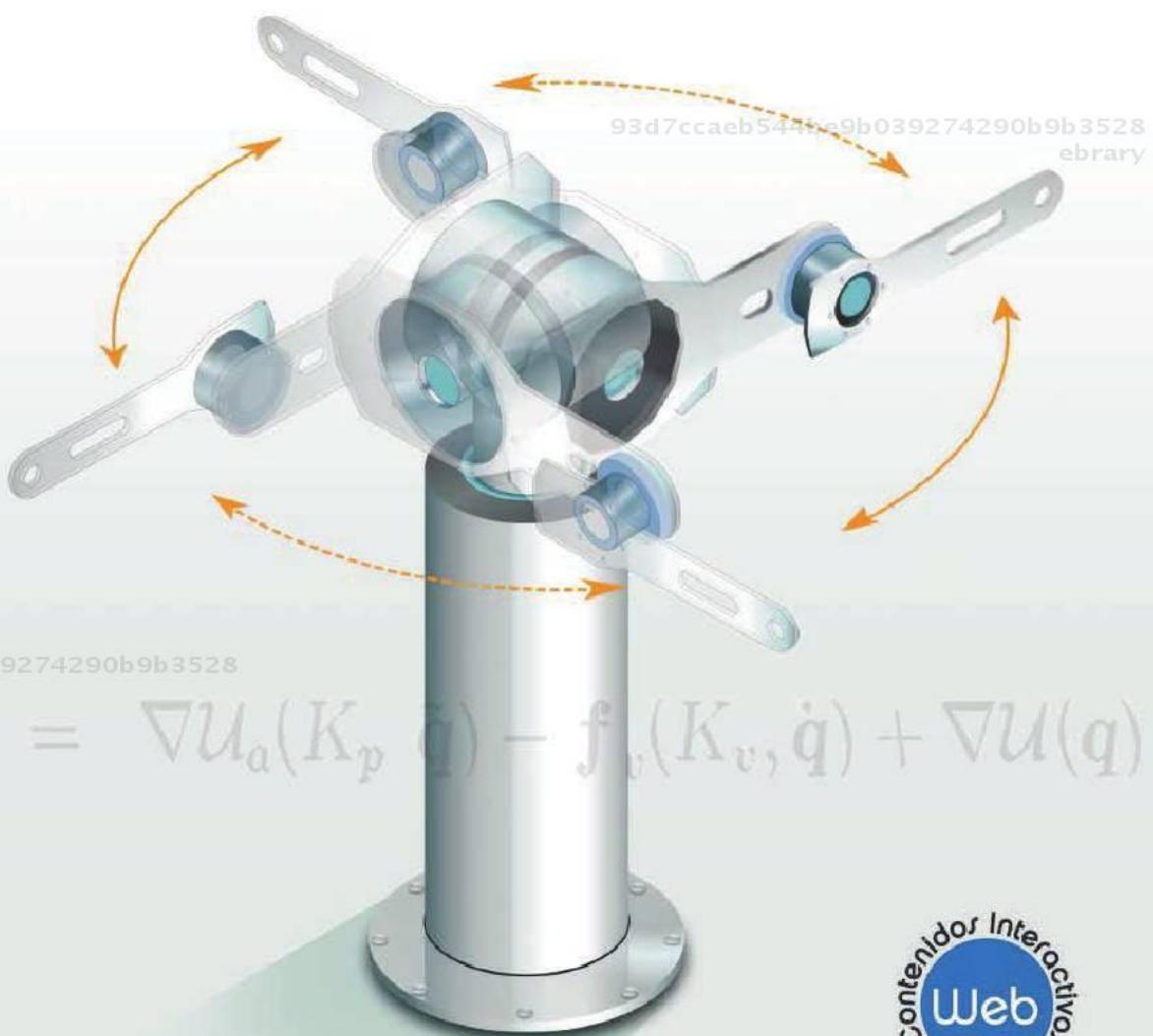


Robótica

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES

FERNANDO REYES CORTÉS



$$\tau = \nabla U_a(K_p, q) - f_v(K_v, \dot{q}) + \nabla U(q)$$



 Alfaomega



93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Robótica

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Reyes Cortés, Fernando. Robótica: control de robots manipuladores.
: Alfaomega Grupo Editor, . p 3
<http://site.ebrary.com/id/10741037?ppg=3>
Copyright © Alfaomega Grupo Editor. . All rights reserved.
May not be reproduced in any form without permission from the publisher,
except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Robótica

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES

FERNANDO REYES CORTÉS

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary



93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Editor

Francisco Javier Rodríguez Cruz
frodriguez@alfaomega.com.mx

Gerente editorial

Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos

Reyes, Fernando
Robótica. Control de robots manipuladores
Primera Edición
Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN: 978-607-707-190-7

Formato: 21 x 24 cm

Páginas: 592

Robótica. Control de robots manipuladores

Fernando Reyes Cortés

Derechos reservados © Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C. V., México.

Primera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, marzo de 2011

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

© 2011 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: <http://www.alfaomega.com.mx>

E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

ISBN: 978-607-707-190-7

Derechos reservados:

Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

Nota importante:

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por el autor y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

Edición autorizada para venta en todo el mundo.

Impreso en México. Printed in Mexico.

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. – C.P. 03100.
Tel.: (52-55) 5575-5022 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396
E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. – Carrera 15 No. 64 A 29, Bogotá, Colombia,
Tel.: (57-1) 2100122 – Fax: (57-1) 6068648 – E-mail: cliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. – Dr. La Sierra 1437, Providencia, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 235-4248 – Fax: (56-2) 235-5786 – E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1057, Buenos Aires,
Argentina, – Tel./Fax: (54-11) 4811-8352, 4811 7183 y 4811 0887 – E-mail: ventas@alfaomegaditor.com.ar

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

Acerca del autor



Dr. José Fernando Reyes Cortés. Es profesor investigador titular C de la Facultad de Ciencias de la Electrónica, Universidad Autónoma de Puebla. En 1984 obtuvo la Licenciatura en Ciencias de la Electrónica en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla. En 1990 obtuvo la Maestría en Ciencias con Especialidad en Electrónica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE). Bajo la asesoría del Dr. Rafael Kelly, en 1997 culminó el Doctorado en Ciencias con Especialidad en Electrónica y Telecomunicaciones en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE). Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores desde 1993 a la fecha. Actualmente es nivel I. Es autor de más de 150 artículos nacionales e internacionales. Ha dirigido 30 proyectos científicos. Ha graduado a más de 100 tesis de los niveles de ingeniería, maestría y doctorado. Ha impartido 50 cursos del área de control y robótica a nivel licenciatura y posgrado. Es fundador del Laboratorio de Robótica y Control de la Facultad de Ciencias de la Electrónica donde ha puesto a punto 30 prototipos de mecatrónica, robótica e instrumentación.

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

Es Premio Estatal de Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería en noviembre 2000 por el Gobierno del Estado de Puebla. Premio al Mérito Civil en Ingeniería y Tecnología por el Ayuntamiento de la Ciudad de Puebla en abril 2010. En actividades administrativas y de gestión académica se ha desenvuelto como Secretario de Investigación y Estudios de Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica desde febrero del 2002 a la fecha. Ha sido fundador y responsable del Cuerpo Académico de Robótica y Control del 2001 a marzo 2010, donde obtuvo el grado de consolidado. Fue responsable de los proyectos de creación, así como su ingreso al Programa Nacional de Posgrados de Calidad de CONACYT de la Maestría de Ciencias de la Electrónica y también del Posgrado en Ingeniería.

A la persona que me dio la vida: Alicia Cortés Castillo, a mi esposa Silvia y mis hijos Luis Fernando y Leonardo.

A mis hermanos Lety, Chela y Jorge.

A mis sobrinos Esmeralda, Adriana, Eduardo, Carlos y Miguel.

Por su ayuda, para Angela Castillo Merchant y Luis Manuel Cortés Castillo.

Por su valioso apoyo a la maestra Vicky.

Mensaje del Editor

Los conocimientos son esenciales en el desempeño profesional, sin ellos es imposible lograr las habilidades para competir laboralmente. La universidad o las instituciones de formación para el trabajo ofrecen la oportunidad de adquirir conocimientos que serán aprovechados más adelante en beneficio propio y de la sociedad. El avance de la ciencia y de la técnica hace necesario actualizar continuamente esos conocimientos. Cuando se toma la decisión de embarcarse en una vida profesional, se adquiere un compromiso de por vida: mantenerse al día en los conocimientos del área u oficio que se ha decidido desempeñar. Alfaomega tiene por misión ofrecerles a estudiantes y profesionales conocimientos actualizados dentro de lineamientos pedagógicos que faciliten su utilización y permitan desarrollar las competencias requeridas por una profesión determinada. Alfaomega espera ser su compañera profesional en este viaje de por vida por el mundo del conocimiento. Alfaomega hace uso de los medios impresos tradicionales en combinación con las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) para facilitar el aprendizaje. Libros como éste tienen su complemento en una página Web en donde el alumno y su profesor encontrarán materiales adicionales, información actualizada, pruebas (test) de autoevaluación, diapositivas y vínculos con otros sitios Web relacionados. Esta obra contiene numerosos gráficos, cuadros, y otros recursos para despertar el interés del estudiante, y facilitarle la comprensión y apropiación del conocimiento. Cada capítulo se desarrolla con argumentos presentados en forma sencilla y estructurada claramente hacia los objetivos y metas propuestas, y concluye con diversas actividades pedagógicas para asegurar la asimilación del conocimiento y su extensión y actualización futuras. Los libros de Alfaomega están diseñados para ser utilizados dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje, y pueden ser usados como textos guía en diversos cursos o como apoyo para reforzar el desarrollo profesional. Alfaomega espera contribuir así a la formación y el desarrollo de profesionales exitosos para beneficio de la sociedad.

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Contenido

Plataforma de contenidos interactivos	XIX
Página Web del libro	XX
Prólogo	XXV
Capítulo 1 Robótica	1
1.1 Introducción	3
 Cirugía robotizada	7
1.2 Tipos de robots	9
1.2.1 Robots móviles	9
 Robots móviles	9
1.2.2 Robots humanoides	10
 Robots humanoides	11
1.2.3 Robots industriales	12
 Componentes de un robot	16
1.3 Control de robots manipuladores	17
1.4 Tecnología de robots	19
 Sistema de engranes	20
 Servomotores de transmisión directa	21

1.5 Estadísticas de robótica	23
1.6 Historia de la robótica	26
 Contribuciones de Leonardo	28
1.7 Sociedades científicas de robótica	33
1.8 Resumen	37
1.9 Referencias selectas	38
1.10 Problemas propuestos	42

Capítulo 2	
Servomotores y sensores	45

2.1 Introducción	47
2.2 Servomotores	49
2.2.1 Principios básicos de motores eléctricos	53
 Sistemas de engranaje	56
2.2.2 Servomotores de transmisión directa	58
 Tecnología de transmisión directa	58
 Programación de robots manipuladores	62
2.3 Sensores	69
2.3.1 Resolvers	70
2.3.2 Potenciómetros	71
2.3.3 Tacómetro	72
2.4 Encoders	73
2.4.1 Encoder incremental	77
2.4.2 Encoder Absoluto	80

2.4.3 Encoder magnético	83
2.4.4 Aspectos importantes de los encoders	85
2.4.5 Construcción de un encoder incremental	87
 Encoder incremental	88
2.4.6 Glosario para encoders	89
2.5 Resumen	90
2.6 Referencias selectas	92
2.7 Problemas propuestos	94

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Capítulo 3	
Preliminares matemáticos	97

3.1 Introducción	99
3.2 Vectores	100
3.2.1 Operaciones entre vectores	102
3.2.2 Norma euclíadiana	105
3.3 Matrices	106
3.3.1 Matrices especiales	108
3.3.2 Operaciones de matrices	109
 Operaciones con matrices	109
 Producto de matrices	112
3.3.3 Norma espectral	126
3.4 Funciones definidas positivas	128
3.4.1 Derivadas parciales de funciones de energía	137
3.5 Sistemas dinámicos	144

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

3.5.1 Puntos de equilibrio	148
3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov	150
3.6.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	152
3.6.2 Función candidata de Lyapunov	157
3.6.3 Método directo de Lyapunov	158
 Simulación de sistemas dinámicos	166
 Sistema dinámico no lineal	174
 Péndulo	182
3.6.4 Principio de invariancia de Lasalle	183
3.7 Norma \mathcal{L}	186
3.7.1 Relación entre \mathcal{L} y estabilidad de Lyapunov	189
3.8 Resumen	192
3.9 Referencias selectas	194
3.10 Problemas propuestos	197

Capítulo 4
Cinemática de robots manipuladores

201

4.1 Introducción	203
4.2 Morfología del robot	203
4.3 Transformaciones homogéneas	208
 Transformaciones homogéneas	209
4.4 Cinemática	210
4.4.1 Convención Denavit-Hartenberg	212
4.4.2 Selección de sistemas de referencia	214

4.4.3 Algoritmo Denavit-Hartenberg	217
4.4.4 Cinemática diferencial	218
4.5 Tipos de robots industriales	221
4.5.1 Robot antropomórfico (RRR)	231
4.5.2 Configuración SCARA (RRP)	236
4.5.3 Configuración esférica (RRP)	238
4.5.4 Configuración cilíndrica (RPP)	241
4.5.5 Configuración cartesiana (RRR)	243
4.6 Resumen	245
4.7 Referencias selectas	246
4.8 Problemas propuestos	248

Capítulo 5
Dinámica de robots manipuladores

251

5.1 Introducción	253
5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange	255
5.3 Modelo dinámico	257
5.3.1 Propiedades del modelo dinámico	259
5.3.2 Efecto inercial	259
5.3.3 Fuerzas centrípetas y de Coriolis	261
5.3.4 Par gravitacional	262
5.3.5 Fenómeno de fricción	263
5.3.6 Linealidad en los parámetros	264
5.3.7 Modelo de energía	266
5.3.8 Modelo de potencia	267

5.3.9 Ejemplos de modelado dinámico	267
 Péndulo robot	275
 Robot de 2 gdl	286
5.4 Modelo dinámico cartesiano	287
5.4.1 Propiedades del modelo dinámico cartesiano	290
5.5 Identificación paramétrica	291
5.5.1 Mínimos cuadrados	293
5.5.2 Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados	295
 Mínimos cuadrados	301
5.5.3 Modelo de regresión dinámico filtrado	302
5.5.4 Regresión lineal del modelo de energía	304
5.5.5 Modelo de regresión de la potencia filtrada	307
5.6 Robot experimental de 3 gdl	315
5.7 Resumen	322
5.8 Referencias selectas	323
5.9 Problemas propuestos	327

Capítulo 6
Control de posición de robots manipuladores **331**

6.1 Introducción	333
6.2 Regulación	334
6.2.1 Control PD	336
6.2.2 Análisis cualitativo del control PD	342
 Control PD péndulo	343

 Videos del péndulo	346
 Simulador péndulo	352
 Robot 2 gdl PD	355
 Videos experimentales. Control PD de un péndulo	356
6.2.3 Control proporcional integral derivativo	357
 PID	358
6.3 Moldeo de energía	359
6.3.1 Control con acciones no acotadas	365
6.3.2 Control con acciones acotadas	376
6.3.3 Ejemplos de algoritmos de control de posición	390
6.4 Índice de desempeño	394
6.5 Aplicaciones de control de posición	404
6.5.1 Control cartesiano	404
6.5.2 Visual servoing	411
 Visual servoing	411
6.5.3 Control punto a punto	413
6.5.4 Programación de instrucciones robot	415
 Inteligencia artificial	415
6.5.5 Robótica industrial	419
 Programación FANUC	421
6.6 Resumen	423
6.7 Referencias selectas	424
6.8 Problemas propuestos	431

Capítulo 7**Control de trayectoria de robots manipuladores****437**

7.1 Introducción 439

7.2 Control PD + 443

7.2.1 Análisis de estabilidad asintótica PD+ 446

7.3. Moldeo de energía PD+ 451

7.3.1 Ejemplos de control de trayectoria tipo PD+ 456

7.4 Control par calculado 459

7.4.1 Moldeo de energía par calculado 460

7.5 Aspectos prácticos 464

Web Esquemas de control de trayectoria 464

Web Videos de robots manipuladores 465

7.6 Resumen 465

7.7 Referencias selectas 466

7.8 Problemas propuestos 469

Capítulo 8**Control de fuerza/impedancia****471**

8.1 Introducción 473

8.2 Sensores de fuerza/par 475

8.2.1 Transductor Nano17 476

8.2.2 Transductor Gamma 477

8.2.3 Transductor Omega250	477
8.3 Sistemas hápticos	479
8.4 Modelado del entorno	481
8.5 Control de fuerza	481
8.5.1 Control de fuerza con lazo interno de posición	482
8.5.2 Control de fuerza: lazo interno de velocidad	483
Web Sistema robótico controlado por fuerza	484
8.6 Control híbrido de fuerza/posición	485
Web Robot manipulador SCARA	487
8.7 Control de impedancia	488
8.7.1 Control de impedancia con base en par	490
Web Robot cartesiano de 1 gdl	491
8.7.2 Control de impedancia con base en posición	491
8.7.3 Enfoque alternativo al control de impedancia	493
Web Robot manipulador de 2 gdl	495
8.8 Aplicaciones	498
8.9 Resumen	503
8.10 Referencias selectas	504
8.11 Problemas propuestos	507

Capítulo 9	
Robótica móvil	509

9.1 Introducción	511
9.2 Robots móviles	513

9.2.1 Descripción de un robot móvil con ruedas	513
9.2.2 Tipos de ruedas	515
9.3 Configuración de robots móviles	520
9.3.1 Configuración Ackerman	520
9.3.2 Configuración triciclo clásico	521
9.3.3 Direccionamiento diferencial	521
9.3.4 Configuración síncrona	522
9.3.5 Movilidad y direcciónabilidad	523
9.4 Cinemática de robots móviles	526
9.5 Dinámica de robots móviles	529
9.6 Control de robots móviles	530
 Robot móvil tipo uniciclo	533
9.6.1 Control por retroalimentación no lineal	536
 Robot móvil tipo (2,0)	539
9.7 Resumen	541
9.8 Referencias selectas	542
9.9 Problemas propuestos	544

Índice analítico**547**

Plataforma de contenidos interactivos

Para tener acceso al material de la plataforma de contenidos interactivos de **Robótica. Control de robots manipuladores**, siga los siguientes pasos:

-  1) Ir a la página
<http://virtual.alfaomega.com.mx>
-  2) Registrarse como usuario del sitio.
-  3) Ingresar al apartado de inscripción de libros, o bien identificar este libro en el catálogo, y registrar la siguiente clave de acceso.

-  4) Para navegar en la plataforma ingrese los nombres de *Usuario* y *Contraseña* definidos en el punto dos.

Página Web del libro

En la página Web del libro se cuenta con los siguientes recursos:



Videos experimentales

Videos experimentales con prototipos científicos se encuentran disponibles en el sitio Web del libro para mostrar aspectos cualitativos de diversos algoritmos de control y desempeño.



- 1) Videos de prototipos desarrollados en el laboratorio del autor, y que en general son la implementación de la teoría de los robots manipuladores.
- 2) Videos que muestran la aplicación de los robots manipuladores en la medicina y en la industria.



Simuladores

Como un paso previo a la etapa experimental, se encuentra el estudio y análisis de esquemas de control a través de simuladores de robots manipuladores. En el sitio Web se encuentran disponibles simuladores del péndulo robot y de un robot planar de 2 grados de libertad.



Código fuente

Se incluyen más de 30 programas escritos para MatLab versión 10 relacionados con sistemas dinámicos lineales y no lineales, robots manipuladores, algoritmos de control, trazo de curvas o trayectorias, etc.



Lecturas complementarias

1) Adicional a los 9 temas que integran la obra, también se incluyen en el sitio Web del libro tres temas relacionados con el control de robots manipuladores:



Visual servoing.



Robótica industrial



Inteligencia artificial

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

2) Se presentan artículos publicados en revistas especializadas en los que se expone temas de matrices homogéneas, control de cinemática, dinámica, identificación paramétrica y control de robots manipuladores.



Respuesta y desarrollo de problemas seleccionados

Para el estudiante se encuentra en la página Web la solución completa de una selección de ejercicios planteados en los capítulos del libro. En la solución de dichos ejercicios se detallada los pasos teóricos y su implicaciones prácticas.



Recursos para el profesor

- 1) Solución completa de todos los problemas propuestos en el libro.
- 2) Apoyo de material didáctico a través de diapositivas de cada capítulo para exposición en clase.

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary



Simbología e iconografía utilizada



Notas al margen

Las notas al margen son representadas por una caja o recuadro con una tachuela pegada en su esquina superior izquierda

Notas al margen proporcionan información básica teórica o práctica sobre algún concepto o definición que se esté tratando en la exposición central del libro.

Con el fin de que el lector identifique fácilmente los recursos didácticos que se presentan en el libro sobre conceptos, teoremas, corolarios, código fuente, llamadas a Web, etc., a lo largo de la exposición se utiliza la siguiente simbología:

Notas al margen se encuentran representadas por cajas que pueden aparecer en el margen izquierdo o derecho de una sección. Proporcionan información adicional o complementaria a los diversos conceptos que se encuentran en exposición.

A lo largo de la presente obra es común encontrar el ícono el cual tiene la intención de llamar la atención del lector para remarcar alguna idea o concepto.



Theorema 1.1 moldeo de energía

El teorema se encuentra asociado con su nombre descriptivo, un ícono distintivo, y un número de referencia que será utilizado en otras secciones o capítulos posteriores.



Corolario 1.1 Funciones de energía

Los corolarios al igual que los teoremas tienen asociados su nombre descriptivo, un ícono que los identifica, y un número de referencia que puede ser empleado para futuras citas.

Propiedades matemáticas del modelo dinámico o de algoritmos de control se encuentran identificadas como

Propiedad 1.1 describe en que consiste dicha propiedad.

Ejemplos

Los ejemplos ilustrativos que se encuentran resueltos en la obra están clasificados con respecto a su grado de complejidad en tres formas posibles: simple o básico, regular y complejo.

Los ejemplos simples se encuentran identificados por un símbolo , complejidad regular por  y complejo por .

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary **Ejemplo 1.1**

Este ejemplo ilustrativo indica que su nivel de complejidad es simple o básico. Adicional al símbolo , también incluyen un número de referencia que lo identifica al capítulo donde fue definido. El enunciado de los ejemplos se encuentra en un recuadro con fondo gris; también se indica el recuadro de solución y la terminación del ejemplo por 3 cuadros posicionados a la derecha del margen.

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

Se plantea la solución del ejemplo y se finaliza el desarrollo del mismo con una serie de 3 cuadros pequeños posicionados a la derecha de la página, los cuales definen la separación con los siguientes párrafos.

**Programas**

Todos los programas de este libro han sido implementados en lenguaje MatLab versión 10. Se encuentran identificados por un recuadro con el icono , número de referencia, cabecera con información del capítulo al que pertenecen, nombre del sistema a simular, nombre del archivo

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

ALFAOMEGA

MatLab y el código fuente.



Llamadas a Web

En el sitio Web del libro se encuentran programas en código fuente MatLab versión 10, simuladores, videos experimentales con robots manipuladores y sistemas mecatrónicos, documentos técnicos y científicos, ejemplos ilustrativos e información complementaria.

Es necesario resaltar que la información contenida en el sitio Web no es estática, es decir se estará actualizando y mejorando con la finalidad de brindar al lector la mejor calidad de servicio en apoyo didáctico a la investigación, docencia y desarrollo tecnológico.



Código Fuente 1.1 Nombre de sistema a simular

```
%capítulo#_nombre.m    Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo # nombre del capítulo
```

Nombre de sistema a simular

- 1 %
- 2 Se inserta el código fuente para MatLab
- 3 comentarios
- 4 instrucciones, etc.
- 5 %

Referencias bibliográficas

Los símbolos empleados en las referencias son la siguientes:



Se emplea para identificar un libro o proceedings.



Utilizado para identificar una revista científica ya sea Journal o Transactions.



Indica una dirección electrónica.

Prólogo

Hoy en día, el avance de la tecnología se encuentra en constante crecimiento. El desarrollo tecnológico es un aspecto estratégico para todo país en vías de crecimiento. La trascendencia del desarrollo científico no se limita a sus consecuencias económicas, también contribuye a elevar la vida política y social, aumenta la reflexión y conocimiento de la sociedad sobre sí misma, y por tanto la capacidad del país para dirigir su propio destino. Asimismo, favorece las posibilidades para que la población obtenga beneficios colectivos de gran importancia, entre ellos, mejorar la salud y calidad de vida.

En base a la experiencia de países avanzados, el desarrollo científico y tecnológico influye de manera significativa en la vida de sus habitantes, reflejándose en la capacidad para crecer y absorber tecnologías más productivas. Aun más, el poderío de una nación depende de su capacidad para innovar tecnología de manera permanente, de tal forma que, con el avance de la generación y aplicación de los conocimientos se incrementa la calidad y los procesos de producción se vuelven más complejos y especializados. Ambos aspectos aumentan la demanda de mano de obra calificada, misma que exige una remuneración más alta y se abren más oportunidades para ascender a mejores puestos de trabajo en todo el aparato productivo. Lo anterior repercute positivamente en la economía, puesto que genera ahorro interno.

La Robótica como parte de la automatización y de la mecatrónica genera tecnología, siendo una área estratégica para el país, ya que su impacto no sólo repercute en aspecto políticos y económicos, también forma parte importante de la vida cotidiana, educación, cultura, y en la sociedad. El progreso de la ciencia y tecnología han transformado el concepto de robot, lo que era un androide de ciencia ficción, ha pasado a ser un sofisticado instrumento de ingeniería. A partir de los años de 1960 se han colocado

robots industriales con mucho éxito en las cadenas de producción de la industria, por ende, hoy en día, la palabra **robot** es sinónimo de automatización, ya que es capaz de **ofrecer** un amplio espectro de aplicaciones en el mundo real y al mismo tiempo abre nuevas fronteras para el desarrollo de la industria y bienestar de la sociedad. Entre las ventajas que ofrecen los robots se encuentran: reducción de costos, incremento de la productividad, mejora la calidad del producto, reducir problemas de operación en ambientes hostiles y peligrosos al hombre tales como radiactivos, nucleares, militares, etc.

Es importante resaltar que la comunidad científica de robótica en México desde hace algunos años ha experimentado un crecimiento importante en cuanto al número de instituciones e investigadores que la componen, así mismo ha de subrayarse el incremento en calidad y cantidad de graduados y publicaciones en el área. Sin embargo, México aún cuenta con una infraestructura pobre en materia de laboratorios de robótica para propósitos de investigación científica y experimentación, por lo que dificulta el desarrollo propio de dicha área en el país. En contraste, los países desarrollados destinan inversiones considerables en investigación y desarrollo de robots, técnicas de adaptación y aprendizaje, modelado de robots, control de movimiento, planificación y coordinación e inteligencia artificial.

El objetivo primordial de la presente obra es presentar los fundamentos del control de robots manipuladores y sus aplicaciones. Se pretende hacer énfasis al lector de la necesidad de aprender *lo necesario* de matemáticas y física para adquirir el rigor científico que se requiere en el análisis y diseño de robots manipuladores y sus algoritmos o estrategias de control.

El contenido de este libro está dirigido a estudiantes del área de ingeniería con el entusiasmo necesario para incursionar en el área de control del robots. Particularmente, el temario es *ad doc* para las ingenierías en electrónica, sistemas, computación, industrial y mecatrónica. Sin embargo, también puede ser tomado como texto en cursos de robótica o

mecatrónica a nivel posgrado.

La obra sirve para el trabajo autodidacta, es decir se pretende que con el material del presente libro el lector pueda aprender por sí mismo el tópico de control de robots manipuladores ya que está escrito para alumnos, más que para profesores; hasta donde es posible, cada concepto que aparece por primera vez se define claramente y se explica cuidadosamente con detalle. Para introducir y sugerir resultados se incluyen ejemplos de simulación auxiliados por computadora con código fuente en MatLab versión 10 y se proporciona una serie de ejercicios para complementar y facilitar los conocimientos adquiridos. Gran parte del material de esta obra está basado en la experiencia científica y profesional que ha tenido el autor.

La organización de este libro consta de cuatro partes: fundamentos de la robótica, modelado, control de robots manipuladores y tópicos selectos de robótica. La primera parte describe un panorama general de la robótica, desarrollo tecnológico y las bases matemáticas requeridas para analizar y diseñar estrategias de control de robots manipuladores. Esta primer fase está integrada por tres capítulos de la siguiente forma: introducción a la robótica, servomotores y sensores, y preliminares matemáticos. La segunda parte se compone de dos capítulos destinados al modelado de robots manipuladores: cinemática y dinámica de robots manipuladores. La tercera fase cubre el tema de control de robots manipuladores para regulación y control de trayectorias. Finalmente, la cuarta parte contiene dos temas: tópicos selectos de la robótica tales como control de fuerza/impedancia y robótica móvil. Al final de cada capítulo se presenta bibliografía selecta y un conjunto de problemas propuestos para mejorar la habilidad y grado de conocimiento en los temas abordados. Adicionalmente se incluyen en el sitio Web del libro temas relacionados con robots manipuladores como visual servoing, robótica industrial e inteligencia artificial.

El Capítulo 1 Robótica presenta una introducción a esta área, mostrando los antecedentes históricos más relevantes de la robótica hasta nuestros

días, resalta la importancia actual como área clave y estratégica de todo país en desarrollo. Asimismo, se presentan sus principales aplicaciones en el sector social, científico e industrial. Un concentrado de páginas Web y ligas electrónicas de las principales sociedades científicas de robótica y de la automatización: journals, transactions, y congresos.

Capítulo 2 Servomotores y sensores se presentan los principales servomotores para diseño y construcción de robots manipuladores con sistemas de engranaje y transmisión directa (direct-drive). Sensores internos de posición de los robots son presentados: encoders, resolvers y métodos sencillos convencionales para obtener la velocidad.

La primera parte del libro finaliza con el **Capítulo 3 Preliminares matemáticos**. Contiene el tratamiento matemático necesario para entender la dinámica y control de robots manipuladores. La robótica es una área científica multidisciplinaria que requiere de la madurez y solvencia del lenguaje elegante y universal de las matemáticas. Este capítulo está destinado a presentar las herramientas matemáticas necesarias para analizar y diseñar esquemas de control para robots manipuladores. Matemáticas básicas desde operaciones mixtas entre vectores y matrices, gradientes, jacobianos, sistemas dinámicos lineales y no lineales, teoría de estabilidad de Lyapunov, estabilidad \mathcal{L} , ejemplos, simulaciones y ejercicios complementarios.

La segunda parte del libro se compone de dos capítulos. Uno de ellos denominado **Capítulo 4 Cinemática de robots manipuladores** contiene la clasificación general de los robots manipuladores, representación de la posición y orientación del efecto final del robot a través de matrices homogéneas. La metodología Denavit-Hartenberg es descrita para obtener la cinemática directa. También se aborda la cinemática inversa y diferencial de todas las configuraciones de robots industriales.

El **Capítulo 5** llamado **Dinámica de robots manipuladores** describe la dinámica de cuerpo rígido para robots manipuladores a través de

las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange: se explican todos los fenómenos que se encuentran presentes en el robot manipulador: efecto inercial, fuerzas centrípetas y de Coriolis, par gravitacional y fricción. Se describe el modelo dinámico del robot manipulador en coordenadas articulares y coordenadas cartesianas, propiedades matemáticas, esquemas de identificación paramétrica usando mínimos cuadrados, simulaciones, ejemplos y ejercicios sugeridos.

La tercera parte de la obra se destina al control de robots manipuladores. Regulación o control de posición es presentado a través de una de las técnicas modernas y más novedosas de control automático, moldeo de energía es la base del **Capítulo 6 Control de posición de robot manipuladores**. Moldeo de energía representa una técnica moderna para análisis y diseño de algoritmos de control de robots manipuladores consiste en generar la estructura del algoritmo de control como el gradiente de la energía potencial artificial más un término disipativo como es la inyección de amortiguamiento a través de la velocidad articular. Se presentan un número importante de nuevos esquemas de control cuyo desempeño superan al regulador tradicional PD. Se explica con detalle el funcionamiento cualitativo de los algoritmos de control a través de simuladores y experimentos con robots manipuladores.

ebrary La técnica de moldeo de energía se generaliza para el caso de control de trayectoria y amplía el horizonte de los algoritmos tradicionales PD+ y Par Calculado hacia una familia muy extensa de esquemas de control abordados en el **Capítulo 7 Control de trayectoria de robots manipuladores**.

Tópicos especiales de robótica se presenta en la última parte de esta obra compuesto por dos capítulos. Uno de ellos el **Capítulo 8 Control de fuerza/impedancia** es un caso particular de control cartesiano. Un enfoque de diseño de control de impedancia es presentado y sus aplicaciones a fisioterapia y rehabilitación, y finalmente **Capítulo 9 Robótica Móvil** incluye modelado cinemático, configuraciones de llantas, modelo dinámi-

co de robots móviles con restricciones holonómicas, diseño de esquemas de control, simulaciones y diseño.

Adicionalmente en el sitio Web del libro se incluyen temas complementarios de la robótica como: **visual servoing** el cual es un enfoque de control cartesiano donde se emplea la información proporcionada por una cámara de video del tipo CCD para incorporarla en el lazo de control. La estructura del esquema de control se basa en el jacobiano transpuesto. Diversas configuraciones entre el robot y cámaras de video. Se presenta el modelo del sistema de visión. Las configuración cámara fija y cámara en mano son analizadas. **Robótica industrial** describe la arquitectura y programación de robots industriales. Uso y empleo del teach pendant, grabado de puntos y datos, ejecución de trayectorias, manejo de puertos, aplicaciones, etc. Otro tema que es presentado en el sitio Web es **inteligencia artificial** el cual describe algunos algoritmos de control implementados con redes neuronales con aplicaciones en robótica.

En el portal del libro se encuentra disponible código fuente para MatLab versión 10 para el modelo dinámico de diversos sistemas mecatrónicos y robóticos, así como una variedad de estructuras de control. El código fuente pretende ser un **tool box** de robótica para MatLab con la finalidad de reforzar los conocimientos de los diferentes ejemplos que se analizan matemáticamente en el libro. La simulación es una herramienta imprescindible para reproducir los fenómenos físicos de un robot y por lo tanto estudiar a detalle los aspectos prácticos que intervienen en la tarea específica que debe realizar un robot industrial.

La preparación del manuscrito representó problemas multidisciplinarios, desde manejo de programas CAD, programación en MatLab, lenguaje C, experimentación y simulación con robots manipuladores. La compilación final de la presente obra fue realizada en lenguaje LaTex, usando el paquete PcTex versión 6, donde se realizaron más de 650 librerías LaTex para la simbología gráfica, formato y estilo del libro.

El autor desea agradecer a múltiples colegas y estudiantes que han brindado su tiempo para enriquecer el manuscrito. Principalmente al Dr. Jaime Cid, M. C. Fernando Porras, Dra. Aurora Vargas, Dr. Sergio Vergara, Dra. Amparo Palomino, M. C. Pablo Sánchez, Dra. Luz del Carmen Gómez y Dra. Olga Félix. Este esfuerzo no hubiera sido posible sin el apoyo de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Por último y de manera muy especial quiero expresar mi profundo reconocimiento al Dr. Rafael Kelly quien me brindó no sólo su amistad, sino que también contribuyó notablemente en mi formación profesional y científica durante mi estancia en el CICESE de 1994 a 1997.

Fernando Reyes Cortés

Puebla, Pue., marzo del 2011

Facultad de Ciencias de la Electrónica



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Reyes Cortés, Fernando. Robótica: control de robots manipuladores.
: Alfaomega Grupo Editor, . p 33
<http://site.ebrary.com/id/10741037?ppg=33>
Copyright © Alfaomega Grupo Editor. . All rights reserved.
May not be reproduced in any form without permission from the publisher,
except fair uses permitted under U.S. or applicable copyright law.

1

Robótica

La naturaleza nunca quebranta sus propias leyes.

Leonardo da Vinci



CAPÍTULO

- 1.1 Introducción**
- 1.2 Tipos de robots**
- 1.3 Control de robots manipuladores**
- 1.4 Tecnología de robots**
- 1.5 Estadísticas de robótica**
- 1.6 Historia de la robótica**
- 1.7 Sociedades científicas de robótica**
- 1.8 Resumen**
- 1.9 Referencias selectas**
- 1.10 Problemas propuestos**

93d7ccaebe9b039274290b9b3528
ebrary

Objetivos

Presentar la importancia e impacto de la robótica como área científica y tecnológica, indispensable para el crecimiento y madurez de toda sociedad dinámica.

Objetivos particulares:



Destacar la relevancia de la robótica como área clave y estratégica.



Destacar el impacto de los conocimientos y tecnología en beneficio de la sociedad.



Describir el desarrollo histórico evolutivo y tendencia de la robótica.



Señalar las sociedades científicas y tecnológicas relevantes de la robótica.

Competencias

Adquirir las habilidades en el manejo de:



Tecnología de robots.



Historia de la robótica.



Componentes que forman a un robot.



Conocimiento sobre las principales sociedades científicas.

1.1 Introducción

Durante los últimos cincuenta años, la robótica no sólo ha incursionado en la industria, centros de investigación, universidades y hospitales, actualmente existen fábricas completamente automatizada mediante robots manipuladores. Hoy en día, la robótica es tan familiar que se pueden encontrar robots en el hogar realizando tareas domésticas. No obstante, se considera como un área joven en constante crecimiento.

La robótica es una disciplina científica que aborda la investigación y desarrollo de una clase particular de sistemas mecánicos, denominados ***robots manipuladores***, diseñados para realizar una amplia variedad de aplicaciones industriales, científicas, domésticas y comerciales.

La naturaleza multidisciplinaria de la robótica permite involucrar una gran cantidad de áreas del conocimiento tales como matemáticas, física, electrónica, computación, visión e inteligencia artificial, entre otras, como se muestra en la figura 1.1. Por otro lado, aun cuando la robótica es un área eminentemente experimental todos sus resultados están sustentados con un estricto rigor científico.

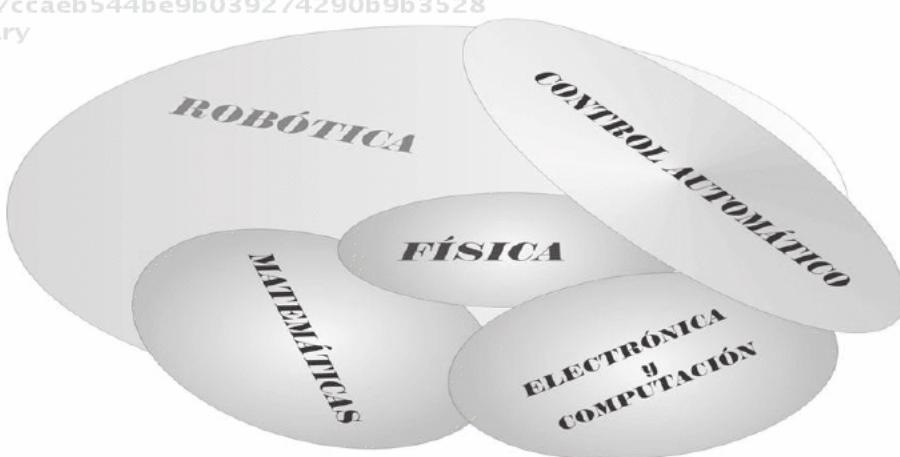


Figura 1.1 Robótica, área multidisciplinaria.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



Mecatrónica

La robótica estudia y analiza una clase particular de sistemas mecánicos llamados robots manipuladores, y la multifuncionalidad es la característica básica que distingue a un robot manipulador de un sistema mecatrónico. Generalmente, los sistemas mecatrónicos realizan sólo una función como en los casos de lavadoras electrónicas, despachadoras de café, aspiradoras, cortadoras de papel, etc. Es decir, la estructura mecánica de un sistema mecatrónico no está diseñada para realizar multifunciones. En contraste, en el caso de un robot manipulador su estructura mecánica le permite realizar una amplia variedad de aplicaciones, cambiando únicamente la herramienta que depende de la aplicación y por supuesto llevando a cabo la reprogramación correspondiente. Mecatrónica es un concepto de la industria japonesa de 1969, y proviene de dos palabras del idioma inglés: *mecha*, que se refiere a un sistema mecánico, y *tronics* que denota la parte electrónica, es decir, la mecatrónica integra la mecánica con la electrónica para realizar una tarea específica. En este contexto un robot manipulador es parte de la mecatrónica. Sin embargo, un sistema mecatrónico no necesariamente pertenece a la clase particular de sistemas mecánicos denominados robots manipuladores.

En general la **mecatrónica** es la integración de los sistemas mecánicos con la electrónica, por tanto el tipo de sistemas mecánicos que estudia y analiza la mecatrónica es mucho más general, de hecho son sistemas que realizan una determinada función mientras que los robots se caracterizan por ser sistemas mecánicos multifuncionales.

Karel Čapek (1890-1938)



Nació el 9 de enero de 1890 en Bohemia (Svatoňovice) perteneciente al imperio austrohúngaro. En el siglo XX fue considerado el escritor más grande en la lengua checa. En realidad a Karel Čapek no se le ocurrió el término robot para representar a los personajes androides de su novela, R.U.R. *Rossum's Universal Robots*, la cual tuvo mucho éxito al presentarse en 1920 en la ciudad de Praga. La idea original de la palabra **robot** fue de su hermano Josef, quien no ha recibido los créditos correspondientes. Después de Praga, la novela se introdujo en varias ciudades, entre ellas Londres y Nueva York, y se tradujo a varias lenguas. Muere el 25 de diciembre de 1938 en la ciudad de Praga, Checoslovaquia.

El término **robot** proviene de la palabra checa “*robota*” y significa *trabajo*; fue introducido en nuestro vocabulario por el dramaturgo Karel Čapek en 1921 en su novela satírica *Rossum's Universal Robots*, donde describe al robot como una máquina que sustituye a los seres humanos para ejecutar tareas sin descanso; a pesar de esto, los robots se vuelven contra sus creadores aniquilando a toda la raza humana. Desde aquel entonces, prácticamente a cualquier sistema mecánico con movimiento se le llama robot.

Existen varias definiciones para describir a un robot, entre ellas la que proporciona una mejor descripción es la adoptada por el **Robot Institute of America (RIA)** la cual establece:

Un robot es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados para la ejecución de una variedad de tareas.

Esta definición que data desde 1980, refleja el estado actual de la tecnología en robótica.

Desde el punto de vista científico, los robots manipuladores como objetos de estudio ofrecen un amplio espectro en la formulación de problemas teórico prácticos debido a la naturaleza no lineal y multivariable de su comportamiento dinámico. Los robots han tenido gran aceptación en la industria, al grado de que se han convertido en elemento clave del proceso de automatización industrial, debido a los beneficios que han traído consigo, tales como reducción de costos, incremento de la productividad,

mejoramiento de la calidad del producto y reducción de problemas en ambientes peligrosos al ser humano como, por ejemplo, ambientes radioactivos. Una de las características principales de la robótica es que como área tecnológica tiene flexibilidad para automatizar y adaptarse a ambientes laborales y su tendencia siempre estará vigente.

Entre las principales áreas que se cultivan en robótica se encuentran: control de movimiento, diseño de ambientes de programación, inteligencia artificial, sensores, visión, planificación y coordinación, entre otras. Los robots manipuladores representan nuevas fronteras para el desarrollo y bienestar de la sociedad, son piezas claves de la modernización tecnológica y han representado un factor clave de la economía mundial. Dentro de las aplicaciones en el mundo real se encuentran: teleoperación, medicina, juegos, agricultura, operaciones espaciales, manufactura, entre otras.

La robótica se ha convertido en un área clave y estratégica para todo país en desarrollo, es sinónimo de la modernización y coadyuva a proporcionar bienestar a la sociedad. Los robots pueden realizar aplicaciones de alto impacto en la sociedad, por ejemplo fisioterapia asistida por robótica donde el paciente recobra la movilidad de sus extremidades con mayor facilidad, eficiencia y menor tiempo. Particularmente, para un cierto sector de nuestra sociedad, específicamente personas con capacidades diferenciadas, los robots pueden mejorar la calidad de vida. Tal es el caso de aquellas personas que no pueden valerse por sí mismas, para éstas un robot significa un asistente impredecible que puede ayudar en sus actividades cotidianas como se muestra en la figura 1.2.

El uso de la robótica en medicina juega un papel destacado, ya que se convierte en una eficiente herramienta que permite incrementar la seguridad y exactitud en la ejecución de cirugías de alto riesgo.

Por ejemplo, utilizando la técnica de terapia asistida por computadora (CAT), la robótica permite incrementar la destreza y exactitud de cortes quirúrgicos, así como aprovechar la experiencia y conocimiento de ciru-



Figura 1.2 Rehabilitación asistida por robots manipuladores.
93d7ccae544be9b039274290b9b3528
ebrary

janos que por razones de edad o de enfermedad han perdido la habilidad y destreza que se requiere en dichas operaciones quirúrgicas (véase la figura 1.3).

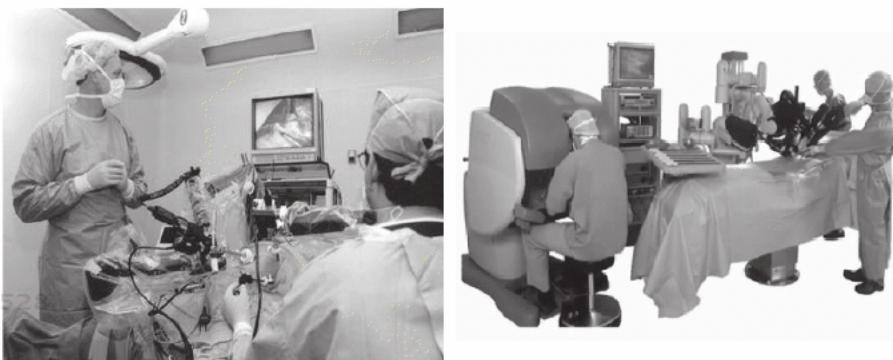


Figura 1.3 Quirófano robotizado: robot da Vinci.

Desde hace varios años se han estado empleando robots manipuladores en cirugías de alto riesgo, por ejemplo cirugías de los ojos, a corazón abierto, o en situaciones mucho más complejas como retirar agua del cerebro (hidrocefalia, ver figura 1.4). La automatización de quirófanos a través de robots garantiza mayores posibilidades de éxito en las cirugías complicadas, evitando errores humanos por cansancio o fatiga, brindando al especialista un instrumental de alta precisión y esperanza de vida a los pacientes.

Un robot ha operado en París a seis pacientes a corazón abierto

La nueva técnica supone una revolución médica por su precisión y posibilidades

PARIS. Un equipo de cardiólogos franceses ha operado a distancia a seis pacientes a corazón abierto manejando a través de una consola de ordenador los movimientos de

dos de los seis pacientes —afectados por enfermedades muy graves— que necesitan cirugías cardíacas o víctimas de malformaciones cardíacas que no permiten su acceso a sus hogares enseguida, prueba del menor efecto traumático de la cirugía—y las posibles incisiones del robot.

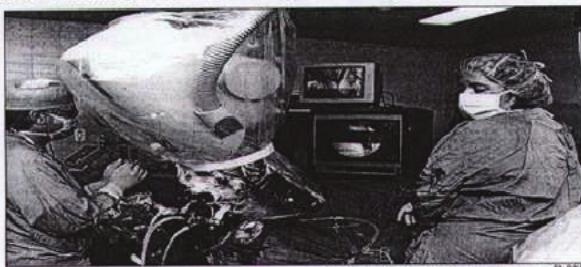
La técnica que el ingeniero Jean-Pierre Rofé y el doctor Frédéric Mott han ideado para la empresa norteamericana Instrument Surgical System (ISS), fabricante pionera de la máquina robótica, permite operar en el interior del paciente a través de un pequeño cráter de pocos milímetros de diámetro por el que se introducen tanto las pinzas como los instrumentos quirúrgicos microscópicos.

Esas cirugías, dirigidas por el brazo articulado que lleva en su visión permanente ampliada y estable en tres dimensiones que facilita la intervención, indican ya que le permite explorar visualmente áreas que de otra manera no serían situadas fuera de su alcance.

Alain Carpenter, de 64 años, que ayer realizó en París una cirugía cardíaca del hospital público Broussais, destaca precisamente de esta experiencia que es la primera intervención que le permite explorar visualmente zonas inexploradas que por nosotros mismos no podemos alcanzar".

La alta precisión de la máquina que reproduce instantáneamente los gestos de los doctores y su capacidad de visión que puede controlar y atemperar los movimientos hacen que estos procedimientos se consideran revolucionarios.

"Cuando yo hago un movimiento, el robot lo reproduce de tal manera que opera en el corazón solo se desplaza 1 milímetro, es un instrumento muy preciso", dice Carpenter, este hombre feíz que fue seleccionado por técnicos norteamericanos en razón de su prestigio interna-



El brazo articulado que fue empleado ayer en Barcelona, semejante al utilizado en París. En la otra foto, el doctor Alain Carpenter.

cional. "El robot obedece a la mano del hombre, pero la precisión es mucha más grande", indica Carpenter. "porque, además, nos permite intervenir en zonas que no podemos alcanzar ni llegar a zonas inexploradas que por nosotros mismos no podemos alcanzar".

Operación a distancia

Según los ingenieros robóticos de la empresa norteamericana, la experiencia del cirujano británico Alan Carpenter, futuro más probable de aplicación sistemática de la robótica a la cirugía.

Con la posibilidad de intervenir quirúrgicamente a un paciente situado a cientos de kilómetros de distancia, se plantea con el problema de que entre la orden del cirujano y el movimiento efectivo de la máquina habrá una espera de



Tiempo de un segundo, un robot articulado grande tardaría en darle órdenes de operaciones tan delicadas.

Otro brazo articulado, dirigido desde Mallorca, interviene en Barcelona a un enfermo de hidrocefalia

MARIA COSTA-PAU. Barcelona. Un ciudadano barcelonés afectado por una hidrocefalia —exceso de agua en el cerebro— fue intervenido quirúrgicamente el pasado miércoles en el hospital Clínico de Barcelona por un robot robótico que dirige un cirujano desde Palma de Mallorca a unos 250 kilómetros del centro hospitalario. El doctor Enrique Ferrer, jefe de Neurocirugía del Clínico, coordinó los movimientos del brazo robótico desde el barco

que practica en el mundo, y significó un importante avance en la aplicación de las telecomunicaciones y la videoconferencia a la medicina.

El Hospital Clínico llevaba un año preparando la experiencia, que se encmarca en el proyecto Urticaria, impulsado por la Fundación The Brain and Heart Research, entidad que dirige el neurocirujano Josep M. Martínez, de Palma de Mallorca, a quien se le realizó la intervención.

El doctor Enrique Ferrer, jefe de Neurocirugía del Clínico, coordinó los movimientos del

brazo robótico que dirige un cirujano de la Universidad de Mallorca, que mediante sistema de videoconferencia, pudo observar la intervención en directo y comentar con el profesor Ferrer todo lo que se llevó a cabo en la sala de operaciones.

El doctor Enrique Ferrer,

dijo ayer que "la operación de París ha sido el pasado día 7. En todos los casos, las 'manos robóticas miniaturizadas'—dirigidas a tres metros de distancia por el doctor Alain Carpenter—cumplieron su trabajo con precisión".

Encontrada de París se hizo el pasado día 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

ón".

Encontrada de París se hizo el pasado dia 7.

En todos los casos, las "manos robóticas

miniaturizadas"—dirigidas a tres metros

de distancia por el doctor Alain Carpen-

ter—cumplieron su trabajo con preci-

La realidad virtual proporciona un excelente medio de simulación que reproduce fielmente los fenómenos físicos que se encuentran presentes en los sistemas dinámicos complejos, y puede recrear situaciones extremas de peligro donde el operador deberá tomar decisiones importantes. Es importante destacar que la realidad virtual no es un simple sistema de animación, por el contrario es un sofisticado simulador ya que el modelado es realizado por medio de sistemas dinámicos que incorporan las características y detalles del ambiente.

Actualmente, la realidad virtual representa el método más importante para entrenar y capacitar a conductores de automóviles, motocicletas, pilotos de aeronaves (simuladores de vuelo), astronautas, cirujanos, etc. En nuestros días, la realidad virtual ha llegado a los video juegos, donde los niños jugando aprenden no sólo a ejercitarse la mente sino también su sistema locomotor en la medida en que se incorporan ejercicio físico a sus rutinas, de esta forma la realidad virtual es una herramienta mucha más completa y adecuada, ideal para fisioterapia y rehabilitación de lesiones en músculos y tejidos.

Por otro lado, los robots pueden ser operados por movimientos de usuarios que se encuentran “conectados” a un ambiente simulado por realidad virtual tal y como se muestra en la figura 1.5.

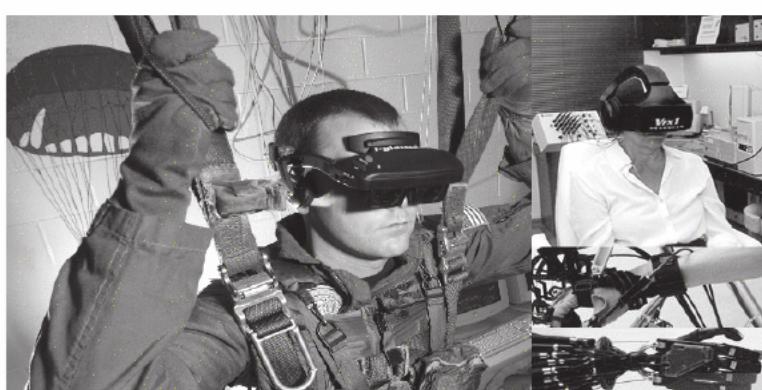


Figura 1.5 La robótica tiene amplias aplicaciones en realidad virtual.

1.2 Tipos de robots

Actualmente existe una gran variedad de robots con diversas estructuras geométricas y mecánicas que definen su funcionalidad y aplicación. Sin embargo, de manera general pueden ser clasificados como se muestra en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Tipos de robots.

Clasificación de robots		
Móviles	Terrestres: ruedas, patas	
	Submarinos, aéreo-espaciales	
Humanoides	Diseño complejo	
Industriales	Brazos mecánicos	Robots manipuladores

A continuación se da una breve descripción de cada tipo de robot clasificado en la tabla anterior.



1.2.1 Robots móviles

Los robots móviles pueden ser clasificados de acuerdo con el medio en el que se desplacen: terrestres, marinos y aéreos. Los terrestres generalmente se desplazan mediante ruedas o patas; tienen aplicaciones en rastreo y traslado de objetos, evasión de obstáculos, traslado de instrumental quirúrgico en hospitales, limpieza del área del hogar, ambientes cooperativos y en la industria donde se emplean para análisis e inspección de fisuras en gaseoductos y contenedores de petróleo, por ejemplo. Otra clase de robots móviles como AIBO de Sony son los tipo mascota (robots perros y gatos) diseñados para ser versátiles en sus movimientos (ver figura 1.6).

Los robots móviles marinos son robots submarinos equipados con sensores especiales para navegación dentro del agua como sonar, radar, visión



Robots móviles

Los robot móviles se utilizan en el hogar para limpiar y recolectar basura; en hospitales se emplean para trasladar instrumental de quirófano al área de desinfectado; en investigación científica del espacio (en la luna o en planetas) se ocupan para analizar y enviar información de piedras, arenas y atmósfera; en arqueología son empleados para enviar señales de video del interior de cavernas, túneles, pirámides, etc. Existen diversos tipos de robots móviles, dependiendo de su aplicación es el tipo de estructura mecánica, ruedas o patas.

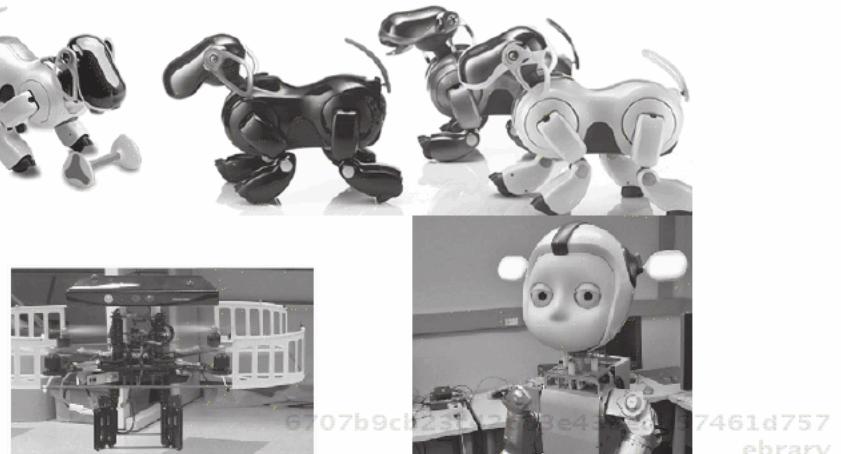


Figura 1.6 Robots móviles.

telescópica, giroscopio, además poseen sistemas electrónicos complejos que les permiten sumergirse y/o elevarse. Los robots aéreos son aeronaves no tripuladas como helicópteros o pequeños aviones operados a control remoto, pueden proporcionar imágenes aéreas para reconocimiento de terreno y superficie, y son muy útiles en problemas de análisis de tráfico e inspección de edificios.



1.2.2 Robots humanoides

El campo de la robótica incluye el desarrollo de robots humanoides, también conocidos como androides, los cuales son máquinas antropomórficas capaces de imitar las funciones básicas del ser humano tales como caminar, hablar, ver, recolectar, limpiar y trasladar objetos. En la figura 1.7 se muestran algunos prototipos de humanoides científicos, como es el caso del robot pianista *Don Cuco el Guapo* de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Con estas características, los robots humanoides pueden llevar a cabo funciones similares a las de un mayordomo como los describe Karel Čapek en su novela satírica *Rossum's Universal Robots* la cual fue la base de la película *Yo, robot*. En un futuro cercano, con el avance de la tecnología los robots humanoides, más que ser máquinas mul-

tifuncionales, intentarán inspirar y comunicar emociones como se plantea en la película *El hombre bicentenario*.

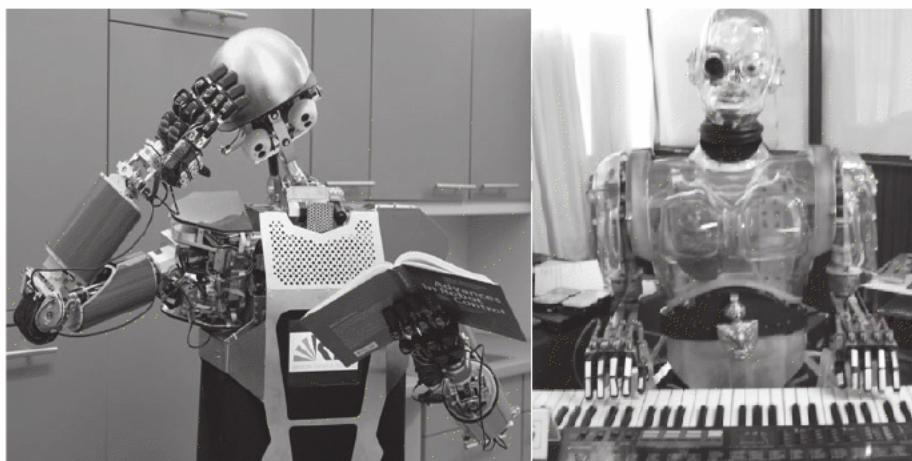


Figura 1.7 Robots humanoides: PACO-PLUS y Don Cuco el Guapo.



Robots humanoides

Los robots humanoides, conocidos como androides, son sistemas muy complejos no sólo en su estructura mecánica, también lo son en lo relacionado con la electrónica, los sensores, los servomotores, la programación y el modelado matemático. Los robots humanoides ocupan una posición muy importante en todo el mundo debido a su versatilidad y aplicaciones; un aspecto clave para tal aceptación en la sociedad es su similitud al ser humano que los hace ver agradables, confiables y amigables. Actualmente, los robots humanoides pueden alcanzar velocidades de 6 km/h y pueden guiar a personas invidentes. Además de realizar actividades domésticas, también son empleados en siniestros o derrumbes como terremotos o desastres naturales.

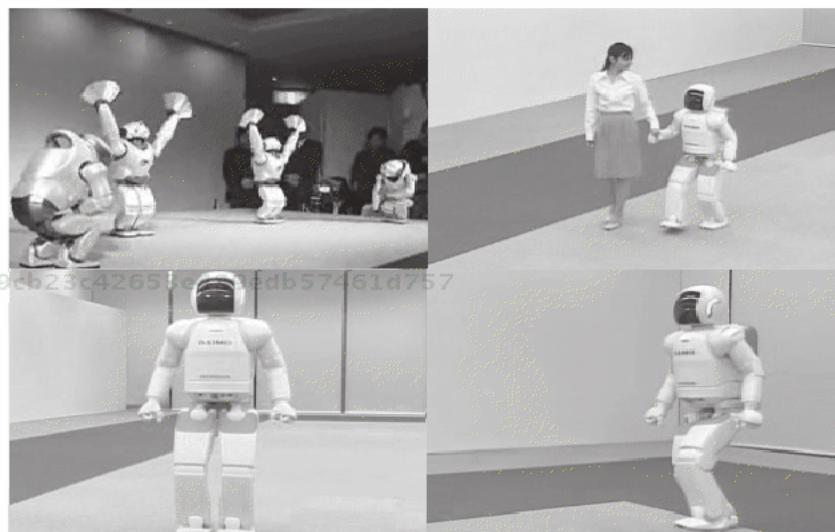


Figura 1.8 Robots Androides: ASIMO.

Los androides actuales poseen la capacidad de realizar actividades complicadas, por ejemplo, ejecutar actividades de danza, alcanzar velocidades de 6 km/hora (*robot ASIMO Advanced Step in Innovative Mobility*), y más aún, el principal potencial del androide es que puede ser empleado en

auxiliar a personas en zonas de desastres, es decir, buscar víctimas atrapadas en lugares donde hay derrumbes, llevarles agua, inclusive rescatar y salvar vidas. Actualmente el aspecto de los robots androides es mucho más humano, lo que los hace más amigables. Un androide puede asistir a personas discapacitadas, puede guiar a personas invidentes, los ayuda a trasladarse a diversos sitios, también puede orientar a las personas y comunicar órdenes. En la figura 1.8 se muestran algunos ejemplos de actividades que pueden llevar a cabo los robots androides.



1.2.3 Robots industriales

Robots industriales

Las principales aplicaciones de los robots industriales se encuentran en fundidoras, fábricas ensambladoras automotrices, empresas textiles, procesos de soldadura de arco y de punto, corte de materiales por láser, traslado y pintado de objetos, estibado de cajas, ensamble de productos electrónicos y mecánicos, inspección y prueba de calidad del producto, mantenimiento y reparación de camiones de carga, pulido y esmerilado de vidrio, traslado de desechos tóxicos, prueba y desempeño de automóviles, industria del zapato y vestido, etc.

Los robots industriales son el tipo de robots más populares, debido a la importancia que ocupan en el sector industrial como herramientas clave para la modernización de las empresas. Hoy en día, la automatización de procesos industriales es realizada a través de robots y esto trae como consecuencia competitividad, productividad, eficiencia y rentabilidad de las empresas.

Los robots industriales también son conocidos como brazos robots o brazos mecánicos, por analogía con el brazo humano, y se componen de la base la cual puede rotar 360° grados alrededor de su eje de giro, además de que poseen articulaciones para hombro y codo. En el extremo final del codo tienen una parte mecánica denominada muñeca que le permite orientar a la herramienta final que es la que determina la aplicación a realizar. En la figura 1.9 se muestra un robot industrial de la compañía ABB para aplicaciones de traslado de cajas o estibado; un ejemplar de esta naturaleza tiene un peso aproximado de 3 toneladas, puede alcanzar una altura de 4 metros y velocidad de movimiento de 3000 mm/seg. Dentro de las características de los robots industriales se encuentra el que trabajan sin descansar las 24 horas del día, todos los días del año, por lo que en aplicaciones industriales superan en desempeño a las personas, ya que los robots no se fatigan ni se cansan, y tienen la habilidad de repetir el proceso siempre con el mismo tiempo y la misma calidad (repetitividad).

Robot Industrial: oficialmente la **ISO** (*International Organization for Standardization*) lo define como un manipulador multipropósitos, reprográ�able y controlado automáticamente en tres o más ejes.



Figura 1.9 Robot industrial de la compañía ABB.

Entre las compañías más importantes que diseñan y construyen robots industriales se encuentran FANUC, ABB, KUKA, MOTOMAN, EPSON; ebrary

cuentan con una gran diversidad de modelos de robots para diferentes aplicaciones industriales. En la figura 1.10 se muestran algunos ejemplos de robots industriales para procesos de pintura y soldadura.

Las principales aplicaciones que tienen los robots industriales son proceso de pintado de carrocerías automotrices, accesorios, cubetas, tinas, cajas, soldadura de punto y por arco en carrocerías automotrices, puertas y diversas piezas industriales; traslado de herramientas, estibado y empaquetado de materiales, etc. En las figuras 1.11 y 1.12 se muestran ejemplos de aplicaciones industriales.

En forma general, un robot industrial está formado por los siguientes

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Industrias robotizadas

Todas las industrias importantes del mundo tienen automatizadas sus líneas de producción mediante robots manipuladores. Comparadas con los robots, en actividades rutinarias las personas tienen la desventaja de la fatiga o cansancio por lo que la productividad y rentabilidad de la empresa así como la calidad del producto se ven comprometidas. En contraste, una característica de los robots es que pueden realizar las cosas con repetitividad, siempre con la misma calidad y en tiempos óptimos todos los días del año. Por eso, los robots manipuladores son parte clave de la modernización industrial.



Figura 1.10 Robots industriales en aplicaciones de pintura y soldadura.

elementos descritos brevemente:



Articulaciones o *uniones* formadas por servomotores que permiten la conexión y movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos del robot. Dependiendo del tipo de movimiento que produzcan las articulaciones del robot pueden ser de tipo *rotacional* o *lineal*. Las articulaciones de tipo *lineal* también son conocidas como *prismáticas*. Las unidades de medición que se asocian a una articulación de tipo rotacional están dadas en radianes o grados, mientras que para una articulación de tipo lineal generalmente se encuentran en metros.



Actuadores: suministran las señales necesarias a las articulaciones para producir movimiento. Los actuadores empleados en robótica pueden ser servomotores, elementos neumáticos, eléctricos o hidráulicos.



Sensores: proporcionan información del estado interno del robot. Posición y velocidad articular son las variables más comunes en el

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

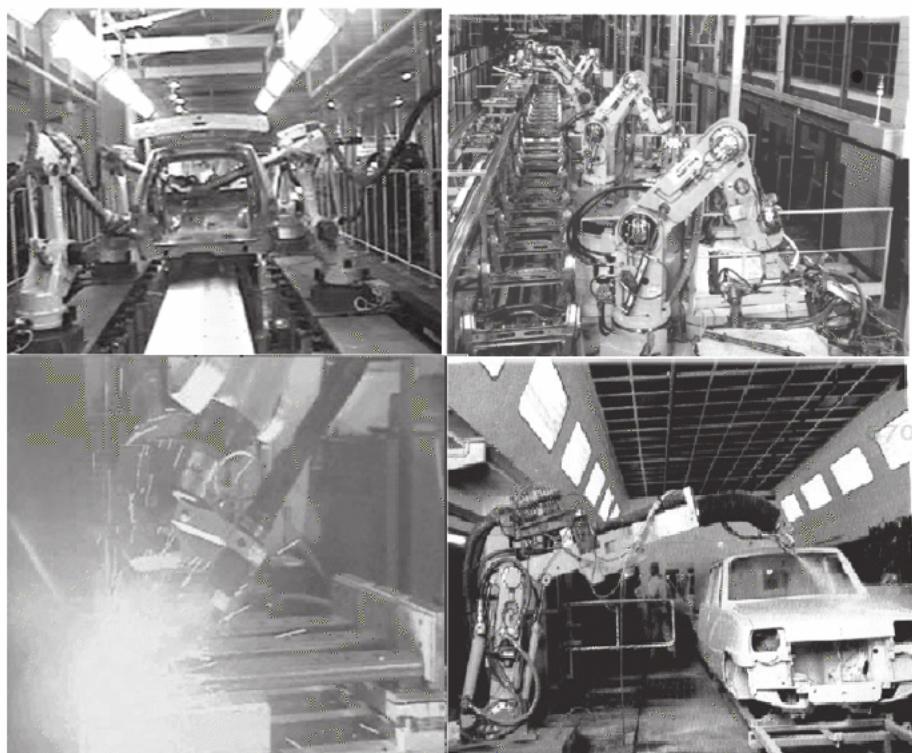


Figura 1.11 Robots industriales en procesos automotrices.

sistema de sensores. En aplicaciones específicas, se emplean sensores de fuerza para conocer la interacción con el medio ambiente, cámaras de video para localizar objetos en el espacio de trabajo. La capacidad de percepción del robot es mejorada a través del sistema de **sensores** que le permite responder a su entorno de manera versátil y autónoma. En robótica son de particular interés los *encoders ópticos*, ya que éstos proporcionan información del desplazamiento articular (ver figura 1.13). En general los encoders ópticos consisten de una fuente de luz (emisor) que incide directamente sobre el lado frontal de un disco o plato con ranuras transparentes, colocado directamente en el rotor del motor que al girar permite el paso de ciertos rayos de luz, el detector de luz (receptor) registra los rayos infrarrojos que han pasado por las ranuras del disco, esta señal de luz es acoplada a un circuito electrónico para generar



Componentes de un robot

En la página web del libro se presenta información adicional acerca de las componentes que configuran un robot manipulador: artículos científicos, reportes técnicos, especificaciones eléctricas, manuales de servomotores, eslabones, programación del robot, fotografías, fabricantes y videos de varios tipos de actuadores (eléctricos, neumáticos e hidráulicos); sensores de posición analógicos y digitales, sensores de fuerza, presión, garras mecánicas, consolas de control, teach pendant, partes del sistema mecánico, drivers o amplificadores de potencia, diseño y evaluación experimental de algoritmos de control, simuladores, código fuente, etc.

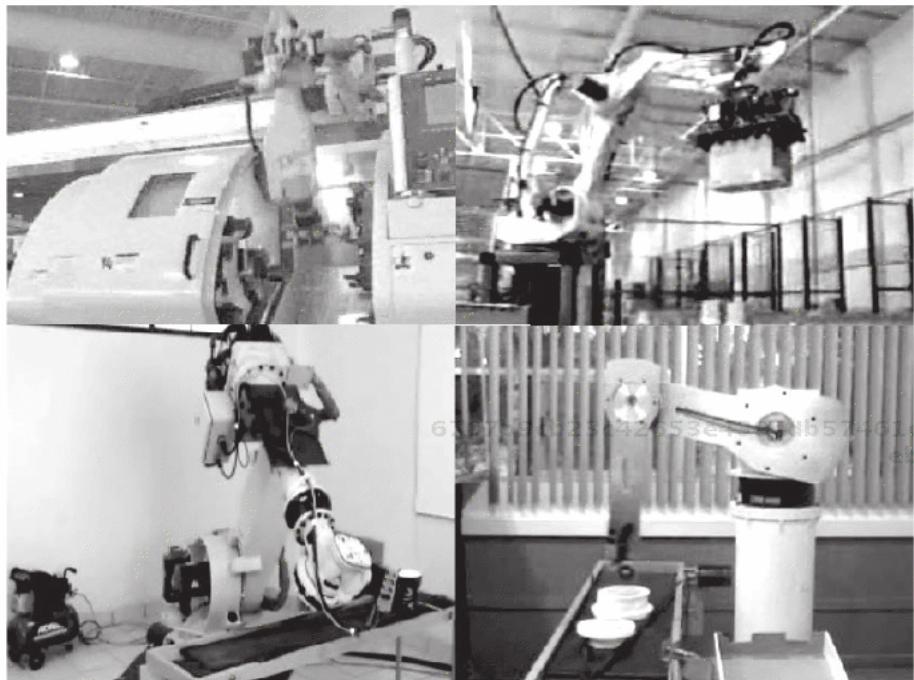


Figura 1.12 Robots industriales.

pulsos de salida proporcional al ángulo de rotación. En la práctica, un arreglo de diodos LED son usados como fuente de luz infrarroja a través de un disco con ranuras guiándola a un dispositivo fotosensible (receptor de luz, por ejemplo un fototransistor), esta señal de luz es procesada por un comparador electrónico para obtener una onda rectangular estable la cual representa el desplazamiento proporcional que tienen las articulaciones del robot.



Sistema mecánico: consiste en una secuencia de eslabones rígidos de metal conectados en cadena abierta por medio de articulaciones (*servomotores*); un robot manipulador está caracterizado por un brazo que asegura la movilidad, una muñeca que confiere la destreza y un extremo final que realiza la tarea programada al robot.



Consola de control: se compone de un sistema electrónico con la etapa de potencia encargada de suministrar energía al robot para su movimiento. Incluye un dispositivo portátil llamado *teach pendant*

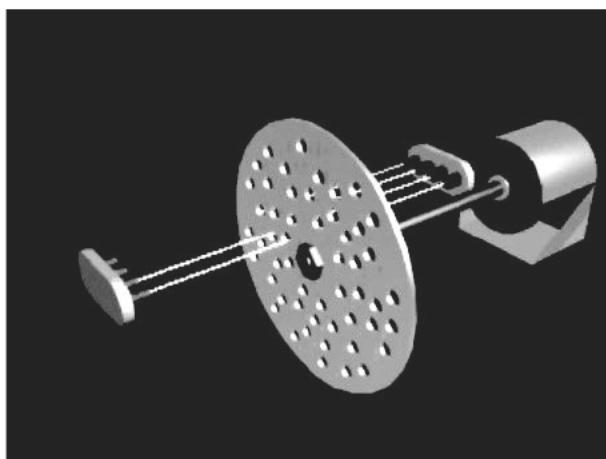
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 1.13 Encoder óptico.

el cual brinda la interfaz necesaria para que el usuario se comunique con el robot a través de instrucciones de programación. La consola de control también incluye los algoritmos de control programados en el sistema operativo del robot para guiar al robot. La capacidad del robot para llevar a cabo la tarea asignada con alto desempeño está dada por el algoritmo de control, el cual puede decidir la ejecución de la acción con respecto a las restricciones impuestas por el sistema mecánico y el medio ambiente.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

1.3 Control de robots manipuladores

A pesar de que los robots industriales son capaces de realizar correctamente una gran variedad de actividades, a simple vista parecería innecesario desarrollar investigación sobre el tema de control de robots. Sin embargo, es importante resaltar que en aplicaciones específicas es indispensable contar con el modelo dinámico del robot manipulador así como tener una adecuada estructura matemática de control de alto desempeño práctico para no saturar los actuadores del robot y realizar con exactitud la tarea encomendada al robot. De ahí que el diseño de controladores sigue siendo un área de intensa investigación por parte de universidades,

centros de investigación y fabricantes de robots.



Control automático

El control automático de robots manipuladores involucra matemáticas, dinámica no lineal, sensores para retroalimentar la posición de movimiento y técnicas de control de diseño para algoritmos de control. Los conceptos de control clásico Nyquist, Bode, root locus son términos específicos de sistemas lineales y por lo tanto no se pueden aplicar a los robots manipuladores, debido a que son sistemas dinámicos no lineales.

Como parte de las técnicas de análisis y diseño de sistemas no lineales en particular se tiene la teoría de estabilidad de Lyapunov, la cual es una herramienta adecuada que permite generar una metodología de diseño que produce una familia extensa de algoritmos de control, en especial moldeo de energía es una técnica de control moderna que emplea todo el rigor matemático para diseñar una variedad infinita de nuevos esquemas de control. En general, el desempeño de estos algoritmos de control superan al esquema clásico de control proporcional derivativo PD.

El diseño de controladores ofrece grandes retos teóricos que resuelven substancialmente problemas de origen práctico, más aún, su estudio resulta indispensable en aquellas aplicaciones que no pueden realizarse por medio de los robots comerciales. Existen diversas técnicas de diseño de estrategias de control, entre ellas el **Moldeo de Energía** es una metodología moderna que se basa en moldear una función de energía potencial dependiente del error de posición e incluye un término con inyección de amortiguamiento o freno mecánico usando la velocidad articular. El objetivo de control es lograr que $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\tilde{q}}^T(t), \tilde{q}^T(t)]^T = \mathbf{0}$, donde la velocidad de movimiento del robot es denotada por el vector $\dot{\tilde{q}}$, el vector de errores de posicionamiento es $\tilde{q} = q_d - q$; el algoritmo de control se encarga de llevar en forma asintótica a cero, q_d representa el vector de posiciones deseadas donde el usuario quiere colocar al robot, q es el vector de la posición actual del robot, τ es el vector de par aplicado y representa la entrada al robot, siendo la energía aplicada a cada una de las articulaciones para que el robot se pueda mover desde su posición inicial a la posición deseada. La figura 1.14 muestra el diagrama a bloques para un sistema de control de posicionamiento de robots industriales.

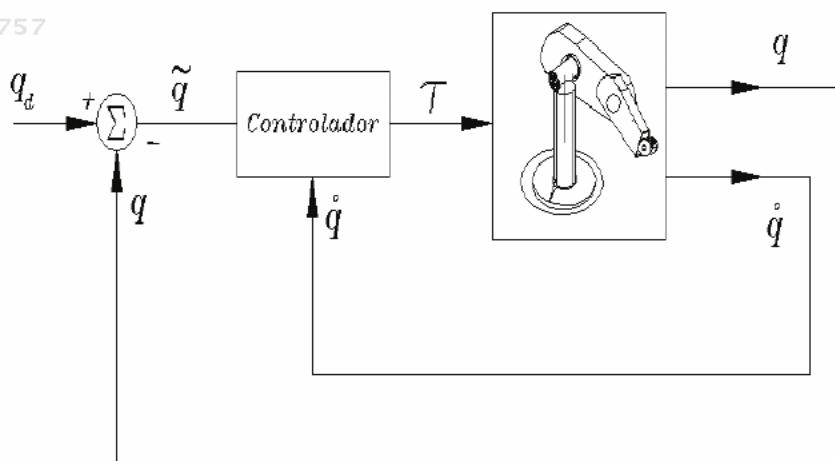


Figura 1.14 Sistema de Control.

Para que los objetivos de control se cumplan es necesario analizar y estudiar los fenómenos dinámicos que intervienen en el sistema mecánico del robot manipulador, por otro lado la estructura teórica que explica la física del robot es el modelo dinámico y está formado por una ecuación diferencial no lineal que se obtiene de las leyes de la física usando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

El control de posición de robots manipuladores es el más simple de los problemas de control, y el control de trayectoria es cuando el robot se encuentra controlado en posición y velocidad simultáneamente. También se pueden usar sensores externos para realizar control de fuerza, control de impedancia y control mediante información visual (*visual servoing*).

1.4 Tecnología de robots



Una forma de clasificar a los robots manipuladores es a través de la tecnología y construcción de sus articulaciones y eslabones, por ejemplo clasificarlos como **robots tradicionales**, fabricados con *engranes y reductores*, y robots de **transmisión directa** (*direct drive robot*). Los robots tradicionales emplean engranes para amplificar la capacidad limitada de par en sus motores y reducir la velocidad rotacional de los mismos (ver figura 1.15). Como desventaja, el sistema de engranes produce

fenómenos de elasticidad en las uniones e introduce fenómenos de fricción. Esta situación representa el principal inconveniente de los sistemas de engranaje, el cual es un fenómeno disipativo, esto es, convierte la energía mecánica en energía térmica, degradando las partes mecánicas de los engranes lo cual repercute en errores de posicionamiento y envejecimiento paulatino del robot. Los pares de fricción pueden ser de considerable magnitud como para predominar sobre la dinámica del manipulador. Por ejemplo, la cantidad de fricción presente en el robot PUMA 600 puede llegar al 45 % del par máximo aplicado al motor.

En la figura 1.16 se muestra el robot PUMA-200 (*Programmable Univer-*



Sistema de engranes

Los sistemas de engranaje desempeñan una función muy importante en la construcción y diseño de robots manipuladores. Sin embargo, es importante recalcar que estos sistemas aumentan notablemente el fenómeno de fricción y juego mecánico o *cascabeleo*, en este sentido la tecnología de trasmisión directa ofrece enormes ventajas. En la página web del libro se presenta información técnica de sistemas de engranaje, clasificación, hojas de especificaciones, fórmulas de ingeniería, reductores de velocidad y amplificación del par, tipos de materiales, detalles de construcción y diseño, formas de acoplamiento con el rotor del motor así como videos de sistemas de engranes con diversas aplicaciones.

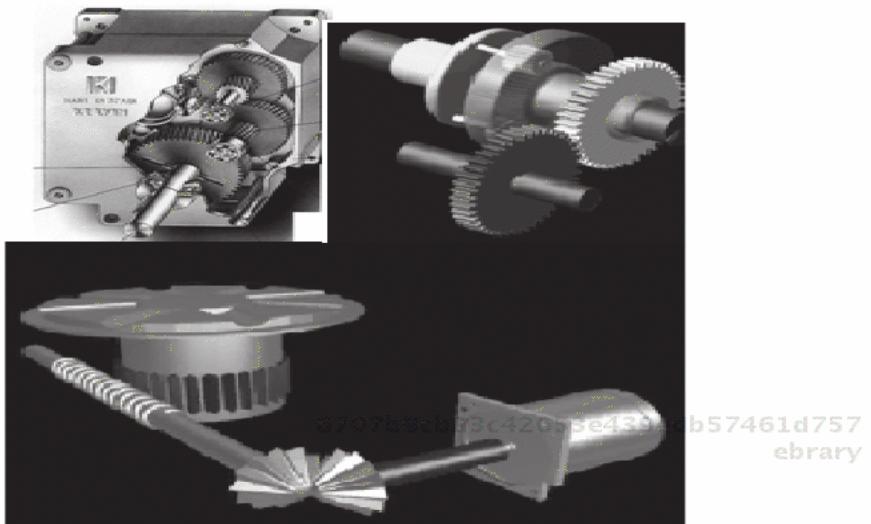


Figura 1.15 Motor con sistema de reducción.

sal Machine for Assembly o Programmable Universal Manipulation Arm) de la empresa pionera en robótica **Unimation**. El sistema mecánico de este robot está formado por sistemas de engranaje produciendo casabeleo o juego mecánico en el movimiento del robot. Además, es mucho más complejo caracterizar los parámetros del modelo dinámico, es decir encontrar los valores numéricos de los momentos de inercia, centros de

masa, coeficientes de gravedad, etc.

Otro tipo de tecnología para robots manipuladores es la denominada **transmisión directa** (*direct drive*), la cual constituye la nueva generación de robots cuya tecnología irá desplazando paulatinamente a los robots tradicionales. Transmisión directa significa que el servomotor funciona como una fuente ideal de par, no hay pérdidas de energía como sucede en los sistemas de engranaje. *Direct drive* elimina el sistema de engranaje tradicional, de ahí que el rotor del motor está directamente acoplado al eslabón. En este tipo de motores desaparece la flecha y el rotor es parte de la carcasa que gira con respecto al estator el cual permanece estático. La tecnología de transmisión directa elimina el casabeleo o falta de movimiento y reduce significativamente el fenómeno de



fricción comparada con los robots convencionales; la fricción no se elimina completamente, su magnitud se reduce debido a que el motor no tiene escobillas (*brushless*). Por otra parte, los materiales de construcción hacen que el rotor y el estator se encuentren levitando entre sí. Además, la construcción mecánica del robot es mucho más simple y la exactitud en el posicionamiento del extremo final del robot es mejorada. Una característica importante de la tecnología de transmisión directa es que la electrónica asociada al motor lo hace funcionar como *fuente ideal de par aplicado*, lo cual significa que independientemente de la carga mecánica mantiene constante el *par* solicitado en cada periodo de muestreo. Sin embargo, en la práctica está restringido por los límites físicos en los servo actuadores.



Figura 1.16 Sistema de engranaje del robot PUMA-200 de la empresa Unimation.

En la figura 1.17 se muestra un robot prototipo de transmisión directa de 3 grados de libertad diseñado y construido de manera específica para realizar investigación científica en robótica. Dicho prototipo fue construido en 1998 en el Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ciencias de la Electrónica, de la *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*.

Otro ejemplo de robot de transmisión directa es el robot IMI de 2 grados de libertad que se muestra en la figura 1.18.

Servomotores de transmisión directa

Los servomotores ofrecen considerables ventajas para el diseño y construcción de robots manipuladores, en particular funcionan como fuente de par aceptando una señal analógica de voltaje que es convertida a par. El fenómeno de fricción es muy bajo, debido a que desaparece el sistema de engranaje. Típicamente para un motor de transmisión directa la fricción alcanza una magnitud menor al 5% de la capacidad máxima del servomotor, si la velocidad de movimiento está en su ancho de banda. Una importante ventaja para investigación es que los servomotores de transmisión directa funcionan en arquitectura abierta, permitiendo la evaluación práctica de cualquier esquema de control. Además, el sensor de posición (*encoder*) es de alta resolución, por ejemplo 4,096,000 pulsos por cada 360 grados.

En la página web del libro se presentan especificaciones técnicas acerca de servomotores de transmisión directa.

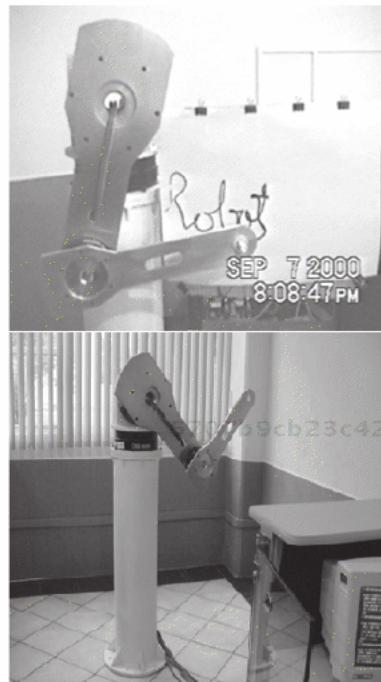


Figura 1.17 Robot de transmisión directa de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

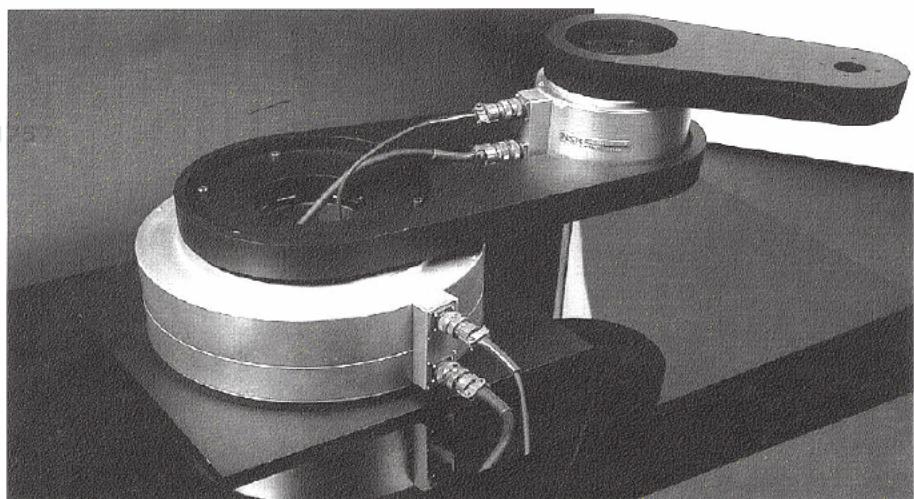


Figura 1.18 Robot IMI de transmisión directa.

1.5 Estadísticas de robótica

Cada vez es mayor el número de robots industriales que se usan en las empresas de todo el mundo, en particular las líneas de producción están automatizadas mediante robots manipuladores. En la tabla 1.3 (fuente: *International Federation of Robotics Statistical Department*) se muestran estadísticas sobre el uso de robots en el mundo. Desde el año 2000 se ha dado una tasa anual de crecimiento sistemático de 25,000 robots, y los principales países usuarios de robots son Estados Unidos, Japón, Alemania, Italia, Francia y China. Para el año 2008 se encontraban operando en todo el mundo más de un millón de robots industriales.

Tabla 1.2 Países usuarios de robots industriales.

Unidades de robots instalados en las industrias				
Continente	Instalaciones anuales		Robots en operación	
	2008	2009	2008	2009
América	17,192	9,600	173,977	172,800
Canadá, México, USA	16242	9000	168,489	166,800
América Central y Sudamérica	950	600	5,488	6000
Asia/Australia	60,294	35,900	514,914	509,00
China	7,879	5,000	31,787	36,800
India	883	500	3,716	4,200
Japón	33,138	18,000	355,562	339,800
República de Corea	11,572	8,100	76,923	79,300
Taiwán	3,359		23,644	
Tailandia	1,585		6,411	
Otros lugares de Asia	1,041	4,300	10,157	48,900
Australia/Nueva Zelanda	837		6,714	
Europa	35,066	22,600	343,700	346,100
Benelux	1,333		11,124	
Francia	2,605	1,800	34,370	34,400
Alemania	15,248	10,000	144,803	145,800
Italia	4,793	3,500	63,051	62,900
España	2,296	1,500	28,636	27,400
Suecia	1,100		9,426	
Reino Unido	909	600	28,636	27,400
Europa Central y del Este	2,603		9,207	
Otros lugares de Europa	4,179	5,200	27,950	62,300
Africa	461	300	1,784	1,800
Total	113,345	68,400	1,035,674	1,031,000

Tabla 1.3 Países usuarios de robots industriales.

Continente	Unidades de robots instalados en las industrias			
	Instalaciones anuales		Robots en operación	
	2008	2009	2008	2009
América	17,192	9,600	173,977	172,800
Canadá, México, USA	16242	9000	168,489	166,800
América Central y Sudamérica	950	600	5,488	6000
Asia/Australia	60,294	35,900	514,914	509,00
China	7,879	5,000	31,787	36,800
India	883	500	3,716	4,200
Japón	33,138	18,000	355,562	339,800
República de Corea	11,572	8,100	76,923	79,300
Taiwán	3,359		23,644	
Tailandia	1,585		6,411	
Otros lugares de Asia	1,041	4,300	10,157	48,900
Australia/Nueva Zelanda	837		6,714	
Europa	35,066	22,600	343,700	346,100
Benelux	1,333		11,124	
Francia	2,605	1,800	34,370	34,400
Alemania	15,248	10,000	144,803	145,800
Italia	4,793	3,500	63,051	62,900
España	2,296	1,500	28,636	27,400
Suecia	1,100		9,426	
Reino Unido	909	600	28,636	27,400
Europa Central y del Este	2,603		9,207	
Otros lugares de Europa	4,179	5,200	27,950	62,300
Africa	461	300	1,784	1,800
Total	113,345	68,400	1,035,674	1,031,000

En la figura 1.19 se muestra el desarrollo histórico de uso de robots manipuladores en la industria desde los años 1991 al 2008. Obsérvese que en el periodo del 2001 al 2005 se incrementó en 20 % año con año el uso de robots en las industrias, durante los años 2006 al 2007 el incremento fue menor del 3 %, en 2008 prácticamente se detuvo la inversión en robótica, debido a la crisis financiera, la cual llevó a una crisis global económica. El parque de robots manipuladores instalados en diversas empresas en 2008 llegó aproximadamente a 113,300 unidades (fuente: *International Federation of Robotics Statistical Department*).

En la figura 1.20 se muestra para el año 2008 el número de robots empleados para aplicaciones específicas de la industria. Más de 22,000 unidades

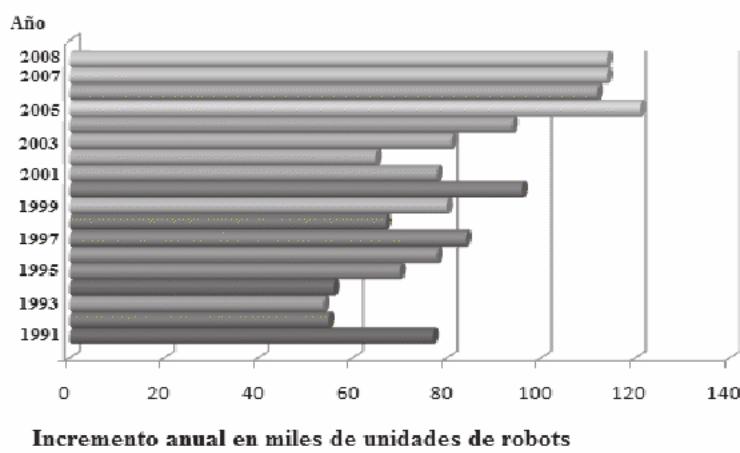
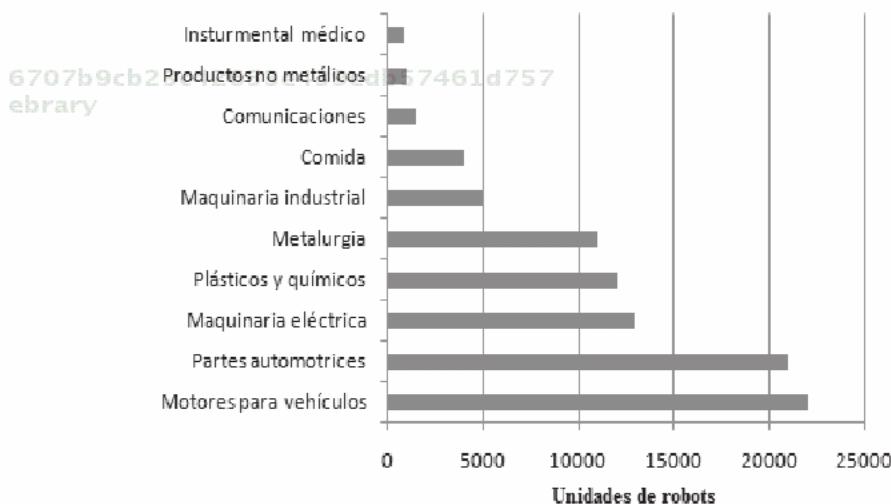


Figura 1.19 Estadísticas de robots usados en el mundo por año.

se han empleado en fabricación y ensamble de motores automotrices, y aproximadamente 20,000 unidades para fabricación de diversas partes de la industria automotriz. Maquinaria eléctrica, productos plásticos y químicos, y procesos metalúrgicos son de las aplicaciones donde se demanda el empleo de robots manipuladores.



Leonardo da Vinci (1452-1519)



Leonardo nació el 15 de abril de 1452 en Vinci, región de la Toscana, cercano a Florencia y Pisa. Su padre Ser Piero tenía 25 años de edad y provenía de una familia de notarios de aquella localidad. Su madre Catalina nunca se casó con Ser Piero. Leonardo desde pequeño vivió en la casa de su abuelo paterno, donde también vivía su padre con su primera mujer. A la edad de 13 años se fue a vivir con su padre a Florencia. La educación de Leonardo fue con influencia renacentista y permaneció en Florencia de 1465 a 1482. Radicó en Milán de 1482 a 1499 donde trabajó con Ludovico el Moro, realizó varias obras entre las que destaca *La Última Cena* que se encuentra en la iglesia de Santa María delle Grazie. Regresó a Florencia de 1500 a 1508 donde terminó la pintura de *La Gioconda o Monna Lisa*. Retornó a Milán en 1508, y en esta época se dedicó cada vez menos a la pintura, siendo su ocupación principal realizar dibujos anatómicos y disección de cuerpos humanos. Leonardo da Vinci realizó una cantidad enorme de prototipos mecánicos de riqueza invaluable para la ingeniería. Murió el 2 de mayo de 1519 y es considerado uno de los más grandes genios que ha dado la humanidad.

1.6 Historia de la robótica

El desarrollo de los sistemas mecánicos tuvo una notable influencia de Leonardo da Vinci, quien fue conocido principalmente por sus actividades de pintura con las que subsistía. Además de esta actividad, Leonardo se desempeñó como científico, ingeniero, médico, escultor, músico y filósofo. Su personalidad polifacética siempre lo llevó a estudiar y entender la naturaleza, fueron sus principales características diseñar, innovar y perfeccionar. En el aspecto de ciencia e ingeniería diseñó una multitud de prototipos mecánicos para diversas aplicaciones y de gran utilidad para la ciudad de Florencia, donde pasó varios años de su vida, por ejemplo diseñó puertas semiautomáticas que con contrapesos y poleas podían abrir y cerrar sin necesidad de ser operadas por una persona.

Reproducciones fabricadas en madera de varios de los diseños de Leonardo pueden apreciarse en el *Museo Leonardo da Vinci* de la ciudad de Florencia, Italia, donde se presenta permanentemente la muestra de prototipos “*Le Grandi Macchine Funzionanti*” (ver figura 1.21).

Entre sus interesantes diseños se encuentra un sistema para cortar madera (“sierra mecánica”). Llegó a desarrollar puentes para ríos, que eran fácilmente desarmables y podrían soportar una cantidad sorprendente de personas. Máquinas para navegar en ríos y en mar abierto con avanzados sistemas de propulsión que aprovechaban al máximo las corrientes de viento, así como sistemas mecánicos rotacionales para recolectar agua y sistemas con espirales que podían transportar agua de abajo hacia arriba (ver figura 1.22).

En los tiempos de Leonardo, la ciudad de Florencia estaba amurallada debido a que era constantemente atacada por los galos. Leonardo diseñó ingeniosos sistemas mecánicos para la guerra y así contribuyó a defender la ciudad; por ejemplo, creó máquinas para lanzar piedras, catapultas, cañones anclados a una base giratoria con sistema de engranaje



Figura 1.21 El Museo de Leonardo da Vinci en Florencia, contiene una importante muestra permanente de prototipos mecánicos.

permitían controlar la orientación y giro para disparar. También diseñó un aparato aéreo que podía ser operado por una persona (*piloto*). El primer robot completamente articulado utilizando una armadura de caballero de guerra fue diseñado por Leonardo. Perfeccionó el sistema mecánico de la bicicleta. En la figura 1.23 se muestran algunos de los prototipos de Leonardo da Vinci.

Varios de sus diseños fueron dedicados a la música, en particular creó sistemas musicales que al desplazarse podían reproducir la melodía que él grababa en forma codificada sobre un cilindro. Un sistema ampliamente utilizado fue el sistema de engranaje para subir y bajar los portones



Contribuciones de Leonardo

Las contribuciones de Leonardo en ciencia y tecnología son innumerables. Actualmente existe una sociedad en Florencia *Renaissance Engineers* que se encuentra recopilando, divulgando y publicando los créditos y logros de Leonardo da Vinci. Poco a poco se han estado encontrando sus notas donde describe a detalle experimentos científicos, cálculos matemáticos, planos de ingeniería, etc. Precisamente en las comunidades de Florencia y en Milán, existen varios museos donde se encuentran reconstrucciones de sus principales prototipos; estos museos son interactivos donde es posible aprender de los principios físicos y matemáticos que ocupó en sus inventos.

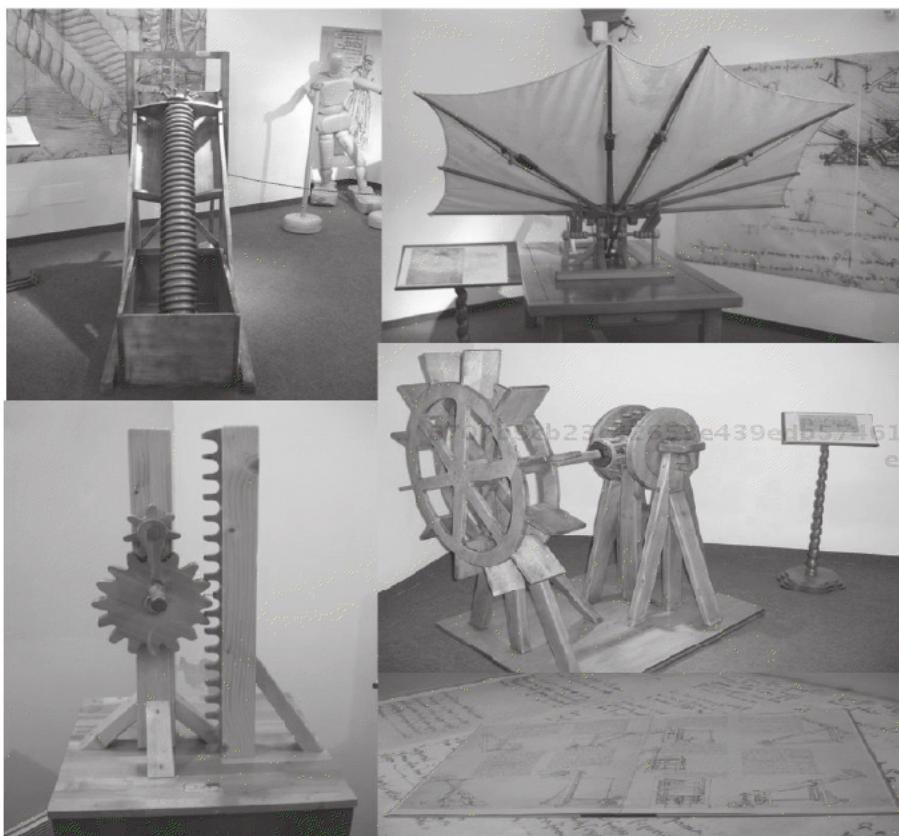


Figura 1.22 Prototipos mecánicos diseñados por Leonardo: Museo Leonardo da Vinci en Florencia.

de los castillos medievales, de hecho con una simple manivela se podían desplazar más de 20 toneladas (ver figura 1.24).

Es importante subrayar que Leonardo no construía sus diseños, eran otras personas como carpinteros, herreros y artesanos quienes en base a las instrucciones detalladas en sus notas, esquemas y planos llevaban a cabo la construcción y la puesta en operación.

Particularmente en el estudio de fenómenos físicos del robot, Leonardo da Vinci en 1519 realizó estudios de fricción y encontró que la fuerza de fricción es proporcional a la carga, se opone al movimiento y es independiente de la velocidad.



Figura 1.23 Prototipos mecánicos de guerra y el primer robot articulado diseñado por Leonardo: Museo Leonardo da Vinci de Florencia.

diente del área de contacto, pero este hecho permaneció escondido por muchos años. Los estudios del fenómeno de fricción de Leonardo fueron redescubiertos por Amontons en 1699 y desarrollados por Coulomb en 1785 (ver *Brian Armstrong-Hélouvy, Pierre Dupont y Carlos Canudas de Wit, 1994*).

A continuación se presentan algunos acontecimientos históricos importantes en el área de la Robótica.

 En la historia de la humanidad, varios siglos antes de Cristo existen registros de máquinas automatizadas empleadas en las guerras, la

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

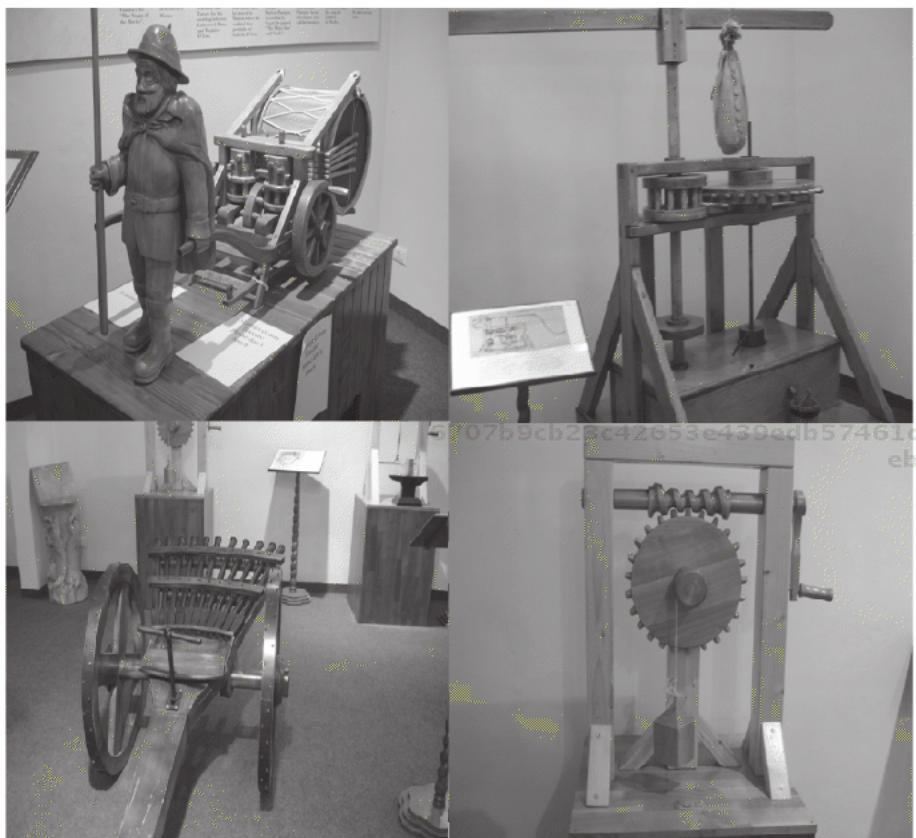


Figura 1.24 Prototipos mecánicos diseñados por Leonardo: Museo Leonardo da Vinci de Florencia.

agricultura, la construcción: catapultas, máquinas de fuego, órganos de viento, máquinas de vapor, etc.



En 1206 *Al-Jazari* desarrolló el primer robot humanoide.



Gallo de Estrasburgo. En 1352 fue desarrollado un gallo mecánico que cantaba y agitaba las alas; fue colocado en el tejado de la catedral de Estrasburgo.



El robot de Leonardo da Vinci se refiere al humanoide automatizado que realizó en el año 1495. El diseño original de éste fue encontrado en la notas de Leonardo da Vinci en 1950.



En 1738 se tiene un pato mecánico con movimientos simples, diseñado por *Jacques de Vaucanson*.

En la época contemporánea se han logrado los siguientes desarrollos:



En 1920 Karel Čapek introdujo el término robot en su novela *Russum's Universal Robots*.



Entre 1939 y 1940 se exhibió un robot humanoide llamado ***Elektro*** en la ***Feria del Mundo*** fabricado por la empresa ***Westinghouse Electric Corporation***.



En la década de los cuarenta y principios de los años cincuenta se inició el desarrollo de la tecnología en robótica.



En 1954, George Devol diseñó el primer robot reprogramable. ***Unimate*** fue el nombre del primer robot que fue puesto en operación en 1961 en la empresa ***General Motors*** por el propio George Devol y Joe Engelberg. De esta forma, en poco tiempo esta empresa se convirtió en la primera compañía mundial en fabricar robots. En esta época a los robots se les denominaba *máquinas de transferencia programables*, puesto que su principal uso era transferir objetos de

un punto a otro



En 1961 Victor Scheinman en la ***Universidad de Stanford*** desarrolló un robot articulado de 6 ejes, conocido como *robot Stanford*.



En 1963, *Fuji Yusoki Kogyo* desarrolló el primer robot para aplicaciones de *palletizing*, cuyo nombre fue ***Palletizer***.



La empresa sueca/suiza ***ABB (Asea Brown Boveri)*** en 1973 introdujo al mercado el primer robot (IRB6) controlado por un microprocesador.



En 1973, la empresa alemana ***KUKA Robotics (KUKA Roboter GmbH)*** construyó el primer robot articulado electromecánicamente de 6 ejes conocido como *FAMULUS*.



En la década de los setenta se desarrolló notablemente el incremento de compañías de robots y algunas ya existentes emigran al campo de la robótica como **General Electric**, **General Motors** la cual se unió a **FANUC Robotics** y **FANUC LTD** de Japón. También en estos tiempos surgen compañías como **Automatix** y **Adept Technology Inc.**



En 1975, Victor Scheinman desarrolló el robot PUMA (*programmable universal machine for assembly* o *programmable universal manipulation arm*) de la compañía **UNIMATION** (initialmente este robot fue desarrollado para **General Motors**). El modelo más popular fue el PUMA-650.



En 1981, Haruhiko Asada diseñó y construyó el primer robot de transmisión directa en la **Universidad de Carnegie-Mellon**, Pittsburgh, Pennsylvania.



En 1984 la compañía **UNIMATE** fue adquirida por **Westinghouse Electric Corporation** (por 107 millones de dólares) quien a su vez la vendió a **Stäubli Faverges SCA** en 1988 y posteriormente, en 2004, fue adquirida por **Bosch**.



En 1992 Alejandro Pedroza desarrolló en la **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla** el primer androide pianista de México **Don Cuco el Guapo**, el cual incluye servomotores, articulaciones neumáticas, sistema óptico para leer partituras; fue una aplicación del microprocesador ILA9200.



En 1994 fue puesto en operación el primer robot de transmisión directa en México con dos grados de libertad realizado en el **Centro de Investigación Científica y de Estudios Superiores de Ensenada** (CICESE por Rafael Kelly, Fernando Reyes & Víctor Santibáñez).



En 1998, fue puesto en operación el primer robot de transmisión directa de tres grados de libertad en México, (Fernando Reyes)

Escuela de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.



El 31 de octubre del año 2000 fue presentado el robot humanoide ASIMO, el cual puede caminar e interactuar con personas. Este robot fue fabricado por la compañía **Honda Motor Co. Ltd.**



En 2002 la compañía **General Motors Controls, Robotics and Welding** (CRW) donó al **Museo Nacional de Historia Americana** el prototipo original del robot PUMA.



En 2010 se desarrollaron los robots de cuarta generación. Robots inteligentes, con sensores sofisticados y control en tiempo real.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

1.7 Sociedades científicas de robótica

Esta sección está destinada a presentar un conjunto de foros científicos de alta calidad de diversas sociedades del área de robótica: revistas especializadas y conferencias nacionales e internacionales.

A continuación se enlistan las sociedades más importantes que desarrollan el área de la robótica y la automatización.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Sociedades internacionales:



IEEE The Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.

www.ieee.org



IFAC International Federation on Automatic Control

www.ifac-control.org



IASTED International Association of Science and Technology for Development www.iasted.org



WSEAS World Scientific and Engineering Academy and Society

www.wseas.org



IFR *International Federation of Robotics* www.ifr.org



AER *Asociación Española de Robótica y ATP Automatización y Tecnologías de la Producción*
www.aeratp.com



BARA *British Association of Robotics and Automation*
www.bara.org.uk



DIRA *Dansk Robot Forening* www.dira.dk



TRS *Thai Robotics Society* www.trs.or.th



RT *Robotics Trends* www.roboticstrends.com



INTECH www.intechweb.org

Sociedades científicas nacionales:



AMCA *Asociación Mexicana de Control Automático, A. C.* pertenece a la Federación Internacional de Control Automático (IFAC)
www.amca.org.mx



AMM *Asociación Mexicana de Mecatrónica A. C.* www.mecamex.net



AMROB *Asociación Mexicana de Robótica A. C.*
<http://ciep.ing.uaslp.mx/amrob>

Revistas científicas indexadas: Journals & Transactions
(ver <http://science.thomsonreuters.com>).



Advanced Robotics



IEEE Robotics and Automation Magazine



IEEE Control

-  IEEE Control Systems
-  IEEE Transactions on Robotics and Automation
-  International Journal of Robotics and Intelligent Systems
-  International Journal of Robotics Research
-  Journal of Robotic Systems
-  Robótica
-  Robotics and Autonomous Systems
-  Automática
-  International Journal of Robotics and Automation
-  International Journal of Modelling and Simulation

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Principales congresos internacionales de robótica:

-  IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA).
-  IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.
-  IEEE Decision and Control.
-  IFAC Symposium on Robot Control.
-  IFAC World Congress.
-  International Conference on Advanced Robotics.
-  International Symposium on Experimental Robotics.
-  Congreso Latinoamericano de Control Automático (IFAC).
-  IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



IASTED Robotica.

Principales congresos nacionales de robótica:

-  Congreso de la Asociación Mexicana de Mecatrónica.
-  Congreso de la Asociación Mexicana de Robótica (COMROB)
-  Congreso de la Sociedad Mexicana de Física (SMF)
-  Congreso de la Sociedad Mexicana de Instrumentación (SOMI)
-  Congreso de la Asociación Mexicana de Control Automático (AMCA)

Principales fabricantes de robots industriales:

-  KUKA: www.kuka.com
-  FANUC: www.fanucrobotics.com
-  ABB: www.abb.com
-  MOTOMAN: www.motoman.com
-  YASKAWA: www.yaskawa.com
-  EPSON: www.robots.epson.com
-  UNIMATE www.prsrobots.com/unimate.html
-  ROBAI www.robai.com
-  YAMAHA ROBOTICS www.yamaharobotics.com

1.8 Resumen



La robótica es un área multidisciplinaria que aborda el análisis, desarrollo de robots y sus potenciales aplicaciones. Hoy en día, se ha convertido en una área estratégica y clave para todo país en desarrollo, es sinónimo de modernización. Dentro del sector industrial todos los procesos productivos se encuentran automatizados a través de robots. Industrias como armadoras automotrices, fundidoras, alimentos, maquiladoras, etc., emplean robots manipuladores como tecnología indispensable debido a que elevan la productividad y calidad del producto que va al consumidor. La rentabilidad y viabilidad de empresas está en manos de la robótica.

Dentro del sector de la salud, operaciones peligrosas que antaño eran sumamente complicadas, hoy en día resultan relativamente simples gracias al empleo de robots manipuladores que se han convertido en herramientas sofisticadas de alta precisión y desempeño, circunstancia que ha proporcionado una mejor esperanza de vida a los pacientes. El empleo de robots en aplicaciones de fisioterapia asistida por robótica es otro escenario donde los robots han ganado terreno y popularidad.

Como una referencia de importancia que ha tenido la robótica a nivel internacional se tiene que una gran cantidad de escuelas, universidades latinoamericanas, europeas, norteamericanas, asiáticas desde niveles medio superior hasta doctorado cultivan como carrera o especialidad el área de la robótica. México no es la excepción, ya que universidades y centros de investigación de al menos 29 entidades federativas incluyen en la currícula del plan de estudios o realizan investigación en robótica.

La robótica por su característica multidisciplinaria requiere desarrollar habilidades y conocimientos. Estudiar robótica implica ser una persona bilingüe. También se requiere trabajar en equipo, así como tener sólidos conocimientos de las ciencias exactas e ingeniería. La robótica no sólo es tecnología y conocimientos, también involucra arte y cultura.



1.9 Referencias Selectas

A continuación se presenta una relación de referencias recomendadas por secciones en donde el lector puede encontrar información complementaria, o profundizar en cada uno de los tópicos presentados en este capítulo.



1.1 Introducción

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Tsuneo Yoshikawa. “*Foundations of robotics: analysis and control*”. The MIT Press. 1990.



IEEE Spectrum <http://spectrum.ieee.org>



Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Second Edition. Springer. 2005.



Fernando Reyes & Jaime Cid. “*La robótica y su impacto en la sociedad*”. CONCYTEP. Saberes Compartidos. Vol. 4, núm. 5, 2010. pp. 19-27. 2010.



1.2 Tipos de robots



J.C. Alexander and J.H. Maddocks. “*On the kinematics of wheeled mobile robots*”. The International Journal of Robotics Research, 8(5), 15-27 (1989).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

-  Richard C. Dorf. “*Concise international encyclopedia of robotics: applications and automation*”. Editorial Board. John Wiley and Sons, Inc. 1990.
-  R. M. Murray, Z. Li and S.S. Sastry, “*A mathematical introduction to robotic manipulation*”, CRC Press, 1994.
-  Shimon Y. Nof. “*Handbook of industrial robotics*”. Second Edition. Jhon Wiley and Sons Inc. 1999.
-  Clarence W. de Silva. “*Mechatronics*”. CRC Press, 2004.
-  Harry Colestock “*Industrial robotics: selection, design and maintenance*”. McGraw-Hill, 2004.



1.3 Control de robots manipuladores

- ebrary  Richard P. Paul. “*Robot manipulators: mathematics, programming, and control*”. The MIT Press. 1981.
-  H. Nijmeijer and A.cJ. van der Schaft. “*Nonlinear dynamical control Systems*”, Springer-Verlag, New York (1990).
-  M. Vidyasagar. “*Nonlinear systems analysis*”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1993).
-  R.M. Murray, Z. Li and S.S. Sastry. “*A mathematical introduction to robotic manipulation*”. CRC Press (1994).

-  A. Isidori. “*Nonlinear control systems*”. Springer-Verlag, London, UK (1995).
-  Karl J. Åström and Björn Wittenmark. “*Computer controlled systems: theory and design*”. Third Edition. Prentice Hall Inc. 1997.
-  Shankar Sastry. “*Nonlinear systems: analysis stability and control*”. Springer 1999. 6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
-  Hassan K. Khalil. “*Nonlinear systems*”. Third Edition. Prentice Hall Inc. 2002.
-  R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Printice-Hall, Pearson. 2003.
-  R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005.
-  Mark W. Spong and Seth Hutchinson, M. Vidyasagar. “*Robot modeling and control*”. John Wiley and Sons, Inc. 2006. 6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
-  Wassim M. Haddad and VijaySekhar Chellaboina. “*Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*”. Princeton University Press. 2008.
-  Katsuhiko Ogata. “*Modern control engineering*”. Prentice-Hall, Pearson. 5th Edition, August 2009.
-  Agustín Jiménez and Basil M. Al Hadithi. “*Robot manipulators, trends and development*”. INTECH. 2010. 653e439edb57461d757
ebrary



1.4 Tecnología de robots



Haruhiko Asada & Kamal Youcef Toumi. “*Direct-drive robots: theory and practice*”. MIT Press Classics, 1987.



www.parkercompumotor.com



www.nsk.com.com

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



1.5 Estadísticas de robótica



www.ifr.org



www.worldrobotics.org



“*World robotics: industrial robots*”. IFR. Statistical Department.
2010.



www.automatica-munich.com

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



1.6 Historia de la robótica



Brian Armstrong-Hélouvy, Pierre Dupont and Carlos Canudas de Wit. “*A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction*”. Automatica, Vol. 30. No. 7, pp. 1083-1138. 1994.



Nof, Shimon Y. “*Handbook of industrial robotics*”. Jhon Wiley and Sons, Segunda edición, 1999. pag. 3-5.

-  Paolo Galluzzi. “*Renaissance engineers from Brunelleschi to Leonardo da Vinci*”. Giunti, Istituto e Museo di Storia della Scienza, Florence. 2001.
-  Frank Zöllner y Johannes Nathan. “*Leonardo da Vinci*”. Editorial Taschen, 2003.
-  Julio Arrechea. “*Leonardo artista, físico, inventor*”. Editorial Libraria, 2005.
-  Domenico Laurenza, Mario Taddei y Edoardo Zanon. “*Atlas ilustrado de las máquinas de Leonardo*”. Editorial Susaeta. 2007.
-  Mario Taddei. “*I robot di Leonardo*”. Editado por Leonardo3. 2007.
 www.mostredileonardo.com
 www.leonardo3.net



1.10 Problemas propuestos

Esta sección contiene una serie de problemas de reflexión y razonamiento cuya finalidad está enfocada a mejorar la habilidad del lector para comprender la importancia, relevancia e impacto que tiene la robótica en la sociedad.



1.1 Introducción

1.1.1 ¿Qué es la robótica?

1.1.2 ¿Cómo se define un robot manipulador?

1.1.3 ¿Cómo se define un robot industrial?

1.1.4 ¿Porqué la robótica es de naturaleza multidisciplinaria?

1.1.5 Mencione al menos 3 características de la robótica que impacten en la sociedad.

1.1.6 ¿Porqué un robot manipulador puede ser empleado en cirugías de alto riesgo?

1.1.7 ¿Porqué un robot manipulador puede asistir a personas con capacidades diferenciadas y en fisioterapia?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

1.2 Tipos de robots

1.2.1 ¿Cuál es la clasificación de robots?

1.2.2 Describa las características de los robots móviles.

1.2.3 Describa las características de los robots humanoides.

1.2.4 Describa las características de un robot industrial y cómo está estructurado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

1.3 Control de robots manipuladores

1.3 .1 ¿Porqué es importante el control automático en robótica?

1.3 .2 Describa a grandes rasgos qué es un algoritmos de control.

1.3 .3 ¿Porqué el control clásico no se aplica en robótica?

1.3 .4 ¿Qué tipo de técnicas de control puede citar para diseñar esquemas para robots manipuladores?

1.3 .5 Describa al menos 5 aplicaciones que tiene el control de robots manipuladores.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



1.4 Tecnología de robots

- 1.4 .1 ¿Porqué se emplean engranes en robots industriales?
- 1.4 .2 ¿Qué desventajas y ventajas presentan los engranes?
- 1.4 .3 ¿Qué significa tecnología de transmisión directa?
- 1.4 .4 ¿Qué ventajas representa la tecnología de transmisión directa con respecto a los engranes?
- 1.4 .5 ¿Cómo se define un robot de transmisión directa?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



1.5 Estadísticas de robótica

- 1.5 .1 ¿Porqué se considera a la robótica un área clave y estratégica de todo país en desarrollo?
- 1.5 .2 ¿Describa la estadística de robots empleados en el mundo y cuáles son sus principales funciones?
- 1.5 .3 ¿Porqué en la gran mayoría de las universidades han incorporado el área de robótica?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



1.6 Historia de la robótica

- 1.6 .1 ¿Porqué se considera a Leonardo da Vinci como científico e ingeniero?
- 1.6 .2 ¿Describa algunos hechos históricos de la robótica en la era contemporánea?
- 1.6 .3 ¿Qué acontecimientos históricos puede citar que han sido claves para el desarrollo actual de la robótica?
- 1.6 .4 ¿Cuál es la tendencia actual de la robótica en el mundo?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

2

CAPÍTULO

Servomotores y sensores

Las ecuaciones de Maxwell resumen la teoría electromagnética y resultan invariantes ante otro tipo de transformaciones.

Hendrik Antoon Lorentz
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



- 2.1 Introducción**
- 2.2 Servomotores**
- 2.3 Sensores**
- 2.4 Encoders**
- 2.5 Resumen**
- 2.6 Referencias selectas**
- 2.7 Problemas propuestos**

Objetivos

Presentar los principales servomotores y sensores que se emplean en el diseño y construcción de robots, haciendo hincapié en:

Objetivos particulares:



Funcionamiento básico de servomotores.



Tecnología de transmisión directa y sus ventajas en robótica.



Clasificación de sensores analógicos de robots manipuladores.



Funcionamiento básico de encoders ópticos (incrementales y absolutos) y magnéticos.

Competencias

Adquirir las habilidades necesarias para:



Seleccionar tecnología de servomotores para diseñar y construir robots.



Entender los fenómenos importantes del sistema de engranaje.



Identificar los sensores de posición de robots.

2.1 Introducción



Los servomotores y sensores son dispositivos fundamentales para el diseño y construcción de cualquier tipo de robot. Los servomotores son sistemas electromecánicos que pertenecen a una clase particular de **actuadores eléctricos** encargados de transmitir energía para producir el movimiento del robot, y son los que forman las uniones o articulaciones del robot mediante las cuales éste se mueve, motivo por el cual al movimiento del robot se le denomina **desplazamiento articular**. La tecnología asociada a los servomotores es complicada, ya que su electrónica está basada en microprocesadores avanzados de procesamiento como los DSP's (*digital signal processors*) para llevar a cabo el análisis y control de las diversas variables que determinan su modo de operación.

El empleo de sensores en robótica es necesario para realizar control automático, y por lo tanto la automatización de procesos. Los robots pueden incluir sensores internos y externos. Los sensores internos (encoders) proporcionan información sobre la posición, velocidad y aceleración de movimiento, con estas variables y el uso del modelo dinámico es posible analizar y entender todos los fenómenos físicos del robot. Por lo tanto, se pueden evaluar experimentalmente algoritmos de control y determinar su robustez y desempeño en diversas aplicaciones. Los sensores externos como fuerza, presión y visión, dotan al robot de un sistema de percepción que no sólo mejora su eficiencia, también lo hace responder de manera versátil y autónoma al interaccionar con su ambiente o espacio de trabajo.

En robótica los sensores más ampliamente usados son los sensores de posición. Dependiendo del tipo de tecnología empleada en la fabricación de los sensores de posición, éstos pueden ser analógicos o digitales. Los sensores analógicos tienen una respuesta eléctrica (señal continua de voltaje) con información de movimiento del robot. Sin embargo, se requiere convertir esta señal a formato digital para que pueda ser procesada por algún sistema mínimo para propósitos de instrumentación y control.

La clasificación de un sensor como analógico, no obedece únicamente a que los materiales y componentes empleados sean analógicos en el proceso de fabricación. Lo que hay que tomar en cuenta es que diversos sensores analógicos ya tienen integrado el sistema electrónico para convertir la respuesta analógica en formato digital, y debido a que su señal de salida está digitalizada, entonces se denomina sensor digital. Un ejemplo clásico de sensor digital es el caso de un termómetro digital de temperatura: sus componentes son analógicos, debido a que emplean como elemento sensor un transistor o termopar y la medición de la temperatura está digitalizada en una pantalla de cristal líquido (*lcd, liquid crystal display*), lo cual hace un sensor digital.

Ejemplos de sensores analógicos de posición de robots son los resolvers, los potenciómetros y los tacómetros. Por otro lado, los sensores digitales de posición más comunes son los encoders.

La mayoría de los sensores se construyen en base a propiedades físicas de materiales semiconductores. Generalmente, las señales de salida tienen que ser acondicionadas a través de instrumentación electrónica. La función de los sensores es medir una variable asociada al fenómeno físico, tal como posición, temperatura o presión, y producir una señal medible como voltaje o corriente. Un *transductor* es un sensor que incluye el sistema electrónico para convertir un tipo de energía (asociada al fenómeno físico), a otro tipo de energía medible (energía de salida).

Un transductor es un dispositivo que convierte un tipo de energía (es decir, energía de entrada o variable de medición) a otro tipo de energía medible (energía de salida, por lo común energía eléctrica en milivoltios). Un ejemplo de transductor es la resistencia magnética que convierte el campo magnético en corriente eléctrica.

Generalmente, por la tecnología que incluyen los sensores, actualmente se les considera transductores.

En este capítulo se presentan servomotores empleados en la construcción de robots manipuladores y los sensores internos que incluyen para medir la posición.

2.2 Servomotores

Un servomotor está compuesto principalmente por tres elementos: motor eléctrico, sensor de posición para medir el desplazamiento articular (rotacional o lineal) y el amplificador electrónico (*electronic driver*), o servoamplificador constituido por un conjunto de microprocesadores y electrónica de potencia que se encarga de acoplar y acondicionar al motor la impedancia y señal de voltaje de baja potencia que proviene de la computadora o de un sistema mínimo digital. Evidentemente, el motor requiere mucha mayor potencia para su correcto funcionamiento.

$$\text{Servomotor} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Amplificador electrónico} \\ \text{Motor} \\ \text{Sensor de posición} \end{array} \right.$$

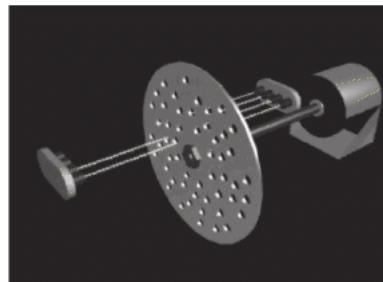
En la figura 2.1 se muestran los componentes básicos de un servomotor: motor eléctrico, sensor de posición que proporciona información del desplazamiento articular, el cual está fabricado por un disco codificado y un ensamble de dispositivos emisores de luz y fotodetectores para generar una señal de salida proporcional al movimiento (rotacional o lineal) del motor, y el amplificador electrónico encargado de realizar el funcionamiento correcto del servomotor.

Los servomotores tienen tres modos de operación: posición, velocidad y par. El **modo posición** permite mover al motor a una posición preestable-

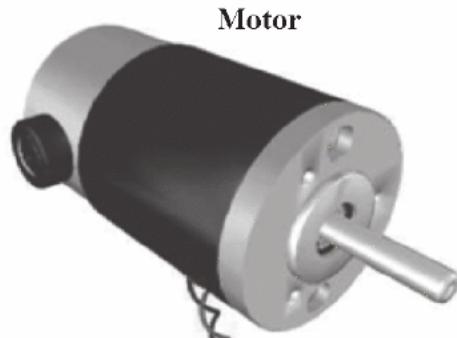
James Clerk Maxwell
(1831-1879)



En la ciudad de Edimburgo, Escocia, nació James Clerk Maxwell el 13 de junio de 1831. La principal aportación que brindó a la humanidad es su trabajo en la teoría electromagnética clásica. Las 4 ecuaciones de Maxwell resumen las leyes de la electricidad, el magnetismo y la óptica. Maxwell es considerado el científico del siglo XIX por sus múltiples aportaciones a la ciencia. A la edad de 13 años inició sus estudios universitarios, escribió su primer trabajo de mecánica a los 15, a los 25 años fue nombrado catedrático en Aberdeen y a los 40 años ocupó un puesto importante en Cambridge. Maxwell murió a la edad de 48 años el 5 de noviembre de 1879.



Encoder



Motor



Amplificador



Señal de salida

Figura 2.1 Partes básicas de un servomotor: motor eléctrico, sensor de posición y amplificador electrónico.

cida, también conocida como *set point*. Sin embargo, no puede desplazar cargas o aplicar una fuerza determinada. En este modo se emplean reguladores simples como el proporcional derivativo (PD) y proporcional integral derivativo (PID). El **modo velocidad** controla el movimiento del motor sobre una velocidad deseada. Tampoco puede ejercer fuerza como en el caso del modo de posición. Estos modos tienen la característica de ser arquitectura cerrada, es decir, no permiten programar otro tipo de controladores, por lo que sus aplicaciones en robótica se encuentran limitadas.

El **modo par** es el que se emplea en robótica y su principal característica es la arquitectura abierta, lo que hace posible evaluar experimentalmente el desempeño y robustez de cualquier estrategia de control. De esta forma, las aplicaciones en robótica se incrementan. Asimismo, permite la interacción dinámica con el sistema mecánico del robot, por lo que es posible



compensar los efectos dinámicos del robot y en consecuencia controlar la posición o desplazamiento articular. El modo par también permite el control de la trayectoria y aplicaciones más complicadas como el control de impedancia, visual-servoing, teleoperación y control de fuerza.

Las ecuaciones de Maxwell permiten deducir una ley fundamental para servomotores que determina la relación entre el campo electromagnético y el par (**torque**) aplicado. En general la generación de movimiento rotacional con respecto a su eje de giro es producido por el par aplicado, esta simple ley es la base del desarrollo de la robótica y está planteada en la siguiente ecuación:

$$\tau = kv \quad (2.1)$$

en donde τ representa el par aplicado al servomotor y sus unidades de medición son Nm (Newton-metro), k es una constante que representa la ganancia del amplificador electrónico y tiene unidades de $\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$ (Newton-metro/Volt) y la variable v es el voltaje que proviene de la computadora

representa el comando o ley de control que programa el usuario para que el robot lleve a cabo una aplicación específica. No todos los motores eléctricos cumplen con la ecuación (2.1), como son los casos de algunos motores de corriente alterna y motores de pasos, y por esta razón no forman parte de la estructura del sistema mecánico del robot, pueden ser empleados en la construcción de garras mecánicas o de herramientas específicas que se colocan en el robot para diversas aplicaciones.

El amplificador del servomotor (servo amplificador) es un sofisticado sistema electrónico cuyo objetivo principal es llevar a cabo la función de la ecuación (2.1). Posee un complejo sistema electrónico para controlar los campos electromagnéticos y procesar comandos secuenciales para la etapa de potencia que se encarga de proporcionar la señal trifásica de ali-

Ecuaciones de Maxwell

La relación entre los campos eléctricos y magnéticos, así como la propagación de ondas electromagnéticas se encuentran descritas por las ecuaciones de Maxwell. Originalmente Maxwell planteó 20 ecuaciones escritas en cuaterniones y no en formato diferencial. Actualmente las 4 ecuaciones de Maxwell incluyen las leyes de Gauss, Faraday y Ampere. Las expresiones reducidas para el caso del vacío son las siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico, ρ es la densidad de carga, ϵ_0 es la permitividad eléctrica en vacío, \vec{B} es el flujo magnético, μ_0 es la permeabilidad magnética y \vec{j} significa la densidad de corriente. Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell son fundamentales para desarrollar la ley fundamental de los servomotores:

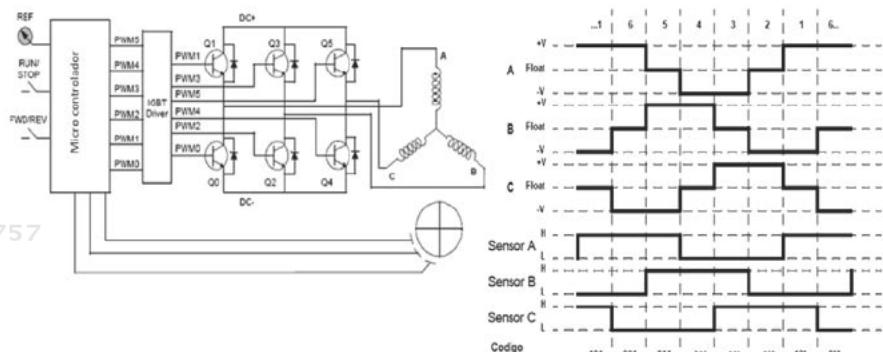
$$\tau = kv$$

Esta ecuación es la función principal que realiza un servo amplificador.

mentación directamente de la fuente de alimentación de corriente directa, con el suministro correspondiente requerido por el motor. En este punto es importante aclarar que los motores son especiales, emplean voltaje trifásico pero esto no significa que se alimentan de la línea trifásica de 220 VAC o 440 VAC. Más bien, en este caso la señal senoidal trifásica es generada en forma discreta (emulando a la señal trifásica continua) por el amplificador electrónico y en cada periodo de muestreo alimenta al motor con voltaje directo; el valor pico a pico de la señal trifásica está en función de las características del motor, por ejemplo pueden ser de 24, 40, 70 Volts, etc.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

De esta forma se envían las correspondientes fases a las bobinas (sensores magnéticos) del motor produciendo un par aplicado que permita movimiento rotacional. En la figura 2.2 se muestran el sistema mínimo, la etapa de potencia y la generación de las señales trifásicas de voltaje directo.



Fase	Sensor C	Sensor B	Sensor A	Nivel alto C	Nivel bajo C	Nivel alto B	Nivel bajo B	Nivel alto A	Nivel bajo A
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0	1
3	1	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	0	1
5	0	1	1	0	1	1	0	0	0
6	0	0	1	0	1	0	0	1	0

Figura 2.2 Amplificador electrónico del servomotor.

Cuando a un servomotor se le acondiciona mecánicamente una barra de

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

metal para formar un péndulo o eslabón, al sistema resultante se le denomina ***servo mecanismo*** e incluye el servomotor con el sistema mecánico acoplado.



2.2.1 Principios básicos de motores eléctricos

Los motores representan una tecnología bien establecida que combina eficiencia y alto desempeño para facilitar los procesos de automatización. El primer motor fue construido en 1821 por el científico e inventor británico Michael Faraday, quien colocó un magneto sobre un plato cóncavo con mercurio y conectó un polo del magneto y del plato con una batería, resultando un campo magnético que produjo movimiento circular en este sencillo motor de un polo. Posteriormente, Faraday perfeccionó este experimento. En 1832 William Sturgeon, científico británico e inventor del electromagneto, construyó un motor de cuatro polos para un asador, con lo que creó la primera cocina moderna.

Los detalles de los motores eléctricos han cambiado desde Faraday y Sturgeon. Sin embargo, los elementos fundamentales han permanecido hasta nuestros días. El movimiento creado por un motor eléctrico obedece a la fuerza de Lorentz la cual establece que cuando se coloca un conductor que

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

transporta corriente en un campo magnético, se genera una fuerza ortogonal (perpendicular) al flujo de corriente, como se muestra en la figura 2.3. La fuerza de Lorenz es también referida como la regla de la mano derecha.

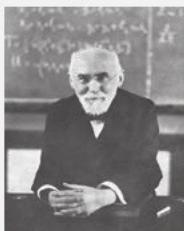
Si se coloca una simple bobina en el campo magnético como se muestra en la figura 2.3 la fuerza empuja al segmento B. Por otro lado, en el segmento A la corriente está fluyendo en dirección opuesta respecto de cómo fluye en el segmento B, lo cual da un movimiento de rotación en sentido positivo o contrario al sentido de rotación de las manecillas del reloj. Si se cambia la polaridad, entonces cambiará el sentido de la corriente por lo que la fuerza de Lorentz producirá una rotación en sentido negativo.

Michael Faraday
(1791-1867)



Físico y químico británico, Michael Faraday nació el 22 de septiembre de 1791 en la ciudad de Newington, Londres. Realizó importantes aportaciones al electromagnetismo, en particular descubrió la inducción electromagnética y construyó una máquina que llamó rotación electromagnética (motor eléctrico). Asimismo, introdujo el concepto de líneas de fuerzas para representar campos magnéticos. Con sus aportaciones ayudó a desarrollar la tecnología moderna de motores eléctricos. En 1831 demostró la existencia del campo magnético alrededor de un conductor cuando circula una corriente. En su honor el ***faradio*** (F) es la unidad de capacidad eléctrica de un conductor. Faraday falleció a la edad de 75 años el 25 de agosto de 1867 en Londres, Inglaterra.

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)



El 18 de julio de 1853 nació Hendrik Antoon Lorentz en Arnhem, Holanda. Este físicomatemático recibió el Premio Nobel de Física en 1902, las Medallas Rumford en 1908, Franklin en 1917 y Copley en 1918. Realizó sus estudios universitarios en la Universidad de Leiden, donde trabajó como profesor investigador. Realizó aportaciones en mecánica, termodinámica, hidrodinámica, teoría cinética y teoría del estado sólido. Sin embargo, sus trabajos más importantes se encuentran en el electromagnetismo, la teoría del electrón y la teoría de la relatividad. Lorentz demostró que las ecuaciones de Maxwell resultan invariantes ante las denominadas transformaciones de Lorentz. Falleció el 4 de febrero de 1928 en Haarlem.

Al proceso de alternar o comutar el sentido de la polaridad en la bobina se le denomina proceso de conmutación, y éste es el fundamento básico de los motores eléctricos.

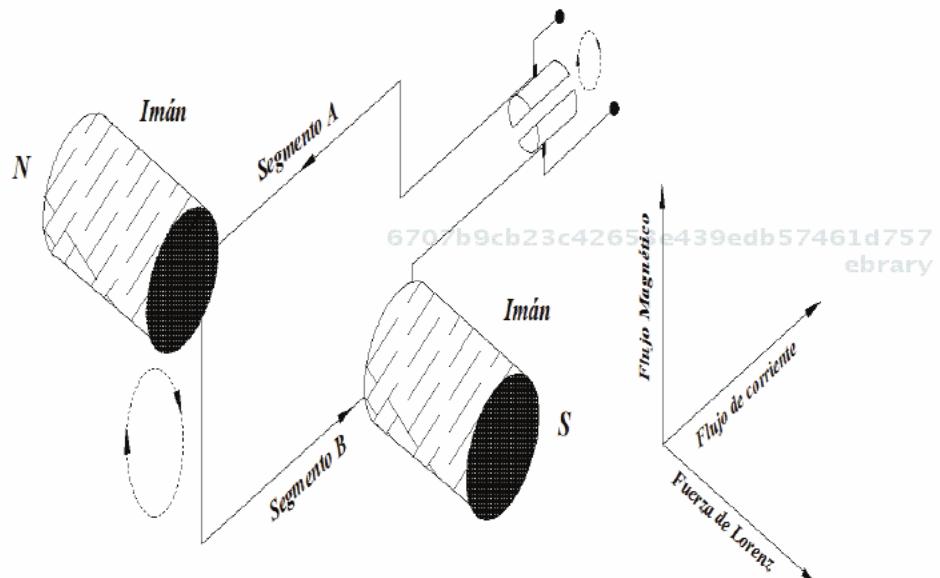


Figura 2.3 Funcionamiento básico de los motores eléctricos.

Los componentes principales de los motores eléctricos son: armadura, conmutador, rotor (embobinado) y estator.

En la figura 2.4 se muestran los elementos básicos del motor eléctrico.

A continuación se presenta una breve descripción de estos componentes:



Estator: es el casco del motor o carcasa; el estator es un magneto permanente que rodea a la flecha y la armadura. El estator se encuentra fabricado con componentes ferromagnéticos que proveen el flujo del campo magnético. Este componente no se mueve, es decir permanece estático.

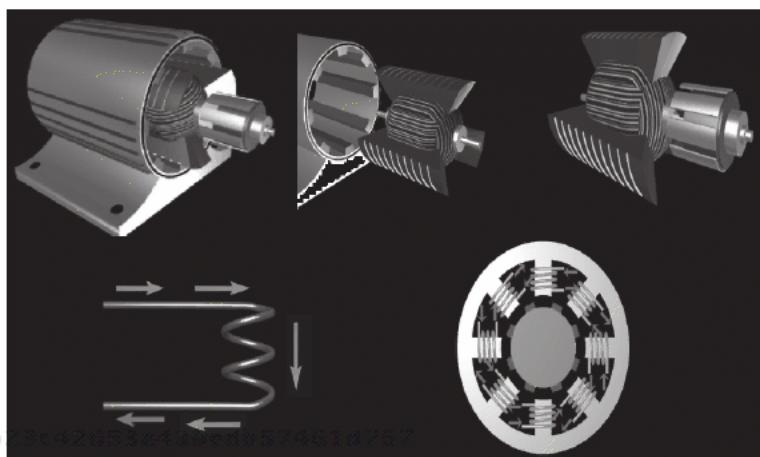


Armadura: consta de una o más bobinas montadas sobre una flecha central (rotor); la corriente es conmutada a través de esas bobinas por medio de un conmutador. Como la fuerza de Lorentz impulsa a las bobinas, la fuerza de rotación (par o torque) es transmitida a la flecha para que gire (fuerza contra-electromotriz).



Conmutador: consta de dos platos divididos en la flecha o rotor, lo que proporciona potencia a la armadura de las bobinas, además de que están conectados a la fuente de alimentación por medio de escobillas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 2.4 Componentes básicos de los motores eléctricos.

Los motores eléctricos pertenecen a una clase especial de transductores, debido a que convierten un tipo de energía (eléctrica) a otro tipo de energía (mecánica). Este concepto está relacionado con la forma de medir el rendimiento y eficiencia del motor \mathcal{E}_{sm} , la cual se define como la relación entre la energía mecánica \mathcal{E}_m y la energía eléctrica \mathcal{E}_e , es decir, $\mathcal{E}_{sm} = \frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_e}$. Idealmente esta relación debería ser del 100 %. Sin embargo, en la práctica la eficiencia de un motor está muy lejos de lo ideal y su valor depende del tipo y calidad de las componentes del motor.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Sistemas de engranaje

El diseño de robots está estrechamente relacionado con un adecuado conocimiento de engranes. En la página web del libro se presenta teoría y ejemplos sobre sistemas de engranaje, fichas técnicas, acoplamiento y tipos de engranes, sistemas satelitales, configuraciones, materiales de construcción, relación de reducción de vueltas y amplificación de fuerza, criterios de selección, forma específica de los dientes del engrane, cálculos de ingeniería y fórmulas de diseño.

También se muestran videos que ejemplifican diversas aplicaciones tanto de la robótica como en general de servomecanismos que involucran el uso de engranes.

Por lo general, los motores eléctricos producen velocidades rotacionales elevadas, por ejemplo más de 1000 revoluciones por minuto. Supóngase que se desea acoplar mecánicamente una barra de aluminio a la flecha del rotor, operar esto a esa velocidad puede ser muy peligroso e inclusive mortal. Para los propósitos de la robótica estos actuadores deben proporcionar una velocidad máxima del orden de la del brazo humano que puede girar sin fatiga un promedio de 120 revoluciones por minuto o 2 revoluciones por segundo, lo cual representa el ancho de banda de un robot.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Otra desventaja de los motores eléctricos es que no proporcionan alto par o torque necesario para desplazar cargas. Existe un dispositivo mecánico que soluciona ambos problemas, esto es, que reduce la velocidad de giro y amplifica el par; dicho dispositivo se conoce como sistema de engranaje. La gran mayoría de los robots industriales (robots convencionales) están construidos con servomotores acoplados a sistemas de engranaje.

En la figura 2.5 se muestra un sistema de engranes que está acoplado a un servomotor como reductor de velocidad. Hay que tomar en cuenta que

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

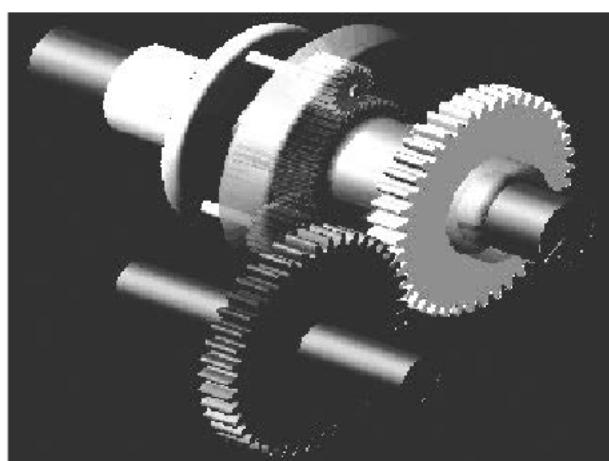


Figura 2.5 Sistema de engranes.

el sistema de engranaje complica el diseño mecánico del robot, puesto que se requiere precisión en el maquinado de los dientes del engrane para

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

evitar juego mecánico o *cascabeleo*. Además, el sistema de engranes incrementa la fricción (la cual es un fenómeno disipativo) y como consecuencia del roce mecánico entre los dientes de los engranes la energía mecánica se convierte en energía térmica, calentándose así las piezas metálicas y deteriorando y acortando el tiempo de vida del sistema de engranes, todo lo cual disminuye el desempeño del servomotor.

Hoy en día, los motores eléctricos son sistemas electromecánicos modernos y muy complejos. En la figura 2.6 se muestra la imagen de un servomotor equipado con sistema de engranaje insertado en la parte frontal del motor para disminuir la velocidad rotacional del rotor y al mismo tiempo amplificar el par o torque. Un sensor de posición (encoder) se encuentra localizado en la parte posterior de la flecha del motor para medir el desplazamiento articular.

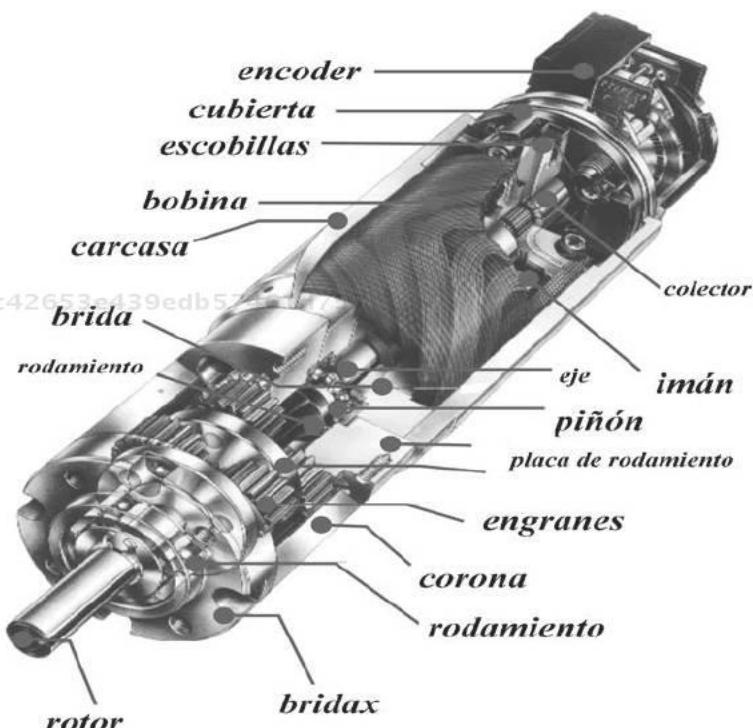


Figura 2.6 Componentes de un motor eléctrico moderno.



Tecnología de transmisión directa

Por las prestaciones y cualidades que presentan los servomotores de transmisión directa representan una atractiva opción para el diseño de robots manipuladores. Funcionan como fuente de par aplicado, lo que los hace atractivos para diseñar plataformas experimentales para realizar investigación científica en robótica y experimentación de calidad. El modo par del servoamplificador le permite funcionar en arquitectura abierta, es decir, puede ser evaluada experimentalmente cualquier estrategia de control. El encoder incremental que incluye el servomotor puede llegar a tener una resolución de 4,096,000 pulsos por revolución. En la página web del libro se presentan cálculos y detalles de ingeniería para construir robots manipuladores empleando tecnología de transmisión directa.



2.2.2 Servomotores de transmisión directa

La transmisión directa (*direct drive*) representa la nueva tecnología de la robótica, debido a las ventajas que tiene sobre los robots convencionales con sistema de engranaje. El concepto de transmisión directa fue establecido por Haruhiko Asada en 1980, y consiste en que el rotor del motor funciona como una fuente de par; aquí el sistema de engranes tradicional está completamente eliminado, por lo que desaparece el *cascabeleo* o falta de movimiento y reduce significativamente el fenómeno de fricción, comparado con los robots convencionales; la construcción mecánica es más simple y la exactitud en el posicionamiento de robots manipuladores es mejorada.

En el motor de transmisión directa, la flecha ha desaparecido y no se requiere el sistema de engranes para disminuir la velocidad de giro y amplificar el par. En la figura 2.7 se muestra la configuración del motor de transmisión directa.

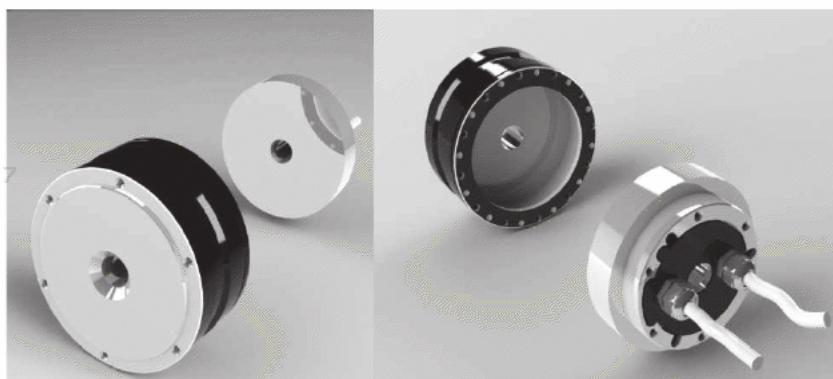


Figura 2.7 Rotor y estator del motor de transmisión directa.

El diseño de robots a través de servomotores de transmisión directa representa enormes ventajas, no sólo en sus prestaciones sino también en el sentido de que resulta clave para propósitos de realizar investigación científica de la robótica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

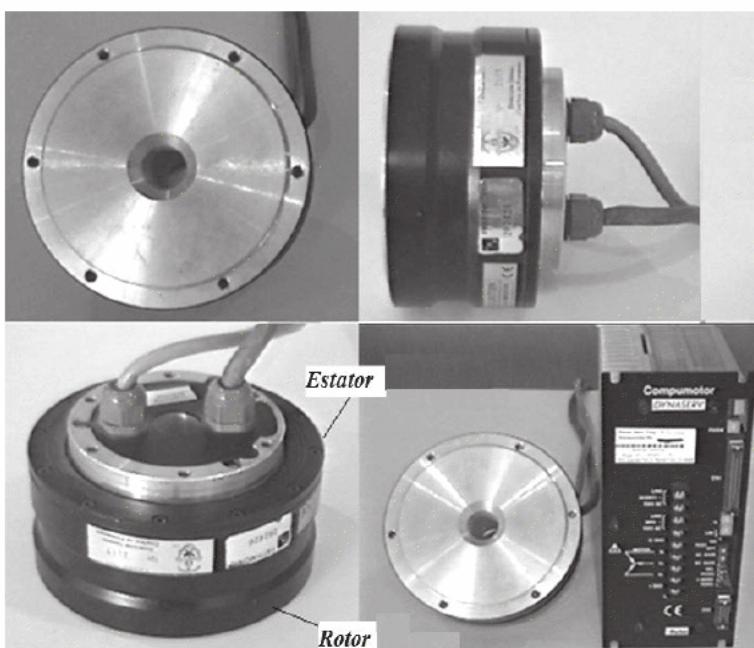
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 2.8 Motor y amplificador electrónico.

Las principales características de los servomotores de transmisión directa son las siguientes:



Arquitectura abierta para la evaluación experimental de cualquier algoritmo de control.



Funcionan como fuente de par.



No hay pérdidas en la transmisión de energía.



Reducción del fenómeno de fricción y juego mecánico.



No es necesario acoplamiento de engranes.



Proporciona alto par, sin sistema de engranaje.



No requieren calibración.



Modelado y programación sencilla.



Maquinado y construcción simple.



Transmisión directa de energía, sin perdidas.



Alta resolución del sensor de posición (encoder 4,096,000 pulsos por revolución).

El principal inconveniente de los robots convencionales es el uso de engranes, necesarios para amplificar la capacidad limitada de par de motores como el que se muestra en la figura 2.9, lo cual hace que el diseño y construcción mecánica sean mucho más complejos. Los engranes amplifican el par del motor por un factor α ; esta proporción multiplica la inercia de los rotores por un factor de α^2 , causando que la inercia del rotor domine sobre la inercia de los eslabones y trayendo como consecuencia que la dinámica no lineal del robot pueda ser ignorada. Por ejemplo, una proporción típica de engranes de 100:1 reduce el efecto inercial de los eslabones por 10^{-4} . Además de esto, la identificación paramétrica de los momentos de inercia, centros de masa y coeficientes de fricción resulta una actividad complicada, en contraste la tecnología de transmisión directa facilita este proceso.

Por otro lado, el sistema de engranes produce fenómenos de elasticidad en las uniones e introduce fenómenos de fricción, en particular los pares debidos a la fricción pueden ser de considerable magnitud como para predominar sobre la dinámica del manipulador. Por ejemplo, la cantidad de fricción presente en el robot PUMA 600 puede llegar a ser hasta del orden del 40 % del par máximo del motor.

Actualmente, los robots de transmisión directa constituyen la nueva generación de manipuladores cuya tecnología irá desplazando paulatinamente a los robots convencionales destinados a ensamblaje de alta velocidad que incluyen sistemas de engranes. En este contexto y para los propósitos de este libro, el término robot de transmisión directa se definirá de la siguiente manera:

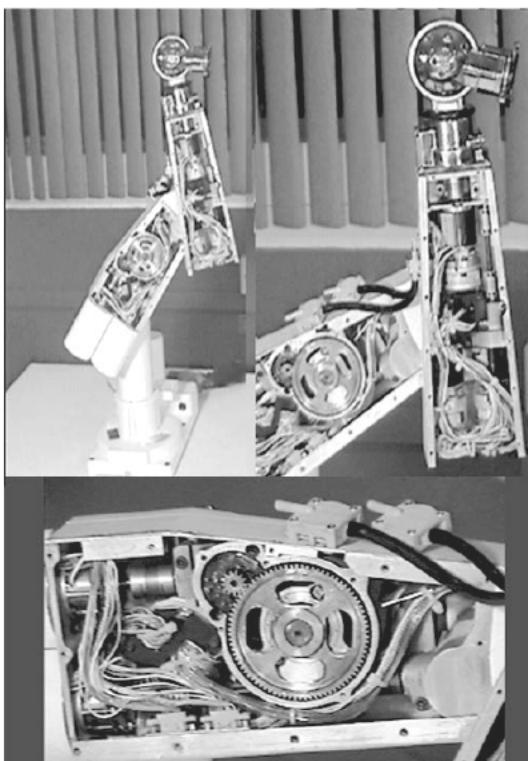
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 2.9 Sistema de engranaje del robot PUMA-200.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Un robot de transmisión directa es un manipulador multifuncional reprogramable de uso general para realizar una amplia variedad de tareas, formado por eslabones rígidos conectados en serie a través de articulaciones fabricadas con servomotores de transmisión directa.

La figura 2.10 muestra un robot de transmisión directa de tres grados de libertad con movimiento tridimensional desarrollado en la **Benemérita Universidad Autónoma de Puebla** (BUAP). Esta tecnología facilita el diseño, construcción y maquinado de los eslabones, así como la caracterización de los parámetros del modelo dinámico del robot tales como centros de masa, momentos de inercia, coeficientes de fricción, etc.

En la figura 2.11 se muestra el diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa en aplicaciones de control. El usuario puede

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA



Programación de robots manipuladores

En la página web del libro se presenta el código fuente para programar robots manipuladores de transmisión directa como los diseñados y construidos en la *Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*. La programación se realiza en lenguaje C, en tiempo real. El periodo de muestreo para los robots fue determinado en 2.5 msecg. Además se especifica la configuración del servo amplificador para que pueda operar en modo par, las características de la tarjeta de instrumentación electrónica y las rutinas que llevan a cabo la adquisición de la posición y el envío de la señal de control o par aplicado $v = \frac{\tau}{k}$. Adicionalmente se cuenta con una serie de videos experimentales en aplicaciones de control de posición, control de trayectoria, visual servoing, teleoperación,

control de impedancia, etc.

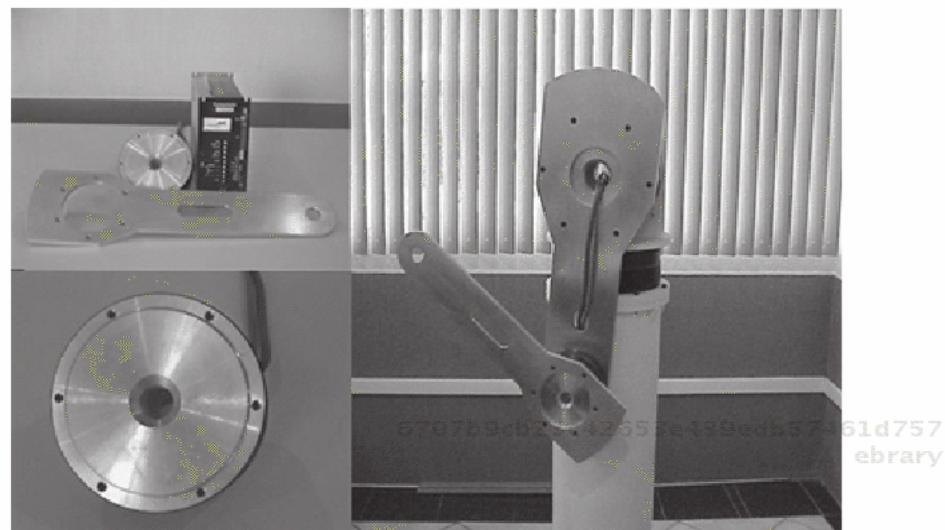


Figura 2.10 Robot de transmisión directa desarrollado en la BUAP.

implementar su estructura de control τ con el auxilio de algún lenguaje de programación, por ejemplo C, C++, C#, MatLab, etc. Por otro lado, las tarjetas de instrumentación electrónica contienen convertidores digital/analógico (DAC's) que envían al amplificador electrónico voltaje analógico v como señal de referencia del par τ , es decir, $v = \frac{\tau}{k}$, siendo k la ganancia del amplificador electrónico. De esta forma el servomotor actúa como una fuente ideal de par. El amplificador electrónico transforma la energía eléctrica (voltaje) en energía mecánica o par aplicado τ al servomotor para que produzca el movimiento de rotación o desplazamiento articular q y se mueva con velocidad de rotación o velocidad articular \dot{q} . Estas variables son adquiridas electrónicamente por FPGA (*field programmable gate array*) o contadores digitales incluidos en la tarjeta de instrumentación y enviadas a la computadora. Este ciclo se repite cada periodo de muestreo.

Debe tomarse en cuenta que la principal característica de los servomotores de transmisión directa es que funcionan como fuente de par, lo que se interpreta como **arquitectura abierta**, para que esto ocurra el servomotor debe ser configurado en modo par y operado dentro de su ancho de

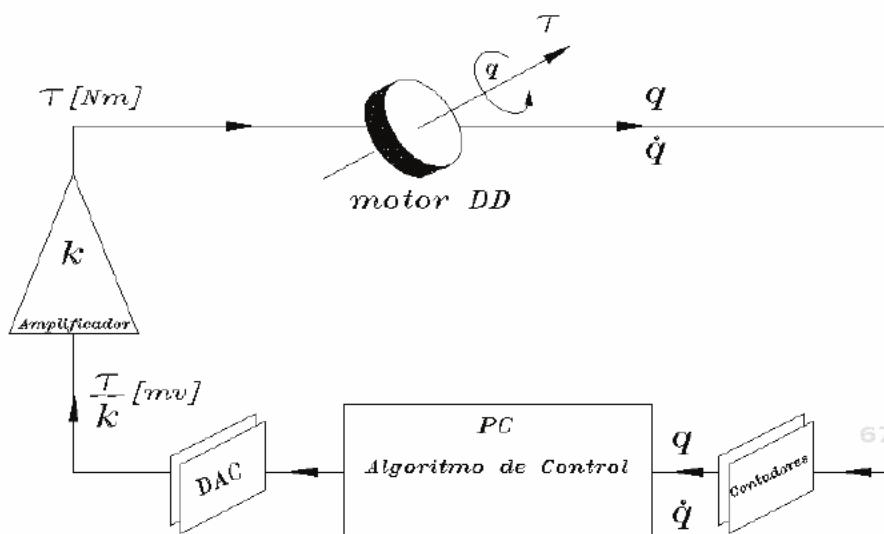


Figura 2.11 Diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa en aplicaciones de control.

banda, es decir, que la velocidad de rotación no exceda su límite máximo (dependiendo de las características del servomotor, la velocidad de corte puede tener un rango de 360 a 720 grados).

El principal beneficio que otorga la tecnología de transmisión directa se encuentra en su utilidad en la investigación y diseño de algoritmos de control para robots manipuladores. La **arquitectura abierta** es una característica intrínseca de los servomotores (*direct drive*), permite la evaluación de cualquier esquema de control y garantiza que el par calculado por la ecuación de la estrategia de control sea transferido sin pérdidas de energía al motor, es decir, que ese par aparezca físicamente con respecto al eje de giro del motor. De esta forma es posible evaluar experimentalmente la eficiencia y desempeño de los algoritmos de control diseñados. En otras palabras, la tecnología de transmisión directa se convierte en una excelente infraestructura o plataforma experimental de calidad para realizar investigación científica en control de robots.

En la figura 2.12 se muestran los componentes ferromagnéticos de cons-

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

trucción de un motor de transmisión directa. El par o torque es proporcional a la suma del flujo magnético del magneto permanente del rotor Φ_m y del flujo magnético de las bobinas del estator Φ_c . Un número grande de pequeños dientes insertados en el rotor y estator crean ciclos magnéticos que se incrementan por cada revolución del motor. Debido a que el radio del motor es grande, las fuerzas tangenciales entre el rotor y el estator producen un torque adicional.

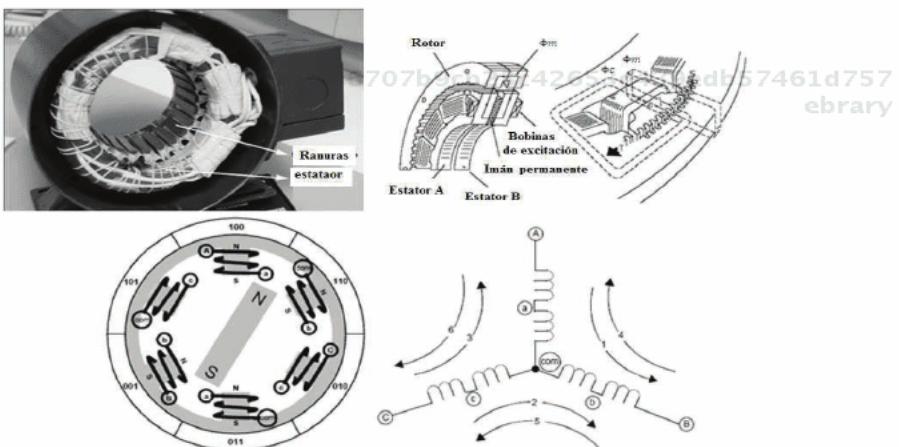


Figura 2.12 Estructura del motor de transmisión directa.

Un servomotor de transmisión directa es una fuente de par, es decir, el par que proporciona como salida se mantiene en magnitud y signo independientemente de la carga que desplace.

Un servomotor no puede proporcionar un par de magnitud infinita, en la práctica la respuesta se encuentra acotada por sus límites físicos.

La figura 2.13 muestra la respuesta de un servomotor de par aplicado τ_{aplicado} en función del $\tau_{\text{solicitado}}$. La respuesta del servomotor se ubica en el primer y tercer cuadrante. Existen dos regiones de trabajo; por ejemplo, para el primer cuadrante se tiene la **zona da saturación** y la **zona lineal**. La zona de saturación representa el límite máximo que el servomotor puede proporcionar, que en el caso de la figura 2.13 es de

10 Nm. La zona de saturación ocurre cuando el par solicitado excede al límite físico o par máximo, es decir $\tau_{solicitado} > \tau_{max}$. En este caso el par entregado es $\tau_{aplicado} = \tau_{max}$. La zona lineal es cuando $\tau_{solicitado} < \tau_{max}$, entonces $\tau_{aplicado} = \tau_{solicitado}$. De manera análoga se procede para el tercer cuadrante, en el cual hay que considerar el signo negativo tanto del par aplicado como del par solicitado.

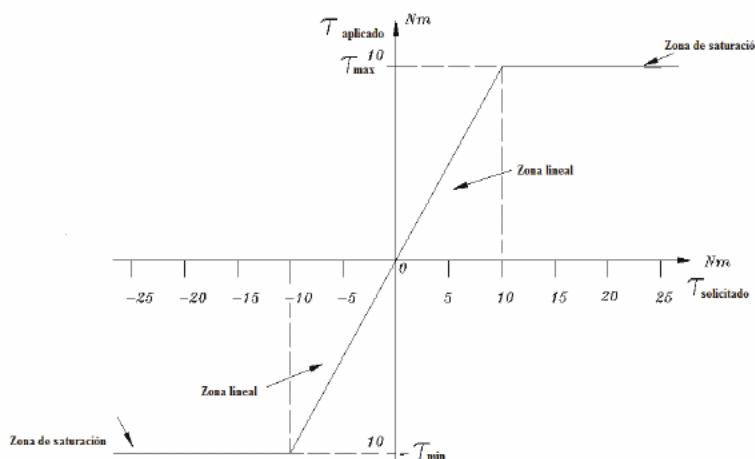
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 2.13 Zona lineal y de saturación de un servomotor.

Matemáticamente la respuesta del servomotor queda específica por la función que a continuación se describe:

$$\begin{aligned} &6707b9cb23c42653e439edb57461d757 \\ &\text{ebrary} \quad \tau_{aplicado} = \begin{cases} \tau_{max} & \text{si } \tau_{solicitado} > \tau_{max} \\ \tau_{solicitado} & \text{si } \tau_{min} \leq \tau_{solicitado} \leq \tau_{max} \\ \tau_{min} & \text{si } \tau_{solicitado} < \tau_{min} \end{cases} \quad (2.2) \end{aligned}$$

Es recomendable que el servomotor trabaje siempre en la región lineal, debido a que la zona de saturación significa que el par solicitado es mayor que los límites físicos del servo, causando vibración mecánica, dinámica no modelada y juego mecánico, además de que la velocidad de rotación tendría una magnitud superior al ancho de banda. Por tanto es clave diseñar estrategias de control con acciones acotadas en los límites físicos del servomotor.

Por otro lado, también influye la velocidad de rotación del servomotor la

cual deberá permanecer dentro de su ancho de banda (véase figura 2.14). Trabajar el servomotor en la zona lineal y dentro de su ancho de banda son condiciones necesarias para que éste funcione como fuente de par. El ancho de banda de un servomotor es el número de revoluciones por segundo que puede girar (velocidad rotacional $\dot{\theta}$) para mantener el par aplicado. Fuera de ese límite el par cae en magnitud y por lo tanto se pierde la ventaja de funcionar como fuente de par.

En la figura 2.14 se muestra el ancho de banda de varios modelos de servomotores de transmisión directa de la compañía Parkercompumotor.¹⁷⁵⁷
^{ebrary} Obsérvese que para el modelo DM1200A con capacidad de 200 Nm se tiene un ancho de banda muy reducido: 0.12 rps o $43.2^\circ/\text{seg}$; si el servomotor llegará a tener una velocidad de rotación mayor a ese límite, por ejemplo $180^\circ/\text{seg}$, entonces el par aplicado del servomotor decae de 200 Nm a 120 Nm. Para el modelo DM1050A el ancho de banda es de 0.5 rps o $180^\circ/\text{seg}$.

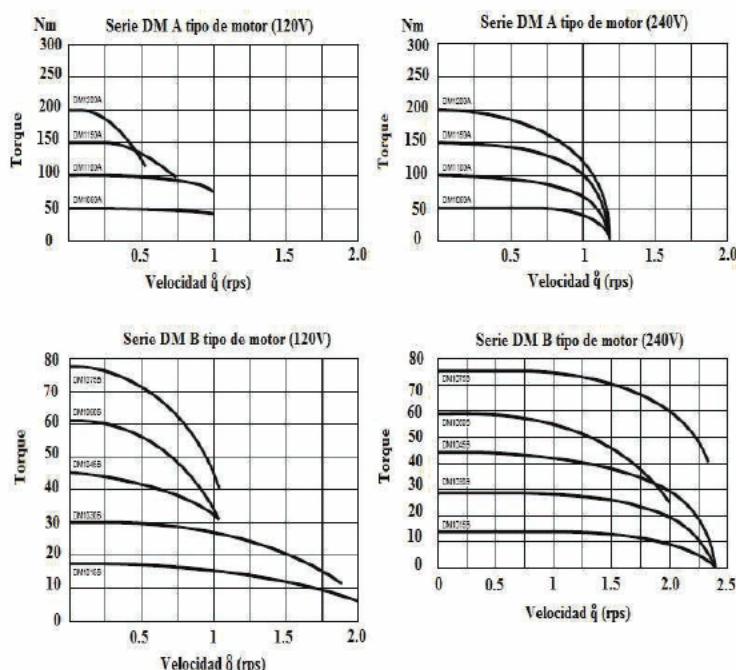


Figura 2.14 Ancho de banda de servomotores de transmisión directa.

En la tabla 2.1 se presenta una comparación cualitativa entre un servomo-

tor de transmisión directa y uno con escobillas (*brush*), mientras que en la tabla 2.2 se muestra el resumen de diversos modelos de servomotores de transmisión directa, resaltando la resolución del encoder, peso, máximo rango de velocidad, capacidad en torque o par aplicado, desempeño, etc.

Actualmente los servomotores de transmisión directa se encuentran en la tercera generación (DrvGIII) y se les denomina como *intelligent drive*; representan una mejora sustancial en desempeño y características con respecto a las versiones anteriores. Ahora incluyen un ambiente de programación para configurar el modo de trabajo. Dicho ambiente facilita la configuración de trabajo en modo par, el cual proporciona que el servomotor funcione como fuente de par, requisito necesario para implementar nuevas estrategias de control.

En la figura 2.15 se muestran las versiones DrvGIII y DrvGII de los servomotores de transmisión directa de la compañía Parkecompumotor.



Figura 2.15 Tercera y segunda generación de servomotores de transmisión directa.

Tabla 2.1 Análisis comparativo entre un servomotor de transmisión directa y uno de escobillas.

Características	Servomotor de transmisión directa	Servomotor con escobillas (brush)
Conmutación	Electrónica con retroalimentación de sensores de posición	Conmutación por escobillas
Mantenimiento	No requiere	Mantenimiento periódico
Relación velocidad/torque	Mantiene el torque dentro del ancho de banda	Ancho de banda muy limitado; cuando la velocidad aumenta, el fenómeno de fricción reduce el torque por las escobillas
Eficiencia	Alta	Moderada
Inercia del rotor	Inercia baja; debido al imán permanente del rotor mejora la respuesta dinámica	Inercia muy alta que reduce la respuesta dinámica
Juego mecánico	No	Si
Generación de ruido eléctrico	Muy bajo	Alto, debido a la generación de arcos eléctricos por las escobillas
Costos de fabricación	Alto	Bajo
Control	Arquitectura abierta: robusto y eficiente	Arquitectura cerrada: esquemas de control tradicionales PD y PID
Fricción	Muy baja	Muy alta por las escobillas
Fuente de par	Fuente ideal	No funciona como fuente de par

A continuación se presentan los aspectos tecnológicos y operativos de los sensores de posición que vienen insertados en el robot.

**Tabla 2.2 Datos técnicos de servomotores
de transmisión directa.**

Características	Indicador	DM1050A	DM1004C
Desempeño	<ul style="list-style-type: none"> ■ Repetitividad ■ Precisión 	<ul style="list-style-type: none"> ■ ± 2 arc-seg (0.00055°) ■ ± 25 arc-seg (0.0069°) 	<ul style="list-style-type: none"> ■ ± 2 arc-seg (0.00056°) ■ ± 60 arc-seg (0.016662°)
Alimentación	<ul style="list-style-type: none"> ■ Volts ■ Rango ■ Corriente 	<ul style="list-style-type: none"> ■ 110/220 VAC, 50/60 hz ■ 10% a 15% ■ 20 A max. 	<ul style="list-style-type: none"> ■ 110/220 VAC, 50/60 hz ■ 10% a 15% ■ 5 A max.
Torque	Par máximo	50 Nm	4 Nm
Entrada analógica	Comando	$\pm 10V$	$\pm 10V$
Peso		14.5 Kg	3 Kg

2.3 Sensores



En robótica los sensores de posición más utilizados son los potenciómetros, tacómetros, resolvers y encoders. Sin embargo, la naturaleza analógica de los potenciómetros, así como problemas de temperatura, precisión y no linealidad los hacen poco atractivos e inconvenientes. Además, el tacómetro y el resolver no son viables por su tamaño y peso. El tacómetro proporciona información de la velocidad, y es posible obtener la posición por medios de integración numérica. Por otro lado, los resolvers no tienen adecuada resolución y pierden competencia ante la tecnología optoelectrónica de los encoders.

A continuación se describen los principales sensores de posición en robótica.



2.3.1 Resolvers

Un resolver es un dispositivo sensor que mide el desplazamiento articular (posición angular o lineal) integrado dentro de los servomotores. El resolver está acoplado mecánicamente a la flecha o rotor del servomotor y proporciona como señal de salida un voltaje analógico proporcional a la posición de desplazamiento articular.

La figura 2.16 muestra el esquema general de un resolver. Obsérvese que la estructura mecánica es muy similar a la de un motor.

Un resolver está formado por un estator, un rotor y un transformador giratorio sin escobillas (*brushless resolver*). La generación de flujo magnético distribuido en forma de onda senoidal realiza el movimiento de rotación entre el rotor y el estator; la respuesta de salida es un voltaje senoidal analógico.

Cojinete de balines

Tapa anterior del rotor

Cilindro

Lámina

Rotor

Tapa posterior del rotor

Cojinete de balines

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

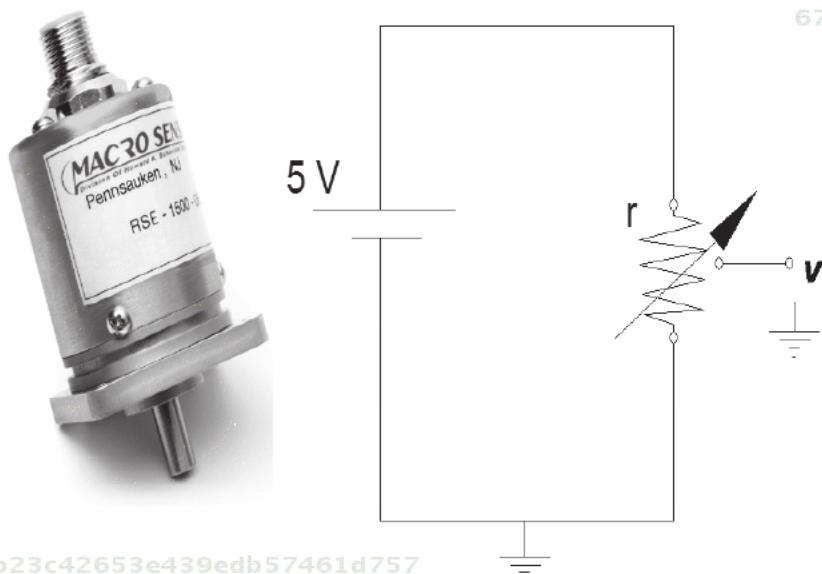
Figura 2.16 Resolver: sensor de posición analógico.

Actualmente, el empleo del resolver como sensor de posición en robots manipuladores es cada vez poco frecuente, debido a sus características analógicas, volumen y peso, lo que se convierten en desventajas.



2.3.2 Potenciómetros

Generalmente, los potenciómetros son dispositivos eléctricos que se emplean como divisores de voltaje para medir la posición o desplazamiento articular de los servomotores. La respuesta de salida representa la posición absoluta del rotor y son calibrados con base en el número de vueltas que puedan realizar. En la figura 2.17 se muestra el esquema básico de un potenciómetro como divisor de voltaje.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 2.17 Potenciómetro como sensor de posición.

Los potenciómetros son resistencias variables fabricadas con un sustrato o película delgada de material resistivo. Un pivote o cursor está acoplado mecánicamente al potenciómetro para que pueda ser desplazado a lo largo de la superficie de la película resistiva, de tal forma que el valor de la resistencia cambia proporcionalmente a la distancia recorrida y de esta manera el voltaje de salida cambia proporcionalmente al desplazamiento articular del servomotor.

Dentro de las **ventajas** que presentan los potenciómetros se encuentran

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

que son dispositivos muy populares, es decir, ampliamente documentados, no son costosos, ni requieren acondicionamiento especial de la señal de respuesta. Entre las **desventajas** se tienen sus limitaciones de precisión debido a las fluctuaciones de la temperatura. Por lo general tienen un rango de variación grande que puede ir hasta el 30%, lo cual depende de la calidad del sustrato y materiales de fabricación. Otros aspectos que afectan a los potenciómetros son las vibraciones mecánicas y el uso continuo, puesto que desgastan y degradan sus características como sensor de posición.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



2.3.3 Tacómetro

Los tacómetros son dispositivos acoplados mecánicamente al servomotor y proporcionan un voltaje proporcional a la velocidad de giro del rotor. La técnica común es colocar un magneto sobre la flecha rotatoria. Cuando el magneto gira y pasa por una bobina, entonces se induce corriente proporcional a la velocidad angular; cada rotación de la flecha genera un pulso en la bobina. El periodo de rotación t se puede determinar midiendo el tiempo entre pulsos, por lo tanto la frecuencia f se obtiene como el inverso del periodo, $f = \frac{1}{t}$. En la figura 2.18 se muestran algunos ejemplos de tacómetros.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

La posición del servomotor puede obtenerse por integración numérica de la velocidad proporcionada por el tacómetro, por ejemplo:

$$q_k = q_{k-1} + h\dot{q}_k,$$

donde q_k es la posición en tiempo de muestreo k -ésimo, q_{k-1} es la posición en el tiempo de muestreo k -ésimo-1 o muestreo anterior, h es el periodo de muestreo y \dot{q}_k es la velocidad del rotor en el tiempo de muestreo k -ésimo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Figura 2.18** Tacómetros.

2.4 Encoders

Los sensores digitales de posición que emplean los robots son encoders construidos con tecnología optoelectrónica y se les denominan encoders ópticos los cuales a su vez se clasifican en *incrementales* y *absolutos*.

Un encoder óptico consta básicamente de una fuente de luz conformada por un arreglo de diodos LEDs que se encuentran enfrente de un disco giratorio con ranuras. En la parte posterior de este disco se coloca una tarjeta con rendijas que hacen la función de guía de luz. La posición de las rendijas sirve como código de la luz para ser detectada por elementos fotosensibles. El disco giratorio está acoplado en el rotor del servomotor para que gire de la misma forma y por lo tanto el encoder óptico produce como señal de salida un tren de pulsos proporcional al ángulo de giro del rotor.

En la figura 2.19 se muestra un ejemplo de un encoder óptico. Los diodos LED como fuente de luz emiten rayos infrarrojos con longitud de onda $\lambda=7000 \text{ A}^\circ$ que pasan por las ranuras del disco giratorio hacia la tarjeta

con rendijas que codifica los haces de luz y los guía hacia la etapa de foto-transistores o fotodioidos que se encuentran en el respaldo de esta tarjeta, lo que genera una onda cuadrada digital que se acopla directamente a un microprocesador o interfaz electrónica de un sistema mínimo para ser empleada por algoritmos de control.

Las ranuras se encuentran en el disco giratorio y se colocan de tal forma que la luz incida directamente sobre los elementos fotosensibles. Al girar el disco interrumpe el haz de luz, cambiando de estado la salida, de ahí que al disco se le conozca como *disco fotointerruptor* o configuración 757 ebrary en *interruptor de haz de luz*.

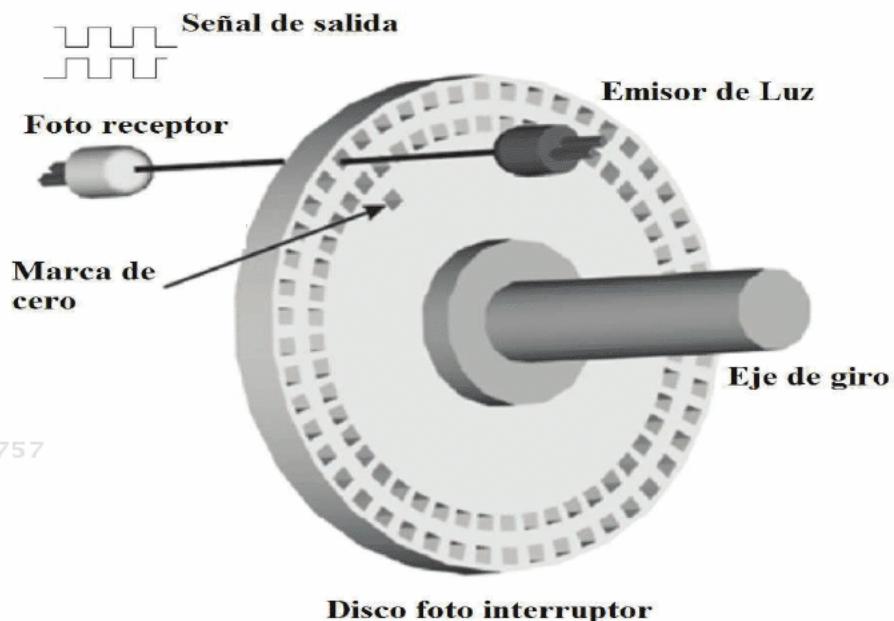


Figura 2.19 Sensor de posición optoelectrónico (encoder óptico).

Sin embargo, hay que tomar en cuenta que la luz emitida por los diodos LED varía con la temperatura: la pendiente de la luz de los diodos LED se declina conforme aumenta la temperatura, y el método más común para compensar esta caída es colocar dos sistemas con dispositivos fotosensibles y producir una señal teniendo una diferencia de fase eléctrica de 180

grados, luego esta señal es procesada por un comparador electrónico para obtener una onda rectangular estable como respuesta de salida.

Algunos encoders en lugar de usar orificios o ranuras emplean dibujos negros codificados sobre el disco giratorio; en este caso el disco es de un material transparente y tiene la apariencia de un negativo de fotografía. En la figura 2.20 se muestran algunos patrones típicos empleados en encoders ópticos. Estos patrones codificados pueden realizarse por medio de programas CAD como AutoCad, CATIA y SolidWorks.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

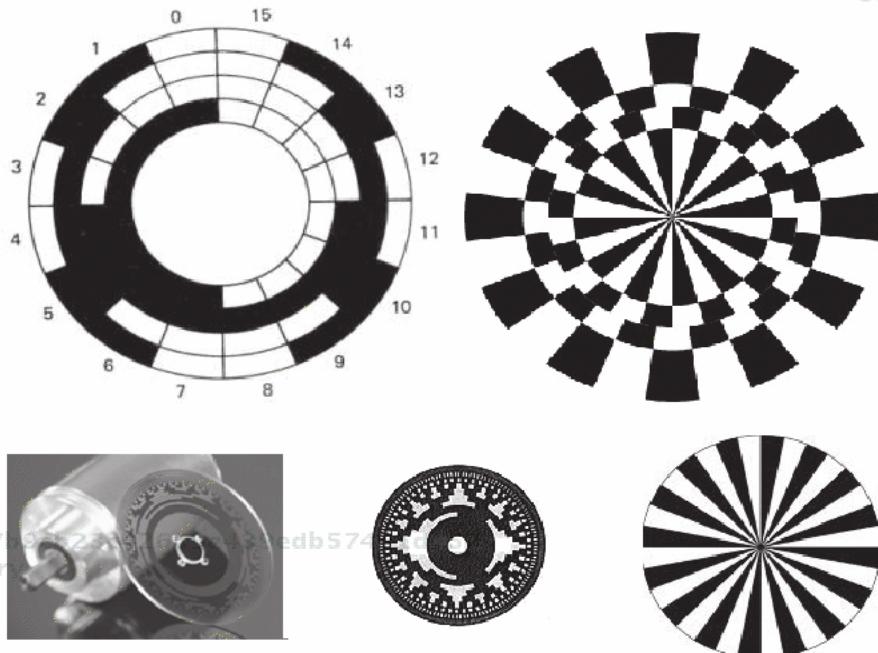


Figura 2.20 Ejemplos de patrones de encoders codificados.

Otra forma de codificar encoders es a través del uso de marcas o franjas reflectivas montadas sobre el disco giratorio, las cuales son figuras concéntricas en blanco y negro. El disco será iluminado por un fotodiodo LED que emite luz infrarroja; al girar el disco, la luz es reflejada por las franjas reflectivas (color blanco) hacia el fototransistor y es interrumpido por los segmentos con franjas negras, lo que causa que el fototransistor commute y produzca un tren de pulsos como salida directamente pro-

porcional al desplazamiento rotacional del servomotor. El montaje de los fotodispositivos es complejo debido a que requieren de un espacio adecuado para ser instalados sobre el disco giratorio, el cual también deberá ser acoplado a la flecha del motor y no obstruir el movimiento del disco.

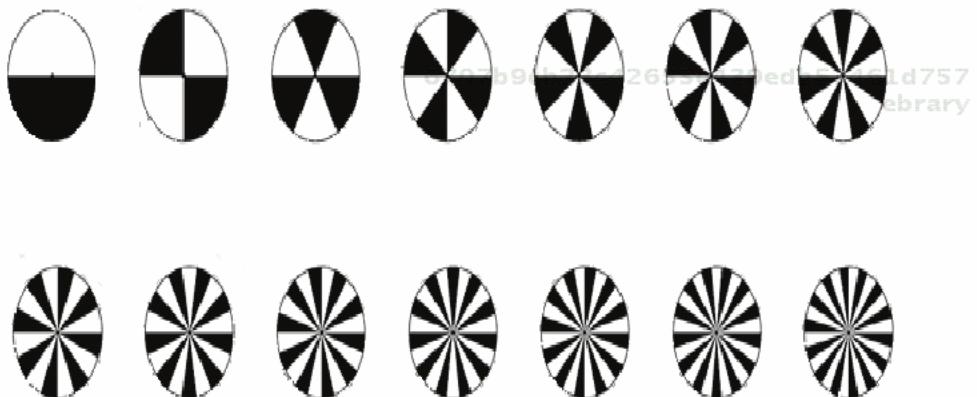


Figura 2.21 Franjas reflectivas para encoders ópticos.

La resolución del encoder está determinada en función de los ciclos por revolución (**CPR**). Entre más alta sea la resolución mucho mejor será la calidad del encoder. Para el caso de encoders que usan franjas reflectivas se tiene que las rayas negras sobre el disco son mucho más pequeñas, lo cual representa dificultades para el fototransistor para diferenciar entre las marcas blancas y las negras, por lo que pueden ocurrir errores en la señal de salida. La alta resolución mejora la exactitud del encoder, lo que significa que el encoder puede ser muestrado a mayor frecuencia, y el sistema de control es capaz de responder más rápido y con mayor exactitud.

Las siguientes son algunas ventajas que representa usar encoders ópticos:



Alta resistencia a las condiciones ambientales tales como humedad, vibraciones e impactos.



Se pueda usar en un rango amplio de temperaturas.



Capacidad de transmitir señales a grandes distancias.



Miniaturizable o tamaño apropiado para las características del servomotor.



Alta resolución en la lectura de la posición a medir.

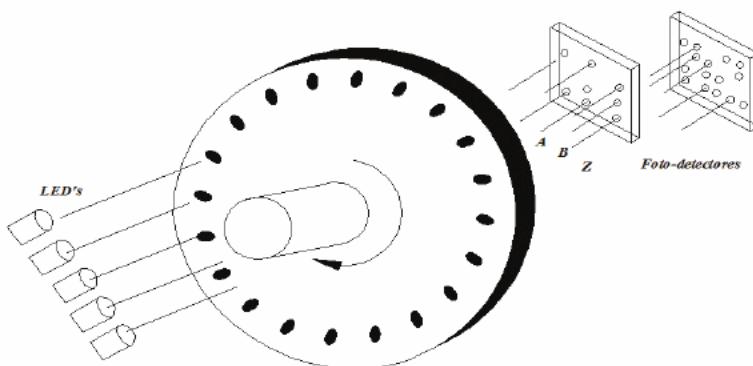
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

2.4.1 Encoder incremental

El encoder incremental también se conoce como *encoder relativo*. En la figura 2.22 se muestra un encoder incremental en la configuración de interruptor de haz de luz. Enfrente del disco giratorio se encuentra el arreglo de diodos LED cuya luz emitida pasa a través de las ranuras del disco rotatorio; los rayos resultantes pasan por las rendijas A, B y Z para ser detectados por los elementos fotosensibles. La luz que pasa por las rendijas A y B tiene una diferencia de fase de 90 grados. La salida es una onda rectangular con la misma diferencia de fase de 90 grados.

La salida del encoder incremental son pulsos que son proporcionales al ángulo de rotación. Por cada fracción de desplazamiento rotacional en la flecha del servomotor, el encoder incremental cambia su salida de bajo hacia alto o viceversa. La posición medida por el encoder es relativa a la última posición o posición anterior, por eso el encoder incremental se conoce también como encoder relativo. Los pulsos no representan el valor absoluto de la posición, en tal caso el valor absoluto de la posición viene dado por acumular los pulsos de salida; la contabilidad de esos pulsos se lleva a cabo por un circuito electrónico contador de pulsos.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Figura 2.22** Encoder óptico con índice Z.

Una forma de mejorar el desempeño de los encoders incrementales que emplean franjas reflectivas es a través de los encoders de cuadratura. La mejora consiste en dos aspectos: primero proporciona la dirección de rotación o sentido de giro del movimiento, es decir, indica si el desplazamiento rotacional tiene dirección negativa (en el sentido del giro de las manecillas del reloj) o positiva (en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj); esto es importante para detectar el signo del error de posición. La segunda mejora se encuentra en duplicar la resolución, puesto que dos estados son generados por cada marca del encoder, por lo tanto se dispondrá de mayor exactitud en el posicionamiento.

Los encoders de cuadratura también pueden usar dos sensores arreglados sobre el disco giratorio, de tal forma que cuando un sensor detecta el límite blanco-negro de la franja causará un cambio de estado, el otro sensor estará exactamente en medio de la otra marca, lo que asegura que responderá con un estado estable conforme el primer sensor cambie de estado. La salida resultante de cada sensor estará fuera de fase 90 grados. En la figura 2.23 se ejemplifica el arreglo del encoder incremental de cuadratura y las formas de onda de los sensores A y B. Una marca negra produce un pulso alto en la salida del sensor (una transición de bajo hacia alto). Una marca blanca produce una salida en bajo (transición de alto

hacia abajo). Conforme el disco se mueva en dirección de las manecillas del reloj, si *B* cambia de alto hacia abajo, después *A* cambiará de alto hacia bajo, o si *B* cambia de bajo hacia alto, después *A* cambiará de bajo hacia alto.

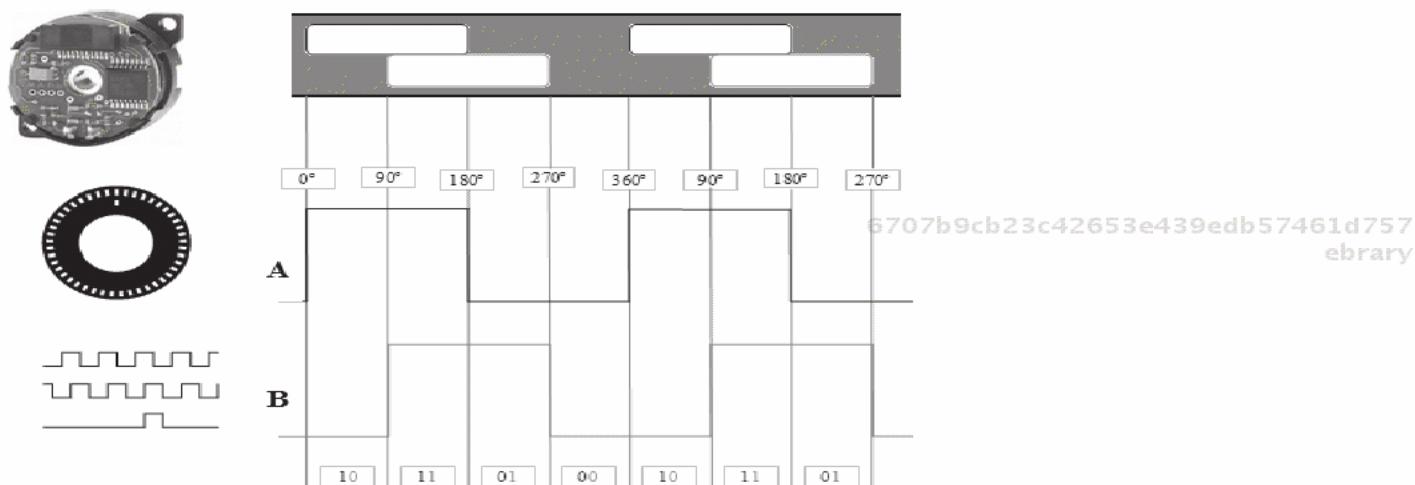


Figura 2.23 Encoder de cuadratura.

Deben considerarse las siguientes características para usar un encoder incremental

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Es necesario tomar precauciones sobre el ruido de la señal del encoder, ya que se acumula el ruido en el contador.

Cuando la fuente de alimentación se desconecta, es imposible mostrar la posición previa, aun si inmediatamente se conecta la fuente.

Los encoders incrementales tienen dos canales *A* y *B* que están fuera de fase 90 grados, de esta forma es posible determinar la dirección de giro. Hay también un canal opcional llamado canal *Z* cuya salida proporcionará un pulso por cada 360 grados. La utilidad de este canal consiste en detectar el número de vueltas que realiza; además de que también es

usado como índice de referencia para ajustar el servomotor a la posición cero (*posición de casa*) o al punto inicial.

En la figura 2.24 se presentan datos técnicos de un encoder incremental de la compañía Bourns. Este encoder tiene una resolución modesta: $360^\circ/256 = 1.406$ grados, lo que significa que no puede detectar movimientos menores de 1.4006 grados. Un encoder con estas características puede utilizarse en control de robots donde la aplicación no requiera una exactitud menor a esa resolución, de lo contrario el robot no podrá posicionarse en la posición especificada, debido a que la exactitud no se puede mejorar,
ebrary 4757

Observe que el rango de temperatura de este encoder incremental tiene un amplio rango de -40°C a 125°C , lo que es adecuado para diversas condiciones ambientales.



Datos	Características
Encoder	Incremental
Resolución	256 pulsos/rev
Tipo de salida	Cuadratura
Alimentación	3.5 a 5 VDC
Temperatura	-40°C a 125°C
Fabricante	Bourns

Figura 2.24 Especificaciones técnicas de un encoder incremental.



2.4.2 Encoder Absoluto

El encoder absoluto, como su nombre lo indica, detecta la posición absoluta de desplazamiento del servomotor. La salida del encoder absoluto son códigos binarios digitales que se pueden encontrar en formato de código binario decimal (binary-coded decimal, BCD) o en código binario cíclico

(gray code). Debido a que la salida del encoder absoluto está en código binario, éste no acumula errores como sucede con el encoder incremental. El encoder absoluto puede medir la posición en cualquier punto de una rotación completa, sin perder la posición previa.

La estructura básica del encoder absoluto es la misma del encoder incremental en configuración fotointerruptor o en patrones codificados. En la figura 2.25 se muestra el patrón de ranuras del disco giratorio.

El número de ranuras determina el número de bits y se encuentran conformadas en bandas de círculos concéntricos distribuidos desde el perímetro hasta el centro del disco giratorio formando un patrón codificado. Los círculos más grandes representan los bits menos significativos, y los círculos más cercanos al centro del disco son los bits más significativos.

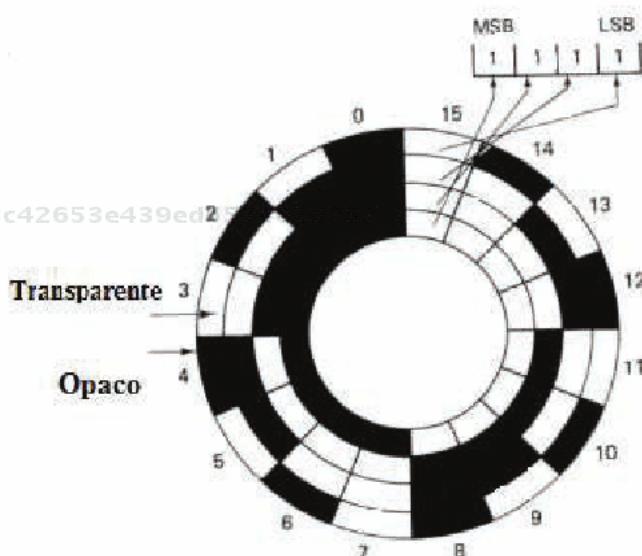


Figura 2.25 Encoder absoluto.

Tabla 2.3 Señal de salida del encoder absoluto.

Número	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

La desventaja del encoder absoluto radica en la dificultad de fabricarlo en tamaño miniatura y producirlo a bajo costo. El número de cables en la señal de salida se incrementan en función directa del número de bits. La principal ventaja es que no pierde la posición previa si la fuente de alimentación se desconecta, es decir, siempre detecta el valor de la posición correcta en función del tiempo.

Una comparación entre el encoder absoluto con el incremental radica principalmente en su tamaño. El encoder absoluto aumenta su volumen en forma proporcional con el número de bits, lo que se traduce en cableado. En contraste, la salida del encoder incremental es una serie de pulsos y el conector que proporciona la información de la posición no interviene en aumentar el volumen. En la actualidad los encoders incrementales son

los que más se emplean en robótica.

En la figura 2.26 se presentan datos técnicos de un encoder incremental de la compañía Honeywell S & C. Obsérvese que la resolución se encuentra indicada como 4 CPR y que está limitado a girar 30 rpm, lo cual significa que no puede girar más allá de 10,800 grados.



Datos	Características
Encoder	Absolute
Resolución	4 CPR
Velocidad máx	30 rpm
Tipo de salida	Código gray
Fabricante	Honeywell S & C

Figura 2.26 Especificaciones técnicas de un encoder absoluto.



2.4.3 Encoder magnético

Los métodos no ópticos de monitoreo de posición de servomotores tienen la ventaja de ser inmunes al ruido creado por la luz de los diodos LED. Por otro lado, los sensores puramente mecánicos tienen baja exactitud y un tiempo de vida corto debido a la degradación continua en sus componentes mecánicas. El empleo de la teoría electromagnética representa una opción diferente a la optoelectrónica para el diseño de encoders.

Los encoders magnéticos constan de una resistencia magnética colocada sobre el perímetro o a un costado del disco magneto. En la figura 2.27 se muestra un disco y una resistencia magnética colocados en sus dos formas posibles. Una forma de colocación consiste en poner a la resistencia magnética sobre una de las caras exteriores del disco para magnetizar el círculo exterior del disco. La otra forma posible es magnetizar uno de los

lados del disco para colocar una resistencia magnética sobre el perímetro del disco.

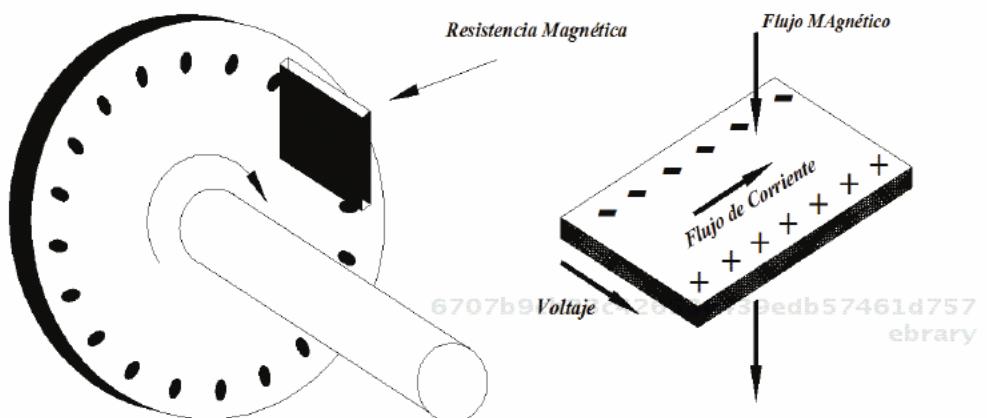


Figura 2.27 Encoder magnético.

La resistencia magnética es un transductor que convierte el campo magnético en corriente eléctrica, y cuya resistencia eléctrica varía en función de la intensidad del campo magnético aplicado. La resistencia magnética tiene una resistencia r cuando la corriente i fluye en dirección de la flecha (véase la figura 2.27), r disminuye cuando el campo magnético H es aplicado en ángulo recto a la dirección de la corriente i . Con esto es posible obtener una señal de salida correspondiente a la rotación del rotor por colocar la resistencia magnética que corresponda al patrón de magnetización del disco o del tambor.

A este principio se le denomina efecto Hall en honor a Edwin Hall, quien en el año de 1879 descubrió que cuando un conductor transporta carga genera un pequeño voltaje potencial en ángulo recto (transversal) al campo magnético y a la dirección del flujo de corriente, como se muestra en el esquema derecho de la figura 2.27.

La desventaja que presentan los encoders magnéticos es que funcionan incorrectamente en ambientes donde existen problemas electromagnéticos o flujo magnético, ya que contaminan la respuesta del encoder magnético.

Es necesario tomar precauciones para aislar niveles de ruido ambiental, lo cual puede lograrse utilizando malla protectora o cable trenzado.



2.4.4 Aspectos importantes de los encoders

La selección de encoders ópticos depende de la aplicación específica. Sin embargo, es conveniente tomar en cuenta las siguientes consideraciones: resolución y precisión de la posición; tamaño del encoder para propósitos de acondicionamiento mecánico, de tal forma que el rotor del servomotor permita acoplamiento mecánico; diferencia de fase de la salida; sensitividad al medio ambiente, cambios climáticos, polvo, condensación de agua (lugares húmedos o cálidos). Cuando el nivel de la salida es compatible con TTL, *lógica transistor a transistor (transistor-transistor logic)*, la fuente de voltaje por lo general es 5 volts, por lo que la salida es fácilmente afectada por ruido ya que son contaminados en lugares donde hay ruido ambiental; en este caso se deberá incorporar circuitos aisladores de ruido. En acoplamientos mecánicos las flechas del encoder y del rotor deberán estar bien alineadas, la flecha del rotor no deberá estar desbalanceada, ya que degrada la exactitud y acorta la vida del encoder. Es importante destacar que la vibración de máquinas se transmite a la flecha de servomotor y puede producir pulsos de salida del encoder cuando no hay movimiento.

Los encoders incrementales son de bajo precio; no registran la posición absoluta después de que la fuente de alimentación ha sido desconectada, por lo tanto pueden utilizarse en aplicaciones donde la pérdida de energía no es importante. Los encoders incrementales son adecuados para la mayoría de las aplicaciones ya que pueden rotar y producir pulsos como sea necesario, siempre y cuando tengan la instrumentación electrónica para almacenar y contabilizar números muy grandes. En contraste, los encoder absolutos con código binario o código gray pueden leer la posición dentro de una rotación y por lo tanto no son adecuados para múltiples rotaciones. El encoder óptico incremental genera pulsos por rotar el disco

giratorio entre la luz que emiten los diodos LED y la luz que reciben los elementos fotosensibles. La salida serán pulsos que sirven para determinar el desplazamiento articular. A la cantidad total de pulsos para obtener el desplazamiento a través de un encoder incremental se le denomina odometría (*odometry*).

Hay que tener cuidado de seleccionar un número alto de pulsos por revolución, ya que esto significa alta exactitud y resolución. No siempre es la mejor opción la selección de encoders con un número alto de pulsos por revolución, puesto que esto implica un mayor precio y altas frecuencias en las salidas para una velocidad dada en el rotor del servomotor. La gran mayoría de los encoders están limitados a 100 khz en su frecuencia de salida.

Los encoders magnéticos son operados por flujo magnético, por lo tanto cuando se emplean en lugares donde hay fenómenos electromagnéticos tienen mal funcionamiento, por tanto se deben tomar en cuenta consideraciones como niveles de ruido ambiental y seleccionar alambres eléctricos trenzados con blindaje especial o malla protectora de ruido para transmitir señales a grandes distancias. El encoder magnético y el encoder óptico tienen el mismo principio para la producción de la señal de salida, no obstante tienen diferente estructura interna como detectores de posición.

Es común el empleo de los encoders ópticos (incrementales y absolutos) y los encoders magnéticos para obtener señales de velocidad, la técnica más usada es conocida como diferenciación numérica de la posición (método de Euler), por ejemplo si q_k representa la posición proporcionada por el encoder en el estado de muestro k -ésimo y q_{k-1} es la posición en el estado de muestreo k -ésimo anterior, entonces la velocidad de movimiento del rotor \dot{q}_k está dado por $\dot{q} = \frac{q_k - q_{k-1}}{h}$, donde h es el periodo de muestreo.

Matemáticamente también es posible obtener la velocidad \dot{q} mediante un sistema dinámico lineal de primer orden. Por ejemplo, considérese el siguiente sistema (*método de filtrado*): $\dot{F}_q = -\lambda F_q + \lambda q$, donde F_q

representa la velocidad filtrada, F_q es el estado del filtro y representa la señal filtrada de la posición q y λ es la frecuencia de corte del filtro. El inconveniente de este método es el problema de la fase en la velocidad obtenida \dot{F}_q , lo que significa que tendrá un corrimiento en el tiempo y por lo tanto la velocidad estimada mantendrá un error con respecto a la velocidad ideal.

Esta representación es equivalente a la función de transferencia: $\frac{F_q}{q} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$, donde $s = jw$ siendo $j = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria, $w = 2\pi f$ la frecuencia en rad/seg y f la frecuencia en Hertz.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Otro método empleado es convertir el número de pulsos de salida a una señal analógica proporcional a la frecuencia del pulso; para este caso se utiliza un convertidor de frecuencia a voltaje, es decir, $\dot{q} = \alpha \text{ voltaje}$, donde α es una constante de proporcionalidad.



2.4.5 Construcción de un encoder incremental

En esta sección se describen el diseño y la construcción de un encoder incremental que puede ser acoplado en la flecha o rotor de un servomotor.

La gran mayoría de los encoders comerciales son relativamente costosos, dependiendo de la precisión y calidad de sus componentes ópticas, sin embargo son fáciles de construir. A continuación se describen los pasos necesarios para construir un encoder incremental sencillo, el cual será fabricado con franjas reflectivas sobre un disco giratorio que será montado sobre la flecha de un motor de corriente directa. Este ejemplo puede aplicarse en control de motores de corriente directa.

Diseño y construcción de un encoder incremental

Supóngase que el diámetro del disco giratorio mide 5 cm y que el encoder tiene un total de 16 marcas (8 franjas blancas y 8 franjas negras). La circunferencia de la rueda es $\pi \times 5\text{cm} = 15.707\text{ cm}$.



Encoder incremental

En la página web del libro se presentan los componentes para construir un encoder incremental con franjas reflectivas. El fotosensor, diagrama esquemático del circuito electrónico, números de serie de los componentes y descripción del funcionamiento del encoder incremental.

Dividiendo el número de marcas dentro de la circunferencia se obtiene 0.98 cm por pulso del encoder, es decir 8 pulsos por cada vuelta completa o cada 360 grados. Entonces, la resolución del encoder está dada como $\frac{360}{8} = 45$ grados.

Es posible duplicar la resolución a 0.49 cm por pulso del encoder duplicando el número de marcas ($\frac{15,707}{32}$), en este caso la resolución está dada por $\frac{360}{16} = 22.5$ grados. Con estas características en la resolución, se tendrían muchos problemas para controlar un servomotor.

Dependiendo de la aplicación, una resolución de milésimas de grado puede ser más conveniente. Sin embargo, para los propósitos del ejemplo se diseñará el disco reflectivo con 32 franjas negras y 32 franjas blancas como se muestra en la figura 2.28; la resolución de este encoder ejemplo es de $\frac{360}{32} = 11.25$ grados.

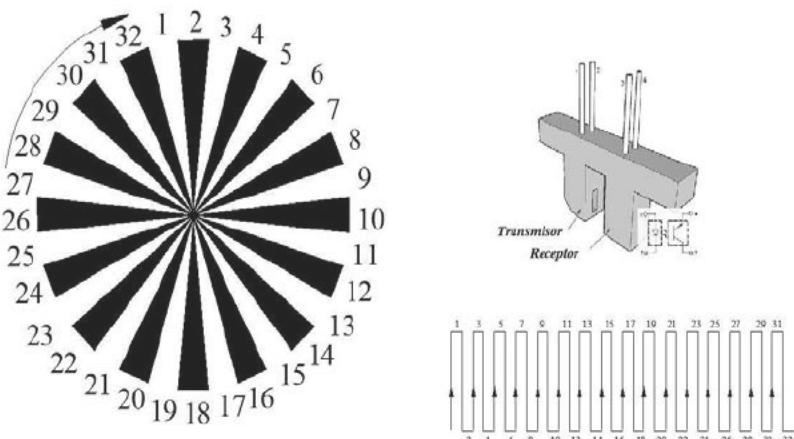


Figura 2.28 Encoder incremental con técnica reflectiva.



2.4.6 Glosario para encoders

A continuación se explican los términos y conceptos importantes directamente relacionados con el uso de encoders. Los nombres técnicos de los conceptos se dan en castellano y entre paréntesis su equivalente en inglés. Es pertinente destacar que no todos los nombres técnicos tienen traducción, como es el caso de la palabra encoder.



Resolución (*Resolution*): es la capacidad de un encoder para dividir una rotación (360 grados) entre n . Para los encoders incrementales la resolución está en función del número de pulsos producidos por una rotación, por ejemplo para los encoders de los motores de transmisión directa (*direct drive*) el número de pulsos por revolución completa es de 4,096,000. Por lo tanto, la resolución es $\frac{360^\circ}{4,096,000} = 0.0000878906$ grados. En los encoders absolutos, la resolución está determinada por el número de dígitos binarios junto con el número de división; por ejemplo, para 8 dígitos binarios es dividido entre 256. La resolución es la mínima medida que un encoder puede detectar o discernir.



Máxima frecuencia de respuesta (*Maximum response frequency*): es la máxima frecuencia en la cual los encoders pueden responder eléctricamente. En el caso de encoders incrementales está expresado por el número de pulsos de salida por segundo.



Máxima frecuencia rotacional permisible (*Maximum allowable rotational frequency*): es la máxima frecuencia rotacional que mecánicamente es permitida por el encoder.



Salida de la fase A (*Phase A output*): en los encoders incrementales, la diferencia de fase ideal entre la fase de salida para el canal *A* y la fase de salida para el canal *B* es de 90 grados + 0 grados. Sin embargo, un estándar práctico es con una diferencia de fase de 90 grados + 45 grados.



Salida de la fase Z (*Phase Z output*): la fase Z también se conoce como **índice** y su respuesta es un pulso por revolución o por cada 360° para indicar el origen. Se usa en los encoders incrementales.



Par de inicio (*Starting torque*): es el torque generado en el inicio de la rotación.



LED (light-emitting diode): diodo emisor de luz.



Exactitud: es la diferencia entre la medición realizada con respecto a la medición real o ideal.



Precisión: el número de bits para representar una medición.



Repetitividad: se refiere a la pequeña variación de lectura que tendrá un tipo específico de encoder que se ha fabricado de manera repetitiva (mismo número de serie y modelo), es decir, es un rango estadístico para lecturas repetidas (típicamente, la repetitividad tienen una desviación estándar de $3\pm$). Por ejemplo, si un encoder tiene una repetitividad de 0.00001 grados, entonces para una lectura actual de 90 grados podría ser 89.9999.



Linealidad de un encoder: sí la señal de salida tiene una relación lineal (proporcional) con el fenómeno de entrada (medición de posición). La linealidad es una característica deseable en todo sensor.



Rango: representa los límites naturales del encoder. Por ejemplo un encoder absoluto puede rotar 200 grados, y un encoder incremental puede rotar miles de vueltas.



2.5 Resumen

Un servomotor es la unión de un motor eléctrico, un sensor de posición y un amplificador electrónico. El sensor de posición más empleado es el encoder incremental por sus características de bajo peso, volumen pequeño y

alta resolución (4,096,000 pulsos/revolución). El amplificador electrónico también es conocido como servoamplificador y es el encargado de controlar el flujo magnético entre el bobinado del rotor y los materiales ferromagnéticos del estator, de tal forma que obedezca a la ecuación fundamental: $\tau = kv$, siendo τ el par o torque aplicado, k una constante que representa la ganancia del amplificador y v el voltaje, siendo la señal o comando que proviene de una computadora o sistema mínimo.

El motor eléctrico es una máquina que convierte energía eléctrica en energía mecánica. El rotor puede alcanzar una velocidad de desplazamiento articular muy grande, por ejemplo 1000 revoluciones por minuto. Esta velocidad de movimiento es muy alta para propósitos de diseño, construcción y movimiento de robots manipuladores, los cuales se mueven a una velocidad parecida al brazo humano, por ejemplo de una a dos vueltas por segundo. En movimiento lineal, el desplazamiento puede llegar a 3000 mm/segundo.

Por otro lado, los motores eléctricos pueden proporcionar poco par o torque para realizar alguna aplicación donde se requiere desplazar cargas de un peso considerable. El dispositivo que permite reducir la velocidad rotacional y amplificar el par limitado es el sistema de engranes. Sin embargo, los engranes introducen otro tipo de fenómenos físicos y mecánicos: vibración, elasticidad, fricción y *cascabeleo* o juego mecánico. La fricción presenta la desventaja de que un alto porcentaje de la energía que se suministra al robot se pierde en problemas de efectos disipativos. Es decir, se da conversión de energía mecánica en energía térmica, lo que degrada y deteriora las piezas del robot.

Como alternativa tecnológica los servomotores de transmisión directa (*direct drive*) corren los inconvenientes de los servomecanismos convencionales. No requieren de un sistema de engranaje para amplificar el par, y funcionan como fuente de par en velocidades de 360 a 720 grados/segundo. El fenómeno de fricción representa un bajo porcentaje del par máximo, típicamente del orden del 5 %.

Los robots de transmisión directa por sus ventajas, características y prestaciones representa los robots de un futuro cercano que paulatinamente irán desplazando a los robots convencionales con sistema de engranaje. Debido a la alta resolución que tienen los encoders incorporados en los servomotores, pueden alcanzar excelente grado de exactitud en el posicionamiento del robot. Por lo que este tipo de robots son ideales para realizar una gama amplia de aplicaciones industriales, seguimiento de trayectorias, control de posición, control punto a punto, etc.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary 2.6 Referencias selectas

A continuación se presentan una serie de referencias específicas para cada una de las secciones presentadas en este capítulo.



2.1 Introducción



www.robotics.org



<http://sensing.honeywell.com>



R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría. “*Control of robot manipulators in Joint Space*”. Springer-Verlag London 2005.



Mark W. Spong and Seth Hutchinson, M. Vidyasagar. “*Robot Modeling and Control*”. John Wiley and Sons, Inc. 2006.



2.2 Servomotores

La tecnología de transmisión directa es realizada por las compañías ParkerCompumotor y NSK. En las referencias indicadas puede encontrar mayor información y cotizaciones de servomotores.

-  Haruhiko Asada & Kamal Youcef Toumi. “*Direct-Drive Robots: Theory and Practice*”, MIT Press Classics, 1987.
-  www.galilmc.com
-  www.mitsubishi-automation.com/products/servomotion_motor.html
-  www.parkercompumotor.com
-  www.nsk.com.com
-  www.yokogawa.com

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

2.3 Sensores

-  www.omega.com
-  Ernest O. Deobelín. “*Measurement Systems: Application and Design*” McGrawHill, Fifth Edition, 2003.
-  D. M Considine & S. D. Ross “*Manual de Instrumentación Aplicada.*” Vols. I y II, CECSA, 1971.
-  Shimon Y. Nof. “*Handbook of Industrial Robotics*” John Wiley & Sons, Inc. Second Edition. 1999.
-  Francis C. Moon “*Superconducting Levitation: Applications to Bearings and Magnetic Transportation*” Wiley-VCH. 2004.
-  www.keyence.com
-  www.sensotec.com
-  www.bannerengineering.com
-  www.edmundoptics.com

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



2.4 Encoders

En las siguientes referencias puede encontrar una amplia variedad de encoders incrementales y absolutos.

www.robotics.org

www.mexico.newark.com

<http://sensing.honeywell.com>

www.newport.com



2.7 Problemas propuestos

A continuación se presenta una serie de problemas propuestos con la finalidad de mejorar la habilidad y grado de conocimiento de servomotores y sensores.



2.2 Servomotores

2.2 .1 ¿Por qué se utilizan los servomotores en robótica?

2.2 .2 ¿Cuáles son las características principales de un sensor?

2.2 .3 ¿Qué es un sensor de posición?

2.2 .4 ¿Cuál es la diferencia entre un sensor digital y analógico?

2.2 .5 Describa aplicaciones donde se emplean sensores analógicos y digitales.

2.2 .6 Explique el concepto de transductor.

2.2 .7 ¿Son los sensores transductores?

2.2 .8 ¿Es un servomotor un tipo de transductor?



2.2 Servomotores

2.2 .1 ¿Qué es un servomotor?

2.2 .2 ¿Qué es un servo amplificador?

2.2 .3 Explique el funcionamiento básico de un motor eléctrico.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

2.2 .4 ¿Qué funciones importantes realiza el sistema de engranes?

2.2 .5 ¿Cuáles son las desventaja que presentan los engranes?

2.2 .6 ¿Qué es un servomotor de transmisión directa?

2.2 .7 Realizar una comparación tecnológica entre los servomotores que emplean engranes y los de transmisión directa.



2.3 Sensores

670 2.3.1 ¿Qué tipo de sensores analógicos de posición puede citar?

ebrary

2.3 .2 Realizar una comparación cualitativa entre ventajas y desventajas de los sensores analógicos de posición.

2.3 .3 ¿Cuál es la resolución en milivolts de un convertidor analógico digital de 8 bits? Tome en cuenta que el voltaje de referencia es de 5 volts.

2.3 .4 Deducir la expresión de integración numérica para la posición $q(t_k)$ en función de la velocidad $\dot{q}(t_k)$, es decir:

$$q(t_k) = q(t_{k-1}) + h\dot{q}(t_k)$$

donde h es el periodo de muestreo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ebrary

ALFAOMEGA

Sugerencia: La velocidad articular $\dot{q}(t)$ es la derivada con respecto al tiempo de la posición $q(t)$, es decir: $\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t) - q(t-1)}{\Delta t}$, donde t es el tiempo. Ahora discretice la velocidad continua $\dot{q}(t)$, es decir: $\dot{q}(t_k) = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{\Delta t_k} = \frac{q(t_k) - q(t_{k-1})}{h}$, donde t_k representa el tiempo discreto, siendo $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Además $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = h$, donde h es el periodo de muestreo.



2.4 Encoders

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

2.4 .1 ¿Qué entiende por un encoder óptico?

2.4 .2 ¿Cuántos tipos de encoder conoce?

2.4 .3 Describa cualitativamente los diferentes tipos de encoder.

2.4 .4 ¿Qué ventajas ofrece un encoder respecto a otros tipos de sensores de posición?

2.4 .5 ¿Cuál es la resolución en grados de un encoder incremental, si tiene 4,096,000 pulsos por cada revolución (360 grados)?

2.4 .6 ¿Qué características debe tener un encoder absoluto si tuviera una resolución de 4,096,000 bits?

2.4 .7 Considere el caso de un motor que es capaz de girar desde 0 a 45 revoluciones por minuto (*RPM*). Usando un encoder incremental con una resolución de 32 franjas reflectivas y un periodo de muestreo de 1 segundo: ¿cuántos pulsos por revolución puede detectar?

2.4 .8 ¿Cómo sería el padrón de franjas reflectivas para un encoder absoluto, si se requiere que tenga una resolución de una milésima de grado?

2.4 .9 Describa cualitativamente el funcionamiento de un encoder magnético.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

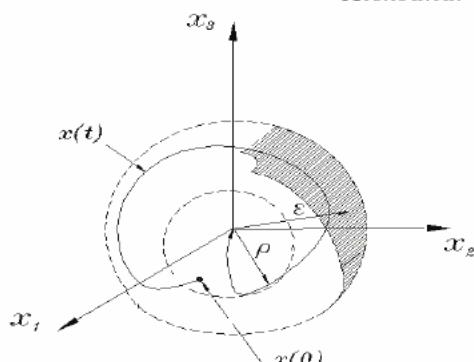
3

CAPÍTULO

Preliminares matemáticos

La energía acumulada dentro del dominio de atracción por un sistema dinámico, cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar su valor mínimo en el punto de equilibrio, el cual es asintóticamente estable.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
Aleksandr Mikhailovich Lyapunov
ebrary



3.1 Introducción

3.2 Vectores

3.3 Matrices

3.4 Funciones definidas positivas

3.5 Sistemas dinámicos

3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov

3.7 Norma \mathcal{L}

3.8 Resumen

3.9 Referencias selectas

3.10 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos

Presentar las herramientas matemáticas que se requieren en el análisis, diseño y control de robots manipuladores.

Objetivos particulares. Exponer los conceptos esenciales de:



Vectores y matrices.



Funciones de energía.



Sistemas dinámicos.



Teoría de estabilidad de Lyapunov.



Norma \mathcal{L} .

Competencias

Adquirir la habilidad en el manejo de:



Operaciones matemáticas para control de robots manipuladores.



Exponer los conceptos fundamentales de análisis y diseño de esquemas de control en robótica.



Análisis de sistemas dinámicos vía Lyapunov.

3.1 Introducción



Las matemáticas son un lenguaje elegante y universal, necesario para describir y comprender cualquier fenómeno de la naturaleza. En particular, en el área de la robótica representan la herramienta fundamental para análisis, diseño y la construcción de robots; específicamente son esenciales en la elaboración del modelo dinámico que permite estudiar todos los fenómenos físicos presentes en el sistema mecánico del robot manipulador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Por otro lado, en control automático las matemáticas permiten diseñar diversos algoritmos de control, planeación de trayectorias, programación de tareas, etc. Si bien es cierto que la robótica es de naturaleza práctica experimental, su esencia es el rigor científico por lo que todas las contribuciones, aportaciones y aplicaciones requieren de una sustentación estricta y formal que sólo puede lograrse a través de las matemáticas.

De acuerdo con los objetivos planteados, en este capítulo se exponen los conceptos y operaciones relacionadas con vectores y matrices, normas euclidianas, gradiente, jacobiano, valores propios, fundamentos de sistemas dinámicos, teoría de estabilidad de Lyapunov y su interconexión con estabilidad \mathcal{L}_2 , principio de invariancia de LaSalle, etc. Para facilitar la asimilación de los conceptos, a lo largo de la exposición se presenta una amplia variedad de ejercicios y programas de simulación en MatLab.

En capítulos posteriores se aplicarán los conceptos expuestos aquí. Por ejemplo, en el modelo de la dinámica de robots manipuladores se utilizan las operaciones entre vectores y matrices, los conceptos de matrices definidas positivas, de gradiente y de jacobiano.

En los capítulos relacionados con el control de robots se emplea la teoría de estabilidad de Lyapunov, así como los conceptos de sistemas dinámicos, de normas (euclidianas, espectrales y \mathcal{L}) y de funciones definidas positivas.

Los preliminares matemáticos aplicados de manera adecuada en la robótica, generan un espectro muy amplio de aplicaciones potenciales de robots manipuladores en los ámbitos científico, industrial, comercial y doméstico.

William Rowan Hamilton (1805-1865)



El 4 de agosto de 1805 en la ciudad de Dublín, Irlanda, nació William Rowan Hamilton quien se destacó por formular en 1833 la llamada mecánica hamiltoniana. En su honor, el hamiltoniano ampliamente usado en robótica, es la suma de la energía cinética y potencial de un sistema mecánico. Además de su trabajo en mecánica analítica Hamilton desarrolló la teoría de los cuaterniones, que tiene importantes aplicaciones para modelar la orientación de la herramienta final del robot. Por otro lado, en el área del álgebra lineal su contribución fundamental es el conocido teorema de Cayley-Hamilton el cual es la base para calcular las constantes que forman el polinomio de la matriz exponencial de sistemas lineales continuos, e^{-At} , y discretos, e^{-Ah} . Luego de una brillante carrera Hamilton murió el 2 de septiembre de 1865 en su ciudad natal.

3.2 Vectores

Es común describir un vector como un elemento que tiene magnitud y dirección, no obstante es necesario establecer una definición formal de este concepto. Históricamente, los términos de vector y escalar fueron definidos por el científico irlandés William Rowan Hamilton en su teoría de los cuaterniones, sin embargo en la robótica un vector no es una simple abstracción matemática, en esta área un vector representa la agrupación de varias señales físicas del robot para ser analizadas, procesadas o controladas; por ejemplo, las variables más representativas del área de robótica son posiciones, errores de posición, velocidades, pares y fuerzas.

En general un espacio vectorial sobre un campo F consta de un conjunto V en el que está definida una operación de suma (la cual satisface las propiedades de un grupo abeliano commutativo), junto con una operación de multiplicación definida entre elementos de V y elementos de F tal que esta operación asocia escalares, distribuye escalares, distribuye vectores y posee elemento identidad y también el elemento neutro.

Un ejemplo de campo es el que está definido en el conjunto de los números reales \mathbb{R} , y a un espacio vectorial construido sobre \mathbb{R} se le llama **espacio vectorial real**.

En robótica éste es el tipo de espacio vectorial que interesa, en particular el que se utiliza es el definido en el conjunto V de las n -adas de números reales. Las propiedades matemáticas asociados a los vectores resultan particularmente útil en el diseño y análisis de algoritmos de control. Los aspectos prácticos y desempeño de diversas estrategias de control se interpretan en función de los vectores.

El conjunto V del espacio vectorial n -dimensional \mathbb{R}^n es el conjunto de todas las n -adas de números reales, y los vectores de este espacio se denotan de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \dots, x_n]^T. \quad (3.1)$$



Números reales

El conjunto de los números reales se denota con el símbolo \mathbb{R} , y a sus elementos se les conoce como escalares. En esta obra los números reales se expresan con letras minúsculas del castellano o del griego en *itálicas*, por ejemplo, $a, b, c, x, y, z, \alpha, \omega, \lambda$.

En la expresión (3.1) las $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2 \dots, n$, representan las componentes o coordenadas del vector. A partir de esta definición se tiene que dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ son iguales, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, si y sólo si sus correspondientes componentes son iguales, es decir $x_i = y_i$ para $i = 1, 2 \dots, n$. Por otro lado, el espacio vectorial \mathbb{R}^n también se conoce como espacio euclíadiano n -dimensional.

En la siguiente sección se plantea la definición de suma y multiplicación en el espacio vectorial \mathbb{R}^n , y se establecen sus propiedades correspondientes.

Notación

Los vectores serán representados con letras minúsculas del castellano y del griego en *negritas itálicas*, por ejemplo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$; las componentes de los vectores son números reales $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, siendo $n \in N$ la dimensión del espacio vectorial.

Es muy importante que el lector adquiera los conocimientos adecuados de vectores, la implementación práctica de esquemas de control de robots manipuladores requiere realizar correctamente los diferentes tipos de operaciones con vectores. Las variables que intervienen el modelo dinámico del robot manipulador como posiciones, velocidades y aceleraciones articulares se encuentran directamente relacionadas con vectores. De la misma manera variables de control de robots manipuladores como errores de posición, trayectorias de seguimientos, y pares aplicados son representa-

dos y procesados matemáticamente de acuerdo a las reglas de vectores.



3.2.1 Operaciones entre vectores

La definición de suma entre vectores de \mathbb{R}^n es la siguiente.

Considérese los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. La adición o suma entre éstos se realiza sumando componente a componente:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_i + y_i \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la definición de espacio vectorial, la suma entre vectores satisface las siguientes propiedades:



Propiedad conmutativa y asociativa de la adición

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$



El **vector nulo** es aquel vector cuyas componentes son todas ceros y es denotado por

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$



Para cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector denotado como $-\mathbf{x}$ tal que:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

La definición del producto de un escalar por un vector es la siguiente.

Sean el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces el producto entre ambos se define como:

$$\alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\alpha \\ x_2\alpha \\ \vdots \\ x_n\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \alpha = \mathbf{x}\alpha$$

De acuerdo con la definición de espacio vectorial, el producto de un escalar por un vector satisface las siguientes propiedades:

 Sean el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene la siguiente propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha x_2 + \alpha y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \alpha y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \alpha = (\mathbf{x} + \mathbf{y})\alpha \end{aligned}$$

 Sean los escalares $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene la siguiente propiedad distributiva:

$$\mathbf{x}(\alpha + \omega) = \mathbf{x}\alpha + \mathbf{x}\omega$$

 Sean los escalares $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se tiene la siguiente propiedad asociativa y conmutativa:

$$\alpha(\omega\mathbf{x}) = (\alpha\omega)\mathbf{x} = \omega(\alpha\mathbf{x}) == \mathbf{x}(\alpha\omega) = \mathbf{x}(\omega\alpha) = \omega\mathbf{x}\alpha = \alpha\mathbf{x}\omega$$

 Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Además de esta estructura algebraica, en el espacio \mathbb{R}^n se define el siguiente producto vectorial interno que satisface las propiedades listadas a continuación.

El producto interno de dos vectores $\mathbf{x}^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ se define como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

A partir de esta definición se tiene que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:



El producto interno entre vectores se realiza como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{y} &= \mathbf{y}^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &= \sum_{i=1}^n \{x_i y_i\} = \sum_{i=1}^n \{y_i x_i\} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Propiedad de asociación del producto interno de vectores:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} + \mathbf{z}^T \mathbf{x}$$



El producto de un vector columna por un vector transpuesto genera una matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \mathbf{y}^T &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1 \ y_2, \dots, y_n] \\ &= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



3.2.2 Norma euclíadiana

La norma de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, que es conocida como norma euclíadiana, es un escalar positivo que representa la magnitud del vector y que se define como:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

Hay que observar que sólo se considera la parte positiva de la raíz cuadrada. En la figura 3.1 se muestra la interpretación geométrica de la norma euclíadiana, la cual representa la distancia (diagonal) desde el punto \mathbf{x} ubicado en las coordenadas $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ al origen $\mathbf{0}$.

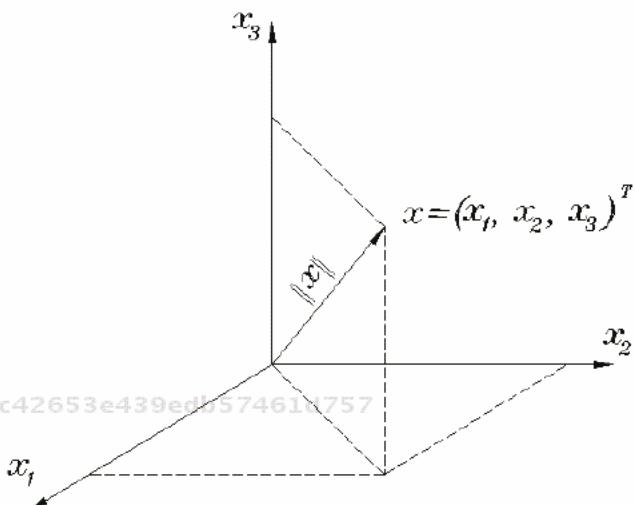


Figura 3.1 Interpretación geométrica de la norma euclíadiana.

La norma euclíadiana de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisface las siguientes propiedades:



$\|\mathbf{x}\| > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.



$\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.



Desigualdad del triángulo:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$



$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$



Desigualdad de Schwarz:

$|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$



3.3 Matrices

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Una matriz A es un arreglo rectangular de números, tiene n renglones horizontales (también llamados filas o hileras) y p columnas verticales. Las entradas de la matriz se conocen como *elementos* y pueden ser números reales, números complejos, funciones, operadores, etc. Es importante destacar que una matriz es un objeto matemático por sí misma, esto es, no representa un número o un escalar, además de que tiene operaciones y propiedades bien definidas. Las operaciones entre matrices producen una matriz, en contraste operaciones entre vectores pueden producir un escalar, vector o matriz.

Notación

Las matrices serán designadas por letras mayúsculas del castellano o del griego en *itálicas*. Hay varias notaciones para representar una matriz A , por ejemplo la más compacta es $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, cuyos elementos son números reales (debe leerse matriz A n por p), donde n, p son números naturales. La terminología $n \times p$ también significa la dimensión de la matriz A . En esta notación es necesario recalcar que n significa el número de renglones y p denota el número de columnas.

En la figura 3.2 se muestra la representación clásica de una matriz rectangular de n renglones por p columnas (matriz n por p). Las columnas son arreglos verticales. Por ejemplo, la segunda columna está formada por los elementos $a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}$, mientras que los renglones son filas horizontales dentro del arreglo rectangular; el segundo renglón está compuesto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Columna
Renglón

Figura 3.2 Componentes de una matriz.

por $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Los elementos de una matriz se denotan por a_{ij} donde $i = 1 \dots n$ representa el i -ésimo renglón y $j = 1 \dots p$ denota la j -ésima columna.

Para los propósitos de identificar los elementos de una matriz, éstos pueden ser vistos como un sistema de referencia cartesiano en el que el origen está en la esquina superior izquierda y el índice del renglón está dado antes del índice de la columna (i, j); los renglones de una matriz son numerados de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha.

Por ejemplo, en la matriz $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ el elemento a_{25} significa la componente del segundo renglón y quinta columna, el cual se muestra en la

670 siguiente expresión:

ebrary

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \boxed{a_{25}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

Una notación alternativa para representar una matriz es la siguiente nomenclatura: $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ puede ser considerado como un tipo particular de matriz perteneciente a $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757



3.3.1 Matrices especiales

Matrices especiales

La matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ampliamente usada en robótica, en especial se utiliza en la dinámica de robots manipuladores así como en el diseño y desarrollo de algoritmos de control. La matriz identidad es una matriz cuadrada cuyos elementos sobre la diagonal tienen valor 1, mientras que los elementos fuera de la diagonal tienen valor cero:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante de la matriz identidad es que, cualquier matriz o vector multiplicado por ella queda igual. Otra matriz especial es la matriz neutra o cero $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en la que todos sus elementos son ceros:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente la matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos sus elementos que se encuentran sobre la diagonal tienen valor diferente a cero, y fuera de la diagonal valen cero, es decir, $a_{ii} \neq 0$ y $a_{ij} = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Existen algunos tipos especiales de matrices que facilitan el análisis e interpretación de los resultados en control y robótica. Por ejemplo, la matriz identidad, la matriz simétrica, la matriz antisimétrica, la matriz diagonal, la matriz definida positiva, etc.

Si la matriz A tiene el mismo número de renglones y columnas ($n = p$), se le denomina **matriz cuadrada**, en este caso $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hay varios tipos especiales de matrices cuadradas, por ejemplo la matriz diagonal, que tiene todos sus elementos en la diagonal diferentes a cero, $a_{ii} \neq 0$, mientras que $a_{ij} = 0$ con $i \neq j$.

Una representación especial para las matrices diagonales es $A = \text{diag}\{a_{ii}\}$ con $i = 1 \dots n$.

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}.$$

Dependiendo del tema de control de robots manipuladores que se esté abordando, se elige la notación más conveniente de una matriz.

♣ Ejemplo 3.1

Considérense las matrices $\Delta = \text{diag}\{2, 7\}$, $\Delta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\Upsilon = \text{diag}\{4, 9, -1\}$, $\Upsilon \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, y $\Phi = \text{diag}\{9, 100, 3, 123\}$, Φ es de orden 4×4 . Obtener la representación estándar de cada una de estas matrices.

Solución

Obsérvese que, los números dentro de las llaves representan los elementos

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

sobre la diagonal.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 123 \end{bmatrix}$$



3.3.2 Operaciones de matrices



En esta sección se presentan las principales operaciones con matrices que se requieren en robótica.

Suma de matrices

Considérense las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. La suma de matrices existe sólo entre matrices de la misma dimensión, $C = (A+B) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y está definida de la siguiente forma:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Si, $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ son matrices del mismo orden, entonces la suma de matrices satisface las siguientes propiedades:

Propiedad conmutativa:

$$A + B + C = B + A + C = A + C + B = C + A + B = C + B + A =$$

$B + C + A$



Propiedad asociativa:

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C = A + (B + C)$$



Sea la matriz nula $0 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ en la que todos sus elementos a_{ij} tienen el valor de cero, entonces se satisface que $0 + A = A + 0 = A$

Matriz transpuesta

La matriz transpuesta de $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se representa por $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la cual se obtiene por intercambiar los renglones por las columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary
Hay que observar que los elementos de la diagonal quedan sin modificación.

La matriz transpuesta satisface las siguientes propiedades:



$$(A^T)^T = A$$



$$((A^T)^T)^T = A^T$$



$$\text{Si } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ entonces } (\lambda A)^T = \lambda A^T = A^T \lambda$$



$$\text{Si } I \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es la matriz identidad, } I^T = I.$$



$$\text{Si } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es cualquier matriz diagonal } A = \text{diag}\{a_{ii}\}, A^T = A.$$



$$(A + B + C)^T = A^T + B^T + C^T$$



$$(A^T + B^T + C^T)^T = A + B + C$$



$$(A^T + B^T + C)^T = A + B + C^T$$

Resta de matrices

Considérese las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, entonces la sustracción de matrices $C = A - B$ existe, con $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, de forma que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1p} - b_{1p} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2p} - b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{np} - b_{np} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El algoritmo para realizar resta de matrices consiste en restar elemento a elemento, y tiene la forma siguiente: $A - B = \{a_{ij}\} - \{b_{ij}\} = (a_{ij} - b_{ij})$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Obsérvese que la resta de matrices no es commutativa, esto es, no se cumple que $A - B \neq B - A$. Sin embargo, es cierto que $A - B = -B + A$.

Sean las matrices $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, entonces la sustracción de matrices satisface las siguientes propiedades:



$$A - B - C = -B + A - C = A - C - B = -C + A - B = -C - B + A = -B - C + A$$



$$A - B - C = A - (B + C) = (A - B) - C = A - (C + B)$$



$$(A - B - C)^T = A^T - B^T - C^T$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



$$(A^T - B^T - C^T)^T = A - B - C$$



$$(A^T - B^T - C)^T = A - B - C^T$$



$$\left(A^T - B^{TT} \right)^T = A - B$$



$$(A - B) = -(B - A)$$



Producto de matrices

Se encuentran disponibles en el sitio web del libro varios programas relacionados con operaciones entre matrices, así como procedimientos para encontrar matrices simétricas, diagonalización de matrices, rango de una matriz, determinantes, etc.

Producto de matrices

Considérese las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$. El producto de matrices *raro* existe sólo en el caso en que el número de las columnas de A es igual al número de los renglones de B . En términos de componentes, el producto $C = AB \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se define como

$$C = \{c_{ij}\} = AB$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^p a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Aquí se tiene que $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$ con $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$.

De esta definición se desprenden directamente dos propiedades básicas: 1) en general el producto de matrices no es commutativo; 2) cuando se multiplican matrices cuadradas, ambas deben de tener el mismo orden.

En general el producto de matrices no es commutativo, esto es, $AB \neq BA$, ya que al intercambiar el orden en que se multiplican las matrices en

general no coinciden el número de renglones de una con el número de columnas de la otra. Para el caso de matrices diagonales, entonces el producto de matrices es commutativo.

Además de no ser commutativo el producto de matrices diferentes a las diagonales, satisface las siguientes propiedades:

Considérense las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ y $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, así como el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces se tiene que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 Ley distributiva izquierda: $C = A(B + D) = (AB + AD) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

 Ley distributiva derecha: $C = (B^T + D^T)A^T = (B^T A^T + D^T A^T) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

 Ley asociativa: $C = A(BE) = (AB)E$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

 $C = (AB)^T = B^T A^T$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

 $C = (ABE)^T = E^T B^T A^T$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

 $C = (A(B + D))^T = (B + D)^T A^T = B^T A^T + D^T A^T$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

 Si $O \in \mathbb{R}^{p \times m}$ es la matriz cero, entonces $A O = O = O \in \mathbb{R}^{n \times m}$

 $C = \lambda A = A\lambda$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

 Si $\lambda = 0$ entonces $\lambda A = O \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

 Si $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces $\Gamma I = I\Gamma = \Gamma$.

♣ Ejemplo 3.2

Realizar la multiplicación de un escalar λ por una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Solución

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \lambda.$$



Hay que observar que el orden de la matriz resultante se deduce del número de renglones de la matriz A y del número de columnas de la matriz B , ya que las p columnas de A y los p renglones de B son absorbidos en los detalles internos de la multiplicación, es decir, ($[n \times p] \underbrace{[p \times n]}_{\text{mismo número}} = [n \times n]$).

mismo número

Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $y \in \mathbb{R}^m$. De acuerdo con la definición de producto de matrices, la expresión $x^T A y \in \mathbb{R}$ es un número real que está dado por:

$$\begin{aligned} x^T A y &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

Matriz cuadrada

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es cuadrada si y sólo si $n = m$.

Las propiedades de las matrices cuadradas, que se utilizan en el análisis y diseño de algoritmos de control de robótica, son las siguientes:



Potencia de una matriz cuadrada: $A^k = \underbrace{AAA \cdots A}_{k \text{ veces}}$



La traza de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está definida por

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\text{traza}\{A\} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (3.6)$$



El determinante $|A|$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está dado por la siguiente expresión:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij} \quad (3.7)$$

para $i \leq n, j \leq n$.

Aquí se emplea la notación $|A|_{ij}$ para representar a un determinante de $n - 1$ filas obtenido por borrar la i -ésima fila y la j -ésima columna de un determinante de n filas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Determinante de la matriz transpuesta: $|A^T| = |A|$.



El determinante menor de m filas es obtenido por borrar $n - m$ filas y $n - m$ columnas de un determinante de n filas.



Un determinante principal menor de un determinante es llamado así, si sus elementos de la diagonal son también elementos de la diagonal del determinante.



El cofactor Δ_{ij} es el coeficiente del término a_{ij} en la expansión del determinante $|A|$ por sus determinantes menores,

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} \quad (3.8)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



La matriz de cofactores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está dada por $\text{Cof}\{A\}$:

$$\text{Cof}\{A\} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

El determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = |A|. \quad (3.10)$$

♣ Ejemplo 3.3

Obtener los cofactores de la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

Aplicando las ecuaciones (3.8) y (3.10) para $i = 1, 2$ se tiene que

$$A_{11} = 4$$

$$A_{12} = 3$$

$$A_{21} = 9$$

$$A_{22} = 1$$

$$\Delta_{11} = (-1^{1+1})A_{11} = 4$$

$$\Delta_{12} = (-1^{1+2})A_{12} = -3$$

$$\Delta_{21} = (-1^{2+1})A_{21} = -9$$

$$\begin{aligned}\Delta_{22} &= = (-1^{2+2})A_{22} = 1 \\ |A| &= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} \\ &= 1 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = -23\end{aligned}$$



Matriz adjunta

La matriz adjunta de la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denotada por $\text{adj}\{A\}$, es la transpuesta de la matriz obtenida de A por reemplazar cada elemento de A por su cofactor:

$$\text{adj}\{A\} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

aquí Δ_{ij} es el cofactor de a_{ij} de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Matriz inversa

La inversa de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular existe y es denotada por $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por definición la inversa de una matriz se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} \quad (3.12)$$

la $\text{adj}\{A\}$ representa la matriz adjunta de A y $|A|$ es el determinante de la matriz A . Los términos de la i -ésima columna de A^{-1} son $\frac{1}{|A|}$ veces los cofactores de la i -ésima fila de la matriz original A .

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{|A|} & \frac{\Delta_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{n1}}{|A|} \\ \frac{\Delta_{12}}{|A|} & \frac{\Delta_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\Delta_{1n}}{|A|} & \frac{\Delta_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{\Delta_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

donde Δ_{ij} es el cofactor de a_{ij} de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Si el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es $|A| = 0$, entonces la matriz inversa no existe. Por lo tanto a esta matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se le llama matriz singular.

A continuación se presentan las propiedades de la matriz inversa:



Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se llama no singular si existe su matriz inversa; en otras palabras, una condición necesaria y suficiente para la existencia de la matriz inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es que el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea diferente de cero, $|A| \neq 0$.



Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices no singulares, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.



$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$



$AA^{-1} = A^{-1}A = I$, donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

♣ Ejemplo 3.4

Considérese la siguiente matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Obtener el determinante.

Solución

De acuerdo con las definiciones, el determinante $|A|$ y la matriz $\text{adj}\{A\}$

están dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc) \neq 0 \\ \text{adj}\{A\} &= \text{cofactores}\{A\}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como un caso práctico considérese la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el determinante $|A|$ y la matriz $\text{adj}\{A\}$ son:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 27) = -23 \\ \text{adj}\{A\} &= \text{cofactores}\{A\}^T = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{\text{adj}\{A\}}{|A|} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{9}{23} & -\frac{1}{23} \end{bmatrix} \quad \blacksquare \blacksquare \blacksquare \end{aligned}$$

Matriz simétrica

Una matriz simétrica, que se representa por $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$, coincide con su matriz transpuesta, es decir, la condición $A_s = A_s^T$ debe ser verdadera por lo que sus elementos deben satisfacer $a_{ij} = a_{ji}$.

En robótica es común el empleo de las matrices simétricas, y se encuentran presentes tanto en la dinámica del robot como en los esquemas de control.

Por ejemplo la siguiente matriz es simétrica.

$$A_s = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}^T$$

donde $a_{12} = a_{21} = 4$, $a_{13} = a_{31} = 9$, $a_{23} = a_{32} = 6$.



Cualquier matriz diagonal es una matriz simétrica.

Matriz antisimétrica

Una matriz antisimétrica será representada por $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la cual satisface la condición $A_{sk} = -A_{sk}^T$, o sus elementos $a_{ij} = -a_{ji}$. Este tipo de matriz se caracteriza porque todos sus elementos sobre la diagonal tienen valor cero.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Entre las propiedades del modelo dinámico del robot manipulador se encuentra la propiedad de antisimetría, la cual resulta particularmente clave en el diseño de algoritmos de control debido a que facilita notablemente el análisis de estabilidad.

Un ejemplo numérico de una matriz antisimétrica es el siguiente:

$$A_{sk} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -4 & 0 & 6 \\ -8 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -4 & 0 & 6 \\ -8 & -6 & 0 \end{bmatrix}^T$$

donde $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ y $a_{12} = 4, a_{21} = -4, a_{13} = 8, a_{31} = -8, a_{23} = 6, a_{32} = -6$.

Cualquier matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ puede ser expresada como la suma de una matriz simétrica $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y una matriz antisimétrica $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, i. e.:

$$A = A_s + A_{sk} \quad (3.14)$$

Además dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus correspondientes matriz simétrica A_s y matriz antisimétrica A_{sk} se obtienen respectivamente como:

$$A_s = \frac{A + A^T}{2} \quad (3.15)$$

$$A_{sk} = \frac{A - A^T}{2} \quad (3.16)$$

  Ejemplo 3.5

Obtener las partes simétrica y antisimétrica de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ A_{sk} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= A_s + A_{sk} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Generalmente el tipo de energía aplicada al robot es de la forma cuadrática, es decir, de la forma $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tomando en cuenta que la matriz A se puede descomponer en su parte simétrica y antisimétrica, se tiene que:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T [A_s + A_{sk}] \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T A_s \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T A_s \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Como se ve, el resultado de esta función sólo dependerá de la parte

simétrica ya que la parte antisimétrica se anula $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} \equiv 0$.

Se denomina **propiedad de antisimetría** a la multiplicación de un vector transpuesto seguido de una matriz antisimétrica y el mismo vector columna, lo cual produce un escalar idéntico a cero:

$$\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} \equiv 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

La propiedad de antisimetría se usa ampliamente en robótica, es una propiedad clave e importante del modelo dinámico y es particularmente útil en el análisis y diseño de algoritmos de control, además de que facilita el álgebra involucrada en el análisis de estabilidad vía Lyapunov.

Para verificar que la propiedad de antisimetría se cumple, sin pérdida de generalidad supóngase que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{sk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

entonces realizando las operaciones correspondientes para la parte antisimétrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \\ -\frac{a_{12}-a_{21}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{a_{12}-a_{21}}{2} x_2 - \frac{a_{12}-a_{21}}{2} x_1 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_{12} - a_{21}}{2}x_1x_2 - \frac{a_{12} - a_{21}}{2}x_1x_2 = 0.$$

Esta propiedad de la matriz antisimétrica es muy importante en el diseño de funciones de energía para robots manipuladores. Debe cuidarse que la función cuadrática de la energía que se le inyecta al robot no incluya una matriz antisimétrica, debido a que no contribuye. En otras palabras el robot no se moverá.

♣ ♣ Ejemplo 3.6

Convertir el siguiente polinomio a su forma como producto de un vector transpuesto, una matriz cuadrada y un vector columna ($\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$).

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 Solución ebrary

El formato pedido de $V(\mathbf{x})$ está dado por:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la función cuadrática $V(\mathbf{x})$ en términos de polinomio tiene la forma

$$V(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + [a_{12} + a_{21}]x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por sustitución directa a_{11} está relacionado con el cuadrado de la primera componente del vector \mathbf{x} , que en este caso es $a_{11} = 3$, mientras que $a_{22} = 4$. Hay que observar que $a_{12} + a_{21} = 3$, y para generar este resultado

se tiene un número muy grande de posibilidades, lo cual implica que para este caso la matriz resultante A no es única. Considérese que $a_{12} = 2$ y $a_{21} = 1$, por tanto se tiene que

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Otra posibilidad de elegir convenientemente a la matriz A es que sea simétrica, en este caso $a_{12} = a_{21} = \frac{3}{2}$. Obsérvese que la matriz A puede descomponerse en su parte simétrica y antisimétrica.

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La parte antisimétrica cumple que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 = 0$$

En ocasiones es muy importante tener un procedimiento para convertir una matriz no simétrica a una simétrica (no confundir con la parte simétrica de la matriz), por ejemplo es útil en la obtención de la norma de una matriz. Una forma de hacer esto es mediante la siguiente expresión:

$$A_{\text{simétrica}} = \{A^T A\} \quad (3.17)$$



No debe confundirse el procedimiento de la ecuación (3.17) con la obtención de la parte simétrica de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ecuación (3.15). Son procedimientos completamente diferentes y no conducen al mismo resultado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

  Ejemplo 3.7

Convertir la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a una matriz simétrica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

Para obtener la matriz simétrica convertida, se emplea la ecuación (3.17):

$$A_{\text{simétrica}} = \{A^T A\} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 22 & 41 \end{bmatrix}$$

■ ■ ■

Valores propios

Los valores propios son una característica muy importante de las matrices

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary cuadradas. Para cada matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existen n valores propios, en general números complejos, denotados por $\lambda_1 \{A\}, \lambda_2 \{A\}, \dots, \lambda_n \{A\}$. El procedimiento para obtener los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el siguiente:

$$\det|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

$$= \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-2} \lambda^2 + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0$$

El polinomio al que da lugar el determinante $|\lambda I - A|$ se llama polinomio característico, y es un polinomio de orden n en la variable λ . Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de dimensión n , entonces tendrá n valores propios λ .

♣ ♣ Ejemplo 3.8

Obtener los valores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

El polinomio característico es:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -3 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 11\lambda + 24 = (\lambda - 8)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

y los valores propios son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = 3$. ■■■

Para el caso de una matriz simétrica $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sus valores propios son números reales:



$\lambda_1 \{A\}, \lambda_2 \{A\}, \dots, \lambda_n \{A\} \in \mathbb{R}$.



3.3.3 Normapectral

Hay varios tipos de normas para matrices; en esta obra se emplea la norma espectral. La norma espectral de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota con el símbolo $\|A\|$ y se define como:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{A^T A}^{\max}}$$

donde $\lambda_{A^T A}^{\max}$ representa el valor propio máximo del producto resultante de las matrices $A^T A$; aquí se ha empleado la ecuación (3.17) para obtener el valor propio máximo $\lambda_{A^T A}^{\max}$ de la matriz simétrica convertida $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

La norma espectral de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface las siguientes propiedades:

-  $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A\| > 0$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A\| - \|B\| \leq \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A - B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
-  $\|A^T B\| \leq \|A\| \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Considérese la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En este caso se tiene que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

-  La norma euclíadiana del vector $A\mathbf{x}$ satisface:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|,$$

donde $\|A\|$ denota la norma espectral de la matriz A , mientras que $\|\mathbf{x}\|$ representa la norma euclíadiana del vector \mathbf{x} .

-  Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el valor absoluto de $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$ satisface:

$$|\mathbf{y}^T A \mathbf{x}| \leq \|A\| \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

-  Si la matriz A es simétrica y definida positiva, entonces su norma espectral satisface: $\|A\| = \lambda_A^{\max}$ y $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_A^{\min}}$.



Definiciones de funciones

Definición 3.1. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces f es una función acotada sobre \mathcal{D} si existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|f(\mathbf{x})\| \leq \alpha, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, entonces f es una función continua en $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta = \delta(\epsilon, \mathbf{x}) > 0$, tal que $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \epsilon, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$, satisface $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Una función $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ es una función discontinua en $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ si f no es continua en \mathbf{x} .

Definición 3.3. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es estrictamente creciente sobre \mathcal{I} , si para cada $(x, y) \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. La función es creciente (no decreciente) sobre el conjunto \mathcal{I} si para cada $(x, y) \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. f es una función estrictamente decreciente sobre \mathcal{I} si para cada $(x, y) \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. f es decreciente (no creciente) sobre \mathcal{I} si para cada $x, y \in \mathcal{I}$ $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Definición 3.4. Sea $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, y sea $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es monótona sobre \mathcal{I} si es creciente o decreciente. Nótese que si la función f es creciente, entonces $-f$ es decreciente.

Definición 3.5. Convergencia monótona de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para una función decreciente (creciente) sobre \mathbb{R} . Asúmase que existe un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq \gamma$ ($f(x) \leq \gamma$), entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe.



3.4 Funciones definidas positivas

Las funciones definidas positivas son ampliamente utilizadas en el diseño y desarrollo de algoritmos de control de robots, y se interpretan como la inyección de energía aplicada al robot para poderlo mover desde su posición inicial al punto deseado (punto final).

A continuación se presentan los conceptos y definiciones de esta clase de funciones.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Una función definida positiva es una función continua en su argumento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisface lo siguiente:



$$V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$



$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$



$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty_+$, es decir $V(\mathbf{x})$ es *radialmente no acotada*.

La función definida positiva sólo puede ser cero cuando su argumento es cero, para cualquier otro valor de su argumento la función $V(\mathbf{x})$ siempre será positiva. Cuando la función cumple con todos esos requisitos en el espacio de su argumento ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), entonces se le denomina **función definida positiva global**.

Si la función $V(\mathbf{x})$ es definida positiva sólo para una parte acotada de su argumento, es decir ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < \rho, \rho \in \mathbb{R}_+$), se le denomina **función definida positiva local** y en este caso satisface lo siguiente:



$$V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$



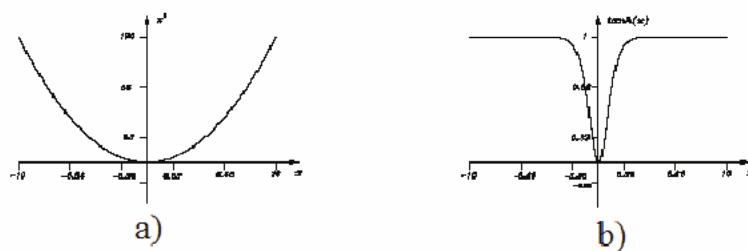
$$\exists \rho > 0, \gamma > 0 : 0 < V(\mathbf{x}) < \gamma \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ y } \|\mathbf{x}\| < \rho$$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Con respecto a la notación $V(\mathbf{x}) > 0$ debe leerse con cuidado su interpretación de función definida positiva. Deberá entenderse que la única posibilidad de hacerse cero es exclusivamente cuando el argumento es cero, $V(\mathbf{0}) = 0$, y por lo tanto la notación $V(\mathbf{x}) \geq 0$ no deberá usarse. En tal caso se estaría hablando de otro tipo de función $V(\mathbf{x}) = 0$ para argumentos $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; a este tipo de funciones se les denomina *funciones semidefinidas positivas*.

En la figura 3.3 se presentan varios casos de funciones definidas positivas.

Por ejemplo, para el caso de la figura 3.3a la función x^2 es global puesto que cumple todos los requisitos para ser una función definida global. En la figura 3.3b, $\tanh^2(x)$ es una función definida positiva en forma local, converge a una constante de valor unitario, y no cumple $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty_+$. En la figura 3.3c la función f es definida positiva en



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

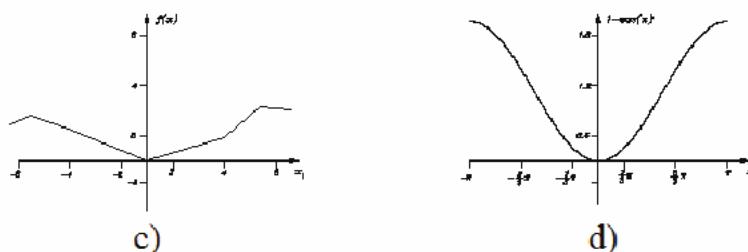


Figura 3.3 Comparación entre funciones definidas locales y globales

forma local, debido a que a partir de $x = 5$ la función decrece, es decir $f(5) > f(6)$. Finalmente, para el caso de la figura 3.3d, $1 - \cos(x)$ sólo es definida positiva en forma local para el intervalo $x \in (-\pi, \pi)$.

♣ Ejemplo 3.9

Analizar si la función $V(x) = x^2$ es definida positiva.

Solución

Considérese la función escalar $V(x) = x^2$. Evaluando en cero se tiene que $V(0) = 0$; sin importar el signo de la variable x se tiene que la función $V(x) > 0$. Obsérvese que si $x \rightarrow \infty_-$ o $x \rightarrow -\infty_+$, se tiene que $V(x) \rightarrow \infty_+$. Además, es global debido a que todos los requisitos de la función definida positiva se cumplen en todo el espacio de x , en este caso en todo el conjunto de los números reales, es decir, no está limitada a una región específica.

**♣ Ejemplo 3.10**

Analizar si la siguiente función escalar

$$V(x) = 1 - \cos(x)$$

es definida positiva.

Solución

Esta función es cero cuando $x = 0$, y cumple con todos los requisitos de una función definida positiva local en la región $x \in (-\pi, \pi)$, es decir, si $|x| < \pi$ entonces $0 < V(x) < 2$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Obsérvese que la definición de función definida positiva local no está limitada a satisfacer que existan números positivos γ, ρ tales que $0 < V(\mathbf{x}) < \gamma$, para una región acotada de $\|\mathbf{x}\| < \rho$, también incluye la siguiente posibilidad:

Una función $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es definida positiva si existe una función definida positiva $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$0 < V(\mathbf{x}) \leq \Psi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

En este caso la cota superior es la función $\Psi(\mathbf{x})$.

Sin embargo, debe notarse que el argumento \mathbf{x} cubre todo su espacio, es decir no permanece acotado.

Considérense las siguientes funciones escalares:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \cosh(x) - 1 \\ V(x) &= \tanh^2(x) \\ 0 &< \tanh^2(x) < \Psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

donde \tanh y \cosh representan la función coseno hiperbólico y tangente hiperbólica, respectivamente. La función Ψ es definida positiva, puesto que $\Psi(0) = 0$, y para $x \neq 0$, $\Psi(x)$ cumple con todos los requisitos de una función definida positiva global. Al mismo tiempo sirve para mostrar que

si la función $V(x)$ es definida positiva en forma local, no es necesario que el argumento x se encuentre acotado.

Las funciones cuadráticas son el caso más común para funciones definidas positivas. En general, para que este tipo de funciones sea del tipo función definida positiva deberá cumplir que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea definida positiva.

Matriz definida positiva

La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se denota con el símbolo $A > 0$ para representar un tipo especial de matriz cuadrada de relevancia en robótica y control.

Debe tenerse cuidado en la interpretación de esta simbología, **no debe leerse matriz A mayor que cero**, ya que esto no tiene sentido en el análisis y teoría de matrices.

A continuación se establece un criterio para determinar si una función cuadrática de la forma $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ es definida positiva.

Teorema de Sylvester

Establece que la función $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ es definida positiva si y sólo si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($A > 0$) para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Una matriz $A > 0$ es definida positiva si cumple con los siguientes requisitos:



La matriz A de la función cuadrática, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, debe ser una matriz simétrica $A = A^T$.



El primer elemento de la matriz a_{11} de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ debe ser positivo, es decir $a_{11} > 0$.



Todos los determinantes menores deben ser positivos, consecuentemente el determinante de la matriz es $|A| > 0$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Observación: en el caso de las funciones cuadráticas definidas positivas $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ se requiere que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea simétrica, debido a la propiedad de antisimetría $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x} = 0$ por lo que $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A_s \mathbf{x} > 0$.

A continuación se listan las propiedades de la matriz definida positiva:



La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ es una matriz no singular, es decir existe la matriz inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y también resulta ser definida positiva $A^{-1} > 0$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Todos sus valores propios son números reales positivos: $\lambda_i\{A\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.



Ejemplo 3.11

Determine si la siguiente función

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

es definida positiva.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

Para resolver este problema primero hay que comprobar si la función en $x = \mathbf{0}$ vale $V(\mathbf{0}) = 0$. Como se comprueba directamente, esta condición es verdadera. Como segundo paso en el análisis de la función, hay que obtener la matriz A . La matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se puede obtener de la siguiente ecuación:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Empleando el teorema de Sylvester, la matriz A es la matriz identidad y para ésta se tiene que:



A es simétrica



$a_{11} = 1$



$|A| = 1$

Por lo tanto, la matriz es definida positiva de forma que $A > 0 \Rightarrow V(x) > 0$.

♣ Ejemplo 3.12

Determine si la siguiente función

$$V(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

es definida positiva.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Solución**

Antes que nada se tiene que la matriz A se puede obtener de la siguiente expresión:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El análisis de la matriz A se puede llevar a cabo a partir del teorema de Sylvester:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

- A es simétrica

- $a_{11} = 1$

- $|A| = 0$

Por lo tanto la matriz no es definida positiva. En este caso la matriz es semidefinida positiva y de aquí se sigue que $A \geq 0 \Rightarrow$ la función es semidefinida positiva $V(\mathbf{x}) \geq 0$.

Función semidefinida positiva

Una función $V(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva cuando $V(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \neq 0$. La función $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$ es semidefinida positiva si y sólo si la matriz

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es semidefinida positiva, esto es, si y sólo si $A \geq 0$ (obsérvese la inclusión del símbolo ≥ 0).

Una matriz es semidefinida positiva si satisface las siguientes condiciones:

-  La matriz A debe ser una matriz simétrica, esto es, $A = A^T$.
-  El primer elemento de la matriz debe ser positivo, es decir, se debe cumplir que $a_{11} > 0$.
-  Alguno de los determinantes menores o el determinante $|A|$ es menor o igual a cero.

La notación de una matriz semidefinida positiva, $A \geq 0$, no se debe de interpretar como que la matriz A *es mayor o igual a cero*, ya que esta interpretación de la notación no tiene ningún significado en el tema de matrices.

Función definida negativa

Una función $V(\mathbf{x})$ es definida negativa, lo cual se denota como $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0$, si la matriz $-A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($-A > 0$).

Función semidefinida negativa

Una función $V(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa, lo que se denota como $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$, si la matriz $-A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva ($-A \geq 0$).

Función indefinidas

Existen funciones que se denominan **indefinidas** y son aquellas en las que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz indefinida, es decir, una matriz en la que algunos de sus determinantes menores son negativos y otros son positivos. Por lo tanto, no son clasificadas ni como funciones definidas positivas, ni como semidefinidas positivas, ni como definidas negativas, ni como semidefinidas negativas.

La matrices definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas e indefinidas tienen las siguientes propiedades matemáticas que resultan de utilidad en el diseño de esquemas de control:

 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida negativa $A < 0$ tiene todos sus valores propios negativos: $\lambda_i\{A\} < 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida positiva $A \geq 0$ tiene todos sus valores propios no negativos: $\lambda_i\{A\} \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidefinida negativa $A \leq 0$ tiene todos sus valores propios no positivos: $\lambda_i\{A\} \leq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ indefinida tiene algunos valores propios positivos y otros más son negativos.



Teorema 3.1 Rayleigh–Ritz

El teorema de Rayleigh–Ritz establece que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\lambda_A^{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_A^{\max} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

donde los valores propios máximo y mínimo de A están denotados por λ_A^{\max} y λ_A^{\min} , respectivamente.

El teorema de Rayleigh–Ritz es ampliamente utilizado en el diseño de algoritmos de control de robots manipuladores, particularmente se emplea en el problema de control de posición para acotar la norma del error.

Una generalización del teorema de Rayleigh–Ritz es para el siguiente caso:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_{\max}\{A\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.20)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



3.4.1 Derivadas parciales de funciones de energía

A continuación se presentan algunas operaciones básicas que son ampliamente usadas en robótica y que están relacionadas con el cálculo de derivadas de vectores y matrices. Se describe la forma de derivar un escalar con respecto a un vector, o la derivada de un vector con respecto a un vector, lo cual se aplica cuando la estructura a derivar está compuesta de vectores y matrices como es el caso de la funciones cuadráticas que inyectan energía a los robots manipuladores: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)



Carl Gustav Jakob Jacobi, matemático alemán, nació el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia, actual Alemania. Estudió en la Universidad de Berlín, obtuvo su doctorado en 1825 sobre análisis de la teoría de fracciones. Realizó numerosas aportaciones en la teoría de números y en el área de las ecuaciones diferenciales, en particular desarrolló la teoría de las funciones elípticas y propuso un método para resolver integrales elípticas usando series exponenciales.

En robótica, en el área de cinemática diferencial se emplea el concepto de jacobiano del robot, el cual permite extraer información acerca de las singularidades del robot, es decir posiciones específicas del robot tal que el determinante de la matriz jacobiana se anula. La matriz jacobiana también es fundamental en el control cartesiano.

Luego de una brillante carrera, Jacobi murió el 18 de febrero de 1854 en la ciudad de Berlín.

Matriz jacobiana

Sea \mathbf{f} una función diferenciable de un campo vectorial n -dimensional a otro campo vectorial m -dimensional $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Las derivadas parciales de las m funciones pueden ser representadas por un arreglo matricial denominado matriz jacobiana, en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

La **matriz jacobiana**, representada por $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$, es una matriz formada por derivadas parciales de primer orden, la cual puede escribirse de la siguiente forma:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$J = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La utilidad de la matriz jacobiana se ubica en varias áreas de la robótica, en el análisis de singularidad de robots manipuladores, planeación de trayectorias, cinemática diferencial, así como en control cartesiano con la estructura de jacobiano transpuesto, en este tema se encuentran control de impedancia, control de fuerza, control híbrido fuerza/posición y visual servoing.

♣ Ejemplo 3.13

Obtener la matriz jacobiana de la siguiente función vectorial:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_1 x_3 \\ \operatorname{sen}(x_3)x_2 \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

De acuerdo con la definición, la matriz jacobiana de esta función vectorial es:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_1^2+x_1x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2+x_1x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial(x_1^2+x_1x_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\operatorname{sen}(x_3)x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\operatorname{sen}(x_3)x_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\operatorname{sen}(x_3)x_2)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(x_1^2x_2^2x_3^2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_1^2x_2^2x_3^2)}{\partial x_2} & \frac{\partial(x_1^2x_2^2x_3^2)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & \operatorname{sen}(x_3) & \cos(x_3)x_2 \\ 2x_1x_2^2x_3^2 & 2x_1^2x_2x_3^2 & 2x_1^2x_2^2x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gradiente

El gradiente es un campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de primer orden de una función escalar:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

El gradiente está representado por el operador $\nabla V(\mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Hay que observar que la matriz jacobiana puede ser representada en términos de gradiente de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x})^T \\ \nabla f_2(\mathbf{x})^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Geométricamente el gradiente representa un vector normal a la superficie de la función de energía que se le inyecta al robot, indica la dirección en la cual la energía se decremente más rápido. El gradiente apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima, y la norma del gradiente representa la magnitud de decremento en una determinada dirección.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ Ejemplo 3.14

Obtener el gradiente de la siguiente función:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Solución

$$\begin{aligned} \nabla V(\mathbf{x}) &= \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

♣ ♣ Ejemplo 3.15

Considérense los vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y defínase la función $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$, con $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$.

Obtener el gradiente.

Solución

El gradiente de esta función es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} A^T \mathbf{x} \\ &= A \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{y}^T}{\partial \mathbf{x}} A^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz jacobiana que para este caso resulta ser la matriz identidad.

Al derivar también se ha utilizado la propiedad $\mathbf{x}^T \underbrace{A \mathbf{y}}_{z \in \mathbb{R}^n} = \underbrace{(A \mathbf{y})^T}_{\mathbf{x}^T z = z^T \mathbf{x}} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x}$.

■ ■ ■

Obsérvese que el operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ carece de movilidad al interior de la estructura matemática de la función $V(\mathbf{x})$. Es muy importante tener claro la función que realiza este operador, ya que es común cometer errores al darle propiedades de un operador escalar. En este caso, de acuerdo con la función cuadrática se emplea álgebra de vectores y matrices para conmutar al extremo derecho el vector \mathbf{y} de la función $V(\mathbf{x})$ y el vector \mathbf{x} moverlo al extremo izquierdo, es decir intercambiar el vector \mathbf{y} por el vector \mathbf{x} .

  Ejemplo 3.16

Obtener el gradiente de la siguiente función de energía: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

Solución

Empleando el resultado del ejemplo 3.15 el gradiente $\nabla V(\mathbf{x})$ adquiere la siguiente forma:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \nabla \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} A \mathbf{x} + \frac{\partial A \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} \quad (3.24)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2A\mathbf{x}.$$

La expresión obtenida en (3.24) es válida si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, en otro caso:

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \nabla \{ \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \} = [A + A^T] \mathbf{x} \quad (3.25)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

El resultado de la expresión (3.24) reproduce el obtenido en el ejemplo 3.14

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \nabla V(\mathbf{x}) &= 2A\mathbf{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■ ■ ■

Derivada temporal de una función de energía

La derivada con respecto al tiempo de una función de energía con la estructura de función cuadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ se obtiene de la siguiente

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ALFAOMEGA

forma:

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= \dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T A \mathbf{x}] \\ &= \frac{d\mathbf{x}^T}{dt} A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \frac{d}{dt} A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A \frac{d\mathbf{x}}{dt} A \mathbf{x} \\ &= \dot{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} \\ &= 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Aquí se ha empleado la notación $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, $\dot{A} = \frac{d}{dt} A$. La expresión (3.26) es válida si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, en otro caso se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T [A + A^T] \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} \quad (3.27)$$

Es importante resaltar que el operador escalar $\frac{d}{dt}$ tiene movilidad al interior de la estructura matemática de la función $V(\mathbf{x})$, en contraste con el operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, el cual permanece inmóvil.

Es una práctica común que en las funciones de energía $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea simétrica y definida positiva, junto con elementos constantes por lo que su derivada adquiere la siguiente forma:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} \quad (3.28)$$

♣ ♣ Ejemplo 3.17

Obtener la derivada temporal de la siguiente función de energía:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$$

Solución

Empleando el operador escalar $\frac{d}{dt}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d(x_1^2)}{dt} + \frac{d(8x_1x_2)}{dt} + \frac{d(3x_2^2)}{dt} \\ &= 2x_1\dot{x}_1 + 8\dot{x}_1x_2 + 8x_1\dot{x}_2 + 6x_2\dot{x}_2 \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por otro lado, empleando el operador vectorial $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}V(x_1, x_2) &= x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \dot{V}(x_1, x_2) &= [\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}}]^T \dot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T A\dot{\mathbf{x}} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Empleando cálculo diferencial, y suponiendo la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, la derivada temporal de la función de energía $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= [\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}]^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} \quad (3.29) \\ &= \nabla V(\mathbf{x})^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x} \\ &= 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \dot{A} \mathbf{x}\end{aligned}$$

Si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es constante, entonces $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T A \dot{\mathbf{x}}$.

En general, si la función de energía se forma bajo las condiciones de que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, $w(t) \in RE_+$, $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, entonces la derivada temporal está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w) &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial \mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}} + \\ &\quad \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w)}{\partial t} \quad (3.30)\end{aligned}$$



Definiciones

Definición 3.6. Considerese el sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}_+$. Si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \forall t \geq 0$, entonces el sistema se llama *sistema dinámico autónomo invariante en el tiempo*.

Definición 3.7. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, entonces \mathbf{f} es *uniformemente continua* en $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, si para cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}$, satisface $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Si $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en \mathcal{D} , entonces \mathbf{f} es una función continua para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. Lo contrario de esta afirmación, no necesariamente es verdadero.

Definición 3.8. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces \mathbf{f} es una *función continua Lipschitz* en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, si existe una constante Lipschitz $l = l(\mathbf{x}_0) > 0$ y una vecindad $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ de \mathbf{x}_0 tal que:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq l\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

**6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook**

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}$.

\mathbf{f} es una *función continua Lipschitz globalmente* si \mathbf{f} es una función *uniformemente Lipschitz* sobre $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.

Definición 3.9. Se tiene un *conjunto atractor* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si existe una vecindad $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{N} \quad \forall t \geq 0$ y $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{M}$ conforme el tiempo tiende a infinito $t \rightarrow \infty$. El *dominio de atracción* $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{D}$ del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ está dado por $\mathcal{M}_0 = \{\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D} : \text{si } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathcal{M}\}$.



3.5 Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales que describen los fenómenos físicos que se encuentran presentes en el robot. Para propósitos de análisis y diseño, en robótica se emplea como modelo dinámico una estructura matemática que incluye una ecuación diferencial de primer orden expresada de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.31)$$

donde \mathbf{x} representa la variable de estado, la cual proporciona información interna de los estados de la dinámica del sistema físico o mecánico en el caso del robot. La variable de estado \mathbf{x} es una función continua del tiempo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y es la solución de la ecuación diferencial, en particular $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ se conoce como la condición inicial o estado inicial.

La función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es un mapeo vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo en la variable de estado que satisface lo siguiente:



La ecuación (3.31) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial $\mathbf{x}(0)$.



La variable de estado \mathbf{x} es una función continua del tiempo t , y esta dependencia es una característica propia o intrínseca. Por tanto, la derivada $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ existe y tiene sentido.



Si $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (3.31) correspondiente a la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, entonces $\mathbf{x}(t)$ depende de manera continua del estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

Continuidad Lipschitz: la función \mathbf{f} es localmente continua Lipschitz en \mathbf{x} si para algún $h > 0$, existe $l \geq 0$ tal que,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq l\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_h, \quad t \geq 0 \quad (3.32)$$

Aquí B_h significa una región esférica $B(0, h)$ de radio h y centrada en cero, la constante l se llama constante Lipschitz. Una definición para una función f continua Lipschitz en forma global es que la relación (3.32) sea válida $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

En el sistema (3.31) la variable tiempo t no aparece de manera explícita, por esto se le denomina **sistema dinámico autónomo** y sirve para representar a los sistemas dinámicos lineales y no lineales. Cuando el tiempo aparece explícitamente como parte de la estructura matemática, entonces se le denomina **sistema dinámico no autónomo**: $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$.

Las siguientes estructuras matemáticas son ejemplos de sistemas dinámicos no lineales autónomos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \operatorname{sen}(x_2) \\ \vdots \\ x_n^3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \tanh(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \cos(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{sen}(\mathbf{x})$$

Lipschitz (1832-1903)



Rudolph Otto Sigismund Lipschitz, matemático alemán, nació el 14 de mayo de 1832. En 1864 fue profesor de la universidad de Bonn. En su honor, la condición de continuidad de Lipschitz lleva su nombre; ésta garantiza la solución única para sistemas dinámicos de la forma $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$; dicha contribución representa una fortaleza para el desarrollo de sistemas dinámicos aplicados a la robótica.

También realizó una gran cantidad de aportaciones en diversas áreas de las matemáticas, entre las que sobresalen: teoría de números, álgebras con involución, análisis matemático, etc. Lipschitz trabajó sobre el método de Hamilton Jacobi de integración de ecuaciones de movimiento de sistemas dinámicos. Murió el 7 de octubre de 1903.

Hay que observar que la denominación de sistemas dinámicos no lineales es respecto a la variable de estado \mathbf{x} , es decir la variable de estado es argumento de una función no lineal.

Un sistema lineal autónomo, invariante en el tiempo, está dado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

Aquí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz con coeficientes constantes.

Ejemplos de sistemas dinámicos no autónomos lineales y no lineales son

los siguientes:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1^2 \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(x_2)e^t \\ \vdots \\ x_n^3 \frac{t}{1+t^4} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \tanh(\mathbf{x})\cosh(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \cos(\mathbf{x})t^3$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} t^9$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \operatorname{sen}(\mathbf{x} t^{100})$$

Normalmente los modelos dinámicos tienen una estructura diferente a la de la ecuación 3.31, siempre es posible mediante un adecuado cambio de variables de estado transformar un sistema dinámico a la forma 3.31.

♣ ♣ Ejemplo 3.18

Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes, y la respuesta del sistema está determinada por $y \in \mathbb{R}$. Obtener la representación en variables de estado de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Solución

La representación en variables de estado de la forma 3.31 se obtiene mediante el siguiente procedimiento.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Teniendo en cuenta que $y = x_1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1\end{aligned}$$

La ecuación anterior puede adquirir la forma vectorial de un sistema lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}}_{f(\mathbf{x})} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Ejemplo 3.19

Considérese el siguiente sistema dinámico no lineal

$$\tau = \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta \operatorname{sen}(y)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes, $\tau \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada y la respuesta del sistema es $y \in \mathbb{R}$.

Obtener la representación en variables de estado.

Solución

La representación en variables de estado de la forma 3.31 se obtiene como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta \operatorname{sen}(x_1) + \tau\end{aligned}$$

Puntos fijos

Considérese el sistema dinámico autónomo (3.31). El vector $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto fijo de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ si:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*. \quad (3.33)$$

La interpretación geométrica de los puntos fijos de la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ son los puntos de intersección de la gráfica de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con la recta de \mathbf{x} .

Algunas funciones tienen uno o más puntos fijos:

- $f(x) = x^3$ tiene tres puntos fijos: $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f(0) = 0$.
- $f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos: $f(0) = 0$, y $f(1) = 1$.
- La función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene como único punto fijo $x^* = 0$.
- La función $f(x) = e^x$ no tiene ningún punto fijo.
- La función $f(x) = x$ tiene un número infinito de puntos fijos.



3.5.1 Puntos de equilibrio

Un **punto de equilibrio** o estado de equilibrio es un vector constante $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ del sistema (3.31) si cumple con la siguiente condición:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.34)$$

Obsérvese que si la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ se encuentra justo en el punto de equilibrio, entonces se satisface que $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$. El punto de equilibrio es un ente dinámico donde todas las fuerzas del sistema encuentran su equilibrio. El punto de equilibrio del sistema dinámico tiene propiedades particularmente importantes para control de robots, por ejemplo el punto de equilibrio puede ser estable o inestable.

Los sistemas dinámicos no lineales son diversos en lo que se refiere a la existencia del punto de equilibrio, siendo las siguientes algunas de las posibilidades:



Un solo y único punto de equilibrio: $\dot{x} = x^2$.



Un número finito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = x^3 [x - 1]$; puntos de equilibrio $x = 0$ y $x = 1$.



Un número infinito de puntos de equilibrio: $\dot{x} = \operatorname{sen}(x)$; puntos de equilibrio $x = 0, \pm n\pi$.



No tiene puntos de equilibrio: $\dot{x} = e^x$.

En los sistemas dinámicos lineales se pueden dar sólo dos posibilidades:



Puede tener un solo y único punto de equilibrio: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, si el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diferente de cero, i.e., $\det[A] \neq 0$.



Tiene un número infinito de puntos de equilibrio: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, si el determinante de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es cero, i.e., $\det[A] = 0$.

Como se expone en la siguiente sección, la teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales o no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.

El estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos se caracteriza por analizar la respuesta del sistema para pequeñas perturbaciones en los estados del sistema. Un punto de equilibrio se dice ser estable si para valores pequeños de perturbaciones iniciales, el movimiento perturbado permanece en el espacio de estados. La metodología de Lyapunov no re-

quiere resolver la ecuación diferencial, la cual puede ser muy complicada. La estabilidad del punto de equilibrio se demuestra por proponer funciones de energía definida positiva al sistema, tal que su potencia sea semidefinida negativa. Si la derivada de la energía o potencia resulta una función definida negativa se habrá demostrado estabilidad asintótica del punto de equilibrio. Los algoritmos de control que se emplean en robótica están directamente relacionados con la estabilidad asintótica y no con la propiedad de estabilidad.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757 3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov es una herramienta indispensable para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos. Históricamente, en el siglo XV el problema que llamó la atención fue la estabilidad del sistema solar generalizado en el título *Problema de estabilidad de N cuerpos rígidos*. Torricelli (1608–1647) fue de los primeros en formalizar lo que se conoce como *mínima energía total*, postuló que un sistema de cuerpos tiene un punto de equilibrio (local) estable, si dicho punto tiene mínima energía total.

A mediados del siglo XVIII, Lagrange y Laplace generalizaron las ideas de Torricelli con el siguiente principio: *si el sistema es conservativo, es decir el sistema conserva la energía total (energía cinética más potencial), entonces un estado del sistema correspondiente a cero energía cinética y un mínimo de energía potencial es un punto de equilibrio estable*. Otros científicos mostraron que el principio de Torricelli también se cumple cuando el sistema es disipativo, es decir, cuando la energía total se decrementa a lo largo de las trayectorias del sistema.

En esencia los teoremas de estabilidad de Lyapunov son la generalización del principio de Torricelli. La teoría de Lyapunov es muy importante en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos lineales y no lineales,

sin importar el orden del sistema: permite obtener información sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema sin resolver la ecuación diferencial que caracteriza a dicho sistema dinámico; ofrece una precisa caracterización de aquellas funciones que califican como *funciones de energía* en la vecindad del punto de equilibrio y la noción de que aquellas *funciones de energía* se decrementan a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico en cuestión, lo que significa que la derivada temporal de la energía (potencia del sistema) debe ser negativa definida, hasta alcanzar un estado de equilibrio.

La definición abstracta de estabilidad para un sistema dinámico no necesariamente se derivó de un sistema conservativo o disipativo. Fue hasta 1892 cuando Alexander Mikhaïlovich Lyapunov estableció contribuciones sobre el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos no lineales en su trabajo *The General Problem of the Stability of Motion*. Los resultados de Lyapunov incluyen los métodos directos e indirectos, junto con el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, los cuales proporcionan una fuerte metodología para el diseño de esquemas de control que garantice la estabilidad del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.

El método directo establece que si se construye una función de energía en los estados del sistema como función definida positiva continua diferenciable, la variación temporal debida a pequeñas perturbaciones en una vecindad del punto de equilibrio es siempre negativa o cero, entonces el punto de equilibrio es estable en forma global, es decir, para toda condición inicial que se encuentre dentro de la región de atracción. Sin embargo, si la razón de cambio de la función definida positiva es estrictamente negativa, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable en forma global. Nótese que la razón de cambio de la función definida positiva corresponde a la potencia del sistema. En contraste, el método indirecto aborda únicamente la estabilidad local del punto de equilibrio de sistemas dinámicos linealizados. La estabilidad local se caracteriza sólo para algunas condiciones iniciales.

Aleksandr Mikhaïlovich Lyapunov (1857-1918)



Matemático y físico ruso, Lyapunov nació el 6 de junio de 1857 en Yaroslavl, Rusia Imperial. Estudió en la Universidad de San Petersburgo, formalizó el concepto de estabilidad en respuesta al problema abierto de determinar configuraciones estables de cuerpos en rotación en fluidos, propuesto por Poincaré y fue profesor de la Universidad de Kharkov, contemporáneo de Routh y Hurwitz (control clásico). Lyapunov obtuvo su doctorado con honores en 1892 en tópicos de estabilidad para sistemas dinámicos que detonó el desarrollo de control en robótica. En 1918 su esposa Natalia enfermó de tuberculosis y por la mala situación económica que pasaban murió el 31 de octubre de 1918; tres días después, el 3 de noviembre Lyapunov se suicidó con un disparo en la cabeza. No dejó descendencia. A partir de 1950, se reconoció el valor de su legado científico y las bases del control moderno.

Existen herramientas para determinar la estabilidad de sistemas lineales, tales como Bode, Nyquist, Routh, lugar de las raíces (*root locus*), etc. Sin embargo, dichas herramientas no se aplican a sistemas no lineales o lineales variables en el tiempo. La técnica del plano fase es aplicable a sistemas de primer y segundo orden. Bajo el enfoque de Nyquist, es posible emplear la técnica de la función descriptiva a un tipo de sistemas no lineales; dicha técnica es sólo aproximada.

Esta sección está destinada a presentar los conceptos básicos de estabilidad para el punto de equilibrio del modelo dinámico (3.35), particularmente el denominado **segundo método** o **método directo** de Lyapunov. Sin pérdida de generalidad, de aquí en adelante su supondrá que el punto de equilibrio es el vector constante cero: $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$. Si este no fuera el caso, siempre es posible trasladar el punto de equilibrio con un adecuado cambio de coordenadas al origen de estados.

Es importante resaltar que los atributos de estabilidad son sobre el punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ y no sobre el sistema en sí, ni de sus soluciones.



3.6.1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov

El concepto de estabilidad tiene varias interpretaciones dependiendo del campo del conocimiento donde se aplica; por ejemplo, en ciencias naturales o en economía un sistema es estable si una determinada variable del sistema se incrementa monótonamente, de acuerdo con una ecuación exponencial. Similarmente en astronomía, el movimiento de un cuerpo celestial es considerado como estable si alguna de sus órbitas no difiere de la previa. En ingeniería, la estabilidad de un sistema significa que después de un intervalo de tiempo el error permanece dentro de un rango específico o bien se decrementa a cero. No obstante, dentro del área de ingeniería es donde el concepto de estabilidad tiene varias facetas, por ejemplo estabilidad exponencial, clásica, absoluta Popov, entrada-salida,

\mathcal{L} , y en el sentido de Lyapunov.

Sin embargo, de todos los conceptos de estabilidad del área de ingeniería, la que mayor ventaja ofrece es la teoría de estabilidad de Lyapunov debido a que proporciona varias propiedades matemáticas que facilitan el análisis y diseño de esquemas de control.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.35)$$

Esta teoría establece que para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ que se encuentra dentro del atractor, si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio.

El concepto de **atractor** o **región de atracción** significa que para cada solución de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que empieza suficientemente cercana a cero, a partir de t_0 se aproxima al origen $\mathbf{0}$ como el tiempo evoluciona, es decir

$t_0 + t \rightarrow \infty$.

Hipótesis sobre el sistema dinámico (3.35): consideraremos que el sistema es dinámico autónomo, es decir

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (3.36)$$



El punto de equilibrio existe: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.



La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es continua Lipschitz sobre \mathbb{R}^n .



Existe la solución $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y es única, continua en t y diferenciable con respecto al tiempo.



La función $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ es continua en \mathbf{x} , continua para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciable en t .

Entre los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov destacan los siguientes:

Estabilidad

El origen de la ecuación (3.36) es un **punto de equilibrio estable** (en el sentido de Lyapunov) si para cada $t_0 \geq 0$, y $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\gamma(t_0, \epsilon) > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}\| < \gamma(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (3.37)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (3.36), la cual empieza desde $\mathbf{x}(0)$ en t_0 .

En la definición anterior la constante $\gamma(t_0, \epsilon) \leq \epsilon$ no es única. Debe interpretarse que en la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ para cada $\epsilon > 0$ y no para algún $\epsilon > 0$.

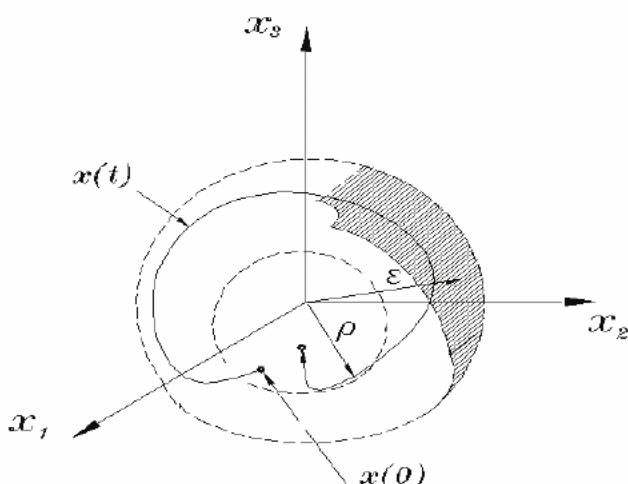
En la figura 3.4 se muestra el concepto de estabilidad para el caso $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^2$ donde el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Obsérvese que existe un ϵ y un γ que satisface la condición de estabilidad, es decir, $\|\mathbf{x}(0)\| < \gamma \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$.

El punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es **atractivo** si $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \exists \eta(t_0) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}_0\| < \eta(t_0) \Rightarrow \mathbf{x}(t_0 + t, t_0, \mathbf{x}(0)) \rightarrow \mathbf{0} \text{ como } t \rightarrow \infty.$$

Estabilidad uniforme

El punto de equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es llamado un punto de equilibrio estable

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Figura 3.4** Concepto de estabilidad.

uniformemente de (3.36) si $\gamma = \gamma(\epsilon)$ no depende de t_0 .

Equilibrio asintóticamente estable

El origen es un *equilibrio asintóticamente estable* de (3.35) si

El origen es estable.

El origen es atractivo, es decir, existe un número $\gamma' > 0$ tal que
 $\|x(0)\| < \gamma' \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

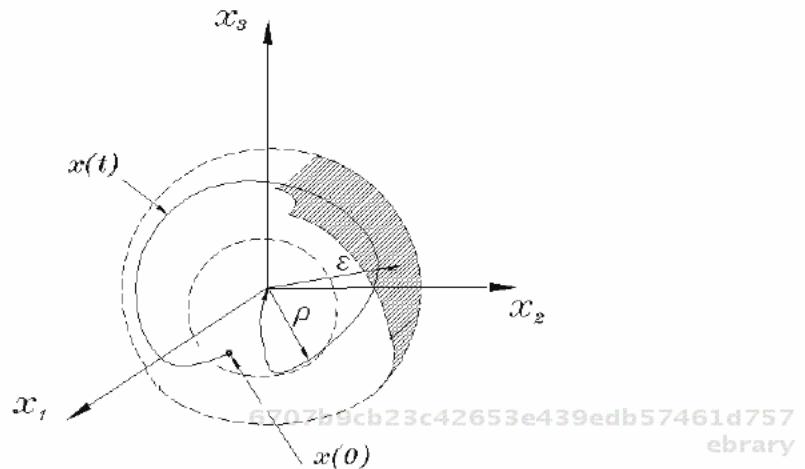
En la figura 3.5 se ilustra el concepto de estabilidad asintótica para el caso de $x(0) \in \mathbb{R}^2$.

El origen es un *punto de equilibrio asintóticamente global* de la ecuación (3.35) si:

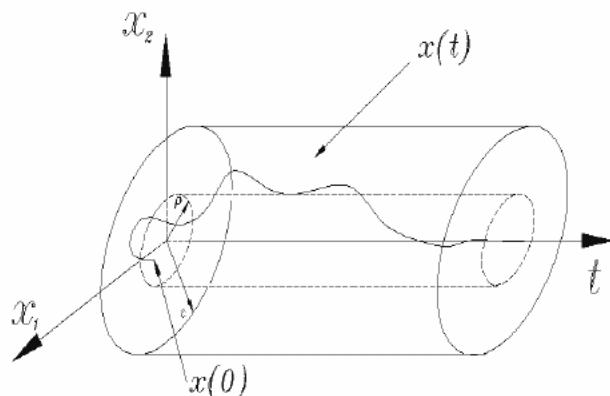
El origen es estable

El origen es atractivo para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

**Figura 3.5** Estabilidad asintótica.

En la figura 3.6 se muestra la evolución temporal de la trayectoria $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ hacia el punto de equilibrio. La condición inicial se encuentra dentro de la región de atracción, entonces $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

**Figura 3.6** Convergencia asintótica al punto de equilibrio.

Los conceptos de estabilidad global y estabilidad asintótica global significan que el punto de equilibrio es único.

El origen es un *punto de equilibrio exponencialmente estable global* de (3.35) si existen constantes positivas α, β y γ tales que:

$$\text{si } \|\mathbf{x}(0)\| < \gamma \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad (3.38)$$

De acuerdo con los conceptos anteriores, un equilibrio exponencialmente estable global es también un equilibrio asintóticamente estable. Sin embargo, lo contrario no necesariamente es verdad.

El origen es un *punto de equilibrio inestable* de la ecuación (3.35) si éste no es estable. Afirmar que el origen de estados es inestable es equivalente a enunciar que existe al menos un $\epsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\gamma > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \gamma \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| > \epsilon \quad \forall t \geq 0,$$

en otras palabras, si existe al menos un $\epsilon > 0$, el cual se desea que acote a la norma de la solución $\|\mathbf{x}(t)\|$ y no existe ninguna condición inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y cuya solución $\mathbf{x}(t)$ lo satisfaga ($\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$), entonces el origen es inestable. Es importante subrayar que en ningún momento se afirma que la solución $\mathbf{x}(t)$ debe “crecer” indefinidamente.



3.6.2 Función candidata de Lyapunov

La propuesta de la función de Lyapunov es importante debido a que su estructura matemática permite demostrar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio del modelo dinámico (3.36).

Una función $V(\mathbf{x})$ es una *función candidata de Lyapunov* para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ cumple con lo siguiente:



$V(\mathbf{x})$ es una función definida positiva.



$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a \mathbf{x} .



La derivada con respecto al tiempo $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ existe y es una función continua con respecto a \mathbf{x} .

La derivada con respecto al tiempo de una función candidata de Lyapunov $\dot{V}(\mathbf{x})$ para la ecuación (3.35) a lo largo de sus trayectorias del sistema, está denotada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.39)$$

La derivada temporal de la **función de Lyapunov** $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ para el sistema dinámico (3.35) debe ser una función definida negativa:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$



3.6.3 Método directo de Lyapunov

Con los preliminares anteriores, ahora se pueden presentar los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Es importante mencionar que se presentan los teoremas comúnmente más utilizados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.



Teorema 3.2 Estabilidad

El origen es un **punto de equilibrio estable** de la ecuación (3.35) si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ con derivadas parciales continuas con respecto a \mathbf{x} tal que su derivada temporal satisface

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.40)$$

Si se cumple la relación (3.40) significa que la función de Lyapunov es una función decreciente y por lo tanto las soluciones $\mathbf{x}(t)$ del modelo dinámico (3.36) se encuentran acotadas para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

Una **función decreciente** es una función continua $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si para cada $r \in \mathbb{R}_+$, existe un número real $k < \infty$ tal que

$$V(\mathbf{x}) \leq k \quad \forall \|\mathbf{x}\| \leq r.$$

Para el caso de estabilidad la función de Lyapunov (función definida positiva y su derivada temporal semidefinida negativa) cumple con lo siguiente:

$$V(\mathbf{x}(0)) > V(\mathbf{x}(t)) > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.41)$$



Teorema 3.3 Estabilidad asintótica global

El origen es un estado de equilibrio **global asintóticamente estable** de (3.36), si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$, tal que su derivada satisface



$$\dot{V}(\mathbf{0}) = 0 \quad \forall t \geq 0$$



$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

lo que significa que la variable de estado $\mathbf{x}(t)$ cumple con:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Teorema de estabilidad exponencial global

Estabilidad exponencial global: el origen es un punto de equilibrio **global exponencialmente estable** del sistema dinámico (3.35), si existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ y constantes positivas α, γ tales que:

- $\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$

La estabilidad asintótica global en sistema dinámicos autónomos significa que el punto de equilibrio $\mathbf{x}_e = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es único y no depende de la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$. Considérese la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0.$$

La existencia de un único estado equilibrio es una condición necesaria para establecer sobre éste:



Estabilidad asintótica global.



Estabilidad exponencial global.

La propuesta de la función candidata de Lyapunov tal que su derivada satisfaga las condiciones de una función definida negativa no es trivial, depende de la intuición y experiencia del diseñador.

En control de robots la estabilidad no es importante, la parte clave y relevante que debe ser atribuible al algoritmo de control involucrado en el punto de equilibrio del modelo dinámico es la estabilidad asintótica global.

Ejemplo 3.20

Considérese el siguiente sistema lineal escalar:

$$\dot{x} = -ax \quad x(0) \in \mathbb{R}$$

donde $a \in \mathbb{R}_+$.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica.

Solución

El origen es el único punto de equilibrio. Considérese la siguiente función candidata:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

la cual es una función definida positiva. La derivada temporal está dada por:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial x^2}{\partial x} \dot{x} = x \dot{x} = x \underbrace{(-ax)}_{\dot{x}} = -ax^2 < 0$$

lo que demuestra estabilidad asintótica global, es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$.

Debe tomarse en cuenta que la propuesta de la función candidata de Lyapunov no es única, es decir puede haber varias funciones o inclusive una familia extensa de funciones miembros, como en el caso de la función

$$V(x) = \frac{1}{2m}x^{2m}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

donde m es un entero positivo. La derivada de la función $V(x)$ con respecto al tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^{2m-1} \dot{x} \\ &= x^{2m-1} (-ax) \\ &= -ax^{2m} < 0\end{aligned}$$

El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo tanto las trayectorias del sistema convergen hacia cero en forma de asintótica.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ebrary

ALFAOMEGA



Plano fase

Henri Poincaré introdujo el plano fase como una herramienta para realizar el estudio de sistemas dinámicos de segundo orden. El plano fase representa un método gráfico que permite deducir información de la estabilidad del sistema. El método consiste en generar un conjunto de trayectorias o curvas de contorno para varias condiciones iniciales $\dot{x}(0), x(0)$ en el espacio de estados \dot{x} vs x , entonces dependiendo del patrón o comportamiento cualitativos de esas trayectorias se deduce características de la dinámica del sistema. Una ventaja que representa es que no requiere resolver analíticamente la ecuación del sistema dinámico. El método se aplica a sistemas lineales y no lineales. En los ejes coordenados no figura el tiempo, únicamente la velocidad \dot{x} y la posición $x(t)$. El tiempo ya se encuentra implícito en las variables de estado.

En el plano fase un *ciclo límite* es una curva cerrada aislada, indicando la naturaleza periódica del movimiento. Por analogía a un punto de equilibrio, hay ciclos límites estables e inestables. Para el caso de ciclos límites estables, trayectorias $[x(t), \dot{x}(t)]^T$ que se encuentren fuera del ciclo límite, tenderán asintóticamente a esa curva cerrada, mientras que si la trayectoria inicia dentro del ciclo límite, permanecerá indefinidamente girando alrededor del punto de equilibrio.

♣ ♣ Ejemplo 3.21

Llevar a cabo el análisis de estabilidad de un sistema mecánico oscilador, el cual se encuentra descrito por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución

El punto de equilibrio existe y es único.

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \left[\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x} \right]^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1x_2 - x_1x_2 = 0 \end{aligned}$$

por lo que se demuestra la estabilidad del punto de equilibrio.

En la figura 3.7 se muestra el diagrama fase del sistema mecánico oscilador. Nótense las diferentes trayectorias circulares del sistema para las siguientes condiciones iniciales: $[x_1(0), x_2(0)]^T$, con $\{x_1(0) = -3, -2, \dots, 5\}$ y $\{x_2(0) = -4, -3, \dots, 4\}$.

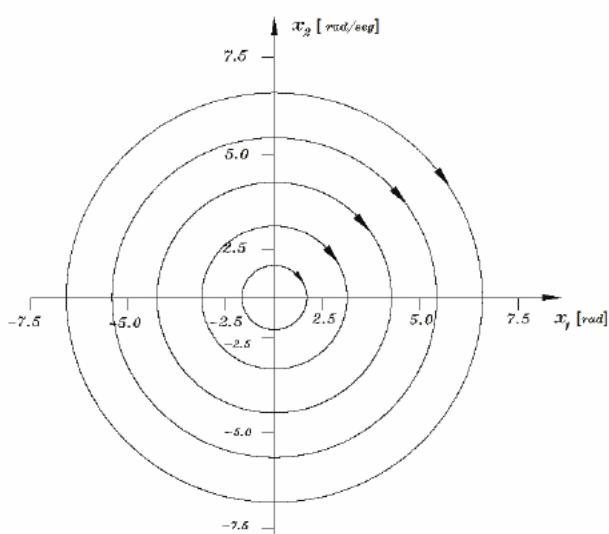


Figura 3.7 Ciclos límite de un sistema oscilador mecánico.

Si la condición inicial del sistema $[x_1(0), x_2(0)]^T \in \mathbb{R}^2$ es el origen de estados (punto de equilibrio), entonces las soluciones del sistema $[x_1(t), x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ permanecen en el punto de equilibrio, es decir, $[x_1(t), x_2(t)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \geq 0$. Si la condición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T \in \mathbb{R}^2$ es diferente a cero, es decir se encuentra fuera del punto de equilibrio, entonces genera una trayectoria circular alrededor del origen de estados.

La figura 3.8 muestra el comportamiento oscilatorio de la posición $x_1(t)$ y velocidad $x_2(t)$, correspondiente a la condición inicial $[x_1(0), x_2(0)]^T = [5\text{rad}, 4\text{rad/seg}]^T \in \mathbb{R}^2$.

A continuación se presenta el código MatLab para realizar la simulación de un sistema oscilador mecánico.

El sistema oscilador corresponde a la forma general de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, cuya implementación se encuentra contenida en el código fuente 3.1. Por otro lado, el programa listado en el código fuente 3.2 emplea al programa 3.1 para obtener los resultados de simulación del plano fase del oscilador mecánico y la evolución en el

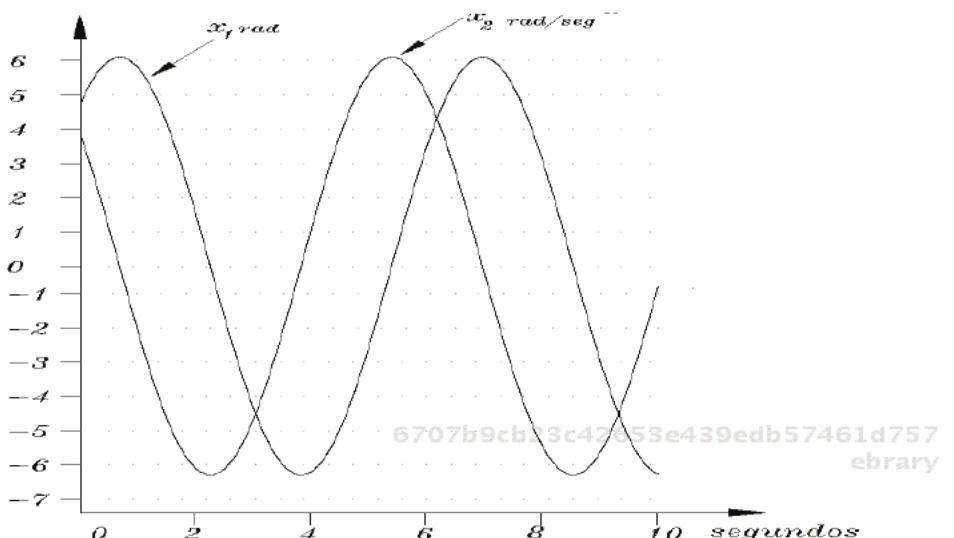


Figura 3.8 Posición y velocidad del oscilador mecánico.

tiempo de las variables de estado que se presentan en las figuras 3.7 y 3.8.

En el proceso de simulación, la función de integración numérica utilizada fue `ode45(·)`. El tiempo de simulación es de 10 segundos con incrementos de tiempo de 2.5 mseg, de esta forma se tienen 400 puntos por cada segundo, siendo un total de 4000 puntos de información dentro del tiempo total de simulación.

Las líneas 11 a 18 del código fuente 3.2 permiten variar las condiciones iniciales $[x_1(0), x_2(0)]^T$. Los resultados del vector de estados que contiene a $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son almacenados en las matrices declaradas en las líneas 16 y 17, para ser graficadas con la función `plot`.

En el sitio web del libro se encuentran varios sistemas dinámicos implementados en código fuente para MatLab, con la finalidad de que el lector encuentre diversidad de ejemplos simulados para un fácil y rápido aprendizaje del comportamiento de sistemas dinámicos. El caso del oscilador mecánico es tan sólo un ejemplo de varios que el lector puede descargar.

if**Código Fuente 3.1 Oscilador mecánico**

```
%cap3_osciladormec.m    Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
%simulación de un sistema dinámico lineal
%de dimensión 2
%oscilador mecánico
%invariante en el tiempo de la forma
% $\dot{x} = Ax$ 
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Oscilador mecánico**

```
1 %
2 function xp =cap3_osciladormec(t,x)
3 %vector de estados
4 x1=x(1); %posición
5 x2=x(2); %velocidad
6 x=[x1; x2];
7 %parámetros de la matriz A
8 %del oscilador mecánico
9 a11=0;
10 a12=1;
11 a21=-1;
12 a22=0;
13 %matriz A
14 A=[a11, a12; a21, a22];
15 %salida del oscilador mecánico
16 xp=A*x; %Salida del Sistema lineal
17 %
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Simulación de sistemas dinámicos

El sitio web del libro contiene código fuente en MatLab para realizar simulación de sistemas dinámicos invariantes en el tiempo. Procedimientos para encontrar plano fase, estudio del régimen transitorio y estacionario en la respuesta de las variables de estado del sistema.

if

Código Fuente 3.2 Simulación del Oscilador mecánico

```
%cap3_om.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Simulación del Oscilador mecánico

```
1 % 
2 clear;
3 close all;
4 clc;
5 format short g
6 ti=0; %tiempo inicial de simulación
7 h=0.0025; %incremento de tiempo
8 tf=10; %tiempo final
9 ts=ti:h:tf;
10 %simulación para varias condiciones iniciales
11 for i=-4:4
12 x0=[i+1; i]; %condición inicial
13 options=odeset('RelTol',1e-3);
14 %simulación del oscilador mecánico
15 [t, x]=ode45('cap3_osciladormec',ts, x0,options);
16 x1(:,5+i)=x(:,1); %posición articular
17 x2(:,5+i)=x(:,2); %velocidad articular
18 end
19 %gráfica de variables de estado
20 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'.')
21 %
```



La manera general para determinar la forma estructural de la función candidata de Lyapunov de sistemas lineales se muestra en el siguiente ejemplo.

♣ ♣ Ejemplo 3.22

Determinar la estabilidad asintótica global de sistemas dinámicos lineales.

Solución

Un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo se encuentra caracterizado por la siguiente ecuación:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

Si el determinante $\det[A]$ de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cumple con la condición $\det[A] \neq 0$, entonces el punto de equilibrio es único.

Considérese la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x},$$

donde la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, $P > 0$. La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= \frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt} = \boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{x}}^T P \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^T [A^T P + P A] \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} < 0 \\ Q &= -[A^T P + P A]\end{aligned}$$

donde la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida negativa.

La forma

$$Q = -[A^T P + PA] \quad (3.43)$$

es conocida como *la ecuación algebraica de Lyapunov*.

La ecuación (3.43) representa la forma general de diseñar funciones candidatas de Lyapunov para sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo.

Como un ejemplo práctico considere el siguiente sistema dinámico lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

El punto de equilibrio existe y es único, debido a que el determinante de la matriz es $\det[A] = 1$.

Tomando en cuenta los resultados del ejemplo 3.22:

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_{11}p_{11} + 2p_{12}a_{21} & p_{11}a_{12} + p_{22}a_{21} + p_{12}[a_{11} + a_{22}] \\ p_{11}a_{12} + p_{22}a_{21} + p_{21}[a_{11} + a_{22}] & 2p_{12}a_{12} + 2p_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} q_{11} & q_{11} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por ser P una matriz definida positiva, debe tomarse en cuenta que $p_{12} = p_{21}$. Por sencillez, se propone la matriz Q como la matriz identidad. Sustituyendo los valores de la matriz A se obtienen los componentes de la matriz P :

$$\begin{aligned} Q &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2p_{12} & 3p_{11} - p_{22} - 4p_{12} \\ 3p_{11} - p_{22} - 4p_{21} & 6p_{12} - 8p_{22} \end{bmatrix} \\ P &= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para verificar que es correcto el anterior desarrollo de la matriz P , se analizará la estabilidad asintótica global a través de la siguiente función

de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

la cual es una función definida positiva, debido a que la matriz $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz definida positiva, $P > 0$. La derivada de esta función con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias del sistema obtiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_1, x_2) &= [\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}}]^T \dot{\mathbf{x}} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x_2 \\ -x_1 - 4x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \left[\frac{5}{6}x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \right] \\ &= -x_1^2 - x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Como se ve, la derivada de la función de Lyapunov es una función definida negativa, lo que demuestra estabilidad asintótica global del punto de equilibrio, es decir: $\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0$.

En la figura 3.9 se presenta el diagrama fase del sistema para las siguientes

670 condiciones iniciales: $x_1(0) = \{-3, -2, \dots, 5\}$ y $x_2(0) = \{-4, -3, \dots, 4\}$.

ebrary

Si la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ se encuentra ubicada en el origen de estados, entonces las trayectorias del sistema se quedan estacionarias en el punto de equilibrio. Para el caso en que las condiciones iniciales se encuentran fuera del punto de equilibrio, entonces la evolución de las trayectorias del sistema convergen asintóticamente al punto de equilibrio.

La evolución en el tiempo de las trayectorias del sistema $[x_1(t), x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ para la condición incial $[x_1(0), x_2(0)]^T = [5\text{rad}, 4\text{rad/seg}] \in \mathbb{R}^2$ se presentan en la figura 3.10. Obsérvese que, conforme el tiempo evoluciona a infinito, la región de atracción del punto de equilibrio lleva a las trayectorias en forma asintótica hacia el origen de estados.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

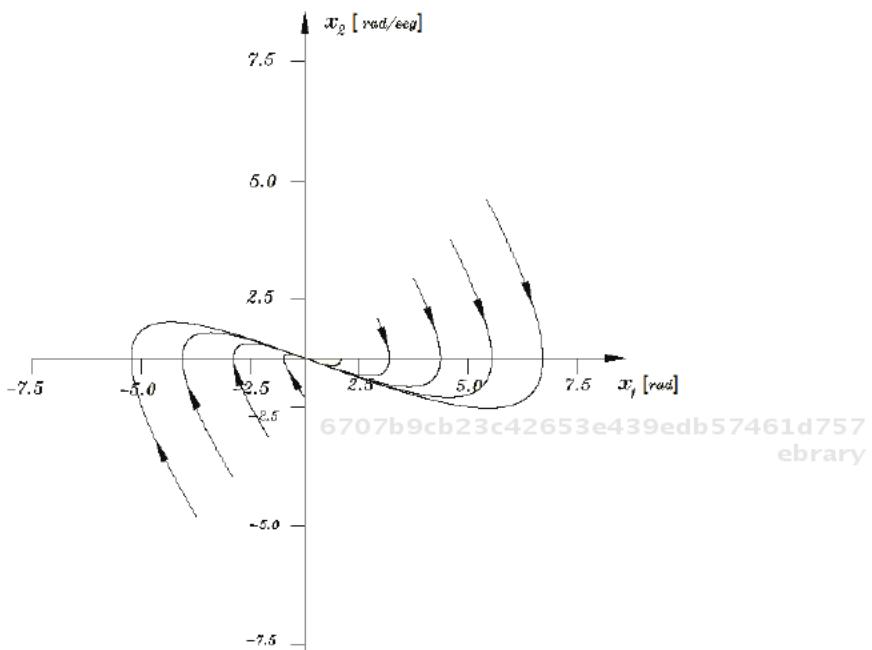


Figura 3.9 Diagrama fase de un sistema con punto de equilibrio asintóticamente estable.

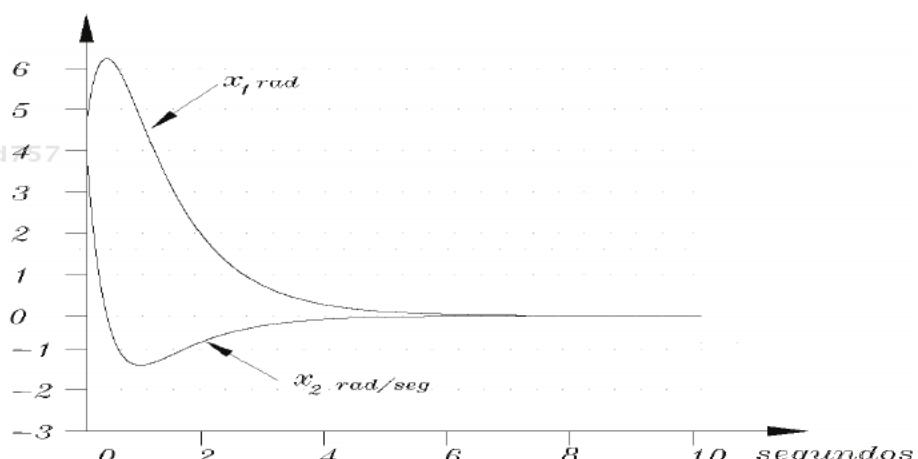


Figura 3.10 Comportamiento asintótico de las trayectorias \$x_1(t)\$ y \$x_2(t)\$ hacia el punto de equilibrio.

 Ejemplo 3.23

Realizar el análisis de estabilidad del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k \tanh(x)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$.

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El punto de equilibrio existe y es único, debido a que $\tanh(0) = 0$.

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(x) &= \ln(\cosh(x)) \\ \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} \dot{x} = \tanh(x) \dot{x} = \tanh(x) ((-k \tanh(x))) \\ &= -k \tanh^2(x) < 0. \end{aligned}$$

670 La derivada temporal de la función de Lyapunov es definida negativa en
ebrary forma local, ya que $-\dot{V}(x) > 0$ es definida positiva en forma local, es decir, no cumple que $V(x) \rightarrow \infty_+$ sí $x(t) \rightarrow \infty$.



 Ejemplo 3.24

Realizar el análisis de estabilidad del siguiente sistema dinámico no lineal:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^5\end{aligned}$$

Implementar un programa en Matlab que permita realizar la simulación del sistema para diversas condiciones iniciales.

Graficar el diagrama fase y explicar el comportamiento de las trayectorias $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

El origen es el único punto de equilibrio $[x_1, x_2]^T = [0, 0]^T$. Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{6}x_2^6$$

Esta función es definida positiva, debido a que es posible estructurarla de la siguiente forma:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{\text{matriz definida positiva}} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

y su matriz respectiva es definida positiva.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov se obtiene como:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = [\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{x}}]^T \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -x_1^3 \\ -x_2^5 \end{bmatrix} = -x_1^6 - x_2^{10} < 0$$

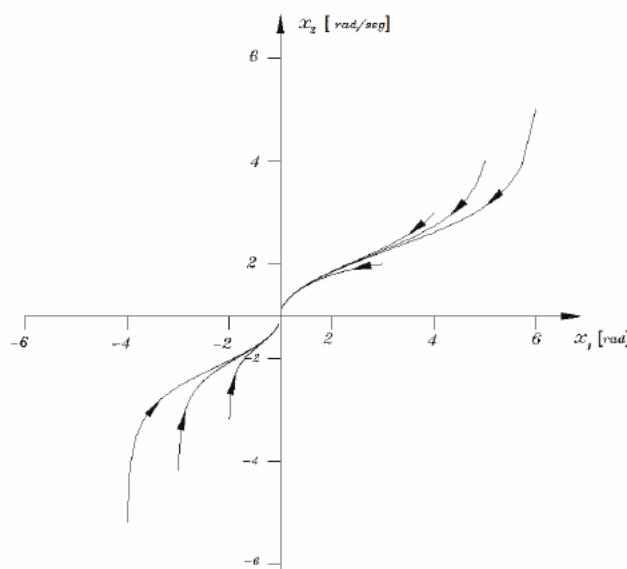
Obsérvese que esta función es definida negativa puesto que $-\dot{V}(x_1, x_2) > 0$, es decir:

$$x_1^6 + x_2^{10} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^5 \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

En la figura 3.11 se presenta el diagrama de fase del sistema dinámico no lineal, para las condiciones iniciales $x_1(0) = \{-3, -2, \dots, 5\}$ rad y $x_2(0) = \{-4, -3, \dots, 4\}$ rad/seg.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 3.11 Diagrama fase de un sistema dinámico no lineal $\dot{x}_1 = -x_1^3(t)$ y $\dot{x}_2 = -x_2^5(t)$.

Hay que observar que el atractor que lleva a las trayectorias del sistema

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary $[x_1(t), x_2(t)]^T, \forall t \geq 0$ hacia una pequeña vecindad del punto de equilibrio, permaneciendo ahí de manera indefinida conforme $t \rightarrow \infty$.

En la figura 3.12 se muestran los perfiles de las curvas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ correspondientes a la condición inicial $x_1(0) = 5$ rad y $x_2(0) = 4$ rad/seg.

El código fuente 3.3 es el programa en MatLab que implementa el modelo dinámico del sistema dinámico no lineal $[\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T = [-x_1^3(t), -x_2^5(t)]^T$. Los planos fase representados en las figuras 3.11 y 3.12 se obtienen con el programa del código fuente 3.2 ; en la línea 8 hay que cambiar el tiempo de simulación a $t_s = 400$ segundos, y en la línea 15 hay que insertar el nombre del sistema dinámico a simular: `[t, x]=ode45('cap3_sdn1',ts,x0,options)`.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary ALFAOMEGA



Sistema dinámico no lineal

Una diversidad de ejemplos de simulación implementados en lenguaje MatLab para sistemas dinámicos no lineales pueden ser descargados directamente del sitio web del libro. Análisis del punto de equilibrio y comportamiento de las variables de estado del sistema.

if

Código Fuente 3.3 Sistema dinámico no lineal

```
%cap3_sdn1.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

Sistema dinámico no lineal

```
1 % 
2 function xp =cap3_sdn1(t,x)
3 x1=x(1); %Posición
4 x2=x(2); %Velocidad
5 x=[x1; x2];
6 xp1=-x1*x1*x1;
7 xp2=-x2*x2*x2*x2*x2;
8 xp=[ xp1; xp2];
9 end
10 %
```

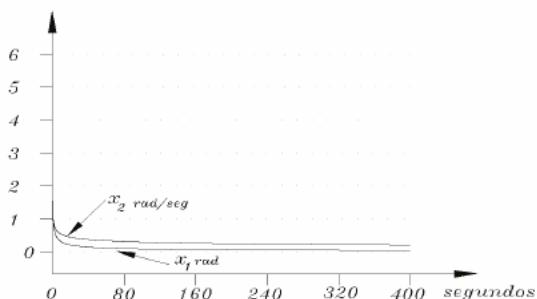
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 3.12 Evolución en el tiempo de las trayectorias $x_1(t)$ y $x_2(t)$.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

 Ejemplo 3.25

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k [1 - \alpha e^{-\alpha x^2}] x$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}_+$ con $0 < \alpha < 1$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
Solución

Se propone la siguiente estructura de función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} [x^2 + e^{-\alpha x^2} - 1]$$

Obsérvese que en la construcción de la función candidata de Lyapunov se agrega la constante -1 para que se cumpla la condición $V(0) = 0$.

La derivada de la función candidata de Lyapunov está dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = [(1 - \alpha e^{-\alpha x^2}) x] \dot{x} = [(1 - \alpha e^{-\alpha x^2}) x] \dot{x} \\ &= [(1 - \alpha e^{-\alpha x^2}) x] [-k(1 - \alpha e^{-\alpha x^2}) x] \\ &= -k(1 - \alpha e^{-\alpha x^2})^2 x^2 \end{aligned}$$


 Ejemplo 3.26

Muéstrese que el siguiente sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\dot{x} = -k \frac{x}{1+x^2}$$

Solución

El origen de estado es el único punto de equilibrio.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} \ln [1 + x^2]$$

Esta función es definida positiva, $V(0) = 0$, y cuando $x \rightarrow \infty_+$ o $x \rightarrow \infty_-$ entonces $V(x) \rightarrow \infty_+$.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov es:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln [1 + x^2]}{\partial x} \dot{x} = \frac{x}{1 + x^2} \dot{x} \\ &= \left(\frac{x}{1+x^2} \right) \left(-k \frac{x}{1+x^2} \right) = -k \frac{x^2}{(1+x^2)^2} < 0\end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad asintótica global.

**♣ Ejemplo 3.27**

Hacer el análisis de estabilidad asintótica en forma local del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k \operatorname{sen}(x)$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$.

Solución

Esta función posee un número infinito de puntos de equilibrio dados por $x = 0, \pm n\pi$, por tanto se realizará el análisis de estabilidad relativo al origen.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = 1 - \cos(x)$$

Esta función es definida positiva en forma local para la región $x \in (-\pi, \pi)$
o $|x| < \pi$.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \operatorname{sen}(x) \dot{x} = -k \operatorname{sen}^2(x) < 0$$

lo que demuestra estabilidad asintótica en forma local. La región de atracción sólo es válida para las trayectorias $x(t) \in (-\pi, \pi)$ y condiciones iniciales $x(0)$ dentro de $(-\pi, \pi)$. Para alguna condición inicial $x(0)$ fuera de este intervalo puede ser atrapada la solución $x(t)$ por otro punto de equilibrio.

♣ ♣ Ejemplo 3.28

Realizar el análisis de estabilidad asintótica del siguiente sistema:

$$\dot{x} = -k \frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1 + \cosh^m(x)}$$

donde $k \in \mathbb{R}_+$ y $m \in N$.

Solución

El punto de equilibrio existe y es único. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{m} \ln \left[\frac{1 + \cosh^m(x)}{2} \right]$$

Esta es una función definida positiva puesto que $V(0) = 0$ y $V(x) \rightarrow \infty_+$ si $x \rightarrow \infty_+$ o si $x \rightarrow \infty_-$.

La derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \left[\frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1+\cosh^m(x)} \right] \dot{x} \\ &= \left[\frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1+\cosh^m(x)} \right] \left[-k \frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1+\cosh^m(x)} \right] \\ &= -k \left[\frac{\cosh^{m-1}(x) \operatorname{senh}(x)}{1+\cosh^m(x)} \right]^2 < 0\end{aligned}$$

Debido a que la función $\dot{V}(x)$ es definida negativa, se demuestra la estabilidad asintótica global.

Ejemplo 3.29

Llevar a cabo el análisis de estabilidad de un péndulo robot y un control proporcional derivativo.

Solución

Considérese un sistema dinámico no lineal describiendo el movimiento de un péndulo simple como el que se muestra en la figura 3.13.

El modelo dinámico del péndulo se encuentra descrito por la siguiente ecuación:

$$\tau = I_r \ddot{q} + b \dot{q} + m g l_c \operatorname{sen}(q) \quad (3.44)$$

donde I_r representa el momento de inercia, b es el coeficiente de fricción viscosa, m es la masa del péndulo, el centro de masa está representado por l_c , y g es la aceleración debido a la gravedad. La longitud del péndulo es de 50 cm.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

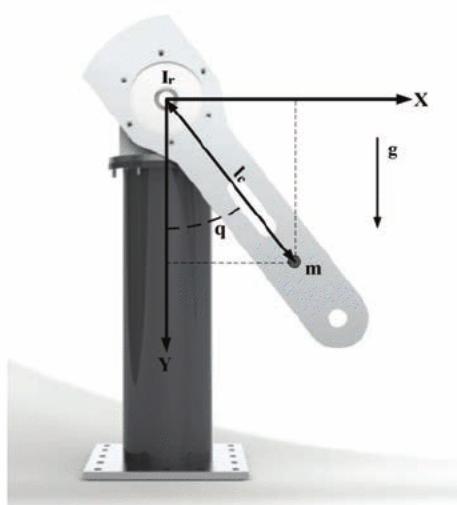


Figura 3.13 Péndulo

El problema consiste en posicionar al péndulo en un punto deseado, por ejemplo en 90 grados. Para eso, se emplea un algoritmo de control denominado proporcional derivativo más compensación de gravedad descrito por la siguiente ecuación:

$$\tau = k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) \quad (3.45)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

donde $k_p \in \mathbb{R}_+$ y $k_v \in \mathbb{R}_+$ representan las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. El error de posición es \tilde{q} que se define como la diferencia entre la posición deseada q_d y la posición actual del robot $q(t)$, es decir: $\tilde{q} = q_d - q(t)$.

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad del péndulo y el algoritmo de control, se obtiene la ecuación dinámica que relaciona a la dinámica del péndulo (3.44) como el esquema de control (3.45); en otras palabras, se obtiene la ecuación en lazo cerrado.

Las variables de estado que definen el problema de control de posición del péndulo son \tilde{q} y \dot{q} . Por lo tanto, la ecuación en lazo cerrado tiene la

siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I_r} [k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} - b \dot{q}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{k_p}{I_r} & -\frac{k_v+b}{I_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.46)$$

La derivada con respecto al tiempo del error de posición es $\frac{d\tilde{q}}{dt} = \frac{dq_d}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dq(t)}{dt} = -\dot{q}$, debido a que la posición deseada q_d es una constante y su derivada es cero. La derivada de la velocidad \dot{q} es la aceleración $\frac{d\dot{q}}{dt} = \ddot{q}$ la cual se despeja de la ecuación (3.46).

Es importante destacar que la ecuación en lazo cerrado 3.46 es lineal a pesar de que el modelo dinámico del péndulo es un sistema dinámico no lineal. Esto quiere decir que la ecuación resultante entre el modelo dinámico del sistema y la estructura de control no necesariamente produce una ecuación no lineal.

Para demostrar la existencia del punto de equilibrio se procede de la siguiente forma.



De la primera componente de la ecuación (3.46) se tiene que: $-\dot{q} = -1 \dot{q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$



Para la segunda componente de la ecuación (3.46) se emplea el hecho anterior $\dot{q} = 0$, entonces $[k_v + b] \dot{q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0 \wedge k_p \in \mathbb{R}_+ \wedge b \in \mathbb{R}_+$. Por otro lado: $k_p \tilde{q} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0 \wedge k_p \in \mathbb{R}_+$.

Por lo tanto, el origen de estados es el punto de equilibrio y es único, es decir: $[\tilde{q}, \dot{q}]^T = [0, 0]^T$.

La construcción de la propuesta de la función de Lyapunov se lleva a cabo del siguiente modo:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_r \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k_p \tilde{q}^2 \quad (3.47)$$

es una función definida positiva en los dos argumentos \tilde{q} y \dot{q} .

La derivada de la función candidata de Lyapunov (3.47) se obtiene incorporando la aceleración $\ddot{q}(t)$ de la ecuación en lazo cerrado (3.46) para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}}(\tilde{q}, \dot{q}) &= I_r \dot{q} \ddot{q} + k_p \tilde{q} \dot{\tilde{q}} = I \dot{q} \ddot{q} - k_p \tilde{q} \dot{q} \\ &= \dot{q} k_p \tilde{q} - [b + k_v] \dot{q}^2 - k_p \tilde{q} \dot{q}\end{aligned}\quad (3.48)$$

después de cancelar los términos correspondientes se obtiene:

$$= -[b + k_v] \dot{q}^2 \leq 0. \quad (3.49)$$

Esta es una función semidefinida negativa, ya que sólo depende de la velocidad \dot{q} , y la variable de estado \tilde{q} no aparece en el álgebra final. En otras palabras $\dot{\tilde{V}}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ si la velocidad $\dot{q} = 0$ y el error de posición \tilde{q} tiene cualquier valor. Por lo tanto se demuestra estabilidad.

En la figura 3.14 se muestra el mapa fase del péndulo para las condiciones iniciales $x_1(0) = \{-3, -2, \dots, 5\}$ rad y $x_2(0) = \{-4, -3, \dots, 4\}$ rad/seg; así como la forma que converge a la posición deseada de 90 grados en el plano cartesiano xy .

Nótese que al variar las condiciones iniciales, las trayectorias $[\dot{q}(t), q(t)]^T$ del sistema convergen asintóticamente a $[0 \text{rad/seg}, q(t) = \frac{\pi}{2} \text{rad}]^T$ conforme el tiempo evoluciona a infinito. La velocidad $\dot{q}(t)$ es cero cuando el péndulo alcanza la posición deseada, entonces la posición $q(t)$ es una constante igual a la posición deseada q_d , por lo que el error de posición $\tilde{q}(t) = q_d - q(t) = 0$.

El código fuente 3.4 contiene el código fuente en MatLab que implementa el modelo dinámico de un péndulo. El plano fase representado en la figura 3.14 se obtienen con el código fuente 3.2 que fue utilizado para realizar la simulación del oscilador mecánico, para el caso del péndulo hay que sustituir la línea 15 por `[t, x]=ode45('cap3_pendulo',ts, x0,options)`.



Péndulo

Algoritmos de control, análisis dinámico y aplicaciones del péndulo pueden ser encontrados en el sitio web del libro implementados en código fuente en MatLab.



Código Fuente 3.4 Péndulo

```
%cap3_pendulo.m    Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 3 Preliminares Matemáticos
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Péndulo

```
1 %
2 function xp =cap3_pendulo(t,x)
3 %vector de estados
4 q=x(1); %posición articular
5 qp=x(2); %velocidad articular
6 %parámetros del péndulo
7 m=5; %masa
8 lc=0.01; %centro de masa
9 g=9.81; %constante de aceleración gravitacional
10 b=0.17; %coeficiente de fricción viscos
11 Ir=0.16; %momento de inercia del rotor
12 kp=10; %ganancia proporcional
13 kv=2; %ganancia derivativa
14 qd=90*pi/180; %referencia deseada 90 grados
15 qt=qd-q; %error de posición
16 tau=kp*qt-kv*qp+m*g*lc*sin(q); %ley de control
17 %aceleración articular del péndulo
18 qpp=(tau-b*qp-m*g*lc*sin(q))/Ir;
19 %vector de salida
20 xp=[ qp ; %xp(1)=x(2) velocidad articular
21 qpp] ; %xp(2)=qpp aceleración articular
22 end
23 %
```

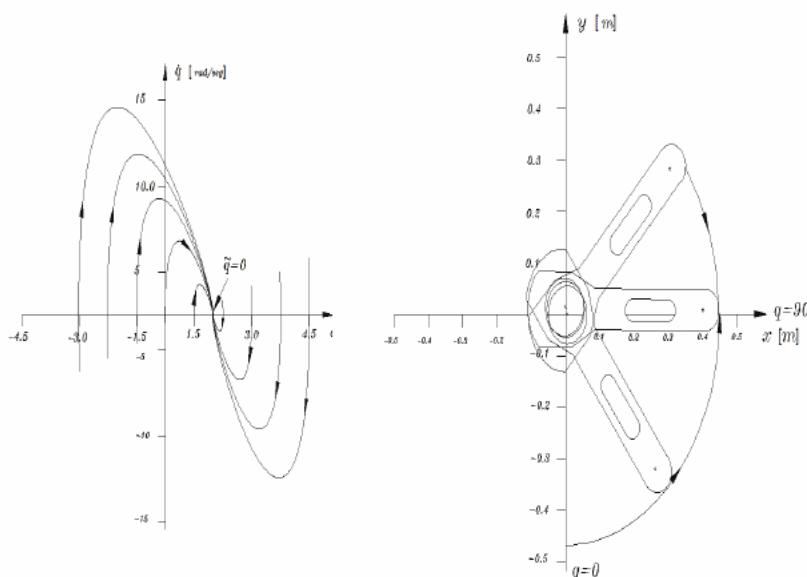


Figura 3.14 Diagrama fase del péndulo y plano cartesiano xy .



Conjunto invariante

Definición 3.10. Un conjunto Ω es un conjunto invariante para un sistema dinámico si para cada trayectoria la cual inicia en Ω permanece en Ω , $\forall t \geq 0$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
Ejemplos de conjuntos invariantes:

cualquier punto de equilibrio estable es un conjunto invariante, debido a que ninguna trayectoria puede permanecer indefinidamente en un punto diferente al punto de equilibrio estable.

El dominio de atracción de un punto de equilibrio es también un conjunto invariante. Cualquier trayectoria de un sistema dinámico autónomo en el espacio de estados es un conjunto invariante.

Los ciclos límite estables son casos especiales de las trayectorias del sistema dinámico, representan curvas cerradas en el plano fase; las trayectorias dentro o fuera del ciclo límite convergen hacia esta curva y permanecen ahí de manera indefinida, por lo que también son conjuntos invariantes.

Existen otras herramientas de sistemas dinámicos no lineales que permiten obtener la estabilidad asintótica global, cuando previamente se ha demostrado la estabilidad del punto de equilibrio. Estas herramientas pueden ser el **principio de invariancia de LaSalle** y la norma \mathcal{L} .



3.6.4 Principio de invariancia de Lasalle

En algunos casos es posible demostrar estabilidad asintótica, aun cuando la función de Lyapunov es semidefinida negativa. Específicamente, si una función continua y diferenciable, definida sobre un conjunto invariante con respecto al sistema dinámico (3.36), puede ser construida de forma que sus derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema son semidefinidas negativas y ninguna trayectoria del sistema puede permanecer indefinidamente en puntos donde las derivadas de la función se desvanecen, entonces **el punto de equilibrio es asintóticamente estable**.

**Teorema 3.2 Barbashin-Krasovskii-LaSalle**

Considérese el sistema dinámico (3.36)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

cuyo origen $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio. Supóngase que el conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto positivamente invariante con respecto al sistema dinámico (3.36) y asímase que existe una función de Lyapunov $V(\boldsymbol{x})$ tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$, y $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \in \Omega$. Defínase $\Omega_{\mathcal{E}}$ como el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \right\}.$$

Sea $\Omega_{\mathcal{M}}$ el conjunto invariante más grande contenido en $\Omega_{\mathcal{E}}$ ($\Omega_{\mathcal{M}} \subseteq \Omega_{\mathcal{E}}$), entonces cada solución que empieza en $\Omega_{\mathcal{E}}$ se aproxima a $\Omega_{\mathcal{M}}$, $\boldsymbol{x}(t) \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}$ conforme $t \rightarrow \infty$.

El teorema de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se utiliza en demostrar que $\boldsymbol{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ conforme el tiempo tiende a infinito $t \rightarrow \infty$. Para esta finalidad, es necesario establecer que el conjunto invariante más grande $\Omega_{\mathcal{M}}$ es el origen de estados. Esto puede hacerse para demostrar que ninguna solución $\boldsymbol{x}(t)$ diferente a $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ puede permanecer en $\Omega_{\mathcal{M}}$. Para tal efecto considérese el siguiente corolario:

**Corolario 3.1 Barbashin-Krasovskii-LaSalle**

Sea $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio del sistema dinámico (3.36), supóngase que $V(\boldsymbol{x})$ es una función de Lyapunov, tal que $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$.

Sea:

$$\Omega_{\mathcal{M}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \right\} \quad (3.50)$$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Supóngase que ninguna otra solución del sistema dinámico con excepción de $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ puede permanecer en el conjunto $\Omega_{\mathcal{M}}$, entonces *el origen es asintóticamente estable.*

Cuando $\dot{V}(\mathbf{x})$ es negativa definida, entonces $\Omega_{\mathcal{M}} = \{\mathbf{0}\}$, y por tanto coincide con el teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov.

El teorema y corolario de Barbashin-Krasovskii-LaSalle únicamente se emplean para sistemas dinámicos autónomos.

Ejemplo 3.30

En el caso del ejemplo del péndulo simple, emplear el corolario de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar estabilidad asintótica.

Solución

Se tiene que la ecuación (3.48) no satisface las condiciones del teorema de estabilidad asintótica global para la ecuación en lazo cerrado (3.46), para todo $[\tilde{q}, \dot{q}]^T \neq [0, 0]^T \in \mathbb{R}^2$.

La ecuación en lazo cerrado (3.46) es de naturaleza autónoma, entonces el conjunto $\Omega_{\mathcal{E}}$:

$$\Omega_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0, \iff \dot{q} = 0 \in \mathbb{R}, \tilde{q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Debe notarse que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$ si y sólo si $\dot{q} = 0$ y el error de posición \tilde{q} toma cualquier valor escalar. Para que una solución $[\tilde{q}(t), \dot{q}(t)]^T \in \Omega_{\mathcal{E}}$ para todo $t \geq 0$, es necesario que $\dot{q} = 0$, $\forall t \geq 0$. Como la velocidad $\dot{q}(t)$ es cero, significa que la posición $q(t)$ es una constante, dicha constante es la

posición deseada q_d , luego entonces el error de posición $\tilde{q} = q_d - q(t) = 0$. Tomando esto en consideración

$$k_p \tilde{q} = 0 \iff \tilde{q} = 0$$

significa que $\tilde{q} = 0$, $\forall t \geq 0$. Por lo tanto, resulta que $[\tilde{q}(0), \dot{\tilde{q}}(0)]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ es el conjunto invariante más grande $\Omega_M \subseteq \Omega_E$, $\forall t \geq 0$ para lo cual $[\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)]^T \rightarrow \Omega_M$, como $t \rightarrow \infty$. Luego entonces se concluye estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (3.46).

3.7 Norma \mathcal{L}

La utilidad de la norma \mathcal{L} se ubica en aplicaciones de estabilidad de sistemas dinámicos, en acotamiento de variables de estado y en ser una herramienta fundamental para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores.

La notación asociada a la norma \mathcal{L} es \mathcal{L}_n^p (léase *ele-pe-ene*). De manera general, el espacio \mathcal{L}_p^n para $1 \leq p < \infty$ es definido como el conjunto de funciones continuas $\mathbf{f} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n} = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (3.51)$$

donde $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n}$ representa la norma \mathcal{L}_p^n de la función \mathbf{f} , el subíndice p en \mathcal{L}_p^n se refiere al tipo de norma- p usado para definir el espacio, mientras que el número n indica la dimensión de \mathbf{f} . Al tipo de espacio definido por \mathcal{L}_p^n , $\forall p \in [1, \infty]$, se le denomina espacio lineal normado.

La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n}$ satisface las siguientes propiedades:



La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n}$ de la función \mathbf{f} es cero \iff la función \mathbf{f} es idénticamente a cero.



La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n}$ de la función \mathbf{f} es positiva, si la función \mathbf{f} es diferente a cero.



La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_p^n}$ satisface la desigualdad del triángulo:

$$\|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\|_{\mathcal{L}_p^n} \leq \|\mathbf{f}_1\|_{\mathcal{L}_p^n} + \|\mathbf{f}_2\|_{\mathcal{L}_p^n} \quad \forall \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2.$$

Norma L_∞^n

El espacio L_∞^n consiste del conjunto de todas las funciones $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir,

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\|\mathbf{f}\|_{L_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}(t)\| < \infty.$$

donde sup indica el *supremo* o la cota superior más pequeña.

Por notación, L_∞ sirve para representar el espacio L_∞^1 ($n = 1$).

Norma L_2

El espacio L_2^n es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^\infty \mathbf{f}^T(t) \mathbf{f}(t) dt} = \sqrt{\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt} < \infty.$$

entonces la integral del cuadrado de la norma eucliana es medible y está acotada superiormente. La norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_2}$ es ampliamente empleada para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores. La interpretación de la norma $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{L}_2}$ y el desempeño del esquema de control a evaluar es inversamente proporcional al desempeño.

Por notación, L_2 denota el espacio L_2^1 ($n = 1$).

Para ilustrar las anteriores definiciones, considérese los siguientes ejemplos.

♣ ♣ Ejemplo 3.31

Considérese la función continua $f(t) = e^{-\beta t}$. Se desea determinar si f pertenece a los espacios L_2 y L_∞ .

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(t)|^2 dt &= \int_0^\infty f^2(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2\beta t} dt \\ &= \frac{1}{2\beta} < \infty,\end{aligned}$$

entonces $f \in L_2$.

Por otro lado, $|f(t)| = |e^{-\beta t}| \leq 1 < \infty$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_\infty$.

En resumen se concluye que $f \in L_2 \cap L_\infty$.



♣ Ejemplo 3.32

Supóngase que $f(t) = \kappa$ siendo κ una constante, $\kappa \in \mathbb{R}$. Analizar si la función $f(t)$ pertenece a los espacios L_2 y L_∞ .

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \int_0^\infty \kappa^2 dt = \kappa^2 \int_0^\infty dt = \infty,$$

no converge; en consecuencia $f \notin L_2$. Sin embargo, $|f(t)| = |\kappa| \leq \rho < \infty$, para algún $\rho > \kappa$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_\infty$.



♣ Ejemplo 3.33

Considérese la función continua $f(t) = \kappa \tanh(t)$ con $\kappa > 0$. Se desea determinar si f pertenece a los espacios L_2 y L_∞ .

Solución

Se tiene que

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \kappa^2 \int_0^\infty \tanh^2(t) dt,$$

no converge; en consecuencia $f \notin L_2$. Sin embargo $|f(t)| = |\kappa \tanh(t)| \leq \kappa < \infty$ para todo $t \geq 0$, entonces $f \in L_\infty$.



Considérese una función continua $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función \mathbf{f} satisface las siguientes hipótesis:

$\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} \in L_\infty^n$,

$\mathbf{f} \in L_2^n$.

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$.



3.7.1 Relación entre \mathcal{L} y estabilidad de Lyapunov

La interconexión entre la norma \mathcal{L} y la teoría de estabilidad de Lyapunov se encuentra dada de la siguiente manera.

Considérense las funciones continuas y diferenciables $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ dadas por:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.52)$$

donde $A_s, B_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas positivas. Si la derivada de V con respecto al tiempo está dada como:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{z}, h)^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{dt} \quad (3.53)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

satisface

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.55)$$

donde $Q > 0$, entonces

-  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n, \mathbf{z} \in \mathcal{L}_\infty^n$
-  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n.$

Para demostrar la membresía de las variables de estado $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ en la norma \mathcal{L}_∞^n se procede de la siguiente forma: debido a que el punto de equilibrio es estable, entonces la función $V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > 0$ es definida positiva, y su derivada resulta ser semidefinida negativa, entonces la función de energía $V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ es una función decreciente, la cual satisface:

$$V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) \geq V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) > 0$$

de la función de energía (3.52) y empleando el teorema 3.1 de Rayleigh-Ritz se tiene lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} > 0$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\|\mathbf{x}(0)\|^2 \lambda_{A_s}^{\max} \geq \|\mathbf{x}(t)\|^2 \lambda_{A_s}^{\min} > 0$$

$$\|\mathbf{z}(0)\|^2 \lambda_{B_s}^{\max} \geq \|\mathbf{z}(t)\|^2 \lambda_{B_s}^{\min} > 0$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{A_s}^{\max}}{\lambda_{A_s}^{\min}}} \|\mathbf{x}(0)\|$$

$$\|\mathbf{z}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{B_s}^{\max}}{\lambda_{B_s}^{\min}}} \|\mathbf{z}(0)\|$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

donde $\lambda_{A_s}^{\min}$, $\lambda_{A_s}^{\max}$, $\lambda_{B_s}^{\min}$ y $\lambda_{B_s}^{\max}$ representan los valores propios mínimos y máximos de las matrices A y B , respectivamente. Por lo que, $\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$.

Considérese la siguiente expresión:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$

integrando de ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) - V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) = - \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$$

$$V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) + \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$$

como la función $V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t))$ es decreciente, entonces se cumple que

$$V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) > V(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)) > 0.$$

Además, $\int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$ es un escalar positivo, por tanto se cumple que $V(\mathbf{x}(0), \mathbf{z}(0)) > \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_{B_s}^{\min} \|\mathbf{x}(s)\|^2 ds &< \int_0^t \mathbf{x}^T(s) Q \mathbf{x}(s) ds &< \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{z}(0) \end{bmatrix} \\ &< \|\mathbf{x}(0)\|^2 \lambda_{A_s}^{\max} + \|\mathbf{z}(0)\|^2 \lambda_{B_s}^{\max} \end{aligned}$$

$$\int_0^t \|\boldsymbol{x}(s)\|^2 ds < \underbrace{\frac{\|\boldsymbol{x}(0)\|^2 \lambda_{A_s}^{max} + \|\boldsymbol{z}(0)\|^2 \lambda_{B_s}^{max}}{\lambda_{B_s}^{min}}}_{\text{constante positiva}}.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{L}_2^n$.

La interconexión entre la teoría de espacios \mathcal{L} con estabilidad en el sentido de Lyapunov permite aprovechar resultados interesantes para el diseño de algoritmos de control. Por ejemplo, si se ha demostrado estabilidad del punto de equilibrio usando una función de energía $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) > 0$, esto garantiza: $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_\infty^n$, $\dot{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{L}_2^n$, adicionalmente si es posible demostrar que $\ddot{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, entonces se puede concluir convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de la variable $\boldsymbol{x}(t)$ aplicando el siguiente corolario.



Corolario 3.2 Convergencia asintótica \mathcal{L}

Considérese la variable de estado $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, supóngase que $\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$ y $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}_2^n$, $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \mathbb{R}^n$.



3.8 Resumen

El presente capítulo está dedicado a los fundamentos matemáticos de la robótica para ser aplicados en el control de robots manipuladores. Este capítulo tiene la finalidad de presentar las herramientas principales de sistemas dinámicos autónomos y estabilidad de puntos de equilibrio para análisis y diseño de esquemas de control.

Los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica deben ser interpretados como propiedades intrínsecas deseables del punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ y no la estabilidad o estabilidad asintótica del sistema dinámico.

El conocimiento modular se encuentra alrededor de la teoría de estabilidad de Lyapunov, la cual establece que el punto de equilibrio de un sistema

dinámico autónomo de la forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es estable si su energía total es una función definida positiva continuamente decreciente ($V(\mathbf{x}(0)) \geq V(\mathbf{x}(t)) > 0$) hasta alcanzar un estado de equilibrio, el cual representa el mínimo global de la energía total, de forma que entonces su potencia es semidefinida positiva.

La función candidata de Lyapunov para el caso de estabilidad satisface:

 $V(\mathbf{x}) > 0,$

 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

La estabilidad del punto de equilibrio del sistema dinámico autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ garantiza que $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n, \mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$. Existen herramientas adicionales para demostrar la estabilidad asintótica cuando la función candidata de Lyapunov sólo puede demostrar estabilidad. La estabilidad asintótica del punto de equilibrio en el estado completo puede ser demostrada partiendo del hecho que el punto de equilibrio es estable y cuando es posible demostrar que si $\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$.

Otra forma de demostrar estabilidad asintótica es aplicando el teorema de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, lo cual equivale a demostrar que el punto

de equilibrio del sistema dinámico es el conjunto invariante más grande dentro de la región de atracción (previa demostración de estabilidad) y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$.

Evidentemente, la forma más elegante y mejor vista en control automático es por medio de la propuesta de una función estricta de Lyapunov, pero esto no necesariamente representa un problema trivial.

La función estricta de Lyapunov puede ser interpretada como la energía moldeada al sistema, siendo una función definida positiva, y su potencia o derivada temporal es definida negativa, es decir:



$V(\mathbf{x}) > 0$,



$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$.

El concepto importante para un esquema de control es la estabilidad asintótica global, lo cual significa la existencia y unicidad del punto de equilibrio y la convergencia asintótica de la trayectoria o solución del sistema $\mathbf{x}(t)$ al punto de equilibrio conforme el tiempo tiende a infinito. Por supuesto, estabilidad asintótica no depende de las condiciones iniciales,
en el entendido que dichas condiciones iniciales se encuentran confinadas dentro de la región de atracción. Estabilidad asintótica local significa varios puntos de equilibrio y la convergencia de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ es con respecto a uno de esos puntos de equilibrio (generalmente al origen de estados) y por lo tanto si depende de las condiciones iniciales que se encuentren en la región de atracción del origen de estados. El concepto de estabilidad en sí, no es importante en control de robots manipuladores, debido que el error de posición no alcanza el punto de equilibrio, significa que el robot manipulador no se posicionará en la referencia deseada.



3.9 Referencias selectas

Los preliminares matemáticos son de uso común en textos de matrices, álgebra lineal, control automático y sistemas dinámicos. A continuación se presentan una serie de referencias selectas de dichos temas.



3.2 Vectores

Las siguientes referencias el lector pueda encontrar información del tema de vectores.



I. N. Herstein. “*Álgebra moderna*”. Trillas, 1988.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

 Saunders MacLane & Garrett Birkhoff. “*Algebra*”. Chelsea Publishing Company, N. Y. 1993.

 Murray R. Spiegel. “*Análisis vectorial*”. McGraw-Hill, 1994.

 Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba. “*Cálculo vectorial*”. Prentice-Hall. Cuarta Edición. 1998.

 Béla Bollobás. “*Linear analysis*”. Cambridge University Press. 1999.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

3.3 Matrices

 Roger A. Horn & Charles R. Johnson. “*Matrix analysis*”. Cambridge University Press. 1996.

 Sam Perlis. “*Theory of matrices*”. Dover Publications, Inc. N. Y. 1991.

 Fuzhen Zhang. “*Matrix theory*”. Springer. 1999.



3.5 Sistemas dinámicos

 Joseph La Salle & Solomon Lefschetz. “*Stability by Lyapunov's direct method with applications*”. Academic Press. 1961.

 C. A. Desoer & M. Vidyasagar. “*Feedback systems: input-output properties*”. Academic Press. N. Y. 1975.

-  Shankar Sastry & Marc Bodson. “*Adaptive control: stability, convergence, and robustness*”. Prentice-Hall. 1989.
-  H. Nijmeijer and A.cJ. van der Schaft. “*Nonlinear dynamical control Systems*”. Springer-Verlag, New York (1990).
-  Eduardo D. Sontag. “*Mathematical control theory*”. Springer-Verlag. 1990.
-  Jean-Jacques E. Slotine. “*Applied nonlinear control*”. Prentice-Hall. 1991.
-  A. M. Lyapunov. “*The general problem of the stability of motion (Lyapunov Centenary Issue)*”. International Journal of Control. Vol. 55. No. 3. pag. 531-773. Taylor & Francis. 1992.
-  F. L. Lewis, C. T. Abdallah, & D. M. Dawson “*Control of robots manipulators*”. Macmillan Publishing Company. N. Y. 1993.
-  M. Vidyasagar. “*Nonlinear systems analysis*”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1993).
-  Zoran Gajić & Muhammad Tahir Javed Qureshi. “*Lyapunov matrix equation in system stability and control*”. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 1995.
-  Editor William S. Levine. “*The control handbook*”. CRC-Press, IEEE-Press. 1995.
-  Arjan Van Der Schaft. “ *\mathcal{L}_2 and passivity techniques in nonlinear control*”. Springer. 2000.

 Hassan K. Khalil. “*Nonlinear systems*”. Third Edition. Prentice Hall Inc. 2002.

 R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Printice-Hall, Pearson. 2003.

 R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 Wassim M. Haddad & VijaySekhar Chellaboina “*Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*”. Princeton University Press. Princeton and Oxford. 2008.

Para programación en lenguaje MatLab se recomienda el siguiente texto: David Báez López. “*MatLab con aplicaciones a la ingeniería, física y finanzas*”. Alfaomega Grupo Editor. Segunda Edición. 2011.

3.10 Problemas propuestos



A continuación se presentan una serie de ejercicios con la finalidad que el lector mejore sus conocimientos sobre preliminares matemáticos para robótica.



3.2 Vectores

3.2.1 Obtener la norma euclíadiana de los siguientes vectores:

(a)

$$\mathbf{x} = [8 \quad \text{sen}(t) \quad \sqrt{9 + 10 \cos(t)} \quad \int_0^t t dt]^T$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

(b)

$$\mathbf{x} = [8 \quad \text{sen}(t) \quad [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]^T \quad \frac{d}{dt} e^{-4t^2}]^T$$

3.2.2 Programar en código MatLab un algoritmo que permita sumar vectores.

3.2.3 Demostrar que $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

3.2.4 Demostrar que $|\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

3.2.5 Demostrar la desigualdad del triángulo: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.



3.3 Matrices

3.3.1 Comprobar la propiedad de antisimetría para los casos $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$. Sugerencia, obtener la parte antisimétrica de cada caso y llevar a cabo las operaciones internas: $\mathbf{x}^T A_{sk} \mathbf{x}$.

3.3.2 Determine si la siguiente desigualdad es falsa o verdadera:

$$\lambda_{\min}\{A\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \leq \lambda_{\max}\{A\} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

donde el valor propio máximo y mínimo de A están representados por $\lambda_{\max}\{A\}$, $\lambda_{\min}\{A\}$, respectivamente. Argumente y sustente su respuesta.



3.4 Funciones definidas positivas

3.4.1 Analizar si las siguientes funciones son definidas positivas:

a) $V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 33x_1x_2 + 0,8x_2^2$

c) $V(x_1, x_2) = 9x^2 + 7x_1x_2 + 2x_2^2 + 4$

3.4.2 Obtener el gradiente de las siguientes funciones escalares:

a) $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{1+\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A > 0$,
 $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$.

b) $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A(\mathbf{x}) \mathbf{x}$

c) $V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T A \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{1+\|\mathbf{q}\|} \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}) \mathbf{q}$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

3.5 Sistemas dinámicos

3.5.1 Explicar claramente ¿qué es un sistema dinámico?

3.5.2 Defina qué es un sistema dinámico lineal y su diferencia con un sistema dinámico no lineal.

3.5.3 Para un sistema dinámico lineal ¿cuáles son las posibilidades que se pueden dar en la existencia de puntos de equilibrio?

3.5.4 Para un sistema dinámico no lineal ¿qué posibilidades puede tener en la existencia de puntos de equilibrio?

3.5.5 Encontrar los puntos fijos de: $\dot{x} = x^4$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary 3.5.6 Determinar los puntos de equilibrio del siguiente sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} [1 - x_1^3] x_2 \\ \sin(x_2) x_1 \end{bmatrix}$$

3.5.7 Trasladar el punto de equilibrio al origen de estados de:

$$\dot{u} = u - 1$$

¿Cómo quedaría el sistema convertido?



3.6 Teoría de estabilidad de Lyapunov

3.6.1 ¿Cuál es la interpretación de punto de equilibrio?

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ALFAOMEGA

- 3.6.2 Explicar el concepto de estabilidad.
- 3.6.3 Explicar claramente los conceptos de estabilidad local y global.
- 3.6.4 ¿Qué es la diferencia hay entre estabilidad y estabilidad asintótica?
- 3.6.5 En referencia a las funciones de energía: ¿Cuál sería la interpretación de una función candidata de Lyapunov?
- 3.6.6 ¿Tiene sentido decir: “*el sistema es estable*”?
- 3.6.7 ¿Cuál es la interconexión de la teoría de estabilidad de Lyapunov con \mathcal{L} ?
- Llevar a cabo el análisis de estabilidad de los siguientes sistemas:
- 3.6.8 $\dot{x} = -\frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}{1 + \operatorname{sen}^2(x)}$.
- 3.6.9 $\dot{x} = -x^{2m-1}$, m es un entero natural.
- 3.6.10 $\dot{x} = -\operatorname{atan}(x)$



3.7 Norma \mathcal{L}

- 3.7.1 Analizar la pertenencia en la norma \mathcal{L}_∞^n y \mathcal{L}_2^n de las siguientes funciones:

- b) $f(t) = t^3$
- c) $f(t) = \cos(t)$
- d) $8e^{-8t^2}$

- 3.7.2 Demostrar que la variable de estado $x(t) \in \mathcal{L}_\infty$ y $x(t) \in \mathcal{L}_2$ para los siguientes casos:

- a) $\dot{x} = -x^{2m-1}$, m es un entero natural.
- b) $\dot{x} = -\operatorname{atan}(x)$
- c) $\dot{x} = -\operatorname{senh}(x)$

¿Qué forma tiene la cota superior?

4

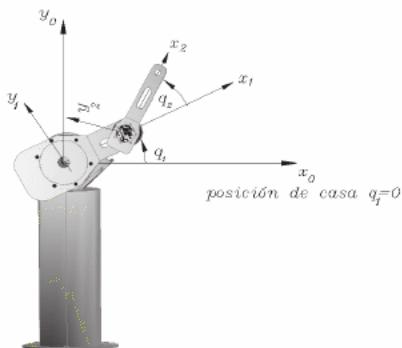
CAPÍTULO

Cinemática de robots manipuladores

El modelo cinemático directo en cadena abierta de robots manipuladores, es un procedimiento sistemático que se obtiene por una representación mínima de 4 parámetros dentro de una transformación homogénea.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Denavit-Hartenberg



6707b9cb23c42653e439edb57161d757 ebrary 4.1 Introducción

- 4.2 Morfología del robot
- 4.3 Transformaciones homogéneas
- 4.4 Cinemática
- 4.5 Tipos de robots industriales
- 4.6 Resumen
- 4.7 Referencias selectas
- 4.8 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos

Presentar el estudio cinemático de robots manipuladores industriales y las herramientas matemáticas que permiten su modelado.

Objetivos particulares:



Analizar la cinemática directa de diversas configuraciones de robots manipuladores.



Aplicar la convención Denavit-Hartenberg.

Competencias

Mejorar la habilidad y grado de conocimiento en el análisis y modelado cinemático.



Clasificación de robots industriales.



Ánalysis cinemático y diferencial de robots manipuladores.

4.1 Introducción

El estudio de la cinemática directa de robots manipuladores industriales proporciona elementos para analizar y diseñar el desplazamiento de trayectorias del robot, así como la orientación de la herramienta de trabajo. Dependiendo del tipo de articulaciones que se encuentran incluidas en la estructura mecánica del robot (lineales o rotacionales), se presenta una clasificación general de robots manipuladores industriales, también conocidos como brazos robots: antropomórfico, esférico, cilíndrico, SCARA y cartesiano.

El posicionamiento del robot (*pose*) en el espacio tridimensional requiere de 6 coordenadas: 3 coordenadas para su posición cartesiana y 3 coordenadas para la orientación de la herramienta de trabajo. La relación entre las coordenadas articulares con las coordenadas cartesianas y su orientación se denomina cinemática directa. En este contexto, se presenta una sección de herramientas matemáticas para modelar la posición y orientación del robot usando ***transformaciones homogéneas***. Sin embargo, existe un conjunto de parámetros longitudes y ángulos que se utilizan directamente en las transformaciones homogéneas; la metodología Denavit-Hartenberg permite obtener dichos parámetros y establecer de manera concreta la estructura matemática de las transformaciones homogéneas de la cual se desprende el modelo cinemático directo.

4.2 Morfología del robot

La morfología del robot se refiere a la descripción de componentes, partes y estructura mecánica. En principio un robot manipulador es un sistema complejo de propósito general que en la práctica puede realizar una amplia gama de aplicaciones como traslado de objetos, pintado de carrocerías automotrices, soldadura por arco, empaquetado de piezas, ensamblaje, operaciones quirúrgicas, teleoperación, investigación aeroespacial, asistencia



Cinemática directa

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de un sistema mecánico, sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen. Por lo tanto, la cinemática directa de robots manipuladores es el estudio del movimiento del robot relacionando las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas articulares o generalizadas. La estructura matemática de la cinemática es generalmente no lineal en las variables de estado de posición, compuesta por funciones trigonométricas y parámetros del robot como lo son sus longitudes.

El estudio de la cinemática de robots manipuladores no involucra ecuaciones diferenciales como en el caso de la dinámica. La **cinemática directa** convierte las coordenadas articulares del robot a coordenadas cartesianas, a través de una función vectorial de la siguiente forma:

$$[x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \psi]^T = f_R(\mathbf{q})$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares del robot, $\theta, \phi, \psi \in \mathbb{R}$ son la orientación de la herramienta final del robot, f_R es una función continua y diferenciable en la variable de estado \mathbf{q} y $[x, y, z]^T$ son las coordenadas cartesianas. El empleo de la cinemática directa resulta útil, debido a que es mucho más fácil programar al robot en coordenadas cartesianas que en ángulos.

a personas con capacidades diferenciadas, fisioterapia, etc.

Un robot manipulador está compuesto por una serie consecutiva de eslabones y articulaciones para formar una cadena cinemática abierta. Cada articulación representa la interconexión entre dos eslabones consecutivos. En la figura 4.1 se muestra el esquema de una articulación.

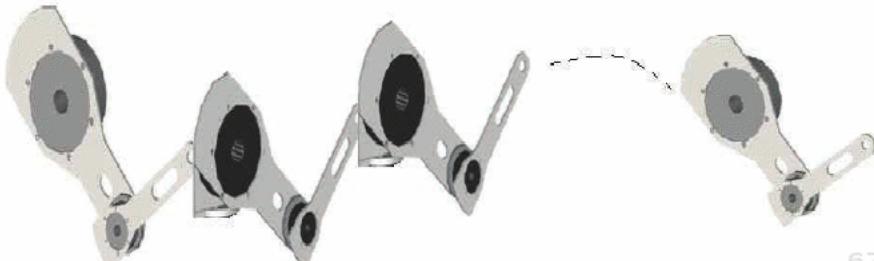


Figura 4.1 Una articulación interconecta dos eslabones.

En la figura 4.2 se ilustra a manera de ejemplo la cadena cinemática abierta, la cual es la estructura mecánica básica de un robot industrial. Dicha cadena cinemática abierta está constituida de la siguiente manera: la primera articulación sirve para formar la base; le siguen conexiones sucesivas entre articulaciones y eslabones, y en el extremo final, esto es, en el último eslabón no hay articulación ya que éste está dedicado a colocar la herramienta indicada para llevar a cabo una aplicación específica. Esto significa que el extremo final del robot no se encuentra conectado a la base.

Desde el punto de vista mecánico, la cadena cinemática se dice que es abierta cuando hay sólo una secuencia de eslabones sin que las dos puntas terminales de la cadena desde la base hasta el extremo final se unan, es decir que no formen un lazo cerrado, de otra manera sería una cadena ci-

nemática cerrada. Los servomotores o actuadores se utilizan para formar



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.2 Robot manipulador formado por cadena cinemática abierta.

las articulaciones, las cuales son las encargadas de transmitir la energía para producir movimiento a cada uno de los eslabones que conforman al robot. Cada articulación contribuye con un grado de libertad, siendo n no sólo la dimensión del vector de posición, sino que también indica el número de articulaciones que corresponde al número de grados de libertad (abreviado *gdl*).

Las articulaciones (*joints*) pueden producir movimiento rotacional o movimiento lineal de translación. A las articulaciones que producen movimiento giratorio o rotacional se les denomina **articulaciones rotacionales**. Por otro lado, a las que producen movimiento lineal se les denomina **articulaciones prismáticas o lineales**. En la figura 4.3 se muestran los dos tipos de articulaciones.

Un **eslabón** (*link*) está formado por una barra metálica acoplada mecánicamente al rotor y al estator de la siguiente articulación. En la figura 4.4 se muestran las partes que componen a un eslabón de un robot manipulador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

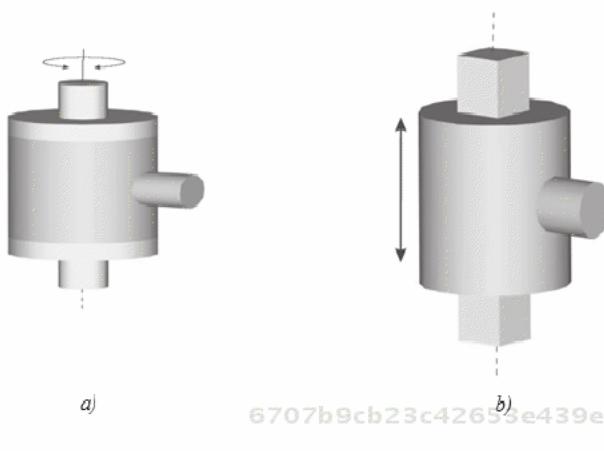


Figura 4.3 Tipos de articulaciones: a) rotacional, b) lineal.

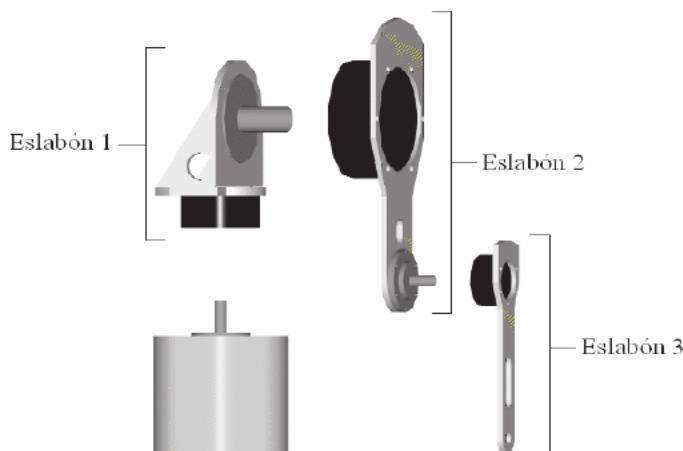


Figura 4.4 Elementos forman un eslabón de un robot manipulador.

El **espacio de trabajo** (*workspace*) de un robot manipulador es el espacio o lugar donde el robot puede realizar todos sus posibles movimientos. El espacio de trabajo está determinado por la geometría del robot y la naturaleza de sus articulaciones (lineales y rotacionales).

El espacio de trabajo de un robot industrial se encuentra acondicionado por sensores especiales y cercas de seguridad para que ninguna persona

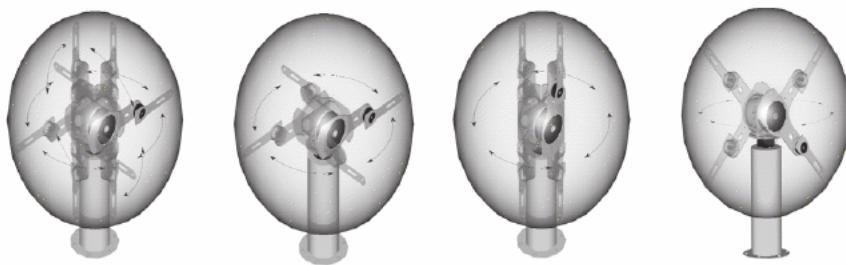


Figura 4.5 Espacio de trabajo de un robot industrial.

pueda invadir su área. Un robot industrial puede tener un peso de más de tres toneladas y alcanzar velocidades superiores a 3000 mm/seg. Mientras el robot está en movimiento, resulta peligroso para un usuario que se encuentre dentro de su espacio de trabajo.

El **extremo final** (*end-effector*) es la parte terminal o final del último eslabón, destinado a colocar la herramienta adecuada para una aplicación específica. La posición del extremo final se representa por $[x, y, z]^T$ y su orientación se denota a través de los ángulos de Euler.

Notación

La posición (movimiento rotacional o lineal) del robot se denota por el vector $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, el cual agrupa la posición i -ésima q_i correspondiente a la i -ésima articulación del robot para $i = 1 \dots, n$. Aquí n es el número de gdl. El valor instantáneo de la i -ésima posición q_i es proporcionado por el encoder integrado en el i -ésimo servomotor. Debido a que q_i representa la posición de la i -ésima articulación, también se le conoce como posición articular o desplazamiento articular.

La figura 4.6 muestra la analogía entre el brazo humano y un brazo robot o robot industrial. La articulación de la base corresponde a la cintura. La articulación del hombro (*shoulder*) debe ser la de mayor capacidad con respecto a las otras articulaciones, ya que es la que mueve y soporta el peso de la articulación del codo (*elbow*) y de la herramienta de trabajo, así como

la carga de objetos que realice durante una determinada aplicación.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.6 Base, hombro y codo de un robot industrial.

4.3 Transformaciones homogéneas

La representación de posicionamiento para robots manipuladores involucra sistemas coordenados cartesianos que especifican posición y orientación del extremo final del robot. La transformación homogénea es una herramienta matemática que involucra operaciones de rotación y traslación dentro de una matriz que estructura el modelo de cinemática directa.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Considérese el sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, cuyos orígenes no son coincidentes. El origen del sistema de referencia Σ_1 se encuentra desplazado una distancia d_0^1 con respecto al origen del sistema Σ_0 , como se muestra en la figura 4.7.

El vector d_0^1 está expresado en coordenadas del sistema Σ_0 , es decir: $\mathbf{d} = [d_{0x}^1, d_{0y}^1, d_{0z}^1]^T$, entonces cualquier punto \mathbf{p} tiene representación \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 . La relación general entre los sistemas de referencias $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ incluyendo la matriz de rotación $R_{z,\theta}$ y el vector de traslación d_0^1 es:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R\mathbf{p}_1 \quad (4.1)$$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

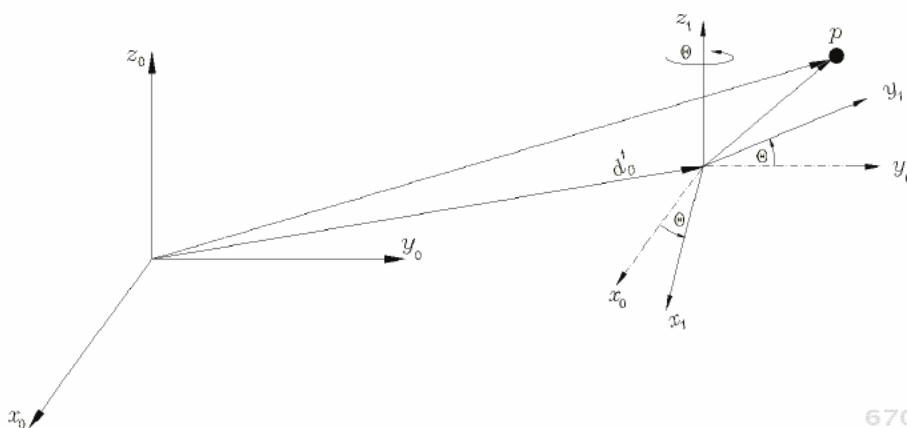


Figura 4.7 Traslación y rotación $R_{z,\theta}$ de los sistemas Σ_0 y Σ_1 .

$$= \begin{bmatrix} d_{0x}^1 \\ d_{0y}^1 \\ d_{0z}^1 \end{bmatrix} + R_{z,\theta} \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix}$$

La notación más común para representar la matriz de rotación y el vector de traslación en forma compacta se conoce como **transformación homogénea** la cual, para el caso de la figura 4.7 está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} R_{z,\theta} & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Matriz de rotación} & \vdots & \text{Vector de Traslación} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0}^T & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $R_{z,\theta} \in SO(3)$ es una matriz ortogonal y $\mathbf{d}_0^1 \in \mathbb{R}^3$. Para propósitos de acoplamiento en dimensiones, el vector $\mathbf{0}^T$ y el número 1 aparecen en el último renglón.

Transformaciones homogéneas

En el sitio web del libro se puede consultar material complementario sobre la teoría de matrices ortogonales, particularmente se demuestran las propiedades de las matrices de rotación las cuales son empleadas para modelar la orientación del sistema de referencia de la herramienta de aplicación colocada en el extremo final del robot. Métodos de rotación sucesivas de sistemas de referencias cartesianos a través de los ángulos de Euler, ángulos de orientación, inclinación y balanceo *roll, pitch, yaw*, etc.

Así mismo se encuentran las propiedades de las transformaciones homogéneas. Ejemplos y programas en código fuente para MatLab.

La transformación inversa está determinada por:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} R_{z,\theta}^T & -R_{z,\theta}^T d_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Observe que, la matriz de rotación $R_{z,\theta}$ aparece como transpuesta, esto es debido a que la inversa de una matriz ortogonal coincide con su transpuesta.

Las matrices de rotación permiten modelar la orientación de la herramienta de trabajo colocada en el extremo final del robot, y junto con las transformaciones homogéneas dentro de una sola matriz incluye la orientación y posición de la herramienta de trabajo, formando la estructura del modelo cinemático directo.

4.4 Cinemática

La cinemática es la parte de la física que aborda el problema de la descripción geométrica del movimiento de sistemas mecánicos sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen. Por consiguiente, la cinemática directa de robots manipuladores se refiere al estudio analítico del movimiento del robot (sin tomar en cuenta las fuerzas que originan dicho movimiento) con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma(x, y, z)$ relacionando la dependencia que existe entre las coordenadas articulares o generalizadas $q \in \mathbb{R}^n$, sus parámetros geométricos y las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ y de orientación $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ del extremo final del robot. Matemáticamente se tiene la siguiente definición.

Cinemática directa es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares $q \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ del robot $f_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, así como la orientación $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ de la herramienta colocada en el extremo final, tomando en cuenta las propiedades geométricas del sistema mecánico del robot.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \quad (4.4)$$



Cadena cinemática

Un robot manipulador se considera como una serie de eslabones interconectados a través de articulaciones (servomotores) rotacionales o prismáticas en forma de cadena cinemática abierta, es decir el extremo final donde se coloca la herramienta no se encuentra conectada mecánicamente a la primera articulación (base) del robot.

Desde el punto de vista de la topología, la cadena cinemática se considera abierta cuando los dos extremos de la cadena no se tocan. De otra manera la cadena cinemática formaría un lazo si sus dos extremos se encontrarán mecánicamente unidos.

La estructura mecánica del robot manipulador se caracteriza por tener un número de grados de libertad, los cuales determinan de manera única su configuración. Típicamente, cada grado de libertad está asociado a una articulación (variable articular q).

El papel fundamental que juega la cinemática directa, es computar la posición y orientación del extremo final del robot manipulador como una función de las variables articulares.

En esta definición \mathbf{f}_R es una función continua en el vector de posiciones o desplazamiento articular $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, n representa el número de grados de libertad y la dimensión del vector de posiciones o desplazamiento articular, $x, y, z \in \mathbb{R}$ son las coordenadas cartesianas asociadas al extremo final del robot y θ, ϕ, ψ son los ángulos de Euler, que representan la orientación de la herramienta colocada en el extremo final con respecto al sistema de referencia fijo en la base del robot, m es la dimensión de la función vectorial $\mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = [x, y, z, \theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^6$, para el caso general $m = 6$. Cuando $n > m$ se denominan robots redundantes.

El posicionamiento de un robot en el espacio tridimensional generalmente requiere de 6 coordenadas, 3 coordenadas representan la posición cartesiana del extremo final del robot (x, y, z) y 3 coordenadas la orientación de la herramienta de trabajo denotadas por los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ).

Dependiendo de la aplicación del robot se pueden requerir menos coordenadas de posición y orientación. Por ejemplo, un robot que pinta armaduras automotrices requiere las 6 coordenadas, en contraste con un robot que corta figuras de plástico que puede requerir 2 coordenadas cartesianas de posición y ninguna de orientación, en este caso el robot puede desarrollar su trabajo sobre un plano, sin requerir coordenadas de orientación.

Para el programador de robots en aplicaciones de automatización y procesos industriales, es mucho más fácil programar los movimientos del robot en coordenadas cartesianas que en coordenadas articulares. Las coor-

nadas cartesianas resultan un medio natural para ser correctamente interpretadas para un mejor entendimiento del posicionamiento del robot, la cinemática directa realiza la función de convertir coordenadas articulares a coordenadas cartesianas.

Dada la posición del extremo final del robot en coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$, su orientación en ángulos de Euler $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ y sus parámetros geométricos con respecto a un sistema de referencia fijo $\Sigma(x, y, z)$, ¿puede el robot posicionarse en cualquier configuración?

La anterior interrogante representa el problema de la **cinemática inversa** y como área de la robótica representa mayor complejidad que la cinemática directa. Siempre es posible encontrar la cinemática directa, mientras que en la cinemática inversa pueden darse diversos escenarios, por ejemplo puede haber varias soluciones o no haber solución analítica, si este es el caso entonces pueden proponerse métodos numéricos, iterativos, geométricos, etc., como posibles formas de solución.

La **cinemática inversa** es un problema no lineal que relaciona las coordenadas articulares en función de las coordenadas cartesianas. Este problema representa la solución inversa de la ecuación (4.4): dada la posición cartesiana y la orientación de la herramienta colocada en el extremo final del robot, obtener los ángulos de las articulaciones.

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi) \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi)$ es función inversa de la ecuación 4.4.



4.4.1 Convención Denavit-Hartenberg

Existen varios métodos para obtener el modelo de cinemática directa, por ejemplo por geometría aplicada al mecanismo del robot se pueden deducir fácilmente las ecuaciones cinemáticas del robot. Sin embargo, cuando el

número de grados de libertad crece, este método puede resultar tedioso. Otra alternativa es la metodología Denavit-Hartenberg, la cual es ampliamente conocida en el ambiente de ingeniería y ofrece un procedimiento sencillo para obtener el modelo cinemático directo cuya estructura queda en representación de transformaciones homogéneas.

Jaques Denavit y Richard S. Hartenberg en 1955 presentaron un procedimiento para obtener una mínima representación de la orientación y traslación de robots manipuladores. La convención Denavit-Hartenberg es una herramienta útil para deducir las ecuaciones de cinemática directa de robots manipuladores. Consiste en determinar una tabla de parámetros relacionados con los eslabones del robot. La convención Denavit-Hartenberg toma como referencia al diagrama de un robot manipulador en cadena cinemática abierta como se muestra en la figura 4.8. Las variables articulares en la representación Denavit Hartenberg son denotadas por θ_i para el tipo rotacional, prismática o lineal por d_i , la longitud del eslabón está representada por l_i y el ángulo de separación entre los ejes z_i y z_{i-1} es denotado por α_i .

Jaques Denavit (1930...)

Jaques Denavit nació el 1 de octubre de 1930 en la ciudad de París. En 1949 recibió el grado de ingeniero en la Universidad de París. Denavit obtuvo la ciudadanía estadounidense. En 1953 y 1956, respectivamente en la Universidad de Northwestern recibió los grados de maestría y doctorado en ingeniería mecánica. En 1958 fue profesor asistente del departamento de ingeniería mecánica de la Universidad de Northwestern, donde se retiró como profesor de tiempo completo en 1982. También trabajó como físico residente en el Naval Research Lab de 1969 a 1971. De 1982 a 1993 Denavit trabajó en el Lawrence Livermore National Laboratory.

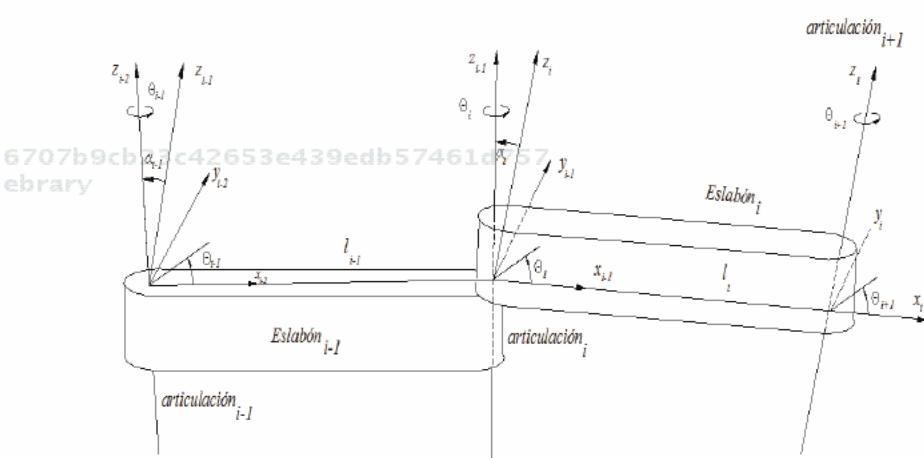


Figura 4.8 Convención Denavit-Hartenberg para un robot manipulador.

El ángulo θ_i es el ángulo entre los ejes x_{i-1} y x_i medido alrededor del eje z_{i-1} . d_i es la distancia del origen del sistema de referencia $i - 1$ a la intersección del eje x_i con el eje z_{i-1} . Su medición se realiza a lo largo

del eje z_{i-1} . En el caso de articulaciones rotacionales d_i es un parámetro constante y representa el *offset* o espesor del servomotor. Adicionalmente a las variables articulares θ_i y d_i , hay 2 parámetros constantes que describen características específicas del eslabón i -ésimo. Esos parámetros son: el parámetro l_i se define como la distancia a lo largo del eje x_i desde el origen del sistema de referencia coordenado $i - 1$ hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i . El ángulo entre los ejes z_i y z_{i-1} se denota por α_i , su medición es respecto a un plano normal a x_i . Una medición de ángulo positivo para α_i se toma en dirección del eje z_{i-1} hacia z_i . Por ejemplo, para un robot con 6 articulaciones rotacionales se requieren de 18 elementos para describir completamente su modelo cinemático.

En la representación Denavit-Hartenberg cada transformación homogénea H_i se representa por el producto de cuatro transformaciones básicas:

$$\begin{aligned}
 H_i &= R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,l_i} R_{x,\alpha_i} & (4.6) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & l_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & l_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



4.4.2 Selección de sistemas de referencia

Antes de presentar la metodología Denavit-Hartenberg, primero se describirá la convención para asignar los sistemas de referencias cartesianos asociados a los eslabones del robot. En este punto es necesario aclarar

que en la literatura de robótica, la convención Denavit-Hartenberg no es única, depende de la selección de los sistemas de referencia cartesianos en las articulaciones y eslabones, así como en sus eslabones adyacentes. La cinemática directa del robot proporciona las coordenadas cartesianas del extremo final del robot relativo a un sistema de referencia cartesiano fijo Σ_0, x_0, y_0, z_0 ; en la figura 4.8 se muestra la asignación de sistemas de referencia para las articulaciones $i - 1$ -ésima, i -ésima e $i + 1$ de un robot manipulador. En general se tiene el siguiente procedimiento:

 El eje z_i se asigna rígidamente a la articulación $i + 1$. Es decir, z_0 es el eje de la articulación 1, z_1 es el eje de la articulación 2, y así sucesivamente.

 Localizar el origen o_i del sistema de referencia $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ en la intersección del eje z_i con la normal común a los ejes z_{i-1} y z_i .

 Seleccionar el eje x_{i-1} sobre la normal que une los ejes z_{i-1} y z_i en dirección de la articulación $i - 1$ hacia la articulación i .

 Definir el ángulo de torsión α_i , este es el ángulo entre los ejes z_i y z_{i-1} y se mide con valor positivo en el sentido de las manecillas del reloj sobre el eje x_i .

 Seleccionar el eje y_i por la regla de la mano derecha.

Hartenberg (1907-1997)

Richard S. Hartenberg nació el 27 de febrero de 1907 en Chicago, Illinois. En 1928 obtuvo el grado en ingeniería en la Universidad de Wisconsin, también la maestría y doctorado en ingeniería mecánica en 1933 y 1941, respectivamente. Trabajó 34 años en la Universidad de Northwestern, donde se jubiló en 1975. Hartenberg fue miembro de la ASME (American Society of Mechanical Engineers) y de la Scientific Research Society. Fue galardonado por la ASME en 1974. Sus investigaciones abarcaban cinemática y diseño de máquinas y la historia de la tecnología. Hartenberg murió el 24 de diciembre de 1997.

La convención Denavit-Hartenberg proporciona una representación no única para los siguientes casos:

 Para el sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ sólo la dirección del eje z_0 es especificada, entonces su origen o_0 y el eje x_0 pueden ser seleccionados de manera arbitraria.

 Para el sistema de referencia $\Sigma_n(x_n, y_n, z_n)$ no existe la articulación $n + 1$, entonces el eje z_n no está completamente definido, mientras

que el eje x_n es normal al eje z_{n-1} . Típicamente la n -ésima articulación es rotatoria, por lo tanto z_n se alinea en la dirección de z_{n-1} .



Cuando dos ejes consecutivos z_i y z_{i-1} son paralelos entre sí, la normal común entre ellos no es única.



Cuando dos ejes consecutivos z_i y z_{i-1} se interceptan, la dirección del eje x_i es arbitraria.



Cuando la articulación i -ésima es lineal o prismática, entonces la dirección de z_i es arbitraria.

De acuerdo con esta convención previamente descrita, a continuación se resumen los parámetros del i -ésimo eslabón:

1. l_i es la longitud del i -ésimo eslabón, es la distancia del eje z_{i-1} hacia el eje z_i medida sobre el eje x_{i-1} .

2. α_i es el ángulo de torsión, el cual representa el ángulo entre los ejes z_{i-1} a z_i medido en el sentido de las manecillas del reloj sobre el eje x_i .

3. d_i es el *offset*, es la distancia de x_{i-1} a x_i medida sobre el eje z_{i-1} .

4. θ_i es el desplazamiento rotacional de x_{i-1} a x_i medido alrededor del eje z_{i-1} . El signo positivo de θ_i es el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Obsérvese que l_i siempre será positivo puesto que corresponde a una longitud, mientras que α_i, d_i, θ_i representan cantidades con signo.



4.4.3 Algoritmo Denavit-Hartenberg

A continuación se describe el procedimiento para encontrar la cinemática directa a través de la convención Denavit-Hartenberg.

1. Localizar la dirección de los ejes z_0, z_1, \dots, z_{n-1} .
2. Establecer el sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ cuyo origen es colocado sobre el sistema de referencia en la base del robot. Los ejes x_0, y_0 son determinados de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Una vez que el sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ ha sido establecido, se inicia un proceso iterativo en el cual se define el sistema de referencia $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ usando el sistema de referencia $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, iniciando con el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$. En la figura 4.8 se muestra el procedimiento.

Llevar a cabo los pasos 3 al 5 para la articulaciones $i = 1, \dots, n - 1$

3. Localizar el origen o_i en la intersección de la normal común que une al eje z_i con el eje z_{i-1} .

Si el eje z_i intercepta al eje z_{i-1} colocar o_i en la intercepción.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Para el caso en que los ejes z_i y z_{i-1} son paralelos:

- Si la articulación i -ésima es rotacional, colocar el origen o_i sobre la articulación i -ésima, tal que $d_i = 0$.
- Si la articulación i -ésima es prismática, colocar el origen o_i en un punto límite físico de la articulación i -ésima, por ejemplo en un punto extremo.

4. Seleccionar el eje x_i a lo largo de la normal común que une a los ejes z_{i-1} y z_i , en dirección de la articulación $i - 1$ hacia la articulación i .

5. Determinar y_i por la regla de la mano derecha.

6. Establecer el sistema de referencia del extremo final $\Sigma_n(x_n, y_n, z_n)$.

- Si la articulación n -ésima es rotatoria, entonces alinear el eje z_n con el eje z_{n-1}
- Si la articulación n -ésima es prismática, entonces seleccionar el eje z_n de forma arbitraria. El eje x_n debe cumplir el paso 4.

7. Establecer la tabla 4.1 de parámetros de eslabones.
8. Obtener las matrices de transformaciones homogéneas (4.6) $H_i(q_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Tabla 4.1 Parámetros Denavit-Hartenberg.

Características de eslabones	
l_i	longitud del eslabón i -ésimo
d_i	articulaciones lineales o prismáticas
α_i	ángulo entre los ejes z_{i-1} y z_i medido con respecto al eje x_i .
θ_i	articulaciones rotacionales; representa el ángulo entre los ejes x_{i-1} y x_i medido alrededor del eje z_{i-1}

La cinemática directa es la forma general de transformaciones homogéneas que concatena los sistemas de referencia cartesianos asociados a los eslabones del robot, todos relativos al sistema de referencia fijo Σ_0 .



4.4.4 Cinemática diferencial

La cinemática diferencial directa es la derivada con respecto al tiempo de la cinemática directa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \psi]^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como se ve, ésta relaciona la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ con la velocidad lineal $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} [x, y, z]^T = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T \in \mathbb{R}^3$ y la velocidad angular $\dot{\mathbf{w}} =$

$\frac{d}{dt} [\theta, \phi, \psi]^T = [\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$, además el mapeo es descrito en términos de una matriz $J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ denominada **jacobiano del robot** o **jacobiano analítico**:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \\ J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ relaciona la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ con la velocidad lineal $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, mientras que $J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ relaciona la velocidad angular $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ con la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$, es decir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

El jacobiano del robot representa una importante herramienta en robótica que sirve para caracterizar a un robot manipulador, encontrar configuraciones singulares, analizar redundancia, determinar la cinemática diferencial inversa, así como describir la relación entre la fuerza aplicada y los pares o torques resultantes del extremo final. Es indispensable para el análisis y diseño de algoritmos de control cartesiano.

Hay varias formas de seleccionar la orientación de la herramienta del robot manipulador: si de manera particular dicha orientación es representada por los ángulos de Euler (un sistema de referencia asociado al extremo final del robot o a la herramienta de trabajo), entonces la velocidad angular $\mathbf{w} = [\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}]^T \in \mathbb{R}^3$ relaciona la matriz jacobiano analítico, como se encuentra descrita en la ecuación (4.7). Otra posible forma de modelar la orientación de la herramienta del robot es expresarla directamente en un sistema de referencia específico, por ejemplo al origen localizado en la base del robot, entonces a la matriz $J(\mathbf{q})$ se le denomina **jacobiano geométrico** que depende de la configuración del robot manipulador. El jacobiano analítico difiere del jacobiano geométrico: básicamente la dife-

rencia se encuentra en cómo modelar la orientación de la herramienta de trabajo del robot.

La cinemática diferencial inversa representa la relación entre la velocidad articular \dot{q} con la velocidad lineal de movimiento v y la velocidad angular w , expresada en términos de la matriz inversa del jacobiano del robot:

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde $J^{-1}(q) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ es la matriz inversa del jacobiano del robot, la cual existe si es una matriz cuadrada y su determinante es diferente a cero.

Si el determinante del jacobiano del robot $J(q)$ es cero, entonces se dice que no es de rango completo y se presentan problemas de *singularidades*.



Singularidad significa que no es posible indicarle un movimiento arbitrario al extremo final del robot, es decir para una velocidad lineal v y velocidad angular w finitas puede corresponder una velocidad articular \dot{q} infinita.



Puede existir un conjunto infinito de soluciones para la cinemática directa.



La cinemática inversa diferencial tiene un número infinito de soluciones.



En control cartesiano la fuerza aplicada al robot puede provocar un par infinito a las articulaciones del robot.



Puede generar un número infinito de puntos de equilibrio en la ecuación en lazo cerrado, formada por la dinámica del robot y la estructura cartesiana de control.

4.5 Tipos de robots industriales



La estructura fundamental de los robots industriales es la cinemática abierta, la cual puede tener diferentes combinaciones de articulaciones rotacionales y prismáticas dando origen a diversos tipos de robots. A continuación se presenta la clasificación de robots industriales con base en las tres primeras articulaciones del robot, es decir sin incluir la muñeca o garra colocada en su extremo final. De acuerdo con lo anterior, los robots industriales se clasifican como se muestra en la tabla 4.2.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Tabla 4.2 Clasificación de robots industriales.

Robot	Características
Antropomórfico (RRR)	3 articulaciones rotacionales
SCARA (RRP)	2 articulaciones rotacionales y 1 prismática
Esférico (RRP)	2 articulaciones rotacionales y 1 prismática
Cilíndrico (RPP)	1 articulación rotacional y 2 prismáticas
Cartesiano (PPP)	3 articulaciones prismáticas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

En relación con la nomenclatura presentada en la tabla 4.2 se tiene que la letra R significa que es un tipo de articulación rotacional, mientras que la letra P representa una articulación prismática. El orden como son presentadas corresponden a las articulaciones de la base, hombro y codo. Por ejemplo, la notación robot cilíndrico (RPP) significa que la base es una articulación rotacional, mientras que el hombro y codo corresponden a articulaciones prismáticas.

La gran mayoría de los robots industriales tienen la configuración antropomórfica (RRR) debido a que presentan mayor versatilidad en sus movimientos. El robot antropomórfico tiene todas sus articulaciones del

tipo rotacional. El robot SCARA (RRP) (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*) tiene la base y hombro del tipo rotacional y el codo de articulación prismática. El robot esférico (RRP) está formado por 2 articulaciones rotacionales para la base y el hombro, el codo es una articulación prismática. El robot cilíndrico (RPP) tiene 1 articulación rotacional y 2 prismáticas. El robot cartesiano (PPP), también conocido como robot lineal o pótico, tiene sus tres articulaciones prismáticas.

En la figura 4.9 se muestra la clasificación de las 5 configuraciones de robots industriales.

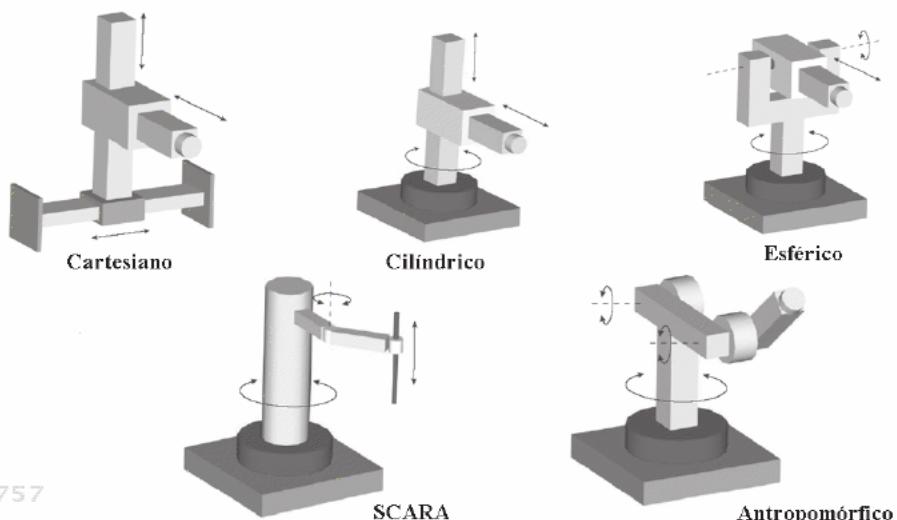
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

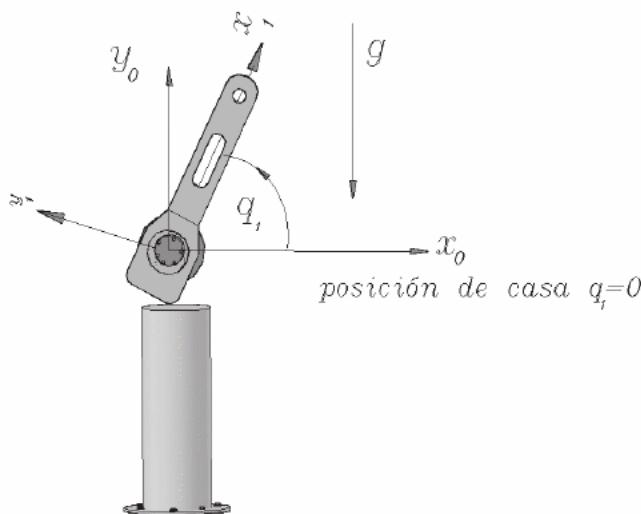
Figura 4.9 Clasificación de los robots industriales.

A continuación se deduce el modelo cinemático directo para cada uno de los robots industriales descritos en la tabla 4.2.

Péndulo robot (R)

El robot más simple de la configuración antropomórfica es el péndulo-robot, formado por un servomotor el cual tiene acoplado mecánicamente una barra metálica de longitud l_1 y se encuentra sometido al fenómeno de

gravedad. El péndulo es un sistema robótico de un grado de libertad, cuya articulación corresponde al codo de un robot industrial. El movimiento del péndulo se encuentra en el plano x_0y_0 como está indicado en la figura 4.10.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.10 Péndulo robot.

Los parámetros para la convención Denavit-Hartenberg correspondientes al péndulo-robot se encuentran especificados en la tabla 4.3.

Tabla 4.3 DH del péndulo.

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1

El origen del sistema de referencia cartesiano Σ_0 se coloca sobre la articulación del péndulo, el eje z_0 coincide con el eje de giro del servomotor el cual es perpendicular al plano de la hoja. El sistema de referencia Σ_1 se coloca sobre el péndulo y se mueve de manera conjunta al péndulo; coincide inicialmente con el sistema Σ_0 cuando $q_1 = 0$, además el eje z_1

es paralelo al eje z_0 . El plano x_1y_1 tiene una rotación de q_1 grados con respecto al plano x_0y_0 del sistema fijo Σ_0 , y la matriz R_{z_1,q_1} determina dicha rotación:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación homogénea para el péndulo-robot está determinada como:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

La cinemática directa para un péndulo-robot de un grado de libertad es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

La cinemática inversa se obtiene despejando la variable q_1 de la cinemática directa (4.12); para el péndulo se tiene que:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.13)$$

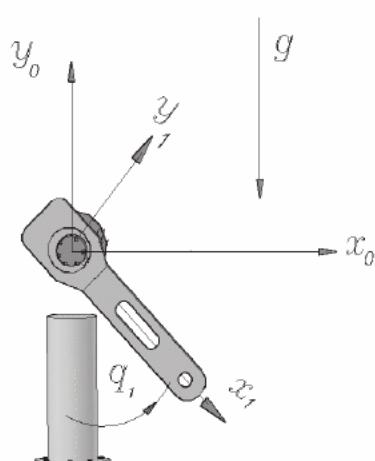
La cinematica diferencial del péndulo se obtiene como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) \\ l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) & 0 \\ 0 & l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}}_{J(q)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

El modelo de cinemática directa depende de la ubicación de la posición de casa (*home position*), la cual es el punto de reposo u origen del péndulo que corresponde a $q_1 = 0$. Como se puede apreciar en la figura 4.10 la

posición de casa está colocada sobre el eje x_{0+} . La matriz de rotación R_{z_1, q_1} que determina la orientación entre los sistemas de referencia fijo Σ_0 y el que se mueve en forma conjunta con el robot Σ_1 fue obtenida con respecto al cuadrante I, es decir sobre el plano $x_{0+}y_{0+}$.

Otra posibilidad de ubicar la posición de casa del péndulo es colocar el origen par $q_1 = 0$ sobre el lado negativo del eje y_0 , es decir y_{0-} entre los cuadrantes III y IV, como se muestra en la figura 4.11.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.11 Cambio de posición de casa del péndulo sobre el eje y_{0-} .

En este caso, para poder obtener la matriz rotacional resultante del péndulo, la matriz de rotación R_{z_1, q_1} debe ser precedida por una rotación de $-\frac{\pi}{2}$ grados con respecto al eje z_0 , es decir:

$$\begin{aligned} R_0^1 &= R_{z, -\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación homogénea para el péndulo-robot está determinada como:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & -l_1 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

La cinemática directa para un péndulo-robot respecto a la posición de casa colocada sobre el eje y_0 adquiere la siguiente forma:

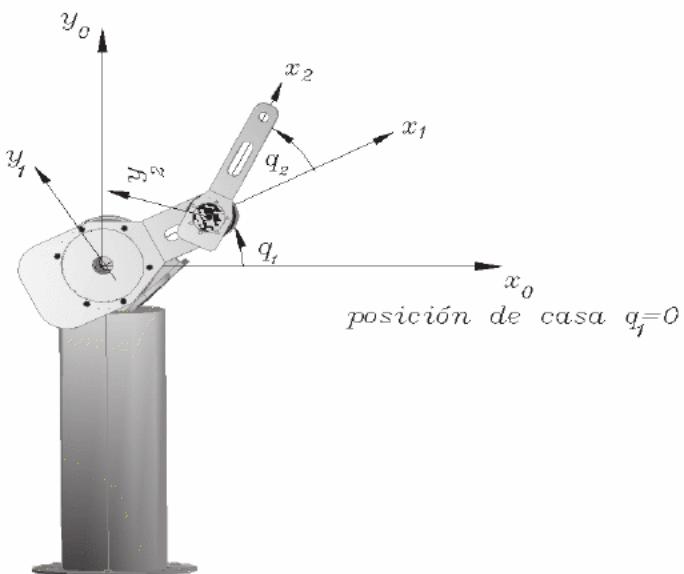
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) \\ -l_1 \cos(q_1) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Robot planar de dos grados de libertad (RR)

Considérese un robot de dos grados de libertad con articulaciones rotacionales que se mueve en el plano vertical x_0y_0 como el que se muestra

en la figura 4.12. El sistema de referencia fijo Σ_0 , $x_0y_0z_0$, se coloca en la base del robot de tal forma que el eje z_0 es perpendicular al plano de la hoja. Los ejes x_0y_0 son seleccionados por la regla de la mano derecha. El eje z_1 se coloca sobre el eje de rotación del hombro, paralelo al eje z_0 , el sistema de referencia Σ_2 se coloca en el extremo final del robot, de tal forma que el eje z_2 es paralelo al eje z_1 . Los orígenes de los sistemas Σ_1 y Σ_2 son colocados sobre las articulaciones del hombro y codo, respectivamente. Los demás ejes x_0y_0 , x_1y_1 y x_2y_2 son determinados por la regla de la mano derecha.

En la tabla 4.4 se muestran los parámetros de los eslabones para la convención Denavit-Hartenberg de un robot planar de dos grados de libertad.

**Figura 4.12** Robot planar de dos gdl.**Tabla 4.4 DH del robot de 2 gdl.**

Eslabón	l_i	α_1	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2

Geralmente la posición de casa para un robot de dos grados de libertad se selecciona sobre el eje x_{0+} , midiendo el ángulo q_1 en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir del eje x_{0+} hacia el eje y_{0+} , con esta consideración se obtiene la siguiente matriz de transformación homogénea:

$$H_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 H_0^2 &= H_1 H_2 \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Por tanto la cinemática directa para un robot planar de dos grados de libertad es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

La cinemática inversa de un robot manipulador de dos grados de libertad se obtiene por un procedimiento geométrico como el que se muestra en la figura 4.13:

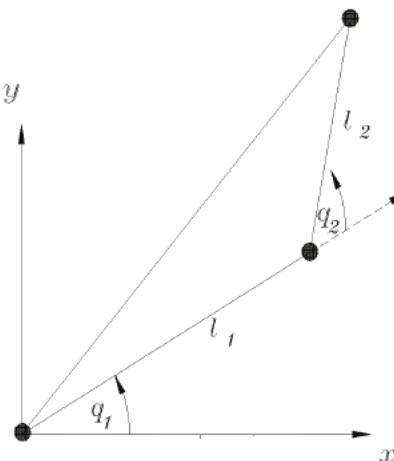


Figura 4.13 Método geométrico para obtener la cinemática inversa de un robot planar de dos grados de libertad.

$$q_2 = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \quad (4.21)$$

$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right) \quad (4.22)$$

La cinemática diferencial de un robot planar de dos grados de libertad se

obtiene de la ecuación (4.7):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

El jacobiano se deduce de:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) - l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & -l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{sen}(q_1) - l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & -l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

El determinante de la matriz jacobiana es $\det[J(\mathbf{q})] = l_1 l_2 \operatorname{sen}(q_2)$, el cual es cero para $q_2 = 0, \pm n\pi$ y q_1 cualquier valor. Por lo tanto, cuando la articulación del codo tiene alguno de esos valores para q_2 el robot entra en una singularidad.

La posición de casa de un robot manipulador planar de dos grados de libertad también puede ser ubicada sobre el eje y_{0-} , en otras palabras, q_1 se mide del eje y_{0-} hacia el eje x_{0+} como se muestra en la figura 4.14.

Esto equivale a hacer una rotación alrededor del eje z_0 por -90 grados o $-\frac{\pi}{2}$ radianes, es decir $R_{z,-\frac{\pi}{2}} R_{z,q_1}$, y $R_{z,-\frac{\pi}{2}} R_{z,q_2}$. Asimismo, también al vector de traslación $R_{z,-\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_0^1$ y $R_{z,-\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_1^2$.

$$\begin{aligned} R_{z,-\frac{\pi}{2}} R_{z,q_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ -\cos(q_1) & \operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_{z,-\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_0^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen}(q_1) \\ -l_1 \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} \\ R_{z,-\frac{\pi}{2}} R_{z,q_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ -\cos(q_2) & \operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_{z,-\frac{\pi}{2}} \mathbf{d}_0^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_2) \\ l_2 \operatorname{sen}(q_2) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \operatorname{sen}(q_2) \\ -l_2 \cos(q_2) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

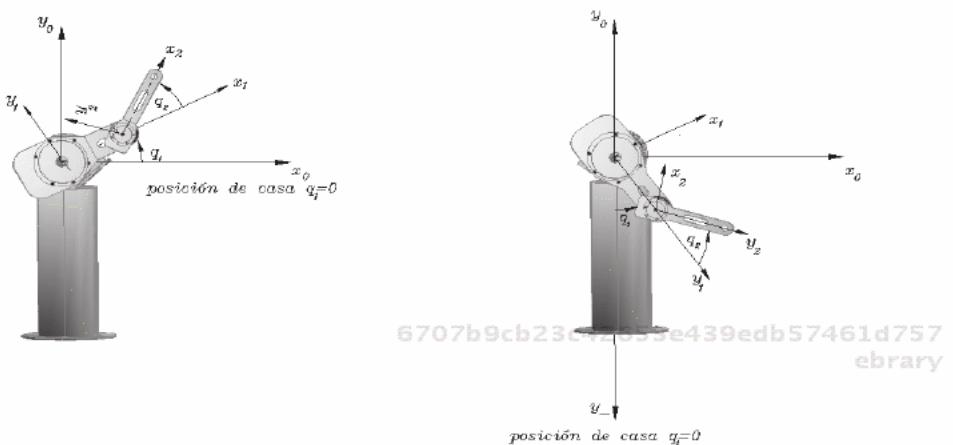


Figura 4.14 Cambio de la posición de casa para un robot de 2 gdl.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & -l_1 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ -\cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & -l_2 \cos(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_0^2 &= H_1 H_2 \\
 &= \begin{bmatrix} \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -\cos(q_1 + q_2) & \sin(q_1 + q_2) & 0 & -l_1 \cos(q_1 + l_2) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo que la cinemática directa para un robot planar de dos grados de libertad cuya posición inicial es sobre el eje \$y_0\$ negativo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Observe que este resultado también se obtiene de manera directa por

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

aplicar la matriz de rotación $R_{z,-\frac{\pi}{2}}$ directamente a las ecuación de la cinemática directa (4.20), es decir: $R_{z,-\frac{\pi}{2}} [x, y]^T$.

La cinemática inversa de la ecuación (4.25) está dada por:

$$\begin{aligned} q_2 &= \cos\left(\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right) \\ q_1 &= \frac{\pi}{2} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) - \tan\left(\frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}\right) \end{aligned}$$



4.5.1 Robot antropomórfico (RRR)

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Los brazos mecánicos o robots manipuladores que tienen la configuración antropomórfica presentan mayor destreza en su espacio de trabajo, ya que sus eslabones están unidos por tres articulaciones rotacionales. El espacio de trabajo de la configuración antropomórfica corresponde a una esfera hueca, cuyo radio es igual a la suma de longitudes de sus eslabones (véase la figura 4.15). Por similitud con el brazo humano (*ergocidad*), la segunda articulación se conoce como **hombro** (*shoulder*) y la tercera articulación se llama **codo** (*elbow*). El sistema de referencia cartesiano fijo Σ_0 se encuentra sobre la base del robot, donde el eje z_0 coincide con el eje de rotación de la articulación de la base z_1 . El eje z_0 es ortogonal a los ejes de rotación z_2 y z_3 del hombro y codo, respectivamente. Los ejes z_2 y z_3 son paralelos entre sí, tal y como se muestra en la figura 4.15.

La figura 4.16 muestra un ejemplo de robot industrial en la configuración antropomórfica de la compañía ABB que es utilizado en aplicaciones de traslado de objetos. Considérese un robot manipulador antropomórfico de tres grados de libertad como el que se presenta en la figura 4.15, donde el sistema de referencia Σ_0 se encuentra en la base del robot, los sistemas de referencia Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 están seleccionados de tal forma que sus ejes z_1 , z_2 y z_3 coincidan con sus respectivos ejes de rotación de cada articulación. De esta manera el eje z_1 es perpendicular a los ejes z_2 y z_3 , y estos dos últimos ejes son paralelos entre sí. La tabla 4.5 contiene los parámetros Denavit-Hartenberg para el robot antropomórfico de tres grados de libertad. Es

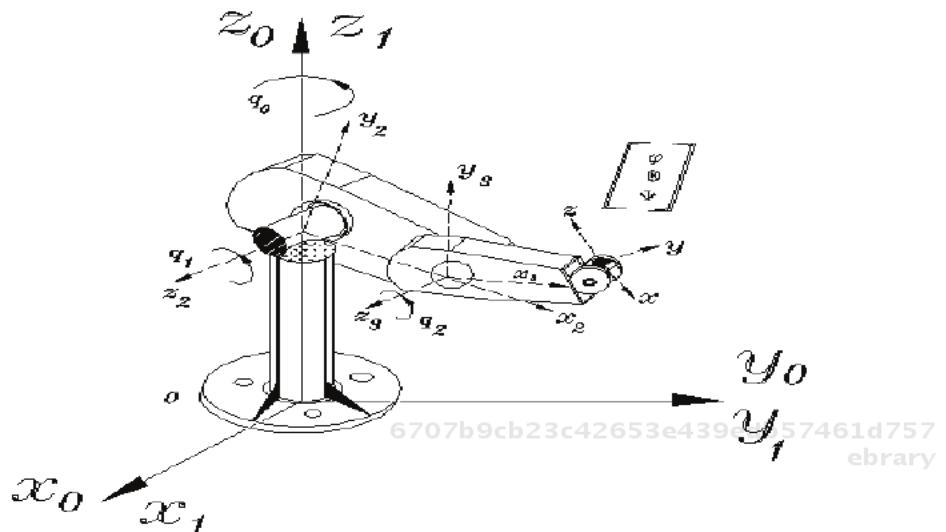


Figura 4.15 Robot antropomórfico.



Figura 4.16 Robot industrial.

Tabla 4.5 DH del robot de 3 gdl.

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	$\frac{\pi}{2}$	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2
3	l_3	0	0	q_3

común considerar en la articulación de la base la longitud $l_1 = 0$.

La configuración antropomórfica se caracteriza por tener todas sus articulaciones del tipo rotacional, lo que significa que las matrices de transformaciones homogéneas adquieren la siguiente forma:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & \sin(q_3) & 0 & l_3 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & l_3 \sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Por lo tanto la matriz homogénea del robot antropomórfico es:

$$\begin{aligned} H_0^3 &= H_0^1 H_1^2 H_2^3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) & -\cos(q_1) \sin(q_2 + q_3) & \sin(q_1) & \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) & -\sin(q_1) \sin(q_2 + q_3) & -\cos(q_1) & \sin(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

La cinemática directa de un robot antropomórfico de 3 gdl es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_1) [l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

La cinemática directa también es posible obtenerla por medios geométricos; a partir de la figura 4.17 se pueden deducir las mismas expresiones de la ecuación (4.30).

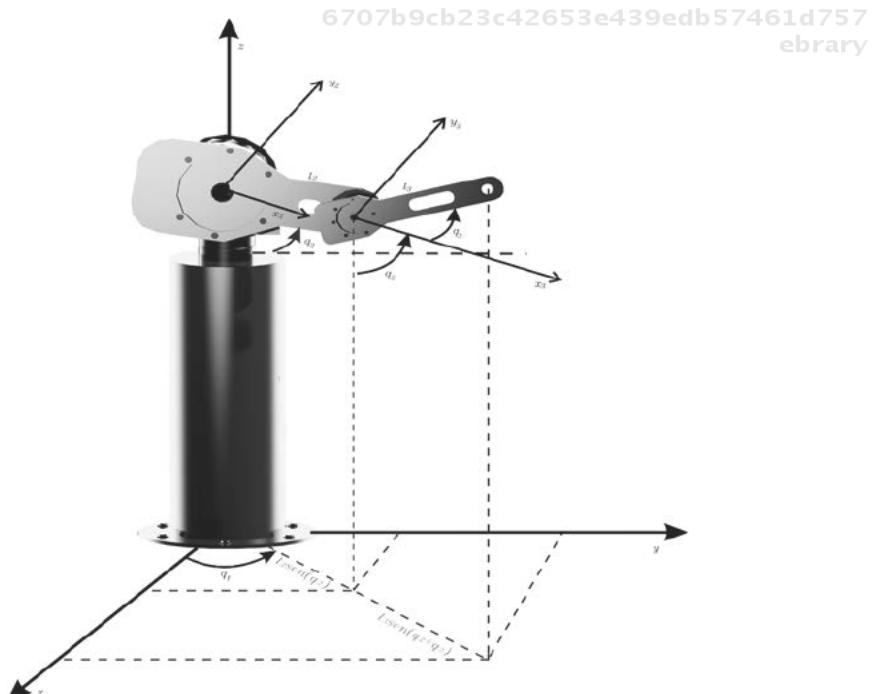


Figura 4.17 Método geométrico para obtener la cinemática directa de un robot antropomórfico de 3 gdl.

La cinemática inversa consiste en obtener por medios analíticos la inversa de la función (4.30):

$$q_1 = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4.31)$$

$$q_2 = \text{atan}\left(\frac{\mu_{s2}}{\mu_{c2}}\right) \quad (4.32)$$

$$q_3 = \arctan\left(\frac{\mu_{s3}}{\mu_{c3}}\right) \quad (4.33)$$

$$\mu_{s3} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)^2} \quad (4.34)$$

$$\mu_{c3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \quad (4.35)$$

$$\mu_{s2} = \frac{(l_2 + l_3\mu_{c3})z - l_3\mu_{s3}\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.36)$$

$$\mu_{c2} = \frac{(l_2 + l_3\mu_{c3})\sqrt{x^2 + y^2} + l_3\mu_{s3}z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.37)$$

El jacobiano de un robot antropomórfico de tres grados de libertad está dado por:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{31} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$j_{11} = -\sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)]$$

$$j_{12} = -\cos(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)]$$

$$j_{13} = -l_3 \cos(q_1) \sin(q_2 + q_3)$$

$$j_{21} = \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)]$$

$$j_{22} = -\sin(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)]$$

$$j_{23} = -l_3 \sin(q_1) \sin(q_2 + q_3)$$

$$j_{31} = 0$$

$$j_{32} = l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

$$j_{33} = l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

La cinemática diferencial se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{31} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$



4.5.2 Configuración SCARA (RRP)

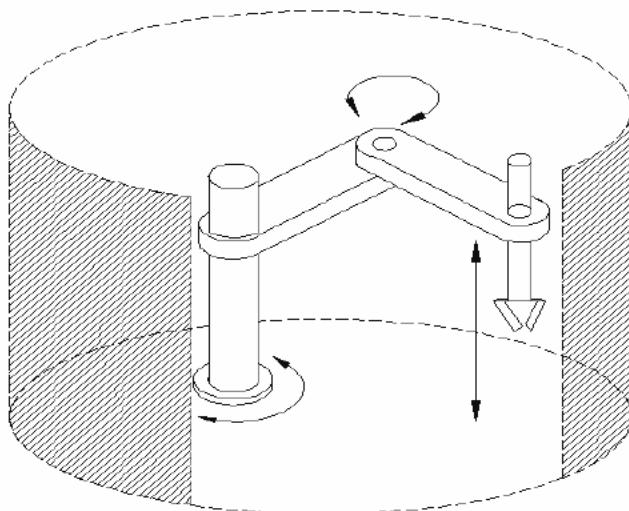
Una geometría especial de robots industriales es el tipo **SCARA** (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*). SCARA es un brazo planar antropomórfico de dos articulaciones rotacionales para la base y hombro, respectivamente, que se mueve en un plano horizontal; la tercera articulación es prismática. Para este tipo de configuración todos los ejes de movimiento z_1 , z_2 y z_3 son paralelos entre sí. La estructura mecánica es de alta rigidez para soportar cargas en forma vertical y para control de fuerza en el plano horizontal, por lo que la configuración SCARA es adecuada para tareas de ensamble con pequeños objetos. El espacio de trabajo se describe en la figura 4.19.



Figura 4.18 Robot SCARA.

En la tabla 4.6 se presentan los parámetros del robot SCARA.

De acuerdo con la tabla 4.6 el robot SCARA tiene las siguientes matrices de transformación homogénea:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary**Figura 4.19** Espacio de trabajo del robot SCARA.**Tabla 4.6 DH del robot SCARA.**

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	180	0	q_2
3	0	0	d_3	0

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary ALFAOMEGA

(4.43)

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) + \sin(q_1 + q_2) & -\cos(q_1 + q_2) + \sin(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) - \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) - \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

El modelo de cinemática directa para el robot SCARA es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -d_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

La matriz jacobiana de un robot SCARA se encuentra de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) & 0 \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$



4.5.3 Configuración esférica (RRP)

La **configuración esférica** presenta una construcción más compleja que la antropomórfica, la articulación rotacional del codo es sustituida por una articulación prismática o lineal como se muestra en la figura 4.20. Los ejes de movimiento de las articulaciones son mutuamente perpendiculares. El nombre de esta configuración deriva del hecho que la posición del extremo final puede ser programada en coordenadas esféricas.

Ejemplo de esta configuración de robots manipuladores es el robot Standford, cuya principal aplicación se encuentra en el mecanizado de piezas automotrices y la manipulación de objetos sobre el piso.

El origen del sistema de referencia esférico se encuentra localizado en la

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

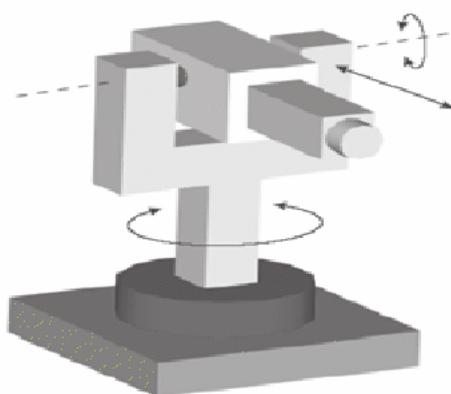
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.20 Configuración esférica tiene dos articulaciones rotacionales (base y hombro) y una prismática (codo).

intersección de los ejes z_1 y z_2 ; el espacio de trabajo de esta configuración es una esfera hueca.

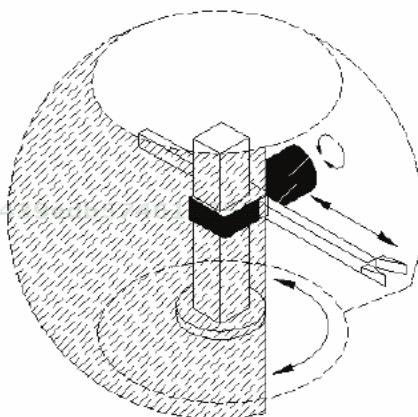


Figura 4.21 Espacio de trabajo de la configuración esférica.

La articulación del hombro del robot Stanford tiene una longitud (*offset*) que hace más compleja la cinemática directa.

La tabla 4.7 presenta los parámetros de la convención Denavit-Hartenberg

para el robot en la configuración esférica Standford.

Tabla 4.7 DH del robot esférico.

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	-90	0	q_1
2	0	90	d_2	q_2
3	0	0	d_3	0

Las matrices de transformación homogénea para el robot en la configuración esférica tienen la siguiente estructura:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\sin(q_1) & \cos(q_1)\sin(q_2) & \cos(q_1)\sin(q_2)d_3 - \sin(q_1)d_2 \\ \sin(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1) & \sin(q_1)\sin(q_2) & \sin(q_1)\sin(q_2)d_3 + \cos(q_1)d_2 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & \cos(q_2)d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Por lo tanto la cinemática directa de un robot manipulador en la configuración esférica está dada por la siguiente ecuación:

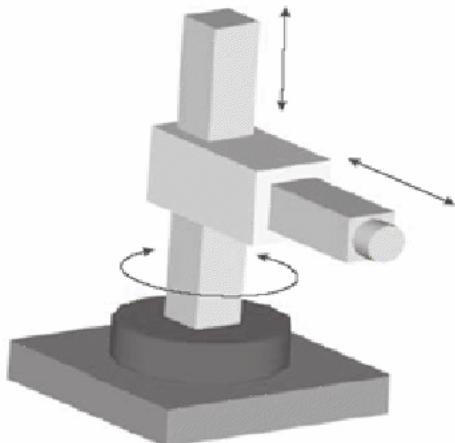
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\sin(q_2)d_3 - \sin(q_1)d_2 \\ \sin(q_1)\sin(q_2)d_3 + \cos(q_1)d_2 \\ \cos(q_2)d_3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$



4.5.4 Configuración cilíndrica (RPP)

La **configuración cilíndrica** tiene la articulación de la base rotacional, mientras que la segunda y tercera articulación son prismáticas. Entre las aplicaciones de robots manipuladores en esta configuración se encuentran aquellas que procesan cavidades horizontales y transporte de objetos. En la figura 4.22 se muestra un robot manipulador en la configuración cilíndrica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 4.22 Robot cilíndrico.

Su estructura mecánica es compleja y su espacio de trabajo es la porción de un cilindro hueco, como se muestra en la figura 4.23. El origen del sistema de referencia cartesiano para el robot en la configuración cilíndrica se ubica en la articulación de la base. Los ejes z_1 y z_2 son paralelos. El eje z_3 es perpendicular a los ejes z_1 y z_2 .

En la tabla 4.8 se muestran los parámetros del robot manipulador en la configuración cilíndrica.

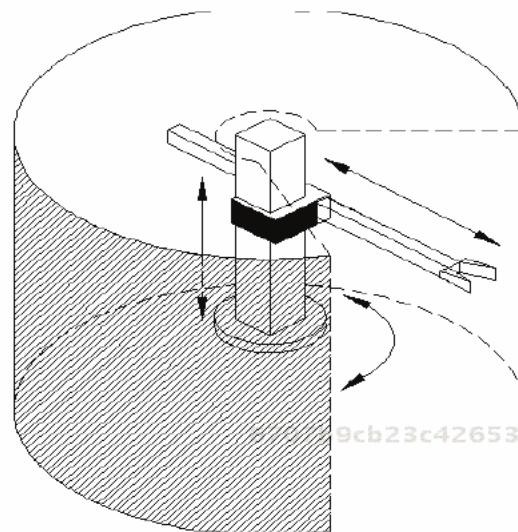


Figura 4.23 Espacio de trabajo del robot cilíndrico.

Tabla 4.8 DH del robot cilíndrico.

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	q_1
2	0	-90	d_2	0
3	0	0	d_3	0

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Con la tabla 4.8 el robot en la configuración cilíndrica tiene las siguientes matrices de transformación homogénea:

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

(4.55)

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & -\sin(q_1)d_3 \\ \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & d_3 \cos(q_1) \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El modelo de cinemática directa para el robot manipulador cilíndrico está dado de la siguiente forma:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(q_1)d_3 \\ d_3 \cos(q_1) \\ d_1 + d_2 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

La matriz jacobiana de un robot cilíndrico está dada por:

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\cos(q_1)d_3 & 0 & -\sin(q_1) \\ -d_3 \sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

4.5.5 Configuración cartesiana (RRR)

Los manipuladores cuyas primeras tres articulaciones son prismáticas se les denomina **robots cartesianos**, y este tipo de robots también son conocidos como *robots póticos o lineales*. En la figura 4.24 se muestra una mesa de medición cartesiana. El modelo cinemático del robot cartesiano es más sencillo en contraste con otras configuraciones de robots, debido a que presenta características lineales. Este tipo de robot es útil en aplicaciones de corte de mascarillas, graficadores, taladros automáticos, plotters, mesa de coordenadas cartesianas, etc.

Los ejes asociados a cada articulación z_1 , z_2 y z_3 son mutuamente perpendiculares entre sí. En la figura 4.25 se muestra un prototipo de un

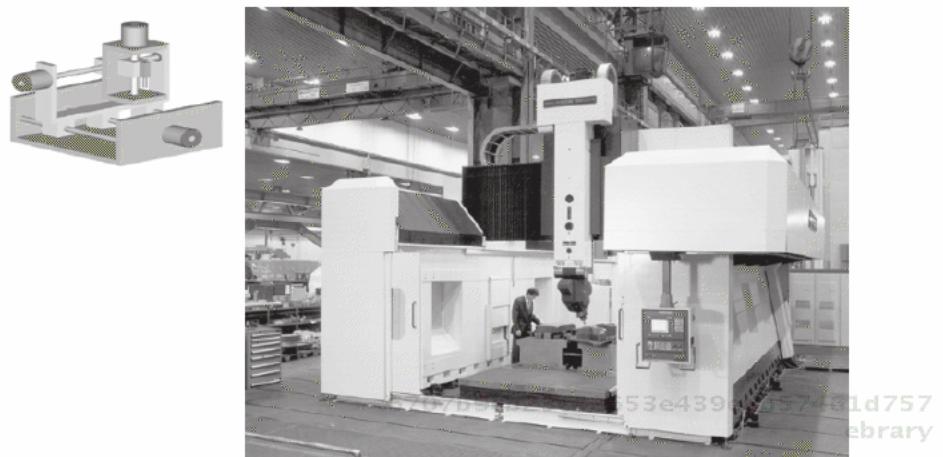


Figura 4.24 Robot cartesiano.

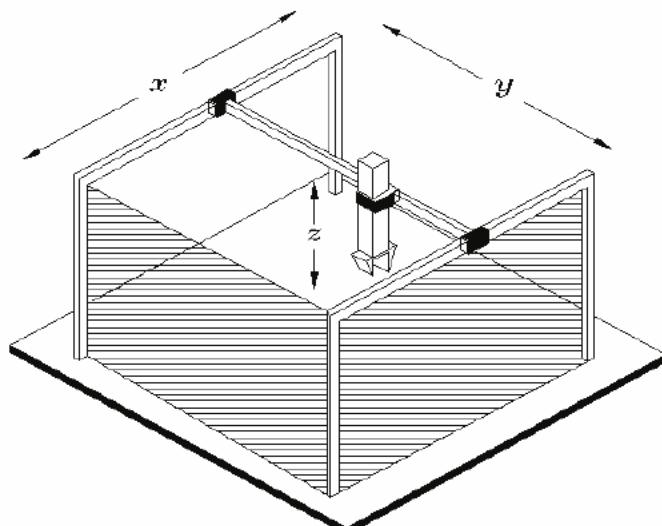


Figura 4.25 Espacio de trabajo del robot cartesiano.

robot cartesiano. El extremo final del robot se programa en coordenadas cartesianas, el espacio de trabajo de este manipulador es un paralelepípedo recto y su estructura mecánica presenta baja destreza debido a que todas sus articulaciones son prismáticas.

En el sitio web del libro se puede encontrar como material complementario

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

tario la tabla de parámetros del robot cartesiano de 3 gdl y su análisis cinemático.



4.6 Resumen

La cinemática directa proporciona un cambio de coordenadas articulares o generalizadas a coordenadas cartesianas y ángulos de orientación de la herramienta de trabajo, colocada en el extremo final del robot.

La **cinemática directa** es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares con las posiciones cartesianas y ángulos de orientación de la herramienta, colocada en el extremo final del robot. Un procedimiento simple que se ha generalizado para determinar la cinemática directa de robots manipuladores es la convención DenavitHartenberg, la cual consiste en determinar 2 variables articulares θ_i para rotacionales y d_i para prismáticas. Además, 2 parámetros constantes de cada eslabón: longitud l_i y el ángulo α_i entre los ejes consecutivos z_i y z_{i-1} , entonces por medio de las transformaciones homogéneas queda determinado el modelo cinemático directo.

La cinemática inversa es un problema mucho más complejo que la cine-

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

mática directa. Puede haber varias soluciones o inclusive no siempre se puede obtener una solución analítica. La cinemática inversa relaciona las coordenadas articulares en función de las coordenadas cartesianas y ángulos de orientación de la herramienta de trabajo del robot. La cinemática directa diferencial relaciona las velocidades lineales y rotacionales de la herramienta de trabajo en función de las coordenadas articulares de posición \mathbf{q} y velocidad $\dot{\mathbf{q}}$.

El jacobiano del robot, $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$, representa un operador importante en robótica, ya que permite establecer conclusiones de singularidades para las diversas configuraciones de robots industriales, interviene en el análisis de estabilidad de esquemas de control cartesiano, y es parte de la

cinemática directa.

Dependiendo de la combinación de articulaciones rotacionales o prismáticas los robots industriales se clasifican en 5 categorías: antropomórficos, esférico, SCARA, cilíndrico y cartesiano, siendo el más popular en el sector industrial el robot antropomórfico debido a su destreza en cuanto a la movilidad que le proporcionan las articulaciones rotacionales.

4.7 Referencias selectas

Se describe un conjunto de referencias selectas con la finalidad de que el lector encuentre información de respaldo a las secciones presentadas.



4.2 Morfología del robot



L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.



John J. Craig. “*Robótica*”. Pearson. 3a. Edición. 2006.



4.3 Transformación homogénea



K. S. Fu, R. C. Gonzalez, & C. S. G. Lee. “*Robotics: control, sensing, vision and intelligence*”. McGraw Hill International Editions. 1987.



L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.



John J. Craig. "Robótica". Pearson. 3a. Edición. 2006.



4.4 Cinemática



J. Denavit & R.S. Hartenberg. "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices". Trans ASME J. Appl. Mech., 23:215-221, 1955



R.S. Hartenberg & J. Denavit. "Kinematic synthesis of linkages". McGraw-Hill, New York, NY, 1964.



Richard P. Paul. "Robot manipulators: mathematics, programming and control". The MIT Press. Cambridge, Massachusetts and London England. 1981.



J. M. McCarthy. "An introduction to theoretical kinematics". The MIT Press. Cambridge, Massachusetts and London England. 1990.



4.5 Tipos de robots industriales



Tsuneo Yoshikawa. "Foundations of robotics: analysis and control". The MIT Press. Cambridge. 1990.



Yoshihiko Nakamura. "Advanced robotics: redundancy and optimization". Addison Wesley. 1991.

-  Richard M. Murray, Zexiang Li, & S. Shankar Sastry. “*A mathematical introduction a robotic manipulation*”. CRC Press. 1993.
-  Wolfram Stadler. “*Analytical robotics and mechatronics*”. McGraw Hill International Editions. 1995.
-  Jorge Angeles. “*Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*”. Springer. 1997.
-  L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.
-  Mark W. Spong, Seth Hutchinson & M. Vidyasagar. “*Robot modeling and control*”. John Wiley & Sons, Inc. 2006.



4.8 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook

A continuación se enlista un conjunto de problemas para mejorar las habilidades y conocimientos del lector sobre el tema de cinemática de robots manipuladores.



4.2 Morfología del robot

4.2.1 Explicar claramente qué es una articulación.

4.2.2 ¿Qué es un eslabón y como está formado?

4.2.3 ¿Cómo se define el espacio de trabajo de un robot?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook



4.3 Transformación homogénea

4.3.1 Considérese que $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz ortogonal. Demuéstrese que la matriz transpuesta es idéntica a su matriz inversa: $R^T = R^{-1}$.

4.3.2 Supóngase que el sistema de referencia asociado a una matriz ortogonal $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se selecciona por la regla de la mano derecha, entonces demuéstrese que el determinante de R es unitario, esto es, $\det[R] = 1$.

4.3.3 Demuéstrese que la inversa de una transformación homogénea está dada por la ecuación (4.3).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

4.4 Cinemática

4.4.1 ¿Qué es la cinemática directa?

4.4.2 ¿Qué es la cinemática diferencial?

4.4.3 ¿Cuál es la importancia en robótica del jacobiano del robot?

4.4.4 ¿Qué es una singularidad?

4.4.5 Explíquese la diferencia entre el jacobiano analítico y el geométrico.



4.5 Tipos de robots industriales

4.5.1 Obtener el determinante de la matriz jacobiana de un robot antropomórfico de 3 gdl (véase la ecuación 4.38). Analizar las posiciones de singularidad.

4.5.2 Obtener la cinemática inversa de un robot SCARA. Sugerencia: manipule matemáticamente la ecuación (4.45) y despeje las variables articulares en función de las coordenadas cartesianas.

4.5.3 Obtener el determinante de la matriz jacobiana (4.46) y analizar las posiciones que producen singularidades.

4.5.4 Obtener la cinemática inversa de un robot en configuración esférica. Sugerencia: emplee la función de cinemática directa (4.51).

4.5.5 Obtener la matriz jacobiana de un robot en configuración esférica. Sugerencia: emplee la función de cinemática directa (4.51).

4.5.6 Obtener la cinemática inversa de un robot en configuración cilíndrica. Sugerencia: emplee la función de cinemática directa (4.56).

4.5.7 Obtener el determinante de la matriz jacobiana de un robot en configuración cilíndrica. Analizar las posiciones que generan singularidades. Sugerencia: emplee la matriz jacobiana (4.57).

4.5.8 Analizar la cinemática directa e inversa de un robot cartesiano de 3 gdl.

4.5.9 Obtener el jacobiano de un robot cartesiano de 3 gdl.

4.5.10 ¿Tiene singularidades un robot cartesiano de 3gdl?

5

CAPÍTULO

Dinámica de robots manipuladores

No existen ningún lenguaje universal para entender y apreciar la naturaleza, con excepción de las matemáticas.



Gauss
ebrary

- 5.1 Introducción**
- 5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange**
- 5.3 Modelo dinámico**
- 5.4 Modelo dinámico cartesiano**
- 5.5 Identificación paramétrica**
- 5.6 Robot experimental de 3 gdl**
- 5.7 Resumen**
- 5.8 Referencias selectas**
- 5.9 Problemas propuestos**

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos

Presentar el modelado dinámico de robots manipuladores a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, así como explicar el proceso de identificación paramétrica a través de 5 esquemas de regresión utilizando la técnica de mínimos cuadrados.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos particulares:



Exponer la dinámica en coordenadas articulares y cartesianas.



Describir y analizar las propiedades matemáticas del modelo dinámico.



Exponer los esquemas de regresión: modelo dinámico, energía y potencia.

Competencias

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Adquirir la habilidad en modelado dinámico de robots manipuladores y su proceso de identificación paramétrica:



Dinámica articular y cartesiana.



Esquemas de regresión.



Infraestructura científica de robótica.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

5.1 Introducción



Un robot manipulador es un sistema mecánico muy complejo cuya descripción analítica requiere de ecuaciones diferenciales. La naturaleza no lineal, multivariable y acoplada de su comportamiento dinámico ofrece un amplio espectro en la formulación de problemas de control teóricos y prácticos. El modelo dinámico del robot manipulador permite explicar todos los fenómenos físicos que se encuentran en su estructura mecánica, tales como efectos iniciales, fuerzas centrípetas y de Coriolis, par gravitacional y fricción los cuales son fenómenos físicos intrínsecos o propios de la naturaleza dinámica del robot. Estos fenómenos aparecen en el rango de operación nominal o ancho de banda del robot. Bajo determinadas condiciones, algunas configuraciones mecánicas de robots manipuladores pueden exhibir dinámica caótica, lo cual es un fenómeno dinámico no lineal adicional a los ya citados. La mecánica analítica representa la herramienta sólida de las ciencias exactas para formular modelos matemáticos de sistemas mecánicos, en este contexto la dinámica es la parte de la física que estudia la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Por este motivo, el análisis y estudio de los fenómenos del robot se lleva a cabo por medio de ecuaciones diferenciales no lineales para formar el **modelo dinámico**. A diferencia de otros métodos de modelado de la física como el de Newton o el de Hamilton, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange representan la mejor alternativa de modelado para robots manipuladores debido a las propiedades matemáticas que se deducen de manera natural usando esa metodología. Este procedimiento facilita el análisis y diseño de algoritmos de control.

La utilidad del modelo dinámico de robots manipuladores es fundamental para propósitos de **simulación, diseño y construcción del sistema mecánico**, así como **análisis y diseño de algoritmos de control**. En el área de **simulación** el modelo dinámico es la parte clave debido a que puede reproducir todos los fenómenos físicos del robot sin la necesi-

dad de usar un robot real (realidad virtual), y esta característica resulta estratégica para evaluar algoritmos de control, técnicas de planeación de trayectorias, programación de aplicaciones industriales, etc. La simulación es el empleo del modelo dinámico para analizar y describir su comportamiento dinámico en un sistema electrónico y de ahí inferir aplicaciones. Es importante no confundir la simulación con animación, son procesos diferentes; la animación no requiere incorporar efectos dinámicos en el movimiento del robot, generalmente son ecuaciones estáticas como la cinemática directa.

Para diseñar algoritmos de control de robots manipuladores es fundamental conocer el modelo dinámico, sobre todo cuando la técnica de diseño se basa en la estructura del modelo dinámico como lo es la teoría de estabilidad de Lyapunov; en este caso las propiedades matemáticas del modelo dinámico son explotadas para facilitar el análisis y propuesta de nuevas estrategias de control.

Otra de las ventajas que representa el modelo dinámico es su empleo para diseñar y construir robots manipuladores. Los robots industriales no se diseñan de manera empírica, existe un procedimiento científico para poder diseñar y construir un robot industrial el cual se sustenta en la dinámica del robot. Los esquemas y planos de ingeniería de los eslabones son deducidos del modelo dinámico y trasladados a un programa CAD para su maquinado mecánico. De esta forma, un robot industrial puede ser estudiado y se pueden hacer las adecuaciones pertinentes antes de llegar a la etapa de construcción física. Dependiendo de la aplicación del robot, la selección de los servomotores es clave ya que ellos generan el par requerido por los eslabones.

Sin embargo, no es suficiente contar con la estructura completa del modelo dinámico, ya que subsisten problemas de naturaleza práctica como son la medición de los parámetros dinámicos del robot manipulador tales como momentos de inercia, centros de masa y coeficientes de fricción, lo que generalmente se convierte en una tarea difícil, sobre todo cuando

no es posible desarmar el robot manipulador. La utilidad de los parámetros dinámicos se presenta en la implementación de sistemas de control basados en el modelo dinámico, ya que el comportamiento, desempeño y robustez de esos esquemas depende de la exactitud de los parámetros del modelo dinámico. Para determinar el valor numérico de los parámetros del robot se emplean métodos de identificación paramétrica, en particular en este capítulo se incluye una sección del tema de regresión lineal, en que se presentan 6 regresores lineales que utilizan el algoritmo de mínimos cuadrados.

5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección se obtiene el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta. Un método estándar para obtener el modelo dinámico de un robot está basado en las *ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange*.

A continuación se describe el procedimiento para obtener el modelo dinámico de robots manipuladores.

La energía total \mathcal{E} (*hamiltoniano*) del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ más la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ representan los vectores de posición y velocidad articular, respectivamente. Obsérvese que la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ tiene una dependencia de la posición y velocidad articular, mientras que la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ está relacionada con el campo conservativo de la gravedad y por lo tanto únicamente depende de la posición.

El *lagrangiano* $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot manipulador de n grados de libertad se define como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía

Euler (1707-1783)

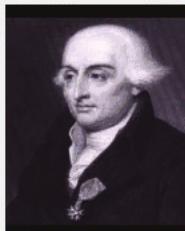


Leonhard Paul Euler, físico matemático suizo, nació el 15 de abril de 1707 en la ciudad de Basilea, Suiza, y es considerado uno de los matemáticos más grandes en la historia de la humanidad. Hizo importantes aportaciones en cálculo, teoría de grafos, análisis matemático, mecánica, óptica y astronomía. El número e fue definido por Euler. En robótica es ampliamente utilizado el método de diferenciación numérica de la posición para aproximar a la velocidad, y la orientación de la herramienta del robot es modelada a través de los ángulos de Euler, asimismo destacan sus contribuciones en mecánica ya que representan las bases del modelado de robots manipuladores. Como un homenaje a este matemático, su retrato ha sido publicado en billetes suizos y rusos. También el asteroide Euler (2002) recibió ese nombre en su honor. Murió el 28 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (5.2)$$

Lagrange (1736-1813)



Joseph Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia o Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange), físico matemático italiano, nació el 25 de enero de 1736 en la ciudad de Turín. Lagrange tuvo una importante contribución en astronomía, demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica lagrangiana que ha tenido grandes aportaciones en el área de robótica, que de manera conjunta a las aportaciones de Euler unificó las bases del modelado dinámico de robots manipuladores.

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de un robot manipulador de n grados de libertad están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \quad (5.3)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i , y $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ y de la fricción estática \mathbf{f}_e que se encuentra presente en las articulaciones del mismo; $t \in \mathbb{R}_+$ representa el tiempo, $n \in \mathbb{N}$ es el número de grados de libertad.

La energía cinética tiene una estructura matemática cuadrática bien definida en función de la velocidad articular:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (5.4)$$

Aquí $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del manipulador, y es una matriz definida positiva (por lo tanto simétrica). Por otro lado, la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ no tiene una forma específica. Sin embargo, tiene una dependencia exclusivamente del vector de posición \mathbf{q} , ya que se considera su presencia a campos conservativos como la fuerza de gravedad.

Con esta forma del lagrangiano, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange pueden escribirse en forma compacta como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (5.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.7)$$



El modelo dinámico de un robot manipulador proporciona una descripción completa entre los pares aplicados a los servomotores y el movimiento de la estructura mecánica. Con la formulación *Euler-Lagrange* las ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas de manera sistemática independientemente del sistema de referencia coordinado. Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (5.3) para un robot de n grados de libertad adquieren la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$$

Modelo dinámico

La ecuación que describe la dinámica no lineal de un robot manipulador (5.8) es válida cuando el robot tiene una estructura en cadena cinemática abierta, además se considera que los eslabones son rígidos, es decir no incluye el fenómeno de elasticidad.

La estructura matemática que tiene el modelo (5.8) se debe a la metodología de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Como una consecuencia de esto, se desprenden importantes propiedades matemáticas que facilitan el diseño y desarrollo de algoritmos de control, de manera particular una propiedad clave que reduce notablemente el álgebra y las operaciones involucradas en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov es la propiedad de antisimetría: $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0 \in \mathbb{R}$.

Debido a que la matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva, genera las condiciones necesarias (no suficientes) para la unicidad y existencia del punto de equilibrio.

Este tipo de propiedades matemáticas del modelo dinámico no existen en otras metodologías como las de Newton o de Hamilton, y es por esto que se emplea la metodología de Euler-Lagrange en el modelado de robots manipuladores.

5.3 Modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad está dado por la ecuación (5.8), que en su forma compacta y con la notación más ampliamente utilizada en el área de robótica se encuentra descrito de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.8)$$

Aquí se tiene que:

 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares,

 $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares,

 $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares,



$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva,



$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis,

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (5.9)$$



$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, es decir:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.10)$$

debida a la acción de la gravedad,



$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática (\mathbf{f}_e) de cada articulación del robot.

El modelo dinámico (5.8) representa la base matemática para llevar a cabo el análisis y estudio de los fenómenos físicos presentes en la estructura mecánica de un robot manipulador de n grados de libertad en cadena cinemática abierta, con eslabones rígidos, en su rango de operación nominal o ancho de banda. Para el caso de que el robot tenga eslabones flexibles, es necesario incorporar dentro del modelo dinámico, el fenómeno físico de elasticidad y flexibilidad en los eslabones. Cuando el robot se encuentra operando fuera de su ancho de banda, por ejemplo excede los límites de velocidades articulares o el amplificador electrónico se encuentra funcionando en los límites de saturación, entonces puede aparecer otro tipo de dinámica no modelada y en este escenario es mucho más complicado explicar el comportamiento dinámico de este tipo de robots. Algunas configuraciones mecánicas de robots manipuladores con especiales condiciones pueden exhibir dinámica caótica. Sin embargo, la ecuación del modelo dinámico (5.8) no explica el régimen caótico.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



5.3.1 Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad (5.8) es una ecuación diferencial compleja, de naturaleza continua, multivariable con dinámica fuertemente acoplada y no lineal en el vector de estados $[\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$. No obstante, tiene varias propiedades fundamentales que pueden ser explotadas para facilitar el diseño y análisis de sistemas de control.

A continuación se describen las principales propiedades matemáticas que posee el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, con eslabones rígidos y en configuración de cinemática abierta.



5.3.2 Efecto inercial

El efecto inercial representado por $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ significa el cambio de estado de movimiento del robot manipulador.

El efecto inercial de un robot manipulador de n grados de libertad tiene las siguientes propiedades:



Propiedad 5.1 La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T$, definida positiva $M(\mathbf{q}) > 0$. Por esto existe la matriz inversa $M(\mathbf{q})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y también satisface que es una matriz simétrica $M(\mathbf{q})^{-1} = M(\mathbf{q})^{-T}$ y definida positiva $M(\mathbf{q})^{-1} > 0$.

En robótica una propiedad clave es la característica distintiva de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$: es una matriz definida positiva. Esta propiedad se emplea mucho en el análisis y diseño de esquemas de control. Su importancia radica en que facilita la demostración de unicidad y existencia del punto de equilibrio en la ecuación en lazo cerrado integrado por el modelo dinámico y el algoritmo de control.



Propiedad 5.2 La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ satisface que

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} I \leq M(\mathbf{q}) \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} I \quad (5.11)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}$ y $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$ representan los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia, respectivamente.

Es necesario aclarar que la expresión (5.11) significa la existencia de una constante $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$ tal que la matriz resultante $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} I - M(\mathbf{q}) \geq 0$ es una matriz semidefinida positiva. No se debe cometer el error común de interpretación de que el valor propio máximo de la matriz de inercia multiplicado por la matriz identidad ($\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} I$) es mayor que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$; este significado no tiene sentido. De manera análoga, existe una constante $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}$ tal que la matriz resultante de $M(\mathbf{q}) - \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min} I \geq 0$ es una matriz semidefinida positiva.



Propiedad 5.7 El fenómeno inercial de un robot manipulador satisface que $\|M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \|\ddot{\mathbf{q}}\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$ representa el valor propio máximo de la matriz de inercia.



Propiedad 5.4 β del robot. Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \leq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (5.12)$$



Propiedad 5.8 Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k_M tal que:

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (5.13)$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.



5.3.3 Fuerzas centrípetas y de Coriolis



El vector de fuerzas centrípetas y de Coriolis están representadas por $C(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$. Las fuerzas centrípetas son fuerzas radiales, teniendo un signo contrario a las fuerzas centrifugas. La fuerza de Coriolis representa una desviación del movimiento de traslación debido a su componente de rotación.

Las fuerzas centrípetas y de Coriolis tienen las siguientes propiedades:



Propiedad 5.6 La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no es una matriz única, pero el vector $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ sí lo es.



Propiedad 5.7 Cuando el vector de velocidades articulares es cero, la matriz de Coriolis satisface $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})|_{\dot{\boldsymbol{q}}=0} = C(\boldsymbol{q}, \mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para todo $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$.



Propiedad 5.8 Para todo vector $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = C(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{x}.$$



Propiedad 5.9 La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia $\dot{M}(\boldsymbol{q})$ satisfacen

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \left[\dot{M}(\boldsymbol{q}) - 2C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \right] \dot{\boldsymbol{q}} \equiv 0$$

Es decir, la matriz resultante $[\dot{M}(\boldsymbol{q}) - 2C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})]$ es una matriz antisimétrica. Recordar la propiedad $\boldsymbol{x}^T A_{sk} \boldsymbol{x} = 0$, entonces la matriz $A_{sk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

La propiedad de antisimetría facilita el diseño y análisis de estabilidad; la demostración de estabilidad para el caso de control de posición o regulación se reduce a tres sencillas fases de la demostración matemática.

Marco inercial

Un sistema de referencia es denominado marco inercial o sistema de referencia newtoniano si permanece fijo, sin rotar, o si se traslada en una dirección dada con velocidad constante (aceleración cero). Esta definición asegura que las mediciones realizadas en dos marcos de referencia iniciales diferentes siempre serán equivalentes.

En contraste, los sistemas de referencia anclados a las articulaciones del hombro, codo y en el extremo final no son iniciales debido a que se trasladan junto con la respectiva articulación, y por tanto existen movimientos de rotación y la velocidad de movimiento no es constante, por lo cual la aceleración es diferente a cero.

Por otro lado, el sistema de referencia $\Sigma_0 (x_0, y_0, z_0)$ es fijo y se encuentra asociado a la base del robot; este sistema de referencia es un marco inercial, ya que no tiene desplazamiento lineal ni rotacional.



Propiedad 5.10 De la propiedad 5.9 la derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$



Propiedad 5.11 Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva k_{C_1} tal que:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\|.$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Propiedad 5.12 Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes k_{C_1} y k_{C_2} tales que

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C_2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\|$$

para todo vector $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.



5.3.4 Par gravitacional

Las propiedades del par gravitacional son:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Propiedad 5.13 Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_g > 0$ tal que

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R},$$

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

La constante k_g se puede calcular como

$$k_g \geq n \left(\max_{i,j,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial g_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right)$$

donde $g_i(\mathbf{q})$ es el i -ésimo elemento del vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

 **Propiedad 5.14** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales existe una constante k' tal que:

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

 El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y de velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ satisfacen

$$\int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{q}(\sigma))^T \dot{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma = \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \mathcal{U}(0).$$

Tribología

La tribología es la rama de la física que se encarga de estudiar el fenómeno de fricción en sistemas mecánicos. Actualmente, se han realizado importantes aportaciones a los modelos básicos de fricción: fricción viscosa y fricción de Coulomb. Estos modelos fueron propuestos por Leonardo da Vinci y han sido los métodos tradicionales para explicar este fenómeno.

Hoy en día, se sabe que la transición de la fricción estática a la fricción en movimiento no es instantánea; este comportamiento se explica con el modelo Stribeck. En esta fase la pendiente de la curva Stribeck tiene valor negativo y posteriormente toma un valor positivo. De hecho, como parte de esa transición, antes de que la velocidad de movimiento sea diferente de cero, existe una etapa denominada histéresis que hace que el robot tenga juego mecánico o cascabeleo.

El fenómeno de fricción es disipativo, esto significa que la energía mecánica se transforma en energía térmica, es decir, satisface $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) > 0$. El aspecto disipativo se traduce como desgaste y envejecimiento en las partes mecánicas del robot. Sin embargo, el fenómeno de fricción ayuda a generar la región de atracción para puntos de equilibrio estables.

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = B\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_n)|] \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \quad (5.14)$$

donde $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La fricción estática \mathbf{f}_e está representada por $\mathbf{f}_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$ que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipulador. En velocidades cero únicamente está presente la fricción estática satisfaciendo:

$$f_i(0, \tau_i) = \tau_i - g_i(\mathbf{q}) \quad (5.15)$$

para $-f_{ei} \leq \tau_i - g_i(\dot{\boldsymbol{q}}) \leq f_{ei}$, donde f_{ei} es el límite del par de fricción estática para la i -ésima articulación.

La función signo de la velocidad, $\text{signo}(\dot{\boldsymbol{q}})$, está dada por:

$$\text{signo}(\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{q}_1) \\ \text{signo}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\text{signo}(\dot{q}_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{q}_i > 0 \\ 0 & \text{si } \dot{q}_i = 0 \\ -1 & \text{si } \dot{q}_i < 0 \end{cases} \quad (5.17)$$



Propiedad 5.15 La fricción viscosa satisface lo siguiente:

$$\|B\dot{\boldsymbol{q}}\| \leq \|B\|\|\dot{\boldsymbol{q}}\| \leq \lambda_B^{\max}\|\dot{\boldsymbol{q}}\|$$

donde λ_B^{\max} es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.



Propiedad 5.16 La fricción de Coulomb satisface lo siguiente:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook

$$\|F_c \text{signo}(\dot{\boldsymbol{q}})\| \leq \|F_c\|\sqrt{n} \leq \lambda_{F_c}^{\max}\sqrt{n}$$

donde $\lambda_{F_c}^{\max}$ es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción de Coulomb $F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n es el número de gdl del robot.



5.3.6 Linealidad en los parámetros

Los robots manipuladores pertenecen a una clase de sistemas mecánicos no lineales con una estructura dinámica bien definida. El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad presenta la propiedad de linealidad con respecto a los parámetros del robot que dependen de masas, momentos de inercias, centros de masa y coeficientes de fricción.

Esta propiedad tiene una enorme repercusión en esquemas de identificación paramétrica y en controladores del tipo adaptable de robots manipuladores.

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange conducen al modelo dinámico del robot manipulador el cual puede ser expresado como un regresor lineal con respecto al vector de parámetros:

$$\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right] \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (5.18)$$

Debido a que la fuerza de fricción presente en el robot es modelada como fricción de Coulomb y viscosa, entonces el modelo de fricción es lineal con respecto a los coeficientes de fricción, es decir:

$$\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}} \quad (5.19)$$

donde $\phi_{\mathcal{F}}$ es una matriz de orden $n \times 2n$ y $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}$ es un vector de $2n \times 1$, el cual contiene los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. Por lo que la ecuación (5.18) toma la forma:

$$\underbrace{\left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right]}_{Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.20)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary donde

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{E}}^T \ \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}^T]^T \quad (5.21)$$

denota el vector de parámetros dinámicos y de fricción del robot manipulador.

Finalmente, del modelo dinámico del robot (5.8) se obtiene la propiedad fundamental de linealidad en los parámetros del modelo dinámico del robot manipulador:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (5.22)$$

donde $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ es una matriz $n \times p$ de funciones conocidas, $\boldsymbol{\theta}$ es el vector $p \times 1$ que contiene los parámetros del robot y $p = p_1 + p_2 + 2n$.



5.3.7 Modelo de energía

La energía del robot es la integral de la potencia del robot $\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}$ sobre el intervalo de tiempo $[0, t]$. La energía hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ más la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (5.23)$$

El modelo de energía del robot se basa en el principio de la conservación de la energía, el cual establece que el trabajo efectuado por las fuerzas aplicadas a un sistema es igual al cambio de energía total del sistema:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{\text{energía aplicada (t)}} &= \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}_{\text{energía almacenada (t)}} + \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \mathbf{f}_f(\sigma) d\sigma}_{\text{energía disipada (t)}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(t) M(\mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(0) M(\mathbf{q}(0)) \dot{\mathbf{q}}(0) \\ &\quad - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) + \int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \mathbf{f}_f(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde $\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)$ son las condiciones iniciales de la posición y velocidad articular, respectivamente.

Propiedad 5.17 La propiedad de pasividad significa que existe una constante $\beta \geq 0$ tal que:

$$\int_0^t \dot{\mathbf{q}}^T(\sigma) \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma = \mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \geq -\beta \quad \forall t > 0 \quad (5.25)$$

entonces la energía $\mathcal{H}(t)$ no es negativa, por lo tanto $\mathcal{H}(0) = \beta$.

Pasividad es un concepto que se emplea en circuitos eléctricos, por ejemplo un circuito es pasivo si sus componentes son resistencias, capacitancias, bobinas, etc. Entonces, por analogía en robótica pasividad significa que

el robot puede ser analizado como si estuviera formado de elementos pasivos como masas, resortes, y amortiguadores. La interpretación física de pasividad es que la cantidad de energía disipada por el robot tiene una cota dada por $-\beta$.



5.3.8 Modelo de potencia

La potencia aplicada al robot manipulador es la variación temporal de la energía total y puede ser obtenida empleando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right] + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (5.26)$$

$$= \frac{d}{dt} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.27)$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \{\nabla \mathcal{U}(\mathbf{q})\}^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.28)$$



5.3.9 Ejemplos de modelado dinámico

Esta sección presenta la metodología de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange aplicada a robots manipuladores. También se presenta el código fuente para MatLab que permite realizar la simulación de un péndulo y de un robot planar vertical de 2 gdl.



Paso 1: obtener la cinemática directa del centro de masa de cada uno de los eslabones. Para el i -ésimo eslabón tomar en cuenta la longitudes anteriores l_{i-1} y ángulos q_i y q_{i-1} :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i)$$



Paso 2: obtener la cinemática diferencial del i -ésimo eslabón y de ahí deducir la rapidez lineal:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

La rapidez lineal del centro de masa de cada eslabón se calcula de la siguiente forma: $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$



Paso 3: obtener el modelo energía :

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q})$$

La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ incluye el movimiento de traslación y rotación, por ejemplo: $\mathcal{K}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{1}{2}m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2}I_i [\Sigma_i^n \dot{q}_i]^2$, donde I_i es el momento de inercia del i -ésimo eslabón.

La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ no tiene una forma específica como en el caso de la energía cinética, depende de la geometría del robot en general $\mathcal{U}_i(\mathbf{q}) = m_i g l_{ci} h_i(\mathbf{q})$, siendo $h_i(\mathbf{q})$ una función que indica la altura del eslabón con respecto al origen del sistema de referencia del robot.

Obtener el lagrangiano: $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q})$.



Paso 4: aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange e incluir el modelo de fricción.

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} + b_i \dot{q}_i + f_{ci} \text{signo}(\dot{q}_i) + f_{ei} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_i)|]$$

♣ Ejemplo 5.1

Obtener el modelo dinámico de una centrífuga.

Solución

Una centrífuga es un sistema mecatrónico compuesto por un servomotor con un ángulo de rotación q con respecto al eje z el cual está alineado con el eje de giro como se muestra en la figura 5.1. El plano xy está determinado por la regla de la mano derecha. La distancia del origen del sistema de referencia cartesiano al extremo final del rotor se representa por l_1 . Una varilla de longitud l_2 se encuentra soldada a la parte final de la flecha del rotor y mantiene un ángulo de inclinación constante φ con respecto a la horizontal (eje y), l_{c2} representa el centro de masa de la varilla. El movimiento rotatorio de la centrífuga describe un círculo sobre el plano xy . La acción de la gravedad g se encuentra en dirección contraria al eje z .

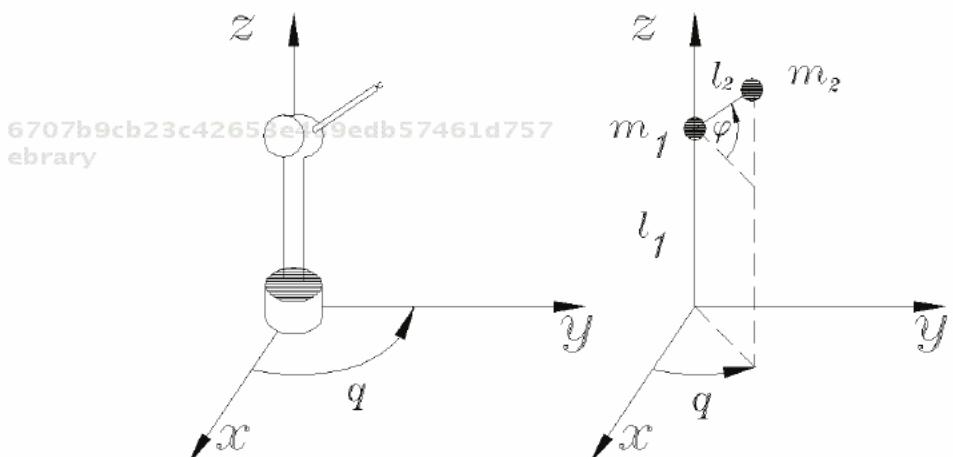


Figura 5.1 Centrífuga.



Paso 1: el modelo de **cinemática directa** está dado por la siguien-

te ecuación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos(\varphi) \cos(q) \\ l_2 \cos(\varphi) \sin(q) \\ l_1 + l_2 \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$



Paso 2: la cinemática diferencial se encuentra dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c2} \cos(\varphi) \sin(q) \\ l_{c2} \cos(\varphi) \cos(q) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} &= (-l_{c2} \cos(\varphi) \sin(q) \dot{q})^2 + (l_{c2} \cos(\varphi) \cos(q) \dot{q})^2 = l_{c2}^2 \cos^2(\varphi) \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Se toma el centro de masa l_{c2} como punto de referencia para finalidades del análisis dinámico. Por esto, ha sido substituida la longitud l por el centro de masa l_c .



Paso 3: el modelo de energía está determinado por la energía cinética y potencial

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2} [m l_{c2}^2 \cos(\varphi)^2 + I] \dot{q}^2 \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\mathcal{U}(q) = mgz = mg [l_1 + l_{c2} \sin(\varphi)] \quad (5.32)$$

El **lagrangiano** de la centrífuga está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ &= \frac{1}{2} [m l_{c2}^2 \cos(\varphi)^2 + I] \dot{q}^2 - mg [l_1 + l_{c2} \sin(\varphi)] \end{aligned} \quad (5.33)$$



Paso 4: las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el caso particular de la centrífuga, adquieren la forma de una ecuación escalar con la siguiente estructura:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + f_f(f_e, \dot{q}) \quad (5.34)$$

tomando en cuenta el lagrangiano de la centrífuga se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_c^2 \cos(\varphi) + I] \dot{q} \quad (5.35) \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_c^2 \operatorname{sen}(\varphi) + I] \ddot{q} \\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] &= 0\end{aligned}$$

Obsérvese que $g(q) = \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial q} = 0$, debido a que la centrífuga describe un círculo sobre el plano horizontal xy , por lo que la energía potencial es una constante. El modelo dinámico de una centrífuga incluyendo el fenómeno de fricción está dado por:

$$\tau = [ml_c^2 \operatorname{sen}(\varphi) + I] \dot{q} + b\dot{q} + f_c \operatorname{signo}(\dot{q}) + f_e [1 - |\operatorname{signo}(\dot{q})|] \quad (5.36)$$



♣ ♣ Ejemplo 5.2

Obtener el modelo dinámico de un péndulo robot.

Solución

A continuación se desarrollan los pasos necesarios para obtener el modelo dinámico de un péndulo-robot. La figura 5.2 describe un péndulo simple el cual está formado por un servomotor y una barra metálica de longitud l . El sistema de referencia se elige de tal forma que el eje z coincida con el eje de rotación del servo (es decir, en este caso perpendicular al plano de la hoja) y el plano xy queda determinado por la regla de la mano derecha. La acción de la gravedad g está dirigida en dirección del eje y negativo. El momento de inercia se denota por I , el centro de masa se representa como l_c y la masa del péndulo por m .

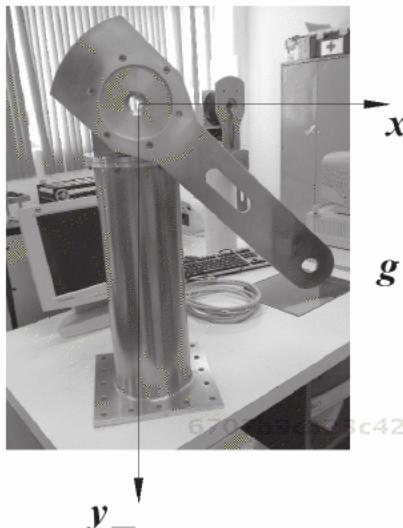


Figura 5.2 Péndulo-robot BUAP.



Paso 1: modelo de cinemática directa con respecto al centro de masa del péndulo-robot:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \sin(q) \\ -l_c \cos(q) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

La posición de casa fue tomada sobre el eje y negativo.



Paso 2: modelo de cinemática diferencial:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_c \cos(q)\dot{q} \\ l_c \sin(q)\dot{q} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

La rapidez de traslación está dada como $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$. Obsérvese que $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = l_c^2 \dot{q}^2$.



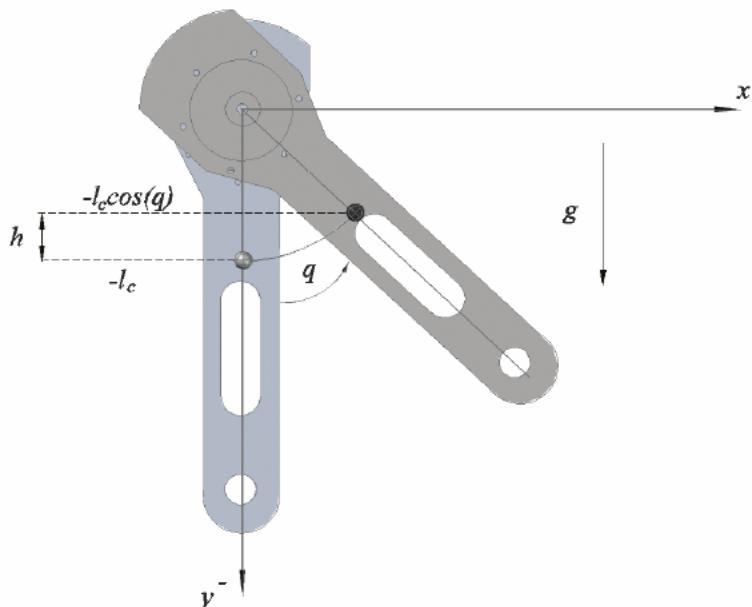
Paso 3: modelo de energía: la energía del robot está compuesta de la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ y de la energía potencial $\mathcal{U}(q)$.

La energía cinética toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} I \dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, la energía potencial $\mathcal{U}(q)$ tiene la siguiente forma:

$\mathcal{U}(q) = mgh$, (véase la figura 5.3) donde $h = h_1 - h_2 = -l_c \cos(q) - (-l_c) = l_c (1 - \cos(q))$:



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 5.3 Desplazamiento del centro de masa l_c del péndulo.

$$\mathcal{U}(q) = mgl_c h = mgl_c [1 - \cos(q)]$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El lagrangiano para el caso del péndulo está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ &= \frac{1}{2} [ml_c^2 + I] \dot{q}^2 - mgl_c [1 - \cos(q)] \end{aligned} \quad (5.39)$$



Paso 4: las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange están dadas por la ecuación 5.5, para el caso particular del péndulo-robot adquieren la forma de una ecuación escalar con la siguiente estructura:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] + f_f(f_e, \dot{q}) \quad (5.40)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Tomando en cuenta el lagrangiano (5.39) se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_c^2 + I]\dot{q} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] &= [ml_c^2 + I]\ddot{q} \\ \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right] &= mgl_c \operatorname{sen}(q)\end{aligned}\quad (5.41)$$

Por lo tanto el modelo dinámico de un péndulo-robot incluyendo el fenómeno de fricción está dado por:

$$\begin{aligned}\tau &= [ml_c^2 + I]\dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) + b\dot{q} + f_e[\operatorname{signo}(\dot{q})] + f_e[1 - |\operatorname{signo}(\dot{q})|]\end{aligned}\quad (5.42)$$

En la figura 5.4 se muestran los perfiles de posición $q(t)$ y velocidad $\dot{q}(t)$ del péndulo prototipo de transmisión directa de la figura 5.2 cuando se le aplica un par de la forma $\tau = 1.5 \operatorname{sen}(t)$ Nm. Los resultados del péndulo pueden reproducirse usando el código fuente 5.1 y el código fuente 5.2 que se presentan aquí.

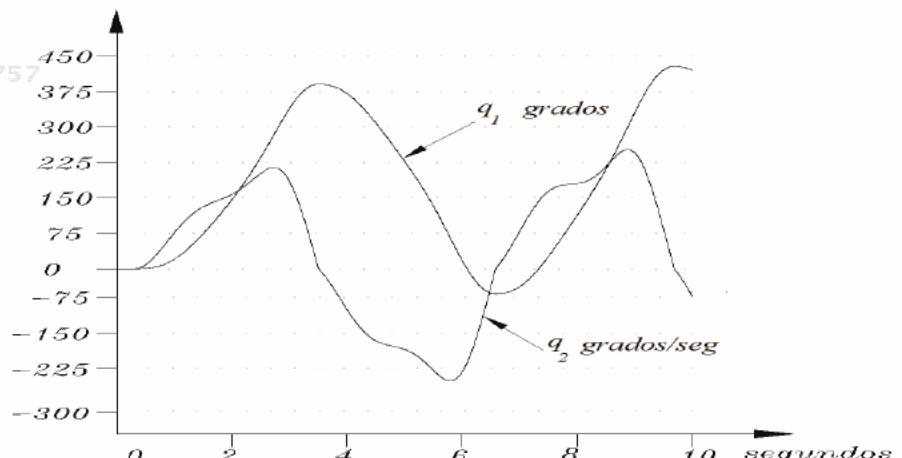


Figura 5.4 Respuesta del péndulo-robot.



Código Fuente 5.1 Péndulo

```
%cap5_pendulo.m Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Péndulo

```
1 %
2 function xp =cap5_pendulo(t,x)
3 %vector de estados
4 q=x(1); %posición articular
5 qp=x(2); %velocidad articular
6 %parámetros del péndulo
7 m=5; %masa
8 lc=0.01; %centro de masa
9 g=9.81; %constante de aceleración gravitacional
10 b=0.17; %coeficiente de fricción viscosa
11 fc=0.45; %coeficiente de fricción de Coulomb
12 Ir=0.16; %momento de inercia del rotor
13 tau=1.5*sin(t); %par aplicado
14 %aceleración articular del péndulo
15 qpp=(tau-b*qp-fc*tanh(100000*qp)-m*g*lc*sin(q))/Ir;
16 %vector de salida
17 xp=[ qp ; %xp(1)=x(2) velocidad articular
18 qpp] ; %xp(2)=qpp aceleración articular
19 end
20 %
```



Péndulo robot

El caso de estudio de un péndulo robot presentado en esta sección es uno de varios ejemplos que contiene el material complementario de la presente obra en el sitio web. Con la finalidad de facilitar el proceso de aprendizaje en dinámica de robots manipuladores, se ofrece al lector simular sistemas lineales y no lineales.

El proceso de simulación tiene la ventaja de poder predecir y explicar los fenómenos físicos de un sistema real. La simulación es diferente a la animación; en la primera se reproducen todos los fenómenos del sistema mecánico a través de su modelo dinámico. En cambio la animación es realizar el movimiento de un sistema mecánico a través de un medio electrónico donde no se reproduce la física del sistema. En el sitio web del libro se encuentran disponibles en código fuente para MatLab diversos sistemas mecatrónicos ampliamente documentados y modelados a través de su dinámica.



Código Fuente 5.2 Simulación del péndulo

```
%cap5_simupendulo.m Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Simulación del péndulo

```
1 % 6707b9cb23c42653e439edb57461d757
2 clc; ebrary
3 clear all;
4 close all;
5 %parámetros de simulación:
6 ti=0; %tiempo inicial
7 tf = 10; %tiempo final de simulación (segundos)
8 h=0.0025; %incremento de simulación
9 ts=ti:h:tf; %tiempo de simulación
10 opciones=odeset('RelTol',1e-3,'InitialStep',2.5e-3,'MaxStep',2.5e-3);
11 [t,x]=ode45('cap5_pendulo',ts,[0; 0],opciones);
12 x1=0.45*sin(x(:,1));
13 y1=-0.45*cos(x(:,1));
14 plot(t,(180/pi)*x(:,1),t,(180/pi)*x(:,2))
15 %
```

El fenómeno de fricción de Coulomb del péndulo contiene la función signo de la velocidad. Esta función es discontinua; para este caso la velocidad $\dot{q} = 0$. Este tipo de discontinuidades causa muchos problemas en aplicaciones de regulación o control de posición. Por lo tanto, no se recomienda utilizar la función signo que tiene implementada MatLab debido a que el proceso de integración numérica puede demorar hasta varios minutos.

if Código Fuente 5.3 Función signo

```
%signo.m Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Función signo

```
1 %
2 | function y = signo(x)
3 |     if x>0
4 |         y=1;
5 |     elseif x<0
6 |         y=-1;
7 |     else
8 |         y=0;
9 |     end
10 %
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Como una opción a esa problemática se recomienda la sustitución de la función signo por la función tangente hiperbólica con una pendiente de 90 grados, es decir $\text{signo}(\dot{q}) \approx \tanh(100000\dot{q})$. Otra opción es utilizar el código fuente 5.3 para implementar la función signo, ya que suaviza el efecto de la función signo en el proceso de integración numérica.

**♣♣♣ Ejemplo 5.3**

Obtener el modelo dinámico de un robot manipulador planar de 2 gdl.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

Considérese el esquema del robot manipulador de 2 gdl que se muestra en la figura 5.5. Defínase un marco coordenado cartesiano cuyo origen se selecciona en el punto de intersección del eje de rotación de la articulación del hombro con el plano vertical xy .

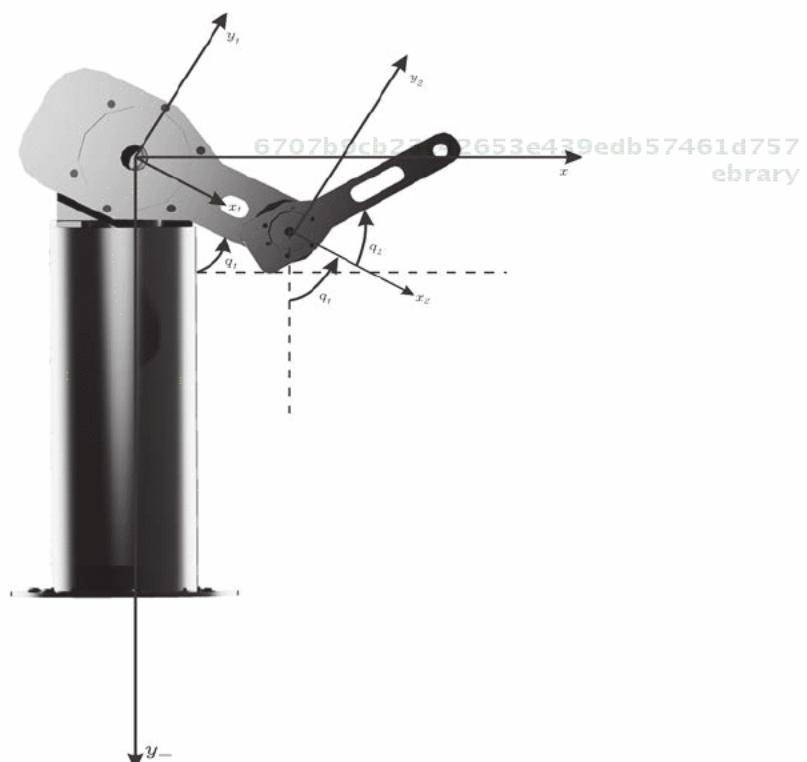


Figura 5.5 Robot manipulador de 2 gdl.

El significado de los símbolos que se presentan en la figura 5.5 se encuentra resumido en la tabla 5.1.



Paso 1: modelo de cinemática directa con respecto al centro de masa de cada eslabón:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \sin(q_1) \\ -l_{c1} \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

Tabla 5.1 Parámetros del robot de 2 gdl.

Eslabón	Significado	Notación
(Hombro)	Masa del eslabón 1	m_1
	Longitud del eslabón 1	l_1
	Inercia del eslabón 1	I_1
	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
	Posición articular del eslabón 1	q_1
(Codo)	Masa del eslabón 2	m_2
	Longitud del eslabón 2	l_2
	Inercia del eslabón 2	I_2
	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
	Posición articular del eslabón 2	q_2
	Aceleración debida a la gravedad	g

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

 **Paso 2:** la cinemática diferencial permite obtener la velocidad lineal con respecto al centro de masa de cada eslabón:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_{c1} \sin(q_1) \\ -l_{c1} \cos(q_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \cos(q_1) \\ l_{c1} \sin(q_1) \end{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) & l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) & l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La rapidez al cuadrado de cada eslabón es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 &= [-l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1]^2 + [l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1]^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \\
 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 &= [(l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2]^2 + \\
 &\quad [(l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2]^2 \\
 &= [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + \\
 &\quad 2[l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)] l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
 &\quad (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2))^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + \\
 &\quad 2(l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 &= [l_1^2 \cos^2(q_1) + l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) + 2l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
 &\quad l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
 &\quad 2l_{c2}^2 \cos^2(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) \dot{q}_2^2 + \\
 &\quad [l_1^2 \sin^2(q_1) + l_{c2}^2 \sin^2(q_1 + q_2) + 2l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2)] \dot{q}_1^2 + \\
 &\quad 2l_1 l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
 &= [l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2[l_1 l_{c2} \cos(q_2) + l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2
 \end{aligned}$$

Aquí se han empleado las identidades trigonométricas $\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1) = 1$, $\cos^2(q_1 + q_2) + \sin^2(q_1 + q_2) = 1$ y $\cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) + \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$.



Paso 3: la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ del robot manipulador de dos grados de libertad está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] \\
 &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} [m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + \\
 &\quad 2[m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2] \\
 &= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_2^2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2
 \end{aligned}$$

La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ del centro de masa para ambos eslabones está dada como:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1 g l_{c1} [1 - \cos(q_1)] + m_2 g [(l_1 + l_{c2}) - (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2))].$$

**Paso 3:** el lagrangiano

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}).$$

**Paso 4:** empleando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

se obtienen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} &= [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_1 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &\quad - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} &= -m_1 g l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)\end{aligned}$$

Los pares aplicados del robot manipulador de 2 gdl incluyendo el fenómeno de fricción:

$$\begin{aligned}&[m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\ &- 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g (l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) + \\ &b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \text{sat}(\tau_1; \bar{f}_1) \\ \tau_2 &= [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \ddot{q}_2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) + \\ &b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \text{sat}(\tau_2; \bar{f}_2).\end{aligned}$$

De los pares aplicados, agrupando términos de aceleración (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2) y velocidades (\dot{q}_1, \dot{q}_2), la matriz de inercia está dada por:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Las componentes de la matriz de inercia son:

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 \\ m_{12} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_{21} &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ m_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2. \end{aligned}$$

La matriz de fuerza centrípetas y de Coriolis toma la forma:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las componentes de la matriz de Coriolis son:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ c_{12} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ c_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ c_{22} &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis no es única, depende de la forma de agrupar los términos de las expresiones correspondientes a los pares τ_1 y τ_2 . Otras posibilidades para la matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ son las siguientes dos:

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_5 &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 0 & -2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sin embargo, el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ sí es único para un robot específico.

El vector de pares gravitacionales está dado como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = g \begin{bmatrix} l_{c1} m_1 \sin(q_1) + m_2 l_1 \sin(q_1) + m_2 l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ l_{c2} m_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

La fricción presente en el robot manipulador es modelada como una combinación lineal de las fricciones viscosa, Coulomb y estática:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \text{sat}(\tau_1; \bar{f}_1) \\ b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \text{sat}(\tau_2; \bar{f}_2) \end{bmatrix}$$

donde b_1 , b_2 , f_{c1} , f_{c2} , \bar{f}_1 y \bar{f}_2 son los coeficientes de fricción viscosa, de Coulomb y fricción estática de la articulación del hombro y codo, respectivamente. Además $\text{sat}(x; \mu)$ significa

$$\text{sat}(x; \mu) = \begin{cases} \mu & \text{si } x > \mu \\ x & \text{si } -\mu \leq x \leq \mu \\ -\mu & \text{si } x < -\mu \end{cases}.$$

La matriz de inercia (5.43) también puede ser obtenida directamente de la energía cinética (5.43) la cual satisface $\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(\mathbf{q})\dot{q}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} [m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \dot{q}_1^2 + \\ &\quad \frac{1}{2} [I_2 + m_2 l_{c2}^2] \dot{q}_2^2 + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 l_1^2 + \\ m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) & m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + m_2 l_{c2}^2 + I_2 & I_2 + m_2 l_{c2}^2 \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El par gravitacional puede ser obtenido de la energía potencial:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [m_1 g l_{c1} [1 - \cos(q_1)] + m_2 g [(l_1 + l_{c2}) - (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2))]] \\ &= g \begin{bmatrix} l_{c1} m_1 \operatorname{sen}(q_1) + m_2 l_1 \operatorname{sen}(q_1) + m_2 l_{c2} \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ l_{c2} m_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La estructura del modelo dinámico es importante. Sin embargo, para propósitos prácticos es necesario contar con un modelo numérico. Para propósitos de simulación de un robot de 2 gdl, considérense las siguientes matrices de inercia y fuerzas centrípetas y de Coriolis, respectivamente:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} 3.117 + 0.2 \cos(q(2)) & 0.108 + 0.1 \cos(q(2)) \\ 0.108 + 0.1 \cos(q(2)) & 0 \end{bmatrix} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -0.2 \operatorname{sen}(q(2)) \dot{q}_2 & -0.1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ 0.1 \operatorname{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El par gravitacional y de fricción se encuentran dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 39.3 \operatorname{sen}(q_1) + 1.95 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ 1.95 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} 1.86\dot{q}_1 + 1.93\operatorname{signo}(\dot{q}_1) \\ 0.16\dot{q}_2 + 0.3\operatorname{signo}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En la simulación no será tomada en cuenta la fricción estática, es complicado incorporarla en un proceso de implementación práctica, por lo que sólo se incluye la fricción viscosa y de Coulomb.

Los pares aplicados a las articulaciones del robot tienen un perfil suave que hacen que se muevan los eslabones dentro de su rango de operación:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - e^{-0.8t})32 + 56 \operatorname{sen}(16t + 0.1) + 12 \operatorname{sen}(20t + 0.15) \\ (1 - e^{-1.8t})1.2 + 8 \operatorname{sen}(26t + 0.08) + 2 \operatorname{sen}(12t + 0.34) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

En la figura 5.6 se muestra la evolución en el tiempo de las posiciones q_1 y q_2 de los eslabones del robot como respuesta a los pares de la ecuación (5.44). El movimiento inicia del reposo, el régimen transitorio es suave, evitando movimientos abruptos.

El código fuente 5.4 y el código fuente 5.5 son programas para llevar a cabo la simulación del robot manipulador de 2 gdl.

El tiempo de simulación es de 10 segundos con pasos de integración de 0.0025 segundos. La fricción de Coulomb fue implementada con la función signo que se encuentra incluida en el código fuente 5.3 del ejemplo 5.2.

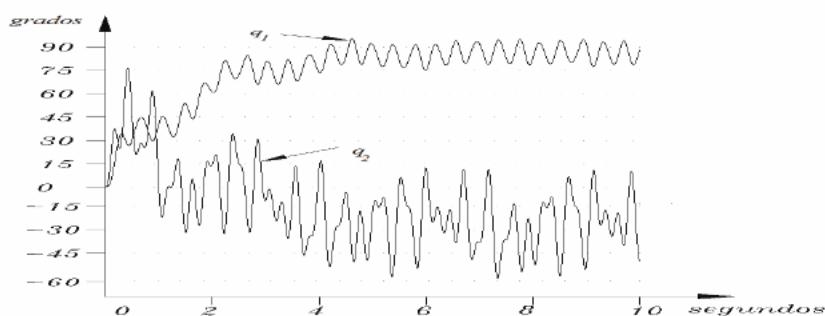


Figura 5.6 Respuesta de un robot planar de 2 gdl.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

if

Código Fuente 5.4 Simulador del robot planar de 2 gdl

```
%cap5_simurobot2gdl.m    Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Simulador del robot planar de 2 gdl

```
1 %
2 clc;
3 clear all;
4 close all;
5 %parámetros de simulación:
6 ti=0; %tiempo inicial
7 h=0.0025; %incremento del tiempo
8 tf = 10; %tiempo final de simulación
9 ts=ti:h:tf; %tiempo de simulación
10 opciones=odeset('RelTol',1e-3,'InitialStep',2.5e-3,'MaxStep',2.5e-3);
11 [t,x]=ode45('cap5_robot2gdl',ts,[0; 0; 0; 0],opciones);
12 plot(t,(180/pi)*x(:,1),t,(180/pi)*x(:,2))
13 %
```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Robot de 2 gdl

El estudio de robots manipuladores a través de simuladores subsana la carencia de contar con un robot real. El modelo dinámico permite reproducir todos los fenómenos físicos del robot, por lo que facilita el estudio y análisis de su comportamiento.

En el sitio web del libro se encuentran implementados varios robots manipuladores en lenguaje MatLab que le ofrecen al lector una herramienta potente y versátil para entender los aspectos cualitativos de un robot manipulador.



Código Fuente 5.5 Robot planar de 2 gdl

```
%cap5_robot2gdl.m      Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Robot planar de 2 gdl

```
1 %
2 %Robot de transmisión directa de 2GDL
3 function xp = cap5_robot2gdl(t,x)
4 q = [x(1); x(2)]; %vector de posición articular
5 %vector de velocidad articular
6 qp = [x(3); x(4)];
7 %Modelo dinámico del robot
8 %matriz de inercia
9 M = [3.117+0.2*cos(q(2)) 0.108+0.1*cos(q(2));
10           0.108+0.1*cos(q(2)) 0.108 ];
11 %Matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis
12 C = [-0.2*sin(q(2))*qp(2) -0.1*sin(q(2))*qp(2);
13           0.1*sin(q(2))*qp(1) 0.0 ];
14 %Vector de pares de gravitacionales
15 par_grav = [39.3*sin(q(1))+1.95*sin(q(1)+q(2));
16           1.95*sin(q(1)+q(2)) ];
17 %vector de pares de fricción viscosa
18 fr = [1.86*qp(1)+1.93*signo(qp(1));
19           0.16*qp(2)+0.3*signo(qp(2))];
20 tau=[(1-exp(-0.8*t))*32.0+ 56*sin(16*t+0.1) + 12*sin(20*t+0.15) ;
21           (1-exp(-1.8*t))*1.2+ 8*sin(26*t+0.08)+2*sin(12*t+0.34) ];
22 %vector de aceleración articular
23 q2p = inv(M)*(tau-C*qp- par_grav-fr);
24 %vector de salida
25 xp = [qp(1); qp(2); q2p(1); q2p(2)];
26 %
```



5.4 Modelo dinámico cartesiano

El modelo dinámico en variables de estado cartesiano define su comportamiento en su espacio operativo o espacio de tareas. Considerérese las coordenadas cartesianas $\chi = [x \ y \ z]^T$, entonces la cinemática diferencial y la aceleración articular se encuentran relacionadas por:

$$\dot{\chi} = J(q)\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q)\dot{\chi} \quad (5.45)$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{\chi} + \left[\frac{d}{dt}J^{-1}(q) \right] \dot{\chi} \quad (5.46)$$

$$\ddot{q} = J^{-1}(q)\ddot{\chi} - J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)\dot{\chi} \quad (5.47)$$

Sustituyendo las relaciones (5.45) y (5.47) en el modelo dinámico articular se tiene la transformación del modelo dinámico en variables articulares o generalizadas a variables cartesianas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau &= M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \\ &= M(q)[J^{-1}(q)\ddot{\chi} - J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)\dot{\chi}] + \\ &\quad C(q, \dot{q})J^{-1}(q)\dot{\chi} + g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \\ &= M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)]\dot{\chi} + \\ &\quad g(q) + f_f(\dot{q}, f_e) \end{aligned} \quad (5.48)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Empleando el modelo de potencia del robot manipulador y las ecuaciones (5.45) y (5.48) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{q}^T \tau &= \dot{q}^T [M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)]\dot{\chi}] + \\ &\quad \dot{q}^T [g(q) + f_f(\dot{q}, f_e)] \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}^T J^{-T}(q) \tau &= \dot{\chi}^T J^{-T}(q) [M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)]\dot{\chi}] \\ &\quad + \dot{\chi}^T J^{-T} [g(q) + f_f(\dot{q}, f_e)] \\ &= \dot{\chi}^T (J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q)\ddot{\chi} + [J^{-T}(q)C(q, \dot{q})J^{-1}(q) - J^{-T}(q)M(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)(q)J^{-1}(q)]\dot{\chi}) + \\ &\quad \dot{\chi}^T (J^{-T}(q)g(q) + J^{-T}(q)f_f(\dot{q}, f_e)) \end{aligned} \quad (5.50) \quad (5.51)$$

Relacionando el lado izquierdo y derecho del signo igual de la ecuación (5.51) se tiene la ecuación fundamental que desarrolló Arimoto en 1981 para sentar las bases del control cartesiano.

$$\boldsymbol{\tau} = J^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f}_x \quad (5.52)$$

Por tanto, el modelo dinámico cartesiano se encuentra dado por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_x &= J^{-T}(\boldsymbol{q})M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{x}} + [J^{-T}(\boldsymbol{q})C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})J^{-1}(\boldsymbol{q}) - J^{-T}(\boldsymbol{q})M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})]\dot{\boldsymbol{x}} \\ &\quad + J^{-T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + J^{-T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{f}_f(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{f}_e) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$= M_x\ddot{\boldsymbol{x}} + C_x\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_x + \boldsymbol{f}_{ef_x} \quad (5.54)$$

La ecuación (5.54) representa la dinámica no lineal de un robot manipulador en el espacio de variables cartesianas, donde la matriz de inercia cartesiana M_x y la matriz de fuerzas centripetas y de Coriolis cartesiana C_x tienen la siguiente forma:

$$M_x = J^{-T}(\boldsymbol{q})M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \quad (5.55)$$

$$C_x = J^{-T}(\boldsymbol{q})C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})J^{-1}(\boldsymbol{q}) - J^{-T}(\boldsymbol{q})M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q})\dot{J}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \quad (5.56)$$

$$C_x = J^{-T}(\boldsymbol{q})C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})J^{-1}(\boldsymbol{q}) - M_x\dot{J}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) \quad (5.57)$$

$$\boldsymbol{g}_x = J^{-T}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \quad (5.58)$$

La derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia cartesiana tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= \left[\frac{d}{dt}J^{-T}(\boldsymbol{q}) \right] M(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) + J^{-T}(\boldsymbol{q})\dot{M}(\boldsymbol{q})J^{-1}(\boldsymbol{q}) + \\ &\quad J^{-T}(\boldsymbol{q})M(\boldsymbol{q}) \left[\frac{d}{dt}J^{-1}(\boldsymbol{q}) \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

Por otro lado, se sabe que:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) &= I \Rightarrow \frac{d}{dt}[J(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})] = j(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) + J(\mathbf{q})\left[\frac{d}{dt}J^{-1}(\mathbf{q})\right] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \left[\frac{d}{dt}J^{-1}(\mathbf{q})\right] &= -J^{-1}(\mathbf{q})j(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

También se cumple que:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q})^T J^{-T}(\mathbf{q}) &= I \Rightarrow \frac{d}{dt}[J(\mathbf{q})^T J^{-T}(\mathbf{q})] = \left[\frac{d}{dt}J^T(\mathbf{q})\right]J^{-T}(\mathbf{q}) + J(\mathbf{q})^T\left[\frac{d}{dt}J^{-T}(\mathbf{q})\right] = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \left[\frac{d}{dt}J^{-T}(\mathbf{q})\right] &= -J^{-T}(\mathbf{q})\left[\frac{d}{dt}J^T(\mathbf{q})\right]J^{-T}(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Por lo tanto, la ecuación (5.59) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= -J^{-T}(\mathbf{q})\left[\frac{d}{dt}J^T(\mathbf{q})\right]\underbrace{J^{-T}(\mathbf{q})M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})}_{M_x} + J^{-T}(\mathbf{q})\dot{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \\ &\quad - \underbrace{J^{-T}(\mathbf{q})M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})}_{M_x}\dot{j}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_x &= -J^{-T}\left[\frac{d}{dt}J^T(\mathbf{q})\right]M_x + J^{-T}(\mathbf{q})\dot{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) - M_x\dot{j}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5.61)$$

Por otro lado, realizando la siguiente suma de matrices de fuerzas cén-

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary trípetas y de Coriolis cartesianas se tiene que:

$$\begin{aligned} C_x + C_x^T &= J^{-T}(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})J^{-1}(\mathbf{q}) - M_x\dot{j}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) \\ &\quad + J^{-T}(\mathbf{q})C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})J^{-1}(\mathbf{q}) - J^{-T}(\mathbf{q})\left[\frac{d}{dt}J^T(\mathbf{q})\right]M_x \\ &= J^{-T}(\mathbf{q})\dot{M}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) - M_x\dot{j}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q}) - J^{-T}(\mathbf{q})\left[\frac{d}{dt}J^T(\mathbf{q})\right]M_x \end{aligned}$$

Aquí se ha empleado la propiedad del modelo dinámico en coordenadas articulares $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Por lo tanto se cumple que la derivada temporal de la matriz cartesianas

de inercias es una matriz simétrica:

$$\dot{M}_x = C_x + C_x^T \quad (5.62)$$



5.4.1 Propiedades del modelo dinámico cartesiano

El modelo dinámico cartesiano de un robot manipulador

$$f_x = M_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + g_x + f_{ex}$$

tiene las siguientes propiedades matemáticas:



Hipótesis: supóngase que la matriz jacobiana del robot $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de rango completo, es decir, existe la inversa $J^{-1}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces la matriz cartesiana $M_x = J^{-T}(\mathbf{q})M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva, puesto que $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo tanto, $M_x > 0$, y simétrica $M_x = M_x^T$.



La matriz de inercia M_x satisface:

$$\lambda_{M_x}^{\min} I \leq M_x \leq \lambda_{M_x}^{\max} I \quad (5.63)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, $\lambda_{M_x}^{\max}$ y $\lambda_{M_x}^{\min}$ representan los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia, respectivamente.



La derivada temporal de la matriz cartesiana M_x satisface lo siguiente: $\dot{M}_x = C_x + C_x^T$, entonces se cumple la propiedad de antisimetría del modelo dinámico cartesiano.



Corolario 5.1 Propiedad de antisimetría



Si $\dot{M}_x = C_x + C_x^T$, entonces

$$\frac{1}{2} \dot{x}^T [\dot{M}_x - 2C_x] \dot{x} \equiv 0.$$

Demostración

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{\chi}^T [\dot{M}_\chi - 2C_\chi] \dot{\chi} &= \frac{1}{2}\dot{\chi}^T [C_\chi + C_\chi^T - 2C_\chi] \dot{\chi} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\chi}^T [C_\chi^T - C_\chi] \dot{\chi} \\ &= -\frac{1}{2}\dot{\chi}^T [C_\chi^T - C_\chi]^T \dot{\chi}\end{aligned}$$

puesto que $[C_\chi^T - C_\chi] = -[C_\chi^T - C_\chi]^T$, entonces la matriz $[C_\chi^T - C_\chi]$ es una matriz antisimétrica, por lo tanto $\frac{1}{2}\dot{\chi}^T [C_\chi^T - C_\chi] \dot{\chi} \equiv 0$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

5.5 Identificación paramétrica



El modelo dinámico de un robot manipulador contiene en su estructura matemática parámetros tales como centros de gravedad, masas, momentos de inercia y coeficientes de fricción. Estos parámetros generalmente son desconocidos; este es el caso de la mayoría de los robots comerciales donde el fabricante no proporciona sus valores nominales. Si bien existen herramientas de la teoría de control como esquemas adaptables y controladores robustos que permiten tolerar errores en los parámetros dinámicos, el conocimiento de éstos es crucial para la mayoría de los esquemas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

basados en el modelo dinámico del robot manipulador.

El problema de identificación paramétrica ha conducido a derivar varios esquemas de identificación que se han convertido en una herramienta atractiva para determinar los parámetros dinámicos de robots manipuladores, sobre todo cuando existe dificultad para medirlos directamente. Sin embargo, la naturaleza no lineal del modelo dinámico de robots manipuladores hace que la tarea de identificación paramétrica no sea trivial.

Es de particular relevancia para los esquemas de identificación paramétrica y de control adaptable expresar el modelo dinámico no lineal del robot manipulador como el producto de una matriz de regresión compuesta de funciones no lineales (dependientes de la posición, velocidad y aceleración

articular) y un vector de parámetros constantes dependiente de masas, momentos de inercias, distancias a centros de masa y coeficientes de fricción.

Los esquemas de identificación que se describirán en esta sección son sistemas de identificación que pertenecen a la filosofía de identificación híbrida, es decir el modelo de regresión es formulado en tiempo continuo mientras que la identificación se realiza a través de un estimador recursivo llamado mínimos cuadrados, el cual se utiliza ampliamente en la literatura debido a su sencillez y a su propiedad de recursividad, atributo que lo hace atractivo para su implementación.
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Los primeros trabajos sobre identificación paramétrica de robots manipuladores explotando esa propiedad, requerían medir la aceleración articular dentro del modelo de regresión. Esto condujo al modelo de regresión dinámico, también conocido como modelo de regresión diferencial. El primer esquema de identificación que relaja la medición de la aceleración articular fue propuesto por [Hsu *et al.*, 1987] al introducir el modelo dinámico filtrado. Desde entonces se han sugerido diversos esquemas de identificación en la literatura.

Los esquemas de identificación basados en el modelo dinámico filtrado, energía y potencia filtrada no dependen de la aceleración articular. Sin embargo, el modelo de la energía involucra una integral que causa problemas en frecuencia cero. El modelo de potencia filtrada supera este inconveniente ya que contiene un filtro de primer orden estable estrictamente propio con ganancia unitaria en frecuencia cero, lo que evita problemas potenciales propios de la ganancia infinita del integrador en frecuencias cercanas a cero.

Otra característica en común entre estos esquemas, es que siempre es posible agrupar de manera conveniente los parámetros de los modelos dinámico filtrado, energía y potencia filtrada, de tal forma que se obtenga el mismo vector de parámetros para ambos esquemas. Sin embargo,

la principal ventaja que presentan los modelos de la energía y potencia filtrada sobre el modelo dinámico filtrado es que el primero contiene un error de predicción escalar, mientras que el dinámico filtrado conduce a un error de predicción vectorial.



5.5.1 Mínimos cuadrados

Como preámbulo a la descripción de los esquemas de regresión lineal para resolver el problema de identificación paramétrica en robótica, primero se discutirá el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo. Esta técnica es particularmente simple si el modelo tiene la propiedad de linealidad en los parámetros del modelo. El método de mínimos cuadrados es un esquema estándar que aproxima la solución de sistemas sobre determinados, por ejemplo cuando hay más variables incógnitas que ecuaciones. Mínimos cuadrados minimiza la suma de cuadrados de los errores; un error es la diferencia entre un valor observado y el valor proporcionado por el modelo matemático (robot).

El método de mínimos cuadrados fue descrito por Carl Friedrich Gauss en 1794, y el objetivo del problema de mínimos cuadrados consiste en encontrar los parámetros del modelo que describe la planta física (por ejemplo un robot manipulador) a través de un simple conjunto de datos

que contienen observaciones o mediciones. El método de mínimos cuadrados encuentra su óptimo cuando la suma de errores cuadrados alcanza el mínimo. Un error se define como la diferencia entre el valor de la variable dependiente (el vector de parámetros) y el valor del modelo. Este resultado se conoce como **teorema de Gauss-Markov**.

El algoritmo recursivo de mínimos cuadrados se describe a continuación. Considérese el siguiente modelo de regresión:

$$\mathbf{y}(k) = \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta} \quad (5.64)$$

donde $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^n$ representa un vector de salida o respuesta del modelo, $\Psi(k) \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de regresión compuesta por mediciones de fun-

Gauss (1777-1855)



Johann Friedrich Carl Gauss nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, hoy Alemania. Desde muy joven demostró ser una persona con un alto coeficiente intelectual aprendiendo diversas lenguas clásicas, literatura, filosofía y matemáticas superiores. Cuando Gauss tenía 17 años desarrolló las bases de análisis del método de mínimos cuadrados. A sus 18 años hizo un descubrimiento que sería clave en el futuro de las matemáticas encontró: la fórmula para construir el heptadecágono o polígono regular de 17 lados con regla y compás. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Helmstedt defendiendo su tesis en un examen oral que fue presidido por el mejor matemático germano de la época, Johann Friedrich Pfaff. Gauss demostró que toda función algebraica racional puede descomponerse en factores de primer o segundo grado con coeficientes reales (ni más ni menos que el sueño del gran Euler). Murió el 23 de febrero de 1855.

ciones conocidas y $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de parámetros desconocidos. El modelo (5.64) es indexado por la variable k , la cual denota el tiempo discreto, se asume que el conjunto de índices $\tau(k), \Psi(k)$ forman un conjunto discreto.

El vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$ puede ser estimado por minimizar la siguiente función de costo:

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta}]^2 + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)]^T P^{-1}(0) [\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)] \quad (5.65)$$

donde $P(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la condición inicial de la matriz de covarianza $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la cual es una matriz definida positiva y $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ representa el valor inicial del vector estimado.

La ecuación (5.65) representa la suma de los cuadrados de los errores $\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta}$, es decir, la diferencia entre la observación actual $\mathbf{y}(k)$ y el valor estimado por el modelo con vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$. El segundo término del lado derecho de la ecuación (5.65) ha sido incluido para tomar en cuenta las condiciones iniciales.

La función de costo (5.65) se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta}]^T [\mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta}] + \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\quad \frac{1}{2} [-\hat{\boldsymbol{\theta}}^T(0) P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(0) P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - (\Psi(k)^T \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{y}(k) - \mathbf{y}(k)^T \Psi(k)^T \hat{\boldsymbol{\theta}}] + \\ &\quad \left(\Psi^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^T \Psi^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} [\hat{\boldsymbol{\theta}}^T P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}} - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^T P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}}(0)] + \\ &\quad \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(0) P^{-1}(0) \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \Psi(k) \mathbf{y}(k) + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \Psi(k) \Psi^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}] + \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\frac{1}{2}[\hat{\theta}^T P^{-1}(0)\hat{\theta} - 2\hat{\theta}^T P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \hat{\theta}^T(0)P^{-1}(0)\hat{\theta}(0)] \quad (5.67)$$

Derivando la ecuación (5.67) con respecto a $\hat{\theta}$ e igualando a cero se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_k(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} &= \sum_{k=1}^n [-\Psi(k)\mathbf{y}(k) + \Psi^T(k)\Psi^T(k)\hat{\theta}] + \\ &P^{-1}(0)\hat{\theta} - P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) = 0 \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
library

Por lo tanto el vector estimado de parámetros $\hat{\theta}$ se obtiene:

$$\hat{\theta} = [P^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\Psi^T(k)]^{-1} [P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\mathbf{y}(k)] \quad (5.68)$$

La ecuación (5.68) se conoce como algoritmo de mínimos cuadrados estándar.



5.5.2 Algoritmo recursivo de mínimos cuadrados

El proceso para obtener la ecuación de mínimos cuadrados estándar (5.68) se describe a continuación:

Sea:

$$\begin{aligned} P^{-1}(k) &= P^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\Psi^T(k) \quad (5.69) \\ &= \underbrace{[P^{-1}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(k)\Psi^T(k)]}_{P^{-1}(k-1)} + \Psi(n)\Psi^T(n) \end{aligned}$$

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \Psi(n)\Psi^T(n) \quad (5.70)$$

Por tanto el vector de parámetros estimados obtiene la siguiente forma:

$$\hat{\theta}(k) = P(k)[P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^n \Psi(k)\mathbf{y}(k)] \quad (5.71)$$



Mínimos cuadrados

El astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubrió el 1 de enero de 1801 el asteroide Ceres y fue capaz de seguir su trayectoria durante 40 días antes de que se perdiera en el firmamento. Las observaciones astronómicas de Giuseppe y el método de Gauss fueron utilizados en análisis de regresión por el astrónomo húngaro Franz Xaver Von Zach para determinar la localización del asteroide Ceres después deemerger más allá del sol. No fue necesario resolver las ecuaciones de movimiento planetario de Kepler. Los resultados de predicción de la relocalización de Ceres del astrónomo Franz Xaver fueron exitosos. Gauss publicó el método de mínimos cuadrados hasta 1809, en el volumen dos de su trabajo sobre mecánica celeste. En 1829, Gauss perfeccionó su método y establece el esquema de mínimos cuadrados para análisis de regresión en un sentido óptimo para un sistema lineal donde los errores tienen una media cero, descorrelacionados y de igual variancia. El método de mínimos cuadrados creció en los campos de la astronomía, debido a la descripción exacta con que este método expllica el comportamiento de los cuerpos celestes. En forma independiente, mínimos cuadrados también fue abordado en 1805 por el matemático francés Adrien-Marie Legendre quien lo publicó antes que Gauss y en 1808 por el científico norteamericano Robert Adrain en 1808.

$$= P(k) \left[\underbrace{P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(k)\mathbf{y}(k)}_{\varpi} \right] + \Psi(n)\mathbf{y}(n) \quad (5.72)$$

$$\hat{\theta}(k-1) = P(k-1) \left[\underbrace{P^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \Psi(k)\mathbf{y}(k)}_{\varpi} \right] \quad (5.73)$$

La ecuación para el vector de parámetros estimados (5.71) se divide en dos componentes: los términos en la sumatoria desde $k = 1$ hasta $n - 1$ más el último término $\Psi(n)\mathbf{y}(n)$, resulta la ecuación (5.72). Por esto el vector de parámetros estimados hasta $n - 1$ muestras es la expresión (5.73). Ahora bien, relacionando los términos ϖ de las expresiones (5.72) y (5.73), se obtiene:

$$\hat{\theta}(k) = P(k) [P^{-1}(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \Psi(n)\mathbf{y}(n)] \quad (5.74)$$

$$= P(k) [(P^{-1}(k) - \Psi(n)\Psi(n)^T)\hat{\theta}(k-1) + \Psi(n)\mathbf{y}(n)] \quad (5.75)$$

donde se ha empleado la ecuación (5.70) en la ecuación (5.74) para resultar (5.75).

La expresión para el vector de parámetros estimados queda de la siguiente forma:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\Psi(k)[\mathbf{y}(k) - \Psi^T(k)\hat{\theta}(k-1)] \quad (5.76)$$

Considérese el siguiente lema de inversión de matrices:

$$[A + BC]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[I + CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} \quad (5.77)$$

$$\text{donde } A = P^{-1}(k) \quad B = \Psi(k) \quad C = \Psi^T(k)$$

Aplicando este resultado a la ecuación (5.70), se tiene que:

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)\Psi(k)[I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1}\Psi(k)^TP(k-1)$$

Además,

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

$$\begin{aligned}
 P(k)\Psi(k) &= P(k-1)\Psi(k) - P(k-1)\Psi(k)[I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1}\Psi(k)^TP(k-1)\Psi(k) \\
 &= P(k-1)\Psi(k)[I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1}[I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k) - \Psi(k)P(k-1)\Psi(k)] \\
 &= P(k-1)\Psi(k)[I + \Psi^T(k)P(k-1)\Psi(k)]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

Por lo tanto, las ecuaciones recursivas del algoritmo de mínimos cuadrados se encuentran expresadas como:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k-1)\Psi(k)[I + \Psi(k-1)^TP(k-1)\Psi(k)]^{-1}e(k) \tag{5.79}$$

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)\Psi(k)[I + \Psi(k)^TP(k-1)\Psi(k)]^{-1}\Psi(k)^TP(k-1) \tag{5.80}$$

$$e(k) = y(k) - \Psi(k)^T\hat{\theta}(k-1) \tag{5.81}$$

Aquí $P(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ se conoce como la matriz de covarianza y $e(k) \in \mathbb{R}^n$ es el error de predicción.

Una propiedad importante para el algoritmo (5.79)-(5.80) es la siguiente:

$$\|\hat{\theta}(k) - \theta\| \leq \frac{\lambda_{\max}\{P(k)\}}{\lambda_{\min}\{P(0)\}} \|\hat{\theta}(0) - \theta\|; k \geq 1 \tag{5.82}$$

donde $\lambda_{\max}\{P(k)\}$ y $\lambda_{\min}\{P(0)\}$ son los

El algoritmo de mínimos cuadrados puede identificar cualquier modelo matemático, no depende de la naturaleza del sistema, la única condición que debe satisfacer el sistema es que pueda ser expresado como un regresor lineal con respecto a sus parámetros. Es decir, puede identificar:



Sistemas continuos (dinámicos y pasivos).



Sistemas lineales.



Sistemas no lineales.



Sistemas discretos.



No depende del periodo de muestreo, inclusive puede ser aperiódico.

♣ Ejemplo 5.4

Proponga modelos matemáticos de sistemas que cumplan con la condición de regresión lineal.

Solución

Ejemplos de sistemas que sí cumplen con la condición de linealidad en los parámetros (regresión lineal) son los siguientes:

$$y = \alpha \operatorname{sen}(t) + \beta \cos(t) = [\operatorname{sen}(t) \quad \cos(t)] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$y = \alpha t^2 + \beta \sqrt{t} = [t^2 \quad \sqrt{t}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \alpha \operatorname{sen}(x) + \beta x^2 = [\operatorname{sen}(x) \quad x^2] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

 Ejemplo 5.5

Proponga modelos matemáticos de sistemas que no cumplen con la condición de regresión lineal.

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Ejemplos de sistemas que no cumplen con la condición de regresión lineal en los parámetros:

$$\begin{aligned}y &= \sin(\alpha t) + \beta \cos(t) \\y &= e^{-\alpha t} + \cos(\beta t) \\ \dot{x} &= -\sin(\cos(\beta x)) + \frac{\sin(\alpha t)}{1 + \sin(\alpha t)}\end{aligned}$$



ebrary Cuando el sistema es escalar, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo adquiere la siguiente forma:

$$\mathbf{y}(k) = \Psi(k)^T \boldsymbol{\theta} \quad (5.83)$$

donde $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}$ representa un vector de salida o respuesta del modelo, $\Psi(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de regresión compuesta por mediciones de funciones conocidas y $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$.

Las ecuaciones del algoritmo de mínimos cuadrados recursivo para el caso escalar son:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k-1) \frac{\Psi(k) e(k)}{1 + \Psi(k-1)^T P(k-1) \Psi(k)} \quad (5.84)$$

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1) \frac{\Psi(k) \Psi(k)^T P(k-1)}{1 + \Psi(k-1)^T P(k-1) \Psi(k)} \quad (5.85)$$

$$e(k) = y(k) - \Psi(k)^T \hat{\theta}(k-1) \quad (5.86)$$

donde $P(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es la matriz de covarianza y $e(k) \in \mathbb{R}^p$ es el error de predicción.

♣ ♣ Ejemplo 5.6

Implementar y simular el proceso de identificación paramétrica de mínimos cuadrados para el siguiente sistema:

$$y = a \sin(t) + b \cos(t)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, la variable del tiempo se representa por $t \in \mathbb{R}_+$, la respuesta del sistema es $y \in \mathbb{R}$.

Solución

El código fuente 5.6 contiene el programa del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (véanse las líneas 19 a 27). El sistema a identificar $y = a \sin(t) + b \cos(t)$ está implementado en el mismo programa (línea 11). La matriz de covarianza del algoritmo de mínimos cuadrados está inicializada como $P(0) = 10^{10}$.

El tiempo de simulación fue de 10 segundos, con intervalos de integración de 2.5 mseg. La condición inicial del vector de estimación $\hat{\theta}(0) = \mathbf{0}$. La condición inicial del parámetro de estimación puede ser diferente de cero, ya que no depende de la condición inicial.



Código Fuente 5.6 Algoritmo de mínimos cuadrados

```
%cap5_mc.m Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 5 Dinámica de robots manipuladores
%Autor Fernando Reyes Cortés
```

Algoritmo de mínimos cuadrados

```
1 %
2 clc;
3 clear all;
4 close all;
5 %vector columna de tiempo
6 t=[0:0.0025:10]';
7 %Parámetro del sistema
8 a=10.34; b=4.85;
9 %Sistema a identificar
10 y=a*sin(t)+b*cos(t);
11 %Algoritmo de mínimos cuadrados recursivo
12 p=2; %Orden del sistema número de parámetros a identificar
13 theta_e=[1:p]'; %vector columna de parámetros
14 Fi=[1:p]'; %vector columna de observaciones
15 theta_e(1)=0; %Condición inicial del vector de parámetros.
16 P=eye(p,p)*10e10; %Matriz de covarianza P
17 n=size(t);
18 for k=1:n
19 %Se forma el vector de observaciones
20 Fi1(1)=sin(t(k));
21 Fi2(2)=cos(t(k));
22 Fi=[ Fi1(1), Fi2(2) ]'; %Vector de observaciones
23 e=y(k)-theta_e'*Fi; %error de regresión
24 theta_e= theta_e+ (P*Fi*e)/(1+Fi'*P*Fi); %vector estimado
25 P=P-(P*Fi*Fi'*P)/(1+Fi'*P*Fi); %Matriz de covariancia
26 end
27 theta_e %Resultado de la identificación
28 %
```



Mínimos cuadrados

Mínimos cuadrados es una excelente técnica de identificación paramétrica. Su estudio y entendimiento se facilita a través de la presentación de ejemplos didácticos documentados en todos sus aspectos teóricos y prácticos.

En el sitio web del libro se encuentran disponibles varios ejemplos de identificación de sistemas; implementados en lenguaje MatLab.

El vector de parámetros estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ está expresado en la salida del programa como $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [10,34, 4,85]^T$.

Obsérvese que a pesar de la naturaleza del sistema continuo $y = a \operatorname{sen}(t) + b \cos(t)$, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo identifica los parámetros exactos. De hecho, la identificación se alcanza en 25 mseg, es decir con 10 pasos de iteración es suficiente para identificar completamente los parámetros.



5.5.3 Modelo de regresión dinámico filtrado

La propiedad (5.87) permite expresar al modelo dinámico no lineal (5.8) del robot manipulador como el producto de una matriz de regresión $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ compuesta de funciones no lineales dependientes de la posición, velocidad y aceleración articular con el vector de parámetros desconocidos $\boldsymbol{\theta}$. Esto conduce al modelo de regresión dinámico también conocido como modelo de regresión diferencial. El modelo de regresión dinámico (5.87) requiere la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$ para calcular los elementos de la matriz $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$. Para vencer este inconveniente fue propuesto el modelo de regresión dinámico filtrado [Hsu *et al.*, 1987; Slotine y Li, 1987].

$$\boldsymbol{\tau}_f = Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\theta} \quad (5.87)$$

La idea clave es filtrar de ambos lados del modelo de regresión dinámico (5.88) por un filtro estable estrictamente propio. Sin pérdida de generalidad, considérese un filtro de primer orden dado por la función de transferencia $f(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ donde λ es una constante positiva y s representa el operador diferencial:

$$\boldsymbol{\tau}_f = f(s)\boldsymbol{\tau} \quad (5.88)$$

$$Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = f(s)Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (5.89)$$

Debido a la introducción de los filtros, se evita el requerimiento de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$ dentro de la matriz de regresión $Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Con la anterior notación y con referencia al algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (5.79)-(5.80), el error de predicción correspondiente al modelo de regresión dinámico filtrado del robot manipulador toma la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\tau_{f(k)}}_{\mathbf{y}(k)} - \underbrace{Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(k)}_{\Psi(k)^T} \hat{\theta}(k-1). \quad (5.90)$$

♣ Ejemplo 5.7

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Obtener el esquema de regresión del modelo dinámico filtrado de un péndulo.

Solución

El modelo dinámico del péndulo se encuentra dado por:

$$\tau = I\ddot{q} + b\dot{q} + f_c \operatorname{signo}(\dot{q}) + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

el esquema de regresión del modelo dinámico es:

ebrary

$$e = \tau - [\ddot{q} \quad \dot{q} \quad \operatorname{signo}(\dot{q}) \quad \operatorname{sen}(q)] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$

donde $[\hat{I} \quad \hat{b} \quad \hat{f}_c \quad \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c]^T$ son los parámetros estimados de $[I \quad b \quad f_c \quad mgl_c]^T$, respectivamente.

El modelo dinámico filtrado se obtiene como:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\tau}{s+\lambda} &= I \frac{\lambda\ddot{q}}{s+\lambda} + b \frac{\lambda\dot{q}}{s+\lambda} + f_c \frac{\lambda \operatorname{signo}(\dot{q})}{\lambda+s} + mgl_c \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)}{s+\lambda} \\ &= I s \frac{\lambda\dot{q}}{s+\lambda} + b s \frac{\lambda q}{s+\lambda} + f_c \frac{\lambda \operatorname{signo}(\dot{q})}{\lambda+s} + mgl_c \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)}{s+\lambda} \end{aligned}$$

donde $s = \frac{d}{dt}$.

Por lo tanto el esquema de regresión del modelo dinámico filtrado para un péndulo es:

$$e = \frac{\lambda\tau}{s+\lambda} - \begin{bmatrix} s \frac{\lambda\dot{q}}{s+\lambda} & s \frac{\lambda q}{s+\lambda} & \frac{\lambda \operatorname{signo}(\dot{q})}{\lambda+s} & \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)}{s+\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



5.5.4 Regresión lineal del modelo de energía

Un enfoque particularmente atractivo para el diseño de esquemas de identificación paramétrica de robots manipuladores se basa en el modelo de energía aplicada al robot manipulador, el cual puede ser descrito como un modelo de regresión lineal en términos de los parámetros dinámicos. Este esquema también se conoce en la literatura como modelo integral.

La energía total del robot manipulador está dada por la suma de la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ más la energía disipativa $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\mathcal{E}_T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (5.91)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (5.92)$$

donde $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se denomina el hamiltoniano.

La energía cinética y potencial puede ser escrita como una función lineal de los parámetros dinámicos:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{K}} \quad (5.93)$$

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{U}}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}} \quad (5.94)$$

donde $\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{K}}$ y $\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{U}}$ son vectores de orden $p_1 \times 1$ y $p_2 \times 1$, los cuales dependen de posiciones y velocidades articulares, respectivamente; $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{K}}$ y $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}}$ son

vectores de orden $p_1 \times 1$ y $p_2 \times 1$, respectivamente, los cuales contienen los parámetros dinámicos del robot manipulador tales como masas, centros de masas y momentos de inercia.

La energía disipativa puede descomponerse como:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{f}_f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)^T \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{f}_f} \quad (5.95)$$

Por lo tanto la energía total (5.91) del robot manipulador puede expresarse como un regresor lineal en términos de los parámetros dinámicos del hamiltoniano $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la fricción $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} \quad (5.96)$$

donde

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T = [\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \ \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{U}}(\mathbf{q})^T] \quad (5.97)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{K}}^T \ \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}}^T]^T. \quad (5.98)$$

La parametrización lineal de la energía total conduce a la bien conocida propiedad de linealidad del modelo dinámico en términos de los parámetros dinámicos del robot manipulador, para demostrar esta afirmación usando las ecuaciones (5.93) y (5.94) y tomando en cuenta que el lagrangiano del robot manipulador $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T &= [\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{K}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T - \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{U}}(\mathbf{q})^T]. \end{aligned}$$

Las siguientes propiedades se satisfacen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}.$$

El modelo de regresión de la energía se basa en el principio de la conservación de la energía, el cual establece que el trabajo efectuado por las fuerzas aplicadas a un sistema es igual al cambio de energía total del sistema:

$$\underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{\text{energía aplicada (t)}} = \underbrace{\mathcal{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}_{\text{energía almacenada (t)}} + \underbrace{\int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)) d\sigma}_{\text{energía disipada (t)}} . \quad (5.99)$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que la energía hamiltoniana en el instante cero es nula, es decir $\mathcal{H}(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) = 0$. Empleando el principio de conservación de la energía y la propiedad de linealidad en los parámetros de la energía total del robot, el modelo de regresión de la energía está dado por:

$$\int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma = \left[\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))^T \quad \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)) d\sigma \right] \boldsymbol{\theta} . \quad (5.100)$$

El modelo de regresión (5.100) es lineal en los parámetros dinámicos y en los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb. El regresor depende de la posición \mathbf{q} y velocidad $\dot{\mathbf{q}}$, por lo que no requiere la aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$.

El error de predicción del modelo de regresión de la energía de acuerdo con el algoritmo de mínimos cuadrados (5.84)-(5.85) se define como:

$$e(k) = \underbrace{\int_0^{kh} \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{y(k)} - \underbrace{\left[\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \int_0^{kh} \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma)) d\sigma \right]}_{\Psi(k)^T} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (5.101)$$

donde h indica el periodo de muestreo.

Es importante resaltar que el error de predicción (5.101) es una función es-

calar mientras que el error de predicción del modelo de regresión dinámico filtrado (5.90) es una función vectorial.

♣ Ejemplo 5.8

Obtener el modelo de regresión de la energía para un péndulo.

Solución

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La energía cinética y potencial de un péndulo se encuentra dada por:

$$\mathcal{H}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}I\dot{q}^2 + mgl_c[1 - \cos(q)]$$

La energía total del péndulo está dada por la siguiente expresión:

$$\int_0^t q\tau dt = \frac{1}{2}I\dot{q}^2 + mgl_c[1 - \cos(q)] + b \int_0^t \dot{q}^2 dt + f_c \int_0^t |\dot{q}| dt.$$

Por tanto, el modelo de gresión lineal de la energía se encuentra por:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

$$e = \int_0^t q\tau dt - [\frac{1}{2}\dot{q}^2 [1 - \cos(q)] \quad \int_0^t \dot{q}^2 dt \quad \int_0^t |\dot{q}| dt] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$



5.5.5 Modelo de regresión de la potencia filtrada

La potencia aplicada (5.27) puede expresarse como un regresor lineal de un vector de parámetros y un vector de observaciones:

$$\dot{q}^T \boldsymbol{\tau} = \left[\frac{d}{dt} \phi_{\mathcal{H}}(q, \dot{q})^T \quad \dot{q}^T \phi_{\mathcal{F}}(\dot{q}) \right] \boldsymbol{\theta} \quad (5.102)$$

El modelo de la potencia aplicada (5.102) presenta la desventaja de requerir la aceleración articular en el vector de regresión. Este inconveniente puede ser resuelto al filtrar ambos lados del modelo de regresión aplicada mediante un filtro estable estrictamente propio. Sin pérdida de generalidad, considérese una vez más el filtro de primer orden cuya función de transferencia está dada por $f(s) = \lambda/(s + \lambda)$ donde $\lambda > 0$.

Al aplicar el filtro a ambos lados de (5.102) se obtiene el siguiente modelo, el cual se ha denotado como el modelo de regresión de la potencia filtrada:

$$\frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{\mathbf{q}}^T(t) \boldsymbol{\tau}(t) = \left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))^T \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (5.103)$$

El modelo (5.103) conserva las mismas ventajas que el modelo de regresión de la energía (5.100), es decir, es lineal en los parámetros dinámicos y coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, depende de la posición \mathbf{q} y velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ y no requiere la medición de la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}$.

El lado izquierdo del modelo (5.103) es precisamente el filtrado de la potencia aplicada $\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}$.

El error de predicción del modelo de regresión de la potencia filtrada es una función escalar que se define en forma natural como:

$$e(k) = \underbrace{\frac{\lambda}{s + \lambda} (\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau})(k)}_{y(k)} - \underbrace{\left[\frac{\lambda s}{s + \lambda} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \frac{\lambda}{s + \lambda} \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}})(k) \right]}_{\Psi(k)^T} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1). \quad (5.104)$$

La obtención del modelo dinámico para robots de 1 o 2 gdl no es compleja, pero a medida que aumentan los gdl el procedimiento se hace mucho más complicado.

El modelo dinámico de robots manipuladores es una de las actividades más complejas de la robótica, por lo que a continuación se presentan una serie de ejemplos resueltos con la finalidad de que el lector se familiarice con el procedimiento.

Ejemplo 5.9

Obtener el esquema de regresión del modelo de la potencia filtrada para un péndulo robot.

Solución

El modelo de la potencia de un péndulo es:

$$\tau q = I\ddot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q)\dot{q} + b\dot{q}^2 + f_c|\dot{q}|$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El modelo de la potencia filtra se determina por:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda\tau q}{s+\lambda} &= I\frac{\lambda\ddot{q}}{s+\lambda} + mgl_c\frac{\lambda \operatorname{sen}(q)\dot{q}}{s+\lambda} + b\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} + f_c\frac{\lambda|\dot{q}|}{s+\lambda} \\ &= \frac{1}{2}Is\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} + mgl_c\frac{\lambda \operatorname{sen}(q)\dot{q}}{s+\lambda} + b\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} + f_c\frac{\lambda|\dot{q}|}{s+\lambda}\end{aligned}$$

El modelo de regresión de la potencia filtrada para un péndulo es:

$$e = \frac{\lambda\tau q}{s+\lambda} - \left[\frac{1}{2}s\frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} \quad \frac{\lambda \operatorname{sen}(q)\dot{q}}{s+\lambda} \quad \frac{\lambda\dot{q}^2}{s+\lambda} \quad \frac{\lambda|\dot{q}|}{s+\lambda} \right] \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{b} \\ \hat{f}_c \\ \hat{m}\hat{g}\hat{l}_c \end{bmatrix}$$



Ejemplo 5.10

Obtener el modelo de regresión dinámico filtrado de un robot planar de 2 gdl.

Solución

El procedimiento consiste en seleccionar un adecuado conjunto de parámetros a identificar; para el caso particular del robot de 2 gdl se trata

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary ALFAOMEGA

de la matriz de inercia, la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, el vector de pares gravitacionales y el vector pares de fricción:

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) \\ \theta_3 + \theta_2 \cos(q_2) & \theta_3 \end{bmatrix}, \\ C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) &= \begin{bmatrix} -2\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ \theta_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix} \theta_4 \sin(q_1) + \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \\ \theta_5 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{q}}) &= \begin{bmatrix} \theta_6 \dot{q}_1 + \theta_8 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ \theta_7 \dot{q}_2 + \theta_9 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_1 &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2, \\ \theta_2 &= l_1 m_2 l_{c2}, \\ \theta_3 &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ \theta_4 &= g(l_{c1} m_1 + m_2 l_1), \\ \theta_5 &= g m_2 l_{c2}, \\ \theta_6 &= b_1, \\ \theta_7 &= b_2, \\ \theta_8 &= f_{c1}, \\ \theta_9 &= f_{c2}. \end{aligned}$$

El vector de parámetros del robot manipulador incluye los parámetros de la energía total está dado por: $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}^T \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}^T]^T$ donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} &= [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5]^T, \\ \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}} &= [\theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9]^T, \\ \boldsymbol{\theta} &= [\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}}^T \quad \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{F}}^T]^T \end{aligned}$$

Los componentes del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \cdots \theta_9]^T$ dependen de una combinación de los parámetros físicos de los eslabones como masas, centros de masas, momentos de inercia y coeficientes de fricción, los cuales se consideran invariantes en el tiempo. El orden de la matriz de regresión P es 11×11 .

La segunda fase del procedimiento consiste en elegir una adecuada trayectoria de entrada al robot manipulador que permita obtener cierto grado de excitación en la matriz de regresión debido a que la calidad de estimación del vector de parámetros depende de los niveles de excitación del regresor, por ejemplo el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo usualmente requiere satisfacer ciertas condiciones de *excitación persistente*. Sin embargo, la selección de la trayectoria no es una tarea trivial, debido a que la matriz de regresión está compuesta por una combinación no lineal de las variables dinámicas del robot tal como $\sin(q_2)\dot{q}_1^2$, $\cos(q_2)\dot{q}_1$. Para el diseño de la trayectoria de excitación persistente se recomienda funciones senoidales que incluyen superposición de cuatro diferentes frecuencias, como la ecuación (5.44).

El error de predicción para el modelo de regresión dinámico filtrado está dado por la ecuación (5.90); en su adaptación al algoritmo de mínimos cuadrados recursivos definido por las ecuaciones (5.79)-(5.80) adquiere la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\tau_f(k)}_{\mathbf{y}(k)} - \underbrace{Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(k)}_{\Psi^T(k)} \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (5.105)$$

donde el vector de parámetros y la matriz de regresión están dados como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(k-1) \\ \vdots \\ \hat{\theta}_9(k-1) \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

$$Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q}_1 & \frac{\lambda s}{s+\lambda} \cos(q_2)(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q}_2 & \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q_1) \\ 0 & \left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \cos(q_2) \dot{q}_1 + \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_1 \right] \frac{\lambda s}{s+\lambda} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q_1 + q_2) & \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_1 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) & 0 \\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \sin(q_1 + q_2) & \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_2 & 0 & \frac{\lambda}{s+\lambda} \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de regresión $Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ contiene una serie de filtros para evitar medir la aceleración articular del robot manipulador. La representación de estados de los filtros $f(s) = \frac{\lambda s}{\lambda+s}$ que corresponden a los elementos del regresor $Y_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ donde interviene la aceleración articular está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda u(t) \quad (5.107)$$

$$y(t) = -\lambda x(t) + \lambda u(t) \quad (5.108)$$

donde x es el estado del filtro, y es la salida del filtro, u es la entrada a filtrar y t representa la evolución en el tiempo.

La representación de estados para los filtros $f(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ que corresponden a los elementos del regresor donde interviene la velocidad articular está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \lambda u(t) \quad (5.109)$$

$$y(t) = x(t). \quad (5.110)$$

Debido a que la trayectoria de entrada, las posiciones y velocidades articulares adquieren valores constantes entre cada k ésmo instante de muestreo, los filtros continuos $f(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ y $f(s) = \frac{\lambda s}{s+\lambda}$ pueden ser expresados en transformada Z (usando un retenedor de orden cero) como $f(z^{-1}) = \frac{(1-e^{-h\lambda})z^{-1}}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$ y $f(z^{-1}) = \frac{(1-z^{-1})\lambda}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$ respectivamente.

La representación de estado en forma discreta de los filtros $f(z^{-1}) = \frac{(1-e^{-h\lambda})z^{-1}}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$ está dada de la siguiente manera:

$$x(k) = e^{-h\lambda}x(k-1) + [1 - e^{-h\lambda}]u(k-1) \quad (5.111)$$

$$y(k) = x(k). \quad (5.112)$$

donde x representa el estado del filtro, y es la salida del filtro, u es la entrada a filtrar y k denota la evolución en el tiempo discreto.

Para el caso de los filtros $f(z^{-1}) = \frac{(1-z^{-1})\lambda}{1-e^{-h\lambda}z^{-1}}$, la representación de estados en forma discreta adquiere la siguiente forma:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$x(k) = e^{-h\lambda}x(k-1) + [1 - e^{-h\lambda}]u(k-1) \quad (5.113)$$

$$y(k) = -\lambda x(k) + \lambda u(k). \quad (5.114)$$

La representación de estados de los filtros continuos en forma discreta permite realizar su implementación de manera directa.



♣ ♣ Ejemplo 5.11

Obtener el modelo de regresión de energía de un robot de 2 gdl.

El error de predicción para el modelo de regresión de la energía está dado por la ecuación (5.101); en su adaptación al algoritmo de mínimos cuadrados recursivos definido por las ecuaciones (5.79)-(5.81) toma la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\int_0^{kh} \dot{\mathbf{q}}(\sigma)^T \boldsymbol{\tau}(\sigma) d\sigma}_{y(k)} - \underbrace{\left[\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \int_0^{kh} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))^T d\sigma \right]}_{\Psi^T(k)} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{H}}(k-1) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{F}}(k-1) \end{bmatrix}$$

donde el vector de regresión está dado por:

$$\left[\boldsymbol{\phi}_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \int_0^{kh} \boldsymbol{\phi}_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}}(\sigma))^T d\sigma \right] =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 & \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) & 1 - \cos(q_1) & 1 - \cos(q_1 + q_2) \\ \int_0^t \dot{q}_1^2 dt & \int_0^t \dot{q}_2^2 dt & \int_0^t |\dot{q}_1| dt & \int_0^t |\dot{q}_2| dt \end{bmatrix}.$$

El algoritmo de mínimos cuadrados necesita la información del vector de regresión y de la energía aplicada al robot manipulador para estimar en forma recursiva el vector de par metros $\hat{\theta}$.

El modelo de regresión de la energía total del robot presenta la ventaja de no requerir la aceleración articular, además el regresor es un vector y no una matriz como es el caso del modelo de regresión dinámico filtrado.



♣ ♣ Ejemplo 5.12

Obtener el modelo de regresión de la potencia filtrada de un robot de 2 gdl.

Solución

El error de predicción del modelo de regresión de la potencia filtrada está dado por la ecuación (5.104); en su adaptación al algoritmo de mínimos cuadrados recursivo dado por las ecuaciones (5.84)-(5.85) toma la siguiente forma:

$$e(k) = \underbrace{\frac{\lambda}{s+\lambda} (\dot{q}^T \boldsymbol{\tau})(k)}_{y(k)} - \underbrace{\left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}})^T(k) \right]}_{\Psi^T(k)} \left[\begin{array}{c} \hat{\theta}_{\mathcal{H}}(k-1) \\ \hat{\theta}_{\mathcal{F}}(k-1) \end{array} \right]$$

donde el regresor está dado como:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T(k) \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \phi_{\mathcal{F}}(\dot{\mathbf{q}})^T(k) \right] = \\ & \left[\frac{\lambda s}{s+\lambda} \frac{\dot{q}_1^2}{2} \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} \cos(q_2)\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} \dot{q}_2(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \quad \frac{\lambda s}{s+\lambda} [1 - \cos(q_1)] \right. \\ & \left. \frac{\lambda s}{s+\lambda} [1 - \cos(q_1 + q_2)] \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_1^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} \dot{q}_2^2 \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} |\dot{q}_1| \quad \frac{\lambda}{s+\lambda} |\dot{q}_2| \right] \end{aligned}$$

El algoritmo de mínimos cuadrados emplea la información del vector de regresión filtrado y de la potencia filtrada aplicada al robot manipulador para estimar en forma recursiva el vector de parámetros $\hat{\theta}$.

5.6 Robot experimental de 3 gdl

Como contribución práctica al área de la robótica, esta sección incorpora la descripción de una plataforma experimental científica diseñada de manera ex-profesa para realizar investigación y al mismo tiempo jugar el rol de una herramienta indispensable de docencia para robótica, mecatrónica y en general cualquier área de la ingeniería. La plataforma experimental denominada ***Rotradi*** consiste en un robot de transmisión directa de 3 gdl que se mueve en su espacio tridimensional equipado con tarjetas electrónicas y programas para realizar aplicaciones de automatización.

Esta plataforma científica con las características de Rotradi puede competir en desempeño y versatilidad con las mejores marcas mundiales de robótica. Sin embargo, principalmente se caracteriza por tener ***arquitectura abierta***, esto significa que puede evaluar experimentalmente ***cualquier*** estrategia de control. En contraste, los robots industriales tienen ***arquitectura cerrada***, no permiten programar nuevos esquemas de control y quedan confinados a lo que permite realizar su sistema operativo. Regularmente, un robot comercial no satisface todos los requerimientos de una institución de educación superior, por lo que en poco tiempo resulta una mala inversión y se convierte en una pieza decorativa.

La puesta en marcha de una plataforma experimental científica coadyuva al desarrollo de tecnología nacional, mejora la eficiencia terminal de los programas de ingeniería y posgrado, genera desarrollo de tesis a nivel licenciatura y posgrado, y consolida los conocimientos aplicados a problemas reales. Además, sin duda alguna, el principal valor agregado consiste en fortalecer la formación profesional de recursos humanos, ya que capacita para innovar, desarrollar, adecuar conocimientos y tecnología en

beneficio de la sociedad.

Los robots manipuladores como objetos de estudio en control automático ofrecen un amplio espectro para la formulación de problemas de carácter teórico y práctico; esto se debe a la naturaleza no lineal, acoplada y multi-variable de su comportamiento dinámico. No obstante que la temática de su control ha atraído la atención de investigadores y tecnólogos, hoy en día subsisten problemas abiertos de control de naturaleza teórica, así como el mejoramiento potencial de problemas de origen práctico. Sin embargo, a pesar de esto en la actualidad la gran mayoría de universidades y centros de investigación carecen de infraestructura adecuada en materia de robótica; de ahí que los trabajos de tesis, reportes técnicos y publicaciones científicas presentan resultados sólo de simulación y muy pocos incluyen evaluación experimental.



Dentro de los objetivos principales de la presente obra se encuentra superar los inconvenientes de infraestructura de robótica mediante la propuesta a la comunidad hispana de un robot experimental 3 gdl diseñado en forma *ex profeso* para realizar investigación sobre algoritmos de control para robots manipuladores, así como constituir una poderosa herramienta pedagógica en docencia. De esta forma, se pretende contribuir con el desarrollo de tecnología nacional.

Las simulaciones son importantes durante las primeras etapas del diseño de algoritmos de control. Sin embargo, los estudios de simulación generalmente son incompletos debido a que desprecian aspectos prácticos. Tal es el caso en simulaciones de sistemas de control donde la dinámica del robot no contempla el fenómeno de fricción (viscosa, Coulomb, estática), ni las limitaciones en los actuadores del robot, y usualmente se desprecia el ruido en los sensores de ahí que los resultados de simulación sean de valor limitado. Por otro lado, la validación experimental de algoritmos de control asegura su éxito potencial en el mundo real de las aplicaciones.

De esta forma, el desarrollo de un sistema experimental es un paso esencial hacia la validación de algoritmos de control nuevos y existentes. En este contexto es útil distinguir entre resultados de simulación y resultados obtenidos por experimentación. Obviamente los primeros son mucho más fáciles de obtener que los segundos.

Desde un punto de vista práctico, la implementación en tiempo real de controladores para robots manipuladores puede ser una *aventura*, que generalmente se convierte en una actividad que consume tiempo si no se dispone de una plataforma experimental con un ambiente de programación que genere al usuario una interfase amigable y proporcione las herramientas necesarias para el desarrollo y estudio de algoritmos de control. De esta forma, la interfase usuario-robot es un ingrediente importante de todo sistema experimental, que permite tomar control sobre la configuración experimental, ejecución del algoritmo, despliegue y registro de datos.

Es importante resaltar que una plataforma experimental diseñada en forma *ad doc* para realizar investigación científica, experimentación y evaluación de algoritmos de control de robots manipuladores, fortalece la infraestructura en materia de laboratorios de calidad de las carreras de ingeniería mecatrónica, robótica, sistemas, automatización, control, electrónica, eléctrica, mecánica, informática y computación. Asimismo, impacta de manera significativa en:



Productividad científica y tecnológica de cuerpos académicos o planta académica de carrera.



Coadyuva a incrementar las tesis de licenciatura y posgrado.



En el aspecto científico se puede decir que es una *minita de papers*, es decir de publicaciones científicas en revistas indexadas, arbitradas y congresos de calidad.



Constituye la infraestructura adecuada que soporta los planes de estudios de las carreras de ingeniería y programas de posgrado.



Facilidad para desarrollar aplicaciones con impacto y mejorar la vinculación con diferentes sectores de la sociedad: asistente de fisioterapia, personas con capacidad diferenciada, automatización de procesos industriales, prototipos científicos y educativos, etcétera.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

En la figura 5.7 se muestra el robot experimental de transmisión directa (*Rotradi*) con 3 grados de libertad moviéndose en el espacio tridimensional.



Figura 5.7 Rotradi robot experimental de transmisión directa de 3 gdl.

El robot manipulador *Rotradi* consta de tres eslabones rígidos fabrica-

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



dos de aluminio 6061, unidos mediante articulaciones del tipo rotacional con servomotores de transmisión directa. Los motores utilizados para formar las articulaciones de la base, hombro y el codo respectivamente, son los modelos DM1050A, DM1200-A y DM1015-B de la compañía Parker Compumotor. El espacio de trabajo del robot manipulador es un círculo de 0.9 metros de radio, tiene un peso aproximado de 120 kg y el extremo final del robot puede alcanzar velocidades lineales de 3000 mm/seg.

Los servo amplificadores electrónicos de los motores operan en modo 'par', aceptando un voltaje analógico como referencia de la señal de par. De esta forma los motores actúan como una fuente ideal de par. En esta configuración, el servomotor de la base DM1050A proporciona 50 Nm, el servomotor DM1200-A que forma el hombro es capaz de proporcionar 200 Nm como par de salida alrededor de su eje de giro, mientras que el servomotor del codo DM1015-B entrega un máximo de 15 Nm. La capacidad del servomotor del codo debe tener una proporción del 10% con respecto a la articulación del hombro, lo cual se debe a consideraciones dinámicas, de anatomía y fisiología del brazo humano.

La electrónica se basa en arquitectura FPGA's para leer los pulsos de los encoders incrementales, 3 convertidores D/A de 12 bits, puertos I/O, 3 timers programables para programar el periodo de muestreo de 2.5 msec.

La información de la posición articular del robot manipulador se obtiene a través de encoders incrementales localizados dentro de los servomotores, los cuales tienen una resolución de 4096000 pulsos por cada 360 grados. La información de la velocidad articular es obtenida mediante un algoritmo estándar de diferenciación numérica de la posición articular (algoritmo de Euler). Los encoders del robot son sensores de posición para medir los desplazamientos articulares q_1 , q_2 y q_3 de cada eslabón, y los servomotores para manejar cada articulación a través de los pares aplicados τ_1 , τ_2 y τ_3 .

Un gran obstáculo en la programación de manipuladores es la falta de comunicación eficaz y apropiada entre el usuario y el robot. Un planteamiento general para resolver este problema es la utilización de programación

Rotradi

El robot manipulador **Rotradi** fue diseñado y construido el 25 de enero de 1998 y ha sido la infraestructura académica clave para lograr acreditaciones de CACEI, CIEES y CONACYT de los programas de ingeniería y posgrado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Una característica de Rotradi es que puede ser guiado con la mano, joystick o ratón, etc., es decir para personas que no tienen conocimientos de robótica pueden guiar al robot moviendo el extremo final con la mano, de esta forma instruyen al robot de todos los movimientos que tiene que realizar, el programa del robot graba en un archivo posiciones y velocidades, posteriormente en modo automático las reproduce.

Hasta la fecha se han construido 6 robots de transmisión directa de 3 gdl y constituyen el soporte de laboratorios e infraestructura académica en robótica de la región de Puebla.

en lenguaje C, lo que le da mayor potencial y versatilidad. Es un ambiente de programación que genera una interfase amigable al usuario, que despliega la información de posiciones y velocidades articulares en tiempo real con las herramientas necesarias para la implementación de algoritmos de control.

La figura 5.8 muestra el diagrama esquemático de la articulación del codo del robot Rotradi. El diseño de esta articulación fue una consecuencia del modelo dinámico, específicamente se proyecta el centro de masa lo más cercano al eje de giro. Para lograr esto es necesario insertarle a la barra un contrapeso que se encuentra localizado en su parte izquierda; el momento de inercia de la barra debe estar balanceado con los momentos de inercia del rotor del codo y con la articulación del hombro. Por eso adquiere esa forma geométrica, así como su grosor y peso de la barra.

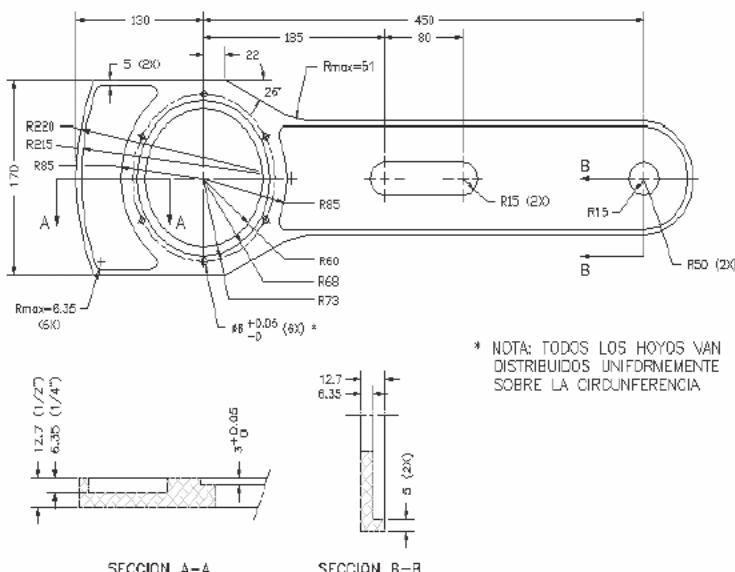


Figura 5.8 Eslabón de la articulación del codo de Rotradi.

Con la finalidad de beneficiarse del sistema mecánico y del equipo de cómputo, un ambiente interactivo debe ofrecer al usuario operación fácil

sobre la implementación y validación experimental de algoritmos de control sobre el robot manipulador. Ha sido desarrollado como un ambiente de programación orientado a la implementación de una clase general de algoritmos de control, el cual genera una interfase amigable al usuario para la validación experimental de controladores de movimiento para el robot experimental.

El ambiente de programación controla todos los aspectos de la ejecución experimental. Esto incluye inicialización, graficación, despliegue y registro de datos, cambios de parámetros en línea, así como el *retorno a casa* del robot (*home position*), el cual conduce al robot manipulador a su posición de inicio a través de un controlador tangente hiperbólico con compensación de gravedad. El retorno a casa es realizado cuando el usuario quiere suspender su experimento, ya sea para finalizar la sesión experimental o para repetirlo una vez más.

La fase de compilación y transferencia del algoritmo del usuario es realizada a través de comandos internos del medio ambiente. En esta fase es enlazado en forma automática un programa monitor, que incluye las funciones necesarias para la ejecución correcta del algoritmo de control sobre la tarjeta FPGA.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary En la etapa de ejecución, el algoritmo de control en cada periodo de muestreo de 2.5 msec emplea las posiciones y velocidades articulares, y con esa información genera las acciones de control aplicadas a cada articulación. Asimismo, exhibe, grafica y graba en tiempo real las variables de interés previamente seleccionadas por el usuario. La forma en que el medio ambiente obtiene la información de cada variable es mediante el acceso directo a la localidad de memoria de la variable en cuestión sin interrumpir la ejecución del algoritmo de control.

Cabe mencionar que el ambiente de programación incluye protección durante la realización del experimento. Los factores de seguridad que se han considerado son los límites en las velocidades y los pares de cada motor.

Adicionalmente incluye un paro de emergencia, para que en caso de fallo del algoritmo de control, entre la tarjeta FPGA en estado de espera, suspendiendo cualquier operación.

5.7 Resumen

El modelo dinámico de un robot manipulador de n gdl en coordenadas generalizadas o articulares representa los fenómenos propios de su naturaleza dinámica no lineal, multivariable y fuertemente acoplada. Contiene una serie de propiedades matemáticas que facilitan el análisis, diseño y desarrollo de estrategias de control. Asimismo, se ha presentado la conversión del modelo dinámico de coordenadas articulares al espacio cartesiano, teniendo un mapeo no lineal, y sus propiedades matemáticas adquieren características locales, debido a la exigencia en la matriz del jacobiano que debe tener rango completo. De manera natural, resulta la ecuación fundamental del control jacobiano transpuesto para espacio cartesiano, introducida por Suguru Arimoto en 1981: $\tau = J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_\chi$. Esta ecuación es la base del control cartesiano como: control de fuerza, impedancia, control de robots mediante información visual (*visual servoing*), teleoperación, etcétera.

A pesar de que la estructura matemática del modelo dinámico de un robot manipulador de n gdl está perfectamente estudiada, para finalidades prácticas en diversas aplicaciones resulta fundamental conocer varios aspectos del robot, entre ellos el valor numérico de cada uno de los parámetros de los eslabones del robot, tales como: masa, centros de masa, momentos de inercia y coeficientes de fricción. Para este propósito se ha presentado el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo, que hoy en día representa uno de los algoritmos de estimación más confiables, y por lo tanto más usado por sus características de convergencia y fácil implementación. Existe un total de 5 esquemas de regresión para identificar los parámetros del robot: modelo dinámico, dinámico filtrado, energía, potencia y potencia filtrada. Los dos primeros establecen un regresor vec-

torial, mientras que los 3 últimos resultan atractivos por su característica de regresión escalar.

Finalmente, se presenta una plataforma experimental científica diseñada en forma **ad doc** para realizar investigación, experimentación y fungir como una herramienta imprescindible para docencia, y al mismo tiempo convertirse en la infraestructura científica de calidad para soportar los programas de ingeniería y posgrado, así como formación de recursos humanos.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

5.8 Referencias selectas

Con la finalidad de complementar la información presentada en las diferentes secciones de este capítulo, se recomiendan las siguientes referencias:



5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para la teoría y fundamentos de la mecánica de Euler-Lagrange ver:



Dare A. Wells. “*Lagrangian dynamics*”. Schaum’s outlines. 1967.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Leonard Meirovitch. “*Methods of analytical dynamics*”. McGrawHill. 1970.



A. P. French. “*Mecánica newtoniana*”. Editorial Reverté. S. A. 1978.



Wolfram Stadler. “*Analytical robotics and mechatronics*”. McGraw Hill International Editions. 1995.



Donald T. Greenwood. “*Classical dynamics*”. Dover Publications Inc. 1997

-  Ahmed A. Shabana. “*Dynamics of multibody systems*”. Second Edition. Cambridge University Press. 1998.
-  Jerry B. Marion. “*Dinámica clásica de las partículas y sistemas*”. Editorial Reverté. S. A. 2000.
-  H. Goldstein. “*Mecánica clásica*”. Editorial Reverté. S. A. 2000.
-  M. R. M. Crespo da Silva. “*Intermediate dynamics*”. McGrawHill. 2004.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



5.3 Modelo dinámico

Las propiedades del modelo dinámico en coordenadas articulares o generalizadas fueron consultadas en:

-  Takegaki M. & S. Arimoto. “*A new feedback method for dynamic control of manipulators*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. 103: pp. 119–125. 1981.



Ortega R. & M. Spong. 1989. “*Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial*”. Automatica. 25(6): pp. 877–888 1989.



Jorge Angeles. “*Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*”. Springer. 1997.



R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Printice-Hall, Pearson. 2003.
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

 R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005.

 L. Sciavicco & B. Siciliano. “*Modelling and control of robot manipulators*”. Springer. 2005.

 Mark W. Spong, Seth Hutchinson & M. Vidyasagar. “*Robot modeling and control*”. John Wiley & Sons, Inc. 2006.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

5.4 Modelo dinámico cartesiano

El desarrollo de las propiedades del modelo dinámico cartesiano fueron depuradas y reformuladas de:

 Pablo Sánchez & Fernando Reyes “*Cartesian control for robot manipulators*”. Edit Intech Croatia. Robot manipulators, trends and development. pp. 165- 212. 2010.



5.5 Identificación paramétrica

 B. Armstrong, O. Khatib & J. Burdick, “*The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm*”. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. pp. 510–518, (1986).

 G. C. Goodwin & K. S. Sin. “*Adaptive filtering prediction and control*”. Prentice-Hall, NY. 1984.

M. Gautier & W. Khalil. “*On the identification of the inertial parameters of robot*”. Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control. Austin, Texas, pp. 2264–2269. 1988.

C. Canudas and A. Aubin. “*Parameters identification of robot manipulators via sequential hybrid estimation algorithms*”. Proc. IFAC'90 Congress, Tallin, pp. 178–183, (1990).

M. Prüfer, C. Schmidt & F. Wahl. “*Identification of robot dynamics with differential and integral models: a comparison*”. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Diego, California, Vol 1, pp. 340–345. 1994.

F. Reyes F. & R. Kelly. “*A direct drive robot for control research*”. Proc. IASTED International Conference, Applications of Control and Robotics. Orlando, FL. pp. 181–184. 1996

El modelo de regresión de potencia fue tomado de las siguientes referencias:

F. Reyes & R. Kelly. “*Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot*”. Robotica. Cambridge University Press. 15, pp. 563-571. 1997.

F. Reyes F. & R. Kelly. “*On parameter identification of robot manipulators*”. Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Albuquerque, New Mexico. April. pp. 1910-1915. 1997.

F. Reyes. and R. Kelly. “*An identification scheme for vision systems*”. International Federation of Automatic Control, Beijing P. R. China, July 5-9. Vol X, pp. 1400–1406. 1999.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

 F. Reyes, & E. Lopez. “*A new hamiltonian-based identification scheme for robot manipulators*”. Proceedings of the 5th WSEAS-IMMCCAS. Cancun, Mexico, May 11-14. pp. 126-131. 2005.



5.6 Robot experimental

 F. Reyes. & Jaime Cid. “*Rotradi: robot de transmisión directa de 3 gdl*”. Reporte interno de la Escuela de Ciencias de la Electrónica. BUAP. 1998.



F. Reyes. “*Celda robótica*”. Reporte técnico CONACYT 31927. 2002.

5.9 Problemas propuestos



Se presenta un conjunto de problemas propuestos para la reflexión, así como para mejorar las habilidades y conocimientos de dinámica de robots

670 manipuladores 53e439edb57461d757
ebrary



5.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

5.2.1 ¿Por qué se emplean las ecuaciones de Euler Lagrange en la obtención del modelo dinámico de un robot manipulador?

5.2.2 ¿Cuál es la interpretación física de la energía cinética?

5.2.3 Explique la energía potencial.

5.2.4 ¿Cómo interpreta el hamiltoniano?

5.2.5 Proporcione alguna interpretación física del lagrangiano.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary ALFAOMEGA



5.3 Modelo dinámico

5.3.1 Explicar cualitativamente el fenómeno inercial de un robot manipulador de n grados de libertad.

5.3.2 Explicar cualitativamente el fenómeno de fuerzas centrípetas y de Coriolis de un robot manipulador de n grados de libertad.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
5.3.3 ¿Qué es el fenómeno de fricción y por qué se dice ser disipativo? ebrary

5.3.4 Mencione las principales hipótesis que validan al modelo dinámico de un robot manipulador.

5.3.5 Demostrar la propiedad de antisimetría del modelo dinámico en coordenadas articulares.



5.4 Modelo dinámico cartesiano

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
5.4.1 ¿Cómo es la energía cinética cartesiana en el modelo dinámico (5.54)?

5.4.2 ¿Por qué la matriz jacobiana del robot debe ser de rango completo en el modelo dinámico cartesiano?

5.4.3 ¿Tiene singularidades la ecuación (5.52)?

5.4.4 ¿Se conservan las propiedades del modelo dinámico en coordenadas articulares al ser convertido en coordenadas cartesianas?

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



5.5 Identificación paramétrica

5.5.1 Considérese el siguiente sistema

$$\dot{x} = -\sin(x) + 0.768x^2$$

Obtenga el regresor de este sistema para encontrar los valores de $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ y realice la implementación en lenguaje MatLab empleando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo (5.84). Realice la simulación para la condición inicial $x(0) = 3.45$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

5.5.2 Obtenga el regresor del siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = -0.00456x + 0.00034u$$

donde $u = 1$.

Realice la implementación del regresor en MatLab empleando mínimos cuadrados recursivo (5.84).

5.5.3 Obtenga el regresor del siguiente sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \sin(t) \quad (5.115)$$

donde t es la variable del tiempo.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary Implemente en MatLab el regresor usando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo (5.84) para $t = 0 \dots 10$ segundos.

5.5.4 Implemente en MatLab para el caso de un péndulo-robot los siguientes modelos de regresión usando mínimos cuadrados (5.84):

- modelo de energía del ejemplo 5.8.
- modelo dinámico y dinámico filtrado del ejemplo 5.7.
- modelo de la potencia filtrada del ejemplo 5.9.

¿Qué criterios toma para seleccionar el parámetro λ ?

5.5.5 Implemente en MatLab para el caso de un robot de 2 gdl los siguientes modelos de regresión usando mínimos cuadrados (5.84):

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ebrary ALFAOMEGA

- a) modelo dinámico y dinámico filtrado del ejemplo 5.10.
- b) modelo de energía del ejemplo 5.11.
- c) modelo de la potencia filtrada del ejemplo 5.12.



5.6 Robot experimental

5.6.1 Realice una búsqueda en las principales universidades y centros de investigación de México para determinar el tipo y características de la infraestructura de robótica que poseen.

Producto de esa búsqueda de información:

- a) ¿Qué porcentaje de esa infraestructura es comprada?
- b) ¿Qué porcentaje de esa infraestructura fue diseñada y desarrollada en el país (tecnología nacional)?
- c) ¿Cómo ha impactado en beneficio de alumnos, planta académica, institución y sociedad?
- d) ¿Qué conclusiones generales puede presentar?

6

CAPÍTULO

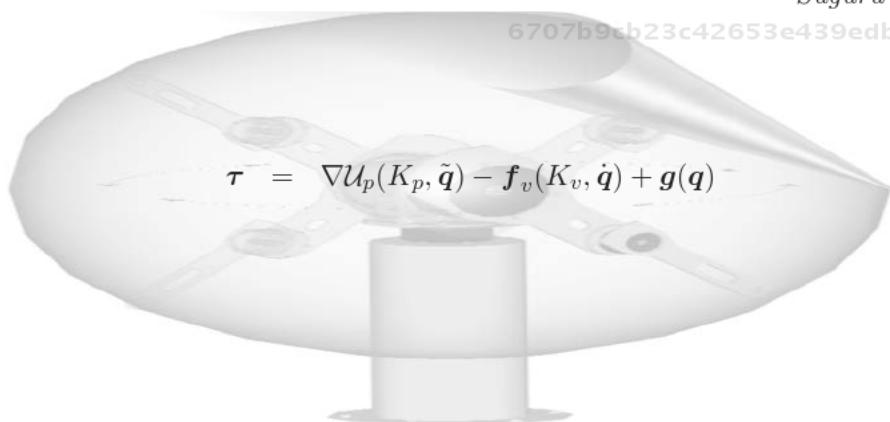
Control de posición de robots manipuladores

La robótica es matemática en movimiento.

Suguru Arimoto

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\boldsymbol{\tau}^- = \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\boldsymbol{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\boldsymbol{q}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{q})^-$$



- 6707b9cb23c42653e439e
ebrary
- 6.1 Introducción**
 - 6.2 Regulación**
 - 6.3 Moldeo de energía**
 - 6.4 Índice de desempeño**
 - 6.5 Aplicaciones del control de posición**
 - 6.6 Resumen**
 - 6.7 Referencias selectas**
 - 6.8 Problemas propuestos**

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos

Presentar la metodología de moldeo de energía como técnica moderna de control automático para análisis y diseño de nuevas estructuras de control de posición para robots manipuladores.

Objetivos particulares:



Análisis y diseño de una familia extensa de algoritmos de control.



Aplicaciones de control de posición en control punto a punto, guiado de robots e implementación de instrucciones robot para programación industrial.



Desempeño de esquemas de control.

Competencias

Adquirir la habilidad y grado de conocimientos en:



Diseño de nuevos esquemas de control de alto desempeño.



Zonas de operación de servo amplificadores.



Desarrollo tecnológico de robots industriales.



Aplicaciones de control punto a punto.

6.1 Introducción



Hoy en día, la temática del control de robots manipuladores ha atraído la atención de la comunidad científica de robótica. Un punto de interés se ubica en el diseño de sistemas de control para robots manipuladores en aplicaciones industriales tales como estibado de cajas, ensamble, traslado, pintado de objetos, etc. Puesto que los robots industriales son capaces de realizar correctamente una variedad de actividades, a simple vista parecería innecesario desarrollar investigación sobre el tema de control de robots manipuladores. Sin embargo, es importante resaltar que la ejecución de la tarea encomendada al robot requiere alto desempeño y exactitud en sus movimientos.

El diseño de nuevos esquemas de control implica grandes retos teóricos que mejoran sustancialmente problemas de origen práctico. Además, su estudio resulta indispensable en aplicaciones que no pueden ser llevadas a cabo por medio de algoritmos de control tradicionales. De ahí que el diseño de controladores sigue siendo un problema de gran interés. Este capítulo está destinado a presentar la metodología de **moldeo de energía** para diseñar una familia extensa de algoritmos de control de robots manipuladores.

Algoritmo de control

En la práctica, una estrategia de control se lleva a la etapa de evaluación experimental o simulada a través de reglas gramaticales o sintaxis de un lenguaje de programación como por ejemplo C, C++, C#, MatLab, etc. Un algoritmo es un conjunto de reglas o instrucciones bien definidas para realizar un procedimiento; en este caso es la implementación de la ecuación del esquema de control. Por lo tanto, para los propósitos de la presente obra el término algoritmo de control será un sinónimo del concepto de programar o implementar la ecuación de la ley de control para su proceso de aplicación práctica, ya sea a nivel simulación o evaluación experimental.

El problema general de control en coordenadas articulares de robots manipuladores es el control de trayectoria o *control de movimiento*, el cual consiste en determinar los pares aplicados a los servoactuadores que forman las articulaciones, de tal forma que las posiciones asociadas a las coordenadas articulares del robot $\mathbf{q}(t)$ sigan con exactitud a la posición deseada $\mathbf{q}_d(t)$ variante en el tiempo.

El control de posición o regulación de control de robots manipuladores es un caso particular de control de movimiento en el cual no hay una referencia variante en el tiempo que el robot haga seguimiento como en el caso de control de trayectoria, más bien es un punto constante en el tiempo al



Control de posición

Dentro de las aplicaciones industriales el control de posición ocupa un papel destacado; hoy en día la gran mayoría de aplicaciones de control punto a punto como trasladado y pintado de objetos, estibado y pintura de carrocerías, etc., se realizan a través de control de posición. El problema de control de posición también se conoce como regulación: consiste en mover el extremo final del robot manipulador independientemente de su posición inicial $\mathbf{q}(0)$ hacia una posición deseada constante \mathbf{q}_d . Los puntos intermedios entre la posición inicial y la referencia deseada no son controlados como tal, forman parte de la etapa transitoria de la respuesta del robot incluido en la señal de error $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ definida como la diferencia entre la posición deseada y la posición actual del robot $\tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)$. El punto final \mathbf{q}_d es la posición clave donde se realiza el control.

El objetivo de control se cumple cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\mathbf{q}}(t)] = [\mathbf{0}]$.

que se le denomina posición deseada o *set point*. El objetivo de control es posicionar el extremo final del robot en ese punto y que permanezca ahí de manera indefinida. Por supuesto, para propósitos prácticos industriales una vez que el extremo final del robot alcanza el punto deseado, deberá pasar uno o más períodos de muestreo para cambiar de valor el punto deseado, entonces el actual punto deseado tomará el papel de condición inicial y el extremo final del robot se moverá al nuevo punto deseado, y así sucesivamente. Este concepto da la posibilidad de interpolar curvas para que el robot pueda seguir la trayectoria a través de un esquema de control de posición con puntos cercanos entre sí. En control automático se le denomina **control punto a punto**. Para realizar esta aplicación es necesario que el esquema de control que forma parte de la ecuación en lazo cerrado genere un punto de equilibrio asintóticamente estable, ya que no dependería de las condiciones iniciales.

Es importante aclarar que en control punto a punto no es controlada la velocidad de movimiento como en el caso de control de trayectoria, donde el error de posición y error de velocidad son controlados simultáneamente.

6.2 Regulación

El problema de control de posición o regulación consiste en mover el extremo final del robot manipulador desde cualquier posición inicial hacia una posición deseada. Esto significa que la *i*-ésima articulación del robot deberá moverse hacia la respectiva *i*-ésima posición deseada. Un ejemplo ilustrativo se muestra en la figura 6.1 donde el robot parte de la posición de reposo (posición de casa) para llegar a la configuración deseada permaneciendo indefinidamente en el punto de equilibrio. Formalmente, el objetivo del problema de control de posición está determinado por encontrar una ley de control τ que proporcione los pares aplicados a las articulaciones o servomotores del robot, de tal forma que la posición actual del robot $\mathbf{q}(t)$ y la velocidad articular de movimiento $\dot{\mathbf{q}}(t)$ tiendan asintóticamente hacia la posición deseada \mathbf{q}_d y velocidad cero, respecti-

vamente, sin importar las condiciones iniciales. Es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Nótese que en la figura 6.1 el robot se encuentra en su punto de equilibrio,

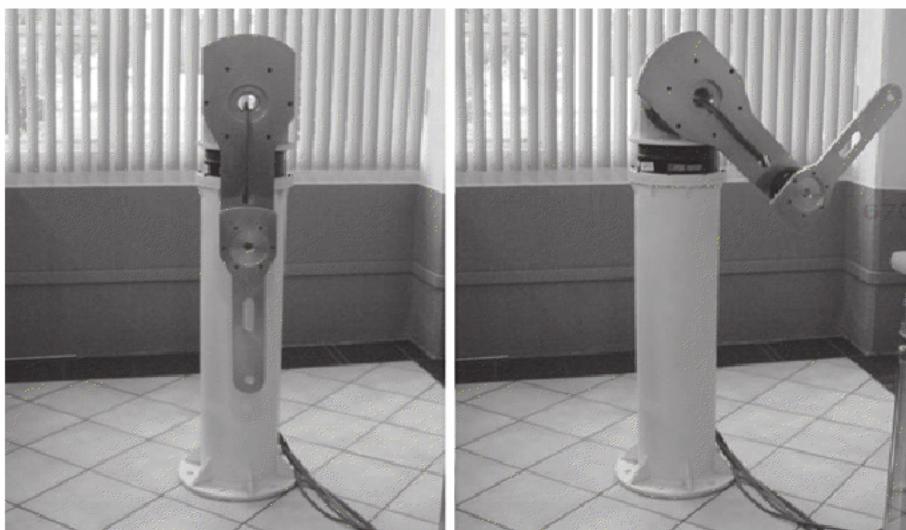


Figura 6.1 Control de posición: configuración inicial y deseada.

lo que significa que el objetivo de control (6.1) se cumplió sin depender de las condiciones iniciales, entonces la posición deseada se alcanza, por lo que la posición del extremo final robot permanece constante ($\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$) y por lo tanto la velocidad de movimiento es cero ($\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$).

Un algoritmo de control de posición o regulación es una fórmula o ecuación cuya principal característica es generar un atractor en la ecuación de lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del algoritmo de control. Lo anterior significa que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable. La importancia de esta problemática radica en proponer estrategias de control que no sólo cumplan con el objetivo de control $\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{\mathbf{q}}^T(t) \quad \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$, sino también que el desempeño práctico sea alto.

El **desempeño** de un algoritmo de control se refiere a realizar de manera



Control PD

El algoritmo de control proporcional derivativo (PD) es el más conocido y empleado en el área de control automático. En los inicios de la robótica (1950), este esquema de control se empleaba para controlar a los robots manipuladores. En esa época ya se conocía como esquema de control al algoritmo Todo/Nada, también conocido como control On/Off. No obstante, su desempeño práctico era muy pobre comparado al control PD. Durante muchos años el algoritmo de control PD fue empírico, es decir carecía de un sustento científico, y su empleo se reducía a la experimentación o aplicaciones prácticas por intuición. La demostración formal de estabilidad para la ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del robot manipulador y el algoritmo de control PD se realizó en 1981 por Takegaki y Arimoto, sentando las bases para el desarrollo de control de robots manipuladores.



6.2.1 Control proporcional-derivativo

El algoritmo de control *proporcional-derivativo* (PD) es el esquema de controlador más simple y más popular que puede ser usado en robots manipuladores. En 1981, Takegaki y Arimoto demostraron que la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador y el control proporcional derivativo tiene un punto de equilibrio global y asintóticamente estable. La demostración consistió en formular una función de energía o función candidata de Lyapunov compuesta por la energía cinética del robot manipulador, más un término que realiza el papel de energía potencial artificial (una función cuadrática del error de posición) tal que su potencia o derivada temporal de la energía sea una función semidefinida negativa. Empleando el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se demuestra la estabilidad asintótica del punto de equilibrio en forma global.

Para propósitos académicos, a continuación se explican en detalle todos los pasos de la demostración matemática realizada por Takegaki y Arimoto en 1981, de la estabilidad asintótica global del punto equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por el control PD y de la dinámica del robot manipulador de n gdl. El lector puede consultar en la sección de referencias selectas el trabajo presentado por Takegaki y Arimoto en 1981, donde por razones de espacio no se exponen los detalles de la demostración.

El control proporcional derivativo más compensación de gravedad (PD) está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) \quad (6.2)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de error de posicionamiento que se define como la diferencia entre la posición deseada \mathbf{q}_d y la posición actual del robot \mathbf{q} . $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa la cual es una matriz definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado en variables de estado que definen el problema de control de posición es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

la cual es una ecuación diferencial autónoma.

El diagrama a bloques del control proporcional derivativo con compensación de gravedad se muestra en la figura 6.2.

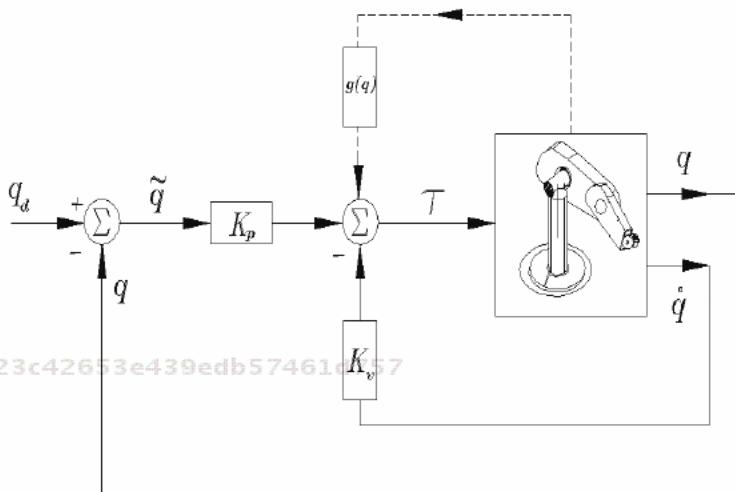


Figura 6.2 Diagrama a bloques del control PD

La posición articular del robot \mathbf{q} se retroalimenta para generar la señal de error de posición $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$. La velocidad de movimiento $\dot{\mathbf{q}}$ se emplea para inyección de amortiguamiento. Obsérvese que el signo menos de la acción de control derivativa sirve para contrarrestar la energía al control proporcional. El término de compensación de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es una componente esencial para la unicidad del punto de equilibrio. Sin embargo,

**Suguru Arimoto
(1936....)**



Suguru Arimoto nació el 3 de agosto de 1936 en Hiroshima, Japón.

Licenciado en matemáticas por la Universidad Kyoto en 1959. Trabajó para eléctrica de Oki de 1959 a 1961.

Doctor en Ingeniería de Control por la Universidad de Tokio en 1967. De 1962 a 1967 fue investigador asistente en el Departamento de Ingeniería de la Universidad de Tokio. En 1968 estuvo en la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la misma Universidad. Desde 1997 ha sido profesor del Departamento de Robótica de la Universidad de Ritsumeikan. El profesor Arimoto ha realizado importantes contribuciones en la teoría de control, cibernetica, máquinas inteligentes; particularmente en robótica propuso las bases de moldeo de energía para control de posición, diversos esquemas de pasividad, control de impedancia, control cartesiano, etc.

De 1995 a 1997 fue el presidente de la Sociedad de Robótica de Japón (RSJ). Ha recibido múltiples reconocimientos.

go, esta condición no es suficiente, también se requiere que las ganancias proporcional y derivativa sean matrices definidas positivas.

El término $g(\mathbf{q})$ se requiere en la implementación del control PD, y se debe conocer como parte de la dinámica parcial del robot si el movimiento es en un plano vertical o en general en su espacio tridimensional. Para el caso en que el movimiento sea en un plano horizontal, la energía potencial es constante y el gradiente de la energía potencial o par gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$ es cero.

Para realizar el análisis sobre la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ se tienen las siguientes consideraciones:



Obsérvese que en la primera componente de la ecuación (6.3) en lazo cerrado $-\dot{\mathbf{q}} = -I\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, puesto que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.

Por otro lado, en la segunda componente de la ecuación (6.3) se tiene lo siguiente:



Por propiedades matemáticas del modelo dinámico del robot manipulador la matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y es definida positiva (propiedad 5.1).



Por diseño, las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas.



Debido a que se ha demostrado para la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.3) que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, entonces la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisface $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (propiedad 5.7).



Por otro lado $K_p\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia proporcional es una matriz definida positiva, es decir $K_p > 0$.

Por lo tanto, queda demostrado que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.3) existe y es único.

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.3) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \quad (6.4)$$

El primer término de esta ecuación es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo término realiza el papel de energía potencial artificial, la cual es una función cuadrática del error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ y por diseño la ganancia proporcional K_p es una matriz definida positiva. Por lo tanto la función $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva.

La derivada temporal de la función de energía (6.4) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (6.5)$$

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (6.6)$$

La derivada del error es $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$ debido a que la posición deseada \mathbf{q}_d es una constante. Sustituyendo la aceleración contenida en la segunda componente de la ecuación (6.3) se obtiene:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} - \cancel{\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad (6.8) \end{aligned}$$

Obsérvese que el primero y último término de (6.8) se cancelan (ver capítulo 3, Preliminares matemáticos, sección 3.2.1 producto interno $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$)

$\mathbf{y}^T \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$). Es decir, para este caso si $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{y} = K_p \tilde{\mathbf{q}}$, entonces $\underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}}_{\mathbf{x}^T \mathbf{y}} = \underbrace{\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\mathbf{q}}}_{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}$, donde $K_p^T = K_p$. Además, empleando la propiedad de antisimetría del modelo dinámico 5.9, agrupando los términos tercero y cuarto de la ecuación (6.8) se obtiene:

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} = 0.$$

Tomando en cuenta los anteriores argumentos, la derivada temporal de la función de energía (6.4) obtiene la siguiente forma:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (6.9)$$

es decir, cumple con el teorema de estabilidad de Lyapunov, por lo que queda demostrada la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.3).

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.3) es una ecuación diferencial autónoma, entonces es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (6.10)$$

Nótese que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$, si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ puede ser cualquier vector. Para que la solución $[\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación en lazo cerrado (6.3) pertenezca a Ω es necesario que $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$.

Además, puesto que $K_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ sólo si $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, entonces el máximo conjunto invariante en Ω es $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \right\} \quad (6.11)$$

puesto que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función positiva definida con un único y global mínimo en $[\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}]^T = \mathbf{0}$, entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en Ω . Por lo tanto, usando el principio de invariancia

de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Considérese un estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones de la ecuación en lazo cerrado (6.3) sobre las cotas de las trayectorias. Debido a que la ecuación (6.4) es una función definida positiva y su derivada con respecto al tiempo (6.9) es una función semidefinida negativa, entonces la función de energía es decreciente, es decir:

$$0 < V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

por lo que se deduce que:

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}(t)^T K_p \tilde{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)) \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)) \quad \forall t \geq 0,$$

utilizando el teorema 3.1 de Rayleigh–Ritz se obtienen las siguientes cotas:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0))}{\lambda_{\min}(K_p)}} \leq \sqrt{\frac{\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)\|^2 \beta + \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 \lambda_{\max}(K_p)}{\lambda_{\min}(K_p)}} \quad (6.13)$$

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0))}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}} \leq \sqrt{\frac{\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)\|^2 \beta + \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|^2 \lambda_{\max}(K_p)}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}} \quad (6.14)$$

Para el controlador PD con compensación de gravedad pueden obtenerse ciertas condiciones que permitan obtener la sintonización de las ganancias proporcional y derivativa K_p y K_v , respectivamente, de tal forma que el controlador permanezca en acciones de control acotadas. Para esta finalidad el objetivo es mantener $\tau_i \leq \tau_i^{\max}$ donde τ_i^{\max} es el par máximo

capaz de suministrar el i -ésimo actuador, la selección de K_p, K_v se realiza de la siguiente manera:

$$\alpha_1 \lambda_{K_p}^{\max} + \alpha_2 \lambda_{K_v}^{\max} \leq \tau_i^{\max} \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \alpha_1 \quad \forall t \geq 0,$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq \alpha_2 \quad \forall t \geq 0$$

donde

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{\lambda_{K_p}^{\min}}} \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| + \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{\max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}} \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\| \quad (6.16)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}} \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| + \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{\max}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}}} \|\tilde{\mathbf{q}}(0)\|. \quad (6.17)$$

donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\min}, \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}, \lambda_{K_p}^{\max}$, y $\lambda_{K_p}^{\min}$ representan los valores propios mínimos y máximos de las matrices de inercia $M(\mathbf{q})$ y de la ganancia proporcional K_p , respectivamente.



6.2.2 Análisis cualitativo del control PD

El algoritmo de control proporcional-derivativo más compensación de gravedad (6.2) tiene en su estructura matemática el esquema de control proporcional y la acción de control derivativo. El control proporcional está formado por $K_p\tilde{\mathbf{q}}$ donde K_p es una matriz definida positiva denominada ganancia proporcional. El nombre de *control proporcional* resulta más que evidente, puesto que el producto de la ganancia proporcional por el error de posición justifica por sí sólo su nombre; en otras palabras, la ley de control es directamente proporcional al error de posición. La acción de control derivativa formada por $K_v\dot{\mathbf{q}}$ donde K_v es una matriz definida positiva denominada ganancia derivativa tiene el efecto de amortiguamiento o freno mecánico a través de la inyección de la velocidad

articular \dot{q} . Normalmente sucede que el término $K_v \dot{q}$ se confunde como control derivativo, lo cual es una mala interpretación, ya que siempre debe ser visto como una acción de control derivativo cuya finalidad es mejorar el desempeño del control proporcional.

La estructura del control PD tiene un término parcial de la dinámica del robot, el par gravitacional, el cual se emplea en robots que se mueven en el plano vertical o en general en el espacio tridimensional. En los robots cuyo movimiento se encuentra restringido a un plano horizontal, la energía potencial es constante y por lo tanto el par gravitacional es cero.

Para entender el funcionamiento práctico del control proporcional derivativo con compensación de gravedad, considérese un péndulo-robot como el de la figura 5.2: se desea colocar el extremo final del péndulo en $q_d = 90$ grados. Las condiciones iniciales son: posición $q(0) = 0$ grados y para la velocidad $\dot{q} = 0$ grados/seg.; la posición de casa es colocada sobre el eje y_- .

El estudio cualitativo del control PD se llevará a cabo en dos fases. La primera etapa consiste en estudiar únicamente el esquema de control proporcional sin incluir la acción derivativa, entonces se observará la respuesta del péndulo sin freno mecánico, es decir con $k_v=0$. La segunda etapa consiste en incluir el efecto de amortiguamiento.

Con respecto a la primera fase, la ganancia derivativa k_v es cero, entonces se obtiene lo siguiente:

$$\tau = k_p \tilde{q} + mglc \operatorname{sen}(q) \quad (6.18)$$

Para una fácil interpretación en los resultados de las gráficas de error de posición y posición articular se encuentran en grados y la velocidad de movimiento en grados/seg. La figura 6.3 muestra la respuesta del péndulo-robot cuando se encuentra bajo el control del esquema proporcional más compensación de gravedad. Obsérvese que la respuesta del péndulo-robot



Control PD péndulo

Programas escritos en código fuente para MatLab que realizan simulación de algoritmos de control con el péndulo robot se encuentran disponibles en el sitio web del libro.

En este mismo portal, también, pueden ser descargada documentación de análisis comparativo del algoritmo de control PD contra nuevos esquemas diseñados a través de moldeo de energía.

presenta un estado transitorio abrupto compuesto de varios sobre impulsos que rebasan la referencia deseada de 90 grados; este tipo de respuesta corresponde al escenario típico del control proporcional cuando la acción derivativa es cero.

El primer pico llega a 157.6 grados en tan sólo 0.5 segundos, los demás sobre impulsos disminuyen su amplitud paulatinamente hasta alcanzar el estado estacionario en 3 segundos. El valor de la posición en estado estacionario es de 89.472 grados, es decir el error permanente \tilde{q} es de 0.528 grados. Una desventaja característica del algoritmo de control proporcional es que el robot exhibe una respuesta transitoria con varios sobre impulsos, mientras que en estado estacionario presenta un error permanente (conocido como *offset*), esto significa que el error de posición $\tilde{q}(t)$ tiende a una constante diferente de cero, lo cual se debe al fenómeno de fricción estática.

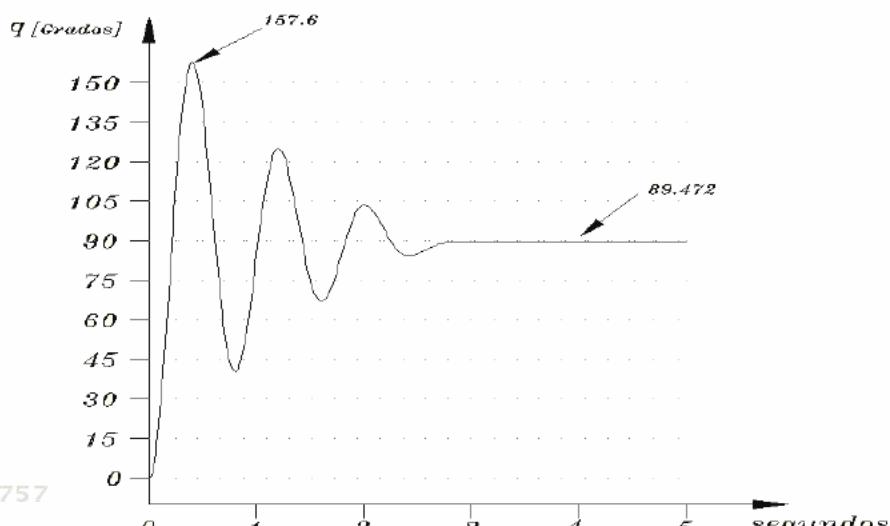


Figura 6.3 Posición del péndulo-robot: control proporcional más compensación de gravedad.

cional es que el robot exhibe una respuesta transitoria con varios sobre impulsos, mientras que en estado estacionario presenta un error permanente (conocido como *offset*), esto significa que el error de posición $\tilde{q}(t)$ tiende a una constante diferente de cero, lo cual se debe al fenómeno de fricción estática.

Cuando el péndulo se encuentra en estado estacionario la siguiente ecuación

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

gobierna su comportamiento

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} [k_p \tilde{q} - f_e] \end{bmatrix}$$

la fricción estática f_e genera un número infinito de puntos de equilibrios de la ecuación en lazo cerrado, $k_p \tilde{q} - f_e = 0$, entonces el error de posición queda confinado a la región $-\frac{f_e}{k_p} \leq \tilde{q} \leq \frac{f_e}{k_p}$, o bien $|\tilde{q}| \leq \frac{f_e}{k_p}$.

Por lo tanto, es verdadera la frase común que se maneja en ingeniería: **el error de posición disminuye, aumentando la ganancia proporcional.**

Comúnmente, en control automático se acostumbra a describir los aspectos prácticos o cualitativos de algoritmos de control con referencia a la gráfica del error de posición del robot, más que referirse a la gráfica de la posición. Esta característica se debe a que el algoritmo de control está diseñado para lograr la convergencia asintótica $\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{q}(t), \dot{q}(t)]^T = [0, 0]^T$. Es decir, si $\tilde{q}(t) = 0$, entonces $q(t) = q_d$. Esta afirmación se encuentra en la gráfica 6.4 donde se muestra la tendencia asintótica del error de posición $\tilde{q}(t)$ del péndulo-robot hacia cero.

La gráfica del error de posición 6.4 contiene la información de la gráfica de la posición 6.3 y viceversa. Por ejemplo, en la gráfica de posición del robot 6.3, el error se encuentra representado en el lado izquierdo del perfil de la curva de la posición, rotado 180 grados hacia abajo como si fuera visto en un espejo colocado en forma perpendicular sobre la flecha del eje de posición $q(t)$. Este efecto se puede ver en la figura 6.5. Evidentemente, el eje del error de posición $\tilde{q}(t)$ tiene su propia escala. El eje del tiempo sigue siendo igual para ambas gráficas. De manera equivalente, la gráfica del error de posición 6.4 ya se encuentra auto contenida en la gráfica de la posición. La parte fundamental para describir el desempeño de un algoritmo de control con los resultados de posición o del error de posición resulta de una adecuada interpretación de cualquiera de esas gráficas.

La figura 6.5 muestra simultáneamente la información de la posición y



Videos del péndulo

En la página web del libro se encuentran disponibles una serie de videos que contienen experimentos que explican los aspectos fundamentales del algoritmo de control proporcional derivativo con el péndulo robot de transmisión directa. Se destaca el funcionamiento cualitativo del control proporcional sin la acción de control derivativa, los sobre impulsos que presenta en régimen transitorio, así como la disminución de éstos incluyendo el efecto de amortiguamiento a través de la inyección de velocidad de la acción de control derivativa. Respecto de la exposición teórica hecha, estos videos son una validación experimental de la región de atracción y la estabilidad asintótica de las variables de estado error de posición y velocidad articular hacia el punto de equilibrio.

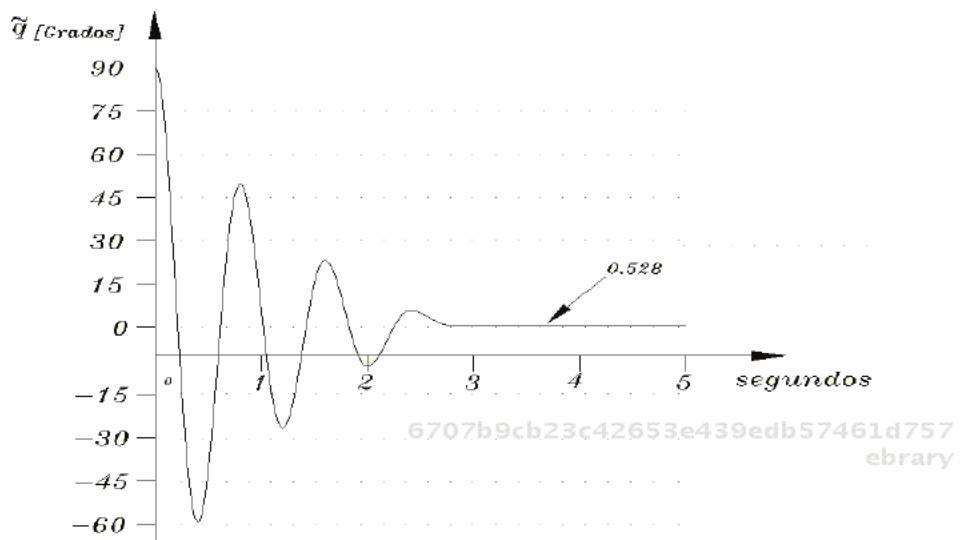


Figura 6.4 Error de posición: control proporcional más compensación de gravedad.

del error de posición del péndulo-robot. Nótese que mientras la posición en $q(0) = 0$ grados, el error de posición $\tilde{q}(0) = 90 - q(0) = 90$ grados. La magnitud del primer pico de la posición corresponde a 157.6 grados, para $t = 0.4$ segundos o de manera equivalente $\tilde{q}(0.4) = -67.6$ grados. La magnitud de la posición en estado estacionario es de 89.472 grados o $\tilde{q} = 0.525$ grados, ambos datos son equivalentes entre sí.

La figura 6.6 muestra la evolución en el tiempo del par aplicado al péndulo-robot. Obsérvese que el perfil del par es muy parecido a la gráfica del error de posición. Esta similitud no es casual, más bien es natural debido a que la ley de control es directamente proporcional al error de posicionamiento. En el régimen estacionario, la magnitud que mantiene el par aplicado es de 0.5826 Nm, este valor incluye el error de posicionamiento (0.528 grados o 0.00921 rad), la ganancia proporcional $k_p = 10\text{Nm/rad}$ y el valor del par gravitacional de 0.4905 Nm. Por esto, la magnitud del control proporcional debido a este error de posicionamiento es (por ejemplo en $t = 4$ segundos, $q(4) = 89.472$ grados) $\tau(4) = k_p \tilde{q}(4) + mgl_c \sin(89.472 \frac{\pi}{180}) = 10 \cdot 0.00921536 + 0.4905 = 0.5826$ Nm.

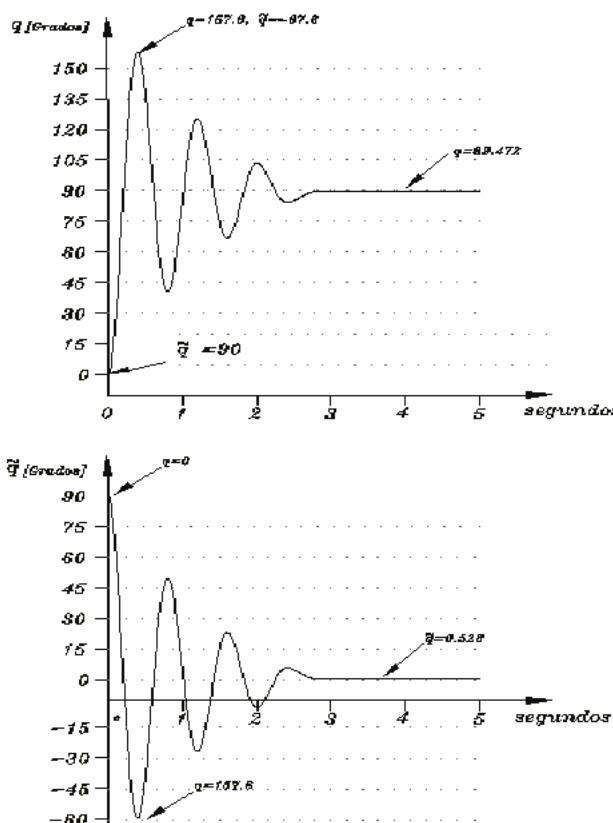
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 6.5 Comparación cualitativa de la respuesta de posición y del error de posición.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

En la gráfica izquierda de la figura 6.7 se muestra la trayectoria que sigue el extremo final del péndulo en su espacio de trabajo xy . Obsérvese que el péndulo exhibe fluctuaciones muy pronunciadas, esto se debe a que no existe la acción de control derivativa, entonces el algoritmo de control aplica toda la energía disponible al péndulo, provocando picos con grandes amplitudes en la posición recorriendo una trayectoria grande que inicia desde su posición de casa ubicada sobre el eje y_- hasta colocarse en el primer cuadrante ($q = 157.6$ grados) para el primer impulso y regresando al cuarto cuadrante, cuando la velocidad cambia de signo positivo a negativo. Así sucesivamente hasta posicionarse cerca del punto deseado de 90 grados.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

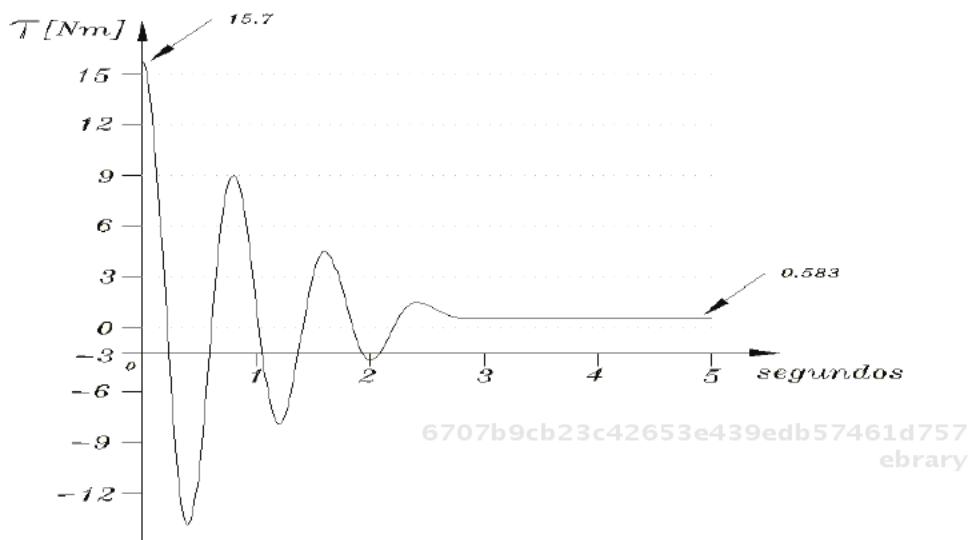


Figura 6.6 Par aplicado del control proporcional más compensación de gravedad sobre el péndulo-robot.

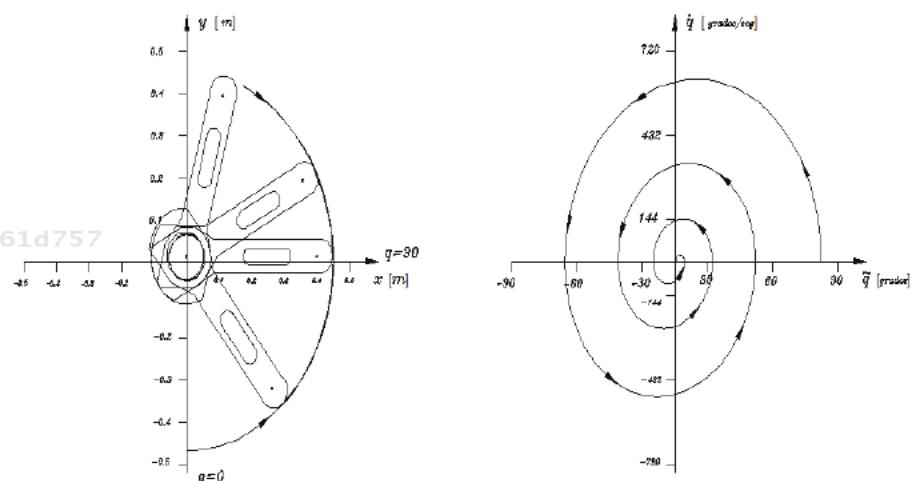


Figura 6.7 Diagrama fase y trayectoria dentro del espacio de trabajo del péndulo-robot con control proporcional.

En la gráfica derecha de la figura 6.7 se presenta en el espacio de estado el plano fase \dot{q} versus \tilde{q} . La condición inicial es $[q(0), \dot{q}(0)]^T = [0, 90]^T$

grados. Se observa un rápido incremento en la velocidad del péndulo, el cual se mueve en la dirección del primer al cuarto cuadrante, esto se ve reflejado en la trayectoria exterior de la gráfica izquierda de la figura 6.7.

Cuando el error de posición \tilde{q} es cero, la velocidad $\dot{q} = 614$ grados/segundo tiene un máximo, como consecuencia el péndulo no se puede detener en la posición deseada debido al efecto inercial que tiene en ese instante, entonces el péndulo invade el primer cuadrante del espacio de trabajo xy de la gráfica izquierda de la figura 6.7. El péndulo continua su movimiento hasta detenerse momentáneamente, es decir $\dot{q}(t) = 0$ grados/segundo y $\ddot{q}(t) = -67.8$ grados, lo que corresponde al primer pico del primer sobre impulso en la posición del péndulo $q(t) = 157.6$ grados. El signo de la velocidad $\dot{q}(t)$ es negativo, entonces el péndulo se mueve hacia la dirección de casa, es decir se mueve del primer cuadrante hacia el cuarto cuadrante. Hay un total de 6 cruces por cero de la velocidad articular $\dot{q}(t)$. Tres de esos cruces corresponden a picos de los sobre impulsos positivos y tres picos negativos. Debido a que la condición inicial se encuentra dentro de la región de atracción del punto de equilibrio, entonces el atractor va *atrapando* a las variables $[\dot{q}(t), \ddot{q}(t)]^T$ conforme el tiempo evoluciona, hasta que quedan estacionarias en una vecindad cercana al punto de equilibrio.

Generalmente, los sobre impulsos se interpretan como un tipo de respuesta con pobre desempeño, son producto de un efecto de amortiguamiento nulo; se requiere de un término de acción de control derivativa que esté incluido en la ley de control para mejorar la respuesta. La acción derivativa se anticipa a los sobre impulsos, dosificando la energía del control proporcional entregada al péndulo, entonces la respuesta en la posición del robot es mucho más suave, se eliminan los sobre impulsos, reduciendo significativamente posibles oscilaciones.

Ahora se procede con la segunda fase del análisis cualitativo del control proporcional derivativo con compensación de gravedad. Para tal efecto, se mantiene el mismo valor en la ganancia proporcional $k_p=10$ Nm/rad y se sintoniza la ganancia derivativa $k_v=2$ Nm-rad/seg que corresponde al



Sintonía de ganancias

La sintonía de las ganancias proporcional y derivativa del algoritmo de control es el procedimiento para encontrar los valores numéricos de cada ganancia que permitan obtener una respuesta adecuada en el robot. Generalmente la ecuación en lazo cerrado formado por la dinámica del robot y el algoritmo de control representan una ecuación diferencial de primer orden no lineal, por lo que procedimientos de sintonía empleados en sistemas lineales tales como Nyquist, Bode, lugar de raíces, etc., no se pueden aplicar a sistemas no lineales. Por lo tanto, hoy en día para el problema de regulación o control de posición no existe una metodología científica para sintonizar las ganancias del controlador. El procedimiento actual es empírico, es decir en base a prueba y error. Consiste en proponer valores iniciales a las ganancias y dependiendo de la forma de la respuesta del robot, se ajustan las ganancias hasta obtener una respuesta satisfactoria de acuerdo con la aplicación. En este tipo de procedimiento la experiencia del usuario es fundamental.

20 % del valor de la ganancia proporcional. La figura 6.8 muestra la simulación de la respuesta de posición articular péndulo robot con el control PD más compensación de gravedad. Con la inyección de amortiguamiento la respuesta del péndulo es mucho más suave en la etapa transitoria, eliminando sobretiros como se muestra en la figura 6.8.

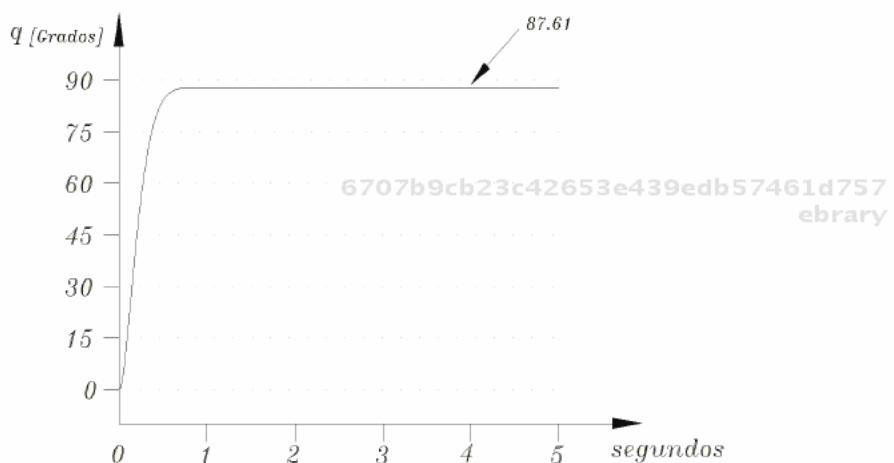


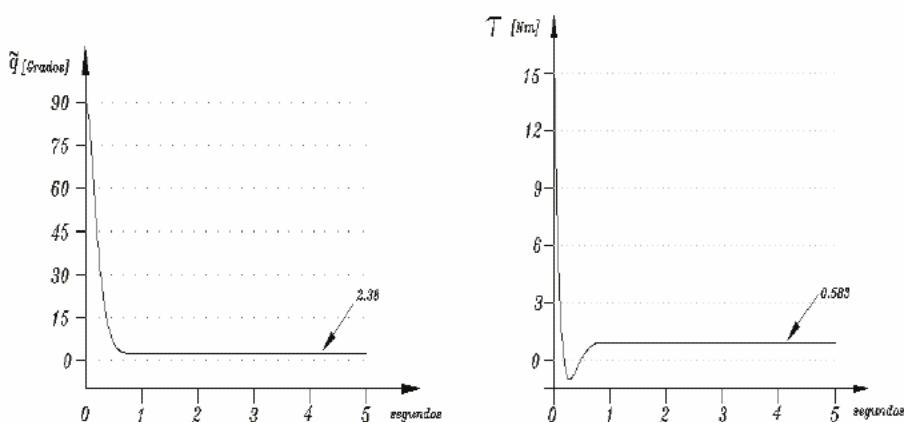
Figura 6.8 Posición del péndulo bajo el esquema de control pd.

Note el signo menos que precede al término de la acción derivativa del control PD $\tau = k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + g(q)$, significa que la acción derivativa dosifica la energía entregada al servomotor del péndulo-robot, cuya consecuencia es que los sobre impulsos se atenúen o desaparezcan; este efecto depende evidentemente del valor en la sintonía de las ganancias proporcional y derivativa. A medida que la ganancia derivativa aumenta, manteniendo constante la ganancia proporcional, los sobre impulsos se van atenuando hasta desaparecer. El estado transitorio es mucho más suave, por lo que el tiempo para alcanzar el estado estacionario es más grande. El efecto de amortiguamiento causado por la acción de control derivativa es principalmente en el estado transitorio; en estado estacionario la posición tiende a ser una constante, por lo que la velocidad es cero, desapareciendo el efecto de amortiguamiento.

La parte izquierda de la figura 6.9 muestra la gráfica del error de posi-

ción, se trata de una curva suave sin sobretiros alcanzando el estado estacionario en forma asintótica. En estado estacionario no presenta oscilaciones o rizo. El par aplicado de la ley de control se encuentra en la parte derecha de la figura 6.9, tiene una similitud con la forma del perfil del error de posición. En el intervalo de 0.3 a 0.6 segundos, existe un par negativo cuyo pico no rebasa -1 Nm, en contraste con la figura 6.6 donde el par aplicado presenta varias fluctuaciones de magnitud considerable. Además, obsérvese que la influencia de ese pequeño pico negativo de la ley de control PD no se ve reflejado en la curva del error de posición.

La figura 6.10 describe el desplazamiento del péndulo en su espacio de



ebrary Figura 6.9 Control proporcional derivativo.

trabajo xy , así como la trayectoria que presenta su diagrama fase. Ambas gráficas son suaves y exhiben un comportamiento monótono. La velocidad de desplazamiento es mucho menor debido a la influencia del efecto de amortiguamiento, por lo tanto no se generan sobre impulsos.

Si la ganancia proporcional aumenta, los sobre impulsos serán de mayor amplitud, produciendo que el estado transitorio tome más tiempo. Sin embargo, el error en estado estacionario puede disminuir. Por otro lado, si la ganancia proporcional disminuye, entonces la amplitud de los sobretiros disminuirán, así como el tiempo de la etapa transitoria, pero el error en estado estacionario será más grande. No existe una regla de sintonía entre

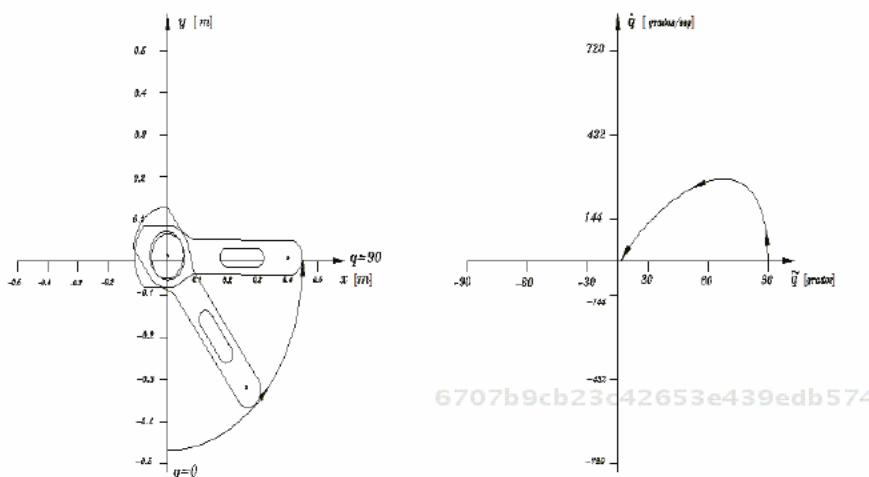


Figura 6.10 Trayectorias del espacio de trabajo y diagrama fase del péndulo robot con el control pd.



la ganancia proporcional y la ganancia derivativa, más bien es empírica. Buenos resultados se obtienen cuando $k_v = 20\%k_p$.

Otra forma de explicar el funcionamiento cualitativo del control PD es a través de un sistema masa resorte amortiguador como el que se muestra en la figura 6.11. La masa m del sistema es sometida a una fuerza f . Cuando esta fuerza se deja de aplicar, entonces el desplazamiento de la variable \tilde{q} puede exhibir grandes sobre impulsos, dependiendo de la rigidez k_p del resorte y del factor de amortiguamiento k_v . Para una rigidez grande k_p el resorte presentará resistencia a desplazarse y si el factor de amortiguamiento k_v también es grande, los desplazamientos de \tilde{q} serán dosificados y los sobre impulsos de la etapa transitoria serán atenuados o amortiguados. Para una pequeña acción de amortiguamiento $k_v\dot{q}$ el desplazamiento de la masa m puede ser abrupto, es decir el desplazamiento \tilde{q} puede exhibir grandes sobre impulsos, inclusive puede quedar en el régimen estacionario con vibraciones u oscilaciones. Para evitar este problema, la ganancia derivativa k_v o freno mecánico se incrementa.

Simulador péndulo

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary

En la página web del libro se encuentra disponible un simulador de control de posición, el cual es un ambiente gráfico interactivo amigable orientado a la programación y control del péndulo robot (visto como sólido). Con este simulador basado en el modelo dinámico del péndulo, ya que emula la dinámica real del péndulo, se puede abordar el estudio y análisis del comportamiento cualitativo del control PD sobre este sistema.

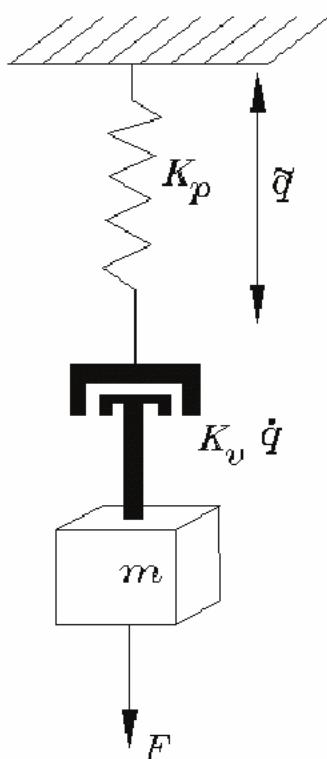


Figura 6.11 Analogía comparativa del control PD y un sistema masa resorte amortiguador.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757 ebrary | Acción de control derivativo

Frecuentemente se interpreta a la acción de control derivativa como un controlador. Esta interpretación es errónea y es importante aclararla; la acción de control derivativa introduce el efecto de amortiguamiento en la respuesta del robot, teniendo como finalidad disminuir los sobretiros y por lo tanto mejorar la respuesta. Debe quedar claro que en el control proporcional derivativo la única variable a controlar es el error de posición \tilde{q} y no la velocidad de movimiento \dot{q} . La velocidad se emplea como inyección de amortiguamiento cuya principal acción es sobre el estado transitorio, puesto que en el estado estacionario la posición es una constante o la velocidad es cero. Si durante el estado estacionario se presentan oscilaciones, perturbación o cambio de referencia, entonces la acción de

control derivativa actúa de manera inmediata. La acción derivativa no reduce la magnitud del error de posición en estado estacionario. El término relacionado con la compensación de gravedad se emplea para mantener al robot en la posición deseada, ya que cuando el robot alcanza esa posición, el error de posición es cero y su velocidad también es cero, por lo que se requiere de energía aplicada al robot para compensar el fenómeno natural de par gravitacional. En tal caso el término de la compensación de gravedad converge a una constante para mantener al robot en la posición deseada, para el caso del péndulo es $g(q_d) = mgl_d \operatorname{sen}(q_d)$. Cuando el robot se mueve en un plano horizontal, el par gravitacional es cero, debido a que se obtiene como el gradiente de la energía potencial.

♣ ♣ Ejemplo 6.1

Analizar el comportamiento cualitativo del algoritmo de control PD sobre un robot manipulador de dos grados de libertad planar para la configuración deseada: $\mathbf{q}_d = [45, 90]^T$ grados. Las condiciones iniciales son para la posición $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ y la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Solución

Considérese un robot planar vertical de dos grados de libertad cuyo modelo dinámico se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}\tau &= M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2.351 + 0.168 \cos(q_2) & 0.102 + 0.084 \cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \ddot{\mathbf{q}} + \\ &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} -0.168 \operatorname{sen}(q_2)\dot{q}_2 & -0.084 \operatorname{sen}(q_2)\dot{q}_2 \\ 0.084 \operatorname{sen}(q_2)\dot{q}_1 & 0,0 \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 38.46 \operatorname{sen}(q_1) + 1.82 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ 1.82 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix}}_{g(\mathbf{q})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2.88\dot{q}_1 \\ 0.175\dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{f_f(\dot{\mathbf{q}})}$$



El objetivo de control consiste en mover la articulación del hombro a $q_{d1} = 45$ grados, la articulación del codo $q_{d2} = 90$ grados, usando un algoritmo de control PD con compensación de gravedad. El proceso de simulación consiste en posicionar al robot en la configuración deseada.

Se proponen los siguientes valores para las ganancias proporcional y derivativa:

$$K_p = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ Nm/grado}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Nm grado/seg.}$$

La sintonía de la ganancia derivativa es del 20 % del valor de la ganancia proporcional. La figura 6.12 muestra la evolución en el tiempo de los errores de posición; el efecto de amortiguamiento atenúa notablemente los sobretiros en la respuesta del robot. El error en la articulación del hombro \tilde{q}_1 no exhibe sobre impulsos, mientras que en el codo \tilde{q}_2 presenta un pequeño sobretiro. El régimen transitorio tiene una duración de 1.5 segundos. Ambos errores muestran una convergencia asintótica hacia cero, es decir la región de atracción del punto de equilibrio hace que tengan una convergencia hacia el origen del vector de estados.

Los pares aplicados a las articulaciones del hombro y codo, respectivamente, se muestran en la parte derecha de la figura 6.12. Durante el régimen transitorio τ_1 presenta una curva en forma de valle, lo cual se debe principalmente al efecto de la acción de control derivativa que inyecta amortiguamiento para frenar al codo. En el régimen estacionario la posición toma un valor constante por lo que la acción derivativa ya no tiene efecto, puesto que la velocidad es cero. Si llegará a existir una perturbación, entonces la acción derivativa actúa instantáneamente.

Robot 2 gdl PD

La simulación del robot manipulador de 2 grados de libertad con el esquema de control PD del ejemplo 6.1 se encuentra disponible en la página web del libro.

Se proporciona el código y documentación necesaria para que el lector pueda estudiar y analizar en detalle los aspectos cualitativos del algoritmo.



Videos experimentales. Control PD de un péndulo

En la página web del libro se encuentran disponibles una serie de videos experimentales que ilustran los aspectos cualitativos del algoritmo de control proporcional derivativo, con robots manipuladores de transmisión directa de dos y tres grados de libertad. Particularmente se ejemplifica el comportamiento transitorio de la respuesta del robot con el control proporcional, y cómo se mejora usando el efecto de amortiguamiento de la acción de control derivativo.

La sintonía de la ganancia derivativa puede aumentarse para eliminar por completo el sobre impulso que presenta \dot{q}_1 . Para τ_2 exhibe una curva suave; obsérvese que el valor de la sintonía en la ganancia derivativa de la articulación del codo es adecuada debido a que \dot{q}_2 no presenta sobre impulsos; llevando suavemente al sistema, sin movimientos bruscos.

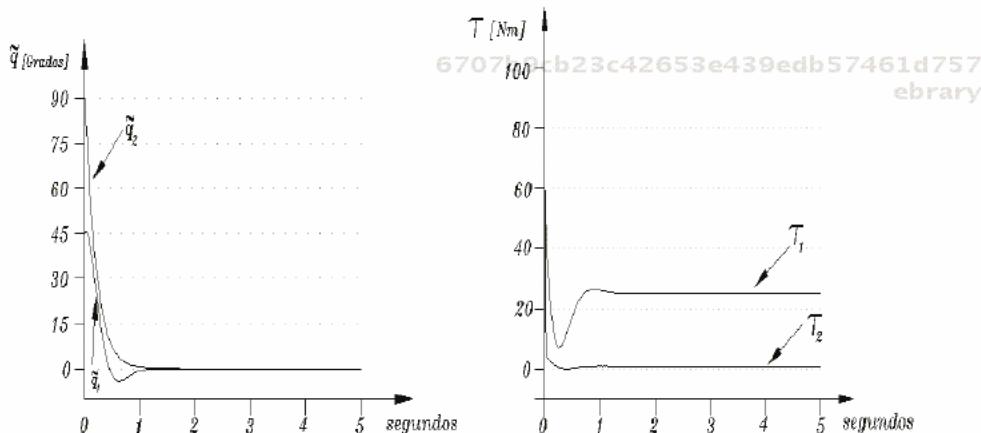
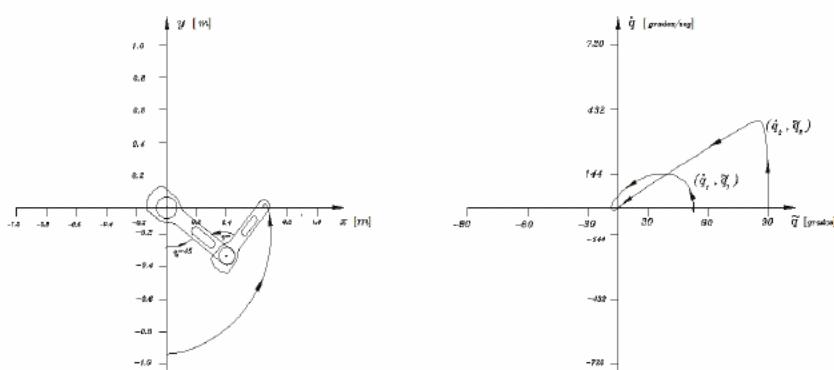


Figura 6.12 Errores de posición y pares aplicados del PD.

La trayectoria que sigue el extremo final del robot dentro de su espacio de trabajo, es una curva suave dentro del IV cuadrante se posiciona sin reflejar sobre impulsos como se muestra en la figura 6.13. El diagrama de fase se encuentra en la parte derecha de esta misma figura.

La articulación del hombro presenta una trayectoria menor a la que exhibe la articulación del codo. Esto se debe a que el eslabón del codo se encuentra montado sobre el extremo final del eslabón del hombro, entonces exhibe una mayor velocidad de movimiento compuesta por la velocidad del hombro \dot{q}_1 más la propia velocidad del codo \dot{q}_2 . Ambas trayectorias son atrapadas por la región de atracción del punto de equilibrio.



6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

Figura 6.13 Trayectorias del espacio de trabajo y diagrama fase de un robot de 2 gdl con control PD.



6.2.3 Control proporcional integral derivativo

El algoritmo de control PD tiene la desventaja de que en régimen estacionario presenta un error permanente de posición denominado *offset*; en otras palabras, el error de posición $\tilde{q}(t)$ converge a una constante diferente de cero. Para disminuir este error se incorpora en la estructura matemática del PD un término más denominado acción de control integral. El proceso de integración es la suma del área bajo la curva del error

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

de posición, por lo tanto acumula energía la cual canalizada adecuadamente puede disminuir la magnitud del error en el régimen estacionario. Esto da origen al control proporcional integral derivativo (PID), el cual no representa un nuevo esquema de control, más bien es la versión modificada del control proporcional derivativo que pretende subsanar la deficiencia del error en régimen estacionario. Con esta finalidad se incorpora en el algoritmo de control PD la acción de control integral, resultando el siguiente esquema proporcional integral derivativo (PID):

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\mu) d\mu + g(q) \quad (6.19)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas y se les denomi na ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$



PID

El algoritmo de control PID se encuentra disponible en la página web del libro para realizar simulación con un robot de 2 gdl. La implementación del modelo dinámico y el esquema de control resultan importantes en el estudio de control de robots manipuladores.

es una matriz definida positiva denominada ganancia integral. Todas las ganancias K_p , K_v y K_i son matrices definidas positivas.

En la figura 6.14 se muestra el diagrama a bloques del algoritmo de control PID.

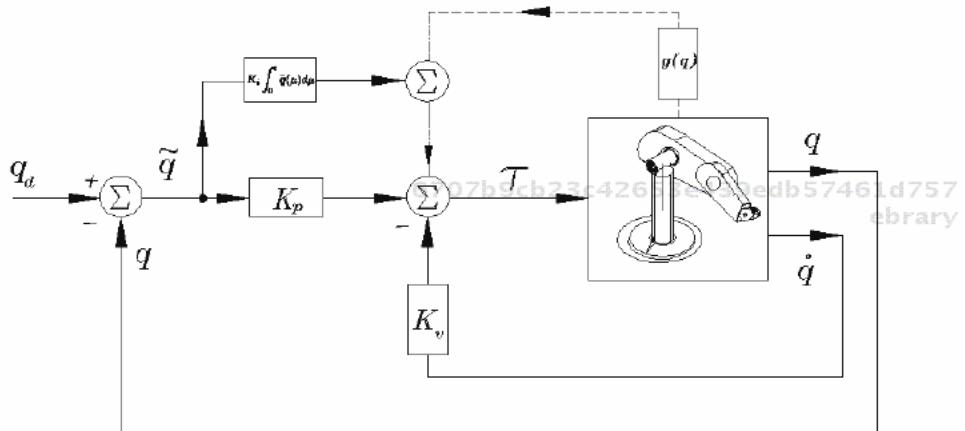


Figura 6.14 Diagrama a bloques del control PID.

El algoritmo de control PD produce en la ecuación en lazo cerrado (dinámica del robot y esquema PD) un punto de equilibrio único y globalmente estable en forma asintótica para una elección trivial en las ganancias proporcional y derivativa ($K_p > 0$, $K_v > 0$). En contraste:

El algoritmo de control PID no genera un punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado con características de estabilidad asintótica global, únicamente tiene **estabilidad asintótica local** siempre y cuando las ganancias del control puedan satisfacer ciertas condiciones de sintonía muy complicadas.

La acción de control PID introduce una nueva variable de estado, que aquí denotaremos por v , la cual se encuentra relacionada con la derivada temporal del error de posición $\dot{v} = \ddot{q}$. Por lo tanto, $v = \int_0^t \ddot{q} dt + v(0)$, con $v(0) \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante. La ecuación en lazo cerrado en

términos de las variables de estado $[\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T$ adquiere la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + K_i \mathbf{v} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Esta es una ecuación diferencial autónoma cuyo único punto de equilibrio es el origen $[\mathbf{v}^T, \tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3n}$.

6.3 Moldeo de energía



La demostración de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador de n grados de libertad (5.8) y el algoritmo de control PD (6.2) realizada por Takegaki y Arimoto en 1981, definió las bases para generalizar y ampliar un número importante de algoritmos de control. Hoy en día, a esa técnica de diseño se le conoce como **moldeo de energía**, la cual representa una herramienta moderna del control automático para diseñar una familia extensa de estrategias de control que resuelven el problema de control de posición o regulación de robots manipuladores.

La técnica de **moldeo de energía** genera una familia muy grande de algoritmos de control de posición con estructura matemática del gradiente de la energía potencial artificial (propuesta como energía de diseño), que moldea la energía aplicada al robot, más la incorporación de una función disipativa (acción de control derivativa) como elemento de inyección de amortiguamiento o freno mecánico a través de la velocidad articular del robot y mediante un término de compensación de gravedad para los casos de robots cuyo movimiento sea diferente a un plano horizontal.

La ley de control por moldeo de energía está dada por la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\boldsymbol{q}}) - \boldsymbol{f}_v(K_v, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \quad (6.21)$$

donde

 $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\boldsymbol{q}}) = \frac{\partial \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\boldsymbol{q}})}{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}}$ es el gradiente de la energía potencial, la función resultante de dicho gradiente $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\boldsymbol{q}})$ debe ser una función continua en $\tilde{\boldsymbol{q}}$ y tener un mínimo y único global en el error de posición $\tilde{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ definido como la diferencia entre la posición deseada \boldsymbol{q}_d y el vector de posición articular \boldsymbol{q} , es decir: $\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}_d - \boldsymbol{q}$.

 La función $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\boldsymbol{q}})$ se conoce como energía potencial artificial debido a que no es la energía potencial del robot obtenida de mecánica clásica, más bien es la energía de diseño, la cual es una función diferenciable y definida positiva con un mínimo y único global en el error de posición $\tilde{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$; la ganancia proporcional $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal.

 La función de inyección de amortiguamiento o freno mecánico está representada por $\boldsymbol{f}_v(K_v, \dot{\boldsymbol{q}})$ satisfaciendo la propiedad dissipativa, es decir $\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{f}_v(K_v, \dot{\boldsymbol{q}}) > 0$, la ganancia derivativa $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.

 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ representa la compensación del par gravitacional, únicamente para el caso de robots manipuladores cuyo movimiento esté restringido a un plano horizontal; el par gravitacional es cero.

La figura 6.15 muestra el diagrama a bloques de la estructura de control por moldeo de energía.

La ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del robot (5.8) y la estructura de control de moldeo de energía (6.21) genera un punto de equilibrio estable global en el sentido de Lyapunov, la estabilidad asintótica

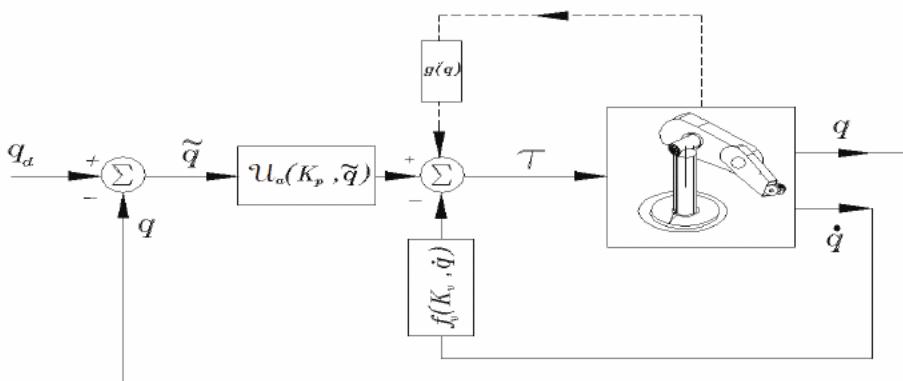


Figura 6.15 Control de robots manipuladores mediante moldeo de energía.

del punto de equilibrio se demuestra con el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

En términos de las variables de estado para el problema de control de posición $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ la ecuación en lazo cerrado queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{q})] - C(\mathbf{q}, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

una ecuación diferencial autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{q}^T \quad \dot{q}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

💡 La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.22) $-\dot{q} = -I\dot{q} = \mathbf{0} \iff \dot{q} = \mathbf{0}$, ya que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.

💡 Por otro lado, en la segunda componente de la ecuación (6.22) se tiene lo siguiente: empleando la propiedad 5.1 del modelo dinámico

del robot manipulador, la matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, y también la matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y es definida positiva.



Por diseño la ganancia proporcional K_p es una matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa K_V es una matriz definida positiva.



Debido a que la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.22) $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisface $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de acuerdo con la propiedad 5.7 del modelo dinámico.



Puesto que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, y la ganancia derivativa K_v es una matriz definida positiva, entonces la función disipativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.



Por otro lado, la función de energía potencial artificial es una función definida positiva $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, por diseño la ganancia proporcional es una matriz diagonal definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.22) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.22) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \quad (6.23)$$

El primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética, la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo término $\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ es la energía potencial artificial la cual es una función cuadrática del error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$ y por diseño la ganancia proporcional K_p es una matriz definida positiva. Por lo tanto, la función $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva.

La derivada temporal de la función de energía (6.23) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (6.24)$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (6.25)$$

La derivada del error es $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$ debido a que la posición deseada \mathbf{q}_d es una constante. Sustituyendo la aceleración contenida en la segunda componente de la ecuación (6.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &\quad - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Hay que observar que se cancelan el primero y último término de la ecuación (6.26). Además, empleando la propiedad 5.9 del modelo dinámico y agrupando el tercer y cuarto término de la ecuación (6.26) se obtiene:

$$-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} = 0$$

La derivada temporal de la función de energía (6.21) obtiene la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (6.27)$$

es decir, cumple con el teorema de estabilidad de Lyapunov, por lo que queda demostrada la estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.4).

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.21) es una ecuación diferencial autónoma, es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (6.28)$$

Nótese que $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$, si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ puede ser cualquier vector. Para que la solución $[\tilde{\mathbf{q}}^T(t), \dot{\mathbf{q}}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación en lazo cerrado (6.21) pertenezca a Ω es necesario que $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$.

Además, puesto que $\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ solo si $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, entonces el máximo conjunto invariante en Ω es $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \wedge \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \right\} \quad (6.29)$$

Puesto que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es una función positiva definida con un único y mínimo global en $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$, entonces el máximo conjunto invariante que está en Ω es el origen. Por lo tanto, usando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Considérese un estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones de la ecuación en lazo cerrado (6.22) sobre las cotas de las trayectorias. Debido a que la ecuación (6.23) es una función definida positiva y su derivada con respecto al tiempo (6.27) es una función semidefinida negativa, entonces la función de energía es decreciente, es decir:

$$0 < V(\tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0$$

por lo que se deduce que:

$$\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0, \quad (6.30)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}(t)^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t) \leq V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \quad \forall t \geq 0, \quad (6.31)$$

utilizando el teorema 3.1 de Rayleigh–Ritz se obtienen las siguientes cotas:

(6.32)

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \mathcal{U}^{-1} \left(\frac{V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}(K_p)} \right)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2V(\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))}{\lambda_{\min}(M(\mathbf{q}))}}$$

(6.33)

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

La técnica de moldeo de energía permite diseñar una familia extensa de algoritmos de control que de manera general se pueden dividir en aquellos esquemas que solicitan par o torque sin tomar en cuenta los límites físicos del servo amplificador, es decir pertenecen a la clase de esquemas de control con acciones no acotadas y los que se encuentran dentro del rango normal de operación del servoa amplificador se les denomina esquemas de control acciones acotadas.



6.3.1 Control con acciones no acotadas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Como ejemplo de aplicación de la técnica de moldeo de energía a continuación se presenta el diseño de nuevas estrategias de control cuya estructura matemática demanda par o torque al sistema electrónico del servoactuador más allá de sus límites de saturación.

Ejemplo 6.2

Realizar el análisis de estabilidad del control proporcional derivativo para un péndulo robot.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Solución

El control PD está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = k_p \ddot{q} - k_v \dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q) \quad (6.34)$$

donde las ganancias proporcional y derivativa se encuentran representadas por $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$, respectivamente.

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del péndulo (5.42) y el control proporcional derivativo (6.34) expresado en términos

de variables de estado $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T$ es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \frac{1}{I_b} [k_p \tilde{q} - (k_v + b) \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

donde el momento de inercia del péndulo I_p está dado por $I_p = ml_c^2 + I$. La ecuación (6.34) resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = [0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^2$ de la ecuación en lazo cerrado (6.34) se toman en cuenta las siguientes consideraciones:



La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.34) $-\dot{\tilde{q}} = -1\dot{\tilde{q}} = 0 \iff \dot{\tilde{q}} = 0$.



Para la segunda componente de la ecuación (6.34), el momento de inercia $I_b \in \mathbb{R}_+$.



Las ganancias proporcional k_p y derivativa k_v son números positivos.



Puesto que $\dot{\tilde{q}} = 0$, entonces la función disipativa $f_v(k_v, \dot{\tilde{q}}) = k_v \dot{\tilde{q}} = 0 \iff \dot{\tilde{q}} = 0$.



Por otro lado, $k_p \tilde{q} = 0 \iff \tilde{q} = 0$.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.34) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.34) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov

$$V(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{2} \tilde{q}^2$$

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= I_b \dot{q} \ddot{q} - k_p \tilde{q} \dot{q} \\ &= \dot{q} [k_p \tilde{q} - (k_v + b) \dot{q}] - k_p \tilde{q} \dot{q} \\ &= -[b + k_v] \dot{q}^2 \leq 0\end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad en forma global del punto de equilibrio.

Obsérvese que $[b + k_v] \dot{q}^2 > 0$.

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.34) es una ecuación diferencial autónoma, entonces es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio.

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0 \wedge \tilde{q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Nótese que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0$, si $\dot{q} = 0$ y \tilde{q} puede ser cualquier escalar. Para que la solución $[\tilde{q}(t), \dot{q}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ de la ecuación en lazo cerrado (6.34) pertenezca a Ω es necesario que $\dot{q}(t) = 0$, $\forall t \geq 0$.

Además, puesto que $k_p \tilde{q} = 0$ solo si $\tilde{q} = 0$, entonces el máximo conjunto

invariante en Ω es $[\tilde{q}, \dot{q}]^T = [0, 0]^T \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0 \wedge \tilde{q} = 0 \right\} \quad (6.36)$$

puesto que $V(\dot{q}, \tilde{q})$ es una función positiva definida con un único y global mínimo en $[\tilde{q} \ \dot{q}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en Ω . Por lo tanto, usando el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

♣♦♥♦ Ejemplo 6.3

Realizar el análisis de estabilidad asintótica del siguiente algoritmo
 Considérese el siguiente algoritmo de control:

$$\tau = K_p \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6.37)$$

donde $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, es la función de control seno hiperbólico y la función $\operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}})$ es la inyección de amortiguamiento.

Solución

Las funciones se encuentran definidas respectivamente como:

$$\operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{senh}(\dot{q}_1) \\ \operatorname{senh}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control (6.37) expresada en términos de las variables de estado queda $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

resulta una ecuación diferencial autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ se toman en cuenta las siguientes consideraciones:



La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.38) $-\dot{\mathbf{q}} = -I\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, ya que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.



Para la segunda componente de la ecuación (6.38) la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y también es definida positiva (propiedad 5.1).



Por diseño las ganancia proporcional K_p es matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa K_v es una matriz definida positiva.



La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sí $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, de acuerdo con la propiedad 5.7 del modelo dinámico.



Puesto que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, y la ganancia derivativa K_v es una matriz definida positiva, entonces la función disipativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.



Por otro lado, $K_p \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia proporcional es una matriz diagonal definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.38) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.38) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo

termino es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición \tilde{q} . Para propósitos de ajuste, observe que se ha incorporado el escalar -1 en cada una de las componentes $\sqrt{\cosh(\tilde{q}_i) - 1}$, para $i = 1, 2 \dots n$. Esto se debe a que la función coseno hiperbólico evaluado en: $\cosh(\tilde{q}_i) = 1$ si $\tilde{q}_i = 0$. De esta forma la función de la energía potencial artificial evaluada en cero resulta cero.

La derivada temporal de la función de energía (6.39) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= \dot{q}^T M(q) \ddot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \\ &\quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} \\ &= \dot{q}^T K_p \operatorname{senh}(\tilde{q}) - \dot{q}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{q}) \underbrace{-\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} -\end{aligned}\tag{6.40}$$

$$\dot{q}^T B \dot{q} - \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_1)) \dot{q}_1}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1}} \\ \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_2)) \dot{q}_2}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1}} \\ \vdots \\ \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_n)) \dot{q}_n}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= \dot{q}^T K_p \operatorname{senh}(\tilde{q}) - \dot{q}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{q}) - \dot{q}^T B \dot{q} \\ &\quad - \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_1)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_2)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_n)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1}} \end{bmatrix} \dot{q}}_{\text{El producto de matrices diagonales es commutativo}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad - \left[\begin{array}{c} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cccc} \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_1)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_2)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\operatorname{senh}(\tilde{q}_n)}{\sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1}} \end{array} \right] K_p \dot{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\left[\begin{array}{c} \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_n) \end{array} \right]^T}_{\operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}})} K_p \dot{\mathbf{q}} \\
&= \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) - \cancel{\operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p \dot{\mathbf{q}}} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0
\end{aligned}$$

Obsérvese que la componente $\dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}}) > 0$ cumple con las propiedades de función disipativa. Puesto que la función $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es semidefinida negativa se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.38), además también se cumple que el error de posición y la velocidad articular se encuentran acotados $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_2$ y la velocidad articular satisface $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_2^n$.

La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle, de manera similar a los ejemplos previos.

Por la estructura matemática de la función seno hiperbólico el algoritmo de control (6.37) crece de manera exponencial, por lo que pueda demandar un par excesivo más allá del par máximo del amplificador electrónico de los servoactuadores. Esto haría que los servoactuadores del robot tra-

bajen en la zona de saturación produciendo cascabeleo o juego mecánico, ruido y dinámica no modelada, degradando el desempeño del algoritmo de control.

♣ Ejemplo 6.4

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico de un péndulo (5.42) y el siguiente esquema de control

$$\tau = k_p \tilde{q}^{203} - k_p \dot{q}^{203} + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

donde las ganancias proporcional y derivativa k_p, k_v son escalares positivos.

Solución

La ecuación en lazo cerrado se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I_b} [k_p \tilde{q}^{203} - k_p \dot{q}^{203} - b \dot{q}] \end{bmatrix}$$

es una ecuación diferencial autónoma.



En la primera componente de la ecuación en lazo cerrado $-\dot{q} = -1\dot{q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.



Puesto que $\dot{q} = 0$, entonces en la segunda componente de la ecuación en lazo cerrado $k_p \tilde{q}^{203} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0$.

Por lo tanto, el punto de equilibrio existe y es único si los escalares I_b, k_p, k_v, b son positivos.

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{q}^2 + \frac{1}{204} k_p \tilde{q}^{204}$$

la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= I_b \dot{q} \ddot{q} - k_p \tilde{q}^{203} \dot{q} \\ &= I_b \dot{q} \underbrace{\left[\frac{1}{I_b} [k_p \tilde{q}^{203} - k_p \dot{q}^{203}] - b \dot{q} \right]}_{\ddot{q}} - k_p \tilde{q}^{203} \dot{q} \\ &= -k_v \dot{q}^{204} - b \dot{q}^2 \leq 0\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

resulta una función semidefinida negativa, por lo que está demostrada la estabilidad del punto de equilibrio. Debido a que la ecuación en lazo cerrado es un sistema dinámico autónomo, entonces es posible emplear el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar estabilidad asintótica global.

Ejemplo 6.5

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico de un robot de n grados de libertad (5.8) y el siguiente esquema de control exponencial tipo $P^{2m-1}D$

$$\tau = K_p \tilde{q}^{2m-1} - K_v \dot{q}^{2m-1} + g(q) \quad (6.41)$$

Solución

donde $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, m es un entero positivo $m = 1, 2, \dots$, $g(q)$ es la compensación de gravedad del robot manipulador.

Por notación se define

$$\tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{2m-1} \\ \tilde{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^{2m-1} \\ \dot{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \dot{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix}$$

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control (6.41) expresada en términos de las variables de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} - K_v \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

resulta una ecuación diferencial autónoma.

El análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ es el siguiente:



De la ecuación en lazo cerrado (6.42) $-\dot{\mathbf{q}} = -I \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.



La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y también es definida positiva.



La ganancia proporcional K_p es matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa $K_v > 0$.



La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.



Puesto que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, y la ganancia derivativa K_v es una matriz definida positiva, entonces la función disipativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.



Por otro lado, $K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.42) existe y es único.

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.42) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2m} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, resulta una función definida positiva con respecto al vector de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, puesto que K_p es diagonal definida positiva.

La derivada temporal de la función de energía (6.43) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} \quad (6.44) \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} \underbrace{-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} - \\ &\quad \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} m \tilde{q}_1^{m-1} \dot{q}_1 \\ m \tilde{q}_2^{m-1} \dot{q}_2 \\ \vdots \\ m \tilde{q}_n^{m-1} \dot{q}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{q}$$

$$- \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2^{m-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{q}_n^{m-1} \end{bmatrix} \dot{q}$$

$$= \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{q}$$

$$- \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2^{m-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{q}_n^{m-1} \end{bmatrix} K_p \dot{q}$$

$$= \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{q} - \{\tilde{q}^{2m-1}\}^T K_p \dot{q}$$

$$= \cancel{\dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q}^{2m-1}} - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{q} - \cancel{\{\tilde{q}^{2m-1}\}^T K_p \dot{q}}$$

$$= -\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{q} \leq 0$$

Note que $\dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}}^{2m-1} > 0$ es una función disipativa. Por lo que se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio. La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.



6.3.2 Control con acciones acotadas

Como una motivación por el problema teórico-práctico de mantener la acción de control acotada dentro de ciertos límites predeterminados de acuerdo con los pares máximos disponibles por los servoactuadores, se ha considerado el **control con acciones acotadas** tal que el error de posición \tilde{q} tienda asintóticamente a cero, independientemente de las condiciones iniciales del robot manipulador.

El control con acciones acotadas se encuentra sujeto a la siguiente restricción

$$|\tau_i| \leq \tau_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.45)$$

donde τ_i^{\max} es el par máximo capaz de suministrar el i -ésimo actuador.

Los actuadores del robot manipulador son capaces de aplicar un par de tal forma que el robot se encuentra en reposo para cualquier posición deseada $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$, es decir: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_d)$. Entonces el par máximo $\tau_i^{\max} > k$, donde k fue definida en la propiedad 5.14 del modelo dinámico del robot manipulador.

El control con acciones acotadas es un tipo particular de algoritmos que se relaciona directamente con el problema de **saturación** de robots manipuladores. La saturación es un fenómeno no lineal que es muy frecuente en control de robots manipuladores; causa que los servomotores operen en sus límites físicos, conocido como región de saturación. Este problema se presenta cuando los algoritmos de control demandan señales grandes de control, como son los casos del control PD y PID; el resultado de esta no linealidad cuando la amplitud de la salida del algoritmo de control $\boldsymbol{\tau}$ conduce salirse de la región lineal del servomotor, el torque suministrado por el servomotor hacia las articulaciones del robot será diferente del solicitado por el controlador y por lo tanto surgen fenómenos no lineales adicionales a los fenómenos naturales que incluye el modelo dinámico (dinámica no modelada).

El servo amplificador electrónico tiene restricciones físicas impuestas por sus límites de saturación τ_{\max} . Si el algoritmo de control $\boldsymbol{\tau}$ solicita una demanda de par mayor a los límites físicos del servo amplificador, es decir si $\boldsymbol{\tau} > \tau_{\max}$, entonces el servo amplificador proporcionará el máximo par τ_{\max} a las articulaciones del robot. Por lo tanto, se puede caer en algunos de los siguientes problemas:



Degrada el desempeño del sistema de control.

-  Efectos térmicos.
-  Fallas mecánicas y cascabeleo (juego mecánico).
-  Pérdida de la estabilidad.
-  Problemas electromagnéticos y electromecánicos.
-  El fenómeno de fricción puede aumentar.
-  Oscilaciones y errores de posicionamiento muy grandes.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

La gráfica 6.16 muestra el perfil típico del par aplicado por un servo amplificador contra el par solicitado por el algoritmo de control. Tiene una parte lineal y la zona de saturación (no lineal). Bajo este escenario, la motivación para diseñar algoritmos de control con acciones acotadas se ubica en el interés teórico-práctico que conduzca a la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio y con alto desempeño.

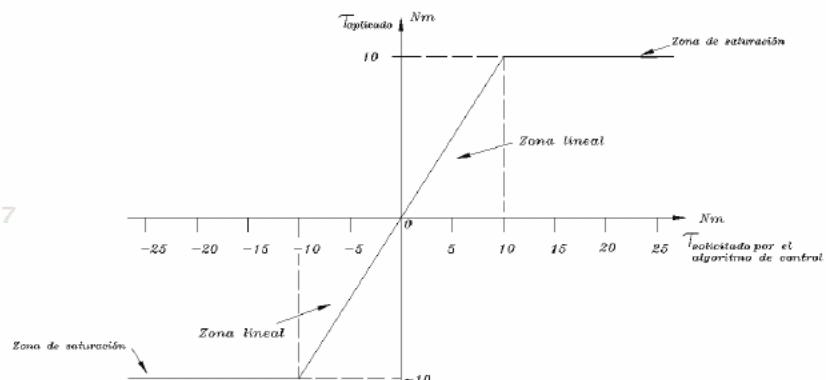


Figura 6.16 Perfil típico de un servo amplificador electrónico.

El servo amplificador es incapaz de aplicar energía ilimitada, sólo puede suministrar *par* dentro de sus límites normales de diseño; en consecuencia está acotado por los límites de saturación $\pm\tau_{max}$ (ver figura 6.16). Cuando la ley de control demanda más par de lo que puede proporcionar el servo amplificador electrónico causa el efecto de saturación; en otras

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

palabras, debido a que el servo amplificador no puede dar más allá de sus límites físicos, entonces proporciona el máximo par τ_{max} . Por ejemplo, considere el caso del péndulo robot, supóngase que el servo amplificador del péndulo tiene límite de saturación de $\pm 15\text{Nm}$. Se requiere posicionar al péndulo en $q_d = 90$ grados a través de un control PD. Suponiendo que las condiciones iniciales son: $[q(0) \quad \dot{q}(0)]^T = [0 \text{ grados} \quad 0 \text{ grados/seg}]^T$ se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\tau(0) &= k_p \tilde{q}(0) - k_v \dot{q}(0) + mgl_c \operatorname{sen}(q(0)) \\ \tau(0) &= k_p q_d\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

si la ganancia proporcional k_p tiene el valor de 10 Nm/grado . Con estos valores el par aplicado en el tiempo $t = 0$ será de $\tau(0) = 900\text{Nm}$, sobre pasando el máximo par $\tau_{max} = 15\text{Nm}$, por lo que el servo amplificador sólo podrá aplicar dentro de sus límites, en este caso es de 15 Nm .

$$\tau_{aplicado}(\tau) = \begin{cases} \tau_{max} & \text{si } \tau \geq \tau_{max} \\ \tau & \text{si } -\tau_{max} < \tau < \tau_{max} \\ -\tau_{max} & \text{si } \tau \leq -\tau_{max} \end{cases}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Para no saturar el servo amplificador y trabajar en la parte lineal, la sintonía de la ganancia proporcional debe cumplir con la siguiente condición:

$$k_p < \frac{\tau_{max}}{q_d}$$

por lo tanto la sintonía de la ganancia proporcional k_p depende de la posición deseada q_d y del par máximo del servo amplificador.

La figura del servo amplificador 6.16 puede realizarse a través de una función tangente hiperbólica como se muestra en la figura 6.17; esta idea sirve para motivar el diseño de esquemas de control con pares acotados.

Con esta finalidad considérese el vector $\tanh(\Lambda \tilde{q})$ donde

$$\tanh(\Lambda \tilde{q}) = \begin{bmatrix} \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \\ \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\lambda_n \tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

donde $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, es una matriz diagonal definida positiva que representa la pendiente de la función $\tanh(\Lambda \tilde{q})$. La gráfi-

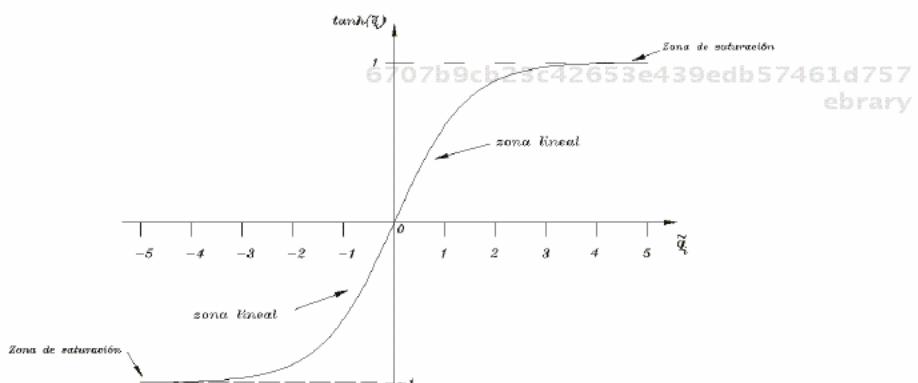


Figura 6.17 Gráfica de la función $\tanh(\cdot)$.

ca correspondiente de la i-ésima componente $\tanh(\lambda_i \tilde{q}_i)$ se muestra en la figura 6.18. Dicha gráfica se encuentra acotada entre los valores 1 y -1 que corresponden al primer cuadrante para $\tilde{q}_i > 0$ y tercer cuadran-

te para $\tilde{q}_i < 0$. Existen dos zona de operación para esta gráfica; la primera corresponde a la parte lineal que se mantiene para los casos que satisfagan $|\tilde{q}_i| < 1$. La zona de saturación está asignada a los valo-
res 1 y -1, que corresponde a los casos $|\tilde{q}_i| > 1$. Observe que la función $\tanh(\lambda_i \tilde{q}_i) = 0$ cuando $\tilde{q}_i = 0$. La función tangente hiperbólica se define como: $\tanh(\lambda_i \tilde{q}_i) = \frac{\exp^{\lambda_i \tilde{q}_i} - \exp^{-\lambda_i \tilde{q}_i}}{\exp^{\lambda_i \tilde{q}_i} + \exp^{-\lambda_i \tilde{q}_i}}$.

Para obtener mayor o menor tiempo de respuesta, es posible variar el valor numérico de la pendiente λ_i para subir o bajar la pendiente de la función $\tanh(\lambda_i \tilde{q}_i)$, respectivamente. La figura 6.18 muestra los diferentes casos para $\lambda_i > 1$, $\lambda_i = 1$, y $\lambda_i < 1$. También, la zona de saturación puede ser ampliada al valor de la ganancia proporcional K_p , por lo que los márgenes

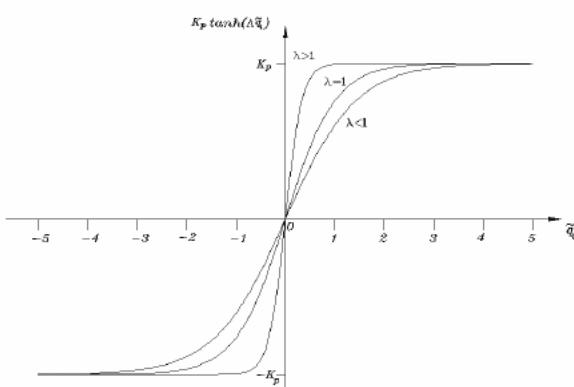


Figura 6.18 Pendiente de la función $\tanh(\cdot)$ para los casos $\lambda > 0$, $\lambda = 1$, y $\lambda < 1$.

de saturación de $K_p \tanh(\Lambda \tilde{q})$ pueden ser ubicados a conveniencia del usuario.

Propiedades de la función $\tanh(\Lambda \tilde{q})$. Considerese $\dot{\tilde{q}}, \tilde{q} \in \mathbb{R}^n$, con $\Lambda, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas, entonces se cumple:

$\|\tanh(\Lambda \tilde{q})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \tanh^2(\lambda_i \tilde{q}_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1_1^2 + 1_2^2 + \dots + 1_n^2} = \sqrt{n}$

$\|\tanh(\Lambda \tilde{q})\| \leq \|\Lambda\| \|\tilde{q}\| \leq \lambda_{\Lambda}^{\max} \|\tilde{q}\|$, donde λ_{Λ}^{\max} es el valor propio máximo de la matriz Λ .

$\dot{\tilde{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) \leq \|\dot{\tilde{q}}\| \lambda_{K_p}^{\max} \lambda_{\Lambda}^{\max} \|\tilde{q}\|$, donde $\lambda_{K_p}^{\max}$ es el valor propio máximo de la ganancia proporcional K_p .

$\dot{\tilde{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) \leq \|\dot{\tilde{q}}\| \lambda_{K_p}^{\max} \sqrt{n}$.

$\|\tanh(\Lambda \tilde{q})\|^2 \leq \tanh(\Lambda \tilde{q})^T \tanh(\Lambda \tilde{q}) \leq \lambda_{\Lambda}^{\max^2} \|\tilde{q}\|^2$

$\|\tanh(\Lambda \tilde{q})\|^2 \leq n$

$\frac{\partial \ln(\cosh(\Lambda \tilde{q}))}{\partial \tilde{q}} = \text{diag} \{ \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1), \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2), \dots, \tanh(\lambda_n \tilde{q}_n) \} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde $\cosh(\tilde{q}) \in \mathbb{R}^n$, es decir

$$\cosh(\Lambda \tilde{q}) = [\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1), \cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2), \dots, \cosh(\lambda_n \tilde{q}_n)]^T$$

Observación: con respecto a las dos primeras propiedades no debe confundirse y mal interpretarse que si $\|\tanh(\Lambda\tilde{q})\| \leq n$ esto de ninguna manera implica que $\lambda_{\Lambda}^{\max}\|\tilde{q}\| \leq n$ ni viceversa se cumple. Esto no es verdadero. Las dos primeras propiedades representan dos cotas superiores distintas de la función $\tanh(\Lambda\tilde{q})$, y se pueden seleccionar a conveniencia dependiendo de la finalidad matemática.

♣ Ejemplo 6.6

Realizar el análisis de estabilidad del control tangente hiperbólico para un péndulo robot dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) - k_v \tanh(\gamma\dot{q}) + mgl_c \operatorname{sen}(q) \quad (6.46)$$

donde las ganancias proporcional y derivativa se encuentran representadas por $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$, respectivamente; $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}_+$ son las pendientes del control tangente hiperbólica $\tanh(\lambda\tilde{q})$ y de la acción derivativa $\tanh(\gamma\dot{q})$, respectivamente.

Solución

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del péndulo (5.42) y el control tangente hiperbólica (6.47) expresado en términos de variables de estado $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T$ es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I_p} [k_p \tanh(\lambda\tilde{q}) - k_v \tanh(\gamma\dot{q}) - b\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

donde el momento de inercia del péndulo I_p está dado por $I_p = ml_c^2 + I$. La ecuación (6.47) resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

equilibrio $[\tilde{q} \quad \dot{q}]^T = [0 \quad 0]^T$ de la ecuación en lazo cerrado (6.47) se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

-  La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.47) $-\dot{q} = -1\dot{q} = 0 \iff \dot{q} = 0$.
-  Para la segunda componente de la ecuación (6.47), el momento de inercia $I_b \in \mathbb{R}_+$.
-  Las ganancias proporcional k_p y derivativa k_v son números positivos.
-  Puesto que $\dot{q} = 0$, entonces la función disipativa $f_v(k_v, \dot{q}) = k_v \tanh(\gamma, \dot{q}) = 0 \iff \dot{q} = 0$.
-  Por otro lado, $k_p \tanh(\lambda \tilde{q}) = 0 \iff \tilde{q} = 0$.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.47) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.47) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{q}^2 + \frac{k_p}{\lambda} \ln(\cosh(\lambda \tilde{q}))$$

la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= I_b \dot{q} \ddot{q} - \frac{k_p}{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{q}} \ln(\cosh(\lambda \tilde{q})) \right] \dot{q} \\ &= \dot{q} [k_p \tanh(\lambda \tilde{q}) - k_v \tanh(\gamma \dot{q}) - b \dot{q}] - k_p \tanh(\lambda \tilde{q}) \dot{q} \\ &= -b \dot{q}^2 - k_v \dot{q} \tanh(\gamma \dot{q}) \leq 0\end{aligned}$$

lo que demuestra estabilidad en forma global del punto de equilibrio.

Obsérvese que $k_v \dot{q} \tanh(\gamma \dot{q}) > 0$.

Debido a que la ecuación en lazo cerrado (6.47) es una ecuación diferencial autónoma, entonces es posible utilizar el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = 0 \iff \dot{\tilde{q}} = 0 \wedge \tilde{q} \in \mathbb{R} \right\}$$

Nótese que $\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = 0$, si $\dot{\tilde{q}} = 0$ y \tilde{q} puede ser cualquier escalar. Para que la solución $[\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ de la ecuación en lazo cerrado (6.47) pertenezca a Ω es necesario que $\dot{\tilde{q}}(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Además, puesto que $k_p \tanh(\lambda \tilde{q}) = 0$ sólo si $\tilde{q} = 0$, entonces el máximo conjunto invariante en Ω es $[\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}]^T = [0, 0]^T \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}) = 0 \iff \dot{\tilde{q}} = 0 \wedge \tilde{q} = 0 \right\} \quad (6.48)$$

puesto que $V(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q})$ es una función positiva definida con un único y global mínimo en $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, entonces el origen es el máximo conjunto invariante que está en Ω . Por lo tanto, usando el principio de invariancia de Barbashin-Krasovskii-LaSalle se concluye que el origen del espacio de estado es asintóticamente estable en forma global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{\tilde{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 6.7

Realizar el análisis de estabilidad del control tangente hiperbólica dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = K_p \tanh(\Lambda \tilde{q}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{q}) + g(q) \quad (6.49)$$

Solución

donde

$$\tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \\ \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\lambda_n \tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

$$\tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \tanh(\gamma_1 \dot{q}_1) \\ \tanh(\gamma_2 \dot{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\gamma_n \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

la ganancia proporcional es $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la cual es una matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva; la matrices $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son ganancias diagonales definidas positivas y representan la pendiente de la función $\tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})$ del error proporcional e inyección de amortiguamiento $\tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}})$, respectivamente.

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control tangente hiperbólica (6.49) puede ser expresada en términos de variables de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

Para llevar a cabo el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ se toman en cuenta las siguientes consideraciones:



La primera componente de la ecuación en lazo cerrado (6.55) $-\dot{\mathbf{q}} = -I\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, ya que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva.



Para la segunda componente de la ecuación (6.55) la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y es definida positiva.



La ganancia proporcional K_p es una matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa K_v es una matriz definida positiva.



La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.



Puesto que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces la función disipativa $f_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.



Por otro lado, $K_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.55) existe y es único.

La demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.55) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, puesto que $K_p > 0$. Note que el $\cosh(0) = 1$ y el $\ln(1) = 0$. Por lo que la función (6.51) evaluada en $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = V(0, 0) = 0$ y $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ si $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ y/o $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$.

La derivada temporal de la función de energía (6.51) queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \quad (6.52)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}})^T K_v \underbrace{-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} -$$

$$\dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{senh}(\lambda_1 \tilde{q}_1) \lambda_1 \dot{q}_1}{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))}} \\ \frac{\operatorname{senh}(\lambda_2 \tilde{q}_2) \lambda_2 \dot{q}_2}{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))}} \\ \vdots \\ \frac{\operatorname{senh}(\lambda_n \tilde{q}_n) \lambda_n \dot{q}_n}{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}}$$

$$-\begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \underbrace{K_p \Lambda^{-1} \Lambda}_{I \in \mathbb{R}^{n \times n}} \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{senh}(\lambda_1 \tilde{q}_1)}{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\operatorname{senh}(\lambda_2 \tilde{q}_2)}{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\operatorname{senh}(\lambda_n \tilde{q}_n)}{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

El producto de matrices diagonales es commutativo

$$= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \quad (6.53)$$

$$-\begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1)}{\sqrt{\ln(\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1))}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2)}{\sqrt{\ln(\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2))}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\tanh(\lambda_n \tilde{q}_n)}{\sqrt{\ln(\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} K_p \dot{\mathbf{q}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \dot{\mathbf{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1) \\ \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\lambda_n \tilde{q}_n) \end{bmatrix}}_{\tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})}^T K_p \dot{\mathbf{q}} \\
 &= \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \cancel{\tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})^T K_p \dot{\mathbf{q}}} \\
 &= -\dot{\mathbf{q}}^T T K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0
 \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Observe que $\dot{\mathbf{q}}^T K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) > 0$ es una función disipativa, por lo que se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio. La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin Krasovskii LaSalle.

Ejemplo 6.8

Realizar el análisis de estabilidad del control arco tangente dado por

6707b9cb23c42653e439edb57461d7 la siguiente ecuación:
ebrary

$$\tau = K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) + g(\mathbf{q}) \quad (6.54)$$

Solución

donde

$$\operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\gamma_1 \dot{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\gamma_2 \dot{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\gamma_n \dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

la ganancia proporcional es $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la cual es una matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva; la matrices $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son ganancias diagonales definidas positivas y representan la pendiente de la función atan($\Lambda \tilde{\mathbf{q}}$) del error proporcional e inyección de amortiguamiento atan($\Gamma \dot{\mathbf{q}}$), respectivamente.

la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y el control arco tangente (6.54) puede ser expresada en términos de variables de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \text{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \text{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

resulta una ecuación diferencial de primer orden autónoma.

El análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ se realiza en forma similar al ejemplo 6.7.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.54) en el sentido de Lyapunov queda de la siguiente forma.

ebr· Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1 \text{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{q}_2 \text{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \text{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_n^2]} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1 \text{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{q}_2 \text{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \text{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_n^2]} \end{bmatrix}$$

el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. El segundo término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}$, puesto que $K_p > 0$.

Nótese que el $\sqrt{\tilde{q}_i \operatorname{atan}(\lambda_i \tilde{q}_i) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_i^2]} = 0$ si $\tilde{q}_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$.

La derivada temporal de la función de energía (6.56), tomando en cuenta la propiedad de antisimetría del modelo dinámico 5.9 queda de la siguiente forma:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})^T K_p \dot{\mathbf{q}} \quad (6.56)$$

$$= \cancel{\dot{\mathbf{q}}^T K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \cancel{\operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})^T K_p \dot{\mathbf{q}}}$$

$$= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (6.57)$$

Obsérvese que $\dot{\mathbf{q}}^T K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) > 0$ es una función disipativa, por lo que se demuestra estabilidad global del punto de equilibrio. La estabilidad asintótica global se obtiene aplicando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.



6.3.3 Ejemplos de algoritmos de control de posición

A continuación se presenta en forma de resumen un conjunto de ejemplos de algoritmos de control de posición con acciones no acotadas.

Control con acciones no acotadas



Control proporcional derivativo PD

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}$$



Familia de controladores exponencial tipo PD

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}}^{2m-1} - K_v \dot{\mathbf{q}}^{2m-1} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}$$



Control seno hiperbólico

$$\begin{aligned}\tau &= K_p \operatorname{senh}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{senh}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\lambda_1 \tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\lambda_2 \tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\lambda_n \tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Control tipo capacitivo

$$\tau = K_p [I - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^2}] \tilde{\mathbf{q}} - K_v [I - \beta \exp^{-\beta \dot{\mathbf{q}}^2}] \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{(1 - \alpha_1 \exp^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2}) \tilde{q}_1} \\ \sqrt{(1 - \alpha_2 \exp^{-\alpha_2 \tilde{q}_2^2}) \tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{(1 - \alpha_n \exp^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2}) \tilde{q}_n} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{(1 - \alpha_1 \exp^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2}) \tilde{q}_1} \\ \sqrt{(1 - \alpha_2 \exp^{-\alpha_2 \tilde{q}_2^2}) \tilde{q}_2} \\ \vdots \\ \sqrt{(1 - \alpha_n \exp^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2}) \tilde{q}_n} \end{bmatrix}$$

$$[I - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{\mathbf{q}}^2}] = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_1 \exp^{-\alpha_1 \tilde{q}_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_2 \exp^{-\alpha_2 \tilde{q}_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 - \alpha_n \exp^{-\alpha_n \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix}$$

$$[I - \beta \exp^{-\beta \dot{\mathbf{q}}^2}] = \begin{bmatrix} 1 - \beta_1 \exp^{-\beta_1 \dot{q}_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - \beta_2 \exp^{-\beta_2 \dot{q}_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 - \beta_n \exp^{-\beta_n \dot{q}_n^2} \end{bmatrix}$$



Control exponencial coseno hiperbólico

$$\tau = K_p \exp^{-\cosh(K_p \tilde{\mathbf{q}})} \operatorname{senh}(K_p \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \exp^{-\cosh(K_v \dot{\mathbf{q}})} \operatorname{senh}(K_v \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\exp^{-\cosh(k_{p1}\tilde{q}_1)} - \exp^{-1}} \\ \sqrt{\exp^{-\cosh(k_{p2}\tilde{q}_2)} - \exp^{-1}} \\ \vdots \\ \sqrt{\exp^{-\cosh(k_{pn}\tilde{q}_n)} - \exp^{-1}} \end{bmatrix}$$

Control con acciones acotadas

A continuación se presentan algunos ejemplos de algoritmos de control con acciones acotadas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Control tangente hiperbólico

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \tanh(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}$$

donde $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas.

Control arco tangente

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{q}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_n^2]} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{q}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{q}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{q}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{q}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{q}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{q}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{q}_n^2]} \end{bmatrix}$$

donde $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas.

Familia de controladores hiperbólicos

$$\tau = K_p \frac{\cosh^{m-1}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\Gamma \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\Gamma \dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{q}_n))} \end{bmatrix}$$

donde $m \in N$, $\Lambda, \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices diagonales definidas positivas.

$$\frac{\cosh^{m-1}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\Lambda \tilde{\mathbf{q}})} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\lambda_1 \tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\lambda_1 \tilde{q}_1)}{1 + \cosh^m(\lambda_1 \tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\lambda_2 \tilde{q}_2) \operatorname{senh}(\lambda_2 \tilde{q}_2)}{1 + \cosh^m(\lambda_2 \tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\lambda_n \tilde{q}_n) \operatorname{senh}(\lambda_n \tilde{q}_n)}{1 + \cosh^m(\lambda_n \tilde{q}_n)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\cosh^{m-1}(\Gamma \dot{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\Gamma \dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\Gamma \dot{\mathbf{q}})} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\gamma_1 \dot{q}_1) \operatorname{senh}(\gamma_1 \dot{q}_1)}{1 + \cosh^m(\gamma_1 \dot{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\gamma_2 \dot{q}_2) \operatorname{senh}(\gamma_2 \dot{q}_2)}{1 + \cosh^m(\gamma_2 \dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\gamma_n \dot{q}_n) \operatorname{senh}(\gamma_n \dot{q}_n)}{1 + \cosh^m(\gamma_n \dot{q}_n)} \end{bmatrix}$$

 Control fraccional

$$\tau = K_p \frac{\dot{\mathbf{q}}}{1 + \dot{\mathbf{q}}^2} - K_v \frac{\dot{\mathbf{q}}}{1 + \dot{\mathbf{q}}^2} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = [\sqrt{\ln(1 + \tilde{\mathbf{q}}^2)}]^T K_p [\sqrt{\ln(1 + \tilde{\mathbf{q}}^2)}]$$

donde

$$\frac{\tilde{\mathbf{q}}}{1 + \tilde{\mathbf{q}}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1^2}{1 + \tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2^2}{1 + \tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n^2}{1 + \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \quad \frac{\dot{\mathbf{q}}}{1 + \dot{\mathbf{q}}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1^2}{1 + \dot{q}_1^2} \\ \frac{\dot{q}_2^2}{1 + \dot{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n^2}{1 + \dot{q}_n^2} \end{bmatrix}$$

 Control signo (todo/nada, On/Off)

$$\tau = K_p \operatorname{signo}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \operatorname{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} |\tilde{q}_1| \\ |\tilde{q}_2| \\ \vdots \\ |\tilde{q}_n| \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} |\tilde{q}_1| \\ |\tilde{q}_2| \\ \vdots \\ |\tilde{q}_n| \end{bmatrix}$$

donde

$$\text{signo}(\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\tilde{q}_1) \\ \text{signo}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} \quad \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{q}_1) \\ \text{signo}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

Sin pérdida de generalidad, la derivada de la función absoluto $|\tilde{q}|$ no existe alrededor del origen, por lo que se considera continua por trozos:

$$\nabla \tilde{q} = \frac{\partial |\tilde{q}|}{\partial \tilde{q}} = \text{signo}(\tilde{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{q} > 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{q} = 0 \\ -1 & \text{si } \tilde{q} < 0 \end{cases}$$

6.4 Índice de desempeño

En el área de robótica no hay un criterio estándar para medir el desempeño (*performance*) de un algoritmo de control. Nyquist, root-locus, Bode, etc., son criterios específicos de sistemas lineales los cuales no aplican a robots manipuladores debido a su naturaleza no lineal.

Algunos investigadores miden el desempeño del algoritmo de control por inspección visual de las gráficas del error de posición y a su juicio determinan si el desempeño es adecuado. Sin embargo, dicha medición es muy subjetiva y queda a interpretación del mismo.

Un criterio académico ampliamente aceptado en la comunidad científica de robótica para medir el desempeño de un algoritmo de control es por medio de la obtención del índice de desempeño determinado por la norma \mathcal{L}_2 .

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

El índice de desempeño de un algoritmo de control de posición de robots manipuladores se define como:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 dt} . \quad (6.58)$$

donde T representa el tiempo de simulación o de experimentación.

El mejor comportamiento de desempeño del controlador corresponde a la norma \mathcal{L}_2 más pequeña. Un valor alto en el índice de desempeño, representa un pobre desempeño.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El análisis comparativo del índice de desempeño se realiza con respecto a un esquema de control de referencia, generalmente es el control PD debido a que se conoce ampliamente. El índice de desempeño de un esquema de control se refiere a la exactitud que debe tener la respuesta del robot manipulador. Los aspectos cualitativos de la estrategia de control son factores importantes que determinan el desempeño: de particular interés son las propiedades matemáticas del gradiente de la energía potencial artificial $\nabla\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ que permitan exhibir un corto transitorio, sobre impulsos y vibraciones mecánicas atenuados por la función de amortiguamiento, facilidad en la sintonía de las ganancias proporcional y derivativa, robustez frente a incertidumbre paramétrica son algunas de las cualidades del esquema de control se ven reflejadas en el desempeño del algoritmo de control y por lo tanto repercuten en la medición de su indicador. Cuando el desempeño de un algoritmo de control no es el adecuado, es necesario mejorar las propiedades matemáticas de la función de energía potencial artificial y en el efecto de amortiguamiento.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Un alto desempeño del esquema de control significa que la exactitud en el error de posicionamiento debe ser idealmente cero, entonces la respuesta del robot es de calidad: es decir, presenta una curva con perfil suave, picos o sobre impulsos atenuados, rápido estado transitorio, no hay vibración mecánica, ni oscilaciones. Además, en el estado estacionario no debe presentar juego mecánico. Sin embargo, en la práctica el error de

posicionamiento no tiene un valor cero debido al ruido que presenta la señal digital de la velocidad articular, más aún si se obtiene por diferenciación numérica de la posición. Hay que tomar en cuenta que el diseño del algoritmo de control es en tiempo continuo, pero la implementación es en tiempo discreto. Por lo tanto, una adecuada cota superior del error de posición puede ser establecida como una diezmilésima de grado para cada articulación.

La evaluación comparativa de desempeño no se realiza para una referencia deseada específica q_d , esto no tendría sentido debido a que los resultados pueden cambiar para otra selección de referencia y no hay certeza para otros posibles escenarios. Por lo tanto, es necesario realizar el análisis comparativo donde los niveles de exigencia sean muy superiores al problema de control de posición, por ejemplo sobre aplicaciones de control punto a punto. La idea principal se centra en evaluar a los algoritmos de control en el seguimiento de trayectoria con las ganancias sintonizadas para trabajar al servo amplificador en la región lineal y lejos de la zona de saturación.

La metodología para obtener la medición del índice de desempeño consiste en realizar una comparación experimental o simulación en una aplicación donde las exigencias al algoritmo de control sean grandes.

El análisis comparativo consiste en seleccionar la mejor sintonía de las ganancias, para una aplicación de control punto a punto. Presentar los resultados por medio de una gráfica como la que se muestra en la figura 6.19 donde en el eje horizontal (eje de las ordenadas) representa los controladores comparados, por ejemplo τ_1, τ_2, τ_3 y τ_4 y el eje vertical (eje de las abscisas) es el índice de desempeño de la norma L_2 , el cual se representa en porcentaje. El índice más pobre (el valor más alto) representa el 100 %, mientras que el índice con mayor desempeño (el valor más pequeño de la norma L_2) se representa con el menor porcentaje.

En la figura 6.19 el control τ_1 tiene pobre desempeño, mientras que el

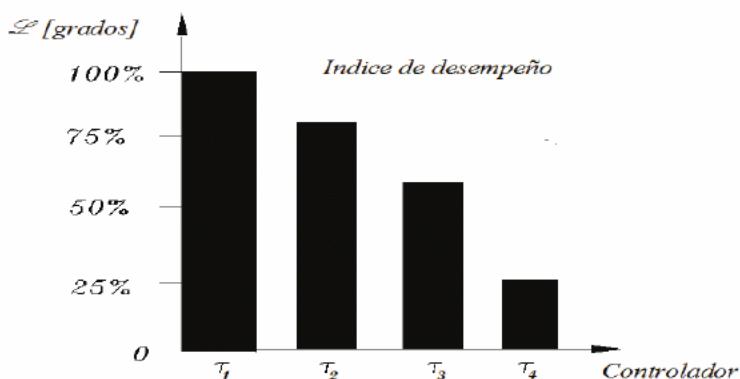


Figura 6.19 Índice de desempeño comparativo entre los controles τ_1, τ_2, τ_3 y τ_4 .

mejor desempeño corresponde al control τ_4 mejorando hasta en un 75% el desempeño del control τ_1 .

♣ ♣ Ejemplo 6.9

Obtener el índice de desempeño para los algoritmos de control PD, arco tangente y tangente hiperbólico sobre un brazo robot de 2 gdl realizando el seguimiento de una trayectoria circular de radio 15 cm y con periodo de 12.56 segundos. Se desea que el centro del círculo quede en el IV cuadrante del espacio de trabajo del robot en las coordenadas (0.3 cm, -0.3 cm). El tiempo de simulación de cada algoritmo de control es de 100 segundos.

Solución

Considere el robot planar vertical de 2 gdl presentado en el ejemplo 6.1. La trayectoria del círculo se parametriza en coordenadas cartesianas y en función del tiempo de la siguiente forma:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_c + r \operatorname{sen}(wt) \\ y_c + r \operatorname{cos}(wt) \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

donde x_c, y_c representan las coordenadas del centro del círculo, r es el radio del círculo, $w = 2\pi f$ es la frecuencia en radianes/seg y f es la frecuencia en hertz de la trayectoria circular, t es la evolución del tiempo.

Se requiere que la trayectoria circular tenga un periodo de 12.56 seg, entonces $f = 0.0795$ hertz, es decir $2\pi f = 0.5$ rad/segundos.

Supóngase que el robot manipulador de 2 gdl tiene su posición de casa (*home position*) sobre el eje y_- , entonces la cinemática inversa está dada por

$$\begin{aligned} q_{d2} &= \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \\ q_{d1} &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{l_2 \sin(q_{d2})}{l_1 + l_2 \cos(q_{d2})}\right) \end{aligned}$$

donde x, y son las coordenadas cartesianas de la trayectoria circular (6.59), l_1, l_2 son las longitudes de los eslabones del robot de las articulaciones del hombro y codo, respectivamente. Para el robot prototipo tienen una longitud de $l_1 = l_2 = 0.45$ m.

Por notación considere el control PD denotado por τ_{PD} , control arco tangente por τ_{atan} y el algoritmo tangente hiperbólico como τ_{tanh} . Para

el robot prototipo de 2 gdl los algoritmos de control adquieren la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau_{PD} &= \begin{bmatrix} \tau_{1_{PD}} \\ \tau_{2_{PD}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p1}\tilde{q}_1 - k_{v1}\dot{q}_1 + 34.629 \sin(q_1) + 1.039 \sin(q_1 + q_2) \\ k_{p2}\tilde{q}_1 - k_{v2}\dot{q}_2 + 1.039 \sin(q_2 + q_1) \end{bmatrix} \\ \tau_{atan} &= \begin{bmatrix} \tau_{1_{atan}} \\ \tau_{2_{atan}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p1} \arctan(\lambda_1 \tilde{q}_1) - k_{v1} \arctan(\gamma_1 \dot{q}_1) + 34.629 \sin(q_1) + 1.039 \sin(q_1 + q_2) \\ k_{p2} \arctan(\lambda_2 \tilde{q}_2) - k_{v2} \arctan(\gamma_2 \dot{q}_2) + 1.039 \sin(q_2 + q_1) \end{bmatrix} \\ \tau_{tanh} &= \begin{bmatrix} \tau_{1_{tanh}} \\ \tau_{2_{tanh}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{p1} \tanh(\lambda_1 \tilde{q}_1) - k_{v1} \tanh(\gamma_1 \dot{q}_1) + 34.629 \sin(q_1) + 1.039 \sin(q_1 + q_2) \\ k_{p2} \tanh(\lambda_2 \tilde{q}_2) - k_{v2} \tanh(\gamma_2 \dot{q}_2) + 1.039 \sin(q_2 + q_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es necesario recalcar que los esquemas de control τ_{PD}, τ_{atan} y τ_{tanh} resuelven el problema de control de posición donde la referencia deseada

q_d es una constante, ya que su diseño fue dentro del ámbito de regulación. La evaluación del seguimiento de una trayectoria resulta una aplicación compleja con respecto al control de posición cuyos niveles de exigencia son mayores.

La sintonía de las ganancias para cada esquema de control se debe realizar tomando en cuenta que el servo amplificador trabaje en la región lineal, lejos de la zona de saturación. Para esta finalidad es recomendable que el par aplicado a las articulaciones adquiera un valor máximo del 80 % del límite físico. Para el robot prototipo los límites físicos de los servos amplificadores del hombro y codo son 200 Nm y 15 Nm, respectivamente.

Las reglas de sintonía para cada algoritmo de control se presentan a continuación:



Para sintonizar adecuadamente las ganancias del algoritmo de control PD es necesario saber cuál es el valor máximo del error de posición, el cual sucede en el tiempo $t = 0$, es decir en el caso de la trayectoria circular (6.59) $\tilde{q}^T(0) = [\tilde{q}_1(0) \quad \tilde{q}_2(0)]^T = [2.2 \quad 140]^T$ grados. Por lo tanto, las ganancias del control τ_{PD} pueden ser sintonizadas como: $k_{p1} \leq 0.8 \frac{\tau_1^{max}}{\tilde{q}_1^{max}(0)} = 0.8 \frac{200 \text{ Nm}}{2.2 \text{ grados}} = 72 \text{ Nm/grados}$; para la articulación del codo $k_{p2} \leq 0.8 \frac{\tau_2^{max}}{\tilde{q}_2^{max}(0)} = 0.8 \frac{15 \text{ Nm}}{140 \text{ grados}} = 0.085 \text{ Nm/grados}$.



Las ganancias del control τ_{atan} no dependen del valor del error de posición \tilde{q} , únicamente deben satisfacer $k_{p1} \leq \frac{0.8}{1.5} \tau_1^{max} = \frac{0.8}{1.5} 200 \text{ Nm} = 106.66 \text{ Nm}$; y $k_{p2} \leq \frac{0.8}{1.5} \tau_2^{max} = \frac{0.8}{1.5} 15 \text{ Nm} = 6.4 \text{ Nm}$. La constante 1.5 se refiere al valor de saturación de la función arco tangente. Las ganancias derivativas deben satisfacer $k_{v1} \leq k_{p1}$ y $k_{v2} \leq k_{p2}$. Los valores en las pendientes de las funciones arco tangente para el error y velocidad son $\Lambda = \text{diag}(\frac{180}{\pi}, \frac{180}{\pi})$ y $\Gamma = \text{diag}(1, 1)$, respectivamente.



Para el control τ_{tanh} , la sintonía de las ganancias no dependen del error de posición \tilde{q} como en el caso τ_{PD} . Por lo que, $k_{p1} \leq 0.8 \tau_1^{max} =$

$0.8 \cdot 200 = 160 \text{ Nm}$; y $k_{p2} \leq 0.8\tau_2^{max} = 0.8 \cdot 15 \text{ Nm} = 12 \text{ Nm}$. Las ganancias derivativas deben satisfacer $k_{v1} \leq k_{p1}$ y $k_{v2} \leq k_{p2}$. Los valores en las pendientes de las funciones tangente hiperbólica para el error y velocidad son $\Lambda = \text{diag}(\frac{180}{\pi}, \frac{180}{\pi})$ y $\Gamma = \text{diag}(1, 1)$, respectivamente.

La tabla 6.1 contiene el resumen de las principales condiciones de evaluación del índice de desempeño.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Tabla 6.1 Condiciones de desempeño.

Articulación	τ_{PD}	τ_{atan}	τ_{tanh}
Hombro $\tau_1^{max} = 200 \text{ Nm}$ $q_{d1} = 45 \text{ grados}$	$k_{p1} = 72 \frac{\text{Nm}}{\text{grados}}$ $k_{v1} = 0.25 k_{p1} \frac{\text{Nm-seg}}{\text{grados}}$	$k_{p1} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v1} = k_{p1} \text{ Nm}$ $\lambda_1 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_1 = 1$	$k_{p1} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v1} = k_{p1} \text{ Nm}$ $\lambda_2 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_2 = 1$
Codo $\tau_1^{max} = 15 \text{ Nm}$ $q_{d2} = 90 \text{ grados}$	$k_{p2} = 0.085 \frac{\text{Nm}}{\text{grados}}$ $k_{v2} = 0.25 k_{p2} \frac{\text{Nm-seg}}{\text{grados}}$	$k_{p2} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v2} = k_{p2} \text{ Nm}$ $\lambda_1 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_1 = 1$	$k_{p2} = 160 \text{ Nm}$ $k_{v2} = k_{p2} \text{ Nm}$ $\lambda_2 = \frac{180}{\pi}$ $\gamma_2 = 1$
El índice de desempeño de cada algoritmo de control se obtiene como:			
$\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = \sqrt{\frac{1}{100} \int_0^{100} (\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2) dt}$			

Los resultados del índice de desempeño para el control τ_{PD} en el seguimiento de la trayectoria circular arrojan una magnitud de 2.4274 grados, para el control τ_{atan} 0.4611 grados y para el tangente hiperbólico τ_{tanh} 0.497 grados, respectivamente. La figura 6.19 muestra la evaluación comparativa del índice de desempeño de los algoritmos de control τ_{pd} , τ_{atan} y τ_{tanh} , el control τ_{PD} fue el que obtuvo la mayor magnitud de la norma \mathcal{L}_2 , lo

que representa el valor de 100 %, los algoritmos de control τ_{atan} y τ_{tanh} representan el 18.99 % y 20.47 %, respectivamente. El control τ_{PD} tiene

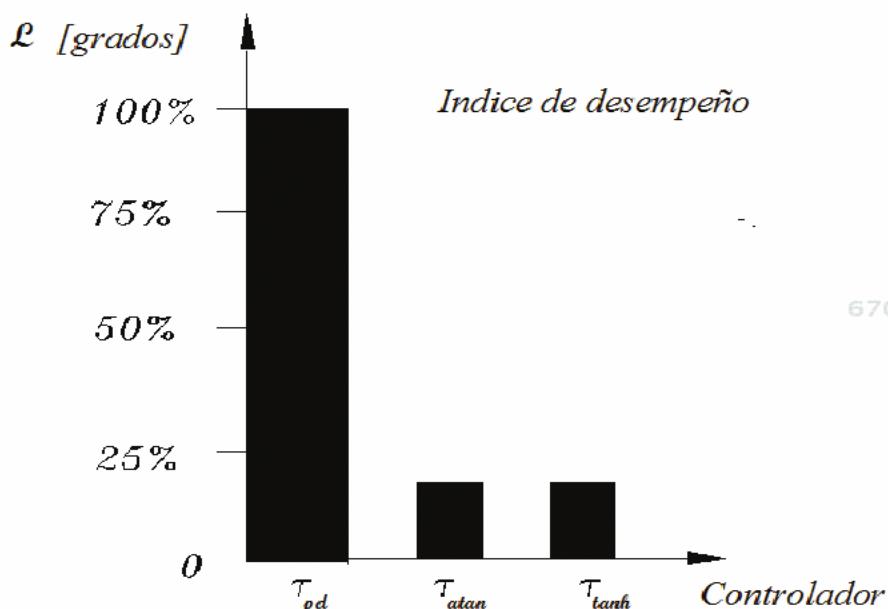


Figura 6.20 Desempeño de los algoritmos de control τ_{pd} , τ_{atan} y τ_{tanh} .

el desempeño más bajo y por lo tanto los mejores desempeños son los controladores τ_{atan} y τ_{tanh} . Esto significa que el control τ_{atan} mejoró el desempeño del control τ_{PD} en un 81 %, mientras que el algoritmo de control τ_{atan} en un 79.53 %. Evidentemente, el desempeño de los algoritmos saturados resultó muy superior al esquema proporcional derivativo τ_{PD} . Del análisis comparativo los algoritmos de control τ_{atan} y τ_{tanh} muestran un desempeño muy similar, por lo tanto sus resultados sobre la traza del círculo y perfil de errores de posición son similares.

La figura 6.21 muestra el seguimiento del robot de 2 gdl para la trayectoria circular con el control τ_{PD} , así como los errores de posición. La sintonía de las ganancias proporcional derivativo permite operar al servo amplificador en la región lineal. El estado transitorio es breve, con sobretiros atenuados, lo que indica que la ganancia derivativa está bien sintonizada como el 25 % de la ganancia proporcional y el efecto de amortiguamiento

to es adecuado. Sin embargo, en estado estacionario la magnitud de los errores de posición es grande, llegando a magnitudes de 6.25 grados, lo que deforma la figura del círculo debido a que la sintonía de las ganancias tienen una dependencia del error de posición $k_p = k_p(\tilde{q})$, deteriorando el desempeño de control.

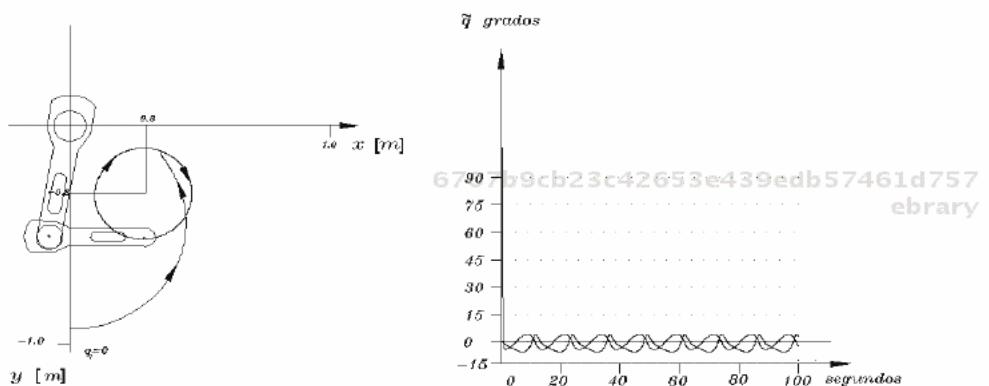


Figura 6.21 Desempeño del algoritmo de control τ_{PD} .

El desempeño del algoritmo de control τ_{atan} se presenta en la figura 6.22. Las ganancias proporcional del hombro y codo garantizan trabajar al servo amplificador en la región lineal, ya que el máximo par aplicado a las articulaciones es el 80 % de sus límites físicos. La sintonía de las ganancias no dependen del error de posición \tilde{q} como en el caso τ_{PD} . La característica

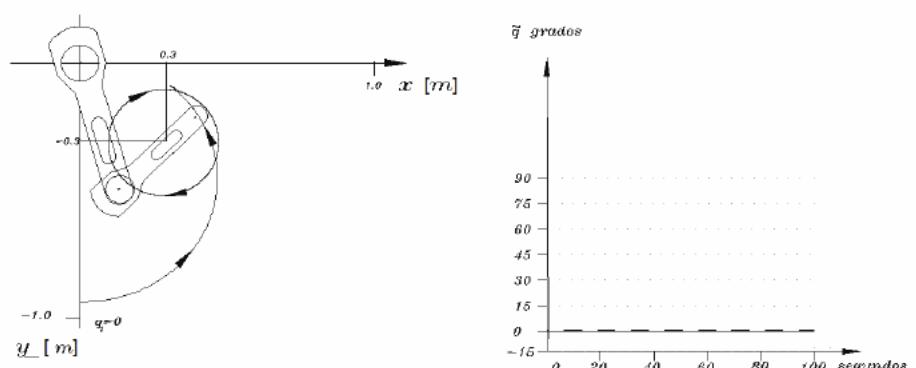


Figura 6.22 Desempeño del algoritmo de control arco tangente τ_{atan} .

de estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado mantiene a los errores de posición acotados $\tilde{q} \in \mathcal{L}_\infty^n$ dentro del radio de atracción. La sintonía de las ganancias del algoritmo de control son adecuadas ya que producen un estado transitorio corto con sobre impulsos atenuados y en estado estacionario la magnitud del error de posición de cada articulación alcanza valores de 0.4 grados, lo que permite realizar un seguimiento mucho más exacto de la trayectoria circular, mejorando el desempeño mostrado por el control τ_{PD} cuya exactitud en el seguimiento es pobre. La convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de las variables de estado $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T$ no se alcanza debido a que la aplicación es sobre el seguimiento de una trayectoria variante en el tiempo $q_d(t)$ lo que representa un problema mucho más complicado que el problema de regulación.

La figura 6.23 presenta el seguimiento de la trayectoria circular por el robot manipulador de 2 gdl cuando se encuentra controlado por el esquema tangente hiperbólico. La sintonía de las ganancias permite operar al servo amplificador en la región lineal lejos de los límites de saturación. De hecho el máximo par aplicado a las articulaciones del robot es el 80 % de los límites físicos.

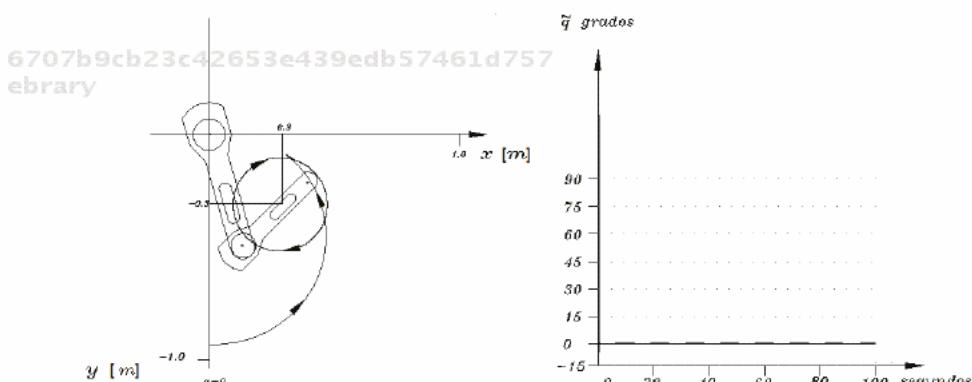


Figura 6.23 Desempeño del algoritmo de control tangente hiperbólico.

Cuando la ganancia derivativa adquiere el mismo valor de la ganancia proporcional, la inyección de amortiguamiento genera un estado transito-

rio rápido con pequeños sobretiros, y en estado estacionario la magnitud del error de posición de ambas articulaciones es menor a 0.45 grados, realizando la traza circular con mayor exactitud que referencia al control τ_{PD} . Para los algoritmos de control τ_{atan} y τ_{tanh} las ganancias que determinan la pendiente Λ y Γ representan una herramienta adicional para mejorar el desempeño de esos esquemas, debido que pueden modificar la velocidad de respuesta.

6.5 Aplicaciones de control de posición

El control de posición de robots manipuladores tiene varias aplicaciones científicas, comerciales, industriales, domésticas y en medicina. Algunos ejemplos son el traslado de objetos, envío y recolección de herramientas, teleoperación, asistencia robotizada a personas minusválidas como ayuda para comer o escribir, etc.

Adicionalmente en el ámbito científico control de posición también puede aplicarse a control cartesiano, control punto a punto y programación de instrucciones para robots industriales.



6.5.1 Control cartesiano

El control cartesiano de robots manipuladores es la programación de tareas directamente en coordenadas cartesianas o en espacio de tareas.

Las coordenadas cartesianas facilitan la interpretación del planteamiento de problemas y su implementación. En contraste, las coordenadas articulares pueden resultar mucho más complicadas para el ingeniero programador de robots (ver figura 6.24). En este contexto, las coordenadas cartesianas plantean un escenario favorable para programar robots manipuladores.

La metodología del jacobiano transpuesto sugerida por Arimoto permite

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

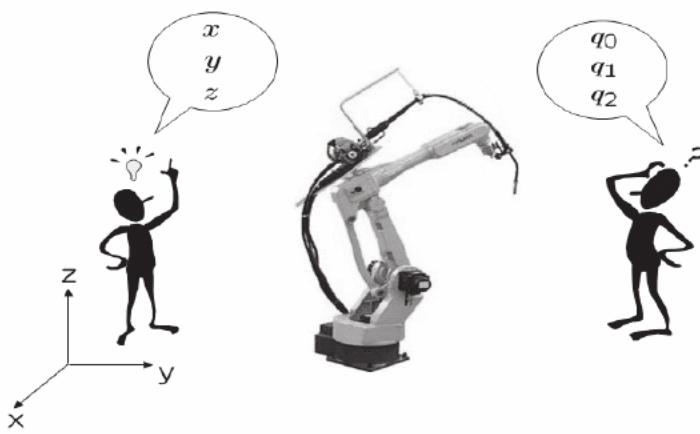
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 6.24 Control cartesiano.

convertir una estructura de control cartesiana en par aplicado a las articulaciones del robot, por ejemplo:

$$\tau = J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_\chi \quad (6.60)$$

donde \mathbf{f}_χ representa la fuerza en coordenadas cartesianas, $J(\mathbf{q})$ es el jacobiano del robot, τ es el par aplicado a las articulaciones del robot.

De esta forma, la técnica de moldeo de energía permite ampliar sus resultados de diseño de algoritmos de control en coordenadas articulares hacia el espacio de tareas, generando una familia extensa de esquemas de control en coordenadas cartesianas.

El problema de control de posición en coordenadas cartesianas consiste en determinar la ley de control $\tau = J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_\chi$ tal que suministre los pares aplicados a las articulaciones del robot con el objetivo de mover el extremo final del robot hacia la posición deseada \mathbf{x}_d . El error de posición cartesiano se define como $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$, entonces el objetivo de control es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$$

sujeto a que las condiciones iniciales del vector de error de posición cartesiano $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ y la velocidad cartesiana $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(0)$ sean suficientemente pequeños.

El problema de control cartesiano de robots manipuladores considera las siguientes hipótesis:



Existe un vector de posición constante $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ en el espacio de configuración cartesiana para el cual el vector de error cartesiano se anula, $\chi(\mathbf{q}) = \chi(\mathbf{q}_d)$. Es importante mencionar que no es necesario conocer a \mathbf{q}_d . Esta hipótesis asegura la solución del problema.



El jacobiano del robot es una matriz continua y diferenciable con respecto a cada entrada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; además satisface que es de rango completo, es decir

$$\text{rango } \{J(\mathbf{q})\} = n$$

Esta hipótesis es un requerimiento técnico en la existencia del punto de equilibrio y del análisis de estabilidad local.

Considérese la siguiente estructura de control cartesiano definida por mapeo de energía:

$$\mathbf{f}_{\chi} = \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\chi}) - \mathbf{f}_v(K_p, \dot{\chi}) + \mathbf{g}(\chi) \quad (6.61)$$

donde $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas. La energía potencial artificial en coordenadas cartesianas está representada por $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi})$ y la función disipativa cartesiana por $\mathbf{f}_v(K_p, \dot{\chi})$, la compensación de fuerza gravitacional es $\mathbf{g}(\chi)$.

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad en coordenadas cartesianas se encuentra determinado por la ecuación (5.54), la cual la reescribimos a continuación:

$$\mathbf{f}_{\chi} = M(\chi)\ddot{\chi} + C(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} + \mathbf{g}(\chi) + B\dot{\chi}$$

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico cartesiano del robot manipulador (5.54) y la estructura de control cartesiano (6.61) se encuentra dado en variables de estado cartesianas $[\tilde{\chi}^T, \dot{\chi}^T]^T$ por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\chi} \\ M^{-1}(\chi) [\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\chi}) - \mathbf{f}_v(K_p, \dot{\chi}) - C(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} - B\dot{\chi}] \end{bmatrix}$$

(6.62)

resulta una ecuación diferencial autónoma no lineal.

Considérese la propuesta de la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\chi}, \tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \dot{\chi}^T M(\chi) \dot{\chi} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi}) \quad (6.63)$$

La derivada temporal de la función (6.63) está dada como:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\chi}, \tilde{\chi}) &= \dot{\chi}^T M(\chi) \ddot{\chi} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^T \dot{M}(\chi) \dot{\chi} - \nabla^T \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi}) \dot{\chi} \quad (6.64) \\ &= \cancel{\dot{\chi}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\chi})} - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi}) - \underbrace{\dot{\chi}^T C(\chi, \dot{\chi}) \dot{\chi} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^T \dot{M}(\chi) \dot{\chi}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &\quad - \cancel{\dot{\chi}^T B \dot{\chi}} - \cancel{\nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\chi}) \dot{\chi}} \\ &= -\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\chi}) - \dot{\chi}^T B \dot{\chi} \leq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se demuestra estabilidad local del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.62). La estabilidad asintótica se obtiene empleando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

ebrary La conversión de la fuerza cartesiana \mathbf{f}_{χ} a par aplicado es por medio de la expresión del jacobiano transpuesto de Arimoto: $\boldsymbol{\tau} = J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_{\chi}$.

El control en espacio cartesiano de robots manipuladores presenta diferencias significativas con el control en espacio articular como las que a continuación se enlistan:



La estabilidad asintótica en espacio cartesiano es local (jacobiano de rango completo), esto significa que la posición del robot debe estar suficientemente cercana al punto deseado.



La estabilidad asintótica en espacio articular es global, no depende de las condiciones iniciales.



Facilidad natural de programación de robots manipuladores en coordenadas cartesianas.



La programación en coordenadas articulares expresadas en grados o radianes puede resultar complicada su interpretación.



Las ganancias de los algoritmos de control en espacio articular permanecen constantes, por lo que resulta más fácil el método de sintonía.



La incorporación del jacobiano transpuesto en la conversión de fuerza cartesiana a par aplicado modifica las ganancias de los algoritmos de control cartesianos, resultando ganancias dependientes de la posición.

Por ejemplo, $J^T(\mathbf{q})K_p$, entonces la matriz resultante del producto de la matriz jacobiana y la ganancia proporcional es una matriz dependiente de la posición articular \mathbf{q} , en consecuencia la sintonía de las ganancias puede ser complicada y producir pobre desempeño.



A pesar de que la conversión de fuerza cartesiana a par aplicado vía jacobiano transpuesto es un mapeo no lineal, la dinámica del robot en coordenadas cartesianas mantiene las propiedades matemáticas claves en el análisis y diseño de algoritmos de control en espacio cartesiano tales como matriz de inercia cartesiana es simétrica y definida positiva, así como la propiedad de antisimetría cartesiana.



El control en espacio articular presenta ventajas en desempeño, sintonía de ganancias y estabilidad asintótica global cuando se aplica a espacio cartesiano convirtiendo las coordenadas cartesianas a coordenadas articulares por medio de la cinemática inversa.



Ejemplo 6.10



Convertir en variables de estado cartesiano el algoritmo de control proporcional derivativo PD (6.2) y llevar a cabo el análisis de estabilidad local en su espacio de tareas.

Solución: el control cartesiano PD está dado por la siguiente estructura:

$$\mathbf{f}_\chi = K_p \tilde{\chi} - K_v \dot{\chi} + \mathbf{g}(\chi) \quad (6.65)$$

donde $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico cartesiano

de un robot manipulador de n gdl (5.54) y el control (6.65) está dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\chi} \\ M^{-1}(\chi) [K_p \tilde{\chi} - K_v \dot{\chi} - C(\chi, \dot{\chi}) \dot{\chi} - B \dot{\chi}] \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\chi}, \tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \dot{\chi}^T M(\chi) \dot{\chi} + \frac{1}{2} \tilde{\chi}^T K_p \tilde{\chi} \quad (6.67)$$

La derivada temporal de la función (6.67) está dada como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\chi}, \tilde{\chi}) &= \dot{\chi}^T M(\chi) \ddot{\chi} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^T \dot{M}(\chi) \dot{\chi} + \tilde{\chi}^T K_p \dot{\chi} \\ &= \cancel{\dot{\chi}^T K_p \tilde{\chi}} - K_v \dot{\chi} - \underbrace{\dot{\chi}^T C(\chi, \dot{\chi}) \dot{\chi} + \frac{1}{2} \dot{\chi}^T \dot{M}(\chi) \dot{\chi}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &\quad - \cancel{\dot{\chi}^T B \dot{\chi}} - \cancel{\tilde{\chi}^T K_p \tilde{\chi}} \\ &= -K_v \dot{\chi} - \dot{\chi}^T B \dot{\chi} \leq 0. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Por lo tanto, se demuestra estabilidad local del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (6.62). La estabilidad asintótica se obtiene empleando el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

El par aplicado a las articulaciones del robot se encuentra determinado por $\tau = J^T(\mathbf{q}) [K_p \tilde{\chi} - K_v \dot{\chi} + \mathbf{g}(\chi)]$.

Control cartesiano con acciones acotadas

Como ejemplos de esquemas de control cartesiano con acciones acotadas se encuentran los siguientes algoritmos:



Control tangente hiperbólico cartesiano

$$\begin{aligned} f_\chi &= K_p \tanh(\Lambda \tilde{\chi}) - K_v \tanh(\Gamma \dot{\chi}) + \mathbf{g}(\chi) \\ \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\chi}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_n))} \end{bmatrix}^T \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_1))} \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{(\ln \cosh(\tilde{\chi}_n))} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Control arco tangente cartesiano

$$f_{\chi} = K_p \operatorname{atan}(\Lambda \tilde{\chi}) - K_v \operatorname{atan}(\Gamma \dot{\chi}) + g(\chi)$$

$$u_a(K_p, \tilde{q}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{\chi}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{\chi}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{\chi}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{\chi}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{\chi}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{\chi}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_n^2]} \end{bmatrix}^T K_p \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\tilde{\chi}_1 \operatorname{atan}(\lambda_1 \tilde{\chi}_1) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_1^2]} \\ \sqrt{\tilde{\chi}_2 \operatorname{atan}(\lambda_2 \tilde{\chi}_2) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_2^2]} \\ \vdots \\ \sqrt{\tilde{\chi}_n \operatorname{atan}(\lambda_n \tilde{\chi}_n) - \frac{1}{2} \ln[1 + \tilde{\chi}_n^2]} \end{bmatrix}$$



6.5.2 Visual servoing



Hoy en día, el empleo de cámaras de video acopladas al robot manipulador se utiliza en la industria para seleccionar por ejemplo materiales o piezas automotrices; en medicina es la forma de automatizar quirófanos, ya que a través de visual servoing es posible realizar cirugías complicadas. En actividades de investigación del espacio la incorporación de cámaras de video amplía el horizonte de búsqueda y análisis de objetos desconocidos. En particular en el caso del robot manipulador mejora sus medios de percepción y su autonomía en el ambiente de trabajo.

Un sistema de visión artificial imita al sentido humano; está compuesto por una cámara de video, electrónica y programación para poder desplegar la información visual en una computadora o monitor. Permite medir sin contacto la posición y orientación del extremo final del robot, así como de cualquier otro objeto visible dentro de su espacio de trabajo. La incorporación de una cámara de video en el robot incrementa su potencial para responder de manera versátil a un espectro de aplicaciones cada vez más amplio. Algunas aplicaciones para robots guiados por visión incluyen manipulación y transportación de objetos, seguimiento de trayectorias, regulación, evasión de obstáculos, etc.

Visual servoing

En el sitio web del libro se presentan las bases fundamentales del control de robots usando información visual, así como el modelo matemático de un sistema de visión. Asimismo, se analizan las principales configuraciones entre la cámara de video y el robot manipulador: configuración cámara en mano y configuración cámara fija. También se ve el diseño de esquemas de control con la estructura del jacobiano transpuesto, los cuales se ilustran usando la metodología de moldeo de energía.

Al control de robots manipuladores mediante el empleo de información

visual proporcionada por una cámara de video CCD en el lazo de retroalimentación se le conoce como *visual servoing*; se trata de una clase particular de control cartesiano y agrupa varias áreas del conocimiento, entre ellas la computación, el procesamiento de imágenes, la física, las matemáticas, el control automático, la electrónica, etc.



Control por visión

El área del conocimiento que aborda el control de posición de robots manipuladores empleando información visual directamente en el lazo de control se le denomina *visual servoing*. Hoy en día, se ha vuelto una atractiva área científica de naturaleza multidisciplinaria; es la fusión de resultados de varias áreas del conocimiento que incluyen procesamiento de imágenes a alta velocidad, cinemática, dinámica, teoría de control, robótica, mecatrónica y cómputo en tiempo real. Visual servoing puede aplicarse ampliamente en control de objetos estáticos, seguimiento de objetos en movimiento, en el campo de las exploraciones de rangos amplios, reconocimiento y vigilancia por robots aéreos, así como en robots de aplicaciones médicas como en operaciones o cirugías a corazón abierto o hidrocefalia (retirar agua del cerebro). El moldeo de energía se ha convertido en una herramienta de diseño de familias grandes de esquemas de control para visual servoing.

Actualmente, la mayoría de los robots industriales que están equipados con sistemas de visión no se explotan al máximo de su potencial debido a que la información visual sólo se utiliza con el propósito de localizar ciertos objetos en el espacio de trabajo del robot. La información visual resulta de mayor valor en el momento que se incorpora en el lazo de control.

Visual servoing es un método de control para robots manipuladores que emplea información visual en el lazo de control. La información visual es proporcionada por un sistema de visión y retroalimentada a un algoritmo de control para que éste guíe la posición del robot y su efecto final relativo a un objeto llamado objetivo. Visual servoing es un concepto que no sólo incluye controlar a un robot para manipular dentro de su ambiente de trabajo, sino también realizar una tarea programada. Es decir, el robot no está limitado a observar el ambiente, lo manipula e interacciona con objetos.

Visual servoing es la fusión de resultados de varias disciplinas tales como visión artificial, teoría de control, robótica y computación, y consiste en incorporar en el lazo de control la información visual obtenida a través del sistema de visión para generar una variable de error definida directamente en términos de un conjunto de características distintivas de imágenes (control basado en imágenes). Esta variable de error se utiliza con la retroalimentación visual directa, la posición y velocidad articular por un controlador para cumplir con ciertos objetivos de control. La formulación más sencilla es cuando el objeto se encuentra estático y la trayectoria deseada es un punto en el plano de la imagen.



6.5.3 Control punto a punto

Una de las aplicaciones más populares de control de posición es el denominado control punto a punto, consiste en mover el extremo final del robot en cada una de las posiciones deseadas q_{di} , $i = 1, 2, \dots, m$. La curva de seguimiento puede estar parametrizada vía ecuaciones o a través del registro de puntos que le indiquen la forma de movimiento. Por ejemplo, la figura 6.25 muestra el trazo de figuras con 4 y 8 pétalos realizadas por un robot planar de 2 gdl usando el algoritmo de control tangente hiperbólica.

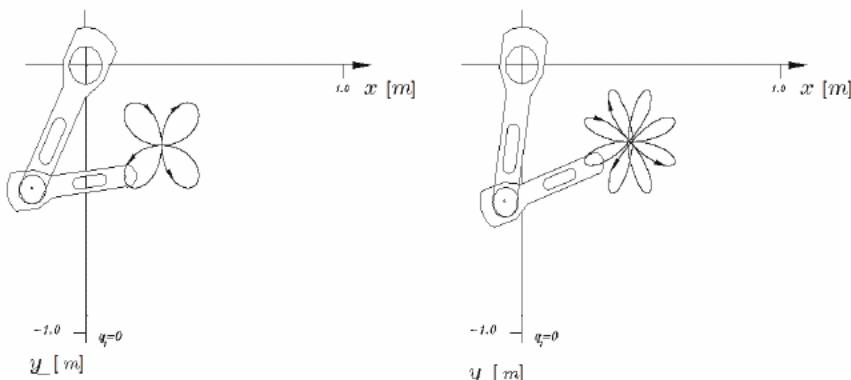


Figura 6.25 Aplicación de reguladores para trazo de figuras.

Para que un regulador diseñado por medio de moldeo de energía pueda ser empleado en control punto a punto, es necesario que dicho regulador genere un atractor con características de estabilidad asintótica global y además tenga alto desempeño.

La estabilidad asintótica global garantiza la inmunidad a la condición inicial, esto significa que una vez que el robot se encuentra posicionado en un punto deseado q_{di} , el siguiente periodo de muestreo se moverá al punto $q_{d(i+1)}$, por lo que q_{di} hace el papel de la condición inicial, esto se hará así sucesivamente durante el seguimiento de la trayectoria $q_d(t)$.

Otra forma de programar a un robot manipulador es por medio de coor-

denadas almacenadas en un archivo tipo texto o ASCII. Los datos pueden estar grabados en forma tabular con dos columnas, la primera columna contiene el tiempo real y la segunda columna el valor de la posición que tiene que seguir el robot.

La velocidad de movimiento del robot no es necesaria debido a que se puede obtener por diferenciación numérica de la posición (método de Euler). Si los datos se encuentran directamente en coordenadas articulares, éstas representan la variable articular q . En otro caso se deben convertir las coordenadas cartesianas a articulares, lo cual se realiza a través de la cinemática inversa del robot.

La ejecución de la aplicación consiste en abrir el archivo o disponer del medio electrónico donde se encuentre la curva o conjunto de coordenadas. Cada renglón del archivo representa el desplazamiento del robot y su instante de tiempo para realizarlo: entre más puntos tenga el archivo más suave será la curva de seguimiento del robot.

Cada uno de estos puntos representa la posición deseada q_{di} para $i = 1, 2, \dots$, número de renglones del archivo de trabajo. La implementación consiste en generar la señal de error de posición $\tilde{q}(t_i) = q_{di} - q(t)$ este error es procesado por el algoritmo de control $\tau = \tau(K_p, K_v, \tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ quien envía la energía al amplificador electrónico de los servomotores del robot, lo cual realiza en cada tiempo t_i especificado en la primera columna del archivo de trabajo. La aplicación se puede realizar en forma cíclica o repetitiva, de esta manera el robot queda programado las 24 horas del día y los 365 días del año.

La figura 6.26 muestra el seguimiento de trayectoria de un robot manipulador de 3 gdl para escribir la palabra *Robot* y realizar el trazo del mapa de la república mexicana. En este caso el algoritmo de control que guía al robot en el seguimiento de la trayectoria fue el tangente hiperbólico.



Figura 6.26 Control punto a punto.



Inteligencia artificial

Aplicaciones de inteligencia artificial a la robótica son presentadas en el sitio web del libro. Empleo de redes neuronales para diseño de trayectorias como las que se muestran en la figura 6.26 o para autosintonía de las ganancias proporcional y derivativa del algoritmos de control. Ejemplos y aplicaciones en MatLab se documentan.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



6.5.4 Programación de instrucciones robot

En la programación estándar de robots industriales se encuentran instrucciones genéricas `move(x,y,z)`, `line(xi,yi,zi,xf,yf,zf)`, `circle(r,x,y)`, etc. Estas instrucciones moverán al robot desde su posición inicial hacia la referencia indicada $[x, y, z]^T$.

El fabricante de robots industriales no proporciona información sobre los detalles técnicos de control de la instrucción genérica, ya que se considera secreto tecnológico. Por ejemplo, evidentemente la instrucción `move(x, y, z)` incorpora algún tipo de algoritmo de control para guiar al robot a la posición solicitada.

Una aplicación de la metodología de moldeo de energía se encuentra en la programación de instrucciones robot, a través de algoritmos de control que generan un punto de equilibrio con atractor asintóticamente estable y de alto desempeño como los esquemas de control saturados.

En la práctica se traduce que el robot desarrollará la aplicación con alto desempeño, confiabilidad y exactitud.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

♣ Ejemplo 6.11

Implementar la instrucción `move(x,y,z)` usando moldeo de energía.

Solución

Para la implementación de la instrucción `move(x,y,z)` se hará uso de la cinemática inversa del robot, ya que convierte las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T$ en coordenadas articulares \mathbf{q} .

Para tal efecto se empleará el algoritmo de control tangente hiperbólico (6.49) ya que es un esquema de control con altas prestaciones y desempeño. La sintonía de las ganancias proporcional y derivativa es trivial. Una buena elección es la siguiente $kv_i = kp_i$, y $\lambda_i = \gamma_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$ y satisfacer la condición para no saturar los servo amplificadores, por ejemplo trabajar a los servo amplificadores al 80% de su capacidad, $kpi < 0.8\tau_i^{max}$ para $i = 1, 2, 3$. De esta forma se sintoniza una sola ganancia y al mismo tiempo el servo amplificador funciona en la región lineal lejos de los límites de saturación.

La implementación de la instrucción `move(x,y,z)` se hará en lenguaje C, cuyo código fuente para el robot rotradi de 3 gdl se presenta a continuación:

```
/* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla */
/* Facultad de Ciencias de la Electrónica */
/* Grupo de Robótica, junio 2001 */
/* Función move(x,y,z) robot rotradi de 3 gdl */

int move( float x, float y, float z){

    /* Detecta si existe alguna singularidad de posicionamiento*/
    ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS
```

```

if(cinematica_inversa(x,y,z)==0){
    return(0); //Activa bandera de error
}

/* Sintonía de las ganancias proporcional y derivativa */
/* Regla de sintonía kpi<0.8 taui(max); kvi=kpi */
/* Pares máximos del Rotradi: */
/* articulación de la base: 50Nm,*/
/* articulación del hombro: 150 Nm, */
/* articulación del codo: 7 Nm. */
    kp1=30; kp2=60; kp3=7; // Ganancias proporcional
    kv1=kp1; kv2=kp2; kv3=kp3; // Ganancias derivativas

/* Lectura del FPGA posiciones en grados del robot */
    q1=encoder1();
    q2=encoder2();
    q3=encoder3();

/* Velocidades articulares grados/seg por el método de Euler */
/* Para cada articulación realizar (qi(k)-qi(k-1))/h */
/* donde h es el periodo de muestreo (0.0025 seg) */
qp1=velocidad_euler(q1);57
qp2=velocidad_euler(q2);
qp3=velocidad_euler(q3);

/* Generación de las señales de error de posición */
qtilde1=cinematica_inversa(x,y,z).qd1-q1;
qtilde2=cinematica_inversa(x,y,z).qd2-q2;
qtilde3=cinematica_inversa(x,y,z).qd3-q3;

// Cálculo de la ley de control para cada articulación
// La base no lleva compensación de gravedad, se mueve en
// un plano horizontal

```

```

tau1=k_p1*tanh(qtilde1)-k_v1*tanh(qp1);
tau2=k_p2*tanh(qtilde2)-k_v2*tanh(qp2)+ comp_gravedad2(q2,q3);
tau3=k_p3*tanh(qtilde3)-k_v3*tanh(qp3)+ comp_gravedad3(q2,q3);

// Envío de los pares aplicados a los servomotores del robot
par_aplicado1(tau1); // Par aplicado de la base
par_aplicado2(tau2); // Par aplicado al hombro
par_aplicado3(tau3); // Par aplicado al codo

return(1);
}

```

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

La puesta a punto de la función `move(x,y,z)` consiste en sintonizar de manera adecuada las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v . Esto es un proceso empírico a base de prueba y error, se seleccionan los valores adecuados de las ganancias de tal forma que el robot responda con un transitorio suave, sin sobre impulsos y con errores en estado estacionario menores a 0.0001 grados, por cada articulación.

Actualmente en diversas industrias existen robots cuya electrónica es obsoleta. Sin embargo el sistema mecánico del robot aún tiene enorme potencial. Una forma de reutilizar al robot es diseñar el servo amplificador y con la incorporación de nuevas tarjetas de instrumentación el robot puede volver a ser operativo, siempre y cuando se tengan todas las instrucciones de programación. En este escenario la técnica de moldeo de energía se convierte en desarrollo tecnológico ya que permite *reconstruir* todas las instrucciones del lenguaje de programación del robot, y de esta forma ser operativo para nuevas aplicaciones industriales o académicas.

Los esquemas de diseño por la técnica moldeo de energía permiten guiar al robot de manera activa. Esto puede realizarse moviendo al robot con la mano por ejemplo, y el sistema operativo del robot grabará todos los puntos de desplazamiento. Posteriormente se reproduce punto a punto el

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

seguimiento de la trayectoria previamente grabada. La curva que debe seguir el robot puede ser registrada en un archivo o almacenada en disco duro. El formato del archivo que tenga registrada la curva de trabajo del robot puede tener un formato simple como tipo texto o ASCII. Los datos pueden estar grabados en el archivo en forma tabular.

La ejecución de la aplicación consiste en abrir el archivo o disponer del medio electrónico donde se encuentre la curva de trabajo. Cada renglón del archivo representa el desplazamiento del robot y su instante de tiempo para realizarlo: entre más puntos tenga el archivo más suave será la curva de seguimiento del robot. Cada uno de estos puntos representa la posición deseada i -ésima \mathbf{q}_{di} para $i = 1, 2, \dots$, número de renglones del archivo de trabajo. La implementación consiste en generar la señal de error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t_i) = \mathbf{q}_{di} - \mathbf{q}(t)$, este error es procesado por el algoritmo de control $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(K_p, K_v, \tilde{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ quien envía la energía al amplificador electrónico de los servomotores del robot, lo cual se realiza en cada tiempo t_i especificado en la primera columna del archivo de trabajo. La aplicación se puede realizar cíclica o repetitiva, de esta forma el robot queda programado las 24 horas del día y los 365 días del año.



6.5.5 Robótica industrial

En la actualidad, los robots industriales se han convertido en poderosas herramientas de productividad, debido a la versatilidad de funciones, exactitud y repetitibilidad que pueden realizar en un amplia gama de aplicaciones como por ejemplo, traslado y pintado de objetos, soldadura por arco y de punto, ensambles, estibado, corte de piezas automotrices, etc. Actualmente, los robots industriales son mecanismos autónomos diseñados para mover partes o objetos a través de una trayectoria deseada, es decir puede procesar ciclos de trabajo de manera secuencial.

La figura 6.27 muestra un ejemplo de celda robotizada de la compañía FANUC, los robots realizan de manera automática todo el proceso de pro-

ducción. Para llevar a cabo este tipo de actividades, es necesario abordar temas sobre lenguajes de programación, estudiar los tipo de instrucciones o comandos para indicarle al robot la manera de realizar la tarea.

Una característica indispensable de la programación de robots es que debe ser capaz de implementar una variedad de aplicaciones y al mismo tiempo ser flexible para una tarea dada, de tal forma que permita una secuencia dinámica de operaciones.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook

Figura 6.27 Celda FANUC.

¿Porqué usar un robot?

- Disminuye el costo de producción.
- Garantiza la calidad del producto.
- Baja el costo de la mano de obra.
- Incrementa la productividad.

La figura 6.28 muestra un robot industrial modelo 2000iA/165F de la compañía FANUC, a través de este robot en el sitio web del libro se pre-

senta el procedimiento desde como encender el robot, operar los interruptores *deadman* para habilitar al robot, paro de emergencia, calibración, descripción de la arquitectura, consola de control, sistema mecánico, ejemplos de programación, *teach pendant* y aplicaciones.



Figura 6.28 Robot Industrial Fanuc-2000iA/165F.

La forma más simple de programar a un robot industrial es por medio de un dispositivo portátil denominado *teach pendant* como el que se presenta en la figura 6.29, el cual corresponde al modelo 2000iA/165F de la compañía FANUC.

El *teach pendant* representa la interface entre el programador y el robot; a través de este dispositivo es posible editar, grabar puntos, datos e instrucciones, corregir, operar al robot en modo manual, activar y desactivar alarmas, puertos, interfaces y programar diversas aplicaciones para un robot industrial.

Características y detalles de los aspectos de programación son abordados en el sitio web del libro a través de ejemplos y aplicaciones con el robot 2000iA/165F de la compañía FANUC.



Programación FANUC

En el sitio web del libro se encuentra disponible una serie de material que le permite al lector aprender desde los pasos secuenciales para encender un robot industrial, nomenclatura y conceptos del área industrial, arquitectura del robot, tipos de sistemas cartesianos, clases de coordenadas, instrucciones de movimiento y trayectoria, procedimientos de programación usando *teach pendant*, programas ejemplos y aplicaciones.



Figura 6.29 Teach pendant del robot 2000iA/165F FANUC.

if Código Fuente 6.1 TRACK

Sub Program: cap11_TRACK Editorial Alfaomega
%Libro: Robótica. Control de Robots Manipuladores
%Capítulo 6 Robótica industrial

TRACK

```

1 %
2 /PROG TRACK
3 ! MOVE TO APPROACH POS
4 L P[2] 500mm/sec FINE ;
5 ! MOVE TO PART
6 L P[3] 500mm/sec FINE ;
7 ! WAIT FOR 5 SECONDS
8 WAIT 5.00(sec) ;
9 ! MOVE TO APPROACH POS
10 L P[2] 500mm/sec FINE ;
11 /END
12 %

```

El cuadro 6.1 muestra un ejemplo de programación del robot FANUC modelo 2000iA/165F, el cual fue editado por medio del *teach pendant*.

6.6 Resumen



Control de posición o regulación de robots manipuladores es uno de los temas más importantes en el control de robots manipuladores. Actualmente es un tema vigente que ofrece retos teóricos y prácticos. El potencial del control de posición de robots manipuladores se ubica en el sector industrial como traslado, estibado, pintado de objetos, soldadura, transporte de material, etc. Estas aplicaciones pueden realizarse por reguladores de alto desempeño diseñados por la técnica de moldeo de energía.

El moldeo de energía representa una técnica de control moderna que permite diseñar una familia extensa de algoritmos de control. La ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica no lineal del robot manipulador y el algoritmo de control genera un punto de equilibrio único y asintóticamente estable en forma global.

Tomando en cuenta que varios algoritmos de control tienen alto desempeño, el moldeo de energía se convierte en una herramienta de desarrollo tecnológico con las siguientes ventajas:

-  Permite implementar instrucciones de programación de robótica industrial.
-  Facilita el guiado del robot a través de una base de datos o curva de registro.
-  Aplicaciones de control punto a punto.

Otra ventaja que presenta el moldeo de energía es que puede guiar al robot

en forma automática si se cuenta con los datos o curva de seguimiento. Esta aplicación se le denomina control punto a punto, debido a que los esquemas de control de moldeo de energía generan un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces no dependen de la condición inicial. Los esquemas de control con acciones de control acotada son recomendables para este tipo de aplicación ya que la sintonía de las ganancias no depende de las posiciones deseadas, como en el caso del control proporcional derivativo.



6.7 Referencias selectas

Con la finalidad de complementar la información presentada en las diferentes secciones de este capítulo se recomiendan las siguientes referencias:



6.2 Regulación

La contribución de Arimoto de 1981 sobre la demostración de estabilidad asintótica del control PD, así como la demostración de estabilidad asintótica local del control PID y condiciones de sintonía de sus ganancias realizada por Kelly pueden ser consultadas en:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



Takegaki M. & S. Arimoto. “*A new feedback method for dynamic control of manipulators*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control. 1981, 103, pp. 119-125.



Arimoto S. & Miyazaki F. “*Stability and robustnes of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability*”. In Robotics research: first international symposium. Edited by M. Brady and P. Paul. MIT Press, 1984, pp. 783-799.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



Arimoto S. & Miyazaki F. "Stability and robustness of PD feedback control with gravity compensation for robot manipulators". In Robotics: theory and applications. DSC Vol 3. Edited by F. Paul and D. Youcef-Toumi. 1986.



T. C. Hsia, "Robustness analysis of a PD controller with approximate gravity compensation for robot manipulator control". Journal of Robotic System, 1994, 11(6), pp. 517–521.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Kelly R. "A tuning procedure for stable PID control for robot manipulators". Robotica. March-April, 1995. Vol. 13. Part 2. pp. 141-148.



H. Seraji "A new class of nonlinear PID controllers with robotic applications". Journal of Robotic Systems. 1998. 15(3). 61–81.



J. Alvarez, R. Kelly, & I. Cervantes "Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators". Automatica, Vol. 39, No. 6, June, 2003. pp. 989-995.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6.3 Moldeo de energía

La técnica de moldeo de energía ha sido utilizada por los siguientes autores:



Kelly R., V. Santibáñez y F. Reyes. "On saturated-proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators". Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. John Wiley & Sons, Ltd. 10(4): 1996. pp. 465-479.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

 R. Kelly, & R. Carelli, “*A class of nonlinear PD-Type controllers for robot manipulators*”. Journal of Robotic Systems. 1996. 13(12). 793-802.

 Kelly R., V. Santibáñez and F. Reyes. “*On saturated-proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators*”. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 1996. 10(4): pp. 465-479.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 Reyes F. and R. Kelly. “*A direct drive robot for control research*”. In Proc. IASTED International Conference, Applications of Control and Robotics. Orlando. FL. 1996. pp. 181–184.

 Kelly R., V. Santibáñez y F. Reyes. “*Adaptive regulation of robot manipulators*”. Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 1997.

 Santibáñez Victor & Rafael Kelly “*Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators*”. Automatica. Vol. 33. No. 4, pp. 675-682. 1997.

 Kelly R., V. Santibáñez & F. Reyes 1998, “*A Class of adaptive regulators for robot manipulators*”. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing (John Wiley and Sons, Ltd). 1998. Vol. 12. pp. 42–62.

 Kelly R., V. Santibáñez “*Global regulation of elastic joint robots based on energy shaping*”. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 43. No. 10. October 1998. pp. 1451-1456.

9edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

 Santibáñez V., R. Kelly and F. Reyes. 1998. “*A new set-point controller with bounded torque for robot manipulators*”. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 1998. Vol. 45, No. 1. February. pp. 126–133.

 Reyes F. and R. Kelly. “*A Class of P(2m-1)D type controllers with gravity compensation for robot manipulators*”. Vol. VII, pp. 67-71, Control Automático. Noviembre 1998. Viña del Mar, Chile.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 R. Kelly. “*Regulation of manipulators in generic task space: An energy shaping plus damping injection approach*”. IEEE Transactions on Robotics and Automation. 15(2). April, 1999. pp. 381–386.

 Reyes F., E. Espinosa & J. Barahona. “*Family of saturated controllers for robot manipulators*”. IASTED International Conference on Control and Applications. Cancun, Mexico. May 20-22, 2002. pp. 250-255.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

 Reyes F., J. Barahona and E. Espinosa. “*Trigonometric saturated Controller for robot manipulators*”. Advances in Systems Theory, Mathematical Methods and Applications. 2002. WSEAS, Electrical and Computer Engineering Series pp. 278-283.

 Reyes F. and J. Cid. “*Bounded controller for robot manipulators*”. IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling. Crete, Greece. June 25-28, 2002. pp. 271-276.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Reyes F. & E. Guevara. “*Design of a new control algorithm for robot manipulators*”. Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signal and Systems. May. 19-23, 2003. Cancun, Mexico, pp. 118-123.



R. Kelly y V. Santibáñez. “*Control de movimiento de robots manipuladores*”. Prentice-Hall, Pearson. 2003. Capítulos 6, 7 y 8.



R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría. “*Control of robot manipulators in joint space*”. Springer-Verlag London 2005. Chapters 6, 7, 8 and 9.



Reyes F. & A. Rosado. “*Polynomial family of PD-Type controllers for robot manipulators*”. IFAC Journal on Control Engineering Practice. Edit Elsevier. 2005. Vol 13. pp. 441-450.



Jose Luis Oviedo, Fernando Reyes & Pablo Sanchez “*Stability proof of a new motion controller using strong Lyapunov function*”. Proceedings of the 12th IASTED International Conference on Robotics and Applications. August 14-16, 2006. Honolulu, Hawaii, USA. pp. 157-162.



Pablo Sanchez & Fernando Reyes, “*A polynomial family of PD type cartesian controller*”. IASTED International Journal of Robotics and Automation. Vol. 23, No. 2, 2008. pp. 79-87. Acta Press.



Emeterio Aguiñaga, Arturo Zavala, Víctor Santibáñez & Fernando Reyes. “*Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs*”. IEEE Transactions on Control Systems Technology. Vol. 17. No. 4. July 2009. pp. 934-944.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

-  Pablo Sánchez & Fernando Reyes “*Cartesian control for robot manipulators*”. Edit Intech Croatia. Robot manipulators, trends and development. pp. 165- 212. 2010.



6.4 Índice de desempeño

La medición del desempeño de un algoritmo de control definido por la norma \mathcal{L}_2 fue introducido por Whitcomb en 1993 y subsecuentemente ha sido empleado por:

 Whitcomb L. L. A. Rizzi. and D.E. Koditschek. 1993. “*Comparative experiments with a new adaptive controller for robot arms.*” IEEE Transactions on Robotics and Automation. Febrary, 1993. Vol. 9. No. 1. pp. 59-70

 B. De Jager, & J. Banens. “*Experimental evaluations of robot controllers.*” Proceedings of the 33rd. Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Fl. U.S.A., December, 1994. pp. 363–368.

 B. De Jager, & J. Banens, “*Experimental evaluations of robot controllers.*” Proceedings of the 33rd. Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, Fl. U.S.A., December, 1994. 363–368.

 H. Berghuis, H. Roebbers & H. Nijmeijer. “*Experimental comparison of parameter estimation methods in adaptive robot control.*” Automatica. 1995. 31(9), pp. 1275–1285.



A. Jaritz & M. Spong.(1996). “*An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator.*” IEEE Transactions on Control Systems Technology. 1996. 4(6), 363–368.



6.5 Aplicaciones del control de posición



Reyes F., C. Muñiz and J. Cid. “*Experimental evaluation of saturation rated control for robot manipulators.*” IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, Marbella, Spain. September 4-7, 2001. pp. 297-301.



Reyes F. “*Experimental controller for robot manipulators.*” WSEAS Int.Conf. on Signal Processing, Robotics and Automation (ISPRA '02) , Cadiz, Spain, June 12-16, 2002. pp. 1541-1545.



Febe B. & F. Reyes. “*Optimal position control for robot manipulators.*” The 46th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems. December 27-30, 2003. Cairo, Egypt. pp.45-49.



Reyes F. J. Cid, M. Mendoza & I. Bonilla. “*A new family of controllers for position control of robots manipulators.*” ICINCO. September 14-17, 2005. Barcelona, Spain. Organized by: INSTICC, Universitat Politecnica de Cataluña, IFAC, EST SETUBAL and AAAI. pp. 361-366.



Pablo Sánchez, Fernando Reyes & Jaime Cid. “*A new position controller:Pascal's Cartesian Controllers.*” WSEAS International Conference on Dynamical Systems and Control, Venice Italy, November 2-4, 2005. pp. 185-191.

Pablo Sanchez & Fernando Reyes “*A position controller’s evaluation using a cartesian robot and a joint robot arm.*” Proceedings of the 12th IASTED International Conference on Robotics and Applications. August 14-16, 2006. Honolulu, Hawaii, USA. pp. 150-156.

6.8 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

A continuación se plantean un conjunto de problemas con la finalidad de mejorar la habilidad y grado de conocimiento del lector en control de posición de robots manipuladores.



6.2 Regulación

6.2.1 Explique el problema de regulación o control de posición de robots manipuladores.

6.2.2 Si el error de posicionamiento de cada articulación \tilde{q}_i , para $i = 1, 2, 3$ de un robot antropomórfico de 3 gdl en estado estacionario tiene un valor de 0.0001 grados, ¿cuál es su correspondiente valor en coordenadas cartesianas?

6.2.3 Explique el funcionamiento cualitativo del control proporcional derivativo PD.

6.2.4 Explique el funcionamiento cualitativo del control proporcional integral derivativo PID.

6.2.5 ¿Por qué no son esquemas de control los términos derivativo e integral que incluye el control proporcional?

6.2.6 Demostrar que el error de posición y velocidad articular de la ecuación en lazo cerrado (6.3) satisfacen:

a) $\tilde{q} \in \mathcal{L}_\infty^n, \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty^n$.

b) $\dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_2^n$.

6.2.7 Considere el control proporcional derivativo de un péndulo desarrollado en el ejemplo 6.2; demostrar que:

a) $\tilde{q} \in \mathcal{L}_\infty, \dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$.

b) $\dot{q} \in \mathcal{L}_2$.

c) Llevar a cabo el análisis de estabilidad usando la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_b \dot{q}^2 + \frac{1}{8} k_p \tilde{q}^8$$

¿Qué puede concluir? Argumente su respuesta.



6.3 Moldeo de energía

6.3.1 Explique cualitativamente la técnica de moldeo de energía.

6.3.2 Considere el modelo del péndulo (5.42) y el siguiente esquema de control

$$\tau = k_p \operatorname{sen}(\tilde{q}) - k_v \operatorname{sen}(\dot{q}) + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

donde $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$ son las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.

a) ¿Qué tipo de estabilidad es local o global?

b) ¿Qué regla de sintonía propone para las ganancias de tal forma que no saturen el servo amplificador cuyos límites son $\pm 15 \text{ Nm}$?

6.3.3 Considere el modelo del péndulo (5.42) y el siguiente esquema de control

$$\tau = k_p [1 - \alpha e^{-\alpha \tilde{q}^2}] \tilde{q} - k_v [1 - \beta e^{-\beta \dot{q}^2}] \dot{q} + mgl_c \operatorname{sen}(q)$$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $k_p, k_v \in \mathbb{R}_+$ son las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.

- ¿Es local o global el tipo de estabilidad?
- ¿Qué regla de sintonía propone para las ganancias de tal forma que no saturen el servo amplificador cuyos límites son $\pm 15\text{Nm}$?
- Implemente en MatLab el algoritmo de control y reporte las gráficas del error de posición y par aplicado. Explique cualitativamente el funcionamiento de este esquema.

6.3.4 ¿Por qué en el esquema de control exponencial tipo PD del ejemplo

6.5 el exponente es impar? ¿Qué sucede si el exponente es par?

6.3.5 Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad (5.8) y el siguiente esquema de control

$$\tau = K_p \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \operatorname{senh}^m(\tilde{\mathbf{q}})} - K_v \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \operatorname{senh}^m(\dot{\mathbf{q}})} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\tilde{\mathbf{q}})} &= \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \operatorname{senh}(\tilde{q}_2)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \operatorname{senh}(\tilde{q}_n)}{1 + \cosh^m(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\mathbf{q}}) \operatorname{senh}(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^m(\dot{\mathbf{q}})} &= \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_1) \operatorname{senh}(\dot{q}_1)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_2) \operatorname{senh}(\dot{q}_2)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{q}_n) \operatorname{senh}(\dot{q}_n)}{1 + \cosh^m(\dot{q}_n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva, m es un número entero positivo.

Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.

6.3.6 Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad (5.8) y el siguiente esquema de control

$$\tau = K_p \frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} - K_v \frac{\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} + g(q)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2}{1 + \tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{1 + \tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} \\ \frac{\dot{q}}{1 + \dot{q}^2} &= \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} \\ \frac{\dot{q}_2}{1 + \dot{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{q}_n}{1 + \dot{q}_n^2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.

6.3.7 Considere el control tangente hiperbólico (6.49), realizar la conversión de ese controlador al espacio cartesiano con la estructura del jacobiano transpuesto $\tau = J^T(\mathbf{q}) \tanh(\tilde{x})$ y realizar el correspondiente análisis de estabilidad asintótica local.

6.3.8 El siguiente esquema de control se conoce como control Todo/Nada, On/Off o Si/No

$$\tau = K_p \operatorname{signo}(\tilde{q}) - K_v \operatorname{signo}(\dot{q}) + g(q)$$

donde

$$\operatorname{signo}(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} \operatorname{signo}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{signo}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{signo}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

$$\text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{signo}(\dot{q}_1) \\ \text{signo}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{signo}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia proporcional, matriz diagonal definida positiva, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, matriz definida positiva.

Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad (5.8) y el control Todo/Nada.

- a) Llevar a cabo el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado resultante.
- b) ¿El punto de equilibrio es único?
- c) La teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov establece que la solución $\mathbf{x}(t)$ de la ecuación en lazo cerrado $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es continua y diferenciable $\forall t \geq 0$, entonces sin pérdida de generalidad, qué argumento puede aportar para justificar en el análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado la incorporación de una función discontinua como es el caso de la función $\text{signo}(\cdot)$.

6.3.9 Proponga una rutina en lenguaje C para que un robot de 3 gdl realice un círculo a través de la función `circle(r,x,y)`. Aquí `r` representa el radio del círculo, cuyo centro se ubica en las coordenadas `x,y`.

6.3.10 Proponga una rutina en lenguaje C para que un robot de 3 gdl realice una línea a través de la función `line(x1,y1,z1,x2,y2,z2)`. La idea es que un robot de 3 gdl realice una línea recta desde las coordenadas iniciales `x1,y1,z1` hasta las coordenadas finales `x2,y2,z2`.

6.3.11 ¿Qué es control de posición en espacio articular?

6.3.12 ¿Qué es control de posición en espacio cartesiano?

6.3.13 Explique la transformación de fuerza cartesiana a par aplicado por medio del jacobiano transpuesto.

6.3.14 ¿Cuáles son las características distintivas entre control articular y control cartesiano? Mencione ventajas y desventajas.



6.4 Índice de desempeño

6.4.1 Explique el concepto de desempeño de un algoritmo de control.

6.4.2 ¿Cómo se mide el índice de desempeño?

6.4.3 ¿Cuáles son los principales criterios para medir el índice de desempeño?



6.5 Aplicaciones del control de posición

6.5.1 Seleccione un algoritmo de control para que un robot planar de 2 gdl realice una trayectoria elíptica y realice su implementación en MatLab.

6.5.2 Seleccione un algoritmo de control para que un robot planar de 2 gdl realice el trazo de una línea recta e implemente el procedimiento en MatLab.

6.5.3 Diseñe un procedimiento para que un robot de 2 gdl dibuje la palabra *Robot*.

6.5.4 Cómo podría diseñar una instrucción robot de retorno a casa.

7

CAPÍTULO

Control de trayectoria de robots manipuladores

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
La dinámica y el control de robots sólo es posible entenderlos usando matemáticas
ebrary

Piotr Silvereado



- 7.1 Introducción
- 7.2 Control PD+
- 7.3 Moldeo de energía PD+
- 7.4 Control par calculado
- 7.5 Aspectos prácticos
- 7.6 Resumen
- 7.7 Referencias selectas
- 7.8 Problemas propuestos

Objetivos

Presentar los algoritmos de control de trayectoria, análisis y diseño de nuevas estrategias de control.

Objetivos particulares:



Análisis del control PD+ y par calculado.



Generalización de la técnica de moldeo de energía para el caso de control de trayectoria.



Aspectos prácticos.

Competencias

Adquirir las habilidades y grado de conocimientos en



Análisis matemático de funciones estrictas de Lyapunov.



Diseño de nuevas estrategias de control de trayectoria.

7.1 Introducción



El problema del control de movimiento es uno de los temas más importantes en robótica. Recientemente ha recibido la atención en la comunidad científica y como resultado se han reportado en la literatura diversos controladores; entre los que han mostrado tener mejor desempeño se encuentran: control par calculado, control PD+, PD con precompensación calculada y PD con compensación.

Hoy en día, el interés en los robots manipuladores radica en su facultad de realizar movimientos de alta velocidad y con alto grado de exactitud. El control de movimiento mueve al robot libremente en su espacio de trabajo siguiendo una trayectoria deseada en posición y velocidad sin interactuar con su medio ambiente.

Los algoritmos del control de trayectoria incluyen la dinámica completa del robot manipulador en la estructura matemática del controlador, es decir se basan en el modelo dinámico del robot. La exactitud, desempeño y robustez de esos controladores dependen del grado de precisión con que se conozcan los parámetros dinámicos que describen el modelo.

El control de movimiento de robots manipuladores ha sido ampliamente estudiado en simulaciones. Sin embargo, la evaluación experimental de controladores basados en el modelo del robot manipulador es un problema de origen práctico, el cual ha quedado evidenciado en la literatura científica.

Lo anterior se debe a la falta de robots experimentales adecuados, así como a la dificultad que presenta conocer el valor nominal de los parámetros dinámicos del robot manipulador.

El problema del control de trayectoria o control de movimiento puede plantearse formalmente en los siguientes términos.

Considérese el modelo dinámico del robot manipulador de n gdl (5.8)

$$\tau = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

además sean $\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{R}^n$ un conjunto de funciones vectoriales acotadas que representan la posición, velocidad y aceleración deseadas, respectivamente.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Control de trayectoria

Los algoritmos de control de trayectoria o movimiento se caracterizan por retroalimentar la dinámica completa del robot manipulador. Con referencia a los esquemas de posición o regulación, los controladores de movimiento son mucho más complejos ya que en éstos no sólo se requiere conocer perfectamente la estructura matemática de la dinámica del robot, sino también el valor numérico de los parámetros del robot, por lo que resulta en la práctica muy complicado realizar experimentación con esta clase de esquemas de control.

El problema de control de trayectoria o control de movimiento consiste en determinar una función vectorial τ de tal forma que las posiciones y velocidades asociadas a las articulaciones del robot sigan con exactitud a las posiciones y velocidades deseadas, respectivamente.

En otras palabras, el **objetivo de control de movimiento** consiste en encontrar τ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (7.1)$$

donde $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$ representan el error de posición definido como la diferencia entre la posición o trayectoria deseada $\mathbf{q}_d(t)$ y la posición actual del robot $\mathbf{q}(t)$, es decir $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$ y error de velocidad definido como $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}(t)$, es decir la diferencia entre la velocidad deseada de movimiento $\dot{\mathbf{q}}_d$ y la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}(t)$.

En la figura (7.1) se muestra el diagrama a bloques del control de trayectoria de robots manipuladores. Obsérvese que las variables que definen el problema de control tales como el error de posición y error de velocidad son procesadas por la estructura matemática del esquema de control, la

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

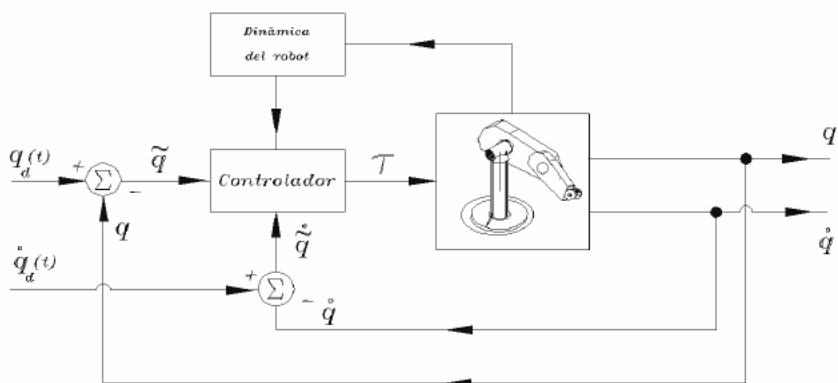


Figura 7.1 Control de movimiento de robots manipuladores

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

cual requiere del conocimiento completo de la dinámica del robot.

Nótese la diferencia sustancial que existe entre el control de posición y control de trayectoria.



El control de posición se define en términos del error de posición \tilde{q} y la velocidad articular \dot{q} para propósitos de inyección de amortiguamiento. Únicamente se requiere conocimiento parcial de la dinámica del robot, como es el par gravitacional $\mathbf{g}(q)$.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\tau = \tau(K_p, K_v, \tilde{q}, \dot{q}, \mathbf{g}(q))$$


En contraste, en control de trayectoria se controla el error de posición \tilde{q} y el error de velocidad $\dot{\tilde{q}}$. Además, se requiere del conocimiento completo de la dinámica del robot manipulador (efecto inercial, vector de fuerzas centrípetas y de Coriolis, par gravitacional y pares de fricción).

$$\tau = \tau(K_p, K_v, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, M(q), C(q, \dot{q}), B, \mathbf{g}(q))$$

La ecuación en lazo cerrado que determina el problema del control de movimiento queda expresada en variables de estado articulares $[\tilde{q}^T, \dot{\tilde{q}}^T]^T$

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau}(K_p, K_v, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), B, \mathbf{g}(\mathbf{q})) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \\ -B\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

la ecuación resultante en lazo cerrado (7.2) es una ecuación diferencial ordinaria no lineal y no autónoma. La incorporación de la trayectoria $\mathbf{q}_d(t)$ es lo que determina que la naturaleza de la ecuación diferencial en lazo cerrado sea no autónoma.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Notación

La notación requerida para la descripción de los esquemas de control se determina de la siguiente manera: sea $\mathbf{q}_d(t)$ denota la trayectoria de seguimiento, es una función continua, suave y acotada, además de doblemente diferenciable. En otras palabras, $\mathbf{q}_d(t)$ debe ser una función de clase C^2 . La velocidad de seguimiento y la aceleración deseada deben ser funciones continuas y diferenciables suaves y acotadas en sus magnitudes de acuerdo con las características propias del robot. Sea $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|_M$ y $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|_M$ representan las cotas superiores sobre la normas $\|\ddot{\mathbf{q}}_d\|$ y $\|\dot{\mathbf{q}}_d\|$, respectivamente.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

El diseño de la trayectoria de seguimiento, velocidad y aceleración deseada deben incorporar aspectos de planificación de trayectoria para una adecuada operatividad de la tarea que va a desempeñar el robot.



Las funciones de seguimiento $\mathbf{q}_d(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}_d(t) \in \mathbb{R}^n$ representan la posición, velocidad y aceleración, respectivamente.



El error de seguimiento $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ se define $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$.



El error de velocidad $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$ se define como $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$.



Las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente, son $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ambas matrices definidas positivas.

7.2 Control PD +

El control PD+ con compensación de gravedad, denotado por τ_{pd+} , es un algoritmo de control que incluye control proporcional del error de posición, control proporcional del error de velocidad más la dinámica completa del robot. En la estructura de este esquema de control también se involucra la trayectoria de seguimiento, velocidad y aceleración deseada.

El control PD+ está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau_{pd} = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + M(\mathbf{q}) \ddot{q}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_d + B \dot{q}_d + g(\mathbf{q}) . \quad (7.3)$$

La figura 7.2 muestra el diagrama a bloques del control PD+

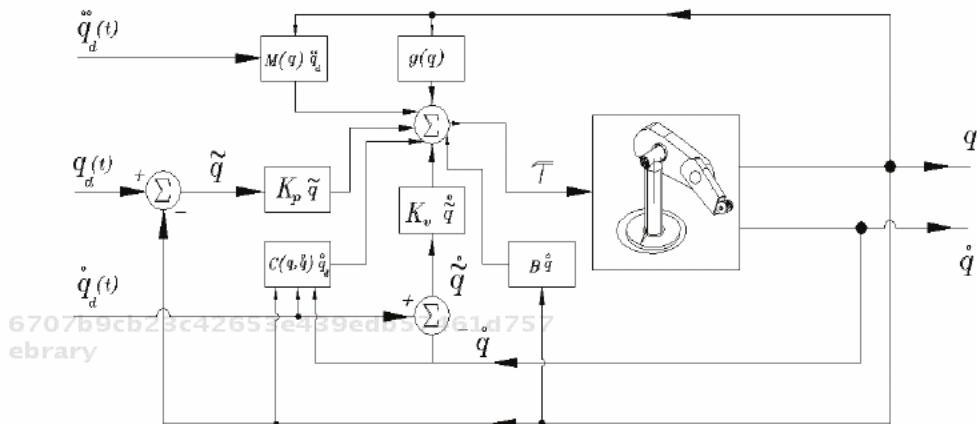


Figura 7.2 Diagrama a bloques del control PD+

La implementación del esquema de control PD+ (7.3) requiere del conocimiento exacto del modelo dinámico del robot, lo cual significa que los valores numéricos de sus parámetros dinámicos se conocen.

La ecuación de lazo cerrado que involucra el modelo dinámico del robot (5.8) y el esquema de control PD+ (7.3) expresado directamente en varia-



Regulador PD

El esquema de control PD+ (7.3)

es el algoritmo más general de control de movimiento. Obsérvese que cuando la posición deseada q_d es una constante, entonces la velocidad deseada \dot{q}_d y la aceleración deseada \ddot{q}_d son vectores cero. Es decir, el error de velocidad cumple: $\dot{q} = -\dot{q}_d$. En este caso el regulador simple proporcional derivativo con compensación de gravedad se obtiene como caso particular:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} + g(\mathbf{q})$$

En este contexto es necesario aclarar que el control proporcional derivativo PD+ contiene dos esquemas de control: control proporcional del error de posición y control proporcional del error de velocidad, no contiene ninguna acción de control como el caso particular del regulador PD, el cual incluye un solo esquema de control proporcional al error de posición y una acción de control derivativa mediante la inyección de amortiguamiento a través de la velocidad articular.

bles de estado que definen el problema de control de trayectoria, está dado de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q}) [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \ddot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}) [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \ddot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

la cual resulta una ecuación diferencial no lineal de primer orden, no *autónoma*, y cuyo punto de equilibrio es el origen $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. La naturaleza no autónoma de la ecuación (7.4) es más evidente en su representación de la ecuación (7.5), donde la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ queda en función de la trayectoria $\mathbf{q}_d(t)$, así como la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis queda también en función de la trayectoria de seguimiento y de la velocidad deseada $\mathbf{q}_d(t)$ y $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$, respectivamente.

El análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$ se lleva a cabo de la siguiente forma:



Para la primera componente de la ecuación de lazo cerrado (7.4) $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = I \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, puesto que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva.

Para la segunda componente de la ecuación (7.4) se tienen las siguientes consideraciones:



Usando la propiedad 5.1, la matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa $M^{-1}(\mathbf{q})$ existe y es definida positiva.



Las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas propuestas por el usuario.



Nótese que $C(\mathbf{q}_d(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ debido a que en la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (7.5) $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$.

Además, $B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, puesto que la matriz de coeficientes de fricción viscosa B es una matriz diagonal definida positiva.



Por otro lado, $K_p\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, puesto que la ganancia proporcional es una matriz definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (7.5) existe y es único, a condición que las ganancias proporcional y derivativa del control PD (7.3) sean diseñadas como matrices definidas positivas.

La demostración de estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (7.5) queda de la siguiente forma.

Considérese la siguiente propuesta de función candidata de Lyapunov,

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \quad (7.6)$$

Se trata de una función definida positiva ya que las matrices de inercia y ganancia proporcional son definidas positivas.

La derivada temporal de la función candidata de Lyapunov (7.6) adquiere la siguiente forma:

$$\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.7)$$

Sustituyendo la ecuación de lazo cerrado (7.5) en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \cancel{-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \cancel{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\ &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \leq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

Se concluye que la estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (7.4). También se concluye del corolario (3.2) que $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathcal{L}_\infty^n$ y $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathcal{L}_2^n$. En este caso, el teorema 3.2 de Barbashin-Krasovskii-LaSalle no puede ser aplicado para demostrar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio, debido a que la ecuación en lazo cerrado (7.4) es un sistema dinámico no autónomo. Recuérdese que sólo se aplica para el caso de regulación y trayectorias periódicas. El control de movimiento es mucho más general que las trayectorias periódicas.



7.2.1 Análisis de estabilidad asintótica PD+

En 1993 Whitcomb y Koditschek propusieron una función estricta de Lyapunov para llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica del algoritmo de control PD+. Posteriormente, Satibañez y Kelly en 1997 empleó esa misma función y la generalizaron también para el caso de regulación. Las referencias especializadas se encuentran al final de este capítulo.

La función (7.7) puede ser perfeccionada para convertirse en una función estricta de Lyapunov, es decir una función definida positiva tal que su derivada sea definida negativa. Con esta finalidad, considere la siguiente función:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.10)$$

Para demostrar que la función (7.10) es definida positiva se procede de la siguiente manera. Esta función contiene un término cuadrático del error de la posición, otro término cuadrático del error de la velocidad y una componente de productos cruzados entre el error de posición y error de la velocidad. Por lo tanto la idea es completar un binomio cuadrado perfecto, para eso se introduce un cero y después se agrupan términos de manera conveniente.

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\substack{\text{Término cuadrático del} \\ \text{error de la velocidad}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}}}_{\substack{\text{Término cuadrático del} \\ \text{error de la posición}}} + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\substack{\text{Término de productos} \\ \text{cruzados}}} +$$

$$\underbrace{\frac{\epsilon_0^2}{[1+\|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0^2}{[1+\|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}_{\text{Complemento del binomio cuadrado perfecto}} \quad (7.11)$$

Para esta finalidad, la ecuación (7.11) se puede reescribir de la siguiente manera: agrupando los términos primero, tercero y cuarto; por otro lado, al agrupar los términos segundo y quinto, se tiene que:

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{q}\|} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{\epsilon_0^2}{[1+\|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{q}^T \left[K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1+\|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \right] \tilde{q} \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{q} + \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{q}\|} \dot{\tilde{q}}]^T M(q) [\tilde{q} + \frac{\epsilon_0}{1+\|\tilde{q}\|} \dot{\tilde{q}}] + \\ &\quad \frac{1}{2} \tilde{q}^T \left[K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1+\|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \right] \tilde{q} \end{aligned} \quad (7.12)$$

El primer término de (7.12) es una función definida positiva debido que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva. Ahora sólo resta obtener las condiciones para que $\left[K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1+\|\tilde{q}\|]^2} M(\mathbf{q}) \right]$ sea una matriz definida positiva.

Considérense las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 + \|\tilde{q}\| \geq 1 &\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ 1 \geq \frac{1}{1 + \|\tilde{q}\|} &\geq \frac{1}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \Rightarrow \|\tilde{q}\| \geq \frac{\|\tilde{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} \geq \frac{\|\tilde{q}\|}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \\ \epsilon_0 \|\tilde{q}\| &\geq \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} \Rightarrow \epsilon_0^2 \|\tilde{q}\| \geq \frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{q}\|}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta el teorema de Rayleigh Ritz (3.1):

$$\|\tilde{q}\|^2 \lambda_{K_p}^{min} \leq \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \leq \|\tilde{q}\|^2 \lambda_{K_p}^{max} \quad (7.13)$$

$$\frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{q}\|^2}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{min} \leq \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \tilde{q} \leq \frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{q}\|^2}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \quad (7.14)$$

$$-\frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{q}\|^2}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq -\frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \tilde{q}^T M(q) \tilde{q} \leq -\frac{\epsilon_0^2 \|\tilde{q}\|^2}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{min} \quad (7.15)$$

Sumando término a término las desigualdades (7.13) y (7.15), se obtiene lo siguiente:

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \left[\lambda_{K_p}^{\min} - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \right] \leq \tilde{\mathbf{q}}^T [K_p - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} M(\mathbf{q})] \tilde{\mathbf{q}} \quad (7.16)$$

Particularmente la cota mínima de (7.16) debe ser positiva, para esta finalidad la condición que debe cumplir el valor propio mínimo de la ganancia proporcional, el valor propio máximo de la matriz de inercia es:

$$0 < \left[\lambda_{K_p}^{\min} - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \right] \Rightarrow 0 \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \leq \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{\min}}{\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}}} \quad (7.17)$$

Por lo tanto la función (7.7) es definida positiva.

La derivada con respecto al tiempo de la función (7.7) se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] = -\frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

Sustituyendo el error de aceleración de la ecuación en lazo cerrado (7.4) en (7.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \overbrace{M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q})}^I [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + \\ & \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \overbrace{M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q})}^I [K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

$$\begin{aligned}
&= \cancel{\dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \dot{\tilde{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{q}} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} - \dot{\tilde{q}}^T B \dot{\tilde{q}} + \cancel{\dot{\tilde{q}}^T K_p \dot{\tilde{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} + \\
&\quad \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}} [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\tilde{q}}}_{\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\tilde{q}} \\
&= -\dot{\tilde{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\tilde{q}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T B \dot{\tilde{q}}.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Para continuar con el proceso analítico de la demostración de estabilidad, deben tomarse en cuenta las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
-\dot{\tilde{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{q}} &\leq -[\lambda_{K_v}^{min} + \lambda_B^{min}] \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} &\leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \epsilon_0 \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\tilde{q}} &= \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tilde{\mathbf{q}} \leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\| k_C \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{q}}\| \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\| k_C \underbrace{[\|\dot{\mathbf{q}}_d\| + \|\dot{\tilde{q}}\|]}_{\|\dot{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\tilde{q}}\| &\leq \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{q}}\| \\
&\quad + \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \\
\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{q}}\| + \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}\|^2 &\leq \epsilon_0 k_C \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{q}}\| + \epsilon_0 k_C \|\dot{\tilde{q}}\|^2
\end{aligned}$$

donde se ha usado $\|\dot{\mathbf{q}}\| = \|\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$, entonces $\|\dot{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| = \|\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \leq \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2$, y tomando en cuenta la propiedad de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis: $\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \leq k_C \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$, $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Además,

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} = \sqrt{\lambda_{\{M(\mathbf{q})^T M(\mathbf{q})\}}^{max}}.$$

Por otro lado, considérese la siguiente desigualdad:

$$-\frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \leq \left| \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \right| \leq \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\leq \epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{\max} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2$$

Entonces la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov puede quedar acotada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq -[\lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min} - \epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{\max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad + \epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{\max} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} k_C \|\dot{\mathbf{q}_d}\| \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}. \end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Ahora, considérense las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} &\leq -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \lambda_{K_p}^{\min} \\ -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &\leq \left| \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T [K_v + B] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right| \leq \epsilon_0 [\lambda_{K_v}^{\max} + \lambda_B^{\max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{aligned}$$

Incorporando las anteriores cotas, la derivada temporal de la función de Lyapunov adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq -[\lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min} - \epsilon_0 k_C - \epsilon_0 2 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{\max}] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad + \epsilon_0 [k_C \|\dot{\mathbf{q}_d}\| + \lambda_{K_v}^{\max} + \lambda_B^{\max}] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{aligned} \tag{7.20}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &\leq - \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min} - \epsilon_0 k_C - \epsilon_0 2 \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{\max} & -\frac{\epsilon_0}{2} \epsilon_0 [k_C \|\dot{\mathbf{q}_d}\| + \lambda_{K_v}^{\max} + \lambda_B^{\max}] \\ -\frac{\epsilon_0}{2} \epsilon_0 [k_C \|\dot{\mathbf{q}_d}\| + \lambda_{K_v}^{\max} + \lambda_B^{\max}] & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Para que la matriz Q sea definida negativa debe existir ϵ_0 tal que:

$$\frac{4 \lambda_{K_p}^{\min} (\lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min})}{(k_C \|\dot{\mathbf{q}_d}\| + \lambda_{K_v}^{\max} + \lambda_B^{\max})^2 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] + 4 (\lambda_{K_p}^{\min} k_C + 2 \lambda_{K_p}^{\min} \lambda_{M(\tilde{\mathbf{q}})}^{\max})} > \epsilon_0 > 0.$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

No es necesario conocer el valor de ϵ_0 , sólo es suficiente su existencia.

Entonces la función (7.21) es definida negativa y por lo tanto se demuestra la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T \Rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$$

7.3 Moldeo de energía PD+



La estructura del control PD+ data de la década de los ochenta a la fecha, y en la literatura especializada de robótica se han reportado versiones con modificaciones menores del esquema de control PD+. La técnica de diseño de moldeo de energía presentada para el problema de regulación puede ser generalizada al caso de control de trayectoria; en este contexto se genera una familia muy grande de algoritmos de control, entre ellos como un caso particular se encuentra el control PD+.

Considérese la siguiente estructura de control

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.22)$$

donde $\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ representa el gradiente de la función de energía potencial $\mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ y representa la estructura matemática para el control proporcional del error de posición, la cual es una función continua en el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$. La ganancia proporcional $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva, $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ es el gradiente de la energía potencial artificial del error de la velocidad $\mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) > 0$ y representa el control proporcional del error de la velocidad además de que es una función continua en $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^n$. $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, la cual es una matriz definida positiva.

La ecuación en lazo cerrado que define el problema de control de trayectoria, formada por el modelo dinámico del robot (5.8) y la técnica de

moldeo energía (7.22), está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -M^{-1}(\mathbf{q}) [\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Esto es, una ecuación diferencial de primer orden no lineal, no autónoma, cuyo punto de equilibrio es el origen $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. La naturaleza no autónoma de la ecuación (7.23) se debe a que la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ queda en función de la trayectoria $\mathbf{q}_d(t)$, así como la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis queda también en función de la trayectoria de seguimiento $\mathbf{q}_d(t)$ y de la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$.

El análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0}^T \quad \mathbf{0}^T]^T$ de la ecuación (7.23) se lleva a cabo de la siguiente forma:



La primera componente de la ecuación de lazo cerrado (7.23) $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = I\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal definida positiva.

Las siguientes consideraciones se tienen para la segunda componente de la ecuación (7.23):



De acuerdo con la propiedad 5.1 de la matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, por lo que también resulta que la matriz inversa $M^{-1}(\mathbf{q})$ existe y es definida positiva.



Las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v son seleccionadas por el usuario como matrices diagonales definidas positivas.



Nótese que $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ debido a que la primera componente de la ecuación en lazo cerrado (7.23) $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$. Además, $B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, puesto que la matriz de coeficientes de fricción viscosa B es una matriz diagonal definida positiva.



El gradiente de la energía potencial del error de posición $\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \iff \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia proporcional K_p es una matriz diagonal definida positiva.



Por otro lado, $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{0} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$, debido a que la ganancia derivativa K_v es una matriz definida positiva.

Por lo tanto, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (7.23) existe y es único.

La demostración de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación de lazo cerrado (7.23) en el sentido de Lyapunov se lleva a cabo considerando la siguiente propuesta de función de energía:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.24)$$

la cual es una función definida positiva, debido a que la matriz de inercia $M > 0$, las funciones de energía potencial artificial del error de posición y del error de velocidad $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ y $\mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, respectivamente, son funciones definidas positivas.

La derivada con respecto al tiempo de la función (7.33) se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \\ &\quad \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\tilde{\mathbf{q}}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Tomando en cuenta el error de aceleración de la ecuación en lazo cerrado (7.23) en (7.25) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underbrace{M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q})}_{I} [\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \\
&\quad + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \underbrace{M(\mathbf{q}) M^{-1}(\mathbf{q})}_{I} [\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \\
&\quad C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \\
&= \cancel{-\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \cancel{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{Propiedad de antisimetría}} \\
&\quad - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \cancel{\nabla^T \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T]\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \\
&\quad - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}
\end{aligned}$$

(7.26)

Para continuar con el análisis de estabilidad es necesario especificar la naturaleza del esquema de control: si es con acciones acotadas o del tipo no acotado.

Supóngase que el algoritmo de control PD+ tiene acciones acotadas o saturadas, por ejemplo $\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$ y $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})$, entonces $\|\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}})\| = \|K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| \leq \lambda_{K_p}^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\|$ y $\|\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| =$

$\|K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{q}})\| \leq \lambda_{K_v}^{\max} \|\dot{\tilde{q}}\|$. De una generalización del teorema (3.1):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}_p(\tilde{q})\|^2 \lambda_{K_p}^{\min} &\leq \mathbf{f}_p^T(\tilde{q}) K_p \mathbf{f}_p(\tilde{q}) \leq \|\mathbf{f}_p(\tilde{q})\|^2 \lambda_{K_p}^{\max} \leq \|\tilde{q}\|^2 \lambda_{K_p}^{\max} \\ \|\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{q}})\|^2 \lambda_{K_v}^{\min} &\leq \mathbf{f}_v^T(\dot{\tilde{q}}) K_v \mathbf{f}_p(\dot{\tilde{q}}) \leq \|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{q}})\|^2 \lambda_{K_v}^{\max} \leq \|\dot{\tilde{q}}\|^2 \lambda_{K_v}^{\max}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &\leq -\lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\tilde{q}}\| \|\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{q}})\| - [\lambda_B^{\min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{q}\| \|\mathbf{f}_p(\tilde{q})\| \\ &\quad + \epsilon_0 [\lambda_{K_v}^{\max} + \lambda_B^{\max} + k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\|] \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\|\end{aligned}$$

la función (7.26) debe cumplir:

$$\lambda_{K_v}^{\min} \|\dot{\tilde{q}}\| \|\mathbf{f}_p(\dot{\tilde{q}})\| + [\lambda_B^{\min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{q}\| \|\mathbf{f}_p(\tilde{q})\| > \epsilon_0 [\lambda_B^{\max} + \lambda_{K_v}^{\max} + k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\|] \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\|.$$

Tomando en cuenta la naturaleza de las funciones acotadas $\|\mathbf{f}_p(\tilde{q})\| \leq \|\tilde{q}\|$

y $\|\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{q}})\| \leq \|\dot{\tilde{q}}\|$ se tiene:

$$[\lambda_B^{\min} + \lambda_{K_v}^{\min} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_C] \|\dot{\tilde{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \|\tilde{q}\|^2 > \epsilon_0 [\lambda_B^{\max} + \lambda_{K_v}^{\max} + k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\|] \|\tilde{q}\| \|\dot{\tilde{q}}\|.$$

Por lo tanto, se cumple:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) \leq - \left[\begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \|\tilde{q}\| \end{bmatrix} \right]^T \left[\begin{array}{cc} \lambda_B^{\min} + \lambda_{K_v}^{\max} - 2\epsilon_0 \lambda_{M(\tilde{q})}^{\max} - \epsilon_0 k_C & -\frac{\epsilon_0}{2} [\lambda_B^{\max} + \lambda_{K_v}^{\max} k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\|] \\ -\frac{\epsilon_0}{2} [\lambda_B^{\max} + \lambda_{K_v}^{\max} k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\|] & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \end{array} \right] \left[\begin{bmatrix} \|\dot{\tilde{q}}\| \\ \|\tilde{q}\| \end{bmatrix} \right] < 0$$

si existe algún ϵ_0 que cumpla:

$$\frac{4\lambda_{K_p}^{\min} (\lambda_{K_v}^{\min} + \lambda_B^{\min})}{\lambda_B^{\max} + \lambda_{K_v}^{\max} + (k_C \|\dot{\tilde{q}}_d\|)^2 [1 + \|\tilde{q}\|] + \lambda_{K_p}^{\min} k_C + 2\lambda_{K_p}^{\min} \lambda_{M(\tilde{q})}^{\max}} > \epsilon_0 > 0.$$

lo cual demuestra estabilidad asintótica del punto de equilibrio $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$ de la ecuación (7.23).

Un razonamiento similar se sigue cuando las estructuras de control del error proporcional y del error proporcional de la velocidad tienen funciones no acotadas.

**Teorema 7.1 Moldeo de energía para regulación**

La función estricta de Lyapunov (7.33) permite abordar el problema de control de posición o regulación $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$, en este caso $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$ y $\ddot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$, entonces la estructura de moldeo de energía (7.22) reproduce el caso de regulación (6.21):

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

siendo $\nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) = -\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})$.

La función estricta que permite demostrar estabilidad asintótica global está dada como:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (7.27)$$

de esta forma, no se requiere utilizar el teorema (3.2) de Barbashin-Krasovskii-LaSalle.

**7.3.1 Ejemplos de control de trayectoria tipo PD+**

A continuación se presentan ejemplos de algoritmos de control con la estructura del control de movimiento PD+.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T K_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau &= K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{2m-1} \\ \tilde{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1^{2m-1} \\ \dot{\tilde{q}}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n^{2m-1} \end{bmatrix} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}.\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned}\tau &= K_p \begin{bmatrix} \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}.\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\begin{aligned}\tau &= K_p \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}_1) \\ \tanh(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \tanh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}.\end{aligned}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \begin{bmatrix} \text{atan}((\dot{\tilde{q}}_1)) \\ \text{atan}((\dot{\tilde{q}}_2)) \\ \vdots \\ \text{atan}((\dot{\tilde{q}}_n)) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \text{atan}((\dot{\tilde{q}}_1)) \\ \text{atan}((\dot{\tilde{q}}_2)) \\ \vdots \\ \text{atan}((\dot{\tilde{q}}_n)) \end{bmatrix} + M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + B\dot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1)}{1+\cosh^m(\tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \operatorname{senh}(\tilde{q}_2)}{1+\cosh^m(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \operatorname{senh}(\tilde{q}_n)}{1+\cosh^m(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1)}{1+\cosh^m(\dot{\tilde{q}}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_2) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_2)}{1+\cosh^m(\dot{\tilde{q}}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_n) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_n)}{1+\cosh^m(\dot{\tilde{q}}_n)} \end{bmatrix} + M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + B\dot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{1+\tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2}{1+\tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{1+\tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\dot{\tilde{q}}_1}{1+\dot{\tilde{q}}_1^2} \\ \frac{\dot{\tilde{q}}_2}{1+\dot{\tilde{q}}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{\tilde{q}}_n}{1+\dot{\tilde{q}}_n^2} \end{bmatrix} + M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_d + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_d + B\dot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_n^2)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_n^2)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2}] \tilde{q}_1 \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2}] \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2}] \tilde{q}_n \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} [1 - \beta \exp^{-\alpha \dot{\tilde{q}}_1^2}] \dot{\tilde{q}}_1 \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_2^2}] \dot{\tilde{q}}_2 \\ \vdots \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_n^2}] \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\tau = K_p \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1) \end{bmatrix} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_d + B \dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

7.4 Control par calculado

El algoritmo par calculado es una estructura de control de trayectoria que emplea la dinámica de compensación en el lazo de retroalimentación para linealizar y desacoplar la dinámica no lineal del robot manipulador, es decir, este controlador tiene el atributo de obtener una ecuación en malla cerrada lineal en términos de las variables de estado $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T$. El control par calculado, que se denota por τ_{pc} , tiene la siguiente expresión:

$$\tau_{pc} = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B \dot{\mathbf{q}} \quad (7.28)$$

La ecuación en malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control τ_{pc} (7.28) en la ecuación del modelo del robot (5.8) y bajo la suposición de que existe una cancelación exacta del modelo dinámico que interviene en el lazo de retroalimentación, entonces el control par calculado realiza el desacoplamiento dinámico en todas las articulaciones del robot, resultando el siguiente sistema lineal:

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = \mathbf{0}, \quad (7.29)$$

el cual puede escribirse en términos del vector de estado $[\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

Es importante observar que la ecuación de malla cerrada (7.30) representa una ecuación diferencial lineal y autónoma, cuyo único estado de equilibrio es el origen $[\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}}^T]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$, el cual tiene estabilidad exponencial si las matrices K_p y K_v son simétricas y definidas positivas.



7.4.1 Moldeo de energía par calculado

La técnica de moldeo de energía puede ser generalizada para diseñar una familia grande de algoritmos de control con la estructura modificada de control par calculado.

$$\tau = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + \nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (7.31)$$

La ecuación en malla cerrada se obtiene de la ecuación de moldeo de energía para control par calculado (7.31) y la ecuación del modelo del robot (5.8):

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebook

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ -[\nabla \mathcal{U}_p(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \nabla \mathcal{U}_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

resulta una ecuación diferencial autónoma cuyo origen es el único punto de equilibrio.

La función para realizar el análisis de estabilidad asintótica de Lyapunov es:

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (7.33)$$

A continuación se describen ejemplos de diseño o casos de estudio de esta metodología:

$$\tau = M(\mathbf{q}) [\ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

$$\tau = M(\mathbf{q}) \left[\ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{2m-1} \\ \tilde{q}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^{2m-1} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_1^{2m-1} \\ \dot{\tilde{q}}_2^{2m-1} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{q}}_n^{2m-1} \end{bmatrix} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^m \\ \tilde{q}_2^m \\ \vdots \\ \tilde{q}_n^m \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}.$$

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_2) \\ \vdots \\ \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + B\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh(\tilde{q}_n) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \tanh(\tilde{q}_1) \\ \tanh(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \tanh(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \tanh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \vdots \\ \tanh(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + B\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\tilde{q}_1) \\ \operatorname{atan}(\tilde{q}_1) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}_1) \\ \vdots \\ \operatorname{atan}(\dot{\tilde{q}}_n) \end{bmatrix} + M(\boldsymbol{q}) \ddot{\boldsymbol{q}}_d + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \dot{\boldsymbol{q}}_d + B\ddot{\boldsymbol{q}}_d + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}$$

$$\tau = M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1)}{1+\cosh^m(\tilde{q}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_2) \operatorname{senh}(\tilde{q}_2)}{1+\cosh^m(\tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\tilde{q}_n) \operatorname{senh}(\tilde{q}_n)}{1+\cosh^m(\tilde{q}_n)} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_1) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_1)}{1+\cosh^m(\dot{\tilde{q}}_1)} \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_2) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_2)}{1+\cosh^m(\dot{\tilde{q}}_2)} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{m-1}(\dot{\tilde{q}}_n) \operatorname{senh}(\dot{\tilde{q}}_n)}{1+\cosh^m(\dot{\tilde{q}}_n)} \end{bmatrix} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_1))} \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_2))} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \cosh^m(\tilde{q}_n))} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\tau = M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}_1}{1+\tilde{q}_1^2} \\ \frac{\tilde{q}_2}{1+\tilde{q}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{q}_n}{1+\tilde{q}_n^2} \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \frac{\dot{\tilde{q}}_1}{1+\dot{\tilde{q}}_1^2} \\ \frac{\dot{\tilde{q}}_2}{1+\dot{\tilde{q}}_2^2} \\ \vdots \\ \frac{\dot{\tilde{q}}_n}{1+\dot{\tilde{q}}_n^2} \end{bmatrix} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_n^2)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_1^2)} \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_2^2)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(1 + \tilde{q}_n^2)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\tau = M(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_d + K_p \begin{bmatrix} [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2}] \tilde{q}_1 \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2}] \tilde{q}_2 \\ \vdots \\ [1 - \alpha \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2}] \tilde{q}_n \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} [1 - \beta \exp^{-\alpha \dot{\tilde{q}}_1^2}] \dot{\tilde{q}}_1 \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_2^2}] \dot{\tilde{q}}_2 \\ \vdots \\ [1 - \beta \exp^{-\beta \dot{\tilde{q}}_n^2}] \dot{\tilde{q}}_n \end{bmatrix} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + B\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$V(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\tilde{q}_1^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_1^2} - 1)} \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_2^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_2^2} - 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\tilde{q}_n^2 + \exp^{-\alpha \tilde{q}_n^2} - 1)} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q}) \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_d + K_p \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_d + K_p \end{bmatrix} + K_v \begin{bmatrix} \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \cosh^{m-1}(\tilde{q}_1) \operatorname{senh}(\tilde{q}_1) \end{bmatrix} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

$$V(t, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\tilde{\boldsymbol{q}}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \end{bmatrix}^T K_p \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_2) - 1} \\ \vdots \\ \sqrt{\cosh^m(\tilde{q}_1) - 1} \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|} \tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\tilde{\boldsymbol{q}}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}.$$



Esquemas de control de trayectoria

En la página web del libro se encuentran disponibles programas en MatLab cuyo propósito general es la evaluación e implementación de varios esquemas de control de trayectoria de las familias de moldeo de energía PD+ y par calculado, además de que se presentan aspectos de implementación práctica del diseño de la trayectoria $\boldsymbol{x}_d(t)$.

7.5 Aspectos prácticos

Un elemento importante en la evaluación experimental de controladores de movimiento para robots manipuladores que requiere de una cuidadosa y sistemática investigación es la selección de la clase de trayectorias de entrada para el robot manipulador.

La trayectoria de entrada debe seleccionarse para exhibir un perfil de movimiento sin cambios abruptos en la posición, velocidad y aceleración de principio a fin del movimiento, así como generar un bajo contenido de fricción, de tal manera que la dinámica del robot sea la que predomine, además de prevenir que los servoactuadores entren en zona de saturación.

Si la trayectoria deseada se encuentra en coordenadas cartesianas $\boldsymbol{x}_d(t)$, entonces las posiciones articulares $\boldsymbol{q}_d(t)$ se obtienen directamente de la cinemática inversa. La velocidad y la aceleración articular deseada se obtienen de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{q}_d = \boldsymbol{f}_{cinv}(\boldsymbol{x}_d) \quad (7.34)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_d = J^{-1}(\boldsymbol{q}_d) \dot{\boldsymbol{x}}_d \quad (7.35)$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}_d = J^{-1}(\boldsymbol{q}_d) \ddot{\boldsymbol{x}}_d - J^{-1}(\boldsymbol{q}_d) \dot{J}(\boldsymbol{q}_d)(\boldsymbol{q}_d) J^{-1}(\boldsymbol{q}_d) \dot{\boldsymbol{x}}_d \quad (7.36)$$

La planificación de la trayectoria $\chi_d(t)$ debe evitar singularidades debido a que se emplea la matriz inversa del Jacobiano $J^{-1}(\mathbf{q}_d)$ para obtener la velocidad deseada $\dot{\mathbf{q}}_d(t)$ y la aceleración articular $\ddot{\mathbf{q}}_d(t)$.

Índice de desempeño

En control de trayectoria el índice de desempeño se mide usando la norma L_2 del error de posición y del error de velocidad de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t)\|^2] dt}. \quad (7.37)$$

donde T representa el tiempo de simulación o de experimentación.

Un valor grande en el índice de desempeño, significa pobre desempeño. Alto desempeño se ve reflejado en un valor pequeño del índice \mathcal{L}_2 .



7.6 Resumen

El control de movimiento o control de trayectorias representa un problema con mayor grado de complejidad que el que se presenta en el control de posición o regulación. La complejidad radica en que los algoritmos de control retroalimentan la dinámica completa del robot manipulador ya que forma parte de los fenómenos de compensación dinámica. Además, se deben conocer los valores numéricos de sus parámetros.

Se ha producido una extensión de la técnica de moldeo de energía al caso de control de trayectoria, generando una familia extensa de algoritmos de control con la estructura PD+, y también para el par calculado.

Videos de robots manipuladores

En la página web del libro se encuentran disponibles diversos videos experimentales del péndulo, robots manipuladores de 2 y 3 gdl con aplicaciones de control de movimiento de las familias PD+ y par calculado.

En estos videos se describen aspectos prácticos de implementación y evaluación experimental de los algoritmos de control, así como del diseño de la trayectoria de seguimiento.

▶ 7.7 Referencias selectas

A continuación se presenta un conjunto de referencias para que el lector pueda profundizar en el tema de control de trayectorias.

🔍 7.2 Control PD+

La sección del control PD+ puede consultarse en:
e439edb57461d757
ebrary

 Koditschek, D. E. 1984. “*Natural motion for robot arms*”, Proceedings of the IEEE 23th Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV. December 1984, pp. 733-735.

 Paden B., Panja, R. 1988. “*Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators.*” International Journal of Control. Vol. 47, No. 6, pp. 1697-1712.

La propuesta de la función estricta de Lyapunov (7.10) que permite obtener la demostración de estabilidad asintótica global del control PD+ se realizó en:

 Whitcomb L L. Rizzi A. & Koditschek, D. E. 1993 “Comparative experiments with a new adaptive controller for robot manipulators.” IEEE Transactions on Robotics and Automation. February, Vol. 9, No. 1, pp. 59-70.

También el desarrollo de la demostración de estabilidad asintótica global del control PD+ puede consultarse en:

 Kelly, R., V. Santibañez, and A. Loría. “*Control of Robot Manipulators in Joint Space.*” Springer-Verlag London 2005.
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



R. Kelly y Víctor Santibañez. “*Control de Movimiento de Robots Manipuladores.*” Pearson Education, Prentice-Hall, 2003.



Wen, J. T., Bayard, D., 1988, “*New class of control law for robotic manipulators*” Part 1: Non-adaptive case. International Journal of Control. Vol. 47, No. 5, pp. 1361-1385.



Kelly, R. 1990. “*Adaptive computed torque plus compensation control for robot manipulators*”. Mechanism and Machine theory. Vol. 25, No. 2, pp. 161-165. MIT Press, 1990.



7.3 Moldeo de energía PD+



Victor Santibañez & Rafael Kelly. “*Strict Lyapunov functions for control of robot manipulators*”. Automatica, Vol. 53. No. 4. pp. 675-682. 1997



Reyes F. & J. Cid. “*Bounded Controller for Robot Manipulators.*” IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling. Crete, Greece. June 25-28, pp. 271-276.



Reyes F. and E. Guevara. “*Design of a new control algorithm for robot manipulators.*” Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signal and Systems. May. 19-23, Cancún, México, pp. 118-123.

Reyes F. and V. Pasilla. 2003. "A tracking controller for robot manipulators." Proceedings of the IASTED International Conference on Circuits, Signal and Systems. May. 19-23, Cancún, México, pp. 124-127.

Reyes F. J. Cid, M. Mendoza, I. Bonilla. "A new family of controllers for position control of robots manipulators." ICINCO 2005.

September 14-17. Barcelona, Spain. Organized by: INSTICCC, Universitat Politecnica de Cataluña, IFAC, EST SETUBAL and AAAI. pp. 361-366.

F. Hugo Ramírez, Fernando Reyes and Rubí Salazar. "A New Family of Saturated Regulators For Robot Manipulators." Proceedings of the 10th IASTED International Conference on Control and Applications CA-2008. Quebec City, Canada. May 26-28, 2008, pp. 102-106.



7.4 Control par calculado

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Kelly, R. 1990. "Adaptive computed torque plus compensation control for robot manipulators ". Mechanism and Machine theory. Vol. 25, No. 2, pp. 161-165. MIT Press, 1990.



Kelly, R., V. Santibañez, and A. Loría. "Control of Robot Manipulators in Joint Space." Springer-Verlag London 2005.



R. Kelly y Víctor Santibañez. "Control de Movimiento de Robots Manipuladores." Pearson Education, Prentice-Hall, 2003.

ALFAOMEGA

7461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



7.5 Aspectos prácticos

 Kelly R. & F. Reyes. “Evaluation of real-time motion controllers for a direct drive robot arm.” International Federation of Automatic Control: on Algorithms and Architectures for Real-Time Control. Cancun, Mexico. April, 1988. Vol V, pp. 149-154.

 Reyes F., and R. Kelly. “Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm.” International Journal on Mechatronics. 2001. Vol. 11, pp. 267-282. Edit. Pergamon.

7.8 Problemas propuestos



Se proponen los siguientes problemas selectos con la finalidad de mejorar la habilidad del lector en análisis y desarrollo de algoritmos de control de trayectoria.



7.2 Control PD+

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

La presente sección contiene una serie de problemas para que el alumno pueda desarrollar la habilidad de diseñar estrategias de algoritmos de control de movimiento.

7.2.1 Describir cualitativamente el problema de control de movimiento o control de trayectoria.

7.2.2 Describir analíticamente el problema de control de movimiento.

7.2.3 Explicar la diferencia entre un controlador y un regulador.

7.2.4 Para el esquema de control PD+, llevar a cabo la demostración de estabilidad asintótica global sobre un péndulo-robot.

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA



7.3 Moldeo de energía PD+

7.3.1 Llevar a cabo el análisis de estabilidad de moldeo de energía para el caso de algoritmos de control con funciones no acotadas: emplear la función (7.26).

7.3.2 Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global de la familia de controladores de moldeo de energía para regulación usando la función estricta de Lyapunov (7.27).

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



7.4 Control par calculado

7.4.1 Llevar a cabo el análisis de estabilidad asintótica global de la familia de controladores de moldeo de energía para regulación usando la función estricta de Lyapunov (7.27).

7.4.2 Llevar a cabo el análisis de estabilidad de la familia de control par calculado.

7.4.3 Explicar cualitativamente el funcionamiento de la estructura de control par calculado.

7.4.4 Diseñar una trayectoria circular y elíptica con el esquema control PD+.



7.5 Aspectos prácticos

7.5.1 Obtener el índice de desempeño para 3 algoritmos de control de la familia moldeo de energía PD+.

7.5.2 Obtener el índice de desempeño para 3 algoritmos de control de la familia moldeo de energía par calculado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

8

CAPÍTULO

Control de fuerza/impedancia

Entre dos hombres iguales en fuerza, el que tiene más razón es el más fuerte.

Pitágoras

Marco Mendoza, Isela Bonilla y Emilio González



- 8.1 Introducción
- 8.2 Sensores de fuerza/par
- 8.3 Sistemas hápticos
- 8.4 Modelado del entorno
- 8.5 Control de fuerza
- 8.6 Control híbrido de fuerza/posición
- 8.7 Control de impedancia
- 8.8 Aplicaciones
- 8.9 Resumen
- 8.10 Referencias selectas
- 8.11 Problemas propuestos

Objetivos

Proporcionar los fundamentos y conceptos claves del control de interacción y los principales esquemas de control que existen para el control de fuerza e impedancia. Se describen los componentes principales de un sistema robótico que interactúa con su entorno, como lo son el sensado de fuerza, la retroalimentación háptica y el modelado y control del sistema.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Competencias

Mejorar la habilidad en control de fuerza e impedancia, así como el uso de sensores de fuerza en aplicaciones robóticas, sistemas hápticos, simular tareas de interacción robóticas y desarrollar esquemas de control de interacción para robots manipuladores.

8.1 Introducción



En la gran mayoría de procesos industriales, médicos y de servicios automatizados por tecnología robótica, se requiere que un robot manipulador esté en contacto o interactúe con su entorno. Esto hace necesario el control, tanto del movimiento como de la fuerza, del robot restringido por su entorno. La inclusión de información de fuerza en el control de robots incrementa su adaptabilidad en entornos inciertos y provee seguridad ante fuerzas de contacto excesivas.

Durante la interacción, el entorno impone restricciones en las trayectorias que puede seguir el efecto final del manipulador. Esta situación se conoce como movimiento restringido, en este caso, el uso de una estrategia de control de movimiento puro para controlar la interacción es candidata a fallar, debido a que cualquier desviación de la trayectoria de referencia provoca una reacción del sistema de control, buscando minimizar esta desviación independientemente de la causa que la generó. Por lo tanto, si la desviación de la trayectoria planeada se debe a la interacción del robot con el entorno, surgen fuerzas de reacción con las cuales la ley de control minimiza esta desviación aumentando en consecuencia la fuerza de contacto hasta el límite de saturación de los actuadores o la deformación de la superficie sobre la que el robot realiza su tarea.

La fuerza de contacto es la cantidad que describe el estado de interacción entre el robot y su entorno, por lo tanto es de esperarse que una mejora en el desempeño pueda lograrse con un control de interacción provisto de mediciones de fuerza. De aquí que para el manejo apropiado de la interacción es necesario considerar estrategias de control de fuerza. El control explícito de fuerza involucra el comando directo y la medición de valores de fuerza, con el objetivo de que la salida siga a la entrada tan cerca como sea posible. Algunos ejemplos de tareas de interacción industriales son perforación, pulido, maquinado o ensamblado. Por otra parte, cuando el manipulador interactúa con seres humanos, como en el

Control de interacción

El problema de control de interacción consiste en la regulación de las fuerzas y/o pares generados durante el desarrollo de una tarea en la cual el efecto final de un robot manipulador tiene contacto físico con su entorno. El objetivo principal es mantener las fuerzas de contacto limitadas, asegurando un comportamiento dócil entre el efecto final del robot y su entorno.

Existen dos formas de realizar el control de un robot manipulador que interactúa con su entorno. La primera se conoce como control pasivo, esto es, se integran elementos pasivos en el robot (dispositivos especiales diseñados y montados en el efecto final), mientras que la segunda es el control activo donde se controla la dinámica del robot utilizando la información de las fuerzas de contacto. De acuerdo con la forma en que se realiza la regulación de fuerzas se clasifican en *control directo de fuerza* y *control indirecto de fuerza*.

El control directo de fuerza regula el contacto a un valor de fuerza deseado y constante, a través de la inclusión de un lazo de control de fuerza. Por otra parte, los enfoques de control indirecto de fuerza regulan la interacción indirectamente a través del control de posición y/o velocidad.



Control de impedancia

Es un enfoque de control indirecto de fuerza, donde la interacción es regulada a partir de la relación entre fuerza y posición dada por la impedancia mecánica.

Los términos impedancia y admittance son equivalentes e intercambiables para sistemas lineales que operan en frecuencia finita. Sin embargo, la manipulación (interacción mecánica) es un problema no lineal y por lo tanto la equivalencia para sistemas lineales no se conserva. En general, los conceptos de impedancia y admittance no son intercambiables para sistemas no lineales.

En la mayoría de las tareas del manipulador, su entorno contiene al menos una restricción inercial y/o cinemática, esto es, sistemas físicos que aceptan como entrada fuerza y su respuesta está determinada por su propio movimiento (admittance). Este problema visto desde el robot, considera que el medio ambiente de interacción es una admittance.

El control de impedancia fue propuesto por primera vez por Hogan en 1985 y tiene hoy en día diversas interpretaciones. Usualmente, el objetivo de control de impedancia consiste en ocasional que el efecto final del robot responda a fuerzas aplicadas externamente de acuerdo con alguna dinámica bien definida.

caso de terapias de rehabilitación, el sistema de control debe garantizar seguridad y estabilidad para el paciente.

El control de interacción ha sido abordado utilizando dos estrategias generales: la primera, llamada **control híbrido de fuerza/posición**, divide el espacio de trabajo del robot en direcciones ortogonales que son restringidas en fuerza o posición y se diseña un controlador apropiado de fuerza o posición para cada dirección. La segunda estrategia, denominada **control de impedancia**, está basada en el control de la relación entre la fuerza de interacción y los errores de posición, resultantes de esta fuerza. La interacción dinámica entre el manipulador y su entorno puede ser regulada y controlada cambiando su impedancia mecánica.

La impedancia mecánica $z(w)$ se define como la relación compleja entre la fuerza y la velocidad a una frecuencia w

$$z(w) = \frac{f(w)}{v(w)} \quad (8.1)$$

donde $f(w)$ es la fuerza y $v(w)$ es la velocidad en la frecuencia w . En frecuencias de resonancia, la impedancia mecánica es más baja, esto significa que menos fuerza es necesaria para ocasionar que una estructura se mueva a la velocidad dada. La impedancia mecánica es el inverso de la admittance mecánica o movilidad, y sus unidades son Ns/m.

El término impedancia es un concepto familiar para la ingeniería eléctrica. La impedancia en un sistema eléctrico se define como la razón entre el voltaje y el flujo de corriente alterna. Es decir, la impedancia es la relación entre la fuerza (diferencia de potencial) y el flujo de corriente. Al inverso de la impedancia se le denomina *admitancia*. Por analogía, el concepto de impedancia puede trasladarse a otra clase de sistemas, por ejemplo, la relación voltaje/corriente se le denomina la impedancia de la línea eléctrica; para un sistema mecánico, la relación *fuerza/velocidad* es la impedancia mecánica.

8.2 Sensores de fuerza/par

Existen diversos tipos de sensores de fuerza, por lo general celdas de par y carga, también conocidos como transductores de fuerza, son dispositivos útiles para la medición de pares y fuerzas generadas dentro de un sistema mecánico. La medición de una fuerza o par se reduce usualmente a medir la tensión inducida por la fuerza o par aplicado a un elemento extensible. Por lo tanto, una medición indirecta de la fuerza se obtiene a través de la medición de pequeños desplazamientos. El componente básico de un sensor de fuerza es un indicador de tensión, que es una pequeña espira plana de alambre conductor que cambia su resistencia cuando se ejerce fuerza sobre ella. Este indicador se coloca sobre una placa y se mide el cambio en la resistencia para determinar la tensión, debido a que ésta está directamente relacionada con la fuerza aplicada sobre la placa. El indicador de tensión se elige de tal forma que su resistencia r_s varíe linealmente en un rango de tensión admisible para el elemento extensible.

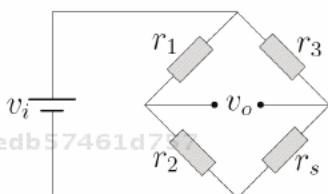


Figura 8.1 Puente Wheatstone para el acondicionamiento de la señal.

Un indicador típico de tensión tiene un cambio de resistencia muy bajo cuando se ejerce fuerza sobre él. Los indicadores dentro del transductor de fuerza, usualmente un múltiplo de cuatro, son conectados dentro de una configuración de puente de Wheatstone, como se muestra en la figura 8.1, con la finalidad de convertir la pequeña señal de cambio en resistencia en una señal eléctrica útil. Además, algunos componentes pasivos como resistencias y cables dependientes de la temperatura, son utilizados para compensar y calibrar la señal de salida del puente. La salida de voltaje



Sensor de fuerza

Es un dispositivo utilizado para medir la presión generada por el contacto entre dos sistemas mecánicos. La salida de un sensor de fuerza es una señal eléctrica, generalmente un voltaje, que es equivalente a la fuerza generada por el contacto.

Los sensores de fuerza se utilizan en diversas aplicaciones por ejemplo, para conocer el entorno, los seres vivos disponemos de un sistema sensorial; sin embargo, para que los robots realicen la misma acción, deben poseer sensores que les permitan saber dónde están, cómo es el lugar donde se encuentran, a qué condiciones físicas se enfrentan, dónde están los objetos con los que deben interactuar, sus parámetros físicos, etc.

De forma específica, la finalidad principal de un sensor de fuerza es mejorar la precisión de diversos procesos (industriales, médicos, etc.), dotando a un manipulador de una mayor autonomía imitando el sentido del tacto del ser humano.

Los sensores de fuerza también son utilizados en diversas aplicaciones, tales como las bolsas de aire de los automóviles, procesos de manufactura, etcétera.



Puente de Wheatstone

Es un instrumento eléctrico de medida inventado por Samuel Hunter Christie en 1832, mejorado y popularizado por Sir Charles Wheatstone en 1843. Este circuito eléctrico está diseñado para medir elementos pasivos, principalmente resistencias desconocidas, mediante el equilibrio de los brazos del puente. Estos están constituidos por cuatro resistencias que forman un circuito cerrado, siendo una de ellas la resistencia a medir.

El puente de Wheatstone es utilizado en diversos instrumentos de medición, entre ellos, sensores de fuerza, con la finalidad de acondicionar la señal eléctrica de salida. El voltaje de salida del puente, en un sensor de fuerza, es equivalente a la fuerza de contacto entre dos sistemas mecánicos.

Una aplicación muy interesante del puente Wheatstone en la industria es como sensor de temperatura, presión, etc. Asimismo, en los sistemas de distribución de energía eléctrica, se utiliza para detectar roturas o fallas en las líneas de distribución.

es negativa para una determinada dirección de la fuerza, y positiva para la dirección opuesta. El balance de voltaje en el puente está descrito por

$$v_o = \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} - \frac{r_s}{r_3 + r_s} \right) v_i. \quad (8.2)$$

Generalmente los sensores de fuerza utilizados en robots manipuladores son colocados en la muñeca, agregando algún elemento sobre el sensor que actúa como efecto final durante la interacción con el entorno. Los rangos de medición de fuerza oscilan entre 50 y 500 N, mientras que para la medición de pares están entre 5 y 70 Nm. La resolución típica es del orden de 0.1 % de la fuerza máxima y de 0.05 % del par máximo, respectivamente. En cuanto al procesamiento de las señales medidas y la generación de la salida, se tiene una frecuencia en muestreo del orden de 1 kHz.

ATI Industrial Automation es el mayor proveedor de sensores de fuerza/pa en el mundo. Miles de sensores de este fabricante están siendo utilizados en una gran variedad de aplicaciones tales como:



- Verificación del ensamblaje de componentes mecánicos y eléctricos.
- Procesos como desbastado, pulido y esmerilado.
- Retroalimentación de fuerza para robots en ambientes nucleares.
- Investigación sobre rehabilitación física y prótesis.

A continuación se describen tres modelos de sensores que son útiles para diversas aplicaciones robóticas.



8.2.1 Transductor Nano17

Es uno de los sensores de 6 ejes más pequeño del mundo y está diseñado para aplicaciones en la investigación científica. Algunas de sus principales

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS



aplicaciones son: cirugía robótica, investigación sobre manos robóticas, investigación dental e investigación sobre fuerza en dedos robóticos. Este sensor tiene un diámetro de 17 mm y una altura de 14.5 mm, y su peso aproximado es de 9 gramos.

Tabla 8.1 Características principales del sensor Nano17.

Rangos de Sensado	Calibraciones		
Ejes	SI-12-0.12	SI-25-0.25	SI-50-0.5
$f_x, f_y (\pm N)$	12	25	50
$f_z (\pm N)$	17	35	70
$t_x, t_y, t_z (\pm Nmm)$	120	250	500
Resolución			
$f_x, f_y, f_z (N)$	1/320	1/160	1/80
$t_x, t_y, t_z (Nmm)$	1/64	1/32	1/16



8.2.2 Transductor Gamma

Este sensor es ampliamente utilizado en tareas de interacción de robots manipuladores tanto para aplicaciones industriales como para investigación científica. Algunas de sus principales áreas de aplicación son: control de fuerza en tiempo real, ensamblado robótico, retroalimentación haptica, pruebas automotrices, pruebas de prótesis, entre otras. Su peso es de 254 gramos, mientras que sus dimensiones son 75.4 mm de diámetro y 33.3 mm de altura.



8.2.3 Transductor Omega250

Este sensor es utilizado en tareas de interacción industriales, debido a su amplio rango de sensado de fuerzas y pares. Algunas de sus principales áreas de aplicación son: pruebas de productos, retroalimentación de fuerza, telerobótica, colocación y extracción de partes o componentes que requieren precisión. Su peso es de 38.1 kg, mientras que sus dimensiones

Transductor

A un dispositivo diseñado para transformar o convertir un determinado tipo de energía de entrada, en otra energía diferente de salida, se le denomina transductor. Su nombre indica cuál es la transformación que realiza; por ejemplo, un transductor electromecánico transforma una señal eléctrica en mecánica o viceversa. El principio físico de funcionamiento de un transductor de fuerza está regido por la tercera ley de Newton, debido a que a cada componente de fuerza aplicada sobre el transductor corresponde una reacción de la misma intensidad pero en sentido opuesto. La fuerza ejercida sobre el transductor flexiona tres placas colocadas simétricamente y acorde con la ley de Hooke:

$$\sigma = k \cdot \varepsilon$$

donde σ es la presión aplicada a la placa (proporcional a la fuerza), k es el módulo de elasticidad de la placa y ε es la deformación que sufre la placa. Adicionalmente se colocan indicadores de tensión sobre las placas, los cuales transforman la tensión aplicada en un valor de resistencia eléctrica dado por:

$$\Delta r = s_a \cdot r_o \cdot \varepsilon$$

donde Δr es el cambio de resistencia en el indicador, s_a es un factor de tensión del indicador y r_o es la resistencia del indicador en ausencia de tensión.

Tabla 8.2 Características principales del sensor Gamma.

Rangos de Sensado Ejes	Calibraciones		
	SI-32-2.5	SI-65-5	SI-130-10
f_x, f_y ($\pm N$)	32	65	130
f_z ($\pm N$)	100	200	400
t_x, t_y, t_z ($\pm Nm$)	2.5	5	10
Resolución			
f_x, f_y (N)	1/160	1/80	1/40
f_z (N)	1/80	1/40	1/20
t_x, t_y, t_z (Nm)	1/2000	10/13333	1/800

son 260 mm de diámetro y 95 mm de altura.

Tabla 8.3 Características principales del sensor Omega250.

Rangos de Sensado Ejes	Calibraciones		
	SI-4000-500	SI-8000-1000	SI-16000-2000
f_x, f_y ($\pm N$)	4000	8000	16000
f_z ($\pm N$)	8000	16000	32000
t_x, t_y, t_z ($\pm Nm$)	500	1000	2000
Resolución			
f_x, f_y (N)	1	2	5
f_z (N)	2	4	10
t_x, t_y, t_z (Nm)	1/8	1/4	1/2

**Figura 8.2** Sensores de fuerza/par ATI: Nano17, Gamma y Omega250, respectivamente.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

8.3 Sistemas hápticos



Los dispositivos hápticos buscan aplicar el sentido del tacto a la interacción humana con sistemas informáticos y/o robóticos. Por lo general, mediante un dispositivo de entrada/salida, como una palanca de mando o guantes, se transmiten los movimientos del cuerpo del usuario. El usuario, que interactúa con un sistema háptico, puede no sólo enviar información a una computadora o a un manipulador remoto, sino que también recibe una respuesta en forma de una sensación (fuerza externa) sobre alguna parte del cuerpo.

La operación de un dispositivo háptico generalmente se basa en el siguiente ciclo: en primer lugar, el dispositivo háptico recibe y mide la entrada de su operador, la cual puede ser una posición, velocidad, aceleración, fuerza, actividad muscular, etc. Posteriormente, la entrada sensada es aplicada a un entorno virtual o teleoperado. Para un entorno virtual, el efecto de la entrada del operador sobre objetos virtuales y la respuesta subsecuente pueden ser mostradas al operador a través de modelos y algoritmos informáticos. En teleoperación, un manipulador en un entorno remoto intenta seguir la entrada dictada por el operador. Cuando el manipulador interactúa con un entorno real, la información háptica a ser transmitida al operador es registrada o estimada. Finalmente, los actuadores del dispositivo háptico son utilizados para transmitir físicamente sensaciones táctiles al operador humano. Con base en la retroalimentación háptica, ya sea a través del control humano consciente o inconsciente, o simplemente la dinámica del sistema, la entrada del operador es modificada, comenzando nuevamente el ciclo háptico.

Existe una gran variedad de dispositivos hápticos disponibles en el mercado, desde dispositivos para investigación de alta fidelidad hasta sistemas de entretenimiento de bajo costo. La mayor parte de dispositivos hápticos disponibles en el mercado están diseñados por dos empresas: Sens-

Háptica

Estrictamente hablando, háptica significa todo aquello referido al contacto, especialmente cuando éste se usa de manera activa. Esta palabra proviene del griego hápto (tocar, relativo al tacto). Sin embargo algunos han extendido el significado de la palabra 'háptica' de manera que con ella hacen alusión por exclusión a todo el conjunto de sensaciones no visuales y no auditivas que experimenta un individuo. El sistema de percepción háptica es especial porque puede incluir los receptores sensoriales ubicados en todo el cuerpo y está estrechamente relacionado con el movimiento del cuerpo, de forma que puede tener un efecto directo sobre el mundo que está percibiendo.

Es decir, un sistema háptico permite a un usuario tocar, sentir, manipular, crear y cambiar objetos tridimensionales simulados dentro de un ambiente virtual o localizados en un entorno remoto (como en el caso de la teleoperación bilateral, realizando la función de manipulador maestro). Estos dispositivos pueden ser usados para entrenar habilidades físicas de un operador en aplicaciones que requieren instrumentos especializados (por ejemplo cirujanos, astronautas, etc.) o permitir el modelado de objetos tridimensionales sin un medio físico.



Teleoperación

Un sistema teleoperado es aquel que permite controlar un robot *esclavo* (controlar su movimiento y la fuerza ejercida) ubicado en una zona remota (o en un entorno hostil del que haya que proteger al operador) a través de la manipulación de un robot *maestro* localizado en el sitio de trabajo del operador. Así, el movimiento del esclavo debe ser predecible a partir de los movimientos que el operador provoca en el maestro, es decir, el operador debe comprender de manera muy intuitiva cómo mover el maestro para conducir al esclavo por una determinada trayectoria y, además, realizar las labores o trabajos requeridos.

El primer teleoperador háptico desarrollado se construyó en los años cincuenta en Argonne National Laboratory, E.U., por el Dr. Raymond Goertz, el cual permitía operar remotamente sobre sustancias radiactivas. Con base en estas experiencias, el uso de una “fuerza de retorno” se ha empleado en muchos tipos de teleoperación. Específicamente, en el área médica, se cuenta con simuladores que resultan útiles en el entrenamiento del personal, con la finalidad de minimizar los daños en procedimientos invasivos; asimismo, los nuevos pilotos son entrenados mediante de vuelo virtuales.

Able Technologies e Immersion Corporation. La familia de dispositivos Phantom de la empresa SensAble Technologies es un interfaz háptico tridimensional de tipo lápiz. El Phantom Premium ha sido el dispositivo háptico más utilizado para propósitos de investigación. El alto precio de estos dispositivos restringe el desarrollo de aplicaciones comerciales. El Phantom Omni, el cual es en orden de magnitud menos caro que el Phantom Premium, ha ganado también popularidad entre los investigadores en robótica. En 2007, Novint Technologies presentó el Novint Falcon, que es un dispositivo háptico de tres grados de libertad y de menor costo que el Phantom Omni. Este dispositivo está dirigido más hacia aplicaciones de entretenimiento.



Figura 8.3 Manipulador háptico Phantom Omni (SensAble Technologies, Inc.).

El Phantom Omni (figura 8.3) es un manipulador de seis grados de libertad y cuenta con tres actuadores eléctricos para posicionar virtualmente un punto en un espacio tridimensional. Todos los grados de movimiento tienen límites físicos. Los movimientos del dispositivo háptico se pueden clasificar en dos tipos: macromovimientos y micromovimientos. Los macromovimientos sirven para lograr la traslación o posicionamiento de la muñeca, a través del movimiento del cuerpo o base, el hombro y el codo. Por otra parte, los micromovimientos sirven para la orientación del efecto final (stylus). Debido a la configuración de estos tres últimos grados de libertad, la muñeca del Phantom Omni es de tipo esférica.

8.4 Modelado del entorno

En lo referente a los modelos del ambiente o entorno utilizados en la literatura, éstos pueden ser clasificados en dos grupos principales:

 *Entorno rígido (restringido).* La interacción mecánica entre el robot y un entorno rígido incluye los modelos matemáticos para impacto, contacto, fricción de Coulomb y las restricciones asociadas.

 *Entorno dócil (compliant).* Para precisar los aspectos fundamentales del control de interacción, es conveniente recurrir a un modelo simple pero significativo del contacto. Para este propósito, es considerado un entorno elástico dócil desacoplado el cual está descrito por el modelo

$$\mathbf{f}_e = K_e(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \quad (8.3)$$

con una rigidez de la superficie $K_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Esta relación lineal entre fuerza y deformación representa una primera aproximación al modelado de la interacción robot-entorno. Investigando la dinámica de interacción, Hogan llegó a la conclusión de que el entorno puede ser modelado como un sistema masa-resorte-amortiguador generalizado.

8.5 Control de fuerza

En algunas aplicaciones es deseable controlar con precisión la fuerza de contacto, lo que hace necesario el uso de esquemas de control que permitan especificar una fuerza de interacción deseada. Un sistema de control directo de fuerza requiere la adopción de una acción estabilizante de control PD (Proporcional-Derivativo) del error de fuerza. Debido a que las mediciones de fuerza suelen contener altos niveles de ruido, la acción derivativa pudiera no ser implementada en la práctica, por lo que se requiere de un



Tipos de entorno

Un robot por definición es una máquina capaz de interactuar con su entorno, esto es, debe ser capaz de adaptar sus movimientos y sus acciones de interacción con base en las características físicas de los ambientes con los que se encuentra y los objetos que hay en ellos. Para lograr esta capacidad de adaptación, lo primero que necesitan los robots es tener conocimiento del entorno.

Los modelos de entorno descritos en la literatura pueden ser clasificados de la siguiente manera:

Entorno rígido: es aquél que impone restricciones cinemáticas y dinámicas, cuando el efecto final de un manipulador entra en contacto con él, limitando el movimiento en algunas direcciones. Existen diversos fenómenos físicos que imponen este tipo de restricciones, entre ellos, el impacto y la fricción.

Entorno dócil: es aquél que permite una interacción con el efecto final del manipulador, debido a que posee un cierto grado de deformabilidad o flexibilidad. El desplazamiento del efecto final permitido por este entorno se considera infinitesimal. En general, este entorno puede ser modelado a través de la selección de los parámetros de rigidez, amortiguamiento e inercia.



Control de fuerza

Consiste en lograr que el efecto final de un manipulador aplique un nivel de fuerza deseado durante una tarea de interacción con su entorno. Es decir, una estrategia de control de la fuerza es la que modifica las trayectorias de posición del efecto final del robot con base en la fuerza detectada logrando, de esta forma, controlar la interacción entre el robot y su entorno.

El control de fuerza es una tecnología que ha sido desarrollada para llenar un vacío en los procesos de manufactura automatizados, tales como: maquinado, fundición, forjado o moldeado, entre otros. Estos procesos suelen responder a ciertas especificaciones dimensionales, pero además requieren de un proceso adicional para lograr un acabado deseado de la superficie. El uso de control de fuerza en estos procesos industriales permite obtener el resultado deseado.

La retroalimentación y el control de la fuerza es una condición obligatoria para lograr un comportamiento robusto y versátil de un sistema robótico en entornos poco o no estructurados, así como para lograr un funcionamiento seguro y confiable de un robot ante la presencia de los seres humanos.

adecuado amortiguamiento de los términos de velocidad. En consecuencia, un sistema de control de fuerza no se basa sólo en mediciones de fuerza sino también en mediciones de velocidad, y eventualmente de posición. Es importante señalar que una estrategia de control de fuerza tiene sentido solamente en aquellas direcciones del espacio de tarea a lo largo de las cuales existen fuerzas de interacción entre el manipulador y su entorno.

Se pueden derivar diversos esquemas de control de interacción a partir del concepto de control por dinámica inversa, simplemente incluyendo la medición o sensado de las fuerzas y/o pares generados por la interacción entre el robot y su entorno. Por lo tanto, las entradas de control para el robot se eligen como

$$\tau = M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{a} - J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_r(\dot{\mathbf{q}}) + J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e \quad (8.4)$$

donde la nueva entrada de control \mathbf{a} se selecciona para que cumpla los requerimientos de la tarea de interacción que debe desempeñar el manipulador. Sustituyendo la ley de control (8.4) en el modelo dinámico se tiene que

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}, \quad (8.5)$$

es decir, que (8.4) es una ley de control linealizante que lleva al sistema a una forma de doble integrador.



8.5.1 Control de fuerza con lazo interno de posición

Considerando un controlador de posición PD y la ley de control por dinámica inversa (8.4), se puede diseñar un controlador de fuerza con lazo interno de posición dado por

$$\mathbf{a} = M_d^{-1} [K_p(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}) - K_v\dot{\mathbf{x}}] \quad (8.6)$$

donde la posición de referencia \mathbf{x}_f está relacionada al error de fuerza con una acción de control proporcional-integral de tal forma que:

$$\mathbf{x}_f = K_{pf}(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) + K_{if} \int_0^t (\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) d\tau \quad (8.7)$$

donde $K_{pf} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $K_{if} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son las matrices diagonales de ganancias proporcionales e integrales, cuya sintonía permite lograr que el error de fuerza $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e$ tienda a cero conforme el tiempo evoluciona. La fuerza deseada $\mathbf{f}_d \in \mathbb{R}^m$ es considerada una referencia constante.

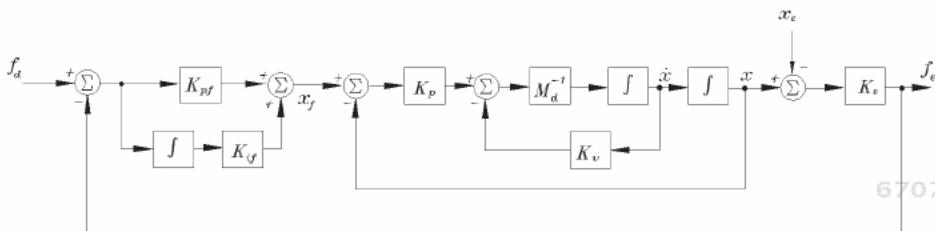


Figura 8.4 Diagrama a bloques del control de fuerza con lazo interno de posición.

Sustituyendo (8.6) en (8.5) se obtiene que la dinámica del sistema de lazo cerrado está dada por:

$$M_d \ddot{\mathbf{x}} + K_v \dot{\mathbf{x}} + K_p \mathbf{x} = K_p \mathbf{x}_f, \quad (8.8)$$

donde las matrices diagonales $M_d \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ representan la inercia deseada, la ganancia derivativa y la ganancia proporcional, respectivamente. Estas matrices son los parámetros de sintonía

que permiten hacer que la posición \mathbf{x} del efecto final alcance la posición de referencia \mathbf{x}_f .



8.5.2 Control de fuerza: lazo interno de velocidad

Un control de fuerza con lazo interno de velocidad puede obtenerse si se considera el lazo de retroalimentación de posición abierto, así se obtiene que \mathbf{x}_f representa ahora una velocidad de referencia. Entonces la ley de control se diseña de tal forma que:

$$\mathbf{a} = M_d^{-1} [K_p \mathbf{x}_f - K_v \dot{\mathbf{x}}] \quad (8.9)$$

donde x_f se puede elegir como una acción proporcional dada por

$$x_f = K_{pf}(f_d - f_e). \quad (8.10)$$

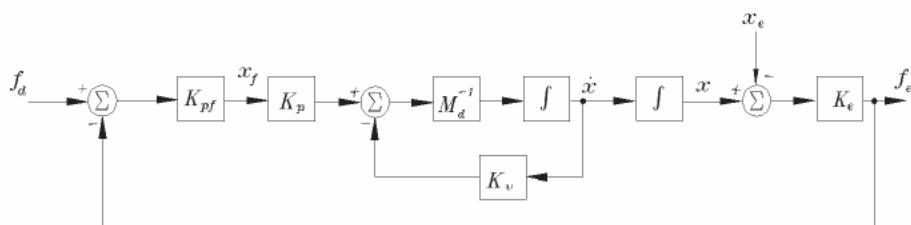


Figura 8.5 Diagrama a bloques del control de fuerza con lazo interno de velocidad.



Sistema robótico controlado por fuerza

En la página web del libro se encuentra el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del sistema robótico de un grado de libertad controlado por fuerza. El programa de simulación está compuesto de dos scripts, el primero corresponde al código del solucionador de la ecuación diferencial y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente a la ecuación diferencial que representa la dinámica del robot y el control de fuerza con lazo interno de velocidad.

El modelo dinámico de un sistema robótico cartesiano de un grado de libertad está dado por

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} [f - f_e - b\dot{x}] \quad (8.11)$$

donde $m = 2,351$ kg representa la masa, $b = 2,288$ N·s/m corresponde al coeficiente de fricción viscosa, f es la fuerza de control aplicada y f_e la fuerza de interacción con el entorno. Para este sistema se desea regular la interacción con el entorno, del tipo (8.3) con rigidez de 1000 N/m, a un valor deseado de fuerza de 50 N.

Solución

Para el control del sistema se utilizó un controlador de fuerza con lazo interno de velocidad y fue simulado numéricamente en MatLab.

Los resultados obtenidos en la simulación se presentan en la figura 8.6. En la gráfica superior se ve el comportamiento de la fuerza aplicada y se

aprecia su convergencia hacia el valor deseado de 50 N. Por otra parte, el error de fuerza tiende a cero conforme el tiempo evoluciona, tal y como se presenta en la parte inferior de la figura, cumpliendo con la tarea de interacción requerida.

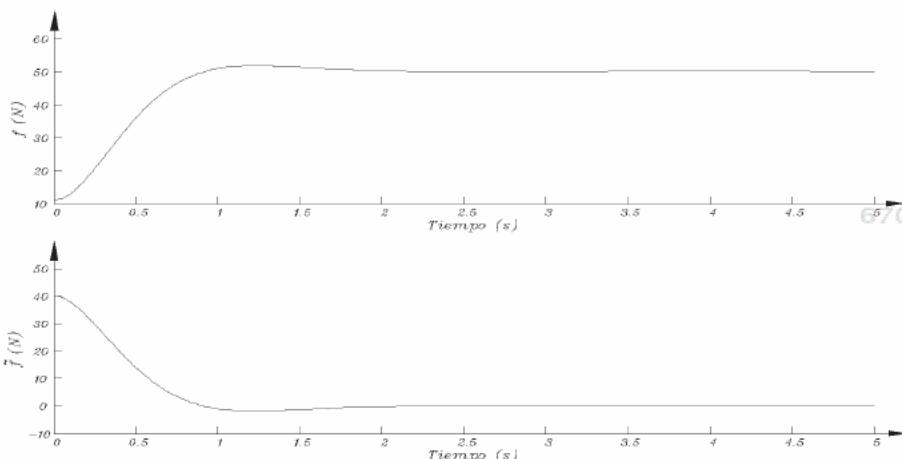


Figura 8.6 Fuerza aplicada y error de fuerza, obtenidos mediante el uso de control de fuerza en un sistema de un grado de libertad.



8.6 Control híbrido de fuerza/posición

ebrary El control híbrido de fuerza/posición puede entenderse como una estrategia de planeación de tareas y una técnica de control, en la cual se especifican fuerzas deseadas en aquellas direcciones del espacio de tarea en las cuales el movimiento del efecto final está restringido por el entorno, y una trayectoria deseada en las otras direcciones. Por lo tanto, el espacio de tarea es dividido en un subespacio de control de posición y un subespacio de control de fuerza. El control híbrido a nivel articular es fácil de implementar, pero difícilmente corresponde a la naturaleza de la tarea debido a que las articulaciones seleccionadas que proveen la posición y la fuerza no corresponden uno-a-uno con las direcciones restringidas y sin restricción en el espacio de tarea del robot manipulador. Khatib propuso una variante al control híbrido basada en una descripción de la dinámica del



Control híbrido de fuerza/posición

Es un enfoque de control directo de fuerza que resuelve los problemas de posicionamiento y regulación de fuerza de manera simultánea. Recibe el nombre de control híbrido debido a que se mezcla dentro de un mismo esquema el control de fuerza y el de posición.

La principal limitante de este enfoque de control es que la tarea debe dividirse de acuerdo a las direcciones del espacio en que se desea cumplir con alguno de los dos objetivos de control. Es decir, el control de posición se aplica en una determinada dirección, mientras que el control de fuerza en la dirección o direcciones restantes.

Para superar el problema que presenta el esquema de control híbrido, se utiliza el control paralelo de fuerza/posición el cual combina las características del control de rigidez y el control de fuerza. En este caso, los lazos de posición y fuerza son cerrados en todas las direcciones del espacio de tarea, donde las propiedades estructurales de los controladores aseguran que una asignación apropiada del valor de fuerza de referencia se alcanza en estado estacionario. Así, los dos lazos no están desacoplados; un inconveniente del control paralelo son las perturbaciones mutuas de las variables de posición y fuerza antes de que el estado estacionario se alcance.

robot manipulador vista desde el efecto final, la llamada formulación en espacio operacional o de tarea. Esta representación es válida excluyendo las configuraciones singulares en el espacio de tarea.

Debido a que el controlador de posición debe controlar algunas direcciones o grados de libertad y el control de fuerza regulará las restantes, esta estrategia de control es adecuada para tareas donde el comportamiento es predecible. La estructura de un controlador híbrido es la siguiente

$$\tau = J^T(\mathbf{q}) [K_f S(\mathbf{f}_d - \mathbf{f}_e) + K_p(I - S)(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) - K_v \dot{\mathbf{x}}] + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (8.12)$$

donde $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz diagonal formada por 1's y 0's, que sirve para especificar las direcciones que deben controlarse por fuerza y las que deben controlarse por posición.

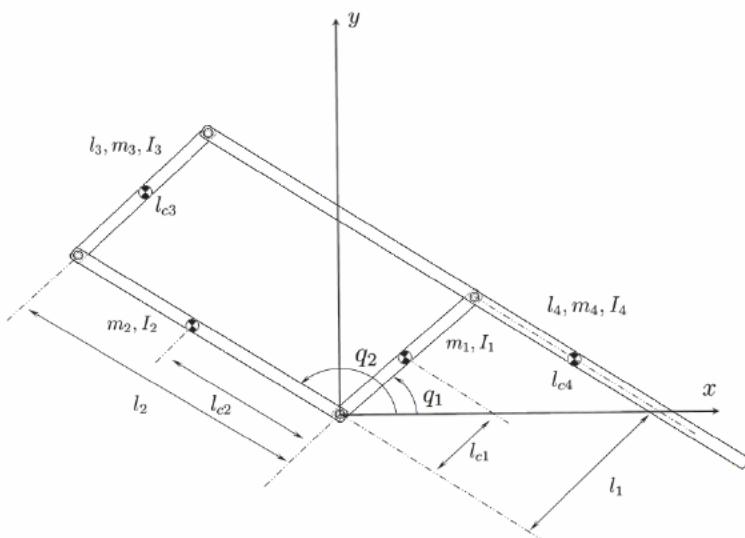
Las direcciones correspondientes a los elementos de S que son 1's se controlan por fuerza y las restantes son controladas por posición, mientras que $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ representa una matriz identidad, los parámetros del controlador $K_f \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ representan las ganancias proporcionales de fuerza y posición, respectivamente; por otro lado, $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$ corresponde a la ganancia derivativa relacionada a la velocidad del efecto final del robot.

♣ ♣ Ejemplo 8.2

Considérese el manipulador de 5 barras tipo SCARA de dos grados de libertad que se muestra en la figura 8.7, cuya tarea de interacción consiste en el seguimiento de una trayectoria recta aplicando una fuerza de 10 N sobre una superficie plana ubicada dentro de su espacio de trabajo.

Simular el proceso de interacción del robot sobre la superficie plana.

Solución



Robot manipulador SCARA

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot manipulador SCARA de cinco barras y dos grados de libertad controlado por fuerza/posición. El programa de simulación está compuesto de dos archivos principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados, mientras que el segundo es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la dinámica del robot y el controlador de híbrido de fuerza/posición. Adicionalmente se presenta una animación que muestra el movimiento del manipulador durante el desarrollo de la tarea de interacción.

Figura 8.7 Manipulador de 5 barras tipo SCARA de dos grados de libertad.

El comportamiento del robot fue simulado numéricamente utilizando MatLab, para tal propósito el modelo dinámico fue reescrito como

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1}(\mathbf{q})[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_r(\dot{\mathbf{q}})]. \quad (8.13)$$

Para limitar los pares aplicados al robot manipulador se consideraron los límites de saturación de ambos actuadores como 7,86 Nm. Con la finalidad de simular la interacción con el entorno, se considera una superficie en $y_e = -0,4$ m desde el origen, la cual ejerce una fuerza a lo largo del eje y . Un entorno elástico (8.3) con una rigidez de $K_e = \text{diag}\{1500\}$ N/m se simuló con la finalidad de generar la fuerza de interacción. Para realizar esta tarea de interacción se utilizó el control híbrido de fuerza/posición.

En la parte superior de la figura 8.8 se presenta el movimiento del manipulador, en términos de la trayectoria deseada y la trayectoria actual del efecto final. Es posible observar que la trayectoria deseada es seguida correctamente por el efecto final manteniéndose en contacto con la superficie ubicada en $y = -0,4$ m. Por otra parte, la fuerza generada por la interacción entre el manipulador y el entorno, se presenta en la

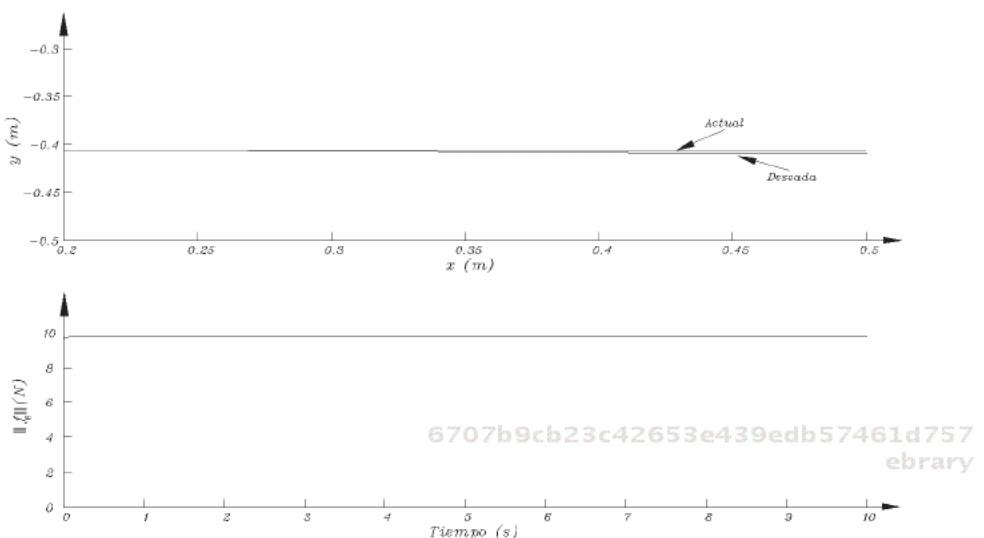


Figura 8.8 Trayectoria sobre el plano y fuerza de interacción, obtenidas mediante el uso de control híbrido de fuerza/posición.

parte inferior de la misma figura. Puede apreciarse que, durante la interacción con el entorno, la fuerza de contacto es regulada al valor deseado de 10 N. Por lo tanto, se verifica que la tarea de interacción descrita con anterioridad es llevada a cabo correctamente por el manipulador. Las ganancias sintonizadas fueron $K_p = \text{diag}\{50000\}$ N/m, $K_f = \text{diag}\{50\}$ y $K_v = \text{diag}\{5000\}$ N·s/m.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

La figura 8.9 permite verificar que, haciendo uso del control híbrido, el error de seguimiento \tilde{x} y el error de fuerza \tilde{f} tienden a cero, logrando que el manipulador realice un correcto seguimiento de la trayectoria deseada y aplique el nivel de fuerza deseado durante la interacción.



8.7 Control de impedancia

La idea original acerca del control de impedancia propuesta por Hogan, tiene hoy en día diversas interpretaciones. Usualmente, el objetivo de control consiste en ocasionar que el efecto final del robot responda a fuerzas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ALFAOMEGA

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

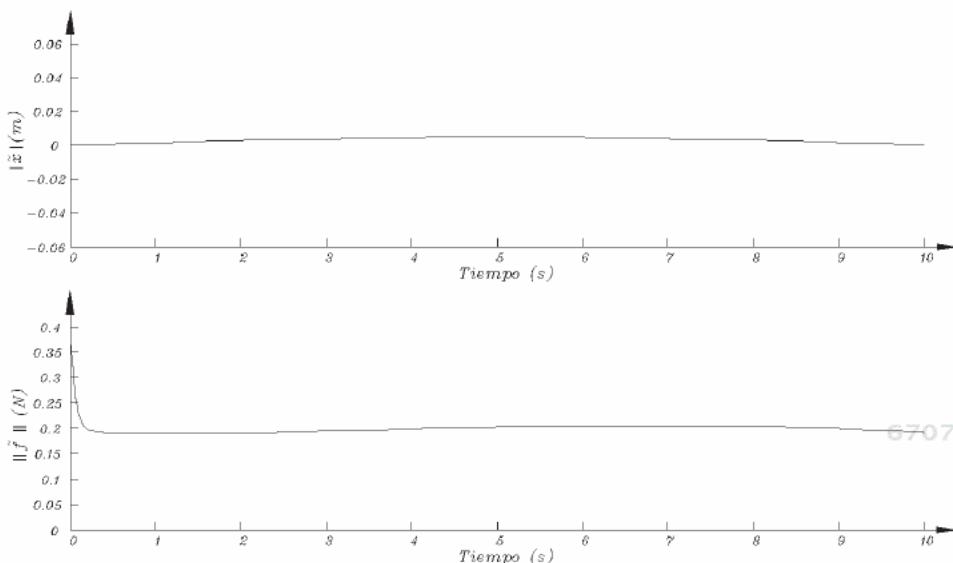


Figura 8.9 Errores de posición y fuerza, respectivamente, obtenidos mediante el uso de control de híbrido de fuerza/posición.

aplicadas externamente, de acuerdo con alguna dinámica bien definida. Específicamente, la relación dinámica deseada entre la posición del efecto final \mathbf{x} , la trayectoria de referencia \mathbf{x}_d y el vector de fuerzas de contacto \mathbf{f}_e está dada por la siguiente expresión

$$\mathbf{f}_e = K_d(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + B_d(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) + M_d(\ddot{\mathbf{x}}_d - \ddot{\mathbf{x}}) \quad (8.14)$$

donde K_d es la matriz de rigidez, B_d es la matriz de amortiguamiento y M_d es la matriz de inercia. Estos parámetros caracterizan la impedancia Z_d de la relación (8.14), la cual es dada en el dominio de la frecuencia por

$$Z_d = K_d + B_d s + M_d s^2. \quad (8.15)$$

Los parámetros de impedancia $K_d=\text{diag}\{k_d\}$, $B_d=\text{diag}\{b_d\}$ y $M_d=\text{diag}\{m_d\}$ pueden seleccionarse de acuerdo con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_d + k_e}{m_d}} \quad (8.16)$$

$$\zeta = \frac{b_d}{2\sqrt{m_d(k_d + k_e)}} \quad (8.17)$$



Control de impedancia

Es la principal técnica de control indirecto de fuerza y consiste en regular la interacción haciendo uso de la relación de impedancia entre la fuerza aplicada y los errores en el posicionamiento.

La idea principal de este enfoque consiste en generar un sistema de lazo cerrado del tipo masa-resorte-amortiguador, con la finalidad de que el efecto final del manipulador responda a la interacción dinámica con el entorno de acuerdo con la selección de los parámetros de rigidez K_d , amortiguamiento B_d e inercia M_d . El control de impedancia ha sido implementado en muchas formas. En su forma más simple puede ser considerado una generalización de los esquemas de control de amortiguamiento y rigidez. De esta manera, es esencialmente un controlador de posición PD, con ganancias de retroalimentación de posición y velocidad ajustadas para obtener impedancias aparentes diferentes.

Considerando el potencial que brinda el control de impedancia en tareas de manipulación que involucran la interacción del robot con su entorno, la rehabilitación neurológica surge como una de sus principales áreas de aplicación. En particular el control de la relación entre fuerza y posición en ortesis robóticas ha mostrado la eficiencia del control de impedancia.

ALFAOMEGA

donde la frecuencia natural ω_n y el factor de amortiguamiento ζ determinan el comportamiento dinámico durante la fase de transición entre el movimiento libre y la interacción. La rigidez del entorno $K_e = \text{diag}\{k_e\}$ se selecciona de acuerdo con el tamaño y la capacidad de par del robot.



8.7.1 Control de impedancia con base en par

En el enfoque de control de impedancia con base en par, la ecuación del comportamiento deseado (8.14) puede ser restringida a la especificación de la aceleración deseada del efecto final

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_d + M_d^{-1} [K_d(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + B_d(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_e]. \quad (8.18)$$

La ley de control completa puede ser obtenida por la sustitución de (8.18) en (8.5), por lo tanto el vector de pares aplicados está dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\{\ddot{\mathbf{x}}_d + M_d^{-1}[K_d(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + B_d(\dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_e] - J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\} \\ & + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + J^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e. \end{aligned} \quad (8.19)$$

♣♦♥♦ Ejemplo 8.3

Considérese nuevamente el robot cartesiano (8.11) de un grado de libertad, el cual interactúa con un entorno de rigidez de 10000 N/m. Se desea regular el sistema mediante control de impedancia, generando tres comportamientos dinámicos para los casos subamortiguado ($0 < \zeta < 1$), críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) y sobre amortiguado ($\zeta > 1$).

Solución

Se utilizó el esquema de control de impedancia con base en par y el sistema robótico fue simulado en MatLab. Los resultados de la simulación

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

corresponden a las fuerzas aplicadas y las trayectorias generadas para cada uno de los casos de amortiguamiento. En la figura 8.10 se pueden apreciar las trayectorias obtenidas y se observa claramente la diferencia para los tres factores de amortiguamiento utilizados: 0,2 (subamortiguado), 1 (críticamente amortiguado) y 2 (sobre amortiguado).

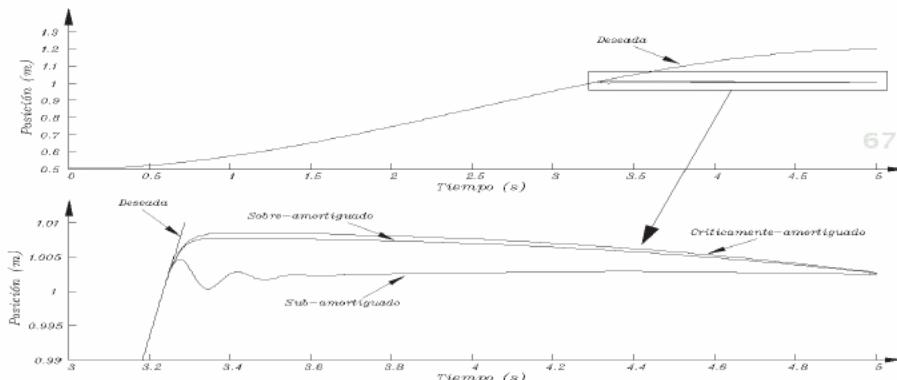


Figura 8.10 Trayectorias sobre el plano obtenidas mediante el uso de control de impedancia con base en par.

Por otra parte, en la figura 8.11 se presentan las fuerzas generadas por

la interacción con el entorno. En la figura se distinguen con claridad los tres diferentes comportamientos dinámicos obtenidos mediante la selección de los parámetros de impedancia. Estos resultados permiten verificar la importancia del control de impedancia en tareas de interacción para generar diferentes comportamientos dinámicos de un sistema robótico.



8.7.2 Control de impedancia con base en posición

En el enfoque con base en posición, las fuerzas y pares son sensados explícitamente por medio de un sensor de fuerza/pair ubicado en la muñeca del manipulador y los comandos de posición se emplean en el lazo interno del controlador. En particular, se crea un vector de ajuste de posición \mathbf{x}_a

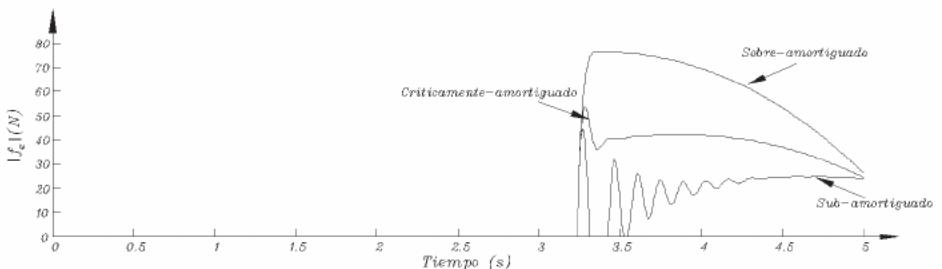


Figura 8.11 Fuerzas obtenidas mediante el uso de control de impedancia con base en par.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
mediante el filtrado de las fuerzas de interacción medidas para satisfacer

$$\mathbf{f}_e = K_d \mathbf{x}_a + B_d \dot{\mathbf{x}}_a + M_d \ddot{\mathbf{x}}_a \quad (8.20)$$

a través de

$$\mathbf{x}_a(s) = (K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e(s). \quad (8.21)$$

Con la simplificación de que K_d , B_d y M_d sean diagonales, esto se reduce a un filtro pasa bajas de cada componente de la fuerza \mathbf{f}_e para generar cada componente de \mathbf{x}_a . El ajuste \mathbf{x}_a se resta a la trayectoria de posición deseada para generar

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_a. \quad (8.22)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary Se puede observar que cuando no existe contacto con el entorno, $\mathbf{f}_e = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_d$. Si al controlar el manipulador se logra el correcto posicionamiento, es decir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$, entonces

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} \quad (8.23)$$

y por ende (8.20) y (8.21) satisfacen la impedancia deseada especificada por (8.14) y (8.15).

Este enfoque permite un control de posición preciso dentro del lazo de control de impedancia, haciéndolo atractivo para su uso en manipuladores industriales, debido a que están diseñados como dispositivos de

posicionamiento preciso (o al menos repetitivo). Sin embargo, sufre la incapacidad de proveer impedancias muy “suaves”, es decir, rigidez y amortiguamiento pequeños. Generalmente sería deseable en casos donde se requiere control de posición articular rígido, es decir un control de posición con mayor seguridad o un correcto posicionamiento en algunas direcciones cartesianas. Por lo tanto, puede utilizarse una ley de control de posición cartesiana PD con compensación de gravedad, tomando como posición de referencia deseada a \mathbf{x}_c .



8.7.3 Enfoque alternativo al control de impedancia

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Este enfoque de control de impedancia corresponde a una generalización del control de movimiento en el espacio de tarea cartesiano, eligiendo una trayectoria deseada \mathbf{x}_d . Éste trata de mantener la siguiente relación dinámica, similar a (8.14),

$$\mathbf{x}_d - \mathbf{x} = (K_s + B_s s + M_s s^2)^{-1} \mathbf{f}_e \quad (8.24)$$

donde $s = \frac{d}{dt}$ denota el operador diferencial y K_s , B_s y $M_s \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$ son matrices diagonales, obteniendo que $(K_s + B_s s + M_s s^2)^{-1}$ es un filtro estable lineal multivariable de segundo orden.

Definiendo el error de impedancia $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^m$ como

$$\tilde{\xi} = \tilde{\mathbf{x}} - (K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e \quad (8.25)$$

donde $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$. Formalmente, el objetivo de este enfoque al control de impedancia consiste en seleccionar τ de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}(t) = \mathbf{0} \quad (8.26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\xi}}(t) = \mathbf{0}. \quad (8.27)$$

Es importante notar que en ausencia de contacto, es decir $\mathbf{f}_e \equiv \mathbf{0}$, este objetivo de control equivale al del control de movimiento en espacio cartesiano. Por lo tanto, el control de impedancia puede verse como un control

de movimiento permitiendo la tolerancia de errores en el seguimiento de la trayectoria deseada en presencia de fuerzas de interacción.

Considerando la definición del error de impedancia (8.25), los vectores

$$\dot{\tilde{\xi}} = \dot{x}_d - \dot{x} - s(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} f_e \quad (8.28)$$

$$\ddot{\tilde{\xi}} = \ddot{x}_d - \ddot{x} - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} f_e \quad (8.29)$$

denotarán la primera y segunda derivadas respecto del tiempo del error de impedancia, respectivamente.

Con la finalidad de resolver el problema de control de impedancia se propone

$$a = \ddot{x}_d - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} f_e + M_d^{-1}[\nabla \mathcal{U}(K_p, \tilde{\xi}) + K_v \dot{\tilde{\xi}}] \quad (8.30)$$

donde $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de ganancias proporcionales y $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de ganancias derivativas, ambas diagonales y definidas positivas. Entonces, eligiendo a como (8.30) y considerando la derivada temporal (8.29), se obtiene la siguiente ecuación de lazo cerrado combinando el modelo del robot y el esquema de control (8.4)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}} \\ -M_d^{-1}[\nabla \mathcal{U}(K_p, \tilde{\xi}) + K_v \dot{\tilde{\xi}}] \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

El término $\nabla \mathcal{U}(K_p, \tilde{\xi})$ es el gradiente de una función artificial de energía potencial que representa la acción proporcional del controlador, mientras el término derivativo $K_v \dot{\tilde{\xi}}$ se incluye para obtener un movimiento amortiguado.

Ejemplo 8.4

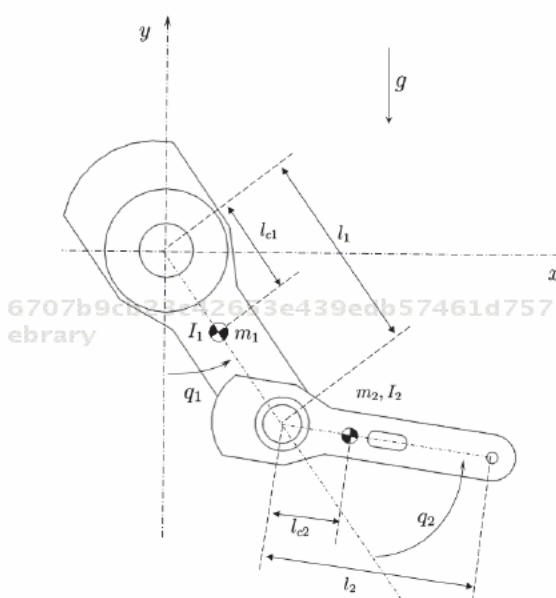
Considérese el manipulador serial de dos grados de libertad que se muestra en la figura 8.12. La tarea encomendada al manipulador consiste en realizar el seguimiento de una trayectoria preestablecida durante la ausencia de contacto con su entorno. Mientras que, ante la presencia de fuerzas externas, el manipulador debe seguir la trayectoria impuesta por el entorno, regulando las fuerzas de contacto para lograr un seguimiento adecuado.



Robot manipulador de 2 gdl

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot manipulador de 2 gdl controlado por impedancia. El programa de simulación está compuesto de dos archivos principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la dinámica del robot y el controlador de impedancia. Adicionalmente se presenta una animación que muestra el movimiento del robot manipulador durante el desarrollo de la tarea de interacción.

Solución



Parámetro	Notación
Longitud del eslabón 1	l_1
Masa del eslabón 1	m_1
Centro de gravedad del eslabón 1	I_{c1}
Inercia del eslabón 1	I_1
Posición de la articulación 1	q_1
Longitud del eslabón 2	l_2
Masa del eslabón 2	m_2
Centro de gravedad del eslabón 2	I_{c2}
Inercia del eslabón 2	I_2
Posición de la articulación 2	q_2
Aceleración de la gravedad	g

Figura 8.12 Robot manipulador de dos grados de libertad.

El comportamiento del robot fue simulado numéricamente utilizando MatLab. Con este propósito el modelo fue reescrito como (8.13) y se consideraron los límites de saturación de los actuadores como 150 y 15 Nm para el hombro y codo, respectivamente. Para simular la interacción con el en-

torno, se colocó una pared vertical en $x_e = 0,98$ m desde el origen, la cual ejerce una fuerza a lo largo del eje x y obstruye el movimiento deseado del efecto final imponiendo una trayectoria vertical sobre la superficie. Se considera un entorno elástico (8.3) con una rigidez de la superficie de $K_e = \text{diag}\{1200\}$ N/m.

El control de esta tarea de interacción se realizó con la estructura de control (8.30) considerando

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}_d - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e + M_d^{-1} [K_p \tanh(\xi) + K_v \xi], \quad (8.32)$$

la cual se puede denominar control de impedancia Tanh-D.

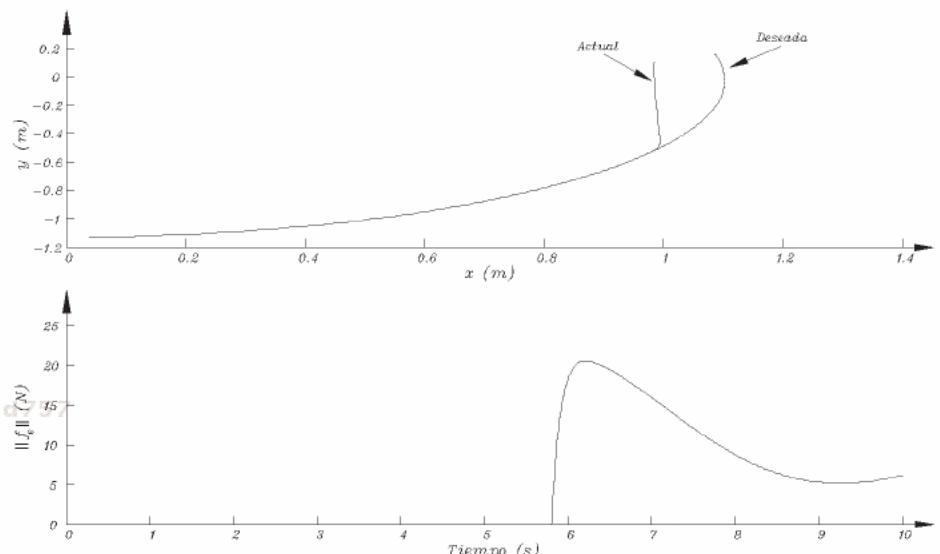


Figura 8.13 Trayectoria sobre el plano y fuerza de interacción, obtenidas mediante el uso de control de impedancia.

Los resultados de simulación correspondientes al uso de control de impedancia se muestran en la figura 8.13. En la parte superior de la figura 8.13 se presenta el movimiento del manipulador, en términos de la trayectoria deseada y la trayectoria actual del efecto final utilizando el controlador Tanh-D. Es posible observar que la trayectoria deseada es seguida correctamente por el efecto final hasta que encuentra la pared y ésta le

impone una trayectoria vertical en $x = 0,98$ m. Durante la interacción con la pared las fuerzas de contacto son reguladas por los parámetros de impedancia, los cuales fueron seleccionados como: $K_d = \text{diag}\{60\}$ N/m, $B_d = \text{diag}\{150\}$ N·s/m y $M_d = \text{diag}\{2\}$ kg. Las fuerzas generadas por la interacción entre el manipulador y la pared se presentan en la parte inferior de la figura 8.13. La regulación de las fuerzas depende de la selección de los parámetros de impedancia y, para las condiciones propuestas, estas fuerzas son menores a 25 N. Por lo tanto, se verifica que la tarea de interacción descrita con anterioridad se lleva a cabo correctamente por el manipulador. Las ganancias sintonizadas fueron $K_p = \text{diag}\{60\}$ N/m y $K_v = \text{diag}\{6\}$ N·s/m.

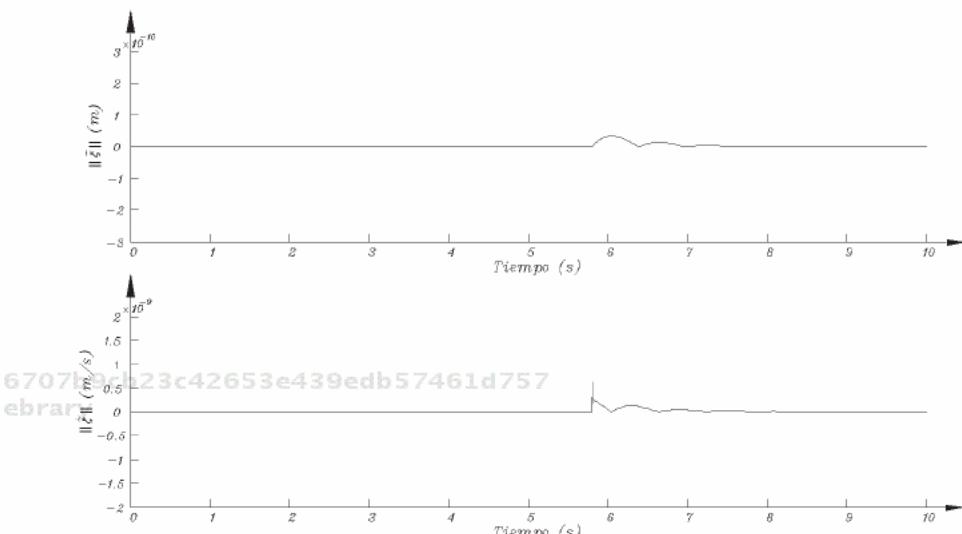


Figura 8.14 Error de impedancia $\tilde{\xi}$ y su derivada respecto al tiempo $\dot{\tilde{\xi}}$, respectivamente, obtenidos mediante el uso de control de impedancia.

La figura 8.14 permite verificar que, haciendo uso del control Tanh-D, el error de impedancia $\tilde{\xi}$ y su derivada $\dot{\tilde{\xi}}$ tienden a cero, acorde con el objetivo de control de impedancia definido en las ecuaciones (8.26)-(8.27).

8.8 Aplicaciones

Aplicaciones

En las últimas décadas han surgido investigaciones dentro del área de la interacción humano-robot, por ejemplo: teleoperación bilateral, máquinas de ejercicio inteligentes, robots para rehabilitación, tareas industriales de guiado activo, etc. Un robot manipulador equipado con sensores de fuerza y esquemas de control de impedancia permite la asistencia a personas con capacidades diferenciadas, problemas o atrofias musculares; asimismo, permite a un especialista ampliar sus conocimientos, obtener mejores diagnósticos y selección de rutinas terapéuticas óptimas y eficientes para el paciente, lo que lleva a un rápido proceso de recuperación, logrando los resultados esperados en menor tiempo. De esta forma las expectativas de vida del paciente se amplían.

Las aplicaciones de la robótica siguen aumentando en número a medida que hay avances en los materiales, en el software de control, una mayor robustez y la disminución en el tamaño de los sensores y actuadores, lo que permite a los diseñadores intentar nuevas formas de utilizar la tecnología mecatrónica para promover el bienestar de las personas con discapacidad.

El control de interacción ha sido ampliamente utilizado en diversas tareas que involucran el contacto entre un manipulador y su entorno. Específicamente, el control de impedancia representa una estrategia muy relevante en tareas de interacción humano-robot, obteniéndose excelentes resultados en tareas de fisioterapia asistida por robots. Por otra parte, el control de sistemas robóticos en forma remota o teleoperación, se ha convertido en un tema de gran interés para la comunidad científica, debido a la posibilidad de extender el impacto de los avances logrados en control a una gran cantidad de sectores de la sociedad. Recientemente, la teleoperación ha sido utilizada durante las misiones de exploración en Marte, cirugías asistidas por robots, en zonas de guerra y además se pretende extender su uso a terapias robóticas de rehabilitación neurológica.

Un sistema de teleoperación o teleoperador consta de un par de robots manipuladores conectados en tal forma que permite a un operador manejar un manipulador (el maestro) para operar en un entorno remoto (vía el esclavo). Cuando la información, sobre todo posiciones y velocidades, fluye únicamente desde el maestro hacia el esclavo, se dice que la configuración del teleoperador es unilateral. Para mejorar el desempeño de una tarea de teleoperación, la fuerza de contacto entre el manipulador esclavo y el entorno puede ser reflejada hacia el manipulador maestro. Agregar retroalimentación de fuerza al sistema provee una mejora considerable en el desempeño de tareas complejas y, en este caso, suele denominarse sistema de teleoperación bilateral. La meta deseada para el manipulador esclavo es seguir el comportamiento del maestro con respecto a la fuerza, posición y velocidad.

Tradicionalmente, los esquemas de teleoperación bilateral incluyen controladores de velocidad como lo son el PD o PI. De acuerdo a lo presentado en el presente capítulo, se sabe que estos controladores clásicos funcionan adecuadamente cuando un manipulador trabaja en espacio li-

bre, sin embargo presentan muchas limitaciones al ser utilizados en tareas de interacción debido a que las fuerzas de contacto no son reguladas correctamente. Con la finalidad de mejorar el desempeño de un teleoperador en tareas de interacción, se hace uso del control de impedancia dentro del esquema de teleoperación.

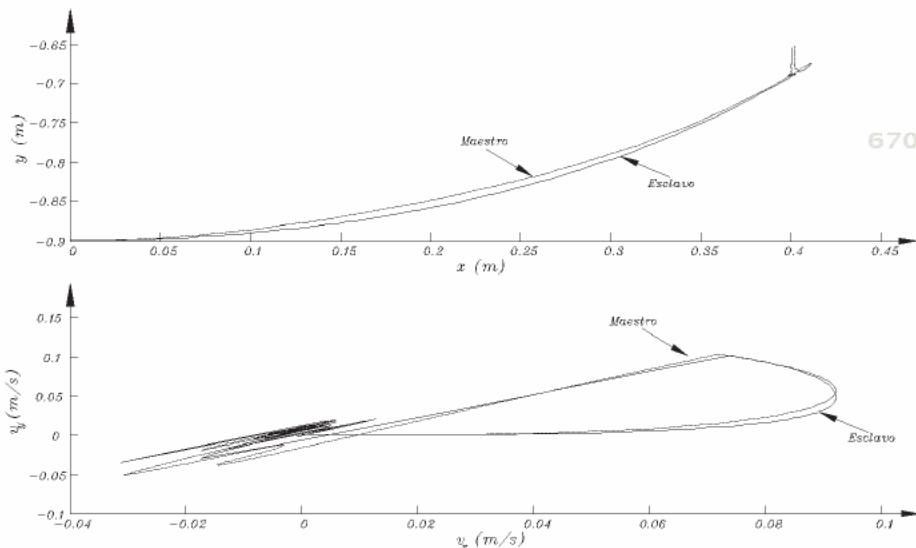


Figura 8.15 Trayectorias y velocidades de una tarea de interacción teleoperada, empleando control PD.

ebrary Los resultados de simulación de una tarea de interacción teleoperada se presentan en las figuras 8.15-8.16. En ellas se muestra el movimiento de los manipuladores maestro y esclavo en términos de las trayectorias y velocidades del efecto final. Cuando se utiliza un control PD, como se aprecia en la figura 8.15, se obtiene un pobre seguimiento tanto de posición como de velocidad, en comparación con los resultados presentados en la figura 8.16, donde la trayectoria del maestro es seguida adecuadamente por el efecto final del esclavo hasta que éste encuentra la pared y le impone una trayectoria vertical en $x = 0,4$ m con un adecuado seguimiento de velocidad. Durante la interacción con la pared, las fuerzas de contacto son reguladas por la sintonía de los parámetros de impedancia. Mientras que, cuando se utiliza el controlador clásico, el sobretiro generado por la inter-

acción produce un comportamiento oscilatorio, por lo tanto el movimiento del efecto final en contacto con la superficie no es adecuado. Además, el avance del efecto final sobre la superficie se vuelve lento debido a que permanece oscilando, como se observa en las gráficas de la figura 8.15. La importancia del control de interacción en tareas de teleoperación se verifica en los resultados presentados, quedando de manifiesto que técnicas como el control de impedancia permiten dotar al sistema de una herramienta muy valiosa para un mejor desempeño de tareas complejas que involucran interacción entre el manipulador esclavo y su entorno.

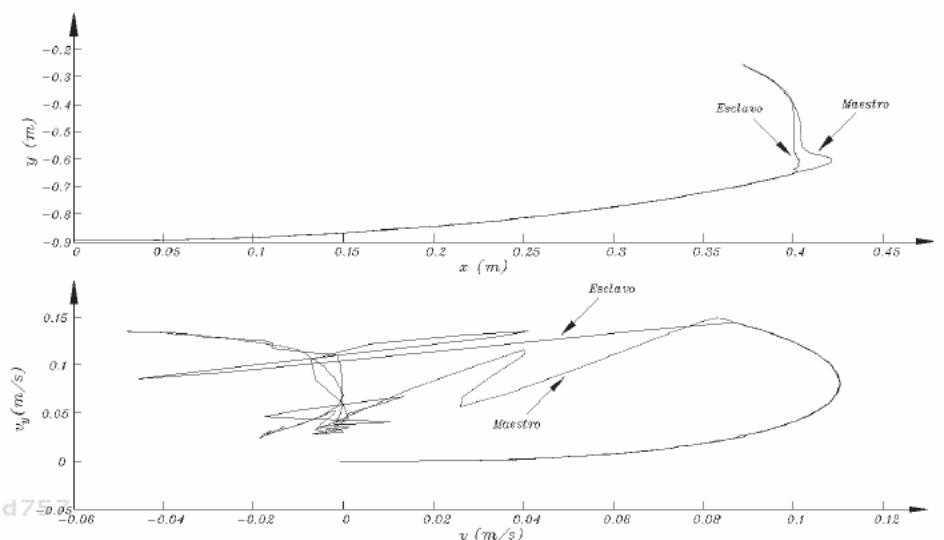


Figura 8.16 Trayectorias y velocidades de una tarea de interacción teleoperada, empleando control de impedancia.

La medicina representa una área de gran aplicación de sistemas de control debido a la interacción, que en la actualidad ocurre, entre sistemas robóticos y el ser humano. Como todos los sistemas robóticos, los robots médicos asocian fundamentalmente información con la acción física que permite el mejoramiento significativo de la habilidad humana para desempeñar tareas importantes, como en el caso de intervenciones quirúrgicas, rehabilitación o simplemente ayudar a gente discapacitada en las tareas de la vida diaria. Al igual que los robots para manufactura, los robots



Rehabilitación neurológica

Es un programa supervisado por un médico y diseñado para las personas con enfermedades, traumatismos o trastornos del sistema nervioso. La rehabilitación neurológica a menudo puede mejorar la funcionalidad, aliviar los síntomas y aumentar el bienestar del paciente. Un programa de rehabilitación neurológica se diseña para atender las necesidades de cada paciente en particular, dependiendo de su problema o enfermedad específicos. La participación activa del paciente y su familia son fundamentales para el éxito del programa.

La neuro-rehabilitación suele suministrarse por terapeutas profesionales e incluyen terapia física, ocupacional y terapia del habla. Estudios realizados presentan evidencia científica de que la neuro-rehabilitación es un objetivo lógico para la automatización, principalmente debido a la naturaleza repetitiva de las tareas.

Una terapia asistida por robots consiste en mover el efecto final del robot de acuerdo con una serie de metas definidas en una interfaz gráfica de usuario (por lo general a través de video juegos). Si durante el desarrollo de la terapia el paciente hemiplégico no pudiera desempeñar la tarea en respuesta a los estímulos visuales, el robot es capaz de asistir y guiar al paciente para completar el ejercicio requerido por la terapia.

De igual modo, los sistemas robóticos para rehabilitación o para asistencia en la vida diaria deben ofrecer ventajas para que puedan ser adoptados. Esto se logra principalmente explotando las capacidades complementarias de los seres humanos (con la discapacidad) y de los robots para cumplir tareas que de otra manera no podría ser viables. Algunos beneficios pueden incluir desempeño más eficiente o consistente de ejercicios después de una lesión o cirugía, restauración parcial de funciones a través de prótesis “inteligentes” y ayuda cooperativa para la población de edad avanzada. La interacción inherente a este tipo de aplicaciones médicas hace necesario el uso de esquemas de control de fuerza o impedancia que permiten garantizar un comportamiento dinámico adecuado del sistema, así como la estabilidad necesaria para realizar procedimientos con alto grado de seguridad, sobre todo para el ser humano.

La rehabilitación física de los pacientes con parálisis de un lado del cuerpo (hemiparesia espástica) es un desafío muy complejo. La parálisis puede estar provocada por varias causas, entre ellas la hemorragia cerebral o infarto (apoplejía), traumas, tumores, esclerosis múltiple y defectos congénitos. Con el fin de sobreponerse a la incapacidad causada por los citados ataques, la terapia física tradicional puede ayudar a los pacientes a disminuir el daño. La terapia generalmente involucra la interacción personal con el terapeuta que asiste y motiva a los pacientes a través de un cierto número de ejercicios repetitivos. Esta naturaleza repetitiva de la terapia la hace especialmente adecuada para ser administrada por robots

diseñados para este propósito. Los robots industriales pueden realizar muchos movimientos tridimensionales. Son precisos, potentes, obedientes y pueden ejecutar muchas de las tareas repetitivas que hasta ahora han tenido que hacer los fisioterapeutas. La idea de utilizar robots para ayudar a los fisioterapeutas en el tratamiento de miembros lesionados es atractiva.

En 1991, un robot llamado MIT-MANUS (llamado así por el enfoque terapéutico y el lema del MIT “mens et manus”, es decir, mente y mano) fue introducido como una base de prueba para el estudio del potencial de usar robots para ayudar y medir la rehabilitación neurológica de las funciones motoras. Este prototipo es un dispositivo planar con dos grados de libertad, que permite los movimientos pasivos y activos asistidos de las articulaciones del hombro y del codo, mientras que el paciente sigue en una pantalla las trayectorias que debe cumplir. En particular, se presentan evidencias de que: 1) la terapia asistida por robots no tiene efectos adversos; 2) los pacientes toleran el procedimiento; 3) la manipulación de las extremidades afectadas influyen en la recuperación a nivel cerebral. Al



Figura 8.17 Robot MIT-MANUS para rehabilitación neurológica.

comparar los resultados experimentales obtenidos mediante roboterapia con el tratamiento fisioterapéutico tradicional se observa, en general, un aumento de la fuerza muscular de las extremidades superiores con paresia, una reducción del déficit motor y una mejora de la funcionalidad de las extremidades superiores tratadas. Se han demostrado mejores resultados motores y funcionales, tanto a corto como a largo plazo. Es un hecho que la manipulación manual de una extremidad incapacitada de una víctima

de apoplejía ayuda en la recuperación del uso de esa extremidad. Existen diversos trabajos de investigación que han permitido corroborar y mejorar los excelentes resultados que ha generado el uso de robots en rehabilitación neurológica, aún en el caso de pacientes crónicos.

Considerando el potencial que brinda el control de impedancia en tareas de manipulación que involucran la interacción del robot con su entorno, la rehabilitación neurológica surge como una de sus principales áreas de aplicación. El control de la relación entre fuerza y posición en ortesis robóticas ha mostrado la eficiencia del control de impedancia. Para garantizar el adecuado funcionamiento del sistema de control, se han realizado análisis de estabilidad y desempeño tanto de los algoritmos de control como de los sistemas robóticos. En robots para rehabilitación, la interacción con el entorno altera sustancialmente la dinámica del sistema y esto debe ser considerado en el análisis de estabilidad. Por otra parte, el desempeño de un robot de rehabilitación no es definido sólo en su capacidad de seguir una trayectoria, sino también en su capacidad de proveer una sensación deseada en su efecto final. La estabilidad y el desempeño son tratados directamente con el uso de control de impedancia. El control de impedancia regula el comportamiento del robot en el punto de interacción con el entorno y la selección apropiada de la impedancia mecánica puede garantizar la estabilidad. El controlador modula la forma en que el robot reacciona ante una perturbación mecánica de un paciente y asegura un comportamiento dócil.

8.9 Resumen

Control de fuerza/impedancia. Actualmente los robots manipuladores tienen mayor demanda en aplicaciones donde el robot interacciona con su medio ambiente, por ejemplo, en pulido y esmerilado de materiales, corte de metal, ensamble de piezas automotrices, etc. Las estrategias de control de posición o movimiento son inadecuadas ya que no consideran la dinámica de interacción entre el robot y su entorno. Para abordar el

problema de interacción se requiere de algoritmos de control con una estructura adecuada que combine control de movimiento y control de fuerza. Al problema de interacción mecánica se le denomina con diferentes nombres: **constrained motion control**, **compliance** o **force control**, en este contexto se han sugerido varios enfoques: **control de impedancia**, **control de fuerza**, **control híbrido de fuerza/posición**, etc.



8.10 Referencias selectas

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
Se presenta un conjunto de referencias selectas con la finalidad de que el lector encuentre información de respaldo a las secciones presentadas.



8.2 Sensores de fuerza/par



ATI Industrial Automation. “*Multi-axis force/torque sensor*”.
<http://www.ati-ia.com>



M.H. Lee & H.R. Nicholls. “*Tactile sensing for mechatronics - A State of the art survey*”. Mechatronics. 9(1), pp. 1-31, 1999.



8.3 Sistemas hápticos



V. Hayward, O.R. Astley, M. Cruz-Hernandez, D. Grant & G. Robles-De-La-Torre. “*Haptic interfaces and devices*”. Sensor Rev. 24(1), pp. 16-29, 2004.



SensAble technologies: www.sensable.com (Woburn 2007).



Immersion corporation: www.immersion.com (San Jose 2007).
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

-  Novint technologies: www.novint.com (Albuquerque 2007).



8.4 Modelado del entorno

-  Y.F. Zheng & H. Hemami. “*Mathematical modeling of a robot collision with its environment*”. J. Robot. Syst. 2(3), pp. 289-307, 1985.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

-  B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani & G. Oriolo. “*Robotics: modelling, planning and control*”. Springer, London. 2009.



8.5 Control de fuerza

-  D.E. Whitney. “*Force feedback control of manipulator fine motions*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 99, pp. 91-97, 1977.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

-  B. Siciliano & L. Villani. “*Robot force control*”. Kluwer Academic Publishers. Boston, MA. 1999.



8.6 Control híbrido de fuerza/posición

-  M. Raibert & J. Craig. “*Hybrid position/force control of manipulators*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 102, pp. 126-133, 1981.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA

O. Khatib. “*A Unified approach to motion and force control of cobot manipulators: the operational space formulation*”. IEEE J. of Robot. Autom. 3(1), pp. 43-53, 1987.

J.K. Mills & A.A. Goldenberg. “*Force and position control of manipulators during constrained motion tasks*”. IEEE Trans. Robot. Autom. 5, pp. 30-46, 1989.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



8.7 Control de impedancia

N. Hogan. “*Impedance Control: An approach to manipulation: part I-theory, part II-implementation and part III-applications*”. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr. 107, pp. 1-24, 1985.

D. Lawrence. “*Impedance control stability in common implementations*”. In Proc. of IEEE Intl. Conf. on Robot. Autom. pp. 1185-1190, 1989.

C. Canudas, B. Siciliano & G. Bastin. “*Theory of robot control*”. Springer-Verlag. 1996.



8.8 Aplicaciones

K. Schilling, H. Roth & R. Lieb. “*Remote control of a ‘mars rover’via internet to support education in control and teleoperations*”. Acta Astronautica. 50(3), pp. 173-178, 2002.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



G. Niemeyer & J. Slotine. “*Telemanipulation with time delays*”. Int. J. Robot. Res. 23(9), pp. 873-890, 2004.



C.R. Carignan & H.I. Krebs. “*Telerehabilitation robotics: bright lights, big future?*” J. Rehab. Res. Develop. 43(5), pp. 695-710, 2006.

8.11 Problemas propuestos



6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

A continuación se enlista un conjunto de problemas para mejorar las habilidades y conocimientos del lector sobre el tema de control de fuerza/impedancia de robots manipuladores.



8.2 Sensores de fuerza/par

8.2.1 ¿Qué es un sensor de fuerza/par?

8.2.2 ¿Cuántas clases de sensores de fuerza conoce?



8.3 Sistemas hápticos

8.3.1 ¿Cuál es la finalidad de un dispositivo háptico?

8.3.2 Realice un diagrama a bloques que describa el ciclo del flujo de información en un sistema háptico.



8.4 Modelado del entorno

8.4.1 ¿Qué tipo de fenómenos se consideran para el modelado del entorno?

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

ALFAOMEGA

8.4.2 ¿Qué significa movimiento restringido?



8.5 Control de fuerza

8.5.1 Realizar la tarea de interacción del ejemplo 9.1 utilizando un controlador de fuerza con lazo interno de posición.

8.5.2 Para el manipulador del ejemplo 9.4, simular su comportamiento utilizando el controlador de fuerza con lazo interno de posición (8.6) 6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary para generar una fuerza constante de 100 N sobre una pared que ejerce una fuerza elástica de oposición a lo largo del eje x .



8.6 Control híbrido de fuerza/posición

8.6.1 Para el manipulador y el entorno del ejemplo 9.4 diseñe un controlador híbrido que opere como control de posición a lo largo del eje y y como control de fuerza a lo largo del eje x , mientras aplica una fuerza de contacto deseada de 30 N. Implemente esta ley de control en simulación considerando una pared ubicada en $x_e = 0,8$ m del origen.



8.7 Control de impedancia

8.7.1 Implementar en simulación el control de impedancia del sistema robótico del ejemplo 9.3, utilizando el esquema de control de impedancia con base en posición.

8.7.2 Implementar la simulación presentada en el ejemplo 9.4, considerando $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}_d - s^2(K_d + B_d s + M_d s^2)^{-1} \mathbf{f}_e + M_d^{-1} [K_p \tilde{\boldsymbol{\xi}} + K_v \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}]$ y comparar los resultados obtenidos.

9

CAPÍTULO

Robótica móvil

Nuestra naturaleza está en movimiento. El reposo absoluto es la muerte.

Blaise Pascal

Isela Bonilla y Marco Mendoza



9.1 Introducción

9.2 Robots móviles

9.3 Configuración de robots móviles

9.4 Cinemática de robots móviles

9.5 Dinámica de robots móviles

9.6 Control de robots móviles

9.7 Resumen

9.8 Referencias selectas

9.9 Problemas propuestos

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Objetivos

El presente capítulo tiene la finalidad de presentar un panorama general de los conceptos más importantes relacionados al modelado de robots móviles con ruedas, así como sus principales problemáticas de control y algunas técnicas que han sido empleadas con la finalidad de resolverlas.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Competencias

Adquirir la habilidad en control de robots móviles y en el análisis cinemático y dinámico en el área de la robótica móvil, así como el control de las principales configuraciones de locomoción usadas para desarrollar robots móviles con ruedas.

9.1 Introducción

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, su importancia radica principalmente en que poseen un espacio de trabajo ilimitado, a diferencia de los robots manipuladores fijos los cuales están restringidos a cumplir tareas dentro de un espacio de trabajo determinado por sus dimensiones físicas. Por lo tanto, con la finalidad de aumentar la movilidad del robot y de esta manera su capacidad de trabajo, se hace uso de un sistema locomotor para que el robot pueda desplazarse libremente en su espacio de trabajo. Además, estos robots tienen la capacidad de adaptarse a una gran diversidad de terrenos y actuar en ambientes no estructurados.

El término autonomía hace referencia a la capacidad del robot para responder ante situaciones cambiantes, ambiguas o impredecibles sin necesidad de supervisión humana, sugiere el paso de robots costosos y poco flexibles a robots ligeros y con mayor capacidad de adaptación a diferentes tareas. Los robots móviles se caracterizan por su capacidad de desplazarse en forma autónoma en un entorno desconocido o conocido parcialmente. Sus aplicaciones cubren una gran variedad de campos, entre los cuales se incluyen trabajos subterráneos (minería, construcción de túneles, etc.), misiones espaciales y exploración planetaria (recolección de muestras, mantenimiento de estaciones orbitales, etc.), vigilancia e intervención de seguridad (desactivación de explosivos, operación en zonas radioactivas, etc.), aplicaciones militares, entre otras. En todas estas aplicaciones la justificación más importante para el uso de la robótica móvil es la dificultad o imposibilidad de intervención humana, ya sea de manera directa o teleoperada.

Los robots móviles se pueden clasificar de acuerdo con el tipo de locomoción utilizado. En general, los tres sistemas de locomoción más conocidos son: ruedas, patas y orugas. Es importante señalar que aunque la locomoción por patas y orugas han sido ampliamente estudiadas, el mayor



Robótica móvil

Los robots móviles han cobrado una importancia creciente desde los años ochentas y noventas. Un robot móvil requiere de mecanismos de locomoción que le permitan moverse ilimitadamente dentro de su entorno. En contraste, los robots manipuladores generalmente se encuentran anclados a una superficie de trabajo fija y limitada físicamente. Hay varias formas para lograr el desplazamiento de un robot, la selección del mecanismo de locomoción es un aspecto importante para el diseño de este tipo de robots. Los robots móviles se clasifican en:

- **Robots terrestres:** son actuados mediante ruedas. Sin embargo, algunos poseen piernas que imitan la forma del caminar de los seres humanos o de animales.
- **Robots aéreos:** suelen ser vehículos aéreos no tripulados (UAV's).
- **Robots subacuáticos:** también conocidos como vehículos subacuáticos autónomos (AUV's), adecuados para entornos marinos.

La rueda ha sido el mecanismo de locomoción más utilizado en la robótica móvil. Este tipo de locomoción presenta una eficiencia aceptable y se logra mediante diseños mecánicos relativamente simples. El balance del robot móvil se obtiene mediante una estructura que permita que todas las ruedas se encuentren en contacto con el suelo en todo momento.



Vehículos autónomos

El término *autonomía* (del griego *auto*, “uno mismo”, y *nomos*, “norma”) es, en términos generales, la capacidad de tomar decisiones sin ayuda de otro. Por lo tanto, un *vehículo autónomo* es cualquier vehículo no tripulado con cierto nivel de autonomía integrada, los cuales pueden ser marinos, aéreos o terrestres.

Las características principales de los robots autónomos son las siguientes:

- Un robot autónomo puede percibir un entorno y actuar sobre él, es decir, el robot no actúa sobre modelos, sino directamente en el mundo real.
- Los robots autónomos interactúan con su entorno; sus experiencias y sus acciones sobre él se producen en forma directa haciendo uso de sus propias capacidades físicas.
- Por sus características, este tipo de robots se emplean para realizar diversas tareas como son: detección y neutralización de minas, identificación o recuperación de objetos submarinos, inspección y mantenimiento preventivo de instalaciones submarinas, rescate, control de fronteras, inspección de tuberías de diferentes diámetros, exploración en el espacio, etcétera.

desarrollo se presenta en los robots móviles con ruedas, por ello el presente capítulo se dedica al estudio de este tipo de robots móviles.

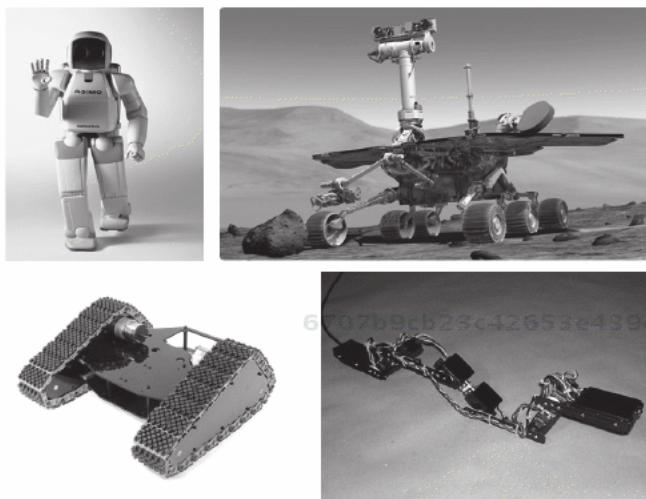


Figura 9.1 Principales sistemas de locomoción para robots móviles.

Un robot móvil con ruedas (RMR) es un vehículo capaz de moverse de manera autónoma sobre una superficie, mediante la acción de las ruedas montadas en el robot. Es importante señalar que se considera que el contacto entre cada rueda y la superficie es solamente un punto de contacto de rodado. Una diferencia esencial entre los RMR's y otros sistemas robóticos son las restricciones cinemáticas entre las ruedas y la superficie sobre la cual se desplazan. Los RMR's constituyen una clase de sistemas mecánicos caracterizados por restricciones cinemáticas no-holonómicas, entre las velocidades en el punto de contacto y las velocidades angulares, las cuales no son integrables en forma de relaciones algebraicas entre las variables de desplazamiento translacional y rotacional, por lo tanto no pueden ser eliminadas de las ecuaciones del modelo. El resultado de este problema de integrabilidad de las restricciones es la falta de una relación uno-a-uno entre las variables cartesianas y las variables articulares. Esto significa que mientras que los desplazamientos angulares en manipuladores seriales determinan la posición y orientación de su efecto final, el desplazamiento angular de las ruedas de un RMR no determina la posición y orientación del cuerpo del vehículo.

9.2 Robots móviles



Los robots móviles emplean diferentes tipos de locomoción mediante ruedas, las cuales les confieren características y propiedades diferentes respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad.



9.2.1 Descripción de un robot móvil con ruedas

Considerando que un RMR es un robot capaz de moverse sobre una superficie mediante la acción de ruedas montadas en él, se asumen las siguientes hipótesis:

- El robot móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal, es decir, la energía potencial es constante.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- No existen elementos flexibles en la estructura del robot, incluyendo las ruedas.
- El contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, en este libro se aborda el caso bidimensional debido a que el robot se mueve en un plano, así el problema se reduce a encontrar la terna (x, y, θ) asociada al sistema de referencia móvil del vehículo, donde las dos primeras componentes corresponden a la traslación y la tercera a la orientación del RMR (figura 9.2).

La localización del robot en el plano puede ser descrita de la siguiente forma: se establece un sistema inercial arbitrario (I_1, I_2) fijo al plano del movimiento, mientras que un punto de referencia P en el robot representa



Postura del robot móvil

Con el fin de determinar la ubicación de un robot móvil en un plano, se establece una relación entre el marco de referencia global (inercial) del plano y el marco de referencia local (no inercial) unido al robot.

Considerando un movimiento horizontal, la posición del robot móvil queda completamente definida con tres variables escalares, dos lineales y una angular (x, y, θ), donde x y y son las coordenadas de un punto de referencia (P) ubicado sobre el robot y θ describe la orientación del marco de referencia del robot (no inercial) con respecto al marco de referencia global (inercial). A la representación de forma vectorial se le denomina *postura* del robot móvil.

El primer paso para obtener los modelos cinemáticos de los diferentes tipos de locomoción de robots móviles, ya sea considerando o no la existencia de deslizamiento, consiste en encontrar las relaciones cinemáticas entre los distintos tipos de variables que intervienen en el robot; una de estas variables es la postura. La importancia de obtener un modelo cinemático radica en la utilización de éste en etapas posteriores como son la planificación y el control.

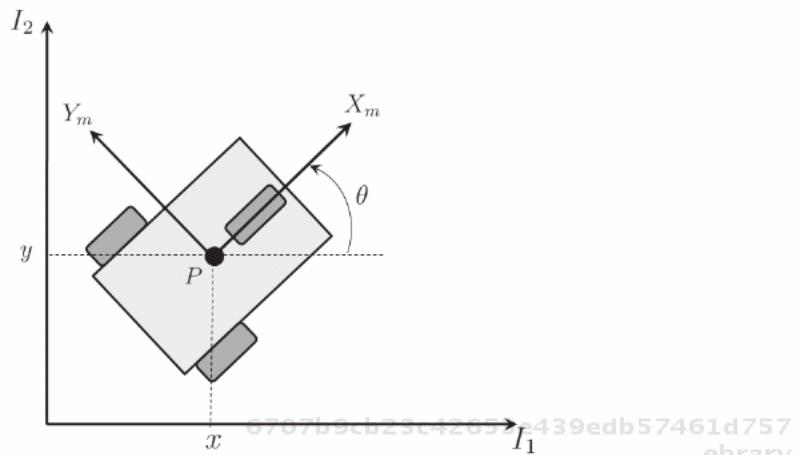


Figura 9.2 Coordenadas de la postura de un robot móvil.

el origen del sistema arbitrario (X_m, Y_m), de tal manera que la postura del robot queda completamente especificada por (x, y, θ) .

El par (x, y) representa las coordenadas generalizadas del punto de referencia P respecto al sistema inercial, es decir,

$$\vec{OP} = x \vec{I}_1 + y \vec{I}_2, \quad (9.1)$$

mientras que θ describe la orientación del sistema (X_m, Y_m) con respecto al sistema inercial (I_1, I_2).

Por lo tanto la postura del robot puede ser determinada por el vector

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

mientras que la matriz de rotación que define la orientación del sistema (X_m, Y_m) con respecto al sistema (I_1, I_2), tomando en cuenta que los ejes Z de ambos sistemas son paralelos, está dada por:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$



9.2.2 Tipos de ruedas



Existen dos tipos básicos de ruedas, las ruedas convencionales y las ruedas suecas. Con base en la clasificación presentada por Campion *et al.*, las ecuaciones de restricción para cada uno de los tipos de ruedas están dadas por las siguientes relaciones cinemáticas.

Rueda fija

El centro de la rueda es el punto fijo A , cuya posición respecto al marco de referencia móvil puede ser obtenida en coordenadas polares, es decir, la distancia l de A a P y el ángulo α . La orientación del plano de la rueda con respecto a l está representada por el ángulo constante β (figura 9.3). Las ecuaciones de restricción para este tipo de rueda están dadas por:

*A lo largo del plano de la rueda

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\phi} = 0. \quad (9.4)$$

*Ortogonal al plano de la rueda

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (9.5)$$

Rueda de centro orientable

Una rueda con centro orientable es aquella en la que el movimiento del plano de la rueda, con respecto a su marco de referencia, es una rotación $\beta(t)$ alrededor del eje vertical (figura 9.4), pasando a través del centro de la rueda. Sus ecuaciones de restricción son:

*A lo largo del plano de la rueda

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\phi} = 0. \quad (9.6)$$

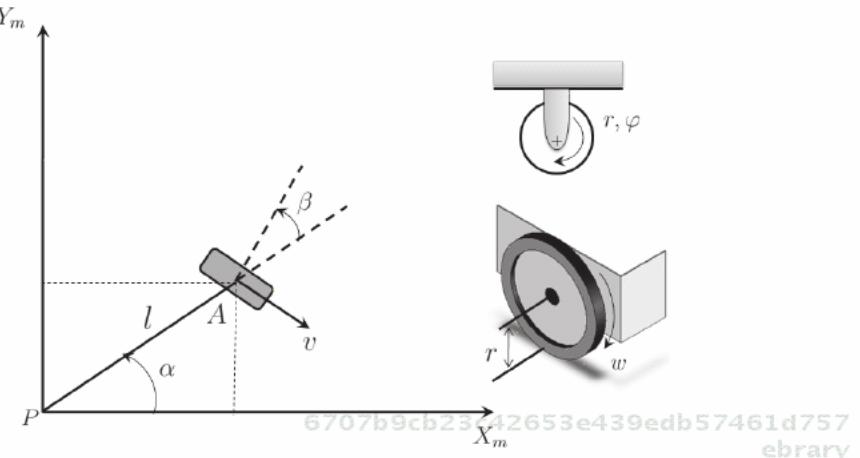


Figura 9.3 Rueda convencional fija.

*Ortogonal al plano de la rueda

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (9.7)$$

Es importante hacer notar que la descripción es la misma que para una rueda fija, excepto porque ahora el ángulo de orientación β no es constante.

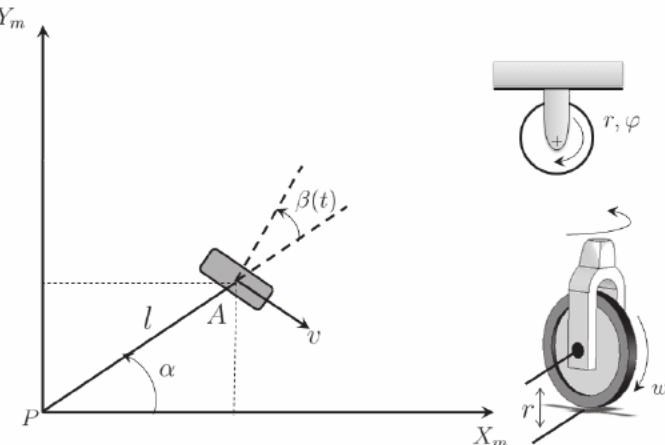


Figura 9.4 Rueda convencional de centro orientable.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Rueda de centro orientable desplazado (giratoria)

Una rueda de centro orientable desplazado es también una rueda orientable con respecto al marco de referencia, sin embargo la rotación del plano de la rueda es alrededor de un eje vertical que no pasa a través del centro de la rueda. El centro de la rueda es el punto B y está conectada al punto A mediante de una varilla rígida, de longitud constante d , la cual puede rotar alrededor del eje vertical que pasa por el punto A (figura 9.5). Sus ecuaciones de restricción son:

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

*A lo largo del plano de la rueda

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0. \quad (9.8)$$

*Ortogonal al plano de la rueda

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0. \quad (9.9)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

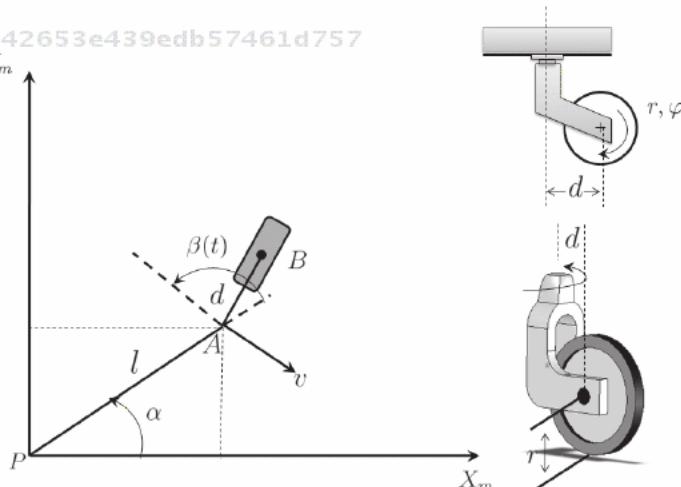


Figura 9.5 Rueda convencional de centro orientable desplazado.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Rueda omnidireccional o sueca

La rueda omnidireccional es similar a una rueda convencional, pero posee muchas ruedas direccionales pequeñas que se mueven en un ángulo de 90 grados por su superficie de rodado. Mientras la rueda completa se mueve hacia adelante y hacia atrás, las ruedas pequeñas que cruzan su superficie se mueven indirectamente, por lo tanto, la rueda puede desplazarse en cuatro direcciones (figura 9.6).

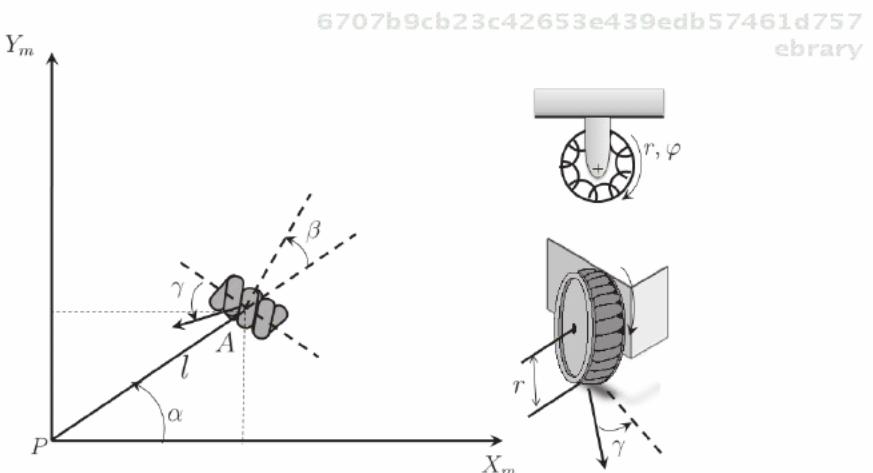


Figura 9.6 Rueda omnidireccional o sueca.

La posición de la rueda con respecto al marco de referencia es descrita como en el caso de la rueda convencional fija. Sin embargo, se requiere un parámetro adicional γ para caracterizar la dirección con respecto al plano de la rueda. Esta configuración sólo tiene una restricción:

*A lo largo del plano de la rueda

$$\begin{aligned} & [-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] R(\theta) \dot{\xi} \\ & + r \cos(\gamma) \dot{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Restricciones en la movilidad de un robot

Considérese un robot móvil equipado con N ruedas de los cuatro tipos descritos con anterioridad, donde la siguiente relación representa el total de ruedas de cada clase

$$N_f + N_{co} + N_{cd} + N_o = N, \quad (9.11)$$

el subíndice f representa las ruedas fijas, co las ruedas de centro orientable, cd las ruedas de centro orientable desplazado y o las ruedas omnidireccionales.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

De acuerdo con la representación anterior, las restricciones de movilidad pueden representarse mediante la siguiente forma general:

$$J_1(\beta_{co}, \beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0 \quad (9.12)$$

$$C_1(\beta_{co}, \beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_{cd} = 0. \quad (9.13)$$

De la ecuación (9.12) se tiene que

$$J_1(\beta_{co}, \beta_{cd}) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1co}(\beta_{co}) \\ J_{1cd}(\beta_{cd}) \\ J_{1o} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

donde J_{1f} , J_{1co} , J_{1cd} y J_{1o} son matrices de dimensiones $(N_f \times 3)$, $(N_{co} \times 3)$, $(N_{cd} \times 3)$ y $(N_o \times 3)$, cuya estructura se deriva directamente de las ecuaciones de restricción (9.4), (9.6), (9.8) y (9.10), respectivamente. Además, J_2 es una matriz diagonal de dimensión $(N \times N)$ compuesta por los radios de las ruedas, excepto para las ruedas omnidireccionales donde el radio está multiplicado por $\cos(\gamma)$.

Por otra parte, de la ecuación (9.13) se tiene que

$$C_1(\beta_{co}, \beta_{cd}) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1co}(\beta_{co}) \\ C_{1cd}(\beta_{cd}) \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2cd} \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

donde C_{1f} , C_{1co} y C_{1cd} son matrices de dimensiones $(N_f \times 3)$, $(N_{co} \times 3)$ y $(N_{cd} \times 3)$ formadas a partir de las ecuaciones (9.5), (9.7) y (9.9), respectivamente. Mientras que C_{2cd} es una matriz diagonal de $(N_{cd} \times N_{cd})$, cuyos elementos son igual d .

9.3 Configuración de robots móviles

A continuación se presentan las características más significativas de los sistemas de locomoción con ruedas más comunes en robótica móvil.



9.3.1 Configuración Ackerman

Este diseño está compuesto de cuatro ruedas y proporciona una adecuada estabilidad, las ruedas direccionables no son motrices.

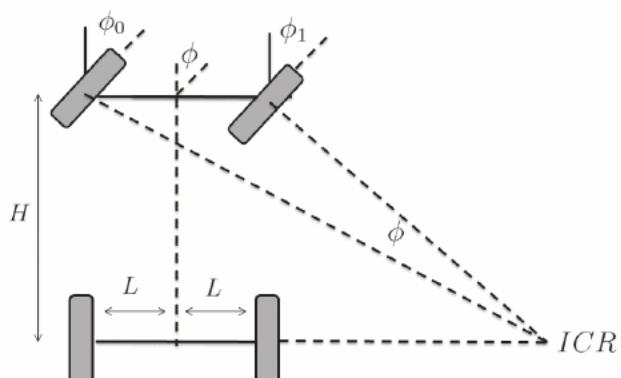


Figura 9.7 Robot móvil en configuración Ackerman.

Ackerman es el término para describir la geometría de conducción que ocasiona que la rueda delantera interior sea más firme que la rueda delantera exterior. La rueda delantera interior gira un ángulo ligeramente superior al exterior $\phi_1 > \phi_0$ para eliminar el deslizamiento (figura 9.7).

Al prolongar los ejes de las dos ruedas delanteras, éstos intersectan en un punto sobre el eje de las ruedas traseras, y este punto se conoce como Centro Instantáneo de Rotación (ICR, por sus siglas en inglés).



9.3.2 Configuración triciclo clásico

La configuración de triciclo más común tiene una rueda delantera y dos ruedas traseras, como puede observarse en la figura 9.8; esta configuración se conoce como *delta*. La premisa principal de un triciclo es proporcionar una plataforma estable. El efecto de la base en un triciclo influye en la

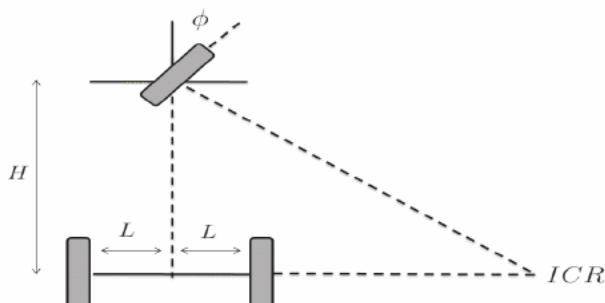


Figura 9.8 Robot móvil en configuración triciclo clásico.

maniobrabilidad y la distribución de peso. La base de un triciclo es la longitud entre el eje de las ruedas traseras y la rueda delantera. Una base

corta genera un radio de giro del triciclo muy pequeño, mientras que una base larga hace al radio de giro más grande (ICR). Adicionalmente, un triciclo con una base corta exhibe mayor maniobrabilidad que un triciclo con una base larga.



9.3.3 Direccionamiento diferencial

En esta configuración, el punto (ICR) sobre el cual el robot móvil pivotea está sobre una línea perpendicular que atraviesa el centro de las ruedas (figura 9.9). El radio llega a ser mínimo cuando el punto del pivote se localiza en el punto medio entre las dos ruedas. El espacio mínimo para



Direccionamiento diferencial

El sistema de locomoción en configuración diferencial se considera como el más sencillo de todos. Mediante esta configuración el robot puede realizar movimientos rectos, girar sobre sí mismo y trazar curvas. Consta de dos ruedas situadas en un eje perpendicular a la dirección del robot. Cada una de ellas es actuada mediante un motor, de tal forma que los giros se realizan dándoles diferentes velocidades. Así, si se quiere girar a la derecha daremos mayor velocidad al motor izquierdo, o si se desea girar a la izquierda, será el motor derecho el que posea mayor velocidad. Por lo tanto, igualando las velocidades de ambos motores el robot se moverá en línea recta.

Para lograr el equilibrio del robot es necesario proporcionarle un apoyo adicional a las dos ruedas ya existentes. Dependiendo de la distribución de pesos en el robot se pueden colocar una o dos ruedas de apoyo añadidas al diseño del chasis. Si alguna de las ruedas se encuentra sobre una superficie que le represente mayor resistencia, las velocidades de los motores tenderán a variar y el robot realizará giros, incluso cuando se le haya ajustado para que su movimiento sea en línea recta. Una forma de evitar este comportamiento es controlando la velocidad dinámicamente, es decir, monitorear en forma continua la velocidad del motor y modificarla mientras el robot avanza.

que el robot gire es determinado por la distancia máxima de ese punto a cualquier otro punto en el robot móvil, normalmente la esquina delantera.

El robot puede moverse en línea recta, girar sobre sí mismo y trazar curvas. El equilibrio del robot se obtiene mediante una o dos ruedas adicionales de apoyo formando un diseño triangular o romboidal. El diseño triangular puede no ser suficiente dependiendo de la distribución de peso del robot, y el romboidal puede provocar poca adaptación al terreno si éste es irregular, lo que puede exigir alguna clase de suspensión.

La tracción se consigue mediante las ruedas laterales y la dirección por la diferencia de velocidades de las mismas (v_L y v_R).

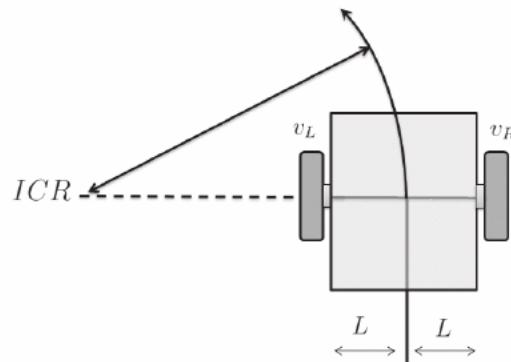


Figura 9.9 Robot móvil en configuración de direccionamiento diferencial.



9.3.4 Configuración síncrona

En este diseño todas las ruedas (generalmente tres) son tanto de dirección como de tracción; las ruedas se encuentran ubicadas de tal forma que siempre apuntan en la misma dirección. Para cambiar la dirección, el robot gira simultáneamente todas sus ruedas alrededor de un eje vertical, de modo que la dirección del robot cambia, pero su chasis sigue apuntando en la misma dirección que tenía antes del giro (figura 9.10).

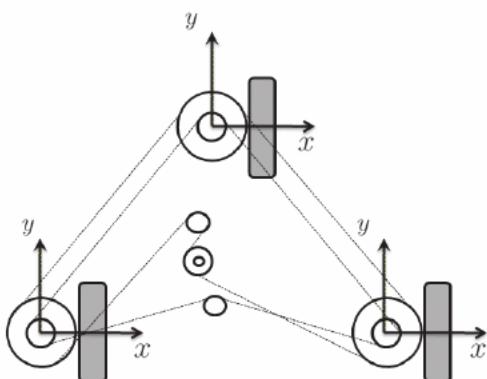


Figura 9.10 Robot móvil en configuración síncrona.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary



9.3.5 Movilidad y direccionabilidad

El término movilidad en robótica se refiere a la habilidad que tiene un robot móvil para desplazarse o moverse con libertad en su entorno. La restricción básica de movilidad es satisfacer la condición de no deslizamiento de las ruedas. Por otra parte, la direccionabilidad es intuitivamente la habilidad de un robot móvil para cambiar de direcciones durante su movimiento dentro de su entorno de trabajo. La capacidad de dirección está directamente relacionada con la cantidad de ruedas direccionables que posee un robot móvil.

Considérese un robot móvil con $N_f + N_{co}$ ruedas, para el cual las restricciones de no deslizamiento (9.13) pueden ser escritas como

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi} = 0 \quad (9.17)$$

$$C_{1co}(\beta_{co})R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (9.18)$$

Estas restricciones implican que el vector $R(\theta)\dot{\xi} \in \mathcal{N}(C_1^*(\beta_{co}))$ donde

$$C_1^*(\beta_{co}) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1co}(\beta_{co}) \end{bmatrix}, \quad (9.19)$$

6707b9cb23c42653e439edb57461d757

ebrary

y $\text{rank}(C_1^*(\beta_{co})) \leq 3$. Sin embargo, si $\text{rank}(C_1^*(\beta_{co})) = 3$ entonces $R(\theta)\dot{\xi} = 0$ y por lo tanto cualquier movimiento en el plano es imposible.

El rango de la matriz $C_1^*(\beta_{co})$ depende del diseño del robot móvil. El grado de movilidad δ_m de un robot móvil puede definirse como

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_{co}))) = 3 - \text{rank}(C_1^*(\beta_{co})). \quad (9.20)$$

Por otra parte, el grado de direcciónabilidad δ_d puede obtenerse a partir del rango de $C_{1co}(\beta_{co})$, es decir que

$$\delta_d = \text{rank}(C_{1co}(\beta_{co})). \quad (9.21)$$

Si un robot móvil es equipado con más de δ_d ruedas direccionables ($N_{co} > \delta_d$), el movimiento de las ruedas extra debe ser coordinado para garantizar la existencia del ICR en cada instante.

Tabla 9.1 Tipos (δ_m, δ_d) de RMR's.

δ_m	3	2	2	1	1
δ_d	0	0	1	1	2

De acuerdo con la estructura de los robots móviles, los grados de movilidad y direcciónabilidad satisfacen las siguientes desigualdades

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (9.22)$$

$$0 \leq \delta_d \leq 2 \quad (9.23)$$

$$2 \leq \delta_m + \delta_d \leq 3. \quad (9.24)$$

Por lo tanto, existen solamente cinco tipos de RMR's de acuerdo con los cinco pares de valores de δ_m y δ_d que satisfacen las desigualdades (9.22)-(9.24) y se presentan en la tabla 9.1.

El grado de movilidad es el primer índice de maniobrabilidad, éste es igual al número de grados de libertad que pueden ser manipulados directamente desde las entradas η , sin la reorientación de las ruedas. Este número δ_m no es igual al número de grados de libertad del robot que pueden ser manipulados mediante η y ζ . De hecho este número es igual al grado de maniobrabilidad dado por

$$\delta_M = \delta_m + \delta_d. \quad (9.25)$$

♣ ♣ Ejemplo 9.1

Considérese un triciclo con dos ruedas fijas localizadas en el mismo eje y una rueda de centro orientable desplazado, como el que se muestra en la figura 9.11, al cual se le conoce como robot uniciclo (tipo(2,0)). Obtenga la representación de sus restricciones de movilidad.

Solución

Las constantes características de este triciclo están especificadas en la tabla 9.2.

Tabla 9.2 Constantes características del robot tipo(2,0).

Ruedas	α	β	l
1f	0	0	L
2f	π	0	L
3cd	$\frac{3}{2}\pi$	-	L

Las restricciones de movilidad dadas en (9.12) y (9.13) tienen la forma:

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1cd}(\beta_{cd3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos(\beta_{cd3}) & \sin(\beta_{cd3}) & L \cos(\beta_{cd3}) \end{bmatrix}$$

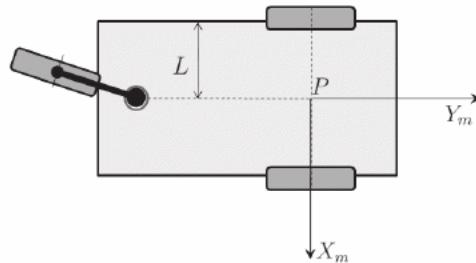


Figura 9.11 Robot móvil tipo(2,0) (uniciclo).

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1cd}(\beta_{cd3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{cd3}) & -\cos(\beta_{cd3}) & d + L \sin(\beta_{cd3}) \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2cd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Es importante notar que las restricciones de no deslizamiento de las 2 ruedas fijas son equivalentes; así, la matriz C_1^* es de rango igual a 1 como se esperaba.



9.4 Cinemática de robots móviles

El movimiento de un robot móvil puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_{co})\eta \quad (9.26)$$

$$\dot{\beta}_{co} = \zeta, \quad (9.27)$$

donde η y ζ representan velocidades y pueden ser interpretadas como entradas de control. Las ecuaciones (9.26)-(9.27) se conocen como *modelo cinemático de postura*.

Sin embargo, es importante reconocer el efecto de las restricciones de movilidad (9.12)-(9.13) a partir de las cuales es posible obtener la evolución de las velocidades de orientación y tracción dadas por

$$\dot{\beta}_{cd} = -C_{2cd}^{-1}C_{1cd}(\beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} \quad (9.28)$$

$$\dot{\varphi} = -J_2^{-1}J_1(\beta_{co}, \beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi}. \quad (9.29)$$

Combinando estas ecuaciones con el modelo cinemático de postura (9.26)-(9.27), las ecuaciones para $\dot{\beta}_{cd}$ y $\dot{\varphi}$ pueden ser reescritas como

$$\dot{\beta}_{cd} = D(\beta_{cd})\Sigma(\beta_{co})\eta \quad (9.30)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_{co}, \beta_{cd})\Sigma(\beta_{co})\eta \quad (9.31)$$

donde

$$D(\beta_{cd}) = -C_{2cd}^{-1}C_{1cd}(\beta_{cd}) \quad (9.32)$$

$$E(\beta_{co}, \beta_{cd}) = -J_2^{-1}J_1(\beta_{co}, \beta_{cd}). \quad (9.33)$$

Definiendo q como el vector de coordenadas de configuración dado por

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_{co} \\ \beta_{cd} \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (9.34)$$

entonces la evolución en el tiempo de este vector puede representarse en forma compacta como:

$$\dot{q} = S(q)u \quad (9.35)$$

donde

$$S(q) = \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_{co}) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{cd})\Sigma(\beta_{co}) & 0 \\ E(\beta_{co}, \beta_{cd})\Sigma(\beta_{co}) & 0 \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

$$u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (9.37)$$

La ecuación (9.35), conocida como *modelo cinemático de configuración*, tiene la forma estándar del modelo cinemático de un sistema sujeto a restricciones de velocidad independientes.

♣ ♣ Ejemplo 9.2

Considere el triciclo clásico (tipo(1,1))^{9.46 10.7 10.5 9.8 12.0 d757 ebrary} de la figura 9.8, que está conformado por dos ruedas fijas en el mismo eje, cuyo centro es el punto P , y una rueda de centro orientable al frente. Sus constantes características se presentan en la tabla 9.3. Obténgase el modelo cinemático de postura.

Solución

Tabla 9.3 Constantes características robot tipo(1,1).

Ruedas	α	β	l
1f	0	0	L
2f	π	0	L
3co	$\frac{3}{2}\pi$	-	L

El punto P debe ser localizado en el eje de las ruedas fijas, en la intersección con la normal que pasa por el centro de la rueda de centro orientable. Para representar la postura de este robot móvil, la matriz $\Sigma(\beta_{co})$ es seleccionada como

$$\Sigma(\beta_{co}) = \begin{bmatrix} 0 \\ L \sin(\beta_{co3}) \\ \cos(\beta_{co3}) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el modelo cinemático de postura del robot tipo(1,1) está dado

por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{co3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \sin(\theta) \sin(\beta_{co3}) \\ L \cos(\theta) \sin(\beta_{co3}) \\ \cos(\beta_{co3}) \\ \zeta_1 \end{bmatrix} \eta_1$$

9.5 Dinámica de robots móviles

En esta sección se presentan las ecuaciones de movimiento que representan un modelo dinámico general en espacio de estados y describen las relaciones entre las coordenadas de configuración y los pares de los actuadores de un robot móvil con ruedas.

De acuerdo con la formulación de Euler-Lagrange, la dinámica de RMR's puede ser descrita por las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\xi}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi} \right)^T = R^T(\theta) J_1^T(\beta_{co}, \beta_{cd}) \lambda + R^T(\theta) C_1^T(\beta_{co}, \beta_{cd}) \mu \quad (9.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{cd}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{cd}} \right)^T = C_2^T \mu + \tau_{cd} \quad (9.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varphi} \right)^T = J_2^T \lambda + \tau_{\varphi} \quad (9.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{co}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{co}} \right)^T = \tau_{co} \quad (9.41)$$

donde \mathcal{K} representa la energía cinética, λ y μ son multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (9.12) y (9.13), τ_{φ} representa los pares de las ruedas de tracción, τ_{cd} los pares de los actuadores de orientación de las ruedas de centro orientable desplazado, y finalmente τ_{co} los pares para la orientación de las ruedas de centro orientable.

Con la finalidad de eliminar los multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones de movimiento (9.38), (9.39) y (9.40), éstas deben premultiplicarse



Sistemas no-holónomos

Las restricciones holónomas se presentan cuando las coordenadas pueden escribirse en la forma $f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, t) = 0$. El número j condiciona al número de coordenadas que pueden existir, por lo que suele decirse que estas restricciones permiten eliminar grados de libertad de un sistema. Por otra parte, las restricciones no-holónomas se presentan cuando las coordenadas no pueden escribirse como restricciones holónomas, es decir, son aquellas en que las restricciones sólo pueden expresarse en términos de las velocidades, así las restricciones no-holónomas no permiten eliminar los grados de libertad de un sistema. Para trabajar con este tipo de restricciones se emplean los multiplicadores de Lagrange. Un error común al derivar las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico con limitaciones no-holónomas es sustituir las restricciones en el Lagrangiano y luego aplicar las ecuaciones de Lagrange con la finalidad de eliminar las variables dependientes y minimizar la complejidad en los cálculos. Sin embargo, este procedimiento arroja ecuaciones de movimiento erróneas para el sistema. Por lo tanto, para calcular en forma correcta las ecuaciones de movimiento, siempre se calcula el Lagrangiano sin restricciones, se sustituye en las ecuaciones de Euler-Lagrange y se vuelven a aplicar las restricciones para eliminar las variables dependientes.

por $\Sigma^T(\beta_{co})R(\theta)$, $\Sigma^T(\beta_{co})D(\beta_{cd})$, y $\Sigma^T(\beta_{co})E(\beta_{co}, \beta_{cd})$, respectivamente, y después sumándolas se obtiene que

$$\begin{aligned} & \Sigma^T(\beta_{co})R(\theta)[\mathcal{K}]_\xi + D(\beta_{cd})[\mathcal{K}]_{\beta_{cd}} + E(\beta_{co}, \beta_{cd})[\mathcal{K}]_\varphi \\ &= \Sigma^T(\beta_{co})[D^T(\beta_{cd})\tau_{cd} + E^T(\beta_{co}, \beta_{cd})\tau_\varphi] \end{aligned} \quad (9.42)$$

$$[\mathcal{K}]_{\beta_{co}} = \tau_{co} \quad (9.43)$$

donde

$$[\mathcal{K}]_\xi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\xi}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \xi} \right)^T \quad (9.44)$$

$$[\mathcal{K}]_{\beta_{cd}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{cd}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{cd}} \right)^T \quad (9.45)$$

$$[\mathcal{K}]_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\varphi}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varphi} \right)^T \quad (9.46)$$

$$[\mathcal{K}]_{\beta_{co}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\beta}_{co}} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \beta_{co}} \right)^T \quad (9.47)$$

La energía cinética de un RMR puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \dot{\xi}^T R^T(\theta) \left[M(\beta_{cd})R(\theta)\dot{\xi} + 2V(\beta_{cd})\dot{\beta}_{cd} + 2W\beta_{co} \right] \\ & + \dot{\beta}_{cd}^T I_{cd}\dot{\beta}_{cd} + \dot{\varphi}^T I_\varphi\dot{\varphi} + \dot{\beta}_{co}^T I_{co}\dot{\beta}_{co} \end{aligned} \quad (9.48)$$

con definiciones apropiadas de las matrices $M(\beta_{cd})$, $V(\beta_{cd})$, W , I_{cd} , I_φ e I_{co} de acuerdo con la distribución de masa del robot y los momentos de inercia de los componentes del mismo.

9.6 Control de robots móviles

El control de RMR's continúa generando muchos desafíos o retos de investigación y desarrollo. Algunos objetivos de control son: seguimiento de trayectorias, estacionamiento de vehículos, evasión de obstáculos y colisiones, cooperación con otros robots, así como el control de formación o escolta. El problema de control más desafiante en robótica móvil consiste en diseñar leyes de control por retroalimentación que puedan estabilizar

a un RMR alrededor de un punto de equilibrio. La problemática radica en que un robot no-holonómico no puede ser estabilizado por una retroalimentación de estados suave.

Esta sección se concentra en el control de seguimiento de RMR's, que resulta ser un problema de mayor importancia práctica que la regulación (estabilización alrededor de un punto de equilibrio). El control de seguimiento consiste en la estabilización alrededor de una trayectoria y se conoce como seguimiento estable de un movimiento de referencia. Es importante mencionar que el problema de seguimiento es más fácil de resolver que problema de regulación de RMR's. Existen diversos problemas de control que se relacionan con tareas de seguimiento para robots móviles; a continuación se describen algunos.

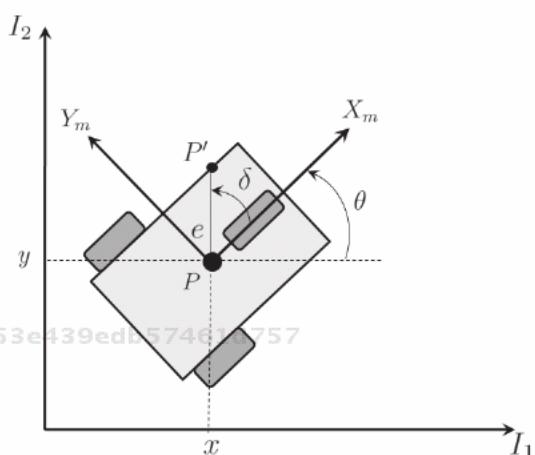


Figura 9.12 Coordenadas del punto P' en un robot móvil.

El problema de *seguimiento de postura* consiste en diseñar una ley de control por retroalimentación estable que permita el seguimiento de una postura de referencia $\xi_r(t)$ variante en el tiempo, la cual se asume que es diferenciable al menos dos veces. En términos más formales, consiste en encontrar una ley de control v acotada que logre que el error de seguimiento $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \xi_r(t)$ permanezca acotado y converja hacia cero en forma



Control de robots móviles

Los robots móviles utilizados en la automatización de procesos industriales u otros campos, se encuentran involucrados principalmente en el seguimiento de referencias, por lo tanto, resulta imprescindible tener un control adecuado del vehículo. El control de un robot móvil puede ser de tipo cinemático o dinámico. En el control cinemático se consideran dos lazos de control: el principal denominado cinemático y otro dinámico de bajo nivel para los actuadores en las ruedas; es decir, existe un desacoplamiento entre la parte cinemática y la parte dinámica.

En el control dinámico no existen los dos lazos, sino que la ley de control es única y considera todos los elementos del robot móvil: relaciones cinemáticas, actuadores, masas, momentos de inercia, etc. El control dinámico tiene el inconveniente de que el análisis presenta una mayor complejidad, es muy sensible a los errores en los parámetros del modelo y requiere de sensores iniciales, los cuales presentan poca robustez y baja precisión. Por otra parte, el control cinemático es más sencillo y tiene validez siempre y cuando el lazo de control dinámico sea más rápido que el lazo de control cinemático.

asintótica, es decir;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}(t) = 0. \quad (9.49)$$

Por lo tanto, si $\xi(0) = \xi_r(0)$ entonces $\xi(t) = \xi_r(t) \forall t$.

En algunas situaciones particulares no es necesario realizar el seguimiento de la postura completa del robot, por lo tanto resulta suficiente controlar solamente la posición de un punto fijo P' en la estructura del robot (figura 9.12). Las coordenadas del punto están dadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + e \cos(\theta + \delta) \\ y + e \sin(\theta + \delta) \end{bmatrix}. \quad (9.50)$$

El problema de *seguimiento de un punto* es encontrar un controlador estable por retroalimentación de estados que logre el seguimiento de una posición de referencia $x'_r(t), y'_r(t)$ móvil dada y la cual se asume doblemente diferenciable. En términos formales, diseñar una ley de control $v(t)$ acotada que permita que los errores de seguimiento $\tilde{x}'(t) = x'(t) - x'_r(t)$, $\tilde{y}'(t) = y'(t) - y'_r(t)$ tiendan asintóticamente hacia cero, es decir;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}'(t) = 0 \quad (9.51)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}'(t) = 0. \quad (9.52)$$

Por lo tanto, si $x'(0) = x'_r(0)$ y $y'(0) = y'_r(0)$ entonces $x'(t) = x'_r(t)$ y $y'(t) = y'_r(t) \forall t$.

Ejemplo 9.3

Considérese el robot móvil tipo(2,0) conocido como *uniciclo* y cuyo sistema de locomoción es de tipo diferencial. Realizar la simulación en MatLab del modelo cinemático de postura de dicho robot considerando tres casos:

- Caso 1: $\dot{\phi}_L \neq \dot{\phi}_R$.
- Caso 2: $\dot{\phi}_L = -\dot{\phi}_R$.
- Caso 3: $\dot{\phi}_L = \dot{\phi}_R$.

Donde $\dot{\phi}_R$ representa la velocidad angular de la rueda derecha y $\dot{\phi}_L$ representa la velocidad angular de la rueda izquierda.



Robot móvil tipo uniciclo

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica de la cinemática de un robot móvil tipo uniciclo. El programa de simulación está compuesto de dos scripts principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la cinemática del robot móvil. Adicionalmente se presentan una serie de animaciones que muestran las trayectorias generadas por el movimiento del robot móvil.

Solución

Para el robot tipo(2,0), el modelo cinemático de postura está dado por

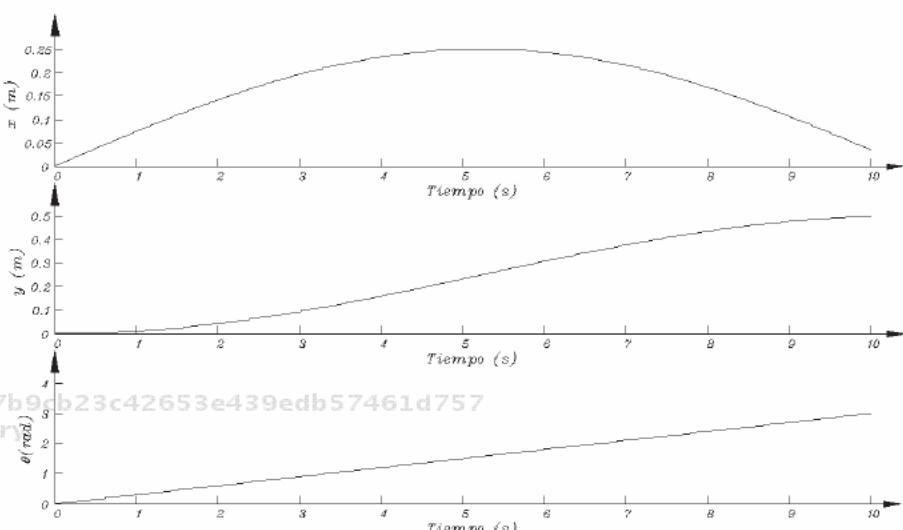


Figura 9.13 Postura de un robot uniciclo tipo(2,0) para el caso: $\dot{\phi}_L \neq \dot{\phi}_R$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix},$$

donde v y ω representan las velocidades lineal y angular, respectivamente.

te, del robot móvil. Para el caso del direccionamiento diferencial dichas velocidades están dadas por:

$$\begin{aligned} v &= \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L) \\ \omega &= \frac{r}{L}(\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L) \end{aligned}$$

donde r representa el radio de ambas ruedas y L la distancia desde el centro de la rueda derecha hasta el centro de la rueda izquierda. Para simular numéricamente en MatLab el modelo cinemático se consideró $r=3$ cm y $L=10$ cm.

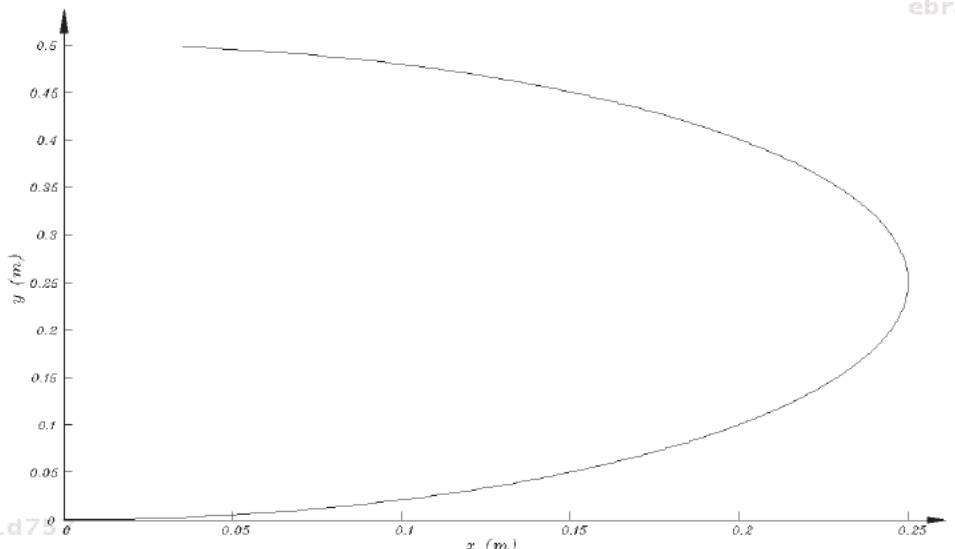
6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Figura 9.14 Trayectoria de un robot uniciclo tipo(2,0) para el caso: $\dot{\varphi}_L \neq \dot{\varphi}_R$.

Los resultados obtenidos en la simulación se presentan en las figuras 9.13-9.16. En el primer caso se consideró $\dot{\varphi}_R = 3$ rad/s y $\dot{\varphi}_L = 2$ rad/s. La figura 9.13 presenta la evolución en el tiempo de la postura del robot y se aprecia que las tres componentes (x , y , θ) muestran un comportamiento variable debido a la diferencia de las velocidades de ambas ruedas. Por lo tanto, el robot móvil debe describir un movimiento de tipo circular, lo cual se verifica en la figura 9.14.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

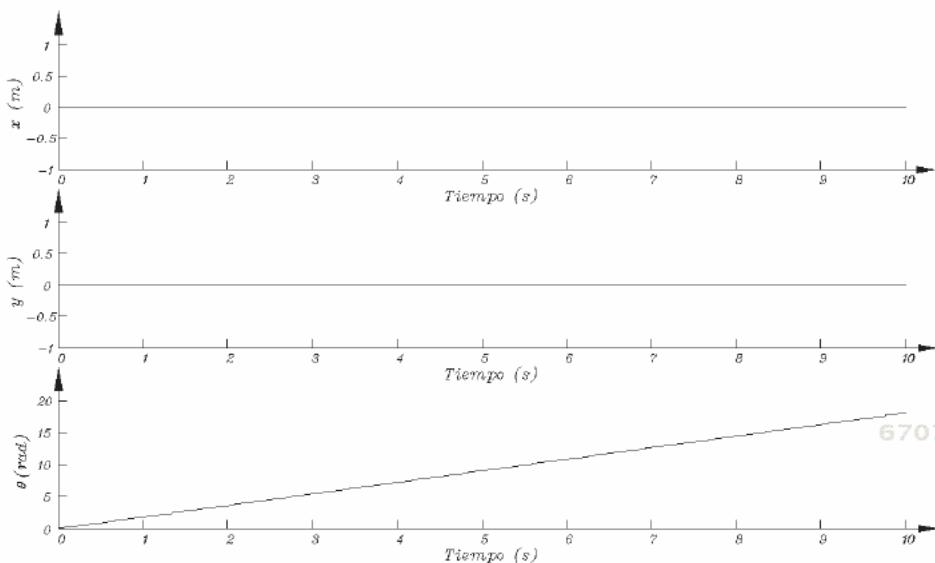


Figura 9.15 Postura de un robot uniciclo tipo(2,0) para el caso: $\dot{\varphi}_L = -\dot{\varphi}_R$.

Para el segundo caso de análisis se consideró $\dot{\varphi}_R = 3$ rad/s y $\dot{\varphi}_L = -3$ rad/s. La figura 9.15 muestra la evolución en el tiempo de la postura del robot y se aprecia que las componentes lineales (x , y) permanecen constantes en la condición inicial (0,0), mientras que la componente angular θ presenta un comportamiento variable debido a la diferencia en el sentido de las velocidades de ambas ruedas. Por lo tanto, el robot móvil gira sobre su propio eje.

Finalmente para el tercer caso se consideró $\dot{\varphi}_R = \dot{\varphi}_L = 3$ rad/s. La figura 9.16 presenta la evolución en el tiempo de la postura del robot y se aprecia que la componente x varía con el tiempo, mientras que las componentes y y θ permanecen constantes en las condiciones iniciales iguales a cero, esto se debe a que las velocidades de ambas ruedas son iguales en magnitud y sentido.

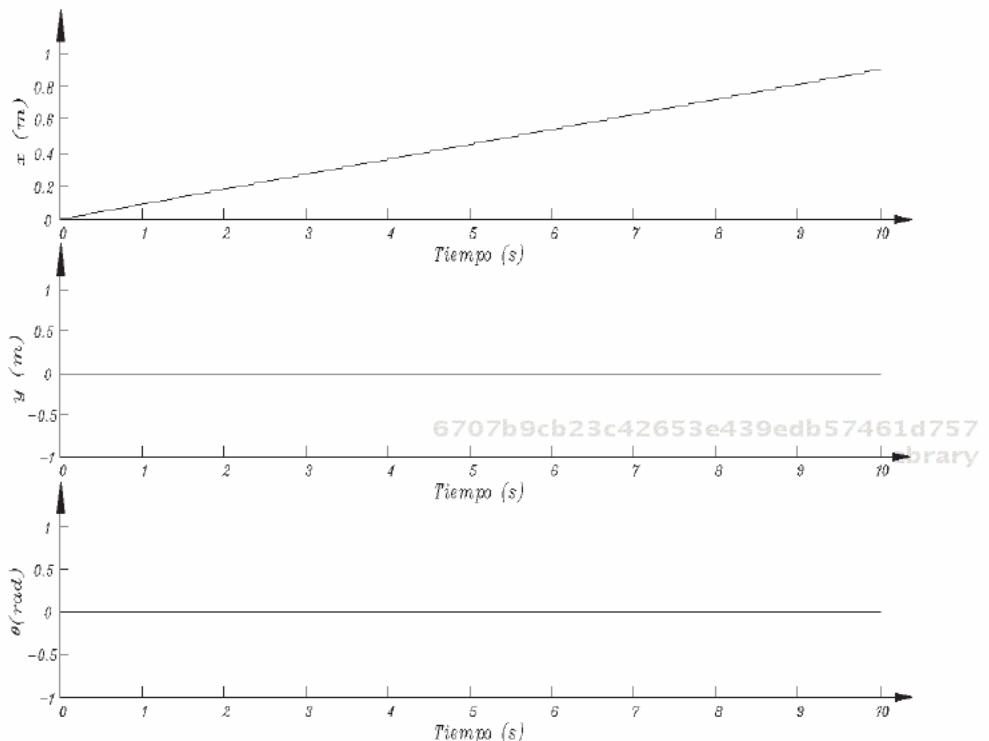


Figura 9.16 Postura de un robot uniciclo tipo(2,0) para el caso: $\dot{\varphi}_L = \dot{\varphi}_R$.



9.6.1 Control por retroalimentación no lineal

Es bien conocido que la linealización vía retroalimentación a través de controladores comunes tiene serias limitaciones para el control de RMR's. En particular, no permite que un robot sea estabilizado alrededor de un punto fijo en el espacio de trabajo. En esta sección se presenta una técnica de control por retroalimentación no lineal que permite resolver el problema de seguimiento de postura.

Considérese el robot uniciclo tipo(2,0) que se muestra en la figura 9.17, cuyo modelo cinemático de postura puede expresarse en forma compacta

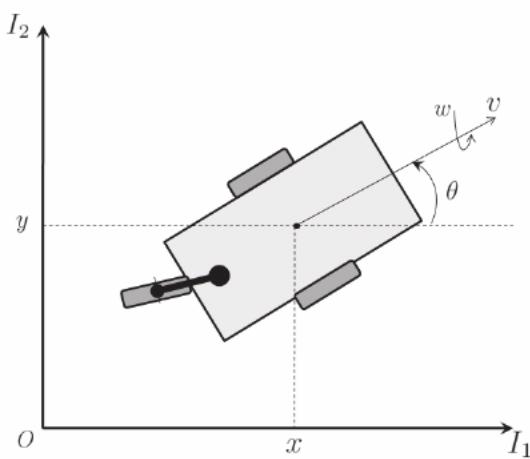


Figura 9.17 Coordenadas de postura de un robot móvil tipo(2,0).

como:

$$\dot{z} = G(z)u = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (9.53)$$

donde $z = [x \ y \ \theta]^T$ y las entradas de control son la velocidad lineal v y la velocidad angular ω .

ebrary Con la finalidad de emplear técnicas de control no lineal, es necesario realizar un cambio de coordenadas para expresar el sistema en una forma canónica, de tal manera que las nuevas coordenadas estarían dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \tan(\theta) \\ x_3 &= y \end{aligned} \quad (9.54)$$

y las nuevas entradas de control serían

$$u_1 = v \cos(\theta) \quad (9.55)$$

$$u_2 = \frac{\omega}{\cos^2(\theta)}, \quad (9.56)$$

donde $\theta \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi) \forall k \in Z$. Por lo tanto, el sistema (9.53) se trasforma a la siguiente forma canónica de cadena

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1.\end{aligned}\tag{9.57}$$

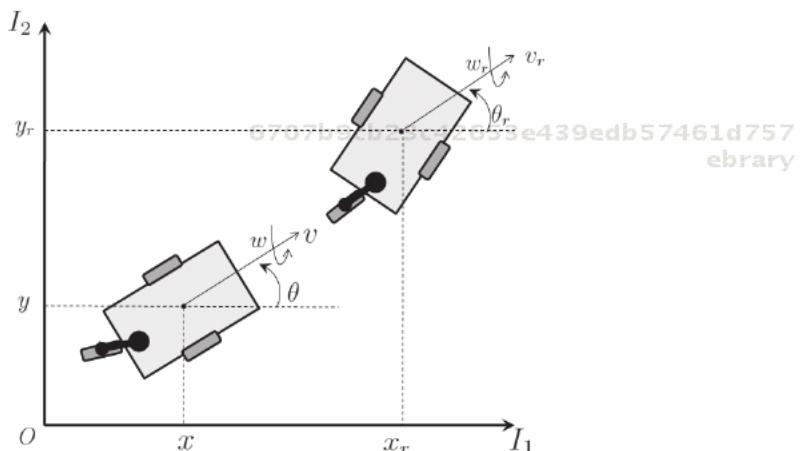


Figura 9.18 Problema de seguimiento de postura.

El problema de seguimiento de postura que se representa en la figura 9.18, consiste en encontrar una ley de control por retroalimentación

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = k(z, z_r, v_r, \omega_r)\tag{9.58}$$

de tal forma que $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - z_r(t)) = 0$. Además se considera que el robot nunca está en reposo, es decir; $\lim_{t \rightarrow \infty} v_r(t) \neq 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_r(t) \neq 0$. Para este problema de seguimiento considérese el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}\tag{9.59}$$

donde e_1 y e_2 son las coordenadas del error de posición y e_3 representa el error de orientación. Además, las entradas de control están dadas por

$$u_1 = v_r \cos(e_3) - v\tag{9.60}$$

$$u_2 = \omega_r - \omega, \quad (9.61)$$

obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(e_3) \\ 0 \end{bmatrix} v_r + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (9.62)$$



Con la finalidad de resolver el problema de seguimiento de postura se emplea el siguiente controlador no lineal

$$u_1 = -k_1(v_r, \omega_r)e_1 \quad (9.63)$$

$$u_2 = -k_2 v_r \frac{e_2}{e_3} \operatorname{sen}(e_3) - k_3(v_r, \omega_r)e_3 \quad (9.64)$$

donde $k_1(v_r, \omega_r)$ y $k_3(v_r, \omega_r)$ son funciones continuas y definidas positivas, y k_2 es una constante positiva.

Robot móvil tipo (2,0)

En el sitio web del libro se encuentra disponible el programa fuente para MatLab, que incluye la simulación numérica del robot móvil tipo uniciclo controlado para el seguimiento de postura. El programa de simulación está compuesto de dos archivos principales, el primero corresponde al código del solucionador del sistema de ecuaciones diferenciales y la graficación de los resultados. Mientras que el segundo, es el código correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales que representa la cinemática del robot móvil y el controlador no lineal para el seguimiento de postura. Adicionalmente se presenta una animación que muestra el movimiento del robot móvil durante el desarrollo de la tarea de seguimiento.

Ejemplo 9.4

Considérese nuevamente el robot móvil tipo(2,0) y el algoritmo de control no lineal (9.63)-(9.64). Realizar la simulación en MatLab del control de seguimiento de postura de dicho robot considerando $\dot{\varphi}_L = 2$ rad/s y $\dot{\varphi}_R = 3$ rad/s.

Solución

Para el controlador de seguimiento de postura se utilizó

$$\begin{aligned} k_1(v_r, \omega_r) &= \operatorname{sen}(v_r) \\ k_2 &= 10 \\ k_3(v_r, \omega_r) &= \operatorname{sen}(\omega_r). \end{aligned}$$

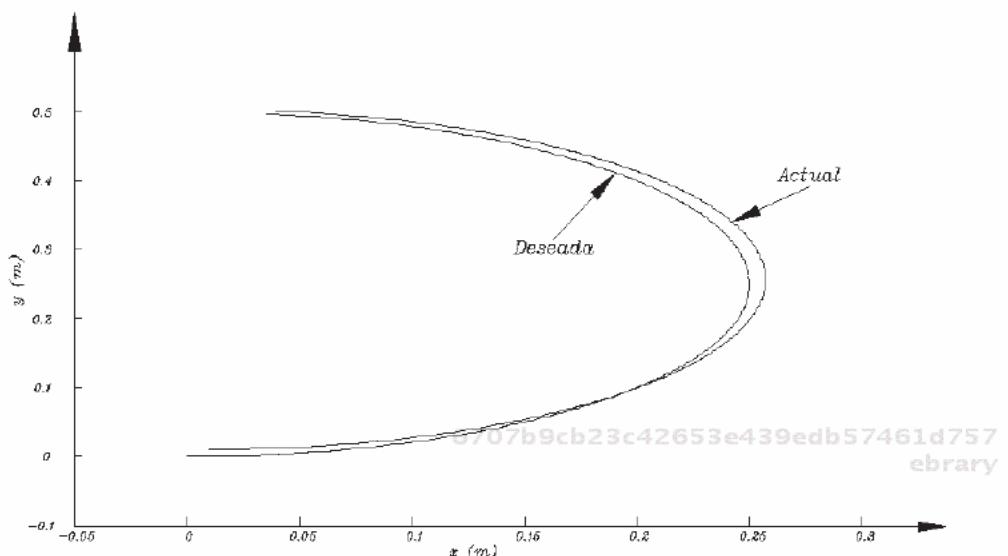


Figura 9.19 Trayectoria sobre el plano x - y de un robot uniciclo tipo(2,0) controlado para el seguimiento de postura.

Para simular numéricamente en MatLab el modelo cinemático se consideró $r=3$ cm y $L=10$ cm. Los resultados obtenidos en la simulación

se presentan en las figuras 9.19 y 9.20. En la figura 9.19 se muestra la evolución de la trayectoria seguida del robot en términos de la trayectoria de referencia (deseada) y la trayectoria generada sobre el plano por el movimiento del vehículo. Se puede apreciar un adecuado seguimiento de la referencia.

Para verificar el cumplimiento del objetivo de control de seguimiento de postura, en la figura 9.20 se presentan las tres componentes del error de seguimiento, las cuales tienden a cero conforme el tiempo evoluciona. Por lo tanto, puede concluirse que el esquema de control no lineal utilizado permite realizar correctamente el seguimiento de postura.



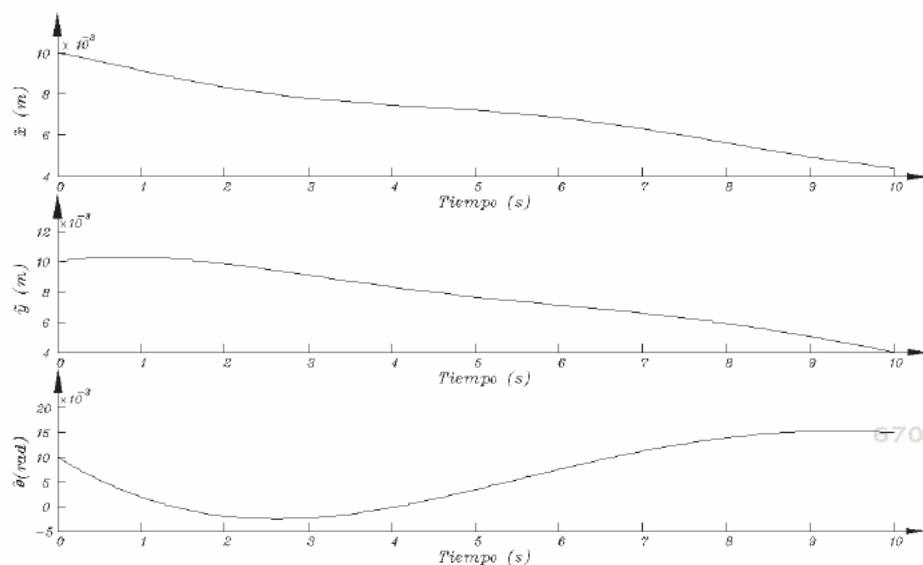


Figura 9.20 Componentes del error de seguimiento de postura $\tilde{z} = z - z_r$.

9.7 Resumen

La **robótica móvil** es una área de la robótica que se encarga del análisis, diseño, construcción y control de una clase particular de sistemas mecánicos que se desplazan con ruedas, patas o cualquier mecanismo que produzca desplazamiento lineal con respecto al centro de gravedad del robot móvil.

Este capítulo está destinado exclusivamente al estudio de los robots que se desplazan con ruedas y sus aplicaciones específicas científicas, comerciales, domésticas e industriales. El análisis presentado abarca los tipos de ruedas más usadas en robótica móvil, las restricciones de movilidad que las caracterizan y sus tipos de configuración.

De manera particular, se describen la cinemática y dinámica de robots móviles con ruedas, y sus potenciales aplicaciones en control automático. Asimismo, se presentan algunos esquemas de control para robótica móvil.



9.8 Referencias selectas

A continuación se presentan algunas referencias selectas de robótica móvil, donde el lector puede profundizar en los temas de cinemática, dinámica y control de robots móviles con ruedas.



9.2 Robots móviles

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

- J. Angeles. “*Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms*”. Springer-Verlag New York, 1995.

- P. Muir. “*Modeling and control of wheeled mobile robots*”. Doctoral dissertation, tech. report CMU-RI-TR-88-20. Robotics Institute. Carnegie Mellon University. 1988.

- A. Ollero. “*Robótica: manipuladores y robots móviles*”. Marcombo, 2001.



9.3 Configuración de robots móviles

- J. Ackerman. “*Robust yaw damping of cars with front and rear wheel steering*”. In Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control. Tucson, Arizona, pp. 2586-2590, 1992.

- D.M. Brienza & C.E. Brubaker. “*A steering linkage for short wheelbase vehicles: design and evaluation in a wheelchair power base - a technical note*”. J. Rehab. Res. Develop. 36(1), pp. 42-47, 1999.

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

ALFAOMEGA



D. Gao & W.J. Book. “*Steerability in planar dissipative passive robots*”. Int. J. Robot. Res. 29(4), pp. 353-366, 2010.



9.4 Cinemática de robots móviles



P.F. Muir & C.P. Neuman. “*Kinematic modelling of wheeled mobile robots*”. J. Robot. Syst. 4, pp. 281-329, 1987.



J.C. Alexander & J.H. Maddocks. “*On the kinematics of wheeled mobile robots*”. Int. J. Robot. Res. 8(5), pp. 15-27, 1989.



R.M. Murray, Z. Li & S.S. Sastry. “*A mathematical introduction to robotic manipulation*”. CRC Press. 1994.



9.5 Dinámica de robots móviles



J.C. Latombe. “*Robot motion planning*”. Kluwer Academic Publishers. Boston, MA. 1991.



G. Campion, G. Bastin & B. D'Andréa-Novel. “*Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots*”. IEEE Trans. Robot. Autom. 12(1), pp. 47-62, 1996.



C. Canudas, B. Siciliano & G. Bastin, “*Theory of robot control*”. Springer-Verlag. 1996.



9.6 Control de robots móviles

G. Campion, B. D'Andréa-Novel & G. Bastin. “*Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems*”. In Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control. Brighton, UK, pp. 1184-1189, 1991.

C. Canudas, H. Khennouf, C. Samson & O.J. Sordalen. “*Nonlinearity near control design for mobile robots*”. In: Y. F. Zheng (ed.), *Recent Trends in Mobile Robots*. World Scientific. Singapore, pp. 121-156, 1993.

B. D'Andréa-Novel, G. Campion & G. Bastin. “*Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization*”. Int. J. Robot. Res. 14, pp. 543-559, 1995.



9.9 Problemas propuestos

A continuación se enlista un conjunto de problemas para mejorar las habilidades y conocimientos del lector sobre el tema de robótica móvil.



9.2 Robots móviles

9.2.1 Para el análisis matemático de un RMR, presentado en este capítulo, se consideraron cinco hipótesis, dos de ellas son: “el contacto entre cada rueda y el suelo se reduce a un solo punto” y “no existe deslizamiento”, explique cuál es la importancia de estas dos hipótesis y, en qué cambiaría el análisis matemático si no se consideraran.

9.2.2 Compruebe las ecuaciones de restricción 9.4 y 9.5, correspondientes a la rueda fija, con base en la figura 9.3.



9.3 Configuración de robots móviles

9.3.1 Considérese el robot móvil tipo(3,0) que se muestra en la figura 9.21, compuesto de tres ruedas de centro orientable desplazado.

Determine las ecuaciones de restricción (9.12)-(9.13) que representan la estructura de este robot.

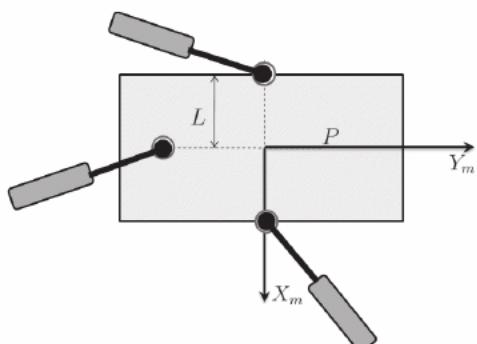


Figura 9.21 Robot móvil tipo(3,0) con ruedas de centro orientable des-

plazado. 3c42653e439edb57461d757
ebrary



9.4 Cinemática de robots móviles

9.4.1 Obténgase el modelo cinemático de postura del robot móvil tipo(1,2) mostrado en la figura 9.22.

9.4.2 Para el robot móvil tipo(2,0) de la figura 9.11, obténgase su modelo cinemático de configuración.

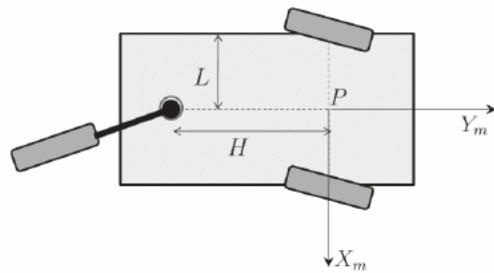


Figura 9.22 Robot móvil tipo(1,2).



9.5 Dinámica de robots móviles

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

9.5.1 ¿Para qué se utilizan los multiplicadores de Lagrange en el análisis dinámico de un robot móvil con ruedas?

9.5.2 Explique los principales fenómenos físicos presentes en la dinámica de un robot móvil con ruedas.



9.6 Control de robots móviles

9.6.1 Describa dos problemáticas de control para robots móviles con ruedas.

9.6.2 Obtenga la representación cinemática para controlar un robot móvil en configuración Ackerman (figura 9.7), considerando como entradas de control u_1 y u_2 que corresponden a la velocidad de conducción y la velocidad de dirección, respectivamente.

9.6.3 Simule el comportamiento cinemático del robot móvil en configuración Ackerman y diseñe un controlador no lineal para resolver el problema de seguimiento de postura.

Índice analítico

A

ABB, 12, 31, 36
acción derivativa, 349,
350,
353, 355
acciones acotadas, 392
actuadores
14
eléctricos, 47
Adept Technology, 32
adición de vectores, 102
AER, 34
algoritmo
333
de control, 17, 18,
43, 333
recursivo de mínimos cuadrados,
295
AMCA, 34
AMM, 34
amortiguamiento, 355
amplificador elec-
trónico, 50

AMROB, 34
análisis cualitativo PD,
342
análisis de estabilidad,
122
androide, 4, 11
androides, 10
ángulos
de Euler 207, 209
de orientación, 209

roll, pitch, yaw,
209
 θ, ϕ, ψ , 211
antropomórfico, 203
Arimoto, 336, 337, 359
armadura, 55
arquitectura abierta, 63
articulación, 14, 205
ASIMO, 33
ATI, 476
atractor, 153
AutoCad, 75
Automatix, 32

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

[B]

BARA, 34
Barbashin, 184
BCD, 80
Bosch, 32
brushless, 21
brushless resolver, 70
BUAP, 33, 61

diferencial, 224, 235
diferencial directa,
218
directa, 203, 210,
218, 226, 234,
238, 243, 245
inversa, 212, 224,
234

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
coeficiente de fricción, ebrary
178

[C]

código
binario cíclico, 80
binario digital, 80
fuente, 164, 209
MatLab, 164
cadena cinemática, 211
cascabeleo, 58
CATIA, 75
CCD, 412
centrífuga, 269
centro de masa, 178
CICESE, 32
ciclos límite, 183
cilíndrico, 203
cinemática
204, 210

cirugías, 5
columna de una matriz,
107
compliant, 481
configuración
Ackerman, 520
cartesiana, 243
cilíndrica, 241
esférica, 238
síncrona, 522
SCARA, 236

conjunto invariante, 183
comutador, 55
continuidad Lipschitz,
144

control
5, 18
arco tangente, 392
cartesiano, 404
acciones acotadas,
377
acciones no acotadas, 365
de fuerza, 473, 482

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS
ebrary

- de impedancia, 474, 489
de interacción, 473
de movimiento, 440
de posición, 334
de robots, 17, 333
de robots móviles, 531
de trayectoria, 440
híbrido, 486
indirecto, 473
on/off, 393
PD, 336, 338, 341, 343, 350, 352, 354, 358, 439
PD péndulo, 343
PD+, 439, 443
PID, 357–359
por visión, 412
proporcional
derivativo, 178, 336, 351
punto a punto, 336, 413
signo, 393
tangente hiperbólica, 392
todo/nada, 393
controladores hiperbólicos, 392
convención Denavit-Hartenberg, 213, 217
- convergencia monótona, 128
Coriolis, 261
CPR, 76
CRW, 33
- D**
- Denavit, 213
desempeño, 335, 377, 394
determinante de una matriz, 115
determinantes menores, 135
diagrama fase, 173
diodos LED, 16
DIRA, 34
direct drive, 19, 20, 58
DM1004C, 69
DM1050A, 69
Don Cucuo el Guapo, 32
DrvGII, 67
DrvGIII, 67
DSP, 47

[E]

ecuación

algebraica de Lyapunov, 168
diferencial autónoma, 359
en lazo cerrado, 360

ecuaciones

de Euler Lagrange, 255
de Maxwell, 51

efecto inercial, 259

electronic driver, 49

Elektro, 31

elementos

eléctricos, 14
foto-sensibles, 74
hidráulicos, 14
neumáticos, 14

encoder

absoluto, 73,80
de cuadratura, 78
incremental 73,77
magnético, 83
ópticos, 15,73
relativo, 77

end effector, 207

energía

cinética, 255

mecánica, 19
potencial, 255
térmica, 19
total, 150, 255

engranes, 19
entorno dócil, 481
entorno rígido, 481
EPSON, 13
Epson, 36

equilibrio asintótica-
mente estable, 155

equilibrio estable, 158
error de posición, 18, 334, 339, 342, 345, 351, 358, 371, 376, 396, 402, 414, 433

error de seguimiento, 442

error de velocidad, 442

esférico, 203

eslabón, 205

espacio de trabajo, 206

espacio euclíadiano, 101

espacio lineal normado, 186

espacio vectorial, 100

estabilidad

154

asintótica, 155

asintótica global, 159, 160

exponencial global, 160

uniforme, 154

estator, 54

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

estudio cualitativo PD,
343
Euler, 255
exactitud, 90
extremo final, 207

F

FAMULUS, 31
FANUC, 13, 32, 36
Fanuc-2000iA/165F,
421
Faraday, 53
fenómeno
 de elasticidad, 19
 de fricción, 19, 263,
 378
 disipativo, 19
 inercial, 260

fisioterapia, 5
fotodiodos, 74
fotosensible, 16
fototransistor, 16, 74
FPGA, 62
fricción
 de Coulomb, 263
 estática, 263
 viscosa, 263

fuente de par, 64
fuerza
 centrípetas, 261

de Lorentz, 53
función
 acotada, 128
 candidata de Lyapunov, 157
 continua, 128, 158
 creciente, 128
 cuadrática, 142
 de energía, 142,
 336, 340, 363, 370
 decreciente, 128
 definida negativa,
 135
 definida positiva,
 128, 132, 135, 158
 definida positiva
 global, 128
 definida positiva
 local, 128
 discontinua, 128
 escalar, 130, 131
 indefinida, 135
 monótona, 128
 semidefinida negativa, 135
 semidefinida positiva, 129, 134

G

ganancia
 derivativa, 358,
 366, 374

proporcional, 355,
357, 366, 374

J

Gauss, 293
General Electric 32
General Motors, 32
gradiente, 138
gray code, 81
Gustav Jacobi, 137

H

háptica, 479
hamiltoniano, 255
Hendrik Antoon Lorentz, 54
home position, 224
Honda Motor, 33

jacobiano, 219
jacobiano analítico, 219
joint, 205

K

Karel Capek, 4, 10, 31
Kelly, 32
Krasovskii, 184
KUKA, 13, 31, 36

L

lagrangiano, 255
Lagrange, 256
LaSalle, 183, 184, 336, 376
lcd, 48
LED's, 73
Leonardo da Vinci, 26, 28, 30, 44, 263
ley asociativa, 113
ley distributiva, 113
lineal, 14
linealidad, 90
linealidad en los parámetros, 265

I

IASTED, 33
identificación paramétrica, 291
IEEE, 33
IFAC, 33
IFR, 34
impedancia mecánica, 474
índice de desempeño, 394, 465
INTECH, 34
intelligent drive, 67
ISO, 13

Lipschitz, 144, 145
liquid crystal display, 48
longitud de onda, 73
Lorentz, 53
luz infrarroja, 16
Lyapunov, 122, 150, 151, 167

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

marco inercial, 261

matrices

106

adjunta, 117

antisimétrica, 120,

261

cuadrada, 115, 117,

125

de cofactores, 116

de inercia, 260

de rotación, 208

definida negativa,

135, 167

definida positiva,

108, 131, 132, 135

diagonal, 108

especiales, 108

indefinida, 135

inversa, 117

jacobiana, 137, 238

ortogonal, 209

semidefinida posi-

tiva, 135

simétrica, 119, 135

transpuesta, 110

Maxwell, 50

mecatrónica, 4

método directo de Lya-

punov, 158

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

Michael Faraday, 53

mínimos cuadrados,

293, 295

modelo

de energía, 266

de potencia, 267

de potencia filtra-
da, 307

de regresión, 302

dinámico, 253, 257,
359

dinámico carte-
siano, 287

dinámico filtrado,
303

Stribeck, 263

modo

par, 50

posición, 50

velocidad, 50

moldeo de energía, 18,

333, 343, 359, 365, 405,

412, 418, 423, 456, 460

momento de inercia, 178

morfología, 203

MOTOMAN, 13

Motoman, 36

motor

15

eléctrico, 50

N

números
enteros, 101
naturales, 101
reales, 101

norma
espectral, 126
euclíadiana, 105
de un vector, 105
de una matriz, 126

NSK, 92

O

objetivos de control, 19
operaciones de matrices, 109
optoelectrónica, 73
oscilaciones, 378
oscilador armónico, 164

parámetros Denavit-Hartenberg, 223
Parkercompumotor, 92
pasividad, 266
PD+, 443, 446
performance, 394
Phantom Omni, 480
plano fase, 162
polinomio característico, 126
pose, 203
posición

articular, 14
de casa, 224, 229
deseada, 18

potenciómetros, 71
precisión, 90
principio de invariancia, 183
prismáticas, 14
producto de matrices, 112
Programación FANUC, 421
propiedad

asociativa, 102
comutativa, 102
de antisimetría, 122
distributiva, 103
del modelo dinámico, 259

puent de Wheatstone, 476

PUMA

19, 32

600, 19

P

péndulo
178, 182
robot, 223, 275

Palletizer, 31

par

aplicado, 18
calculado, 460

ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

ALFAOMEGA

- punto
 de equilibrio,
 148, 359, 361, 375,
 376, 388, 389, 403,
 407
 de equilibrio estable, 158
 puntos fijos, 148
- Q**
- quirófano robotizado, 6
 quirófanos, 6
- R**
- régimen transitorio, 355
 rango, 90
 Rayleigh-Ritz, 136, 341
 rayos infrarrojos, 73
 realidad virtual, 7
 región de atracción, 153
 regla de la mano derecha, 53
 regresión lineal, 304
 regulación, 334
 regulador
 413
 PD, 443
 rehabilitación neurológica, 501
- renglón de una matriz, 107
 repetitividad, 90
 resistencia magnética, 84
 resolution, 89
 resolver, 70
 resta de matrices, 111
 restricciones
 de movilidad, 515
 holónomas, 529

Richard S. Hartenberg,

215

RMR, 512

robótica, 3–5, 10, 24, 33

Robai, 36

robot

3,4

antropomórfico,
 222, 231, 232

ASIMO, 11

cartesiano, 203,
 222, 243, 245

cilíndrico, 222, 241

Cuco el Guapo, 32

da Vinci, 6

de 2 gdl, 226

esférico, 222

IMI, 21

Institute of America, 4

móvil, 9, 511

manipulador, 211,
 359

- MIT-MANUS, 502
pórtico, 222
PACO-PLUS, 11
SCARA, 222
Standford, 31, 238

robots
aéreos, 10
humanoides, 10
industriales, 12, 222
manipuladores, 3

rotación, 208
rotacional, 14
rotor, 15
rotradi, 315, 319
RT, 34
rueda fija, 515

S
salida de la fase, 89
SCARA, 203, 236, 238
sensor
14
de fuerza, 15, 475
de posición, 50
servo actuadores, 21
servo amplificador, 51, 91, 377
servo mecanismo, 53
servomotor, 14, 50, 64

set point, 334
simulación de sistemas dinámicos, 166
simulador péndulo, 352
singularidades, 220
sintonía de ganancias, 350

sistema
de engranes, 60
de referencia cartesiano, 208
dinámico, 144, 174
masa resorte amortiguador, 352
mecánico oscilador, 162
no-holónomos, 529

SolidWorks, 75
Sturgeon, 53
suma
de matrices, 109
de vectores, 102



- tacómetros, 72
teach pendant, 16, 421
teleoperación, 480
teoría de estabilidad, 150
teorema
de Barbashin Krasovskii LaSalle,

T
ROBÓTICA. CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES - FERNANDO REYES CORTÉS

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary 184

de estabilidad exponencial global,

159

de Rayleigh-Ritz,

136

de Sylvester, 132

Torricelli, 150

transductor

48, 84, 477

nano, 477

transformación homogénea, 203, 208, 218,

226, 240

transmisión directa, 19, 20

translación, 208

traza de una matriz, 115

tribología, 263

TRS, 34



Unimate, 36

UNIMATION, 32

Unimation, 20

uniones, 14



valores propios, 125

vectores, 100

vehículos autónomos,

512

velocidad angular, 218

velocidad articular, 14,

218, 219

velocidad de movimiento, 18

velocidad lineal, 218, 219

videos del péndulo, 346

visión artificial, 411

visual servoing, 411, 412



Westinghouse Electric Corporation, 31

William Rowan Hamilton, 100

workspace, 206

WSEAS, 33



Yamaha Robotics, 36

YASKAWA, 36

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

6707b9cb23c42653e439edb57461d757
ebrary

Robótica

CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES

Robótica. Control de robots manipuladores es un libro de texto para los cursos de robótica que se imparten en las carreras de ingeniería en mecatrónica, electrónica, sistemas e industrial.

PRESENTA

- Los fundamentos de la robótica, modelado y control de robots manipuladores, y los tópicos selectos control de fuerza/impedancia, robótica móvil, visual servoing, robótica industrial e inteligencia artificial.

INCLUYE

- Videos experimentales que muestran aspectos cualitativos de algoritmos de control.
- Simuladores cuyo propósito general es servir para el estudio y análisis de esquemas de control.
- Código fuente (tool-box) de más de 30 programas para MatLab relacionados con sistemas dinámicos lineales y no lineales, robots manipuladores, algoritmos de control y trazo de trayectorias.

NIVEL

- Intermedio-Avanzado.

Fernando Reyes Cortés. Licenciado en Ciencias de la Electrónica (UAP), Maestro en Ciencias con Especialidad en Electrónica (INAOE), Doctor en Ciencias con Especialidad en Electrónica y Telecomunicaciones (CICESE). El Dr. Reyes Cortés es profesor investigador titular C en la UAP, y desde 1993 es miembro del Sistema Nacional de Investigadores.

www.alfaomega.com.mx



"Te acerca al conocimiento"

 **Alfaomega Grupo Editor**