

理解深度学习

2023 年 11 月 28 日

目录

1 傅里叶分析	2
1.1 四类傅里叶变换的定义	3
1.1.1 连续傅里叶变换 (Continuous Fourier transform, CFT) . . .	4
1.1.2 离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)	
.	5
1.1.3 傅里叶级数 (Fourier Series, FS)	7
1.1.4 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT)	9
1.2 从 CFT 到 DTFT 产生的频率混叠效应 (aliasing)	10
1.3 傅里叶系数的衰减特性	13
1.4 为什么频谱的峰值比较重要	15
1.5 实数函数傅里叶变换的对称性	16

Chapter 1

傅里叶分析

研究神经网络的基本特征需要用到很多学科的工具，在其中傅里叶频率分析扮演了最为重要的角色。为了方便我们使用傅里叶分析来研究神经网络的训练过程，在本章节中，我们将要介绍一些有关傅里叶分析重要的基本根据和证明。

在讨论傅里叶变换之前，我们简明扼要地回顾一下基本概念。本节中最重要的基本概念是内积和投影，及其衍生的函数空间正交基。不妨考虑两个向量 a, b ，向量内积的计算公式 $a \cdot b = (a_{proj} + a_{\perp}) \cdot b = a_{proj} \cdot b$ 将内积和投影联系在一起。为了将两者彻底统一，方便我们对空间中向量的刻画，我们一般会在空间中建立标准正交基。对于我们要处理的函数空间，如果将函数空间考虑成向量空间，函数本身作为向量，寻找函数空间的标准正交基就自然而然了。出于泰勒展开的思想，人们有的时候希望简单的多项式函数可以用于描述函数空间（注意这里有一个完备性的问题），但是一系列正交多项式的可解释性较差，除了一些特殊用途之外，我们并不清楚一个函数 f 在一个正交多项式基底 $\{p_i(x)\}_i$ 的投影 $f \cdot p_i$ 有什么意义。引入傅里叶变换中的标准正交基 $\{e^{-2\pi i \xi x}\}_{\xi}$ 便凸显出其可解释的重要性，在基底中 ξ 的地位类似于正交多项式中 i 的地位（从这个方面可以看出正交多项式是离散的，而傅里叶标准正交基是连续的，这对我们描述空间的能力产生了很显著的影响）。

我们选取三角函数的原因主要是其函数本身包含周期、频率这些的比较好理解且有大量研究基础的概念。傅里叶变换的典型用途是将信号分解为频谱——显示频率与对应幅值的大小。对于一个简单的 $x = f(t)$ 函数，如果我们看到的是 x 值随

着 t 值的变化情况，称我们在时域上看函数。但是如果我们把 f 投影到傅里叶标准正交基上，并记录投影的值： $w(\xi) = f \cdot e^{-2\pi i \xi x}$ ，那么我们就获得了一个新的角度：函数的振幅 w 随着频率 ξ 的变化情况，这称作在频域上看函数。

下面的图片1.1 可以帮助我们理解傅里叶变换在做什么，在频域看，我们可以看到它是由哪些频率成分的三角函数以多大的幅度叠加而成的。最前面红色的线就是所有正弦波叠加而成的总和。而后面依不同颜色排列而成的正弦波就是组合为目标函数的各个分量。这些正弦波按照频率从低到高从前向后排列开来，而每一个波的振幅都是不同的，我们把每种频率的波的振幅画出来作为纵坐标，以频率作为横坐标，便得到了右边的频域图像。

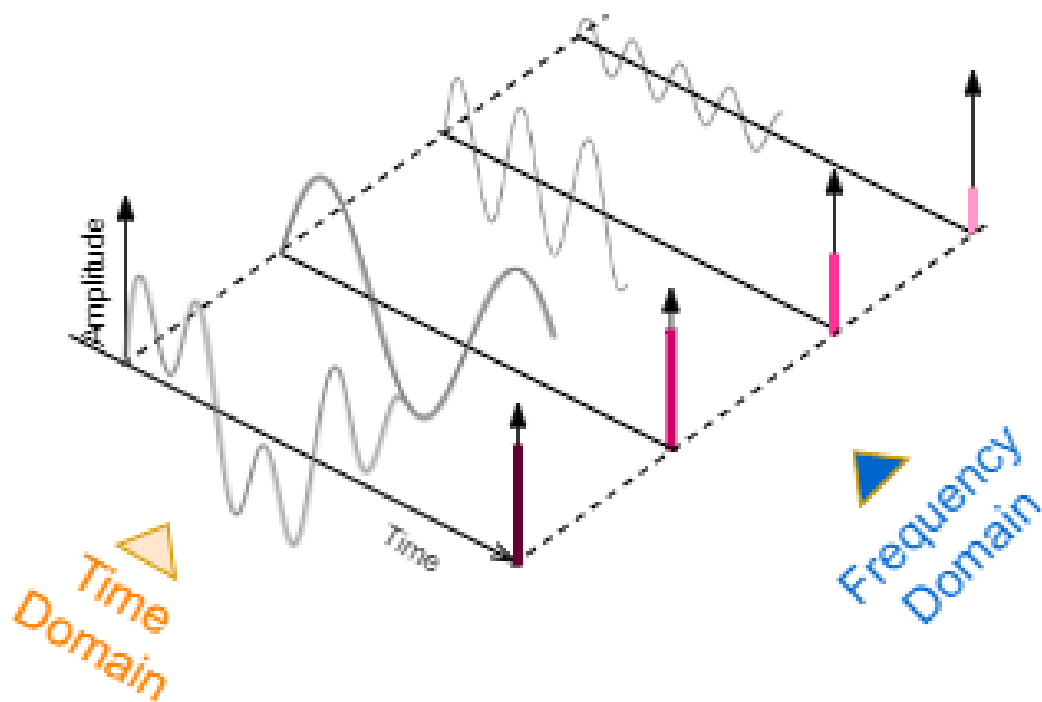


图 1.1: An example of Fourier analysis. Figure is copied from [链接](#).

1.1 四类傅里叶变换的定义

下面我们从定量的角度理解傅里叶分析的概念。我们这里的两个空间分别是时域空间 (time domain, 常记作 x domain) 和频域空间 (frequency domain, 常记作 ξ domain)。这四种傅里叶变换的本质是完全相同的, 区别仅仅在于我们对于时域空间和频域空间的某些限制, 这些限制带来了四种不一样形式的傅里叶变换。

1.1.1 连续傅里叶变换 (Continuous Fourier transform, CFT)

第一种情况是在时域空间上信号的采样是可以做到精度无穷且无界的, 也就是说我们可以获得待变换函数 g 在实数域上任一点的具体值。在这种情况下, 傅里叶变换叫做连续傅里叶变换 (Continuous Fourier transform, CFT), 因为此时我们做傅里叶变换, 相当于是将 g 完整地投影到标准正交基底上, 因此会在频域空间上完全保存时域空间上的信息, 同时也可以通过逆变换还原函数 g 。我们可以说 CFT 是对信号的”真拟合”。

对于时域空间上的信号 $g(x)$, 做傅里叶变换后将成为频域空间上的信号, 因此是一个关于 ξ 的函数, 其定义为:

$$\mathcal{F}[g(x)](\xi) = \hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (1.1)$$

注意这里的内积是 $f \cdot g = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x) dx$.

相应的逆变换为:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}(\xi)](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (1.2)$$

我们可以从以下几点来理解 CFT。

第一, 正如前文所述在做 CFT 正变换时, 实际上我们是把 $g(x)$ 投影到另一个函数空间, 这个函数空间的基底是 $e^{2\pi i \xi x}$ 。而逆变换则是函数使用基底表示的过程, 将系数 (这里是指 $\mathcal{F}[g](\xi)$) 乘以基底之后做线性组合重组回原信号 $g(x)$, 只不过由于基底是连续的, 导致逆变换变成积分的形式。

第二, 由于 $e^{2\pi i \xi x} = \cos(2\pi \xi x) + i \sin(2\pi \xi x)$, 所以可以说 CFT 是将 $g(x)$ 被放入了三角函数空间中, 而之所以选择三角函数是因为它比较简单并且有一些良好的

性质，比如 $\sin x, \cos x$ 互为导数、周期性和振荡性（我们可以通过上下震荡地幅度读出振幅大小）等等都有利于进一步理论分析 $g(x)$ 的性质。

第三，对于初学者比较令人困惑的是为什么逆变换中积分里面出现了负频率？这是因为我们这里定义的频率只是 $e^{-2\pi i \xi x}$ 指数上的 ξ 并没有物理意义上的严格正性，一般可以理解为正频率代表着逆时针旋转的波形，负频率代表着顺时针旋转的波形。

接下来做一些补充。对于任何一个信号或者说函数 $g(x)$ ，如果它是非周期的，那么如果要完全获取它的信息，需要对全空间进行无限精度采样，易知其傅里叶变换后频域空间上的信号是连续并且非周期的。而对于一个周期函数，若想完全获取其信息，在任意一个周期宽度下进行无限精度采样就等价于全空间无限精度采样了，这一特点将在傅里叶级数部分讨论。

1.1.2 离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)

第二种情况是时域空间上信号的采样是离散的但采样是无界的，也就是我们只能采到 $g(x)$ 在一些离散点上的值但是全空间范围都可以进行采样。这种情况下的傅里叶变换转化为离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT)。在 DTFT 中，一个重要假设是在时域上采样的间隔是固定的，也就是假设均匀采样，并设这个步长为 δ ，则我们定义 $x_j = j\delta, j \in \mathbb{Z}$ 为时域上可采样的点。

我们先介绍 DTFT 的正变换、逆变换公式：

$$\mathcal{F}_{DTFT, \delta}[g(x)](\xi) = \hat{g}_{DTFT, \delta}(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j\delta) e^{-2\pi i \xi j \delta}, \quad (1.3)$$

相应逆变换为：

$$\mathcal{F}_{DTFT, \delta}^{-1}[\hat{g}_{DTFT, \delta}(\xi)](j) = \delta \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} \hat{g}_{DTFT, \delta}(\xi) e^{2\pi i \xi j \delta} d\xi, \quad (1.4)$$

DTFT 离散采样的特征带来了一些与 CFT 显著不同的变化，有以下几点比较重要的 Remark 需要给出：

1. 在 DTFT 中，可采样的最大周期是 ∞ ，这对应着最小的频率 0，可采样的最小周期是 δ ，因为即便真实信号周期再小我们也无法准确测量了，从而对应着最大频率 $\frac{1}{\delta}$ 。换句话说即函数在频域上出现最大值，傅里叶变换后 ξ 应有一个范围，我们以 $\xi = 0$ 为中心考虑 $-\frac{1}{2\delta} \leq \xi \leq \frac{1}{2\delta}$ 。

下图揭示了为什么我们无法测量出周期小于 δ 的信号。我们使用绿色虚线 $f(x) = \sin(2x)$ 作为待测量信号，从 $x = 0$ 开始以 $\frac{1}{2}\pi$ 为间隔测量信号 $f(\frac{k}{2}\pi), k = 0, 1, \dots$ ，我们将测量得到的信号重新计算频率并绘制了 DTFT 计算得到的结果在时域上的表现 $g(x)$ (红实线)，我们可以发现最后的频率为 $\xi_{DTFT} = 2\pi/(\frac{1}{2}\pi) = 1$ 而非原信号的 $\xi_{origin} = 2\pi/2 = \pi$ ，这是因为我们在计算信号频率的时候无法获得并使用 $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ 之间的任何待求信号的其他信息，因此也不能获知该函数在区间内的高频表现。

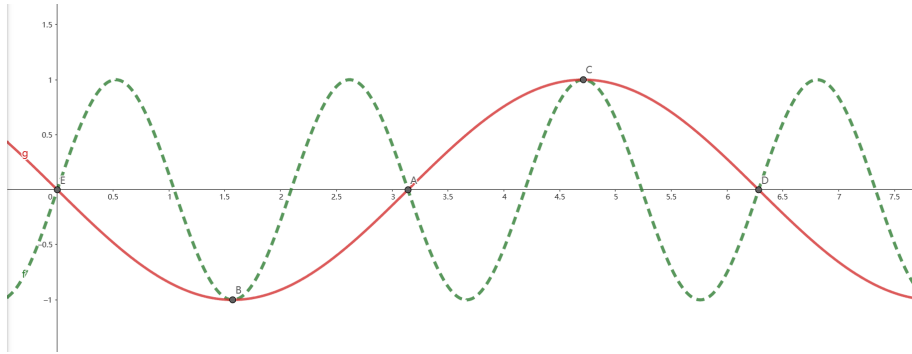


图 1.2

2. 逆变换后的自变量为 j ，这是因为我们采样是离散的，所以逆变换后自变量也应该是离散的，所以直接用 j 来表示； ξ 的范围是 $-\frac{1}{2\delta} \leq \xi \leq \frac{1}{2\delta}$ ，故应以此确定逆变换积分的上下限。
3. 接着上一条注解，我们可以把任意频率 ξ_0 代入公式 (1.3)，也可以算出一个值，这与我们所说函数在频域中有界是不是相矛盾？答案是并不矛盾，虽然我们设置了 DTFT 的定义域为 $[-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ ，但是出于各方面的需要，我们在非定义域空间周期延拓定义域空间的频率值，因此实际上 $\mathcal{F}[g](\xi)$ 是一个周期函数。

为了将我们关于 CFT 的知识应用到 DTFT 上，我们需要调整我们的目标函数，将 DTFT 看做 CFT 的一个特例。方法是将函数视作 Dirac δ 函数的和，将定义域扩展到全空间后对其做 CFT，该结果和上文我们给出 DTFT 公式相同，接下来即是 CFT 推导 DTFT 的简略证明：

证明. 考虑实数域上的函数 $g(x)$ ，其只有在 $x_j = jh$ 上的值能被我们观测到。因此我们定义一个新函数

$$\bar{g}(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} g(x_j) \delta(x - x_j),$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirac 函数，在 $x = 0$ 时值为 ∞ ，在其他处值为 0. 我们对 \bar{g} 做 CFT 变换：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\bar{g}](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{g}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{N}} g(x_j) \delta(x - x_j) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} g(jh) \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_j) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} g(jh) e^{-2\pi i x_j \xi} \end{aligned}$$

便得到了我们定义的 DTFT 正变换；讨论逆变换的情况，我们先将其写出来：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\bar{g}(\xi)](x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{N}} g(jh) e^{-2\pi i x_j \xi} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} g(jh) \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_j \xi} e^{2\pi i \xi x} d\xi, \end{aligned}$$

我们看出来 $e^{-2\pi i x_j \xi}, e^{2\pi i \xi x}$ 均是傅里叶标准正交基中的元素，在 ξ 固定的情况下，倘若 $x \neq x_j$ ，那么该内积为 0. 换言之，我们逆变换得到的函数 $\mathcal{F}^{-1}[\bar{g}](x)$ 仅在采样点下有意义，因为其中自变量 x 若不等于之前我们采样点 x_j 那么函数值就是 0；若自变量 $x = x_j$ ，那么 $\mathcal{F}^{-1}[\bar{g}](x)|_{x=x_j} = g(x_j)$ ，

因此自然而然地我们可以将逆变换函数记为： $\mathcal{F}^{-1}[\bar{g}](j) := \mathcal{F}^{-1}[\bar{g}](x_j)$ ，而且我们通过正变换再逆变换将之前的采样点的信息还原出来了。 \square

1.1.3 傅里叶级数 (Fourier Series, FS)

第三种情况是时域空间上采样是无穷精度但是有限宽的，因此我们可以假设采样范围是 $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$ 。这种情况下就是我们熟悉的傅里叶级数 (Fourier Series, FS)。因为采样是有限宽的，所以即便一个信号的周期是大于采样宽度的，我们也无法通过采样测量出来，亦即存在一个可采样的最大周期，即采样宽度 T ，这也对应着最小频率 $\frac{1}{T}$ 。又因为采样精度无穷，所以没有最小的可采样周期，这对应着最大频率是 ∞ 。

因为我们的采样区域是有限宽的，因此我们着重考虑的是所有可以通过采样确定周期的函数，它们的周期应该满足 $T/k, k \in \mathbb{Z}$ ，因此频率是离散的、无界的，频率 $\xi = \frac{k}{T}, k \in \mathbb{Z}$ ，从而频率可以等价于取 $k \in \mathbb{Z}$ 。FS 的公式为：

$$c_k := \mathcal{F}_{FS,T}[g(x)](k) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x) e^{-2\pi i x k / T} dx \quad (1.5)$$

这里的 c_k 即傅里叶系数。

相应逆变换的意义是从傅里叶系数重构出真实信号，即我们已知 c_k ，重构出时域空间的信号，从而逆变换后自变量为 x ，范围是 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ，逆变换公式为：

$$\mathcal{F}_{FS,T}^{-1}[c_k](x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k x / T} \quad (1.6)$$

补充说明一点，计算 $g(x)$ 傅里叶级数的流程实际上是在计算信号以周期的方式延拓出去形成的函数 $\hat{g}(x)$ 的 CFT，而当采样宽度不能整除真实信号周期时或者采样不完全时，这种延拓可能造成采样信号在某些点是间断的，在做傅里叶变换时会在间断点上产生一些假的信号，这些假信号通常是衰减的，所以我们做傅里叶变换后常常更关注峰值而不是衰减，为什么我们需要将信号以周期方式延拓出去呢？因为我们所有的基函数均是周期函数且在端点上的值都是相等的，如果 $g(x)$ 不是周期函数，则它显然不能用固定区间上的周期函数逼近，而且端点的值将产生比较大的麻烦。

1.1.4 离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT)

第四种情况是时域空间上采样精度有限并且有限宽，根据上文中的经验，时域空间精度有限将导致频域空间频率宽度有限；时域空间采样有限将导致频率空间频率离散（换言之就是频率空间精度有限）。这种情况下 CFT 将退化为离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT)。这里我们依然假设时域空间均匀离散且有界的采样，则可以设采样信号为 $\{a_j\}_{j=0}^{N-1}$ ，此时 DFT 的公式为：

$$\mathcal{F}_{DFT}[\{a_j\}_{j=0}^{N-1}](k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-2\pi i k j / N} \quad (1.7)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 相应的逆变换为：

$$\mathcal{F}_{DFT}^{-1}[\{b_k\}_{k=0}^{N-1}](j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{2\pi i k j / N} \quad (1.8)$$

补充说明几点重要的 Remark:

1. 与 DTFT 与 FS 类似，DFT 我们对时域和频域都做周期延拓。FS 是对时域做周期延拓很容易理解，DTFT 对频域做周期延拓本质上和下一小节混叠现象是相同的。
2. 我们可以将 DFT 表示为矩阵的形式：

$$\hat{a} = Fa \quad \text{where } F \text{ is } \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{2\pi i / N} & \dots & e^{2\pi i (N-1) / N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{2\pi i (N-1) / N} & \dots & e^{2\pi i (N-1)^2 / N} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

注意 F 是一个可逆对称矩阵，且容易证明它的逆矩阵满足 $F^{-1} = F^T$ ，这个性质将在 DFT 中扮演重要的角色。

介绍过四种傅里叶变换后，我们可以发现一个比较明显的现象：CFT 是连续时域空间到连续的频域空间的映射；DTFT 是离散时域空间（视为了 Dirac 函数和）到连续的频域空间的映射，且在频域空间上是一组周期函数（混叠现象）；FS

是连续且周期时域空间到离散的频域空间的映射；DFT 是离散的时域空间到离散的频域空间的映射。我们看出时域的离散性对应频域的周期性（有界性），时域的周期性（有界性）对应频域的离散性。那么有没有可能时域上信号是离散且有界的，但是在频域空间上它是连续且无界的？这是完全不可能的，因为不确定性原理告诉我们，一对对偶变量是不可能完全准确测量的。在时间上离散化以后有个最小的精度，那么在频率上就有一个最大的宽度。反过来频率上有个最小的精度，那么在空间上就有最大的宽度。离散一个空间的变量就是使他在另一个空间中有界。如果时间采样有限宽，那么采样频率就是离散的。如果时间采样离散，那么采样频率就有限宽。

值得一提的是，如果我们不遵循均匀采样的假设，同样可以获得相应的离散傅里叶变换，均匀采样既是指时在域空间上的均匀，也可以指在频域空间上的。这一般用于当我们仅对特定的频率点感兴趣的时候。我们所要做的是调整 DFT 的基底 $e^{-2\pi i k j / N}$ 从均匀到不均匀的 $e^{-2\pi i k \omega_j / N}$ ，因为 DFT 的基底是有限维的，因此有很大的调整空间。例如我们有在时域上的均匀采样的信号，但是仅仅对特定频率点感兴趣，那么我们可以做如下的 NUDFT：

$$\hat{a}(\omega_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-\frac{2\pi i k}{N} \omega_j} \quad (1.10)$$

但是不能忽视 NUDFT 的效率较低，因为均匀采样的好处是可以使用快速傅里叶变换算法极大地加速计算过程，计算效率非常高。

1.2 从 CFT 到 DTFT 产生的频率混叠效应 (aliasing)

在这些公式、分析的基础上，我们进一步的希望知道傅里叶变换对于目标函数的拟合效果，当然之前我们也提到了 CFT 是可以完全拟合目标函数的，因此我们对于其他情况下傅里叶变换拟合效果的定性定量分析就以它和 CFT 之间的差别来衡量。这里以 DTFT 为例，也就是时域采样有最小精度的时候，那么它用 DTFT 拟合之后，和真实信号到底差多少。首先由 DTFT 正变换我们得到对采样信号的

DTFT 拟合 (由于采样精度有限, 我们最多只能做 DTFT 拟合):

$$\mathcal{F}_{DTFT,\delta}[g(x)](\xi) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g(j\delta)e^{-2\pi i\xi j\delta}$$

我们要比较它与真实信号的关系, 因此在这里我们利用 CFT 逆变换表示积分中的 $g(j\delta)$, 从而引入真实信号。为了和外面的采样频率 ξ 区分开, 我们使用 ξ' 表示逆变换时的积分变量。由 CFT 逆变换, 我们有

$$g(j\delta) = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi')e^{2\pi i\xi'j\delta}d\xi'$$

将上式带之入前的式子, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{DTFT,\delta}[g(x)](\xi) &= \delta \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi')e^{2\pi i\xi'j\delta}d\xi'e^{-2\pi i\xi j\delta} \\ &= \delta \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{M}{\delta}-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{M}{\delta}+\frac{1}{2\delta}} \hat{g}(\xi')e^{2\pi i\xi'j\delta}d\xi'e^{-2\pi i\xi j\delta} \\ &= \delta \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} \hat{g}(\xi' + \frac{M}{\delta})e^{2\pi i(\xi'+\frac{M}{\delta})j\delta}d\xi'e^{-2\pi i\xi j\delta} \\ &= \delta \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} \hat{g}(\xi' + \frac{M}{\delta})e^{2\pi i\xi'j\delta}d\xi'e^{-2\pi i\xi j\delta}\end{aligned}$$

令 $\hat{h}_M(\xi') = \hat{g}(\xi' + \frac{M}{\delta})$, 并利用 DTFT 逆变换, 则有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{DTFT,\delta}[g(x)](\xi) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \delta \int_{-\frac{1}{2\delta}}^{\frac{1}{2\delta}} \hat{h}_M(\xi')e^{2\pi i\xi'j\delta}d\xi'e^{-2\pi i\xi j\delta} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{M=-\infty}^{+\infty} h_M(j\delta)e^{-2\pi i\xi j\delta} \\ &= \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \hat{h}_M(\xi) \\ &= \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi + \frac{M}{\delta})\end{aligned}$$

因此最终我们得到:

$$\hat{g}_{DTFT,\delta}(\xi) = \sum_{M=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi + \frac{M}{\delta})$$

我们来分析一下这个结果。左边的 $\hat{g}_{DTFT,\delta}(\xi)$ 是离散时间采样拟合的信号，右边则是真实信号。最直观的一点是该公式告诉我们 DTFT 是一个周期为 $1/\delta$ 的函数，这一点与我们在上一小节最后的总结相对应。由之前 DTFT 的介绍， $\hat{g}_{DTFT,\delta}(\xi)$ 中的自变量 ξ 应该在 $[-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ 内。如果真实信号中没有任何 $[-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ 外的频率成分，那么对于一个固定的频率值 ξ ，这时右边的求和只有一项非零，即 $\hat{g}(\xi)$ 。故此时离散时间采样后做 DTFT 实际上就是真实信号的周期延拓。但若真实信号有 $[-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ 外的频率成分，则此时右边的求和中便会保留 \hat{g} 在 $[-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ 以外的值，因此真实信号的周期延拓与离散时间采样的 DTFT 就产生了偏差。这种偏差称为频率混叠 (aliasing)。

我们可以用一个简单的例子来解释这个现象¹:

为了方便起见，我们考虑函数 $g(x) = \cos(2\pi x)$ ，很明显地，在我们的 CFT 看来这个函数的频率是 $\{+1, -1\}$ ，也就是说其 CFT 为:

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = 1 \\ 1, & \xi = -1 \end{cases}$$

我们尝试创造出出现混叠现象和不出现混叠现象两种采样方式。牢记如果我们不想看到混叠现象，我们需要满足的不等式为:

$$-\frac{1}{2\delta} < -1 < 1 < \frac{1}{2\delta} \Rightarrow \delta < \frac{1}{2}$$

于是我们得到了最大的采样宽度，当我们采样宽度小于最大采样宽度时混叠现象是不存在的，如图 1.3 展示; 但是如果调宽采样宽度跨过 $\frac{1}{2}$ 那么可以明显发现在频域的一个周期内频域的图像远远偏离了真实 CFT 的结果。我们将第二种情况称为信号发生了混叠，而此处 $\delta = \frac{1}{2}$ 是防止信号发生混叠最小的采样频率，称为奈奎斯特频率。

¹完整的例子请见: https://www.projectrhea.org/rhea/index.php/2015_Fall_ECE_438_Boutin_A_visual_explanation_of_aliasing_and_repetition_with_the_DTFT_Erik_Swan.

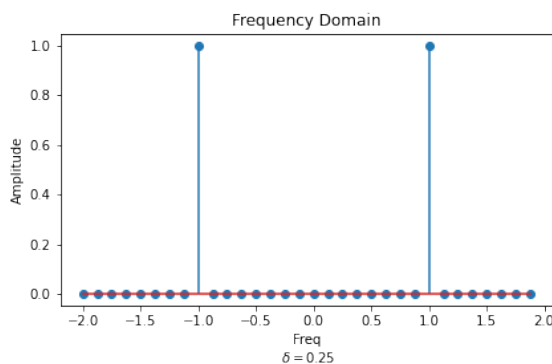


图 1.3

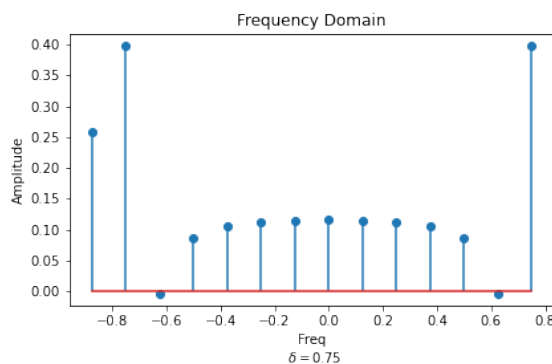


图 1.4

图 1.5: 在 $\delta = 0.25, 0.75$ 时一个固定周期内 DTFT 的频域图，其中左图是与 CFT 的结果相同，而右图与 CFT 的结果相去甚远

从上文中可以得到如下结论：因此为了不失真地恢复模拟信号，我们的采样频率应该大于等于模拟信号频谱中最高频率的 2 倍。这一定律被称为香农采样定理。在实际操作中，通常为了保证完整恢复信号会将 2 倍扩大到更高的值。

1.3 傅里叶系数的衰减特性

关于傅里叶变换系数随频率衰减的研究，我们从三个特殊的函数入手，最终引出一个较为一般的结论。这三个特殊函数在傅里叶变换的计算中起到了重要的作用。

首先是 $\delta(x)$ 函数，

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (1.12)$$

对任意函数 $f(x)$ 和 $\delta(x)$ 有如下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx = f(y). \quad (1.13)$$

对 $\delta(x)$ 做傅里叶变换可得

$$F[\delta](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)e^{-2\pi i\xi x}dx = e^{-2\pi i\xi x}|_{x=0} = 1$$

可以看到 δ 函数傅里叶变换的系数是不随频率衰减的。

其次考虑 Heaviside 函数: $H(x) = \int_0^x \delta(t)dt$, 由傅里叶逆变换可得

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

两端分别求导可得

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\xi)2\pi i\xi e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

又由于 $\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\delta}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$, 与上式比较可得

$$\hat{\delta}(\xi) = \hat{H}(\xi)2\pi i\xi \Rightarrow \hat{H}(\xi) = \frac{1}{2\pi i\xi}$$

可以看到 Heaviside 函数傅里叶变换的系数按照 $\frac{1}{|\xi|}$ 衰减。

最后考虑 ReLU 函数: $\text{ReLU}(x) = \int_0^x H(t)dt$, 由傅里叶逆变换可得

$$\text{ReLU}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\text{ReLU}}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

两端分别求导可得

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\text{ReLU}}(\xi)2\pi i\xi e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

又由于 $H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$, 与上式比较可得

$$\hat{H}(\xi) = \widehat{\text{ReLU}}(\xi)2\pi i\xi \Rightarrow \widehat{\text{ReLU}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i\xi)^2}$$

可以看到 $\text{ReLU}(x)$ 函数的傅里叶变换的系数按照 $\frac{1}{|\xi|^2}$ 衰减。

若我们定义 $\delta(x)$ 是-2 阶连续, $H(x)$ 是-1 阶连续, $\text{ReLU}(x)$ 是 0 阶连续, 依此类推, 每积一次分, 就提升一次连续性。推广到一般情况可以得到如下结论: 若函数 f 是 k 阶连续, 则 f 的傅里叶变换系数按照 $\frac{1}{|\xi|^{k+2}}$ 衰减; 若 f 无穷光滑, 比如指数函数, 其傅里叶变换系数衰减速度不慢于指数衰减。这个结论可以参考 Elias M. Stein 的 *Fourier Analysis an Introduction*。

1.4 为什么频谱的峰值比较重要

在一般的数值模拟中受限于采样的区域, 我们一般没有办法窥视到函数的全貌, 只能取得函数在一小段定义域上的离散值。在这一小节, 我们需要指出选取不同的定义域上的离散信号点, 做出傅里叶变换后得到的结果是不一样的。这里我们取一个简单的函数 $f(x) = \sin(x) + \sin(3x)$ 分别在 $[0, 2\pi]$ 和 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 两个区域上进行同样宽度的采样, 然后做离散傅里叶变换。结果如下图, 可以观察到在傅里叶变换后的频谱有明显的差异。

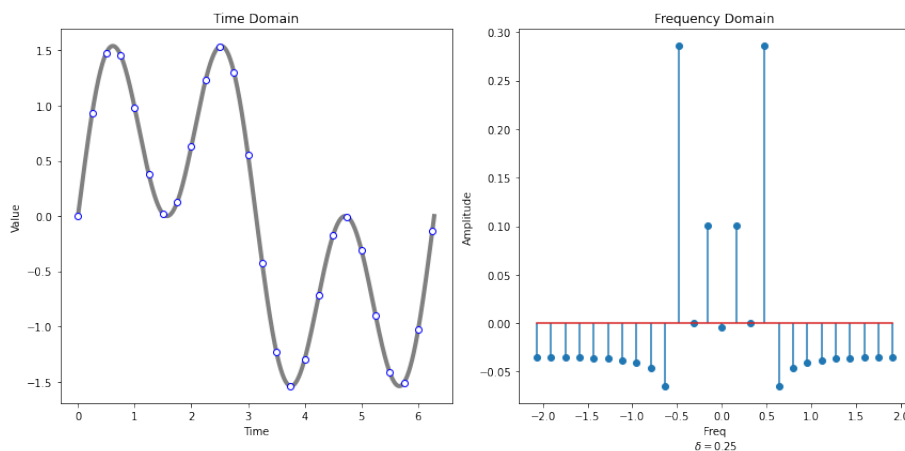


图 1.6: 在 $[0, 2\pi]$ 内进行采样并进行 DFT 的结果

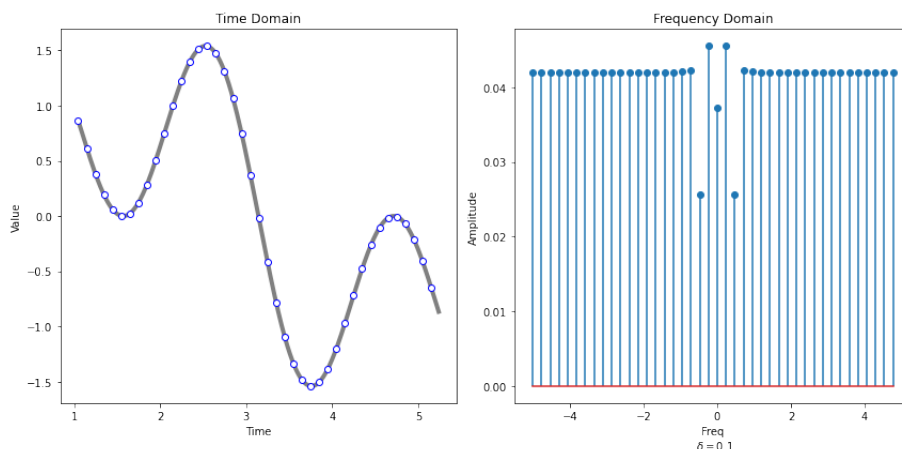


图 1.7: 在 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 内进行采样并进行 DFT 的结果

我们可以明显看出两者的区别如下：

- a 两者的频域范围是有区别的；前者的频率整体较低，主要频率集中在 $[-2, 2]$ 之间；后者的频域范围更大，出现了 $[-4, 4]$ 的高频率
- b 两者的振幅有明显区别，前者在低频处存在一个振幅高峰而后者在整个频域范围内都很平均且相对较低。

综合这两点考虑，我们可以发现在 $[0, 2\pi]$ 内 DFT 认为函数主要由低频成分组成，高频成分很少；而在后者 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 区域内认为函数存在高频且不同频率的振幅基本相同，也就是说函数中高频成分也占主要作用。如果我们把函数的频率粗浅地理解成振幅与周期的商，这个现象很容易解释：因为两者函数在定义域内振幅是相同的，但是由于后者采样点距离明显更近，导致了后者有更多的高频成分。

1.5 实数函数傅里叶变换的对称性

通过上面的所有实验可以发现，DFT 的一个重要特征是在频域中一个周期内振幅实值存在轴对称的性质。我们清楚其第一个周期范围为 $\xi \in [-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ 是被我们人为设置为关于原点 $\xi = 0$ 对称的，因此我们只要说明 $\mathcal{F}[g](\xi)$ 的实部是关于直线

$\xi = 0$ 对称就可以说明所有周期的轴对称性质。而这个轴对称性质是继承自 CFT 的特性。因此我们有以下结论：

实数函数离散傅里叶变换的幅度在一个周期内具有对称性。

证明. 我们回忆 CFT 的变换公式, 设 $g(x)$ 是实数函数。

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

很容易得到,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](-\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{2\pi i \xi x} dx \\ &= \overline{\mathcal{F}[g]} \\ &= Re(\mathcal{F}[g](\xi)) - i Im(\mathcal{F}[g](\xi)) \end{aligned}$$

可以看出实部是关于 $\xi = 0$ 对称: $Re(\mathcal{F}[g](\xi)) = Re(\mathcal{F}[g](-\xi))$; 虚部是关于原点对称: $-Im(\mathcal{F}[g](\xi)) = Im(\mathcal{F}[g](-\xi))$ □