流动与配对-
图论中网络最大流问题与最大匹配问题探讨

曹奕伦 22300240008

2024 年 1 月 10 日

1 论文摘要

论文主要探讨了网络最大流问题中的基础定理与实际应用算法，包括Max-flow-Min-cut定理[12]、Ford-Fulkerson算法[6]、Edmonds-Karp算法[5]、Dinic算法[3]，以及最大匹配中的基础定理与实际应用算法，包括Berge引理[1]、Hall定理[7]、Tutte定理[11]、Tutte-Berge公式[2]、Konig定理[9]、Hopcroft-Karp算法[8]、Hungarian算法[10]、Bloosom算法[4]等内容。

2 背景介绍

2.1 最大流问题

网络流是图论中一个重要的概念，它在模拟各种实际情况中都有广泛的应用。一个网络流问题可以用图来表示，其中节点代表各种资源或位置，边代表资源之间的流动路径或连接。

在网络流问题中，每条边都有一个容量限制，表示该路径能够承载的最大流量。流量可以在图中的路径上流动，但不能超过每条路径的容量限制。这一概念在模拟实际世界中的管道、道路、数据传输等方面有着广泛的应用。

最大流问题是网络流问题中的一个重要分支，它着重于寻找从一个特定起点到一个特定终点的最大流量路径。这个问题通常涉及如何在网络中找到一条路径，使得其流经的边的总流量最大化，同时满足每条路径的容量限制。

解决最大流问题的算法和技术对于优化网络资源分配、流量控制、通信网络以及运输规划等领域都具有重要意义。通过寻找最大流量路径，我们能够最大化资源的利用，提高系统的效率和性能。

在解决最大流问题的过程中，有许多经典的算法和技术被提出和优化，其中包括Ford-Fulkerson算法[6]、Edmonds-Karp算法[5]、Dinic算法[3]等。这些算法在寻找网络中的最大流路径方面都发挥着重要作用。

2.2 最大匹配问题

在图论中，匹配是一种重要的概念，用于描述图中节点之间的配对关系。一个匹配是图中边的集合，其中任意两条边没有共同的顶点。在匹配中，每个顶点最多只能属于一条边。这个概念在实际应用中常用于模拟配对问题，如任务分配、婚姻问题等。

其中最大匹配问题包括了二分图最大基数匹配问题、二分图最大权重匹配问题、一般图最大基数匹配问题和一般图最大权重匹配问题等。其中二分图最大基数匹配问题是最大匹配问题中的一个基础问题，其他问题都可以视作二分图最大基数匹配问题的衍生变种。

解决最大匹配问题对于任务分配、资源优化、稳定婚姻问题等领域有着广泛的应用。通过寻找图中的最大匹配，我们能够有效地优化资源分配，实现任务的最优解决方案，或者找到稳定的配对关系。

在解决最大匹配问题的过程中，有许多经典的算法和技术被提出和优化，其中包括Hopcroft-Karp算法[8]、Hungarian算法[10]、Bloosom算法[4]等。这些算法在寻找图中的最大匹配方面都发挥着重要作用。

3 论文内容

3.1 最大流问题

3.1.1 基础定义与定理

1. **网络的定义：**

   设连通无自环的带权有向图G，其中有两个不同的顶点s和t，其中s为源点(source)，t为汇点(sink)，且每条边的权值都是非负实数，则称该有向图为网络，记为N(V,E,C)，其中C为网络的容量函数

2. **流量的定义：**

   设$N(V,E,C)$为网络，则流量f是N上的一个实函数。

   对于任意一条边$e=(u,v)$，有$f(e) \leq C(e)$

   对于中间点k，有$\sum f(j,k) = \sum f(k,i)$，

   即 k入流量=k出流量，k负责传递流量

   对于源点s，有$\sum f(j,s) + V_f = \sum f(s,i)$，

   即 s入流量+流=s出流量，s能够产生流量

   对于汇点t，有$\sum f(j,t) - V_f = \sum f(t,i)$，

   即 t入流量-流=t出流量，t能够消耗流量

   其中V_f称为f的流量，如果没有其他f'使得$V_{f'} > V_f$，则称f为最大流

3. **饱和的定义：**

   若$f(i,j) = C(i,j)$，则称弧e=(i,j)为饱和的

   若$f(i,j) < C(i,j)$，则称弧e=(i,j)为未饱和的

4. **割的定义：**

   设N(V,E,C)是网络，s为其源点，t为其汇点

   若V被分割为两个不相交的子集A, A^C，使得$s \in A, t \in A^C$，

   那么称从A到A^C的弧集为割，记为(A, A^C)

割(A, A^C)的容量为其所有弧的容量之和，即$C(A, A^C) = \sum_{i \in A, j \in A^C} C_{ij}$

若N中不存在其他割(A', A'^C)，使得$C(A', A'^C) < C(A, A^C)$，则称(A, A^C)为最小割

5. **引理：**

   对于任意网络N(V,E,C)，设f是N上的任一可行流，(A, A^C)是N的任一割，则有$V_f \le C(A, A^C)$

   证明：由于$s \in A$，则A能够产生流量，

   即$\sum f(A, A^C) = \sum f(A^C, A) + V_f$

   因为$\sum f(A^C, A)$是个非负值，所以$\sum f(A^C, A) + V_f \ge V_f$

   故$V_f \le \sum f(A, A^C) \le C(A, A^C)$，得证

6. **最大流最小割定理(Max-flow Min-cut theorem)：**[12]

   在任意网络中，从s到t的最大流等于网络的最小割

   定义残差容量函数$c_f : V \times V \to R^+$，使得

   1. 如果$(i, j) \in E$，那么$c_f(i, j) = C(i, j) - f(i, j)$

   2. 如果$(j, i) \in E$，那么$c_f(i, j) = f(j, i)$

   用构造法证明：给定最大流f，现构造增广路点集A为

   1. $s \in A$

   2. $if\ (i \in A) \wedge (c_f(i, j) > 0) \to j \in A$

   如果$t \in A$，那么就存在一条从s到t的增广路，使得最大流f的流量增加，得出矛盾

   故$t \notin A$，于是得到分离s和t的割(A, A^C)

   由增广路的构造过程可知，对于任意$k \in A, k' \in A^C$，

   要么有$f(k, k') = C(k, k')$，要么有$f(k, k') = 0$

   也就是说，对于割(A, A^C)，

   1. 所有正向弧的流量都是饱和的

   2. 所有反向弧的流量都为0

   即$\sum f(A, A^C) = \sum C(A, A^C)$，$\sum f(A^C, A) = 0$

   因为引理已证得$\sum f(A, A^C) = \sum f(A^C, A) + V_f$

   故有$\sum C(A, A^C) = V_f$，得证

3.1.2 算法实现与时间复杂度分析

1. **Ford-Fulkerson算法** [6]

Algorithm 1 Ford-Fulkerson Algorithm

```
procedure FIND MAXIMUM FLOW(G)
    Input: Network G=(V,E,C)
    Output: Maximum flow of Network G

    for each edge(u,v)∈G,E do
        f(u,v)=0
    end for

    while exists a path p from s to t in residual network G_f do
        c_f(p) = min{c_f(p) : (u, v) ∈ p}
        for each edge(u, v) ∈ p do
            if (u, v) ∈ E then
                f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)
            else if (v, u) ∈ E then
                f(v, u) = f(v, u) − c_f(p)
            end if
        end for
    end while
    return f
end procedure
```

当网络的容量为整数时，Ford-Fulkerson算法的时间复杂度为$O(Ef)$

其中E为网络中的边数，f为最大流的流量

这是因为在每次迭代中，算法需要在$O(E)$时间内找到增广路

而对于每次迭代，流量至少增加1，最多增加f，故最多需要$O(f)$次迭代

2. **Edmonds-Karp算法**[5]

将Ford-Fulkerson算法中的搜索增广路径过程改为BFS，即可得到Edmonds-Karp算法

现欲证明Edmonds-Karp算法的时间复杂度为$O(VE^2)$

- 引理 对于任意顶点$v \in V - \{s,t\}$，从s到达v所需的最短增广路径距离$\delta_f(s,v)$随着迭代次数增加而单调递增

用反证法证明：假设存在一个增广操作，使得$\delta_f(s,v)$减小为$\delta_{f'}(s,v)$，

并且v是所有因增广操作递减的顶点中，$\delta_{f'}(s,v)$最小的顶点

不妨假设在残差网络$G_{f'}$中，从s到v的最短路径$p = s \sim u \to v$

所以$(u,v) \in E_{f'}$，并且$\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1$

因为v是$\delta_{f'}(s,v)$最小的顶点，而u不是，所以$\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$

如果有$(u,v) \in E_f$，那么

$$\begin{aligned} \delta_f(s,v) &\leq \delta_f(s,u) + 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s,v) \end{aligned}$$

这与之前的假设$\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$矛盾，所以$(u,v) \notin E_f$

所以要使得$(u,v) \notin E_f$，而$(u,v) \in E_{f'}$，那么f就要有从v到u的最短路径$p = s \sim v \to u$，那么

$$\begin{aligned} \delta_f(s,v) &\leq \delta_f(s,u) - 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) - 1 \\ &= \delta_{f'}(s,v) - 2 \end{aligned}$$

这又与之前的假设$\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$矛盾，所以不存在这样的顶点v

- 定理 Edmonds-Karp算法的时间复杂度为$O(VE^2)$

如果在残差网络G_f中，增广路p的最大容量$c_f(p) = c_f(u,v)$，那么将(u,v)称为这条增广路p的关键边

如果(u,v)是首次成为关键边，那么有$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$

因为这时候(u,v)已经饱和，所以如果还想成为关键边，那么就需要成为抵消操作，即$(v,u) \in E_{f'}$

所以有$\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1$

由引理可知，对于顶点v有$\delta_{f'}(s,v) \geq \delta_f(s,v)$，所以

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,u) &= \delta_f(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s,u) + 2 \end{aligned}$$

故每次操作最多会使顶点u的距离增加2，

因为顶点u到v的距离最多为$|V|-2$，

所以(u,v)最多需要$(|V|-2)/2=|V|/2-1$次操作迭代

而图G中总共有$|E|$条边，

所以对于所有边来说，最多需要$O(VE)$次操作迭代

因为每次操作的时间复杂度为$O(E)$，所以总的时间复杂度为$O(VE^2)$

3. **Dinic算法**[3]

   将Ford-Fulkerson算法中的搜索增广路径过程改为启发式搜索，即可得到Dinic算法

   1. 将每条边的流量初始化为0，即$\forall e \in E, f(e)=0$

   2. 从残差图G_f中构造层级残差图G_L，使得对于残差容量$c_f(u,v)>0$的边(u,v)，有$L(v)=L(u)+1$

   3. 在层级残差图G_L中，从s到t搜索一条层级增广路p，使得$\forall (u,v) \in p, L(v)=L(u)+1$

   4. 将层级增广路p累加至流f中，并不断重复步骤2和步骤3，直到不存在层级增广路为止

- 定理 Dinic算法的时间复杂度为$O(V^2E)$

由于在每次迭代中，层级流的层数最多将增加1，而层级流的层数最多为$|V|-1$，所以迭代次数为$O(V)$，而对于每次迭代有：

1. 使用BFS构造层级残差图G_L的时间复杂度为$O(E)$

2. 使用DFS搜索层级增广路p的时间复杂度为$O(VE)$

所以每次迭代的时间复杂度为$O(E+VE)=O(VE)$，故总时间复杂度为$O(V^2E)$，得证

3.2 最大匹配问题

3.2.1 基础定义与定理

1. **匹配的定义(Matching or Independent-edge-set)**

   设图G(V,E)是一个无向图，有$M \subseteq E$

   如果M中的任意两条边都没有公共点，则称M为G的一个匹配

2. **盖点的定义(Matched or Saturated Vertex)**

   设M是二分图G的一个匹配，将M中的边所关联到的顶点称为盖点

3. **极大匹配的定义(Maximal matching)**

   设图G的一个匹配为M，如果M不是其他任何匹配的真子图，则称M为极大匹配

4. **最大匹配的定义(Maximum matching or Maximum-cardinality matching)**

   设图G的一个匹配为M，如果M的边数大于其他任何匹配的边数，则称M为最大匹配

   将最大匹配的边数称为图G的匹配数，记为$\nu(G)$

5. **完美匹配的定义(Perfect matching or Complete matching)**

   设图G的一个匹配为M，如果M的盖点数等于图G的顶点数，则称M为完美匹配

   完美匹配同时也是最小边覆盖

   完美匹配需要顶点数为偶数

   完美匹配同时也是最大匹配

6. **准完美匹配的定义(Near-perfect matching)**

   设图G的一个匹配为M，如果M的盖点数只比图G的顶点数少1，则称M为准完美匹配

   准完美匹配需要顶点数为奇数

   准完美匹配同时也是最大匹配

7. **交错路和增广路的定义(Alternating path and Augmenting path)**

   若一条路由未盖点开始，路上属于匹配M的边和不属于匹配M的边交错出现，则称该路为交错路

   如果路p是一条起始点和结束点都是未盖点的交错路，则称路p为增广路

8. **引理**

   将增广路p进行匹配边与非匹配边的对换，得到$M \oplus p$

   则$M \oplus p$也是关于图G的匹配，且比M多了一条匹配边

   证明：由于增广路的两端都是未盖点，所以不会影响到其他边的匹配

   而将增广路进行对换之后仍然满足匹配，且多了一条匹配边，得证

9. **引理**

   对于图G，以及图G的两个匹配M和M’，令$G' = M \oplus M'$，则G’由以下三种组成：

   1. 孤立点

   2. 具有M和M’交错边的偶回路

   3. 具有M和M’交错边的交错路

证明： G’中每个顶点最多与2条边相关联，

其中一条来自M，另一条来自M’

因此，图G’只能由由孤立顶点、回路或交替路径组成

而对于回路，它必须具有相等数量来自M和M’的交错边，因此其长度必须为偶数，即其为具有M和M’交错边的偶回路，得证

10. **Berge定理 (Berge’s theorem)**[1]

    匹配M为图G的最大匹配，当且仅当图G中不存在关于M的增广路

    逆否命题：匹配M不是图G的最大匹配，当且仅当图G中存在关于M的增广路

    $\Longleftarrow$：证明：假设图G中存在关于M的增广路

    那么将增广路进行对换，就能得到$|M \oplus p| > |M|$，故M不是最大匹配，得证

    $\Longrightarrow$：证明：假设M不是最大匹配，那么存在一个最大匹配M'，使得$|M'| > |M|$，

    作$D = M' \oplus M$，由引理知，D的各连通分支皆为关于M和M’的偶回路或者交错路

    由于$|M'| > |M|$，那么在D中，就会存在某个连通分支，

    使得其中属于M’的边数大于属于M的边数

    那么这个连通分支就是一条以M’的边作为首尾的交错路p，所以是关于M的增广路，得证

11. **霍尔婚配定理(Hall’s Marriage Theorem)**[7]

    对于二分图$G(X, Y)$，存在X-完美匹配，当且仅当对于X的任意子集A，以及与A邻接的点集N(A)，都有$|N(A)| \geq |A|$

    $\Longrightarrow$：因为存在X-完美匹配，所以X的任意子集A也都存在完美匹配，故$|N(A)| \geq |A|$

    $\Longleftarrow$：要证明：若对于任何子集$A \subseteq X$，都有$|N(A)| \geq |A|$，那么存在X-完美匹配

    逆否命题：如果不存在X-完美匹配，那么就会存在子集$A \subseteq X$，使得$|N(A)| < |A|$

    由于不存在X-完美匹配，即最大匹配M不是X-完美匹配，所以X中存在未盖点$u \in X$，以u为根节点构造交错树T

    记X的子集A为交错树T在X中的点集，记Y的子集B为交错树T在Y中的点集，即$A = X \cap T, B = Y \cap T$

    由于M是最大匹配，所以子集B中所有顶点都是盖点，否则能构造出关于M的增广路，得到更大的匹配

    因为匹配边在交错树中的方向是从右到左的，所以子集A中的盖点数=子集B中的盖点数

    又因为X中还有个未盖点$u \in X$，所以$|A| = |B| + 1 > |B|$，即$|N(A)| < |A|$，得证

12. **塔特定理(Tutte Theorem)**[11]

    Tutte定理是Hall定理的推广

    奇组件的定义(Odd component)

    如果一个连通分支的顶点数为奇数，那么称这个连通分支为奇组件

    对于任意图$G(V,E)$，存在完美匹配，

    当且仅当 对于V的任意子集U，以及与U邻接的奇组件odd(G-U)，都有$|U| \geq |odd(G-U)|$

    $\Longrightarrow$：因为存在完美匹配，所以每个奇组件至少有一个顶点需要与U中的顶点匹配，

    所以有$|U| \geq |odd(G-U)|$，充分性得证

    $\Longleftarrow$：要证明：若对于任何子集$U \subseteq V$，都有$|U| \geq |odd(G-U)|$，那么存在完美匹配

    逆否命题：如果不存在完美匹配，那么就会存在子集$U \subseteq V$，使得$|U| < |odd(G-U)|$

    对于子集$U \subseteq V$，如果能够使得$|U| = |odd(G-U)|$，那么称子集U为关键子集

    现取出图G的最大关键子集记为W，则W具有如下几个性质：

    1. 图G-W中不存在偶组件，否则可以从偶组件中取出v，使得$W' = W \cup \{v\}$，并且$|W'| > |W|$，与W是最大关键子集矛盾
    2. 对于图G-W中的任意奇组件C，从奇组件C中取出v，可以使得$C - \{v\}$存在完美匹配

    所以可以将分支集合族$odd(G-U)$看作是二分图中的点集X，将最大关键子集W看作是二分图中的点集Y，因为不存在完美匹配，所以根据Hall定理可知，存在子集$A \subseteq X = odd(G-U)$，使得$|N(A)| < |A|$

    即存在子集$U = N(A) = N(odd(G-U)) \subseteq W \subseteq V$，使得$|U| < |odd(G-U)|$，得证

13. **Tutte-Berge公式**[2]

    从直观上来说就是，由于每个奇组件都会自带一个未匹配点，所以有$odd(G-U)$，而这个未匹配点可以被U中的未匹配点所抵消，即$odd(G-U) - |U|$

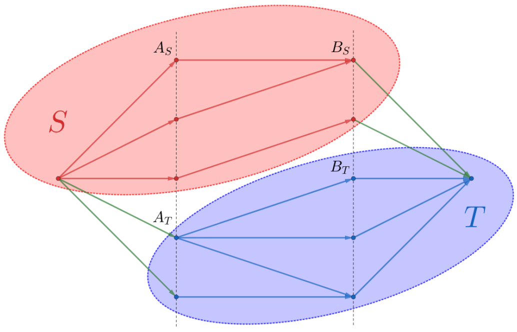
    任意图G(V,E)的最多未匹配点为$\max_{U \subseteq V}(odd(G-U) - |U|)$

    或者说：任意图G(V,E)最大匹配数为 $\frac{1}{2}\min_{U \subseteq V}(|V| - odd(G-V) + |U|)$

14. **Konig定理**[9]

    在二分图$G(X,Y)$中，有最大匹配数等于最小点覆盖数

- 使用最大流最小割构造最小点覆盖来证明：



已知二分图G(A,B)，并且有最大匹配M，现构造最小点覆盖

构造流网络G'_∞，其中从源点s流向A的容量为1，

从A流向B的容量为∞，从B流向汇点t的容量为1

由最大匹配和最大流的定义可知，此时$|M| = V_f$，故可以运用最大流最小割定理

取出最小割(S,T)，且$A = A_S \cup A_T, B = B_S \cup B_T$，

则最小割只包含从s到A_T的边和从B_S到t的边，

因为所有从A_S到B_T的和从A_T到B_S的无穷边都会导致割的流量为无穷大

所以最小割的大小为$|A_S| + |B_T|$，并且$A_T \cup B_S$是点覆盖

即点覆盖的大小为$|A_S| + |B_T| = |M|$，所以这是最小点覆盖，得证

- 使用交错树构造最小点覆盖来证明：

已知二分图G(X,Y)，并且有最大匹配M，现构造最小点覆盖

考虑以下构造：取左侧X的未匹配结点作为根节点，构造多棵交错树

然后再将所有交错树上的所有结点都打上标记，记为点集Z

最后再构造集合K为：X未打标记的结点+Y打了标记的结点

即 $K = (X - Z) \cup (Y \cap Z)$

现欲证明集合K是一个点覆盖，且$|K| = |M|$

首先证明：集合K是一个点覆盖，即所有边都要么左侧未打标记，要么右侧打了标记

逆否命题：不存在这样的边，其左侧打了标记，并且右侧没打标记

1. 假设存在左侧打了标记 and 右侧没打标记的匹配边，因为匹配边在交错树中的方向是从右到左的，所以如果右侧没标记，那么左侧也不应该有标记，得出矛盾

2. 假设存在左侧打了标记 and 右侧没打标记的非匹配边，因为非匹配边在交错树中的方向是从左到右的，所以如果左侧有标记，那么右侧也应该有标记，得出矛盾

因为K是点覆盖，由引理可知$|K| \geq |M|$，

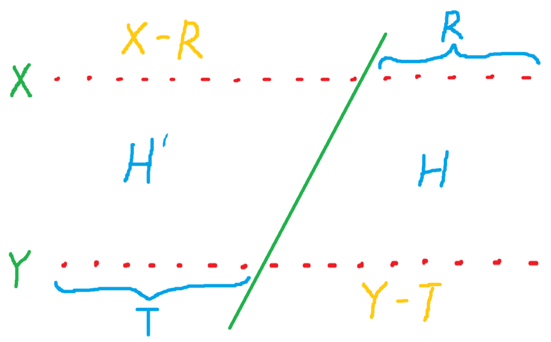
所以要证明K是最小点覆盖，还需要证明$|K| \leq |M|$，即K中的所有点都会被匹配边覆盖

1. 对于左侧X未打标记的结点，其肯定不能是未盖点，否则会作为交错树根结点

2. 对于右侧Y打了标记的结点，其肯定不能是未盖点，否则会出现增广路

综上所述，集合K是一个点覆盖，且$|K| = |M|$，所以K是最小点覆盖，得证

- 使用Hall定理构造最大匹配来证明：



设二分图G的最小点覆盖为Cα_0，

其中C在二分图子集X中的部分记为R，C在二分图子集Y中的部分记为T

设R的任意子集为A，和A邻接的点集为p(A)，

其中在Y-T的部分记为$p_H(A) = p(A) \cap Y - T$，现欲证明$|p_H(A)| \geq |A|$

假如$|p_H(A)| < |A|$，那么就可以得到点覆盖 $C' = C - A + p_H(A)$，

使得$|C'| < |C|$，与C为最小点覆盖矛盾

所以$|p_H(A)| \geq |A|$，即满足Hall定理的条件，

所以存在匹配M_R，使得$|M_R| = |R|$

同理可得存在匹配M_T，使得$|M_T| = |T|$

所以图G中存在大小为$|M| = |R| + |T| = |C|$的匹配，

由引理即可得$\beta_1(G) = \alpha_0(G)$，得证

- 使用线性规划对偶定理来证明：

分数匹配的定义(Fractional matching)

图的分数匹配是对整数匹配的泛化，即允许每条边的匹配度为0到1之间的任意实数

直观上来说，可以理解为把顶点分割为若干份，每份中的顶点都可以与另一顶点进行匹配

对于对于图G(V,E)，如果存在一个实值函数$f: E \to R$，使得

1. $\forall e \in E, f(e) \in [0,1]$
2. $\forall v \in V, \sum_{e \ni v} f(e) \leq 1$

那么称该实值函数f为图G的一个分数匹配

对于任意图G(V,E)，其最大分数匹配问题等价于：

$$\begin{aligned} Maximize \quad & 1_E \cdot x \\ Subject\ to: \quad & x \geq 0_E \\ & A_G \cdot x \leq 1_V \end{aligned}$$

其中向量x是每条边的权重，故$1_E \cdot x$为图G的边权和，$Maximize$表示要尽可能多匹配边

$x \geq 0_E$指边权为非负数，A_G为图G的邻接矩阵，故$A_G \cdot x$为每个顶点的边权和

$A_G \cdot x \leq 1_V$表示每个顶点最多只能匹配一条完整边

对于任意图G(V,E)，其最小分数点覆盖问题等价于：

$$\begin{aligned} Minimize \quad & 1_V \cdot y \\ Subject\ to: \quad & y \geq 0_V \\ & A_G^T \cdot y \geq 1_E \end{aligned}$$

向量y是每个顶点的权重，故$1_V \cdot y$为图G的顶点权和，$Minimize$表示要尽可能少点覆盖

$y \geq 0_V$指顶点权为非负数，A_G^T为图G的邻接矩阵的转置，故$A_G^T \cdot y$为每条边的顶点权和

$A_G^T \cdot y \geq 1_E$表示每条边至少要被一个顶点覆盖

由于最大分数匹配问题和最小点覆盖问题互为线性规划对偶，

所以它们的最优解相等，即对于任意图，都有最大分数匹配等于最小分数点覆盖

而对于二分图，两个问题的最优解都是整数解，

所以对于二分图，有最大匹配等于最小点覆盖，得证

3.2.2 二分图最大基数匹配问题

Hopcroft–Karp算法[8]

利用Dinic算法的思想，来实现分层搜索多条增广路

对于二分图G(X,Y)，其算法实现如下

1. 将X中的未盖点作为$L(1)$，使用BFS算法构造交错边层级图G_L
2. 如果在第k层找到位于Y的未盖点，那么G_L止步于第k层，并将第k层的所有未盖点记为F
3. 对于F中的每个Y未盖点，向上使用DFS搜索其对应的X未盖点，并将途经顶点标记为$used$
4. 如果向上找到了对应的X未盖点，那么就找到了一条增广路，删去这条增广路上途经的$used$顶点，保证这些顶点不会被下次搜索重复使用，重复步骤3和4直至F全部搜完
5. 重复步骤1到步骤4，直至不存在增广路为止

- 定理 Hopcroft–Karp算法的最差时间复杂度为$O(E\sqrt{V})$

由于每次迭代包含一次BFS和几次不重复的DFS，

所以每次迭代的时间复杂度为$O(E+E)=O(E)$

因此，对于刚开始的前$\sqrt{V}$次迭代，累计有时间复杂度为$O(E\sqrt{V})$

由于每次迭代至少会将最短增广路长度k增加1，

所以经过前$\sqrt{V}$次迭代后，此时的最短增广路长度至少为$\sqrt{V}$

不妨设此时的匹配为M，最终的最大匹配为M'，

令$G'=M\oplus M'$，则G'中的连通分支皆为交错回路或者交错路

由于每条交错回路或交错路至少有$\sqrt{V}$条边，

则G'最多还有 $\frac{V}{\sqrt{V}}=\sqrt{V}$个连通分支，即M最多还有$\sqrt{V}$条增广路

故最多还需要$\sqrt{V}$次的增广迭代，再加上刚开始的前$\sqrt{V}$次迭代，故最多需要2$\sqrt{V}$次迭代，算法总共的时间复杂度为$O(E\sqrt{V})$，得证

3.2.3 二分图最大权重匹配问题

Hungarian算法(Kuhn-Munkres算法)[10]

对于二分图G(S,T)，定义实值函数 $y:(S\cup T)\rightarrow\mathbb{R}$

如果$\forall i\in S,j\in T$，都有$y(i)+y(j)\leq c(i,j)$，则称y为G的一个潜在值函数(potential)

将$\sum_{v\in S\cup T}y(v)$，记为y的累加值，则可知任意完美匹配的值都至少会比y的累加值大

如果对于边(i,j)有$y(i)+y(j)=y(i,j)$，则称边(i,j)为y的紧致边(tight edges)，

将由紧致边组成的图记为G_y，如果G_y中存在完美匹配，那么完美匹配的值就会等于y的值

对于匹配M，将S中的未盖点记为R_S，T中的未盖点记为R_T，
将从R_S出发的紧致交错路可达点记为Z

1. 如果$R_T \cap Z$不为空集，那么就存在一条从R_S到$R_T \cap Z$的增广路，将其加入匹配M中
2. 如果$R_T \cap Z$为空集，那么记$\Delta = \min\{c(i,j) - y(i) - y(j) : i \in S \cap Z, j \in T - Z\}$

即Δ为所有(左侧在交错路，右侧不在交错路的边)(的端点潜在值)(的最大可行增长)
对于左侧在紧致交错路中的顶点$s_z \in S \cup Z$，让其潜在值$f(s_z) += \Delta$，
对于右侧在紧致交错路中的顶点$t_z \in T \cap Z$，让其潜在值$f(t_z) -= \Delta$
这样改变潜在值之后，$f(s_z) += \Delta$ 只会影响下面两种边的端点值出现增加：

1. 对于左侧在$S \cup Z$，右侧在$T \cap Z$的边，
其两端点潜在值一增一减相互抵消，故$y'(i) + y'(j) = y(i) + y(j)$
2. 对于左侧在$S \cup Z$，右侧在$T - Z$的边，
其左端点潜在值增加值为最大可行增长Δ，不会导致$y(i) + y(j) > c(i,j)$

所以y仍然会是G的潜在值函数，并且经过迭代之后能够使得G_y中的紧致边数增加，
重复以上所有操作直到M成为完美匹配

Hungarian算法有效性证明
每次迭代后，会出现下面三种情况之一：

1. M已成为最大匹配
2. $R_T \cap Z$不为空集，则G_y存在增广路
3. $R_T \cap Z$为空集，则G_y存在紧致边的可行增长

由Berge定理可知，当M不是最大匹配时，图G中存在关于M的增广路P
1. 如果增广路P全部都在G_y中，那么通过对换即可得到更大的匹配
2. 如果增广路P不全在G_y，也就是说，尽管增广路P的偶数边(匹配边)根据M的定义都会在G_y中，但是它的奇数边(未匹配边)不一定会全部在G_y中

如果增广路P不全在G_y，不妨设此时增广路P的第一条松弛边为(u,v)，
3. 如果v不在紧致交错路Z中，那么在计算Δ时这条边(u,v)就会被计算在内，通过不断地可行增长能够使其最终成为G_y的一部分
4. 如果v会在紧致交错路Z中，那么存在一条紧致边(w,v)，通过将增广路P中的(u,v)部分替换为(w,v)部分，仍然可以得到增广路P'，并且P'的松弛边部分会比P的更短，对于P'再次重复3和4操作即可

3.2.4 一般图最大基数匹配问题

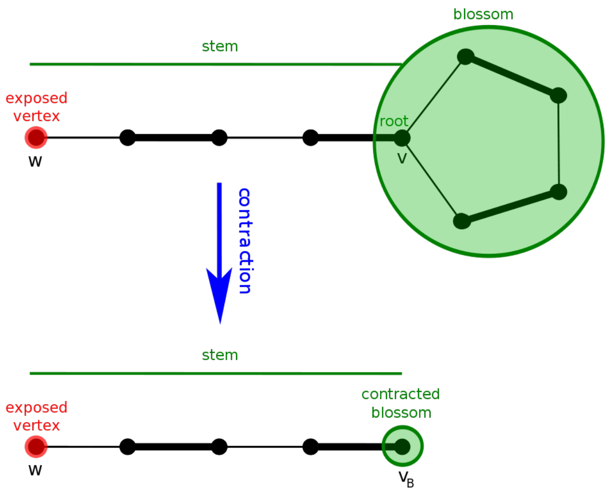
Blossom算法[4]

Blossom算法的核心是缩花与开花操作(Contractions and Blossoms)

花朵的定义(blossom)

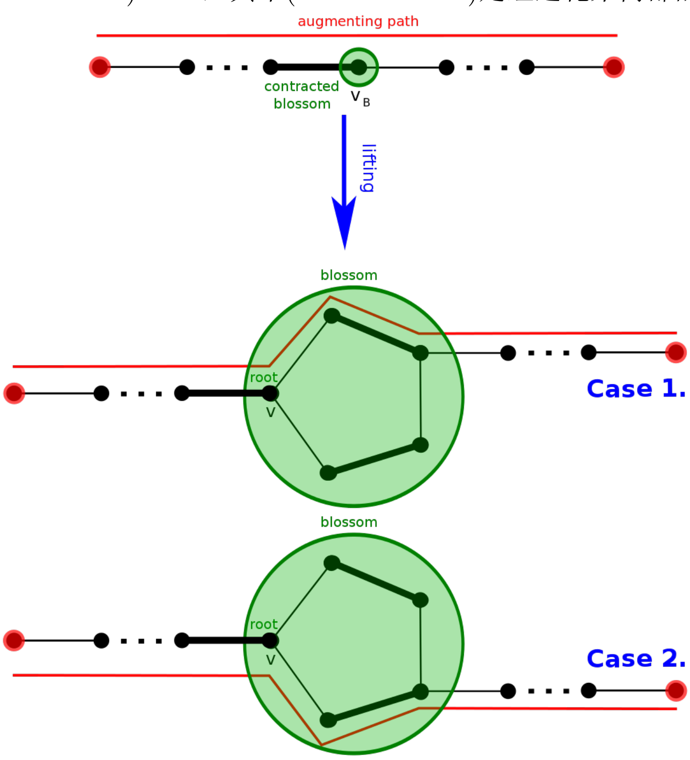
对于任意图G(V,E)和匹配M，如果一个奇环有2k+1条边，并且其中有k条匹配边，那么称这个奇环为花朵(blossom)

花朵可以通过缩花，成为一个盖点V_B，图G经过缩花操作之后成为图G'



引理 图G'有一条增广路P'，当且仅当图G有一条增广路P

因为对于图G'中的增广路$P' = u \to v_B \to w$，可以通过开花将其替换为增广路$P = u \to (u' \to \cdots \to w') \to w$，其中$(u' \to \cdots \to w')$是经过花朵内部的交错路



Algorithm 2 Blossom Algorithm

```
procedure FIND AUGMENTING PATH(G, M)
    Input: Graph G, matching M on G
    Output: augmenting path P in G or empty path if none found

    F ← empty forest
    unmark all vertices and edges in G, mark all edges of M

    for each exposed vertex v do
        create a singleton tree {v} and add the tree to F
    end for

    while an unmarked vertex v in F with distance(v, root(v)) even do
        while there exists an unmarked edge e = {v, w} do
            if w is not in F then
                // Add e and w's matched edge to expand F
                x ← vertex matched to w in M
                add edges {v, w} and {w, x} to the tree of v
            else if w is in F then
                if distance(w, root(w)) is odd then
                else
                    if root(v) ≠ root(w) then
                        // Find an augmenting path in F ∪ {e}.
                        P ← path {(root(v) → ... → v) → (w → ... → root(w))}
                        return P
                    else if root(v) == root(w) then
                        // Look for the path in the contracted graph G'.
                        B ← blossom formed by e and edges on the path v → w in T
                        G′, M′ ← contract G and M by B
                        P′ ← find augmenting path(G', M')
                        P ← lift P' to G
                        return P
                    end if
                end if
            end if
            mark edge e
        end while
        mark vertex v
    end while
    return empty path
end procedure
```

Blossom算法复杂度分析

由于匹配M最多有$|V|/2$条边，最多要进行$|V|/2$次迭代
对于每次迭代过程中出现的两层循环嵌套，
外层嵌套的时间复杂度为$O(V)$，内层嵌套的时间复杂度为$O(E)$
所以每次迭代的时间复杂度为$O(EV)$，故Blossom算法的总时间复杂度为$O(EV^2)$

3.2.5 一般图最大权重匹配问题

综合使用Hungarian算法[10]和Blossom算法[4]即可实现

参考文献

[1] Claude Berge. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 43(9):842–844, 1957.

[2] Claude Berge. Sur le couplage maximum d’un graphe. *CR Acad. Sci. Paris*, 247(258-259):2–29, 1958.

[3] Yefim A Dinitz. An algorithm for the solution of the problem of maximal flow in a network with power estimation. In *Doklady Akademii nauk*, volume 194, pages 754–757. Russian Academy of Sciences, 1970.

[4] Jack Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of mathematics*, 17:449–467, 1965.

[5] Jack Edmonds and Richard M Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 19(2):248–264, 1972.

[6] Lester Randolph Ford and Delbert R Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian journal of Mathematics*, 8:399–404, 1956.

[7] Philip Hall. On representatives of subsets. *Classic Papers in Combinatorics*, pages 58–62, 1987.

[8] John E Hopcroft and Richard M Karp. An nˆ5/2 algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM Journal on computing*, 2(4):225–231, 1973.

[9] Dénes Kőnig. Gráfok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:116–119, 1931.

[10] James Munkres. Algorithms for the assignment and transportation problems. *Journal of the society for industrial and applied mathematics*, 5(1):32–38, 1957.

[11] William Thomas Tutte. The factorization of locally finite graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 2:44–49, 1950.

[12] Wikipedia contributors. Max-flow min-cut theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 10-January-2024].