《微积分A1》第四讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年09月25日

Stolz 定理回忆

定理：考虑极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

(i)($\frac{*}{\infty}$ 型) 若 $b_n\uparrow+\infty$ 严格，且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在，记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷)，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L.$$

(ii)($\frac{0}{0}$ 型) 若 $b_n\downarrow 0$ 严格，且极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在，记作 L (允许 L 为正无穷或负无穷)，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L.$$

课本第8页习题1.2第7题(2)：设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$，证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A$$

证明：在 Stolz 定理结论一中，令 $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，$b_n = n$，则 $b_n \uparrow +\infty$ 严格，且

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{x_{n+1}}{1} \to A.$$

因此由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A. \qquad \square$$

证: 只证明 $\frac{*}{\infty}$ 情形型的结论. 情形 $\frac{0}{0}$ 的证明略去. 考虑极限 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 假设 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 即作 L. 以下分四种情况讨论 (i) $L=0$; (ii) $L \neq \pm\infty$, $L \neq 0$; (iii) $L=+\infty$; (iv) $L=-\infty$.

情形 (i) $L=0$. 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 由假设 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 0$ 可知, 存在正整数 N_1, 使得

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1.$$

即 $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon(b_{n+1}-b_n)$, $\forall n\geq N_1$. 由此得对任意 $n\geq N_1$

$$
\begin{aligned}
|a_{N_1+1}-a_{N_1}| &< \varepsilon(b_{N_1+1}-b_{N_1}),\\
|a_{N_1+2}-a_{N_1+1}| &< \varepsilon(b_{N_1+2}-b_{N_1+1}),\\
&\vdots\\
|a_{n+1}-a_n| &< \varepsilon(b_{n+1}-b_n).
\end{aligned}
$$

将上述不等式相加得

$$\sum_{k=N_1}^{n}|a_{k+1}-a_k|<\varepsilon(b_{n+1}-b_{N_1}).$$

将 a_{n+1} 写作

证明续二

$$a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{N_1+1} - a_{N_1}) + a_{N_1},$$

$$\text{则 } |a_{n+1}| \le \sum_{k=N_1}^{n} |a_{k+1} - a_k| + |a_{N_1}| \le \varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|.$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| \le \frac{\varepsilon(b_{n+1} - b_{N_1}) + |a_{N_1}|}{b_{n+1}}$$

$$< \varepsilon\left(1 - \frac{b_{N_1}}{b_{n+1}}\right) + \frac{|a_{N_1}|}{b_{n+1}} \le \varepsilon + \frac{|a_{N_1}| + \varepsilon|b_{N_1}|}{b_{n+1}}.$$

根据假设 $b_n \uparrow +\infty$，故存在正整数 $N_2 > N_1$，使得

$$\frac{|a_{N_1}| + \varepsilon |b_{N_1}|}{b_{n+1}} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2.$$

综上可知对于$\forall \varepsilon > 0$，存在正整数N_2，使得对任意$n \geq N_2$，$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| < 2\varepsilon$. 这就证明了$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$. 情形(i)得证.

情形(ii): $L \neq \pm\infty$ 且$L \neq 0$. 将情形(ii)转化为情形(i). 由于

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L = \frac{(a_{n+1} - Lb_{n+1}) - (a_n - Lb_n)}{b_{n+1} - b_n}.$$

令$\hat{a}_n = a_n - Lb_n$，则

$$\frac{\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n}{b_{n+1} - b_n} \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to L.$$

故由假设$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$ 知$\frac{\hat{a}_{n+1}-\hat{a}_n}{b_{n+1}-b_n} \to 0$. 再由情形(i)的结论知

$$\frac{\hat{a}_n}{b_n} \to 0 \quad 即 \quad \frac{\hat{a}_n}{b_n} = \frac{a_n - Lb_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - L \to 0.$$

这就证明了 $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$. 情形(ii)得证.

情形(iii) $L = +\infty$. 已知 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$, 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 设法将情形(iii) 转化到情形(i). 考虑 $\frac{b_n}{a_n}$. 假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 意味着 $\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} \to 0$. 为应用结论(i), 需验证 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格.

由假设 $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to +\infty$ 可知存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 1 \quad 即 \quad a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n > 0.$$

这表明 $\{a_n\} \uparrow$ 严格(对 $\forall n \geq N$).

之前已证 $a_{n+1}-a_n > b_{n+1}-b_n > 0, \forall n \geq N$. 因此对 $n \geq N$

$$
\begin{aligned}
a_{N+1}-a_N &> b_{N+1}-b_N, \\
a_{N+2}-a_{N+1} &> b_{N+2}-b_{N+1}, \\
&\vdots \\
a_{n+1}-a_n &> b_{n+1}-b_n.
\end{aligned}
$$

将上述不等式两边分别相加得 $a_{n+1}-a_N > b_{n+1}-b_N \to +\infty$.

这表明 $\{a_n\} \uparrow +\infty$ 严格. 对序列 $\frac{b_n}{a_n}$ 应用结论(i) 可知 $\frac{b_n}{a_n} \to 0$.

由于 $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, 故当 n 充分大时, $a_n > 0$, $b_n > 0$.

因此 $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. 情形(iii) 得证.

证明续六

情形(iv): $L = -\infty$. 考虑序列 $\frac{-a_n}{b_n}$, 即可将情形(iv) 转化到情形(iii). 至此 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型的结论得证.

Lemma

引理: (i) 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则存在子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to +\infty$; (ii) 若序列 $\{a_n\}$ 无下界, 则存在子序列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \to -\infty$.

Proof.

证明: 只证(i). 结论(ii)的证明类似. 若序列 $\{a_n\}$ 无上界, 则依定义知, 对 $\forall M > 0$, 存在项 $a_m > M$. 取 $M = 1$, 则存在指标 $n_1 \geq 1$, 使得 $a_{n_1} > 1$. 取 $M = 2$, 则存在指标 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} > 2$. 取 $M = k$, 则存在指标 $n_k > n_{k-1}$, 使得 $a_{n_k} > k$. 于是子列 $a_{n_k} \to +\infty$. $\square$

Definition

定义：给定一个序列 $\{a_n\}$. (i) 若存在一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 $\hat{a} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, 则称 $\hat{a}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个聚点. (ii) 若聚点 $\hat{a} = +\infty$ 或 $\hat{a} = -\infty$, 则 $\hat{a}$ 为无穷聚点. (iii) 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 所有聚点(包括无穷聚点)的集合，定义

$$\overline{\lim}\, a_n \triangleq \sup E, \quad \underline{\lim}\, a_n \triangleq \inf E,$$

并分别称它们为序列 $\{a_n\}$ 的上极限(superior limits) 和下极限(inferior limits).

例子

<u>例一</u>: 易证序列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}_{n\geq 1} = \{1, 0, -1, 0, 1, \cdots\}$ 的聚点集合 $E = \{-1, 0, 1\}$. 因此 $\overline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = 1$. $\underline{\lim}\sin\frac{n\pi}{2} = -1$.

<u>例二</u>: 易证序列 $\{n^{(-1)^n}\} = \{\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \cdots\}$ 的聚点集合 $E = \{0, +\infty\}$, 故序列的上下极限为 $\overline{\lim}\, a_n = +\infty$, $\underline{\lim}\, a_n = 0$.

Theorem

定理: 有界序列必存在收敛子列.

证明大意: 设 $\{x_n\}$ 为一有界序列. 设 $\{x_n\} \subset J_1 = [a_1, b_1]$. 将区间 J_1 等分为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. 这两个子区间中, 必至少有一个, 记作 $J_2 = [a_2, b_2]$ 含有序列 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 再对区间 $[a_2, b_2]$ 等分为两个区间, 其中之一, 记作 $J_3 = [a_3, b_3]$ 必含序列$\{x_n\}$ 的无穷多项. 如此继续下去, 我们得到一个闭区间套 $\{J_k\}$ 满足 $J_{k+1} \subset J_k$, $k \geq 1$, 且区间长度为 $|J_k| = b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}|J_1| \to 0$, $k \to +\infty$.

根据区间套定理可知，存在唯一一点 $\xi \in \bigcap_{k\geq 1} J_k$. 根据做法，每个区间 J_k 均含有序列 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 可在区间 J_1 中取 x_{n_1}，在区间 J_2 中取 x_{n_2}，$n_1 < n_2$. 如此继续下去，即可得到一个子列 $\{x_{n_k}\}$，$n_1 < n_2 < \cdots$. 显然 $x_{n_k} \to \xi$. 定理得证. $\square$

记号：设 $\{a_n\}$ 为有界序列，记

$$\bar{a}_n \triangleq \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}, \quad \underline{a}_n \triangleq \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots\}.$$

显然 $\bar{a}_n$ 单调下降，$\underline{a}_n$ 单调上升，$\underline{a}_n \leq \bar{a}_n$，且 $\{\bar{a}_n\}$ 和 $\{\underline{a}_n\}$ 均有界. 因此极限 $\lim \bar{a}_n$ 和 $\lim \underline{a}_n$ 均存在.

Theorem

定理：(i) $\overline{\lim}\, a_n = \lim \bar{a}_n$; (ii) $\underline{\lim}\, a_n = \lim \underline{a}_n$.

证: 只证结论(i). 结论(ii) 的证明类似. 记 $\bar{a} \triangleq \lim \bar{a}_n$, 记 E 为序列 $\{a_n\}$ 的聚点集合. 要证 $\bar{a} = \sup E$. 先证 $\bar{a}$ 是聚点. 由于 $\bar{a}_n \downarrow \bar{a}$, 故对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n \geq N$, $|\bar{a}_n - \bar{a}| < \varepsilon$. 特别取 $n = N$ 得 $|\bar{a}_N - \bar{a}| < \varepsilon$, 即

$$-\varepsilon + \bar{a} < \bar{a}_N < \varepsilon + \bar{a}.$$

取 $\varepsilon = 1$, 则存在正整数 N_1, 使得

$$-1 + \bar{a} < \bar{a}_{N_1} < 1 + \bar{a}.$$

因 $\bar{a}_{N_1} = \sup\{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \cdots\}$, 故存在 $a_{n_1} \in \{a_{N_1}, a_{N_1+1}, \cdots\}$,

使得

$$-1+\bar{a} < a_{n_1} \leq \bar{a}_{N_1} < 1+\bar{a}, \quad n_1 \geq N_1.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 则存在正整数 $N_2 > n_1$, 使得

$$-\frac{1}{2}+\bar{a} < \bar{a}_{N_2} < \frac{1}{2}+\bar{a}.$$

同理存在 $a_{n_2} \in \{a_{N_2}, a_{N_2+1}, \cdots\}$, 使得

$$-\frac{1}{2}+\bar{a} < a_{n_2} \leq \bar{a}_{N_2} < \frac{1}{2}+\bar{a}, \quad n_2 \geq N_2.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \geq 3$, 则存在正整数 $n_k \geq N_k > n_{k-1} \geq N_{k-1}$, 使得

$$-\frac{1}{k}+\bar{a} < a_{n_k} \leq \bar{a}_{N_k} < \frac{1}{k}+\bar{a}.$$

于是我们得到序列 $\{a_n\}$ 的一个子列 $a_{n_k} \to \bar{a}$. 故 $\bar{a}$ 是一个聚点, 即 $\bar{a} \in E$. 因此 $\bar{a} \le \sup E$. 再证相反的不等式, 即 $\bar{a} \ge \sup E$. 对 $\forall b \in E$, 即 b 是序列 $\{a_n\}$ 的一个聚点, 故存在子列 $a_{m_k} \to b$. 由于 $a_{m_k} \le \sup\{a_{m_k}, a_{m_k+1}, \cdots\} = \bar{a}_{m_k}$, 故令 $k \to +\infty$, 则得 $b \le \bar{a}$. 这表明对 $\forall b \in E$, $b \le \bar{a}$. 因此 $\sup E \le \bar{a}$. 证毕. □

<u>注一</u>: 序列 $\{a_n\}$ 的上下极限也常分别记作 $\limsup\{a_n\}$, $\liminf\{a_n\}$.

<u>注二</u>: 实际上, 序列 $\{a_n\}$ 的上极限就是序列的最大聚点, 下极限就是序列的最小聚点. 当序列无上界或无下界时, 结论显然. 当序列 $\{a_n\}$ 有界时, 可以证明其聚点集合 E 是有界闭集. 而有界闭集必存在最大点(即最大聚点)和最小点(即最小聚点).

Theorem

<u>定理</u>：有界序列 $\{a_n\}$ 有极限，当且仅当 $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.

Proof.

<u>证明</u>：有界序列 $\{a_n\}$ 有极限 $\Longleftrightarrow$ 序列 $\{a_n\}$ 有唯一一个有限聚点 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$. $\square$

性质: 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为两个有界序列, 则以下结论成立.

(i) 若 $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, n_0 为某个正整数, 则

$$\overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, b_n, \quad \underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n;$$

(ii)

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}\, (a_n + b_n)$$

$$\le \overline{\lim}\, (a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n;$$

(iii) 若 $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$, 则

$$(\underline{\lim}\, a_n)(\underline{\lim}\, b_n) \le \underline{\lim}\, (a_n b_n)$$

$$\le \overline{\lim}\, (a_n b_n) \le (\overline{\lim}\, a_n)(\overline{\lim}\, b_n);$$

性质续

(iv) $\underline{\lim}\,(-a_n) = -\overline{\lim}\,a_n$, $\overline{\lim}\,(-a_n) = -\underline{\lim}\,a_n$;

(v) 若极限 $\lim a_n$ 存在，则

$$\underline{\lim}\,(a_n + b_n) = \lim\ a_n + \underline{\lim}\,b_n,$$

$$\overline{\lim}\,(a_n + b_n) = \lim\ a_n + \overline{\lim}\,b_n;$$

(vi) 若 $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, 且极限 $\lim a_n$ 存在，则

$$\underline{\lim}\,(a_n b_n) = (\lim\ a_n)(\underline{\lim}\,b_n),$$

$$\overline{\lim}\,(a_n b_n) = (\lim\ a_n)(\overline{\lim}\,b_n).$$

证明

证明详见吉米多维奇的数学分析习题集习题解答(共六册)，第一册，题解131,132,133,134. 以下只证结论(ii)，即

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}\,(a_n + b_n)$$

$$\leq \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

第二个不等号显然成立. 第一个和第三个不等式的证明类似. 以下只证最后第三个不等式.

记 $c_n = a_n + b_n$, 则对任意正整数 m, $\forall n \geq m$,

$$c_n = a_n + b_n \leq \sup\{a_m, a_{m+1}, \cdots\} + \sup\{b_m, b_{m+1},\ldots\}$$

$$= \bar{a}_m + \bar{b}_m \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_m = \sup\{c_m, c_{m+1}, \cdots\}$$

$$= \sup\{a_m + b_m, a_{m+1} + b_{m+1}, \cdots\}$$

$$\leq \sup\{\bar{a}_m + \bar{b}_m, \bar{a}_m + \bar{b}_m, \cdots\} = \bar{a}_m + \bar{b}_m.$$

于是 $\lim \bar{c}_m \leq \lim \bar{a}_m + \lim \bar{b}_m$. 此即 $\overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$. 此即性质(ii) 成立.

回忆 Stolz 定理关于 $\frac{*}{\infty}$ 型极限的结论.

定理: 考虑极限 $\lim \frac{a_n}{b_n}$. 若 $b_n \uparrow +\infty$ 严格, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在(包括正无穷或负无穷情形), 记作 L, 则 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

另证: 只证 L 为有限数情形. 根据假设可知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

于是

$$L-\varepsilon<\frac{a_{N+1}-a_N}{b_{N+1}-b_N}<L+\varepsilon$$

$$L-\varepsilon<\frac{a_{N+2}-a_{N+1}}{b_{N+2}-b_{N+1}}<L+\varepsilon$$

$$\vdots$$

$$L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<L+\varepsilon.$$

引理 (分数不等式)：对任意 n 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定分母 $y_k>0$)，$k=1,2,\cdots,n$，则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1},\cdots,\frac{x_n}{y_n}\right\}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n}\le\max\left\{\frac{x_1}{y_1},\cdots,\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

引理的证明留作习题．将引理应用于上述不等式得

应用，续二

$$L-\varepsilon<\frac{(a_{N+1}-a_N)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)}{(b_{N+1}-b_N)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)}<L+\varepsilon.$$

此即 $$L-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_N}{b_{n+1}-b_N}<L+\varepsilon.$$

亦即 $$L-\varepsilon<\frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_N}{b_{n+1}}}{1-\frac{b_N}{b_{n+1}}}<L+\varepsilon. \qquad (*)$$

注意到 $\frac{a_N}{b_{n+1}}\to 0$, $\frac{b_N}{b_{n+1}}\to 0$. 在不等式(*)中分别取上下极限，并利用上下极限的性质可得

$$L-\varepsilon\le\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le L+\varepsilon,\quad L-\varepsilon\le\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le L+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 为任意小的正数，上下极限均为常数，故它们必相等，且等于 L，即

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = L.$$

从而极限 $\lim \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ 存在且等于 L. 命题得证. $\square$

例子

<u>课本第1章总复习题第14题(p.24)</u>:

设序列 $\{x_n\}$ 满足 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$, $\forall n, m$ 正整数. 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

<u>证明</u>: 由假设 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$ 可知 $0 \le x_n \le nx_1$, 即 $0 \le \frac{x_n}{n} \le x_1$. 因此

$$0 \le \underline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le x_1.$$

任意固定一个正整数 m, 则任意正整数 n 可表为 $n = qm + r$, 其中 $0 \le r < m$. 于是 $x_n = x_{mq+r} \le x_{qm} + x_r \le qx_m + x_r$.

例子续一

$$\Rightarrow \quad 0 \le \frac{x_n}{n} \le \frac{qx_m}{qm+r} + \frac{x_r}{n} \le \frac{qx_m}{qm} + \frac{x_r}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{M}{n},$$

其中 $M = \max\{x_1, \cdots, x_{m-1}\}$. 即

$$0 \le \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m} + \frac{M}{n},$$

注意上式 m 为固定的正整数，与指标 n 无关. 令 $n \to +\infty$ 取上极限得

$$\overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m}.$$

上式对任意正整数 m 均成立. 于上式中关于 m 取下极限即得

$$\overline{\lim}\frac{x_n}{n} \leq \underline{\lim}\frac{x_m}{m} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim}\frac{x_n}{n} = \underline{\lim}\frac{x_n}{n}.$$

这就证明了极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在. 证毕. $\square$

Definition

定义: 序列 $\{a_n\}$ 称为 Cauchy 序列或基本序列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$, 或者 $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon, \forall n \geq N, \forall p \geq 1$.

Theorem

定理 [Cauchy 收敛准则]: 序列 $\{a_n\}$ 收敛, 当且仅当序列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列.

Cauchy 收敛准则的优点: 判断序列的收敛性, 无需事先知道序列的极限值. 为证明 Cauchy 收敛准则, 我们回忆 Bolzano - Weierstrass 定理: 有界序列必有收敛子列.

Cauchy 收敛准则证明

证 $\Rightarrow$: 设 $a_n \to a$, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 于是对 $\forall n, m \geq N$,

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$$

$$\leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这表明收敛序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列.

证 $\Leftarrow$: 设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列. 以下证 (i) $\{a_n\}$ 有界; (ii) $\{a_n\}$ 收敛.

证(i): 序列 $\{a_n\}$ 有界. 由于序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 故对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 使得对 $\forall n \geq N$,

$$|a_n - a_N| < 1 \quad \text{即} \quad -1 + a_N < a_n < a_N + 1.$$

由此得 $|a_n| < |a_N| + 1$. 于是对任意 $n \geq 1$,

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

这就证明了序列 $\{a_n\}$ 有界.

证明续二

证(ii): $\{a_n\}$ 收敛. 由于 $\{a_n\}$ 有界, 根据 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$. 设 $a_{n_k} \to a$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 K, 使得 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, $\forall k \geq K$. 因 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列, 故对上述 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得对任意 $n, m \geq N_1$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$. 取 $k_1 \geq K$ 充分大, 使得 $n_{k_1} \geq N_1$. 于是对于 $\forall n \geq N_1$,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这就证明了 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证毕.

总结：以下公理和定理反映了实数完备(连续)性.

完备(连续)性公理，确界存在定理，单调有界定理，区间套定理，B-W 定理，Cauchy 收敛准则，有限覆盖定理(尚未介绍).

可以证明以上七个定理和公理相互等价. 到目前为止，我们已证明了如下蕴含关系：

完备(连续)性公理 $\Longleftrightarrow$ 确界存在公理 $\Rightarrow$ 单调有界定理 $\Rightarrow$ 区间套定理 $\Rightarrow$ B-W 定理 $\Rightarrow$ Cauchy 收敛准则.

例一: 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明序列 $\{a_n\}$ 不收敛.

证: 反证. 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛, 则序列 $\{a_n\}$ 是Cauchy 序列. 于是对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在正整数 N, 使得 $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq 1$. 取 $p = n \geq N$, 则

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

矛盾. 这说明序列 $\{a_n\}$ 不收敛. 证毕. $\square$

例二: 设序列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k| \le M$, $\forall n \ge 1$, 其中 $M>0$ 为一正常数, 与 n 无关. 证明序列 $\{a_n\}$ 收敛.

证: 记 $b_n=\sum_{k=1}^{n}|a_{k+1}-a_k|$, 则序列 $\{b_n\}$ 为单调增加, 且有上界 M. 故序列 $\{b_n\}$ 收敛. 从而它是 Cauchy 列, 即对 $\forall \varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得 $\forall n \ge N$, $\forall p \ge 1$, $|b_{n+p}-b_n|<\varepsilon$, 即

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_{k+1}-a_k|<\varepsilon.$$

因此 $|a_{n+p}-a_n|$

$$=|(a_{n+p}-a_{n+p-1})+(a_{n+p-1}-a_{n+p-2})+\cdots+(a_{n+1}-a_n)|$$

例二续

$$\le |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

这说明序列 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 序列. 从而序列 $\{a_n\}$ 收敛. 证毕. $\square$

作业

补充习题：证明引理(分数不等式)：对任意 n 个分数 $\frac{x_k}{y_k}$ (约定分母$y_k > 0$), $k = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\min\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \le \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

课本习题1.5 (pp. 22-23): 2(1)(3)(5), 3, 4, 5, 6, 7, 8.

第一章总复习题(pp. 23-25): 4, 5, 6, 7, 11.