《微积分A1》第十九讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月18日

Lemma

引理三: 设 P_1 和 P_2 为 $[a,b]$ 的任意两个分割, 则 $L_{P_1} \leq U_{P_2}$.

Proof.

证明: 记 $P = P_1 \cup P_2$, 即 P 为分割 P_1 和 P_2 分点的合并, 则 P 既是 P_1 又是 P_2 的加密分割. 根据引理二可知

$$L_{P_1} \leq L_P \leq U_P \leq U_{P_2}.$$

证毕. $\square$

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，即 $m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a,b]$，

则对 $[a,b]$ 的任何分割 P，$m(b-a) \le L_P \le U_P \le M(b-a)$.

Definition

定义：分别称

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \triangleq \inf\{U_P\} \quad 和 \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx \triangleq \sup\{L_P\}$$

为有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Darboux 上积分和下积分.

显然对 $[a,b]$ 的任意分割 P，

$$L_P \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U_P.$$

Lemma

引理: 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则

$$\lim_{\|P\|\to 0} U_P = \overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \lim_{\|P\|\to 0} L_P = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

证明: 只证第一个等式. 第二个等式的证明类似. 要证第一个等式, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\forall P : \|P\| < \delta, \quad 0 \le U_P - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

证明，续一

由 Darboux 上积分的定义知，任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P_0，使得 $U_{P_0} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$. 设分割 P_0 有 k 个内分点 (除去两个端点的分点)，则对任意分割 P，作加密分割 $P' = P \cup P_0$，即分割 P' 可看作在分割 P 中再添加至多 k 个新分点所得到的分割. 由加密分割的性质可知

$$U_{P'} \le U_P \le U_{P'} + k\omega\|P\| \quad 且 \quad U_{P'} \le U_{P_0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le U_P - \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U_{P'} + k\omega\|P\| - \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\le U_{P_0} - \overline{\int_a^b} f(x)dx + k\omega\|P\| < \varepsilon + k\omega\|P\| < 2\varepsilon,$$

证明，续二

最后一个不等式成立，只要分割 $\|P\| < \frac{\varepsilon}{1+k\omega}$ 即可，其中 ω 表示 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的振幅，即 $\omega = M - m$，$m \le f(x) \le M$，$\forall x \in [a,b]$。证毕.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则下述条件等价

(i) f 在 $[a,b]$ 上可积;

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$, 存在分割 P, 使得 $U_P-L_P<\varepsilon$;

(iii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

以下证 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 记 $J=\int_a^b f(x)dx$. 根据可积定义知对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i - J\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P : \|P\| < \delta, \quad \forall \xi = \{\xi_i\}.$$

于上式中关于样点集ξ分别取上确界和下确界就得到

$|U_P - J| \le \varepsilon/3$ 以及 $|L_P - J| \le \varepsilon/3$. 于是

$$0 \le U_P - L_P = U_P - J - (L_P - J)$$

$$\le |U_P - J| + |L_P - J| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即条件(ii)成立.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 假设条件 (ii) 成立，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P，使得 $U_P - L_P < \varepsilon$，则根据定义得

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le U_P - L_P < \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$，即条件 (iii) 成立.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 假设条件 (iii) 成立，即 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$，要证 f 可积.

记 Darboux 上积分与 Darboux 下积分的共同值为 J. 对任意分割 P，以及任意样点集 $\xi = \{\xi_i\}$，显然成立

$$L_P \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \le U_P. \quad (*)$$

由 Darboux 定理知当 $\|P\| \to 0$ 时，$U_P \to \overline{\int_a^b} f(x)dx = J$，以及 $L_P \to \underline{\int_a^b} f(x)dx = J$. 于不等式 (*) 中关于 $\|P\| \to 0$ 取极限，并根据极限的两边夹法则即得

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = J.$$

即条件 (i) 成立. 定理得证. $\square$

Dirichlet 函数不可积

例: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积, 其中

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

证明: 对 $[a,b]$ 的任意分割 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$M_i=\sup\{D(x), x\in[x_{i-1},x_i]\}=1,$$

$$m_i=\inf\{D(x), x\in[x_{i-1},x_i]\}=0,$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$U_P=\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i=\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i=b-a,$$

$$L_P=\sum_{i=1}^{n}m_i\triangle x_i=0.$$

$$\Rightarrow\quad \overline{\int_a^b}D(x)dx=\inf\{U_P\}=b-a,$$

$$\underline{\int_a^b}D(x)dx=\sup\{L_P\}=0.$$

根据 Darboux 可积性定理知 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任意有界闭区间 $[a,b]$ 上不可积. 证毕.

Definition

定义: 区间 J 上的函数 f(x) 称为在 J 上一致连续 (uniformly continuous), 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ (δ 仅与 ε 有关), 使得只要 $|x - x'| < \delta$, $\forall x, x' \in J$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

显然若函数 f(x) 在区间 J 上一致连续, 则 f(x) 在区间 J 上处处连续. 反之不然. 请看下例.

Example

例: 函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证明: 反证. 假设 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上一致连续, 则对于 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得当 $|x - x'| < \delta_0$, $\forall x, x' \in (0,1)$, 就有 $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}| < \frac{1}{2}$.

取 $x_k = \frac{1}{k}$, 由于 $|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \delta_0$, 只要 k 充分大, 故

$$\left|\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\right| = |k - k - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

这就得到一个矛盾. 证毕.

Lemma

引理: 设 $f(x)$ 为在区间 J 定义的函数, 则 $f(x)$ 在 J 上非一致连续, 当且仅当存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及存在 $x_n, x_n' \in J$, 使得

$$|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}, \quad 但 \quad |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \geq 1.$$

证明

Proof.

证明: 依定义 f 在区间 J 上一致连续 $\Longleftrightarrow$ 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x'| < \delta$, $\forall x, x' \in J$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

因此 f 在区间 J 上非一致连续 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任给 $\delta > 0$, 存在 $x_\delta, x'_\delta \in J$, $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$, 使得 $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0$. 因此, 如果取 $\delta = \frac{1}{n}$, 则存在 $x_n, x'_n \in J$, $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$, 使得 $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$. $\square$

Theorem

定理: 有界闭区间上的连续函数必一致连续.

证明: 设函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续. 要证 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 反证. 若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 且存在 $x_n, x_n' \in [a,b]$, 使得 $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0$. 由于 $\{x_n\} \subset [a,b]$ 有界, 由 B-W 定理知序列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k} \to x^*$, $k \to +\infty$. 再由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$, $k \to +\infty$.

另一方面由 $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ 知 $x'_{n_k} \to x^*$, 故 $f(x'_{n_k}) \to f(x^*)$, $k \to +\infty$. 于是

$$0 < \varepsilon_0 \leq |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})|$$

$$\leq |f(x_{n_k}) - f(x^*)| + |f(x^*) - f(x'_{n_k})| \to 0, \quad k \to +\infty.$$

矛盾. 矛盾说明函数 f 在 $[a, b]$ 上一致连续. 定理得证.

Theorem

定理: 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明: 由 Cantor 定理知 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上一致连续, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x'| < \delta$, $\forall x, x' \in [a,b]$, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. 对区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 根据连续函数的最值性质知

$$M_i = \sup\left\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$$

$$= \max\left\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = f(\xi_i),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

证明续一

$$m_i = \inf\left\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$$

$$= \min\left\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = f(\eta_i),\ \eta_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

于是对应分割 P 的 Darboux 上和与下和可表为

$$U_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i,$$

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i) \triangle x_i.$$

当 $\|P\| < \delta$ 时,

$$
\begin{aligned}
0 &\le U_P - L_P \\
&\le \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\eta_i)] \triangle x_i \\
&< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = \varepsilon (b - a).
\end{aligned}
$$

由 Darboux 可积性定理知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积. 定理得证. $\square$

例: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[m,M]$ 上连续且下凸, 这里 M 和 m 分别是 $f(x)$ 的一个上界和一个下界, 即 $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [0,1]$. 证明

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \le \int_0^1 g(f(x))dx.$$

证明: 由于 f, g 均连续, 故复合函数 $g(f(x))$ 也连续, 从而在 $[0,1]$ 上可积. 记 $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 由 f 的可积性知

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \to \int_0^1 f(x)dx.$$

例子续

再由 g 的连续性和下凸性可得

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) = g\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(f(x_i))$$

$$= \int_0^1 g(f(x))dx.$$

命题得证.

Theorem

定理: 有界闭区间上的单调函数可积.

证明: 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数. 不妨设 f 为单调增加. 对 $[a, b]$ 作分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 我们有

$$M_i = \sup\left\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = f(x_i),$$

$$m_i = \inf\left\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = f(x_{i-1}).$$

于是

$$0 \le U_P - L_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x_i - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \triangle x_i$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \|P\| = [f(b) - f(a)] \|P\|.$$

若 $f(b) = f(a)$，则 f 为常数函数，可积. 设 $f(b) > f(a)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，使得当分割 P 满足 $\|P\| < \delta$ 时，$U_P - L_P < \varepsilon$. 由可积性定理知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 定理得证.

Definition

<u>定义</u>: 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一实数集. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一列开区间 $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ (有限个或可数无穷个), 使得

$$S \subset \bigcup_{k \geq 1} J_k \quad 且 \quad \sum_{k \geq 1} |J_k| < \varepsilon,$$

则称数集 S 为零测集, 其中 $|J_k| = \beta_k - \alpha_k$.

<u>注</u>: 设 $\{a_k\}$ 为一个数列, 称 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 为无穷级数; 称 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 该无穷级数的前 n 项和(部分和). 若数列 $\{S_n\}$ 收敛, 即极限 $\lim_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 记作 S, 则称无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛, 其和为 S, 即 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \triangleq \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

性质一: 有限点集为零测集.

证明: 设 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \subset \mathbb{R}$ 为有限点集, 作开区间 $J_k = (x_k - \delta, x_k + \delta)$, 其中 $\delta = \frac{\varepsilon}{2m+1}$, 则 $|J_k| = 2\delta$. 于是

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k \quad \text{且} \quad \sum_{k=1}^{m} |J_k| = 2m\delta = \frac{2m\varepsilon}{2m+1} < \varepsilon.$$

故点集 S 为零测集. 证毕.

性质二: 零测集的任意子集也是零测集.

证明: 结论显然. 证明略去.

性质三: 可数无穷点集为零测集.

证明: 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots\}\subset\mathbb{R}$ 为可数无穷点集. 对 $\forall\varepsilon>0$, 作开区间 $J_k=(x_k-\frac{\delta}{2^k},x_k+\frac{\delta}{2^k})$, 其中 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, 则 $|J_k|=\frac{\delta}{2^{k-1}}$. 于是

$$S\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty}J_k \quad 且 \quad \sum_{k=1}^{+\infty}|J_k|=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta}{2^{k-1}}=\delta\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}.$$

由于等比级数 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\to 2$, 故级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2$. 因此 $\sum_{k=1}^{+\infty}|J_k|=\delta\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2\delta<\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$. 故点集 S 为零测集. 证毕.

性质四: 设 A 和 B 均为零测集, 则 $A\cup B$ 也是零测集.

证明: 由假设 A 和 B 均为零测集, 故存在两个至多可数的开区间 J_k 和 J'_j, 使得

$$A\subset\bigcup_{k\geq 1}J_k \quad 且 \quad \sum_{k\geq 1}|J_k|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$B\subset\bigcup_{j\geq 1}J'_j \quad 且 \quad \sum_{j\geq 1}|J'_j|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Rightarrow \quad A\cup B\subset\bigcup_{k\geq 1,j\geq 1}(J_k\cup J'_j) \quad 且 \quad \sum_{k\geq 1}|J_k|+\sum_{j\geq 1}|J'_j|<\varepsilon.$$

故 $A\cup B$ 是零测集. 证毕.

Theorem

定理: 设 f 为区间 $[a, b]$ 上的有界函数, 则 f 于 $[a, b]$ 可积 $\Longleftrightarrow$ f 在 $[a, b]$ 上的间断点集为零测集.

证明有点长. 略去. 详见常庚哲史济怀《数学分析教程》(上册), 第三版, 第 271 页.

术语: 当函数 f 在 $[a, b]$ 上的间断点集为零测集, 或等价地说, f 在 $[a, b]$ 上除去一个零测集外处处连续时, 我们常说函数 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处 (almost everywhere) 连续, 并记作 f 连续 a.e. on $[a, b]$.

例一: 符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在任何闭区间上可积.

例二: 取整函数 $[x]$ 在任何闭区间上可积.

例三: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a,b]$ 上不可积. 因为函数 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集为整个区间, 而非零测集. 故 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数, $c \in (a,b)$, 则

(i) f 在 $[a,b]$ 上可积 $\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积;

(ii) 当 f 在 $[a,b]$ 上可积时,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

证 (i): f 在 $[a,b]$ 上可积

$\Longleftrightarrow$ f 连续 a.e. on $[a,b]$

$\Longleftrightarrow$ f 连续 a.e. on $[a,c]$ 和 $[c,b]$

$\Longleftrightarrow$ f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积.

证 (ii): 当 f 在 $[a,b]$ 上可积时，根据结论 (i) 知，f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积. 取 $[a,c]$ 的一个分割 P_1，以及 $[c,b]$ 的一个分割 P_2，则 $P = P_1 \cup P_2$ 为 $[a,b]$ 的一个分割. 于是函数 f 关于分割 P 的任意一个 Riemann 和可表为

$$\sum_i f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i\in J_1} f(\xi_i)\triangle x_i + \sum_{i\in J_2} f(\xi_i)\triangle x_i,$$

其中 $J_1 = \{i, [x_{i-1}, x_i] \subset [a,c]\}$, $J_2 = \{i, [x_{i-1}, x_i] \subset [c,b]\}$. 因此上式右端的两个和式分别为 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的 Riemann 和，分别关于分割 P_1 和 P_2.

证明续二

显然$\|P\| = \max\{\|P_1\|, \|P_2\|\}$. 因此在等式

$$\sum_i f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i\in J_1} f(\xi_i)\triangle x_i + \sum_{i\in J_2} f(\xi_i)\triangle x_i$$

中, 令 $\|P\| \to 0$ 取极限即得

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

结论 (ii) 得证. 从而定理得证.

Theorem

定理：若 $f \in R[a,b]$，则其绝对值函数 $|f| \in R[a,b]$，且

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Proof.

证明：$f \in R[a,b]$

$\Rightarrow$ f 于 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ $|f|$ 于 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ $|f| \in R[a,b]$.

由不等式 $f(x) \le |f(x)|, \forall x \in [a,b]$ 得 $\int_a^b f \le \int_a^b |f|$. □

Theorem

定理：设 $f, g \in R[a,b]$，则乘积函数 $fg \in R[a,b]$.

Proof.

证明：$f, g \in R[a,b]$

$\Rightarrow$ f 和 g 在 $[a,b]$ 上均几乎处处连续

$\Rightarrow$ 乘积 fg 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续

$\Rightarrow$ 乘积 $fg \in R[a,b]$.

命题得证. $\square$

第二个蕴含关系：记 C_f 和 D_f 为 f 的连续点集和间断点集，则 $C_f \cap C_g \subset C_{fg}$，

从而 $D_f \cup D_g \supset D_{fg}$. 由于 D_f 和 D_g 均为零测集，故 D_{fg} 也为零测集.

Theorem

定理：设 $f, g \in R[a, b]$，则

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2. \quad (*)$$

比较有限型或离散型 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

不等式 (*) 可看作连续型 Cauchy-Schwarz 不等式.

<u>证明大意</u>: 由乘积 fg 的可积性知

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i \to \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

另一方面根据离散型 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\triangle x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}g(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right)^2\\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right]^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left[g(\xi_i)\sqrt{\triangle x_i}\right]^2\right)\\ &\le \left(\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\triangle x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g^2(\xi_i)\triangle x_i\right) \to \int_a^b f^2\int_a^b g^2. \quad \square\end{aligned}$$

Theorem

定理: 设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m \le \mu \le M$, $m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}$. 当 f 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

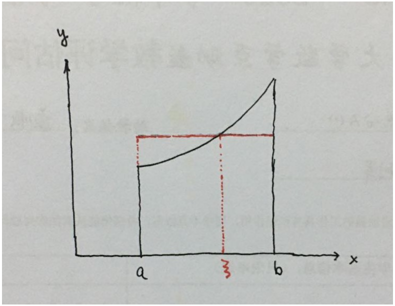
几何意义

当 $g(x) \equiv 1$, 且 $f(x)$ 连续时, 积分中值定理有如下形式

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

上式的几何意义就是曲边四边形的面积, 等于某个矩形面积.

如图所示.



证明: 不失一般性设 $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. 由 $m \leq f(x) \leq M$ 可得 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \forall x \in [a, b]$. 于是

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g. \quad (*)$$

如果 $\int_a^b g = 0$, 则必有 $\int_a^b fg = 0$. 于是所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 成立. 设 $\int_a^b g > 0$, 则由式 (*) 得

$$m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M.$$

证明续

于是取

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g},$$

所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

成立. 当 $f(x)$ 连续时, 由介值定理知存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$. 因此不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

成立. 命题得证.

Example

例: 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=0. \quad (*)$$

证明: 由积分中值定理知

$$\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi\sin\xi_n}{\xi_n}, \quad \xi_n\in[n,n+\pi].$$

由此立刻得到极限式 (*) 成立. 证毕.

作业

课本习题5.1 (pp.135): 4, 5, 6, 9, 10, 14, 15(1)(3).

课本习题5.2 (pp.140-141): 4, 5, 6.