《微积分A1》第六讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年09月30日

以下各函数极限性质的证明，与相应序列极限的性质之证明类似，故从略.

性质一 (极限唯一性)：若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则极限值唯一.

性质二 (有界性)：若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 a 附近有界，即存在 $\delta > 0$，以及 $M > 0$，使得 $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$.

性质三 (保序性)：设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

(i) 若 $A < B$，则存在 $\delta > 0$，使得对 $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$, $f(x) < g(x)$.

(ii) 若存在 $\rho > 0$，使得 $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (a-\rho, a+\rho)\backslash\{a\}$, 则 $A \leq B$.

<u>性质四</u>: 设 $f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in (a-\rho, a+\rho)\backslash\{a\}$, 若两个极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a} h(x)$ 均存在且相等. 它们共同的极限记作 L, 则极限 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在且等于 L.

Theorem

定理: 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$, 则和差极限 $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)]$, 乘积极限 $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$, 以及商极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (补充假设 $B \neq 0$) 均存在, 并且

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ $(= AB)$;

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $(= \frac{A}{B})$.

例

Example

例: 显然 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. 于是根据函数极限的四则运算可知, $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. 进而对多项式 $P(x)$ 有 $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, 对于分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 假设 $Q(x_0) \neq 0$, 有 $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

注: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. (稍后正式定义). 上述结论表明, 多项式函数 $P(x)$ 处处连续, 有理分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在其定义域上处处连续.

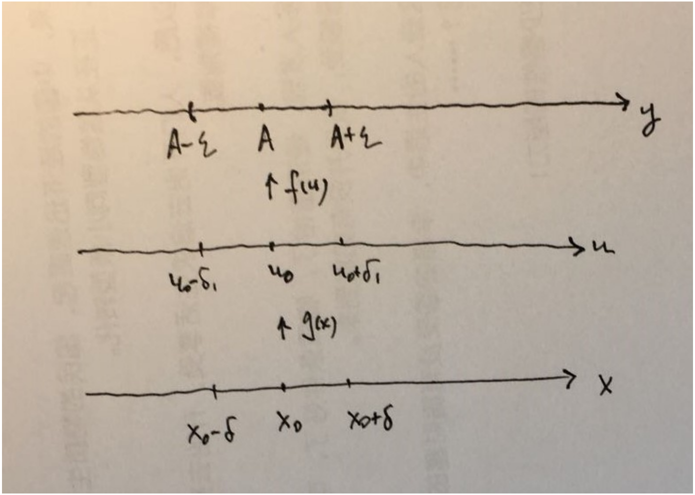
Theorem

定理: 设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 且 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$. 再设(*) $g(x) \neq u_0$, $\forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)\backslash\{x_0\}$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

注: 假设(*) 是为了复合函数 $f\circ g$ 有意义. 见课本第51页习题2.3第10题.

证: 由假设 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$ 可知, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $|f(u) - A| < \varepsilon$, $\forall u \in (u_0-\delta_1, u_0+\delta_1)\backslash\{u_0\}$. 再由假设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$ 可知, 对上述 $\delta_1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|g(x) - u_0| < \delta_1$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$. 再根据假设(*) $g(x) \neq u_0$, $\forall x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)\backslash\{x_0\}$ 知 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$. 此即 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$. □

证明图示



Example

例：证明 $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证明：由于 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$，故

$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\lim_{x\to x_0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=1-2\lim_{x\to x_0}\sin^2\frac{x}{2}=1-2\sin^2\frac{x_0}{2}=\cos x_0.$$

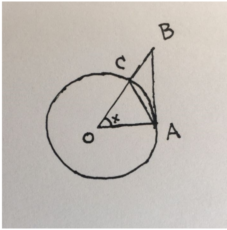
命题得证.

注：极限 $\lim_{x\to x_0}\sin^2\frac{x}{2}$ 可看作三重复合函数的极限 $\lim_{x\to x_0}f(g(h(x)))$，同样可应用复合函数极限定理，其中 $h(x)=\frac{x}{2}$，$g(y)=\sin y$，$f(z)=z^2$.

一个重要的函数极限

定理: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

证明: 由于函数 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 故只需证 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. 如图作单位圆. 取弧度 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.



由图可知, $\triangle AOC$ 面积 $<$ 扇形 AOC 面积 $<$ $\triangle AOB$ 面积, 即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$. 亦即 $\sin x<x<\tan x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

由 $\sin x < x$ 得 $\frac{\sin x}{x} < 1$. 再由 $x < \tan x$ 得 $\frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, 即 $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. 总结得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

在上式中令 $x \to 0^+$, 并利用挤夹法则得 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. 因 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 故 $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. 于是 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 证毕. $\square$

Example

例: 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, 其中 a, b 为非零常数.

解:

$$\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{ax}{bx}\cdot\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}$$

$$\to 1\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1} = \frac{a}{b}, \quad x\to 0.$$

解答完毕.

Theorem

定理: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

证明分三步. 第一步: 证明 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e$, 这里 $[x]$ 为取整函数. 已证 $(1+\frac{1}{n})^n \uparrow e$ 严格, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $0 < e - (1+\frac{1}{n})^n < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 故对任意 $x \geq N$, 则 $[x] \geq N$, 从而

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \leq e - \left(1+\frac{1}{N}\right)^N < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e.$

第二步：证明

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=e,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=e.$$

这是因为

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)\to e\cdot 1=e;$$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}$$

$$\to e\cdot 1^{-1}=e.$$

第三步，证明结论 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

对任意 $x > 1$，显然有 $[x] \le x < [x]+1$. 因此

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

根据第二步的结论知，上式两端的极限均为 e. 故由函数极限的两边夹法则可知，中间项的极限也存在且等于 e. 即

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

证毕. $\square$

Corollary

推论: (i) $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$; (ii) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

证(i). 令 $y=-x$, 则当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$. 于是

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$\to e\cdot 1 = e, \quad y\to+\infty.$$

结论(i)得证.

证(ii). 要证 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, 考虑两个单侧极限. 当 $x\to 0^+$ 时, $y=\frac{1}{x}\to+\infty$. 于是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\to e,\quad y\to+\infty.$$

当 $x\to 0^-$ 时, $y=\frac{1}{x}\to-\infty$. 于是

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\to e,\quad y\to-\infty.$$

即两个单侧极限存在且均等于 e. 结论(ii) 得证. □

Example

例一: 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2}1^2=\frac{1}{2}.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. 解答完毕.

Example

例二: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}$, 其中 $a>1$.

解: 已证 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{a^n}=0$. 故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{a^{[x]}}=0$. 由于

$$0<\frac{x}{a^x}<\frac{[x]+1}{a^{[x]}}\le\frac{[x]}{a^{[x]}}+\frac{1}{a^{[x]}}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$. 解答完毕.

Example

例三: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.

解: 已证 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. 故 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln[x]}{[x]}=0$. 故对 $x>0$

$$0<\frac{\ln x}{x}\le\frac{\ln([x]+1)}{[x]}\le\frac{\ln([x]+1)}{[x]+1}\frac{[x]+1}{[x]}\to 0\cdot 1=0.$$

根据函数极限的两边夹法则可知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. 解答完毕.

Theorem

定理: 函数极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 对任意序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛, 且收敛于相同的极限值.

注: 定理也可表述如下: 函数极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 对任意序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛. 因为可以断言: 若对任意一个序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛, 则序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛于同一个极限值. 理由: 对于任意两个序列 $x_n \to a$, $x'_n \to a$, $(x_n \neq a,\ x'_n \neq a)$, 构造一个新序列 $\{x''_n\} = \{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots\}$. 显然 $x''_n \to a$. 如果三个序列 $\{f(x_n)\}$, $\{f(x'_n)\}$ 和 $\{f(x''_n)\}$ 均收敛, 那么序列 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(x'_n)\}$ 必收敛于相同的极限值.

Example

例一: 证明极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

证明: 取两个序列 $x_k=\frac{1}{2k\pi}$, $x_k'=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$. 它们都趋向于零. 但 $\sin x_k=0\to 0$, $\sin x_k'=1\to 1$. 如果极限 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 存在, 那么根据上述定理可知, 两个序列 $\{\sin x_k\}$ 和 $\{\sin x_k'\}$ 收敛于相同的极限值. 这就导出了矛盾. 证毕.

例二

Example

例二: 设 $\lim_{x\to x_0} u(x) = u_0$, 证明(i) $\lim_{x\to x_0} e^{u(x)} = e^{u_0}$; (ii) $\lim_{x\to x_0} \ln u(x) = \ln u_0$, 其中 $u(x) > 0$ 且 $u_0 > 0$. 特别我们有 $\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$. 这表明指数函数 e^x 在任意点 x_0 处连续(稍后定义).

证(i): 由上述定理可知对于任意 $x_n \to x_0$, 序列 $u_n \triangleq u(x_n)$ 收敛于同一个极限 u_0. 已证对于任意 $u_n \to u_0$, 则有 $e^{u_n} \to e^{u_0}$. 于是 $e^{u(x_n)} = e^{u_n} \to e^{u_0}$. 再次利用根据上述定理可知 $e^{u(x)} \to e^{u_0}$, $x \to x_0$. 结论(i)得证. 结论(ii)的证明类似. 细节略去. □

证明: $\Rightarrow$: 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 存在, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$. 对于任意序列 $x_n \to a$, $x_n \neq a$, 则对于上述 $\delta > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|x_n - a| < \delta$, $\forall n \geq N$. 于是 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 即序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛且收敛于同一个极限值.

$\Leftarrow$: 设对任意序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 均收敛, 且收敛于相同的极限值 A. 要证 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在, 且等于A. 反证. 若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 n, 存在 $x_n \neq a$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$. 故存在序列 $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$, 序列 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 A. 矛盾. 证毕. $\square$

Example

例: 证明 (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; (iii) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, 其中 $a>0$.

证 (i). (回忆例二的结论: 设 $\lim_{x\to x_0}u(x)=u_0$, 其中 $u(x)>0$ 且 $u_0>0$, 则 $\lim_{x\to x_0}\ln u(x)=\ln u_0$). 于是 $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\to\ln e=1$, $x\to 0$.

证 (ii). 令 $y=e^x-1$, 则 $y\to 0$, $x\to 0$, 且 $e^x=1+y$, 即 $x=\ln(1+y)$. 于是 $\frac{e^x-1}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}\to\frac{1}{1}=1$.

证 (iii). $\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a\to 1\cdot\ln a=\ln a$.

Theorem

定理: 极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, $\forall x,x'\in(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$.

证: $\Rightarrow$: 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, 则依定义知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$, $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$. 于是对任意 $x,x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$,

$$|f(x)-f(x')|=|f(x)-A+A-f(x')|$$

$$\leq|f(x)-A|+|f(x')-A|<2\varepsilon.$$

必要性得证.

证明续

$\Leftarrow$: 设对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, $\forall x, x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$. 要证极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在. 对任意序列 $x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$, 关于上述 $\delta > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|x_n - x_0| < \delta$, $\forall n > N$. 于是对任意 $n, m > N$, $x_n, x_m \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$, 故有 $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, 这说明序列 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 序列, 从而收敛. 根据函数极限与序列极限定理知极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在. $\square$

Definition

<u>定义</u>: 设函数 $f(x)$ 在 $(a-\rho, a+\rho)\backslash\{a\}$ 上定义.

(i) 若 $f(x) \to 0$ $(x \to a)$, 则称 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时为无穷小量;

(ii) 若 $|f(x)| \to +\infty$, $x \to a$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时为无穷大量. 依据 $f(x) \to +\infty$ 或 $f(x) \to -\infty$, 还称 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时为正无穷大量, 或负无穷大量.

(iii) 若存在 $M > 0$ 以及 $\delta > 0$, 使得对 $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$, $|f(x)| \le M$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时为有界量.

(iv) 类似可定义函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时为无穷小量, (正负)无穷大量和有界量.

例子

Example

1). 当 $x \to 0$ 时, $\sin x$, x^n (n 为正整数), $e^x - 1$ 均为无穷小量.

2). 当 $x \to +\infty$ 时, $\ln x$, x^n (n 为正整数), e^x 均为正无穷大量.

3). 设 $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (a-\rho, a+\rho)\backslash\{a\}$, 则当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 为无穷小量 $\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

Definition

定义：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 附近定义(除去 a)．若存在常数 $M>0$，以及 $\delta>0$，使得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M, \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$$

则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比为有界量，记作 $f(x)=O(g(x))$，$x\to a$．特别 $f(x)=O(1)$ 表示 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时有界，即 $f(x)$ 在 a 附近有界．当 $a=\pm\infty$ 时，$f(x)=O(g(x))$ 的意义类似．

例一：$\sin x = O(x)$，$x\to 0$；

例二：$3x^2 - x + 10 = O(x^2)$，$x\to +\infty$．

定义: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为无穷小量 $(x \to a)$, 且 $g(x) \neq 0$ 在点 $x = a$ 附近.

(i) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ $(x \to a)$, 则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量 $(x \to a)$, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$.

(ii) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to C \neq 0$, $x \to a$, 则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为同阶无穷小 $(x \to a)$. 特别当 $C = 1$ 时, 称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷小, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$.

(iii) 若 $f(x)$ 与 $(x - a)^k$ 为同阶无穷小量 (k 为正整数), 则称 $f(x)$ 为 k 阶无穷小量.

Definition

定义：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为无穷大量 $(x \to a)$.

(i) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ $(x \to a)$，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷无量，或者说 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷无量．此事也记作 $f(x) = o(g(x))$.

(ii) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \to C \neq 0$, $x \to a$，则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为同阶无穷大量 $(x \to a)$．特别当 $C = 1$ 时，称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为等价无穷大，记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$.

注：与标准无穷小量类似，当 $x \to a$ 时，通常取 $\frac{1}{x-a}$ 为标准无穷大量．于是 $\frac{1}{(x-a)^k}$ 为 k 阶无穷大量．当 $x \to +\infty$ 时，取 x 为标准无穷大量．此时 x^k 为 k 解无穷大量.

小欧 o 例子

Example

例: (i) 当 $x \to 0$ 时, $x^2 + x^3 = o(x)$;

(ii) 当 $x \to 0$ 时, $\sin(x^2) = o(x)$. 但不能写作 $o(x) = \sin(x^2)$;

(iii) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = o(x^{n+1})$, $x \to \infty$;

(iv) $x^n = o(e^x)$, $x \to +\infty$.

Example

例: 当 $x \to 0$ 时,

(i) $\sin x \sim x$;

(ii) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(iii) $\tan x \sim x$;

(iv) $\ln(1+x) \sim x$;

(v) $e^x - 1 \sim x$;

(vi) $a^x - 1 \sim x \ln a$;

(vii) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

结论(i)至(vi)已证. 以下证(vii).

令 $y = (1+x)^\alpha - 1$, 则 $y \to 0$ $(x \to 0)$ 且 $1 + y = (1+x)^\alpha$.

故 $\ln(1+y) = \alpha \ln(1+x)$. 于是

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{\alpha x} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

这就证明了结论(vii), 即 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Example

例一：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}.$$

解：

$$\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}{x^4}$$

$$=\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)^2\frac{1}{2\cdot 4}\to 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

例：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{\sin^2 x(1-\cos x)}.$$

解：

$$\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{\sin^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+2x^4}-1)-(\sqrt[3]{1-x^4}-1)}{x^4}\frac{x^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\left(\frac{(1+2x^4)^{1/2}-1}{x^4}-\frac{(1-x^4)^{1/3}-1}{x^4}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\frac{2\cdot\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}$$

$$\to\left(\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)\right)(1^2)\cdot 2\cdot 1=(1+\frac{1}{3})\cdot 2=\frac{8}{3}.$$

作业

课本习题2.2 (pp. 42-43): 4, 5, 6, 7, 8.

课本习题2.3 (pp. 50-52): 6(偶标号), 7(偶标号).

课本习题2.4 (pp. 56-57): 7, 8, 9(1)(3)(5)(7)(9), 11.