《微积分A1》第十六讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月06日

6. 证明不等式

$$4x\ln x \geq x^2 + 2x - 3, \quad \forall x \in (0,2).$$

<u>证明</u>: 令 $f(x) = 4x\ln x - x^2 - 2x + 3$. 注意 $f(1) = 0$. 因此无法利用 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内的单调性证明结论, 即证明不等式的常用方法, 单调性方法这里不能应用. 考虑证明不等式的另一个方法, 最值方法. 以下将证明函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,2)$ 内可以取得最小值, 并且最小值是零. 从而得到所要证明的不等式. 为此先求驻点. 简单计算得

证明题 6，续

$$f'(x) = 4\ln x + 2 - 2x, \quad f''(x) = \frac{4}{x} - 2.$$

可见 $f''(x) > 0$, $\forall x \in (0,2)$. 故 $f'(x)$ 在 $(0,2)$ 上严格单调升.

由于 $f'(1) = 0$, 故

$$\forall x \in (0,1), \quad f'(x) < f'(1) = 0, \quad f(x) \downarrow \text{严格},$$

$$\forall x \in (1,2), \quad f'(x) > f'(1) = 0, \quad f(x) \uparrow \text{严格}.$$

因此 $f(x)$ 于点 $x = 1$ 处取得在 $(0,2)$ 内的最小值，且最小值为 $f(1) = 0$. 于是 $f(x) \geq 0$, 即 $4x\ln x \geq x^2 + 2x - 3$, $\forall x \in (0,2)$. 命题得证. 证毕. $\square$

证明题 7

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 上二阶可导，且 $f(a)=0=f(b)$，$f'_{+}(a)f'_{-}(b)>0$，证明下列结论：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)+2f'(\xi)+f(\xi)=0$;

(2) 存在 $\theta\in(a,b)$，使得 $f''(\theta)-2f'(\theta)+f(\theta)=0$;

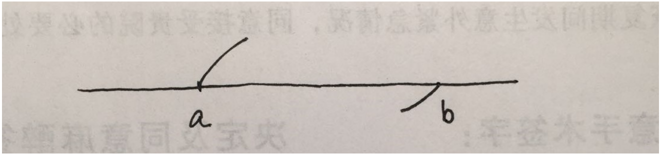
(3) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f'(\eta)$;

(4) 存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

注：这是课本第95页第14题

<u>证</u>：由假设 $f'_+(a)f'_-(b)>0$ 可知 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 同号. 不妨设 $f'_+(a)>0$ 且 $f'_-(b)>0$. 再根据假设 $f(a)=0=f(b)$，可知存在 $\delta>0$，使得

$$f(x)>f(a)=0,\quad \forall x\in(a,a+\delta),$$
$$f(x)<f(b)=0,\quad \forall x\in(b-\delta,b).$$



由此可见 $f(x)$ 至少有一个零点 $x_0\in(a,b)$.

于是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上至少存在三个零点 a, x_0, b. 以下来证明题目中的四个结论.

证(1). 考虑 $F(x) = e^x f(x)$. 因 $F(x)$ 和 $f(x)$ 有相同零点，即至少有三个零点 a, x_0, b. 由 Rolle 定理知 $F'(x) = e^x[f'(x) + f(x)]$ 在 (a,b) 上至少有两个零点，即 $f'(x) + f(x)$ 在 (a,b) 上至少有两个零点(这个结论稍后要用到)，进而知二阶导数 $F''(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点. 简单计算知

$$F''(x) = e^x\Big[f''(x) + 2f'(x) + f(x)\Big].$$

因此结论(1)成立.

证(2). 考虑函数 $G(x) = e^{-x}f(x)$. 与函数 $F(x)$ 类似，函数 $G(x)$ 的二阶导数 $G''(x)$ 在 (a, b) 上至少有一个零点. 简单计算知

$$G''(x) = e^{x}\Big[f''(x) - 2f'(x) + f(x)\Big].$$

因此结论(2)成立.

证(3). 考虑 $H(x) = e^{-x}f'(x)$. 由于 $f'(x)$在 (a, b) 上至少存在两个零点，从而 $H(x)$ 也是这样. 故 $H'(x) = e^{-x}[f''(x) - f'(x)]$ 在 (a, b) 上至少存在一个零点. 因此结论(3)成立.

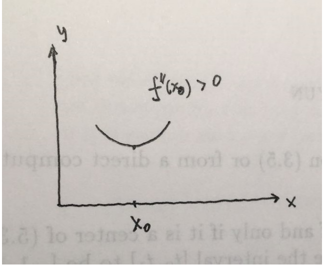
证(4). 考虑 $J(x)=e^{-x}[f'(x)+f(x)]$. 在结论(1)的证明过程中, 已证 $f'(x)+f(x)$, 从而 $J(x)$ 在 (a,b) 上至少存在两个零点. 因此 $J'(x)=e^{-x}[f''(x)-f(x)]$ 在 (a,b) 上至少存在一个零点. 因此结论(4)成立. 证毕.

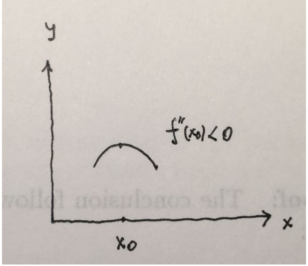
Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, x_0 是 f 的一个驻点, 即 $f'(x_0)=0$. 假设 $f''(x_0)$ 存在, 则

(i) 当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 为严格极小点;

(ii) 当 $f''(x_0)<0$ 时, x_0 为严格极大点.





定理证明

证明: 只证情形(i). (ii)的证明类似. 根据假设 $f''(x_0) > 0$ 可知

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

由极限的保号性质知存在 $\delta > 0$, 使得

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

故

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0),$$
$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

根据之前的定理可知 x_0 是严格极小点. 结论(i)得证. □

注: 当 $f''(x_0) = 0$ 时, 我们需要更高阶导数判断驻点 x_0 是否为极值点.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 若 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, 2 \cdots, n$.

(i) 若 $n+1$ 是偶数, 则 x_0 是极值点, 并且当 $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ 时, x_0 是极小点, 当 $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ 时, x_0 是极大点;

(ii) 若 $n+1$ 是奇数, 则 x_0 非极值点.

证明: 考虑 $f(x)$ 在 x_0 处带 Peano 余项的 $n+1$ 阶 Taylor 展式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o(x-x_0)^{n+1}.$$

将上述展式写作

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \frac{o(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}\right)(x-x_0)^{n+1}.$$

根据上式立刻就得到结论. 证毕. □

Example

例一: 对于 $f(x) = x^3$, $x = 0$ 是驻点, 且 $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 不是极值点.

Example

例二: 对于 $g(x) = x^4$, $x = 0$ 是驻点, 且 $g^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$, $g^{(4)}(0) = 24 > 0$. 根据定理可知 $x = 0$ 是极小值点.

求最大值和最小值步骤

考虑如何求闭区间上连续函数的最值点以及最值. 假设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 除去由有限个点外处处可导, 则可用按如下步骤求出 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最值.

一. 求 f 的驻点. 即求解 $f'(x)=0$ 得驻点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,

二. 求 $f(x)$ 的不可导点 $\mu_1,\cdots,\mu_n$,

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M=\max\{f(a),f(b),f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_m),f(\mu_1),\cdots,f(\mu_n)\},$$

$$m=\min\{f(a),f(b),f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_m),f(\mu_1),\cdots,f(\mu_n)\}.$$

例一: 求函数 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$ 在 $[-1,3]$ 的最大最小值.

解: 先求驻点. 令 $f'(x)=0$, 即

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)=0.$$

由此求得三个驻点 $x=0,1,2$. 显然函数处处可导, 无不可微点. 因此产生最值在集合

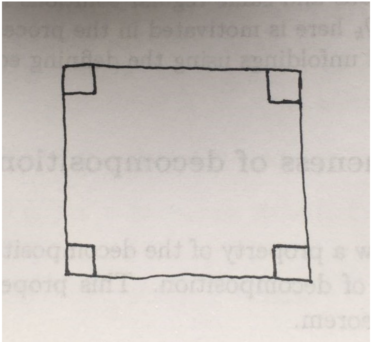
$$\{f(-1),f(3),f(0),f(1),f(2)\}=\{9,9,0,1,0\}$$

中产生. 于是所求的最大值 $M=9$, 最小值 $m=0$.

例二: 证明函数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ 在整个实轴上可取得最大值和最小值, 并求出函数的最大值和最小值.

证明: 由于 $f(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 且 $f(1) = e^{-2} > 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上必可取得最大值. 显然 $f(x)$ 是奇函数, 故可知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上必可取得最小值. 因此 $f(x)$ 在整个实轴上必可取得最大值和最小值. 往下求之. 令 $f'(x) = e^{-2x^2} + xe^{-2x^2}(-4x) = e^{-2x^2}(1-4x^2) = 0$, 得两个驻点 $x = \frac{\pm 1}{2}$. 故所求最大值为 $f(1/2) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, 最小值为 $f(-1/2) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$. 解答完毕.

例三: 给定边长为 $a > 0$ 的正方形. 从正方形的四个角截去大小相同的小正方形, 做成一个无盖的长方体. 如图所示. 问小正方形的边长为何值时, 所得长方体的体积最大?



解: 设小正方形的边长为 x. 依题意可知 $x \in [0, \frac{a}{2}]$. 于是所得长方体的体积为 $v(x) = x(a-2x)^2$. 为求 $v(x)$ 的最大值, 先求其驻点. 令 $v'(x) = 0$, 即

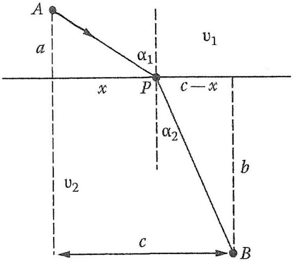
$$v'(x) = (a-2x)^2 + 2x(a-2x)(-2) = (a-2x)(a-6x).$$

由此得驻点 $x = \frac{a}{2}$ 和 $x = \frac{a}{6}$. 于是所求最大值必在如下数集中

$$\{v(0), v(a/2), v(a/2), v(a/6)\} = \{0, 0, 0, \frac{2a^3}{27}\}.$$

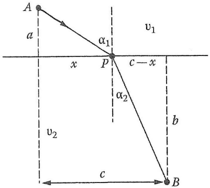
这表明, 当小正方形的边长取为 $\frac{a}{6}$ 时, 所得体积 $v(x)$ 为最大. 其最大体积为 $\frac{2a^3}{27}$. 解答完毕.

Snell's law of reflection (Snell 光的折射定理): 假设光线在两种不同的介质里传播，其传播速度分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$，入射角度(即光线与垂直方向的夹角)分别为 α_1 和 α_2，如图所示，



则 $\dfrac{\sin\alpha_1}{\mathbf{v}_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\mathbf{v}_2}.$

证明：假设点 A 位于上层介质，点 B 位于下层介质，光线从点 A 出发，沿直线传播到点 P，然后再沿直线传播到点 B．如图．



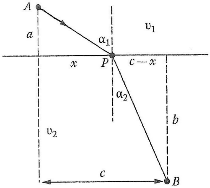
于是光线由点 A 到 B 的传播时间为

$$T = T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2},$$

由费马最少时间原理(公理)，光的真实路径使得 $T'(x) = 0$，即

Snell 定理的证明，续一

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0.$$



由图可知 $\sin\alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$，$\sin\alpha_2 = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$. 于是我们得到Snell 光的折射定理

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}.$$

Snell 定理的证明，续二

对 $T'(x)$ 再次求导，并经化简即得

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2[b^2+(c-x)^2]^{3/2}} > 0.$$

故 $T'(x)$ 严格↑. 由 $T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$ 知

$$T'(0) = -\frac{c}{v_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0, \quad T'(c) = \frac{c}{v_1\sqrt{a^2+c^2}} > 0$$

故方程 $T'(x)=0$ 有唯一解 $x_0 \in (0,c)$，即函数 $T(x)$ 有唯一驻点 x_0. 由于在驻点 x_0 的左侧，$T'(x)<0$，即 $T(x)$ 严格单调下降，而在驻点 x_0 的右侧，$T'(x)>0$，即 $T(x)$ 严格单调上升，故驻点 x_0 是区间 $[0,c]$ 上的最小值点.

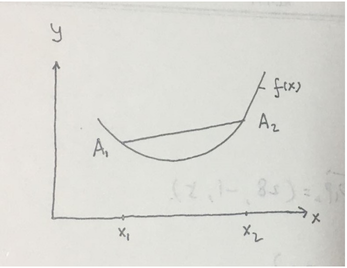
Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上定义. 若对曲线 $\Gamma: y=f(x)$ 上的任意两个点 $A_1=(x_1,y_1), A_2=(x_2,y_2)\in\Gamma$, 曲线段 A_1A_2 位于直线段 $\overline{A_1A_2}$ 的下方(上方), 即

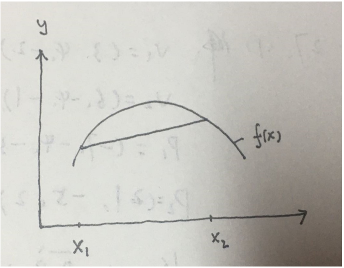
$$f(x)\le(\ge)f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad \forall x\in(x_1,x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 下凸(上凸). 如果上述不等式严格成立, 则称函数 $f(x)$ 严格下凸(严格上凸).

注: 下凸 (convex downward) 也称为上凹 (concave upward), 上凸 (convex upward) 也称为下凹 concave downward.



下凸 **convex downward**



上凸 **convex upward**

等价定义

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上定义, 若对于 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $\forall \lambda \in (0,1)$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le (\ge) \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 于区间 (a,b) 下凸(上凸). 若不等式严格成立 $(x_1 \ne x_2)$, 则称 $f(x)$ 为严格下凸的(严格上凸的).

显然, $f(x)$ 下凸(上凸), 当且仅当 $-f(x)$ 上凸(下凸). 例如抛物线 $y = x^2$ 下凸, 而抛物线 $y = -x^2$ 上凸.

证明: 只证明下凸情形. 要证两个定义等价, 即要证明对于

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$,

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \ \forall x \in (x_1, x_2), \ (*)$$

$$\iff f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \ (**)$$

其中 $\forall \lambda \in (0, 1)$.

$\Rightarrow$: 设式(*) 成立. 对 $\forall \lambda \in (0, 1)$, 记 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 则 $x = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$. 于是

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

于是根据不等式(*) 得

$$f\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)\le f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

$$=f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}[f(x_2)-f(x_1)]$$

$$=f(x_1)+(1-\lambda)[f(x_2)-f(x_1)]$$

$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

即不等式(**) 成立.

$\Leftarrow$: 假设式(**) 成立. 对任意 $x\in(x_1,x_2)$, 则 x 可表为

$$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\quad \lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\quad 1-\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

等价性证明，续二

由式(**) 得

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

$$\le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$= f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

即不等式(*) 成立. 等价性得证.

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸 $\Longleftrightarrow$ f 满足 Jensen 不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i), \quad (*)$$

$$\forall n \ge 2,\ \forall x_1,\cdots,x_n \in (a,b),\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n = 1,\ \lambda_i \ge 0.$$

显然关于上凸的平行结论同样成立, 即函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上凸, 当且仅当不等式 (*) 中不等号改为 $\ge$ 成立.

证明: $\Leftarrow$: 当 $n = 2$ 时, Jensen 不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

这正是下凸的等价定义. 结论成立.

$\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 下凸, 要证 Jensen 不等式成立. 当 $n = 2$ 时, Jensen 不等式就是下凸的等价定义, 结论成立. 设当 $n = k$ 时, Jensen 不等式成立. 考虑 $n = k + 1$ 情形. 对于任意 $k + 1$ 个点 $x_1, \cdots, x_k, x_{k+1} \in (a, b)$, 以及任意 $k + 1$ 个非负实数 $\lambda_1, \cdots,$ $\lambda_k, \lambda_{k+1} \geq 0$, 且 $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, 由于

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \lambda_{k+1} x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}},$$

因此

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_{k+1} x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

$$\leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-\lambda_{k+1}) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}}\right)$$

$$\leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1-\lambda_{k+1}) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} f(x_i)\right)$$

$= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i)$, 即 Jensen 当 $n = k+1$ 是成立. 定理得证.

凸性的充要条件

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 下凸

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 < x_3$,

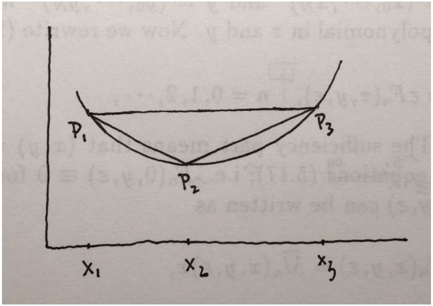
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}, \qquad (*)$$

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$, $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \qquad (**)$$

注: 根据如下证明可知, $f(x)$ 在 (a,b) 严格下凸, 当且仅当不等式(*) 中的不等号严格成立, 当且仅当不等式(**) 中的两个不等号均严格成立.

几何意义



条件(*) 的几何意义：对于曲线上的任意三个点 P_1, P_2, P_3，

$\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $\leq$ $\overline{P_2P_3}$ 的斜率；

条件(**) 的几何意义：对于曲线上的任意三个点 P_1, P_2, P_3，

$\overline{P_1P_2}$ 的斜率 $\leq$ $\overline{P_1P_3}$ 的斜率 $\leq$ $\overline{P_2P_3}$ 的斜率.

定理证明

先证条件(*) $\Leftrightarrow$ (**). $\Rightarrow$: 回忆分数不等式: 若 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, 其中 $b, d > 0$, 则 $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$. 因此当条件 (*) 成立时, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_1 + x_3 - x_2} \\ &\leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\end{aligned}$$

即 $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

故条件(**) 成立. $\Leftarrow$: 显然成立.

再证 $f(x)$ 下凸 $\Leftrightarrow$ 条件(*). 条件(*) 成立, 即

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_3-x_2)[f(x_2)-f(x_1)] \leq (x_2-x_1)[f(x_3)-f(x_2)]$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_3-x_2)f(x_2)-(x_3-x_2)f(x_1) \leq (x_2-x_1)f(x_3)-(x_2-x_1)f(x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_3-x_2)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_2) \leq (x_2-x_1)f(x_3)+(x_3-x_2)f(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_3 - x_1)f(x_2) \le (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3).$$

注意 $x_2 \in (x_1, x_3)$ 是任意的. 记 x_2 为 x, 记

$$\lambda = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1}, \quad 1 - \lambda = 1 - \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1},$$

则有对任意 $x_1, x_3 \in (a, b)$,

$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3), \quad \forall x \in (x_1, x_3).$$

此即 $f(x)$ 在 (a, b) 下凸. 证毕.

定理: 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上下凸(严格下凸) $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ 单调增(严格单调增).

证: 只证括号外情形. $\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 下凸. 要证 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, $f'(x_1) \le f'(x_2)$. 对 $\forall x \in (x_1, x_2)$, 由下凸性质知

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

于上式分别令 $x \to x_1^+$, $x \to x_2^-$ 得

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2).$$

由此得 $f'(x_1) \le f'(x_2)$, 即导数 $f'(x)$ 单调增.

$\Leftarrow$: 假设 $f'(x)$ 单调增，要证 f 下凸．对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$，且 $x_1 < x_2 < x_3$，两次应用 Lagrange 中值定理知

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x_2),$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_2, x_3).$$

由 $f'(x)$ 的单调增性质知 $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$．于是

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

这表明函数 f 下凸．证毕． $\square$

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上二阶可导, 则

(i) f 下凸 $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b)$;

(ii) f 严格下凸 $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (a,b)$, 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 的任何子区间上不恒为零.

证明: 利用上述定理, 以及严格单调增函数的充要条件即可得到结论. 细节略.

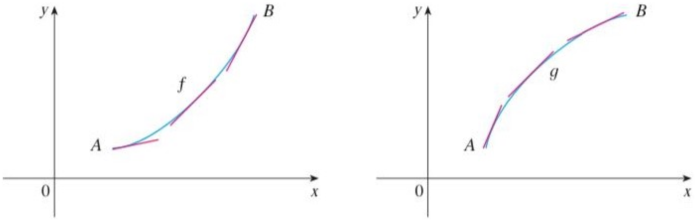
Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 下凸 $\iff \forall x_0 \in (a,b)$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $\forall x \in [a,b]$. (*)

不等式(*)的几何意义是, 曲线位于任意点的切线之上.

定理证明留作习题(课本第120页习题4.5习题9).

切线判据图示



(a) Concave upward (b) Concave downward

例: 考虑旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ 的凸性，其中 $\theta \in (0, 2\pi)$, $a > 0$.

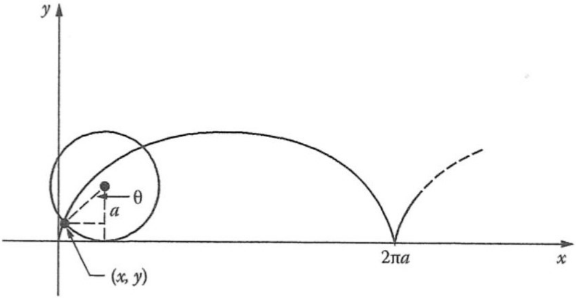


FIGURE 11

解: 设旋轮线是函数 $y=f(x)$ 的函数曲线，已求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$=\left(\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}\right)\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta-1}{a(1-\cos\theta)^3}=\frac{-1}{a(1-\cos\theta)^2}<0,\quad\forall\theta\in(0,2\pi).$$

因此旋轮线是严格上凸的. 解答完毕.

注: 也可以直接由一阶导数看出曲线是上凸的. 因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

由于 $\tan\frac{\theta}{2}$ 关于 θ 是严格单调增的, 且 $\theta=\theta(x)$ 也是严格单调增的, 其中函数 $\theta(x)$ 是 $x=a(\theta-\sin\theta)$ 的反函数, 故一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 关于 x 是严格单调下降的. 因此曲线严格上凸.

作业

课本习题4.4 (pp.114-115): 6, 9.

课本第4章总复习题(pp.124-125): 6, 7, 8, 9.

注: 题8可补充假设 $0 \leq a < b$