Musterlösungen zu Serie 12

Lösung 12.1

a) Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P(X = 1000) = \binom{1000}{1000} 0.5^{1000}(1-0.5)^0$$

also (zu **R**)

```
from scipy.stats import binom
print(binom.pmf(k=1000, n=1000, p=0.5))

## Error in running command /usr/bin/python3
```

b) Bezeichne X die Anzahl Schritte der Schrittweite δ nach rechts, dann ist $X \sim \text{Bin}(N, \pi)$, wobei N die Gesamtzahl Schritte und π die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts bezeichnet. Die Position M_N nach N Schritten ist dann gegeben durch

$$M_N = X - (N - X)\,,$$

wobei X die Anzahl Schritte nach rechts und $(N - X)$ die Anzahl Schritte nach links bezeichnet. Die mittlere Position ist also

$$\text{E}[M_N] = 2 \cdot \text{E}[X] - N\,.$$

Für die Binomialverteilung gilt $\text{E}[X] = N\pi$. Somit haben wir mit $N = 1000$ und $\pi = 0.5$ $\text{E}[M_N] = 0$. Die mittlere quadratische Verschiebung ist gegeben durch

$$\sqrt{\text{E}[M_N^2]} = \sqrt{\text{E}\left[(X - (N - X))^2\right]} = \sqrt{4 \cdot \text{E}[X^2] + N^2 - 4 \cdot \text{E}[X] \cdot N}$$

Nun gilt

$$\text{Var}(X) = N \cdot \pi \cdot q = \text{E}[X^2] - \text{E}[X]^2 = \text{E}[X^2] - (N \cdot \pi)^2\,.$$

Somit ist $\text{E}[X^2] = N \cdot \pi \cdot q + N^2\pi^2$ und

$$\sqrt{\text{E}[M_N^2]} = \sqrt{4 \cdot (N \cdot \pi^2 + N^2\pi^2) + N^2 - 4 \cdot N^2\pi)}$$

Mit $\pi = 0.5$ ergibt sich $\sqrt{\text{E}[M_N^2]} = \sqrt{N}$. Der Besoffene hat also nach $N = 1000$ Schritten eine quadratisch gemittelte Verschiebung von $\sqrt{\text{E}[M_N^2]} = 31.6\,\text{m}$.

c) Der Erwartungswert der Position $S(N)$ nach N Schritten ist

$$\mathrm{E}(S(N)) = x_0 + \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = x_0 + N\mu = 0\,.$$

Die Varianz der Schrittweiten berechnet sich zu

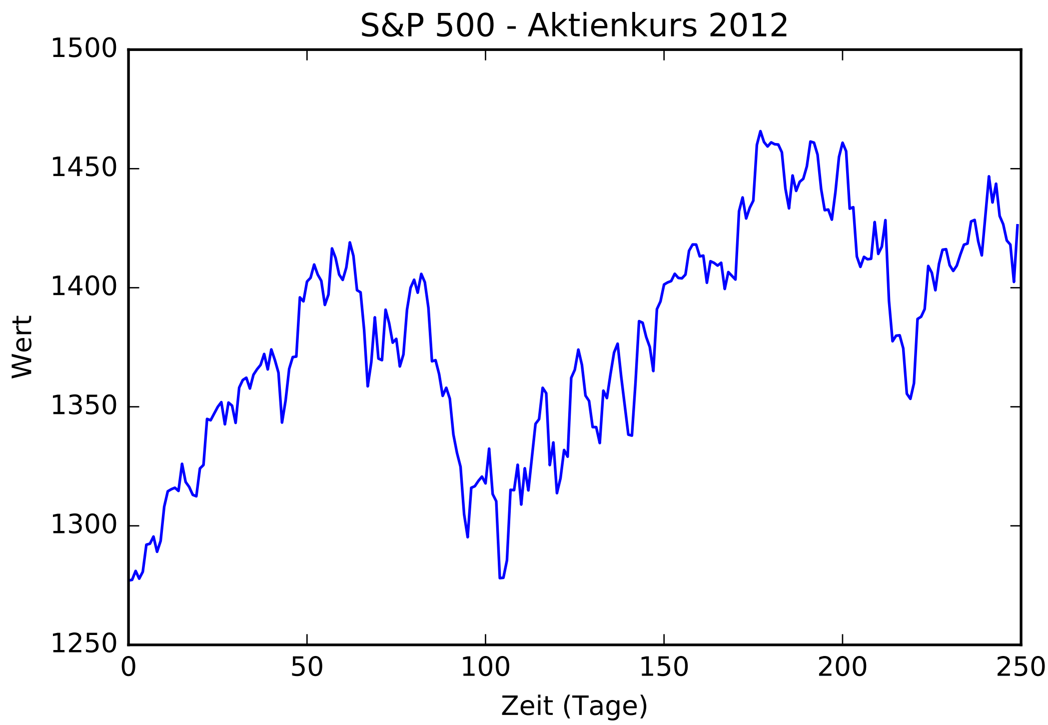
$$\mathrm{Var}(S(N)) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = N\sigma^2 = 1000\,.$$

Somit beträgt die Standardabweichung $\sigma_{S(N)} = 31.6$. Würde der betrunkene Spaziergänger regelmässig nach seinen Barbesuchen auf diese Weise nach Hause torkeln, so kann er also davon ausgehen, dass er sich im Mittel nach N Schritten an der Position $x_0 + N\mu$ befindet, wobei ein Mass für die Unsicherheit durch die Standardabweichung $\sqrt{N}\sigma$ gemessen werden kann. Falls $\mu > 0$, dann wird sich der betrunkene Spaziergänger nach N Schritten mit grosser Wahrscheinlichkeit rechts von seinem Ausgangspunkt x_0 befinden.

d) (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm
steps = np.array(norm.rvs(size=250, loc=0.483, scale=11 ))
sp_simulated = np.empty([250])
sp_simulated[0] = -1257.7
for i in range(249):
    sp_simulated[i+1] = sp_simulated[i]+ steps[i]

plt.plot(sp_simulated)
plt.xlabel("Zeit (Tage)")
plt.ylabel("Wert")
plt.title('S&P 500 - Simulierter Aktienkurs 2012')
plt.show()
```



Lösung 12.2

a) Gegeben dass $X(t) = T + (1 - t)$, wobei T uniform über dem Intervall $[0, 1]$ verteilt ist. Dann haben wir

$$P[X(t) \leq x] = P[T \leq x - (1 - t)]$$

Nun wissen wir, dass für eine uniform verteilte Zufallsvariable T gilt (siehe Kumulative Verteilungsfunktion für uniform verteilte Zufallsvariablen)

$$P[T \leq y] = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ y & 0 < y < 1 \\ 1 & y > 1\,. \end{cases}$$

Ersetzen wir nun y durch $x - (1 - t)$ im obigen Ausdruck, dann finden wir

$$F_X(x, t) = P[X(t) \leq x] = P[T \leq x - (1 - t)] = \begin{cases} 0 & x < 1 - t, \\ x - (1 - t) & 1 - t < x < 2 - t \\ 1 & x > 2 - t\,. \end{cases}$$

b) Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ aus der Kumulativen Verteilungsfunktion

$$f_X(x,t) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \begin{cases} 1 & 1-t < x < 2-t, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

c) Für den Scharmittelwert gilt:

$$\mu_X(t) = \int_{1-t}^{2-t} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{1-t}^{2-t} = \frac{3}{2} - t$$

Andererseits haben wir für $T \sim \text{Uniform}([0,1]) : \mathrm{E}[T] = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{E}[T^2] = \frac{1}{3}$. Somit können wir $\mu_X(t)$ alternativ berechnen

$$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[T + (1-t)] = 1 - t + \mathrm{E}[T] = \frac{3}{2} - t$$

d) Da der Scharmittelwert zeitabhängig ist, handelt es sich um einen nicht-stationären Prozess.

Lösung 12.3

a) Da $\mathrm{E}[A] = \mu$ für $A \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 4)$ ist, gilt:

$$\mathrm{E}[X(t = t_0)] = \exp\Big(-\ln(2)\Big)\mathrm{E}[A] = \frac{1}{2}\mu$$

Somit folgt mit der Momentenmethode

$$\widehat{\mathrm{E}}[X(t = t_0)] = \frac{1}{2}\widehat{\mu} = 2.5$$

also $\widehat{\mu} = 5$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} P[X(t = t_0) > 0.5] &= P\Big[A \cdot \exp\Big(-\ln(2)\Big) > 0.5\Big] \\ &= P[A > 1] \\ &= 1 - P[A \leq 1] \end{aligned}$$

```
from scipy.stats import norm
print(1-norm.cdf(x=1, loc=5, scale=2))

## Error in running command /usr/bin/python3
```

c) Wir finden für $\mu_X(t)$

$$\mathrm{E}[X(t)] = \exp(-t) \cdot \mathrm{E}[A] = \exp(-t) \cdot \mu$$

d) Für die Varianz von $X(t)$ finden wir

$$\mathrm{Var}[X(t)] = \exp(-2t) \cdot \mathrm{Var}[A] = \exp(-2t)\sigma^2 = 4 \cdot \exp(-2t)$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned} F(x,t) &= P[X(t) \leq x] \\ &= P[A \cdot \exp(-t) \leq x] \\ &= P[A \leq x \cdot \exp(t)] \\ &= \Phi\Big(x \cdot \exp(t)\Big) \end{aligned}$$

```
from scipy.stats import norm
print(norm.cdf(x=5, loc=5, scale=2))

## Error in running command /usr/bin/python3
```

f) Also gilt

$$\begin{aligned} f(x,t) &= F_x(x,t) \\ &= \exp(t) \cdot \varphi\Big(x \cdot \exp(t)\Big) \\ &= e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{(x\cdot\exp(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}2} e^{\left(-\frac{(x\cdot\exp(t)-5)^2}{2\cdot 2^2}+t\right)} \end{aligned}$$

```
from scipy.stats import norm
print(0.5*norm.pdf(x=5, loc=5, scale=2))

## Error in running command /usr/bin/python3
```

g) Nicht-stationär

R-Code

Aufgabe 12.1

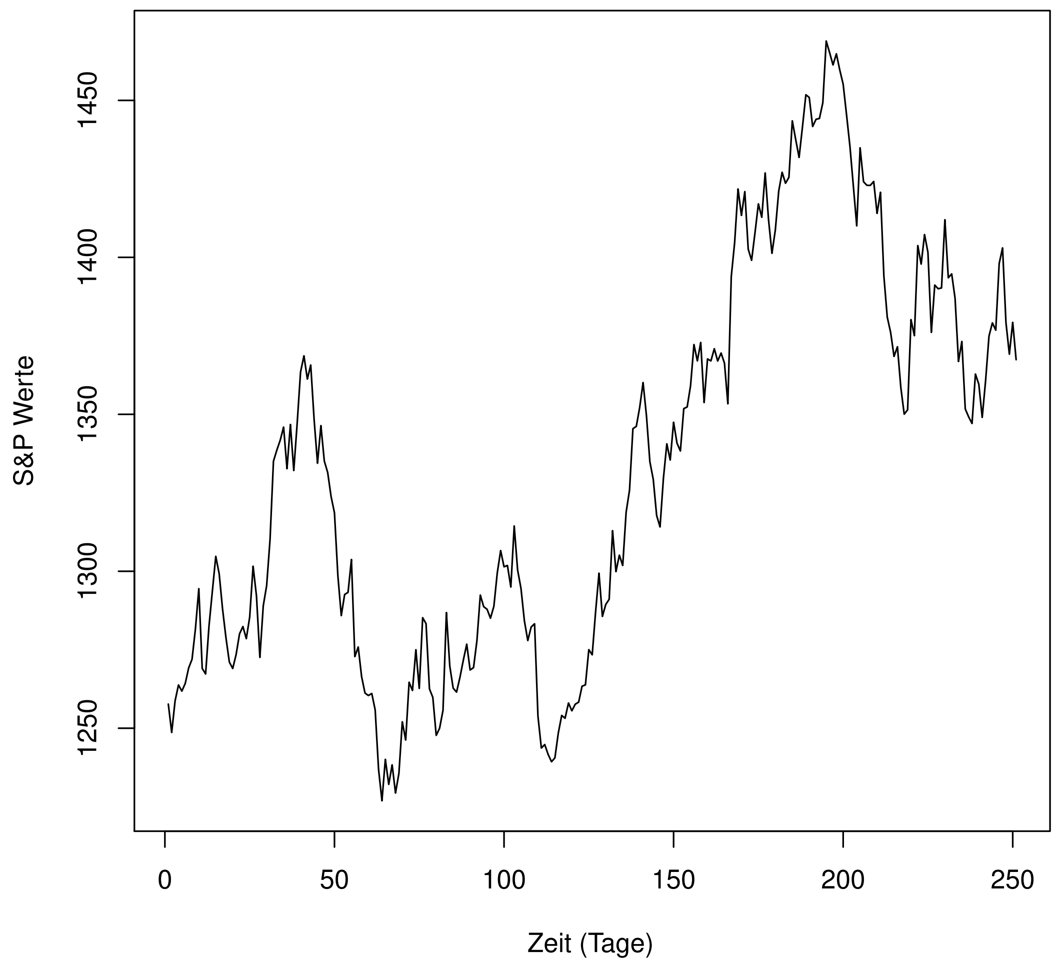
a) (zu **Python**)

```
dbinom(x = 1000, size = 1000, prob = 0.5)

## [1] 9.332636e-302
```

d) (zu **Python**)

```
steps <- rnorm(250, mean = 0.483, sd = 11)
sp <- numeric(251)
sp[1] <- 1257.7
for (i in 1:250) {
    sp[i + 1] <- sp[i] + steps[i]
}
plot(sp, type = "l", xlab = "Zeit (Tage)", ylab = "S&P Werte")
```


S&P Werte
1250
1300
1350
1400
1450
0
50
100
150
200
250
Zeit (Tage)