《微积分A1》第三十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月25日

n阶齐次线性方程的解空间构成n维线性空间

Theorem

n阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

的全体解集合构成一个n维线性空间.

<u>证明概要</u>: 证明思想同二阶情形. 固定一点 $x_0 \in J$, 记 $\phi_k(x)$ 为齐次方程 $(*)_{齐}$ 满足初值条件 $y^{(j)}(x_0) = 0$, $y^{(k)}(x_0) = 1$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$, $j \neq k$ 的唯一解, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 则不难证明这n个解构成解空间的一个基底. 也就是说, (1) 这n个解线性无关; (2) 方程 $(*)_{齐}$ 的每个解可由这n个线性表出. 定理得证.

基本解组

Definition

n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \qquad (*)_{齐}$$

的任意 n 个线性无关的解均称为方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组 (fundamental solutions).

Wronsky 行列式

Definition

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 的 n 个解，称如下 n 阶行列式 $W(x)$ 为这 n 个解所对应的 Wronsky 行列式.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Liouville 定理

Theorem

设 $W(x)$ 是齐次方程 $(*)_{齐}$, 即方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \qquad (*)_{齐}$$

的任意一个 Wronsky 行列式, 则 $W(x)$ 可表为

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}, \quad \forall x_0, x \in J. \qquad (**)$$

注: 公式 (**) 常称为 Liouville 公式. 这个公式表明 Wronsky 行列式或者恒为零, 或者处处非零.

证: 设 $W(x)$ 是由 n 个解 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 所确定的 Wronsky 行列式, 即

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

考虑 $W(x)$ 的导数. 注意对上述行列式前 $n-1$ 行中的任意一行求导后, 所得行列式由两行相同, 故为零. 因此

证明续

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

由方程 $(*)_{齐}$ 可知 $y_k^{(n)}(x) = -a_1(x)y_k^{(n-1)}(x) - \cdots$. 将其带入上式得 $W'(x) = -a_1(x)W(x)$. 故 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}$.

定理得证. □

Example

考虑 Hill 方程 $y'' + a(x)y = 0$, 其中 $a(x)$ 是区间 (a, b) 上连续函数. 不难看出方程的任何 Wronsky 行列式均为常数. 这是因为对于 Hill 方程而言, 系数函数 $a_1(x) \equiv 0$. 因此根据 Liouville 公式立刻得到结论.

Theorem

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次方程$(*)_{齐}$ 的 n 个解，它们所确定的 Wronsky 行列式记作 $W(x)$，则这 n 个解线性相关(无关) $\Longleftrightarrow W(x) \equiv 0$ ($W(x)$ 处处非零).

证明：只证括号外结论. $\Longrightarrow$：显然. $\Longleftarrow$：设 $W(x) \equiv 0$. 任取一点 $x_0 \in J$，由 $W(x_0) = 0$ 可知行列式 $W(x_0)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 n 个不全为零的数 c_k, $k = 1, \cdots, n$，使得

$$c_1 Y_1(x_0) + \cdots + c_n Y_n(x_0) = 0, \qquad (**)$$

定理证明续

其中 $Y_k(x_0) \triangleq (y_k(x_0), y_k'(x_0), \cdots, y_k^{(n-1)}(x_0))^T$，即 $Y_k(x_0)$ 为 $W(x_0)$ 的第 k 个列向量，$k = 1, \cdots, n$. 令 $y_*(x) \triangleq c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$，则 $y_*(x)$ 是齐次方程$(*)_{齐}$的解，且由式$(**)$知 $y_*(x)$ 满足初值条件 $y_*^{(j)}(x_0) = 0$, $j = 0, 1, \cdots, n-1$. 由 Cauchy 问题解的唯一性可知，$y_*(x)$ 恒为零. 这表明解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 线性相关. 证毕. $\square$

定义：假设 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次方程 $(*)_{齐}$ 的一个基本解组，它们所确定的 Cauchy 函数定义为

$$H(s,x) \triangleq \frac{W(s,x)}{W(s)},$$

这里 $W(s)$ 为基本解组 $y_1(s), \cdots, y_n(s)$ 对应的 Wronsky 行列式，$W(s,x)$ 是将行列式 $W(s)$ 的最后一行元素依次换为 $y_1(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 所得到行列式，即

Cauchy 函数定义，续

$$W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \cdots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \cdots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix},$$

$$W(s,x) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \end{vmatrix}.$$

定理：考虑非齐次 n 阶线性方程 $(*)_{非}$，即方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x). \qquad (*)_{非}$$

假设已知对应齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \qquad (*)_{齐}$$

的一个基本解组 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$，则非齐次方程 $(*)_{非}$ 的一般解为 $y(x) = y_g(x) + y_p(x)$，其中 $y_g(x)$ 是 $(*)_{齐}$ 的一般解，即 $y_g(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$，$y_p(x) \triangleq \int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)ds$ 是 $(*)_{非}$ 的一个特解. 这里 $H(s,x)$ 为基本解组 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 所确定的 Cauchy 函数. (定理证明基于 Cauchy 函数的性质. 这里从略)

例子

例: 求方程 $y''' - 3y'' + 2y' = 2e^x$ 的通解.

解: 稍后将系统讨论常系数线性齐次方程的基本解组的解法.

这里先应用这个解法来求 $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ 的基本解组. 其特征方程为 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$, 即 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$, 特征根为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. 由此得基本解 $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$. 对应的 Wronsky 行列式为

$$W(s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & y_3(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & y_3'(s) \\ y_1''(s) & y_2''(s) & y_3''(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^s & e^{2s} \\ 0 & e^s & 2e^{2s} \\ 0 & e^s & 4e^{2s} \end{vmatrix} = 2e^{3s},$$

例子，续一

$$W(s,x) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & y_3(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & y_3'(s) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^s & e^{2s} \\ 0 & e^s & 2e^{2s} \\ 1 & e^x & e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2x+s} - 2e^{x+2s} + e^{3s}.$$

于是 Cauchy 函数为

$$H(s,x) = \frac{W(s,x)}{W(s)} = \frac{e^{2x+s} - 2e^{x+2s} + e^{3s}}{2e^{3s}}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x-2s} - 2e^{x-s} + 1).$$

于是方程 $y''' - 3y'' + 2y' = 2e^x$ 有如下特解

$$y_p = \int_0^x H(s,x)f(s)ds = \int_0^x \frac{1}{2}(e^{2x-2s} - 2e^{x-s} + 1)2e^s ds$$

$$= \int_0^x (e^{2x-s} - 2e^x + e^s)ds = e^{2x} - 2xe^x - 1.$$

由于 1 是齐次方程 $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ 的解，故 $e^{2x} - 2xe^x$ 也是方程 $y''' - 3y'' + 2y' = 2e^x$ 的特解．于是所求通解为 $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + e^{2x} - 2xe^x$，其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数．解答完毕.

考虑高阶线性常系数方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x),\qquad (*)_{\text{非}}$$

以及对应的齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0,\qquad (*)_{\text{齐}}$$

这里 $a_1,\cdots,a_n$ 均为常数. 我们将给出齐次方程 $(*)_{\text{非}}$ 的一个显式的基本解组.

关于齐次方程 $(*)_{齐}$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \qquad (*)_{齐}$$

有以下几个简单事实:

(i) 每个解在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一;

(ii) 解空间是 n 维线性空间;

(iii) 每个 Wronsky 行列式 $W(x)$ 可表为 $W(x) = W(0)e^{-a_1 x}$.

为方便，记

$$L(\lambda) \triangleq \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

并称之为齐次方程 $(*)_{齐}$ 的特征多项式，方程 $L(\lambda) = 0$ 称为特征方程，其根称为特征根．记 $D \triangleq \frac{d}{dx}$ 为微分算子，并且定义

$$L(D) \triangleq D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n,$$

则非齐方程 $(*)_{非}$ 和齐次方程 $(*)_{齐}$ 可分别记作

$$L(D)y = D^ny + a_1D^{n-1}y + \cdots + a_ny = f(x),$$
$$L(D)y = D^ny + a_1D^{n-1}y + \cdots + a_ny = 0.$$

Theorem

指数函数 $e^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的解 $\iff L(\lambda_0) = 0$.

Proof.

$$L(D)e^{\lambda_0 x} = (D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda_0 x}$$

$$= (\lambda_0^n + a_1 \lambda_0^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda_0 x} = L(\lambda_0)e^{\lambda_0 x}.$$

因此 $e^{\lambda_0 x}$ 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的解 $\iff L(\lambda_0) = 0$. □

基本解组，特征根互异情形

定理：如果 n 阶齐次方程 $L(D)y=0$ 的 n 个特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 互异，则方程有基本解组 $e^{\lambda_1 x},\cdots,e^{\lambda_n x}$.

证：由之前定理知这 n 个指数函数都是解．要证它们构成基本解组，只要证明它们线性无关即可．简单计算可知它们对应的 Wronsky 行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}.$$

证明续

易见行列式 $W(x)$ 在 $x = 0$ 处的值为 Vandermonde 行列式

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

由假设特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 互异，故 $W(0) \neq 0$. 因此这 n 个指数函数解线性无关. 定理得证. $\square$

例子

Example

求齐次方程 $y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0$ 的基本解组.

解: 特征方程为 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4 = 0$. 作分解因式得 $(\lambda - 2)[(\lambda - 1)^2 + 1] = 0$. 由此求得到三个互异的特征根 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. 于是方程有的一组复函数基本解组 e^{2x}, $e^{(1+i)x}$ 和 $e^{(1-i)x}$. 取复函数解的实部和虚部就得到一组实的基本解祖 e^{2x}, $e^x \cos x$ 和 $e^x \sin x$. 解答完毕.

Theorem

设 λ_1 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的 $k \geq 1$ 重特征根，则 $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, $\cdots$, $x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$ 是方程的 k 个线性无关解.

证：定理中的 k 个函数的线性无关性显而易见. 往下来证明它们是解. 即要证

$$L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}] = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1. \qquad (**)$$

根据假设 λ_1 是 $k \geq 1$ 重特征根，可知特征多项式 $L(\lambda)$ 可表为 $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k L_1(\lambda)$，其中 $L_1(\lambda_1) \neq 0$.

为证明式(**)，观察知 $xe^{\lambda x}$ 可以表示为 $xe^{\lambda x}=D_\lambda e^{\lambda x}$，这里 D_λ 代表关于 λ 的微分算子，即 $D_\lambda\triangleq\frac{d}{d\lambda}$. 由于函数 $e^{\lambda x}$ 足够光滑，故 $DD_\lambda(e^{\lambda x})=D_\lambda D(e^{\lambda x})$. 即二阶混合导数相等. 进一步不难证明

$$L(D)D_\lambda^j(e^{\lambda x})=D_\lambda^j L(D)(e^{\lambda x}).$$

于是

$$L(D)[x^j e^{\lambda_1 x}] = L(D)[x^j e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$= L(D)[D_\lambda^j e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_1} = D_\lambda^j L(D) e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1}$$

$$= D_\lambda^j L(\lambda) e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = D_\lambda^j \Big[(\lambda - \lambda_1)^k L_1(\lambda)\Big] e^{\lambda x}\Big|_{\lambda=\lambda_1} = 0.$$

这就证明了 $x^j e^{\lambda_1 x}$, $j = 0, 1, \cdots, k-1$, 是方程的 k 个解. □

Theorem

定理：设 n 阶线性齐次方程 $L(D)y=0$ 有 s 个互异的特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，对应的重数为 $k_1,\cdots,k_s$，其中 $k_1+\cdots+k_s=n$，则如下 n 个函数组构成了齐次方程 $L(D)y=0$ 的一个基本解组.

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x} & \cdots, & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x} & \cdots, & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x} & \cdots, & x^{k_s-1}e^{\lambda_s t}.
\end{array}
$$

证明：根据前一个定理可知上述 n 个函数都是解. 再根据本次课的选作题之结论，可知它们的线性无关性. 证毕.

Example

例: 求方程 $y^{(5)}-2y^{(4)}-16y'+32y=0$ 的基本解组.

解: 方程的特征多项式为 $L(\lambda)=\lambda^5-2\lambda^4-16\lambda+32$. 为求特征值, 需对 $L(\lambda)$ 作分解因式得 $L(\lambda)=\lambda^4(\lambda-2)-16(\lambda-2)$ $=(\lambda-2)(\lambda^4-16)=(\lambda-2)^2(\lambda+2)(\lambda^2+4)$. 于是特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$, $\lambda_4=2i$, $\lambda_5=-2i$. 进而得到方程实的基本解组为 e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, $\cos 2x$, $\sin 2x$. 解答完毕.

回忆对非齐次方程 $L(D)y = f(x)$，若已知齐次方程 $L(D)y = 0$ 的一个基本解组，那么 $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)b(s)ds$ 就是非齐方程一个特解. 这里 $H(s,x)$ 是基本解组所对应的 Cauchy 函数.

以下针对函数类 $f(x) = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$，用待定系数法，直接求方程 $L(D)y = f(x)$ 的特解，这里 $\phi(x)$ 为多项式. 待定系数法可能比计算 Cauchy 形式的特解 $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} H(s,x)f(s)ds$ 来得更简单快捷. 方法的理论基础是如下的两个定理.

待定系数法的理论基础

定理一：若 λ_0 不是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的特征值，则非齐次方程 $L(D)y = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解具有形式 $y_p(x) = e^{\lambda_0 x}\psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 为多项式，且 $\deg\psi(x) = \deg\phi(x)$.

定理一的证明稍后给出.

定理二：设 λ_0 是齐次方程 $L(D)y = 0$ 的 k 重特征值，则非齐次方程 $L(D)y = e^{\lambda_0 x}\phi(x)$ 有唯一解有形式 $y_p(x) = e^{\lambda_0 x}x^k\psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 为多项式，且 $\deg\psi(x) = \deg\phi(x)$.

定理二的证明思想同定理一. 略去.

例一：求方程 $y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征多项式为 $L(\lambda) = \lambda^2 - 1$，特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm 1$. $\lambda_0 = 2$ 不是特征值. 根据定理一可知方程有唯一解具有形式 $y_p(x) = e^{2x}(ax^2 + bx + c)$，其中 a, b, c 为待定常数. 将 $y_p(x)$ 代入方程 $y'' - y = e^{2x}(x^2+1)$，约去指数函数并加以整理得 $3ax^2 + (8a+3b)x + (2a+4b+3c) = x^2 + 1$. 比较两边的系数得到关于 a, b, c 的线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解之得 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{-8}{9}$, $c = \frac{35}{27}$. 特解 $y_p = e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right)$.

因此非齐次方程 $y'' - y = e^{2x}(x^2 + 1)$ 的通解为

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8x}{9} + \frac{35}{27}\right).$$

解答完毕.

例二：求方程 (*) $y'' - y = e^{-x}(x+1)$ 的一般解.

解：对应齐次方程的特征多项式为 $L(\lambda) = \lambda^2 - 1$，特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$，$\lambda_0 = -1$ 是单重特征值. 由定理二可知方程有唯一解具有形式 $y_p(x) = e^{-x}x(ax+b)$，其中 a, b 为待定常数. 将 $y_p(x)$ 代入方程 (*)，约去 e^{-x} 得 $-4ax + 2(a-b) = x+1$. 比较两边的系数得到关于 $a = -\frac{1}{4}$，$b = -\frac{3}{4}$. 故所求特解为 $y_p(x) = -e^{-x}(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4})$. 于是非齐次方程 (*) 的一般解为

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - e^{-x}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4}\right).$$

解答完毕.

证: 定义 $m+1$ 维线性空间

$$\mathcal{S} \triangleq \mathrm{span}\left\{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}\right\},$$

以及映射 $L(D)$: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $p(x) \mapsto L(D)p(x)$, $\forall p(\cdot) \in \mathcal{S}$. 显然 $L(D)$ 是线性的. 记映射 $L(D)$ 在基底 $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}$ 下的表示矩阵记作 A, 即

$$L(D)(e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x}) = (e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^m e^{\lambda_0 x})A.$$

证明续

经过一些初等但有些繁琐的计算可知，矩阵 $\mathbf{A}$ 为如下 $\mathbf{m}+1$ 阶的上三角矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{L}(\lambda_0) & * & \cdots & * \\ & \mathbf{L}(\lambda_0) & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{L}(\lambda_0) \end{bmatrix}.$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 中的元素 $*$ 代表某些我们目前并不感兴趣的常数．由于 λ_0 不是特征值，即 $\mathbf{L}(\lambda_0)\neq 0$．故矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆．于是线性映射 $\mathbf{L}(\mathbf{D})$ 可逆．定理一得证．证毕． $\square$

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \quad x > 0,$$

的方程称为 Euler 型方程, 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 为常数. 对应的齐次方程为

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \quad x > 0,$$

Lemma

引理: 函数 x^{λ_0} 是齐次 Euler 方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,\ x > 0,\ (*)$$

的解, 当且仅当 λ_0 是如下 n 次代数方程的根

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)$$

$$+\cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (**)$$

引理证明显而易见. 细节略去. 方程 (**) 称为齐次 Euler 方程 (*) 的特征方程, 其根称作特征根.

Example

例: 求解齐次 Euler 方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4y' = 0$, $x > 0$.

解: 考虑其特征方程 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) - 4\lambda = 0$. 整理得 $\lambda(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$. 于是 Euler 方程的特征根为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. 由此得方程的三个解 $y_1 = x^0 = 1$, $y_2 = x^{-1}$, $y_3 = x^3$. 显然这三个解在 $(0, +\infty)$ 上线性无关. 故所考虑的齐次 Euler 方程的通解为 $y = c_1 + c_2x^{-1} + c_3x^3$, 其中 c_1, c_2, c_3 为任意实常数.

对齐次 Euler 方程

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \ x > 0, \ (*)$$

可以通过变量替换 $x = e^u$ 或 $u = \ln x$ 化为常系数线性方程. 理由基于如下引理.

一个引理

引理: 设 $y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无穷连续可微函数, 记 $z(u)\triangleq y(e^u)$, $u\in(-\infty,+\infty)$, 则对任意正整数 $k\geq 1$ 下式成立

$$x^k\frac{d^k y(x)}{dx^k}\bigg|_{x=e^u}=\left(\frac{d}{du}-(k-1)\right)\cdots\left(\frac{d}{du}-1\right)\left(\frac{d}{du}-0\right)z(u).$$

证明用归纳法. 细节略去. 根据上述引理, 不难看出新的未知函数 $z(u)$ 满足一个常系数线性方程, 并且这个常系数线性方程所对应的特征方程, 正是之前我们假设解的形式 x^λ 所导出的特征方程.

例一：求 Euler 方程 $x^2y'' + \frac{1}{4}y = 0\ (x > 0)$ 的基本解组.

解：作变量代换 $x = e^t$, $z(t) = y(e^t)$, 则由引理知

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=e^t} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 0\right)z(t) = z''(t) - z'(t).$$

于是新的未知函数 $z(t) = y(e^t)$ 所满足的常系数线性方程为 $z'' - z' + \frac{1}{4}z = 0$. 其特征根为 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, 二重. 根据常系数情形的结论可知，方程 $z'' - z' + \frac{1}{4}z = 0$ 的基本解组为 $e^{\frac{t}{2}}$, $te^{\frac{t}{2}}$. 由此得到原 Euler 方程 $x^2y'' + \frac{y}{4} = 0$ 的基本解组为 $\sqrt{x}$, $\ln x\sqrt{x}$.

解答完毕.

课本第 237 页例 7.5.9: 求方程 $x^2y'' + xy' + y = 2x$ 的通解，其中 $x > 0$.

解: 方法一: 作变量代换 $x = e^t$, 或 $t = \ln x$, $z(t) = y(e^t)$. 由引理知

$$x\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e^t} = \left(\frac{d}{dt} - 0\right)z(t) = z'(t)$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=e^t} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 0\right)z(t) = z''(t) - z'(t).$$

将上式代入方程 $x^2y'' + xy' + y = 2x$ 得 $z'' - z' + z' + z = 2e^t$, 即 $z'' + z = 2e^t$.

根据待定系数法求特解的理论知，方程 $z''+z=2e^t$ 有形如 Ae^t 的解. 代入方程得 $Ae^t+Ae^t=2e^t$. 由此得待定系数为 $A=1$. 于是方程 $z''+z=2e^t$ 的一般解为 $z=c_1\cos t+c_2\sin t+e^t$. 再回到变量 $t=\ln x$ 得到原方程 $x^2y''+xy'+y=2x$ 的通解为

$$y=c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x+x.$$

方法二．考虑对应齐次方程 $x^2y''+xy'+y=0$ 的解．设方程有形如 x^λ 的解．代入方程得 $\lambda(\lambda-1)x^\lambda+\lambda x^\lambda+x^\lambda=0$．由此得 $\lambda^2+1=0$．即特征值为 $\pm i$．故齐次方程有解 $x^{\pm i}=e^{\pm i\ln x}=\cos\ln x\pm i\sin\ln x$．从而方程有基本解组 $\cos\ln x$, $\sin\ln x$．由观察知方程 $x^2y''+xy'+y=2x$ 有特解 $y=x$．因此方程的通解为 $y=c_1\cos\ln x+c_2\sin\ln x+x$．解答完毕．

注：也可以用特解的 Cauchy 形式求特解．先将方程 $x^2y''+xy'+y=2x$ 写作标准形式 $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{2}{x}$．再计算 Cauchy 函数．基本解组 $\cos\ln x$, $\sin\ln x$ 对应的 Wronsky 行列式为

$$W(s)=\begin{vmatrix}\cos\ln s & \sin\ln s\\ \frac{-1}{s}\sin\ln s & \frac{1}{s}\cos\ln s\end{vmatrix}=\frac{1}{s}$$

$$W(s,x)=\begin{vmatrix}\cos\ln s & \sin\ln s\\ \cos\ln x & \sin\ln x\end{vmatrix}=\cos\ln s\sin\ln x-\sin\ln s\cos\ln x$$

$$=\sin(\ln x-\ln s)=\sin\ln(x/s).$$

$$\Rightarrow \text{ Cauchy 函数为 } H(s,x)=\frac{W(s,x)}{W(s)}=\frac{\sin\ln\frac{x}{s}}{1/s}=s\cdot\sin\ln\frac{x}{s}.$$

于是方程 $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{2}{x}$ 有特解

$$y_p = \int_1^x H(s,x)f(s)ds = \int_1^x s\cdot \sin\ln\frac{x}{s}\cdot 2sds = 2\int_1^x \sin\ln\frac{x}{s}ds$$

$$= 2x\int_1^x \frac{\sin\ln u}{u^2}du = 2x\int_0^{\ln x} e^{-v}\sin v dv$$

$$= x\left[-e^{-v}(\cos v+\sin v)\Big|_0^{\ln x}\right] = x\left[-\frac{1}{x}(\cos\ln x+\sin\ln x)+1\right]$$

$$= x-\cos\ln x-\sin\ln x.$$

由于 $\cos\ln x$ 和 $\sin\ln x$ 均为齐次方程 $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=0$ 的解.

故非齐次方程 $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{2}{x}$ 有特解 $y_p=x$. 解答完毕.

习题7.4: 第 230-231 页, 1, 4, 5(奇), 6, 7, 8.

习题7.5: 第 238 页, 4(1)(3), 5, 6, 7.

选作题: 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 s 个互异的实数, 设 $k_1, \cdots, k_s$ 为 s 个正整数. 证明以下 $k := k_1 + \cdots + k_s$ 个函数在 $\mathbb{R}$ 上线性无关.

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \cdots, & t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \cdots, & t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \cdots & t^{k_s-1}e^{\lambda_s t}. \end{array}$$

(提示: 可考虑对 s 用归纳法.)