Definiţia 1. *Polinoamele* $B_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall k \in \overline{0,n}$, *se numesc polinoamele Bernstein de grad n, unde* $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Definiţia 2. *Polinomul* $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) B_n^k(x)$, $\forall x \in [0,1]$, *se numeşte polinomul Bernstein de grad n asociat funcţiei f.*

Teorema 1. (**teorema lui Bernstein**) *Dacă* $f \in C[0,1]$, *atunci* $B_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} f$.

Teorema 2. (**teorema lui Weierstrass**) *Dacă* $f \in C[a,b]$, *există un şir de polinoame cu coeficienţi reali,* (P_n), *aşa încât* $P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} f$.

Corolarul 1. *Dacă* $f \in C[a,b]$, *atunci* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q$, *un polinoam cu coeficienţi raţionali, aşa încât* $\|f - Q\|_u < \varepsilon$.

Corolarul 3.6.2. *Spaţiul* $\left(C[a,b], \|\cdot\|_u\right)$ *este separabil.*

Teorema lui Bernstein este o teoremă fundamentală în analiza matematică. Prin acest rezultat, orice funcţie continuă pe $[0,1]$ (respectiv pe $[a,b]$, dacă ţinem seama de Teorema 2) se poate aproxima uniform cu polinoame, care sunt funcţii cu o structură mai simplă. Cu alte cuvinte, orice funcţie reală continuă pe $[0,1]$ poate fi reprezentată cu o precizie arbitrar fixată, de o funcţie polinomială. Din acest motiv, în CAGD (*Computer Aided Geometric Design*) se utilizează mai ales curbele şi suprafeţele polinomiale, prin intermediul cărora pot fi modelate o mare varietate de forme.

Fie $A_n = \left\{x \mid x(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n,\ \forall t \in [0,1],\ \text{unde } a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ şi $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Definiţia 3. *Prin curbă polinomială înţelegem orice curbă definită printr-o parametrizare polinomială:* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, $\forall t \in [0,1]$, *unde* $x, y, z \in A$. *În acest caz, maximul gradelor polinoamelor* x, y, z, *se numeşte gradul curbei* γ.

Fie $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, $\forall t \in [0,1]$, o curbă polinomială de grad *n*. Atunci există o mulţime de vectori $C_n = \left\{c_k = (x_k, y_k, z_k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \overline{0,n}\right\}$ aşa încât $\gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^k$, $\forall t \in [0,1]$. Cercetătorii în CAGD au încercat să descopere în ce măsură modificarea acestor coeficienţi influienţează geometria curbei, însă au ajuns la concluzia că baza canonică $\left\{1, t, t^2, ...\right\}$ nu este potrivită pentru design CAGD. În 1970, Pierre Bézier, inginer la firma Renault, în dorinţa de a proiecta capote de automobile cu forme cât mai variate, a înlocuit baza canonică din A_n cu baza Bernstein: $B=\left\{B_n^0, B_n^1,\ldots,B_n^n\right\}$.

Fie $C_n=\left\{c_k=\left(x_k, y_k, z_k\right)\in\mathbb{R}^3 \mid k\in\overline{0,n}\right\}$. Vom numi această mulţime *poligon de control*.

Definiţia 4. *Se numeşte curbă Bézier definită de poligonul de control* C_n*, funcţia* $b_n:[0,1]\to\mathbb{R}^3,\ b_n(t)=\sum_{k=0}^{n} c_k B_n^k(t),\ \forall t\in[0,1]$. *În acest caz, punctele* $c_k,\ k\in\overline{0,n}$*, se numesc puncte de control ale curbei* b_n.

Deoarece $B_n^k(t)\geq 0$ şi $\sum_{k=0}^{n} B_n^k(t)=1,\ \forall t\in[0,1]$, rezultă că $b_n(t)$ este o combinaţie convexă a punctelor de control, $\forall t\in[0,1]$.

În desenele următoare avem reprezentate câteva curbe Bézier plane.

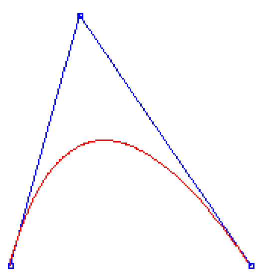

Fig. 1. Curbă Bézier cu 3 puncte de control

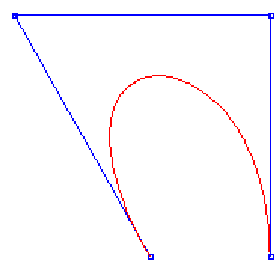

Fig. 2. Curbă Bézier cu 4 puncte de control

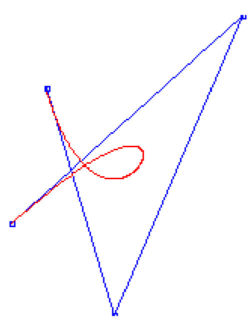

Fig. 3. Curbă Bézier cu 4 puncte de control

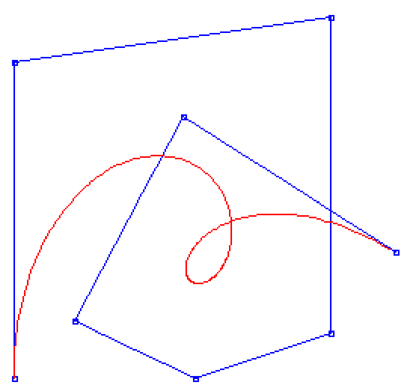

Fig. 4. Curbă Bézier cu 8 puncte de control

Fie acum mulţimea curbelor din $\mathbb{R}^3$:

$\mathcal{C}=\left\{\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3 \mid \gamma(t)=\left(f(t), g(t), h(t)\right),\ \forall t\in[0,1],\ \text{unde}\, f,g,h\in C[0,1]\right\}$.

Considerăm funcţia $\|\cdot\|_u:\mathcal{C}\to\mathbb{R}_+,\ \|\gamma\|_u=\sup\limits_{t\in[0,1]}\|\gamma(t)\|_\infty,\ \gamma\in\mathcal{C}$. Ţinând seama că $\|\cdot\|_\infty$ este o normă pe $\mathbb{R}^3$, se arată fără dificultate că $\|\cdot\|_u$ este o normă pe $\mathcal{C}$.

Fie $(\gamma_n) \subset \mathcal{C}$ şi $\gamma \in \mathcal{C}$. Presupunem că $\gamma_n = (f_n, g_n, h_n)$, $\forall n$ şi $\gamma = (f, g, h)$. Au loc de asemenea echivalenţele:

$$\gamma_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} \gamma \Leftrightarrow \gamma_n \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} f \\ g_n \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} g \\ h_n \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} h \end{cases}.$$

Fie $\gamma \in \mathcal{C}$, $\gamma = (f, g, h)$, unde $f, g, h \in C[0,1]$. Atunci din teorema lui Bernstein obţinem că: $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} f$, $\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} g$, $\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k \xrightarrow[{[0,1]}]{uniform} h$.

Considerăm poligonul de control $C_n = \left\{ \left(f\left(\frac{k}{n}\right), g\left(\frac{k}{n}\right), h\left(\frac{k}{n}\right) \right) \mid k \in \overline{0,n} \right\}$ şi fie b_n curba Bézier asociată lui C_n. Acestea vor fi numite *curbele Bézier asociate lui* γ. Ţinând seama de observaţiile de mai sus, rezultă că $b_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} \gamma$. Prin urmare, curba γ poate fi reprezentată prin curbele Bézier asociate.

În prezent, în CAGD curbele Bézier sunt utilizate aproape în exclusivitate.

Problemă:

Să se scrie un aplet care care să permită desenarea unei curbe Bezier cu 4 puncte de control.