STAT Zusammenfassung

Maurin Thalmann

HS 2018

In ZF zu ergänzen:

2: - Python-Ablauf für Bestimmung von $y = a + bx$
sowie Regressionsgerade

3: - Integrationsregeln notieren

4: - Standardfehler / absoluten Fehler

① Arithmetisches Mittel / Durchschnitt

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Empirische Varianz & Standardabweichung

$$\mathrm{Var}(x) = \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \dots + (x_n-\overline{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

$$S_x = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

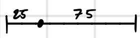
(Sind diese Werte gross, ist Streuung um arith. Mittel gross)

Median

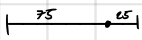
Datensatz nach Grösse ordnen, Wert in der Mitte ist Median (ungerade Anzahl). Bei gerader Anzahl: Mittelwert der beiden mittleren Beobachtungen

Quartile

Unteres Quartil: 25% der Werte kleiner und 75% grösser als dieser Wert



Oberes Quartil: 75% der Werte kleiner und 25% grösser als dieser Wert



Quartilsdifferenz: oberes Quartil − unteres Quartil
(je kleiner, umso näher liegt Hälfte aller Werte um den Median und umso kleiner ist die Streuung)

Quantile

= Quartile auf jede andere Prozentzahl verallgemeinert

Median: 50%-Quantil

oberes Quartil: 75%-Quantil

unteres Quartil: 25%-Quantil

Empirische α-Quantile $(0 < \alpha < 1)$

$\frac{1}{2}\left(x_{(\alpha n)} + x_{(\alpha n+1)}\right)$ falls $\alpha \cdot n$ natürliche Zahl ist

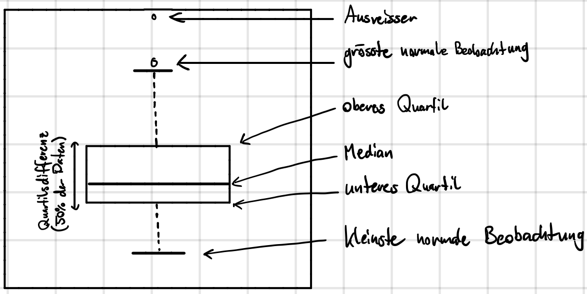
$x(k)$, wobei k die Zahl $\alpha \cdot n$ aufgerundet ist

Python-Bsp:

```
noten.quantile(q=.1, interpolation="midpoint")  : 10%-Quantil
noten.quantile(q=np.linspace(.2,1,5), interpol...):
  20/40/60/80/100%-Quantile
```

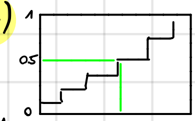
② Boxplot

Ersichtlich sind: Lage, Streuung, Schiefe



grösste normale Be.: ist höchstens 1.5 · Quartilsdifferenz vom oberen Quartil entfernt

empirische kumulative Verteilungsfunktion $F_n(\cdot)$



- Links von $x_{(1)}$ ist die Funktion gleich null
- bei jedem $x_{(i)}$ wird ein Sprung der Höhe $\frac{1}{n}$ gemacht
- falls Wert mehrmals vorkommt, ist Sprung entsprechend Vielfaches von $\frac{1}{n}$
- Wert bei 0.5 entspricht dem Median

→ Anteil der Punkte kleiner als ein bestimmter Wert

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\,\text{Anzahl}\,\{i \mid x_i \le x\}$$

Zweidimensionales Streudiagramm

v.a. für Kausalität zwischen Daten (Bsp. Weinkonsum ⇔ Mortalität Herzerkrankung)

Residuum: Abstand zw. Messpunkt und Regressionsgerade

↳ $\boxed{r_i = y_i - a - bx_i}$

wobei: Messpunkt (x_i, y_i)

Punkt auf Gerade $(x_i, a + bx_i)$

Parameter $[a,b]$ für Regressionsgerade $y = a + bx$:

(Python: np.polyfit)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(x_i-\overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

$\overline{x}, \overline{y}$ = Mittelwerte der jeweiligen Daten

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Empirische Korrelation

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\right)}}$$

$r = +1$: Werte auf steigender Gerade $(y = a + bx,\ b > 0)$

$r = -1$: Werte auf fallender Gerade $(y = a + bx,\ b < 0)$

$r = 0$: x und y unabhängig

nahe bei 1: starker linearer Zusammenhang

immer auch graphische Korrelation betrachten!

③ Zufallsvariable

→ Funktion, die jedem Ereignis einen Zahlwert zuordnet

Bsp. $\omega = As \mapsto X(\omega) = 11 = x$

Elementarereignis (ist in der Funktion $X(\cdot)$ zufällig)

Funktion, die jedem ω den Zahlwert x zuordnet (Ereignis)

Zahlenwert

Grundraum Ereignisse

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega)$$

Wahrscheinlichkeit P einer Realisierung x einer Zufallsvariablen X:

Bsp. $P(X=4) = P(\{\omega \mid \omega = \text{ein König}\})$
$= P(\text{E-König}) + P(\text{R-König}) + \dots$
$= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

Integrationsregel: $\boxed{c \cdot x^n = \left(\frac{c}{n+1} x^{n+1}\right)'}$

$$\left[P(X=x) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x\}) = \sum_{\omega;\, X(\omega)=x} P(\omega) \right]$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\sum_{\text{alle möglichen } x} P(X=x) = 1$$

W'keitsdichte $f(\cdot)$: $f(x) = F'(x)$
(Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion)

Eigenschaften W'keitsdichte:

1. $f(x) \geq 0$ für alle x (da $F(\cdot)$ monoton wachsend)
2. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ (Fläche zw. a und b unter $f(x)$)
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (wegen ②)

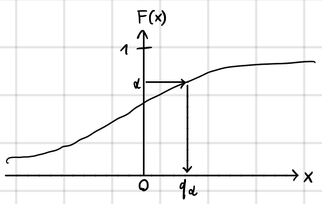
Erwartungswert: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$

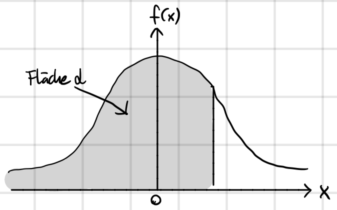
Varianz: $Var(X) = \sigma_x^2 = E\left((X - E(X))^2\right)$
$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$
$= E(X^2) - E(X)^2$

Quantile

$q(\alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ einer Zufallsvariablen X:

$$P(X \leq q(\alpha)) = \alpha \leftrightarrow F(q(\alpha)) = \alpha \leftrightarrow q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$$



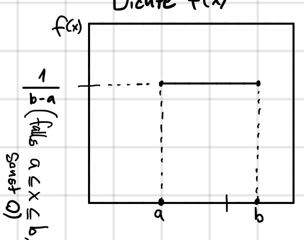


Uniforme Verteilung

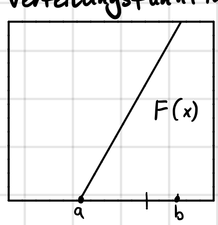
auf Intervall $[a,b]$

Situation: Jeder Wert in $[a,b]$ ist gleich wahrscheinlich

Dichte $f(x)$



Verteilungsfunktion $F(x)$



- 0 für $x < a$
- $\frac{x-a}{b-a}$ für $a \leq x < b$
- 1 für $x \geq b$

$E(X) = \frac{b+a}{2}$ $\quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Unif. Verteilung in Python:

cdf: cumulative distribution function

$P(X \leq 1)$: uniform.cdf(x=1, loc=0, scale=7)

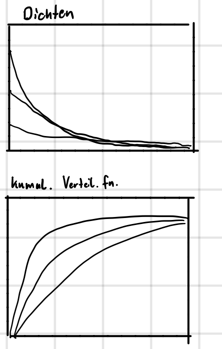
Dichte an Stelle $x=3$: uniform.pdf(x=3, loc=0, scale=7)

uniform verteilte Zufallszahlen: uniform.rvs(size=3, loc=0, scale=7)

Exponentialverteilung

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

Wertebereich:	$W_X = [0, \infty]$
Dichte:	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$
Verteilungsfunktion:	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \leq 0$
Erwartungswert:	$E[X] = \frac{1}{\lambda}$
Varianz:	$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

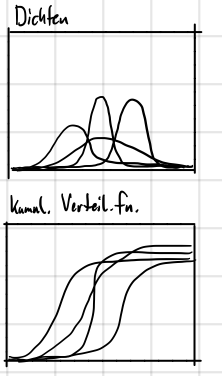


Beispiele? (mit Poisson-Verteilung)

Normal (Gauss-) verteilung

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Wertebereich:	$W = (-\infty, \infty)$
Dichte:	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$
Verteilungsfunktion:	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
Erwartungswert:	$E[X] = \mu$
Varianz:	$Var(X) = \sigma^2$



Bsp. Verteilung IQ

W'keit IQ mehr als 130: $1 - P(X \leq 130)$ bei $X \sim N(100, 15^2)$

1 − norm.cdf(x=130, loc=100, scale=15) = 0.0227… (2%)

In welchem Intervall 90% der Ergebnisse? c dass, $P(100 - c < X < 100 + c) = 0.9$
also $P(X < 100 - c) = 0.05$ und $P(X > 100 + c) = 0.95$

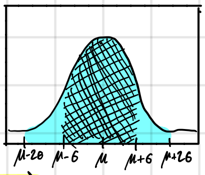
norm.ppf(q=0.05, loc=100, scale=15) = 75.32
(q=0.95 …) = 124.67

Standardnormalverteilung, falls: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ → $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\left[\frac{2}{3}\right.$ zw. $\mu \pm \sigma$
95% zw. $\mu \pm 2\sigma$

Dichte: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

kumul. V'funktion: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$



Standardisierung $X \sim N(\mu, \sigma^2) \to Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Bsp. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \to \mu = 2$, $\sigma^2 = 4$: $P(X \leq 5)$?

$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{5-2}{2}\right) = P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5)$
$= 0.93$

norm.cdf(x=1.5) = 0.9331

④ Lineare Transformation

$Y = a + bX$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Eigenschaften: folgende Beziehungen gelten:

1. $E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$
2. $Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X)$, $\sigma_Y = |b|\sigma_X$
3. α-Quantil von Y = $q_Y(\alpha) = a + b q_X(\alpha)$
4. $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$

Bsp. Würfel. Erwartungswert $\mu = E[X_i] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$

Augensumme S_n, mittlere Augenzahl $\bar{X}_n$ $\Big\}$ $n \in \{10, 40\}$ → bei wachsendem n: σ von S_n wird kleiner, σ von $\bar{X}_n$ wird grösser → näher am Erwartungswert

für n sehr gross, arith. Mittel $\bar{X}_n$ sehr nahe am Erwartungswert μ → Gesetz der grossen Zahlen

Gesetz der grossen Zahlen

i.i.d: independent & identically distributed

für $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d gilt

Kennzahlen S_n

$E(S_n) = E(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$

$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot Var(X_i)$

$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$

Kennzahlen $\bar{X}_n$

$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2} n \sigma_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$

$\sigma(\bar{X}_n) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ← Standardfehler des arith. Mittels

Zentraler Grenzwertsatz

falls $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, gilt:

$S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n \cdot \sigma_X^2)$ $\quad \bar{X}_n \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$

(Approximation besser mit grösserem n & je näher Verteilung von X_i bei Normalvert. $N(\mu, \sigma_X^2)$ ist)

- Binomialverteilung ≈ Normalverteilung (für n gross und π nicht zu klein)
- Poissonverteilung ≈ Normalverteilung (für λ gross)

Normalapproximation Binomialverteilung

wenn $X \sim Bin(n, \pi)$, dann: $E[X] = n \cdot \pi$; $Var(X) = n \cdot \pi(1-\pi)$

Approximation Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit

$\mu = n \cdot \pi$; $\sigma^2 = n \cdot \pi(1-\pi)$ $\Rightarrow P[X \le x] \approx \Phi\left(\frac{x - n\cdot\pi}{\sqrt{n\cdot\pi(1-\pi)}}\right)$

Bsp. W'keit, dass bei 10'000 Würfen max. 5'100 mal Kopf erscheint?

Anzahl Würfe (Kopf) ist $Bin(10'000, 0.5)$-verteilt. Approx. mit Normalvert.: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

mit $\mu = 10'000 \cdot 0.5 = 5000$ / $\sigma^2 = 10'000 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5) = 2500$

$P(X \le 5100) \approx 0.98$ (norm.cdf(x=5100, loc=5000, scale=np.sqrt(2500)))

Vergleichen: $X \sim Bin(10'000, 0.5)$ → $P(X \le 5100) \approx 0.98$ (binom.cdf(k=5100, n=10000, p=0.5))

⇒ sehr gute Übereinstimmung

Normalapproximation Poissonverteilung

wenn $X \sim Pois(\lambda)$, dann: $E[X] = \lambda$; $Var(X) = \lambda$

Norm. vert. mit $\mu = \lambda$; $\sigma^2 = \lambda$ $\Rightarrow P[X \le x] \approx \Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$

Roulette-Beispiel: $X_i \begin{cases} 1 & \text{W'keit } \frac{19}{37} \\ -1 & \text{W'keit } \frac{18}{37} \end{cases}$ 18 schwarz, 1 grün ; totaler Gewinn nach n Spielen: S_n

$E[X_i] = 1 \cdot \frac{19}{37} + (-1) \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37}$ (Casino leicht im Vorteil)

$E[X_i^2] = \frac{19}{37} \cdot (-1)^2 + \frac{18}{37} \cdot (1)^2 = 1$

$Var(X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 1 - \left(\frac{1}{37}\right)^2 = 0.99927 \approx 1$

W'keit, dass Casino Gewinn macht bei 10'000 unabhängigen Spielen?

$E[S_n] = n \cdot E[X_i] = 10'000 \cdot \frac{1}{37} \approx 270.27$

$Var(S_n) = n \cdot Var[X_i] = 10'000 \cdot 0.99927 \approx 9992.7 \Rightarrow \sigma_{S_n} = \sqrt{9992.7} \approx 99.96$

$P[S_n > 0] \overset{\text{Standardisierung}}{=} P\left[\frac{S_n - 270}{99.96} > \frac{0-270}{99.96}\right] \approx P[\underset{Z \sim N(0,1)}{Z} > -2.7] \underset{\text{Symetrie}}{=} \Phi(2.7) \rightarrow \text{cdf} = 0.9965$

Standardfehler für Daten: daten.std() $\quad \left(\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

Standardfehler: $s_{\bar{x}_n} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$

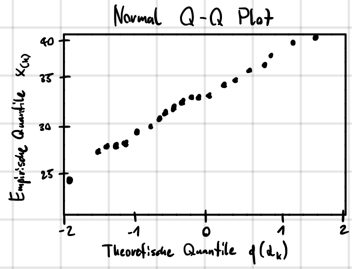
absoluter Fehler: $\bar{x}_n \pm s_{\bar{x}_n}$ $\quad$ auf signifikante Stellen aufpassen

relativer Fehler: $\bar{x}_n \pm \frac{s_{\bar{x}_n}}{\bar{x}_n} \cdot 100\%$

5 Normal (Q-Q) Plot

Plotten der theoretischen Quantile der Standardnorm.vert. $q(\alpha_k) = \Phi^{-1}(\alpha_k)$ gegen die empirischen Quantile $x_{(k)}$

1) Datensatz: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2) $\alpha_{(k)} = \frac{k-0.5}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$
3) Theoretische Quantile: $q(\alpha_k) = \Phi^{-1}(\alpha_k)$
4) Empirische Quantile: $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$
5) $(q(\alpha_k), x_{(k)})$ plotten



scipy.stats: st.probplot(x, plot=plt)

6 Statistische Tests

($n = 150$ nur Beispiel)

H_0: Nullhypothese (was behauptet wird)

H_A: Alternativhypothese (Gegenbehauptung, soll H_0 verwerfen)

- Daten erheben: $X_1, \ldots, X_{150}$ i.i.d $\sim N(\mu, \sigma_X^2)$
- arithmetisches Mittel $\bar{x}_{150}$ bestimmen $\Rightarrow \bar{X}_{150}$ (Zufallsvariable)
- Verteilung $\bar{X}_{150}$: $\bar{X}_{150} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{X}_{150}}^2) = N\left(\mu, \frac{\sigma_X^2}{150}\right)$

P-Wert: Wert der angibt, wie gut H_0 und Daten zusammenpassen (0: passt nicht, 1: passt sehr gut)

↳ W'keit, unter Annahme von H_0 das erhaltene Ergebnis oder extremeres zu erhalten

Signifikanzniveau α (z.Bsp. 0.05/5%): Verwerfe H_0 falls P-Wert $\le \alpha$, ansonsten belasse H_0

P-Wert bei einseitiger nach oben gerichteter H_A: $P(\bar{x}_{150} < \bar{X}_{150})$

einseitiger nach unten gerichteter H_A: $P(\bar{X}_{150} < \bar{x}_{150})$

zweiseitiger H_A: $P(\bar{x}_{150} < |\bar{X}_{150}|)$

Bsp. Messergebnisse: $\bar{x}_{150} = 168$cm (grösser als 168cm → einseitig nach oben gerichtet)

σ_X bekannt: 8cm

Berechnung P-Wert: $P[\bar{X}_{150} > 168] = 1 - P[\bar{X}_{150} \le 168]$:

↳ 1 - norm.cdf(x=168, loc=164, scale=8/np.sqrt(150))

z-Test (σ_X bekannt)

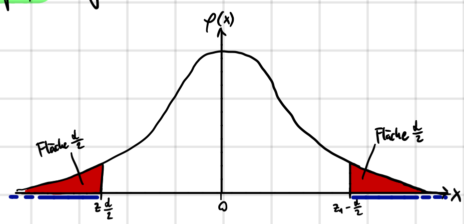
1. **Modell**: X_i ist eine kontinuierliche Messgrösse; $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d $N(\mu, \sigma_X^2)$ und σ_X bekannt
2. **Nullhypothese H_0**: $\mu = \mu_0$ || Alternative H_A: $\mu \ne \mu_0$ (oder >/<)
3. **Teststatistik**: $Z = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma_{\bar{X}_n}} = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma_X / \sqrt{n}} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{Standardfehler}}$

   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $Z \sim N(0,1)$
4. **Signifikanzniveau**: α (wird selbst gewählt, 0.1%, 1%, 5%, ...)
5. **Verwerfungsbereich** für die Teststatistik:

   $K = (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ bei H_A: $\mu \ne \mu_0$

   $K = (-\infty, z_{\alpha}]$ bei H_A: $\mu < \mu_0$

   $K = [z_{1-\alpha}, \infty)$ bei H_A: $\mu > \mu_0$
6. **Überprüfen**: Liegt beobachteter Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich?



t-Test (σ_X bekannt)

Annahme: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma_X^2)$ und unabhängig

Varianz aus Daten schätzen: $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$

neue Teststatistik: $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}}$ | Verteilung von T, falls $H_0: \mu = \mu_0$ stimmt: $T \sim t_{n-1}$

t_{n-1}: t-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden

t-Verteilung symmetrisch, aber langschwänziger (Peak in Mitte weniger hoch, weit aussen ist Dichte grösser, falls Anzahl Freiheitsgrade n klein ist)
liefert eher grosse Werte (verglichen mit Std.norm. vert.)

$t_n \to N(0,1)$ für $n \to \infty$

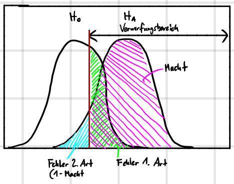
1. **Modell**: X_i ist eine kontinuierliche Messgrösse; $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma_X^2)$
   σ_X durch $\hat{\sigma}_X$ schätzen
2. **Nullhypothese H_0**: $\mu = \mu_0$ || **Alternative H_A**: $\mu \neq \mu_0$ (oder $>$/$<$)
3. **Teststatistik**: $Z = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_n}} = \frac{(\bar{X}_n - \mu_0)}{\hat{\sigma}_X/\sqrt{n}} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{Standardfehler}}$

   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim t_{n-1}$
4. **Signifikanzniveau**: α (wird selbst gewählt, 0.1%, 1%, $\underbrace{5\%}_{\text{üblich}}$, ...)
5. **Verwerfungsbereich** für die Teststatistik:
   $K = (-\infty, t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ bei $H_A: \mu \neq \mu_0$
   $K = (-\infty, t_{n-1;\alpha}]$ bei $H_A: \mu < \mu_0$
   $K = [t_{n-1;1-\alpha}, \infty)$ bei $H_A: \mu > \mu_0$
6. **Überprüfen**: Liegt beobachteter Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich?

7 Fehler 1. und 2. Art

Fehler 1. Art kontrollieren: Signifikanzniveau α klein halten
→ P(Fehler 2. Art) wird grösser, falls α kleiner gewählt wird.

Wahrheit \ Entscheidung	H_0	H_A
H_0	✓	Fehler 1. Art
H_A	Fehler 2. Art	✓



Vertrauens-/Konfidenzintervall

↳ $K = (-\infty, t_{n-1;\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$

$= \left[\bar{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}\right]$

Std.abw. (geschätzt oder bekannt); Mittelwert; Freiheitsgrad; α = 1 - Signifikanzniveau, Bsp. 5% = 0.05

$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ in Python: `t.ppf(q=1-α/2, df=n-1)`

Bsp: $K = \underset{\bar{x}_n}{80.02} \pm \underset{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}{2.18} \cdot \underset{\hat{\sigma}_X}{0.024}/\underset{\sqrt{n}}{\sqrt{13}} = [80.01, 80.03]$

Python: `t.interval(alpha=0.95, df=12, loc=80.02, scale=0.024/np.sqrt(13))`

```
import scipy.stats as st
from scipy.stats import norm, t
numpy
```

8 Vorzeichentest

beobachtet: $x_1 = 13$, $x_2 = 9$, $x_3 = 17$, $x_4 = 8$, $x_5 = 14$

Annahme: $H_0: \mu = \mu_0 = 10$ | Vorzeichen von $x_i - \mu_0$: +, −, +, −, +
$H_A: \mu \neq 10$

Binomialtest: $H_0: \pi = 0.5$
$H_A: \pi \neq 0.5$, $n = 5$, $x = 3$ (Anzahl „+")

`st.binom_test(x=3, n=5, p=0.5)` = 1 ← P-Wert

Nullhypothese beim Vorzeichentest wird nicht verworfen.

Keine Annahme an Verteilung
Kleinere Macht

Wilcoxon-Test (Kompromiss zw. Vorzeichen- und t-Test)

Annahme: $X_i \sim F$ i.i.d. ist symmetrisch, teste Median μ: $H_0: \mu = \mu_0$ (ein- oder zweiseitig)

Intuition der Teststatistik:
- rangiere $|x_i - \mu_0| \to r_i$
- Rängen ursprüngliches Vorzeichen von $(x_i - \mu_0)$ geben
- Teststatistik T: Summe aller Ränge, bei denen $(x_i - \mu_0)$ positiv ist

Falls H_0 stimmt, sollte diese Rangsumme nicht zu gross/klein sein

Bsp: $H_0: \mu_0 = 0$; beobachte: −1.9, 0.2, 2.9, −4.1, 3.9
Absolutbeträge: 1.9, 0.2, 2.9, 4.1, 3.9
Ränge der Absolutbeträge: 2, 1, 3, 5, 4

Rangsumme der positiven Gruppe: 1+3+4 = 8
Minimale Rangsumme: 0
Maximale Rangsumme: 1+2+3+4+5 = 15

```
x = np.array([-1.9, 0.2, 2.9, -4.1, 3.9])
st.wilcoxon(x, correction=True)
```

gepaarte Stichproben: jede Beobachtung einer Gruppe kann eindeutig einer Beobachtung der anderen Gruppe zugeordnet werden.
(Stichprobengrösse in beiden Gruppen zwangsläufig gleich)

ungepaarte Stichproben: Keine Zuordnung von Beobachtungen möglich
Stichprobengrössen können (müssen aber nicht) verschieden sein.
Man kann die eine Gruppe vergrössern, ohne dass man die andere vergrössert.

ungepaart	vs.	gepaart
Intuition Teststatistik: $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}}$		Differenz $D_i = X_i - Y_i$; Teststatistik $T = \frac{\bar{D}}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}}$

gepaarte Stichproben:
$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
betrachte Differenzen $D_i = X_i - Y_i$

Python: `from scipy.stats import norm, t, binom` (und st, np, pd. Series)

```
vorher = Series([25, 25, ..., 60, 28])
nachher = Series([27, 29, ..., 59, 43])
st.ttest_rel(nachher, vorher)
```

pvalue = 0.0016... → P-Wert unter Signifikanzniveau → Nullhypothese verwerfen

```
vorher = Series([25, 25, ..., 60, 28])
nachher = Series([27, 29, ..., 59, 43])
dif = nachher - vorher
t.interval(alpha=.95, df=dif.size-1, loc=dif.mean(), scale=dif.std()/np.sqrt(dif.size))
```

95%-Vertrauensintervall: Unterschied in den Gruppenmittelwerten
↳ Mit 95% W'keit ist Gruppenmittelwert von x um eine Zahl im Bereich: [9.91431, 15.63114] grösser als der Gruppenmittelwert von y

ungepaarte Stichproben:
Daten X_i und Y_i normalverteilt, aber ungepaart

```
x = Series([...])
y = Series([...])
st.ttest_ind(x, y, equal_var=False)
```
→ P-Wert 0.018 unter Sig.niveau 5%

Falls Daten nicht normalverteilt:

```
x = Series([...])
y = Series([...])
st.mannwhitneyu(x, y)
```
← gibt einseitigen P-Wert aus → 0.00726...
P-Wert also: 0.0145...