## 从另一个视角推导出齐次二阶线性微分方程

国内的大部分教材都是通过线性相关解与线性无关解推导出齐次二阶线性微分方程的解，但大部分同学对此有些困惑，只能硬记公式。这里给出一种推导方法：

对于方程

$$y'' + py' + qy = 0 \text{ ①}$$

参考一阶线性微分方程，我们不难看出$y$可以用自然数指数函数表示，因此仿照这个定义，我们令：

$$y = Ce^{rx}$$

那么带入方程就有：

$$(r^2 + pr + q)Ce^{rx} = 0$$

不难得出：

$$r^2 + pr + q = 0$$

这个方程为微分方程的特征方程，可以知道如果我们求出$r$的两个解，那么就能求出这个微分方程。

根据韦达定理：

$$r_1 + r_2 = -p$$
$$r_1 r_2 = q$$

带入到①式就有：

$$y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$$

展开得到：

$$y'' - r_2 y' - r_1(y' - r_2 y) = (y' - r_2 y)' - r_1(y' - r_2 y) = 0$$

令：

$$z = y' - r_2 y \text{ ②}$$

那么这个方程就转换为一阶线性微分方程：

$$\frac{dz}{dx} - r_1 z = 0$$

解得

$$z = C_1 e^{r_1 x}$$

带入②式，就有：

$$y' - r_2 = C_1 e^{r_1 x}$$

根据通解公式就有：

$$y = e^{\int (-r_2) dx} [\int C_1 e^{r_1 x} e^{\int (-r_2) dx} dx + C_2] = e^{r_2 x} [C_1 \int e^{(r_1 - r_2) x} dx + C_2]$$

到这里我们就能看出来：

1. 当$r_1 = r_2$的时候，解为

$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_2 x}$$

2. 当$r_1$和$r_2$是实数解的时候，解为

$$y = e^{r_2 x} [\frac{C_1}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_2) x} + C_2] = C_1' e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

3. 当$r_1$和$r_2$是复数解的时候，根据欧拉公式，令$r_1, r_2 = a \pm bi$，有：

$$\begin{aligned} y &= C_1' e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ &= C_1' e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x} \\ &= e^{ax} [C_1' e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}] \\ &= e^{ax} [C_1' (\cos(bx) + i \sin(bx)) + C_2 (\cos(bx) - i \sin(bx))] \\ &= e^{ax} [C_1'' (\cos(bx) + + C_2'' \sin(bx)] \end{aligned}$$

这就是用一阶微分方程推导二阶微分方程的方法