《微积分A1》第十二讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月23日

Theorem

定理: 假设 (i) $f(x)$, $g(x)$ 在开区间 $(a, a+h)$ 上可导,

(ii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, a+h)$,

(iii) $\lim_{x \to a^+} |g(x)| = +\infty$,

(iv) 极限 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 记作 A, 允许 $A = +\infty$ 或 $-\infty$, 则 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Example

例: 求 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln x}$.

解: 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 考虑应用 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则.

$$\frac{[\ln\sin 2x]'}{[\ln x]'}=\frac{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{\frac{1}{x}}=\cos 2x\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\to 1,$$

当 $x\to 0^+$. 因此 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln x}=1$. 解答完毕.

Theorem

定理: 设 (i) 函数 f, g 在区间 $(a, +\infty)$ 上可导;

(ii) $f(x) \to 0$ 且 $g(x) \to 0$, $x \to +\infty$;

(iii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x > a$;

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 允许 $A = +\infty$ 或 $A = -\infty$,

则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Proof.

证明大意: 令 $u = \frac{1}{x}$, $\hat{f}(u) = f(\frac{1}{u})$, $\hat{g}(u) = g(\frac{1}{u})$, $u \in (0, \frac{1}{a})$. 这里不妨设 $a > 0$. 于是 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to0^+} \frac{\hat{f}(u)}{\hat{g}(u)}$. 对后一极限应用有限处的 L'Hospital 法则即可. $\square$

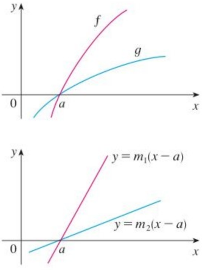
例: 求极限 $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$.

解: 将极限函数写作 $\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. 考虑导数的比值

$$\frac{[\frac{\pi}{2}-\arctan x]'}{[\frac{1}{x}]'}=\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{x^2}{1+x^2}\to 1,\quad x\to+\infty.$$

根据上述定理知极限 $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)=1$.

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a-h, a+h)$ 上连续可微, 且 $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, 则 $f(x)=m_1(x-a)+o(x-a)$, $g(x)=m_2(x-a)+o(x-a)$. 如图所示.



L'Hospital 法则为什么成立，续

于是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{m_1(x-a)+o(x-a)}{m_2(x-a)+o(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{m_1+\frac{o(x-a)}{x-a}}{m_2+\frac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{m_1}{m_2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a-h, a+h)$ 上连续可微，且 $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

一个特别例子

例: 设 $a>0$，求极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}.$$

解:

$$\frac{[\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}]'}{[a-\sqrt[4]{ax^3}]'}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2a^3x-x^4)^{-\frac{1}{2}}(2a^3-4x^3)-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\to\frac{\frac{1}{2}(a^4)^{-\frac{1}{2}}(-2a^3)-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}}=-\frac{4}{3}\left(-a-\frac{1}{3}a\right)$$

$$=\frac{16a}{9},\quad x\to a.\quad \text{故所求极限为}\ \frac{16a}{9}.$$

例子为何特别?

1696 年 L'Hospital 出版了他的微积分教科书 Analyse des Infiniment Petits (无穷小分析). 在这本书中, L'Hospital 应用这一法则计算极限的第一个例子就是上述例子. 这本教科书封面如图所示.

例: 当 $x \to +\infty$ 时, 可依照无穷大的量级, 由小到大将如下函数(无穷大量) 排列为 $\ln x$, x^a, e^x, x^x, 即后一个函数是前一个函数的高阶无穷大, 其中 $a > 0$. 证明如下.

$$\text{(i)}\qquad \lim \frac{\ln x}{x^a} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim \frac{1}{ax^a} = 0;$$

$$\text{(ii)}\qquad \lim \frac{x^a}{e^x} = \lim \frac{ax^{a-1}}{e^x}$$

$$= a(a-1)\cdots(a-n+1)\lim \frac{x^{a-n}}{e^x} = 0,$$

这里假设 $n-1 \leq a < n$.

$$\text{(iii)}\qquad \lim \frac{e^x}{x^x} = \lim e^{x - x\ln x} = \lim e^{x(1-\ln x)} = 0.$$

例一：考虑 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)$.

解：这是 $\infty-\infty$ 型的极限. 将其转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限.

$$\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}=\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

上式最右边的分式是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 故可以使用 L'Hospital 法则. 但为了简化计算，可按如下方式将分母中的因子 $\sin x$ 用 x 替换.

$$\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}.$$

以下用 L'Hospital 法则求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$.

例一，续

$$\frac{[\sin x - x\cos x]'}{[x^3]'} = \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \frac{x\sin x}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\sin x}{x} \to \frac{1}{3}, \quad x \to 0.$$

因此极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x}\right) = \frac{1}{3}$. 解答完毕.

例二: 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

解: 这是 0^0 型极限. 将 x^x 写作 $x^x = e^{x\ln x}$. 再将 $x\ln x$ 写作 $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 可用 L'Hopital 法则求其极限.

$$\frac{[\ln x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -x \to 0, \quad x \to 0^+.$$

因此极限

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

例二续

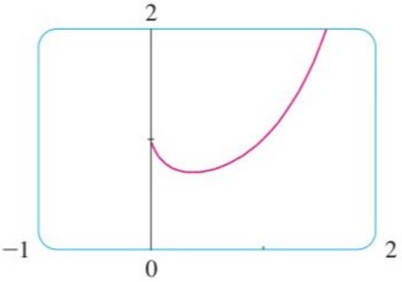
另解: 也可不用 L'Hospital 法则, 直接求极限 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

$$x\ln x = \frac{-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln y}{y} \to 0, \quad y \to +\infty,$$

其中 $y = \frac{1}{x}$. 因此原极限为 $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

函数 x^x 的图像

The graph of the function $y = x^x$, $x > 0$, is shown in Figure 7. Notice that although 0^0 is not defined, the values of the function approach 1 as $x \to 0^+$. This confirms the result of Example 10.



例三: 求极限 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解: 这是$\infty-\infty$ 型极限. 转化为$\frac{0}{0}$ 型之后, 用L'Hospital 法则求极限.

$$\lim\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$=\lim\frac{[x\ln x-x+1]'}{[(x-1)\ln x]'}=\lim\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$

$$=\lim\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}=\lim\frac{[x\ln x]'}{[x-1+x\ln x]'}$$

$$=\lim\frac{\ln x+1}{1+1+\ln x}=\frac{1}{2}.$$

例四: 求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

解: 这是 ∞^0 型极限. 先做变换 $y=\frac{\pi}{2}-x$, 则当 $x\to\frac{\pi}{2}^-$ 时, $y\to 0^+$. 于是

$$(\tan x)^{\frac{\pi}{2}-x}=\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^y=(\cot y)^y=\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y$$

令 $z=\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^y$, 则

$$\lim\ln z=\lim y(\ln\cos y-\ln\sin y)=\lim\frac{\ln\cos y-\ln\sin y}{\frac{1}{y}}$$

例四续

$$= \lim \frac{\frac{-\sin y}{\cos y} - \frac{\cos y}{\sin y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim \frac{y^2}{\sin y \cos y} = 0.$$

因此极限

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{\cos y}{\sin y} \right)^y = \lim_{y \to 0^+} e^{\ln z} \to e^0 = 1.$$

解答完毕.

例五

Example

例五: 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, $\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=A$,

证明 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明:

$$\lim f(x)=\lim\frac{e^xf(x)}{e^x}=\lim\frac{e^x[f'(x)+f(x)]}{e^x}$$

$$=\lim[f'(x)+f(x)]=A.$$

由此得 $f'(x)=[f'(x)+f(x)]-f(x)\to A-A=0$. 解答完毕.

Example

例六：设 $\varepsilon > 0$，求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x$

解：

$$\lim x^\varepsilon \ln x = \lim \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = \lim \frac{x^\varepsilon}{-\varepsilon} = 0.$$

注：上述极限 $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0$ 可与极限 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ 相比较．粗略地说，对于任意 $\varepsilon > 0$，

(i) 当 $x \to +\infty$，$\ln x$ 是 x^ε 的低阶无穷大；

(ii) 当 $x \to 0^+$，$\ln x$ 是 $\frac{1}{x^\varepsilon}$ 的低阶无穷大．

例七：求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：记 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，则

$$\lim \ln y=\lim\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim\frac{\ln|\sin x|-\ln|x|}{x^2}$$

$$=\lim\frac{[\ln|\sin x|-\ln|x|]'}{[x^2]'}=\lim\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim\frac{x}{2\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim\frac{[x\cos x-\sin x]'}{[x^3]'}=\frac{1}{2}\lim\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

因此原极限为 $-1/6$.

慎用 L'Hospital 法则！

一. L'Hospital 法则不能用于非不定式极限

例: 极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=\frac{1}{2}$. 这是正常极限, 非不定式情形. 若用 L'Hospital 法则, 则得到错误的结论

$$\frac{[x]'}{[1+x]'}=\frac{1}{1}\to 1,\quad x\to 1.$$

二. 使用 L'Hospital 法则可能出现死循环. 例如

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$=\lim\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\quad \text{死循环出现!}$$

实际上无需使用L'Hospital 法则就可求出极限为1.

三. 极限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $\not\Rightarrow$ 极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

例: 极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 存在且等于1. 但

$$\frac{[x+\sin x]'}{[x-\sin x]'}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$ 极限不存在, $x\to+\infty$.

导数的介值性质

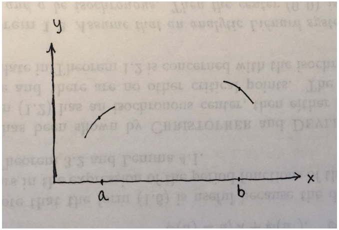
Theorem

定理 [Darboux, 1842-1917]: 设 $f(x)$ 在开区间 J 上可导，设 $a, b \in J$, $a < b$. 若 $f'(a) \neq f'(b)$, 则对任意介于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的值 γ, 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \gamma$.

注: 如果导函数 $f'(x)$ 在区间 J 上连续，那么根据连续函数的介值性立刻得到定理的结论. Darboux 定理表明，即使导数 $f'(x)$ 不连续，$f'(x)$ 仍然具有介值性. 根据 Darboux 定理可知，不存在可导函数，其导数为 Dirichlet 函数 $D(x)$. 因为函数 $D(x)$ 不具有介值性.

证明. 情形一: $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 异号, 且 $\gamma = 0$. 不妨设 $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. 要证存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = 0$. 此时可断言存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(x) > f(a), \quad \forall x \in (a, a+\delta),$$
$$f(x) > f(b), \quad \forall x \in (b-\delta, b).$$



证明续一

理由如下. 由于

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0,$$

及极限的保号性知存在 $\delta_1 > 0$, 使得对于 $\forall x \in (a, a + \delta_1)$, $f(x) > f(a)$. 同理存在 $\delta_2 > 0$, 使得对于 $\forall x \in (b - \delta_2, b)$, $f(x) > f(b)$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则断言成立. 因此函数 $f(x)$ 必在区间 $[a, b]$ 内部取得最大值, 即 f 在某点 $c \in (a, b)$ 取得最大值. 根据 Fermat 定理知 $f'(c) = 0$.

证明续二

情形二. 一般情形 $f'(a) \neq f'(b)$, 且 γ 是任意一个介于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的一个数. 令 $g(x) = f(x) - \gamma x$, 则 $g'(a) = f'(a) - \gamma$ 和 $g'(b) = f'(b) - \gamma$ 异号, 由情形一的结论知存在 $c \in (a, b)$, 使得 $g'(c) = 0$. 此即 $f'(c) = \gamma$. 定理得证.

Theorem

<u>定理</u>: (i) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，除点 $x_0 \in (a,b)$ 外处处可导. 若极限 $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，记作 A，则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且导数 $f'(x_0) = A$.

(ii) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上处处可导，则导函数 $f'(x)$ 在开区间 (a,b) 上不存在第一类间断点. 具体说来，对于 $\forall x_0 \in (a,b)$，若右极限 $f'(x_0^+)$ 存在，则 $f'(x_0^+) = f'(x_0)$，即导数 $f'(x)$ 在 x_0 处右连续；若左极限 $f'(x_0^-)$ 存在，则 $f'(x_0^-) = f'(x_0)$，即导数 $f'(x)$ 在 x_0 处左连续.

参见课本第95页习题4.2题15.

左右导数 vs 导数的左右极限

(i) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的

$$\text{左导数}\quad f'_-(x_0) \triangleq \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\text{右导数}\quad f'_+(x_0) \triangleq \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(ii) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 处处可导，可能除了一点 $x_0 \in (a,b)$，即函数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 处处有定义，可能除了点 x_0，那么函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的左右极限定义为

$$f'(x_0^-) \triangleq \lim_{x\to x_0^-} f'(x), \qquad f'(x_0^+) \triangleq \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

注: 上述定理再次说明, 并不是任意一个函数都可以是某个函数的导数. 例如开区间 $(-1,1)$ 上的符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$, 就不可能是导函数. 因为函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在点 $x=0$ 有第一类间断, 即跳跃间断.

证(i): 任意给定 $x \in (a, x_0)$, 在区间 $[x, x_0]$ 对函数 f 应用 Lagrange 中值定理得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x, x_0).$$

于上式令 $x \to x_0^-$, 由假设极限 $\lim_{x \to x_0} f'(x) = A$ 存在可知, $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 存在且 $f'_-(x_0) = A$. 同理可证, $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且 $f'_+(x_0) = A$. 因此 $f(x)$ 在点 x_0 处的可导, 且 $f'(x_0) = A$.

证(ii). 假设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处可导, 要证导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 无第一类间断点.

反证. 假设 $x_0 \in (a,b)$ 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点, 即极限 $f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ 和 $f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ 均存在. 一方面根据 Lagrange 中值定理知

$$\text{当 } x \to x_0^-, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \to f'(x_0^-),$$

$$\text{当 } x \to x_0^+, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\eta) \to f'(x_0^+).$$

另一方面 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 故

$$\text{当 } x \to x_0, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0).$$

这表明 $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$, 即 $f'(x)$ 在点 x_0 处连续. 矛盾. 证毕.

例: 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & 0 < |x| < 1, \\ e, & x = 0, \end{cases}$$

对函数 $f(x)$ 验证上述定理结论(i).

解: 我们先证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并计算出导数 $f'(0)$.

然后计算出极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$. 看看极限是否为 $f'(0)$.

一. 按定义证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并计算处导数 $f'(0)$.

对 $x \neq 0$, 考虑

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

例子续一

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 以下两次用使用 L'Hospital 法则求这个极限.

$$\frac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'}{[x]'}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

显然极限 $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e$. 考虑第二个因子的极限, 并使用 L'Hospital 法则求之.

$$\frac{[x-(1+x)\ln(1+x)]'}{[x^2(1+x)]'}=\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}\to-\frac{1}{2},\quad x\to 0.$$

$$\text{故}\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{e}{2}.$$

这表明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=-\frac{e}{2}$.

二. 求极限 $\lim_{x\to0} f'(x)$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = [e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}]' = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'.$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \cdot \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

在第一个步骤中已经计算了上述函数当 $x \to 0$ 的极限为 $-\frac{e}{2}$.

这表明

$$\lim_{x\to0} f'(x) = -\frac{e}{2} = f'(0).$$

也就是说, 对于函数 $f(x)$ 以及点 $x = 0$, 上述定理结论(i)成立.

例：令

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导．因为对于 $x\neq 0$，$f(x)$ 显然可导，且 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，而在点 $x=0$ 处，$f(x)$ 也可导，且 $f'(0)=0$．因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=x\sin\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to 0.$$

由于极限 $\lim_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，故 $x=0$ 是导函数 $f'(x)$ 的第二类间断点．

作业

课本习题4.2 (pp. 100-101): 2(奇), 3, 4.

第4章总复习题(pp. 124-125): 4, 16.