ΠΛΗ 512 Χειμερινό Εξάμηνο 2022 Α΄ Σετ Ασκήσεων

Βάρος: 10% βαθμού μαθήματος. Οι ασκήσεις είναι ατομικές.

Παράδοση εως και τις 30 Νοέμβρη 2022. Οι λύσεις «ανεβαίνουν» με αρχείο pdf, που *δεν* εμπεριέχει οπτικά σαρωμένες (scanned) χειρόγραφες σελίδες. Κάθε ημέρα καθυστέρησης επιφέρει ποινή 20% επί του βαθμού. Συζήτηση μεταξύ των φοιτητών/φοιτητριών επιτρέπεται, αλλά οποιαδήποτε αντιγραφή επισύρει μηδενισμό στο σετ ασκήσεων συνολικά.

1) **[μηδέν (0) μονάδες]** Η Υπηρεσία Πολιτικής Προστασίας (ΥΠΠ) επιθυμεί να καθορίσει ένα κριτήριο για να αποφασίσει την εφαρμογή καραντίνας σε μια περιοχή για να αντιμετωπιστεί πιθανό ξέσπασμα (outbreak) μιας θανατηφόρας μεταδοτικής ασθένειας.

Η πιθανότητα ξεσπάσματος είναι 1%. Υπάρχουν τέσσερα πιθανά αποτελέσματα της διαδικασίας απόφασης:

(Α) Δεν χρειάζεται καραντίνα (δεν υπήρξε ξέσπασμα), και δεν επιβάλλεται.

(Β) Επιβάλλεται καραντίνα, η οποία όμως δεν ήταν απαραίτητη (γιατί δεν υπήρξε ξέσπασμα).

(Γ) Επιβάλλεται καραντίνα που αποδεικνύεται απαραίτητη.

(Δ) Δεν αποφασίζεται και δεν επιβάλλεται καραντίνα, αλλά υπάρχει ξέσπασμα που προκαλεί εκατόμβες θυμάτων.

Η ΥΠΠ είναι αδιάφορη μεταξύ του σίγουρου αποτελέσματος (Β) και μιας λοτταρίας που οδηγεί στο (Α) με πιθανότητα p και του (Δ) με πιθανότητα 1-p (δηλαδή το να συμβεί με σιγουριά το (Β) έχει την ίδια αναμενόμενη αξία/κόστος για την ΥΠΠ με αυτήν της λοτταρίας) ΄ και αδιάφορη μεταξύ του σίγουρου αποτελέσματος (Γ) και μιας λοτταρίας που οδηγεί στο (Α) με πιθανότητα q και στο (Δ) με πιθανότητα 1-q. Τα p και q ανήκουν στο (0,1). Επίσης, προτιμά το (Α) από το (Δ). Θεωρήστε επίσης ότι ισχύει το θεώρημα Αναμενόμενης Αξίας (von Neumann-Morgenstern).

Με αυτά τα δεδομένα:

(i) Καθορίστε συναρτήσεις απόδοσης utility στα ενδεχόμενα αποτελέσματα με βάση τις παραπάνω προτιμήσεις της ΥΠΠ. (Για να το κάνετε, σκεφτείτε πρώτα ποιο είναι το καλύτερο και ποιο το χειρότερο ενδεχόμενο).

(ii) Θεωρήστε τα ακόλουθα δύο κριτήρια πολιτικής εκκένωσης:

Κ1: Το κριτήριο θα οδηγήσει σε καραντίνα στο 90% των περιπτώσεων στις οποίες θα υπάρξει ξέσπασμα, και σε μή απαραίτητη καραντίνα στο 10% των περιπτώσεων κατά τις οποίες δε θα υπάρξει ξέσπασμα.

Κ2: Το πιο συντηρητικό αυτό κριτήριο θα οδηγήσει σε καραντίνα στο 95% των περιπτώσεων στις οποίες θα υπάρξει ξέσπασμα, και σε μή απαραίτητη καραντίνα στο 15% των περιπτώσεων κατά τις οποίες δε θα υπάρξει ξέσπασμα.

Καθορίστε τις πιθανότητες για τα τέσσερα πιθανά αποτελέσματα στην περίπτωση χρήσης καθενός εκ των Κ1 και Κ2. Κατόπιν αξιοποιήστε την απάντησή σας στο (i) για να καθορίσετε πότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει η ΥΠΠ ποιο κριτήριο.

2) **[μηδέν (0) μονάδες]** Έστω ένα παίγνιο **δυοπωλίου Cournot** όπου η συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης δίδεται από τη σχέση $P(Q) = \alpha - Q$ αν $Q \leq \alpha$, διαφορετικά 0 (αν $Q > \alpha$) , και όπου η συνάρτηση κόστους $C_i(q_i) = q_i^2$ για κάθε *i* εταιρεία. Βρείτε την ισορροπία Nash του παιχνιδιού.

3) **[μηδέν (0) μονάδες]** Λύστε την Άσκηση 5.14 (σελ. 267) από το βιβλίο του M. Osborne.

4) **[μηδέν (0) μονάδες]** Αποδείξτε (επιχειρηματολογήστε για το) ότι το να φανερώσεις το πραγματικό σου valuation σε second price sealed bid auction είναι weakly dominant strategy *και όχι* dominant strategy.

5) **[10 μονάδες]** Έστω τρία χρηματικά έπαθλα (Ε1, Ε2, Ε3), το πρώτο Ε1 = 2 εκατομμύρια ευρώ, το δεύτερο Ε2=1 εκατομμύριο ευρώ, και το τρίτο Ε3=0 ευρώ. Ένας παίκτης αντιμετωπίζει τα εξής δυο προβλήματα-σετ επιλογών:

(Α) επιλογή μεταξύ των λοτταριών Λ1={(0.0, Ε1),(1.0, Ε2), (0.0, Ε3)} και Λ1'={(0.10, Ε1),(0.89, Ε2), (0.01, Ε3)}

(Β) επιλογή μεταξύ των λοτταριών Λ2={(0.0, Ε1),(0.11, Ε2), (0.89, Ε3)} και Λ2'={(0.10, Ε1),(0.0, Ε2), (0.90, Ε3)}

Δείξτε ότι *αν* ο παίκτης όταν του τίθεται το δίλημμα (Α) επιλέγει Λ1, τότε όταν του τίθεται το δίλημμα (Β) *δεν* θα μπορούσε να επιλέξει Λ2' αντί για Λ2 : δεν υπάρχει τρόπος συμβατός με τη θεωρία αναμενόμενης αξίας ώστε να ανατεθούν αξίες στα χρηματικά αποτελέσματα (δεν μπορεί να ισχύει το θεώρημα von Neumann-Morgenstern).

6) **[4 μονάδες]** Στα παρακάτω παίγνια, ποιό /ποιά είναι το /τα κατά Nash σημείο/σημεία ισορροπίας σε αμιγείς στρατηγικές (αν υπάρχουν τέτοια);

(i)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	**X**	**Y**
A	10, 10	15, 5
B	5, 15	12, 12

(ii)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y
A	0, 0	0 , 1
B	2, 0	0 , 0

(iii)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y	Z
A	6, 6	8 , 30	0, 8
B	10, 0	5 , 5	2, 8
Γ	8 , 0	30, 0	4, 4

(iv)

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	X	Y	Z
A	0, 0	-1 , 1	1, -1
B	1, -1	0, 0	-1, 1
Γ	- 1, 1	1, -1	0, 0

7) **[6 μονάδες]** Βρείτε το ή τα ΝΕ του παρακάτω παιχνιδιού (σε αμιγείς στρατηγικές) εφαρμόζοντας επαναλαμβανόμενη απαλοιφή ισχυρά κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Π1 (γρ) \ Π2 (στ)	E	Z	H	Θ	I
A	3 , 5	4 , 6	2 , 3	1, 7	5 , 2
B	2 , 5	3 , 5	0 , 6	-1 , 7	4 , 5
Γ	-1 , 4	5 , 5	4 , 4	3 , 3	3 , 2
Δ	2, 4	3 , 2	3 , 1	-1 , 7	4 , 7

8) **[10 μονάδες]** Σε ένα παιχνίδι, δυο παίκτες - ο Μονός (Μ) και ο Ζυγός (Ζ) - έχουν από δυο κάρτες ο καθένας, και μπορούν ταυτόχρονα είτε *(i)* να «ρίξουν» μία κάρτα *(ii)* να «ρίξουν» δυο κάρτες, με απολαβές που εξαρτώνται από το αν ο αριθμός των καρτών στο τραπέζι είναι μονός ή ζυγός, και οι οποίες φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μ ⇓ | *Ζ* ⇒	1 κάρτα	2 κάρτες
1 κάρτα	-2, 2	3, -3
2 κάρτες	3, -3	-4, 4

(α) [3 μ] Υπάρχουν dominant strategies για τους παίκτες; Αν ναι, ποιες και γιατί; Αν όχι, γιατί όχι;

(β) [3 μ] Υπάρχει Nash equilibrium σε αμιγείς στρατηγικές; Αν ναι, ποιο; Αν όχι, γιατί όχι;

(γ) [3 μ] Υπολογίστε ένα mixed Nash equilibrium του παιχνιδιού αυτού.

(δ) [1 μ] Ποιες είναι οι αναμενόμενες απολαβές των παικτών σε mixed Nash equilibrium;

9) **[10 μονάδες]** Έστω οι επιλογές ενεργειών *α* και *β* που έχετε στη διάθεσή σας, και οι οποίες οδηγούν σε απολαβές σε πιθανούς κόσμους θ_1, θ_2, θ_3, όπως φαίνεται στον πίνακα:

Ενέργειες \ Κόσμοι	θ_1	θ_2	θ_3
α	0	n	(n-1)/2
β	1/n	1	n/2

a) **[4 μονάδες]** Έστω ότι το *n* είναι κάποιος μεγάλος αριθμός. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο minimax regret για να επιλέξετε ενέργεια. Εξηγήστε την απάντησή σας. Δείξτε πως κατατάσσονται οι ενέργειες *α* και *β* ως προτιμήσεις, με βάση αυτήν.

b) **[6 μονάδες]** Έστω τώρα ότι στις επιλογές ενεργειών σας προστίθεται η επιλογή *γ* :

Ενέργειες \ Κόσμοι	θ_1	θ_2	θ_3
α	0	n	(n-1)/2
β	1/n	1	n/2
γ	n	-n	n

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο minimax regret για να επιλέξετε ενέργεια. Εξηγήστε την απάντησή σας. Δείξτε πως κατατάσσονται οι ενέργειές σας ως προτιμήσεις, με βάση αυτήν. Σχολιάστε (ενδεχομένως χρησιμοποιώντας και τεχνικούς όρους που διδάχθηκαν στο μάθημα) το ενδιαφέρον φαινόμενο που ενδεχομένως παρατηρείτε.

10) **[25 μονάδες]** Έστω μια ψηφοφορία με n ψηφοφόρους και m υποψήφιους στο σετ υποψηφίων εναλλακτικών A. Όπως εξηγήθηκε στο μάθημα, η μέθοδος Borda συνήθως αναθέτει για τον

κάθε ψηφοφόρο ένα ``σκορ΄΄ m-1 στην πρώτη του επιλογή, m-2 στην δεύτερη, κοκ. – και αθροίζει για κάθε υποψήφιο τα σκορ που έλαβε ανά «ψηφοδέλτιο». Εναλλακτικά, το σκορ Borda ενός υποψηφίου x μπορεί να υπολογιστεί από τον majority margin matrix M ως ακολούθως:

$Borda(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{y\ in\ A}} \mathrm{M_{xy}} / 2 + \mathrm{n}$

a) [**5 μονάδες**] Έστω ψηφοφορία με 5 ψηφοφόρους (τους 1, 2, 3, 4, 5) με τα ακόλουθα προφίλ προτιμήσεων μεταξύ των εναλλακτικών A , B, C :

1: A ≻ B ≻ C

2: A ≻ B ≻ C

3: A ≻ B ≻ C

4: B ≻ C ≻ A

5: B ≻ C ≻ A

Υπολογίστε το majority margin matrix της ψηφοφορίας.

b) [**5 μονάδες**] Έστω ότι για τον προσδιορισμό του νικητή στην παραπάνω ψηφοφορία χρησιμοποιείται η μέθοδος Borda όπου τα σκορ υπολογίζονται με τον εναλλακτικό τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω. Υπολογίστε τα Borda scores των υποψηφίων, και αναφέρετε τον τελικό νικητή.

c) [**5 μονάδες**] Έστω τώρα ότι ο νικητής προσδιορίζεται πιθανοτικά, με ανάθεση *πιθανοτήτων* ανάλογων των (κανονικοποιημένων) υπολογισμένων Borda scores σε όλους τους υποψήφιους με maximal Borda scores. Αναφέρετε τις πιθανότητες νίκης του κάθε υποψηφίου.

d) [**5 μονάδες**] Έστω τώρα ότι ο νικητής προσδιορίζεται πιθανοτικά, με ανάθεση *πιθανοτήτων* ανάλογων των υπολογισμένων Borda scores σε όλους τους υποψήφιους. Αναφέρετε τις πιθανότητες νίκης του κάθε υποψηφίου.

e) [**5 μονάδες**] Έστω τώρα ότι ο νικητής προσδιορίζεται πιθανοτικά, με ανάθεση *πιθανοτήτων* σε εκείνους τους υποψηφίους που αποτελούν πρώτες επιλογές για τουλάχιστον έναν ψηφοφόρο, με τις πιθανότητες αυτές να είναι ανάλογες του αριθμού των ψηφοδελτίων στα οποία «πρώτευσε» ο κάθε τέτοιος υποψήφιος. Αναφέρετε τις πιθανότητες νίκης του κάθε υποψηφίου.

11) **[20 μονάδες]** Έστω μια *δημοπρασία δεύτερης τιμής* για ένα αγαθό, στην οποία συμμετέχουν δύο παίκτες, ο Α και ο Β. Η χρησιμότητα (λχ αξία σε ευρώ) που θεωρεί ο κάθε παίκτης ότι έχει για αυτόν το αγαθό είναι $u_A = 40$ και $u_B = 20$ αντίστοιχα. Οι κανόνες ορίζουν ότι: οι προσφορές

πρέπει να γίνονται σε πολλαπλάσια του 10 (σε ευρώ)΄ ο νικητής πληρώνει το ποσόν που προσέφερε ο αντίπαλος΄ σε περίπτωση ισοπαλίας κερδίζει το αγαθό ο Α ΄ και η μέγιστη προσφορά δεν μπορεί να υπερβεί τα 50 ευρώ. Με αυτά τα δεδομένα:

(α) **[4 μονάδες]** Αναπαραστήστε το παιχνίδι σε κανονική μορφή.

(β) **[4 μονάδες]** Υπάρχουν στρατηγικές των παικτών που είναι dominant; Ποιες είναι αυτές και γιατί;

(γ) **[4 μονάδες]** Βρείτε όλα τα σημεία ισορροπίας του παιχνιδιού σε αμιγείς στρατηγικές.

(δ) **[4 μονάδες]** Ποιες στρατηγικές των παικτών επιβιώνουν μετά από επαναλαμβανόμενη αφαίρεση *ισχυρά* κυριαρχούμενων στρατηγικών;

(ε) **[4 μονάδες]** Ποιες στρατηγικές των παικτών επιβιώνουν μετά από *οποιαδήποτε* επαναλαμβανόμενη αφαίρεση *ασθενώς* κυριαρχούμενων στρατηγικών;

12) **[15 μονάδες]** Έστω μία *συνδυαστική δημοπρασία (combinatorial auction)* που χρησιμοποιεί μηχανισμό VCG, κατά την οποία κατακυρώνονται δύο (2) τηλεοπτικές άδειες. Έστω ότι ενδιαφέρονται να συμμετάσχουν τρεις παίκτες (κοινοπραξίες εταιρειών), ο Α, ο Β, και ο Γ, οι οποίοι έχουν ο καθένας έναν *διαθέσιμο προϋπολογισμό* 120 εκ. ευρώ για να ξοδέψουν για την αγορά τηλεοπτικών αδειών. Οι *αξίες* (private valuations) που έχουν οι παίκτες για τις άδειες (οι οποίες προκύπτουν από εκτιμήσεις, μετά από σχετικές αναλύσεις του καθενός, αναμενόμενων κερδών τους δεδομένων και άλλων δραστηριοτήτων τους), *ανεξάρτητα του προϋπολογισμού τους*, έχουν ως ακολούθως:

- ο Α θεωρεί ότι μία εκ των δύο αδειών αξίζει 100 εκ., ενώ το ζεύγος αξίζει για αυτόν 200 εκ.
- ο Β θεωρεί ότι μία εκ των δύο αδειών αξίζει 80 εκ., και δε θα αγόραζε δεύτερη
- ο Γ είναι αβέβαιο ότι αναθέτει αξία σε άδεια: συγκεκριμένα, είναι αβέβαιο ότι θα συμμετάσχει στη δημοπρασία (καθώς ίσως δε θέλει να δραστηριοποιηθεί στην τηλεοπτική αγορά). Αν αποφασίσει να συμμετάσχει, θεωρεί ότι μία εκ των δύο αδειών αξίζει 110 εκ., και σίγουρα δεν θα αγόραζε δεύτερη.

Με αυτά τα δεδομένα,

(i) **[10 μ]** Θεωρήστε πρώτα ότι οι παίκτες μπορούν να κάνουν προσφορές (bids) χωρίς να δεσμεύονται από τους προϋπολογισμούς τους (μπορούν να *προσφέρουν* δηλαδή ποσά και μεγαλύτερα του προϋπολογισμού τους).

Έστω ότι ο Γ συμμετέχει στην VCG δημοπρασία (*5 μονάδες*). Τί θα συμβεί – σε ποιους θα ανατεθούν οι άδειες, και πόσα θα πληρώσουν για αυτές;

Έστω ότι ο Γ <u>δεν</u> συμμετέχει στην VCG δημοπρασία – κάνει, με άλλα λόγια, μηδενικές προσφορές (*5 μονάδες*). Τί θα συμβεί – σε ποιους θα ανατεθούν οι άδειες, και πόσο θα πληρώσουν για αυτές;

(ii) **[5 μ]** Θεωρήστε τώρα ότι οι παίκτες δεσμεύονται από τους προϋπολογισμούς τους (δεν μπορούν να κάνουν προσφορές που τους υπερβαίνουν). Σε αυτή την περίπτωση, δείξτε ότι η στρατηγική του Α εξαρτάται από την στρατηγική του Γ, και άρα ο Α δεν έχει dominant

strategy. Συγκεκριμένα, εξετάστε το ποια πρέπει να είναι η στρατηγική του Α στην περίπτωση που ο Γ κάνει μηδενική προσφορά, και ποια η στρατηγική του Α στην περίπτωση που ο Γ κάνει προσφορά ίση με το valuation του, ώστε να κατορθώσει (ο Α) να μεγιστοποιήσει το utility του. Θεωρήστε ότι σε κάθε περίπτωση ο Β κάνει προσφορά ίση με το valuation του (καθώς οι προϋπολογισμοί τους είναι μεγαλύτεροι από τα valuations τους, οι Γ και Β εξακολουθούν να έχουν το truthfulness ως (weakly) dominant strategy).