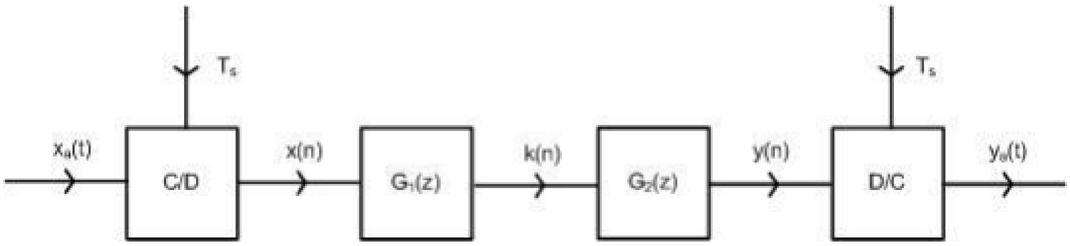
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

ΤΗΛ 301: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ
Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Στοιχεία Ομάδας 37 :
Περίδης Ιωάννης 2018030069
Σκλάβος Παναγιώτης 2018030170
Τσιπουράκη Αλεξάνδρα 2018030089

Άσκηση 1

Αντικείμενο της πρώτης άσκησης υπήρξε η πλήρης περιγραφή ενός αιτιατού , γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος. Γνωρίζουμε ότι οι τρεις τρόποι μελέτης και περιγραφής ενός τέτοιου συστήματος είναι μέσω της εξίσωσης διαφορών του, της απόκρισης συχνότητας και της συνάρτησης μεταφοράς του στον z. Παρακάτω, αναλύονται και οι τρεις τρόποι μελέτης για το σύστημα που ακολουθεί .



α)

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{H}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$.

Επειδή τα G1, G2 επιμέρους μέρη του συστήματος είναι συνδεδεμένα σε σειρά και στον χρόνο θα έπρεπε να συνελιχθούν μεταξύ τους , στο πεδίο της συχνότητας θα πρέπει να πολλαπλασιαστούν.
Δηλαδή $H(z) = G1(z) \times G2(z)$.

Από την εκφώνηση δίνεται για το $G2(z)$ ότι $G2(z) = \frac{1}{z+0,2}$

Για την εύρεση του $G1(z)$ έχει δοθεί η εξίσωση διαφορών του με τη μορφή :
$k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n)$

Βάσει των ιδιοτήτων της γραμμικότητας και της μετατόπισης στο χρόνο (time shifting property) , δηλαδή
$x[n-no] \leftrightarrow z^{-no}X(z)$ και $x[n] \leftrightarrow X(Z)$

προκύπτει πως

$$k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n) \leftrightarrow K(z) = 0,9\,z^{-1}k(z) + 0,2X(z)$$

Επομένως αφού $G1(z) = \frac{K(z)}{X(z)} \Rightarrow G1(z) = \frac{0,2}{1-0,9\,z^{-1}} \Rightarrow G1(z) = \frac{0,2z}{z-0,9}$

και τελικά , $H(z) = G1(z) \times G2(z) \Rightarrow H(z) = \frac{0,2z}{z-0,9} \times \frac{1}{z+0,2}$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{0,2z}{(z-0,9)(z+0,2)} \Rightarrow H(z) = \frac{0,2\,z}{z^2-0,7z-0,18}$$

Για την εύρεση της εξίσωσης διαφορών του συστήματος θα πρέπει να εκτελεστεί η αντίστροφη διαδικασία από την παραπάνω , δηλαδή αφού ισχύει ότι
$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = X(z) \times H(z) \Rightarrow Y(z) = X(z) \times \frac{0,2\,z}{z^2-0,7z-0,18} \Rightarrow$
$\Rightarrow Y(z) = \frac{0,2\,z\,X(z)}{z^2-0,7z-0,18} \Rightarrow Y(z) = 0,2zX(z) \times \frac{1}{z-0,9} \times \frac{1}{z+0,2}$

Εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$ θα προσπαθήσουμε να φέρουμε την εξίσωση διαφορών σε κατάλληλη μορφή :

➔ $\frac{1}{z-0,9} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}}\frac{1}{(z-0,9)} = \frac{z^{-1}}{1-0,9z^{-1}}, |z| > 0,9$

Ισχύει ακόμη πως $\delta(n-m) \leftrightarrow z^{-m}, \ \forall z \neq 0, \infty$

Επομένως $\frac{1}{z-0,9} \leftrightarrow \delta(n-1) \times 0,9^n u[n]$

Αντίστοιχα

➔ $\frac{1}{z+0,2} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}}\frac{1}{(z+0,2)} = \frac{z^{-1}}{1+0,2z^{-1}}$, $|z| > -0,2$

Επομένως $\frac{1}{z-0,9} \leftrightarrow \delta(n-1) \times -0,2^{n}u[n]$

Τέλος

➔ $0,2zX(z) \leftrightarrow 0,2x[n+1]$

Επαναφέρουμε τελικά την εξίσωση διαφορών στο πεδίο του χρόνου και προκύπτει

$y[n] = (\delta(n-1)(-0,2^{n}u[n]))(\delta(n-1)\,0,9^{n}u[n])(0,2x[n+1])$.

β)

Στο δεύτερο ερώτημα ζητείται ο σχεδιασμός του διαγράμματος πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ που υπολογίστηκε προηγουμένως :

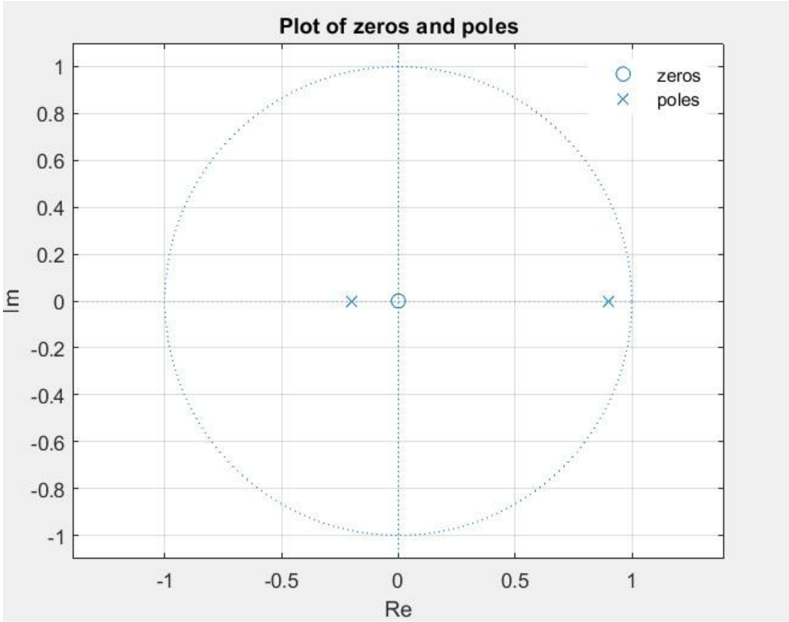
$$H(z) = \frac{0,2\,z}{z^{2} - 0,7z - 0,18}.$$

Αρχικά , ως μηδενικά ορίζονται οι ρίζες του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς , ενώ ως πόλοι οι αντίστοιχες ρίζες του παρονομαστή .

Επομένως , είναι φανερό πως μηδενικό της $H(z)$ είναι το $x0 = 0$ και ρίζες οι λύσεις του τριωνύμου $z^{2} - 0,7z - 0,18$.

Δ= 1,21 και $x1,2 = \frac{0,7\,(+/-)\sqrt{1,21}}{2} \Rightarrow x1 = 0,9$ και $x2 = -0,2$

Όσον αφορά την υλοποίηση του κώδικα σε matlab για την κατασκευή του διαγράμματος , αρχικά ορίστηκαν ο αριθμητής και παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς . Βάσει αυτών, βρέθηκαν ύστερα τα μηδενικά και οι πόλοι της συνάρτησης , αυτή τη φορά μέσω της συνάρτησης roots(func). Έπειτα, μέσω της συνάρτησης tf ορίστηκε η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και κατασκευάστηκε το ζητούμενο διάγραμμα, που παρατίθεται παρακάτω, σε σχέση με τον μοναδιαίο κύκλο με τη βοήθεια της συνάρτησης *zplane(zeros,poles)*.



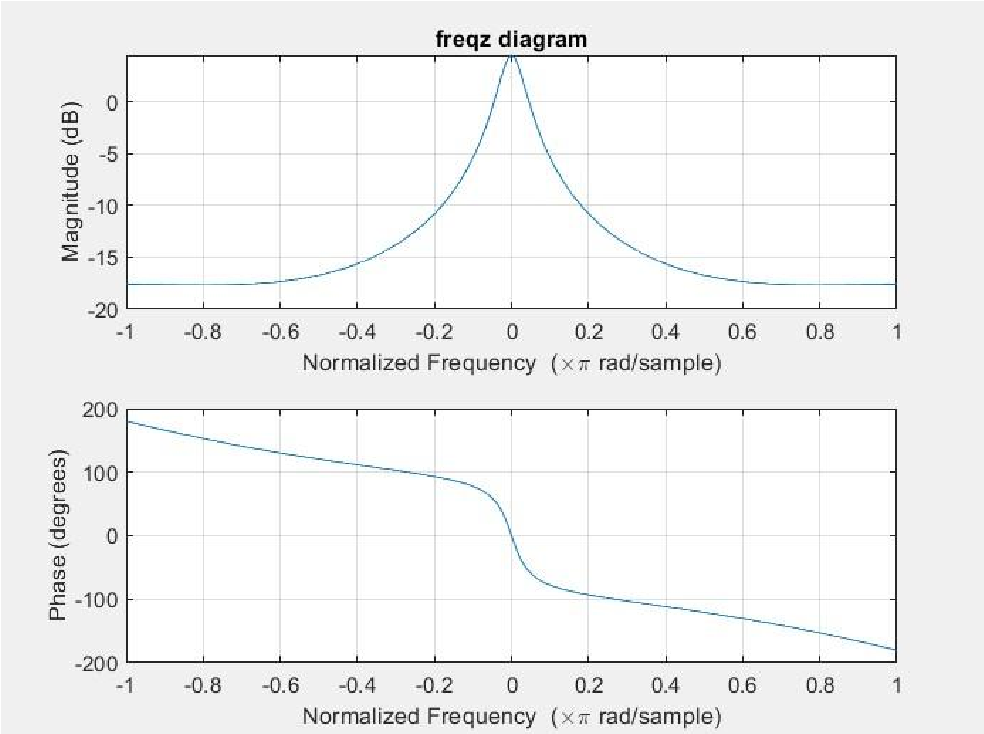
Διάγραμμα πόλων και μηδενικών του συστήματος (zplane)

γ) Το σύστημα που μελετάται είναι ευσταθές καθώς η περιοχή σύγκλισής του (ROC) περιέχει τον μοναδιαίο κύκλο . Αναλυτικότερα, ένα αιτιατό σύστημα με δεξιόπλευρη περιοχή σύγκλισης που περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο θεωρείται ευσταθές ,όπως είναι στην στην περίπτωσή μας αφού έχουμε μέγιστο πόλο το 0.9 .

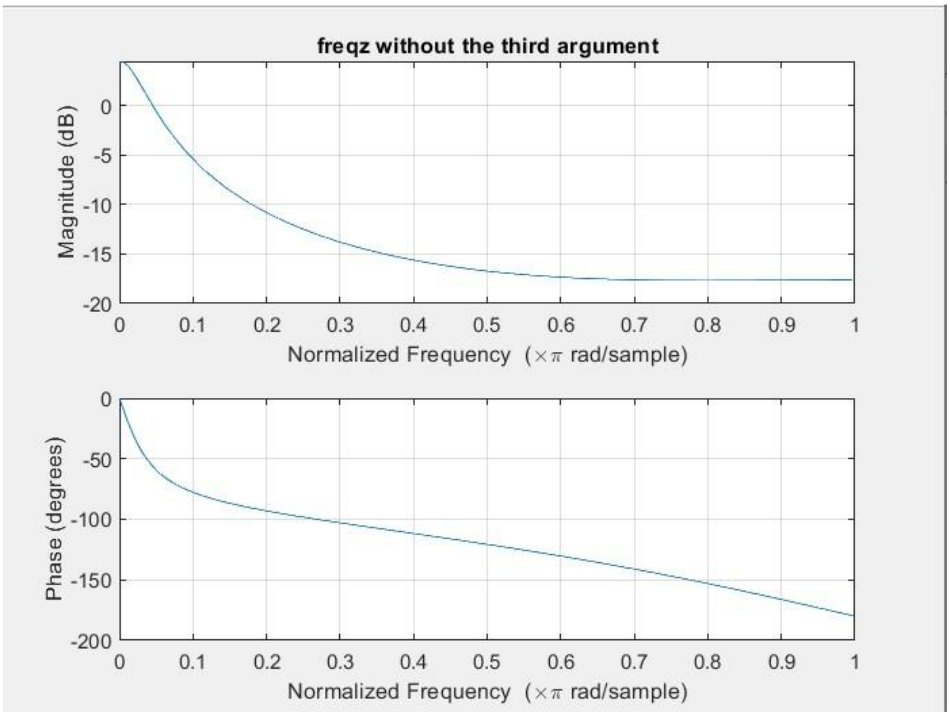
δ)

Στο ερώτημα αυτό ζητείται ο σχεδιασμός της απόκρισης συχνότητας του συστήματος στο διάστημα [-π,π] , την πρώτη φορά με το διάστημα απεικόνισης (F) ως τρίτο όρισμα στην συνάρτηση freqz και μία δεύτερη φορά χωρίς αυτό.

Τα αποτελέσματα , φαίνονται στα δύο παρακάτω διαγράμματα :



Διάγραμμα freqz(num,denom,F)



Διάγραμμα freqz(num,denom)

Εκ της θεωρίας ορμώμενοι , γνωρίζουμε πως όσο πλησιάζουν οι πόλοι τον μοναδιαίο κύκλο αυξάνεται και η ενίσχυση των συχνοτήτων της συνάρτησης μεταφοράς και αντίστοιχα όσο τα μηδενικά προσεγγίζουν το μηδέν , τόσο μειώνεται η ενίσχυση της συχνότητας της συνάρτησης μεταφοράς, εξ ου και προκύπτει η παραπάνω μορφή στο διάγραμμα πλάτους (magnitude plot) .
Για το διάγραμμα φάσης παρατηρούμε πώς για normalized frequency (x άξονα) μικρότερη του μηδενός, η φάση είναι θετική με συνεχή πτώση από τις 180 έως τις 0 μοίρες ενώ για x>0 παρατηρείται πτώση της φάσης από τις 0 μέχρι τις -180 μοίρες.

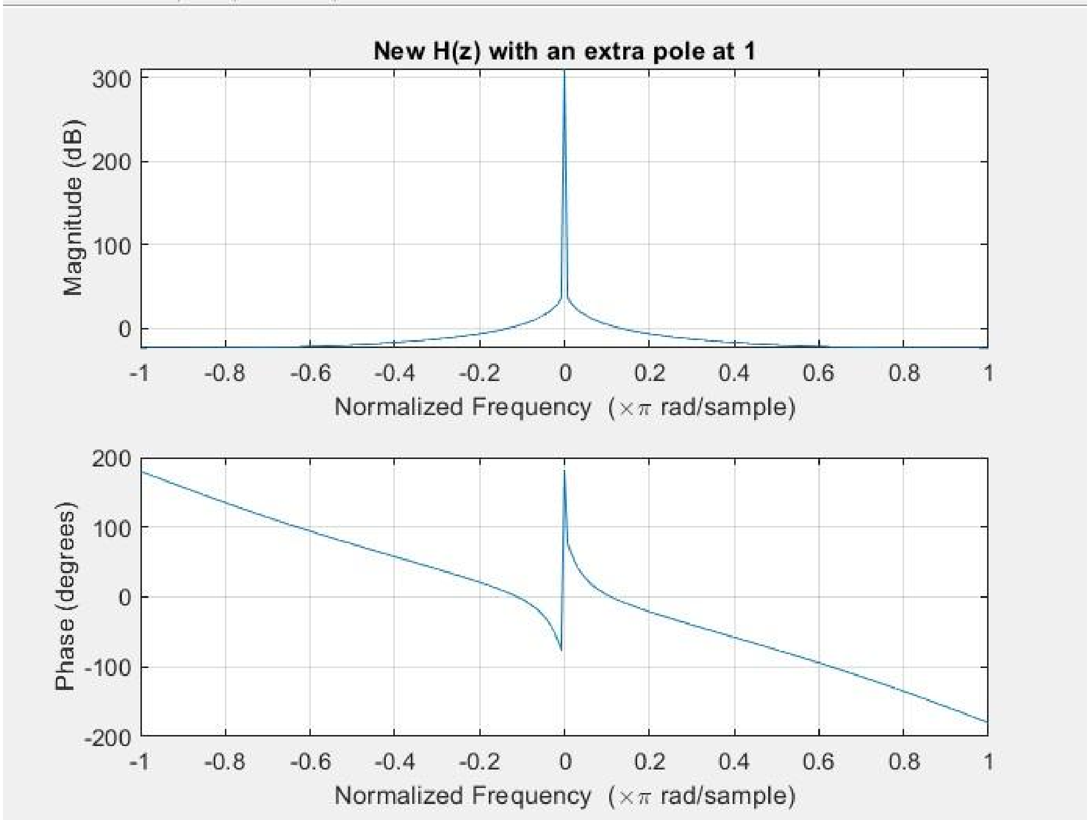
Ακόμη , παρατηρείται πώς ελλείψει του τρίτου ορίσματος στη συνάρτηση freqz , εμφανίζεται μόνο ο θετικός ημιάξονας x των γραφικών απεικονίσεων, γεγονός που αποκρύπτει όμως την πλήρη συμπεριφορά της συνάρτησης.

ε)

Στο τελευταίο αυτό ερώτημα, ζητείται εκ νέου ο σχεδιασμός της απόκρισης συχνότητας του συστήματος με το σύστημα όμως να έχει έναν επιπλέον πόλο στο z=1. Για να επιτευχθεί το παραπάνω, πολλαπλασιάστηκε ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς H(z) με τον όρο (1-z) , οπότε και προέκυψε η νέα συνάρτηση μεταφοράς :

$$H'(z) = \frac{0,2\, z}{(z^2 - 0,7z - 0,18\,)(1-z)} \Rightarrow H'(z) = \frac{0,2z}{-z^3 + 1,7z^2 - 0,52z - 0,18}\,.$$

Βάσει αυτής της νέας συνάρτησης μεταφοράς , ορίστηκαν ο νέος αριθμητής και παρονομαστής στο matlab αρχείο και προέκυψε η παρακάτω γραφική απεικόνιση



Διάγραμμα freqz(numerator,denominator,F) με νέο πόλο στο z=1

Από το παραπάνω διάγραμμα απόκρισης συχνότητας παρατηρείται πως η προσθήκη νέου πόλου στο z=1 οδηγεί στο να απειρίζεται στιγμιαία το πλάτος του διαγράμματος στην τιμή x=0. Πράγματι , από την θεωρία γνωρίζουμε πως η ύπαρξη πόλων ακριβώς πάνω στο μοναδιαίο κύκλο προκαλεί απρόσμενες στιγμιαίες συμπεριφορές της συνάρτησης εφόσον όσο πλησιάζουν οι πόλοι τον μοναδιαίο κύκλο αυξάνεται και η ενίσχυση των συχνοτήτων της συνάρτησης μεταφοράς και, όπως διαπιστώνεται και γραφικά , ακριβώς στη μονάδα οι γραφικές απειρίζονται στιγμιαία .

<u>Άσκηση 2</u>

α)

Στην άσκηση αυτή, μας ζητήθηκε η εύρεση της αναλυτικής έκφρασης , που προκύπτει από την ανάλυση σε απλά κλάσματα της δοθείσας συνάρτησης μεταφοράς:

$H(z) = \frac{4-3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$, με $|z| > 2$

Για την υλοποίησή της σε Matlab χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση residuez, η οποία δέχεται ως όρισμα ένα σύνθετο κλάσμα. Αρχικά, υπολογίζει τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή, και στη συνέχεια το αναλύει σε επιμέρους απλά κλάσματα.
Οπότε μετά την ανάλυση προκύπτει:

$$H(z) = \frac{4-3.5z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = -\frac{3}{2z^{-1}-1} - \frac{1}{0.5z^{-1}-1}$$

Το αποτέλεσμα αυτό όπως απεικονίζεται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση pretty:

```
     3         1
- ----- - -------
  2         1
  - - 1   --- - 1
  z       2 z
```

β)

Για την εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Z της συνάρτησης $H(z)$ θεωρητικά, ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία.

Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος ανάπτυξης σε μερικά κλάσματα Αρχικά, για καλύτερη διαχείριση της συνάρτησης μεταφοράς , μετατράπηκε στην μορφή

$H(z) = \sum \frac{Ak}{1-dkz^{-1}} = 3\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$, εφόσον οι πόλοι είναι περισσότεροι από τα μηδενικά.

Έπειτα για τον αντίστροφο μετασχηματισμό , χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω ιδιότητες , αναλόγως με το που βρίσκεται ο κάθε πόλος σε σχέση με την περιοχή σύγκλισης.

Για $ROC: rR < |z| < rL$

$(dk)^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-dkz^{-1}}$, δεξιόπλευρη $|dk| \leq rR$

$-(dk)^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-dkz^{-1}}$, αριστερόπλευρη $|dk| \geq rL$

Στην περίπτωσή μας και οι δύο περιοχές σύγκλισης είναι δεξιόπλευρες.

Επομένως $H(z) \leftrightarrow h[n] = 3(2^n)u[n] + (\frac{1}{2})^n u[n]$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα , ταυτίζεται μετά από έλεγχο με το αποτέλεσμα της συνάρτησης iztrans της MATLAB όπως αυτά παρουσιάζονται παρακάτω:

```
h =
3*2^n + (1/2)^n
```