《微积分A1》第十八讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月13日

定积分的几何意义

当 $f(x) \geq 0$ 时，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可以看作或定义为曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 下的面积. 如图所示

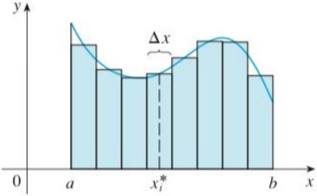

FIGURE 1
If $f(x) \geqslant 0$, the Riemann sum $\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ is the sum of areas of rectangles.

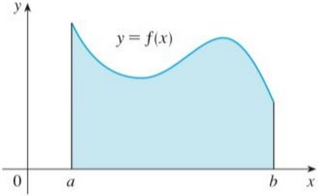

FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b.

当 $f(x)$ 有正有负时，积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可以看作曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 下的面积的代数和(净面积)．如图所示

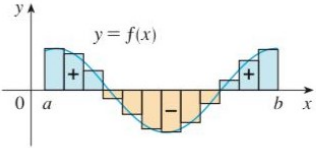

FIGURE 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ is an approximation to the net area.

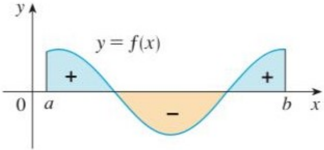

FIGURE 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ is the net area.

定积分的物理意义

1. 设在区间 $[a, b]$ 上分布有某种物质，$\rho(x) \geq 0$ 为其分布密度，则积分 $\int_a^b \rho(x)dx$ 可解释为(或定义为)该物质的总量.

2. 设质点作直线运动，时刻 t 时速度为 $v(t)$，则积分 $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ 可解释为(或定义为)质点在时间间隔 t_1 到 t_2 所经过的路程.

3. 设质点沿着 x 轴作直线运动，$f(x)$ 为质点位于位置 x 处所受的力 (x 轴方向的力)，则积分 $\int_a^b f(x)dx$ 可解释为(或定义为) 力 $f(x)$ 关于质点从点 $x = a$ 运动到点 $x = b$ 所做的功.

1. 保号性：设 $f \in R[a,b]$ 且 $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\int_a^b f \geq 0.$$

2. 保序性：设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

3. 线性性：设 $f, g \in R[a,b]$, 则 $\lambda f, f \pm g \in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f, \quad \int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g.$$

例一

Example

例: 证明 $\int_a^b 1dx = b - a$.

证明: 记 $f(x) = 1$. 对任意分割 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 以及任意关于分割 P 的样点集 $\xi = \{x_i^*\}$, 相应的 Riemann 和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = b - a.$$

因此由积分定义知, 函数 $f(x) = 1$ 在任意闭区间 $[a, b]$ 上可积, 且 $\int_a^b 1dx = b - a$. 证毕.

例二: 计算 $\int_a^b x dx$.

解: 对任意分割 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 以及对于任意关于分割 P 的样点集 $\{x_i^*\}$, $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$, 相应的 Riemann 和为 $\sum_{i=1}^n x_i^*\triangle x_i$. 记子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的中点为 $x_i^{**}=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$. 于是

$$\sum_{i=1}^n x_i^*\triangle x_i=\sum_{i=1}^n x_i^{**}\triangle x_i+\sum_{i=1}^n (x_i^*-x_i^{**})\triangle x_i.$$

上式右边第一个和式为

$$\sum_{i=1}^n x_i^{**}\triangle x_i=\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(x_i+x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

再考虑第二个和式，即和式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - x_i^{**})\triangle x_i.$$

由于 $x_i^*, x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$，故 $|x_i^* - x_i^{**}| \leq (x_i - x_{i-1}) \leq \|P\|$. 于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - x_i^{**})\triangle x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i^* - x_i^{**}|\triangle x_i$$

$$\leq \|P\|\sum_{i=1}^{n}\triangle x_i = \|P\|(b-a).$$

因此对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \varepsilon$，使得当任意分割 P 满足 $\|P\| < \delta = \varepsilon$ 时，对任意样点集 $\{x_i^*\}$，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^* \triangle x_i - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right| \leq \|P\|(b-a) \leq (b-a)\varepsilon.$$

根据积分定义，函数 x 在任意区间 $[a, b]$ 上可积，且

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

解答完毕.

定积分的两个基本问题:

(i) 如何判断一个函数是否可积?

(ii) 如何计算定积分.

关于第一个问题, 我们有如下结论.

Theorem

定理: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 即

$C[a,b] \subset R[a,b]$.

证明稍后给出.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 如果存在函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \quad (\text{Newton}-\text{Leibniz 公式})$$

注: 上述定理称为微积分学基本定理 (the fundamental theorem of Calculus). 有时简记作 FTC.

Definition

<u>定义</u>: 给定 (a,b) 上的函数 $f(x)$, 若存在可微函数 $F(x)$, 使得 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$, 则称 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的原函数 (primitive functions), 或反导数 (anti-derivatives)

证明: 对区间 $[a,b]$ 作 n 等分, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $x_i = a + ih$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, 则

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \to \int_a^b f(x)dx, \ \ n \to +\infty,$$

其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 定理得证. $\square$

注: 为了表示微分和积分的互逆关系, N-L 公式常形式地写作

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

例子

Example

例: 利用 N-L 公式计算如下积分.

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$\int_a^b x^n dx = \int_a^b d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1};$$

$$\int_a^b \sin x dx = \int_a^b d(-\cos x) = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b;$$

$$\int_a^b \cos x dx = \int_a^b d(\sin x) = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a.$$

例: 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

解: 将上述极限转化为某个函数的 Riemann 和的极限. 记

$$a_n=\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{则}\quad a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

于是 a_n 可看作函数 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的一个 Riemann 和. 由于 $\ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 故在区间 $[0,1]$ 上可积. 因此

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \ln(1+x)dx.$$

易证 $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ 是函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的一个原函数(我们将在不定积分部分学习如何求原函数). 因此

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = \left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

于是原极限为

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n\to+\infty} a_n} = e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}.$$

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明: 设 $\int_a^b f(x)dx = J$, 根据积分定义知对于 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 使得对分割 P, $\|P\| < \delta$, 则有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i - J\right| < 1,$$

这里样点 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 由上式得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i\right| \le |J| + 1.$$

证明，续

$$\text{由}\quad f(x_1^*)\triangle x_1=\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\triangle x_i-\sum_{i=2}^{n}f(x_i^*)\triangle x_i$$

$$\Rightarrow\quad |f(x_1^*)\triangle x_1|\le\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\triangle x_i\right|+\left|\sum_{i=2}^{n}f(x_i^*)\triangle x_i\right|$$

$$\Rightarrow\quad |f(x_1^*)|<\frac{1}{\triangle x_1}\left(|J|+1+\left|\sum_{i=2}^{n}f(x_i^*)\triangle x_i\right|\right).$$

固定样点 $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$, $i=2,\cdots,n$, 则上式右边是一个确定的数，而 x_1^* 则可以在子区间 $[x_0,x_1]$ 上任意取值．这就证明了 $f(x)$ 在子区间 $[x_0,x_1]$ 上有界．同理可证 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上有界，$i=2,\cdots,n$．从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界．证毕．

注记: 定义函数 $f(0)=0$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x\in(0,1]$. 显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界. 根据上述定理可知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上不可积. 但这个函数广义可积. 广义可积以后定义.

Theorem

定理: 设 f 为 $[a,b]$ 上定义的函数, $c \in (a,b)$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积, 当且仅当 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积. 并且当 f 在 $[a,b]$ 上可积时,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (*)$$

证明: 第一个关于可加性的结论是稍后介绍的 Lebesgue 大定理的推论. 以下证明积分等式(*). 由于可积性得到保证, 故在分割时, 可以始终将点 $x = c$ 取为分点, 然后取极限即得到积分等式(*).

Example

例: 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 不恒为零, 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

证明: 因为 f 非负且不恒为零, 故存在点 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) > 0$. 根据连续函数性质知存在 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 使得 $f(x) > \frac{1}{2}f(x_0)$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$. 再根据积分可加性知

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx$$

$$\geq \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}f(x_0)dx = \frac{1}{2}f(x_0)(\beta-\alpha) > 0.$$

命题得证.

设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数. 取 $[a,b]$ 中一个分割 P:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 记

$$M_i \triangleq \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i \triangleq \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

再记 $\omega_i = M_i - m_i$, 称 ω_i 为函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$

上的振幅, $i = 1, 2\cdots, n$. 分别称

$$U_P \triangleq \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i, \quad L_P \triangleq \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

为关于函数 $f(x)$ 关于分割 P 的 Darboux 上和与 Darboux 下和.

(U=upper, L=lower)

Darboux 上和与下和的性质

Lemma

引理一：对于任意 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$，$m \le f(x) \le M$，$\forall x \in [a,b]$，对于区间 $[a,b]$ 的任意一个分割 P，及其任意一个 Riemann 和 $\sigma(P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i$，成立

$$m(b-a) \le L_P \le \sigma(P,\xi) \le U_P \le M(b-a).$$

Proof.

证明：对 $1 \le i \le n$，显然有 $m \le m_i \le f(x_i^*) \le M_i \le M$，于是 $m\triangle x_i \le m_i\triangle x_i \le f(x_i^*)\triangle x_i \le M_i\triangle x_i \le M\triangle x_i$. 关于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 求和即得所要证明的不等式. 证毕. □

分割加密

Definition

<u>定义</u>: 设 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 和 $P': a = x_0' < x_1' < x_2' < \cdots < x_m' = b$ 为区间 $[a, b]$ 的两个分割. 若 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subsetneq \{x_0', x_1', \cdots, x_m'\}$, 则称分割 P' 是分割 P 的一个加密.

换言之, 若分割 P' 是 P 的一个加密, 则 P' 可以看作在分割 P 中添加若干个分点所得到的分割.

Lemma

引理二: 若分割 P' 是在分割 P 中添加 k 个新的分点而得, 则

(i) $U_{P'} \le U_P \le U_{P'} + k\omega\|P\|$;

(ii) $L_P \le L_{P'} \le L_P + k\omega\|P\|$,

其中 $\omega = M - m$, 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅, $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$, $\|P\| = \max\{\triangle x_i\}$, $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$.

粗略地说, 随着分割加密, 上和 U_P 不增, 下和 L_P 不减.

证明: 只证 (i) 且 $k=1$ 情形. 设 $P'=P\cup\{x'\}$, $x'\in(x_{i-1},x_i)$.
为明确计不妨设 $i=1$, 即 $x'\in(x_0,x_1)$. 记

$$M_1'=\sup\{f(x),x\in[x_0,x']\},\quad M_1''=\sup\{f(x),x\in[x',x_1]\},$$

则 $M_1',M_1''\le M_1$, 其中 $M_1=\sup\{f(x),x\in[x_0,x_1]\}$. 于是

$$U_P-U_{P'}=\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i-\left(M_1'\triangle x_1'+M_1''\triangle x_1''+\sum_{i=2}^{n}M_i\triangle x_i\right)$$

$$=M_1\triangle x_1-M_1'\triangle x_1'-M_1''\triangle x_1''\ge M_1(\triangle x_1-\triangle x_1'-\triangle x_1'')=0,$$

其中 $\triangle x_1'=x_1'-x_0$, $\triangle x_1''=x_1-x_1'$, $\triangle x_1=x_1-x_0$.

另一方面

$$U_P - U_{P'} = M_1 \triangle x_1 - M_1' \triangle x_1' - M_1'' \triangle x_1''$$

$$\leq M_1 \triangle x_1 - m_1 \triangle x_1' - m_1 \triangle x_1''$$

$$= (M_1 - m_1) \triangle x_1 \leq \omega \|P\|.$$

这就证明了 $0 \leq U_p - U_{P'} \leq \omega\|P\|$. 当分割 P' 是在分割 P 中添加 k 个新的分点而得时, 则 $0 \leq U_p - U_{P'} \leq k\omega\|P\|$. 引理得证.

任意 Darboux 下和 $\leq$ 任意 Darboux 上和

Lemma

引理三: 设 P_1 和 P_2 为 $[a, b]$ 的任意两个分割, 则 $L_{P_1} \leq U_{P_2}$.

Proof.

证明: 记 $P = P_1 \cup P_2$, 即 P 为分割 P_1 和 P_2 分点的合并, 则 P 既是 P_1 又是 P_2 的加密分割. 根据引理二可知

$$L_{P_1} \leq L_P \leq U_P \leq U_{P_2}.$$

证毕. □

Darboux 上积分与 Darboux 下积分

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，即 $m \le f(x) \le M,\ \forall x \in [a,b]$，

则对 $[a,b]$ 的任何分割 P，$m(b-a) \le L_P \le U_P \le M(b-a)$.

Definition

定义：分别称

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \triangleq \inf\{U_P\} \quad 和 \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx \triangleq \sup\{L_P\}$$

为有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Darboux 上积分和下积分.

显然对 $[a,b]$ 的任意分割 P，

$$L_P \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U_P.$$

Lemma

引理: 设 f 为 [a, b] 上的有界函数, 则

$$\lim_{\|P\|\to 0} U_P = \overline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \lim_{\|P\|\to 0} L_P = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

证明: 只证第一个等式. 第二个等式的证明类似. 要证第一个等式, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$0 \le U_P - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon, \quad \forall P : \|P\| < \delta.$$

由 Darboux 上积分的定义知，任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P_0，使得 $U_{P_0} < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$. 设分割 P_0 有 m 个内分点 (除去两个端点的分点)，则对任意分割 P，作加密分割 $P' = P \cup P_0$，即分割 P' 可看作在分割 P 中再添加至多 m 个新分点所得到的分割. 由加密分割的性质可知

$$U_{P'} \le U_P \le U_{P'} + m\omega\|P\| \quad 且 \quad U_{P'} \le U_{P_0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le U_P - \overline{\int_a^b} f(x)dx \le U_{P'} + m\omega\|P\| - \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\le U_{P_0} - \overline{\int_a^b} f(x)dx + m\omega\|P\| < \varepsilon + m\omega\|P\| < 2\varepsilon,$$

证明续二

最后一个不等式成立，只要分割 $\|P\| < \frac{\varepsilon}{1+m\omega}$ 即可，其中 ω 表示 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的振幅，即 $\omega = M - m$，$m \le f(x) \le M$，$\forall x \in [a,b]$. 证毕.

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数, 则下述条件等价

(i) f 在 $[a,b]$ 上可积;

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在分割 P, 使得 $U_P - L_P < \varepsilon$;

(iii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

以下证 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii): 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 记 $J = \int_a^b f(x)dx$. 根据可积定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i - J\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall P : \|P\| < \delta, \quad \forall \xi = \{\xi_i\}.$$

于上式中关于样点集ξ分别取上确界和下确界就得到

$|U_P - J| \le \varepsilon/3$ 以及 $|L_P - J| \le \varepsilon/3$. 于是

$$0 \le U_P - L_P = U_P - J - (L_P - J)$$

$$\le |U_P - J| + |L_P - J| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

即条件(ii)成立.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 假设条件(ii) 成立，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P，使得 $U_P - L_P < \varepsilon$，则根据定义得

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le U_P - L_P < \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$，即条件(iii) 成立.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 假设条件 (iii) 成立，即 $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$，要证 f 可积.

证明, 续三

记 Darboux 上积分与 Darboux 下积分的共同值为 J. 对任意分割 P, 以及任意样点集 $\xi = \{\xi_i\}$, 显然成立

$$L_P \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i \leq U_P. \quad (*)$$

由 Darboux 定理知当 $\|P\| \to 0$ 时, $U_P \to \overline{\int_a^b} f(x)dx = J$, 以及 $L_P \to \underline{\int_a^b} f(x)dx = J$. 于不等式 (*) 中关于 $\|P\| \to 0$ 取极限, 并根据极限的两边夹法则即得

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = J.$$

即条件 (i) 成立. 定理得证.

例: Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任何闭区间 $[a, b]$ 上不可积，其中

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

证明: 对 $[a, b]$ 的任意分割 $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$M_i = \sup\{D(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1,$$

$$m_i = \inf\{D(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0,$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$U_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = b - a,$$

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\int_a^b} D(x)dx = \inf\{U_P\} = b - a,$$

$$\underline{\int_a^b} D(x)dx = \sup\{L_P\} = 0.$$

根据 Darboux 可积性定理知 Dirichlet 函数 $D(x)$ 在任意有界闭区间 $[a, b]$ 上不可积. 证毕.

作业

课本习题5.1 (pp.135): 1.

课本习题5.3 (pp.146-147): 12, 13, 15