《微积分A1》第二十五讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月09日

1. 设在直角坐标系下，一个质量为 m 的质点位于 (x_0, y_0)，则定义质点关于 x 轴的力矩为 my_0，关于 y 轴的力矩为 mx_0.

2. 设平面上有 n 个质点，质量为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，分别位于点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_n, y_n)，则质点系总质量 M，以及关于 x 轴和 y 轴的总力矩 M_y 和 M_y 定义为

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i.$$

这个质点系的质心(质点中心) (x_c, y_c) 定义为

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

设曲线Γ: $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$上分布有某种物质，其分布密度为$\rho(t)$，其中$t\in[\alpha,\beta]$. 考虑曲线的质心位置.

1. 求总质量. 取质量微元: 密度$\times$弧长微元，即

$$dM=\rho(t)\cdot d\ell=\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

于是总质量为

$$M=\int_\alpha^\beta\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

2. 求曲线关于 x 轴和 y 轴的总力矩.

质量微元 dM 关于 x 轴和 y 轴的力矩分别为

$$dM_x = y(t)dM = y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt,$$

$$dM_y = x(t)dM = x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

因此质量曲线关于 x 轴和 y 轴的总力矩分别为

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt,$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

3. 求质心坐标. 质量曲线的质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 定义如下:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt},$$

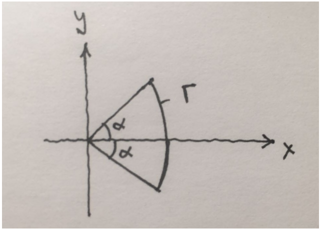
$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\int_\alpha^\beta \rho(t)y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

当 $\rho(t)$ 为正常数时，即质量均匀分布时，质心称为形心. 此时

$$\bar{x}=\frac{\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

例: 求圆弧 $x = r\cos t,\ y = r\sin t$ 的形心, 其中 $|t| \le \alpha$, $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$.



解: 由于 $x'(t)^2 + y'(t)^2 = (-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 = r^2$, 故

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2r\alpha,$$

例子，续

$$M_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\sin t \cdot r dt = 0$$

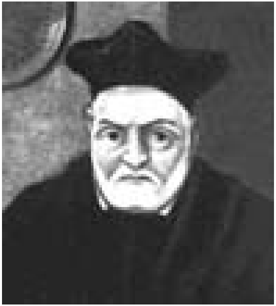
$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos t \cdot r dt = 2r^2 \sin\alpha.$$

由形心坐标公式得

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2r^2\sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = 0.$$

Theorem

定理: 曲线段围绕一直线旋转所得旋转面的侧面积, 等于曲线的弧长, 乘以形心绕直线旋转一周的周长.



Paul Guldin, 1577-1643, 瑞士人

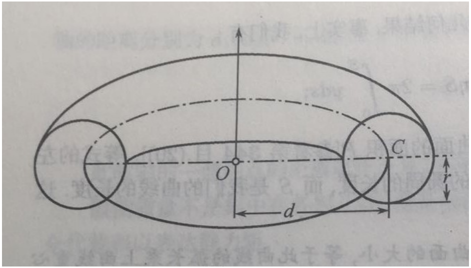
例一

例一: 已求得圆弧 $x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ |t| \le \alpha,\ 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$, 的形心位置为 $(\frac{r\sin\alpha}{\alpha}, 0)$. 根据 Guldin 第一定理知, 圆弧绕 y 旋转一周所得旋转面(球面的一部分)的面积 S, 等于弧长 $2r\alpha$, 乘以形心绕 y 轴旋转一周的周长, 即 $2\pi\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$, 亦即

$$S = 2r\alpha \cdot 2\pi\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = 4\pi r^2\sin\alpha.$$

另一方面, 根据第十三周习题课中的 Archimedes 球面带定理知, 这部分球面面积等于相应的柱面面积, 即高 × 周长. 显然高为 $2r\sin\alpha$, 周长为 $2\pi r$. 因此 $S = 2r\sin\alpha \cdot 2\pi r = 4\pi r^2\sin\alpha$. 这个结果与利用 Guldin 第一定理的计算结果一致.

例二: 计算如图所示的环面面积.



解: 环面可看作半径为 $r > 0$ 的圆周 C, 绕竖直的 y 轴旋转所得的旋转面. 显然圆周 C 的形心为其圆心. 形心绕 y 轴旋转一周的周长为 $2\pi d$, 圆周的周长为 $2\pi r$. 根据 Guldin 第一定理知, 环面面积为 $2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 rd$. 解答完毕.

定理证明

证明: 设曲线 Γ 有参数表示 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, $r(t)$ 连续可微, 且位于 x 轴的上方, 即 $y(t)\geq 0$, 则曲线 Γ 的形心的纵坐标 $\bar{y}$ 如下确定

$$\bar{y}=\frac{\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}{\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt}.$$

由此得

$$2\pi\bar{y}|\Gamma|=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

注意上式右边是曲线 Γ 绕 x 轴旋转所得旋转面面积, 而左边是曲线的弧长, 乘以形心绕 x 轴旋转一周的周长. 定理得证. $\square$

设平面区域 D 上均匀分布某种物质，考虑 D 的质心. 此时质心也称为区域 D 的形心. 假设区域 D 为如下形式的曲边梯形

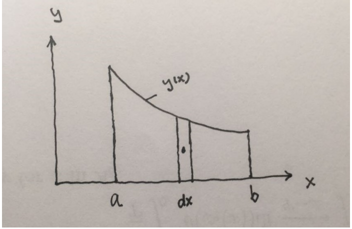
$$D = \left\{(x, y), 0 \leq y \leq y(x), a \leq x \leq b\right\}.$$

不妨设物质的分布密度为 $\rho(x, y) \equiv 1$. 于是 D 的质量就是 D 的面积，即

$$M = |D| = \int_a^b y(x)dx.$$

考虑域 D 关于 x 轴和 y 轴的力矩.

取质量(面积)微元 $dM = dS = y(x)dx$. 如图所示.



质量(面积)微元 $dM = dS$ 关于 x 轴和 y 轴的力矩分别为

$$dM_x = \frac{1}{2}y(x)dM = \frac{1}{2}y^2(x)dx,$$

$$dM_y = xdM = xy(x)dx.$$

于是区域 D 关于 x 轴和 y 轴的总力矩为

$$M_x = \int_a^b \frac{1}{2} y^2(x)dx, \quad M_y = \int_a^b xy(x)dx.$$

平面域 D 的形心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 定义为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b xy(x)dx}{\int_a^b y(x)dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y(x)^2 dx}{\int_a^b y(x)dx}.$$

Theorem

定理: 平面图形 D 围绕一直线(旋转轴)旋转所得的旋转体 V 的体积 $|V|$, 等于图形的面积 $|D|$, 乘以形心绕直线旋转一周的周长, 即 $|V| = 2\pi d|D|$, 其中 d 代表形心到旋转轴的距离.

证明: 只证明当平面图形 D 具有如下形式的情形

$$D = \left\{(x,y), 0 \le y \le y(x), a \le x \le b\right\},$$

其中 $y(x) \ge 0$, 且 $y(x)$ 连续可微. 此时域 D 的形心的纵坐标为

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y(x)^2 dx}{\int_a^b y(x) dx}.$$

证明续

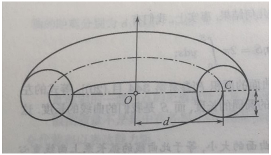
由此得

$$2\pi\bar{y}|D| = \int_a^b \pi y(x)^2 dx.$$

上式右边是平面域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积，上式左边是区域 D 的面积，乘以形心绕 x 轴旋转一周的周长．Guldin 第二定理得证． □

例子

例: 利用 Guldin 第二定理计算环面所围立体的体积.



解: 设 $D=\{(x,y),(x-d)^2+y^2\leq r^2\}$ 为一个闭圆盘, 其中 $d>r>0$. 根据 Guldin 第二定理知, 圆盘 D 绕 y 轴旋转一周所得立体(实心轮胎)的体积为 $V=|D|\cdot\ell$, 这里 $|D|=\pi r^2$ 为圆盘 D 的面积, ℓ 表示图形 D 的形心绕 y 轴一周的周长. 显然图形 D 的形心为为圆盘的圆心, 即 $(d,0)$. 因此 $\ell=2\pi d$. 故所求立体的体积为 $V=\pi r^2\cdot 2\pi d=2\pi^2r^2d$. 解答完毕.

考虑积分

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx.$$

显然对于任意 $b > 1$,

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left.\frac{-1}{x}\right|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

因此

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

定义: (i) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上定义. 假设对任意 $b>a$, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积; (ii) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭可积. 若极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在(有限), 则称极限值为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义积分, 并记之为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \triangleq \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

此时也称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分存在(收敛). (iii) 当极限 $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 不存在时, 称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非广义可积, 或其广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散(不收敛).

Example

例一: 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

证明: 因为对任意 $b > 0$, 函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, b]$ 上可积, 即 $\frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上内闭可积, 且极限

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Example

例二: 设 $p>0$, 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 的收敛性.

解: 当 $p\neq 1$ 时, 对任意 $b>1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^b=\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1).$$

(i) 当 $p>1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 的收敛且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$.

(ii) 当 $p<1$ 时, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散.

(iii) 当 $p=1$ 时, $\int_1^b\frac{dx}{x}=\ln b\to+\infty$. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 发散.

综上, 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛且 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$; 当 $p\leq 1$ 时积分发散.

无穷区间上的广义积分的其他形式

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \triangleq \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \triangleq \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx.$$

这里假设等式右边的极限均存在.

例子

例: 考虑广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{2-x}} dx$ 的收敛性.

解: 对于 $a < 0 < b$,

$$\int_a^b \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \int_a^b \frac{e^x}{e^{2x} + e^2} dx = \int_a^b \frac{de^x}{e^{2x} + e^2}$$

$$= \int_{e^a}^{e^b} \frac{du}{u^2 + e^2} = \frac{1}{e}(\arctan e^{b-1} - \arctan e^{a-1})$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^b \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \frac{1}{e}(\arctan e^{b-1} - \arctan e^{-1})$$

$$\to \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1}\right), \quad b \to +\infty$$

例子续

$$\int_a^0 \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \frac{1}{e}(\arctan e^{-1} - \arctan e^{a-1})$$

$$\to \frac{1}{e} \arctan e^{-1}, \quad a \to -\infty.$$

因此广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{2-x}} dx$ 收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{2-x}} dx$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1}\right) + \frac{1}{e} \arctan e^{-1} = \frac{\pi}{2e}.$$

定义: (i) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上定义. 若 f 在 $x=b$ 的左侧无界, 则称 $x=b$ 是 $f(x)$ 的暇点或奇点.

(ii) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 有唯一暇点 $x=b$. 若对任意 $b'\in(a,b)$, $f(x)$ 在 $[a,b']$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积;

(iii) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有唯一暇点 $x=b$, 且内闭可积. 若极限

$$\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'} f(x)dx$$

存在(有限), 则称 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上广义可积, 称极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分(或暇积分), 并记之为 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'} f(x)dx.$$

(iv) 若极限 $\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'} f(x)dx$ 不存在, 则称广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不收敛或发散.

Example

例一: 证明广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛且 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

证明: 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 在区间 $[0,1)$ 上有唯一暇点 $x=1$, 且内闭可积. 进一步对任意 $b' \in (0,1)$,

$$\int_0^{b'} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int_0^{b'} d(2\sqrt{1-x}) = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^{b'}$$

$$= 2(1-\sqrt{1-b'}) \to 2, \quad b' \to 1^-.$$

这表明广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ 收敛且 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

例二

Example

例二: 广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ 发散. 因为对任意 $b' \in (0,1)$,

$$\int_0^{b'} \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x)\Big|_0^{b'}$$

$$= -\ln(1-b') \to +\infty, \quad b' \to 1^-.$$

例三: 设 $a < b$, 考虑广义积分 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, 其中 $p > 0$.

(i) 当 $p = 1$ 时, 积分发散. 因为当 $b' \to b^-$ 时,

$$\int_a^{b'} \frac{dx}{b-x} = \ln(b-a) - \ln(b-b') \to +\infty.$$

(ii) 当 $p \neq 1$ 时, 当 $b' \to b^-$ 时,

$$\int_a^{b'} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b'}$$

$$= \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(b-b')^{1-p}}{1-p} \to \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ +\infty, & p > 1. \end{cases}$$

综上, 积分当 $p < 1$ 收敛, 当 $p \geq 1$ 发散.

定义: (i) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上定义. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的右侧无界, 则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的一个暇点;

(ii) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有唯一暇点 $x=a$. 若对任意 $a'\in(a,b]$, $f(x)$ 在 $[a',b]$ 上可积, 则称 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上内闭可积.

(iii) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有唯一暇点 $x=a$, 且内闭可积. 若极限

$$\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^{b} f(x)dx$$

存在(有限), 称极限值为 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的广义积分(或暇积分), 并记之为 $\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^b f(x)dx.$$

(iv) 若极限 $\lim_{a'\to a^+}\int_{a'}^b f(x)dx$ 不存在，则称积分 $\int_a^b f(x)dx$ 不收敛或发散.

例一: 设 $p > 0$, 考虑广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 的收敛性.

解: 设 $p \neq 1$. 对任意 $a \in (0, 1)$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-p}(1 - a^{1-p}).$$

(i) 设 $0 < p < 1$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(1 - a^{1-p}) \to \frac{1}{1-p}, \quad a \to 0^+.$$

(ii) 设 $p > 1$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}(1 - a^{1-p}) \to +\infty, \quad a \to 0^+.$$

(iii) 当 $p = 1$,

$$\int_a^1 \frac{dx}{x} = -\ln a \to +\infty, \quad a \to 0^+.$$

综上，当 $0 < p < 1$ 时，广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 收敛，且 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$.

当 $p \geq 1$ 时，广义积分发散.

注：比较广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$：当 $p \leq 1$ 发散；当 $p > 1$ 收敛且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

例: 考虑广义积分 $J=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 的收敛性.

解: 显然 $x=0$ 是被积函数 $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ 的瑕点. 同时积分区间 $[0,+\infty)$ 无穷. 故将积分 J 分为两个部分 $J=J_1+J_2$, 其中

$$J_1=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}dx,\quad J_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}dx.$$

先考虑瑕积分 J_1. 对任意 $a\in(0,1)$,

$$\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}dx=\int_{\sqrt{a}}^1\frac{2udu}{u(1+u^2)}=2(\arctan 1-\arctan\sqrt{a})$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\arctan\sqrt{a}\to\frac{\pi}{2},\quad a\to 0^+.$$

例子续

因此暇积分 J_1 收敛. 再来考虑区间无穷积分 J_2. 对任意 $b>1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2udu}{u(1+u^2)} = 2\int_1^{\sqrt{b}} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2(\arctan\sqrt{b} - \arctan 1) \to 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad b \to +\infty.$$

故广义积分 J_2 收敛. 因此两类广义积分同时出现的积分 $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 收敛.

注: 如果两个广义积分 J_1 和 J_2 其中之一发散, 则称原广义积分 J 发散.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上内闭可积, 其中 $b=+\infty$, 或者 $b<+\infty$ 是 $f(x)$ 的唯一瑕点, 并且 $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b)$, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $F(b')=\int_a^{b'} f(x)dx$ 在 $[a,b)$ 上有上界.

Proof.

证明: 因 $f(x)\geq 0$, 故 $F(b')\uparrow \text{on } [a,b)$. 因此积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛即极限 $\lim_{b'\to b^-} F(b')$ 存在 $\Longleftrightarrow$ $F(b')$ 在 $[a,b)$ 上有上界. 定理得证. $\square$

Theorem

定理: 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b)$ 上内闭可积, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

(i) 若广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) 若广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 也发散.

证: 对任意 $b' \in [a, b)$ 记

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)dx, \quad G(b') = \int_a^{b'} g(x)dx.$$

由假设 $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b)$ 知 $F(b') \uparrow$, $G(b') \uparrow$ on $[a, b)$, 且 $F(b') \le G(b')$, $\forall b' \in [a, b)$.

(i) 若积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $G(b')$ 有上界, 从而 $F(b')$ 有上界, 故积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

(ii) 若积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $F(b')$ 无上界, 从而 $G(b')$ 无上界, 故积分 $\int_a^b g(x)dx$ 发散. 定理证毕. $\square$

Corollary

推论一: 设 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负, 且内闭可积. 若极限 $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$ 存在且 $\lambda>0$, 则

(i) 当 $p>1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $p\le 1$ 时, 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证明: (i) 情形 $p > 1$. 由假设知存在 $M > 0$, 使得当 $\forall x \geq M$,

$$0 \leq x^p f(x) \leq \lambda + 1, \quad \text{即} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\lambda + 1}{x^p}.$$

显然积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda+1}{x^p} dx$ 收敛, 由比较判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

(ii) 情形 $p \leq 1$. 由假设知存在 $N > 0$, 使得当 $\forall x \geq N$,

$$\frac{\lambda}{2} \leq x^p f(x), \quad \text{即} \quad \frac{\lambda}{2x^p} \leq f(x).$$

显然积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{2x^p} dx$ 发散, 由比较判别法知积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散. 推论得证. $\square$

Corollary

推论二: 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上有唯一暇点 $x = b < +\infty$, 非负, 且内闭可积. 若极限 $\lim_{x \to b^-}(b - x)^q f(x) = \mu$ 存在且 $\mu > 0$, 则

(i) 当 $q < 1$ 时, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $q \geq 1$ 时, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

证明方法基本同推论一. 细节略.

Example

例一：考虑广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2-1}$ 的收敛性.

解：由于

$$x^2\cdot\frac{x^2}{x^4+x^2-1}\to 1>0,\quad x\to+\infty,$$

故应用推论一 $(p=2>1)$ 知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+x^2-1}$ 收敛.

Example

例二：考虑广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 的收敛性.

解：由于

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$

$$\Rightarrow \quad (1-x)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} > 0, \quad x \to 1^-,$$

故应用推论二 $(q = \frac{1}{4} < 1)$ 知积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 收敛.

Theorem

定理: 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b)$ 上非负, 内闭可积, 其中 $b=+\infty$ 或 $b<+\infty$ 为瑕点. 假设 $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=C$,

(i) 若 $C>0$, 则两个广义积分 $\int_a^b f$ 和 $\int_a^b g$ 的收敛性相同, 即同时收敛或同时发散;

(ii) 若 $C=0$, 且广义积分 $\int_a^b g$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f$ 也收敛.

证明: 只证情形 $b = +\infty$.

(i) 由假设 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C > 0$ 知存在 $M > 0$, 使得 $\forall x \geq M$

$$\frac{C}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2C, \quad \text{即} \quad \frac{C}{2}g(x) < f(x) < 2Cg(x)$$

由此可见两个广义积分 $\int_a^{+\infty} f$ 和 $\int_a^{+\infty} g$ 有相同的收敛性.

(ii) 由假设 $C = 0$ 知存在 $N > 0$, 使得当 $x \geq N$ 时

$$0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} < 1, \quad \text{即} \quad 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

故由比较判别法知当 $\int_a^{+\infty} g$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f$ 也收敛. $\square$

广义积分的绝对收敛性与条件收敛性

Definition

定义: 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上内闭可积, $b = +\infty$ 或 $b < +\infty$ 是 $f(x)$ 的唯一暇点.

(i) 若广义积分 $\int_a^b |f|$ 收敛, 则称广义积分 $\int_a^b f$ 绝对收敛;

(ii) 若广义积分 $\int_a^b f$ 收敛, 但 $\int_a^b |f|$ 发散, 则称广义积分 $\int_a^b f$ 条件收敛.

Example

例一: 证明广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 绝对收敛.

证明: 因为 $\frac{|\sin x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$, 而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}dx$ 收敛, 由比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx$ 收敛. 于是广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 绝对收敛. 证毕. □

稍后将证明广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛.

Theorem

定理: (i) 设 $f(x)$ 于 $[a,b)$ 上内闭可积, $b<+\infty$ 是 $f(x)$ 的一个瑕点, 则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \forall b',b''\in(b-\delta,b).$$

(ii) 设 $f(x)$ 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon,\quad \forall b',b''\geq M.$$

证明

<u>证明</u>: (i) 记 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. 依定义广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 极限 $\lim_{b'\to b^-} F(b')$ 存在. 再根据函数极限的 Cauchy 准则知, 极限 $\lim_{b'\to b^-} F(b')$ 存在 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|F(b') - F(b'')| < \varepsilon$, $\forall b', b'' \in (b-\delta, b)$. 此即

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon, \quad \forall b', b'' \in (b-\delta, b).$$

结论 (i) 成立. 结论 (ii) 的证明类似. $\square$

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 于 $[a,b)$ 上内闭可积, $b=+\infty$ 或 b 是 $f(x)$ 的唯一瑕点. 若积分 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛, 即积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛, 则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

Proof.

证明: 只考虑 $b=+\infty$ 情形. 假设积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 那么由 Cauchy 收敛准则知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得 $\forall b''>b'\geq M$, $\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$. 故 $\left|\int_{b'}^{b''}f(x)dx\right|\leq\int_{b'}^{b''}|f(x)|dx<\varepsilon$, $\forall b''>b'\geq M$. 再次由 Cauchy 收敛准则知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 证毕. □

考虑广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的收敛性, 其中 $b = +\infty$ 或 b 是 $f(x)$ 的唯一瑕点.

Theorem

定理: 设 (i) $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上内闭可积, 且存在 $M > 0$, 使得 $|\int_a^{b'} f(x)dx| < M$, $\forall b' \in [a, b)$;

(ii) $g(x)$ 在 $[a, b)$ 上单调且 $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$,

则广义积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理稍后证明.

例: 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛.

证明: 要证积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛, 只需证 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 条件收敛. 注意 $x=0$ 不是暇点. 因为 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 令 $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x}$. 显然积分 $\int_1^b \sin x dx=\cos 1-\cos b$ 关于 $b\in[1,+\infty)$ 有界, 且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. 这表明 Dirichlet 判别法的两个条件均满足. 因此积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

以下证明积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ 发散. 由于 $\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x}$, $\forall x\geq 1$, 故只要证积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散即可. 将函数 $\frac{\sin^2 x}{x}$ 写作

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x}.$$

由此得

$$\frac{1}{x} = \frac{2\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{x}.$$

由 Dirichlet 判别法知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ 收敛. 因此如果积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}$ 收敛, 那么积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 也收敛. 这是显然是个矛盾. 因此积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散. 这就证明了积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 条件收敛. 证毕.

作业

课本习题5.7(pp.185-187): 8(1)(3)(4), 9(1)(2).

课本习题6.1(pp.193-194): 2(奇), 3(奇)