《微积分A1》第一讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2020年09月16日

联系方式

办公室：理科楼 A323

电话：62796895(O), 13521891215(M)

微信群名: 20秋微A1乙YLJ

email: lyang@tsinghua.edu.cn

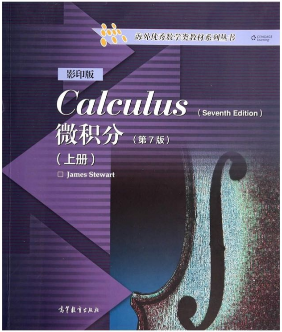
教材

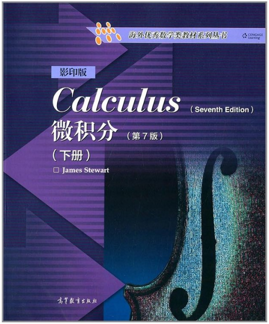
教材: 《高等微积分教程》(上), 章纪民, 闫浩, 刘智新编著, 清华大学出版社, 2014 (价32元, 教材中心有售)

参考书一

一. James Stewart, Calculus, 7th edition, 2012 年, pp. 1381.

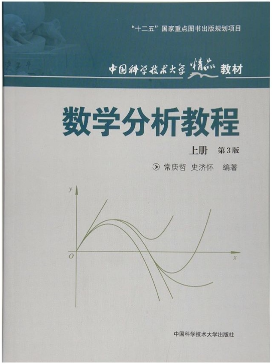
英文电子版已上载于网络学堂. 这本教材, 图文并茂, 通俗易懂, 说理透彻, 强烈推荐!

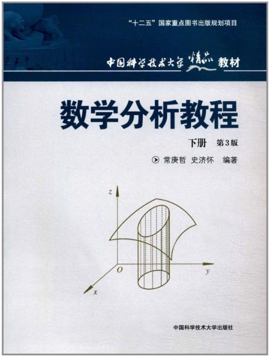




二. 《数学分析教程》上下两册，第三版，常庚哲史济怀编著.

上册第二版的电子版已上载到网络学堂.



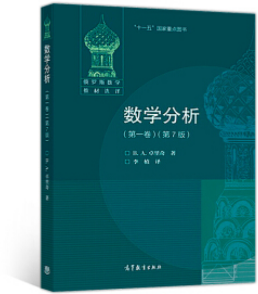


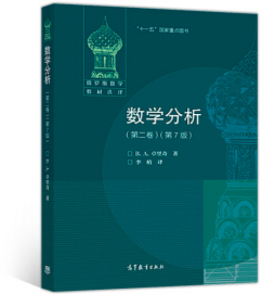
参考书三

三. 《数学分析习题课讲义》第二版，上下两册，谢惠民等编著，高等教育出版社，分别于 2018 年和 2019 年出版

四．《数学分析》第一,二卷，第7版，卓里奇著，李植译，2019.

(数学系学生教材)





参考书五

五. Peter Lax and Maria Terrell, 《微积分及其应用》, 2018

《多元微积分及其应用》, 2020, 现代数学译丛, 科学出版社

作业事宜

- 请用数学作业纸做作业，并且手写作业
- 抄题，解答时要写"解" 或"证明"
- 两道题之间要空行
- 从第二周起，每周三上课前提交上一周所布置的两次作业，下周周三取回已批改好的作业
- 助教每周三课前或课后带来批改好的作业，并取走新交的作业

答疑,助教,习题课,考试及成绩事宜

答疑: 周一,二,四,五下午3:00-6:00, 在办公室(理科楼A323)

助教: ???(博士生)　???@???

习题课: 习题课从第四周开始, 每周一次, 至第十六周, 具体安排待通知.

期中考试: 闭卷, 时间11月14日(周六)晚19:20-21:20

成绩评定: 20% 作业成绩 + 30% 期中成绩 + 50% 期末成绩

实数定义(以下关于实数的内容可不必深究, 只需作一般性了解)

Definition

定义(参见卓里奇数学分析,第七版,卷一,第28-53页): 如果一个非空集合 $\mathbb{R}$ 满足四组公理(即条件):

(i) 加法公理,

(ii) 乘法公理,

(iii) 序公理,

(iv) 连续性(完备性)公理,

则称集合 $\mathbb{R}$ 构成一个实数模型(或系统), 也称作实数域.

设 $\mathbb{R}$ 是一个集合. 定义乘积集合 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\triangleq\{(a,b),a,b\in\mathbb{R}\}$. 任何一个映射 $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 均称作集合 $\mathbb{R}$ 上的一个二元运算, 简称运算. 如果一个运算 ϕ 满足以下四个条件(加法公理), 则称运算 ϕ 为 $\mathbb{R}$ 上的加法.

(i) (存在零元素) 存在一个元素, 记作 $0\in\mathbb{R}$, 称作零元素, 使得对 $\forall x\in\mathbb{R}$, $\phi(x,0)=\phi(0,x)=x$; (稍后将证明零元素唯一).

(ii) (存在负元素) 对于任意 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $y\in\mathbb{R}$, 使得 $\phi(x,y)=\phi(y,x)=0$. 元素 x 的负元素记作 $-x$. (稍后将证明负元素唯一).

(iii) (交换律) 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, $\phi(x,y)=\phi(y,x)$;

(iv) (结合律) 对任意 $x,y,z\in\mathbb{R}$, $\phi(x,\phi(y,z))=\phi(\phi(x,y),z)$.

用符号 + 表示加法运算

通常用符号 $+$ 表示集合 $\mathbb{R}$ 上的加法运算 ϕ. 即将 $\phi(x, y)$ 写作 $\phi(x, y) = x + y$. 于是加法运算 $+$ 所满足的四个条件(加法公理) 可比较简单地表示如下:

(i) (存在零元素) 存在一个元素, 记作 $0 \in \mathbb{R}$, 称作零元素, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$;

(ii) (存在负元素) 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $y \in \mathbb{R}$, 使得 $x + y = y + x = 0$. 元素 x 的负元素记作 $-x$.

(iii) (交换律) 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$;

(iv) (结合律) 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

注一: 零元素唯一. 因为若还存在另一个零元素 $\bar{0} \in \mathbb{R}$, 则 $\bar{0} = \bar{0} + 0 = 0$.

注二: 负元素唯一. 假设对于元素 $x \in \mathbb{R}$, 存在两个负元素 $y, z \in \mathbb{R}$, 即 $x + y = y + x = 0$, $x + z = z + x = 0$, 则 $z = z + 0 = z + (x + y) = (z + x) + y = 0 + y = y$.

注三: 用抽象代数的语言, 满足上述四条加法公理的集合 $\mathbb{R}$ 构成一个群(group), 常称为加法群.

乘法公理

假设在集合 $\mathbb{R}$ 上除了加法运算 $+$ 外，还定义了另一个运算，即存在另一个映射 $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足以下五个条件(乘法公理)，则称运算 ψ 为乘法. 通常记 $\psi(a, b) = a \cdot b$，或直接写作 $\psi(a, b) = ab$.

(i) (存在单位元) 存在一个非零元素，记作 $1 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$，称作单位元，使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x1 = 1x = x$; (显然单位元唯一)

(ii) (存在逆元素) 对于每个非零元素 $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$，存在 $y \in \mathbb{R}$，使得 $xy = yx = 1$. 元素 x 的逆元素常记作 x^{-1} (稍后将证明每个非零元的逆元素唯一).

乘法公理续

(iii) (结合律) 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x(yz) = (xy)z$;

(iv) (交换律) 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, $xy = yx$.

(v) (分配律) 对于任意 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x + y)z = xz + yz$.

注一: 单位元唯一. 因为若还存在另一个单位元 $\bar{1} \in \mathbb{R}$, 则 $\bar{1} = \bar{1} \cdot 1 = 1$.

注二: 每个非零元素的逆元素唯一. 若对非零元素 $x \in \mathbb{R}$, 存在两个逆元素 $y, z \in \mathbb{R}$, 即 $xy = yx = 1$, $xz = zx = 1$, 则 $z = z1 = z(xy) = (zx)y = 1y = y$.

注三: 用抽象代数的语言, 集合 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 关于乘法满足上述四条公理的集合 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 构成一个群(group), 常称为乘群. 我们称同时满足加法公理和乘法公理的集合 $\mathbb{R}$ 构成一个域(field). 加法公理与乘法公理一起构成域公理.

乘积集合 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 任意一个子集合 $S\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 均称为 $\mathbb{R}$ 的一个关系. 如果 $(x,y)\in S$, 则称元素 x 与元素 y 有关系 S, 记作 xSy.

设集合 $\mathbb{R}$ 上定义了加法和乘法. 假设在其上还存在一个关系 S, 满足如下六个条件(序公理), 则称关系 S 为集合 $\mathbb{R}$ 上的一个序.

(i) 对任意 $x\in\mathbb{R}$, xSx; (自反性)

(ii) 若 xSy 且 ySx, 则 $x=y$;

(iii) 若 xSy 且 ySz, 则 xSz; (传递性)

(iv) 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 则或 xSy 或 ySx; (全序性)

(v) 若 xSy, 则 $(x+z)S(y+z)$, $\forall z\in\mathbb{R}$;

(vi) 若 $0Sx$ 且 $0Sy$, 则 $0S(xy)$.

用符号 $\leq$ 代替序关系符号 S

若用符号 $\leq$ 来代替序关系符号 S, 则六个序公理可表示如下:

(i) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$; (自反性)

(ii) 若 $x \leq y$ 且 $y \leq x$, 则 $x = y$;

(iii) 若 $x \leq y$ 且 $y \leq z$, 则 $x \leq z$; (传递性)

(iv) 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 则或 $x \leq y$ 或 $y \leq x$; (全序性)

(v) 若 $x \leq y$, 则 $x + z \leq y + z$, $\forall z \in \mathbb{R}$;

(vi) 若 $0 \leq x$ 且 $0 \leq y$, 则 $0 \leq (xy)$.

关于序关系的注记

注一: 关系 $x \le y$ 称为 x 小于等于 y.

注二: 关系 $x \le y$ 可等价地写作 $y \ge x$, 并称为 y 大于等于 x.

注三: 若 $x \le y$ 且 $x \ne y$, 则记作 $x < y$ 或 $y > x$, 并称之为 x 小于 y, 或 y 大于 x.

注四: 如下三分律经常用到(见下面性质六), 即对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 则或 $x < y$ 或 $x = y$ 或 $x > y$.

设 $\mathbb{R}$ 为一个集合，其上定义了加法 $+$ 和乘法 $\cdot$，并且定义了一个序关系 $\leq$. 称 $\mathbb{R}$ 还满足连续性(完备性)公理，如果下述条件成立：

假设任意两个集合 $U, V \subset \mathbb{R}$ 满足 $u \leq v,\ \forall u \in U,\ \forall v \in V$，则存在 $c \in \mathbb{R}$，使得 $u \leq c \leq v,\ \forall u \in U,\ \forall v \in V$.

如何构造实数模型

自然数(定义,加法, 乘法, 序关系)

$\longrightarrow$ 整数(继承自然数的加法, 乘法和序关系)

$\longrightarrow$ 有理数(继承整数的加法, 乘法和序关系)

$\longrightarrow$ 实数(继承有理数的加法, 乘法和序关系)

由有理数集合 $\mathbb{Q}$ 构造实数系统 $\mathbb{R}$ 主要有两种方法:

(i) Cantor 构造: 定义每个有理数基本列 (Cauchy 列) 的等价类为一个实数.

(ii) Dedekind 构造(分割): 若将有理数集分解成两个集合的并 $\mathbb{Q} = A \cup B$, 其中 A 和 B 均非空, 且 $a < b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, 则称分解 $\mathbb{Q} = A \cup B$ 为一个有理数的 Dedekind 分割. 定义每个有理数的 Dedekind 分割为一个实数.

可以证明, 无论是 Cantor 构造的集合, 还是 Dedekind 分割所构成一个集合, 均满足实数系统的四组公理条件. 但证明过程复杂且漫长.

上帝创造了自然数

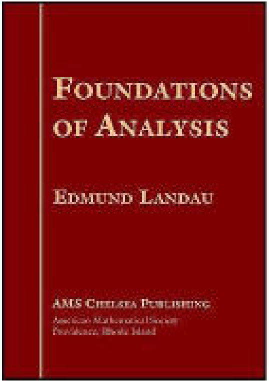
德国数学家 Leopold Kronecker (1823-1891) 语录:

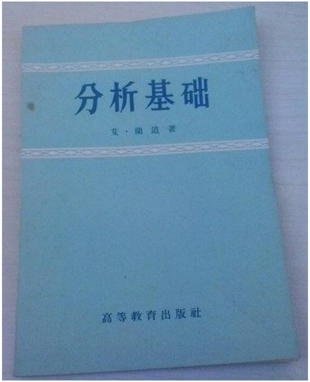
上帝创造了自然数, 其余都是人工作品.

英译: God created the integers, all else is the work of man.

原始德文: Die [positiven] ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

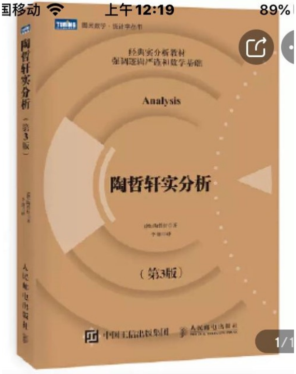
关于实数理论的参考书

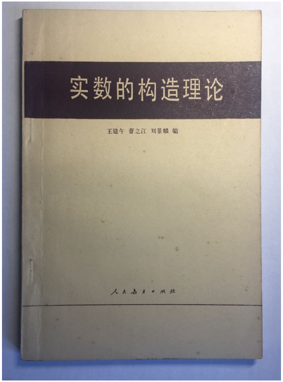




Landau 在他的著作中为学生所作的前言里写到, Please forget everything you have learned in school, for you haven't learnt it.

关于实数理论的参考书，续





《陶哲轩实分析》一书前100多页专门用于讨论实数的定义及其性质.

实数常常表示为一条直线上的点. 这条直线称为实轴或数轴. 先选一个点代表数 0, 再在点 0 的右边选一个点代表数 1. 这样的选择确定了数轴的尺度. 这样实数与数轴上的点就一一对应起来了.

The number line

定义：(i) 一个数集 $S \subset \mathbb{R}$ 称为有上界的(bounded above)，如果存在一个数 $u \in \mathbb{R}$，使得 $x \leq u, \forall x \in S$. 此时 u 称为集合 S 的一个上界(an upper bound).

(ii) 一个数集 $S \subset \mathbb{R}$ 称为有下界的(bounded below)，如果存在一个数 $b \in \mathbb{R}$，使得 $x \geq b, \forall x \in S$. 此时 b 称为集合 S 的一个下界(a lower bound).

(iii) 一个数集 $S \subset \mathbb{R}$ 称为有界的(bounded)，如果它既有上界也有下界，即存在 $u, b \in \mathbb{R}$，使得 $b \leq x \leq u, \forall x \in S$.

例：考虑数集 $S = [0, 1)$. 显然集合 S 是有界集. 因为它有上界 1，且有下界 0.

<u>定义</u>: (i) 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为数集. 如果存在点 $M \in S$, 使得 $x \leq M$, $\forall x \in S$, 则称集合 S 存在最大点, 且 M 是 S 的最大点. 此时记 $M = \max S$. 显然若数集存在最大点, 则它有上界且最大点是一个上界. 例如数集 $(-\infty, 1]$ 有最大点且 $\max(-\infty, 1] = 1$.

(ii) 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为数集. 如果存在 $m \in S$, 使得 $x \geq m$, $\forall x \in S$, 则称集合 S 存在最小点, 且 m 是集合 S 的最小点. 此时记 $m = \min S$. 显然若数集存在最小点, 则它有下界且最小点就是一个下界. 例如数集 $[-1, +\infty)$ 有最小点且 $\min[-1, +\infty) = -1$.

更多例子

Example

例: 有界闭区间 $[0,1] \triangleq \{x, 0 \le x \le 1\}$ 既有最大点, 也有最小点, 且 $\max[0,1] = 1$, $\min[0,1] = 0$. 而有界开区间 $(0,1) \triangleq \{x, 0 < x < 1\}$ 既不存在最大点, 也不存在最小点. 故有上(下)界的实数集不一定存在最大(小)点. 虽然开区间 $(0,1)$ 有界.

确界存在定理

Theorem

<u>定理</u>: 在实数系统 $\mathbb{R}$ 中, (i) 每个有上界的数集 $S \subset \mathbb{R}$ 必存在最小上界 M, 即 M 是 S 的上界, 且对 S 的任意一个上界 M', 必有 $M \le M'$; (ii) 每个有下界的数集 $T \subset \mathbb{R}$ 必存在最大下界 m, 即 m 是 T 的下界, 且对 T 的任意一个下界 m', 必有 $m \ge m'$.

Definition

<u>定义</u>: (i) 有上界数集 S 的最小上界称为 S 的上确界, 记作 $\sup S$; (sup=supremum) (ii) 有下界数集 T 的最大下界称为 T 的下确界, 记作 $\inf T$. (inf=infimum) (iii) 约定当数集 S 无上界时, 记 $\sup S = +\infty$; 当数集 T 无下界时, 记 $\inf T = -\infty$.

Example

例: (i) $\sup[0,1]=1$, $\inf[0,1]=0$.

(ii) $\sup(0,1)=1$, $\inf(0,1)=0$.

(iii) 记 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$, 则 $\sup\mathbb{N}=+\infty$, $\inf\mathbb{N}=1$.

定理证明

Proof.

证: 只证上确界存在性. 下确界存在性的证明类似. 设 $U \subset \mathbb{R}$ 为非空有上界的数集. 令 $V \triangleq \{v \in \mathbb{R}, v$ 是 U 的上界$\}$, 即 V 为子集 U 的所有上界所构成的集合. 显然 U 和 V 均非空. 由实数的连续性公理知存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $u \le c \le v$, $\forall u \in U$, $\forall v \in V$. 由不等式 $u \le c$, $\forall u \in U$, 知 c 是 U 的上界; 由不等式 $c \le v$, $\forall v \in V$, 知 c 是最小上界, 即 c 是 U 的上确界. 定理得证. $\square$

确界存在公理等价于连续性公理

Theorem

定理: 假设集合 $\mathbb{R}$ 定义了加法和乘法, 以及一个序关系. 如果 $\mathbb{R}$ 还满足如下确界存在公理: $\mathbb{R}$ 的每个有上界的子集均存在上确界(即最小上界), 则 $\mathbb{R}$ 满足连续性公理.

Proof.

证明: 留作习题. $\square$

确界的充分必要条件

Theorem

定理: (1) 假设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一个有上界的子集, 则 $M = \sup S$ $\Longleftrightarrow$ (i) M 是 S 的一个上界; (ii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $s_\varepsilon \in S$, 使得 $s_\varepsilon > M - \varepsilon$;

(2) 假设 $T \subset \mathbb{R}$ 为一个有下界的子集, 则 $m = \inf T \Longleftrightarrow$ (i) m 是 T 的一个下界; (ii) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $t_\varepsilon \in S$, 使得 $t_\varepsilon < m + \varepsilon$.

注: 上述定理的结论可看作是上下确界的可操作性的定义.

证明: 结论(1)和(2)的证明类似. 故以下只证明(1). $\Rightarrow$: 设 $M = \sup S$, 即 M 是实数集 S 的上确界(最小上界). 依定义知 M 是 S 的上界, 故(i)成立. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $M - \varepsilon < M$, 故 $M - \varepsilon$ 不是 S 的上界. 因此存在 $s_\varepsilon \in S$, 使得 $s_\varepsilon > M - \varepsilon$, 即(ii)成立. $\Leftarrow$: 假设(i)和(ii)均成立. 要证 $M = \sup S$, 即要证 M 是 S 的上确界. 由(i)知 M 是 S 的上界. 若 M 不是 S 的最小上界, 则存在 S 一个较小的上界 $M_0 < M$. 取 $\varepsilon \triangleq M - M_0 > 0$, 由(ii)知存在一点 $s_\varepsilon \in S$, 使得 $s_\varepsilon > M - \varepsilon = M - (M - M_0) = M_0$. 此与 M_0 是 S 的上界的假设相矛盾. 故 $M = \sup S$. □

确界存在性的意义

确界存在性的意义在于，它保证了在实数域上许多极限的存在性. 由于整个微积分就是极限理论，例如连续，导数和积分等基本概念都是某种极限，故实数的确界存在性是整个微积分的基石. 往下均假设 $\mathbb{R}$ 为一个实数域(系统).

性质一：对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$，方程 $a + x = b$ 有唯一解 $x = b - a$.

证：(i) $x = b - a$ 是解. 因为 $a + (b - a) = (a - a) + b$
$= 0 + b = b$.

(ii) 唯一性. 设 $x' \in \mathbb{R}$ 也是解，即 $a + x' = b$，则 $a + x' - a =$
$b - a$. 于是 $a - a + x' = b - a$. 此即 $x' = b - a$. 证毕.

性质二：设 $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$，方程 $ax = b$ 有唯一解 $x = a^{-1}b$.

证：(i) $x = a^{-1}b$ 是解. 因为 $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1b = b$.

(ii) 唯一性. 设 $x' \in \mathbb{R}$ 也是解，即 $ax' = b$，则 $a^{-1}ax' = a^{-1}b$.

于是 $x' = a^{-1}b$. 证毕.

性质三：对任意 $x \in \mathbb{R}$，$0x = x0 = 0$.

证：由于 $x0 = x(0+0) = x0 + x0$，故 $x0 - x0 = x0 + x0 - x0$，

即 $0 = x0$. 证毕.

性质四：若 $xy=0$，则或 $x=0$ 或 $y=0$.

证：设 $y\neq 0$，则于等式 $xy=0$ 两边同乘 y^{-1} 得 $xyy^{-1}=0y^{-1}$.

此即 $x=0$. 证毕.

性质五：对任意 $x\in\mathbb{R}$，$-x=(-1)x$.

证：由于 $x+(-1)x=[1+(-1)]x=0x=0$，故 $-x=(-1)x$.

证毕.

性质六: 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 则下述三分律成立, 即以下三种情形必出现且只出现之一

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

证: 根据序公理(iii) 可知对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, $x \le y$ 或 $y \le x$. 若这两者同时成立, 则由序公理(ii) (若 $x \le y$ 且 $y \le x$, 则 $x = y$), 知 $x = y$. 设 $x \ne y$, 则当 $x \le y$ 时, $x < y$; 当 $y \le x$ 时, $y < x$. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 设 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x > 0$, 则存在正整数 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $nx > y$.

Proof.

证明: 反证. 假设命题不成立, 即 $nx \le y$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 即 y 是集合 $A \triangleq \{nx, n \in \mathbb{N}\}$ 的一个上界. 记 $a \triangleq \sup A$. 由于 $x > 0$, 故 $a - x < a$, 即 $a - x$ 不是 A 的上界. 因此存在正整数 m, 使得 $a - x < mx$, 即 $a < (m+1)x \in A$. 此与 a 是集合 A 的上确界相矛盾. 命题得证. $\square$

Corollary

推论一: 自然数集 $\mathbb{N}$ 无上界. 即对任意 $y \in \mathbb{R}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $n > y$.

Corollary

推论二: (i) 如果 $a \in \mathbb{R}$ 满足 $0 \le a < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, 那么 $a = 0$.

(ii) 如果 $a > 0$, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{1}{n} < a$.

证明: (i) 假设 $0 < a \le \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, 则 $n \le \frac{1}{a}, \forall n \in \mathbb{N}$ 这表明自然数集 $\mathbb{N}$ 有上界. 矛盾. 故 $a = 0$.

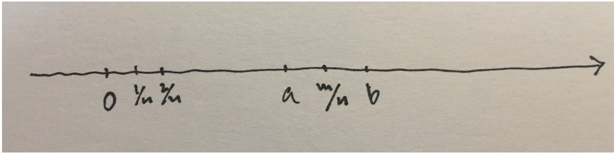
证(ii). 反证. 假设结论不成立, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \ge a > 0$. 根据结论(i)知 $a = 0$. 矛盾. 故结论(ii) 成立. 证毕. $\square$

有理数的稠密性

命题: 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 使得 $a < r < b$.

注: 一个子集 $S \subset \mathbb{R}$ 称为在实数域 $\mathbb{R}$ 上稠密, 如果任意开区间 (a, b) 包含 S 中的元素. 故上述命题是说, 有理数集在实数域中稠密.

证明: 由假设 $a < b$ 可知 $b - a > 0$. 再根据上述推论知存在正整数 n, 使得 $\frac{1}{n} < b - a$. 故存在正整数 m, 使得 $a < \frac{m}{n} < b$. 如图所示. 命题得证. $\square$



无理数的稠密性

命题: 对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, 存在无理数 ξ, 使得 $a < \xi < b$.

证明: 由假设 $a < b$ 可知 $\sqrt{2}a < \sqrt{2}b$. (稍后定义 $\sqrt{2}$, 并证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.) 由有理数的稠密性知, 存在有理数 $r \in (\sqrt{2}a, \sqrt{2}b)$. 若 $r \neq 0$, 则无理数 $\frac{r}{\sqrt{2}} \in (a, b)$. 若 $r = 0$, 则 $\sqrt{2}a < 0 < \sqrt{2}b$. 再次由有理数的稠密性知存在有理数 $s \in (0, \sqrt{2}b)$. 由此可知无理数 $\frac{s}{\sqrt{2}} \in (0, b) \subset (a, b)$. 命题得证. □

注: 课后一位同学(很遗憾我忘了问他的名字)给出了一个更简单的证明: 由有理数的稠密性知存在有理数 $r \in (a + \sqrt{2}, b + \sqrt{2})$. 故 $r - \sqrt{2} \in (a, b)$. 显然 $r - \sqrt{2}$ 是一个无理数. 证毕.

$\sqrt{2}$ 的存在性

Theorem

定理: 存在唯一正实数 $b > 0$, 使得 $b^2 = 2$. (这个数 b 通常称作正数 2 的平方根, 记作 $\sqrt{2}$ 或 $2^{\frac{1}{2}}$.)

证明: 唯一性显然成立. 因为如果还存在 $a > 0$, 使得 $a^2 = 2$, 则 $0 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. 由于 $a+b > 0$, 故 $a-b = 0$, 即 $a = b$. (回忆实数性质四: 若 $xy = 0$, 则或 $x = 0$ 或 $y = 0$.) 以下证存在性. 记 $S = \{x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 < 2\}$. 断言 (i) S 非空. 因为 $1^2 = 1 < 2$, 故 $1 \in S$. 断言(ii) S 上有界. 因为对任意 $x \in S$, $x^2 < 2 < 4 = 2^2$, 故 $x < 2$. 这表明 2 就是 S 的一个上界.

证明续一

由确界存在定理知 S 存在上确界. 记 $b = \sup S$. 由序公理的三分律知, 或 $b^2 < 2$ 或 $b^2 > 2$ 或 $b^2 = 2$. 往下将证明前两个情形不可能发生. 因此必有 $b^2 = 2$.

(1) 假设 $b^2 < 2$. 对于 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, $(b+\varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 < b^2 + 4\varepsilon + \varepsilon = b^2 + 5\varepsilon$. 令 $b^2 + 5\varepsilon < 2$, 即 $\varepsilon \in (0, \frac{2-b^2}{5})$. 对这样的 ε, $(b+\varepsilon)^2 < 2$. 故 $b + \varepsilon \in S$. 此与 b 是 S 的上确界矛盾. 因此情形 $b^2 < c$ 不可能出现.

(2) 假设 $b^2 > 2$. 对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, $(b-\varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2$ $> b^2 - 2b\varepsilon \geq b^2 - 4\varepsilon$. (因为 $0 < b < 2$). 令 $b^2 - 4\varepsilon > 2$, 即 $\varepsilon \in (0, \frac{b^2-2}{4})$. 对于这样的 ε, $(b-\varepsilon)^2 > 2$. 于是对于 $\forall x \in S$, $x^2 < 2 < (b-\varepsilon)^2$. 故 $x < b - \varepsilon$. 这表明 $b - \varepsilon$ 是 S 的一个上界. 此与 b 是 S 的上确界相矛盾. 这说明 $b^2 > 2$ 不可能发生.

这就证明了 $b^2 = 2$. 证毕.

注: 类似可证, 对任意正整数 n, 以及任意正数 c, 存在唯一正数 $b > 0$, 使得 $b^n = c$. 这个数 b 称作正数 c 的 n 次方根, 记作 $\sqrt[n]{c}$, 或 $c^{\frac{1}{n}}$.

Theorem

定理[Pythagoras School, 约公元前 500 年]: $\sqrt{2}$ 是无理数.

Proof.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 即它可表示为 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 均为正整数, 且 p 和 q 无公因子, 则 $(\frac{p}{q})^2 = 2$, 即 $p^2 = 2q^2$. 由此可见 p 是偶数, 即 $p = 2k$, 其中 k 也是正整数. 于是 $4k^2 = 2q^2$, 即 $2k^2 = q^2$. 由此可知 q 也为偶数. 矛盾. 证毕. □

注: 可以证明, 若 n 不是完全平方数, 即 $n \neq 1, 4, 9, \cdots$, 则 $\sqrt{n}$ 是无理数. 参见常庚哲史济怀《数学分析教程》(上), 第3页.

不难验证，有理数集 $\mathbb{Q}$ 按通常的加法满足加法公理，乘法满足乘法公理，以及通常的大小关系满足序公理. 因此 $\mathbb{Q}$ 构成一个数域，称作有理数域.

命题：有理数域 $\mathbb{Q}$ 不满足确界存在性条件.

证明：只要证 $\mathbb{Q}$ 的某个非空上有界集不存在上确界即可. 定义 $S = \{r \in \mathbb{Q}, r > 0, r^2 < 2\}$. 假设 S 有上确界 $b \triangleq \sup S$，且 b 是有理数. 不难证明在有理数域内同样成立三分律，即 $b^2 < 2$ 或 $b^2 > 2$ 或 $b^2 = 2$. 用前述方法可证，在有理数域 $\mathbb{Q}$ 内，前两个情况同样不可能发生. (唯一不同的地方是这里需取 ε 为适当小的正有理数.) 故 $b^2 = 2$，即 $b = \sqrt{2}$ 是无理数. 矛盾. 故 S 没有上确界. 从而有理数域不满足确界存在性条件. 证毕. □

根据实数的序公理，不难得到如下关于不等式的五个基本结论

(i) 三分律：对于 $\forall a, b \in \mathbb{R}$，或 $a < b$，或 $a = b$，或 $a > b$.

(ii) 传递律：若 $a < b$ 且 $b < c$，则 $a < c$.

(iii) 加法律：若 $a < b$ 且 $c < d$，则 $a + c < b + d$.

(iv) 乘法律：设 $a < b$. 若 $p > 0$，则 $ap < bp$；若 $p < 0$，则 $ap > bp$.

(v) 倒数律：若 $0 < a < b$，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

注意除了三分律之外，在其它所有地方的严格不等号 $<$ (或 $>$)，均可由相应的非严格不等号 $\leq$ (或 $\geq$) 替换，结论亦然成立.

Theorem

定理：对于 $\forall a, b \in \mathbb{R}$，$|a| - |b| \le |a+b| \le |a| + |b|$.

注：第二个不等式称作三角不等式，第一个不等式称作逆三角不等式.

Proof.

证明：由于 $\pm a \le |a|$，$\pm b \le |b|$，故 $\pm(a+b) \le |a| + |b|$. 因此

$$|a+b| = \pm(a+b) \le |a| + |b|.$$

故三角不等式得证. 再根据三角不等式得 $|a| = |a+b-b|$ $\le |a+b| + |b|$. 由此即得逆三角不等式. 证毕. $\square$

Example

例: 利用 $|\pi - 3.141| < 10^{-3}$, $|\sqrt{2} - 1.414| < 10^{-3}$, 我们可以得到关于数 $\pi + \sqrt{2}$ 的估计:

$$\left|\pi + \sqrt{2} - 4.555\right| = \left|(\pi - 3.141) + (\sqrt{2} - 1.414)\right|$$

$$\leq \left|\pi - 3.141\right| + \left|\sqrt{2} - 1.414\right| \leq 10^{-3} + 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}.$$

Theorem

定理 (The arithmetic-geometric mean inequality): 对任意两个正数 $a, b > 0$, 成立 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, 且等号成立当且仅当 $a = b$.

注: 记 $G(a, b) = \sqrt{ab}$, $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, 分别称 $G(a, b)$ 和$A(a, b)$ 为正数 a, b 的几何平均和算术平均. 因此定理可简言之为, 几何平均小于等于算术平均.

Proof.

代数证明: 由于 $0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故 $4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. 于是 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. 显然等号成立, 当且仅当 $a = b$. 命题得证. $\square$

图形证明

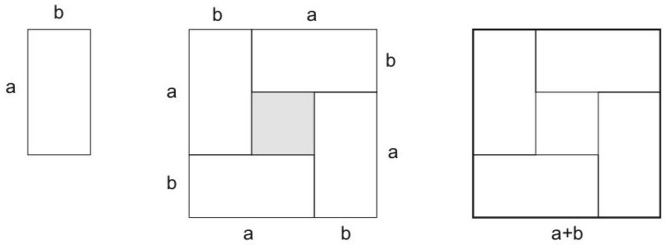
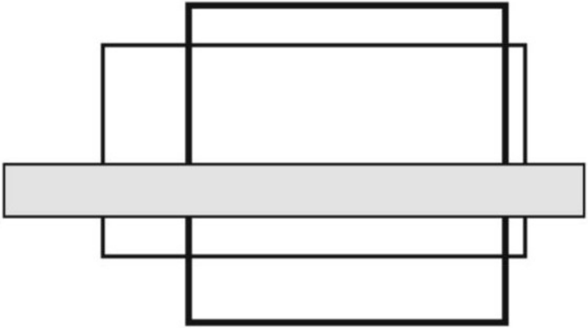


Fig. 1.9 A visual proof that $4ab \leq (a+b)^2$, by comparing areas

例: 证明在给定周长的矩形中, 正方形的面积最大. 如图所示.



证明

Proof.

证明: 设矩形的长和宽分别为 L 和 W, 则其面积为 LW. 根据算术几何平均不等式可知 $\sqrt{LW} \le \frac{L+W}{2}$, 或等价地

$$LW \le \left(\frac{L+W}{2}\right)^2.$$

注意上式右边是具有相同周长的正方形之面积. 命题得证. □

Theorem

定理: 对任意 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

且等号成立, 当且仅当这 n 个数相等, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

注: 同两个数的情形, 记 $G(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, 它们分别称为正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的几何平均和算术平均. 因此定理可简言之为, 任意 n 个正数的几何平均小于等于其算术平均.

证明大意: 已证结论对 $n = 2$ 成立. 以下证明当 $n = 4$ 时结论成立. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 为四个正数, 记

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad A_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}.$$

多次应用 $n = 2$ 时的结论得

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq A_1, \quad \sqrt{a_3 a_4} \leq A_2, \quad \sqrt{A_1 A_2} \leq \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

于是

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \le \sqrt{A_1A_2} \le \frac{A_1+A_2}{2}$$

$$= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

等号成立，当且仅当 $A_1 = A_2$ 且 $a_1 = a_2$，$a_3 = a_4$. 这等价于 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. 因此 $n = 4$ 时结论成立. 以下再证明 $n = 3$ 时的结论. 设 a_1, a_2, a_3 为三个正数. 记它们的算术平均值为

$$m = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}.$$

不难证明 m 也是四个数 a_1, a_2, a_3, m 的算术平均值，即

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + m}{4}.$$

现在对这四个数应用 $n = 4$ 时的结论得 $(a_1a_2a_3m)^{\frac{1}{4}} \leq m$. 两边取四次方即得 $(a_1a_2a_3m) \leq m^4$. 此即 $(a_1a_2a_3) \leq m^3$. 亦即 $(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}} \leq m$. 这就证明了结论当 $n = 3$ 时成立. 其余情形的证明类似.

作业

课本习题1.1 (pp.3-4): 1(2)(3), 2(1)(3), 4, 6.

补充题一: 证明定理: 假设集合 $\mathbb{R}$ 定义了加法和乘法, 以及一个序关系. 如果 $\mathbb{R}$ 还满足如下确界存在公理: $\mathbb{R}$ 的每个有上界的子集均存在上确界(即最小上界), 则 $\mathbb{R}$ 满足连续性公理.

补充题二: 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数.

补充题三: 利用算术几何平均不等式证明, 对于任意 $x > 0$,

(i) $x^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x+2}{3}$.

(ii) 对于每个正整数 n, $x^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x+n-1}{n}$.

(iii) 对于每个正整数 n, $n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2n-1}{n}$.

<u>补充题四</u>: 设 a, b 为两个正数, 证明 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

<u>注</u>: 表达式 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 称为两个正数 a, b 的调和平均. 于是题目中的结论就是调和平均小于等于几何平均.

<u>补充题五</u>: 证明对于任意正整数 n, $(n!)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n+1}{2}$.

<u>补充题六</u>: 完成算术几何平均不等式一般情形的证明.

(i) 证明 $n = 8$ 时的结论: 应用两次对于四个正数时的结论.

(ii) 证明 $n = 5$ 时的结论: 设 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 为五个任意正数, m 是它们的算术平均值, 则八个数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, m, m, m$ 算术平均值仍然为 m. 由此证明 $n = 5$ 时的结论成立.