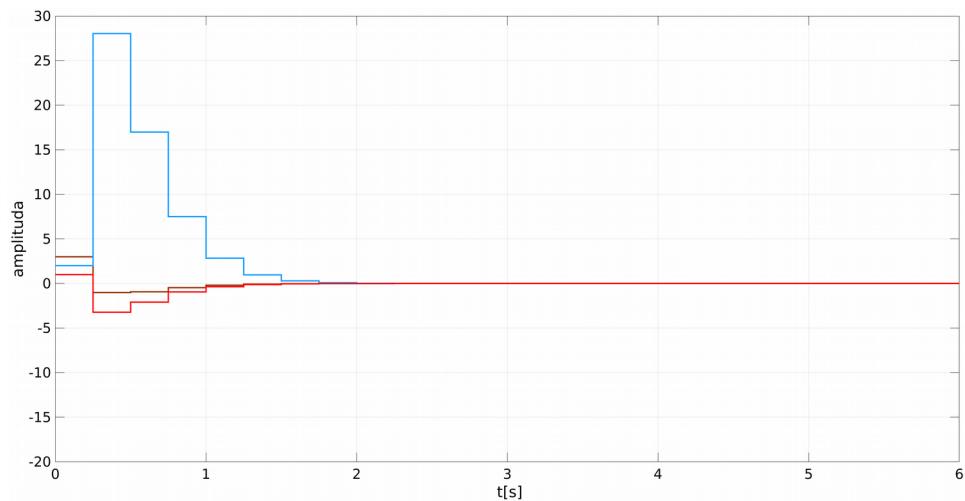


Ilustracja 19: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych 0,3

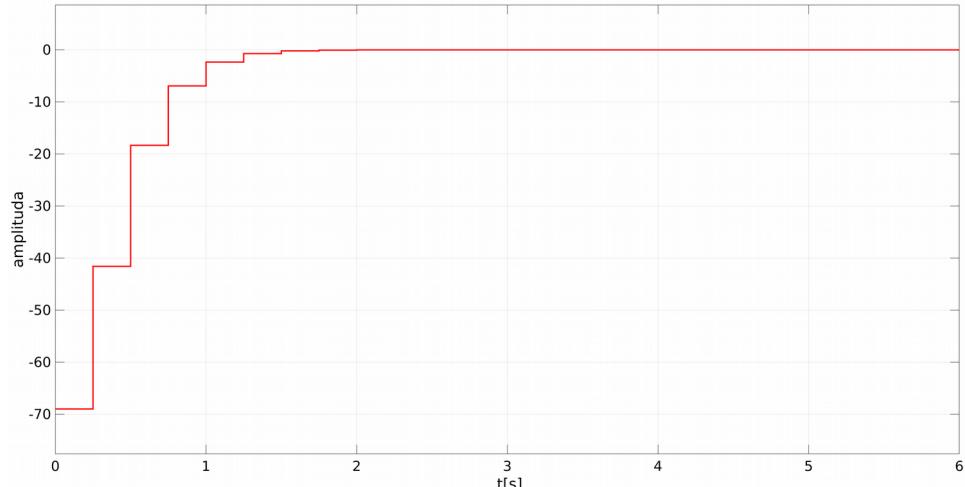


Ilustracja 20: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0,3

Najlepszy regulator z biegunem rzeczywistym i dwoma biegunami zespolonymi zostały wybrane dla $z_{b1}=0,3$, $z_{b2}=0,3+0,1j$, $z_{b3}=0,3-0,1j$. Regulator ten jest nieco wolniejszy od regulatora o biegunach $z_{b1}=0,3$, $z_{b2}=0,3+0,2j$, $z_{b3}=0,3-0,2j$, ale za to sygnał sterujący nie narasta aż tak gwałtownie. W porównaniu do regulatora o biegunach $z_{b1}=0,3$, $z_{b2}=0,5+0,6j$, $z_{b3}=0,5-0,6j$ jest dużo szybszy (w przeciągu 2s trajektorie zmiennych stanu spadają do zera), a w sygnale sterującym nie występuje przeregulowanie. Przebiegi tego regulatora przedstawiono poniżej (oznaczenia kolorami jak poprzednio).



Ilustracja 21: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych $z_{b1}=0,3$, $z_{b2}=0,3+0,1j$, $z_{b3}=0,3-0,1j$



Ilustracja 22: Sygnał sterujący przy biegunach równych $z_{b1}=0,3$, $z_{b2}=0,3+0,1j$, $z_{b3}=0,3-0,1j$

Zad 8

Zaprojektowano obserwator zredukowanego rzędu o biegunach rzeczywistych z_{o2}, z_{o3} . Równanie obiektu jest postaci:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \omega(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} y(k) &= x_1(k) \\ \omega(k) &= \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \\ A_{11} &= 9,6337 \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -1.3906 \\ 0.0498 \end{bmatrix} \\ B_1 &= 0.4626 \\ B_2 &= \begin{bmatrix} -0.4525 \\ 0.0489 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

W równaniu obserwatora użyto zmiennej $z(k)$ by nie było potrzeby korzystania ze zmiennej $\omega(k)$. Zmienna $z(k)$ ma postać:

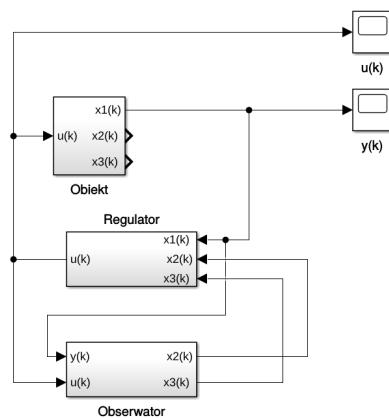
$$z(k) = \omega(k) - Ly(k)$$

Równanie obserwatora ma postać:

$$z(k+1) = (A_{22} - LA_{12})(z(k) - Ly(k)) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k)$$

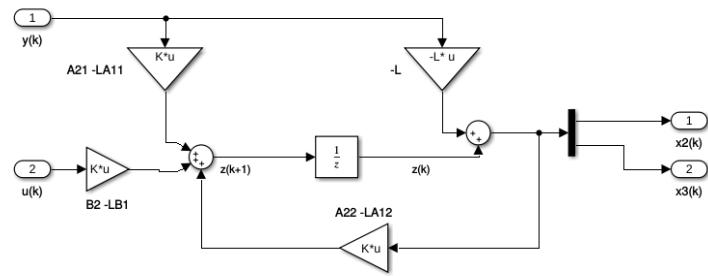
gdzie: L – wektor z parametrami obserwatora, wyznaczany poprzez dobór biegunów. Parametry te wyznaczano za pomocą funkcji: $L = \text{acker}(A2_22', A2_12', [z1\ z3])$. Gdzie: L – wektor z parametrami obserwatora, $A2_22$ – macierz A_{22} , $A2_12$ – macierz A_{12} , $z1, z3$ – dobierane bieguny z_{o2}, z_{o3} .

Ogólna struktura układu regulacji z obserwatorem:



Ilustracja 23: Ogólna struktura układu regulacji z obserwatorem

Szczegółowa struktura obserwatora:



Ilustracja 24: Szczegółowa struktura obserwatora zredukowanego rzędu