**期末大作业报告**

2200011070 王雨森

1. **数理算法原理**
   1. **问题描述：**针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

时刻，初始条件为：

各变量及关系如下：

* 1. **激波捕捉格式**

1. TVD格式

定义总变差

总变差不增即为

TVD格式是一种单调保持格式，能够保证不产生数值震荡.对于守恒形式

由于构造过程非常冗长，此处直接利用讲义上的结论.利用限制器构造具有二阶精度的TVD格式，修正通量的公式为

其中,为TVD限制器，处于二阶TVD区域内，通常可以取Van Leer或Minmod限制器：

对于守恒律方程组，修正通量的公式可以类似写出：

其中是特征值分解后得到的对角阵可以通过Roe平均的方法求出：

1. GVC格式

对于一阶波动方程，假设一个二阶精度的格式修正方程为

采用耗散比拟方法分析格式的数值特性，把修正方程的主导项强制写成一个二阶耗散项的形式，而二阶耗散项系数相当于粘性系数，启示性条件要求其总应该是正的.将修正方程三阶导数项写成

解不波动要求耗散比拟系数恒正，这一原则用于指导数值格式的构造.

在间断处，当时（减函数情况），间断前间断后；当时（增函数情况），间断前间断后.因此想要得到合理的数值解，应该有间断前间断后.使得波速增加，相位超前，称为快格式；使得波速减小，相位滞后，称为慢格式.在间断前后分别使用快格式和慢格式，从而使得各种扰动趋向于传播到间断处.

以空间中心差分格式和二阶迎风格式为例时，空间中心差分格式

的修正方程为

考察其项，根据修正方程满足间断后条件.而二阶迎风格式

的修正方程为

时满足间断前条件.也类似分析，将两种格式组合起来就得到了具有二阶精度的NND格式.对于通量，用FVS方法分裂成和两部分，于是得到

统一写成守恒形式

其中

计算点处于间断前还是间断后的判断方法是

间断前：与 同号，且

间断后：与 同号，且

于是，NND格式最终可以写成

对于守恒律方程组，上式仍然适用.

1. WENO格式

TVD格式可以给出二阶无波动格式，但很难给出高于二阶精度的格式，而WENO格式可以具有更高阶的精度.WENO格式的思想是将多个基架集上给出的函数值根据光滑性做加权组合，使得光滑基架集上的权重大，间断基架集上的权重小，并且当存在多个光滑基架集时，等价于扩张了基架点集，从而给出更高阶的近似.

对于阶精度近似，需要选取个网格来确定次多项式中的个系数. 假设我们要在网格上构造次多项式，自然要求基架集中包含这个网格. 可以顺次取个包含的网格单元

对于每个可能的基架集，都可以通过Lagrange插值法给出一个多项式，从而给出一个界面值：

将这些值做一个凸组合：

其中是权系数，自然要求光滑基架集对应的权系数大，包含间断的基架集权系数小，并且满足

所有的可能基架集并在一起，总网格数是于是，如果所有的基架集都是光滑的，我们希望有系数，使得

的求法是，将所有网格点在处进行Taylor展开，然后代入得到含参数的表达式，再令项的系数为零，具体过程比较繁琐，这里直接参考书上的结论：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 1 |  |
| 2 | 3 |  |
| 3 | 5 |  |

我们选择权系数为

其中

是防止分母为零的小正数，通常取.是光滑指示器，如果在上光滑，则，如果有间断，则. 当时，可以给出

对于传播方向反向的情况，可以将基架集整体往右平移一格，然后将所有网格点在处进行Taylor展开，然后求得各系数. 当然也可以根据对称性直接给出系数，只需要将对应的各点倒序填入即可.

* 1. **通量处理方法**

1. FVS方法

矢通量分裂方法将矢通量用某种方法分解为两部分，分解后的矢通量代表了不同的方向，可以用适当的迎风方法处理. 这里讨论最简单的Steger-Warming通量分裂.

通量的Jacobi矩阵有若干个特征值，首先将特征值分解为为正负部分：

进而将矩阵分解成正负两部分：

其中是对角线上是特征值的对角矩阵，于是正负通量为

还可以将特征重构方法引入FVS方法，假设局部的Jacobi矩阵是常系数矩阵，设，则

再设，则

这样的优点是将局部的Jacobi矩阵转化为对角阵，从而将变量解耦，能够严格保证局部的特征方向，缺点是需要进行大量的矩阵运算.

1. FDS方法

通量的差分分裂方法是基于局部一维Euler方程的Riemann问题的精确解或者近似解得到的，这里讨论最简单的Roe格式. 将Euler方程做局部线性化，线性化后的方程为

线性化后的矩阵和与有关，即. 要求线性化后的方程满足

对于多维情况，可以仅考虑一个界面，要求界面守恒量和穿过界面的通量满足上述关系. 可以证明，如果通量的Jacobi矩阵中的变量用Roe平均量代入，所得到的矩阵满足以上条件.

可以做对角化定义平均斜率，是对各特征值取绝对值得到的对角阵，于是Roe格式的对流通量为

* 1. **时间推进格式**

选用三阶Runge-Kutta格式进行时间推进，针对一维欧拉方程

三阶Runge-Kutta格式的计算公式为

1. **代码生成与调试**
   1. **计算域与网格设置**

设定计算域为，这是由于该问题初始间断位于处， 选择对称的计算域，出于以下几点考虑：方便分析左右波动的传播；激波、接触间断和膨胀波在数值实验时间内不会接触边界；简化后续可视化和比较操作，便于与参考文献中的经典解进行对比.

网格设置为均匀网格，网格数，既能保证较好的激波捕捉能力和计算精度，也有较好的计算效率. 网格划分选取均匀分布，原因如下：均匀网格便于实现TVD、GVC、WENO格式；网格精度在所有区域都保持一致；对于一维激波管问题，均匀网格对于激波、接触间断和膨胀波的捕捉能力已经相当好.

* 1. **变量的初始化**

网格数，守恒变量，，，网格步长，终止时间，动态时间步长.

* 1. **时间推进流程**

1. FVS方法
2. 使用Steger-Warming矢通量分解方法，计算所有网格点处的、. 关键公式如下
3. 使用TVD/GVC/WENO格式重构，关键公式如下

TVD：

由和两点的Roe平均求出：

GVC：

WENO（5阶）正向通量：（负向通量将换成即可）

注：表示的分量，应逐分量重构.

1. 计算.
2. 使用i、ii、iii中计算的函数进行时间推进，使用三阶Runge-Kutta：

如果使用**特征重构**，步骤需要稍作修改：

1. 使用Steger-Warming矢通量分解方法，计算所有网格点处的、.
2. 针对每一个点计算Roe平均后的Jacobi矩阵 .
3. 将基架点转换到特征空间：，.
4. 在特征空间使用TVD/GVC/WENO格式重构.
5. 还原到物理空间：.
6. 计算.
7. 三阶Runge-Kutta时间推进.
8. FDS方法
9. 用Roe平均方法计算点处Jacobi矩阵的.
10. 计算，关键公式如下：
11. 计算
12. 三阶Runge-Kutta时间推进.