《微积分A1》第二讲

教师 杨利军

清华大学数学科学系

2019年09月18日

无理数的稠密性的另一证明

命题：对 $\forall a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$，存在无理数 ξ，使得 $a < \xi < b$.

证明：由有理数的稠密性知存在有理数 $r \in (a + \sqrt{2}, b + \sqrt{2})$.

故 $r - \sqrt{2} \in (a, b)$. 显然 $r - \sqrt{2}$ 是一个无理数. 证毕.

注：上述证明是周三课后一位同学提供给我的. 谢谢！

不难验证，有理数集 $\mathbb{Q}$ 按通常的加法满足加法公理，乘法满足乘法公理，以及通常的大小关系满足序公理．因此 $\mathbb{Q}$ 构成一个数域，称作有理数域．

命题：有理数域 $\mathbb{Q}$ 不满足确界存在性条件．

证明：只要证 $\mathbb{Q}$ 的某个非空有上界子集不存在有理数上确界即可．定义 $S = \{r \in \mathbb{Q}, r > 0, r^2 < 2\}$．假设 S 有上确界 b，且 b 是有理数．不难证明在有理数域内同样成立三分律，即 $b^2 < 2$ 或 $b^2 > 2$ 或 $b^2 = 2$．与证明 $\sqrt{2}$ 的存在性相同的方法可以证明，在有理数域 $\mathbb{Q}$ 内，前两个情况同样不可能发生．

例如证明情形 $b^2 < 2$ 不可能出现. 反证. 假设 $b^2 < 2$, 那么可取充分小的有理数 $\varepsilon > 0$, 使得 $(b+\varepsilon)^2 < 2$. 这与 b 是 S 的上确界的假设相矛盾. 故情形 $b^2 < 2$ 不可能出现. 类似可证情形 $b^2 > 2$ 也不可能出现. 故 $b^2 = 2$, 即 $b = \sqrt{2}$. 但已证 $\sqrt{2}$ 是无理数. 矛盾. 故 S 没有有理数的上确界. 从而有理数域不满足确界存在性条件. 证毕. $\square$

根据实数的序公理，不难得到如下关于不等式的五个基本结论

(i) 三分律：对于 $\forall a, b \in \mathbb{R}$，或 $a < b$，或 $a = b$，或 $a > b$.

(ii) 传递律：若 $a < b$ 且 $b < c$，则 $a < c$.

(iii) 加法律：若 $a < b$ 且 $c < d$，则 $a + c < b + d$.

(iv) 乘法律：设 $a < b$. 若 $p > 0$，则 $ap < bp$；若 $p < 0$，则 $ap > bp$.

(v) 倒数律：若 $0 < a < b$，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

注意除了三分律之外，在其它所有地方的严格不等号 $<$ (或 $>$)，均可由相应的非严格不等号 $\leq$ (或 $\geq$) 替换，结论亦然成立.

Theorem

定理: 对于 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$.

注: 第二个不等式称作三角不等式, 第一个不等式称作逆三角不等式.

Proof.

证明: 由于 $\pm a \le |a|$, $\pm b \le |b|$, 故 $\pm(a + b) \le |a| + |b|$. 因此

$$|a + b| = \pm(a + b) \le |a| + |b|.$$

故三角不等式得证. 再根据三角不等式得 $|a| = |a + b - b|$

$\le |a + b| + |b|$. 由此即得逆三角不等式. 证毕. $\square$

Example

例: 利用 $|\pi - 3.141| < 10^{-3}$, $|\sqrt{2} - 1.414| < 10^{-3}$, 我们可以得到关于数 $\pi + \sqrt{2}$ 的估计:

$$\left|\pi + \sqrt{2} - 4.555\right| = \left|(\pi - 3.141) + (\sqrt{2} - 1.414)\right|$$

$$\leq \left|\pi - 3.141\right| + \left|\sqrt{2} - 1.414\right| \leq 10^{-3} + 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}.$$

Theorem

定理 (The arithmetic-geometric mean inequality): 对任意两个正数 $a, b > 0$, 成立 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, 且等号成立当且仅当 $a = b$.

注: 记 $G(a,b) = \sqrt{ab}$, $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$, 分别称 $G(a,b)$ 和$A(a,b)$ 为正数 a, b 的几何平均和算术平均. 因此定理可简言之为, 几何平均小于等于算术平均.

Proof.

代数证明: 由于 $0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故 $4ab \le a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. 于是 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. 显然等号成立, 当且仅当 $a = b$. 命题得证. $\square$

图形证明

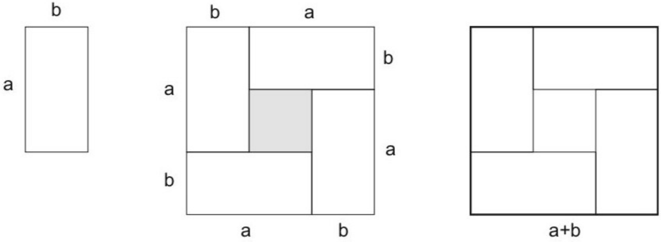
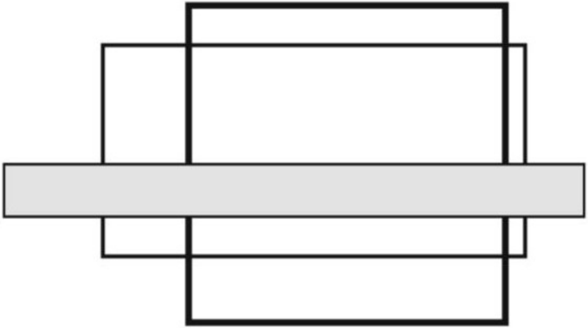


Fig. 1.9 A visual proof that $4ab \leq (a+b)^2$, by comparing areas

例子

例: 证明在给定周长的矩形中，正方形的面积最大. 如图所示.



Proof.

证明: 设矩形的长和宽分别为 L 和 W, 则其面积为 LW. 根据算术几何平均不等式可知 $\sqrt{LW} \leq \frac{L+W}{2}$, 或等价地

$$LW \leq \left(\frac{L+W}{2}\right)^2.$$

注意上式右边是具有相同周长的正方形之面积. 命题得证. $\square$

Theorem

定理: 对任意 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

且等号成立, 当且仅当这 n 个数相等, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

注: 同两个数的情形, 记 $G(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $A(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, 它们分别称为正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的几何平均和算术平均. 因此定理可简言之为, 任意 n 个正数的几何平均小于等于其算术平均.

<u>证明大意</u>: 已证结论对 $n=2$ 成立. 以下证明当 $n=4$ 时结论成立. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 为四个正数, 记

$$A_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad A_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}.$$

多次应用 $n=2$ 时的结论得

$$\sqrt{a_1 a_2} \le A_1, \quad \sqrt{a_3 a_4} \le A_2, \quad \sqrt{A_1 A_2} \le \frac{A_1 + A_2}{2}.$$

于是

证明续一

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \le \sqrt{A_1A_2} \le \frac{A_1+A_2}{2}$$

$$= \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

等号成立，当且仅当 $A_1 = A_2$ 且 $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$. 这等价于 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. 因此 $n = 4$ 时结论成立. 以下再证明 $n = 3$ 时结论成立. 设 a_1, a_2, a_3 为三个正数. 记它们的算术平均值为

$$m = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}.$$

不难证明 m 也是四个数 a_1, a_2, a_3, m 的算术平均值，即

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + m}{4}.$$

现在对这四个数应用 $n = 4$ 时的结论得 $(a_1a_2a_3m)^{\frac{1}{4}} \leq m$. 两边四次方得 $(a_1a_2a_3m) \leq m^4$. 此即 $(a_1a_2a_3) \leq m^3$. 亦即 $(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}} \leq m$. 这就证明了结论当 $n = 3$ 时成立. 其余情形的证明类似.

数列(sequences)

Definition

定义: 任意一个映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 均称作一个数列或序列, 其中 $\mathbb{N}$ 代表自然数集. 通常称 $a_n = f(n)$ 为数列的一般项. 常用记号 $\{a_n\}$ 或 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 表示一个数列或序列. 有时也将各项列出 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$, 其中 a_1 称为数列的第一项, a_2 称为第二项, a_n 称为第 n 项.

Example

例一: $\{\frac{n}{n+1}\}_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$, $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\}$.

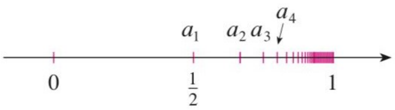
Example

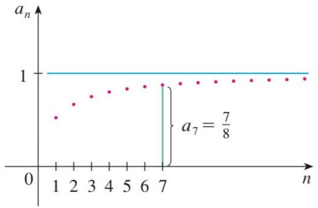
例二: $\{\cos\frac{n\pi}{6}\}_{n\geq 0}$, $a_n = \cos\frac{n\pi}{6}$, $\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, \cos\frac{n\pi}{6}, \cdots\}$.

Example

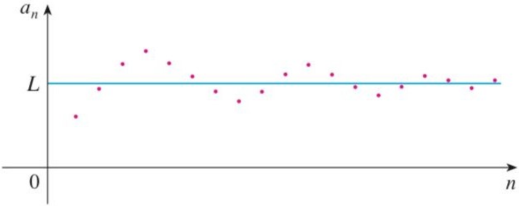
例三: Fibonacci 数列: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$. 数列的前几项为 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$.

考虑数列$\{\frac{n}{n+1}\}_{n\geq1}$. 一般项 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 随着 n 的增加越来越接近数 1，因为 $1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. 两种方式图示如下.





数列极限的几何图示



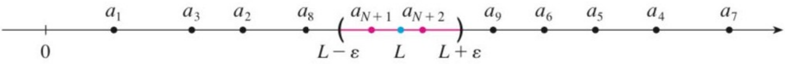
Definition

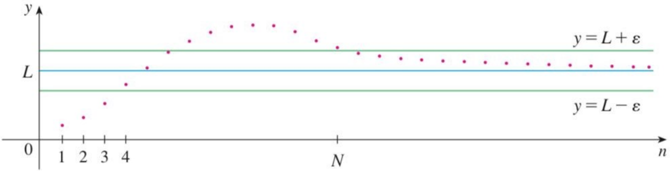
定义: 设 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 为一数列(或序列), 若存在 $L \in \mathbb{R}$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

则称序列 $\{a_n\}$ 收敛于 L, 或序列 $\{a_n\}$ 有极限且极限值为 L. 这事记作 $a_n \to L\ (n \to +\infty)$ 或 $\lim a_n = L$ 或 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

数列极限精确定义的几何意义





收敛数列的例子

定义: 函数 $[x]$ 称作取整函数，它的值定义为不大于 x 的最大整数. 例如 $[1.5]=1$, $[2]=2$, $[-1.5]=-2$. 注意函数 $[x]$ 满足 $[x]\le x<[x]+1$ 或 $x-1<[x]\le x$.

例一: 证明 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. 证: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时, $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{N+1}=\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$.

例二: 类似可证 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$. 因为对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n>N$ 时, $|\frac{n+1}{n}-1|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

例三: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, 因为当 $n>N=[\frac{1}{\varepsilon}]$ 时, $|\frac{\sin n}{n}-0|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$.

回忆极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ 的定义. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall n > N$.

注一. 不等式 $|a_n - L| < \varepsilon$ 可以用 $|a_n - L| < M\varepsilon$ 代替, 其中 M 为任意一个事先给定的正常数, 与 ε 和 n 无关.

注二. 上述定义所涉及的严格不等号, 可以部分地或全部地改为相应的非严格不等号. 例如, 极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ 也可如下定义: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - L| \le M\varepsilon$, $\forall n \ge N$, 其中 $M > 0$ 为正常数, 与 n 无关. 参见课本习题1.2题1(p. 7).

发散数列

Definition

定义: 设 $\{a_n\}$ 为一数列. 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 均不以 a 为极限, 即 $a_n \to a$ 不成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或无极限. 更确切地说, 若对任意 $a \in \mathbb{R}$, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意正整数 N, 存在 $n_0 \geq N$, $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散或无极限.

Example

例: 易证(i) 序列 $\{1-(-1)^n\}$ 发散; (ii) 序列 $\{n\}$ 发散; (iii) 序列 $\{\sin n\}$ 发散. (思考如何证明?).

Example

例一：证明 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明：记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$，则 $\sqrt[n]{n}=1+a_n$. 于是

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2+\cdots>\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2$$

$$\text{故}\quad a_n^2<\frac{2}{n-1}\quad\text{或}\quad 0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0.$$

这表明 $a_n\to 0$. 故 $\sqrt[n]{n}\to 1$. 证毕.

例二: 设 $\lim a_n = A$, 证明

(i) $\lim e^{a_n} = e^A$;

(ii) 设 $a_n > 0$ 且 $A > 0$, 则 $\lim \ln a_n = \ln A$.

(iii) $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$.

证(i). 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon \iff |e^{a_n - A} - 1| < \varepsilon e^{-A}$$

$$\iff -\varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} - 1 < \varepsilon e^{-A}$$

$$\iff 1 - \varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} < 1 + \varepsilon e^{-A}$$

$$\iff \quad \ln\left(1-\varepsilon e^{-A}\right) < a_n - A < \ln\left(1+\varepsilon e^{-A}\right).$$

这里不妨取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $1-\varepsilon e^{-A} > 0$. 记

$$\delta \triangleq \min\left\{\left|\ln\left(1-\varepsilon e^{-A}\right)\right|, \ln\left(1+\varepsilon e^{-A}\right)\right\},$$

由假设 $a_n \to A$ 知，对 $\delta > 0$，存在正整数 N，使得 $|a_n - A| < \delta$，$\forall n \geq N$. 于是当 $n \geq N$ 时，$|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon$. 结论(i)得证.

证(ii). 设 $\varepsilon > 0$，$|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$，即

$$\left|\ln\frac{a_n}{A}\right| < \varepsilon \quad \iff \quad -\varepsilon < \ln\frac{a_n}{A} < \varepsilon$$

$$\iff \quad e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < e^{\varepsilon} \quad \iff \quad Ae^{-\varepsilon} < a_n < Ae^{\varepsilon}$$

$$\iff \quad A(e^{-\varepsilon}-1) < a_n - A < A(e^{\varepsilon}-1) \quad (*)$$

记 $\delta \triangleq \min\{A(1-e^{-\varepsilon}), A(e^{\varepsilon}-1)\}$. 由假设 $a_n \to A$ 可知，对于 $\delta > 0$，存在正整数 N，使得 $|a_n - A| < \delta$, $\forall n \geq N$. 于是式(*) 中的不等式成立. 由上述等价关系知 $|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$. 此即 $\lim \ln a_n = \ln A$. 结论(ii) 得证.

证(iii): 已证 $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. 记 $a_n = \sqrt[n]{n}$, $A = 1$, 则 $a_n \to A$. 由结论(ii) 知 $\lim \ln a_n = \ln A = \ln 1 = 0$, 即 $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$. (iii)得证.

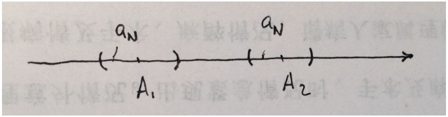
<u>命题</u>：如果序列 $\{a_n\}$ 有极限，则极限值唯一.

<u>证明</u>：设序列 $\{a_n\}$ 有两个极限值 A_1 和 A_2，$A_1 \neq A_2$. 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$，根据极限定义可知，存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，$|a_n - A_1| < \varepsilon$ 且 $|a_n - A_2| < \varepsilon$. 于是

$$|A_1 - A_2| = |A_1 - a_N + a_N - A_2| \leq |A_1 - a_N| + |a_N - A_2|$$

$$< 2\varepsilon < 2 \cdot \frac{1}{2}|A_1 - A_2| = |A_1 - A_2|.$$

矛盾. 命题得证. □



命题: 若序列 $\{a_n\}$ 收敛, 则序列 $\{a_n\}$ 有界, 即存在正常数 $M > 0$, 使得 $|a_n| \le M, \forall n \ge 1$.

证明: 设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. 根据极限定义可知, 对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$,

$$|a_n - A| < 1 \quad 即 \quad -1 + A < a_n < A + 1.$$

由此得 $|a_n| < 1 + |A|, \forall n > N$. 于是 $|a_n| \le M, \forall n \ge 1$, 其中 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |A|\}$. 证毕. $\square$

Definition

定义: 设 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为一序列, 若映射 $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足 $\phi(k) < \phi(k+1)$, $\forall k \geq 1$, 则称序列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

Example

例: (i) $\phi(k) = 2k$, $\{a_{2k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(ii) $\phi(k) = 2k+1$, $\{a_{2k+1}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iii) $\phi(k) = 3k$, $\{a_{3k}\}$ 为序列 $\{a_n\}$ 的一个子序列.

(iv) $\phi(k) = k$, 序列 $\{a_n\}$ 为其自身的一个子序列.

注: 序列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 的子列 $\{a_{\phi(k)}\}$ 也常常记作 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $n_k = \phi(k)$ 满足 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 为严格递增的正整数序列.

子序列的收敛性

Theorem

定理: 收敛序列的每个子序列均收敛, 且收敛于原序列的极限.

Proof.

证明: 设序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 设 $\{a_{\phi(k)}\}$ 为其任意一个子序列. 依极限定义可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对任意 $n > N$, $|a_n - a| < \varepsilon$. 由于映射 $\phi(\cdot)$ 满足 $\phi(k) < \phi(k+1)$, 故 $\phi(k) \geq k$, $\forall k \geq 1$. 于是 $|a_{\phi(k)} - a| < \varepsilon$, $\forall k > N$. 因为 $\phi(k) \geq k > N$. 这就证明了子序列也收敛于 a. 证毕. □

例子

Example

例: 证明序列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ 发散.

证明: 反证. 假设序列 $\{(-1)^n\}$ 收敛, 则根据上述定理可知它的每个子序列均收敛于同一个极限值. 但是这个序列的偶脚标和奇脚标子序列

$$\{(-1)^{2n}\} = \{1, 1, 1, \cdots\},$$

$$\{(-1)^{2n-1}\} = \{-1, -1, -1, \cdots\}$$

分别收敛于两个不同的极限值 1 和 -1. 矛盾. 故序列 $\{(-1)^n\}$ 发散. 证毕. $\square$

收敛序列的保序性

Theorem

定理: 设 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$.

(1) 若 $a < b$, 则存在正整数 N, 使得 $a_n < b_n$, $\forall n > N$.

(2) 若存在正整数 n_0, 使得 $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, 则 $a \le b$.

注: 结论(2) 不能推广如下: 若 $a_n < b_n$, $\forall n \ge n_0$, 且 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则 $a < b$. 例如序列 $\{\frac{1}{n^2}\}$ 和 $\{\frac{1}{n}\}$ 均收敛, 且满足 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, $\forall n \ge 2$. 但它们有相同的极限零.

证明

证明: (1) 由假设 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$ 可知, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时,

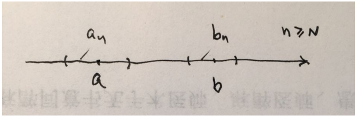
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad 且 \quad |b_n - b| < \varepsilon,$$

$$即 \quad -\varepsilon + a < a_n < a + \varepsilon \quad 且 \quad -\varepsilon + b < b_n < b + \varepsilon.$$

由于 $a < b$, 故可取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a) > 0$, 则

$$a_n < a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(a+b),\ b_n > -\frac{1}{2}(b-a) + b = \frac{1}{2}(a+b),$$

即 $a_n < \frac{1}{2}(a+b) < b_n$, $\forall n > N$. 结论(1)得证.



证(2). 反证. 假设 $a > b$. 由结论(1)知存在正整数 N, 使得 $a_n > b_n, \forall n > N$. 此与假设 $a_n \le b_n, \forall n > n_0$ 相矛盾. 证毕. $\square$

Theorem

定理: 设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛，且 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则这两个数列的和 $\{a_n + b_n\}$, 差 $\{a_n - b_n\}$, 乘积 $\{a_n b_n\}$, 以及商 $\frac{a_n}{b_n}$ (补充假设 $b \neq 0$) 均收敛，并且

(i) $a_n \pm b_n \to a \pm b$;

(ii) $ca_n \to ca$;

(iii) $a_n b_n \to ab$;

(iv) 设 $b \neq 0$, 则 $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

证明: 结论(i)和(ii)的证明容易. 略去. 证(iii). 要证 $a_nb_n \to ab$, 即要证对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 使得 $|a_nb_n - ab| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 由于

加减项证明

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab|$$

$$\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|.$$

由于收敛序列有界, 故存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$. 再根据假设 $a_n \to a$, $b_n \to b$ 可知对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ 且 $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N$. 于是

$$|a_nb_n - ab| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$\le \varepsilon M + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon, \quad \forall n > N.$$

(iii)得证. 证(iv). 要证 $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

由于

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_nb - ab_n}{b_nb}\right| = \frac{1}{|bb_n|}|a_nb - ab + ab - ab_n|$$

$$\leq \frac{1}{|bb_n|}\Big(|b||a_n - a| + |a||b - b_n|\Big).$$

由于 $b_n \to b$ 可知，对于任意 $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ (因 $b \neq 0$)，存在正整数 N_1，使得 $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$，$\forall n > N_1$. 于是对 $\forall n > N_1$

$$-\frac{|b|}{2} + b < b_n < \frac{|b|}{2} + b \quad \Rightarrow \quad |b_n| \geq \frac{|b|}{2}.$$

再由假设 $a_n \to a$，$b_n \to b$ 可知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N_2，使得

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad 且 \quad |b_n - b| < \varepsilon, \quad \forall n > N_2.$$

证明续三

于是对 $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \le \frac{1}{|bb_n|}\Big(|b||a_n - a| + |a||b - b_n|\Big)$$

$$\le \frac{2}{|b|^2}(|b|\varepsilon + |a|\varepsilon) = M\varepsilon,$$

其中 $M = \frac{2}{|b|^2}(|b| + |a|)$. 结论(iv)得证. $\square$

例一：求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}.$$

解：由于

$$\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}=\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}},$$

故

$$\lim\frac{n^2-n+1}{2n^2+3n+2}=\lim\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\left(2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim 1-\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{1}{n^2}}{\lim 2+\lim\frac{3}{n}+\lim\frac{2}{n^2}}=\frac{1-0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}.\quad\#$$

Theorem

定理: 设三个序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \ge n_0$, 其中 n_0 为某个正整数. 若极限 $\lim a_n$ 和 $\lim c_n$ 均存在且极限值相等, 记作 a, 则极限 $\lim b_n$ 也存在且等于 a.

例: 设 $a > 0$, 证明 $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

证: (i) 设 $a \ge 1$, 则 $1 \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$, $\forall n \ge a$. 已证 $\sqrt[n]{n} \to 1$. 于是根据 Sandwich 定理知 $\sqrt[n]{a} \to 1$.

(ii) 设 $0 < a < 1$, 则 $b = \frac{1}{a} > 1$. 于是 $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \to \frac{1}{1} = 1$. 证毕. □

证明: 由假设 $a_n \le b_n \le c_n, \forall n \ge n_0$ 可知

$$a_n - a \le b_n - a \le c_n - a, \quad \forall n \ge n_0.$$

由此可知 $|b_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |c_n - a|\}$. 由假设 $\lim a_n = a$ 且 $\lim c_n = a$ 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $\forall n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad 且 \quad |c_n - a| < \varepsilon.$$

于是对于 $\forall n > \max\{N, n_0\}$,

$$|b_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |c_n - a|\} < \varepsilon.$$

此即 $\lim b_n = a$. 证毕.

例: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个非负实数, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

证: 记 $a \triangleq \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 则

$$a = (a^n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq (ma^n)^{\frac{1}{n}} = m^{\frac{1}{n}} a \to a.$$

根据 Sandwich 定理可知命题得证. $\square$

作业

课本习题1.2 (pp.7-8):

1(1)(3)(4)(5)(6), 2, 4, 5, 6(1)(3)(4), 7.

课本习题1.3 (pp.13-14):

1, 4(2)(4)(6)(8)(10)(12), 5, 6.