В этой лабораторной мы будем воспринимать любую матрицу 2×2 как линейное отображение, преобразующее точки плоскости по закону

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}.$$

Подготовка перед началом выполнения заданий.

- Выберете четыре целых числа a, b, c и d таким образом, чтобы все они были различными и ни одно из них не равнялось 0 или ± 1. Для выбора можно использовать свой табельный номер или любой другой случайный алгоритм.
- Задайте n точек, образующих вершины произвольного многоугольника. Используя MATLAB или Python, постройте его графическое изображение.

Задание 1. Придумайте. Придумайте матрицы 2×2, которые задают:

1. Отражение (симметрию) плоскости относительно прямой $y = ax$.
2. Ортогональное отображение всей плоскости в прямую $y = bx$.
3. Поворот плоскости на $10c$ градусов против часовой стрелки.
4. Центральную симметрию плоскости относительно начала координат.
5. Отображение, которое можно описать так: сначала отражение относительно прямой $y = ax$, потом поворот на $10d$ градусов по часовой стрелке.
6. Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ и прямую $x = 0$ в $y = bx$.
7. Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ в $y = 0$ и прямую $y = bx$ в $x = 0$.
8. Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$.
9. Отображение, образованное недиагональной матрицей, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади c.
10. Отображение, образованное недиагональной матрицей, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в **не**круг площади d.
11. Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой $y = 0$ или $y = x$.
12. Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.
13. Отображение, образованное вещественной матрицей, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора

14. Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.

15. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: $AB \neq BA$. Сделайте визуализацию всех рассматриваемых отображений, а именно: A, B, AB и BA.

16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: $AB = BA$. Постарайтесь, чтобы матрицы A и B были максимально непохожими друг на друга. Сделайте визуализацию, аналогичную предыдущему пункту.

Визуализируйте каждую из найденных матриц. Для этого найдите линейное отображение всех вершин построенного ранее многоугольника матрицей преобразования. После постройте графическое изображение многоугольника на полученных (отображённых) вершинах. Также, добавьте на картинку прямые, совпадающие с направлениями собственных векторов, если это возможно.

Ожидаемые результаты для каждого пункта первого задания:

- Приведен вывод, расчёты и теоретическое обоснование полученных матриц. Попытайтесь найти наиболее общий класс матриц, прежде чем давать частное решение.
- Приведена матрица, которую вы выбрали.
- Выполнена визуализация пункта.

Задание 2. Проанализируйте.

- Найдите образ и ядро придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 13, 14.
- Найдите собственные числа и собственные вектора придуманных вами отображений из пунктов 1, 2, 3, 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16.
- Найдите определитель матриц из пунктов 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10.
- В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной? В каких инволютивной? В каких ортогональной?

Ожидаемые результаты для каждого пункта второго задания:

- Приведены все расчёты и обоснования.

Контрольные вопросы по проделанной работе:

- Какой геометрический смысл определителя? Что обозначает его знак? Почему в некоторых заданиях он получился отрицательным?
- Какие свойства определителя матриц? Какие свойства следа матриц?
- Что такое собственные векторы матрицы? Какой смысл собственных чисел матрицы? Что такое спектральное разложение и как его вывести? В каком случае спектральное разложение существует?
- Что такое вещественная каноническая форма спектрального разложения, которую можно получить с помощью замены комплексных собственных чисел на вещественные матричные блоки?
- Вдоль каких направлений смотрят собственные векторы матрицы первого пункта первого задания и почему?
- Что такое $O(n)$ и $SO(n)$ группы, их геометрический смысл? Почему ортогональные матрицы носят такое название?
- Какие еще виды матриц вам известны? Как находить собственные числа треугольных, блочно-треугольных матриц? Какая особенность собственных векторов симметричной матрицы? Как находить обратную матрицу от ортогональной?
- В записи ABv какая матрица будет применена к вектору v первой?
- Как невырожденные матрицы преобразуют окружности? Какие фигуры можно получить с помощью линейных преобразований окружности?
- Что такое алгебраическая и геометрическая кратность собственных чисел? Что такое nullity и его связь с кратностями? Собственные векторы матриц с кратными собственными числами.
- Что такое обобщенные собственные векторы? Что такое жордановы клетки? Какая у них алгебраическая и геометрическая кратность собственных чисел? Как составляется Жорданово разложение?
- При каких условиях матрицы A и B будут коммутировать между собой по умножению?