

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

ΤΗΛ 301: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ
Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Εργαστήριο 4

Στοιχεία Ομάδας 37:

Περίδης Ιωάννης 2018030069

Σκλάβος Παναγιώτης 2018030170

Τσιπουράκη Αλεξάνδρα 2018030089

Ζητούμενο της τέταρτης εργαστηριακής άσκησης υπήρξε η περαιτέρω εξοικείωσή μας με την σχεδίαση FIR φίλτρων με χρήση παραθύρων.

➤ **Άσκηση 1**

Στην πρώτη άσκηση, σχεδιάστηκε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με αναλογική συχνότητα αποκοπής $\Omega_c = 0.4\pi$ rad/sec, $F_s = 0.1$ kHz ή $F_s = 100$ Hz και μήκος παραθύρου $N = 21$.

Το μήκος παραθύρου ορίζει την περιοχή του σήματος IIR που πρακτικά θα μετατρέψουμε σε FIR. Αναλυτικότερα, για να έχει νόημα το φίλτρο πεπερασμένου μήκους (FIR) πρέπει να κρατήσουμε έναν πεπερασμένο μόνο αριθμό συντελεστών $h(n)$, δηλαδή να κάνουμε αποκοπή. Η αποκοπή αυτή αλλοιώνει την αρχική ιδανική συνάρτηση της οποίας είναι η προσέγγιση και εκφράζεται τελικά καλύτερα με την έννοια του παραθύρου. Η τελική πράξη που εκτελείται είναι η πράξη πολλαπλασιασμού της άπειρης ακολουθίας $h(n)$ με ένα ορθογώνιο παράθυρο $w(n)$ πεπερασμένου μήκους N , που δηλώνει το πλήθος δειγμάτων που θα λάβουμε. Η έννοια του παραθύρου μας δίνει την δυνατότητα γενίκευσης της αποκοπής με ταχύχρονη διαμόρφωση των συντελεστών $h(n)$.

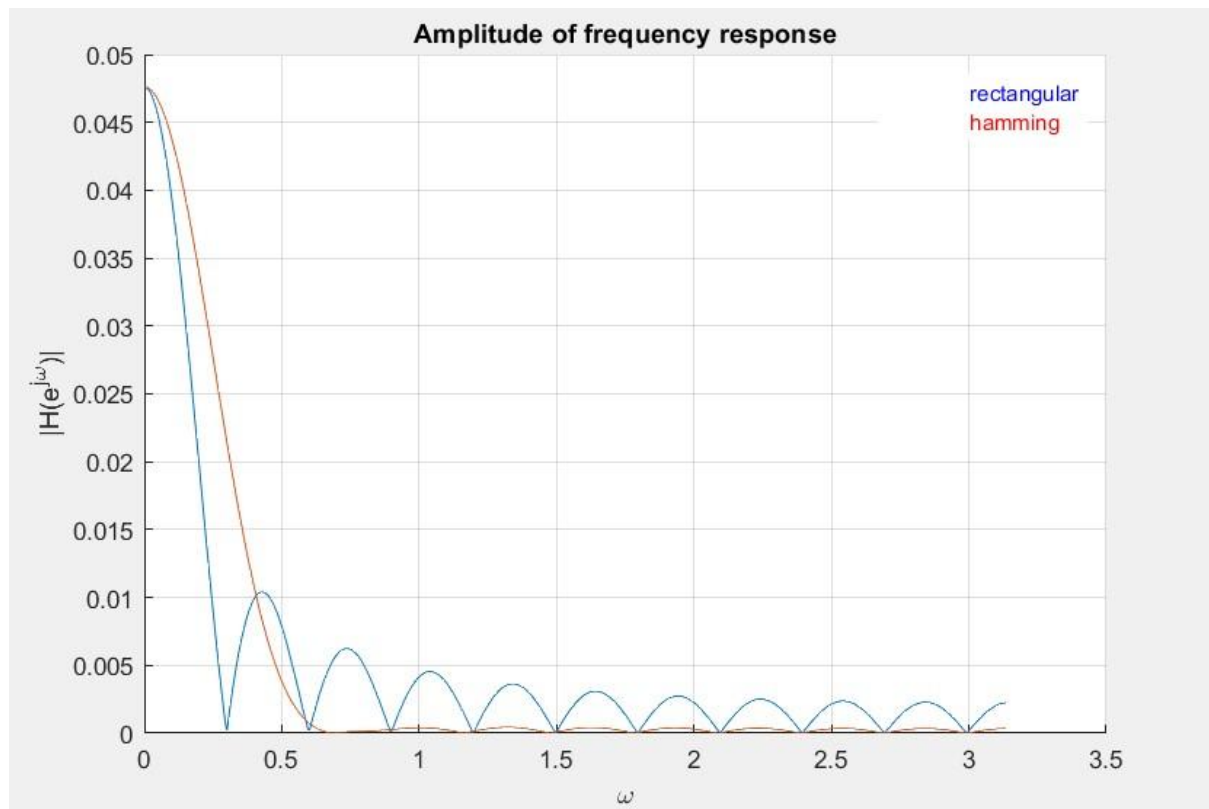
Για την επίλυση της άσκησης, απαραίτητη υπήρξε η χρήση της συνάρτησης `fir1`, η οποία ορίστηκε ως εξής :

```
lp1=fir1((N-1),wc_dig,rectwin(N));
```

Όπου ως $N-1$ ορίστηκε η τάξη του φίλτρου εφόσον N τέθηκε το μήκος παραθύρου και γνωρίζουμε ότι για μήκος παραθύρου N η τάξη φίλτρου είναι $N-1$.

Ακόμη, το όρισμα `wc_dig` συμβολίζει την ψηφιακή συχνότητα αποκοπής, η οποία υπολογίστηκε με τη βοήθεια της αναλογικής συχνότητας αποκοπής $\omega_c = 0.4\pi$ rad/sec.

Πιο συγκεκριμένα, η σχέση που συνδέει αυτές τις δύο συχνότητες είναι $\omega_c_{dig} = \omega_c_{analog} / \omega_s$, με $\omega_s = 2\pi F_s$ (rad/s) και εφόσον, όπως και στο φίλτρο cheby1, η fir1 μας δίνει αποτέλεσμα στο μισό φάσμα συχνοτήτων $[0, f_s/2]$ φροντίσαμε να διαιρέσουμε το ω_s διά του 2 και τελικά προέκυψε η σχέση: $\omega_c_{dig} = (2 \omega_c_{analog}) / \omega_s$. Τέλος, το τρίτο όρισμα της συνάρτησης δηλώνει τον τύπο παραθύρου που χρησιμοποιείται για το φιλτράρισμα. Στην περίπτωση μας η άσκηση επαναλήφθηκε για φίλτρα rectangular και hamming.

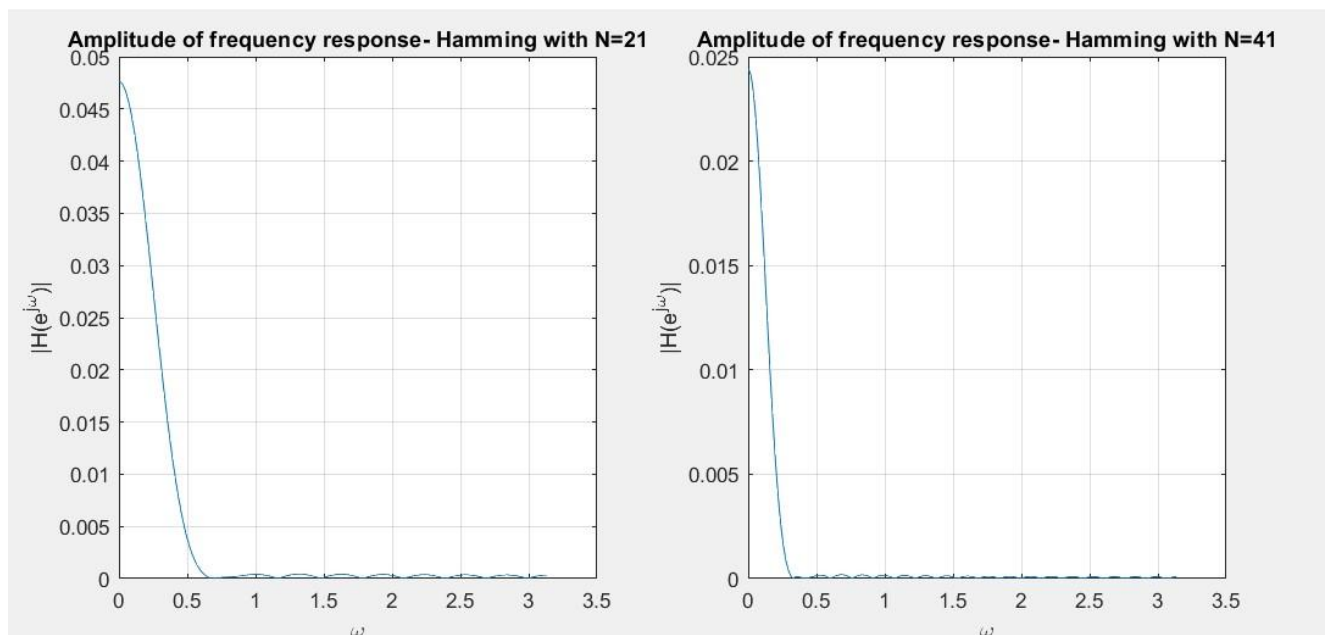


Από το παραπάνω γράφημα είναι οφθαλμοφανές πως το παράθυρο hamming δίνει εμφανώς καλύτερα αποτελέσματα από το rectangular. Πιο συγκεκριμένα, το παράθυρο rectangular, στην απόκριση συχνότητας του οποίου είναι έντονη η ύπαρξη πλευρικών λοβών, προκαλεί έντονες διακυμάνσεις (ripples) στην απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Αμέσως πριν και μετά τη ζώνη μετάβασης του φίλτρου εμφανίζεται η μέγιστη διακύμανση που το πλάτος της είναι ανεξάρτητο του μεγέθους του παραθύρου. Αυτό είναι γνωστό σαν φαινόμενο Gibbs και είναι χαρακτηριστικό του rectangular παραθύρου. Για τον λόγο αυτό, το παράθυρο rectangular θεωρείται ένα μη αξιόπιστο παράθυρο και δεν χρησιμοποιείται ευρέως. Αντίθετα, το παράθυρο hamming παρουσιάζει πολύ ομαλότερο φιλτράρισμα και τελικά ελάχιστες δυσδιάκριτες διακυμάνσεις. Τέλος, θετικό στοιχείο του rectangular παραθύρου θα πρέπει να θεωρηθεί το γεγονός ότι έχει μικρότερη ζώνη διέλευσης από το hamming, γεγονός που μπορεί να φανεί χρήσιμο κατά περίπτωση.

➤ Άσκηση 2

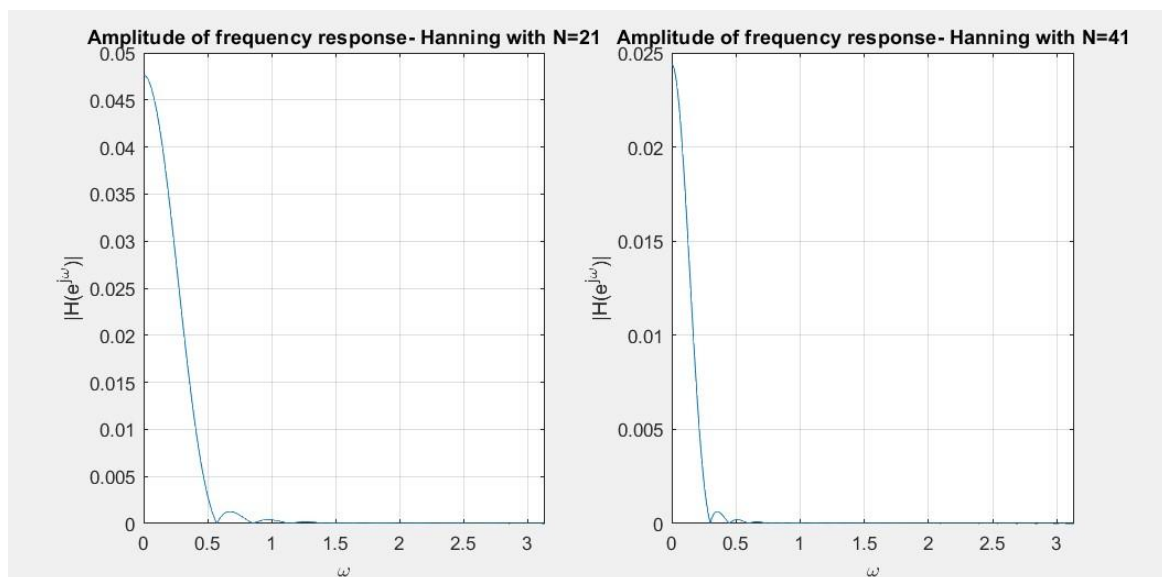
Στην δεύτερη άσκηση σχεδιάστηκε αντίστοιχα με προηγουμένως ένα FIR φίλτρο με αναλογική συχνότητα αποκοπής $\Omega_c=0.5\pi$ rad/sec και $F_s = 0.1\text{KHz}$. Η παραπάνω διαδικασία εκτελέστηκε τέσσερις φορές , αλλάζοντας κάθε φορά είτε το μήκος παραθύρου,άρα και την τάξη του φίλτρου, από 21 σε 41 και αντίστροφα, είτε αλλάζοντας το παράθυρο από Hamming σε Hanning.

Τα αποτελέσματα, φαίνονται αναλυτικά στις παρακάτω γραφικές απεικονίσεις , όπου γίνεται σύγκριση τόσο μεταξύ της αποτελεσματικότητας φίλτρων όσο και μεταξύ των τάξεων φίλτρου και του μήκους παραθύρου που επιλέγεται κάθε φορά.



Σχήμα 1

Παρατηρώντας την απόκριση συχνότητας των φίλτρων Hamming για μήκος παραθύρου 21 και 41 αντίστοιχα μπορούν να διακριθούν τα εξής ακόλουθα :
Για $N=21$ το πλάτος της απόκρισης είναι διπλάσιο από ότι για $N=41$. Ακόμη, για $N=21$ εμφανίζονται μεγαλύτερες διακυμάνσεις απ'οτι για $N=41$, γεγονός που φανερώνει πως τελικά η αύξηση τάξης φίλτρου -και μήκους παραθύρου αντίστοιχα- βελτιώνει την ακρίβεια του φίλτρου.

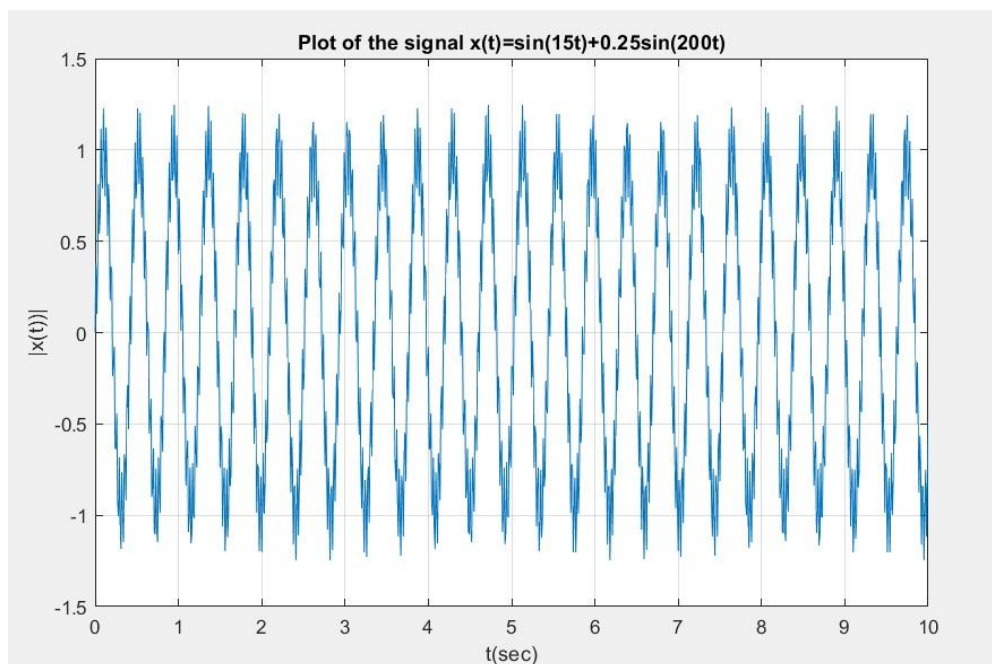


Σχήμα 2

Για το παράθυρο Hanning μπορεί να αναφερθεί το γεγονός ότι ενώ αρχικά εμφανίζεται μία έντονη διακύμανση, μετέπειτα το φίλτρο λειτουργεί με αρκετά μεγαλύτερη ακρίβεια από το Hamming που εξετάστηκε προηγουμένως. Ακόμη, ως προς το πλάτος των αποκρίσεων και σε αυτή την περίπτωση το πλάτος για $N=21$ είναι διπλάσιο από το πλάτος για $N=41$ ενώ και πάλι βέλτιστη συμπεριφορά εμφανίζει το φίλτρο μεγαλύτερης τάξης.

- Σε δεύτερο χρόνο, ζητήθηκε η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος με είσοδο το σήμα :

$$x = \sin(15t) + 0.25\sin(200t) \text{ και } F_s=100\text{Hz.}$$

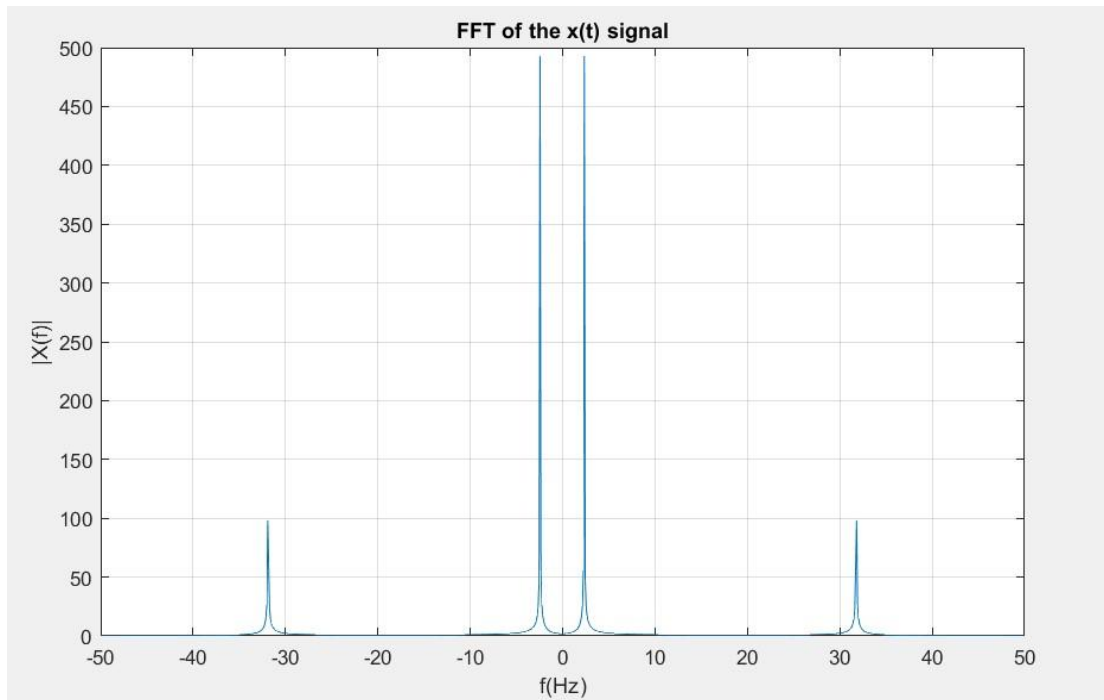


Σχήμα 3

Αρχικά , υπολογίστηκε η συχνότητα Nyquist του σήματος με σκοπό την πρόβλεψη τυχουσών ανωμαλιών στα αποτελέσματα των γραφικών απεικονίσεων (π.χ επικάλυψη , αναδίπλωση).

Για το συγκεκριμένο σήμα η συχνότητα Nyquist προκύπτει τελικά ίση με :

$2 \times f_{max} = 2 \times (200/2\pi) = 2 \times 31,8 = 63,66 \text{ Hz} < 100 \text{ Hz}$ με τα οποία γίνεται η δειγματοληψία και επομένως αναμένονται ομαλά αποτελέσματα.

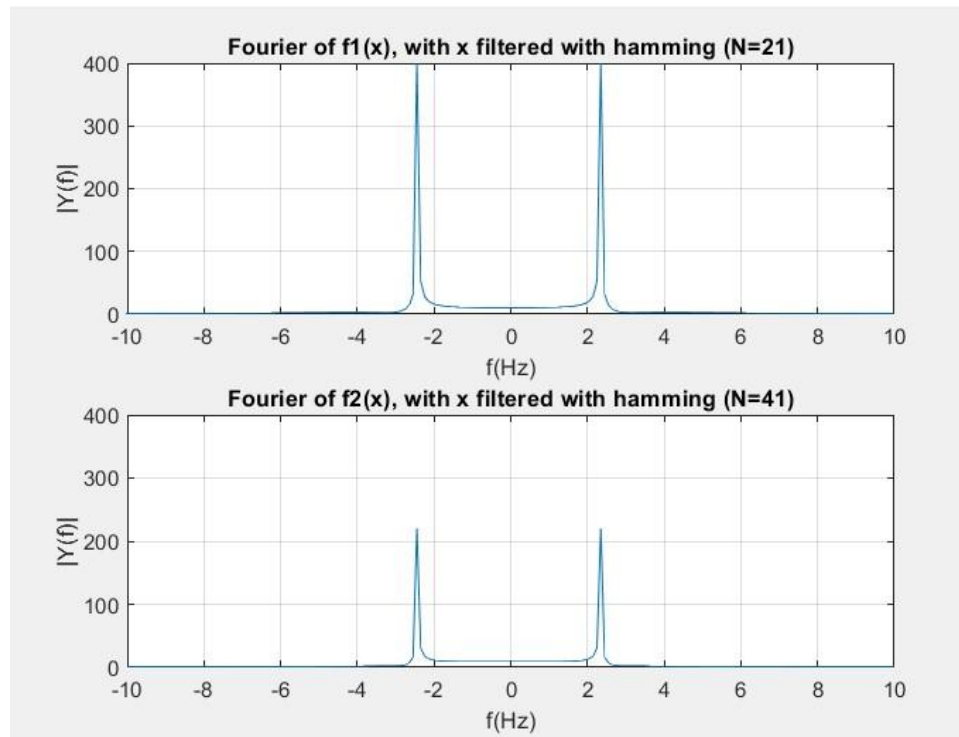


Σχήμα 4

Στο παραπάνω γράφημα , απεικονίζεται ο μετασχηματισμός Φουριέ του αρχικού , $x(t)$, σήματος. Παρατηρείται η ύπαρξη παλμών dirac για συχνότητες $f = \pm 2,5 \text{ Hz}$ και $f = \pm 32 \text{ Hz}$.

Στο παρακάτω γράφημα, παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Φουριέ του σήματος $f_1(x)$, (και $f_2(x)$) δηλαδή του σήματος $x(t)$, περασμένου μέσα από τις συναρτήσεις fir1 και filter ($f_1 = \text{filter}(H, 1, x)$ με $\text{lp3} = \text{fir1}((N-1), \text{wc_dig2}, \text{hamming}(N))$).

Ομοίως, θα σχολιαστούν τα $f_2(x)$, $f_3(x)$ και $f_4(x)$, με τις ανάλογες διαφορές τους να αναγράφονται σε κάθε γραφική απεικόνιση.

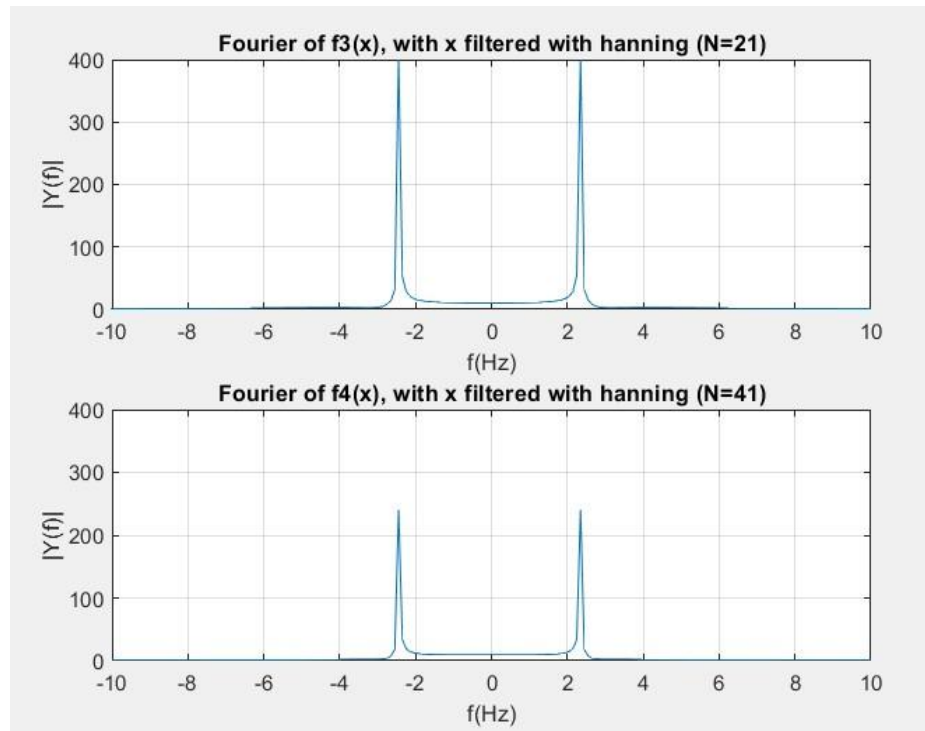


Σχήμα 5

Στην $f_1(x)$, δηλαδή την $x(t)$ φιλτραρισμένη με παράθυρο Hamming και μήκος παραθύρου $N=21$, παρατηρείται η διατήρηση ενός μεγάλου τμήματος του παλμού στις συχνότητες $f = \pm 2,5$ Hz. Οι παλμοί στις συχνότητες $f = \pm 32$ Hz έχουν αποκοπεί εντελώς.

Αντίστοιχα, στην $f_2(x)$, όπου εξετάζεται η $x(t)$ φιλτραρισμένη με παράθυρο Hamming μήκους $N=41$, οι παλμοί για $f = \pm 2,5$ Hz ψαλιδίζονται αισθητά περισσότερο από ότι στην $f_1(x)$ και οι παλμοί για $f = \pm 32$ Hz έχουν αποκοπεί για ακόμη μία φορά.

Άρα γίνεται εμφανές ότι η ζώνη μετάβασης του συστήματος μικραίνει όσο αυξάνεται η τάξη του φίλτρου δηλαδή τα δύο αυτά μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα.

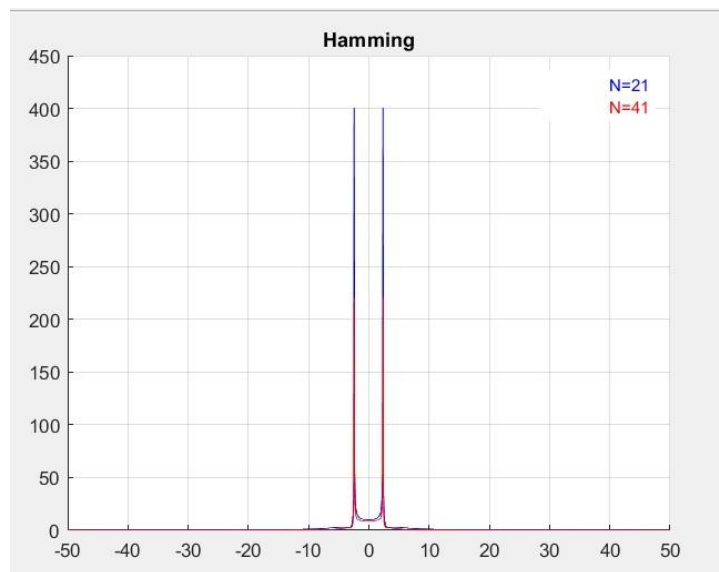


Σχήμα 6

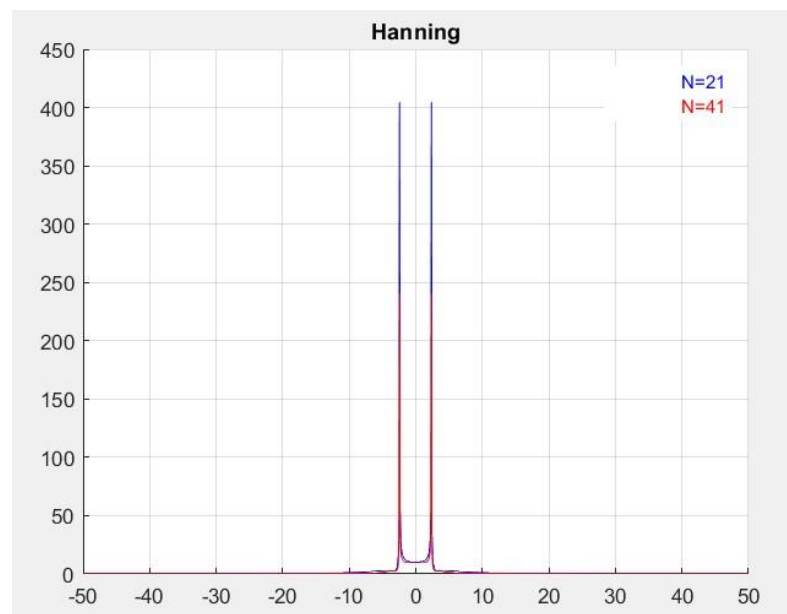
Ομοίως με το φίλτρο Hamming , για το Hanning εντοπίζονται ακριβώς ίδιες συμπεριφορές. Οι παλμοί για $f=\pm 32$ Hz έχουν αποκοπεί εντελώς ενώ οι παλμοί για $f=\pm 2,5$ Hz για τάξη φίλτρου 20 ψαλιδίζονται ελαφρώς και για 40 περίπου υποδιπλασιάζονται σε ύψος. Επομένως, ακόμη μία φορά διαπιστώνεται πως η ζώνη μετάβασης στενεύει όσο η τάξη του φίλτρου αυξάνεται.

Αξίζει ακόμη , να παρουσιαστούν και τα διαγράμματα φάσματος συγκρίνοντας ως προς το φίλτρο ή ως προς την τάξη αυτού με σκοπό την εξαγωγή μερικών ακόμη συμπερασμάτων .

- Σύγκριση ίδιου φίλτρου ως προς τις τάξεις του-μήκη παραθύρου



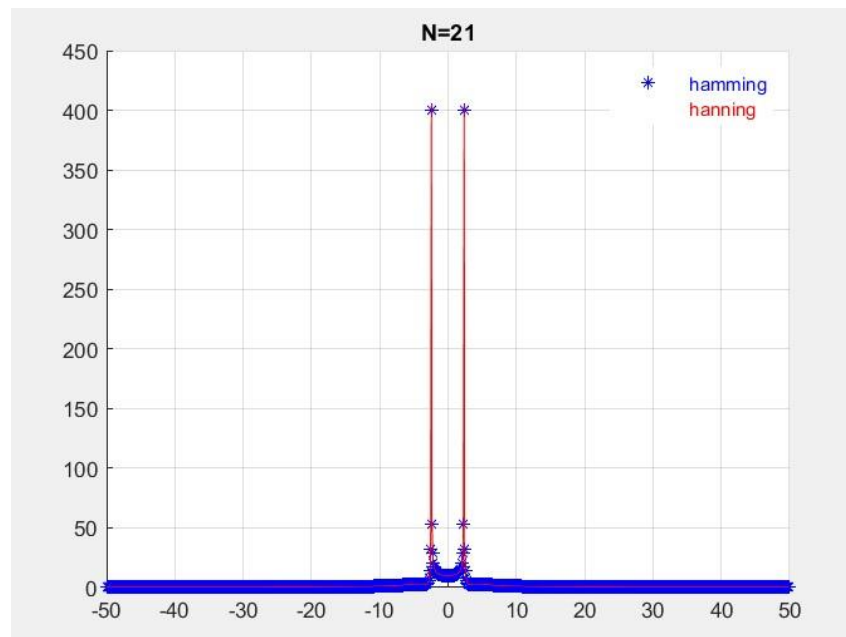
Σχήμα 7



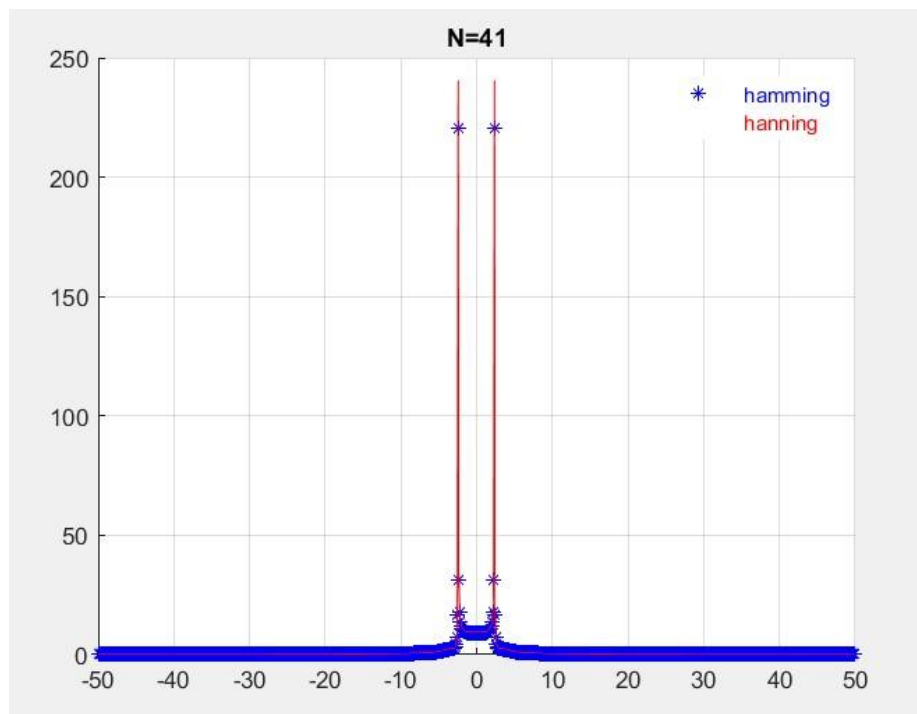
Σχήμα 8

Τόσο στο σχήμα 7 όσο και στο 8 , για ακόμη μία φορά επιβεβαιώνεται ότι η ζώνη μετάβασης του φίλτρου στενεύει όσο η τάξη του αυξάνεται. Το παραπάνω εντοπίστηκε τόσο στο Hamming όσο και στο Hanning φίλτρο. Ένα τελικό συμπέρασμα και για τα δύο αυτά φίλτρα είναι πώς και τα δύο είναι χαμηλοπερατά εφόσον επιτρέπουν την διέλευση των παλμών που βρίσκονται σε χαμηλές συχνότητες , αποκόπτοντας αυτά που βρίσκονται στις υψηλές.

- Σύγκριση διαφορετικών φίλτρων ως προς την ίδια τάξη-μήκος παραθύρου



Σχήμα 9

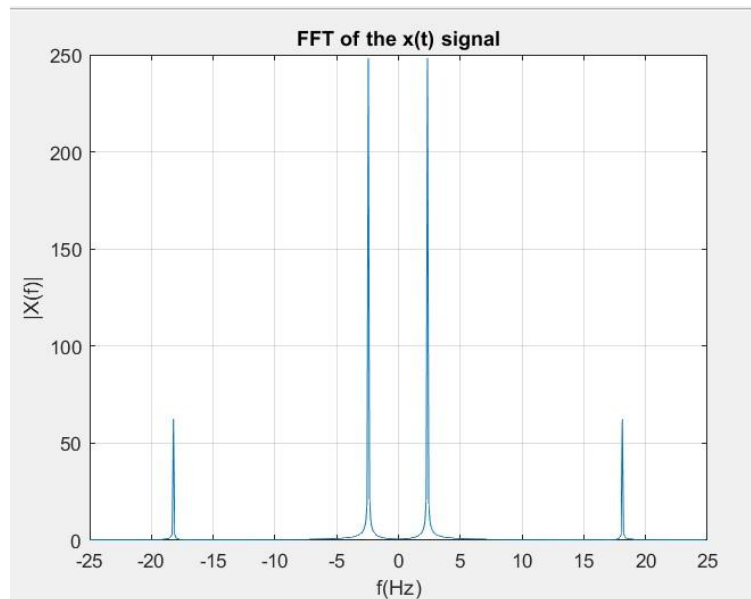


Σχήμα 10

Και από τα δύο παραπάνω σχήματα (9,10) διαπιστώνεται η ομοιότητα των φίλτρων Hamming και Hanning ως προς την απόδοσή τους. Τα δύο φίλτρα για ίδιο μήκος παραθύρου εμφανίζουν πανομοιότυπη συμπεριφορά με αποκλίσεις μη παρατηρήσιμες από γυμνό μάτι. Μοναδική διαπιστώσιμη διαφορά υπήρξε ότι για $N=41$

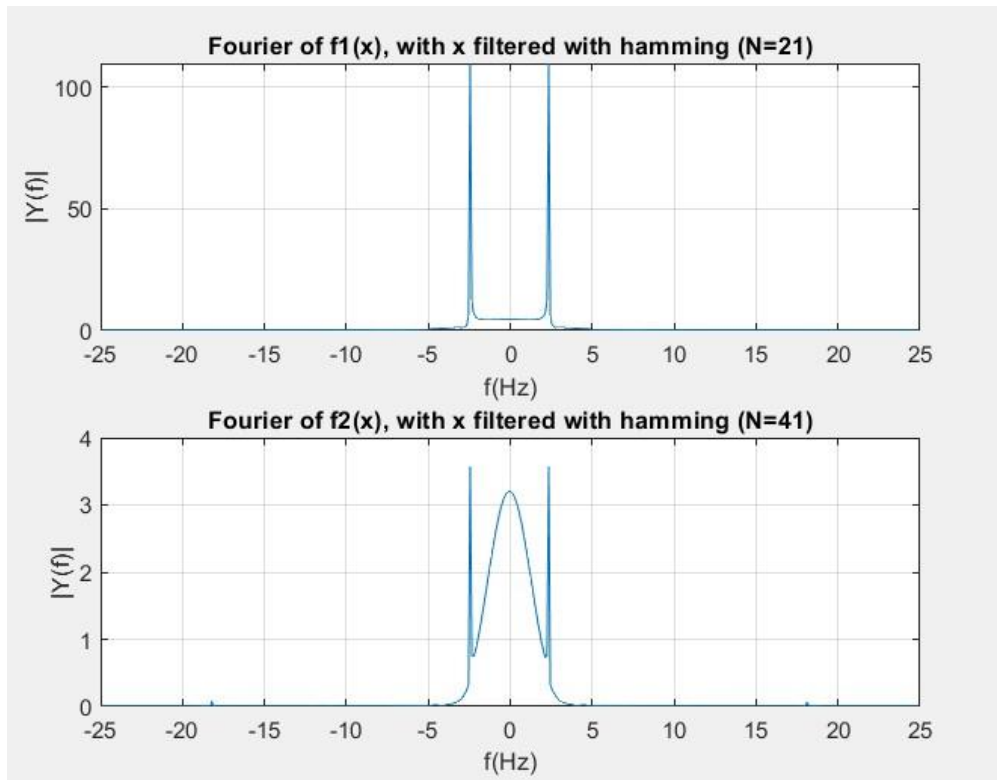
,τα ύψη των δύο φίλτρων αποκλίνουν κατά 25 μονάδες (10% διαφορά) με το Hanning φίλτρο ψηλότερο.

- Έπειτα επαναλήφθηκε η ίδια διαδικασία φιλτραρίσματος , με $F_s'=50$ Hz. Σε αυτή την περίπτωση που η συχνότητα δειγματοληψίας είναι μικρότερη από την συχνότητα Nyquist, η οποία είχε υπολογιστεί και προηγουμένως στα 63,66 Hz > 50 Hz, αναμένονται στα τελικά γραφήματα ανωμαλίες, είτε μικρές (aliasing) είτε μεγάλες (mirroring-αναδίπλωση), οι οποίες θα εξεταστούν αμέσως παρακάτω.



Σχήμα 11

Οι παλμοί dirac που προέκυψαν αυτή τη φορά μετά τον μετασχηματισμό Φουριέ βρίσκονται στις θέσεις $f=\pm 18$ Hz και $f=\pm 2,5$ Hz, έχοντας και το μισό πλάτος από την προηγούμενη ανάλυση για $F=100$ Hz.

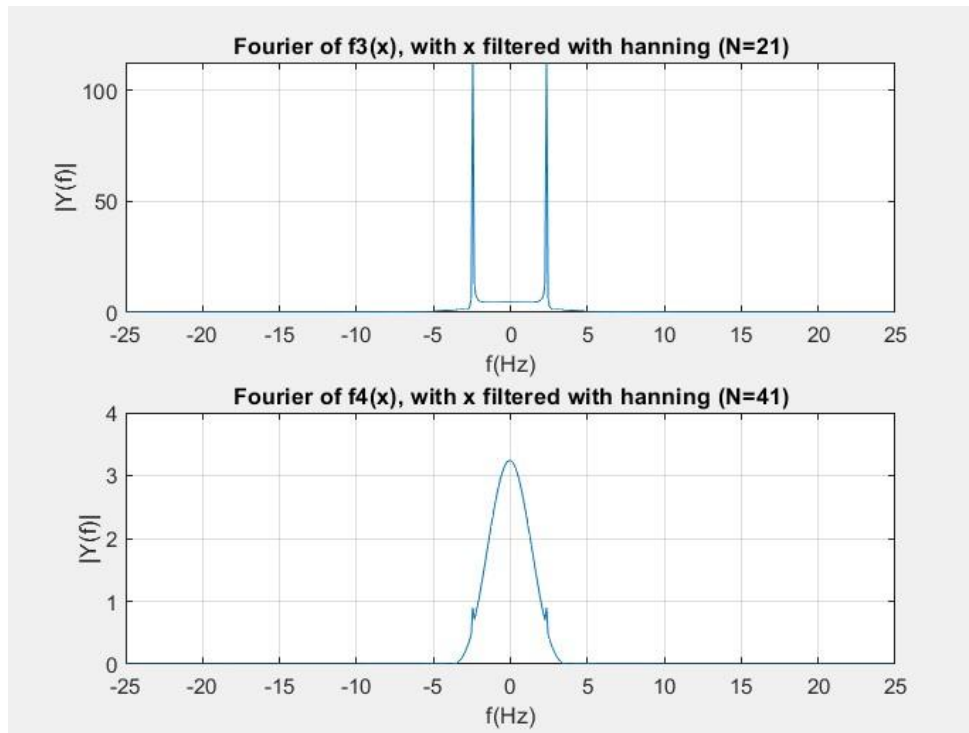


Σχήμα 12

Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζονται τα φάσματα των συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$, δηλαδή του σήματος $x(t)$ φιλτραρισμένου με Hamming $N=21$ και $N=41$, για το νέο $F_s=50$ Hz.

Όπως αναμενόταν, εμφανίζονται έντονες ανωμαλίες ιδιαίτερα στο φίλτρο μεγαλύτερης τάξης λόγω της ακατάλληλης συχνότητας που έχει επιλεγεί. Όσον αφορά την $f_1(x)$, οι συχνότητες στις $f=\pm 18$ Hz έχουν αποκοπεί πλήρως ενώ εκείνες για $f=\pm 2,5$ Hz έχουν ψαλιδιστεί. Ακόμη μία φορά διαπιστώνεται ότι το φίλτρο Hamming είναι low pass. Ακόμη, στην $f_2(x)$ παρατηρείται μία έντονη ανωμαλία στο σχήμα, όπως αναμενόταν και εκ της θεωρίας. Αναλυτικότερα, εμφανίζεται το φαινόμενο της επικάλυψης καθώς ενώ θα έπρεπε να εμφανίζονται μόνο οι δύο διακριτοί παλμοί dirac στις συχνότητες $f=\pm 2,5$ Hz, εμφανίζεται και ένας ακόμη λοβός ανάμεσά τους. Οι παλμοί για $f=\pm 2,5$ Hz εμφανίζουν εξαιρετικά έντονο ψαλιδισμό ενώ οι παλμοί για $f=\pm 18$ Hz έχουν και πάλι αποκοπεί.

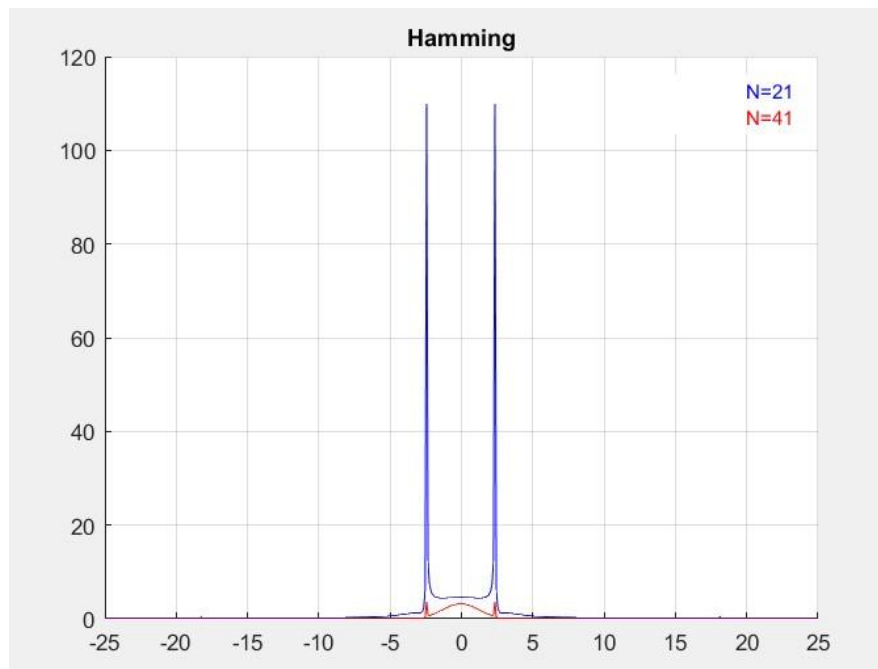
Τέλος, αξίζει να αναφερθεί το γεγονός ότι η παραβίαση της συνθήκης Nyquist προκάλεσε αισθητές μεταβολές μόνο στο φίλτρο μεγαλύτερης τάξης, γεγονός που το καθιστά πιο αξιόπιστο και ακριβές από εκείνο της μικρότερης τάξης.



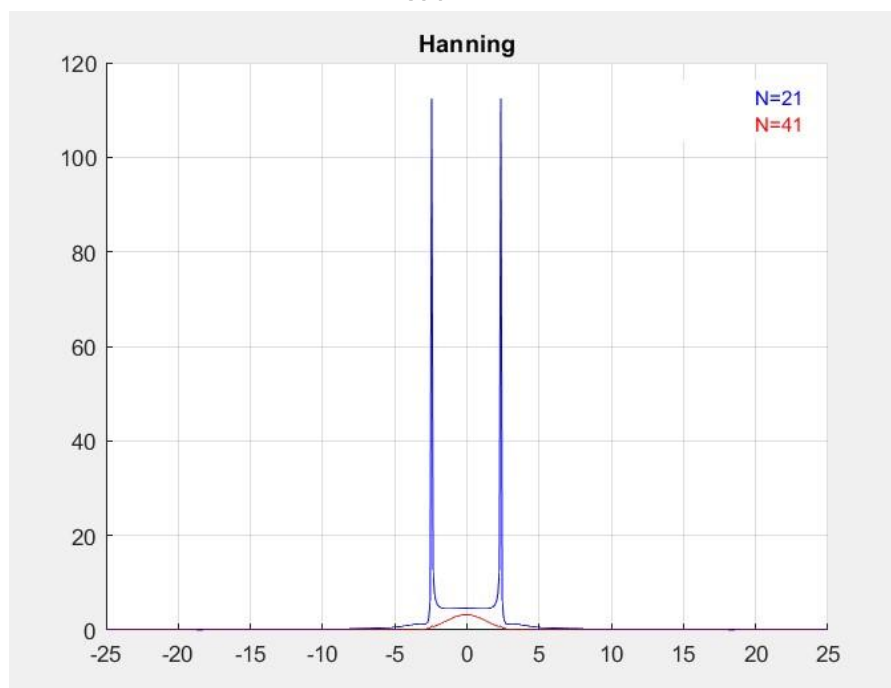
Σχήμα 13

Αντίστοιχα με το προηγούμενο σχήμα 12, στο 13ο σχήμα απεικονίζεται το φάσμα συχνοτήτων της x φιλτραρισμένο με παράθυρο Hanning τάξεων 20 και 40. Όμοια με προηγουμένως, το φίλτρο μικρότερης τάξης εμφανίζει οριακά ξεκάθαρα τους δύο αναμενόμενους ψαλιδισμένους παλμούς για $f = \pm 2,5$ Hz, ενώ έχουν αποκοπεί εκείνοι για $f = \pm 18$ Hz ενώ στο φίλτρο μεγαλύτερης τάξης είναι πλέον εμφανέστατη η παρουσία φαινομένου επικάλυψης σε βαθμό που έχει εξαφανιστεί εντελώς η έννοια παλμών *dirac*. Για ακόμη μία φορά, το φίλτρο Hanning υψηλότερης τάξης είναι και το πιο ακριβές.

- Σύγκριση ίδιου φίλτρου ως προς τις τάξεις του-μήκη παραθύρου



Σχήμα 14

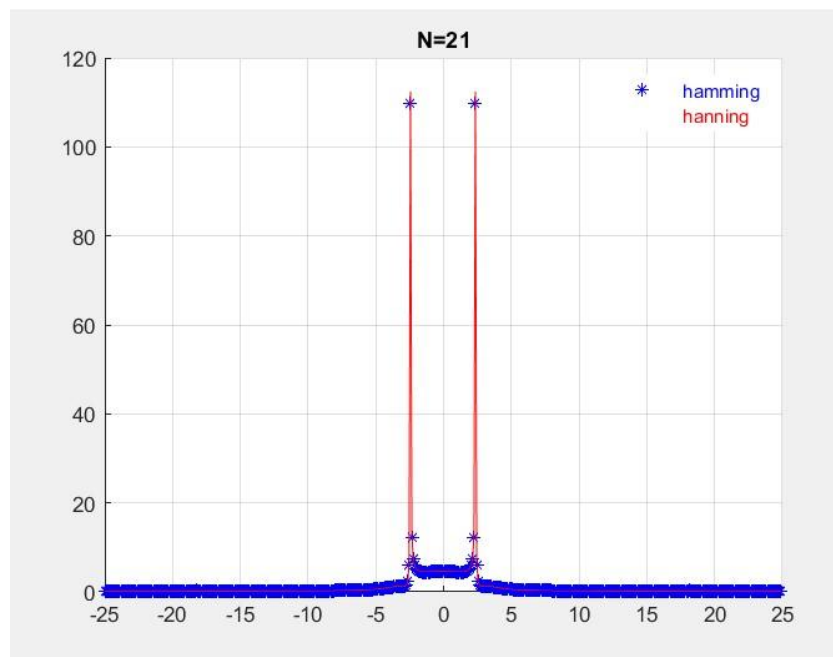


Σχήμα 15

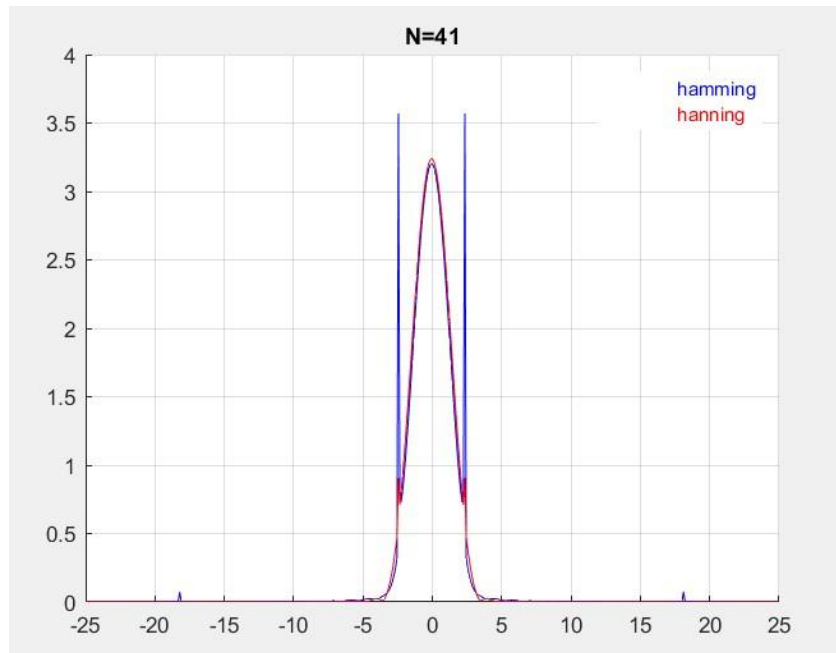
Από τα παραπάνω γραφήματα γίνεται πλέον εμφανές το γεγονός ότι μεγαλύτερη τάξη φίλτρου συνεπάγεται στενότερη ζώνη μετάβασης εφόσον είναι πιο έντονος ο ψαλιδισμός των παλμών που βρίσκονται εντός της ζώνης μετάβασης. Επομένως, θα μπορούσε να ληφθεί ως συμπέρασμα πως εάν γίνεται δειγματοληψία με συχνότητα

ελαφρώς μικρότερη από την Nyquist τότε για ακριβέστερο αποτέλεσμα θα πρέπει να εξεταστεί φίλτρο υψηλής τάξης αλλά εάν μας απασχολεί απλώς η εμφάνιση των παλμών χωρίς ιδιαίτερη επικάλυψη τότε εξυπηρετεί ένα φίλτρο χαμηλότερης τάξης .

- Σύγκριση διαφορετικών φίλτρων ως προς την ίδια τάξη-μήκος παραθύρου



Σχήμα 16



Σχήμα 17

Εάν συγκριθούν τα φίλτρα ως προς την ορθότητα των αποτελεσμάτων τότε είναι εμφανές πώς ορθότερα αποτελέσματα προκύπτουν με χρήση του παραθύρου Hanning καθώς αυτό μας προειδοποιεί ξεκάθαρα για την λανθασμένη συχνότητα δειγματοληψίας ενώ εάν απλώς μας ενδιαφέρει να δούμε την συμπεριφορά του φίλτρου (π.χ εάν είναι low pass ή high pass) και να εντοπίσουμε προσεγγιστικά τις θέσεις των παλμών μετά το φιλτράρισμα, τότε είναι επαρκές το φίλτρο Hamming. Σε κάθε περίπτωση τα δύο φίλτρα τελικά δεν εμφανίζουν ιδιαίτερα διαφορετικές συμπεριφορές για σωστή συχνότητα δειγματοληψίας ενώ για λανθασμένη συχνότητα πιο ακριβές είναι το φίλτρο Hanning.