《微积分A1》第八讲

教师　杨利军

清华大学数学科学系

2020年10月09日

Definition

定义: 每个从区间 J 到自身的函数(映射) $f: J \to J$ 均称为区间 J 上的一个(离散)动力系统 (dynamical system). 动力系统理论研究 f 区间 J 上的迭代, 即轨道(序列)

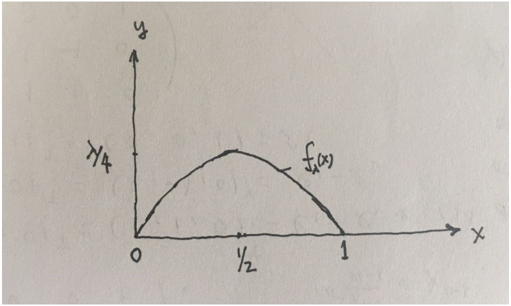
$$\{f^n(x)\} = \left\{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots\right\}, \quad x \in J$$

的性态, 这里 $f^2(x) = f(f(x))$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $\forall n \geq 1$.

记号: 由区间 J 到自身的映射(函数) f 有时记作 $f: J \hookleftarrow$.

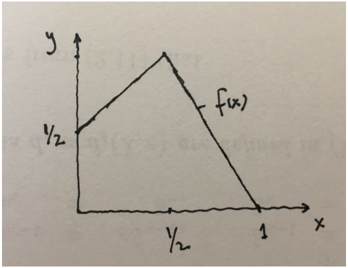
设 $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. 不难证明当 $\lambda \in [0,4]$ 时, $f_\lambda : [0,1] \hookleftarrow$, 即有区间 $[0,1]$ 到自身的映射. 这个著名映射称 Logistic 映射.

(建议 Google 一下 Logistic maps, 或百度一下 Logistic 映射).



考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1 - x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



(稍后我们将再考虑这个例子，作为 Li-Yorke 第一定理的一个应用).

Definition

<u>定义</u>: 点 $x_0 \in J$ 称为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 如果

$$f^j(x_0) \neq x_0, \quad j = 1, 2, \cdots, k-1, \quad f^k(x_0) = x_0.$$

特别 1 周期点又称为不动点, 即 $f(x_0) = x_0$.

<u>注</u>: 当 $x_0 \in J$ 为 k 周期点时, 其轨道 $\{f^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ 为 k 个点 x_0, $f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)$ 的无穷次重复. 此时轨道可简单记作 $\{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\}$.

Lemma

引理一: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点, 则 k 个点 x_0, $f(x_0)$, $\cdots$, $f^{k-1}(x_0)$ 两两互异.

Lemma

引理二: 设 x_0 为映射 $f: J \hookleftarrow$ 的 k 周期点. 若 $f^n(x_0) = x_0$, 则 n 为 k 的倍数, 即 $n = mk$.

Lemma

引理三: 设函数 $f: J = [a, b] \hookleftarrow$ 连续, 则 f 必有 1 周期点, 即不动点.

Lemma

引理四：设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续. 若 f 有 2 周期点，则 f 有 1 周期点，即不动点.

Lemma

引理五：设函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续. 若 f 的值域包含其定义域，即 $f([a, b]) \supseteq [a, b]$，则 f 有不动点.

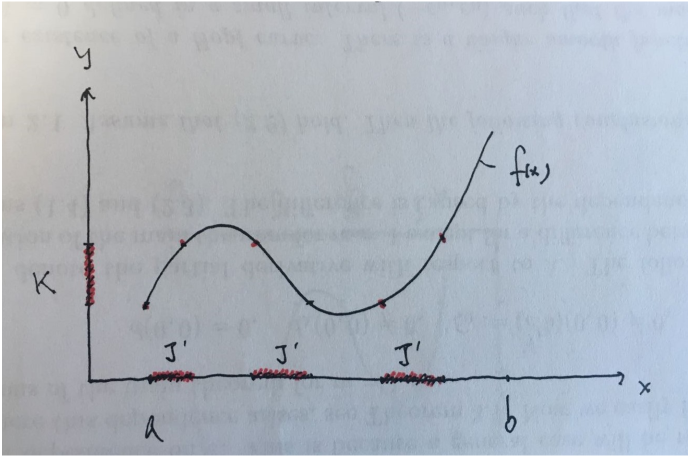
以上引理一至五的证明均留作补充习题.

Lemma

引理六: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 J 上连续. 如果值域 $f(J)$ 包含一个闭区间 K, 即 $f(J) \supseteq K$, 那么存在一个闭子区间 $J' \subseteq J$, 使得 $f(J') = K$, 且 f 映射区间 J' 的端点为区间 K 的端点, 映区间 J' 的内部为区间 K 的内部. 就是说, 若记 $J' = [p, q]$, $K = [c, d]$, 则 $\{f(p), f(q)\} = \{c, d\}$, $f((p, q)) = (c, d)$.

记号: 条件 $f(J) \supseteq K$ 将记作 $J \xrightarrow{f} K$ 或 $J \to K$.

引理六图示



证明: 记 $J=[a,b]$, $K=[c,d]$. 由于 $f([a,b])\supseteq[c,d]$, 故存在 $\xi,\eta\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=c$, $f(\eta)=d$. 若 $\xi<\eta$, 定义

$$p\triangleq\sup\left\{s, f(s)=c, \xi\le s\le\eta\right\},$$
$$q\triangleq\inf\left\{t, f(t)=d, p\le t\le\eta\right\}.$$

若 $\xi>\eta$, 定义

$$p\triangleq\inf\left\{s, f(s)=c, \eta\le s\le\xi\right\},$$
$$q\triangleq\sup\left\{t, f(t)=d, \eta\le t\le p\right\}.$$

显然 $f(p)=c$, $f(q)=d$. 由 p,q 的取法可知, $c<f(x)<d$, $\forall x\in(p,q)$ 或 (q,p). 于是闭区间 $J'=[p,q]$ 或 $[q,p]\subseteq[a,b]$ 即可满足要求. 引理得证.

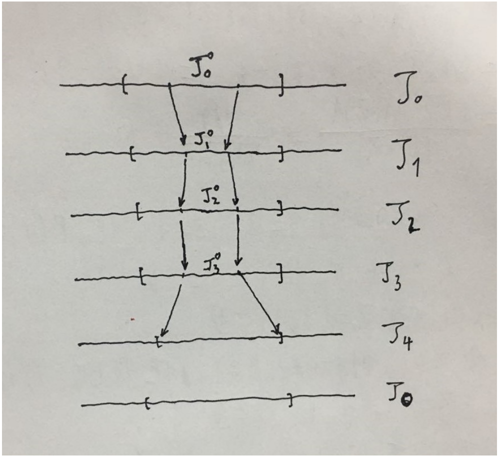
Lemma

<u>引理七</u>: 设 $f : J \hookleftarrow$ 连续, $J_k \subseteq J$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 为 J 的 n 个有界闭子区间. 若

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-2} \to J_{n-1} \to J_0,$$

则存在 $x_0 \in J_0$, 使得 $f^n(x_0) = x_0$, $f^k(x_0) \in J_k$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$.

引理七证明图示, $n = 5$ 情形



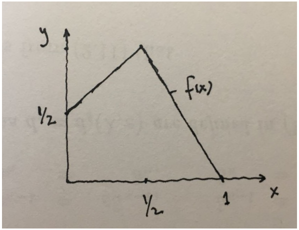
Theorem

第一定理 [Tienyien Li & James Yorke, 1975]: 设 $f : J \hookleftarrow$ 连续. 若 f 有 3 周期点, 则对任意正整数 n, f 有 n 周期点.

例子

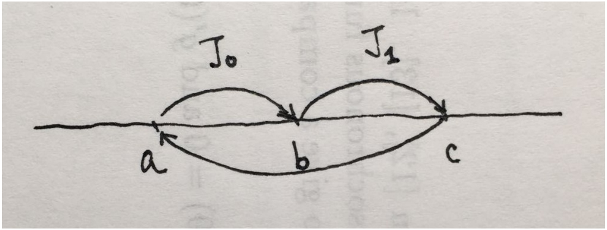
考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & x\in[0,\frac{1}{2}],\\ 2(1-x), & x\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$



易证点 $x=0$ 是 3 周期点: $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=1$, $f(1)=0$. 根据 Li-Yorke 第一定理可知, f 在区间 $[0,1]$ 上拥有任意正整数 n 的周期点.

证明: 假设连续函数 $f: J \hookleftarrow$ 有一个 3 周期点, 要证对任意正整数 n, f 有 n 周期点. 设 $\{a, b, c\}$ 是函数 f 的一个 3 周期轨道, 且 $f(a) = b$, $f(b) = c$ 以及 $f(c) = a$. 不妨设 $a < b < c$. 其他情形可类似处理. 记 $J_0 = [a, b]$, $J_1 = [b, c]$, 则 $f(J_0) \supseteq J_1$, $f(J_1) \supseteq J_0 \cup J_1 = [a, c]$. 如图所示.



证明续一

(i) 1 周期点的存在性. 由于 $f(J_1) \supseteq J_1$, 根据引理五可知 f 在区间 $J_1 = [b, c]$ 中存在不动点, 即存在 1 周期点.

(ii) 2 周期点的存在性. 由于 $J_0 \to J_1 \to J_0$, 即 $f(J_0) \supseteq J_1$ 且 $f(J_1) \supseteq J_0$. 故 $f^2(J_0) \supseteq J_0$. 由引理七知 f^2 存在不动点 $x_0 \in J_0$, 即 $f^2(x_0) = x_0$ 且 $f(x_0) \in J_1$. 如果 x_0 的最小周期不是 2, 则 x_0 是 f 的不动点, 即 $f(x_0) = x_0$. 由于 $x_0 = f(x_0) \in J_0 \cap J_1$ $= [a, b] \cap [b, c] = \{b\}$, 故 $x_0 = b$. 但是 b 不是 f 的 1 周期点, 而是 3 周期点. 矛盾. 因此 x_0 是 f 的 2 周期点.

(iii) 对 $\forall n \geq 4$，n 周期点的存在性. 记 $J_k = J_1 = [b, c]$，$k = 2, 3, \cdots, n-1$，于是

$$J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0.$$

根据引理七知存在 $x_0 \in J_0$，使得 $f^n(x_0) = x_0$，$f^k(x_0) \in J_k = J_1$，$k = 1, 2, \cdots, n-1$. 假设 x_0 不是 n 周期点，则存在正整数 p，$1 \leq p < n$，使得 $f^p(x_0) = x_0$. 由于 $f^p(x_0) \in J_p = J_1 = [b, c]$ 且 $x_0 \in J_0 = [a, b]$. 故 $x_0 = b$ 即 x_0 是 3 周期点. 一方面 $f^2(x_0) = f^2(b) = f(c) = a$. 另一方面 $a = f^2(x_0) \in J_2 = [b, c]$. 矛盾. 因此 x_0 的最小周期为 n. 定理证毕.

Theorem

Li-Yorke 第二定理: 设 $f: J \hookleftarrow$ 连续. 假设 f 存在 3 周期点, 则存在不可数子集 $S \subset J$, 使得对 $\forall x, y \in S$, $x \neq y$

(i) $\underline{\lim}_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$;

(ii) $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$;

(iii) $\overline{\lim}_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(p)| > 0$, $\forall x \in S$, $p \in \mathcal{P}$, 其中 $\mathcal{P}$ 记所有周期点集合.

注: 结论(i)和(ii)表明, 集合 S 上的任意两点 $x, y \in S$ $(x \neq y)$ 的轨道 $\{f^n(x)\}$ 和 $\{f^n(y)\}$ 既无穷次靠近, 也无穷次隔离, 忽分忽合, 若即若离. 因此 f 在 S 上的运动(迭代)呈现出混乱的状态. 于是 Li-Yorke 引入了如下混沌概念.

Definition

定义: 如果 $f: J \hookleftarrow$ 满足如下条件,

(i) f 的周期点的最小周期无上界;

(ii) 存在不可数子集 $S \subset J$, 使得对任何两点 $x, y \in S$, $x \neq y$,

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}|f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}|f^n(x) - f^n(y)| = 0,$$

则称由 f 在区间 J 上所定义的动力系统是混沌的(chaotic).

正整数的 Sharkovsky 序

下述正整数的排序称为 Sharkovsky 序(1965):

$$
\begin{array}{ccccc}
3, & 5, & 7, & 9, & \cdots \\
2\times 3, & 2\times 5, & 2\times 7, & 2\times 9, & \cdots \\
2^2\times 3, & 2^2\times 5, & 2^2\times 7, & 2^2\times 9, & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

$$\cdots, \quad 2^n, \quad 2^{n-1}, \quad \cdots, \quad 2^2, \quad 2, \quad 1.$$

记号: 如果按照上述 Sharkovsky 排序, 正整数 n 排在正整数 m 之前, 则记作 $n \rhd m$ 或 $m \lhd n$. 于是 $3 \rhd m$, $\forall m \neq 3$.

Sharkovsky 定理

Theorem

定理 [Sharkovsky, 1965]: 设 $f : J \hookleftarrow$ 连续，其中 J 为一区间，若 f 有 n 周期点，则对任意正整数 $m \lhd n$，f 有 m 周期点.

显然 Li-Yorke 第一定理是 Sharkovsky 定理的一个特殊情形. 也就是说，当 f 有 3 周期点时，则对任意正整数 m，f 有 m 周期点.

Definition

定义: 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有定义, $x_0 \in (a,b)$. 若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad 或 \quad \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且上述极限值称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数(derivative), 记作 $f'(x_0)$ 或 $Df(x_0)$ 或 $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\cdots$.

注: 式 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 通常称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的差商 (difference quotient).

因此导数就是差商的极限.

例一

Example

例一: 常数函数处处可导, 且导数恒为零. 即对于常数函数 $f(x) = C$, $f'(x) = 0$. 因为

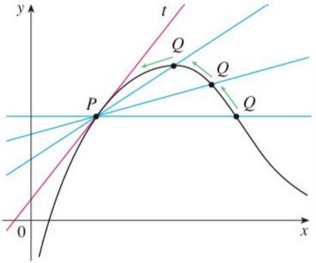
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{C - C}{x - x_0} = 0 \to 0, \quad x \to x_0.$$

Example

例二: 函数 $f(x) = x^2$ 在任意点 x_0 处的导数为 $f'(x_0) = 2x_0$，或写作 $f'(x) = 2x$. 因为

$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \to 2x_0, \quad x \to x_0.$$

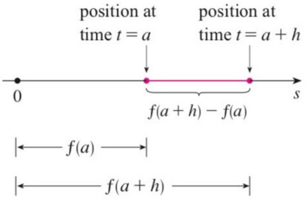
依定义，曲线在一点的切线就是割线的极限位置. 如图所示.

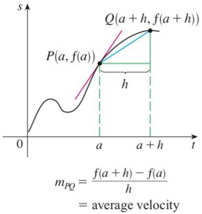


任取函数曲线 $\Gamma: y = f(x)$ 上一点 $P = (x_0, f(x_0))$，再取曲线 Γ 上 P 附近的一点 $Q = (x, f(x))$，则割线 $\overline{PQ}$ 的斜率为 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x0}$.

因此导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 Γ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率. 这正是导数的几何意义.

设物体(质点)沿着直线运动，其位置坐标记作 $s=f(t)$，即在时刻 t 时，物体位于位置 $s=f(t)$. 在时刻 $t=a$ 到 $t=a+h$ 间隔内，位置变化为 $f(a+h)-f(a)$. 于是在这个时间间隔的平均速度为 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. 令 $h\to 0$ 可知极限(假设存在)即导数 $f'(a)$，代表了在时刻 $t=a$ 时物体运动的瞬时速度.





例: $(\sin x)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

证明: 任意固定 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x\sin h}{h} \to \cos x, \quad h \to 0.$$

因此函数 $\sin x$ 在任意点 x 处可导, 且 $(\sin x)' = \cos x$. 另证:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$= \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to \cos x_0, \quad x \to x_0.$$

因此 $(\sin x)'_{x_0} = \cos x_0$. 因 x_0 任意, 故 $(\sin x)' = \cos x$.

例: $(\cos x)' = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

证明: 任意固定 $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h} \to -\sin x, \quad h \to 0.$$

因此函数 $\cos x$ 在任意点 x 处可导, 且 $(\cos x)' = -\sin x$. 另证:

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\frac{2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}$$

$$= -\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \to -\sin x_0, \quad x \to x_0.$$

Example

例: $(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

证明: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 以及任意增量 h,

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \to a^x \ln a, \quad h \to 0.$$

故 $(a^x)' = a^x \ln a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Example

例: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

证明: 设 $x \neq 0$, 则当 $|h| < |x|$ 时,

$$\frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \frac{1}{x}, \quad h \to 0.$$

故 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

Example

例: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

证明: $\forall x > 0$, $\forall h$,

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{x \cdot \frac{h}{x}} \to \alpha x^{\alpha-1}, \quad h \to 0.$$

故 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x > 0$.

Theorem

定理: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

Proof.

证明: 由于 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 即 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 故

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

这表明 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证毕. □

左导数与右导数

Definition

定义: (i) 若极限$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数，记作 $f'_+(x_0)$;

(ii) 若极限$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数，记作$f'_-(x_0)$.

Theorem

定理: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 均存在且相等.

Proof.

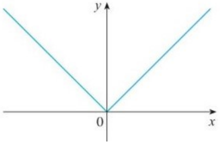
证明: 依可导定义，结论显然. 细节略. □

例: 考虑函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处左右导数, 以及可导性.

解: 对于 $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x} = 1 \to 1, \quad x \to 0^+.$$

故 $|x|$ 在点 $x = 0$ 处的右导数存在且 $f'_+(0) = 1$. 同理可得 $|x|$ 在点 $x = 0$ 处的左导数存在且 $f'_-(0) = -1$. 根据上述定理可知函数 $|x|$ 在点 $x = 0$ 处不可导. 根据函数 $y = |x|$ 图像可知点 $(0, 0)$ 是尖点, 无切线. 故不可导. 解答完毕.



作业

课本习题2.6 (pp. 63-64):

7, 8, 9, 10, 12, 14.

补充习题: 证明讲义中的引理一至引理五.

选作题

选做题(选作题解答直接交给任课老师. 期中考试前提交解答即可)

题一: 设 $f:[a,b]\hookleftarrow$ 连续. 直接证明(即不利用Sharkovsky 定理), 若 f 有 4 周期点, 则 f 有 2 周期点.

题二: 设 $f:[0,1]\hookleftarrow$ 连续. 对 $\forall x_1\in[0,1]$, 定义 $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\geq 1$. 若 $\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 证明序列 $\{x_n\}$ 收敛.

题三: 设 $f:[0,1]\hookleftarrow$ 连续. 若 f 没有 2 周期点, 那么对任意 $x_0\in[0,1]$, 由迭代 $x_{n+1}=f(x_n)$ 所产生的序列 $\{x_n\}$ 均收敛.

(注: 题三比较难. 第一个给出正确解答的同学将获得总成绩加分的奖励)