Máquina de Turing

Continuación

Lenguajes formales

Contexto: Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

- Veremos a los lenguajes desde el punto de vista de su aplicación a problemas de computación

- Lenguajes con distintos grados de complejidad asociados a problemas con distintos grados de complejidad computacional

Lenguajes formales

Los Lenguajes son conjuntos de sentencias (*strings*) construidas a partir de un conjunto finito de símbolos (el alfabeto). Cada una de las sentencias de un lenguaje es una secuencia finita de estos símbolos.

Lenguajes formales

Sintaxis vs. semántica

•**Sintaxis**: Principios y procesos que permiten combinar los símbolos para formar las sentencias de un lenguaje particular. Corresponde a la pregunta ¿Es gramaticalmente correcto?

•**Semántica**: Mecanismo subyacente a través del cual se le asigna un significado a las sentencias de un lenguaje particular. Corresponde a las preguntas ¿Qué significa esta sentencia? ¿Que sentencia tiene sentido?

Es claro que para que una sentencia tenga sentido es necesario primero que sea sintácticamente correcta.

Para trabajar con lenguajes formales sólo hace falta observar la sintaxis (las formas).

Lenguajes formales

Desde el punto de vista sintáctico (es decir en el contexto de los lenguajes formales) existen dos cuestiones importantes:

La generación: Gramáticas para generar sentencias sintácticamente correctas.

El reconocimiento o aceptación: Autómatas capaces de reconocer si una sentencia es sintácticamente correcta para un determinado lenguaje. Las MT son un ejemplo de un tipo particular de autómata.

Lenguajes formales

Clases de lenguajes (Chomsky)

Según el tipo de autómata que lo acepte o gramática que lo genere

- Lenguajes Regulares
- Lenguajes Libres de contexto
- Lenguajes Sensibles al contexto
- Lenguajes Recursivos y Recursivos Enumerables

Máquinas de Turing

Definiciones

Definición. **Alfabeto**: Diremos que un conjunto finito Σ es un alfabeto

si $\Sigma \neq \emptyset$ y $(\forall x)(x \in \Sigma \rightarrow$ x es un símbolo indivisible)

Ejemplos $\Sigma = \{a,b\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Sigma = \{a,b,\ldots z\}$ son alfabetos

$\Sigma = \{0,1,00,01\}$ $\Sigma = \{sa,ca,casa\}$ no lo son

Definiciones

Definicion. **Palabra**: Se dice que *w* es una palabra (cadena, sentencia o string) sobre Σ si *w* es una secuencia finita de símbolos de Σ

Ejemplos: si $\Sigma = \{0,1\}$, entonces:

0011, 101, 1 son palabras sobre Σ

Definiciones

Definicion. **Longitud de una palabra**: Se denota $|w|$, es el número de símbolos que contiene *w.*
Por ejemplo: |perro|=5 |010|=3

Nota: notaremos con Σ^* al conjunto de todas las palabras formadas por símbolos de Σ incluida la cadena nula (o vacía) que tiene longitud cero y denotaremos con
λ. ($|\lambda| = 0$)

Ejemplo: $\Sigma = \{a,b\}$
$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa\ldots\}$

Definiciones

Concatenación: La notación utilizada para denotar la concatenación de dos palabras w y v es $w.v$ (o simplemente wv).

La concatenación es asociativa pero no conmutativa:

$$(v.w).x = v.(wx) \qquad v.w \neq w.v$$

Se cumple que:

$$|v.w|=|v|+|w|$$

La cadena vacía es el elemento neutro para la concatenación $\lambda.w = w.\lambda = w$

Definiciones

Definición. Sea una palabra $w \in \Sigma^*$ y un número natural i, se define la potencia i-ésima de w como:

$$w^0 = \lambda$$

$$w^{(i+1)} = w.w^{i} \qquad (\forall i)\ (i \geq 0)$$

Ejemplo: si w = ab, w^3 = ababab

Definiciones

Definición. Se denomina lenguaje definido sobre Σ a cualquier subconjunto de Σ^*

Ejemplo: si $\Sigma = \{0,1\}$

$\emptyset$

Σ^*

$\{\lambda\}$

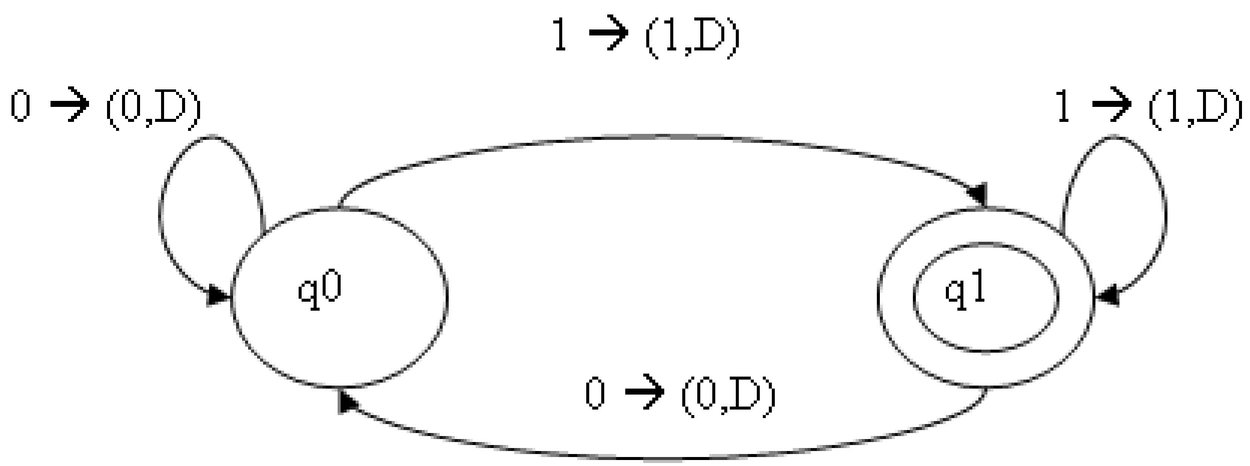
$\{w \in \Sigma^* \mathbin{/} w$ comienza con $1\}$

$\{1w0 \mathbin{/} w \in \Sigma^*\}$

Son lenguajes sobre Σ

Máquina de Turing como reconocedoras de cadenas de símbolos

- Alcanza con identificar los estados que se consideran finales (aceptadores). Se dice que una máquina de Turing M reconoce un string w ⇔ M **se detiene** en un **estado final**.



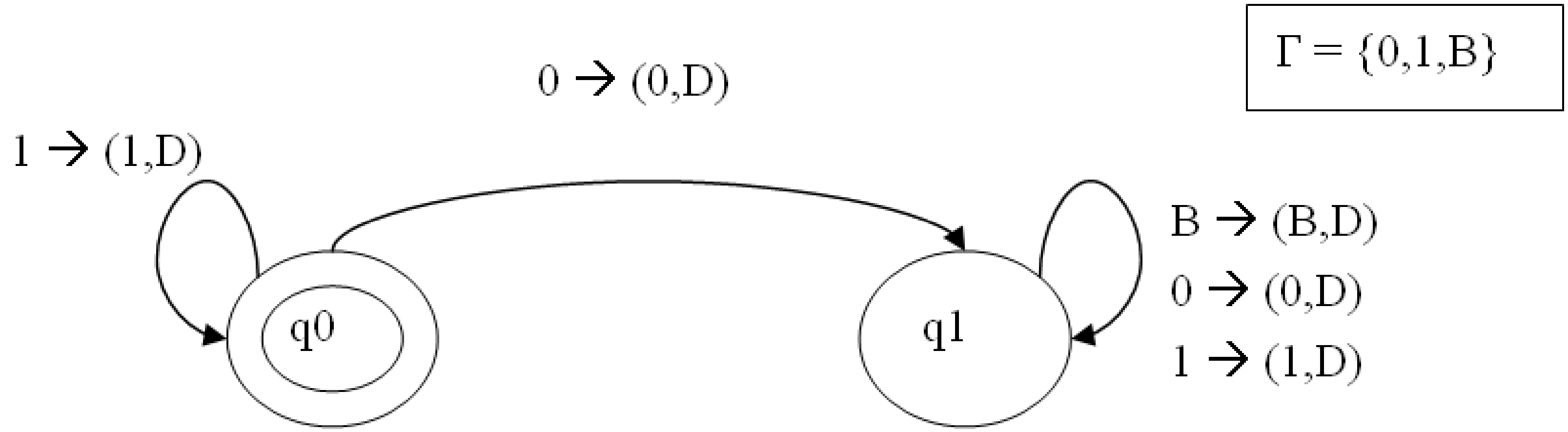
$\Gamma = \{0,1,B\}$

Se identifican los estados finales con doble círculo

Esta máquina reconoce números binarios terminados en 1

Máquina de Turing como reconocedoras de cadenas de símbolos

¿Qué cadenas reconoce esta máquina de Turing?



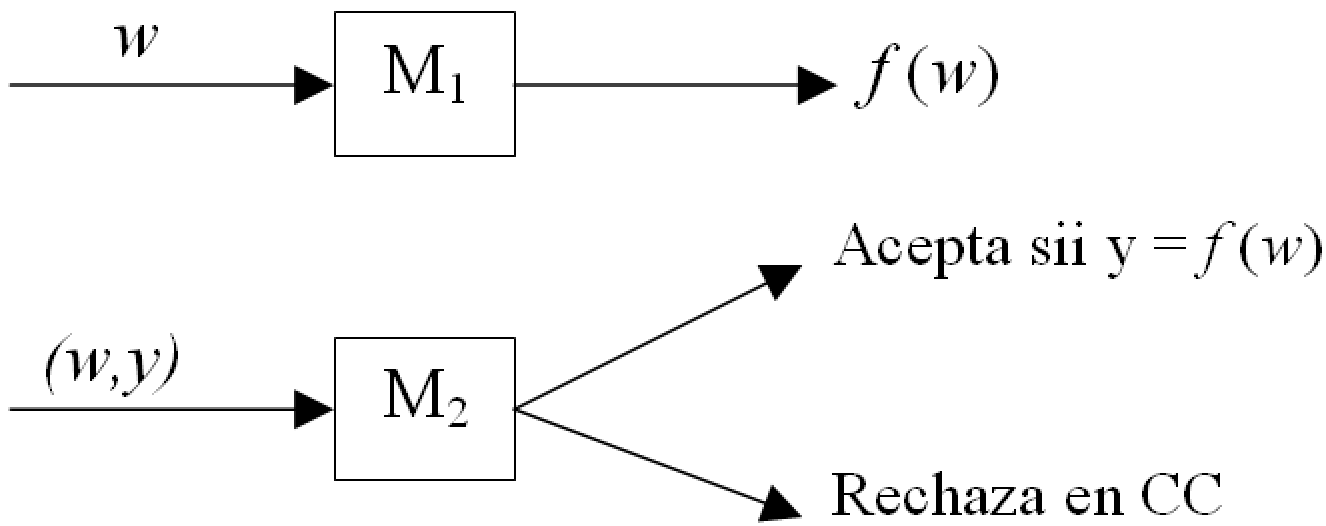
Reconoce cadenas de ‘1’ y a λ (decimos que en la cinta está λ cuando sólo contiene símbolos B.

También se puede decir que reconoce cadenas de la forma 1^n con $n>=0$ (cuando $n=0$ la potencia da como resultado λ)

Nótese que esta máquina rechaza “loopeando” (lazo o loop infinito)

Máquina de Turing como reconocedoras de cadenas de símbolos

NOTA: Para el estudio de la computabilidad podemos quedarnos únicamente con las máquinas de Turing reconocedoras sin perder generalidad. Intuitivamente:



M_2 es una máquina de Turing reconocedora

Modelo Estándar de máquina de Turing

Definición. Una máquina de Turing es una 6-tupla

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$$

tal que:

Q es un conjunto finito de estados de M

Σ es el alfabeto de la entrada

Γ es el alfabeto de la cinta. $\Sigma \subset \Gamma$ y $B \in (\Gamma - \Sigma)$

q_0 es el estado inicial de M ($q_0 \in Q$)

F es el conjunto de estados finales de M. ($F \subseteq Q$)

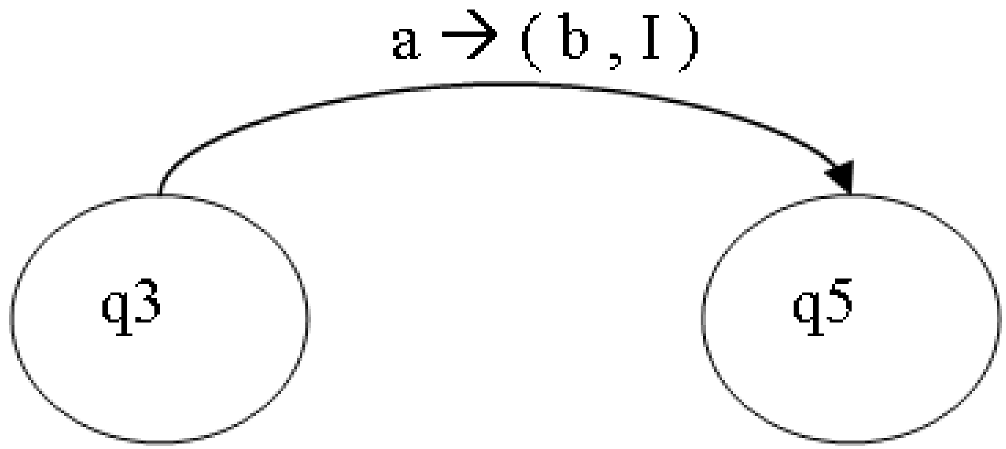
δ es la función de transición de M.

Se define δ: $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D, I\}$,

D e I representan el movimiento del cabezal a derecha e izquierda respectivamente.

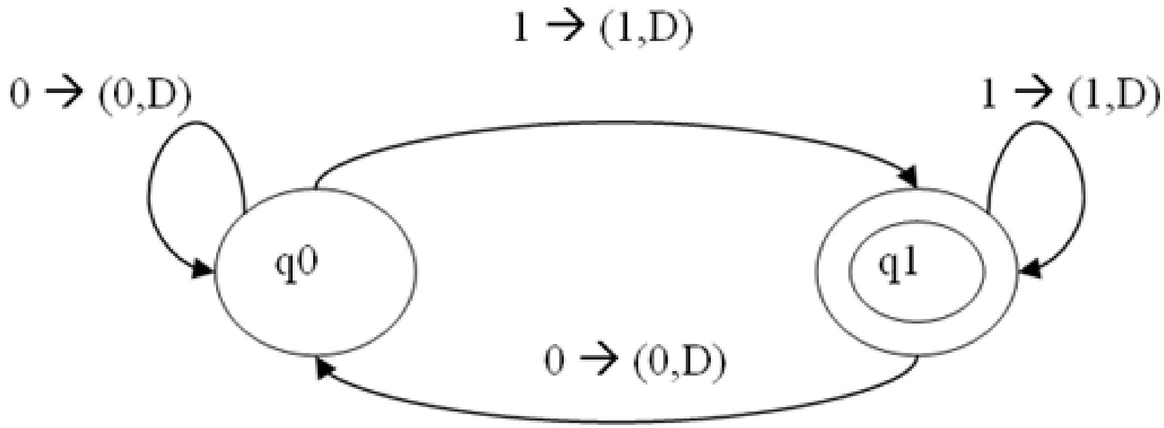
Modelo Estándar de máquina de Turing

$\delta(q3,a)=(q5,b,I)$ equivale a:



IMPORTANTE: δ puede estar definida parcialmente

Ejemplo (revisitado)



$\Gamma = \{0,1,B\}$

Formalmente se escribe así: $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$

$Q=\{q0,q1\}$; $\Sigma=\{0,1\}$; $\Gamma=\{B,0,1\}$, $F=\{q1\}$

δ: $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{D, I\}$

$\delta(q0,0)=(q0,0,D)$

$\delta(q0,1)=(q1,1,D)$

$\delta(q1,0)=(q0,0,D)$

$\delta(q1,1)=(q1,1,D)$

Ejemplo (revisitado)

Otra forma de especificar la función de transición es con una tabla

δ	**0**	**1**	**B**
q0	(q0,0,D)	(q1,1,D)	--
q1	(q0,0,D)	(q1,1,D)	--

Descripción instantánea de una máquina de Turing

Denotaremos $s_1s_2\ldots qs_i\ldots s_n$ a la **configuración** o **descripción instantánea** de la máquina de Turing M que indica:

1. El contenido de la cinta es $\ldots BBBs_1s_2\ldots s_i\ldots s_nBBB \ldots$
2. El estado corriente de M es q
3. El cabezal se encuentra barriendo el símbolo s_i

Para evitar confusiones Γ y Q deben ser disjuntos $(Q \cap \Gamma = \varnothing)$

Movimiento de una máquina de Turing

La expresión $C_1 \vdash_M C_2$ indica que la máquina de Turing M pasa en un solo movimiento o paso, de la configuración C_1 a la configuración C_2 .

La expresión $C_1 \vdash^*_M C_2$ indica que la máquina de Turing M pasa en cero o más pasos de C_1 a C_2.

Movimiento de una máquina de Turing

δ	**0**	**1**	**B**
q0	(q0,0,D)	(q1,1,D)	--
q1	(q0,0,D)	(q1,1,D)	--

Ejemplo:

Traza de ejecución de la máquina de Turing anterior para la entrada *w*=0101.

$$q_0 0101 \vdash_M 0q_0 101 \vdash_M 01q_1 01 \vdash_M 010q_0 1 \vdash_M 0101q_1 B$$

Podemos escribir entonces:

$$q_0 0101 \vdash^*_M 0101q_1 B$$

Lenguaje aceptado por una máquina de Turing

Definición. El lenguaje aceptado por $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ es:

$$L(M)=\{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash^*_M \alpha q \beta, \quad q \in F, \quad \alpha\beta \in \Gamma^* \text{ y M se detiene}\}$$

Obsérvese que para que M se detenga δ no debe estar definida para el estado q y el primer símbolo de β.

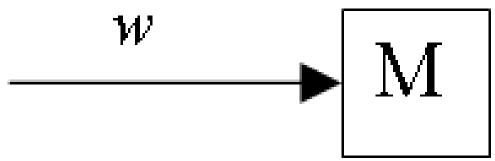
Dicho de otra forma:

$w \in L(M) \Leftrightarrow$ con input w, M se <u>detiene</u> en un <u>estado final</u>

Lenguaje aceptado por una máquina de Turing

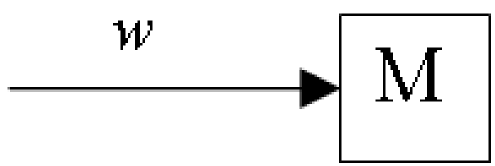
Tres casos posibles:

a)



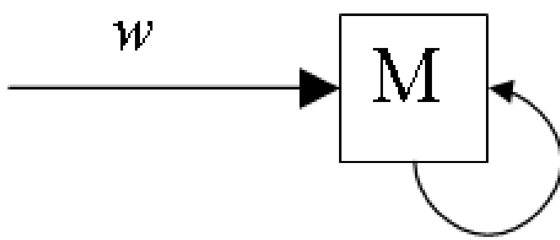
M se detiene en $q \in F \Rightarrow w \in L(M)$

b)



M se detiene en $q \notin F \Rightarrow w \notin L(M)$

c)



M no se detiene $\Rightarrow w \notin L(M)$

Lenguaje aceptado por una máquina de Turing

Ejercicio para el lector

a) Construir una máquina de Turing M tal que L(M)=$\{0^n 1^n / \ n \geq 1\}$ y describir los movimientos de la máquina (traza de computación) para las entradas w_1=0011 y w_2=011

b) Construir una máquina de Turing que busque en la cinta el patrón "abab" y se detenga si y sólo si encuentra ese patron. $\Sigma=\{a,b,c\}$