



Paralelismo de solución a TSP con Branch and Bound en sistemas distribuidos con MPI

Maria Tidball Binz

Resumen

Este informe investiga la paralelización de la solución Branch and Bound para Travelling Salesman Problem. Primero se analiza el problema conceptualmente, y se examinan soluciones importantes en el último siglo. Se profundiza con un análisis de la solución del algoritmo Branch and Bound basado en Depth Search First de Peter Pachecho en "An Introduction to Parallel Programming"¹, la implementación serial y su paralelización. Se define una versión con Static Partitioning y se plantea el problema de balance de carga.

En base a la implementación paralela desarrollada con MPI (usamos la implementación OpenMPI 4.0.2)², se realizaron pruebas en un cluster de 8 nodos con un máximo de 64 procesos. Se usaron grafos de 5, 8, 10, 12 y 15 ciudades para tres casos distintos; sin camino, con un solo camino y con caminos parciales. En todas las pruebas, se analizaron las diferencias en Speedup y Eficiencia entre 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 24, 32 y 64 procesos, en comparación con la versión serial más rápida del mismo algoritmo. En estos casos no se consiguieron resultados super lineales. En el análisis se realizaron pruebas adicionales para grafos de 10 ciudades con 3 y 5 caminos en un espacio cercano del árbol. Para 5 caminos se produjeron resultados super lineales con 6 procesos.

El análisis demuestra que hay mayores beneficios en el uso de entre 6 y 16 procesos para la mayoría de los casos. La conclusión es que este número de procesos se condice con el promedio del pequeño rango de ciudades de prueba utilizado. También se considera la condición del cluster, donde los procesos internos a un nodo tienen menor latencia de comunicación que procesos inter-nodo. A futuro, se considera importante correr las mismas pruebas con una versión con mapeo dinámico, analizar la diferencia en Speedup y Eficiencia en base al número de procesos utilizado, comparando la diferencia con el algoritmo con mapeo estático.

Introducción

Existe un problema en informática que se llama Travelling Salesman Problem. Se puede pensar desde el punto de vista de planificar un viaje. Cuando visitamos más de una ciudad en un viaje, sabemos cuales son nuestros próximos puntos de salida. Pero, ¿sabemos cuál es el camino óptimo entre los lugares que queremos visitar? Descubrir la distancia mínima entre una serie de puntos (volviendo al lugar de origen), se conoce como el Travelling Salesman Problem (o TSP) - el problema del vendedor ambulante. En TSP, un vendedor recibe una lista de ciudades que debe visitar y el costo para viajar entre cada par de ciudades. Su problema es que necesita visitar cada ciudad una sola vez, volviendo a su lugar de partida, y debe hacerlo con el menor costo posible. Una ruta que sale desde su ciudad, visita una sola vez a cada ciudad, y vuelve a su ciudad de partida se llama un camino. Por esto se puede decir que TSP es encontrar el camino de costo mínimo. Este problema tiene gran importancia en el mundo de la matemática, y consecuentemente, en el mundo de las ciencias de la computación³

⁴Este problema es cada vez más vigente en el mundo contemporáneo, porque afecta una serie de áreas que requieren de sistemas de alto cómputo para planificar sus operaciones. Por ejemplo, una empresa de ventas que necesita planificar el camino más corto para despachar sus productos de manera óptima alrededor del mundo es un problema similar a TSP.

En los siguientes capítulos haremos un recorrido por algunos conceptos necesarios para entender TSP. Luego, haremos un recorrido de algunas soluciones e implementaciones secuenciales conocidas. Vamos a analizar la solución e implementación secuencial Branch and Bound con mayor profundidad, analizando la forma algorítmica que toma. Luego veremos una implementación de la solución de búsqueda en un árbol, Branch and Bound, paralelizada usando una librería de Message Passing Interface (MPI) en C para sistemas distribuidos. En este último análisis entraremos en los detalles de MPI para entender los detalles del algoritmo. Comparamos métricas de resoluciones secuenciales y paralelas para entender las posibilidades de speedup y eficiencia en la paralelización en sistemas distribuidos.

¹ Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011

² Documentación OpenMPI <https://ccportal.lms.ac.jp/en/node/2635>

³ Balas, E. . *The prize collecting traveling salesman problem*. *Networks*, 19(6), 621–636. 1989 doi:10.1002/net.3230190602

⁴ David L. Applegate; Robert E. Bixby; Vašek Chvátal; William J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press, 2007. "TSP [...] is in fact one of the most intensely investigate problems in computational mathematics." p1, ch1

Capítulo 1: Marco Teórico

Hoy en día, no se puede hablar de una sola "solución" a TSP, ya que es un problema que sigue generando preguntas en términos generales y teóricos tanto en la matemática como en las ciencias de la computación. TSP se sigue estudiando por que no existen soluciones que sean óptimas para aplicar a cualquier versión del problema mejores que simplemente buscar por todas las posibles soluciones y compararlas. Si pudiéramos encontrar una solución a TSP que sea mejor en todos los casos que la fuerza bruta, entonces hay muchos otros problemas que podemos solucionar rápidamente. Esto es lo que lo hace un problema común de optimización.

¿Que significa que este sea considerado un problema de **optimización**?

En el cómputo se entiende así: "En cómputo, la **optimización** es el proceso de modificar un sistema para mejorar su eficiencia y el uso de los recursos disponibles (rendimiento)."⁵

En las matemáticas la optimización hace referencia a hallar máximos o mínimos de una función:

"De forma general, la optimización incluye el descubrimiento de los "mejores valores" de alguna función objetivo dado un dominio definido"⁶

Busquemos entonces la definición en matemáticas para Optimización:

"En matemáticas la **optimización** **programación matemática** intenta dar respuesta a un tipo general de problemas matemáticos donde se desea elegir el mejor entre un

$$\max(\min) f(x)$$

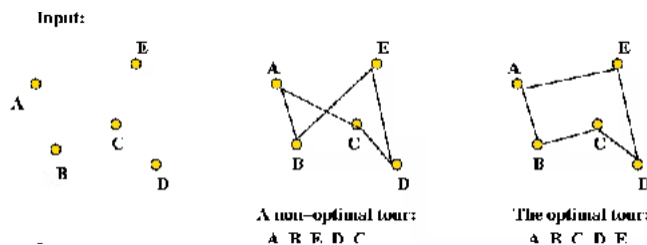
conjunto de elementos. En su forma más simple, el problema equivale a resolver una ecuación de este tipo: $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

Donde $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ es un vector y representa variables de decisión, $f(x)$ es llamada función objetivo y representa o mide la calidad de las decisiones (usualmente números enteros o reales) y Ω es el conjunto de puntos o decisiones factibles o restricciones del problema. Algunas veces es posible expresar el conjunto de restricciones como la solución de un sistema de igualdades o desigualdades.

$$\begin{aligned} g_j(x_1, \dots, x_n) &\leq 0 \\ h_k(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Un problema de optimización trata entonces de tomar una decisión óptima para maximizar (ganancias, velocidad, eficiencia, etc.) o minimizar un criterio determinado (costos, tiempo, riesgo, error; etc). Las restricciones significan que no cualquier decisión es posible."⁷

Volviendo al tema en cuestión, vemos que la optimización necesaria en TSP es encontrar un mínimo absoluto para la suma de caminos entre un número dado (N) de nodos, sin repetición y volviendo siempre al primer nodo.



Ver referencia de imagen a pie de página.⁸

Consideremos que el conjunto de ciudades y rutas que debe recorrer el vendedor ambulante de TSP se representan con un grafo. Un grafo es un conjunto de vértices o nodos unidos por conexiones llamadas aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Los nodos corresponden a las ciudades, las conexiones a las rutas entre ciudades, y las etiquetas de las conexiones corresponden a los costos de las rutas. El grafo es dirigido y pesado, es decir, las conexiones tienen dirección y valor. En la teoría de grafos, un grafo pesado es un grafo cuyos vértices o aristas tienen valor; en este caso, las aristas tienen costos asociados. El valor del camino entre un par de nodos es su tiempo de recorrido o de distancia. En un grafo dirigido, las conexiones tienen una orientación; si hay una arista (A, B), A es el nodo inicial y B es el nodo final de la arista. Hay variaciones de TSP en las cuales el grafo es simétrico o asimétrico, lo cual facilita diferentes tipos de soluciones. Que sea asimétrico significa que dado un nodo A y un nodo B la distancia de un nodo A a un nodo, B, no es necesariamente equivalente a la distancia de B a A. Estas variaciones en el problema se deben tener en cuenta al momento de idear una solución.⁹

Incógnita ¿P = NP?

TSP es un problema importante para la matemática y para la computación porque entra en los problemas que se definen dentro de la incógnita "P = NP", aún irresuelta. Para la mayoría de científicos en el campo de la computación y la matemática, P no es igual a NP. ¿Qué significa esto? En resumen, consideremos que P es un conjunto de problemas que pueden ser **solucionados** en tiempo polinómico. Además, NP es el conjunto de problemas que pueden ser **verificados** en tiempo polinómico. Actualmente, no se puede comprobar

⁵ Wikipedia - Optimización [https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_\(%C3%B3mputo\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_(%C3%B3mputo))

⁶ Wikipedia - Optimización [https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_\(%C3%B3mputo\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_(%C3%B3mputo))

⁷ Diccionario - Optimización [http://diccionario.sensagent.com/Optimizaci%C3%B3n%20\(matem%C3%A1tica\)/es-es/](http://diccionario.sensagent.com/Optimizaci%C3%B3n%20(matem%C3%A1tica)/es-es/)

⁸ Imagen de <https://www2.seas.gwu.edu/~simhaweb/champale/tsp/tsp.html>

⁹ Existe una librería especializada sobre problemas TSP en torno a la optimización de la universidad de Heidelberg. <http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/projects/>

que todo problema en el conjunto P , también se comprende en el conjunto NP . Si fuese así, muchos problemas que ahora son muy difíciles de resolver, se resolverán de manera fácil. En general, son problemas que en algún punto requieren de búsqueda exhaustiva de combinaciones para su resolución, por lo cual los tiempos de resolución de dichos problemas se hacen cercanos al infinito mientras crece N . Para resolver TSP se deben probar y comparar todas las combinaciones posibles. Esto lleva un tiempo muy alto de resolución para N s grandes, que es el tiempo factorial. En algunos casos usando algoritmos especiales, el tiempo de resolución puede llegar a bajar hasta ser exponencial. Adicionalmente, en TSP; para verificar qué llegamos a la solución correcta, no queda otra manera que resolver el problema.

Para TSP, existen algoritmos que devuelven una solución exacta (el camino más corto entre todos los caminos posibles), y algoritmos que se aproximan a un camino mínimo, pero no garantizan que sea el más corto entre todos los caminos. Estos últimos se llaman heurísticas y pueden ser muy eficientes para casos específicos. Hoy en día, se encuentran heurísticas que devuelven soluciones optimizadas para N s de millones, con tiempos en segundos - pero aún no hay una solución exacta genérica que sea factible para cualquier N , o para cualquier variación del problema.

Dependiendo de la variación del problema, si buscamos una solución exacta, TSP se considera un problema NP -Completo. Si simplemente buscamos una solución cercana, entonces se considera NP -difícil.

"TSP in nominal form is considered *NP-Complete*, when attempted using exact deterministic heuristics. When solving the problem using optimization algorithms and approximation, then the problem tends to be *NP-Hard*."¹⁰

Nos enfocaremos en una solución exacta, por lo tanto abordamos TSP como NP -Completo. Este tema es muy amplio y basta con saber que no solo **no** hay soluciones conocidas para TSP que sean mejores en todos los casos que la búsqueda exhaustiva, sino que es muy poco probable que se encuentre una. Por esta razón, se siguen publicando estudios y buscando mejoras para números más grandes de nodos. Para leer con detalle sobre problemas NP -completos, se recomienda *Computers and Intractability* de Garey y Johnson.¹¹

Complejidad de tiempo

La resolución exacta más inmediata para resolver TSP es la solución de fuerza bruta. Esta solución implica probar todas las combinaciones de conexiones entre nodos y comparar las soluciones entre ellas para encontrar la más corta. Este algoritmo conlleva una complejidad de tiempo factorial, el cual en la computación es un tiempo extremadamente costoso de $O(n!)$ para buscar cada camino y encontrar el más corto. Esto significa que el tiempo de resolución crece de manera factorial con cada incremento de N , y para N s mayor a 20 el tiempo necesario se hace demasiado grande para ser viable. El algoritmo que analizaremos más adelante (Branch and Bound simple usando Depth First Search) no mejora este tiempo en el peor caso, aunque en la práctica podemos tener tiempos mejores al acortar el campo de búsqueda. Soluciones conocidas más sofisticadas que se basan en Branch and Bound como Held-Karp llegó a mejorar la complejidad de tiempo a $O(n^2 2^n)$.

¹⁰ Davendra, D., et al, "CUDA Accelerated 2-OPT Local Search for the Traveling Salesman Problem", in *Novel Trends in the Traveling Salesman Problem*. London, United Kingdom: IntechOpen, 2020 [Online]. Available: <https://www.intechopen.com/chapters/72774> doi: 10.5772/intechopen.93125

¹¹ Garey, M.R.; Johnson, D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman. 1979

Capítulo 2: Cronología de orígenes y de optimizaciones sobre TSP

Basándonos en el sitio Concorde¹², haremos un recorrido sobre las optimizaciones secuenciales más conocidas para las soluciones y aproximaciones a TSP. Este sitio web del equipo de investigación de David Applegate, AT&T Labs - Research, Robert Bixby, ILOG and Rice University, Vašek Chvátal, Concordia University y William Cook University of Waterloo, acompaña al libro "In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation", de William Cook¹³.

Primeras aproximaciones

William Cook hace un extenso recorrido de los orígenes del problema en el libro "In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation"¹⁴. Sin embargo, para no perder el foco de este informe, podemos tocar algunos puntos relevantes para nuestro propósito. Dos nombres importantes que dieron reconocimiento a la importancia del problema son Leonhard Euler y W.R. Hamilton en 1800s. Leonhard Euler dió pie a la teoría de grafos con su planteo del problema "los puentes de Königsberg", y Sir William Rowan Hamilton definió un problema inicialmente conocido como Hamilton Cycle, una generalización y versión simplificada de TSP. Hamilton y Euler se aproximan al problema desde perspectivas diferentes. Hamilton se pregunta cómo atravesar el grafo pasando por cada nodo una sola vez, volviendo al nodo de partida. Euler se plantea como atravesar un grafo pasando por cada vértice una sola vez. Pero ninguno de los dos aún considera la necesidad de encontrar el camino más corto. Por lo pronto, sus preguntas dan inicios a las consecuentes formulaciones del problema.¹⁵

Consiguientemente en los 1930s, se empiezan a encontrar un mayor número de publicaciones y conferencias sobre este problema como punto de investigación. Karl Menger es uno de los tales que define el problema y busca nuevas reglas para mejorar sobre la solución con fuerza bruta.

En un coloquio de matemáticos el 5 de febrero de 1930, Menger menciona el problema del Hamilton Cycle como el "Messenger Problem" -

"We designate as the Messenger Problem (since this problem is encountered by every postal messenger, as well as by many travelers) the task of finding, for a finite number of points whose pairwise distances are known, the shortest path connecting the points [...] This problem is of course solvable by finitely many trials. Rules that give a number of trials below the number of permutations of the given points are not known."¹⁶

Karl Menger considera una heurística llamada Nearest Neighbour (de ahora en más NN) para encontrar un Hamilton Cycle, considerando adicionalmente la necesidad de encontrar el camino más corto. Reconoce que NN mejora los tiempos pero no encuentra el camino más corto. "The rule, that one should first go from the starting point to the point nearest this, etc., does not in general result in the shortest path."¹⁷

En los 40s aparecen publicaciones con referencias al problema y en 1949 en J.B. Robinson, "On the Hamiltonian game (a traveling-salesman problem)", RAND Research Memorandum, aparece la primera mención escrita del nombre "Travelling Salesman Problem", que es como lo conocemos hoy.¹⁸

En los años 50, tuvo lugar una solución innovadora muy famosa. En 1954, tres investigadores desarrollan una solución exacta usando Linear Programming con el método "cutting plane" para optimizar TSP hasta N de 49. Este paper seminal de G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson¹⁹ soluciona el mayor N encontrado hasta ese entonces, e indicó un gran salto en la construcción del conocimiento sobre la resolución. A pesar de que el grupo de investigación no provee un algoritmo computacional para resolver TSP, logra definir el problema matemáticamente, proveyendo los pasos de resolución matemática y las ideas necesarias que dan pie a los avances posteriores. Cabe destacar que Georg Dantzig fue autor de uno de los grandes algoritmos del siglo 20 (simplex algorithm in linear programming, del año 1947), el cual fue un necesario precursor de esta solución.²⁰

Otro conjunto de soluciones posteriores, tanto para soluciones exactas como para heurísticas, se basan en utilizar árboles de búsqueda, con diferentes restricciones para encontrar caminos óptimos. Entre ellos, se destacan Held-Karp, Christofides y Lin-Kernighan. Luego nos enfocaremos en una versión simplificada y general de búsqueda en árboles con Branch and Bound para encarar la paralelización.

Hago una mención especial a desarrollos más recientes para soluciones aproximadas de TSP, con algoritmos evolutivo genéticos y su paralelización. La mayoría de las investigaciones actuales hacen enfoque en estos métodos, se encuentran estudios sobre la paralelización de metaheurísticas en arquitectura distribuida con MPI²¹, o con CUDA para GPU.

¹² Concorde <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html>

¹³ Cook, W. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation, Princeton University Press, 2014

¹⁴ Cook, W. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation, Princeton University Press, 2014

¹⁵ <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/index.html>

¹⁶ <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/biblio/1930.html>

¹⁷ <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/biblio/1930.html>

¹⁸ <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/biblio/1940.html>

¹⁹ G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, 1954, "Solution of a large-scale traveling-salesman problem", en *Operations Research*

²⁰ Dantzig George

https://mbrijournal.com/wp-content/uploads/2020/11/29_George-Dantzig-The-Pioneer-of-Linear-Optimization.pdf<https://metnumun.wordpress.com/2-history-of-scientific-computing-numerical-algorithms-numerical-methods/>

²¹ B. Wilkinson, M. Allen, Parallel Programming: techniques and applications using networked workstations and parallel computers" Pearson, 2005

Análisis de soluciones

Karl Menger - Nearest Neighbour - 1930

Nearest Neighbour (NN) es una heurística, es decir es un algoritmo que no devuelve soluciones exactas a TSP, sino que se aproxima a una solución óptima para algunos tipos de problemas. Para NN, se elige para cada ciudad su vecino más cercano no visitado y se elige ese como siguiente hasta volver al nodo de inicio. Para NN se debe transformar el grafo a un grafo completo.

Un breve resumen de la heurística Nearest Neighbour:

1. Empezar en un nodo, señalar como el nodo actual.
2. Desde el nodo actual, ir por por el vínculo de menor costo que lo lleve a un nodo no visitado - su vecino más cercano.
3. Marcar el nodo actual como visitado.
4. Si quedan nodos sin visitar, vuelve al paso 2.
5. Sino, termina.

Esta solución, aunque mejora el tiempo, generalmente no brinda el camino más corto. El conjunto resultante de vértices es una solución aproximada a TSP. Nearest Neighbour es un ejemplo de un algoritmo Greedy. En cada paso, elige el vértice más corto. No se toman en cuenta las consecuencias posteriores de esa decisión. Es posible que elegir el vértice más corto ahora genere la necesidad de elegir uno mucho más largo en el futuro, por lo que hay instancias en el cual Nearest Neighbour no tenga resultados muy eficientes.²²

G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, Cutting Plane Method - 1954

En esta solución para 42-49 ciudades²³, la realización de la solución se hizo instrumentando métodos de Linear Programming. En Linear Programming (de ahora en más LP), se intenta buscar la mejor resolución de un modelo matemático dadas ciertas restricciones.

En esta solución se comienza relajando la definición de recorrido para permitir encontrar fracciones de caminos en una solución intermedia, luego remediando los errores usando métodos de chequeo y eliminación de ciclos hasta subsecuentemente encontrar la solución óptima. En cada iteración subsecuente, se corrigen errores hasta arribar a una solución óptima. Se parte del algoritmo Simplex en LP desarrollado por Dantzig en 1947.

Ellos formularon el problema como un conjunto de conexiones en un grafo simétrico. En vez de pensar un camino como un itinerario de nodos en un orden particular, se piensa el camino como las conexiones entre los nodos en cuestión. Se formula la pregunta, si entre cada nodo hay una conexión potencial, entonces, se hace la pregunta 'la conexión existe o no?'. La respuesta se puede representar como un valor 0 (no) o 1 (si), para cada conexión. Entonces el camino total se puede representar como la suma de todas las conexiones.

Para pensar el problema de modo matemático, se puede pensar un camino fraccional con características tales que se puede representar un camino entre un nodo i , y un nodo j como $x(i,j)$

- Para cada par de ciudades hay un vínculo de tipo $x(i,j)$. Se asume que $x(i,j)$ es igual a $x(j,i)$, por lo tanto, solo necesita representarse un camino por cada par de ciudades.
- El total de caminos en un grafo n , es de $n(n-1)/2$. Por ejemplo para 6 ciudades hay 15 vínculos de este tipo.
- Cada camino se puede representar por ($x = 0$) si no existe el camino entre dos ciudades, ó ($x = 1$) si existe el camino
- Para cada $x(i,j)$ (con 1 o 0 que representa si está en el camino o no) hay una distancia $c(i,j)$ de valor variable mayor que 0 y menor o igual a 1.
- Para tener un camino, se multiplica cada correspondiente x y c de tal manera $x(i,j) * c(i,j)$ y luego se suman todos los términos. $\sum (x(i,j) * c(i,j))$ con $i=1$ y $j=1$ hasta $N + 1$ (número de ciudades contando dos veces la de partida)
- Se busca encontrar: $\text{Min}(\sum(x(i,j)*c(i,j)))$

Para mejorar el modelo toman en cuenta las restricciones que fueron sugeridas por Julia Robinson en 1949²⁴ de usar valores fraccionarios en la resolución intermedia. Ella sugiere que los valores de x en lugar de contener solo 1 o 0, deben contener un valor fraccionario de 0 ó más y requiere que el valor total de la suma de los valores de los enlaces vinculados a una ciudad deben ser un máximo de dos. Esto representa que se sale y entra a una ciudad al menos una vez ($1 + 1$), y que se termina en la misma ciudad que se empieza (1 solo ciclo comprende la totalidad de los nodos + 1). Puede haber infinitos enlaces posibles a cada nodo, de los cuales se deben elegir conexiones tal que deben quedar solo dos para cada nodo en el recorrido final.

Al usar valores fraccionarios, y tener el requerimiento de una suma de 2 para cada nodo, se genera que en una primera instancia pueden haber varias conexiones desde un solo nodo. Esto requiere correcciones posteriores para eliminar las conexiones innecesarias. Luego, usando lo que ellos denominan restricciones para eliminación de ciclos, se logran eliminar todas las conexiones donde se crean ciclos intermedios, y se agregan nuevas conexiones que unifican a estos.

A partir de corregir usando las restricciones, y reiterando el algoritmo hasta encontrar un camino conexo, se puede verificar una solución exacta a TSP usando dualidad LP.

1. Encontrar error: identificar una desigualdad TSP que se viola por la fracción del camino
2. Corregir error: agregar la desigualdad violada como límite en la fracción de camino LP y resolver el nuevo LP con el algoritmo Simplex
3. Verificar solución: chequear si existe un camino TSP como solución óptima a la fracción de camino LP, verificando optimalidad usando dualidad LP.

La mayoría de las soluciones de TSP desde entonces, han utilizado optimizaciones sobre esta solución, específicamente en la parte donde se computan y eliminan los ciclos.

²² G.Gutin and A.Yeo. [The Greedy Algorithm for the Symmetric TSP](#), *Algorithmic Oper. Res.*, Vol.2, 2007, pp.33--36.

²³ G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, 1954, "Solution of a large-scale traveling-salesman problem", en *Operations Research*

²⁴ Cook W Computing in Combinatorial Optimization. In: Steffen B., Woeginger G. (eds) Computing and Software Science. Lecture Notes in Computer Science, vol 10000. Springer, Cham. 2019 https://doi.org/10.1007/978-3-319-91908-9_3

Algoritmos de búsqueda en árbol

El uso de búsqueda en árboles es intuitivo para este tipo de problemas y muchos algoritmos tanto exactos como aproximados usan una variación de búsqueda en árbol. La generalización usa acotamientos en base a búsquedas en árboles mínimos de expansión, lo cual permite reducir las permutaciones en el campo de búsqueda, y por lo tanto el tiempo de ejecución. Abajo se enumeran algunos de los algoritmos más famosos.

Bellman-Held-Karp algorithm - 1962

Este es un algoritmo que encuentra la solución exacta, y es mejor conocido como simplemente Held-Karp. Es una versión del algoritmo de Branch and Bound (búsqueda en un árbol), está basado en la programación dinámica, y tiene un tiempo exponencial $T(n) = O(2^{n^2})$. Siendo un algoritmo exacto, no es apto para N s muy grandes. Requiere un mayor espacio para poder resolverse - espacio $S(n) = O(2^n \sqrt{n})$, lo cual se debe tener en cuenta si se tienen recursos limitados.^{25 26 27} Held-Karp es una relajación Lagrangiana de TSP²⁸. Held-Karp agregan restricciones especiales a Branch and Bound, se utiliza un 1-tree y el uso de programación dinámica para calcular valores para la acotación de caminos. Una descripción paso por paso del algoritmo se puede encontrar en línea.

Lin-Kernighan / k-opt - 1973

El Lin-Kernighan algorithm es una de las soluciones heurísticas con mejores resultados para TSP simétrico hasta hoy, logrando soluciones óptimas para valores altos de N , y con complejidad de tiempo de $O(n^{2.2})$. Su implementación utiliza árboles mínimos de expansión, intercambiando vértices o subárboles utilizando un algoritmo greedy. La implementación no es trivial, por lo cual no vamos a profundizar en el algoritmo en este estudio. Sin embargo, los detalles completos se pueden encontrar en la referencia de la nota de pie.²⁹ Existen varias publicaciones más recientes que amplifican el estudio de este algoritmo.³⁰

Christofides - 1976

Otro algoritmo notorio con árbol de búsqueda es Christofides, de 1976³¹. Es un algoritmo que encuentra caminos óptimos aproximados (es decir, un algoritmo de tipo heurístico), en instancias donde las distancias forman un espacio métrico (son simétricos y obedecen la desigualdad triangular). Es un algoritmo de aproximación que garantiza que la solución estará dentro de un factor de 3/2 de la solución óptima. Desde 2017, se ha comprobado como la mejor relación de aproximación para TSP en espacios métricos generales, aunque mejores aproximaciones han sido encontradas para algunos casos especiales.

Pasos básicos:

1. Encontrar un árbol mínimo de expansión (T)
2. Encontrar los vértices de T con un ángulo impar (O)
3. Encontrar vértices de pesos mínimos (M) vinculados a T
4. Generar un circuito Euleriano utilizando los vértices de M y T
5. Generar un ciclo Hamiltoniano saltando los vértices repetidos.

Metaheurísticas: enfoque evolutivo

A diferencia de los enfoques deterministas vistos en las secciones anteriores, en las últimas décadas ha surgido un campo basado en enfoques evolutivos que se denominan 'meta-heurísticas'.³² Uno de los primeros es el trabajo seminal Ant Colony Optimization de Dorigo and Gambardella³³ en 1997. Hay varios estudios de este tipo, y abundan paralelizaciones para este tipo de estudios particularmente con el uso de tecnologías multi-core y tarjetas gráficas.³⁴

Siguiente etapa: paralelización de búsqueda en un árbol

En el próximo capítulo, veremos un algoritmo simplificado para TSP basado en búsqueda en un árbol llamado Branch and Bound. Describiremos el algoritmo usando Depth First Search. Luego, en capítulo 5, veremos una posible paralelización del algoritmo Branch and Bound implementada para MPI.

²⁵ Held, M. and Karp. R.M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. Op.Res.18, 1970, pp.1138-1162.

²⁶ Held, M. and Karp. R.M., A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 10, No. 1 (Mar.,1962), pp. 196-210

²⁷ C.L.Valenzuela and A.J.Jones. [Estimating the Held-Karp lower bound for the geometric TSP](#), European J. Op. Res., 102:1, 1997, pp.157-175

²⁸ John E. Mitchell, The Held & Karp Relaxation of TSP, 2019

²⁹ Lin, Shen; Kernighan, B. W. (1973). "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem". Operations Research

³⁰

K. Helsgaun. [General k-opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic](#), Mathematical Programming Computation, 2009.

K. Helsgaun. [An Effective Implementation of the Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic](#), DATALOGISKE SKRIFTER (Writings on Computer Science), No. 81, 1998, Roskilde University.

Keld Helsgaun "An Effective Implementation of the Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic", European Journal of Operational Research. 126, 106–130 2000

http://akira.ruc.dk/~keld/research/LKH/LKH-1.3/DOC/LKH_REPORT.pdf

Johnson, David S.; McGeoch, Lyle A. (1997). "The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization" (PDF). In E. H. L. Aarts; J. K. Lenstra (eds.). Local Search in Combinatorial Optimization. London: John Wiley and Sons. pp. 215–310

B.Chandra, H.Karloff and C.Tovey. [New results on the old k-opt algorithm for the TSP](#). 5th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 1994, pp.150-159.

³¹ N.Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Report No. 388, GSIA, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1976.

<https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a025602.pdf>

³² www.metaheuristics.org, www.aco-metaheuristic.org

³³ Dorigo M, Gambardella L. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. IEEE Transactions on Evolutionary Computation. April 1997; 1(1):53-66. DOI: 10.1109/4235.585892

³⁴ Uchida A., Ito, Y., Nakano, K. An Efficient GPU Implementation of Ant Colony, Optimization for the Traveling Salesman Problem, 2012 Third International Conference on Networking and Computing

https://www.cs.hiroshima-u.ac.jp/cs/_media/4893a094.pdf
You, Y-S. Parallel Ant System for Traveling Salesman Problem on GPUs Taiwan Evolutionary Intelligence Laboratory (TEIL)<http://www.gpgpgpu.com/gecco2009/4.pdf>

Capítulo 3: Descripción del algoritmo Branch and Bound

El método Branch and Bound (ramificación y acotamiento) consiste de un recorrido sobre una estructura de árbol de soluciones que utiliza una búsqueda basada en un estado óptimo, de tal manera que se enumeran los candidatos exitosos de la búsqueda y se descartan (no se exploran) los que no lo son. La decisión sobre la selección o descarte se decide usando límites que se actualizan durante el recorrido. El algoritmo Branch and Bound se suele usar como método de optimización global para problemas discretos.

Existen variaciones de este algoritmo, con mayor y menor complejidad. Veremos una versión simple que utiliza depth-first-search, o búsqueda en profundidad para resolver TSP.

Inicialmente se imagina a todos los nodos potencialmente conectados entre todos ellos, y luego se plantea el grafo expandido como un árbol. Desde éste árbol de expansión se expande a partir del nodo "ciudad de partida" como la raíz. Los caminos son los subárboles hijos del nodo raíz hasta las hojas. Las hojas enumeran el conjunto de posibles soluciones totales o caminos, y todos los otros nodos corresponden a caminos parciales - rutas que han visitado algunas, pero no todas las ciudades. Cada nodo del árbol tiene un costo asociado, el costo del camino parcial. Se tiene registro de un costo mínimo actual durante la búsqueda. En este método, se comienza desde la raíz del árbol, o el nodo actual, en profundidad por el subárbol (izquierdo si se quiere) hasta la primera hoja, y de aquí se obtiene el primer costo del mejor camino. Si durante el resto de la búsqueda por los subsecuentes subárboles nos encontramos con que el costo del camino parcial desde la raíz a ese nodo excede la mejor solución actual establecida como acotamiento, entonces podemos ignorar el subárbol de este nodo.

The set of all tours (feasible solutions) is broken up into increasingly small subsets by a procedure called branching. For each subset a lower bound on the length of the tours therein is calculated. Eventually, a subset is found which contains a single tour whose length is less than or equal to some lower bound for every tour.

The process stops when a subset is found which contains a single solution whose value is less than or equal to the lower bounds for all the terminal nodes. (The lower bound used for a single solution is assumed to be the value of the solution itself.) Since the terminal nodes collected together always contain all solutions, a minimal solution has been identified.³⁵

La **complejidad temporal** en el peor caso implica recorrer todos los posibles subárboles (el conjunto completo de soluciones posibles), que nos dan el tiempo factorial de $O(n!)$, por lo tanto no podemos decir que implica una mejora en estos términos a la solución de fuerza bruta. Sin embargo, en términos prácticos, existen ocasiones en las cuales se percibe una mejora en el tiempo de ejecución usando Branch and Bound por sobre la solución usando permutaciones, ya que en muchos casos se pueden eliminar caminos posibles.

En pseudocódigo podemos pensar el problema de la siguiente manera. Consideramos el acotamiento como el cálculo de un costo mínimo, que se calcula de costos acumulados. El costo de atravesar un nodo está compuesto de dos costos

- 1) El costo de alcanzar el nodo desde la raíz (que conocemos al llegar al nodo)
- 2) El costo de un camino desde el nodo actual a una hoja (se calcula un acotamiento)
- 3) Lo más complejo es encontrar una forma de calcular el acotamiento sobre la mejor solución posible, y aquí se concentran la mayoría de las optimizaciones.

Costo de un camino $C = (1/2) * \Sigma$ (suma del costo de dos

aristas adyacentes a v
y en el camino C)

donde $v \in V$

Para cada vértice v , si consideramos dos aristas adyacentes a v en C , y sumamos sus costos. La suma total para todos los vértices sería el doble del costo del camino C (hemos considerado cada arista dos veces).

(Suma de dos adyacentes a v) \geq (suma del peso mínimo de dos aristas adyacentes a v)

Costo de cualquier camino $\geq (1/2) * \Sigma$ (Suma del costo de dos

aristas de peso
mínimo adyacentes a
 v)

adonde $v \in V$

3.1 Algoritmo Iterativo de Branch and Bound

¿Cómo pensar esto en código implementado? Se toma como referencia la solución planteada por Peter Pacheco en "An Introduction to Parallel Programming".³⁶ La implementación sugerida por Pacheco es una búsqueda en profundidad. Al trabajar con grafos o con árboles, el método más simple e intuitivo de la búsqueda en profundidad, es comúnmente implementado usando recursión. Para cada nodo en el árbol, vamos a llamar a buscar en sus subárboles hasta llegar a una hoja. Tenemos dos casos bases para retornar de la función - llegar a una hoja, o exceder el mínimo actual.

³⁵ J.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, and C. Karel, "An algorithm for the traveling salesman problem", *Operations Research* **11**, 972-989. 1963
<https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/46828/algorithmfortrav00litt.pdf>

³⁶ Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011

Esta implementación necesita de una estructura para almacenar el grafo dirigido. Se puede pensar como una estructura que contiene el número de ciudades N , además de un arreglo que almacena la matriz de adyacencias. También vamos a necesitar representar la ciudad de partida y el mejor camino encontrado.

Solución 1: recursiva

El valor del camino se inicializa previo a la búsqueda llamada de la función con un número máximo. Se llama a la función recursiva “búsqueda en profundidad”, una función en la cual primero se chequea si se llegó a una hoja; luego se chequea si es el mejor camino. Si fuera el mejor camino, se actualiza la variable mejor camino y se guarda el camino actual como mejor camino. Si no se llegó a una hoja, se puede continuar buscando en profundidad en el árbol - expandiendo el nodo actual. Para hacer esto, llamamos a la función recursiva si se cumple con las condiciones. Para cada ciudad, se chequea si la ciudad o vértice ya fue visitada; y si el costo es menor al mínimo actual. Si la ciudad es viable, se la agrega al camino, y se llama recursivamente a “búsqueda en profundidad”. Cuando se retorna de “búsqueda en profundidad”, se remueve la ciudad del camino, ya que no debería ser incluida en el camino usado en las llamadas recursivas subsecuentes.

```
1 void Depth_first_search(tour_t tour) {
2     city_t city;
3
4     if (City_count(tour) == n) {
5         if (Best_tour(tour))
6             Update_best_tour(tour);
7     } else {
8         for each neighboring city
9             if (Feasible(tour, city)) {
10                 Add_city(tour, city);
11                 Depth_first_search(tour);
12                 Remove_last_city(tour, city);
13             }
14     }
15 } /* Depth_first_search */
```

Ya tenemos un algoritmo de búsqueda en profundidad en el árbol que nos devuelve el camino mínimo. Este algoritmo funciona correctamente. Pero este tipo de funciones recursivas dificultan la paralelización. Para poder pensar la paralelización, necesitamos poder encontrar un modelo apto de forma tal que se pueda distribuir el trabajo y mapear el problema a los diferentes procesos. La recursión en este caso tiene la desventaja de que en cualquier instante del tiempo solo el nodo actual es accesible. Esto podría presentar problemas al momento de paralelizar la búsqueda en el árbol y querer dividir los nodos del árbol entre procesos.

Soluciones Iterativas

Peter Pacheco describe dos soluciones iterativas, en estas se replica y reemplaza la pila de llamadas del sistema con una estructura de datos tipo arreglo. La idea básica de los algoritmos está modelada sobre la implementación recursiva. Las llamadas recursivas empujan el estado actual de la función recursiva en la pila de ejecución. Entonces, se puede simular la recursión con una estructura de control *while* y una estructura de datos que reemplaza la pila. Se empujan los datos contextuales de un nodo a una pila propia antes de buscar más profundo en el árbol. Al volver para arriba en el árbol - sea por que se llega a una hoja o a un nodo demasiado costoso - se saca de nuevo de la pila del sistema. Con este tipo de estructura es posible pensar en manipular y dividir el problema en la paralelización.

Hay un poco de diferencia entre las dos versiones descritas por Pacheco que utilizan una estructura de datos tipo lista para replicar la pila.

Solución 2: primer versión iterativa

Al primer caso, lo llamaremos solución iterativa 1. En esta versión, un registro de la pila consiste de una sola ciudad. Inicialmente, con una estructura de control tipo *for*, se empujan todas las ciudades del grafo a la estructura de pila (en orden reverso $n-1$ a 1 , ya que luego se sacan de la pila de manera descendente. Esto asegura que las ciudades son visitadas en el mismo orden que la función recursiva).

Luego, la estructura de control principal del algoritmo es un *while* que no se corta mientras la pila no esté vacía. Se saca una ciudad de la pila. Se chequea que la ciudad sacada no sea la constante “NO_CITY” que representa haber llegado a una hoja (el final de la lista de hijos de un nodo), en cual caso se quita la última ciudad del camino actual para subir un nivel. Si no es “NO_CITY”, se agrega nuestra ciudad al camino actual.

Seguidamente, si se ha llegado a una hoja, se chequea si el costo es mejor que el costo mejor actual y si lo es, se actualiza el costo menor. También se debe sacar la última ciudad del camino para poder volver hacia arriba en el árbol.

Luego se empuja “NO_CITY”, y se empujan todos los hijos del nodo actual a la pila. Entonces, se desarrolla la búsqueda en profundidad desde la ciudad actual, bajando por el árbol de hijos, preguntando si cada uno puede producir caminos viables.

En esta versión hay un trabajo más cercano y explícito a la pila, y es una versión más eficiente en su uso de memoria, aunque sea más difícil de replicar en versión paralela. La razón que es más difícil de paralelizar, es que al solo empujar ciudades al stack, no hay información contextual para que cada proceso pueda trabajar de manera independiente con diferentes partes del árbol. Se pierde toda la información del camino parcial al recorrer por cada nodo.


```

1  for (city = n-1; city >= 1; city--)
2    Push(stack, city);
3  while (!Empty(stack)) {
4    city = Pop(stack);
5    if (city == NO_CITY) // End of child list, back up
6      Remove_last_city(curr_tour);
7    else {
8      Add_city(curr_tour, city);
9      if (City_count(curr_tour) == n) {
10         if (Best_tour(curr_tour))
11           Update_best_tour(curr_tour);
12         Remove_last_city(curr_tour);
13       } else {
14         Push(stack, NO_CITY);
15         for (nbr = n-1; nbr >= 1; nbr--)
16           if (Feasible(curr_tour, nbr))
17             Push(stack, nbr);
18       }
19     } /* if Feasible */
20 } /* while !Empty */

```

Solución 3: segunda versión iterativa

La tercera versión estudiada por Peter Pacheco nos permite paralelizar TSP más fácilmente en contextos distribuidos (sin memoria compartida).

En esta versión hacemos una búsqueda similar que las anteriores, pero en vez de solo guardar ciudades en la pila, se guardan subárboles enteros. De esta manera conservamos la información contextual de cada camino parcial construido (en este sentido, es más similar a la versión recursiva), y esto nos permite pensar la paralelización ya que cada proceso tendría todo lo que necesita para trabajar independientemente.

Esta versión es más lenta, ya que requiere tiempo de aloación para los caminos parciales. Este tiempo se puede ahorrar en parte reutilizando el espacio de los caminos adescartados.

Lo que nos permite esta versión es poder dividir el digrafo en subárboles, y distribuir un subárbol por proceso, y que cada proceso pueda encargarse de manera independiente de buscar en su subárbol. En la sección siguiente, analizaremos cómo se puede paralelizar este algoritmo.

```

1  Push_copy(stack, tour); // Tour that visits only the hometown
2  while (!Empty(stack)) {
3    curr_tour = Pop(stack);
4    if (City_count(curr_tour) == n) {
5      if (Best_tour(curr_tour))
6        Update_best_tour(curr_tour);
7    } else {
8      for (nbr = n-1; nbr >= 1; nbr--)
9        if (Feasible(curr_tour, nbr)) {
10           Add_city(curr_tour, nbr);
11           Push_copy(stack, curr_tour);
12           Remove_last_city(curr_tour);
13         }
14      }
15    Free_tour(curr_tour);
16 }

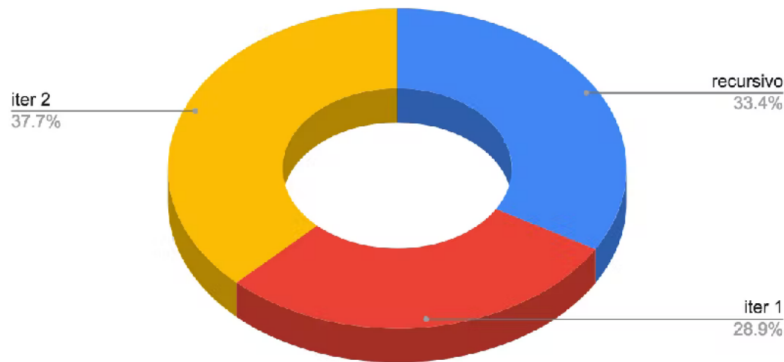
```

Pruebas sobre algoritmos seriales

Luego de ejecutar algunas pruebas, podemos ver que el algoritmo recursivo es aproximadamente 8% más lento que la primera versión iterativa. La primera versión iterativa es aproximadamente 5% más rápida que la segunda versión iterativa. Como es la más rápida, nos sirve para ejecutar las pruebas de comparación con las versiones paralelas. La tercera versión será la más lenta, pero nos sirve para paralelizar este problema con el paradigma SPMD.

Tiempos de ejecución sobre versiones seriales

Algoritmos Iterativos	recursivo	iter 1	iter 2
n = 8	0.002761126	0.002388	0.003111124
n = 10	0.2269852	0.192179	0.2497609
n = 12	4.471921	3.948113	4.763838



3.2 Paralelizar Branch and Bound

Consideramos la metodología de Ian Foster^{37 38}, para la paralelización de programas seriales.

1. **Partitioning** Divide the computation to be performed and the data operated on by the computation into small tasks. The focus here should be on identifying tasks that can be executed in parallel.
2. **Communication** Determine what communication needs to be carried out among the tasks identified in the previous step.
3. **Agglomeration or aggregation** Combine tasks and communications identified in the first step into larger tasks. For example, if task A must be executed before task B can be executed, it may make sense to aggregate them into a single composite task.
4. **Mapping** Assign the composite tasks identified in the previous step to processes/ threads. This should be done so that communication is minimized, and each process/thread gets roughly the same amount of work.

Esta metodología se puede aplicar a diferentes modelos generales para paralelizar algoritmos. En nuestro caso tenemos un modelo basado principalmente en master-slave o coordinador y trabajadores (una versión de SPMD con dos tipos de tareas en vez de una) con mapeo estático de tareas, y divide and conquer, ya que cada proceso trabajara sobre su subárbol de manera independiente. En este modelo de datos paralelos, la descomposición y mapeo se hace sobre los datos, las tareas (luego de dividir entre coordinador y trabajadores) son fijas, los datos se mapean estáticamente, y cada tarea hace la misma operación sobre los datos asignados. Luego de la repartición inicial, todos los procesos hacen la misma tarea y no hay comunicación entre procesos durante ese trabajo. Al final se vuelve a coordinar para obtener el resultado.

El algoritmo de Branch and Bound se basa en la búsqueda en el árbol de soluciones utilizando un costo mínimo actualizable que vimos en la sección anterior. Trabajar con árboles hace accesible la paralelización ya que diferentes procesos pueden buscar diferentes partes del árbol iterando independientemente, por lo cual el programa se hace “embarrassingly parallel”. Se divide el árbol de soluciones en subárboles, cada proceso recorre sus posibles caminos y al final se comparan sus costos acumulados. Al usar una estructura de tipo árbol tiene sentido asociar tareas con nodos del árbol.

Para la paralelización, surge la necesidad de usar búsqueda en anchura (Breadth First Search) para poder particionar el árbol, abriendo todos los subárboles de un nodo en vez de explorar a profundidad desde un primer paso. Para distribuir equitativamente el árbol entre procesos, conviene particionar el árbol desde un nivel que tenga suficientes nodos para repartir entre los procesos. De esta manera mejoramos la distribución de carga que si intentamos empezar con una búsqueda en profundidad. El proceso coordinador se puede encargar de hacer esta primera división. Hace una búsqueda en anchura, busca lo más amplio posible en el árbol, hasta encontrar un nivel que tiene al menos el número de procesos, y así dividir el nivel en número de procesos usando un **block-cyclic partition**³⁹. Si hay más subárboles que procesos, algunos procesos tendrán +1 subárbol. El coordinador envía los subárboles a cada proceso usando una estructura especial.

Cada proceso, de manera independiente, hace búsqueda en profundidad en su subárbol o subárboles, y para cada nodo compara el costo contra un mínimo local. Se usan estructuras de datos auxiliares para poder almacenar los caminos localmente y poder ir recorriendo los caminos de cada proceso. Se saca el camino parcial de la pila local, y se pregunta si llegó a N, si no, se continúa haciendo una búsqueda en profundidad. Para cada nodo, se pregunta si el costo actual es mayor al mínimo local, y si lo es, no se continúa buscando profundidad por ese subárbol. Al llegar a una hoja, con comunicación grupal se pide un costo mínimo global, y si el proceso tiene el camino de menor costo global, manda comunicación grupal para que se actualice el costo. Para mejorar los tiempos, solo se envía el costo, y no el camino. Un proceso que ya no tiene más trabajo que hacer, espera ocioso en una barrera, hasta que hayan terminado todos los procesos para poder finalizar. Cuando todos los procesos han terminado de buscar, se hace una reducción global para poder encontrar el camino con el menor costo. El proceso que tiene el menor costo puede enviar su camino y su ID al proceso 0, (si tiene el camino más corto, no necesita enviarlo). El proceso coordinador tiene control sobre I/O para informar el resultado.

Veremos con más detalle la implementación con MPI en el capítulo 5.

³⁷P. Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming, 2011.p66

³⁸I. Foster; Designing and Building Parallel Programs, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.

³⁹P. Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming, 2011.p110

Algunos desafíos:

Todos los procesos no tienen la misma carga de trabajo, y algunos pueden estar ejecutando mucho tiempo, mientras otros terminan de trabajar y no toman más trabajo. Cuando no se le puede asignar la misma carga de trabajo a cada proceso, tenemos un problema de balance de carga. El balance de carga surge debido al uso de una estructura irregular. A pesar de asignar un subárbol de igual tamaño a cada proceso, puede que un proceso no tenga trabajo si el costo actual supera el costo mejor actual de ese subárbol.

“El objetivo primario del cómputo paralelo es reducir el tiempo de ejecución haciendo uso eficiente de los recursos. El balance de carga es un aspecto central y consiste en, dado un conjunto de tareas que comprenden un algoritmo y un conjunto de procesadores, encontrar el mapeo (asignación) de tareas a procesadores tal que cada uno tenga una cantidad de trabajo que demande aproximadamente el mismo tiempo. Esto es más complejo si los procesadores (y comunicaciones) son heterogéneos.”⁴⁰

En la implementación que vimos se utiliza static partitioning (se le asigna una sección igual del árbol a cada proceso, sin re-asignar trabajo de los que tienen mucho a los que se quedan sin trabajo) y presenta un problema de load balancing que se puede resolver ajustando el programa para utilizar dynamic scheduling. En la solución de dynamic scheduling, cuando un proceso se queda sin trabajo se le intenta asignar trabajo para aliviar la carga de otros procesos. Se debe tomar en cuenta que un mapeo dinámico presenta sus propios desafíos de sincronización entre procesos. La implementación se hace más compleja, y tiene un mayor overhead de comunicaciones. Como no tenemos forma de saber cuáles procesos tendrán más trabajo que otros, el proceso de repartirse la carga implica que se necesitan más comunicaciones grupales, y mayor tiempo de sincronización entre procesos para determinar el reparto.

Por estas razones, TSP en general no es simple de implementar de manera paralela. Obviando las diferencias en lo que son arquitecturas o posibles herramientas dentro de lo que es el campo de la concurrencia, el problema en sí es difícil de dividir de manera pareja. Esto es porque no se cuenta con una estructura regular; siendo el centro del problema conocer el mejor recorrido de un grafo, cuyo árbol de expansión tiene límites desconocidos.⁴¹

Capítulo 4: librería MPI para C

MPI⁴² es una especificación para la implementación de paralelización usando pasaje de mensajes. El API de MPI facilita el uso de primitivas para la comunicación entre procesos. Fue diseñado para el uso de procesamiento paralelo. Las implementaciones vigentes tienen soporte también para memoria compartida, pero no usaremos esa funcionalidad en este estudio. Hay varias implementaciones de la especificación MPI como lo son MPICH y openMPI. *En este informe se utiliza OpenMPI 4.0.2 que es la implementación de MPI instalada en el cluster de la Universidad Nacional de La Plata.*⁴³

En MPI, no se automatiza la paralelización implícitamente, sino que se debe implementar de manera explícita por el programador. La forma habitual de implementar la paralelización, es comenzar con un algoritmo secuencial en el cual se identifican secciones paralelizables, luego se hace re-ingeniería para paralelizar dichas secciones utilizando MPI.

Siendo MPI un paradigma SPMD (Single Program Multiple Data)⁴⁴, se puede utilizar una estrategia de “divide and conquer” donde cada proceso ejecuta el mismo programa pero se divide entre ellos el problema. A partir del algoritmo secuencial, se particionan los datos en partes iguales y se dividen entre los procesos. Cada uno toma una pequeña parte. Esto suele mejorar la eficiencia de procesamiento. Aunque cada proceso levanta la misma aplicación, cuenta con su propia sección de memoria para procesar su sección de datos.

Una vez desarrollada la reingeniería del programa, esté siempre corre de manera serial en su principio. Para inicializar la paralelización, se explicita con MPI_Init(). Luego se utilizan los primitivos de pasaje de mensaje para trabajar los datos en paralelo. Luego del procesamiento paralelo, se indica el final de la sección paralela con MPI_Finalize(). Luego el programa corre de manera serial hasta finalizar a.

Se debe tener en cuenta al momento de programar el uso de I/O puede generar cuellos de botella ya que MPI no cuenta con un scheduler para ese tipo de operaciones. Se previene cuello de botella de I/O (además de otros problema relacionados con sincronización) eligiendo un solo proceso para este tipo de operaciones. Citamos⁴⁵:

Recall that different parallel systems vary widely in their I/O capabilities, and with the very basic I/O that is commonly available it is very difficult to obtain high performance. This basic I/O was designed for use by single-process, single-threaded programs, and when multiple processes or multiple threads attempt to access the I/O buffers, the system makes no attempt to schedule their access. [...] we generally assume that one process/thread does all the I/O, and when we're timing program execution, we'll use the option to only print output for the final timestep.

En el caso del algoritmo implementado, solo el proceso 0 lee el archivo que almacena en una matriz los vértices del digrafo para poder comunicarlo a otros procesos.

⁴⁰ Naiouf, M. et al. Fundamentos de cómputo paralelo y distribuido de altas prestaciones. Construcción y evaluación de aplicaciones. 2014, p2

⁴¹ Monteiro, M. J. T. P., / Parallelizing Irregular Algorithms: a Pattern Language. Conference on Pattern Languages of Programs. 2011. pp. 4:1-4:17 <https://www.hillside.net/plop/2011/papers/A-24-Monteiro.pdf>

⁴² Padua, D., Ghoting, A., Gunnel, J. A., et al. MPI (Message Passing Interface). Encyclopedia of Parallel Computing, 1184–1190. 2011 doi:10.1007/978-0-387-09766-4_222

⁴³ Documentación OpenMPI <https://ccportal.ims.ac.jp/en/node/2635>

⁴⁴ Dongarra, J., et al (2011). SPMD Computational Model. Encyclopedia of Parallel Computing, 1933–1943. doi:10.1007/978-0-387-09766-4_26

⁴⁵ Pacheco, P. An Introduction to Parallel Programming. 2011. p280

Capítulo 5: Implementación algoritmo Branch and Bound paralelizado con MPI

El código trabajado en este capítulo se basa en la implementación que se describe en el libro de Peter Pachco "An Introduction to Parallel Programming, en el capítulo 6. Tiene 3 secciones principales - el inicio, donde se incluye la librería, se definen los tipos de datos, se declaran las variables globales y se inicializa la paralelización con MPI, guardando los datos correspondientes a la comunicación entre procesos. La sección principal, que es el procesamiento de datos con MPI. Al final, se hace la finalización de la sección MPI, liberación de memoria, el informe al usuario, etc

Inicialización

Se inicializa la paralelización con la primitiva `MPI_Init(&argc, &argv)`. Los argumentos recibidos de la línea de comandos, `argc` y `argv` representan respectivamente el número de argumentos y el vector de argumentos. Luego se llaman las primitivas que nos permiten tener para cada proceso su ID (`mi_id_proceso`), y el total de procesos (`num_de_procesos`).

```
MPI_Init(&argc, &argv);
universo = MPI_COMM_WORLD;
MPI_Comm_size(universo, &num_de_procesos);
MPI_Comm_rank(universo, &mi_id_proceso);
```

`MPI_COMM_WORLD` es el comunicador predefinido por `MPI_Init()`, guardado en la variable 'universo'. Se pueden definir nuevos comunicadores que definen un universo de procesos que se pueden comunicar entre sí. A partir del comunicador podemos conocer el ID o rango de los procesos y el tamaño de la colección. El comunicador siempre se debe especificar en las primitivas de comunicación. En este caso solamente usaremos el comunicador predefinido `MPI_COMM_WORLD` que contempla todos los procesos que usaremos.

Para iniciar a trabajar con el dígrafo, se debe leer desde un archivo de entrada. Los archivos de los dígrafos son archivos de texto plano que contienen el dato `N` como primer dato, y luego una matriz de adyacencias. Cada posición `Xij` de la matriz (`i` y `j` son índices de 0 a `n-1`) corresponde a la distancia entre el nodo `i` y el nodo `j` en la "ciudad". Las distancias `Xij` no son iguales a las distancias `Xji`. En la diagonal principal, donde `i = j`, el dato no se usa, por lo cual se guarda como 0. Como vamos a usar al proceso 0 como coordinador, y le vamos a otorgar acceso único a I/O, proceso 0 se encargará de leer los datos del archivo y repartirlos para el resto de los procesos en el universo.

El proceso 0 abre el archivo que contiene la matriz de adyacencias. Este se pasa como argumento al programa en modo lectura y está en `argv[1]`.

```
if (mi_id_proceso == 0) {
    archivo_de_matriz = fopen(argv[1], "r");
}
```

El proceso 0 lee el tamaño de `N` (el número de ciudades). Luego envía este dato, indicando que es integer con `MPI_INT` en `&n`, con un broadcast usando la función `MPI_Bcast()` (bloqueante) a todos los procesos. Todos los procesos llaman la función `MPI_Bcast()`, y solo se continúa ejecutando el programa una vez que todos los procesos hicieron el llamado a la función.

```
if (mi_id_proceso == 0) fscanf(archivo_de_matriz, "%d", &n);
MPI_Bcast(&n, 1, MPI_INT, 0, universo)
```

Todos los procesos alocan memoria para el dígrafo, un espacio de tamaño `n*n` del tipo dato `costo_t` (es un `int` que representa el costo de una ruta entre dos nodos). Luego, proceso 0 usa dos estructuras de `for` anidadas para direccionarse en la matriz de adyacencias, y lee cada dato haciendo un desplazamiento usando los índices `i` y `j` para acceder a las posiciones.

```
if (mi_id_proceso == 0) {
    for (i = 0; i < n; i++)
        for (j = 0; j < n; j++) {
            fscanf(archivo_de_matriz, "%d", &matriz_de_adyacencias[i*n + j]);
        }
}
```

Nuevamente, todos los procesos llaman a la función `MPI_Bcast()`, adonde el proceso 0 envía al resto de los procesos la matriz en un tipo de dato compuesto de `MPI_INT` de tamaño `n*n` en el puntero `matriz_de_adyacencias`, previamente alocado. El proceso 0 cierra el archivo de la matriz.

```
MPI_Bcast(matriz_de_adyacencias, n*n, MPI_INT, 0, universo);
if (mi_id_proceso == 0) fclose(archivo_de_matriz);
```

MPI tiene una serie limitada tipos de datos predefinidos que se declaran en el momento de envío y recepción, que no incluyen datos compuestos. Sin embargo, hay varias funciones para declarar nuevos tipos de datos, particularmente para datos compuestos. Luego de alocar e inicializar los structs correspondientes a los tours locales, se necesita declarar un tipo de datos nuevo de tipo arreglo para poder enviar los subárboles a los procesos en el universo. Ya que se trata de un arreglo de datos integer, podemos definirlo con la primitiva `MPI_Type_contiguous()` que es la primitiva más básica para esta funcionalidad. La firma de `MPI_Type_contiguous` en los docs de OpenMPI es la siguiente:

```
int MPI_Type_contiguous(int count, MPI_Datatype oldtype,
                        MPI_Datatype *newtype)
```

Usamos `MPI_INT` como `oldtype`, `&camino_mpi_t` como `newtype` (pasada como puntero), y el `count` es de `n+1` ya que necesitamos contar `N` más el nodo que es el punto de retorno. Para definir el nuevo tipo de datos MPI, se declara entre las variables globales, y se utiliza la primitiva `MPI_Type_contiguous()` para declarar un tipo

contiguo en memori. Se usa `MPI_Type_commit` para asentar la definición nueva. Al final del programa, necesariamente liberaremos el nuevo tipo con `MPI_Type_free()`.

```
MPI_Datatype camino_mpi_t;
MPI_Type_contiguous(n+1, MPI_INT, &camino_mpi_t);
MPI_Type_commit(&camino_mpi_t);
```

Finalmente, siguiendo los consejos de Pacheco⁴⁶, implementamos una barrera `MPI_barrier()` previo a la medición del tiempo del algoritmo paralelo, y una reducción con `MPI_MAX` posterior a la medición, para obtener el tiempo máximo de la búsqueda entre todos los procesos, “[...] timing parallel code is more complex, since ideally we’d like to synchronize the processes at the start of the code, and then report the time it took for the “slowest” process to complete the code. MPI Barrier does a fairly good job of synchronizing the processes. A process that calls it will block until all the processes in the communicator have called it.”

```
MPI_Barrier(universo);
comienzo = MPI_Wtime();
// CÓDIGO A MEDIR
fin = MPI_Wtime();
duracion_local = fin - comienzo;
MPI_Reduce(&duracion_local, &duracion, 1, MPI_DOUBLE, MPI_MAX, 0, universo);
```

Partición inicial del árbol

La partición inicial del árbol y la distribución de los subárboles correspondientes a cada proceso lo hace proceso 0. Proceso 0 se hace responsable de hacer una búsqueda en anchura para repartir, entre el número de procesos, los nodos correspondientes a los subárboles que corresponden a un nivel en el árbol. Se usa una estructura de tipo cola para la búsqueda en anchura y para almacenar los caminos parciales. A continuación se describe en detalle este proceso, paso a paso.

El proceso 0 primero necesita saber un límite superior para el tamaño de la cola. Se llama a la función `Limite_superior_para_cola()`, que encuentra un límite superior para el tamaño de la cola en relación al número de ciudades y de procesos, usando un incremento factorial. Este tamaño se guarda en la variable `tam_de_cola`. Luego se aloca espacio en la cola para todos los caminos.

```
cola_t Inicializar_cola(int tamano) {
    cola_t cola_nueva = malloc(sizeof(struct_de_cola));
    cola_nueva->lista = malloc(tamano*sizeof(camino_t));
    cola_nueva->lista_alloc = tamano;
    cola_nueva->cabeza = cola_nueva->final = cola_nueva->llena = 0;
    return cola_nueva;
}
```

Para poder hacer la búsqueda en anchura, primero se declara un camino “vacío” de tipo `camino_t`, en donde se guarda la ciudad 0 como ciudad de partida, con contador de ciudades en 1, el costo en 0 y el camino vacío.

Antes de empezar la búsqueda en anchura, se encola una copia del camino vacío y se libera la memoria del camino ya que fue encolado. La variable `tam_actual` que representa el tamaño de la cola, inicializada en 0, ahora se incrementa a 1.

Mientras la cantidad de caminos en la cola sea menor que la cantidad de procesos, se itera en el *while*. Se inicia desencolando el primer camino, por lo cual se decrementa el contador de la cola en uno. Se usa una iteración en un *for* de 1 hasta *n* (ciudades) para hacer una búsqueda en anchura, encolando cada camino parcial en la cola. Por ejemplo, en la primera iteración por un grafo de 4 ciudades, la cola saca primero del nivel 0 la ciudad 0, y luego encola los caminos parciales 0→1, 0→2 y 0→3 correspondientes a nivel 1 del árbol. En el *for* se reutiliza el mismo struct de camino para cada camino parcial ahorrando tiempo y espacio. Al terminar cada iteración del *while*, se libera el camino. Al volver a iterar en el *while*, se desencola el primer camino parcial del nivel encolado previamente usando la estructura liberada, y se iteran las ciudades no visitadas para agregar los caminos parciales que siguen a ese camino parcial. Se hace lo mismo para cada camino parcial del nivel anterior, recorriendo cada nivel del árbol. Una vez que se llega a un nivel cuya cantidad de caminos es superior al número de procesos, se corta el *while*.

```
while (tam_actual < num_de_procesos) {
    camino = Sacar_primer(cola);
    tam_actual--;
    for (nbr = 1; nbr < n; nbr++)
        if (!Visitada(camino, nbr)) { n $
            Agregar_ciudad_al_camino(camino, nbr);
            Encolar(cola, camino);
            tam_actual++;
            Quitar_la_ultima_ciudad(camino);
        }
    Liberar_camino(camino, NULL);
}
```

⁴⁶ Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011 p.139

Repartir los datos

Luego de particionar el árbol, se copia todos los caminos que hay en la cola a un solo arreglo `lista_de_colas`. Se retorna el puntero de la `lista_de_colas`, y se guarda el número de caminos de la cola, `tam_actual`, en el puntero `&contador_de_caminos`. Proceso 0 hace un `MPI_Bcast()` a todos los procesos enviando el valor del contador. Este servirá luego para la repartición.

```
MPI_Bcast(&contador_de_caminos, 1, MPI_INT, 0, universo);
```

Luego de construir la lista de colas inicial, proceso 0 se encarga de enviarle a cada proceso su subárbol con `MPI_Scatterv()` usando un contador y un desplazamiento para cada proceso. `MPI_Scatterv()` a diferencia del `MPI_Scatter()` común. Se usa en casos como este, donde el número de subárboles no se puede dividir perfectamente por el número de procesos. Cada proceso sabe donde esta(n) su(s) subárbol(es) gracias al valor de desplazamiento que se calcula en la función `Colocar_caminos_iniciales()`. Esta función usa el número de caminos (`contador_de_caminos`) y número de procesos (`num_de_procesos`), calcula el cociente y el módulo de la división entre ambos, y luego calcula el desplazamiento para cada proceso y devuelve los arreglos 'cuantos' y 'desplazamientos' y la variable `mi_contador` (que tiene el número de elementos en el subárbol que le corresponde a cada proceso). También se aloca la lista de caminos `lista_de_caminos_de_proceso`, en la cual cada proceso va a poder recibir su porción en el `MPI_Scatterv()` usando **block-cyclic partition**⁴⁷

```
void Colocar_caminos_iniciales(int contador_de_caminos, int cuantos[], int desplazamientos[],
    int* contador_de_proceso, ciudad_t** lista_de_caminos_de_proceso) {
    int quotient, remainder, i;

    quotient = contador_de_caminos/num_de_procesos;
    remainder = contador_de_caminos % num_de_procesos;
    for (i = 0; i < remainder; i++)
        cuantos[i] = quotient+1;
    for (i = remainder; i < num_de_procesos; i++)
        cuantos[i] = quotient;
    *contador_de_proceso = cuantos[mi_id_proceso];
    desplazamientos[0] = 0;
    for (i = 1; i < num_de_procesos; i++)
        desplazamientos[i] = desplazamientos[i-1] + cuantos[i-1];

    *lista_de_caminos_de_proceso = malloc((*contador_de_proceso)*(n+1)*sizeof(int));
}
```

```
MPI_Scatterv(lista_de_colas, cuantos, desplazamientos, camino_mpi_t,
    lista_de_caminos, mi_contador, camino_mpi_t, 0, universo)
```

Los primeros tres datos para el envío son arreglos. La variable `lista_de_colas` contiene todos los caminos encolados en la lista que construimos previamente. La variable `cuantos` contiene información de cuantos elementos le corresponden a cada proceso. La variable `desplazamientos` envía información sobre dónde se encuentra el camino correspondiente en el arreglo `lista_de_colas` para el proceso receptor. Para estos tres arreglos la posición *i* en cada arreglo corresponde a los datos para el proceso *i*. El tipo de datos `camino_mpi_t`, es el tipo de datos MPI que registramos en la sección inicial con `MPI_Type_contiguous()`.

Para la recepción, se usa el puntero `lista_de_caminos` para recibir el camino o caminos parciales correspondiente al proceso receptor (previamente alocado), `mi_contador` es el número de elementos recibidos en `lista_de_caminos`, y nuevamente `camino_mpi_t` es el tipo de datos MPI registrado previamente. Se envían los datos desde el proceso 0 usando el comunicador 'universo'.

```
Construir_pila_inicial(pila, lista_de_caminos, mi_contador);
```

Luego de recibir su lista de caminos con `MPI_Scatterv()`, cada proceso construye su pila con los subárboles que le corresponden. Esta pila será la base para la búsqueda en profundidad Branch and Bound.

Cada proceso llama `Construir_pila_inicial()` con la pila vacía, la lista de caminos recibida, y el contador `mi_contador`. Luego de armar las pilas, el proceso 0 libera la lista de colas, y todos los procesos liberan su lista de caminos propia.

```
void Construir_pila_inicial(pila_propia_t pila, ciudad_t lista_de_caminos[], int mi_contador) {
    int i;
    camino_t camino = Alocar_camino(NULL);

    for (i = mi_contador-1; i >= 0; i--) {
        Crear_camino_desde_lista(lista_de_caminos + i*(n+1), camino);
        Empujar_copia(pila, camino, NULL);
    }
    Liberar_camino(camino, NULL);
}
```

Dentro de la función `Construir_pila_inicial()` se aloca un camino vacío. Se itera usando un *for* reverso desde el tamaño del contador de caminos del proceso `mi_contador-1`, bajando hasta 0. En el *for*, el proceso llama a `Crear_camino_desde_lista()` con el puntero de la lista de caminos del proceso, `lista_de_caminos`. Se usa aritmética de punteros para sumar el valor del índice actual del *for* *i* por *n+1* a la dirección de la `lista_de_caminos` pasada por parámetro. Esto direccionará en el arreglo `lista_de_caminos` en el punto que le corresponde a cada camino del proceso. Le llegará la dirección a la función `Crear_camino_desde_lista()` en la dirección del camino *i*. También se le envía el tipo `camino_t` alocado previamente para recibir el camino. Una vez que se copian las ciudades y el costo del camino al `camino_t` tour, se vuelve al *for* de la función `Construir_pila_inicial()` y se empuja una copia del camino a la pila. De esta manera el proceso tendrá una pila con todos los caminos parciales que le corresponden de su subárbol. Con estos caminos parciales, luego construirá todos los caminos completos que sean viables en relación a los costos mínimos, local y global, en la búsqueda con Branch and Bound.

Búsqueda con Branch and Bound

El algoritmo principal de Branch and Bound es la búsqueda en profundidad, usando la pila construida. Cada proceso itera sobre su pila con a su(s) subárbol(es) recibido(s). Mientras su pila no esté vacía, itera sobre esta, y hace una búsqueda en profundidad para cada subárbol.

Lo primero que hace al entrar al *while*, es sacar de la pila un camino. Pregunta si se ha completado el camino (se tiene `Cant_ciudades() == n` en el camino actual). En afirmativo, se pregunta si es el mejor camino con la función `Mejor_camino()`. En esta función se llama a `Buscar_mejores_caminos()` donde se chequea si hay un mejor costo global entre los otros procesos, usando la comunicación grupal `MPI_Iprobe()`, con el tag `TAG_CAMINO` (este tag sirve para distinguir este tipo de mensajes); si existen mensajes con este tag de otros procesos que hayan enviado un costo mínimo nuevo, se entra en el *if* y se reciben con `MPI_Recv()`. Importante notar que no podemos usar `MPI_Recv()` directamente ya que es bloqueante, necesitamos usar `MPI_Iprobe()` para verificar qué hay mensajes en el buffer y recién ahí permitir al proceso recibir con `MPI_Recv()`, sino se quedará esperando en `MPI_Recv()` y no volverá a la búsqueda en su subárbol. Al recibir un `costo_camino`, lo chequea contra su mejor camino. Actualiza su mejor camino (`costo_del_mejor_camino`) acorde. Esta variable se ha inicializado en un valor máximo (100000) en un principio, y luego se va actualizando con los costos de los caminos propios o ajenos. Se utiliza esta variable en la búsqueda para descartar caminos con costos más altos.

```
int Mejor_camino(camino_t camino) {
    costo_t costo_actual = Costo_camino(camino);
    ciudad_t ultima_ciudad = Ultima_ciudad(camino);

    Buscar_mejores_caminos();

    if (costo_actual + Costo(ultima_ciudad, ciudad_de_partida) < costo_del_mejor_camino)
        return TRUE;
    else
        return FALSE;
}

void Buscar_mejores_caminos(void) {
    int terminado = FALSE, msg_disponible, costo_camino;
    MPI_Status status;

    while(!terminado) {
        MPI_Iprobe(MPI_ANY_SOURCE, TAG_CAMINO, universo, &msg_disponible,
                  &status);
        if (msg_disponible) {
            MPI_Recv(&costo_camino, 1, MPI_INT, status.MPI_SOURCE, TAG_CAMINO,
                    universo, MPI_STATUS_IGNORE);
            if (costo_camino < costo_del_mejor_camino) costo_del_mejor_camino = costo_camino;
        } else {
            terminado = TRUE;
        }
    }
}
```

Luego, volviendo a la búsqueda principal, si el camino tiene el mejor costo a nivel global, entra en el *if* y llama a la función `Actualizar_el_mejor_camino()`, en la cual le agrega su ciudad de partida (nodo 0) al camino para terminar, y llama `Bcast_costo_camino()`. En esta función envía el nuevo costo mínimo al resto de los procesos menos a sí mismo. Se usa un loop de `MPI_Bsend()` para enviar de manera no bloqueante el mejor camino a todos los procesos, indicando que envía costo de camino con el tag `TAG_CAMINO`.

```
void Bcast_costo_camino(int costo_camino) {
    int destino;

    for (destino = 0; destino < num_de_procesos; destino++)
        if (destino != mi_id_proceso)
            MPI_Bsend(&costo_camino, 1, MPI_INT, destino, TAG_CAMINO, universo);
}
```

Si aún no entra en el *if* que pregunta si se llegó al final, se hace una búsqueda en profundidad por el subárbol actual para seguir armando el camino. En la estructura iterativa, *for* recorre las ciudades de manera inversa, de *n-1* a 1 preguntando en cada una si ya fue visitada y si el costo actual es mayor al mínimo local. La ciudad es viable si no fue visitada, y si el costo es menor que el mínimo local. Si es viable, se agrega al camino, y se empuja una copia del camino a la pila. Luego de empujar una copia del camino, se saca la última ciudad. Se vuelve a iterar, se agrega la próxima ciudad viable, se empuja una copia del nuevo camino a la pila, y así repetidamente hasta completar un camino (o descartarlo). Cada proceso construye los caminos viables para cada subárbol usando búsqueda en profundidad y luego, al llegar al final de cada camino, hace los chequeos correspondientes con comunicación grupal para comparar con el mínimo global.

En cada iteración se usa un solo struct para construir los caminos. Este se libera en cada iteración que se entra al *else*, y al volver a iterar se usa nuevamente para el próximo camino actualizado que se saca de la pila. De esta manera se puede reutilizar el espacio sin volver a aloca para cada vuelta. Esto ahorra algo de espacio y tiempo.

Como ejemplo, se puede pensar que si se está trabajando con 5 ciudades (0, 1, 2, 3, 4), y el subárbol inicial es 0→1, imaginando que todas las ciudades son viables por costo, entonces se agregarán los caminos 0→1→4, 0→1→3 y 0→1→2 a la pila. Luego se sacará 0→1→2, y se copiarán 0→1→2→3 y 0→1→2→4 a la pila. Se sacará 0→1→2→3 y se copiará 0→1→2→3→4. En la próxima iteración, se sacará 0→1→2→3→4, entrará en el *if* por tener *n* ciudades, y se evaluará su costo. Al ser el primer camino evaluado, se guardará su costo como el mejor costo local (será mejor que el valor máximo de 100000 con el cual se inicializa la variable de mejor costo). Se chequea si hay mensajes de costos mejores de parte de otros procesos. Si su costo es el mejor costo de todos los recibidos, se enviará este costo al resto de los procesos.

```
while (!Pila_esta_vacia(pila)) {
    camino_actual = Sacar_ultimo(pila);
    if (Cant_ciudades(camino_actual) == n) {
        if (Mejor_camino(camino_actual)) {
            Actualizar_el_mejor_camino(camino_actual);
        }
    } else {
        for (nbr = n-1; nbr >= 1; nbr--)
            if (Viable(camino_actual, nbr)) {
                Agregar_ciudad_al_camino(camino_actual, nbr);
                Empujar_copia(pila, camino_actual, disponible);
                Quitar_la_ultima_ciudad(camino_actual);
            }
    }
    Liberar_camino(camino_actual, disponible);
}
```

Allreduce()

Luego de terminar de recorrer la pila construyendo los caminos y enviando los costos, se hace liberación de memoria de la pila, y se usa una barrera de sincronización para esperar a que todos los procesos terminen su trabajo. Esto se hace con `MPI_Barrier()`.

“The MPI collective communication function `MPI_Barrier` ensures that no process will return from calling it until every process in the communicator has started calling it.”⁴⁸

```
Liberar_pila(pila);
Liberar_pila(disponible);
MPI_Barrier(universo);
Obtener_mejor_camino_global();
```

Luego de la barrera, se llama `Obtener_mejor_camino_global()` en el cual se hace un `MPI_Allreduce()` para deducir el costo total del camino mínimo de todos los procesos.

`MPI_Allreduce()` recibe valores de todos los procesos en el comunicador indicado, y comunica los resultados de la operación usando un patrón mariposa. Luego de computar el mínimo, comunica el resultado de la operación a todos los procesos llamantes. Para hacer esto, se guarda el valor de retorno en el comunicador.

“MPI_Allreduce stores the result on all the processes in the communicator.”⁴⁹

Se usa el operador de la función mínimo `MPI_MINLOC`, que indica una reducción a un mínimo “local”, o sea, se relaciona al ID del proceso “ganador”. Como además del valor mínimo, también comunica el id del proceso que envió ese costo mínimo, y se utiliza `MPI_2INT` para enviar ambos valores.

`MPI_Allreduce()` es bloqueante, ningún proceso puede retornar de la función hasta que todos los procesos la han llamado. Esto garantiza que siempre recibamos el mejor camino, aún cuando algunos procesos ya han encontrado su mejor camino mientras otros están buscando.

Si el proceso 0, coordinador, tiene el mejor camino, entonces retorna de la función. Si es otro el que tiene el mejor camino, este proceso envía su mejor camino al proceso 0 para que lo pueda procesar.

```
MPI_Allreduce(&data_local, &data_global, 1, MPI_2INT, MPI_MINLOC, universo);
if (data_global.id == 0) return;
if (mi_id_proceso == 0) {
    MPI_Recv(mejor_camino_local->ciudades, n+1, MPI_INT, data_global.id,
            0, universo, MPI_STATUS_IGNORE);
    mejor_camino_local->costo = data_global.costo;
    mejor_camino_local->contador = n+1;
} else if (mi_id_proceso == data_global.id) {
    MPI_Send(mejor_camino_local->ciudades, n+1, MPI_INT, 0, 0, universo);
}
```

⁴⁸ Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011.p.122

⁴⁹ Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011.p.137

Finalizando

Como pueden haber quedado mensajes del mejor camino sin recibir en el comunicador, usamos una función para “limpiar” el buffer. La función `LimpiarColaMensajes()` usa `MPI_Iprobe()` e itera en un *while*. Mientras haya mensajes en el buffer, llama `MPI_Recv()`. De esta manera “limpiamos” los mensajes que hayan quedado esperando recepción. Es necesario hacer esto para que `MPI_Buffer_detach()` y `MPI_Finalize()` que necesitamos llamar al final del programa puedan ejecutarse normalmente y sin errores.

```
MPI_Iprobe(MPI_ANY_SOURCE, MPI_ANY_TAG, universo, &msg_recibido, &status);

while (msg_recibido) {

    MPI_Recv(buf_trabajo, 100000, MPI_BYTE, status.MPI_SOURCE,
             status.MPI_TAG, universo, MPI_STATUS_IGNORE);

    if (status.MPI_TAG == TAG_CAMINO)

        cuantos[1]++;

    else

        cuantos[0]++;

    MPI_Iprobe(MPI_ANY_SOURCE, MPI_ANY_TAG, universo, &msg_recibido, &status);

}
```

Luego llamamos a `MPI_Buffer_detach()`, y el proceso 0 se encarga de I/O, imprimiendo el mejor camino a `stdout`, para informar el resultado de la búsqueda.

En MPI necesitamos explicitar que se ha terminado de trabajar paralelamente llamando a `MPI_Finalize()`. Previo a esto, liberamos memoria de variables alocadas durante la ejecución, y liberamos los tipos de datos registrados para MPI durante el programa. En nuestro caso, usamos `MPI_Type_free()` para el arreglo que usamos para almacenar caminos `&camino_mpi_t`.

Capítulo 6: Diseño del estudio

Las pruebas se hacen con diferentes números de ciudades. Se usan grafos con 5, 8, 10, 12 y 15 nodos para medir adecuadamente las diferencias entre el algoritmo iterativo elegido y la implementación. Con este algoritmo exacto, números de ciudades mayores a 15 se hacen inviables. Para obtener Speedup se utilizan los tiempos del algoritmo serial más rápido entre los tres vistos. Se utiliza Speedup absoluto, usando el peor tiempo del algoritmo secuencial más rápido. Speedup relativo mediría el tiempo secuencial corriendo el algoritmo paralelo con un solo proceso, pero esta opción se descarta por que la literatura aconseja el uso de Speedup absoluto⁵⁰. En el código, se usa una barrera previo a medir el tiempo y una función de reducción para obtener el tiempo de búsqueda del proceso más lento. También se toman varias veces los tiempos para cada prueba y se usa el mínimo como métrica. Esta recomendación en Pacheco⁵¹ evita las variaciones en tiempos que pueden aparecer en sistemas paralelos:

A further problem with taking timings lies in the fact that there is ordinarily considerable variation if the same code is timed repeatedly. For example, the operating system may idle one or more of our processes so that other processes can run. Therefore, we typically take several timings and report their minimum.

Se toman tiempos de ejecución seriales y paralelos, y se mide el Speedup absoluto y la eficiencia para cada caso. Al evaluar los resultados, se toman en cuenta los consejos de Pacheco⁵² ya que con MPI tenemos un overhead de comunicación:

Parallel overhead is the part of the parallel run-time that's due to any additional work that isn't done by the serial program. In MPI programs, parallel overhead will come from communication. When p is large and n is small, it's not unusual for parallel overhead to dominate the total run-time and speedups and efficiencies can be quite low.

Las fórmulas para speedup y eficiencia que se usan en este estudio son las siguientes:

Speedup:

$$S_{n,p} = \frac{\text{sequential execution time}}{\text{parallel execution time}}$$

Eficiencia:

$$E_{n,p} = \frac{\text{sequential execution time}}{\text{processors used} \times \text{parallel execution time}}$$

Para la paralelización, la idea es poder medir las diferencias en speedup y eficiencia con diferentes números de procesos y ver los resultados. Se hacen pruebas con números de procesos; 2, 4, 6, 8, 16, 32 y 64. Estamos trabajando con una arquitectura de granularidad gruesa, y el diseño de algoritmo se adapta a esta modalidad donde hay comunicación entre procesos limitada. En comparación con un algoritmo de mapeo dinámico, cada proceso hace mucho trabajo independiente del resto. A pesar de esto y de que teóricamente la búsqueda en un árbol es uno de los pocos casos en donde la paralelización puede dar resultados de Speedup superlineal (por qué realmente se hace menos trabajo en el algoritmo paralelo), en este caso es improbable. Por un lado por el desbalance de carga, por otro lado por tener un porcentaje del código que no permite la paralelización total, además del overhead de las comunicaciones grupales. Dada la ley de Amdahl⁵³, y una parte importante del programa que se hace secuencial (donde se particiona el árbol y se reparten los datos), se reconoce que hay poca probabilidad de este caso. La comunicación grupal genera un overhead, aunque también nos permite descartar partes de la búsqueda en la mayoría de los casos. A partir de esta situación, se plantea una hipótesis de que es muy probable que cuando el número de procesos se aproxime al número de n (ciudades) se den las mejores métricas. Ya que, habría suficientes procesos para hacer menos trabajo, pero también se divide el árbol en los primeros niveles y se minimiza la sección no paralelizable.

Esperamos que el tiempo en unidades que tomará el algoritmo varíe mucho entre casos, tanto en tiempo secuencial como paralelo. Estamos ante una situación no determinista cuyo desarrollo dependerá de los valores presentes en el grafo. Podemos decir que el tiempo secuencial es un tiempo factorial en el peor caso. Para pensar en los tiempos debemos pensar siempre en el peor de los casos.

El tiempo total del algoritmo paralelo debe tener en cuenta el tiempo del proceso que ejecuta el código más complejo, en este caso el proceso 0. El proceso 0 hace los broadcast iniciales, la partición del árbol, el scatter de los subárboles, y luego trabaja de la misma manera que el resto de los procesos buscando en su subárbol. Durante la búsqueda se hacen a lo sumo N comunicaciones grupales por proceso, y finalmente se hace una comunicación grupal para la reducción. Si el costo de la búsqueda es factorial en el peor caso, el costo de la comunicación es exponencial al número de procesos. En el código paralelo tenemos dos secciones, una primera que particiona al árbol entre los procesos con búsqueda en anchura, y otra es la búsqueda en profundidad. La búsqueda en anchura se ejecuta solo por el proceso 0, siendo esta sección esencialmente secuencial. Esta búsqueda depende del número de procesos, cuantos más procesos haya, más niveles atraviesa del árbol, lo cual genera un overhead de tiempo con un número grande de procesos. La segunda es la búsqueda en profundidad, que en el peor caso tomará tiempo factorial, aunque en este caso el tiempo factorial se dividirá aproximadamente por el número de procesos. Adicionalmente, van a haber overheads de paralelismo para las comunicaciones grupales⁵⁵ y el tiempo necesario para alocaiones de memoria para los caminos durante la búsqueda (aunque sean limitadas).

Para calcular Speedup y Eficiencia de manera absoluta, los tiempos iterativos se toman ejecutando el algoritmo iterativo discutido en capítulo 3 que da el mejor tiempo (el segundo caso). Esta versión implementa un stack que emula la pila del sistema con una lista, pero no guarda el camino entero en la pila, solo la ciudad actual.

Para poder comprobar la diferencia de performance y tiempos de ejecución antes diferentes casos de prueba, usamos tres diferentes tipos de casos - matrices de adyacencia donde no hay caminos óptimos (se usan todos valores iguales), matrices de adyacencias donde hay un camino mejor desde principio a fin (y solo uno), y matrices donde hay caminos mejores parciales intermedios (lo más cercano a un caso real e imprevisible). Podemos predecir que el peor caso debería tomar un tiempo cercano a factorial tanto para el algoritmo secuencial como para el paralelo. En el mejor caso se debería poder descartar una gran parte del trabajo desde un principio, por eso deberíamos poder ver una mejora sobre el peor caso en los tiempos de ejecución. Estos casos nos ayudan a evaluar los extremos. Lo que más nos interesa es ver en el caso intermedio, y cuánta mejora se puede ver por el uso de la paralelización por sobre el algoritmo secuencial.

⁵⁰ Aunque en este estudio, se recomienda usar Speedup relativo. Sun, X.-H. and J.L. Gustafson, Toward a better parallel performance metric, Parallel Computing 17, 1093-1109. 1991.

⁵¹ Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011.p.139

⁵² Pacheco, P.S. An Introduction to Parallel Programming. 2011.p.139

⁵³ <https://demonstrations.wolfram.com/AmdahlsLaw/>

⁵⁴ Ver filmina de la clase teórica n.11 de la cátedra de Programación Concurrente ATIC, Info, UNLP, 2021

⁵⁵ Wilkinson, B, Allen, M., Parallel Programming: techniques and applications using networked workstations and parallel computers" Pearson, 2005, p67

Se utiliza una arquitectura de tipo cluster con 8 nodos, cada uno con cuatro núcleos con dos hilos de procesamiento cada uno. En este cluster es posible tener 64 procesos paralelos corriendo simultáneamente.

Características de cluster HPC (salida del comando lscpu)

Orden de los bytes:	Little Endian
Tamaños de las direcciones:	40 bits physical, 48 bits virtual
CPU(s):	8
Lista de la(s) CPU(s) en línea:	0-7
Hilo(s) de procesamiento por núcleo:	2
Núcleo(s) por «socket»:	4
«Socket(s)»	1
Modo(s) NUMA:	1
ID de fabricante:	GenuineIntel
Familia de CPU:	6
Modelo:	26
Nombre del modelo:	Intel(R) Xeon(R) CPU E5520 @ 2.27GHz
Revisión:	5
CPU MHz:	1595.926
CPU MHz máx.:	2262,0000
CPU MHz mín.:	1596,0000
BogoMIPS:	4521.75
Virtualización:	VT-x
Caché L1d:	32K
Caché L1i:	32K
Caché L2:	256K
Caché L3:	8192K
CPU(s) del nodo NUMA 0:	0-7

Nota: Inicialmente el estudio se realizó con matrices de valores de adyacencias random. Pero esos valores se descartaron ya que al haber mucha diferencia entre diferentes N, no era fácil de deducir patrones en las pruebas. El objetivo de este estudio es comparar el speedup entre diferentes números de N, además de diferentes casos específicos entre algoritmos iterativos y con paralelización. Agregado a esto, se quiso evaluar la diferencia en el tiempo de procesamiento con diferentes números de procesos. Estas métricas no permiten ver patrones de comportamiento. Este tipo de evaluación requiere un control sobre los casos medidos. Se debe notar que con este tipo de algoritmo, el tipo de matriz de adyacencias devuelve resultados muy diferentes. Sin control adecuado de tipos de casos no se pueden evidenciar patrones con seguridad, ya que con demasiada randomización puede que algunas matrices sean más fáciles o rápidas de atravesar que otras, no por el N, sino por la dificultad de encontrar un camino óptimo.

Capítulo 7: Resultados y Análisis

Como fue discutido en el capítulo anterior, para el estudio se utilizaron tres casos para diferentes valores de N con un número diferente de procesos. Los casos analizados fueron los siguientes:

Caso 1, no hay camino (todos los valores son iguales)

Caso 2, camino parcial intermedio (principio y fin indeterminados)

Caso 3, camino predeterminado de comienzo a final

Analizando los resultados, en algunos puntos surgieron anomalías. Para analizar esto con mayor detalle, se volvieron a correr análisis con un mayor rango de procesos (se pueden ver las tablas ampliadas luego de los resultados iniciales en la segunda parte de este capítulo). Hay diferencia entre los tres diferentes casos en relación al Speedup. Vamos a analizar cada caso individualmente.

Primero definimos a lo que nos referimos con Speedup. Cuando hablamos de Speedup, nos referimos a la métrica de rendimiento que nos comunica el beneficio relativo que se alcanza al ejecutar un programa, en este caso analizando el cociente entre el tiempo de ejecución de una versión secuencial y una versión paralelizada.

Speedup sublineal es donde $\text{Speedup} < \# \text{ Procesos}$

Speedup lineal o perfecto es donde $\text{Speedup} = \# \text{ Procesos}$

Speedup Superlineal es $\text{Speedup} > \# \text{ Procesos}$

En la literatura contemplada se reporta que en casos de búsqueda en profundidad en un árbol se puede producir Speedup superlineal.⁵⁶ Esto se da porque en el algoritmo secuencial se debe hacer una búsqueda completa en cada rama, pero en el algoritmo paralelo se divide el árbol en subárboles más pequeños que se reparten entre procesos. También puede pasar que un proceso informe que hay una rama más prometedora para la solución y se descartan búsquedas en ramas manejadas por otros procesos, por lo cual el algoritmo paralelo se puede dar que se hace menos trabajo por proceso.

A number of parallel formulations of depth-first search have been developed by various researchers. In one such formulation, N processors concurrently perform depth-first-search in disjoint parts of a state-space tree to find a solution in the search space. The parts of the state-space searched by different processors are determined dynamically, and are roughly of equal sizes. Since only one solution is needed, the search terminates whenever any of the processors encounters a solution. Depending upon when a solution is first encountered in the space by the processors, the speedup can be superlinear (i.e., $> N$) or sublinear (i.e., $< N$).¹ This phenomenon of speedup being greater than N on N processors in isolated executions of parallel depth-first search has been reported by many researchers. [nota: N equivale en este caso a número de procesos]⁵⁷

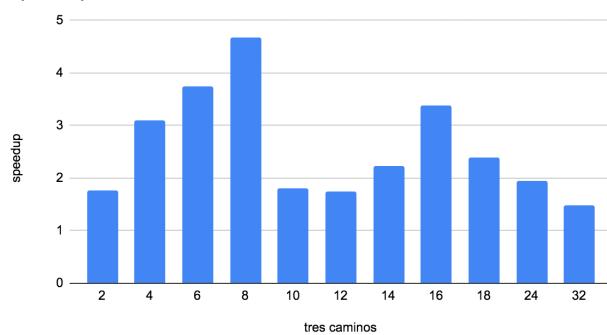
Pero viendo los resultados, en ningún caso probado tenemos un Speedup superlineal (donde $S > p$). De hecho, en la mayoría de los casos vemos un Speedup sublineal, y obtenemos Speedups menor a 1 en la mayoría de las instancias del camino singular. Rao y Kumar desarrollan un análisis donde notan que la mayoría de los casos de búsqueda en profundidad tienen un Speedup sublineal, y los casos en los cuales se tiende a desarrollar Speedup superlineal son donde hay varias soluciones distribuidas uniformemente y estén cercanas en el espacio de búsqueda. Estos no son los casos contemplados en este estudio hasta ahora:

Using an analytical model, we show that if the search space has more than one solution and if these solutions are uniformly distributed in a relatively small (randomly located) region of the search space, then the average speedup in parallel depth-first search can be superlinear.⁵⁸

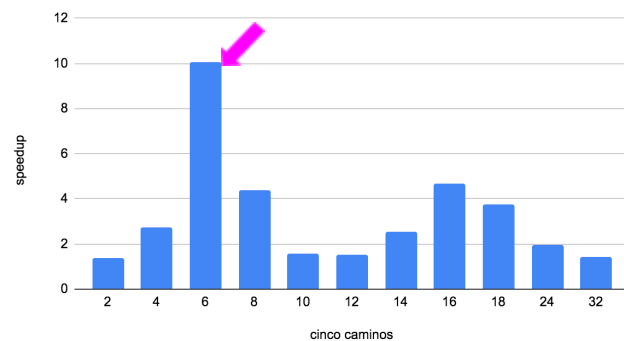
Pruebas adicionales

A partir de estas aserciones de Rao y Kumar se decide hacer un pequeño número de pruebas adicionales con dos nuevos grafos de $N = 10$, con caminos distribuidos de manera uniforme y cercanos en el espacio de búsqueda (un grafo con tres caminos, otro con cinco caminos), probado con un rango amplio de procesos. En solo una ocasión el Speedup obtenido es superlineal. En el resto de los casos, el Speedup es sublineal. En el caso de los tres caminos, con 2 y 4 procesos se aproxima S a p , pero no llega. Se logra un resultado superlineal en $\#p = 6$, pero no queda claro si esto es por haber configurado el caso como fue mencionado arriba (distribución, uniformidad y cercanía de caminos), o también por que los procesos para esa prueba corren en un solo nodo donde se puede dar por la disponibilidad de caché entre núcleos⁵⁹. Se pueden ver los resultados abajo:

speedup: $n = 10$ con tres caminos



speedup: $n = 10$ con cinco caminos



⁵⁶ Grama A., Gupta A., Karypis G., Kumar V., "An Introduction to Parallel Computing. Design and Analysis of Algorithms", Pearson Addison Wesley, 2nd Edition, 2003

⁵⁷ Rao, V. N., & Kumar, V. (1988). Superlinear speedup in parallel state-space search. Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, 161–174

⁵⁸ Rao, V. N., & Kumar, V. (1988). Superlinear speedup in parallel state-space search. Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, 161–174

⁵⁹ El caché en el sistema multiprocesador aumenta la velocidad de transferencia de datos entre la RAM y la CPU. La reducción del tiempo de acceso a la memoria debido al efecto de caché disminuye aún más la sobrecarga y produce una aceleración súper lineal.

Varios caminos: N = 10

Tres caminos			Cinco caminos		
iterativo	0.05663705		iterativo	0.04353499	
Procesos	Tiempo de ejecución	Speedup	Procesos	Tiempo de ejecución	Speedup
2	0.03222144	1.757744222	2	0.03180041	1.369007192
4	0.01832185	3.09122987	4	0.01599302	2.722124402
6	0.01508244	3.755164947	6	0.004328958	10.05669032
8	0.01211122	4.676411625	8	0.009927158	4.385443447
10	0.03132948	1.807787745	10	0.02786192	1.56252656
12	0.03243152	1.746358173	12	0.02880913	1.511152541
14	0.02544007	2.226293009	14	0.01727008	2.52083314
16	0.01678902	3.373457772	16	0.009300742	4.680808262
18	0.0236869	2.391070592	18	0.01153907	3.772833513
24	0.02921426	1.938678235	24	0.02195237	1.983156716
32	0.03831507	1.478192523	32	0.03063045	1.421297761

En el caso de cinco caminos con 6 procesos, $S > \#p$ donde $\#p$ es 6 y el Speedup obtenido es de 10.05669032, el único ejemplo de speedup superlineal en todo el estudio. Se debe destacar que solo fue el caso mínimo en una de cinco ejecuciones bajo las mismas condiciones. Es un punto para análisis futuros, donde se podrían construir más grafos con varios caminos cercanos en el espacio de búsqueda e intentar analizar en qué casos y con cuantos procesos se puede reproducir este resultado. También sería interesante analizar esos casos con un algoritmo paralelo con mapeo dinámico. Intentar seguir tan cercanamente el movimiento durante la ejecución se hace muy difícil por la irregularidad de la estructura. Adicionalmente, se destaca que en esta investigación no contamos con control o información específica sobre el rendimiento de los nodos del cluster - no sabemos si alguno tiene un rendimiento superior o inferior al del resto.

Volviendo a los resultados y análisis de los tres casos planteados inicialmente, se puede deducir que estamos ante un caso de alto overhead de paralelismo. Las mayores causas de overhead en los algoritmos paralelos en arquitecturas distribuidas tienen que ver con las comunicaciones entre diferentes nodos, además del costo del startup o la inicial división de tareas entre procesos, el uso de barreras y primitivas bloqueantes en el código, la comunicación grupal y el hecho que hay una distribución de trabajo que no es uniforme.

Aunque eliminamos cuellos de botella que pueden ser causados por I/O, no obstante hay otros puntos para analizar. El código secuencial del comienzo es inevitable para poder dividir las tareas entre procesos. Hay varios puntos en el código de tipo barrera o de comunicación bloqueante que hace que el proceso más lento defina el tiempo total, aunque no se pueden obviar o reemplazar sin perder correctitud. Lo que sí podría intentarse cambiar para ver si genera mejoras, es la distribución de carga de trabajo. El mapeo estático podría estar provocando lentitud que podría (o no) mejorar con un mapeo dinámico. La razón que puede que no sea mejor el rendimiento se menciona en el capítulo anterior - al trabajar con arquitectura distribuida, la cantidad de comunicación grupal necesaria para el mapeo dinámico, podría ejercer en detrimento del rendimiento importante y puede ser que el mapeo estático tenga un rendimiento mejor en estos casos solo por esto. De todos modos, amerita un futuro estudio para comprobarlo y descubrir si hay un número o rango de procesos que permita mejorar el rendimiento dado un mapeo dinámico.

Análisis de casos

Sin camino

El primer caso, en el cual no hay camino, nos permite analizar el “peor caso”, en el cual se deben buscar en todos los subárboles para encontrar un mejor camino. Como no se encuentra uno, se debe seguir buscando hasta zanjar todas las posibilidades. En este caso, la búsqueda en $N = 15$ se hizo inviable, tardando horas, y hasta días. Por esto, en el análisis ampliado, se hicieron pruebas para $N = 13$ como el mayor número de N probado. Inicialmente, se hicieron algunas pruebas para $N = 15$, pero al demorarse tanto, se decidió desistir al pasar varias horas de espera. Gracias a las pruebas ampliadas mencionadas anteriormente, pudimos percibir el speedup más importante en las pruebas de este caso. Aunque en los resultados no se percibe un Speedup mayor a 1 en la mayoría de las pruebas, en $N = 13$ si se ve el mejor Speedup con 14 y 16 procesos, un speedup de 6 y de 5 respectivamente. Los otros casos donde se ve un speedup mayor a 1 es en los casos en N mayores a 5, con un número de procesos mayor a 2 y menor que 8. En estos casos se percibe un Speedup pequeño, aproximadamente entre 1 y 3. En todos los casos son Speedup sublineales. Claramente, en esos casos donde no se descarta ningún subárbol, hay un beneficio en la paralelización aumentando el número de procesos y dividiendo la carga de trabajo hasta cierto punto. Sin embargo, en este tipo de problemas, el número de comunicaciones grupales está garantizado de ser muy alto. Es probable que esta sea la razón por la cual con un mayor número de procesos se deteriora el Speedup. El alto grado de comunicaciones grupales genera un costo demasiado alto para garantizar buenos resultados cuando hay muchos procesos. Específicamente, el alto costo de comunicación entre diferentes nodos, tal cual se ve en cualquier número de procesos mayor a 8, puede ser la razón que pasado este número de procesos el speedup es menor a 1 en todos los N . De hecho, en todos los N ,

luego de agregar cierto número de procesos (difieren para diferentes N), se hace mucho más caro el algoritmo paralelo que el secuencial. En cuanto a números de procesos igual o menores que 8, se puede dar que el caché en el ambiente multiprocesador del nodo habilite una mejora en Speedup.

Un camino

Este caso y el caso en el cual se diseña un solo camino desde principio a fin, sirven para ilustrar casos extremos donde tenemos expectativas más claras de los resultados. En el caso de tener un camino desde el primer punto hasta el final, hace fácil el trabajo para la mayoría de los procesos, que podrán descartar sus subárboles con costo excesivo al inicio. En este caso, la búsqueda se hace rápida, y un N = 15 que en el peor caso de no tener caminos tardó varias horas, aquí tardó solo minutos. Lo que se hace claro en los resultados es que en estos casos de un solo camino no hay una gran mejora con respecto a los tiempos secuenciales. En el algoritmo paralelo no vamos a tener más que un proceso trabajando por mucho tiempo. El algoritmo paralelo va a poder descartar trabajo fácilmente desde el inicio. En la mayoría de las pruebas en este caso el Speedups es menor a 1 o apenas mayor que 1. Este caso nos devuelve el peor rendimiento en su totalidad en términos de diferencia.

Camino parcial

En el segundo caso, del camino parcial, donde no se sabe desde un principio como se va a proceder, se comienza sin caminos y se elabora una solución en el intermedio de uno de los subárboles. Esto permite ver una aproximación a los casos comunes, aunque podríamos probar muchas más variaciones a futuro para poder ver las diferencias entre casos más amplios (por ejemplo, tener varios caminos mejores, esparcidos en el árbol de expansión o cercanos en el árbol de expansión).

En este caso vimos los mayores beneficios en términos de la paralelización, en particular con los N más grandes. Pudimos ver valores de Speedup más altos y con un mayor grado de eficiencia. En el caso de N = 15 con 14 procesos vimos el Speedup mayor en todas las pruebas - un Speedup de 10. Sin embargo, al ser menor el número de procesos sigue siendo un Speedup sublineal. Este speedup de 10, es el doble al mayor speedup en el resto de los casos para el camino parcial de N=15 que en general obtuvo speedup de 5 para 8 o más procesos. Nuevamente es difícil especular la razón por la cual este número de procesos en particular tuvo un rendimiento mucho más alto que el resto, y porque incrementar el número de procesos luego de superar los 8 no hizo diferencia aparte de este caso. Cada caso de TSP tiene sus particularidades y parece haber puntos justos, donde dado el número correcto de procesos, se consiguen tiempos mejores.

También se nota una mejora importante con N= 15 con más de 8 procesos donde conseguimos en todas las instancias Speedup > 5. Las mejores métricas en eficiencia (cercanas a 0,7) en el estudio son para N= 15 con 2 procesos y para 14 procesos. Hay algunas anomalías en los patrones del speedup y la eficiencia en las métricas del estudio en general. Esto es común en estos casos de búsqueda Branch and Bound:

For parallel tree-based B&B, one would expect results that show almost linear speedup, close to p (efficiency close to 100%). Yet, the relative speedup obtained by a parallel B&B algorithm may sometimes be quite spectacular, >p, while at other times, a total or partial failure (much <p) may be observed..⁶⁰

Inicialmente, notamos que el uso de 8 y 16 procesos, y usando 8 procesos específicamente, tiene cierta ventaja en muchos puntos del estudio. Al probar agregando un rango más amplio de procesos, se nota que con 6 y 14 procesos también hay ventaja en el rendimiento. La mejora en las métricas de entre 6 a 16 procesos puede ser por una razón similar, por el promedio del número de ciudades que usamos en estos casos, y la manera que se reparten los subárboles es pareja y ajustada a N o N/2. Otra hipótesis es que el cluster utilizado tiene 8 unidades de procesamiento por nodo, y las posibilidades de utilizar caché hace que la comunicación sea más rápida. Las comunicaciones inter-nodo son mucho más lentas que la comunicación interna al nodo por el uso del caché y el costo alto de las conexiones ethernet. Estas pueden ser algunas de las razones por las cuales se nota una mejora en el Speedup en la mayoría de los casos con 6 y 8 procesos. Para analizar con más detenimiento este punto, se hicieron tablas que promediaron los tiempos de ejecución para los tamaños de n = 5 a n = 12 (ya que el primer caso no tiene n = 15 y se hace más fácil la comparación entre casos usando las mismas métricas), separando por número de procesos. En todos los casos, los tiempos promediados de ejecución más rápidos fueron con 8 procesos.

Análisis teorico

Para comprender el pobre rendimiento del programa también debemos tener en cuenta la ley de Amdahl ("El incremento de velocidad de un programa utilizando múltiples procesadores en computación distribuida está limitada por la fracción secuencial del programa"), y tomar en cuenta el porcentaje de código secuencial en el programa paralelo. La totalidad de los procesos deben esperar mientras un solo proceso, proceso 0, calcula el tamaño de las pilas, y los desplazamientos, y construye la lista de pilas para todos los procesos usando la búsqueda en anchura. Todo esto es procesamiento secuencial. Aunque, como vimos anteriormente, la búsqueda en profundidad en un árbol es un algoritmo que al paralelizarse, puede, en algunos casos, lograr un Speedup superlineal, en este caso vemos que hay límites graves al Speedup en la mayoría de los casos. Por un lado, podemos hipotetizar que esto es porque una parte importante del programa se ejecuta por un solo proceso, y por otra parte la formulación irregular del problema produce un desbalance en la carga de trabajo, cuya resolución también agregaría déficit en performance por necesidad de sincronización y comunicación, aunque esto debería ser testeado con diferentes números de procesos para verificar la hipótesis. Por otro lado se ven variaciones en relación al tamaño de datos en el caso de camino parcial con N= 15, donde se ven los mejores números de Speedup. Teniendo en cuenta la ley de Gustafson, si agregamos trabajo al mismo tiempo que agregamos más procesadores puede verse aminorada la situación señalada por Amdahl:

Gustafson's law addresses the shortcomings of Amdahl's law, which is based on the assumption of a fixed problem size, that is of an execution workload that does not change with respect to the improvement of the resources. Gustafson's law instead proposes that programmers tend to increase the size of problems to fully exploit the computing power that becomes available as the resources improve.⁶¹

Hay pequeñas alteraciones en los patrones en el caso del camino parcial, donde es esperable que no se siga una moda específica, ya que los caminos parciales intermedios generan las irregularidades comunes en TSP, basado en que no hay un comportamiento esperado en cuanto la búsqueda y encuentro de caminos. Sin embargo, justamente en este caso, se nota una mayor ventaja en cuanto a la eficiencia en torno a agregar procesos. Mientras en los casos extremos es notoria la falta de eficiencia pasados los 8 procesos, en el caso menos predecible el camino parcial, sigue siendo viable la eficiencia para un número de procesos mayor a 6 para Ns grandes.

⁶⁰ Crainic, T. G., Le Cun, B., & Roucairol, C. (n.d.). Parallel Branch-and-Bound Algorithms. Parallel Combinatorial Optimization, 1–28.

⁶¹ Gustafson, J. L. (May 1988). "Reevaluating Amdahl's Law". *Communications of the ACM*. **31** (5): 532–3

Resultados y gráficas

Caso 1: No existe un mejor camino

Tiempo de ejecución iterativo (sin camino)

	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
	0.0000231266	0.003890038	0.3243999	45.85871	

Tiempo de ejecución paralelo (sin camino)

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.000073054	0.0042372	0.3502244	45.02683	
4	0.000111886	0.002232197	0.2165592	22.82423	
8	0.02292791	0.03730816	0.1492446	15.54695	
16	0.02661057	0.04234065	0.4948537	86.23886	
32		0.0436964	1.249451	112.6817	
64		0.2336378	1.027771	160.5826	

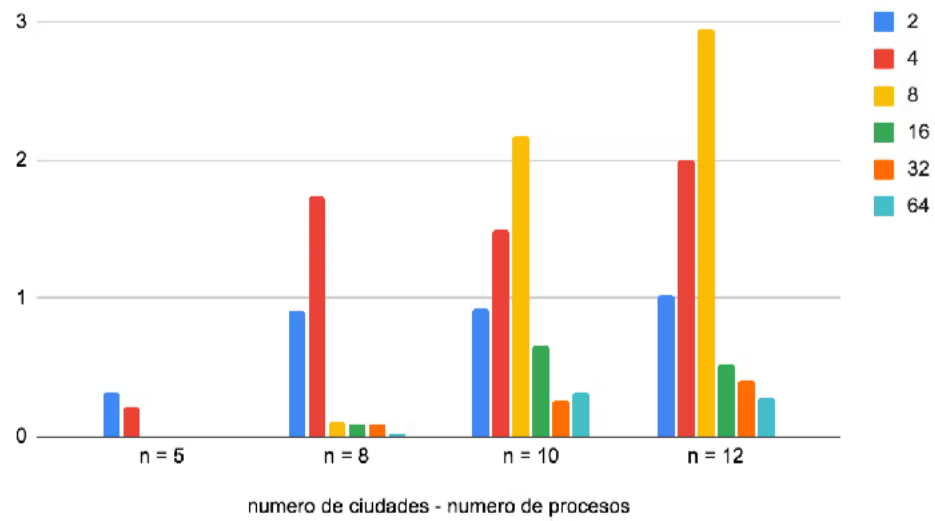
Speedup (sin camino)

Procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.3165685657	0.9180680638	0.9262629902	1.018475207	
4	0.2066978889	1.742694753	1.497973302	2.009211702	
8	0.001008665857	0.1042677527	2.173612312	2.94969174	
16	0.0008690757094	0.09187478227	0.6555470839	0.5317638707	
32		0.08902422168	0.2596339512	0.4069756669	
64		0.01664986573	0.3156344166	0.28557708	

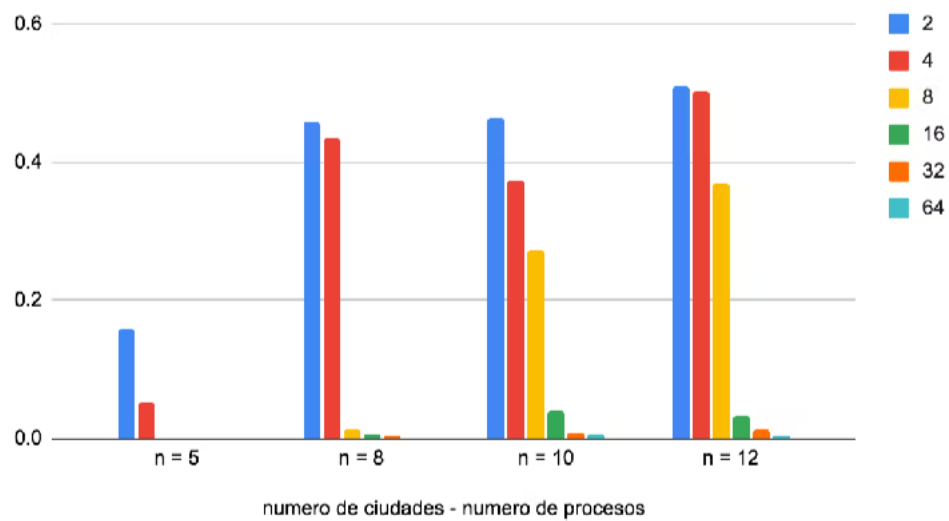
Eficiencia (sin camino)

Name	n = 8 2	n = 8	n = 10	n = 12	n =15
2	0.158284283	0.459034	0.4631315	0.50924	
4	0.051674472	0.435673688	0.3744933	0.5023	
8	0.00012608	0.01303347	0.2717015	0.36871	
16	0.00005432	0.00574217	0.0409717	0.03324	
32		0.002782	0.0081136	0.01272	
64		0.0002602	0.0049318	0.00446	

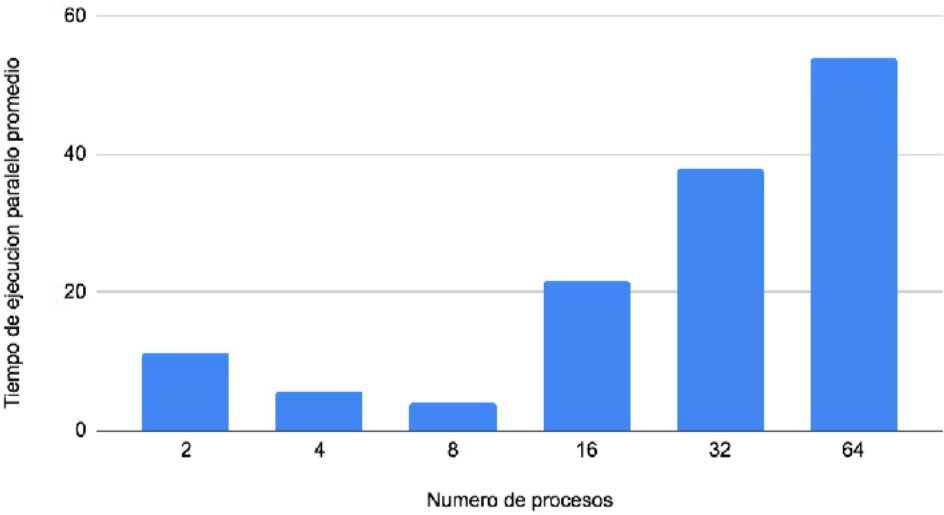
Speedup: sin camino



Eficiencia: sin camino



Sin Camino/Tiempo de ejecucion paralelo promedio (n5-12)



Caso 2: Existe un mejor camino parcial intermedio

Tiempo de ejecución iterativo (camino parcial)

n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
0.00001978874	0.002364159	0.191402	3.932629	9214.981

Tiempo de ejecución paralelo (camino parcial)

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12 n = 15
2	0.000081994	0.002332279	0.1522438	3.275998 6109.936
4	0.000104482	0.00102513	0.09377705	2.292064 3532.138
8	0.00037407	0.001478819	0.06266016	1.192487 1802.372
16	0.005018551	0.005790932	0.0445849	1.373752 1798.652
32		0.02406084	0.09313007	0.9395402 1777.24
64		0.327415	0.1563893	0.9496293 1731.016

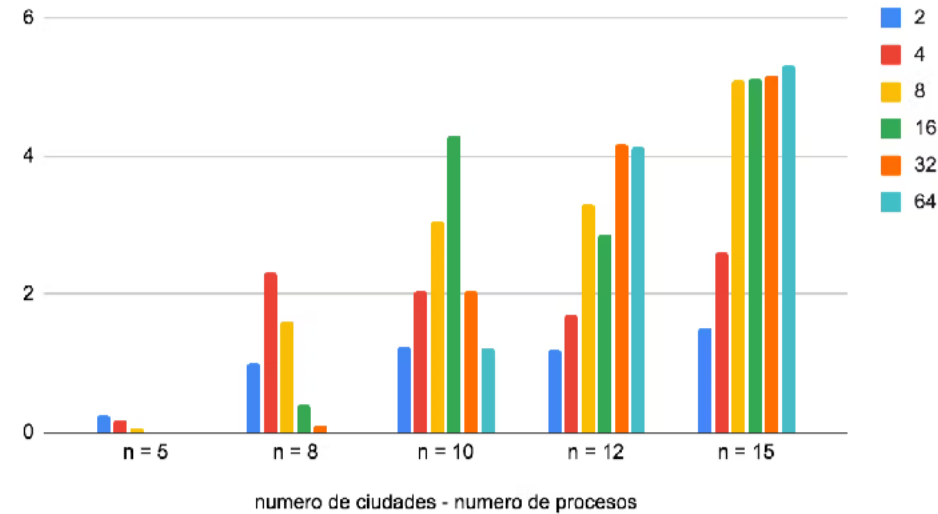
Speedup (camino parcial)

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.2413437569	1.013669034	1.25720719	1.200436936	1.508195994
4	0.1893985567	2.306204091	2.041032427	1.71575881	2.608896085
8	0.05290116823	1.598680434	3.054604393	3.297838048	5.112696491
16	0.003943118243	0.4082519014	4.292978116	2.862692102	5.123270649
32		0.09825754213	2.055211598	4.185695301	5.184995274
64		0.007220680177	1.223881685	4.141225423	5.323452238

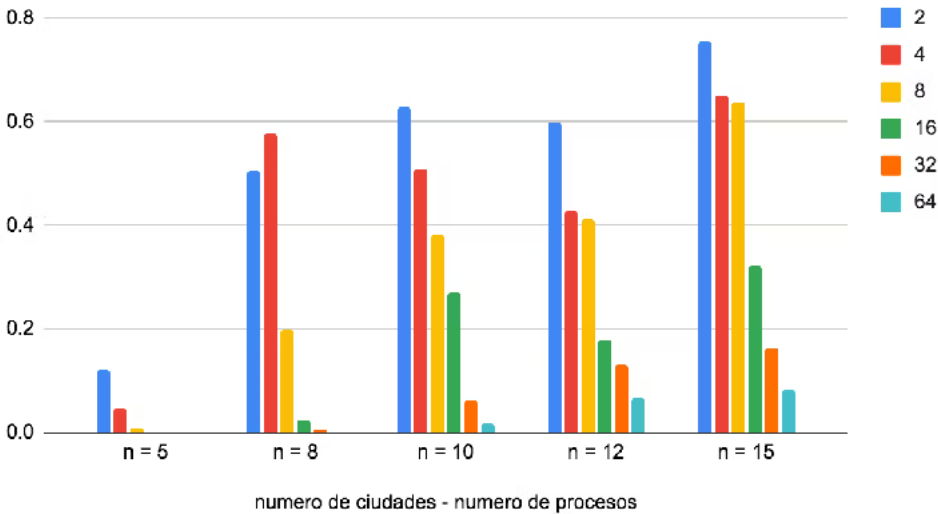
View of Eficiencia, camino mejor parcial

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.1206718784	0.5068345168	0.628603595	0.6002184678	0.7540979971
4	0.04734963917	0.5765510228	0.5102581069	0.4289397024	0.6522240213
8	0.006612646029	0.1998350542	0.3818255491	0.412229756	0.6390870614
16	0.0002464448902	0.02551574384	0.2683111322	0.1789182564	0.3202044156
32		0.003070548192	0.06422536244	0.1308029781	0.1620311023
64		0.0001128231278	0.01912315133	0.06470664724	0.08317894123

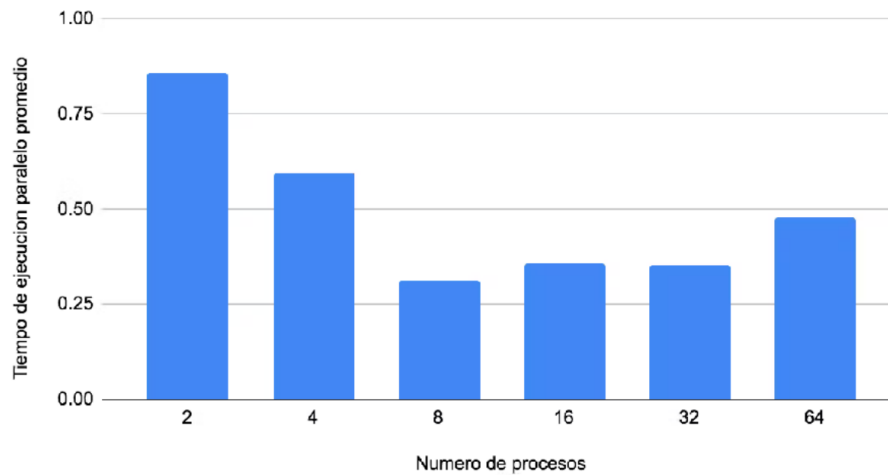
Speedup: camino parcial



Eficiencia: camino parcial



Camino parcial/ Tiempo de ejecucion paralelo promedio (n5-12)



Caso 3: Existe un camino de principio a fin

Tiempo de ejecución iterativo (un camino)

n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
0.000008821487	0.0003709793	0.01105404	0.648442	110.9308

Tiempo de ejecución paralelo (un camino)

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.000071588	0.000950058	0.02871672	1.366815	303.9704
4	0.000103366	0.0008644310	0.02580409	0.6984877	137.4295
8	0.000434765	0.0009277780	0.01028483	0.3857512	100.6779
16	0.01494418	0.006055630	0.01554126	0.6104376	138.3322
32		0.02937712	0.03631297	0.5989708	99.09387
64		1.073074	0.9954581	0.5216227	62.43953

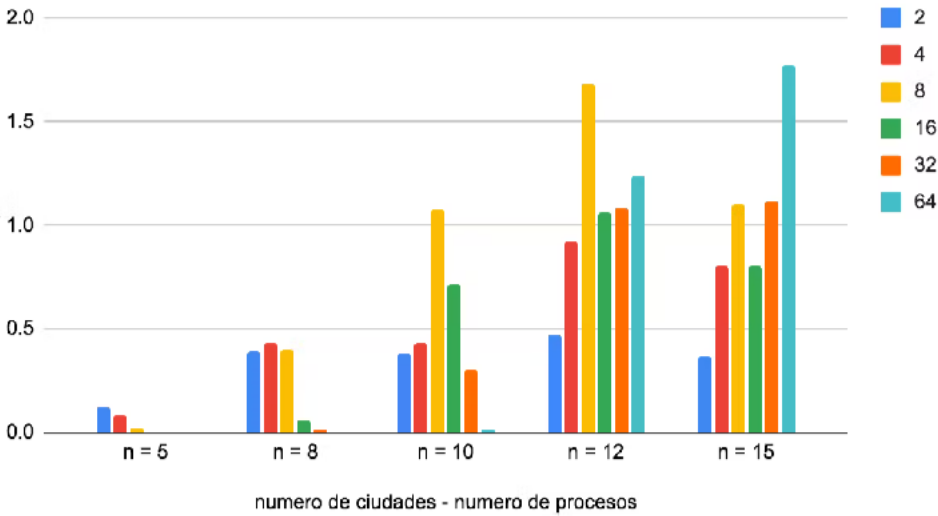
Speedup (un camino)

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 16
2	0.1232257781	0.3904806864	0.384933934	0.4744182644	0.3649394809
4	0.08534224987	0.4291601065	0.4283832524	0.9283513511	0.8071833194
8	0.02029024185	0.3998578324	1.074790735	1.680985049	1.101838636
16	0.0005902958208	0.06126188357	0.7112705147	1.062257633	0.8019159675
32		0.01262817118	0.3044102424	1.082593676	1.119451688
64		0.0003457164184	0.01110447542	1.24312458	1.776611707

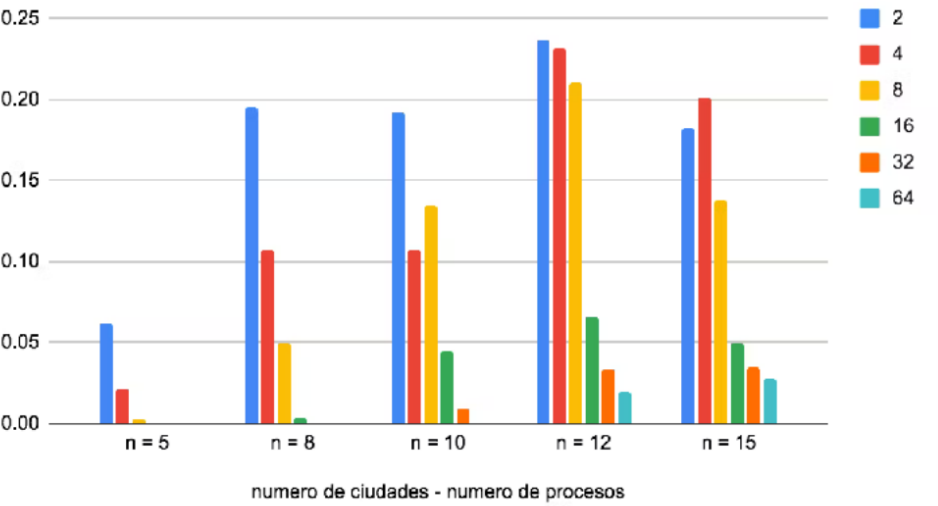
Eficiencia (un camino)

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.06161288903	0.1952403432	0.192466967	0.2372091322	0.1824697405
4	0.02133556247	0.1072900266	0.1070958131	0.2320878378	0.2017958299
8	0.002536280232	0.04998222905	0.1343488419	0.2101231312	0.1377298295
16	0.0000368934888	0.003828867723	0.04445440717	0.06639110206	0.05011974797
32		0.0003946303492	0.009512820075	0.03383105237	0.03498286524
64		0.000005401819038	0.0001735074284	0.01942382157	0.02775955793

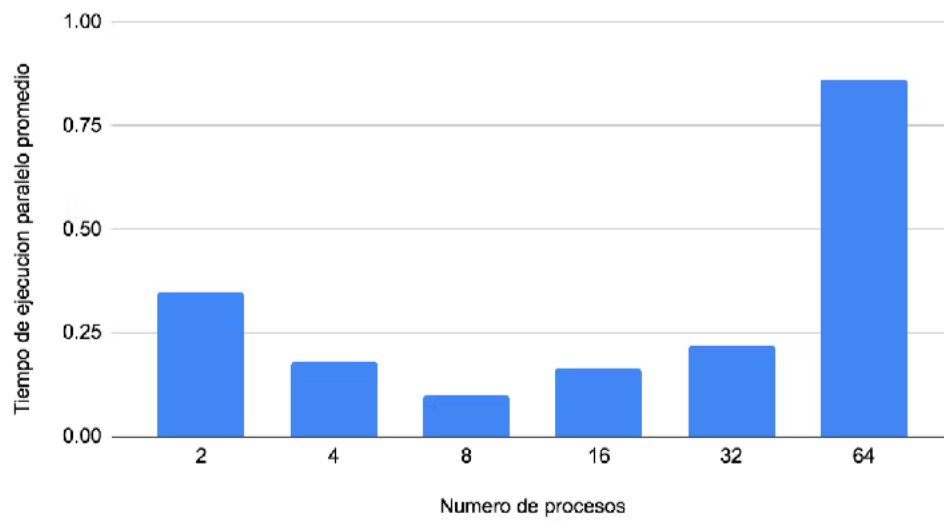
Speedup: un camino



Eficiencia: un camino



Un camino/ Tiempo de ejecucion paralelo promedio (n5-12)



Análisis adicionales

Sin caminos

Tiempo de ejecución paralelo

procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 13
2	0.000073054	0.0042372	0.3502244	45.02683	540.1996
4	0.000111886	0.002232197	0.2165592	22.82423	270.5271
6	0.000129206	0.0023045	0.1437481	15.26447	183.7737
8	0.000275806	0.0024291	0.1489290	15.54027	183.6715
10	0.01235317	0.02713780	0.8920434	81.18311	918.5133
12	0.021543700	0.0297042	0.9068790	83.94214	466.6577
14	0.01415501	0.03110876	1.02629	92.82595	102.2681
16	0.005030248	0.0233776	0.5362399	86.2124	109.7313
18	0.007437937	0.02346747	0.9886516	90.70932	1024.074
24	0.009757904	0.0296076	1.2238720	110.34760	1214.915
32		0.0436964	1.2494510	112.68170	686.1763
64		0.2336378	1.0277710	160.58260	1735.804

Tiempo de ejecución iterativo

n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 13
0.0000231266	0.003890038	0.3243999	45.85871	615.1015

Speedup

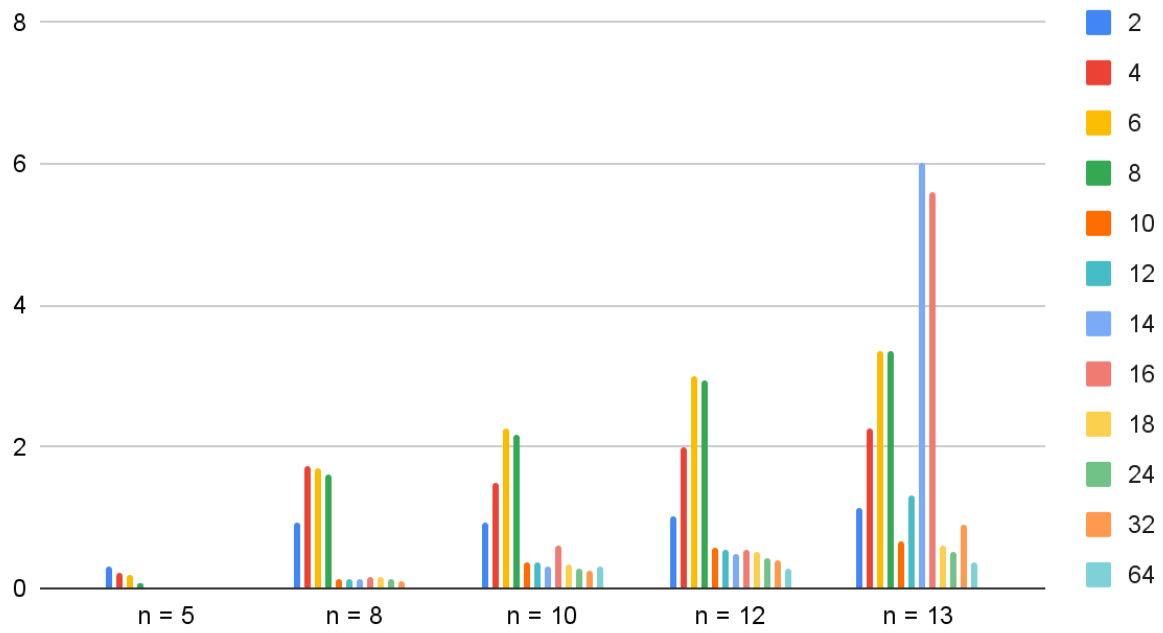
Procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 13
2	0.3165685657	0.9180680638	0.9262629902	1.018475207	1.138655971
4	0.2066978889	1.742694753	1.497973302	2.009211702	2.273714907

6	0.1789901398	1.687983067	2.256724785	3.004277908	3.347059454
8	0.08385096771	1.601399502	2.17821848	2.950959668	3.348921852
10	0.001872118655	0.1433438967	0.3636593242	0.5648799362	0.6696707603
12	0.001073473916	0.130959191	0.3577102348	0.5463133296	1.318099969
14	0.00163381022	0.1250463856	0.3160898966	0.4940289865	6.014597905
16	0.004597506922	0.1664002293	0.6049529324	0.5319270778	5.605524586
18	0.003109276134	0.1657629902	0.3281235776	0.5055567609	0.6006416528
24	0.002370037664	0.1313863796	0.2650603168	0.4155841178	0.5062917982
32		0.08902422168	0.2596339512	0.4069756669	0.8964190398
64		0.01664986573	0.3156344166	0.28557708	0.3543611491

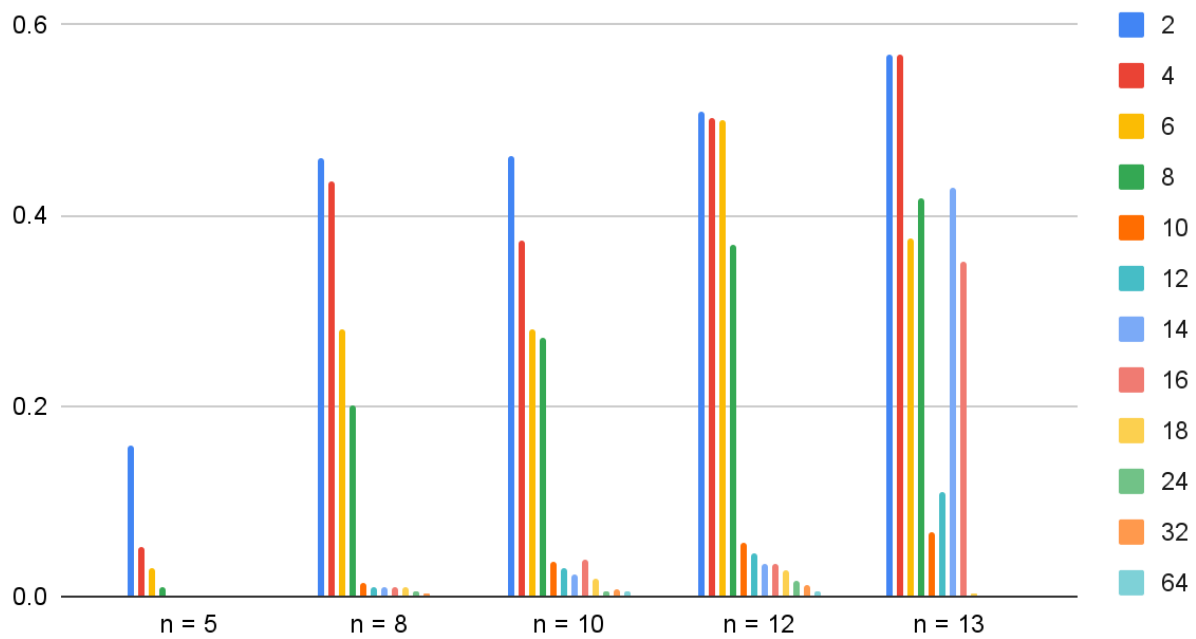
Eficiencia

procesos	n = 5		n = 8		n = 10		n = 12		n = 13	
2	0.158284283		0.459034032		0.463131495		0.509237603		0.569327985	
4	0.051674472		0.435673688		0.374493326		0.502302925		0.568428727	
6	0.02983169		0.28133051		0.28133051		0.50071298		0.37612080	
8	0.01048137		0.20017494		0.27227731		0.36886996		0.41861523	
10	0.0001872118655		0.01433438967		0.03636593242		0.05648799362		0.06696708	
12	0.00008945615965		0.01091326591		0.02980918623		0.0455261108		0.1098416641	
14	0.00011670073		0.008931884689		0.02257784976		0.03528778475		0.4296141361	
16	0.0002873441826		0.01040001433		0.03780955828		0.03324544236		0.3503452866	
18	0.000172737563		0.009209055012		0.01822908764		0.02808648672		0.002487814466	
24	0.00009875156933		0.005474432483		0.005474432483		0.01731600491		0.001572768122	
32			0.002782006927		0.008113560976		0.01271798959		0.002088507993	
64			0.0002601541521		0.00493178776		0.004462141874		0.0004128014129	

Speedup: sin camino



Eficiencia: sin camino



Camino parcial

Tiempo de ejecución paralelo					
procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.000081994	0.002332279	0.1522438	3.275998	6109.936
4	0.000104482	0.00102513	0.09377705	2.292064	3532.138
6	0.000224750	0.0010888	0.0624019	1.32532	2655.85
8	0.000312472	0.0014554	0.0627112	1.16654	1799.497
10	0.01258148	0.01369839	0.0824189	1.17802	1808.129
12	0.020787900	0.0214566	0.0829516	1.36386	1754.105
14	0.01461205	0.01520738	0.08442673	1.366233	903.1468
16	0.005018551	0.005790932	0.04327953	1.356607	1778.988
18	0.008786803	0.0083001	0.07759884	1.320502	1786.826
24	0.01035633	0.01239408	0.07797612	0.8546003	1779.479
32		0.02406084	0.09313007	0.9395402	1777.24
64		0.327415	0.1563893	0.9496293	1731.016

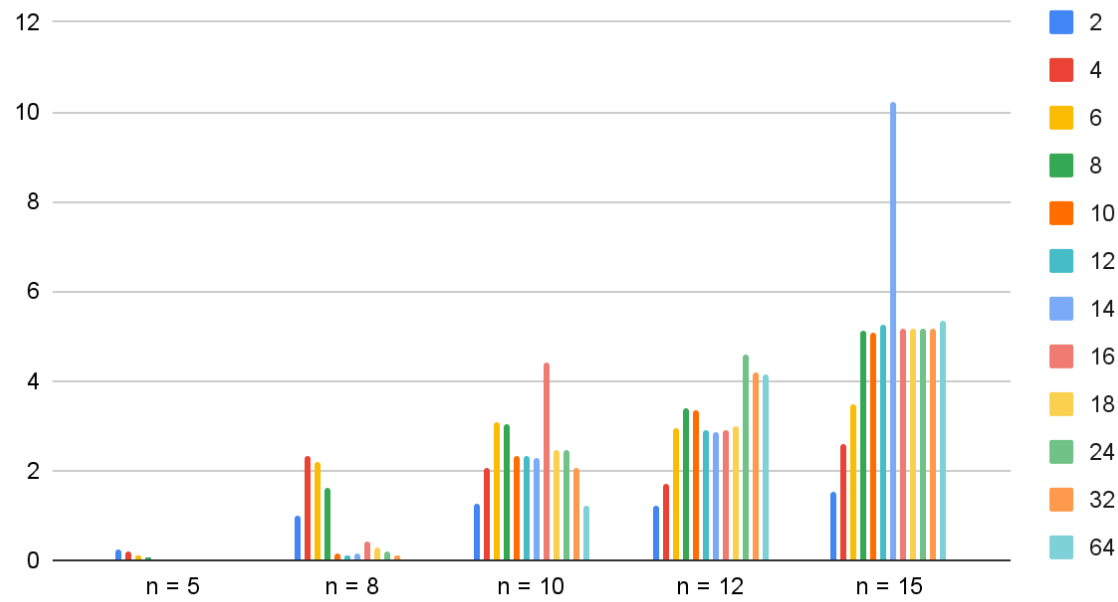
Tiempo de ejecución iterativo					
	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
	0.00001978874	0.002364159	0.191402	3.932629	9214.981

Speedup					
Procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.2413437569	1.013669034	1.25720719	1.200436936	1.508195994
4	0.1893985567	2.306204091	2.041032427	1.71575881	2.608896085
6	0.08804778643	2.171425449	3.067247333	2.967305255	3.469691812
8	0.06332964234	1.624382652	3.052118769	3.371179313	5.120864886
10	0.001572846756	0.1725866324	2.322306014	3.338340893	5.096417899
12	0.0009519355009	0.1101830948	2.307393153	2.883461389	5.253380499
14	0.00135427541	0.1554612958	2.267078211	2.878446795	10.20319288
16	0.003943118243	0.4082519014	4.422460225	2.898871228	5.179900595
18	0.002252097834	0.284835002	2.46655749	2.978131801	5.157178707
24	0.001910786929	0.1907490512	2.454623287	4.601717317	5.178471339
32		0.09825754213	2.055211598	4.185695301	5.184995274
64		0.007220680177	1.223881685	4.141225423	5.323452238

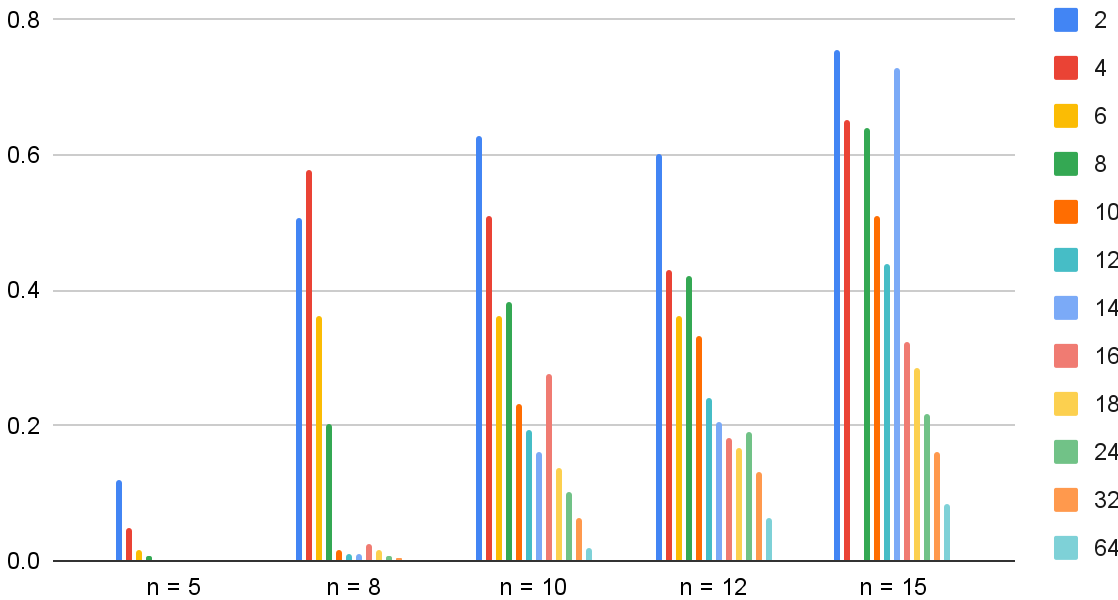
Eficiencia					
procesos	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
2	0.120671878	0.506834517	0.628603595	0.600218468	0.754097997
4	0.047349639	0.576551023	0.510258107	0.428939702	0.652224021
6	0.01467463	0.36190424	0.36190424	0.36190424	0.00001201
8	0.00791621	0.20304783	0.38151485	0.42139741	0.64010811
10	0.0001572846756	0.01725866324	0.2322306014	0.3338340893	0.5096417899
12	0.00007932795841	0.00918192457	0.1922827627	0.2402884491	0.4377817082
14	0.00009673395783	0.01110437827	0.1619341579	0.2056033425	0.7287994915
16	0.0002464448902	0.02551574384	0.2764037641	0.1811794517	0.3237437872

18	0.0001251165463	0.01582416678	0.1370309717	0.1654517667	0.2865099282
24	0.0001469836099	0.007947877132	0.1022759703	0.1917382216	0.2157696391
32		0.003070548192	0.06422536244	0.1308029781	0.1620311023
64		0.0001128231278	0.01912315133	0.06470664724	0.08317894123

Speedup: camino parcial



Eficiencia: camino parcial



Un camino

Tiempo de ejecución paralelo

procesos		n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
	2	0.000071588	0.000950058	0.02871672	1.366815	303.9704
	4	0.000103366	0.000864431	0.02580409	0.6984877	137.4295
	6	0.000218045	0.000950053	0.0144004	0.5146695	138.3727
	8	0.000304717	0.000927778	0.0101830	0.3857512	100.6779
	10	0.01266243	0.01301261	0.0293334	0.40099	100.7001
	12	0.020795700	0.0207489	0.0299885	0.61727	100.5846
	14	0.01455806	0.01470054	0.03075435	0.6178649	89.00814
	16	0.005338177	0.005714762	0.01436795	0.6104376	138.0424
	18	0.007894298	0.0084932	0.01978135	0.608664	133.6517
	24	0.0118872	0.01141465	0.01939554	0.4901838	133.7878
	32		0.02937712	0.03631297	0.5989708	99.09387
	64		1.073074	0.9954581	0.5216227	62.43953

Tiempo de ejecución iterativo

	n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
	0.000008821487	0.0003709793	0.01105404	0.648442	110.9308

Speedup

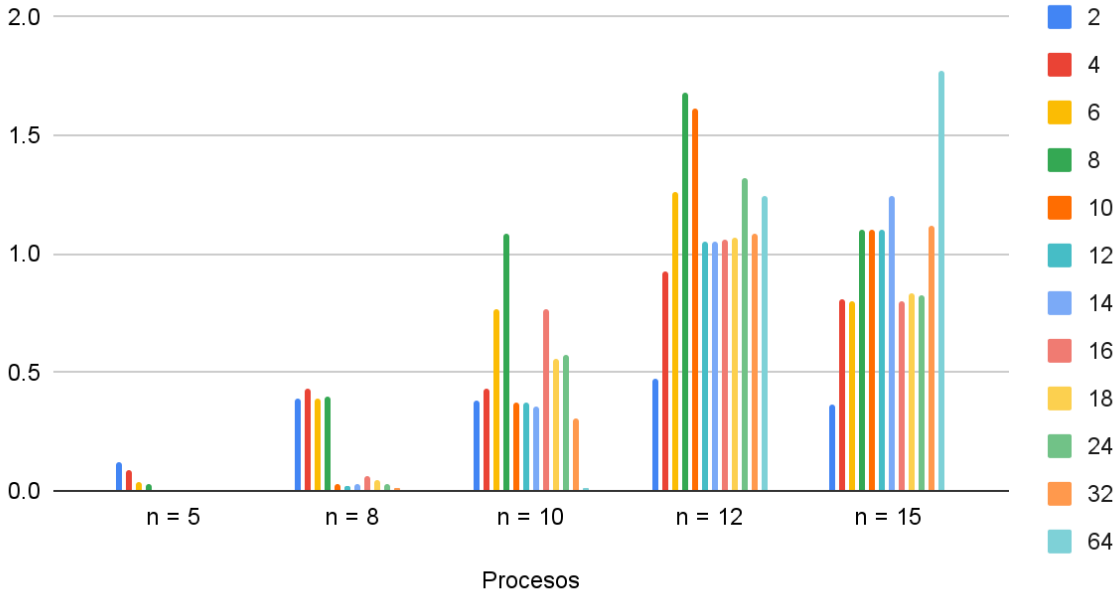
Procesos		n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
	2	0.1232257781	0.3904806864	0.384933934	0.4744182644	0.3649394809
	4	0.08534224987	0.4291601065	0.4283832524	0.9283513511	0.8071833194
	6	0.04045718544	0.3904827415	0.7676203439	1.25991923	0.8016812565
	8	0.02894976979	0.3998578324	1.085538643	1.680985049	1.101838636
	10	0.0006966662007	0.02850921529	0.3768414163	1.617099848	1.101595728
	12	0.0004241976466	0.01787950278	0.3686093002	1.050502334	1.102860676
	14	0.000605952098	0.02523576005	0.3594301294	1.049488327	1.246299496
	16	0.001652528007	0.06491596675	0.7693540136	1.062257633	0.8035994738
	18	0.001117450469	0.04367956718	0.5588112035	1.06535297	0.8299991695
	24	0.0007420996534	0.03250027815	0.5699269007	1.322854815	0.8291548258
	32		0.01262817118	0.3044102424	1.082593676	1.119451688
	64		0.0003457164184	0.01110447542	1.24312458	1.776611707

Eficiencia

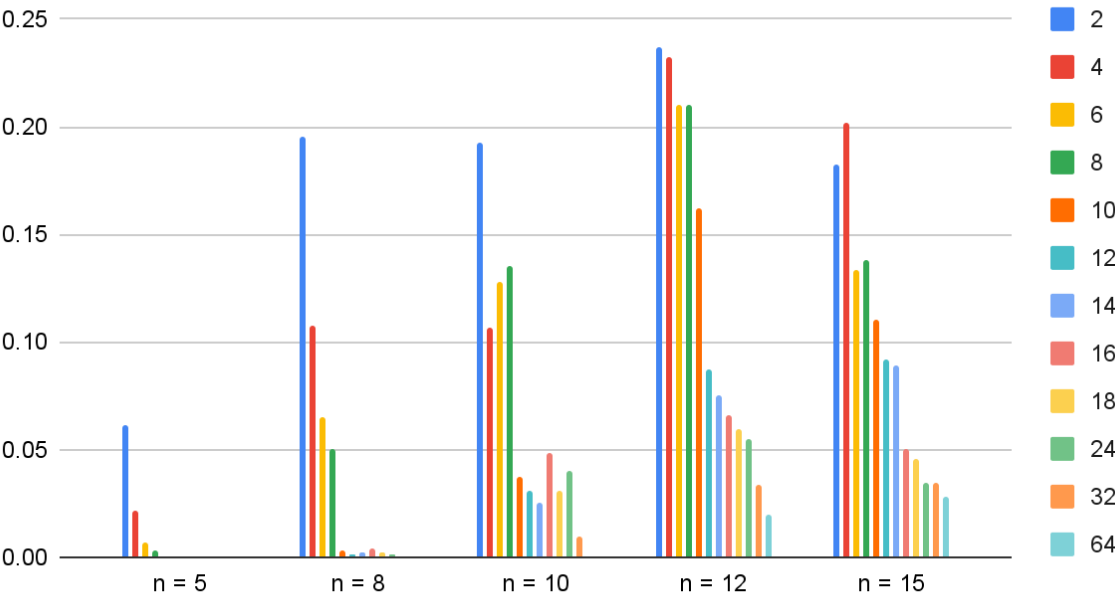
procesos		n = 5	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15
	2	0.061612889	0.195240343	0.192466967	0.237209132	0.182469740
	4	0.021335562	0.107290027	0.107095813	0.232087838	0.201795830
	6	0.00674286	0.06508046	0.12793672	0.20998654	0.13361354
	8	0.00361872	0.04998223	0.13569233	0.21012313	0.13772983
	10	0.0000696662007	0.002850921529	0.03768414163	0.1617099848	0.1101595728
	12	0.00003534980389	0.001489958565	0.03071744169	0.08754186117	0.09190505637
	14	0.00004328229272	0.001802554289	0.02567358067	0.0749634519	0.08902139255

16	0.0001032830005	0.004057247922	0.04808462585	0.06639110206	0.05022496711
18	0.00006208058159	0.002426642621	0.03104506686	0.0591862761	0.04611106497
24	0.00005708458872	0.001354178256	0.04035033926	0.05511895062	0.03454811774
32		0.0003946303492	0.009512820075	0.03383105237	0.03498286524
64		0.000005401819038	0.0001735074284	0.01942382157	0.02775955793

Speedup: un camino



Eficiencia: un camino



Capítulo 8: Conclusiones

El problema TSP es amplio y no tiene soluciones conocidas para todos los casos que sean mejores que la solución de fuerza bruta. Este es un tema conocido y se conoce como parte de la incógnita $P = NP$. Recorrimos una serie de soluciones exactas y soluciones aproximadas en la historia de este problema. Como el objetivo de este estudio no es conocer una mejor solución, sino poder paralelizar una solución serial y hacer pruebas para comparar los tiempos de ejecución, se elige una solución simple de paralelizar, sabiendo que no es la mejor opción.

La consigna fue elaborar una solución paralela para arquitectura distribuida, por lo cual se trabajó con el protocolo MPI, específicamente la implementación openMPI, sobre un cluster de 8 nodos con 4 núcleos por nodo, y 2 hilos de procesamiento por núcleo. Se desarrolló la solución en base del estudio sobre TSP publicado en el libro "An introduction to parallel programming" del Peter Pacheco. En las pruebas pudimos deducir que hay mejor performance con un número de procesos entre 6 y 16. En una primera ronda de pruebas se analizaron Speedup y Eficiencia para N s 5, 8, 10, 12 y 15 con 2, 4, 8, 16, 32 y 64 procesos. En una segunda versión de pruebas se agregó un grafo de $N = 13$ para el caso sin camino, y se agregaron pruebas para 6, 10, 12, 14, 16, 18, y 24 procesos para ver adonde se encuentra el punto óptimo para la performance en problemas de este tipo y tamaño. También se hicieron dos pruebas con $N = 10$ con mayor número de caminos para comprobar una hipótesis sobre Speedup superlineal en esos casos. En general los resultados arrojaron un Speedup sublineal, con un solo caso especial de speedup superlineal en las pruebas agregadas de $N = 10$ con cinco caminos.

Las mayores mejoras en rendimiento se vieron en los casos donde hay caminos intermedios, y las peores fueron en relación al caso de un solo camino. En el caso de un solo camino, tanto en iterativo como en paralelo, se puede descartar mucho trabajo desde un principio y esto hace que no se vean ventajas grandes en la paralelización. En el caso de no tener caminos viables, hay mucho trabajo, por lo tanto, hay mucha ventaja en la paralelización para un número reducido de procesos, ya que se puede dividir el trabajo. Sin embargo, cuando crece el número de procesos, el overhead de comunicación grupal es tan grande que se reduce toda ventaja. En el caso de caminos intermedios o de muchos caminos, se hace mejor el rendimiento y Speedup cuánto mayor sea el N . Hay mejoras en rendimiento pasado un número de procesos, y hay casos puntuales donde un número de procesos exacto genera saltos en rendimiento. En particular, cerca de 6, 8, 14 o 16 procesos se vieron alteraciones. Esto parece depender específicamente de cada caso de TSP y no es fácil de predecir o anticipar para poder conformar o elegir una prueba que de resultados esperables. A partir de los resultados vistos, podríamos plantear una hipótesis muy tentativa de que cuando el número de procesos se acerca a N o $N/2$ se ven saltos en el rendimiento, pero se deberían hacer más pruebas con diferentes tipos de casos y N s más grandes para poder comprobar si se sostiene, en algún estudio a futuro si se quiere detectar más finamente patrones en torno al rendimiento.

En el algoritmo con mapeo estático nos muestra solo una cara de la solución. Trabajando con paralelismo es importante aprovechar al máximo el potencial de trabajo de los procesos disponibles. En el estudio se considera el desafío de balance de carga, se reconoce que el estudio podría ampliarse, desarrollando la implementación del algoritmo paralelo con mapeo dinámico de tareas, para ver si un mejor balance de carga se justifica contra el mayor overhead de paralelización en relación con la comunicación y sincronización extra necesaria entre procesos.

Bibliografía

- Andrews G. "Foundations of Multithreaded, Parallel and Distributed Programming", Addison Wesley, 2000
- Balas, E. . The prize collecting traveling salesman problem. *Networks*, 19(6), 621–636. 1989 doi:10.1002/net.3230190602
- Ben-Ari, M. "Principles of Concurrent and Distributed Programming, 2/E". Addison-Wesley. 2006. ISBN 0-321-31283-X
- Brinch Hansen, P., "Studies in Computational Science. Parallel Programming Paradigms", Prentice Hall, 1995.
- Chandra,B. et al. New results on the old k-opt algorithm for the TSP. 5th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 1994, pp.150-159.
- Chandy, Misra, "Parallel Program Design. A Foundation", Addison Wesley, 1988.
- Christofides, N. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Report No. 388, GSIA, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1976.
<https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a025602.pdf>
- Concorde <https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html>
- Cook W Computing in Combinatorial Optimization. In: Steffen B., Woeginger G. (eds) Computing and Software Science. Lecture Notes in Computer Science, vol 10000. Springer, Cham. 2019 https://doi.org/10.1007/978-3-319-91908-9_3
- Cook, W. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation, Princeton University Press, 2014
- Dantzig, G., Fulkerson, R., and Johnson, S. 1954, "Solution of a large-scale traveling-salesman problem", en *Operations Research*
- Davendra, D., et al, "CUDA Accelerated 2-OPT Local Search for the Traveling Salesman Problem", in *Novel Trends in the Traveling Salesman Problem*. London, United Kingdom: IntechOpen, 2020 [Online]. Available: <https://www.intechopen.com/chapters/72774> doi: 10.5772/intechopen.93125
- David L. Applegate; Robert E. Bixby; Vašek Chvátal; William J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study* , Princeton University Press, 2007.
- Documentación OpenMPI <https://ccportal.ims.ac.jp/en/node/2635>
- Dongarra, J.,et al SPMD Computational Model. *Encyclopedia of Parallel Computing*, 1933–1943. 2011. doi:10.1007/978-0-387-09766-4_26
- Dorigo M, Gambardella L. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. April 1997; 1(1):53-66. DOI: 10.1109/4235.585892
- Filminas de las clases teóricas de la cátedra de Programación Concurrente ATIC, Info, UNLP, 2021
- Foster, I. *Designing and Building Parallel Programs*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.
- Gao, Y. Heuristic Algorithms for the Traveling Salesman Problem, 2020 <https://medium.com/opex-analytics/heuristic-algorithms-for-the-traveling-salesman-problem-6a53d8143584>
- Garey, M.R.; Johnson, D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York: W.H. Freeman. 1979
- Grama A., Gupta A., Karypis G., Kumar V., "An Introduction to Parallel Computing. Design and Analysis of Algorithms", Pearson Addison Wesley, 2nd Edition, 2003
- Gustafson, J. L. (May 1988). "Reevaluating Amdahl's Law". *Communications of the ACM*. **31** (5): 532–3
- Gutin, G. and Yeo, A.. The Greedy Algorithm for the Symmetric TSP. *Algorithmic Oper. Res.*, Vol.2, 2007, pp.33--36.
- Held, M. and Karp. R.M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees. *Op.Res.*18, 1970, pp.1138-1162.
- Helsgaun, K.. General k-opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic. *Mathematical Programming Computation*, 2009.
http://akira.ruc.dk/~keld/research/LKH/LKH-1.3/DOC/LKH_REPORT.pdf
- John E. Mitchell, *The Held & Karp Relaxation of TSP*, 2019
- Johnson, David S.; McGeoch, Lyle A. (1997). "The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization" (PDF). In E. H. L. Aarts; J. K. Lenstra (eds.). *Local Search in Combinatorial Optimization*. London:
- John Wiley and Sons. pp. 215–310

Jordan H.F., Alaghband G., Jordan H.E., "Fundamentals of Parallel Computing", Prentice Hall, 2002

Keld Helsgaun "An Effective Implementation of the Lin-Kernighan Traveling Salesman Heuristic", European Journal of Operational Research. 126, 106–130 2000

Libreria TSP Universidad de Heidelberg. <http://comopt.ifl.uni-heidelberg.de/projects/>

Lin, Shen; Kernighan, B. W. (1973). "An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem". Operations Research

Little, J.D.C., et al, "An algorithm for the traveling salesman problem", Operations Research 11, 972-989. 1963
<https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/46828/algorithmfortrav00litt.pdf>

McCool, Michael; et al (2013). Structured Parallel Programming: Patterns for Efficient Computation. Elsevier. p. 61. ISBN 978-0-12-415993-8.

Metaheuristics, sitios web www.metaheuristics.org, www.a-co-metaheuristic.org

Monteiro, M. J. T. P./ Parallelizing Irregular Algorithms: a Pattern Language. Conference on Pattern Languages of Programs. 2011. pp. 4:1-4:17
<https://www.hillside.net/plop/2011/papers/A-24-Monteiro.pdf>

Naiouf, M. et al. Fundamentos de cómputo paralelo y distribuido de altas prestaciones. Construcción y evaluación de aplicaciones. 2014

Pacheco, P. An Introduction to Parallel Programming. 2011

Padua, D., Ghoting, A., Gunnel, J. A., et al. MPI (Message Passing Interface). Encyclopedia of Parallel Computing, 1184–1190, 2011

Rao, V. N., & Kumar, V. (1988). Superlinear speedup in parallel state-space search. Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, 161–174

Raynal M. "Concurrent Programming: Algorithms, Principles, and Foundations". Springer, 2012.

Sun, X.-H. and Gustafson, J.L. . Toward a better parallel performance metric, Parallel Computing 17, 1093-1109. 1991.

Taubenfeld, G. "Synchronization Algorithms and Concurrent Programming". Prentice Hall. 2006

Uchida A., Ito, Y., Nakano, K. An Efficient GPU Implementation of Ant Colony, Optimization for the Traveling Salesman Problem, 2012 Third International Conference on Networking and Computing https://www.cs.hiroshima-u.ac.jp/cs/_media/4893a094.pdf

Valenzuela, C.L. and Jones, A.J. Estimating the Held-Karp lower bound for the geometric TSP. European J. Op. Res., 102:1, 1997, pp.157-175

Wilkinson, B, Allen, M., Parallel Programming: techniques and applications using networked workstations and parallel computers" Pearson, 2005

Writing Efficient Programs https://www.youtube.com/watch?v=-40jMw4HN-o&list=PLGvfHSglmk4aweyWlhBXNF6XISY3um82_&index=91

You, Y-S. Parallel Ant System for Traveling Salesman Problem on GPUs Taiwan Evolutionary Intelligence Laboratory (TEIL) <http://www.gpgpgpu.com/gecco2009/4.pdf>