Trabalho 1 - Zero de Funções

Felipe de Avila, Leonardo Valerio Anastácio, Lucas Pires Cobucci

Curso de Bacharelado em Ciência da Computação – Universidade do Estado de Santa Catarina(UDESC) – CCT

felipedeavila5@gmail.com, leonardovalerio@live.com, lucascobucci@hotmail.com

1. Introdução

Este relatório tem como objetivo mostrar o processo para calcular e encontrar o zero de funções utilizando o método de iteração do ponto fixo.

2. Contexto

Como ponto de partida, foram apresentadas três funções para o cálculo de suas respectivas raízes, para isso, foi solicitado a utilização do método de iteração de ponto fixo. O método resume-se em iterar uma função g(x), encontrada por meio dos pontos fixos de f(x), n vezes até que um desvio de erro seja respeitado.

As funções disponibilizadas foram:

1. $f(x) = x + arctg(x-1)$
2. $f(x) = 9 * \sqrt[3]{x} - e^x$
3. $f(x) = 2^x - 6 * ln(x)$

3. Método de iteração do ponto fixo

O método consiste em transformar uma equação f(x) = 0 (onde f(x) é uma função contínua em um intervalo [a,b], que possui a raiz desta equação, em uma equação equivalente x = ϕ(x). A partir de uma aproximação inicial, gerar outras aproximações, onde $f(\xi) = 0$ se e somente se $\phi(\xi) = \xi$. Passando o problema de encontrar f(x) em um problema de encontrar o ponto fixo de $\varphi(x)$, essa função chamada de função de iteração.

3.1 Critério de convergência

Seja ξ uma raiz da equação f(x) = 0, isolada num intervalo I centrado em ξ. Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação f(x) = 0. Além disso, se:

i) $\varphi(x)$ *e* $\varphi'(x)$ são contínuas em I,

ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \ \forall\ x \in I$ *e*

iii) $x\ inicial \in I$,

então a sequência gerada na iteração converge para ξ.

4. Funções de iteração encontradas

4.1 Análise da função 7

Considere a função 7 definida por $f(x) = x + arctg(x-1)$, obtemos como função de iteração $\varphi(x) = x = -arctg(x-1)$, que possui como derivada $\varphi'(x) = (-x^2+2x-2)^{-1}$. Logo, é feita análise de convergência $|\varphi'(x)| < 1$:

$|\varphi'(x)| = |(-x^2 + 2x - 2)^{-1}| < 1$

A inequação é satisfeita para os intervalos $(-\infty, 1/2)$ e $(3/2, \infty)$. Portanto, ao escolher um ponto inicial pertencente à este intervalo, a função de iteração irá convergir para uma raíz de $f(x)$.

4.2 Análise da função 18

Considere a função 18 definida por $f(x) = 9 * \sqrt[3]{x} - e^x$, para obtenção da função de iteração $\varphi(x)$ foram necessário alguns passos:

1. $\varphi(x) = e^x = 9 * \sqrt[3]{x}$ ⇐ multiplicando os dois lados por $\frac{x^5}{3}$
2. $e^x * \frac{x^5}{3} = 9 * \frac{x}{3} * \frac{x^5}{3}$
3. $e^x * \sqrt[3]{x^5} = 9 * x^2$
4. $\frac{e^x * \sqrt[3]{x^5}}{9} = x^2$
5. $\varphi(x) = \sqrt{(e^x * \sqrt[3]{x^5})/9}$

Passos para encontrar a derivada de $\varphi(x)$:

1. $\varphi'(x) = \frac{1}{3} * \sqrt{u}$ ⇐ sendo $u = e^x * x^{\frac{5}{3}}$
2. $\varphi'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial x}$
3. $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * u^{-\frac{1}{2}} * \frac{1}{3} * e * x^{\frac{2}{3}} * (3x+5)$
4. $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{18} * (e^x * x^{\frac{5}{3}})^{\frac{-1}{2}} * e^x * x^{\frac{2}{3}} * (3x+5)$ ⇐ multiplicando por $\frac{x}{x}$
5. $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{18x} * (e^x * x^{\frac{5}{3}})^{\frac{-1}{2}} * e^x * x^{\frac{5}{3}} * (3x+5)$
6. $|\varphi'(x)| = |\frac{\partial\varphi}{\partial x}| = |\frac{1}{18x} * (e^x * x^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}} * (3x+5)| < 1$

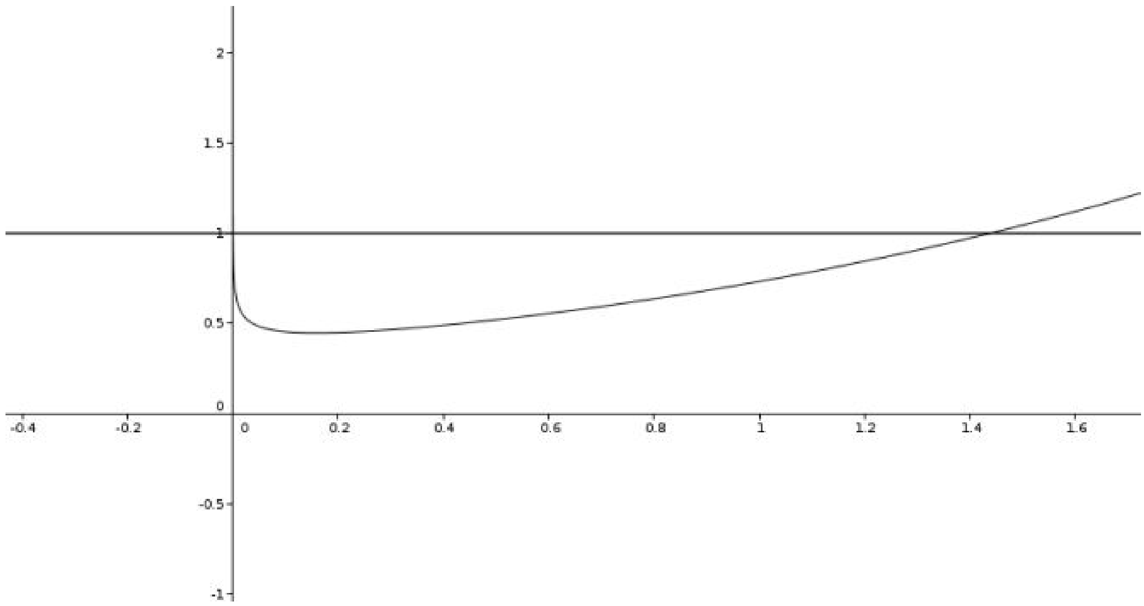

imagem 1: Visualização do intervalo de convergência, sendo a curva o módulo derivada de $\varphi(x)$

Com a utilização do software Geogebra, percebe-se que no intervalo (0, 1.43856) a inequação é respeitada. Portanto, ao escolher um ponto inicial pertencente à este intervalo, a função de iteração irá convergir para uma raíz de $f(x)$.

4.2 Análise da função 20

Considere a função 20 definida por $f(x) = 2^x - 6 * ln(x)$, para obtenção da função de iteração $\varphi(x)$ foram necessário alguns passos:

1. ϕ (x) = $2^x = 6ln(x)$
2. ϕ (x) = $ln(2^x) = ln(6ln(x))$
3. ϕ (x) = $xln(2) = ln(6ln(x)$
4. ϕ (x) = $\frac{ln(6*ln(x))}{ln(2)}$

Passos para encontrar a derivada de $\varphi(x)$:

1. $\varphi'(x) = \frac{1}{ln(2)} * ln(u)' \Leftarrow$ *considere* $u = 6 * ln(x)$
2. $\varphi'(x) = \frac{1}{ln(2)} * \frac{6}{u} * \frac{1}{x}$
3. $\varphi'(x) = \frac{1}{ln(2)} * \frac{6}{6*ln(x)} * \frac{1}{x}$
4. $\varphi'(x) = |\frac{1}{ln(2)*x*ln(x)}| < 1$

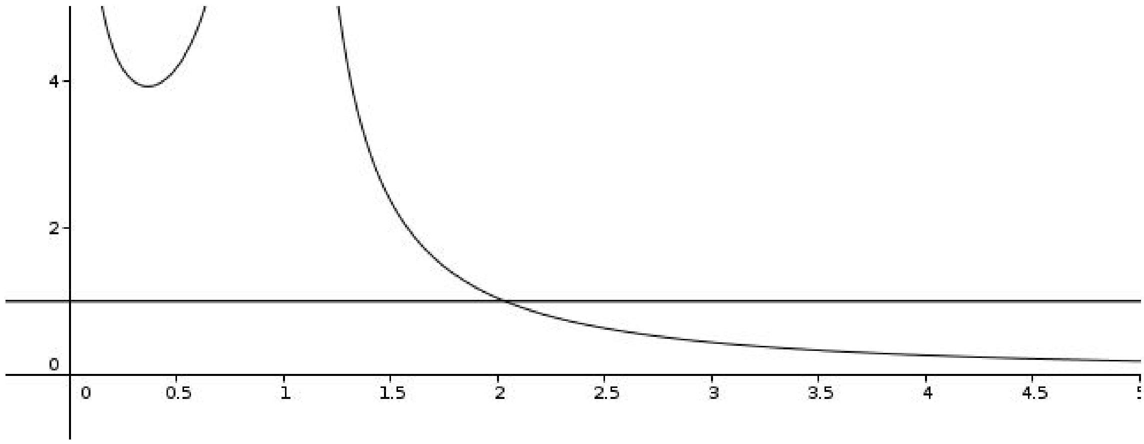

imagem 1: Visualização do intervalo de convergência, sendo a curva o módulo da derivada de $\varphi(x)$

Com auxílio do software Geogebra é possível visualizar que a inequação é satisfeita para o intervalo $(2.03315, \infty)$. Portanto, ao escolher um ponto inicial pertencente à este intervalo, a função de iteração irá convergir para uma raíz de $f(x)$.

6. Conclusão

Como síntese do conteúdo apresentado neste trabalho, foi implementado, em Python, um software o qual realiza aproximações de raízes de funções utilizando iterações do método do ponto fixo. Em sua execução, na função 7, com a escolha do valor inicial de x igual 2, foram necessárias 99 interações para se encontrar a raiz aproximada. Já para a função 18, com a definição do valor inicial de x como 0.5, foram necessárias 92 interações para se chegar em uma raiz aproximada da função. Por fim, função 20, foi escolhido o valor inicial de x igual a 5, logo 60 interações foram computadas para se chegar no zero da função com erro absoluto estimado de 10^{-10} .

Referências

RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. Joinville: Makron Books do Brasil, 1996. 406 p.