

Sterowanie procesami – projekt I, zadanie 8

Michał Stolarz

Proces dynamiczny opisany jest transmitancją ciągłą:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+8)}{(s-9)(s+10)(s+11)}$$

Zad nr 1

Wyznaczona (za pomocą ekstrapolatora zerowego rzędu) transmitancja dyskretna o okresie próbkowania 0,25s o ma postać:

$$G(z) = \frac{0.4626z^2 - 0.4525z + 0.04888}{z^3 - 9.634z^2 + 1.391z - 0.04979}$$

Biegunki transmitancji ciągłej znajdują się w punktach: 9, -10, -11. Natomiast zera w: -1, -8 .

Biegunki transmitancji dyskretnej znajdują się w punktach: 9,4877 , 0,0821 , 0,0639. Natomiast zera: 0,8546 , 0,1236. Transmitancje dyskretną oraz jej biegunki i zera wyznaczono przy pomocy poniższych komend:

```
Numerator = [0 1 9 8];
Denominator = [1 12 -79 -990];
sys = tf(Numerator,Denominator) % transmitancja ciągła
Ts = 0.25; % czas próbkowania
sysd = c2d(sys,Ts,'zoh') % zastosowanie ekstrapolatora zerowego rzędu
a = pole(sysd) % biegunki transmitancji dyskretnej
b = zero(sysd) % zera transmitancji dyskretnej
```

Zad nr 2

Modele w przestrzeni stanu przedstawiające się następującym wzorem:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

wyznaczono za pomocą poniższych komend w matlabie:

```
[num,den] = tfdata(sysd)
[A,B,C,D] = tf2ss(num{1},den{1})
A2 = A.'
B2 = C.'
C2 = B.'
```

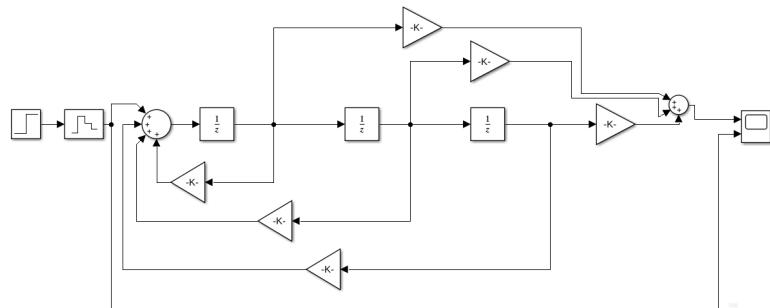
Gdzie num i den zawierają współczynniki w liczniku i mianowniku transmitancji dyskretnej. A, B, C, D to macierze współczynników w przestrzeni stanów (pierwsza metoda). A2, B2, C2 to pierwsze trzy macierze współczynników w przestrzeni stanów wyznaczonej drugą metodą (D pozostaje takie samo czyli 0). Dla pierwszej metody uzyskano następujące wyniki:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6337 & -1,3906 & 0,0498 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [0,4626 \quad -0,4525 \quad 0,0489] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

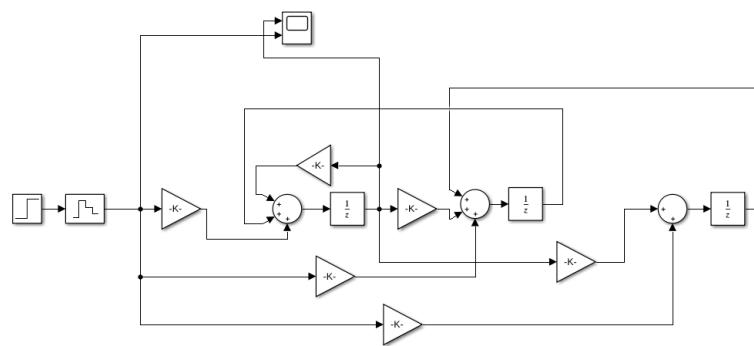
Dla drugiej metody:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,6337 & 1 & 0 \\ -1,3906 & 0 & 1 \\ 0,0498 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4626 \\ -0,4525 \\ 0,0489 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Modele graficzne przedstawiono poniżej:



Ilustracja 1: Struktura modelu dyskretnego w przestrzeni stanu (wariant pierwszy metody bezpośredniej)



Ilustracja 2: Struktura modelu dyskretnego w przestrzeni stanu (wariant drugi metody bezpośredniej)

Zad nr 3

Poniżej wykazano symbolicznie, że obie reprezentacje modelu dyskretnego w przestrzeni stanu można sprowadzić do tej samej transmitancji. Na początku przedstawiono ogólne własności macierzy, z których skorzystano w dalszej części do wyprowadzenia dowodu. Gdzie I- macierz jednostkowa, $G(z)$ – transmitancja , A,B,C,D z indeksami dolnymi to macierze przestrzeni stanu dla jednego i drugiego wariantu metody bezpośredniej (D jest macierzą 1×1 czyli skalarem).

$$\begin{aligned}(A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\ (A - B)^T &= A^T - B^T \\ (AB)^T &= A^T B^T \\ I^T &= I\end{aligned}$$

$$G(z)_1 = C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1$$

$$G(z)_2 = C_2(zI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$$

$$A_1^T = A_2$$

$$B_1^T = C_2$$

$$C_1^T = B_2$$

$$D_1 = D_2$$

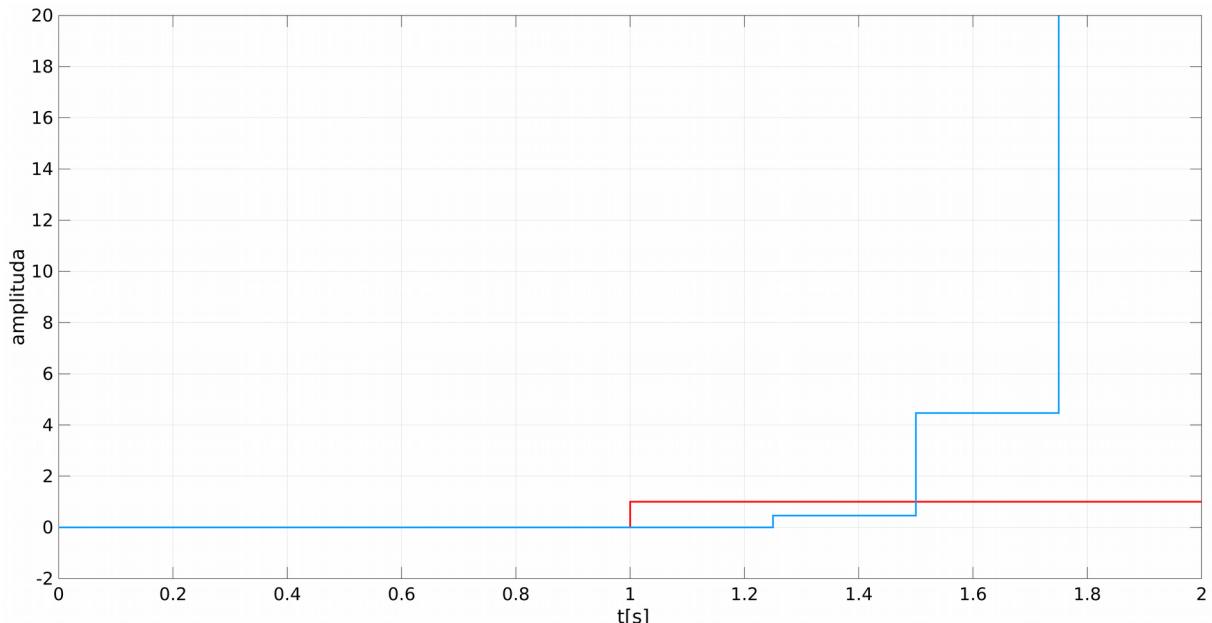
$$G(z)_2 = C_1^T(zI^T - A_1^T)^{-1}B_1^T + D_1$$

$$G(z)_2 = (C_1(zI - A_1)^{-1}B_1 + D_1)^T$$

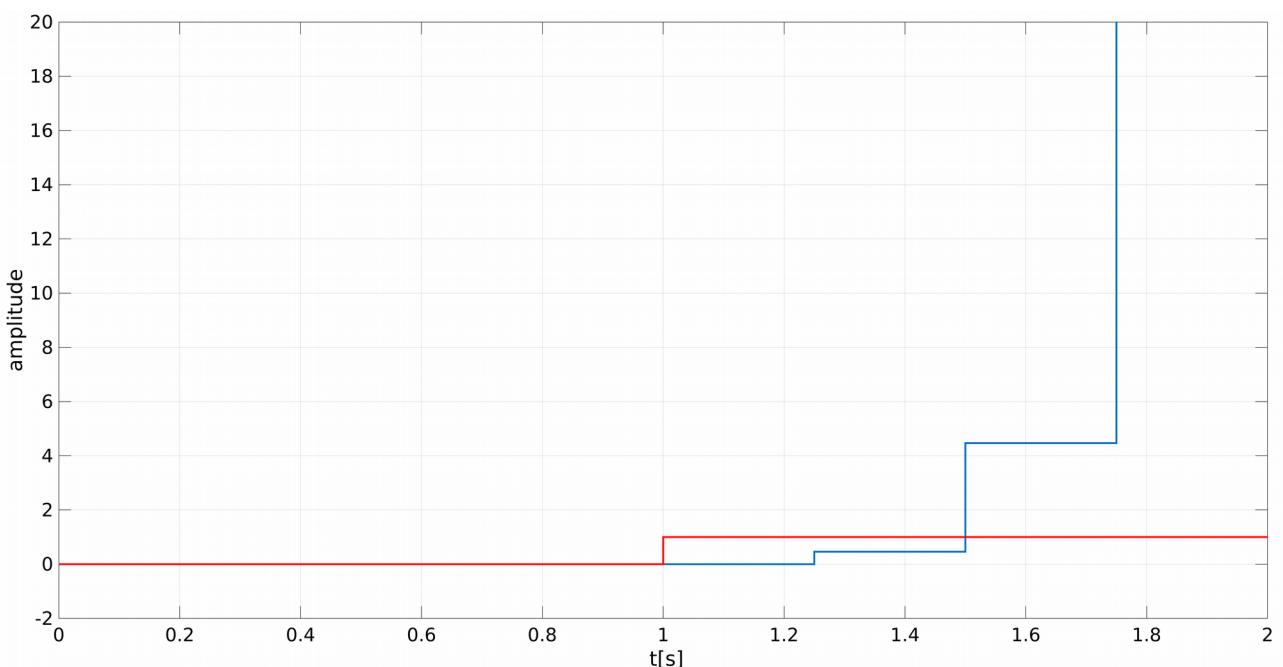
$$G(z)_2 = (G(z)_1)^T = G(z)_1$$

Zad nr 4

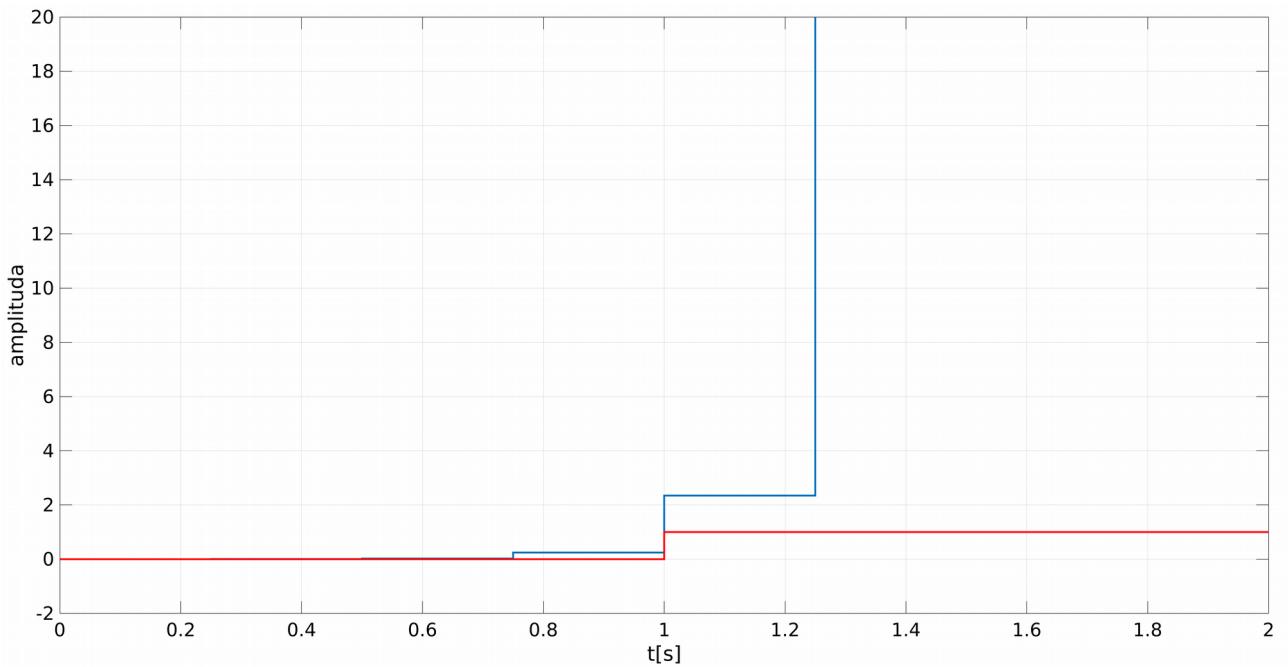
Porównano odpowiedzi skokowe transmitancji dyskretnej i obu modeli w przestrzeni stanu przy zmianie sygnału wejściowego z wartości 0 na 1 w chwili 1s. Symulacje przeprowadzono przy zerowych i niezerowych warunkach początkowych modeli w przestrzeni stanu. Z wyników jednoznacznie wynika, że modele są niestabilne, zarówno dla zerowych jak i niezerowych warunków początkowych (modele przestrzeni stanów). Fakt ten nie zaskakuje, jako że transmitancja ciągła (dana w zadaniu) także jest niestabilna, jako że ma biegum o dodatniej części rzeczywistej. Na poniższych wykresach kolorem czerwonym oznaczono skok jednostkowy, a niebieskim odpowiedź danego układu.



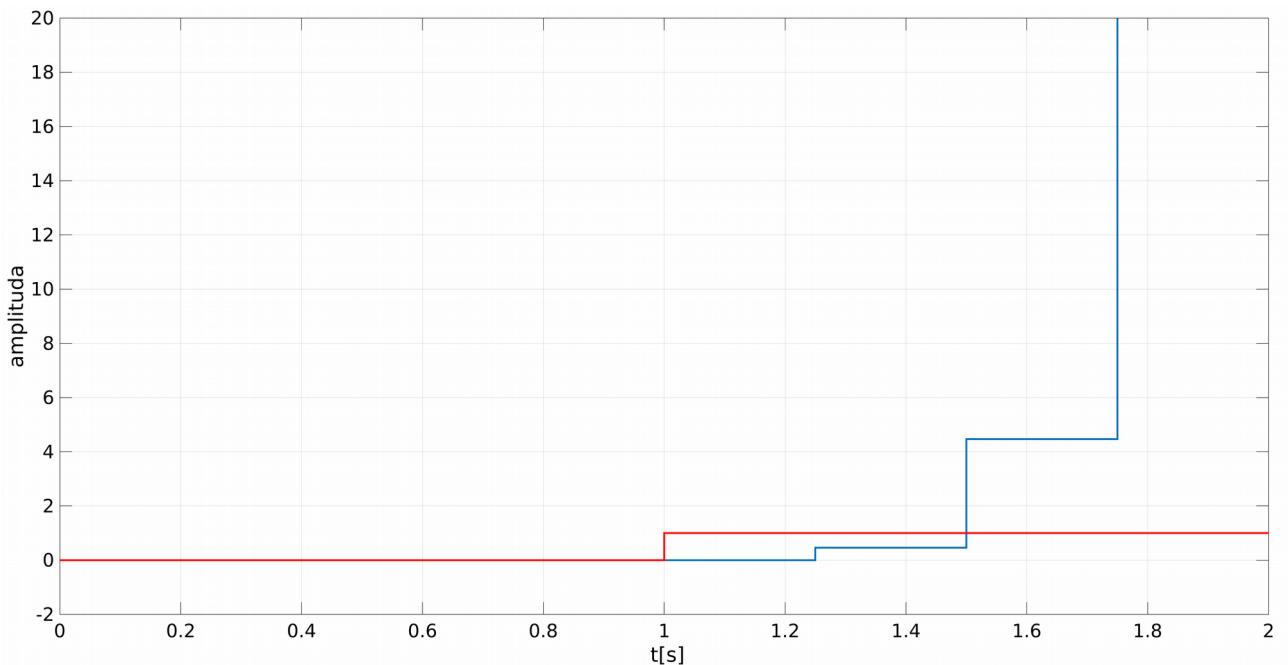
Ilustracja 3: Odpowiedź skokowa transmitancji dyskretnej



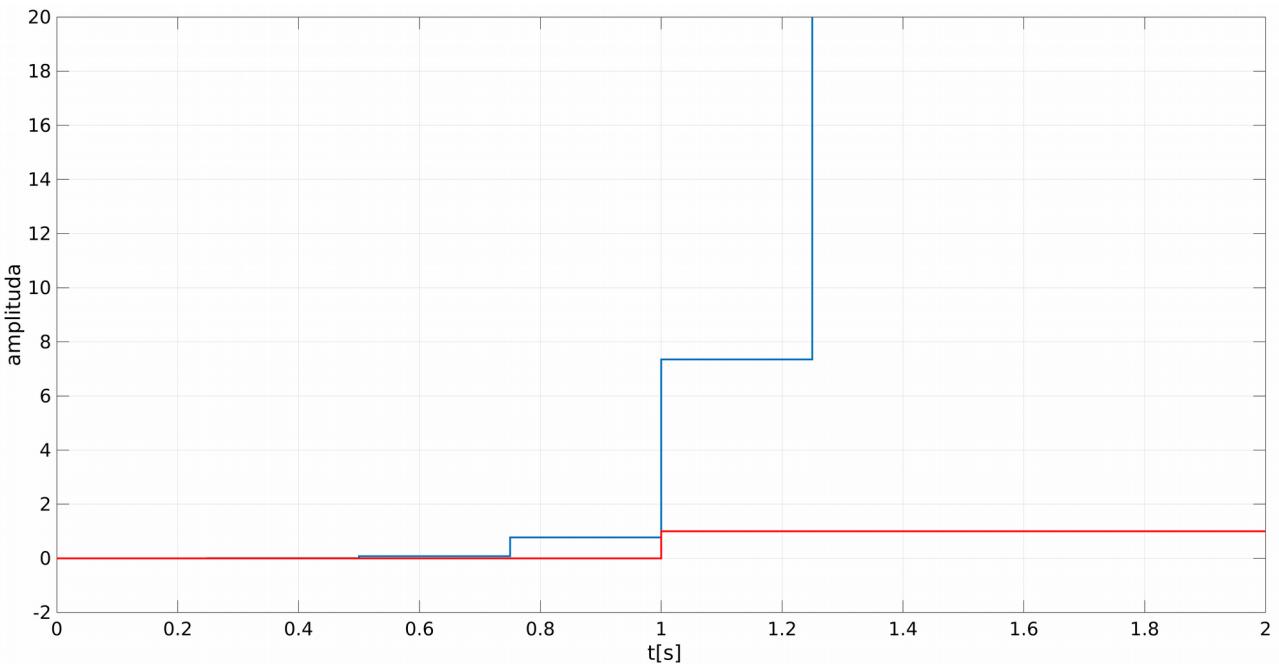
Ilustracja 4: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla zerowych warunków początkowych (1 wariant)



Ilustracja 5: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla niezerowych warunków początkowych (1 wariant,
warunek początkowy = 0,0008)



Ilustracja 6: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla zerowych warunków początkowych (2 wariant)



Ilustracja 7: Odpowiedź skokowa modelu w przestrzeni stanów dla niezerowych warunków początkowych (2 wariant, warunek początkowy = 0,0008)

Na powyższych wykresach widać także, że odpowiedzi skokowe obu modeli w przestrzeni stanu (zarówno dla warunków początkowych zerowych jak i niezerowych) są identyczne co jest dodatkowym dowodem na to, że są sobie równoważne.

Dalsze rozważania są przeprowadzane dla drugiej wersji modelu w przestrzeni stanu

Zad nr 5

Sprawdzono sterowalność i obserwonalność dla drugiej wersji modelu w przestrzeni stanu. Zastosowano tutaj komedy:

```

Co = ctrb(A2,B2) % macierz sterowalności
Ob = obsv(A2,C2) % macierz obserwonalności

d_co = det(Co) % wyznacznik macierzy sterowalności
d_ob = det(Ob) % wyznacznik macierzy obserwonalności

```

Gdzie : Co – macierz sterowalnosci, Ob – macierz obserwonalnosci, A2,C2,B2 – macierze przestrzeni stanu, d_co – wyznacznik macierzy sterowalnosci, d_ob – wyznacznik macierzy obserwonalnosci

Z obliczeń wynikło, że badany układ jest sterowalny i obserwonalny, ponieważ $d_{co} = -0.0121$, a $d_{ob} = 1$.

Zad nr 6

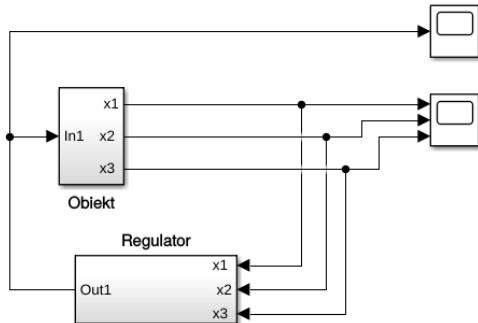
Wyznaczono regulator ze sprzężeniem od stanu o równaniu:

$$u(k) = -Kx(k)$$

$$u(k) = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Gdzie: K – wektor z parametrami regulatora, $u(k)$ – sygnał sterujący, $x(k)$ – wektor zmiennych stanu.

Ogólna struktura tego układu regulacji została przedstawiona poniżej:

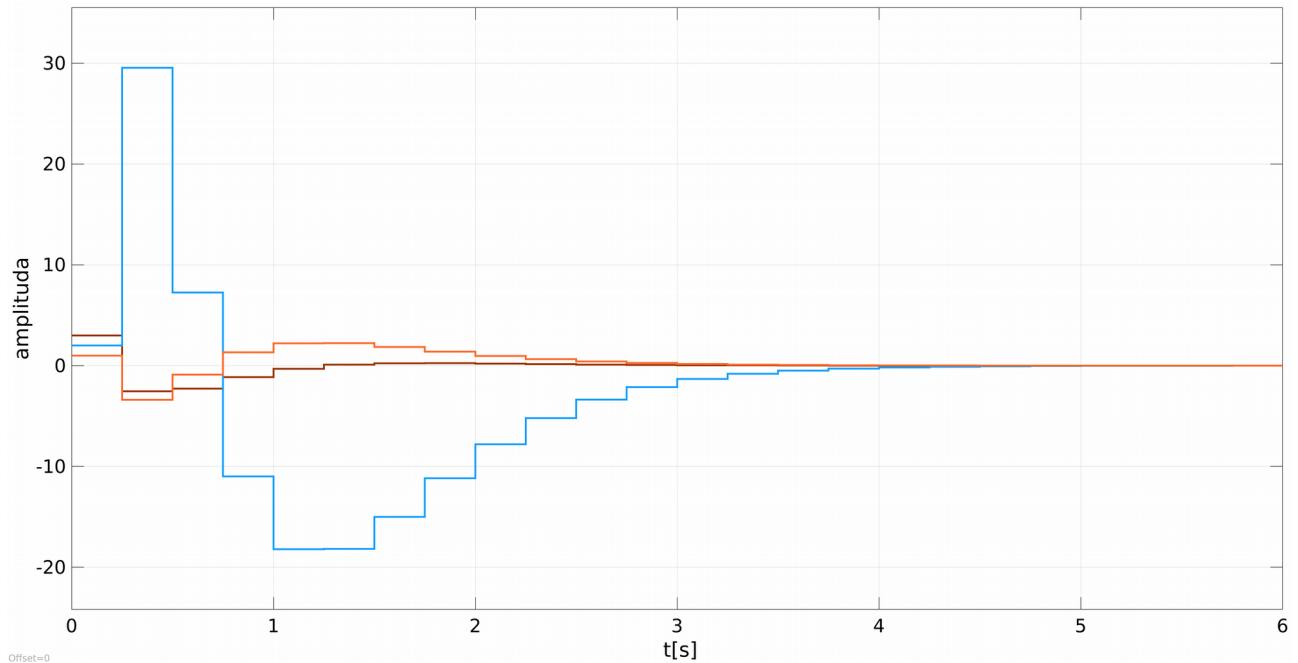


Ilustracja 8: Ogólna struktura układu regulacji

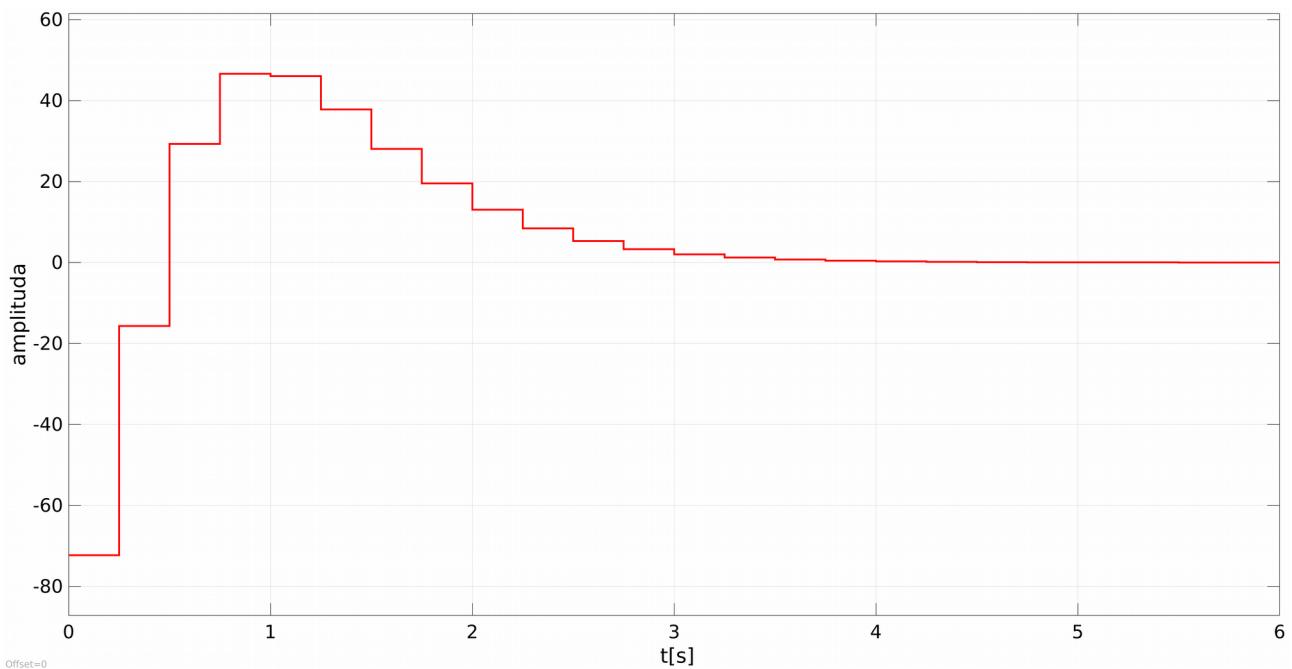
W kolejnej części zadania dobierano biegunki dla układu zamkniętego przy założonym warunku początkowym: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ oraz końcowym: $x_1=x_2=x_3=0$. Biegunki dobierano przy pomocy funkcji: $K = \text{acker}(A_2, B_2, p)$, gdzie K – wektor parametrów regulatora, A_2, B_2 – macierze przestrzeni stanu obiektu, p – wektor z testowanymi biegunkami.

I:

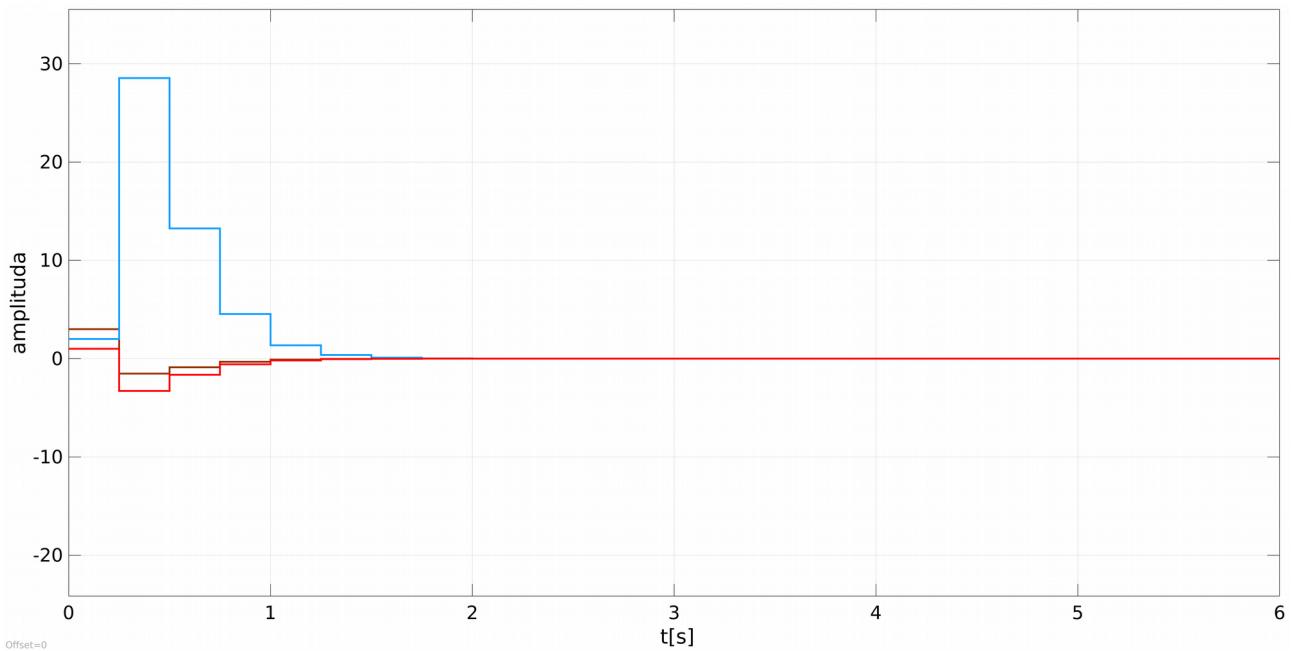
Przyjęto, że układ zamknięty ma trzy takie same biegunki rzeczywiste. Symulacji dokonano dla czasu 6s (po tym czasie osiągany zostaje warunek końcowy). Jej wyniki przedstawiono na poniższych wykresach. W przebiegach trajektorii stanu układu zamkniętego czerwonym kolorem oznaczono x_3 , niebieskim – x_2 , brązowym – x_1 . Testy przeprowadzono tylko dla dodatnich biegunków, ponieważ ujemne wprowadzają układ w oscylacje.



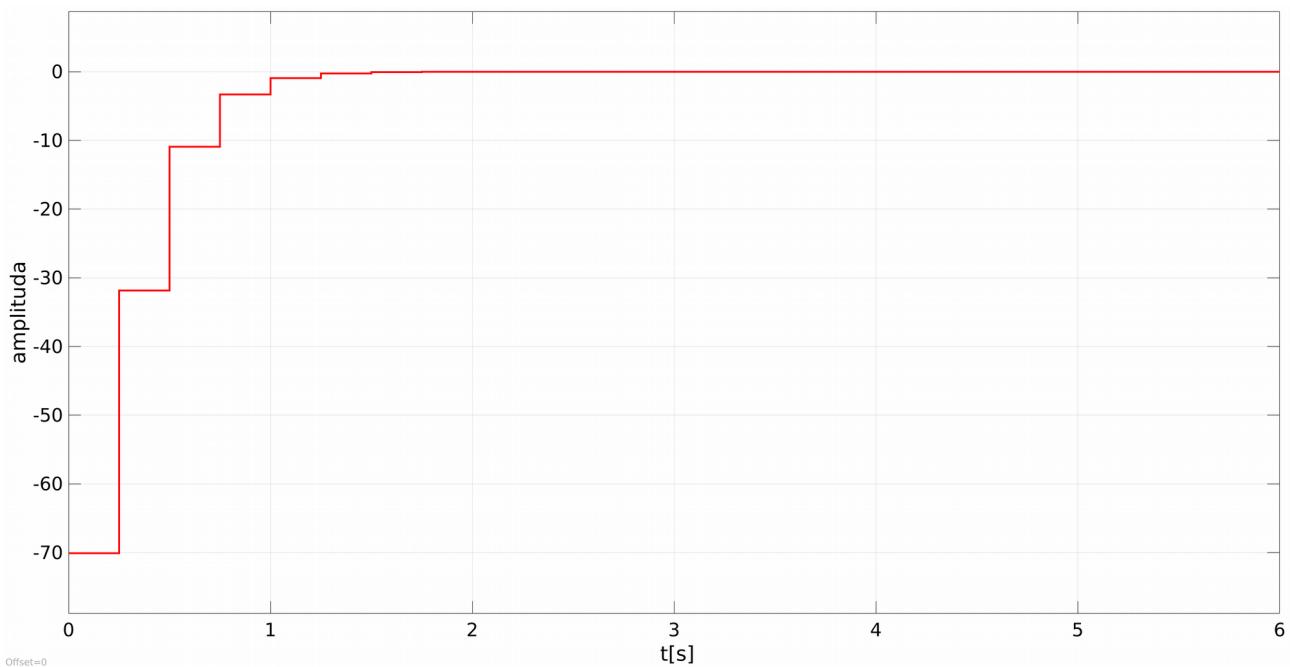
Ilustracja 9: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunkach równych 0,5



Ilustracja 10: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0,5



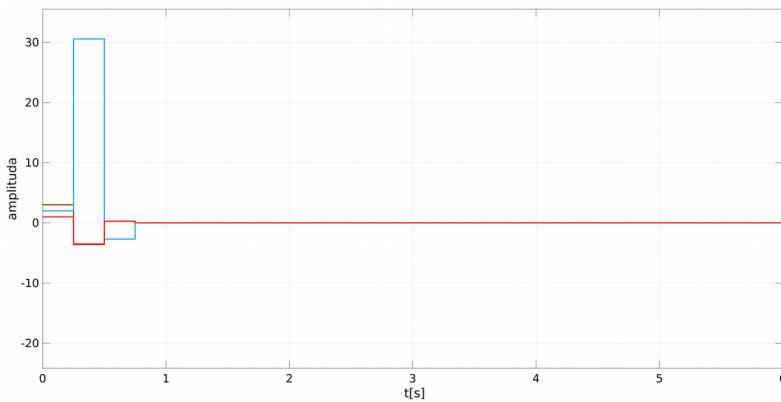
Ilustracja 11: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych 0,2



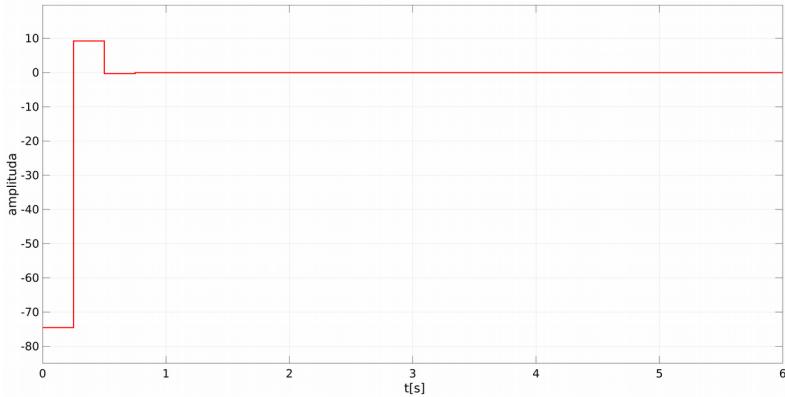
Ilustracja 12: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0,2

Jak widać na powyższych wykresach wybór biegunów w znaczący sposób pływa na postać przebiegu sygnału sterującego i trajektorii stanu układu zamkniętego. Widać, że im mniejszy moduł biegunów tym otrzymane przebiegi są szybsze. Na ilustracji nr 9 stany układu dużo wolniej osiągają warunek końcowy, niż na ilustracji nr 11. Natomiast sygnał sterujący dla biegunów 0,5 dużo wolniej osiąga wartość 0 niż dla biegunów 0,2 , a na dodatek ma duże przeregulowanie (sięgające do ok. 50).

W regulatorze można przyjąć zerowe biegony. Wówczas układ stabilizuje się bardzo szybko, bo już po 3 okresach próbkowania i to mieszcząc się w wartościach osiąganych w poprzednich symulacjach (dla biegunów 0,2 i 0,5). Warto podkreślić, że sygnał sterujący zmienia się wówczas bardzo szybko. W jednej chwili zmiana taka wynosi ok. 85 jednostek.



Ilustracja 13: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy biegunach równych 0



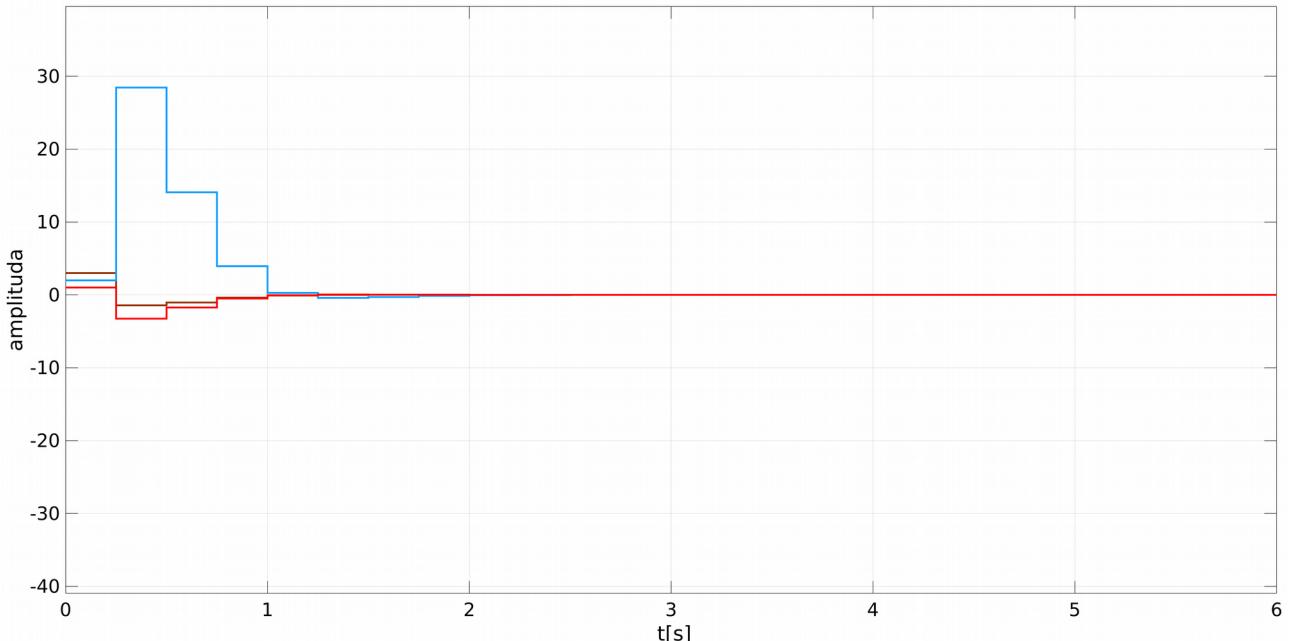
Ilustracja 14: Sygnał sterujący przy biegunach równych 0

II:

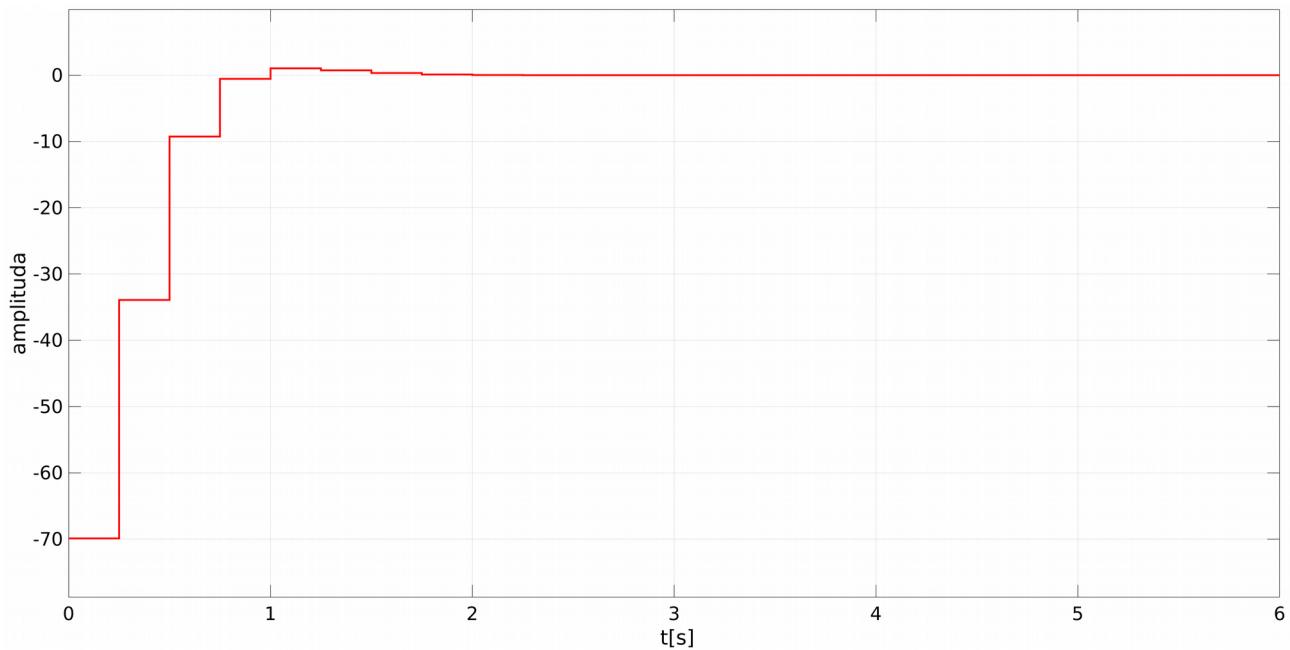
Następnie przyjęto, że układ zamknięty ma jeden biegum rzeczywisty i parę biegunów zespolonych sprzężonych ze sobą $z_{b2}=a+bj$, $z_{b3}=a-bj$. Poniższe wykresy ilustrują zachowanie sygnału sterującego i trajektorii poszczególnych zmiennych stanu dla niezmiennego bieguna rzeczywistego równego 0,3.

Biegumy także w tym przypadku dla małego modułu sprawiają, że układ działa szybciej. Jednak można zauważać, że biegumy zespolone sprzężone są tutaj dominujące (mają zazwyczaj większy moduł niż biegum rzeczywisty). Skutkiem tego jest, że nawet niewielka zmiana parametrów a i b znaczco wpływa na zachowanie układu, natomiast zmiana bieguna rzeczywistego nie aż tak bardzo (o ile para zespolonych biegunów sprzężonych nadal jest dominującą). Z wykresów widać, że im biegumy zespolone mają mniejszy moduł tym układ jest szybszy. W sygnale sterującym występuje mniejsze przeregulowanie, a w zmiennej stanu przyjmują mniejsze wartości i oczywiście szybciej dążą do zera.

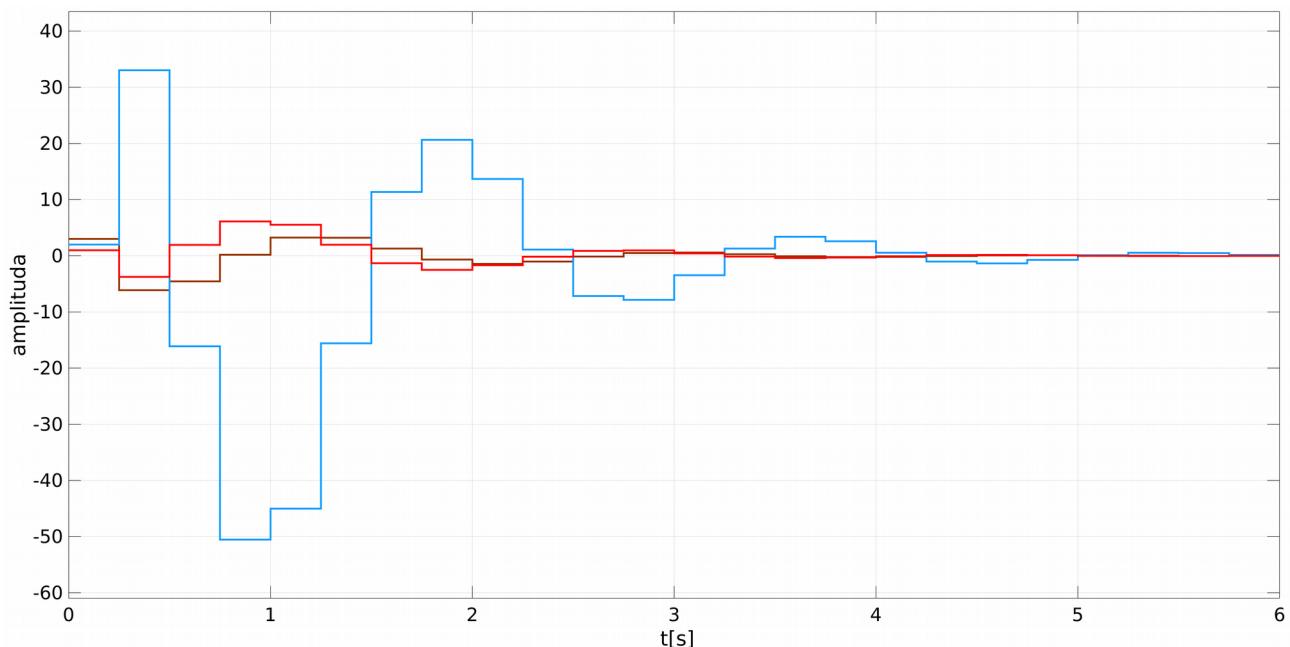
Warto też zauważyć, że sprzężone biegumy zespolone o mniejszych częściach urojonych znacznie polepszają zachowanie układu (szycie zbiega do zera), w porównaniu do przypadku gdy te same biegumy mają taki sam moduł ale większą część urojoną.



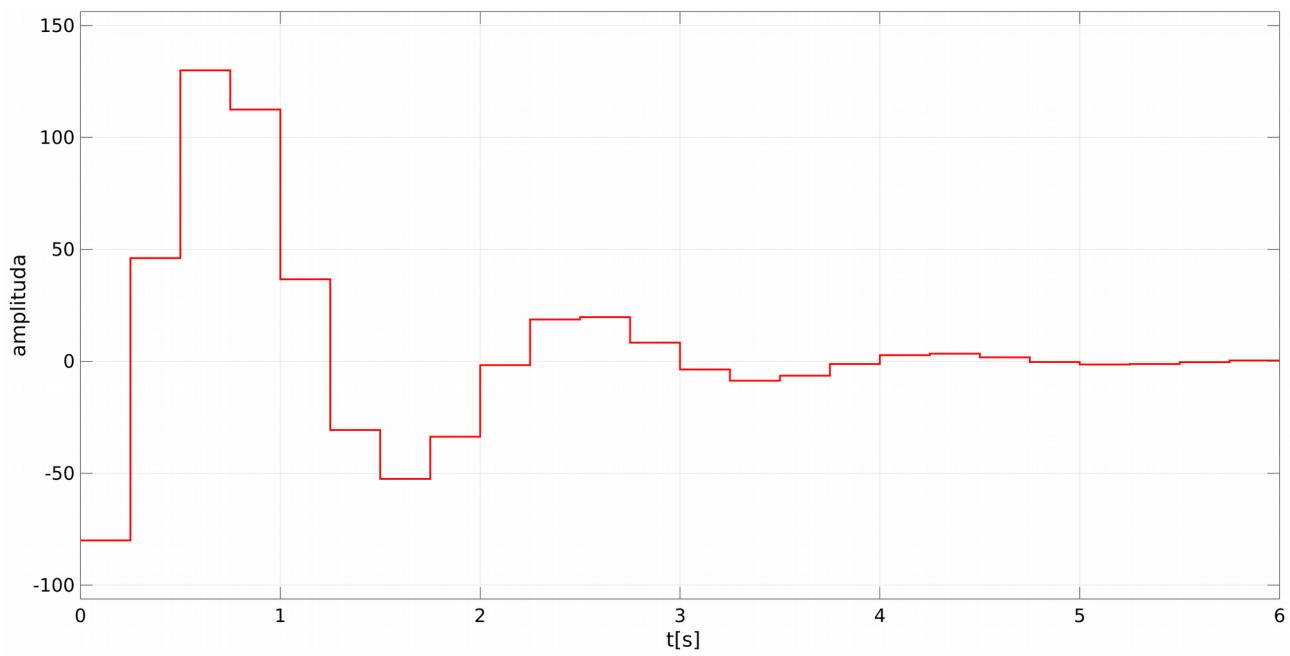
Ilustracja 15: Trajektorie stanu zamkniętego przy $a=0,3$ $b=0,2$



Ilustracja 16: Sygnał sterujący przy $a=0,3$ $b=0,2$



Ilustracja 17: Trajektorie stanu układu zamkniętego przy $a=0,5$ $b=0,6$



Ilustracja 18: Sygnał sterujący przy $a=0,5$ $b=0,6$

Zad nr 7

Zad 8