



## ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

### ΤΗΛ301: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Καθηγητής: Μιχάλης Ζερβάκης

#### 4η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

lir exei apirh kroustikh  
apokrish, dld kroustikh  
apokrish tou den  
midenizei pote se kamia  
timh

#### Windowing

Η απλούστερη μέθοδος σχεδίασης FIR φίλτρων είναι η σχεδίαση με χρήση παραθύρων.

Εστω ότι έχουμε ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση  $h_d(n)$ . Τότε η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

Ισχύει για την κρουστική απόκριση:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Ένα τέτοιο σύστημα είναι μη αιτιατό (no causal) και επεκτείνεται από το  $+\infty$  ως το  $-\infty$ . Για να κατασκευάσουμε ένα αιτιατό σύστημα (causal) πρέπει να "κόψουμε" κάποιο κομμάτι του  $h_d(n)$ . Η πιο απλή μέθοδος είναι η εξής:

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Για να κατασκευάσουμε το  $h(n)$  είναι σαν να χρησιμοποιήσαμε ένα "παράθυρο"  $w(n)$ :

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

και

$$h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$$

Για τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στο πεδίο της συχνότητας ισχύει:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) w(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

### Φαινόμενο Gibbs

Γενικά, η ύπαρξη πλευρικών λοβών στην απόκριση συχνότητας του παράθυρου δημιουργεί διακυμάνσεις (ripples) στην απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Μόλις πριν και μόλις μετά τη ζώνη μετάβασης του φίλτρου εμφανίζεται η μέγιστη διακύμανση που το πλάτος της είναι ανεξάρτητο του μεγέθους του παραθύρου.

Αυτό είναι γνωστό σαν φαινόμενο Gibbs και είναι χαρακτηριστικό του rectangular παραθύρου.

### Άλλα παράθυρα

Για να αποφύγουμε το φαινόμενο Gibbs χρησιμοποιούμε συχνά άλλα παράθυρα μερικά από τα πιο γνωστά είναι τα εξής:

Ορθογώνιο (Rectangular):

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Hamming:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Hanning:

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

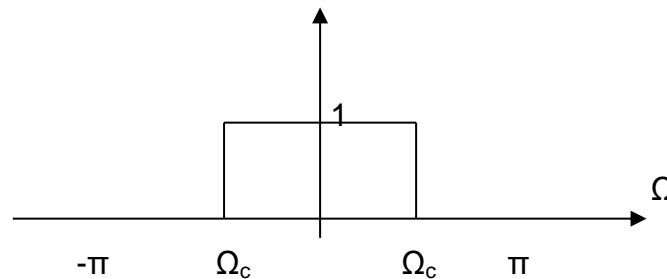
Blackman:

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.8 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Μια μέθοδος για την κατασκευή των FIR φίλτρων είναι από ένα δοσμένο IIR φίλτρο να κατασκευάσουμε το επιθυμητό ψηφιακό FIR φίλτρο. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στον περιορισμό της απόκρισης του IIR φίλτρου έτσι ώστε η

απόκριση για  $n > N$  να είναι μηδέν. Ο περιορισμός της απόκρισης θα γίνεται πάντα με την βοήθεια κάποιου παραθύρου.

Έστω το ιδεατό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής  $\Omega_c$  που φαίνεται στην παρακάτω γραφική παράσταση:



Για να κάνουμε το φίλτρο causal εισάγουμε ένα phase shift  $e^{-j\Omega m}$ . Η απόκριση συχνότητας  $H(\Omega)$  του φίλτρου που προκύπτει θα δίδεται από  $H(\Omega) = H_1(\Omega) e^{-j\Omega m}$ . Η  $H(\Omega)$  μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega m} & \text{αν } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{αν } |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

Η impulse response  $h[n]$  αυτού του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί παίρνοντας τον αντίστροφο DTFT της σχέσης αυτής ο οποίος είναι :

$$h[n] = \frac{\sin(\Omega_c(n-m))}{\pi(n-m)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Omega_c(n-m)}{\pi}\right]$$

Το FIR φίλτρο πραγματοποιείται περιορίζοντας την απόκριση  $h[n]$  για  $n < 0$  και για  $n > N-1=2m$  το οποίο δίνει:

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\frac{\Omega_c(n-m)}{\pi}\right] & \text{για } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Σχεδιάστε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με  $\Omega_c = 0.4\pi$ ,  $F_s = 0.1\text{KHz}$  και μήκος  $N=21$  (τι είναι το μήκος του παραθύρου και με ποιο τρόπο επηρεάζει το φίλτρο?), με χρήση **rectangular** και **hamming** παραθύρων για τον περιορισμό του  $h[n]$ . Παρουσιάστε το πλάτος της απόκρισης συχνότητας των δύο επιμέρους φίλτρων στο ίδιο γράφημα. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση του Matlab **firl**.

Τι παρατηρείτε; Τι διαφορές έχουν τα δύο παράθυρα μεταξύ τους και πώς αυτές εξηγούνται βάσει της αντίστοιχης θεωρίας;

## ΑΣΚΗΣΗ 2

- Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία να σχεδιάσετε ένα FIR φίλτρο με  $\Omega_c=0.5\pi$ ,  $F_s = 0.1\text{KHz}$  και με χαρακτηριστικά παραθύρου:
  - α)  $N=21$  και παράθυρο Hamming (Γράφημα 1 – αριστερό τμήμα)
  - β)  $N=41$  και παράθυρο Hamming (Γράφημα 1 – δεξί τμήμα)
  - γ)  $N=21$  και παράθυρο Hanning (Γράφημα 2 – αριστερό τμήμα)
  - δ)  $N=41$  και παράθυρο Hanning (Γράφημα 2 – δεξί τμήμα)
 Να δείξετε το πλάτος της απόκρισης συχνότητας των παραπάνω φίλτρων.  
 Τι παρατηρείτε; Τι διαφορές έχουν τα δύο παράθυρα μεταξύ τους και πώς αυτές εξηγούνται βάσει της αντίστοιχης θεωρίας;
- Βρείτε την έξοδο ενός συστήματος όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα  $x = \sin(15t) + 0.25\sin(200t)$  με  $F_s=100\text{Hz}$ , εφαρμόζοντας τα 4 παραπάνω φίλτρα (ένα κάθε φορά). Δηλαδή, φιλτράρετε το σήμα  $x(t)$  με το κάθε ένα από τα παραπάνω φίλτρα.  
 Για την έξοδο του συστήματος δείξτε ΜΟΝΟ το φάσμα του σήματος πριν και μετά την εφαρμογή του κάθε φίλτρου. Εξηγείστε το σήμα εξόδου κάθε φίλτρου. Επηρεάζει το διαφορετικό παράθυρο την έξοδο του συστήματος και, αν ναι, πώς και γιατί;
- Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία φιλτραρίσματος με τα 4 φίλτρα του σήματος που δίνετε παραπάνω με τη διαφορά ότι η συχνότητα δειγματοληψίας φίλτρων και σήματος να είναι  $F_s=50\text{Hz}$ .  
 Τι αλλάζει στο αποτέλεσμα του κάθε φιλτραρίσματος και γιατί;

Κατά την υποβολή της παρούσας εργαστηριακής άσκησης παραδίδεται και αναφορά, η οποία να περιέχει:

- Σύντομη περιγραφή της υλοποίησης σε κάθε ερώτημα, αναλυτικά συμπεράσματα ή παρατηρήσεις όπου προκύπτουν.
- Οι γραφικές που προέκυψαν σε κάθε ερώτημα.
- Να ΜΗΝ περιέχει κώδικες.
- Η αναφορά μπορεί να παραδοθεί σε ηλεκτρονική μορφή.