ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

[ΠΛΗ 512]- Πολυπρακτορικά Συστήματα

$1^{ο}$ Θεωρητικό Σετ Ασκήσεων

Ιωάννης Περίδης
Α.Μ. 2018030069

26 Νοεμβρίου 2022

Άσκηση 1):

Θεωρώ Ξέσπασμα : Ξ, Καραντίνα : Κ , Λοταρία 1,2: L1,L2, Utility function του x: u(x) , πιθανότητες :q,p , σύμβολο : > δηλώνει την προτίμηση και έχω P(Ξ)=0,01 και αποτελέσματα απόφασης:

Α: Δεν χρειάζεται καραντίνα (δεν υπήρξε ξέσπασμα), και δεν επιβάλλεται.

Β: Επιβάλλεται καραντίνα, η οποία όμως δεν ήταν απαραίτητη (γιατί δεν υπήρξε ξέσπασμα).

Γ: Επιβάλλεται καραντίνα που αποδεικνύεται απαραίτητη.

Δ: Δεν αποφασίζεται και δεν επιβάλλεται καραντίνα, αλλά υπάρχει ξέσπασμα που προκαλεί εκατόμβες θυμάτων.

Ερώτημα i)

Γνωρίζω από δεδομένα
$L1 = \{(p, A), (1-p, \Delta)\}\, , \acute{\alpha}\rho\alpha\ u(L1) = pu(A) + (1-p)u(\Delta)$
$L2 = \{(q, A), (1-q, \Delta)\}\, , \acute{\alpha}\rho\alpha\ u(L1) = qu(A) + (1-q)u(\Delta)$
$u(B) = u(L1)$
$u(B) = u(L2)$
Αφού ισχύει το θεώρημα της αναμενόμενης αξίας έχω επίσης:
$A\ >\ \Delta$, άρα ισχύει και $u(A) > u(\Delta)$ και θα επιλέγω πάντα την λοταρία με την μεγαλύτερη αναμενόμενη αξία.
Το Α είναι η καλύτερη επιλογή και το Δ η χειρότερη , άρα:
$u(A) = \max utility = 1$
$u(B) = \min utility = 0$
Κάνοντας αντικατάσταση τις χρησιμότητες των Α,Β στις χρησιμότητες των L1,L2 έχω:
$u(L1) = u(B) = p\ \ \kappa\alpha\iota\ \ u(L2) = u(B) = q$
$\acute{A}\rho\alpha, \alpha\nu\ p > q\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon, A > B > \Gamma > \Delta\ , \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ u(A) > u(B) > u(\Gamma) > u(\Delta)$
$\kappa\alpha\iota\ \alpha\nu\ p < q\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon, A > \Gamma > B > \Delta\ , \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ u(A) > u(\Gamma) > u(B) > u(\Delta)$

Ερώτημα ii)

Γνωρίζω από δεδομένα για το
Κριτήριο 1: $P(K|\Xi) = 0{,}9\ \kappa\alpha\iota\ P(K|\neg\Xi) = 0{,}1$

$$\acute{A}\rho\alpha\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega\ P(K|\Xi) = \frac{P(K\wedge\Xi)}{P(\Xi)}\ \ => \ P(K\wedge\Xi) = 0{,}01 * 0{,}9 = 0{,}009\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha$$

$$P(K|\neg\Xi) = \frac{P(K\wedge\neg\Xi)}{1 - P(\Xi)}\ \ => \ P(K\wedge\neg\Xi) = 0{,}1 * (1 - 0{,}01) = 0{,}099$$

$\boldsymbol{K\rho\iota\tau}$ή$\boldsymbol{\rho\iota o}$ **2**: $P(K|\Xi) = 0{,}95\ \kappa\alpha\iota\ P(K|\neg\Xi) = 0{,}15$

Άρα $\theta\alpha$ έ$\chi\omega$ $P(K|\Xi) = \dfrac{P(K \wedge \Xi)}{P(\Xi)} \Rightarrow P(K \wedge \Xi) = 0{,}01 * 0{,}95 = 0{,}0095\ \kappa\alpha\iota\ \alpha\nu\tau$ί$\sigma\tau o\iota\chi\alpha$

$P(K|\neg\Xi) = \dfrac{P(K \wedge \neg\Xi)}{1 - P(\Xi)} \Rightarrow P(K \wedge \neg\Xi) = 0{,}15 * (1 - 0{,}01) = 0{,}1485$

Παρατηρείται άρα πως το κριτήριο 1 είναι λιγότερο συντηρητικό στο θέμα της ασφάλειας, από το κριτήριο 2. Επομένως , αν προτιμάμε το αποτέλεσμα Β από το Γ , τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τι ασφαλές κριτήριο 2, αλλιώς αν προτιμάμε το Γ από το Β θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο 1. Άρα:

$\alpha\nu\ u(B) > u(\Gamma)\ \tau$ό$\tau\varepsilon\ p > q$, $\chi\rho$ή$\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ K\rho\iota\tau\eta\rho$ί$o\upsilon$ 2

$\alpha\nu\ u(B) < u(\Gamma)\ \tau$ό$\tau\varepsilon\ p < q$, $\chi\rho$ή$\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ K\rho\iota\tau\eta\rho$ί$o\upsilon$ 1

Άσκηση 2):

Δυοπώλιο Cournot με συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης:

$P(Q) = a - Q$, $Q \le a\ \kappa\alpha\iota\ 0\ \gamma\iota\alpha\ Q > 0$ $\kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu$ά$\rho\tau\eta\sigma\eta\ \kappa$ό$\sigma\tau o\upsilon\varsigma\ Ci(qi) = qi^2\ \gamma\iota\alpha\ \kappa$ά$\theta\varepsilon\ i$.

Για να βρώ την ισορροπία Nash, θα υπολογίσω το best response του κάθε παίκτη , παραγωγίζοντας την συνάρτηση του κέρδους για κάθε εταιρία.

Η συνάρτηση κέρδους του 1 είναι:

$\pi 1(q1, q2) = q1 * P(q1 + q2) - q1^2 = q1(a - 2q1 - q2) - q1^2, \gamma\iota\alpha\ q1 + q2 \le a$

$\kappa\alpha\iota\ \pi 1(q1, q2) = -q1^2$, $\gamma\iota\alpha\ q1 + q2 > a$

Αντίστοιχα για το 2:

$\pi 2(q1, q2) = q2 * P(q1 + q2) - q2^2 = q2(a - 2q2 - q1) - q2^2, \gamma\iota\alpha\ q1 + q2 \le a$

$\kappa\alpha\iota\ \pi 2(q1, q2) = -q2^2$, $\gamma\iota\alpha\ q1 + q2 > a$

Για να πετύχω το best response του 1:

Πρέπει $q2 \le \alpha - 2q1$, αλλιώς αν $q2 > \alpha - 2q1$, τότε θα είχα π1<0 για q1>0 άρα B1(q2)={0}

Παραγωγίζω το κέρδος και το θέτω ίσο με το 0 και παίρνω:

$(q1(a - 2q1 - q2) - q1^2)' = 0 \Rightarrow \alpha - 4q1 - q2 = 0 \Rightarrow q1 = \frac{a-q2}{4}$

Άρα $B1(q2) = \frac{a-q2}{4}$

Για να πετύχω το best response του 2, αντίστοιχα:

Πρέπει $q1 \le \alpha - 2q2$, αλλιώς αν $q1 > \alpha - 2q2$, τότε θα είχα π2<0 για q2>0 άρα B2(q1)={0}

Παραγωγίζω το κέρδος και το θέτω ίσο με το 0 και παίρνω:

$(q2(a - 2q2 - q1) - q2^2)' = 0 \Rightarrow \alpha - 4q2 - q1 = 0 \Rightarrow q2 = \frac{a-q1}{4}$

Άρα $B2(q1) = \frac{a-q1}{4}$

Για ισορροπία Nash στο (q1,q2) , πρέπει $q1 = \frac{a-q2}{4}\ \kappa\alpha\iota\ q2 = \frac{a-q1}{4}$, εξισώνω τις 2 σχέσεις και υπολογίζω πως $q1 = q2 = \frac{a}{5}$ και άρα το κέρδος του κάθε ένα θα είναι:

$\pi 1(q1, q2) = \pi 2(q1, q2) = \dfrac{2\alpha^2}{25}$

Άσκηση 3):

Το πρόβλημα αυτό , μοντελοποιείται σαν εκτεταμένο παίγνιο ως εξής.

Οι παίκτες είναι ο γονιός και το παιδί.

Οι ενέργειες είναι α (αριθμός) για το παιδί και μ(αριθμός, μεταφοράς χρημάτων) για τον γονιό. Με αυτές δημιουργούνται ακολουθίες της μορφής (α,μ).
Συναρτήσεις εισοδήματος c(α) για το παιδί και p(α) για τον γονιό και ισχύει p(α)> c(α).
Το παιδί ενδιαφέρεται για το ποσό πληρωμής {c(α) + μ} ενώ ο γονιός για το ποσό min{p(α)-μ, c(α)+μ }

Για να βρεθεί μια υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία, πρέπει να βρούμε την βέλτιστη ενέργεια που θα κάνει ο γονιός , όταν το παιδί παίζει α. Αρχίζοντας από μ=1€ , το ποσό του παιδιού θα είναι {c(α) + 1}, ύστερα αυξάνουμε το μ, μέχρι να φτάσουμε στο σημείο p(α)-μ= c(α)+μ , δηλαδή για μ=1/2(p(α)- c(α)) , όπου αν το ξεπεράσουμε, το παιδί θα έχει μεγαλύτερο εισόδημα από τον γονιό. Άρα για το υποπαίγνιο αυτό, η βέλτιστη ενέργεια του γονιού είναι να μεταφέρει μ=1/2(p(α)- c(α)) χρήματα στο παιδί.

Για το ολόκληρο παιχνίδι, παρατηρείται πως για έναν γονιό που παίζει την βέλτιστη ενέργεια του και το παιδί που παίζει α , το παιδί θα πάρει ποσό ίσο με {c(α) + 1/2(p(α)- c(α))}= {1/2(p(α)+c(α))}. Επομένως είναι φανερό πως το παιδί στην τέλεια ισορροπία, θα πρέπει να διαλέξει την ενέργεια που μεγιστοποιεί , όχι μόνο το δικό του εισόδημα, αλλά το συνδυαστικό εισόδημα αυτουνού και του γονιού του.

Άσκηση 4):

Σε ένα second-price sealed bid auction είναι weakly dominant strategy και όχι dominant strategy, να φανερώνεις το πραγματικό valuation σου.

Για να το αποδείξουμε, ας υποθέσουμε αγοραστή i , ο οποίος έχει πραγματικό valuation: vi και κάνει bid: bi και ισχύει πως bi>vi. Ακόμα, έστω ότι το μεγαλύτερο bid από όλους τους αγοραστές είναι ίσο bmax.

Υπάρχουν 3 πιθανά αποτελέσματα της δημοπρασίας για τον αγοραστή i.

a) bmax>bi,vi   b) bi>bmax>vi   c) bi,vi>bmax

a) Στην περίπτωση αυτή , ο i δεν νικάει έτσι κι αλλιώς είτε κάνει bid ίσο με bi ή vi, πάει εξίσου το ίδιο.
c) Στην περίπτωση αυτή, ο i νικάει έτσι και αλλιώς είτε κάνει bid ίσο με bi ή vi, και πληρώνει και στις 2 περιπτώσεις τιμή bmax, άρα πάει εξίσου το ίδιο.
b) Στην περίπτωση αυτή όμως , υπάρχει διαφορά αν κάνει bid bi ή vi. Στην περίπτωσή μας, κάναμε bid bi, κερδίσαμε και πληρώσαμε όμως bmax > vi, δηλαδή πληρώσαμε παραπάνω από το πραγματικό μας valuation, πράγμα που δεν θα συνέβαινε αν είχαμε κάνει bid ακριβώς ίσο με το vi.

Επομένως, παρατηρούμε πως να ποντάρεις το πραγματικό valuation σου σε 2 από τις 3 περιπτώσεις , έχει ίδια αξία και ίδιο αποτέλεσμα με το να ποντάρεις παραπάνω από το πραγματικό σου, αλλά σε 1 από τις 3 περιπτώσεις δίνει καλύτερη αξία από το να πόνταρες παραπάνω . Άρα κάνει μια περίπτωση dominate και με τις άλλες 2 περιπτώσεις πάει εξίσου καλά, επομένως είναι ένα weakly dominant strategy.

Άσκηση 5):

Ξέρω από τα δεδομένα $έπαθλα\ (E1 = 2M, E2 = 1M, E3 = 0)$
Λοτταρίες:
A) $\Lambda 1 = \{(0, E1), (1, E2), (0, E3)\}, \qquad \Lambda 1' = \{(0.1, E1), (0.89, E2), (0.01, E3)\}$
$B)\ \Lambda 2 = \{(0, E1), (0.11, E2), (0.89, E3)\}, \Lambda 2' = \{(0.1, E1), (0, E2), (0.9, E3)\}$

Έστω πως ισχύει το θεώρημα Ramsey/von Neumann & Morgenstern :
Μπορεί να κατασκευαστεί real-valued utility function u, το οποίο αντιστοιχεί στο expected utility Μιας lottery ώστε $u(\Lambda 1) > u(\Lambda 2)\ \alpha\nu\nu\ \Lambda 1 \geq \Lambda 2$, ,με $u(\Lambda) = \Sigma pi * u(Xi)$

$'O\tau\alpha\nu\ έ\chi\omega\ A)\ \Lambda 1 > \Lambda 1'\ (\pi\rho o\tau\iota\mu ά\varepsilon\iota\ \tau o\ \Lambda 1)$, Άρα
$u(\Lambda 1) > u(\Lambda 1')\ (\mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda ύ\tau\varepsilon\rho o\ utility\ \tau o\ \Lambda 1)$
$u(E2) > 0{,}1u(E1) + 0{,}89u(E2) + 0{,}01u(E3)$
$0{,}11u(E2) > 0{,}1u(E1) + 0{,}01u(E3)\ \ (\Sigma\chi έ\sigma\eta\ 1)$

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με εις άτοπο απαγωγή. Έστω λοιπόν πως ισχύει
$'O\tau\alpha\nu\ έ\chi\omega\ B)\ \Lambda 2 > \Lambda 2'\ (\pi\rho o\tau\iota\mu ά\varepsilon\iota\ \tau o\ \Lambda 1)$, Άρα
$u(\Lambda 2) > u(\Lambda 2')\ (\mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda ύ\tau\varepsilon\rho o\ utility\ \tau o\ \Lambda 1)$
$0{,}1u(E1) + 0{,}9u(E3) > 0{,}11u(E2) + 0{,}89u(E3)$
$0{,}11u(E2) < 0{,}1u(E1) + 0{,}01u(E3)$

Άτοπο από την (Σχέση 1), άρα δεν μπορεί να ισχύει το θεώρημα που υποθέσαμε ότι ισχύει στην αρχή. Οι προτιμήσεις είναι αναπαραστήσιμες από συνάρτηση χρησιμότητας, ανν είναι συνεπείς, αλλιώς είναι μη αναπαραστήσιμες . Στην περίπτωσή μας, οι προτιμήσεις δεν είναι συνεπείς.

Άσκηση 6):

‘Ένα προφίλ ενεργειών , αποτελεί Nash equilibrium (σημείο ισορροπίας) , αν κανείς παίκτης δεν μπορεί να επωφεληθεί αλλάζοντας τις ενέργειές του **μονομερώς, δεδομένων των ενεργειών των άλλων παικτών**.

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y
A	10, 10	15, 5
B	5, 15	12, 12

Nash equilibrium: (A,X)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y
A	0, 0	0 , 1
B	2, 0	0 , 0

Nash equilibrium: (B,X) , (B,Y) , (A,Y)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y	Z
A	6, 6	8 , 30	0, 8
B	10, 0	5 , 5	2, 8
Γ	8 , 0	30, 0	4, 4

Nash equilibrium: (Γ,Z)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y	Z
A	0, 0	-1 , 1	1, -1
B	1, -1	0, 0	-1, 1
Γ	- 1, 1	1, -1	0, 0

Nash equilibrium: ΔΕΝ υπάρχει

Άσκηση 7):

Μια ενέργεια α ενός παίκτη i, strictly dominates επί της ενέργειας b αν $u_i(a^{-}_{-i}, a) > u_i(a^{-}_{-i}, b)$ για οποιοδήποτε προφίλ ενεργειών a^{-}_{-i}.
Αν ο b είναι strictly dominated από α, ο i δεν μπορεί να παίξει b σε Nash equilibrium. Άρα αφού ένας ορθολογικός πράκτορας δεν θα επιλέξει ποτέ μια strictly dominated στρατηγική, μπορούμε να τις διαγράφουμε.

Θα βρούμε τα NE με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή ισχυρά κυριαρχούμενων στρατηγικών. Μετά από κάθε απαλοιφή βήμα βήμα, ξανακοιτάζουμε τον πίνακα για να βρούμε στον νέο υποπίνακα που δημιουργήθηκε αν διαγράφεται κάποια άλλη στρατηγική.

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι
Α	3 , 5	4 , 6	2 , 3	1 , 7	5 , 2
Β	2 , 5	3 , 5	0 , 6	-1 , 7	4 , 5
Γ	-1 , 4	5 , 5	4 , 4	3 , 3	3 , 2
Δ	2 , 4	3 , 2	3 , 1	-1 , 7	4 , 7

Βήμα 1): για τον Π1(γραμμή) : Α strictly dominates Β
Βήμα 2): για τον Π2(στήλη) : Ζ strictly dominates Η
Βήμα 3): για τον Π1(γραμμή) : Α strictly dominates Δ
Βήμα 4): για τον Π2(στήλη) : Ζ strictly dominates Ι
Βήμα 5): για τον Π2(στήλη) : Ζ strictly dominates Ε

Αφού απλοποιήσαμε τον παραπάνω πίνακα όσο γινόταν , βρίσκουμε πως το NE είναι το (Γ,Ζ), για την διαδικασία εύρεσης ισχύει όπως στην άσκηση 6).

Άσκηση 8):

Παίκτες: Μονός (Μ), Ζυγός (Ζ)
Ενέργειες: 1 Κάρτα (κ1), 2 Κάρτες (κ2)
Πίνακας απολαβών φαίνεται δεξία:

Μ ⇓ | *Ζ* ⇒	1 κάρτα	2 κάρτες
1 κάρτα	-2, 2	3, -3
2 κάρτες	3, -3	-4, 4

Ερώτημα α)

Όπως ισχύει ο ορισμός της κυριαρχίας που προ αναφέρθηκε στην άσκηση 7), παρατηρώ πως δεν υπάρχει καμία ενέργεια α (κ1 ή κ2) που να κυριαρχεί σε οποιαδήποτε ενέργεια β (κ2 ή κ1), δηλαδή να ισχύει για την α , ότι $u_i(a^{-}_{-i}, a) > u_i(a^{-}_{-i}, b)$ για οποιοδήποτε προφίλ ενεργειών a^{-}_{-i}. Γεγονός, που ήταν αναμενόμενο σε ένα ισχυρά ανταγωνιστικό zero-sum παιχνίδι , που τα συμφέροντα των παικτών είναι αντιδιαμμετρικά.

Ερώτημα β)

Στο παιχνίδι αυτό, είναι φανερό πως δεν υπάρχουν Nash equilibrium, για αμιγής στρατηγικές, καθώς και δεδομένη την ενέργεια του ενός παίκτη, ο άλλος πάντα θα έχει κίνητρό να αλλάξει την ενέργεια του, αν είναι αυτός που χάνει. Προφανώς, είναι ένα ήδος παιχνιδιού zero-sum, strictly competitive ,'όπως περιεγράφηκε και παραπάνω, στο οποίο σε κάθε πιθανό αποτέλεσμα ένας από τους 2 παίκτες θα νικάει και ο άλλος θα χάνει. Πιο συγκεκριμένα, σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς αποτελεσμάτων, πάντα κάποιος παίκτης μπορεί να επωφεληθεί από αλλαγή κίνησης του μονομερώς, δεδομένης της κίνησης του αντιπάλου.

Ερώτημα γ)

Έστω ο παίκτης γραμμή Μ : επιλέγει κ1 με πιθανότητα p και κ2 με πιθανότητα 1-p, ενώ ο παίκτης στήλη Ζ : επιλέγει κ1 με πιθανότητα q και κ2 με πιθανότητα 1-q.

Για να υπολογιστεί το Nash equilibrium σε μικτή στρατηγική, πρέπει και οι 2 παίκτες να παίζουν με τρόπο τέτοιο ώστε να κάνει τον αντίπαλο αδιάφορο να διαλέξει κάποια αμιγή στρατηγική (που θα βελτίωνε τις απολαβές του). Παίζουν δηλαδή, ο καθένας best response στη στρατηγική του άλλου.

Αν ο Ζ παίξει mixed, τότε πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ των ενεργειών κ1/κ2. Άρα:

$u_z(\kappa 1) = u_z(\kappa 2) \;=>\; 2p - 3(1-p) = -3p + 4(1-p) \;=>\; 5p - 3 = -7p + 4 \;=>$
$\boldsymbol{p = \frac{7}{12}}$

Αν ο Μ παίξει mixed, τότε πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ των ενεργειών κ1/κ2. Άρα:

$u_M(\kappa 1) = u_M(\kappa 2) \;=>\; -2q + 3(1-q) = 3q - 4(1-q) \;=>\; -5q + 3 = 7q - 4 =>$
$\boldsymbol{q = \frac{7}{12}}$ Το οποίο ήταν και αναμενόμενο σε ένα τέτοιο παιχνίδι.

Ερώτημα δ)

Το expected utility του κάθε παίκτη υπολογίζεται ως εξής:

$\boldsymbol{\Gamma\iota\alpha\ \tau o\nu\ M\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega}$:

$E[u_M] = -2pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q - 4(1-p)(1-q) =$
$= -0{,}68 + 0{,}729 + 0{,}729 - 0{,}694 = 0{,}084$

$\boldsymbol{\Gamma\iota\alpha\ \tau o\nu\ Z\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi\omega}$:

$E[u_Z] = 2pq - 3q(1-p) - 3(1-q)p + 4(1-p)(1-q) =$
$= +0{,}68 - 0{,}729 - 0{,}729 + 0{,}694 = -0{,}084$

Άσκηση 9):

Ενέργειες : α,β , Κόσμοι: θ1,θ2,θ3, n μεγάλος αριθμός.

Ερώτημα α)

Θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο Minimax regret για να κατατάξω τις προτιμήσεις των 2 ενεργειών μου. Θα σχεδιάσω τον κατάλληλο πίνακα με το regret που έχει κάθε αποτέλεσμα και επίσης το μέγιστο regret της κάθε ενέργειας:

Ενέργειες/Κόσμοι	Θ1	Θ2	Θ3	Max Regret
α	$0/\frac{1}{n}$	$n/0$	$\frac{n-1}{2}/\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
β	$\frac{1}{n}/0$	$1/n-1$	$\frac{n}{2}/0$	$n-1$

Θα κατατάξω τις ενέργειες με προτίμηση πρώτα σε εκείνες που έχουν ελάχιστο μέγιστο regret. Επομένως, έχω α>β (αφού n-1>1/2), δηλαδή προτιμάω την α από την β.

Ερώτημα β)

Ξανασχεδίαζω τον νέο πίνακα:

Ενέργειες/Κόσμοι	Θ1	Θ2	Θ3	Max Regret
α	$0/n$	$n/0$	$\frac{n-1}{2}/\frac{n+1}{2}$	n
β	$\frac{1}{n}/n-\frac{1}{n}$	$1/n-1$	$\frac{n}{2}/\frac{n}{2}$	$n-1$
γ	$n/0$	$-n/2n$	$n/0$	$2n$

Κατατάσσω τις ενέργειες με αντίστοιχο τρόπο με πριν. Επομένως β>α>γ , δηλαδή προτιμώ το β μετά το α και μετά το γ (αφού 2n>n>n-1). Παρατηρώ πως πλέον προτιμώ τον β αντί τον α. Αυτό συμβαίνει , καθώς και η νέα ενέργεια γ, παρόλο που έχει το μεγαλύτερο regret,δημιουργεί ένα πολύ μεγάλο regret στον κόσμο Θ1 στο α, επομένως το μέγιστο regret του α αυξάνεται πάρα πολύ (του β αυξάνεται ελάχιστα απ ότι πριν) και έτσι η επιλογή β γίνεται πιο προτιμητέα από την α.

Λόγω αυτού, παραβιάζεται ένα κριτήριο δικαιοσύνης σε διαδικασίες εύρεσης προτιμήσεων, το λεγόμενο **κριτήριο του Condorcet**. Δηλαδή, παρατηρώ πως παρόλο που ο α νικάει όλες τις ένα προς ένα αναμετρήσεις με τις άλλες δύο ενέργειες , αφού προτιμάω τον α από τον β και προτιμάω τον α από τον γ , όταν υπάρχουν μόνο 2 ενέργειες, **δεν** βγαίνει ο συνολικός νικητής όταν υπάρχουν 3 ενέργειες.

Άσκηση 10):

Ψηφοφορία με μέθοδο Borda με n =5 (1,2,3,4,5) ψηφοφόροι, m =3 (A,B,C) υποψήφιοι με προφίλ προτιμήσεων:

1:A>B>C, 2: A>B>C, 3: A>B>C, 4: B>C>A, 5: B>C>A

Ερώτημα α)

Το majority margin matrix, είναι ένας πίνακας που μας δείχνει για κάθε συνδυασμό 2 επιλογών πόσοι υποψήφιοι προτιμάνε την μια επιλογή από την άλλη. Προφανώς, τα στοιχεία της διαγώνιου θα είναι μηδενικά. Ο πίνακας M φαίνεται παρακάτω: M=

	A	**B**	**C**
A	0	1	1
B	-1	0	5
C	-1	-5	0

Ερώτημα β)

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Borda με εναλλακτικό τρόπο, θα υπολογίσουμε τον αριθμό των ψήφων που παίρνει κάθε υποψήφιος. Ο αριθμός αυτός υπολογίζεται παρακάτω μέσω ενός πίνακα, που δίνει 2 μόριο στον υποψήφιο που είναι σαν $1^{η}$ επιλογή, δίνει 1 μόριο στην δεύτερη επιλογή και 0 μόρια στην $3^{η}$.

	A	**B**	**C**
1η επιλογή (2 μόρια)	3	2	0
$2^{η}$ επιλογή (1 μόριο)	0	3	2
$3^{η}$ επιλογή(0 μόρια)	2	0	3
Σύνολο μορίων	6	7	2

Προφανώς, ο υποψήφιος B μάζεψε τα πιο πολλά μόρια άρα είναι και ο νικητής.

Ερώτημα)

Στο ερώτημα αυτό, υπολογίζουμε τον νικητή πιθανοτικά , με ανάθεσή πιθανοτήτων ανάλογων των κανονικοποιημένων Borda scores. Τα συνολικά μόρια, ήταν 15. Θα βρούμε την πιθανότητα νίκης διαιρώντας τον αριθμό μορίων κάθε υποψήφιου, με τα συνολικά μόρια.

Pa=6/15=40%

Pb 7/15=46,7%

Pc=2/15=13,3%

Επομένως, παρατηρώ πως ο τελικός νικητής είναι ο B, καθώς και μάζεψέ το μεγαλύτερο συνολικό ποσοστό.

Ερώτημα ε)

Στο ερώτημα αυτό, υπολογίζουμε τον νικητή πιθανοτικά , με ανάθεσή πιθανοτήτων ανάλογων υποψηφίων, που αποτελούν τουλάχιστον για έναν ψηφοφόρο πρώτη επιλογή. Οι συνολικές πρώτες ψήφοι ήταν 5. Θα βρούμε την πιθανότητα νίκης διαιρώντας τον αριθμό πρώτων ψήφων κάθε υποψήφιου, με τις συνολικές.

Pa=3/5=60%

Pb=2/5=40%

Pc=0/5=0%

Παρατηρώ πως ο A πρώτευσε σε παραπάνω ψήφους παρά τον B και ο C δεν ψηφίστηκε πρώτος από κανέναν.

Άσκηση 11):

Δημοπρασία 2ης τιμής, συμμετέχουν2 παίκτες A,B και ο νικητής πληρώνει το ποσό που προσέφερε ο αντίπαλος. Χρησιμότητα A,B : ua=40€, ub=20€. Προσφορές σε πολλαπλάσια του 10 και μέγιστη προσφορά 50€.

Ερώτημα α)

Για να αναπαρασταθεί το παιχνίδι σε κανονική μορφή, θεωρώ:

Παίκτες A,B.
Ενέργειες: προσφορά 10,20,30,40 ή 50 €
Αποτελέσματα, θα είναι για τον κάθε παίκτη, το utility του – την τιμή αγοράς του αγαθού. Δηλαδή A: ua-τιμή αγοράς=40-προσφορα του B, B: ub-τιμή αγοράς=20-προσφορα του A. Θεωρώ τον παίκτη A τον παίκτη γραμμή και τον B τον παίκτη στήλη και δημιουργώ τον πίνακα με όλα τα πιθανά αποτελέσματα -rewards. Αν ένα αποτέλεσμα είναι θετικό , σημαίνει πως ο παίκτης κέρδισε αξία, γιατί αγόρασε το αγαθό σε μικρότερη τιμή από το πραγματικό του valuation, αν είναι 0 σημαίνει ότι ο παίκτης αγόρασε το αγαθό ακριβώς στην τιμή του valuation του , ενώ αν είναι αρνητικό, σημαίνει πως ο παίκτης έχασε αξία καθώς και αγόρασε το αγαθό σε μεγαλύτερή τιμή από το valuation του.

A(γρ)/ B(στ)	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
10	30,0	0,10	0,10	0,10	0,10
20	30,0	20,0	0,0	0,0	0,0
30	30,0	20,0	10,0	0,-10	0,-10
40	30,0	20,0	10,0	0,0	0,-20
50	30,0	20,0	10,0	0,0	-10,0

Ερώτημα β)

Για τον A παρατηρώ : Οι ενέργειες στις οποίες προσφέρει 30 και 40 €, είναι και οι 2 weakly dominant προς όλες τις άλλες ενέργειές 10,20 και 50 €. Αυτό διότι δίνουν εξίσου καλό αποτέλεσμα σε κάποιες ενέργειες του αντιπάλου , και καλύτερο σε τουλάχιστον 1 (ή παραπάνω). Γενικά ισχύει πως μια ενέργεια α του παίκτη i weakly dominates , επί της ενέργειας β αν $u_i(a^{-}_{-i}, a) \geq u_i(a^{-}_{-i}, b)$, για κάθε διάνυσμα a^{-}_{-i} των ενεργειών των άλλων και επιπλέον $u_i(a^{-}_{-i}, a) > u_i(a^{-}_{-i}, b)$, για κάποιο διάνυσμα a^{-}_{-i} των ενεργειών των άλλων.

Για τον B παρατηρώ : Ισχύουν τα αντίστοιχα με τον A. Οι ενέργειες στις οποίες προσφέρει 20 και 30€ είναι και οι 2 weakly dominant προς όλες τις άλλες ενέργειες 10,20 και 40€.Οι λόγοι είναι ίδιοι με πριν.

Ερώτημα γ)

Ο ορισμός και ο τρόπος εύρεσης ισορροπιών Nash, έχει αναλυθεί σε προηγούμενη άσκηση. Παρόλα αυτά, στο συγκεκριμένο παράδειγμα το οποίο αποτελούταν από έναν πολύ μεγάλο πίνακα χρησιμοποιήθηκε ένας άλλος τρόπος εύρεσης των Nash, ο αλγόριθμος 2.

Δηλαδή, για κάθε ενέργεια του παίκτη B υπολογίζω τα best resposes του παίκτη A:

- Διατρέχω στήλη για εύρεση max payoff A στη στήλη.
- Διατρέχω ξανα για να σημειώνω τα κελιά με το max payoff.

Κάνω τις αντίστοιχες ενέργειες για τον παίκτη B και μετά ξαναδιατρέχω τον πίανακα και τα κελιά που είναι διπλοσημειωμένα είναι τα Nash equilibrium.

Α(γρ)/ Β(στ)	10	20	30	40	50
10	30*,0	0,10*	0,10*	0*,10*	0,10*
20	30*,0*	20*,0*	0,0*	0*,0*	0*,0*
30	30*,0*	20*,0*	10*,0*	0*,-10	0*,-10
40	30*,0*	20*,0*	10*,0*	0*,0*	0*,-20
50	30*,0*	20*,0*	10*,0*	0*,0*	-10,0*

Nash:
(20,10),(30,10),(40,10),(50,10),(20,20),(30,20),(40,20),(50,20),(30,30),(40,30),(50,30),(10,40),(20,40),(40,40),(50,40),(10,50) και (20,50)

Παρατηρώ πως όλες οι ισορροπίες Nash που έχω **δεν είναι καμία strict Nash.**

Ερώτημα δ)

Όπως είδαμε και στο ερώτημα β), δεν υπάρχει καμία strictly dominant στρατηγική. Επομένως, δεν μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή του πίνακα με αφαίρεση ισχυρά κυριαρχούμενων στρατηγικών και άρα όλες οι ενέργειες των παικτών επιβιώνουν κανονικά.

Ερώτημα ε)

Παρόλα αυτά, μπορούμε να κάνουμε κανονικά επαναλαμβανόμενη αφαίρεση ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών , τις οποίες βρήκαμε ότι υπάρχουν στο ερώτημα β). Εδώ πρέπει να γίνει αντιληπτό, πως η διαδικασία αυτή, μπορεί να αποφέρει πολλούς διαφορετικούς απλοποιημένους πίνακες, οι οποίοι όλοι θα είναι σωστοί και θα εξαρτάται το που καταλήξαμε , από την διαφορετική σειρά που έγινε η απαλοιφή των ενεργειών. Κάτι τέτοιο προφανώς δεν ισχύει στην απαλοιφή ισχυρά κυριαρχούμενων στρατηγικών, εκεί καταλήγουν όλες οι σειρές απαλοιφής, στην ίδια λύση.

Παρακάτω φαίνεται ο απλοποιημένος πίνακας που μένει, αν κάνουμε βήμα βήμα τις εξής απαλοιφές :

Βήμα 1): για τον Α:30 (και 40) weakly dominates 10
Βήμα 2): για τον Α:30 (και 40) weakly dominates 20
Βήμα 3): για τον Α:30 (και 40) weakly dominates 50
Βήμα 4): για τον Β:20 (και 30) weakly dominates 40
Βήμα 5): για τον Β:20 (και 30) weakly dominates 50

Α(γρ)/ Β(στ)	10	20	30	~~40~~	~~50~~
~~10~~	~~30,0~~	~~0,10~~	~~0,10~~	~~0,10~~	~~0,10~~
~~20~~	~~30,0~~	~~20,0~~	~~0,0~~	~~0,0~~	~~0,0~~
30	30,0	20,0	10,0	~~0,-10~~	~~0,-10~~
40	30,0	20,0	10,0	~~0,0~~	~~0,-20~~
~~50~~	~~30,0~~	~~20,0~~	~~10,0~~	~~0,0~~	~~-10,0~~

Άσκηση 12):

Δημοπρασία με μηχανισμό VCG. Υπάρχουν 3 παίκτες Α,Β,Γ με 120Μ προϋπολογισμό ο καθένας. Υπάρχουν 2 άδειες (prizes) έστω είναι οι άδειες1,2 :p1,p2 αντίστοιχα. Τα private valuations των παικτών , είναι ανεξάρτητες του προϋπολογισμού τους και δημιουργούνται από τις παρακάτω εκτιμήσεις τους:

A): p1 ή p2 =>100M , p1 και p2 => 200M
B): p1 ή p2 =>80M , p1 και p2 => δεν ενδιαφέρεται (0 προσφορά)
Γ): p1 ή p2 =>110M , p1 και p2 => δεν ενδιαφέρεται (0 προσφορά), Αλλά δεν συμμετέχει πάντα στην δημοπρασία.

Ερώτημα i)

Θεωρώ ότι πράκτορες μπορούν να κάνουν Bids μεγαλύτερα από τους προϋπολογισμούς τους.

Ο Γ συμμετέχει αρχικά στην δημοπρασία:
Αρχικά πρέπει να γίνει αντιληπτός ο τρόπος λειτουργίας της δημοπρασίας VCG. Η δημοπρασία αυτή, είναι incentive compatible και έχει σαν dominant strategy να δηλώνεις το αληθινό valuation σου . Αυτό διότι, ο κάθε παίκτης, αναπληρώνει στους άλλους τις απώλειες που τους προκάλεσε με την συμμετοχή του. Η διαδικασία είναι ως εξής. Ξεκινώντας, όλοι οι παίκτες δηλώνουν τα valuations τους ταυτόχρονα. Τα έπαθλα, κατανέμονται ανάλογός στους παίκτες εκείνους με κριτήριο την μεγιστοποίηση των κερδών του δημοπράτη. Για τον κάθε παίκτη i,που κέρδισε κάποιο έπαθλο, υπολογίζεται η συνεισφορά του στο σύνολο, δηλαδή η συνάρτηση κοινωνικής ωφέλειας όταν συμμετέχει. Τέλος **κάθε παίκτης i πληρώνει ποσό ίσο με την συνάρτηση κοινωνικής ωφέλειας σε περίπτωση που δεν συμμετείχε στην δημοπρασία πλην την συνεισφορά του τώρα που συμμετέχει**.

Επομένως, στην περίπτωσή μας, τα αγαθά θα μοιραστούνε στους παίκτες A και Γ ,θα πάρουν 1 άδεια ο καθένας , και το τελικό μέγιστο ποσό που συλλέγεται είναι 210M.

Ο A θα πληρώσει:
Κοινωνική ωφέλεια A = ολικό ποσό – bid του A=210-100=110M.
Ποσό πληρωμής A = ολικό ποσό αν δεν υπήρχε ο A – κοινωνική ωφέλεια του A=190-110 **= 80M**

Ο Γ θα πληρώσει:
Κοινωνική ωφέλεια Γ = ολικό ποσό – bid του Γ=210-110=100M.
Ποσό πληρωμής Γ = ολικό ποσό αν δεν υπήρχε ο Γ – κοινωνική ωφέλεια του Γ=200-100 **= 100M**

Ο Γ ΔΕΝ συμμετέχει αρχικά στην δημοπρασία:
Στην περίπτωση αυτή, τα αγαθά θα τα κερδίσει μόνο ο A, θα πάρει και τις 2 άδειες.

Ο A θα πληρώσει:
Κοινωνική ωφέλεια A = ολικό ποσό – bid του A=200-200=0M.
Ποσό πληρωμής A = ολικό ποσό αν δεν υπήρχε ο A – κοινωνική ωφέλεια του A=80-0 **= 80M**

Ερώτημα ii)

Τώρα πλέον οι παίκτες δεσμεύονται από τους προϋπολογισμούς τους, άρα θα κάνουν bid μέχρι 120M. B και Γ κάνουν Bids ίσα με τα valuations τους. Ο A δεν μπορεί να κάνει bids ίσα με τα valuations του, θα κάνει στρατηγικές προσφορές για να μεγιστοποιήσει το utility του, που θα είναι διαφορετικές κάθε φορά και οι οποίες θα εξαρτώνται με το αν συμμετέχει ο Γ ή όχι στην δημοπρασία.

Ο Γ ΔΕΝ συμμετέχει αρχικά στην δημοπρασία:
Ο A μπορεί να ακολουθήσει 2 διαφορετικές τακτικές.

1η Στρατηγική:
A): p1 ή p2 =>80M , p1 και p2 => 0M
Με αυτήν την στρατηγική, ο A θα κερδίσει μια από τις 2 άδειες και ο B την άλλη. Παρόλα

αυτά, ο Α δεν θα πληρώσει τίποτα. Επομένως, ο Α **έχει κερδίσει 100M αξία**, εφόσον το πραγματικό Utility του για μια από τις άδειες είναι 100M και τώρα θα την πάρει με 0M:

Ο Α θα πληρώσει:
Κοινωνική ωφέλεια Α = ολικό ποσό – bid του Α=160-80=80M.
Ποσό πληρωμής Α = ολικό ποσό αν δεν υπήρχε ο Α – κοινωνική ωφέλεια του Α=80-80
= 0M

2η Στρατηγική:
Α): p1 ή p2 =>0M , p1 και p2 => 81M
Με αυτήν την στρατηγική, ο Α θα κερδίσει και τις 2 άδειες και θα πληρώσει 80M και ο Β δεν θα πάρει τίποτα. Άρα , **ο Α κερδίζει 120M αξία**, εφόσον το πραγματικό του Utility Για 2 άδειες είναι 200M και αυτός θα τις πάρει με 80M. **Καταλαβαίνουμε τελικά, πως από τις 2 στρατηγικές αυτή είναι η καλύτερη αφού του μεγιστοποιεί την αξία που κερδίζει**.

Ο Α θα πληρώσει:
Κοινωνική ωφέλεια Α = ολικό ποσό – bid του Α=81-81=0M.
Ποσό πληρωμής Α = ολικό ποσό αν δεν υπήρχε ο Α – κοινωνική ωφέλεια του Α=80-0
= 80M

Ο Γ συμμετέχει αρχικά στην δημοπρασία:
Στην περίπτωση αυτή, ο Α δεν μπορεί με κάποιο τρόπο να κερδίσει και τις άδειες, εφόσον δεν έχει αρκετά μεγάλο προϋπολογισμό για να το καταφέρει αυτό. Επομένως, θα προσπαθήσει να κερδίσει την 1 από τις 2 στην φθηνότερη τιμή που γίνεται.

Α): p1 ή p2 =>81M , p1 και p2 => 0M
Με αυτήν την στρατηγική, ο Α θα κερδίσει μια από τις 2 άδειες και ο Γ την άλλη. Παρόλα αυτά, ο Α θα πληρώσει 80M. Επομένως, ο Α **έχει κερδίσει 20M αξία**, εφόσον το πραγματικό Utility του για μια από τις άδειες είναι 100M και τώρα θα την πάρει με 80M:

Ο Α θα πληρώσει:
Κοινωνική ωφέλεια Α = ολικό ποσό – bid του Α=191-81=110M.
Ποσό πληρωμής Α = ολικό ποσό αν δεν υπήρχε ο Α – κοινωνική ωφέλεια του Α=190-110
= 80M