Def.: **orden canónico para Σ^*:** se listan todas las palabras en orden según su tamaño con las palabras del mismo tamaño en orden lexicográfico.

Ej: $\Sigma = \{0, 1\}$, el orden canónico es:

λ,	0,	1,	00,	01,	10,	11,	000,	001,	010,	011,	100,	101,	110,	111,	0000,	0001	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	

Obsérvese que si w es un string de $\{0,1\}^*$, la posición i que ocupa en el orden canónico se escribe en binario como $1w$. Decimos entonces que w es el i-ésimo string y por ello lo denotamos w_i

Por ejemplo el string λ ocupa la posición 1 (1λ) el string 01 ocupa la posición 5 (101), el string 0000 la posición 16 (10000)

Pregunta 1: ¿Puede una MT generar las palabras de Σ^* en orden canónico?

Rta.: Sí. Idea: ir sumando 1 en binario, cuando el resultado necesita un bit más, se ponen todos los bits en cero y se vuelve al proceso de sumar uno en binario.

<u>Ejercicio de deber</u>: construir una MT que escriba en la primera cinta las palabras de $\{0, 1\}^*$ en orden canónico separadas por "；"

Pregunta 2: Si L es un lenguaje recursivo ($L \in$ R) ¿Puede una MT generar todas las palabras de L en orden canónico?

Rta.: Sí, porque existirá alguna MT M que reconoce L y siempre se detiene. Se construye una MT M' que va generando en una cinta los strings de Σ^* en orden canónico, simula M sobre cada string generado y si M lo acepta M' lo escribe en la cinta 1.

Pregunta 3: si L es un lenguaje recursivamente enumerable ($L \in$ RE) ¿Puede una MT generar todas las palabras de L?

Rta.: Sí. Se generan todos los pares (i, j) en orden de su suma, i+j, y entre los de igual suma en orden creciente de i (ver ejercicio de la práctica 1)

(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (2, 2); (3, 1), …

Por cada par (i, j) generado se simulan j pasos de la MT M que reconoce el lenguaje L (L=L(M)), sobre w_i (i-ésimo string de Σ^* en orden canónico). Si M acepta w_i en esos j pasos $\Rightarrow$ se escribe w_i en la cinta 1.

Pregunta 4: ¿Puede codificarse una MT como un string de un alfabeto de 2 símbolos?

Rta.: Sí. Se puede hacer de muchas formas, acá se muestra una.

Ej: se quiere codificar $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$

$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_K\}$ $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_L\}$ $\Gamma = \{B, a_1, a_2, \ldots, a_L, a_{L+1}, \ldots, a_n\}$

Se puede codificar M con un alfabeto binario {0, 1} de la sgte. forma:

<u>Estados</u>: $q_A = 1$ $q_R = 11$ $q_0 = 111$ $q_1 = 1111$ … $q_i = 1^{(i+3)}$

<u>Símbolos</u>: $B = 1$, $a_1 = 11$ $a_2 = 111$ … $a_i = 1^{(i+1)}$

<u>Movimiento del Cabezal</u>: $D = 1$ $I = 11$ $S = 111$

<u>Función de Transición</u>: cada transición se codifica como una quíntupla de elementos separados por un símbolo 0. Ej.:

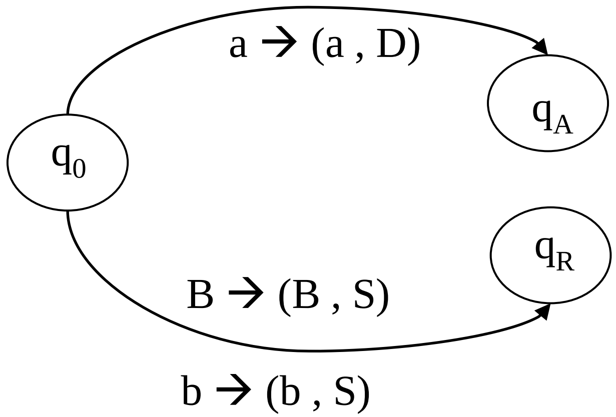
$\delta(q_0, a_2) = (q_1, a_4, D)$ se codifica como

$(q_0, a_2, q_1, a_4, D) = (111011101111011111101)$

q_0, a_2, q_1, a_4, D

M se codifica como una sucesión de quíntuplas separadas por 00.

Ej.: $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$ $Q = \{q_0\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $\Gamma = \{B, a, b\}$



$d(q_0, a) = (q_A, a, D)$
$d(q_0, b) = (q_R, b, S)$
$d(q_0, B) = (q_R, B, S)$

Ej.: $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_A, q_R \rangle$ $Q = \{q_0\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $\Gamma = \{B, a, b\}$

$q_A = 1$	$q_R = 11$	$q_0 = 111$
$B = 1$	$a = 11$	$b = 111$
$D = 1$	$I = 11$	$S = 111$

$\langle M \rangle$ = 111011010110100111011101101110111001110101101011

$\delta(q_0, a) = (q_A, a, D)$ $\delta(q_0, b) = (q_R, b, S)$ $\delta(q_0, B) = (q_R, b, S)$

Note que existen otros posible códigos para *M*. Las tres transiciones pueden listarse en distinto orden (3! formas distintas) por lo tanto hay 6 códigos distintos para *M*

Pregunta 5: ¿$L_{<M>} \in$ R?
Con $L_{<M>} = \{w \in \{0, 1\}^* \, / \, w$ es el código bien formado de una MT$\}$

Rta.: Sí, para demostrarlo hay que construir una MT que realice un chequeo sintáctico y siempre se detenga.

Ejercicio para el lector: proponer una forma de codificar una MT del modelo original (con conjunto de estados finales F) y construir una MT que acepte $L_{<M>}$ para esa codificación.

El código binario de una MT M se denotará con $<M>$

Def. Se denomina i-ésima máquina de Turing y se denota M_i a aquella MT cuyo código es w_i (i-ésimo string binario en orden canónico), es decir $<M_i>=w_i$

Si w_i no es un código válido de MT se toma M_i como la máquina de Turing que se detiene inmediatamente rechazando cualquier input ($L(M_i)=\{\}$). Así, todo string w_i de $\{0,1\}^*$ se corresponde con una MT M_i

Def.: se define el lenguaje Diagonal L_D (primer ejemplo de lenguaje no recursivamente enumerable que se verá) de la siguiente manera:

$$L_D = \{w_i \in \Sigma^* \,/\, w_i \notin L(M_i)\}$$

siendo $\Sigma=\{0,1\}$; w_i el i-ésimo string en orden canónico de Σ^* y M_i la i-ésima MT

$L_D = \{w_i \in \Sigma^* \,/\, w_i \notin L(M_i)\}$

Teorema: $L_D \notin$ RE

Dem.: Por reducción al absurdo, se asume que $L_D \in$ RE $\Rightarrow$ existirá una MT M y un natural k para el cual $M = M_k$ y $L_D = L(M_k)$.

Considerando w_k el k-ésimo string de Σ^*, hay dos posibilidades, o bien $w_k \in L_D$ o bien $w_k \notin L_D$.

a) $w_k \in L_D \Rightarrow w_k \notin L(M_k) \Rightarrow$ (por def. L_D)

$\Rightarrow w_k \notin L_D$ (porque $L(M_k) = L_D$)

(contradicción)

b) $w_k \notin L_D \Rightarrow w_k \in L(M_k)$ (por def. L_D)

$\Rightarrow w_k \in L_D$ (porque $L(M_k) = L_D$)

(contradicción)

En ambos casos se llega a una contradicción y por ende no puede existir una M_k que reconozca al lenguaje L_D, por lo tanto L_D no puede ser recursivamente enumerable.

Por lo tanto $L_D \notin$ RE.