Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphik: Projektive Geometrie - Übung 1

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_CG, SW 03 I

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Lothar Papulua, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1.*

Aufgabe 1: Translation im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde um den Vektor $(1,2)^T$ translatiert. Was sind die neuen Koordinaten der drei Eckpunkte? Ist es möglich diese Transformation mit Hilfe einer 2×2-Matrix zu beschreiben? Zeichnen Sie die Situation auf!

Lösung: $A'(1,2)$, $B'(5,2)$, $C'(3,5)$.

Aufgabe 2: Translation im 3D

Das Dreieck $A(0,0,0)$, $B(4,0,2)$, $C(2,3,1)$ werde um den Vektor $(1,2,3)^T$ translatiert. Was sind die neuen Koordinaten der drei Eckpunkte?

Lösung: $A'(1,2,3)$, $B'(5,2,5)$, $C'(3,5,4)$.

Aufgabe 3: Skalierung im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde in x-Richtung mit dem Faktor $s_x = 2$ und in y-Richtung mit dem Faktor $s_y = 1$ skaliert. Bestimmen Sie die Skalierungsmatrix und berechnen Sie die skalierten Eckpunkte. Verwenden Sie Matrix-Vektor-Multiplikationen! Skizzieren Sie die Situation zur Kontrolle.

Lösung: Die Skalierungsmatrix lautet

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit wir beispielsweise aus dem Punkt C wegen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

der Punkt $B'(4,3)$. Analog erhält man $A'(0,0)$ und $B'(8,0)$.

Aufgabe 4: Rotation im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde um den Ursprung gedreht und zwar mit dem Winkel $\phi = 135^o$. Bestimmen Sie die Rotations- oder Drehmatrix. Bestimmen Sie die Eckpunkte des rotierten Dreiecks mit Hilfe von Matrix-Vektor-Multiplikationen! Skizzieren Sie die Situation zur Kontrolle.

Lösung: Die Rotationsmatrix für $\phi = 135^o$ ist

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Somit wird der Punkt $C(2,3)$ wegen

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in den Punkt $C'(-5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Analog erhält man $A'(0,0)$ und $B'(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Aufgabe 5: Nochmals Rotation im 2D

Wie lautet die Drehmatrix, um das in der vorigen Aufgabe rotierte Dreieck wieder zurück zu drehen? Wie hängen die beiden letzten Drehmatrizen zusammen?

Lösung: Jede Rotationsmatrix ist orthogonal, d.h. die einzelnen Spalten (Zeilen) haben die Länge 1 und sie stehen paarweise senkrecht aufeinander:

$$\begin{aligned} \text{Länge der 1. Spalte} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{Länge der 2. Spalte} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{Skalarprodukt} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Man kann einfach zeigen, dass die Inverse $\mathbf{R}^{-1}$ einer orthogonalen Matrix $\mathbf{R}$ nichts anderes als die transponierte $\mathbf{R}^T$ der Matrix ist, d.h.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, dass dadurch die Punkte A', B' und C' wieder auf ihre Ursprungspositionen A, B, C zurück gedreht werden.

Aufgabe 6: Spiegelung an der x-Achse

Spiegeln Sie das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ an der x-Achse. Wie muss eine entsprechende Matrix aussehen, die das bewirkt? Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der y-Achse aus? Wie für eine Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Ursprung?

Lösung: Die Spiegelungsmatrix lautet:

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit dieser Matrix bewirkt, dass die x-Koordinate bleibt wie sie ist und die y-Koordinate das Vorzeichen wechselt und dies ist genau der Effekt einer Spiegelung an der x-Achse.

Auf diese Weise ändern sich A und B nicht und C geht über in $C'(2,-3)$. Zeichnen Sie die Situation auf!