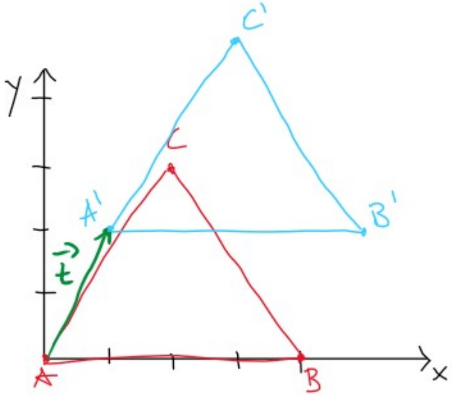
Projektive Geometrie - Übung 1

Serge Hauri

Aufgabe 1: Translation im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde um den Vektor $(1,2)^T$ translatiert. Was sind die neuen Koordinaten der drei Eckpunkte? Ist es möglich diese Transformation mit Hilfe einer 2×2-Matrix zu beschreiben? Zeichnen Sie die Situation auf!

Lösung: $A'(1,2)$, $B'(5,2)$, $C'(3,5)$.



$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$$

Antwort: Nein, Translationen nicht durch Matrizen berechnet werden, ausser mit homogenen Koordinaten.

Aufgabe 2: Translation im 3D

Das Dreieck $A(0,0,0)$, $B(4,0,2)$, $C(2,3,1)$ werde um den Vektor $(1,2,3)^T$ translatiert. Was sind die neuen Koordinaten der drei Eckpunkte?

Lösung: $A'(1,2,3)$, $B'(5,2,5)$, $C'(3,5,4)$.

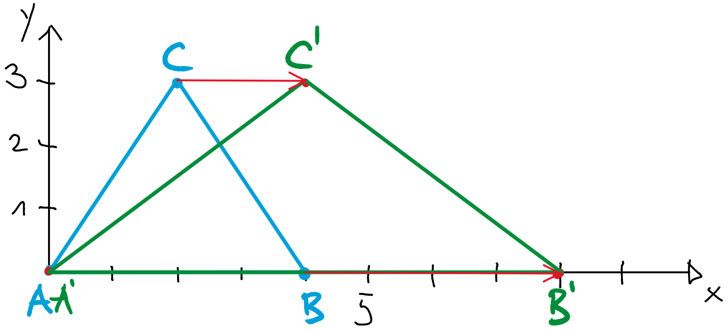
$$A' = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad ; \quad B' = \begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\\5\end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$$

Antwort:
$A'(1,2,3)$, $B'(5,2,5)$, $C'(3,5,4)$

Aufgabe 3: Skalierung im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde in x-Richtung mit dem Faktor $s_x = 2$ und in y-Richtung mit dem Faktor $s_y = 1$ skaliert. Bestimmen Sie die Skalierungsmatrix und berechnen Sie die skalierten Eckpunkte. Verwenden Sie Matrix-Vektor-Multiplikationen! Skizzieren Sie die Situation zur Kontrolle.



Skalierungsmatrix: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A' & B' & C' \end{array} \end{array}$$

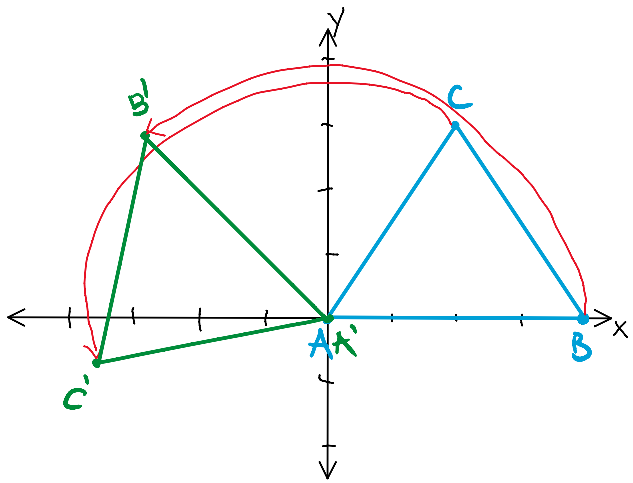
Aufgabe 4: Rotation im 2D

Das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ werde um den Ursprung gedreht und zwar mit dem Winkel $\phi = 135^o$. Bestimmen Sie die Rotations- oder Drehmatrix. Bestimmen Sie die Eckpunkte des rotierten Dreiecks mit Hilfe von Matrix-Vektor-Multiplikationen! Skizzieren Sie die Situation zur Kontrolle.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(135^\circ) & -\sin(135^\circ) \\ \sin(135^\circ) & \cos(135^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$RA = \begin{bmatrix} \cos(135^\circ) & -\sin(135^\circ) \\ \sin(135^\circ) & \cos(135) \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -2.8284 & -3.5355 \\ 0 & 2.8284 & -0.7071 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A' & B' & C' \end{array} \end{array}$$



Aufgabe 5: Nochmals Rotation im 2D

Wie lautet die Drehmatrix, um das in der vorigen Aufgabe rotierte Dreieck wieder zurück zu drehen? Wie hängen die beiden letzten Drehmatrizen zusammen?

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-135°) & -\sin(-135°) \\ \sin(-135°) & \cos(-135°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} = R^T$$

Aufgabe 6: Spiegelung an der x-Achse

Spiegeln Sie das Dreieck $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$ an der x-Achse. Wie muss eine entsprechende Matrix aussehen, die das bewirkt? Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der y-Achse aus? Wie für eine Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Ursprung?

Eine Spiegelung an der x-Achse ist eine Skalierung mit $s_x = 1$ und $s_y = -1$, also lautet die Matrix:

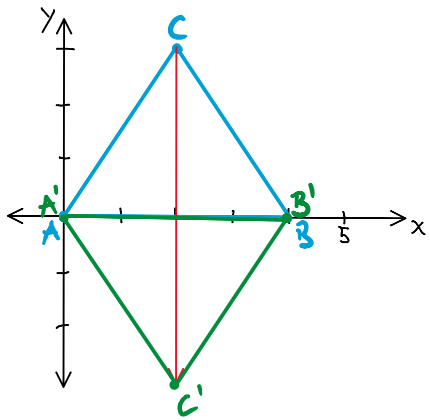
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Spiegelung des Dreiecks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A'(0,0)$, $B'(4,0)$, $C'(2,-3)$

Auf diese Weise ändern sich A und B nicht und C geht über in $C'(2,-3)$. Zeichnen Sie die Situation auf!



Eine Spiegelung an der y-Achse: $s_x = -1$, $s_y = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spiegelung an einer beliebigen Gerade durch den Ursprung

1. Rotation, sodass die Gerade auf der y-Achse liegt
2. Spiegelung an der y-Achse
3. Rotation zurück zur ursprünglichen Gerade