ELE105
Circuits électriques

Analyse en régime permanent sinusoïdal

Chapitre 9 - Nilsson, Electric Circuits, 10e Ed.

Régime permanent

- Nous avons vu que lorsqu'une source continue (courant ou tension) est appliquée à un circuit, on peut facilement calculer la réponse en régime permanent.

- Que se passe-t-il si au lieu d'avoir une source continue, nous avons une source sinusoïdale?

Signal sinusoïdal

Angle de phase en rad ou degrés

- La forme mathématique est donnée par:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

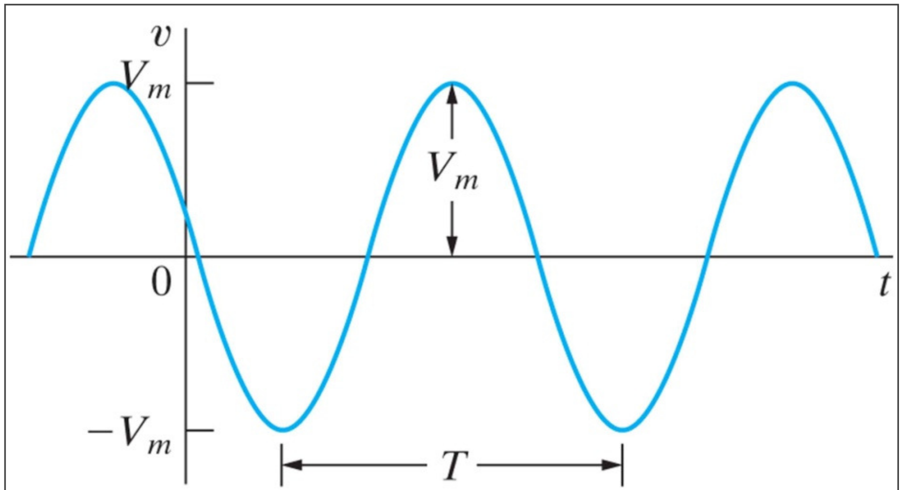
- La fréquence en Hz est donnée par:

$$f = \frac{1}{T}$$

période en s

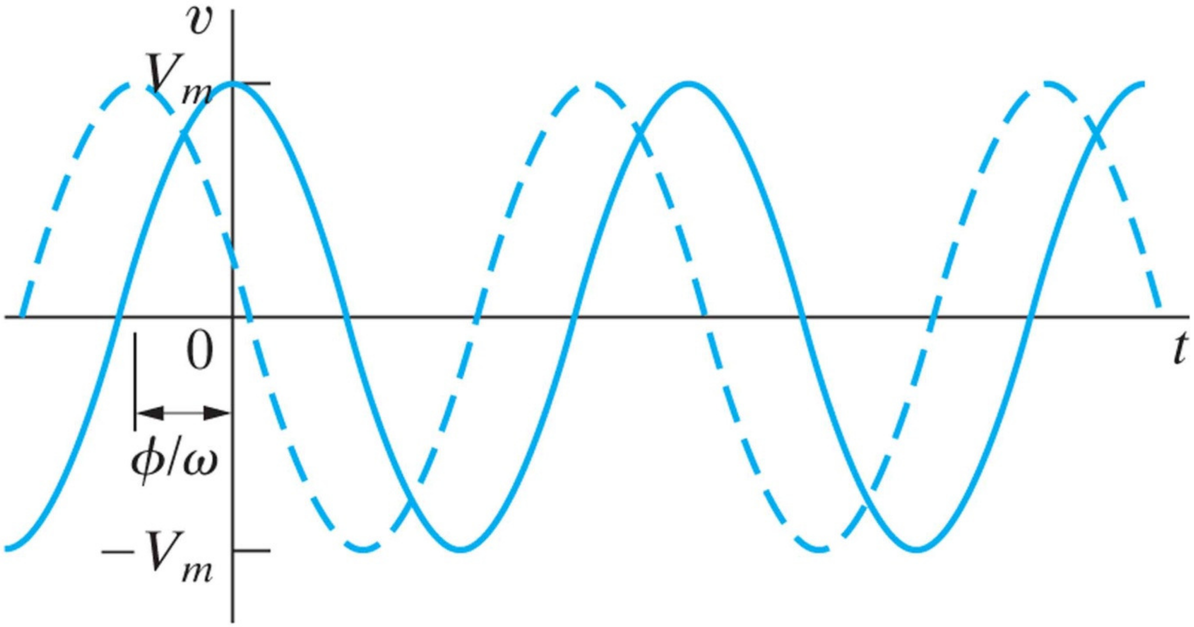
- La fréquence angulaire en rad/s est

$$\omega = 2\pi f$$



Angle de phase

- L'angle de phase détermine la valeur de la fonction à t = 0



Valeur RMS

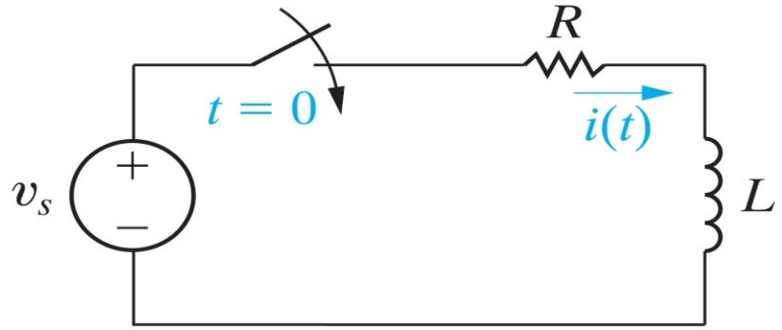
- La valeur RMS d'une source sinusoïdale est donnée par

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

- La valeur RMS est particulièrement importante pour le calcul de la puissance.
  – Nous en rediscuterons au prochain chapitre.

Réponse sinusoïdale d'un circuit RL

- Supposons $v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$ V dans ce circuit :



L'équation pour trouver $i(t)$ est: $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$

La solution pour $i(t)$ est:

$$i(t) = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\varphi - \theta)e^{-(R/L)t} + \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + \varphi - \theta)$$

où $\theta = \tan^{-1}(\omega L/R)$

Réponse sinusoïdale

- Dans la réponse du circuit, nous avons les composantes suivantes:
  - Le premier terme est la composante transitoire
  - Le deuxième terme est la composante permanente

- Existe-t-il une façon plus simple de calculer la composante permanente?

Le régime permanent

- Les techniques d'analyse de circuit que nous étudions nous permettront de calculer la **réponse sinusoïdale en régime permanent du circuit.**
  - C'est-à-dire la réponse du circuit à une entrée sinusoïdale une fois que la réponse transitoire est devenue nulle.

Caractéristique du régime permanent

- Le régime permanent d'un circuit avec une entrée sinusoïdale est une fonction sinusoïdale
- La fréquence du régime permanent dans le circuit est la même que celle de la source d'entrée
  - Mais l'amplitude est différente de celle de la source et l'angle de phase est différente de celle de la source

Phaseur (1)

- Un phaseur est un nombre complexe en forme polaire avec une amplitude et un angle de phase
  - Il permet de représenter le concept d'amplitude et de phase simultanément
- Provient de l'identité d'Euler

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \mathcal{Re}\left\{e^{j\theta}\right\}$$

$$\text{Si } v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= V_m \mathcal{Re}\left\{e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = V_m \mathcal{Re}\left\{e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right\} = \mathcal{Re}\left\{V_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right\}$$

Phaseur (2)

Ce terme est
sous-entendu

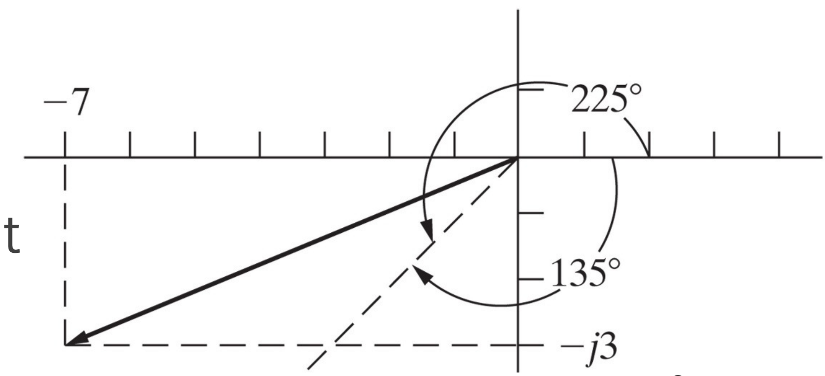
- Transformée de phaseur:

$$\boldsymbol{V} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle \phi$$

- Transformée inverse de phaseur

$$v(t) = \mathcal{P}^{-1}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{P}^{-1}\{V_m \angle \phi\} = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Le phaseur est défini par un nombre complexe.
Il est souvent écrit en forme polaire (A∠θ), mais peut aussi être écrit en forme cartésienne (a+jb)



-7 - j3 = 7.62∠156.80°

Addition et soustraction de phaseurs

- Les phaseurs sont faciles à additionner ou soustraire (pas comme les fonctions sinusoïdales).

$$i(t) = \left[5\cos(300t + 36.87°) + 10\cos(300t - 53.13°)\right] A$$

$$\boldsymbol{I} = 5\angle 36.87° + 10\angle -53.13° = 11.18\angle -26.57°\ A$$

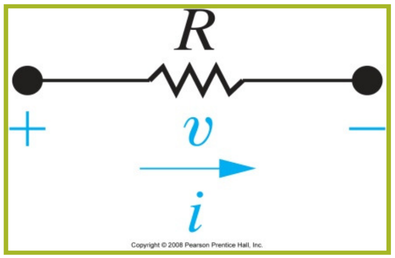
$$\therefore \qquad i(t) = \mathscr{P}^{-1}\{\boldsymbol{I}\} = 11.18\cos(300t - 26.57°)\ A$$

Notez que cette technique ne fonctionne que si les sinusoïdes ont la même fréquence!

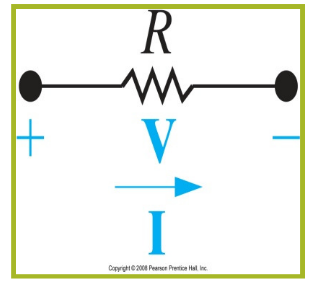
Résistances

Domaine temporel

Domaine des phaseurs (fréquentiel)



$$\xrightarrow{\mathscr{P}}$$



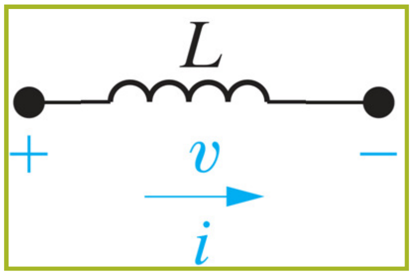
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta) \qquad \mathbf{I} = I_m \angle \theta$$

$$\therefore \quad v(t) = Ri(t) = RI_m \cos(\omega t + \theta) \qquad \therefore \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I} = RI_m \angle \theta$$

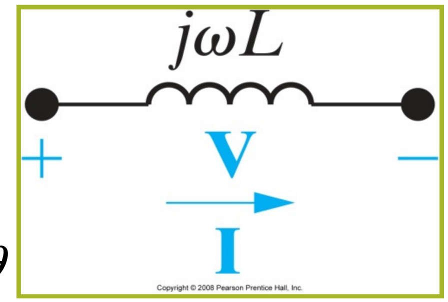
Notez que les phaseurs de tension et de courant pour une résistance ont le même angle de phase - donc nous disons que la tension et le courant dans une résistance sont "en phase".

Inductances

Domaine temporel



Domaine des phaseurs (fréquentiel)



$$\xrightarrow{\mathscr{P}}$$

$$\boldsymbol{I} = I_m \angle \theta$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$\therefore \quad v(t) = L\, di(t)/dt$$

$$= -\omega L I_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$= -\omega L I_m \cos(\omega t + \theta - 90°)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{V} = -\omega L I_m e^{j(\theta - 90°)}$$

$$= -\omega L I_m e^{j\theta} e^{-j90°}$$

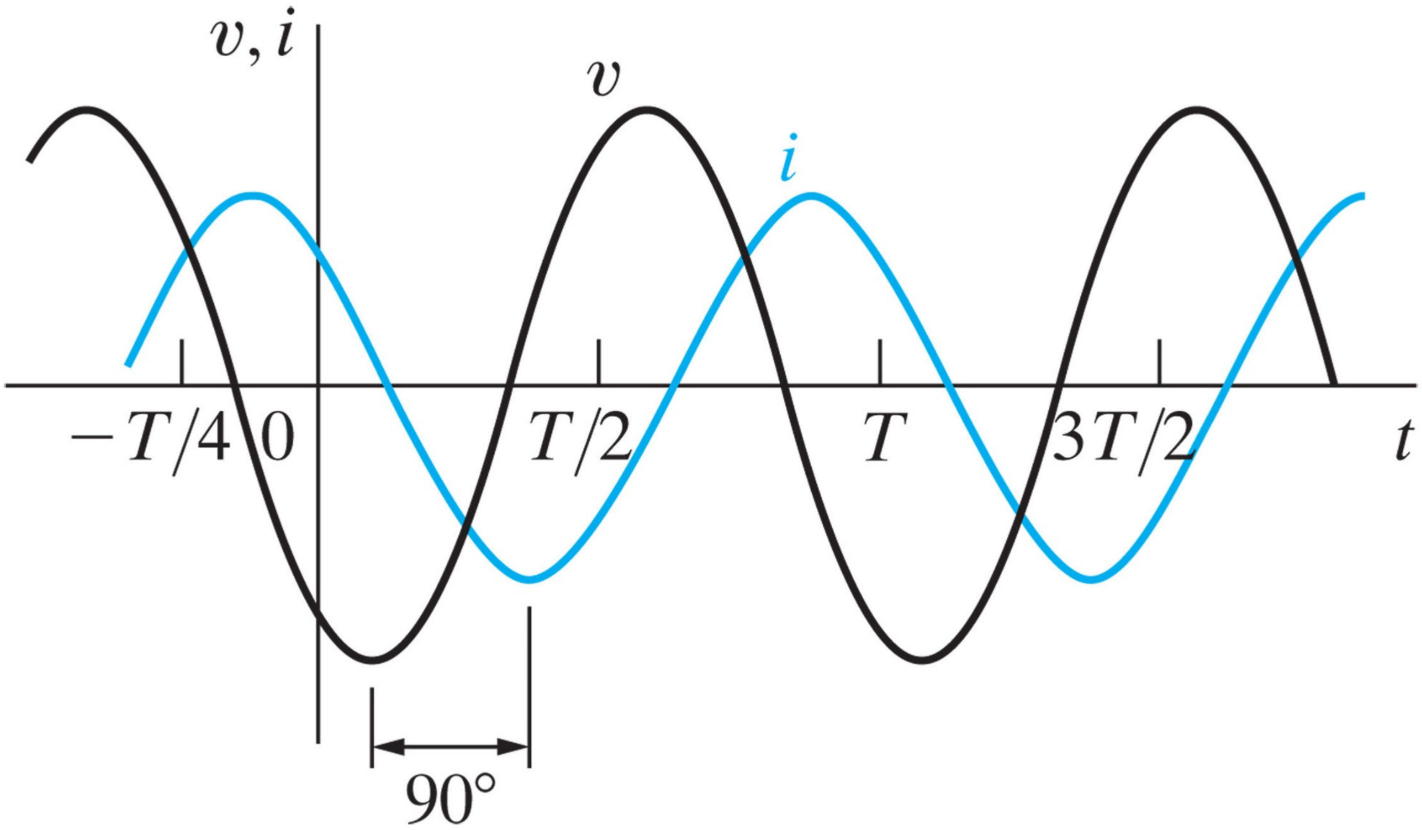
$$= -\omega L I_m e^{j\theta}(-j)$$

$$= j\omega L I_m e^{j\theta} = j\omega L \boldsymbol{I}$$

Dans une inductance, la tension devance le courant de 90º.

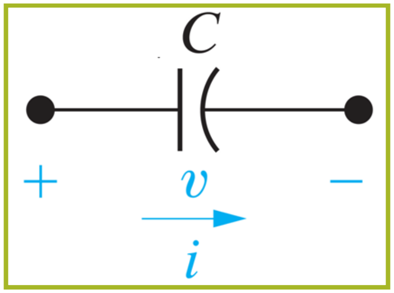
Impédance: jωL

Courant-tension dans l'inductance

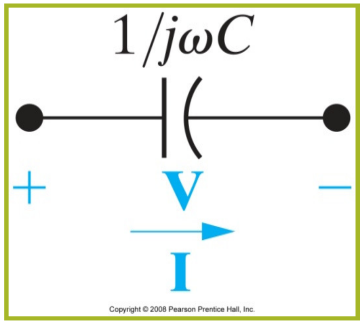


Condensateurs

Domaine temporel



Domaine des phaseurs (fréquentiel)



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$\therefore \quad i(t) = C\, dv(t)/dt$$

$$= -\omega C V_m \sin(\omega t + \theta)$$

$$= -\omega C V_m \cos(\omega t + \theta - 90°)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{P}}$$

$$\boldsymbol{V} = V_m \angle \theta$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I} = -\omega C V_m e^{j(\theta - 90°)}$$

$$= -\omega C V_m e^{j\theta} e^{-j90°}$$

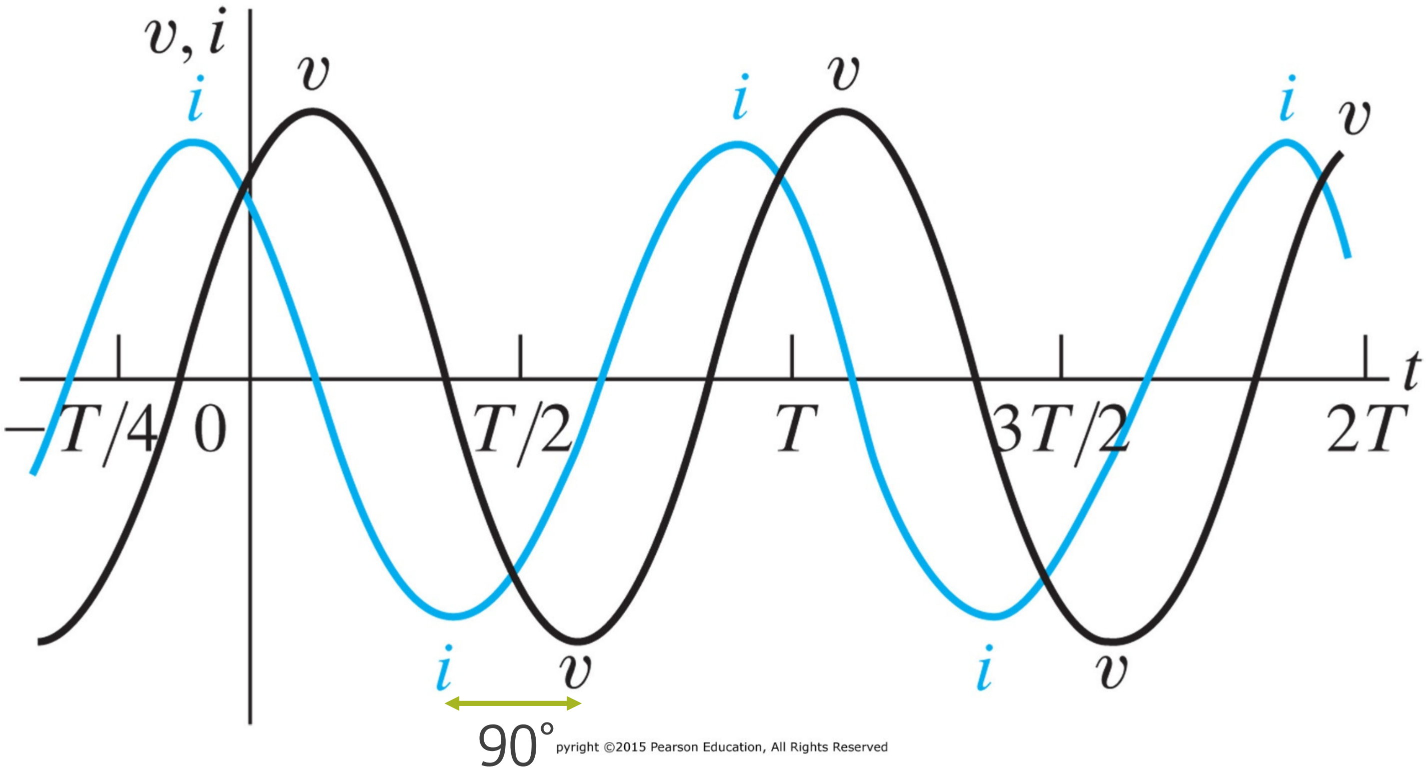
$$= -\omega C V_m e^{j\theta}(-j)$$

$$= j\omega C V_m e^{j\theta} = j\omega C \boldsymbol{V}$$

Dans un condensateur, le courant devance la tension de 90°

Impédance: 1/jωC

Courant-tension dans le condensateur



Pourquoi utiliser les phaseurs dans les circuits?

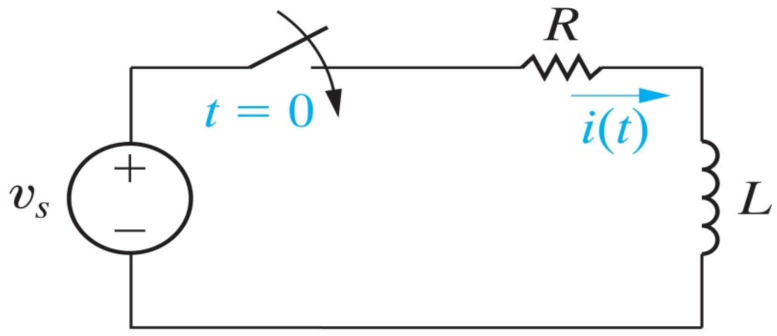
- Les phaseurs ne donnent pas le régime transitoire
- Le circuit doit être linéaire
- La fréquence doit être connue
- On pose aussi l'hypothèse que la variable recherchée est un phaseur

Phaseurs dans les circuits

- En terme de phaseur, la loi des nœuds pour un circuits RL dans le régime permanent nous donne:

$$(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} = V_m e^{j\phi}$$

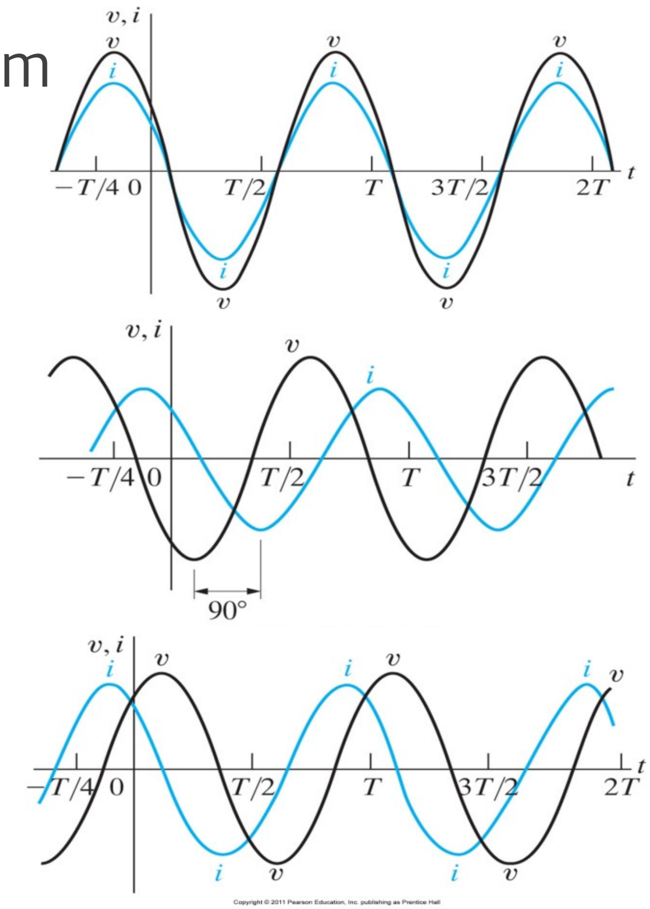
$$(j\omega L + R)I_m \angle\beta = V_m \angle\phi$$



- Et nous pouvons donc trouver directement la valeur du courant

$$I_m e^{j\beta} = \frac{V_m e^{j\phi}}{(j\omega L + R)}$$

Circuits passifs – domaine fréquentiel



- Pour la résistance nous gardons la loi d’ohm

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$$

  – Tension et courant en phase

- Pour les inductances, nous avons:

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

  – La tension est en avance de phase

- Pour les condensateurs, nous obtenons:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$$

- Le courant est en avance de phase

Loi des tensions et courants

- Nous pouvons donc généraliser la loi d'ohm:

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

impédance

- Avec cette définition, on peut appliquer:
  - les lois des tensions et courants
  - les simplifications série et parallèle,
  - la transformation Y-Δ,
  - les équivalents Thévenin et Norton,
  - les méthodes des mailles et des nœuds
  - superposition

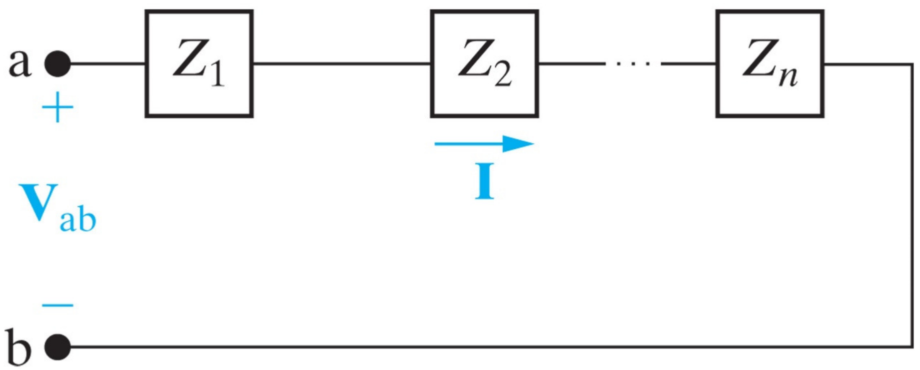
L’impédance des composants

- Considérons les équations qui relient la tension et le courant dans une résistance, un inducteur et un condensateur dans le domaine temporel et dans le domaine des phaseurs (ou domaine fréquentiel).

$$Z = R + j\,X$$

R: Résistance
X: Réactance

Combinaison d'impédances



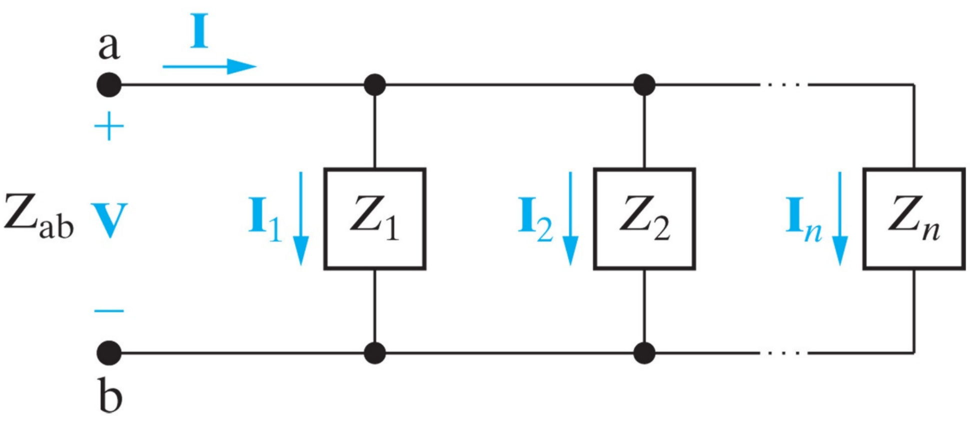
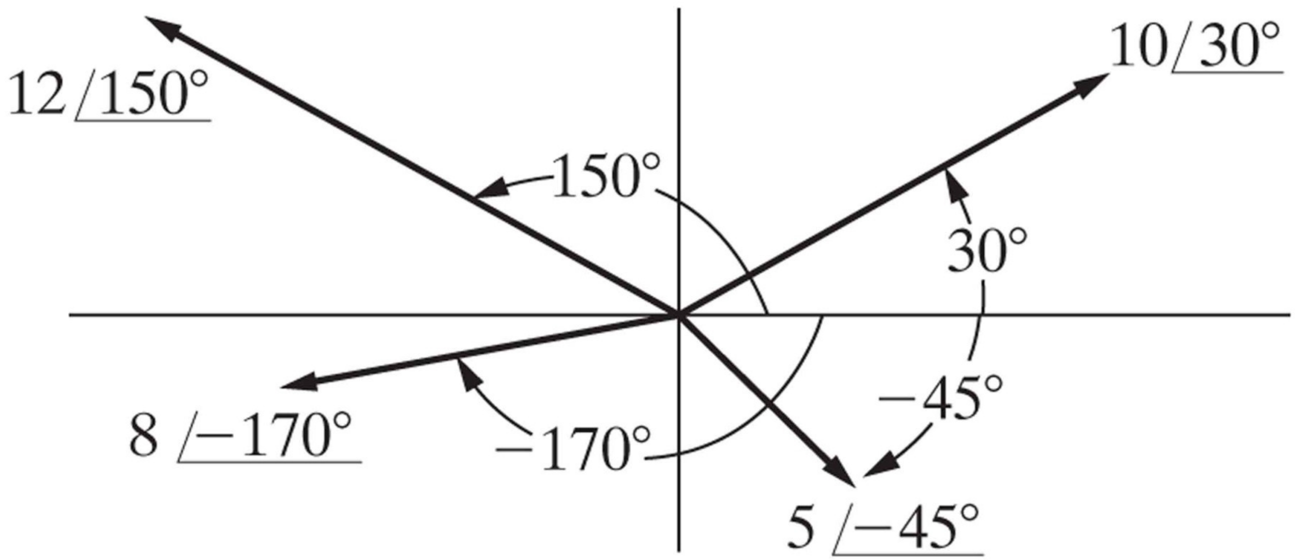
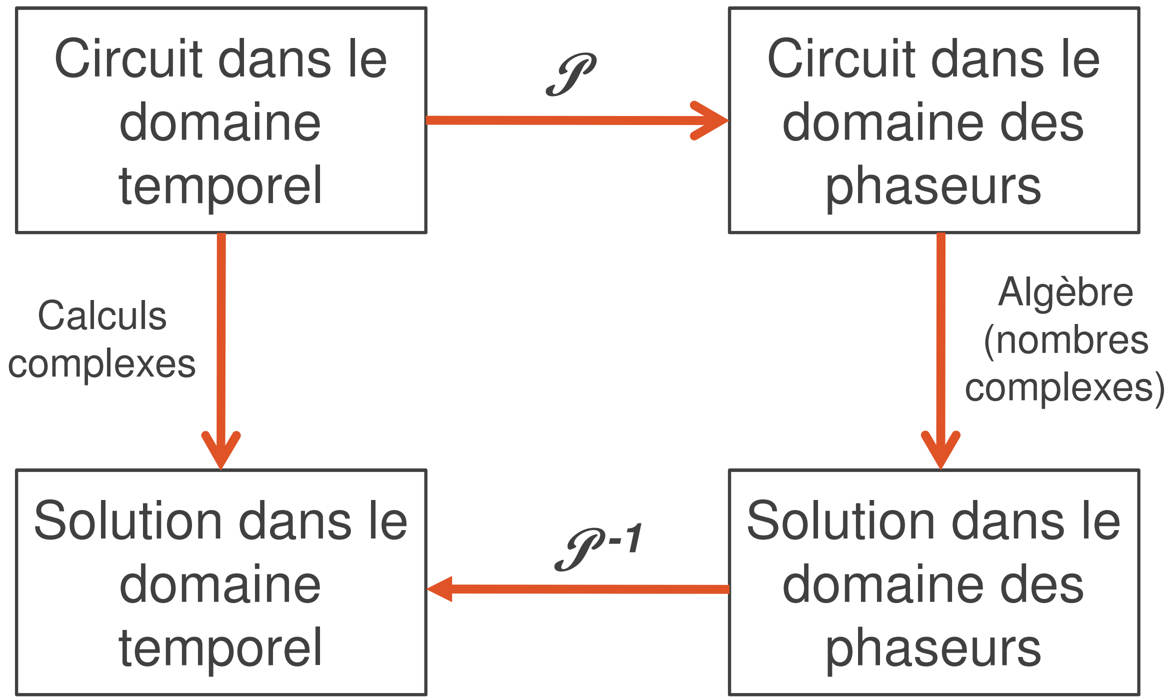


Diagramme de Phase

- Une représentation cartésienne des phaseurs permet de bien illustrer la relation entre les différentes variables



Relation entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel



Étapes de résolution de problème avec phaseurs

1. Redessiner le circuit (la transformée en phaseur ne change pas les composants ou leurs connexions).
2. Transformer en phaseurs tous les $v(t)$ et $i(t)$ connus.
3. Représenter les tensions et des courants inconnus avec $\vec{V}$ et $\vec{I}$.
4. Remplacer les valeurs des composants par les valeurs d'impédance ($\vec{Z}$).
5. Utiliser n'importe quelle méthode d'analyse de circuit pour écrire des équations et les résoudre avec une calculatrice.
6. Utiliser la transformation inverse pour passer de la réponse en phaseur à une réponse temporelle.

Résumé (1)

– Dans le domaine temporel:
  - Résistance : $v(t) = Ri(t)$
  - Inductance: $v(t) = Ldi(t)/dt$
  - Condensateur: $i(t) = Cdv(t)/dt$

– Dans le domaine fréquentiel (phaseurs) $\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$
  - Z est l'impédance, définie comme la rapport entre $\mathbf{V}$ et $\mathbf{I}$
  - Z a l'unité de Ohms [Ω]
  - Résistance: $Z_R = R$
  - Inductance: $Z_L = j\omega L$
  - Condensateur: $Z_C = 1/j\omega C = -j/\omega C$

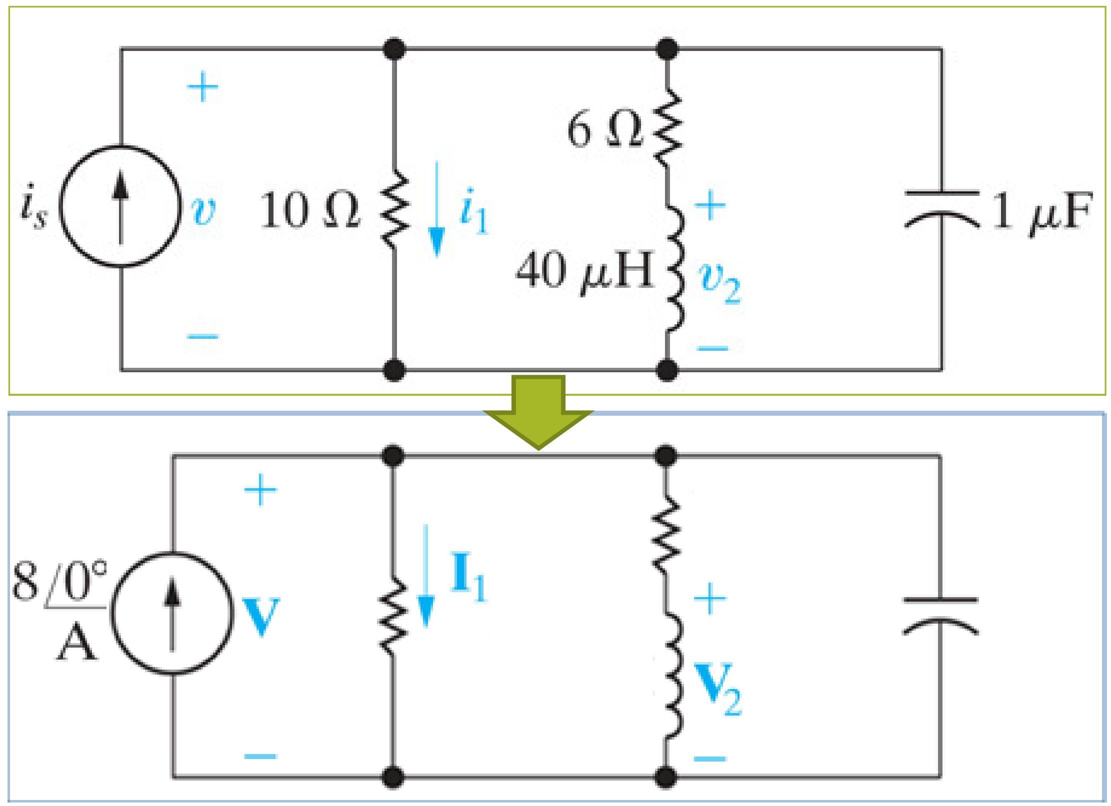
Résumé (2)

– Dans le domaine temporel:
  - La loi de Ohm (pour les résistances): $v = Ri$
  - LKT (autour d'une maille) : $v1 + v2 + \ldots + vn = 0$
  - LKC (à un noeud): $i1 + i2 + \ldots + in = 0$

– Dans le domaine des phaseurs (fréquentiel)
  - La loi de Ohm (pour R, L, C): $V = ZI$
  - LKT (autour d'une maille): $V1 + V2 + \ldots + Vn = 0$
  - LKC (à un noeud): $I1 + I2 + \ldots + In = 0$

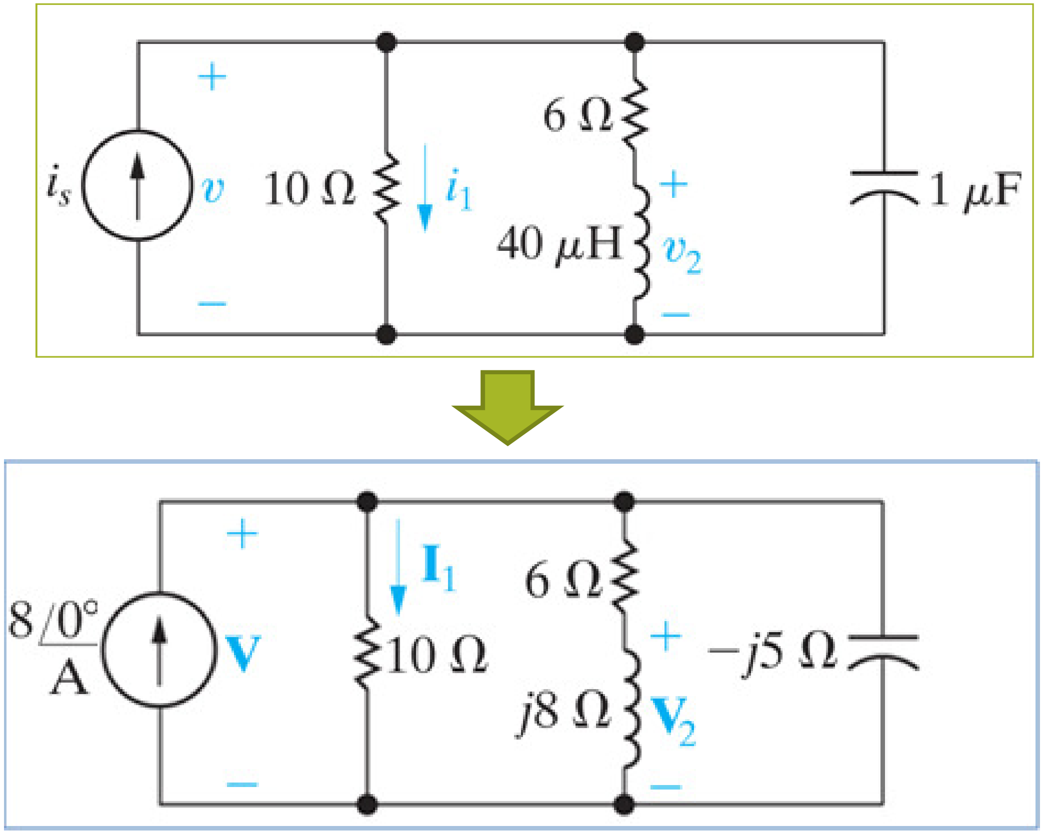
Exemple 1 (1)

- Avec $i_s(t) = 8\cos(200{,}000t)$ [A].
- Trouver $v(t)$, $i_1(t)$ et $v_2(t)$ en régime permanent.



Exemple 1 (2)

- Calcul des impédances

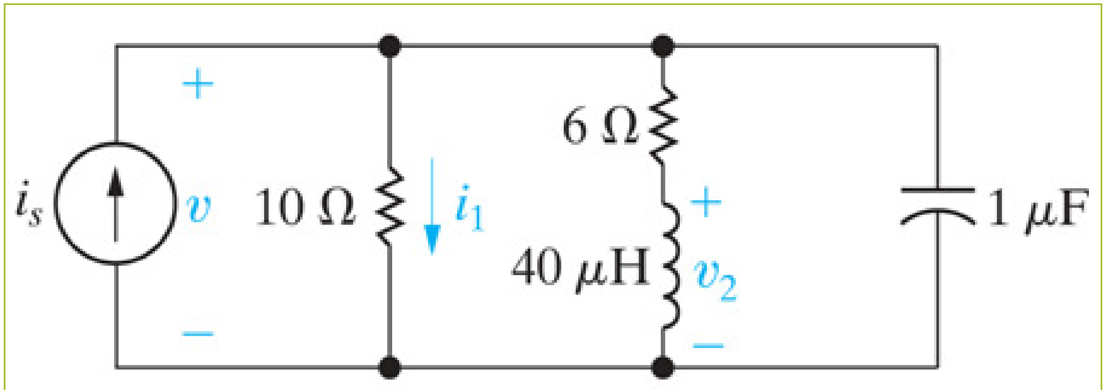


$$Z_L = j\omega L = j(200{,}000)(40\mu) = j8\Omega$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(200{,}000)(1\mu)} = -j5\Omega$$

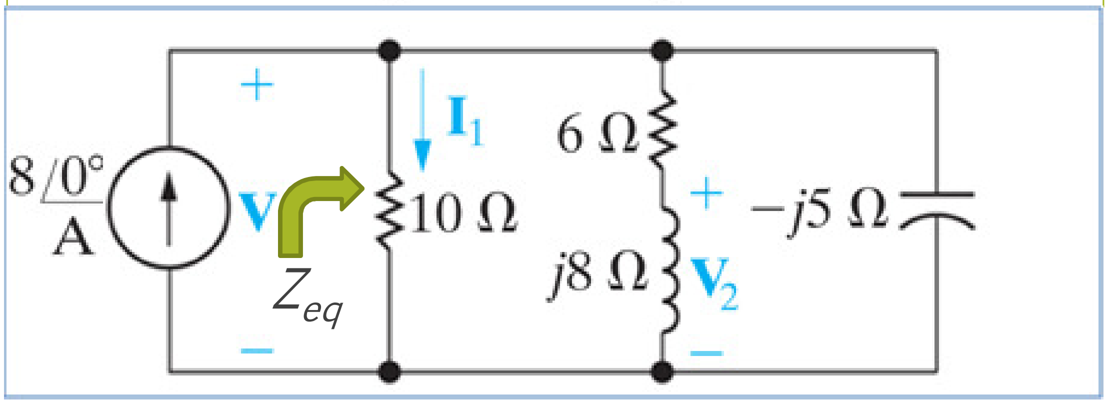
Exemple 1 (3)

- Trouver V



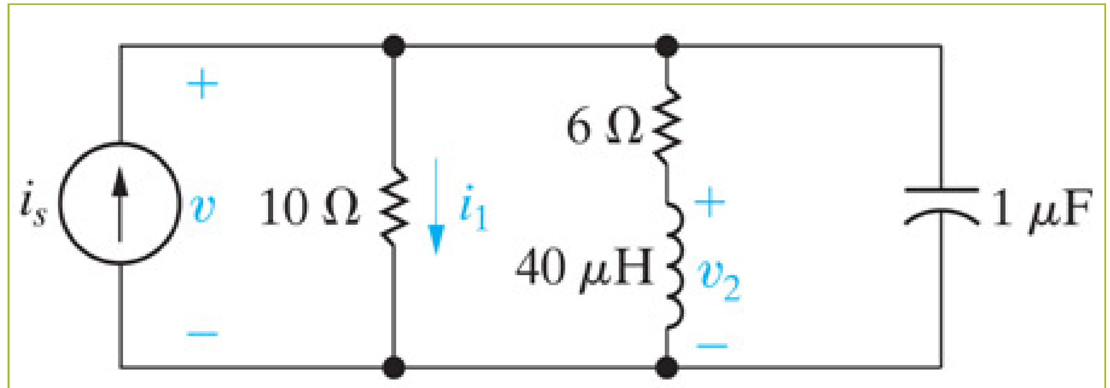
$$Z_{eq} = 10 \,||\, (6 + j8) \,||\, -j5 = (4 - j3)\Omega$$

$$\boldsymbol{V} = Z\boldsymbol{I} = (4 - j3)(8\angle 0°) = (32 - j24)\text{V}$$



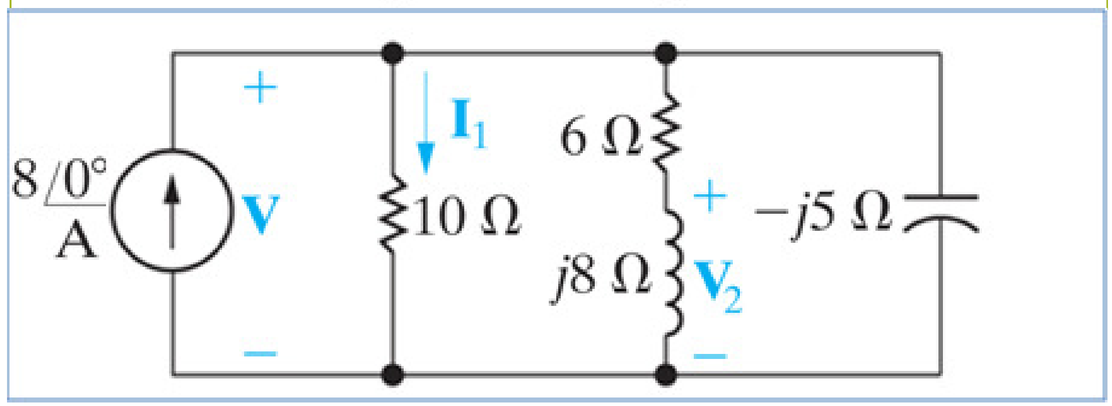
Exemple 1 (4)

- Inverser la réponse vers le domaine temporel



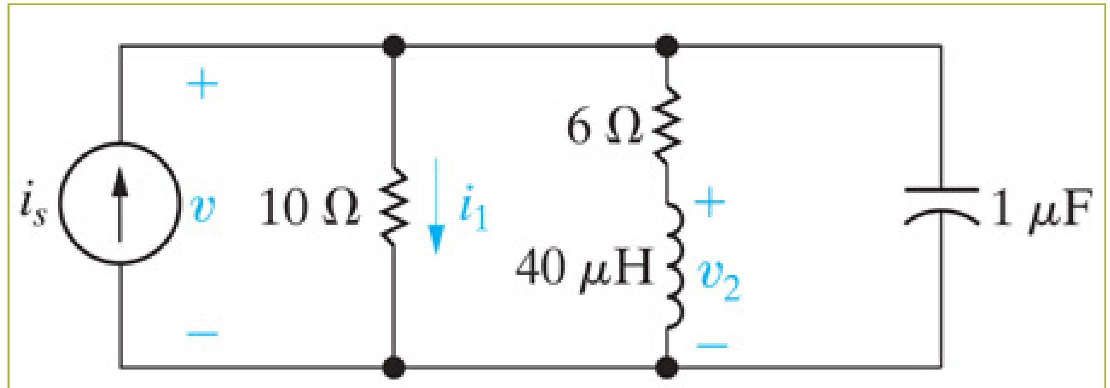
$$\boldsymbol{V} = (32 - j24)\text{V} = 40\angle -36.87° \text{ V}$$

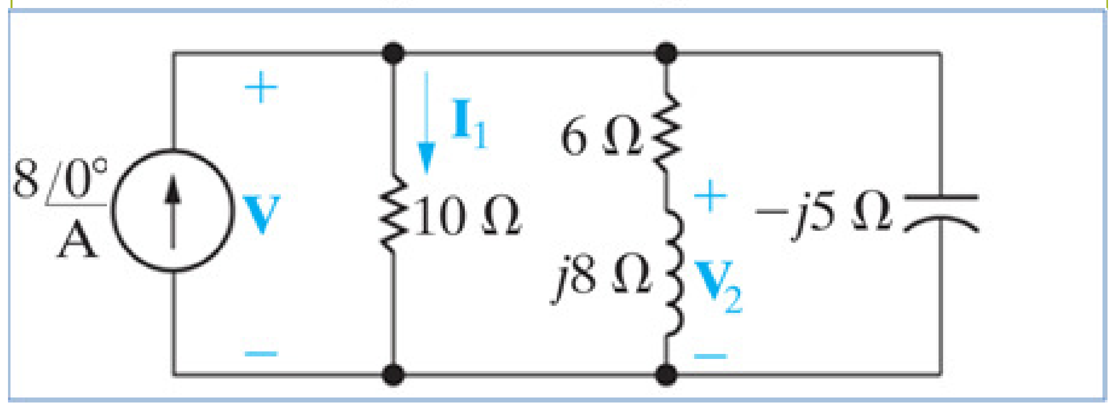
$$v(t) = \mathscr{P}^{-1}\{40\angle -36.87°\}$$
$$= 40\cos(200{,}000t - 36.87°) \text{ V}$$



Exemple 1 (5)

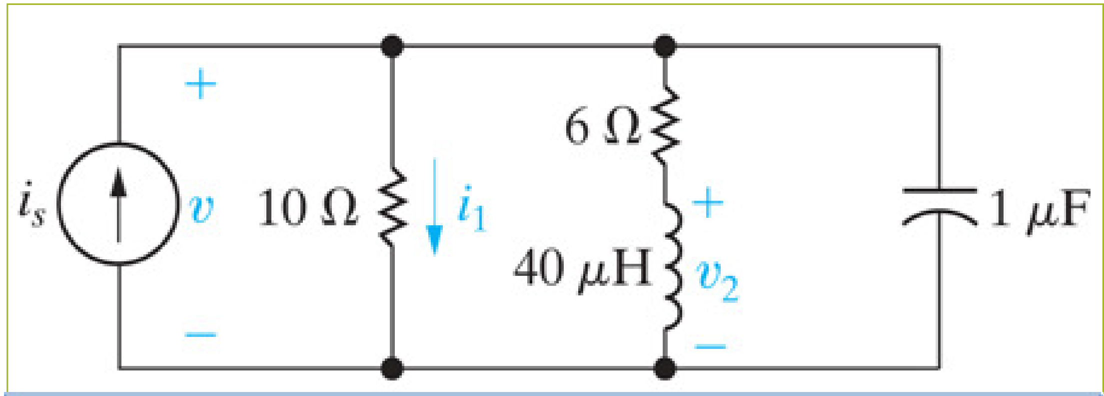
- Trouver I_1

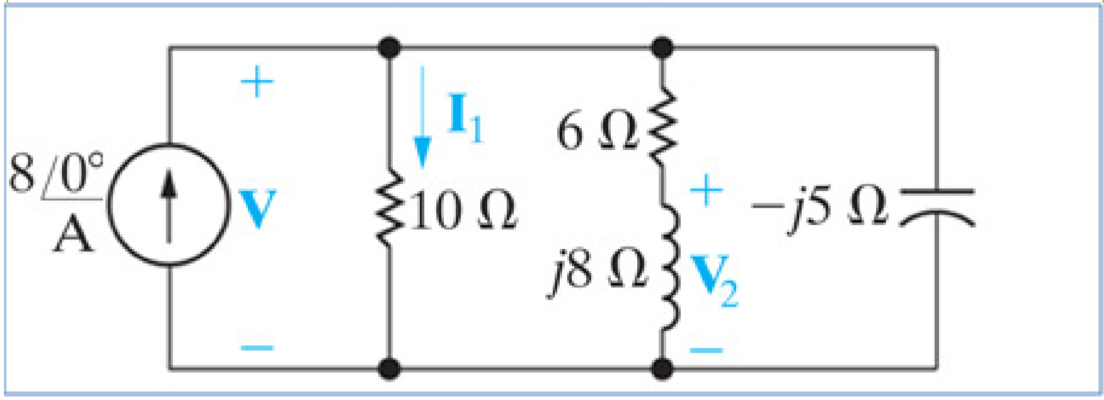




Exemple 1 (6)

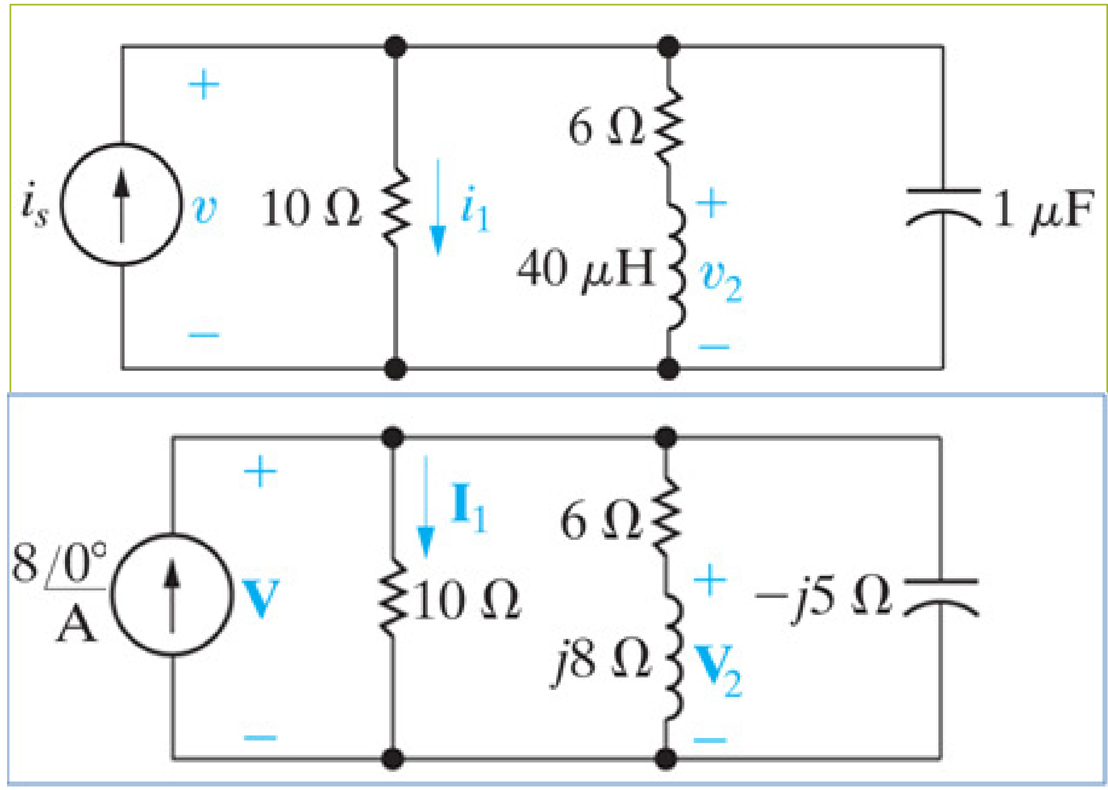
- Trouver $i_1(t)$





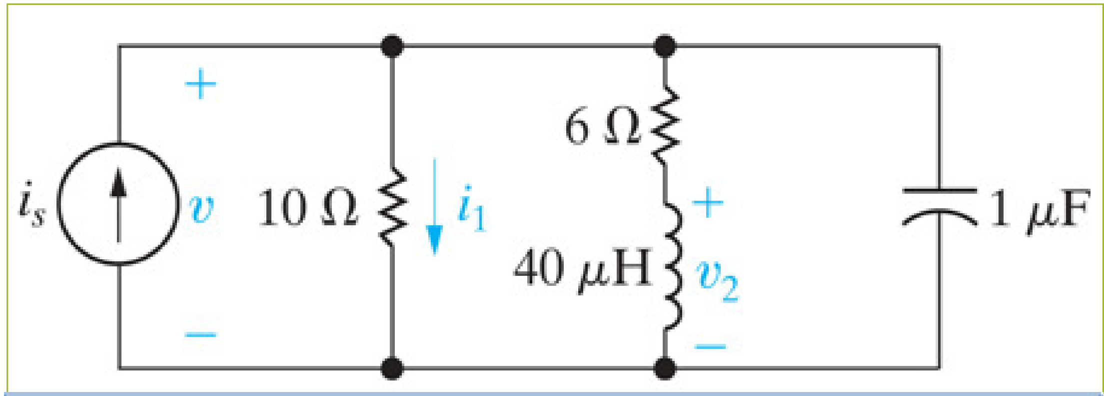
Exemple 1 (7)

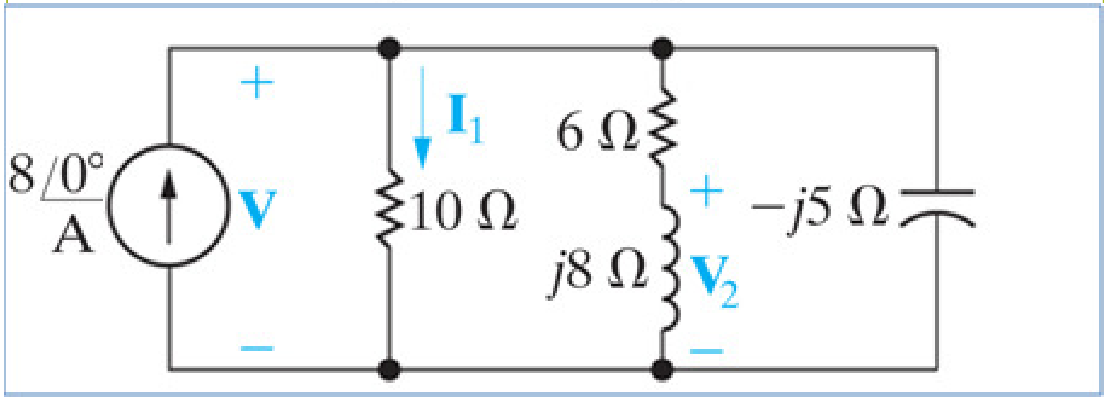
- Trouver V_2



Exemple 1 (8)

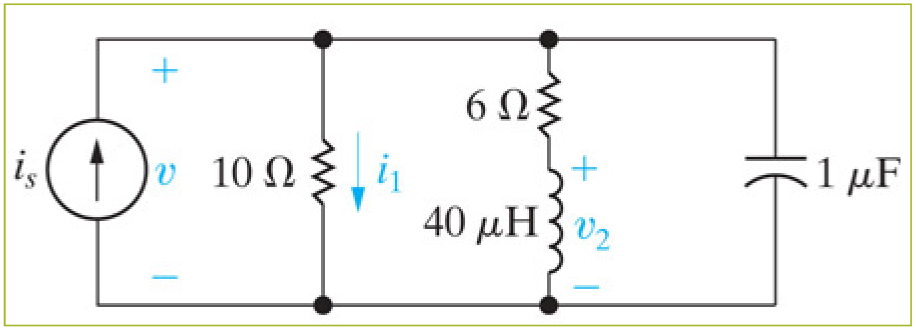
- Trouver $v_2(t)$



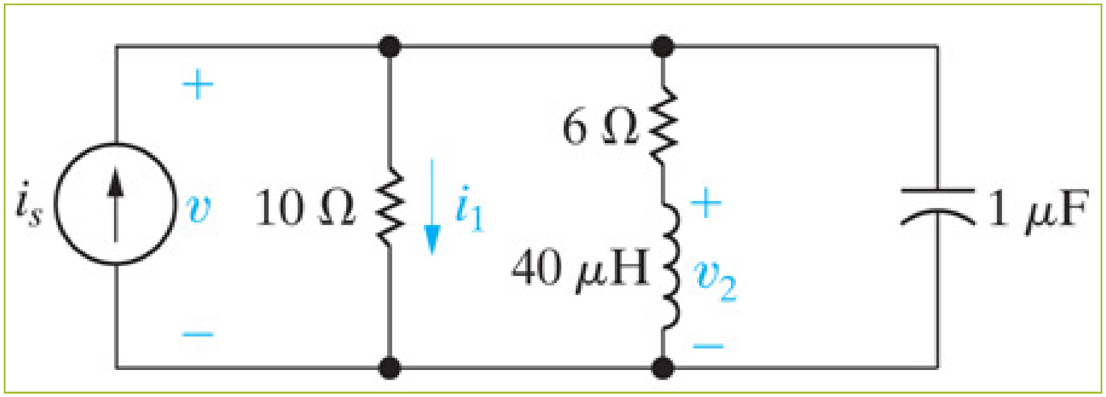


Exemple 1 (9)

- Supposons que nous pouvons faire varier la fréquence de la source de courant. Quelle est la fréquence à laquelle $i_s(t)$ et $v(t)$ sont en phase en régime permanent?
- Il faut trouver la fréquence ω pour que:
  - Les angles de phase de I_S et V sont les mêmes. Cela arrivera si l'impédance équivalente vue par la source de courant a un angle de phase de 0º ou autrement dit l'impédance équivalente vue par la source de courant est purement résistive.



Exemple 1 (10)



$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{6+j\omega L} + j\omega C$$

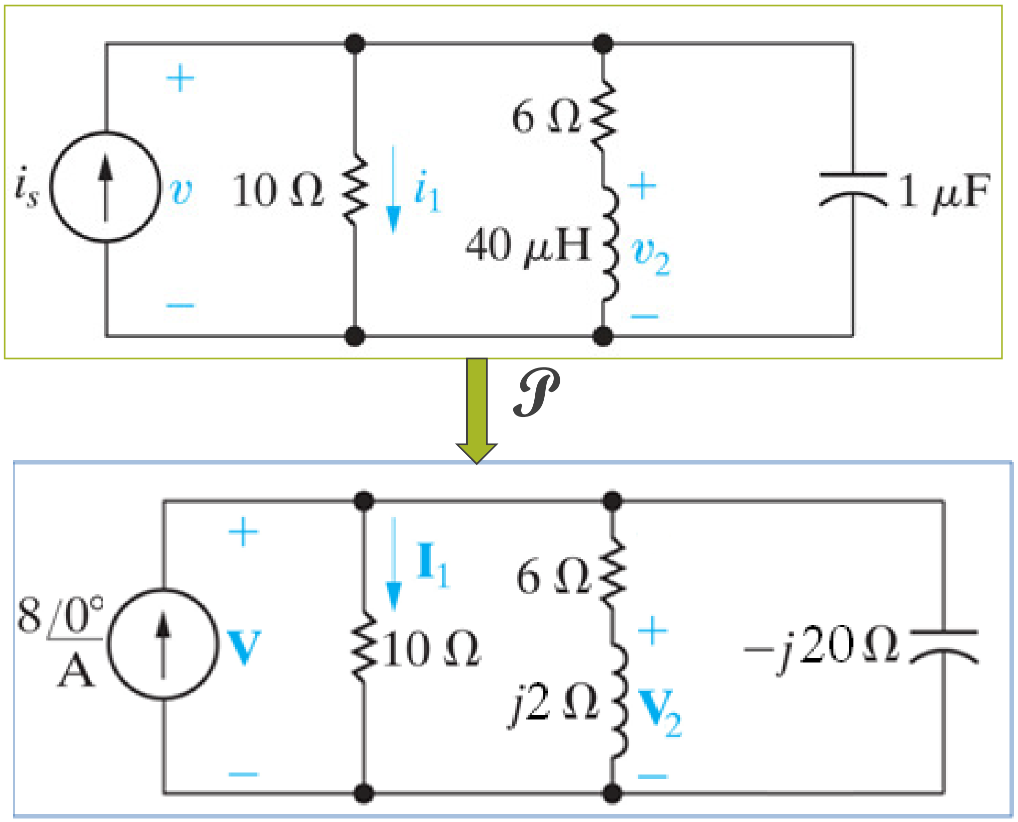
$$= \frac{(6+j\omega L)(6-j\omega L)}{10(6+j\omega L)(6-j\omega L)} + \frac{10(6-j\omega L)}{10(6+j\omega L)(6-j\omega L)} + \frac{10(j\omega C)(6+j\omega L)(6-j\omega L)}{10(6+j\omega L)(6-j\omega L)}$$

$$= \frac{36+\omega^2 L^2 + 60 - 10j\omega L + 10j\omega C(36+\omega^2 L^2)}{10(36+\omega^2 L^2)}$$

$$\mathcal{Im}\left\{\frac{1}{Z_{eq}}\right\} = \frac{-10\omega L + 10\omega C(36+\omega^2 L^2)}{10(36+\omega^2 L^2)} = 0 \qquad \therefore \qquad -10\omega L + 10\omega C(36+\omega^2 L^2) = 0$$

$$\therefore \qquad \omega^2 = \frac{L/C - 36}{L^2} = \frac{40/1 - 36}{(40\mu)^2} \qquad \therefore \qquad \omega = 50{,}000\ rad/s$$

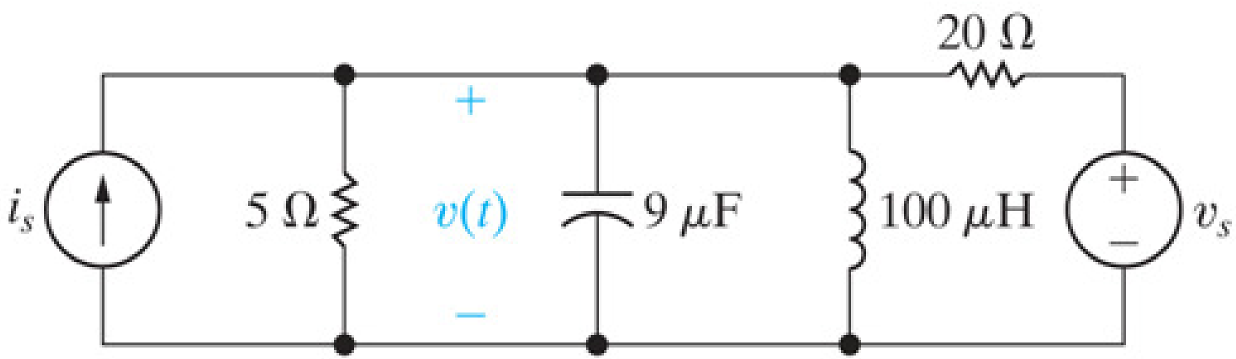
Exemple 1 (11)

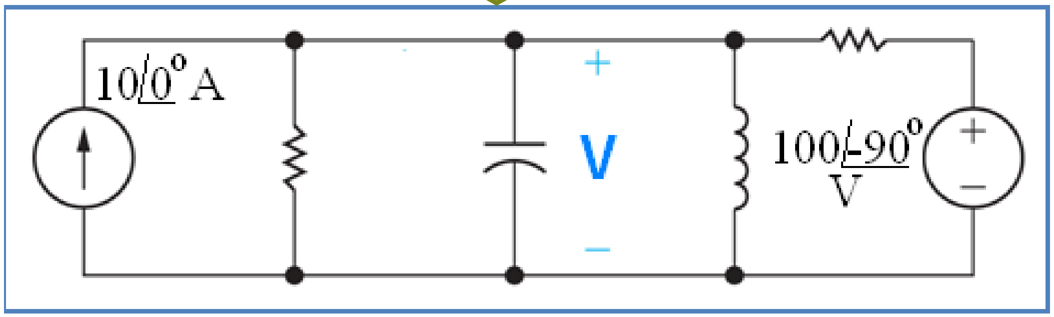


- Calculons les impedances à ω = 50,000 rad/s

Exemple 2 (1)

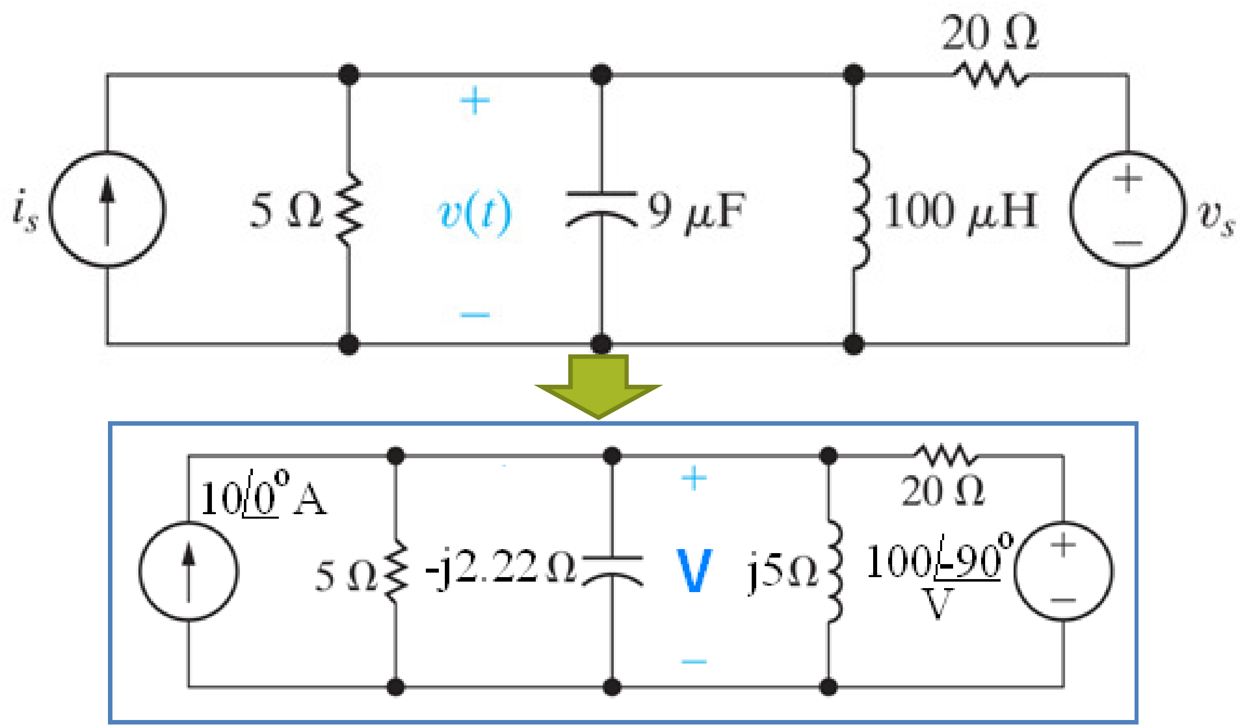
- $i_s(t) = 10\cos(50{,}000t)$ A; $v_s(t) = 100\sin(50{,}000t)$ V.
- Trouver v(t) en régime permanent.





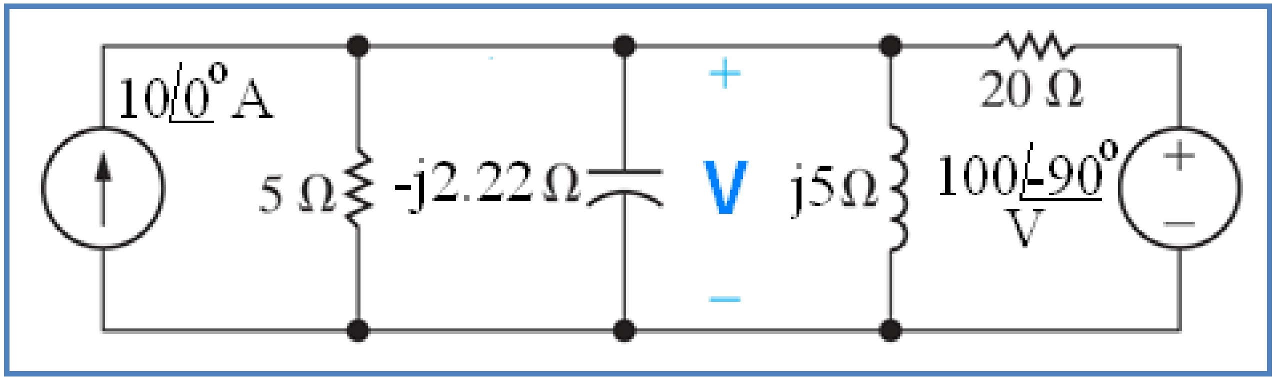
Exemple 2 (2)

- Calculer les impédances



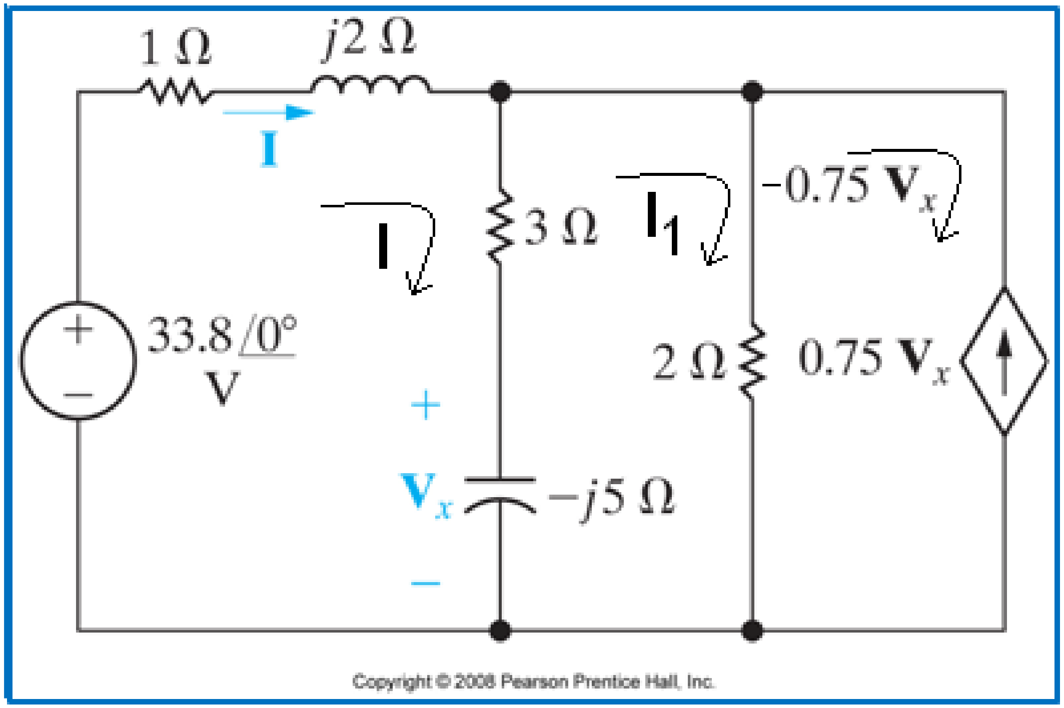
Exemple 2 (3)

- Calculer *V*.



Exemple 3 (1)

- Calculer *I*



Exemple 3 (2)

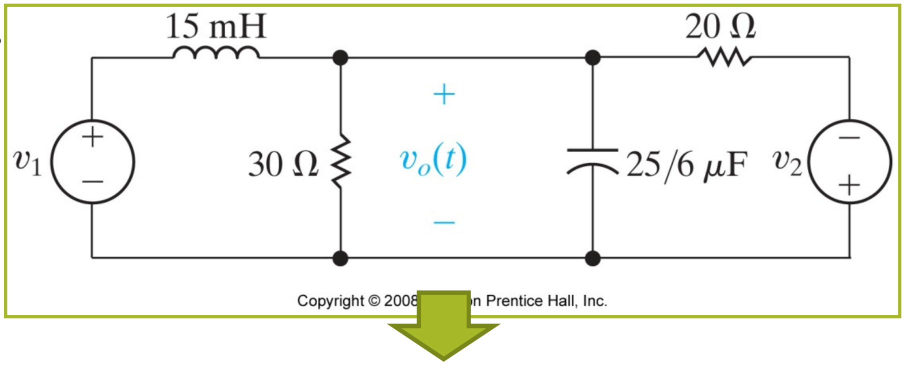
- Résolution du système d'équations.

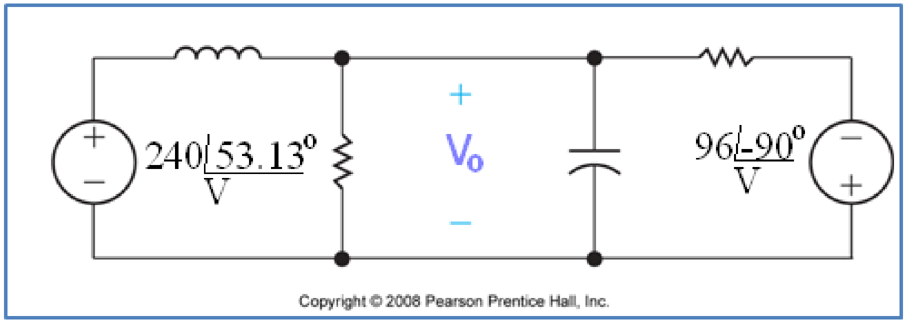
$$\mathbf{I} = 29 + j2 \text{ A} = 29.07\angle 3.95°$$
$$\mathbf{I}_1 = 19.4 + j6 \text{ A} = 20.31\angle 17.19°$$
$$\mathbf{V}_x = -20 - j48 \text{ V} = 52\angle -112.62°$$

- On peut ensuite trouver la représentation temporelle des solutions.

Exemple 4 (1)

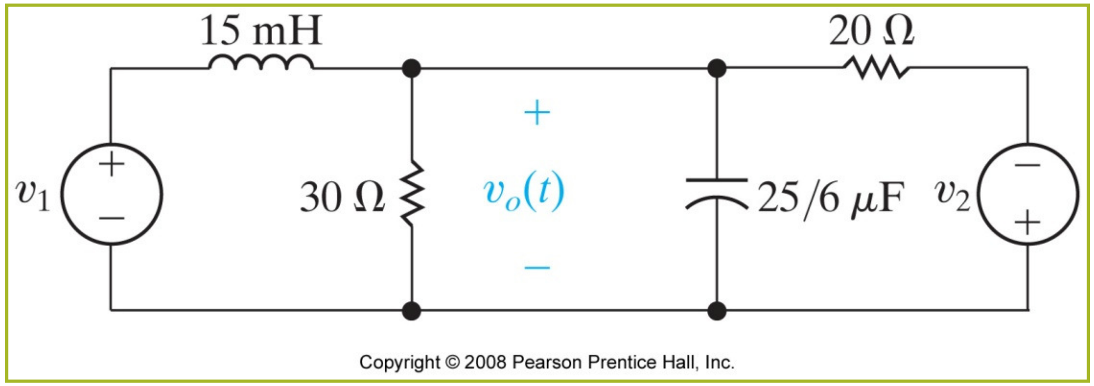
- $v_1(t) = 240 \cos(4000t + 53.13°)$ V; $v_2(t) = 96 \sin(4000t)$ V.
- Trouver $v_o(t)$ en régime permanent en faisant des transformations de source.

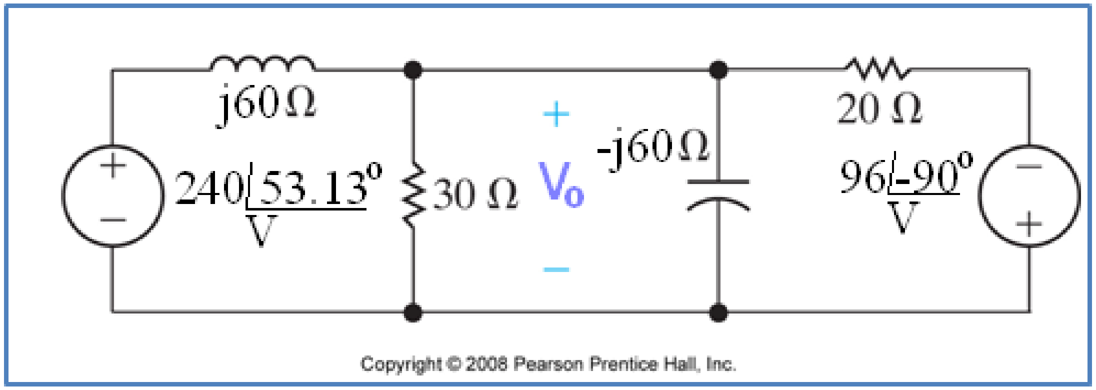




Exemple 4 (2)

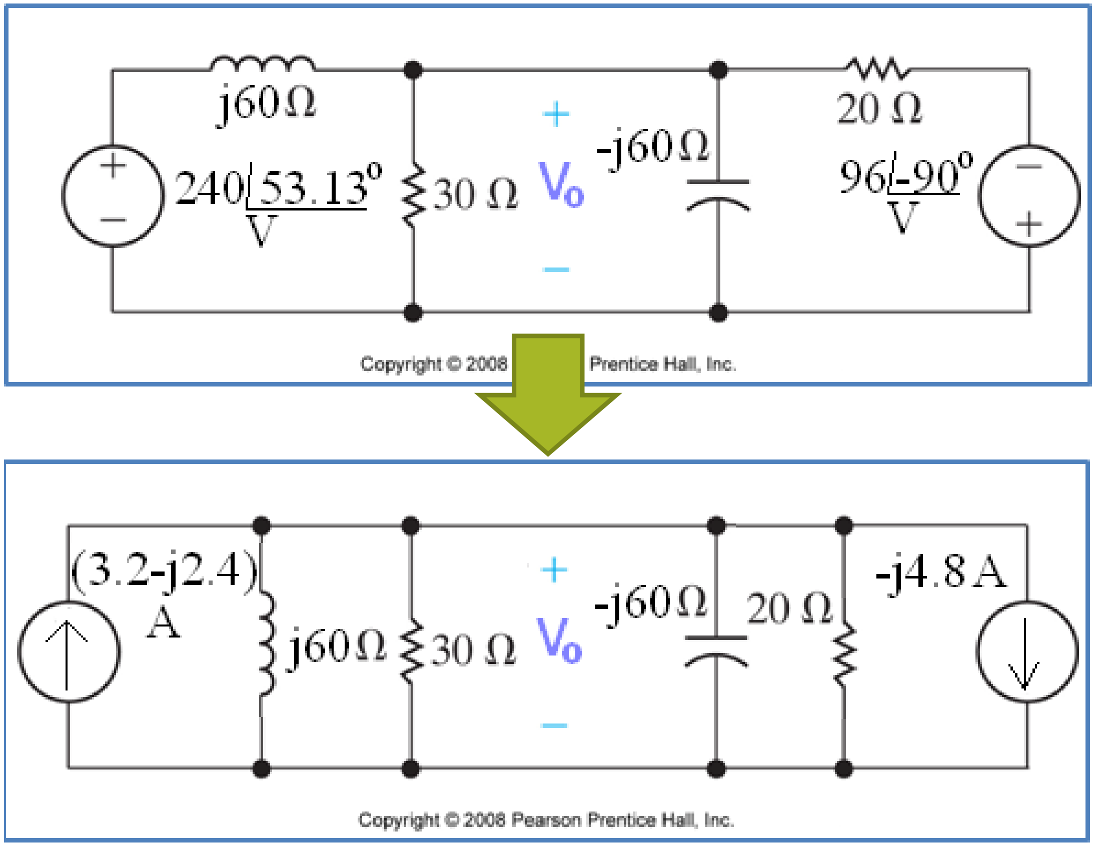
- Calculer les impedances.





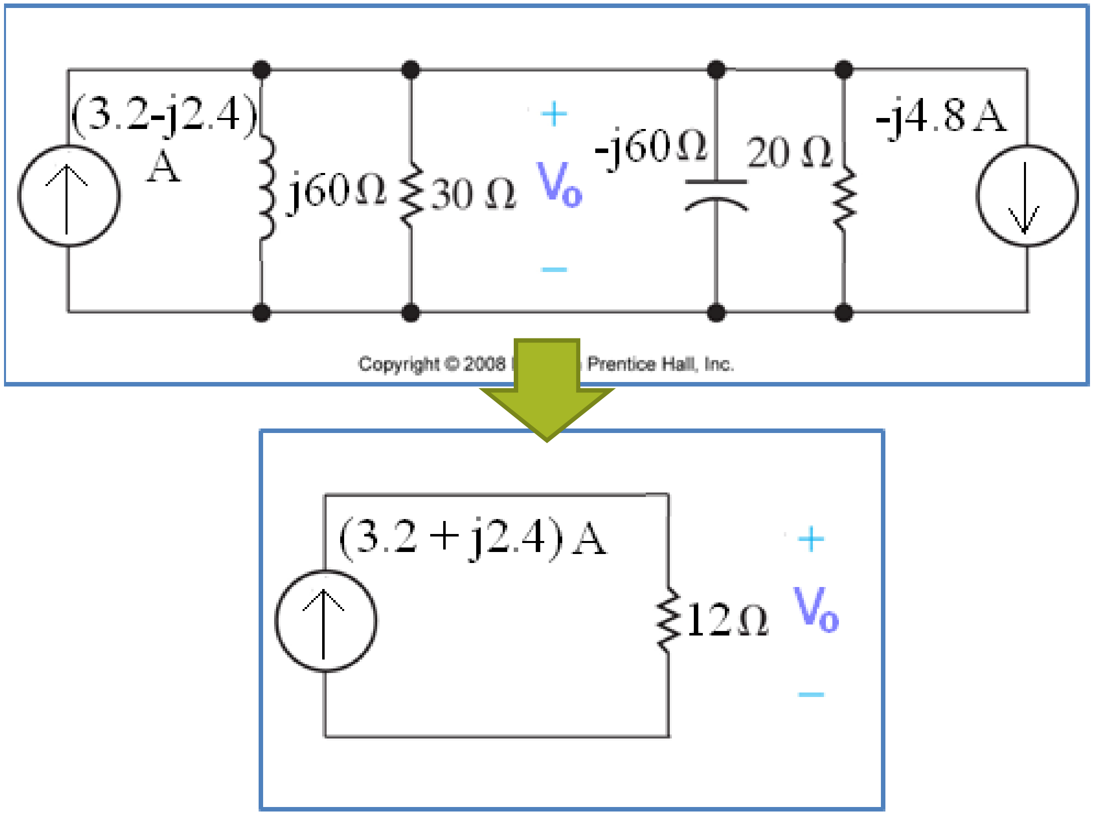
Exemple 4 (3)

- Transformation des sources



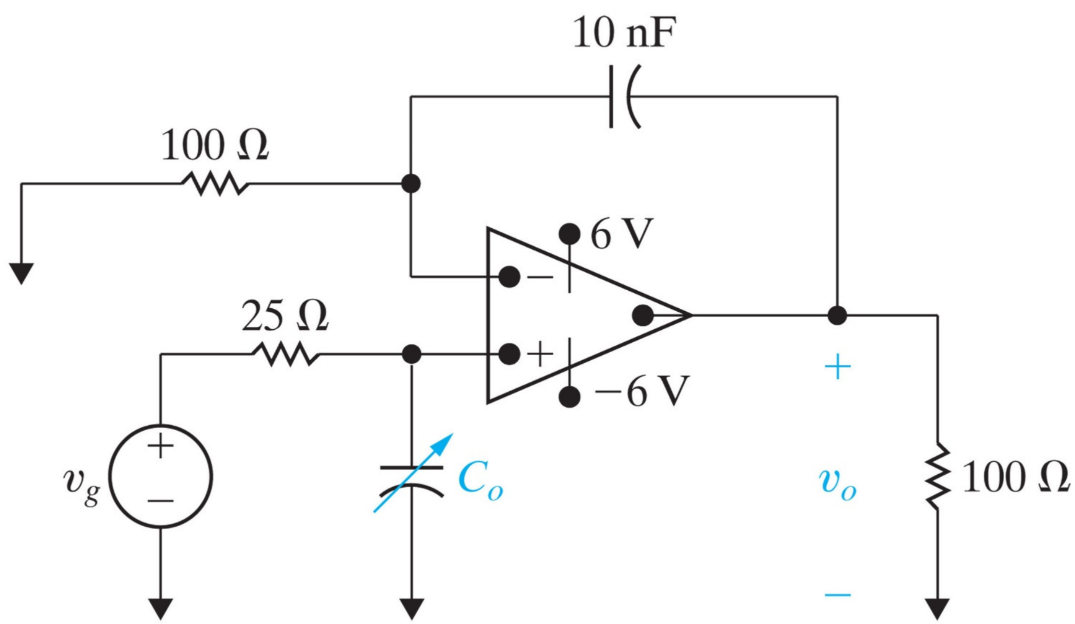
Exemple 4 (4)

- Combinaison des sources et des impédances.



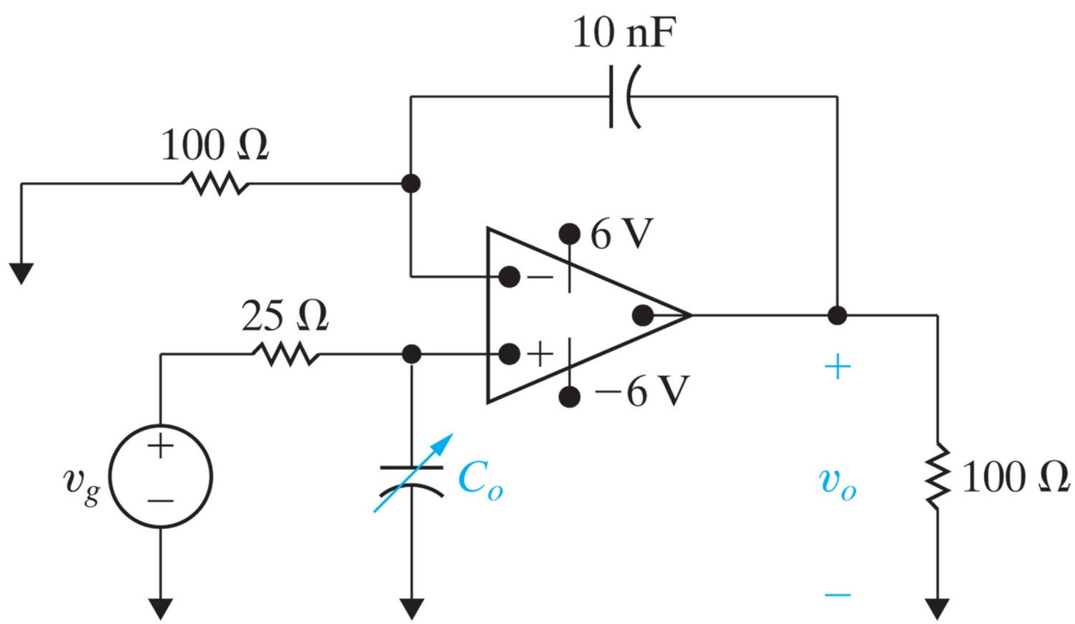
Exemple 5 (1)

- Si $v_g = 30\cos 10^6 t$, trouver la valeur de C_0 pour que l'amplificateur demeure linéaire.



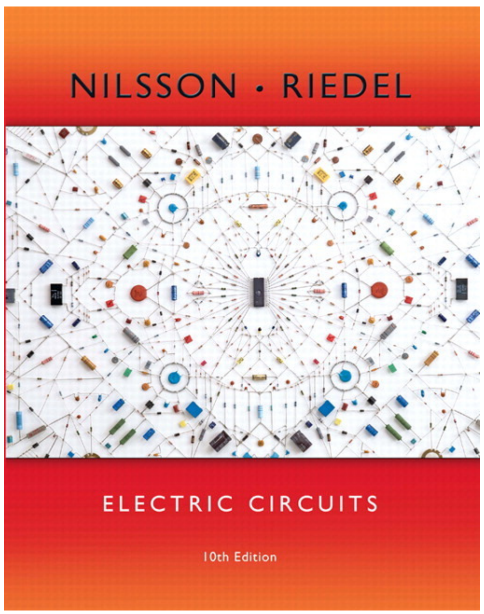
Exemple 5 (2)

- Si $v_g = 30\cos 10^6 t$, trouver la valeur de C_0 pour que l'amplificateur demeure linéaire.



À faire

- À lire: Chapitre 9
- Exercices: Tous les exercices qui possèdent une réponse à la fin du livre



J. W. Nilsson S. Riedel, Electric Circuits, 10e Ed. *Pearson*, 2015.