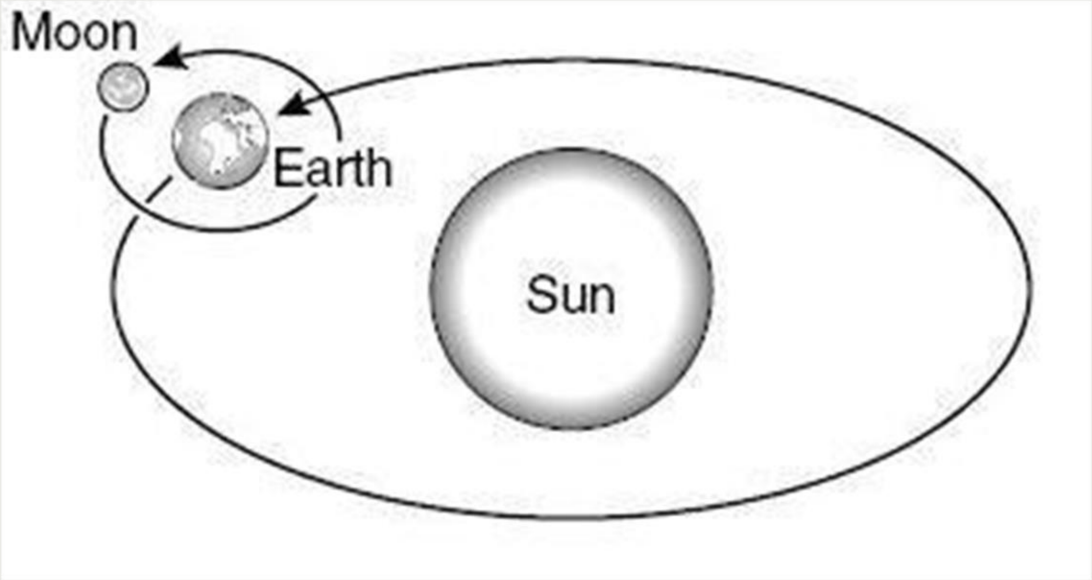
Problema de los tres cuerpos restringido

Problema de los tres cuerpos

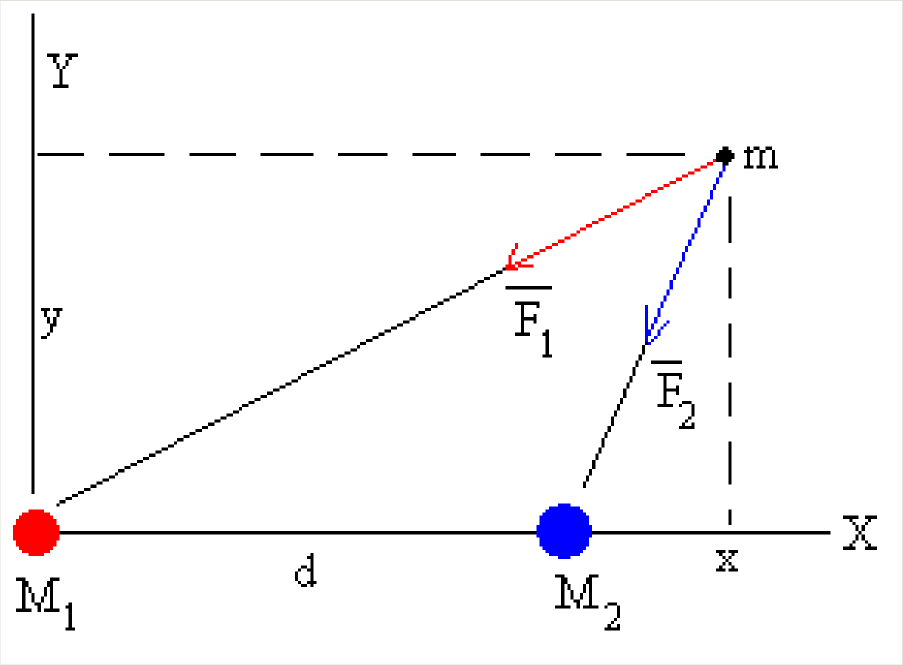


“determinar las posiciones y velocidades, en cualquier instante de tiempo, de tres cuerpos –con sus correspondientes masas- sometidos a la atracción gravitacional mutua, y partiendo de posiciones y velocidades iniciales dadas”

Problema de los tres cuerpos restringido

También llamado: problema de Euler.

Es una variación al problema de los tres cuerpos original.



$$\ddot{x} = x + 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{s^3}$$

$$\ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{r^3} - \frac{\mu y}{s^3}$$

$$\ddot{z} = -\frac{(1-\mu)z}{r^3} - \frac{\mu z}{s^3}$$

Donde :

$r = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$ s = $\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}$

$$\mu = {}^{M_{Luna}}/_{M_{Tierra}} = 0.012277471$$

$$T = 17.0652165601579625588917206249$$

Solución por métodos numéricos

$$\begin{cases} p = \ddot{y} \\ u = \ddot{x} \\ \ddot{x} = x + 2\dot{y} - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{s^3} \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{(1-\mu)y}{r^3} - \frac{\mu y}{s^3} \end{cases}$$

Considerando las condiciones iniciales para el caso planar:

$$p_0 = -2.00158510637908252240537862224$$

$$u_0 = 0.0$$

$$x_0 = 0.994$$

$$y_0 = 0.0$$

Método de Euler

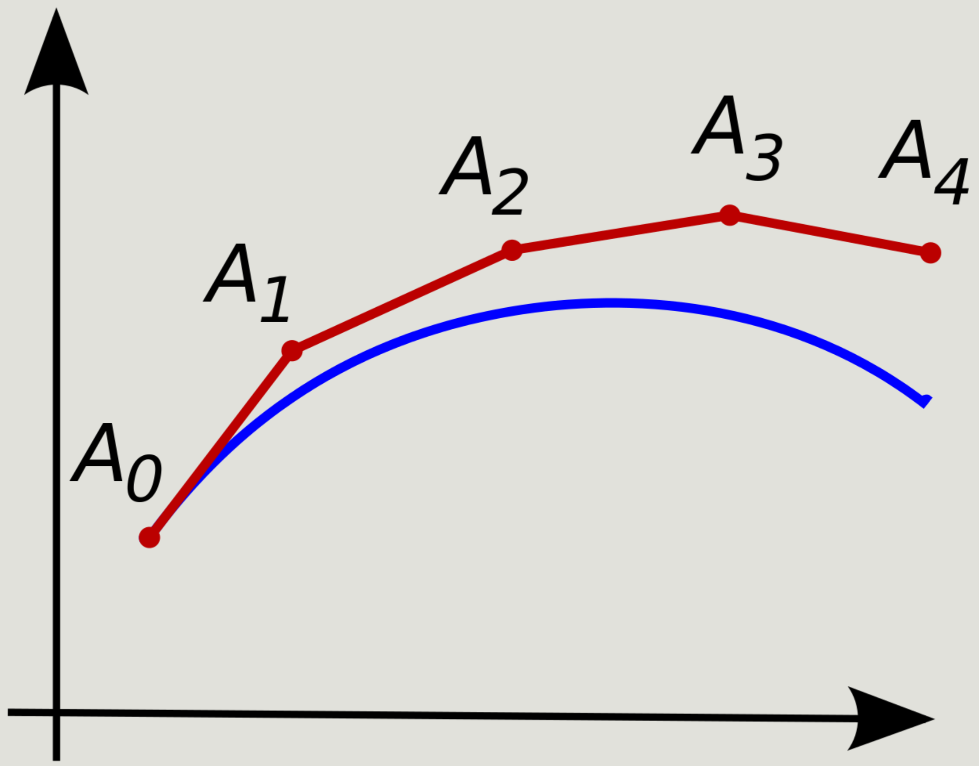
Sirve para resolver ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_i) = ? \end{cases}$$

La formula para aplicar el método de Euler es:

$$y_i = \ y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Método de Euler



$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

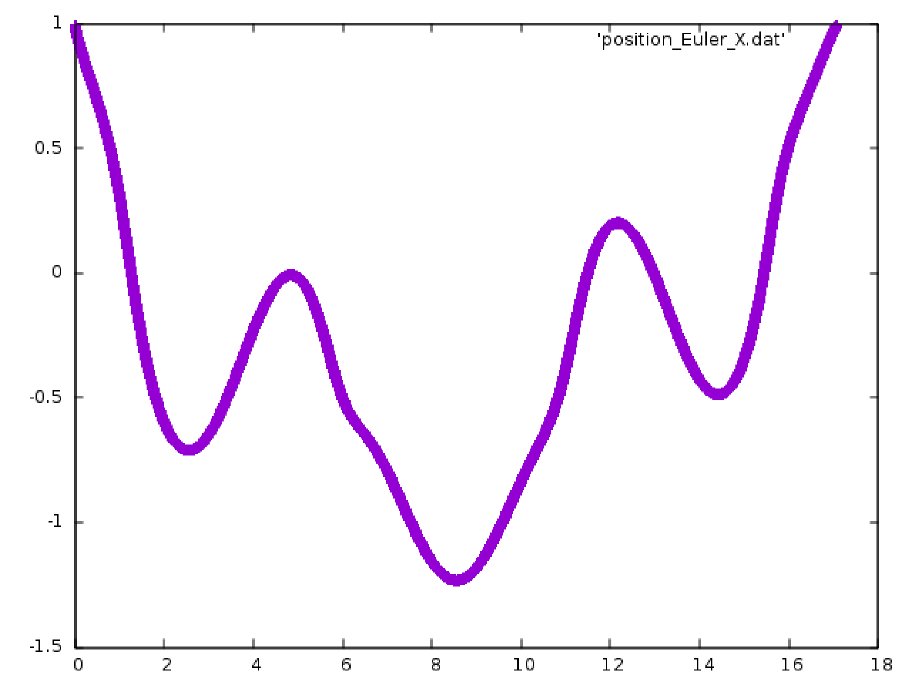
Método de Euler

Implementación

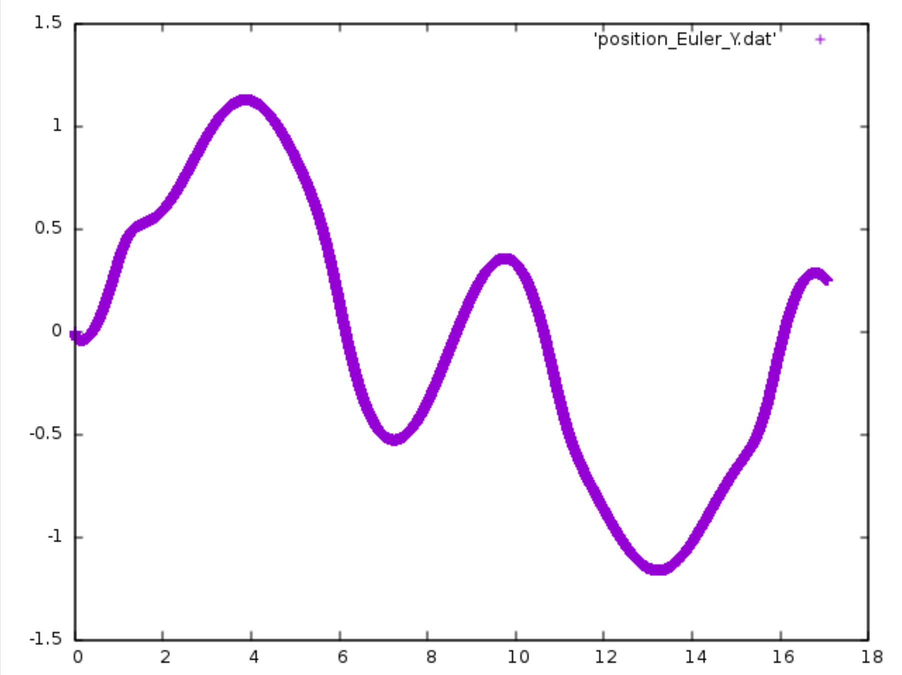
```
void euler (double h, double &p0, double &u0, double &y0, double &x0)
{
+  x0 += h*g1(p0,u0,x0,y0);
+  y0 += h*f1(p0,u0,x0,y0);
+  p0 += h*f2(p0,u0,x0,y0);
+  u0 += h*g2(p0,u0,x0,y0);
}
```

Posición

POSICIÓN EN EL EJE X

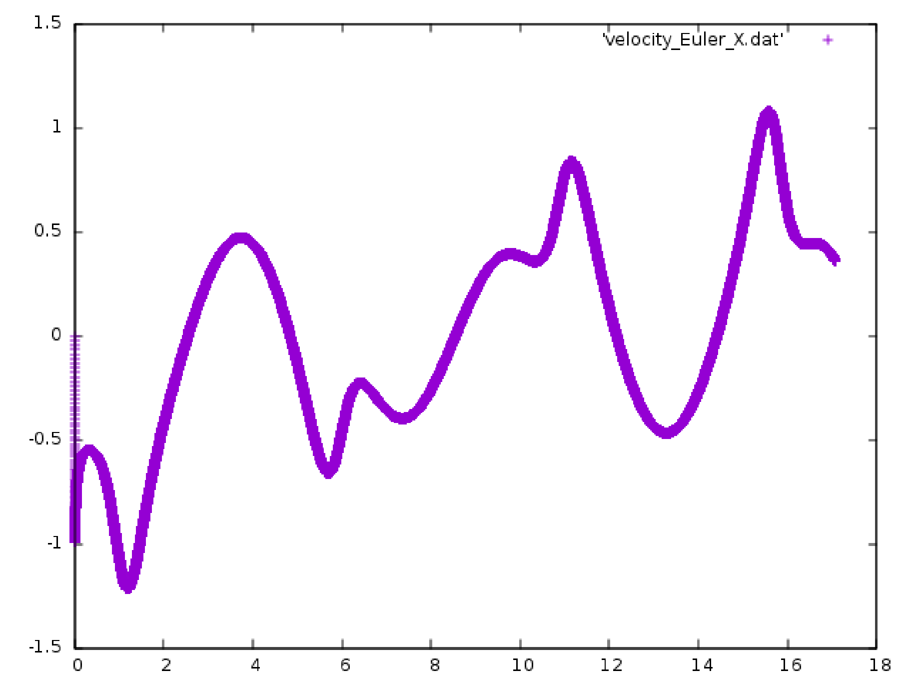


POSICIÓN EN EL EJE Y

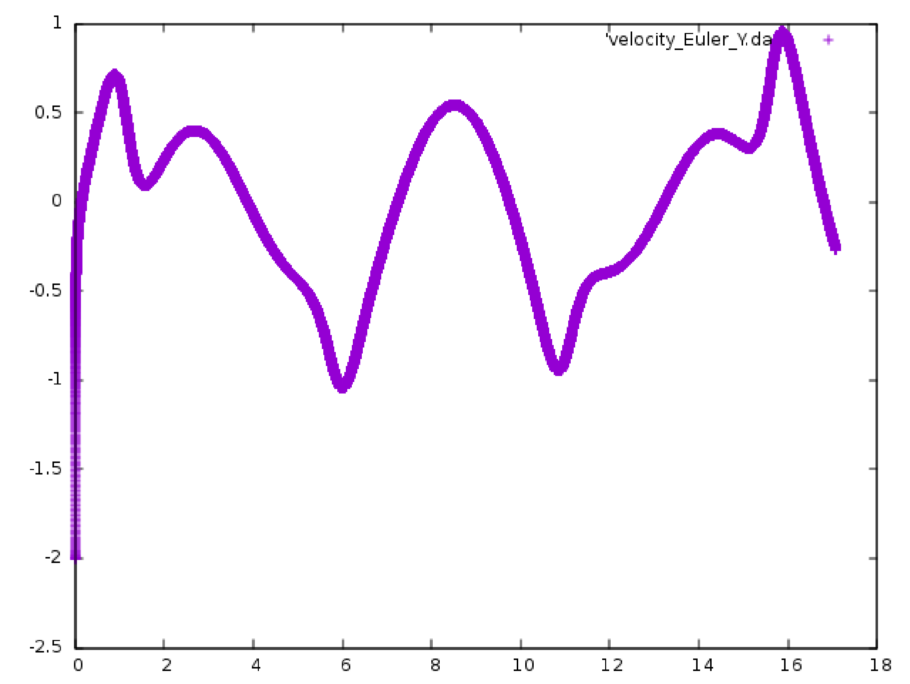


Velocidad

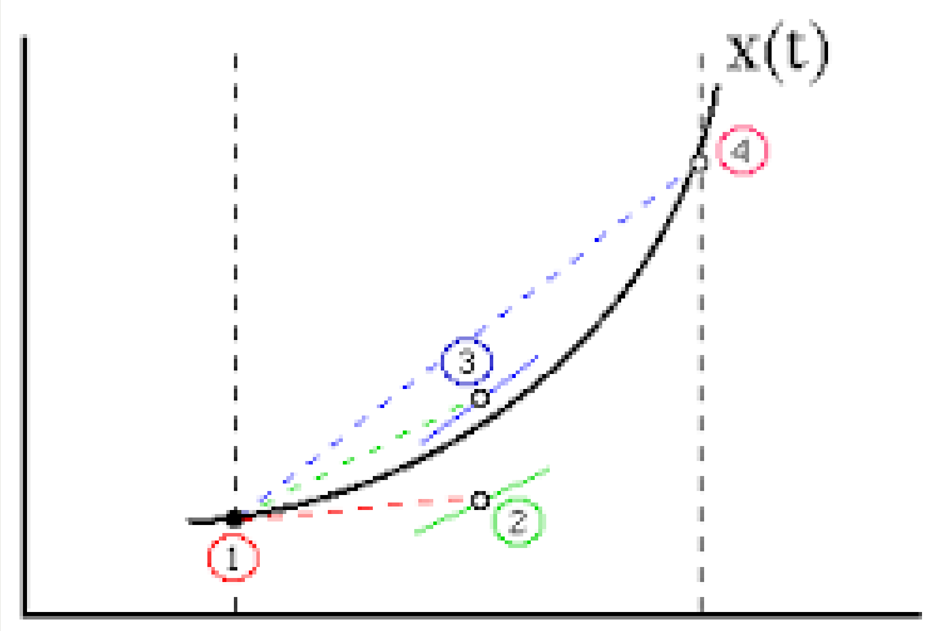
VELOCIDAD EN EL EJE X



VELOCIDAD EN EL EJE Y



Método de Runge-Kutta



$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

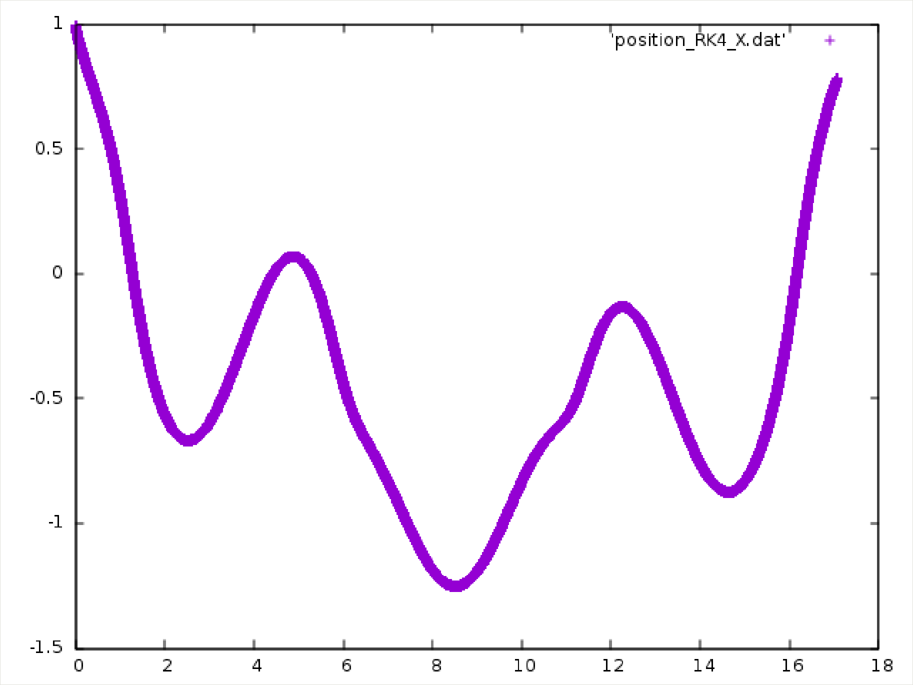
Método de Runge-Kutta

Implementación

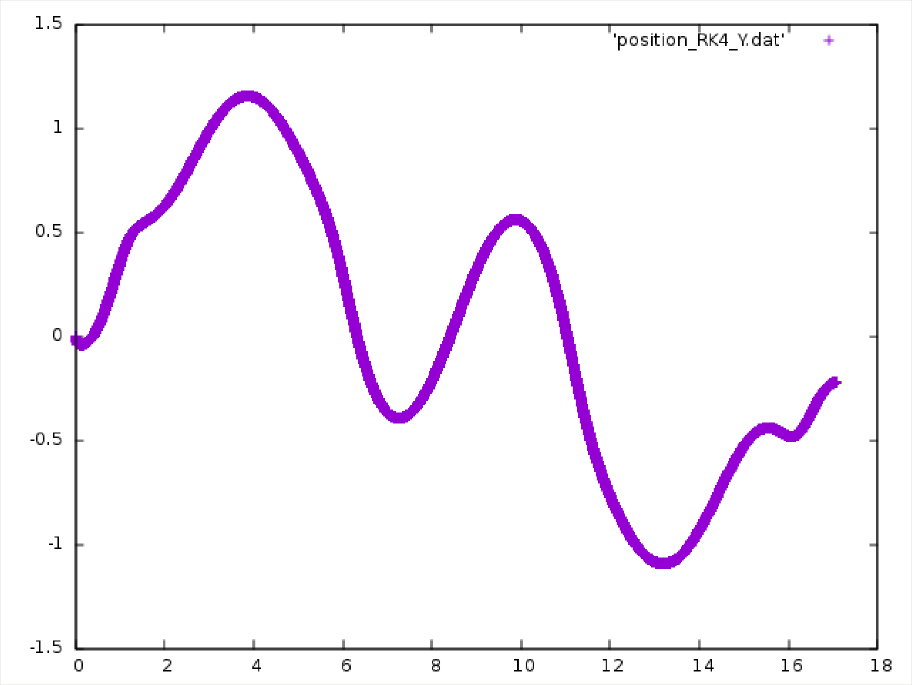
```
void rk4(long double t, long double h, long double &x0, long double &x1, long double &y0, long double &y1)
{
  long double k10, k11, k20, k21, k30, k31, k40, k41;
  long double p10, p11, p20, p21, p30, p31, p40, p41;

  k10=h*f0(t, x0, x1, y0, y1);
  k11=h*f1(t, x0, x1, y0, y1);
  k20=h*f0(t+ (h/2), x0+ (k10/2), x1+ (k11/2), y0, y1);
  k21=h*f1(t+ (h/2), x0+ (k10/2), x1+ (k11/2), y0, y1);
  k30=h*f0(t+ (h/2), x0+ (k20/2), x1+ (k21/2), y0, y1);
  k31=h*f1(t+ (h/2), x0+ (k20/2), x1+ (k21/2), y0, y1);
  k40=h*f0(t+h, x0+k30, x1+k31, y0, y1);
  k41=h*f1(t+h, x0+k30, x1+k31, y0, y1);

  x0+=(1.0/6.0)*(k10+(2*k20)+(2*k30)+k40);
  x1+=(1.0/6.0)*(k11+(2*k21)+(2*k31)+k41);

  p10=h*g0(t, y0, y1, x0, x1);
  p11=h*g1(t, y0, y1, x0, x1);
  p20=h*g0(t+ h/2, y0+ p10/2, y1+ p11/2, x0, x1);
  p21=h*g1(t+ h/2, y0+ p10/2, y1+ p11/2, x0, x1);
  p30=h*g0(t+ h/2, y0+ p20/2, y1+ p21/2, x0, x1);
  p31=h*g1(t+ h/2, y0+ p20/2, y1+ p21/2, x0, x1);
  p40=h*g0(t+h, y0+p30, y1+p31, x0, x1);
  p41=h*g1(t+h, y0+p30, y1+p31, x0, x1);

  y0+=(1.0/6.0)*(p10+(2*p20)+(2*p30)+p40);
  y1+=(1.0/6.0)*(p11+(2*p21)+(2*p31)+p41);
}
```

Posición

POSICIÓN EN EL EJE X

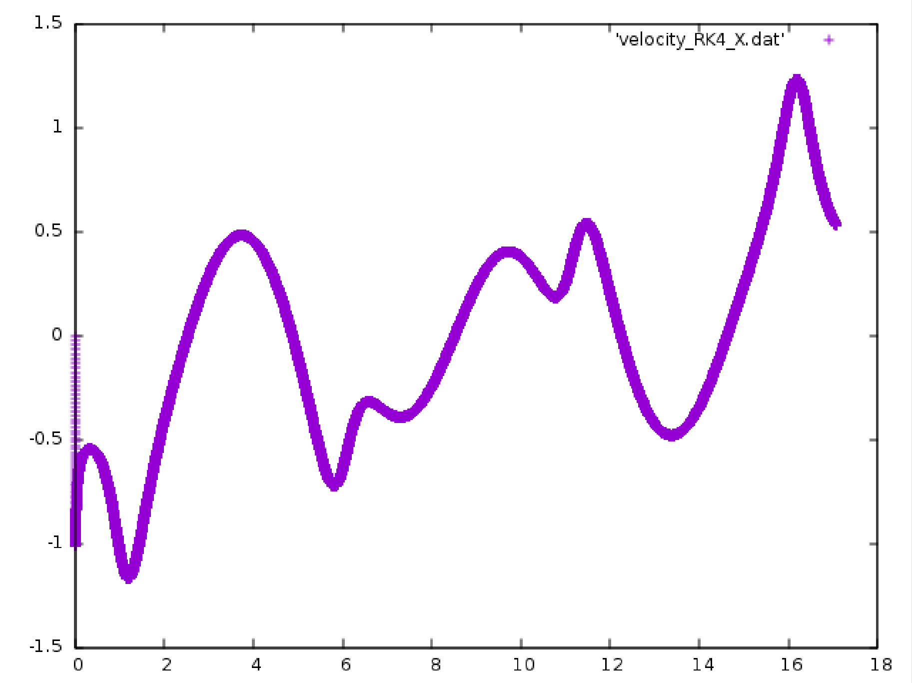


POSICIÓN EN EL EJE Y

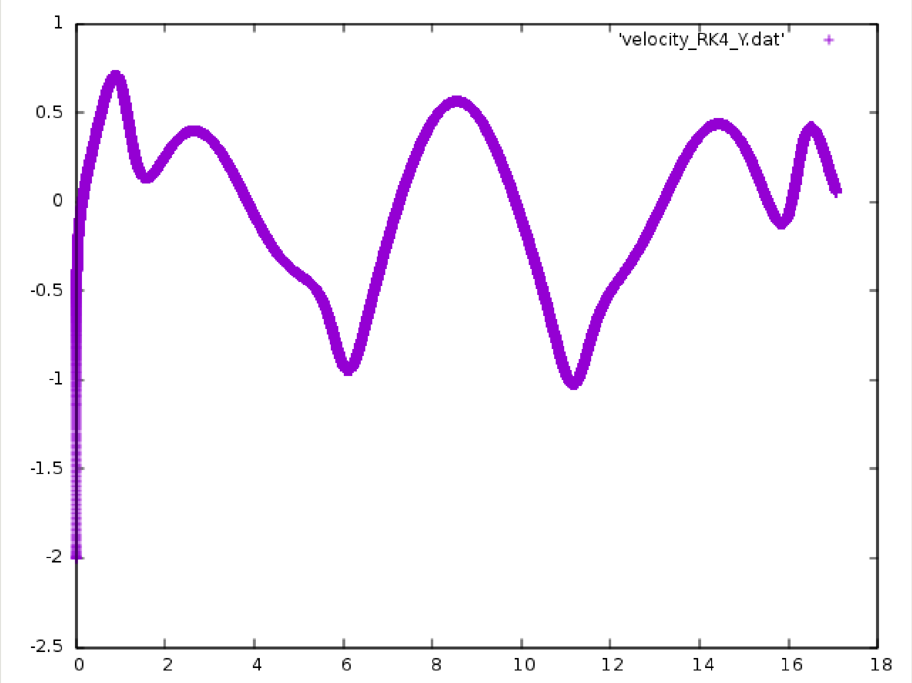


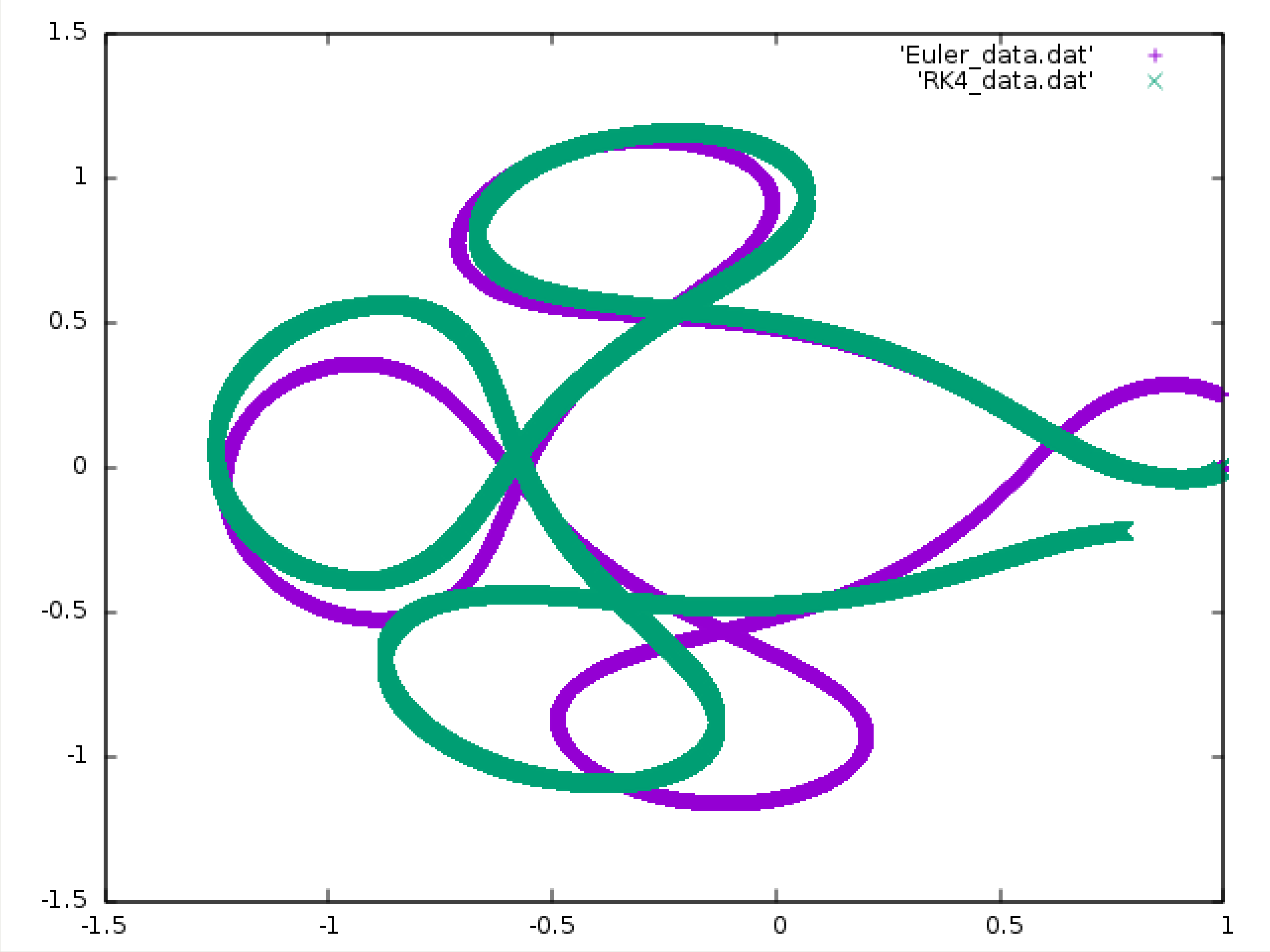
Velocidad

VELOCIDAD EN EL EJE X



VELOCIDAD EN EL EJE Y





Comparación de las orbitas usando ambos métodos.

```
void euler (double h, double &p0, double &u0, double &y0, double &x0, double &z0, double &q0)
{
  x0 += h*g1(p0,u0,x0,y0,z0,q0);
  y0 += h*f1(p0,u0,x0,y0,z0,q0);
  z0 += h*h1(p0,u0,x0,y0,z0,q0);
  p0 += h*f2(p0,u0,x0,y0,z0,q0);
  u0 += h*g2(p0,u0,x0,y0,z0,q0);
  q0 += h*h2(p0,u0,x0,y0,z0,q0);

}
```

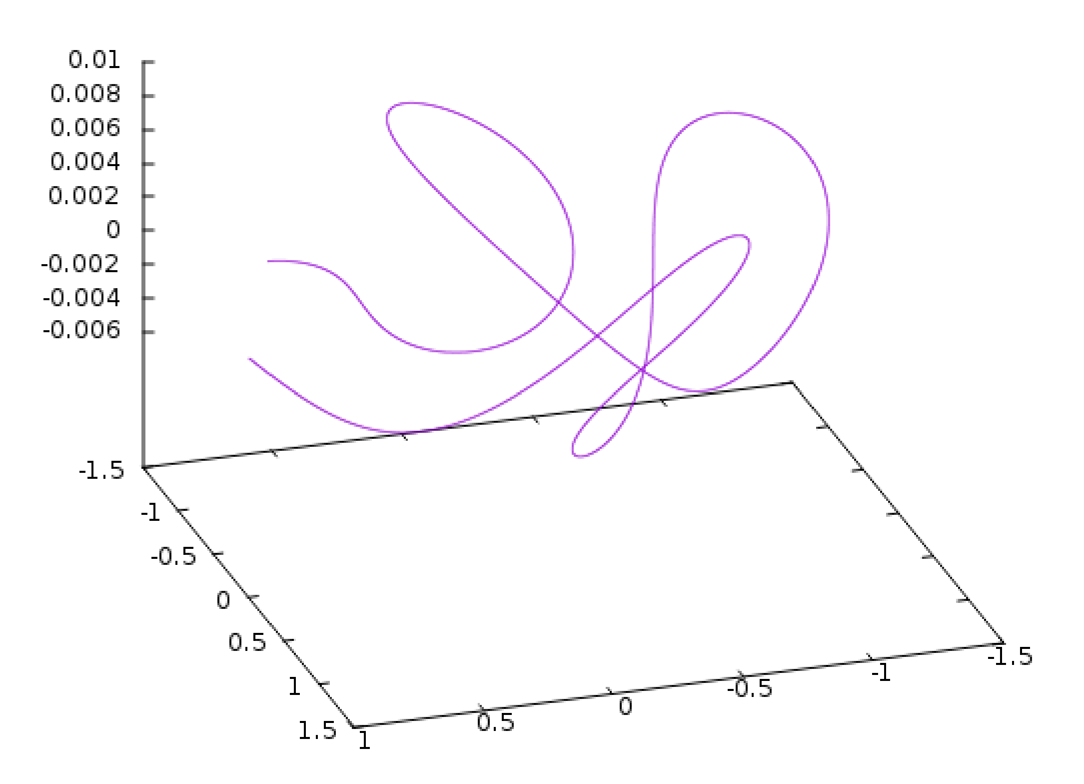
$Para\ las\ condiciones\ iniciales\ arbitrarias$:

z_0 = 0.0001

$q_0 = -0.000001$

$$\begin{cases} q = \ddot{z} \\ \ddot{z} = -\dfrac{(1-\mu)z}{r^3} - \dfrac{\mu z}{s^3} \end{cases}$$

Orbita para tres dimensiones



$Para\ las\ condiciones\ iniciales\ arbitrarias$:
z_0 = 0.0001
q_0 = −0.000001

$$\begin{cases} q = \ddot{z} \\ \ddot{z} = -\dfrac{(1-\mu)z}{r^3} - \dfrac{\mu z}{s^3} \end{cases}$$

Orbita para tres dimensiones