# 《微积分A1》第二十七讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月16日

课本第 206 页第六章总复习题第 5 题: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明: 反证. 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不成立, 那么存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $A>a$, 存在 $x_A>A$, $|f(x_A)|\geq\varepsilon_0$. 一方面, 由函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一致连续性知, 对 $\varepsilon_0>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使得 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$, 只要 $|x'-x''|<\delta_0$, $x',x''\geq a$. 于是对 $\forall x\in(x_A,x_A+\delta_0)$,

$$|f(x)|=|f(x_A)+f(x)-f(x_A)|\geq|f(x_A)|-|f(x)-f(x_A)|$$

$$>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

这说明 $f(x)$ 在 $(x_A, x_A+\delta_0)$ 上定号. 因此

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| = \int_{x_A}^{x_A+\delta_0} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0. \quad (*)$$

注意 $\frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0$ 为一个正常数. 另一方面由于广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则知对于 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0$，存在 $M_1 > a$，使得 $|\int_b^{b'} f(x)dx| < \varepsilon_1$，$\forall b, b' \geq M_1$. 取 $A \geq M_1$，则 $x_A$，$x_A + \delta_0 > A > M_1$，故

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0.$$

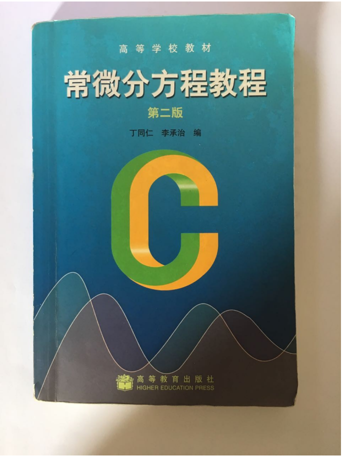
此与式 (*) 相矛盾. 命题得证.

**Definition**

定义: (i) 含有未知函数之导数的方程 (等式) 称为微分方程 (Differential Equations, DE);

(ii) 如果一个微分方程的未知函数是单变量函数, 那么这个方程就称为常微分方程 (Ordinary Differential Equations, ODE);

(iii) 如果一个微分方程的未知函数是多变量函数, 则称这个方程为偏微分方程 (Partial Differential Equations, PDE).


高等学校教材
常微分方程教程
第二版
丁同仁 李承治 编
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

**Example**

例一：Malthas 人口 (物种) 模型 $x' = ax$，这里 $x = x(t)$ 代表未知函数，$t \in \mathbb{R}$ 代表独立变量，通常可看作时间变量．符号 $'$ 代表关于变量 $t$ 的导数，$a \in \mathbb{R}$ 为某个是实常数．

**Example**

例二：Logistic 方程 $x' = ax(1 - \frac{x}{K})$，其中正常数 $K$ 可解释为最大人口承载量．作尺度变换 (scaling) $y = \frac{x}{K}$，则原方程可化为 $y' = ay(1 - y)$．故不妨设 $K = 1$，即 $x' = ax(1 - x)$．这个方程可看作方程 Malthas 方程 $x' = ax$ 的一个修正或摄动．

**Example**

例三：方程 $x'' + x = 0$ 常称为简谐振动方程，这里 $x''$ 代表未知函数 $x(t)$ 的二阶导数．这是物体在弹簧的作用下无摩擦的运动方程．

**Example**

例四：非线性振动方程 $x'' + \sin x = 0$．这是单摆在重力作用下的运动方程．确切地说，单摆与垂直方向所成的角度 (弧度) 满足这个方程．

# 例六, 例七

**Example**

例六: Airy 方程 $x'' - tx = 0$.

**Example**

例七: Riccati 方程 $x' = x^2 - t$.

# 方程的阶 (order)

**Definition**

定义: 一个 ODE 称为 n 阶方程, 如果方程中未知函数导数的最高阶为 n.

**Example**

例: 方程 $x' = ax$ 和 $x' = x - x^2$ 均为一阶的; 方程 $x'' + x = 0$ 和 $x'' - tx = 0$ 均为二阶的.

一般正规n阶方程是指如下形式的n阶方程

$$x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}, t).$$

某些方程可以写成正规方程. 例如方程$1 + (x')^2 = x^2$等价于两个正规方程$x' = \sqrt{x^2 - 1}$和$x' = -\sqrt{x^2 - 1}$.

形如 $x^{(n)}=a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+a_{n-2}(t)x^{(n-2)}+\cdots+a_1(t)x'$ $+a_0(t)x+b(t)$ 的方程称为 n 阶线性方程，其中系数函数 $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\cdots$, $a_{n-1}(t)$, $b(t)$ 为某开区间上的连续函数. 换言之，方程 $x^{(n)}=f(x,x',\cdots,x^{(n-1)},t)$ 的右端函数 $f(x,x',\cdots,x^{(n-1)},t)$ 关于变量 $x,x',\cdots,x^{(n-1)}$ 是线性时，则称作<u>线性方程</u>. 否则方程称作<u>非线性方程</u>. 例如方程 $x'=a(t)x+b(t)$ 为一阶线性方程，方程 $x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)$ 为二阶线性方程. 而方程 $x'=a(t)x^2+b(t)x+c(t)$ 为一阶非线性方程 (Riccati 方程)，假设 $a(t)$ 不恒为零.

# 方程的解

**Definition**

定义: 一个 $n$ 阶连续可微的函数 $x=\phi(t)$, $t\in J$, 称为 $n$ 阶正规方程 $x^{(n)}=f(x,x',\cdots,x^{(n-1)},t)$ 的解, 如果

$$\phi^{(n)}(t)\equiv f\big(\phi(t),\phi'(t),\cdots,\phi^{(n-1)}(t),t\big),\quad \forall t\in J.$$

**Example**

例一: 方程 $x' = ax$ 有解 $\phi(t) = e^{at}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 因为左边 $= (e^{at})' = ae^{at} =$ 右边, $\forall t \in \mathbb{R}$. 显然对任意常数 $c \in \mathbb{R}$, $ce^{at}$ 也是解. 以下证明方程的每个解都具有这种形式. 假设 $x(t)$ 是方程的解, 即 $x'(t) - ax(t) = 0$. 方程两边同乘以 $e^{-at}$ (称作积分因子) 得 $e^{-at}[x'(t) - ax(t)] = 0$. 即 $[e^{-at}x(t)]' = 0$. 故 $e^{-at}x(t) = C$. 因此 $x(t) = Ce^{at}$.

**Example**

例二: 考虑方程 $x'' + x = 0$. 不难验证方程有解 $\phi_1(t) = \cos t$, $\phi_2(t) = \sin t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. 进一步对任意常数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 线性组合 $c_1 \cos t + c_2 \sin t$ 都是解. 因为

$$(c_1 \cos t + c_2 \sin t)'' + (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$= c_1[(\cos t)'' + \cos t] + c_2[(\sin t)'' + \sin t] = 0.$$

我们将证明这个方程的全部解构成一个二维线性空间, $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 是空间的基底, 称为方程的基本解组. 因此方程的每个解 (一般解) 可表为 $c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

## 一阶方程的初值问题(也称 Cauchy 问题)

已知一阶方程 $x' = ax$ 有一般解 $ce^{at}$, 其中 $c \in \mathbb{R}$ 为任意常数. 因此如果要确定方程的某个特别的解 (特解), 需要这个解的进一步信息. 例如指定解在某个特定时刻(独立变量)的值, 即初值 (初始) 条件. 显然方程 $x' = ax$ 满足初值条件 $x(0) = b$ 有解 $x(t) = be^{at}$. 显然满足这个初值条件的解存在且唯一.

求解一阶方程 $x' = f(t, x)$ 满足条件 $x(t_0) = x_0$ 的解 $x(t)$ 的问题称为初值问题, 也称 Cauchy 问题. 这个问题常记作

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

课本第 210 页例 7.1.3, 略有修改: 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且恒正, 即 $f(x)>0,\ \forall x>0$. 设 $f(1)=\frac{1}{2}$. 假设由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=t$ 与 $x$ 轴所围平面图形, 绕 $x$ 轴旋转所形成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}t^2f(t)$. 试求函数 $f(x)$.

解: 由旋转体体积公式知体积可表示为 $V(t)=\int_0^t\pi[f(s)]^2ds$. 由此得

$$\int_0^t\pi[f(s)]^2ds=\frac{\pi}{3}t^2f(t)\quad\text{或}\quad 3\int_0^t[f(s)]^2ds=t^2f(t).$$

由于 $f(x)$ 连续, 故上式左边连续可微, 从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微. 对上式两边求导得 $3[f(t)]^2=2tf(t)+t^2f'(t)$.

# 例子解析，续一

换回变量 $x$ 即得 $3[f(x)]^2 = 2xf(x) + x^2f'(x)$. 换言之函数 $f(x)$ 满足方程 $x^2y' + 2xy = 3y^2$. 这个方程称为 Bernoulli 型方程. 以后我们将学习如何求解这类方程. 也可以如下直接求解. 由方程 $3[f(x)]^2 = 2xf(x) + x^2f'(x)$ 两边同除 $f(x)^2$ (因为有假设 $f(x)$ 恒正) 得

$$3 = \frac{2x}{f(x)} + x^2\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

记 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, 则上式可写作

$$3 = 2xg(x) - x^2g' \quad \text{或} \quad g' - \frac{2}{x}g = -\frac{3}{x^2}.$$

## 例子解析，续二

于右边方程两边同乘以 $x^{-2}$ (称作积分因子) 得

$$\frac{1}{x^2}g' - \frac{2}{x^3}g = \frac{-3}{x^4}.$$

注意上式左端可写作 $(g/x^2)'$. 因此 $(g/x^2)' = -3/x^4$. 积分得

$$\frac{g}{x^2} = \frac{1}{x^3} + C, \quad \forall x > 0.$$

由条件 $f(1) = \frac{1}{2}$ 知 $g(1) = 2$. 因此 $2 = 1 + C$, 即 $C = 1$. 于是

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x^3 + 1}.$$

解析完毕.

# 一阶方程的方向场(the direction field)

给定一阶方程 $x' = f(t, x)$，设 D 为函数 f 的定义域．对任意点 $(t_0, x_0) \in D$，以该点为起始点，以 $f(t_0, x_0)$ 为斜率画出一个小箭头 (或线段)．这个小箭头称点$(t_0, x_0)$ 处的一个方向．若 $x(t)$ 是经过点 $(t_0, x_0)$ 的解，即 $x(t_0) = x_0$，则

$$x'(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0).$$

即解曲线 $x = x(t)$ 在点处的斜率为 $f(t_0, x_0)$．这表明点 $(t_0, x_0)$ 的小箭头代表了解曲线的走向．若对开区域 D 中比较密集的点上画出方向，则我们可以大致看出解曲线的走向．粗略地说，这些小箭头 (或线段) 构成了一阶方程 $x' = f(t, x)$ 的方向场．

Riccati 方程 $x' = x^2 - t$ 的方向场，以及几条解曲线如图所示.

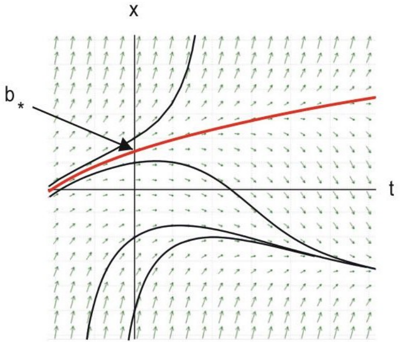



**Figure 1.1**: *Direction field for the Riccati equation* (1.6)*, with several solution trajectories corresponding to different choices of initial condition* $x(0)$.

**Theorem (Picard 定理)**

考虑一阶方程 $x' = f(t, x)$，其中函数 $f$ 以及偏导数 $f_x$ 在平面开域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，则对任意点 $(t_0, x_0) \in \Omega$，

**(i)** (存在性) Cauchy 问题 $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ 有解 $\phi(t)$, $t \in J_1$, $J_1$ 是包含 $t_0$ 的一个开区间.

**(ii)** (唯一性) 若还有其他解 $\psi(t)$, $t \in J_2$, 其中 $J_2$ 是包含 $t_0$ 的一个开区间，则 $\psi(t) \equiv \phi(t)$, $\forall t \in J_1 \cap J_2$.

这是 ODE 理论中最重要的定理(没有之一)! 定理证明略.

# 有显式解的几类一阶方程

大部分常微分方程的解没有显式表达. 例如 Liouville 于 1841 年证明, Riccati 方程 $x' = x^2 - t$ 无显式解, 即其解不能用初等函数表示. 以下是几类具有显式表达式的方程.

1) 一阶线性方程;

2) 变量分离型方程;

3) 恰当方程.

**Theorem**

定理: 考虑一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$. 假设函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在开区间 $J$ 上连续, 则对于任意时刻 $t_0 \in J$, 以及任意初始值 $x_0 \in \mathbb{R}$, Cauchy 问题 $x' + a(t)x = b(t)$, $x(t_0) = x_0$ 有唯一解如下

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds, \ \forall t \in J.$$

例一：求方程 $x' + 2tx = e^{-t^2}$ 满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的解.

解：对于上述方程，函数 $a(t) = 2t$, $b(t) = e^{-t^2}$，它们的定义域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. 在通解公式

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds.$$

中，取 $t_0 = 0$. 于是 $\int_0^t a(s)ds = \int_0^t 2sds = t^2$. 于是一阶线性方程 $x' + 2tx = e^{-t^2}$ 满足初值条件 $x(0) = x_0$ 的唯一解为

$$x(t) = x_0 e^{-t^2} + e^{-t^2} \int_0^t e^{-s^2} e^{s^2} ds = x_0 e^{-t^2} + te^{-t^2}.$$

解答完毕.

# 一阶线性方程, 例二

例二: 求解一阶线性方程 $x' + \frac{x}{t} = 3t$, $t > 0$.

解: 函数 $a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = 3t$, 定义区间可取为 $J = (0, +\infty)$. 为方便 $t_0 = 1$. 于是 $\int_1^t \frac{ds}{s} = \ln t$, $e^{-\int_1^t a(s)ds} = e^{-\ln t} = 1/t$, $\int_1^t b(s)e^{\int_1^s a(\tau)d\tau} = \int_1^t 3s \cdot sds = t^3 - 1$. 因此方程满足 $x(1) = x_0$ 的唯一解为

$$x(t) = x_0 e^{-\int_1^t a(s)ds} + e^{-\int_1^t a(s)ds} \int_1^t b(s)e^{\int_1^s a(\tau)d\tau} ds$$

$$= \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t}(t^3 - 1) = \frac{x_0}{t} + (t^2 - \frac{1}{t}).$$

解答完毕.

注一: 一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 初值问题 $x(t_0) = x_0$ 的求解公式

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds,$$

可写作

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\int_{t}^{s} a(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in J.$$

注二: 如果不关心解的初值条件, 则求解公式可写作不定积分的形式, 即

$$x(t) = ce^{-\int a(t)dt} + e^{-\int a(t)dt} \int b(t) e^{\int a(t)dt} dt. \quad \forall t \in J.$$

# 一阶线性方程解的整体存在性

根据一阶线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的通解公式

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)e^{\int_t^s a(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in J,$$

可知方程每个解均定义在整个区间 $J$ 上. 这个性质称作线性方程解的整体存在性.

对于非线性方程, 这样的性质不再成立. 例如易证非线性方程 $\frac{dx}{dt} = 2t(1+x^2)$ 有解 $x = \tan(t^2)$. 显然这个解的最大存在区间为 $(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$. 虽然右端函数 $2t(1+x^2)$ 在全平面上定义. 但方程的解并不是整体有定义, 即解并不是在整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 上定义.

证明: 设 $x(t)$ 是方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的解, 且满足初值条件 $x(t_0) = x_0$, 则对等式 $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ 两边同乘 $e^{\hat{a}(t)}$ (常称作积分因子) 得

$$e^{\hat{a}(t)}[x' + a(t)x] = e^{\hat{a}(t)}b(t).$$

其中 $\hat{a}(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$, $x = x(t)$. 因上式左边可写作 $[xe^{\hat{a}(t)}]'$, 故 $[xe^{\hat{a}(t)}]' = e^{\hat{a}(t)}b(t)$. 两边从 $t_0$ 到 $t$ 积分, 并注意 $\hat{a}(t_0) = 0$, 即得

$$x(t)e^{\hat{a}(t)} - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{\hat{a}(s)}b(s)ds.$$

将 $x_0$ 移到右边, 且两边同除 $e^{\hat{a}(t)}$ 即得

$$x(t) = x_0 e^{-\hat{a}(t)} + e^{-\hat{a}(t)} \int_{t_0}^{t} e^{\hat{a}(s)} b(s) ds, \quad \forall t \in J. \quad (*)$$

这说明初值问题的解 $x(t)$ 都可写作公式(*)的形式. 解的唯一性同时得证. 将上述步骤可逆推回去, 即可知公式 (*) 定义的 $x(t)$ 是方程的解, 且满足初值条件 $x(t_0) = x_0$. 定理得证. □

# 解的结构

观察 Cauchy 问题 $x' + a(t)x = b(t)$, $x(t_0) = x_0$ 的求解公式

$$x = x_0 e^{-\hat{a}(t)} + e^{-\hat{a}(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\hat{a}(s)} ds, \qquad (*)$$

其中 $\hat{a}(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau$, 可知线性方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 通解具有如下结构:

非齐次方程通解 = 齐次方程通解 + 非齐次方程特解.

如同线性代数方程组 $A\xi = b$ 解的结构.

证明: 显然式 (*) 第一项 $x_0 e^{-\hat{a}(t)}$ 是齐次方程 $x' + a(t)x = 0$ 的解. 记第二项为 $\xi(t)$, 即

# 通解结构，续

$$\xi(t) = e^{-\hat{a}(t)} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\hat{a}(s)} ds.$$

以下验证，$\xi(t)$ 是非齐次方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的解 (特解):

$$\xi'(t) = e^{-\hat{a}(t)} [-a(t)] \int_{t_0}^{t} b(s) e^{\hat{a}(s)} ds$$

$$+ e^{-\hat{a}(t)} b(t) e^{\hat{a}(t)} = -a(t)\xi(t) + b(t).$$

即 $\xi(t)$ 是方程 $x' + a(t)x = b(t)$ 的解. 证毕.

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 为周期连续函数．这类方程称为一阶线性周期方程．

注1：这里记号与之前的有两处不同．其一，这里独立变量和未知函数分别记作 $x$ 和 $y$，而不是以往的 $t$ 和 $x$；其二，是项 $p(x)y$ 现位于方程的右端，而不是以往位于左端；注 2：根据线性方程解的整体存在性可知，对于一阶线性周期方程，其每个解的最大存在区间均为 $(-\infty, +\infty)$．

不失一般性，可设周期为 $2\pi$．关于这类方程，我们关心：

(1) 方程是否存在 $2\pi$ 周期解？判别条件？

(2) 存在时，有多少个？可否表示出来．

# 周期解个数

**Theorem**

考虑一阶线性方程 $y' = p(x)y + q(x)$，这里 $p(x), q(x)$ 为周期连续函数，周期为 $2\pi$，则

i) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$，则方程有唯一一个 $2\pi$ 周期解；

ii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但 $\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx \neq 0$，则方程没有 $2\pi$ 周期解；

iii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且 $\int_0^{2\pi} q(x)e^{\int_x^{2\pi} p(s)ds}dx = 0$，则方程的每个解都是 $2\pi$ 周期解.

# 周期解存在的充要条件

**Lemma**

记号与假设如上，设 $y=\phi(x)$ 是线性周期方程 $y'=p(x)y+q(x)$ 的一个解，则 $\phi(x)$ 是 $2\pi$ 周期解 $\Longleftrightarrow \phi(2\pi)=\phi(0)$.

$\Longrightarrow$: 显然成立.

$\Longleftarrow$: 设 $\phi(2\pi)=\phi(0)$. 要证 $\phi(x+2\pi)=\phi(x), \forall x\in\mathbb{R}$. 令 $\psi(x):=\phi(x+2\pi)$, 则显然 $\psi(0)=\phi(2\pi)=\phi(0)$, 并且 $\psi(x)$ 也是解. 因为

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \phi'(x+2\pi)\\ &= p(x+2\pi)\phi(x+2\pi)+q(x+2\pi)\\ &= p(x)\psi(x)+q(x).\end{aligned}$$

根据解的唯一性可知 $\psi(x)=\phi(x)$, 即 $\phi(x+2\pi)=\phi(x)$. 此即解 $\phi(x)$ 是 $2\pi$ 周期的. Lemma 得证. $\square$

证明: 记 Cauchy 问题 $y' = p(x)y + q(x)$, $y(0) = y_0$ 的唯一解为 $\phi(x, y_0)$. 根据通解公式知

$$\phi(x, y_0) = y_0 e^{\int_0^x p(s)ds} + \int_0^x q(s) e^{\int_s^x p(\tau)d\tau} ds.$$

由 Lemma 知解 $\phi(x, y_0)$ 是 $2\pi$ 周期解 $\iff \phi(2\pi, y_0) = y_0$,

$$\iff y_0 e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds} + \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds = y_0$$

$$\iff \left(1 - e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds}\right) y_0 = \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds. \quad (*)$$

# 证明，续

$$\Longleftrightarrow \left(1 - e^{\int_0^{2\pi} p(s)ds}\right) y_0 = \int_0^{2\pi} q(s) e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds. \quad (*)$$

i) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx \neq 0$，则方程 (*) 关于 $y_0$ 有且仅有一个解，此即方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 有且仅有一个 $2\pi$ 周期解.

ii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，但 $\int_0^{2\pi} q(s)e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds \neq 0$，则方程 (*) 关于 $y_0$ 无解，即方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 无 $2\pi$ 周期解.

iii) 若 $\int_0^{2\pi} p(x)dx = 0$，且 $\int_0^{2\pi} q(s)e^{\int_s^{2\pi} p(\tau)d\tau} ds = 0$，则方程 (*) 关于任意 $y_0$ 成立. 此即方程 $y' = p(x)y + q(x)$ 的每个解都是 $2\pi$ 周期解. 证毕. □

# Riccati 方程的周期解问题

考虑周期 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，这里 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 均为周期连续函数，周期为 $2\pi$. 我们关心：方程是否存在 $2\pi$ 周期解？若存在，有多少？

**Theorem**

假设函数 $p(x)$ 不变号，且不恒为零，则周期 Riccati 方程 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 至多有两个不同的 $2\pi$ 周期解.

# 定理证明

反证: 假设 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ 为三个不同的 $2\pi$ 周期解. 由解的存在唯一性可设

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

考虑解 $\phi_k$ 所满足的方程

$$\phi_1' = p(x)\phi_1^2 + q(x)\phi_1 + r(x),$$
$$\phi_2' = p(x)\phi_2^2 + q(x)\phi_2 + r(x),$$
$$\phi_3' = p(x)\phi_3^2 + q(x)\phi_3 + r(x).$$

这里解 $\phi_k(x)$ 已经简写为 $\phi_k$.

将第二个方程减去第一个方程，并且两边同除 $\phi_2 - \phi_1$ 得

$$\frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_2 + \phi_1) + q(x).$$

同样将第三个方程减去第一个方程得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 + \phi_1) + q(x).$$

再将上述两个等式相减得

$$\frac{\phi_3' - \phi_1'}{\phi_3 - \phi_1} - \frac{\phi_2' - \phi_1'}{\phi_2 - \phi_1} = p(x)(\phi_3 - \phi_2).$$

于上式两边从 0 到 $2\pi$ 积分得

# 证明，续二

$$\ln \frac{\phi_3(x) - \phi_1(x)}{\phi_2(x) - \phi_1(x)}\Bigg|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} p(x)[\phi_3(x) - \phi_2(x)]dx.$$

注意上式左边为零，因为解是 $2\pi$ 周期的．考虑等式右边．根据假设 $p(x)$ 不变号且不恒为零，而函数 $\phi_3(x) - \phi_2(x)$ 恒大于零．因此右边的积分不为零．这就得到了一个矛盾．矛盾说明方程至多有两个不同的以 $2\pi$ 为周期的周期解．定理得证． □

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程称作变量分离型方程 (separable equations).

形式解法: 先分离变量, 再取不定积分, 即

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

第二个等式可看作一族函数方程, 并称之为方程的通解或一般解. 首先注意到, 函数 $g(y)$ 的每个零点都是方程的常数解. 也就是说, 若 $g(y_0) = 0$, 则 $y(x) \equiv y_0$ 是常数解.

**Example**

例一：求方程 $y' = e^{x-y}$ 的通解.

解：分离变量得 $e^y dy = e^x dx$，两边积分得通解 $e^y = e^x + C$.

**Example**

例二：求解初值问题 $y' = y^2 \cos x$，$y(0) = 1$.

解：关于方程 $y' = y^2 \cos x$ 分离变量得 $\frac{dy}{y^2} = \cos x dx$，两边积分 $\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx$，求得方程的通解 $-1/y = \sin x + C$. 令 $x = 0$ 得 $-1 = C$. 于是所求初值问题的解为 $y = \frac{1}{1-\sin x}$.

例三：考虑 Logistic 方程 $\frac{dx}{dt} = ax(x-1)$. 首先注意方程有两个常数解 $x = 0$ 和 $x = 1$. 再将方程分离变量并积分得

$$\frac{dx}{x(x-1)} = adt, \quad \int \frac{dx}{x(x-1)} = a\int dt.$$

计算上述不定积分得通解

$$\ln|x| - \ln|1-x| = at + c \quad 或 \quad \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = at + c,$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 为任意常数. 上式可等价地写作

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| = c_1 e^{at} \quad 或 \quad \frac{x}{1-x} = c_2 e^{at},$$

其中 $c_1 = e^c > 0$, $c_2 = \pm c_1 \neq 0$.

由 $\frac{x}{1-x} = c_2 e^{at}$ 可解得

$$x(t) = \frac{c_2 e^{at}}{1 + c_2 e^{at}}. \quad (*)$$

当 $c_2 = 0$ 时，由式 (*) 得到方程的特解 $x = 0$. (注：方程另一特解 $x = 1$, 对应情形 $c_2 = +\infty$) 因此式 (*) 中 $c_2$ 取任意常数，都得到解.

再来考虑初值问题的解. 在式 (*) 中令 $t = 0$ 得

$$x(0) = \frac{c_2}{1 + c_2} \quad 或 \quad c_2 = \frac{x(0)}{1 - x(0)}.$$

于是方程满足初始条件 $x(0) = x_0$ 的解可表为

$$x = \frac{x_0 e^{at}}{1 - x_0 + x_0 e^{at}}.$$

由通解公式

$$x(t) = \frac{c_2 e^{at}}{1 + c_2 e^{at}},$$

可知当 $c_2 \geq 0$ 时，对应的解在整个实轴上有定义．而当 $c_2 < 0$ 时，对应的解仅定义在单边无穷区间上，而不是在整个实轴上．所以不同的解，最大存在区间可能不同．

# Logistic 方程的方向场，解曲线和相图

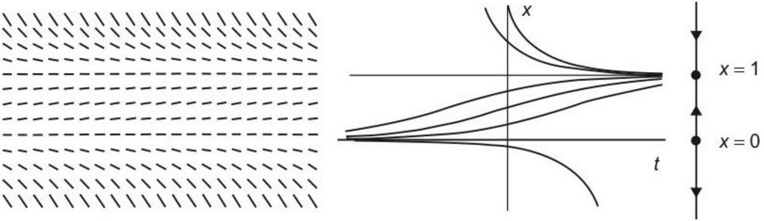



Figure 1.3 Slope field, solution graphs, and phase line for $x' = ax(1-x)$.

**Theorem**

定理: 考虑方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, 其中 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续, $g(y)$ 在 $(c,d)$ 上连续可微, 则对 $\forall (x_0, y_0) \in (a,b) \times (c,d)$, Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的唯一解 $y = \phi(x)$ 可如下确定.

(i) 若 $g(y_0) = 0$, 则 $\phi(x) \equiv y_0$;

(ii) 若 $g(y_0) \neq 0$, 则 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$, $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, 其中 $G^{-1}(z)$ 表示 $G(y)$ 的反函数,

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dv}{g(v)}, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)du.$$

情形一：若 $g(y_0)=0$，则易知 Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$，$y(x_0)=y_0$ 有常数解 $y=y_0$. 由解的唯一性知 $\phi(x)\equiv y_0$.

情形二：设 $g(y_0)\neq 0$. 此时定义函数

$$G(y)\triangleq\int_{y_0}^{y}\frac{dv}{g(v)}.$$

函数 $G(y)$ 至少在 $(y_0-\delta, y_0+\delta)$ 上有定义，连续可微，且严格单调. 再定义函数

$$\phi(x)\triangleq G^{-1}(F(x)),\quad x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon),$$

其中 $F(x)\triangleq\int_{x_0}^{x}f(u)du$, $x\in(a,b)$.

注意 $F(x_0)=0$，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，复合函数 $G^{-1}(F(x))$ 在开区间 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 有意义. 进一步 $\phi(x)$ 连续可微，$\phi(x_0)=G^{-1}(F(x_0))=G^{-1}(0)=y_0$，并且

$$\phi'(x)=[G^{-1}(F(x))]'=[G^{-1}]'(F(x))\cdot F'(x)$$

$$=\frac{1}{G'(\phi)}f(x)=\frac{1}{\frac{1}{g(\phi)}}f(x)=f(x)g(\phi(x)),$$

其中 $x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. 这表明 $y=\phi(x)$ 就是 Cauchy 问题 $y'=f(x)g(y)$，$y(x_0)=y_0$ 的解. 证毕. $\square$

注一: 设 $\phi(x)$ 是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ 的解, 其中 $g(y_0) \neq 0$, 则必有 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$, 这里 $J$ 为解 $\phi(x)$ 的定义区间. 证明如下. 假设存在 $x_1 \in J$, 使得 $g(\phi(x_1)) = 0$. 记 $y_1 = \phi(x_1)$, 则 $y = \phi(x)$ 也是 Cauchy 问题 $y' = f(x)g(y)$, $y(x_1) = y_1$. 但另一方面这个 Cauchy 问题有常数解 $y \equiv y_1$. 由解的唯一性知 $\phi(x) \equiv y_1$. 令 $x = x_0$ 得 $y_0 = \phi(x_0) = y_1$. 这不可能. 因为 $g(y_0) \neq 0$, 而 $g(y_1) = 0$. 故 $g(\phi(x)) \neq 0$, $x \in J$.

<u>注二</u>: 解 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$ 也可用如下方式得到. 由恒等式 $\phi'(x) = f(x)g(\phi(x))$, $x \in J$ 可得

$$\frac{\phi'(x)}{g(\phi(x))} = f(x), \quad x \in J,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(u)du}{g(\phi(u))} = \int_{x_0}^{x} f(u)du$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dv}{g(v)} = F(x),$$

即 $G(\phi(x)) = F(x)$, 故 $\phi(x) = G^{-1}(F(x))$.

# 可化为分离型的方程，类型一

类型一. 齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$. 令 $u = y/x$ 或 $y = ux$, 即将变量 $u$ 看作新的未知函数，则

$$y' = u'x + u = f(u),$$

即 $u'x = f(u) - u$, 或 $u' = \frac{f(u)-u}{x}$. 这是变量分离型方程.

**Example**

例: 求解 Cauchy 问题 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 或 $y = ux$. 于是 $y' = xu' + u = u + \tan u$, 即 $xu' = \tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$. 分离变量得

$$\frac{\cos u du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin u| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \sin u = C_1 x \Rightarrow u = \arcsin C_1 x \text{ 或 } y = x \arcsin C_1 x.$$

由初值条件 $y(1) = \frac{\pi}{2}$ 得 $\arcsin C_1 = \frac{\pi}{2}$, 即 $C_1 = 1$. 故所求唯一解为 $y = x \arcsin x$.

例子. 求解方程

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

解: 如果将右端分子分母中的常数 1 和 $-3$ 设法消去，则方程就变为齐次方程，从而可求解. 为此考虑线性代数方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

解之得 $x = 1$, $y = 2$. 令 $v = x - 1$, $u = y - 2$, 或 $x = v + 1$, $y = u + 2$. 即 $v$ 为新的独立变量，$u$ 为新的未知函数.

于是
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dv} = \frac{v-u}{v+u}.$$
令 $w = \frac{u}{v}$ 或 $w = uv$，则
$$\frac{du}{dv} = w + v\frac{dw}{dv} \quad 且 \quad \frac{v-u}{v+u} = \frac{v-vw}{v+vw} = \frac{1-w}{1+w}$$
$$\Rightarrow \quad w + v\frac{dw}{dv} = \frac{1-w}{1+w} \quad \Rightarrow \quad v\frac{dw}{dv} = \frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

# 例子，续二

$$\Rightarrow \quad \frac{(1+w)dw}{2-(1+w)^2} = \frac{dv}{v} \quad \Rightarrow \quad -\frac{d[2-(1+w)^2]}{2-(1+w)^2} = \frac{2dv}{v}$$

$$\Rightarrow \quad \ln v^2 + \ln[2-(1+w)^2] = C \quad \Rightarrow \quad v^2[2-(1+w)^2] = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2v^2 - v^2(1+w)^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad 2v^2 - (v+u)^2 = C_1$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_1. \quad (*)$$

上式为原方程 $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ 的一般解. 易证取 $C_1 = 0$ 时, 由式 (*) 所确定的两条直线也是解. 因此原方程的一般解为 $2(x-1)^2 - (x+y-3)^2 = C_2$, 其中 $C_2$ 为任意常数.

# 作业

习题7.1 (pp. 212-213): 2, 3(奇), 4(奇), 5.

习题7.2 (pp. 220-221): 1(奇), 2(奇).