《微积分A1》第二十一讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月25日

第一换元法(也称作凑微分方法)

Theorem

定理: 考虑计算不定积分 $\int g(x)dx$. 如果 $g(x)$ 可以表示为 $g(x)=f(\phi(x))\phi'(x)$, 且 $\int f(u)du=F(u)+C$ 容易计算, 则

$$\int g(x)dx=F(\phi(x))+C.$$

注: 应用第一换元法计算 $\int g(x)dx$ 的关键在于, 如何识别被积函数 $g(x)$ 可以表示为 $g(x)=f(\phi(x))\phi'(x)$, 并且计算 $\int f(u)du=F(u)+C$ 比较容易.

例三:

$$\int \sin^2 x\cos^3 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x) d\sin x = \int u^2(1-u^2) du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

例四:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

例五: 设 $a \neq 0$, 则

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

Theorem

定理: 考虑计算不定积分 $\int f(x)dx$. 如果作变量代换 $x=\phi(t)$, 使得计算 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = G(t)+C$ 比较容易, 则

$$\int f(x)dx = G(\phi^{-1}(x))+C, \quad x\in J,$$

其中 $f(x)$ 于 J 上定义, $x=\phi(t)$ 为区间 K 上的连续可微函数, $\phi(t)\in J$, $\forall t\in K$, 且 $\phi'(t)\neq 0$, $t=\phi^{-1}(x)$ 为 $x=\phi(t)$ 的反函数.

定理证明

Proof.

证明: 由假设 $\phi'(t)\neq 0$ 可知 $x=\phi(t)$ 存在反函数 $t=\phi^{-1}(x)$.

于是

$$[G(\phi^{-1}(x))]' = G'(t)[\phi^{-1}(x)]'$$

$$= f(\phi(t))\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f(x),$$

上式中 $t=\phi^{-1}(x)$. 这表明 $G(\phi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数. 证毕. □

注: 应用第二换元法计算 $\int f(x)dx$ 的关键在于, 如何寻找合适的可逆变换 $x=\phi(t)$, 使得不定积分 $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ 容易算出来.

例一:

$$\int x(1-x)^n dx = -\int (1-t)t^n dt \quad (x = 1-t)$$

$$= -\int (t^n - t^{n+1})dt = -\frac{1}{n+1}t^{n+1} + \frac{1}{n+2}t^{n+2} + C$$

$$= -\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} + \frac{1}{n+2}(1-x)^{n+2} + C.$$

例二：求不定积分

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$$

解法一：作变换 $x = 2\sin t$，$t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos t dt}{2\sin t \cdot 2\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t/2)}{\tan(t/2)\cos^2(t/2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\tan(t/2)}{\tan(t/2)}=\frac{1}{2}\ln|\tan(t/2)|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin(x/2)\right)\right|+C.$$

注：另计算 $\int\frac{dt}{\sin t}=\int\frac{\sin t dt}{\sin^2 t}=-\int\frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos t}+\frac{1}{1+\cos t}\right)d\cos t$
$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-(x/2)^2}}{1+\sqrt{1-(x/2)^2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C.$

解法二：令 $u=\sqrt{4-x^2}$，则 $u^2=4-x^2$，$2udu=-2xdx$. 于是

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\int\frac{udu}{(4-u^2)u}$$

例二，续二

$$= \int \frac{du}{u^2-4} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + C.$$

注：虽然两种解法所得到的结果看上去不同，但不难验证它们仅相差一个常数.

例三: 求不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad a>0.$$

解: 作变换 $x = au$, 则

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{adu}{a^2+a^2u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例四: 设 a, b 为两个非零常数, 求不定积分

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}.$$

解:

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2\tan^2 x + b^2},$$

$$= \frac{1}{b^2}\int \frac{d\tan x}{(a/b)^2\tan^2 x + 1} = \frac{1}{ab}\int \frac{d\frac{a}{b}\tan x}{1 + (\frac{a}{b})^2\tan^2 x},$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$$

例五: 求不定积分

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad |x| < a, a > 0.$$

解: 作变换 $x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$, $a\sin t : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-a, a)$.

于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot (a\sin t)' dt$$

$$= a^2 \int \cos t \cdot \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

函数 $x = a\sin t$ 的反函数为 $t = t(x) = \arcsin\frac{x}{a}$,

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-(x/a)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

例五续二

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

注记

求不定积分有时不容易，但验证计算不定积分的计算结果却是很简单的，只需对计算结果求导，并观察求导结果是否为被积函数．因此同学们应该养成一个好习惯，即每次计算不定积分完后，都应验证计算结果．例如我们来验证刚才的计算结果

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

验证 $$\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)'$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

验证续

$$= \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-x^2}.$$

由此可见计算结果正确.

两种换元法有时都管用

例如对于积分

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

用第一换元法:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'dx$$

$$= 2\int \sin\sqrt{x}d\sqrt{x} = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

用第二换元法: 作变换 $x = t^2$, 则

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin t}{t}2tdt$$

$$= 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

例子: 求满足方程

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},\quad \forall x,y\in \mathbb{R}\quad (*)$$

的可导函数 $f(x)$.

解: 令 $y=0$, 则

$$f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)f(0)},\quad \forall x\in \mathbb{R}.$$

上式等价于 $f(x)[1-f(x)f(0)]=f(x)+f(0)$. 化简得 $f(0)[1+f^2(x)]=0$. 因此 $f(0)=0$. 进一步由式(*)得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)}-f(x)\right)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)}-f(x)\right)$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x)+f(h)-f(x)[1-f(x)f(h)]}{1-f(x)f(h)}=\frac{f(h)}{h}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(h)}.$$

令 $h\to 0$，得 $f'(x)=f'(0)[1+f^2(x)]$. 若 $f'(0)=0$，则 $f'(x)$ 恒为零，即 $f(x)$ 恒为常数. 又由于 $f(0)=0$，故 $f(x)\equiv 0$. 设 $\lambda\triangleq f'(0)\neq 0$，并记 $y=f(x)$，即得 $y'=\lambda(1+y^2)$. 于是

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\lambda(1+y^2)}.$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\lambda}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\lambda}(\arctan y + C)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \lambda x - C = \arctan y \quad 或 \quad y = \tan(\lambda x - C)\,.$$

再根据条件 $f(0) = 0$ 可知常数 $C = 0$. 故所求函数为

$f(x) = \tan(\lambda x)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为任意非零常数. 解答完毕.

注: 所得解 $y = \tan(\lambda x)$ 的定义区间为 $\lambda x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.
因此有必要对函数方程

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

加上隐性条件 $f(x)f(y) \neq 1$.

分部积分法 (Integration by parts)

回忆求导的 Leibniz 法则 $(uv)' = u'v + uv'$，由此得

$$\int (uv)'dx = \int u'vdx + \int uv'dx,$$

$$\Rightarrow \quad uv = \int u'vdx + \int uv'dx.$$

因此如果两个不定积分 $\int u'vdx$ 和 $\int uv'dx$ 之一可以求出，那么就可求出另一个. 这两个不定积分可写作 $\int u'vdx = \int vdu$ 和 $\int uv'dx = \int udv$.

例一:

$$\int xe^x dx = \int x de^x$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

注：分部积分还有另一种可能:

$$\int xe^x dx = \int e^x dx^2/2 = e^x(x^2/2) - \int \frac{x^2}{2} de^x$$

$$= e^x(x^2/2) - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

显然这个尝试不可取.

例二:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C.$$

注: 之前我们需要计算函数 $\ln(1+x)$ 的原函数，即计算 $\int \ln(1+x)dx$，见 Nov13 讲义第 16 页. 由上例知

$$\int \ln(1+x)dx = (1+x)\ln(1+x) - (x+1) + C.$$

例三:

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

例四：求不定积分 $\int e^x \cos x dx$ 和 $\int e^x \sin x dx$.

解法一：两次分部积分

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d \sin x$$

$$= e^x \sin x - \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx;$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d \cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

将上式最后一项移到左边得

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\Rightarrow \quad \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1.$$

完全类似地我们可以得到

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

解法二：对积分 $\int e^x \cos x dx$ 和 $\int e^x \sin x dx$ 分别作一次分部积分

即得

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx;$$

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

记 $C=\int e^x\cos x dx$，$S=\int e^x\sin x dx$，则

$$\begin{cases} C=e^x\sin x-S \\ S=-e^x\cos x+C \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} C+S=e^x\sin x \\ -C+S=-e^x\cos x. \end{cases}$$

由此可解得

$$\int e^x\cos x dx=C=\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+c_1,$$

$$\int e^x\sin x dx=S=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c_2.$$

解法三：利用 Euler 公式 $e^{x+ix} = e^x(\cos x + i\sin x)$，计算上述两个不定积分.

$$\int e^{(x+ix)}dx = \int e^{x(1+i)}dx = \frac{1}{1+i}e^{x(1+i)} + c$$

$$= \frac{1-i}{1+1}e^x(\cos x + i\sin x) + c_1 + ic_2$$

$$= \frac{e^x}{2}\left[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)\right] + c_1 + ic_2,$$

其中 $c = c_1 + ic_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 此即

例四，续四

$$\int e^{(x+ix)}dx = \int e^x \cos x dx + i \int e^x \sin x dx$$

$$= \frac{e^x}{2}\left[(\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x)\right] + c_1 + ic_2.$$

上述等式意味着两边的实虚部分别相等，即

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c_1,$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c_2.$$

例五:

$$\int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x - \int e^xdx^2$$

$$= x^2e^x - 2\int e^xxdx = x^2e^x - 2\int xde^x$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^xdx\right)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

例一: 计算积分 $J_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$, 其中 $a > 0$, m 为正整数.

解:

$$J_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} - \int x \left[\frac{1}{(x^2+a^2)^m}\right]' dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}} dx - 2ma^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2 J_{m+1}.$$

即 $$J_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mJ_m - 2ma^2 J_{m+1}.$$

$$2ma^2 J_{m+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^m} + (2m-1)J_m$$

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} J_m.$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} J_1$$

$$= \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例二: 求积分 $J_n = \int \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数.

解:

$$J_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x d \tan x - J_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}.$$

$$J_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Definition

定义：(i) 多项式的商称为有理函数，或有理分式，即形如 $P(x)/Q(x)$ 的函数，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为多项式.

(ii) 多项式 $P(x)$ 的次数记作 $\deg P(x)$. 例如 $\deg(1+x^3)=3$.

(iii) 有理分式 $P(x)/Q(x)$ 称为真(假)分式，如果 $\deg P(x) < (\geq) \deg Q(x)$.

例如 $\frac{x^2+1}{x^3+2}$ 是真分式，而 $\frac{x^4+2}{x^3+1}$ 是假分式.

Lemma

引理: 每个假分式均可表为一个多项式加上一个真分式.

引理的证明可以由如下例子得到. 例如有理分式 $\frac{x^4}{1+x^2}$ 是假分式. 可按如下方式将其化为一个多项式, 加上一个真分式.

$$\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{x^4+x^2-x^2}{x^2+1} = x^2 + \frac{-x^2}{x^2+1}$$

$$= x^2 + \frac{-x^2-1+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

定理: 设 P/Q 为真分式. 假设其分母有分解

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

其中 $a,\cdots,b,p,q,\cdots,r,s$ 均为实数, 且 $p^2-4q<0,\cdots,$ $r^2-4s<0$, $\alpha,\cdots,\beta,\lambda,\cdots,\mu$ 均为正整数, 则真分式 P/Q 有如下分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots$$

$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}$$

$$+\frac{K_\lambda x+L_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{x^2+px+q}+\cdots$$

$$+\frac{M_\mu x+N_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s},$$

其中 $A_i,\cdots,B_i,K_i,L_i,\cdots,M_i,N_i$ 均为实数. 进一步上述分解式是唯一的.

证明思想是待定系数法. 有点麻烦. 略去.

例一: 化分式 $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ 为分部分式.

解: 注意分母由分解式 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. 根据上述分式分解定理知分式可分解为

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},$$

其中 A, B 为待定常数. 于上式两边同乘以分母得

$$x+1=A(x-3)+B(x-1).$$

确定常数 A, B 有两种方法. 方法一是分别用 $x=1$ 和 $x=3$ 代入上式即得 $2=-2A$ 和 $4=2B$. 由此得 $A=-1$, $B=2$.

例一续

另一种方法是比较等式 $x+1=A(x-3)+B(x-1)$ 常数项和一次项的系数得 $A+B=1$ 和 $3A+B=-1$. 解之得同样的结果 $A=-1, B=2$. 于是求得如下分式分解

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-3}.$$

例二: 化分式 $\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}$ 为分部分式.

解: 先将分母作分解 $x^3+x^2+3x+3=(x+1)(x^2+3)$. 依据分式分解定理知上述分式可分解成如下形式

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

去分母得

$$x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+1). \quad (*)$$

令 $x=-1$ 得 $-1=4A$, 即 $A=\frac{-1}{4}$. 将等式(*)中项 $A(x^2+3)$ 移到左边得

$$\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4}=(Bx+C)(x+1)=Bx^2+(B+C)x+C.$$

由此得 $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{3}{4}$. 于是所求分式的分解为

$$\frac{x}{x^3 + x^2 + 3x + 3} = \frac{-1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{x+3}{x^2+3}.$$

例三: 将分式 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 化为分部分式.

解: 显然分母有分解 $x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$. 根据分式分解定理知上述分式有如下分解

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1},$$

其中 A, B, C, D 为待定系数. 去分母后得

$$x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

为确定这些系数, 令 $x=0$ 得 $A=-1$. 于是

$$x^3+1+(x-1)^3=2x^3-3x^2+3x=Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2.$$

约去因子 x 得

$$2x^2 - 3x + 3 = B + C(x-1) + D(x-1)^2.$$

令 $x = 1$ 即得 $B = 2$. 于是

$$2x^2 - 3x + 1 = C(x-1) + D(x-1)^2.$$

上式左边可因式分解为 $(2x-1)(x-1)$. 故约去因子 $x-1$ 得

$$2x - 1 = C + D(x-1).$$

再取 $x = 1$ 得 $C = 1$. 进而最后确定 $D = 2$.

例三，续二

综上即得分式 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 的分部分式为

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$$

$$=\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}.$$

解答完毕.

根据分式分解定理知，真分式的不定积分可转化为如下两类简单分式

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

的不定积分，其中 $p^2-4q<0$. 第一类分式的不定积分可立刻写出

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \quad k \geq 2.$$

第二类简单分式的不定积分

考虑第二类分式的不定积分，即

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx,$$

其中 $p^2-4q<0$. 经过配方得 $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$.
令 $u=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$. 于是

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = A\int \frac{udu}{(a^2+u^2)^k}+B_1\int \frac{du}{(a^2+u^2)^k}$$

其中 $B_1=B-\frac{Ap}{2}$. 上式第一个积分可简单计算. 第二个不定积分可用递推方法求得.

例一: 计算积分

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx.$$

解: 之前已分解被积有理分式如下

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

于是

$$\int \frac{(x^3+1)dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$$

例一，续

$$= -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)^2 + C.$$

例二: 求积分

$$J = \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$$

解: 分母已分解妥. 故被积分式有如下形式的分部分式

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2},$$

其中 A, B, C, D, E 为待定常数. 去分母得

$$2x^2 + 2x + 13$$

$$= A(x^2+1)^2 + (Bx + C)(x-2)(x^2+1) + (Dx + E)(x-2).$$

例二，续一

令 $x = 2$ 得 $25 = 25A$. 由此得 $A = 1$. 再将项 $A(x^2+1)^2$ 移至左边得

$$2x^2 + 2x + 13 - (x^2+1)^2 = -x^4 + 2x + 12$$

$$= (Bx + C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2).$$

由上式可知左端含有因子 $x-2$. 仍由待定系数法可得 $-x^4 + 2x + 12 = (x-2)(-x^3 - 2x^2 - 4x - 6)$. 消去因子 $x-2$ 得

$$-x^3 - 2x^2 - 4x - 6 = (Bx+C)(x^2+1) + (Dx+E)$$

$$= Bx^3 + Cx^2 + (B+D)x + (C+E).$$

例二，续二

比较上式两边系数得

$$B=-1,\ C=-2,\ B+D=-4,\ C+E=-6.$$

由此解得 $D=-3,\ E=-4$. 于是得到如下分解

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

由此得

$$\int\frac{(2x^2+2x+13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

例二，续三

$$= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{(x+2)dx}{x^2+1} - \int \frac{(3x+4)dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$-\frac{3}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} - 4\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan x$$

$$+\frac{3}{2(1+x^2)} - 4\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

例二，续四

已求得关于积分 $J_m = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$ 的递推关系式

$$J_{m+1} = \frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} J_m.$$

故 $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

于是所求不定积分为

$$\int \frac{(2x^2+2x+13)dx}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{1+x^2} + \frac{3-4x}{2(1+x^2)} - 4\arctan x + C.$$

<u>总结</u>: 任何有理函数的不定积分均可积得出来, 并且可以表示为若干个有理函数, 对数函数, 以及反正切函数之和.

双曲函数，及其基本性质

定义双曲余弦和双曲正弦函数如下

$$\cosh x \triangleq \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x \triangleq \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

不难证明双曲余弦与双曲正弦函数有如下性质：

1. $\cosh x$ 是偶函数，$\sinh x$ 是奇函数；
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. $[\cosh x]' = \sinh x$, $[\sinh x]' = \cosh x$;
4. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$; $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$;

5. 函数 $y = \sinh x$ 有反函数 $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

6. 函数 $y = \cosh x$ 有反函数 $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$: $(1, +\infty) \to (0, +\infty)$.

证明留作习题.

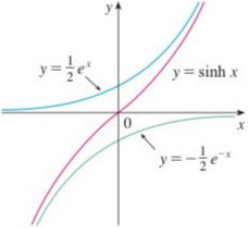

FIGURE 1
$y=\sinh x=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$

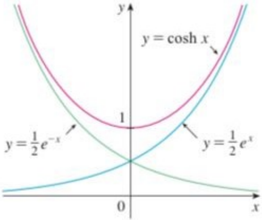

FIGURE 2
$y=\cosh x=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$

双曲函数的反函数图像

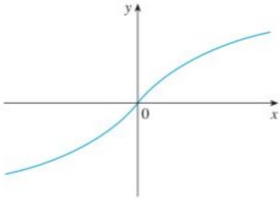

FIGURE 8 $y = \sinh^{-1} x$
domain $= \mathbb{R}$ range $= \mathbb{R}$

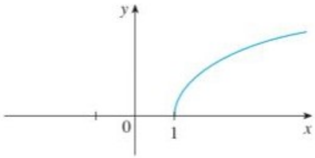

FIGURE 9 $y = \cosh^{-1} x$
domain $= [1, \infty)$ range $= [0, \infty)$

例一：求不定积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

解：作代换 $x=a\sinh t$，则 $dx=[a\sinh t]'dt=a\cosh t$，

$\sqrt{a^2+x^2}=a\cosh t$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}dt=\int dt=t+C$$

$$=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)+C=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C_1,$$

其中 $C_1=C-\ln a$ 仍为一个任意常数.

例二：求不定积分

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

解：作代换 $x = a \sinh t$，则 $dx = [a \sinh t]' dt = a \cosh t$，
$\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh t$，于是

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^2 \int \cosh^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cosh 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sinh 2t \right) + C$$

例二，续

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sinh t \cosh t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + C_1.$$

解答完毕.

Definition

<u>定义</u>: 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 均为二元多项式, 它们的商 $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ 称为二元有理函数. 称 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 为三角有理函数, 或有理三角函数.

考虑如何计算 $\int R(\cos x,\sin x)dx$. (这里遵从习惯用变量 x 而不用 θ.)

Theorem

<u>定理</u>: 任何三角有理函数的不定积分均可通过变换 (称为万能代换) $t = \tan(x/2)$, $|x| < \pi$, 化为有理函数的不定积分.

证明：由代换 $t=\tan(x/2)$ 得

$$\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$$

$$= \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$$

$$= \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

证明续

进一步由代换 $t = \tan(x/2)$ 得 $x = 2\arctan t$. 于是

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

因此

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (*)$$

由于函数

$$R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$$

为有理函数, 故上式 (*) 右边为有理函数的不定积分. 定理得证.

例: 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

解: 作万能代换 $t=\tan(x/2)$ 得

$$\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2dt}{(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)dt}{t} = \frac{1}{2}\int \left(t+\frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2(x/2) + \frac{1}{2}\ln|\tan(x/2)| + C.$$

注: 对于有理三角函数的不定积分, 虽然万能代换解法可行, 但不一定是最简便的方法. 请看下例

例二: 计算 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$.

解: 作代换 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

于是

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2+2t}{2}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=\int \frac{(1+t)^2dt}{1+t^2}=\int\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=t+\ln(1+t^2)+C$$

$$=\tan\frac{x}{2}+\ln(1+\tan^2\frac{x}{2})+C=\tan\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

上述不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$ 可用如下更简单的解法.

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} - \int \frac{d\cos x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2} - \ln(1+\cos x) + C.$$

解答完毕.

作业

课本习题5.4 (pp.155-157)

1, 2, 3(奇), 4(奇), 5(奇), 6(奇), 7(奇).