Máquina de Turing - Repaso

- ¿Cómo se define una máquina de Turing?

- ¿Cómo se define el lenguaje aceptado por una máquina de Turing?

Modelos de Máquinas de Turing

- Existen numerosos modelos de Máquinas de Turing que se han probado equivalentes
- **Definición**. Dos máquinas de Turing M1 y M2 son equivalentes sii L(M1)=L(M2)
- **Definición**. Dos modelos de máquinas de Turing son equivalentes si para cada máquina de Turing de un modelo existe una máquina de Turing equivalente en el otro modelo.

Modelos de Máquinas de Turing

- **Teorema**: El modelo estándar de máquina de Turing visto es equivalente al modelo de máquina de Turing que comienza su computación apuntando al último símbolo del string de entrada.

- **Demostración**. Hay que probar 2 cosas: Para toda máquina de Turing M del modelo estándar existe una máquina de Turing M’ equivalente que comienza con el cabezal apuntando al último símbolo del string de entrada y viceverza, es decir, para toda máquina de Turing M’ del nuevo modelo existe una máquina de Turing M del modelo estándar equivalente.

Modelos de Máquinas de Turing

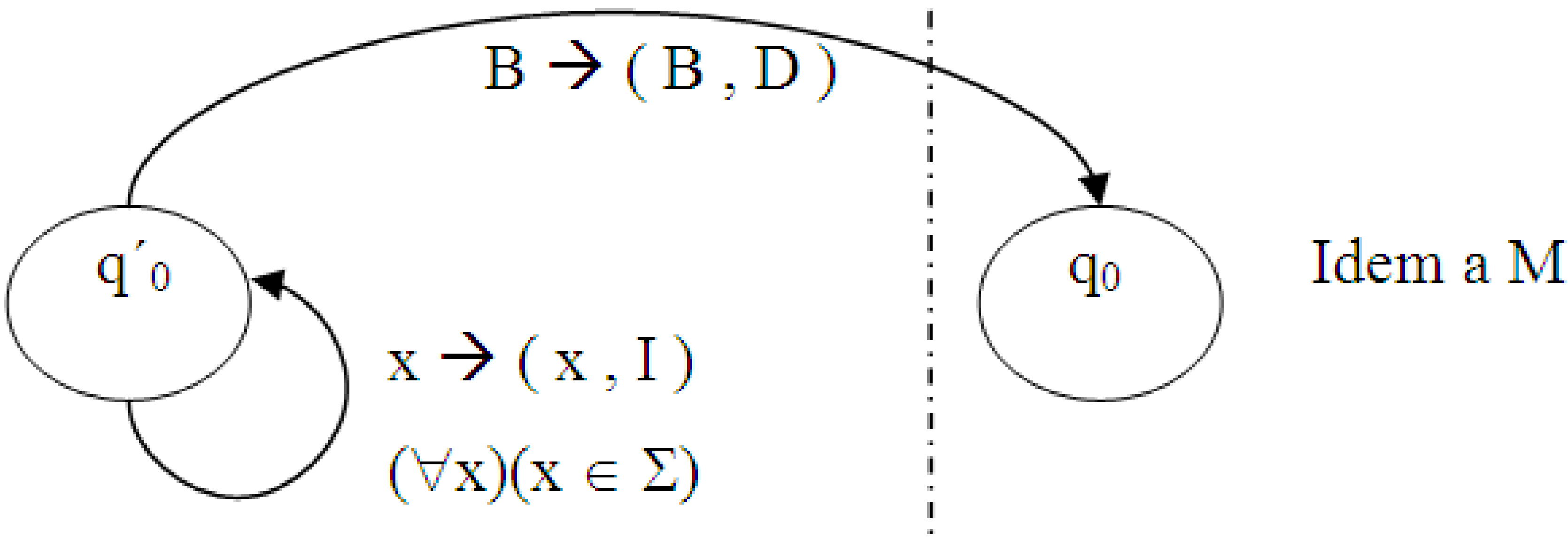
1) Vamos a probar que para toda máquina de Turing M del modelo estándar existe una máquina de Turing equivalente M' que comienza con el cabezal apuntando al último símbolo del string de entrada.

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ una máquina de Turing arbitraria del modelo estándar. Construiremos M' tal que L(M) sea igual a L(M')

$M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q'_0, F\rangle$

con $Q' = Q \cup \{q'_0\}$ y $q'_0 \notin Q$

Modelos de Máquinas de Turing



Modelos de Máquinas de Turing

Definimos de esta manera $\delta': Q' \times \Gamma \rightarrow Q' \times \Gamma \times \{D, I\}$

a) Si $\delta(q_i, x) = (q_j, y, Z)$ con $x \in \Gamma$, $y \in \Gamma$, $Z \in \{D, I\}$

definimos $\delta'(q_i, x) = (q_j, y, Z)$

b) Y agregamos las siguientes transiciones:

$\delta'(q'_0, x) = (q'_0, x, I)$, $(\forall x)(x \in \Sigma)$

$\delta'(q'_0, B) = (q_0, B, D)$

Modelos de Máquinas de Turing

Hay que probar **L(M) = L(M')** ***(Hay que demostrar igualdad entre conjuntos)***

i) L(M) $\subseteq$ L(M') ?

Sea w = $s_1.s_2\ldots s_n \in$ L(M) (si n = 0 entonces w=λ)

$\Rightarrow q_0 s_1.s_2\ldots s_n \vdash^*_M \alpha q \beta$, con $q \in F$ y M se detiene. ***(por def. L(M))***

Además, para M' se cumple que:

$$s_1.s_2\ldots q'_0 s_n \underbrace{\vdash^*_{M'}}_{\text{(por def. } \delta' \text{ b)}} q_0 s_1.s_2\ldots s_n \underbrace{\vdash^*_{M'}}_{\text{(por def. } \delta' \text{ a)}} \alpha q \beta, \text{ con } q \in F \text{ y M' se detiene.}$$

$\Rightarrow s_1.s_2\ldots q'_0 s_n \vdash^*_{M'} \alpha q \beta$, con $q \in F$ y M' se detiene. ***(por def. $\vdash$*)***

$\Rightarrow w \in$ L(M') ***(por def. L(M'))***

Observe que también funciona para el caso en que w=λ

Por lo tanto L(M) $\subseteq$ L(M')

Modelos de Máquinas de Turing

ii) $L(M') \subseteq L(M)$? Vamos a probar por contrarecíproca

Sea $w = s_1.s_2\ldots s_n$ tal que $w \notin L(M)$ entonces por def. de L(M) se tienen dos casos:

Caso A) M con input w se detiene en un estado no final.

Caso B) M no se detiene con input *w*

Caso A) $q_0s_1.s_2\ldots s_n \vdash^*_M \alpha q\beta$, y M se detiene con $q \notin F$ ***(por def. L(M))***

Además, para M' se cumple que:

$\underbrace{s_1.s_2\ldots q'_0 s_n \vdash^*_{M'} q_0 s_1.s_2\ldots s_n}_{\text{(por def. } \delta' \text{ b)}} \ \underbrace{\vdash^*_{M'} \alpha q\beta}_{\text{(por def. } \delta' \text{ a)}}$, y M' se detiene con $q \notin F$.

$\Rightarrow s_1.s_2\ldots q'_0 s_n \vdash^*_{M'} \alpha q\beta$, y M' se detiene con $q \notin F$. ***(por def. $\vdash$*)***

$\Rightarrow w \notin L(M')$ ***(por def. L(M'))***

Observe que también funciona para el caso en que w=λ

Modelos de Máquinas de Turing

Caso B) A partir de $q_0 s_1.s_2\ldots s_n$ M loopea (nunca se detiene)

Además, para M' se cumple que:

$s_1.s_2\ldots q'_0 s_n \underbrace{\vdash^*_{M'}}_{\textit{(por def. } \delta' \textit{ b)}} q_0 s_1.s_2\ldots s_n$ *y* $\underbrace{\text{a partir de aquí M' loopea}}_{\textit{(por def. } \delta' \textit{ a)}}$

$\Rightarrow$ A partir de $s_1.s_2\ldots q'_0 s_n$ M' loopea.

$\Rightarrow w \notin L(M')$ ***(por def. L(M'))***

Observe que también funciona para el caso en que w=λ

Por lo tanto si $w \notin L(M) \Rightarrow w \notin L(M')$ ***(por casos A y B)***

Por contrarecíproca si $w \in L(M') \Rightarrow w \in L(M)$.

Por lo tanto $L(M') \subseteq L(M)$.

De i) y ii) **L(M) = L(M')** ***(como se pretendía demostrar)***

Modelos de Máquinas de Turing

- Modelo D-I-S (Derecha-Izquierda-Sin movimiento)
- Máquina de Turing que admite transiciones sin movimiento del cabezal de la cinta.
- $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ con $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F$ definidos como en el modelo estándar (modelo D-I)
- y $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D, I, S\}$ (S significa sin movimiento)

Modelos de Máquinas de Turing

Ejemplo: Construir una máquina de Turing que se posicione en el primer símbolo ‘1’ del input de la cinta para luego saltar a una subrutina (Σ={0,1})