《微积分A1》第十五讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月04日

1. 极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x =$ ______.

分析: 这是 1^∞ 型极限. 令 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x = [1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{y}} = (1+u)^{\frac{1}{u}\frac{u}{y}},$$

其中 $u=u(y)=\cos y-1$. 由于

$$\frac{u}{y}=\frac{\cos y-1}{y}\to 0, \quad y\to 0.$$

因此 $(1+u)^{\frac{1}{u}\frac{u}{y}}\to e^0=1$. 故原极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x = 1$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a>0$ 处可导，则极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\underline{\qquad\qquad}.$$

分析:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

$$=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\to f'(a)\cdot 2\sqrt{a}.$$

故所求极限为 $2\sqrt{a}f'(a)$.

3. 极限 $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}} =$ ______.

分析: 这是 0^0 型极限. 处理这类极限的常用方法是取对数. 令 $y=(1-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x}$. 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 可考虑使用 L'Hospital 法则

$$\frac{[\ln(1-\cos x)]'}{[\ln x]'} = \frac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot \sin x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{x\sin x}{x^2}\cdot \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} \to 2, \quad x\to 0^+$$

因此 $\lim_{x\to 0^+}\ln y = 2$. 从而原极限为

$$y = e^{\ln y} \to e^2, \quad x \to 0^+.$$

4. 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 的无穷小的阶为

_______.

分析:

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\frac{1+\tan x-(1-\sin x)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

$$=\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

$$=\sin x\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}+1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}.$$

由此可见函数 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 的无穷小的阶为 1.

5. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的间断点类型为 ______.

分析: 考虑 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左右极限. 当 $x>1$ 时,

$$f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\to 2,\quad x\to 1^+$$

这表明 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的右极限存在, 且等于 2.

填空题 5，续

当 $x < 1$ 时，

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{x - 1} = -(x + 1) \to -2, \quad x \to 1^-.$$

这表明 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的左极限为 -2. 由此可见 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的间断点类型为跳跃间断，即第一类间断.

6. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$$

则 $f'(0) = $ ______.

分析:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{1-e^h}{h} + 1}{h} = \frac{1 + h - e^h}{h^2}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}h^2 + o(h^2)}{h^2} \to -\frac{1}{2}, \quad h \to 0.$$

因此 $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

7. 设函数 $f(u)$ 可导，且函数 $y=f(\sin x)$ 存在可导的反函数 $x=x(y)$，则反函数的导数 $\frac{dx}{dy}=$ ______.

分析: 对等式 $y=f(\sin x)$ 两边关于 y 求导，视 $x=x(y)$，即得

$$1=f'(u)(\cos x)\frac{dx}{dy},$$

其中 $u=\sin x$. 于是所求导数为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(u)\cos x}=\frac{1}{f'(\sin x)\cos x}.$$

8. 函数 $y = e^{\sin(2x+1)}$ 的微分为 $dy =$ ______.

分析: 所求微分为 $dy = 2e^{\sin(2x+1)}\cos(2x+1)dx$.

9. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $x = t + \sin t$, $y = t - \cos t$ 确定, 则函数 $y(x)$ 的微分为 $dy =$ ______.

分析: 由求导公式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1+\sin t}{1+\cos t}.$$

因此 $dy = \frac{1+\sin t}{1+\cos t}dx$.

10. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$, 则 $f'(0) =$ ______.

分析: $f'(0) = 100!$.

11. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 则 $f'(x)$ 在开区间 $(0, 2)$ 上有且仅有 ______ 个零点.

分析: 有且仅有 2 个零点. 理由如下: 显然 $f(x)$ 为四次多项式, 有四个零点 $x = 0, 1, 2, 3$. 根据 Rolle 定理知其导数 $f'(x)$ 至少有三个零点 $\xi_1 \in (0, 1)$, $\xi_2 \in (1, 2)$, $\xi_3 \in (2, 3)$. 由于 $f'(x)$ 是三次多项式, 故 $f'(x)$ 有且仅有这三个零点. 因此 $f'(x)$ 在开区间 $(0, 2)$ 上有且仅有 2 个零点.

12. 设 $f(x)$ 可导. 若 $\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$, 则 $f'(x) =$ ________.

<u>解答与分析</u>: $f'(x) = \frac{1}{8}x^2$. 理由如下: 记 $y = 2x$, 则

$$\frac{y^2}{4} = x^2 = \frac{d}{dx}[f(2x)] = \frac{d}{dy}f(y)\frac{dy}{dx} = f'(y)2.$$

因此 $f'(y) = \frac{y^2}{8}$. 即 $f'(x) = \frac{x^2}{8}$.

13.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{4x-3}\sin\frac{1}{x+1}=\underline{\qquad\qquad}.$$

<u>分析</u>:

$$\frac{2x^2+1}{4x-3}\sin\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2+1}{4x-3}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{3}{x}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}\to\frac{1}{2},\quad x\to+\infty.$$

故所求极限为 $\frac{1}{2}$.

14.
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+4\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\right)=\underline{\qquad\qquad}.$$

<u>分析</u>:

$$\sqrt{n+4\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}=\frac{n+4\sqrt{n}-(n-2\sqrt{n})}{\sqrt{n+4\sqrt{n}}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n+4\sqrt{n}}+\sqrt{n-2\sqrt{n}}}=\frac{6}{\sqrt{1+4\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1}{n}}}}$$

$$\to\frac{6}{2}=3,\quad n\to+\infty.$$

故所求极限为 3.

15. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}=\_\_\_\_\_\_.$$

分析: 将 $\cos(2\sqrt{x})$ 展开得

$$\cos(2\sqrt{x})=1-\frac{1}{2!}(2\sqrt{x})^2+\frac{1}{4!}(2\sqrt{x})^4+o(x^2)$$

$$=1-2x+\frac{16}{24}x^2+o(x^2).$$

$$\Rightarrow\ \frac{1-\cos(2\sqrt{x})-2x}{x^2}=\frac{1-[1-2x+\frac{2}{3}x^2]-2x+o(x^2)}{x^2}$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}\to-\frac{2}{3},\quad x\to 0^+.$$

故所求极限为 $-\frac{2}{3}$.

16.

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \_\_\_\_\_\_.$$

<u>分析</u>:

$$(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = (1+x^2e^x)^{\frac{1}{x^2e^x}\cdot\frac{x^2e^x}{1-\cos x}}$$

$$\to e^2, \quad x\to 0.$$

故所求极限为 e^2.

17. 设 $f(x)\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ______.

<u>分析</u>: 由假设 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1}=1$ 可知 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=0$. 由于

$$\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1}=\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{\frac{f(x)}{\sin x}}\cdot\frac{f(x)}{(\sin x)(e^x-1)}\to 1,$$

$$\text{故}\quad \frac{f(x)}{(e^x-1)\sin x}\to 1.$$

$$\text{因此}\quad \frac{f(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{(e^x-1)\sin x}\cdot\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\to 1\cdot 1\cdot 1=1.$$

故所求极限为 1.

18.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \underline{\qquad\qquad}.$$

<u>分析</u>: 令 $u_n=\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{2}$, 则 $u_n\to 0$, $n\to+\infty$, 且

$$\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}\cdot nu_n}$$

而 $$nu_n=n\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\frac{1}{2}\ln 3.$$

因此 $$\left(\frac{1+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}\cdot nu_n}\to e^{\frac{1}{2}\ln 3}=\sqrt{3}.$$

一般结论:

1. 设 $a > 0$, $b > 0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}.$$

2. 设 $a_k > 0$, $k = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_m^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^n=\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}.$$

19. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ 1, & x\le 0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______.

分析: 先求 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左右极限. 对 $x>0$,

$$f(x)=\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}\to\frac{1}{2a},\quad x\to 0^{+},$$

即右极限为 $f(0^{+})=\frac{1}{2a}$. 对 $x<0$, $f(x)=1$. 故 $f(0^{-})=1$. 由假设 f 在点 $x=0$ 处连续，故 $\frac{1}{2a}=1$, 即 $a=\frac{1}{2}$.

20. 设 $f(x) = x^{\sin x}$, 则 $f'(\pi) =$ ______.

分析:

$$[x^{\sin x}]' = [e^{\sin x \ln x}]' = e^{\sin x \ln x}[\sin x \ln x]'$$

$$= e^{\sin x \ln x}\left[\cos x \ln x + (\sin x) \cdot \frac{1}{x}\right].$$

于是 $f'(\pi) = -\ln\pi$.

填空题 21

21. 设 $y = e^{-3x}\sin(2x)$，则 $dy =$ ______.

分析:

$$dy = [e^{-3x}\sin(2x)]' dx$$

$$= [-3e^{-3x}\sin(2x) + 2e^{-3x}\cos(2x)]dx$$

$$= e^{-3x}[2\cos(2x) - 3\sin(2x)]dx.$$

填空题 22

22. 函数 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ 在点 $x=0$ 处带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式为 ______.

分析:

$$\frac{1+x}{1-x}=(1+x)[1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)]$$

$$=1+2x+2x^2+\cdots+2x^n+o(x^n).$$

23. 设 $f(x)=x^2e^x$，则 $f^{(10)}(x)=$ ______.

解答：根据 Leibniz 求导公式得

$$f^{(10)}(x)=C_{10}^0x^2[e^x]^{(10)}+C_{10}^1[x^2]'[e^x]^{(9)}+C_{10}^2[x^2]''[e^x]^{(8)}$$

$$=x^2e^x+20xe^x+90e^x.$$

24. 设 $f(x) = x^6|x|$ 在 $x = 0$ 处存在最高阶导数的阶数为 ________.

解答: 阶数为 6.

25. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x_0-\delta)-f(x_0)}{\sin\delta}\qquad(*)$$

存在, 那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, ______ (填是或否).

解答: 是. 理由如下. 依定义函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 即极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\qquad(**)$$

存在. 由于

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x_0-\delta)-f(x_0)}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin\delta}{\delta}\cdot(-1),$$

其中 $\delta=-h$. 由此可见, 极限(*) 存在, 当且仅当极限(**) 存在, 并且这两个极限仅相差一个符号.

1. 设二阶可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x+y) = x - y$ 确定，求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: 对方程 $\sin(x+y) = x - y$ 两边关于 x 求导，并视 y 为 x 的函数，即 $y = y(x)$，即得

$$\cos(x+y) \cdot (1+y') = 1 - y'. \quad (*)$$

由上式可解得

$$y' = \frac{1-\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}.$$

对等式(*)再求一次导数得

$$-\sin(x+y)\cdot(1+y')^2+\cos(x+y)\cdot y''=-y''.$$

$$\Rightarrow \quad y''=\frac{\sin(x+y)\cdot(1+y')^2}{1+\cos(x+y)}$$

将

$$y'=\frac{1-\cos(x+y)}{1+\cos(x+y)}$$

代入得 y'' 的表达式并加以整理得

$$y''=\frac{4\sin(x+y)}{[1+\cos(x+y)]^3}.$$

解答完毕.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = b$, 求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

解: 由条件 $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = a$, $\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = b$, 可知

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n} = a,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n} = b.$$

于是

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}}{2n}$$

$$= \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{2n} + \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{2n}$$

$$\to \frac{a+b}{2}, \quad n \to +\infty.$$

而 $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} + \frac{a_{2n+1}}{2n+1}$$

$$\to \frac{a+b}{2}, \quad n \to +\infty.$$

故所求极限等于 $\frac{a+b}{2}$. 解答完毕.

3. 求极限

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}.$$

解: 对于 $x>0$,

$$\frac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3} = \frac{1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}}{x^3} = -\frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x\ln\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3}$$

$$\frac{x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3} = \frac{\ln\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)}{x^2} = \frac{\ln\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)}{\frac{\sin x - x}{x}} \cdot \frac{\frac{\sin x - x}{x}}{x^2}$$

$$\frac{\frac{\sin x - x}{x}}{x^2} = \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 - x + o(x^3)}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \to -\frac{1}{6}, \quad x \to 0^+.$$

因此原极限

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

解答完毕.

4．设 $y = 2x + \sin x$，求其反函数 $x = x(y)$ 的二阶导数 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

解：在方程 $y = 2x + \sin x$ 两边关于 y 求导，视 x 为 y 的函数，即 $x = x(y)$，可得

$$1 = (2 + \cos x)\frac{dx}{dy} \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2 + \cos x}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2+\cos x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+\cos x}\right)\frac{dx}{dy}$$

$$= \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}\frac{1}{2+\cos x} = \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}.$$

解答完毕.

5. 设

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{xe^{(1-x)t}+x^{2t}}{e^{(1-x)t}+x^{2t+1}},\quad x\in[0,+\infty),$$

求函数 $f(x)$ 的表达式，讨论 $f(x)$ 的连续性和可微性，并在可微点处计算其导函数.

解：当 $x\in[0,1)$ 时，$e^{(1-x)t}\to+\infty$, $t\to+\infty$. 故此时

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{xe^{(1-x)t}+x^{2t}}{e^{(1-x)t}+x^{2t+1}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+x^{2t}e^{-(1-x)t}}{1+x^{2t+1}e^{-(1-x)t}}=x.$$

当 $x=1$ 时,

$$f(1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+1}{1+1}=1.$$

当 $x>1$ 时,

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{xe^{(1-x)t}+x^{2t}}{e^{(1-x)t}+x^{2t+1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{x^{1-2t}e^{(1-x)t}+1}{x^{-2t}e^{(1-x)t}+x}$$

$$=\frac{\lim_{t\to+\infty}[x^{1-2t}e^{(1-x)t}+1]}{\lim_{t\to+\infty}[x^{-2t}e^{(1-x)t}+x]}=\frac{1}{x}.$$

综上可得

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

显然函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上处处连续. 显然函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不可导. 因为左导数为 $f'_-(0)=1$, 而右导数为

$$\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\frac{1-x}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}\to-1,\quad x\to 0^-.$$

除 $x=1$ 点外，在开区间 $(0,+\infty)$ 上，处处可导，且

$$f'(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -\frac{1}{x^2}, & x>1.\end{cases}$$

解答完毕.

6. 设函数 $y=f(x)$ 为三次可导，并且 $f'(x)\neq 0$，其反函数记作 $x=g(y)$. 试用函数 $f(x)$ 的前三阶导数，来表示反函数 $g(y)$ 的前三阶导数. (课本第89页第三章总复习题题15)

解：由反函数定理知

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},\quad x=g(y).$$

进一步关于 y 求导得

$$g''(y)=\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},$$

其中 $x=g(y)$. 于上式再次关于 y 求导得

$$g'''(y) = \frac{d}{dy}\left[-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]\frac{dx}{dy}$$

$$= \left(-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^3} + \frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4}\right)\frac{1}{f'(x)} = \frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5} - \frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4},$$

其中 $x = g(y)$. 解答完毕.

1. 中间点的极限位置(课本第125 页第4 章总复习题题10). 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导且 $f''(x)\neq 0$, $\forall x\in(-1,1)$. 证明

(1) 对 $\forall x\in(-1,1)$, 存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x;$$

(2) $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

推广: 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 $n+1$ 阶可导, 且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, $\forall x\in(-1,1)$, 则(1)对 $\forall x\in(-1,1)$, 存在唯一 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}f^n(\theta(x)x)x^n$. (2) $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{n+1}$.

证明题 1, 续一

证明: (1) 由 Lagrange 中值定理可知, 对 $\forall x \in (-1,1)$, 存在 $\theta(x) \in (0,1)$, 使得 $f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x)x$. 由于 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in (-1,1)$. 故 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号. 这表明 $f'(x)$ 严格单调. 因此在 $\theta(x) \in (-1,1)$ 内存在唯一, 可看作去心邻域 $(-1,1)\backslash\{0\}$ 上的函数. 一般而言中间点 θ 的位置并不唯一确定.

(2) 由等式 $f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x)x$ 得

$$\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}.$$

证明题 1，续二

将该式写作

$$\theta(x)\frac{[f'(\theta(x)x)-f'(0)]}{\theta(x)x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}.$$

考虑左边当 $x\to 0$ 时的极限．由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}.$$

因此右边极限等于 $\frac{f''(0)}{2}$．注意到

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0).$$

由此可见 $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$．证毕．

2. 设 $f(x)$ 于闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，且 $f(x)$ 不恒等于 x. 证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>1$.

证明：因 $f(x)$ 不恒等于 x，故存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)\neq x_0$.

若 $f(x_0)>x_0$，则

$$1<\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi),\quad \xi\in(0,x_0).$$

结论成立. 若 $f(x_0)<x_0$，则

$$1=\frac{1-x_0}{1-x_0}<\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\xi),\quad \xi\in(x_0,1).$$

结论成立.

另证：令 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(0)=0=g(1)$．由于 $f(x)$ 不恒为 x，故 $g(x)$ 不恒为 0．因此存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)\neq 0$．

若 $g(x_0)>0$，则由 Lagrange 中值定理知

$$\frac{g(x_0)}{x_0}=\frac{g(x_0)-g(0)}{x_0-0}=g'(\xi)>0,$$

此即 $f'(\xi)>1$，其中 $\xi\in(0,x_0)$．若 $g(x_0)<0$，则

$$\frac{g(x_0)}{x_0-1}=\frac{g(x_0)-g(1)}{x_0-1}=g'(\eta)>0,$$

此即 $f'(\eta)>1$，其中 $\eta\in(x_0,1)$．证毕． □

3. 设 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n}$, $\forall n \geq 1$. 证明极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 并求出极限值.

证明: 证明序列极限的存在性, 首选工具, 也是最常用的工具, 就是单调有界原理. 先观察前几项.

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_3 = \frac{3}{2},$$

$$a_4 = \frac{8}{5}.$$

可猜测序列 $\{a_n\}$ 单调增加. 假设序列 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $a_n \to a_*$,

则在关系式 $a_{n+1}=\frac{1+2a_n}{1+a_n}$ 中，令 $n\to+\infty$ 即得 $a_*=\frac{1+2a_*}{1+a_*}$，即 $a_*^2-a_*-1=0$. 解之得 $a_*=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. 由于 $a_n>0$，故 $a_*\geq 0$. 因此 $a_*=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. 以下要证 (i) $\{a_n\}$ 单调增; (ii) $a_n\leq a_*$, $\forall n\geq 1$. 假设 $a_1<a_2<\cdots<a_n<a_*$，那么

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1+2a_n}{1+a_n}-a_n=\frac{1+a_n-a_n^2}{1+a_n}.$$

由于 $a_n\in(0,a_*)$，故 $1+a_n-a_n^2>0$，从而 $a_{n+1}-a_n>0$.

还需证明 $a_{n+1} < a_*$.

$$a_{n+1} = \frac{1+2a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n}.$$

由于 $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, 故 $\frac{x}{1+x}$ 关于 $x > 0$ 严格单调增. 因此

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} < 1 + \frac{a_*}{1+a_*} = a_*.$$

最后一个等式成立是因为

$$1 + \frac{a_*}{1+a_*} = a_* \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+2a_*}{1+a_*} = a_*.$$

证毕. (实际上也可用归纳法证 $a_n < 2, \forall n \geq 1$). □

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)>0$，极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ 存在且小于零. 求证方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

证明: 注意到 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=[f(x)f'(x)]'$，因此要证方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根，等价于证明函数 $F(x)\triangleq f(x)f'(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 上至少有两个临界点. 往下考虑函数 $f(x)f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上的零点.

一. 由假设极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$ 存在可知 $f(0)=0$.

证明题 4，续

二. 由假设极限 $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在，说明函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的右导数 $f'_+(0)$ 存在. 由假设 $f'_+(0)<0$ 知，存在 $\delta>0$，使得 $f(x)<0$, $\forall x\in(0,\delta)$. 由假设 $f(1)=1$，以及由介值定理可知存在 $x_1\in(0,1)$，使得 $f(x_1)=0$. 再根据 Rolle 定理知存在 $x_2\in(0,x_1)$，$f'(x_2)=0$.

三. 综上得，函数 $F(x)=f(x)f'(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有三个零点 $0,x_1,x_2$. 两次利用 Rolle 定理可知，$F(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 上至少有两个临界点. 证毕. $\square$

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0=f(1)$. 进一步假设 $\min\{f(x), x\in[0,1]\}=-1$. 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)\geq 8$. (课本第 125 页第 4 章总复习题题11)

证明: 设 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,1)$ 处取得最小值，则 $f(x_0)=-1$, $f'(x_0)=0$, 并在点 x_0 处作 Taylor 一阶展开，带 Lagrange 余项

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

其中 ξ 介于 x_0 和 x 之间. 将 $x=0$ 和 $x=1$ 代入得

$$0 = f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta_1)(0 - x_0)^2,$$

$$0 = f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\eta_2)(1 - x_0)^2,$$

其中 $\eta_1 \in (0, x_0)$，$\eta_2 \in (x_0, 1)$. 由此得

$$\frac{1}{2}f''(\eta_1)(0 - x_0)^2 = 1, \quad \frac{1}{2}f''(\eta_2)(1 - x_0)^2 = 1.$$

由此进一步得

$$\frac{1}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)] = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1 - x_0)^2}.$$

上式左边是平均值 $\frac{1}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)]$ 介于两个值 $f''(\eta_1)$ 和 $f''(\eta_2)$ 之间.

根据 Darboux 定理(导数介值定理) 可知，存在一点 ξ 介于 η_1 和 η_2 之间，使得 $f'(\xi) = \frac{1}{2}[f''(\eta_1) + f''(\eta_2)]$. 于是

$$f''(\xi) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2}.$$

上式右边可作如下估计

$$\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2} \geq \min\left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2}, \lambda \in (0,1)\right\}.$$

不难证明上式右边的最小值为 8，且在 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时取得. 即

$$f''(\xi) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{(1-x_0)^2} \geq 8.$$

命题得证. 证毕.

注：可根据以下等式(*)直接得到结论.

$$\frac{1}{2}f''(\eta_1)(0-x_0)^2=1,\quad \frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2=1.\quad (*)$$

当 $0<x_0\le\frac{1}{2}$ 时，则 $0<x_0^2\le\frac{1}{4}$. 由式(*)中的第一个等式得

$$f''(\eta_1)=\frac{2}{x_0^2}\ge 2\times 4=8.$$

当 $\frac{1}{2}<x_0\le 1$ 时，则 $(1-x_0)^2<\frac{1}{4}$. 由式(*)中的第二个等式得

$$f''(\eta_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>2\times 4=8.$$

命题得证.

朱锦涛同学的证明

证：记 $g(x)=f(x)-4x^2$，则 $g(0)=0$，$g(1)=-4$. 设 $f(x_0)=\min\{f(x),0\le x\le 1\}=-1$，其中 $x_0\in(0,1)$，则 $g(x_0)=-1-4x_0^2$. 关于 $g(x)$ 分别在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上应用 Lagrange 中值定理得

$$g'(\eta_1)=\frac{g(x_0)-g(0)}{x_0-0}=\frac{-4x_0^2-1}{x_0},$$

$$g'(\eta_2)=\frac{g(1)-g(x_0)}{1-x_0}=\frac{4x_0^2-3}{1-x_0},$$

其中 $\eta_1\in(0,x_0)$，$\eta_2\in(x_0,1)$.

简单计算得

$$g'(\eta_2) - g'(\eta_1) = \frac{4x_0^2 - 3}{1 - x_0} - \frac{-4x_0^2 - 1}{x_0} = \frac{(2x_0 - 1)^2}{x_0(1 - x_0)} > 0.$$

对导数 $g'(x)$ 在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上再次应用 Lagrange 中值定理得

$$g''(\xi) = \frac{g'(\eta_2) - g'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} > 0,$$

其中 $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$. 由于 $g''(x) = f''(x) - 8$, 故 $f''(\xi) \geq 8$. 命题得证.

作业

课本习题4.4 (pp.114-115): 4(2)(4)(6)(8), 5(2)(4)(6)(8), 7, 8, 11.