《微积分A1》第二十四讲

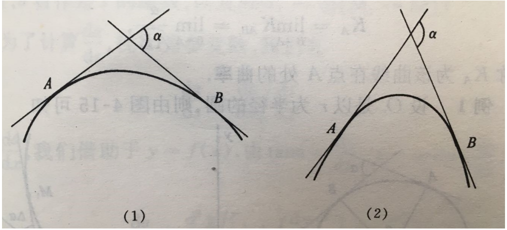
教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月04日

曲线的弯曲程度

先来观察下图



上述两个图中的弧段AB 的弧长大致相等. 由直觉知, 图 (2) 中的弧AB比图 (1) 中的弧AB的弯曲程度更大. 因为A, B两点的切线所成的夹角 α 更大. 角 α 可看作切线从点A出发沿着曲线移动至点B 所扫过的角度.

Definition

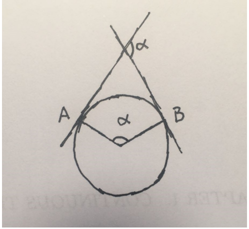
定义: 在平面光滑曲线 Γ 上任取两点 $A, B \in \Gamma$. 若记 α_{AB} 表示 A, B 两点的切线所成的夹角. 记 L_{AB} 表示弧段 AB 的弧长, 则比值 $\frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}}$ 可用作衡量弧段 AB 平均弯曲程度的一个量. 现固定点 A, 若极限

$$\lim_{B \to A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}}$$

存在, 则称极限值为曲线在点 A 处的曲率, 常记作 κ_A.

例子

考虑半径为 r 的圆周上，任意一点 A 处的曲率.



由图可知，角 $\alpha = \alpha_{AB}$ 等于弧 AB 所对应的圆心角. 因此弧长 $L_{AB} = \alpha r$. 于是 $\frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}} = \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}$. 故 $\lim_{B\to A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}} = \frac{1}{r}$. 此即 $\kappa_A = \frac{1}{r}$. 这表明圆周上各点的曲率相同. 即各点的弯曲程度相同，且半径越大，弯曲程度越小. 这与我们的直觉一致.

曲率的计算公式

设曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in(a,b)$ 给出，其中 $\vec{r}(t)$ 二次连续可微，且 $\vec{r}'(t)\neq 0$. 记点 $A=\vec{r}(t)$, $B=\vec{r}(t+h)$, 则曲线 Γ 在 A 和 B 两点处的切线斜率分别为

$$\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)}.$$

记两切线与 x 轴的夹角分别为 θ 和 θ_h, 则

$$\tan\theta=\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad \tan\theta_h=\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)}.$$

两切线之间的夹角为

$$\alpha_{AB} = \theta_h - \theta = \arctan\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

另一方面弧段 AB 的弧长为

$$L_{AB} = \int_t^{t+h}\sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}d\tau = s(t+h) - s(t).$$

于是

$$\frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{\arctan\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}}{s(t+h) - s(t)}$$

$$= \frac{\arctan\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}}{h} \cdot \frac{1}{\frac{s(t+h)-s(t)}{h}}$$

$$\to \frac{\left[\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{s'(t)}, \quad h \to 0.$$

计算得

$$\left[\arctan\frac{y'}{x'}\right]' = \frac{1}{1+(\frac{y'}{x'})^2}\left[\frac{y'}{x'}\right]'$$

$$= \frac{x'^2}{x'^2+y'^2} \cdot \frac{x'y''-y'x''}{x'^2} = \frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}.$$

曲率的计算公式，续三

这表明曲线 Γ 在点 $A=\vec{r}(t)$ 处的曲率为

$$\kappa_A=\lim_{B\to A}\frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}}=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注：上述公式也可以写作

$$\kappa_A=\frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

理由：由 $\vec{r}=(x,y)$ 得 $\vec{r}\,'=(x',y')$，$\vec{r}\,''=(x'',y'')$. 因此

$$|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|=\mathrm{abs}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}=|x'y''-y'x''|,\quad |\vec{r}\,'|=\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

$$\text{故}\quad \frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

曲线 $y = f(x)$ 的曲率公式

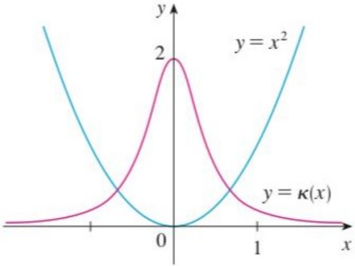
当曲线 C 由 $y = f(x)$ 给出时，则 x 可看作参数，C 由参数方程 $r(x) = (x, f(x))$ 给出．于是 $x' = 1$，$y' = f'$，$x'' = 0$，$y'' = f''$，进而 $|r'| = \sqrt{1 + f'^2}$．因此

$$\kappa(x) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|r'|^3} = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

<u>例子</u>: 求抛物线 $y = x^2$ 的曲率.

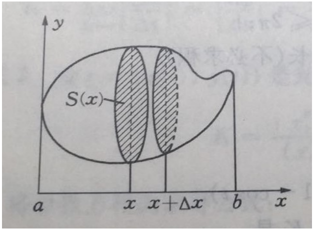
<u>解</u>: 由于 $f' = 2x$, $f'' = 2$, 故所求曲率

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}} = \frac{2}{[1 + 4x^2]^{3/2}}.$$



一般体积公式

设一个几何立体夹在平面 $x = a$ 和 $x = b$ 之间，如图所示.



假设用平面 $x = x\ (x \in [a, b])$ 截这个立体所得的截面面积为 $S(x)$，且函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则该几何体体积可定义为

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

定义的合理性

定义的合理性：设 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是区间 $[a, b]$ 的一个分割. 于是立体分成了 n 个近似于圆盘的部分. 第 i 个部分体积近似为 $S(\xi_i)\triangle x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$. 因此立体体积有近似

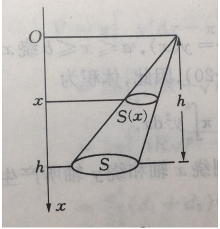
$$\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\triangle x_i.$$

这是函数 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个 Riemann 和. 故定义极限

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\triangle x_i = \int_a^b S(x)dx$$

为立体体积是合理的.

例一：求底面面积为 S，高为 h 的圆锥体体积。如图所示。



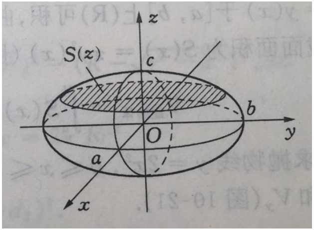
解：由于 $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$。故所求体积为

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h S\frac{x^2}{h^2}dx = \frac{1}{3}Sh.$$

例二：求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$$

所围立体的体积. 如图所示.



解：用平面 $z=z,\ z\in(-c,c)$ 截椭球面，其截线是椭圆周

例二，续

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$

这个椭圆周所围椭圆盘的面积为

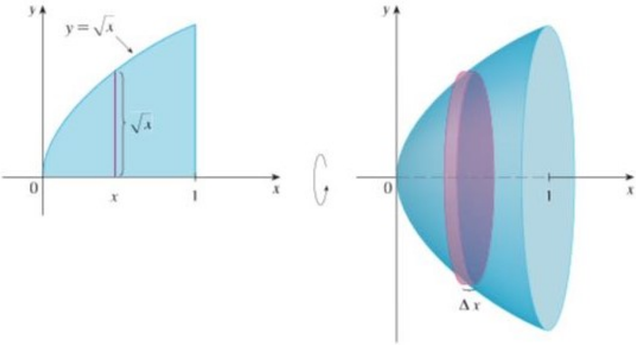
$$S(z)=\pi\cdot a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

故所求体积为

$$V=\int_{-c}^{c}S(z)dz=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Definition

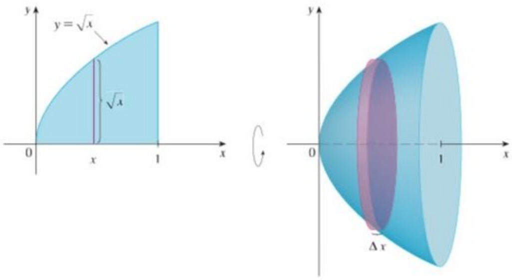
定义：平面有界闭域(或称图形)绕一条直线(称为旋转轴)旋转一周，所得的立体称为旋转体．如图所示．



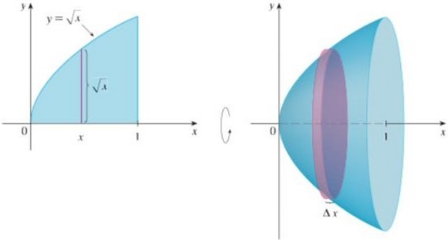
考虑曲边梯形

$$D = \left\{(x, y), 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\right\}$$

绕 x 轴旋转所得到的旋转体体积. 如图为情形 $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.



对区间 $[a,b]$ 作分割 P: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 则旋转体相应地分割成 n 个薄片立体. 每个薄片立体近似与一个薄片圆柱体. 如图所示.



设第 i 个薄片立体体积近似于 $\pi y^2(\xi_i)\triangle x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

于是整个旋转体体积有近似 $\sum_{i=1}^{n}\pi y^2(\xi_i)\triangle x_i$. 注意这是函数 $\pi y^2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 和. 因此我们有理由定义旋转体体积为

$$V=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi y^2(\xi_i)\triangle x_i=\int_a^b \pi y^2(x)dx.$$

这里当然假设极限存在，即积分存在.

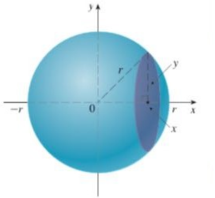
可将上述推导旋转体体积公式的方法，加以提炼简化成一个一般方法：微元法.

1. 取体积微元 $dV = \pi y^2(x)dx$, (圆盘面积 $\pi y^2(x)$ $\times$ 厚度 dx).
2. 积分 $V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi y^2(x)dx$.

例一：求球体的体积

将半径为 $r>0$ 的球体看半圆盘 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体，

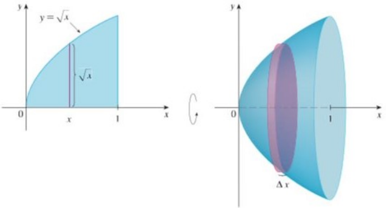
其中 $D=\{(x,y),0\le y\le\sqrt{r^2-x^2},|x|\le r\}$，如图所示.



故球体体积为 $V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$

$$=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)dx=2\pi(r^3-\frac{1}{3}r^3)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

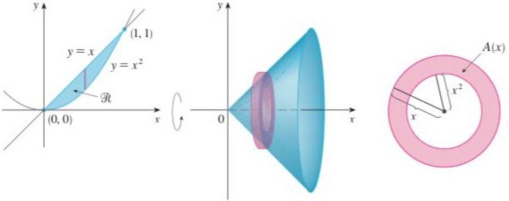
例: 求旋转体 V 体积, 其中 V 是由抛物线 $y = \sqrt{x}$, 以及直线 $x = 0$, $x = 1$ 和 $y = 0$ 所围区域绕 x 轴旋转所得. 如图所示.



解: 根据体积公式得

$$V = \int_0^1 \pi y^2(x)dx = \pi \int_0^1 xdx = \frac{\pi}{2}.$$

例三: 求旋转体 V 的体积, 其中 V 是由直线 $y = x$ 和抛物线 $y = x^2$ 所围有界区域绕 x 轴旋转一周所得. 如图所示.



解: 根据体积公式得

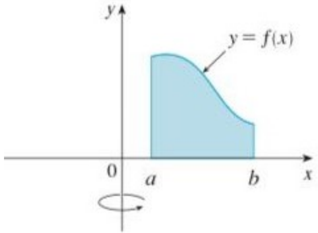
$$V = \int_0^1 \pi[y_2^2(x) - y_1(x)^2]dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \frac{2\pi}{15}.$$

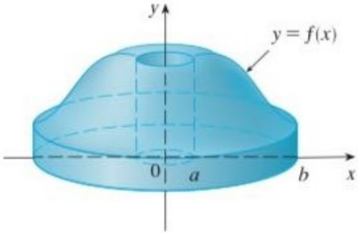
绕 y 轴旋转的旋转体体积

考虑曲边梯形

$$D = \left\{(x, y), 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\right\}$$

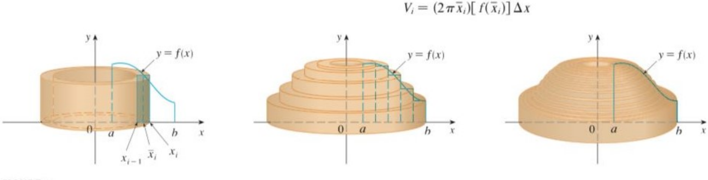
所围区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积，其中 $b > a \ge 0$, $f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$，如图所示.



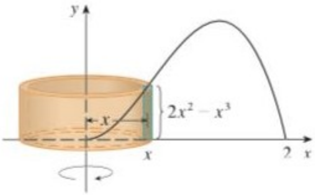


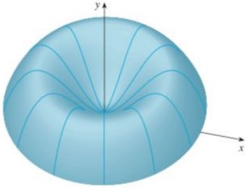
用微元法推导旋转体体积公式.

1. 取体积微元 $dV = 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx$，(周长 · 高 · 厚)
2. 积分 $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$. (圆柱壳方法或薄壁桶方法)



例一: 求由区域 $\{(x,y), 0 \le y \le 2x^2 - x^3, 0 \le x \le 2\}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.

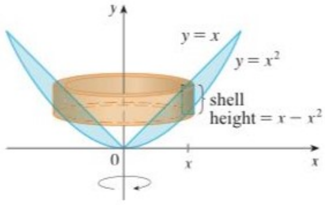




解: 根据上述体积公式得

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \frac{16\pi}{5}.$$

例二: 求旋转体 V 的体积，其中 V 是由直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 所围有界区域绕 y 轴旋转一周所得. 如图所示.

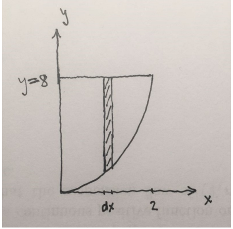


解: 根据体积公式得

$$V=\int_0^1(2\pi x)(x-x^2)dx=2\pi\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{\pi}{6}.$$

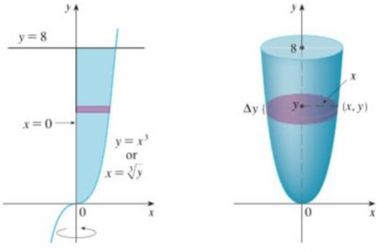
例三

例三: 求旋转体 V 的体积, 其中 V 是由曲线 $y = x^3$ 和直线 $y = 8$, $x = 0$ 所围有界区域绕 y 轴旋转一周所得. 如图所示.



解: 由体积公式 $V = \int_0^2 (2\pi x)(8-y)dx = 2\pi\int_0^2 x(8-x^3)dx$

$$= 2\pi\int_0^1 (8x - x^4)dx = \frac{96\pi}{5}.$$

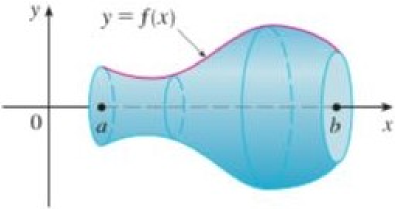


(a) (b)

<u>另解</u>：如图所示，取体积微元 $\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}y$，故所求体积为

$$V = \int_0^8 \pi x^2 \mathrm{d}y = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}y = \frac{96\pi}{5}.$$

设曲线Γ: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, 位于x轴上方, 即$f(x) \geq 0$, 则曲线Γ绕x轴旋转一周所得到的曲面称为旋转面. 如图所示.



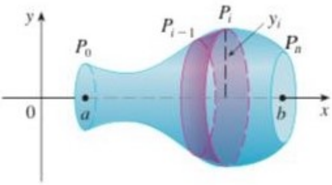
(a) Surface of revolution

旋转面面积的计算

考虑旋转面面积的定义和计算. 用微元法求面积.

1. 取面积微元 $dS = 2\pi y \cdot d\ell = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$ (周长 $\cdot$ 弧长微元), 其中 $d\ell$ 为曲线的弧长微分;

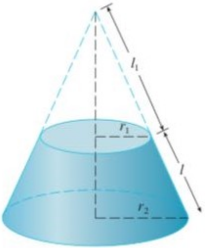
2. 积分即得面积 $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.



(b) Approximating band

问题: 为何微元面积取为 $dS = 2\pi y d\ell$, 而不取为 $dS = 2\pi y dx$.

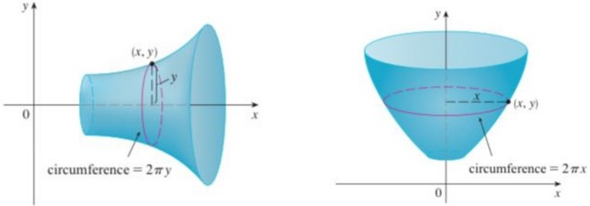
这是因为所取的面积微元近似为圆台侧面, 比取圆柱侧面有更好的近似. 圆台侧面面积公式为 $A = \pi(r_1 + r_2)\ell$, 如图所示.



曲线绕 x 和绕 y 轴旋转所得旋转面的面积分别为

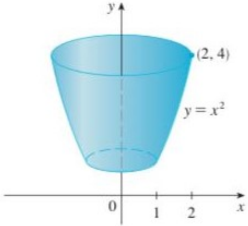
$$S = \int 2\pi y d\ell, \quad S = \int 2\pi x d\ell,$$

其中 $d\ell$ 为弧长微分. 如图所示.



(a) Rotation about x-axis: $S = \int 2\pi y\, ds$ (b) Rotation about y-axis: $S = \int 2\pi x\, ds$

求曲线段 $y = x^2$ 由点 $(1,1)$ 到点 $(2,4)$ 绕 y 轴旋转所得旋转面面积. 如图所示.



解法一: 由绕 y 轴的面积公式得

$$S = \int 2\pi x d\ell = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

$$= 2\pi\int_1^2 x\sqrt{1+4x^2}dx = \pi\int_1^2\sqrt{1+4x^2}dx^2$$

$$= \pi\int_1^4\sqrt{1+4u}du = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}).$$

解法二: 曲线方程可写作 $x=\sqrt{y}$, 从而 $x'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$. 于是

$$S = \int 2\pi x d\ell = 2\pi\int_1^4\sqrt{y}\sqrt{1+x'(y)^2}dy$$

$$= 2\pi\int_1^4\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy = \pi\int_1^4\sqrt{4y+1}dy$$

$$= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}).$$

例二：求半径为 R 的球面面积.

解：半径为 R 的球面可看作半圆周 $y=\sqrt{R^2-x^2},\ x\in[-R,R]$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转面. 由上述面积公式知其面积为

$$S=\int_{-R}^{R}2\pi y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx.$$

计算得

$$1+y'(x)^2=1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2=1+\frac{x^2}{R^2-X^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2}.$$

$$\Rightarrow\quad S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}dx=4\pi R^2.$$

例: 考虑由旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, 绕 x 轴旋转所得的旋转面的面积, 其中 $0 \le \theta \le 2\pi$, 如图所示.

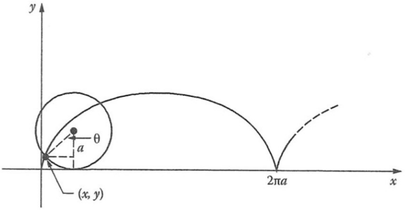


FIGURE 11

解: 由旋转面面积公式得所求面积为

$$S = \int 2\pi y d\ell = \int_0^{2\pi} 2\pi y(\theta)\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta.$$

例子续

$$由于 \quad x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = [a(1-\cos\theta)]^2 + [a\sin\theta]^2$$

$$= 2a^2(1-\cos\theta) = 4a^2\sin^2\theta/2$$

$$\Rightarrow \quad S = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\sqrt{4a^2\sin^2\theta/2 d\theta}$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\sin(\theta/2)d\theta = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3(\theta/2)d\theta$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi = 32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\phi d\phi$$

$$= 32\pi a^2\frac{2!!}{3!!} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

1. 设在直角坐标系下，一个质量为 m 的质点位于 (x_0, y_0)，则定义质点关于 x 轴的力矩为 my_0，关于 y 轴的力矩为 mx_0.

2. 设平面上有 n 个质点，质量为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，分别位于点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n)，则质点系总质量 M，以及关于 x 轴和 y 轴的总力矩 M_y 和 M_y 定义为

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i.$$

根据力学理论，这个质点系有一个质心(质点中心)，其坐标为

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

设曲线Γ: $r(t) = (x(t), y(t))$ 上分布有某种物质，其分布密度为 $\rho(t)$，其中 $t \in [\alpha, \beta]$. 考虑质量曲线的质心位置.

解: 1. 求总质量. 取质量微元: 密度 × 弧长微元，即

$$dM = \rho(t) \cdot d\ell = \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

于是总质量为

$$M = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

2. 求质心坐标. 质量微元 dM 关于 x 轴和 y 轴的力矩分别为

$$dM_x = y(t)dM = y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt,$$

$$dM_y = x(t)dM = x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

因此质量曲线关于 x 轴和 y 轴的总力矩分别为

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

于是质量曲线的质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 定义如下:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt},$$

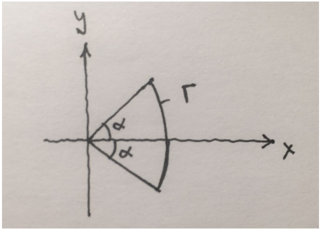
$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

当 $\rho(t)$ 为正常数时，即质量均匀分布时，质心称为形心. 此时

$$\bar{x}=\frac{\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

例: 求圆弧 $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ 的形心, 其中 $|t| \leq \alpha$, $0 < \alpha \leq \pi$.



解: 由于 $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 = r^2$, 故

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2r\alpha,$$

例子，续

$$M_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\sin t \cdot rdt = 0$$

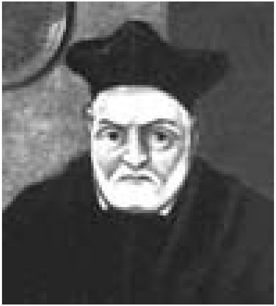
$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos t \cdot rdt = 2r^2\sin\alpha.$$

由形心坐标公式得

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = 0.$$

Theorem

定理: 曲线段围绕一直线旋转所得旋转面的侧面积, 等于曲线的弧长, 乘以形心绕直线旋转一周的周长.



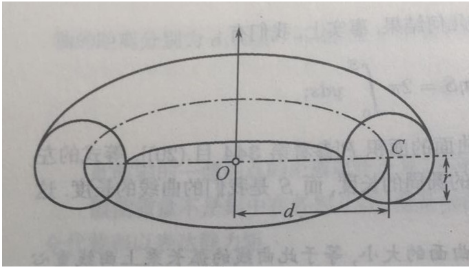
Paul Guldin, 1577-1643, 瑞士人

例一: 已求得圆弧 Γ: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $|t| \le \alpha$, $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$, 的形心位置为 $(\frac{r\sin\alpha}{\alpha}, 0)$. 根据 Guldin 第一定理知, 圆弧 Γ 绕 y 旋转一周所得旋转面(球面的一部分)的面积 S, 等于弧长 $(2r\alpha)$, 乘以形心绕 y 轴旋转一周的周长, 即 $2\pi\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$, 亦即

$$S = 2r\alpha \cdot 2\pi\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = 4\pi r^2\sin\alpha.$$

根据第十三周习题课中的 Archimedes 球面带定理知, 这部分球面面积等于相应部分的柱面面积, 即高 $\times$ 周长. 显然高为 $2r\sin\alpha$, 周长为 $2\pi r$. 因此 $S = 2r\sin\alpha \cdot 2\pi r = 4\pi r^2\sin\alpha$. 即与利用 Guldin 第一定理的计算结果一致.

例二: 计算如图所示的环面面积.



解: 环面可看作半径为 $r > 0$ 的圆周 C, 绕竖直的 z 旋转所得的旋转面. 显然圆周 C 的形心为其圆心. 根据 Guldin 第一定理知, 环面面积为 $2\pi d \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 d$. 解答完毕.

证明: 设曲线 Γ 由参数表示 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\mathbf{r}(t)$ 连续可微, 且位于 x 轴的上方, 即 $y(t)\geq 0$, 则曲线 Γ 的形心的纵坐标 $\bar{y}$ 如下确定

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

由此得

$$2\pi\bar{y}|\Gamma|=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

注意上式右边是曲线 Γ 绕 x 轴旋转所得旋转面的面积, 而上式的左边是曲线的弧长, 乘以形心绕直线旋转一周的周长. 定理得证.

作业

课本习题5.6(pp.170-172)：11，12，13.

课本习题5.7(pp.185-187)：2(奇)，3(1)(2)(6)，4(1)(2)，7(1)(2)(3).