《微积分A1》第十一讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月21日

Theorem

定理 [Michel Rolle, 1652-1719]：设函数 f 满足如下三个条件:

(i) f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) f 在开区间 (a, b) 上可导;

(iii) $f(a) = f(b)$,

则存在一点 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$.

Rolle 定理图示

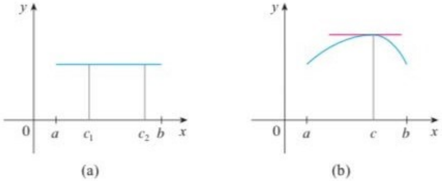
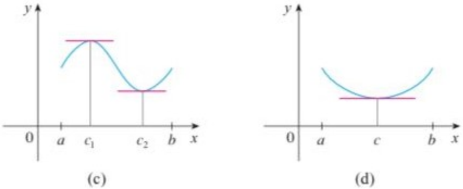


FIGURE 1



Rolle 定理的应用，例一

例一：证明方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个实根.

证明：记 $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$，则 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$，$f(0) = -1$，$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0$. 由介值定理知，函数 f 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{\pi}{2})$ 各有一个零点. 因此方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上至少有两个不同的实根. 假设 f 有三个零点，则 $f'(x)$ 至少有两个零点. 但是

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

在实轴上仅有一个零点. 因此方程 $x^2 = x\sin x + \cos x$ 在实轴上恰有两个不同的实根. 证毕.

例二

Example

例二: 证明方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根.

证明: 将方程改写为 $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. 观察知左端是函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$ 的导数, 即 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)$. 由于 $f(0)=0$, $f(1)=a+b+c-(a+b+c)=0$, 根据 Rolle 定理知存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在区间 $(0,1)$ 上至少存在一个实根. 证毕.

例三

Example

<u>例</u>: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上可导．进一步假设 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$.

<u>证明</u>: 考虑函数 $F(x)=f(x)-x$. 要证存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$, 只要证 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点即可．由假设条件知 $F(0)=0$, $F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$, $F(1)=0-1<0$. 由介值定理知存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $F(x_0)=0$. 再对函数 $F(x)$ 以及闭区间 $[0,x_0]$ 应用 Rolle 定理知存在 $\xi\in(0,x_0)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 此即 $f'(\xi)=1$. 证毕.

Lagrange 中值定理

Theorem

定理 [Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813]：设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可导，则存在一点 $c \in (a, b)$，使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$，或等价地

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

注：当 $f(a) = f(b)$ 时，Lagrange 中值定理就是Rolle 定理．因此 Lagrange 中值定理可看作 Rolle 定理的推广．

Lagrange 中值定理的几何意义

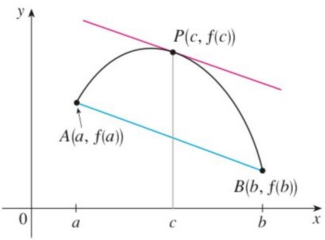


FIGURE 3

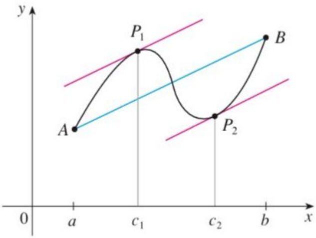
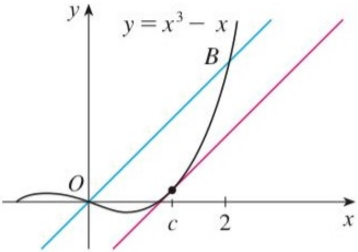


FIGURE 4

例一: 考虑 $f(x)=x^3-x$. 显然 f 对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 连续且可导. 对 f 和区间 $[0,2]$ 应用 Lagrange 中值定理知存在 $c\in(0,2)$, 使得 $f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)$, 即 $6=(3c^2-1)2=6c^2-2$. 解之得 $c^2=\frac{4}{3}$, 即 $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$.



Example

例二: 设 $f(x)$ 在实轴上可导. 假设 $f(0) = -3$, 且 $f'(x) \leq 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 问 $f(2)$ 可能有多大?

解: 对函数 f 以及区间 $[0, 2]$ 应用 Lagrange 中值定理得 $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$, 即

$$f(2) = f(0) + f'(c)(2 - 0) \leq -3 + 5 \times 2 = 7.$$

这表明 $f(2)$ 的值不可能超过 7.

Example

例三: 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

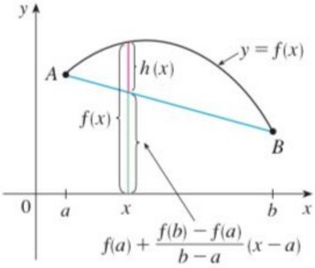
证明: 根据 Lagrange 中值定理得

$$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a = [\ln x]'_{x=c}(b-a) = \frac{b-a}{c},$$

其中 $c \in (a,b)$. 由此即可得到结论. 证毕.

证明：由两个端点 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$ 所确定的直线方程为 $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. 令

$$h(x) \triangleq f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



不难验证函数 $h(x)$ 满足 Rolle 定理的条件. 特别 $h(a)=0$ $=h(b)$. 于是存在 $c\in(a,b)$, 使得

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$\text{即}\quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证毕. □

推论一

Corollary

推论一: 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 则 f 为常数函数, 当且仅当 $f'(x)\equiv 0$, $\forall x\in(a,b)$.

Proof.

证明: $\Rightarrow$: 已证常数函数的导数恒为零.

$\Leftarrow$: 设 $f'(x)\equiv 0$, $\forall x\in(a,b)$. 要证 $f(x)$ 为常数函数. 反证. 若不然, 存在 $x_1,x_2\in[a,b]$, 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 由 Lagrange 中值定理得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$, 其中 ξ 介于 x_1,x_2 之间. 因此 $f'(\xi)\neq 0$. 矛盾. 命题得证. □

Corollary

推论二: 设函数 f, g 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导. 若 $f'(x) \equiv g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, 则 $g(x) \equiv f(x) + C$, 其中 C 为常数. 换言之, 导数恒等的函数彼此相差一个常数.

Lagrange 中值定理的另一种表现形式

Lagrange 中值定理断言，存在 $c \in (a, b)$，使得

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

其中不确定的点 c 可以写作 $c = a + \theta(b - a)$，$\theta \in (0, 1)$，即不确定的 c 转化为另一个不确定的数 $\theta \in (0, 1)$. 对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \triangle x]$ 上应用 Lagrange 中值定理，则可得

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0 + \theta\triangle x), \quad \theta \in (0, 1)$$

或写作 $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\triangle x)\triangle x$. 这个等式可与微分式 $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = f'(x_0)\triangle x + o(\triangle x)$ 相比较.

导数非负(非正) $\Rightarrow$ 函数单调增(减)

Theorem

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导. 若对 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增(减).

Proof.

证括号外情形: 对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, 应用 Lagrange 中值定理得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$, $\xi \in (x_1, x_2)$. 故 $f(x_2) \geq f(x_1)$. 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增. 对于括号里的情形 $f'(x) \leq 0$, 证明完全类似. $\square$

注: 当导数条件加强为 $f'(x) > 0 (< 0)$, $\forall x \in (a,b)$, 则结论也加强为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(严格单调减).

Example

例：证明 $\ln(1+x) < x,\ \forall x > -1,\ x \neq 0$.

证明：令 $F(x) = x - \ln(1+x)$，则

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}, \quad \forall x > -1,$$

(i) 当 $x > 0$ 时，$F'(x) > 0$，于是 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增．因此 $0 = F(0) < F(x)$，此即 $\ln(1+x) < x$.

(ii) 当 $x \in (-1, 0)$ 时，$F'(x) < 0$，于是 $F(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上严格单调减．因此 $0 = F(0) < F(x)$，故 $\ln(1+x) < x$．此即结论成立．证毕.

例二

Example

例二: 证明函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在开区间 $(e, +\infty)$ 上严格单调减.

证明: 考虑函数的导数

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \quad \forall x \in (e, +\infty)$$

因此函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在开区间 $(e, +\infty)$ 上严格单调减.

<u>例三</u>：证明恒等式 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi,\ \forall x\in(1,+\infty)$.

<u>证明</u>：对上述恒等式左边的函数求导得

$$\left(2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=0,\quad \forall x\in(1,+\infty).$$

故函数恒为常数，即 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=C$. 令 $x\to+\infty$ 可知常数为 π. 命题得证.

例四：证明

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

证明：记

$$f(x) = \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

求导得

$$f'(x) = \frac{-4}{(2x+1)^2} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{(2x+1)^2 x(1+x)} > 0, \quad \forall x > 0.$$

这表明函数 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增. 由于

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{2x+1} - \ln\left[1+\frac{1}{x}\right]\right) = 0.$$

因此 $f(x) < 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$. 此即

$$\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0.$$

命题得证.

例五：设 $b > a > 1$，证明 $\frac{b}{a} > \frac{b^a}{a^b}$.

证明：

$$\frac{b}{a} > \frac{b^a}{a^b} \iff \ln b - \ln a > a\ln b - b\ln a$$

$$\iff (b-1)\ln a > (a-1)\ln b$$

$$\iff \frac{\ln a}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

现考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$，$x > 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

再记 $g(x) = x - 1 - x\ln x$，则 $g(1) = 0$，且 $g'(x) = -\ln x < 0$，$\forall x > 1$．故 $g(x)$ 严格单调减，从而 $g(x) < g(1) = 0$，$\forall x > 1$．于是 $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-1)} < 0$，$\forall x > 1$．由此可见 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调减．因此 $f(a) > f(b)$，$b > a > 1$．此即

$$\frac{\ln a}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

根据前述的等价性可知不等式 $\frac{b}{a} > \frac{b^a}{a^b}$ 成立．证毕．

Cauchy 中值定理

Theorem

定理: 设函数 f 和 g 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 且 $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, 则存在一点 $c \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Proof.

证明: 对函数 f 和 g 分别应用 Lagrange 定理得

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),$$
$$g(b)-g(a)=g'(c)(b-a).$$

将上述两个式子相除即得结论. □

找出上述证明的漏洞.

证明: 令 $F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(g(x) - g(a))$, 其中

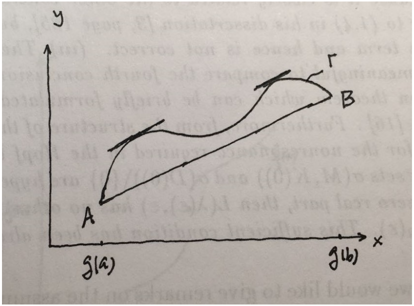
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

则 $F(a) = 0 = F(b)$. 根据 Rolle 定理知存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $F'(c) = 0$. 此即 $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$, 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad \square$$

另证: 由假设知 $y = g(x)$ 存在反函数 $x = g^{-1}(y)$. 对复合函数 $f(g^{-1}(y))$ 应用 Lagrange 中值定理可得 Cauchy 中值定理.

设平面曲线 Γ: $x = g(t)$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$, 则在 Cauchcy 定理的条件下, 曲线 Γ 上必存在点 $P = (g(c)), f(c))$, $c \in (a, b)$, 使得点 P 处的切线平行于直线 $\overline{AB}$, 其中 $A = (g(a), f(a))$, $B = (g(b)), f(b))$. 如图所示.



Example

例: 设 $b > a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$.

证明: 将要证明的等式改写作

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}.$$

将 Cauchy 中值定理应用于函数 $f(x)$ 和 $g(x) = x^2$ 即可得到结论.

Theorem

定理: 假设 (i) $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a, a+h)$ 上可导,

(ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, a+h)$,

(iv) 极限 $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 记作 A, 允许 $A = +\infty$ 或 $-\infty$,

则 $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

注: 上述 L'Hospital 法则可与序列情形的 Stolz 定理相比较.

L'Hospital 法则应用，例一

Example

例一：求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解：之前我们求过类似的极限，即 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$. 见 Oct07讲义第7页. 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 以下用 L'Hospital 法则来求之.

$$\frac{[\tan x-\sin x]'}{[x^3]'}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{3\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad x\to 0.$$

因此 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

例二

例二: 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解: 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 考虑用 L'Hospital 法则.

$$\frac{[e^x-e^{-x}-2x]'}{[x-\sin x]'}=\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

导数的比值仍为 $\frac{0}{0}$ 型极限. 继续考虑

$$\frac{[e^x+e^{-x}-2]'}{[1-\cos x]'}=\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

继续求导 $$\frac{[e^x-e^{-x}]'}{[\sin x]'}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}\to 2,\quad x\to 0.$$

故 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=2.$

Proof.

证明: 令 $f(a)=0$, $g(a)=0$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,a+h)$ 上连续. 对任意 $x\in(a,a+h)$, 在区间 $[a,x]$ 上应用 Cauchy 中值定理得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(a,x).$$

令 $x\to a^+$, 则 $\xi\to a$. 于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\to A,\quad x\to a^+$$

证毕. □

Corollary

推论: 假设 (i) $f(x)$, $g(x)$ 在开区间 $(a-h, a+h)$ 上连续，在 $(a-h, a+h)\backslash\{a\}$ 上可导，

(ii) $f(a) = 0$, $g(a) = 0$,

(iii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a-h, a+h)\backslash\{a\}$,

(iv) 极限 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，记作 A，允许 $A = +\infty$ 或 $-\infty$，则 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

证明: 应用 Cauchy 中值定理知, 对 $x \in (a, a+h)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to A, \quad x \to a^+,$$

其中 $\xi \in (a, x)$. 对 $x \in (a-h, a)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \to A, \quad x \to a^-,$$

其中 $\eta \in (x, a)$. 此即函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处的左右极限均存在且相等. 因此极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. 证毕.

例: (i) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$. (ii) 证明由 $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$ 所产生的序列 $\{a_n\}$，其中 $a_1>0$，满足 $na_n\to 2$, $n\to+\infty$.

解(i): 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型的. 可用 L'Hospital 法则.

$$\frac{[x-\ln(1+x)]'}{[x\ln(1+x)]'}=\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}.$$

上式仍为 $\frac{0}{0}$ 型的极限. 再考虑

$$\frac{[x]'}{\Big[(1+x)\ln(1+x)+x\Big]'}=\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}\to\frac{1}{2}.$$

因此两次应用 L'Hospital 法则即得 $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{1}{2}$.

证(ii). 对于 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, $\forall n \geq 1$, 不难用归纳法证明 $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$, 且序列 $\{a_n\}$ 严格单调减. (利用不等式 $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$). 因此序列 $\{a_n\}$ 有极限, 记作 a. 在迭代式 $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ 中取极限得 $a = \ln(1+a)$. 故 $a = 0$, 即 $a_n \downarrow 0$ 严格. 由结论(i)得

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n \ln(1+a_n)} \to \frac{1}{2}.$$

回忆一个极限结论：若一个序列收敛，则它的算数平均序列收敛到同一个极限. 也就是说，若 $b_n \to b$, 则 $\frac{b_1+\cdots+b_n}{n} \to b$.

故 $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)\to\frac{1}{2},\quad n\to+\infty.$

注意上式左端可表为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)\\ =&\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)\right]\\ =&\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\right)\to\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{na_{n+1}} \to \frac{1}{2} \quad \text{即} \quad na_{n+1} \to 2, \quad n \to +\infty.$$

于是

$$(n+1)a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot na_{n+1} \to 1 \cdot 2 = 2, \quad n \to +\infty.$$

结论(ii)得证. 解答完毕.

Theorem

定理: 假设 (i) $f(x)$, $g(x)$ 在开区间 $(a, a+h)$ 上可导,

(ii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, a+h)$,

(iii) $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$,

(iv) 极限 $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 记作 A, 允许 $A = +\infty$ 或 $-\infty$, 则 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

证: 只证 A 为有限数情形. 其他情形的证明类似. 要证 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$, 即要证对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

由假设 $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 可知存在 $\delta_1\in(a,a+h)$, 使得

$$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta_1].$$

记 $c=a+\delta_1$, 则对 $\forall x\in(a,c)$, 由 Cauchy 中值定理得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon,\quad \xi\in(a,c).$$

于是对 $\forall x \in (a, c]$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{g(x)-g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \cdot \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

由假设 $|g(x)| \to +\infty, x \to a^+$，故存在 $\delta_2 \in (0, \delta_1)$，使得

$|g(c)| < |g(x)|, \forall x \in (a, a+\delta_2)$. 于是对 $\forall x \in (a, a+\delta_2)$，

$$\frac{f(c)}{g(x)} + (A-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$< (A+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c)}{g(x)}.$$

证明，续二

上述不等式稍加变形得

$$\frac{f(c)-Ag(c)}{g(x)}-\varepsilon\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)+A<\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$<A+\varepsilon\left(1-\frac{g(c)}{g(x)}\right)+\frac{f(c)-Ag(c)}{g(x)}.$$

再次由假设 $|g(x)|\to+\infty$, $x\to a^+$，存在 $\delta\in(0,\delta_2)$，使得

$$\frac{|g(c)|}{|g(x)|}<\frac{1}{2},\quad \frac{|f(c)-Ag(c)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall x\in(a,a+\delta).$$

$$\Rightarrow\quad A-2\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+2\varepsilon,\quad \forall x\in(a,a+\delta).\qquad\square$$

Example

例: 求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 2x}{\ln x}$.

解: 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 考虑应用 L'Hospital 法则.

$$\frac{[\ln\sin 2x]'}{[\ln x]'} = \frac{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{\frac{1}{x}} = \cos 2x\cdot\frac{2x}{\sin 2x} \to 1,$$

当 $x \to 0^+$. 因此 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 2x}{\ln x} = 1$. 解答完毕.

Theorem

定理: 设 (i) 函数 f, g 在区间 $(a, +\infty)$ 上可导;

(ii) $f(x) \to 0$ 且 $g(x) \to 0$, $x \to +\infty$;

(iii) $g'(x) \neq 0$, $\forall x > a$;

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 允许 $A = +\infty$ 或 $A = -\infty$,

则 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Proof.

证明大意: 令 $u = \frac{1}{x}$, $\hat{f}(u) = f(\frac{1}{u})$, $\hat{g}(u) = g(\frac{1}{u})$, $u \in (0, \frac{1}{a})$. 这里不妨设 $a > 0$. 于是 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\hat{f}(u)}{\hat{g}(u)}$. 对后一极限应用有限处的 L'Hospital 法则即可. $\square$

例子

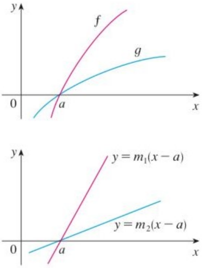
例: 求极限 $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$.

解: 将极限函数写作 $\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. 考虑导数的比值

$$\frac{[\frac{\pi}{2} - \arctan x]'}{[\frac{1}{x}]'} = \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 1, \quad x \to +\infty.$$

根据上述定理知极限 $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = 1$.

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $(a-h, a+h)$ 上连续可微, 且 $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$, 则 $f(x)=m_1(x-a)+o(x-a)$, $g(x)=m_2(x-a)+o(x-a)$. 如图所示.



于是

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{m_1(x-a)+o(x-a)}{m_2(x-a)+o(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{m_1+\frac{o(x-a)}{x-a}}{m_2+\frac{o(x-a)}{x-a}}=\frac{m_1}{m_2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

假设 $f(x), g(x)$ 在区间 $(a-h, a+h)$ 上连续可微，且 $f(a)=0$，$g(a)=0$，$g'(a)\neq 0$，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

例：设 $a > 0$，求极限

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}.$$

解：

$$\frac{[\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}]'}{[a-\sqrt[4]{ax^3}]'}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(2a^3x-x^4)^{-\frac{1}{2}}(2a^3-4x^3)-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\to\frac{\frac{1}{2}(a^4)^{-\frac{1}{2}}(-2a^3)-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}a^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{4}}}=-\frac{4}{3}\left(-a-\frac{1}{3}a\right)$$

$$=\frac{16a}{9},\quad x\to a.$$ 故所求极限为 $\frac{16a}{9}$.

例子为何特别?

1696 年 L'Hospital 出版了他的微积分教科书 Analyse des Infiniment Petits (无穷小分析). 在这本书中, L'Hospital 应用这一法则计算极限的第一个例子就是上述例子. 他的教科书封面如图所示.

例: 当 $x \to +\infty$ 时, 可依照无穷大的量级, 由小到大将如下函数(无穷大量) 排列为 $\ln x$, x^a, e^x, x^x, 即后一个函数是前一个函数的高阶无穷大, 其中 $a > 0$. 证明如下.

$$\text{(i)} \quad \lim \frac{\ln x}{x^a} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim \frac{1}{ax^a} = 0;$$

$$\text{(ii)} \quad \lim \frac{x^a}{e^x} = \lim \frac{ax^{a-1}}{e^x}$$

$$= a(a-1)\cdots(a-n+1) \lim \frac{x^{a-n}}{e^x} = 0,$$

这里假设 $n-1 \leq a < n$.

$$\text{(iii)} \quad \lim \frac{e^x}{x^x} = \lim e^{x - x\ln x} = \lim e^{x(1-\ln x)} = 0.$$

作业

课本习题4.1 (pp. 94-95): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9(1)(2)(4), 10, 11, 12.