

Nous nous plaçons dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure d'espace euclidien canonique, pour laquelle le produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$

Pour tout $x \in E$, on définit le projecteur de foyer x comme :

$$\begin{aligned} p_x &: E \setminus \{x\} \rightarrow S(x, 1) \\ y &\mapsto x + \frac{1}{\|y-x\|} \cdot (y-x) \end{aligned}$$

(On notera $S(x, 1)$, $B_o(x, 1)$ et $B_f(x, 1)$ respectivement la sphère, la boule ouverte et la boule fermée de centre x et de rayon 1)

On définit la silhouette d'une partie A de E vue depuis un point x comme son image directe par p_x .

Note : Cela ne correspond pas exactement à une photographie, qui elle est une projection sur un plan. Toutefois, on admettra que si un objet est entièrement du côté du plan focal opposé au foyer (ce qui est toujours vérifié pour une photographie), le "cône" reconstruit à partir de sa photographie est le même que celui reconstruit à partir de la projection sphérique, et que donc la définition de l'enveloppe visuelle que l'on va donner ici correspond donc bien à la définition "naturelle".

On définit ensuite le cône de sommet x et de silhouette $A \subset S(x, 1)$ comme suit :

$$C(x, A) = \{x + t \cdot (y - x), y \in A, t \in \mathbb{R}_+\}$$

On peut alors définir l'enveloppe visuelle d'une partie A de E selon un ensemble de points de vues V :

$$ev(V, A) = \bigcap_{x \in V} C(x, p_x(A))$$

On notera aussi $conv(A)$ l'enveloppe convexe de A , et on admettra que :

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n \text{ t.q. } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

J'ai montré dans un premier temps le lemme 1 :

Lemme 1. *Si A est un fermé de E , et il existe $b \in E$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $A \subset B_o(b, M)$,*

$$\textbf{Alors } ev(S(b, M), A) \subset B_o(b, M)$$

Démonstration. On supposera, quitte à faire effectuer une translation à A , que $b = 0$

Supposons qu'il existe $x \in ev(S(0, M), A)$ tel que $\|x\| \geq M$

— Si $\|x\| > M$

On considère β un vecteur orthogonal à x de norme 1 (β existe car E est un espace euclidien de dimension 3)

$$\text{On pose } y = \frac{M^2}{\|x\|^2} \cdot x + M \sqrt{1 - \frac{M^2}{\|x\|^2}} \cdot \beta$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \frac{M^4}{\|x\|^2} + M^2 \left(1 - \frac{M^2}{\|x\|^2}\right) \\ &= M^2 \end{aligned}$$

Donc que $y \in S(0, M)$

Et que

$$\begin{aligned} (y|x - y) &= (y|x) - \|y\|^2 \\ &= M^2 - M^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $y \in S(0, M)$ donc $x \in C(y, p_y(A))$, donc il existe $u \in p_y(A)$ et $t \in \mathbb{R}^+$ tels que $x = y + t \cdot (u - y)$.

Comme $\|x\| > M$, $t \neq 0$

Donc $u - y = \frac{1}{t} \cdot (x - y)$, et donc $(u - y|y) = 0$

De plus $u \in p_y(A)$ donc il existe $v \in A$ tel que $u = y + \frac{1}{\|v-y\|} \cdot (v - y)$

Donc $v = y + \|v - y\| \cdot (u - y)$

Comme $(u - y|y) = 0$,

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|y\|^2 + \|v - y\|^2 \cdot \|u - y\|^2 \\ &\geq M^2\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $v \in A$ implique $\|v\| < M$

On a une contradiction.

— Si $\|x\| = M$

A est fermé et borné car inclus dans $B_o(0, M)$, donc A est compact (On a $\dim(E) = 3$).

Et comme $u \mapsto \|u\|$ est continue, elle admet un maximum n_m sur A . Il existe donc $x_0 \in A$ tel que $\|x_0\| = n_m$

$x_0 \in B_o(0, M)$ donc $n_m < M$

Soit y un vecteur de $S(0, M)$ tel que $\|y - x\| < \frac{M - n_m}{2}$ et $y \neq x$

$y \in S(0, M)$ donc $x \in C(y, p_y(A))$

Donc il existe $v \in A$ et $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $x = y + \frac{t}{\|v-y\|} \cdot (v - y)$

$x \neq y$ donc $t \neq 0$ et $v = y + \frac{\|v-y\|}{t} \cdot (x - y)$

On note

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \|y\|^2 + \lambda^2 \cdot \|x - y\|^2 + 2\lambda(y|x - y)\end{aligned}$$

(On a alors $f(\lambda) = \|y + \lambda \cdot (x - y)\|^2$, et donc $\|v\|^2 = f(\frac{\|v-y\|}{t})$)

Or $f'(\lambda) = 2\lambda \|x - y\|^2 + 2(y|x - y)$

Donc $f(\lambda)$ atteint un minimum en

$$\lambda = \frac{(y|y - x)}{\|x - y\|^2} = \frac{\|y\|^2 - (y|x)}{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)} = \frac{1}{2}$$

(Car $\|x\| = \|y\|$)

Ainsi

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= f\left(\frac{\|v-y\|}{t}\right) \\ &\geq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\geq \left\|y + \frac{1}{2}(x - y)\right\|^2 \\ &\geq \left(\|y\| - \frac{1}{2}\|x - y\|\right)^2\end{aligned}$$

Donc $\|v\| \geq \|y\| - \frac{1}{2}\|x - y\|$

Or, par construction de y , $\|y - x\| < \frac{M - n_m}{2}$

Donc $\|v\| > n_m$

Or $v \in A$ donc $\|v\| \leq n_m$ On a encore une contradiction.

Dans les deux cas on a une contradiction. Donc $\|x\| < M$

□

J'ai ensuite montré le théorème 1 :

Théorème 1. *L'enveloppe visuelle d'un fermé A de E vu depuis une sphère englobant A est incluse dans l'enveloppe convexe de A .*

En d'autres termes,

$$\forall A \subset E \text{ t.q. } A \text{ fermé et borné, } \forall (b, M) \in E \times \mathbb{R} \text{ t.q. } A \subset B_o(b, M), \\ \text{On a } ev(S(b, M), A) \subset conv(A)$$

Démonstration. Soit A un fermé de E

On considérera A non vide (Si A est vide, $ev(S(b, M), A) = conv(A) = A = \emptyset$)

Soit $a \in ev(S(b, M), A)$

Quitte à effectuer une translation sur A et b , on va considérer que $a = 0_E$.

— Si $0 \in A$, immédiatement $0 \in conv(A)$

— Si $0 \notin A$, on a que $\forall x \in S(b, M), 0 \in C(x, p_x(A))$

Donc

$$\exists t \in \mathbb{R}_+, \exists y \in p_x(A) \text{ t.q. } 0 = x + t \cdot (y - x)$$

Or $y \in p_x(A)$ donc il existe z dans A tel que $p_x(z) = y$, soit

$$y - x = \frac{1}{\|z - x\|} \cdot (z - x)$$

Soit $x_0 \in S(0, 1)$

On note alors

$$\begin{array}{ccc} d & : & \mathbb{R} \rightarrow E \\ & & t \mapsto t \cdot x_0 \end{array}$$

$d(\mathbb{R})$ est la droite passant par x_0 et par 0 .

De plus $A \subset B_o(b, M)$ et $0 \in ev(S(b, M), A)$ donc, selon le lemme 1, $\|0 - b\| < M$

Ainsi $\|d(0) - b\| < M$, et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|d(t)\| = +\infty$ et $t \mapsto \|d(t) - b\|$ est une application continue, selon le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tel que } \|d(t_1)\| = M$$

On note $x_1 = d(t_1)$

Comme $0 \in C(x_1, p_{x_1}(A))$, il existe $v \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$0 = x_1 + \lambda(v - x_1)$$

De plus $\lambda \neq 0$, donc

$$v = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot x_1 = t_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_0$$

Ainsi, selon le signe de $t_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$, on aura $p_0(v) = x_0$ ou $p_0(v) = -x_0$

Cela est vrai pour tout x_0 dans $S(0, 1)$ donc, en notant $P = p_0(A)$ et $P' = \{-a, a \in P\}$, $P \cup P' = S(0, 1)$

On cherche alors à montrer que $P \cap P' \neq \emptyset$

Comme A est fermé et borné en dimension finie, A est compact, et comme p_0 est continue, $P = p_0(A)$ est compact aussi.

Et comme $a \mapsto -a$ est continue, P' est compact aussi.

Soit alors $u \in P$ et v un vecteur orthogonal à u de norme 1

On note

$$\begin{array}{ccc} \gamma & : & [0, 1] \rightarrow S(0, 1) \\ & & t \mapsto \cos(t\pi) \cdot u + \sin(t\pi) \cdot v \end{array}$$

γ est continue, donc $\gamma^{-1}(P)$ et $\gamma^{-1}(P')$ sont fermés.

$\gamma(0) = u \in P$ donc $\gamma^{-1}(P) \neq \emptyset$ et on peut donc considérer $t = \sup \gamma^{-1}(P) = \max \gamma^{-1}(P)$ (Car $\gamma^{-1}(P)$ est fermé)

— Si $t = 1$, $-u \in P$, et comme on a aussi $u \in P$, $u \in P \cap P'$

— Si $t < 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, t + \frac{1}{n} \leq 1$ Alors $(\gamma(t + \frac{1}{n}))_{n \geq n_0}$ est une suite d'éléments qui ne sont pas dans P , et donc qui sont dans P' (car ils sont dans $S(0, 1)$)
Comme γ est continue, elle converge vers $\gamma(t)$, et comme P' est fermé, on a donc $\gamma(t) \in P'$
Donc $\gamma(t) \in P \cap P'$

On a donc que $P \cap P'$ est non vide

Soit q un élément de $P \cap P'$

On a $q \in p_0(A)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mu q \in A$

De même $-q \in p_0(A)$ donc il existe $\nu \in \mathbb{R}^+$ tel que $-\nu q \in A$

$0_E \notin A$ donc $\mu \neq 0$ et $\nu \neq 0$

on note $\alpha = \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}}$ (on a $\alpha \in [0, 1]$)

Ainsi $0_E = \alpha \cdot \mu q + (1 - \alpha) \cdot (-\nu q)$

Donc $0_E \in \{c \cdot u + (1 - c) \cdot v, c \in [0, 1], (u, v) \in A^2\}$

Et donc $0_E \in \text{conv}(A)$

□