Kurzlösungen vereinzelter Aufgaben

A 3.2:

a) $c = \frac{1}{10}$

b) $F(x) = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{400}$ und $P[X < 5] = 0.4375$ und $P[X < 10] = 0.75$.

d) $\mathrm{E}(X) = \frac{20}{3}$ und $\mathrm{Var}(X) = \frac{200}{9}$ und Median $\tilde{m} = 5.858$

e) 0.6975

f) $\lambda = \frac{3}{20}$

g) $P[K \leq 120'000] = 0.741$

A 3.3:

a) Median: 17.3, Erwartungswert: 25 und $P(T_1 > \mathrm{E}(T_1)) \approx 0.368$

b) $P(\mu_1 - \sigma_{T_1} \leq T_1 \leq \mu_1 + \sigma_{T_1}) = P(0 \leq T_1 \leq \frac{2}{\lambda_1}) = F\left(\frac{2}{\lambda_1}\right) - F(0) = (1 - \mathrm{e}^{-2}) - 0 \approx 0.865$

c) $\mathrm{E}(T_2) = \sigma_{T_2} = \frac{1}{\lambda_2} = 1000$ Stunden.

d) $P(T_1 \geq 200, T_1 \geq 200) = 0.0002746$

A 3.5:

a) 0.02275

b) $[-1.16, 1.16]$

c) 0.02275

A 3.6:

a) 0.91924

b) 0.9973

Musterlösungen zu Serie 3

Lösung 3.1

a) Die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über ihren gesamten Wertebereich muss 1 ergeben:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_{0}^{60} x(15 - \frac{x}{4})\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^{60}$$

also ist

$$1 = c\,((27000 - 18000) - 0)$$

und daher

$$c = \frac{1}{9000}$$

b) In Aufgabe a) haben wir die Funktion bereits integriert: Für $0 \leq x \leq 60$ haben wir

$$F(x) = \frac{1}{9000}\left(\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right)$$

Über alle Wertebereiche lautet die kumulative Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{9000}(\frac{15}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3) & \text{falls } 0 \leq x \leq 60 \\ 1 & \text{falls } x > 60 \end{cases}$$

c) Wir suchen ein a, so dass gilt $P(X > a) = 0.1$, d. h. $P(X \leq a) = 0.9$. Es muss also gelten $F(a) = 0.9$. Daraus folgt mit der Formel für F aus Aufgabe b), dass

$$\frac{1}{12}a^3 - \frac{15}{2}a^2 + 8100 = 0$$

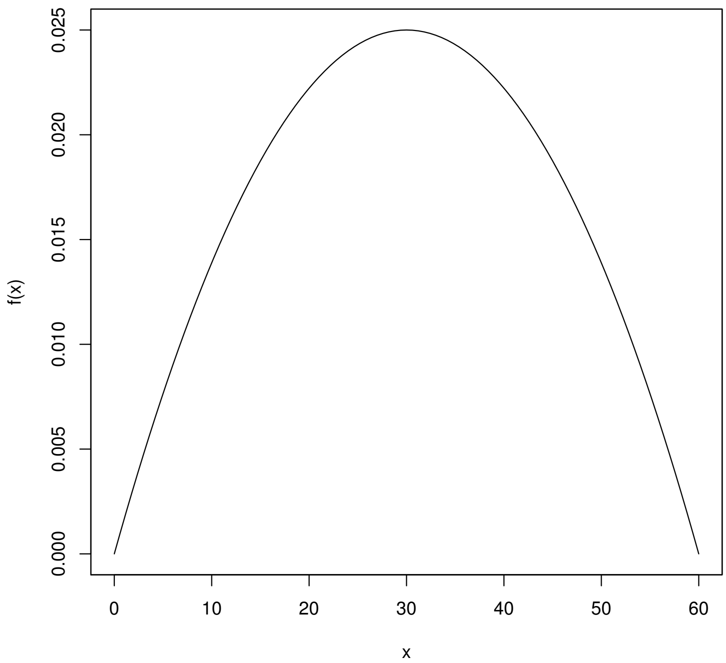
Diese kubische Gleichung hat 3 Lösungen, es liegt jedoch nur eine davon im Bereich $[0, 60]$, nämlich $a = 48.25$. a ist gerade das sogenannte 90 %-Quantil von F.

d) Der Erwartungswert kann wie folgt berechnet werden:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{9000} \int_0^{60} x^2 \left(15 - \frac{x}{4}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9000} \left[5x^3 - \frac{1}{16} x^4\right]_0^{60} \\
&= \frac{1}{9000} (1080000 - 810000) \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Alternativ: Da die Dichte um den Wert 30 symmetrisch ist, folgt sofort, dass der Erwartungswert 30 ist (da der Erwartungswert physikalisch gesehen der Schwerpunkt ist).



Lösung 3.2

a) Damit $f(x)$ eine Dichte ist, muss die Fläche des Dreiecks gleich 1 sein. Es muss also gelten

$$\frac{c \cdot 20}{2} = 1$$

Daraus folgt $c = \frac{1}{10}$. Die Dichte lässt sich somit durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ und } x > 20 \\ \frac{1}{10}(1 - \frac{x}{20}) & 0 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

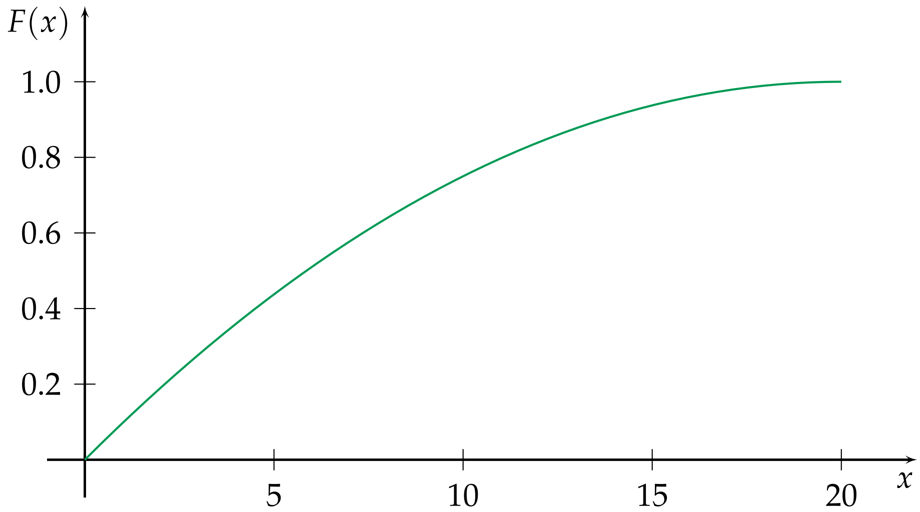
beschreiben.

b) Die kumulative Verteilungsfunktion von X lässt sich durch Integration der Dichtefunktion berechnen: Für $0 \leq x \leq 20$ gilt:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{10} - \frac{t}{200}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{10} - \frac{x^2}{400}$$

Für $x \leq 0$ ist $F(x) = 0$ und für $x \geq 20$ gilt $F(x) = 1$. Insbesondere gilt: $P[X < 5] = F(5) = 0.4375$ und $P[X < 10] = F(10) = 0.75$.

c) Die kumulative Verteilungsfunktion wurde bereits in b) berechnet. Skizze von $F(x)$:



d)

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} x \left[\frac{1}{10}\left(1 - \frac{x}{20}\right)\right]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{60}\right)\Bigg|_0^{20} = \frac{20}{3}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} x^2 \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{20}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{80}\right)\Bigg|_0^{20} = \frac{200}{3}$$

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - (\text{E}(X))^2 = \frac{200}{3} - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{200}{9}$$

Also ist die Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{2} \cdot \frac{10}{3} \approx 4.71$. Für den Median $\tilde{m}$ muss gelten: $F(\tilde{m}) \stackrel{!}{=} 0.5$. Der Median liegt sicher im Intervall $[0, 20]$ und somit haben wir

$$\frac{\tilde{m}}{10} - \frac{\tilde{m}^2}{400} \stackrel{!}{=} 0.5 \quad \Rightarrow \quad \tilde{m} = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5.858$$

e)

$$\begin{aligned} P[K \leq 120'000] &= P[40'000 \cdot \sqrt{X} \leq 120'000] \\ &= P[\sqrt{X} \leq 3] \\ &= P[X \leq 9] \\ &= F(9) \\ &= \frac{9}{10} - \frac{9^2}{400} \\ &= 0.6975 \end{aligned}$$

f) Die Exponentialverteilung hat die Dichte $g(x)$:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda \exp(-\lambda x) & x > 0 \end{cases}$$

Wenn X exponentialverteilt ist, dann ist der Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Für $\lambda = \frac{3}{20}$ erhalten wir somit denselben Erwartungswert wie in der bisherigen Verteilung.

g) Die kumulative Verteilungsfunktion $G(x)$ ist für $x > 0$

$$G(x) = P[X \leq x] = 1 - \exp(-\lambda x)$$

Daher

$$P[K \leq 120'000] = P[40'000 \cdot \sqrt{X} \leq 120'000]$$

$$
\begin{aligned}
&= P[\sqrt{X} \leq 3] \\
&= P[X \leq 9] \\
&= G(9) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{3}{20} \cdot 9\right) \\
&= 1 - 0.259 \\
&= 0.741
\end{aligned}
$$

Wenn die Dauer der Baustellen als exponentialverteilt angenommen wird, ist die Wahrscheinlichkeit also grösser, dass die Kosten einer Baustelle unter 120'000 Fr. liegen, verglichen mit der ursprünglich angenommenen Verteilung, obwohl der Erwartungswert für die Dauer der Baustellen identisch ist für beide Verteilungen.

Lösung 3.3

Exponentialverteilung der Lebensdauer T_1 der ersten Maschine des technischen Systems:

$$
\text{Dichte } f_{T_1}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\, t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

$$
\text{Verteilungsfunktion } F_{T_1}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\, t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

a) Der Median berechnet sich zu $\tilde{m} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 17.3$, wobei wir die Gleichung $F(\tilde{m}) = 0.5$ nach $\tilde{m}$ aufgelöst haben. Für Erwartungswerte und Varianz haben wir folgende Beziehungen:

$$
\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx \overset{PI}{=} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-(\lambda \cdot x + 1) \cdot e^{-\lambda\, x}}{\lambda}\right]_0^T = \frac{1}{\lambda}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda\, x}\, dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\
&\overset{PI}{=} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-\left(\lambda^2 \cdot x^2 + 2\lambda x + 2\right) \cdot e^{-\lambda\, x}}{\lambda^2}\right]_0^T - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

Der Erwartungswert lautet $E(T_1) = \frac{1}{\lambda_1} = 25$, also gilt

$$\begin{aligned} P(T_1 > \mathrm{E}(T_1)) &= P(T_1 > \frac{1}{\lambda_1}) \\ &= 1 - P(T_1 \leq \frac{1}{\lambda_1}) \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-1} \\ &\approx 0.368 \end{aligned}$$

b) Es gilt $\mu = \sigma = \frac{1}{\lambda}$, also gilt

$$\begin{aligned} P(\mu_1 - \sigma_{T_1} \leq T_1 \leq \mu_1 + \sigma_{T_1}) &= P(0 \leq T_1 \leq \frac{2}{\lambda_1}) \\ &= F\left(\frac{2}{\lambda_1}\right) - F(0) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-2}) - 0 \\ &\approx 0.865 \end{aligned}$$

c) Aus der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{T_2}(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

folgt $c_2 = \frac{1}{1000}$. Somit ist $\mathrm{E}(T_2) = \frac{1}{c_2} = 1000$ und da $\mathrm{E}(T_2) = \sigma_{T_2}$ ist $\sigma_{T_2} = 1000$.

d) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq 200, T_2 \geq 200) &\overset{\text{unabhängig}}{=} P(T_1 \geq 200) \cdot P(T_2 \geq 200) \\ &= (1 - P(T_1 \leq 200)) \cdot (1 - P(T_2 \leq 200)) \\ &= (1 - F_{T_1}(200))(1 - F_{T_2}(200)), \end{aligned}$$

wobei F_{T_1} die kumulative Verteilungsfunktion von T_i ist, d. h. für $t > 0$ gilt

$$F_{T_i}(t) = \int_0^t f_{T_i}(s)\,\mathrm{d}s = 1 - \mathrm{e}^{-c_i t}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit: (zu **R**)

$$P(T_1 \geq 200, T_1 \geq 200) = e^{-200c_1} \cdot e^{-200c_2} = e^{-200(c_1+c_2)}$$

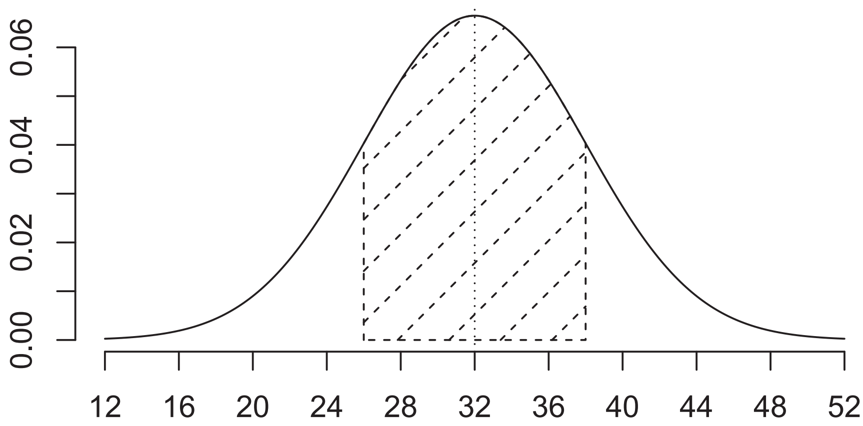
```
from math import exp

exp(-200*(1/25+1/1000))

## 0.00027465356997214205
```

Lösung 3.4

a) Skizze:



b) X bezeichne den Bleigehalt. Es gilt:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ mit } \mu = 32 \text{ und } \sigma^2 = 6^2$$

Mit **Python** kann die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 40)$ direkt (ohne Transformation) berechnet werden: (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm

norm.cdf(x=40, loc=32, scale=6)

## 0.9087887802741321
```

Standardisieren wir die Zufallsvariable X, so lautet die standardisierte Zufallsvariable $Z = (X - \mu)/\sigma$. Es gilt: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$P[X \leq 40] = P\left[Z \leq \frac{40-32}{6}\right] = P[Z \leq 1.33] = \Phi(1.33)$$

Mit **Python** finden wir: (zu **R**)

```
norm.cdf(x=(40-32)/6)

## 0.9087887802741321
```

c) Wir können $P[X \leq 27]$ direkt mit **Python** berechnen (zu **R**)

```
norm.cdf(x=27, loc=32, scale=6)

## 0.20232838096364308
```

oder durch Standardisieren der Zufallsvariablen X, also $P[X \leq 27] = P[Z \leq -0.83] = \Phi(-0.83)$ (zu **R**)

```
norm.cdf(x=-0.83)

## 0.2032693918280684
```

d) Mit **Python** lässt sich die 97.5 %-Quantile berechnen mit (zu **R**)

```
norm.ppf(q=0.975, loc=32, scale=6)

## 43.759783907240326
```

Alternativ lässt sich die 97.5 %-Quantile, die wir hier mit c bezeichnen, folgendermassen berechnen: es gilt $P[X \leq c] = 0.975 = P[Z \leq \frac{c-32}{6}] = \Phi(\frac{c-32}{6})$. Mit Hilfe von **Python** findet man (zu **R**)

```
norm.ppf(q=0.975)

## 1.959963984540054
```

also $\Phi(1.96) = 0.975$. Also muss gelten:

$$\frac{c-32}{6} = 1.96 \text{ und deshalb } c = 32 + 1.96 \cdot 6 = 43.76$$

e) Mit **Python** ergibt sich: (zu **R**)

```
norm.ppf(q=0.1, loc=32, scale=6)

## 24.310690606732397
```

f) Direkt mit **Python** berechnet finden wir (zu **R**)

```
norm.cdf(x=32+6, loc=32, scale=6) - norm.cdf(x=32-6, loc=32, scale=6)

## 0.6826894921370859
```

Andererseits gilt $\Phi(1) - \Phi(-1) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$, wobei wir $\Phi(1)$ folgendermassen berechnen (zu **R**)

```
norm.cdf(x=1)

## 0.8413447460685429
```

Lösung 3.5

a) Wir bezeichnen mit der Zufallsvariablen N die Spannung des Hintergrundrauschens. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet dann $P(N > 0.9)$ für die Verteilung $\mathcal{N}(0, 0.45^2)$: (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm

1-norm.cdf(x=0.9, loc=0, scale=0.45)

## 0.022750131948179209
```

Diese Wahrscheinlichkeit kann als die Wahrscheinlichkeit einer falschen Detektion aufgefasst werden.

Oder mit Standardisieren: (zu **R**)

$$\begin{aligned} P(N > 0.9) &= P\left(\frac{N-0}{0.45} > \frac{0.9-0}{0.45}\right) \\ &= P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 \end{aligned}$$

```
from scipy.stats import norm

1-norm.cdf(2)

## 0.022750131948179209
```

b) Wir müssen also ein c finden, so dass $P(-c < N < c) = 0.99$. Dies heisst nichts anderes als

$$P(-c < N) = 0.005 \qquad \text{und} \qquad P(N < c) = 0.995$$

Damit erhalten wir für $-c$ (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm

norm.ppf(q=0.005, loc=0, scale=0.45)

## -1.1591231865970053
```

Daraus erhalten wir $c = 1.16$ und das Intervall, in dem 99 % des Rauschsignals enthalten ist, lautet:

$$[-1.16, 1.16]$$

Oder mit Standardisieren

$$\begin{aligned} P(-c < N < c) &= P\left(\frac{-c-0}{0.45} < \frac{N-0}{0.45} < \frac{c-0}{0.45}\right) \\ &= P\left(\frac{-c}{0.45} < Z < \frac{c}{0.45}\right) \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie der Standardnormalverteilung folgt $P(Z < \frac{c}{0.45}) = 0.005$. Mit (zu **R**)

```
norm.ppf(0.005)

## -2.575829303548901
```

Oder mit Standardisierung finden wir, dass $P(Z < 2.58) = 0.005$ und folglich ist $\frac{c}{0.45} = 2.58$.

c) Wir bezeichnen mit S die Spannung, wenn eine digitale 1 übertragen wird. Es gilt $S \sim \mathcal{N}(1.8, 0.45^2)$ und wir erhalten für $P(S < 0,9)$ (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm

norm.cdf(x=0.9, loc=1.8, scale=0.45)

## 0.022750131948179195
```

Diese Wahrscheinlichkeit kann interpretiert werden als die Wahrscheinlichkeit, ein Signal zu verpassen.

Oder mit Standardisieren (zu **R**)

$$P(S < 0.9) = P\left(\frac{S-1.8}{0.45} < \frac{0.9-1.8}{0.45}\right) = P(Z < -2) = 0.02275$$

```
norm.cdf(-2)

## 0.022750131948179195
```

Lösung 3.6

a) Wir bezeichnen mit X den Schaftdurchmesser in Millimeter. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet $P(0.2485 < X < 0.2515)$: (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm

norm.cdf(x=0.2515, loc=0.2508, scale=0.0005) - norm.cdf(x=0.2485, loc=0.250

## 0.91924122831152
```

Oder mit Standardisieren

$$
\begin{aligned}
P(0.2485 < X < 0.2515) &= P\left(\frac{0.2485 - 0.2508}{0.0005} < Z < \frac{0.2515 - 0.2508}{0.0005}\right) \\
&= P(-4.6 < Z < 1.4) = P(Z < 1.4) - P(Z < -4.6) \\
&= 0.91924 - 0.0000 \\
&= 0.91924
\end{aligned}
$$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(0.2485 < X < 0.2515)$ (zu **R**)

```
from scipy.stats import norm

norm.cdf(x=0.2515, loc=0.2500, scale=0.0005) - norm.cdf(x=0.2485, loc=0.250

## 0.9973002039367398
```

Oder mit Standardisieren

$$
\begin{aligned}
P(0.2485 < X < 0.2515) &= P\left(\frac{0.2485 - 0.2500}{0.0005} < Z < \frac{0.2515 - 0.2500}{0.0005}\right) \\
&= P(-3 < Z < 3) \\
&= P(Z < 3) - P(Z < -3) \\
&= 0.99865 - 0.00135 \\
&= 0.9973
\end{aligned}
$$

Lösung 3.7 Wir generieren $n = 10\,000$ Punkte im Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ((zu **R**))

```
from scipy.stats import uniform
n = 10000
x = uniform.rvs(size=n, loc=-1, scale=2)
y = uniform.rvs(size=n, loc=-1, scale=2)
```

Die Anzahl Punkte im Kreis ist gegeben durch

```
n = 10000
x = uniform.rvs(size=n, loc=-1, scale=2)
y = uniform.rvs(size=n, loc=-1, scale=2)
p_circle = np.sum(np.sqrt(x*x+y*y)<1)
print(p_circle)


## 7892
```

Wie in der Aufgabenstellung ausgeführt, ist das Verhältnis von Anzahl Punkten im Kreis zur Gesamtanzahl Punkte gleich $\frac{\pi}{4}$. Somit ergibt sich für π folgende Schätzung

```
n = 10000
x = uniform.rvs(size=n, loc=-1, scale=2)
y = uniform.rvs(size=n, loc=-1, scale=2)
import numpy as np
p_circle = np.sum(np.sqrt(x*x+y*y)<1)
print(4*p_circle/n)


## 3.1444
```

R-Code

Aufgabe 3.3

d) (zu **Python**)

```
exp(-200 * (1/25 + 1/1000))

## [1] 0.0002746536
```

Aufgabe 3.4

a)

b) (zu **Python**)

```
pnorm(40, mean = 32, sd = 6)

## [1] 0.9087888
```

(zu **Python**)

```
pnorm((40 - 32)/6)

## [1] 0.9087888
```

c) (zu **Python**)

```
pnorm(27, mean = 32, sd = 6)

## [1] 0.2023284
```

(zu **Python**)

```
pnorm(-0.83)

## [1] 0.2032694
```

d) (zu **Python**)

```
qnorm(0.975, mean = 32, sd = 6)

## [1] 43.75978
```

(zu **Python**)

```
qnorm(0.975)

## [1] 1.959964
```

e) (zu Python)

```
qnorm(0.1, mean = 32, sd = 6)

## [1] 24.31069
```

f) (zu Python)

```
pnorm(32 + 6, mean = 32, sd = 6) - pnorm(26, mean = 32,
      sd = 6)

## [1] 0.6826895
```

(zu Python)

```
pnorm(1)

## [1] 0.8413447
```

Aufgabe 3.5

a) (zu Python)

```
1 - pnorm(0.9, mean = 0, sd = 0.45)

## [1] 0.02275013
```

(zu Python)

```
1 - pnorm(2)

## [1] 0.02275013
```

b) (zu Python)

```
qnorm(0.005, mean = 0, sd = 0.45)

## [1] -1.159123
```

(zu Python)

```
qnorm(0.005)

## [1] -2.575829
```

c) (zu Python)

```
pnorm(0.9, mean = 1.8, sd = 0.45)

## [1] 0.02275013
```

(zu **Python**)

```
pnorm(-2)

## [1] 0.02275013
```

Aufgabe 3.6

a) (zu **Python**)

```
pnorm(0.2515, 0.2508, 5e-04) - pnorm(0.2485, 0.2508,
    5e-04)

## [1] 0.9192412
```

b) (zu **Python**)

```
pnorm(0.2515, 0.25, 5e-04) - pnorm(0.2485, 0.25, 5e-04)

## [1] 0.9973002
```

Aufgabe 3.7

Wir generieren $n = 10\,000$ Punkte im Quadrat $[-1,1] \times [-1,1]$ ((zu **Python**))

```
n <- 10000
x <- runif(n, min = -1, max = 1)
y <- runif(n, min = -1, max = 1)
```

Die Anzahl Punkte im Kreis ist gegeben durch

```
p.circle <- sum(sqrt(x^2 + y^2) < 1)
p.circle

## [1] 7801
```

Wie in der Aufgabenstellung ausgeführt, ist das Verhältnis von Anzahl Punkten im Kreis zur Gesamtanzahl Punkte gleich $\frac{\pi}{4}$. Somit ergibt sich für π folgende Schätzung

```
4 * p.circle/n

## [1] 3.1204
```