ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

[ΠΛΗ 512]- Πολυπρακτορικά Συστήματα

2ο Θεωρητικό Σετ Ασκήσεων

Ιωάννης Περίδης
Α.Μ. 2018030069

4 Ιανουαρίου 2023

Άσκηση 2):

Στην άσκηση αυτή, πρέπει να δείξουμε ότι σε ένα superadditive simple game G, ένα outcome vector x, ανήκει στο core του ανν, $xi=0$ για κάθε παίκτη που δεν είναι veto player. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε πως κάθε non-veto player πρέπει να έχει 0 outcome. Οι veto players , είναι εκείνοι που χωρίς αυτούς στο coalition,το value του γίνεται ίσο με 0. Στα simple games, ένα coalition C είναι wining αν $v(C)=1$, αλλιώς είναι loosing αν $v(C)=0$.

Έστω V το σετ από όλους τους veto players και $x>0$ outcome με $xi=0$ για κάθε i που δεν είναι veto player. Αν ένα coalition C, είναι loosing, τότε $v(C)=0 \leq x(C)$. Αν το C είναι wining, τότε $v(C)=x(C)=1$, άρα το x είναι στο core. Άρα γνωρίζουμε πως για όλους τους παίκτες ισχύει $xi\geq 0$. Έστω τώρα $x2>0$ 0 outcome με $xi>0$ για κάποιον i που δεν είναι veto player. Έστω ο C2 είναι wining coalition και δεν περιέχει τον i. Τότε, $x2(C2)<1=v(C2)$, άρα το x2 δεν είναι στο core.

Άσκηση 3):

i)

Το παιχνίδι αυτό, θα είναι ένα characteristic function game $G=(N,v)$, αφού το payoff του κάθε coalition, εξαρτάται από τις πράξεις του και μόνο.
Το σετ των παιχτών θα είναι ο εργολάβος 1 και ο εργολάβος 2, δηλαδή $N=\{1,2\}$, θα είναι το grand coalition.
H characteristic function v(c), είναι μονότονη και θετική για κάθε εφικτό coalition στο N και μας επιστρέφει την αξία του κάθε coalition c.
Ισχύει για αυτήν πως:$v(\{1\})=u1$, $v(\{2\})=u2$, $v(\emptyset)=0$ και $v(C1)=v(\{1,2\})= v(\{1\}\vee\{2\})>u1+u2$
Όπου $C1=\{1,2\}$ είναι το coalition της συνεργασίας των 2 παικτών και έχει αξία ,outcome $x1=1$

ii)

Ένα παιχνίδι G είναι superadditive, αν $v(C\vee D) \geq v(C)+v(D)$ για κάθε δύο disjoint coalitions C και D.

Στην περίπτωσή μας, ισχύει πως είναι superadditive, αφού οι 2 παίκτες έχουν κίνητρο να φτιάξουν coalition ,αφού έτσι θα πάρουν μεγαλύτερη αξία από το άθροισμα των ξεχωριστών αξιών τους. Συγκεκριμένα:
$v(\{1,2\})=v(\{1\}\vee\{2\})>v(\{1\})+v(\{2\})$ αφού $1>u1+u2$

iii)

Το core ενός παιχνιδιού, είναι το σετ όλων των stable outcomes, δηλαδή όλα τα outcomes για τα οποία ισχύει πως κανένας παίκτης ή coalition δεν έχει κίνητρο να φύγει από αυτά. Συγκεκριμένα ισχύει: core(G)={(CS,x) | ∑xi ≥ v(C) για κάθε C⊂N}, κάθε coalition βγάζει αξία τουλάχιστον όση θα έβγαζε και μόνος του.

Στην περίπτωσή μας, για να ανήκει ένα στοιχείο στο core, πρέπει και οι 2 παίκτες να βγάζουνε παραπάνω από την αξία που θα είχαν μόνοι τους και επίσης το άθροισμα της συνολικής αξίας του coalition τους, να είναι ίσο με 1. Άρα είναι μέσα τα στοιχεία που ισχύει για το coalition που δημιουργούν ο 1 και ο 2:
$x1 \geq u1 \;\; \kappa\alpha\iota \; x2 \geq u2 \;\; \kappa\alpha\iota \; x1 + x2 = 1$. Όπου x1 και x2, είναι οι απολαβές από το coalition των παικτών 1 και 2 αντίστοιχα

iv)

Το Shapley value ενός παίκτη i για ένα παιχνίδι G=(N,v) με |N|=N ,δίνεται από τον παρακάτω τύπο: $\phi_i(G) = 1/n! \sum_{\pi:\, \pi \in P(N)} \delta_i(S_\pi(i))$

Παρόλα αυτά, στην περίπτωσή μας αφού έχουμε μόνο 2 παίκτες, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τα Shapley values των 2 παικτών , μέσω του average marginal contribution, βρίσκοντας τις απολαβές των παικτών, ανάλογα με την συνεισφορά τους , παίρνοντας όλες τις πιθανές σειρές που μπορεί να προστέθηκαν οι παίκτες στο coalition.

1,2: x1= v({1})- v(Ø)=u1, x2= v({1,2})- v({1})=1-u1
2,1: y2= v({2})- v(Ø)=u2, y1= v({1,2})- v({2})=1-u2

Άρα τα Shapley values των 1 και 2 είναι τα αντίστοιχα:
Φ1= (x1+y1)/2=(u1-u2+1)/2 και Φ2= (x2+y2)/2=(u2-u1+1)/2 και ισχύει προφανώς πως v(N)=Φ1+Φ2=1

Άσκηση 4):

Δύο πράκτορες ο i(γραμμή) ,j(στήλη), δε διαθέτουν τρόπο επικοινωνίας, ορθολογικοί, χρήση fictitious play για επιλογή ενέργειας. Αρχική πεποίθηση είναι ½, μοντελοποίηση με μετρητές. Το fictitious play, είναι ένα απλό μοντέλο μάθησης στρατηγικών σε παίγνια. Συγκεκριμένα, οι παίκτες παρατηρούν τα αποτελέσματα μόνο των δικών τους παιχνιδιών και παίζουν best response ενάντια στην ιστορικά παρατηρημένη συχνότητα κινήσεων.
Ο παίκτης i θεωρεί ότι ο παίκτης j παίζει ενέργεια aj δεδομένου του αριθμού φορών C_{aj}^{j}, που την έχει αυτός χρησιμοποιήσει στο παρελθόν.
$P_{aj}^{i} = \frac{C_{aj}^{j}}{\sum C'^{\,j}_{aj}}$, τα counts, ενημερώνονται σε κάθε γύρω δεδομένων των ενεργειών των αντιπάλων.

$i \Downarrow$ | $j \Rightarrow$	Αριστερά (Α)	Δεξιά (Δ)
Αριστερά (Α)	10, 10	0, 0
Δεξιά (Δ)	0, 0	10, 10

Δημιουργούμε τον πίνακα με τους μετρητές, τις ενέργειες, και τις πεποιθήσεις.

Γύρος	Πεποιθήσεις παίκτη i	Πεποιθήσεις παίκτη j	Μετρητής κινήσεων του i (Α,Δ)	Μετρητής κινήσεων του j (Α,Δ)	Ενέργειες i	Ενέργειες j
1ος	$P_{jA}^{i} = P_{j\Delta}^{i} = \frac{1}{2}$	$P_{iA}^{j} = P_{i\Delta}^{j} = \frac{1}{2}$	(0,0)	(0,0)	Δ	Α
2ος	$P_{jA}^{i} = 1$ $P_{j\Delta}^{i} = 0$	$P_{iA}^{j} = 0$ $P_{i\Delta}^{j} = 1$	(0,1)	(1,0)	Α	Δ
3ος	$P_{jA}^{i} = P_{j\Delta}^{i} = \frac{1}{2}$	$P_{iA}^{j} = P_{i\Delta}^{j} = \frac{1}{2}$	(1,1)	(1,1)	Δ ή Α	Δ ή Α

Παρατηρώ από τον πίνακα πως στον **1ο γύρο,** ο παίκτης i έχει πεποίθηση ότι ο j θα παίξει Α και Δ με 1/2 πιθανότητα το καθένα, αυτό διότι δεν έχει παίξει προηγουμένως κάποια κίνηση και ο μετρητής του είναι αρχικά 0 και για τις 2 κινήσεις , οπότε βρίσκεται στην αβεβαιότητα. Ακριβώς αντίστοιχα ισχύει και για τον παίκτη j.Οι παίκτες έχουμε πληροφορία ότι παίζουν Δ ο i και Α ο j, άρα δεν συγχρονίζονται και δεν παίρνουν κάποιο έπαθλο.

Στον **2ο γύρο**, ο μετρητής του παίκτη i , έχει αυξηθεί κατά 1 στην κίνηση Δ, ενώ του παίκτη j , έχει αυξηθεί κατά 1 στην κίνηση Α (αφού αυτές είναι οι ενέργειες που έπαιξαν στον γύρο 1 αντίστοιχα). Επομένως, πλέον οι πεποιθήσεις αναδιαμορφώνονται σε σχέση με τον τύπο που αναφέρθηκε στην αρχή και γίνονται: για τον παίκτη i, να πιστεύει πως ο j θα παίξει Α με πιθανότητα 1 και Δ με πιθανότητα 0, επομένως αφού είναι ορθολογικός και παίζει best response σε αυτήν την στρατηγική, παίζει και αυτός Α , έτσι ώστε να καταφέρει να συγχρονιστεί με τον j. Αντίστοιχα, ο παίκτης j πιστεύει πως ο i θα παίξει Α με πιθανότητα 0 και Δ με πιθανότητα 1, επομένως, και αυτός θα παίξει Δ ώστε να προσπαθήσει να συγχρονιστεί με τον i. Εν τέλη οι παίκτες άρα πάλι δεν συγχρονίζονται και δεν παίρνουν κάποιο έπαθλο.

Στον **3ο γύρο,** οι μετρητές ανανεώνονται ξανά και γίνονται πάλι (1,1) και για τους 2 παίκτες , αφού έπαιξαν μια φορά Α και μια φορά Δ ο καθένας τους. Επομένως οι πεποιθήσεις και των 2 παικτών γίνονται πάλι αβέβαιες αφού ΄πιστεύουν ότι ο αντίπαλος παίζει κάθε κίνηση Α ή Δ με πιθανότητα 1/2. Άρα και ο i και ο j, δεν έχουν κάποιο λόγο να προτιμήσουν κάποια από τις ενέργειες Α ή Δ πιο πολύ από την άλλη , άρα και οι 2 θα παίξουνε Α με πιθανότητα 1/2 και επίσης Δ με πιθανότητα 1/2 . Τελικά, θα έχουν πιθανότητα να συγχρονιστούν 50% και να πάρουν έπαθλο 10 ο καθένας , αυτό είναι στα σενάρια ΑΑ,ΔΔ και αντίστοιχα έχουν 50% να μην συγχρονιστούνε και να μην πάρουν έπαθλο , στα σενάρια ΑΔ,ΔΑ.

Άσκηση 5):

i)

Το παιχνίδι αυτό, θα είναι ένα characteristic function game G=(N,v) , αφού το payoff του κάθε coalition, εξαρτάται από τις πράξεις του και μόνο.
Το σετ των παιχτών θα είναι οι 3 επιχειρηματίες Ρ,Σ,Κ, δηλαδή Ν={Ρ,Σ,Κ}, θα είναι το grand coalition.
H characteristic function v(c), είναι μονότονη και θετική για κάθε εφικτό coalition στο Ν και μας επιστρέφει την αξία του κάθε coalition c.
Ισχύει για αυτήν πως:
v(Ø)=0 , v({Ρ})=0, v({Σ})=0, v({Κ})=0, v({Ρ,Κ})=0, v({Σ,Κ})=0
v({Ρ,Σ,Κ})=30Μ ,v({Ρ,Σ})=30Μ , άρα ο Κ είναι dummy.

ii)

Ένα παιχνίδι G είναι superadditive, αν v(C∨D) ≥v(C)+v(D) για κάθε δύο disjoint coalitions C και D.

Στην περίπτωσή μας, ισχύει πως είναι superadditive, αφού και οι 3 παίκτες έχουν κίνητρο(ή έστω παίρνουν το ίδιο αν δεν το κάνουν) να φτιάξουν coalition ,αφού έτσι θα πάρουν μεγαλύτερη αξία από το άθροισμα των ξεχωριστών αξιών τους. Συγκεκριμένα:

v({P,K}) = v({P})+ v({K})
v({Σ,K}) = v({Σ})+ v({K})
v({P,Σ}) > v({P})+ v({Σ})
v({P,Σ,K}) > v({P})+ v({K})+ v({Σ})
v({P,K},{Σ}) = v({P,K})+ v({Σ})
v({P},{Σ,K}) = v({Σ,K})+ v({P})
v({P,Σ},{K}) = v({P,Σ})+ v({K})

iii)

Το core ενός παιχνιδιού, είναι το σετ όλων των stable outcomes, δηλαδή όλα τα outcomes για τα οποία ισχύει πως κανένας παίκτης ή coalition δεν έχει κίνητρο να φύγει από αυτά. Συγκεκριμένα ισχύει: core(G)={(CS,x) | ∑xi ≥ v(C) για κάθε C⊂N}, κάθε coalition βγάζει αξία τουλάχιστον όση θα έβγαζε και μόνος του.

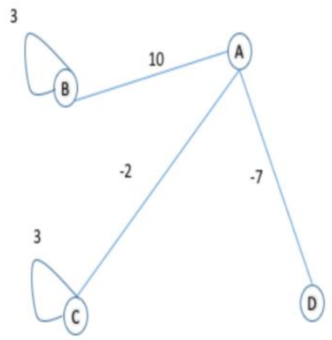
Το στοιχείο (20,10,0) είναι μέσα στο core, ,αφού κανένας δεν έχει κίνητρο να φύγει.
Τα Outcomes XP=20, XΣ=10, XK=0, είναι τα έπαθλα που παίρνει ο κάθε ένας από τους P,Σ,K αντίστοιχα.
Συγκεκριμένα ισχύει:
v({P,K}) < XP+XK ⇒ 0<20+0
v({P,Σ}) = XP+XΣ ⇒ 30=20+10
v({Σ,K}) < XK+XΣ ⇒ 0<10+0

iv)

Για να βρίσκεται ένα στοιχείο στο core, πρέπει αναγκαστικά το XK=0, αφού ο K είναι dummy, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, θα ίσχυε πως v({P,Σ}) > XP+XΣ , αρά ο P και ο Σ θα είχαν κίνητρο να φύγουν από το coalition που είναι μέσα και ο K.
Ακόμα , θα πρέπει απλά να ισχύει XP+XΣ=30, οποιοσδήποτε διαμερισμός των τιμών στον Σ,K θα είναι μέσα στο core, γιατί έτσι και αλλιώς δεν μπορούν να επιτύχουν κάτι καλύτερο ούτε ο καθένας μόνος του , είτε κάτι καλύτερο αν συνεργαστεί ένας από τους 2 με τον K, άρα , δεν θα έχουν κίνητρο να φύγουν . Αυτό διότι , v({P})=0, v({Σ})=0, v({P,K})=0, v({Σ,K})=0.

Άσκηση 6):

i)



Παρακάτω, φαίνονται όλα τα πιθανά coalitions που επιτρέπει να δημιουργηθούν οι γράφος, και επίσης φαίνονται και τα singleton coalitions, τα οποία αν δεν φαίνεται αλλιώς , έχουν αξία ίση με 0.

C1={A}, C2={B}, C3={C}, C4={D}
C5={A,B}, C6={A,C}, C7={A,D}
C8={A,B,C}, C9={A,B,D}
C10={A,B,C,D} είναι το grand coalition

Τα αντίστοιχα coalition values θα είναι τα παρακάτω:
v(C1)= 0,   v(C2)= 3, v(C3)= 3, v(C4)= 0
v(C5)= 13, v(C6)= 1, v(C7)= -7
v(C8)= 14, v(C9)= 6
v(C10)= 7

ii)

Για ένα induced subgraph game (V,W), τα Shapley values για κάποιον παίκτη i, δίνονται από τον τύπο: $Sh_i(N,v) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in N^2 \mid i\neq j} w_{ij}.$

Θα έχω για του παίκτες τα αντίστοιχα Shapley values:
A: ShA= (10-2-7)/2 = 0,5
B: ShB= 10/2 + 3 = 8
C: ShC= -2/2 + 3 = 2
D: ShD= -7/2 = -3,5
Μπορώ να επαληθεύσω το αποτέλεσμα, γιατί ξέρω πως πρέπει να ισχύει πως το άθροισμα των Shapley values όλων των παικτών, πρέπει να είναι ίσο με το coalition value του grand coalition.
ShA+ShB+ShC+ShD=0,5+8+2-3,5=7= v(C10) ισχύει.

iii)

Ένα Marginal Contribution Net, αναπαριστά το παιχνίδι από ένα σετ κανόνων της μορφής pattern⇒value. Ένας κανόνας εφαρμόζεται στο coalition, αν κάνει fit με το pattern.
Επίσης v(C)= άθροισμα όλων των κανόνων που εφαρμόζονται στο C.
Για την περίπτωσή μας, θα έχουμε τους εξής κανόνες:
Rule: pattern⇒value:
R1: (A∧B) ⇒10
R2: (A∧C) ⇒-2
R3: (A∧D) ⇒-7
R4: B ⇒3
R5: C⇒3

Άσκηση 7):

2 παίκτες, X γραμμή, Y στήλη, 2 κόσμοι , πάνω , κάτω με πιθανότητα 1/2 και οι 2. X γνωρίζει σε ποιον κόσμο βρίσκεται, Y δεν γνωρίζει .

X (γρ) \ Y(στ)	Γ q	Δ 1-q
p A	1, 1	0 , 2
1-p B	0, 2	1 , 1

Πάνω Κόσμος

X (γρ) \ Y(στ)	Γ q	Δ 1-q
k A	2 , 2	0 , 1
1-k B	4, 4	2 , 3

Κάτω Κόσμος

Ένα Bayes-Nash equilibrium, είναι ένα προφίλ μικτών στρατηγικών, που ικανοποιεί την σχέση $\forall i \;\; s_i \in BR_i(s_{-i}).$

Σε ένα Bayes-Nash equilibrium, ο κάθε παίκτης ενεργεί με τον βέλτιστο τρόπο, δεδομένου του σήματος πληροφορίας που έχει δεχτεί, και τις πεποιθήσεις του για την κατάσταση του κόσμου και τις πιθανές ενέργειες των αντιπάλων, όπως αυτές οι πεποιθήσεις διαμορφώθηκαν δεδομένου του σήματος.

Αρχικά, θα βρούμε το BNE για τις αμιγείς στρατηγικές:

X(γρ)\Y(στ)	**Γ**	**Δ**
AA	3/2, 3/2*	0, 3/2*
AB	**5/2*, 5/2***	1, 5/2*
BA	1, 2*	1/2, 1
BB	2, 3*	3/2*, 2

Το BNE για αμιγής στρατηγικές είναι το {(AB,Γ)}={(5/2,5/2)}

Στην συνέχεια, θα υπολογίσουμε τα BNE για μικτές στρατηγικές:

Αρχικά, θεωρούμε πως ο Υ παίζει Γ με πιθανότητα q και Δ με πιθανότητα 1-q και στους 2 κόσμους. Αντίθετα, ο Χ παίζει Α με πιθανότητα p και Β με πιθανότητα 1-p στον πάνω κόσμο, ενώ παίζει Α με πιθανότητα k και Β με πιθανότητα 1-k στον κάτω κόσμο.

1) **Υπολογίζω τα best responses του Χ (γραμμή) για τον πάνω κόσμο:**
   Πότε παίζω Α αντί Β:

$$U_X(A) > U_X(B) \Rightarrow 1q + 0(1-q) > 0q + 1(1-q) \Rightarrow q > 1-q \Rightarrow q > \frac{1}{2}$$

$$q > \frac{1}{2}, \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ A \Rightarrow p = 1, \quad q < \frac{1}{2}, \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ B \Rightarrow p = 0, \quad q = \frac{1}{2}, \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ A \text{ ή } B \Rightarrow p = 0 \text{ ή } 1$$

2) **Υπολογίζω τα best responses του Χ (γραμμή) για τον κάτω κόσμο:**
   Πότε παίζω Α αντί Β:

$$U_X(A) > U_X(B) \Rightarrow 2q > 4q + 2(1-q) \Rightarrow 2q > 2q + 2 \Rightarrow \text{ΆΤΟΠΟ}$$

$$\text{Προφανώς, επιλέγω πάντα την κίνηση } B \text{, αφού είναι dominant, άρα:}$$

$$q \in [0,1], \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ B \Rightarrow k = 0$$

3) **Υπολογίζω τα best responses του Υ (στήλη) για πάνω/κάτω κόσμο:**
   Πότε παίζω Γ αντί Δ:

$$U_Y(\Gamma) > U_Y(\Delta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[2k + 4(1-k) + p + 2(1-p)] > \frac{1}{2}[2p + 1 - p + k + 3(1-k)]$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{p}{2} + 2 - k > \frac{p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - k$$

$$\Rightarrow 3 - k - \frac{p}{2} > \frac{p}{2} + 2 - k \Rightarrow p < 1$$

$$p < 1, \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \Gamma \Rightarrow q = 1, \qquad p = 1, \pi\alpha\acute{\iota}\zeta\varepsilon\iota\ \Gamma \text{ ή } \Delta \Rightarrow q = 0 \text{ ή } 1$$

Άρα οι εξισώσεις που έχω είναι:

1) $q > \frac{1}{2} \Rightarrow p = 1$

2) $q < \frac{1}{2} \Rightarrow p = 0$

3) $q = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 0 \text{ ή } 1$

4) $q \in [0,1] \Rightarrow k = 0$
5) $p < 1 \Rightarrow q = 1$
6) $p = 1 \Rightarrow q = 0$ ή 1

Θα εξετάσω συνδυασμούς Best Responses:

Για q=0: τότε από 1),4) θα έχω p=1, k=0, αλλά από 5) θα έχω p<1 άρα είναι αδύνατον να έχουμε BNE για τις τιμές αυτές.

Για q=1: τότε από 1),4) θα έχω p=1, k=0, και από 5) θα έχω p=1 είναι εφικτό BNE και μάλιστα είναι το αμιγής στρατηγικής {(ΑΒ,Γ)} που βρήκαμε νωρίτερα.

Για $q \in [0,1]$, τότε από 4)θα έχω k=0, από 1) θα έχω για q<1/2 , p=0,αλλά από 5) θα έχω p<1, q=1 άρα είναι αδύνατον να έχουμε BNE Για αυτές τις τιμές.