《微积分A1》第二十六讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月11日

Theorem

定理: (i) 设 $f(x)$ 于 $[a,b)$ 上内闭可积, $b<+\infty$ 是 $f(x)$ 的一个瑕点, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \forall b',b''\in(b-\delta,b).$$

(ii) 设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \forall b',b''\geq M.$$

绝对收敛性蕴含收敛性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 于 $[a, b)$ 上内闭可积, $b = +\infty$ 或 b 是 $f(x)$ 的一个瑕点. 若积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, 即积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

Proof.

证明: 只考虑 $b = +\infty$ 情形. 假设积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 那么由 Cauchy 收敛准则知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > a$, 使得 $\forall b'' > b' \geq M$, $\int_{b'}^{b''} |f(x)|dx < \varepsilon$. 故 $|\int_{b'}^{b''} f(x)dx| \leq \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx < \varepsilon$, $\forall b'' > b' \geq M$. 再次由 Cauchy 收敛准则知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证毕. □

Theorem

定理: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 $b=+\infty$ 或 b 是 $f(x)$ 的瑕点. 设

(i) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积, 且存在 $M>0$, 使得 $|\int_a^{b'} f(x)dx| < M$, $\forall b' \in [a,b)$;

(ii) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理稍后证明.

例: 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛.

证明: 要证积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛, 只需证 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛. 注意 $x=0$ 不是暇点. 因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 令 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x}$. 显然积分 $\int_1^b \sin x dx=\cos 1-\cos b$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. 这表明 Dirichlet 判别法的两个条件均满足. 因此积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

以下证明积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ 发散. 由于 $\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x}$, $\forall x\geq 1$, 故只要证积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散即可. 将函数 $\frac{\sin^2 x}{x}$ 写作

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}.$$

由此得

$$\frac{1}{x}=\frac{2\sin^2 x}{x}+\frac{\cos 2x}{x}. \quad (*)$$

由 Dirichlet 判别法知广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ 收敛. 假设积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 收敛，则由等式 (*) 可知，广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 收敛. 这显然是个矛盾. 因此积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散. 这就证明了积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛. 证毕.

广义积分收敛性的Abel判别法

Theorem

<u>定理</u>: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 $b=+\infty$ 或 b 是 $f(x)$ 的瑕点. 设

(i) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 内闭可积, 且广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

<u>证明</u>: 由于 $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界, 故极限 $\lim_{x\to b^-} g(x)$ 存在, 记作 C. 令 $g_1(x)=g(x)-C$, 则易证 $f(x)$ 和 $g_1(x)$ 分别满足 Dirichlet 判别法中的条件 (i) 和 (ii), 因此积分 $\int_a^b f(x)g_1(x)dx$ 收敛. 于是对于任意 $b'<b$,

$$\int_a^{b'} f(x)g_1(x)dx = \int_a^{b'} f(x)g(x)dx - C\int_a^{b'} f(x)dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b'} f(x)g(x)dx = \int_a^{b'} f(x)g_1(x)dx + C\int_a^{b'} f(x)dx$$

$$\to \int_a^{b} f(x)g_1(x)dx + C\int_a^{b} f(x)dx, \quad b' \to b^-.$$

这就证明了广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛. 定理得证. $\square$

Example

例一: 考虑下述广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \arctan x dx. \quad (*)$$

解: 记 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \arctan x$, 则广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调有界. 根据 Abel 判别法知广义积分 (*) 收敛.

对于上述例子，也可应用 Dirichlet 判别法来证明广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \arctan x dx. \qquad (*)$$

的收敛性．记 $f(x) = \sin x$，$g(x) = \frac{\arctan x}{x}$，则易证 (i) 广义积分 $\int_0^b \sin x dx$ 关于 $b \in [0, +\infty)$ 有界，(ii) $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调下降且趋向于零．于是根据 Dirichlet 判别法知广义积分 (*) 收敛．

例二: 设 $\max\{p,q\}>1$, 证明广义积分 $J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$ 收敛.

证明: 不妨设 $p\ge q$, 且 $p>1$. 于是积分 J 可写作

$$J=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p(1+\frac{1}{x^{p-q}})}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}(1+\frac{1}{x^{p-q}})}dx.$$

令 $f(x)=\frac{\cos x}{x^{p-1}}$, $g(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x^{p-q}}}$. 由 Dirichlet 判别法知, 广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 而函数 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界. 于是再利用 Abel 判别法可知积分 J 收敛. 证毕.

另证：考虑积分

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$$

令 $f(x) = \cos x$, $g(x) = \frac{x}{x^p+x^q}$. 显然变上限积分 $\int_1^b f(x)dx$ 关于 $b \in [1, +\infty)$ 有界. 此外在假设 $\max\{p, q\} > 1$ 下，不难证明 $g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调下降，并且趋向于零. 因此根据 Dirichlet 判别法知积分 J 收敛. 证毕.

Theorem

定理: 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m_f \leq \mu \leq M_f$, M_f 和 m_f 分别记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下确界.

特别当 $f(x)$ 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

定理: 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

证明: 我们加强假设, 即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调且连续可微, 来证明定理. 一般情形下的证明比较复杂, 这里从略. 令 $F(x)=\int_a^x f(s)ds$, 则由分部积分法得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

因 g 单调且连续可微, 故 g' 不变号, 因而存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)[g(b)-g(a)].$$

证明，续

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)[g(b) - g(a)]$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)dx - g(b)\int_a^\xi f(x)dx + g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

定理得证.

定理: 考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 $b=+\infty$ 或 b 是 $f(x)$ 的唯一暇点. 假设

(i) $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积且 $\exists M>0$, 使得 $|\int_a^{b'} f(x)dx| \leq M$, $\forall b' \in [a,b)$;

(ii) $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim_{x\to b^-} g(x)=0$,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

证: 两类广义积分情形的证明类似. 以下只证无穷区间情形, 即证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. 由假设 (i) 知存在 $M>0$, 使得

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M, \quad \forall b \in [a,+\infty).$$

于是对任意 $b, b' \in [a, +\infty)$,

$$\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| = \left|\int_a^{b'} f(x)dx - \int_a^{b} f(x)dx\right|$$

$$\le \left|\int_a^{b'} f(x)dx\right| + \left|\int_a^{b} f(x)dx\right| \le 2M.$$

再由假设 (ii) 知对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C > a$，使得 $|g(x)| < \varepsilon$，$\forall x \ge C$. 于是对任意 $b' > b \ge C$，应用第二积分中值定理得

$$\int_b^{b'} f(x)g(x)dx = g(b)\int_b^{\xi} f(x)dx + g(b')\int_{\xi}^{b'} f(x)dx.$$

证明，续二

$$\Rightarrow \quad \left| \int_b^{b'} f(x)g(x)dx \right|$$

$$\leq |g(b)| \left| \int_b^{\xi} f(x)dx \right| + |g(b')| \left| \int_{\xi}^{b'} f(x)dx \right|$$

$$\leq \varepsilon 2M + \varepsilon 2M = 4M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则知，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛. $\square$

例一: 考虑广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x-\ln x}dx$$

的收敛性.

解: 记 $f(x)=(-1)^{[x]}$, $g(x)=\frac{1}{x-\ln x}$. 显然 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调下降且趋向于零, 为应用 Dirichlet 判别法, 还需验证积分 $\int_1^b f(x)dx$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界. 对于任意 $b>1$,

$$\int_1^b (-1)^{[x]}dx=\int_1^{[b]}(-1)^{[x]}dx+\int_{[b]}^b(-1)^{[b]}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{[b]-1} (-1)^k + (-1)^{[b]}(b-[b]).$$

$$\Rightarrow \quad \left| \int_1^b (-1)^{[x]} dx \right| \le 1 + 1 = 2.$$

由 Dirichlet 判别法知积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x - \ln x} dx$$

收敛. 解答完毕.

例二: 考虑广义积分

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$$

的绝对收敛性.

解: 这是瑕积分, 瑕点为 $x=0$. 取 $a\in(0,1)$, 在区间 $[a,1]$ 上作变换 $y=\frac{1}{x}$, 则 $dy=\frac{-dx}{x^2}$. 于是

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{1/a}^1 y\cdot\sin y(-x^2)dy=\int_1^{1/a}\frac{\sin y}{y}dy.$$

由此可见

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\sin y}{y}dy=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy$$

例二

已证广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$$

条件收敛. 因此

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$$

条件收敛. 解答完毕.

例一: 计算 Euler 积分 $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$.

解: 这是瑕积分, 瑕点为 $x=0$. 积分的收敛性是显然的. 因为对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$, $y^\varepsilon\ln y\to 0$, $y\to 0^+$. 因此

$$x^\varepsilon\ln\sin x=\left(\frac{x}{\sin x}\right)^\varepsilon(\sin x)^\varepsilon\ln\sin x\to 0,\quad x\to 0^+.$$

根据比较判别法的极限形式可知, Euler 积分 E 收敛. 以下来计算 Euler 积分. 对积分 $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$, 作变量代换 $x=2t$, 则

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2t)d(2t)=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t\Big)dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

对积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt$，作变换 $t = \frac{\pi}{2} - s$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{2} - s) d(\frac{\pi}{2} - s)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin s ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt.$$

$$\Rightarrow E = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2E.$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

另一个瑕积分计算

例二: 考虑积分 $J=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$. (参见 Nov 27 讲义第 32 页)

解: 显然上述积分是瑕积分, 积分上下限 $x=a$, $x=b$ 均为瑕点. 易证这两个瑕点处的积分均收敛. 因此广义积分 J 收敛. 为计算积分 J, 作变量代换 $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, $0\le t\le \pi/2$, 则

$$dx=-2a\cos t\sin t+2b\sin t\cos t=2(b-a)\cos t\sin t,$$

$$(x-a)(b-x)=(a\cos^2 t-a+b\sin^2 t)(b-b\sin^2 t-a\cos^2 t)$$

$$=(b-a)\sin^2 t\cdot(b-a)\cos^2 t=(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t.$$

$$\Rightarrow\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(b-a)\cos t\sin t}{(b-a)\cos t\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dt=\pi.$$

Beta 函数

考虑广义积分

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

这个积分可能有两个暇点 $x=0$ 和 $x=1$. 将积分分成两个部分

$B(\alpha,\beta)=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\quad J_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

考虑广义积分 J_1. 由于

$$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{x^{\alpha-1}}\to 1,\quad x\to 0^+,$$

故由比较判别法知，积分 $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ 和积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}dx$ 有相同的收敛性. 显然积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}dx$ 收敛，当且仅当 $\alpha > 0$. 因此积分 J_1 收敛，当且仅当 $\alpha > 0$. 同理可证积分 $J_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ 收敛，当且仅当 $\beta > 0$. 因此积分

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

可看作定义在 $\alpha > 0, \beta > 0$ 的函数，称作 Beta 函数.

考虑广义积分

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

因 $x=0$ 可能是暇点，故将积分分成两个部分 $\Gamma(\alpha)=J_1+J_2$，其中

$$J_1=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad J_2=\int_1^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

考虑积分 J_1. 显然积分 J_1 的收敛性与积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}dx$ 的收敛性相同. 即这两个积分收敛，当且仅当 $\alpha>0$.

再考虑积分 $J_2 = \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. 显然对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 积分 J_2 均收敛. 因为

$$\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} \to 0, \quad x \to +\infty.$$

再根据比较判别法的极限形式可知积分 J_2 收敛. 因此积分 $\Gamma(\alpha)$ 作为函数对 $\alpha > 0$ 有定义. 函数 $\Gamma(\alpha)$ 称作 Gamma 函数.

Theorem

定理: (i) $\Gamma(\alpha) > 0,\ \forall\alpha > 0$ 且 $\Gamma(1) = 1$;

(ii) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \forall\alpha > 0$.

证明: (i) 显然 $\Gamma(\alpha) > 0,\ \forall\alpha > 0$, 且 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

(ii) 利用分部积分可得

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx = -e^{-x}x^\alpha\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-x}(x^\alpha)'dx = \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha). \qquad \square$$

注: 由性质 (ii) 知对任意正整数 n, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)$

$= \cdots = n!$. 因此 $\Gamma(n+1) = n!$.

例子

课本第 206 页第六章总复习题第 5 题: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明: 反证. 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 不成立, 那么存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $A>a$, 存在 $x_A>A$, $|f(x_A)|\geq\varepsilon_0$. 一方面, 由函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的一致连续性知, 对 $\varepsilon_0>0$, 存在 $\delta_0>0$, 使得 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$, 只要 $|x'-x''|<\delta_0$, $x',x''\geq a$. 于是对 $\forall x\in(x_A,x_A+\delta_0)$,

$$|f(x)|=|f(x_A)+f(x)-f(x_A)|\geq|f(x_A)|-|f(x)-f(x_A)|$$

$$>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

例子，续

这说明 $f(x)$ 在 $(x_A, x_A+\delta_0)$ 上定号. 因此

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| = \int_{x_A}^{x_A+\delta_0} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0. \quad (*)$$

注意 $\frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0$ 为一个正常数. 另一方面由于广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，故由 Cauchy 收敛准则知对于 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0 > 0$，存在 $M_1 > a$，使得 $|\int_b^{b'} f(x)dx| < \varepsilon_1$, $\forall b, b' \geq M_1$. 取 $A \geq M_1$，则 x_A, $x_A + \delta_0 > A > M_1$，故

$$\left|\int_{x_A}^{x_A+\delta_0} f(x)dx\right| < \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\delta_0.$$

此与式 (*) 相矛盾. 命题得证.

作业

课本习题6.1(pp.193-194): 4(奇), 5, 6, 7.

课本习题6.2 (pp.204-206): 3, 4(奇), 5(奇), 6, 7, 8, 9(1)(2)(3).

更正: (i) 题8似有印刷错误. 题目中"若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 存在" 应改为"若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在".

(ii) 题9(3)的课本答案为收敛. 似有误. 这题的广义积分应该是发散的.