《微积分A1》第十四讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月30日

例二: 求常数 a, k, 使得极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos(x^2)}{x^8} \qquad (*)$$

存在, 并求出这个极限.

解: 由 Taylor 展式得

$$e^{ax^k}=1+ax^k+\frac{1}{2!}(ax^k)^2+\frac{1}{3!}(ax^k)^3+o(x^{3k}),$$

$$\cos\left(x^2\right)=1-\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{4!}x^8+o(x^8).$$

由此可见, 若极限(*)存在, 则必有 $k=4$, $a=-\frac{1}{2}$. 此时

例二续

$$e^{ax^k} - \cos(x^2) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^4\right)^2 - \frac{1}{4!}x^8 + o(x^8)$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^8 + o(x^8) = \frac{1}{12}x^8 + o(x^8).$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax^k} - \cos(x^2)}{x^8} = \frac{1}{12}.$$

解答完毕.

例三 (课本第107 页例4.3.11): 设 $f(x)$ 于 $[-1,1]$ 上三阶可导, 且 $f(1)=1$, $f(-1)=0$, $f'(0)=0$. 证明存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明: 考虑函数 $f(x)$ 的二阶 Maclaurin 展开, 并带 Lagrange 余项得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 为介于 0 和 x 之间的某个点. 按上述展式计算函数值 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 得

$$1 = f(1) = f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} f''(0) \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} f'''(\xi_1) \cdot 1^3,$$

$$0 = f(-1) = f(0) + f'(0) \cdot (-1) + \frac{1}{2} f''(0) \cdot (-1)^2$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(\xi_2) \cdot (-1)^3,$$

其中 $\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 \in (-1,0)$. 将上述两个式子相减得

$$1 = \frac{1}{6}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad 或 \quad \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = 3.$$

根据 Darboux 定理(导数的介值性)可知存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$. 解答完毕.

课本第109页习题4.3题12: 设 $f(x)$ 于某个开区间 J 上二阶可导, $[a,b]\subset J$, 且 $f'(a)=0$, $f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明: 将 $f(x)$ 分别在点 $x=a$ 和 $x=b$ 处作一阶 Taylor 展开, 带 Lagrange 余项得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,$$
$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,$$

其中 $\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$. 根据上述两个等式计算函数值 $f(\frac{a+b}{2})$ 得

例四续一

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + f'(a)(\frac{a+b}{2} - a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(\frac{a+b}{2} - a)^2,$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + f'(b)(\frac{a+b}{2} - b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(\frac{a+b}{2} - b)^2,$$

其中 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$, $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$. 将上述两个等式相减得

$$0 = f(b) - f(a) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2) - f''(\xi_1)]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad f(b) - f(a) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right] = \frac{4[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right| = \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

不妨设$|f''(\xi_1)| \geq |f''(\xi_2)|$, 则

$$|f''(\xi_1)| \geq \frac{1}{2}\Big[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|\Big]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right| = \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

命题得证.

Example

课本第93页例4.1.5：设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导．证明若 $f(a)=0=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

证明：考虑函数 $h(x)=f(x)e^{g(x)}$．显然 $h(a)=0=h(b)$．应用 Rolle 定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $h'(\xi)=0$．计算得

$$h'(x)=[f(x)e^{g(x)}]'=f'(x)e^{g(x)}+f(x)e^{g(x)}g'(x).$$

因此 $h'(\xi)=0$，当且仅当 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$．证毕.

Example

例: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导. 证明若 $f(a)=0=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$. 进一步证明函数 e^x-x^n (n 为正整数) 至多有三个不同的实根.

证: 在例一中取 $g(x)=-x$，即考虑函数 $f(x)e^{-x}$，可知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$. 第一个结论得证. 考虑 $f(x)=e^x-x^n$. 由于 $f'(x)-f(x)=e^x-nx^{n-1}-[e^x-x^n]$ $=x^{n-1}(x-n)$ 只有两个实根，故 $f(x)=e^x-x^n$ 至多有三个实零点. 因为 $f(x)$ 的每两个零点，对应函数 $f'(x)-f(x)$ 的一个零点. 证毕.

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 若对 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(减).

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(严格单调减) $\Longleftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$), 且在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零.

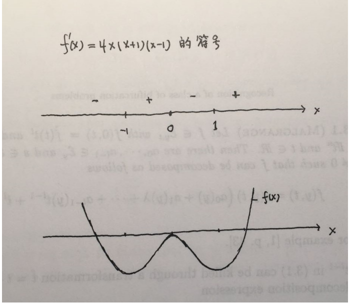
证明: 只证括号外结论. $\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增, 要证(i) $f'(x)\geq 0$, (ii) 在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零. 结论(i)显然成立. 证(ii). 反证. 假设存在区间 $(c,d)\subset(a,b)$, 使得 $f'(x)\equiv 0$, $\forall x\in(c,d)$. 于是 $f(x)$ 在区间 (c,d) 上为常数函数. 此与 $f(x)$ 的严格单调增性质相矛盾. 故结论(ii)成立.

证明续

$\Leftarrow$: 假设(i) $f'(x) \geq 0$, (ii) 在 $[a, b]$ 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为零, 要证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增. 由假设(i)知函数 $f(x)$ 单调增. 要证 $f(x)$ 还是严格单调增. 反证. 若不然则存在点 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 由于 $f(x)$ 是单调增的, 故 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. 这表明 $f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上恒为常数. 于是 $f'(x) \equiv 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$. 此与(ii)矛盾. 定理得证.

<u>例一</u>: 讨论函数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ 的单调区间.

<u>解</u>: 先求驻点. 令 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$. 解之得驻点 $x = 0$, $x = \pm 1$. 由此不难确定 $f'(x)$ 的符号, 以及函数的增减区间, 如图所示.



例二: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且导数 $f'(x)$ 严格单调增. 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 也严格单调增.

证明: 一方面

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{1}{x}\left[f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right].$$

另一方面

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi),$$

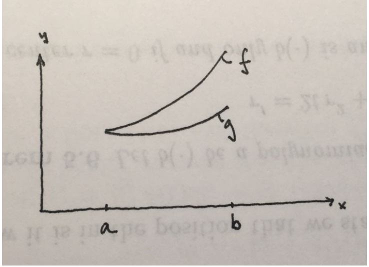
其中 $\xi \in (0,x)$. 由假设 $f'(x)$ 严格单调增, 故 $f'(\xi) < f'(x)$. 因此 $[\frac{f(x)}{x}]' > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$. 这就证明了 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 也严格单调增. 证毕.

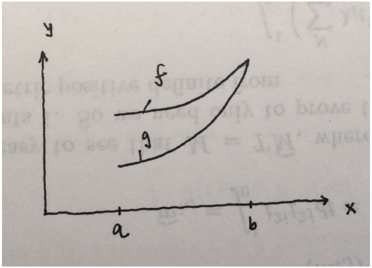
例三: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 证明

i) 若 $f(a)=g(a)$ 且 $f'(x)>g'(x)$, 则 $f(x)>g(x)$, $\forall x\in(a,b]$;

ii) 若 $f(b)=g(b)$ 且 $f'(x)<g'(x)$, 则 $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[a,b)$.

(解释: 起点相同, 速度快者领先; 终点相同, 速度慢者领先)





例三续

证明: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F'(x) = f'(x) - g'(x)$.

(i) 当 $f(a) = g(a)$ 且 $f'(x) > g'(x)$ 时, $F(a) = 0$, $F'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$. 这说明 $F(x)$ 严格单调增. 因此 $F(x) > F(a) = 0$, 此即 $f(x) > g(x)$, $\forall x \in (a, b]$.

(ii) 当 $f(b) = g(b)$ 且 $f'(x) < g'(x)$ 时, $F(b) = 0$, $F'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$. 这说明 $F(x)$ 严格单调减. 因此 $F(x) > F(b) = 0$, 此即 $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [a, b)$. 证毕.

例一: 证明 $e^x > x+1,\ \forall x \in (-\infty,+\infty),\ x \neq 0$.

证明: 记 $F(x) = e^x - x - 1$, 则 $F'(x) = e^x - 1$. 于是

(i) 在区间 $(0,+\infty)$ 上, $F'(x) > 0$. 从而 $F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增. 故 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $e^x > x+1,\ \forall x > 0$.

(ii) 在区间 $(-\infty,0)$ 上, $F'(x) < 0$. 从而 $F(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上严格单调减. 故 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $e^x > x+1,\ \forall x < 0$. 命题得证.

例二: 证明不等式 $\sin x < x$, $\forall x > 0$.

证明: 记 $F(x) = x - \sin x$, 则 $F(0) = 0$, $F'(x) = 1 - \cos x \geq 0$. 显然 $F'(x)$ 在任何区间上不恒为零. 根据定理可知函数 $F(x)$ 在整个实轴上严格单调增. 于是 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $\sin x < x$, $\forall x > 0$. 命题得证.

例三: 证明 $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

证明: 定义函数 $F(x) = \frac{\sin x}{x}$, 当 $x \neq 0$, $F(0) = 1$. 显然 $F(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且对 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0.$$

(回忆在证明 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 时, 证明了不等式 $x < \tan x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$) 这表明 $F(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上$\downarrow$严格. 故 $F(\frac{\pi}{2}) < F(x) < F(0)$, 此即

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{亦即} \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

证毕.

极值问题

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，在 $(a,b)\backslash\{x_0\}$ 上可导，$x_0\in(a,b)$.

(i) 若 $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，

且 $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，

则 x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点.

(ii) 若 $f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，

且 $f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，

则 x_0 是$f(x)$ 的严格极大值点.

证明: 只证结论(i). 结论(ii)的证明类似.

1) 由条件 $f'(x) < 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 知 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 严格单调减, 故 $f(x) > f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

2) 完全类似, 由条件 $f'(x) > 0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 知 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 严格单调增, 故 $f(x) > f(x_0),\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

综上 $f(x) > f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ x \neq x_0$. 这就证明了 x_0 是 $f(x)$ 的严格极小值点. 证毕.

Example

例一: 考虑函数 $f(x) = |x|$. 显然 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty, 0)$, 以及 $(0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) = -1 < 0$, $\forall x < 0$, $f'(x) = 1 > 0$, $\forall x > 0$. 根据定理知 $x = 0$ 是函数的极小点. 实际上还最小值点. 如图所示.

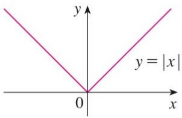


FIGURE 12
If $f(x) = |x|$, then $f(0) = 0$ is a minimum value, but $f'(0)$ does not exist.

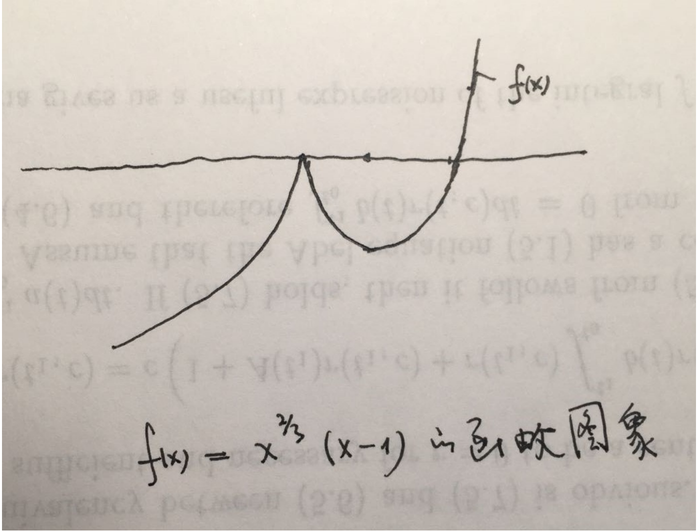
例二: 求函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的极值.

解: 对 $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}(5x-2).$$

于是函数有唯一驻点 $x = \frac{2}{5}$, 且当 $0 < x < \frac{2}{5}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{2}{5}$, $f'(x) > 0$. 因此驻点 $x = \frac{2}{5}$ 为极小点. 相应的极小值为 $f(\frac{2}{5}) = -\frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{2/3}$. 此外函数 $f(x)$ 有唯一一个不可微点 $x = 0$. 当 $x \in (0, \frac{2}{5})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$. 由此可见 $x = 0$ 是函数的极大值点. 相应的极大值为 $f(0) = 0$.

函数 $y = x^{\frac{2}{3}}(x-1)$ 的函数图像

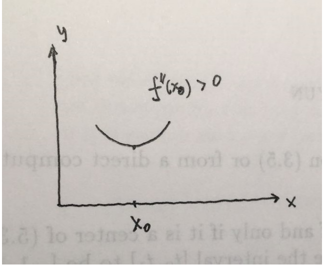


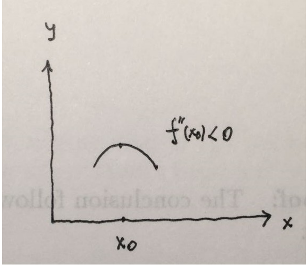
Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, x_0 是 f 的一个驻点, 即 $f'(x_0)=0$. 假设 $f''(x_0)$ 存在, 则

(i) 当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 为严格极小点;

(ii) 当 $f''(x_0)<0$ 时, x_0 为严格极大点.





证明: 只证情形(i). 情形(ii)的证明类似. 根据假设 $f''(x_0) > 0$ 可知

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

由极限的保号性质知存在 $\delta > 0$, 使得

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\}.$$

故 $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$; $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

再次根据上述定理可知 x_0 是严格极小点. 结论(i)得证. □

注: 当 $f''(x_0) = 0$ 时, 我们需要更高阶导数判断驻点 x_0 是否为极值点.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在(a,b) 上连续，若 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, 2\cdots, n$.

(i) 若 $n+1$ 是偶数，则 x_0 是极值点，并且当 $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ 时，x_0 是极小点，当 $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ 时，x_0 是极大点;

(ii) 若 $n+1$ 是奇数，则 x_0 非极值点.

证明: 考虑 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 $n+1$ 阶 Taylor 展式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + o(x - x_0)^{n+1}.$$

将上述展式写作

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \frac{o(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}} \right)(x - x_0)^{n+1}.$$

根据上式立刻就得到结论. 证毕. □

Example

例一：对于 $f(x) = x^3$, $x = 0$ 是驻点，且 $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 不是极值点.

Example

例二：对于 $g(x) = x^4$, $x = 0$ 是驻点，且 $g^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$, $g^{(4)}(0) = 24 > 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 是极小值点.

作业

课本习题4.1 (p.95): 13.

课本习题4.3 (pp. 107-109): 9, 10, 11.

课本习题4.4 (pp.114-115): 4(1)(3)(5)(7), 5(1)(3)(5)(7).