**期末大作业报告**

2200011070 王雨森

1. **数理算法原理**
   1. **问题描述**：针对 Sod 激波管问题，求解一维欧拉方程：

时刻，初始条件为：

各变量及关系如下：

* 1. **激波捕捉格式**

1. TVD格式

定义总变差

总变差不增即为

TVD格式是一种单调保持格式，能够保证不产生数值震荡.对于守恒形式

由于构造过程非常冗长，此处直接利用讲义上的结论.利用限制器构造具有二阶精度的TVD格式，修正通量的公式为

其中,为TVD限制器，处于二阶TVD区域内，通常可以取Van Leer或Minmod限制器：

对于守恒律方程组，修正通量的公式可以类似写出：

其中是特征值分解后得到的对角阵可以通过Roe平均的方法求出.

1. GVC格式

对于一阶波动方程，假设一个二阶精度的格式修正方程为

采用耗散比拟方法分析格式的数值特性，把修正方程的主导项强制写成一个二阶耗散项的形式，而二阶耗散项系数相当于粘性系数，启示性条件要求其总应该是正的.将修正方程三阶导数项写成

解不波动要求耗散比拟系数恒正，这一原则用于指导数值格式的构造.

在间断处，当时（减函数情况），间断前间断后；当时（增函数情况），间断前间断后.因此想要得到合理的数值解，应该有间断前间断后.使得波速增加，相位超前，称为快格式；使得波速减小，相位滞后，称为慢格式.在间断前后分别使用快格式和慢格式，从而使得各种扰动趋向于传播到间断处.

以空间中心差分格式和二阶迎风格式为例时，空间中心差分格式

的修正方程为

考察其项，根据修正方程满足间断后条件.而二阶迎风格式

的修正方程为

时满足间断前条件.也类似分析，将两种格式组合起来就得到了具有二阶精度的NND格式.对于通量用FVS分裂成和两部分，于是得到

统一写成守恒形式

其中

计算点处于间断前还是间断后的判断方法是

间断前：与 同号，且

间断后：与 同号，且

于是，NND格式最终可以写成

对于守恒律方程组，上式仍然适用.

1. WENO格式

TVD格式可以给出二阶无波动格式，但很难给出高于二阶精度的格式，而WENO格式可以具有更高阶的精度.WENO格式的思想是将多个基架集上给出的函数值根据光滑性做加权组合，使得光滑基架集上的权重大，间断基架集上的权重小，并且当存在多个光滑基架集时，等价于扩张了基架点集，从而给出更高阶的近似.

对于阶精度近似，需要选取个网格来确定次多项式中的个系数. 假设我们要在网格上构造次多项式，自然要求基架集中包含这个网格. 可以顺次取个包含的网格单元

对于每个可能的基架集，都可以通过Lagrange插值法给出一个多项式，从而给出一个界面值：

将这些值做一个凸组合：

其中是权系数，自然要求光滑基架集对应的权系数大，包含间断的基架集权系数小，并且满足

所有的可能基架集并在一起，总网格数是于是，如果所有的基架集都是光滑的，我们希望有系数，使得

的求法是，将所有网格点在处Taylor展开，然后代入得到含参数的表达式，再令项的系数为零，具体过程比较繁琐，这里直接参考书上的结论：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 1 |  |
| 2 | 3 |  |
| 3 | 5 |  |

我们选择权系数为

其中

是防止分母为零的小正数，通常取.是光滑指示器，如果在上光滑，则，如果有间断，则. 当时，可以给出

* 1. **通量处理方法**
     1. FVS方法

矢通量分裂方法将矢通量用某种方法分解为两部分，分解后的矢通量代表了不同的方向，可以用适当的迎风方法处理. 这里只讨论最简单的Steger-Warming通量分裂.

通量的Jacobi矩阵有若干个特征值，首先将特征值分解为为正负部分：

进而将矩阵分解成正负两部分：

其中是对角线上是特征值的对角矩阵，于是正负通量为

* + 1. FDS方法

通量的差分分裂方法是基于局部一维Euler方程的Riemann问题的精确解或者近似解得到的，这里仅讨论最简单的Roe格式.