

常见动态规划模型及其优化

上海市曹杨第二中学 屈运华

区间DP，四边形不等式优化DP，状态压缩DP，单调队列优化DP，背包问题及其优化、斜率优化的DP

动态规划基本模型——区间DP

区间DP是常见的动态规划模型。

我们用“石子合并”问题这个例子来解释区间DP。

区间DP——石子合并

题目描述：有 n 堆石子排成一排，每堆石子有一定的数量。将 n 堆石子并成一堆，每次只能合并相邻的两堆石子，合并的花费为这两堆石子的总数。经过 $n-1$ 次合并后成为一堆，求总的最小花费。

输入：第一行是整数 n ，表示有 n 堆石子。第二行有 n 个数，分别表示这 n 堆石子的数目。

输出：总的最小花费。

输入样例：

3

2 4 5

输出样例：

17

提示：样例的计算过程是：第一次合并 $2+4=6$ ；第二次合并 $6+5=11$ ；总花费 $6+11=17$ 。

区间DP——石子合并

定义 $dp[i][j]$ 为合并第 i 堆到第 j 堆的最小花费。

状态转移方程是：

$$dp[i][j] = \min\{dp[i][k] + dp[k+1][j] + w[i][j]\} \quad i \leq k < j$$

$dp[1][n]$ 就是答案。方程中的 $w[i][j]$ 表示从第 i 堆到第 j 堆的石子总数。

按自顶向下的思路分析状态转移方程，很容易理解。计算大区间 $[i, j]$ 的最优值时，合并它的两个子区间 $[i, k]$ 和 $[k+1, j]$ ，对所有可能的合并（ $i \leq k < j$ ，即 k 在 i 、 j 之间滑动），返回那个最优的合并。子区间再继续分解为更小的区间，最小的区间 $[i, i+1]$ 只包含两堆石子。

区间DP——例题1

题目描述：给定两个长度相等的字符串A、B，由小写字母组成。一次操作，允许把A中的一个连续子串（区间）都转换为某个字符（就像用刷子刷成一样的字符）。要把A转换为B，问最少操作数是多少？

输入：第一行是字符串A，第二行是字符串B。两个字符串的长度不大于100。

输出：一个表示答案的整数。

输入样例：

zzzzzfzzzzz

abcdefedcba

输出样例：

6

提示：第1次把zzzzzfzzzzz转换为aaaaaaaaaaa，第2次转为abbbbbbbbbbba，第3次转为abccccccccba...

题目网址

<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2476>

区间DP——例题1分析

(1) 从空白串转换到B

先考虑简单一点的问题：从空白串转换到B。为方便阅读代码，把字符串存储为 $B[1] \sim B[n]$ ，不从0开始，编码的时候这样输入：`scanf("%s%s", A+1, B+1)`。

如何定义DP状态？可以定义 $dp[i]$ ，表示在区间 $[1, i]$ 内转换为B的最少步数。或者更进一步，定义 $dp[i][j]$ ，表示在区间 $[i, j]$ 内从空白串转换到B时的最少步数。重点是区间 $[i, j]$ 两端的字符 $B[i]$ 和 $B[j]$ ，分析以下两种情况。

1) 若 $B[i] = B[j]$ 。第一次刷用 $B[i]$ 把区间 $[i, j]$ 刷一遍，这个刷法肯定是最优的。如果分别去掉两个端点，得到2个区间 $[i+1, j]$ 、 $[i, j-1]$ ，这2个区间的最小步数相等，也等于原区间 $[i, j]$ 的最小步数。例如 $B[i, j] = \text{"abbba"}$ ，先用"a"全部刷一遍，再刷1次"bbb"，共刷2次。如果去掉第一个"a"，剩下的"bbba"，也是刷2次。

2) 若 $B[i] \neq B[j]$ 。因为两端点不等，至少要各刷1次。用标准的区间操作，把区间分成 $[i, k]$ 和 $[k+1, j]$ 两部分，枚举最小步数。

区间DP——例题1分析

(2) 从A转换到B

如何求 $dp[1][j]$? 观察A和B相同位置的字符, 分析以下两种情况.

1) 若 $A[j] = B[j]$ 。这个字符不用转换, 有 $dp[1][j] = dp[1][j-1]$ 。

2) 若 $A[j] \neq B[j]$ 。仍然用标准的区间DP, 把区间分成 $[1,k]$ 和 $[k+1,j]$ 两部分, 枚举最小步数。这里利用了上一步从空白转换到B的结果, 当区间 $[k+1,j]$ 内A和B的字符不同时, 从A转到B, 与从空白串转换到B是等价的。

区间DP——例题2

题目描述：n个男孩去相亲，排成一队上场。大家都不想等，排队越靠后越愤怒。每人的耐心不同，用D表示火气，设男孩i的火气是 D_i ，他排在第k个时，愤怒值是 $(k-1) * D_i$ 。导演不想看到的，会场气氛紧张。他安排了一个黑屋，可以调整这排男孩上场的顺序，屋子很狭长，先进去的男孩最后出来（黑屋就是一个堆栈）。例如，当男孩A排到时，如果他后面的男孩B火气的更大，就把A送进黑屋，让B先上场。一般情况下，那些火气小的男孩要多等等，让火气大的先上场。不过，零脾气的你也不一定吃亏，如果你原本排在倒数第二个，而最后一个男孩的脾气最坏，导演为了让这个刺头第一个上场，把其他人全赶进了黑屋，结果你就排在了黑屋的第1名，第二个上场相亲了。

注意，每个男孩都要进出黑屋。

对所有男孩的愤怒值求和，求所有可能情况的最小和。

输入：第一行包含一个整数T，即数据组数。对于每种情况，第一行是n（ $0 < n \leq 100$ ），后面n行，整数 $D_1 \dots D_n$

输出：对每个用例，输出最小愤怒值之和。

题目网址

<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4283>

区间DP——例题2分析

定义 $dp[i][j]$ ，表示从第 i 个人到第 j 个人，即区间 $[i,j]$ 的最小愤怒值之和。

由于栈的存在，这一题的区间 $[i,j]$ 的分割点 k 比较特殊。分割时，总是用区间 $[i,j]$ 的第一个元素 i 把区间分成两部分，让 i 第 k 个从黑屋出来上场相亲，即第 k 个出栈。根据栈的特性：若第一个元素 i 第 k 个出栈，则第二到 $k-1$ 个元素肯定在第一个元素之前出栈，第 $k+1$ 到最后一个元素肯定在第 k 个之后出栈。

例如，5个人排队序号是1、2、3、4、5。如果要第1 ($i=1$) 个人第3 ($k=3$) 个出场，那么栈的操作是这样：1进栈、2进栈、3进栈、3出栈、2出栈，1出栈。2号、3号在1号之前出栈，1号第3个出栈，4号5号在1号后面出栈。

区间DP——例题2分析

分割点 k ($1 \leq k \leq j-i+1$) 把区间划分成了两段, 即 $dp[i+1][i+k-1]$ 和 $dp[i+k][j]$ 。 $dp[i][j]$ 的计算分为三部分:

- (1) $dp[i+1][i+k-1]$ 。原来 i 后面的 $k-1$ 个人, 现在排到 i 前面了。
- (2) 第 i 个人往后挪了 $k-1$ 个位置, 愤怒值加上 $D[i]*(k-1)$ 。
- (3) $dp[i+k][j] + k*(sum[j]-sum[i+k-1])$ 。第 k 个位置后面的人, 即区间 $[i+k, j]$ 的人, 由于都在前 k 个人之后, 相当于从区间的第1个位置往后挪了 k 个位置, 所以整体愤怒值要加上 $k*(sum[j]-sum[i+k-1])$ 。其中 $sum[j] = \sum_{i=1}^j D_i$, 是 $1 \sim j$ 所有人 D 值的和, $sum[j]-sum[i+k-1]$ 是区间 $[i+k, j]$ 内这些人的 D 值和。

二维区间DP

区间 $[i,j]$ 可以看成在一条直线上移动，即一维DP。

下面我们给出一个二维区间DP的例题，它的区间同时在两个方向移动。

二维区间DP——例题3 CF1199 F

题目描述：有一个 $n \times n$ 大小的方格图，某些方格初始是黑色，其余为白色。一次操作，可以选定一个 $h \times w$ 的矩形，把其中所有方格涂成白色，代价是 $\max(h, w)$ 。要求用最小的代价把所有方格变成白色。

输入：第1行是整数 n ，表示方格的大小。后面有 n 行，每行长度为 n 的串，包含符号'.'和'#'，'.'表示白色，'#'表示黑色。第 i 行的第 j 个字符是 (i, j) 。 $n \leq 50$ 。

输出：打印一个整数，表示把所有方格涂成白色的最小代价。

输入样例：

```
5
#...#
.#.#.
...
.#...
#...
```

输出样例：

```
5
```

二维区间DP——例题3分析

设矩形区域从左下角坐标 $(x1, y1)$ 到右上角坐标 $(x2, y2)$ 。定义状态 $dp[x1][y1][x2][y2]$ ，表示把这个区域内染成白色的最小代价。

这个区域可以分别按x轴或者按y轴分割成两个矩形，遍历所有可能的分割，求最小代价。那么从x方向看，就是一个区间DP；从y方向看，也是一个区间DP。

代码可以完全套用前面一维DP的模板，分别在两个方向操作。

(1) x方向，区间分为 $[x1, k]$ 和 $[k+1, x2]$ 。状态转移方程是：

$$dp[x1][y1][x2][y2] = \min(dp[x1][y1][x2][y2], dp[x1][y1][k][y2] + dp[k+1][y1][x2][y2])$$

(2) y方向，区间分为 $[y1, k]$ 和 $[k+1, y2]$ 。状态转移方程是：

$$dp[x1][y1][x2][y2] = \min(dp[x1][y1][x2][y2], dp[x1][y1][x2][k] + dp[x1][k+1][x2][y2])$$

区间DP优化——四边形不等式

有一些常见的DP问题，通常是区间DP问题，它的状态转移方程是：

$$dp[i][j] = \min(dp[i][k] + dp[k+1][j] + w[i][j])$$

其中 $i \leq k < j$ ，初始值 $dp[i][i]$ 已知。 $\min()$ 也可以是 $\max()$ 。

方程的含义是：

(1) $dp[i][j]$ 表示从 i 状态到 j 状态的最小花费。题目一般是求 $dp[1][n]$ ，即从起始点1到终点 n 的最小花费。

(2) $dp[i][k] + dp[k+1][j]$ 体现了递推关系。 k 在 i 和 j 之间滑动， k 有一个最优值，使得 $dp[i][j]$ 最小。

(3) $w[i][j]$ 的性质非常重要。 $w[i][j]$ 是和题目有关的费用，如果它满足四边形不等式和单调性，那么用DP计算 dp 的时候，就能进行四边形不等式优化。

这类问题的经典的例子是“石子合并”，它的转移矩阵就是上面的 $dp[i][j]$ ， $w[i][j]$ 是从第 i 堆石子到第 j 堆石子的总数量。

区间DP优化——四边形不等式

只需一个简单的优化操作，就能把上面代码的复杂度变为 $O(n^2)$ 。
这个操作就是把循环 $i \leq k < j$ 改为： $s[i][j-1] \leq k \leq s[i+1][j]$ 其中 $s[i][j]$ 记录从 i 到 j 的最优分割点。

在计算 $dp[i][j]$ 的最小值时得到区间 $[i,j]$ 的分割点 k ，记录在 $s[i][j]$ 中，用于下一次循环。

区间DP优化——四边形不等式

```
for(i = 1; i <= n; i++){
    dp[i][i] = 0;
    s[i][i] = i; //s[][]的初始值
}
for(int len = 2; len <= n; len++){
    for(int i = 1; i <= n-len+1; i++){
        int j = i + len - 1;
        for(k = s[i][j - 1]; k <= s[i + 1][j]; k++){ //缩小循环范围
            if(dp[i][j] > dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j]){ //是否更优
                dp[i][j] = dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j];
                s[i][j] = k; //更新最佳分割点
            }
        }
    }
}
```

区间DP优化——四边形不等式

代码的复杂度是多少？

代码i和k这2个循环，优化前是 $O(n^2)$ 的。优化后，每个i内部的k的循环次数是 $s[i+1][j]-s[i][j-1]$ ，其中 $j=i+len-1$ 。那么：

i=1时， k循环 $s[2][len]-s[1][len-1]$ 次。

i=2时， k循环 $s[3][len+1]-s[2][len]$ 次。

i=n-len+1时， k循环 $s[n-len+2][n]-s[n-len+1][n+1]$ 次。

上述次数相加，总次数：

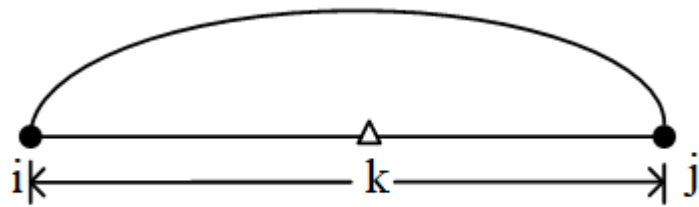
$$s[2][len]-s[1][len-1]+s[3][len+1]-s[2][len]+\dots+s[n+1][n]-s[n][n]$$

$$=s[n-len+2][n]-s[1][len-1]$$

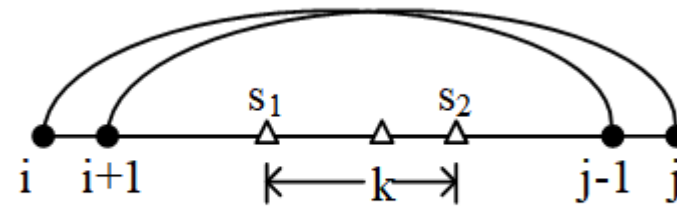
$$<n$$

区间DP优化——四边形不等式

下图给出了四边形不等式优化的效果， $s1$ 是区间 $[i, j-1]$ 的最优分割点， $s2$ 是区间 $[i+1, j]$ 的最优分割点。



(1) 优化前 k 的滑动范围



(2) 优化后 k 的滑动范围

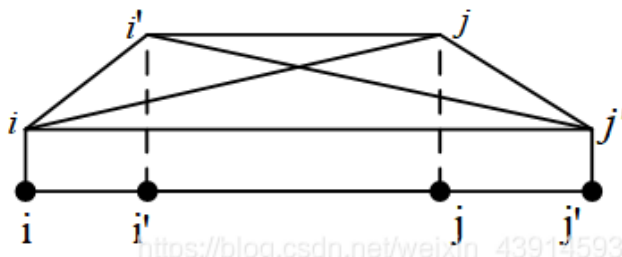
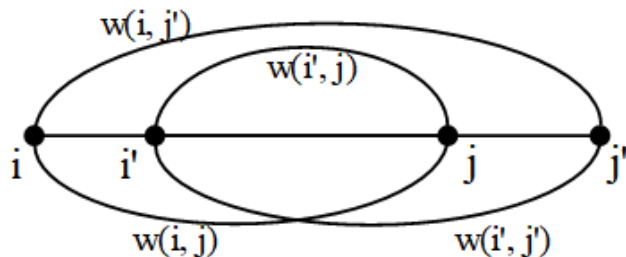
- (1) 为什么能够把 $i \leq k < j$ 缩小到 $s[i][j-1] \leq k \leq s[i+1][j]$?
- (2) $s[i][j-1] \leq s[i+1][j]$ 成立吗?

区间DP优化——四边形不等式定义和单调性定义

在四边形不等式DP优化中，对于 w ，有2个关键内容：四边形不等式定义、单调性。

(1) 四边形不等式定义1：设 w 是定义在整数集合上的二元函数，对于任意整数 $i \leq i' \leq j \leq j'$ ，如果有 $w(i, j) + w(i', j') \leq w(i, j') + w(i', j)$ ，则称 w 满足四边形不等式。

四边形不等式可以概括为：两个交错区间的 w 和，小于等于小区间与大区间的 w 和。



为什么被称为“四边形”？把它变成一个几何图，画成平行四边形，见上面图中的四边形 $i'ijj$ ，图中对角线长度和 $ij+i'j'$ 大于平行线长度和 $ij'+i'j$ 。

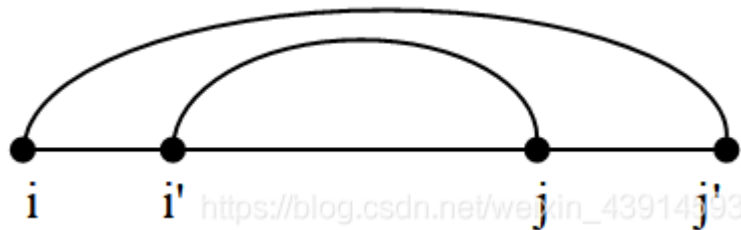
这个“四边形”只是一个帮助理解的示意图，并没有严谨的意义。也有其他的四边形画法，当中间两个点 $i'=j$ 时，四边形变成了一个三角形。

区间DP优化——四边形不等式定义和单调性定义

(2) 四边形不等式定义2: 对于整数 $i < i+1 \leq j < j+1$, 如果有 $w(i,j) + w(i+1,j+1) \leq w(i,j+1) + w(i+1,j)$, 称 w 满足四边形不等式。

(3) 单调性: 设 w 是定义在整数集合上的二元函数, 如果对任意整数 $i \leq i' \leq j \leq j'$, 有 $w(i,j') \geq w(i',j)$, 称 w 具有单调性。

单调性可以形象地理解为, 如果大区间包含小区间, 那么大区间的 w 值超过小区间的 w 值。



在石子合并问题中, 令 $w[i][j]$ 等于从第 i 堆石子加到第 j 堆石子的石子总数。它满足四边形不等式的定义、单调性:

$w[i][j'] \geq w[i'][j]$, 满足单调性;

$w[i][j] + w[i'][j'] = w[i][j'] + w[i'][j]$, 满足四边形不等式定义。

利用 w 的四边形不等式、单调性的性质, 可以推导出四边形不等式定理, 用于DP优化。

区间DP优化——四边形不等式定理 (Knuth-Yao DP Speedup Theorem)

四边形不等式定理：如果 $w(i,j)$ 满足四边形不等式和单调性，则用DP计算 $dp[i][j]$ 的时间复杂度是 $O(n^2)$ 的。

这个定理是通过下面2个更详细的引理来证明的。

引理1：状态转移方程 $dp[i][j] = \min(dp[i][k] + dp[k+1][j] + w[i][j])$ ，如果 $w[i][j]$ 满足四边形不等式和单调性，那么 $dp[i][j]$ 也满足四边形不等式。

引理2：记 $s[i][j] = k$ 是 $dp[i][j]$ 取得最优值时的 k ，如果 dp 满足四边形不等式，那么有 $s[i][j-1] \leq s[i][j] \leq s[i+1][j]$ ，即 $s[i][j-1] \leq k \leq s[i+1][j]$ 。

引理2直接用于DP优化，复杂度 $O(n^2)$ 。

这两个引理的证明论文见下方的链接

http://www.cs.ust.hk/mjg_lib/bibs/DPSu/DPSu.Files/p429-yao.pdf

动态规划基本模型——状态压缩DP

提到状态压缩DP时，常常用Hamilton问题作为引例。

动态规划基本模型——状态压缩DP

最短Hamilton路径

时间限制：3s。

题目描述：给定一个有权无向图，包括 n 个点，标记为 $0 \sim n-1$ ，以及连接 n 个点的边，求从起点 0 到终点 $n-1$ 的最短路径。要求必须经过所有点，而且每个点只经过一次。 $1 \leq n \leq 20$ 。

输入格式：第一行输入整数 n 。接下来 n 行每行 n 个整数，其中第 i 行第 j 个整数表示点 i 到 j 的距离（记为 $a[i, j]$ ）。 $0 \leq a[i, j] \leq 10^7$

对于任意的 x, y, z ，数据保证 $a[x, x]=0$ ， $a[x, y]=a[y, x]$ 并且 $a[x, y]+a[y, z] \geq a[x, z]$ 。

输出格式：输出一个整数，表示最短Hamilton路径的长度。

动态规划基本模型——状态压缩DP

暴力解法：枚举 n 个点的全排列，共 $n!$ 个全排列。一个全排列就是一条路径，计算这个全排列的路径长度，需要做 n 次加法。在所有路径中找最短的路径，总复杂度是 $O(n \times n!)$ 。

Hamilton问题是NP问题，没有多项式复杂度的解法。不过，用状态压缩DP求解，能把复杂度降低到 $O(n^2 \times 2^n)$ 。当 $n=20$ 时， $O(n^2 \times 2^n) \approx 4$ 亿，比暴力法好很多。

首先定义DP。设 S 是图的一个子集，用 $dp[S][j]$ 表示“集合 S 内的最短Hamilton路径”，即从起点 0 出发经过 S 中所有点，到达终点 j 时的最短路径；集合 S 中包括 j 点。根据DP的思路，让 S 从最小的子集逐步扩展到整个图，最后得到的 $dp[N][n-1]$ 就是答案， N 表示包含图上所有点的集合。

如何求 $dp[S][j]$ ？可以从小问题 $S-j$ 递推到大问题 S 。其中 $S-j$ 表示从集合 S 中去掉 j ，即不包含 j 点的集合。

如何从 $S-j$ 递推到 S ？设 k 是 $S-j$ 中一个点，把从 0 到的路径分为两部分： $(0 \rightarrow \dots \rightarrow k) + (k \rightarrow j)$ 。以 k 为变量枚举 $S-j$ 中所有的点，找出最短的路径，状态转移方程是：

$$dp[S][j] = \min\{dp[S-j][k] + \text{dist}(j, k)\}$$

其中 k 属于集合 $S-j$ 。

集合 S 的初始情况只包含起点 0 ，然后逐步将图中的点包含进来，直到最后包含所有的点。这个过程用状态转移方程实现。

动态规划基本模型——状态压缩DP

上面是DP的设计，现在关键问题是如何操作集合S？

这就是状态压缩DP的技巧：用一个二进制数表示集合

S，即把S“压缩”到一个二进制数中。S的每一位表示图上的1个点，等于0表示S不包含这个点，等于1表示包含。

例如 $S = 0000\ 0101$ ，其中有两个1，表示集合中包含点2、0。

本题最多有20个点，那么就定义一个20位的二进制数，表示集合S。

后面给出了代码，第一个for循环有 2^n 次，加上后面2个各n次的for循环，总复杂度 $O(n^2 \times 2^n)$ 。

第一个for循环，实现了从最小的集合扩展到整个集合。

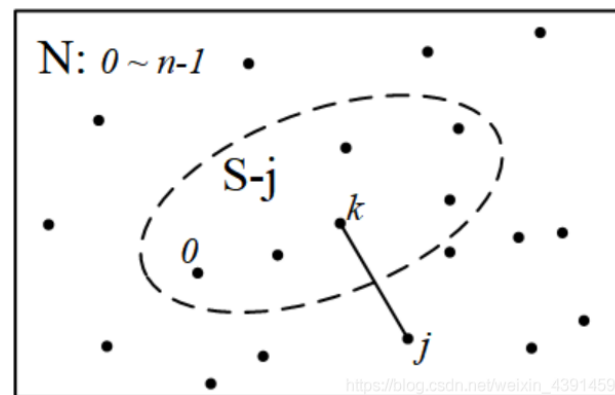
最小的集合是 $S = 1$ ，它的二进制数只有最后1位是1，即包含起点0；

最大的集合是 $S = (1 \ll n) - 1$ ，它的二进制数中有n个1，包含了所有的点。

算法最关键的部分“枚举集合S-j中所有的点”，是通过代码中的两个if语句实现的：

$\text{if}((S \gg j) \& 1)$ ，判断当前的集合S中是否有j点；

$\text{if}((S \wedge (1 \ll j)) \gg k \& 1)$ ，其中 $S \wedge (1 \ll j)$ 的作用是从集合中去掉j点，得到集合S-j，然后“ $\gg k \& 1$ ”表示用k遍历集合中的1，这些1就是S-j中的点，这样就实现了“枚举集合S-j中所有的点”。注意 $S \wedge (1 \ll j)$ 也可以这样写：
 $S - (1 \ll j)$ 。



动态规划基本模型——状态压缩DP的原理

从上面的“引子”可知，状态压缩DP的应用背景是以集合为状态，且集合一般用二进制来表示，用二进制的位运算来处理。

集合问题一般是指指数复杂度的（NP问题），例如：（1）子集问题，设元素无先后关系，那么共有 2^n 个子集；（2）排列问题，对所有元素进行全排列，共有 $n!$ 全排列。

可以这样概况状态压缩DP的思想：集合的状态（子集或排列），如果用二进制表示状态，并用二进制的位运算来遍历和操作，又简单又快。当然，由于集合问题是NP问题，所以状态压缩DP的复杂度仍然是指数的，只能用于小规模问题的求解。

注意，一个问题用状态压缩DP求解，时间复杂度主要取决于DP算法，和是否使用状态压缩关系不大。状态压缩只是DP处理集合的工具，也可以用其他工具处理集合，只是不太方便，时间复杂度也差一点。

C语言的位运算有“&”、“|”、“^”、“<<”、“>>”等，下面是例子。虽然数字是用十进制表示的，但位运算是按二进制处理的。

动态规划基本模型——状态压缩DP的原理

用位运算可以简便地对集合进行操作，下表给出了几个例子，并在上面的代码中给出了示例。

(1)判断a的第i位（从最低位开始数）是否等于1:

$$1 \ll (i - 1) \& a$$

(2)把a的第i位改成1:

$$a \mid (1 \ll (i - 1))$$

(3)把a的第i位改成0

$$a \& (\sim(1 \ll (i - 1)))$$

(4)把a的最后一个1去掉:

$$a \& (a - 1)$$

动态规划基本模型——轮廓线

Mondriaan's Dream

题目描述：给定 n 行 m 列的矩形，用 1×2 的砖块填充，问有多少种填充方案。

输入格式：每一行是一个测试用例，包括两个整数： n 和 m 。若 $n = m = 0$ 表示终止。 $1 \leq n, m \leq 11$ 。

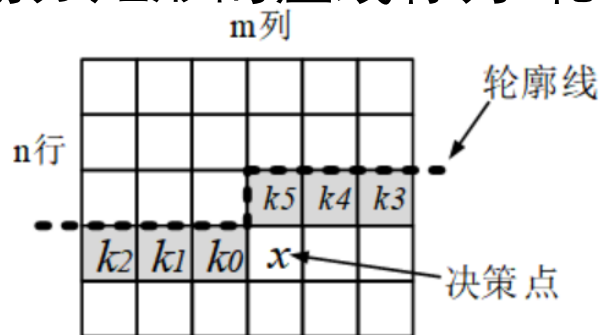
输出格式：对每个测试用例，输出方案数。

动态规划基本模型——轮廓线

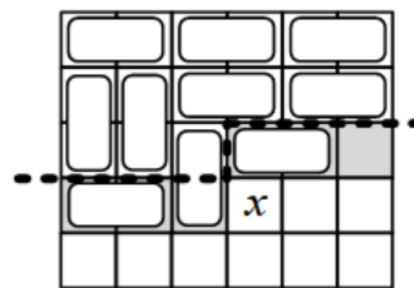
摆放砖头的操作步骤，可以从第一行第一列开始，从左往右、从上往下依次摆放。横砖只占1行，不影响下一行的摆放；竖砖占2行，会影响下一行。同一行内，前列的摆放决定后列的摆放，例如第1列放横砖，那么第2列就是横砖的后半部分；如果第1列放竖砖，那么就不影响第2列。上下两行是相关的，如果上一行是横砖，不影响下一行；如果上一行是竖砖，那么下一行的同一列是竖砖的后半部分。

用BFS搜索，从第一行第一列开始扩展到全局，每个格子的砖块有横放、竖放2种摆法，共 $m \times n$ 个格子，复杂度大约是 $O(2^{m \times n})$ 。下面用DP解题。DP的思想是从小问题扩展到大问题，在这一题中，是否能从第一行开始，逐步扩展，直到最后一行？这一题的复杂性在于，一个砖块可能影响连续的2行，而不是1行，必须考虑连续2行的情况。

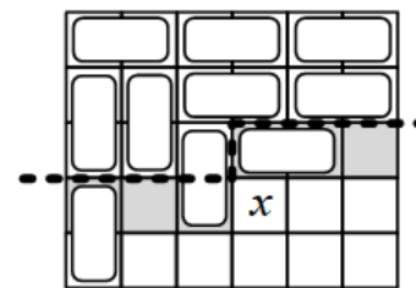
如下图所示，用一根虚线把矩形分为两半，上半部分已经填充完毕，下半部分未完成。把这条划分矩形的虚线称为“轮廓线”。



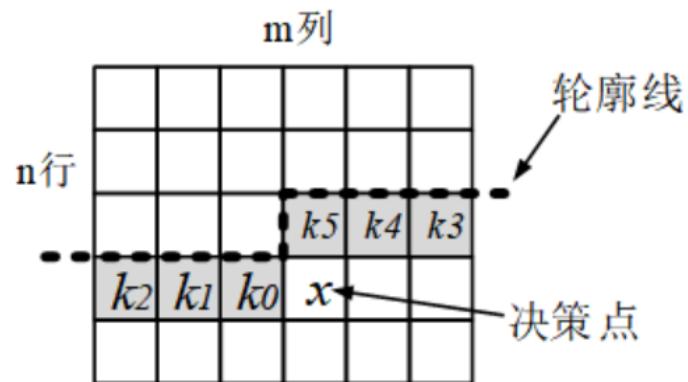
(1)原理图



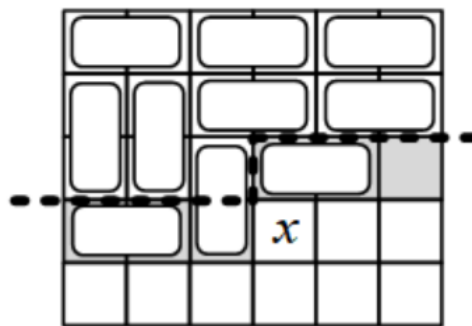
(2)一个填充的例子



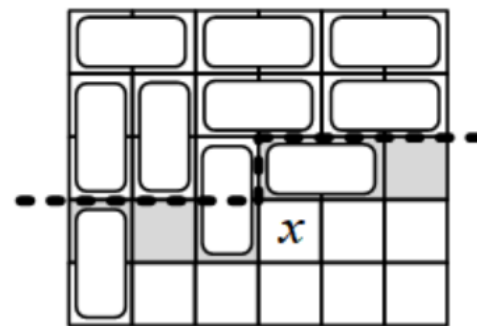
(3)错误的填充操作



(1)原理图



(2)一个填充的例子



(3)错误的填充操作

轮廓线下面的6个阴影方格 $k_5k_4k_3k_2k_1k_0$ 表示当前的砖块状态，它跨越了2行。从它们推广到下一个方格 x ，即递推到新状态 $k_4k_3k_2k_1k_0x$ 。 $k_5k_4k_3k_2k_1k_0$ 有各种情况，用0表示没填砖块，用1表示填了砖块，有 $000000 \sim 111111$ 共 2^6 种情况。图(2)是一个例子，其中 k_3 未填， $k_5k_4k_3k_2k_1k_0 = 110111$ 。用二进制表示状态，这就是状态压缩的技术。

注意，根据DP递推的操作步骤，递推到阴影方格时，砖块只能填到阴影格本身和上面的部分，不能填到下面去。在图(3)中，把 k_2 的砖填到下面是错的。这 2^6 种情况，有些是非法的，应该去掉。在扩展到 x 时，分析 2^6 种情况和 x 的对应关系，根据 x 是否填充砖块，有三种情况：

(1) $x = 0$ (x 不放砖块)。如果 $k_5 = 0$ (k_5 上没有砖块)，由于 k_5 只剩下和 x 一起填充的机会，现在失去了这一机会，所以这个情况是非法的。如果 $k_5 = 1$ ，则 $x = 0$ 可以成立。递推到 $k_4k_3k_2k_1k_0x = k_4k_3k_2k_1k_00$ 。

(2) $x = 1$ (x 放竖砖)，只能和 k_5 一起放竖砖，要求 $k_5 = 0$ 。递推到 $k_4k_3k_2k_1k_0x = k_4k_3k_2k_1k_01$ 。

(3) $x = 1$ (x 放横砖)，只能和 k_0 一起放横砖，要求 $k_0 = 0$ ，另外还应有 $k_5 = 1$ 。递推到 $k_4k_3k_2k_1k_0x = k_4k_3k_2k_111$ 。

经过上述讨论，对 n 行 \times m 列的矩阵，可以得到状态定义和状态转移方程。

动态规划基本模型——状态转移方程

定义DP状态为 $dp[i][j][k]$ ，它表示递推到第 i 行、第 j 列，且轮廓线处填充为 k 时的方案总数。

其中 k 是用 m 位二进制表示的连续 m 个方格，这 m 个方格的最后一个方格就是第 i 行第 j 列的方格。 k 中的0表示方格不填充，1表示填充。 m 个方格前面的所有方格（轮廓线以上的部分）都已经填充为1。 $dp[n-1][m-1][(1 \ll m) - 1]$ 就是答案，它表示递推到最后一行、最后一列、 k 的二进制是 m 个1（表示最后一行全填充）。时间复杂度是 $O(m \times n \times 2^m)$ 。

后面给出的代码用到了滚动数组，把二维 $[i][j]$ 改为一维，状态定义改为 $dp[2][k]$ 。

状态转移方程。根据前面分析的三种情况，分别转移到新的状态。

状态转移方程。根据前面分析的三种情况，分别转移到新的状态。

(1) $x = 0, k_5 = 1$ 。从 $k = k_5 k_4 k_3 k_2 k_1 k_0 = 1 k_4 k_3 k_2 k_1 k_0$ 转移到 $k = k_4 k_3 k_2 k_1 k_0 0$ 。转移代码：

```
1 | dp[now][(k<<1) & ~(1<<m)] += dp[old][k];
```

其中 $\sim(1 \ll m)$ 的意思是原来的 $k_5 = 1$ 移到了第 $m+1$ 位，超出了 k 的范围，需要把它置0。

(2) $x = 1, k_5 = 0$ 。从 $k = k_5 k_4 k_3 k_2 k_1 k_0 = 0 k_4 k_3 k_2 k_1 k_0$ 转移到 $k = k_4 k_3 k_2 k_1 k_0 1$ 。转移代码：

```
1 | dp[now][(k<<1)^1] += dp[old][k];
```

(3) $x = 1, k_0 = 0, k_5 = 1$ 。从 $k = k_5 k_4 k_3 k_2 k_1 k_0 = k_5 k_4 k_3 k_2 k_1 1$ 转移到 $k = k_4 k_3 k_2 k_1 1 1$ 。转移代码：

```
1 | dp[now][((k<<1) | 3) & ~(1<<m)] += dp[old][k];
```

其中 $(k \ll 1) | 3$ 的意思是末尾置11； $\sim(1 \ll m)$ 是原来的 $k_5 = 1$ 移到了第 $m+1$ 位，把它置0。

动态规划基本模型——单调队列优化DP

例.老徐真人秀

- 最美杭城人老徐参加一个真人秀，节目共录制 N 天，每一天节目组都提供同一种美味的苹果若干，老徐有个怪癖，每一天只会吃天数不超过 M ($1 \leq M \leq N \leq 10^6$)天的最美味的苹果。
- 老徐是编程达人，决定通过程序来快速选择。请老徐回答当时是怎么做到的？
- 老徐是大师，当然不会直接告诉你答案，当时随手扔过来下面这个：
- 比如， $N = 5$ ， $M = 4$ ，5天提供的苹果美味度分别为(80,75,78,73,79)，老徐的做法如下：



一.单调队列及应用

- 五大要点:

- ①维护区间最值:

如上例中, 设 a_i 表示第 i 天发放苹果的美味度, $f(i)$ 表示老徐第 i 天选择的苹果的美味度,

$$f(i) = \max\{a_j \mid (\max\{1, i - M + 1\} \leq j \leq i)\}$$

- ②区间出现平移:

如上面例子中, 区间左边界 $l_i = \max\{1, i - M + 1\}$, 右边界 $r_i = i$ 。随着 i 的增加, 右边界 r_i 递增, 左边界 l_i 非递减, 当 $i > M$ 时, l_i 递增。查询区间是随着 i 右移向右平移的。

- ③去除冗余状态:

如上例中, 区间中两个元素 a_j 与 a_k , 如果满足 $k > j$ 且 $a_k \geq a_j$, a_k 跟 a_j 比“既新鲜又美味”, a_j 没有存在的必要, 可以直接删除。

- ④保持队列单调:

由③得队列中保留的元素是单调的, 如例中是单调减的。

- ⑤最优选择在队首:

如上例中维护单调减的队列, 队列中的最大值在队首。

单调队列

队列中各个元素之间的关系是单调的(单调递增或递减) ;
在队首删除、队尾即可插入又可删除;
用于求解某个范围的最大值或最小值问题。

算法步骤：

一、把第一个元素进队，队头队尾指针指向第一个元素

二、对于其它的 $N-1$ 个未入队的元素执行如下操作：

1、如果队头元素超过指定的区间范围，队头元素出队

2、当队尾指向的元素的值小于当前要入队的元素值，队尾元素出队

3、当前要入队的新元素入队

4、当前最优值为队头元素的值

代码实现方式：

1、STL中的双端队列（deque）

2、数组模拟

一.单调队列及应用

```
head=1; tail=1; que[head]=1; //第一个数进队
for(i=2;i<=n;i++) //枚举其它N-1个元素
{
    if(i-que[head]>=M) head++; // (1)
    //队首元素超过区间大小限制，则队首元素出队列。
    while(head<=tail)&&(a[q[tail]]<a[i]) tail--; // (2)
    //当队列非空且队尾元素小于未进队的数，队尾元素出队
    tail++; q[tail]:=i; // (3)
    //新元素入队
    cout<<a[q[head]]); // (4)
}
```

例1.[NOIP2010初赛]烽火传递

- 题目描述：

烽火台又称烽燧，是重要的军事防御设施，一般建在险要或交通要道上。一旦有敌情发生，白天燃烧柴草，通过浓烟表达信息；夜晚燃烧干柴，以火光传递军情，在某两座城市之间有 N 个烽火台，每个烽火台发出信号都有一定代价。为了使情报准确地传递，在连续 M 个烽火台中至少要有有一个发出信号。

请计算总共最少花费多少代价，才能使敌军来袭之时，情报能在这两座城市之间准确地传递。

- 输入格式：

第一行：两个整数 N, M 。其中 N 表示烽火台的个数， M 表示在连续 M 个烽火台中至少要有有一个发出信号。

接下来 N 行，每行一个数 W_i ，表示第 i 个烽火台发出信号所需代价。

- 输出格式：

一行，表示答案。

- 样例输入：

5 3
1
2
5
6
2

- 样例输出：

4

- 数据范围：

对于50%的数据， $M \leq N \leq 1000$;

对于100%的数据， $M \leq N \leq 100,000, W_i \leq 100$ 。

例1.[NOIP2010初赛]烽火传递

- 分析:
- 动态规划: 状态 $f(i)$ 表示“在前 i 个烽火台传递情报且第 i 个烽火台一定发出信号”所需最小代价。
- 通过考虑“前一个烽火台的位置 j ”得到以下状态转移方程:

$$f(i) = \begin{cases} w_i & i \leq M \text{ 时} \\ \min\{f(j)\} + w_i & (i - M \leq j \leq i - 1) \quad i > M \text{ 时} \end{cases}$$

- 答案 $Ans = \min\{f(i) \mid (\max\{N + 1 - M, 1\} \leq i \leq N)\}$
- 上式计算 $f(i)$ 时要计算区间最小值, 而且区间是向右平移的, 如果 $f(k) \leq f(j)$ 且 $k > j$, 可以删除 $f(j)$, 所以队列中的元素保持单调递增, 最优决策在队首。
- 使用单调队列优化, 时间复杂度为 $O(N)$ 。

例2.修剪草坪

【题目描述】

在一年前赢得了小镇的最佳草坪比赛后，FJ 变得很懒，再也没有修剪过草坪。现在，新一轮的最佳草坪比赛又开始了，FJ 希望能够再次夺冠。然而，FJ 的草坪非常脏乱，因此，FJ 只能让他的奶牛来完成这项工作。FJ 有 N 只排成一排的奶牛，编号为 1 到 N 。每只奶牛的效率是不同的，奶牛 i 的效率为 E_i 。靠近的奶牛们很熟悉，如果 FJ 安排超过 K 只连续的奶牛，那么这些奶牛就会罢工去开派对。因此，现在 FJ 需要你的帮助，计算 FJ 可以得到的最大效率，并且该方案中没有连续的超过 K 只奶牛。

【输入】

第一行：空格隔开的两个整数 N 和 K ；第二到 $N+1$ 行：第 $i+1$ 行有一个整数 E_i 。

【输出】

一行一个值，表示 FJ 可以得到的最大的效率值。

【输入样例】

```
5 2
1
2
3
4
5
```

【输出样例】

```
12
```

例2.修剪草坪

分析:

设 $dp[i][0]$ 表示以 i 结尾并且 i 不选所得的最大效率值

$dp[i][1]$ 表示以 i 结尾并且 i 要选所得的最大效率值

$S[i]$ 表示效率值的前缀和

转移方程为:

$$dp[i][0] = \max(dp[i-1][0], dp[i-1][1])$$

$$dp[i][1] = \max(dp[j][0] + S[i] - S[j]); (i-K \leq j < i)$$

可以变形为 $dp[i][1] = \max(dp[j][0] - S[j]) + S[i]; (i-K \leq j < i)$

因此 $dp[i][1]$ 可以用单调队列优化, 维护队首为 $dp[i][0] - S[i]$ 最大的单调队列

例3.背包问题——01背包

每种物品都有一个价值 w 和体积 c .

你现在有一个背包容积为 V ,你想用一些物品装背包使得物品总价值最大.

多种物品,每种物品只有一个.求能获得的最大总价值.

分析

如果我们不选择第 i 件物品,那我们就相当于是用 $i-1$ 件物品,填充了体积为 v 的背包所得到的最优解.

而我们选择第 i 件物品的时候,我们要得到体积为 v 的背包,我们需要通过填充用 $i-1$ 件物品填充得到的体积为 $v-c[i]$ 的背包得到体积为 v 的背包.

	$V-c[i]$ 价值为A		V 哎,我好像能填充 前面的得到更大价值.		
--	------------------	--	-------------------------------	--	--

例3.背包问题——01背包

所以根据上面的分析,我们很容易设出01背包的二维状态

$f[i][v]$ 代表用*i*件物品填充为体积为*v*的背包得到的最大价值.

从而很容易的写出状态转移方程

$$f[i][v] = \max(f[i-1][v], f[i-1][v-c[i]] + w[i])$$

状态转移方程是如何得来的?

对于当前第*i*件物品,我们需要考虑其是否能让我们得到更优解.

显然,根据上面的话

我们选择第*i*件物品的时候,我们要得到体积为*v*的背包,我们需要通过填充用*i-1*件物品填充得到的体积为*v-c[i]*的背包得到体积为*v*的背包.我们需要考虑到*v-c[i]*的情况.

当不选当前第*i*件物品的时候,就对应了状态转移方程中的 $f[i-1][v]$,而选择的时候就对应了 $f[i-1][v-c[i]] + w[i]$.

	$V-c[i]$ 价值为A		V 哎,我好像能填充前面的得到更大价值.		
--	------------------	--	-------------------------	--	--

例3.背包问题——01背包

考虑一维如何写!

仔细观察会发现,二维状态中,我们的状态每次都会传递给i(就是说我们的前几行会变得没用.)

我们设状态 $f[i]$ 代表体积为 i 的时候所能得到的最大价值.

容易发现的是,我们的 $f[i]$ 只会被 i 以前的状态影响.

代码写法↓

```
for(int i=1;i<=n;i++)//枚举 物品
    for(int j=V;j>=c[i];j--)//枚举体积
        f[j]=max(f[j],f[j-c[i]]+w[i]);//状态转移方程.
```

	$V - c[i]$ 价值为A		V 哎,我好像能填充前面的得到更大价值.		
--	--------------------	--	-------------------------	--	--

例4.背包问题——完全背包

每种物品都有一个价值 w 和体积 c .

你现在有一个背包容积为 V ,你想用一些物品装背包使得物品总价值最大.

此类背包问题中,我们的每种物品有无限多个,可重复选取.

类似于01背包,我们依旧需要考虑前 $i-1$ 件物品的影响.

分析

此时我们依旧可以设得二维状态

$f[i][v]$ 代表用 i 件物品填充为体积为 v 的背包得到的最大价值

依旧很容易写出状态转移方程

$$f[i][v] = \max(f[i-1][v], f[i-1][v-k*c[i]] + k*w[i])$$

//其中 k 是我们需要枚举的物品件数.而我们最多选取 $\lfloor V/c[i] \rfloor$ 个

例4.背包问题——完全背包

同样地,我们去考虑一维状态实现

依旧设

$f[i]$ 代表体积为 i 的时候所能得到的最大价值

与01背包不同的是,我们可以重复选取同一件物品.

此时,我们就需要考虑到前面 $i-1$ 件物品中是否有已经选取过(其实没必要

即,我们当前选取的物品,可能之前已经选取过.我们需要考虑之前物品对答案的贡献.

因此我们需要顺序枚举.

与01背包一维的写法类似.

```
for(int i=1;i<=n;i++)//枚举物品
    for(int j=c[i];j<=V;j++)//枚举体积.注意这里是顺序/
        f[j]=max(f[j],f[j-c[i]]+w[i]);//状态转移.
```

例4.背包问题——多重背包

每种物品都有一个价值 w 和体积 c .

你现在有一个背包容积为 V ,你想用一些物品装背包使得物品总价值最大.

此类问题与前两种背包问题不同的是,

这里的物品是有个数限制的.

(下面用 $\text{num}[i]$ 表示物品 i 的个数.)

分析:

同样,我们最多可以放 $\lfloor V/c[i] \rfloor$,但我们的物品数量可能不够这么多.

因此,我们枚举的物品个数是 $\min(\lfloor V/c[i] \rfloor, \text{num}[i])$

多个物品,我们就可以看成为一个大的物品,再去跑01背包即可.

因此这个大物品的价值为 $k \times w[i]$,体积为 $k \times c[i]$

```
for(int i=1;i<=n;i++)//枚举物品
```

```
    for(int j=V;j>=0;j--)//枚举体积
```

```
        for(int k=1;k<=num[i],k++)
```

```
            //这个枚举到num[i]更省心
```

```
                if(j-k*c[i]>=0)//判断能否装下.
```

```
                    f[j]=max(f[j],f[j-k*c[i]]+k*w[i]);
```


例4.背包问题——多重背包的二进制拆分优化

二进制拆分的原理

我们可以用 $1, 2, 4, 8 \dots 2^n$ 表示出1到 $2^{(n+1)}-1$ 的所有数.

考虑我们的二进制表示一个数。

根据等比数列求和,我们很容易知道我们得到的数最大就是 $2^{(n+1)}-1$

而我们某一个数用二进制来表示的话,每一位上代表的数都是2的次幂.

就连奇数也可以,例如->19可以表示为10011(2)

二进制拆分的做法

因为我们的二进制表示法可以表示从1到num[i]的所有数,我们对其进行拆分,就得到好多个大物品(这里的大物品代表多个这样的物品打包得到的一个大物品).

(简单来讲,我们可以用一个大物品代表1,2,4,8..件物品的和。)

而这些大物品又可以根据上面的原理表示出其他不是2的次幂的物品的和.

因此这样的做法是可行的.

我们又得到了多个大物品,所以再去跑01背包即可.

例4.背包问题——多重背包的二进制拆分优化

```
for(int i=1;i<=n;i++)
{
    for(int j=1;j<=num[i];j<=1)
        //二进制每一位枚举.
        //注意要从小到大拆分
        {
            num[i]-=j;//减去拆分出来的
            new_c[++tot]=j*c[i];//合成一个大的物品的体积
            new_w[tot]=j*w[i];//合成一个大的物品的价值
        }
    if(num[i])//判断是否会有余下的部分.
        //就好像我们某一件物品为13,显然拆成二进制为1,2,4.
        //我们余出来的部分为6,所以需要再来一份.
        {
            new_c[++tot]=num[i]*c[i];
            new_w[tot]=num[i]*w[i];
            num[i]=0;
        }
}
```

时间复杂度分析

我们拆分一种物品的时间复杂度为 $\log(\text{num}[i])$.

我们总共会有n种物品,再配上枚举体积的时间复杂度.

因此,二进制拆分做法的时间复杂度为

$$O(\sum_{i=1}^n \log(\text{num}[i]) \times V)$$

例4.背包问题——多重背包的单调队列优化

首先回想多重背包最普通的状态转移方程

$$f[i][j] = \max(f[i-1][j], f[i-1][j-k*c[i]] + k*w[i])$$

其中 $k \in [1, \min(\lfloor V/c[i] \rfloor, \text{num}[i])]$

下面用 lim 表示 $\min(\lfloor V/c[i] \rfloor, \text{num}[i])$

容易发现的是 $f[i][j-k*c[i]]$ 会被 $f[i][j-(k+1)*c[i]]$ 影响 (很明显吧

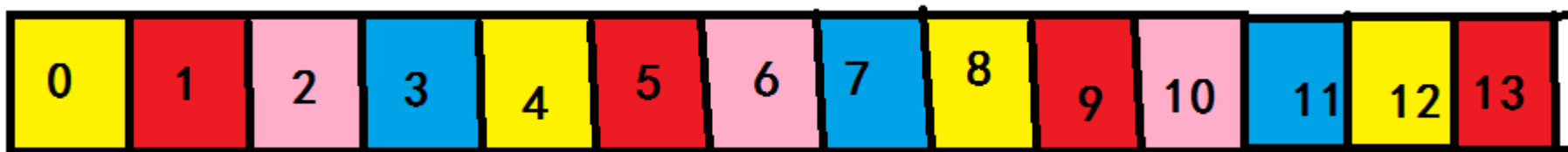
(我们通过一件体积为 $c[i]$ 的物品填充体积为 $j-(k+1)*c[i]$ 的背包, 会得到体积为 $j-k*c[i]$ 的背包.)

归纳来看的话

$f[i][j]$ 将会影响 $f[i][j+k*c[i]]$ ($j+k*c[i] \leq V$)

栗子

$c[i]=4$



例4.背包问题——多重背包的单调队列优化

容易发现的是,同一颜色的格子,对 $c[i]$ 取模得到的余数相同.

且,它们的差满足等差数列!(公差为 $c[i]$.)

通项公式为 $j=k*c[i]+$ 取模得到的余数

所以我们可以根据对 $c[i]$ 取模得到的余数进行分组.

即可分为 $1,2,3\dots c[i]-1$ 共 $c[i]$ 组



且每组之间的状态转移不互相影响.(注意这里是组.相同颜色为一组)

相同颜色的格子,位置靠后的格子,将受到位置靠前格子的影响.

//但是这样的话,我们的格子会重复受到影响.

即 $f[9]$ 可能受到 $f[5]$ 的影响,也可能受到 $f[1]$ 的影响

而 $f[5]$ 也可能受到 $f[1]$ 的影响.

所以我们考虑将原始状态转移方程变形.

例4.背包问题——多重背包的单调队列优化

令 $d=c[i], a=j/c[i], b=j\%c[i]$

其中 a 为全选状况下的物品个数.则 $j=a*d+b$

则代入原始的状态转移方程中

$$j-k*d=a*d+b-k*d=(a-k)*d+b$$

我们令 $(a-k)=k'$

再回想我们最原始的状态转移方程中第二状态： $f[i][j-k*c[i]]+k*w[i]$ 代表选择 k 个当前 i 物品.

根据容斥：全选-不选=选.

因此 $a-(a-k)=k$ 而前面我们已经令 $(a-k)=k'$

而我们要求的状态也就变成了

$$f[i][j]=\max(f[i-1][k'*d+b]+a*w[i]-k'*w[i])$$

而其中,我们的 $a*w[i]$ 为一个常量

所以我们要求的状态就变成了

$$f[i][j]=\max(f[i-1][k'*d+b]-k'*w[i])+a*w[i]$$

根据我们的 $k \in [1, \text{lim}]$ 容易推知 $k' \in [a-k, a]$

那么当前的 $f[i][j]$ 求解的就是为 $\text{lim}+1$ 个数对应的 $f[i-1][k'*d+b]-k'*w[i]$ 的最大值.

(之所以为 $\text{lim}+1$ 个数,是包括当前这个 j .)

将 $f[i][j]$ 前面所有的 $f[i-1][k'*d+b]-k'*w[i]$ 放入一个队列.

那我们的问题就是求这个最长为 $\text{lim}+1$ 的队列的最大值 $+a*w[i]$.

例4.背包问题——多重背包的单调队列优化

```
for(int i=1;i<=n;i++)//枚举物品种类
{
    cin>>c[i]>>w[i]>>num[i];//c,w,num分别对应 体积,价值,个数
    if(V/c[i] < num[i]) num[i]=V/c[i];//求lim
    for(int mo=0;mo<c[i];mo++)//枚举余数
    {
        head=tail=0;//队列初始化
        for(int k=0;k<=(V-mo)/c[i];k++)
        {
            int x=k;
            int y=f[k*c[i]+mo]-k*w[i];
            while(head<tail && que[head].pos<k-num)head++;//限制长度
            while(head<tail && que[tail-1].value<=y)tail--;
            que[tail].value=y,que[tail].pos=x;
            tail++;
            f[k*c[i]+mo]=que[head].value+k*w[i];
        }
        //加上k*w[i]的原因:
        //我们的单调队列维护的是前i-1种的状态最大值.
        //因此这里加上k*w[i].
    }
}
```

斜率优化DP

有一类DP状态方程，例如：

$$dp[i] = \min\{dp[j] - a[i]*d[j]\} \quad 0 \leq j < i, \quad d[j] \leq d[j+1], a[i] \leq a[i+1]$$

它的特征是在存在一个既有 i 又有 j 的项 $a[i]*d[j]$ 。

编程时，如果简单地对 i 和 j 循环，复杂度是 $O(n^2)$

通过斜率优化（英文convex hull trick，凸壳优化），把时间复杂度优化到 $O(n)$ 。

斜率优化的核心技术是斜率（凸壳）模型和单调队列。

斜率优化DP

1. 把状态方程变换为平面的斜率问题

方程对某个固定的 i ，求 j 变化时 $dp[i]$ 的最优值，所以可以把关于 i 的部分看成固定值，把关于 j 的部分看成变量。把 \min 去掉，方程转化为：

$$dp[j] = a[i] * d[j] + dp[i]$$

为方便观察，令： $y = dp[j]$ ， $x = d[j]$ ， $k = a[i]$ ， $b = dp[i]$ ，方程变为：

$$y = kx + b$$

斜率优化的数学模型，就是把状态转移方程转换为平面坐标系直线的形式： $y = kx + b$ 。
其中：

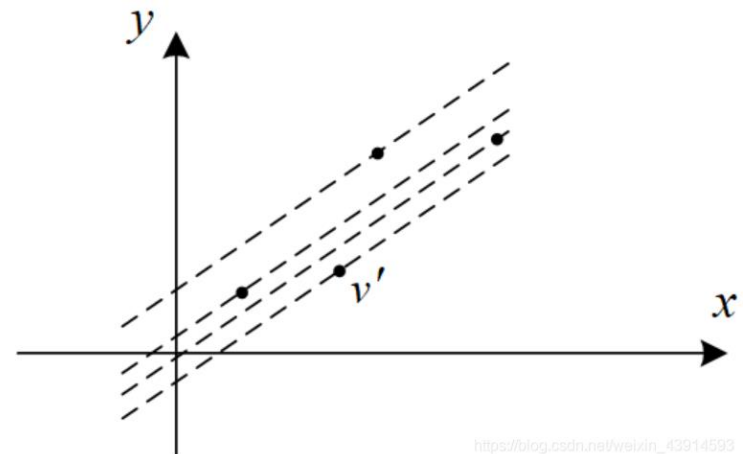
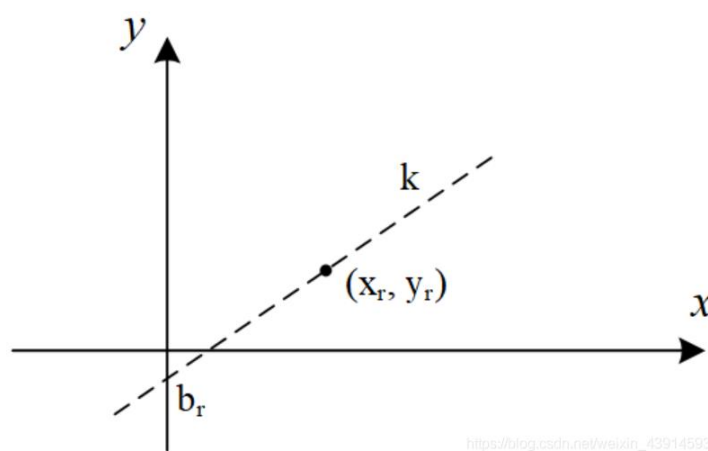
(1) 变量 x 、 y 和 j 有关，并且只有 y 中包含 $dp[j]$ 。点 (x, y) 是题目中可能的决策。

(2) 斜率 k 、截距 b 与 i 有关，并且只有 b 中包含 $dp[i]$ 。最小的 b 包含最小的 $dp[i]$ ，也就是状态方程的解。

注意应用斜率优化的2个条件： x 和 k 是单调增加的，即 x 随着 j 递增而递增， k 随着 i 递增而递增。

斜率优化DP

2. 求一个dp[i]



先考虑固定 i 的情况下求 $dp[i]$ 。由于 i 是定值，那么斜率 $k=a[i]$ 可以看成常数。当 j 在 $0 \leq j < i$ 内变化时，对某个 j_r ，产生一个点 $v_r=(x_r, y_r)$ ，这个点在一条直线 $y = kx + b_r$ 上， b_r 是截距。如图。

对于 $0 \leq j < i$ 中所有的 j ，把它们对应的点都画在平面上，这些点对应的直线的斜率 $k=a[i]$ 都相同，只有截距 b 不同。在所有这些点中，有一个点 v' 所在的直线有最小截距 b' ，算出 b' ，由于 b' 中包含 $dp[i]$ ，那么就算出了最优的 $dp[i]$ 。如图。

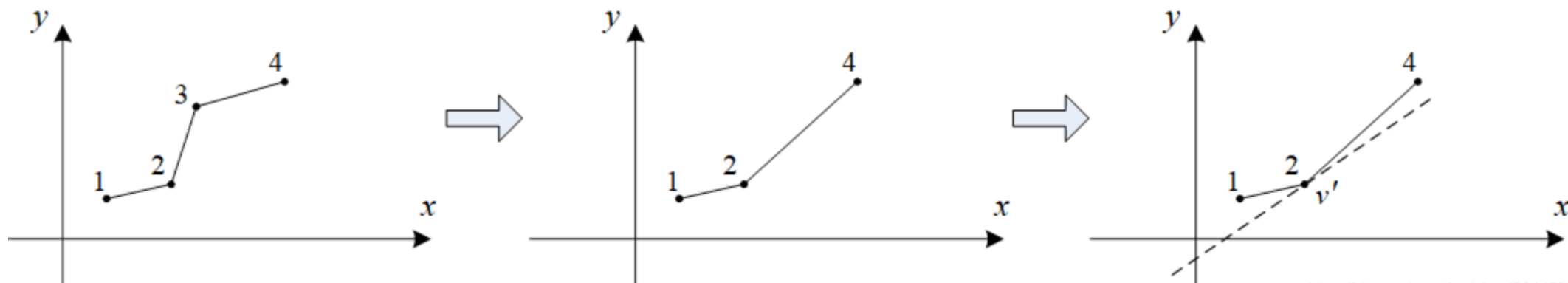
斜率优化DP

如何找最优点 v' ? 利用“下凸壳”。

前面提到, x 是单调增加的, 即 x 随着 j 递增而递增。图中给出了4个点, 它们的 x 坐标是递增的。

图(1) 中的1、2、3构成了“下凸壳”, “下凸壳”的特征是线段12的斜率小于线段23的斜率。2、3、4构成了“上凸壳”。经过上凸壳中间点3的直线, 其截距 b 肯定小于经过2或4的有相同斜率的直线的截距, 所以点3肯定不是最优点, 去掉它。

去掉“上凸壳”后, 得到图(2), 留下的点都满足“下凸壳”关系。最优点就在“下凸壳”上。例如在图(3)中, 用斜率为 k 的直线来切这些点, 设线段12的斜率小于 k , 24的斜率大于 k , 那么点2就是“下凸壳”的最优点。

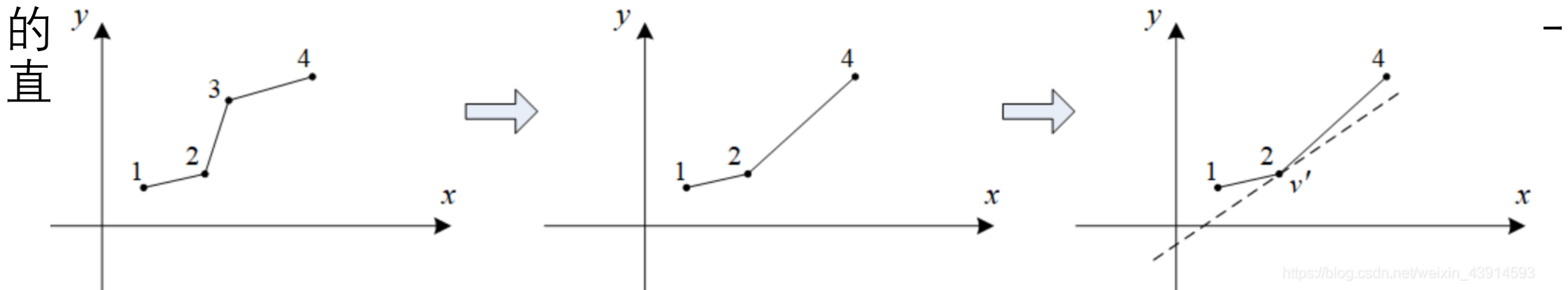


斜率优化DP

以上操作用单调队列编程很方便。

(1) 进队操作，在队列内维护一个“下凸壳”，即每2个连续点组成的直线，其斜率是单调上升的。新的点进队列时，确保它能与队列中的点一起仍然能够组成“下凸壳”。例如队列尾部的2个点是 $v1$ 、 $v2$ ，准备加入队列的新的点是 $v3$ 。比较 $v1$ 、 $v2$ 、 $v3$ ，看线段 $v1v2$ 和 $v2v3$ 的斜率是否递增，如果是，那么 $v1$ 、 $v2$ 、 $v3$ 形成了“下凸壳”；如果斜率不递增，说明 $v2$ 不对，从队尾弹走它；然后继续比较队列尾部的2个点和 $v3$ ；重复以上操作，直到 $v3$ 能进队为止。经过以上操作，队列内的点组成了一个大的“下凸壳”，每2个点组成的直线，斜率递增，队列保持为单调队列。

(2) 出队列，找到最优点。设队头的2个点是 $v1$ 、 $v2$ ，如果线段 $v1v2$



斜率优化DP

3. 求所有的 $dp[i]$

以上求得了一个 $dp[i]$ ，复杂度 $O(n)$ 。如果对所有的 i ，每一个都这样求 $dp[i]$ ，总复杂度仍然是 $O(n^2)$ 的，并没有改变计算的复杂度。有优化的方法吗？

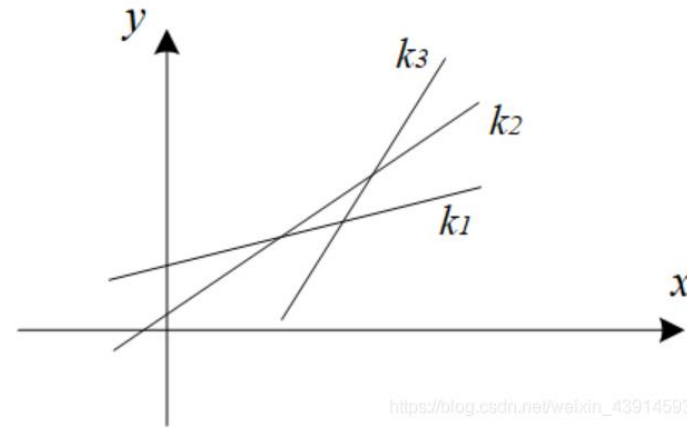
一个较小的 i_1 ，它对应的点是 $\{v_0, v_1, \dots, v_{i_1}\}$ ；一个较大的 i_2 ，对应了更多的点 $\{v_0, v_1, \dots, v_{i_1}, \dots, v_{i_2}\}$ ，其中包含了 i_1 的所有点。当寻找 i_1 的最优点时，需要检查 $\{v_0, v_1, \dots, v_{i_1}\}$ ；寻找 i_2 的最优点时，需要检查 $\{v_0, v_1, \dots, v_{i_1}, \dots, v_{i_2}\}$ 。这里做了重复的检查，并且这些重复是可以避免的。这就是能优化的地方，仍然用“下凸壳”进行优化。

(1) 每一个 i 所对应的斜率 $k_i=a[i]$ 是不同的，根据约束条件 $a[i] \leq a[i+1]$ ，当 i 增大时，斜率递增。

(2) 前面已经提到，对一个 i_1 找它的最优点的时候，可以去掉一些点，即那些斜率比 k_i 小的点。这些被去掉的点，在后面更大的 i_2 时，由于斜率 k_{i_2} 也更大，肯定也要被去掉。

根据 (1) 和 (2) 的讨论，优化方法是：对所有的 i ，统一用一个单调队列处理所有的点；被较小的 i_1 去掉的点，被单调队列弹走，后面更大的 i_2 不再处理它们。

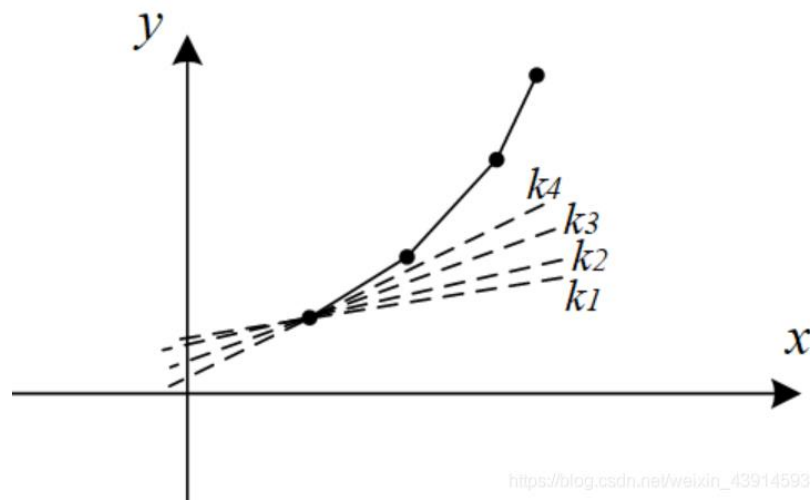
因为每个点只进入一次单调队列，总复杂度 $O(n)$ 。



斜率优化DP

//q[]是单调队列， head指向队首， tail指向队尾， slope()计算2个点组成的直线的斜率

```
for(int i=1;i<=n;i++){  
    while(head<tail && slope(q[head],q[head+1])<k) //队头的2个点斜率小于k  
        head++; //不合格， 从队头弹出  
    int j = q[head]; //队头是最优点  
    dp[i] = ...; //计算dp[i]  
    while(head<tail && slope(i,q[tail-1])<slope(q[tail-1],q[tail])) //进队操作  
        tail--; //弹走队尾不合格的点  
    q[++tail] = i; //新的点进队列  
}
```



例题1： HDU 3507 Print Article——斜率优化DP

题目描述：

打印一篇包含N个单词的文章，第i个单词的打印成本为 $(\sum_{i=1}^k C_i)^2 + M$ 。打印k个单词的花费是

，M是一个常数。如何安排文章，才能最小化费用？

输入：有很多测试用例。对于每个测试用例，第一行中都有两个数字N和M（ $0 \leq n \leq 500000$ ， $0 \leq M \leq 1000$ ）。然后，在接下来的2到N+1行中有N个数字。输入用EOF终止。

输出：一个数字，表示打印文章的最低费用。

样例输入：

5 5

5

9

5

7

5

样例输出：

230

例题1： HDU 3507 Print Article——斜率优化DP

题目的意思是：有N个数和一个常数M，把这N个数分成若干部分，每一部分的计算值为这部分数的和的平方加上M，总计算值为各部分计算值之和，求最小的总计算值。由于N很大， $O(N^2)$ 的算法超时。

设 $dp[i]$ 表示输出前i个单词的最小费用，DP转移方程：

$$dp[i] = \min\{dp[j] + (sum[i]-sum[j])^2 + M\} \quad \text{其中} sum[i] \text{表示前} i \text{个数字和。}$$

下面把DP方程改写为 $y = kx + b$ 的形式。首先展开方程：

$$dp[i] = dp[j] + sum[i]*sum[i] + sum[j]*sum[j] - 2*sum[i]*sum[j] + M$$

移项得：

$$dp[j] + sum[j]*sum[j] = 2*sum[i]*sum[j] + dp[i] - sum[i]*sum[i] - M$$

对照 $y = kx + b$ ，有：

$$y = dp[j] + sum[j]*sum[j], \quad y \text{只和} j \text{有关。}$$

$$x = 2*sum[j], \quad x \text{只和} j \text{有关，且随着} j \text{递增而递增。}$$

$$k = sum[i], \quad k \text{只和} i \text{有关，且随着} i \text{递增而递增。}$$

$$b = dp[i] - sum[i]*sum[i] - M, \quad b \text{只和} i \text{有关，且包含} dp[i]。$$

例题2： HNOI2008 玩具装箱——斜率优化DP

P教授要去看奥运，但是他舍不得他的玩具，于是他决定把所有的玩具运到北京。他使用自己的压缩器进行压缩，其可以将任意物品变成一堆，再放到一种特殊的一维容器中。P教授有编号为1...N的N件玩具，第i件玩具经过压缩后变成一维长度为Ci。为了方便整理，P教授要求在一个一维容器中的玩具编号是连续的。同时如果一个一维容器中有多个玩具，那么两件玩具之间要加入一个单位长度的填充物，形式地说如果将第i件玩具到第j件玩具放到一个容器中，那么容器的长度将为 $x = j - i + \sum_{k=i}^j C_k$ 。制作容器的费用与容器的长度有关，根据教授研究，如果容器长度为x，其制作费用为 $(x - L)^2$ 。其中L是一个常量。P教授不关心容器的数目，他可以制作出任意长度的容器，甚至超过L。但他希望费用最小。

输入 第一行输入两个整数N， L。接下来N行输入Ci。 $1 \leq N \leq 50000, 1 \leq L, C_i \leq 10^7$

输出 输出最小费用

Sample Input

5 4

3

4

2

1

4

Sample Output

1

例题2： HNOI2008 玩具装箱——斜率优化DP

DP:

$$dp[i] = \min(dp[j] + (\text{sum}[i] - \text{sum}[j - 1] + i - j - L)^2)$$

可以变成

$$dp[i] = \min(dp[j] + (\text{sum}[i] - \text{sum}[j] + i - j - L - 1)^2)$$

$$\text{令 } a[i] = \text{sum}[i] + i, b[j] = \text{sum}[j] + j + L + 1$$

$$dp[i] = \min(dp[j] + (a[i] - b[j])^2)$$

$$dp[i] = dp[j] + a[i]^2 + b[j]^2 - 2 \cdot a[i] \cdot b[j]$$

$$dp[j] + b[j]^2 = 2 \cdot a[i] \cdot b[j] + dp[i] - a[i]^2$$

把 $b[j]$ 看做 x , $dp[j] + b[j]^2$ 看做 y

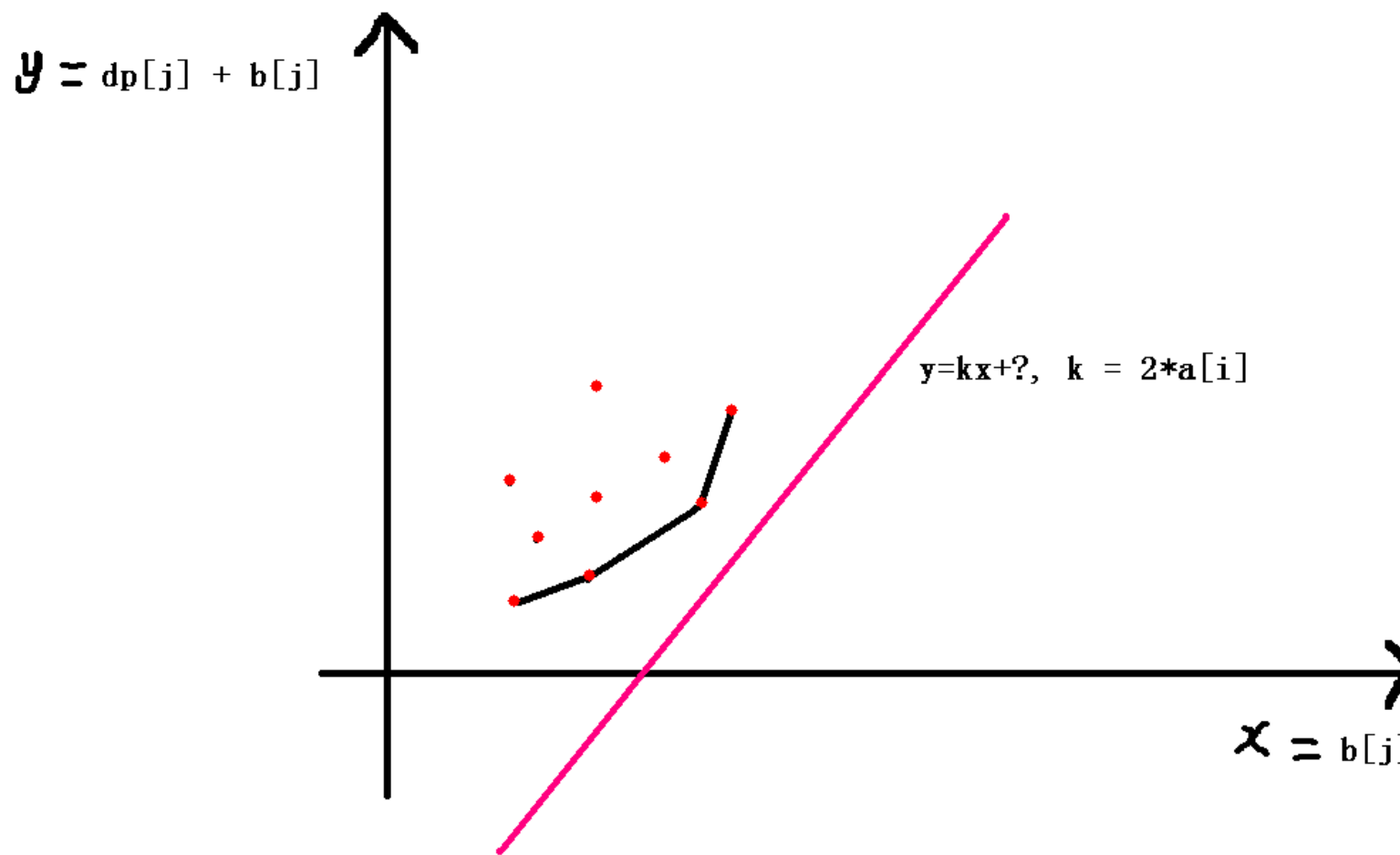
$$y = 2 \cdot a[i]x + dp[i] - a[i]^2$$

这就是一条直线的解析式, $y = kx + b$, $k = 2 \cdot a[i]$, $b = dp[i] - a[i]^2$

要找一个点 $P(b[j], dp[j] + b[j]^2)$ 使得上面的斜率为 $2 \cdot a[i]$ 的直线过这个点且与 y 轴截距 $(b = dp[i] - a[i]^2)$ 最小

例题2： HNOI2008 玩具装箱——斜率优化DP

就变成了用一条斜率为 $k=2*a[i]$ 的直线从下到上扫过去，碰到的第一个点然后把直线和y轴的截距求出来加上 $a[i]^2$ 就是答案



Thanks!