# 《微积分A1》第二十讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年11月20日

**Theorem**

定理: 设 $f, g \in R[a,b]$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m \le \mu \le M$, $m = \inf_{[a,b]}\{f(x)\}$, $M = \sup_{[a,b]}\{f(x)\}$. 当 $f$ 连续时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

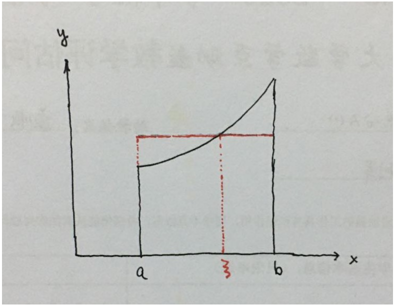
# 几何意义

当 $g(x) \equiv 1$，且 $f(x)$ 连续时，积分中值定理有如下形式

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

上式的几何意义就是曲边四边形的面积，等于某个矩形面积.

如图所示.



证明: 不失一般性设 $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. 由 $m \leq f(x) \leq M$ 可得 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $\forall x \in [a,b]$. 于是

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g. \quad (*)$$

如果 $\int_a^b g = 0$, 则必有 $\int_a^b fg = 0$. 于是所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 成立. 设 $\int_a^b g > 0$, 则由式 (*) 得

$$m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M.$$

# 证明续

于是取

$$\mu = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g},$$

所要证的不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

成立. 当 $f(x)$ 连续时, 由连续函数的最值定理和介值定理知存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$. 因此不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

成立. 命题得证.

**Example**

例: 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=0. \quad (*)$$

证明: 由积分中值定理知

$$\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi\sin\xi_n}{\xi_n}, \quad \xi_n\in[n,n+\pi].$$

由此立刻得到极限式 (*) 成立. 证毕.

另证: 由积分中值定理知

$$\int_n^{n+\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\sin\eta_n\int_n^{n+\pi}\frac{dx}{x}=\sin\eta_n\ln\frac{n+\pi}{n}=\sin\eta_n\ln(1+\frac{\pi}{n})\to 0,$$

其中 $\eta_n\in[n,n+\pi]$. 命题得证.

**Theorem**

定理：设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，则变上限积分 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：任取一点 $x_0\in[a,b]$，$x_0+h\in[a,b]$，$h$ 可正可负，则

$$g(x_0+h)-g(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt,$$

由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故 $f$ 有界, 即存在 $M>0$, 使得 $|f(x)|\leq M,\ \forall x\in[a,b]$. 于是

$$|g(x_0+h)-g(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt\right|\leq M|h|.$$

这表明 $f$ 在任意点 $x_0\in[a,b]$ 处连续. 这就证明了 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处连续. 证毕. $\square$

**Theorem**

<u>定理</u>：设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，在点 $x_0\in(a,b)$ 处连续，则变上限积分 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在点 $x_0$ 处可导，且 $g'(x_0)=f(x_0)$. 特别当 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续时，$g'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a,b)$.

<u>证明</u>：之前已经得到 $g(x_0+h)-g(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt$,

$$\Rightarrow\quad \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt.$$

$$\Rightarrow\quad \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-f(x_0)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt.$$

由假设 $f$ 在点 $x_0$ 处连续，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$,

使得当 $|t-x_0|<\delta$ 时，$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$. 现取 $|h|<\delta$，则

$$\left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt\right|<\frac{1}{|h|}\varepsilon\left|\int_{x_0}^{x_0+h}dt\right|=\varepsilon.$$

此即 $g(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，且 $g'(x_0)=f(x_0)$. 证毕. $\square$

# 原函数定义回忆

原函数定义：设 $f(x)$ 为开区间 $J$ 上定义的函数. 若存在 $J$ 上可导的函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in J$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

两个注记：

(i) 原函数 $F(x)$ 连续，因为它处处可导；

(ii) 若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 $C$ 为任意常数. 显然任意两个原函数仅相差一个常数.

# 微积分学基本定理的另一形式

**Theorem**

定理: 若 $f$ 于 $[a,b]$ 连续, 则

$$g(x) \triangleq \int_a^x f(t)dt$$

于闭区间 $[a,b]$ 连续, 于开区间 $(a,b)$ 可导, 且 $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, 即 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上的一个原函数.

上述定理直接由变上限积分的连续性和可微性定理得到.

**Corollary**

推论: 开区间上的连续函数必存在原函数.

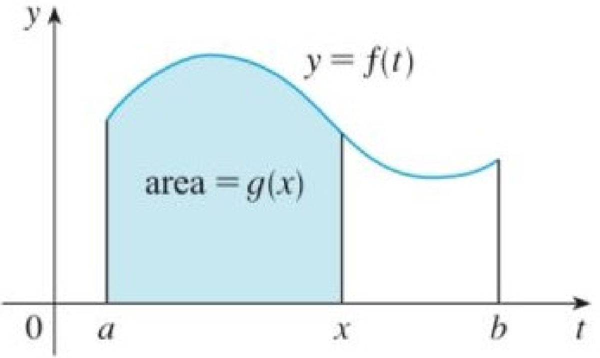
**Proof.**

证明: 设 $f$ 是 $(a,b)$ 上的连续函数, 则变上限积分

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

就是 $f$ 的一个原函数, 其中 $x_0 \in (a,b)$ 上任意一个固定的点. 证毕. □

# 面积函数图示



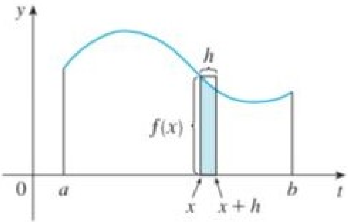
## 图示公式 $g'(x) = f(x)$

由于

$$\frac{1}{h}\Big[g(x+h)-g(x)\Big] = \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\Big]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi) \to f(x), \quad h \to 0,$$

其中 $\xi$ 介于 $x$ 和 $x+h$ 之间的某点. 故 $g'(x) = f(x)$. 如图所示.



**Theorem**

定理回忆: 设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可积. 若 $h(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上的一个原函数, 且于 $[a,b]$ 连续, 则

$$\int_a^b f(x)dx = h(b) - h(a). \quad (\text{Newton} - \text{Leibniz 公式})$$

注: 之前已证过这个定理. 如果假设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续, 则定理还有另一简单证明.

# 另一个证明

证明: 由微积分学基本定理的另一形式可知, 变上限积分 $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 由于 $h(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数, 故 $h(x) = g(x) + C$. 于是

$$h(b) - h(a) = g(b) + C - g(a) - C$$

$$= g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

定理得证.

微积分学基本定理的有两个形式. 其一是

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad (*)$$

其中 $f(x)$ 假设在 $[a, b]$ 连续. 其二为 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$, 其中 $F(x)$ 假设在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 将积分上限 $b$ 换为变量 $x$, 则

$$\int_a^x \left[\frac{d}{dt}F(t)\right]dt = F(x) - F(a). \quad (**)$$

等式 (*) 和 (**) 表明, 微分和积分运算互逆.

# 注记

注一: 并不是每个函数都有原函数. 例如 Dirichlet 函数在任何区间上都没有原函数.

注二: 导函数不一定可积. 例如考虑函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

易证 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, $F'(x) = 2x\sin(x^{-2}) - 2x^{-1}\cos(x^{-2})$, $x \neq 0$, 且 $F'(0) = 0$. 显然导函数 $F'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上不可积. 因为 $F'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无界.

例一: 求 $G'(x)$, 其中 $G(x)$ 定义如下

$$G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2}dt$$

解: 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, 则 $F'(x) = f(x)$. 另一方面 $G(x)$ 可以表为

$$G(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)dt + \int_0^{x^3} f(t)dt$$

$$= -\int_0^{x^2} f(t)dt + \int_0^{x^3} f(t)dt = F(x^3) - F(x^2).$$

于是

$$G'(x) = F'(x^3) \cdot 3x^2 - F'(x^2) \cdot 2x$$

$$= 3x^2\sqrt{1+x^6} - 2x\sqrt{1+x^4}.$$

解答完毕.

例二：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且 $f(a)=0$. 证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx.$$

证明：由 Newton-Leibniz 公式得

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x 1\cdot f'(t)dt.$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$f^2(x)=\left(\int_a^x 1\cdot f'(t)dt\right)^2$$

# 例二续

$$f^2(x) = \left(\int_a^x 1 \cdot f'(t)dt\right)^2$$

$$\le \left(\int_a^x 1^2 dx\right) \cdot \left(\int_a^x [f'(t)]^2 dt\right)$$

$$\le (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2 dt.$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b [f(x)]^2 dx \le \int_a^b (x-a)dx \int_a^b [f'(t)]^2 dt$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

命题得证. □

例三: 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}.$$

解: 显然分母当 $x\to+\infty$ 时趋向正无穷. 考虑应用 L'Hospital 法则.

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\int_0^x e^{2t^2}dt}=\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$$

$$\frac{\frac{d}{dx}[2\int_0^x e^{t^2}dt]}{\frac{d}{dx}e^{x^2}}=\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}\cdot 2x}=\frac{1}{x}\to 0,\quad x\to+\infty.$$

故原极限为零.

例四: 设函数 $f$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导, $f(0)=f(1)=0$, 且 $f(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$. 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geq 4.$$

注: 俄罗斯数学家 Lyapunov (1857-1918) 在研究二阶线性微分方程 $y''+a(x)y=0$ 的稳定性时, 发现了这个不等式, 并由此导出著名的 Lyapunov 稳定性准则.

证明: 由假设可知 $f$ 在 $[0,1]$ 上必然在某点 $c\in(0,1)$ 处取得正最大值. 即 $f(c)=\max\{f(x),x\in[0,1]\}>0$. 再由中值定理知

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)c,\quad f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),$$

其中 $\xi\in(0,c)$, $\eta\in(c,1)$. 由此得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)}{c},\quad f'(\eta)=-\frac{f(c)}{1-c}.$$

因此

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \frac{1}{f(c)} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \frac{1}{f(c)} \int_\xi^\eta |f''(x)| dx$$

$$\geq \frac{1}{f(c)} \left| \int_\xi^\eta f''(x) dx \right| = \frac{1}{f(c)} \left| f'(\eta) - f'(\xi) \right|$$

$$= \frac{1}{f(c)} \left[ \frac{f(c)}{1-c} + \frac{f(c)}{c} \right] = \frac{1}{(1-c)c} \geq 4, \ \forall c \in (0,1).$$

命题得证. $\square$

**Definition**

定义: 假设函数 $f$ 有原函数, 则用符号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任意一个原函数, 并称 $\int f(x)dx$ 为 $f$ 的一个不定积分, 其中 $f$ 称为被积函数. 有时不定积分 $\int f(x)dx$ 简写作 $\int f$.

1. $\int 0 dx = C$;
2. $\int \cos x dx = \sin x + C, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \ \forall x \neq 0$;
5. $\int x^{\lambda} dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + C, \ \forall x > 0, \ \lambda \neq -1$;
6. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \ a > 0, \ a \neq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \ \forall x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \ \forall k \in \mathbb{Z}$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \ \forall x \in (k\pi, (k+1)\pi), \ \forall k \in \mathbb{Z}$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \ \forall x \in (-1, 1)$.

1. $[\int f(x)dx]' = f(x)$;
2. 设 $F(x)$ 可导，则 $\int F'(x)dx = F(x) + C$;
3. $\int (f+g) = \int f + \int g$;
4. $\int (\lambda f) = \lambda \int f$;

例一：求积分

$$\int \left(3x^2 + \frac{4}{x}\right) dx.$$

解：

$$\int \left(3x^2 + \frac{4}{x}\right) dx = \int 3x^2 dx + \int \frac{4dx}{x}$$

$$= \int dx^3 + 4 \int d \ln|x| = x^3 + 4 \ln|x| + C.$$

例二: 求积分

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

解:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$

例三: 求积分

$$\int \tan^2 x dx.$$

解:

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C.$$

例四：求积分

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx.$$

解：

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C.$$

例五：设 $a > 0$，求不定积分

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx, \quad |x| \neq a.$$

解：先将被积函数的分式形式化为方便积分的形式，即

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right).$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|a+x| - \ln|a-x|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

例六：求不定积分

$$\int e^{|x|}dx.$$

解：由于 $e^{|x|}$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续，故它有原函数，$F(x)=\int_0^x e^{|t|}dt$ 就是一个原函数．当 $x\geq 0$ 时，

$$F(x)=\int_0^x e^t dt=e^x-1;$$

当 $x<0$ 时，

$$F(x)=-\int_x^0 e^{-t}dt=e^{-t}\Big|_x^0=1-e^{-x}.$$

# 例六续

因此所求不定积分为

$$\int e^{|x|}dx = F(x) + C,$$

其中 $F(x)$ 定义如下

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

**Theorem**

定理: 设 $f(u)$ 在区间 $J$ 上有原函数 $F(u)$, 即 $\int f(u)du = F(u) + C$, 则 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C$, 其中 $\phi(x)$ 是区间 $K$ 上的可导函数, 且 $\phi(x) \in J, \forall x \in K$

**Proof.**

证明: 由假设 $F'(u) = f(u)$ 知

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x),$$

此即 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C$. 定理得证. □

计算不定积分 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$ 的过程:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(\phi(x))d\phi(x) = \int f(u)du$$

$$= F(u) + C, \quad u = \phi(x).$$

注: 实际计算的关键在于, 识别积分 $\int g(x)dx$ 中的被积函数 $g(x)$ 可以表示为 $g(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$.

例一:

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{3}\int (3x+2)^5 d(3x+2) = \frac{1}{3}\int u^5 du$$

$$= \frac{1}{18}u^6 + C = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C.$$

例二:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

例三:

$$\int \sin^2 x\cos^3 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x) d\sin x = \int u^2(1-u^2) du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

例四:

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

例五: 设 $a \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

# 作业

课本习题5.2 (pp.140-141): 7, 8, 9, 10.

课本习题5.3 (pp.145-147): 1(1)(3)(5), 2, 3, 4, 6, 7, 11.