《微积分A1》第九讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月14日

Example

例: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

证明: 设 $x \neq 0$, 则当 $0 < |h| < |x|$ 时,

$$\frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \frac{1}{x}, \quad h \to 0.$$

故 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

Example

例: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

证明: $\forall x > 0$, $\forall h \neq 0$,

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \alpha x^{\alpha-1}, \quad h \to 0.$$

故 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

可导蕴含连续

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

Proof.

证明: 由于 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 故

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

这表明 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕. □

Definition

定义: (i) 若极限$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，记作 $f'_+(x_0)$;

(ii) 若极限$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记作$f'_-(x_0)$.

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等.

Proof.

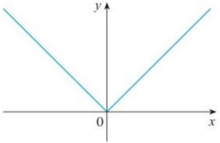
证明: 依可导定义，结论显然. 细节略. □

例：考虑函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处左右导数，以及可导性.

解：对于 $x>0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x-0}{x}=1\to 1,\quad x\to 0^+.$$

故 $|x|$ 在点 $x=0$ 处的右导数存在且 $f'_+(0)=1$. 同理可得 $|x|$ 在点 $x=0$ 处的左导数存在且 $f'_-(0)=-1$. 根据上述定理可知函数 $|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导. 根据函数 $y=|x|$ 图像可知点 $(0,0)$ 是尖点，无切线. 故不可导. 解答完毕.



微分(differentials)

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上定义. 若 f 在点 $x_0 \in (a,b)$ 处的改变量可表示为: 齐次线性部分 + 高阶部分, 即

$$f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\lambda\triangle x+o(\triangle x), \quad \triangle x\to 0,$$

其中 λ 为常数, $\triangle x$ 代表变量 x 的改变量($\triangle x$ 也是一个独立变量), 则称函数 f 在点 x_0 处可微(differentiable), 称齐次线性部分 $\lambda\triangle x$ 为函数 f 在点 x_0 处的微分, 并记之为 $df(x_0)=\lambda\triangle x$.

Theorem

定理: (i) f 在点 x_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ f 在点 x_0 处可导.

(ii) 当 f 在点 x_0 可微时, $df(x_0) = f'(x_0)\triangle x$.

证(i) 必要性: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 即

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \lambda \triangle x + o(\triangle x), \quad \triangle x \to 0.$$

故 $$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lambda + \frac{o(\triangle x)}{\triangle x} \to \lambda, \quad \triangle x \to 0.$$

这表明函数 f 在点 x_0 处可导, 且导数就是 λ, 即 $f'(x_0) = \lambda$.

证明，续一

充分性：设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，即

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}=f'(x_0),$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\triangle x\to 0}\left[\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}-f'(x_0)\right]=0,$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)-f'(x_0)\triangle x}{\triangle x}=0,$$

$$\Rightarrow\ f(x_0+\triangle x)-f(x_0)-f'(x_0)\triangle x=o(\triangle x),\ \triangle x\to 0.$$

$$\Rightarrow\ f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=f'(x_0)\triangle x+o(\triangle x),\ \triangle x\to 0.$$

这表明 $f(x)$ 在点 x_0 处可微. 结论(i)得证.

证明，续二

证(ii). 当 f 在点 x_0 可微时，即 $f(x_0+\triangle x)-f(x_0)=\lambda\triangle x+o(\triangle x)$. 已证 $\lambda=f'(x_0)$. 因此 $df(x_0)=f'(x_0)\triangle x$. 定理得证. $\square$

注一: 当 $f(x)=x$ 时, $f'(x)=1$. 因此函数 $f=x$ 在任意点 x_0 处的微分为 $dx\Big|_{x_0}=1\cdot\triangle x=\triangle x$. 因此常记 $\triangle x=dx$. 于是一般可导函数 $f(x)$ 的微分可写作 $df(x_0)=f'(x_0)dx$.

注二: 一元函数导数的概念不能直接推广到多元函数情形. 但微分概念则可以推广. 下个学期将详细讨论.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f\pm g$, fg 及 f/g (假设 $g(x_0)\neq 0$) 在点 x_0 处可导, 且

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad (f\pm g)'_{x_0} = f'(x_0)\pm g'(x_0),\\
&\text{(ii)} \quad (fg)'_{x_0} = (f'g+fg')_{x_0},\\
&\text{(iii)} \quad (f/g)'_{x_0} = \left.\frac{f'g-fg'}{g^2}\right|_{x_0}.
\end{aligned}$$

证明: 结论(i)的证明简单. 略去. 只证(ii)和(iii).

证(ii)

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\to f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0),\quad x\to x_0.$$

结论(ii)得证.

证(iii). 利用结论(ii), 只需证 $(\frac{1}{g})'_{x_0} = -(\frac{g'}{g^2})_{x_0}$.

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

$$= -\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad x \to x_0.$$

结论(iii)得证. 定理证毕. □

例子

Example

例: 求正切函数 $\tan x$ 的导数.

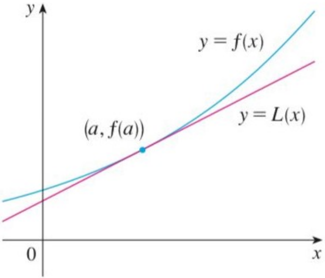
解:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\left([\sin x]' \cos x - \sin x[\cos x]'\right)$$

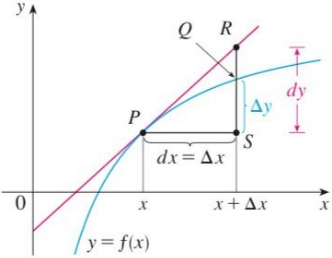
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

设函数 $f(x)$ 在点 a 处可微(或可导), 则曲线 $\Gamma: y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线方程为 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. 线性函数 $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ 称为函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处的线性化.



微分的几何解释

设 $P=(x,f(x))$ 和 $Q=(x+\triangle x,f(x+\triangle x))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的两个点，其中 $dx=\triangle x$ 为在点 $P=(x,f(x))$ 处的独立变量的增量，则函数改变量 $\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$，以及函数 f 在点 x 处的微分 $dy=f'(x)dx$，如图所示.



Example

例一：求 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$ 的近似值.

解：已证函数 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导. 为计算 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0.01\right)$ 的近似值，记 $a=\frac{\pi}{6}$, $h=0.01$. 于是

$$\sin(a+h)=\sin a+[\sin x]'_a h+o(h)=\sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)h+o(h)$$

$$\simeq \sin\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)h=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.01\simeq 0.50866.$$

Example

例二: 求 $\sqrt{3.98}$ 的近似值.

解: 记 $a = 4$, $h = -0.02$. 于是

$$\sqrt{3.98} = \sqrt{a+h} = \sqrt{a} + (\sqrt{x})'_a h + o(h)$$

$$\simeq \sqrt{4} + \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4} \times (-0.02)$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \times (-0.02) = 1.995.$$

Theorem

定理 [链规则The chain rule]: 设 $g(x)$ 于 x 可导, $f(u)$ 于 $u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $f(g(x))$ 于 x 处可导, 并且

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x), \quad u = g(x)$$

$$\text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad y = f(u), u = g(x).$$

Example

例一：求导数 $[\sqrt{x^2+1}]'$.

解：将函数 $\sqrt{x^2+1}$ 看作函数 $f(u)=\sqrt{u}$ 与 $g(x)=x^2+1$ 的复合，即 $\sqrt{x^2+1}=f(g(x))$. 于是根据链规则得

$$\left[\sqrt{x^2+1}\right]' = [f(g(x))]' = f'(u)g'(x) = (\sqrt{u})'(x^2+1)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Example

例二: 求导数 $[\ln\tan(x^2)]'$.

解: 函数 $\ln\tan(x^2)$ 可看作三个函数的复合, 即 $f(u)=\ln u$, $u=g(v)=\tan v$, $v=\phi(x)=x^2$ 的复合. 两次利用链规则得

$$[\ln\tan(x^2)]'=[f(g(\phi(x)))]'=f'(u)g'(v)\phi'(x)$$

$$=[\ln u]'[\tan v]'[x^2]'=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 2x=\frac{1}{\tan v}\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 2x$$

$$=\frac{2x}{\sin v\cos v}=\frac{2x}{\sin(x^2)\cos(x^2)}.$$

例三

Example

例: 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 可导, 且 $u(x) > 0$.

(i) 设 a 为常数, 则 $[u(x)^a]' = au(x)^{a-1}u'(x)$;

(ii) 设 $b > 0$ 为正常数, 则 $[b^{v(x)}]' = b^{v(x)}(\ln b)v'(x)$;

(iii) 考虑 $[u(x)^{v(x)}]'$.

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]' = \left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot [v(x)\ln u(x)]'$$

$$= e^{v(x)\ln u(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

例: 求导数 $f'(x)$, 其中

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[x^2(2x+3)\right]^{\frac{1}{3}}.$$

解: 利用对数函数的性质(化乘除为加减), 可简化多因子函数的求导计算. 如本例.

$$\ln|f(x)|=\frac{1}{2}(\ln|x+1|-\ln|x-1|)+\frac{1}{3}(2\ln|x|+\ln|2x+3|)$$

$$\Rightarrow\quad\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{2x+3}\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2-1} + \frac{2}{3}\frac{2x+3+x}{x(2x+3)} = \frac{2(x+1)}{x(2x+3)} - \frac{1}{x^2-1}.$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = f(x)\left(\frac{2(x+1)}{x(2x+3)} - \frac{1}{x^2-1}\right).$$

解答完毕.

链规则回忆

Theorem

定理 [链规则The chain rule]: 设 $g(x)$ 于 x 可导, $f(u)$ 于 $u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $f(g(x))$ 于 x 处可导, 并且

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x), \quad u = g(x)$$

$$\text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad y = f(u), u = g(x).$$

证明: 只要证明复合函数 $f(g(x))$ 在任意一个固定点 x_0 处可微, 并且 $[f(g(x))]'_{x_0} = f'(u_0)g'(x_0)$, $u_0 = g(x_0)$ 即可. 定义

$$h(u) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}, & u \neq u_0, \\ f'(u_0), & u = u_0, \end{cases}$$

则 $h(u)$ 在 u_0 处连续, 且 $f(u) - f(u_0) = h(u)(u - u_0)$. 于是

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = h(g(x))\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(u_0)g'(x_0),$$

当 $x \to x_0$ 时. 定理得证. $\square$

一阶微分形式的不变性

设函数 $y = f(u)$ 可导，则它的微分为 $dy = f'(u)du$. 当 $u = u(x)$ 是函数且可导时，复合函数 $f(u(x))$ 的微分为

$$dy = [f(u(x))]'dx = f'(u)u'(x)dx = f'(u)du.$$

这表明函数 $f(u)$ 的微分总可以写作 $dy = f'(u)du$，无论 u 是独立变量或是函数 $u = u(x)$. 这个性质称为一阶微分形式的不变性. 这一性质对于高阶微分不再成立.

反函数导数

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上严格单调, 连续, 且在点 $x_0 \in (a, b)$ 处可导. 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 在点 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$[f^{-1}(y)]'_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Example

例一: 熟知正弦函数 $y = \sin x$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调上升, 并且 $[\sin x]' = \cos x \neq 0$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 根据反函数导数定理可知, 反函数 $x = \arcsin y$ 在 $(-1, 1)$ 上也可导, 且

$$[\arcsin y]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \sin x.$$

由于 $\cos x > 0$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 故 $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ $= \sqrt{1 - y^2}$. 因此

$$[\arcsin y]' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \forall y \in (-1, 1).$$

Example

例二: 类似可证余弦函数 $y = \cos x$, $x \in (0, \pi)$, 的反函数 $x = \arccos y$ 的导数为

$$[\arccos y]' = \frac{1}{[\cos x]'} = \frac{1}{-\sin x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \forall y \in (-1, 1).$$

Example

例三: 函数 $y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\uparrow$ 严格, 且 $[\tan x]'=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. 根据反函数导数定理可知其反函数 $x=\arctan y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 并且

$$[\arctan y]'=\frac{1}{[\tan x]'}=\cos^2 x.$$

由于 $y=\tan x$, 故 $y^2=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1$. 由此得 $\frac{1}{\cos^2 x}=1+y^2$. 于是

$$[\arctan y]'=\cos^2 x=\frac{1}{1+y^2},\quad \forall y\in(-\infty,+\infty).$$

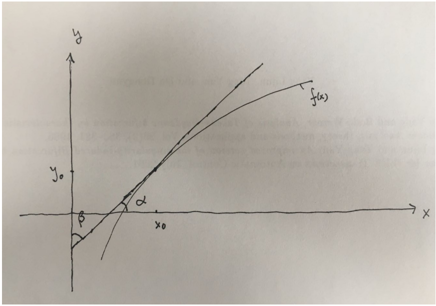
证: 取 y_0 附近 y, 记 $x_0=f^{-1}(y_0)$, $x=f^{-1}(y)$, 则 $y_0=f(x_0)$, $y=f(x)$. 于是

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

$$=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\to\frac{1}{f'(x_0)},\quad y\to y_0.$$

最后一步的解释: 当 $y\to y_0$ 时, 由反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的连续性知 $f^{-1}(y)\to f^{-1}(y_0)$, 即 $x\to x_0$. 定理得证.

反函数导数的几何解释



如图所示，函数 $f(x)$ 在点x_0 处的导数 $f'(x_0) = \tan\alpha$，而反函数 $f^{-1}(y)$ 在点 y_0 处的导数 $[f^{-1}(y)]'_{y_0} = \tan\beta$. 而 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$，即 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. 因此 $[f^{-1}(y)]'_{y_0} = \tan\beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$ $= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

假设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的，且 $y(x)$ 可导. 考虑如何求导数 $y'(x)$. 至于函数方程 $F(x, y) = 0$ 在何种条件下能够确定一个可导函数(称作隐函数)，即隐函数存在唯一性问题，我们将在下个学期专门讨论.

Example

例一: 假设由方程 $y^2 + 2\ln|y| = x^4$ 确定了一个可导函数 $y(x)$, 即 $y^2(x) + 2\ln|y(x)| \equiv x^4$. 对这个恒等式两边求导得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad \text{其中} \quad y = y(x),\ y' = y'(x)$$

$$\Rightarrow \quad y'\left(y + \frac{1}{y}\right) = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x^3}{(y + \frac{1}{y})} = \frac{2x^3 y}{1 + y^2}.$$

例: 假设由方程 $x^2 + y\cos x - 2e^{xy} = 0$ 在点 $(x, y) = (0, 2)$ 附近确定了一个可导函数 $y = y(x)$. 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程.

解: 注意点 $(0, 2)$ 满足方程 $x^2 + y\cos x - 2e^{xy} = 0$. 因为将 $(x, y) = (0, 2)$ 代入方程得 $0^2 + 2\cos 0 - 2e^0 = 0$, 即方程成立.

求过点 $(0, 2)$ 处的切线方程, 即要求切线的斜率即 $y'(0)$. 为此关于恒等式 $x^2 + y(x)\cos x - 2e^{xy(x)} \equiv 0$ 两边求导得

$$2x + y'\cos x + y(-\sin x) - 2e^{xy(x)}[y + xy'(x)] = 0.$$

例二续

将点 $(x,y)=(0,2)$ 代入上述方程得

$$2\cdot 0+y'(0)\cdot\cos 0+2\cdot(-\sin 0)-2e^{0\cdot 2}[2+0\cdot y'(0)]=0.$$

此即 $y'(0)-2\cdot 2=0$, 即 $y'(0)=4$. 于是所求切线方程为

$y-2=4(x-0)$, 即 $y=4x+2$. 解答完毕.

参数式函数求导

设函数 $y = y(x)$ 是由参数方程 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$ 确定，其中函数 $\phi(t)$, $\psi(t)$ 均可导. 还是假设 $\phi(t)$ 严格单调，且 $\phi'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$. 故反函数 $\phi^{-1}(x)$ 可导. 从而函数 $y = y(x)$ 可表为 $y(x) = \psi(\phi^{-1}(x))$. 根据链规则以及反函数求导定理得

$$y'(x) = \psi'(t) \cdot [\phi^{-1}(x)]' = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}, \quad \text{其中} \quad t = \phi^{-1}(x).$$

例子: 由旋轮线方程确定的函数之导数

例: 考虑由旋轮线参数方程 $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ 所确定的函数 $y = y(x)$, 其中 $a > 0$ 为常数. 求导数 $y'(x)$.

解: 记 $\phi(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$, $\psi(\theta) = a(1 - \cos\theta)$. 易证 $\phi(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上严格↑, 且 $\phi'(\theta) = a(1 - \cos\theta) \neq 0$, $\forall\theta \in (0, 2\pi)$. 于是

$$y'(x) = \frac{\psi'(\theta)}{\phi'(\theta)} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

考虑半径为 a 的圆盘(轮子)在 x 轴上滚动，轮子的边缘上的任意一点的轨迹即为旋轮线．如图所示.

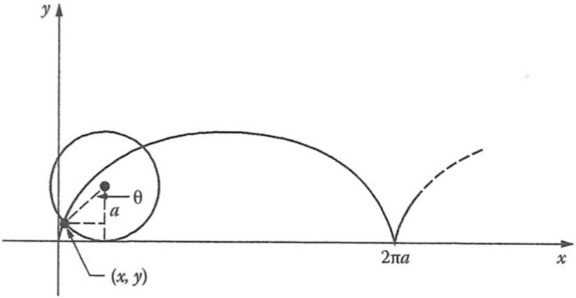
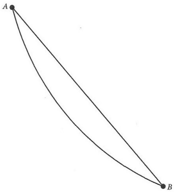


FIGURE 11

最速下降问题: Johann Bernoulli 于1696 年在《教师学报》提出如下问题征解: 考虑空间两点 A 和 B, 用一根金属丝串上一个珠子, 并连接点 A 和 B. 再设 A 高于 B. 如图所示.



问题: 当金属丝(可看作平面曲线)呈何种形状时, 珠子沿着金属丝从点 A 滑向点 B 的时间最短? 这样的平面曲线若存在, 则称作最速下降曲线(路径). 猜测: 直线段? 圆弧? 抛物线?

最速下降曲线，续

答案：如图建立平面坐标系，点 A 位于原点，y 轴的正向垂直向下. Bernoulli 兄弟，Newton 等证明最速下降曲线就是旋轮线，即其参数方程可以表示为 $x = a(\theta - \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$，$\theta \in (0, 2\pi)$

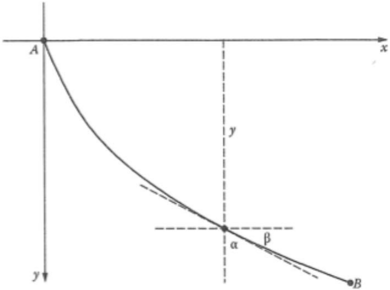
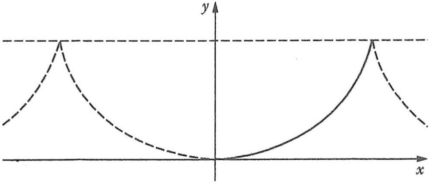


FIGURE 10

Christiaan Huygens (1629-1695) 证明旋轮线具有如下等时性质：将一根金属丝弯成如下旋轮线的形状，即 $x = a(\theta + \sin\theta)$，$y = a(1 - \cos\theta)$，$\theta \in (0, 2\pi)$.



如果金属丝串上一个珠子，那么珠子从曲线上任意点开始，下滑至原点所需时间恒为常数，即与珠子下滑的位置无关.

作业

课本习题3.1 (pp. 73-74): 1(1)(3), 2(1)(3)(5), 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14.

课本习题3.2 (pp. 83-84): 2(1)(3)(5)(7), 4(1)(3)(5)(7), 5(1)(3)(5), 6(1)(3)(5).