Preliminares – Teoría de Conjuntos

Relación con la Lógica

Lógica Proposicional

- **Definición**. Una proposición es una oración con valor declarativo o informativo, de la cual se puede predicar su verdad o falsedad.
- Ejemplos de proposiciones
  - Hoy es viernes
  - 5 > 25
  - 7 es primo

Lógica Proposicional

- Ejemplos de expresiones no proposicionales
  - Hola
  - ¿Cómo estás?
  - Quédense quietos
  - ¡Buenísimo!

Conectivos lógicos

- **<u>Negación</u>**
- Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por ~p (se lee "no p") que le asigna el valor de verdad opuesto al de p. Ej:
- p: Hoy está lloviendo
- ~ p: Hoy no está lloviendo

(formal: variable y significado coloquial)

Conectivos lógicos

- **Tabla de verdad de la Negación**

p	**~ p**
V	F
F	V

Conectivos lógicos

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición $p \wedge q$ (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

p	**q**	**$p \wedge q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivos lógicos

$$\underbrace{\text{5 es un número impar}}_{p}\ \underset{\wedge}{\text{y}}\ \underbrace{\text{6 es un número par}}_{q}$$

Por ser p y q ambas verdaderas, la conjunción de ellas es verdadera.

"Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre"

Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones.

Conectivos lógicos

Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \vee q$ cuya tabla de valor de verdad es:

p	**q**	**$p \vee q$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos lógicos

"Tiro las cosas viejas o que no me sirven"

- El sentido de la disyunción es incluyente, pues si tiro algo viejo, y que además no me sirve, la disyunción es verdadera.

Conectivos lógicos

- **<u>Implicación o condicional</u>**
- "Si apruebas todas las materias, te dejaré salir el fin de semana".
- p: "Apruebas todas las materias"
- q: "Te dejaré salir el fin de semana"
- Si p es verdad, entonces q también es verdad. Se trata de un enunciado condicional cuya formalización es $p \rightarrow q$, y que se puede leer también como p implica q.
- p es el antecedente (o hipótesis) y q el consecuente (o conclusión).
- Una implicación es siempre verdadera excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Conectivos lógicos

Tabla de verdad de la implicación

p	**q**	**p→q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conectivos lógicos

- Es destacable que la implicación puede ser cierta aunque el consecuente sea falso. Así, si no apruebas todas las materias, pero yo no te permito salir el fin de semana, la implicación "Si apruebas todas las materias, te dejaré salir el fin de semana" es verdadera.

Conectivos lógicos

- *Ejercicios:* Determina el valor de las siguientes implicaciones y justifica por qué:
  - a) Si llueve hacia arriba, entonces eres un ser humano.
  - b) Si 2 + 2 = 4, entonces las ranas tienen pelo.
  - c) Si sabes leer, entonces los círculos son cuadrados.
  - d) Si los burros vuelan, entonces las tortugas saben álgebra

Conectivos lógicos

Equivalencia lógica.

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente **equivalentes**. Si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad. Se indican como p $\Leftrightarrow$ q.

Conectivos lógicos

Propiedades de la implicación:

Una implicación y su **recíproco** no son lógicamente equivalentes (distintas tablas de verdad). Se dice que $q \to p$ es el recíproco de $p \to q$.

Una implicación y su **contrarrecíproco** son lógicamente equivalentes (iguales tablas de verdad). El contrarrecíproco del enunciado $p \to q$ es $\sim q \to \sim p$

$$p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$$

Conectivos lógicos

<u>El bicondicional (o coimplicación)</u>

Ya hemos comprobado que $p \rightarrow q$ no es lo mismo que $q \rightarrow p$. Puede ocurrir, sin embargo, que tanto $p \rightarrow q$ como $q \rightarrow p$ sean verdaderos. Justamente, ello es lo que expresamos con el bicondicional $p \leftrightarrow q$

En consecuencia, el enunciado $p \leftrightarrow q$ queda definido por el enunciado $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Conectivos lógicos

El bicondicional o coimplicador $p \leftrightarrow q$, que se lee "p si y sólo si q" se define por la siguiente tabla de verdad:

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tautología

- **Tautología.**
- Tautología, es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables.

Tautología

Ejemplo típico de Tautología:

p	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V

Tautología

NOTA

Observar que si $p \leftrightarrow q$ es una tautología entonces p y q son lógicamente equivalentes, lo que se puede expresar como $p \Leftrightarrow q$

De la misma manera, cuando $p \rightarrow q$ es una tautología decimos que existe una implicación lógica que la expresamos $p \Rightarrow q$

Tautologías más importantes

1.- Doble negación.

a). $\sim\sim p \Leftrightarrow p$

2.- Leyes conmutativas.

a). $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

b). $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

c).$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

Tautologías más importantes

3.- Leyes asociativas.

a). $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

b). $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

4.- Leyes distributivas.

a). $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

b. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

Tautologías más importantes

5.- Leyes de idempotencia.

a). $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

b). $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

6.- Leyes de Morgan

a). $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

b). $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Tautologías más importantes

7.- Contrapositiva.

a). $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

8.- Implicación.

a). $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

b). $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

9.- Equivalencia

a). $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

Tautologías más importantes

10.- Adición.

a). $p \Rightarrow (p \vee q)$

11.- Simplificación.

a). $(p \wedge q) \Rightarrow p$

12.- Modus ponens.

a). $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$

Tautologías más importantes

13- Modus tollens.

a). $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

14.- Transitividad del $\leftrightarrow$ y del $\rightarrow$

a). ¿Cómo sería?

Las tautologías relacionadas con $\Leftrightarrow$ y $\Rightarrow$ permiten "derivar" o "generar" o "tratar" información *nueva* o *distinta*

Esquemas proposicionales

$$x + 2 = 5$$

¿Es una proposición?

Si $x = 7$ se tiene que $7 + 2 = 5$ es una proposición Falsa

Esquemas proposicionales

- **Definición**. Se llama *esquema proposicional en la indeterminada x* a toda expresión que contiene a x y posee la siguiente propiedad: “Existe por lo menos un nombre tal que la expresión obtenida sustituyendo la indeterminada por dicho nombre, es una proposición”.
- Las indeterminadas suelen llamarse **variables o incógnitas**

Esquemas proposicionales

- Ejemplo: “x es blanca” es un esquema pues existe una constante “esta flor” que en lugar de la variable x produce la siguiente proposición: “Esta flor es blanca”
- Vamos a utilizar símbolos tales como P(x), Q(x), F(x), para designar esquemas de incógnita x.

Operadores Universal y Existencial

Operadores Universal y Existencial

Si se tiene un esquema P(n) puede obtenerse de él una proposición mediante la adjunción de los operadores

UNIVERSAL: $(\forall n):(P(n))$

EXISTENCIAL: $(\exists n):(P(n))$

Operadores Universal y Existencial

Ejercicios

En cada caso decir si se trata de esquemas, en tal caso transformarlo en una proposición y hallar su valor de verdad

1) P(n) : n+1 > n

2) Q(n): $n^2 + 1$

3) R(n) : $n^2 - 3n + 2 = 0$

4) S(n) : n es un número racional

Operadores Universal y Existencial

El alcance del operador llega únicamente al primer esquema, si quisiéramos que alcance a los dos esquemas, tendríamos que poner $(\exists x):(x$ es verde $\wedge$ x es rojo $)$ o sea usaríamos paréntesis.

Se llama **alcance de un operador en x** al esquema más simple que aparece inmediatamente después del operador, salvo que se presenten paréntesis, en cuyo caso deben aplicarse las reglas habituales referentes al uso de paréntesis.

En informática diríamos que los cuantificadores tienen mayor precedencia que lo conectivos lógicos (salvo el ~)

Negación de los operadores

Negación de los operadores

Sea la siguiente proposición:

$$(\forall n)\text{: } n \text{ es un número primo,}$$

Vamos ahora a negarla

$$\sim(\forall n)\text{: } n \text{ es un número primo}$$

$$(\exists n)\text{: } n \text{ no es un número primo}$$

Negación de los operadores

De lo anterior se puede deducir que son expresiones sinónimas

$$\sim(\forall n)\colon P(n) \quad \text{y} \quad (\exists n)\colon \sim P(n)$$

De igual manera se obtiene:

$$\sim(\exists n)\colon P(n) \quad \text{y} \quad (\forall n)\colon \sim P(n)$$

Ejercitación

Ejercicios

Expresar mediante operadores y símbolos las proposiciones

1) Todos los hombres son mortales
2) Hay algún número que es primo
3) Hay honrados y además hay ladrones.
4) Hay ladrones o hay honrados
5) Hay individuos que son ladrones o comen uvas
6) No todos comen uvas

Ejercitación

Expresar en lenguaje corriente las siguientes proposiciones:

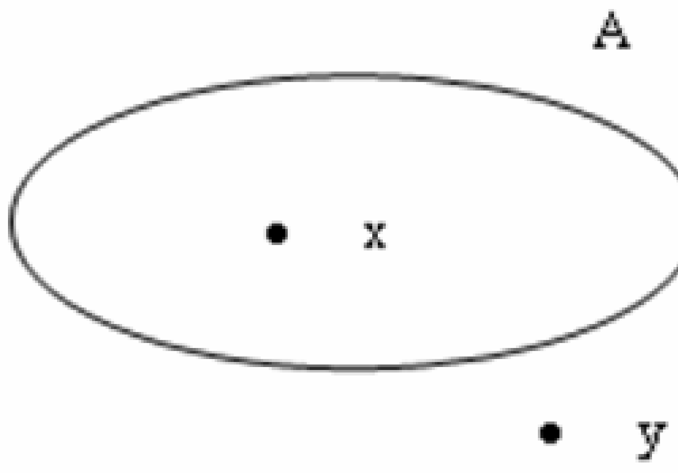
1) $(\forall x)$: (x es metal $\rightarrow$ x se funda)

2) $(\forall x)$: (x es metal) $\vee$ el oro se funde

3) $(\exists x)$: (x es cuadrado) $\rightarrow$ $(\exists x)$: (x es paralelogramo)

4) $\sim[(\forall x)$: (x es hombre $\rightarrow$ x es mortal)]

Teoría de Conjuntos



La idea de conjunto no requiere mucha presentación.

Seguramente estarás familiarizado con gráficos como éste donde se indica que **x es un elemento del conjunto A** (lo que de aquí en más escribiremos $\mathbf{x \in A}$) y que y no es elemento del conjunto A ($\mathbf{y \notin A}$).

Conjuntos

Otras formas de expresar conjuntos:

{1, 2, 3, 4, 5} es el conjunto formado por los elementos 1, 2, 3, 4 y 5.

{x / x es un número natural} es el conjunto de los números naturales

SubConjuntos

SubConjuntos

Definición. **Subconjunto**: Sean A y B dos conjuntos, se dice que A es un subconjunto de B, o que A es parte de B, si todo elemento de A es también elemento de B.

$$(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B)$$

También se dice que A está incluido o es igual a B y se denota $A \subseteq B$

Si B tiene al menos un elemento que no pertenece a A se dice que A es un subconjunto propio de B o que está incluido de manera propia en B y se denota $A \subset B$

$$(\forall x):(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\exists x):(x \in B \wedge x \notin A)$$

Conjunto Vacío

Definición. Conjunto Vacío: Es el conjunto que no tiene elementos. Se denota $\varnothing$ o $\{\}$

$$(\forall x):(x \notin \varnothing)$$

Ejercicios

Ejercicios: Responder si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

$$\emptyset \subseteq \{a,b\}$$

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

$$\emptyset \subset \emptyset$$

$$A \subset A$$

Igualdad

Igualdad

Definición. Igualdad entre conjuntos: Se dice que A es igual a B, se denota A = B, si possen los mismos elementos

$$(\forall x):(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Observación: $(A = B) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$

Operaciones básicas

Si bien vamos a utilizar casi siempre las ideas de conjuntos y demostraciones con conjuntos, ahora vamos más directamente orientados hacia los problemas computacionales, para tener una idea en cuanto a si se pueden resolver o no

Operaciones básicas

Operaciones básicas de Conjuntos

Intersección: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

Unión: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

Diferencia: $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

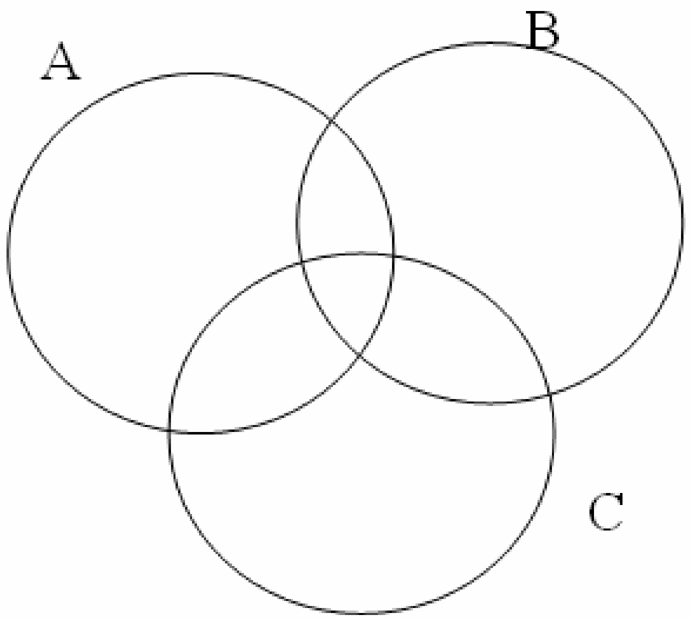
Complemento: Si $A \subseteq B$, $\overline{A}_B = B - A$

Si B es el conjunto universal se denota $\overline{A}$
y se puede escribir como $\{ x \,/\, x \notin A \}$

Ejercicios

1) En el diagrama que sigue indicar

a) $(A \cup B) - (A \cup C)$ b) $(A \cap B) \cup (C - B)$ c) $(A-B) \cap C$



2) Un subconjunto X de números naturales tiene 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 y 8 números impares. ¿Cuántos elementos tiene X? Grafique el diagrama de Venn

Producto cartesiano

Producto cartesiano

Producto cartesiano: $A \times B = \{ (x, y) / x \in A \wedge y \in B \}$

$A \times A$ se denota A^2 en gral A^n representa el conjunto de n-tuplas de elementos de A

Conjunto de partes

Conjunto de partes

Definición. Conjunto de partes. Si A es un conjunto, se llama conjunto de partes de A o conjunto potencia de A y se denota $\rho(A)$ (en algunos textos también aparece como 2^A) al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

$$\rho(A) = \{B \;/\; B \subseteq A\}$$

Ejemplo: $A = \{a,b\}$

$$\rho(A) = \{\{\}\{a\}\{b\}\{a,b\}\}$$

Equivalencias de conjuntos

Leyes conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \text{ y } A \cap B = B \cap A$$

Leyes distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

¿Por qué se llamarán leyes de Morgan?

Ley de doble complemento:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Ejercitación

Probar que $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

Dem.

	$x \in (A - B) \cap (A - C)$		
$\Leftrightarrow$	$x \in (A - B) \wedge x \in (A - C)$	(def. de intersec.)	
$\Leftrightarrow$	$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$	(def. de resta)	Asoc. Conm.
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \sim(x \in B) \wedge \sim(x \in C)$	(Lóg. Prop.)	simp.
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \sim(x \in B \vee x \in C)$	(Morgan)	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge \sim(x \in (B \cup C))$	(def. de unión)	
$\Leftrightarrow$	$x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$	(def. de $\notin$)	
$\Leftrightarrow$	$x \in A - (B \cup C)$	(def. de resta)	

Por lo tanto $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

Cardinalidad

Cardinalidad

Definición. Si A es un conjunto finito, se denomina cardinalidad o tamaño de A, y se denota $|A|$ al número de elementos del conjunto A.

Ejercicio para el lector: Demostrar por inducción que si A es un conjunto finito

$$|A| = n \Rightarrow |\rho(A)| = 2^n$$

Nota: Está claro que si A es un conjunto finito, entonces $|A| < |\rho(A)|$

¿Pero qué ocurre si A es un conjunto infinito?

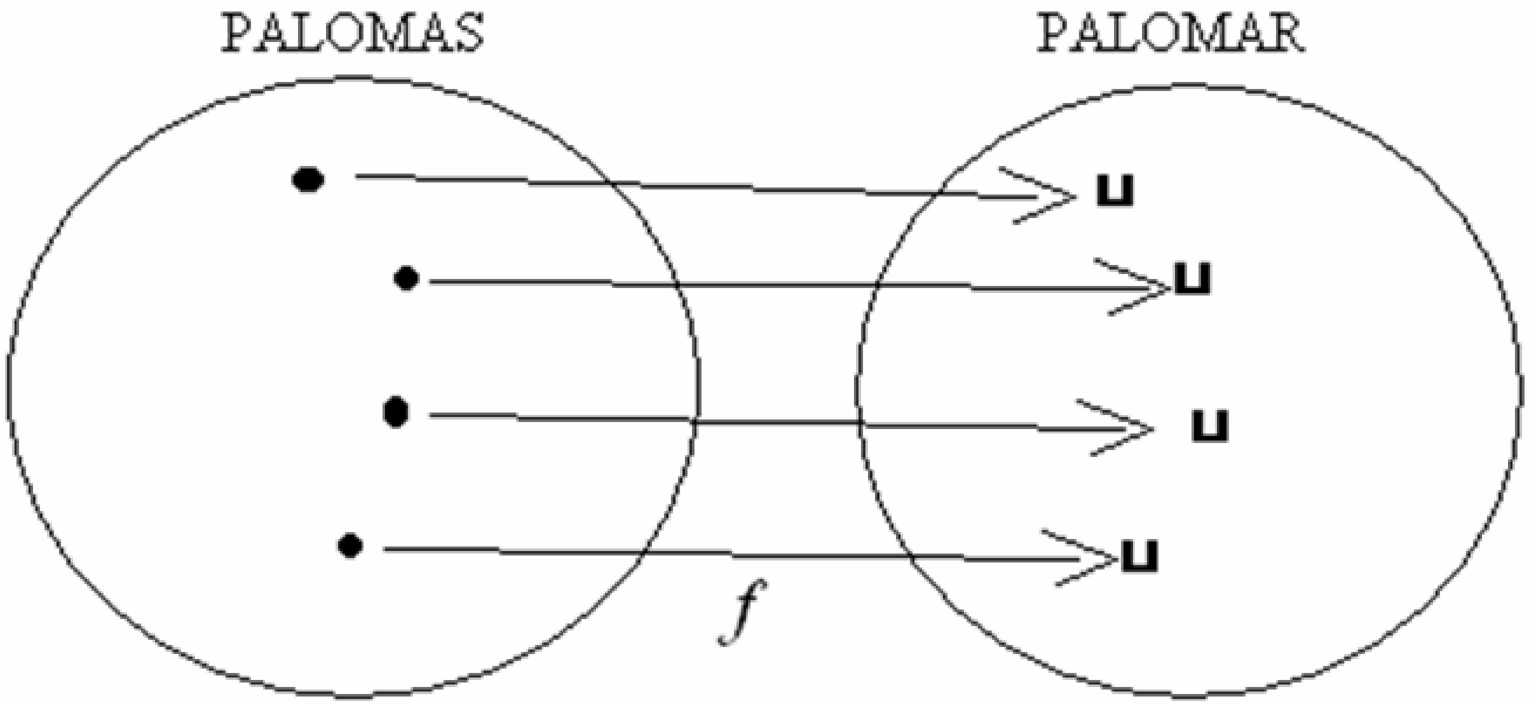
Cardinalidad de conjuntos infinitos

- ¿Cuántos elementos hay en N?
- Infinito no es un número de nuestro sistema contable normal
- La cardinalidad de un conjunto finito es el número de elementos del conjunto, pero la cardinalidad de un conjunto infinito no es un número, sino una propiedad del conjunto llamada número cardinal que nos permite hacer comparaciones entre tamaños de conjuntos

Cardinalidad de conjuntos infinitos

- Para comparar las cardinalidades se utiliza el "*Principio del Palomar*"

Cardinalidad de conjuntos infinitos



f es una función inyectiva (uno a uno)

f: A $\rightarrow$ B **x, y $\in$ A, x $\neq$ y $\Rightarrow$ f(x) $\neq$ f(y)** **f(x) = f(y) $\Rightarrow$ x = y**

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definicion. Se establece que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual que la cardinalidad de un conjunto B, y se denota $|A| \leq |B|$ sí y sólo si se puede establecer una correspondencia "uno a uno" de cada elemento de A con un elemento distinto de B

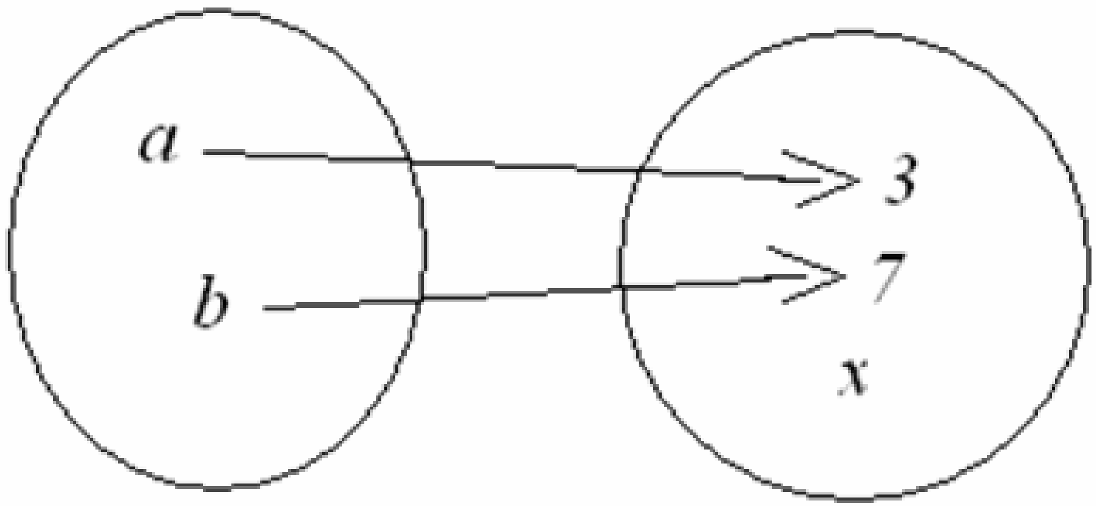
$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow (\exists f): (f \text{ es una función inyectiva de A en B})$$

Puede demostrarse que es una relación de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva)

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Observación. Esta definición es consistente con la forma de comparar las cardinalidades de conjuntos finitos. Por ejemplo

$$|\{a,b\}| \leq |\{3,7,x\}|$$



Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición. $|A| = |B| \iff |A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$

Definición. $|A| < |B| \iff |A| \leq |B| \wedge |B| \neq |A|$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

a) Mostrar que $|N| = |N^+|$

b) Mostrar que $|P| = |N|$ con P={n/n es un número par}

c) Mostrar que $|Z| \leq |N|$

d) Mostrar que $|NxN| = |N^+|$

e) Mostrar que $|Q^+| \leq |N|$, siendo Q^+ el conjunto de los racionales positivos

Conjuntos contables

Definicion. Un conjunto infinito es contable, o también llamado numerable, cuando su cardinalidad es igual a la cardinalidad de los naturales

$$\text{Si } |A| = |N| \Rightarrow A \text{ es contable}$$

Como se ha demostrado que N es el infinito más chico, para saber si un conjunto es contable alcanza con probar que $|A| \leq |N|$ (si A es infinito ya se sabe que $|N| \leq |A|$). Por lo tanto :

$$\text{Si } |A| \leq |N| \Rightarrow A \text{ es contable}$$

Un conjunto no contable

Teorema. $|N| < |\rho(N)|$

Dem.

Hay que demostrar dos cosas

a) $|N| \leq |\rho(N)|$ y b) $|N| \neq |\rho(N)|$

a) Sea f: $N \rightarrow \rho(N)$, tal que $f(n) = \{n\}$

Claramente f es una función inyectiva de N a $\rho(N)$, por lo tanto $|N| \leq |\rho(N)|$

Un conjunto no contable

b) Demostraremos por el absurdo que $|N| \neq |\rho(N)|$

Supongamos que $|\rho(N)| \leq |N|$. Por lo tanto los elementos de pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los naturales, es decir pueden colocarse en una sucesión como la siguiente:

$$\rho(N) = \{ S_1, S_2, S_3, \ldots \}$$

Definimos un conjunto D de la siguiente manera

$$D=\{n \in N \ / \ n \notin S_n\}$$

Un conjunto no contable

Obsérvese que D es un conjunto bien definido, perfectamente válido. Además $D \subseteq N$, por lo tanto $D \in \rho(N)$

Por lo tanto debe existir algún natural *k* para el cual $D = S_k$

¿Qué pasa con *k*? ¿pertenece o no pertenece a D? Bueno, hay dos posibilidades y las dos llevan a una contradicción

Un conjunto no contable

1) $k \in D \Rightarrow k \notin S_k$ (Por definición de D)

$\Rightarrow k \notin D$ (Porque $D = S_k$)

Contradicción

2) $k \notin D \Rightarrow k \in S_k$ (Por definición de D)

$\Rightarrow k \in D$ (Porque $D = S_k$)

Contradicción

$$\left(D=\{n \in N \,/\, n \notin S_n\} \quad \wedge \quad D = S_k \right)$$

Un conjunto no contable

Por lo tanto no puede existir la sucesión como la que se asumió. Es decir no puede existir una función inyectiva que a cada elemento de $\rho(N)$ le asigne uno de N.

Entonces $|\rho(N)| \nleq |N|$ entonces $|\rho(N)| \neq |N|$

De (a) y (b) quedando demostrado que $|N| < |\rho(N)|$

Un conjunto no contable

Cololario. $\rho(N)$ es no contable

Se podría pensar como que "hay más" subconjuntos de N que números en N

Conjuntos no contables

Nota. El resultado del teorema anterior puede generalizarse a cualquier conjunto, es decir:

$$|A| < |\rho(A)|$$

¿Por qué nos interesa todo esto?

E y S pueden codificarse en binario, por lo tanto puede verse como un número natural. Así podemos decir que la computadora implementa una función *f*: N → N

¿Podríamos construir cualquier f: N → N?

¿Por qué nos interesa todo esto?

Puede verse fácilmente que $|\rho(N)| \leq |\{ f \;/\; f\colon N \rightarrow \{0,1\} \}| \leq |F|$

Aclaración: Por cada conjunto A de $\rho(N)$ hay una función f: $N \rightarrow \{0,1\}$ llamada característica del conjunto A definida como:

$$f(n) \begin{cases} f(n) = 0, & \text{si } n \notin A \\ f(n) = 1, & \text{si } n \in A \end{cases}$$

Y como $|N| < |\rho(N)|$, por transitividad se tiene que $|N| < |F|$

Es decir: **F es no contable**

¿Por qué nos interesa todo esto?

Sea PROG el conjunto de todos los programas de computación que pueden escribirse para computar funciones. PROG es contable pues puede verse como un $n \in N$ escrito en binario

Por lo tanto:

$$|PROG| \leq |N| < |\rho(N)| \leq |\{ f \ / \ f\colon N \rightarrow \{0,1\} \}| \leq |F|$$

Es decir: **|PROG| < |F|**