Computabilidad y Complejidad

Práctica 5

1) Si el tiempo de ejecución en el mejor caso de un algoritmo, $t_m(n)$, es tal que $t_m(n) \in \Omega(f(n))$ y el tiempo de ejecución en el peor caso de un algoritmo, $t_p(n)$, es tal que $t_p(n) \in O(f(n))$, ¿Se puede afirmar que el tiempo de ejecución del algoritmo es $\Theta(f(n))$?

2) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$.

b) $n^3 \in O(n^2)$.

c) $n^2 \in \Omega(n^3)$.

d) $2^n \in \Theta(2^{n+1})$.

e) $n! \in O((n+1)!)$.

f) $f : \mathbf{N} \to I\!R^{\geq 0}, f(n) \in O(n) \Longrightarrow [f(n)]^2 \in O(n^2)$.

g) $f : \mathbf{N} \to I\!R^{\geq 0}, f(n) \in O(n) \Longrightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$.

h) $f : \mathbf{N} \to I\!R^{\geq 0}$ y $k \in I\!R^{\geq 0}$, $kf(n) \in O(f(n))$.

i) Para todo polinomio $p(n)$ de grado m, $p(n) \in O(n^m)$.

j) $\alpha, \beta \in I\!R, \alpha < \beta \Longrightarrow n^\alpha \in O(n^\beta)$.

3) Probar que se cumplen las siguientes propiedades para $f, g, h : \mathbf{N} \to I\!R^{\geq 0}$,

- Reflexividad:
  - a) $f(n) \in O(f(n))$
  - b) $f(n) \in \Theta(f(n))$
  - c) $f(n) \in \Omega(f(n))$
- Transitividad:
  - d) Si $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(h(n)) \Longrightarrow f(n) \in O(h(n))$
  - e) Si $f(n) \in \Theta(g(n))$ y $g(n) \in \Theta(h(n)) \Longrightarrow f(n) \in \Theta(h(n))$
  - f) Si $f(n) \in \Omega(g(n))$ y $g(n) \in \Omega(h(n)) \Longrightarrow f(n) \in \Omega(h(n))$

g) Simetría: $f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$.

h) Simetría transpuesta: $f(n) \in O(g(n)) \iff g(n) \in \Omega(f(n))$.