《微积分A1》第三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年09月23日

助教信息

助教:

1. 曹杰, 数学系博士生, caoj18@mails.tsinghua.edu.cn
2. 黄文仕, 能动系博士生, huangws18@mails.tsinghua.edu.cn
3. 王立, 数学系博士生, l-wang20@mails.tsinghua.edu.cn
4. 叶豪, 机械系博士生, ye-h18@mails.tsinghua.edu.cn
5. 赵汉青, 数学系博士生, 1294614524@qq.com

子序列(subsequences)

Definition

定义: 设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为一序列, 若映射 $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足 $\phi(k) < \phi(k+1)$, $\forall k \geq 1$, 则称序列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

Example

例: (i) $\phi(k) = 2k$, $\{a_{2k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(ii) $\phi(k) = 2k+1$, $\{a_{2k+1}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iii) $\phi(k) = 3k$, $\{a_{3k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iv) $\phi(k) = k$, 序列 $\{a_n\}$ 为其自身的一个子序列.

注: 序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的子列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 也常常记作 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $n_k = \phi(k)$ 满足 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 为严格递增的正整数序列.

Theorem

定理: 收敛序列的每个子序列均收敛，且收敛于原序列的极限.

Proof.

证明: 设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，设 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为其任意一个子序列. 依极限定义可知，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对任意 $n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. 由于映射 $\phi(\cdot)$ 满足 $\phi(k) < \phi(k+1)$，故 $\phi(k) \geq k$, $\forall k \geq 1$. 于是 $|a_{\phi(k)} - a| < \varepsilon$, $\forall k > N$. 因为 $\phi(k) \geq k > N$. 这就证明了子序列也收敛于 a. 证毕. □

Example

<u>例</u>: 证明序列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ 发散.

<u>证明</u>: 反证. 假设序列 $\{(-1)^n\}$ 收敛, 则根据上述定理可知它的每个子序列均收敛于同一个极限值. 但是这个序列的偶脚标和奇脚标子序列

$$\{(-1)^{2n}\} = \{1, 1, 1, \cdots\},$$

$$\{(-1)^{2n-1}\} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

分别收敛于两个不同的极限值 1 和 −1. 矛盾. 故序列 $\{(-1)^n\}$ 发散. 证毕. $\square$

收敛序列的保序性

Theorem

定理: 设 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$.

(1) 若 $a < b$, 则存在正整数 N, 使得 $a_n < b_n$, $\forall n > N$.

(2) 若存在正整数 n_0, 使得 $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, 则 $a \le b$.

注: 结论(2) 不能推广如下: 若 $a_n < b_n$, $\forall n \ge n_0$, 且 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则 $a < b$. 例如序列 $\{\frac{1}{n^2}\}$ 和 $\{\frac{1}{n}\}$ 均收敛, 且满足 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 2$. 但它们有相同的极限零.

证明: (1) 由假设 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$ 可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时,

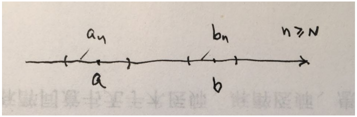
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{且} \quad |b_n - b| < \varepsilon,$$

$$\text{即} \quad -\varepsilon + a < a_n < a + \varepsilon \quad \text{且} \quad -\varepsilon + b < b_n < b + \varepsilon.$$

由于 $a < b$, 故可取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a) > 0$, 则

$$a_n < a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(a+b), \ b_n > -\frac{1}{2}(b-a) + b = \frac{1}{2}(a+b),$$

即 $a_n < \frac{1}{2}(a+b) < b_n$, $\forall n > N$. 结论(1)得证.



证(2). 反证. 假设 $a > b$. 由结论(1)知存在正整数 N, 使得 $a_n > b_n, \forall n > N$. 此与假设 $a_n \leq b_n, \forall n > n_0$ 相矛盾. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则这两个数列的和 $\{a_n + b_n\}$, 差 $\{a_n - b_n\}$, 乘积 $\{a_n b_n\}$, 以及商 $\frac{a_n}{b_n}$ (补充假设 $b \neq 0$) 均收敛, 并且

(i) $a_n \pm b_n \to a \pm b$;

(ii) $ca_n \to ca$;

(iii) $a_n b_n \to ab$;

(iv) 设 $b \neq 0$, 则 $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

证明: 结论(i)和(ii)的证明容易. 略去. 证(iii). 要证 $a_n b_n \to ab$, 即要证对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 使得 $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$, $\forall n > N$.

一方面

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|$$

$$\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|.$$

另一方面, 由于收敛序列有界, 故存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$. 根据假设 $a_n \to a$, $b_n \to b$ 可知对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ 且 $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 于是

$$|a_n b_n - ab| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$\le \varepsilon M + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

于是结论(iii)得证. 证(iv). 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

一方面

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|bb_n|}|a_n b - ab + ab - ab_n|$$

$$\leq \frac{1}{|bb_n|}\Big(|b||a_n - a| + |a||b - b_n|\Big).$$

另一方面，由 $b_n \to b$ 可知，对于任意 $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ (因 $b \neq 0$)，存在正整数 N_1，使得 $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$，$\forall n > N_1$. 于是对 $\forall n > N_1$

$$-\frac{|b|}{2} + b < b_n < \frac{|b|}{2} + b \quad \Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

再由假设 $a_n \to a$，$b_n \to b$ 可知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N_2，使得

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad 且 \quad |b_n - b| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

证明续三

于是对 $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \le \frac{1}{|bb_n|}\Big(|b||a_n - a| + |a||b - b_n|\Big)$$

$$\le \frac{2}{|b|^2}(|b|\varepsilon + |a|\varepsilon) = M\varepsilon,$$

其中 $M = \frac{2}{|b|^2}(|b| + |a|)$. 结论(iv)得证. $\square$

例一：求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}.$$

解：由于

$$\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}=\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}},$$

故

$$\lim\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}=\lim\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim 1-\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n^2}}{\lim 2+\lim\frac{3}{n}+\lim\frac{2}{n^2}}=\frac{1-0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}.\qquad\#$$

Theorem

定理: 设三个序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \ge n_0$, 其中 n_0 为某个正整数. 若极限 $\lim a_n$ 和 $\lim c_n$ 均存在且极限值相等, 记作 a, 则极限 $\lim b_n$ 也存在且等于 a.

例: 设 $a > 0$, 证明 $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

证: (i) 设 $a \ge 1$, 则 $1 \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$, $\forall n \ge a$. 已证 $\sqrt[n]{n} \to 1$. 于是根据 Sandwich 定理知 $\sqrt[n]{a} \to 1$.

(ii) 设 $0 < a < 1$, 则 $b = \frac{1}{a} > 1$. 于是 $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1} = 1$. 证毕. □

证明: 由假设 $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \ge n_0$ 可知

$$a_n - a \le b_n - a \le c_n - a, \quad \forall n \ge n_0.$$

由此可知 $|b_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |c_n - a|\}$. 由假设 $\lim a_n = a$ 且 $\lim c_n = a$ 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $\forall n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{且} \quad |c_n - a| < \varepsilon.$$

于是对于 $\forall n > \max\{N, n_0\}$,

$$|b_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |c_n - a|\} < \varepsilon.$$

此即 $\lim b_n = a$. 证毕.

例: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个非负实数, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证: 记 $a \triangleq \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 则

$$a = (a^n)^{\frac{1}{n}} \le \left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n\right)^{\frac{1}{n}} \le (ma^n)^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} a \to a.$$

根据 Sandwich 定理可知结论得证. $\square$

$\sqrt{2}$ 的近似值

我们已知 $\sqrt{2}$ 是一个无理数. 假设 s 是 $\sqrt{2}$ 的一个近似值, 考虑如何得到一个更好的近似值. 由于 s 和 $\frac{2}{s}$ 的乘积为 2, 不难看出 $\sqrt{2}$ 介于 s 和 $\frac{2}{s}$ 之间. 故可期待 s 和 $\frac{2}{s}$ 的算术平均值 $\frac{1}{2}\left(s+\frac{2}{s}\right)$ 是一个更好的近似. 显然新的近似大于等于 $\sqrt{2}$, 因为

$$\frac{1}{2}\left(s+\frac{2}{s}\right) \geq \sqrt{s\cdot\frac{2}{s}} = \sqrt{2}.$$

受此启发, 我们构造一个迭代序列

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{2}{s_n}\right), \quad \forall n \geq 1,$$

初始值 s_1 事先给定．例如取 $s_1 = 2$．前几项的计算结果如下

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \\ s_2 &= 1.5 \\ s_3 &= 1.41666666666666\cdots \\ s_4 &= 1.41421568627451\cdots \\ s_5 &= 1.41421356237469\cdots \\ s_6 &= 1.41421356237309\cdots \end{aligned}$$

观察知 s_5 和 s_6 的前 12 位小数相同，且 $s_5^2 \approx 2.000000000000451$．因此数值计算表明序列 $\{s_n\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$.

我们也可以估计误差 $|s_n - \sqrt{2}|$.

$$s_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{2}{s_n}\right) - \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2s_n}\left(s_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}s_n\right) = \frac{1}{2s_n}\left(s_n - \sqrt{2}\right)^2.$$

注意 $s_n > \sqrt{2}$, $\forall n \geq 2$, 故 $0 < \frac{s_n - \sqrt{2}}{s_n} < 1$. 因此

$$0 < s_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2s_n}(s_n - \sqrt{2})^2$$

$$= \frac{1}{2}(s_n - \sqrt{2})\frac{s_n - \sqrt{2}}{s_n} \leq \frac{1}{2}(s_n - \sqrt{2}).$$

$\sqrt{2}$ 的近似值, 续三

重复使用上述结论可得

$$0 < s_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{1}{2}(s_n - \sqrt{2})$$

$$\le \frac{1}{2^2}(s_{n-1} - \sqrt{2}) \le \cdots \le \frac{1}{2^n}(s_1 - \sqrt{2}).$$

根据两边夹法则可知, 序列 $s_{n+1} - \sqrt{2} \to 0$, 即 $s_n \to \sqrt{2}$.

注: 往后将介绍解函数方程 $f(x) = 0$ 的 Newton 迭代格式 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
对方程 $x^2 - 2 = 0$ 应用 Newton 迭代格式即为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

这正是上述我们采用的计算 $\sqrt{2}$ 的计算公式.

Definition

定义: (i) 若序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \ge 1$, 则称这个序列为单调上升的或单调增加的 (monotone increasing); 若不等号严格成立, 即 $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \ge 1$, 则称这个序列为严格单调上升的 (strictly monotone increasing).

(ii) 若序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \ge 1$, 则称这个序列为单调下降的或单调减少的 (monotone decreasing); 若不等号严格成立, 即 $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \ge 1$, 则称这个序列为严格单调下降的 (strictly monotone decreasing).

(iii) 单调上升和单调下降序列都称为单调序列.

例一: 序列 $\{\frac{3}{n+5}\}$ 是严格单调下降的. 因为

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}.$$

例二: 序列 $\{\frac{n}{n^2+1}\}$ 是严格单调下降的. 因为

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

$$\iff \quad n[(n+1)^2+1] > (n+1)(n^2+1).$$

$$\iff \quad n^3+2n^2+2n > n^3+n^2+n+1.$$

$$\iff \quad n^2+n > 1, \quad \forall n \geq 1.$$

记号

$\{a_n\}\uparrow$: 表示序列 $\{a_n\}$ 为单调上升的;

$\{a_n\}\downarrow$: 表示序列 $\{a_n\}$ 为单调下降的;

$\{a_n\}\uparrow$ 严格: 表示序列 $\{a_n\}$ 为严格单调上升的;

$\{a_n\}\downarrow$ 严格: 表示序列 $\{a_n\}$ 为严格单调下降的.

单调序列定理

Theorem

定理: 每个单调有界序列均有极限. 具体说来,

(i) 若 $\{a_n\}\uparrow$ 且有上界, 则 $\{a_n\}$ 有极限, 且 $\lim a_n = \sup\{a_n\}$;

(ii) 若 $\{a_n\}\downarrow$ 且有下界, 则 $\{a_n\}$ 有极限, 且 $\lim a_n = \inf\{a_n\}$.

例子

例: 研究序列 $\{a_n\}$ 的收敛性, 其中 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, $n = 1, 2, \cdots$.

解: 简单计算可知

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 2 & a_2 = 4 & a_3 = 5 \\
a_4 = 5.5 & a_5 = 5.75 & a_6 = 5.875 \\
a_7 = 5.9375 & a_8 = 5.96875 & a_9 = 5.984375
\end{array}
$$

上述结果表明序列的前 9 项是单调上升的, 并且趋向极限值 6.

一. 考虑用数学归纳法证明序列满足 $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \geq 1$. 显然情形 $n = 1$ 成立, 因为 $a_2 = 4 > 2 = a_1$. 假设 $a_{k+1} > a_k$, 则 $a_{k+1} + 6 > a_k + 6$. 故 $\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6)$. 此即 $a_{k+2} > a_{k+1}$. 这就证明了序列是严格单调上升的.

二. 再证明序列有上界 6, 即 $a_n < 6$, $\forall n \geq 1$. 仍然用归纳法证. 由于 $a_1 = 2 < 6$, 故结论当 $n = 1$ 时成立. 假设 $a_k < 6$, 则 $a_k + 6 < 12$. 故 $a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + 6) < 6$. 故序列有上界 6.

三. 根据单调序列定理可知序列 $\{a_n\}$ 有极限. 设 $a_n \to a$. 根据递推关系式我们有

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}(\lim a_n + 6) = \frac{1}{2}(a + 6).$$

即 $a = \frac{1}{2}(a + 6)$. 解之得 $a = 6$. 解答完毕.

注: 这里必须先证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 然后才可在式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$ 中取极限. 否则有可能出错. 例如对于 $a_n = (-1)^n$, $a_{n+1} = -a_n$. 若直接在迭代式 $a_{n+1} = -a_n$ 中取极限, 则 $a = -a$, 即 $a = 0$. 但显然序列 $\{(-1)^n\}$ 无极限.

证明: 证(i). 设序列 $\{a_n\}\uparrow$ 且有上界. 记 $a=\sup\{a_n\}$. 依上确界充要条件知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得 $a_N>a-\varepsilon$, 即 $0\le a-a_N<\varepsilon$. 再由序列单调增加的假设知, 对 $\forall n>N$, $0\le a-a_n\le a-a_N<\varepsilon$. 这表明 $a_n\to a$.

证(ii). 证明方法与结论(i)类似. 设序列 $\{a_n\}\downarrow$ 且有下界. 记 $a=\inf\{a_n\}$. 由下确界充要条件知, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists a_N\in\{a_n\}$, 使得 $a_N<a+\varepsilon$, 即 $0\le a_N-a<\varepsilon$. 再由序列的单调下降性质可知, 对 $\forall n\ge N$, $0\le a_n-a\le a_N-a<\varepsilon$. 这表明 $a_n\to a$.

命题得证.

例: 证明极限 $\lim_{n\to+\infty} e_n$ 存在, 其中

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

证: 对 e_n 作二项式展开得

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

于是 $e_{n+1} =$

$$1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) > e_n.$$

例子续

这表明 $\{e_n\}\uparrow$ 严格. 以下证序列 $\{e_n\}$ 有上界. 对于任意 $n\geq 1$

$$e_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$< 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= 2+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2+1-\frac{1}{n} = 3-\frac{1}{n} < 3.$$

这就证明了序列 $\{e_n\}$ 单调上升且有上界, 故极限 $\lim_{n\to+\infty} e_n$ 存在. 证毕.

注一: 数 $e \triangleq \lim(1+\frac{1}{n})^n$ 称为 Euler 常数, 近似值为 2.718. Euler 于 1737 年证明了数 e 是无理数.

注二: Hermite 于 1768 年证明了数 e 是超越数. 一个数 c 称为代数数, 如果 c 是某个整系数多项式方程的根. 例如, 每个有理数都是代数数. 再例如 $\sqrt{2}$ 是代数数, 因为它是方程 $x^2-2=0$ 的根. 非代数数称为超越数(transcendental numbers). 超越数性质比代数数更加难以理解和掌握. 一个比较明显的超越数的例子是数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{k!}}$, 由 Liouville 提供并证明.

注三: 关于另一个重要常数圆周率 π: Lambert 于 1768 年证明了 π 是无理数. Lindemann 于 1882 年证明了 π 是超越数.

例: 设 $a > 1$, 证明 $\frac{n}{a^n} \to 0$.

证法一 (课本证法): 记 $b_n = \frac{n}{a^n}$, 则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{a^{n+1}} \frac{a^n}{n} = \frac{1}{a} \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{a} < 1.$$

故存在正整数 N, 使得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1, \forall n \geq N$. 这表明序列 $\{b_n\}$ 对于 $n > N$ 单调下降, 且下界 $(b_n > 0)$. 由单调序列定理知 $\{b_n\}$ 收敛. 记 $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. 在如下关系式

$$b_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}} = \frac{n+1}{na} \frac{n}{a^n} = \frac{n+1}{na} b_n$$

中令 $n \to +\infty$ 即得 $b = \frac{1}{a} b$ 或 $ab = b$. 因为 $a > 1$, 故 $b = 0$. 命题得证.

证法二: 记 $a = 1 + \delta$, $\delta > 0$, 则

$$a^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\delta^2.$$

于是

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\delta^2} = \frac{2}{(n-1)\delta^2} \to 0.$$

命题得证.

例: 设 $c>0$, 定义 $c_1=\sqrt{c}$, $c_{n+1}=\sqrt{c+c_n}$, $\forall n\geq 1$. 证明序列 $\{c_n\}$ 收敛, 并其极限.

证: (i) 证 $c_n<c_{n+1}$, $\forall n\geq 1$. 情形 $n=1$: $c_2=\sqrt{c_1+c}>\sqrt{c}=c_1$. 结论成立. 假设结论对情形 n 成立, 即 $c_{n+1}>c_n$, 则 $c_{n+2}=\sqrt{c+c_{n+1}}>\sqrt{c+c_n}=c_{n+1}$. 由归纳法原理知结论成立.

(ii) 证 $\{c_n\}$ 有上界.

$$c_2=\sqrt{c+c_1}=\sqrt{c+\sqrt{c}}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=1+\sqrt{c}.$$

设 $c_n<1+\sqrt{c}$, 则

$$c_{n+1} = \sqrt{c + c_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < 1 + \sqrt{c}.$$

由归纳法原理知结论成立.

(iii) 综合结论(i)(ii)知序列 c_n 收敛. 在关系式 $c_{n+1} = \sqrt{c + c_n}$ 中令 $n \to +\infty$, 并记 $c_* = \lim_{n\to+\infty} c_n$ 得 $c_* = \sqrt{c + c_*}$. 等式两边平方得 $c_*^2 = c + c_*$ 或 $c_*^2 - c_* - c = 0$. 解这个一元二次方程得 $c_* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4c}\right)$. 由于 $c_n > 0$, 故 $c_* \geq 0$. 因此所求极限为

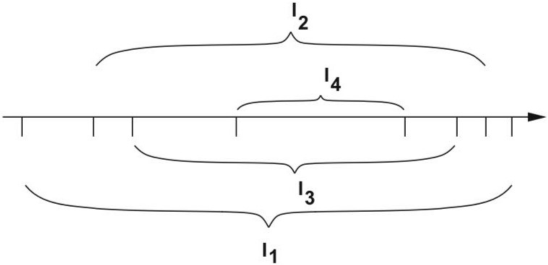
$$c_* = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\right).$$

解答完毕.

区间套定理(Nested intervals theorem)

Theorem

定理: 设 $\mathbf{I}_k$, $\forall k \geq 1$, 为逐次包含的闭区间序列, 即 $\mathbf{I}_{k+1} \subset \mathbf{I}_k$, $\forall k \geq 1$. 若区间长度 $|\mathbf{I}_k| \to 0$, 则存在唯一一个点 $\xi \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{I}_k$.



证: 设 $I_k=[a_k,b_k]$, $\forall k\ge 1$, 由于 $I_{k+1}\subset I_k$, 故序列 $\{a_k\}\uparrow$, $\{b_k\}\downarrow$, 并且它们均有界, 从而收敛. 设 $a_k\uparrow a$, $b_k\downarrow b$. 由于 $a_k<b_k$, 故 $a\le b$. 因此 $a_k\le a\le b\le b_k$, $\forall k\ge 1$. 依假设 $|I_k|=b_k-a_k\to 0$, 故 $|b-a|\le b_k-a_k\to 0$. 即 $a=b$. 故存在唯一一点 $\xi\in\bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k$. 证毕. $\square$

课本第19页习题1.4第15题(记号略有不同): 回忆两个正数 $a_0 > g_0 > 0$, 其算术平均和几何平均为 $a_1 = \frac{a_0+g_0}{2}$, $g_1 = \sqrt{a_0g_0}$. 显然 $g_0 < g_1 < a_1 < a_0$. 令 $a_2 = \frac{a_1+g_1}{2}$, $g_2 = \sqrt{a_1g_1}$, 则

$$g_0 < g_1 < g_2 < a_2 < a_1 < a_0.$$

如此继续下去, 即得到两个单调序列$\{g_n\}$, $\{a_n\}$,

$$g_0 < g_1 < g_2 < \cdots < g_n < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < a_0,$$

其中 $a_{n+1} = \frac{a_n+g_n}{2}$, $g_{n+1} = \sqrt{a_ng_n}$, $\forall n \geq 1$. 考虑闭区间 $I_n = [g_n, a_n]$ 的长度.

$$a_1 - g_1 = \frac{a_0 + g_0}{2} - \sqrt{a_0 g_0}$$

$$= \frac{a_0 - g_0}{2} + g_0 - \sqrt{a_0 g_0} < \frac{a_0 - g_0}{2}.$$

即 $|I_1| < \frac{1}{2}|I_0|$. 类似可证 $|I_k| < \frac{1}{2}|I_{k-1}|$, $\forall k \geq 1$. 由此得 $|I_k| < \frac{1}{2^k}|I_0|$. 可见区间长度 $|I_k|$ 趋向于零. 由区间套定理可知存在唯一一点 $\xi \in \bigcap_{k\geq 0} I_k$. 值 ξ 通常记作 $\mathrm{AGM}(a, g)$. Gauss 首先发现了这个数的一些特殊性质，并利用它计算 π 的近似值.

Definition

定义: 数列 $\{a_n\}$ 称为趋向正无穷, 记作 $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ 或 $a_n \to +\infty$, 如果对于任意大的正数 $M > 0$, 存在正整数 N, 使得 $a_n > M$, $\forall n > N$. 类似可定义数列 $\{a_n\}$ 趋向负无穷, 并记作 $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ 或 $a_n \to -\infty$.

例如, $\sqrt{n} \to +\infty$; $n^2 \to +\infty$.

注一: 趋向正无穷的序列必无界, 但无界序列不必趋向正无穷.

例如序列 $\{0, 1, 0, 2, 0, 3, \cdots\}$ 无界, 但并不趋向正无穷.

注二: 易证 $|a_n| \to +\infty \iff \frac{1}{a_n} \to 0$.

Stolz 定理

定理: 考虑极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

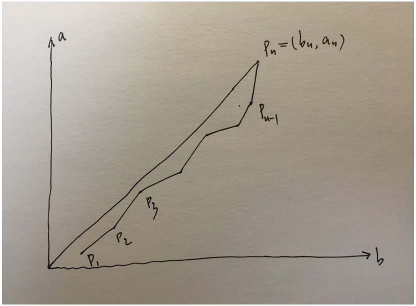
(i)($\frac{*}{\infty}$ 型) 若 $b_n\uparrow+\infty$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L.$$

(ii)($\frac{0}{0}$ 型) 若 $b_n\downarrow 0$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷), 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L.$$

记 $P_n = (b_n, a_n)$ 为给定的一个平面点列，则线段 $\overline{OP_n}$ 的斜率为 $\frac{a_n}{b_n}$，线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 的斜率为 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$，由此可知 Stolz 定理的几何意义：若线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 的斜率有极限，则线段 $\overline{OP_n}$ 的斜率也有极限，且极限相同.



例一：求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}.$$

解：记

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad b_n=\ln n,$$

则显然 $b_n\uparrow+\infty$ 严格. 考虑

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{1}{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{1}{\frac{n+1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{1\cdot\ln e}=1.$$

根据 Stolz 定理可知所求极限为 $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$. 解答完毕.

例二：给定正整数 k，求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

解：记

$$a_n=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\quad b_n=n^{k+1},$$

则显然 $b_n\uparrow+\infty$ 严格. 考虑

$$\triangle_n\triangleq\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}.$$

展开二项式 $(n+1)^{k+1}$ 得

例二，续

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + (k+1)n^k + \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \cdots.$$

$$\Rightarrow \triangle_n = \frac{(n+1)^k}{n^{k+1} + (k+1)n^k + \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \cdots - n^{k+1}}$$

$$= \frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k + \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \cdots}$$

$$= \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+1) + \frac{(k+1)k}{2}\frac{1}{n} + \cdots} \to \frac{1}{k+1}.$$

根据 Stolz 定理可知，所求极限为 $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{k+1}$. 解答完毕.

例三

课本第8页习题1.2第7题(2): 设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$, 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A$$

证明: 在 Stolz 定理结论一中, 令 $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,

$b_n = n$, 则 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{x_{n+1}}{1} \to A.$$

因此由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A. \qquad \square$$

证: 只证明 $\frac{*}{\infty}$ 情形型的结论. 情形 $\frac{0}{0}$ 的证明略去. 考虑极限 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 假设 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 即作 L. 以下分四种情况讨论 (i) $L=0$; (ii) $L\neq\pm\infty$, $L\neq 0$; (iii) $L=+\infty$; (iv) $L=-\infty$.

情形 (i) $L=0$. 要证 $\frac{a_n}{b_n}\to 0$, 即要证对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得 $\left|\frac{a_n}{b_n}\right|<\varepsilon$, $\forall n>N$. 由假设 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=0$ 可知, 存在正整数 N_1, 使得

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right|<\varepsilon, \quad \forall n\geq N_1.$$

即 $|a_{n+1}-a_n| < \varepsilon(b_{n+1}-b_n)$, $\forall n \geq N_1$. 由此得对任意 $n \geq N_1$

$$
\begin{aligned}
|a_{N_1+1}-a_{N_1}| &< \varepsilon(b_{N_1+1}-b_{N_1}), \\
|a_{N_1+2}-a_{N_1+1}| &< \varepsilon(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}), \\
&\vdots \\
|a_{n+1}-a_n| &< \varepsilon(b_{n+1}-b_n).
\end{aligned}
$$

将上述不等式相加得

$$
\sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1}-a_k| < \varepsilon(b_{n+1}-b_{N_1}).
$$

将 a_{n+1} 写作

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{N_1+1} - a_{N_1}) + a_{N_1},$$

则 $|a_{n+1}| \le \sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1} - a_k| + |a_{N_1}| \le \varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|.$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| \le \frac{\varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|}{b_{n+1}}$$

$$< \varepsilon\left(1 - \frac{b_{N_1}}{b_{n+1}}\right) + \frac{|a_{N_1}|}{b_{n+1}} \le \varepsilon + \frac{|a_{N_1}| + \varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}}.$$

根据假设 $b_n \uparrow +\infty$，故存在正整数 $N_2 > N_1$，使得

$$\frac{|a_{N_1}|+\varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}}<\varepsilon,\quad \forall n\geq N_2.$$

综上可知对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N_2，使得对任意 $n\geq N_2$，$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right|<2\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\frac{a_n}{b_n}=0$. 情形(i)得证.

情形(ii)：$L\neq\pm\infty$ 且 $L\neq 0$. 将情形(ii)转化为情形(i). 由于

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-L=\frac{(a_{n+1}-Lb_{n+1})-(a_n-Lb_n)}{b_{n+1}-b_n}.$$

令 $\hat{a}_n=a_n-Lb_n$，则

$$\frac{\hat{a}_{n+1}-\hat{a}_n}{b_{n+1}-b_n}\to 0\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L.$$

故由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ 知 $\frac{\hat{a}_{n+1}-\hat{a}_n}{b_{n+1}-b_n}\to 0$. 再由情形(i)的结论知

$$\frac{\hat{a}_n}{b_n} \to 0 \quad 即 \quad \frac{\hat{a}_n}{b_n} = \frac{a_n - Lb_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - L \to 0.$$

这就证明了 $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$. 情形(ii)得证.

情形(iii) $L = +\infty$. 已知 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$, 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 设法将情形(iii) 转化到情形(i). 考虑 $\frac{b_n}{a_n}$. 假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 意味着 $\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} \to 0$. 为应用结论(i), 需验证 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格.

由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 可知存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 1 \quad 即 \quad a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n > 0.$$

这表明 $\{a_n\} \uparrow$ 严格.

之前已证 $a_{n+1}-a_n>b_{n+1}-b_n>0,\ \forall n\geq N$. 因此对 $n\geq N$

$$\begin{aligned} a_{N+1}-a_N &> b_{N+1}-b_N, \\ a_{N+2}-a_{N+1} &> b_{N+2}-b_{N+1}, \\ &\vdots \\ a_{n+1}-a_n &> b_{n+1}-b_n. \end{aligned}$$

将上述不等式两边分别相加得 $a_{n+1}-a_N>b_{n+1}-b_N\to+\infty$.

这表明 $\{a_n\}\uparrow+\infty$ 严格. 对序列 $\frac{b_n}{a_n}$ 应用结论(i) 可知 $\frac{b_n}{a_n}\to 0$.

由于 $a_n\to+\infty$, $b_n\to+\infty$, 故当 n 充分大时, $a_n>0$, $b_n>0$.

因此 $\frac{a_n}{b_n}\to+\infty$. 情形(iii) 得证.

证明续六

情形(iv): $L = -\infty$. 考虑序列 $\frac{-a_n}{b_n}$, 即可将情形(iv) 转化到情形(iii). 至此 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型的结论得证.

无界序列的特征

Lemma

引理: (i) 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to +\infty$; (ii) 若序列 $\{a_n\}$ 无下界, 则存在子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to -\infty$.

Proof.

证明: 只证(i). 结论(ii)的证明类似. 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则依定义知, 对 $\forall M > 0$, 存在项 $a_m > M$. 取 $M = 1$, 则存在指标 $n_1 \geq 1$, 使得 $a_{n_1} > 1$. 取 $M = 2$, 则存在指标 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} > 2$. 取 $M = k$, 则存在指标 $n_k > n_{k-1}$, 使得 $a_{n_k} > k$. 于是子列 $a_{n_k} \to +\infty$. □

Definition

定义：给定一个序列 $\{a_n\}$. (i) 若存在一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 $\hat{a} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$，则称 $\hat{a}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个聚点. (ii) 若聚点 $\hat{a} = +\infty$ 或 $\hat{a} = -\infty$，则 $\hat{a}$ 为无穷聚点. (iii) 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 所有聚点(包括无穷聚点)的集合，定义

$$\overline{\lim}\, a_n \triangleq \sup E, \quad \underline{\lim}\, a_n \triangleq \inf E,$$

并分别称它们为序列 $\{a_n\}$ 的上极限(superior limits) 和下极限(inferior limits).

例子

例一: 易证序列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1} = \{1, 0, -1, 0, 1, \cdots\}$ 的聚点集合 $E = \{-1, 0, 1\}$. 因此 $\overline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = 1$. $\underline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = -1$.

例二: 易证序列 $\{n^{(-1)^n}\} = \{\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \cdots\}$ 的聚点集合 $E = \{0, +\infty\}$, 故序列的上下极限为 $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\, a_n = 0$.

Theorem

定理: 有界序列必存在收敛子列.

证明大意: 设 $\{x_n\}$ 为一有界序列. 设 $\{x_n\} \subset J_1 = [a_1, b_1]$. 将区间 J_1 等分为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. 这两个子区间中, 必至少有一个, 记作 $J_2 = [a_2, b_2]$ 含有序列 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 再对区间 $[a_2, b_2]$ 等分为两个区间, 其中之一, 记作 $J_3 = [a_3, b_3]$ 必含序列 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 如此继续下去, 我们得到一个闭区间套 $\{J_k\}$ 满足 $J_{k+1} \subset J_k$, $k \geq 1$, 且区间长度为 $|J_k| = b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}|J_1| \to 0$, $k \to +\infty$.

B-W 定理证明续

根据区间套定理可知，存在唯一一点 $\xi \in \bigcap_{k\geq 1} J_k$. 根据做法，每个区间 J_k 均含有序列 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 可在区间 J_1 中取 x_{n_1}，在区间 J_2 中取 x_{n_2}，$n_1 < n_2$. 如此继续下去，即可得到一个子列 $\{x_{n_k}\}$，$n_1 < n_2 < \cdots$. 显然 $x_{n_k} \to \xi$. 定理得证. $\square$

作业

课本习题1.3 (pp.13-14):

5, 6, 7, 8, 9.

课本习题1.4 (pp. 18-19):

2, 3, 4, 5(1)(2), 6, 12, 13, 16, 17.

提示: (i) 习题1.3题9, 以及习题1.4题4(2)(3): 可利用几何算数平均不等式

(ii) 习题1.4题16(1): 可利用 Bernoulli 不等式: $(1+h)^n \geq 1+nh$, 对任意正整数 n, 以及任意实数 $h > -1$.