《微积分A1》第二十八讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月18日

Theorem

定理: 考虑方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$, 其中 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, $g(y)$ 在 (c,d) 上连续可微, 则对 $\forall(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$, Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$, $y(x_0)=y_0$ 唯一解 $y=\phi(x)$ 确定如下.

(i) 若 $g(y_0)=0$, 则 $\phi(x)\equiv y_0$;

(ii) 设 $g(y_0)\neq 0$. 定义

$$G(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)},\quad F(x)=\int_{x_0}^{x}f(u)du,$$

则解 $y=\phi(x)$ 由方程 $G(y)=F(x)$ 确定, 即 $G(\phi(x))=F(x)$, 或 $\phi(x)=G^{-1}(F(x))$, $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

定理证明

情形一：若 $g(y_0)=0$，则结论显然成立.

情形二：设 $g(y_0)\neq 0$. 此时定义函数

$$G(y)\triangleq\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)},\quad F(x)\triangleq\int_{x_0}^{x}f(u)du$$

函数 $G(y)$ 至少在 $(y_0-\delta,y_0+\delta)$ 上有定义，连续可微，且严格单调. 故 $G(y)$ 有连续可微的反函数 $G^{-1}(z)$. 故由方程 $G(y)=F(x)$ 唯一确定了一个连续可微函数 $y=\phi(x)$，$G(\phi(x))=F(x)$，亦即 $\phi(x)=G^{-1}(F(x))$，$\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$. 以下来证明 $y=\phi(x)$ 就是 Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$，$y(x_0)=y_0$ 的唯一解.

由于 $F(x_0)=0$, $G(y_0)=0$, 故 $\phi(x_0)=y_0$. 再对恒等式 $G(\phi(x))=F(x)$, $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, 求导得

$$G'(\phi)\phi'(x)=F'(x)=f(x),\ \text{即}\ \frac{1}{g(\phi)}\phi'(x)=f(x).$$

此即 $\phi'(x)=f(x)g(\phi(x))$, $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$. 这表明 $y=\phi(x)$ 就是 Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$, $y(x_0)=y_0$ 的唯一解. 证毕. □

注一

注一: 设 $\phi(x)$ 是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解, 其中 $g(y_0) \neq 0$, 则必有 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$, 这里 J 为解 $\phi(x)$ 的定义区间. 证明如下. 假设存在 $x_1 \in J$, 使得 $g(\phi(x_1)) = 0$. 记 $y_1 = \phi(x_1)$, 则 $y = \phi(x)$ 也是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_1) = y_1$. 但另一方面这个 Cauchy 问题有常数解 $y \equiv y_1$. 由解的唯一性知 $\phi(x) \equiv y_1$. 令 $x = x_0$ 得 $y_0 = \phi(x_0) = y_1$. 这不可能. 因为 $g(y_0) \neq 0$, 而 $g(y_1) = 0$. 故 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$.

注二: 当 $g(y_0) \neq 0$ 时, 解 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$ 也可用如下方式得到. 由恒等式 $\phi'(x) = f(x)g(\phi(x))$, $x \in J$ 可得

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x), \quad x \in J$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(u)du}{g(\phi(u))} = \int_{x_0}^{x} f(u)du \Rightarrow \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dv}{g(v)} = F(x),$$

即 $G(\phi(x)) = F(x)$, 故 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$.

<u>类型一</u>. 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$. 令 $u = y/x$ 或 $y = ux$, 即将变量 u 看作新的未知函数, 则

$$y' = u'x + u = f(u),$$

即 $u'x = f(u) - u$, 或 $u' = \frac{f(u)-u}{x}$. 这是变量分离型方程.

Example

例: 求解 Cauchy 问题 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 或 $y = ux$. 于是 $y' = xu' + u = u + \tan u$, 即

$xu' = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$. 分离变量得

$$\frac{\cos u du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \sin u = C_1 x \Rightarrow u = \arcsin C_1 x \text{ 或 } y = x \arcsin C_1 x.$$

由初值条件 $y(1) = \frac{\pi}{2}$ 得 $\arcsin C_1 = \frac{\pi}{2}$, 即 $C_1 = 1$. 故所求唯一解为 $y = x \arcsin x$.

例子. 求解方程

$$y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

解: 如果将右端分子分母中的常数 1 和 -3 设法消去，则方程就变为齐次方程，从而可求显式解. 为此考虑线性代数方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y-3=0. \end{cases}$$

解之得 $x=1$, $y=2$. 令 $v=x-1$, $u=y-2$, 或 $x=v+1$, $y=u+2$. 即 v 为新的独立变量, u 为新的未知函数.

于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} = \frac{v-u}{v+u}.$$

令 $w = \frac{u}{v}$ 或 $u = wv$，则

$$\frac{du}{dv} = w + v\frac{dw}{dv} \quad 且 \quad \frac{v-u}{v+u} = \frac{v-vw}{v+vw} = \frac{1-w}{1+w}$$

$$\Rightarrow \quad w + v\frac{dw}{dv} = \frac{1-w}{1+w} \quad \Rightarrow \quad v\frac{dw}{dv} = \frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+w)dw}{2-(1+w)^2} = \frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d[2-(1+w)^2]}{2-(1+w)^2} = \frac{2dv}{v}$$

$$\Rightarrow \quad \ln v^2 + \ln[2-(1+w)^2] = C \quad \Rightarrow \quad v^2[2-(1+w)^2] = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2v^2 - v^2(1+w)^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad 2v^2 - (v+u)^2 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_1. \quad (*)$$

上式为原方程 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ 的一般解，其中 $C_1 = e^C \neq 0$. 若取 $C_1 = 0$，由式 (*) 所确定的两条直线也是解，

即两条直线 $2(x-1)^2=(x+y-3)^2$ 也是方程的解. 理由如下.

由等式 $2(x-1)^2=(x+y-3)^2$ 求导得

$$4(x-1)=2(x+y-3)(1+y') \Rightarrow 1+y'=\frac{2(x-1)}{x+y-3}$$

$$\Rightarrow \quad y'=\frac{2(x-1)}{x+y-3}-1=\frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

这表明两条直线 $2(x-1)^2-(x+y-3)^2$ 也是方程的解. 因此原方程的一般解为 $2(x-1)^2-(x+y-3)^2=C_2$, 其中 C_2 为任意常数. 解答完毕.

之前利用积分因子方法，导出了一阶方程 $y' = a(x)y + b(x)$ 的通解公式

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt\right).$$

我们也可以利用 Euler 常数变易法 (variation of constants)，导出上述通解公式. 已知齐次方程 $y' = a(x)y$ 的一般解可写作 $y = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$. 现设非齐次方程 $y' = a(x)y + b(x)$ 有解形如 $y = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$，即由常数 C 变为函数 $C(x)$，常数变易法因此得名. 将 $y = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ 代入非齐方程 $y' = a(x)y + b(x)$ 得

$$y' = C'e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + Ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}a(x) = a(x)Ce^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} + b(x)$$

$$\Rightarrow \quad C' e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x) \quad \Rightarrow \quad C' = e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} b(x)$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = C_1 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt.$$

因此非齐方程可能有如下形式的解

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \left(C_1 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right). \qquad (*)$$

由于上述步骤均可逆，故可知式(*)是非齐方程的一般解. 这与之前用积分因子方法求得通解公式相同.

例一: 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解, 其中 $x > 0$.

解: 将方程写成标准形式 $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\sin x}{x}$, 其中 $a(x) = \frac{-1}{x}$, $b(x) = \frac{\sin x}{x}$. 于是

$$\int_1^x \frac{-ds}{s} = -\ln x, \quad e^{\int_1^x a(s)ds} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x};$$

$$\int_1^x b(s)e^{-\int_1^s a(s)ds}dt = \int_1^x \frac{\sin s}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{s}}ds$$

$$= \int_1^x \sin s ds = \cos 1 - \cos x.$$

于是方程的通解为

$$y = e^{\int_1^x a(s)ds}\left(C + \int_1^x b(s)e^{-\int_1^s a(s)ds}dt\right)$$

$$= \frac{1}{x}(C + \cos 1 - \cos x) = \frac{1}{x}(C_1 - \cos x).$$

另解：将方程写作 $xy' + y = \sin x$. 此即 $(xy)' = \sin x$. 于是 $xy = C - \cos x$，即 $y = \frac{1}{x}(C - \cos x)$.

例二：求方程 $y^2dx+(x-2xy-y^2)dy=0$ 的通解.

解：若将 $x=x(y)$ 看作 y 的函数，则方程为一阶线性的，即 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1$. 不妨设 $y>0$. 计算得

$$\int_1^y \frac{(2s-1)ds}{s^2}=2\ln y+\frac{1}{y}-1 \Rightarrow e^{\int_1^y \frac{(2s-1)ds}{s^2}}=e^{-1}y^2e^{\frac{1}{y}}.$$

故齐次方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x$ 的通解为 $x=Cy^2e^{\frac{1}{y}}$. 可按公式求通解，也可以按常数变易法直接求解. 将 $x=C(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$ 代入方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1$ 并化简得 $C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}}=1$. 故 $C'(y)=\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$. 积分得 $C(y)=C_1+e^{\frac{-1}{y}}$. 于是方程 $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-1}{y^2}x+1$ 的通解为 $x=y^2+C_1y^2e^{\frac{1}{y}}$. 解答完毕.

称形如 $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ 的方程为 Bernoulli 型方程，其中 $y > 0$. 当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = 1$，方程为线性的，可求显式解. 故可设 $\alpha \neq 0, 1$. 于方程两边同除 y^α 得 $y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$. 令 $z = y^{1-\alpha}$，则 $\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{\alpha}y'$. 于是关于未知函数 y 的方程就变为关于新的未知函数 z 的方程

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x).$$

这是一阶线性方程.

<u>例</u>: 求方程 $y' - y + \frac{2x}{y} = 0$ 的通解.

<u>解</u>: 这是 Bernoulli 型方程, $\alpha = -1$. 于方程两边同乘以 y 得 $yy' - y^2 + 2x = 0$. 令 $z = y^2$, 则 $\frac{1}{2}z' - z + 2x = 0$, 或写作 $z' = 2z - 4x$. 对应齐次方程 $z' = 2z$ 的通解 $z = Ce^{2x}$. 再将 $z = C(x)e^{2x}$ 代入方程 $z' = 2z - 4x$ 得 $C'(x) = -4xe^{-2x}$. 积分得 $C(x) = \int -4xe^{-2x}dx = C_1 + (2x+1)e^{-2x}$. 于是方程 $z' = 2z - 4x$ 的通解为 $z = C_1e^{2x} + 2x + 1$. 故方程 $y' - y + \frac{2x}{y} = 0$ 的通解为 $y^2 = C_1e^{2x} + 2x + 1$. 解答完毕.

例: 求解 $y' = \frac{y}{x+y^3}$.

解: 方程是非线性的. 显然 $y \equiv 0$ 是解. 因此其他解无零点(解的唯一性). 考虑等价方程 $x' = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$. 这是关于未知函数 $x = x(y)$ 的一阶线性方程. 不难由求解公式求得其解为 $x = Cy + \frac{1}{y^3}$. 解答完毕.

例一：求解方程 $xy''' - 3y'' = 2x - 3$，其中 $x > 0$.

解：记 $p = y''$，则原方程变为 $xp' - 3p = 2x - 3$. 将方程写作标准形式 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$. 这是关于 p 的一阶线性方程，其中 $a(x) = \frac{3}{x}$, $b(x) = 2 - \frac{3}{x}$. 计算得

$$\int_1^x a(s)ds = \int_1^x \frac{3}{s}ds = \ln x^3, \quad e^{\int_1^x a(s)ds} = e^{\ln x^3} = x^3,$$

$$\int_1^x b(s)e^{-\int_1^t a(s)ds}dt = \int_1^x \left(2 - \frac{3}{s}\right)\frac{1}{s^3}ds$$

$$= \int_1^x \left(\frac{2}{s^3} - \frac{3}{s^4}\right)ds = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

于是方程 $p' = \frac{3}{x}p + 2 - \frac{3}{x}$ 的通解为

$$p(x) = e^{\int_1^x a(s)ds}\left(C_1 + \int_1^x b(s)e^{-\int_1^s a(t)dt}ds\right)$$

$$= x^3\left(C_1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = C_1x^3 + x - 1.$$

由于 $p = y'' = C_1x^3 + x - 1$，故

$$y' = \frac{C_1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C_2,$$

$$\Rightarrow \quad y = C_1'x^5 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3,$$

其中 C_1'，C_2，C_3 均为任意常数.

<u>例二</u>: 求解 $xy'' - y' = x^2$, $x > 0$.

<u>解</u>: 令 $p = y'$, 则 $xp' = p + x^2$, 或 $p' = \frac{1}{x}p + x$. 这是一阶线性方程, 可利用公式求解. 细节略.

<u>另解</u>: 将方程 $xy'' - y' = x^2$ 写作

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{x} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 + C_1 x$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^3 + C_1' x^2 + C_2,$$

其中 C_1', C_2 为任意常数.

求解某些不显含 x 的二阶正规方程 $y'' = f(y, y')$

考虑不显含 x 的二阶正规方程 $y'' = f(y, y')$. 记 $p = y'$, 且将 p 看作 y 的函数, 即 $p = p(y)$, 则

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

于是原二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 降为一阶方程 $pp' = f(y, p)$. 假设 $p = p(y)$, $y \in J$ 是方程 $pp' = f(y, p)$ 的解, 那么再解方程 $y' = p(y)$ 即可得原二阶方程 $y'' = f(y, y')$ 的解.

注: 视 $p = p(y)$ 的合理性: 对于 $y'(x) \neq 0$ 的 x, 可局部反解 $x = x(y)$. 因此至少对于这样 x, $p = p(x) = p(x(y))$.

例: 求解 $yy'' = 2(y')^2$.

解: 将 $y' = p$, $y'' = p'p$ 代入方程 $yy'' = 2(y')^2$ 得 $ypp' = 2p^2$, 并视 y 为独立变量解这个方程. 令 $q = p^2$ 则 $yq' = 4q$. 解之得 $q = Cy^4$, 即 $p^2 = Cy^4$. 故 $y' = p = C_1y^2$. 以下解这个变量分离型方程:

$$\frac{y'}{y^2} = C_1 \quad \Rightarrow \quad -(1/y)' = C_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = -C_1x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{C_1'x + C_2},$$

其中 C_1', C_2 为任意常数.

二阶线性方程

Definition

一般二阶线性方程是指如下形式的方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

其中 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 均假设在某个开区间上连续.

注一: 熟知一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有显式通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int\left(Q(x)e^{\int P(x)dx}\right)dx + c\right).$$

但对于一般二阶线性方程而言，不存在这样的显式通解公式.

这是一阶线性方程与二阶以及高阶线性方程的本质区别.

注二: 二阶线性常系数方程 $y'' + py' + qy = R(x)$ 有显式通解，

这里 p, q 均为常数.

注三: 处理二阶线性方程的思想和方法，原则上可以推广到处

理 n 阶线性方程 $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x)$.

Theorem

考虑 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$. 假设 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 均假设在开区间 J 上连续, 则对于任意点 $x_0 \in J$, 以及任意 y_0, $y_1 \in \mathbb{R}$, 二阶线性方程的初值问题 (也称为 Cauchy 问题)

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

存在唯一解, 并且这个解的最大存在区间为开区间 J.

证明不易. 略去.

例：考虑二阶线性方程 $y'' + y = 0$. 不难验证 $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ 是方程的两个解，且满足初值条件 $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, 以及 $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

注：稍后我们将学习如何求出这类常系数高阶线性方程的解.

Definition

当二阶线性方程的右端函数 $R(x)$ 恒为零时，即方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

称作二阶线性齐次方程 (homogeneous equation). 当 $R(x)$ 不恒为零时，方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

称作二阶线性非齐次方程 (nonhomogeneous equation).

齐次方程解的全体构成二维线性空间，基本解组

Theorem

二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

解的全体构成一个二维线性空间.

Definition

齐次方程 $(*)_{齐}$ 的任意两个线性无关的解均称作方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组.

例子

Example

例：已说明函数 $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的两个解. 显然这两个解线性无关. 因此它们构成方程的一个基本解组. 于是方程 $y'' + y = 0$ 的每个解 $y(x)$ 都可以表示为它们的线性组合，即 $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

证: 记 $\mathcal{S}$ 为方程 $(*)_{齐}$ 解的全体. 显然 $\mathcal{S}$ 是一个线性空间, 即对任意 $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, 则 $\lambda\phi + \mu\psi \in \mathcal{S}$, 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 以下要证 $\dim \mathcal{S} = 2$. 固定一点 $x_0 \in J$, 记 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 分别是如下两个初值问题的解

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \\ y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 1. \end{cases}$$

往下证 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 构成解空间 $\mathcal{S}$ 的一个基底. 先证 ϕ_1, ϕ_2 线性无关. 令 $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = 0$, 即 $c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) = 0$, $\forall x \in J$. 令 $x = x_0$ 可知 $c_1 = 0$. 进一步得 $c_2 = 0$. 故 ϕ_1 和 ϕ_2 线性无关. 再证线性空间 $\mathcal{S}$ 中的每个元素, 即方程 $(*)_{齐}$ 的每个解都可以由 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 线性表出. 设 $y(x) \in \mathcal{S}$ 是方程 $(*)_{齐}$ 的任意一个解. 令 $\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$, 这里 $c_1 \triangleq y(x_0)$, $c_2 \triangleq y'(x_0)$.

显然 $\phi(x)$ 是解，且

$$\phi(x_0) = c_1 = y(x_0),$$

$$\phi'(x_0) = c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) = c_2 = y'(x_0).$$

这说明两个解 $y(x)$ 和 $\phi(x)$ 满足相同的初值条件．根据解的唯一性知，它们恒同．此即 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$．这就证明了 $\mathcal{S}$ 中的每个元素，即方程 $(*)_{齐}$ 的每个解都可以由 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 线性表出．定理得证． $\square$

Theorem

定理: 二阶线性非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (*)_{非}$$

的一般解可表示为 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + y_p(x)$, 其中 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 为对应齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

的两个线性无关的解, $y_p(x)$ 是方程 $(*)_{非}$ 的一个特解.

一般解的含义

我们说方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ 的一般解 (general solutions) 由式 $y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + y_p(x)$ 给出有两个意思:

(i) 方程的每个解都可以表示为这样的形式;

(ii) 每个这样形式的函数均为方程的解.

证：(i) 证每个形如 $y = y_g + y_p$ 的函数是方程 $(*)_{非}$ 的解，这里 $y_g = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$. 直接验证

$$
\begin{aligned}
& y'' + P(x)y' + Q(x)y \\
&= (y_g'' + y_p'') + P(x)(y_g' + y_p') + Q(x)(y_g + y_p) \\
&= [y_g'' + P(x)y_g' + Q(x)y_g] + [y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p] \\
&= R(x).
\end{aligned}
$$

(ii) 证方程 $(*)_{非}$ 的每个解都可以表示为形式 $y = y_g + y_p$. 设 $y(x)$ 是方程 $(*)_{非}$ 的一个解. 根据解 $y(x)$ 和 $y_p(x)$ 所满足的方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$
$$y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = R(x)$$

可得 $(y - y_p)'' + P(x)(y - y_p)' + Q(x)(y - y_p) = 0$. 这表明 $y - y_p$ 是齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个解. 故 $y - y_p$ 可表为 $y - y_p = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$, 即 $y(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + y_p(x)$. 定理得证. $\square$

两个注记

<u>注一</u>: 稍后将会看到, 如果已知齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$, 则可以利用这个基本解组, 构造出非齐次方程 $(*)_{非}$ 的一个特解 y_p, 从而求得方程 $(*)_{非}$ 的一般解. 因此问题的关键在于求齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组.

<u>注二</u>: 目前尚不存在求齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 基本解组的一般方法.

<u>例一</u>: 求齐次方程 $y'' + y' = 0$ 的一个基本解组.

<u>解</u>: 观察知 $y_1 = 1$ 是解, 且 $y_2 = e^{-x}$ 也是解. 显然函数 $1, e^{-x}$ 在实轴上线性无关. 因此解 $1, e^{-x}$ 构成方程的一个基本解组. 它的一般解为 $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$.

例二: 求解 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$.

解: 由方程的特点, 以及幂函数 x^λ 的求导规则 $(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}$, 可期待方程有形如 x^λ 的解, λ 待定. 将 $y = x^\lambda$ 代入方程得

$$\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 2\lambda x^\lambda - 2x^\lambda = 0 \quad \text{or} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

令 $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2) = 0$ 解得 $\lambda = 1, -2$. 由此得到两个解 $y_1 = x$ 和 $y_2 = x^{-2}$. 易证这两个解在 $(0, +\infty)$ 上线性无关. 因此它们构成一个基本解组, 一般解为 $y = c_1x + c_2x^{-2}$.

注一: 形如 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ 的方程称为二阶 Euler 方程.

一般 n 阶 Euler 方程是指如下形式的方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,\ x > 0. \quad (*)$$

注二: Euler 方程 (*) 有形如 x^λ 的解. 将 $y = x^\lambda$ 代入方程 (*) 并约去因子 x^λ, 即可得到一个关于 λ 的 n 次多项式方程. 这个方程称为 Euler 方程的特征方程.

注三: Euler 方程 (*) 还可以通过独立变量变换 $x = e^t$ (t 为新的独立变量) 化为常系数线性方程, 而后者的解可以显式表出.

Definition

设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)_{齐}$$

的两个解，称

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

为解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 所对应的 Wronsky 行列式.

Lemma

设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程$(*)_{齐}$ 的两个解，则它们所对应的 Wronsky 行列式 $W(x)$ 恒为零或恒不为零，即 $W(x) \equiv 0$ 或 $W(x) \neq 0, \forall x \in J$.

<u>证明</u>：对 Wronsky 行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

两边求导得

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

再根据两个恒等式

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0,$$

得

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -P(x)y_1' & -P(x)y_2' \end{vmatrix} = -P(x)W(x).$$

即行列式 $W(x)$ 满足一阶线性方程 $W' + P(x)W = 0$. 因此 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds}$. 于是 $W(x) \equiv 0$ 或者 $W(x) \neq 0$, $\forall x \in J$. 结论得证. □

Theorem

设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)_{齐}$$

的两个解，记它们对应的 Wronsky 行列式为 $W(x)$，则

(i) $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow W(x) \equiv 0,\ \forall x \in J$;

(ii) $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow W(x) \neq 0,\ \forall x \in J$.

证：显然结论 (i) 和 (ii) 等价. 故只需只证 (i). $\Rightarrow$: 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关，则 $y_1(x) = ky_2(x)$ 或 $y_2(x) = ky_1(x)$. 此时显然有 $W(x) \equiv 0$. $\Leftarrow$: 设 $W(x) \equiv 0$. 若 $y_1(x)$ 为平凡解 (即零解)，则显然 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关. 结论成立. 设 $y_1(x)$ 为非平凡解，则存在一个子区间 $J_1 \subset J$，使得 $y_1(x) \neq 0$, $\forall x \in J_1$. 于是

$$\left[\frac{y_2}{y_1}\right]' = \frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} \equiv 0, \quad \forall x \in J_1.$$

这表明 $y_2(x) = ky_1(x)$，从而 $y_2'(x) = ky_1'(x)$, $\forall x \in J_1$. 由解的唯一性可知 $y_2(x) = ky_1(x)$, $\forall x \in J$. 即 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性相关. 证毕. $\square$

作业

习题7.2 (pp. 220-221): 3(奇), 4, 5.

习题7.3 (pp. 223-224): (1)(3)(5)(7)(9).