Projektive Geometrie - Übung 2

Serge Hauri

Aufgabe 1: Schnittpunkt zweier Geraden mit homogenen Koordinaten

Bestimmen Sie den Schnittpunkt Q der beiden Geraden

$$g : 2x+3y-5=0 \quad \text{und}$$
$$h : 5x+11y-9=0$$

indem Sie homogene Koordinaten verwenden.

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{g} \times \vec{h}$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & -9 & 5 & 11 \end{matrix}$$

$$3(-9) - 11(-5) = 28$$
$$5(-5) - 2(-9) = -7$$
$$2 \cdot 11 - 5 \cdot 3 = 7$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 28 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad Q\left(\frac{28}{7}, \frac{-7}{7}\right) = Q(4, -1)$$

Aufgabe 2: Punkte und Geraden

Gesucht sind

(a) die Gerade g durch die Punkte $A(5.5\ {-1.0})$ und $B(2.9\ 8.0)$

(b) die Gerade h, welche zu g parallel ist und durch $C(3\ {-6})$ geht.

Verwenden Sie für die Lösung homogene Koordinaten!

(a) $ax + by + 1 = 0$

$$5.5a - b + 1 = 0 \Rightarrow b = 5.5a + 1$$

$$2.9a + 8(5.5a+1) + 1 = 0 \Rightarrow 46.9a = -9 \Rightarrow a = -\frac{9}{46.9}$$

$$b = 5.5\left(-\frac{9}{46.9}\right) + 1 = -\frac{49.5}{46.9} + 1 = -\frac{2.6}{46.9}$$

$$-\frac{9}{46.9}x - \frac{2.6}{46.9} + 1 = 0 \quad \xRightarrow{\cdot(-46.9)} \quad 9x + 2.6y - 46.9 = 0$$

$$g: \quad 9x + 2.6y - 46.9 = 0$$

(b) $9 \cdot 3 + 2.6(-6) - 46.9 = 35.5$

$$\Rightarrow 9 \cdot 3 + 2.6(-6) - 11.4 = 0$$

$$h: \quad 9x + 2.6y - 11.4 = 0$$

Aufgabe 3: Spiegelung an einer Geraden

In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ betrachten wir die Spiegelung σ an der Geraden g, welche durch den Vektor $\mathbf{g} = [2,\ -3,\ 2]^T$ gegeben ist. Gesucht sind

(a) die Matrix von σ

(b) die Bildpunkte von $A(8|1)$ und $B(-65.3|0.2)$

$$g:\ 2x - 3y + 2 = 0$$

a) g schneidet die x-Achse beim Punkt:

$$2x - 3\cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow (-1\ \ 0)$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta:\quad \tan(\delta) = \frac{2}{3} \Rightarrow \delta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69°$$

$$S = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & 0 \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = T^{-1} \underbrace{S\,T}$$

$$ST = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & \cos(2\delta) \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & \sin(2\delta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = T^{-1}(ST) = \begin{bmatrix} \cos(2\delta) & \sin(2\delta) & \cos(2\delta)-1 \\ \sin(2\delta) & -\cos(2\delta) & \sin(2\delta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos(2\delta) = \cos\left(2\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{5}{13}$$

$$\sin(2\delta) = \sin\left(2\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{2\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{1+\tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)} = \frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{12}{13}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 & -8 \\ 12 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

b) $A(8 \quad 1)$, $B(-65.3 \quad 0.2)$

$$\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 & -8 \\ 12 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -65.3 \\ 1 & 0.2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 44 & -332.1 \\ 103 & -772.6 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3846 & -25.5462 \\ 7.9231 & -59.4308 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A'\left(\frac{44}{13} \quad \frac{103}{13}\right)$

$B'\left(-\frac{332.1}{13} \quad -\frac{772.6}{13}\right)$

Aufgabe 4: Streckung

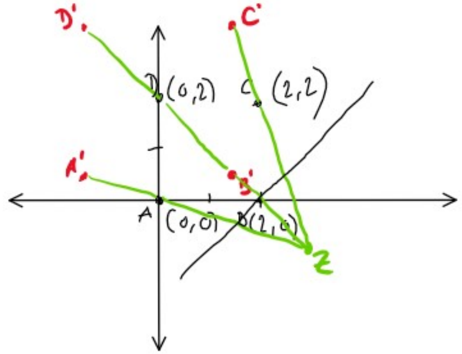
Gegeben ist eine projektive Transformation η durch ihre Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

s

Translation um $\vec{t} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Es stellt sich heraus, dass η eine Streckung ist. Bestimmen Sie den Streckungsfaktor s sowie das Zentrum.



Transformation mit 4 frei gewählten Punkten
$A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

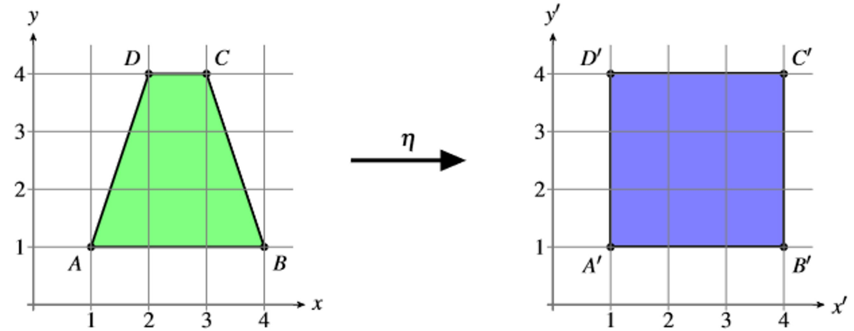
$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0.5 & 0.5 & 3.5 & 3.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} A' & B' & C' & D' \end{array}$$

Zentrum: $Z(3, -1)$

$s = 1.5$

Aufgabe 5: Korrektur einer perspektivischen Verzerrung

Gesucht ist eine projektive Transformation η mit der Matrix $\mathbf{H}$, welche die folgende perspektivische Verzerrung korrigiert:



Dabei können Sie die ganzzahligen Koordinaten direkt aus der Abbildung ablesen (z.B. $C(3,4)$ oder $D'(1,4)$ etc.). Weiter können Sie annehmen, dass $h_{33} = 1$.

$A = (1,1,1)$ $\quad A' = (1,1,1)$

$B = (4,1,1)$ $\quad B' = (4,1,1)$

$C = (3,4,1)$ $\quad C' = (4,4,1)$

$D = (2,4,1)$ $\quad D' = (1,4,1)$

$$\begin{array}{c} A\ B\ C \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{array}{c} D \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\lambda + 4\mu + 3\tau = 2$$
$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \mu + 4\tau = 4 \\ \lambda + \mu + \tau = 1 \end{array}\right\} \text{Subtraktion } 3\tau = 3 \Rightarrow \tau = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + 4\mu = -1 \\ \lambda + \mu = 0 \end{array}\right\} \text{Subtraktion } 3\mu = -1 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{3}$$

$$\lambda - \frac{4}{3} + 3 = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda p_1 & \mu p_2 & \tau p_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 4 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} A'\ B'\ C' \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{array}{c} D' \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + 4\mu + 4\tau = 1 \\ \lambda + \mu + 4\tau = 4 \end{array}\right\} \text{Subtraktion } 3\mu = -3 \Rightarrow \mu = -1$$
$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \mu + 4\tau = 4 \\ \lambda + \mu + \tau = 1 \end{array}\right\} \text{Subtraktion } 3\tau = 3 \Rightarrow \tau = 1$$

$$\lambda - 1 + 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda p'_1 & \mu p'_2 & \tau p'_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix M_1^{-1} mit Gauss-Jordan-Algorithmus

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$r2 := r2 - r3$
swap$(r2, r3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$r1 := r1 - r2$
$r3 := \frac{1}{3} r3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$r1 := r1 - 2 \cdot r3$
$r1 := -r1$
swap$(r1, r2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$r1 := 3r1$
$r1 := r1 + r2$
$r1 := r1 - 3r3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$M = M_2 M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

Kontrolle:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 12 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

Falls Sie wirklich wollen, dass $h_{33} = 1$, dann:

$$H = \frac{3}{11} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$