

4.2 管内および攪拌槽内の流れ

4.2.1 目的

一般に流動状態には乱流と層流があり、流動状態によって流動に関連するあらゆる特性が変化する。例えば流体を輸送あるいは混合・攪拌するのに必要な動力のみならず、熱や物質の移動速度も変化する。流体を対象とする装置は多種多様であるが、ここでは管内と攪拌槽内の流動状態を取り上げ、層流から乱流へ流動状態が遷移した際に圧力損失や攪拌所要動力がどのように変化するのかその特徴を調べ、また同時に流動状態の観察を通して、流動状態がどのような因子によって支配されるのかを理解することを目的とする。

4.2.2 基礎事項

4.2.2.1 管内の流動状態

管内の流速が小さい場合、管内の流動状態は図 4.2.1 に示す層流となる。層流とは流線流れとも呼ばれ、流体の分子が互いに平行に流れる流れである。管壁に接する部分は移動せず、壁を遠ざかるにつれて速度が増し、中心部が最大の速度となる。一方、速度が増し、ある一定値になると流動状態が飛躍的に変化して乱流となる。乱流は各部における速度も方向も不規則で、定性的には平均流速に乱流渦と呼ばれる速度変動が異なった流れとみなすことができる。この速度変動の特徴は3次的に不規則に変動する流れであり、壁から離れた中心部には大きな渦が存在し、壁に近づくにつれて小さな渦となる傾向がある。壁のごく近傍では流体粒子は壁と平行に流れざるを得ないので、図 4.2.1 に示すように、この領域には層流域の薄い層が存在する。大きな壁に基づく乱流変動の速度が大きいため、壁から離れた領域では流体間の混合速度が大きく、物質・熱の移動が起こりやすい。これに対して壁近傍では混合速度が遅く、物質や熱移動が起こりにくくなる。この物質や熱の移動に対して大きな抵抗を示す領域が流体境膜と呼ばれており、その原因は管内での流動状態の相違に基づいている。

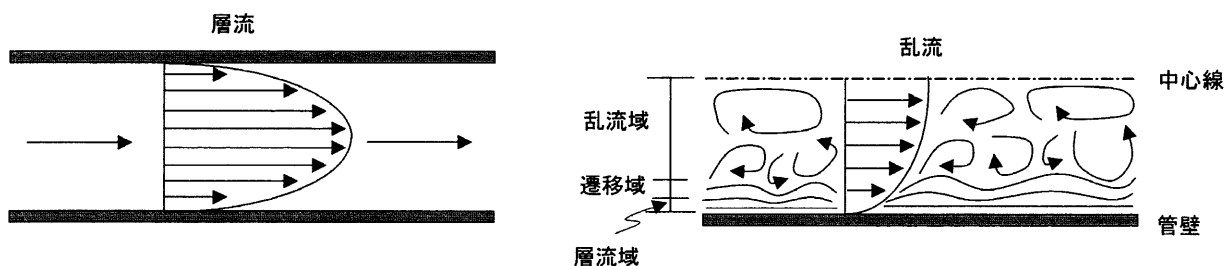


図 4.2.1 円管内流れの層流および乱流

4.2.2.2 管内の流動状態を支配する無次元数と管内圧力損失

運動量収支と摩擦係数

図 4.2.2 のように円管内を非圧縮性流体が定常的に流れているとき、半径 r の仮想円筒について運動量収支をとると (4.2.1) 式のようになる。

式中の ΔP は仮想円筒両端の差圧 ($= P_0 - P_L$) であり、左辺第 1、2 項は左および右端より流入する運動量、第 3 項は円筒面に働く応力、第 4 項は左右両端に働く外力である。

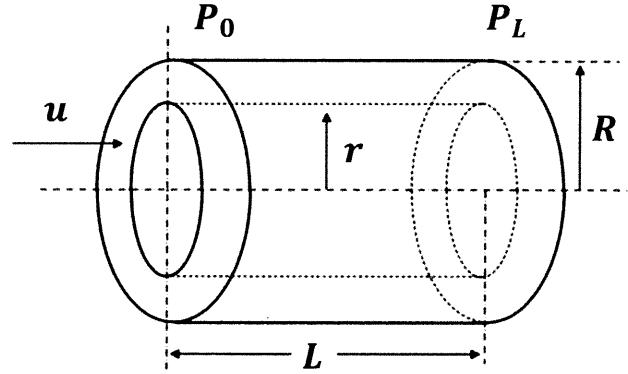


図 4.2.2 仮想円筒

$$\int_0^r 2\pi r \rho u^2 - \int_0^r 2\pi r \rho u^2 - 2\pi r L \tau + \pi r^2 \Delta P = 0 \quad (4.2.1)$$

両端から出入りする運動量は等しいので、

$$\tau = \frac{r}{2L} \Delta P \quad (4.2.2)$$

上式は層流でも乱流でも成立する。また、 $r = R$ (管の半径) とすれば、応力は壁のものとなり、 $\tau = \tau_w$ として、

$$\tau_w = \frac{R}{2L} \Delta P \quad (4.2.3)$$

摩擦の大きさを表す無次元量として摩擦係数 f を流体の平均速度 \bar{u} を用いて以下のように定義できる。

$$\tau_w = \frac{f \rho \bar{u}^2}{2} \quad (4.2.4)$$

これは、次元解析から無次元数 f は Re 数の他に管内の粗さを表す相対粗度 e/d の関数であることが知られていることによる。ここで、 ΔP の代わりに f を用いて解析する理由は、無次元数相互の関係として表現する方が多くの因子をまとめて簡単な形式になるからである。(4.2.3) 式および (4.2.4) 式より圧力損失 ΔP と f とは以下の関係がある (Fanning の式)。

$$\Delta P = 4f \left(\frac{\rho \bar{u}^2}{2} \right) \left(\frac{L}{d} \right) \quad (4.2.5)$$

ここで、 $d = 2R$ である。この (4.2.5) 式は、層流・乱流いずれの条件においても成り立つ。

管内の速度分布と圧力損失

層流域での管内流動と圧力損失の関係は簡単に導くことができる。管内を流れる流体がニュートン流体であるとする、

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (4.2.6)$$

これを(4.2.2)式に代入して、管壁で流速は 0 ($r = R$ で $u = 0$) という境界条件で積分すると、

$$u = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (4.2.7)$$

(4.2.7)式はいわゆる放物線形速度分布として知られている。 u_0 は管中心($r = 0$)の流速である。(4.2.7)式を r について $r = 0$ から $r = R$ まで積分すると体積流量 Q_v となり、

$$Q_v = \int_0^R 2\pi r u dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L} = \pi R^2 \bar{u} \quad (4.2.8)$$

(4.2.8)式は Hagen-Poiseuille の法則として知られる。これと(4.2.5)式から

$$f = \frac{16\mu}{\rho \bar{u} d} = \frac{16}{Re} \quad (4.2.9)$$

であることがわかる。ここで、 Re は次式で定義される Reynolds 数である。

$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu} \quad (4.2.10)$$

層流域では上述のように速度分布は放物線型になるが、乱流域では図 4.2.1 に示したように管壁付近で大きな速度分布を有し、中央部では比較的平均流速の小さな速度分布となる。このように乱流状態で速度分布が層流状態と異なるのは乱流渦の存在による。

(4.2.6)式からわかるように、層流状態での運動量は速度勾配に基づく粘性力によって伝播される。これに対し乱流渦が存在すると、運動量の輸送は粘性力の他に、乱流変動に伴う流体の移動によっても引き起こされることになる。乱流渦は中央部で大きく、管壁近くで小さいので、流体移動に伴う運動量の輸送速度は中央部で大きくなる。このように、乱流状態では粘性力による運動量の輸送と乱流渦による運動量の輸送とがある。後者の乱流渦に基づき生じる応力は Reynolds 応力と呼ばれ、乱流状態では粘性応力に加えて Reynolds 応力が存在するために、層流状態に比べて非常に大きな流動抵抗を示すことになる。

ここで、流体移動に伴う運動量輸送の増加を流体の見かけの粘性率の増加として捉えた場合、管の中央部で大きく、周辺部で小さくなるものとみなすことができる。このような考え方に基づけば、乱流状態での速度分布は解析的に求めることができないため、これを求めるためのモデルが提案されている。その代表的なものに Prandtl の混合長理論がある。

流体の移動に伴う運動量の輸送が流動状態を支配する場合には、流体の持つ密度、すなわちそれに基づく慣性力が重要な役割を担っている。これに対して層流下では(4.2.7)式からわかるように、速度分布は流体の密度に無関係であり、このため(4.2.9)式を(4.2.5)式に代入した式では密度 ρ が相殺されて、圧力降下 ΔP も慣性項と無関係になる。従って、単位長さ当たりの圧力降下 $\Delta P/L$ を支配する因子を考えた場合、層流下では μ 、 \bar{u} 、 d であり、乱流状態ではこれに ρ を加えなければならない。これらの変数を用いて次元解析を行えば、単位長さ当たりの圧力降下は、(4.2.11)式で表されることがわかる。

$$\frac{\Delta P}{L} \approx \left(\frac{\rho \bar{u}^2}{d} \right) Re^x \quad (4.2.11)$$

ここで x は任意の定数である。摩擦係数 f の定義式でもある(4.2.5)式と(4.2.11)式を比較すれば、 f は Re 数の関数になることがわかる。また、流れの状態も当然 Re 数によって規定されることになる。この無次元数は慣性力と粘性力の比を表すものであるから、 Re 数が小さければ粘性力が支配的になり、流れは層流となる。これとは逆に Re 数が大きければ乱流となり、層流から乱流への遷移は Re 数が2000を越えた領域で生じる。

乱流域での摩擦係数は実験的に知られており、平滑管に対する相関式としては次のBlausius式が良く知られている。

$$f = 0.0791 Re^{-1/4} \quad (4.2.12)$$

図4.2.3に層流((4.2.9)式)および乱流((4.2.12)式)における f と Re の関係を示す。図に示すように層流域では f が Re 数とともに大きく減少するのに対し、乱流域では Re 数が大きく変化しても f は大きく変化しない。

一方、管壁に粗さがある場合、摩擦係数は粗さのスケールと管径の比 e/d の関数として、完全乱流の条件に対して次のようにまとめられている。

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2.28 - 4 \log \left(\frac{e}{d} \right) \quad (4.2.13)$$

また(4.2.13)式に至るまでの中間領域では、

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -4 \log \left\{ \frac{1}{3.71} \left(\frac{e}{d} \right) + \frac{1.26}{Re \cdot f^{1/2}} \right\} \quad (4.2.14)$$

を用いることができる。

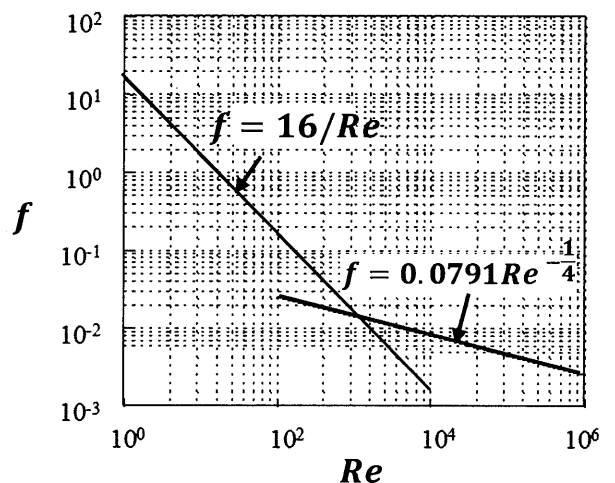


図 4.2.3 f と Re 数の関係

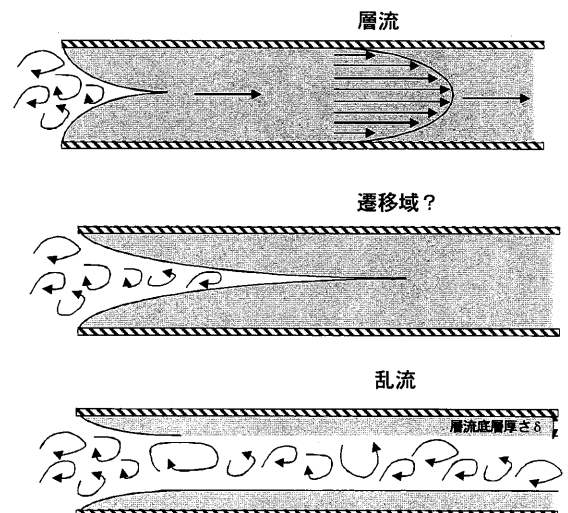


図 4.2.4 層流、乱流、遷移域の流れ

乱流での応力と速度分布について

はじめに管内を流れる流体における、壁面に働く応力 τ_w と流動状態について考える。管に流れ込む流体は、管の入り口では乱れをともなっている。この際、図 4.2.4 の上図に示すように壁と流体との作用が流体内部までおよび、乱れが整えられた状態が層流となる。一方、図 4.2.4 の下図に示すように、壁との力のやりとりが流体中心部まで行き渡らない場合には、乱れが流動状態全体を支配し乱流となる。しかし壁付近には乱れが整えられた流れ場（層流底層）が存在する。したがって流体に働く応力と流動状態は管内に存在する層流部分の厚さに依存すると考えられる。

本実験で測定する圧力損失と応力の関係は(4.2.3)式で表される。(4.2.3)式を書き換えると、

$$\Delta P = \tau_w \frac{2L}{R} \quad (4.2.3')$$

この関係式が示す応力の物理的意味は、「応力とは長さ方向に関する管径方向の速度分布である」ということに他ならない。層流の場合には壁から流体中心部にかけて放射線形の速度分布をとり、それは理論的に導き出され、応力と速度分布の関係も明確に示される。乱流の場合にも同様であるが、応力が働くのは層流底層内だけであるので、その部分の速度分布を考えなければならない。すなわち、流体に働く応力 τ_w は、流体が Newton 流体であるなら(4.2.6)式であり、(4.2.3')式の意味を考えると層流底層内（層流底層厚さ： δ ）の速度分布が応力と直接関係がある。

$$\tau_w = -\mu \frac{du}{dr} = -\mu \frac{\bar{u}}{\delta} \quad (4.2.15)$$

乱流での摩擦係数と Re の関係と移動現象のアナロジーについて

壁面に作用する摩擦応力 τ_w と摩擦係数 f との関係は、流体密度 ρ と平均流速 \bar{u} を用いて次式で表される。

$$\tau_w = f \cdot \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (4.2.16)$$

(4.2.15)式より、壁面での応力と摩擦係数との関係は次式となる。

$$\tau_w = -\mu \frac{\bar{u}}{\delta} = f \cdot \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (4.2.17)$$

したがって管径 d と層流底層厚さ δ の関係(d/δ)は

$$\frac{d}{\delta} = -f \cdot \left(\frac{d\rho \bar{u}^2}{2\mu u} \right) = -f \cdot \left(\frac{d\rho \bar{u}}{2\mu} \right) = -\frac{1}{2}f \cdot Re \quad (4.2.18)$$

となり、乱流での摩擦係数と Re 数の関係は(4.2.12)式で与えられるので、 d/δ は次式となる。

$$\frac{d}{\delta} = -\frac{1}{2}f \cdot Re = -\frac{1}{2}(0.0791Re^{-1/4})Re \propto Re^{0.75} \quad (4.2.19)$$

ここで、移動現象の相似性（アナロジー）を考えるために、乱流場での伝熱現象について着目する。円管内の発達した乱流の強制対流伝熱は、

$$Nu = \frac{d}{\delta} = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4} \quad (4.2.20)$$

与えられる。(4.2.19)および(4.2.20)式を比較すると明らかなように乱流場での d/δ とはいずれの場合も Re 数の 0.8 乗程度に依存することが分かり、移動現象に数多く見られるアナロジーがここでも確認できる。

4.2.2.3 攪拌槽内の流動状態

攪拌装置の構成

攪拌装置の最も基本的な構成を図 4.2.5 に示す。円筒槽の中心に攪拌翼（インペラ）を取り付け、モーターにより攪拌翼を回転させることにより槽内の流体を攪拌するように構成される。攪拌翼は構成要素の中で最も重要な部分を占め、モーターから与えられた回転運動の機械的エネルギーにより、攪拌槽内の液全体を流動させる液循環作用と局所的な混合を達成させるせん断作用を与える。攪拌翼形状によりこの2つの攪拌作用の割合が異なってくるので、攪拌目的や攪拌液の物性により最適な翼形状を選定する必要がある。パドル、タービン、プロペラ翼は主に低粘度液攪拌用として、一方、アンカーやヘリカルリボンは高粘度液攪拌用として用いられることが多い。円筒形攪拌槽の中心に攪拌翼を取り付けると、そのままでは旋回流が主の状態になってしまうために、それを防ぎ、上下流を起こさせる目的で邪魔板（バフフル）を設置することがある。

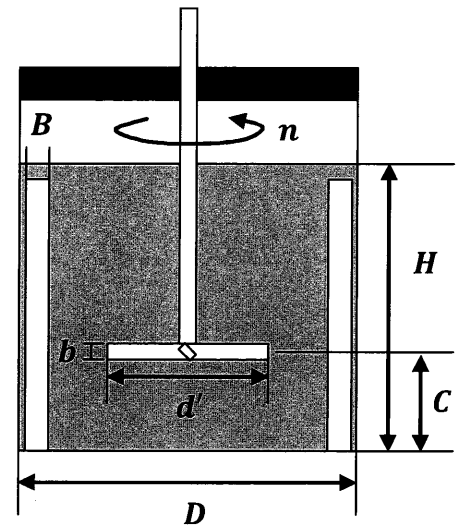


図 4.2.5 攪拌槽の構成

攪拌 Reynolds 数

攪拌操作において最も重要な特性は流動特性である。その流動状態は、攪拌すべき流体の粘度や密度の違いにより異なる。一般に、高粘性流体の攪拌は層流状態で操作されることが多く、低粘性流体の攪拌は乱流状態で操作されることが多い。層流状態と乱流状態の区別は次式で示される攪拌 Reynolds 数によって判別される。

$$Re \equiv \frac{d'(nd')\rho}{\mu} = \frac{nd'^2\rho}{\mu} \quad (4.2.21)$$

ここで、 (nd') は攪拌系の代表速度である。一般に $Re < 50$ では層流状態、 $Re > 1000$ では乱流状態と判別される。また、 $50 < Re < 1000$ の範囲では、一概にはいえないが、層流から乱流への過渡状態にあると考えられ、だいたい攪拌翼先端部分から不安定な流れ（乱流の始まり）が生じ、 Re 数の増加とともに不安定状態から

乱流状態が全槽内に広がっていく。この攪拌層内の流動状態を次ページの図 4.2.6 に示す。

攪拌翼と流動状態

垂直状のパドル翼やディスクタービン翼は、翼の回転による半径方向に流体を吐出する。攪拌槽内に邪魔板が装着されていないときは、図 4.2.6(d₁)に示すように槽内には輻流型の流れパターンと呼ばれる渦流れを形成する。この場合、槽内の液自由表面にはくぼみが生じるほか、渦の中央には固体的回転体を形成するためこの部分は混合不良である。一方、邪魔板を槽内の隅に数枚所装着すると、上述の渦流れは消滅し、攪拌翼からの吐出流は、図 4.2.6(d₂)に示すように攪拌翼を中心に槽内を上下二分して循環流を発生する。このとき、通常の攪拌 Re 数が数千を越える乱流状態となると循環流は槽全体に及んで、液流の乱れも加わって効果的な攪拌状態となる。攪拌 Re 数が数百以下になると攪拌翼から離れた流れは層流となって攪拌による混合作用は低下する（図 4.2.6(a)–(c)）。傾斜状のパドル翼（ピッチパドル）やプロペラ翼の場合は、邪魔板が無くても軸方向に吐出流れが発生し、攪拌液を流動させる性能は上述の輻流型を特徴とする翼に比べて一般的に高くなる。

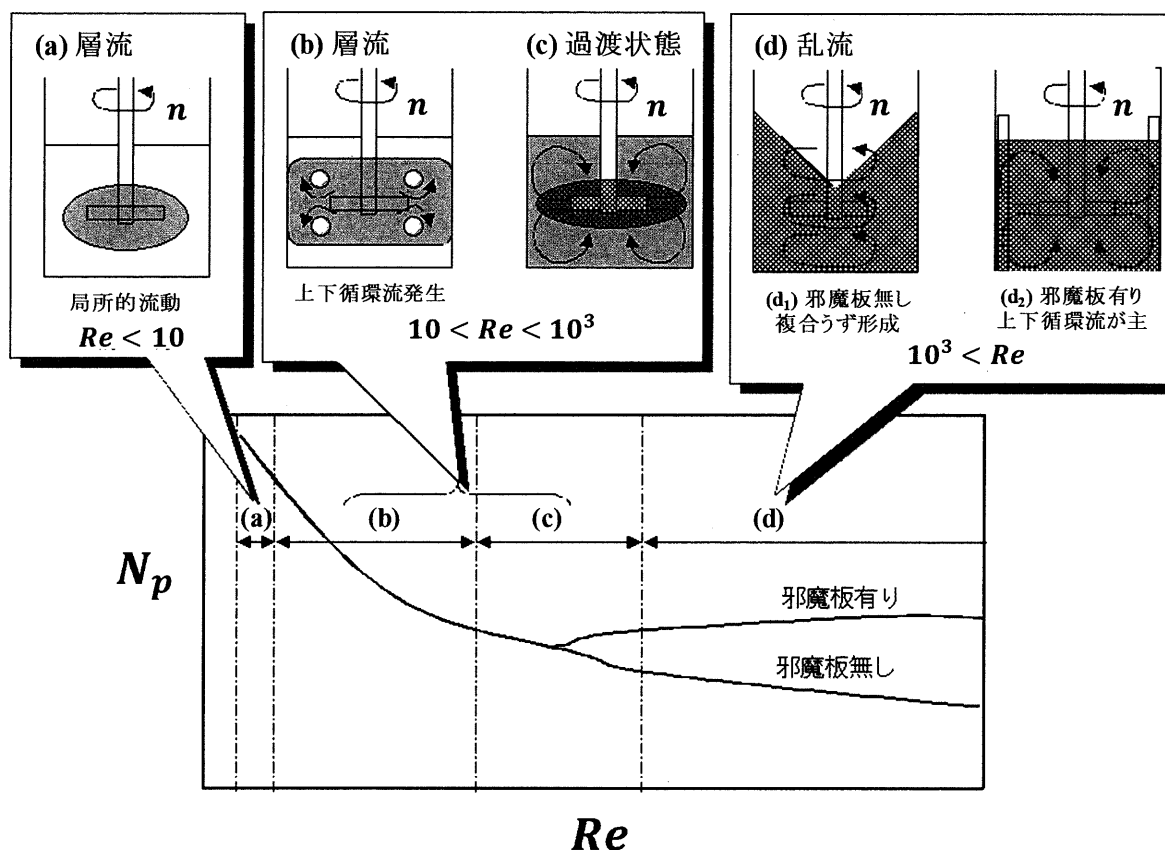


図 4.2.6 攪拌槽内における液流動状態と動力数の関係

中心部液面低下と槽壁部液面上昇

邪魔板のない攪拌槽において、攪拌速度を大きくとる（攪拌 Re 数が大きくなる）と、中心部における自由液面の低下によるガスの吸い込みや、槽壁部での液面上昇による液の溢れが生じることがある。静止液面からの中心部液面低下量 ΔH_1 [m]と槽壁部液面上昇量 ΔH_2 [m]は、前項の旋回流速度分布 ($m = 1$) を用いて、近似的に次式で表される。

$$\Delta H_1 = \pi^2 \cdot d \cdot Fr \cdot \left(\frac{2r_c}{d} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2r_c}{D} \right)^2 \left\{ \ln \left(\frac{D}{2r_c} \right) + \frac{3}{4} \right\} \right] \quad (4.2.22)$$

$$\Delta H_2 = \pi^2 \cdot d \cdot Fr \cdot \left(\frac{2r_c}{d} \right)^2 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \left\{ \ln \left(\frac{D}{2r_c} \right) + \frac{1}{4} \right\} \quad (4.2.23)$$

ここで、 Fr は Froude 数と呼ばれ、次式で定義される。

$$Fr \equiv \frac{(nd)^2}{dg} = \frac{n^2 d}{g} \quad (4.2.24)$$

ここで g は重力加速度である。

式(4.2.22)および(4.2.23)より液面形状は Fr 数に影響されることが分かる。

旋回流速度分布と固体的回転半径

乱流条件下にある邪魔板なし攪拌槽内の旋回流速度 u_t [m/s]は次式で近似される。

$$u_t = 2\pi n r \quad (0 \leq r \leq r_c) \quad (4.2.25)$$

$$u_t = 2\pi n r_c \left(\frac{r_c}{r} \right)^m \quad (r_c \leq r \leq \frac{D}{2}) \quad (4.2.26)$$

ここで、 r_c は固体的回転半径とよばれ、槽中心からの距離 r が $r \leq r_c$ では旋回流の角速度は翼の回転角速度と同じであり、 $r \geq r_c$ では $m = 0.8$ と近似されることが多い。

固体的回転半径 r_c は翼寸法や Re 数によって変わる r_c の推算式として次式がある。

$$\frac{2r_c}{d} = 1.23 \left\{ 0.57 + 0.35 \left(\frac{d}{D} \right) \right\} \left(\frac{b}{D} \right)^{0.036} (n_p)^{0.116} \left(\frac{Re}{10^3 + 1.43Re} \right) \quad (4.2.27)$$

Re 数が小さい時、固体的回転半径は消滅する。また、邪魔板付き攪拌槽では、乱流域でも固体的回転半径は小さいか、ほとんど現れない。

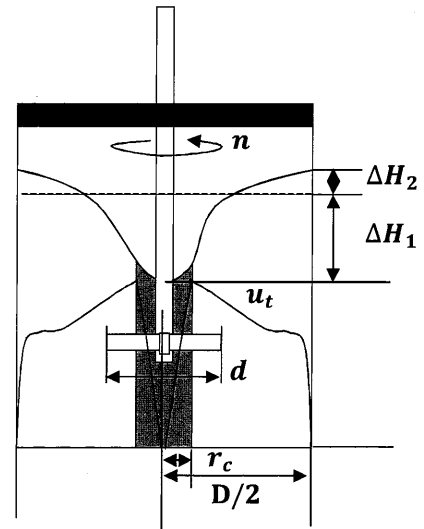


図 4.2.7
中心部液面低下量と槽壁部
液面上昇量

4.2.2.4 攪拌操作と混合性能

攪拌所要動力

攪拌槽内に流れを引き起こすためのエネルギーは、モーターのトルクを攪拌翼に伝えることにより与えられる。攪拌翼の回転数が n である場合、単位時間当りに与えられるエネルギー、すなわち、攪拌所要動力 P_w は、攪拌軸のトルク T より、次式で与えられる。

$$P_w = 2\pi nT \quad (4.2.28)$$

攪拌所要動力に関する無次元数 N_p は動力数と呼ばれ、次式で定義される。

$$N_p = \frac{P_w}{\rho n^3 d'^5} = \frac{2\pi T}{\rho n^2 d'^5} \quad (4.2.29)$$

攪拌所要動力は、攪拌槽、攪拌翼の形状・大きさ、あるいは攪拌される流体の粘度・密度などで変わるが、幾何的に相似の攪拌槽では、動力数 N_p は攪拌 Re 数の関数として表すことができる。

図 4.2.6 にパドル型攪拌翼を例にとった場合の攪拌 Re 数と動力数 N_p の関係を示す。(a)区間から(b)区間を経て(c)区間の初めまでは層流状態となっているが、慣性力の影響が強くなって吐出流が発生することにより、その分の対流による運動およびエネルギー量が増加するので、 N_p 値は攪拌 Re 数が増加するにつれて(a)区間の延長線上より上方の大きな値を示す(右下がり 45°から離れて水平に近づく)。(c)区間から(d)区間の初めにかけて、翼端付近から発生した乱流が次第に槽内全体へ波及していくが、邪魔板がない場合には剛体的な固体的回転渦の発生により翼と液の相對運動が弱くなるので、 N_p 値は減少傾向を示し、槽全体が乱流状態になった後は N_p-Re 曲線は水平線に近い緩い右下り傾向のほぼ直線に落ち着く。邪魔板を挿入した場合には攪拌翼は全負荷の状態に近づき、吐出流量の増加、乱流の強化に対応して増加し、その後、 N_p-Re 曲線は攪拌 Re 数に関係なくほぼ水平直線となる。

このように N_p-Re 曲線の傾向は、攪拌翼の吐出能力、乱流層流状態と密接に関係している。代表的な攪拌所要動力の推算式としては、簡単な形状の羽根板について広範囲に適用可能な永田の式がある。

邪魔板なしの攪拌所要動力(永田の式)

邪魔板のない円筒型攪拌槽における 2 枚羽根パドル翼の動力数は次式で示すことができる。

$$N_p = \frac{A}{Re} + B \left(\frac{10^3 + 1.2Re^{0.66}}{10^3 + 3.2Re^{0.66}} \right)^p \left(\frac{H}{D} \right)^{(0.35+b/D)} (\sin \theta)^{1.2} \quad (4.2.30)$$

ここで、 θ は羽根の傾斜角(羽根取付角度)であり、

$$A = 14 + \left(\frac{b}{D} \right) \left\{ 670 \left(\frac{d'}{D} - 0.6 \right)^2 + 185 \right\} \quad (4.2.31)$$

$$B = 10^{\left\{ 1.3 - 4 \left(\frac{b}{D} - 0.5 \right)^2 - 1.14 \left(\frac{d'}{D} \right) \right\}} \quad (4.2.32)$$

$$p = 1.1 + 4 \left(\frac{b}{D} \right) - 2.5 \left(\frac{d'}{D} - 0.5 \right)^2 - 7 \left(\frac{b}{D} \right)^4 \quad (4.2.33)$$

である。攪拌翼の羽根枚数 n_p が 2 以外の場合には、羽根枚数と攪拌翼幅の積 $n_p \cdot b$ が同じである 2 枚羽根パドル翼、すなわち攪拌翼幅 $b' = (n_p \cdot b)/2$ の 2 枚羽根パドル翼として、(4.2.30)式を用いて攪拌所要動力を求めることができる。(4.2.30)式の右辺第 1 項および第 2 項は、それぞれ層流域と乱流域の影響を表す項である。すなわち、攪拌液の粘度が大になると Re 数は小さくなるので右辺第 1 項が支配的

となり、動力数は次式のように簡略化される。

$$N_p = \frac{P_w}{\rho n^3 d'^5} \approx \frac{A}{Re} = \frac{A\mu}{d'^2 n \rho} \quad (4.2.34)$$

また、液粘度が小になると Re 数が大となり、右辺第1項の影響は無視できる。したがって、動力数は、係数 A 、 B 、 p 、 H/D は攪拌装置の幾何寸法で定まるので、 Re 数が極めて大きい範囲では一定値に漸近する。

$$N_p = \frac{P_w}{\rho n^3 d'^5} \approx B \left(\frac{10^3 + 1.2 Re^{0.66}}{10^3 + 3.2 Re^{0.66}} \right)^p \approx B \left(\frac{1.2}{3.2} \right)^p = const. \quad (4.2.35)$$

このような力と流れの状態の関係は前述の管内の流れにおける f と Re 数の関係と類似であり、力と流れの状態に関して管内および攪拌層内の流れにもアナロジーがあることが分かる。

完全邪魔板条件での攪拌所要動力

液粘度が小さい乱流範囲では、液の旋回流を押えるために攪拌槽の周辺に邪魔板を取り付ける。邪魔板の幅 B_b を増加していくと、ある点まで動力数は上昇するが、それを越えると減少に転じる(図4.2.8)。この動力数が最大値を示す邪魔板の幅と邪魔板枚数との関係は次式で示され、完全邪魔板条件と呼ばれている。

$$\left(\frac{B_b}{D} \right)^{1.2} \cdot n_B = 0.35 \quad (4.2.36)$$

完全邪魔板条件下の動力数は攪拌 Re 数の高い乱流域では一定値を示す。このときの最大動力数は、この一定値を水平に延長した交点の攪拌 Re 数 R_θ に相当する動力数を求めることにより得られる(図4.2.9)。この R_θ は、攪拌翼径、翼幅、槽径によって定まり、次式で算出できる。

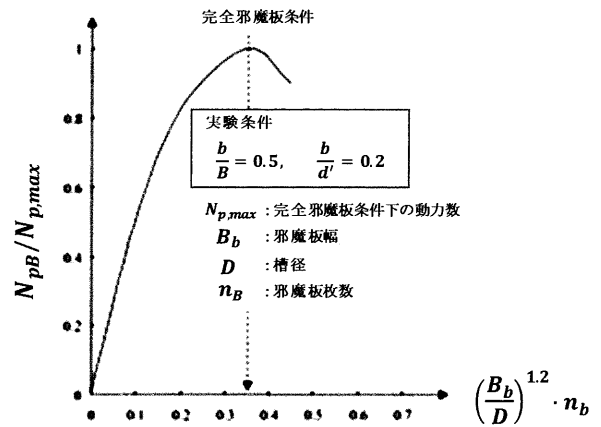


図 4.2.8 完全および不完全邪魔板条件

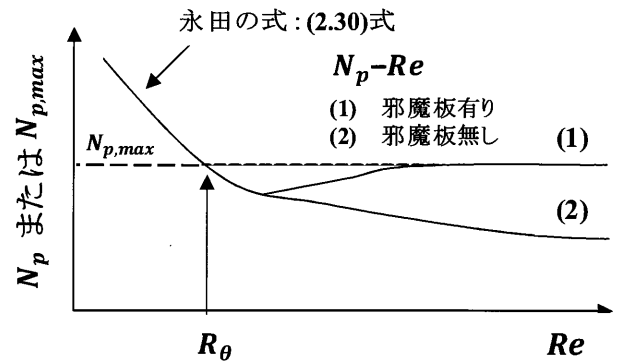


図 4.2.9 実験式の求め方

$$R_\theta = 10^{4(1-\sin\theta)} \left\{ \frac{25D}{b} \left(\frac{d'}{D} - 0.4 \right)^2 + \frac{b/D}{0.11(b/D) - 0.0048} \right\} \quad (4.2.37)$$

つまり、完全邪魔板条件での最大動力数 $N_{p,max}$ は、この R_θ を(4.2.30)式の攪拌 Re 数に代入して求めることができる。

不完全邪魔板条件での攪拌所要動力

邪魔板付き攪拌槽の場合、全てが完全邪魔板条件下にて設計されるわけではなく、むしろ、邪魔板幅は $B_b = 0.06 \sim 0.1D$ 程度で、邪魔板枚数 $n_B = 3 \sim 6$ がよく用いられている。邪魔板幅の増加に伴う動力数の変化は図 4.2.8 のようになり、完全邪魔板条件以外の邪魔板条件に対して次式の関係が得られている。

$$N_{pB} = N_{p,max} - (N_{p,max} - N_{p\infty}) \left\{ 1 - 2.9 \left(\frac{B_b}{D} \right)^{1.2} \cdot n_B \right\}^2 \quad (4.2.38)$$

$$N_{p\infty} = B \left(\frac{1.2}{3.2} \right)^p \left(\frac{H}{D} \right)^{(0.35+b/D)} (\sin \theta)^{1.2} \quad (4.2.39)$$

したがって、完全邪魔板条件で得られた $N_{p,max}$ および(4.2.39)式で得られた $N_{p\infty}$ を(4.2.38)式に代入することにより不完全邪魔板条件下での動力数 N_{pB} が求まる。

循環流量と吐出流量

攪拌槽内の停滞部をなくし、流体を素早く混合するためには、攪拌液の適度な循環が必要である。図 4.2.10 は攪拌翼先端からの吐出流が周囲からの同伴流量と合流して循環流を起こすことを示したものである。循環流量 q_c は、後述する混合時間に関係がある循環時間 T_c と次の関係がある。

$$q_c = \frac{V}{T_c} \quad (4.2.40)$$

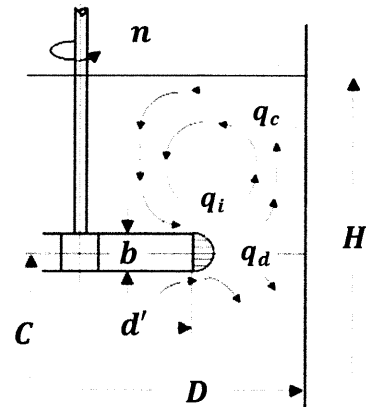
ここで、 V は攪拌槽内の流体の体積である。無次元数としての循環流量数 N_{qc} は次式で定義される。

$$N_{qc} \equiv \frac{q_c}{nd'^3} \quad (4.2.41)$$

一方、吐出流量 q_d は循環流を引き起こす要因となる流量として重要であり、その無次元数である吐出流量数 N_{qd} は次式で定義される。

$$N_{qd} \equiv \frac{q_d}{nd'^3} \quad (4.2.42)$$

循環流量および吐出流量は、攪拌翼端の上昇流および吐出流の速度分布をそれぞれ面積積分して求める必要があるが、乱流条件下では次のような実験式が得られている。



全循環流(q_c)=吐出流量(q_d)+同伴流量(q_i)

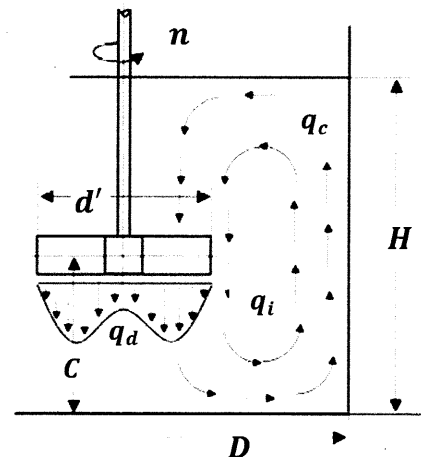


図 4.2.10 攪拌槽内の液循環流

$$N_{qc} = N_{qd} \left[1 + 0.16 \left\{ \left(\frac{D}{d'} \right)^2 - 1 \right\} \right] \quad (4.2.43)$$

$$N_{qd} = 0.12 \left(\frac{n_p \cdot b}{d'} \right)^{1/3} \left(\frac{D}{d'} \right)^{0.92} \left(\frac{H}{D} \right)^{0.5} \sqrt{N_p} \quad (4.2.44)$$

混合時間

混合時間 T_M とは、攪拌槽に異種の流体を投入した後、目的に合った均一度に到達するまでに要する時間と定義される。無次元混合時間 $n \cdot T_M$ の値は層流域と乱流域で異なるが、攪拌装置の幾何的形狀が定まると、それぞれの領域ではほぼ一定値を示す。ただし、 Re 数が極端に小さい場合、攪拌槽内に停滞部ができ、混合時間は極端に大きくなる。

乱流条件下での混合時間は、攪拌翼の循環流量(または吐出流量)と乱流状態によって影響される。混合時間に関する無次元相関式として次式がある。

$$\frac{1}{n \cdot T_M} = 0.092 \left\{ \left(\frac{d'}{D} \right)^3 N_{qd} + 0.21 \left(\frac{d'}{D} \right) \left(\frac{N_p}{N_{qd}} \right)^{1/2} \right\} (1 - e^{-13(d'/D)^2}) \quad (4.2.45)$$

右辺第1項は循環流の混合作用(対流項)、第2項は乱流による混合作用(乱流拡散項)、第3項は吐出流の対流範囲をそれぞれ表している。

一方、層流域については、各種高粘度用攪拌翼に対しても成立する無次元相関式として次式がある。

$$\frac{1}{n \cdot T_M} = (9.8 \times 10^{-5}) \left(\frac{d'^3}{D^2 H} \right) (N_p \cdot Re) \quad (4.2.46)$$

攪拌 Re 数が極端に小さいときには、後述するように動力数 N_p はほぼ A/Re (A は定数)に等しくなるので、この領域での無次元混合時間はほぼ一定値を示すようになる。

4.2.3 実験

実験は、管内の流動(実験 A) および攪拌槽内の流動(実験 B) についてそれぞれ行う。1 班と 2 班は実験 A→実験 B の順に、3 班と 4 班は実験 B→実験 A の順に行う。基本的に自班で得られた実験データを用いて各人のレポートを作成する。

4.2.3.1 実験装置

実験 A 管内の流れ

図 4.2.11 に管内流動実験に用いる装置の概略図を示す。測定部は圧力損失測定用の 3 本の円管と流動状態観察用のアクリル製円管で構成されている。圧力測定用の円管は内径 4、6、10 mm の 3 つであり、それぞれ差圧測定用のマノメーター(間隔 1 m)に接続されている。流動状態観察用の円管は内径が 6 mm である。すべての円管に供給される流体は水道水であり、オーバーフロータンクから供給される。ヘッドタンクは円管の位置から約 1.5 m の高さに取り付けられている。

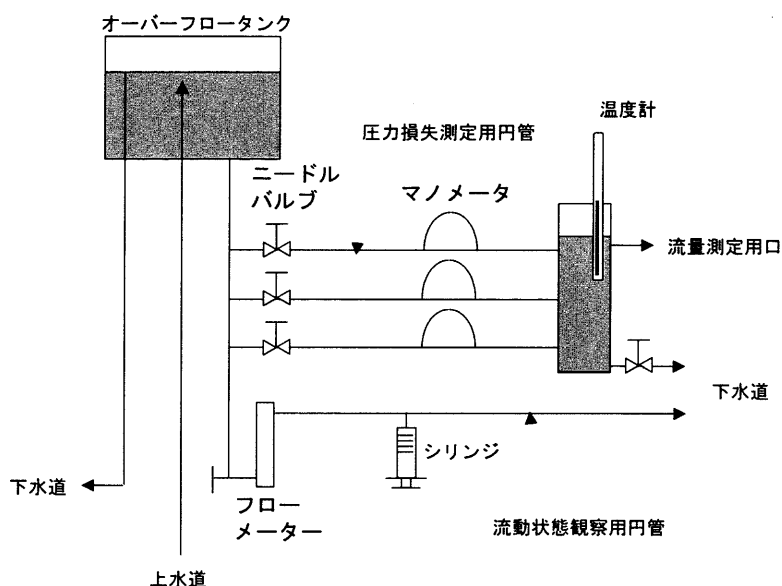


図 4.2.11 管内流動実験装置図

実験 B 攪拌槽内の流れ

攪拌装置は図 4.2.5 と同様な構成になっているが、動力数を測定するため攪拌軸にトルクメーターを装着する。使用する攪拌翼はピッチパドルであり、羽根の傾斜角は 45° である。攪拌装置の仕様を表 4.2.1 に示す。

表 4.2.1 攪拌装置の仕様

	攪拌槽	攪拌翼(小)		攪拌翼(大)
攪拌槽径 D	0.190 m			-
邪魔板幅 B_b	0.015 m			-
邪魔板枚数 n_B	4			-
攪拌翼の回転数 n		上限は攪拌状態に応じて決定		
攪拌翼径 d'	-	0.05 m		0.10 m
攪拌翼幅 b	-	0.014 m		
羽根枚数 n_p	-	4		
ピッチパドルの傾斜角	-	45°		

4.2.3.2 実験方法

実験 A 管内の流れ（管内圧力損失の測定と流動状態の観察）

管内圧力損失の測定

1. 流量調整用のニードルバルブを閉じ、マノメーターにより差圧がないことを確認する。
2. 測定しようとする円管のニードルバルブを開けて適当な差圧に設定し、流量が安定した後に流量を測定する。この際、測定する差圧の範囲はマノメーターの読みで最低 3 cm から、測定できる最大の高さまでとし、各円管に対しマノメーターの値を 5 通り程度変化させる。設定したマノメーターの値での単位時間当たりの質量流量をビーカー（プラスチック製）、天秤、およびストップウォッチにより測定する。各流量において水温を測定し、測定温度の水の密度と質量流量から体積流量を求める。水の密度ならびに粘度の温度依存性については、配布された物性表を参照する。圧力損失 ΔP は測定したマノメーターの読みと $\Delta P = \rho g \Delta h$ の関係式から求める。ここで ρ 、 μ 、 g 、および Δh は、それぞれ水の密度、水の粘度、重力加速度、およびマノメーターの読みである。
3. Re 数と摩擦係数 f の値を両対数グラフにプロットし、層流および乱流の理論式と比較する
4. 両対数グラフに圧力損失 ΔP と流速 u の値をプロットする。各管径に対するプロットの傾きと、(4.2.5)、(4.2.9)および(4.2.12)式から求められる層流および乱流域での ΔP と u の傾きの関係とを比較し、各実験点の妥当性を評価しながら実験を行う。

ΔP と u の関係について

上記の管内圧力損失の測定 3 において、両対数グラフに圧力損失 ΔP と流速 u の値をプロットするが、ここでその意味について説明を加える。(4.2.5)式は

$$\Delta P = 4f \left(\frac{\rho \bar{u}^2}{2} \right) \left(\frac{L}{d} \right) \quad (4.2.5)$$

であるから、この式の両辺の対数をとると

$$\log \Delta P = 2 \log \bar{u} + \log \left\{ 4f \left(\frac{\rho}{2} \right) \left(\frac{L}{d} \right) \right\} \quad (4.2.47)$$

となり、もし摩擦係数 f が Re 数によらない定数なら、 ΔP と u のプロットは傾き 2 の直線になるはずであるが、実際には f が Re 数の関数となる。これを考慮し、 ΔP と u のプロットから、層流か乱流かを判断せよ（→実験 A 課題 2）

管内の流動状態の観察

1. 圧力損失測定用のニードルバルブを全て閉め、フローメーターのバルブを調整して、流量を設定する。
2. 水道水により 20 倍程度に希釈したインク（トレーサー）をシリンジに充填し、シリンジから観察用円管のトレーサー注入口から供給する。

3. 流動状態を観察しながら流量を設定し、層流、乱流、および遷移域の流動状態を観察し、スケッチする。この際、遷移域とはどういう状態かを考え、遷移域を特に注意深く観察する。また、それぞれの流れにおいて水温と流速を測定し、 Re 数を求めておく。
4. 全ての測定および観察が終了した後、すべてのバルブを閉じ、シリンジを洗浄し、実験終了とする。

実験 B 攪拌槽内の流れ（動力数および混合時間の測定、ならびに攪拌槽内の流動状態の観察）

本実験では、攪拌の基本特性である攪拌所要動力をまず水を用いて測定する。各測定は、邪魔板設置条件と未設置条件について行う。次に、グリセリンを用いた実験を行う。グリセリンでは、所要動力の測定と攪拌槽内の流動状態観察を行う。ただし、邪魔板は設置しない。攪拌には、攪拌翼としてピッチパドルを使用する。実験手法の詳細を以下に示す。

水を用いた実験

1. 動力数を測定するためのトルクメーター、攪拌軸、攪拌翼（大）をモーターに取り付ける。次いで、アクリル製円筒水槽に水を入れ、水中に攪拌翼を設置する。このとき邪魔板は設置せず、攪拌翼の高さ(C)は液深(H)の3分の1($C = H/3$)に合わせる。また、水の密度および粘度を求めるため、水の温度も測定しておく。液深も記録しておく。
2. 攪拌翼を回転させ、モーターの回転数(n)とトルク(T)を読みとる。トルクおよび回転数は、適切なトルクメーター(1.0, 5.0 または 10 N·cm)を選択して低～高回転数まで 10 点程度測定する。両対数グラフに攪拌 Re と動力数(N_p)をプロットする。このプロットと、(4.2.34)および(4.2.35)式が示す攪拌 Re 数－動力数(N_p)の関係とを比較し、各実験点の妥当性を評価しながら実験を行う。
3. 邪魔板を設置し、攪拌 Re と動力数(N_p)に関する測定を 2 と同様に行う。邪魔板を入れることにより、トルクや流動状態にどのような変化が生じたか（邪魔板の役割）について、注意深く観察する。
4. 引き続き、混合時間を測定する。まず邪魔板未設置条件で攪拌翼（大）を **50–200 rpm** の範囲内のある速度で回転させ、注射器を用いて攪拌液に対して数 mL のヨード液を注入する。このとき、注入位置にも十分留意する。液を注入してから色が均一になるまでの時間を計測する。トルクおよび温度、液深の値も測定しておく。
5. 邪魔板を設置した場合についても攪拌翼（大）を使って、邪魔板未設置条件と同じ回転数で混合時間測定を行う。この際、邪魔板の役割を考慮し測定する。

グリセリンを用いた実験

1. 水を用いた実験同様にトルクメーターおよび攪拌翼（大）を使って、グリセリンの場合の攪拌 Re —動力数(N_p)の関係を調べる。ただし、邪魔板は設置しない。
2. 動力数を測定終了後、流動状態の観察実験に移る。攪拌槽をガラス反応器に変更し、ガラス製反応器にグリセリンを入れ、注射器を用いてヨード液を適量注入する。このとき、攪拌翼は（小）を用い、その高さは液深の3分の1を目安に合わせる。攪拌翼の回転数は150 rpmとする。
3. 注入後のヨード液の流れを観察しスケッチする。スケッチはヨード液の濃淡がわかるように描き、槽内の流れがわかるように、その向きを矢印で記す。
4. 使用した器具類および机の上をきれいに片づけ、実験終了とする。

4.2.4 結果の整理と考察（レポートについて）

実験 A (管内の流動) と実験 B (攪拌槽内の流動) の結果を一つにまとめてレポートを作成する。各実験の結果と考察は以下の課題に従って整理すること。データは有効数字に十分留意して表記すること。またレポートの最後に、「まとめ」（後述）および本実験の「感想」を必ず記述すること。

実験 A 「管内の流れ」の結果と考察

1. 実験的に求めた水の流速(u)と圧力損失(ΔP)から、摩擦係数 f ならびに Re 数を(4.2.5)式および(4.2.10)式を使って求め、それらを表にまとめよ。このとき、それぞれの計算値の有効数字を考慮すること。ただし、円管内径およびマノメータ間隔は、有効数字に加味しないこと。また、 f と Re 数の関係を両対数グラフにプロットせよ。摩擦係数 f の実測値を、層流での f と Re の関係式(4.2.9)式、および乱流での f と Re の関係式(4.2.12)式よりそれぞれ求めた計算値と比較し実測値 f の妥当性を検討せよ。
2. 各測定値が層流状態にあるか乱流状態にあるかは、 ΔP と u の両対数プロットを調べることによって判断できる。層流あるいは乱流を仮定したときに得られる理想的な勾配($\log u$ に対する $\log \Delta P$ の変化量)を実測値と定量的に比較することで、いずれの点までが層流状態か、またいずれの点からが乱流状態にあるのか考察せよ。
3. 1、2において層流から乱流へ変化する臨界 Re 数の値をそれぞれ求めよ。通常、層流から乱流へ遷移するときの臨界 Re 数は2300–2400と言われている。それぞれ求めた臨界 Re 数がこの臨界領域の Re 数の範囲内にあるかどうか確認し、ズレが確認された場合にはその原因に関して考察せよ。
4. 観察したそれぞれの流動状態を図示し、どのような特徴があるかを簡潔に述べよ。また、観察時に遷移域とした Re 数を、 f と Re 数の関係のグラフから求めた臨界 Re 数と比較せよ。もし両者にズレが生じた場合には、その原因を考察せよ。

実験 B 「攪拌槽内の流れ」の結果と考察

1. N_p と Re について：

水およびグリセリン中で測定した攪拌 Re 数と動力数 N_p の関係を表に整理せよ。表には攪拌翼の回転数とトルクの値も合わせて記すこと。実験 A と同様に有効数字を考慮すること。ただし、表 4.2.1 で与えられる値は有効数字に加味しない。

(i) 攪拌溶液の影響：邪魔板未設置条件において水およびグリセリンを攪拌翼（大）で攪拌したときの攪拌 Re 数と動力数 N_p の関係を同一の両対数グラフにプロットせよ。グラフには永田式から得られる動力数を推算値として点線あるいは破線で追記すること。このグラフをもとに、攪拌 Re に対する動力数(N_p)の変化を水およびグリセリンについて考察せよ。その際、各流動状態が層流なのか乱流なのかを十分に考慮すること。

(ii) 邪魔板の効果：水中での邪魔板設置条件について Re 数と動力数(N_p)の関係を (i) で作成した同一の両対数グラフに併せてプロットせよ。グラフには永田式から得られる動力数の推算値を実線で追記し、その数値自体もグラフ中に明示せよ。また、動力数の推算値の計算過程も詳細に記述せよ。作成したグラフから邪魔板の効果について考察せよ。

2. 混合時間に関する考察：

ヨード液を添加した水溶液において測定した混合時間（邪魔板設置・未設置両方について）を相関式の値（(4.2.45)式または(4.2.46)式）と比較せよ。

3. 攪拌槽内の流動状態について：

グリセリン溶液で観察した流動状態について観察結果を図で示し（写真貼付不可）、観察結果からどのような流動状態であったかを考察せよ。この際、図はできる限り見やすく書き（濃淡がわかるように色などを利用する、流れの方向を記入する）、流動状態について詳細に記述（吐出流、同伴流、および全循環流などについて）せよ。

まとめ

- i. 以上二つの実験結果をもとに、管内と攪拌槽内においてどのような“流れ”の違い、どのような類似点があったのかを、二つの実験を比較することで考察せよ。この場合、いずれの流れにおいても、層流とは「構造化された流れ」であり、乱流とは「無秩序な流れ」であることを念頭において欲しい。
- ii. 管内の流れを引き起こす力と流れの様子を無次元数の f と Re で整理した。同様に攪拌槽内の流れを引き起こす力と流れの様子を無次元数の N_p と Re で整理した。このように無次元数を定義し、それを使って整理することが工学的にどのような利点を有しているのか、考察せよ。

感想

本実験についての感想を述べよ（良かった点および改善すべき点について）。

【注意】グラフは各自作成し、レポートに添付すること。グラフでは、プロットおよび線などが何を表しているのかをグラフ中に明記すること。流動状態の図は、流れの方向などがわかるように詳細に描くこと。このことは次の攪拌槽内の流れの結果と考察で作成するグラフにも共通することである。

使用記号

円管内の流れ

d	管径	[m]	f	Fanning の摩擦係数	[-]
g	重力加速度(9.807)	[m·s ⁻²]	Δh	マノメータの液柱差	[m]
L	管の長さ	[m]	ΔP	差圧	[kg·m ⁻¹ s ⁻²]
Q_v	体積流量	[m ³ ·s ⁻¹]	R	管の半径	[m]
Re	Reynolds 数	[-]	r	管の中心からの距離	[m]
u	流速	[m·s ⁻¹]	\bar{u}	平均流速 ($Q_v/(\pi R^2)$)	[m·s ⁻¹]
u_0	管中心における流速	[m·s ⁻¹]	u^*	摩擦速度	[m·s ⁻¹]
y	管壁からの距離	[m]	μ	液粘度	[Pa·s]
ρ	液密度	[kg·m ⁻³]	τ	応力	[kg·m ⁻¹ s ⁻²]
τ_w	管壁における応力	[kg·m ⁻¹ s ⁻²]			

攪拌槽内の流れ

B_b	邪魔板幅	[m]	P_w	攪拌所要動力	[W]
b	攪拌翼幅	[m]	q_c	循環流量	[m ³ ·s ⁻¹]
D	攪拌槽径	[m]	q_d	吐出流量	[m ³ ·s ⁻¹]
d'	攪拌翼径	[m]	T	攪拌軸のトルク	[N·m]
H	液深	[m]	T_c	循環時間	[s]
N_p	動力数	[-]	T_M	混合時間	[s]
N_{qc}	循環流量数	[-]	V	攪拌液の体積	[m ³]
N_{qd}	吐出流量数	[-]	n_B	邪魔板枚数	[-]
n	攪拌翼の回転数	[s ⁻¹]	θ	攪拌翼の傾斜角	[deg]
n_p	攪拌翼の枚数	[-]			

参考文献

- [1] H. Schlichting: "Boundary Layer Theory", 7th Eds., Ch. XX, McGraw-Hill (1979).
- [2] 日野幹夫：流体力学、第3章、朝倉書店 (1986).
- [3] J. C. ロッタ：乱流、第3章、岩波書店 (1975).
- [4] 化学工学会編：化学工学便覧 改訂第7版 丸善出版 (2011).
- [5] 化学工学会編：化学工学 改定第3版 -解説と演習- 朝倉書店 (2008).
- [6] 佐竹化学機械工業(株)編：攪拌技術 佐竹化学機械工業(株) (1992).