《微积分A1》第二十三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年12月02日

定积分的分部积分定理

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $F'(x)=f(x)$. 再设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Example

例一:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \int_0^{\pi} x[\sin x]' dx = \int_0^{\pi} x d\sin x$$

$$= x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$$

例二: 证明对任意正整数 n

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

并计算上述积分 J_n.

证: 对积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, 作变量代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\pi/2 - t)(\pi/2 - t)' dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

以下来计算积分 J_n.

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x d\sin x$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x[\cos^{n-1}x]'dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$

$$=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n \Rightarrow J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

由于 $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$,

故 $J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} J_{2m-2} = \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m)(2m-2)} J_{2m-4} = \cdots$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{(2m)(2m-2)\cdots 2} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2},$$

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} J_{2m-1}$$

$$= \frac{(2m)(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)} J_{2m-3} = \cdots$$

$$= \frac{(2m)(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

解答完毕.

Theorem

定理: 下述极限成立

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1},$$

或 $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots2n\cdot2n}{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot2n+1}.$$

上述极限式称为 **Wallis (1616-1703,** 英国数学家)公式, 中译华莱士公式. 公式的意义在于, 它是第一次将超越数 π 表示成容易计算的有理数的极限.

证明: 对于 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 成立

$$\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x.$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x dx.$$

根据上述关于 $J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ 的计算公式得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}$$

上式左右两端之差为

$$0 < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}$$

$$= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{(2n)(2n+1)}$$

$$= \left(\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{(2n+1)}\right) \frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2} \frac{1}{2n} \to 0.$$

证明续二

因此

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

公式得证.

Theorem

<u>定理</u>: 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上 $n+1$ 次连续可微, $x_0\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上可表为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),\qquad (*)$$

$$\text{其中}\quad R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du.$$

<u>注</u>: 与其他形式的余项不同, 上述积分余项不含不确定的变量.

注记

由上述带积分余项的 Taylor 展式, 很容易导出带 Lagrange 余项的 Taylor 展式. 因为利用积分中值定理得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^n f^{(n+1)}(u)du$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-u)^n du$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

这正是 Lagrange 余项.

证明: 当 $n=0$ 时, 等式 (*) 成立. 因为此时等式 (*) 为

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(u)du,$$

即 Newton-Leibniz 公式. 假设等式 (*) 对 $n=m-1$ 成立, 即

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{m-1}(x), \qquad (**)$$

其中 $$R_{m-1}(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{m-1}f^{(m)}(u)du.$$

对余项 $R_{m-1}(x)$ 作分部积分得

$$R_{m-1}(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{m-1}f^{(m)}(u)du$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x}f^{(m)}(u)\left[-\frac{(x-u)^m}{m}\right]_u' du$$

$$=-\frac{1}{m!}\left(f^{(m)}(u)(x-u)^m\Big|_{u=x_0}^{u=x}-\int_{x_0}^{x}(x-u)^m f^{(m+1)}(u)du\right)$$

$$=\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m+\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^m f^{(m+1)}(u)du.$$

将上述余项 $R_{m-1}(x)$ 代入等式 (**) 即可知结论对 $n=m$ 时成立. 定理得证.

(i) 直角坐标下的面积：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x) \le f(x), \forall x \in [a,b]$，如图所示．则由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$，以及直线 $x=a$，$x=b$ 所围图形 S 的面积定义为 $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.

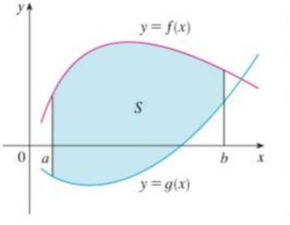


FIGURE 1
$S=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b, g(x)\leqslant y\leqslant f(x)\}$

求平面图形的面积，续

如图所示，所求图形 S 的面积 A 也可看作

曲线 $y = f(x)$ 下的面积，减去曲线 $y = g(x)$ 下的面积

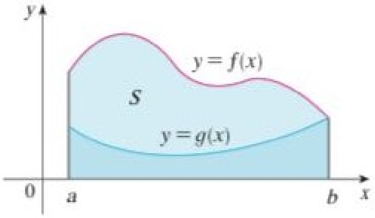
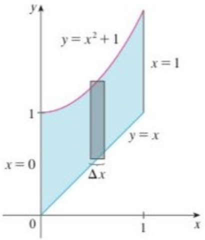


FIGURE 3

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

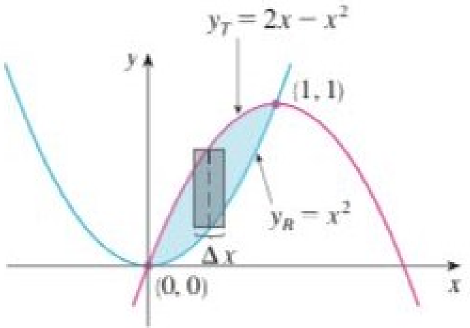
例一: 求由曲线 $y = x^2 + 1$ 和直线 $y = x$ 在区间 $[0, 1]$ 上所围图形的面积. 如图所示.



解: 根据面积公式知所求面积为

$$A = \int_0^1 (x^2 + 1 - x)dx = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

例二: 求由两个抛物线 $y = x^2$ 和 $y = 2x - x^2$ 所围有界图形的面积. 如图所示.



解: 先求两个抛物线的交点. 令 $2x - x^2 = x^2$, 即 $2x(x-1) = 0$.
由此可见它们的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$. 因此所求面积为

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

设 $y = f(x) \geq 0$ 由方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 确定, $\alpha \leq t \leq \beta$, 其中 $x(t)$ 连续可微且可逆, 且 $y(t) = f(x(t))$ 或 $f(x) = y(t(x))$, $t = t(x)$ 是 $x = x(t)$ 的反函数. 不失一般性, 设 $x(t)$ 严格单调增, 并记 $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 下的面积为

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

例：求旋轮线 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$ 一拱与 x 轴所围图形的面积，如图所示.

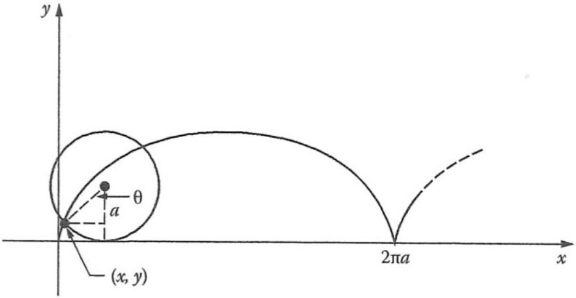


FIGURE 11

解: 由参数方程所确定的平面图形的面积公式得所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a}f(x)dx=\int_0^{2\pi}y(\theta)x'(\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)a(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\right)d\theta=a^2\cdot\frac{3}{2}\cdot2\pi=3\pi a^2.$$

注: 设旋轮线在直角坐标下为函数曲线 $y=f(x)$, 则 $f(x)=y(\theta(x))$, 其中 $\theta(x)$ 为 $x=a(\theta-\sin\theta)$ 的反函数.

设曲线由极坐标方程 $r = f(\theta)$, $a \le \theta \le b$ 给出. 考虑由曲线 $r = f(\theta)$, 以及两条射线 $\theta = a$ 和 $\theta = b$ 所围图形 $\mathcal{R}$ 的面积. 如图所示.

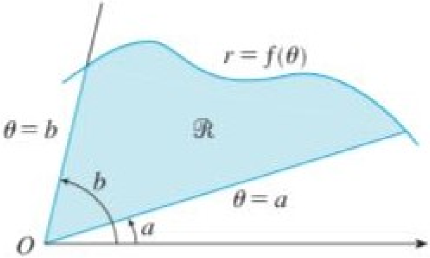
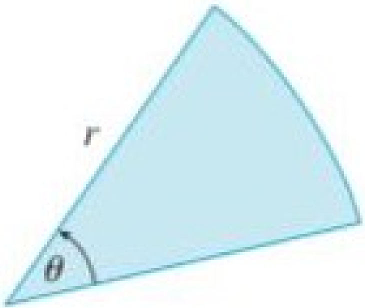


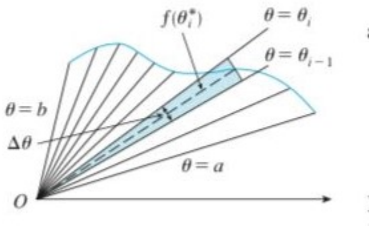
FIGURE 2

一个简单情形，即扇形面积为 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r}^2\theta$，如图所示.



极坐标下平面图形的面积，续二

考虑平面图形 $\mathcal{R}$ 的面积. 假设 $0 < b - a \le 2\pi$. 将区间 $[a, b]$ 的分割成 n 个等分，$\theta_0 = a < \theta_1 < \cdots < \theta_n = b$，每个子区间的宽度为 $\theta_i - \theta_{i-1} = \triangle\theta = \frac{b-a}{n}$，射线 $\theta = \theta_i$ 将图形 $\mathcal{R}$ 分割成 n 个近似于小扇形，取点 $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$，那么第 i 部分的近似面积为扇形面积 $\frac{1}{2}f^2(\theta_i^*)\triangle\theta$. 如图所示.



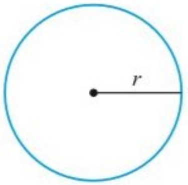
于是整个图形 $\mathcal{R}$ 由近似面积

$$A \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\theta_i^*) \triangle\theta.$$

上式右边为函数 $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 和。因此有理由定义图形 $\mathcal{R}$ 的面积为

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta$$

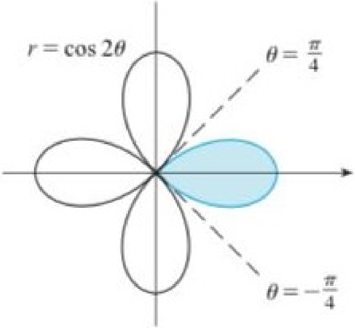
例一: 求半径为 r 的圆盘的面积.



解: 半径 r 的圆盘可以看作圆周 $r(\theta) = r,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, 所围的图形. 由极坐标下平面面积公式得

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi = \pi r^2.$$

例二: 求四叶玫瑰曲线 $\mathsf{r} = \cos 2\theta$ 的一支所围图形的面积. 如图所示.



解: 根据极坐标下平面面积公式得所求面积为

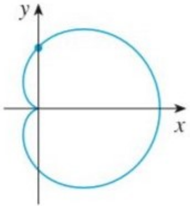
$$A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos^2 2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

解答完毕.

例三: 求心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 所围图形的面积. 如图所示.

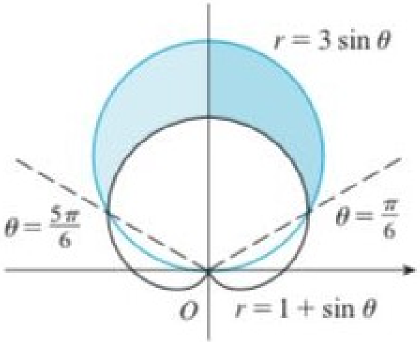


解: 根据极坐标下的面积公式知所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a(1+\cos\theta)]^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

<u>例四</u>: 求圆周 $\mathsf{r} = 3\sin\theta$ 的内部与心形线 $\mathsf{r} = 1 + \sin\theta$ 外部交集图形的面积. 如图所示.



解：先求两条曲线即圆周 $r = 3\sin\theta$ 和心形线 $r = 1 + \sin\theta$ 的交点，以确定图形极角的范围. 令 $3\sin\theta = 1 + \sin\theta$，即 $\sin\theta = \frac{1}{2}$. 解之得 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 和 $\theta = \frac{5\pi}{6}$. 于是所求面积可以表示为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \sin\theta)^2 d\theta$$

由于图形关于 y 轴对称，故

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2\theta d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta) d\theta\right]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta) d\theta$$

例四，续二

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [4(1-\cos 2\theta) - 1 - 2\sin\theta] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta] d\theta$$

$$= \Big[3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

解答完毕.

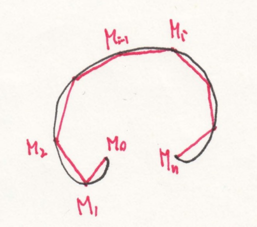
设平面曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, 设 Γ 不自相交, 即 $\vec{r}(t_1)\neq\vec{r}(t_2)$, $\forall t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$, $t_1\neq t_2$. 当 $\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$ 时, Γ 为闭曲线. 设

$$P:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$$

为区间 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割, 相应地曲线 Γ 有一个分割

$$M_0,M_1,\cdots,M_n,\quad M_i=\vec{r}(t_i)=(x(t_i),y(t_i)).$$

若以直线段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的长度近似代替曲线段 $M_{i-1}M_i$ 的弧长, 如图所示.



则曲线 Γ 的弧长有近似 $\sum_{i=1}^{n}|\overline{M_{i-1}M_i}|$. 若极限

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|\overline{M_{i-1}M_i}|$$

存在，则称曲线 Γ 可求长，或曲线 Γ 有弧长，其弧长定义为上述极限值，其中 $\|P\|$ 为分割 P 的模，即 $\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$.

注：空间曲线弧长类似定义.

Theorem

定理: 设曲线 Γ 有 C^1 表示 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, 即 $x(t)$, $y(t)$ 连续可微, 则曲线 Γ 可求长, 且其弧长为

$$|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

注一: 定理中的条件 $x(t), y(t)$ 连续可微, 可以减弱为 $x(t), y(t)$ 可微, 且 $x'(t), y'(t)$ 可积.

注二: 对于空间曲线 Γ: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, 成立类似的弧长公式

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

注三: 当曲线 Γ 为函数 $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ 的函数图像时, 其弧长公式为

$$|\Gamma| = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'(x)^2} dt.$$

例一：圆周的周长

例一：设圆周 Γ 由方程 $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ 给出. 求其弧长.

解：由弧长公式得

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

例二：求旋轮线 Γ：$x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ 一拱的弧长，其中 $0 \le t \le 2\pi$.

解：简单计算得 $x'(t) = a(1 - \cos t)$，$y'(t) = a\sin t$. 由此得

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2(\sin t)^2$$

$$= 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$\Rightarrow \quad |\Gamma| = \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 4a\int_0^{\pi}\sin s ds = 8a.$$

例三：求椭圆 Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的弧长，其中 $a>b>0$.

解：为方便取椭圆 Γ 的参数方程为 $x=a\sin t$, $y=b\cos t$, $0\le t\le 2\pi$. 于是椭圆弧长为

$$|\Gamma|=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\cos t)^2+(-b\sin t)^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t}dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt,$$

其中 $k=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\in(0,1)$ 为椭圆离心率. 文献上称

$$E(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$$

椭圆积分(函数). 可以证明椭圆积分“积“不出来，即不能用初等函数表示.

证明: 设 P: $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割, $\|P\| = \max\{\triangle t_i\}$, $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 对应分割 P, 曲线 Γ 有分点 $M_0, M_1, \cdots, M_n$, $M_i = (x(t_i), y(t_i)) = \vec{r}(t_i)$. 于是

$$|\overline{M_{i-1}M_i}| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$= \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2} \triangle t_i,$$

其中 $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. 这里使用了 Lagrange 中值定理. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}|\overline{M_{i-1}M_i}|-\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(|\overline{M_{i-1}M_i}|-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}-\sqrt{x'(\tau_i)^2+y'(\tau_i)^2}\right)\triangle t_i,$$

其中 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$. 这里对积分 $\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$ 使用了积分中值定理.

证明，续二

Lemma

引理：对于任意 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$，成立

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| \le |a-c|+|b-d|.$$

证明，续三

Proof.

证明：若 a, b, c, d 全为零，则上述不等式显然成立．假设它们不全为零，则

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| = \frac{|a^2+b^2-c^2-d^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\leq \frac{|a-c||a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} + \frac{|b-d||b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\leq |a-c|+|b-d|.$$

引理得证． $\square$

由上述引理得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}|\overline{M_{i-1}M_i}| - \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2} - \sqrt{x'(\tau_i)^2+y'(\tau_i)^2}\right|\triangle t_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\Big(|x'(\xi_i)-x'(\tau_i)|+|y'(\eta_i)-y'(\tau_i)|\Big)\triangle t_i.$$

这里 $\xi_i, \eta_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. 由于 $x'(t), y'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，从而一致连续. 故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|t-t'| < \delta$, $|x'(t)-x'(t')| < \varepsilon$, $|y'(t)-y'(t')| < \varepsilon$.

因此当 $\|P\| < \delta$ 时，$|x'(\xi_i) - x'(\tau_i)| < \varepsilon$，$|y'(\eta_i) - y'(\tau_i)| < \varepsilon$.

此时

$$\left|\sum_{i=1}^{n} |\overline{M_{i-1}M_i}| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \Big(|x'(\xi_i) - x'(\tau_i)| + |y'(\eta_i) - y'(\tau_i)|\Big) \triangle t_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon + \varepsilon) \triangle t_i = 2\varepsilon(\beta - \alpha).$$

这表明

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{M_{i-1}M_i}| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

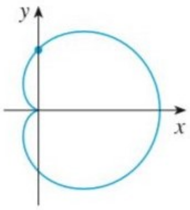
弧长公式得证.

Theorem

定理: 设曲线 Γ 由极坐标形式 $\mathsf{r}=\mathsf{r}(\theta)$ 给出，其中 $\alpha\leq\theta\leq\beta$，$\mathsf{r}(\theta)$ 连续可微，则曲线 Γ 可求长，且其弧长为

$$|\Gamma|=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\mathsf{r}(\theta)^2+\mathsf{r}'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

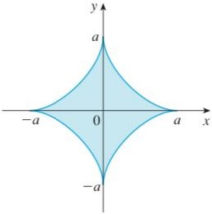
例一：求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的弧长，其中 $0 \le \theta \le 2\pi$.



解：简单计算得 $r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 = [a(1+\cos\theta)]^2 + [-a\sin\theta]^2$
$= 2a^2(1+\cos\theta) = 4a^2\cos^2\theta/2$. 于是所求弧长为

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta = 8a.$$

例二: 求星形线 Γ: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 的弧长, 其中 $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$. (注: 星形线在直角坐标下的方程为 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$).



解: 计算得 $x' = -3a\cos^2 t \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t \cos t$. 因此所求弧长为

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

例二续

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2} dt$$

$$= 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, d \sin t = 6a.$$

<u>证明</u>: 由曲线Γ的极坐标方程$r=r(\theta)$ 可以得到曲线在直角坐标下的参数方程

$$\begin{cases} x = x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \\ y = y(\theta) = r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, \\ y' = r'\sin\theta + r\cos\theta. \end{cases}$$

为方便计算$x'(\theta)^2+y'(\theta)^2$, 将上式写成如下矩阵和向量形式

证明续一

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ r \end{bmatrix}$$

上述系数矩阵，记作 $Q = Q(\theta)$，是正交矩阵，即 $Q^T Q = E$. 正交矩阵或正交变换的一个重要性质是它保持向量的模(长度).

因此 $r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2 = x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2$. 这个等式也可以如下直接证明:

$$x'^2 + y'^2 = [x', y'] \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= [r', r]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r' \\ r \end{bmatrix}$$

$$= [r', r]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r' \\ r \end{bmatrix} = r'^2 + r^2.$$

因此曲线 Γ 的弧长为

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}d\theta.$$

定理得证. $\square$

曲线可以由不同的参数化. 例如两个参数化 $\vec{r}_1(t)=(t,t^2)$, $1\le t\le 2$, $\vec{r}_2(u)=(e^u,e^{2u})$, $0\le u\le \ln 2$, 对应同一条曲线 Γ. 可以期待曲线 Γ 关于这两个参数化所得的弧长相等. 实际上

$$\int_0^{\ln 2}|\vec{r}_2'(u)|du=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2u}+4e^{4u}}du=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+4e^{2u}}e^u du$$

$$=\int_1^2\sqrt{1+4t^2}dt=\int_1^2|\vec{r}_1'(t)|dt.$$

设曲线 Γ 有连续可微的参数化 $\vec{r} = r(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. 称

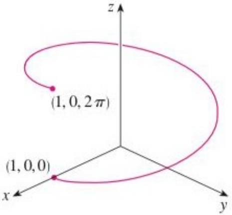
$$s(t) = \int_\alpha^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau = \int_\alpha^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau$$

为曲线 Γ 的弧长函数. 它表示曲线从点 $r(\alpha)$ 到点 $r(t)$ 的那一部分的弧长. 由 Newton-Leibniz 公式知弧长函数 $s(t)$ 可微, 且 $s'(t) = |\vec{r}'(t)|$.

曲线的弧长参数化

设曲线 Γ 由有一个参数化 $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, 连续可微, 且 $\vec{r}'(t) \ne 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$, 则弧长函数满足 $s'(t) = |\vec{r}'(t)| > 0$. 因此弧长函数 $s(t)$ 有反函数 $t = t(s)$. 由此我们得到曲线 Γ 关于其弧长的参数化 $\vec{r}=\vec{r}(t(s))$.

例：求螺线 $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,t)$ 的弧长，其中 $0\le t\le 2\pi$，并以弧长为参数将螺线重新参数化.



解：对 $\vec{r}(t)$ 求导得 $\vec{r}'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$. 于是 $|\vec{r}'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{2}$. 因此螺线的弧长为

例子续

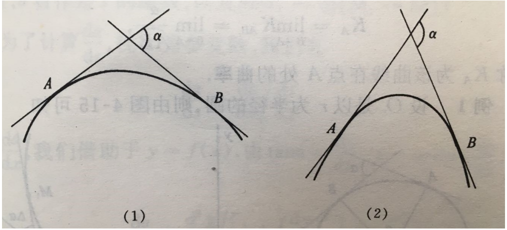
$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)|dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

由定义 $s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t)|dt = \sqrt{2}t$. 由此解得 $t(s) = s/\sqrt{2}$. 于是螺线以弧长作为参数的方程为

$$r = r(t(s)) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right).$$

解答完毕.

先来观察下图



上述两个图中的弧段AB 的弧长大致相等. 由直觉知, 图(2)中的弧AB比图(1)中的弧AB的弯曲程度更大. 因为A, B两点的切线所成的夹角 α 更大. 角 α 可看作切线从点A出发沿着曲线移动至点B 所扫过的角度.

Definition

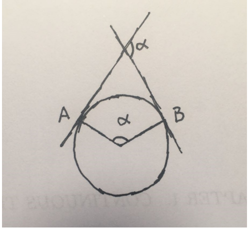
定义: 在平面光滑曲线 Γ 上任取两点 $A, B \in \Gamma$. 若记 α_{AB} 表示 A, B 两点的切线所成的夹角. 记 L_{AB} 表示弧段 AB 的弧长, 则比值 $\frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}}$ 可用作衡量弧段 AB 平均弯曲程度的一个量. 现固定点 A, 若极限

$$\lim_{B \to A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}}$$

存在, 则称极限值为曲线在点 A 处的曲率, 常记作 κ_A.

例子

考虑半径为 r 的圆周上，任意一点 A 处的曲率.



由图可知，角 $\alpha=\alpha_{AB}$ 等于弧 AB 所对应的圆心角. 因此弧长 $L_{AB}=\alpha r$. 于是 $\frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}}=\frac{\alpha}{\alpha r}=\frac{1}{r}$. 故 $\lim_{B\to A}\frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}}=\frac{1}{r}$. 此即 $\kappa_A=\frac{1}{r}$. 这表明圆周上各点的曲率相同. 即各点的弯曲程度相同，且半径越大，弯曲程度越小. 这与我们的直觉一致.

设曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a, b)$ 给出，其中 $\vec{r}(t)$ 二次连续可微，且 $\vec{r}'(t) \neq 0$. 记点 $A = \vec{r}(t)$, $B = \vec{r}(t+h)$, 则曲线 Γ 在 A 和 B 两点处的切线斜率分别为

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)}.$$

记两切线与 x 轴的夹角分别为 θ 和 θ_h, 则

$$\tan\theta = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \tan\theta_h = \frac{y'(t+h)}{x'(t+h)}.$$

曲率的计算公式，续一

两切线之间的夹角为

$$\alpha_{AB} = \theta_h - \theta = \arctan\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

另一方面弧段 AB 的弧长为

$$L_{AB} = \int_t^{t+h} \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau = s(t+h) - s(t).$$

于是

$$\frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{\arctan\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}}{s(t+h) - s(t)}$$

$$= \frac{\arctan\frac{y'(t+h)}{x'(t+h)} - \arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}}{h} \cdot \frac{1}{\frac{s(t+h)-s(t)}{h}}$$

$$\to \frac{\left[\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{s'(t)}, \quad h \to 0.$$

计算得

$$\left[\arctan\frac{y'}{x'}\right]' = \frac{1}{1+(\frac{y'}{x'})^2}\left[\frac{y'}{x'}\right]'$$

$$= \frac{x'^2}{x'^2+y'^2} \cdot \frac{x'y''-y'x''}{x'^2} = \frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}.$$

这表明曲线 Γ 在点 $A = \vec{r}(t)$ 处的曲率为

$$\kappa_A = \lim_{B \to A} \frac{|\alpha_{AB}|}{L_{AB}} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注：上述公式也可以写作

$$\kappa_A = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

理由：由 $\vec{r} = (x, y)$ 得 $\vec{r}\,' = (x', y')$，$\vec{r}\,'' = (x'', y'')$. 因此

$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = |x'y'' - y'x''|, \quad |\vec{r}\,'| = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

$$故 \quad \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

作业

课本习题5.6(pp.170-172):

1(奇), 2(奇), 3(奇), 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.