

Lock In & Hall

고영린

자연과학대학 물리천문학부 2023-19697

k00lin@snu.ac.kr

(Dated: 16 May 2024)

전류가 흐르는 도선에 외부 자기장이 가해질 경우, 도선의 양쪽에 자기장의 크기에 비례하는 전압 차이가 생기게 된다. 이러한 Hall voltage는 크기가 매우 작아 noise의 영향을 제거하지 못하면 측정이 어렵다. 이렇게 Noise의 영향을 제거하여 정밀한 신호를 검출하고 싶을 때 lock-in detection 기술을 사용할 수 있다. 이는 진동수가 서로 다른 두 사인파가 곱해질 경우 진동수의 합과 차를 진동수로 가지는 두 파동의 합으로 분리할 수 있음을 이용한 것으로, 이렇게 곱해진 신호를 low-pass filter에 통과시킬 경우 두 진동수가 비슷해 DC signal이 존재하는 경우에만 신호가 검출되게 된다. 본 실험에서는 함수발생기와 lock-in amplifier kit, 오실로스코프를 이용하여 다양한 실험을 통해 기기의 특성을 파악한 후 lock-in detection의 원리를 파악하고 이를 이용해 Hall voltage를 측정하여 자석과의 거리에 따른 자기장의 세기의 변화를 관찰하는 것을 목표로 하였다. 실험 결과 자기장의 크기가 거리에 대해 지수적으로 감소하는 경향을 보였으나, 계산된 계수는 이론적 예측인 -3보다 컸다. 이러한 오차는 자석의 세기가 약해 noise를 제거하더라도 측정 장비의 오차의 영향을 크게 받았기 때문으로 보이며, 더욱 정밀한 측정 장치를 사용하거나 더욱 강한 자석을 사용한다면 정확한 측정이 가능해질 것으로 기대된다.

I. INTRODUCTION

본 실험은 lock-in detection의 원리를 파악하고 이를 이용하여 Hall 전압을 측정해 거리에 따른 자기장의 변화를 알아보는 것을 목적으로 하였다.

I.A. Lock-in Detection

Lock-in detection은 다양한 진동수의 noise가 있는 신호에서 특정 진동수의 신호만을 검출해내는 기술로, 원리는 다음과 같다. 두 사인파 $A \sin f_1 t$ 와 $B \sin f_2 t$ 가 곱해진 신호는 Eq. 1과 같이 분석할 수 있다.

$$AB \sin f_1 t \sin f_2 t = \frac{1}{2} AB [\cos (f_1 - f_2) t - \cos (f_1 + f_2) t] \quad (1)$$

따라서 이 신호를 low-pass filter에 통과시키면 $f_1 \neq f_2$ 인 경우 신호가 거의 통과하지 못하지만, $f_1 = f_2$ 인 경우는 filter를 통과할 수 있는 DC 성분이 나타나게 된다. 이를 이용하면 noise가 섞인 신호에 검출하고자 하는 진동수를 가진 신호를 DBM(Double Balanced Mixer) 등을 사용하여 곱한 뒤 low-pass filter에 통과시켜 특정 진동수 성분의 세기를 알아낼 수 있다.

I.B. Filter

Filter는 진동수가 특정 조건을 만족하는 신호만을 통과시키는 장치로, low-pass, high-pass, band-pass가 있으며, 본 실험에는 low-pass filter를 사용하였다. 가장 간단한 low-pass filter는 직렬 RC 회로에 input signal이 주어지고 축전기에 걸리는 전압을 output signal로 측정하는 것을 생각할 수 있다. 이때 output 전압은 input 전압의 시간 적분으로 나타내어질 수 있으며, 이로 인해 진동수가 충분히 낮은 신호만 통과할 수 있게 된다.

I.C. Hall Effect

전류가 흐르는 도선에 외부 자기장이 가해졌을 때 도선 내부의 운동하고 있는 전자들은 이로 인한 로렌츠 힘을 받게 된다. 이로 인해 전류와 자기장에 수직한 방향으로 도선 내부에 전위차가 생기게 되며, 이 현상을 Hall effect라 한다. 이때 생성되는 Hall voltage는 Hall effect로 인한 전기력과 로렌츠 힘이 평형을 이루는 것을 이용하여 계산할 수 있다. 전하 운반자 밀도가 n , 도선의 단면적이 A , 도선의 폭이 d , 가해진 외부 자기장의 크기가 B 일 때 Hall voltage V_H 는 Eq. 2와 같이 나타내어진다. 이때 R_H 는 Hall coefficient로, 도선의 특성에 의존하는 값이다.

$$V_H = -\frac{id}{neA} B = -R_H i B \frac{d}{A} \quad (2)$$

Hall voltage는 외부 자기장의 크기에 비례하므로 이를 이용해 자기장의 크기를 측정할 수 있다. 다만 Hall voltage는 매우 작기 때문에 noise로부터 검출하기 어려워 lock-in detection과 같은 장비를 사용해야 한다.

II. EXPERIMENTAL METHODS

본 실험에서는 function generator, lock-in amplifier kit, 오실로스코프를 이용하여 lock-in detection을 실행하고, Hall sensor를 이용해 자기장의 세기를 측정하였다. 특별한 언급이 없는 이상 회로도 그림은 매뉴얼에 제시된 그림을 참고하였다. 실험은 실험 장비의 특성을 파악하고 calibration하는 것, lock-in detection을 확인하는 것, Hall voltage를 측정하는 것의 세 단계로 실행하였다.

II.A. Calibration

II.A.1. Preamp Gain

Preamp gain의 진동수 의존성을 확인하기 위해 preamp의 gain을 1, 2, 5, 10, 20으로 바꾸며 각 경우에서 입력 신호의 진동수에 따른 출력 신호의 gain의 변화를 관찰하였다. 이때 회로는 Figure 1과 같았다.

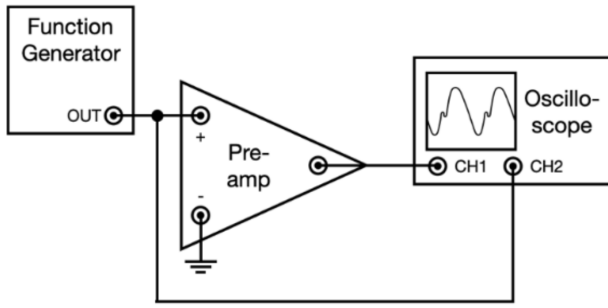


FIG. 1 Preamp gain의 입력 진동수에 따른 변화를 확인하기 위해 사용한 회로도

II.A.2. Phase Shifter

이후 phase shifter의 거동을 파악하기 위해 Figure 2와 같이 phase shifter만 연결한 상태로 실험을 진행하였다. 우선 phase shift의 값을 90° 로 맞춘 뒤 입력 신호의 진동수에 따른 실제 phase shift의 값을 측정하였다. 이후 입력 진동수를 1000 kHz로 고정한 뒤 설정된 phase shift 값에 대한 실제 phase shift 값도 측정하였다.

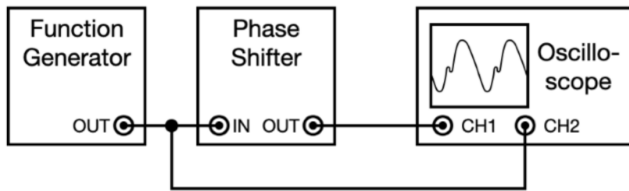


FIG. 2 Phase shifter의 거동을 확인하기 위해 사용한 회로도

II.A.3. DBM

다음으로 lock-in detector의 DBM에서 input signal과 reference signal의 위상차가 특정 값일 때 출력 신호가 원본과 어떻게 달라지는지 오실로스코프를 통해 확인하였다. 사용한 회로도는 Figure 3와 같다.

II.A.4. Low-Pass Amplifier

마지막으로 low-pass amplifier의 gain을 확인하기 위해 Figure 4와 같은 회로를 사용하여 roll-off이 6, 12인 경우와 time constant가 0.03, 0.1, 0.3인 경우에 나타나는 입력 진동수에 따른 gain을 각각 측정하여 비교하였다.

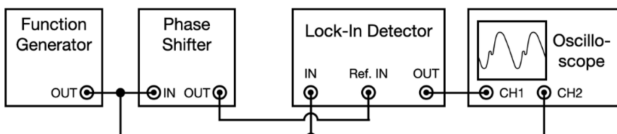


FIG. 3 Lock-in detector의 거동을 확인하기 위해 사용한 회로도

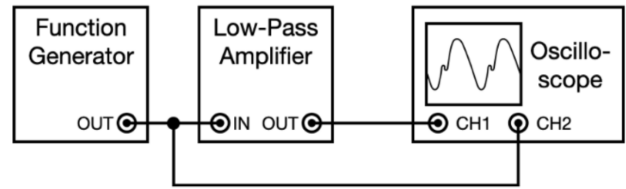


FIG. 4 Low-pass filter의 gain을 확인하기 위해 사용한 회로도

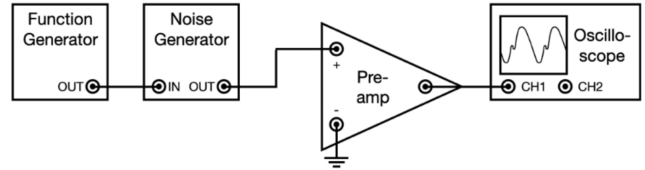


FIG. 5 FFT를 통해 noise를 관찰하기 위해 사용한 회로도

II.B. Lock-In Detection

II.B.1. FFT를 이용한 Noise 관찰

Noise generator를 통과시켜 신호에 noise를 섞었을 때 출력되는 신호의 양상을 관찰하기 위해 Figure 5와 같은 회로를 구성하여 오실로스코프의 FFT 기능을 이용해 실험하였다.

II.B.2. Lock-In Detection Without DC Offset

DC offset이 존재하지 않는 noise가 섞인 신호가 lock-in detection으로 검출되는 것을 관찰하기 위해 Figure 6와 같은 회로를 이용하여 실험하였다. 이때 신호의 특성을 바꾸어가며 다양한 조건에서 원본 신호의 검출이 잘 이루어지는지 확인하였다.

II.B.3. Lock-In Detection With DC Offset

Noise에 DC offset이 있는 경우에도 lock-in detection이 잘 이루어지는지 확인하기 위해 Figure 6와 같은 회로를 구성하고 DC offset이 존재하는 noise를 섞어 주어 결과를 확인하였다.

II.C. Hall 전압 측정

위에서 확인한 실험 장비들을 이용하여 Figure 7와 같은 회로를 구성한 뒤 자석의 극 방향과 극에 수직한 방향으

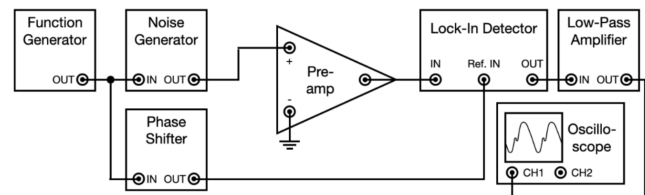


FIG. 6 Lock-in detection이 잘 이루어지는지 확인하기 위해 사용한 회로도

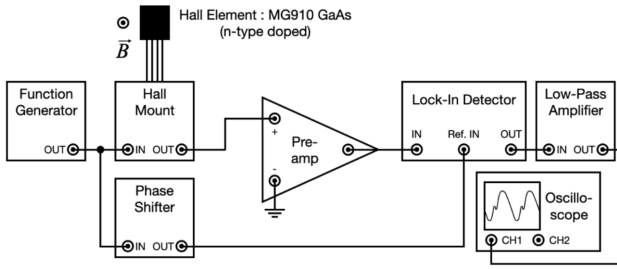


FIG. 7 Hall voltage를 측정하기 위해 사용한 회로도

로 Hall 소자를 움직여가며 거리에 따른 output signal의 크기를 측정하였다.

III. RESULTS

III.A. Calibration

III.A.1. Preamp Gain

Preamp의 gain을 1, 2, 5, 10, 20으로 설정했을 때 각각의 경우에서 나타난 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 gain은 Figure 8, 9, 10, 11, 12과 같았다. 이때 선형 회귀는 측정 값이 평행선에서 벗어나는 구간에서 진행하였으며, gain이 3dB이 되는 지점을 구하였다. 실험 결과 진동수가 특정

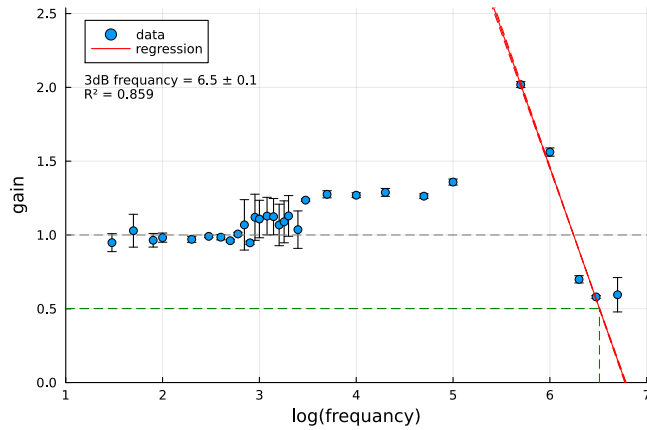


FIG. 8 Preamp의 gain을 1로 두었을 때 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 gain

값보다 커지게 되면 일정한 gain에서 벗어나 선형적으로 감소하는 경향을 보임을 알 수 있었으며, gain이 커지는 경우 진동수가 작은 범위에서도 표기된 gain과의 오차가 커지는 것을 관찰했다.

III.A.2. Phase Shifter

Phase shift 설정값을 90°로 두었을 때 진동수에 따른 실제 phase shift는 Figure 13과 같았다. 이때 선형 회귀는 값이 직선에서 벗어나지 않는 앞부분을 이용하여 진행하였으며, 거동을 관찰하기 위해 각도에 360°를 더하거나 빼어 분석하였다. 이때 관찰된 phase shift는 낮은 진동수 영역에서 선형성을 보였고, 특정 지점에서는 직선의 위쪽으로

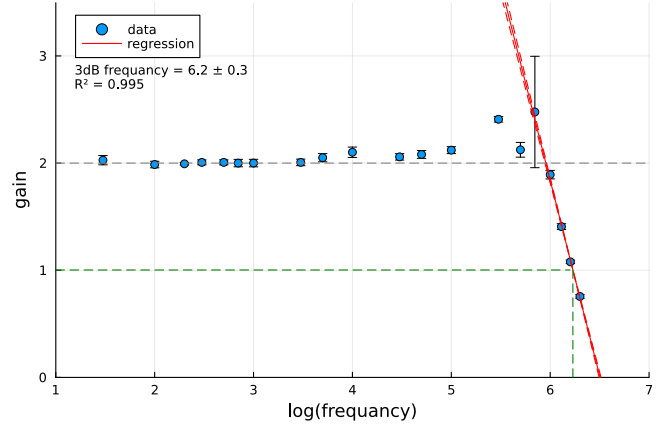


FIG. 9 Preamp의 gain을 2로 두었을 때 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 gain

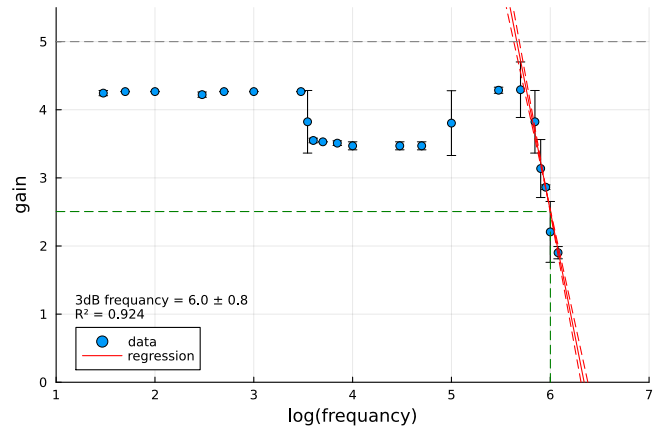


FIG. 10 Preamp의 gain을 5로 두었을 때 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 gain

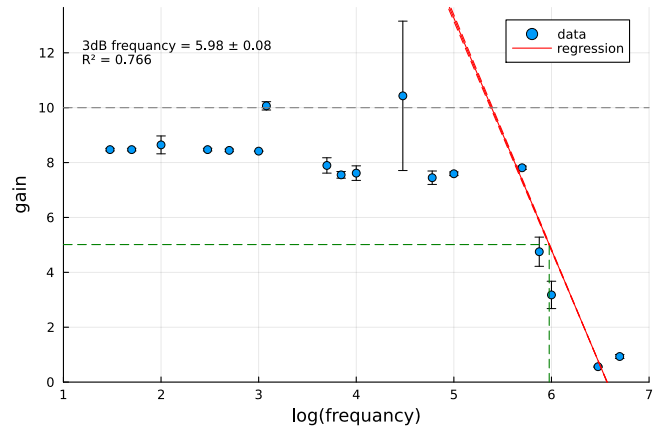


FIG. 11 Preamp의 gain을 10으로 두었을 때 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 gain

벗어나는 경향을 보였다. 회귀의 R^2 이 충분히 큰 것을 보아 낮은 진동수 영역에서는 선형 근사가 타당해 보인다.

입력 진동수를 1000 kHz로 두고 설정된 phase shift를 변화시켰을 때 실제 측정된 phase shift 값은 Figure 14와 같았으며, 설정값과의 차이는 Figure 15와 같았다. Phase

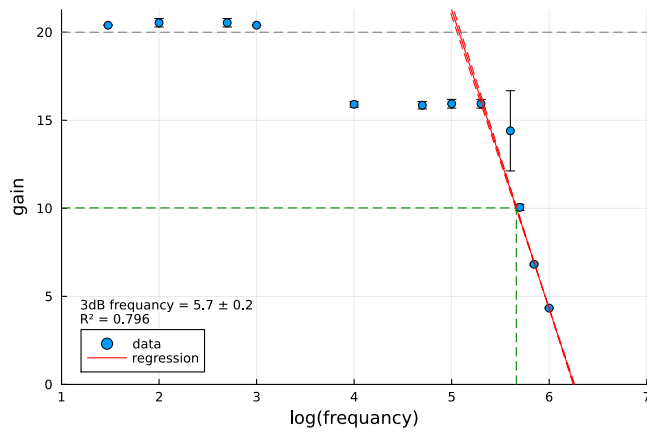


FIG. 12 Preamp의 gain을 20으로 두었을 때 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 gain

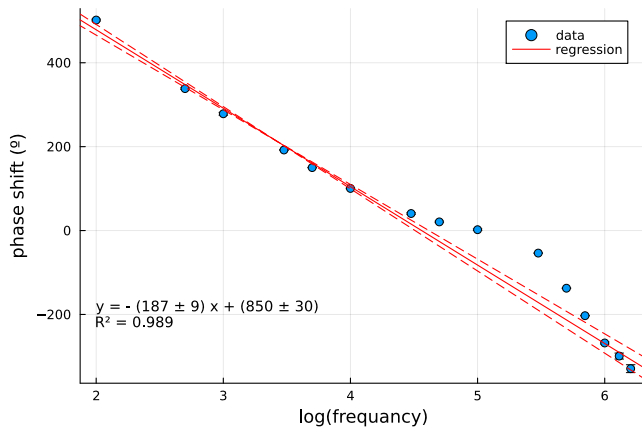


FIG. 13 Phase shifter를 90°로 설정했을 때 입력 진동수에 따른 실제로 측정된 phase shift

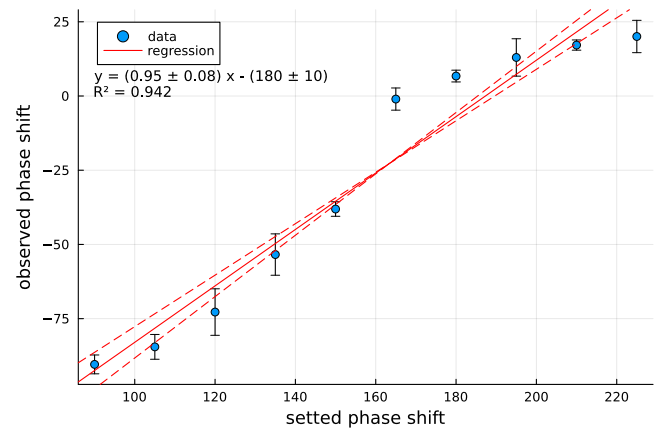


FIG. 14 Input signal의 진동수를 1000 kHz로 두었을 때 설정된 phase shift 값에 대한 측정된 phase shift 값

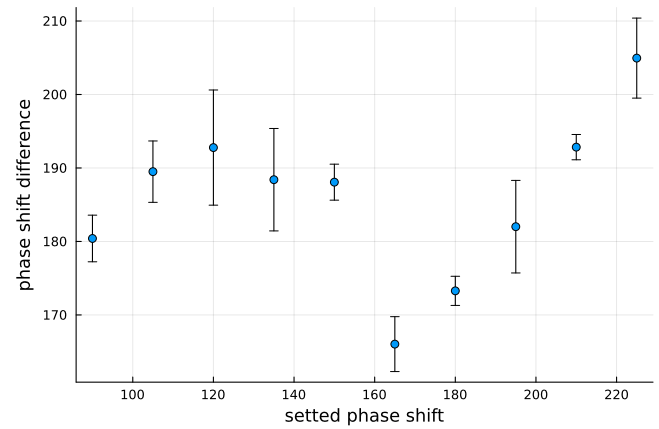


FIG. 15 Input signal의 진동수를 1000 kHz로 두었을 때 설정된 phase shift 값에 대한 측정된 phase shift 값의 차이

155 shift값을 변화시키며 실제로 일어난 phase shift를 관찰한
결과 명시된 값과 측정값 사이에 오차가 존재함을 볼 수
있었다.

III.A.3. DBM

160 Input signal과 reference signal의 위상차를 약 0°, 90°,
180°, 270°일 때 DBM을 통과한 출력 신호는 각각 Figure 16, 17, 18, 19과 같았다.
165

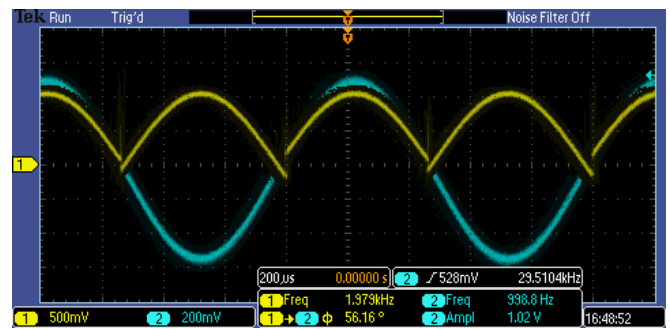


FIG. 16 Input signal과 reference signal의 위상차가 0°일 때 DBM을 통과한 신호의 결과

III.A.4. Low-Pass Amplifier

170 Low-pass amplifier의 roll-off를 고정하고 time constant
를 변화시켰을 때 나타난 입력 진동수에 대한 gain의 변화
는 roll-off가 6일 때 Figure 20, 12일 때 Figure 21와 같았다.
175 Time constant를 고정했을 때 roll-off에 따른 입력 진동수
에 대한 gain의 변화는 time constant가 0.03, 0.1, 0.3일 때
각각 Figure 22, 23, 24과 같았다. 이때 low-pass amplifier
의 gain은 2로 두고 실험하였다.

III.B. Lock-In Detection

이하의 lock-in detection을 확인하는 실험은 별다른 언급이 없는 경우 input signal이 1000 Hz, 100 mV, 설정된 preamp와 low-pass amplifier의 gain이 2, noise amplitude가 0.001, time constant가 0.3, roll-off이 12인 조건에서 실행하였다.

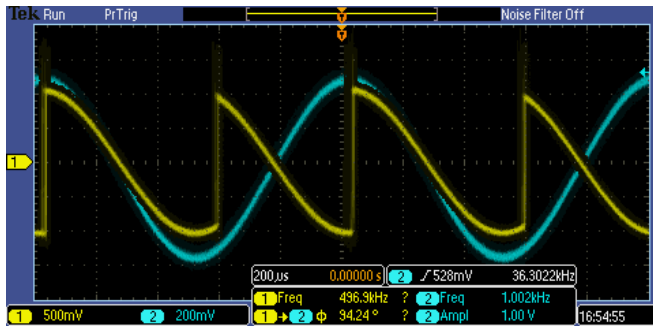


FIG. 17 Input signal과 reference signal의 위상차가 90°일 때 DBM을 통과한 신호의 결과

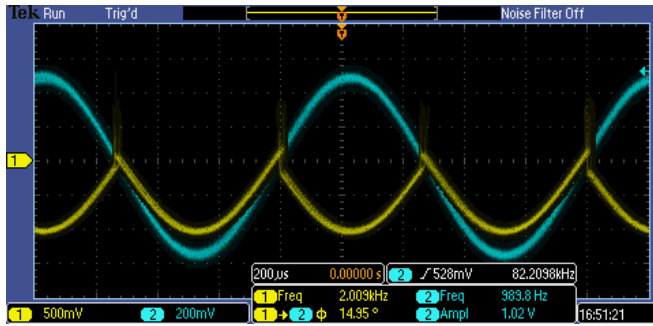


FIG. 18 Input signal과 reference signal의 위상차가 180°일 때 DBM을 통과한 신호의 결과

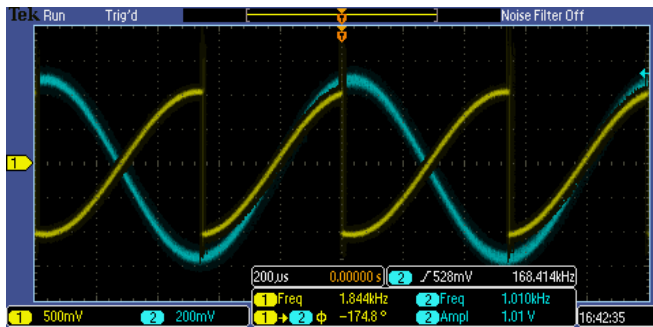


FIG. 19 Input signal과 reference signal의 위상차가 270°일 때 DBM을 통과한 신호의 결과

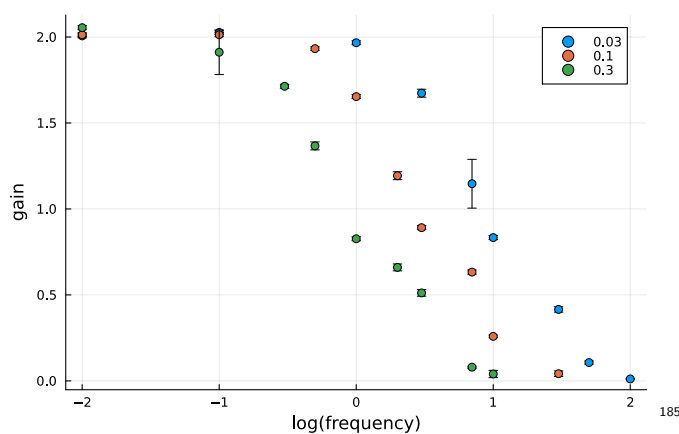


FIG. 20 Low-pass amplifier의 roll-off가 6일 때 각 time constant에 대해 나타나는 입력 진동수에 대한 gain의 변화

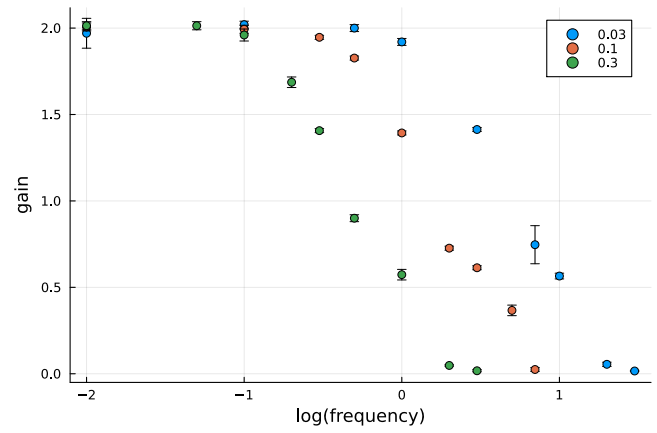


FIG. 21 Low-pass amplifier의 roll-off가 12일 때 각 time constant에 대해 나타나는 입력 진동수에 대한 gain의 변화

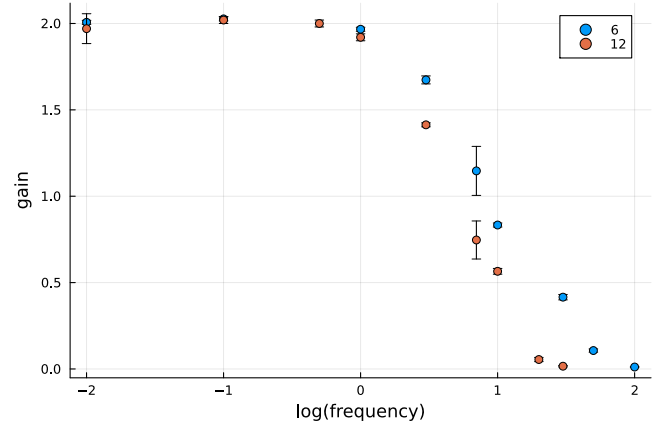


FIG. 22 Time constant가 0.03일 때 두 가지 roll-off 값에 대해 나타나는 입력 진동수에 대한 gain의 변화

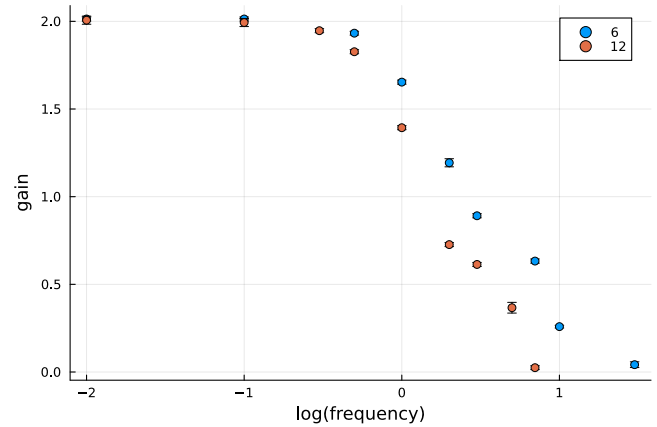


FIG. 23 Time constant가 0.1일 때 두 가지 roll-off 값에 대해 나타나는 입력 진동수에 대한 gain의 변화

III.B.1. FFT를 이용한 Noise 관찰

Roll-off를 고정시킨 경우, time constant가 클 수록 더 낮은 진동수에서 gain이 감소하기 시작했으며, time constant를 고정시킨 경우 roll-off이 큰 경우 더 날카롭게 감소함을

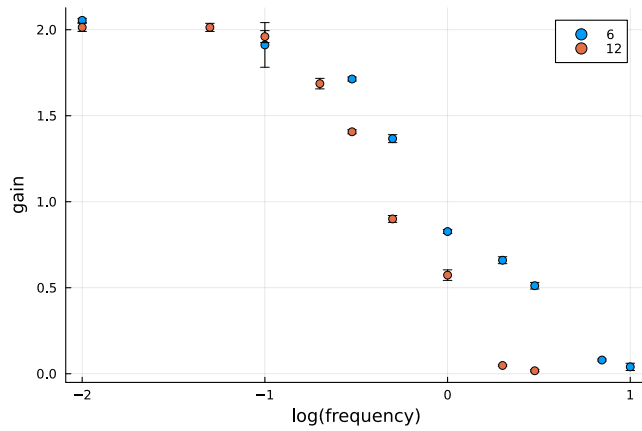


FIG. 24 Time constant가 0.3일 때 두 가지 roll-of 값에 대해 나타나는 입력 진동수에 대한 gain의 변화

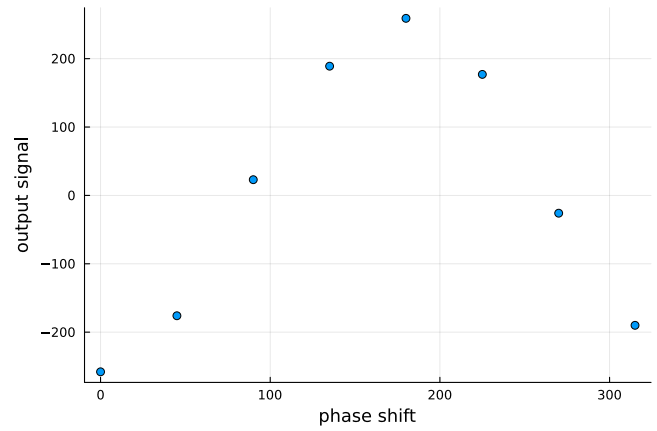


FIG. 26 Noise의 위상차를 변화시켰을 때 lock-in detection의 output 신호의 변화

볼 수 있었다. 오실로스코프에서 검출된 신호와 FFT 결과

III.B.3. Lock-In Detection With DC Offset

DC offset를 주었을 때 관찰된 input signal과 lock-in detection을 통과한 output signal은 Table II와 같았다. 이

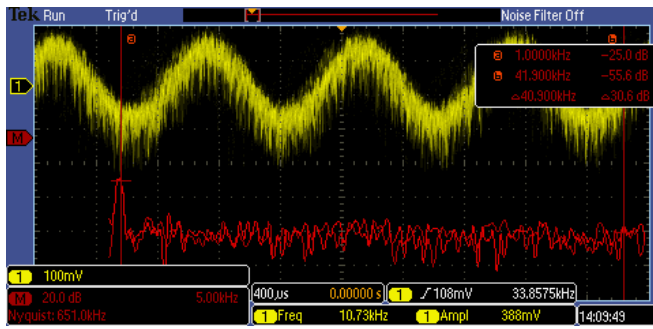


FIG. 25 원본 신호에 noise를 섞었을 때 검출된 신호와 FFT 실행 결과

TABLE II Noise에 DC offset을 주었을 때 관찰된 input signal, output signal과 그 비율

offset(%)	input (mV)	output (mV)	output/input
20	98	131	1.34
40	98	131	1.34
60	100	131	1.31
80	102	131	1.28
90	100	131	1.31
100	102	131	1.28

때 DC offset에 관계 없이 output의 비율이 거의 일정한 것을 보아 DC offset이 있더라도 신호를 잘 검출할 수 있다고 볼 수 있다.

III.B.2. Lock-In Detection Without DC Offset

Reference signal이 원본 signal에 대해 가지는 위상차를 변화시키며 lock-in detection의 결과를 비교했을 때 Figure 26과 같이 나타났다. Reference signal의 위상차를 180°로 고정하고 noise amplitude의 값을 변화시켰을 때 나타나는 출력 신호의 크기는 Table I와 같이 나타났다. Input

TABLE I Noise amplitude를 변화시켰을 때 lock-in detection의 output 신호의 변화

Noise Amp.	0.1	0.01	0.001	0.0001
output(mV)	260	259	259	259

signal과 reference signal의 위상차에 따라서 output signal이 변화함을 관찰할 수 있었으며, 이론적 예측과 같이 위상차가 180°의 배수일 때 output signal의 크기가 가장 커지는 것을 볼 수 있었다. Noise amplitude를 변화시켰을 때는 그것에 관계없이 output이 거의 일정한 것을 보아 lock-in detection이 잘 일어났다고 볼 수 있다.

III.C. Hall 전압 측정

자석의 극 방향과 극에 수직인 방향으로 Hall 소자를 움직이며 output signal을 측정하였을 때 자석과 소자 사이의 거리에 따른 signal의 크기는 각각 Figure 27, 28와 같았다. 이때 함수발생기의 신호는 1 kHz, 300 mV로 설정하였으며, gain은 2, roll-off는 12, time constant는 0.3으로 두고 실험하였다. 이때 각 데이터의 부호는 자기장의 방향을 나타내며, 자기장의 크기는 그 절댓값에 비례한다고 볼 수 있다.

IV. DISCUSSION

II.A와 II.B.2를 통해 lock-in detection이 이루어지는 과정과 실험 장비의 특성을 파악하였다. 이때 noise와 원본 signal의 진동수가 유사하지 않다면 noise의 특성과 관계 없이 원본 signal을 잘 검출해낼 수 있음을 확인하였다. III.A.4에서 roll-off와 time constant가 클수록 낮은 진동수의 신호만을 날카롭게 검출해냄을 확인하였고, 이에 Hall voltage를 측정할 때 roll-off와 time constant를 최대로 두고 실험하였다.

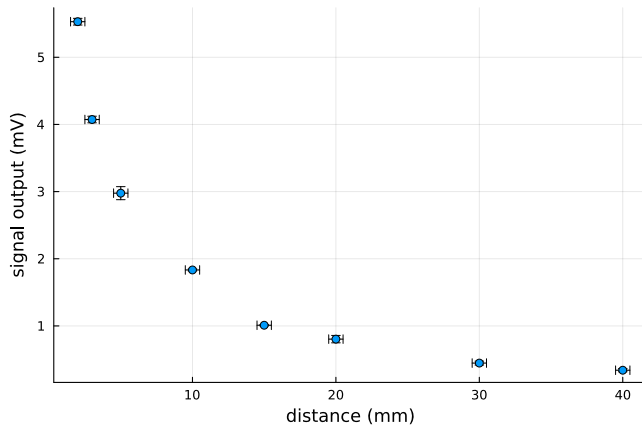


FIG. 27 자석과 소자 사이의 극 방향 거리에 따른 output signal의 크기

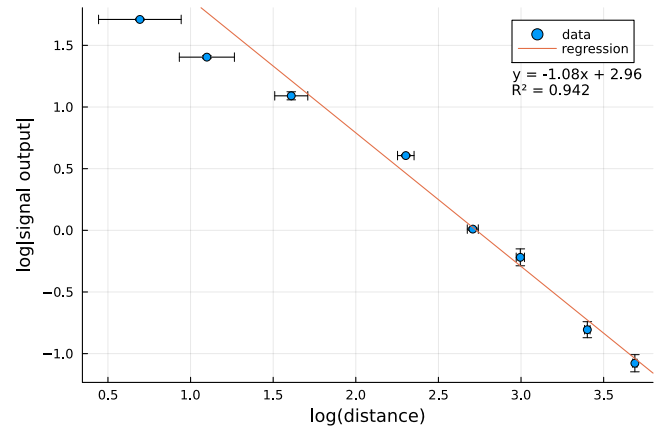


FIG. 29 극 방향으로 소자를 움직였을 때 로그 스케일의 그래프

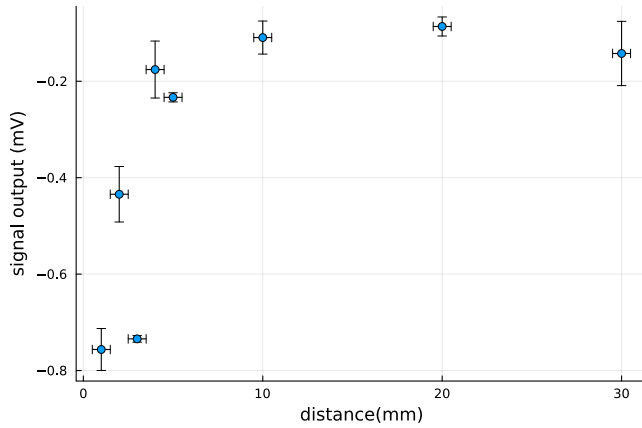


FIG. 28 자석과 소자 사이의 극 수직 방향 거리에 따른 output signal의 크기

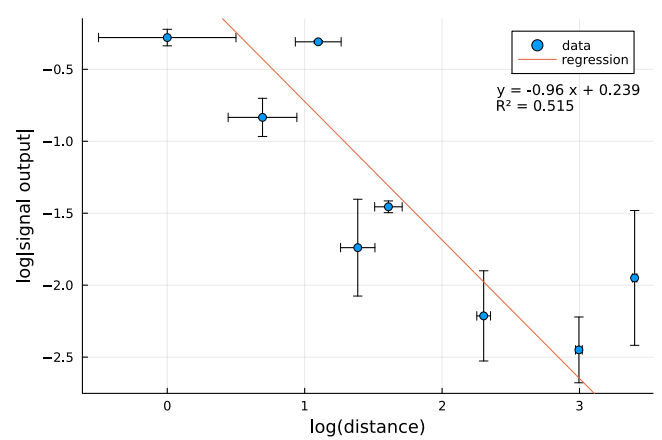


FIG. 30 극에 수직한 방향으로 소자를 움직였을 때 로그 스케일의 그래프

Hall voltage를 측정한 결과 자석과의 거리가 멀어질수록 output signal의 크기가 감소함을 확인할 수 있었으며, 이때 output signal은 자기장의 크기에 비례하므로 자석과 멀어질수록 자기장의 크기가 감소함을 관찰할 수 있었다. 자석을 하나의 자기 쌍극자로 근사한다면, 실험 결과는 output signal의 크기가 거리의 세제곱에 반비례하도록 나온다고 가정할 수 있다. 이를 확인하기 위해 거리와 signal의 세기에 log를 씌워 선형 회귀를 진행할 수 있다. 이때 이 데이터는 조작 변인과 종속 변인 모두의 오차를 고려해야 하므로 Eq. 3를 최소화하는 계수 a , b 를 찾는 방식으로 회귀를 진행해야 한다.¹ 이는 비선형 최적화 문제로 볼 수 있으며, JuMP²와 Ipopt를 이용해 회귀를 계산한 결과는 Figure 29, 30와 같았다.

$$E^2 = \sum_i \frac{(Y_i - bX_i - a)^2}{(b^2 + 1)(\sigma_{X_i}^2 + \sigma_{Y_i}^2)} \quad (3)$$

회귀 결과 계수가 -3이라는 가설과 맞지 않았으며, Figure 30의 경우 R^2 값도 낮게 측정되었다. Lock-in detection이 잘 이루어짐을 확인하고 이를 통해 noise의 영향을 최소화했음에도 이러한 결과가 나오는 이유는 lock-in detection으로 제거할 수 없는 오차 원인 때문으로 생각된다. 가장 주된 원인으로 자기장의 세기가 매우 작은 것을 지목할 수 있다. 자석의 자기장의 세기가 매우 작아 output signal의

크기 또한 작았으며, 이로 인해 오실로스코프의 측정의 오차의 영향을 매우 크게 받게 되었다. 또한 자석과 소자의 거리를 매우 가까이 해야 유의미한 측정이 가능했으므로 거리의 오차의 영향도 커지게 되었다. 따라서 세기가 강한 자석을 사용한다면 오차의 영향을 줄일 수 있을 것이다. 이외에도 실제 자석을 단순한 쌍극자로 근사할 수 없어 차이가 발생하는 등의 오차 원인이 존재할 수 있다.

V. CONCLUSION

본 실험을 통해 lock-in detection의 원리를 파악하고 실습하며 lock-in detection에 쓰이는 다양한 장비의 특성을 관찰할 수 있었으며, 이를 이용해 noise의 제거가 필수적인 Hall voltage를 측정할 수 있었다. Hall voltage를 측정한 결과 자석과 센서의 거리가 멀어질수록 자기장의 세기가 감소함을 확인할 수 있었으나, 실험적으로 계산된 계수는 쌍극자로 근사한 경우의 이론적 예측인 -3보다 크게 측정되었으며, 이는 자기장의 세기가 매우 약해 lock-in detection을 통해 noise를 줄이더라도 오실로스코프와 자의 측정의 오차의 영향이 컸기 때문으로 생각된다. 따라서 더욱 강한 자석을 사용하거나 정밀한 측정 장비를 사용한다면 더욱 정확한 실험이 될 수 있을 것이라 기대된다.

VI. REFERENCES

guage for mathematical optimization,” Mathematical Programming Computation (2023), 10.1007/s12532-023-00239-3.

- ¹S. Kim, “Error analysis for experimental physicists,”
- ²M. Lubin, O. Dowson, J. Dias Garcia, J. Huchette, B. Legat, and J. P. Vielma, “JuMP 1.0: Recent improvements to a modeling lan-