Random Walk
Stochastische Prozesse

Peter Büchel

HSLU I

Stat: Block 12

Random Walk

- *Random Walk* (auch Zufallsbewegung oder Irrfahrt): Mathematisches Modell für eine Bewegung, bei der die einzelnen Schritte zufällig erfolgen
- Es handelt sich um einen stochastischen Prozess in diskreter Zeit mit unabhängigen und identisch verteilten Zuwächsen

Beispiel: Aktienkurs

- Aktienkurs

- Aktienkurse können nicht vorhergesagt werden

- Durch Random-Walks können die zufälligen Kursanstiege oder Kurszerfälle von Tag zu Tag (diskrete Zeit) modelliert werden

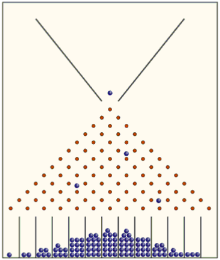
Beispiel: Weisses Rauschen

- An eletrischem Leiter wird keine Spannung angelegt
- Elektronen sich wegen Wärme trotzdem zufälliger
- Dies führt zu kleiner Spannung im Leiter, die dauernd zufällig ändert
- Heisst *weissem Rauschen*

- Diesen Prozess kann man mit Hilfe eines Random-Walks modellieren

Beispiel: Galton-Brett

- Brett:



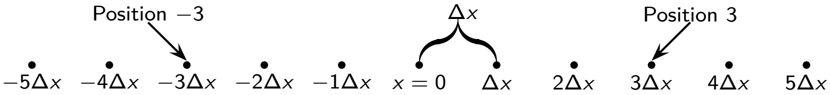
- Sprungwahrscheinlichkeit der Kugel auf einem Nagel nach links oder nach rechts ist die gleiche, nämlich 50 %

- Verteilung der Kugeln nach N Sprüngen folgt einer Binomialverteilung

Prinzip des Random Walk

- Betrunkener geht aus einer Bar in eine Gasse und versucht, nach Hause zu gehen
- Da er etwas durcheinander ist, geht nicht jeder seiner Schritte in die richtige Richtung
- Annahmen:
  - Jeder seiner Schritte die Grösse Δx
  - Mit W'keit p geht er nach rechts geht
  - Mit W'keit $q = 1 - p$ nach links
- Wenn $p > q$ ist, geht er häufiger nach rechts als nach links
- Weg des Betrunkenen ist Beispiel für einen Zufallspfad („random walk")

- Auf einem eindimensionalen Gitter mit der Gitterkonstanten Δx



- Annahme: Betrunkener beginnt am Ort $x = 0$ seinen Spaziergang beginnt

- Bezeichnen mit X die Anzahl Schritte, die unser Betrunkener nach rechts geht

- Dann ist

$$X \sim \text{Bin}(N, p)$$

  wobei N die Gesamtzahl Schritte ist

- Wollen wissen, wie gross die W'keit ist, dass sich unser Betrunkener nach N Schritten an der Position m (in Einheiten von Δx) auf dem Gitter befindet

- Man beachte, dass m auch negativ sein kann

- Bezeichnen mit M_N die Zufallsvariable für die Position unseres Spaziergängers nach N Schritten auf Gitter (in Einheiten von Δx)

- Fragen also, wie gross die W'keit

  $$P(M_N = m)$$

  ist, dass der Pfad nach N Schritten an der Position m ist

- Bezeichnen mit S_r die Anzahl Schritte nach rechts

- Mit S_l die Anzahl Schritte nach links

- Nach unseren Voraussetzungen muss dann gelten

$$S_r + S_l = N \quad \text{und} \quad S_r - S_l = m$$

- Lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den beiden Unbekannten S_r und S_l

- Nach S_r und S_l auflösen (Gleichungen addieren und subtrahieren):

$$S_r = \frac{N+m}{2} \quad \text{und} \quad S_l = \frac{N-m}{2}$$

- Um nach N Schritten bei m zu sein, muss man also $(N+m)/2$ von den N Schritten nach rechts und $(N-m)/2$ Schritte nach links gehen

- Zahl $m+N$ muss eine gerade sein:
  - wenn also N gerade ist, ist auch m gerade
  - ist N ungerade, so ist es m

- Anzahl Schritte nach rechts bestimmt die Position M_N eindeutig

- W'lichkeit, dass sich der Betrunkene nach insgesamt N Schritten bei $M_N = m$ befindet, berechnen, indem man Zufallsvariable X (Anzahl Schritte nach rechts) durch $(N+m)/2$ ersetzt:

$$P(M_N = m) = \binom{N}{\frac{N+m}{2}} p^{(N+m)/2} q^{(N-m)/2}$$

- Wenn N gross ist erhält man unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes eine Normalverteilung

- W'lichkeit, dass sich Bargänger nach N Schritten bei $M_N = m$ befindet:

$$P(M_N = m) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Vorfaktor 2 ist so gewählt, dass die Summe über alle m-Werte eins ergibt, die Punktwahrscheinlichkeiten also normiert sind

- Beachte: Für (un)gerade N nur (un)gerade Werte von m auftauchen

- Abstand zweier benachbarter Werte von m den Betrag 2 hat:

$$\Delta m = \pm 2$$

- Schrittgrösse steht im Zähler des Vorfaktors, so dass die Summe von $P(M_N = m)$ über alle m mit $\Delta m = \pm 2$ eins ergibt

- Es handelt sich bei

$$P(M_N = m)$$

immer noch um eine *diskrete* W'keitsverteilung

- $P(M_N = m)$ ist Punktw'lichkeit für die diskrete Zufallsvariable M_N

- Wie bestimmt man die Werte der Parameter μ und σ in Gleichung oben?
- Als Erwartungswert der Normalverteilung für die Zufallsvariable M_N nimmt man den Erwartungswert der Binomialverteilung: N mal die mittlere Positionsänderung eines Schrittes (in Einheiten von Δx)
- Also:

$$\begin{aligned}
\mu = \mathrm{E}(M_N) = N \cdot \mathrm{E}(M_1) &= N\Big(1 \cdot P(M_1 = +1) - 1 \cdot P(M_1 = -1)\Big) \\
&= N(p - q) \\
&= N(p - (1 - p)) = N(2p - 1)
\end{aligned}$$

wobei M_1 Bernoulli-verteilt ist

- Varianz der Normalverteilung ist N mal die Varianz eines Schrittes

$$\begin{aligned}
\sigma^2(M_N) &= \mathrm{Var}(M_N) \\
&= N \cdot \mathrm{Var}(M_1) \\
&= N \Big((1 - \mathrm{E}(M_1))^2 P(M_1 = +1) + (-1 - \mathrm{E}(M_N))^2 P(M_1 = -1) \\
&= N \Big((1 - (p-q))^2 p + (-1 - (p-q))^2 q \Big) \\
&= 4Npq
\end{aligned}$$

- Also ist die W'keit, dass sich unser nächtlicher Spaziergänger nach N Schritten an der Position m befindet

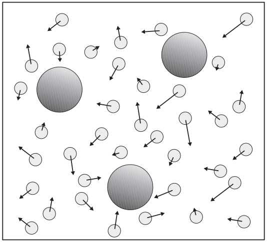
$$\begin{aligned}
P(M_N = m) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{8\pi Npq}} \mathrm{e}^{-\frac{(m-N(p-q))^2}{8Npq}}
\end{aligned}$$

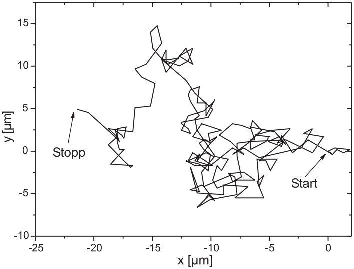
Brownsche Bewegung

- Begriff *Brownsche Bewegung*: Biologen Robert Brown führte 1827 Arbeiten durch, in welchen dieser die zufällige Bewegung von in Wasser schwimmenden Pollen beobachtete

- Einstein lieferte 1905 eine Erklärung dafür: die Zitterbewegung der Pollen wird durch fortwährende Stösse mit sich zufällig bewegenden Wassermolekülen verursacht

- Skizze





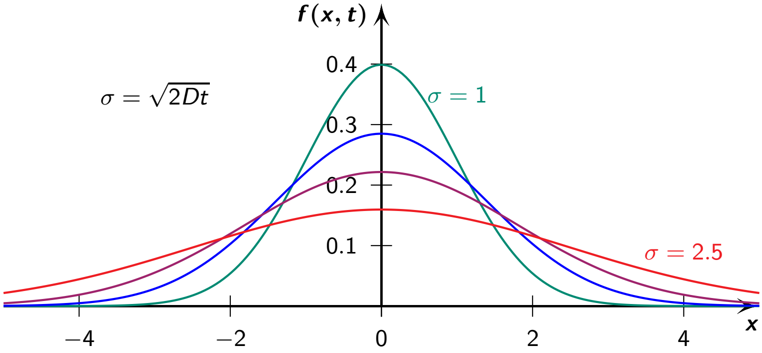
- Gewichtiges Argument für die Existenz von Atomen und Molekülen, die im 19. Jahrhundert noch heftig umstritten gewesen ist
- Einsteins: Je wärmer Wasser ist, um so grösser ist mittlere Geschwindigkeit, mit der Wassermoleküle ungeordnet umherflitzen und damit Stösse verursachen
- *Brownsche Bewegung* ergibt sich aus *Random Walk*, wobei Zeitvariable kontinuierlich
- Schrittweiten werden als normalverteilte Zufallsvariablen aufgefasst
- Anstelle eines Betrunkenen $\rightarrow$ Partikel in Wasser
- Geben z.B. Tintentropf in Wasser, so diffundieren die Tintenmoleküle im Wasser und verteilen sich gleichmässig

- Annahme: In Flüssigkeit befinden sich n Tintenmoleküle zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle x_0
- Zeitabhängige Teilchendichte beschrieben durcc:

$$n(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

- D die von der Temperatur T des Wassers abhängige Diffusionskonstante
- Aufgrund der Diffusion der Tintenmoleküle wird die Teilchendichtekurve mit grösser werdendem t immer breiter

- Graphisch:



- Zusammenhang des makroskopisch beschriebenen Phänomens der *Diffusion* mit dem mikroskopischen Phänomen der *Brownschen Bewegung* eines Partikels
- Übergang zu einer Kontinuumsbeschreibung des Random Walks
- Fassen Bewegung des Tintenmoleküls im Wasser als einen Random Walk auf (in Analogie zum Barbesucher)
- Lassen Schrittlänge Δx sowie den zeitlichen Abstand Δt zwischen zwei Schritten immer kleiner werden
- Resultat (ohne Herleitung):

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$

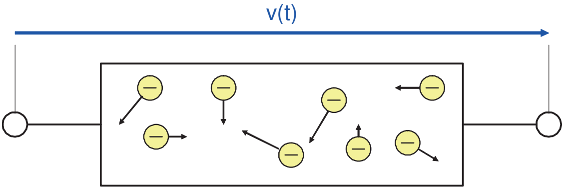
- W'keitsdichte für die Position x des Brownschen Partikels zur Zeit t

Beispiel: thermische Rauschen

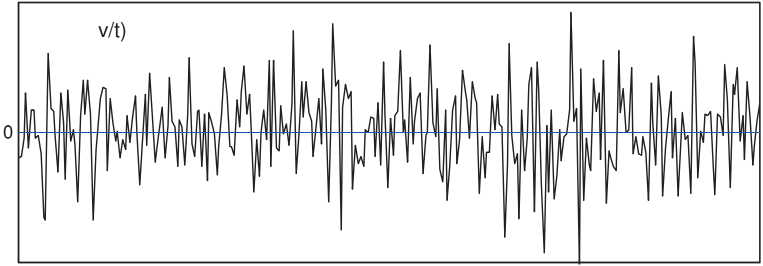
- Thermisches Rauschen kommt in jedem elektrischen Leiter vor

- Wird durch die ungeordnete Wärmebewegung der Ladungsträger hervorgerufen (Brownsche Bewegung)

- In Ohmschen Widerstand tritt an Anschlüssen durch eine zufällige Ansammlung von Elektronen sporadisch eine Rauschspannung auf, selbst wenn kein Strom durch den Leiter fliesst



- Typischer Verlauf einer Rauschspannung $v(t)$:



- Auftretende Spannungen liegen unter üblichen Bedingungen in der Grössenordnung von Mikrovolts

- Zufallssignal (engl. random signal) oder einem „stochastischen Signal", da aus der Vergangenheit des Signals den zukünftigen Verlauf nicht vorhersagbar ist

- Ein einmal aufgetretener Signalverlauf in einem wiederholten Experiment lässt nicht wiederholen
- Stochastische Signale können nur mit statistischen Grössen oder Mittelwerten beschrieben werden
- Bei einem thermischen Rauschsignal ist der lineare Mittelwert der Spannung null, da ja im Mittel kein Strom fliessen kann

W'keitsverteilungsfunktion und W'keitsdichtefunktion

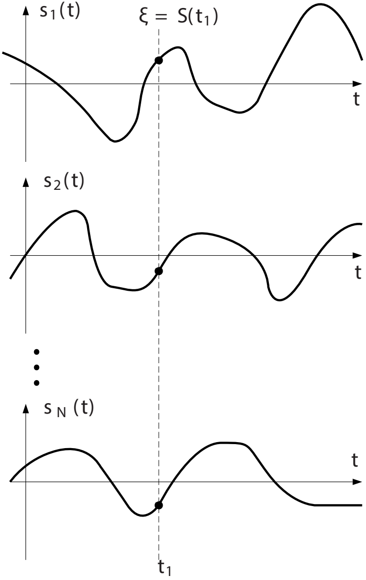
- Betrachten *stochastische Signale* als Musterfunktionen von Zufallsprozessen
- Es gilt die folgende Definition:

Stochastischer Prozess

Ein *Zufallsprozess* oder stochastischer Prozess $S(t)$ ist durch ein *Ensemble* von *Musterfunktionen* $\{s_1(t), s_2(t), \ldots, s_N(t)\}$ gegeben.

Eine *Realisierung* ergibt sich durch die zufällige Auswahl einer Musterfunktion $s_i(t)$ mit $1 \leq i \leq N$ des Ensembles.

- Graphisch:



- Zufallsprozess $S(t)$ mit Hilfe von W'keitsverteilungsfunktionen beschreiben

- Betrachten (gemessenen) Funktionswert $s(t_1)$ des Prozesses $S(t)$ zum Zeitpunkt $t = t_1$ als Realisierung der Zufallsvariable $\xi = S(t_1)$

- Musterfunktionen sind *kontinuierliche* Zufallsprozesses

- Über Ensemble der Musterfunktionen kann man die W'keit ermitteln, mit der Werte $s(t_1)$ im Bereich $-\infty < \xi \leq s$ anzutreffen sind:

  $$P(\xi \leq s) = F(s)$$

  wobei $F(s)$ die kumulative W'keitsverteilungsfunktion ist

- Analog Treppenkurve; aber eine stetige Funktion

- Da ihr Funktionswert eine W'keit ist, gilt

  $$0 \leq F(s) \leq 1$$

- Da Ereignis $\{\xi \leq s\}$ grösser wird, wenn s grösser wird, ist $F(s)$ monoton wachsend mit s

- Ereignisse $\xi \leq s$ und $s < \xi \leq (s + \Delta s)$ schliessen sich gegenseitig aus

- Deshalb dürfen die zugehörigen W'keiten addiert werden:

$$P(\xi \leq s) + P\left(s < \xi \leq (s + \Delta s)\right) = P\left(\xi \leq (s + \Delta s)\right)$$

- Damit gilt auch:

$$P(s < \xi \leq (s + \Delta s)) = F(s + \Delta s) - F(s) \geq 0$$

- Dividieren obigen Ausdruck durch Δs, so führt Grenzwertbildung auf Definition der *W'keitsdichtefunktion* $f(s)$:

$$f(s) := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{P(s < \xi \leq (s + \Delta s))}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} \geq 0$$

- Beachte: $f(s)$ ggf. dimensionsbehaftet mit$[f(s)] = s^{-1}$
- z.B. $[f(s)] = \text{Sekunde}^{-1}$, sofern s die Zeit gemessen in Sekunden ist
- Dichtefunktion hat die wichtige Eigenschaft

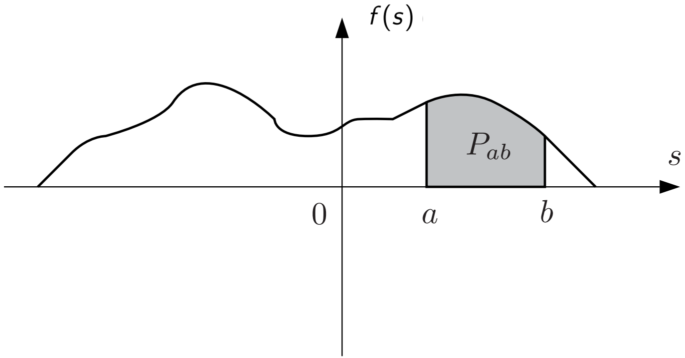
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \mathrm{d}s = 1$$

- Sind die zu einem stochastischen Signal gehörenden Funktionen $f(s)$ bzw. $F(s)$ bekannt, so lassen sich systemtechnisch wichtige Grössen ermitteln
- Z.B. kann bei bekannter W'keitsdichte $f(s)$ der Werte $\{s(t_1)\}$ ausgesagt werden, dass sich diese mit der W'keit:

$$P_{ab} = \int_{a}^{b} f(s)\, \mathrm{d}s$$

im Bereich $a \leq s(t_1) \leq b$ aufhalten

- Graphisch:



- Anschaulich: Fläche unter der Kurve $f(s)$ von $s = a$ bis $s = b$ gleich W'keit, mit der Zufallsvariable ξ einen Wert zwischen a und b annimmt

- Bis jetzt: Funktionswert eines stochastischen Signals zum Zeitpunkt $t = t_1$ betrachtet

- Allgemein: W'keitsverteilungsfunktion und W'keitsdichtefunktion zeitabhängig, d.h. man hat $F(s, t)$ und $f(s, t)$

- Bei vielen technisch relevanten Zufallsprozessen sind die statistischen Eigenschaften unabhängig von der Zeit

- Diese Eigenschaft heisst *Stationärität*:

Stationärer stochastischer Prozess

Zufallsprozess heisst *stationär*, wenn die kumulative W'keitsverteilungsfunktion oder die W'keitsdichtefunktion zeitunabhängig sind:

$$F(s, t) = F(s)$$
$$f(s, t) = f(s)$$

Bemerkung

- Diese Definition von Stationarität wird auch als starke Stationarität bezeichnet
- Ein stochastischer Prozess $X(t)$ heisst *stark stationär*, wenn die Verteilung von $X(t+s)$ nicht von der Verschiebung s abhängt
- Ein stochastischer Prozess heisst *schwach stationär*, wenn der Erwartungswert konstant ist und die Varianz endlich ist

Beispiel: Thermisches Rauschen

- *Thermische Rauschen* $V(t)$ in elektrischem Widerstand (Abb. früher)
- Betrachten Verteilung der Rauschamplituden $V(t)$
- z.B. Werte der Spannung v aus Abb. früher
- Verteilung ändert zeitlich nicht und folgt Normalverteilung:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  wobei μ den Erwartungswert und σ^2 die Varianz bzw. σ die Standardabweichung der Zufallsvariablen $V(t) = V$ (Rauschamplitude) bezeichnet

- Verteilung der Rauschamplituden in einem elektrischen Widerstand in einem Jahr mit der Verteilung der momentanen Rauschamplituden vergleichen $\quad\rightarrow\quad$ keinen Unterschied feststellen

- Anders: *Diffusionsprozess*

- Hier: W'keitsdichte für die Position x eines Teilchens in Abhängigkeit der Zeit t gemäss

$$f(x;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$

unter der Annahme, dass es sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $x = 0$ befand

- Nicht-stationärer stochastischer Prozess

Bestimmung des Erwartungswertes über eine Schar von Musterfunktionen

- Für eine beliebige W'keitsdichtefunktion $f(s,t)$ berechnen sich Erwartungswert und Varianz gemäss

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s,t)\,\mathrm{d}s$$
$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (s-\mu)^2 f(s,t)\,\mathrm{d}s$$

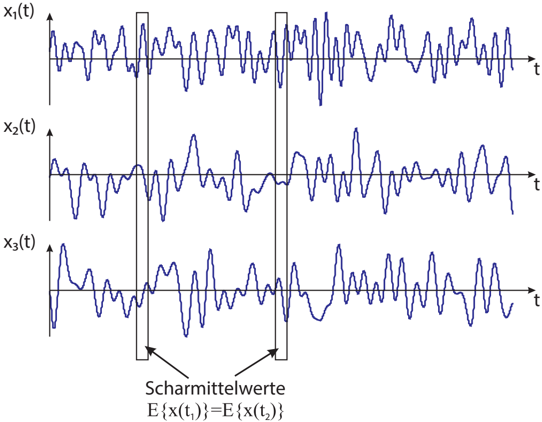
- Berechnungen oben können als Mittelwertbildung über das Ensemble $\{s_1(t), s_2(t), \ldots, s_N(t)\}$ bzw. über die Schar des Zufallsprozesses $S(t)$ angesehen werden

- Ist der Zufallsprozess $S(t)$ stationär, so sind die Scharmittelwerte

$$\mu_S(t) = \mathrm{E}[S(t)]$$

zeitunabhängig

- Man bezeichnet $\mu_S(t)$ und $\sigma_S^2(t)$ deshalb auch als *Scharmittelwert*, resp. *Scharvarianz*



- Können berechnet werden, wenn eine mathematische Beschreibung der W'keitsdichtefunktion $f(s, t)$ vorliegt.

- Praxis: Oft nur eine einzige Realisierung des Prozesses beobachtet
- Man kennt die W'keitsdichtefunktion nicht
- In diesem Fall lassen sich μ_S und σ_S^2 nur bestimmen, wenn die betrachteten Zufallsprozesse eine weitere Regularität aufweisen, die als *Ergodizität* bezeichnet wird
- Definition Zeitmittelwert:

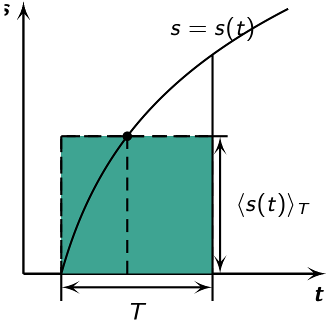
Zeitmittelwert

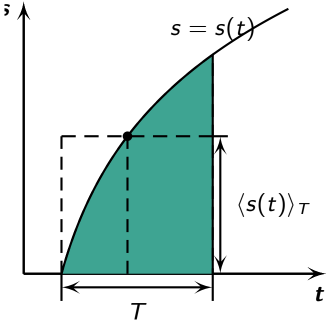
Für stochastischen Prozess $S(t)$ definieren wir den Zeitmittelwert

$$\langle s(t)\rangle_T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,\mathrm{d}t$$

- Geometrisch: Zeitmittelwert als interpretieren als Fläche unter der Kurve des Stochastischen Signals $S(t) > 0$, dividiert wir durch die Länge der Integrationszeit

- D. h. Höhe des Rechtecks mit der gleichen Fläche wie die Fläche unter der Kurve des Stochastischen Prozesses $S(t)$





Beispiel

- Sei A eine auf dem Intervall $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable
- Definieren den stochastischen Prozess

$$S(t) = A$$

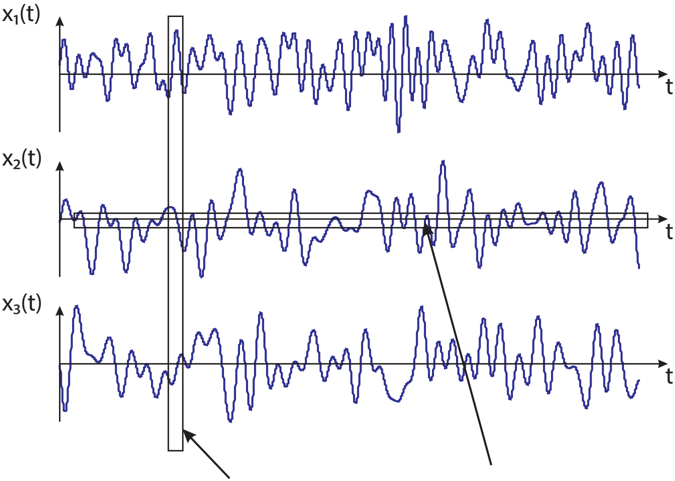
- Realisierung dieses stochastischen Prozesses: Auf Intervall $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallszahl „gezogen" und zu jedem Zeitpunkt diesen Wert besitzt
- Es handelt sich also um einen *stationären* stochastischen Prozess
- Der Zeitmittelwert ist dann gegeben durch

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \,\mathrm{d}t = A \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \,\mathrm{d}t = A$$

- A gerade Höhe des Rechtecks ist und A eine Zufallsvariable $\to$ Zeitmittelwert für jede Realisierung des Zufallsprozesses $S(t)$ verschieden

Zeitmittelwert graphisch

- Skizze:



Schaarmittelwert $E\{x(t_1)\}$ = Zeitmittelwert <x(t)>