

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

ΤΗΛ301: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Στοιχεία Ομάδας 37 :

Περίδης Ιωάννης 2018030069

Σκλάβος Παναγιώτης 2018030170

Τσιπουράκη Αλεξάνδρα 2018030089

1η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

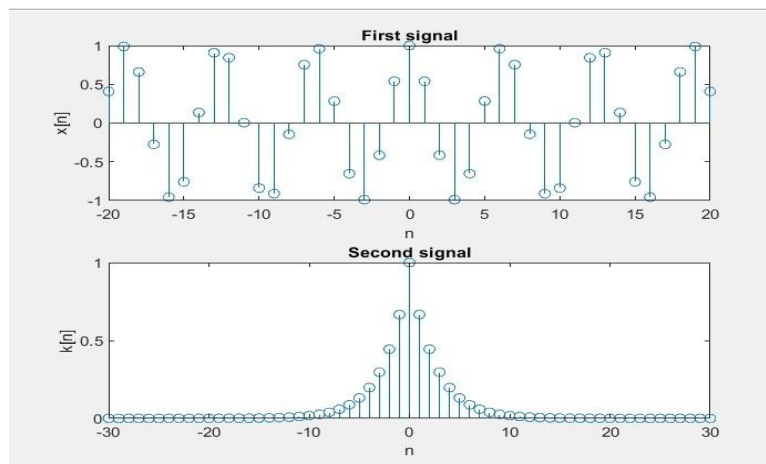
Αντικείμενο της πρώτης εργαστηριακής άσκησης είναι η περαιτέρω εξοικείωση (υπενθύμιση) των εννοιών της συνέλιξης και της δειγματοληψίας καθώς και των δομικών τους εννοιών.

Παρακάτω απαντώνται αναλυτικά τα ζητούμενα της κάθε επιμέρους άσκησης, συνοδευόμενα από κατάλληλες γραφικές απεικονίσεις σε Matlab και συμπεράσματα.

Άσκηση 1

❖ Ερώτημα Α

Αρχικά ζητήθηκε η κατασκευή δύο ακολουθιών . Επιλέχθηκαν μία συνημιτονοειδής (x) και μία εκθετική (k), ώστε να είναι σαφείς και ευδιάκριτες οποιεσδήποτε πράξεις μεταξύ των δύο.



1.1 Signals $x[n] = \cos(n\pi/3)$, $x[-20, 20]$, $k[n] = 2/3^{|n|}$, $k[-30, 30]$

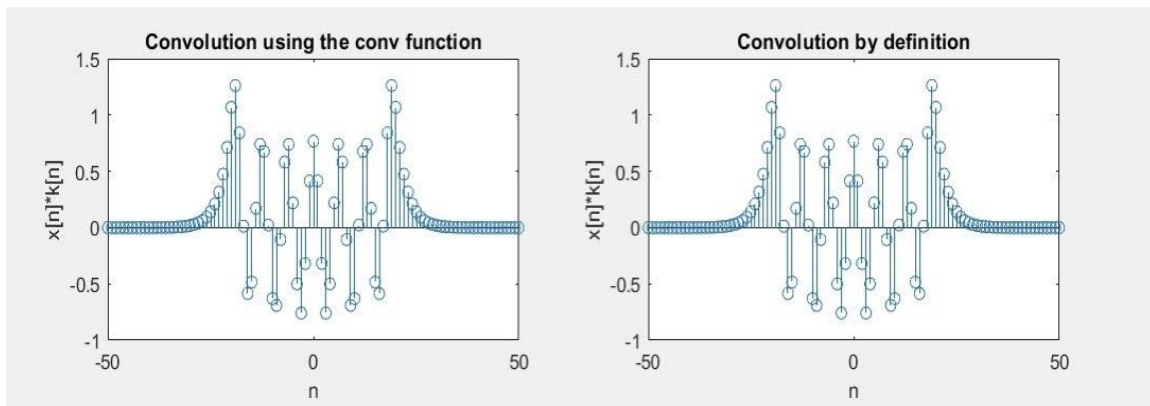
Κατόπιν, ζητήθηκε η συνέλιξη των δύο αυτών ακολουθιών πρώτα βάσει ορισμού κι έπειτα η επαλήθευση της ορθότητας του αποτελέσματος με εκείνο που προκύπτει από την εφαρμογή της έτοιμης συνάρτησης της matlab, conv(x,k).

Για την συνέλιξη βάσει ορισμού, εφαρμόστηκε zero padding στη μικρότερη σε μήκος ακολουθία, δηλαδή προσθήκη μηδενικών στο σήμα x, προκειμένου να αποκτήσουν τα δύο σήματα ίδιες διαστάσεις και να γίνουν όλοι οι κατάλληλοι πολλαπλασιασμοί σημείο προς σημείο (X0). Για την σωστή οριοθέτηση του νέου, X0 σήματος, δημιουργήθηκε και το εκτεταμένο διάνυσμα χρόνου nx0. Έστερα, κατασκευάστηκε η ανάκλαση του εκθετικού σήματος, η οποία οριοθετήθηκε επίσης στο μήκος nx0.

Τέλος, πραγματοποιήθηκε εντός μιας for loop η συνέλιξη βάσει ορισμού

($z(n) = x(h)k(n-h)$), δηλαδή για κάθε n υπολογίστηκαν τα $x(h)$. $k(n-h)$ και έγινε χρονική ολίσθηση κατά n. Το μήκος της συνέλιξης ορίστηκε $L = (\text{μήκος του σήματος } x) + (\text{μήκος του σήματος } k - 1)$.

Μέσω της συνάρτησης conv(x,k) , επαληθεύτηκε η ορθότητα της συνέλιξης βάσει ορισμού , όπως φαίνεται και στο παρακάτω figure(2).



1.2 Συνέλιξη μέσω της συνάρτησης conv(x,k) ,συνέλιξη βάσει ορισμού

❖ Ερώτημα Β

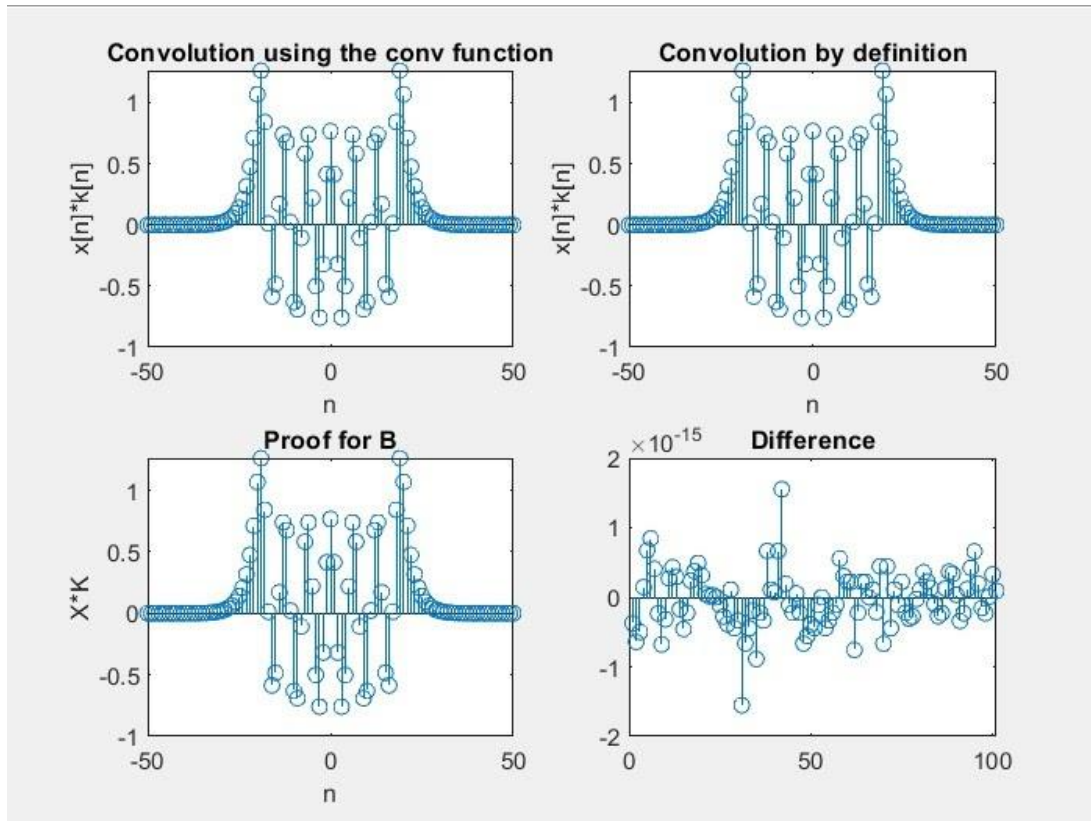
Ζητούμενο του δεύτερου σκέλους της άσκησης υπήρξε η πρακτική απόδειξη πως (συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου) = (πολλαπλασιασμός στο πεδίο της συχνότητας) . Για την απόδειξη αυτή , χρησιμοποιήθηκαν τα σήματα του ερωτήματος 1.Α.

Αναλυτικότερα, εφαρμόστηκε αρχικά μετασχηματισμός Fourier στα δύο σήματα, μέσω της έτοιμης συνάρτησης της matlab fft(x,L).

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ο λόγος ύπαρξης του δεύτερου ορίσματος στην παραπάνω συνάρτηση. Όπως είχε αναφερθεί και παραπάνω, οι αρχικές ακολουθίες που επιλέχθηκαν ορίστηκαν σε διαφορετικό μήκος, ακριβώς με σκοπό όμως την παρακάτω παρατήρηση. Επειδή σε ρεαλιστικές εφαρμογές είναι αρκετά σπάνια η μελέτη δύο ακολουθιών ίδιου μήκους, στην συνάρτηση fft υπάρχει και η δυνατότητα προσθήκης ενός δεύτερου ορίσματος (L) το οποίο καθορίζει τα δείγματα που θα λάβει ο μετασχηματισμός Fourier. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ως L έχει οριστεί το μήκος της συνέλιξης των σημάτων x, k, το οποίο κρίνεται ιδανικό για την απόδειξη που ζητείται εφόσον πραγματοποιείται σύγκριση των γραφημάτων σε ίδια όρια.

Κατόπιν, επαναφέρθηκε το σήμα στο πεδίο του χρόνου μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ($\text{res} = \text{ifft}(X.*K)$), εφόσον σε ρεαλιστικές εφαρμογές οι συγκρίσεις γίνονται στο πεδίο του χρόνου, και μέσω της γραφικής απεικόνισης του τελευταίου σήματος, αποδείχθηκε πως τελικά τα αποτελέσματα της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου και του πολλαπλασιασμού στο πεδίο της συχνότητας προέκυψαν πρακτικά ίδια.

Ας σημειωθεί ότι η ομοιότητα των σημάτων πέραν της οπτικής επιβεβαίωσης του αποτελέσματος, επαληθεύτηκαν και μέσω της αφαίρεσης των (conv-res), όπου τελικά η διαφορά που προέκυψε για κάθε τιμή ήταν της τάξεως του 10^{-15} (figure 3).



1.3 Συνέλιξη στο χρόνο = πολλαπλασιασμός στη συχνότητα . Σύγκριση με τις γραφικές απεικονίσεις του πρώτου ερωτήματος .

Άσκηση 2

Περιγραφή

Στην Άσκηση αυτή ζητείται αρχικά να γίνει γραφική υλοποίηση στο περιβάλλον της *Matlab* του σήματος:

$$\{x(t)\} = 5\cos(24\pi t) - 2\sin(1.5\pi t) \quad 0 < t < 0.5 \text{ s (1)}$$

Έπειτα το σήμα αυτό δειγματοληπτείται με διαφορετικές περιόδους T_s και απεικονίζεται σε κοινό γράφημα πριν και μετά την δειγματοληψία του ($\{x[n]\} = \{x_a(nTs)\}$). Ποικίλα ευρήματα προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία τα οποία θα σχολιαστούν και θα εξηγηθούν ενδελεχώς στην συνέχεια.

Υπολογισμοί

Σε πρώτη φάση θα υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier($X[f]$) του σήματος $\{x(t)\}$:

Γνωρίζουμε για το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier ότι:

$$\{\cos(2\pi F_0 t)\} \Leftrightarrow_F \frac{1}{2} \{\delta(F - F_0)\} + \frac{1}{2} \{\delta(F + F_0)\} \quad (2)$$

$$\{\sin(2\pi F_0 t)\} \Leftrightarrow_F \frac{1}{2} \{\delta(F - F_0)\} - \frac{1}{2} \{\delta(F + F_0)\} \quad (3)$$

Άρα εκμεταλλευόμενοι την γραμμικότητα του Μετασχηματισμού έχουμε:

$$\{x(t)\} = 5\cos(24\pi t) - 2\sin(1.5\pi t) \Leftrightarrow_F X(F) = F(5\cos(24\pi t) - 2\sin(1.5\pi t)) \text{ ή}$$

$$X(F) = 5F(\cos(2\pi 12t)) - 2F(\sin(2\pi \frac{3}{4}t))$$

Άρα από (2) και (3) προκύπτει:

$$X(F) = 5 \left[\frac{1}{2} \{\delta(F - 12)\} + \frac{1}{2} \{\delta(F + 12)\} \right] - 2 \left[\frac{1}{2} \left\{ \delta \left(F - \frac{3}{4} \right) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \delta \left(F + \frac{3}{4} \right) \right\} \right]$$

$$\text{Άρα: } X(F) = \frac{5}{2} \{\delta(F - 12)\} + \frac{5}{2} \{\delta(F + 12)\} - \left\{ \delta \left(F - \frac{3}{4} \right) \right\} + \left\{ \delta \left(F + \frac{3}{4} \right) \right\}$$

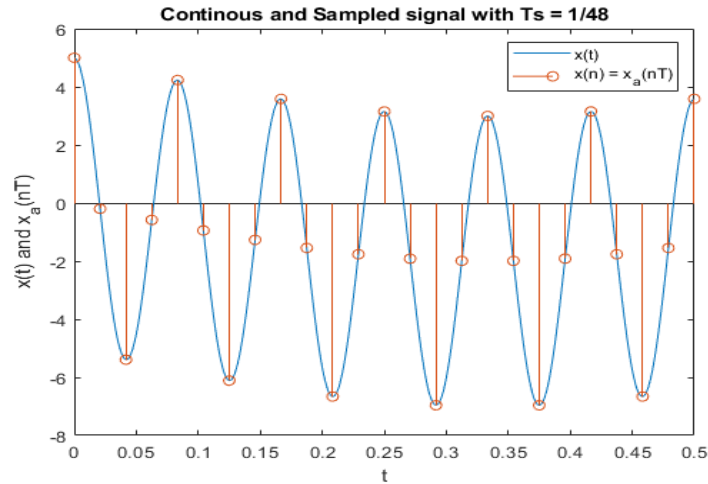
Η συχνότητα Nyquist του σήματος λοιπόν προσδιορίζεται έπειτα με πολύ απλό τρόπο. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η μέγιστη, κατά μέτρο, συχνότητα του σήματος είναι:

$f_{max} = 12 \text{ Hz}$. Συνεπώς προκύπτει $f_{Nyquist} = 2f_{max} = 24 \text{ Hz}$, το οποίο μεταφράζεται σε μέγιστη δυνατή περίοδο δειγματοληψίας, ώστε να είναι εφικτή η ανάκτηση του σήματος, που ισούται με $T_{Nyquist} = \frac{1}{24} s$. Συγκεντρωτικά δηλαδή, ώστε να είναι εφικτή η ανάκτηση του σήματος, θα πρέπει να έχουμε: $fs \geq f_{Nyquist} = 24 \text{ Hz} \Rightarrow Ts \leq T_{Nyquist} = \frac{1}{24} s$

Ευρήματα

Στην φάση αυτή πραγματοποιείται η δειγματοληψία του σήματος $\{x(t)\}$. Η δειγματοληψία επιτυγχάνεται λαμβάνοντας δείγματα του αναλογικού σήματος $\{x(t)\}$ ανά T_s . Δηλαδή: $\{x[n]\} = \{x_a(nTs)\}$. Για το παράδειγμα αυτό δοκιμάζουμε να δειγματοληπτήσουμε για 4 διαφορετικές περιόδους: α) $T_s = \frac{1}{48} s$, β) $T_s = \frac{1}{24} s$, γ) $T_s = \frac{1}{12} s$, δ) $T_s = \frac{1}{37} s$

a)

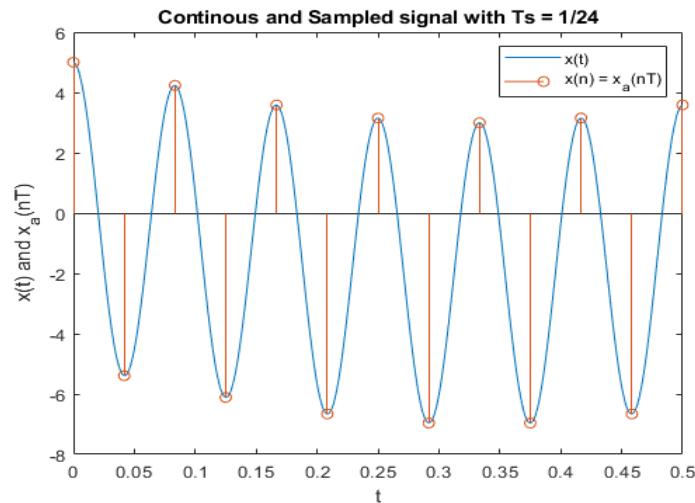


2.1 Γράφημα συνεχούς και διακριτού σήματος με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/48$.

Στην περίπτωση αυτήν ισχύει ότι: $f_s = \frac{1}{T_s} = 48 \text{ Hz} > 24 \text{ Hz} = 2f_{max}$. Το γεγονός αυτό μας δίνει σημαντική πληροφορία για την δυνατότητα ανακατασκευής του σήματος. Με άλλα λόγια, παρατηρούμε ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι διπλάσια του ρυθμού Nyquist. Συνεπώς μπορούμε με χρήση ενός low pass φίλτρου να ανακτήσουμε το αρχικό μας σήμα με αρκετά καλή ακρίβεια καθώς δεν προκύπτουν επικαλύψεις στο πεδίο της συχνότητας. Το φίλτρο αυτό θα μπορεί να έχει συχνότητα αποκοπής (f_c), χωρίς να υπάρχουν επικαλύψεις με επόμενες επαναλήψεις του σήματος, η οποία θα κυμαίνεται στο εύρος:

$f_{max} \leq f_c \leq f_s - f_{max}$ ή $12 \text{ Hz} \leq f_c \leq 36 \text{ Hz}$, ενώ ιδανικά η συχνότητα αποκοπής θα είναι $f_c = f_{max} = 12 \text{ Hz}$. Συνεπώς έχουμε πληθώρα επιλογών φίλτρων για την ανακατασκευή του σήματος, με ιδανικό το: $h_s = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$.

b)

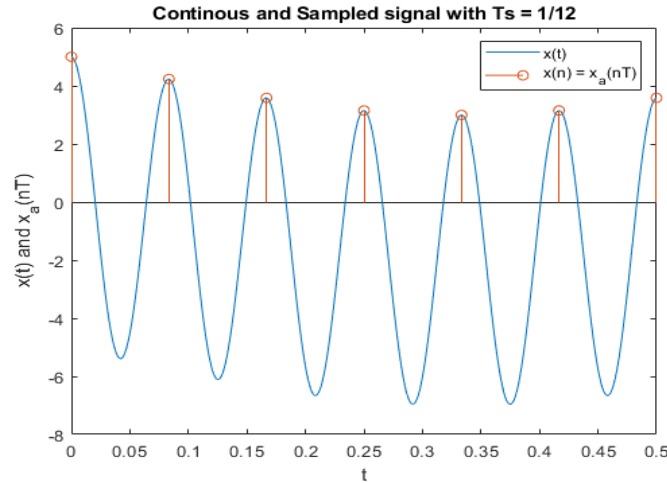


2.2 Γράφημα συνεχούς και διακριτού σήματος με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/24$.

Για περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{24}$ έχουμε συχνότητα: $f_s = \frac{1}{T_s} = 24 \text{ Hz} = f_{Nyquist}$. Αυτή είναι η οριακή περίπτωση όπου ο ρυθμός που δειγματοληπτούμε ταυτίζεται με τον ρυθμό

Nyquist. Συνεπώς για την περίπτωση αυτή δεν θα προκύπτουν οριακά επικαλύψεις με επόμενες επαναλήψεις του σήματος στο πεδίο συχνοτήτων. Άρα για να μπορέσουμε να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα low pass φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $f_c = f_{max}$. Δηλαδή τα δείγματα μας θα είναι οριακά επαρκή για την ανακατασκευή του αρχικού σήματος.

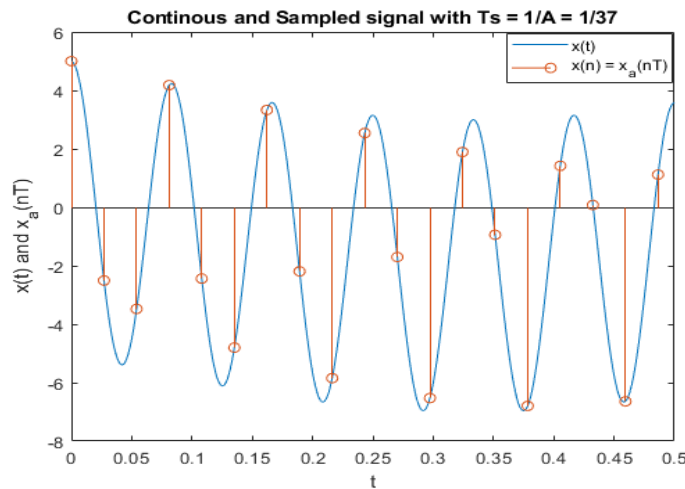
c)



2.3 Γράφημα συνεχούς και διακριτού σήματος με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/12$.

Στην τρίτη περίπτωση δειγματοληπτούμε με ρυθμό $f_s = 12\text{Hz} = \frac{f_{Nyquist}}{2} < f_{Nyquist}$. Συνεπώς όπως φαίνεται και από το γράφημα το πλήθος των δειγμάτων δεν επαρκεί για την ανακατασκευή του σήματος. Συγκεκριμένα παίρνουμε πληροφορία κάθε φορά μόνο για την θετική κορυφή του σήματος, συνεπώς δεν είναι εφικτό να προβλέψουμε την διακύμανσή του στα ενδιάμεσα σημεία.

d)



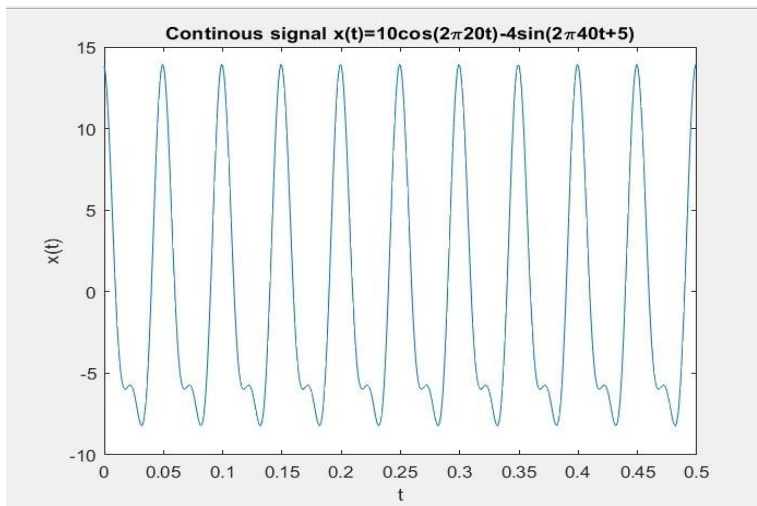
2.4 Γράφημα συνεχούς και διακριτού σήματος με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/12$.

Σε τελική φάση για την άσκηση 2 επιχειρείται να δειγματοληπτήσουμε με περίοδο $T_s = \frac{1}{A} = \frac{1}{\text{αριθμός ομάδας}} = \frac{1}{37} \text{ s}$, δηλαδή ο ρυθμός δειγματοληψίας θα είναι $f_s = 37\text{Hz} > f_{\text{Nyquist}}$. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι το σήμα θα μπορούσε να ανακατασκευαστεί αν δειγματοληπτούσαμε με τον παραπάνω ρυθμό. Ενώ το low pass φίλτρο που θα χρησιμοποιούνταν θα μπορούσε να έχει συχνότητα αποκοπής: $12\text{Hz} < f_c < 25\text{Hz}$ λαμβάνοντας όλη την απαραίτητη πληροφορία για ανακατασκευή χωρίς επικαλύψεις, ενώ η περίπτωση του ιδανικού φίλτρου περιγράφηκε στο ερώτημα α).

Άσκηση 3

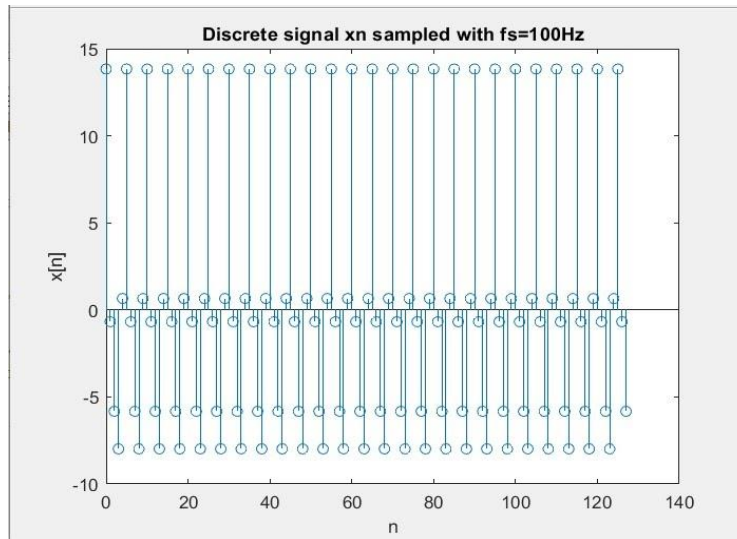
❖ Ερώτημα Α

Ζητούμενο του πρώτου μέρους της τρίτης άσκησης ήταν η δειγματοληψία (128 δειγμάτων) του σήματος: $x(t) = 10\cos(2\pi \cdot 20t) - 4\sin(2\pi \cdot 40t + 5)$, το οποίο αρχικά απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα.



3α.1 Γράφημα του σήματος $x(t)$ σε συνεχή χρόνο

Βασική προϋπόθεση ορθής δειγματοληψίας ορίστηκε η απουσία του φαινομένου επικάλυψης (aliasing). Όπως είναι γνωστό εκ της θεωρίας, η παραπάνω συνθήκη διασφαλίζεται μέσω της επιλογής συχνότητας (f_s) μεγαλύτερης από την συχνότητα Nyquist ($2f_{\text{max}}$). Στο δοθέν σήμα, f_{max} είναι τα 40 Hz. Επομένως η συχνότητα Nyquist ισούται με 80 Hz. Άρα, προς αποφυγή του φαινομένου επικάλυψης η δειγματοληψία έγινε σε συχνότητα μεγαλύτερη των 80 Hz. Επιλέχθηκε τελικά η συχνότητα των 100 Hz και το αποτέλεσμα αυτής της πρώτης δειγματοληψίας φαίνεται στο παρακάτω γράφημα:



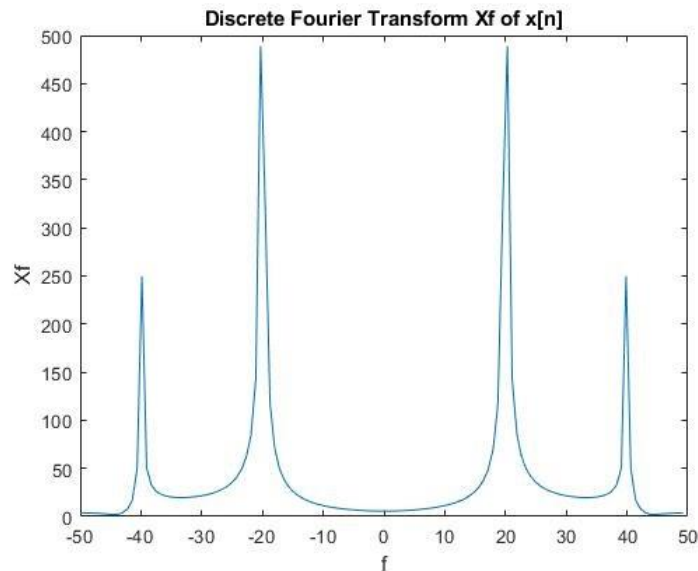
3α.2 Γράφημα δειγματοληπτημένου x_n με $f_s = 100$ Hz

Κατόπιν, εκτελέστηκε ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του αρχικού σήματος ενώ ορίστηκε πρώτα το κατάλληλο διάστημα με σκοπό την απεικόνιση ενός φάσματος του σήματος το οποίο να συμπεριλαμβάνει όλα τα δείγματα που ζητάω να εκφράσω σε κατάλληλες συχνότητες. Ως φάσμα ενός σήματος, ορίζεται η γραφική αναπαράσταση του Fourier του σε μία μόνο περίοδο (f) γύρω από το 0. Επομένως επιλέχθηκε ως διάστημα συχνοτήτων το παρακάτω :

$f = [-f_s/2: -f_s/N: -f_s/2]$, και όπου N , εννοείται το πλήθος δειγμάτων (στον κώδικα matlab ορίστηκε noOfSamples).

Επιπροσθέτως, χρησιμοποιήθηκε και η έτοιμη συνάρτηση της matlab **fftshift(fft(xn))**, με σκοπό την τοποθέτηση της μηδενικής συχνότητας του μετασχηματισμού στο κέντρο του.

Το γράφημα που προέκυψε είναι το ακόλουθο :



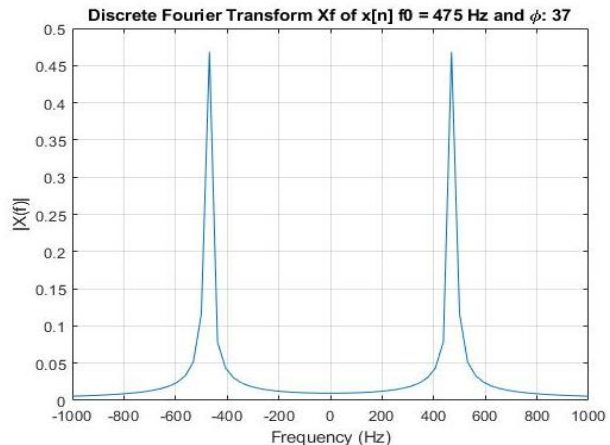
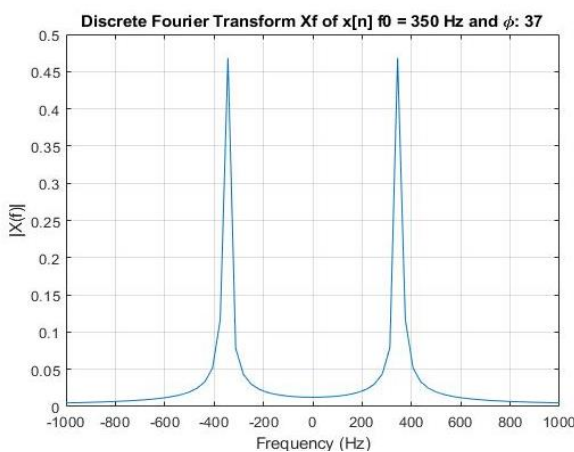
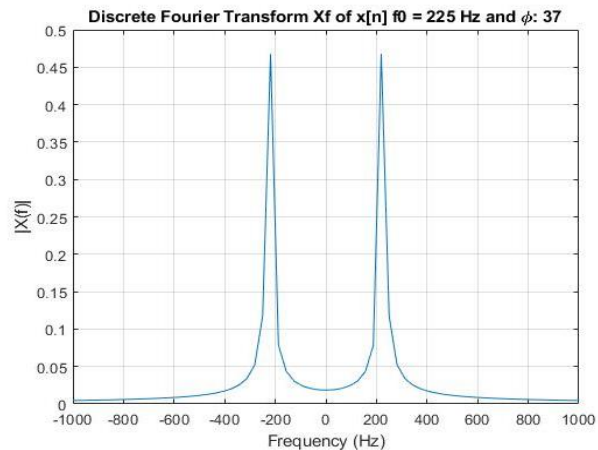
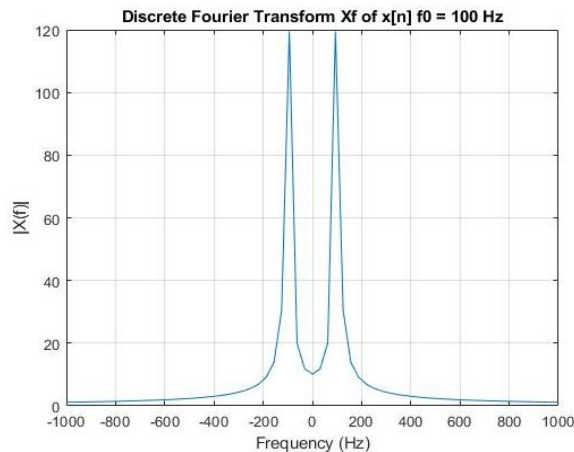
3α.3 plot Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier.

❖ Ερώτημα Β

Στο παρακάτω ερώτημα μας ζητήθηκε η δημιουργία του συνεχούς ημιτονοειδούς σήματος $x(t) = \sin(2\pi * f_0 t + \varphi)$, όπου $\varphi = 37$ (κωδικός ομάδας) και ύστερα η δειγματοληψία του με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 8\text{KHz}$.

Για την δημιουργία του ψηφιακού σήματος $x[n] = \sin(2\pi * (\frac{f_0}{f_s}) * n + \varphi)$, χρησιμοποιήθηκαν αυθαίρετα για τον άξονα του διακριτού χρόνου πλήθος δειγμάτων $nos = 256$ ενώ η συχνότητα του f_0 , μεταβαλλόταν στο ζητούμενο εύρος από 100 έως 475 Hz με ένα βρόγχο επαναλήψεων. Είναι φανερό πως το σήμα έχει την παραπάνω μορφή καθώς και ισχύει για την δειγματοληψία $x[n] = x(nT_s) = x(\frac{n}{f_s})$.

Στην συνέχεια στον ίδιο βρόγχο, υπολογιστικές για κάθε επανάληψη το φάσμα του σήματος και σχεδιάστηκε η γραφική παράσταση του. Για το εύρος των συχνοτήτων του, επιλέχθηκε ξανά αυθαίρετα (παντα σε δυναμη του 2), μέσα σε μια περίοδο να παρθούν $nfft = 256$ δείγματα, έτσι ώστε να υπάρχει λεπτομερής απεικόνιση. Τα σχήματα παρατίθενται παρακάτω:



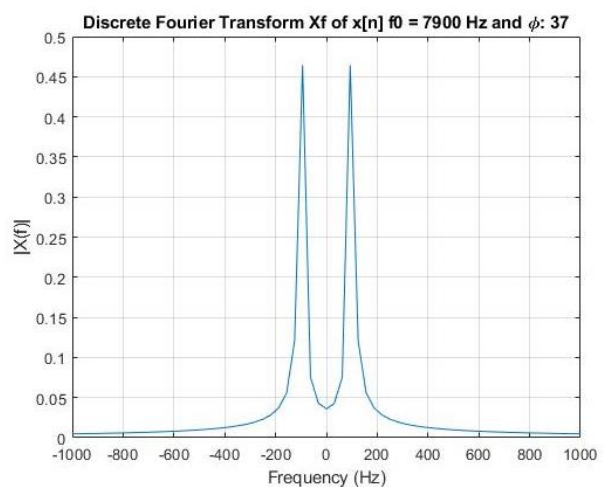
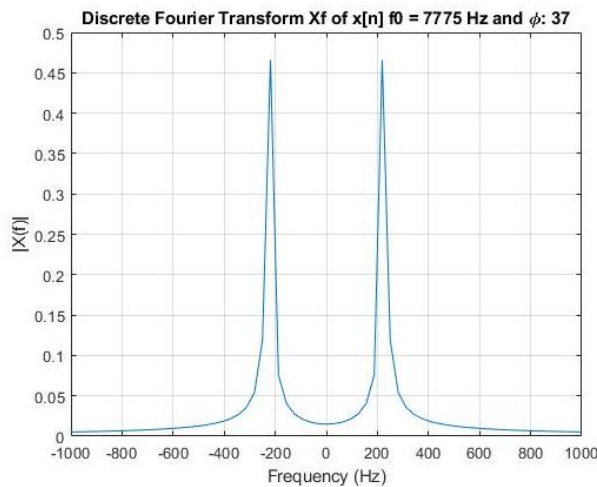
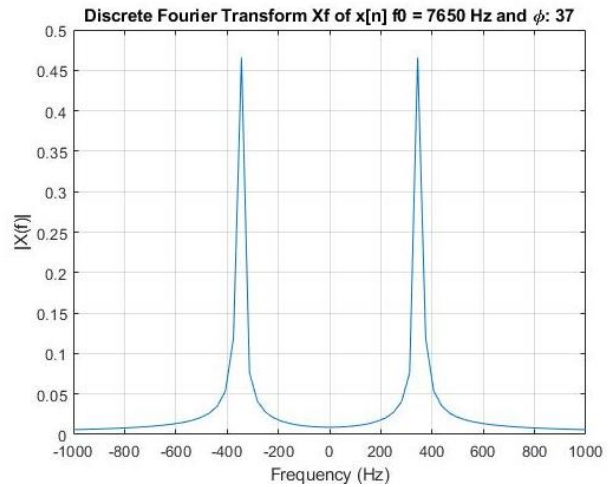
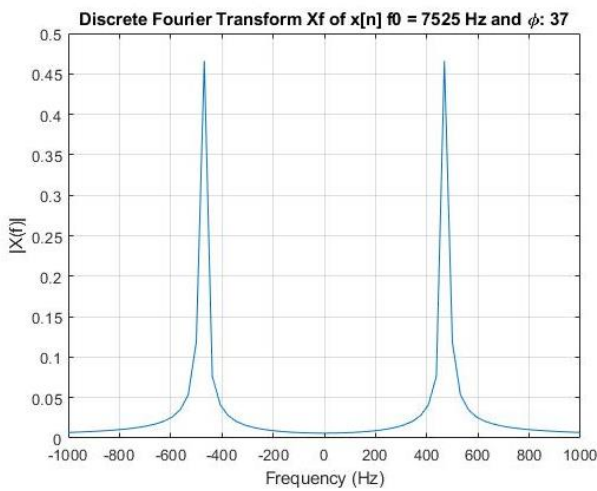
3b.1 Φάσμα Συχνοτήτων $X(F)$ για συχνότητες $f_0 \ll f_s$

Παρατηρήθηκε στα σχήματα όπως και ήταν αναμενόμενο από την θεωρία, το κάθε διαφορετικό φάσματα $X(F)$ του σήματος να έχει την μορφή δύο μοναδιαίων ώσεων με πλάτος $\frac{1}{2}$ (συγκεκριμένα μιας προσέγγισης της ώσης στην μορφή «καμπάνας», λόγω της λειτουργίας της συνάρτησης *fft της MATLAB*) μετατοπισμένων γύρω από την συχνότητα $\pm f_0$. Αυτό αιτιολογείται άμεσα από τον μετασχηματισμό Fourier ημιτονοειδούς σήματος :

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi F_0 n) x[n]\} = \frac{1}{2} (\{X(F - F_0)\} + \{X(F + F_0)\}) , \text{ με } x[n] = 1 \leftrightarrow$$

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi F_0 n)\} = \frac{1}{2} (\{\delta(F - F_0)\} + \{\delta(F + F_0)\})$$

Στην συνέχεια επαναλήφθηκε η ίδια ακριβώς διαδικασία παραγωγής των διαφορετικών σημάτων $x[n]$ και των φασμάτων τους, αλλά αυτή τη φορά για μεγαλύτερες συχνότητες της τάξης από 7527 Hz έως 7900 Hz. Τα αντίστοιχα σχήματα φαίνονται παρακάτω:



3b.2 Φάσμα Συχνοτήτων $X(F)$ για συχνότητες f_0 κοντά σε f_s

Παρατηρήθηκε αυτή τη φορά στις γραφικές παραστάσεις μια διαφοροποίηση σε σχέση με τις προηγούμενες. Συγκεκριμένα, είχαν παρόμοια μορφή με τις παραπάνω, αλλά οι ώσεις είναι έντονα μετατοπισμένες γύρω από συχνότητες με μικρότερη (κατά απόλυτο) τιμή από τις $\pm f_0$. Αναλυτικότερα στις μεγάλες αυτές συχνότητες f_0 , που βρίσκονται κοντά στην συχνότητα δειγματοληψίας F_S αυτό το γεγονός εξηγείται από το φαινόμενο της αναδίπλωσης, δηλαδή οι νέες συχνότητες στις οποίες θα βρίσκονται οι παλμοί θα έχουν την τιμή $\pm(F_S - f_0)$, δηλαδή μια τιμή εξαιρετικά μικρότερη από την αρχική του σήματος.

Τέλος, όσον αφορά την τιμή της αρχικής φάσης ϕ , και το πώς επηρεάζει αυτή το φάσμα μας, δοκιμάστηκαν ποικίλες τιμές του, παρατηρώντας ότι το φάσμα είναι ανεξάρτητο αυτού. Το γεγονός αυτό αιτιολογείται εύκολα αν αναλογιστούμε ότι η συνιστώσα ϕ δεν επηρεάζεται ούτε επηρεάζει τη συχνότητα του σήματος.