Zufallsvariable
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung

Peter Büchel

HSLU I

Stat: SW03

Zufallsvariable

- Begriff der Zufallsvariable: Spielt zentrale Rolle in der Statistik
- Beispiel: Jasskarten
  - Ein Pack Jasskarten besteht aus 36 verschiedenen Karten
  - Um beim Jassen Stiche zu vergleichen, werden den Jasskarten Zahlwerte zugewiesen
  - So hat ein König den Wert 4
  - Ohne diese Werte wären verschiedene Stiche beim Jass sehr schwierig miteinander zu vergleichen
  - Betrachten *Funktion*, die jeder Jasskarte einen Zahlwert zuordnet

- Also

$$\begin{aligned}
\omega = \text{As} \quad &\mapsto \quad X(\omega) = 11 \\
\omega = \text{König} \quad &\mapsto \quad X(\omega) = 4 \\
\vdots \quad & \quad\quad\quad \vdots \\
\omega = \text{Sechs} \quad &\mapsto \quad X(\omega) = 0
\end{aligned}$$

- Dieselbe Situation kommt in der Stochastik häufig vor
- Oft wird ein Zufallsexperiment mit Zahlenwerten verknüpft
- Zu jedem Elementarereignis ω gehört ein Zahlenwert $X(\omega) = x$
- Dabei ist X eine *Funktion*, die jedem Elementarereignis ω den Zahlwert x zuordnet

- Wie in Beispiel: X ist Funktion auf dem Grundraum Ω
- Diese Funktion wird *Zufallsvariable* genannt
- Sie ordnet jedem Element des Grundraumes *eine Zahl* zu
- Vorteil: Mit den Werten der Zufallsvariable kann man rechnen
- Beispiel oben: Mit den Zahlenwerten $X(\omega)$ kann man den „Durchschnitt" der gezogenen Karten berechnen
- Für die *Elementareignisse* „As", „König" etc. macht das Wort „Durchschnitt" keinen Sinn

Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsvariable

Eine *Zufallsvariable* X ist eine *Funktion*:

$$\begin{aligned} X: \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Notation X (oder auch $Y, Z, \ldots$) ist eher ungewohnt für die Bezeichnung einer Funktion, ist aber üblich in der W'keitsrechnung

Konventionen

- Zufallsvariable wird mit einem *Grossbuchstaben* X (oder Y, Z) bezeichnet

- Der entsprechende *Kleinbuchstabe* x (oder y, z) stellt einen *konkreten Wert* dar, den die Zufallsvariable annehmen kann

- Für das Ereignis, bei dem die Zufallsvariable X den Wert x annimmt, schreiben wir $X = x$

- In Beispiel: Ereignis $X = 2$ entspricht „einen Under ziehen"

- Bei einer Zufallsvariable ist nicht die Funktion $X(\cdot)$ zufällig, sondern nur das Argument ω

- Je nach Ausgang des Zufallsexperiments ω erhält man einen anderen Wert $x = X(\omega)$

- x heisst dann eine *eine Realisierung* der Zufallsvariablen X

- Wird das Experiment zweimal durchführt erhölt zweimal das gleiche Ergebnis ω, dann sind auch die realisierten Werte von X gleich

- Jasskartenbeispiel: Realisierung $X = 11$ entspricht dem Ziehen eines Asses

Diskrete Zufallsvariablen

- Hier: Zahlen, die X annehmen kann, sind *diskret*
- D.h.: Anzahl dieser Werte ist endlich (wie Jasskartenbeispiel)

$$\{0, 2, 3, 4, 10, 11\}$$

- Möglich: Unendliche Liste

$$\{2.5, 4.5, 6.5, 8.5, \ldots,\}$$

- Man sagt: Zufallsvariable X ist diskret
- Insbesondere sind Anzahlen stets diskret
- Messungen meist kontinuierlich $\quad \rightarrow \quad$ Mit $\mathbb{R}$ modelliert

Wahrscheinlichkeit einer Realisierung

- Schon gesehen: W'keit $P(E)$ eines Ereignisse E berechnen
- Entsprechend: W'keit einer allgemeinen Realisierung x einer Zufallsvariable X definieren
- Beispiel: Zufallsvariable X sei der Wert einer gezogenen Jasskarte
- Wie gross die W'keit ist, dass gezogene Karte den Wert 4 hat?
- Realisierung ist in diesem Fall $X = 4$

- Bezeichnung: W'keit zur Realisierung 4

$$P(X = 4)$$

- Realisierung $X = 4$ entspricht dem Ziehen eines Königs

- D.h.: Gesucht W'keit, dass ein König gezogen wird:

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= P(\{\omega \mid \omega = \text{ ein König}\}) \\ &= P(\text{Eicheln-König}) + P(\text{Rosen-König}) + \\ &\quad + P(\text{Schellen-König}) + P(\text{Schilten-König}) \\ &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

- Vorgehen hier ausführlicher als notwendig $\rightarrow$ verallgemeinerbar

- W'keit, dass ein König gezogen wird, ist also gleich der Summe der W'keiten die verschiedenen Könige zu ziehen

- Diese Überlegung verallgemeinern:

  - Die Werte einer Zufallsvariablen X (die möglichen Realisationen von X) treten mit gewissen W'keiten auf
  - Die W'keit, dass X den Wert x annimmt, berechnet sich wie folgt:

$$P(X = x) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega; X(\omega)=x} P(\omega)$$

- Jasskartenbeispiel: $x = 4$ und ω alle möglichen Könige, deren entsprechende W'keiten aufaddiert werden

Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Beispiel vorher: W'keit *einer* Realisierung berechnet
- Jetzt: W'keiten *aller* Realisierungen berechnen
- *Sehr wichtiger* Begriff: Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Für *jede* Realisierung einer Zufallsvariable die zu gehörige W'keit berechnen $\quad \rightarrow \quad$ *W'keitsverteilung* dieser Zufallsvariablen

Jasskartenbeispiel

- Zufallsvariable X ist wieder der Wert einer gezogenen Jasskarte
- W'keit $P(X = 4)$ schon berechnet:

$$P(X = 4) = \frac{1}{9}$$

- W'keit $P(X = 0)$ mit der Laplace-W'keit berechnen
- Es hat unter den 36 Karten genau 16 „leere" Karten
- Somit gilt für die W'keit $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

- Realisierung $X = 2$ entspricht dem Ziehen eines Unders
- Da es 4 von denen gibt, gilt für die W'keit $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

- W'keiten für die anderen Realisierungen analog
- *Jeder* Realisierung wird einen W'keitswert zugeordnet
- Man spricht dann von einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung*
- W'keitsverteilung von X in Tabelle

x	0	2	3	4	10	11
$P(X = x)$	4/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9

- Werte für $P(X = 1)$ oder $P(X = 178)$ sind in Tabelle *nicht* aufgeführt
- Der Grund dafür ist natürlich, dass diese Werte nicht gezogen werden können
- Ihnen wird die W'keit 0 zugeordnet

$$P(X = 1) = 0 \qquad \text{oder} \qquad P(X = 178) = 0$$

- Addition aller Werte der W'keitsverteilung $\rightarrow$ muss 1 ergeben

$$P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 10) + P(X = 11) = 1$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Allgemein gilt:

Die „Liste" von $P(X = x)$ für alle möglichen Werte x heisst diskrete *(Wahrscheinlichkeits-) Verteilung* der diskreten Zufallsvariablen X. Dabei gilt immer

$$\sum_{\text{alle möglichen } x} P(X = x) = 1$$

Kontinuierliche Messdaten

- In vielen Anwendungen: Nicht Zähldaten, sondern *Messdaten*
- Messdaten können jeden Wert in einem bestimmten Bereich annehmen
- Bsp: Gemessenen Körpergrössen (in cm) von Menschen *jeden* Wert im Intervall $[0, 500]$:
- Also auch

$$145.325\,986\,54\ldots$$

- Voraussetzung: Beliebig genaue Messung möglich

Definitionen

- *Wertebereich* W_X einer Zufallsvariable $\quad \rightarrow \quad$ Menge aller Werte, die X annehmen kann

- Zufallsvariable X heisst *stetig*, wenn deren Wertebereich W_X kontinuierlich ist

- Kontinuierlich heisst: „Zusammenhängend" und nicht „löchrig", wie Menge $\{1, 2, 3\}$

- Wichtige kontinuierliche Wertebereich:

$$W_X = \mathbb{R},\ \mathbb{R}^+ \quad \text{oder} \quad [0, 1]$$

- Letzter Fall: Zahlen 0 und 1 *und* alle Zahlen dazwischen

Intervalle

- Intervall, wo die Grenzen innerhalb oder ausserhalb des Intervalls sein sollen $\quad\rightarrow\quad$ eckige und runde Klammern
  - Runde Klammer: Wert ausserhalb des Intervalls
  - Eckige Klammer: Wert innerhalb des Intervalls

- Intervall $(a, b]$ beschreibt also alle Punkte x mit $x > a$ und $x \leq b$

Beispiel

- Intervall
$$(1.2, 2.5]$$
enthält die Zahl 1.2 nicht, die Zahl 2.5 schon

- Unterschied zum Intervall
$$[1.2, 2.5]$$
minimal

- Es enthält nur den einen Punkt 1.2 der Zahlengeraden mehr

- In praktischer Hinsicht spielt es keine Rolle spielt, ob das 1. oder 2. Intervall verwendet wird

Punktwahrscheinlichkeit 0

- W'keitsverteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen: „Punkt"-W'keiten $P(X = x)$ für alle möglichen x im Wertebereich

- Aber für stetige Zufallsvariable X:

$$P(X = x) = 0$$

  für alle $x \in W_X$

- Folgerung: W'keitsverteilung von X kann nicht mittels der Angaben von „Punkt"-W'keiten beschrieben werden

Beispiel

- ZV X_0 uniform auf $W_0 = \{0, 1, \ldots, 9\} \to P(X_0 = x) = \frac{1}{10}$
- ZV X_1 uniform auf $W_1 = \{0.0, 0.1, \ldots, 9.9\} \to P(X_1 = x) = \frac{1}{100}$
- ZV X_2 uniform auf $W_2 = \{0.00, 0.01, \ldots, 9.99\} \to P(X_2 = x) = \frac{1}{1000}$

  $\vdots$
- ZV X_i uniform auf $W_i \to P(X_i = x) = \frac{1}{10^{i+1}}$
- ZV X_∞ uniform auf $W_\infty = [0, 10] \to P(X_\infty = x) = 0$

Punktw'keit ist null
bei kontinuierlichen Zufallsvariablen!

Beispiel: Körpergrösse

- Messen Körpergrösse von Personen
- W'keit *genau* eine Körpergrösse von 182.254 680 895 434 ... cm zu messen ist gleich 0:

$$P(X = 182.254\,680\,895\,434\ldots) = 0$$

- Verwendung der W'keit einen exakten Messwert zu messen, bringt nichts
- Aber möglich: W'keit, dass ein Messwert in einem bestimmten Bereich liegt

- Beispiel: zwischen 174 und 175 cm:

$$P(174 < X \leq 175)$$

- Diese W'keit ist dann nicht mehr 0

- Begriff: W'keitsdichte

Allgemein

- Datensatz mit experimentellen Messdaten: Relative Häufigkeiten von Messpunkten in bestimmten Intervallen grösser ist als in anderen

- *W'keitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen* X kann also beschrieben werden, indem man W'keiten für alle Intervalle $(a, b]$ mit $a < b$ angibt:

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b)$$

- Genügt *kumulative Verteilungsfunktion* anzugeben

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Es gilt

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Kumulative Verteilungsfunktion

- $F(x) = P(X \leq x)$ ist W'keit:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

- W'keit $P(X \leq -\infty)$, dass ein Messwert kleiner als $-\infty$ ist, ist 0:

$$F(-\infty) = 0$$

- Die W'keit $P(X \leq \infty)$, dass ein Messwert kleiner als ∞ ist, ist 1:

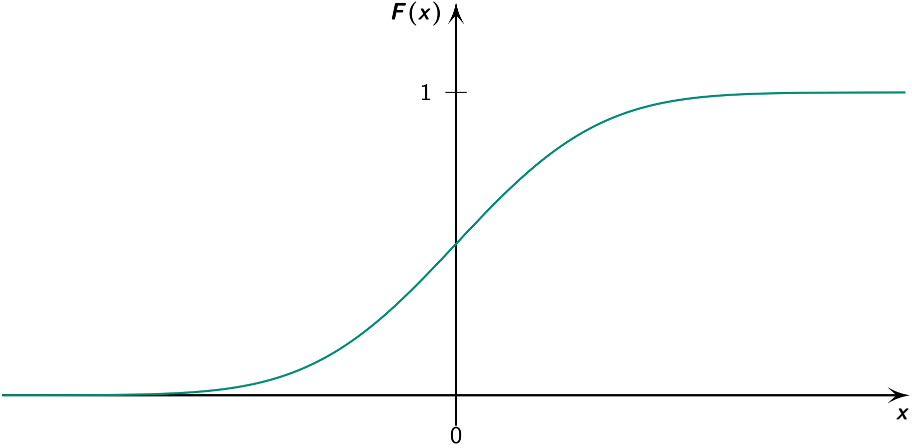
$$F(\infty) = 1$$

- Die Funktion von $F(x)$ ist monoton wachsend. Es gilt also für $a < b$:

$$F(a) \leq F(b)$$

- Wichtiger Punkt: Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ ist grösser gleich 0

Graph der kumulativen Verteilungsfunktion



Bemerkungen

- Zusammenfassend: W'keitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen X wird durch die kumulative Verteilungsfunktion

- Weil für stetige Zufallsvariablen

$$P(X = a) = P(X = b) = 0$$

spielt es keine Rolle, ob wir $<$ oder $\leq$ schreiben

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

- Obige Formeln sind jedoch auch richtig für diskrete Zufallsvariablen.

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Stetige Zufallsvariablen: analoger Begriff zur „Punkt"-W'keit $P(X = x)$ für diskrete Variablen mit Hilfe der Ableitung

- Definition

Wahrscheinlichkeitsdichte

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte f ist definiert als Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion:

$$f(x) = F'(x)$$

Interpretation

- Interpretation: W'keit, dass Zufallsvariable X einen Wert in $(x, x + \Delta x]$ annimmt (für Δx klein):

$$P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$$

- Begründung:

$$\frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

- Die letzte Approximation folgt aus der Definition einer Ableitung folgt

- Differentielle Schreibweise:

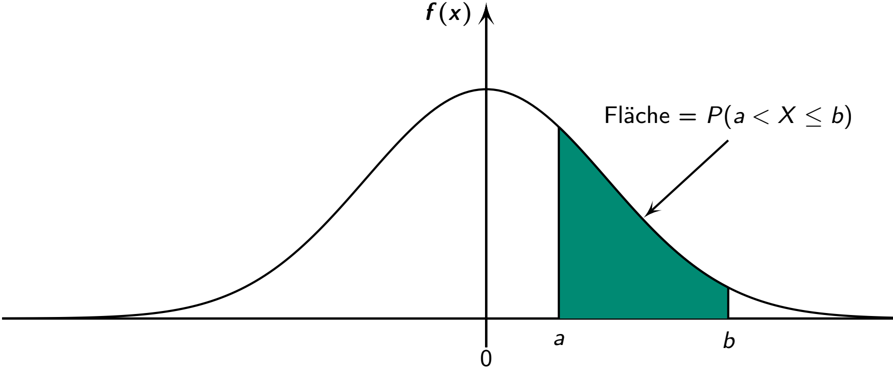
$$P(x < X \leq x + \mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Aus Dichte die kumulative Verteilungsfunktion zurückgewinnen:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y$$

weil F eine Stammfunktion von f ist und $F(-\infty) = 0$

Dichtefunktion



Eigenschaften der Dichtefunktion

- Es gilt
$$f(x) \geq 0$$
für alle x, da $F(x)$ monoton wachsend $\rightarrow$ Ableitung grösser gleich 0

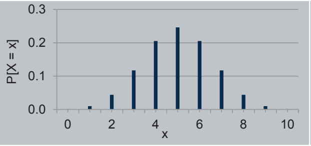
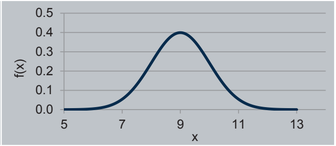
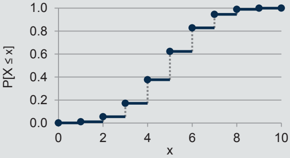
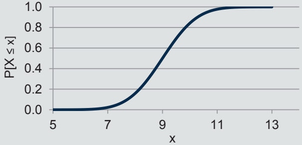
- Es gilt
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Dies entspricht der Fläche zwischen a und b unter $f(x)$

- Es gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

- Dies ist die W'keit, dass *irgendein* Wert gemessen wird.

Vergleich der Konzepte (diskret vs. stetig)

	Diskret	**Stetig**
Dichte		
Kumulative Verteilungsfunktion	 $F(x) = \sum_{k:x_k \leq x} p(x_k)$	 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
Erwartungswert	$E[X] = \sum_{k \geq 1} x_k p(x_k)$	$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert und Varianz

- *Erwartungswert* ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

- *Varianz* ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2\end{aligned}$$

Quantile

- *Quantile* $q(\alpha)$ für $0 < \alpha < 1$ einer Zufallsvariablen X:

$$P(X \leq q(\alpha)) = \alpha$$

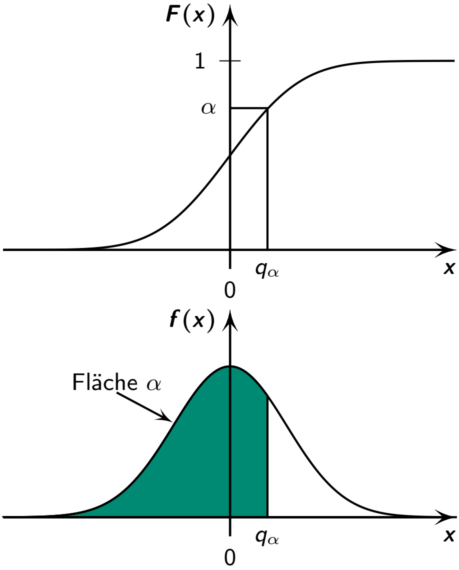
- Das heisst:

$$F(q(\alpha)) = \alpha \Leftrightarrow q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$$

- Interpretation: $q(\alpha)$ ist der Punkt, wo Fläche von $-\infty$ bis $q(\alpha)$ unter der Dichte f gleich α ist

- 50 %-Quantil heisst der *Median*

Abbildung: Quantile

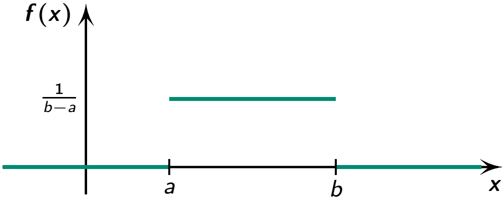


Beispiel: Körpergrösse

- Messen wieder die Körpergrösse
- Beispiel: für $\alpha = 0.75$ ist das zugehörige Quantil $q(\alpha) = 182.5$
- D.h.: 75 % der gemessenen Personen kleiner oder gleich 182.5 cm

Uniforme Verteilung

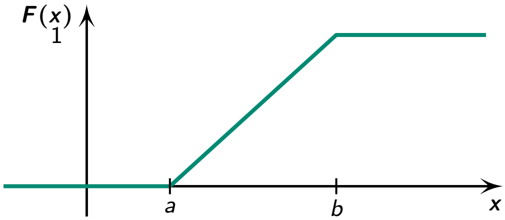
- *Situation*: Jeder Wert im Intervall $[a, b]$ ist gleich wahrscheinlich
- Zufallsvariable V X: Ein Wert aus $[a, b]$ $\quad \rightarrow \quad X \sim \text{Unif}(a, b)$
- "'X ist uniform verteilt auf dem Intervall $[a, b]$"'
- Dichte: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ falls $a \leq x \leq b$, sonst 0



- Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x < b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}$$

- Graph:



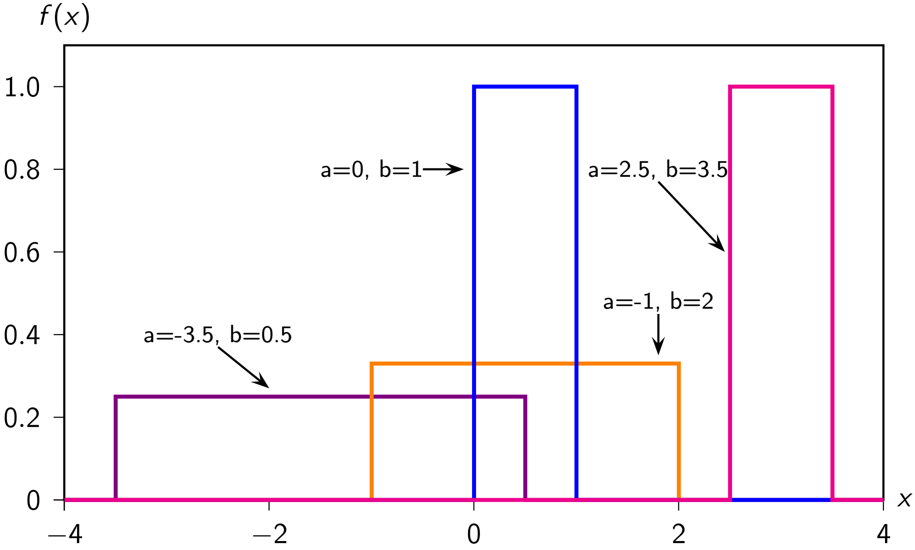
- *Erwartungswert*:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

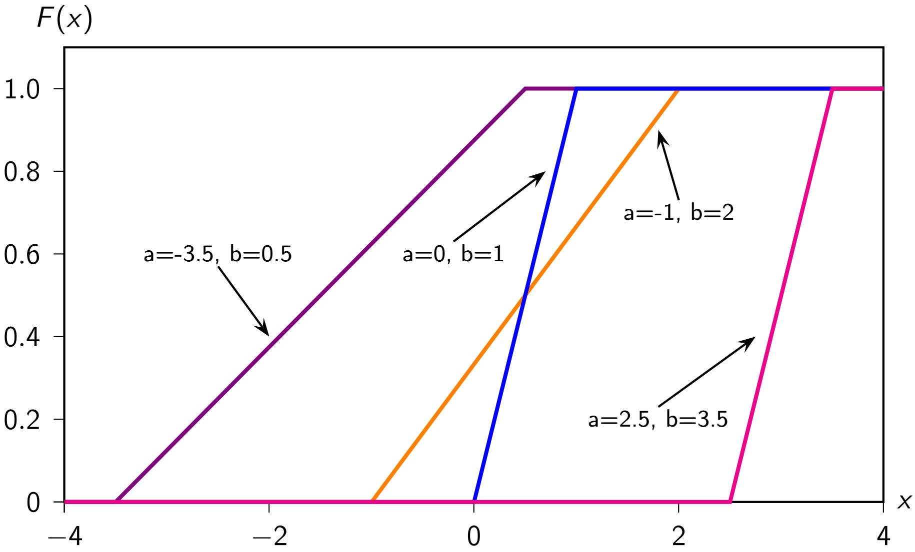
- *Varianz*:

$$\mathrm{Var} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Uniforme Verteilung: Illustration Dichten



Uniforme Verteilung: Illustration kum. Vert.fn



Beispiel: Wartezeit an Haltestelle

- Zürich: Trams fahren alle 7 Minuten
- Annahme: Man kommt zu zufälliger Zeit an Haltestelle vorbei
- Wie wahrscheinlich ist es, dass man höchstens eine Minute warten muss?
- X: Wartezeit in Minuten

$$X \sim \text{Unif}(0, 7)$$

- Es gilt dann

$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1-0}{7-0} = \frac{1}{7}$$

Beispiel mit Python: $X \sim \text{Unif}(0, 7)$

- $P(X \leq 1)$

```
from scipy.stats import uniform, expon, norm

uniform.cdf(x=1, loc=0, scale=7)

## 0.14285714285714285
```

- $P(0.5 \leq X \leq 2.2)$

```
uniform.cdf(x=2.2, loc=0, scale=7) - uniform.cdf(x=0.5, loc=0, scale=7)

## 0.2428571428571429
```

- Dichte an der Stelle $x = 3$ (das ist *nicht* die W'keit)

```
uniform.pdf(x=1, loc=0, scale=7)

## 0.14285714285714285
```

- Uniform verteilte Zufallszahlen generieren, z.B. $X_i \sim \text{Unif}(0, 7)$ mit $i = 1, 2, 3$:

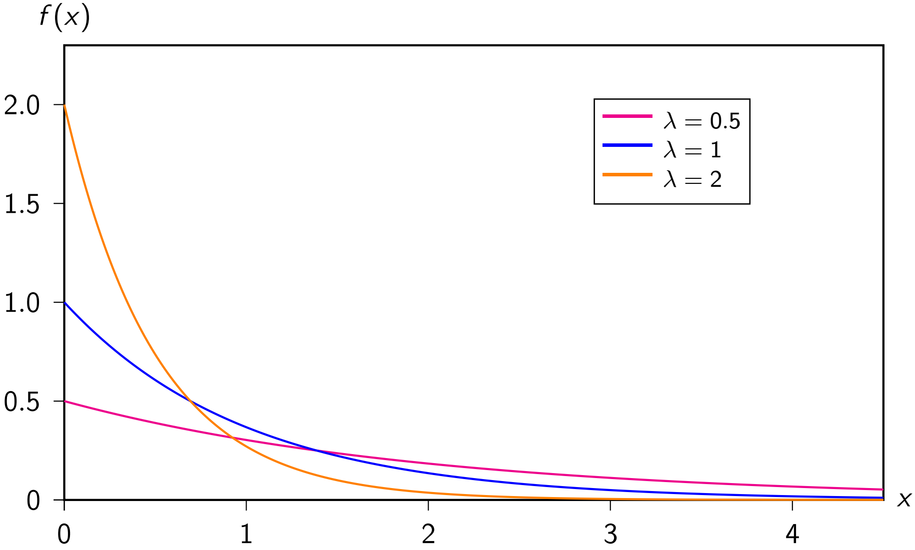
```
uniform.rvs(size=3, loc=0, scale=7)

## [0.9097826  6.00829091 4.44543069]
```

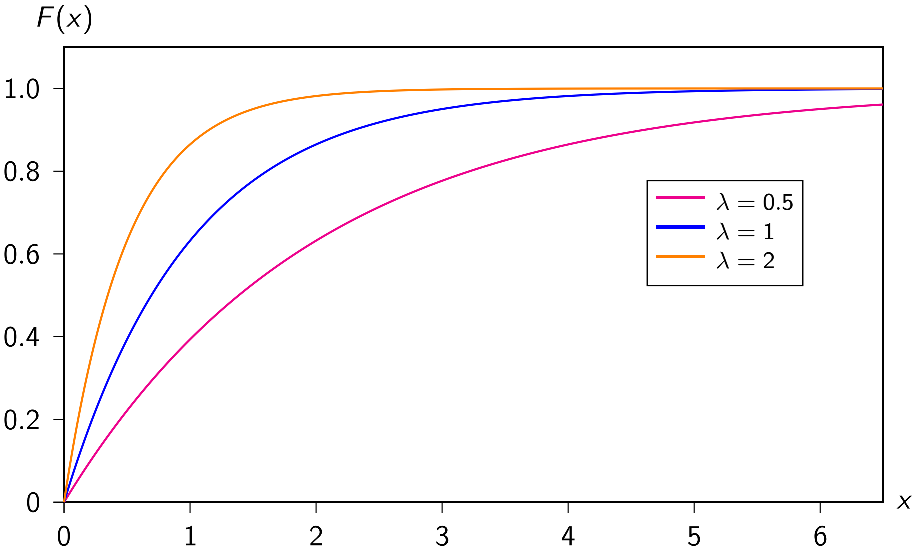
Exponentialverteilung: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- *Wertebereich* $W_X = [0, \infty)$
- *Dichte* $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \; x \geq 0$
- *Verteilungsfunktion* $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \; x \geq 0$
- *Erwartungswert* $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- *Varianz* $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- *Anwendung* Lebenszeit techn. Systeme (ohne Alterungserscheinungen), Wartezeiten, stetige Version der geom. Verteilung, ...

Exponentialverteilung: Illustration Dichten



Exponentialverteilung: Illustration kumul. Vert.fn



Beispiel Exponentialverteilung: Radioaktiver Zerfall

- Wie lange dauert es, bis ein bestimmtes radioaktives Isotop zerfällt?
- Modell für diese zufällige Lebenszeit : *Exponentialverteilung*
- T : Zerfallszeit ; somit $T \sim \text{Exp}(\lambda)$

Beispiel Exponentialverteilung: Radioaktiver Zerfall

- Für welchen Zeitpunkt wird die W'keit, dass das Isotop bis dahin zerfällt, gleich $\frac{1}{2}$?

- *Antwort*: Median,

$$F(t_{1/2}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

- Lösung: nach t auflösen (logarithmieren):

$$-\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

- In radioaktiven Gegenstand gibt es sehr viele aktive Isotope
- W'keit $\frac{1}{2}$ des Zerfalls eines einzelnen Isotops $\quad\rightarrow\quad$ Relative Häufigkeit der zerfallenen Isotope bis zum Zeitpunkt $\frac{0.693}{\lambda}$
- Man nennt

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

  die *Halbwertszeit*
- Bsp.: Halbwertszeit Americium: 16.02 h, Halbwertszeit Uran (235) : 703'800'000 Jahre

Exponential-Verteilung mit Python

- Annahme: $X \sim$ Exp(3) $\quad\rightarrow\quad$ W'keit $P(X \leq 4)$ mit Python :

```
expon.cdf(x=4, loc=0, scale=1/3)
## 0.9999938557876467
```

- Wert der W'keitsdichtefunktion berechnet mit Python :

```
expon.pdf(x=1, loc=0, scale=1/3)
## 0.00037022941226003387
```

- Beachte: scale=1/λ

Zusammenhang zwischen Exponential-Verteilung und Poisson-Verteilung

- Zur Zeit $t_0 = 0$ ereignet sich ein radioaktiver Zerfall
- Wie gross ist die W'keit, dass erst nach dem Zeitpunkt t erneut ein Zerfall eintreten kann?
- W'keit, dass sich erst nach der Zeit t wieder ein Zerfall ereignet:

$$P(T > t) = P(\text{kein Zerfall in } [0, t])$$

- Anzahl Zerfälle im Zeitintervall $[0, t]$ folgt einer Poisson-Verteilung

$$P(X = k) = \frac{(\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- Parameter $\lambda t \equiv$ Anzahl Zerfälle in $[0, t]$

Zusammenhang zwischen Exponential-Verteilung und Poisson-Verteilung

- W'keit, dass sich erst nach der Zeit t wieder ein Zerfall ereignet:

$$P(T > t) = P(\text{kein Zerfall in } [0, t]) = \frac{(\lambda t)^0 \mathrm{e}^{-\lambda t}}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

- Also folgt die Lebenszeit T eines radioaktiven Isotops einer Exponentialverteilung mit Parameter λ

- Die kumulative Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{für } t \geq 0$$

Normalverteilung (Gaussverteilung): $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

- *Wertebereich*

$$W = (-\infty, \infty)$$

- *Dichte*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

- *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

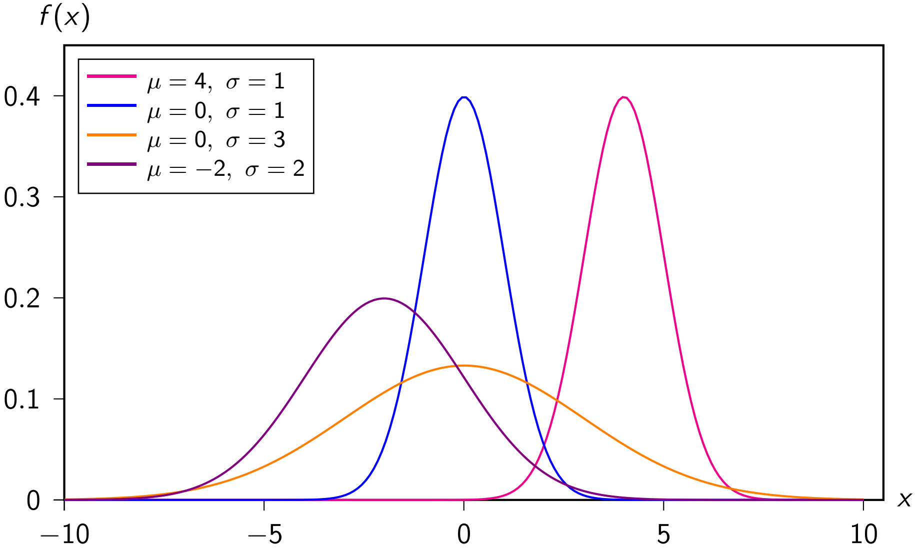
- *Erwartungswert*

$$\mathrm{E}[X] = \mu$$

- *Varianz*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

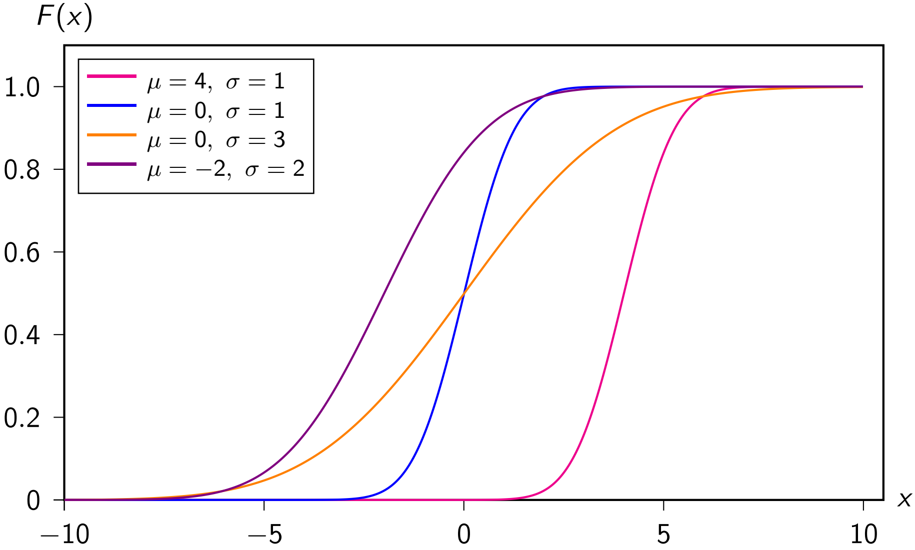
Normalverteilung: Illustration Dichten



Eigenschaften der Normalverteilung

- Dichtefunktionen „glockenförmig"
- Durch Parameter μ Verschiebung der Kurve
  - nach rechts, falls μ positiv
  - nach links, falls μ negativ
- Durch Parameter σ wird die Kurve
  - schmal und hoch um μ, falls σ klein (nahe bei 0)
  - weit und tief um μ, falls σ gross

Normalverteilung: Illustration kumul. Vert.fn.



Beispiel mit Python: Verteilung von IQ

- Anwendung: Häufigste Verteilung für Messwerte
- Beispiel: IQ Tests folgen einer Normalverteilung mit Mittelwert 100 und Standardabweichung 15
- Wie gross die W'keit ist, dass jemand einen IQ von mehr als 130 hat, also als hochbegabt gilt?
- $P(X > 130)$, wobei $X \sim \mathcal{N}(100, 15^2)$. Gesucht:

$$1 - P(X \leq 130)$$

```
1-norm.cdf(x=130, loc=100, scale=15)

## 0.022750131948179209
```

- Also rund 2 % der Bevölkerung ist hochbegabt
- In welchem Intervall liegen 90 % der IQ Ergebnisse?
- Gesucht: c, so dass

$$P(100 - c < X < 100 + c) = 0.9$$

also

$$P(X < 100 - c) = 0.05 \qquad \text{und} \qquad P(X > 100 + c) = 0.95$$

```
norm.ppf(q=0.05, loc=100, scale=15)

## 75.32719559572791
```

```
norm.ppf(q=0.95, loc=100, scale=15)

## 124.67280440427209
```

- Also liegen 90 % der IQ Ergebnisse im Intervall $[75, 125]$

- Wieviel Prozent der Bevölkerung liegen innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert liegen?

- Gesucht W'keit

$$P(85 \leq X \leq 115)$$

```
norm.cdf(x=115, loc=100, scale=15) - norm.cdf(x=85, loc=100, scale=15)

## 0.6826894921370859
```

- D.h., etwa $\frac{2}{3}$ der Bevölkerung haben einen IQ zwischen 85 und 115

Normalverteilung: Eigenschaften

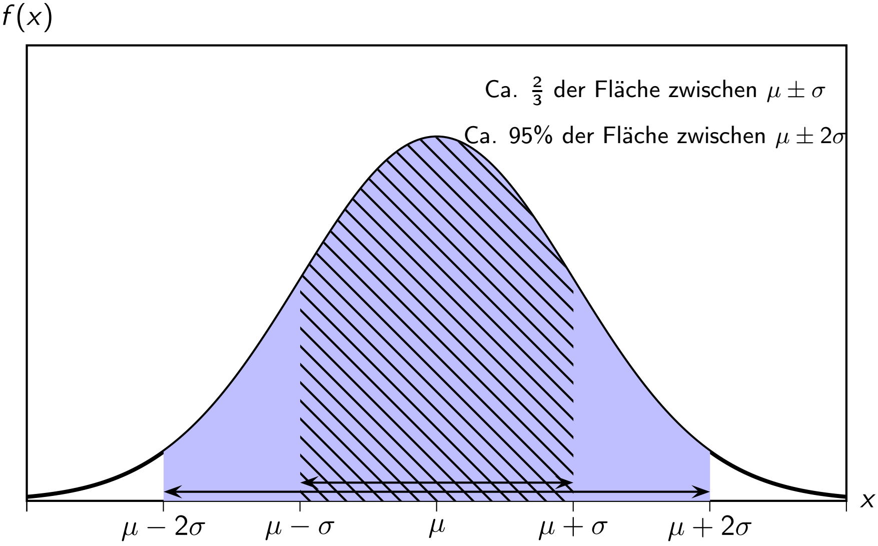
- Letzte Resultat aus Beispiel gilt für alle Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Die W'keit, dass eine Beobachtung eine höchstens Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, ist etwa $\frac{2}{3}$:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{2}{3}$$

- Normalverteilung: Konkrete Aussage für die Streuung als „mittlere" Abweichung vom Erwartungswert
- W'keit, dass eine Beobachtung höchstens zwei Standardeinheiten vom Erwartungswert abweicht:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

Normalverteilung: Eigenschaften



Normalverteilung: Standardnormalverteilung

- *Standardnormalverteilung* falls

$$\mu = 0,\ \sigma^2 = 1$$

- Dichte der Standardnormalverteilung $\quad\rightarrow\quad \varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- Kumul. Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\rightarrow\ \Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$$

- Diese ist nicht geschlossen darstellbar $\quad\rightarrow\quad$ Nicht integrierbar

Normalverteilung: Standardisierung

- Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Man spricht von der *Standardisierung* von X (auf Erwartungswert 0 und Varianz 1)
- *Beispiel:* Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 4$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{5-2}{2}\right) \\
&= P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) = 0.93
\end{aligned}
$$

```
norm.cdf(x=1.5)

## 0.9331927987311419
```