《微积分A1》第十七讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月11日

期中考试时间地点

期中考试时间:

2020年11月14日(周六)晚7:20-9:20

期中考试地点:

(i) 学号 $\leq$ 2020012361 的同学考场: 技科楼 3311

(ii) 其他同学的考场: 技科楼 3217

定理: 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上下凸(严格下凸) $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ 单调增(严格单调增).

证: 只证括号外情形. $\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 下凸. 要证 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, $f'(x_1) \le f'(x_2)$. 对 $\forall x \in (x_1, x_2)$, 由下凸性质知

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

于上式分别令 $x \to x_1^+$, $x \to x_2^-$ 得

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2).$$

由此得 $f'(x_1) \le f'(x_2)$, 即导数 $f'(x)$ 单调增.

证明续

$\Leftarrow$: 假设 $f'(x)$ 单调增，要证 $f(x)$ 下凸. 对 $\forall x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$,

且 $x_1 < x_2 < x_3$, 两次应用 Lagrange 中值定理知

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2, x_3).$$

由 $f'(x)$ 的单调增性质知 $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$. 于是

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

这表明函数 $f(x)$ 下凸. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上二阶可导, 则

(i) $f(x)$ 下凸 $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b)$;

(ii) $f(x)$ 严格下凸 $\Longleftrightarrow f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b)$ 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 的任何子区间上不恒为零.

证明: 利用上述定理, 以及严格单调增函数的充要条件即可得到结论. 细节略.

凸性的切线判别

Theorem

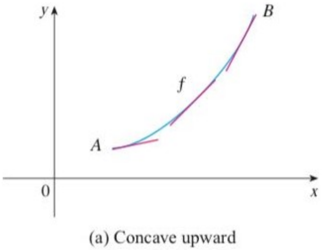
定理: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 于 (a,b) 下凸 $\Longleftrightarrow$

$\forall x_0 \in (a,b)$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall x \in (a,b)$. (*)

不等式(*)的几何意义是, 曲线位于任意点的切线之上.

定理证明留作习题(课本第120页习题4.5习题9).

切线判据图示



例: 考虑旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ 的凸性, 其中 $\theta \in (0, 2\pi)$, $a > 0$.

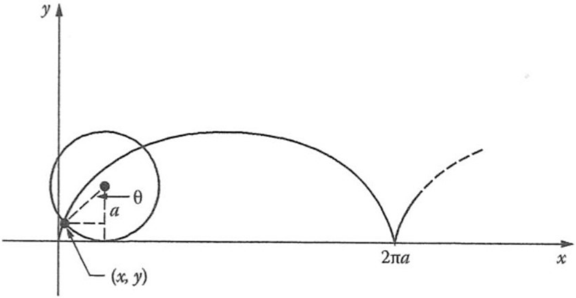


FIGURE 11

解: 设旋轮线是函数 $y = f(x)$ 的函数曲线, 已求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right)\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta - 1}{a(1-\cos\theta)^3} = \frac{-1}{a(1-\cos\theta)^2} < 0, \quad \forall\theta \in (0, 2\pi).$$

因此旋轮线是严格上凸的. 解答完毕.

注: 也可以直接由一阶导数看出曲线是上凸的. 因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

由于 $\tan\frac{\theta}{2}$ 关于 θ 是严格单调增的, 且 $\theta = \theta(x)$ 也是严格单调增的, 其中函数 $\theta(x)$ 是 $x = a(\theta - \sin\theta)$ 的反函数, 故一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 关于 x 是严格单调下降的. 因此曲线严格上凸.

定理：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正实数，则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad (*)$$

证明：考虑函数 $f(x) = \ln x,\ x \in (0, +\infty)$. 由于 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0,\ \forall x \in (0, +\infty)$. 故 $f(x)$ 在开区间 $(0, +\infty)$ 上是上凸的. 于是由 Jensen 不等式得

$$\ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

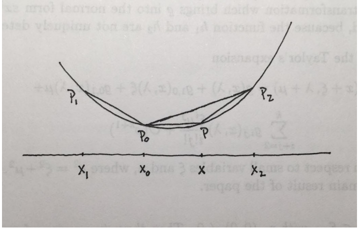
$$\geq \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

这显然等价于算术几何平均不等式(*).

Theorem (参见课本第125页第四章总复习题第19题)

定理: 开区间上的凸函数必为连续函数.

证明: 设函数 $f(x)$ 于开区间 (a,b) 下凸, 以下证 $f(x)$ 在任意点 $x_0 \in (a,b)$ 处连续, 即要证 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续. 只证右连续, 因为左连续的证明基本相同. 取两个固定点 x_1, x_2, 使得 $x_1 < x_0 < x_2$. 再取点 $x \in (x_0, x_2)$, 如图所示.

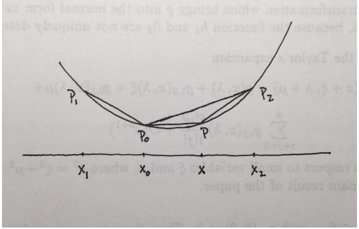


证明续一

由 f 的凸性有

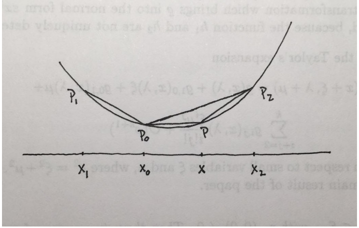
$$\overline{P_1P_0}\text{ 的斜率} \le \overline{P_0P}\text{ 的斜率} \le \overline{P_0P_2}\text{ 的斜率},$$

即
$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$



于上述不等式同乘以 $x - x_0 > 0$ 得

证明续二

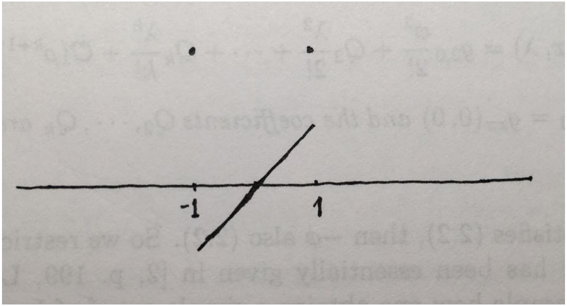


$$\frac{x-x_0}{x_0-x_1}[f(x_0)-f(x_1)] \le f(x)-f(x_0) \le \frac{x-x_0}{x_2-x_0}[f(x_2)-f(x_0)].$$

令 $x \to x_0^+$, 即可知 $f(x) \to f(x_0)$. 即 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续. 同理可证 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续. 证毕. $\square$

闭区间上的凸函数未必连续

例: $f(x) = x,\ x \in (-1, 1),\ f(\pm 1) = 2$. 如图所示.



易证 $f(x)$ 于闭区间 $[-1, 1]$ 下凸. 显然 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 的两个端点处均不连续.

Theorem (参见课本第125页第四章总复习题第19题)

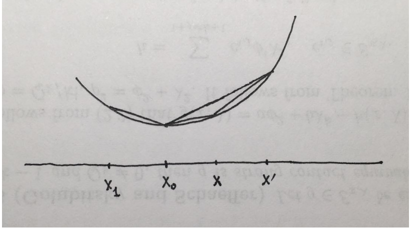
定理: 开区间上的任意下(上)凸函数, 处处存在两个单侧导数.

证明: 设 $f(x)$ 与开区间 (a,b) 下凸, $x_0 \in (a,b)$. 考虑函数

$$\triangle(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \forall x \in (x_0, b).$$

固定一个 $x_1 < x_0$. 对 $\forall x' > x > x_0$, 由 $f(x)$ 的下凸性得

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$



这表明$\triangle(x)$在区间(x_0,b)上单调上升，且有下界. 故极限

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，其极限就是$\inf\{\triangle(x), x\in(x_0,b)\}$. (可利用确界性质证明.)

即$f(x)$在点x_0处的右导数$f'_+(x_0)$存在. 同理可证左导数

$f'_-(x_0)$也存在. 证毕.

Theorem

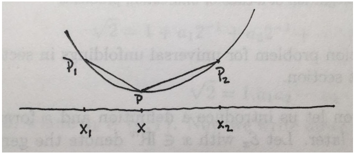
定理：设函数 $f(x)$ 于 (a,b) 下凸，则

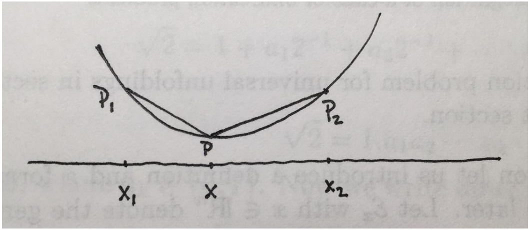
(i) $f'_-(x) \le f'_+(x), \forall x \in (a,b)$;

(ii) $f'_+(x) \le f'_-(y), \forall x, y \in (a,b), x < y$.

证明：根据函数 $f(x)$ 的下凸性质可知，对于任意点 $x_1 < x < x_2$，

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$



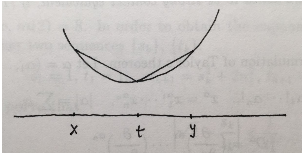


令 $x_1 \to x^-$ 得

$$f'_-(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

再令 $x_2 \to x^+$ 得 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. 结论(i)成立.

证(ii). 对任意 $x, y \in (a, b)$, $x < y$, 取 $t \in (x, y)$. 如图所示.



由 $f(x)$ 的下凸性知

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \le \frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$

于上式中, 分别令 $t \to x^+$, 令 $t \to y^-$ 得

$$f'_+(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_-(y).$$

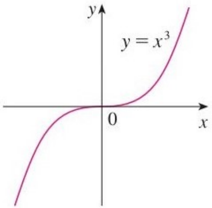
结论(ii)得证.

拐点

Definition

定义: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近的两侧有不同的凸性, 即一侧是下凸, 另一侧是上凸, 则称点 x_0 为 f 的拐点 (inflection points).

例: 函数 $y = x^3$ 有拐点 $x = 0$. 因为 $y'' = 6x$, 当 $x < 0$ 时, 函数上凸; 当 $x > 0$ 时, 函数下凸. 如图所示.



拐点的必要条件

Theorem

定理: 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的拐点，且 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x_0) = 0$.

证: 因 $f''(x_0)$ 存在，故 $f'(x)$ 在一个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 存在. 由于 x_0 是拐点，故函数在 x_0 的两侧凸性不同. 不妨设 $f(x)$ 于 $(x_0 - \delta, x_0)$ 下凸，于 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上凸. 由一阶导数与凸性定理知，$f'(x)$ 于 $(x_0 - \delta, x_0)$ 单调增，于 $(x_0, x_0 + \delta)$ 单调减. 于是 $f'(x)$ 在点 x_0 处有极大值. 由 Fermat 定理知 $f''(x_0) = 0$. 定理得证. $\square$

例: 求曲线 $y=(x-1)^3(x+1)$ 的凸性区间以及拐点.

解: 先计算一阶和二阶导数

$$y'=3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3=2(x-1)^2(2x+1);$$

$$y''=4(x-1)(2x+1)+4(x-1)^2=12x(x-1).$$

因此 (i) 函数有两个拐点 $x=0$ 和 $x=1$. 因为 y'' 在这两个点处改变符号, 从而函数改变了凸性.

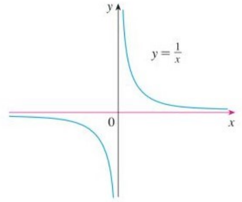
(ii) 当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 时, $y''>0$, 故曲线下凸,

(iii) 当 $x\in(0,1)$ 时, $y''<0$, 故曲线上凸.

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在点 x_0 的单侧邻域 $(x_0-\delta, x_0)$ 或 $(x_0, x_0+\delta)$ 内定义. 若 $\lim_{x\to x_0^+}|f(x)| = +\infty$ 或 $\lim_{x\to x_0^-}|f(x)| = +\infty$, 则称函数 $f(x)$ 有垂直渐近线 $x = x_0$.

例: 函数 $y = \frac{1}{x}$ 有垂直渐近线 $x = 0$.



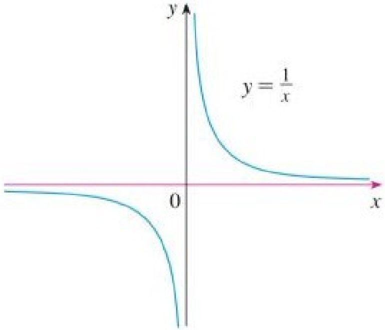
水平渐近线(horizontal asymptotes)

Definition

定义: (i) 当 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上定义, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=C$, 则称函数 $f(x)$ 有水平渐近线 $y=C$.

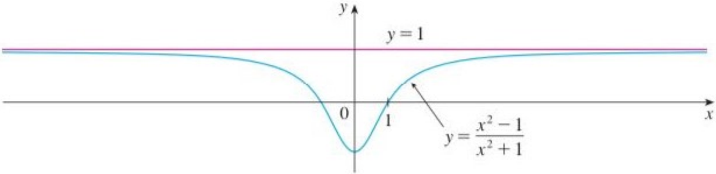
(ii) 当 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上定义, 且 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=C$, 也称函数 $f(x)$ 有水平渐近线 $y=C$.

例一: 函数 $y = \frac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y = 0$.



例二: 函数 $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ 有水平渐近线 $y=1$. 因为

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$



Definition

定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上定义. 称直线 $y = kx + b$ 为函数 $f(x)$ 的斜渐近线, 如果 $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

显然水平渐近线是斜渐近线的特殊情形, 即 $k = 0$ 的情形. 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上定义时, 类似可定义函数 $f(x)$ 的(负向)斜渐近线.

Example

例: 函数 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有斜渐近线 $y = x + 2$. 因为

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(x + 2 - \frac{1}{x} \right) - (x + 2) \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上定义, 则 $f(x)$ 有斜渐近线 $\Longleftrightarrow$

(i) 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 存在, 极限值记作 k;

(ii) 极限 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$ 存在, 极限值记作 b.

当条件 (i) 和 (ii) 成立时, $f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

例: 考虑 $f(x)=x+2-\frac{1}{x}$. 验证条件 (i), (ii):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2-\frac{1}{x}}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}[x+2-\frac{1}{x}-x]=2.$$

因此函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y=x+2$.

证明: $\Rightarrow$: 当 $f(x)$ 有渐近线 $y = kx + b$ 时, 即

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0, \quad (*)$$

则 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(x) - (kx + b)]}{x} = 0.$$

由此可知 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k$. 即条件 (i) 成立. 再根据极限式 (*) 可知

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = b.$$

即条件(ii) 成立.

$\Leftarrow$: 假设条件 (i) 和 (ii) 成立，则由条件 (ii)，即

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

存在，其极限值记作 b，则立刻得到

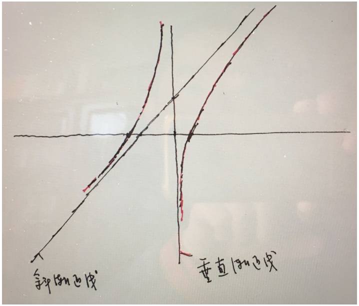
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

即函数 $f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$. 定理得证. $\square$

注: 实际上 $f(x)$ 有斜渐近线 $\Longleftrightarrow$ 存在 k，使得极限 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$ 存在.

条件 (i) 显得多余. 但条件 (i) 提供了求 k 的方法，即 $k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

例: 仍考虑曲线 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$. 已求得曲线的一条斜渐近线 $y = x + 2$. 此外曲线还有一条垂直渐近线 $x = 0$, 即 y 轴. 因为 $\lim_{x \to 0^{\pm}}[x + 2 - \frac{1}{x}] = \mp\infty$. 曲线 $y = x + 2 - \frac{1}{x}$ 的函数图像, 及其渐近线如图所示.



函数作图的一般步骤

为定性地画出 $y = f(x)$ 的函数图像，可按照如下步骤进行：

1. 确定函数的定义域；
2. 奇偶性，周期性，对称性；
3. 单调区间与极值点(利用一阶导数)；
4. 凸性和拐点(利用二阶导数)；
5. 渐近线；
6. 特殊点，例如零点等；
7. 定性作图.

例一: 考虑函数 $f(x) = x^4 - 4x^3$. 简单计算得

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

1. 函数有两个驻点 $x = 0$, $x = 3$. 由于 $f''(3) = 36 > 0$, 故 $x = 3$ 是极小点, 且极小值为 $f(3) = -27$. 由于 $f''(0) = 0$, 故不能用二阶导数来测试驻点 $x = 0$ 是否为极值点. 由于 $f'(x) = 4x^2(x-3) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty, 3)$, 且仅在 $x = 0$ 是为零, 故 $f(x)$ 在这个区间里严格单调下降. 因此驻点 $x = 0$ 不是极值点.

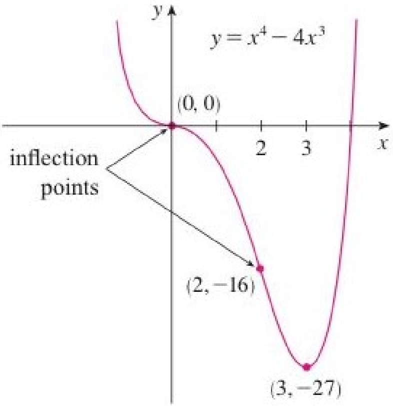
例一，续一

2. 如上所述，由 $f'(x) = 4x^2(x-3)$ 可知，在区间 $(-\infty, 3)$ 里，$f'(x) < 0$，故函数严格单调减，在区间 $(3, +\infty)$ 里，$f'(x) > 0$，故函数严格单调增.

3. 根据 $f''(x) = 12x(x-2)$ 不难看出函数有两个拐点 $x = 0$，$x = 2$. 函数的凸性区间如下表所述.

区间	$f''(x) = 12x(x-2)$	凸性
$(-\infty, 0)$	$+$	下凸
$(0, 2)$	$-$	上凸
$(2, +\infty)$	$+$	下凸

4. 根据以上信息，不难画出函数图像.



例二: 定性地画出函数 $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 的函数图像.

解: 先计算 $f(x)$ 的一阶和二阶导数

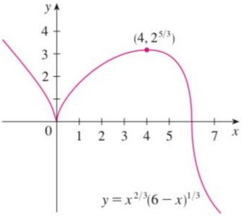
$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \quad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

由此可得函数单调区间如下.

区间	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty,0)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\downarrow$
$(0,4)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\uparrow$
$(4,6)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$\downarrow$
$(6,+\infty)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$\downarrow$

(i) 由上述表格可知 $x = 0$ 是极小值点，$x = 4$ 是极大值点，而点 $x = 6$ 不是极值点.

(ii) 考虑函数的凸性. 注意 $f''(x) < 0,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$. 故函数于这两个区间上凸. 由于 $f''(x) > 0,\ \forall x \in (6, +\infty)$，故函数于这个区间下凸. 进一步知不可微点 $x = 6$ 是拐点. 函数的图像如图所示.



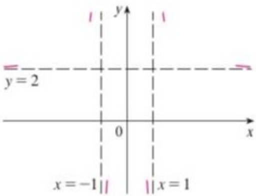
例三: 考虑 $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$ 的函数图像.

1. 定义域为 $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$;

2. 在 x 轴和 y 轴上的截距均为零;

3. 偶函数, 即 $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in D$;

4. 有两条垂直渐近线 $x=\pm1$, 一条水平渐近线 $y=2$. 因为 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$.



5. 由

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

可知 (i) 在 $(-\infty, 0)\setminus\{-1\}$ 上，$f'(x) > 0$，故 $f(x) \uparrow$ 严格；

(ii) 在 $(0, +\infty)\setminus\{1\}$ 上，$f'(x) < 0$，故 $f(x) \downarrow$ 严格.

(iii) 函数有唯一驻点 $x = 0$，且驻点 $x = 0$ 是极大值点.

6. 计算二阶导数

$$f''(x) = \frac{-4}{(x^2-1)^2} + \frac{4x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}.$$

由此可见 (i) 当 $|x| < 1$ 时，$f''(x) < 0$，函数上凸；(ii) 当 $|x| > 1$ 时，$f''(x) > 0$，函数下凸；(iii) 函数无拐点.

7. 综合上述信息可得函数图形如下

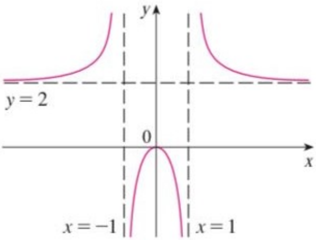


FIGURE 6
Finished sketch of $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

例四: 考虑函数 $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

1. 定义域为 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$;

2. 在 x 轴和 y 轴上的截距为均为零;

3. 奇函数, 故函数图像关于原点对称;

4. 无水平渐近线, 无垂直渐近线;

5. 由于 $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1$, 并且

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty}[\frac{x^3}{x^2+1} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-x^3-1}{x^2+1}$

$= 0$, 故函数有斜渐近线 $y = x$;

6. 计算一阶导数

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

这表明 $f'(x) > 0$, $\forall x \neq 0$, 从而函数在 $\mathbb{R}$ 上严格单调上升;

7. 计算二阶导数

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3) + x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

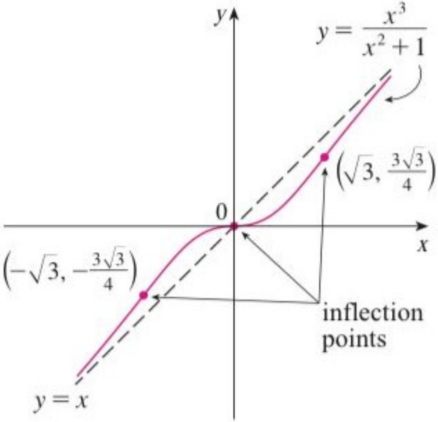
根据

$$f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

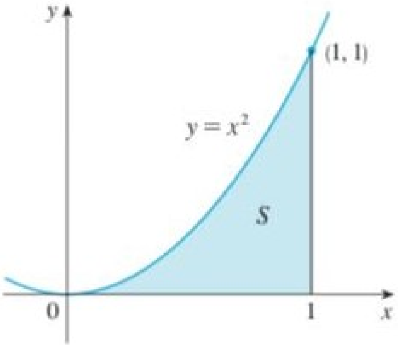
可得函数的三个拐点 $x = 0, \pm\sqrt{3}$. 由此可知函数 $f(x)$ 的凸性区间如下.

区间	x	$3-x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	凸性
$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-$	$-$	$+$	$+$	下凸
$(-\sqrt{3}, 0)$	$-$	$+$	$+$	$-$	上凸
$(0, \sqrt{3})$	$+$	$+$	$+$	$+$	下凸
$(\sqrt{3}, +\infty)$	$+$	$-$	$+$	$-$	上凸

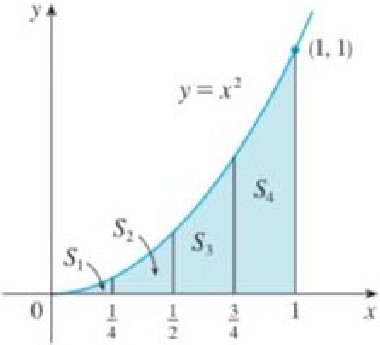
8. 综合上述信息可得函数 $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ 的图像如下.



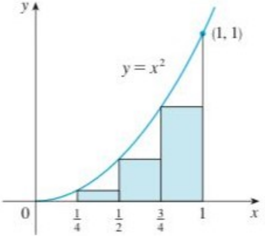
例: 考虑抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x = 1$, 以及 x 轴所围图形 S 的面积. 如图所示. 形如 S 的图形常称为曲边梯形.

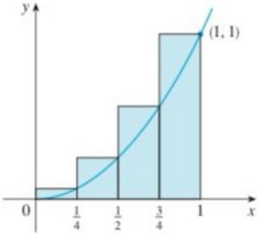


我们用三条直线 $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{2}{4}$, $x=\frac{3}{4}$, 将图形 S 分成四个条域 S_1, S_2, S_3, S_4, 则 $S=S_1+S_2+S_3+S_4$, 如图所示.



将区间 $[0,1]$ 分割成 $[0,1]=[0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{4},\frac{2}{4}]\cup[\frac{2}{4},\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},1]$，我们可以用两种矩形来逼近每个条域 S_i，宽均为 $\frac{1}{4}$，高分别取函数 x^2 在子区间的左端点和右端点的值，如图所示.





记 R_4 为取函数 $f(x) = x^2$ 在右端点的值作为高的逼近值，L_4 为取函数 $f(x) = x^2$ 在左端点的值作为高的逼近值，则

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^2 = 0.46875,$$

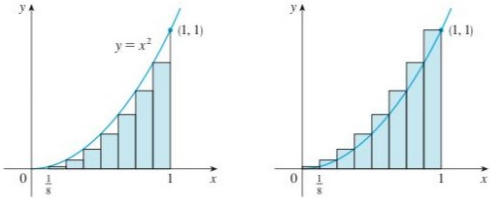
$$L_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{0}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.21875.$$

因此所求面积 $|S|$ 满足 $L_4 < |S| < R_4$.

为了取得更好的逼近，可以将区间 $[0,1]$ 分解得更小，例如分成 8 等分，并用同样的方式，即取函数 $f(x)$ 在子区间的右端点和左端点为高的方式，可以得到更好的逼近

$$0.2734375 = L_8 < |S| < R_8 = 0.398475.$$

如图所示.



(a) Using left endpoints (b) Using right endpoints

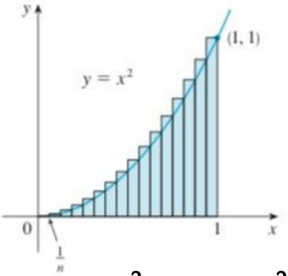
面积问题，续五

下述表格表明，随着等分数 n 的增加，面积 R_n 和 L_n 越来越接近.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

R_n 的极限

将区间 $[0, 1]$ 分割成 n 等分，第 i 个矩形条的高取为 x_i^2（右端点的值），记 R_n 为这 n 矩形条的面积之和，如图所示.



即 $$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{1}{3}.$$

L_n 的极限

与 R_n 情形类似，

$$L_n = \frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}[0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n[2(n-1)+1]}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}.$$

由于 $L_n < |S| < R_n$，故可以定义所求面积 $|S| = \frac{1}{3}$.

R_n, L_n 随 n 的变化图示

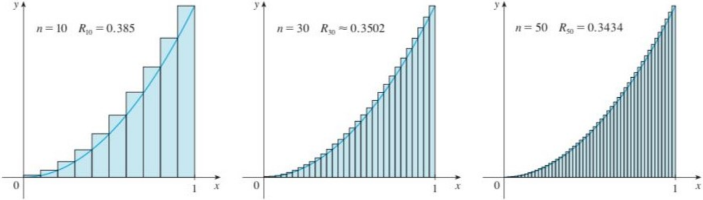


FIGURE 8 Right endpoints produce upper sums because $f(x) = x^2$ is increasing

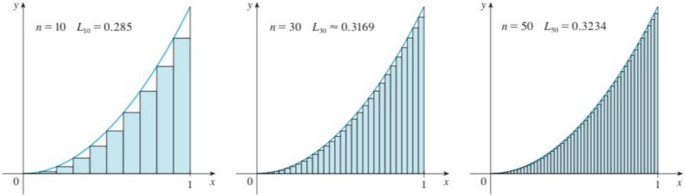


FIGURE 9 Left endpoints produce lower sums because $f(x) = x^2$ is increasing

定积分定义

<u>定义</u>: 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的函数.

1. 分割: 在区间 $[a,b]$ 上取有限个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 记 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 点集 P 称为区间 $[a,b]$ 的一个分割 (partition).

2. 取样点 (sample points) $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, 并作 Riemann 和

$$\sigma(P,\xi)\triangleq\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\triangle x_i,$$

其中 $\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$, $\xi=\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$ 称作样点集;

3. 取极限：记 $\|P\| \triangleq \max\{\triangle x_i, i=1,2,\cdots,n\}$，并称之为分割 P 的密度．如果极限 $\lim_{\|P\|\to 0}\sigma(P,\xi)$ 存在，且极限值与样点集 ξ 的选择无关．换言之，存在数 J，使得对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\forall P: \|P\|<\delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(P,\xi)-J|<\varepsilon, \quad \forall\xi,$$

则称数 J 为函数 f(x) 在区间 [a, b] 上的 Riemann 积分，也称 f(x) 在区间 [a, b] 上 Riemann 可积．此时数 J 记作 $\int_a^b f(x)dx$．即

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\triangle x_i.$$

注一: 积分符号 $\int_a^b f(x)dx$ 中, a 和 b 分别称为积分下限与积分上限, $f(x)$ 称作被积函数.

注二: $\int_a^b f(x)dx$ 应看作一个整体. 它代表 Riemann 和的极限.

注三: $\int_a^b f(x)dx$ 中的 x 称作哑元, 可以换成任意一个符号, 例如

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(z)dz = \cdots.$$

就好比 $\sin x$, $\sin t$, $\sin s$ 等均表示同一个正弦函数一样.

注四: 记 $R[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数的全体.

注五: 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 有时可简写作 $\int_a^b f$.

当 $f(x) \geq 0$ 时，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可以看作或定义为曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 下的面积. 如图所示

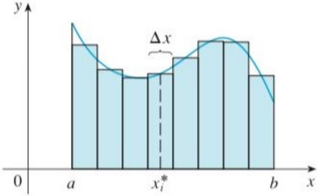


FIGURE 1
If $f(x) \geqslant 0$, the Riemann sum $\Sigma f(x_i^*)\Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

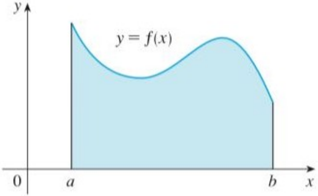


FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b.

当 $f(x)$ 有正有负时，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可以看作曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 下的面积的代数和(净面积)．如图所示

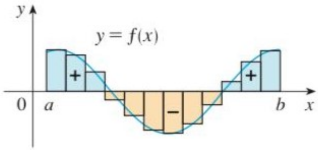


FIGURE 3

$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ is an approximation to the net area.

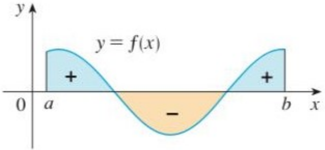


FIGURE 4

$\int_a^b f(x)\,dx$ is the net area.

定积分的物理意义

1. 设在区间 $[a,b]$ 上分布有某种物质，$\rho(x) \geq 0$ 为其分布密度，则积分 $\int_a^b \rho(x)dx$ 可解释为(或定义为)该物质的总量.

2. 设质点作直线运动，时刻 t 时速度为 $v(t)$，则积分 $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ 可解释为(或定义为)质点在时间间隔 t_1 到 t_2 所经过的路程.

3. 设质点沿着 x 轴作直线运动，$f(x)$ 为质点位于位置 x 处所受的力 (x 轴方向的力)，则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可解释为(或定义为) 力 $f(x)$ 关于质点从点 $x=a$ 运动到点 $x=b$ 所做的功.

定积分的简单性质

1. 保号性：设 $f \in R[a,b]$ 且 $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\int_a^b f \geq 0.$$

2. 保序性：设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

3. 线性性：设 $f, g \in R[a,b]$, 则 $\lambda f, f \pm g \in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f, \quad \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g.$$

例一

Example

例: 证明 $\int_a^b 1dx = b - a$.

证明: 记 $f(x) = 1$. 对任意分割 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 以及任意关于分割 P 的样本点集 $\xi = \{x_i^*\}$, 相应的 Riemann 和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = b - a.$$

因此由积分定义知函数 $f(x) = 1$ 在任意闭区间 $[a, b]$ 上可积, 且 $\int_a^b 1dx = b - a$. 证毕.

例二: 计算$\int_a^b x dx$.

解: 对任意分割 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 以及对于任意关于分割 P 的样点集 $\{x_i^*\}$, $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$, 相应的 Riemann 和为 $\sum_{i=1}^n x_i^*\triangle x_i$. 记子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的中点为 $x_i^{**}=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$. 于是

$$\sum_{i=1}^n x_i^*\triangle x_i=\sum_{i=1}^n x_i^{**}\triangle x_i+\sum_{i=1}^n (x_i^*-x_i^{**})\triangle x_i.$$

上式右边第一个和式为

$$\sum_{i=1}^n x_i^{**}\triangle x_i=\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(x_i+x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

再考虑第二个和式，即和式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^*-x_i^{**})\triangle x_i.$$

由于 $x_i^*, x_i^{**}\in[x_{i-1},x_i]$，故 $|x_i^*-x_i^{**}|\le(x_i-x_{i-1})\le\|P\|$. 于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i^*-x_i^{**})\triangle x_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i^*-x_i^{**}|\triangle x_i$$

$$\le\|P\|\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i=\|P\|(b-a).$$

因此对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \varepsilon$，使得当任意分割 P 满足 $\|P\| < \delta = \varepsilon$ 时，对任意样点集 $\{x_i^*\}$，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \triangle x_i - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right| \le \|P\|(b-a) \le (b-a)\varepsilon.$$

根据积分定义，函数 x 在任意区间 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

解答完毕.

作业

课本习题4.5 (pp.119-120): 1(1)(3)(5), 2, 3, 4, 5, 9.

课本习题4.6 (pp.123-124): 1, 2(1)(3)(5).