《微积分A1》第十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月16日

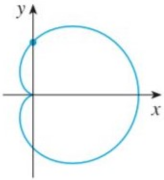
例：考虑由旋轮线参数方程 $x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$，$\theta \in (0, 2\pi)$ 所确定的函数 $y = y(x)$，其中 $a > 0$ 为常数. 求导数 $y'(x)$.

解：记 $\phi(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$，$\psi(\theta) = a(1 - \cos\theta)$. 易证 $\phi(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上严格↑，且 $\phi'(\theta) = a(1 - \cos\theta) \neq 0$, $\forall\theta \in (0, 2\pi)$. 于是

$$y'(x) = \frac{\psi'(\theta)}{\phi'(\theta)} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

例：已知心脏线 (cardioid) 的极坐标方程为 $\rho = a(1+\cos\phi)$，$a>0$，$\phi\in[0,2\pi]$。如图所示。

(cardioid)



在直角坐标系下心脏线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi = a(1+\cos\phi)\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi = a(1+\cos\phi)\sin\phi. \end{cases}$$

于是心脏线的斜率为

$$y'(x) = \frac{y'(\phi)}{x'(\phi)} = \frac{[a(1+\cos\phi)\sin\phi]'}{[a(1+\cos\phi)\cos\phi]'}$$

$$= \frac{(\sin\phi + \frac{1}{2}\sin2\phi)'}{[\cos\phi + \frac{1}{2}(1+\cos2\phi)]'}$$

$$= \frac{\cos\phi + \cos 2\phi}{-\sin\phi - \sin 2\phi} = -\frac{\cos\phi + \cos 2\phi}{\sin\phi + \sin 2\phi}.$$

解答完毕.

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上处处可导. 如果其导函数 $f'(x)$ 作为 (a, b) 上的函数在点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导, 即极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 称极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处二阶导数, 记作 $f''(x_0)$, 或 $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, 或 $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0}$, 或 $D^2 f(x_0)$, 或 $\left.D^2 f\right|_{x_0}$, $\cdots$. 类似可以定义三阶导数, 以及一般 n 阶导数. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 导数通常记作 $f^{(n)}(x_0)$.

Example

例: (i) 已证函数 $y = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导, 且 $y' = \cos x$. 由此可见 $y = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处二阶可导, 且 $y'' = -\sin x$. 由归纳法可知对任意正整数 n, 函数 $y = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处 n 次可导.

(ii) 注意 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. 因此 $[\sin x]' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. 于是 $y'' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$. 归纳法可证, 对 $\forall n \geq 1$, $[\sin x]^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

(iii) 类似可证函数 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处有任意阶导数, 对 $\forall n \geq 1$, $[\cos x]^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

记号: 设 J 为一开区间.

(i) $C^k(J)$ 记区间 J 上有连续的 k 阶导数的函数全体. 显然

$$C(J) \supseteq C^1(J) \supseteq C^2(J) \supseteq \cdots \supseteq C^n(J) \supseteq C^{n+1}(J) \supseteq \cdots$$

(ii) $C^\infty(J)$ 记区间 J 上有任意阶导数的函数全体. 显然

$$C^\infty(J) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(J).$$

高阶导数更多例子，例一

Example

例一：考虑 $y = \ln(1+x)$, $x > -1$. 显然函数 $y = \ln(1+x)$ 可导，且 $y' = \frac{1}{1+x}$, $x > -1$. 由此进一步可知函数二阶可导，且 $y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$. 用归纳法可证，对任意正整数 k，函数有 k 阶导数，且 $y^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Example

例二: 考虑 $y = x^\alpha$, $x > 0$ 的 n 阶导数. 已证 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$. 由此可知 $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. 用归纳法可证

$$y^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}, \quad \forall k \geq 1.$$

当 α 为正整数, 即 $\alpha = n$ 时, $y^{(n)} = n!$, $y^{(n+1)} = 0$.

例三

Example

例三: 考虑 $y = a^x$ 的 n 阶导数，其中 $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$，已证 $y' = \ln a \cdot a^x$. 由此可知 $y'' = (\ln a)^2 a^x$. 用归纳法可证

$$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x, \quad \forall n \geq 1.$$

Theorem

定理: 设 $f, g \in C^n(J)$, 则它们的乘积 $fg \in C^n(J)$, 且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)},$$

其中 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为二项式系数, $C_n^0 = C_n^n = 1$. 特别

$$n = 1, \quad (fg)' = f'g + fg',$$

$$n = 2, \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

$$n = 3, \quad (fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

证明: 显然结论对 $n=1$ 成立. 因为已证 $(fg)'=f'g+fg'$. 假设结论对正整数 n, 即当 $f,g\in C^n(J)$ 时, 则乘积 $fg\in C^n(J)$, 且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}. \qquad (*)$$

要证结论对 $n+1$ 成立. 假设 $f,g\in C^{n+1}(J)$, 则 $f,g\in C^n(J)$, 故由归纳假设知乘积 $fg\in C^n(J)$, 且公式(*)成立. 由于公式(*)右边的每一项都是连续可微的, 因此 $(fg)^{(n)}$ 也连续可微. 于是 $fg\in C^{n+1}(J)$. 对公式(*)两边求导得

证明续一

$$(fg)^{(n+1)} = [(fg)^{(n)}]' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k)} g^{(n-k)}]' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g$$

$$+ C_n^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g \\
&+ C_n^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= C_{n+1}^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g \\
&= C_{n+1}^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} + C_n^k \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g
\end{aligned}
$$

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},$$

这里用到到了组合公式 $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. 这表明 Leiniz 公式对情形 $n+1$ 成立. 上述组合公式的证明如下.

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n+1-k)!}(k+n-k+1) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

组合公式 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$ 可如下解释:

设一个箱子里有 n 个小球. 再往箱子里添加一个新球. 然后从中取出 k 个球, 共有 C_{n+1}^k 取法. 另一方面, 取法分为两类: k 个球中包含新球和不包含新球. 显然不含新球的取法有 C_n^k 种, 而包含新球的取法有 C_n^{k-1} 种. 因此 $C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$.

求高阶导数的例子, 例一

例一: 求函数 $y=\frac{1}{x^2-x-2}$ 的 n 阶导数.

解: 先将函数化为最简分式. 由于 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

故可令

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1},$$

其中 A, B 为待定常数. 上式两边同乘以 $(x-2)(x+1)$ 得

$1=A(x+1)+B(x-2)$. 由此得 $A+B=0$, $A-2B=1$. 解之得 $B=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. 于是

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right).$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)' = -\frac{1}{(x-2)^2}, \quad \left(\frac{1}{x-2}\right)'' = \frac{2}{(x-2)^3},$$

一般 $$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

同理 $$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

因此所求函数的 n 阶导数为

$$\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{3}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

注: 在稍后学习不定积分时，我们将详细讨论分式分解问题.

例二：求函数 $y=x^2\cos x$ 的 n 阶导数.

解：

$$y'=x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2x\cos x;$$

$$y''=x^2\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)+4x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos x;$$

$$y^{(n)}=C_n^0x^2[\cos x]^{(n)}+C_n^1[x^2]'[\cos x]^{(n-1)}+C_n^2[x^2]''[\cos x]^{(n-2)}$$

$$=x^2\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$+n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right),\quad \forall n\geq 3.$$

例: 易证点 $(1,1)$ 位于双纽线 $(x^2+y^2)^2=4xy$ 上. 可以证明存在 C^∞ 函数 $y=y(x)$, $x\in(1-\delta,1+\delta)$, 满足 $y(1)=1$ 且 $[x^2+y^2(x)]^2=4xy(x)$, $\forall x\in(1-\delta,1+\delta)$. 求 $y''(1)$.

解: 对恒等式 $[x^2+y^2(x)]^2=4xy(x)$ 两边求导得

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy')=4(y+xy'),$$

$$\text{或}\quad (x^2+y^2)(x+yy')=y+xy',\qquad (1)$$

其中 $y=y(x)$, $y'=y'(x)$. 对上式再次求导得

$$(2x+2yy')(x+yy')+(x^2+y^2)(1+[y']^2+yy'')=2y'+xy''.(2)$$

例子续

于是等式 (1) 即等式

$$(x^2+y^2)(x+yy')=y+xy',$$

中令 $(x,y)=(1,1)$ 得 $2(1+y'(1))=1+y'(1)$. 由此解得 $y'(1)=-1$. 再将 $(x,y)=(1,1)$ 以及 $y'(1)=-1$ 带入等式 (2) 即等式

$$(2x+2yy')(x+yy')+(x^2+y^2)(1+[y']^2+yy'')=2y'+xy'',$$

得 $2(1-1)(1-1)+2[1+1+y''(1)]=-2+y''(1)$. 解之得 $y''(1)=-6$. 解答完毕.

例: 设函数 $y = y(x)$ 是由旋轮线参数方程 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ 所确定的函数. 求 $y''(x)$. 旋轮线如图所示.

解: 回忆已证 $y'(x) = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$, 其中 $\theta = \theta(x)$ 是函数 $x = x(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$ 的反函数.

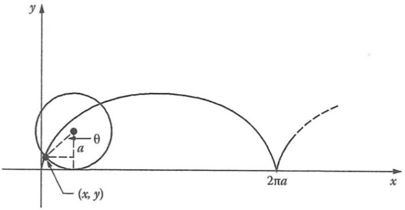


FIGURE 11

例子续

于是

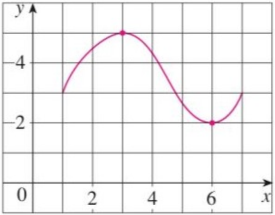
$$y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right)\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{-1}{a(1-\cos\theta)^2}.$$

解答完毕.

在工程和商业活动中，常常需要确定一个函数在某个区间上的最大值和最小值．例如在容积一定的情形下，罐头做成什么形状时，可使得表面积最小，以节省材料(成本)．如图为一函数图像．易见在闭区间 $[1,7]$ 上，$f(3)=5$ 是最大值，而 $f(6)=2$ 是最小值．



定义: 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上定义, $x_0 \in (a,b)$.

(i) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 则称 x_0 为函数 f 的一个(局部)极小值点, 称 f 在点 x_0 处取得(局部)极小值.

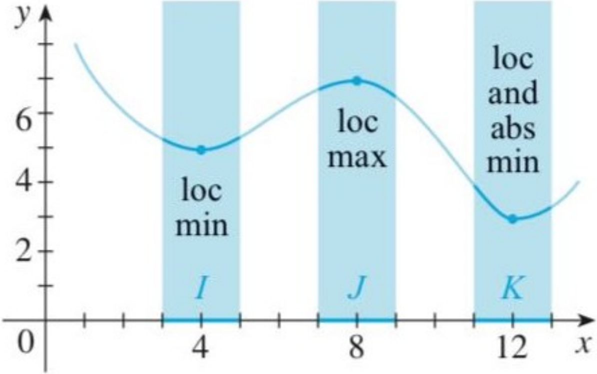
(ii) 若 $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, 则称 x_0 为函数 f 的一个(局部)严格极小值点, 称 f 在点 x_0 处取得(局部)严格极小值.

(iii) 若 $\exists\delta>0$，使得 $f(x)\le f(x_0)$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，则称 x_0 为函数 f 的一个(局部)极大值点，称 f 在点 x_0 处取得(局部)极大值.

(iv) 若 $\exists\delta>0$，使得 $f(x)<f(x_0)$，$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$，则称 x_0 为函数 f 的一个(局部)严格极大值点，称 f 在点 x_0 处取得(局部)严格极大值.

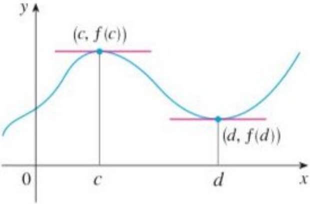
(v) 严格或非严格极大值和极小值均称作极值，严格或非严格极大值点和极小值点均称作极值点.

极大极小(点)值图示



Theorem

定理 [Pierre Fermat, 1601-1665]: 设函数 $f(x)$ 在开区间上定义. 若点 $x_0 \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.



Proof.

证明: 不妨设 x_0 是极小点, 则由定义知存在 $\delta > 0$, 使得

$f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 于是

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

由此可见 $f'_-(x_0) \leq 0$ 且 $f'_+(x_0) \geq 0$. 由于 f 在点 x_0 处可导, 故

$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. 因此 $f'(x_0) = 0$. 证毕. □

极值点处不可导例子

显然函数 $|x|$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 但在点 $x=0$ 处不可导.

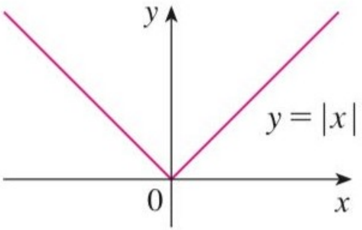


FIGURE 12

If $f(x)=|x|$, then $f(0)=0$ is a minimum value, but $f'(0)$ does not exist.

驻点(临界点)

Definition

定义: 函数 $f(x)$ 的导数之零点, 即 $f'(x) = 0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点 (stationary points) 或临界点 (critical points).

注: Fermat 定理的另一个说法: 假设函数在极值点处可导, 则极值点必为驻点.

驻点不必是极值点

例如函数 x^3 有驻点 $x = 0$. 但这个驻点不是极值点. 如图所示.

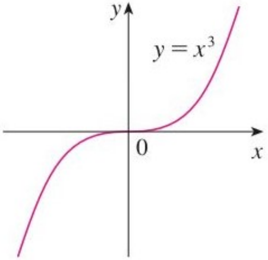


FIGURE 11
If $f(x) = x^3$, then $f'(0) = 0$ but f has no maximum or minimum.

Theorem

定理 [Michel Rolle, 1652-1719]：设函数 f 满足如下三个条件:

(i) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) f 在开区间 (a, b) 上可导;

(iii) $f(a) = f(b)$,

则存在一点 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$.

Rolle 定理图示

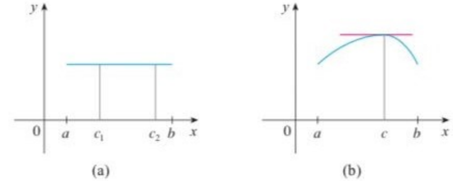
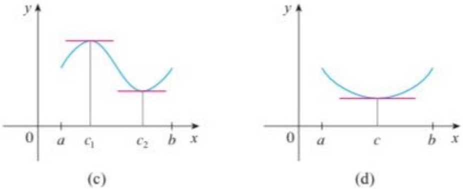


FIGURE 1



Proof.

证明：由连续函数的最值性知，函数 f 在 $[a, b]$ 上必取得最大最小值，即存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$，使得 $f(x_1) = \min\{f(x), x \in [a, b]\}$，$f(x_2) = \max\{f(x), x \in [a, b]\}$. 若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 f 必为常数函数，从而有 $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. 设 $f(x_1) < f(x_2)$，则 x_1 和 x_2 之一，记作 c，不是端点. 根据 Fermat 定理知 $f'(c) = 0$. 证毕. □

例一：证明方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个实根.

证明：记 $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$，则 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} > 0$，$f(0) = -1$，$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$. 由介值定理知，函数 f 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{\pi}{2})$ 各有一个零点. 因此方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上至少有两个不同的实根. 假设 f 有三个零点，则 $f'(x)$ 至少有两个零点. 但是

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

在实轴上仅有一个零点. 因此方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个不同的实根. 证毕.

Example

例二: 证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根.

证明: 将方程改写为 $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. 观察知左端是函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$ 的导数, 即 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$. 由于 $f(0)=0$, $f(1)=a+b+c-(a+b+c)=0$, 根据 Rolle 定理知存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根. 证毕.

Example

例: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 上可导. 进一步假设 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$.

证明: 考虑函数 $F(x)=f(x)-x$. 要证存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$, 只要证 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点即可. 由假设条件知 $F(0)=0$, $F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$, $F(1)=0-1<0$. 由介值定理知存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $F(x_0)=0$. 再对函数 $F(x)$ 以及闭区间 $[0,x_0]$ 应用 Rolle 定理知存在 $\xi\in(0,x_0)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 此即 $f'(\xi)=1$. 证毕.

作业

课本习题3.2 (pp. 83-84): 7(1)(2), 8(1)(2), 9(1)(2), 10(1)(2), 11(1)(2), 12.

课本习题3.3 (pp. 87-88): 1(奇), 2, 3(奇), 4(2)(3), 5, 6.

第3章总复习题(pp.88-89) 5, 6, 8.