《微积分A1》第十三讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月28日

Theorem

定理: (i) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 除点 $x_0\in(a,b)$ 外处处可导. 若极限 $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 记作 A, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0)=A$.

(ii) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上处处可导, 则导函数 $f'(x)$ 在开区间 (a,b) 上不存在第一类间断点. 具体说来, 对于 $\forall x_0\in(a,b)$, 若右极限 $f'(x_0^+)$ 存在, 则 $f'(x_0^+)=f'(x_0)$, 即导数 $f'(x)$ 在 x_0 处右连续; 若左极限 $f'(x_0^-)$ 存在, 则 $f'(x_0^-)=f'(x_0)$, 即导数 $f'(x)$ 在 x_0 处左连续.

这是课本第95页习题4.2题15的结论.

左右导数 vs 导数的左右极限

(i) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的

$$\text{左导数}\quad f'_-(x_0) \triangleq \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\text{右导数}\quad f'_+(x_0) \triangleq \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

(ii) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 处处可导，可能除了一点 $x_0\in(a,b)$，那么函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的左右极限(假设存在)定义为

$$f'(x_0^-) \triangleq \lim_{x\to x_0^-} f'(x),\qquad f'(x_0^+) \triangleq \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

例: 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & 0<|x|<1,\\ e, & x=0,\end{cases}$$

对函数 $f(x)$ 验证上述定理结论(i).

解: 我们先证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并计算出导数 $f'(0)$.

然后计算出极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$. 看看极限是否为 $f'(0)$.

一. 按定义证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并计算导数 $f'(0)$. 对 $x\neq 0$, 考虑

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$$

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限. 以下使用 L'Hospital 法则求这个极限.

$$\frac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'}{[x]'}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'$$

$$=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

显然极限 $\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e$. 考虑第二个因子的极限, 并使用 L'Hospital 法则求之.

$$\frac{[x-(1+x)\ln(1+x)]'}{[x^2(1+x)]'}=\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}\to-\frac{1}{2},\quad x\to 0.$$

$$\text{故}\quad\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{e}{2}.$$

这表明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=-\frac{e}{2}$.

二．求极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$．对于 $x\neq 0$,

$$f'(x)=[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}]'=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'.$$

$$=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

在第一个步骤中已经计算了上述函数当 $x\to 0$ 的极限为 $-\frac{e}{2}$.

这表明

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{e}{2}=f'(0).$$

也就是说，对于函数 $f(x)$ 以及点 $x=0$，上述定理结论(i)成立.

例：令

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导．因为对于 $x\neq 0$，$f(x)$ 显然可导，且 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，而在点 $x=0$ 处，$f(x)$ 也可导，且 $f'(0)=0$．因为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=x\sin\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to 0.$$

由于极限 $\lim_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，故 $x=0$ 是导函数 $f'(x)$ 的第二类间断点．

当 $f(x)$ 在点 x_0 处可导时, $f(x)$ 在 x_0 附近可表为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这表明以线性函数 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 代替函数 $f(x)$ 的误差为 $o(x - x_0)$. 假设 $f''(x_0)$ 存在, 函数 $f(x)$ 可否用 $(x - x_0)$ 的二次多项式逼近, 并且逼近的阶为二, 即

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2,$$

其中 A, B, C 为待定常数. 在上式中令 $x \to x_0$ 即得 $A = f(x_0)$. 将 $A = f(x_0)$ 带入上式, 并两边同时除以 $x - x_0$ 得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，故令 $x\to x_0$ 即得

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B.$$

$$\Rightarrow\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$$

于是待定常数 C 可表为

$$C=\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad C = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}.$$

两次用 L'Hospital 法则求上式右边的极限可得 $C = \frac{1}{2} f''(x_0)$.

这样我们证明了存在唯一一个二次多项式，即

$$f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

在 x_0 附近，可以二阶逼近函数 $f(x)$，且逼近误差为 $o(x - x_0)^2$.

Theorem

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式): 设 $f(x)$ 在 (x_0-r, x_0+r) 上定义. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 可表为

$$f(x) = T_n(x) + o(x-x_0)^n,$$

其中 $$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

定义

Definition

定义: (i) 定理中的多项式 $T_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式.

(ii) 函数 $f(x)$ 的表达式 $f(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n$, 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处, 带 Peano 余项的 n 阶 Taylor 展式, 高阶无穷小量 $o(x - x_0)^n$ 称为 Peano 余项.

注记

注一: 上述 Taylor 展式表明, 当 $f^{(n)}(x_0)$ 存在时, 以 n 次 Taylor 多项式代替 $f(x)$ 时的误差为 $o(x-x_0)^n$.

注二: Taylor 多项式 $T_n(x)$ 有时也写作 $T_n(f,x)$ 或 $T_n(f,x,x_0)$, 以强调 Taylor 多项式关于函数 f 以及展开点 x_0 的依赖关系.

注三: 条件 $f^{(n)}(x_0)$ 存在意味着 $f(x)$ 的各低阶导数 $f^{(k)}(x)$, $0 \le k \le n-1$, 在 x_0 某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上处处存在. 特别当我们说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 或 $f'(x_0)$ 存在时, 一个不言自明的假设是 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有定义.

Definition

定义: 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 Taylor 展式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

又称作 Maclaurin 展式.

指数函数 e^x 的 Maclaurin 展式

指数函数 $f(x) = e^x$ 在整个实轴上无穷次可微，满足 Taylor 展式的条件. 由于 $f^{(k)}(x) = [e^x]^{(k)} = e^x$, 故 $f^{(k)}(0) = 1$, $k \geq 1$. 因此指数函数 e^x 的 n 阶 Maclaurin 展式为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

指数函数 e^x 的前三个 Taylor 多项式如下

$$T_1(x) = 1+x,\ T_2(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2,\ T_3(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3.$$

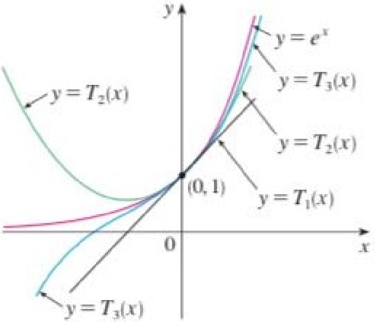


FIGURE 1

As n increases, $T_n(x)$ appears to approach e^x in Figure 1. This suggests that e^x is equal to the sum of its Taylor series.

记 $f(x) = \sin x$, 则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1,\\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

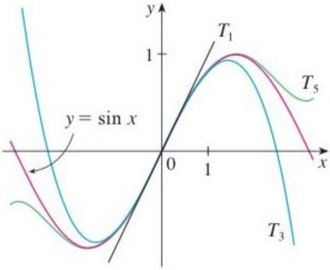
注意导数已经出现了循环，即 $f^{(4n+k)}(x) = f^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$. 因此我们不难写出函数 $\sin x$ 的 Maclaurin 展式

$$
\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).
$$

函数 sin x 的前几个 Taylor 多项式如下

$$T_1(x) = x,\ T_3(x) = x - \frac{1}{3!}x^3,\ T_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,$$

注意 $T_2(x) = T_1(x)$, $T_4(x) = T_3(x)$, $T_6(x) = T_5(x)$.



类似对 $\sin x$ 的处理，我们可以构造 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式. 不过根据关系式 $\cos x = [\sin x]'$，我们可以更加快捷得到 $\cos x$ 的 Maclaurin 展式如下

$$\cos x = [\sin x]'$$
$$= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\right)'$$
$$= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

我们可以按部就班地，逐次计算函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的各阶导数 $f^{(k)}(0)$，从而求得它的 Maclaurin 展式. 但我们可以用如下简便方法求 $f^{(k)}(0)$. 由 $f(x) = \arctan x$ 得

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{或} \quad (1+x^2)f'(x) = 1.$$

由此得 $f'(0) = 1$. 进一步关于上面第二个等式取 n 阶导数，并利用 Leibniz 公式得

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

将 $x = 0$ 代入上式得

$\arctan x$ 的 Maclaurin 展式，续一

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0), \quad \forall n \geq 1.$$

由此得

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= 1, \\
f^{(2)}(0) &= -1(1-1)f(0) = 0, \\
f^{(3)}(0) &= -2(2-1)f'(0) = -2, \\
f^{(4)}(0) &= -3(3-1)f^{(2)}(0) = 0, \\
&\vdots \\
f^{(2n)}(0) &= 0, \\
f^{(2n+1)}(0) &= (-1)^n(2n)!.
\end{aligned}$$

于是我们得到所求的 Maclaurin 展式

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}). \ (*)$$

注：稍后我们将证明如下展式成立

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}). \quad (**)$$

对式(**)两边积分，从 0 到 x，即得上述展开式(*).

记 $f(x) = \sin x$，则

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{2},\\
f'(x) &= \cos x, & f'(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{1}{2},\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(\tfrac{\pi}{3}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2},\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(\tfrac{\pi}{3}) &= -\frac{1}{2},\\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(\tfrac{\pi}{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

导数同样出现了循环. 函数 $\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的 Taylor 展式

$$\sin x = f(\frac{\pi}{3}) + \frac{f'(\frac{\pi}{3})}{1!}(x-\frac{\pi}{3}) + \frac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n + o(x-\frac{\pi}{3})^n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{3})^3$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{3})}{n!}(x-\frac{\pi}{3})^n + o(x-\frac{\pi}{3})^n,$$

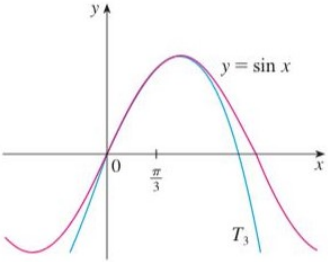
其中 $f^{(n)}(\frac{\pi}{3})$ 根据 $n = 4k + r$ 的余数 $r = 0, 1, 2, 3$ 分别取值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{1}{2}$.

函数 $\sin x$ 在点 $\frac{\pi}{3}$ 处的前三项 Taylor 多项式分别为

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2,$$

$$T_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$$



Theorem

定理 (带 Peano 余项的 Taylor 公式): 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上定义. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 可表为

$$f(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n,$$

$$\text{其中}\quad T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

<u>证明</u>: 要证展式 $f(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n$, 即要证

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \to 0, \quad x \to x_0. \quad (*)$$

以下用归纳法证. 当 $n = 1$ 时,

$$\frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to 0, \quad x \to x_0.$$

结论成立. 假设展式对正整数 n 成立, 即等式(*) 成立. 考虑 $n + 1$ 情形. 假设 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在, 要证

$$\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \to 0, \quad x \to x_0.$$

注意 $T'_{n+1}(x) = T'_{n+1}(f,x) = T_n(f',x)$. 例如 $n=3$,

$$T_3(f,x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}$$

$$+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}, \quad \text{则} \quad T'_3(f,x) = f'(x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} = T_2(f',x).$$

由于极限函数

$$\frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

为 $\frac{0}{0}$ 型，应用 L'Hospital 法则得

$$\frac{[f(x) - T_{n+1}(x)]'}{[(x - x_0)^{n+1}]'} = \frac{f'(x) - T'_{n+1}(x)}{(n+1)(x - x_0)^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \frac{f'(x) - T_n(f', x)}{(x - x_0)^n} \to 0, \quad x \to x_0. \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \to 0, \quad x \to x_0. \qquad \square$$

注：极限式(*)成立，是因为对导函数 $f'(x)$ 应用关于 n 的归纳假设.

Theorem

定理 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)：设 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处有 $n+1$ 阶导数，对 $x_0 \in (a, b)$，$f(x)$ 可表为

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

其中 $\xi \in (x_0, x)$ 或 $\xi \in (x, x_0)$，$T_n(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式，即

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Definition

定义: (i) 函数 $f(x)$ 的表达式

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

称作 $f(x)$ 在点 x_0 处, 带 Lagrange 余项的 Taylor 展式.

(ii) 上述展式中, 最后一项

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

称为 Lagrange 余项, 其中 ξ 可写作 $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$.

指数函数 e^x 的 Maclaurin 展式，带 Lagrange 余项

由于 $[e^x]^{(n)} = e^x$，故容易得到 e^x 的 n 阶，带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 为介于 0 和 x 之间的一个不确定的点.

由于 $[\sin x]^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$，故 $\sin x$ 的 $2n$ 次带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$+ \frac{\sin(\xi + n\pi)}{(2n)!}x^{2n}.$$

由于 $[\cos x]^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$，故 $\cos x$ 的 $2n+1$ 次带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$+ \frac{\cos(\xi + \frac{2n+1}{2}\pi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

证明：记 $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$，即

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right).$$

$$\Rightarrow \quad R_n(x_0) = 0, \quad R_n'(x_0) = 0, \quad \cdots, \quad R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

考虑 $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$. 反复应用 Cauchy 中值定理可得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)[(\xi_1-x_0)^n-0]}=\frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}}=\cdots$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)-f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

其中当 $x_0<x$ 时，$x_0<\xi<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_1<x$，当 $x<x_0$ 时，$x_0>\xi>\xi_n>\xi_{n-1}>\cdots>\xi_1>x$. 定理得证.

对数函数 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式

考虑函数 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展式. 记 $f(x)=\ln(1+x)$, 则

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= -1,\\
f'''(x) &= \frac{2!}{(1+x)^3}, & f'''(0) &= 2!,\\
f^{(4)}(x) &= \frac{-3!}{(1+x)^4}, & f^{(4)}(0) &= -3!,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

由此不难写出函数 $\ln(1+x)$ 的 n 阶 Maclaurin 展式如下

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项. 可取 Peano 余项 $R_n(x) = o(x^n)$, 或取为 Lagrange 余项

$$R_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间.

考虑二项式函数 $f(x)=(1+x)^a$, 其中 $a\in\mathbb{R}$ 为任意实数.

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)^a, & f(0)&=1,\\
f'(x)&=a(1+x)^{a-1}, & f'(0)&=a,\\
f''(x)&=a(a-1)(1+x)^{a-2}, & f''(0)&=a(a-1),\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x)&=(a)_n(1+x)^{a-n}, & f^{(n)}(0)&=(a)_n,
\end{aligned}$$

其中 $(a)_n\triangleq a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)$. 故函数 $(1+x)^a$ 的 n 阶 Maclaurin 展式为

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{(a)_n}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 为余项.

注一：若记

$$C_k^a = \frac{(a)_k}{k!} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!}.$$

则二项式的 $(1+x)^a$ 的 Maclaurin 展式又可写作

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} C_k^a x^k + R_n(x).$$

注二：余项 $R_n(x)$ 可取 Peano 或 Lagrange 余项，即 $R_n(x) = o(x^n)$，或

$$R_n(x) = \frac{(a)_{n+1}(1+\xi)^{a-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Taylor 展式的唯一性

Theorem

定理: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 若存在 n 次多项式 $P_n(x)$, 使得 $f(x) = P_n(x) + o(x - x_0)^n$, 则 $P_n(x)$ 必为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式, 即

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

定理为函数的Taylor 展开提供了间接方法.

例子: 求函数 $f(x)=\frac{1}{2x-x^2}$ 在 $x=1$ 处 n 阶带 Peano 余项的 Taylor 展开式.

解: 可将 $f(x)$ 写作 $f(x)=\frac{1}{1-(x-1)^2}=\frac{1}{1-u^2}$, 其中 $u=x-1$. 回忆二项式展开

$$(1+t)^a=1+at+\frac{a(a-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{(a)_n}{n!}t^n+o(t^n)$$

令 $a=-1$, 则

$$(-1)_k=(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)=(-1)^k k!.$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{1+t}=1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+o(t^n).$$

例子续

在上式中用 $-t$ 代替 t 即可得

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^n+o(t^n).$$

在将 $t=(x-1)^2$ 带入即得

$$\frac{1}{2x-x^2}=\frac{1}{1-(x-1)^2}$$

$$=1+(x-1)^2+(x-1)^4+\cdots+(x-1)^{2n}+o(x-1)^{2n}.$$

上式即为所求的 Taylor 展式.

证明: 不失一般性可设 $x_0 = 0$. 根据带 Peano 余项的 Taylor 展式定理可知 $f(x)$ 可表为 $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$. 于是我们有 $T_n(x) + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n)$, 即 $P_n(x) - T_n(x) = o(x^n)$. 设

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

$$T_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n,$$

其中 $b_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, 则

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots++(a_n-b_n)x^n = o(x^n).$$

在上式中令 $x=0$, 立刻得 $a_0=b_0$. 于是

$$(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n=o(x^n).$$

两边同除 x 得

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)x+\cdots+(a_n-b_n)x^{n-1}=o(x^{n-1}).$$

令 $x\to 0$ 得 $a_1=b_1$. 继续这种做法即可得 $a_k=b_k$, $k=0,1,2,\cdots,n$. 此即 $P_n(x)=T_n(x)$. 命题证毕.

例子: 求函数 $e^{\sin^2 x}$ 的四阶 Maclaurin 展式, 带 Peano 余项.

解: 由于 $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, 故令 $u = \sin^2 x$ 得

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x + o(x^4),$$

因为 $o(\sin^4 x) = o(x^4)$. 由于 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$, 故 $\sin^2 x = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^4)$, $\sin^4 x = x^4 + o(x^4)$. 于是

$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).$$

$$\text{即} \quad e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4).$$

上述展式即为所求.

例一：求 e 的近似值，要求误差小于 10^{-5}.

解：已经求得 e^x 的带有 Lagrange 余项的 Maclaurin 展式为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间．取 $x = 1$ 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!},$$

其中 $\xi \in (0, 1)$．于是

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

简单计算可知 $n = 8$ 时，

$$0 < \frac{3}{(8+1)!} = \frac{3}{362880} < \frac{1}{100000} = 10^{-5}.$$

因此所求近似值为

$$e \simeq \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!}.$$

解答完毕.

例二: 求常数 a, k, 使得极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k}-\cos(x^2)}{x^8} \quad (*)$$

存在, 并求出这个极限.

解: 由Taylor 展式得

$$e^{ax^k}=1+ax^k+\frac{1}{2!}(ax^k)^2+\frac{1}{3!}(ax^k)^3+o(x^{3k}),$$

$$\cos(x^2)=1-\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{4!}x^8+o(x^8).$$

由此可见若极限(*)存在, 则必有 $k=4$, $a=-\frac{1}{2}$. 此时

例二续

$$e^{ax^k} - \cos(x^2) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^4\right)^2 - \frac{1}{4!}x^8 + o(x^8)$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right)x^8 + o(x^8) = \frac{1}{12}x^8 + o(x^8).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^k} - \cos(x^2)}{x^8} = \frac{1}{12}.$$

解答完毕.

例三 (课本第107 页例4.3.11): 设 $f(x)$ 于 $[-1,1]$ 上三阶可导, 且 $f(1)=1$, $f(-1)=0$, $f'(0)=0$. 证明存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

证明: 考虑函数 $f(x)$ 的二阶 Maclaurin 展开, 并带 Lagrange 余项得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 为介于 0 和 x 之间的某个点. 按上述展式计算函数值 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 得

$$1 = f(1) = f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} f''(0) \cdot 1^2 + \frac{1}{3!} f'''(\xi_1) \cdot 1^3,$$

$$0 = f(-1) = f(0) + f'(0) \cdot (-1) + \frac{1}{2} f''(0) \cdot (-1)^2$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(\xi_2) \cdot (-1)^3,$$

其中 $\xi_1 \in (0, 1)$, $\xi_2 \in (-1, 0)$. 将上述两个式子相减得

$$1 = \frac{1}{6}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \quad 或 \quad \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = 3.$$

根据 Darboux 定理(导数的介值性)可知存在 $\xi \in (\xi_2, \xi_1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$. 解答完毕.

例四

课本第109页习题4.3题12: 设 $f(x)$ 于某个开区间 J 上二阶可导, $[a,b]\subset J$, 且 $f'(a)=0$, $f'(b)=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明: 将 $f(x)$ 分别在点 $x=a$ 和 $x=b$ 处作一阶 Taylor 展开, 带 Lagrange 余项得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,$$
$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,$$

其中 $\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$. 根据上述两个等式计算函数值 $f(\frac{a+b}{2})$ 得

例四续一

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + f'(a)(\frac{a+b}{2} - a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(\frac{a+b}{2} - a)^2,$$

$$f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + f'(b)(\frac{a+b}{2} - b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(\frac{a+b}{2} - b)^2,$$

其中 $\xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$, $\xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$. 将上述两个等式相减得

$$0 = f(b) - f(a) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2) - f''(\xi_1)]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad f(b) - f(a) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right] = \frac{4[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right| = \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

不妨设$|f''(\xi_1)| \geq |f''(\xi_2)|$，则

$$|f''(\xi_1)| \geq \frac{1}{2}\left[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right| = \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

命题得证.

Example

课本第93页例4.1.5：设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导．证明若 $f(a)=0=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

证明：考虑函数 $h(x)=f(x)e^{g(x)}$．显然 $h(a)=0=h(b)$．应用 Rolle 定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $h'(\xi)=0$．计算得

$$h'(x)=[f(x)e^{g(x)}]'=f'(x)e^{g(x)}+f(x)e^{g(x)}g'(x).$$

因此 $h'(\xi)=0$，当且仅当 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$．证毕.

例二

Example

<u>例</u>: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导．证明若 $f(a)=0=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$．进一步证明函数 e^x-x^n (n 为正整数) 至多有三个不同的实根．

<u>证</u>: 在例一中取 $g(x)=-x$，即考虑函数 $f(x)e^{-x}$，可知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=0$．第一个结论得证．考虑 $f(x)=e^x-x^n$．由于 $f'(x)-f(x)=e^x-nx^{n-1}-[e^x-x^n]$ $=x^{n-1}(x-n)$ 只有两个实根，故 $f(x)=e^x-x^n$ 至多有三个实零点．因为 $f(x)$ 的每两个零点，对应函数 $f'(x)-f(x)$ 的一个零点．证毕．

作业

课本习题4.3 (pp. 107-109): 3(奇), 4(奇), 5, 6, 7.

注：题4(9)更正：当 $x \neq 0$ 时，$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. 参见课本第88页第3章总复习题题2.