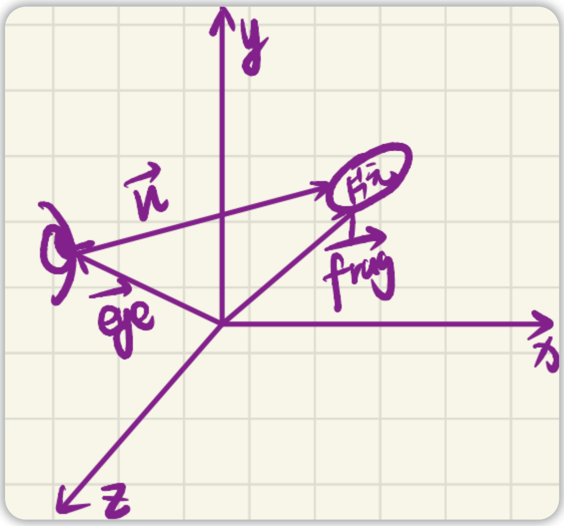
# 摄像机及其坐标系

## H2 摄像机方向

摄像机是一种抽象的结构，它表示我们看东西的媒介，类似于眼睛。为了定义摄像机，我们给定摄像机的世界空间位置向量$\mathbf{eye} = (x_0, y_0, z_0, 1)$，以及我们要观察的片元的世界空间位置向量$\mathbf{frag}$。

为了构建摄像机的坐标系，我们需要三个正交的基向量，而其中一个必须表示方向信息。首先可以计算出摄像机的方向向量：



可以计算摄像机的视角方向向量，简称方向向量：

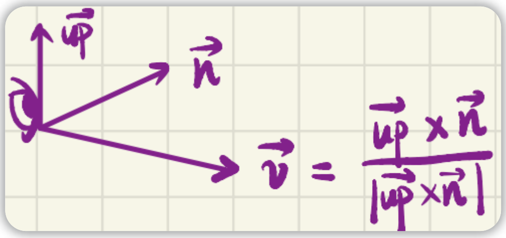
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{frag} - \mathbf{eye}}{|\mathbf{frag} - \mathbf{eye}|}$$

## H2 摄像机的右轴

现在有了第一个基向量$\mathbf{n}$，然后需要找到摄像机的右轴，充当其坐标系的第二个基向量。为此，我们要引用一个辅助向量$\mathbf{up} = (0, 1, 0)$，也就是上向量。进行叉乘，就可以得到第二个正交的基向量：

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{n}|}$$

如图所示：



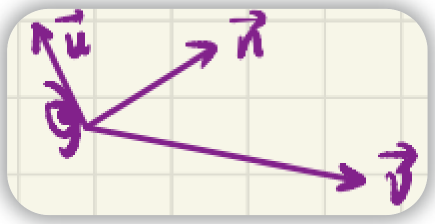
## H2 摄像机的上轴

最后处理上轴，请问上轴是$\mathbf{up}$吗？不是！因为$\mathbf{up}$不一定与$\mathbf{n}$正交，因此我们还要找到上轴基向量！

非常简单，只需要：

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}$$

如图所示：



## H2 LookAt矩阵的推导

为了实现世界空间与观察空间的变换，我们需要引入一个矩阵。这就是LookAt矩阵的作用。

LookAt矩阵实现了将摄像机坐标系的基向量变换到世界坐标系的基向量。为此我们将进行推导。我们令：

$$\mathbf{LookAt} = \mathbf{RT}$$

其中$\mathbf{T}$是平移矩阵，$\mathbf{R}$是旋转矩阵。这个矩阵将进行摄像机坐标系基向量变换到世界坐标系基向量。

首先需要将摄像机平移到世界坐标原点，也就是将$\mathbf{eye}$向量平移到原点位置，不难知道平移矩阵的值：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此：

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{eye}=\begin{bmatrix}1&0&0&-x_0\\0&1&0&-y_0\\0&0&1&-z_0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

平移到了原点。

接下来推导$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$是将摄像机坐标系的基向量旋转到世界坐标系的基向量的位置，即：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}&\mathbf{y}&\mathbf{z}&\alpha\end{bmatrix}=\mathbf{R}\begin{bmatrix}\mathbf{u}&\mathbf{v}&\mathbf{n}&\alpha\end{bmatrix}$$

其中$\alpha=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}^T$。

但这样比较难计算，我们可以求$\mathbf{R}^{-1}$然后求逆矩阵就好了！也就是将世界坐标系的基向量变换到摄像机坐标系的基向量：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{-1}&=\begin{bmatrix}\mathbf{u}&\mathbf{v}&\mathbf{n}&\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}&\mathbf{y}&\mathbf{z}&\alpha\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}u_x&v_x&n_x&0\\u_y&v_y&n_y&0\\u_z&v_z&n_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}u_x&v_x&n_x&0\\u_y&v_y&n_y&0\\u_z&v_z&n_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

根据格拉姆-施密特正交化的理念，能够知道$\mathbf{R}^{-1}$是正交矩阵，转置矩阵等于逆矩阵，因此：

$$\mathbf{R}=(\mathbf{R}^{-1})^{-1}=(\mathbf{R}^{-1})^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}u_x&u_y&u_z&0\\v_x&v_y&v_z&0\\n_x&n_y&n_z&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

综上所述：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{LookAt} = \mathbf{RT} &= \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -x_0u_x - y_0u_y - z_0u_z \\ v_x & v_y & v_z & -x_0v_x - y_0v_y - z_0v_z \\ n_x & n_y & n_z & -x_0n_x - y_0n_y - z_0n_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -\mathbf{eye} \cdot \mathbf{u} \\ v_x & v_y & v_z & -\mathbf{eye} \cdot \mathbf{v} \\ n_x & n_y & n_z & -\mathbf{eye} \cdot \mathbf{n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$