

---

# RAPPORT DE TIPE

---

---

## PREAMBULE

---

Pour optimiser le processus de reconstitution d'objets en trois dimensions, nous nous étions proposé de choisir et d'implémenter en Python un tel algorithme de reconstitution, et d'en étudier l'efficacité. C'est ce que nous avons fait, en choisissant l'algorithme dit d'« enveloppe visuelle » étudié notamment par B. Baumgart [1] et A. Laurentini [2]. Il présente l'avantage d'être conceptuellement assez simple, et d'être implémentable de manière relativement légère.

---

## INTRODUCTION

---

Nous avons donc réalisé une implémentation de cet algorithme, puis avons effectué des tests pour en étudier l'efficacité, et pouvoir analyser la pertinence des choix réalisés durant la construction de l'algorithme. Je me suis personnellement occupé de la partie de modélisation en 3D du projet, tandis que mon binôme s'est occupé du prétraitement des photographies pour les rendre exploitables. Pour s'assurer du fait que le modèle produit par l'algorithme n'est, dans des cas idéaux, pas trop éloigné de l'objet original, j'ai aussi démontré un résultat portant sur des cas simples de l'algorithme.

---

## CORPS PRINCIPAL

---

L'« enveloppe visuelle » d'un objet  $A$  est l'objet maximal qui donne la même silhouette que  $A$  quand on l'observe depuis un ensemble de points de vue donné. Ainsi, l'enveloppe visuelle de  $A$  depuis un point de vue unique est un cône dont le sommet est placé sur ce point de vue, et qui a la forme de la silhouette de  $A$  depuis ce point de vue (fig. 1).

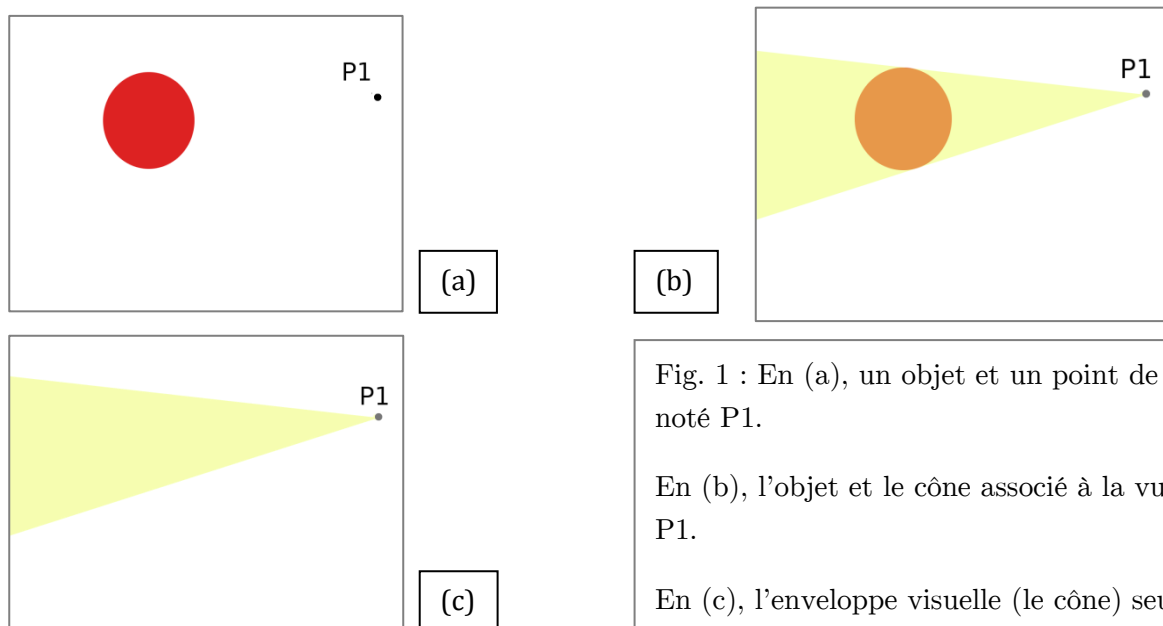
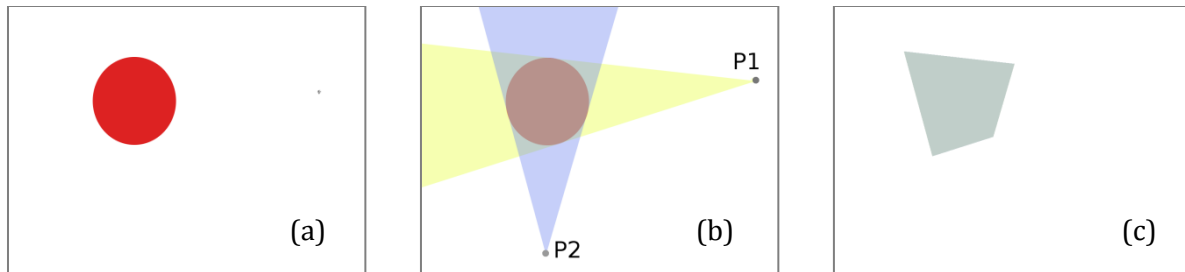


Fig. 1 : En (a), un objet et un point de vue, noté P1.

En (b), l'objet et le cône associé à la vue depuis P1.

En (c), l'enveloppe visuelle (le cône) seule.

Pour obtenir l'enveloppe visuelle d'un objet depuis plusieurs points de vue, on peut alors simplement considérer l'intersection des enveloppes visuelles obtenues depuis chacun des points de vue. Un exemple (en deux dimensions, pour simplifier) est donné en fig. 2.



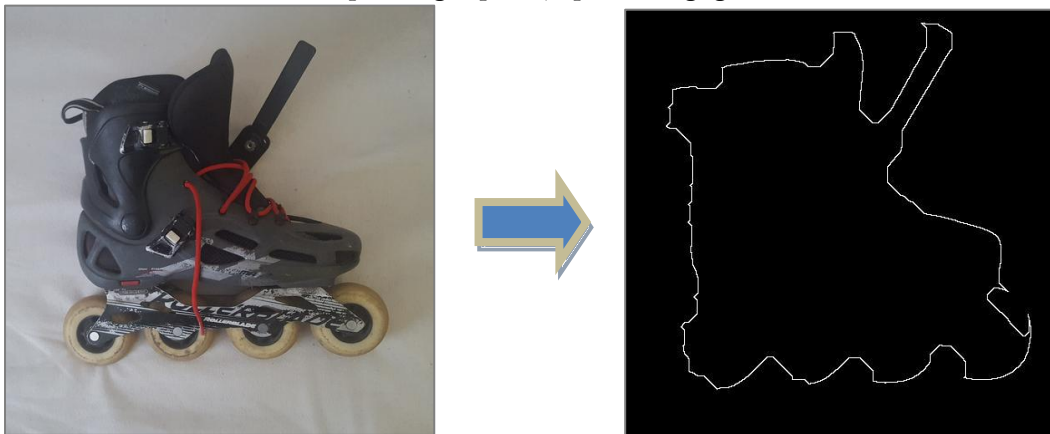
En (a), un objet.

En (b), les cônes correspondant aux deux points de vue P1 et P2.

En (c), l'intersection des deux cônes, soit l'enveloppe

En multipliant les points de vue, l'enveloppe visuelle se rapproche de l'objet original. On peut donc utiliser cette méthode pour reconstituer le modèle 3D d'un objet, simplement à partir de photographies. Se dégagent deux étapes majeures pour cette reconstitution :

- Le traitement de la photographie, pour dégager la silhouette de l'objet :



- La reconstitution à proprement parler, qui consiste à créer les cônes correspondant aux silhouettes, puis à en calculer l'intersection.

Ma contribution personnelle fut la démonstration d'un résultat sur l'enveloppe visuelle, qui permet d'établir un lien entre un objet et son enveloppe visuelle, et la construction d'un système de représentation en machine d'objets en 3D, ainsi que de tous les algorithmes l'accompagnant, en particulier les algorithmes d'intersection, de constructions de cônes, et de simulation de la prise d'une photographie. Cette construction fut réalisée en langage python.

J'ai montré que, dans le cas idéal où l'on dispose de tous les points de vue situés sur une sphère qui englobe l'objet, le modèle reconstitué est inclus dans l'enveloppe convexe de l'objet original. Comme, par définition de l'enveloppe visuelle, elle contient l'objet original, on a que si l'objet original était convexe, l'objet reconstitué est égal à l'original. Cela nous assure donc

que la méthode utilisée a un sens, et que, dans le cas limite, on retrouve un objet proche de l'original. Le détail de la démonstration est fourni en annexe.

La modélisation choisie s'appuie sur une approximation des objets par des polyèdres. Celle-ci présente l'avantage d'être assez légère en mémoire, car seuls quelques points importants y sont stockés.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de la modélisation choisie et des algorithmes qui ont été programmés, comme la fonction d'intersection de deux polyèdres, car les explications seraient assez longues et fastidieuses.

A partir de cette modélisation, j'ai réalisé des tests sur l'algorithme d'intersection pour obtenir des informations sur le temps d'exécution de cet algorithme pour divers complexités de polyèdres initiaux. Nous avons préféré une analyse du temps d'exécution pratique plutôt qu'une étude de la complexité théorique. En effet, si cette dernière donne des bonnes informations asymptotiques, elle ne donne aucun contrôle sur la vitesse de convergence, et un algorithme en  $O(n^2)$  pourra être en pratique beaucoup plus rapide à exécuter qu'un autre qui est en  $O(n)$ , simplement parce que les  $n$  considérés ne deviennent jamais très grands. De plus, une information sur le temps d'exécution, en secondes, est bien plus facilement interprétable qu'une information de complexité. Ainsi, des tests simples sur le programme que j'ai réalisé montrent qu'une intersection simple, avec deux polyèdre ayant de l'ordre de la dizaine de sommets, prend en moyenne 0,15s sur un ordinateur portable, le processeur y étant cadencé à 2 GHz. Ceci, bien sûr, n'est que le temps d'exécution sur une machine particulière, et en utilisant des machines plus puissantes, ce temps pourrait être considérablement réduit. Mais il faut reprendre les objectifs que nous nous étions fixés : nous cherchions un algorithme efficace, qui renvoie des résultats les plus fidèles possibles tout ayant un temps d'exécution le plus court possible. Ici, les résultats obtenus signifient que pour pouvoir reconstituer un modèle 3D avec une précision acceptable, en un temps raisonnable (c'est-à-dire réaliser de l'ordre de 10 à 100 intersections de polyèdres qui possèdent de l'ordre de 1000 sommets), il faudrait une machine très puissante.

---

## CONCLUSION GENERALE

---

En conclusion, le modèle construit ici est modérément efficace. Le traitement d'image effectué par mon binôme est, lui aussi, relativement lent (de l'ordre de la minute sur des ordinateurs personnels). Nous obtenons donc un programme qui fonctionne en un temps raisonnable, et dont nous savons qu'il renverra un modèle proche de l'original, mais qui n'est pas aussi efficace que ce qu'on avait espéré.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Bruce Guenther Baumgart : Geometric modeling for computer vision :  
<http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA002261>
- [2] Aldo Laurentini : The visual hull concept for silhouette-based understanding  
<http://areeweb.polito.it/ricerca/cgvg/Articles/pami94.pdf>

---

## ANNEXE

---

Nous nous plaçons dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$ , muni de sa structure d'espace euclidien canonique, pour laquelle le produit scalaire sera noté  $(\cdot|\cdot)$

Pour tout  $x \in E$ , on définit le projecteur de foyer  $x$  comme :

$$\begin{aligned} p_x &: E \setminus \{x\} \rightarrow S(x, 1) \\ y &\mapsto x + \frac{1}{\|y-x\|} \cdot (y-x) \end{aligned}$$

(On notera  $S(x, 1)$ ,  $B_o(x, 1)$  et  $B_f(x, 1)$  respectivement la sphère, la boule ouverte et la boule fermée de centre  $x$  et de rayon 1)

On définit la silhouette d'une partie  $A$  de  $E$  vue depuis un point  $x$  comme son image directe par  $p_x$ .

*Note : Cela ne correspond pas exactement à une photographie, qui elle est une projection sur un plan. Toutefois, on admettra que si un objet est entièrement du côté du plan focal opposé au foyer (ce qui est toujours vérifié pour une photographie), le "cône" reconstruit à partir de sa photographie est le même que celui reconstruit à partir de la projection sphérique, et que donc la définition de l'enveloppe visuelle que l'on va donner ici correspond donc bien à la définition "naturelle".*

On définit ensuite le cône de sommet  $x$  et de silhouette  $A \subset S(x, 1)$  comme suit :

$$C(x, A) = \{x + t \cdot (y - x), y \in A, t \in \mathbb{R}_+\}$$

On peut alors définir l'enveloppe visuelle d'une partie  $A$  de  $E$  selon un ensemble de points de vues  $V$  :

$$ev(V, A) = \bigcap_{x \in V} C(x, p_x(A))$$

On notera aussi  $conv(A)$  l'enveloppe convexe de  $A$ , et on admettra que :

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}^*, (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n \text{ t.q. } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

J'ai montré dans un premier temps [le lemme 1](#) :

**Lemme 1.** *Si  $A$  est un fermé de  $E$ , et il existe  $b \in E$  et  $M \in \mathbb{R}$  tels que  $A \subset B_o(b, M)$ ,*

$$\textbf{Alors } ev(S(b, M), A) \subset B_o(b, M)$$

*Démonstration.* On supposera, quitte à faire effectuer une translation à  $A$ , que  $b = 0$

Supposons qu'il existe  $x \in ev(S(0, M), A)$  tel que  $\|x\| \geq M$

— Si  $\|x\| > M$

On considère  $\beta$  un vecteur orthogonal à  $x$  de norme 1 ( $\beta$  existe car  $E$  est un espace euclidien de dimension 3)

On pose  $y = \frac{M^2}{\|x\|^2} \cdot x + M \sqrt{1 - \frac{M^2}{\|x\|^2}} \cdot \beta$

On remarque que

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \frac{M^4}{\|x\|^2} + M^2 \left(1 - \frac{M^2}{\|x\|^2}\right) \\ &= M^2 \end{aligned}$$

Donc que  $y \in S(0, M)$

Et que

$$\begin{aligned} (y|x - y) &= (y|x) - \|y\|^2 \\ &= M^2 - M^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or  $y \in S(0, M)$  donc  $x \in C(y, p_y(A))$ , donc il existe  $u \in p_y(A)$  et  $t \in \mathbb{R}^+$  tels que  $x = y + t \cdot (u - y)$ .

Comme  $\|x\| > M$ ,  $t \neq 0$

Donc  $u - y = \frac{1}{t} \cdot (x - y)$ , et donc  $(u - y|y) = 0$

De plus  $u \in p_y(A)$  donc il existe  $v \in A$  tel que  $u = y + \frac{1}{\|v-y\|} \cdot (v - y)$

Donc  $v = y + \|v - y\| \cdot (u - y)$

Comme  $(u - y|y) = 0$ ,

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|y\|^2 + \|v - y\|^2 \cdot \|u - y\|^2 \\ &\geq M^2\end{aligned}$$

Or, par hypothèse,  $v \in A$  implique  $\|v\| < M$

On a une contradiction.

— Si  $\|x\| = M$

$A$  est fermé et borné car inclus dans  $B_o(0, M)$ , donc  $A$  est compact (On a  $\dim(E) = 3$ ).

Et comme  $u \mapsto \|u\|$  est continue, elle admet un maximum  $n_m$  sur  $A$ . Il existe donc  $x_0 \in A$  tel que  $\|x_0\| = n_m$

$x_0 \in B_o(0, M)$  donc  $n_m < M$

Soit  $y$  un vecteur de  $S(0, M)$  tel que  $\|y - x\| < \frac{M - n_m}{2}$  et  $y \neq x$

$y \in S(0, M)$  donc  $x \in C(y, p_y(A))$

Donc il existe  $v \in A$  et  $t \in \mathbb{R}^+$  tel que  $x = y + \frac{t}{\|v-y\|} \cdot (v - y)$

$x \neq y$  donc  $t \neq 0$  et  $v = y + \frac{\|v-y\|}{t} \cdot (x - y)$

On note

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \|y\|^2 + \lambda^2 \cdot \|x - y\|^2 + 2\lambda(y|x - y)\end{aligned}$$

(On a alors  $f(\lambda) = \|y + \lambda \cdot (x - y)\|^2$ , et donc  $\|v\|^2 = f(\frac{\|v-y\|}{t})$ )

Or  $f'(\lambda) = 2\lambda \|x - y\|^2 + 2(y|x - y)$

Donc  $f(\lambda)$  atteint un minimum en

$$\lambda = \frac{(y|y - x)}{\|x - y\|^2} = \frac{\|y\|^2 - (y|x)}{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)} = \frac{1}{2}$$

(Car  $\|x\| = \|y\|$ )

Ainsi

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= f\left(\frac{\|v-y\|}{t}\right) \\ &\geq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\geq \left\|y + \frac{1}{2}(x - y)\right\|^2 \\ &\geq \left(\|y\| - \frac{1}{2}\|x - y\|\right)^2\end{aligned}$$

Donc  $\|v\| \geq \|y\| - \frac{1}{2}\|x - y\|$

Or, par construction de  $y$ ,  $\|y - x\| < \frac{M - n_m}{2}$

Donc  $\|v\| > n_m$

Or  $v \in A$  donc  $\|v\| \leq n_m$  On a encore une contradiction.

Dans les deux cas on a une contradiction. Donc  $\|x\| < M$

□

J'ai ensuite montré [le théorème 1](#) :

**Théorème 1.** *L'enveloppe visuelle d'un fermé  $A$  de  $E$  vu depuis une sphère englobant  $A$  est incluse dans l'enveloppe convexe de  $A$ .*

*En d'autres termes,*

$$\forall A \subset E \text{ t.q. } A \text{ fermé et borné, } \forall (b, M) \in E \times \mathbb{R} \text{ t.q. } A \subset B_o(b, M), \\ \text{On a } ev(S(b, M), A) \subset conv(A)$$

*Démonstration.* Soit  $A$  un fermé de  $E$

On considérera  $A$  non vide (Si  $A$  est vide,  $ev(S(b, M), A) = conv(A) = A = \emptyset$ )

Soit  $a \in ev(S(b, M), A)$

Quitte à effectuer une translation sur  $A$  et  $b$ , on va considérer que  $a = 0_E$ .

— Si  $0 \in A$ , immédiatement  $0 \in conv(A)$

— Si  $0 \notin A$ , on a que  $\forall x \in S(b, M), 0 \in C(x, p_x(A))$

Donc

$$\exists t \in \mathbb{R}_+, \exists y \in p_x(A) \text{ t.q. } 0 = x + t \cdot (y - x)$$

Or  $y \in p_x(A)$  donc il existe  $z$  dans  $A$  tel que  $p_x(z) = y$ , soit

$$y - x = \frac{1}{\|z - x\|} \cdot (z - x)$$

Soit  $x_0 \in S(0, 1)$

On note alors

$$\begin{array}{ccc} d & : & \mathbb{R} \rightarrow E \\ & & t \mapsto t \cdot x_0 \end{array}$$

$d(\mathbb{R})$  est la droite passant par  $x_0$  et par  $0$ .

De plus  $A \subset B_o(b, M)$  et  $0 \in ev(S(b, M), A)$  donc, selon le lemme 1,  $\|0 - b\| < M$

Ainsi  $\|d(0) - b\| < M$ , et comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|d(t)\| = +\infty$  et  $t \mapsto \|d(t) - b\|$  est une application continue, selon le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tel que } \|d(t_1)\| = M$$

On note  $x_1 = d(t_1)$

Comme  $0 \in C(x_1, p_{x_1}(A))$ , il existe  $v \in A$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tels que

$$0 = x_1 + \lambda(v - x_1)$$

De plus  $\lambda \neq 0$ , donc

$$v = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot x_1 = t_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_0$$

Ainsi, selon le signe de  $t_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$ , on aura  $p_0(v) = x_0$  ou  $p_0(v) = -x_0$

Cela est vrai pour tout  $x_0$  dans  $S(0, 1)$  donc, en notant  $P = p_0(A)$  et  $P' = \{-a, a \in P\}$ ,  $P \cup P' = S(0, 1)$

On cherche alors à montrer que  $P \cap P' \neq \emptyset$

Comme  $A$  est fermé et borné en dimension finie,  $A$  est compact, et comme  $p_0$  est continue,  $P = p_0(A)$  est compact aussi.

Et comme  $a \mapsto -a$  est continue,  $P'$  est compact aussi.

Soit alors  $u \in P$  et  $v$  un vecteur orthogonal à  $u$  de norme 1

On note

$$\begin{array}{ccc} \gamma & : & [0, 1] \rightarrow S(0, 1) \\ & & t \mapsto \cos(t\pi) \cdot u + \sin(t\pi) \cdot v \end{array}$$

$\gamma$  est continue, donc  $\gamma^{-1}(P)$  et  $\gamma^{-1}(P')$  sont fermés.

$\gamma(0) = u \in P$  donc  $\gamma^{-1}(P) \neq \emptyset$  et on peut donc considérer  $t = \sup \gamma^{-1}(P) = \max \gamma^{-1}(P)$  (Car  $\gamma^{-1}(P)$  est fermé)

— Si  $t = 1$ ,  $-u \in P$ , et comme on a aussi  $u \in P$ ,  $u \in P \cap P'$

— Si  $t < 1$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, t + \frac{1}{n} \leq 1$  Alors  $(\gamma(t + \frac{1}{n}))_{n \geq n_0}$  est une suite d'éléments qui ne sont pas dans  $P$ , et donc qui sont dans  $P'$  (car ils sont dans  $S(0, 1)$ )  
Comme  $\gamma$  est continue, elle converge vers  $\gamma(t)$ , et comme  $P'$  est fermé, on a donc  $\gamma(t) \in P'$   
Donc  $\gamma(t) \in P \cap P'$

On a donc que  $P \cap P'$  est non vide

Soit  $q$  un élément de  $P \cap P'$

On a  $q \in p_0(A)$  donc il existe  $\mu \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\mu q \in A$

De même  $-q \in p_0(A)$  donc il existe  $\nu \in \mathbb{R}^+$  tel que  $-\nu q \in A$

$0_E \notin A$  donc  $\mu \neq 0$  et  $\nu \neq 0$

on note  $\alpha = \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}}$  (on a  $\alpha \in [0, 1]$ )

Ainsi  $0_E = \alpha \cdot \mu q + (1 - \alpha) \cdot (-\nu q)$

Donc  $0_E \in \{c \cdot u + (1 - c) \cdot v, c \in [0, 1], (u, v) \in A^2\}$

Et donc  $0_E \in \text{conv}(A)$

□