《微积分A1》第七讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月07日

小欧 o 例子

Example

例: (i) 当 $x \to 0$ 时, $x^2 + x^3 = o(x)$;

(ii) 当 $x \to 0$ 时, $\sin(x^2) = o(x)$. 但不能写作 $o(x) = \sin(x^2)$;

(iii) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = o(x^{n+1})$, $x \to \infty$;

(iv) $x^n = o(e^x)$, $x \to +\infty$.

Example

例: 当 $x \to 0$ 时,

(i) $\sin x \sim x$;

(ii) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(iii) $\tan x \sim x$;

(iv) $\ln(1+x) \sim x$;

(v) $e^x - 1 \sim x$;

(vi) $a^x - 1 \sim x \ln a$;

(vii) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

结论(i)至(vi)已证. 以下证(vii): $(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$.

令 $y=(1+x)^{\alpha}-1$, 则 $y \to 0$ $(x \to 0)$ 且 $1+y=(1+x)^{\alpha}$.

故 $\ln(1+y)=\alpha\ln(1+x)$. 于是

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\alpha x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x} \to 1\cdot 1=1.$$

这就证明了结论(vii).

Example

例一：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}.$$

解：

$$\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}{x^4}$$

$$=\frac{1-\cos(1-\cos x)}{\frac{1}{2}(1-\cos x)^2}\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right)^2\frac{1}{2\cdot 4}\to 1\cdot 1^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

例二

例：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{\sin^2 x(1-\cos x)}.$$

解：

$$\frac{\sqrt{1+2x^4}-\sqrt[3]{1-x^4}}{\sin^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+2x^4}-1)-(\sqrt[3]{1-x^4}-1)}{x^4}\frac{x^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\left(\frac{(1+2x^4)^{1/2}-1}{x^4}-\frac{(1-x^4)^{1/3}-1}{x^4}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\frac{2\cdot\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}$$

$$\to\left(\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)\right)(1^2)\cdot 2\cdot 1=(1+\frac{1}{3})\cdot 2=\frac{8}{3}.$$

例三：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}.$$

解:

$$\frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x\ln(1+x)}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$\to 1\cdot 1\cdot 1/2\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

故所求极限为1/2.

例四

课本第57页习题2.4第9题(14): 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right).$$

解:

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

$$=x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-1\right]-x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right]$$

例四，续

$$= \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2} - 1}{\frac{2}{x}} \cdot 2 - \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1}{-\frac{1}{x}} \cdot (-1)$$

$$\to \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot (-1) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

故所求极限为 $4/3$.

Definition

定义：设 $f(x)$ 在 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上有定义.

(i) 若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(ii) 若极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在，或虽存在但不等于 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，或不连续.

(iii) 若函数 $f(x)$ 在其定义域 J 处处连续，则称 $f(x)$ 为 J 上的连续函数.

由函数极限的讨论可知,

1. 多项式在 $\mathbb{R}$ 上连续;

2. 分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 在分母非零处连续, 其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为多项式;

3. 函数 $\sin x$, $\cos x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数;

4. 函数 $\tan x$ 是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的连续函数, ctanx 是 $(0, \pi)$ 上的连续函数;

5. 指数函数 a^x $(a > 0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续;

6. 对数函数 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

Definition

定义：(i) 若 $f(x_0^+) \triangleq \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续；

(ii) 若 $f(x_0^-) \triangleq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

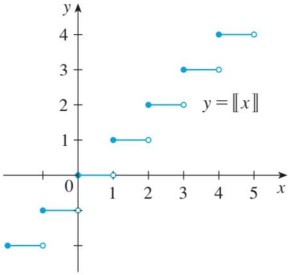
Theorem

定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处既右连续又左连续.

Proof.

证明：由相应的函数极限结论立得. $\square$

回忆取整函数 $[x]$ 的值定义为不大于 x 的最大整数. 因此对于函数 $[x]$ 在非整数处连续. 显然在整数 $x = N$ 处间断, 但右连续. 函数 $[x]$ 的图像如下.



间断点类型

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则可能出现如下情形之一.

(1) (可去间断) 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ 存在, 但 $L \neq f(x_0)$.

(2) (跳跃间断) 左右极限 $\lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$ 均存在, 但不相等.

(3) (本性间断) 至少有一个单侧极限不存在.

有时称可去间断和跳跃间断为第一类间断, 称本性间断为第二类间断.

对于可去间断点，若补充或修改 $f(x)$ 在点 x_0 处的值为 L，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处就连续了. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处有可去间断. 因为 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 极限存在且等于 1，不等于 $f(0) = 0$. 如果改变 $f(0) = 0$ 为 $f(0) = 1$，则函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

Heaviside 函数定义如下

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

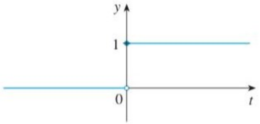
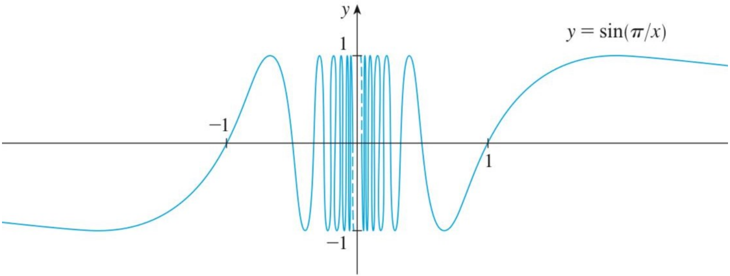


FIGURE 8
The Heaviside function

显然 $t = 0$ 是函数 $H(t)$ 的跳跃间断点. 因为 $\lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$, $\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0$, 即两个单侧极限存在, 但不相等.

定义函数 $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}, \forall x \neq 0, f(0) = 0$. 显然 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的本性间断点. 因为左右极限 $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)$ 都不存在. 如图所示.



单调函数的间断点均为跳跃间断

回忆单调函数在任意点处的左极限和右极限均存在. 因此单调函数的间断点均为跳跃间断.

Theorem

定理: 设函数 f 和 g 在点 x_0 处连续, 则它们的和差函数 $f \pm g$, 乘积函数 fg, 商函数 f/g (补充假设 $g(x_0) \neq 0$) 在点 $x = x_0$ 处也连续.

Proof.

证明: 根据函数极限的四则运算定理立得. □

复合函数的连续性

Theorem

定理: 设函数 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 设 $f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则它们的复合函数 $f \circ g$ 在点 x_0 处也连续.

Proof.

证明: 由 $f(u)$ 在点 u_0 的连续性知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$, $\forall u \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta)$. 由 $g(x)$ 在点 x_0 处的连续性知对上述 $\delta > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $|g(x) - g(x_0)| < \delta$, $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. 于是 $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$, $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. 此即 $f \circ g$ 在点 x_0 处连续. 证毕. □

Corollary

推论: 幂函数 x^α 在区间 $(0,+\infty)$ 上处处连续, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为任意常数.

Proof.

证明: 因为幂函数 x^α 可以表示为复合函数 $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, 即函数 e^u 和函数 $u=\alpha\ln x$ 的复合. 由于这两个函数都连续, 故它们的复合函数, 即幂函数也连续. 证毕. $\square$

命题：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 若 $f(x_0) > 0(< 0)$，则存在 $\delta_0 > 0$，使得 $f(x) > 0(< 0)$，$\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$.

证明：只证括号外的情形，即 $f(x_0) > 0$. 由 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$，则存在 $\delta_0 > 0$，使得对 $\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$，

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

即 $$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2},$$

证明，续

亦即

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2},$$

其中 $\forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. 证毕.

闭区间上的连续函数, 记号

Definition

定义: 称函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续, 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上每一点均连续, 且在左端点 $x=a$ 处右连续, 在右端点 $x=a$ 处左连续.

记号: $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体.

Theorem

介值定理：设 $f \in C[a,b]$，则对于介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个值 c，存在点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = c$.

证：若 $f(a) = f(b)$，则 $c = f(a) = f(b)$. 取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$ 即可. 设 $f(a) \neq f(b)$. 不失一般性 (without loss of generality)，可设 $f(a) < 0 < f(b)$ 且 $c = 0$. 因为(1) 若 $f(b) < f(a)$，则可考虑函数 $\hat{f}(x) \triangleq -f(x)$. (2) 若 $c \neq 0$，则考虑 $\hat{f}(x) \triangleq f(x) - c$.

往证在假设 $f(a) < 0 < f(b)$ 下，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$.

考虑集合 $E \triangleq \{x \in [a,b], f(x) < 0\}$. 显然 E 非空且有上界，因为 $a \in E$，且 $E \subset [a,b]$. 因此 E 存在上确界.

证明续

记$\xi \triangleq \sup E$. 我们将证明$f(\xi) = 0$. 讨论如下.

(i) 若$f(\xi) > 0$, 则根据连续函数的保号性质知, 存在$\delta > 0$, 使得$f(x) > 0$, $\forall x \in [\xi - \delta, \xi]$. 由上确界性质可知, 存在$x_1 \in E$, 使得$x_1 > \xi - \delta$. 于是一方面$x_1 \in (\xi - \delta, \xi]$, 故$f(x_1) > 0$. 另一方面$x_1 \in E$, 故$f(x_1) < 0$. 矛盾.

(ii) 若$f(\xi) < 0$, 仍由连续函数的保号性质知, 存在$\delta > 0$, 使得$f(x) < 0$, $\forall x \in [\xi, \xi + \delta]$. 这说明$\xi + \delta \in E$. 此与$\xi = \sup E$ 相矛盾.

综上所述可知$f(\xi) = 0$. 证毕.

另证: 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$. 要证 $\exists\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = 0$. 以下用二分法来证. 记 $[a_1,b_1] = [a,b]$, 则 $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. 考虑 $f(x)$ 在区间 $[a_1,b_1]$ 中点 $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ 处值. 若 $f(c_1) = 0$, 则证毕. 设 $f(c_1) \neq 0$. 若 $f(c_1) > 0$, 则记 $[a_2,b_2] = [a_1,c_1]$. 否则记 $[a_2,b_2] = [c_1,b_1]$. 于是 $f(a_2) < 0 < f(b_2)$, 且 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b-a)$. 对区间 $[a_2,b_2]$ 重复对 $[a_1,b_1]$ 的做法, 考虑 $f(c_2)$ 的值, 其中 $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$. 若 $f(c_2) = 0$, 结论成立. 若不然, 则类似构造闭区间 $[a_3,b_3]$, 使得 $f(a_3) < 0 < f(b_3)$, 且 $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = \frac{1}{2^2}(b-a)$.

继续上述过程，则可能出现如下两种情况.

(i) 上述过程中止于第 n 步，即已构造闭区间 $[a_n, b_n]$，函数 $f(x)$ 在其中点 $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ 为零，结论成立.

(ii) 上述过程可无穷次进行. 由此得一个闭区间套 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，$\forall n \geq 1$，且区间长度为 $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$. 由区间套定理知存在唯一点 $\xi \in \bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$，并且 $a_n \uparrow \xi$，$b_n \downarrow \xi$. 根据做法有 $f(a_n) < 0 < f(b_n)$. 令 $n \to +\infty$ 并利用函数 $f(x)$ 的连续性可知，$f(\xi) \leq 0 \leq f(\xi)$. 因此 $f(\xi) = 0$. 证毕.

例子

例: 证明奇数次实系数多项式必存在零点.

证: 设 $p(x) = x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0$ 为 $2k+1$ 次实系数多项式. 要证 $p(x)$ 有零点, 即存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $p(\xi) = 0$.

将 $p(x)$ 写作

$$p(x) = x^{2k+1}\left(1 + \frac{a_{2k}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k+1}}\right).$$

由于 $\frac{a_{2k}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2K+1}} \to 0$, 当 $|x| \to +\infty$. 故存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\frac{a_{2k}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2k}} + \frac{a_0}{x^{2k+1}}\right| < \frac{1}{2}, \quad |x| \geq M$$

于是

$$
\begin{aligned}
p(M) &= M^{2k+1}\left(1+\frac{a_{2k}}{M}+\frac{a_{2k-1}}{M^2}+\cdots+\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right)\\
&\geq M^{2k+1}\left(1-\left|\frac{a_{2k}}{M}+\frac{a_{2k-1}}{M^2}+\cdots+\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right|\right)\\
&> M^{2k+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}M^{2k+1}>0.
\end{aligned}
$$

同理

$$
p(-M) = -M^{2k+1}\left(1-\frac{a_{2k}}{M}+\frac{a_{2k-1}}{M^2}-\cdots-\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right)
$$

例子，续二

$$
\begin{aligned}
&\le -M^{2k+1}\left(1-\left|\frac{a_{2k}}{M}-\frac{a_{2k-1}}{M^2}+\cdots+\frac{a_0}{M^{2k+1}}\right|\right) \\
&< -M^{2k+1}\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}M^{2k+1} < 0.
\end{aligned}
$$

由介值定理知存在 $\xi \in [-M, M]$，使得 $p(\xi) = 0$. 证毕.

Theorem

定理：有界闭区间上的连续函数必有界．也就是说，若 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leq M$，$\forall x\in[a,b]$．

证明：反证．若不然，设 $f(x)$ 无界，则对任意正整数 n，存在 $x_n\in[a,b]$，使得 $|f(x_n)|>n$．这样就得到一个有界序列 $\{x_n\}\subset[a,b]$．根据 B-W 定理可知序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $x_{n_k}\to\xi$，$k\to+\infty$．由 $a\leq x_{n_k}\leq b$ 可知 $a\leq\xi\leq b$．一方面 $|f(x_{n_k})|>n_k\to+\infty$．另一方面由函数 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_{n_k})\to f(\xi)$，$k\to+\infty$．故序列 $\{f(x_{n_k})\}$ 有界．这就得到一个矛盾．证毕．

例子

例: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上取正值的连续函数. 若 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

反证: 假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 不成立, 则存在 $M_0 > 0$, 使得对任意正整数 n, 存在 $x_n > n$, 使得 $0 < f(x_n) \le M_0$, $\forall n \ge 1$. 由于连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, M_0]$ 上有界, 故存在 $C > 0$, 使得 $0 \le f(x) \le C$, $\forall x \in [0, M_0]$. 于是 $0 < f(f(x_n)) \le C$. 此与假设 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = +\infty$ 相矛盾. 证毕

Theorem

<u>定理</u>: 有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必有最大值和最小值，即存在 $\xi,\eta\in[a,b]$，使得 $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$，$\forall x\in[a,b]$.

即 $f(\xi)=\min\{f(x),x\in[a,b]\}$，$f(\eta)=\max\{f(x),x\in[a,b]\}$.

引理: 设 $S \subset \mathbb{R}$ 为一实数集合.

(i) 记 $M = \sup S$ (允许 $M = +\infty$), 则存在 $s_n \in S$, 使得 $s_n \to M$, $n \to +\infty$;

(ii) 记 $m = \inf S$ (允许 $m = -\infty$), 则存在 $t_n \in S$, 使得 $t_n \to m$, $n \to +\infty$.

证明: 只证(i). 结论(ii)的证明类似. 当 M 为有限数时, 依定义知对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $s_\varepsilon \in S$, 使得 $s_\varepsilon > M - \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则存在 $s_n \in S$, 使得 $M \geq s_n > M - \frac{1}{n}$, 即 $s_n \to M$. 当 $M = +\infty$, 即 S 无上界时, 已证存在 $s_n \in S$, 使得 $s_n \to +\infty$. 证毕.

证明: 记 $M \triangleq \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$, $m \triangleq \inf\{f(x), x \in [a,b]\}$. 根据函数 $f(x)$ 的有界性可知 M 和 m 均为有限数. 根据上述引理知存在 $x_n \in [a,b]$, 使得 $f(x_n) \to M$, $n \to +\infty$. 根据 B-W 定理知序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $x_{n_k} \to \eta$. 再根据函数 $f(x)$ 的连续性知 $f(x_{n_k}) \to f(\eta)$. 这表明 $f(\eta) = M$. 同理可证 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = m$. 证毕.

Corollary

推论: 有界闭区间上的连续函数的值域是有界闭区间. 也就是说, 若 $f(x)$ 在有界闭区间 $J=[a,b]$ 上连续, 则 f 的值域 $f(J)=\{f(x),x\in J\}$ 是有界闭区间.

Proof.

证明: 根据连续函数的最值性可知, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取得最大值和最小值, 即 $\exists\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\min\{f(x),x\in[a,b]\}$, $f(\eta)=\max\{f(x),x\in[a,b]\}$. 再根据连续函数的介值性可知, 对任意 $c\in[f(\xi),f(\eta)]$, 存在 x 介于 ξ 和 η 之间, 使得 $f(x)=c$. 这表明 $f(J)=[f(\xi),f(\eta)]$. $\square$

总结：有界闭区间上的连续函数具有三个性质：介值性，有界性，最值性.

注记：上述三个性质成立的前提条件是(i) 区间闭；(ii) 区间有界；(iii) 函数连续.

例一：函数 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续，但无界.

例二：函数 $\frac{1}{x}$ 在无界区间 $[1,+\infty)$ 上连续，但无最小值.

例三：符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 无介值性质. 例如不存在 $\xi \in \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{sgn}(\xi) = \frac{1}{2}$.

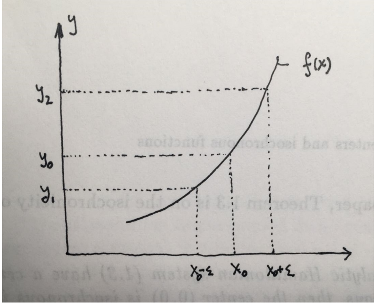
Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在闭区间 $J=[a,b]$ 上连续, 且严格单调, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 在有界闭区间 $K \triangleq f(J)$ 上连续.

证明: 不妨设 $f(x)\uparrow$ 严格. 不然考虑 $-f$. 于是反函数 $f^{-1}(y)\uparrow$ 严格. 于是 $c=f(a)$ 和 $d=f(b)$ 分别是函数 $f(x)$ 的最小值和最大值. 回忆连续函数在有界闭区间的值域也是有界闭区间, 故 $f(J)=[c,d]$. 以下证反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 对任意 $y_0\in[c,d]$, 记 $x_0=f^{-1}(y_0)$, 即 $f(x_0)=y_0$.

情形一. $y_0 \in (c, d)$, 即 y_0 是闭区间 $[c, d]$ 的内点(不是端点).

要证 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 处连续, 即要证对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$, $\forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. 令 $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, 如图所示.



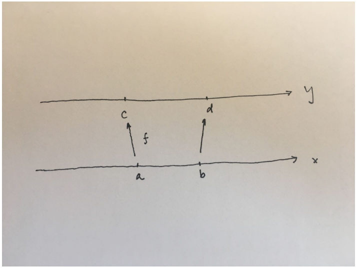
取 $\delta = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. 由图可知，当 $|y - y_0| < \delta$ 时，$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. 这就证明了 $f^{-1}(y)$ 在点 y_0 处的连续.

情形二: $y_0 = c$ 或 $y_0 = d$. 可作类似处理. 定理得证. $\square$

Lemma

引理：设 $f(x)$ 在闭区间 $J=[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 在 J 上连续，当且仅当 $f(x)$ 的象集(值域) $f(J)=\{f(x),x\in J\}$ 为闭区间.

证明：不妨设 $f(x)\uparrow$. 则 $c=f(a)$ 和 $d=f(b)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值. 如图所示.



证明续一

$\Rightarrow$: 设 $f(x)$ 在闭区间 J 上连续. 回忆连续函数在有界闭区间的值域也是有界闭区间, 故 $f(J) = [c, d]$. 必要性得证.

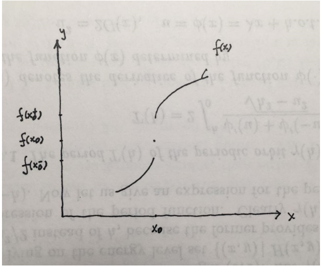
$\Leftarrow$: 设 $f(J) = [c, d]$, 要证 $f(x)$ 在 $J = [a, b]$ 上连续. 反证. 假设 $f(x)$ 在某点 $x_0 \in [a, b]$ 处不连续. 回忆单调函数在任意点的左右极限均存在. 因此 $f(x_0^+)$ 和 $f(x_0^-)$ 均存在. 由于 x_0 是间断点, 且 $f(x) \uparrow$, 故 $f(x_0^-) < f(x_0^+)$.

现断言：对于任意 $y \in (f(x_0^-), f(x_0^+)) \setminus \{y_0\}$，不存在 $x \in [a, b]$，使得 $f(x) = y$. 因为 $y \neq y_0$，且

对于 $x \in [a, x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0^-) < y$，

对于 $x \in (x_0, b]$，有 $f(x) \ge f(x_0^+) > y$.

如图所示. 这表明 $f(J) \neq [c, d]$. 充分性得证. 引理得证.



反函数定理的另一个证明

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在有界闭区间 $J=[a,b]$ 上连续, 且严格单调, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 在有界闭区间 $K=f(J)$ 上连续.

Proof.

证明: 由于反函数 $f^{-1}(y)$ 的值域为有界闭区间 $J=[a,b]$, 故根据引理知反函数 $f^{-1}(y)$ 在其定义域 $K=f(J)$ 上连续. 结论(ii)成立. 证毕. $\square$

Example

例: 正弦函数 $y=\sin x$ 在有界闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调上升, 其值域为有界闭域 $[-1,1]$. 由反函数存在定理知, 函数 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上存在反函数. 这个反函数就是我们熟知的反正弦函数 $x=\arcsin y$, 它的定义域为 $[-1,1]$, 并在 $[-1,1]$ 上处处连续. 类似可证其他反三角函数在其定义域上连续.

Theorem

定理: 每个初等函数在其定义域上处处连续.

Proof.

证明: 已证六类基本初等函数, 即多项式函数, 幂函数, 对数函数, 指数函数, 三角函数, 反三角函数在其定义域上处处连续. 依定义每个初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算, 以及有限次函数复合所得, 因此每个初等函数在其定义域上处处连续. □

Example

例: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且极限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 记作 $f(+\infty)$. 若 $f(a)f(+\infty)<0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上存在零点.

证: 由于极限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 且 $f(a)f(+\infty)<0$, 故极限 $\lim_{x\to\infty} f(a)f(x)<0$. 由极限的保序性知存在 $M>a$, 使得 $f(a)f(x)<0$, $\forall x\geq M$. 于是 $f(a)$ 与 $f(M)$ 反号. 由介值定理知存在 $\xi\in[a,M]$, 使得 $f(\xi)=0$. 证毕.

作业

课本习题2.5 (pp. 59-60):

2(1)(3)(5), 3, 4, 5, 6.

课本习题2.6 (pp. 63-64):

1, 2, 3, 4, 5, 6.