《微积分A1》第二十二讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月27日

例二: 求积分

$$J = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$$

解: 分母已分解妥. 故被积分式有如下形式的分部分式

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2},$$

其中 A, B, C, D, E 为待定常数. 去分母得

$$2x^2 + 2x + 13$$

$$= A(x^2+1)^2 + (Bx + C)(x-2)(x^2+1) + (Dx + E)(x-2).$$

例二，续一

令 $x = 2$ 得 $25 = 25A$. 由此得 $A = 1$. 再将项 $A(x^2+1)^2$ 移至左边得

$$2x^2 + 2x + 13 - (x^2+1)^2 = -x^4 + 2x + 12$$

$$= (Bx + C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2).$$

由上式可知左端含有因子 $x - 2$. 仍由待定系数法可得 $-x^4 + 2x + 12 = (x-2)(-x^3 - 2x^2 - 4x - 6)$. 消去因子 $x - 2$ 得

$$-x^3 - 2x^2 - 4x - 6 = (Bx + C)(x^2+1) + (Dx + E)$$

$$= Bx^3 + Cx^2 + (B+D)x + (C+E).$$

比较上式两边系数得

$$B = -1,\ C = -2,\ B + D = -4,\ C + E = -6.$$

由此解得 $D = -3$, $E = -4$. 于是得到如下分解

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

由此得

$$\int \frac{(2x^2 + 2x + 13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

例二，续三

$$= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{(x+2)dx}{x^2+1} - \int \frac{(3x+4)dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} - 4\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan x$$

$$+\frac{3}{2(1+x^2)} - 4\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

已求得关于积分 $J_m=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$ 的递推关系式

$$J_{m+1}=\frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m}+\frac{2m-1}{2ma^2}J_m.$$

故 $$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

于是所求不定积分为

$$\int\frac{(2x^2+2x+13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{1+x^2}+\frac{3-4x}{2(1+x^2)}-4\arctan x+C.$$

总结: 任何有理函数的不定积分均可积得出来, 并且可以表示为若干个有理函数, 对数函数, 以及反正切函数之和.

定义双曲余弦和双曲正弦函数如下

$$\cosh x \triangleq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x \triangleq \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

不难证明双曲余弦与双曲正弦函数有如下性质：

1. $\cosh x$ 是偶函数，$\sinh x$ 是奇函数；
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $[\cosh x]' = \sinh x$, $[\sinh x]' = \cosh x$;
4. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$; $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$;

5. 函数 $y=\sinh x$ 有反函数 $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$;

6. 函数 $y=\cosh x$ 有反函数 $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$: $(1,+\infty)\to(0,+\infty)$.

证明留作习题.

双曲函数的函数图像

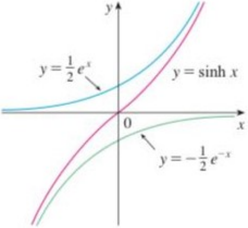

FIGURE 1
$y = \sinh x = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

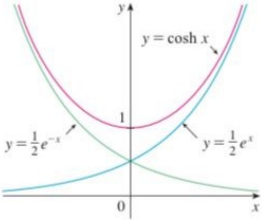

FIGURE 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$

双曲函数的反函数图像

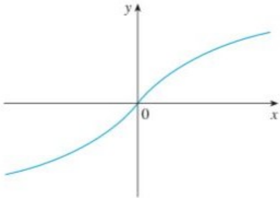

FIGURE 8 $y = \sinh^{-1} x$
domain $= \mathbb{R}$ range $= \mathbb{R}$

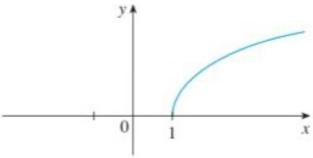

FIGURE 9 $y = \cosh^{-1} x$
domain $= [1, \infty)$ range $= [0, \infty)$

例一：求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

解：作代换 $x = a\sinh t$，则 $\mathrm{d}x = [a\sinh t]'\mathrm{d}t = a\cosh t$，

$\sqrt{a^2+x^2} = a\cosh t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C_1,$$

其中 $C_1 = C - \ln a$ 仍为一个任意常数.

例二: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad a > 0.$$

解: 作代换 $x = a\cosh t$, 则 $dx = [a\cosh t]'dt = a\sinh t dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh t$. 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sinh t dt}{a\sinh t} = \int dt = t + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C_1,$$

其中 $C_1 = C - \ln a$, 仍为一任意常数. 解答完毕.

例二，续

注：作变换 $x = a\cosh t$，默认 $x > a > 0$．实际上被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 对 $x < -a < 0$ 也有定义．此时做变换 $x = -a\cosh t$，类似得到不定积分为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = -\ln\left|x - \sqrt{x^2-a^2}\right| + C,$$

其中 $x < -a < 0$．但是

$$-\ln\left|x - \sqrt{x^2-a^2}\right| = \ln\frac{1}{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}$$

$$= \ln\frac{\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|}{\left|(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})\right|} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a^2$$

因此对于 $|x| > a$，我们有一个统一的积分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

Definition

定义：设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均为二元多项式，它们的商 $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ 称为二元有理函数. 称 $R(\cos\theta, \sin\theta)$ 为三角有理函数，或有理三角函数.

考虑如何计算 $\int R(\cos x, \sin x)dx$. (这里遵从习惯用变量 x 而不用 θ.)

Theorem

定理：任何三角有理函数的不定积分 $\int R(\cos x, \sin x)dx$，均可通过变换(称为万能代换) $t = \tan(x/2)$ $(|x| < \pi)$，化为有理函数的不定积分.

证明: 由代换 $t = \tan(x/2)$ 得

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$$

$$= \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$$

$$= \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

证明续

进一步由代换 $t=\tan(x/2)$ 得 $x=2\arctan t$. 于是

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\Rightarrow \int R(\cos x,\sin x)dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

这样不定积分 $\int R(\cos x,\sin x)dx$ 化为了有理函数的不定积分.

因为函数

$$R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$$

为有理函数. 定理得证.

例一: 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

解: 作万能代换 $t = \tan(x/2)$ 得

$$\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t+\frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2(x/2) + \frac{1}{2}\ln|\tan(x/2)| + C.$$

注: 对于有理三角函数的不定积分, 万能代换解法可行, 但不一定是最简便的方法. 请看下例

例二: 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx.$

解: 作代换 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

于是

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2+2t}{2}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int \frac{(1+t)^2dt}{1+t^2}=\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=t+\ln(1+t^2)+C$$

$$=\tan\frac{x}{2}+\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+C=\tan\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

例二，续

上述不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$ 可用如下更简单的解法.

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} - \int \frac{d\cos x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x) + C.$$

解答完毕.

含有根号的函数称作无理函数. 不是每个无理函数的不定积分都可以积得出来, 即可以表示初等函数. 例如可以证明不定积分 $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx \ (k \in (0,1))$ 积不出来. 这个积分称作椭圆(函数)积分. 此外可以证明如下不定积分积不出来.

$$\int e^{-x^2}dx, \int \sin(x^2)dx, \int \cos(x^2)dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{dx}{\ln x}.$$

以下考虑一类无理函数的不定积分, 它们可以化为有理函数的的不定积分, 从而积得出来. 计算原则: 有理化(即去根号).

以下我们将证明形如 $R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 的无理函数可以积出来，其中 $R(x,y)$ 为二元有理函数，n 为正整数，且 $ad\neq bc$. 若不然，则 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 就是一个常数，从而被积函数为一个有理函数. 对于这类无理函数的不定积分，作变换

$$t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\quad 即\quad t^n=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

由此可解出 $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$. 于是

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)'dt.$$

化为有理函数的不定积分了.

例一: 计算积分 $\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$, 其中 $a<x<b$.

解: 令 $t^2=\frac{x-a}{b-x}$, 则 $t^2(b-x)=x-a$, 即 $a+bt^2=x(1+t^2)$,

即

$$x=\frac{a+bt^2}{1+t^2}=b+\frac{a-b}{1+t^2}.$$

于是 $dx=\frac{2(b-a)tdt}{(1+t^2)^2}$. 因此

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx=\int\frac{t\cdot 2(b-a)tdt}{(1+t^2)^2}=2(b-a)\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2}$$

$$=2(b-a)\left(\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$= 2(b-a)\left(\arctan t - \int \frac{dt}{(1+t^2)^2}\right).$$

利用之前关于积分 $J_m = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$ 的递推关系式可得

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$$

$$= 2(b-a)\left(\arctan t - \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\arctan t\right) + C$$

$$= (b-a)\arctan t - \frac{(b-a)t}{1+t^2} + C$$

$$= (b-a)\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} - \sqrt{(x-a)(b-x)} + C.$$

另解(非常规解法)：由于 $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$，我们可以尝试作变换 $\frac{x-a}{b-a} = \sin^2 t$，$0 < t < \frac{\pi}{2}$，则 $\frac{b-x}{b-a} = \cos^2 t$，

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t,$$

并且 $dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt$. 于是

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx=\int\tan t\cdot 2(b-a)\sin t\cos t dt$$

$$=2(b-a)\int\sin^2 t dt=(b-a)\int(1-\cos 2t)dt$$

$$=(b-a)\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=(b-a)\left(t-\sin t\cos t\right)+C$$

$$=(b-a)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{b-a}\right)+C$$

$$=(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

例二: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

解: 将被积函数写作如下形式

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

令 $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, 则 $t^3(x-1) = x+1$, 或写作 $t^3x - x = t^3 + 1$.

由此解得

$$x = \frac{t^3+1}{t^3-1} = 1 + \frac{2}{t^3-1},$$

故 $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}$. 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$$

$$= \int \frac{1}{1 + \frac{2}{t^3-1} + 1} \cdot t \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} dt$$

$$= \int \frac{t^3-1}{2t^3} \frac{-6t^3}{(t^3-1)^2} dt = -3 \int \frac{dt}{t^3-1}.$$

根据分式分解定理知

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

其中 A, B, C 为待定系数. 去分母得

$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1).$$

令 $t=1$ 得 $1=3A$. 故 $A=\frac{1}{3}$. 令 $t=0$ 得 $1=A-C=1/3-C$. 故 $C=-\frac{2}{3}$. 令 $t=-1$ 得

$$1=A+(-B+C)(-2)=1/3+2B-2C=1/3+2B+4/3.$$

故 $B=-\frac{1}{3}$. 即

$$\frac{1}{t^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t+2}{t^2+t+1}\right).$$

于是所求积分为

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\frac{-3dt}{t^3-1}$$

$$= \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \cdots$$

$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

再将

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

回代上式即得所求的不定积分.

例: 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解: 为去根号, 作变换 $x = t^6$, 则 $dx = 6t^5dt$. 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = \int \frac{6t^2dt}{1+t^2}$$

$$= 6\int \frac{(1+t^2)dt}{1+t^2} - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6\arctan t + C$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\sqrt[6]{x} + C.$$

解答完毕.

<u>例三</u>: 设 $a < b$, 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < x < b.$$

<u>解</u>: 作变换 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$, 其中 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $x - a = (b-a)\sin^2 t$, $b - x = (b-a)\cos^2 t$, $dx = 2(b-a)\sin t\cos t dt$.

于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{2(b-a)\sin t\cos t dt}{(b-a)\sin t\cos t}$$

$$= 2t + C = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C.$$

Theorem

定理 [定积分变量代换]: 设 $\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微, $f(x)$ 在 $J=[m,M]$ 上连续, 其中 M,m 分别是函数 $\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的最大值和最小值, 则

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \quad (*)$$

注记: (i) 等式 (*) 中允许 $\phi(\beta)\le\phi(\alpha)$; (ii) 上述定理中的变换函数 $\phi(t)$ 不必可逆. 这不同于不定积分中变量代换 $x=\phi(t)$ 要求可逆.

定理证明

Proof.

证明: 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x)=f(x)$, 则 $F(\phi(t))$ 是 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 的原函数, 因为

$$[F(\phi(t))]'=F'(\phi(t))\phi'(t)=f(\phi(t))\phi'(t).$$

$$\Rightarrow \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx=F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha))=\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

命题得证. □

Example

例一: 设 $a > 0$, 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

解: 作变换 $x = \phi(t) = a\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$, $\phi(0) = 0$,

$\phi(\pi/2) = a$. 于是根据定积分变量代换定理得

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}(a\sin t)'dt$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

例二: 设 $f(x)$ 为周期连续函数, 周期为 $T>0$. 证明 $f(x)$ 在任意长度为 T 的闭区间上的积分相等, 即对任意 $a\in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

证明: 由积分区间可加性得

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

而 $\displaystyle\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(T+t)(T+t)'dt = \int_0^a f(t)dt$

$$\Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt = \int_0^T f(x)dx. \qquad \square$$

例三: 计算 $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

解: 作代换 $x = \phi(t) = \tan t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$, 则

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})}{\cos t}\right) dt$$

$$= (\ln\sqrt{2})\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(t-\frac{\pi}{4}) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\cos s ds - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

即 $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

解答完毕.

定积分的分部积分定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x)=f(x)$. 再设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Proof.

证明: 由于 $[Fg]' = F'g + Fg'$, 故两边积分得

$$\int_a^b [Fg]' = \int_a^b F'g + \int_a^b Fg'.$$

$$\text{因此} \int_a^b fg = \int_a^b F'g = \int_a^b [Fg]' - \int_a^b Fg'$$

$$= Fg\Big|_a^b - \int_a^b Fg'.$$

$\square$

Example

例一:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \int_0^{\pi} x[\sin x]' dx = \int_0^{\pi} x d\sin x$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$$

例二：证明对任意正整数 n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

并计算上述积分 J_n.

证：对积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$，作变量代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\pi/2 - t)(\pi/2 - t)' dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

以下来计算积分 J_n.

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x d\sin x$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x [\cos^{n-1} x]' dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$= (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n \Rightarrow J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

由于 $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$,

故 $$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} J_{2m-2} = \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m)(2m-2)} J_{2m-4} = \cdots$$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} J_{2m-1}$$

$$= \frac{(2m)(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)} J_{2m-3} = \cdots$$

$$= \frac{(2m)(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

解答完毕.

课本习题5.5(pp.163-164): 1(前5), 2(前5), 3(前5), 4(前5).

补充习题一: 证明双曲余弦 $\cosh x$ 与双曲正弦函数 $\sinh x$ 满足如下性质:

1. $\cosh x$ 是偶函数, $\sinh x$ 是奇函数;
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $[\cosh x]' = \sinh x$, $[\sinh x]' = \cosh x$;
4. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$; $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$;
5. 函数 $y = \sinh x$ 有反函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
6. 函数 $y = \cosh x$ 有反函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$: $(1, +\infty) \to (0, +\infty)$.

补充习题二: 利用双曲函数计算如下不定积分

(i) $\int (x^2+a^2)^{-3/2}dx$;

(ii) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

(iii) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx$.