Computabilidad y Complejidad
Práctica 2

1) Sea $\Sigma = \{a\}$ y $w = a$. Decir cuáles son las palabras que se obtienen como resultado de aplicar las siguientes operaciones: ww, www, w^3, w^5, w^0 ¿Cuáles son sus longitudes? Definir Σ^*.

2) Idem al ejercicio (1), pero con $\Sigma = \{a,b\}$ y $w = aba$.

3) Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$, escriba las 13 cadenas más cortas de Σ^*.

4) Dar tres ejemplos de lenguajes basados en el alfabeto $\{0,1\}$

5) ¿Cuántas cadenas de longitud 3 hay en $\{0,1,2\}^*$, y cuántas de longitud n?

6) Explicar la diferencia -si la hay- entre los lenguajes L_1 y L_2.

a) $L_1 = \varnothing$	$L_2 = \{\lambda\}$
b) $L_1 = \Sigma^* \cup \{\lambda\}$	$L_2 = \varnothing \cup \Sigma^*$
c) $L_1 = \Sigma^* - \varnothing$	$L_2 = \Sigma^*$
d) $L_1 = \Sigma^* - \{\lambda\}$	$L_2 = \Sigma^*$

7) Mostrar que Σ^* es infinito contable.

8) Indicar cuál es el lenguaje que se obtiene al intersectar los siguientes lenguajes:

a) $L_1 = \{a^n c^m d^n \ / \ n \geq 0, m \geq 0\}$ con $L_2 = \{ c^n \ / \ n \geq 0\}$
b) $L_1 = \{a^n c^m d^n \ / \ n > 0, m \geq 0\}$ con $L_2 = \{ c^n \ / \ n \geq 0\}$
c) $L_1 = \{a^n c^m d^n \ / \ n \geq 0, m > 10\}$ con $L_2 = \{ c^n \ / \ n > 5\}$
d) $L_1 = \{1^n 2^m \ / \ n, m \geq 0, n \text{ par}, m \text{ impar}\}$ con $L_2 = \{ 2^n \ / \ n \geq 0\}$
e) $L_1 = \{1^n 2^m \ / \ n, m \geq 0, n \text{ par}, m \text{ impar}\}$ con $L_2 = \{ 1^n \ / \ n \geq 0\}$

9) Encontrar si es posible un lenguaje L_1 que cumpla:

a) $L_1 \cap \{1^k 2^m 3^n \ / \ m = k+n+1 \text{ y } n, k \geq 0\} = \{1^n 2^{n+1} \ / \ n \geq 0\}$
b) $L_1 \cap \{1^n 2^m \ / \ n \neq m \text{ y } n, m \geq 0\} = \{1^n 2^n \ / \ n > 0\}$

10) Conteste las siguientes preguntas sobre Máquinas de Turing

a) ¿Puede el alfabeto de la cinta (Γ) ser el mismo que el alfabeto de entrada (Σ)?
b) ¿Puede una máquina de Turing tener un único estado?
c) ¿Cuántos lenguajes existen definidos sobre el alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$? ¿y sobre $\Sigma = \{1\}$?
d) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son lenguajes definidos sobre Σ?
$\varnothing$, Σ, Σ^*, $\{\lambda\}$, $\{\lambda\} \cup \Sigma$, $\{\varnothing\}$
e) Sea la siguiente máquina de Turing:
$M = < Q , \Sigma , \Gamma , \delta , q_0, F>$
Con $Q = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $\Sigma = \{a,b,c\}$, $\Gamma = \{a,b,c,B\}$ y $F = \varnothing$
Reconoce el lenguaje $\{\lambda\}$?
Si no es así indique cuál es el lenguaje que reconoce.

11) a) Construir una máquina de Turing que haga un corrimiento a derecha del string binario en la cinta, marcando con un símbolo especial '#' la celda que corresponde al primer símbolo desplazado. $\Gamma = \{B, \#, 0, 1\}$. b) Y otra que haga un corrimiento a izquierda.

12) a) Construir una máquina de Turing M tal que L(M) = $\{0^n 1^n / n \geq 1\}$ y mostrar la traza de computación de M para las entradas w_1=0011 y w_2 = 011.
b) Construir una máquina de Turing que busque en la cinta el patrón “abab” y se detenga si y sólo si encuentra ese patron. Γ={a,b,c,B}

13) Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$, en cada caso determinar L(M)

a) $Q=\{q_0, q_1\}$; $\Sigma=\{0,1\}$; $\Gamma=\{0, 1, B\}$; $F=\{q_0\}$
$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, I)$
$\delta(q_0, B) = (q_0, B, D)$
$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, D)$

b) $Q=\{q_0, q_1\}$; $\Sigma=\{0,1\}$; $\Gamma=\{0, 1, B\}$; $F=\{q_1\}$
$\delta(q_0, 0) = (q_1, B, D)$

c) $Q=\{q_0, q_1\}$; $\Sigma=\{0,1\}$; $\Gamma=\{0, 1, B\}$; $F=\emptyset$
$\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, I)$
$\delta(q_0, B) = (q_0, B, D)$
$\delta(q_0, 1) = (q_1, 1, D)$
$\delta(q_1, 0) = (q_0, B, I)$
$\delta(q_1, B) = (q_0, B, D)$

d) $Q=\{q_0\}$; $\Sigma=\{0,1\}$; $\Gamma=\{0, 1, B\}$; $F=\{q_0\}$
$\delta(q_0, 1) = (q_0, B, I)$
$\delta(q_0, B) = (q_0, B, D)$

e) $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$; $\Sigma=\{0,1\}$; $\Gamma=\{0, 1, B\}$; $F=\{q_2\}$
$\delta(q_0, 0) = (q_1, B, D)$
$\delta(q_1, 0) = (q_1, 1, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, B) = (q_2, 1, D)$

14) Construir máquinas de Turing para computar las siguientes funciones:

a) Suma unaria. Σ={+, 1}.

b) Resta unaria *a* - *b* con *a* > *b* Σ = {-, 1}.

c) Calcular el complemento a 2 de un número binario de 8 bits Σ={0, 1}

15) Implementar en el lenguaje de su preferencia una máquina de Turing determinística de una sóla cinta (modelo estándar visto en clase)

16) Utilice la implementación de la máquina de Turing del ejercicio 15 para verificar los ejercicios anteriores y responder lo siguiente:

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $\Gamma = \{0, 1, B\}$, $F = \emptyset$

$\delta(q_0,1)=(q_0,1,D)$ $\delta(q_0,0)=(q_0,0,D)$ $\delta(q_0,B)=(q_1,B,I)$
$\delta(q_0,2)=(q_1,B,I)$ $\delta(q_1,0)=(q_0,1,I)$ $\delta(q_1,B)=(q_2,B,D)$
$\delta(q_1,1)=(q_1,B,D)$ $\delta(q_1,2)=(q_1,2,D)$ $\delta(q_2,1)=(q_1,2,D)$
$\delta(q_2,0)=(q_0,0,D)$ $\delta(q_2,B)=(q_2,1,I)$ $\delta(q_2,2)=(q_1,0,I)$

a) Determinar la configuración de la máquina (contenido de la cinta, posición de la cabeza y estado de M) luego de efectuar el movimiento (o paso de computación) número 67 con el input w = 01012000

b) Si agregamos el estado q_3 en M y reemplazamos la última definición $\delta(q_2,2)=(q_1,0,I)$ por $\delta(q_2,2)=(q_3,0,I)$ ¿Cuántos movimientos hace M con input w = 011012000 y cuál es la configuración al detenerse?