Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphik: Projektive Geometrie - Übung 3

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_CG, SW 05

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Aufgabe 1: Rotation im dreidimensionalen Raum

Der Würfel mit der Seitenlänge $a = 1$ hat eine Ecke im Nullpunkt und befindet sich vollständig im ersten Oktanten ($\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\right\}$). Wie lautet die (homogene) Transformationsmatrix, welche diesen Würfel im mathematisch positiven Sinn um 45^o um die y-Achse dreht. Wie lauten dann die neuen Koordinaten der acht Eckpunkte?

Aufgabe 2: Rotation im dreidimensionalen Raum

Die Gerade g geht durch die Punkte $P(2,0,0)$ und $Q(0,4,0)$. Sie liegt also in der x-y-Ebene. Sei δ die Drehung um die Gerade g mit dem Drehwinkel $\phi = 55^o$. Gesucht ist die Matrix D dieser Drehung

Hinweis: Man erhält die gesuchte Matrix, wenn man ρ wie folgt zusammensetzt:

- Zuerst eine Translation τ, welche g in eine Gerade $g^\star$ durch den Nullpunkt schiebt
- Nach einer geeigneten Rotation R um die z-Achse kommt $g^\star$ auf die x-Achse zu liegen
- Rotation η um die x-Achse mit dem Winkel ϕ.

Dann ist $\delta = \tau^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \eta \circ \rho \circ \tau$.

Aufgabe 3: Transformation im dreidimensionalen Raum

Die $3D$-Transformation σ ist gegeben durch die Matrix

$$\mathbf{M} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & -28 \\ 4 & 7 & 4 & 14 \\ -8 & 4 & 1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Bildpunkte $A^{\star}$ und $B^{\star}$ von $A(2|3|\text{-}5)$ und $B(6.2|\text{-}4.8|\text{-}1.7)$ und bestätigen Sie, dass der Abstand erhalten bleibt, d.h. $\overline{A^{\star}B^{\star}} = \overline{AB}$.

(b) Es stellt sich heraus, dass σ eine Spiegelung ist. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene ε, an welcher gespiegelt wird.

Hinweis: Die Punkte in ε sind dadurch gekennzeichnet, dass sie bei der Transformation fest bleiben.

Aufgabe 4: Transformation im dreidimensionalen Raum

Die Punkte $A(0,0,0)$, $B(6,6,3)$, $C(0,9,9)$, $D(\text{-}6,3,6)$, $E(3,\text{-}6,6)$, $F(9,0,9)$, $G(3,3,15)$ und $H(\text{-}3,\text{-}3,12)$ sind die Ecken eines Würfels. Sei π die Parallel-Projektion auf die x-z-Ebene entlang des Vektors $(1,1,0)$.

Gesucht

(a) die Matrix der Projektion und

(b) das Abbild des Würfels in der x-z-Ebene.

Aufgabe 5: Transformation im dreidimensionalen Raum

Die Punkte $A(0,0,0)$, $B(6,6,3)$, $C(0,9,9)$, $D(\text{-}6,3,6)$, $E(3,\text{-}6,6)$, $F(9,0,9)$, $G(3,3,15)$ und $H(\text{-}3,\text{-}3,12)$ sind die Ecken eines Würfels. Sei π die perspektivische Projektion auf die x-y-Ebene mit Zentrum $Z(2,4,\text{-}3)$. Gesucht sind

(a) die Matrix der Projektion und

(b) das Abbild des Würfels in der x-y-Ebene.

Aufgabe 6: Perspektivische Projektion

Wir betrachten die perspektivische Projektion auf die Bildebene $\varepsilon:\ z = \text{-}5$ mit dem Zentrum im Nullpunkt. Das Sichtvolumen wird so festgelegt: Nach vorne durch $\varepsilon:\ z = \text{-}5$ und nach hinten durch $\varepsilon:\ z = \text{-}10$. Seitlich durch das rechteckige Fenster mit den Ecken $P(\text{-}3,\text{-}2,\text{-}5)$ und $Q(3,3,\text{-}5)$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{T}$, welche die Transformation auf das kanonische Sichtvolumen erzeugt.

(b) Berechnen Sie die Bildpunkte von $A(\text{-}4.5,4.2,\text{-}8)$ und $B(1.6,\text{-}2.4,\text{-}5.5)$ und entscheiden Sie dann, ob A und B innerhalb oder ausserhalb des Sichtvolumens liegen.

Viel Spass!