《微积分A1》第五讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年09月27日

Definition

定义: 序列 $\{a_n\}$ 称为 Cauchy 序列或基本序列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$, 或者 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$.

Theorem

定理 [Cauchy 收敛准则]: 序列 $\{a_n\}$ 收敛, 当且仅当序列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列.

Cauchy 收敛准则的优点: 判断序列的收敛性, 无需事先知道序列的极限值.

关于实数完备性总结

总结：以下公理和定理反映了实数完备(连续)性.

完备(连续)性公理, 确界存在定理, 单调有界定理, 区间套定理, B-W 定理, Cauchy 收敛准则, 有限覆盖定理(尚未介绍).

可以证明以上七个定理和公理相互等价. 到目前为止, 我们已证明了如下蕴含关系:

完备(连续)性定理 $\Longleftrightarrow$ 确界存在定理 $\Rightarrow$ 单调有界定理 $\Rightarrow$ 区间套定理 $\Rightarrow$ B-W 定理 $\Rightarrow$ Cauchy 收敛准则.

例一: 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明序列 $\{a_n\}$ 不收敛.

证: 反证. 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛, 则序列 $\{a_n\}$ 是Cauchy 序列. 于是对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N, 使得 $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$. 取 $p = n \geq N$, 则

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

矛盾. 这说明序列 $\{a_n\}$ 不收敛. 证毕. □

例二: 设序列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k| \le M$, $\forall n \ge 1$, 其中 $M>0$ 为一正常数, 与 n 无关. 证明序列 $\{a_n\}$ 收敛.

证: 记 $b_n = \sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|$, 则序列 $\{b_n\}$ 为单调增加, 且有上界 M. 故序列 $\{b_n\}$ 收敛. 从而它是 Cauchy 列, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $\forall n \ge N$, $\forall p \ge 1$, $|b_{n+p}-b_n| < \varepsilon$, 即

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_{k+1}-a_k| < \varepsilon.$$

因此 $|a_{n+p}-a_n|$

$$= |(a_{n+p}-a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1}-a_{n+p-2}) + \cdots + (a_{n+1}-a_n)|$$

例二续

$$\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列. 从而序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证毕. $\square$

Definition

定义: 一个映射 $f: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称作一个函数, 其中 J 通常为一个区间, 开的, 闭的或半开半闭, 称作函数 f 的定义域.

注: 常见的函数均以公式的形式给出. 例如多项式, 三角函数等. 但也有许多重要的函数不能以公式形式给出, 也很难画出它们的函数图像. 例如 Dirichlet 函数 $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

Definition

<u>定义</u>: 设 $f, g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个函数, 定义它们的

$$
\begin{array}{ll}
\text{和差函数} & (f \pm g)(x) \triangleq f(x) \pm g(x) \\
\text{乘积函数} & (f \cdot g)(x) \triangleq f(x) \cdot g(x) \\
\text{商函数} & (f/g)(x) \triangleq f(x)/g(x),\ g(x) \neq 0.
\end{array}
$$

Definition

定义: 设 $g: J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个函数. 若函数 g 的值域 $g(J) \triangleq \{g(x), x \in J\}$ 包含在函数 f 的定义域 K 内, 即 $g(J) \subset K$, 则函数 f 可与函数 g 复合, 且它们的复合函数 $f \circ g$ 定义如下

$$(f \circ g)(x) \triangleq f(g(x)), \quad x \in J.$$

复合函数图示

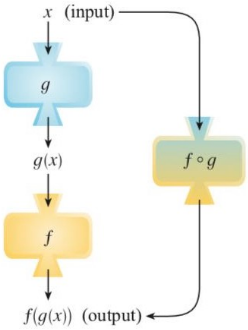


FIGURE 11

The $f \circ g$ machine is composed of the g machine (first) and then the f machine.

复合函数例子

Example

例: 设 $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$, 它们的定义域均为 $\mathbb{R}$, 则 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 均有意义, 且 $(g\circ f)(x)=\sin(e^x)$, $(f\circ g)(x)=e^{\sin x}$.

注: (i) 并非任意两个函数均可复合; (ii) 一个复合函数有意义, 并不意味着另一个复合函数有意义; (iii) 当两个复合函数均有意义时, 它们一般并不相同. 如上例.

Definition

定义: 以下六类函数均称作基本初等函数.

(i) 多项式 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$;

(ii) 幂函数 x^p;

(iii) 指数函数 $a^x,\ a > 0$;

(iv) 对数函数 $\log_a x,\ a > 0,\ x > 0$;

(v) 三角函数 $\sin x,\ \cos x,\ \cdots$;

(vi) 反三角函数 $\arcsin x,\ \arccos x,\ \cdots$.

定义: 由基本初等函数经过有限次四则运算，以及有限次复合运算所得到的函数称作初等函数.

初等函数包含了许多常见的函数. 例如函数 $|x|$ 是初等函数，因为它可以表示为 $|x| = \sqrt{x^2}$. 可以证明 Dirichlet 函数不是初等函数. 再例如，当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为初等函数时，函数 $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 和 $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 均为初等函数. 因为这两个函数可表为

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\Big),$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\Big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\Big).$$

Definition

定义: 称函数 $f(x)$ 在其定义域(区间) J 上有界, 如果存在正常数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M, \forall x \in J$.

例如函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在其定义域 $\mathbb{R}$ 上有界. 因为 $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

函数的有界性与其定义区间有关. 例如函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 上有界, 而在区间 $(0, 1]$ 上无界.

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在整个实轴上定义. 如果存在常数 $T > 0$, 使得 $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, 则称 $f(x)$ 为周期为 T 的周期函数.

Example

例: (i) 常数函数是周期函数, 任意正常数均为它的周期. (ii) 三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 均为周期函数, 且周期为 2π.

显然周期函数有无穷个周期. 因为若周期函数有周期 $T>0$, 则 nT 也是周期, 这里 n 为任意正整数.

问题: 非常数函数是否有最小正周期?

回答是否定的. 例如 Dirichlet 函数 $D(x)$ 是周期函数, 且以任意正有理数为周期. 由于不存在最小的正有理数, 故周期函数 $D(x)$ 不存在最小正周期. (但可以证明, 非常数的连续的周期函数有最小正周期.)

我们约定: 称某个连续的周期函数的周期为 $T>0$, 意思就是 $T>0$ 是最小正周期. 例如我们常说三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期为 2π, 意思是它们的最小正周期是 2π.

单调函数

Definition

<u>定义</u>: 设 $f(x)$ 在区间 J 上定义. (i) 若对于任意两点 $x_1 < x_2$ $\forall x_1, x_2 \in J$, 均有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 J 上单调上升, 并记作 $f(x) \uparrow$. 若不等号 $\le$ 严格成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 J 上严格单调上升.

(ii) 类似可定义函数 $f(x)$ 在区间 J 上单调下降, 以及严格单调下降, 并记作 $f(x) \downarrow$.

单调函数的图像

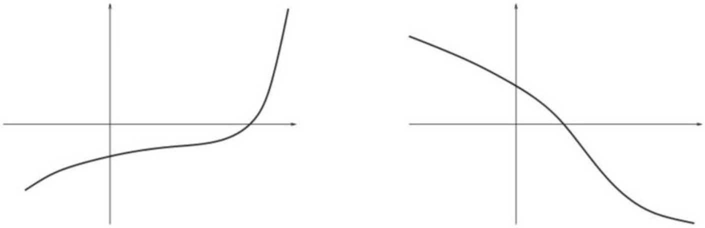


Fig. 2.24 Two graphs of monotonic functions. *Left*: increasing, *Right*: decreasing

Definition

定义: 若函数 $f : J \to K$ 为一一对应即双射, 则存在唯一的反函数 $f^{-1} : K \to J$ 满足如下条件

$$\forall y \in K, \quad f^{-1}(y) = x, \quad \text{其中} \quad f(x) = y.$$

注一: (i) 函数 f 称为单射, 如果 $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall x_1 \neq x_2$. (ii) 函数 f 称为满射, 如果 $\forall y \in K$, 存在 $x \in J$, 使得 $f(x) = y$. (iii) 函数 f 称为双射, 如果 f 既是单射又是满射.

注二: 双射 bijective, 单射 injective, 满射 surjective

反函数的例子

Example

例: (i) $f(x)=x$, $(x\in \mathbb{R})$ 的反函数为 $f^{-1}(y)=y$;

(ii) $f(x)=2x+1$ $(x\in \mathbb{R})$ 的反函数为 $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1)$;

(iii) $f(x)=\sin x$ $(x\in [\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ 的反函数为 $f^{-1}(y)=\arcsin y$, $y\in[-1,1]$.

Theorem

定理: (i) 若函数 $f: J \to K$ 严格单调, 则存在反函数 $f^{-1}(y)$, 其中 $K = f(J)$;

(ii) 若 $f(x)$ 严格单调上升, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 也严格单调上升;

(iii) 若 $f(x)$ 严格单调下降, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 也严格单调下降.

证明见课本第36页习题2.1题21.

函数与反函数图像

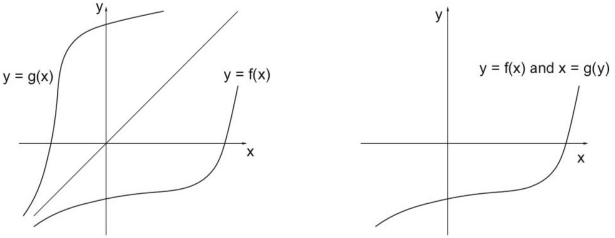


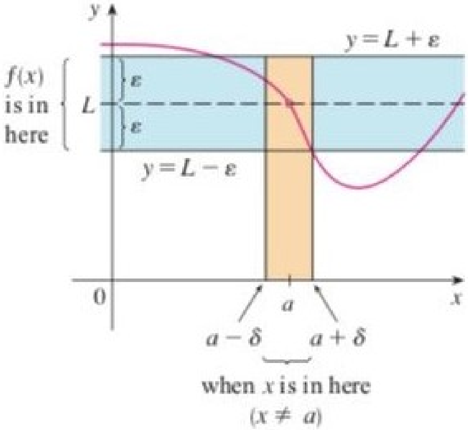
Fig. 2.25 *Left*: graphs of an increasing function f and its inverse g. *Right*: if you write $f(x) = y$ and $x = g(y)$, then the graph of $f(x) = y$ is also the graph of $g(y) = x$

Definition

<u>定义</u>: 设函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的某个去心邻域 $0<|x-x_0|<\rho$ 上有定义(通常 f 的定义域很大), 如果存在数 L, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$, $|f(x)-L|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极限, 且极限值为 L, 并记作 $f(x)\to L$, $x\to x_0$, 或 $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

<u>注</u>: 在考虑函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限时, $f(x)$ 在点 x_0 处有没有定义, 与极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在与否无关.

函数极限 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 可图示如下.



例一

Example

例一: 考虑函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处是否有极限. 注意函数 $f(x)$ 除 $x=0$ 点之外处处有定义. 由于 $|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$, $\forall x\neq 0$, 故 $|f(x)-0|=|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|$. 因此对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\varepsilon$, 使得当 $0<|x-0|=|x|<\delta$ 时, $|f(x)-0|\leq|x|<\varepsilon$. 因此函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有极限, 且 $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

例二: 考虑函数
$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$$
在点 $x=1$ 处的极限.

解: 注意函数 $f(x)$ 可以化简
$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}=\frac{x-2}{x}.$$
由此可见函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的极限似乎是 $f(1)=-1$. 以下来证明. 考虑
$$|f(x)-(-1)|=\left|\frac{x-2}{x}+1\right|=\frac{2|x-1|}{|x|}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \varepsilon\}$，则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，

$$|x| = x > 1 - \delta > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

于是 $$|f(x) - (-1)| = \frac{2|x-1|}{x} \leq 4|x-1| < 4\delta \leq 4\varepsilon.$$

这表明 $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = -1$. 解答完毕.

Example

例三：证明极限 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明：由于

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|,$$

故对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\varepsilon$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$. 命题得证.

注：上述结论 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ 表明三角函数 $\sin x$ 在任意点 x_0 连续. 稍后定义连续. 此外, 在上述证明中用到了不等式 $\sin x<x,\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 稍后将证明这个结论.

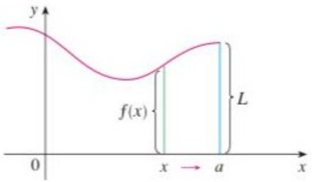
Definition

<u>定义</u>: 设函数 $f(x)$ 的定义域包含开区间 $(a, a+\rho)$. 若存在数 $L \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

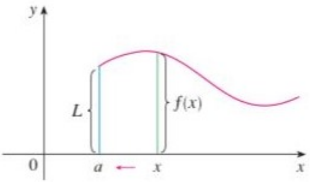
$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, a+\delta),$$

则称 $f(x)$ 在点 a 处的右侧极限存在, 记作 $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ 或 $f(x) \to L$ $(x \to a^+)$, 且极限值 L 常记作 $f(a^+)$, 即 $f(a^+) \triangleq \lim_{x\to a^+} f(x)$. 类似可定义函数 $f(x)$ 在点 a 处的左侧极限, 并记左侧极限为 $f(a^-)$, 即 $f(a^-) \triangleq \lim_{x\to a^-} f(x)$.

单侧极限图示



(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$



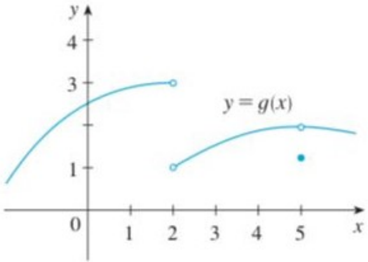
(b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

单侧极限，例一

符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 定义如下

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}.$$

显然 $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.



假设 g(x) 的函数如图所示，则

(i) $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$;

(ii) $\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to 5^+} g(x)$.

Theorem

定理: 极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 两个单侧极限 $\lim_{x\to a^\pm} f(x)$ 均存在且相等.

证明简单. 从略.

单调函数的两个单侧极限处处存在

定理 [课本第40页例2.2.6]: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上单调, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上每一点处的左右极限均存在.

证: 不妨设 $f(x)\uparrow$. 设 $x_0\in(a,b)$. 以下证左极限 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在. 右极限情形类似, 故略去. 记 $S \triangleq \{f(x), x\in(a,x_0)\}$. 显然集 S 有上界, 因为 $f(x_0)$ 就是一个上界. 记 $L \triangleq \sup S$. 根据上确界性质可知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $s^*\in S$, 使得 $s^*>L-\varepsilon$. 设 $s^*=f(x^*)$, $x^*\in(a,x_0)$. 于是

$$L-\varepsilon<f(x^*)\le f(x)<L+\varepsilon,\quad \forall x\in(x^*,x_0).$$

这表明 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且等于 L. 证毕. $\square$

Definition

定义：设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上定义. 若存在数 $L\in\mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在数 $M>a$, 使得

$$|f(x)-L|<\varepsilon,\quad \forall x>M,$$

则称函数 $f(x)$ 在无穷远处 $x=+\infty$ 有极限 L, 记作 $f(x)\to L$, $x\to+\infty$, 或 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$. 当 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b)$ 定义时, 可类似定义 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$.

Example

例一: 证明当 $a > 1$ 时, $a^{-x} \to 0,\ x \to +\infty$.

证明: 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$|a^{-x} - 0| = a^{-x} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ -x\ln a < \ln\varepsilon \ \Leftrightarrow\ x > \frac{-\ln\varepsilon}{\ln a}.$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M = \frac{-\ln\varepsilon}{\ln a}$, 使得当 $x > M$ 时, $|a^{-x} - 0| = a^{-x} < \varepsilon$. 这就证明了 $a^{-x} \to 0,\ x \to +\infty$. 证毕. $\square$

例二: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$.

解: 由于 $\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(1+\frac{1}{x})$, 且 $\frac{1}{x}\to 0$, 故可猜测所求极限为零. 现证明如下. 对任意 $\varepsilon>0$ 以及 $x>0$,

$$|\ln(x+1)-\ln x-0|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\quad 1+\frac{1}{x}<e^{\varepsilon}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x}<e^{\varepsilon}-1\quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}.$$

于是对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M=\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$, 使得当 $x>M$ 时,

$|\ln(x+1)-\ln x-0|<\varepsilon$. 故 $\lim_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln x]=0$.

解答完毕.

以下各函数极限性质的证明，同相应的序列极限的性质的证明类似，故从略.

性质一 (极限唯一性): 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则极限值唯一.

性质二 (有界性): 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 a 附近有界，即存在 $\delta > 0$，以及 $M > 0$，使得 $|f(x)| \le M$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$.

性质三 (保序性): 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$.

(i) 若 $A < B$，则存在 $\delta > 0$，使得对 $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$, $f(x) < g(x)$.

(ii) 若存在 $\rho > 0$，使得 $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in (a-\rho, a+\rho)\backslash\{a\}$，则 $A \le B$.

<u>性质四</u>：设 $f(x) \le g(x) \le h(x)$，$\forall x \in (a-\rho, a+\rho) \backslash \{a\}$，若两个极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a} h(x)$ 均存在且相等。它们共同的极限记作 L，则极限 $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在且等于 L.

Theorem

定理: 设 $\lim_{x\to a} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to a} g(x) = B$, 则和差极限 $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)]$, 乘积极限 $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$, 以及商极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (补充假设 $B \neq 0$) 均存在, 并且

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$;

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ $(= AB)$;

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $(= \frac{A}{B})$.

Example

例: 显然 $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. 于是根据函数极限的四则运算可知, $\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$. 进而对多项式 $P(x)$ 有 $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, 对于分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 假设 $Q(x_0) \neq 0$, 有 $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

注: 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 我们称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. (稍后正式定义). 上述结论表明, 多项式函数 $P(x)$ 处处连续, 有理分式函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在其定义域上处处连续.

作业

课本习题2.1 (pp. 35-37):

3, 4, 5, 8, 9(1)(2)(3)(4), 10, 15, 16.

课本习题2.2 (pp. 42-43):

1, 2, 3(1)(3)(5)(7).