**期末大作业报告**

2200011070 王雨森

1. **数理算法原理**
   1. **问题描述：**针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

时刻，初始条件为：

各变量及关系如下：

* 1. **激波捕捉格式**

1. TVD格式

定义总变差

总变差不增即为

TVD格式是一种单调保持格式，能够保证不产生数值震荡.对于守恒形式

由于构造过程非常冗长，此处直接利用讲义上的结论.利用限制器构造具有二阶精度的TVD格式，修正通量的公式为

其中,为TVD限制器，处于二阶TVD区域内，通常可以取Van Leer或Minmod限制器：

对于守恒律方程组，修正通量的公式可以类似写出：

其中是特征值分解后得到的对角阵可以通过Roe平均的方法求出：

1. GVC格式

对于一阶波动方程，假设一个二阶精度的格式修正方程为

采用耗散比拟方法分析格式的数值特性，把修正方程的主导项强制写成一个二阶耗散项的形式，而二阶耗散项系数相当于粘性系数，启示性条件要求其总应该是正的.将修正方程三阶导数项写成

解不波动要求耗散比拟系数恒正，这一原则用于指导数值格式的构造.

在间断处，当时（减函数情况），间断前间断后；当时（增函数情况），间断前间断后.因此想要得到合理的数值解，应该有间断前间断后.使得波速增加，相位超前，称为快格式；使得波速减小，相位滞后，称为慢格式.在间断前后分别使用快格式和慢格式，从而使得各种扰动趋向于传播到间断处.

以空间中心差分格式和二阶迎风格式为例时，空间中心差分格式

的修正方程为

考察其项，根据修正方程满足间断后条件.而二阶迎风格式

的修正方程为

时满足间断前条件.也类似分析，将两种格式组合起来就得到了具有二阶精度的NND格式.对于通量，用FVS方法分裂成和两部分，于是得到

统一写成守恒形式

其中

计算点处于间断前还是间断后的判断方法是

间断前：与 同号，且

间断后：与 同号，且

于是，NND格式最终可以写成

对于守恒律方程组，上式仍然适用.

1. WENO格式

TVD格式可以给出二阶无波动格式，但很难给出高于二阶精度的格式，而WENO格式可以具有更高阶的精度.WENO格式的思想是将多个基架集上给出的函数值根据光滑性做加权组合，使得光滑基架集上的权重大，间断基架集上的权重小，并且当存在多个光滑基架集时，等价于扩张了基架点集，从而给出更高阶的近似.

对于阶精度近似，需要选取个网格来确定次多项式中的个系数. 假设我们要在网格上构造次多项式，自然要求基架集中包含这个网格. 可以顺次取个包含的网格单元

对于每个可能的基架集，都可以通过Lagrange插值法给出一个多项式，从而给出一个界面值：

将这些值做一个凸组合：

其中是权系数，自然要求光滑基架集对应的权系数大，包含间断的基架集权系数小，并且满足

所有的可能基架集并在一起，总网格数是于是，如果所有的基架集都是光滑的，我们希望有系数，使得

的求法是，将所有网格点在处进行Taylor展开，然后代入得到含参数的表达式，再令项的系数为零，具体过程比较繁琐，这里直接参考书上的结论：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 1 |  |
| 2 | 3 |  |
| 3 | 5 |  |

我们选择权系数为

其中

是防止分母为零的小正数，通常取.是光滑指示器，如果在上光滑，则，如果有间断，则. 当时，可以给出

对于传播方向反向的情况，可以将基架集整体往右平移一格，然后将所有网格点在处进行Taylor展开，然后求得各系数. 当然也可以根据对称性直接给出系数，只需要将对应的各点倒序填入即可.

* 1. **通量处理方法**

1. FVS方法

矢通量分裂方法将矢通量用某种方法分解为两部分，分解后的矢通量代表了不同的方向，可以用适当的迎风方法处理. 这里讨论最简单的Steger-Warming通量分裂.

通量的Jacobi矩阵有若干个特征值，首先将特征值分解为为正负部分：

进而将矩阵分解成正负两部分：

其中是对角线上是特征值的对角矩阵，于是正负通量为

还可以将特征重构方法引入FVS方法，假设局部的Jacobi矩阵是常系数矩阵，设，则

再设，则

这样的优点是将局部的Jacobi矩阵转化为对角阵，从而将变量解耦，能够严格保证局部的特征方向，缺点是需要进行大量的矩阵运算.

1. FDS方法

通量的差分分裂方法是基于局部一维Euler方程的Riemann问题的精确解或者近似解得到的，这里讨论最简单的Roe格式. 将Euler方程做局部线性化，线性化后的方程为

线性化后的矩阵和与有关，即. 要求线性化后的方程满足

对于多维情况，可以仅考虑一个界面，要求界面守恒量和穿过界面的通量满足上述关系. 可以证明，如果通量的Jacobi矩阵中的变量用Roe平均量代入，所得到的矩阵满足以上条件.

可以做对角化定义平均斜率，是对各特征值取绝对值得到的对角阵，于是Roe格式的对流通量为

为了防止非物理解，需要引入Harten熵修正技术：

* 1. **时间推进格式**

选用三阶Runge-Kutta格式进行时间推进，针对一维欧拉方程

三阶Runge-Kutta格式的计算公式为

1. **代码生成与调试**
   1. **计算域与网格设置**

设定计算域为，这是由于该问题初始间断位于处， 选择对称的计算域，出于以下几点考虑：方便分析左右波动的传播；激波、接触间断和膨胀波在数值实验时间内不会接触边界；简化后续可视化和比较操作，便于与参考文献中的经典解进行对比.

网格设置为均匀网格，网格数，既能保证较好的激波捕捉能力和计算精度，也有较好的计算效率. 网格划分选取均匀分布，原因如下：均匀网格便于实现TVD、GVC、WENO格式；网格精度在所有区域都保持一致；对于一维激波管问题，均匀网格对于激波、接触间断和膨胀波的捕捉能力已经相当好.

* 1. **变量的初始化**

网格数，守恒变量，，，网格步长，终止时间，动态时间步长.

* 1. **时间推进流程**

1. FVS方法
2. 使用Steger-Warming矢通量分解方法，计算所有网格点处的、. 关键公式如下
3. 使用TVD/GVC/WENO格式重构，关键公式如下

TVD：

由和两点的Roe平均求出：

GVC：

五阶WENO正向通量：（负向通量将换成即可）

注：表示的分量，应逐分量重构.

1. 计算.
2. 使用i、ii、iii中计算的函数进行时间推进，使用三阶Runge-Kutta：

如果使用**特征重构**，步骤需要稍作修改：

1. 使用Steger-Warming矢通量分解方法，计算所有网格点处的、.
2. 针对每一个点计算Roe平均后的Jacobi矩阵 .
3. 将基架点转换到特征空间：，.
4. 在特征空间使用TVD/GVC/WENO格式重构.
5. 还原到物理空间：.
6. 计算.
7. 三阶Runge-Kutta时间推进.

注：的左右特征值矩阵和 可以解析地给出，减少特征分解的计算量：

1. FDS方法
2. 用Roe平均方法计算点处Jacobi矩阵的，计算平均斜率 (引入Harten熵修正) .
3. 计算，关键公式如下：
4. 计算
5. 三阶Runge-Kutta时间推进.
6. **结果讨论和物理解释**
   1. **FVS方法**

，时，结果如下. 图中，虚线代表Riemann精确解，实现代表数值解. 从左向右依次观察到膨胀波、接触间断和激波. 膨胀波密度、压强和速度都连续变化；接触间断密度不连续，压强和速度连续；激波密度、压力、速度都不连续.

TVD：使用Minmod限制器

（不使用特征重构）

膨胀波

激波

接触间断

（使用特征重构）

TVD格式在膨胀波区域（约）略有耗散，但基本准确；在接触间断处（约），密度出现过渡带，说明接触间断略被数值耗散；在激波处（约），有轻微耗散. 全域无数值震荡.



小波动

着重分析接触间断处的误差，不使用特征重构时，密度曲线不是跳跃而是斜坡，速度曲线和压强曲线有一个小的波动（图中不太明显）. 我们先解释波动的原因，由于左图红色箭头处先偏小、后偏大，于是污染了和，由于，和不变时，偏小，则偏大，偏小；偏大，则偏小，偏大. 所以速度曲线和压强曲线有波动.

小波动

使用特征重构后，速度曲线和压强曲线的波动消失，说明特征重构避免了不同特征波的相互干扰；​​但接触间断的较大耗散仅有轻微改善，尝试了多种限制器后仍然无果，因此得出结论：密度曲线之所以不是跳跃而是斜坡，可能是TVD格式本身具有局限性. TVD格式通过限制机制重构以避免振荡，然而这种限制往往在接触间断处将重构退化到一阶精度（当时，TVD格式是一阶迎风格式），引入显著的数值黏性. 另一方面，在接触间断生成的初始时刻，滑移波对应的特征值与激波和膨胀波对应的和相比绝对值很小，可能会被格式是认为是非物理震荡，因此被大幅耗散.

GVC：使用NND格式

（不使用特征重构）

（使用特征重构）

NND格式在膨胀波区域（约）略有耗散，但基本准确；在接触间断处（约），耗散情况明显好于TVD格式；在激波处（约），有极轻微耗散. 全域无数值震荡. 是否使用特征重构对结果影响不大.

NND格式具有间断识别的能力，能够在间断附近选择合适的重构方式，并且能够保持格式具有二阶精度，因此耗散情况好于TVD格式.

五阶WENO：

（不使用特征重构）

（使用特征重构）

五阶WENO格式在膨胀波区域（约）有极轻微耗散，表现非常好；在接触间断处（约），耗散比前面两种格式更小；在激波处（约），没有数值耗散. 在膨胀波区域没有震荡，但是接触间断和激波附近出现轻微震荡，同时接触间断处的密度曲线以及激波处的三条曲线都有轻微过冲现象. 总体来看，五阶WENO格式对间断的捕捉能力比前两种方法强，但WENO格式本身没有配备控制数值震荡的方法，间断附近容易产生震荡.

在使用特征重构方法之后，轻微震荡的幅度有所缓解但依然存在，激波处过冲现象依然明显，但接触间断处密度曲线的过冲现象更加明显. 而前面的TVD和NND格式都没有出现这一现象，说明是WENO格式本身的问题.

如果函数是间断的，高精度方法的误差反而会增大，表现在间断附近出现函数值过高和过低的震荡，在谱方法中，称这种数值震荡为Gibbs现象. 出现这种现象的原因是函数在基架集中有间断，所谓的阶精度，只有在函数充分光滑时才有意义，这就是五阶WENO格式的局限性.

**特征重构方法的影响**：特征重构的优点是可以将每个变量沿着特征方向进行解耦重构，显著减少非物理震荡（五阶WENO格式的震荡被缓解）；接触间断在保守变量中是非线性耦合的，而在特征变量中，接触间断主要集中在某一特征变量上，重构更精准（TVD格式接触间断的耗散略有降低）. 不足是对精度的提升有限（三种格式都表明了这一点），未必能够抵消计算量的代价.

* 1. **FDS方法**

，时，结果如下.

****

Roe格式在膨胀波区域（约）有较大耗散；在接触间断处（约），数值耗散比较严重；在激波处（约），有较小耗散. 全域无数值震荡. 由于使用了熵修正，没有出现“红斑”.

Roe格式对于激波的捕捉能力较强，但是本身是一阶格式，导致平滑的膨胀波区域耗散大. 接触间断的耗散严重，与TVD格式的原因类似，可能也是因为滑移波被当作震荡施加了大的耗散.

此外，我还尝试了将激波捕捉格式的方法类似地引入到Roe格式，具体过程是将通量 重构的公式用于守恒变量，得到重构后的和，虽然物理意义不是特别清楚，但确实能够改善Roe格式的结果，如下图所示.

（TVD + Roe）



（NND + Roe）



（WENO-5 + Roe）



整体运行情况与前面FVS的情况几乎一样.